MATHS

BCPST 1re ANNÉE

Marc-Aurèle Massard

DUNOD

Conception et création de couverture : Dominique Raboin

Avec la collaboration scientifique de Sabrina Bergez,
professeur en classes préparatoires au lycée Saint-Louis (Paris)

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-078679-4

Avant propos

Cet ouvrage s'adresse aux élèves de première année de la filière BCPST. Il recouvre l'intégralité du programme.

Ce livre ne se veut en aucun cas être un cours tout prêt ou se substituer au professeur. Il doit plutôt être vu comme un complément permettant de revoir les notions et méthodes abordées en cours avec un point de vue potentiellement différent.

Il est divisé en cinq parties thématiques et vingt-quatre chapitres. Il commence par une brève introduction exposant quelques règles de rédaction mathématiques. Puis les douze premiers chapitres portent sur le programme du premier semestre et les douze autres sur le programme du second semestre (à l'exception du chapitre sur les suites qui navigue entre les deux).

Chaque chapitre se décompose en cinq parties :

- **L'essentiel du cours**, rappelant les points les plus importants du cours et permettant à l'élève de vérifier qu'il connaît bien les hypothèses exactes des résultats utilisés
- **Les méthodes à maîtriser**, exposant quelques méthodes classiques illustrées d'exemples
- **Interro de cours**, regroupant des questions d'application directe du cours (Vrai/Faux, QCM, citation d'un résultat du cours ou petit exercice)
- **Exercices,** regroupant, comme son nom l'indique, des exercices. Ils sont classés par ordre de difficulté globalement croissant et séparés en deux parties :
  - « *Pour s'entraîner* » comprenant des exercices couvrant les différents points du chaptire
  - « *Pour aller plus loin* » comprenant des exercices d'approfondissement
- **Correction,** regroupant le corrigé détaillé de l'interro de cours et de tous les exercices du chapitre.

Tout au long de l'ouvrage, les symboles suivants ont été utilisés :

pour ajouter quelques remarques aux résultats et méthodes cités

pour signaler un piège ou une erreur à éviter

pour donner quelques conseils concernant la rédaction

pour exposer un programme en Python associé à un résultat du cours ou à une méthode.

En tant qu'auteur, je me permets de souligner mon intérêt pour toute remarque des lecteurs de ce livre, étudiants ou enseignants. C'est grâce à ces retours que cet ouvrage pourra converger rapidement vers une forme définitive répondant pleinement aux exigences des élèves de classes préparatoires.

Je termine en remerciant A. Lalauze, M. Marouby et J.-M. Monier pour leurs relectures avisées, leurs remarques et leurs suggestions et sans qui ce livre ne serait certainement pas aussi abouti.

Table des matières

Partie 4 Algèbre linéaire

Partie 5 Analyse réelle

Pour bien commencer

Le but de cette introduction est de donner des conseils pour prendre de bonnes habitudes de rédaction dès le début de l'année.

Méthode 0.1 : Bien définir ses objets

Dans la rédaction d'un raisonnement, avant d'utiliser un objet, il convient de le définir. Sinon, une personne lisant votre raisonnement pourrait ne pas le comprendre. A priori, x n'est pas forcément un réel, n pas forcément un entier, f pas forcément une fonction (même si ces noms sont très courants pour chacun de ces objets).
On peut, par exemple, définir un objet (ici un réel x) par « soit $x \in \mathbb{R}$ » lorsque l'on veut définir un objet quelconque ou bien par « on pose $x = \dots$ » lorsque l'on veut définir un objet en particulier ou encore par « on dispose de $x \in \mathbb{R}$ tel que $\dots$ » si un résultat préalable nous a justifié l'existence de cet objet.

Exemple d'application

Un élève a voulu utiliser le fait que toute suite croissante majorée converge de la façon suivante :

« Pour tout n, on a $a_{n+1} - a_n \geq 0$ et $a_n \leq M$. Donc $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. »

Compléter ce raisonnement pour définir correctement les objets utilisés.

Correction :

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles et M un réel. Pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} - a_n \geq 0$ et $a_n \leq M$. Donc, on dispose d'un réel ℓ tel que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Méthode 0.2 : Prêter attention aux hypothèses d'un théorème

Il convient de bien regarder (et de bien connaître) les hypothèses d'un théorème avant de l'utiliser. On ne peut rien conclure tant que **toutes** les hypothèses ne sont pas remplies.
Par exemple, le théorème reliant signe de la dérivée d'une fonction et monotonie ne s'applique que sur un intervalle.

Exemple d'application

Déterminer si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

(1) Le carré d'un nombre est positif.
(2) Deux nombres réels et leurs carrés sont rangés dans le même ordre.
(3) Si la dérivée d'une fonction est nulle sur I, cette fonction est constante sur I.
(4) Une fonction dont la dérivée s'annule peut être strictement monotone.

Correction :

(1) **Faux.** Le carré d'un nombre réel est positif mais le carré d'un complexe, pas forcément.
(2) **Faux.** Il faut que les deux réels soient positifs pour que ce résultat soit vrai. Par exemple, on a $(-1)^2 > 0^2$ alors que $-1 < 0$.

(3) **Faux.** Comme expliqué dans la méthode, il faut que I soit un intervalle pour que le résultat soit vrai. Par exemple, on prend $I = [0,1] \cup [2,3]$ et f la fonction définie sur I par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 2 & \text{si } x \in [2,3] \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas constante car $f(0) \neq f(2)$ mais sa dérivée est nulle sur $[0,1]$ et sur $[2,3]$. La dérivée f' est donc nulle sur I sans que f soit constante sur I.

(4) **Vrai.** La courbe d'une fonction strictement monotone peut avoir une tangente horizontale (comme celle de la fonction $x \mapsto x^3$ en 0 par exemple).

Méthode 0.3 : Vérifier le bien-fondé des opérations à utiliser

Lors d'un raisonnement, avant de faire une opération, il faut bien vérifier que l'on peut la faire. On évitera typiquement de diviser par 0, de prendre la racine carrée d'un nombre négatif (ou d'un nombre complexe), de dériver une fonction si on ne sait pas qu'elle est dérivable, etc. A chaque fois qu'il y a besoin, on précise pourquoi on peut effectuer cette opération.

Exemple d'application

Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant :

« Soient a et b deux réels non nuls tels que $a = b$. On a donc

$$a^2 = ab \quad \text{donc} \quad a^2 - b^2 = ab - b^2 \quad \text{et} \quad (a-b)(a+b) = (a-b)b \quad \text{ainsi} \quad a+b = b$$

Vu que $a = b$, on en déduit que $2b = b$ puis que $2 = 1$ en divisant par b. »

Correction :

L'erreur réside au moment où on passe de $(a-b)(a+b) = (a-b)b$ à $a+b = b$. En effet, à ce moment-là, on a divisé par $a-b$ sans vérifier si on pouvait. Or, comme $a = b$ on a $a - b = 0$. Il n'est donc pas possible d'effectuer cette opération.

Méthode 0.4 : Faire attention au type des objets manipulés

En mathématiques, on manipule différents types d'objets : des ensembles, des fonctions, des nombres (entiers, réels, complexes), des vecteurs, des suites, etc. Il ne faut pas les confondre. Un élément peut appartenir à un ensemble, pas à un nombre. On peut comparer deux nombres réels (avec $\leq$), pas deux nombres complexes. On peut dire qu'une suite est croissante, pas un nombre. On peut dériver une fonction dérivable, pas un réel.

Exemple d'application

Déterminer si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

(1) La fonction $\dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(2) cos, sin et exp sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

(3) $\forall z \in \mathbb{C}, z^2 \geq 0$.

(4) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^x$. Cette fonction est dérivable et, si $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \left(x^2\right)' \times e^x + x^2 \times (e^x)' = 2xe^x + x^2 e^x = (2x + x^2)e^x$$

Correction :

(1) **Faux.** $\dfrac{1}{x}$ n'est pas une fonction, c'est un nombre. On peut corriger en « la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ ».

(2) **Vrai.** Il s'agit de trois fonctions, qui sont effectivement dérivables sur $\mathbb{R}$.

(3) **Faux.** Il n'y a pas de relation d'ordre (avec $\leq$) sur les nombres complexes.

(4) **Faux.** Même si le résultat obtenu pour $f'(x)$ est juste au final, il y a une erreur de rédaction dans le calcul de $f'(x)$. En effet, $\left(x^2\right)'$ et $(e^x)'$ n'ont pas de sens car x^2 et e^x sont des réels et non pas des fonctions, on ne peut donc pas les dériver. Pour la rédaction, il conviendrait donc de simplement sauter l'étape de calcul faisant intervenir ces expressions erronées. Dans le cas d'un calcul plus compliqué, on donnera des noms aux sous-fonctions que l'on veut dériver lors de ce calcul.

Dans d'autres matières scientifiques, comme la physique, les notations sont utilisées de manière un peu moins rigoureuse et il peut arriver de tolérer les écritures du type $(e^x)'$. Mais ces libertés ne doivent pas se retrouver en mathématiques.

Méthode 0.5 : Différencier implication et équivalence

Lors d'un raisonnement dans lequel on part des hypothèses A pour montrer une conclusion B, on montre que $A \Rightarrow B$. Mais on n'a pas nécessairement $A \Leftrightarrow B$, on ne peut pas forcément remonter toutes les implications effectuées lors de notre démonstration. C'est pour cela qu'il est toujours dangereux dans un calcul de partir de ce que l'on veut montrer pour finir par arriver à quelque chose de vrai, parce que cela ne montre rien et on n'a pas forcément équivalence. Dans ce cas, il convient de faire ce raisonnement au brouillon et de le rédiger dans le bon sens au propre (c'est-à-dire partir de ce que l'on sait pour arriver à ce que l'on veut) pour être sûr que le raisonnement ne soit pas erroné.

Exemple d'application

Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant :

« On considère l'équation $x^2 + x + 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Si x est solution, on a

$$x^3 + x^2 + x = 0 \quad \text{puis} \quad x^3 = -x^2 - x = 1$$

D'où $x = 1$ (c' est la seule solution réelle de $x^3 = 1$). Pourtant $1^2 + 1 + 1 \neq 0$. »

Correction :

Ce qui a été montré dans ce raisonnement c'est que si x est une solution réelle de l'équation, alors $x = 1$. Mais il ne s'agit en aucun cas d'une équivalence. On n'a pas montré que si $x = 1$, alors x est solution de l'équation. Ce que montre finalement le raisonnement en entier est que la seule potentielle solution réelle est 1 et qu'elle n'est pas solution : cette équation n'a donc aucune solution réelle (ce qui se retrouve en calculant le discriminant du trinôme).

Dans une résolution d'équation, à moins d'avoir justifié au fur et à mesure du calcul qu'il y avait équivalence du début à la fin, il conviendra de vérifier que les valeurs trouvées sont bien solutions de l'équation.

Méthode 0.6 : Raisonner en français

Une succession d'égalités ou d'inégalités ne constitue pas un raisonnement mathématique. Il faut y mettre des mots pour savoir comment tout cela s'articule et qu'une autre personne que son auteur puisse suivre le même raisonnement.
Pour commencer à écrire un résultat, que l'on a supposé comme hypothèse ou que l'on veut montrer, on peut l'introduire par « on a » dans le premier cas et « on veut montrer que » dans le second cas.
Au sein d'un raisonnement pour passer d'un résultat à un autre, il ne peut y avoir qu'une implication (que l'on pourra traduire par « donc », « alors, », « ainsi », « d'où », etc) ou il peut y avoir équivalence entre ces deux résultats (que l'on pourra traduire par « si et seulement si », « c'est-à-dire », « i.e. », etc).

Exemple d'application

Un élève a produit le raisonnement suivant pour encadrer $\boldsymbol{\frac{x}{y}}$ avec $\boldsymbol{x \in [-1, 2]}$ et $\boldsymbol{y \in [1, 2]}$. Rédiger correctement ce raisonnement :

«

- $0 \leq x \leq 2$, $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq 1$, $0 \leq \frac{x}{y} \leq 2$.
- $-1 \leq x \leq 0$, $0 \leq -x \leq 1$, $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq 1$, $0 \leq -\frac{x}{y} \leq 1$, $-1 \leq \frac{x}{y} \leq 0$.

$-1 \leq \frac{x}{y} \leq 2$. »

Correction :

On souhaite encadrer $\frac{x}{y}$. On va distinguer deux cas, en fonction du signe de x :

- Si $0 \leq x \leq 2$, comme $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq 1$, on déduit par produit de facteurs positifs que $0 \leq \frac{x}{y} \leq 2$.
- Si $-1 \leq x \leq 0$, on a $0 \leq -x \leq 1$. De plus $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq 1$. Donc, par produit de facteurs positifs, on obtient $0 \leq -\frac{x}{y} \leq 1$, puis $-1 \leq \frac{x}{y} \leq 0$.

Ainsi, on a donc montré que $-1 \leq \frac{x}{y} \leq 2$.

- Les symboles $\Leftrightarrow$ et $\Rightarrow$ sont à proscrire dans la rédaction d'un raisonnement. On peut éventuellement les utiliser dans la résolution d'une équation/inéquation ou d'un système d'équations.
- Le terme « i.e. » est une abréviation du latin *id est* (qui se traduit littéralement par « ce qui est » et qui a la même signification que « c'est-à-dire »). Cette locution est souvent utilisé en mathématiques.

CHAPITRE

Raisonnements, ensembles et applications

1

L'essentiel du cours

1 Bases de la logique

Définition

Une **assertion** est une phrase plus ou moins complexe qui est soit vraie soit fausse. On peut opérer sur des assertions de la façon suivante :

- **négation** : si P est une assertion, non P est aussi une assertion qui est vraie si et seulement si P est fausse.
- **conjonction** : si P et Q sont deux assertions, P et Q est une assertion qui est vraie si et seulement si P est vraie et Q est vraie.
- **disjonction** : si P et Q sont deux assertions, P ou Q est une assertion qui est vraie si et seulement si P est vraie ou Q est vraie (ou les deux en même temps).

Définition

Si P et Q sont deux assertions, on note :

- $\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$, l'assertion (non P) ou Q (qui se lit « P implique Q »)
- $\boldsymbol{P \Leftrightarrow Q}$, l'assertion $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ (qui se lit « P équivaut à Q »).

- Si $P \Rightarrow Q$, on dit que P est une **condition suffisante** pour Q (en effet, il suffit que P soit vraie pour que Q soit vraie). On dit aussi que Q est une **condition nécessaire** pour P (en effet, pour que P soit vraie, il est nécessaire que Q soit vraie).
- Si $P \Leftrightarrow Q$, on dit P est une **condition nécessaire et suffisante** pour Q (on abrège souvent par CNS).

Contraposée

Si P et Q sont deux assertions, alors $P \Rightarrow Q$ est équivalente à (non Q) $\Rightarrow$ (non P). On appelle cette deuxième assertion la **contraposée** de $P \Rightarrow Q$.

Ne pas confondre la contraposée avec $Q \Rightarrow P$, qui est la **réciproque** de $P \Rightarrow Q$.

Négation des connecteurs logiques

Si P et Q sont deux assertions, alors :
- non (non P) est équivalente à P
- non (P et Q) est équivalente à (non P) ou (non Q)
- non (P ou Q) est équivalente à (non P) et (non Q)
- non ($P \Rightarrow Q$) est équivalente à P et (non Q).

La négation d'une implication n'est pas une implication.

Distributivité du « et » et du « ou »

Si P, Q et R sont trois assertions, alors :
- l'assertion P et (Q ou R) est équivalente à (P et Q) ou (P et R)
- l'assertion P ou (Q et R) est équivalente à (P ou Q) et (P ou R).

Définition

Si E est un ensemble et $P(x)$ une assertion comportant une variable x, on définit alors les assertions suivantes :
- $\boldsymbol{\forall x \in E,\ P(x)}$ est vraie si et seulement si $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x de E (qui se lit « pour tout x appartenant à E, $P(x)$ »)
- $\boldsymbol{\exists x \in E,\ P(x)}$ est vraie si et seulement si $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E (qui se lit « il existe x appartenant à E tel que $P(x)$ »)
- $\boldsymbol{\exists ! x \in E,\ P(x)}$ est vraie si et seulement si $P(x)$ est vraie pour exactement un élément x de E (qui se lit « il existe un unique x appartenant à E tel que $P(x)$ »).

Chacune des trois assertions précédentes ne dépend plus de x. On dit alors que x est une variable muette.

- L'usage des quantificateurs hors des énoncés mathématiques est à proscrire. Ils ne doivent donc pas apparaître comme abréviation dans la rédaction d'un raisonnement.
- On ne peut pas intervertir les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ dans une assertion. L'assertion

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ y < x$$

signifie que pour tout réel x on peut trouver un réel y, **qui peut dépendre de $\boldsymbol{x}$**, qui soit strictement inférieur à x. Cette assertion est clairement vraie (il suffit de prendre $y = x - 1$). Alors que l'assertion

$$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ y < x$$

signifie qu'il existe un réel y, **ne dépendant pas de $\boldsymbol{x}$** (x n'a pas encore été introduit lorsqu'on introduit y), qui soit strictement inférieur à tous les réels x. Cela reviendrait donc à dire que $\mathbb{R}$ est minoré, ce qui est clairement faux.

Négation des quantificateurs

Si E est un ensemble et $P(x)$ une assertion comportant une variable x, alors
- non $(\forall x \in E,\ P(x))$ est équivalente à $\exists x \in E$, non $(P(x))$
- non $(\exists x \in E,\ P(x))$ est équivalente à $\forall x \in E$, non $(P(x))$.

En ajoutant à ces deux règles, les règles de négation des connecteurs logiques, on est maintenant à même de nier n'importe quelle assertion.

Principe de récurrence simple

Soit $P(n)$ une assertion dépendant d'un entier naturel n. Si $P(0)$ est vraie et si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

alors $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$.

- Ce principe de récurrence se découpe en deux parties : l'**initialisation** qui consiste à montrer que $P(0)$ est vraie ; l'**hérédité** qui consiste à montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1).$$
- Si on veut juste montrer que $P(n)$ est vraie pour $n \geq n_0$, il suffit d'initialiser avec $P(n_0)$.
- Si on se rend compte qu'on n'utilise pas le fait que $P(n)$ est vraie pour montrer que $P(n+1)$ est vraie, il ne sert à rien de faire une récurrence. Un raisonnement classique suffit alors.
- Avant de se lancer dans une récurrence il faut toujours réfléchir à comment montrer l'hérédité (l'initialisation est souvent très simple à montrer). Si on ne voit pas comment montrer l'hérédité, il vaut mieux se tourner vers une autre méthode de raisonnement.

Pour que l'assertion $P(n)$ dépende de n il ne faut surtout pas qu'elle commence (ou même comporte) « $\forall n \in \mathbb{N}$ ».

Principe de récurrence double

Soit $P(n)$ une assertion dépendant d'un entier naturel n. Si $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies et si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (P(n) \text{ et } P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$$

alors $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$.

Principe de récurrence forte

Soit $P(n)$ une assertion dépendant d'un entier naturel n. Si $P(0)$ est vraie et si

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(k)) \Rightarrow P(n+1)$$

alors $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$.

2 Ensembles

Définition

Si E et F sont deux ensembles, on dit que F est **inclus** dans E (ou que F est un **sous-ensemble** de E ou encore que F est une **partie** de E), que l'on note $F \subset E$, si tous les éléments de F sont aussi dans E, autrement dit :

$$\forall x \in F,\ x \in E$$

On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Les éléments de $\mathscr{P}(E)$ sont des ensembles.

Double inclusion

Si E et F sont deux ensembles, alors

$$E = F \Leftrightarrow (E \subset F \text{ et } F \subset E).$$

Définition

Si E est un ensemble et $P(x)$ une assertion comportant une variable x, on définit un ensemble contenant les éléments x de E vérifiant la propriété $P(x)$. On note cet ensemble

$$\{x \in E\ /\ P(x)\}\,.$$

Cet ensemble peut aussi être noté $\{x \in E\ ;\ P(x)\}$.

Définition

- Si E et F sont deux ensembles, on appelle **couple** de E et F tout élément de la forme (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$. On appelle **produit cartésien** de E et F, noté $E \times F$, l'ensemble des couples de E et F.
- Si n est un entier naturel non nul et $E_1, \dots, E_n$ sont des ensembles, on appelle n-**uplet** de $E_1, \dots, E_n$ tout élément de la forme $(x_1, \dots, x_n)$ avec $x_i \in E_i$ pour tout entier $1 \leq i \leq n$. On appelle produit cartésien de $E_1, \dots, E_n$, noté $E_1 \times \cdots \times E_n$, l'ensemble des n-uplets de $E_1, \dots, E_n$.

Si $E_1 = \cdots = E_n = E$, on simplifie la notation par $E_1 \times \cdots \times E_n = E^n$. Dans ce cas, on dit qu'un élément de E^n est une n-**liste** d'éléments de E.

Définition

Si E est un ensemble et A et B sont des parties de E, alors :

- le **complémentaire** de A, noté $\overline{A}$, est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A :
$$\overline{A} = \{x \in E \ / \ x \notin A\}$$
- la **différence** de A et B, noté $A \backslash B$ et qui se lit « A privé de B », est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B :
$$A \backslash B = \{x \in A \ / \ x \notin B\}$$
- l' **intersection** de A et B, noté $A \cap B$, est l'ensemble des éléments appartenant à la fois aux deux ensembles A et B :
$$A \cap B = \{x \in E \ / \ x \in A \text{ et } x \in B\}$$
- l' **union** de A et B, noté $A \cup B$, est l'ensemble des éléments appartenant à au moins un des deux ensembles A et B :
$$A \cup B = \{x \in E \ / \ x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Complémentaire et opérations

Si E est un ensemble et A et B sont deux parties de E, alors
$$\overline{\overline{A}} = A, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \text{et} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Distributivité de l'intersection et de l'union

Si E est un ensemble et A, B et C sont trois parties de E, alors
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad \text{et} \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Toutes ces propriétés reviennent à traduire les propriétés sur le « non », le « ou » et le « et » vues plus tôt.

3 Applications

Définition

Une **application** est définie par son ensemble de départ E, son ensemble d'arrivée F et sa façon de transformer tout élément x de E en un unique élément de F, que l'on notera $f(x)$. On la note
$$\begin{array}{rccl} f: & E & \to & F \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$
On note $\mathscr{F}(E,F)$ (ou F^E) l'ensemble des applications de E dans F.

Par souci de gain de place, on peut aussi noter l'application $f : E \to F \ , \ x \mapsto f(x)$.

Définition

- Si E est un ensemble, on appelle **application identité** de E l'application
$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Id}_E : & E & \to & E \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$
- Si E est un ensemble et A une partie de E, on appelle **fonction indicatrice** de A l'application
$$\begin{array}{rccc} \mathbb{1}_A : & E & \to & F \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Définition

Si f est une application de E dans F et A est une partie de E, on appelle **image directe** de A par f l'ensemble des images par f des éléments de A, c'est-à-dire
$$f(A) = \{f(x) \ / \ x \in A\} = \{y \in F \ / \ \exists x \in A, \ y = f(x)\}.$$

Définition

Si $f : E \to F$ et $g : G \to H$ deux applications et $f(E) \subset G$, on appelle **composée** de f par g l'application :
$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & E & \to & H \\ & x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Définition

Si f est une application de E dans F, on dit que f est :

- **injective** si tout élément de F possède au plus un antécédent dans E par f, c'est-à-dire
$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$
- **surjective** si tout élément de F possède au moins un antécédent dans E par f, c'est-à-dire
$$\forall y \in F, \exists x \in E, \ y = f(x)$$
- **bijective** si tout élément de F possède exactement un antécédent dans E par f, c'est-à-dire
$$\forall y \in F, \exists ! x \in E, \ y = f(x).$$

On remarque qu'une application est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.

Définition

Si $f : E \to F$ est une application bijective, on appelle **réciproque** de f, notée f^{-1}, l'application de F dans E qui à $y \in F$ associe l'unique antécédent de y par f.

Proposition

Si $f : E \to F$ est une application bijective, alors $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Théorème

Si $u : E \to F$ et $v : F \to E$ sont deux applications vérifiant $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ et $v \circ u = \mathrm{Id}_E$, alors u et v sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

Proposition

- Si $f : E \to F$ est bijective, alors f^{-1} est bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
- Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

⚠ Il faut bien faire attention à l'inversion d'une composée : on inverse l'ordre des applications. L'opération inverse de remplir une bouteille puis de la fermer est d'ouvrir la bouteille puis de la vider.

Les méthodes à maîtriser

Méthode 1.1 : Montrer une implication

Si l'on veut montrer $P \Rightarrow Q$, on suit le schéma suivant :
Supposons P.
Raisonnement où l'on traduit l'hypothèse P, la conclusion Q et où l'on essaye de compléter entre les deux.
Donc Q.

Exemple d'application

Montrer que le carré d'un entier pair est pair.

Soit $n \in \mathbb{Z}$ pair. On dispose de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. Ainsi $n^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$ est pair.

Voir exercices **1.3** et **1.20**.

Méthode 1.2 : Raisonner par contraposée

Pour montrer que $P \Rightarrow Q$, il peut être plus facile de montrer que non $Q \Rightarrow$ non P, tout particulièrement quand la négation de la conclusion (non Q) est plus simple à utiliser que l'hypothèse (P).

Exemple d'application

Montrer que si le carré d'un entier est pair, alors cet entier est pair.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On veut montrer que « n^2 pair $\Rightarrow n$ pair ». On raisonne par contraposée, supposons que n n'est pas pair, donc impair. On dispose donc de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. Ainsi $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ est impair.

Voir exercice **1.3**.

Méthode 1.3 : Montrer une équivalence

A part dans des résolutions d'équations, de systèmes d'équations ou d'équivalence simple où l'on procède par équivalences successives, pour montrer que $P \Leftrightarrow Q$, on montre séparément les deux implications (on dit qu'on procède par double implication).

Exemple d'application

Montrer qu'un entier est pair si et seulement si son carré est pair.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On procède par double implication :
- On montre que n pair $\Rightarrow n^2$ pair (cf. ci-dessus).
- Réciproquement, on montre que n^2 pair $\Rightarrow n$ pair (cf. ci-dessus).

On peut donc conclure que n est pair si et seulement si n^2 est pair.

Voir exercices **1.9**, **1.16** et **1.19**.

Méthode 1.4 : Montrer un énoncé avec $\forall$

Pour montrer que $\forall x \in E,\ P(x)$, on suit le schéma suivant :
Soit $x \in E$.

Raisonnement utilisant le fait que x est dans E et aucune autre propriété sur x.

Alors $P(x)$. On a donc montré que $\forall x \in E,\ P(x)$.

Exemple d'application

Montrons que $\forall x \in [-1, 1],\ x^2 - 1 \leq 0$

Soit $x \in [-1, 1]$. On a $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Or $x - 1$ est négatif (car $x \leq 1$) et $x + 1$ est positif (car $-1 \leq x$). Alors, par produit, $x^2 - 1 \leq 0$. On a donc montré que $\forall x \in [-1, 1],\ x^2 - 1 \leq 0$.

Voir exercice **1.19**.

Méthode 1.5 : Montrer un énoncé avec $\exists$

Pour montrer que $\exists x \in E,\ P(x)$, il faut réussir à trouver un $x \in E$ tel que $P(x)$. Il convient donc de chercher cet élément par un raisonnement préliminaire ou de l'intuiter. Une fois trouvé on suit le schéma suivant :
Posons $x =$ *l'élément qu'on a trouvé.*
Raisonnement en utilisant ce x.
Alors $P(x)$. On a donc montré que $\exists x \in E,\ P(x)$.

Exemple d'application

Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists y \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_0^x (2t^3 + yt)\mathrm{d}t = 0.$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On commence par calculer l'intégrale donnée

$$\int_0^x (t^3 + yt)\mathrm{d}t = \left[2\frac{t^4}{4} + y\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^4}{2} + \frac{yx^2}{2}$$

Ainsi, l'intégrale serait nulle pour $y = -x^2$. Posons donc $y = -x^2$. On a $\displaystyle\int_0^x (t^2 + yt)\mathrm{d}t = 0$.

On a donc montré que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists y \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_0^x (2t^3 + yt)\mathrm{d}t = 0$.

Voir exercice **1.4**.

Méthode 1.6 : Raisonner par disjonction de cas

Pour montrer une assertion P, on peut être amené à distinguer plusieurs cas lors du raisonnement. Il convient de bien faire attention à n'oublier aucun cas.

Exemple d'application

Pour tout entier naturel n, montrons que $n(n+1)$ est un entier pair.

On s'intéresse à la parité de $n(n+1)$, distinguons donc les cas selon la parité de n.

- **si n pair :** alors on dispose de $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Donc $n(n+1) = 2 \times k(2k+1)$ est pair.

- **si n impair :** alors on dispose de $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Donc $n(n+1) = 2 \times (2k+1)(k+1)$ est pair.

Dans tous les cas $n(n+1)$ est pair.

Voir exercices **1.4**, **1.15**, **1.16** et **1.17**.

Méthode 1.7 : Nier une assertion

Pour nier une assertion, on va utiliser les règles de négation : les $\forall$ deviennent des $\exists$ et vice-versa, les « et » deviennent des « ou » et vice-versa.

Exemple d'application

Soit E une partie de $\mathbb{R}$. Donnons la négation de « E est majoré ».

On commence par traduire l'assertion à nier. Donc dire que E est majoré revient à dire que $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E,\ x \leq M$. Sa négation est donc $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in E,\ x > M$.

Voir exercices **1.1**, **1.2** et **1.13**.

Méthode 1.8 : Raisonner par l'absurde

Pour montrer une assertion P, on peut supposer non P et arriver à montrer quelque chose de faux (on parle d'une absurdité).

Exemple d'application

Pour $a, b \in \mathbb{Q}$, montrons que si $a + b\sqrt{2} = 0$, alors $a = 0$ et $b = 0$.

Supposons que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Traitons 2 cas :

- si $b = 0$, alors $a + 0\sqrt{2} = 0$ et $a = 0$ ce qui absurde car on a supposé que soit a soit b est non nul.
- si $b \neq 0$, alors $\sqrt{2} = -\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde car on sait que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.

On arrive bien à une absurdité dans tous les cas. Ainsi $a = 0$ et $b = 0$.

Voir exercices **1.4**, **1.8** et **1.13**.

Méthode 1.9 : Raisonner par analyse/synthèse

Pour déterminer l'ensemble des éléments vérifiant une assertion P, on peut procéder en deux temps.
Analyse : on prend un élément x vérifiant l'assertion et on cherche à la spécifier le plus possible/à en tirer le plus d'information possible (on analyse la situation).
Synthèse : on vérifie que le ou les éléments x obtenus conviennent (on fait une synthèse de ce qu'on a trouvé).

Exemple d'application

Division Euclidienne : pour $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, montrons qu'il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $a = bq + r$ et $r < b$.

- **Analyse :** Soit $(q,r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $a = bq + r$ et $r < b$. On obtient que $0 \leq \frac{r}{b} < 1$. Or $\frac{r}{b} = \frac{a}{b} - q$. Donc $0 \leq \frac{a}{b} - q < 1$ puis $q \leq \frac{a}{b} < q + 1$. On en déduit donc que q est la partie entière de $\frac{a}{b}$, c'est-à-dire $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$, et $r = a - bq$.
- **Synthèse :** Posons $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$ et $r = a - bq \in \mathbb{Z}$. Tout d'abord, on a bien $a = bq + r$. Ensuite, par définition de la partie entière, $q \leq \frac{a}{b} < q + 1$ puis $bq \leq a < bq + b$. On en déduit donc que $0 \leq r < b$. On obtient bien ainsi que $(q,r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $a = bq + r$ et $r < b$.

On a donc montré qu'il existe un unique couple $(q,r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $a = bq + r$ et $r < b$.

- La phase d'analyse permet de trouver les candidats potentiels et la phase de synthèse permet de vérifier que ces candidats conviennent bien.
- Dans le cas où, comme dans l'exemple ci-dessus, la phase d'analyse ne nous laisse qu'un seul candidat vérifié par la synthèse, on obtient en plus l'unicité de l'élément vérifiant l'assertion.
- Ce type de raisonnement est très approprié pour montrer des énoncés du genre « Montrer que ... s'écrit de manière unique sous la forme ... »

Voir exercices **1.17** et **1.18**.

Méthode 1.10 : Montrer une unicité

Pour montrer qu'un élément x vérifiant $P(x)$ est unique, on prend deux éléments x et y vérifiant cette propriété et on montre que $x = y$.

Exemple d'application

Montrons que la décomposition d'un réel sous la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$ est unique.

Soit x un réel se décomposant sous la forme $x = a + b\sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$. On suppose que x s'écrit aussi sous la forme $x = c + d\sqrt{2}$ avec $c, d \in \mathbb{Q}$. On obtient donc que $a + b\sqrt{2} = x = c + d\sqrt{2}$ et donc que $(a - c) + (b - d)\sqrt{2} = 0$ avec $a - c \in \mathbb{Q}$ et $b - d \in \mathbb{Q}$. Alors $a - c = 0$ et $b - d = 0$ (cf. exemple d'illustration du raisonnement par l'absurde). Ainsi $(a,b) = (c,d)$, ce qui montre l'unicité de l'écriture demandée.

Cette méthode ne montre que l'unicité, elle ne montre en aucun cas l'existence.

Voir exercices **1.5** et **1.15**.

Méthode 1.11 : Raisonner par récurrence

Pour raisonner par récurrence

- On définit proprement la proposition $P(n)$ à montrer.
- On repère quel type de récurrence on veut faire. Pour ce faire, on regarde de quoi on a besoin pour montrer $P(n+1)$: si l'on n'a besoin que de $P(n)$, il s'agit d'une **récurrence simple** ; si on a besoin de $P(n)$ et $P(n-1)$, il s'agit d'une **récurrence double** ; si on a besoin de tous les $P(k)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$, il s'agit d'une **récurrence forte**.
- On initialise : on montre $P(0)$ pour les récurrences simples et fortes ; on montre $P(0)$ et $P(1)$ pour les récurrences doubles.
- On montre l'hérédité : on fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ et on montre l'implication qui traduit l'hérédité (c'est-à-dire pour une récurrence simple, on suppose $P(n)$ vraie et on montre que $P(n+1)$ est vraie).
- On n'oublie pas de conclure.

Exemple d'application

(1) Soit (u_n) la suite définie par récurrence par

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{N}$.

(2) Soit (u_n) la suite définie par récurrence par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n$.

(1) On note $P(n)$: « $u_n \in \mathbb{N}$ ». On remarque que les termes de la suite (u_n) sont définis à l'aide des deux précédents : on va donc utiliser une récurrence double (cette remarque n'a pas forcément besoin d'être écrite au propre).
Initialisation : $u_0 = u_1 = 1 \in \mathbb{N}$ ce qui montre $P(0)$ et $P(1)$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $P(n)$ et $P(n+1)$. On a donc $u_n \in \mathbb{N}$ et $u_{n+1} \in \mathbb{N}$. Ainsi $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \in \mathbb{N}$, ce qui montre $P(n+2)$.
On a donc montré par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{N}$.

(2) On note $Q(n)$: « $u_n = 2^n$ ». On remarque que les termes de la suite (u_n) sont définis à l'aide de tous les précédents : on va donc utiliser une récurrence forte.
Initialisation : $u_0 = 1 = 2^0$ ce qui montre $Q(0)$
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\forall k \in [\![0, n]\!],\ Q(k)$. On a donc

$$u_{n+1} = 1 + \sum_{k=0}^{n} u_k = 1 + \sum_{k=0}^{n} 2^k = 1 + \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 1 + 2^{n+1} - 1 = 2^{n+1}$$

ce qui montre $P(n+1)$.
On a donc montré par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n$.

Voir exercices **1.6**, **1.7**, **1.14** et **1.15**.

Méthode 1.12 : Montrer une inclusion d'ensembles

Si E et F sont deux ensembles, montrer que $F \subset E$ revient à montrer que $\forall x \in F,\ x \in E$.
En reprenant ce que l'on a vu précédemment, on suit le schéma suivant :
Soit $x \in F$.
Raisonnement utilisant le fait que x est dans F et aucune autre propriété sur x.
Alors $x \in E$. On a donc montré que $F \subset E$.

Exemple d'application

Si $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ /\ x + y + z = 0\right\}$ et $F = \{\lambda(1, -2, 1)\ /\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, montrons que $F \subset E$.

Soit $u = (x, y, z) \in F$. Par définition de F, on dispose de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda(1, -2, 1) = (\lambda, -2\lambda, \lambda)$. Ainsi $x = \lambda, y = -2\lambda$ et $z = \lambda$. Donc $x + y + z = \lambda - 2\lambda + \lambda = 0$, ce qui montre que $u \in E$. On a donc montré que $F \subset E$.

Voir exercices **1.9**, **1.10** et **1.19**.

Méthode 1.13 : Montrer une égalité d'ensembles

Si E et F sont deux ensembles, pour montrer que $E = F$, sauf cas particuliers où on peut montrer aisément que $x \in E \Leftrightarrow x \in F$, on procède par double inclusion : on montre séparément que $E \subset F$ et que $F \subset E$.

Exemple d'application

Pour $A \subset B$, montrons que $A \cap B = A$.

On procède par double inclusion.

- **$A \cap B \subset A$:** Soit $x \in A \cap B$. On a, par définition de l'intersection, $x \in A$ et $x \in B$. Donc, entre autres, $x \in A$. On a donc montré que $A \cap B \subset A$.
- **$A \subset A \cap B$:** Soit $x \in A$. On a $A \subset B$, donc $x \in B$. On a alors que $x \in A$ et $x \in B$. Donc $x \in A \cap B$, ce qui montre que $A \subset A \cap B$.

On a alors montré, par double inclusion, que $A \cap B = A$.

Voir exercices **1.9**, **1.16** et **1.19**.

Méthode 1.14 : Montrer qu'une application est injective

Si $f : E \to F$, montrer que f est injective renvient à montrer que

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

En reprenant ce que l'on a déjà vu, on suit le schéma suivant :
Soient x_1 et $x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.
Raisonnement.
Alors $x_1 = x_2$. On a donc montré que f est injective.

Exemple d'application

Montrons que $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}\ ,\ n \mapsto n - 1$ est injective.

Soient n et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $f(n) = f(m)$. On a donc que $n - 1 = m - 1$ et alors $n = m$. On a donc montré que f est injective.

Voir exercices **1.12**, **1.19** et **1.20**.

Méthode 1.15 : Montrer qu'une application est surjective

Si $f : E \to F$, montrer que f est surjective renvient à montrer que $\forall y \in F, \exists x \in E,\ y = f(x)$.
En reprenant ce que l'on a vu précédemment, on suit le schéma suivant :
Soit $y \in F$.
On pose $x =$ *valeur intuitée au brouillon. Raisonnement.*
Alors $y = f(x)$. On a donc montré que f est surjective.

Exemple d'application

Montrons que $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}\ ,\ n \mapsto n - 1$ est surjective.

Soit $m \in \mathbb{N}$, on pose $n = m + 1 \in \mathbb{N}^*$ et on a $f(n) = n - 1 = m + 1 - 1$. Alors $f(n) = m$. On a donc montré que f est surjective.

Voir exercices **1.12** et **1.20**.

Méthode 1.16 : Montrer qu'une application est bijective

Si $f : E \to F$, pour montrer que f est bijective il existe trois méthodes générales
Méthode 1 : on montre que f est injective et surjective.
Méthode 2 : on arrive directement à trouver la réciproque g de f de manière intuitive et on vérifie que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$
Méthode 3 : on montre que l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ admet une unique solution pour tout $y \in F$.

Exemple d'application

(1) Montrons que $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}\ ,\ n \mapsto n - 1$ est bijective.
(2) Montrons que $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-\ ,\ x \mapsto -\ln(1 + \sqrt{x})$ est bijective.

(1) **Méthode 1 :** On a montré déjà que f est injective et surjective, donc elle est bijective.
Méthode 2 : On peut assez naturellement penser que l'opération inverse d'enlever 1 est d'ajouter 1, on pose donc $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*\ ,\ n \mapsto n + 1$.
Si $n \in \mathbb{N}$, on a $f \circ g(n) = f(n+1) = n + 1 - 1 = n$ donc $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.
Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a $g \circ f(n) = g(n-1) = n - 1 + 1 = n$ donc $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}^*}$.
Ainsi f est bijective.

(2) **Méthode 3 :** Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_-$, on a :

$$y = f(x) \Leftrightarrow \ln(1 + \sqrt{x}) = -y \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x} = e^{-y} \Leftrightarrow \sqrt{x} = e^{-y} - 1 \underset{\text{car } x \geq 0}{\Leftrightarrow} x = \left(e^{-y} - 1\right)^2.$$

L'équation $y = f(x)$ admet donc bien une unique solution dans $\mathbb{R}_+$ et ce pour tout $y \in \mathbb{R}_-$. L'application f est donc bijective.

En utilisant la méthode 3, si on résout l'équation, on trouve même une expression de la réciproque de f.

Voir exercice **1.12**.

Interro de cours

1. Déterminer la négation, la réciproque et la contraposée de :

(a) « Il fait beau donc il ne pleut pas ».

(b) « J'ai bien dormi donc je suis en forme ».

(c) « J'ai bien révisé donc je connais mon cours ».

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on pose

- P : « $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ »,
- Q : « $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ ».

(a) Associer les assertions P et Q aux phrases suivantes :

« f s'annule », « f est la fonction nulle ».

(b) Nier les assertions P et Q.

(c) Déterminer si les implications suivantes sont vraies ou fausses

$$P \Rightarrow Q, \quad Q \Rightarrow P \quad \text{et} \quad \text{non}\, Q \Rightarrow \text{non}\, P.$$

3. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{R}$. Montrer que $p \in \mathbb{Z}$ si et seulement si $n + p \in \mathbb{Z}$.

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

5. Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Quelles assertions a-t-on le droit d'écrire ?

(a) $1 \in E$	**(d)** $\{1\} \subset E$	**(g)** $1 \in \mathscr{P}(E)$	**(j)** $\{1\} \subset \mathscr{P}(E)$
(b) $1 \subset E$	**(e)** $\varnothing \in E$	**(h)** $1 \subset \mathscr{P}(E)$	**(k)** $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$
(c) $\{1\} \in E$	**(f)** $\varnothing \subset E$	**(i)** $\{1\} \in \mathscr{P}(E)$	**(l)** $\varnothing \subset \mathscr{P}(E)$.

6. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que $\overline{A} \backslash \overline{B} = B \backslash A$.

7. Soit f l'application qui va de l'ensemble des aéroports dans l'ensemble des villes et qui à un aéroport associe la ville où il se situe. Dire que f n'est pas surjective revient à dire que :

(a) il y a des aéroports qui ne sont pas associés à une ville,

(b) il y a au moins une ville sans aéroport,

(c) tous les aéroports sont associés à une ville,

(d) une ville ne peux pas avoir plus d'un aéroport.

8. De la même manière qu'à la question précédente transformer les affirmation suivantes en applications qui sont ou non surjectives, injectives, bijectives :

(a) Une mairie possède un et un seul maire.

(b) Les raisins ne possèdent pas tous des pépins.

(c) Une place de parking ne peut pas être occupée par plus d'une voiture à la fois.

(d) Un arbre possède au moins une branche.

Exercices

Pour s'entraîner

Exercice 1.1

Transcrire les énoncés suivants en assertions logiques puis donner leur négation :

1. La somme de deux éléments d'un ensemble E appartient encore à E.
2. La fonction réelle f est croissante.
3. La partie E de $\mathbb{R}$ est minorée.
4. La fonction f s'annule.

Exercice 1.2

Donner la négation des assertions suivantes :

1. $\forall y \in F, \exists x \in E,\ y = f(x)$
2. $\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
3. $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I,\ |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

Exercice 1.3

Soit x un nombre réel. Montrer que

1. $(\forall \varepsilon \geq 0,\ |x| \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0$
2. $(\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0$.

Exercice 1.4

1. Montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
2. Calculer $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$.
3. En déduire qu'il existe deux irrationnels a et b tel que a^b soit rationnel.

Exercice 1.5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On admet que f possède une primitive qui s'annule en 0 (on verra ce résultat plus tard). Montrer que f admet une unique primitive qui s'annule en 0.

Exercice 1.6

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

Exercice 1.7

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par récurrence par

$$u_1 = u_2 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+2} = n\,(u_{n+1} + u_n)$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = (n-1)!$.

Exercice 1.8

Montrer qu'il n'existe pas de nombre à la fois pair et impair.

Exercice 1.9

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que

1. $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$

2. $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$

3. $(A \cup B)\backslash(A \cap B) = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.

Exercice 1.10

Soient $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0\right\}$ et $B = \{\lambda(1, 1, -2) \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que $B \subset A$.

2. A-t-on $A = B$?

3. Écrire A sous la forme $A = \{au + bv \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$ où u et v sont des triplets à déterminer.

Exercice 1.11

Déterminer si les transformations suivantes définissent des applications et le cas échéant donner leur ensemble de départ et leur ensemble d'arrivée :

1. À deux réels associer leur somme

2. À deux réels associer leur quotient

3. À un rationnel associer son dénominateur

4. À une fonction associer sa primitive

5. À une suite associer son premier terme

6. À une suite associer sa limite.

Exercice 1.12

Déterminer si les applications suivantes sont injectives, surjectives, bijectives :

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$

2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} n-1 & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{array} \right. \end{array}$

3. $g \circ f$

4. $f \circ g$

5. $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{array} \right. \end{array}$

6. $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair.} \end{array} \right. \end{array}$

Pour aller plus loin

Exercice 1.13

Soient $n + 1$ réels vérifiant $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$. On veut montrer qu'il y en a au moins deux consécutifs qui sont distants d'au plus $\dfrac{1}{n}$.

1. Écrire l'assertion mathématique correspondant à ce que l'on veut montrer.

2. Donner la négation de cette assertion.

3. Démontrer par l'absurde le résultat que l'on veut montrer.

Exercice 1.14

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

On pourra commencer par développer l'expression $\left(x^{n+1} + \dfrac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 1.15

Montrer que tout $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit de manière unique sous la forme $n = 2^p(2q+1)$ avec $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.
Pour l'existence, on utilisera une récurrence forte sur l'hypothèse

$$P(n) : \text{« } \exists (p,q) \in \mathbb{N}^2, n = 2^p(2q+1) \text{ ».}$$

Exercice 1.16

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

1. Montrer que $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A = B$.

2. Montrer que

a. $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$ **b.** $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$ **c.** $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

Exercice 1.17

En raisonnant par analyse-synthèse, déterminer toutes les applications de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 1.18

Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 1.19

Soient $f : E \to F$ et A, B des parties de E.

1. Montrer que $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2,\ f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

2. Montrer l'équivalence suivante :

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow \forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Exercice 1.20

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

2. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

3. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

4. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Corrections

Interro de cours

1. Pour les négations, on utilise la négations de $A \Rightarrow B$ qui est A et non B. On obtient

(a) « Il fait beau et il pleut »

(b) « J'ai bien dormi et je suis fatigué »

(c) « J'ai bien révisé et je ne connais pas mon cours ».

Pour les réciproques :

(a) « Il ne pleut pas donc il fait beau »

(b) « Je ne suis pas fatigué donc j'ai bien dormi »

(c) « Je connais mon cours donc j'ai bien révisé ».

Pour les contraposées :

(a) « Il pleut donc il ne fait pas beau »

(b) « Je suis fatigué donc j'ai mal dormi »

(c) « Je ne connais pas mon cours donc je n'ai pas bien révisé ».

2. **(a)** On a P : « f est la fonction nulle » et Q : « f s'annule ».

(b) On a les négations suivantes

- non P : « f n'est pas la fonction nulle », c'est-à-dire « $\exists x \in E,\ f(x) \neq 0$ »
- non Q : « f ne s'annule pas », c'est-à-dire « $\forall x \in E,\ f(x) \neq 0$ ».

(c) « Si f est la fonction nulle, alors elle s'annule » est vrai et sa contraposée aussi, mais sa réciproque est fausse. Ainsi $P \Rightarrow Q$ et non $Q \Rightarrow$ non P sont vraies et $Q \Rightarrow P$ est fausse.

3. On procède par double implication.

- **« Si $p \in \mathbb{Z}$, alors $n+p \in \mathbb{Z}$ » :** On suppose que $p \in \mathbb{Z}$.
  On sait que la somme de deux entiers relatifs est un entier relatif. Donc, comme $n \in \mathbb{Z}$, on a $n+p \in \mathbb{Z}$.
- **« Si $n+p \in \mathbb{Z}$, alors $p \in \mathbb{Z}$ » :** On suppose que $n+p \in \mathbb{Z}$.
  On a $p = (n+p) - n$. Or $n+p$ et n sont des entiers relatifs et la différence de deux entiers relatifs est un entier relatif. Ainsi $p \in \mathbb{Z}$.

4. On procède par récurrence en posant l'hypothèse de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{P}(n) : \text{« } \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ ».}$$

- **Initialisation :** pour $n = 0$, on a
$$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = \frac{0 \times (0+1) \times (2 \times 0 + 1)}{6},$$
ce qui montre $\mathscr{P}(0)$.
- **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathscr{P}(n)$.
On a
$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \underset{\mathscr{P}(n)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2.$$

On factorise ensuite l'expression trouvée

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{n+1}{6}\left(n(2n+1)+6(n+1)\right)=\frac{n+1}{6}\left(2n^2+7n+6\right).$$

Or $(n+2)(2n+3)=2n^2+7n+6$. On obtient donc que

$$\sum_{k=0}^{n+1}k^2=\frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6},$$

ce qui montre $\mathscr{P}(n+1)$.

On a donc montré par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

> Il ne faut pas hésiter à écrire explicitement (au brouillon ou au propre) ce que l'on doit montrer. Cela peut toujours guider la manière de mener les calculs. C'est ce qui a permis ici de factoriser $2n^2+7n+6$ (sans passer par l'étude du trinôme).

5. Les assertions que l'on a le droit d'écrire sont : **(a), (d), (f), (i), (k), (l)**.

6. On procède par double inclusion.

- **« $\overline{A}\backslash\overline{B}\subset B\backslash A$ » :** Soit $x\in\overline{A}\backslash\overline{B}$.
  On a $x\in\overline{A}$ donc $x\notin A$ et $x\notin\overline{B}$ donc $x\in B$. Ainsi x est un élément de B qui n'est pas dans A, c'est-à-dire $x\in B\backslash A$.
  Alors $\overline{A}\backslash\overline{B}\subset B\backslash A$.
- **« $B\backslash A\subset\overline{A}\backslash\overline{B}$ » :** Soit $x\in B\backslash A$.
  On a $x\in B$ donc $x\notin\overline{B}$ et $x\notin A$ donc $x\in\overline{A}$. Ainsi $x\in\overline{A}\backslash\overline{B}$.
  Alors $B\backslash A\subset\overline{A}\backslash\overline{B}$.

On a donc montré, par double inclusion, que $\overline{A}\backslash\overline{B}=B\backslash A$.

7. Dire que f n'est pas surjective revient à dire qu'un élément de l'ensemble d'arrivée de f (une ville) n'a pas d'antécédent par f (ne possède pas d'aéroport), ce qui correspond à **(b)**.
(a) veut dire que f n'est pas bien définie ; **(c)** veut dire que f est bien définie et **(d)** veut dire que f est injective.

8. **(a)** L'application qui va de l'ensemble des maires dans l'ensemble des mairies et qui à un maire associe sa mairie est bijective.

(b) L'application qui va de l'ensemble des pépins de raisins dans l'ensemble des raisins et qui à un pépin associe le raisin dans lequel il se trouve n'est pas surjective.

(c) L'application qui va de l'ensemble des voitures garées sur le parking dans l'ensemble des places de ce parking et qui à une voiture associe la place où elle est garée est injective.

(d) L'application qui va de l'ensemble des branches d'arbres dans l'ensemble des arbres et qui à une branche associe l'arbre sur lequel elle se trouve est surjective.

Exercice 1.1

1. Assertion : « $\forall x,y\in E,\ x+y\in E$ » ; négation : « $\exists x,y\in E,\ x+y\notin E$ ».
2. Assertion : « $\forall a,b\in D_f,\ a\leq b\Rightarrow f(a)\leq f(b)$ » ; négation : « $\exists a,b\in D_f,\ a\leq b$ et $f(a)>f(b)$ ».
3. Assertion : « $\exists m\in\mathbb{R},\forall x\in E,\ x\geq m$ » ; négation : « $\forall m\in\mathbb{R},\exists x\in E,\ x<m$ ».
4. Assertion : « $\exists x\in D_f,\ f(x)=0$ » ; négation « $\forall x\in D_f,\ f(x)\neq 0$ ».

Exercice 1.2

1. $\exists y \in F, \forall x \in E,\ y \neq f(x)$.
2. $\exists (x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 \neq x_2$.
3. $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in I,\ |x - a| \leq \eta$ et $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$.

Exercice 1.3

1. On suppose que $\forall \varepsilon \geq 0, |x| \leq \varepsilon$. Cette assertion est vraie même si $\varepsilon = 0$. Donc, pour $\varepsilon = 0$, on obtient $|x| \leq 0$. Ainsi $|x| = 0$ et $x = 0$, ce qui montre l'implication demandée.
2. On suppose que $\forall \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon$. On suppose, par l'absurde, que $x \neq 0$. On a donc $|x| > 0$. Donc si on pose $\varepsilon = \frac{|x|}{2} > 0$, on a $|x| \leq \varepsilon = \frac{|x|}{2}$. En divisant de chaque côté par $|x| > 0$, on obtient que $1 \leq \frac{1}{2}$, ce qui est absurde.
   Alors $x = 0$, ce qui montre l'implication demandée.

Exercice 1.4

1. On suppose par l'absurde que $\sqrt{2}$ est rationnel. On dispose donc de $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Quitte à simplifier la fraction, on peut supposer que p et q ne sont pas tous les deux pairs. On a donc $p = \sqrt{2} \times q$ puis $p^2 = 2q^2$. Ainsi p^2 est pair, donc p est pair (cf. exemple d'application de la méthode **1.2**). On dispose donc de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$. On en déduit que $q^2 = \frac{p^2}{2} = \frac{4k^2}{2} = 2k^2$. Donc q^2 est pair et q est aussi pair. Ainsi, p et q sont tous les deux pairs, ce qui est absurde car, par hypothèse, p et q ne sont pas tous les deux pairs.
   On en conclut que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
2. On a $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{(\sqrt{2}\times\sqrt{2})} = \sqrt{2}^2 = 2$.
3. On distingue deux cas :
   - Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, alors on pose $a = b = \sqrt{2}$ et on a bien a et b irrationnels tels que a^b est rationnel.
   - Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel, alors on pose $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$. D'après la question précédente, on a $a^b = 2$ qui est rationnel. Donc on a bien a et b deux irrationnels tels que a^b est rationnel

   Dans les deux cas, on dispose de a et b irrationnels tels que a^b est rationnel.

Exercice 1.5

Soient F et G deux primitives de f s'annulant en 0. On a $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$, donc la fonction $F - G$ est constante sur $\mathbb{R}$. On dispose donc de $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) - G(x) = k$. Or $F(0) = G(0) = 0$, donc $k = 0$. Ainsi $F = G$.
On a donc montré que f n'admet qu'une seule primitive s'annulant en 0.

Exercice 1.6

On procède par récurrence en posant l'hypothèse de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathscr{P}(n) : « 2^{n-1} \leq n! \leq n^n ».$$

- **Initialisation :** pour $n = 1$, $2^{1-1} = 1 \leq 1! = 1 \leq 1^1 = 1$, ce qui montre $\mathscr{P}(1)$.

- **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $\mathscr{P}(n)$.
  On a
  $$2^n = 2 \times 2^{n-1} \underset{\mathscr{P}(n)}{\leq} 2 \times n! \leq (n+1) \times n! = (n+1)!.$$
  Et
  $$(n+1)! = (n+1) \times n! \underset{\mathscr{P}(n)}{\leq} (n+1) \times n^n \leq (n+1) \times (n+1)^n = (n+1)^{n+1}.$$
  On a donc montré $\mathscr{P}(n+1)$.

Alors, on a démontré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

Exercice 1.7

On procède par récurrence double en posant l'hypothèse de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}^*$
$$\mathscr{P}(n) : « \, u_n = (n-1)! \, ».$$

- **Initialisation :** on a $u_1 = 1 = (1-1)!$ et $u_2 = 1 = (2-1)!$, ce qui montre $\mathscr{P}(1)$ et $\mathscr{P}(2)$.
- **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$. On a
  $$u_{n+2} = n(u_{n+1} + u_n) = n\left(n! + (n-1)!\right),$$
  puis, en factorisant par $(n-1)!$
  $$u_{n+2} = n\left(n \times (n-1)! + (n-1)!\right) = n\left((n+1) \times (n-1)!\right) = (n+1) \times n \times (n-1)! = (n+1)!,$$
  ce qui montre $\mathscr{P}(n+2)$.

On a donc démontré par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (n-1)!$.

Exercice 1.8

Supposons par l'absurde qu'il existe un entier n à la fois pair et impair. Comme n est pair, on dispose d'un entier p tel que $n = 2p$. Comme n est impair, on dispose d'un entier k tel que $n = 2k+1$. On obtient donc que $2p = n = 2k+1$, puis $1 = 2(p-k)$. On a ainsi que 1 est pair, ce qui est absurde.
On a donc montré par l'absurde qu'il n'existe pas d'entier à la fois pair et impair.

Exercice 1.9

1. On procède par double implication
- **« $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$ » :** On suppose que $A \cup B = B$.
  On a $A \subset A \cup B = B$, donc $A \subset B$.
- **« $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$ » :** On suppose que $A \subset B$ et on montre que $A \cup B = B$ par double inclusion
  - ◇ **« $B \subset A \cup B$ » :** cette inclusion est toujours vraie
  - ◇ **« $A \cup B \subset B$ » :** soit $x \in A \cup B$. On a deux cas
    - ⋆ Si $x \in A$, comme $A \subset B$, alors $x \in B$.
    - ⋆ Si $x \in B$, alors $x \in B$.

    Dans les deux cas, $x \in B$. Donc $A \cup B \subset B$.

  On a donc montré, par double implication, que $A \cup B = B$.

Ainsi $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$.

2. On procède par double implication
   - **« $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$ » :** On suppose que $A \cup B = A \cap B$.
     On a $A \subset A \cup B = A \cap B \subset B$, donc $A \subset B$. On montre de même que $B \subset A$.
     Ainsi $A = B$.
   - **« $A = B \Rightarrow A \cup B = A \cap B$ » :** On suppose que $A = B$.
     On a $A \cup B = A \cup A = A = A \cap A = A \cap B$. Ainsi $A \cup B = A \cap B$.

   Alors $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.
3. On procède par double inclusion
   - **« $(A \cup B)\backslash(A \cap B) \subset (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$ » :** Soit $x \in (A \cup B)\backslash(A \cap B)$. On a $x \in A \cup B$, on distingue donc deux cas.
     - ◇ Si $x \in A$, alors, comme $x \notin A \cap B$, x ne peut pas appartenir à A et à B à la fois. Étant dans A, il n'est pas dans B. Ainsi $x \in A\backslash B$.
     - ◇ Si $x \in B$, alors en procédant de la même manière, on obtient que $x \notin A$. Ainsi $x \in B\backslash A$.

     Au final, $x \in A\backslash B$ ou $x \in B\backslash A$, c'est-à-dire $x \in (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$, d'où l'inclusion voulue.
   - **« $(A\backslash B) \cup (B\backslash A) \subset (A \cup B)\backslash(A \cap B)$ » :** Soit $x \in (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$. On distingue deux cas.
     - ◇ Si $x \in A\backslash B$, alors $x \in A$, donc $x \in A \cup B$. De plus $x \notin B$, donc $x \notin A \cap B$. Ainsi $x \in (A \cup B)\backslash(A \cap B)$.
     - ◇ Si $x \in B\backslash A$, on procède de la même manière pour montrer que $x \in (A \cup B)\backslash(A \cap B)$.

     Dans les deux cas, $x \in (A \cup B)\backslash(A \cap B)$, ce qui montre l'inclusion voulue.

Exercice 1.10

1. Soit $u = (x, y, z) \in B$. On dispose de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda(1, 1, -2)$. On obtient donc que $x = \lambda$, $y = \lambda$ et $z = -2\lambda$. Ainsi $x + y + z = \lambda + \lambda - 2\lambda = 0$ puis $u \in A$. On en conclut que $B \subset A$.
2. On a $(1, -1, 0) \in A$ mais $(1, -1, 0) \notin B$ (sinon, on aurait un λ égal à 1, -1 et 0 à la fois). On en déduit donc que $A \neq B$.
3. On va exprimer z en fonction de x et y dans l'équation de A pour paramétriser A :
$$\begin{aligned} A &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = -x - y\right\} \\ &= \{(x, y, -x - y) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, 0, -x) + (0, y, -y) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$
   Si on pose $u = (1, 0, -1)$ et $v = (0, 1, -1)$, les variables étant muettes, on obtient bien
$$A = \{au + bv \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 1.11

1. C'est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
2. Ce n'est pas une application car on ne peut pas diviser par 0.
3. Un rationnel n'a pas un seul et unique dénominateur ($\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, donc ce rationnel admet 2 et 4 comme dénominateurs). L'application n'est donc pas correctement définie.
4. Les fonctions n'ont pas toutes des primitives et celles qui en ont n'en n'ont pas qu'une seule. L'application n'est donc pas correctement définie.

5. C'est une application des l'ensemble des suites dans $\mathbb{R}$.
6. Les suites n'ont pas toutes des limite. L'application n'est donc pas correctement définie.

Exercice 1.12

1. • Injectivité : Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(m)$. On a alors $n+1 = m+1$ et $n = m$. Donc f est injective.
• Surjectivité : 0 n'a pas d'antécédent par f (car $-1 \notin \mathbb{N}$), donc f n'est pas surjective, donc f n'est pas bijective.

2. • Injectivité : $g(0) = 0 = g(1)$ donc g n'est pas injective, donc g n'est pas bijective.
• Surjectivité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $n+1 > 0$, donc $g(n+1) = n$ et n admet au moins un antécédent par g. Ainsi g est surjective.

3. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g \circ f(n) = g(n+1) = n$. Ainsi $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ et $g \circ f$ est bijective.

4. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f \circ g(n) = f(n-1) = n$ et $f \circ g(0) = f(0) = 1$.
• Injectivité : $f \circ g(1) = 1 = f \circ g(0)$ donc $f \circ g$ n'est pas injective, donc $f \circ g$ n'est pas bijective.
• Surjectivité : on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f \circ g(n) \geq 1$. Donc 0 n'a pas d'antécédent par $f \circ g$ et $f \circ g$ n'est pas surjective.

5. • Injectivité : $h(0) = 0 = h(1)$ donc h n'est pas injective.
• Surjectivité : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n = h(2n)$. Donc h est surjective.

6. • Injectivité : Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $u(n) = u(m)$.
◇ Si $u(n) \geq 0$, alors on est dans le cas où n est pair et $u(n) = \frac{n}{2}$. Or $u(m) = u(n) \geq 0$, donc de même $u(m) = \frac{m}{2}$. Ainsi $\frac{n}{2} = \frac{m}{2}$ puis $n = m$.
◇ Si $u(n) < 0$, alors n est impair et $u(n) = -\frac{n+1}{2}$. Or $u(m) = u(n) < 0$, donc de même $u(m) = -\frac{m+1}{2}$. Ainsi $-\frac{n+1}{2} = -\frac{m+1}{2}$ puis $n = m$.
Dans les deux cas, $n = m$. On en conclut que u est injective.
• Surjectivité : Soit $n \in \mathbb{Z}$.
◇ Si $n \geq 0$, alors $n = \frac{2n}{2} = u(2n)$ car $2n \in \mathbb{N}$ est pair.
◇ Si $n < 0$, alors $n = -\frac{-2n-1+1}{2} = u(-2n-1)$ car $-2n-1 \in \mathbb{N}$ est impair.
Dans les deux cas, n admet un antécédent par u. On en conclut que u est surjective.

Exercice 1.13

1. On veut montrer que « $\exists k \in [\![1, n]\!], \ x_k - x_{k-1} \leq \frac{1}{n}$ ».
2. La négation de cette assertion est « $\forall k \in [\![1, n]\!], \ x_k - x_{k-1} > \frac{1}{n}$ ».
3. On suppose par l'absurde que $\forall k \in [\![1, n]\!], \ x_k - x_{k-1} > \frac{1}{n}$. On a ainsi

$$(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1}) > \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}}_{n \text{ fois}} = 1.$$

De plus cette somme se simplifie en

$$(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0.$$

Donc, $x_n - x_0 > 1$. Or x_0 et x_n sont dans $[0, 1]$, alors $x_n - x_0 \leq 1$, ce qui est absurde.
On a donc montré, par l'absurde, qu'il y a au moins deux x_k consécutifs distants d'au plus $\frac{1}{n}$.

