МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені Тараса Шевченка
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра програмних систем і технологій

Дисципліна

«Ймовірнісні основи програмної інженерії»

Звіт з лабораторної роботи № 5

на тему:

«Дискретні розподіли ймовірностей»

Виконала:	Дрозд Єлизавета Андріївна	**Перевірила:**	Марцафей А. С.
Група	ІПЗ-12(2)	Дата перевірки	
Форма навчання	денна	Оцінка	
Спеціальність	121		

2022

Мета роботи:

Навчитись використовувати на практиці набуті знання про центральні тенденції та міри.

Постановка задачі:

1. Аналітичним шляхом розв'язати вказані задачі.

1. Ймовірність знаходження в кожному прибулому потязі вагонів на дане призначення 0,2. Визначити ймовірність того, що в трьох із п'яти потягів, які прибувають протягом однієї години, будуть вагони на дане призначення.

2. Знайти ймовірність того, що в п'яти незалежних випробуваннях подія А відбудеться: а) рівно 4 рази; б) не менше 4 разів, якщо в кожному випробуванні ймовірність появи події становить 0,8.

3. На кондитерській фабриці 20% всіх цукерок складають льодяники. Знайти ймовірність того, що серед 400 вибраних навмання цукерок буде рівно 80 льодяників.

4. На автомобільному заводі у звичному режимі роботи з конвеєра сходить 100000 автомобілів. Ймовірність бракованого автомобіля дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що з конвеєра зійшло 5 бракованих автомобілів.

5. Ймовірність того, що пара взуття, яка взята навмання з виготовленої партії виявиться вищого ґатунку дорівнює 0,4. Чому дорівнює ймовірність того, що серед 600 пар, які поступили на контроль, виявиться від 228 до 252 пар взуття вищого ґатунку?

6. Банк обслуговує 100 клієнтів, від кожного з яких може надійти вимога на проведення фінансової операції на наступний день з ймовірністю 0,4. Знайти найімовірніше число вимог клієнтів кожного дня, та його ймовірність.

7. Завод випускає в середньому 4% нестандартних виробів. Яка ймовірність того, що число нестандартних виробів у партії з 4000 штук не більше 170?.

8. Яка ймовірність того, що при 10000 незалежних киданнях монети герб випаде 5000 разів?

9. Фірма відправила на базу 1000 якісних виробів. Ймовірність того, що вироби в дорозі пошкодяться дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що на базу прибуде 5 пошкоджених виробів.

10. Нехай ймовірність того, що грошовий приймальник автомату при опусканні монети скидає неправильно дорівнює 0,03. Знайти найімовірніше число випадків правильної роботи автомату, якщо буде кинуто 150 монет.

2. Написати програму, яка, використовуючи відомі формули теорії ймовірності(запрограмувати вручну) розв'яже задачі приведені у п.1.
3. Порівняти результати обчислень, зробити висновки.

Побудова математичної моделі:

Формули, які були використані для розв’язання даних задач:

1.3.2. Формула Бернуллі

Теорема 1. Ймовірність того, що в n повторних незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи випадкової події A рівна p $(0<p<1)$, дана подія відбудеться рівно m разів знаходиться за формулою Бернуллі:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m} \qquad (1.3.1.)$$

де $q=1-p$ – ймовірність не появи події A в кожному випробуванні.

Зауваження 1. Ймовірність появи події A в n випробуваннях схеми Бернуллі менше m разів знаходять за формулою

$$P_n(k<m)=P_n(0)+P_n(1)+...+P_n(m-1).$$

Ймовірність появи події A не менше m разів можна знайти за формулою

$$P_n(k\geq m)=P_n(m)+P_n(m+1)+...+P_n(n).$$

або за формулою $$P_n(k\geq m)=1-\sum_{k=0}^{m-1}P_n(k).$$

Ймовірність появи події A хоча б один раз у n випробуваннях доцільно знаходити за формулою

$$P_n(1\leq m\leq n)=1-q^n.$$

1.3.3. Локальна теорема Муавра-Лапласа

Якщо число випробувань n достатньо велике і ймовірність появи A в кожному випробуванні не мала $p\in(0,1)$, а число npq>10, то використовують теореми Муавра-Лапласа, які дають добре наближення при n>40. Коли треба більш висока точність, то дані теореми використовують для n≥100.

