DISTRIBUCIONES MUESTRALES

# 1 Muestreo aleatorio

## 1.1 Población y parámetros

**Definición**. Se denomina población o universo a la totalidad de personas u objetos que tienen una o más características medibles o contables de naturaleza cualitativa o cuantitativa. La característica medible o contable es una variable estadística cuyo valor, numérico o no numérico, es una observación. Si la variable estadística a estudiar es una sola, cada elemento de la población puede asociarse con una observación. En este sentido, se denon.ina población al corjurtto de valores posibles de la variable. Si los elementos de la población se definen en forma aleatoria, entonces la variable estadística cuantitativa es una variable aleatoria cuyos valores constituyen la población. En este caso, la distribución de la población es la distribución de la variable aleatoria, por lo tanto, la media y la varianza de la variable aleatoria, vienen a ser la media y la varianza de la población. Si la variable aleatoria **X** tiene distribución , se puede referir a la población , Por ejemplo, si **X** está normalmente distribuida se dice que la población está normalmente distribuida o que se tiene una población normal. Por el número de observaciones la población puede ser finita de tamaño **N**, o infinita. Algunas poblaciones finitas son tan grandes que en teoría son asumidas como poblaciones infinitas.

**Definición**. Se denominan parámetros a las medidas descriptivas que caracterizan a la distribución de la población. Entre otros, los parámetros poblacionales son.

En diversas aplicaciones estadísticas al estudiar una población, la variable aleatoria que la define puede tener distribución conocida o no. La distribución de la población es conocida, si se conocen sus parámetros y su forma, es decir si se conoce su distribución de probabilidad . Si la distribución de la población es desconocida, podemos estar interesados en:

**Estimar sus parámetros**, si se conoce su distribución, y **Probar determinada suposición** acerca de un valor determinado del parámetro, o probar la suposición acerca del tipo de distribución de probabilidades de la población.

## 1.2 Muestra aleatoria

En vez de examinar la población entera, lo cual puede resultar físicamente imposible o no práctica, puede examinarse una **muestra** de la población con el propósito de **inferir** los resultados encontrados. Una **muestra** es un subconjunto de la poblacion. El proceso de seleccon de una muestra de n elementos de la población se llama **muestreo**. Las ventajas y las razones para el muestreo son diversas, las mismas que no explicaremos en este texto. El proceso que consiste en inferir resultados a la población a partir de la muestra se denomina **inferencia estadística**. La confiabilidad de las conclusiones extraídas concernientes a una población dependen de si la muestra se ha escogido apropiadamente de manera que represente bien a la población. Una técnica para obtener muestras representativas de la población es el muestreo **aleatorio**. Se llama muestreo aleatorio a todo proceso que asegure en cualquier momento del mismo igual probabilidad de ser incluidos en la muestra a todos los elementos que pertenezcan a la población en dicho momento. A las muestras aleatorias se les denomina también muestras probabilísticas Las muestras aleatorias son de 4 tipos: **Al azar simple**, **al azar sistemático**, **estratificado** y **por grupos (o conglomerados)**.