Exercice 1.14

On commence par utiliser l'indication :

$$\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x^{n+2}+\frac{1}{x^{n+2}}\right)+\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right).$$

On va donc démontrer le résultat par récurrence double en posant l'hypothèse de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$

$$\mathscr{P}(n) : \text{« } x^n+\frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z} \text{ »}$$

- **Initialisation :** On a $x^0+\frac{1}{x^0}=2 \in \mathbb{Z}$ et $x^1+\frac{1}{x^1}=x+\frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ par hypothèse. On a donc bien $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$. On utilise le calcul de l'indication pour obtenir

$$\left(x^{n+2}+\frac{1}{x^{n+2}}\right)=\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right).$$

  Par produit et différence d'entiers, $x^{n+2}+\frac{1}{x^{n+2}}$ est un entier, ce qui montre $\mathscr{P}(n+2)$.

On a donc montré, par récurrence double, que $\forall n \in \mathbb{N},\ x^n+\dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

Exercice 1.15

On procède par récurrence forte en posant l'hypothèse de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathscr{P}(n) : \text{« } \exists (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ n=2^p(2q+1) \text{ »}$$

- **Initialisation :** On a $1=2^0(2\times 0+1)$ ce qui montre $\mathscr{P}(1)$.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathscr{P}(k)$.
  On distingue deux cas, selon la parité de $n+1$.
  - ◇ Si $n+1$ est pair, alors on dispose de $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $n+1=2k$. Comme $k \leq n$, d'après $\mathscr{P}(k)$, on dispose de deux entiers naturels r et s tels que $k=2^r(2s+1)$. Ainsi

$$n+1=2k=2^{r+1}(2s+1)=2^p(2q+1) \quad \text{en posant } p=r+1 \text{ et } q=s.$$

  - ◇ Si $n+1$ est impair, alors on dispose de $k \in \mathbb{N}$ tel que $n+1=2k+1$. Ainsi

$$n+1=2^0(2k+1)=2^p(2q+1) \quad \text{en posant } p=0 \text{ et } q=k.$$

  Dans les deux cas, on peut trouver deux entiers naturels p et q tels que $n+1=2^p(2q+1)$, ce qui montre $\mathscr{P}(n+1)$.

On a donc montré, par récurrence forte, que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ n=2^p(2q+1)$.

Exercice 1.16

1. Si $A=B$, il est évident que $\mathbb{1}_A=\mathbb{1}_B$. Il faut donc montrer l'implication dans le sens direct.
On suppose que $\mathbb{1}_A=\mathbb{1}_B$. Soit $x \in A$, on a $\mathbb{1}_A(x)=1$ par définition. Ainsi $\mathbb{1}_B(x)=\mathbb{1}_A(x)=1$.
On en conclut que $x \in B$ puis que $A \subset B$.
On montre de même que $B \subset A$.
On en conclut, par double inclusion, que $A=B$.

2. a. • Si $x \in A$, alors $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = 0 = 1 - 1 = 1 - \mathbb{1}_A(x)$.
• Si $x \notin A$, alors $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = 1 = 1 - 0 = 1 - \mathbb{1}_A(x)$.
Ainsi $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.

b. • Si $x \in A \cap B$, alors $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 1 = 1 \times 1 = \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$.
• Si $x \notin A \cap B$, alors $x \notin A$ ou $x \notin B$ puis $\mathbb{1}_A(x) = 0$ ou $\mathbb{1}_B(x) = 0$. On en déduit que $\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = 0 = \mathbb{1}_{A\cap B}(x)$.
Ainsi $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.

c. • Si $x \in A$ et $x \in B$, alors $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1 = 1 + 1 - 1 = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$.
• Si $x \in A$ et $x \notin B$, alors $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1 = 1 + 0 - 0 = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$.
• Si $x \notin A$ et $x \in B$, alors $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1 = 0 + 1 - 0 = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$.
• Si $x \notin A$ et $x \notin B$, alors $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 0 = 0 + 0 - 0 = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$.
Ainsi $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.

Exercice 1.17

On procède par analyse-synthèse.

• **Analyse :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) = f(x) + f(y)$.
On commence par utiliser l'égalité donnée pour $x = y = 0$ pour obtenir que

$$f(0)f(0) = f(0) + f(0), \text{ c'est-à-dire } f(0)(f(0) - 2) = 0.$$

On en déduit que $f(0) = 0$ ou que $f(0) = 2$.

◇ Si $f(0) = 0$, alors, en prenant $x \in \mathbb{R}$ et en utilisant l'égalité pour x et 0, on obtient que

$$f(x)f(0) = f(x) + f(0), \text{ c'est-à-dire } 0 = f(x).$$

On en déduit que f est l'application nulle.

◇ Si $f(0) = 2$, alors, en prenant $x \in \mathbb{R}$ et en utilisant l'égalité pour x et 0, on obtient que

$$f(x)f(0) = f(x) + f(0), \text{ c'est-à-dire } 2f(x) = f(x) + 2 \text{ donc } f(x) = 2.$$

On en déduit que f est constante et égale à 2.

On obtient au final que soit f est nulle soit f est constante et égale à 2.

• **Synthèse :** Soit f qui est soit l'application nulle soit l'application constante égale à 2.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

◇ Si f est l'application nulle, alors

$$f(x)f(y) = 0 \times 0 = 0 = 0 + 0 = f(x) + f(y).$$

◇ Si f est l'application constante égale à 2, alors

$$f(x)f(y) = 2 \times 2 = 4 = 2 + 2 = f(x) + f(y).$$

Dans les deux cas, f est solution du problème.

Ainsi les applications solutions du problème sont l'application nulle et l'application constante égale à 2.

> Dans ce genre de problème où l'on dispose d'une condition vraie pour toute(s) valeur(s) d'un ou plusieurs paramètres (ici pour tous x et y), c'est en général une bonne idée de tester cette condition en des valeurs particulières (ici, $x = y = 0$).

Exercice 1.18

On procède par analyse-synthèse. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- **Analyse :** On suppose qu'il existe une fonction paire p et une fonction impaire i telles que $f = p + i$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par parité des fonctions p et i, on obtient que
$$f(x) = p(x) + i(x) \quad \text{et} \quad f(-x) = p(x) - i(x).$$
En sommant et en soustrayant ces deux égalités, on obtient que
$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$
- **Synthèse :** On pose les fonctions p et i définies sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$p(x) + i(x) = \frac{f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x)$$
et
$$p(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = p(x)$$
et
$$i(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -i(x).$$
On en conclut que $f = p + i$ avec p paire et i impaire.

Ainsi f se décompose de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

La phase d'analyse nous donne même l'expression de ces deux fonctions.

Exercice 1.19

1. Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Soit $y \in f(A \cap B)$. On dispose de $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$.
On a $x \in A$, donc $y = f(x) \in f(A)$. De même, $x \in B$, donc $y \in f(B)$.
Ainsi $y \in f(A) \cap f(B)$ ce qui montre que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

2. On procède par double implication.

- **« f injective $\Rightarrow \forall (A, B) \in \mathscr{P}(E)^2,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ ».**
On suppose f injective. Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$.
Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Comme $y \in f(A)$, on dispose de $a \in A$ tel que $y = f(a)$. De même, comme $y \in f(B)$, on dispose de $b \in B$ tel que $y = f(b)$. On a donc que $f(a) = f(b)$. Par injectivité de f, on en déduit que $a = b \in A \cap B$. Ainsi $y \in f(A \cap B)$ ce qui montre que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.
L'autre inclusion ayant été démontrée à la question précédente, on en conclut que
$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

- **« $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2,\ f(A\cap B) = f(A)\cap f(B) \Rightarrow f$ injective ».**
  On suppose que $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2,\ f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$.
  Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. On pose $A = \{x_1\}$ et $B = \{x_2\}$. On a donc $f(A) = \{f(x_1)\} = \{f(x_2)\} = f(B)$, puis $f(A)\cap f(B) = \{f(x_1)\} \neq \varnothing$.
  On suppose, par l'absurde, que $x_1 \neq x_2$. On a donc que $A\cap B = \varnothing$ et $f(A\cap B) = \varnothing$.
  Or $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B) \neq \varnothing$ ce qui est absurde.
  Alors $x_1 = x_2$ donc f est injective.

On en conclut que : f injective $\Leftrightarrow \forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2,\ f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$

Exercice 1.20

1. On suppose f et g injectives. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $g\circ f(x_1) = g\circ f(x_2)$.
On a $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, donc $f(x_1) = f(x_2)$ par injectivité de g.
Puis, par injectivité de f, on obtient $x_1 = x_2$.
On en conclut que $g\circ f$ est injective.

2. On suppose f et g surjectives. Soit $z \in G$. L'application g étant surjective, on dispose de $y \in F$ tel que $z = g(y)$. L'application f étant surjective, on dispose de $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On obtient donc que
$$z = g(y) = g(f(x)) = g\circ f(x).$$
Ainsi, tout élément de G admet un antécédent par $g\circ f$ dans E donc $g\circ f$ est surjective.

3. On suppose $g\circ f$ injective. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. En composant par l'application g, on obtient que $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ c'est-à-dire $g\circ f(x_1) = g\circ f(x_2)$. Par injectivité de $g\circ f$, on en déduit que $x_1 = x_2$.
Ainsi f est injective.

4. On suppose $g\circ f$ surjective. Soit $z \in G$. L'application $g\circ f$ étant surjective, on dispose de $x \in E$ tel que $z = g\circ f(x)$. Si on pose $y = f(x) \in F$, on obtient
$$z = g\circ f(x) = g(f(x)) = g(y).$$
Ainsi, tout élément de G admet un antécédent par g dans F et g est surjective.

Partie 1

Techniques de calcul

CHAPITRE 2

Ensembles de nombres

L'essentiel du cours

1 Nombres entiers

Définition

- On appelle **entier naturel** tout entier positif ou nul. On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.
- On appelle **entier relatif** tout entier qu'il soit positif ou négatif. On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.

Définition

Soit n un entier. On dit que
- n est **pair** s'il existe un entier k tel que $n = 2k$.
- n est **impair** s'il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$.

Définition

On appelle **nombre rationnel** tout nombre de la forme $\dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.

2 Nombres réels

Définition

On appelle **intervalle** de $\mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}$ d'une des formes suivantes (avec $a \leq b \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{array}{llll}
[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\} & \qquad & [a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x\} \\
]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leq b\} & &]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x\} \\
[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < b\} & &]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq b\} \\
]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\} & &]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x < b\}
\end{array}$$

⚠ Si $a > b$, alors $[a,b] = \varnothing$. L'ordre des bornes a donc une très grande importance.

Définition

Si $x \in \mathbb{R}$, la **valeur absolue** de x est le réel $|x| = \max(x, -x)$.
Ainsi $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ sinon.

Inégalité triangulaire

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a

$$|x+y| \leq |x| + |y| \qquad \text{et} \qquad ||x| - |y|| \leq |x-y| \, .$$

On n'a en aucun cas $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x-y| \leq |x| - |y|$. La seule chose que l'on peut avoir est

$$|x-y| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$$

Définition

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **partie entière** de x, noté $\lfloor x \rfloor$, le seul entier $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $n \leq x < n+1$.

Il s'agit du plus grand entier inférieur ou égal à x.

Propriétés de la puissance

Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$ et $n, m \in \mathbb{Z}$. On a

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \qquad x^{n+m} = x^n x^m, \qquad x^{nm} = (x^n)^m \qquad \text{et} \qquad (xy)^n = x^n y^n.$$

Définition

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On appelle **racine carrée** de x, noté $\sqrt{x}$, le réel positif dont le carré vaut x.

Propriétés de la racine carrée

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. On a

$$\sqrt{x^2} = |x| \, , \qquad \text{si } x \geq 0, \ \left(\sqrt{x}\right)^2 = x, \qquad \text{et} \qquad \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0, \ \sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}.$$

Identités remarquables

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad \text{et} \qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Si a, b sont non nuls, ne jamais écrire $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ ou encore pire $(a-b)^2 = a^2 - b^2$.

Opérations et inégalités

Soient $a, x, y, z, t \in \mathbb{R}$.
- Si $x \leq z$ et $y \leq t$, alors $x + y \leq z + t$.
- Si $x \leq y$ et $a \geq 0$, alors $ax \leq ay$. Si $x \leq y$ et $a \leq 0$, alors $ax \geq ay$.
- Si $0 \leq x \leq z$ et $0 \leq y \leq t$, alors $xy \leq zt$.
- Si $0 < x \leq y$, alors $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$. Si $x \leq y < 0$, alors $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$.

⚠
- On ne peut pas soustraire deux inégalités de même sens, on multiplie la deuxième par -1 et on l'ajoute à la première.
- Lorsqu'on multiplie par un élément de chaque côté d'une inégalité, il faut bien faire attention au signe de cet élément.
- Il faut bien se ramener à n'avoir que des réels positifs pour pouvoir multiplier deux inégalités.

Définition

Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré (avec a, b, c des réels et $a \neq 0$). On appelle **discriminant** du trinôme le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

Équation du second degré

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ de discriminant Δ.
- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$
le trinôme est du signe de a en-dehors de racines et du signe de $-a$ entre les racines et $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une seule solution réelle $x_0 = -\frac{b}{2a}$, le trinôme est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solution réelle, le trinôme est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et $ax^2 + bx + c$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

3 Majorant, maximum, borne supérieure

Définition

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
- On dit que A est **majorée** s'il existe un réel M tel que $\forall x \in A,\ x \leq M$. Un tel réel M est appelé un **majorant** de A.
- On dit que A est **minorée** s'il existe un réel m tel que $\forall x \in A,\ x \geq m$. Un tel réel m est appelé un **minorant** de A.
- On dit que A est **bornée** si elle est majorée et minorée.

Définition

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit que M est le **maximum** de A si M est un majorant de A et M est un élément de A. On le note $\max(A)$.
- On dit que m est le **minimum** de A si m est un minorant de A et m est un élément de A. On le note $\min(A)$.

⚠

- Une partie majorée n'admet pas forcément de maximum.
- Si le maximum/minimum existe, il est unique.

Définition

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On appelle **borne supérieure** de A le plus petit des majorants de A, s'il existe. On la note $\sup(A)$.
- On appelle **borne inférieure** de A le plus grand des minorants de A, s'il existe. On la note $\inf(A)$.

Si la borne supérieure/inférieure existe, elle est unique.

⚠ La borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$ n'appartient pas forcément à cette partie. La borne supérieure de $]-\infty, 0[$ est 0 mais n'appartient pas à $]-\infty, 0[$.

Théorème

- Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Caractérisation de la borne supérieure / inférieure

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- s est la borne supérieure de A si et seulement si s est un majorant de A et
$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A,\ x > s - \varepsilon.$$
- i est la borne inférieure de A si et seulement si i est un minorant de A et
$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A,\ x < i + \varepsilon.$$

La deuxième partie de la caractérisation de la borne supérieure revient à dire que, pour tout $\varepsilon > 0$ aussi petit soit-il, $s - \varepsilon$ n'est pas un majorant.

Les méthodes à maîtriser

Méthode 2.1 : Encadrer une différence, un produit et un quotient

Il ne faut pas se précipiter en créant de nouvelles règles de calcul sur les inégalités. Il faut commencer par modifier nos inégalités pour se ramener aux règles de base : on peut ajouter deux inégalités et, quand tout est positif, on peut multiplier deux inégalités.

- Pour une différence : on multiplie l'inégalité que l'on veut soustraire par -1 et on l'ajoute à l'autre.
- Pour un produit : on se ramène à ne considérer que des objets positifs, quitte à multiplier les inégalités par -1 ou à distinguer des cas, et on les multiplie ensuite.
- Pour un quotient : grâce au passage à l'inverse on compare les inverses des dénominateurs, quitte à distinguer les cas pour tout avoir du même signe, et ensuite on multiplie cette inégalité à celle concernant les numérateurs en suivant la démarche pour le produit.

Exemple d'application

Soient $-1 \leq x \leq 2$ et $2 \leq y \leq 4$. Encadrer $x+y$, $x-y$, xy et $\dfrac{x}{y}$.

- Aucun problème, il s'agit d'une somme, on ajoute terme à terme et on obtient $1 \leq x+y \leq 6$.
- On commence par multiplier par -1 l'inégalité avec y : $-4 \leq y \leq -2$. Ensuite, on l'ajoute à l'inégalité avec x pour obtenir $-5 \leq x-y \leq 0$.
- Le réel x n'est pas de signe fixé, il va donc falloir disjoindre des cas.
  — Si $x \geq 0$, alors $0 \leq x \leq 2$. Tout étant positif, on peut multiplier et obtenir $0 \leq xy \leq 8$.
  — Si $x \leq 0$, alors $-1 \leq x \leq 0$. On commence par multiplier cette dernière inégalité par -1 : $0 \leq -x \leq 1$. On peut maintenant multiplier : $0 \leq (-x)y \leq 4$. On multiplie cette dernière inégalité par -1 pour retrouver xy : $-4 \leq xy \leq 0$.
  Au final, on obtient $-4 \leq xy \leq 8$.
- On commence par inverser l'inégalité de y (on peut le faire car tout est strictement positif dans cette inégalité) : $\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{2}$. On va ensuite encore devoir distinguer des cas suivant le signe de x.
  — Si $x \geq 0$, alors $0 \leq x \leq 2$. On peut ensuite multiplier pour obtenir : $0 \leq x \times \dfrac{1}{y} \leq 1$.
  — Si $x \leq 0$, alors $-1 \leq x \leq 0$ et $0 \leq -x \leq 1$. On peut ensuite multiplier : $0 \leq (-x) \times \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{2}$. On multiplie par -1 pour récupérer $\dfrac{x}{y}$: $-\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{x}{y} \leq 0$.
  Au final, on obtient $-\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{x}{y} \leq 1$.

Voir exercices **2.1**, **2.2**, **2.5**, **2.7** et **2.8**.

Méthode 2.2 : Exploiter une valeur absolue

Parfois, on peut vouloir se débarrasser d'une valeur absolue dans une expression. Pour ce faire, il va falloir distinguer des cas en fonction du signe de ce qui se trouve dans la valeur absolue. Ensuite, on utilise le fait que $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$.

Exemple d'application

Résoudre l'équation $|2x-8| + |x-1| = 9$

On va distinguer deux cas en fonction du signe de $2x-8$, qui change en $x = 4$, et de celui de $x-1$, qui change en $x = 1$. Le plus simple ensuite est d'effectuer un tableau pour récapituler les expressions de $|2x-8|$ et $|x-1|$ puis de leur somme, que l'on notera S.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$\|2x-8\|$		$8-2x$		$8-2x$	0	$2x-8$	
$\|x-1\|$		$1-x$	0	$x-1$		$x-1$	
S		$9-3x$	0	$7-x$	0	$3x-9$	

Ensuite, on résout l'équation sur chacun des intervalles (en vérifiant bien que la ou les solutions trouvées sont bien dans cet intervalle).

- Sur $]-\infty, 1]$, on obtient $x = 0$ qui est dans l'intervalle.
- Sur $[1, 4]$, on obtient $x = -2$ qui n'est pas dans l'intervalle.
- Sur $[4, +\infty[$, on obtient $x = 6$ qui est dans l'intervalle.

Au final, les solutions de l'équation sont 0 et 6.

Voir exercices **2.2**, **2.3** et **2.4**.

Méthode 2.3 : Résoudre une équation

Pour résoudre une équation simple du type $f(x) = g(x)$, on commence par se ramener à une équation du type $h(x) = 0$, par une simple soustraction. Ensuite, on factorise notre expression : on met tout au même dénominateur s'il y a des fractions et ensuite on repère des facteurs communs ou des identités remarquables. Pour finir on utilise le fait qu'un produit est nul si et seulement si au moins un des facteurs est nul ou le fait qu'un quotient est nul si et seulement si le numérateur est nul et le dénominateur est non nul.

Exemple d'application

Résoudre $\dfrac{(x-1)(x^2+6x+7)}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{x-1}{x+2}$

On commence par donner un nom à l'équation : (E), puis par tout ramener à gauche de l'inégalité et tout mettre au même dénominateur :

$$(E) \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x^2+6x+7) - (x-1)(x+2) - (x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)} = 0$$

Ensuite, on repère $(x-1)$ comme facteur commun pour factoriser le numérateur :

$$(x-1)(x^2+6x+7) - (x-1)(x+2) - (x-1)(x+1) = (x-1)(x^2+4x+4)$$

Une simple résolution nous donne que la solution de $x^2+4x+4=0$ est -2. Place à la conclusion :

$$\begin{aligned}(E) \quad &\Leftrightarrow \quad \big(x-1=0 \text{ ou } x^2+4x+4=0\big) \text{ et } x+1\neq 0 \text{ et } x+2\neq 0\\ &\Leftrightarrow \quad (x=1 \text{ ou } x=-2) \text{ et } x\neq -1 \text{ et } x\neq -2\end{aligned}$$

Ainsi la seule solution de (E) est 1.

Attention aux simplifications hasardeuses :

- On aurait pu diviser par $x-1$ toute l'équation, mais on aurait perdu la seule solution que l'on a trouvé à la fin. En effet, pour pouvoir diviser par $x-1$, il faut s'assurer que $x-1\neq 0$, ce qui n'est pas le cas ici.
- En poussant le calcul un peu plus loin et en factorisant le trinôme, on aurait pu faire la simplification suivante :

$$(E) \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+2)^2}{(x+1)(x+2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+2)}{x+1} = 0$$

On aurait ainsi trouvé 1 et -2 comme solutions, ce qui est faux. En effet, en faisant ceci, il aurait fallu continuer de préciser que $x+2$ devait être non nul.

Voir exercice **2.3**.

Méthode 2.4 : Résoudre une inéquation

Pour résoudre une inéquation simple, on applique le même principe que pour la résolution d'une équation simple, jusqu'à avoir à déterminer le signe d'une expression factorisée. Pour ce faire, on dresse un tableau de signe pour chacun des facteurs.

Exemple d'application

Résoudre $\boldsymbol{\dfrac{(x-1)(x^2+6x+7)}{(x+1)(x+2)} \geq \dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{x-1}{x+2}}$

On commence par donner un nom à l'inéquation : (I), puis on reprend les calculs de l'exercice précédent pour se ramener à :

$$(I) \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x^2+4x+4)}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

Ensuite, on fait un tableau de signe, en notant Q le quotient obtenu,

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2+4x+4		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Q		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Ainsi l'ensemble des solutions de (I) est $]-2,-1[\cup[1,+\infty[$.

Voir exercice **2.4**.

Méthode 2.5 : Exploiter la partie entière dans des inégalités

Pour utiliser la partie entière dans des inégalités, il faut revenir à la définition :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

et utiliser le plus possible le fait que si $m, n \in \mathbb{Z}$, on a : $n < m \Leftrightarrow n \leq m - 1$. Si on veut égaler des parties entières, il faut aussi revenir à la définition : $\lfloor x \rfloor$ est le seul entier n vérifiant $n \leq x < n + 1$.

Exemple d'application

(1) Montrer que la fonction $\lfloor \cdot \rfloor$ est croissante.
(2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$

(1) Soient $x \leq y$ deux réels. Par définition, on a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$. Ainsi

$$\lfloor x \rfloor \leq x \leq y < \lfloor y \rfloor + 1 \quad \text{d'où} \quad \lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor + 1.$$

Or $\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor y \rfloor$ sont des entiers, donc $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$.
On en conclut que la fonction $\lfloor \cdot \rfloor$ est croissante.

(2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition, on a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. On a donc

$$\lfloor x \rfloor + 1 \leq x + 1 < (\lfloor x \rfloor + 1) + 1.$$

Ainsi, $\lfloor x \rfloor + 1$ est un entier n vérifiant $n \leq x + 1 < n + 1$.
Par unicité, $n = \lfloor x + 1 \rfloor$. Ainsi $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

Voir exercice **2.6**.

Interro de cours

1. Est-ce qu'un nombre entier est rationnel ?

2. Soient $4 \leq x \leq 8$ et $-2 \leq y \leq -1$. Parmi les inégalités suivantes, lesquelles sont vraies ?

(a) $2 \leq x + y \leq 6$

(b) $6 \leq x - y \leq 7$

(c) $-16 \leq xy \leq -4$

(d) $-2 \leq \dfrac{x}{y} \leq -8$.

3. Soient a et b deux réels. Montrer que $|a| = |b|$ si et seulement si $a = b$ ou $a = -b$.

4. Résoudre l'équation $|3x + 2| = |x + 4|$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

5. Soient x, a et ε trois réels tels que $\varepsilon > 0$ et $|x - a| \leq \varepsilon$. Parmi les inégalités suivantes, lesquelles sont vraies ?

(a) $x - a \leq \varepsilon$

(b) $x - a \geq -\varepsilon$

(c) $x - a \leq \varepsilon \leq x + a$

(d) $a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon$.

6. Soient x et y deux réels. A-t-on $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = \lfloor x + y \rfloor$?

7. Résoudre l'inéquation $2x^2 + 5x - 3 > 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

8. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ?

(a) Si s est la borne supérieure de A, alors s un majorant de A.

(b) Si s est la borne supérieure de A, alors A admet un maximum $M \leq s$.

(c) Si M est le maximum de A, alors M est aussi sa borne supérieure.

(d) Si s est la borne supérieure de A, alors il existe $x \in A$ tel que $s - 1 \leq x$.

Exercices

Pour s'entraîner

Exercice 2.1

Montrer que pour tout $x > 1$, $\dfrac{1-x}{1+\sqrt{x}} \geq \dfrac{1-x}{2}$.

Exercice 2.2

On suppose que $|x-1| \leq 2$ et que $-5 \leq y \leq -4$. Encadrer les expressions suivantes :

1. $x+y$

2. $x-y$

3. xy

4. $\dfrac{x}{y}$

5. $|x|$

6. $|x|-|y|$

7. x^2

8. $\dfrac{x^2}{y^2-x^2}$.

Exercice 2.3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\dfrac{3x+1}{x^2+1} = -1$

2. $|2x-1| = |x-5|$

3. $|x+3| + |x-5| = 8$

4. $|x+12| = \left|x^2-8\right|$.

Exercice 2.4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $|x-3| + |x+4| \leq 7$

2. $0 \leq \dfrac{x}{x^2-1} \leq 1$

3. $\dfrac{x^3-1}{x+1} \leq x^2-x-1$

4. $\sqrt{x^2-4x+4} \leq \left|\dfrac{3}{2}x-1\right|$.

Exercice 2.5

On considère le sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ défini par

$$A = \left\{ \frac{x-y}{x+y+3} \ / \ x \in [-1,1],\ y \in [-1,1] \right\}.$$

Trouver un majorant de A.

Exercice 2.6

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. Montrer que $\mathrm{Card}([a,b] \cap \mathbb{Z}) = \lfloor b \rfloor + \lfloor 1-a \rfloor$.

Pour aller plus loin

Exercice 2.7

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Le but est de montrer qu'au moins un des réels $a(1-b), b(1-c), c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

1. Si a, b ou c est supérieur ou égal à 1, montrer la propriété voulue.

2. On suppose désormais que a, b et c sont dans $[0, 1[$.

- **a.** Déterminer le signe de $a(1-b), b(1-c)$ et $c(1-a)$.
- **b.** Soit $x \in \mathbb{R}$, mettre $x(1-x)$ sous forme canonique et en déduire que $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.
- **c.** En déduire que
$$a(1-b) \times b(1-c) \times c(1-a) \leq \frac{1}{4^3}.$$
- **d.** Conclure.

Exercice 2.8

1. Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}, |ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.

2. Soient $0 < x \leq y$. On définit

- la moyenne arithmétique de x et y : $m = \frac{x+y}{2}$
- la moyenne géométrique de x et y : $g = \sqrt{xy}$
- la moyenne harmonique de x et y, notée h, par : $\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$.

On veut montrer que
$$x \leq h \leq g \leq m \leq y.$$

- **a.** Montrer que $m \leq y$.
- **b.** Montrer que $x \leq h$.
- **c.** Montrer que $g \leq m$.
- **d.** En remarquant que $\frac{1}{h}$ est la moyenne arithmétique de $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$, montrer que $\frac{1}{h} \geq \frac{1}{g}$ et conclure.

Corrections

Interro de cours

1. **Oui.** Si $n \in \mathbb{Z}$, alors $n = \frac{n}{1}$ avec n et 1 des entiers, donc n est rationnel.
2. (a) **Vrai.** On a le droit d'ajouter des inégalités.

   (b) **Faux.** On n'a pas le droit de soustraire des inégalités. Il aurait fallu encadrer $-y$ puis l'ajouter à x.

   (c) **Vrai.** On a $1 \leq -y \leq 2$. On peut multiplier cet encadrement avec celui de x (car tous les nombres sont positifs) et on obtient $4 \leq -xy \leq 16$. On finit en multipliant par $-1 < 0$ pour obtenir $-16 \leq xy \leq -4$.

   (d) **Faux.** -2 n'est pas inférieur à -8.
3. Si $a = b$ ou $a = -b$, il est clair que $|a| = |b|$.
   Pour l'autre sens, on suppose que $|a| = |b|$. On a $|a|$ qui vaut a ou $-a$ (en fonction du signe de a) et de même pour $|b|$. On considère tous les cas.
   - Si $|a| = a$ et $|b| = b$, alors $a = |a| = |b| = b$.
   - Si $|a| = a$ et $|b| = -b$, alors $a = |a| = |b| = -b$.
   - Si $|a| = -a$ et $|b| = b$, alors $a = -|a| = -|b| = -b$.
   - Si $|a| = -a$ et $|b| = -b$, alors $a = -|a| = -|b| = b$.

   Donc, au final, on obtient que $a = b$ ou $a = -b$.
4. En utilisant le résultat de la question précédente, on a
$$|3x+2| = |x+4| \Leftrightarrow 3x+2 = x+4 \text{ ou } 3x+2 = -x-4 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\frac{3}{2}.$$
5. On a
$$|x-a| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x-a \leq \varepsilon \Leftrightarrow a-\varepsilon \leq x \leq a+\varepsilon.$$
   Ainsi les propositions vraies sont **(a), (b), (d)**.
6. **Non.** On a $\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0 + 0 = 0$, alors que $\left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1$.
7. On calcule le discriminant du trinôme $\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 = 7^2$. On trouve donc les deux racines du trinôme
$$x_1 = \frac{-5-7}{2 \times 2} = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5+7}{2 \times 2} = \frac{1}{2}.$$
   Le cœfficient du trinôme est $2 > 0$, donc la solution de l'inéquation est l'ensemble $]-\infty, -3[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$.
8. (a) **Vrai.** Par définition, s est le plus petit des majorants, c'est donc bien un majorant.

   (b) **Faux.** Il existe des ensembles non vide majorés qui n'ont pas de maximum : $\mathbb{R}_+^*$ par exemple est majoré, admet 0 comme borne supérieure mais n'a pas de maximum.

   (c) **Vrai.** Étant le maximum, M est un majorant. Et si α est un majorant de A, on a $M \leq \alpha$ car $M \in A$. Donc M est bien le plus petit des majorants.

   (d) **Vrai.** On a $s - 1 < s$, donc $s - 1$ n'est pas un majorant de A (car s est le plus petit des majorants). On peut donc trouver un élément $x \in A$ qui lui est supérieur, c'est-à-dire tel que $s - 1 \leq x$.

Exercice 2.1

On a $x > 1$, donc $\sqrt{x} > 1$ puis $1 + \sqrt{x} > 2$. Tous ces nombres étant positifs, on peut inverser et obtenir $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}} < \dfrac{1}{2}$. On finit par multiplier de chaque côté de l'inégalité par $1 - x < 0$ (ce qui change le sens de l'inégalité) pour en conclure que $\dfrac{1-x}{1+\sqrt{x}} > \dfrac{1-x}{2}$. L'inégalité stricte étant vraie, l'inégalité large l'est aussi.

Exercice 2.2

On commence par encadrer x : on a $-2 \leq x - 1 \leq 2$, donc $-1 \leq x \leq 3$.

1. Par somme, on a $\boxed{-6 \leq x + y \leq -1}$

2. On a $4 \leq -y \leq 5$, puis par somme $\boxed{3 \leq x - y \leq 8}$

3. On distingue deux cas en fonction du signe de x.

- Si $x \leq 0$, alors $-1 \leq x \leq 0$, puis $0 \leq -x \leq 1$. De plus $4 \leq -y \leq 5$. Tout est positif, on peut donc multiplier et obtenir $0 \leq xy \leq 5$.
- Si $x \geq 0$, alors $0 \leq x \leq 3$. De plus, $4 \leq -y \leq 5$. Tout est positif, on peut donc multiplier et obtenir $0 \leq -xy \leq 15$. Donc $-15 \leq xy \leq 0$.

Au final, on obtient $\boxed{-15 \leq xy \leq 5}$

4. On distingue deux cas en fonction du signe de x.

- Si $x \leq 0$, alors $-1 \leq x \leq 0$, puis $0 \leq -x \leq 1$. De plus $4 \leq -y \leq 5$ donc $\dfrac{1}{5} \leq -\dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{4}$.

  Tout est positif, on peut donc multiplier et obtenir $0 \leq \dfrac{x}{y} \leq \dfrac{1}{4}$.
- Si $x \geq 0$, alors $0 \leq x \leq 3$. De plus, $4 \leq -y \leq 5$ donc $\dfrac{1}{5} \leq -\dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{4}$.

  Tout est positif, on peut donc multiplier et obtenir $0 \leq -\dfrac{x}{y} \leq \dfrac{3}{4}$. Donc $-\dfrac{3}{4} \leq \dfrac{x}{y} \leq 0$.

Au final, on obtient $\boxed{-\dfrac{3}{4} \leq \dfrac{x}{y} \leq \dfrac{1}{4}}$

5. On distingue deux cas en fonction du signe de x.

- Si $x \leq 0$, alors $|x| = -x$. On a $-1 \leq x \leq 0$, puis $0 \leq -x \leq 1$. Donc $0 \leq |x| \leq 1$.
- Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$. On a $0 \leq x \leq 3$. Donc $0 \leq |x| \leq 3$.

Au final, on obtient $\boxed{0 \leq |x| \leq 3}$

6. On $-5 \leq y \leq -4$, donc $y < 0$ et $|y| = -y$. Donc $-5 \leq -|y| \leq -4$.

Par somme, on obtient $\boxed{-5 \leq |x| - |y| \leq -1}$

7. On distingue deux cas en fonction du signe de x.

- Si $x \leq 0$, alors $-1 \leq x \leq 0$, puis $0 \leq -x \leq 1$. En multipliant cet encadrement avec lui-même, on obtient $0 \leq x^2 \leq 1$.
- Si $x \geq 0$, alors $0 \leq x \leq 3$. En multipliant cet encadrement avec lui-même, on obtient $0 \leq x^2 \leq 9$.

Au final, on obtient $\boxed{0 \leq x^2 \leq 9}$

8. On a $4 \leq -y \leq 5$. En multipliant cet encadrement avec lui-même, on obtient $16 \leq y^2 \leq 25$. De plus $-9 \leq -x^2 \leq 0$. Par somme $7 \leq y^2 - x^2 \leq 25$, puis en inversant (tout étant positif), on obtient $\dfrac{1}{25} \leq \dfrac{1}{y^2 - x^2} \leq \dfrac{1}{7}$. Par produit, on en déduit que $\boxed{0 \leq \dfrac{x^2}{y^2 - x^2} \leq \dfrac{9}{7}}$

Exercice 2.3

1. L'expression $x^2 + 1$ étant non nulle, on a

$$\frac{3x+1}{x^2+1} = -1 \Leftrightarrow 3x + 1 = -x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0.$$

On calcule le discriminant du trinôme obtenu $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1$.
Les solutions sont donc $\boxed{x_1 = \dfrac{-3-1}{2} = -2 \text{ et } x_2 = \dfrac{-3+1}{2} = -1}$

2. On utilise le fait (démontré à la question **3.** de l'interro de cours) : $|a| = |b|$ si et seulement si $a = b$ ou $a = -b$.

$$|2x - 1| = |x - 5| \Leftrightarrow 2x - 1 = x - 5 \text{ ou } 2x - 1 = -x + 5 \Leftrightarrow x = -4 \text{ ou } 3x = 6.$$

Les solutions de l'équation sont donc $\boxed{-4 \text{ et } 2}$

3. On note $S = |x + 3| + |x - 5|$ et on calcule son expression sur différents intervalles

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$\lvert x+3\rvert$		$-x-3$	0	$x+3$		$x+3$	
$\lvert x-5\rvert$		$5-x$		$5-x$	0	$x-5$	
S		$2-2x$		8		$2x-2$	

On résout l'équation sur chacun des intervalles.
- Sur $]-\infty, -3]$, on obtient $x = -3$ qui est bien dans l'intervalle.
- Sur $[-3, 5]$, l'équation est toujours vraie.
- Sur $[5, +\infty[$, on obtient $x = 5$ qui est bien dans l'intervalle.

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation est $\boxed{[-3, 5]}$

4. Comme pour la question **2.**, on a

$$\begin{aligned} |x + 12| = \left|x^2 - 8\right| &\Leftrightarrow x + 12 = x^2 - 8 \text{ ou } x + 12 = -x^2 + 8 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 20 = 0 \text{ ou } x^2 + x + 4 = 0. \end{aligned}$$

On résout les deux équations du second degré obtenues.
La deuxième n'a pas de solution ($\Delta = -17 < 0$) et la première a pour solutions -4 et 5.
Les solutions de l'équation sont donc $\boxed{-4 \text{ et } 5}$

Exercice 2.4

1. On note $S = |x-3| + |x+4|$ et on calcule son expression sur différents intervalles

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$\|x-3\|$		$3-x$		$3-x$	0	$x-3$	
$\|x+4\|$		$-x-4$	0	$x+4$		$x+4$	
S		$-2x-1$		7		$2x+1$	

On résout l'inéquation sur chacun des intervalles.

- Sur $]-\infty, -4]$, on obtient $x \geq -4$. Donc l'ensemble de solutions sur cet intervalle est $\{-4\}$.
- Sur $[-4, 3]$, l'inéquation est toujours vraie. Donc l'ensemble de solutions sur cet intervalle est $[-4, 3]$.
- Sur $[3, +\infty[$, on obtient $x \leq 3$. Donc l'ensemble de solutions sur cet intervalle est $\{3\}$.

Ainsi l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\boxed{[-4, 3]}$

2. On sépare l'encadrement en deux inégalités $0 \leq \dfrac{x}{x^2-1}$ et $\dfrac{x}{x^2-1} \leq 1$. On a

$$\frac{x}{x^2-1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x-(x^2-1)}{x^2-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+x+1}{x^2-1} \leq 0.$$

Le trinôme au numérateur n'a pas de racine réelle. On obtient donc le tableau de signe suivant

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x^2+x+1$		$-$		$-$		$-$		$-$	
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x}{x^2-1}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$\frac{-x^2+x+1}{x^2-1}$		$-$	$\|\|$	$+$		$+$	$\|\|$	$-$	

L'encadrement que l'on veut résoudre est équivalent à : $\dfrac{x}{x^2-1} \geq 0$ et $\dfrac{-x^2+x+1}{x^2-1} \leq 0$.

Ainsi l'ensemble des solutions de l'encadrement est $\boxed{]1, +\infty[}$

3. On a

$$\frac{x^3-1}{x+1} \leq x^2-x-1 \Leftrightarrow \frac{x^3-1-(x+1)(x^2-x-1)}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} \leq 0.$$

On dresse le tableau de signe du quotient $Q = \dfrac{2x}{x+1}$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Q		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

On en conclut que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\boxed{]-1, 0]}$

4. On commence par remarquer que $\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$.
L'inéquation à résoudre peut donc se réécrire $|x-2| \leq \left|\frac{3}{2}x-1\right|$, ou encore $|x-2|-\left|\frac{3}{2}x-1\right| \leq 0$.
On regarde l'expression de la différence $= D\,|x-2|-\left|\frac{3}{2}x-1\right|$ sur différents intervalles

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	2	$+\infty$
$\lvert x-2\rvert$	$2-x$	$2-x$	0	$x-2$
$\left\lvert\frac{3}{2}x-1\right\rvert$	$1-\frac{3}{2}x$	0 $\frac{3}{2}x-1$		$\frac{3}{2}x-1$
D	$\frac{x}{2}+1$	$-\frac{5}{2}x+3$	0	$-\frac{x}{2}-1$

On résout l'inéquation sur chacun des intervalles.
- Sur $]-\infty,\frac{2}{3}]$, on obtient $x \leq -2$. Donc l'ensemble de solutions sur cet intervalle est $]-\infty,-2]$.
- Sur $\left[\frac{2}{3},2\right]$, on obtient $x \geq \frac{6}{5}$. Donc l'ensemble de solutions sur cet intervalle est $\left[\frac{6}{5},2\right]$.
- Sur $[2,+\infty[$, on obtient $x \geq -2$. Donc l'ensemble de solutions sur cet intervalle est $[2,+\infty[$.

On en conclut que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\boxed{]-\infty,-2] \cup \left[\frac{6}{5},+\infty\right[}$

Exercice 2.5

On va chercher à majorer les éléments de A. Soient $x,y \in [-1,1]$.
Par somme on a $1 \leq x+y+3 \leq 5$ puis $\dfrac{1}{5} \leq \dfrac{1}{x+y+3} \leq 1$. De plus, $-1 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq -y \leq 1$, donc $-2 \leq x-y \leq 2$.
On distingue deux cas en fonction du signe de $x-y$.
- Si $x-y \geq 0$, alors $0 \leq x-y \leq 2$. Tout étant positif, par produit avec l'encadrement de $\dfrac{1}{x+y+3}$, on obtient $0 \leq \dfrac{x-y}{x+y+3} \leq 2$.
- Si $x-y \leq 0$, alors $x-y$ est négatif et $x+y+3$ est positif donc leur quotient est négatif, d'où $\dfrac{x-y}{x+y+3} \leq 0$.

Au final, $\dfrac{x-y}{x+y+3} \leq 2$. Ainsi tous les éléments de A sont plus petits que 2.
On en conclut que 2 est un majorant de A.

Exercice 2.6

- Si $a \in \mathbb{Z}$, alors $[a,b] \cap \mathbb{Z} = [\![\lfloor a \rfloor, \lfloor b \rfloor]\!]$ et $\mathrm{Card}([a,b]\cap\mathbb{Z}) = \lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor + 1$. Or $a \in \mathbb{Z}$, donc
$$-\lfloor a \rfloor + 1 = -a+1 = 1-a = \lfloor 1-a \rfloor$$
car $1-a \in \mathbb{Z}$. On en conclut que $\mathrm{Card}([a,b]\cap\mathbb{Z}) = \lfloor b \rfloor + \lfloor 1-a \rfloor$.
- Si $a \notin \mathbb{Z}$, alors $[a,b] \cap \mathbb{Z} = [\![\lfloor a \rfloor + 1, \lfloor b \rfloor]\!]$ et $\mathrm{Card}([a,b]\cap\mathbb{Z}) = \lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor$. On pose $n = \lfloor 1-a \rfloor$ et on a $n \leq 1-a < n+1$. Comme $1-a \notin \mathbb{Z}$, alors $n \neq 1-a$. On en déduit que
$$n < 1-a < n+1, \text{ puis } -n < a < -n+1.$$
Ainsi $-n = \lfloor a \rfloor$ et $\lfloor 1-a \rfloor = n = -\lfloor a \rfloor$. On en conclut que $\mathrm{Card}([a,b]\cap\mathbb{Z}) = \lfloor b \rfloor + \lfloor 1-a \rfloor$.

Dans les deux cas, on obtient $\mathrm{Card}([a,b]\cap\mathbb{Z}) = \lfloor b \rfloor + \lfloor 1-a \rfloor$.

Exercice 2.7

1. Si a est supérieur ou égal à 1, alors $1-a$ est négatif, donc $c(1-a)$ est négatif (car c est positif), donc inférieur à $\frac{1}{4}$. On procède de même si b ou c est supérieur ou égal à 1.

2. **a.** Par produit, ils sont tous les trois positifs.

b. On a $x(1-x) = -x^2 + x = -\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$.

c. Les trois termes $a(1-a), b(1-b)$ et $c(1-c)$ étant positifs, on a

$$a(1-b) \times b(1-c) \times c(1-a) = a(1-a) \times b(1-b) \times c(1-c) \leq \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}.$$

d. Si les trois nombres proposés étaient strictement supérieurs à $\frac{1}{4}$, alors le produit de la question précédente serait strictement supérieur à $\frac{1}{4^3}$ ce qui n'est pas possible.
On en conclut, par l'absurde, qu'au moins un des trois nombres proposés est supérieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Exercice 2.8

1. On a $a^2 + b^2 - 2\,|ab| = (|a| - |b|)^2 \geq 0$ ce qui montre le résultat demandé.

2. **a.** On a $m = \frac{x+y}{2} \leq \frac{y+y}{2} = y$.

b. On a $\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}$, donc $h \geq x$.

c. D'après la question **1.**, on a $g = \sqrt{x}\sqrt{y} \leq \frac{\sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2}{2} = \frac{x+y}{2} = m$.

d. $\frac{1}{h}$ est la moyenne arithmétique de $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$.
Elle est donc supérieure à la moyenne géométrique de ces deux nombres.
Ainsi $\frac{1}{h} \geq \sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} = \frac{1}{\sqrt{xy}} = \frac{1}{g}$.
On en conclut que $h \leq g$.

CHAPITRE

3 Sommes et produits

L'essentiel du cours

1 Sommes et produits

Définition

- Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de nombres complexes indicée sur un ensemble fini I, on note $\sum_{i\in I} a_i$ la sommes des a_i pour $i \in I$ et $\prod_{i\in I} a_i$ le produit des a_i pour $i \in I$.
- Si $I = [\![p, n]\!]$, avec $p \leq n$, alors

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n \quad \text{et} \quad \prod_{i=p}^{n} a_i = a_p \times a_{p+1} \times \cdots \times a_n.$$

- Dans une somme, l'indice est muet et peut donc être remplacé par n'importe quel autre lettre :

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{\theta=p}^{n} a_\theta.$$

- La valeur d'une somme ne peut pas dépendre de son indice, c'est-à-dire la valeur $\sum_{i=p}^{n} a_i$ ne dépend pas de i.
- Une somme vide est nulle et un produit vide est égal à 1. En d'autres termes, si $p > n$ ou $I = \varnothing$, alors $\sum_{i\in I} a_i = 0$ et $\prod_{i\in I} a_i = 1$. Ne rien ajouter revient à ajouter 0 et ne multiplier par rien revient à multiplier par 1.

Opérations sur les sommes et les produits

Si λ est un nombre complexe, alors

$$\sum_{i=p}^{n} (\lambda a_i + b_i) = \lambda \sum_{i=p}^{n} a_i + \sum_{i=p}^{n} b_i \quad \text{et} \quad \prod_{i=p}^{n} (a_i b_i) = \left(\prod_{i=p}^{n} a_i\right) \times \left(\prod_{i=p}^{n} b_i\right).$$

Découpage de sommes et de produits

On peut découper les sommes et produits en deux par rapport à un indice $r \in [\![p, n]\!]$

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{i=p}^{r} a_i + \sum_{i=r+1}^{n} a_i \quad \text{et} \quad \prod_{i=p}^{n} a_i = \left(\prod_{i=p}^{r} a_i\right) \times \left(\prod_{i=r+1}^{n} a_i\right).$$

On peut aussi les découper en séparant les termes d'indices pairs et les termes d'indices impairs

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{p \leq 2k \leq n} a_{2k} + \sum_{p \leq 2k+1 \leq n} a_{2k+1} \quad \text{et} \quad \prod_{i=p}^{n} a_i = \left(\prod_{p \leq 2k \leq n} a_{2k}\right) \times \left(\prod_{p \leq 2k+1 \leq n} a_{2k+1}\right).$$

Changements d'indice

- Si $r \in \mathbb{N}^*$, alors $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} a_{i+r} = \sum_{j=p+r}^{n+r} a_j$ et $\displaystyle\prod_{i=p}^{n} a_{i+r} = \prod_{j=p+r}^{n+r} a_j$.
  Dans ce cas, on dit qu'on a effectué le **changement d'indice** $j = i + r$.
- Si $r \in \mathbb{N}^*$, alors $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} a_{r-i} = \sum_{j=r-n}^{r-p} a_j$ et $\displaystyle\prod_{i=p}^{n} a_{r-i} = \prod_{j=r-n}^{r-p} a_j$.
  Dans ce cas, on dit qu'on a effectué le **changement d'indice** $j = r - i$.

L'indice étant muet on peut donc directement écrire

$$\sum_{i=p}^{n} a_{i+r} = \sum_{i=p+r}^{n+r} a_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=p}^{n} a_{r-i} = \sum_{i=r-n}^{r-p} a_i.$$

Télescopage

Si $p \leq n$ et $a_p, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}^*$ pour la deuxième formule), alors

$$\sum_{i=p}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_p \quad \text{et} \quad \prod_{i=p}^{n} \left(\frac{a_{i+1}}{a_i}\right) = \frac{a_{n+1}}{a_p}.$$

Sommes usuelles

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- Si $q \in \mathbb{C}$ et $p \leq n$, on a alors la somme géométrique

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \quad \text{si } q \neq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{n} q^k = n - p + 1 \quad \text{si } q = 1.$$

Dans un calcul faisant intervenir une somme géométrique, bien penser au cas $q = 1$.

2 Binôme de Newton

Définition

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **factorielle** de n le nombre

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

- Si $n, p \in \mathbb{N}$, le **cœfficient binomial** $\binom{n}{p}$ (qui se lit « p parmi n ») est défini par

$$\binom{p}{n} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } 0 \leq p \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par convention $0! = 1$ (produit vide).

Propriétés des cœfficients binomiaux

- Si $n \in \mathbb{N}$, on a $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
- Si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$, alors

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

- Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$, alors

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}.$$

Formule de Pascal

Si $n, p \in \mathbb{N}$, alors

$$\binom{n}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

- Cette formule reste vraie même si certains coefficients binomiaux sont nuls.
- Grâce à l'information $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, on peut calculer les coefficients binomiaux avec le triangle de Pascal (voir méthode **3.4**).

Binôme de Newton

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

3 Sommes doubles

Définition

On appelle **somme double** une somme faisant intervenir deux indices :

$$\sum_{\substack{p\leq i\leq n\\ r\leq j\leq s}} a_{i,j} = \sum_{i=p}^{n}\sum_{j=r}^{s} a_{i,j}.$$

Dans une somme double, une borne de la deuxième somme peut dépendre de l'indice de la première somme. On dit alors qu'il s'agit d'une **somme triangulaire**.

Produit de deux sommes

On a

$$\left(\sum_{i=p}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{j=r}^{s} b_j\right) = \sum_{i=p}^{n}\sum_{j=r}^{s} a_i b_j.$$

Inversion des sommes

- Si la somme n'est pas triangulaire, l'inversion des sommes se fait aisément :

$$\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=r}^{s} a_{i,j} = \sum_{j=r}^{s}\sum_{i=p}^{n} a_{i,j}$$

- Si la somme est triangulaire, il faut revenir à une relation entre i et j, comme par exemples :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i-1} a_{i,j} = \sum_{0\leq j< i\leq n} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j+1}^{n} a_{i,j}.$$

Les méthodes à maîtriser

Méthode 3.1 : Calculer une somme télescopique

Si on arrive à mettre le terme général d'une somme sous la forme $u_{k+1} - u_k$ (ou l'opposé) avec k qui varie entre p et n, beaucoup de termes vont se télescoper et donner lieu à une simplification. Cette somme vaut alors $u_{n+1} - u_p$ (ou $u_p - u_{n+1}$).

Exemple d'application

Calculer $\boldsymbol{S_n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot k!}$

On commence par transformer le terme général de la manière suivante : si $k \in [\![0, n]\!]$, alors $k \cdot k! = (k+1-1)k! = (k+1)k! - k! = (k+1)! - k!$. Il s'ensuit que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = \sum_{k=0}^{n} ((k+1)! - k!) = (n+1)! - 1.$$

Voir exercices **3.2**, **3.5** et **3.9**.

Méthode 3.2 : Effectuer un changement d'indice

Une fois que l'on a choisi le changement d'indice que l'on veut effectuer (du type $j = i + r$ ou $j = n - i$ en général) :

- On exprime i (l'ancien indice) en fonction de j (le nouvel indice)
- Dans le terme général, on remplace i par son expression en fonction de j
- Pour finir, on s'occupe des bornes en regardant les valeurs de i pour trouver celles de j. Si le changement est du type $j = n - i$, il faudra bien penser à remettre les bornes dans le bon ordre.

Exemple d'application

On pose $\boldsymbol{S_n = \sum_{i=0}^{2n}(n-i)}$**. A l'aide du changement d'indice** $\boldsymbol{j = 2n - i}$**, montrer que** $\boldsymbol{S_n = -S_n}$ **et en déduire la valeur de** $\boldsymbol{S_n}$**.**

Si on pose $j = 2n - i$, alors $i = 2n - j$, ainsi $n - i = j - n$. Pour ce qui est des bornes, lorsque $i = 0$, on a $j = 2n$ et lorsque $i = 2n$, on a $j = 0$. En remettant dans le bon ordre, les bornes de la nouvelle somme sont 0 et $2n$. Ainsi

$$S_n = \sum_{j=0}^{2n}(j-n) = -\sum_{j=0}^{2n}(n-j).$$

La variable d'une somme étant muette, la dernière somme n'est autre que S_n.
On a donc bien obtenu que $S_n = -S_n$, puis que $2S_n = 0$ et enfin que $S_n = 0$.

Lorsqu'on procède à un changement d'indice, on effectue toutes ces opérations en même temps. Il est hors de question d'avoir, dans la même somme l'ancien indice et le nouvel indice.

Voir exercices **3.2**, **3.6** et **3.12**.

Méthode 3.3 : Scinder une somme

Dans certains calculs, il pourra être judicieux de scinder une somme en plusieurs morceaux (soit en coupant au niveau d'une valeur de l'indice, soit en séparant les indices pairs et impairs par exemple).

Exemple d'application

(1) En scindant les deux sommes de l'expression, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 - \sum_{k=3}^{n+1} k^3$.

(2) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k$.

(1) On remarque que l'on a la somme de deux sommes ayant le même terme général. On se doute donc qu'il va y avoir des simplifications. On va donc faire apparaître les termes communs des deux sommes pour pouvoir les simplifier proprement. La plage des indices communs entre les deux sommes est $[\![3, n]\!]$. On va donc scinder les deux sommes de la manière suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \sum_{k=0}^{2} k^3 + \sum_{k=3}^{n} k^3 \quad \text{et} \quad \sum_{k=3}^{n+1} k^3 = \sum_{k=3}^{n} k^3 + \sum_{k=n+1}^{n+1} k^3.$$

On obtient donc que

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 - \sum_{k=3}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{2} k^3 - \sum_{k=n+1}^{n+1} k^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 - (n+1)^3 = 9 - (n+1)^3.$$

(2) On commence par remarquer que la valeur de $(-1)^k$ dépend de la parité de k. On va donc scinder la somme en fonction de la parité de l'indice :

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k = \sum_{1 \leq 2k \leq 2n} \underbrace{(-1)^{2k}}_{=1} + \sum_{1 \leq 2k+1 \leq 2n} \underbrace{(-1)^{2k+1}}_{=-1} = \sum_{k=1}^{n} 1 + \sum_{k=0}^{n-1} (-1) = n + (-n) = 0.$$

Pour chacune des deux sommes, à partir de l'encadrement sur $2k$ ou $2k+1$, on a retrouvé la plage de valeur de l'indice pour pouvoir continuer le calcul.

Voir exercices **3.3** et **3.10**.

Méthode 3.4 : Appliquer le binôme de Newton pour un petit exposant

Pour appliquer la formule du binôme de Newton sur une petite valeur de l'exposant r, on va avoir besoin des coefficients binomiaux $\binom{r}{p}$. Pour les calculer, on va se servir de la $r+1^{\text{ème}}$ ligne du triangle de Pascal (celle pour $n = r$).
On commence par utiliser le fait que $\binom{n}{0}$ et $\binom{n}{n}$ valent 1 pour remplir la première colonne et la diagonale. Ensuite, on utilise la formule du triangle de Pascal pour calculer les suivants, c'est-à-dire chaque coefficient manquant est la somme de celui au-dessus et de celui au-dessus à gauche.

Exemple d'application

Développer $(a+b)^4$

Pour remplir le triangle de Pascal, on va commencer par placer les coefficients valant 1 puis on va remplir ligne par ligne jusqu'à celle pour $n = 4$ (les lignes correspondant aux valeurs de n et les colonnes aux valeurs de p)

$\binom{n}{p}$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1		1		
3	1			1	
4	1				1

$\binom{n}{p}$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1			1	
4	1				1

$\binom{n}{p}$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1				1

$\binom{n}{p}$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

On applique ensuite la formule : $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Voir exercice **3.5**.

Méthode 3.5 : Intervertir deux signes sommes

L'interversion de deux signe sommes lorsque les indices sont indépendants ne pose pas de problème.
En revanche, dans une somme triangulaire, pour intervertir les deux signes sommes, on se ramène à une propriété sur le couple (i,j).

Exemple d'application

Intervertir les signes sommes dans l'expression : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}$.

On commence par identifier la propriété sur le couple (i,j) : $1 \leq i \leq n$ et $i+1 \leq j \leq n$, c'est-à-dire $1 \leq i < j \leq n$. Cette fois-ci, on veut définir j en premier, donc j peut varier de 2 jusqu'à n. Une fois j fixé, i peut varier de 1 jusqu'à $j-1$. On obtient donc que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}.$$

Voir exercices **3.7** et **3.8**.

Interro de cours

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer si les formules suivantes sont vraies ou fausses :

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\lambda + a_i) = \lambda + \sum_{i=1}^{n} a_i$

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\lambda a_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i$

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i b_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$

(e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{\lambda}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\lambda}.$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer si les formules suivantes sont vraies ou fausses :

(a) $\displaystyle\sum_{i=4}^{n} a_{i-3} = \sum_{i=7}^{n+3} a_i$

(b) $\displaystyle\sum_{i=3}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n-2} a_{i+2}$

(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-2} a_{n-i} = \sum_{i=1}^{n-2} a_i$

(d) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=n}^{0} a_{n-i}.$

3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^{k+1} - k^k\right)$.

4. Soient $p \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et $\omega \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$ tels que $\omega^n = 1$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=p}^{p+n-1} \omega^k$.

5. Citer la formule du binôme de Newton.

6. Remplir le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n = 5$.

7. Déterminer si les formules suivantes sont vraies ou fausses :

(a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}$

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j+1}^{n} a_{i,j}$

(c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i+1}^{n-1} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}.$

Exercices

Pour s'entraîner

Exercice 3.1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \leq (n+1)!$.

Exercice 3.2

Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k+1}{k}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$
4. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^3}{(k+2)(k-1)^2}\right)$.

Exercice 3.3

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k$.

On pourra séparer le cas n pair et le cas n impair.

Exercice 3.4

Calculer les produits suivants à l'aide de nombres factoriels

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k)$
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k+1)$.

Exercice 3.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^4 - k^4\right), \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} k^3 \quad \text{et} \quad D_n = \sum_{k=0}^{n} k^2.$$

1. Calculer S_n.
2. Exprimer S_n en faisant intervenir T_n et D_n.
3. Rappeler une expression, sans symbole somme, de D_n puis en déduire une expression, sans symbole somme, de T_n.

Exercice 3.6

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer l'égalité $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, puis en déduire la valeur de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}.$$

Pour aller plus loin

Exercice 3.7

Calculer de deux manières différentes $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 2^i$ puis en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i2^i$.

Exercice 3.8

Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=k}^{n} \frac{k}{l}$.

Exercice 3.9

Soient $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ et $\omega \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ tels que $\omega^n = 1$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k$.

On pourra calculer $(1-\omega)S_n$.

Exercice 3.10

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe deux entiers a et b tels que $(1+\sqrt{2})^n = a + b\sqrt{2}$.
On pourra utiliser un binôme de Newton et scinder la somme en deux.

Exercice 3.11

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \max(i, j)$

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |i-j|$.

Exercice 3.12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $C_n = \displaystyle\sum_{1 \le i < j \le n} (i+j)$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{1 \le i, j \le n} (i+j) = 2C_n + 2\sum_{i=1}^{n} i$.

2. En déduire la valeur de C_n.

Corrections

Interro de cours

1. **(a)** **Faux.** Un contre-exemple : $(2+1)+(2+3) \neq 2+(1+3)$.

(b) **Vrai.** D'après le cours (opération sur les sommes).

(c) **Vrai.** D'après le cours (opération sur les sommes).

(d) **Faux.** Un contre-exemple : $(1 \times 4 + 3 \times 5) \neq (1+3)(4+5)$.

(e) **Faux.** Un contre-exemple : $(1+3)^2 \neq 1^2 = 3^2$.

2. **(a)** **Faux.** Les bornes ne sont pas bonnes, le bon changement est $\displaystyle\sum_{i=4}^{n} a_{i-3} = \sum_{i=1}^{n-3} a_i$.

(b) **Vrai.** Le changement d'indice $j = i-2$ a été effectué dans la somme de droite, puis j a été renommé en i.

(c) **Faux.** Les bornes ne sont pas bonnes, le bon changement est $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-2} a_{n-i} = \sum_{i=2}^{n-1} a_i$.

(d) **Faux.** Les bornes ne sont pas dans le bon ordre, le bon changement est $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}$.

3. Il s'agit d'une somme télescopique, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^{k+1} - k^k\right) = (n+1)^{n+1} - 1^1 = (n+1)^{n+1} - 1$.

4. Il s'agit d'une somme géométrique de raison $\omega \neq 1$, donc $\displaystyle\sum_{k=p}^{p+n-1} \omega^k = \omega^p \cdot \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0$ car $\omega^n = 1$.

5. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

6.

$\binom{n}{p}$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

7. **(a)** **Faux.** Dans la première double somme, on a $i \leq j$, alors que dans la seconde $i \geq j$.

(b) **Vrai.** Même si cela paraît faux car on devrait avoir $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n} a_{i,j}$. Mais

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j+1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n} a_{i,j} + \underbrace{\sum_{i=n+1}^{n} a_{i,j}}_{=0}.$$

(c) **Faux.** On devrait avoir $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i+1}^{n-1} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=0}^{j-1} a_{i,j}$.

(d) **Vrai.** Cf. cours.

Exercice 3.1

Si $k \in [\![0, n]\!]$, alors $k! \leq n!$. En sommant ces $n+1$ inégalités, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \leq n! \times (n+1) = (n+1)!$.

Exercice 3.2

1. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k+1}{k} = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k))$. Il s'agit d'une somme télescopique donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k+1}{k} = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)}$$

2. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$. Il s'agit d'une somme télescopique donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}}$$

3. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right)$. Il s'agit d'une somme télescopique, donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}}$$

4. Grâce aux propriétés de la fonction ln, on a

$$\sum_{k=2}^{n} \ln \left(\frac{k^3}{(k+2)(k-1)^2}\right) = 3\sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \sum_{k=2}^{n} \ln(k+2) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln(k-1).$$

On effectue le changement d'indice $i = k+2$ dans la $2^{\text{ème}}$ somme et $j = k-1$ dans la $3^{\text{ème}}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \ln \left(\frac{k^3}{(k+2)(k-1)^2}\right) &= 3\sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \sum_{i=4}^{n+2} \ln(i) - 2\sum_{j=1}^{n-1} \ln(j) \\
&= 3\ln(2) + 3\ln(3) + 3\ln(n) + 3\sum_{k=4}^{n-1} \ln(k) \\
&\quad - \ln(n) - \ln(n+1) - \ln(n+2) - \sum_{i=4}^{n-1} \ln(i) \\
&\quad -2\ln(1) - 2\ln(2) - 2\ln(3) - 2\sum_{j=4}^{n-1} \ln(j).
\end{aligned}$$

Les sommes restantes étant les mêmes, elles se simplifient et on en déduit que

$$\sum_{k=2}^{n} \ln \left(\frac{k^3}{(k+2)(k-1)^2}\right) = \ln(2) + \ln(3) + 2\ln(n) - \ln(n+1) - \ln(n+2).$$

On en conclut que $\boxed{\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^3}{(k+2)(k-1)^2}\right) = \ln\left(\frac{6n^2}{(n+1)(n+2)}\right)}$

Exercice 3.3

On distingue deux cas en fonction de la parité de n.