Локальна теорема Муавра-Лапласа. Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні постійна і відмінна від нуля і одиниці ($0<p<1$), то ймовірність $P_n(m)$ того, що подія A з’явиться в n випробуваннях рівно m разів, приблизно дорівнює значенню функції

$$P_n(m)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_m) \qquad (1.3.5.)$$

де $x_m=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$.

Функція $\varphi(x_m)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{x^2}{2}}$ - це функція Гауса, значення якої занесені в таблиці (дод. А) і вона має такі властивості:

а) $\varphi(x)$ - визначена на всій числовій осі; б) $\varphi(x)$ - парна, $\varphi(-x)=\varphi(x)$;

в) $\varphi(x)$ - спадає при $x>0$; г) $\varphi(x)=0,0001$ при $x\geq 4$.

1.3.4. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Теорема 2. Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні постійна і відмінна від нуля і одиниці ($0<p<1$), то ймовірність $P_n(m_1\leq m\leq m_2)$ того, що подія A з'явиться в n випробуваннях від m_1 до m_2 разів, приблизно рівна визначеному інтегралу

$$\mathrm{P}_n(m_1\leq m\leq m_2)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\Phi(x_2)-\Phi(x_1), \qquad (1.3.6.)$$

де $x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}$

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ - функція Лапласа, значення якої занесені в таблиці (дод. В) і має такі властивості:

а) $\Phi(x)$ визначена на всій числовій осі;

б) $\Phi(x)$ – непарна – $\Phi(-x)= -\Phi(x)$;

в) $\varphi(x)$ зростає при $x>0$ до 0,5 і спадає при $x<0$ до -0,5;

г) для $x>5$ $\Phi(x)\approx 0,5$; для $x<-5$ $\Phi(x)\approx -0,5$.

1.3.5. Теорема Пуассона

Якщо n достатньо велике, а ймовірність події настільки мала, що число np невелике (звичайно $p \le 0,1$; $npq \le 10$), тобто для подій, що рідко трапляються, використовують асимптотичну формулу Пуассона.

Теорема 3. Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні при необмеженому збільшенні числа випробувань n змінюється таким чином, що при $np=\lambda$, λ=const, то ймовірність того, що деяка подія A з'явиться m разів в n випробуваннях обчислюється за формулою

$$P_n(m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} \qquad (1.3.7.)$$

Для використання формули Пуассона немає необхідності знати окремо числа n і p, а лише їх добуток $\lambda=np$.

1.3.6. Найімовірніше число появ випадкової події

Означення 4. *Число m_0, при якому при заданому n відповідає максимальна біноміальна ймовірність $P_n(m_0)$, називається найімовірнішим числом появи події A.*

Найімовірніше число m_0 задовольняє системі нерівностей:

$$np-q \le m_0 \le np+p \text{ або } (n+1)p-1 \le m_0 \le (n+1)p \qquad (1.3.8.)$$

якщо $np-q$ - неціле, то є одне значення m_0, якщо $np-q$ - ціле, то таких

значень є два, які будуть відрізнятися між собою на 1:

$$m_1=(n+1)p-1 \text{ та } m_2=(n+1)p.$$

Псевдокод алгоритму:

```
from math import *
import scipy.stats

f2 = open('output.txt', 'w')


def c(n, m):
    return factorial(n) / (factorial(m) * factorial(n - m))


def bernulli(m, n, p):
    q = 1 - p
    return c(n, m) * pow(p, m) * pow(q, n - m)


def muavra_laplasa_integral(n, p, m1, m2):
    q = 1 - p
    x1 = (m1 - n * p) / sqrt(n * p * q)
    x2 = (m2 - n * p) / sqrt(n * p * q)
    return scipy.stats.norm.cdf(x2) - scipy.stats.norm.cdf(x1)


def gaus(x):
    return (1 / sqrt(2 * pi)) * exp(x ** 2 / 2)


def muavra_laplasa_local(n, p, m):
    q = 1 - p
    x = (m - n * p) / sqrt(n * p * q)
    return gaus(x) / sqrt(n * p * q)
```

```
def puasson(m, n, p):
    x = n * p
    return pow(x, m) / factorial(m) * exp(-x)


def m0(n, p):
    q = 1 - p
    m = 0
    i = n * p - q
    while i <= n * p + p:
        if i % 1 == 0:
            m = i
        i += 0.1
        i = round(i, 1)
    return m


def task1():
    m = 3
    n = 5
    p = 0.2
    f2.write("task 1: p(a) = %s\n" % bernulli(m, n, p))
```

```python
def task2():
    m = 4
    n = 5
    p = 0.8
    result2 = 0
    i = 0
    while i < 4:
        result2 += bernulli(i, n, p)
        i += 1
    result2 = 1 - result2
    f2.write("\ntask 2 (a): p(a) = %s\ntask 2 (b): p(a) = %s\n" % (bernulli(m, n, p), result2))


def task3():
    m = 80
    n = 400
    p = 0.2
    f2.write("\ntask 3: p(a) = %s\n" % bernulli(m, n, p))


def task4():
    m = 5
    n = 100000
    p = 0.0001
    f2.write("\ntask 4: p(a) = %s\n" % puasson(m, n, p))
```

```python
def task5():
    n = 600
    p = 0.4
    m1 = 228
    m2 = 252
    f2.write("\ntask 5: p(a) = %s\n" % muavra_laplasa_integral(n, p, m1, m2))


def task6():
    p = 0.4
    n = 100
    f2.write("\ntask 6: m0 = %s\n" % m0(n, p))


def task7():
    p = 0.04
    n = 4000
    m1 = 0
    m2 = 170
    f2.write("\ntask 7: p(a) = %s\n" % muavra_laplasa_integral(n, p, m1, m2))


def task8():
    n = 10000
    m = 5000
    p = 1 / 2
    f2.write("\ntask 8: p(a) = %s\n" % muavra_laplasa_local(n, p, m))
```

```python
def task9():
    m = 5
    n = 1000
    p = 0.002
    f2.write("\ntask 9: p(a) = %s\n" % puasson(m, n, p))


def task10():
    p = 0.03
    n = 150
    f2.write("\ntask 10: m0 = %s\n" % m0(n, p))


task1()
task2()
task3()
task4()
task5()
task6()
task7()
task8()
task9()
task10()
f2.close()
```

Випробування алгоритму:

```
task 1: p(a) = 0.05120000000000002

task 2 (a): p(a) = 0.4096
task 2 (b): p(a) = 0.7372800000000002

task 3: p(a) = 0.04981327224985552

task 4: p(a) = 0.037833274802070715

task 5: p(a) = 0.6826894921370859

task 6: m0 = 40.0

task 7: p(a) = 0.7901297487022927

task 8: p(a) = 0.007978845608028654

task 9: p(a) = 0.03608940886309672

task 10: m0 = 4.0
```

```
"C:\Users\admin\Desktop\2 курс\2 курс 1 семестр\ЙОПІ\LAB5\venv\Scripts\python.exe" "C:/Users/admin/Desktop/2 курс/2 курс 1 семестр/ЙОПІ/LAB5/main.py"

Process finished with exit code 0
```

Висновки:

Під час виконання цієї лабораторної роботи я навчилася використовувати здобуті знання про центральні тенденції та міри на практиці за допомогою мови програмування Python.