* **Muestra al azar simple** Es aquella en la que los elementos se escogen del total de la población en forma individual con una oportunidad igual e independiente .Por lo general se utiliza una tabla de números aleatorios. Si la población es infinita el muestreo aleatorio ocurre cuando la extracción de los elementos de la muestra se hace con o sin reemplazo. Si la población es finita de tamaño N, el muestreo aleatorio ocurre también si la extracción es con o sin reemplazo. Con reemplazo, la probabilidad de cada elemento de ser extraído es 1/N. Si es, sin reemplazo, la probabilidad de cada elemento de ser elegido es en la primera extracción, es de en la segunda extracción, es en la tercera extracción, etc.
* Por ejemplo, seleccionar una muestra al azar simple es similar a la que se realiza en la extracción aleatoria de números en una lotería.
* **Muestra al azar sistemática** Una muestra aleatoria sistemática es aquella en que sus elementos se eligen de la población a intervalos uniformes a partir de un listado ordenado. El fc-ésimo elemento de la muestra es , donde n es el tamaño de la muestra y N el tamaño de la población. Por ejemplo, al elegir una muestra sistemática de **100** alumnos de EE.GG.CC que tiene **3000** alumnos, . El primero se elige en forma aleatoria de los **30** primeros de la lista y los demás sistemáticamente cada **30** alumnos de la lista.
* **Muestreo aleatorio estratificado** Primero se clasifican a los elementos de la población en subgrupos separados de acuerdo con una o más características importantes (estratos). Después se obtiene por separado una muestra aleatoria simple o sistemática en cada estrato. El tamaño de cada submuestra debe ser proporcional al tamaño del estrato para asegurar representatividad. Por ejemplo, para obtener una muestra aleatoria de **600** electores de una población de **600,000** electores de los cuales 300,0000 son de clase baja, **200,000** de clase media y **100,000** de clase alta. Se deben elegir al azar 300 de clase baja, **200** de clase media y **100** de clase alta.
* **Muestreo aleatorio agrupado** Denominado también por conglomerados. Los elementos de la población se dividen en forma natural en subgrupos. Luego se eligen al azar los subgrupos que forman la muestra. Por **ejemplo**, al estudiar los pensiones que se pagan en los colegios particulares donde no es posible tener una lista de todas las pensiones, pero puede obtenerse una lista de los colegios particulares (grupos). Entonces, con esta lista puede obtener una muestra aleatoria de colegios y así obtener los pensiones que se pagan en estos colegios. **El muestreo aleatorio simple**, es pues el proceso de selección de una muestra por el cual cada uno de los elementos de la población tienen una oportunidad igual e independiente de ser incluidos en la muestra. En el muestreo aleatorio simple cada
* variable aleatoria cuyo valor es , tiene la misma distribución de la población de la cual se obtiene. Por ejemplo, supongamos que una población consiste de **8** fichas, dos con el número **2**, cuatro con el número **5**, y dos con el número 7. Si se extrae una ficha al azar, la ficha puede tomar cualquiera de los tres valores: 2 con probabilidad **0.25**, **5** con probabilidad **0.50**, y **7** con probabilidad 0.25, que viene a ser la misma distribución de la población. Luego, diremos que los valores tomados respectivamente por las variables aleatorias , constituyen una muestra aleatoria simple de tamaño **n** de una población de la variable aleatoria **X** , si estas variables aleatorias están distribuidas en forma idéntica a la distribución de la población y son independientes. Llamaremos también muestra aleatoria simple a este conjunto de variables aleatorias. Formalmente definimos una muestra aleatoria simple o brevemente muestra aleatoria de la forma siguiente:
* **Definición**, (muestra aleatoria simple). Dada una población con media y varianza **2**, se denomina muestra aleatoria de tamaño n de esa población, a un conjunto de n variables aleatorias tales que:
  1. Son independientes.
  2. Cada una de ellas está distribuida en forma idéntica a . La condición 1) implica que la distribución de probabilidad conjunta de la muestra aleatoria es la expresión:
  + La condición 2) significa que: **a)** Cada variable aleatoria X¿ tiene la misma media y varianza de la distribución de , es decir: y
* **b)** La distribución de probabilidad de cada variable aleatoria es la misma distribución de probabilidades de X, esto es. **NOTA**. El proceso de obtener este tipo de muestra requiere población infinita o bien población finita pero con reposición de elementos.

#### Ejercicio de aplicación.

* sea una muestra aleatoria de tamaño n de una población normal
  1. Si , , y $ σ^2= 25$, calcular la probabilidad de que: a1) sea mayor que .

#### SOLUCION.

La media y la varianza de la variable aleatoria están dadas respectivamente por:

Por la propiedad reproductiva de la normal la variable aleatoria Y tiene distribución normal , luego, la variable aleatoria estándar:

## 1.3 Estadísticas

Definición. Se denomina estadística a cualquier función de las variables aleatorias que constituyen la muestra. Una estadística es una variable aleatoria , cuyo valor es el número real . El término estadística se usa para referirse tanto a la función de la muestra, como al valor de esta función. En general para cada parámetro poblacional hay una estadística correspondiente a calcularse a partir de la muestra. Algunas estadísticas importantes y sus valores calculados a partir de una muestra aleatoria son:

$ S=$

## 2. Distribuciones muéstrales

Definición. Se denorr .na distribución muesvral de una estadística a su distribución de probabilidad Por ejemplo, a la distribución de probabilidad de la estadística media , se le denomina distribución muestral de la media.

### 2.1 Distribución muestral de la media

**TEOREMA** Sea una muestra aleatoria de tamaño **n** escogida de una población con media y es la media muestral , entonces.

**PRUEBA** por la definición de muestra aleatoria, las variables aleatorias . son independientes e idénticamente distribuidas como con y con