- Si $n = 2p$ est pair, alors

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k = \sum_{i=1}^{p}\left((-1)^{2i-1}(2i-1)+(-1)^{2i}(2i)\right) = \sum_{i=1}^{p}(-(2i-1)+(2i)) == \sum_{i=1}^{p}1 = p = \frac{n}{2}.$$

- Si $n = 2p+1$ est impair, alors on fait apparaître la somme ci-dessus et on a

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k = \sum_{k=1}^{2p}(-1)^k k + (-1)^{2p+1}(2p+1) = p-(2p+1) = -(p+1) = -\frac{n+1}{2}.$$

On en conclut que $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}}$

Exercice 3.4

1. On a $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k) = \prod_{k=1}^{n}2 \times \prod_{k=1}^{n}k$, d'où $\boxed{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n \times n!}$

2. Le produit de la question précédente correspond au produit des facteurs pairs jusqu'à $2n+1$ et celle de cette question au produits des facteurs impairs. En les multipliant, on obtient donc

$$\prod_{k=1}^{n}(2k)\prod_{k=1}^{n}(2k+1) = \prod_{i=1}^{2n+1} i = (2n+1)!.$$

En utilisant le résultat de la question précédente, on en conclut que

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n}(2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}}$$

Exercice 3.5

1. Il s'agit d'une somme télescopique, donc $S_n = (n+1)^4$.

2. On utilise le développement $(k+1)^4 = k^4+4k^3+6k^2+4k+1$ pour obtenir

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(4k^3+6k^2+4k+1) = 4\sum_{k=0}^{n}k^3+6\sum_{k=0}^{n}k^2+4\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}1 = 4T_n+6D_n+2n(n+1)+(n+1).$$

3. On rappelle que $D_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. De la question précédente, on déduit que
$4T_n = S_n - 6D_n - (n+1)(2n+1) = (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - (n+1)(2n+1) = n^4 + 2n^3 + n^2.$

On en conclut que $\boxed{T_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}}$

Exercice 3.6

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$. On a

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

On en déduit que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \underset{i=k-1}{=} n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}1^i \times 1^{n-1-i} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

Exercice 3.7

On note S cette somme double. Le terme 2^i ne dépendant pas de j, on a

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(2^i \sum_{j=1}^{i} 1\right) = \sum_{i=1}^{n} i2^i.$$

En intervertissant les signes sommes, on obtient

$$S = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} 2^i = \sum_{j=1}^{n} 2^j \cdot \frac{2^{n-j+1}-1}{2-1} = \sum_{j=1}^{n}\left(2^{n+1} - 2^j\right) = n2^{n+1} - 2^1 \cdot \frac{2^n - 1}{2-1}.$$

On en déduit que $\boxed{\sum_{i=1}^{n} i2^i = (n-1)2^{n+1} + 2}$.

Exercice 3.8

On intervertit les signes sommes et on obtient

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=k}^{n}\frac{k}{l} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}\frac{k}{l} = \sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l} k = \sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l}\cdot\frac{l(l+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}(l+1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+3)}{2} = \frac{n(n+3)}{4}.$$

Exercice 3.9

On a

$$(1-\omega)S_n = S_n - \omega S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^{k+1}.$$

On effectue le changement d'indice $l = k + 1$ dans la $2^{\text{ème}}$ somme, puis on renomme l en k :

$$(1-\omega)S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k - \sum_{l=1}^{n} l\omega^l = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k - \sum_{k=1}^{n} k\omega^k.$$

On continue en sortant le terme en $k = 0$ de la $1^{\text{ère}}$ somme et le terme en $k = n$ de la $2^{\text{ème}}$ somme

$$(1-\omega)S_n = \omega^0 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)\omega^k - \sum_{k=1}^{n-1} k\omega^k - n\omega^n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\omega^k - n\omega^n.$$

De plus ω^0 correspond au terme en $k = 0$ de la somme et $\omega^n = 1$. Ainsi

$$(1-\omega)S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\omega^k - n = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} - n = 0 - n.$$

On en déduit que $\boxed{S_n = \dfrac{n}{\omega - 1}}$

Exercice 3.10

On utilise le binôme de Newton puis on sépare selon les indices pairs et les indices impairs :

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(\sqrt{2})^k &= \sum_{0\leq 2p\leq n}\binom{n}{2p}(\sqrt{2})^{2p} + \sum_{0\leq 2p+1\leq n}\binom{n}{2p+1}(\sqrt{2})^{2p+1}\\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2p}2^p + \sqrt{2}\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2p+1}2^p.\end{aligned}$$

Ainsi $(1+\sqrt{2})^n = a + b\sqrt{2}$ en posant $a = \displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2p}2^p \in \mathbb{N}$ et $b = \displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2p+1}2^p \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.11

1. On note S la somme et on la sépare en deux : celle pour $i \leq j$ et celle pour $i > j$

$$S = \sum_{1\leq i\leq j\leq n}\underbrace{\max(i,j)}_{=j} + \sum_{1\leq j<i\leq n}\underbrace{\max(i,j)}_{=i} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} i = \sum_{j=1}^{n} j^2 + \sum_{i=1}^{n} i^2 - i.$$

De plus

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 - i = \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}.$$

On en conclut que $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\max(i,j) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}}$

2. On note S la somme et on la sépare en trois : celle pour $i < j$, pour $i = j$ et pour $i > j$

$$S = \sum_{1\leq i<j\leq n} \underbrace{|i-j|}_{=j-i} + \sum_{1\leq i=j\leq n} \underbrace{|i-j|}_{=0} + \sum_{1\leq j<i\leq n} \underbrace{|i-j|}_{=i-j} = \sum_{1\leq i<j\leq n} (j-i) + \sum_{1\leq j<i\leq n} (i-j).$$

Les deux sommes obtenues sont les mêmes, en renommant les deux indices (muets). Et

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} (j-i) = \sum_{1\leq i<j\leq n} j - \sum_{1\leq i<j\leq n} i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} j - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} i = \sum_{j=1}^{n} j(j-1) - \sum_{i=1}^{n} i(n-i).$$

De plus

$$\sum_{j=1}^{n} j(j-1) = \sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} i(n-i) = n\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} i^2 = n\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ainsi, après un calcul élémentaire, $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} (j-i) = \frac{n(n^2-1)}{6}$ puis $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |i-j| = \frac{n(n^2-1)}{3}}$

Exercice 3.12

1. Les indices étant muets, on a $\displaystyle C_n = \sum_{1\leq i<j\leq n} (i+j) = \sum_{1\leq j<i\leq n} (j+i)$.

On sépare $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} (i+j)$ en trois : celle pour $i < j$, pour $i = j$ et pour $i > j$

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} (i+j) = \underbrace{\sum_{1\leq i<j\leq n} (i+j)}_{C_n} + \sum_{1\leq i=j\leq n} \underbrace{(i+j)}_{=2i} + \underbrace{\sum_{1\leq j<i\leq n} (i+j)}_{C_n} = 2C_n + 2\sum_{i=1}^{n} i.$$

2. On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ et

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i,j\leq n} (i+j) = \sum_{1\leq i,j\leq n} i + \sum_{1\leq i,j\leq n} j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} j &= \sum_{i=1}^{n} ni + \sum_{j=1}^{n} nj \\ &= n\frac{n(n+1)}{2} + n\frac{n(n+1)}{2} \\ &= n^2(n+1).\end{aligned}$$

De plus, d'après la question **1.**, on a $\displaystyle C_n = \frac{1}{2}\sum_{1\leq i,j\leq n} (i+j) - \sum_{i=1}^{n} i$.

On ne conclut que $\boxed{C_n = \dfrac{n(n^2-1)}{2}}$

CHAPITRE

Nombres complexes

4

L'essentiel du cours

1 Nombres complexes

Définition

- Un **nombre complexe** est un élément de la forme $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ où i est un nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
- Si a et $b \in \mathbb{R}$, $a + ib$ est appelé la **forme algébrique** de z.
- Le réel a est appelé **partie réelle** de z notée $\mathfrak{Re}(z)$.
- Le réel b est appelé **partie imaginaire** de z notée $\mathfrak{Im}(z)$.
- Tout complexe de la forme ib avec $b \in \mathbb{R}$ est appelé **imaginaire pur**. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.
- Si $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$ avec a, b, c et $d \in \mathbb{R}$, alors

  • $z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$ • $z_1 z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$.

• Un nombre réel a peut aussi s'écrire $a + i0$ et est donc aussi un complexe.
• Les formules de somme et produit se retrouvent simplement en développent et en utilisant le fait que $i^2 = -1$.

Proposition

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\mathfrak{Re}(\lambda z_1 + z_2) = \lambda \mathfrak{Re}(z_1) + \mathfrak{Re}(z_2) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{Im}(\lambda z_1 + z_2) = \lambda \mathfrak{Im}(z_1) + \mathfrak{Im}(z_2).$$

• Il faut bien vérifier que λ est réel pour utiliser ces formules.
• Les formules $\mathfrak{Re}(z_1 z_2) = \mathfrak{Re}(z_1)\mathfrak{Re}(z_2)$ et $\mathfrak{Im}(z_1 z_2) = \mathfrak{Im}(z_1)\mathfrak{Im}(z_2)$ sont fausses.

Définition

Si $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on appelle **conjugué** de z le complexe $\overline{z} = a - ib$.

Il faut bien vérifier que a et b sont réels pour pouvoir dire que $\overline{a + ib} = a - ib$, sinon cela est clairement faux.

Proposition

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a
$$\mathfrak{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

Propriétés de la conjugaison

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a
$$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}, \quad \overline{(z_1^n)} = \overline{z_1}^n \quad \text{et} \quad \text{si } z_2 \neq 0, \ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle **module** de z le réel positif $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.

Proposition

Si $z = a+ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ et si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

La deuxième formule est utile pour mettre sous forme algébrique l'inverse d'un complexe (elle revient à multiplier au numérateur et au dénominateur par $\overline{z}$ et utiliser le fait que $z\overline{z} = |z|^2$).

Propriétés du module

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a
$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \quad |z_1^n| = |z_1|^n \quad \text{et} \quad \text{si } z_2 \neq 0, \ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Inégalité triangulaire

- Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On a $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$ avec cas d'égalité si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_1 = \lambda z_2$ ou si $z_2 = 0$.
- On a aussi $||z_1|-|z_2|| \leq |z_1-z_2|$ (il s'agit de l'inégalité triangulaire renversée).

On n'a en aucun cas $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1-z_2| \leq |z_1|-|z_2|$. La seule chose que l'on peut avoir est
$$|z_1-z_2| \leq |z_1|+|-z_2| = |z_1|+|z_2|.$$

■ 2 Forme exponentielle

Définition

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On définit le complexe $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Formules d'Euler

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Propriétés de l'exponentielle complexe

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\left|e^{i\alpha}\right| = 1, \quad \overline{e^{i\alpha}} = e^{-i\alpha}, \quad e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}, \quad e^{i(\alpha-\beta)} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} \quad \text{et} \quad \left(e^{i\alpha}\right)^n = e^{in\alpha}.$$

Formule de Moivre

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a $\quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Proposition

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z|\, e^{i\theta}$.

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. L'écriture $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est appelée **forme exponentielle** de z. On dit que le réel θ est un **argument** de z. On note $\arg(z)$ un argument de z.

- Le réel r doit être strictement positif sinon il ne s'agit pas de la forme exponentielle.
- Le réel r n'est autre que le module de z.
- On parle bien d'un argument et non de l'argument de z. En effet si θ est un argument de z, alors $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est aussi un argument de z. On dit alors que ces arguments sont **congrus** à θ modulo 2π, que l'on note $\equiv \theta \ [2\pi]$.
- Cette forme est particulièrement pratique pour gérer les produits, quotients et puissances, mais beaucoup moins pour les sommes.

Propriétés de l'argument

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

- $\arg(\overline{z_1}) \equiv -\arg(z_1) \ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2) \ [2\pi]$
- $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \ [2\pi]$
- $\arg\left(z_1^n\right) \equiv n\arg(z_1) \ [2\pi]$.

Proposition

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
- Si $a = 0$, alors $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ si $b > 0$ et $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ si $b < 0$.
- Si $a > 0$, alors $\arg(z) \equiv \arctan\left(\frac{b}{a}\right)\ [2\pi]$.
- Si $a < 0$, alors $\arg(z) \equiv \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi\ [2\pi]$.

Définition

Soit $z = a+ib \in \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On définit l' **exponentielle complexe** de z par $e^z = e^a e^{ib}$.

Propriété de l'exponentielle complexe

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On a $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.

3 Représentation géométrique

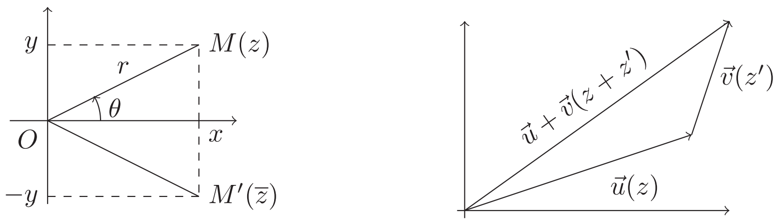
Dans toute cette partie, on se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.
- On dit que le point M de coordonnées (x, y) a pour **affixe** le complexe z et que M et le point image de z.
- On dit que le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ a pour **affixe** le complexe z et que $\vec{v}$ est le vecteur image de z.

Proposition

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, M d'affixe z, $\vec{u}$ d'affixe z et $\vec{v}$ d'affixe z'.
- Si on note M' le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses, l'affixe de M' est $\overline{z}$.
- La longueur OM est égale au module de z : $OM = |z|$.
- Si $z \neq 0$, alors l'angle orienté entre le vecteur $\vec{i}$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est un argument de z : $\arg(z) \equiv (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})\ [2\pi]$
- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$.



Proposition

Soient A et B des points d'affixes respectives z_A et z_B. Si on note $z_{\overrightarrow{AB}}$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$, alors

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A \qquad \text{et} \qquad AB = |z_B - z_A|\,.$$

4 Résolution d'équations

Définition

Soit $az^2 + bz + c$ un trinôme du second degré (avec a, b, c des réels et $a \neq 0$). On appelle le **discriminant** du trinôme, le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

Équation du second degré

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ de discriminant Δ.

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une seule solution réelle $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Relations racines-coefficients

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a pour solutions r_1 et r_2 (avec $r_1 = r_2$ dans le cas où le discriminant est nul) si et seulement si

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad r_1 r_2 = \frac{c}{a}.$$

Égalité de deux nombres complexes

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. En les mettant sous forme algébrique $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$ (où a, b, c, et $d \in \mathbb{R}$), on a

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d. \end{cases}$$

Si de plus $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$, en les mettant sous forme exponentielle $z_1 = re^{i\theta}$ et $z_2 = \rho e^{i\varphi}$ (où r, $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et θ, $\varphi \in \mathbb{R}$), on a

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r = \rho \\ \theta \equiv \varphi \ [2\pi]\,. \end{cases}$$

Les méthodes à maîtriser

Méthode 4.1 : Mettre sous forme algébrique

Pour mettre sous forme algébrique un nombre complexe :

- S'il s'agit d'une somme ou d'un produit de deux nombres complexes sous forme algébrique, il suffit d'utiliser la définition de la somme et du produit.
- S'il y a un quotient, il faut multiplier au numérateur et au dénominateur par le conjugué du dénominateur.
- S'il y a un terme sous forme exponentielle $re^{i\theta}$, on décompose $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ pour passer sous forme algébrique.

Exemple d'application

Mettre sous forme algébrique le nombre complexe $z = 3 + 4i - \dfrac{3+i}{1-i}$.

On commence par s'occuper du quotient

$$\frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{|1-i|^2} = \frac{3+3i+i+i^2}{2} = 1+2i.$$

Ainsi, par différence, $z = 2 + 2i$.

Voir exercices **4.1**, **4.7** et **4.11**.

Méthode 4.2 : Passer de la forme algébrique à exponentielle

On part d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$ sous forme algébrique $z = a + ib$ (où a et $b \in \mathbb{R}$). On commence par calculer $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Ensuite, deux cas

- En passant directement par la forme algébrique, on factorise z par $|z|$ et on reconnaît un angle θ tel que $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.
- Sinon, on applique les formules $z = |z|\,e^{i\theta}$ avec $\theta = \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)$ si $a > 0$ ou $\theta = \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) + \pi$ si $a < 0$.

Exemple d'application

Mettre sous forme exponentielle $1 + i$ et $-1 + 2i$.

- On commence par calculer $|1+i| = \sqrt{2}$ et ensuite on met $\sqrt{2}$ en facteur
$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}.$$
- On commence par calculer $|-1+2i| = \sqrt{5}$, mais cette fois-ci, on ne reconnait pas des valeurs connues de cosinus et sinus pour $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ et $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. On applique donc les formules en prenant pour argument $\arctan(-2) + \pi$ (car $-1 < 0$). Ainsi $-1 + 2i = \sqrt{5}\,e^{i(-\arctan(2)+\pi)}$.

Voir exercices **4.3**, **4.4** et **4.5**.

Méthode 4.3 : Calculer les puissances d'un nombre complexe

Pour calculer des puissances, il est souvent préférable d'utiliser la forme exponentielle du nombre complexe et ensuite on utilise les propriétés de l'exponentielle avec une puissance.

Exemple d'application

Calculer $(1+i)^{2017}$

On a déjà vu juste avant que $1+i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$. Ainsi

$$(1+i)^{2017}=\sqrt{2}^{2017}\,e^{i\frac{2017\pi}{4}}=2^{1008}\sqrt{2}\,e^{504i\pi+i\frac{\pi}{4}}$$

(on a effectué la division euclidienne de 2017 par 4 : $2017=4\times 504+1$).

De plus $e^{504i\pi}=\left(e^{2i\pi}\right)^{252}=1$. Ainsi

$$(1+i)^{2017}=2^{1008}\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}=2^{1008}(1+i).$$

Voir exercices **4.1**,**4.3** et **4.9**.

Méthode 4.4 : Factoriser $e^{ip}\pm e^{iq}$

On peut être amené à factoriser une expression du type $e^{ip}\pm e^{iq}$ (pour simplifier un calcul, pour déterminer le module et un argument de ce nombre complexe, etc). Pour ce faire, on factorise par l'angle moitié, c'est-à-dire par le nombre complexe $e^{i\frac{p+q}{2}}$ et ensuite on utilise les formules d'Euler pour reconnaître un cosinus ou un sinus :

$$e^{ip}+e^{iq}=e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}}+e^{-i\frac{p-q}{2}}\right)=e^{i\frac{p+q}{2}}\times 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

Exemple d'application

Factoriser $e^{ip}-e^{iq}$ puis $\cos p-\cos q$

On applique le principe ci-dessus

$$e^{ip}-e^{iq}=e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}}-e^{-i\frac{p-q}{2}}\right)=e^{i\frac{p+q}{2}}\times 2i\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

Ensuite pour récupérer $\cos p-\cos q$, il suffit de prendre la partie réelle de $e^{ip}-e^{iq}$. Or

$$e^{ip}-e^{iq}=e^{i\frac{p+q}{2}}\times 2i\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)=\left(\cos\frac{p+q}{2}+i\sin\frac{p+q}{2}\right)\times 2i\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

Ainsi, en développant, on obtient

$$\cos p-\cos q=\mathfrak{Re}\left(e^{ip}-e^{iq}\right)=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

Voir exercices **4.5**, **4.9** et **4.12**.

Méthode 4.5 : Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

On commence par calculer le discriminant du trinôme et selon le signe de ce dernier, on en déduit les solutions de l'équation.

Exemple d'application

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 5 = 0$.

On commence par calculer le discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4 < 0$. L'équation admet donc les deux solutions suivantes

$$z_1 = \frac{4-2i}{2} = 2 - i \quad \text{et} \quad z_2 = 2 + i.$$

Voir exercices **4.6**, **4.10** et **4.12**.

Méthode 4.6 : Utiliser les relations racines-cœfficients

Les relations racines-cœfficients permettent de faire deux choses.

- Si on a trouvé une solution d'une équation du second degré (en cherchant au hasard ou parce que l'énoncé nous la donne), on peut facilement trouver l'autre solution sans passer par le discriminant.
- Si on connaît le produit p et la somme s de deux nombres complexes z_1 et z_2, on peut déterminer z_1 et z_2 comme étant les solutions de l'équation $z^2 - sz + p = 0$.

Exemple d'application

(1) Déterminer les solutions de l'équation $z^2 - 2019z + 2018 = 0$.

(2) Résoudre le système $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6. \end{cases}$

(1) Le calcul du discriminant est assez affreux. On commence plutôt par remarquer que 1 est une solution évidente de l'équation. En effet, $1^2 - 2019 \times 1 + 2018 = 0$. D'après les relations racines-cœfficients, le produit des deux solutions doit être égale à 2018. On en déduit donc que les deux solutions sont 1 et 2018.

(2) Les deux nombres x et y sont donc solutions de l'équation $z^2 - 5z + 6 = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = 1 > 0$. Les deux solutions sont donc 2 et 3. Ainsi le système a pour solutions $(2, 3)$ et $(3, 2)$.

Voir exercice **4.12**.

Interro de cours

1. Parmi les égalités suivantes, lesquelles sont vraies pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$?

(a) $\mathfrak{Re}(z_1 + z_2) = \mathfrak{Re}(z_1) + \mathfrak{Re}(z_2)$

(b) $\mathfrak{Re}(z_1 z_2) = \mathfrak{Re}(z_1)\mathfrak{Re}(z_2)$

(c) $\mathfrak{Im}(z_1 - z_2) = \mathfrak{Im}(z_1) - \mathfrak{Im}(z_2)$

(d) $\mathfrak{Im}(z_1^n) = \mathfrak{Im}(z_1)^n$.

2. Si $a = 1 + i$, $b = 1 + 2i$ et $z = a + ib$. Parmi les égalités suivantes, lesquelles sont vraies ?

(a) $\overline{z} = a - ib$

(b) $\overline{z} = 2 - 3i$

(c) $\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$

(d) $\overline{z} = \overline{a} - i\overline{b}$.

3. Parmi les inégalités suivantes, lesquelles sont vraies pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$?

(a) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(b) $|z_1| + |z_2| \leq |z_1 + z_2|$

(c) $|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2|$

(d) $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$.

4. À quelle condition, sur $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, a-t-on $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$?

5. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\overline{z} = z$.

6. Citer les formules d'Euler.

7. Mettre $z = \sqrt{3} + i$ sous forme exponentielle.

8. Déterminer un argument de $1 + e^{i\frac{\pi}{4}}$.

9. Calculer $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{256}$.

10. Soient r_1 et r_2 les deux solutions de l'équation $-2r^2 - 3r + 4 = 0$. Que valent $r_1 r_2$ et $r_1 + r_2$?

Exercices

Pour s'entraîner

Exercice 4.1

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants

1. $z_1 = (1+i)^{36}$ **2.** $z_2 = \left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2 + \dfrac{1-7i}{4+3i}$ **3.** $z_3 = (\sqrt{3}-i)^9(-3+i)^2$.

Exercice 4.2

Calculer le module des nombres complexes suivants

1. $z_1 = (1+2i)^3\dfrac{1-7i}{4+3i}$ **2.** $z_2 = \dfrac{53+i}{53-i}$ **3.** $z_3 = \left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^4$.

Exercice 4.3

On donne $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.
Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants : $z_1z_2z_3$, $\dfrac{z_1}{z_2z_3}$, z_2^2 et z_3^6.

Exercice 4.4

Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants

1. $z_1 = \dfrac{3}{2+3i}$ **2.** $z_2 = \dfrac{\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)(1+i)}{1-i}$ **3.** $z_3 = -5\dfrac{-1+i}{\sqrt{3}+i}$.

Exercice 4.5

Déterminer la forme exponentielle de $1+e^{i\frac{\pi}{3}}$ et de $e^{\frac{3i\pi}{5}}-1$.

Exercice 4.6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $2z^2 - 12z + 18 = 0$
2. $3z^2 + 3z + 3 = 2z^2 + z + 1$
3. $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$ $(\theta \in \mathbb{R})$
4. $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$.

Pour aller plus loin

Exercice 4.7

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z \neq -2i$ tels que $\dfrac{z-2+i}{z+2i}$ soit imaginaire pur.

Exercice 4.8

1. Soit $u \in \mathbb{C}$. Montrer que si $|u| = 1$, alors $\overline{u} = \dfrac{1}{u}$.
2. Soient $a, z \in \mathbb{C}$ tels que $|a| = |z| = 1$. Exprimer $(z-a)^2$ en fonction de $|z-a|$, a et $\overline{z}$.
3. Soient $a, b, z \in \mathbb{C}$ tels que $|a| = |b| = |z| = 1$ et $z \neq b$. Montrer que $\dfrac{b}{a}\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)^2 \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4.9

Calculer pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta).$$

Exercice 4.10

Soient $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + \dfrac{1}{z} \end{array}$.

1. Résoudre l'équation $f(z) = 0$.
2. L'application f est-elle injective ?
3. Montrer que $f(\mathbb{U}) = [-2, 2]$.

Exercice 4.11

Soient les ensembles $P = \{z \in \mathbb{C} \ / \ \mathfrak{Im} z > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < 1\}$ et la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} P & \to & D \\ z & \mapsto & \dfrac{z-i}{z+i}. \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie.
2. Si $\alpha \in D$, résoudre l'équation $f(z) = \alpha$. En déduire que f est bijective.

Exercice 4.12

1. a. Comparer $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et $e^{\frac{8i\pi}{5}}$, puis $e^{\frac{4i\pi}{5}}$ et $e^{\frac{6i\pi}{5}}$.
b. En déduire que $\cos\frac{2\pi}{5} = \cos\frac{8\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5} = \cos\frac{6\pi}{5}$.
2. a. Calculer $1 + e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{6i\pi}{5}} + e^{\frac{8i\pi}{5}}$.
b. En déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}$.
3. a. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Factoriser $e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)}$ et en déduire que

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right).$$

b. Calculer $\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}$.
4. En déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

Corrections

Interro de cours

1. (a) **Vrai.** Cf. cours.
   (b) **Faux.** Un contre-exemple : $\mathfrak{Re}(i \times i) = -1 \neq 0 = \mathfrak{Re}(i)\mathfrak{Re}(i)$.
   (c) **Vrai.** Cf. cours.
   (d) **Faux.** Un contre-exemple : $\mathfrak{Im}(i^2) = 0 \neq 1 = \mathfrak{Im}(i)^2$.
2. (a) **Faux.** a et b ne sont pas des réels donc cette égalité est fausse.
   (b) **Vrai.** On a $z = 2 + 3i$, donc $\overline{z} = 2 - 3i$.
   (c) **Vrai.** Cf. cours.
   (d) **Vrai.** On a $\overline{z} = \overline{a} + \overline{ib} = \overline{a} + \overline{i}\overline{b} = \overline{a} - i\overline{b}$.
3. (a) **Vrai.** Cf. cours.
   (b) **Faux.** On a $|i| + |-i| = 2 \not\leq 0 = |i + (-i)|$.
   (c) **Faux.** Un contre-exemple : $|1 - i| = \sqrt{2} > 0 = |1| - |i|$.
   (d) **Vrai.** Grâce à l'inégalité triangulaire renversée, on a $|z_1| - |z_2| \leq ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.
4. À condition que $z_2 = 0$ ou qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_1 = \lambda z_2$.
5. Soit $z = a + ib$ la forme algébrique de z, on a
$$\overline{z} = z \Leftrightarrow a - ib = a + ib \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$
6. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.
7. On a $|z| = 2$, puis $z = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.
8. On factorise par l'angle moitié $1 + e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{8}}\left(e^{-i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8}}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{\pi}{8}}$. Or $2\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) > 0$, donc $\dfrac{\pi}{8}$ est un argument de $1 + e^{i\frac{\pi}{4}}$.
9. On a $(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})^{256} = \left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{256} = e^{-64i\pi} = 1$.
10. Grâce aux relations racines-cœfficients, on obtient $r_1 + r_2 = -\frac{-3}{-2} = -\frac{3}{2}$ et $r_1 r_2 = \frac{4}{-2} = -2$.

Exercice 4.1

1. On a $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc $z_1 = (\sqrt{2})^{36}e^{36i\frac{\pi}{4}} = 2^{18}e^{9i\pi} = -2^{18}$.
2. On commence par le premier terme
$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \frac{1 + 2i + i^2}{2^2 - 4i + i^2} = \frac{2i}{3 - 4i} = \frac{2i(3 + 4i)}{3^2 + 4^2} = \frac{-8 + 6i}{25}.$$
Puis le deuxième terme
$$\frac{1 - 7i}{4 + 3i} = \frac{(1 - 7i)(4 - 3i)}{4^2 + 3^2} = \frac{-17 - 31i}{25}.$$
Par somme, on obtient $\boxed{z_2 = -1 - i}$.

3. On a $\sqrt{3}-i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$, donc $(\sqrt{3}-i)^9 = 2^9 e^{-\frac{3i\pi}{2}} = 512i$.
Puis $(-3+i)^2 = 9-6i-1 = 8-6i$. Par produit, on obtient $\boxed{z_3 = 3072+4096i}$.

> Même si on veut déterminer la forme algébrique d'un nombre, il peut être utile de passer par des formes exponentielles (surtout lorsqu'on est en présence de puissances élevées).

Exercice 4.2

1. On calcul le module de chacun des facteurs et on applique les propriétés du module

$$|z_1| = |1+2i|^3 \frac{|1-7i|}{|4+3i|} = (\sqrt{5})^3 \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{25}} = 5\sqrt{10}.$$

2. De même

$$|z_2| = \frac{|53+i|}{|53-i|} = \frac{\sqrt{53^2+1}}{\sqrt{53^2+1}} = 1.$$

3. De même

$$|z_3| = \left(\frac{\sqrt{3+1}}{\sqrt{1+1}}\right)^4 = (\sqrt{2})^4 = 2.$$

> Pour calculer le module d'un produit ou quotient, ce serait une très mauvaise idée de tout développer pour mettre sous forme algébrique. Cela fonctionne mais génère beaucoup de calculs (et donc potentiellement d'erreurs de calcul) et fait perdre beaucoup de temps.

Exercice 4.3

On utilise les propriétés de l'exponentielle complexe pour obtenir

$$\boxed{z_1 z_2 z_3 = 3\sqrt{2}e^{-i\pi}},\quad \boxed{\frac{z_1}{z_2 z_3} = \frac{\sqrt{2}}{6}e^{\frac{4i\pi}{3}}},\quad \boxed{z_2^2 = 9e^{-\frac{2i\pi}{3}}} \quad \text{et} \quad \boxed{z_3^6 = 8e^{-5i\pi} = 8e^{i\pi}}.$$

> On a aussi $z_3^6 = -8$, mais il ne s'agit plus de sa forme exponentielle car $-8 < 0$.

Exercice 4.4

1. On met sous forme exponentielle chaque terme puis on utilise les propriétés de l'exponentielle complexe

$$z_1 = \frac{3}{\sqrt{13}\, e^{i\arctan\left(\frac{3}{2}\right)}} = \frac{3\sqrt{13}}{13} e^{-i\arctan\left(\frac{3}{2}\right)}.$$

2. De même

$$z_2 = \frac{2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right) \times \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

3. De même

$$z_3 = 5\frac{1-i}{\sqrt{3}+i} = 5\frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5i\pi}{12}}.$$

Exercice 4.5

On factorise par l'angle moitié pour obtenir

$$1+e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{6}}\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

et

$$e^{\frac{3i\pi}{5}}-1 = e^{\frac{3i\pi}{5}}+e^{i\pi} = e^{\frac{4i\pi}{5}}\left(e^{-i\frac{\pi}{5}}+e^{i\frac{\pi}{5}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}_{>0}e^{\frac{4i\pi}{5}}.$$

Exercice 4.6

1. On calcule le discriminant du trinôme $\Delta = 0$. La seule solution est donc $-\frac{-12}{2\times 2}$, c'est-à-dire $\boxed{3}$.

2. On commence par ramener tous les termes du même côté de l'égalité. L'équation à résoudre est donc équivalente à $z^2+2z+2=0$. On calcule le discriminant du trinôme obtenu : $\Delta = -4$. Le solutions sont donc

$$\boxed{z_1 = \frac{-2-2i}{2} = -1-i \quad \text{et} \quad z_2 = -1+i}.$$

3. On a $z^2 - 2\cos\theta + 1 = z^2 - \left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)z + e^{i\theta}e^{-i\theta} = \left(z-e^{i\theta}\right)\left(z-e^{-i\theta}\right)$.

Les solutions de l'équation sont donc $\boxed{e^{i\theta} \text{ et } e^{-i\theta}}$.

4. On pose $Z = z^2$ et l'équation devient $Z^2+3Z-4=0$. On calcule le discriminant du trinôme obtenu : $\Delta = 25$. Les solutions sont donc $Z_1 = \frac{-3-5}{2} = -4$ et $Z_2 = \frac{-3+5}{2} = 1$. Ainsi

$$z^4+3z^2-4=0 \Leftrightarrow z^2=-4 \text{ ou } z^2=1 \Leftrightarrow z=\pm 2i \text{ ou } z=\pm 1.$$

Les solutions de l'équation sont donc $\boxed{2i, -2i, 1 \text{ et } -1}$.

Exercice 4.7

On note Z le complexe étudié et on le met sous forme algébrique. On commence par écrire $z = x+iy$ sous forme algébrique (avec $x, y \in \mathbb{R}$). On a

$$Z = \frac{x-2+i(y+1)}{x+i(y+2)} = \frac{(x-2+i(y+1))(x-i(y+2))}{x^2+(y+2)^2} = \frac{x^2-2x+y^2+3y+2}{x^2+(y+2)^2}+i\frac{2y-x+4}{x^2+(y+2)^2}.$$

Ainsi

$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathfrak{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow x^2-2x+y^2+3y+2=0 \text{ et } x^2+(y+2)^2 \neq 0.$$

Or $x^2+(y+2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow (x,y) \neq (0,-2)$ et

$$x^2-2x+y^2+3y+2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

Il s'agit de l'équation d'un cercle qui contient le point de coordonnées $(0,-2)$.

Alors, si on note $\Omega(1, \frac{3}{2})$ et $A(0, -2)$ l'ensemble des points recherché est le cercle de centre Ω et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ privé du point A.

Exercice 4.8

1. Si $|u| = 1$, alors $|u|^2 = 1$, puis $u\overline{u} = 1$ et $\overline{u} = \dfrac{1}{u}$ (car $u \neq 0$, du fait que $|u| \neq 0$).

2. Comme a et z sont de module 1, on peut leur appliquer le résultat de la question précédente

$$(z-a)^2 = (z-a)\left(\frac{1}{\overline{z}} - \frac{1}{\overline{a}}\right) = (z-a)\left(\frac{\overline{a}-\overline{z}}{\overline{a}\overline{z}}\right) = -\frac{(z-a)(\overline{z-a})}{\overline{a}\,\overline{z}} = -\frac{a}{\overline{z}}\,|z-a|^2 .$$

3. On utilise le résultat de la question précédente pour $(z-a)^2$ et pour $(z-b)^2$

$$\frac{b}{a}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^2 = \frac{b}{a}\,\frac{-\frac{a}{z}\,|z-a|^2}{-\frac{b}{z}\,|z-b|^2} = \left|\frac{z-a}{z-b}\right|^2 \in \mathbb{R}_+^*.$$

Exercice 4.9

On a

$$C_n + iS_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{i\theta}\right)^k \times 1^{n-k} = \left(e^{i\theta}+1\right)^n .$$

On factorise $e^{i\theta}+1$ par l'angle moitié pour obtenir $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$. Donc

$$C_n + iS_n = 2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{n\theta}{2}} = 2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + i2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right).$$

On récupère C_n (resp. S_n) comme la partie réelle (resp. imaginaire) du complexe ci-dessus. D'où

$$\boxed{C_n = 2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad S_n = 2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}.$$

Exercice 4.10

1. On a

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{z} \Leftrightarrow z^2 = -1.$$

Les solutions de l'équation $f(z) = 0$ sont donc i et $-i$.

2. D'après la question précédente, on a $f(i) = f(-i)$ avec $i \neq -i$, donc f n'est pas injective.

3. On procède par double inclusion

- $\boldsymbol{f(\mathbb{U}) \subset [-2, 2]}$ **:** Soit $y \in f(\mathbb{U})$. On dispose de $z \in \mathbb{U}$ tel que $y = f(z)$ puis de $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. On obtient

$$y = f(z) = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta) \in [-2, 2].$$

Donc $f(\mathbb{U}) \subset [-2, 2]$.

- **$[-2,2] \subset f(\mathbb{U})$:** Soit $x \in [-2,2]$. On a $\dfrac{x}{2} \in [-1,1]$, donc on dispose de $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{x}{2} = \cos\theta$. D'où
$$x = 2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = f\left(e^{i\theta}\right) \in f(\mathbb{U}).$$
Donc $[-2,2] \subset f(\mathbb{U})$.

Ainsi $f(\mathbb{U}) = [-2,2]$.

Exercice 4.11

1. Il faut et il suffit de montrer que si $z \in P$, alors $f(z)$ existe et $f(z) \in D$.
Soit $z \in P$. On note $z = x + iy$ sa forme algébrique (avec $x, y \in \mathbb{R}$).
Comme $z \in P$, alors $y > 0$, puis
$$|f(z)| = \frac{|z-i|}{|z+i|} = \frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}{\sqrt{x^2+(y+1)^2}} = \sqrt{\frac{x^2+(y-1)^2}{x^2+(y+1)^2}}.$$
Or $x^2 + (y+1)^2 - \left(x^2 + (y-1)^2\right) = 4y > 0$, donc $0 < x^2 + (y-1)^2 < x^2 + (y+1)^2$ d'où $|f(z)| < 1$. Ainsi $f(z) \in D$ et f est bien définie.

2. Soit $\alpha \in D$. On remarque que $\alpha \neq 1$ et on résout l'équation de l'énoncé
$$f(z) = \alpha \Leftrightarrow \alpha(z+i) = z - i \Leftrightarrow (1-\alpha)z = i(1+\alpha) \Leftrightarrow z = i\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \text{ car } \alpha \neq 1.$$
Tout élément de D admet donc un et un seul antécédent par l'application $z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$. Il ne reste plus qu'à montrer que cet antécédent est dans P. On note $\alpha = a + ib$ sous forme algébrique (avec $a, b \in \mathbb{R}$) et on a
$$i\frac{1+\alpha}{1-\alpha} = i\frac{1+a+ib}{1-a-ib} = i\frac{(1+a+ib)(1-a+ib)}{(1-a)^2+b^2} = \frac{-2b}{(1-a)^2+b^2} + i\frac{1-a^2-b^2}{(1-a)^2+b^2}.$$
Ainsi $\mathfrak{Im}\left(i\dfrac{1+\alpha}{1+\alpha}\right) = \dfrac{1-|\alpha|^2}{(1-a)^2+b^2} > 0$ car $|\alpha| < 1$ donc $i\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha} \in P$.
Alors, tout élément de D admet un et un seul antécédent dans P par f, ce qui signifie que f est bijective.

> La résolution de l'équation $f(z) = \alpha$ donne une expression de la bijection réciproque de f : $f^{-1}(\alpha) = i\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}$.

Exercice 4.12

1. a. On commence par remarquer que $\dfrac{8\pi}{5} = 2\pi - \dfrac{2\pi}{5}$, donc
$$e^{\frac{8i\pi}{5}} = e^{-\frac{2i\pi}{5}} = \overline{e^{\frac{2i\pi}{5}}}.$$
On a de même $e^{\frac{6i\pi}{5}} = \overline{e^{\frac{4i\pi}{5}}}$.

b. On utilise les formules d'Euler
$$\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \frac{e^{\frac{8i\pi}{5}} + e^{-\frac{8i\pi}{5}}}{2} = \frac{e^{-\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{2i\pi}{5}}}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$
On a de même $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

2. a. La somme considérée est une somme géométrique de raison $e^{\frac{2i\pi}{5}} \neq 1$, donc
$$1 + e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{6i\pi}{5}} + e^{\frac{8i\pi}{5}} = \frac{1 - \left(e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)^5}{1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}} = \frac{1 - e^{2i\pi}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}} = 0.$$

b. En calculant la somme d'une autre façon, on obtient
$$1 + e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{6i\pi}{5}} + e^{\frac{8i\pi}{5}} = 1 + e^{\frac{2i\pi}{5}} + \overline{e^{\frac{2i\pi}{5}}} + e^{\frac{4i\pi}{5}} + \overline{e^{\frac{4i\pi}{5}}} = 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right).$$

On en déduit donc que $\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}}$.

3. a. On factorise par l'angle moitié pour obtenir
$$e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)} = e^{ia}\left(e^{ib} + e^{-ib}\right) = (\cos a + i\sin a) \times 2\cos b = 2\cos a\cos b + 2i\sin a\cos b.$$

Ainsi, en prenant la partie réelle, on obtient bien $\boxed{\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)}$.

b. On applique la formule précédente pour $a = \frac{2i\pi}{5}$ et $b = \frac{4i\pi}{5}$ et on obtient
$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) = -\frac{1}{4}.$$

4. À l'aide des relations racines-cœfficients, on en déduit que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ sont solutions de l'équation $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$. On calcule le discriminant du trinôme obtenu : $\Delta = \dfrac{5}{4}$. Les solutions sont donc
$$x_1 = \frac{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} < 0 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} > 0.$$
Or $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ car $\frac{2\pi}{5} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) < 0$ car $\frac{4\pi}{5} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. On en conclut donc que
$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}}.$$

CHAPITRE

Trigonométrie

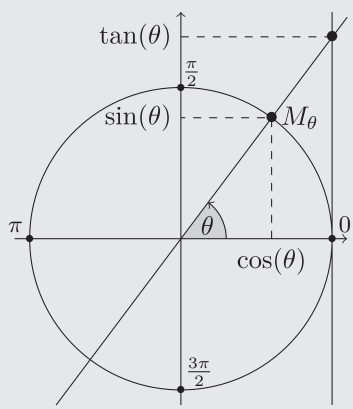
5

L'essentiel du cours

1 Le cercle trigonométrique

Définition

- Le **cercle trigonométrique** est le cercle centré sur le repère et de rayon 1. On le parcourt dans le sens direct (sens anti-horaire).
- On place un point M_θ sur ce cercle de sorte que la longueur de l'arc entre le point de coordonnées $(1, 0)$ et M_θ soit égal à θ. On note alors $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ les coordonnées de ce point.
- Si le point M_θ n'est pas sur l'axe des ordonnées, la droite (OM_θ) et la tangente au cercle trigonométrique en le point de coordonnées $(1, 0)$ se coupent en un point. On appelle $\tan(\theta)$ l'ordonnée de ce point d'intersection.



A l'aide du théorème de Thalès, on retrouve la formule $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ si $\theta \not\equiv \dfrac{\pi}{2} \ [\pi]$ (formule très souvent donnée comme définition de $\tan(\theta)$).

2 Formules de trigonométrie

Proposition

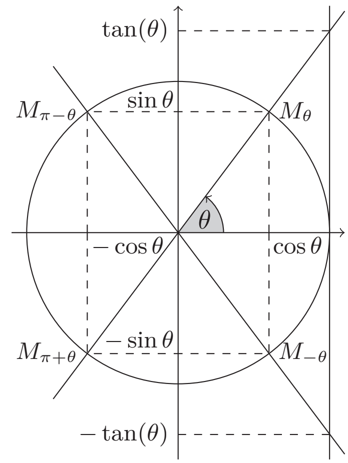
Soient $\theta, \alpha \in \mathbb{R}$. On a
- $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.
- Si $\theta \equiv \alpha \ [2\pi]$, alors $\cos(\theta) = \cos(\alpha)$ et $\sin(\theta) = \sin(\alpha)$.
- Si $\theta \equiv \alpha \ [\pi]$, alors $\tan(\theta) = \tan(\alpha)$.

Ajouter un multiple de 2π revient à faire plusieurs tours sur le cercle trigonométrique, ce qui donne le même point sur le cercle et donc les mêmes valeurs de cosinus et sinus.

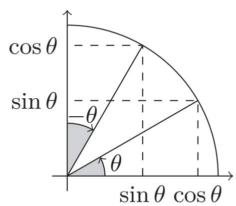
Formules de translation et symétries

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En regardant bien le cercle trigonométrique, on obtient les formules suivantes

- $\cos(-\theta) = \cos\theta$
- $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
- $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$
- $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$
- $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$
- $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$
- $\tan(-\theta) = -\tan\theta$
- $\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$
- $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$



- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$
- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$
- $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{1}{\tan\theta}$



En cas de trou de mémoire, il ne faut pas hésiter à tracer un cercle trigonométrique au brouillon pour retrouver ces formules.

Formules d'addition et de duplication

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b \\
\cos(a-b) &= \cos a\cos b + \sin a\sin b \\
\sin(a+b) &= \sin a\cos b + \sin b\cos a \\
\sin(a-b) &= \sin a\cos b - \sin b\cos a
\end{aligned}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{aligned}
\sin(2a) &= 2\sin a\cos a \\
\cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a \\
&= 2\cos^2 a - 1 \\
&= 1 - 2\sin^2 a
\end{aligned}$$

Transformation de $a\cos\theta + b\sin\theta$

Soient $a, b, \theta \in \mathbb{R}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que

$$a\cos\theta + b\sin\theta = A\cos(\theta - \varphi)$$

et de plus

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{A} \quad \text{et} \quad \sin\varphi = \frac{b}{A}.$$

3 Résolution d'équations trigonométriques

Existence et unicité de solution

- Soit $x \in [-1,1]$. L'équation $\cos\theta = x$ (d'inconnue θ) admet une unique solution dans $[0,\pi]$. On la note $\arccos(x)$ (il s'agit de l' **arccosinus** de x).
- Soit $x \in [-1,1]$. L'équation $\sin\theta = x$ (d'inconnue θ) admet une unique solution dans $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. On la note $\arcsin(x)$ (il s'agit de l' **arcsinus** de x).
- Soit $x \in \mathbb{R}$. L'équation $\tan\theta = x$ (d'inconnue θ) admet une unique solution dans $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. On la note $\arctan(x)$ (il s'agit de l' **arctangente** de x).

Résolution d'équations

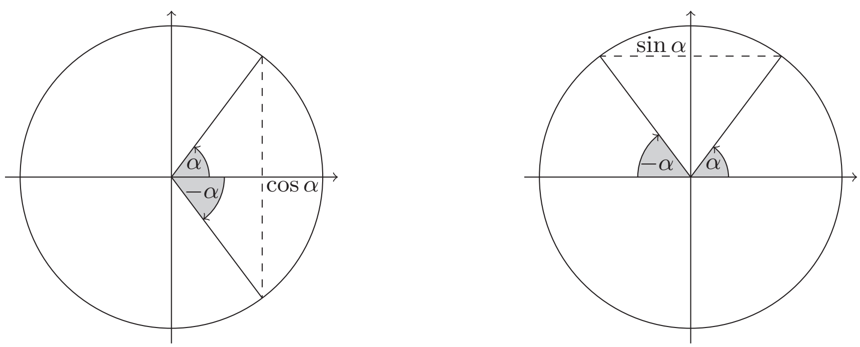
Soient $\theta, \alpha \in \mathbb{R}$. On a

- $\cos\theta = \cos\alpha$ si et seulement si $\theta \equiv \alpha \ [2\pi]$ ou $\theta \equiv -\alpha \ [2\pi]$.
- $\sin\theta = \sin\alpha$ si et seulement si $\theta \equiv \alpha \ [2\pi]$ ou $\theta \equiv \pi-\alpha \ [2\pi]$.
- $\tan\theta = \tan\alpha$ si et seulement si $\theta \equiv \alpha \ [\pi]$.

Si $c, s \in [-1,1]$ et $t \in \mathbb{R}$, on a donc

- $\cos\theta = c$ si et seulement si $\theta \equiv \arccos(c) \ [2\pi]$ ou $\theta \equiv -\arccos(c) \ [2\pi]$.
- $\sin\theta = s$ si et seulement si $\theta \equiv \arcsin(s) \ [2\pi]$ ou $\theta \equiv \pi - \arcsin(s) \ [2\pi]$.
- $\tan\theta = t$ si et seulement si $\theta \equiv \arctan(t) \ [\pi]$.

Pour les équations avec cosinus et sinus tout se passe à un multiple de 2π près, et le figures suivantes illustrent les deux familles de solutions de $\cos\theta = \cos\alpha$ et $\sin\theta = \sin\alpha$



Les méthodes à maîtriser

Méthode 5.1 : Résoudre des équations trigonométriques

Le but est de se ramener à une équation de la forme $\cos\theta = \cos\alpha$, $\sin\theta = \sin\alpha$ ou $\tan\theta = \tan\alpha$ dans la mesure du possible ou sinon de la forme $\cos\theta = c$, $\sin\theta = s$ ou $\tan\theta = t$. Ensuite on utilise le théorème sur le cas d'égalité des fonctions trigonométriques.

Exemple d'application

Résoudre $\cos(x) + \sin(2x) = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\cos(x) + \sin(2x) = 0$ si et seulement si $\cos(x) = -\sin(2x)$. Ensuite, on essaye de transformer $-\sin(2x)$ en un cosinus : $-\sin(2x) = \sin(-2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-2x)\right)$. On a ainsi

$$\cos(x) + \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{2} + 2x \ [2\pi] \text{ ou } x \equiv -\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \ [2\pi].$$

Pour finir la résolution, on a $x \equiv \frac{\pi}{2} + 2x \ [2\pi]$ si et seulement si $x \equiv -\frac{\pi}{2} \ [2\pi]$. Et

$$x \equiv -\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \ [2\pi] \Leftrightarrow 3x \equiv -\frac{\pi}{2} \ [2\pi] \Leftrightarrow x \equiv -\frac{\pi}{6} \ \left[\frac{2\pi}{3}\right].$$

Ainsi les solutions de l'équation initiale sont les $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et les $-\frac{\pi}{6} + \frac{2\ell\pi}{3}$, $\ell \in \mathbb{Z}$.

Voir exercices **5.2**, **5.7** et **5.10**.

Méthode 5.2 : Transformer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$

Il s'agit de faire l'opération inverse de la linéarisation. Voici la démarche à suivre :

- Grâce à la formule de Moivre, on écrit $\cos(nx) = \mathfrak{Re}(e^{inx}) = \mathfrak{Re}((e^{ix})^n)$ (ou avec la partie imaginaire pour $\sin(nx)$).
- A l'aide du binôme de Newton, on développe $(e^{ix})^n = (\cos(x) + i\sin(x))^n$.
- On récupère la partie réelle (ou la partie imaginaire pour $\sin(nx)$).
- On exprime les sin à l'aide de cos (et inversement) grâce à l'identité $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, en fonction de ce que demande l'énoncé.

Exemple d'application

Exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. A l'aide de la formule de Moivre, on observe que

$$\sin(3x) = \mathfrak{Im}((e^{ix})^3) = \mathfrak{Im}((\cos(x) + i\sin(x))^3).$$

Ensuite, on applique le binôme de Newton pour obtenir

$$(\cos(x) + i\sin(x))^3 = \cos^3(x) + 3\cos^2(x)(i\sin(x)) + 3\cos(x)(i\sin(x))^2 + (i\sin(x))^3.$$

On récupère la partie imaginaire de cette expression et on remplace les $\cos(x)$ à l'aide de la relation $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$:

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)\\ &= 3(1-\sin^2(x))\sin(x) - \sin^3(x)\\ &= -4\sin^3(x) + 3\sin(x).\end{aligned}$$

Voir exercice **5.6**.

Méthode 5.3 : Linéariser une expression trigonométrique

Linéariser une expression du type $\cos^p(x)\sin^q(x)$ (avec $p, q \in \mathbb{N}$) veut dire la transformer en une combinaison linéaire des $\cos(mx)$ et $\sin(nx)$ (avec $n, m \in \mathbb{N}$). Voici la démarche à suivre :

- On exprime $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de e^{ix} et e^{-ix} grâce aux formules d'Euler.
- On développe tout à l'aide du binôme de Newton.
- On regroupe les termes conjugués ensemble pour faire apparaitre des cos et sin.

Exemple d'application

Linéariser $\cos^2(x)\sin^3(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après les formules d'Euler et le binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned}\cos^2(x)\sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3\\ &= \frac{1}{2^5 i^3}\left(e^{2ix}+2+e^{-2ix}\right)\left(e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}\right)\\ &= -\frac{1}{32i}\left(e^{5ix}-3e^{3ix}+3e^{ix}-e^{-ix}+2e^{3ix}-6e^{ix}+6e^{-ix}-2e^{3ix}\right.\\ &\quad \left.+e^{ix}-3e^{-ix}+3e^{-3ix}-e^{-5ix}\right)\\ &= -\frac{1}{32i}\left(e^{5ix}-e^{-5ix}-e^{3ix}+e^{3ix}-2e^{ix}+2e^{-ix}\right)\\ &= -\frac{1}{32i}\left(2i\sin(5x)-2i\sin(3x)-2\times 2i\sin(x)\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(-\sin(5x)+\sin(3x)+2\sin(x)\right).\end{aligned}$$

Voir exercices **5.3** et **5.8**.

Interro de cours

1. Déterminer si les égalités suivantes sont vraies ou fausses, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

(a) $\cos(-x) = -\cos(x)$

(b) $\sin(-x) = -\sin(x)$

(c) $\tan(x - \pi) = -\tan(x)$

(d) $\cos(x + \pi) = \cos(x)$

(e) $\sin(\pi - x) = -\sin(x)$

(f) $\tan(x + 2\pi) = \tan(x)$

(g) $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$

(h) $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$

(i) $\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(x)}$.

2. Calculer $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$. En déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{12}$.

3. Transformer $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x)$ sous la forme $A\cos(x - \varphi)$.

4. Calculer $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$.

5. Résoudre l'équation $\tan(x) = 1$.

6. Résoudre l'équation $\cos(x) + \sin(x) = 1$.

7. Linéariser $\sin^4(x)$.

8. Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$.

Exercices

Pour s'entraîner

Exercice 5.1

1. Exprimer $\cos^2(\theta)$ en fonction de $\cos(2\theta)$, puis $\sin^2(\theta)$ en fonction de $\cos(2\theta)$.

2. Calculer $\cos\dfrac{\pi}{8}$, $\sin\dfrac{\pi}{8}$ et $\tan\dfrac{\pi}{8}$.

Exercice 5.2

Résoudre les équations suivantes

1. $\sin(x) = 0$

2. $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3. $\cos(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

4. $\cos(x) = \sin(x)$

5. $\sin(3x) = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

6. $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 1$.

Exercice 5.3

Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser les expressions suivantes

1. $\cos^5(x)$

2. $\cos^3(x)\sin^2(x)$.

Exercice 5.4

1. Soit $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$. Montrer que $\dfrac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

2. En déduire la valeur de $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 5.5

Soient $a, b, p, q \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\cos(a+b) - \cos(a-b)$.

2. Factoriser $\cos p - \cos q$ et $\sin p + \sin q$.

3. Simplifier $\dfrac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q}$.

4. En déduire la valeur de $\tan\left(\dfrac{\pi}{24}\right)$.

Exercice 5.6

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin^5(\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.

2. En déduire la valeur de $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

Pour aller plus loin

Exercice 5.7

Résoudre les équations suivantes

1. $2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1 = 0$
2. $\tan^2(2x) + (1-\sqrt{3})\tan(2x) - \sqrt{3} = 0$
3. $\tan(x)\tan(2x) = 1$
4. $\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1.$

Exercice 5.8

1. Soient $x \not\equiv 0 \ [2\pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En exploitant les nombres complexes, montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^3(\theta)$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{9} \cos^3\left(\frac{k\pi}{9}\right)$.

Exercice 5.9

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $\dfrac{1}{\tan(\theta)} - \dfrac{2}{\tan(2\theta)}$ en précisant l'ensemble de validité.
2. En déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \tan(2^k)$.

Exercice 5.10

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.
2. On considère l'équation suivante
$$8x^3 - 6x + \sqrt{2} = 0 \quad (E)$$
(on admet que cette équation possède au plus trois solutions réelles).
   - **a.** Déterminer les solutions de (E) dans $[-1, 1]$.
   (*Si $x \in [-1,1]$, on pourra introduire* $\theta = \arccos(x)$).
   - **b.** Conclure.

Corrections

Interro de cours

1. On utilise les formules du cours pour obtenir que les égalités correctes sont **(b), (f), (g), (i)**. Pour la **(i)**, on a

$$\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{-\cos(x)}{\sin(x)}=-\frac{1}{\tan(x)}.$$

2. On a $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$. Donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

3. On a $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$, donc

$$\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)=2\left(\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x))\right)=2\left(\cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

On conclut que $\boxed{\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}$.

4. On cherche un angle entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus vaut $\frac{1}{2}$. Or $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$, donc $\boxed{\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}}$

5. On a

$$\tan x=1\Leftrightarrow\tan x=\tan\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x\equiv\frac{\pi}{4}\ \ [\pi].$$

Donc les solutions sont les $\boxed{\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}}$

6. On commence par transformer $\cos(x)+\sin(x)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. On a ensuite

$$\begin{aligned}\cos(x)+\sin(x)=1\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad&\Leftrightarrow\quad\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\\&\Leftrightarrow\quad x-\frac{\pi}{4}\equiv\frac{\pi}{4}\ \ [2\pi]\ \text{ ou }x-\frac{\pi}{4}\equiv-\frac{\pi}{4}\ \ [2\pi]\\&\Leftrightarrow\quad x\equiv\frac{\pi}{2}\ \ [2\pi]\ \text{ ou }x\equiv0\ \ [2\pi].\end{aligned}$$

Donc les solutions sont les $\boxed{\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\text{ et }2\ell\pi,\ \ell\in\mathbb{Z}}$

7. On applique les formules d'Euler

$$\begin{aligned}\sin^4(x)&=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4\\&=\frac{1}{(2i)^4}\left(e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix}\right)\\&=\frac{1}{16}\big(2\cos(4x)-8\cos(2x)+6\big)\\&=\frac{1}{8}\big(\cos(4x)-4\cos(2x)+3\big).\end{aligned}$$

8. On applique la formule de Moivre

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \mathfrak{Re}\left((\cos x + i\sin x)^3\right)\\ &= \mathfrak{Re}\left(\cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3(x)\right)\\ &= \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x\\ &= \cos^3 x - 3\cos x(1-\cos^2 x)\\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x.\end{aligned}$$

Exercice 5.1

1. On a $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ et $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta$, donc

$$\boxed{\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}}$$

2. On a $\frac{\pi}{8} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos\frac{\pi}{8} \geq 0$ et $\sin\frac{\pi}{8} \geq 0$. Ainsi

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\cos^2\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

On procède de même pour le sinus : $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
On fait le quotient pour la tangente et on obtient

$$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1.$$

Ainsi

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \text{et} \quad \tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1}$$

Exercice 5.2

1. On a

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \sin 0 \Leftrightarrow x \equiv 0 \ [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - 0 \ [\pi] \Leftrightarrow x \equiv 0 \ [\pi].$$

Donc les solutions sont les $\boxed{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$

2. On a

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{4} \ [2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{4} \ [2\pi].$$

Donc les solutions sont les $\boxed{\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ et } -\frac{\pi}{4} + 2\ell\pi,\ \ell \in \mathbb{Z}}$

3. On a

$$\cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x \equiv x + \frac{\pi}{3} \ [2\pi] \text{ ou } x \equiv -x - \frac{\pi}{3} \ [2\pi] \Leftrightarrow 2x \equiv -\frac{\pi}{3} \ [2\pi],$$

car la première famille de solutions est vide.

Donc les solutions sont les $\boxed{-\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$

4. On transforme le sinus à l'aide d'un cosinus et on obtient

$$\cos x = \sin x \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{2} - x \ [2\pi] \text{ ou } x \equiv x - \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \Leftrightarrow 2x \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi].$$

car la deuxième famille de solutions est vide.
Donc les solutions sont les $\boxed{\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$

On aurait aussi pu remplacer le cosinus à l'aide d'un sinus, mais il est en général plus léger en terme de calcul de passer par une égalité de cosinus qu'une égalité de sinus si on a le choix.

5. On remplace le sinus à l'aide d'un cosinus et on obtient

$$\begin{aligned}
\sin(3x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \quad & \Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{2} - 3x \equiv 2x - \frac{\pi}{6} \ [2\pi] \text{ ou } \frac{\pi}{2} - 3x \equiv \frac{\pi}{6} - 2x \ [2\pi] \\
& \Leftrightarrow \quad 5x \equiv \frac{2\pi}{3} \ [2\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi].
\end{aligned}$$

Donc les solutions sont les $\boxed{\frac{2\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z} \text{ et } \frac{\pi}{3} + 2\ell\pi,\ \ell \in \mathbb{Z}}$

6. On commence par transformer $\cos x - \sqrt{3}\sin x$:

$$\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) = 2\left(\cos x \cos\frac{\pi}{3} - \sin x \sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Puis, en remarquant que $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, on a

$$\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi] \text{ ou } x + \frac{\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{3} \ [2\pi].$$

Donc les solutions sont les $\boxed{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ et } -\frac{2\pi}{3} + 2\ell\pi,\ \ell \in \mathbb{Z}}$

Exercice 5.3

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On utilise les formules d'Euler

$$\begin{aligned}
\cos^5 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^5 \\
&= \frac{1}{2^5}\left(e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix}\right) \\
&= \frac{1}{32}\big(2\cos(5x) + 10\cos(3x) + 20\cos(x)\big) \\
&= \frac{1}{16}\big(\cos(5x) + 5\cos(3x) + 10\cos(x)\big).
\end{aligned}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On utilise les formules d'Euler

$$\begin{aligned}
\cos^3 x \sin^2 x &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2^3(2i)^2}\left(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}\right)\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right) \\
&= -\frac{1}{32}\left(e^{5ix}+e^{3ix}-2e^{ix}-2e^{-ix}+e^{-3ix}+e^{-5ix}\right) \\
&= -\frac{1}{32}\left(2\cos(5x)+2\cos(3x)-4\cos(x)\right) \\
&= -\frac{1}{16}\left(\cos(5x)+\cos(3x)-2\cos(x)\right).
\end{aligned}$$

Exercice 5.4

1. On pose $\alpha = 2\theta$. On utilise le fait que $1-\cos(2\alpha) = 1-(1-2\sin^2\alpha) =$ et $\sin(2\alpha) = 2\cos\alpha\sin\alpha$. Ainsi

$$\frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{1-\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} = \frac{2\sin^2\alpha}{2\cos\alpha\sin\alpha} = \tan\alpha = \tan\frac{\theta}{2}.$$

2. On applique le résultat précédent pour $\theta = \frac{\pi}{6}$ et on obtient

$$\tan\frac{\pi}{24} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2-\sqrt{3}.$$

Exercice 5.5

1. On utilise les formules d'addition :

$$\cos(a+b)-\cos(a-b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b - (\cos a\cos b + \sin a\sin b).$$

D'où

$$\boxed{\cos(a+b)-\cos(a-b) = -2\sin a\sin b}$$

2. On essaye de se ramener à la formule précédente. On cherche donc à écrire p et q de la forme $p = a+b$ et $q = a-b$. En résolvant le système obtenu, on trouve $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$. En posant ce a et ce b, on obtient $\cos p - \cos q = \cos(a+b)-\cos(a-b) = -2\sin a\sin b$. D'où

$$\boxed{\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

On procède de la même manière pour obtenir $\sin(a+b)+\sin(a-b) = 2\sin a\cos b$ et

$$\boxed{\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

3. On utilise les formules trouvées à la question précédente

$$\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q} = \frac{-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)} = -\frac{\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)}{\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)} = -\tan\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

4. On applique la formule de la question précédente avec $p = \dfrac{\pi}{3}$ et $q = \dfrac{\pi}{4}$ et on obtient

$$\tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}}{2}\right) = -\frac{\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

Exercice 5.6

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On utilise la formule de Moivre

$$\begin{aligned}
\sin 5\theta &= \mathfrak{Im}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^5\right)\\
&= \mathfrak{Im}\left(\cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta - 10i\cos^2\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + i\sin^5\theta\right)\\
&= 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta\\
&= 5(1-\sin^2\theta)^2\sin\theta - 10(1-\sin^2\theta)\sin^3\theta + \sin^5\theta\\
&= 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta.
\end{aligned}$$

2. Si $\theta = \dfrac{\pi}{5}$, alors $\sin(5\theta) = 0$. Donc si on pose $x = \sin\dfrac{\pi}{5}$, on déduit de la question précédente que

$$16x^5 - 20x^3 + 5x = 0.$$

Comme $x \neq 0$, on a $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$. Ainsi x^2 est solution de l'équation $16y^2 - 20y + 5 = 0$. Le discriminant du trinôme obtenu est $\Delta = 20^2 - 4\times 16\times 5 = 20(20-16) = 4\times 5\times 4 = 16\times 5$. On obtient les solutions

$$y_1 = \frac{20-4\sqrt{5}}{2\times 16} = \frac{5-\sqrt{5}}{8} > 0 \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8} > 0.$$

On en déduit donc que $x^2 = y_1$ ou $x^2 = y_2$ puis que $x = \pm\sqrt{y_1}$ ou $x = \pm\sqrt{y_2}$.
Pour savoir laquelle de ces 4 solutions est la bonne, on encadre x.
Comme $0 \leq \dfrac{\pi}{5} \leq \dfrac{\pi}{4}$, on a $0 \leq x \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On remarque ensuite que $y_2 > \dfrac{5}{8} > \dfrac{1}{2}$, donc $\sqrt{y_2} > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On en déduit que la seule valeur possible pour x est $\sqrt{y_1}$ et on en conclut que $\boxed{\sin\dfrac{\pi}{5} = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}}$

Exercice 5.7

1. Si on pose $y = \sin x$, l'équation devient $2y^2 - 3y + 1 = 0$. Il s'agit d'une équation du second degré dont les solutions sont 1 et $\frac{1}{2}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin x = 1 \text{ ou } \sin x = \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad x \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \text{ ou } \left(x \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]\right).
\end{aligned}$$

Donc les solutions sont les $\boxed{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\ ;\ \dfrac{\pi}{6} + 2\ell\pi, \ell\in\mathbb{Z} \text{ et } \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}}$

2. Si on pose $y = \tan(2x)$, l'équation devient $y^2 + (1-\sqrt{3})y - \sqrt{3} = 0$.
Il s'agit d'une équation du second degré dont le discriminant vaut

$$\Delta = (1-\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3} = 1 - 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3} = 1 + 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = (1+\sqrt{3})^2.$$

On en déduit que les solutions de l'équation du second degré vérifiée par y sont -1 et $\sqrt{3}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\tan^2(2x) + (1-\sqrt{3})\tan(2x) - \sqrt{3} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \tan(2x) = -1 \text{ ou } \tan(2x) = \sqrt{3}\\ &\Leftrightarrow \quad 2x \equiv \frac{-}{\pi}4 \ [\pi] \text{ ou } 2x \equiv \frac{\pi}{3}\ [\pi].\end{aligned}$$

Donc les solutions sont les $\boxed{\frac{-}{\pi}8 + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \text{ et } \frac{\pi}{6} + \frac{\ell\pi}{2}, \ell \in \mathbb{Z}}$

3. On commence par utiliser les formules de duplication de cosinus et sinus pour obtenir une formule de duplication pour tangente :

$$\tan(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \frac{2\cos(x)\sin(x)}{\cos^2(x) - \sin^2(x)} = \frac{\cos^2(x) \times 2\tan(x))}{\cos^2(x)(1-\tan^2(x))} = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\tan(x)\tan(2x) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \tan(x) \times \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)} = 1\\ &\Leftrightarrow \quad 2\tan^2(x) = 1 - \tan^2(x)\\ &\Leftrightarrow \quad \tan^2(x) = \frac{1}{3}\\ &\Leftrightarrow \quad \tan(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ou } \tan(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}\\ &\Leftrightarrow \quad x \equiv \frac{\pi}{6}\ [\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{6}\ [\pi].\end{aligned}$$

Donc les solutions sont les $\boxed{\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ et } -\frac{\pi}{6} + \ell\pi, \ell \in \mathbb{Z}}$

4. On utilise le fait que $1 = \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^2$

$$\begin{aligned}\cos^4 x + \sin^4 x = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos^4 x + \sin^4 x = \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^2\\ &\Leftrightarrow \quad \cos^4 x + \sin^4 x = \cos^4 x + 2\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x\\ &\Leftrightarrow \quad \cos^2 x \sin^2 x = 0\\ &\Leftrightarrow \quad \cos(x) = 0 \text{ ou } \sin(x) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad x \equiv 0 \ \left[\frac{\pi}{2}\right].\end{aligned}$$

Donc les solutions sont les $\boxed{\frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}}$

Exercice 5.8

1. On utilise le fait que $\cos(kx) = \mathfrak{Re}(e^{ikx})$ et la linéarité de la partie réelle pour obtenir que

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \mathfrak{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right).$$

La somme S obtenue est une somme géométrique de raison $e^{ix} \neq 1$. Donc

$$S = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{ix}\right)^k = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}.$$

On factorise ensuite par l'angle moitié au numérateur et au dénominateur

$$S = \frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\left(e^{-i\frac{(n+1)x}{2}} - e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}\right)} = e^{i\frac{nx}{2}} \frac{-2i\sin\left(\dfrac{(n+1)x}{2}\right)}{-2i\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}.$$

On extrait la partie réelle de S pour obtenir le résultat demandé.

2. On utilise les formules d'Euler

$$\begin{aligned}
\cos^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3^{-i\theta} + e^{-3i\theta}\right) \\
&= \frac{1}{8}\big(2\cos(3\theta) + 6\cos(\theta)\big) \\
&= \frac{1}{4}\big(\cos(3\theta) + 3\cos(\theta)\big).
\end{aligned}$$

3. On fait commencer la somme à $k = 0$ (pour pouvoir utiliser la question **1.** par la suite) et on utilise la formule de la question précédente pour $\theta = \dfrac{k\pi}{9}$

$$\sum_{k=1}^{9} \cos^3\left(\frac{k\pi}{9}\right) = \sum_{k=0}^{9} \cos^3\left(\frac{k\pi}{9}\right) - 1 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{9} \cos\left(\frac{k\pi}{9}\right) + \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{9} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) - 1.$$

Ensuite, on calcule chacune des deux sommes à l'aide de la question **1.**

$$\sum_{k=0}^{9} \cos\left(\frac{k\pi}{9}\right) = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} \frac{\sin\left(\dfrac{5\pi}{9}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{18}\right)} = 0.$$

Et

$$\sum_{k=0}^{9} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \underbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{=0} \frac{\sin\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)} = 0.$$

On en conclut que $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{9} \cos^3\left(\frac{k\pi}{9}\right) = -1}$

Exercice 5.9

1. L'expression considérée a un sens si et seulement si $\tan(\theta)$ et $\tan(2\theta)$ sont définis et non nuls, c'est-à-dire $\theta \not\equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$ et $2\theta \not\equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$.

On en conclut que l'expression considérée a un sens si et seulement si $\theta \not\equiv 0 \left[\frac{\pi}{4}\right]$.

Ensuite on utilise les formules de duplication de cosinus et sinus pour obtenir une formule de duplication pour tangente :

$$\tan(2\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \frac{2\cos(\theta)\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)} = \frac{\cos^2(\theta)\times 2\tan(\theta))}{\cos^2(\theta)(1-\tan^2(\theta))} = \frac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}.$$

Ainsi

$$\frac{1}{\tan(\theta)} - \frac{2}{\tan(2\theta)} = \frac{1}{\tan(\theta)} - \frac{2(1-\tan^2(\theta))}{2\tan(\theta)} = \frac{\tan^2(\theta)}{\tan(\theta)} = \tan(\theta).$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $2^k \not\equiv 0 \left[\frac{\pi}{4}\right]$, on peut donc appliquer la formule précédente pour $\theta = 2^k$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} 2^k \tan(2^k) &= \sum_{k=0}^{n} 2^k \left(\frac{1}{\tan(2^k)} - \frac{2}{\tan(2\times 2^k)}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2^k}{\tan(2^k)} - \frac{2^{k+1}}{\tan(2^{k+1})}\right).\end{aligned}$$

Il s'agit d'une somme télescopique, et on en conclut que $\boxed{\sum_{k=0}^{n} 2^k \tan(2^k) = \frac{1}{\tan(1)} - \frac{2^{n+1}}{\tan(2^{n+1})}}$

Exercice 5.10

1. On utilise les formules d'Euler

$$\begin{aligned}\cos^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta}+3e^{i\theta}+3^{-i\theta}+e^{-3i\theta}\right) &= \frac{1}{8}\big(2\cos(3\theta)+6\cos(\theta)\big)\\ &= \frac{1}{4}\big(\cos(3\theta)+3\cos(\theta)\big).\end{aligned}$$

2. a. Soit $x \in [-1,1]$. On pose $\theta = \arccos(x) \in [0,\pi]$ et on a $x = \cos(\theta)$. Ainsi

$$\begin{aligned}8x^3-6x+\sqrt{2}=0 &\Leftrightarrow 8\cos^3\theta - 6\cos\theta + \sqrt{2} = 0\\ &\Leftrightarrow 2\cos(3\theta)+\sqrt{2}=0\\ &\Leftrightarrow \cos(3\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &\Leftrightarrow 3\theta \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi] \text{ ou } 3\theta \equiv -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]\\ &\Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{4}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right] \text{ ou } \theta \equiv -\frac{\pi}{4}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right].\end{aligned}$$

L'angle θ étant entre 0 et π, on obtient seulement les trois valeurs suivantes de θ :

$$\frac{\pi}{4}+0\times\frac{2\pi}{3},\quad \frac{\pi}{4}+1\times\frac{2\pi}{3} \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{4}+1\times\frac{2\pi}{3}.$$

On obtient donc les valeurs suivantes pour x :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},$$

et

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

b. L'énoncé nous affirme que l'équation admet au plus trois solutions (fait que l'on pourra aisément démontrer une fois que l'on aura vu le chapitre sur les polynômes). Or on a trouvé trois solutions distinctes à la question précédente. Ce sont donc les seules.
On en conclut que les solutions de (E) sont

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \quad \text{et} \quad \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$

CHAPITRE 6

Fonctions d'une variable réelle

L'essentiel du cours

1 Généralités sur les fonctions

Définition

Soit f une fonction définie sur I. On appelle **graphe** de la fonction f l'ensemble de points :

$$\mathscr{C}_f = \{(x, f(x)) \ / \ x \in I\}.$$

Proposition

Soit $f : I \to J$ une fonction bijective. Le graphe de la fonction f et celui de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$).

Définition

Soit f une fonction définie sur I. On dit que :
- f est **paire** si $\forall x \in I,\ -x \in I$ et $f(-x) = f(x)$.
- f est **impaire** si $\forall x \in I,\ -x \in I$ et $f(-x) = -f(x)$.

- Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Définition

Soient f une fonction définie sur I et $T > 0$. On dit que f est T-**périodique** si

$$\forall x \in I,\ x + T \in I \text{ et } f(x + T) = f(x).$$

Définition

Soient f une fonction définie sur I. On dit que
- f est **majorée** sur I si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$. Alors M est un **majorant** de f sur I.
- f est **minorée** sur I si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \geq m$. Alors m est un **minorant** de f sur I.
- f est **bornée** sur I si elle est majorée et minorée sur I.

Proposition

Une fonction f est bornée sur I si et seulement si $\exists K > 0, \forall x \in\ I,\ |f(x)| \leq K$.

Définition

Soient f une fonction définie sur I et A un sous-ensemble de I. On dit que
- f admet un **maximum** sur A en a si $\forall x \in A, f(x) \leq f(a)$.
- f admet un **minimum** sur A en a si $\forall x \in A, f(x) \geq f(a)$.

Définition

Soient f une fonction définie sur I et A un sous-ensemble de I.
- La fonction f est **croissante** (resp. **strictement croissante**) sur A si :
$$\forall (x,y) \in A^2,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad (\text{resp. } x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$$
- La fonction f est **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) sur A si :
$$\forall (x,y) \in A^2,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \quad (\text{resp. } x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$$
- La fonction f est **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur A si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur A.

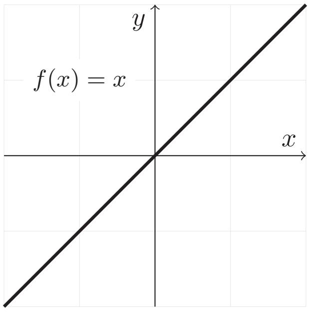
Définition

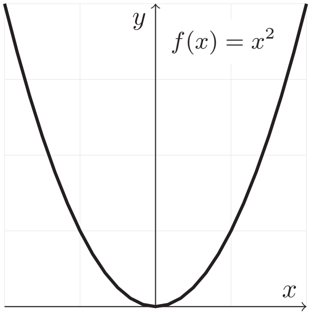
Soient f une fonction définie sur I et g une fonction définie sur J avec $f(I) \subset J$. On définit alors la **composée** de f par g par :
$$g \circ f : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g \circ f(x) = g\left(f(x)\right) \end{array}.$$

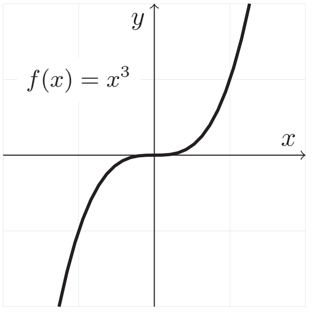
2 Fonctions puissance entières

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$, a la même parité que n, est dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto nx^{n-1}$.

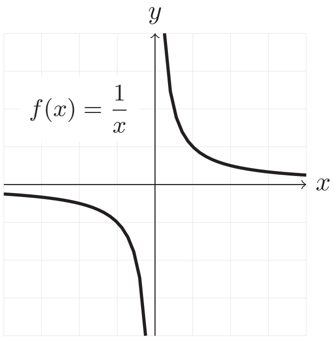


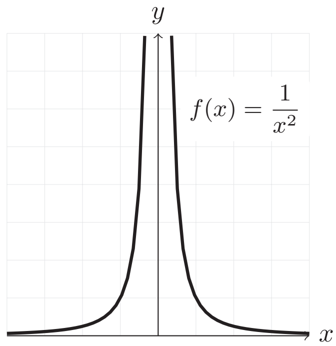




Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$, a la même parité que n, est dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée $x \mapsto -\dfrac{n}{x^{n+1}}$.





En utilisant le fait que $\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$, on peut réécrire ces fonctions sous la forme $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$. Les propriétés de parité et la formule de la dérivée sont les mêmes que pour $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ (mais l'ensemble de définition change).

Définition

On appelle **fonction polynomiale** toute fonction de la forme $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ où $n \in \mathbb{N}$ et $a_n, \ldots, a_0$ sont des réels.

Définition

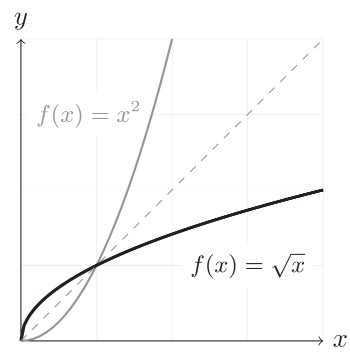
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On appelle **racine carrée** de x, notée $\sqrt{x}$ le réel positif dont le carré est x. On peut ainsi définir la fonction racine carrée

$$\begin{array}{rccc} \sqrt{\cdot}: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Propriétés de la fonction racine carrée

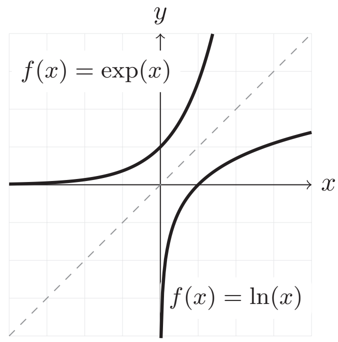
La fonction racine carrée est

- strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$,
- continue sur $\mathbb{R}_+$,
- dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.



La fonction racine carrée est la bijection réciproque de la fonction $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$.

3 Fonctions logarithme et exponentielle



Définition

- Le fonction **exponentielle**, notée exp, est la seule fonction vérifiant $y' = y$ et $y(0) = 1$.
- La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est la bijection réciproque de exp.

Propriétés de la fonction exp

La fonction exp est strictement croissante, dérivable (et donc continue) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) = \exp(x), \quad \exp(0) = 1, \quad \lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0.$$

De plus, si a, b sont des réels et si $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b), \quad \exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}, \quad \text{et} \quad \exp(na) = \exp(a)^n.$$

Propriétés de la fonction ln

La fonction ln est strictement croissante, dérivable (et donc continue) de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x) = \frac{1}{x}, \quad \ln(1) = 0, \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

De plus, si a, b sont des réels strictement positifs et si $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b), \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b), \quad \text{et} \quad \ln(a^n) = n\ln(a).$$

Définition

Si $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$, on note $a^b = \exp(b\ln(a))$.

Si on note $e = \exp(1)$, on a donc $e^x = \exp(x\ln(e)) = \exp(x)$.

Définition

- Les fonctions exponentielles sont les fonctions du type $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.
- La fonction **logarithme décimal**, notée log, est la fonction $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Si $a \in \mathbb{R}$, on a $\log(10^a) = \frac{\ln(10^a)}{\ln(10)} = \frac{a\ln(10)}{\ln(10)} = a$.
La fonction log est donc la bijection réciproque de la fonction $x \mapsto 10^x$.

Définition

Les **fonctions puissances** sont les fonctions $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto x^a = e^{a\ln(x)}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Propriétés de la fonction puissance

Une fonction puissance $x \mapsto x^a$ est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $x \mapsto ax^{a-1}$.

- Si $a > 0$, alors la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$$\lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x^a = 0.$$
- Si $a < 0$, alors la fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$$\lim_{x\to+\infty} x^a = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x^a = +\infty.$$

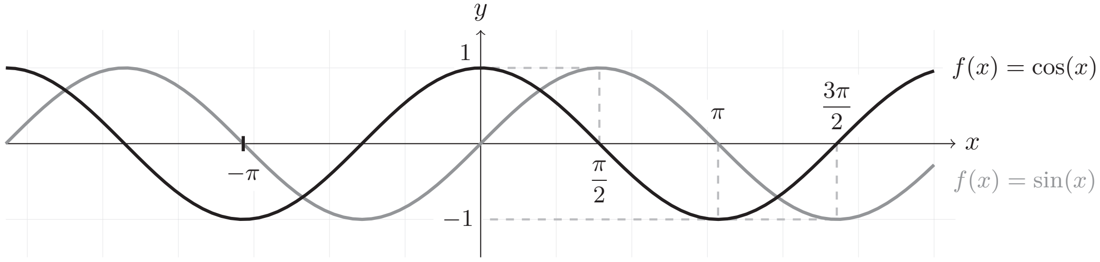
Règles de calcul des puissances

Si $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $a, b \in \mathbb{R}$, on a
$$(xy)^a = x^a y^a, \quad x^{a+b} = x^a x^b, \quad x^{ab} = (x^a)^b \quad \text{et} \quad \ln(x^a) = a\ln(x).$$

4 Fonctions trigonométriques

Propriétés des fonctions cos et sin

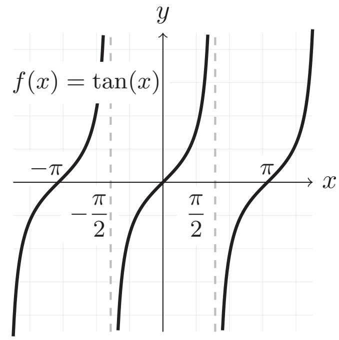
Les fonctions **cosinus** et **sinus** sont dérivables (donc continues) sur $\mathbb{R}$ et, si $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\cos'(x) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad \sin'(x) = \cos(x).$$
La fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.



Propriétés de la fonction tan

La fonction **tangente** est impaire, π-périodique, dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \ / \ k\in\mathbb{Z}\right\}$ et, si x est dans cet ensemble, on a

$$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{et} \quad \tan'(x)=1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}.$$



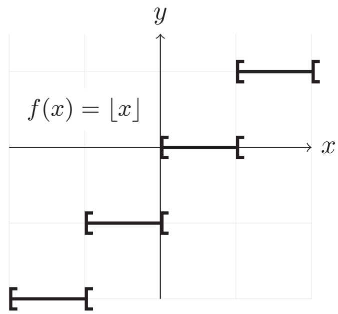
5 Fonction partie entière et fonction valeur absolue

Définition et propriétés de la fonction partie entière

La fonction **partie entière**, définie par

$$\begin{array}{rccc} \lfloor\cdot\rfloor: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lfloor x\rfloor \end{array}$$

est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et est discontinue en chaque point de $\mathbb{Z}$.



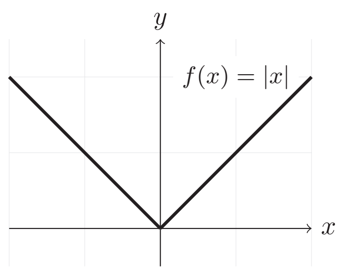
Définition et propriétés de la fonction valeur absolue

La fonction **valeur absolue**, définie par

$$\begin{array}{rccc} |\cdot|: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & |x| \end{array}$$

est paire, continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et de dérivée

$$x\mapsto\begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ -1 & \text{si } x<0 \end{cases}$$



6 Limites usuelles

Théorème des croissances comparées

On a les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+}x\ln(x)=0.$$

Ce qu'il faut retenir de ce théorème, c'est surtout qu'en $+\infty$ l'exponentielle l'emporte sur une puissance qui l'emporte sur un ln ; et qu'en 0, une puissance l'emporte sur un ln.

Limites classiques en 0

On a les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

7 Dérivées

Toutes les dérivées usuelles sont regroupées dans le formulaire **Dérivées usuelles** en appendice (page 486).

Opérations sur les dérivées

Soient u et v dérivables sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les fonctions $\lambda u + v$ et uv sont dérivables sur I et

$$(\lambda u + v)' = \lambda u' + v' \quad \text{et} \quad (uv)' = u'v + uv'.$$

De plus si la fonction v ne s'annule pas sur I, alors les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I et

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Dérivée et composition

Soient $u : I \to \mathbb{R}$ et $v : J \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $u(I) \subset J$. La fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et

$$(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u).$$

Définition

Soient f une fonction de deux variables définie sur un domaine $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in \mathscr{D}$.

- Si on note $f_1 : x \mapsto f(x, y_0)$ et que cette fonction f_1 est dérivable en x_0, alors on dit que f admet une **dérivée partielle** par rapport à x en (x_0, y_0) et on note $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_1'(x_0)$.
- Si on note $f_2 : x \mapsto f(x_0, y)$ et que cette fonction f_2 est dérivable en y_0, alors on dit que f admet une **dérivée partielle** par rapport à y en (x_0, y_0) et on note $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_2'(y_0)$.

Pour calculer ces dérivées partielles, il suffit de dériver par rapport à une variable et de considérer les autres variables comme des constantes.

8 Primitives

Toutes les primitives usuelles sont regroupées dans le formulaire **Primitives usuelles** en appendice (page 487).

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Une **primitive** de f sur I est une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $F' = f$.

Une première façon de déterminer une primitive est de reconnaître une forme dérivée connue (d'où l'intérêt de très bien connaître ses dérivées).

Structure des primitives d'une fonction

Soit f une fonction admettant une primitive F. Alors, les primitives de f sont de la forme $F + k$ avec k une constante.

Toutes les primitives sont donc trouvées à une constante près. On parle donc d'une primitive de f et non de la primitive de f (à moins d'avoir précisé une de ses valeurs).

Existence d'une primitive

Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.

Définition

Soient f une fonction continue sur $[a, b]$ et F une primitive de f sur $[a, b]$. On appelle **intégrale** de f de a à b le réel

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Les primitives étant calculées à une constante additive près, on pourra écrire $F(x) = \displaystyle\int^x f(t)\mathrm{d}t$ pour désigner une primitive F de f.

Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a, b]$ telles que u' et v' soient continues sur $[a, b]$. On a

$$\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t.$$

Cette méthode permet de calculer une primitive pour un produit de fonction que l'on ne pouvait pas reconnaître comme une dérivée usuelle (comme par exemple les fonctions du type $P(x)\ln(x)$, $P(x)e^x$, $P(x)\cos(x)$, $P(x)\sin(x)$ où P est une fonction polynomiale).

9 Équations différentielles linéaires à cœfficients constants

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

- Les solutions de l'équation différentielle (dite homogène ou sans second membre) $y' + ay = 0$ sont de la forme $y(x) = Ke^{-ax}$ où $K \in \mathbb{R}$.
- Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sont de la forme $y(x) = Ke^{-ax} + \dfrac{b}{a}$ où $K \in \mathbb{R}$.

Dans la pratique, quand on cherche les solutions d'une équation différentielle du premier ordre $y' + ay = b$ $(\mathscr{E})$:

- on cherche les solutions y_h de l'équation homogène associée $y' + ay = 0$ $(\mathscr{H})$
- on cherche une solution particulière constante y_p de $(\mathscr{E})$
- on somme y_h et y_p pour trouver les solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{E})$.

Équation différentielle linéaire homogène du second ordre

Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$ et $(\mathscr{H})$ l'équation différentielle linéaire homogène $ay'' + by' + cy = 0$. On appelle **équation caractéristique** de $(\mathscr{H})$: $ar^2 + br + c = 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 et les solutions de l'équation $(\mathscr{H})$ sont
$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une solution réelle double r_0 et les solutions de l'équation $(\mathscr{H})$ sont
$$y(x) = (\lambda x + \mu)e^{r_0 x} \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
- Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées : $\rho + i\omega$ et $\rho - i\omega$ (où $\rho \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}^*$) et les solutions de l'équation $(\mathscr{H})$ sont
$$y(x) = e^{\rho x}\left(\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)\right) \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre

Soient $ay'' + by' + cy = d$ $(\mathscr{E})$ une équation différentielle linéaire du second ordre à cœfficients constants, $ay'' + by' + cy = 0$ $(\mathscr{H})$ son équation homogène associée et y_p une solution de $(\mathscr{E})$. Toute solution de $(\mathscr{E})$ se décompose comme la somme de y_p et d'une solution y_h de $(\mathscr{H})$.

Dans la pratique, quand on cherche les solutions d'une équation différentielle du second ordre $(\mathscr{E})$:

- on cherche les solutions y_h de l'équation homogène associée $(\mathscr{H})$,
- on cherche une solution particulière constante y_p de $(\mathscr{E})$,
- on somme y_h et y_p pour trouver les solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{E})$.

Les méthodes à maîtriser

Méthode 6.1 : Étudier une fonction

Voici le plan d'étude d'une fonction

1. Déterminer le domaine de définition ;
2. Déterminer les symétries et les périodicités afin de réduire l'ensemble d'étude ;
3. Déterminer les variations et les limites ;
4. Déterminer les extrema éventuels ;
5. Tracer le graphe en faisant apparaitre les asymptotes et les tangentes remarquables.

Exemple d'application
Étudier les fonctions $x \mapsto \dfrac{\sqrt{|1-x^2|}}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{3}{2+\cos(\pi x)} - 2$ et tracer leurs graphes.

(1) On pose $f(x) = \dfrac{\sqrt{|1-x^2|}}{x}$. On a $x \in \mathscr{D}_f \Leftrightarrow (\left|1-x^2\right| \geq 0$ et $x \neq 0)$. On en déduit que $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$. La fonction f est clairement impaire, on restreint donc l'intervalle d'étude à $\mathbb{R}_+^*$ (on complétera avec une symétrie par rapport à l'origine). Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad \text{si } x < 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \quad \text{si } x > 1.$$

Sur $\mathbb{R}_+^*$, si $x \neq 1$, $\left|1-x^2\right| > 0$. Donc f est dérivable sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.
Si $0 < x < 1$, on a

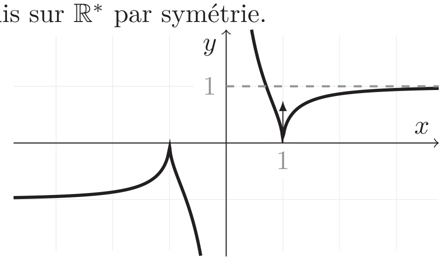
$$f'(x) = \frac{\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \times x - \sqrt{1-x^2} \times 1}{x^2} = \frac{\dfrac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{x^2} = -\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}.$$

De même, si $x > 1$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.
De plus $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$ et si $x > 1$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1.$$

On obtient donc le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$. En ajoutant le fait que $f'(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} -\infty$ et $f'(x) \xrightarrow[x \to 1^+]{} +\infty$, on trace le graphe de f sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}^*$ par symétrie.

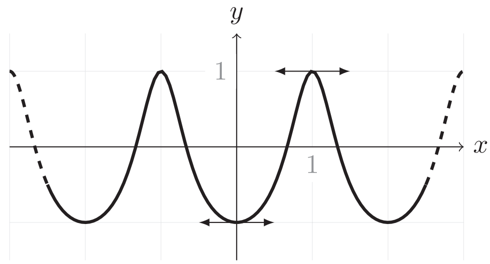
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\infty \,\Vert\, +\infty$	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1



(2) On pose $g(x) = \dfrac{3}{2+\cos(\pi x)} - 2$. Comme, pour tout x réel, $2+\cos(\pi x) \neq 0$, on a $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}$. La fonction g étant paire et 2-périodique, on restreint l'intervalle d'étude à $[0,1]$. Par somme et composition, g est dérivable sur $[0,1]$. Si $x \in [0,1]$, on a $g'(x) = \dfrac{3\pi\sin(\pi x)}{(2+\cos(\pi x))^2}$.

On a, de plus, $g(0) = -1$ et $g(1) = 1$. On obtient donc le tableau de variations de g sur $[0, 1]$ et on trace le graphe de g par symétrie et périodicité.

x	0		1
$g'(x)$	0	$+$	0
g	-1	$\nearrow$	1



Voir exercices **6.10**, **6.11**, **6.14**, **6.15** et **6.16**.

Méthode 6.2 : Déterminer une primitive

À ce stade de l'année, pour déterminer une primitive d'une fonction, on peut s'y prendre de deux manières :

- On reconnait une forme connue (du type $\frac{u'}{u}$, $\alpha u' u^{\alpha-1}$, $u'e^u$, etc)
- Sinon, on voit notre fonction comme un produit et on fait une intégration par parties pour simplifier l'expression à intégrer. Par exemple, si on veut intégrer une expression de la forme $P(x)\ln(x)$ (où P est une fonction polynomiale) : on dérive le ln et on primitive P. Si on veut intégrer une expression de la forme $P(x)e^x, P(x)\cos(x)$ ou $P(x)\sin(x)$ (où P est une fonction polynomiale) : on dérive le polynôme et primitive l'autre fonction et on recommence jusqu'à ce que le polynôme devienne constant.

Exemple d'application

Calculer une primitive de $x \mapsto -\tan(x)$ et une primitive de $x \mapsto (x^2 + x + 1)e^x$.

(1) En transformant légèrement $-\tan(x) = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)}$, on retrouve une forme connue du type $\dfrac{u'}{u}$ (avec $u(x) = \cos(x)$). Une primitive de cette fonction est donc $x \mapsto \ln|\cos(x)|$.

(2) On effectue plusieurs intégrations par parties pour faire « disparaître » le polynôme (on a le droit de les faire car les fonctions présentes sont dérivables une infinité de fois) :

$$\int^x \underbrace{(t^2+t+1)}_{u(t)}\underbrace{e^t}_{v'(t)}\mathrm{d}t = [\underbrace{(t^2+t+1)}_{u(x)}\underbrace{e^t}_{v(t)}]^x - \int^x \underbrace{(2t+1)}_{u'(t)}\underbrace{e^t}_{v(t)}\mathrm{d}t = (x^2+x+1)e^x - \int^x (2t+1)e^t\mathrm{d}t$$

On effectue de nouveau une intégration par partie

$$\int^x (2t+1)e^t\mathrm{d}t = [(2t+1)e^t]^x - \int^x 2e^t\mathrm{d}t = (2x+1)e^x - 2e^x = (2x-1)e^x.$$

En regroupant ces deux calculs, on obtient donc que

$$\int^x (t^2+t+1)e^t\mathrm{d}t = (x^2+x+1)e^x - (2x-1)e^x = (x^2-x+2)e^x.$$

Ainsi la fonction $x \mapsto (x^2 - x + 2)e^x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto (x^2 + x + 1)e^x$.

Voir exercices **6.5** et **6.6**.

Méthode 6.3 : Établir une inégalité à l'aide d'une étude de fonction

Lorsqu'on veut montrer une inégalité, mais que les opérations sur les inégalités ne suffisent pas, on peut s'aider d'une étude de fonction pour y parvenir. On commence par transformer l'inégalité en mettant tout ce qui est variable du même côté et on donne un nom à cette fonction. On l'étudie et, à l'aide des ses variations, on la majore ou la minore (en fonction de l'inégalité à montrer).

Exemple d'application

Montrer que, si $x \geq 0$, alors $\sin(x) \leq x$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Cela revient à montrer que $\sin(x) - x \leq 0$. On pose donc la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sin(x) - x$ et on l'étudie. Par somme, f est dérivable et on a $f'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0$. On obtient donc le tableau de variations suivant

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	0	$\searrow$	

On en déduit donc que, si $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq 0$, c'est-à-dire $\sin(x) \leq x$.

Voir exercices **6.10**, **6.14** et **6.15**.

Méthode 6.4 : Résoudre une équation différentielle linéaire à cœfficients contants

Pour résoudre une équation différentielle linéaire à cœfficients constants, deux cas :

1. On trouve les solutions y_h de l'équation homogène associée en se référant au cours.

2. On cherche une solution particulière y_p constante (de sorte que $y_p' = y_p'' = 0$) et on conclut en disant que les solutions de l'équation sont de la forme $y = y_h + y_p$.

Exemple d'application

Résoudre les équations différentielles $y' + 2y = 4$ et $y'' - 3y' + 2y = -6$.

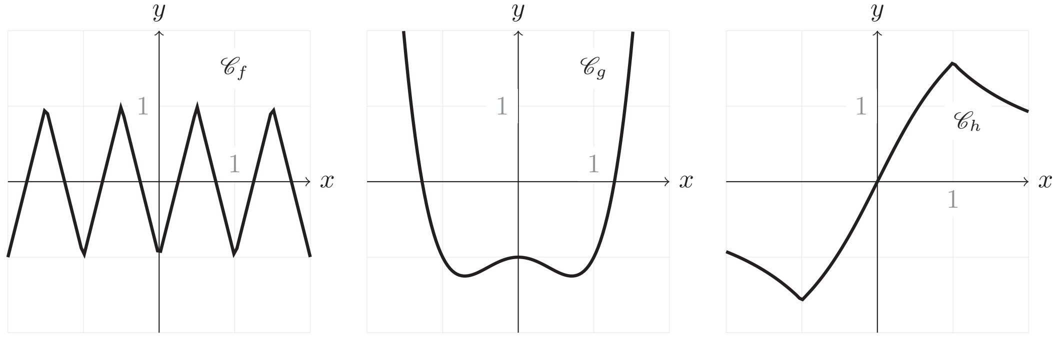
(1) On note $(\mathscr{E}_1)$ l'équation différentielle. L'équation homogène associée est $y' + 2y = 0$ et les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme $y_h(x) = Ke^{-2x}$ avec $K \in \mathbb{R}$.
On cherche ensuite une solution particulière constante y_p. Comme $y_p' = 0$, on obtient que $0 + 2y_p = 4$ c'est-à-dire $y_p = 2$. Ainsi les solutions de $(\mathscr{E}_1)$ sont les fonctions de la forme $y(x) = 2 + Ke^{-2x}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

(2) On note $(\mathscr{E}_2)$ l'équation différentielle. L'équation homogène associée est $y'' - 3y + 2y = 0$. L'équation caractéristique est donc $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont $r = 1$ et $r = 2$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme $y_h(x) = \lambda e^x + \mu e^{2x}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
On cherche ensuite une solution particulière constante y_p. Comme $y_p'' = y_p' = 0$, on obtient que $0 - 3 \times 0 + 2y_p = -6$ c'est-à-dire $y_p = -3$. Ainsi les solutions de $(\mathscr{E}_2)$ sont les fonctions de la forme $y(x) = -3 + \lambda e^x + \mu e^{2x}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Voir exercice **6.7**.

Interro de cours

1. Soient f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et dont les graphes sont

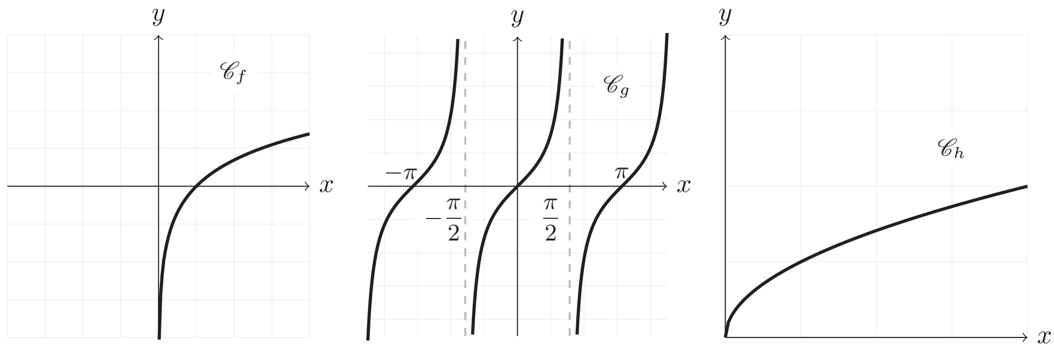


(a) Étudier la parité et la périodicité de ces trois fonctions.

(b) Ces fonctions sont-elles majorées ? Minorées ? Bornées ?

(c) Pour chaque fonction, déterminer, s'il existe, son maximum et son minimum.

2. Reconnaitre les fonctions usuelles associées aux graphes ci-dessous



3. Étudier la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^2}$.

4. Montrer que, si $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x \geq x+1$.

5. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

(a) Calculer la dérivée de f.

(b) Déterminer une primitive de f.

6. Déterminer une primitive de $x \mapsto (x^2 - x + 1)\ln(x)$.

7. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = -8$.

Exercices

Pour s'entraîner

Exercice 6.1

Parmi les relations suivantes, lesquelles sont vraies, pour tous a, b et $c \in \mathbb{R}_+^*$:

1. $(a^b)^c = a^{bc}$
2. $a^b a^c = a^{bc}$
3. $a^{2b} = (a^b)^2$
4. $(ab)^c = a^{c/2} b^{c/2}$
5. $(a^b)^c = a^{(b^c)}$
6. $(a^b)^c = (a^c)^b$.

Exercice 6.2

Simplifier a^b pour

1. $a = x$ et $b = \dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x}$

2. $a = \exp(x^2)$ et $b = \dfrac{1}{x} \ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)$.

Exercice 6.3

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2 \cos(x)$

2. $f(x) = \sin^9(x)$

3. $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

4. $f(x) = \ln\left(1 + \sqrt{2 + \cos(x)}\right)$

5. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

6. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

7. $f(x) = \ln(x)\sqrt{1 + \cos^2(x)}$.

Exercice 6.4

Déterminer les dérivées partielles de :

1. $f(x, y) = xy^2 + yx^2$

2. $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$

3. $f(x, y) = e^{xy^2}$.

Exercice 6.5

En reconnaissant une forme connue, déterminer une primitive des fonctions suivantes

1. $f(x) = (x-1)e^{x^2 - 2x}$

2. $f(x) = \dfrac{x}{(x^2 - 1)^3}$

3. $f(x) = (x^2 + 3)\sqrt{x^3 + 9x - 5}$

4. $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$

5. $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$

6. $f(x) = \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x - \sin x}$

7. $f(x) = \left(\dfrac{x}{e}\right)^x \ln x$.

Exercice 6.6

En se servant d'intégration(s) par parties, déterminer une primitive des fonctions suivantes

1. $f(x) = (x-1)\cos x$ **2.** $f(x) = x^n \ln x$ **3.** $f(x) = \ln(1+x^2)$ **4.** $f(x) = \dfrac{x}{\cos^2 x}$.

Exercice 6.7

Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $y' - 3y = 9$
2. $y'' + 4y' + 5y = -10$
3. $y'' + 5y' - 6y = 3$
4. $y'' - 6y' + 9y = 6$.

Exercice 6.8

Montrer que la composée d'une fonction croissante par une fonction décroissante est une fonction décroissante.

Exercice 6.9

Montrer que la dérivée d'une fonction paire est impaire et que la dérivée d'une fonction impaire est paire.

Exercice 6.10

1. Montrer que si $x \in \mathbb{R}_+$, $\sin(x) \leq x$ et que si $x \in \mathbb{R}_-$, $\sin(x) \geq x$.

2. En déduire que, si $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

Pour aller plus loin

Exercice 6.11

1. Montrer que $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$.

2. En déduire que $\forall n \geq 2$, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{-n}$.

Exercice 6.12

Soient $x \in]-1, 1[$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.

1. Si $x \in]-1, 1[$, calculer $xf'(x)$ de deux façons différentes.

2. Déterminer une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kx^k$ puis sa limite quand $n \to +\infty$.

Exercice 6.13

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $p \in [0,1]$ et $f(x,y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

1. Déterminer une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^k y^{n-k}$.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k p^k (1-p)^{n-k}$.

Exercice 6.14

Soient $0 < a \leq b$, $f(x) = \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ et $g(x) = a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax)$.

1. Étudier la fonction g sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. En déduire que $\ln(1+\frac{a}{b})\ln(1+\frac{b}{a}) \leq (\ln 2)^2$.

Exercice 6.15

Montrer que

$$\forall x \in]0,1[,\ x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}.$$

(On pourra commencer par composer par ln*.)*

Exercice 6.16

Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \end{array}$$

1. Étudier f.
2. Justifier que $f(\mathbb{R}) =]-1,1[$.
3. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1,1[$. Résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x, en déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ et que

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

4. Étudier f^{-1}.
5. Tracer le graphe de f et de f^{-1} sur le même graphique.

Corrections

Interro de cours

1. On se fie à la partie de la courbe que l'on nous donne en extrapolant son comportement au-delà.

(a) La fonction f est paire et 1-périodique. La fonction g est paire sans périodicité. La fonction h est impaire sans périodicité.

(b) La fonction f est bornée. La fonction g est minorée mais pas majorée. La fonctions h est bornée.

(c) Par lecture graphique, le minimum de f est -1 et son maximum est 1.
Le minimum de g est environ $-1,25$ et g ne possède pas de maximum.
Le minimum de h est environ $-1,57$ et son maximum est environ $1,57$ (il s'agit en réalité de $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$).

2. On reconnaît $f = \ln$, $g = \tan$ et $h = \sqrt{\cdot}$.

3. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$. Tout d'abord, si $x \neq 0$, on a

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} = \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1.$$

Ensuite, par quotient, f est dérivable et, si $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \frac{2x(1+x^2) - x^2 \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Ainsi, $f'(x)$ est du signe de x. On en déduit le tableau de variations suivant

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

On aurait aussi pu remarquer que f était paire. Mais dans un cas aussi simple, ça ne valait pas la peine d'utiliser cet argument de symétrie.

4. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$.
Par différence, f est dérivable et, si $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = e^x - 1$.
On obtient donc le tableau de variations suivant

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On en déduit que, si $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \geq 0$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x+1$.

5. **(a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f'(x) = \frac{1 \times \sqrt{1+x^2} - x\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} = \frac{\frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \quad \text{avec } u(x) = 1+x^2.$$

Or $\sqrt{u}$ est une primitive de $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$. On obtient donc une primitive de f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{F(x) = \sqrt{1+x^2}}.$$

6. On procède par intégration par parties. Soit $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\int^x (t^2 - t + 1)\ln(t)\mathrm{d}t &= \left[\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t\right)\ln(t)\right]^x - \int^x \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t\right)\frac{1}{t}\mathrm{d}t \\
&= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right)\ln(x) - \int^x \left(\frac{t^2}{3} - \frac{t}{2} + 1\right)\mathrm{d}t \\
&= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right)\ln(x) - \left(\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4} + x\right).
\end{aligned}$$

7. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2. On commence par résoudre l'équation caractéristique de l'équation différentielle : $r^2 + 4r + 4 = 0$, c'est-à-dire $(r+2)^2 = 0$. On obtient donc une solution double -2 et les solutions de l'équation différentielle homogène associée sont les fonctions

$$y_h : t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{-2t} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière y_p constante. On a donc $y_p'' = y_p' = 0$, donc $4y_p = -8$ et $y_p = -2$. D'après le principe de superposition, les solutions de l'équation différentielle proposée sont les fonctions

$$\boxed{y : t \mapsto -2 + (\lambda + \mu t)e^{-2t} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

Exercice 6.1

Les relations toujours vraies sont les **1.**, **3.** et **6.**.

Exercice 6.2

Dans les deux questions on utilise la forme exponentielle $a^b = e^{b \ln a}$.

1. $a^b = \exp\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\ln x\right) = \exp\big(\ln(\ln x)\big) = \ln(x)$.

2. $a^b = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\ln\left(\exp(x^2)\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln(x) \times x^2\right) = \exp\big(\ln(x)\big) = x$.

Exercice 6.3

1. On a $f'(x) = 2x\cos(x) - x^2\sin(x)$.
2. On utilise l'identité $\left(u^9\right)' = 9u'u^8$ et on a $f'(x) = 9\cos(x)\sin^8(x)$.
3. On a $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
4. On utilise l'identité $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ et on a

$$f'(x) = \frac{\frac{-\sin(x)}{2\sqrt{2+\cos(x)}}}{1+\sqrt{2+\cos(x)}} = -\frac{\sin(x)}{2\sqrt{2+\cos(x)}\left(1+\sqrt{2+\cos(x)}\right)}.$$

5. On a $f'(x) = \dfrac{1\times(x^2+1)-(x+1)\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = -\dfrac{x^2+2x}{\left(x^2+1\right)^2}$.
6. On a $f'(x) = \dfrac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} = \dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$.
7. On a $f'(x) = \dfrac{1}{x}\sqrt{1+\cos^2(x)} + \ln(x)\dfrac{-2\sin(x)\cos(x)}{2\sqrt{1+\cos^2(x)}}$.

Exercice 6.4

1. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2+2xy$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + x^2$.
2. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \dfrac{2y}{(x+y)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \dfrac{-2x}{(x+y)^2}$.
3. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2e^{xy^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xye^{xy^2}$.

Exercice 6.5

Dans chaque question F dénommera une primitive de f.

1. On reconnaît une forme $\dfrac{1}{2}u'e^u = \dfrac{1}{2}(e^u)'$, donc $\boxed{F(x) = \dfrac{1}{2}e^{x^2-2x}}$
2. On reconnaît une forme $-\dfrac{1}{4}\left(-2\dfrac{u'}{u^3}\right) = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{u^2}\right)'$, donc $\boxed{F(x) = -\dfrac{1}{4(x^2-1)^2}}$
3. On reconnaît une forme $\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{3}{2}u'\sqrt{u}\right) = \dfrac{2}{9}\left(u^{\frac{3}{2}}\right)'$, donc $\boxed{F(x) = \dfrac{2}{9}(x^3+9x-5)^{\frac{3}{2}}}$
4. On reconnaît une forme $\dfrac{u'}{u} = (\ln|u|)'$ avec $u(x) = \ln x$, donc $\boxed{F(x) = \ln|\ln x|}$
5. En multipliant au numérateur et au dénominateur par e^x, on obtient $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$.

   On reconnaît une forme $\dfrac{u'}{u} = (\ln|u|)'$, donc $\boxed{F(x) = \ln(e^x+1)}$
6. On utilise le fait que $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$ pour obtenir que $f(x) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x-\sin x}$.

On reconnaît une forme $\frac{1}{2}\frac{u'}{u} = \frac{1}{2}(\ln|u|)'$, donc $\boxed{F(x) = \frac{1}{2}\ln|x - \sin x|}$

7. On transforme un peu l'expression de f :

$$f(x) = \exp\left(x \ln\left(\frac{x}{e}\right)\right)\ln(x) = \ln(x)\exp\left(x\ln x - x\right).$$

Or, si on note $u(x) = x\ln x - x$, alors $u'(x) = \ln x$. On reconnaît une forme $u'e^u = (e^u)'$, donc

$$\boxed{F(x) = \exp\left(x\ln x - x\right) = \left(\frac{x}{e}\right)^x}$$

Exercice 6.6

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\int^x (t-1)\cos(t)\mathrm{d}t = [(t-1)\sin(t)]^x - \int^x 1 \times \sin(t)\mathrm{d}t = (x-1)\sin(x) + \cos(x).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\int^x t^n \ln(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t)\right]^x - \int^x \frac{t^{n+1}}{n+1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\int^x 1 \times \ln(1+t^2)\mathrm{d}t &= \left[t\ln(1+t^2)\right]^x - \int^t \frac{2t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&= x\ln(1+x^2) - 2\int^x \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\mathrm{d}t \\
&= x\ln(1+x^2) - 2\int^x \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x).
\end{aligned}$$

4. Soit $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. On a $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, donc

$$\int^x \frac{t}{\cos^2(t)}\mathrm{d}t = [t\tan(t)]^x - \int^x 1 \times \tan(t)\mathrm{d}t.$$

On remarque ensuite que $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ et est donc de la forme $-\frac{u'}{u} = (\ln|u|)'$. On obtient ainsi

$$\int^x \frac{t}{\cos^2(t)}\mathrm{d}t = x\tan(x) + \ln|\cos(x)|.$$

Exercice 6.7

1. Les solutions de l'équation différentielle homogène associée sont les $y_h : t \mapsto Ke^{3t}$ avec $K \in \mathbb{R}$.
Une solution particulière constante est $y_p = -3$.
Ainsi, d'après le principe de superposition, les solutions sont les fonctions de la forme

$$\boxed{y : t \mapsto Ke^{3t} - 3}$$

2. On commence par résoudre l'équation caractéristique $r^2+4r+5=0$ pour obtenir deux solutions complexes $-2+i$ et $-2-i$. Les solutions de l'équation différentielle homogène associée sont les

$$y_h : t \mapsto e^{-2t}\left(\lambda\cos(t)+\mu\sin(t)\right) \quad \text{avec } \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Une solution particulière constante est $y_p=-2$.
Ainsi, d'après le principe de superposition, les solutions sont les fonctions de la forme

$$\boxed{y : t \mapsto e^{-2t}\left(\lambda\cos(t)+\mu\sin(t)\right)-2 \quad \text{avec } \lambda,\mu\in\mathbb{R}}$$

3. On commence par résoudre l'équation caractéristique $r^2+5r-6=0$ pour obtenir deux solutions réelles 1 et -6. Les solutions de l'équation différentielle homogène associée sont les

$$y_h : t \mapsto \lambda e^{t}+\mu e^{-6t} \quad \text{avec } \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Une solution particulière constante est $y_p=-\dfrac{1}{2}$.
Ainsi, d'après le principe de superposition, les solutions sont les fonctions de la forme

$$\boxed{y : t \mapsto \lambda e^{t}+\mu e^{-6t}-\frac{1}{2} \quad \text{avec } \lambda,\mu\in\mathbb{R}}$$

4. On commence par résoudre l'équation caractéristique $r^2-6r+9=0$ pour obtenir une seule solution réelle 3. Les solutions de l'équation différentielle homogène associée sont les

$$y_h : t \mapsto (\lambda+\mu t)e^{3t} \quad \text{avec } \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Une solution particulière constante est $y_p=\dfrac{2}{3}$.
Ainsi, d'après le principe de superposition, les solutions sont les fonctions de la forme

$$\boxed{y : t \mapsto (\lambda+\mu t)e^{3t}+\frac{2}{3} \quad \text{avec } \lambda,\mu\in\mathbb{R}}$$

Exercice 6.8

Soient $g : J \to \mathbb{R}$ croissante et $f : I \to J$ décroissante où I est J sont des parties de $\mathbb{R}$.
Soient $a,b\in I$ tels que $a\leq b$. Comme f est décroissante, on a $f(a)\geq f(b)$. Comme g est croissante, on a $g(f(a))\geq g(f(b))$. On a donc montré que

$$\forall a,b\in I,\ a\leq b \Rightarrow g\circ f(a)\geq g\circ f(b).$$

On en conclut que $g\circ f$ est décroissante.

Exercice 6.9

Soient I une partie de $\mathbb{R}$, f une fonction dérivable paire et g une fonction dérivable impaire. On a

$$\forall x\in I,\ f(-x)=f(x).$$

Si on dérive cette identité (en voyant $x\mapsto f(-x)$ comme la composée de f par $x\mapsto -x$), on obtient

$$\forall x\in I,\ -f'(-x)=f'(x),$$

et f' est impaire.
De même, $\forall x\in I$ $g(-x)=-g(x)$, donc en dérivant, on obtient $\forall x\in I$, $-g'(-x)=-g(x)$ et g est paire.

Exercice 6.10

1. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x - x$.
Par différence, f est dérivable et, si $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$.
On obtient donc le tableau de variations suivant

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$			$-$		
f		$\searrow$	0	$\searrow$	

On en déduit donc que f est négative sur $\mathbb{R}_+$ et positive sur $\mathbb{R}_-$.
D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\sin(x) \leq x$ et $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $\sin(x) \geq x$.

2. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$.
Par différence, g est dérivable et, si $x \in \mathbb{R}$, on a $g'(x) = -\sin(x) + x$.
D'après la question précédente, on obtient le tableau de variations suivant

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On en déduit donc que g est positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 6.11

1. On note f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = \ln(1 + x) - x$.
Par différence, f est dérivable et, si $x > -1$, on a $f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = -\frac{x}{x+1}$.
On obtient le tableau de variations suivant

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	0	$\searrow$	

On en déduit donc que f est négative sur $]-1, +\infty[$. Ainsi $\forall x > -1$, $\ln(1 + x) \leq x$.

2. Soit $n \geq 2$. On applique l'inégalité de la question précédente à $x = \dfrac{1}{n} > -1$ et on obtient

$$\begin{aligned} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \quad \text{donc} \quad & n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq 1 \quad \text{car } n > 0 \\ \text{donc} \quad & \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \leq 1 \\ \text{donc} \quad & \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \quad \text{car exp est croissante.} \end{aligned}$$

Pour l'autre inégalité, on utilise l'inégalité de la question précédente avec $x = -\dfrac{1}{n} > -1$ car $n \geq 2$ et on obtient

$$\begin{aligned} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \leq -\frac{1}{n} \quad \text{donc} \quad & -n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \geq 1 \quad \text{car } -n < 0 \\ \text{donc} \quad & \ln\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right) \geq 1 \\ \text{donc} \quad & \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} \geq e \quad \text{car exp est croissante.} \end{aligned}$$

Exercice 6.12

1. Premièrement, par linéarité de la dérivation, on a, si $x \in]-1,1[$,

$$xf'(x) = x\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} kx^k.$$

Deuxièmement, $f(x)$ est une somme géométrique de raison $x \neq 1$, donc

$$f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Donc $f'(x) = \dfrac{-(n+1)x^n(1-x)-(1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$. Ainsi

$$xf'(x) = \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}.$$

2. On obtient donc que $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kx^k = \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}}$

Comme $x \in]-1,1[$, on a $(n+1)x^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $nx^{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées. On en conclut que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} kx^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x}{(1-x)^2}}$$

Exercice 6.13

1. D'après la formule du binôme de Newton, on a $f(x,y) = (x+y)^n$. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^k y^{n-k} = x \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1} y^{n-k} = x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x \times n(x+y)^{n-1} = nx(x+y)^{n-1}.$$

2. On remplace x par p et y par $1-p$ dans la formule obtenue à la question précédente et on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k p^k (1-p)^{n-k} = np(p+1-p)^{n-1} = np.$$

Exercice 6.14

1. Par différence et produit, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \geq 0$, on a

$$g'(x) = ab\ln(1+bx) + a(1+bx)\frac{b}{1+bx} - ab\ln(1+ax) - b(1+ax)\frac{a}{1+ax} = ab\ln\left(\frac{1+bx}{1+ax}\right).$$

Or $0 < a < b$ et $x \geq 0$, donc $1+ax \leq 1+bx$ et $g'(x) \geq 0$.
On obtient le tableau de variations suivant

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
g	0	$\nearrow$	

2. Par quotient, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$, alors

$$f'(x) = \frac{a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax)}{(1+ax)(1+bx)\big(\ln(1+bx)\big)^2} = \frac{g(x)}{(1+ax)(1+bx)\big(\ln(1+bx)\big)^2}.$$

Or, d'après la question précédente, la fonction g est positive.
On en déduit que $f' \geq 0$ et on en conclut que f est croissante.

3. Comme $0 < a < b$, on a $0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$.

Par décroissance de f on obtient que $f\left(\dfrac{1}{a}\right) \geq f\left(\dfrac{1}{b}\right)$, c'est-à-dire

$$\frac{\ln(2)}{\ln(1+\frac{b}{a})} \geq \frac{\ln(1+\frac{a}{b})}{\ln(2)}.$$

On finit en multipliant de chaque côté par $\ln\left(1+\dfrac{b}{a}\right) > 0$ et par $\ln(2)$, on en conclut que

$$\boxed{\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2}.$$

Exercice 6.15

Soit $x \in]0,1[$. En composant par ln qui est une bijection strictement croissante, on a

$$x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln\left(x^x(1-x)^{1-x}\right) \geq \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x) \geq -\ln 2.$$

On note donc f la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(x) = x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x) + \ln 2$.
Par produit et somme, f est dérivable et, si $x \in]0,1[$, on a

$$f'(x) = \ln(x) + x\frac{1}{x} - \ln(1-x) + (1-x)\frac{(-1)}{1-x} = \ln(x) - \ln(1-x).$$

Ainsi

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq \ln(1-x) \Leftrightarrow x \geq 1-x \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

De plus, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \left(1-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) + \ln 2 = 0$.
On obtient le tableau de variations suivant

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On en déduit que f est positive. Donc $\forall x \in]0,1[$, $x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x) \geq -\ln 2$. Ainsi, d'après l'équivalence établie au début du raisonnement, on en conclut que $\forall x \in]0,1[$, $x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 6.16

1. La fonction f est impaire car, si $x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -f(x).$$

Par somme et quotient, f est dérivable et, si $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0.$$

De plus

$$f(x) = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

et, f étant impaire, $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -1$.

On obtient le tableau de variations suivant

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		
f	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

2. La fonction f est continue et strictement croissante, donc

$$f(\mathbb{R}) = f\left(]-\infty, +\infty[\right) = \left]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-1,1[.$$

3. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1,1[$. On a

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y(e^x + e^{-x}) = e^x - e^{-x} \\ &\Leftrightarrow \quad y(e^{2x}+1) = e^{2x} - 1 \quad \text{car } e^x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (y-1)e^{2x} = -y-1 \\ &\Leftrightarrow \quad e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \quad \text{car } 1-y \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \quad \text{car } 1+y>0 \text{ et } 1-y>0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right). \end{aligned}$$

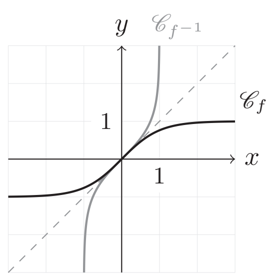
On en déduit que tout élément de $]-1,1[$ admet un unique antécédent par f dans $\mathbb{R}$.
Ainsi f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$.
Par définition, on a $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

On en conclut que $\boxed{\forall y \in]-1,1[,\ f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)}$

4. Par symétrie, f^{-1} est impaire et strictement croissante. On obtient le tableau de variations suivant

x	-1	0	1
f^{-1}	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

5. On obtient



Partie 2

Algèbre générale

CHAPITRE 7

Systèmes linéaires

L'essentiel du cours

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ sera toujours égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Systèmes linéaires et matrices

Définition

- On appelle **système linéaire** de n équations à p inconnues tout système de la forme

$$\mathscr{S} : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p &= b_2 \\ \quad\vdots & \ \ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p &= b_n \end{cases}$$

où les $a_{i,j}$ et les $b_i \in \mathbb{K}$.
- Une solution du système est un p-uplet de valeurs $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ pour lesquelles les n équations du système sont vérifiées.
- On appelle **système homogène** associé au système précédent le système obtenu en remplaçant les b_i par 0.

- Avec deux inconnues, une équation linéaire $ax + by + c = 0$ représente une droite de $\mathbb{R}^2$ (si $(a, b) \neq (0, 0)$).
- Avec trois inconnues, une équation linéaire $ax + by + cz + d = 0$ représente un plan dans $\mathbb{R}^3$ (si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$).
- Avec trois inconnues, un système de deux équations non proportionnelles représente l'intersection de deux plans non parallèles de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire une droite de $\mathbb{R}^3$.

Définition

- On dit qu'un système $\mathscr{S}$ est **compatible** s'il admet au moins une solution. Sinon, on dit qu'il est **incompatible**.
- On dit que deux systèmes $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ sont **équivalents** s'ils ont exactement les mêmes solutions. On note $\mathscr{S}_1 \Leftrightarrow \mathscr{S}_2$.

Définition

Soit $\mathscr{S}$ le système de la première définition. On appelle **matrice** (resp. **matrice augmentée**) du système $\mathscr{S}$ le tableau à n lignes et p colonnes (resp. $p+1$ colonnes)

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad \left(\text{resp. } \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} & b_n \end{array}\right)\right)$$

Il ne s'agit que d'une façon de "coder" notre système afin d'alléger un peu la rédaction lors de sa résolution.

Définition

On appelle **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système ou d'une matrice les opérations suivantes :

- l'échange de la ligne i et de la ligne j. On note $L_i \longleftrightarrow L_j$.
- la multiplication de la ligne i par un scalaire α ***non nul***. On note $L_i \longleftarrow \alpha L_i$.
- l'ajout de la ligne j multiplié par un scalaire α à la ligne i. On note $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$.

On peut combiner les deux dernières opérations en $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$, avec $\alpha \neq 0$, pour un peu plus de rapidité dans les calculs.

Proposition

Si on peut passer du système $\mathscr{S}_1$ au système $\mathscr{S}_2$ par des opérations élémentaires sur les lignes, alors ils sont équivalents.

2 Résolution des systèmes linéaires

Définition

- On dit qu'un système est **échelonné** si, dans sa matrice, le nombre de zéros précédant la première valeur non nulle d'une ligne augmente ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste plus de ligne ou jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des zéros.
- Dans un système échelonné, on appelle **pivot** le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle dans la matrice du système.

Une matrice échelonnée est de la forme suivante

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & \oplus & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \oplus & * & * & * & * & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & * & * & * & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \oplus & * & * & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

Le nombre de ligne de zéros en bas peut être nul.
Il en va de même du nombre de colonne de zéros à gauche.

Pivot de Gauss

Tout système linéaire est équivalent à un système échelonné.

L'algorithme du Pivot de Gauss (cf méthode **7.1**) permet de déterminer un tel système échelonné.

Définition

Soit $\mathscr{S}$ un système linéaire équivalent à un système échelonné $\mathscr{S}_1$ de matrice A_1.

- On appelle **inconnue principale** de $\mathscr{S}$ une inconnue se situant sur la colonne d'un pivot de A_1. Les autres inconnues sont appelées **inconnues secondaires**.
- On appelle **rang** de $\mathscr{S}$ le nombre de pivots de A_1.

- Dans un système avec p inconnues et de rang r, il y a donc r inconnues principales et $p-r$ inconnues secondaires.
- En allant de bas en haut, il est facile de résoudre un système échelonné, en exprimant les inconnues principales en fonctions des inconnues secondaires (qui jouent donc le rôle de paramètres dans l'ensemble des solutions).
- Si on se place dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, l'ensemble des solutions est
  (1) vide si le système est incompatible ;
  (2) un singleton s'il est compatible sans inconnue secondaire, c'est-à-dire s'il y a une seule solution ;
  (3) une droite s'il est compatible avec une inconnue secondaire ;
  (4) un plan s'il est compatible avec deux inconnues secondaires.

Nombre de solutions d'un système

- Un système linéaire admet zéro, une seule ou une infinité de solutions.
- Un système de n équations à n inconnues de rang n admet une unique solution. On dit qu'il s'agit d'un **système de Cramer**.

Les méthodes à maîtriser

Méthode 7.1 : Pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss permet d'obtenir un système échelonné équivalent à un système linéaire quelconque en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes. Cette méthode fonctionne aussi pour les matrices. Le principe général est de placer les pivots à leurs places et d'éliminer tous les cœfficients non nuls qui se trouvent en-dessous. Plus précisément, sur une matrice avec n lignes et p colonnes, voici l'algorithme du Pivot de Gauss :

1. On commence en haut à gauche de la matrice avec $i = 1$ et $j = 1$.

2. Sur la $i^{\text{ème}}$ colonne, on regarde s'il y a un coefficient non nul entre la $j^{\text{ème}}$ ligne et la dernière ligne.

- Si oui, on note q le numéro de la ligne du coefficient non nul que l'on a choisi (notre pivot) et on effectue $L_q \leftrightarrow L_j$, puis on passe à l'étape 3.
- Sinon, on augmente i de 1. Si $i > p$, on s'arrête, sinon, on retourne à l'étape 2.

3. Le coefficient $a_{j,i}$ est non nul, on effectue donc les opérations $L_k \leftarrow a_{j,i}L_k - a_{k,i}L_j$, pour tout k entre $j+1$ et n, pour faire apparaître des 0 sous notre pivot.

4. On augmente i et j de 1. Si $i > p$ ou $j > n$, on s'arrête sinon on retourne à l'étape 2.

Exemple d'application

Échelonner les systèmes $\boldsymbol{\mathscr{S}_1 : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 5y + 7z = 0 \end{cases}}$ **et le système** $\boldsymbol{\mathscr{S}_2 : \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ 2x + y = 3. \end{cases}}$

(1) On applique l'algorithme du pivot de Gauss au système $\mathscr{S}_1$:

$$\mathscr{S}_1 \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ \phantom{x+{}} y + 2z = 0 \\ \phantom{x+y+{}} 0 = 0. \end{cases}$$

On remarque que pour le deuxième pivot, on avait le choix entre le 1 de la deuxième ligne et le 2 de la troisième ligne. Quand on fait l'algorithme à la main, on essaye de choisir des pivots engendrant les calculs les plus légers : le 1 de la deuxième ligne était donc la meilleure option (en plus d'être déjà à la bonne place).

(2) On applique l'algorithme du pivot de Gauss au système $\mathscr{S}_2$:

$$\mathscr{S}_2 \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y = 2 \\ \phantom{x+{}} y = 1 \\ - y = -1 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y = 2 \\ \phantom{x+{}} y = 1 \\ \phantom{x+{}} 0 = 0. \end{cases}$$

Il est important de bien préciser les opérations effectuées à chaque étape pour que le calcul puisse être suivi par une tierce personne (le correcteur par exemple).

Voir exercices **7.1** et **7.2**.

Méthode 7.2 : Résoudre un système linéaire

Pour résoudre un système linéaire, on commence par échelonner sa matrice augmentée grâce à la méthode du pivot de Gauss pour ensuite décoder et récupérer un système échelonné et équivalent à celui de départ (si le système est petit, on peut même pivoter directement sur le système). Si on obtient une équation du type « $0 = 1$ » (ou toute autre égalité impossible), le système est incompatible. Sinon, on exprime les inconnues principales en fonctions des inconnues secondaires en allant du bas vers le haut.

Exemple d'application

Résoudre les systèmes $\boldsymbol{\mathscr{S}_1 : \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y-z=0 \\ -x+y+5z=1 \end{cases}}$ **et** $\boldsymbol{\mathscr{S}_2 : \begin{cases} x-y+z=1 \\ x-2y-z=6 \\ 2x-y+4z=-3. \end{cases}}$

(1) On applique l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice augmentée de $\mathscr{S}_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right).$$

Le système $\mathscr{S}_1$ est donc équivalent à $\begin{cases} x+y+z=3 \\ -y-3z=-3 \\ 0=-8 \end{cases}$ et n'a donc pas de solution.

(2) On applique l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice augmentée de $\mathscr{S}_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Le système $\mathscr{S}_2$ est donc équivalent au système $\begin{cases} x-y+z=1 \\ -y-2z=5 \\ 0=0. \end{cases}$

On en déduit que $y=-5-2z$ puis que $x=1+y-z=-4-3z$.
Les solutions de $\mathscr{S}_2$ sont donc les $(-4-3z, -5-2z, z)$, $z \in \mathbb{K}$.

Il est tout à fait possible d'intervertir l'ordre des inconnues dans le système avant de le coder en matrice (pour simplifier les calculs). Il faudra alors faire bien attention de reprendre le même ordre des inconnues au moment de décoder.

Voir exercices **7.1** et **7.2**.

Interro de cours

1. Échelonner la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$.

2. Résoudre le système linéaire $\begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \\ x - y + z = 1. \end{cases}$

3. Résoudre le système linéaire $\begin{cases} y - z = 1 \\ x + y - 2z = 0 \\ x + 2y - 3z = 2. \end{cases}$

4. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ?

(a) Un système homogène est toujours compatible.

(b) Un système de n équations à n inconnues admet toujours une unique solution.

(c) Un système de n équations à p inconnues avec $n > p$ admet 0 ou 1 solution.

(d) Un système de n équations à p inconnues avec $n < p$ admet 0 ou une infinité de solutions.

5. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ?

(a) Un système de n équations à p inconnues de rang p admet au moins une solution.

(b) Un système de n équations à p inconnues de rang p admet au plus une solution.

(c) Un système de n équations à p inconnues de rang n admet au moins une solution.

(d) Un système de n équations à p inconnues de rang n admet au plus une solution.

Exercices

Pour s'entraîner

Exercice 7.1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes linéaires suivants :

1. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 5y = 2 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ x - 4y + 7z = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x - y + 3z + t = -1 \\ x + 2z + 3t = 2 \\ -x - 2y - 7t = -6 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y + 3z + 2t = -2 \\ 2x + 3y + 4z + t = -1 \\ 3x + 7y + z - 6t = 6 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + y + z + t = -2 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ x + y + 2z = 3 \\ 2y - 2z + t = -15. \end{cases}$

Exercice 7.2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes linéaires suivants, en discutant suivant la valeur du paramètre m :

1. $\begin{cases} 3x + y + 2z = 7 \\ x + y + z = 2 \\ 3x + 3y + 7z = 10 \\ 3x + y - 2z = m \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - my + z = 2 \\ x + (m+1)z = 3 \\ x + my + 3z = 4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + my + z = 2 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y + mz = 3 \\ x + 2y + (m+1)z = 2 \\ 2x + y + (m-1)z = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} mx + y + z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \\ (m+1)x - y + z = 0. \end{cases}$

Pour aller plus loin

Exercice 7.3

Dans le plan usuel $\mathbb{R}^2$, on prend deux vecteurs $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$ non colinéaires.

1. Montrer que l'équation $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{0}$ n'admet que $(x, y) = (0, 0)$ comme solution.

2. En déduire que pour tout vecteur $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique couple (x, y) tel que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Exercice 7.4

Soient $p > n$ et $u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{K}^n$.

Montrer qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0$.

Corrections

Interro de cours

1. On applique l'algorithme du pivot de Gauss

$$A=\begin{pmatrix}0&2&3\\1&-1&2\\2&-6&-4\end{pmatrix}\underset{\substack{L_2\leftrightarrow L_1\\L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\Leftrightarrow}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&2&3\\0&-4&-8\end{pmatrix}\underset{L_3\leftarrow L_3+2L_2}{\Leftrightarrow}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&2&3\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

2. On applique l'algorithme du Pivot de Gauss en utilisant la matrice augmentée du système

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-2&1\\2&1&-1&2\\1&-1&1&1\end{array}\right)\underset{\substack{L_3\leftrightarrow L_1\\L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\Leftrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\0&3&-2&1\\0&3&-4&-1\end{array}\right)\underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\Leftrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\0&3&-2&1\\0&0&-2&-2\end{array}\right).$$

Le système est donc équivalent au système $\begin{cases}x-\ y+\ z=\ 1\\ \quad 3y-2z=\ 1\\ \qquad -2z=-2.\end{cases}$

On en déduit que $z=1$ puis que $y=1$ et $x=1$.
La seule solution du système est donc $(1,1,1)$.

3. On applique l'algorithme du Pivot de Gauss en utilisant la matrice augmentée du système

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&-1&1\\1&1&-2&0\\1&2&-3&2\end{array}\right)\underset{\substack{L_2\leftrightarrow L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\Leftrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&0\\0&1&-1&1\\0&1&-1&2\end{array}\right)\underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\Leftrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&0\\0&1&-1&1\\0&0&0&1\end{array}\right).$$

Le système est donc équivalent au système $\begin{cases}x+y-2z=0\\ \quad y-\ z=1\\ \qquad 0=1.\end{cases}$

On en conclut que le système n'a pas de solution.

4. **(a)** **Vrai.** Le n-uplet $(0,0,\dots,0)$ est toujours solution.

(b) **Faux.** Le système $\begin{cases}x-y=0\\x-y=1\end{cases}$ est un système de deux équations à deux inconnues n'ayant clairement pas de solution.

(c) **Faux.** Le système $\begin{cases}x-y=0\\x-y=0\\x-y=0\end{cases}$ a strictement plus d'équations que d'inconnues et admet une infinité de solutions (tous les (y,y) avec $y\in\mathbb{R}$).

(d) **Vrai.** Le système admet au plus n inconnues principales. Comme $p>n$, il y aura nécessairement des inconnues secondaires. Si le système admet au moins une solution, alors les solutions sont paramétrisées par les inconnues secondaires.

Ainsi le système a 0 ou une infinité de solutions

5. **(a)** **Faux.** Le système $\begin{cases}x-y=0\\ \quad y=0\\ \quad y=1\end{cases}$ a deux inconnues et est de rang 2, mais n'a pas de solution.

(b) **Vrai.** Le système n'a que des inconnues principales. Il n'y aura donc aucun paramètres dans les solutions. Ainsi, s'il y a une solution, elle sera unique.

(c) **Vrai.** Une fois échelonné, on n'aura pas d'équation du type $0 = b_k$ (où $b_k \in \mathbb{R}$). On pourra donc toujours trouver une/des solution(s) au système.

(d) **Faux.** Le système $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ \quad y - z = 0 \end{cases}$ a deux équations et est de rang 2, pourtant il admet une infinité de solutions (tous les $(0, z, z)$ avec $z \in \mathbb{R}$).

Exercice 7.1

Après avoir appliqué l'algorithme du Pivot de Gauss, on obtient les solutions suivantes

1. $\left(1, \frac{1}{5}, \frac{6}{5}\right)$.
2. Aucune solution.
3. Aucune solution.
4. Tous les $(-5 - 5z - 5t, 3 + 2z + 3t, z, t)$ avec $z, t \in \mathbb{R}$.
5. $(-2, -3, 4, -1)$.

Exercice 7.2

1. On note $\mathscr{S}$ le système. On pivote comme d'habitude pour arriver à

$$\mathscr{S} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \ y \ + z = & 2 \\ \quad - 2y - z = & 1 \\ \qquad\qquad z = & 1 \\ \qquad\qquad 0 = & m - 3. \end{cases}$$

On distingue donc deux cas

- Si $m \neq 3$, alors le système n'a pas de solution.
- Si $m = 3$, alors la seule solution du système est $(2, -1, 1)$.

2. On note $\mathscr{S}$ le système. Cette fois-ci le paramètre est dans la partie homogène du système. On va donc essayer, autant que possible, de ne pas utiliser un pivot contenant un paramètre (sinon, on pourrait être amener à distinguer des cas pendant le pivot). On va donc essayer de laisser les paramètres le plus à droite de la partie homogène du système. On va donc commencer à pivoter avec la deuxième ligne (car elle n'a pas de paramètre sur le y).

$$\mathscr{S} \underset{\substack{L_2 \leftrightarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m+1 & 3 \\ 0 & -m & -m & -1 \\ 0 & m & 2-m & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m+1 & 3 \\ 0 & -m & -m & -1 \\ 0 & 0 & 2-2m & 0 \end{array}\right).$$

Maintenant que le système est échelonné, pour savoir quels cas distinguer, on regarde les termes diagonaux.

- Si $m = 0$, alors $\mathscr{S}$ est équivalent à $\begin{cases} x \ + \ z \ = \ 3 \\ \qquad 0 \ = -1 \\ \qquad 2z = \ 0 \end{cases}$ et n'a donc pas de solution.
- Si $m = 1$, alors $\mathscr{S}$ est équivalent à $\begin{cases} x \qquad + 2z = \ 3 \\ \quad - y - \ z \ = -1 \\ \qquad\quad 0 \ = \ 0 \end{cases}$ dont les solutions sont les $(3-2z, 1-z, z)$ avec $z \in \mathbb{R}$.
- Si $m \neq 0$ et $m \neq 1$, alors le système est de Cramer et a une seule solution $\left(3, \frac{1}{m}, 0\right)$.

On en conclut que l'ensemble $S_{\mathscr{S}}$ des solutions du système $\mathscr{S}$ est

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Si } m=0, & S_{\mathscr{S}}=\varnothing \\ \text{Si } m=1, & S_{\mathscr{S}}=\{(3-2z,1-z,z)\ /\ z\in\mathbb{R}\} \\ \text{Sinon,} & S_{\mathscr{S}}=\left\{\left(3,\dfrac{1}{m},0\right)\right\}. \end{array}}$$

3. On note $\mathscr{S}$ le système et on procède comme à la question précédente.

$$\mathscr{S} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2\leftrightarrow L_3\\ L_3\leftarrow L_3+(m-1)L_2}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3(m-1) & m \end{array}\right).$$

On distingue donc deux cas

- Si $m=1$, alors $\mathscr{S}$ est équivalent à $\begin{cases} x+y+\ z=1 \\ \quad -y-3z=1 \\ \qquad\quad 0=1 \end{cases}$ et n'a donc pas de solution.
- Si $m\neq 1$, alors $\mathscr{S}$ est de Cramer et a pour seule solution $\left(\dfrac{4m-6}{3m-3},\dfrac{1}{m-1},-\dfrac{m}{3m-3}\right)$.

On en conclut que l'ensemble $S_{\mathscr{S}}$ des solutions du système $\mathscr{S}$ est

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Si } m=1, & S_{\mathscr{S}}=\varnothing \\ \text{Sinon,} & S_{\mathscr{S}}=\left\{\left(\dfrac{4m-6}{3m-3},\dfrac{1}{m-1},-\dfrac{m}{3m-3}\right)\right\}. \end{array}}$$

4. On note $\mathscr{S}$ le système et on procède comme à la question précédente.

$$\mathscr{S} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -m-1 & -5 \end{array}\right) \underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -m & -6 \end{array}\right).$$

On distingue donc deux cas

- Si $m=0$, alors $\mathscr{S}$ est équivalent à $\begin{cases} x+y \qquad = 3 \\ \quad y+z=-1 \\ \qquad\ 0=-6 \end{cases}$ et n'a donc pas de solution.
- Si $m\neq 0$, alors $\mathscr{S}$ est de Cramer et a pour seule solution $\left(\dfrac{-2m+6}{m},\dfrac{-m-6}{m},\dfrac{6}{m}\right)$.

On en conclut que l'ensemble $S_{\mathscr{S}}$ des solutions du système $\mathscr{S}$ est

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Si } m=0, & S_{\mathscr{S}}=\varnothing \\ \text{Sinon,} & S_{\mathscr{S}}=\left\{\left(\dfrac{-2m+6}{m},\dfrac{-m-6}{m},\dfrac{6}{m}\right)\right\} \end{array}}$$

5. On note $\mathscr{S}$ le système. On remarque que les paramètres sont sur la gauche de la partie homogène du système. Un pivot direct va propager le paramètre partout dans le système et on va devoir distinguer beaucoup de cas durant le pivot. On va donc commencer par inverser les colonnes 1 et 3 avant de coder. Il faudra bien faire attention de décoder « dans le même ordre » $(z,y,x$ et non $x,y,z)$.

$$\mathscr{S} \Leftrightarrow \begin{cases} z+\ y+\quad mx\quad =2 \\ z+2y+\qquad x\quad =1 \\ z-\ y+(m+1)x=0 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftrightarrow L_1\\ L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & m-1 & 1 \\ 0 & -3 & m & -1 \end{array}\right) \underset{L_3\leftarrow L_3-3L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & m-1 & 1 \\ 0 & & -2m+3 & -4 \end{array}\right)$$

On distingue donc deux cas

- Si $m = \dfrac{3}{2}$, alors $\mathscr{S}$ est équivalent à $\begin{cases} z + 2y + x = 1 \\ \quad - y + \frac{x}{2} = 1 \\ \qquad\quad 0 = -4 \end{cases}$ et n'a donc pas de solution.
- Si $m \neq \dfrac{3}{2}$, alors $\mathscr{S}$ est équivalent à $\begin{cases} z + 2y + \quad x = 1 \\ \quad - y + (m-1)x = 1 \\ \qquad (-2m+3)x = -4. \end{cases}$

  Il est donc de Cramer et a pour seule solution $\left(\dfrac{4}{2m-3}, \dfrac{2m-1}{2m-3}, \dfrac{-2m-5}{2m-3}\right)$.

On en conclut que l'ensemble $S_{\mathscr{S}}$ des solutions du système $\mathscr{S}$ est

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Si } m = \dfrac{3}{2}, & S_{\mathscr{S}} = \varnothing \\ \text{Sinon,} & S_{\mathscr{S}} = \left\{\left(\dfrac{4}{2m-3}, \dfrac{2m-1}{2m-3}, \dfrac{-2m-5}{2m-3}\right)\right\} \end{array}}$$

Exercice 7.3

1. On commence par chercher à retranscrire sur a, b, c et d le fait que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient non colinéaires. Il est plus simple de regarder la négation

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{v} = \vec{0} \text{ ou } \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \vec{u} = \lambda \vec{v} \\ &\Leftrightarrow \quad (c,d) = (0,0) \text{ ou } \exists \lambda \in \mathbb{R}, \left(\begin{cases} a = \lambda c \\ b = \lambda d \\ d \neq 0 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} a = \lambda c \\ b = \lambda d \\ d = 0 \end{cases}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad (c,d) = (0,0) \text{ ou } \exists \lambda \in \mathbb{R}, \left(\begin{cases} \quad a \quad = \lambda c \\ bc - ad = 0 \\ \quad d \quad \neq 0 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} a = \lambda c \\ b = 0 \\ d = 0 \end{cases}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad ad - bc = 0. \end{aligned}$$

En prenant la négation, on en déduit que $ad - bc \neq 0$.
Ainsi, si $a \neq 0$,

$$x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + cy = 0 \\ bx + dy = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow aL_2 - bL_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} ax + \qquad cy \quad = 0 \\ \qquad (ad - bc)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Si $a = 0$, alors $c \neq 0$ (sinon on aurait $\vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ seraient colinéaire). Ainsi

$$x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \qquad cy = 0 \\ bx + dy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Dans les deux cas, la seule solution est $(x, y) = (0, 0)$.

2. Soit $\vec{w} = (\alpha, \beta)$. On a

$$x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{w} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + cy = \alpha \\ bx + dy = \beta. \end{cases}$$

Le système linéaire homogène associé est de Cramer d'après la question précédente, donc ce système aussi. Il admet donc une unique solution.

Exercice 7.4

Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, on explicite u_i en $u_i = (a_{1,i}, a_{2,i}, \ldots, a_{n,i})$. et on a

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_{1,1}\lambda_1 + a_{1,2}\lambda_2 + \cdots + a_{1,p}\lambda_p & = 0 \\ a_{2,1}\lambda_1 + a_{2,2}\lambda_2 + \cdots + a_{2,p}\lambda_p & = 0 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ a_{n,1}\lambda_1 + a_{n,2}\lambda_2 + \cdots + a_{n,p}\lambda_p & = 0 \end{cases}$$

Le système obtenu a strictement plus d'inconnues que d'équations. Une fois réduit il y aura nécessairement des inconnues secondaires. Donc ce système admet soit aucune solution soit une infinité de solutions. Or le n-uplet $(0, 0, \ldots, 0)$ est solution de ce système. Il y a donc une infinité de solutions. On peut donc trouver une solution $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ du système. On a donc montré que

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \neq (0, 0, \ldots, 0),\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0.$$

CHAPITRE 8

Matrices

L'essentiel du cours

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ sera toujours égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n, p et q seront des entiers naturels non nuls.

1 Matrices particulières et opérations

Définition

On appelle **matrice** à n lignes et p colonnes à cœfficients dans $\mathbb{K}$ un tableau à n lignes et p colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$. On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces matrices.

- Si $n = p$, on parle de **matrice carrée** d'ordre n et on note plus simplement $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.
- Si $n = 1$, on parle de **matrice ligne**.
- Si $p = 1$, on parle de **matrice colonne**.

Définition

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A est

- **diagonale** si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$. On note $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces matrices.
- **triangulaire supérieure** (resp. **inférieure**) si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$ (resp. $i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$). On noté $\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.

Définition

- La **matrice nulle** de taille $n \times p$ est la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ composée uniquement de 0.
- La **matrice identité** d'ordre n est la matrice diagonale d'ordre n avec des 1 sur la diagonale. On la note I_n.

Définition

- Si $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \quad \text{et} \quad \lambda \cdot A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

- Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on définit

$$A \times B = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}}$$

Pour la somme et la multiplication par un scalaire, tout se passe comme dans $\mathbb{K}$.

Pour le produit de matrices

- Il faut que le nombre de colonnes de la première matrice soit égal au nombre de lignes de la deuxième pour que le produit soit défini.
- S'il n'y a pas d'ambiguïté, on écrit généralement λA et AB plutôt que $\lambda \cdot A$ et $A \times B$.
- Le produit est associatif et distributif par rapport à la somme, mais le parallèle avec les calculs dans $\mathbb{K}$ s'arrête là.
- Le produit n'est pas commutatif : on n'a pas forcément $AB = BA$.
- Si $AB = 0$, on n'a pas forcément $A = 0$ ou $B = 0$.
- Si $AB = AC$, on n'a pas forcément $B = C$.
- Les identités remarquables usuelles sont en général fausses pour les matrices.
- Si A et B commutent (c'est-à-dire $AB = BA$), on retrouve alors toutes les identités remarquables avec ces deux matrices là.

Multiplication par la matrice identité

Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $I_n A = A$ et $AI_p = A$.

Produit de matrices diagonales ou triangulaires

Si A et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont diagonales (resp. triangulaires supérieures), alors AB est diagonale (resp. triangulaire supérieure) et les cœfficients diagonaux de AB sont les produits terme à terme des cœfficients diagonaux de A par ceux de B.

Définition

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on définit A^p, pour $p \in \mathbb{N}$, par récurrence de la manière suivante $A^0 = I_n$ et $\forall p \in \mathbb{N},\ A^{p+1} = A^p \times A$.

Binôme de Newton

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$ et $p \in \mathbb{N}$. On a $(A+B)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$.

Si A et B ne commutent pas, cette formule est fausse.

Définition

- Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle **transposée** de A la matrice $(a_{j,i})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
  On la note ${}^tA$ (ou A^T).
- On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une **matrice symétrique** si ${}^tA = A$.
  On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n.

Transposée d'une somme et d'un produit

- Si $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ et ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$.
- Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors ${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$.

2 Matrices et systèmes linéaires

Définition

On appelle **opérations élémentaires**sur les lignes d'une matrice les opérations suivantes :

- l'échange de la ligne i et de la ligne j. On note $L_i \longleftrightarrow L_j$.
- la multiplication de la ligne i par un scalaire α ***non nul***. On note $L_i \longleftarrow \alpha L_i$.
- l'ajout de la ligne j multipliée par un scalaire α à la ligne i. On note $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$.

On peut effectuer les même opérations sur les colonnes $C_i \leftrightarrow C_j$, $C_i \leftarrow \alpha C_i$ et $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$.

Le système $\mathscr{S}$: $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p &= b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p &= b_n \end{cases}$

peut s'écrire matriciellement $AX = B$, avec

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}).$$

Définition

Si on peut passer de $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à $A_1 \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, qui est échelonnée, à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes (ou sur les colonnes), on définit alors le **rang** de A comme le nombre de pivots de A_1.

Le rang d'une matrice est donc le rang d'un système dont elle est la matrice.

Rang et transposition

Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{rg}\left({}^tA\right) = \operatorname{rg}(A)$.

3 Matrices inversibles

Définition

On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une **matrice inversible** s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

Dans ce cas la matrice B est unique, est appelée la **matrice inverse** de A et est notée A^{-1}.

Une matrice qui n'est pas carrée ne peut pas être inversible.

Propriétés de l'inverse

Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont inversibles, alors AB et ${}^tA$ le sont aussi et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad \text{et} \quad \left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right).$$

Proposition

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors A est inversible si et seulement si le système $AX = B$ admet une unique solution. Dans ce cas, la solution est $X = A^{-1}B$.

Une matrice carrée d'ordre n est donc inversible si et seulement si son rang vaut n.

Proposition

Si une suite d'opérations élémentaires sur les lignes permet de passer de la matrice A à I_n, alors A est inversible et la même suite d'opérations permet de passer de I_n à A^{-1}.

4 Cas des matrices carrées d'ordre 2

Définition

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, on appelle **déterminant** de A, que l'on note $\det(A)$ ou $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, le nombre (complexe ou réel) $ad - bc$.

Inversibilité d'une matrice carrée d'ordre 2

- Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

- Le système $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ est de Cramer si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

  Dans ce cas la solution du système est donnée par $x = \dfrac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$ et $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$.

Les méthodes à maîtriser

Méthode 8.1 : Effectuer un produit de matrices

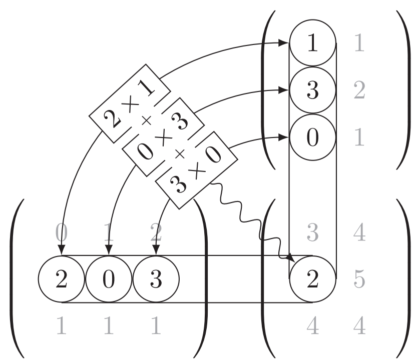
Dans un cas concret, pour effectuer le produit AB, on écrit explicitement la matrice A puis on écrit, explicitement aussi, la matrice B en haut à droite de A. Pour calculer le coefficient d'indice (i, j) du produit, il suffit de faire la somme des produits des éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par ceux de la $j^{\text{ème}}$ colonne de B.
Dans un cas théorique, on utilise la formule de la définition.

Exemple d'application

(1) Calculer le produit de $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$ par $\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

(2) Si $\boldsymbol{A}$ est une matrice réelle, montrer que $\boldsymbol{{}^tAA}$ est carrée et que tous ses coefficients diagonaux sont positifs.

(1) On commence par illustrer le calcul du coefficient de la deuxième ligne et première colonne :



En poursuivant le calcul pour chaque coefficient, on obtient donc que $AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

(2) On note $S = {}^tAA$. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors ${}^tA \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, on peut donc effectuer le produit et $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est carrée. De plus, si $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$s_{i,i} = \sum_{k=1}^{p} \left({}^tA\right)_{i,k} a_{k,i} = \sum_{k=1}^{p} a_{k,i}^2 \geq 0.$$

Ainsi tous les coefficients diagonaux de S sont positifs.

Voir exercices **8.2**, **8.4**, **8.6**, **8.7**, **8.8**, **8.9**, **8.10** et **8.11** .

Méthode 8.2 : Calculer une puissance à l'aide du binôme de Newton

Pour calculer les puissances d'une matrice, on peut décomposer cette matrice en une somme $A+B$ avec A diagonale et B une matrice dont les puissances se calculent facilement et telles que $AB = BA$. La formule du binôme de Newton permet alors de conclure.

Exemple d'application

Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On commence par décomposer M sous la forme $M = A + I_2$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Un simple calcul de produit donne que $A^2 = 0$. Ainsi, $A^k = 0$ pour tout $k \geq 2$. De plus $AI_2 = A = I_2A$. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :

$$M^n = (A+I_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k I_n^{n-k} = \binom{n}{0} A^0 + \binom{n}{1} A^1 = I_2 + nA = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Voir exercices **8.4** et **8.11**.

Méthode 8.3 : Calculer l'inverse d'une matrice

Pour calculer l'inverse (s'il existe) d'une matrice carrée M, on lui applique le pivot de Gauss en allant plus loin qu'avec les systèmes : on doit la transformer en I_n. Pour ce faire, on applique le pivot de Gauss pour transformer M en une matrice échelonnée, donc triangulaire supérieure. Si le rang de M n'est pas égal à sa taille, alors M n'est pas inversible. Sinon, on continue de pivoter pour obtenir des 1 sur la diagonale et éliminer tout ce qu'il reste au-dessus de la diagonale.
On a transformé M en I_n et il ne reste plus qu'à appliquer exactement les mêmes opérations (dans le même ordre) à I_n pour obtenir M^{-1}. Dans la pratique, on fait les opérations sur M et I_n en même temps en les accolant sous la forme $(M|I_n)$.

Exemple d'application
Déterminer l'inverse de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

On colle la matrice M à I_n et on commence à pivoter :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow -L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & -3 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & -3 \end{array}\right).$$

Ainsi M est inversible et $M^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Voir exercice **8.1**.

Interro de cours

1. Calculer le produit de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ par $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

3. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

4. Parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies ?

- **(a)** Il existe deux matrices non nulles dont le produit est nul.
- **(b)** Si $AC = BC$ avec C non nulle, alors $A = B$.
- **(c)** Si $AC = BC$ avec C inversible, alors $A = B$.
- **(d)** La somme de deux matrices inversibles est inversible.

5. Montrer qu'une matrice diagonale est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

6. Calculer les puissances $n^{\text{ème}}$ de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $n \in \mathbb{N}$.

7. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ?

- **(a)** La somme de deux matrices symétriques est symétrique.
- **(b)** Le produit de deux matrices symétriques est symétrique.
- **(c)** Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure.

8. Résoudre le système $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b. \end{cases}$

Exercices

Pour s'entraîner

Exercice 8.1

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui calculer leurs inverses respectifs :

1. $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 9 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 5 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 11 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 8.2

Soient $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ avec $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $M = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$ et $P = I_3 + M^2$.

1. Exprimer P en fonction de U et ${}^tU$.

2. Montrer que $P^2 = P$, puis $PM = MP = 0$.

Exercice 8.3

Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $J = A - 2I_3$. Démontrer par récurrence sur n que $A^n = 2^n I_3 + \frac{5^n - 2^n}{3} J$.

Exercice 8.4

Soient $a \in \mathbb{R}$, $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = D + N$.

Vérifier que $N^3 = 0$ et $DN = ND$, puis en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Pour aller plus loin

Exercice 8.5

On dit qu'une matrice carrée A est antisymétrique si ${}^tA = -A$.

Montrer que toute matrice carrée peut s'écrire d'une unique façon comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 8.6

Soit $M = \begin{pmatrix} 8 & 10 & -6 \\ -2 & -3 & 1 \\ 6 & 7 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^3.

2. Si $x \in \mathbb{R}$, factoriser l'expression polynomiale $1 - x^3$ dans $\mathbb{R}$.
En déduire que $I_3 - M$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 8.7

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^3 - 4A^2 + 4A + 2I_3$, puis en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 8.8

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - 2A^2 + 2A$.

2. On suppose que A est inversible.

a. Justifier ***sans calcul*** que $A^2 - 2A + 2I_3 = 0$.

b. Calculer $A^2 - 2A + 2I_3$.

3. En déduire que A n'est pas inversible.

Exercice 8.9

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\sigma(A)$ la somme de tous les coefficients de A. On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $JAJ = \sigma(A)J$.

Exercice 8.10

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de la matrice A, et on note $\mathrm{Tr}(A)$, la somme des éléments diagonaux de A. Autrement dit, $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que

1. $\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$

2. $\mathrm{Tr}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{Tr}(A)$

3. $\mathrm{Tr}({}^tA) = \mathrm{Tr}(A)$

4. $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Exercice 8.11

Soient $\alpha,\ \beta$ deux scalaires et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^2, puis J^n pour $n \in \mathbb{N}$.

2. On pose $A = \alpha I_3 + \beta J$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Corrections

Interro de cours

1. Après calcul, on obtient $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. On a $\det(A) = 0$, donc A n'est pas inversible.

3. On applique l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice A accolée de I_3.

$$\begin{aligned}
(A|I_3) \quad & \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \\
& \Leftrightarrow_{L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right) \\
& \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right) \\
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_2}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

4. **(a)** **Vrai.** Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $AB = 0$.

(b) **Faux.** Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $AC = 0 = BC$ mais $A \neq B$.

(c) **Vrai.** Si $AC = BC$, alors $ACC^{-1} = BCC^{-1}$, donc $A = B$.

(d) **Faux.** Si $A = I_n$ et $B = -I_n$, alors A et B sont inversibles mais $A + B = 0$ ne l'est pas.

5. Soit D une matrice diagonale d'ordre n inversible. Le système associé à D est échelonné et de Cramer, il est donc de rang n. Ainsi chaque terme diagonal est un pivot et est non nul.
La réciproque est évidente.

6. On note $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on a $N^2 = 0$. On a $A = I_2 + N$ et $I_2 N = N = N I_2$.
On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton.

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_2^{n-k} = \binom{n}{0} N^0 I_2^n + \binom{n}{1} N^1 I_2^{n-1} + 0 = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. **(a)** **Vrai.** Si A et B sont symétriques, alors ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = A + B$, donc $A + B$ est symétrique.

(b) **Faux.** Il faut et il suffit qu'elles commutent pour avoir ce résultat. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, alors A et B sont symétriques mais $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ne l'est pas.

(c) Vrai. Cf. cours.

8. On a $1 \times (-1) - 1 \times 1 = -2 \neq 0$ donc le système est de Cramer et

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{a-b}{2}.$$

Exercice 8.1

On utilise l'algorithme du pivot de Gauss.

1. La matrice est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$.

2. La matrice est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. La matrice est inversible, d'inverse $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -10 & -1 \\ -2 & 8 & 2 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

4. On applique l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice, que l'on notera A, accolée de I_3.

$$\begin{aligned}
(A|I_3) \quad & \underset{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_1}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2m-1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right) \\
& \underset{\substack{L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (2m-1)L_2}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6m & -6m+2 & 2 & 4m-2 \end{array}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi A est inversible si et seulement si $m \neq 0$. Et, si $m \neq 0$

$$\begin{aligned}
(A|I_3) \quad & \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3m & -3m+1 & 1 & 2m-1 \end{array}\right) \\
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow mL_2 - L_3 \\ L_1 \leftarrow 3mL_1 + L_3}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6m & 3m & 0 & 1 & 1 & 2m-1 \\ 0 & -m & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3m & -3m+1 & 1 & 2m-1 \end{array}\right) \\
& \Leftrightarrow_{L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6m & 0 & 0 & -2 & -2 & 2m+2 \\ 0 & -m & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3m & -3m+1 & 1 & 2m-1 \end{array}\right).
\end{aligned}$$

Si $m \neq 0$, on obtient donc que $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{3m}\begin{pmatrix} -1 & -1 & m+1 \\ 3 & 3 & -3 \\ -3m+1 & 1 & 2m-1 \end{pmatrix}}$

5. La matrice n'est pas inversible.

6. La matrice n'est pas carrée, elle n'est donc pas inversible.

Exercice 8.2

1. Après calcul, $M^2 = \begin{pmatrix} -y^2 - z^2 & xy & xz \\ xy & -x^2 - z^2 & yz \\ xz & yz & -x^2 - y^2 \end{pmatrix}$ puis

$$P = \begin{pmatrix} 1 - y^2 - z^2 & xy & xz \\ xy & 1 - x^2 - z^2 & yz \\ xz & yz & 1 - x^2 - y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}.$$

car $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

De plus $U\,{}^tU = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$. D'où $\boxed{P = U\,{}^tU}$

2. On a $P^2 = P \times P = U\,{}^tU \times U\,{}^tU = U \times {}^tUU \times {}^tU$. Or ${}^tUU = (x^2 + y^2 + z^2) = 1$.
Donc $P^2 = U\,{}^tU = P$.
De plus $PM = (I_3 + M^2)M = M + M^3 = M(I_3 + M^2) = MP$. Et $MP = MU\,{}^tU$.
Or, après un calcul simple, $MU = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $MU\,{}^tU = 0$. Ainsi $\boxed{PM = MP = 0}$

Exercice 8.3

On commence par calculer $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $J^2 = 3J$. De plus $A = 2I_3 + J$.

Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(n)$: « $A^n = 2^n I_3 + \frac{5^n - 2^n}{3} J$ ».

- **Initialisation.** On a $A^0 = I_3 = 2^0 I_3 + \frac{5^0 - 2^0}{3} J$, ce qui montre $\mathscr{P}(0)$.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathscr{P}(n)$. On a

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &\underset{\mathscr{P}(n)}{=} \left(2^n I_3 + \frac{5^n - 2^n}{3} J\right)(2I_3 + J) \\ &= 2^{n+1} I_3 + 2^n J + 2\frac{5^n - 2^n}{3} J + \frac{5^n - 2^n}{3} J^2 \\ &= 2^{n+1} I_3 + \frac{3 \times 2^n}{3} J + 2\frac{5^n - 2^n}{3} J + 3\frac{5^n - 2^n}{3} J \\ &= 2^{n+1} I_3 + \frac{5^n(2+3) + 2^n(3 - 2 - 3)}{3} J \\ &= 2^{n+1} I_3 + \frac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{3} J. \end{aligned}$$

ce qui montre $\mathscr{P}(n+1)$.

Ainsi, par une récurrence simple, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = 2^n I_3 + \frac{5^n - 2^n}{3} J$.

Exercice 8.4

On a $D = aI_3$, donc $DN = aN = ND$. On peut alors utiliser la formule du binôme de Newton. De plus $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$. On en déduit ainsi que $\forall k \geq 3,\ N^k = 0$. Alors, si $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} A^n &= (D+N)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} N^0 (aI_3)^n + \binom{n}{1} N^1 (aI_3)^{n-1} + \binom{n}{2} N^2 (aI_3)^{n-2} + 0 \\ &= a^n I_3 + na^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} N^2. \end{aligned}$$

On en conclut que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}}$

> On pourrait croire qu'il faut distinguer les cas $n = 0$ et $n = 1$ à part, pour être sûr de bien avoir les trois termes restants dans la somme. Mais si $n = 1$, alors $\binom{n}{2} = 0 = \frac{n(n-1)}{2}$ et si $n = 0$, alors $\binom{n}{1} = 0 = n$ et $\binom{n}{2} = 0 = \frac{n(n-1)}{2}$. Donc tout le calcul et le raisonnement restent valables pour ces deux valeurs de n.

Exercice 8.5

On procède par analyse-synthèse. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- **Analyse.** On suppose qu'il existe S symétrique et A antisymétrique telles que $M = S + A$. On a ${}^tM = {}^tS + {}^tA = S - A$. Ainsi $M + {}^tM = 2S$ donc $S = \frac{M + {}^tM}{2}$. De même $A = \frac{M - {}^tM}{2}$.
- **Synthèse.** On pose $S = \frac{M + {}^tM}{2}$ et $A = \frac{M - {}^tM}{2}$.
  On a $S + A = \frac{2M}{2} = M$ et ${}^tS = \frac{{}^tM + M}{2} = S$ et ${}^tA = \frac{{}^tM - M}{2} = -A$.
  Ainsi $M = S + A$ avec S symétrique et A antisymétrique.

Alors, par analyse-synthèse, M se décompose de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique S et d'une matrice antisymétrique A. De plus $S = \frac{M + {}^tM}{2}$ et $A = \frac{M - {}^tM}{2}$.

Exercice 8.6

1. Après calcul, on a $M^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 & -8 \\ -4 & -4 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ et $M^3 = 0$.

2. On a $1 - x^3 = (1 - x)(1 + x + x^2)$. Ainsi

$$(I_3 - M)(I_3 + M + M^2) = I_3 - M^3 = I_3 \quad \text{car } M^3 = 0.$$

De même $(I_3 + M + M^2)(I_3 - M) = I_3$.

Alors $I_3 - M$ est inversible d'inverse $I_3 + M + M^2 = \begin{pmatrix} 17 & 18 & -14 \\ -6 & -6 & 5 \\ 10 & 11 & -8 \end{pmatrix}$.

Si A est une matrice carrée et qu'on a trouvé une matrice carrée B telle que $AB = I_n$, on a forcément $BA = I_n$. Il s'ensuit que A est inversible et que $B = A^{-1}$.

Exercice 8.7

Après calcul, on a $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 6 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 20 \\ -4 & 2 & 20 \\ -8 & -4 & 14 \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$\boxed{A^3 - 4A^2 + 4A + 2I_3 = 0}$$

On en déduit ensuite que $A^3 - 4A^2 + 4A = -2I_3$ puis que $A\left(\frac{A^2-4A+4I_3}{-2}\right) = I_3$.
De même, $\left(\frac{A^2-4A+4I_3}{-2}\right) A = I_3$. On en conclut que A est inversible et que

$$\boxed{A^{-1} = \frac{A^2 - 4A + 4I_3}{-2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Exercice 8.8

1. Après calcul, on a $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$\boxed{A^3 - 2A^2 + 2A = 0}$$

2. **a.** On a $A^3 - 2A^2 + 2A = 0$, donc $A^{-1}(A^3 - 2A^2 + 2A) = A^{-1}0$, c'est-à-dire $A^2 - 2A + 2I_3 = 0$.

b. Après calcul on obtient que $A^2 - 2A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Si on suppose que A est inversible, on en déduit que $A^2 - 2A + 2I_3 = 0$.
Or $A^2 - 2A + 2I_3 \neq 0$, ce qui est absurde.
Ainsi A n'est pas inversible.

Exercice 8.9

On a $\sigma(A) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}$. De plus, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $JAJ \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Soient $i, j, k \in [\![1, n]\!]$. On a $(AJ)_{k,j} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} \underbrace{J_{\ell,j}}_{=1} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}$, puis

$$(JAJ)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{J_{i,k}}_{=1} (AJ)_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} == \sigma(A) = \sigma(A)J_{i,j}.$$

Ainsi JAJ et $\sigma(A)J$ ont même format et mêmes cœfficients.
On en conclut que $JAJ = \sigma(A)J$.

Exercice 8.10

1. On a $\operatorname{Tr}(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(A+B)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}(a_{i,i}+b_{i,i}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B)$.

2. On a $\operatorname{Tr}(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda A)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{i,i} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \lambda \operatorname{Tr}(A)$.

3. On a $\operatorname{Tr}({}^tA) = \sum_{i=1}^{n} \left({}^tA\right)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \operatorname{Tr}(A)$.

4. On a $\operatorname{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i} = \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_{k,i}a_{i,k}}_{=(BA)_{k,k}} = \sum_{k=1}^{n}(BA)_{k,k} = \operatorname{Tr}(BA)$.

Exercice 8.11

1. Après calcul, on obtient $J^2 = 3J$. On démontre par récurrence, sur $k \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathscr{P}(k)$: « $J^k = 3^{k-1}J$ ».

- **Initialisation.** On a $J^1 = 3^{1-1}J$, ce qui montre $\mathscr{P}(1)$.
- **Hérédité.** Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on suppose $\mathscr{P}(k)$. On a

$$J^{k+1} = J^k \times J = 3^{k-1}J \times J = 3^{k-1}J^2 = 3^{k-1} \times 3J = 3^kJ,$$

ce qui montre $\mathscr{P}(k+1)$.

Ainsi $J^0 = I_3$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $J^k = 3^{k-1}J$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les matrices αI_3 et βJ commutent. On peut donc utiliser la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
A^n &= (\alpha I_3 + \beta J)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\alpha I_3)^{n-k} (\beta J)^k \\
&= \binom{n}{0} \alpha^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \beta^k J^k \\
&= \alpha^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \beta^k 3^{k-1} J \\
&= \alpha^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} (3\beta)^k \frac{1}{3} J \\
&= \alpha^n I_3 + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} (3\beta)^k - \alpha^n \right) \frac{1}{3} J \\
&= \alpha^n I_3 + \frac{(\alpha + 3\beta)^n - \alpha^n}{3} J.
\end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = (a-b)I_3 + bJ$. D'après la question précédente, on a

$$\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}^n = (a-b)^n I_3 + \frac{(a+2b)^n - (a-b)^n}{3} J.$$

CHAPITRE

9 Polynômes

L'essentiel du cours

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ sera toujours égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Opérations et premières propriétés sur les polynômes

Définition

- On définit le **monôme** X^k comme la fonction $X^k : \mathbb{K} \to \mathbb{K},\ x \mapsto x^k$.
- On appelle **polynôme** à une indéterminée et à cœfficients dans $\mathbb{K}$ toute fonction de la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.
- On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à cœfficients dans $\mathbb{K}$.

Opérations sur les polynômes

- Si $k, l \in \mathbb{N}$, alors $X^k \times X^l = X^{k+l}$ et $\left(X^k\right)^l = X^{kl}$.
- Si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, alors $P + Q \in \mathbb{K}[X]$ et $PQ \in \mathbb{K}[X]$.

Pour effectuer des opérations sur les polynômes, on peut faire comme si X était un nombre indéterminé et appliquer les règles de calcul habituelles.

Définition

Soit le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

- Si P est non nul, on appelle **degré** de P, noté $\deg(P)$, le plus grand entier d tel que $a_d \neq 0$. Par convention, si $P = 0$, alors $\deg(P) = -\infty$.
- Si $k \in [\![0, n]\!]$, on appelle **cœfficient** de degré k de P le cœfficient a_k.
- Si P est non nul, on appelle **cœfficient dominant** de P le cœfficient a_d où $d = \deg(P)$.
- On dit que P est **unitaire** si P est non nul et que son cœfficient dominant vaut 1.
- Si $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Égalité de deux polynômes

Deux polynômes sont égaux si et seulement s'il ont le même degré et les mêmes cœfficients.

Opérations et degré

Si P et $Q \in \mathbb{K}[X]$, alors
- $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$ avec égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Définition

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on appelle **polynôme dérivé** de P (ou dérivée de P), le polynôme

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k.$$

On définit, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, la dérivée $k^{\text{ème}}$ de P par $P^{(0)} = P$ et $P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)'$.

Il s'agit de la même formule que pour dériver le polynôme en tant que fonction. On retrouve donc les formules habituelles.

Dérivée et opérations

Si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q' \quad \text{et} \quad (PQ)' = P'Q + PQ'.$$

Dérivée et degré

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est non constant, alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$.

2 Racines et multiplicité

Définition

- Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $x \in \mathbb{K}$, on peut évaluer P en x par $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.
- On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une **racine** de P si $P(\alpha) = 0$.

Proposition

- Si $\alpha \in \mathbb{K}$, alors : α est une racine de P si et seulement si P est factorisable par $X - \alpha$.
- Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ sont deux à deux distincts, alors : les $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont des racines de P si et seulement si P est factorisable par $\prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)$.

On dit aussi parfois « $X - \alpha$ divise P », au lieu de « P est factorisable par $X - \alpha$ ».

Définition

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $r \in \mathbb{N}$. On dit que α est une racine de **multiplicité** exactement r (ou d'ordre r) de P si P est factorisable par $(X-\alpha)^r$ mais pas par $(X-\alpha)^{r+1}$.

Le nombre α est une racine de multiplicité 0 de P si $P(\alpha) \neq 0$ (i.e. α n'est pas racine de P).

Caractérisation de la multiplicité

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $r \in \mathbb{N}$. Le nombre α est une racine de multiplicité r de P si et seulement si

$$\forall k \in [\![0, r-1]\!], \; P^{(k)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(r)}(\alpha) \neq 0.$$

Si on veut seulement montrer que α est une racine de multiplicité supérieure ou égale à r, il n'est pas nécessaire de calculer $P^{(r)}(\alpha)$.

Proposition

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de multiplicité r de P, alors $\overline{\alpha}$ (le conjugué de α) aussi.

Théorème

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$.
- Si P est non nul, son nombre de racines ne dépasse pas son degré.
- Si $\deg(P) \leq n$ et si P admet au moins $n+1$ racines, alors $P = 0$.
- Si P possède une infinité de racines, alors $P = 0$.

3 Factorisation des polynômes

Théorème de d'Alembert-Gauss

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine.

Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul, de degré n et de cœfficient dominant λ.
- Il existe $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ tels que $P = \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - z_k)$.
- Si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont les racines (deux à deux distinctes) de P de multiplicité $m_1, \dots m_p$, alors
$$P = \lambda \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{m_k}.$$

Pour factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$, il suffit donc de trouver ses racines et leur ordre de multiplicité.

Les méthodes à maîtriser

Méthode 9.1 : Déterminer le degré d'un polynôme

Si un polynôme n'est pas sous forme développée et que l'on veut déterminer son degré, on utilise les propriétés du degré avec les opérations.
Cependant, s'il s'agit d'une combinaison linéaire de polynômes de même degré, il conviendra de commencer à développer pour voir si les termes dominants s'annulent ou non.

Exemple d'application

Déterminer le degré de $P = (X+1)^5 - X^5$.

On sait que $\deg(P) \leq 5$ d'après le cours. On va donc développer, à l'aide du binôme de Newton

$$(X+1)^5 = X^5 + 5X^4 + 10X^3 + 10X^2 + 5X + 1.$$

Les termes de degré 5 se simplifient mais pas ceux de degré 4 :

$$P = 5X^4 + 10X^3 + 10X^2 + 5X + 1$$

et $\deg(P) = 4$ (et son coefficient dominant vaut 5).

Voir exercices **9.1**, **9.2**, **9.5** et **9.8**.

Méthode 9.2 : Montrer qu'un polynôme est le polynôme nul

Pour montrer qu'un polynôme est le polynôme nul, soit on montre qu'il a une infinité de racines soit on commence par majorer son degré par un entier $n \in \mathbb{N}$ et on montre qu'il admet au moins $n+1$ racines.

Exemple d'application

Déterminer tous les polynômes P tels que $P(X+1) = P(X)$.

On évalue l'égalité polynomiale en 1 pour obtenir que

$$P(1) = P(0).$$

On recommence en 2 :

$$P(2) = P(1) = P(0).$$

Par une récurrence simple, on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = P(0).$$

Ainsi $P - P(0)$ admet une infinité de racines (tous les entiers naturels), donc est le polynôme nul. Alors $P - P(0) = 0$, donc $P = P(0)$ et P est constant.
Réciproquement tous les polynômes constants vérifient la relation $P(X+1) = P(X)$.
On en conclut que les seuls polynômes vérifiant $P(X+1) = P(X)$ sont les polynômes constants.

Voir exercice **9.9**.

Méthode 9.3 : Déterminer la multiplicité d'une racine

Pour déterminer la multiplicité de α en tant que racine de P, on calcule $P(\alpha)$, $P'(\alpha)$, etc jusqu'à tomber sur une valeur non nulle $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$. La multiplicité de α est alors l'entier r.

Exemple d'application

Déterminer la multiplicité de 1 comme racine de $P = X^3 - 3X + 2$.

On a $P(1) = 0$, donc 1 est racine de P. On calcule

$$P' = 3X^2 - 3$$

et on a $P'(1) = 0$, donc 1 est racine au moins double de P. On calcule

$$P'' = 6X$$

et on a $P''(1) \neq 0$.

On peut donc en conclure que 1 est une racine de P de multiplicité 2 (on dit aussi que c'est une racine double de P).

Voir exercices **9.3**, **9.5**, **9.6** et **9.10**.

Méthode 9.4 : Montrer qu'un polynôme est factorisable par un autre

Pour montrer qu'un polynôme P est factorisable par un polynôme Q, on commence par factoriser Q dans $\mathbb{C}[X]$. Ensuite on montre que les racines de Q sont aussi racines de P avec une multiplicité dans P au moins aussi grande que dans Q.

Exemple d'application

Montrer que $P = X^5 + 3X^4 - X^3 - 11X^2 - 12X - 4$ est factorisable par $Q = (X+1)^2(X-2)$.

Le polynôme Q est déjà factorisé, donc ses racines sont -1, de multiplicité 2, et 2 de multiplicité 1. Il suffit donc de montrer que -1 est racine au moins double de P et que 2 est racine de P. On a :

$$P(-1) = -1 + 3 + 1 - 11 + 12 - 4 = 0$$

puis

$$P' = 5X^4 + 12X^3 - 3X^2 - 22X - 12 \quad \text{et} \quad P'(-1) = 5 - 12 - 3 + 22 - 12 = 0,$$

ce qui montre que -1 est racine au moins double de P. Ensuite :

$$P(2) = 32 + 48 - 8 - 44 - 24 - 4 = 0,$$

ce qui montre que 2 est racine de P.

Ainsi P est factorisable par $(X+1)^2(X-2) = Q$.

Voir exercices **9.5** et **9.7**.

Méthode 9.5 : Effectuer une factorisation

En trouvant des racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, on peut être amené à déterminer qu'un polynôme P peut se factoriser par un polynôme $Q = \prod_{k=1}^{p}(X - \alpha_k)$.

Pour effectuer cette factorisation, on écrit que $P = QR$ avec R un polynôme quelconque de degré $\deg(P) - \deg(Q)$, on développe QR et on identifie les coefficients de P avec ceux de QR pour obtenir un système linéaire qu'il ne reste alors plus qu'à résoudre pour déterminer le polynôme R.

Exemple d'application

Factoriser $X^3 - 3X + 2$ par $(X - 1)^2$.

On cherche un polynôme R tel que

$$X^3 - 3X + 2 = (X - 1)^2 R.$$

En observant les degrés, R est de degré 1, donc de la forme $R = aX + b$. En remplaçant et développant, on obtient que

$$(X - 1)^2 R = (X^2 - 2X + 1)(aX + b) = aX^3 + (b - 2a)X^2 + (a - 2b)X + b.$$

Par unicité, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} a & = & 1 \\ b - 2a & = & 0 \\ a - 2b & = & -3 \\ b & = & 2 \end{cases}$$

Ainsi $a = 1$, $b = 2$ et on en conclut que $X^3 - 3X + 2 = (X - 1)^2(X + 2)$.

Voir exercice **9.6**.

Méthode 9.6 : Factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$

Pour factoriser un polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$:

1. On commence par déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme P.

2. On cherche des racines évidentes (0, 1, -1 ou i) et leur multiplicité. On sait désormais que P est factorisable par un certain polynôme R. On factorise P par R : $P = QR$.

3. Il reste à factoriser Q pour finir. On cherche à résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$, $Q(z) = 0$. On identifie les solutions distinctes et on compte le nombre de racines obtenues.

- Si ce nombre correspond au degré de Q, on conclut qu'on a déterminé toutes les racines de Q et on peut ainsi le factoriser.
- Sinon, on regarde la multiplicité des racines trouvées pour pouvoir factoriser Q.

4. On n'oublie pas de bien multiplier la forme factorisée de Q par R (qui est déjà factorisé) pour obtenir la forme factorisée de P.

Exemple d'application

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = 2X^4 - 2X^3 - 22X^2 - 2X - 24$.

Le polynôme P est de degré 4 et a pour coefficient dominant 2.
On commence par remarquer que i est une racine évidente de P. En effet,

$$P(i) = 2 + 2i + 22 - 2i - 24 = 0.$$

Puis

$$P' = 8X^3 - 6X^2 - 44X - 2 \quad \text{et} \quad P'(i) = -8i + 6 - 44i - 2 \neq 0.$$

Donc i est une racine simple de P. Le polynôme P étant à coefficients réels, on a aussi $\overline{i} = -i$ comme racine simple de P. On peut donc factoriser P par $(X-i)(X+i) = X^2+1$. En observant les degrés, on cherche a, b et $c \in \mathbb{R}$ tels que

$$P = (X^2 + 1)(aX^2 + bX + c).$$

Après calcul, on obtient $a = 2$, $b = -2$ et $c = -24$.
Il ne reste plus qu'à factoriser $Q = 2X^2 - 2X - 24$. Il s'agit d'un trinôme du second degré dont les racines sont -3 et 4. Ainsi P admet i, $-i$, -3 et 4 comme racines. Or P est de degré 4 et de coefficient dominant 2. Alors

$$P = 2(X - i)(X + i)(X + 3)(X - 4).$$

⚠

- Ne pas oublier le coefficient dominant dans la forme factorisée.
- Ne pas écrire $P(X) = 0$ quand on cherche à résoudre une équation polynomiale. En effet, écrire $P(X) = 0$ revient à dire que P est le polynôme nul. Alors que, si $z \in \mathbb{C}$, écrire $P(z) = 0$ revient à dire que z est une racine de P.

➔ Voir exercices **9.1**, **9.5**, **9.6**, **9.8** et **9.9**.

Interro de cours

1. Déterminer le degré, le coefficient dominant et le coefficient constant des polynômes suivants

   (a) $2X^3 - X^2 + X + 3$

   (b) $(X^2 - 2)^2$

   (c) $(2X^5 - 10X^3 + 1)^5$.

2. Soient P, $Q \in \mathbb{K}[X]$. Les propositions suivantes sont-elles toujours vraies ?

   (a) Si $PQ = 0$, alors $P = 0$ ou $Q = 0$.

   (b) $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.

   (c) $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

3. Si $\alpha \in \mathbb{C}$, montrer que $(X - \alpha)(X - \overline{\alpha}) \in \mathbb{R}[X]$.

4. Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ admet n racines, est-ce toujours le polynôme nul ?

5. Factoriser $X^3 - 3X^2 + 3X - 2$ par $X - 2$.

6. Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$, montrer que $P^{(n+1)} = 0$.

7. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $r \in \mathbb{N}$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

   (a) Si α est une racine de P de multiplicité r, alors P est factorisable par $(X - \alpha)^r$.

   (b) Si P est factorisable par $(X - \alpha)^r$, alors α est une racine de P de multiplicité r.

8. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = X^4 - 3X^3 + X^2 - 3X$.

Exercices

Pour s'entraîner

Exercice 9.1

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants

1. $X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 5X + 6$
2. $X^4 - 2X^3 + 4X^2 + 2X - 5$
3. $X^4 - 2X^3 - 8X^2 + 18X - 9$
4. $X^4 - X^2 + 1$.

Exercice 9.2

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que
1. $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$
2. $(P')^2 = 4P$
3. $(X^2 + 1)P'' - 6P = 0$.

Exercice 9.3

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le polynôme

$$P_n = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}$$

n'a pas de racine multiple.

Exercice 9.4

Développer le polynôme $P = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + X^{2^k}\right)$.
On pourra considérer $(1 - X)P$.

Exercice 9.5

Soit P le polynôme $(X + 1)^7 - X^7 - 1$.
1. Montrer que P a deux racines réelles évidentes et donner leur ordre de multiplicité.
2. Montrer que P est factorisable par $(X - j)^2$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
3. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 9.6

Le but est de factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme

$$P = X^8 + 2X^7 + 2X^6 + 2X^5 + 2X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1.$$

1. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $R = X^3 + X^2 + X + 1$.
2. Vérifier que -1 est racine au moins double de P.
3. Factoriser P par $(X + 1)^2$.
4. Conclure.

Exercice 9.7

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur

1. a et $b \in \mathbb{R}$ pour que $X^4 + aX^3 + bX^2 + X + 2$ soit factorisable par $X^2 - 3X + 2$.
2. $n \in \mathbb{N}^*$ pour que $X^{2n} + X^n + 1$ soit factorisable par $X^2 + X + 1$.

Pour aller plus loin

Exercice 9.8

On définit les polynômes de Tchebychev par

$$T_0 = 1 \quad T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. Calculer T_2 et T_3.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos x) = \cos(nx)$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre l'équation $T_n(y) = 0$ d'inconnue $y \in [-1, 1]$.
5. Si $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire toutes les racines de T_n et factoriser T_n.

Exercice 9.9

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. On définit les polynômes de Lagrange associés aux nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n$ par

$$\forall i \in [\![0, n]\!]\,,\ L_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(X - a_j)}{a_i - a_j}.$$

1. Soient $i, j \in [\![0, n]\!]$. Montrer que $L_i(a_j)$ vaut 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$.
2. En déduire que, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i.$$

Exercice 9.10

Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré 7 tel que $P + 1$ est factorisable par $(X - 1)^4$ et $P - 1$ est factorisable par $(X + 1)^4$.

Corrections

Interro de cours

1. **(a)** Degré : 3, cœfficient dominant : 2 et cœfficient constant : 3.

(b) Degré : 4, cœfficient dominant : 1 et cœfficient constant : 4.

(c) Degré : 25, cœfficient dominant : 32 et cœfficient constant : 1.

2. **(a)** **Vrai.** On procède par contraposée. Si $P \neq 0$ et $Q \neq 0$, alors ils ont chacun un nombre fini de racine. On peut donc trouver un élément $a \in \mathbb{K}$ tel que $P(a) \neq 0$ et $Q(a) \neq 0$. Il s'ensuit que $PQ(a) = P(a)Q(a) \neq 0$. On en conclut que $PQ \neq 0$.

(b) **Faux.** On a $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$, mais pas forcément l'égalité.
Si $P = X^2+X$ et $Q = -X^2$, alors $P+Q = X$ et $\deg(P+Q) = 1 < 2 = \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$.

(c) **Vrai.** Cf. cours.

3. On a $(X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) = X^2 - (\alpha+\overline{\alpha})X + \alpha\overline{\alpha} = X^2 - 2\,\mathfrak{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2 \in \mathbb{R}[X]$.

4. **Faux.** Le résultat est vrai si P admet au moins $n+1$ racines. Si $P = (X-1)(X-2) \in \mathbb{K}_2[X]$, alors $P \neq 0$ et P admet 2 racines.

5. On développe $(X-2)(aX^2+bX+c) = aX^3 + (b-2a)X^2 + (c-2b)X - 2c$.
Par identification avec $X^3 - 3X^2 + 3X - 2$, on obtient

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -3 \\ c - 2b = 3 \\ -2c = -2 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1. \end{cases}$$

Ainsi $X^3 - 3X^2 + 3X - 2 = (X-2)(X^2 - X + 1)$.

6. On démontre le résultat par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathscr{P}(n) : « \forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ P^{(n+1)} = 0 ».$$

- **Initialisation.** Soit $P \in \mathbb{K}_0[X]$. Le polynôme P est constant, donc sa dérivée P' est nulle, ce qui montre $\mathscr{P}(0)$.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathscr{P}(n)$.
Soit $P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$. On a $P' \in \mathbb{K}_n[X]$, donc, d'après $\mathscr{P}(n)$, alors $(P')^{(n+1)} = 0$, c'est-à-dire $P^{(n+2)} = 0$, ce qui montre $\mathscr{P}(n+1)$.

On en conclut que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ P^{(n+1)} = 0$.

7. **a.** **Vrai.** Cf. cours.

b. **Faux.** Cela signifie que α est une racine de P de multiplicité supérieure ou égale à r.
On pourrait factoriser P par $(X-\alpha)^k$ avec k strictement plus grand que r.

8. On commence par factoriser P par X pour obtenir $P = X(X^3 - 3X^2 + X - 3)$.
On note $Q = X^3 - 3X^2 + X - 3$. On cherche une racine évidente de Q. On a $Q(i) = 0$, donc aussi $Q(-i) = 0$. On factorise Q par $(X-i)(X+i) = X^2+1$:

$$Q = (X^2+1)(aX+b) \Leftrightarrow X^3 - 3X^2 + X - 3 = aX^3 + bX^2 + aX + b \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ a = 1 \\ b = -3. \end{cases}$$

On en conclut que $\boxed{X^4 - 3X^3 + X^2 - 3X = X(X-3)(X^2+1)}$

Exercice 9.1

1. On note P le polynôme. On commence par remarquer que $P(i) = P(-i) = 0$. Ainsi P se factorise par X^2+1 :

$$\begin{aligned} P = (X^2+1)(aX^2+bX+c) &\Leftrightarrow X^4-5X^3+7X^2-5X+6 = aX^4+bX^3+(a+c)X^2+bX+c \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1 \\ b &= -5 \\ a+c &= 7 \\ b &= -5 \\ c &= 6. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $P = (X^2+1)(X^2-5X+6)$. On calcule le discriminant du trinôme obtenu en factorisant : $\Delta = 1$, puis ses racines $x_1 = \frac{5-1}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$. Ainsi

$$\boxed{X^4-5X^3+7X^2-5X+6 = (X^2+1)(X-2)(X-3)}$$

Il est très utile de se rappeler que si P est un polynôme à cœfficients réels et si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P, alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P avec même multiplicité. Cela évite de factoriser par un polynôme à cœfficients complexes et donc de faire apparaitre des complexes de partout dans le calcul.

2. On note P le polynôme. On commence par remarquer que $P(1) = P(-1) = 0$. Ainsi P se factorise par X^2-1 :

$$\begin{aligned} P = (X^2-1)(aX^2+bX+c) &\Leftrightarrow X^4-2X^3+4X^2+2X-5 = aX^4+bX^3+(c-a)X^2-bX-c \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1 \\ b &= -2 \\ c-a &= 4 \\ -b &= 2 \\ -c &= -5. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $P = (X^2-1)(X^2-2X+5)$. On calcule le discriminant du trinôme obtenu en factorisant : $\Delta = -16$, puis ses racines $x_1 = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$ et $x_2 = 1+2i$. Ainsi

$$\boxed{X^4-2X^3+4X^2+2X-5 = (X-1)(X+1)(X-1+2i)(X-1-2i)}$$

3. On note P le polynôme. On commence par remarquer que $P(1) = 0$.
De plus, on a $P' = 4X^3-6X^2-16X+18$ et $P'(1) = 0$.
Donc 1 est racine au moins double de P.
Ainsi P se factorise par $(X-1)^2 = X^2-2X+1$:

$$\begin{aligned} & P = (X^2-2X+1)(aX^2+bX+c) \\ \Leftrightarrow\ & X^4-2X^3-8X^2+18X-9 = aX^4+(b-2a)X^3+(c-2b+a)X^2+(b-2c)X+c \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} a &= 1 \\ b-2a &= -2 \\ c-2b+a &= -8 \\ b-2c &= 18 \\ c &= -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -9. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $P = (X^2 - 2X + 1)(X^2 - 9)$. On reconnaît une identité remarquable. Ainsi

$$\boxed{X^4 - 2X^3 - 8X^2 + 18X - 9 = (X-1)^2(X-3)(X+3)}$$

On s'est arrêté à $P'(1)$ car un calcul au brouillon nous donne $P''(1) \neq 0$. Cette information ne nous avance pas beaucoup dans le cadre pratique d'une factorisation (cela nous assure juste que le second polynôme obtenu en factorisant n'admettra pas 1 comme racine).

4. On note P le polynôme. Si on pose $Y = X^2$, on obtient que $P = Y^2 - Y + 1$. On calcul le discriminant du trinôme obtenu : $\Delta = -3$ et ses racines $x_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $x_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$. Donc $P = (Y - e^{i\frac{\pi}{3}})(Y - e^{-i\frac{\pi}{3}}) = (X^2 - e^{i\frac{\pi}{3}})(X^2 - e^{-i\frac{\pi}{3}})$. De plus

$$(X^2 - e^{i\frac{\pi}{3}}) = \left(X^2 - \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2\right) = (X - e^{i\frac{\pi}{6}})(X + e^{i\frac{\pi}{6}}).$$

On procède de même pour le second facteur pour obtenir que

$$\boxed{X^4 - X^2 + 1 = (X - e^{i\frac{\pi}{6}})(X + e^{i\frac{\pi}{6}})(X - e^{-i\frac{\pi}{6}})(X + e^{-i\frac{\pi}{6}})}$$

Exercice 9.2

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Le polynôme nul est solution du problème. Si $P \neq 0$, on note $n = \deg(P)$. On a $\deg(P(X^2)) = 2n$ et $\deg((X^2+1)P(X)) = n+2$. Alors, si P est solution, on a $2n = n+2$ donc $n = 2$. On note alors $P = aX^2 + bX + c$ et on obtient

$$\begin{aligned} P(X^2) = (X^2+1)P(X) \quad &\Leftrightarrow \quad aX^4 + bX^2 + c = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = 0 \\ a + c = b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = 0 \\ c = -a. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi P est solution si et seulement si $P = 0$ ou s'il existe $a \in \mathbb{K}^*$ tel que $P = a(X^2 - 1)$. En regroupant, on en conclut que $\boxed{P(X^2) = (X^2+1)P(X) \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{K},\ P = a(X^2 - 1)}$

2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Le polynôme nul est solution du problème. Si $P \neq 0$, on note $n = \deg(P)$. On a $\deg((P')^2) = 2(n-1)$ et $\deg(4P) = n$. Alors, si P est solution, on a $2(n-1) = n$ donc $n = 2$. On note alors $P = aX^2 + bX + c$ et on obtient

$$\begin{aligned} (P')^2 = 4P \quad &\Leftrightarrow \quad 4a^2X^2 + 4abX + b^2 = 4aX^2 + 4bX + 4c \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 = a \\ ab = b \\ b^2 = 4c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ c = \dfrac{b^2}{4} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{(P')^2 = 4P \Leftrightarrow \left(P = 0 \text{ ou } \exists b \in \mathbb{K},\ P = X^2 + bX + \dfrac{b^2}{4}\right)}$

3. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

- Si $\deg P \leq 1$, alors $P'' = 0$. Donc P est solution si et seulement si $P = 0$.
- Si $\deg P \geq 2$, on note $n = \deg(P)$. On a $P = a_n X^n + Q$ avec $a_n \neq 0$ et $Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Ensuite,

$$(X^2+1)P'' - 6P = (n(n-1)-6)a_n X^n + \underbrace{n(n-1)a_n X^{n-2} + (X^2+1)Q'' - 6Q}_{\in \mathbb{K}_{n-1}[X]}.$$

Donc, si P est solution, alors $(n(n-1)-6)a_n = 0$. Or $a_n \neq 0$, donc $n(n-1) = 6$ puis $n = 3$. Si on note $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on obtient

$$\begin{aligned}(X^2+1)P'' - 6P = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (2b-6b)X^2 + (6a-6c)X + 2b - 6d = 0\\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4b \; = 0 \\ 6a - 6c = 0 \\ 2b - 6d = 0 \end{cases}\\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = 0 \\ c = a \\ d = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Donc P est solution si et seulement si $P = 0$ ou s'il existe $a \in \mathbb{K}^*$ tel que $P = a(X^3+X)$.

En regroupant, on en conclut que $\boxed{(X^2+1)P'' - 6P = 0 \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{K},\ P = a(X^3+X)}$

Exercice 9.3

On suppose par l'absurde que P_n admet une racine multiple α. Ainsi $P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = 0$. Or

$$P_n' = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3!} + \cdots + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Ainsi $P_n - P_n' = \frac{X^n}{n!}$. Donc $\frac{\alpha^n}{n!} = P_n(\alpha) - P_n'(\alpha) = 0$ puis $\alpha = 0$. Cependant, $P_n(0) = 1 \neq 0$ ce qui est absurde.

On ne conclut que P_n n'a pas de racine multiple.

Exercice 9.4

On voit apparaître successivement des identités remarquables $(1 - X^{2^k})(1 + X^{2^k}) = 1 - X^{2^{k+1}}$.

On démontre donc par récurrence, sur $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $(1-X)\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1 + X^{2^k}\right) = 1 - X^{2^{n+1}}$ ».

- **Initialisation.** On a $(1-X)\displaystyle\prod_{k=0}^{0}\left(1 + X^{2^k}\right) = (1-X)(1+X) = 1 - X^{2^{0+1}}$ ce qui montre $\mathscr{P}(0)$.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}(n)$. On a

$$(1-X)\prod_{k=0}^{n+1}\left(1 + X^{2^k}\right) = \left((1-X)\prod_{k=0}^{n}\left(1 + X^{2^k}\right)\right)(1-X^{2^{n+1}}) \underset{\mathscr{P}(n)}{=} (1+X^{2^{n+1}})(1-X^{2^{n+1}}) = 1-X^{2^{n+2}}$$

ce qui montre $\mathscr{P}(n+2)$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1-X)\prod_{k=0}^{n}\left(1+X^{2^k}\right) = 1 - X^{2^{n+1}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On utilise les sommes géométriques pour obtenir

$$1 - X^{2^{n+1}} = (1-X)\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^k.$$

On en conclut que $\boxed{\prod_{k=0}^{n}\left(1+X^{2^k}\right) = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^k}$

Exercice 9.5

1. On a $P(0) = P(-1) = 0$. De plus $P' = 7(X+1)^6 - 7X^6$, puis $P'(0) \neq 0$ et $P'(-1) \neq 0$. Ainsi 0 et -1 sont deux racines simples de P.
2. On cherche à montrer que j est une racine au moins double de P. On rappelle que $j^3 = 1$ et $j^2 + j + 1 = 0$. On a donc

   $$P(j) = (j+1)^7 - j^7 - 1 = (-j^2)^7 - (j^3)^2 j - 1 = -j^{14} - j - 1 = -(j^2+j+1) = 0$$

   et

   $$P'(j) = 7(-j^2)^6 - 7j^6 = 7j^{12} - 7j^6 = 7 - 7 = 0.$$

   Ainsi j est une racine au moins double de P donc P est factorisable par $(X-j)^2$.
3. Si on commence à développer $(X+1)^7$ avec la binôme de Newton, on obtient

   $$P = X^7 + 7X^6 + Q - X^7 - 1 = 7X^6 + \underbrace{Q-1}_{\deg=5} \quad \text{où } \deg(Q) = 5.$$

   Ainsi P est de degré 6 et son cœfficient dominant vaut 7. Il nous « manque » encore deux racines. Or P est à cœfficients réels et j est une racine au moins double de P. Donc $\overline{j}$ est aussi une racine au moins double de P. Ainsi

   $$\boxed{P = 7X(X+1)(X-j)^2(X-\overline{j})^2}$$

Exercice 9.6

1. On cherche des racines évidentes de R. On trouve que $R(-1) = R(i) = R(-i) = 0$. Or R est un polynôme de degré 3 dont le cœfficient dominant vaut 1, donc $\boxed{R = (X+1)(X-i)(X+i)}$.
2. On a $P(-1) = 0$. Ensuite $P' = 8X^7 + 14X^6 + 12X^5 + 10X^4 + 8X^3 + 6X^2 + 4X + 2$ et $P'(-1) = 0$. Ainsi -1 est une racine au moins double de P.
3. On factorise P par $(X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$. On a

$$P=(X^2+2X+1)(aX^6+bX^5+cX^4+dX^3+eX^2+fX+g) \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1 \\ 2a+b &= 2 \\ a+2b+c &= 2 \\ b+2c+d &= 2 \\ c+2d+e &= 2 \\ d+2e+f &= 2 \\ e+2f+g &= 2 \\ f+2g &= 2 \\ g &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \\ d=0 \\ e=1 \\ f=0 \\ g=1. \end{cases}$$

On en conclut que $\boxed{P=(X+1)^2(X^6+X^4+X^2+1)}$

4. On remarque que $P=(X+1)^2R(X^2)$ (où R est le polynôme factorisé dans la question **1.**). Puis

$$\begin{aligned} R(X^2)=(X^2+1)(X^2-i)(X^2+i) &= (X^2-i^2)(X^2-e^{i\frac{\pi}{2}})(X^2-e^{-i\frac{\pi}{2}}) \\ &= (X^2-i^2)\left(X^2-\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2\right)\left(X^2-\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^2\right). \end{aligned}$$

On en conclut donc que

$$\boxed{P=(X+1)^2(X-i)(X+i)(X-e^{i\frac{\pi}{4}})(X+e^{i\frac{\pi}{4}})(X-e^{-i\frac{\pi}{4}})(X+e^{-i\frac{\pi}{4}})}$$

Exercice 9.7

1. On note $P=X^4+aX^3+bX^2+X+2$ et $Q=X^2-3X+2$. On commence par factoriser Q. En trouvant les racines de ce trinôme, on obtient que $Q=(X-1)(X-2)$.
Ainsi P est factorisable par Q si et seulement si 1 et 2 sont racines de P.
Or $P(1)=4+a+b$ et $P(2)=20+8a+4b$. Donc

$$P(1)=P(2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4+a+b &= 0 \\ 20+8a+4b &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-3. \end{cases}$$

On en conclut que P est factorisable par Q si et seulement si $a=-1$ et $b=-3$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$. On note $P=X^{2n}+X^n+1$ et $Q=X^2+X+1$. On commence par factoriser Q. En trouvant les racines du trinôme, on obtient $Q=(X-j)(X-\overline{j})$ où $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
Ainsi P est factorisable par Q si et seulement si j et $\overline{j}$ sont racines de P si et seulement si j est racine de P (car P est à cœfficients réels). On rappelle que $j^2=\overline{j}$ et on a

$$\begin{aligned} P(j)=0 &\Leftrightarrow j^{2n}+j^n+1=0 \\ &\Leftrightarrow \left(j^2\right)^n+j^n+1=0 \\ &\Leftrightarrow \left(\overline{j}\right)^n+j^n+1=0 \\ &\Leftrightarrow e^{-\frac{2in\pi}{3}}+e^{\frac{2in\pi}{3}}+1=0 \\ &\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)+1=0 \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{2n\pi}{3}\equiv\frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \text{ ou } \frac{2n\pi}{3}\equiv-\frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow n\equiv 1\ [3] \text{ ou } n\equiv -1\ [3]. \end{aligned}$$

On en conclut que P est factorisable par Q si et seulement si n n'est pas un multiple de 3.

Exercice 9.8

1. On a
$$T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1 \quad \text{et} \quad T_3 = 2XT_2 - T_1 = 4X^3 - 3X.$$

2. On montre par récurrence double, sur $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $\forall x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos x) = \cos(nx)$ ».

- **Initialisation.** Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$T_0(\cos x) = 1 = \cos(0 \times x) \quad \text{et} \quad T_1(\cos x) = \cos x = \cos(1 \times x)$$
ce qui montre $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$T_{n+2}(\cos(x)) = 2(\cos(x))T_{n+1}(\cos(x)) - T_n(\cos(x)) = 2\cos(x)\cos((n+1)x) - \cos(nx).$$
Or
$$\cos((n+2)x) = \cos((n+1)x + x) = \cos((n+1)x)\cos(x) - \sin((n+1)x)\sin(x)$$
et
$$\cos(nx) = \cos((n+1)x - x) = \cos((n+1)x)\cos(x) + \sin((n+1)x)\sin(x).$$
En ajoutant, on obtient
$$\cos((n+2)x) + \cos(nx) = 2\cos((n+1)x)\cos(x)$$
puis
$$\cos((n+2)x) = 2\cos(x)\cos((n+1)x) - \cos(nx).$$
Ainsi $T_{n+2}(\cos x) = \cos((n+2)x)$, ce qui montre $\mathscr{P}(n+2)$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos x) = \cos(nx)$.

3. En regardant T_1, T_2, T_3 et la formule qui définit les polynômes T_n, on conjecture que, si $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est de degré n et de cœfficient dominant 2^{n-1}. On montre par récurrence double, sur $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$: « T_n est de degré n et de cœfficient dominant 2^{n-1} ».

- **Initialisation.** $\mathscr{P}(1)$ et $\mathscr{P}(2)$ sont clairement vérifiées.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$. On a $\deg(T_n) = n$ et on dispose de $Q \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $T_{n+1} = 2^n X^{n+1} + Q$. Donc
$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n = 2^{n+1}X^{n+2} + \underbrace{2XQ - T_n}_{\in \mathbb{K}_n[X]}.$$
Ainsi, le degré de T_{n+2} est $n+2$ et son cœfficient dominant est $2^{(n+2)-1}$, ce qui montre $\mathscr{P}(n+2)$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est de degré n et de cœfficient dominant 2^{n-1}.

4. Soit $y \in [-1, 1]$. On pose $x = \arccos(y) \in [0, \pi]$, de sorte que $y = \cos(x)$. On a
$$\begin{aligned} T_n(y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad T_n(\cos(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \cos(nx) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ nx = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}. \end{aligned}$$

Or $x \in [0, \pi]$, donc
$$0 \leq \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n} \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq n - \frac{1}{2}.$$
Or k est un entier, donc $k \in [\![0, n-1]\!]$. Ainsi
$$\begin{aligned} T_n(y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!]\,,\ \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!]\,,\ y = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

5. Pour tout k tel que $0 \leq k \leq n-1$, on note $x_k = \dfrac{\pi}{2n} + k\dfrac{\pi}{n}$, on a alors
$$0 < x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < \pi.$$
Or la fonction cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, donc, si on note $y_k = \cos(x_k)$, on a
$$y_0 > y_1 > \cdots > y_{n-1}.$$
Donc, pour $0 \leq k \leq n-1$, les y_k sont tous différents.
Le polynôme T_n, étant de degré n, ne peut pas avoir plus de n racines.
Or, on vient de montrer qu'il en a au moins n.
Donc les y_k sont toutes les racines de T_n.
Vu que le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1}, on obtient
$$\boxed{T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)\right)}.$$

Exercice 9.9

1. Soient $i, j \in [\![0, n]\!]$.

- Si $i \neq j$, alors $L_i(a_j) = \displaystyle\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{a_j - a_k}{a_i - a_k} = \frac{a_j - a_j}{a_i - a_j} \times \prod_{\substack{k=0 \\ k\notin\{i,j\}}}^{n} \frac{a_j - a_k}{a_i - a_k} = 0.$
- Si $i = j$ alors $L_i(a_j) = \displaystyle\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{a_i - a_k}{a_i - a_k} = 1.$

2. On note $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i$. Tous les L_i sont de degré n, donc $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. De plus, si $j \in [\![0, n]\!]$, alors
$$Q(a_j) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i(a_j) = P(a_j).$$
Ainsi $P - Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $(P - Q)(a_j) = 0$.
Le polynôme $P - Q$ est donc de degré au plus n et admet au moins $n+1$ racines.

On en déduit que $P - Q = 0$ et on en conclut que $\boxed{P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i}$

Exercice 9.10

Soit P un polynôme de degré 7. On remarque que $P+1$ et $P-1$ ont la même dérivée égale à P'.
On a : $P+1$ factorisable par $(X-1)^4$
ssi 1 est une racine de multiplicité au moins 4 de $P+1$
ssi 1 est racine de $P+1$ et est une racine au moins triple de $(P+1)'$
ssi $P(1)=-1$ et 1 est une racine au moins triple de P'.
De même, $P-1$ est factorisable par $(X+1)^4$ si et seulement si $P(-1)=1$ et -1 est une racine au moins triple de P'.
Ainsi $P+1$ est factorisable par $(X-1)^4$ et $P-1$ est factorisable par $(X+1)^4$ si et seulement si $P(1)=-1$, $P(-1)=1$ et 1 et -1 sont des racines au moins triples de P.
Or $\deg(P')=6$. Donc $P+1$ est factorisable par $(X-1)^4$ et $P-1$ est factorisable par $(X+1)^4$ si et seulement si $P(1)=-1$, $P(-1)=1$ et il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $P'=\lambda(X-1)^3(X+1)^3$.
De plus, $(X-1)^3(X+1)^3=((X-1)(X+1))^3=(X^2-1)^3=X^6-3X^4+3X^2-1$.
Et $P'=\lambda(X^6-3X^4+3X^2-1)$, si et seulement si $\exists\mu\in\mathbb{K}$, $P=\lambda\left(\dfrac{X^7}{7}-\dfrac{3X^5}{5}+X^3-X\right)+\mu$.
Pour finir, si $P=\lambda\left(\dfrac{X^7}{7}-\dfrac{3X^5}{5}+X^3-X\right)+\mu$, alors

$$\begin{cases} P(1) &= -1 \\ P(-1) &= \ \ 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{16}{35}\lambda+\mu = -1 \\ \dfrac{16}{35}\lambda+\mu \ = \ 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{35}{16} \\ \mu = 0. \end{cases}$$

On en conclut que le seul polynôme P de degré 7 tel que $P+1$ est factorisable par $(X-1)^4$ et $P-1$ est factorisable par $(X+1)^4$ est

$$\boxed{P=\frac{35}{16}\left(\frac{X^7}{7}-\frac{3X^5}{5}+X^3-X\right)}$$

CHAPITRE

10 Géométrie du plan et de l'espace

L'essentiel du cours

Dans tout le chapitre, dans le plan, $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ sera une base orthonormée directe et $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ sera un repère orthonormé direct ; dans l'espace, $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sera une base orthonormée directe et $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sera un repère orthonormé direct.

1 Coordonnées, produit scalaire et déterminant

Définition

Dans le plan :

- On dit que le vecteur $\vec{u}$ est de **coordonnées** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{B}$ si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
- On dit que le point M est de **coordonnées** (x, y) dans $\mathscr{R}$ si $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Dans l'espace :

- On dit que le vecteur $\vec{u}$ est de **coordonnées** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{B}$ si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
- On dit que le point M est de **coordonnées** (x, y, z) dans $\mathscr{R}$ si $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

On peut donc représenter des vecteurs du plan par un couple de réels et les vecteurs de l'espace avec un triplet de réels. On peut donc « assimiler » l'ensemble des vecteurs du plan à $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble des vecteurs de l'espace à $\mathbb{R}^3$.

Définition

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si $\vec{v} = \vec{0}$ ou s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

Théorème du barycentre

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \dots, A_n$ sont des points et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^{n} a_k \neq 0$, alors il existe un unique point G tel que $\sum_{k=1}^{n} a_k\overrightarrow{GA_k} = \vec{0}$. On appelle G le **barycentre** des points $A_1, \dots, A_n$ affectés des poids $a_1, \dots, a_n$ et on note $G = \operatorname{bar}((A_1, a_1), \dots, (A_n, a_n))$.

Si M est un point, alors $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\overrightarrow{MG} = \sum_{k=1}^{n} a_k\overrightarrow{A_kM}$.

- Si tous les poids sont égaux, on parle d'isobarycentre et on note isobar $(A_1, \ldots, A_n)$.
- Le milieu d'un segment $[AB]$ n'est autre que l'isobarycentre des points A, B.

Coordonnées du barycentre

Si G est le barycentre des points $A_1, \ldots, A_n$ affectés des poids $a_1, \ldots, a_n$, avec $a = \sum_{k=1}^{n} a_k \neq 0$, alors les coordonnées de G sont

$$\textbf{Dans le plan : } G\left(\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n} a_k x_{A_k}, \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n} a_k y_{A_k}\right)$$

$$\textbf{Dans l'espace : } G\left(\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n} a_k x_{A_k}, \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n} a_k y_{A_k}, \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n} a_k z_{A_k}\right)$$

Définition

Dans le plan :
On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ le réel $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Dans l'espace :
On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ le réel $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Propriétés du produit scalaire

Si $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

- $(\lambda\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{w}) + \vec{v} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot (\lambda\vec{v} + \vec{w}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ et $\left(\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}\right)$.

Définition

On appelle **norme** du vecteur $\vec{u}$ le réel $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

Expression géométrique du produit scalaire

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls et si $\theta = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\theta$.

Caractérisation de l'orthogonalité

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Propriétés de la norme

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

- $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\,\|\vec{u}\|$
- $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ (Cauchy-Schwarz)
- $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ (Inégalité triangulaire)
- $\|\vec{u}\| \geq 0$ et $\big(\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}\big)$.

Définition

Dans le plan. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs et si on pose l'angle orienté $\theta = (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$, on définit le **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{cases} \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\theta & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Caractérisation de la colinéarité

Dans le plan. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$.

Formule du déterminant

Dans le plan. Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\det(\vec{u},\vec{v}) = xy' - x'y$.

Il s'agit du déterminant de la matrice des coordonnées $\begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$.

Propriétés du déterminant

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

- $\det(\lambda\vec{u}+\vec{v},\vec{w}) = \lambda\det(\vec{u},\vec{w}) + \det(\vec{v},\vec{w})$
- $\det(\vec{u},\lambda\vec{v}+\vec{w}) = \lambda\det(\vec{u},\vec{v}) + \det(\vec{u},\vec{w})$
- $\det(\vec{u},\vec{u}) = 0$
- $\det(\vec{v},\vec{u}) = -\det(\vec{u},\vec{v})$.

2 Droites et cercles du plan

On notera $\mathscr{P}$ l'ensemble des points du plan.

Définition

Si A est un point et si $\vec{u}$ est un vecteur non nul, on appelle **droite** passant par A et dirigée par $\vec{u}$ l'ensemble

$$\mathscr{D}(A,\vec{u}) = \left\{ M \in \mathscr{P} \;\middle/\; \exists t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \right\}.$$

Dans ce cas, on dit que $\vec{u}$ est un **vecteur directeur** de la droite.

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite $\mathscr{D}$, alors $\lambda\vec{u}$ l'est aussi, si $\lambda \neq 0$.
On parlera donc bien **d'un** vecteur directeur et jamais **du** vecteur directeur.

Définition

On dit que deux droites sont
- **parallèles** si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires
- **perpendiculaires** si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Représentation paramétrique d'une droite

Si $A(x_A, y_A)$ est un point, $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ un vecteur non nul et $\mathscr{D} = \mathscr{D}(A, \vec{u})$, alors

$$M(x, y) \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t. \end{cases}$$

- Grâce à une représentation paramétrique, on peut récupérer facilement un point de la droite et un vecteur directeur.
- Tout comme il n'y a pas unicité du point et du vecteur pour définir une droite, il n'y a pas unicité de la représentation paramétrique.

Définition

Si $\mathscr{D}$ est une droite dirigée par un vecteur $\vec{u}$, on appelle **vecteur normal** à la droite $\mathscr{D}$ tout vecteur non nul orthogonal à $\vec{u}$.

Équation cartésienne d'une droite

Si $\mathscr{D}$ est une droite, $A(x_A, y_A) \in \mathscr{D}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ un vecteur normal à $\mathscr{D}$, alors

$$M(x, y) \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0.$$

Réciproquement, toute partie du plan ayant une équation de la forme $ax + by + c = 0$ (avec $(a, b) \neq (0, 0)$) est une droite et le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ lui est normal.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ est une vecteur directeur de $\mathscr{D}$, alors $\vec{n}\begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$.

Équation réduite d'une droite

Si $\mathscr{D}$ est une droite du plan non verticale (c'est-à-dire si $\vec{j}$ n'est pas un vecteur directeur de $\mathscr{D}$), alors elle admet une unique équation de la forme $y = mx + p$. On dit que m est la **pente** (ou le **cœfficient directeur**) de $\mathscr{D}$.

Définition

Si B est un point et $\mathscr{D} = \mathscr{D}(A, \vec{u})$, alors le **projeté orthogonal** de B sur $\mathscr{D}$ est le seul point H vérifiant

$$H \in \mathscr{D} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BH} \perp \vec{u}.$$

Caractérisation du projeté orthogonal sur une droite

Si B est un point, $\mathscr{D} = \mathscr{D}(A, \vec{u})$ et H le projeté orthogonal de B sur $\mathscr{D}$, alors

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}.$$

Définition

Si A est un point et $r > 0$, on appelle **cercle** de centre A et de rayon r l'ensemble

$$\mathscr{C}(A, r) = \{M \in \mathscr{P} \ / \ AM = r\}.$$

Équation d'un cercle

Si $A(x_A, y_A)$ est un point, $r > 0$ et $\mathscr{C} = \mathscr{C}(A, r)$, alors

$$M(x, y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2 \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + r\cos t \\ y = y_A + r\sin t. \end{cases}$$

Réciproquement, toute partie du plan ayant une équation de la forme $x^2+y^2+ax+by+c=0$ est un cercle ou un point ou l'ensemble vide.

3 Droites et plans de l'espace

On notera $\mathscr{E}$ l'ensemble des points de l'espace.

Définition

Si A est un point et si $\vec{u}$ est un vecteur non nul, on appelle **droite** passant par A et dirigée par $\vec{u}$ l'ensemble

$$\mathscr{D}(A, \vec{u}) = \left\{M \in \mathscr{E} \ \middle/ \ \exists t \in \mathbb{R}, \ \overrightarrow{AM} = t\vec{u}\right\}.$$

Dans ce cas, on dit que $\vec{u}$ est un **vecteur directeur** de la droite.

Définition

On dit que deux droites sont

- **parallèles** si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires
- **orthogonales** si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux
- **perpendiculaires** si elles sont orthogonales et qu'elles se croisent.

Représentation paramétrique d'une droite

Si $A(x_A, y_A, z_A)$ est un point, $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ un vecteur non nul et $\mathscr{D} = \mathscr{D}(A, \vec{u})$, alors

$$M(x, y) \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t. \end{cases}$$

Définition

Si B est un point et $\mathscr{D} = \mathscr{D}(A, \vec{u})$, alors le **projeté orthogonal** de M sur $\mathscr{D}$ est le seul point H vérifiant

$$H \in \mathscr{D} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BH} \perp \vec{u}.$$

Caractérisation du projeté orthogonal sur une droite

Si B est un point, $\mathscr{D} = \mathscr{D}(A, \vec{u})$ et H le projeté orthogonal de B sur $\mathscr{D}$, alors

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}.$$

Définition

Si A est un point et si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires, on appelle **plan** passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ l'ensemble

$$\mathscr{P}(A, \vec{u}, \vec{v}) = \left\{ M \in \mathscr{E} \ \middle/ \ \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \right\}.$$

Définition

Si $\mathscr{P}$ est un plan dirigé par les vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on appelle **vecteur normal** au plan $\mathscr{P}$ tout vecteur non nul orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

Définition

On dit que deux plans sont

- **parallèles** si leurs vecteurs normaux sont colinéaires
- **perpendiculaires** si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Représentation paramétrique d'un plan

Si $A(x_A, y_A, z_A)$ est un point, $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ \gamma_2\end{pmatrix}$ deux vecteurs non colinéaires et $\mathscr{P} = \mathscr{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$, alors

$$M(x,y,z) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + \alpha_1\lambda + \alpha_2\mu \\ y = y_A + \beta_1\lambda + \beta_2\mu \\ z = z_A + \gamma_1\lambda + \gamma_2\mu. \end{cases}$$

Équation cartésienne d'un plan

Si $\mathscr{P}$ est un plan, $A(x_A, y_A, z_A) \in \mathscr{P}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ un vecteur normal à $\mathscr{P}$, alors

$$M(x,y,z) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Réciproquement, toute partie de l'espace ayant une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ (avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$) est un plan et le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ lui est normal.

Une droite peut être vue comme l'intersection de deux plans. Pour caractériser de manière cartésienne une droite, il faut donc se donner deux équations cartésiennes de plans.

Définition

Si B est un point et $\mathscr{P} = \mathscr{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$, alors le **projeté orthogonal** de B sur $\mathscr{P}$ est le seul point H vérifiant

$$H \in \mathscr{D}, \quad \overrightarrow{BH} \perp \vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BH} \perp \vec{v}.$$

Caractérisation du projeté orthogonal sur un plan

Si B est un point, $\mathscr{P} = \mathscr{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$, avec $\vec{u} \perp \vec{v}$, et H le projeté orthogonal de B sur $\mathscr{P}$, alors

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} + \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}.$$

Les méthodes à maîtriser

Méthode 10.1 : Passer d'une représentation cartésienne à paramétrique

Lorsque l'on a une droite ou un plan donné par sa (ou ses) équation(s) cartésienne(s), on pivote comme pour résoudre un système linéaire. Il suffit ensuite de considérer les inconnues secondaires comme des paramètres pour obtenir une représentation paramétrique.

Exemple d'application

(1) Déterminer un représentation paramétrique de $\mathscr{P}$: $x - 2y - 3z - 4 = 0$, puis en déduire $A, \vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\mathscr{P} = \mathscr{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$.

(2) Déterminer un représentation paramétrique de $\mathscr{D}$: $\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x - y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$ puis en déduire B et $\vec{w}$ tels que $\mathscr{D} = \mathscr{D}(B, \vec{w})$.

(1) On transforme assez facilement l'équation en $x = 2y+3z+4$ avec y, z en inconnues secondaires. On obtient donc la représentation paramétrique suivante $\mathscr{P}$: $\begin{cases} x = 2\lambda + 3\mu + 4 \\ y = \lambda \\ z = \mu. \end{cases}$

En posant $A(4, 0, 0)$, $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a bien $\mathscr{P} = \mathscr{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$.

(2) En appliquant le pivot de Gauss sur le système, on arrive à $\begin{cases} x = -2z \\ y = z - 1 \end{cases}$ avec z en inconnue secondaire. On obtient donc la représentation paramétrique suivante $\mathscr{D}$: $\begin{cases} x = -2t \\ y = t - 1 \\ z = t. \end{cases}$

En posant $B(0, -1, 0)$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a bien $\mathscr{D} = \mathscr{D}(B, \vec{w})$.

Pour passer d'une représentation paramétrique à cartésienne, on fait l'inverse : on pivote pour « éliminer » les paramètres.

Voir exercices **10.1**, **10.2**, **10.5** et **10.6**.

Méthode 10.2 : Déterminer le centre et le rayon d'un cercle

En partant d'une équation de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, pour déterminer s'il s'agit d'une cercle, d'un point ou du vide, on commence par mettre sous forme canonique $x^2 + ax$ puis $y^2 + bx$. On arrive à une équation de la forme $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \gamma$.

- Si $\gamma < 0$, il n'y a pas de solutions à cette équation, il s'agit donc du vide.
- Si $\gamma = 0$, il s'agit du point de coordonnées (α, β).
- Si $\gamma > 0$, il s'agit d'un cercle de centre $\Omega(\alpha, \beta)$ et de rayon $\sqrt{\gamma}$.

Exemple d'application

Déterminer si $\mathscr{C}_1 : x^2 - 2x + y^2 + 2y + 3 = 0$ et $\mathscr{C}_2 : x^2 - 4x + y^2 + y + 2 = 0$ sont des cercles. Si oui, déterminer leur centre et leur rayon.

- Pour $\mathscr{C}_1$, on met sous forme canonique
$$x^2 - 2x = (x^2 - 2x + 1) - 1 = (x-1)^2 - 1 \quad \text{et} \quad y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1.$$
L'équation de $\mathscr{C}_1$ se transforme donc en
$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = -1$$
qui n'a pas de solution dans $\mathbb{R}^2$. Donc $\mathscr{C}_1 = \varnothing$.
- On procède de même pour arriver à
$$(x-2)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$
Si on pose $\Omega\left(2, -\frac{1}{2}\right)$, alors $\mathscr{C}_2 = \mathscr{C}\left(\Omega, \frac{3}{2}\right)$.

Voir exercice **10.4**.

Méthode 10.3 : Déterminer le projeté orthogonal d'un point

Dans la pratique, il n'est pas conseillé d'utiliser la formule avec les produits scalaires pour déterminer le projeté orthogonal (très très calculatoire), on se sert plutôt de la définition.

- Pour projeter B sur une droite dans le plan ou sur un plan dans l'espace (que l'on notera $\mathscr{A}$) : on commence par déterminer la droite $\mathscr{D}$ perpendiculaire à $\mathscr{A}$ et passant par B ($\mathscr{D}$ sera dirigée par un vecteur normal à $\mathscr{A}$), puis on détermine le point d'intersection de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{D}$.
- Pour projeter B sur une droite $\mathscr{D}$ dans l'espace : on commence par déterminer un plan $\mathscr{P}$ perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et passant par B (un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$), puis on détermine le point d'intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$.

Exemple d'application

Déterminer le projeté orthogonal H de $B(-2,-1,0)$ sur $\mathscr{D} : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 2t. \end{cases}$

La droite $\mathscr{D}$ est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$. Soit $\mathscr{P}$ le plan perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et passant par B. Le vecteur $\vec{u}$ est normal à $\mathscr{P}$, donc
$$M(x,y,z) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (x+2) + (y+1) + 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow x + y + 2z + 3 = 0$$
Il ne reste plus qu'à déterminer l'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ (encore un système linéaire à résoudre) :
$$M(x,y,z) \in \mathscr{D} \cap \mathscr{P} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 2t \\ x + y + 2z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = -1 \\ t = -2. \end{cases}$$
Ainsi $H(-1,0,-1)$.

Voir exercices **10.2** et **10.6**.

Interro de cours

1. Soient A et B deux points du plan tels que $A(1,2)$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées de B.

2. Déterminer les coordonnées du milieu du segment $[AB]$ où $A(2,4)$ et $B(-4,2)$.

3. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ? orthogonaux ?

4. Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ des vecteurs et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les propositions sont-elles toujours vraies ?

(a) $\|\lambda\vec{u}\| = \lambda\,\|\vec{u}\|$

(b) $\det(\vec{u},\vec{v}) = \det(\vec{v},\vec{u})$

(c) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

(d) $\det(\vec{u},\vec{u}) = 0$ si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$.

5. Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$ les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2a+1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2a-1\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

6. Soient $A(2,-1)$ et $B(3,1)$. Déterminer une équation cartésienne de (AB).

7. Soient $A(1,2)$, $B(2,1)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et $\mathscr{D} = \mathscr{D}(A,\vec{u})$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par B.

8. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D} : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-t. \end{cases}$

9. Déterminer une représentation paramétrique du plan $\mathscr{P} : x - y + z - 1 = 0$.

10. Soient $A(1,2)$ et $B(3,6)$. Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$.

11. Déterminer le centre et le rayon du cercle $\mathscr{C}$ d'équation : $x^2 + x + y^2 - 3y + 2 = 0$.

12. Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

(a) Dans le plan, l'intersection d'une droite et d'un cercle est soit le vide, soit un point, soit deux points.

(b) Dans l'espace, deux droites qui ne se croisent pas sont parallèles.

(c) Dans l'espace, l'intersection de deux plans est soit le vide, soit une droite.

13. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de $B(1,3,1)$ sur $\mathscr{P} : x + y + z + 1 = 0$.

Exercices

Pour s'entraîner

Exercice 10.1

Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $4x+2y-1=0$.

Exercice 10.2

Soit $\mathscr{D} : \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = t - 1. \end{cases}$
Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{D}$ et les coordonnées du projeté orthogonal de O sur $\mathscr{D}$.

Exercice 10.3

Soient $\mathscr{D} : 2x - y + 3 = 0$ et $\mathscr{D}' : 2x + 4y - 2 = 0$.

1. Montrer que $\mathscr{D} \perp \mathscr{D}'$.
2. En quel point sont-elles perpendiculaires ?

Exercice 10.4

Soient $\mathscr{C} : x^2 + 2x + y^2 - 2y - 2 = 0$ et $\mathscr{D} : x + y - 2 = 0$.

1. Montrer que $\mathscr{C}$ est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
2. Déterminer le(s) point(s) d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

Exercice 10.5

Déterminer une représentation paramétrique du plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $4x+2y-z-1=0$.

Exercice 10.6

Soient $A(-1, 4, 3)$ et $\mathscr{P} : \begin{cases} x = 2\lambda + \mu + 3 \\ y = \lambda - \mu - 1 \\ z = -\lambda + 2\mu + 1. \end{cases}$
Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ et les coordonnées du projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$.

Exercice 10.7

Soient $\mathscr{P} : x - 3y - 2z + 1 = 0$ et $\mathscr{P}' : \begin{cases} x = -4\lambda + \mu + 1 \\ y = -2\lambda - \mu - 3 \\ z = \lambda + 2\mu. \end{cases}$

1. Montrer que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles.
2. Sont-ils confondus ?

Pour aller plus loin

Exercice 10.8

Soient $A(1,2,3)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\mathscr{D}=\mathscr{D}(A,\vec{u})$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$.
2. Déterminer deux plans différents $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ contenant $\mathscr{D}$ et une équation cartésienne de chacun d'eux.
3. En déduire une représentation cartésienne de $\mathscr{D}$.

Exercice 10.9

Soient $A(1,1,1)$, $B(1,2,3)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\mathscr{D}=\mathscr{D}(A,\vec{u})$ et $\mathscr{D}'=\mathscr{D}(B,\vec{v})$.
Le but de cet exercice est de chercher la perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

1. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont-elles parallèles ?
2. Déterminer un vecteur normal à $\mathscr{D}$ et à $\mathscr{D}'$, on le notera $\vec{w}$.
3. Déterminer une représentation cartésienne de $\mathscr{P}=\mathscr{P}(A,\vec{u},\vec{w})$ et $\mathscr{P}'=\mathscr{P}(B,\vec{v},\vec{w})$.
4. À quoi correspond l'intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$? On la notera $\mathscr{D}''$.
5. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathscr{D}''$.

Exercice 10.10

Soient $\mathscr{D} : ax+by+c=0$ (avec $(a,b)\neq(0,0)$) et $B(x_B,y_B)\in\mathscr{D}$. Si $A(x_A,y_A)$ est un point du plan et si H est son projeté orthogonal sur $\mathscr{D}$, on appelle distance de A à $\mathscr{D}$ le réel $d(A,\mathscr{D})=AH$. Le but de l'exercice est de trouver une formule donnant cette distance.

1. Justifier que $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$.
2. Exprimer c en fonction de a, b, x_B et y_B. En déduire que $\overrightarrow{BA}\cdot\vec{n}=ax_A+by_A+c$.
3. Montrer que $\overrightarrow{BA}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{HA}\cdot\vec{n}$. En déduire que $\left|\overrightarrow{BA}\cdot\vec{n}\right|=AH\,\|\vec{n}\|$.
4. Conclure que $d(A,\mathscr{D})=\dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Exercice 10.11

Soient (Ox) l'axe des abscisses, $N(0,2)$, $\Omega(0,1)$ et $\mathscr{C}=\mathscr{C}(\Omega,1)$. Si $M\in\mathscr{C}\setminus\{N\}$, on définit $\sigma(M)$, la projection stéréographique de M, comme l'intersection de la droite (NM) et de (Ox).

1. Si $M(a,b)\in\mathscr{C}\setminus\{N\}$, déterminer les coordonnées de $\sigma(M)$.
2. Si $P\in(Ox)$, déterminer les coordonnées des points d'intersection de (NP) et $\mathscr{C}$.
3. En déduire que

$$\begin{array}{rccc}\sigma : & \mathscr{C}\setminus\{N\} & \to & (Ox)\\ & M & \mapsto & \sigma(M)\end{array}$$

est bijective.

Corrections

Interro de cours

1. On note (x_B, y_B) les coordonnées de B. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont donc $\begin{pmatrix} x_B - 1 \\ y_B - 2 \end{pmatrix}$.
Par identification, $x_B - 1 = 1$ et $y_B - 2 = -4$.
On en conclut que les coordonnées de B sont $(2, -2)$.

2. On utilise les coordonnées du barycentre. Si on note I le milieu de $[AB]$, on a

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = -1 \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 3.$$

3. Les vecteurs ne sont clairement pas colinéaires à cause de l'emplacement des zéros. En effet s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, alors $2 = \lambda$, $1 = 0$ et $0 = 2\lambda$, ce qui est impossible.
Pour l'orthogonalité, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \neq 0$. Ainsi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

4. **(a)** **Faux.** Si $\lambda = -1$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors $\|-\vec{u}\| = \|\vec{u}\| \neq -\|\vec{u}\|$.

(b) **Faux.** Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u}) \neq \det(\vec{v}, \vec{u})$.

(c) **Vrai.** C'est la symétrie du produit scalaire.

(d) **Faux.** On a toujours $\det(\vec{u}, \vec{u}) = 0$.

5. On a $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. Or $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 4a^2 - 4$. Donc $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ si et seulement si $4a^2 - 4 = 0$ c'est-à-dire $a = \pm 1$.
Ainsi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $a = 1$ ou $a = -1$.

6. On a $M(x, y) \in (AB) \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right) = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} x-2 & 1 \\ y+1 & 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 5 = 0$.
Ainsi une équation cartésienne de (AB) est $2x - y - 5 = 0$.

7. On note $\mathscr{D}'$ cette droite, dont $\vec{u}$ est un vecteur normal, et on a

$$M(x, y) \in \mathscr{D}' \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (x - 2) - (y - 1) = 0.$$

Ainsi une équation cartésienne de $\mathscr{D}'$ est $x - y - 1 = 0$.

8. On pivote pour éliminer le paramètre t :

$$M(x, y) \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} t = x - 2 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x + y - 5 = 0.$$

Ainsi une équation cartésienne de $\mathscr{D}$ est $x + y - 5 = 0$.

9. On paramétrise l'équation cartésienne donnée

$$M(x, y, z) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow x = y - z + 1 \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda - \mu + 1 \\ y = \lambda \\ z = \mu. \end{cases}$$

10. On note $\mathscr{C}$ ce cercle et I le milieu de $[AB]$. Ainsi $\mathscr{C}$ est le cercle de centre I et de rayon $\dfrac{AB}{2}$.
On obtient $x_I = \dfrac{1+3}{2} = 2$ et $y_I = \dfrac{2+6}{2} = 4$.
De plus $AB = \sqrt{(3-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
On en conclut qu'une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ est $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 5$.

11. Si $x, y \in \mathbb{R}$, on a $x^2 + x + y^2 - 3y + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$. Ainsi

$$M(x, y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2.$$

On en conclut que $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

12. **(a)** **Vrai.**

(b) **Faux.** Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, si on note $A(1, 0, 0)$, $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}(O, \vec{j})$ et $\mathscr{D}_2 = \mathscr{D}(A, \vec{k})$, alors $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas parallèles car $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas colinéaires. De plus, $\mathscr{D}_1$ est contenue dans la plan d'équation $x = 0$ et $\mathscr{D}_2$ est contenue dans la plan d'équation $x = 1$. Elles ne se croisent donc pas.

(c) **Faux.** Si les deux plans sont les mêmes, l'intersection est un plan.

13. Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal à $\mathscr{P}$. On note $\mathscr{D} = \mathscr{D}(B, \vec{n})$. On a

$$M(x, y, z) \in \mathscr{P} \cap \mathscr{D} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + t \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = -1 \\ t = -2. \end{cases}$$

On en conclut que le projeté orthogonal de B sur $\mathscr{P}$ a pour coordonnées $(-1, 1, -1)$.

Exercice 10.1

On paramétrise l'équation cartésienne donnée

$$M(x, y) \in \mathscr{D} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} - 2x \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2} - 2t. \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ est donc $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2} - 2t. \end{cases}$

Exercice 10.2

On pivote pour éliminer le paramètre

$$M(x, y) \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = t - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x - 2y = 5 \\ t = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x - 2y - 5 = 0.$$

Ainsi une équation cartésienne de $\mathscr{D}$ est $x - 2y - 5 = 0$.

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ qui est normal à $\mathscr{D}$. On note $\mathscr{D}' = \mathscr{D}(O, \vec{n})$. On a

$$M(x,y) \in \mathscr{D} \cap \mathscr{D}' \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ x - 2y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ t = 1. \end{cases}$$

On en conclut que le projeté orthogonal de O sur $\mathscr{D}$ a pour coordonnées $(1, -2)$.

Exercice 10.3

1. Soient $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ un vecteur normal à $\mathscr{D}$ et $\vec{n'}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ un vecteur normal à $\mathscr{D}'$. On a $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$ donc $\vec{n} \perp \vec{n'}$. Alors $\mathscr{D} \perp \mathscr{D}'$.

2. On résout le système

$$M(x,y) \in \mathscr{D} \cap \mathscr{D}' \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \ \ y = -3 \\ 2x + 4y = \ \ 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \ \ 1. \end{cases}$$

On en conclut que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ se coupent en le point de coordonnées $(-1, 1)$.

Exercice 10.4

1. Si $x, y \in \mathbb{R}$, on a $x^2 + 2x + y^2 - 2y - 2 = (x+1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 - 2$. Donc

$$M(x,y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 4.$$

On en conclut que $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\Omega(-1,1)$ et de rayon 2.

2. On résout le système.

$$M(x,y) \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + y^2 - 2y - 2 = 0 \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2 = 0 \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -1 \\ y = 3. \end{cases}$$

On en conclut que les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ sont les points $A(1,1)$ et $B(-1,3)$.

Exercice 10.5

On paramétrise l'équation cartésienne donnée

$$M(x,y,z) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow z = 4x + 2y - 1 \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 4\lambda + 2\mu - 1. \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de $\mathscr{P}$ est donc $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 4\lambda + 2\mu - 1. \end{cases}$

Exercice 10.6

• On pivote pour éliminer les paramètres

$$\begin{aligned}
M(x,y,z)\in\mathscr{P} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}, \begin{cases} x = 3+2\lambda+\mu \\ y=-1+\lambda-\mu \\ z=1-\lambda+2\mu \end{cases} \\
&\underset{\substack{L_1\leftarrow L_1-2L_2 \\ L_3\leftarrow L_3+L_2}}{\Leftrightarrow} \quad \exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}, \begin{cases} x-2y = 5+3\mu \\ y=-1+\lambda-\mu \\ y+z=\mu \end{cases} \\
&\underset{L_1\leftarrow L_1-3L_3}{\Leftrightarrow} \quad \exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}, \begin{cases} x-5y-3z=5 \\ y=-1+\lambda-\mu \\ y+z=\mu \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad x-5y-3z-5=0.
\end{aligned}$$

On en conclut que une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est $x-5y-3z-5=0$.

• On note $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-5\\-3\end{pmatrix}$ un vecteur normal à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}=\mathscr{D}(A,\vec{n})$. On a

$$M(x,y,z)\in\mathscr{P}\cap\mathscr{D}\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}, \begin{cases} x=-1+t \\ y=4-5t \\ z=3-3t \\ x-5y-3z-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}, \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=0 \\ t=1. \end{cases}$$

On en conclut que le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$ a pour coordonnées $(0,-1,0)$.

Exercice 10.7

1. Si on note $A(1,-3,0)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, alors $\mathscr{P}'=\mathscr{P}(A,\vec{u},\vec{v})$. On pose $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$ un vecteur normal à $\mathscr{P}$.
On a $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$ et $\vec{v}\cdot\vec{n}=0$, donc $\vec{u}\perp\vec{n}$ et $\vec{v}\perp\vec{n}$. Ainsi $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}'$. Alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles.

2. On a $x_A-3y_A-2z_A+1=11\neq 0$, donc $A\notin\mathscr{P}$. Or $A\in\mathscr{P}'$. Donc $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ne sont pas confondus.

Exercice 10.8

1. De manière immédiate, on a une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$: $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=3+2t. \end{cases}$

2. On pivote pour éliminer le paramètre.

$$M(x,y,z)\in\mathscr{D}\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}, \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=3+2t \end{cases} \Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}, \begin{cases} t=x-1 \\ y+x=3 \\ z-2x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-3=0 \\ 2x-z+1=0. \end{cases}$$

On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x+y-3=0$ et $\mathscr{P}'$ le plan d'équation $2x-z+1=0$.

On a $B(1,2,0) \in \mathscr{P}$ et $B \notin \mathscr{P}'$, donc $\mathscr{P} \neq \mathscr{P}'$.
De plus, si $M(x,y,z) \in \mathscr{D}$, alors d'après le calcul effectué au début de la question, $x+y-3=0$ et $M \in \mathscr{P}$. Ainsi $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}$. De même, on a $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}'$.

3. D'après la question précédente, on a $\mathscr{D} = \mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$.
On en conclut qu'une représentation cartésienne de $\mathscr{D}$ est $\begin{cases} x+y-3=0 \\ 2x-z+1=0. \end{cases}$

Exercice 10.9

1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont clairement pas colinéaires, donc $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles.

2. On note $\vec{w}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On a $\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b=-c. \end{cases}$

Donc, pour $c=1$, le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Ainsi $\vec{w}$ est normal à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

3. Dans les deux cas, on part d'une représentation paramétrique et on pivote pour éliminer les paramètres. Pour $\mathscr{P}$:

$$M(x,y,z) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1+\lambda+\mu \\ y = 1+\lambda-\mu \\ z = 1 +\mu \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-z = \phantom{2+{}}\lambda \\ y+z = 2+\lambda \\ \phantom{y+{}}z = 1 +\mu \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-y-2z=-2 \\ \phantom{x-{}}y+z = 2 +\lambda \\ \phantom{x-y+{}}z = 1 +\mu \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x-y-2z+2=0.$$

On en conclut qu'une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est $x-y-2z+2=0$.
De même on trouve une équation cartésienne de $\mathscr{P}'$: $2x+y-z-1=0$.

4. Le plan $\mathscr{P}$ est dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{w}$; le plan $\mathscr{P}'$ est dirigé par $\vec{v}$ et $\vec{w}$, donc leur intersection $\mathscr{D}''$ est dirigée par $\vec{w}$. Ainsi $\mathscr{D}''$ est orthogonale à $\mathscr{D}$ et à $\mathscr{D}'$. De plus $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}''$ sont incluses dans le plan $\mathscr{P}$. Comme elles ne sont pas parallèles, elles se croisent. De même $\mathscr{D}'$ et $\mathscr{D}''$ se croisent.
On en conclut que $\mathscr{D}''$ est la perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

5. On part des équations cartésiennes définissant $\mathscr{D}''$ puis on pivote pour paramétriser.

$$M(x,y,z) \in \mathscr{D}'' \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-2z=-2 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-y-2z=-2 \\ 3y+3z=5 \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{3}L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-z=-\frac{1}{3} \\ 3y+3z=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t-\frac{1}{3} \\ y=-t+\frac{5}{3} \\ z=t. \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de $\mathscr{D}''$ est donc $\begin{cases} x = \ \ t \ - \frac{1}{3} \\ y = -t + \frac{5}{3} \\ z = \ \ t. \end{cases}$

Exercice 10.10

1. Les réels a et b n'étant pas tous les deux nuls, d'après le cours $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à $\mathscr{D}$.

2. Le point B appartient à $\mathscr{D}$, donc $ax_B + by_B + c = 0$ et $c = -ax_B - by_B$. Donc

$$\overrightarrow{BA} \cdot \vec{n} = a(x_A - x_B) + b(y_A - y_B) = ax_A + by_A - ax_B - by_B = ax_A + by_A + c.$$

3. Les points B et H sont sur la droite $\mathscr{D}$, donc $\overrightarrow{BH}$ est colinéaire à un vecteur directeur de $\mathscr{D}$, puis $\overrightarrow{BH} \cdot \vec{n} = 0$. Ainsi

$$\overrightarrow{BA} \cdot \vec{n} = \left(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HA}\right) \cdot \vec{n} = \underbrace{\overrightarrow{BH} \cdot \vec{n}}_{=0} + \overrightarrow{HA} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{HA} \cdot \vec{n}.$$

Ensuite, on note $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{HA}, \vec{n}}\right)$. Le point H étant le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$, les vecteurs $\overrightarrow{HA}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, donc $\theta \equiv 0 \ [\pi]$. On en déduit que $\cos\theta = \pm 1$. Ainsi

$$\left|\overrightarrow{BA} \cdot \vec{n}\right| = \left|\overrightarrow{HA} \cdot \vec{n}\right| = \left\|\overrightarrow{HA}\right\| \|\vec{n}\| \left|\cos\theta\right| = AH \|\vec{n}\|.$$

4. On en conclut donc que

$$d(A, \mathscr{D}) = AH = \frac{\left|\overrightarrow{BA} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Exercice 10.11

1. Comme $M \in \mathscr{C} \setminus \{N\}$, on a $a^2 + (b-1)^2 = 1$ et $(a, b) \neq (0, 2)$. Nécessairement, on a $b \neq 2$ (sinon on aurait $a^2 = 0$ et $(a, b) = (0, 2)$). On a $\overrightarrow{NM}\begin{pmatrix} a \\ b-2 \end{pmatrix}$ et

$$A(x, y) \in (NM) \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NM}\right) = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} x & a \\ y-2 & b-2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x(b-2) - a(y-2) = 0.$$

On cherche ensuite à déterminer le point d'intersection de (NM) et (Ox) :

$$A(x, y) \in (NM) \cap (Ox) \Leftrightarrow \begin{cases} x(b-2) - a(y-2) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2a}{2-b} \\ y = 0. \end{cases}$$

On en conclut que les coordonnées de $\sigma(M)$ sont $\left(\dfrac{2a}{2-b}, 0\right)$.

2. Soit $P(a,0) \in (Ox)$. On a $\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix} a \\ -2 \end{pmatrix}$, puis

$$M(x,y) \in (NP) \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NP}\right) = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} x & a \\ y-2 & -2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2x - a(y-2) = 0.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
M(x,y) \in (NP) \cap \mathscr{C} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ -2x - a(y-2) = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{a^2}{4}(y-2)^2 + (y-1)^2 = 1 \\ x = -\dfrac{a}{2}(y-2) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{a^2}{4}(y-2)^2 + y^2 - 2y = 0 \\ x = -\dfrac{a}{2}(y-2) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{a^2}{4}(y-2)^2 + y(y-2) = 0 \\ x = -\dfrac{a}{2}(y-2) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left(\dfrac{a^2}{4}(y-2) + y\right)(y-2) = 0 \\ x = -\dfrac{a}{2}(y-2) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = \dfrac{2a^2}{4+a^2} \\ x = \dfrac{4a}{4+a^2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 2 \\ x = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Les points d'intersection de (NP) et $\mathscr{C}$ sont donc N et le point de coordonnées $\left(\dfrac{4a}{4+a^2}, \dfrac{2a^2}{4+a^2}\right)$.

3. D'après la question précédente pour tout point P, on trouve un unique point $M \in \mathscr{C} \setminus \{N\}$ sur (NP), c'est-à-dire tel que $\sigma(M) = P$. Ainsi σ est une bijection.

Partie 3

Probabilités et statistiques

CHAPITRE 11

Dénombrement

L'essentiel du cours

1 Ensembles finis

Définition

On dit qu'un ensemble E est une **ensemble fini** s'il a un nombre fini d'éléments. On appelle alors **cardinal** de E son nombre d'éléments, noté $\mathrm{Card}(E)$ ou $|E|$ ou $\#E$.

Théorème

Deux ensembles finis E et F sont de même cardinal si et seulement s'il existe une bijection de E dans F.

Cardinal d'un sous-ensemble

Si E est un ensemble fini et $F \subset E$, alors F est un ensemble fini et $\mathrm{Card}(F) \leq \mathrm{Card}(E)$, avec égalité si et seulement si $E = F$.

Cardinaux et sous-ensembles

Si E et F sont des ensembles finis et $p \in \mathbb{N}$, alors :

- Si $E \cap F = \varnothing$, alors $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F)$.
- $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E \cap F)$ (*formule du crible*).
- $\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F)$.
- $\mathrm{Card}(E^p) = \mathrm{Card}(E)^p$.
- $\mathrm{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}$.

2 Dénombrement

Dans toute cette partie p sera un entier naturel non nul et E un ensemble fini de cardinal n.

Définition

- Une p-**liste sans répétition** de E est une p-liste de E dont les éléments sont deux à deux distincts.
- Une **permutation** de E est une liste de E contenant exactement une fois chaque élément de E.
- Si $p \in \mathbb{N}^*$, une p-**combinaison** d'un ensemble E est une partie de E à p éléments.

- Un p-liste sans répétition de E est aussi appelée un **arrangement** de E à p éléments.
- Une permutation de E est une n-liste sans répétition de E.
- Une p-liste modélise p tirages successifs avec remise en tenant compte de l'ordre.
- Une p-liste sans répétition modélise p tirages successifs sans remise en tenant compte de l'ordre.
- Une p-combinaison modélise p tirages successifs sans remise sans tenir compte de l'ordre ou p tirages simultanés.

Nombre de p-listes

Le nombre de p-listes de E est n^p.

Nombre de p-listes sans répétition

Le nombre de p-listes sans répétition de E est $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)\cdots(n-p+1)$.

Nombre de permutations

Le nombre de permutations de E est $n!$.

Nombre de combinaisons

Le nombre de p-combinaisons de E est $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$.

RÉPÉTITION

ORDRE		AVEC	SANS
	AVEC	p-listes n^p	p-arrangements $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
	SANS		p-combinaisons $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Les méthodes à maîtriser

Méthode 11.1 : Dénombrer des anagrammes

Un certain nombre de problèmes de dénombrement peuvent se ramener à compter des anagrammes d'un « mot ». Pour ce faire, si notre mot initial est de longueur n :

1. On compte le nombre de fois qu'apparaît chaque lettre dans le mot initial.
2. On prend une de ces lettres (en général, celle qui apparait le plus). Si elle apparaissait p fois dans le mot initial, on compte le nombre de façons de placer ces p mêmes lettres dans un mot de longueur n. Cela revient à choisir la place de ces p lettres parmi n places possibles. On a donc $\binom{n}{p}$ possibilités.
3. On recommence avec une autre lettre du mot, en n'oubliant pas qu'il ne reste plus que $n-p$ places disponibles pour placer les lettres.
4. On continue ainsi de suite pour toutes les lettres. Le nombre d'anagrammes sera le produit de toutes les possibilités trouvées pour chaque lettre.

Exemple d'application

Compter les anagrammes du mot MISSISSIPPI

Ce mot contient 11 caractères dont 4 S, 4 I, 2 P et 1 M. Comptons les anagrammes de ce mot :

- On place les 4 S dans un mot de 11 lettres : $\binom{11}{4}$ possibilités.
- On place les 4 I parmi les 7 places restantes : $\binom{7}{4}$ possibilités.
- On place les 2 P parmi les 3 places restantes : $\binom{3}{2} = 3$ possibilités.
- On place le M sur la seule place restante : 1 possibilité.

Ainsi le nombre d'anagrammes du mot MISSISSIPPI est $\binom{11}{4}\binom{7}{4} \times 3 \times 1 = 34\ 650$.

Voir exercices **11.2**, **11.6** et **11.10**.

Méthode 11.2 : Dénombrer un ensemble

Pour compter le nombre d'éléments vérifiant une propriété ou compter le nombre de configurations issues d'une expérience, on découpe le problème en plusieurs étapes et on utilise les formules du cours pour dénombrer chaque étape. On fera bien attention de vérifier qu'on n'a pas oublié de cas et qu'on n'a pas compté plusieurs fois les mêmes cas (sinon il faudra diviser par le nombre de fois que l'on a compté).

Exemple d'application

(1) Avec un jeu de 52 cartes, on distribue une main de 5 cartes. Combien y a-t-il de mains comportant une double paire (mais pas de full) ?

(2) Si $n \in \mathbb{N}$, de combien de façon peut-on répartir n paires de chaussettes identiques dans trois tiroirs ? (On ne peut pas dissocier les chaussettes d'une même paire)

(1) On commence par rappeler qu'un jeu de 52 cartes est découpé en 4 couleurs (pique, carreau, cœur et trèfle) et dans chaque couleur il y a 13 hauteurs différentes (2, 3, ..., 10, Valet, Dame, Roi, As). On va « construire » une main comportant exactement deux paires :

- On choisit les hauteurs de nos deux paires : $\binom{13}{2}$ possibilités.
- On choisit les deux couleurs pour notre première paire : $\binom{4}{2}$ possibilités.
- De même pour la deuxième paire : $\binom{4}{2}$ possibilités.
- On choisit la 5$^{\text{ème}}$ carte, d'une hauteur différente : $\binom{52-8}{1} = 44$ possibilités.

Ainsi le nombre de mains comportant exactement deux paires est $\binom{13}{2}\binom{4}{2}^2 \times 44 = 123\,552$.

(2) Les paires de chaussettes étant identiques, la seule chose qui importe est le nombre de paires dans chaque tiroir. Des tiroirs pouvant difficilement être indiscernables, ils ont un ordre. Si on note a le nombre de paires de chaussettes dans le premier tiroir, b celui dans le deuxième et c celui dans le troisième, le problème se ramène à chercher trois entiers naturels a, b et c tels que $a + b + c = n$.

- On choisit $a \in [\![0, n]\!]$: $n + 1$ possibilités.
- On choisit $b \in [\![0, n - a]\!]$: $n + 1 - a$ possibilités.
- On choisit $c = n - a - b$: 1 possibilité.

Ici, on ne peut pas simplement faire le produit car le nombre de choix de b dépend de la valeur de a. On va donc distinguer en fonction de la valeur de a :

$$\sum_{a=0}^{n}((n+1-a)\times 1) = \sum_{a=0}^{n}(n+1) - \sum_{a=0}^{n} a = (n+1)^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Il y a donc $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ façons de répartir les paires de chaussettes.

- Un des grands avantages du dénombrement est qu'on n'est pas du tout obligé de suivre l'ordre chronologique pour compter.
- Pour dénombrer le nombre de configurations issues d'une expérience, il suffit de chercher à construire une configuration voulue, en comptant toutes les possibilités à chaque étape de la construction.

Voir exercices **11.1** à **11.11**.

Interro de cours

1. Soient E et F deux ensembles finis. Les propositions suivantes sont-elles toujours vraies ?

(a) Si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$, alors $E = F$.

(b) $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F)$.

(c) $\text{Card}(E \cap F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$.

(d) $\text{Card}(P(E)) = 2^{\text{Card}(E)}$.

2. Si $\text{Card}(E) = n$, rappeler le nombre de p-listes sans répétition de E et le nombre de p-combinaisons de E.

3. On considère une urne contenant des boules numérotées de 1 à 50. Déterminer le nombre de tirages possibles de 5 boules :

(a) avec remise et en tenant compte de l'ordre.

(b) sans remise et en tenant compte de l'ordre.

(c) sans remise et sans tenir compte de l'ordre.

4. Le raisonnement suivant est-il juste ? Le corriger le cas échéant.

Dans un jeu de 52 cartes, on veut compter le nombre de mains de 5 cartes contenant exactement une paire (on exclut les doubles paires, les brelans, etc).

Pour choisir la hauteur de la paire, on a 13 possibilités. On a ensuite $\binom{4}{2} = 6$ possibilités pour les couleurs des cartes de cette paire.

Ensuite, on a $52 - 4 = 48$ choix pour la troisième carte (pour éviter une carte de la même hauteur que la paire), $48 - 4 = 44$ choix pour la quatrième carte (qui doit être d'une hauteur encore différente pour éviter une double paire) et $44 - 4 = 40$ choix pour la dernière carte.

On a donc $13 \times 6 \times 48 \times 44 \times 40 = 6\ 589\ 440$ mains avec exactement une paire.

Exercices

Pour s'entraîner

Exercice 11.1

On utilise un jeu de 32 cartes (7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi et As dans cet ordre dans chacune des quatre couleurs $\spadesuit$, $\diamondsuit$, $\heartsuit$ et $\clubsuit$).

1. On tire une carte. Quel est le nombre de possibilités d'obtenir un 7 ou une figure (Valet, Dame ou Roi) ?
2. On tire successivement deux cartes sans remise. Quel est le nombre de possibilités d'obtenir un Roi suivi d'une Dame ?
3. On tire successivement 4 cartes sans remise. Quel est le nombre de possibilités d'obtenir quatre Rois ?
4. On tire une main de 5 cartes. Quel est le nombre de possibilités d'obtenir :
   a. la Dame de $\heartsuit$.
   b. exactement trois $\heartsuit$.
   c. exactement deux $\spadesuit$ et deux $\clubsuit$.
   d. exactement deux $\spadesuit$ et deux Rois.
   e. au moins un Roi.
   f. au plus quatre $\spadesuit$.

Exercice 11.2

Déterminer le nombre d'anagrammes du mot

1. PLUME
2. MOUTON
3. ASSASSIN
4. ABRACADABRA.

Exercice 11.3

Dans une classe de 45 élèves, tout le monde se serre la main le matin en arrivant. Quel est le nombre de poignées de mains échangées ?

Exercice 11.4

Une association composée de 32 personnes (18 hommes et 14 femmes) doit élire parmi ses membres son bureau constitué d'un président, d'un vice-président du sexe opposé à celui du président, d'un trésorier, d'un secrétaire et d'un gardien nécessairement un homme.
Quel est le nombre de bureaux possibles ?

Exercice 11.5

Sur une étagère, un élève possède 4 livres de SVT, 2 livres de Mathématiques et 3 livres de Physique-Chimie.
Quel est le nombre de façon de ranger les livres en les gardant groupés par matière ?

Exercice 11.6

Déterminer le nombre de chemins allant du point $O(0,0)$ au point $A(3,5)$ en n'autorisant que les déplacements d'un cran vers la droite et les déplacements d'un cran vers le haut.

Pour aller plus loin

Exercice 11.7

On lance un dé à 6 faces n fois et on note le résultat de chaque lancer. On note k et p des entiers tels que $0 \leq k \leq p \leq n$.

1. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
2. Dans combien de ces résultats a-t-on obtenu un 6 exactement k fois ?
3. Dans combien de ces résultats a-t-on obtenu un 6 exactement k fois au cours des p premiers lancers ?
4. Dans combien de ces résultats a-t-on obtenu le $k^{\text{ème}}$ 6 au $p^{\text{ème}}$ lancer ?

Exercice 11.8

On dispose de sept pierres précieuses toutes différentes. De combien de façon peut-on les disposer pour constituer

1. un collier avec un fermoir ?
2. un collier sans fermoir ?

Exercice 11.9

On lance six dés de couleurs différentes (bleu, blanc, rouge, jaune, vert et noir), chacun à 6 faces.

1. Quel est le nombre de résultats possibles ?
2. Quel est le nombre de résultats avec 5 valeurs identiques ?
3. Quel est le nombre de résultats avec 5 entiers consécutifs ?

Exercice 11.10

On dispose de r paires de chaussettes et n tiroirs. On répartit toutes les paires de chaussettes dans les tiroirs. Chaque tiroir est assez grand pour accueillir toutes les paires de chaussettes.

1. On suppose les paires de chaussettes toutes différentes.
Combien de répartitions possibles peut-on avoir ?
2. On suppose les paires de chaussettes toutes identiques.
Combien de répartitions possibles peut-on avoir ?
3. On suppose encore les paires de chaussettes toutes identiques.
Combien de répartitions sans aucun tiroir vide peut-on avoir ?

Exercice 11.11

On dispose de n jetons numérotés de 1 à n. On les tire successivement sans remise. On dit qu'il y a record au rang i, si lors du $i^{\text{ème}}$ tirage, le jeton tiré a un numéro supérieur aux jetons tirés auparavant. Par convention, le premier tirage est forcément un record.

1. Déterminer le nombre de façons d'avoir n records.
2. Déterminer le nombre de façons d'avoir 1 seul record.
3. Déterminer le nombre de façons d'avoir un record au rang i.
4. Déterminer le nombre de façons d'avoir exactement 2 records.

Corrections

Interro de cours

1. **(a)** **Faux.** Si $E = \{0\}$ et $F = \{1\}$, alors $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$ mais $E \neq F$.

(b) **Faux.** D'après la formule du crible, $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) - \text{Card}(E \cap F)$.

(c) **Faux.** Si $E = \{0\}$ et $F = \{1\}$, alors $\text{Card}(E \cap F) = \text{Card}(\varnothing) = 0 \neq \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$.

(d) **Vrai.** Cf. cours.

2. • Le nombre de p-listes sans répétition de E est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

• Le nombre de p-combinaisons de E est $\dbinom{p}{n} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

3. On peut modéliser l'ensemble des boules tirées par $E = [\![1, 50]\!]$.

(a) Il s'agit de compter les 5-listes de E. Il y en a $50^5 = 312\ 500\ 000$.

(b) Il s'agit de compter les 5-listes sans répétition de E. Il y en a

$$\frac{50!}{45!} = 50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46 = 254\ 251\ 200.$$

(c) Il s'agit de compter les 5-combinaisons de E. Il y en a

$$\frac{50!}{5!45!} = \frac{50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2\ 118\ 760.$$

4. Le raisonnement est faux.
Pour compter le nombre de mains de 5 cartes, on ne tient pas compte de l'ordre des cartes tirées. Ceci a bien été respecté dans le tirage de la paire mais n'a pas été respecté dans le tirage des trois autres cartes.
Pour corriger, il suffit de compter combien de fois on a compté en trop nos mains, du fait d'avoir introduit un ordre sur les trois dernières cartes. Les trois dernières cartes étant différentes, le choix de l'ordre de ces cartes correspond à une permutation de trois éléments : $3! = 6$ possibilités.
Il suffit donc juste de diviser le résultat donné par le raisonnement erroné par 6 pour le rectifier.
On a donc $\dfrac{13 \times 6 \times 48 \times 44 \times 40}{6} = 1\ 098\ 240$ mains avec exactement une paire.

Exercice 11.1

1. On a 4 possibilités pour tirer un 7 et 12 possibilités pour tirer une figure. Ces deux éventualités étant incompatibles, il suffit de faire la somme des cardinaux.
Ainsi il y a $\boxed{4 + 12 = 16}$ possibilités de tirer un 7 ou une figure.

2. On tire d'abord un Roi : 4 possibilités ; puis on tire une Dame : 4 possibilités.
On a donc $\boxed{4 \times 4 = 16}$ possibilités d'obtenir un Roi puis une Dame sur le tirage successif de deux cartes.

3. On tire tous les Rois et que des Rois. Il ne reste plus qu'à déterminer dans quel ordre on les a tiré : 4! possibilités.
Il y a donc $\boxed{4! = 24}$ possibilités d'obtenir quatre Rois sur le tirage successif de quatre cartes.

4. Dans le tirage d'une main de 5 cartes, on ne tient pas compte de l'ordre.

a. On tire la Dame de $\heartsuit$: 1 possibilité ; puis on tire 4 autres cartes (parmi les 31 restantes) : $\binom{31}{4}$ possibilités. On a donc $\boxed{\binom{31}{4} = 31\ 465}$ possibilités de tirer la Dame de $\heartsuit$.

b. On tire 3 cartes de $\heartsuit$: $\binom{8}{3}$ possibilités ; puis on tire 2 cartes qui ne sont pas des $\heartsuit$: $\binom{24}{2}$ possibilités. On a donc $\boxed{\binom{8}{3} \times \binom{24}{2} = 15\ 456}$ possibilités de tirer exactement 3 $\heartsuit$.

c. On tire 2 cartes de $\spadesuit$: $\binom{8}{2}$ possibilités ; puis on tire 2 cartes de $\clubsuit$: $\binom{8}{2}$ possibilités ; on finit en tirant une carte de $\diamondsuit$ ou $\heartsuit$: 16 possibilités. On a donc $\boxed{\binom{8}{2} \times \binom{8}{2} \times 16 = 12\ 544}$ possibilités de tirer exactement deux $\spadesuit$ et deux $\clubsuit$.

d. On distingue deux cas.

- Si on tire le Roi de $\spadesuit$. On tire le Roi de $\spadesuit$: 1 possibilité ; puis on tire un autre Roi : 3 possibilités ; puis on tire une autre carte de $\spadesuit$: 7 possibilités ; on finit en tirant 2 cartes qui ne sont ni un $\spadesuit$ ni un Roi : $\binom{21}{2}$ possibilités. Dans ce cas, on a $3 \times 7 \times \binom{21}{2}$ possibilités.
- Si on ne tire pas le Roi de $\spadesuit$. On tire 2 Rois en évitant le Roi de $\spadesuit$: $\binom{3}{2} = 3$ possibilités ; puis on tire 2 cartes de $\spadesuit$: $\binom{7}{2}$ possibilités ; on finit en tirant une carte qui n'est ni un $\spadesuit$ ni un Roi : 21 possibilités. Dans ce cas, on a $3 \times \binom{7}{2} \times 21$ possibilités.

Ces deux cas étant incompatibles, il suffit d'effectuer la somme pour conclure.

Ainsi il y a $\boxed{3 \times 7 \times \binom{21}{2} + 3 \times \binom{7}{2} \times 21 = 5\ 733}$ possibilités de tirer exactement 2 Rois et 2 $\spadesuit$.

e. Il est plus simple de considérer le contraire A : « Ne tirer aucun Roi ». On dénombre A. On tire 5 cartes qui ne sont pas des Rois : $\binom{28}{5}$ possibilités. Donc le cardinal de $\overline{A}$ est le nombre de mains totales $\binom{32}{5}$ auquel on soustrait le cardinal de A.

Ainsi, il y a $\boxed{\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 103\ 096}$ possibilités de tirer au moins un Roi.

f. On procède de même. On dénombre le fait de n'avoir tiré que des $\spadesuit$: $\binom{8}{5}$ possibilités.

Ainsi, il y a $\boxed{\binom{32}{5} - \binom{8}{5} = 201\ 320}$ possibilités de tirer au plus 4 $\spadesuit$.

Quand on doit dénombrer un ensemble comportant un grand nombre de cas à distinguer, il peut être intéressant de regarder si le complémentaire impose moins de cas à distinguer. C'est typiquement le cas quand on doit dénombrer un événement du type « Obtenir au moins un … ».

Exercice 11.2

1. Ici toutes les lettres sont différentes, seul leur ordre compte. Il s'agit du nombre d'arrangements de 5 éléments. On a donc $\boxed{5! = 120}$ anagrammes de PLUME.

2. On commence par placer la lettre apparaissant plusieurs fois. On place les 2 O dans les 6 places disponibles : $\binom{6}{2}$ possibilités ; puis on place toutes les autres lettres distinctes parmi les 4 places restantes : 4! possibilités.

On a donc $\boxed{\dbinom{6}{2} \times 4! = 360}$ anagrammes de MOUTON.

3. On place les 4 S dans les 8 places disponibles : $\binom{8}{4}$ possibilités ; puis on place les 2 A dans les 4 places restantes : $\binom{4}{2}$ possibilités ; on finit en plaçant les deux autres lettres distinctes dans les deux places restantes : 2! possibilités.

On a donc $\boxed{\dbinom{8}{4} \times \dbinom{4}{2} \times 2! = 840}$ anagrammes de ASSASSIN.

4. On place les 5 A dans les 11 places disponibles : $\binom{11}{5}$ possibilités ; puis on place les 2 B dans les 6 places restantes : $\binom{6}{2}$ possibilités ; puis on place les 2 R dans les 4 places restantes : $\binom{4}{2}$ possibilités ; on finit en plaçant les deux autres lettres distinctes : 2! possibilités.

On a donc $\boxed{\dbinom{11}{5} \times \dbinom{6}{2} \times \dbinom{4}{2} \times 2! = 83\ 160}$ anagrammes de ABRACADABRA.

Exercice 11.3

Une poignée de mains correspond à un couple d'élève. Compter le nombre de poignées de mains revient donc à compter le nombre de couples d'élèves. Il s'agit du nombre de façon de choisir 2 élèves parmi 45.

Il y a donc $\boxed{\dbinom{45}{2} = 990}$ poignées de mains échangées.

Exercice 11.4

On commence par ceux imposant un choix.

- On choisit une femme .... : 14 possibilités
- On choisit un homme .... : 18 possibilités
- On choisit lequel est le président .... : 2 possibilités
- On choisit le gardien .... : 17 possibilités
- On choisit le trésorier .... : 29 possibilités
- On choisit le secrétaire .... : 28 possibilités.

Ainsi il y a $\boxed{14 \times 18 \times 2 \times 17 \times 29 \times 28 = 6\ 957\ 216}$ bureaux possibles.

Exercice 11.5

- On choisit l'ordre dans lequel on range les matières entre elles : $3!$ possibilités
- On choisit l'ordre dans le quel on range les livres de SVT entre eux : $4!$ possibilités
- On choisit l'ordre dans le quel on range les livres de Maths entre eux : $2!$ possibilités
- On choisit l'ordre dans le quel on range les livres de P-C entre eux : $3!$ possibilités.

Ainsi il y a $\boxed{3! \times 4! \times 2! \times 3! = 1\ 728}$ façons de ranger les livres en les gardant groupés par matière.

Exercice 11.6

On commence par remarquer que chaque chemin nous intéressant est constitué de 8 déplacements : 3 à droite et 5 en haut.
On code le problème en notant « d » un déplacement vers la droite et « h » un déplacement vers le haut. À chaque chemin nous intéressant correspond un et un seul mot de 8 lettres comprenant 3 « d » et 5 « h ». Il s'agit donc de compter le nombre d'anagrammes correspondant. On place les 5 « h » dans les 8 places disponibles : $\binom{8}{5}$ possibilités ; puis on place les 3 « d » dans les 3 places restantes : 1 possibilité.

Ainsi il y a $\boxed{\binom{8}{5} = 56}$ chemins allant de O jusqu'à A.

Exercice 11.7

En notant le résultat de chaque lancer, on modélise une série de tirages par une n-liste de $[\![1, 6]\!]$.

1. Il s'agit de compter le nombre de n-listes de $[\![1, 6]\!]$. Il y a donc $\boxed{6^n}$ résultats possibles.

2. Il s'agit de déterminer la place des 6 et les valeurs prises là où il n'y a pas de 6.
- On choisit la place des k 6 .... : $\binom{n}{k}$ possibilités
- On choisit la valeur prise dans les autres emplacements : 5^{n-k} possibilités.

Il y a donc $\boxed{\binom{n}{k} 5^{n-k}}$ résultats avec exactement k 6.

3.
- On choisit la place des k 6 dans les p premières places : $\binom{p}{k}$ possibilités
- On choisit la valeur prise dans les autres emplacements : 5^{n-k} possibilités.

Il y a donc $\boxed{\binom{p}{k} 5^{n-k}}$ résultats avec exactement k 6 dans les p premiers lancers.

4.
- On place un 6 à la $p^{\text{ème}}$ place .... : 1 possibilité
- On choisit la place des $k-1$ autres 6 dans les $p-1$ premières places : $\binom{p-1}{k-1}$ possibilités
- On choisit la valeur prise dans les autres emplacements........... : 5^{n-k} possibilités.

Il y a donc $\boxed{\binom{p-1}{k-1} 5^{n-k}}$ résultats avec le $k^{\text{ème}}$ et dernier 6 au $p^{\text{ème}}$ lancer.

Exercice 11.8

1. Le fermoir permet de distinguer quelle pierre on met en premier sur le collier. Il ne s'agit donc que d'une permutation de 7 éléments.
On peut donc disposer de $\boxed{7! = 5\ 040}$ façons les pierres pour constituer un collier avec fermoir.

2. On note C le cardinal à déterminer. S'il n'y a pas de fermoir, il est impossible de savoir quelle pierre a été mise en premier. Pour se ramener au cas précédent, il faudrait rajouter un fermoir après avoir rempli le collier. Il a 7 façons de rajouter un fermoir (il y a 7 pierres sur le collier et donc 7 espaces entre deux pierres consécutives). Il y a donc $7C$ façons de remplir un colier avec fermoir. D'après la question précédente, $7C = 7!$, puis $C = 6!$.
On peut donc disposer de $\boxed{6! = 720}$ façons les pierres pour constituer un collier sans fermoir.

Exercice 11.9

Les 6 dés étant discernables, on peut relever les résultats dans un certain ordre. Tout fonctionne donc avec ordre et avec répétition.

1. Il s'agit du nombre de 6-listes de $[\![1, 6]\!]$. Il y a donc $\boxed{6^6 = 46\ 656}$ résultats possibles.

2. On choisit les 5 dés ayant la même valeur : $\binom{6}{5} = 6$ possibilités ; puis on choisit la valeur de ces 5 dés : 6 possibilités ; pour finir, on choisit la valeur de l'autre dé : 5 possibilités.
Ainsi il y a $\boxed{6 \times 6 \times 5 = 180}$ résultats possibles avec 5 valeurs identiques.

3. Les suites possibles de 5 valeurs consécutives dans $[\![1, 6]\!]$ sont « $1, 2, 3, 4, 5$ » et « $2, 3, 4, 5, 6$ ». La valeur minimale de cette suite est donc soit 1 soit 2. De plus, si on a 5 valeurs consécutives, il y a forcément une valeur atteinte deux fois.
- On choisit la valeur minimale de la suite . . . . : 2 possibilités
- On choisit, parmi les valeurs de la suite, la valeur prise deux fois : 5 possibilités
- On choisit les deux dés prenant cette valeur . . . . : $\binom{6}{2}$ possibilités
- On ordonne les dés restant pour leur affecter les autres valeurs de la suite par ordre croissant . . . . : 4! possibilités.

Ainsi il y a $\boxed{2 \times 5 \times \binom{6}{2} \times 4! = 7\ 200}$ résultats possibles avec 5 valeurs consécutives.

Exercice 11.10

Les tiroirs sont forcément discernables, donc on peut considérer qu'ils sont numérotés de 1 à n.

1. Les paires de chaussettes étant toutes différentes, on peut les numéroter de 1 à r. On peut donc placer les paires de chaussettes une à une en suivant la numérotation et noter le numéro du tiroir dans lequel elle atterrit. On peut donc coder le problème avec une r-liste de $[\![1, n]\!]$.
Ainsi le nombre de répartitions possibles est $\boxed{n^r}$

2. Les paires de chaussettes étant indiscernables, seul le nombre de paires de chaussettes dans chaque tiroir nous intéresse. On va coder le problème de la façon suivante :
- Chaque répartition va correspondre à un mot contenant les caractères « $\circ$ » et « $|$ ».
- On met autant de « $\circ$ » qu'il y a de paire de chaussettes dans le premier tiroir.
- On met un « $|$ » pour signifier que l'on change de tiroir.
- On met autant de « $\circ$ » qu'il y a de paire de chaussettes dans le deuxième tiroir.
- On met un « $|$ » pour signifier que l'on change de tiroir.
- On recommence jusqu'à arriver au dernier tiroir et finir par mettre autant de « $\circ$ » qu'il y a de paire de chaussettes dans le dernier tiroir.

Par exemple, pour $r = 6$ et $n = 4$, le mot « $\circ\circ|\circ\circ\circ||\circ$ » correspond à la répartition où il y a 2 paires de chaussettes dans le premier tiroir, 3 paires de chaussettes dans le deuxième tiroir, rien dans le troisième tiroir et 1 paire de chaussettes dans le quatrième et dernier tiroir.

Chaque mot est composé de r « $\circ$ » et $n-1$ « $|$ ». Il s'agit juste de savoir dans quel ordre on place ces caractères. Cela revient à compter le nombre d'anagrammes.

- On place les $n-1$ « $|$ » dans les $r+n-1$ places disponibles : $\binom{r+n-1}{n-1}$ possibilités
- On place les r « $\circ$ » dans les r places restantes .... : 1 possibilité.

Ainsi le nombre de répartitions est $\boxed{\binom{r+n-1}{n-1}}$

3. Si $r < n$, alors il n'y a aucune répartition sans tiroir vide. On suppose donc $r \geq n$. Pour dénombrer le problème, on se ramène à la situation de la question précédente :

- on commence par mettre une paire de chaussette dans chaque tiroir : 1 possibilité
- on répartit les $r-n$ paires de chaussettes restantes .... : $\binom{(r-n)+n-1}{n-1}$ possibilités.

Ainsi le nombre de répartitions sans tiroir vide est $\boxed{\binom{r-1}{n-1}}$

Exercice 11.11

En notant le n° de chaque tirage, on modélise une série de tirage par une permutation de $[\![1, n]\!]$.

1. La seule façon de battre le record à chaque tirage est de tirer les jetons dans l'ordre croissant. Il n'y a donc qu'une seule façon d'obtenir n records.

2. Le premier tirage étant forcément un record, si on ne veut qu'un seul record, il faut et il suffit de tirer le jeton n° n au premier tirage. On dénombre :

- on place le jeton n° n à la première place : 1 possibilité
- on place les autres jetons............... : $(n-1)!$ possibilités.

Ainsi, il y a $\boxed{(n-1)!}$ façons d'obtenir un seul record.

3. On va construire une permutation correspondant à une série de tirages pour laquelle on a eu un record au rang i.

- On prend i jetons.. : $\binom{n}{i}$ possibilités
- On place le plus grand de ces i jetons à la $i^{\text{ème}}$ place .... : 1 possibilité
- On place les $i-1$ autres jetons tirés dans les $i-1$ premières places : $(i-1)!$ possibilités
- On prend tous les jetons restants................................ : 1 possibilité
- On les place dans les $n-i$ places restantes....................... : $(n-i)!$ possibilités.

Ainsi, il y a $\boxed{\binom{n}{i} \times (i-1)! \times (n-i)! = \frac{n!}{i}}$ façons d'obtenir un record au rang i.

4. Si on veut exactement 2 records, le premier record sera au premier tirage, et pour le deuxième record, on aura tiré le jeton n° n. Si on suppose que le deuxième record a eu lieu au $j^{\text{ème}}$ tirage (avec $j \in [\![2, n]\!]$), on dénombre :

- on place le jeton n° n à la $j^{\text{ème}}$ place................................ : 1 possibilité
- on prend $j-1$ jetons dans les $n-1$ restants .... : $\binom{n-1}{j-1}$ possibilités
- on place le plus grand de ces jetons à la première place .... : 1 possibilité
- on place les $j-2$ autres jetons tirés entre la $2^{\text{ème}}$ et la $(j-1)^{\text{ème}}$ place : $(j-2)!$ possibilités
- on prend tous les jetons restants .... : 1 possibilité
- on les place dans les $n-j$ places restantes .... : $(n-j)!$ possibilités.

On obtient donc $\binom{n-1}{j-1} \times (j-2)! \times (n-j)! = \frac{(n-1)!}{j-1}$ façons d'avoir exactement 2 records avec le deuxième au rang $j \in [\![2, n]\!]$.

Tous ces cas sont incompatibles, on peut donc sommer les cardinaux obtenus.

Ainsi, il y a $\boxed{(n-1)!\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j-1} = (n-1)!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}}$ façons d'obtenir exactement 2 records.

CHAPITRE 12

Statistique descriptive

L'essentiel du cours

1 Statistique univariée

Définition

- Une **population** (ou **série statistique**) est un ensemble fini d'éléments sur lesquels portent une étude statistique.
- Les éléments de la population sont appelés **individus**.
- Le nombre total d'individus est appelé **effectif total**.

Définition

- Un **caractère** est une donnée que l'on peut observer sur les individus de la population.
- La caractère est dit **quantitatif** lorsqu'il est numérique (taille, poids, durée, etc). Les différentes valeurs prises par un tel caractère sont appelé ses **classes**.
- Sinon, il est dit **qualitatif** (couleur des yeux, etc).

Dans la suite de cette partie, on considèrera un caractère quantitatif x dont les classes sont $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ sur une population d'effectif global N et on prendra $k \in [\![1, n]\!]$.

Définition

- L'**effectif** de la classe x_k est le nombre n_k d'individus dont le caractère vaut x_k.
- La **fréquence** de la classe x_k est $f_k = \dfrac{n_k}{N} \in [0, 1]$.

- La somme des effectifs est égale à N et la somme des fréquences est égale à 1.
- On peut représenter graphiquement les effectifs (resp. les fréquences) en fonction des classes.
- On utilisera un diagramme en bâtons si on connaît les effectifs (resp. fréquence) des valeurs exactes du caractère ou par un histogramme si on connaît les effectifs (resp. fréquence) de plages de valeurs du caractère.

Définition

- L'**effectif cumulé croissant** de la classe x_k est $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i$.
- La **fréquence cumulée croissante** de la classe x_n est $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} f_k$.

On peut aussi représenter graphiquement les effectifs cumulés croissants (resp. fréquences cumulées croissantes) par la courbe d'une fonction affine par morceaux.

Définition

- Le **mode** de la série statistique est la valeur du caractère ayant le plus gros effectif.
- La **médiane** Me de la série statistique est une valeur qui sépare la population en deux groupes de même effectif : ceux dont la classe est inférieure et ceux dont la classe est supérieure. En particulier si l'effectif de chaque classe vaut 1 :
  - ◇ si $n = 2p + 1$ est impair, la médiane est x_{p+1},
  - ◇ si $n = 2p$ est pair, la médiane est une valeur entre x_p et x_{p+1} (par défaut, leur moyenne).
- La **moyenne** de la série statistique est le réel

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i.$$

On peut déterminer graphiquement la médiane si on connaît les effectifs des valeurs exactes du caractère et approximer graphiquement la médiane si on connaît les effectifs de plages de valeurs du caractère (cf méthode **12.1**).

Définition

- Le **premier quartile** Q_1 est la plus petite valeur de la série statistique telle qu'au moins un quart des valeurs lui soient inférieures ou égales.
- Le **troisième quartile** Q_3 est la plus petite valeur de la série statistique telle qu'au moins trois quarts des valeurs lui soient inférieures ou égales.
- Si $p \in [\![1, 9]\!]$, le $p^{\text{ème}}$ **décile** D_k est la plus petite valeur de la série statistique telle qu'au moins k dixièmes des valeurs lui soient inférieures ou égales.
- La **variance** de x est le réel

$$V_x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 n_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 f_i.$$

- L'**écart-type** de x est le réel $s_x = \sqrt{V_x}$.

Formule de Kœnig-Huygens

La variance de x est égale à $V_x = \overline{x^2} - \overline{x}^2$.

2 Statistique bivariée

Dans cette partie, on considèrera deux caractères quantitatifs x et y dont les classes sont $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ et $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$ sur une population d'effectif global N.

Définition

- Le **nuage de points** associé aux caractères x et y est l'ensemble de points $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$.
- Le **point moyen** du nuage est le point $G(\overline{x}, \overline{y})$.

Définition

- On note, pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, $n_{i,j}$ le nombre d'individus vérifiant les caractères $x = x_i$ et $y = y_j$.
  La **covariance** de x et y est le réel
  $$s_{x,y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_j - \overline{y}) n_{i,j}.$$
- Le **cœfficient de corrélation** de x et y est le réel $r_{x,y} = \dfrac{s_{x,y}}{s_x s_y} \in [-1, 1]$.

- Le cœfficient de corrélation mesure à quel point les caractères x et y sont liés de manière affines. Plus ce cœfficient est proche de -1 ou de 1 et plus leur nuage de point suit une droite.
- On considère qu'il est pertinent de supposer une relation affine entre x et y dès lors que $|r_{x,y}| > 0,8$.

Formule de Kœnig-Huygens

La covariance de x et y est égale à $s_{x,y} = \overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}$.

Moindres carrés

La droite qui approxime le mieux le nuage de point associé à x et y, au sens où elle minimise la somme des carrés des écarts verticaux entre les points et la droite, est la droite d'équation
$$y = ax + b \quad \text{avec } a = \frac{s_{x,y}}{s_x^2} \text{ et } b = \overline{y} - \frac{s_{x,y}}{s_x^2}\overline{x}.$$

Proposition

Le point moyen est sur la droite obtenue avec la méthode des moindres carrés (cf proposition précédente).

Les méthodes à maîtriser

Méthode 12.1 : Approximer la valeur de la médiane

Si les effectifs (resp. fréquences) d'un caractère ne sont pas donnés valeur par valeur, mais plutôt sur des plages de valeurs, on peut déterminer dans quelle plage de valeur se trouve la médiane, mais on ne peut pas trouver sa valeur exacte. On peut néanmoins l'approximer de la façon suivante.

(1) On représente graphiquement les effectifs cumulés croissants (resp. fréquences cumulées croissantes).

(2) On relie les points obtenus pour obtenir une courbe polygonale.

(3) On trace la droite d'équation $y = \frac{N}{2}$ (resp. $y = \frac{1}{2}$). Son point d'intersection a pour abscisse la médiane Me (que l'on peut donc déterminer algébriquement).

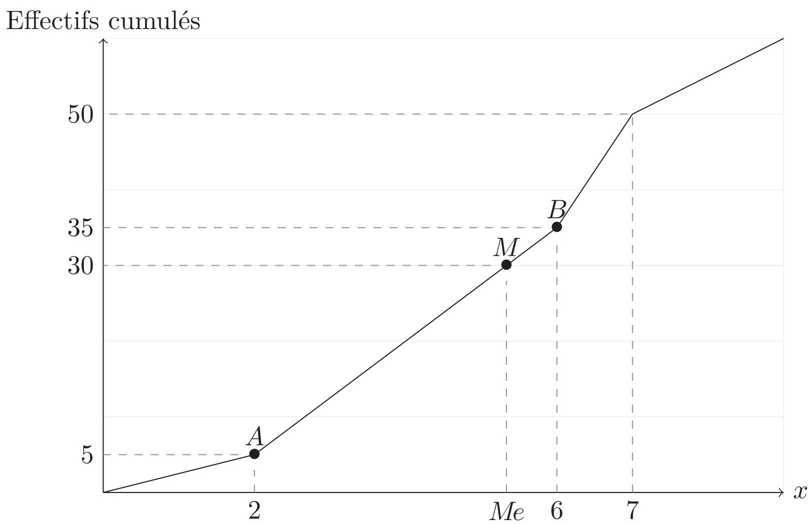
Exemple d'application

Déterminer la médiane de la série statistique donnée par :

x	$[0,2[$	$[2,6[$	$[6,7[$	$[7,9[$
Effectifs	5	30	15	10

On dresse le tableau des effectifs cumulés croissants. On les représente graphiquement, en reliant les points et on y ajoute la droite d'équation $y = 30$ pour obtenir

x	$[0,2[$	$[2,6[$	$[6,7[$	$[7,9[$
Effectifs cumulés	5	35	50	60



Les points A, M et B étant alignés, les taux d'accroissements de A à B et de A à M sont égaux. Ainsi $\frac{35-5}{6-2} = \frac{30-5}{Me-2}$ et $Me = \frac{16}{3} \simeq 5,33$.

Voir exercice **12.2**.

Méthode 12.2 : Ajuster deux caractères

Pour ajuster deux caractères statistiques x et y, on peut utiliser la méthode des moindre carrés. Cependant, on ne veut pas toujours faire une ajustement affine entre x et y. On commence par tracer le nuage de points de x et y et on regarde sa forme.

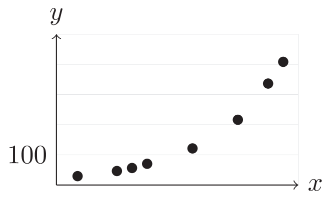
- Si le nuage est éparpillé, il n'y a aucune corrélation entre x et y. Un ajustement ne sera donc pas pertinent.
- Si le nuage ressemble à une droite, on peut appliquer la méthode des moindres carrés pour obtenir un ajustement affine.
- Si le nuage ressemble à la courbe d'un exponentielle, on cherchera plutôt un ajustement de la forme $y = \lambda e^{ax}$ (avec $\lambda > 0$), c'est-à-dire $\ln(y) = ax + \ln(\lambda)$. On cherchera donc un ajustement affine de x et $\ln(y)$.
- Si le nuage ressemble à la courbe d'une puissance, on cherchera plutôt un ajustement de la forme $y = \lambda x^a$ (avec $\lambda > 0$), c'est-à-dire $\ln(y) = a\ln(x) + \ln(\lambda)$. On cherchera donc un ajustement affine de $\ln(x)$ et $\ln(y)$.

Exemple d'application

Déterminer un ajustement pertinent entre x et y donnés par

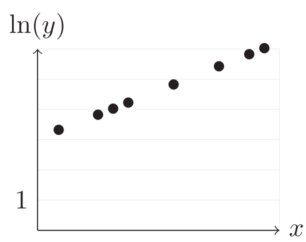
x	$1,4$	4	5	6	9	12	14	15
y	27	44	54	68	119	214	334	406

On commence par représenter le nuage de points



La relation entre y et x ne semble pas affine mais plutôt exponentielle. On calcule donc $\ln(y)$.

x	$1,4$	4	5	6	9	12	14	15
$\ln(y)$	$3,3$	$3,8$	4	$4,2$	$4,8$	$5,4$	$5,8$	6



Cette fois-ci, le nuage de points ressemble à une droite. Et après calculs, on obtient $a \simeq 0,2$ et $b \simeq 3$ (et $r_{x,\ln(y)} > 0,999$). On obtient donc l'ajustement $y = e^{0,2x+3}$.

Voir exercices **12.4** et **12.5**.

Interro de cours

1. La langue maternelle d'un individu est-elle un caractère quantitatif ou qualitatif ?

2. Calculer les effectifs cumulés croissant de la série donnée par

x	1	2	4	5
Effectifs	5	4	6	3

puis les représenter graphiquement.

3. Déterminer la médiane, le premier quartile et le troisième quartile de la série $\{0, 2, 5, 8, 9, 12, 15, 18, 20\}$.

4. Calculer la moyenne et l'écart-type de la série donnée par

x	0	1	3	6
Fréquences	$0,1$	$0,4$	$0,3$	$0,2$

5. On dispose de la série statistique double

x	1	2	3	4
y	$2,9$	$5,1$	$7,2$	$8,9$

(a) Tracer le nuage de points associés à x et y et leur point moyen G.

(b) On conjecture un ajustement affine de x et y. Calculer le cœfficient de corrélation de x et y. Cet ajustement semble-t-il pertinent ?

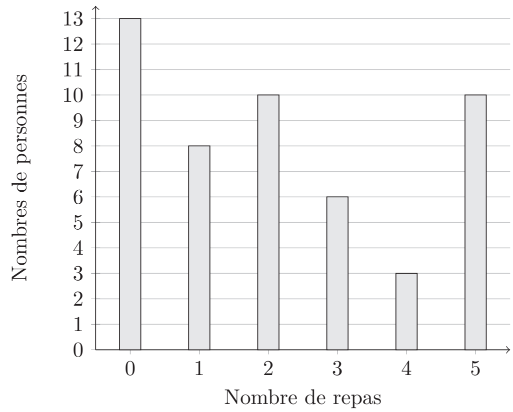
(c) Effectuer l'ajustement affine à l'aide de la méthode des moindres carrés et tracer cette droite sur le graphique comportant le nuage de points.

Exercices

Pour s'entraîner

Exercice 12.1

Dans un établissement scolaire, on demande à un échantillon de 50 élèves combien de fois ils mangent au restaurant scolaire dans la semaine. Les données sont représentées dans le diagramme ci-contre.



1. Déterminer le mode, la médiane et le premier et troisième quartile de la série statistique.
2. Calculer la moyenne et l'écart-type de la série statistique.

Exercice 12.2

Après une étude sur le taux de cholestérol (en g/L) d'un échantillon de 100 personnes, on obtient les résultats suivants :

Taux de cholestérol	$[1.2, 1.4[$	$[1.4, 1.6[$	$[1.6, 1.8[$	$[1.8, 2.0[$	$[2.0, 2.2[$
Effectifs	5	14	15	21	18

Taux de cholestérol	$[2.2, 2.4[$	$[2.4, 2.6[$	$[2.6, 2.8[$	$[2.8, 3.0[$	$[3.0, 3.2[$
Effectifs	10	7	5	3	2

1. Approximer la valeur de la médiane, ainsi que du premier et troisième quartile.
2. On suppose homogène la répartition dans chaque classe. Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série statistique.

Exercice 12.3

On cherche à étudier la relation entre le nombre d'enfants d'un couple et son salaire mensuel en euros. On dispose de la série bidimensionnelle suivantes :

Salaire en euros (x)	510	590	900	1420	2000	600	850	1300	2200
Nombre d'enfants (y)	4	3	2	1	0	5	6	7	8

1. Représenter le nuage de points et calculer le cœfficient de corrélation linéaire de x et y.
2. Ces deux séries statistiques sont-elles indépendantes ?

Pour aller plus loin

Exercice 12.4

L'évolution de la population mondiale (en millions d'habitants) de 1950 à 2015 est résumée dans le tableau suivant

Année	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980
Rang de l'année (x)	0	5	10	15	20	25	30
Population mondiale (y)	2 525	2 758	3 018	3 322	3 682	4 061	4 439

Année	1985	1990	1995	2000	2005	2010	2015
Rang de l'année (x)	35	40	45	50	55	60	65
Population mondiale (y)	4 852	5 309	5 735	6 126	6 519	6 929	7 349

Source : ONU (World Population Prospects : The 2015 Revision)

1. À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel sur ordinateur, tracer le nuage de points de x et y.
2. Effectuer un ajustement de la forme $y = 2\ 525 + \lambda x^a$.
3. Quelle population mondiale peut-on prévoir en 2100 ?

Exercice 12.5

Une étude portant sur les dépenses mensuelles moyennes, en euros, (alimentaires/habillement-loisirs) a été effectuée sur des ménages français composés d'un couple et d'un enfant mineur. Les données récoltées ont été résumées dans le tableau suivant

Revenus mensuel moyen (x)	790	1 198	1 577	1 986	3 007	4 989	7 906
Dépenses alimentaires (y)	614	738	828	908	1 094	1 406	1 730
Dépenses habillement-loisirs (z)	40	81	131	199	406	951	2 030

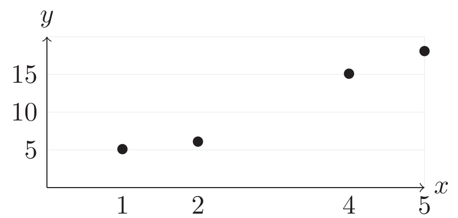
1. À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel sur ordinateur, représenter graphiquement sur une même première figure le nuage des points de x et y et le nuage des points de x et z. Quels ajustements peut-on prévoir ?
2. **a.** À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel sur ordinateur, calculer le cœfficient de corrélation linéaire entre $\ln(x)$ et $\ln(y)$ et celui entre $\ln(x)$ et $\ln(z)$.
   b. Vérifier alors la validité des ajustements prévus à la question **1.** .
   c. En déduire des relations de la forme : $y = kx^\alpha$ et $z = \dfrac{h}{10^5}x^\beta$.
   (On arrondira k, h, α et β à 10^{-2} près)
3. **a.** Déterminer les dépenses alimentaires et les dépenses d'habillement-loisirs moyennes d'un ménage dont le revenu mensuel moyen est de 4 000€.
   b. Déterminer le revenu mensuel d'un ménage qui dépense autant pour la nourriture que pour l'habillement-loisirs.

Corrections

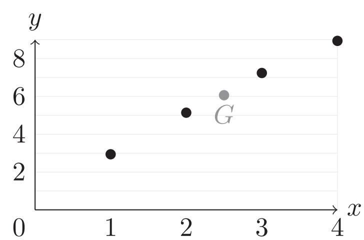
Interro de cours

1. Il s'agit d'un caractère qualitatif.
2. On obtient le tableau et le graphique suivant

x	1	2	4	5
Effectifs cumulés	5	9	15	18

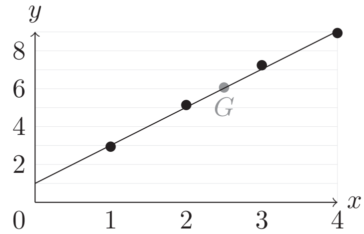


3. Les 10 valeurs sont classées par ordre croissant, donc la médiane est la moyenne du 5^{ème} et du 6^{ème} terme ; le 1^{er} quartile est le 3^{ème} terme (car $\frac{10}{4} = 2.5$) et le 3^{ème} quartile est le 8^{ème} terme (car $\frac{3\times 10}{4} = 7.5$).
Donc $\boxed{Me = 10.5\ ;\ Q_1 = 5\ ;\ Q_3 = 15}$
4. On a $\overline{x} = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.4 + 3 \times 0.3 + 6 \times 0.2 = 2.5$.
Pour l'écart-type, on commence par calculer $\overline{x^2} = 0^2 \times 0.1 + 1^2 \times 0.4 + 3^2 \times 0.3 + 6^2 \times 0.2 = 10.3$, puis $V_x = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = 10.3 - 2.5^2 = 4.05$. Ainsi $s_x = \sqrt{4.05} \simeq 2$.
5. (a) On obtient le graphique suivant



(b) Après calculs, on obtient $\overline{x} = 2.5$, $\overline{y} = 6.025$, $\overline{x^2} = 7.5$, $\overline{y^2} = 41.3675$, $\overline{xy} = 17.575$, $s_x \simeq 1.1180340$, $s_y \simeq 2.2509720$, $s_{x,y} \simeq 2.5125$ et $r_{x,y} \simeq 0.9983457$. Le cœfficient de corrélation est très proche de 1 donc un ajustement affine semble pertinent.

(c) Après calculs, $a \simeq 2.01$ et $b \simeq 1$. On obtient donc le graphique suivant



Exercice 12.1

1. Le mode vaut 0. Si on notait le nombre de repas de chaque élève et qu'on classait le tout par ordre croissant, les 25$^{\text{ème}}$ et 26$^{\text{ème}}$ valeurs seraient des 1, donc $Me = 1$. La 13$^{\text{ème}}$ valeur serait un 0, donc $Q_1 = 0$; la 38$^{\text{ème}}$ valeur serait un 4, donc $Q_3 = 4$.
2. Après calculs, on obtient $\overline{x} = 2.16$; $\overline{x^2} = 8$ et $s_x \simeq 1.826$.

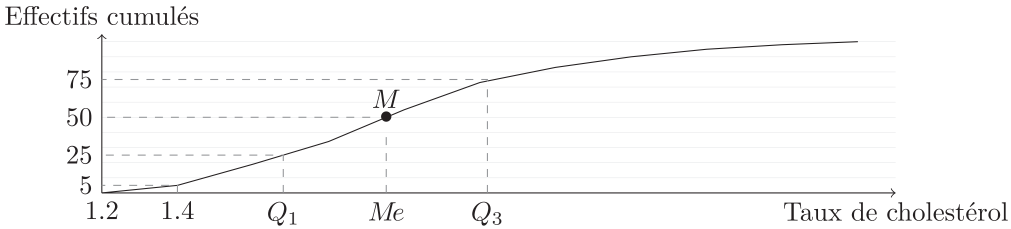
Exercice 12.2

1. On commence par calculer les effectifs cumulés croissants

Taux de cholestérol	$[1.2, 1.4[$	$[1.4, 1.6[$	$[1.6, 1.8[$	$[1.8, 2.0[$	$[2.0, 2.2[$
Effectifs	5	19	34	55	73

Taux de cholestérol	$[2.2, 2.4[$	$[2.4, 2.6[$	$[2.6, 2.8[$	$[2.8, 3.0[$	$[3.0, 3.2[$
Effectifs	83	90	95	98	100

Puis on représente graphiquement



La 50$^{\text{ème}}$ valeur se situe donc entre 1.8 et 2. Si on considère que le point $M(Me, 50)$ est sur le segment défini par les points de coordonnées $(1.8, 34)$ et $(2, 55)$, on obtient que $\frac{50-34}{Me-1.8} = \frac{55-34}{2-1.8}$, c'est-à-dire $Me = 1.8 + \frac{0.2\times16}{21} \simeq 1.95$.
De même, on a $\frac{25-19}{Q_1-1.6} = \frac{34-19}{1.8-1.6}$, c'est-à-dire $Q_1 = 1.6 + \frac{0.2\times6}{15} = 1.68$, et $\frac{75-73}{Q_3-2.2} = \frac{83-73}{2.4-2.2}$, c'est-à-dire $Q_3 = 2.2 + \frac{0.2\times2}{10} = 2.24$.

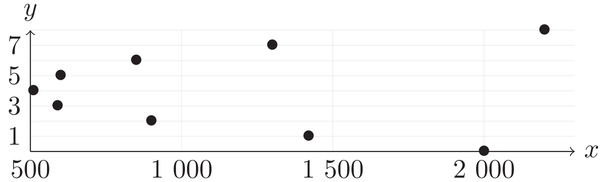
2. Si on considère la répartition homogène au sein de chaque classe, on peut remplacer chaque intervalle par son milieu. On obtient donc la série statistique suivantes

Taux de cholestérol	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1	2.3	2.5	2.7	2.9	3.1
Effectifs	5	14	15	21	18	10	7	5	3	2

Après calculs, on obtient $\overline{x} = 1.996$ et $s_x \simeq 0.4199810$.

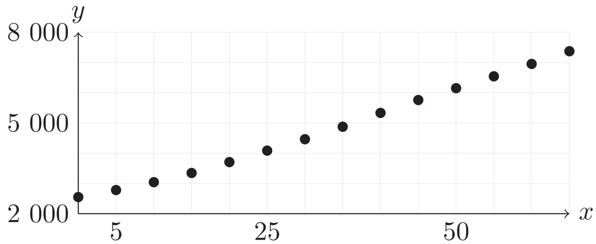
Exercice 12.3

1. On obtient le graphique ci-contre.
Après calculs, $r_{x,y} \simeq 0.0256692$.
2. Le cœfficient de corrélation est très proche de 0, les deux séries statiqtiques semblent donc indépendantes.



Exercice 12.4

1. On obtient le graphique suivant



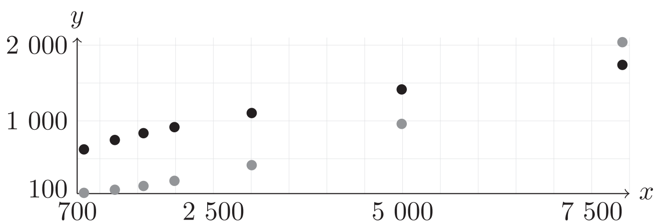
2. On a $y = 2\ 525 + \lambda x^a$ si et seulement si $\ln(y - 2525) = a\ln(x) + \ln(\lambda)$. Il faut donc enlever la première valeur de la série statistique de x (pour éviter d'avoir $\ln(0)$) et donc de y aussi. On applique donc la méthode des moindres carrées aux séries statistiques $\ln(x)$ et $\ln(y - 2\ 525)$. Après calculs, on obtient $\boxed{a \simeq 1.2054434}$ et $\ln(\lambda) \simeq 3.4603496$, c'est-à-dire $\boxed{\lambda \simeq 31.828102}$

3. L'année 2100 correspond à $x = 150$. Donc en 2100, on peut prévoir une population de

$$\boxed{2\ 525 + \lambda \times 150^a \simeq 15\ 890 \text{ millions d'habitants}}$$

Exercice 12.5

1. On obtient le graphique suivant, avec en noir les points de x et y et en gris les points de x et z.



Les points de x et y semblent ralentir leur croissance, on peut donc conjecturer un ajustement du type $y = \lambda x^a$.
Les points de x et z semblent augmenter un peu leur croissance, on peut donc conjecturer un ajustement du type $z = \mu x^b$ ou du type $z = \mu e^{bx}$.

2. **a.** Après calculs, on a $r_{\ln(x),\ln(y)} \simeq 0.9995673$ et $r_{\ln(x),\ln(z)} \simeq 0.9999254$.

b. Ces deux cœfficients de corrélation sont très proches de 1 ce qui semble confirmer un ajustement du type puissance pour x et y et pour x et z.

c. On a $y = kx^\alpha$ si et seulement si $\ln(y) = \alpha\ln(x) + \ln(k)$. On a $z = \frac{h}{10^5}x^\beta$ si et seulement si $\ln(z) = \beta\ln(x) + \ln\left(\frac{h}{10^5}\right)$. Après calculs, on obtient $\alpha \simeq 0.45$, $\ln(k) \simeq 3.4030174$, donc $k \simeq 30.05$ et $\beta \simeq 1.71$, $\ln(\frac{h}{10^5}) \simeq -7.7219540$ donc $h \simeq 44.30$.

3. **a.** Pour un ménage dont le revenu mensuel moyen est 4 000 €, les dépenses alimentaires sont estimées à $k \times 4000^\alpha \simeq 1\ 255$ € et les dépenses d'habillement-loisirs sont estimées à $\frac{h}{10^5} \times 4000^\beta \simeq 640$ €.

b. On cherche donc la valeur de $x > 0$ pour laquelle $kx^\alpha = \frac{h}{10^5}x^\beta$, c'est-à-dire $x^{\alpha-\beta} = \frac{h}{k10^5}$. Ainsi, le revenu mensuel d'un ménage qui dépense autant pour la nourriture que pour l'habillement-loisirs est estimé à $\boxed{\exp\left(\frac{1}{\alpha-\beta}\ln\left(\frac{h}{k10^5}\right)\right) \simeq 6\ 831\ €}$

CHAPITRE 13

Probabilités

L'essentiel du cours

1 Espaces probabilisés finis

Définition

- On appelle **expérience aléatoire** une situation dont l'issue est laissée au hasard.
- On appelle **univers** l'ensemble Ω de toutes les issues possibles de l'expérience.
- On appelle **événement** toute partie de Ω.

Définition

Si Ω est un univers fini et si A et B sont deux événements, alors

- on appelle $\varnothing$ l'**événement impossible** et Ω l'**événement certain**.
- on appelle $A \cap B$ l'événement « A et B » et $A \cup B$ l'événement « A ou B ».
- on appelle $\overline{A}$ l'**événement complémentaire** de A.

Définition

Si Ω est un univers fini, alors

- on dit que deux événements A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.
- on dit que $(A_1, \dots, A_n)$ est un **système complet d'événements** si $A_1, \dots, A_n$ sont deux à deux incompatibles et si $\Omega = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Si A est un événement, $(A, \overline{A})$ forme un système complet d'événements.

Définition

- Si Ω est un univers fini, on appelle **probabilité** sur Ω toute application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ vérifiant $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ pour tous événements A et B incompatibles.
- On appelle **espace probabilisé fini** tout couple $(\Omega, \mathbb{P})$ où Ω est un univers fini et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω.

Propriétés d'une probabilité

Si $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini et si A et B sont deux événements, alors

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A), \quad \mathbb{P}(\varnothing) = 0, \quad \text{si } A \subset B,\ \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$$
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Propriétés des systèmes complets d'événements

Si $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini, si $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements et si B est un événement, alors

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap B).$$

Détermination d'une probabilité

Si $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est un univers fini et si $(p_1, \ldots, p_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que $p_1 + \cdots + p_n = 1$, alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω vérifiant :

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ \mathbb{P}(\{x_i\}) = p_i.$$

Dans ce cas, si A est un événement, alors $\mathbb{P}(A) = \displaystyle\sum_{i \text{ tels que } x_i \in A} p_i.$

Cela revient à dire qu'il y a une et une seule façon de construire une probabilité si on connait la probabilité d'avoir chaque issue possible.

Définition

Si $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est un univers fini, l'unique probabilité $\mathbb{P}$ vérifiant

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ \mathbb{P}(\{x_i\}) = \frac{1}{n}$$

est appelée **probabilité uniforme** sur Ω. Dans ce cas, on parle d'**équiprobabilité**.

Théorème

Si Ω est un univers fini, si $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur Ω et si A est un événement, alors

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}.$$

Il s'agit donc de dire que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

et de se ramener à un problème de dénombrement.

On peut simuler le hasard avec Python

- Dans le module `random`, la commande `rand()` renvoie aléatoirement un réel entre 0 et 1 ; la commande `randint(a,b)` renvoie aléatoirement de manière équiprobable un entier entre a et b, compris ; la commande `choice(l)` renvoie aléatoirement de manière équiprobable un élément de la liste `l`.
- Dans le module `numpy`, la commande `rand()` renvoie aléatoirement un réel entre 0 et 1, par contre la commande `randint(a,b)` renvoie aléatoirement de manière équiprobable un entier entre a et b, a compris et b exclu (elle renvoie aléatoirement un élément de `range(a,b)`).

2 Probabilités conditionnelles

Dans toute la suite $(\Omega, \mathbb{P})$ sera un espace probabilisé fini.

Définition

Si A et B sont deux événements avec $\mathbb{P}(A) > 0$, la **probabilité conditionnelle** de B sachant A, notée $\mathbb{P}_A(B)$ ou $\mathbb{P}(B \mid A)$, est le réel

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

$B \mid A$ n'est pas un événement, $\mathbb{P}(B \mid A)$ est juste une notation.

$\mathbb{P}_A(B)$ représente la probabilité de réaliser l'événement B sachant que l'événement A est réalisé.

Proposition

Si A est un événement vérifiant $\mathbb{P}(A) > 0$, alors $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur Ω.

Formule des probabilités composées

Si $A_1, \dots, A_n$ sont des événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$, alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Cette formule appliquée à deux événements A et B tels que $\mathbb{P}(A) > 0$ devient $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A)$.

Formule des probabilités totales

Si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements tel que $\mathbb{P}(A_i) > 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et si B est un événement, alors

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B).$$

- Si A est un événement tel que $0 < \mathbb{P}(A) < 1$, cette formule appliquée au système complet d'événements $(A, \overline{A})$ devient $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)\mathbb{P}(\overline{A})$.
- Ces deux formules sont très utiles pour passer d'un arbre de probabilité (ne constituant pas une preuve rigoureuse) à une rédaction propre et rigoureuse.

Formule de Bayes

Si B est un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$ et si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements tels que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(A_i) > 0$, alors

$$\forall j \in [\![1, n]\!]\,,\ \mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}_{A_j}(B)\mathbb{P}(A_j)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)}.$$

- Cette formule permet de calculer la probabilité d'avoir un événement sachant un événement se produisant après dans la chronologie de l'expérience.
- On ne sait jamais comment prononcer le nom de cette formule. Thomas Bayes étant un mathématicien britannique, son nom se prononce à l'anglaise.

3 Indépendance

Définition

Deux événements A et B sont **indépendants** si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Il faut bien faire attention aux hypothèses de l'énoncé pouvant donner l'indépendance ou non d'épreuves (et donc l'indépendance d'événements).

Définition

On dit que $A_1, \dots, A_n$ sont des événements **mutuellement indépendants** si pour toute partie non vide I de $[\![1, n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Proposition

Si $A_1, \dots, A_n$ sont des événements mutuellement indépendants et si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$, alors les événements $B_1, \dots, B_n$ sont mutuellement indépendants.

Les méthodes à maîtriser

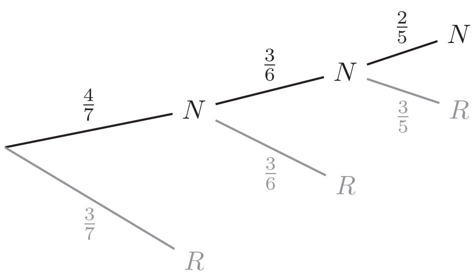
Méthode 13.1 : Utiliser la formule des probabilités composées

On utilise la formule des probabilités composées pour calculer la probabilité d'une succession d'étapes quand on sait calculer facilement les probabilités conditionnelles à chaque étape. Cela revient à justifier rigoureusement la probabilité d'une branche sur un arbre de probabilité comme le produit des différentes probabilités le long de cette branche.

Exemple d'application

On dispose d'une urne avec 4 boules noires et 3 boules rouges. On tire successivement 3 boules sans remise. Quelle est la probabilité de n'avoir tiré que des boules noires ?

Pour apprivoiser le problème, on peut commencer par faire au brouillon une arbre de probabilité, partiellement rempli (ci-contre).



Pour la justification rigoureuse : on note A : « on n'a tiré que des boules noires au cours des trois tirages » , R_i : « on tire une boule rouge au $i^{\text{ème}}$ tirage » et N_i : « on tire une boule noire au $i^{\text{ème}}$ tirage ». Si on sait que l'événement $N_1 \cap \cdots \cap N_i$ a été réalisé, il reste $4-i$ boules noires et $7-i$ boules dans l'urne. Ainsi

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}(N_2 \mid N_1)\mathbb{P}(N_3 \mid N_2 \cap N_1) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{35}.$$

Voir exercices **13.4**, **13.8** et **13.9**.

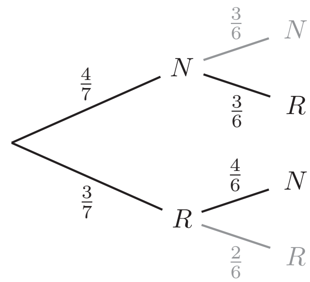
Méthode 13.2 : Utiliser la formule des probabilités totales

On utilise la formule des probabilités totales pour calculer la probabilité d'un événement B pouvant arriver de différentes manières. On commence par se donner un système complet d'événements $(A_1, \ldots, A_n)$ (correspondant aux différents cas de figure amenant à notre événement) et ensuite on détermine les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}(B \mid A_i)$. Cela revient à justifier rigoureusement la probabilité de plusieurs branches sur un arbre de probabilité comme la somme de la probabilité de chaque branche.

Exemple d'application

On dispose d'une urne avec 4 boules noires et 3 boules rouges. On tire successivement 2 boules sans remise. Quelle est la probabilité d'avoir tiré une boule de chaque couleur ?

Pour apprivoiser le problème, on peut commencer par faire au brouillon une arbre de probabilité (ci-contre).
Pour la justification rigoureuse : on note



A : « on tire une boule de chaque couleur »,
R_i : « on tire une boule rouge au $i^{\text{ème}}$ tirage »,
N_i : « on tire une boule noire au $i^{\text{ème}}$ tirage ».

La famille (N_1, R_1) est un système complet d'événements donc

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(A) + \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(A) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(R_2) + \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(N_2) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{7}.$$

Voir exercices **13.7**, **13.10**, **13.12** et **13.14**.

Méthode 13.3 : Utiliser la formule de Bayes

On utilise la formule de Bayes lorsque l'on veut calculer une probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_B(A)$ en connaissant $\mathbb{P}_A(B)$. Cela revient à inverser cause et conséquence en général.

Exemple d'application

On dispose d'une pièce équilibrée et d'une autre pièce donnant Face avec la probabilité $\frac{1}{3}$. On prend une des deux pièces au hasard, on la lance et on obtient Face. Quelle est la probabilité d'avoir utilisé la pièce équilibrée ?

On note F (resp. P) : « obtenir Face » (resp. Pile) et E : « utiliser la pièce équilibrée ». Les pièces étant choisies au hasard, on a $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(\overline{E}) = \frac{1}{2}$. Ainsi

$$\mathbb{P}_F(E) = \frac{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}_E(F)}{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}_E(F) + \mathbb{P}(\overline{E})\mathbb{P}_{\overline{E}}(F)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{3}{5}.$$

Voir exercices **13.5**, **13.6** et **13.7**.

Méthode 13.4 : Exploiter l'indépendance

L'indépendance (mutuelle) est très souvent donnée (ou sous-entendue) dans l'énoncé. Il suffit ensuite d'utiliser la définition de l'indépendance.

Exemple d'application

On lance n fois un dé équilibré. Quelle est la probabilité de n'avoir eu le premier 6 qu'au $n^{\text{ème}}$ lancer ?

On note S_i : « obtenir un 6 au $i^{\text{ème}}$ lancer ». On cherche la probabilité de $A = \overline{S_1} \cap \cdots \cap \overline{S_{n-1}} \cap S_n$. Les événements S_i sont mutuellement indépendants donc $\overline{S_1}, \ldots, \overline{S_{n-1}}, S_n$ aussi. Ainsi

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\overline{S_1}) \cdots \mathbb{P}(\overline{S_{n-1}})\mathbb{P}(S_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6}.$$

Voir exercices **13.1** et **13.2**.

Interro de cours

1. Soient A et B deux événements incompatibles. Parmi les propositions suivantes lesquelles sont toujours vraies ?

(a) A et B sont indépendants.

(b) (A, B) est un système complet d'événements.

(c) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

(d) $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.

2. Dans une urne, on dispose de $2n$ boules blanches et $2n$ boules noires indiscernables au toucher. On tire successivement sans remise n boules. Quelle est la probabilité de tirer une boule noire pour la première fois au $n^{\text{ème}}$ tirage ?

3. On dispose de $2n$ jetons blancs, n jetons rouges et n jetons noirs. Les jetons peuvent être ronds ou carrés. La moitié des jetons blancs sont ronds, le tiers des jetons rouges sont ronds et le quart des jetons noirs sont ronds. On tire un jeton au hasard.

(a) Quelle est la probabilité de tirer une jeton rond ?

(b) On a tiré un jeton rond, quelle est la probabilité qu'il soit blanc ?

4. On lance un dé équilibré à 6 faces n fois. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 ?

Exercices

Pour s'entraîner

Exercice 13.1

Est-il plus probable d'obtenir au moins un 6 en quatre lancers d'un dé équilibré, ou au moins un double 6 en vingt-quatre lancers de deux dés équilibrés ?

Exercice 13.2

La probabilité qu'un forage conduise à une nappe de pétrole est $0,1$.

1. Quelle est la probabilité pour que, sur dix forages, on ait au moins un succès ?
2. Combien de forages sont nécessaires pour avoir au moins une chance sur deux de succès ?

Exercice 13.3

On considère une famille de deux enfants. On suppose que chaque enfant a une chance sur deux d'être une fille.

1. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant que l'aîné est une fille ?
2. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant que l'un des deux enfants est une fille ?

Exercice 13.4

Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire. On tire une boule au hasard. Si cette boule est blanche on la remet dedans et on remet une autre boule blanche. Si cette boule est noire on s'arrête.
Calculer la probabilité p_n de tirer la boule noire au $n^{\text{ème}}$ tirage.

Exercice 13.5

Une maladie affecte une personne sur mille. On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99% si cette personne est malade. Par contre, on obtient un faux positif pour $0,2\%$ des personnes saines.
Une personne a été testée positive, quelle est la probabilité qu'elle soit réellement malade ?

Exercice 13.6

Dans une entreprise 1 % des articles produits sont défectueux. Un contrôle qualité permet de refuser 95 % des articles défectueux mais aussi de refuser 2 % des articles non défectueux.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ?
2. Quelle est la probabilité qu'un article accepté soit en réalité défectueux ?

Exercice 13.7

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne n° k il y a k boules blanches et $n-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard puis dans cette urne, on tire une boule au hasard.

1. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?

2. Quelle est la probabilité d'avoir utilisé l'urne n sachant qu'on a tiré une boule blanche ?

Exercice 13.8

Romulus distribue à Rémus n cartes parmi un jeu de 32 cartes.
Rémus est gagnant s'il reçoit la Dame de ♠.

1. Quelle est la probabilité que Rémus gagne ?

2. Romulus tente de tricher. Il retire p cartes du jeu, sans savoir lesquelles, avant de donner n cartes à Rémus.
Est-ce plus intéressant pour Romulus de tricher ?

Pour aller plus loin

Exercice 13.9

Sur un navire, n marins tirent à la courte paille. Vous êtes le k-ième à tirer. Quel est la probabilité que vous ayez la paille la plus courte ?

Exercice 13.10

On dispose de deux pièces : A qui est équilibrée et B qui donne Face avec probabilité $\frac{2}{3}$. On choisit une pièce au hasard. On la lance et si on obtient Face on garde la pièce et si on obtient Pile on prend l'autre pièce. On continue les lancers de la même manière.

1. On note p_n la probabilité de tirer la pièce A au lancer numéro n. Montrer que (p_n) est une suite arithmético-géométrique.

2. En déduire une expression de p_n.

3. Quelle est la probabilité d'obtenir Face au lancer numéro n ?

Exercice 13.11

Une classe contient n élèves.

1. Quelle est la probabilité qu'un élève ait la même date d'anniversaire que le professeur ?

2. Quelle est la probabilité que deux élèves aient la même date d'anniversaire (on ne tient pas compte des années bissextiles) ?

3. À partir de combien d'élèves il y a plus d'une chance sur deux d'avoir deux élèves ayant la même date d'anniversaire ?

Exercice 13.12

Vous participez à un jeu télévisé. On vous présente trois portes. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture de luxe. Derrière les deux autres, une chèvre.
Vous choisissez une porte au hasard. Pour faire durer le suspense, l'animateur du jeu ouvre, en connaissance de cause, une porte derrière laquelle se trouve une chèvre. On vous laisse la possibilité de changer de porte. Que choisissez-vous ?

Exercice 13.13

Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle une pièce truquée qui amène Pile avec la probabilité p. A commence. A gagne dès qu'il obtient Pile et le jeu s'arrête alors. B gagne dès qu'il obtient Face, et le jeu s'arrête alors.

1. Quelle est la probabilité pour que A gagne lors de son $n^{\text{ème}}$ lancer ?
2. Quelle est la probabilité pour que A gagne.
3. Quelle est la probabilité pour que le jeu ne s'arrête pas ?
4. Quelle valeur faut-il donner à p pour que les deux joueurs aient tous deux les même chances de gagner ?

Exercice 13.14

Un jeu entre deux joueurs A et B est divisé en parties indépendantes. À chaque partie, celui qui perd donne un euro au gagnant. La probabilité que A gagne est p. On note $q = 1 - p$ la probabilité que B gagne. Les deux joueurs possèdent au total N euros. Le jeu s'arrête dès que l'un des joueurs est ruiné. On note p_k la probabilité que A soit ruiné en démarrant avec k euros.

1. Calculer p_0 et p_N.
2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_k = pp_{k+1} + qp_{k-1}$
3. En déduire que
$$p_k = \begin{cases} \dfrac{\left(\dfrac{q}{p}\right)^N - \left(\dfrac{q}{p}\right)^k}{\left(\dfrac{q}{p}\right)^N - 1} & \text{si } p \neq \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{N-k}{N} & \text{si } p = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$
4. On note q_k la probabilité que B soit ruiné en démarrant avec k euros. En déduire une expression de q_k.
5. Calculer $p_k + q_{N-k}$ et interpréter.

Corrections

Interro de cours

1. (a) **Faux.** Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$, alors $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ par incompatibilité mais $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \neq 0$.

   (b) **Faux.** Si $\Omega = \{1, 2, 3\}$, alors $A = \{1\}$ et $B = \{2\}$ sont incompatibles mais ne forment pas un système complet d'événements de Ω car $A \cup B = \{1, 2\} \neq \Omega$.

   (c) **Vrai.** Il s'agit d'un des points définissant une probabilité.

   (d) **Faux.** Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$, alors $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 0 \neq \mathbb{P}(A)$.

2. On note A :« tirer une boule noire pour la première fois au $n^{\text{ème}}$ tirage » et, pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note B_i : « tirer une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage ». On a $A = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} B_i\right) \cap \overline{B_n}$, donc d'après la formule des probabilités composées, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2 \mid B_1) \cdots \mathbb{P}\left(B_{n-1} \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n-2} B_i\right) \mathbb{P}\left(\overline{B_n} \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n-1} B_i\right) \\
&= \frac{n}{2n} \times \frac{n-1}{2n-1} \times \cdots \times \frac{2}{2n-(n-2)} \times \frac{n}{2n-(n-1)} \\
&= \frac{n! \times n}{\frac{(2n)!}{n!}} \\
&= \frac{n(n!)^2}{(2n)!}.
\end{aligned}$$

3. (a) On note C : « le jeton tiré est carré », B : « le jeton tiré est blanc », R : « le jeton tiré est rouge » et N : « le jeton tiré est noir ». La famille (B, R, N) est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales, on obtient

$$\mathbb{P}(\overline{C}) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(\overline{C}) + \mathbb{P}(R)\mathbb{P}_R(\overline{C}) + \mathbb{P}(N)\mathbb{P}_N(\overline{C}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{19}{48}.$$

   (b) On utilise la formule de Bayes pour obtenir

$$\mathbb{P}_{\overline{C}}(B) = \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(\overline{C})}{\mathbb{P}(\overline{C})} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{19}{48}} = \frac{12}{19}.$$

4. On note A : « obtenir au moins un 6 ». On a $\overline{A}$: « n'obtenir aucun 6 ». Ainsi $\mathbb{P}(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$, puis $\boxed{\mathbb{P}(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}$.

> Lorsque l'on doit calculer la probabilité d'un événement du type
>
> « obtenir au moins … »
>
> il est en général beaucoup plus simple de passer par l'événement contraire.

Exercice 13.1

On note U : « obtenir au moins un 6 en quatre lancers » et D : « obtenir au moins un double 6 en vingt-quatre lancers ». On a $\mathbb{P}(\overline{U}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$, donc $\boxed{\mathbb{P}(U) = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^4 \simeq 0,52}$

On a $\mathbb{P}(\overline{D}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$, donc $\boxed{\mathbb{P}(D) = 1 - \left(\dfrac{35}{36}\right)^{24} \simeq 0,49}$

Il est donc plus probable d'obtenir au moins un 6 en lançant un dé équilibré quatre fois que d'obtenir au moins un double 6 en lançant deux dés équilibrés vingt-quatre fois.

Exercice 13.2

1. On note S : « on est tombé au moins une fois sur une nappe de pétrole en dix forages ».

On a $\mathbb{P}(\overline{S}) = \left(\frac{9}{10}\right)^{10}$, donc $\boxed{\mathbb{P}(S) = 1 - \left(\dfrac{9}{10}\right)^{10}}$

2. On note S_n : « on est tombé au moins une fois sur une nappe de pétrole en n forages ». En procédant comme à la question précédente, on obtient $\mathbb{P}(S_n) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n$. Ainsi

$$\mathbb{P}(S_n) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^n \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{9}{10}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow n \geq -\frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{9}{10}\right)} \quad \text{car } \ln\left(\frac{9}{10}\right) < 0.$$

Or $-\frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{9}{10}\right)} \simeq 6,6$, donc il faut au moins 7 forages pour avoir au moins une chance sur deux de succès.

Exercice 13.3

On modélise le problème avec un F pour une fille et un G pour un garçon. Ainsi $\Omega = \{F, G\}^2$.

1. On note A : « l'aîné est une fille » et B : « les deux enfants sont des filles ».
On a $A = \{(F,F),(F,G)\}$, $B = \{(F,F)\}$ et $A \cap B = \{(F,F)\}$.
Donc $\mathrm{Card}(A) = 2$ et $\mathrm{Card}(A \cap B) = 1$. Ainsi, par équiprobabilité,

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{\mathrm{Card}(A\cap B)}{\mathrm{Card}(\Omega)}}{\frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}} = \frac{\mathrm{Card}(A \cap B)}{\mathrm{Card}(A)} = \frac{1}{2}.$$

2. On note C : « l'un des deux enfants est une fille ». On a $C = \{(F,F),(F,G),(G,F)\}$ et $C \cap B = \{(F,F)\}$. Donc $\mathrm{Card}(C) = 3$ et $\mathrm{Card}(C \cap B) = 1$. Ainsi

$$\mathbb{P}_C(B) = \frac{\mathbb{P}(C \cap B)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\frac{\mathrm{Card}(C\cap B)}{\mathrm{Card}(\Omega)}}{\frac{\mathrm{Card}(C)}{\mathrm{Card}(\Omega)}} = \frac{\mathrm{Card}(C \cap B)}{\mathrm{Card}(C)} = \frac{1}{3}.$$

Exercice 13.4

On note A :« tirer la boule noire au $n^{\text{ème}}$ tirage » et, pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note B_i : « tirer une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage ». On a $A = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} B_i\right) \cap \overline{B_n}$, donc d'après la formule des probabilités composées, on obtient

$$\mathbb{P}(A) \quad = \quad \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2 \mid B_1) \cdots \mathbb{P}\left(B_{n-1} \;\middle|\; \bigcap_{i=1}^{n-2} B_i\right) \mathbb{P}\left(\overline{B_n} \;\middle|\; \bigcap_{i=1}^{n-1} B_i\right)$$

De plus, si l'événement $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} B_i$ est réalisé, alors il y a $k+2$ boules dans l'urne, dont $k+1$ boules blanches et une boule noire. Ainsi

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Exercice 13.5

On note M :« être malade » et P : « être testé positif ».
D'après l'énoncé $\mathbb{P}(M) = \frac{1}{1000}$, $\mathbb{P}_M(P) = 0,99$ et $\mathbb{P}_{\overline{M}}(P) = 0,002$. D'après la formule de Bayes, on a

$$\mathbb{P}_P(M) = \frac{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(P)}{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(P) + \mathbb{P}(\overline{M})\mathbb{P}_{\overline{M}}(P)} = \frac{0,001 \times 0,99}{0,001 \times 0,99 + 0,999 \times 0,002} \simeq 0,33.$$

Exercice 13.6

On note D : « l'article est défectueux » et A : « l'article est accepté ».
D'après l'énoncé, $\mathbb{P}(\overline{D}) = 0,99$, $\mathbb{P}_D(\overline{A}) = 0,95$ et $\mathbb{P}_{\overline{D}}(\overline{A}) = 0,02$.

1. On note E : « il y a eu une erreur de contrôle ». On a $E = (D \cap A) \cup (\overline{D} \cap \overline{A})$. Cette union étant disjointe, on a $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(D \cap A) + \mathbb{P}(\overline{D} \cap \overline{A})$. Ainsi

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(D)\mathbb{P}_D(A) + \mathbb{P}(\overline{D})\mathbb{P}_{\overline{D}}(\overline{A}) = (1 - 0,99) \times (1 - 0,95) + 0,99 \times 0,02 = 0,0203.$$

2. D'après la formule de Bayes, on a

$$\mathbb{P}_A(D) = \frac{\mathbb{P}(D)\mathbb{P}_D(A)}{\mathbb{P}(D)\mathbb{P}_D(A) + \mathbb{P}(\overline{D})\mathbb{P}_{\overline{D}}(A)} = \frac{(1 - 0,99) \times (1 - 0,95)}{(1 - 0,99) \times (1 - 0,95) + 0,99 \times (1 - 0,002)} \simeq 0,025.$$

Exercice 13.7

1. Pour $i \in [\![i, n]\!]$, on note U_i : « choisir l'urne n° i » et on note B : « tirer une boule blanche ». La famille $(U_1, \ldots, U_n)$ forme un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(U_i)\mathbb{P}_{U_i}(B) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{i}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n+1}{2n}$.

2. On utilise la formule de Bayes : $\mathbb{P}_B(U_n) = \dfrac{\mathbb{P}(U_n)\mathbb{P}_{U_n}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\frac{1}{n} \times \frac{n}{n}}{\frac{n+1}{2n}} = \dfrac{2}{n+1}$.

Exercice 13.8

On modélise le problème en définissant l'univers Ω comme l'ensemble des mains de n cartes d'un jeu de 32 cartes.

1. On note G : « Rémus gagne ». On a $\text{Card}(\Omega) = \binom{32}{n}$. Pour dénombrer G, on prend la Dame de ♠ : 1 possibilité ; on prend $n-1$ autres cartes : $\binom{31}{n-1}$ possibilités. Par équiprobabilité,

$$\mathbb{P}(G) = \frac{\text{Card}(G)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\binom{31}{n-1}}{\binom{32}{n}} = \frac{n}{32}.$$

2. On note T : « Romulus enlève la Dame de ♠ ». En réutilisant le résultat de la question précédente, $\mathbb{P}(T) = \frac{p}{32}$. Si l'événement $\overline{T}$ est réalisé, il reste $32-p$ cartes dans le jeu, dont la Dame de ♠. Ainsi, en réutilisant le résultat de la question précédente $\mathbb{P}_{\overline{T}}(G) = \frac{n}{32-p}$. De plus $\mathbb{P}_T(G) = 0$. Alors, d'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(T, \overline{T})$, on obtient

$$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(T)\mathbb{P}_T(G) + \mathbb{P}(\overline{T})\mathbb{P}_{\overline{T}}(G) = 0 + (1 - \frac{p}{32}) \times \frac{n}{32-p} = \frac{32-p}{32} \times \frac{n}{32-p} = \frac{n}{32}.$$

Romulus n'a donc aucun intérêt à tricher de cette façon.

Exercice 13.9

On modélise le problème en notant l'ordre dans lequel ont été tirées les pailles. Ainsi Ω est l'ensemble des permutations des n pailles et $\text{Card}(\Omega) = n!$. Tous les éléments de Ω ont la même probabilité d'arriver. On est donc dans une situation d'équiprobabilité.
On note C : « on tire la courte-paille ». Pour dénombrer C, on place la paille la plus courte à la $k^{\text{ème}}$ place : 1 possibilité ; on place les autres pailles aux $n-1$ places restantes : $(n-1)!$ possibilités.
Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(C) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}}$

Exercice 13.10

1. Si $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k : « tirer la pièce A au $k^{\text{ème}}$ lancer » et F_n : « obtenir Face au $k^{\text{ème}}$ lancer ». On utilise la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(A_n, \overline{A_n})$:

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n \cap A_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{A_n} \cap A_{n+1}).$$

Or, d'après l'énoncé, $A_n \cap A_{n+1} = A_n \cap F_n$ et $\overline{A_n} \cap A_{n+1} = \overline{A_n} \cap \overline{F_n}$, d'où

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(F_n) + \mathbb{P}(\overline{A_n})\mathbb{P}_{\overline{A_n}}(\overline{F_n}) = p_n \times \frac{1}{2} + (1-p_n) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{3},$$

ce qui montre que la suite (p_n) est une suite arithmético-géométrique.

2. On commence par chercher α tel que $\alpha = \frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{3}$ c'est-à-dire $\alpha = \frac{2}{5}$. La suite $(p_n - \alpha)$ est géométrique de raison $\frac{1}{6}$. Ainsi $p_n - \alpha = (\frac{1}{6})^{n-1}(p_1 - \alpha)$. Or, d'après l'énoncé $p_1 = \frac{1}{2}$. Alors

$$\boxed{p_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}}$$

3. On utilise la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(A_n, \overline{A_n})$ pour obtenir $\mathbb{P}(F_n) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(F_n) + \mathbb{P}(\overline{A_n})\mathbb{P}_{\overline{A_n}}(F_n)$. Ainsi

$$\mathbb{P}(F_n) = p_n \times \frac{1}{2} + (1-p_n) \times \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}p_n + \frac{2}{3} = -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{3}{5}.$$

Exercice 13.11

1. On modélise en notant la date d'anniversaire du professeur puis celle de chaque élève. Ainsi $\Omega = [\![1, 365]\!]^{n+1}$.
On note P : « au moins un élève a la même date d'anniversaire que le professeur ». L'événement $\overline{P}$ signifie que chaque élève a une date de naissance différente de celle du professeur. Donc pour dénombrer $\overline{P}$, on choisit la date d'anniversaire du professeur : 365 possibilités ; on choisit la date d'anniversaire des élèves parmi les 364 dates restantes : 364^n possibilités. Par équiprobabilité,

$$\mathbb{P}(P) = 1 - \mathbb{P}(\overline{P}) = 1 - \frac{\mathrm{Card}(\overline{P})}{\mathrm{Card}(\Omega)} = 1 - \frac{365 \times 364^n}{365^{n+1}} = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n.$$

2. La date de naissance du professeur n'entrant plus en compte, on a $\Omega = [\![1, 365]\!]^n$.
On note A : « au moins deux élèves ont la même date de naissance ».
L'événement $\overline{A}$ signifie que tous les élèves ont des dates de naissance différentes, cela correspond donc aux n-listes sans répétition. Par équiprobabilité,

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{\mathrm{Card}(\overline{A})}{\mathrm{Card}(\Omega)} = 1 - \frac{\frac{365!}{(365-n)!}}{365^n}.$$

3. En testant différentes valeurs, on trouve qu'à partir de 23 élèves, cette probabilité est plus grande que $\frac{1}{2}$.

Exercice 13.12

On note V_1 : « avoir choisi au début la porte cachant la voiture » et V_2 : « avoir choisi à la fin la porte cachant la voiture ».
On calcule la probabilité de remporter la voiture dans les deux cas.

- Dans le cas où on change de porte, si l'événement V_1 est réalisé, alors on est sûr de ne pas choisir à la fin la porte cachant la voiture, donc $\mathbb{P}_{V_1}(V_2) = 0$. Si l'événement $\overline{V_1}$ est réalisé, vu que l'animateur va forcément révéler une chèvre, on est sûr de choisir à la fin la porte cachant la voiture, donc $\mathbb{P}_{\overline{V_1}}(V_2) = 1$. Donc d'après la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(V_2) = \mathbb{P}(V_1)\mathbb{P}_{V_1}(V_2) + \mathbb{P}(\overline{V_1})\mathbb{P}_{\overline{V_1}}(V_2) = 0 + \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}.$$

- Dans le cas où on ne change pas de porte, si l'événement V_1 est réalisé, alors on est sûr de choisir à la fin la porte cachant la voiture, donc $\mathbb{P}_{V_1}(V_2) = 1$. Si l'événement $\overline{V_1}$ est réalisé, alors on est sûr de ne pas choisir à la fin la porte cachant la voiture, donc $\mathbb{P}_{\overline{V_1}}(V_2) = 0$. Donc d'après la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(V_2) = \mathbb{P}(V_1)\mathbb{P}_{V_1}(V_2) + \mathbb{P}(\overline{V_1})\mathbb{P}_{\overline{V_1}}(V_2) = \frac{1}{3} \times 1 + 0 = \frac{1}{3}.$$

Donc, si on veut gagner la voiture, il vaut mieux changer de porte.

Exercice 13.13

1. Si $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k : « A gagne lors de son $k^{\text{ème}}$ lancer » et B_k : « B gagne lors de son $k^{\text{ème}}$ lancer ». On a $A_n = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1}(\overline{A_k} \cap \overline{B_k})\right) \cap A_n$. D'après la formule des probabilités composées

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n) &= \underbrace{\mathbb{P}(\overline{A_1})}_{=1-p}\underbrace{\mathbb{P}(\overline{B_1} \mid \overline{A_1})}_{=p} \times \cdots \\ &\quad \times \underbrace{\mathbb{P}\left(\overline{A_{n-1}} \middle| \bigcap_{k=1}^{n-2}(\overline{A_k} \cap \overline{B_k})\right)}_{=1-p} \underbrace{\mathbb{P}\left(\overline{B_{n-1}} \middle| \bigcap_{k=1}^{n-2}(\overline{A_k} \cap \overline{B_k}) \cap \overline{A_{n-1}}\right)}_{=p} \underbrace{\mathbb{P}\left(A_n \middle| \bigcap_{k=1}^{n-1}(\overline{A_k} \cap \overline{B_k})\right)}_{=p} \\ &= p^n(1-p)^{n-1}.\end{aligned}$$

2. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note G_n : « A gagne en au plus n lancers » et G_A : « A gagne » . On a $G_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_n$.

Les événements étant deux à deux incompatibles, on a

$$\mathbb{P}(G_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) = p\sum_{k=1}^{n}(p(1-p))^{k-1} = p\frac{1-(p(1-p))^n}{1-p(1-p)}.$$

La probabilité que A gagne est la limite de cette probabilité lorsque $n \to +\infty$.
Or $0 < p(1-p) < 1$ donc $(p(1-p))^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On en conclut que $\boxed{\mathbb{P}(G_A) = \dfrac{p}{1-p(1-p)}}$

3. On note G_B : « B gagne ».

On procède de même pour déterminer que $\mathbb{P}(B_n) = p^{n-1}(1-p)^{n+1}$ et $\mathbb{P}(G_B) = \dfrac{(1-p)^2}{1-p(1-p)}$.

Si on note S : « le jeu s'arrête ». On a $S = G_A \cup G_B$. Ces deux événements étant incompatibles, on a $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(G_A) + \mathbb{P}(G_B) = \dfrac{p+(1-p)^2}{1-p(1-p)} = 1$.

On en conclut que la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais est nulle.

4. On a : $\mathbb{P}(G_A) = \mathbb{P}(G_B) \Leftrightarrow p = (1-p)^2 \Leftrightarrow p^2 - 3p + 1 = 0 \Leftrightarrow p = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ car $p \in]0, 1[$.

Exercice 13.14

1. On a $p_0 = 1$ car A est sûr de finir ruiné s'il commence avec 0 € et $p_N = 0$ car, si A commence avec N €, alors B est ruiné dès le début et le jeu s'arrête sans que A soit ruiné.

2. On note R_k : « A est ruiné en commençant avec k € » et P : « A gagne la première partie ». D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(P, \overline{P})$, on obtient

$$\mathbb{P}(R_k) = \mathbb{P}(P)\mathbb{P}_P(R_k) + \mathbb{P}(\overline{P})\mathbb{P}_{\overline{P}}(R_k).$$

Or, si A a démarré avec k € et a gagné la première partie, alors il dispose de $k+1$ €.
Il est donc ruiné avec la probabilité p_{k+1} et $\mathbb{P}_P(R_k) = p_{k+1}$. De même $\mathbb{P}_{\overline{P}}(R_k) = p_{k-1}$.

On en conclut que $\boxed{p_k = pp_{k+1} + qp_{k-1}}$

3. On obtient donc $p_{k+1} = \frac{1}{p}p_k - \frac{q}{p}p_{k-1}$. Ainsi la suite (p_k) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 = \frac{1}{p}r - \frac{q}{p}$, dont les solutions sont $r = 1$ ou $r = \frac{q}{p}$.

- Si $p \neq \frac{1}{2}$, alors les deux solutions de l'équation caractéristiques sont différentes.
  Ainsi, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, on a $p_k = \lambda + \mu(\frac{q}{p})^k$. En utilisant les égalités $p_0 = 1$ et $p_N = 0$, on détermine les valeurs de λ et μ et on obtient
  $$\boxed{p_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}}$$
- Si $p = \frac{1}{2}$, alors l'équation caractéristique admet une solution double. Ainsi il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, on a $p_k = \lambda + \mu k$. En utilisant les égalités $p_0 = 1$ et $p_N = 0$, on détermine les valeurs de λ et μ et on obtient $\boxed{p_k = \dfrac{N-k}{N}}$

4. En appliquant le résultat précédente à (q, p) au lieu de (p, q), on obtient que

$$\boxed{q_k = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{p}{q}\right)^N - \left(\frac{p}{q}\right)^k}{\left(\frac{p}{q}\right)^N - 1} & \text{si } p \neq \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{N-k}{N} & \text{si } p = \dfrac{1}{2} \end{cases}}$$

5.
- Si $p \neq \frac{1}{2}$, alors

$$\begin{aligned} p_k + q_{N-k} &= \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} + \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^N - \left(\frac{p}{q}\right)^{N-k}}{\left(\frac{p}{q}\right)^N - 1} &= \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} + \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^N \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^k\right)}{\left(\frac{p}{q}\right)^N \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N\right)} \\ & &= \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} + \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} \\ & &= \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} \\ & &= 1. \end{aligned}$$

- Si $p = \frac{1}{2}$, alors $p_k + q_{N-k} = \dfrac{N-k}{N} + \dfrac{N-(N-k)}{N} = 1$.

Dans tous les cas, $p_k + q_{N-k} = 1$. Ainsi, si A commence avec k € et B avec $N - k$ €, alors la probabilité que A ou B soit ruiné est de 1. Donc le jeu s'arrête presque sûrement.

CHAPITRE

Variables aléatoires finies 14

L'essentiel du cours

Dans tout le chapitre $(\Omega, \mathbb{P})$ sera un espace probabilisé fini.

■ 1 Variables aléatoires finies

Définition

Une **variable aléatoire réelle** sur Ω est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

L'univers Ω étant fini, l'ensemble $X(\Omega)$ l'est aussi.

Définition

Si X est une variable aléatoire réelle sur Ω, $A \subset \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit les événements

- $[X = x] = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = x\}$
- $[X \leq x] = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \leq x\}$
- $[X \in A] = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \in A\}$.

- On a des définitions analogues pour $[X < x]$, $[X \geq x]$ et $[X > x]$.
- Pour alléger les notations, on note simplement $\mathbb{P}(X = x)$, $\mathbb{P}(X \leq x)$ et $\mathbb{P}(X \in A)$.

Définition

Si X est une variable aléatoire réelle sur Ω, on appelle **loi** de X l'application

$$f_X : \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \mathbb{P}(X = x) \end{array}$$

et **fonction de répartition** de X l'application $F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathbb{P}(X \leq x). \end{array}$

Proposition

Si X est une variable aléatoire réelle sur Ω, et $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ alors $([X = x_1], \dots, [X = x_n])$ est un système complet d'événements de Ω et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$.

Proposition

Si X est une variable aléatoire réelle sur Ω à valeurs entières, alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1).$$

Cette formule traduit simplement le fait que avoir $X = k$ revient à avoir $X \leq k$ et ne pas avoir $X \leq k - 1$.

2 Espérance et variance

Dans toute cette partie X sera une variable aléatoire réelle sur Ω.

Définition

On appelle **espérance** de X le réel

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x).$$

On dit que X est une variable aléatoire réelle **centrée** si $\mathbb{E}(X) = 0$.

L'espérance de X est la moyenne des valeurs prises par X pondérées par leur probabilité.

Propriétés de l'espérance

Soient X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur Ω et $a, b \in \mathbb{R}$.

- Positivité : si X est à valeurs positives, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
- Croissance : si $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \leq Y(\omega)$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.
- Linéarité : $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.

Théorème de transfert

Si $u : X(\Omega) \to \mathbb{R}$, alors $u(X)$ est une variable aléatoire réelle sur Ω et

$$\mathbb{E}(u(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} u(x)\mathbb{P}(X = x).$$

Il suffit donc de connaître la loi de X et la fonction u pour calculer l'espérance de $u(X)$.

Définition

Si $k \in \mathbb{N}$, on appelle **moment** d'ordre k de X le réel $\mathbb{E}(X^k) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} x^k\mathbb{P}(X = x)$.

Définition

La **variance** de X est le réel $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$.
On dit que X est **réduite** si $\mathbb{V}(X) = 1$.

La variance calcule la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. Elle mesure donc la dispersion des valeurs de X.

Propriétés de la variance

Soient a et $b \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{V}(X) \geq 0$
- $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ (formule de Kœnig-Huygens)
- $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$.

Dans la pratique, on utilise la formule de Kœnig-Huygens pour calculer la variance.

Définition

L'**écart-type** de X est le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

La variable aléatoire réelle $\dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Si $\varepsilon > 0$, alors $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$.

3 Lois usuelles

Définition

On dit que X suit une **loi certaine** s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = a) = 1$.

Il s'agit de la modélisation d'une situation déterministe.

Propriétés de la loi certaine

Si X suit une loi certaine a, alors $\mathbb{E}(X) = a$ et $\mathbb{V}(X) = 0$.

Définition

Si $a, b \in \mathbb{N}$ avec $a < b$, on dit que X suit une **loi uniforme** sur $[\![a, b]\!]$ si

$$X(\Omega) = [\![a, b]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![a, b]\!]\,,\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{b - a + 1}.$$

On note $X \sim \mathscr{U}([\![a, b]\!])$ (ou $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![a, b]\!])$).

Il s'agit de la modélisation d'une situation d'équiprobabilité.

Propriétés de la loi uniforme

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \sim \mathscr{U}([\![1, n]\!])$, alors $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$.

On peut simuler une loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$ à l'aide la fonction `randint` du module `random` de la façon ci-contre.

```
import random as rd
def loi_uniforme(a,b):
    k = rd.randint(a,b)
    return(k)
```

Définition

Si $p \in [0, 1]$ et $q = 1 - p$, on dit que X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre p si

$$X(\Omega) = \{0, 1\}\,, \quad \mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = q.$$

On note $X \sim \mathscr{B}(p)$.

Il s'agit de la fonction indicatrice d'un événement ayant la probabilité p de se réaliser. Il s'agit donc de la modélisation d'une expérience pouvant soit réussir, avec la probabilité p, soit échouer, avec la probabilité q (on parle d'épreuve de Bernoulli).

Propriétés de la loi de Bernoulli

Si $p \in [0, 1]$, $q = 1 - p$ et $X \sim \mathscr{B}(p)$, alors

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = pq.$$

On peut simuler une loi de Bernoulli à l'aide de la fonction `random` du module `random`. En effet `random()` renvoie aléatoirement, de manière uniforme, un nombre entre 0 et 1. Donc l'événement « `random() < p` » se réalise avec la probabilité p.

```
import random as rd
def loi_Bernoulli(p):
    if rd.random() < p:
        return(1)
    else:
        return(0)
```

Définition

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$ et $q = 1-p$, on dit que X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p si

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0,n]\!]\,,\ \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

On note $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.

Il s'agit de la modélisation du nombre de succès à l'issue de n épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre p.

Propriétés de la loi binomiale

Si $p \in [0,1]$, $q = 1-p$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, alors

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = npq.$$

On peut simuler une loi binomiale en enchaînant n épreuves de Bernoulli et en comptant le nombre de succès obtenus.

```
import random as rd
def loi_binomiale(n,p):
    nb_succes = 0
    for i in range(n):
        if rd.random() < p:
            nb_succes += 1
    return(S)
```

Définition

Si N et $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$ tel que $Np \in \mathbb{N}$ et $q = 1-p$, on dit que X suit la **loi hypergéométrique** de paramètres N, n et p si

$$X(\Omega) \subset [\![0,n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0,n]\!]\,,\ \mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

On note $X \sim \mathscr{H}(N,n,p)$.

Il s'agit de la modélisation d'une situation du type :
On dispose de N éléments dont une proportion p vérifie une propriété. On prend n éléments (sans remise) et on compte le nombre d'éléments tirés vérifiant la propriété.

Propriétés de loi hypergéométrique

Si N et $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$ tel que $Np \in \mathbb{N}$ et $X \sim \mathscr{H}(N,n,p)$, alors $\mathbb{E}(X) = np$.

Pour simuler une loi hypergéométrique, il va falloir s'inspirer de la modélisation donnée dans la remarque précédente.

```
import random as rd
def loi_hyper(N,n,p):
    nb_succes = 0
    for i in range(n):
        if rd.random() < (N*p-nb_succes)/(N-i):
            nb_succes += 1
    return(nb_succes)
```

Ici, au départ, il y a `N*p` éléments vérifiant la propriété voulue et `N` éléments au total. Au bout du `i`ème tirage, il ne reste plus que `N*p-nb_succes` éléments vérifiant la propriétés (on en a déjà retiré `nb_succes` avant) et il ne reste plus que `n-i` éléments au total.

Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale

Si N et $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$ tel que $Np \in \mathbb{N}$, $q = 1-p$, $X_N \sim \mathscr{H}(N,n,p)$, $k \in [\![0,n]\!]$ et $Y \sim \mathscr{B}(n,p)$ alors

$$\mathbb{P}(X_N = k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}} \xrightarrow[\substack{N\to+\infty \\ Np\in\mathbb{N}}]{} \mathbb{P}(Y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

On approxime en général une loi hypergéométrique par une loi binomiale quand l'échantillon étudié (n) représente moins de 10% de la population totale (N), c'est-à-dire quand $10n \leq N$.

Les méthodes à maîtriser

Méthode 14.1 : Déterminer la loi d'une variable aléatoire réelle

Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire réelle X, on commence par déterminer $X(\Omega)$ (l'ensemble des valeurs prises par X). Puis pour chaque élément x de cet ensemble, on calcule $\mathbb{P}(X = x)$. Si on ne trouve pas de formule générique en fonction de x, on peut représenter les résultats dans un tableau.

Exemple d'application

On dispose d'une urne contenant une boule rouge et 4 boules noires. On tire successivement toutes les boules sans remise et on note X le rang du tirage de la boule rouge. Déterminer la loi de X.

Le tirage recherché se situe entre le 1^{er} et le $5^{\text{ème}}$, on obtient donc que $X(\Omega) = [\![1, 5]\!]$. On a

- $\mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{1}{5}$ (on tire la boule rouge au premier tirage).
- $\mathbb{P}(X = 2) = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{5}$ (on tire une boule noire, 4 chances sur 5, puis une boule rouge, 1 chance sur 4).
- $\mathbb{P}(X = 3) = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{5}$.
- On obtient de même $\mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(X = 5) = \dfrac{1}{5}$.

Ainsi, X suit une loi uniforme sur $[\![1, 5]\!]$.

Voir exercices **14.1** à **14.11**.

Méthode 14.2 : Utiliser les lois usuelles

Dans un problème concret, on peut reconnaître des schémas modélisés par les lois usuelles et ainsi exprimer notre variable aléatoire en fonction d'autres suivant des lois usuelles. En cas d'équiprobabilité, on pourra considérer une loi uniforme. S'il s'agit d'une expérience ayant une probabilité p de réussir, on a une loi de Bernoulli. Si on compte le nombre de succès dans la répétition de n expériences de Bernoulli identiques et indépendantes, on a une loi binomiale. Enfin si on effectue des tirages ciblés sans remise dans une population, on a une loi hypergéométrique.

Exemple d'application

Une puce se déplace de manière rectiligne. À chaque saut, elle avance d'un centimètre avec la probabilité p et recule d'un centimètre avec la probabilité $1 - p$. Chaque saut est indépendant des autres. On note X_n la distance qui sépare la puce de son point de départ au bout de n sauts.
Exprimer X_n en fonction d'une variable aléatoire suivant une loi usuelle.

On a un enchainement d'épreuves de Bernoulli. Si on note S_n le nombre de fois que la puce avance au cours de n premiers sauts, alors $S_n \sim \mathscr{B}(n, p)$. De plus, la distance parcourue est égale au nombre de fois que la puce a avancé multiplié par 1 ajouté au nombre de fois que la puce a reculé multiplié par -1. D'où $X_n = 1 \times S_n + (-1) \times (n - S_n) = 2S_n - n$.

Voir exercices **14.6**, **14.4**, **14.7**, **14.9** et **14.11**.

Méthode 14.3 : Calculer une espérance et une variance

- Si on connait la loi, on utilise la définition pour calculer l'espérance et la formule de Kœnig-Huygens pour calculer la variance.
- Si la variable s'exprime en fonction d'autre(s) variable(s) aléatoire(s), on utilise la linéarité de l'espérance ou le théorème de transfert pour calculer l'espérance. Pour la variance, si on peut exploiter l'indépendance, on utilise la variance d'une combinaison affine sinon, on revient à la formule de Kœnig-Huygens.

Exemple d'application

(1) On lance un dé équilibré à 6 faces. On gagne 2 euros si on obtient entre 1 et 4 (compris) et on perd 1 euro sinon. Déterminer l'espérance et la variance du gain X.

(2) Une puce se déplace de manière rectiligne. À chaque saut, elle avance d'un centimètre avec la probabilité p et recule d'un centimètre avec la probabilité $1-p$. Chaque saut est indépendant des autres. On note X_n la distance qui sépare la puce de son point de départ au bout de n sauts.
Déterminer l'espérance et la variance de X_n.

(1) On commence par déterminer la loi de X : on a $X(\Omega)=\{-1,2\}$ et $\mathbb{P}(X=2)=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$ et $\mathbb{P}(X=-1)=\dfrac{1}{3}$. Ensuite, on passe au calcul de l'espérance

$$\mathbb{E}(X)=2\times\mathbb{P}(X=2)+(-1)\times\mathbb{P}(X=-1)=2\times\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=1.$$

Pour le calcul de la variance, on va commencer par calculer

$$\mathbb{E}(X^2)=2^2\times\mathbb{P}(X=2)+(-1)^2\times\mathbb{P}(X=-1)=4\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=3.$$

On utilise la formule de Kœnig-Huygens pour conclure

$$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2=3-1^2=2.$$

(2) En reprenant l'exemple de la méthode **14.2**, on a $X_n=2S_n-n$ avec $S_n\sim\mathscr{B}(n,p)$. On applique donc les propriétés de l'espérance et de la variance pour obtenir

$$\mathbb{E}(X_n)=2\mathbb{E}(S_n)-n=n(2p-1)\quad\text{ et }\quad\mathbb{V}(X_n)=2^2\mathbb{V}(S_n)=4np(1-p).$$

➔ Voir exercices **14.1**, **14.2**, **14.3**, **14.4**, **14.5**, **14.6**, **14.8**, **14.9**, **14.10** et **14.11**.

Interro de cours

1. Un glacier vend des cornets de glaces contenant 1 ou 2 boules. Chaque jour, il a 100 clients qui choisissent de manière indépendante. Un tiers de ses clients prend systématiquement 1 boule, un sixième systématiquement 2 boules. L'autre moitié est constitué d'indécis qui prennent 2 boules 3 fois sur 4. Combien de boules le glacier vend-il en moyenne par jour ?

2. On lance deux dés équilibrés et on notre X le plus grand des deux résultats. Déterminer la fonction de répartition de X puis en déduire sa loi.

3. Citer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

4. Dans une urne, il y a 50 boules noires, 80 boules bleues, 120 boules blanches et 150 boules rouges. On tire simultanément 100 boules et on note X le nombre de boules bleues tirées. Reconnaître la loi de X.

5. Si $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, déterminer l'espérance de $1 + n2^X$.

6. Les propositions suivantes sont-elles toujours vraies ?

(a) Si X et Y ont la même loi, alors pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = Y(\omega)$.

(b) Si X est positive, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.

(c) $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(X^2)$

(d) Si a et $b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{V}(aX + b) = a\mathbb{V}(X) + b$.

7. Par quelle loi peut approximer la loi hypergéométrique et à quelle(s) condition(s) ?

Exercices

Pour s'entraîner

Exercice 14.1

Un forain possède deux roues découpées en 10 secteurs égaux. Sur la première roue, il y a 3 secteurs rouges et 7 blancs ; sur la deuxième roue, il y a un secteur rouge et 9 blancs. Les gains sont attribués de la manière suivante :

- 3 € si les deux roues tombent sur un secteur rouge,
- 1 € si une des deux roues tombe sur un secteur rouge,
- $0,5$ € si aucune des deux roues ne tombe sur un secteur rouge.

Déterminer à quel prix le forain doit faire payer son jeu pour gagner en moyenne $0,25$ € par partie ?

Exercice 14.2

On lance un dé à 4 faces numérotées de 1 à 4. La probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro qu'elle porte. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre obtenu.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance de X.
3. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

Exercice 14.3

Les n individus d'une population souffrent d'une maladie avec la probabilité $p = 0,05$. Pour dépister cette maladie, on procède de l'une des deux manières suivantes :

- **Première méthode :** on dépiste tout le monde.
- **Deuxième méthode :** on mélange le sang des n individus et on le teste. Si le mélange est contaminé par cette maladie, on dépiste tout le monde sinon, on ne dépiste personne.

On note X_n le nombre de tests effectués avec la deuxième méthode

1. Calculer l'espérance de X_n.
2. Étudier la fonction $f : x \mapsto x\ln(0,95) + \ln(x)$.
3. Jusqu'à quelle valeur de n la deuxième méthode est-elle plus économique que la première ?

Exercice 14.4

On dispose d'une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On tire successivement avec remise deux jetons et on note M la plus grande valeur obtenue.

1. Écrire une fonction Python `M(n)` qui simule M.
2. Déterminer la fonction de répartition F_M de M.
3. En déduire la loi de M puis calculer son espérance.
4. On suppose maintenant que l'on tire successivement sans remise les deux jetons.
Déterminer de même la loi et l'espérance de M.

Exercice 14.5

On dispose d'une urne contenant n boules vertes, 5 boules rouges et 10 boules blanches. On tire une boule au hasard. Si elle est rouge, on gagne 5 €, si elle est blanche, on perd 3 € et si elle est verte, on tire une deuxième boule, sans remettre la première. Si cette deuxième boule est rouge, on gagne 4 €, si elle est blanche on perd 1 € et si elle est verte, on ne gagne rien et le jeu s'arrête. On note X le gain du joueur.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et en déduire la valeur de n pour que le jeu soit équitable.

Exercice 14.6 — ***G2E 2016***

Les n échantillons d'une usine de traitement sont relevés par un laboratoire qui choisit d'analyser une partie de ces échantillons (partie choisie de façon équiprobable, éventuellement réduite à l'ensemble vide ou égale à l'ensemble des n échantillons).
Pour une semaine donnée, on considère X la variable aléatoire correspondant au nombre d'échantillons analysés.

1. **a.** Rappeler Card $\mathscr{P}(E)$ (où $E = [\![1, n]\!]$) puis montrer que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$.
b. Quelle est la loi suivie par X ? Quels sont les paramètres de cette loi ?
c. Quel est le nombre moyen d'échantillons analysés par ce laboratoire ?
2. Calculer le plus petit entier naturel n non nul tel qu'on est certain à strictement plus de 99% qu'au moins un échantillon a été analysé.

Pour aller plus loin

Exercice 14.7

On s'intéresse à la proportion p de personnes possédant une certaine mutation génétique.
On cherche à estimer la valeur de p. Pour ce faire, on examine n personnes prises au hasard et on compte X personnes portant cette mutation génétique. On veut savoir combien de personnes examiner pour avoir une marge d'erreur sur p assez faible.
À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur de n à partir de laquelle on a 95% de chances que p soit dans l'intervalle $\left]\frac{X}{n} - 0,05\ ;\ \frac{X}{n} + 0,05\right[$.
On pourra démontrer puis utiliser le fait que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$.

Exercice 14.8

On cherche à transmettre des données informatiques (une suite de 0 et de 1). Un bruit dans la transmission peut fausser un caractère (transformer un 0 en 1 ou un 1 en 0) avec la probabilité $1-p$, de manière indépendante. Pour limiter cette altération, on envoie trois fois chaque caractère et si on a obtenu une majorité de 0, on considère que le caractère est 0, sinon 1.

1. Montrer que, si $p > \frac{1}{2}$, la fiabilité de la réception est meilleure avec le triple envoi qu'avec l'envoi simple.
2. Quelle est la probabilité qu'un message de n caractères ait été envoyé sans erreur ?
3. Quel est le nombre moyen de caractères erronés à la réception d'un message de n caractères ?

Exercice 14.9

Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi binomial $\mathscr{B}(n,p)$. Les résultats de X sont affichés sur un compteur détraqué :

- si $X(\omega) \neq 0$, le compteur affiche $X(\omega)$,
- si $X(\omega) = 0$, le compteur affiche un nombre au hasard entre 1 et n.

On note Y la valeur affichée par le compteur.

1. Écrire une fonction Python `X(n,p)` qui simule la variable aléatoire X puis une fonction `Y(n,p)` qui simule la variable aléatoire Y.

2. Déterminer la loi de Y ainsi que son espérance.

Exercice 14.10

On dispose de n boules blanches et n boules noires indiscernables au toucher dans une urne. On tire les $2n$ boules successivement sans remise. On note X_n le rang du tirage de la dernière boule noire.

1. Déterminer la loi de X_n.

2. En déduire que
$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \cdots + \binom{2n}{n} = \binom{2n+1}{n+1}.$$

3. Calculer l'espérance de X_n.

Exercice 14.11

Une puce se déplace de manière rectiligne dans un seul sens par bonds successifs de 1 cm, avec une probabilité p, ou de 2 cm, avec une probabilité $q = 1 - p$. Tous les sauts sont indépendants.

1. On note S_n le nombre de sauts de 2 cm effectués au cours des n premiers sauts.
Déterminer la loi de S_n.

2. On note X_n le nombre de cm parcourus par la puce après n sauts.

- **a.** Écrire une fonction Python `X(n,p)` qui simule X_n.
- **b.** Exprimer X_n en fonction de S_n. En déduire l'espérance et la variance de X_n.

3. On note Y_n le nombre de sauts nécessaires pour parcourir n cm.

- **a.** Écrire une fonction Python `Y(n,p)` qui simule Y_n.
- **b.** Exprimer $\mathbb{P}(Y_{n+2} = k+1)$ en fonction de $\mathbb{P}(Y_{n+1} = k)$ et $\mathbb{P}(Y_n = k)$.
- **c.** En déduire une relation de récurrence sur $\mathbb{E}(Y_n)$.
- **d.** On pose $u_n = \mathbb{E}(Y_n) - an$. Déterminer le réel a pour que (u_n) soit une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
- **e.** En déduire l'espérance de Y_n.

Corrections

Interro de cours

1. On considère les événements

D : « être parmi ceux qui prennent systématiquement 2 boules »,
U : « être parmi ceux qui prennent systématiquement 1 boule »,
I : « être un client indécis »,

et la variable aléatoire réelle X égale au nombre de boules prises par un client.
On a $X(\Omega) = \{1, 2\}$. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (D, U, I) pour obtenir

$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(D)\mathbb{P}_D(X=1) + \mathbb{P}(U)\mathbb{P}_U(X=1) + \mathbb{P}(I)\mathbb{P}_I(X=1) = 0 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{24}$$

et

$$\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(D)\mathbb{P}_D(X=2) + \mathbb{P}(U)\mathbb{P}_U(X=2) + \mathbb{P}(I)\mathbb{P}_I(X=2) = \frac{1}{6} \times 1 + 0 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{13}{24}.$$

On en conclut que $\mathbb{E}(X) = 1 \times \mathbb{P}(X=1) + 2 \times \mathbb{P}(X=2) = \dfrac{37}{24} \simeq 1,54$.
Ayant 100 clients par jour, le glacier vend en moyenne 154 boules de glace par jour.

2. Soit $k \in [\![1, 6]\!]$. L'événement $[X \leq k]$ correspond au fait d'avoir eu deux valeurs inférieures ou égales à k, donc $\boxed{\mathbb{P}(X \leq k) = \left(\dfrac{k}{6}\right)^2}$ (la formule reste vraie pour $k = 0$).

On en déduit ensuite que $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1) = \dfrac{k^2 - (k-1)^2}{6^2} = \dfrac{2k-1}{36}$.

3. Si X est une variable aléatoire réelle et si $\varepsilon > 0$, alors $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$.

4. Il s'agit d'effectuer un tirage sans remise et de compter un certain type d'élément, cela se modélise par une loi hypergéométrique. Il y a $N = 400$ boules au total, on en tire $n = 100$ et la proportion de boules qui nous intéresse est de $p = \frac{80}{400} = \frac{1}{5}$. Ainsi $X \sim \mathscr{H}(400, 100, \frac{1}{5})$.

5. D'après la formule de transfert

$$\mathbb{E}(1 + n2^X) = \sum_{k=1}^{n} (1 + n2^k)\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n} 2^k = n \times \frac{1}{n} + 2^{n+1} - 2 = 2^{n+1} - 1.$$

6. **(a)** **Faux.** Si on lance n fois une pièce équilibrée et que l'on note X le nombre de Pile obtenus et Y le nombre de Face obtenus, il est clair que X et Y ne sont pas égales, pourtant elles suivent toutes les deux la même loi binomiale $\mathscr{B}(n, \frac{1}{2})$.

(b) **Vrai.** Il s'agit de la positivité de l'espérance.

(c) **Faux.** Le second membre de la formule correcte pour la variance est l'opposée de celui donné.

(d) **Faux.** La formule correcte est $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$.

7. On peut approximer la loi $\mathscr{H}(N, n, p)$ par la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ si $N \geq 10n$.

Exercice 14.1

On note G le gain du joueur et

$$R_1 : \text{« tomber sur un secteur rouge avec la première roue »},$$
$$R_2 : \text{« tomber sur un secteur rouge avec la deuxième roue ».}$$

On a $G(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}, 1, 3\right\}$, et

$$\mathbb{P}(G = \frac{1}{2}) = \mathbb{P}(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) = \frac{7}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{63}{100},$$

$$\mathbb{P}(G = 1) = \mathbb{P}\big((R_1 \cap \overline{R_2}) \cup (\overline{R_1} \cap R_2)\big) = \frac{3}{10} \times \frac{9}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{34}{100}$$

et

$$\mathbb{P}(G = 3) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{100}.$$

Ainsi $\mathbb{E}(G) = \frac{1}{2} \times \frac{63}{100} + 1 \times \frac{34}{100} + 3 \times \frac{3}{100} = \frac{149}{200} = 0,745$.
Donc si le forain veut gagner en moyenne $0,25$ € par partie, il faut qu'il fasse payer $\mathbb{E}(G) + 0,25 \simeq 1$ € la partie.

Exercice 14.2

1. D'après l'énoncé $X(\Omega) = [\![1, 4]\!]$ et on dispose de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall k \in [\![1, 4]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \alpha k$. Pour déterminer la valeur de α, on utilise le fait que la somme de toutes les probabilités vaut 1 :

$$1 = \sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}(X = k) = \alpha \sum_{k=1}^{4} k = 10\alpha.$$

Ainsi $\alpha = \frac{1}{10}$ et $\boxed{\forall k \in [\![1, 4]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{k}{10}}$

2. On a $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{4} k\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{4} k^2 = \frac{1}{10} \times 30$. Donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = 3}$

3. D'après la formule de transfert, $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k}\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{4} \frac{k}{k} = \frac{4}{10}$. Donc $\boxed{\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{2}{5}}$

Exercice 14.3

1. Soit le test du mélange du sang des individus n'est pas contaminé, auquel cas on n'a effectué qu'un seul test ; sinon, en plus, on dépiste tout le monde, auquel cas on a effectué $n + 1$ tests. On a donc $X_n(\Omega) = \{1, n + 1\}$. L'événement $[X_n = 1]$ correspond au cas où personne n'est malade. Donc $\mathbb{P}(X_n = 1) = 0,95^n$. Puis $\mathbb{P}(X_n = n + 1) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - 0,95^n$.
Ainsi $\mathbb{E}(X_n) = 1 \times 0,95^n + (n + 1)(1 - 0,95^n)$. D'où $\boxed{\mathbb{E}(X_n) = n + 1 - n \times 0,95^n}$

2. Par somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, si $x > 0$, on a $f'(x) = \ln(0,95) + \frac{1}{x}$. De plus, $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$ par croissances comparées et car $\ln(0,95) < 0$.

On obtient donc le tableau de variations suivant

x	0		$-\frac{1}{\ln(0{,}95)}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	>0	$\searrow$	$-\infty$

3. La deuxième méthode est plus économique que la première si et seulement si

$$\mathbb{E}(X_n) < n \Leftrightarrow n \times 0,95^n > 1 \Leftrightarrow f(n) > 0.$$

Or à l'aide de l'étude de la fonction f et en cherchant une valeur approchée des deux valeurs qui annulent la fonction (en regardant différentes valeurs sur ordinateur par exemple), on en conclut que la deuxième méthode est plus économique que la première si et seulement si $2 \leq n \leq 87$.

Exercice 14.4

1.

```python
import random as rd
def M(n):
    J1 = rd.randint(1,n) # tirage du premier jeton
    J2 = rd.randint(1,n) # tirage du second jeton
    if J1 > J2:
        return J1
    else:
        return J2
```

2. On a $M(\Omega) = [\![1, n]\!]$. Si $k \in [\![1, n]\!]$, l'événement $[M \leq k]$ correspond au cas où on a tiré deux jetons ayant chacun un numéro inférieur ou égal à k. Ainsi $\mathbb{P}(M \leq k) = \left(\dfrac{k}{n}\right)^2$. D'où

$$\boxed{F_M(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 1 \\ \left(\dfrac{k}{n}\right)^2 & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ 1 & \text{si } k > n \end{cases}}$$

3. En utilisant le résultat précédent, si $k \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}(M = k) = F_M(k) - F_M(k-1) = \left(\frac{k}{n}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 = \frac{k^2 - (k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}.$$

Puis

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(M = k) &= \frac{1}{n^2}\left(2\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\left(2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}. \end{aligned}$$

4. Dans ce cas, on a

$$F_M(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 1 \\ \dfrac{k(k-1)}{n(n-1)} & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ 1 & \text{si } k > n \end{cases}$$

d'où, si $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(M = k) = F_M(k) - F_M(k-1) = \frac{k(k-1) - (k-1)(k-2)}{n(n-1)} = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}.$$

Puis

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(M = k) &= \frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k \right) \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{2n+2}{3}.\end{aligned}$$

Exercice 14.5

1. On définit les événements suivants, pour $i = 1$ ou $i = 2$

V_i : « tirer une boule verte au $i^{\text{ème}}$ tirage »
R_i : « tirer une boule rouge au $i^{\text{ème}}$ tirage »
B_i : « tirer une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage ».

On a $X(\Omega) = \{-3, -1, 0, 4, 5\}$ et, en utilisant la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(V_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(V_1)\mathbb{P}_{V_1}(B_2) = \frac{n}{n+15} \times \frac{10}{n+14} = \frac{10n}{(n+15)(n+14)},$$

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(V_1 \cap V_2) = \mathbb{P}(V_1)\mathbb{P}_{V_1}(V_2) = \frac{n}{n+15} \times \frac{n-1}{n+14} = \frac{n(n-1)}{(n+15)(n+14)},$$

$$\mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(V_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(V_1)\mathbb{P}_{V_1}(R_2) = \frac{n}{n+15} \times \frac{5}{n+14} = \frac{5n}{(n+15)(n+14)},$$

$$\mathbb{P}(X = -3) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{10}{n+15} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 5) = \mathbb{P}(R_1) = \frac{5}{n+15}.$$

On résume tous ces résultats dans le tableau suivant

k	-3	-1	0	4	5
$\mathbb{P}(X = k)$	$\dfrac{10}{n+15}$	$\dfrac{10n}{(n+15)(n+14)}$	$\dfrac{n(n-1)}{(n+15)(n+14)}$	$\dfrac{5n}{(n+15)(n+14)}$	$\dfrac{5}{n+15}$

2. On déduit de la question précédente que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= -3 \times \frac{10}{n+15} - 1 \times \frac{10n}{(n+15)(n+14)} + 0 \times \frac{n(n-1)}{(n+15)(n+14)} \\ &\quad + 4 \times \frac{5n}{(n+15)(n+14)} + 5 \times \frac{5}{n+15} \\ &= \frac{5n-70}{(n+15)(n+14)}.\end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{E}(X) = 0 \Leftrightarrow 5n - 70 = 0 \Leftrightarrow n = 14$.
Le jeu est donc équitable si et seulement s'il y a 14 boules vertes.

Exercice 14.6

1. a. On a $\text{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n$.
De plus, si $k \in [\![0, n]\!]$, pour dénombrer $[X = k]$, on choisit les k échantillons analysés : $\binom{n}{k}$ possibilités ; puis on choisit les $n-k$ échantillons non analysés parmi les $n-k$ échantillons restants : 1 possibilité. Donc $\text{Card}([X = k]) = \binom{n}{k}$.
Par équiprobabilité, on en conclut que $\forall k \in [\![0, n]\!]\,,\ \mathbb{P}(X = k) = \displaystyle\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$.

b. Si $k \in [\![0, n]\!]$, on peut réécrire $\mathbb{P}(X = k) = \displaystyle\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$.
Ainsi $X \sim \mathscr{B}(n, \frac{1}{2})$.

c. Le nombre moyen d'échantillons analysés par ce laboratoire est $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n}{2}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 1) \geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - \mathbb{P}(X = 0) \geq 0,99 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(X = 0) \leq 0,01 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2^n} \leq 0,01 \\ &\Leftrightarrow \quad n \geq -\frac{\ln(0,01)}{\ln(2)} \simeq 6,64.\end{aligned}$$

On est donc sûr à au moins 99% d'analyser au moins un échantillon dès que $n \geq 7$.

Exercice 14.7

La variable X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$. On a donc $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.
Soit $\varepsilon > 0$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a $\mathbb{P}(|X - np| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$.
On commence par utiliser l'indication. On a $p(1-p) = p - p^2 = -\left(p - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{4}$.
Donc $\mathbb{V}(X) \leq \dfrac{n}{4}$. Ainsi $\mathbb{P}(|X - np| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{n}{4\varepsilon^2}$ puis

$$\mathbb{P}(|X - np| < \varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(|X - np| \geq \varepsilon) \geq 1 - \frac{n}{4\varepsilon^2}.$$

Or en modifiant un peu l'événement considéré ci-dessus, on obtient

$$|X - np| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < X - np < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{X}{n} - \frac{\varepsilon}{n} < p < \frac{X}{n} + \frac{\varepsilon}{n}.$$

Au final, on arrive à

$$\mathbb{P}\left(\frac{X}{n} - \frac{\varepsilon}{n} < p < \frac{X}{n} + \frac{\varepsilon}{n}\right) \geq 1 - \frac{n}{4\varepsilon^2}.$$

Il suffit donc de trouver ε et n de sorte que $\dfrac{\varepsilon}{n} = 0,05$ et $1 - \dfrac{n}{4\varepsilon^2} = 0,95$. On obtient $\varepsilon = 0,05n$ puis $\dfrac{n}{4\varepsilon^2} = \dfrac{n}{4 \times 0,05^2 n^2} = \dfrac{1}{0,01n}$ et $n = \dfrac{1}{0,01 \times 0,05} = 2000$.
Ainsi, si on examine au moins 2 000 personnes, on a au moins 95% de chances que p soit dans l'intervalle $\left]\dfrac{X}{n} - 0,05\ ;\ \dfrac{X}{n} + 0,05\right[$.

Exercice 14.8

1. On note S le nombre de fois que le caractère a été transmis avec succès. La variable S suit une loi binomiale $\mathscr{B}(3,p)$. La probabilité que le caractère ait été transmis sans erreur vaut

$$\mathbb{P}(S=2)+\mathbb{P}(S=3)=3p^2(1-p)+p^3=p^2(3-3p+p)=p^2(3-2p).$$

On compare avec l'envoi simple :

$$p^2(3-2p)>p \Leftrightarrow 2p^2-3p+1<0.$$

Après étude du trinôme, on a $2p^2-3p+1<0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<p<1$.
Ainsi, si $p>\frac{1}{2}$, le triple envoi est plus fiable que le simple envoi.

2. On note C le nombre de caractères envoyés correctement (avec le triple envoi) sur un message de n caractères. La variable C suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p^2(3-2p))$. La probabilité que le message ait été envoyé sans erreur est $\mathbb{P}(C=n)=(p^2(3-2p))^n$.
3. Le nombre moyen de caractères corrects envoyés est $\mathbb{E}(C)=np^2(3-2p)$.
Donc le nombre moyen de caractères erronés $n(1-p^2(3-2p))$.

Exercice 14.9

1.

```
import random as rd
def X(n,p):
    S = 0
    for i in range(n):
        if rd.random() < p:
            S += 1
    return S
```

```
def Y(n,p):
    S = X(n,p)
    if S != 0:
        return rd.randint(1,n)
    else:
        return S
```

2. On a $Y(\Omega)=[\![1,n]\!]$. Si $k\in[\![1,n]\!]$ et $i\in[\![1,n]\!]$ avec $i\neq k$, on a $\mathbb{P}_{[X=i]}(Y=k)=0$.
On applique ensuite la formule des probabilités totales au système complet d'événements $([X=i])_{0\leq i\leq n}$ et on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=k)=\sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}_{[X=i]}(Y=k) &= \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}_{[X=0]}(Y=k)+\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}_{[X=k]}(Y=k)\\ &= (1-p)^n\times\frac{1}{n}+\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\times 1.\end{aligned}$$

Pour l'espérance,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\frac{(1-p)^n}{n} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \frac{(1-p)^n}{n}\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} - 0 \\
&= \frac{(1-p)^n}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} + \mathbb{E}(X) \\
&= \frac{(n+1)(1-p)^n}{2} + np.
\end{aligned}$$

Exercice 14.10

1. On modélise le problème en notant la couleur de la boule tirée à chaque tirage pour obtenir un « mot » de $2n$ éléments. Chaque série de tirages a la même probabilité d'arriver. On est donc dans une situation d'équiprobabilité.
Pour dénombrer Ω, on choisit les places des n boules noires : $\binom{2n}{n}$ possibilités ; puis on choisit les places de n boules blanches dans les n places restantes : 1 possibilité. Ainsi $\mathrm{Card}(\Omega) = \binom{2n}{n}$.
On a $X_n(\Omega) = [\![n, 2n]\!]$. Si $k \in [\![n, 2n]\!]$, pour dénombrer $[X_n = k]$, on commence par placer une boule noire à la $k^{\text{ème}}$ place : 1 possibilité ; puis on place les $n-1$ boules noires restantes dans $k-1$ premières places : $\binom{k-1}{n-1}$ possibilités ; pour finir, on place les n boules noires dans les n places restantes : 1 possibilité. Ainsi

$$\boxed{\forall k \in [\![n, 2n]\!]\,,\ \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}}$$

2. On considère la variable aléatoire réelle X_{n+1}. On a $X_{n+1}(\Omega) = [\![n+1, 2n+2]\!]$, donc

$$1 = \sum_{k=n+1}^{2n+2} \mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{\binom{k-1}{n}}{\binom{2n+2}{n+1}} = \frac{1}{\binom{2n+2}{n+1}} \sum_{k=n+1}^{2n+2} \binom{k-1}{n}.$$

Alors $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n+2} \binom{k-1}{n} = \binom{2n+2}{n+1}$, puis

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \cdots + \binom{2n}{n} = \sum_{k=n+1}^{2n+2} \binom{k-1}{n} - \binom{2n+1}{n} = \binom{2n+2}{n+1} - \binom{2n+1}{n}.$$

On conclut en utilisant la formule du triangle de Pascal : $\binom{2n+1}{n+1} + \binom{2n+1}{n} = \binom{2n+2}{n+1}$. Ainsi

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \cdots + \binom{2n}{n} = \binom{2n+1}{n+1}.$$

3. On a

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=n}^{2n} k\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=n}^{2n} k\frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=n}^{2n} k\binom{k-1}{n-1}.$$

On applique les propriétés des cœfficients binomiaux $k\binom{k-1}{n-1} = n\binom{k}{n}$, puis l'égalité obtenue à la question précédente pour obtenir

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=n}^{2n} n\binom{k}{n} = \frac{n}{\binom{2n}{n}} \times \binom{2n+1}{n+1} = \frac{n(2n+1)}{n+1}.$$

Exercice 14.11

1. S_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, q)$.

2. a.

```
from random import random
def X(n,p):
    X = 0
    for k in range(n):
        if random() < p:
            X += 1
        else:
            X += 2
    return X
```

b. Pour avoir la distance parcourue, on compte : la puce a effectué S_n sauts de 2 cm et $n - S_n$ sauts de 1 cm. Ainsi $X_n = 2 \times S_n + 1 \times (n - S_n) = S_n + n$.
Par linéarité, on obtient $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(S_n) + n = n(q + 1)$.

3. a.

```
def Y(n,p) :
    nb_sauts = 0 # nombre de sauts
    d = 0        # distance parcourue
    while d < n :
        nb_sauts += 1
        if random() < p :
            d += 1
        else :
            d += 2
    return nb_sauts
```

b. Soient n un entier naturel et k un entier naturel non nul. La famille $([X_1 = 1], [X_1 = 2])$ forme un système complet d'événements, on peut donc lui appliquer la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(Y_{n+2} = k) = \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = 1)}_{=p} \mathbb{P}_{[X_1=1]}(Y_{n+2} = k) + \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = 2)}_{=q} \mathbb{P}_{[X_1=2]}(Y_{n+2} = k).$$

Pour le calcul de $\mathbb{P}_{[X_1=1]}(Y_{n+2} = k)$: parcourir $n + 2$ cm en k sauts sachant qu'on en a parcouru 1 au premier saut, cela revient à parcourir $n + 1$ cm sur les $k - 1$ sauts suivants. Ainsi $\mathbb{P}_{[X_1=1]}(Y_{n+2} = k) = \mathbb{P}(Y_{n+1} = k - 1)$.
De même $\mathbb{P}_{[X_1=2]}(Y_{n+2} = k) = \mathbb{P}(Y_n = k - 1)$.
On en conclut que $\boxed{\mathbb{P}(Y_{n+2} = k) = p\mathbb{P}(Y_{n+1} = k - 1) + q\mathbb{P}(Y_n = k - 1)}$

c. Par souci de simplicité, on prendra les sommes à partir de l'indice 0 (même si la moitié des termes de la somme est nulle). On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_{n+2}) &= \sum_{k=0}^{n+2} k\mathbb{P}(Y_{n+2} = k) = p\sum_{k=1}^{n+2} k\mathbb{P}(Y_{n+1} = k - 1) + q\sum_{k=1}^{n+2} k\mathbb{P}(Y_n = k - 1)\\
&= p\sum_{j=0}^{n+1}(j + 1)\mathbb{P}(Y_{n+1} = j) + q\sum_{j=0}^{n+1}(j + 1)\mathbb{P}(Y_n = j)\\
&= \underbrace{p\sum_{j=0}^{n+1} j\mathbb{P}(Y_{n+1} = j)}_{=\mathbb{E}(Y_{n+1})} + \underbrace{p\sum_{j=0}^{n+1} \mathbb{P}(Y_{n+1} = j)}_{=1} + \underbrace{q\sum_{j=0}^{n+1} j\mathbb{P}(Y_n = j)}_{=\mathbb{E}(Y_n)} + \underbrace{q\sum_{j=0}^{n+1} \mathbb{P}(Y_n = j)}_{=1}\\
&= p\mathbb{E}(Y_{n+1}) + q\mathbb{E}(Y_n) + 1.
\end{aligned}$$

d. On a

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= \mathbb{E}(Y_{n+2}) - a(n + 2) = p\mathbb{E}(Y_{n+1}) + q\mathbb{E}(Y_n) + 1 - a(n + 2)\\
&= pu_{n+1} + qu_n + 1 + a(pn + p + qn - n - 2)\\
&= pu_{n+1} + qu_n + 1 - a(1 + q).
\end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2 si $a = \dfrac{1}{1 + q}$.

e. On considère l'équation caractéristique de la suite (u_n) : $r^2 - pr - q = 0$, dont les deux solutions sont $r = 1$ et $r = -q$. Ainsi, il existe λ et μ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \lambda + \mu(-q)^n.$$

Or les variables aléatoires réelles Y_0 et Y_1 sont constantes égales respectivement à 0 et 1. Donc $u_0 = 0$ et $u_1 = 1 - \frac{1}{1+q}$. On en déduit que $\lambda = \frac{q}{(1+q)^2}$ et $\mu = -\frac{q}{(1+q)^2}$. Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(Y_n) = \frac{q}{(1 + q)^2}(1 - (-q)^n) + \frac{n}{1 + q}}$$

CHAPITRE

15

Couples de variables aléatoires finies

L'essentiel du cours

Dans tout le chapitre $(\Omega, \mathbb{P})$ sera un espace probabilisé fini.

■ 1 Couples de variables aléatoires réelles

Dans toute cette partie X et Y seront des variables aléatoires réelles sur Ω.

Définition

- La **loi conjointe** de X et Y est la loi du couple $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$.
- Si $Z = (X, Y)$ est un couple de variables aléatoires réelles, les **lois marginales** de Z sont celles de X et Y.

Proposition

Les lois marginales de (X, Y) sont données par les formules suivantes

$$\forall x_0 \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X = x_0) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x_0, Y = y)$$

$$\forall y_0 \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}(Y = y_0) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y_0).$$

⚠ Il n'est en revanche pas possible de déterminer la loi conjointe à partir des deux lois marginales (on ne sait pas comment elles interagissent entre elles).

Définition

Si $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) > 0$, la **loi conditionnelle** de Y sachant $X = x$ est la loi $\mathbb{P}_{X=x}$ définie par

$$\forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}_{X=x}(Y = y) = \mathbb{P}(Y = y \mid X = x) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(X = x)}.$$

Théorème de transfert

Si $u : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$, alors $u(X, Y)$ est une variable aléatoire réelle sur Ω et

$$\mathbb{E}(u(X,Y)) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} u(x,y)\mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

Définition

La **covariance** de X et Y est le réel $\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \exp(Y)\big)\Big)$.

Formule de Kœnig-Huygens

On a $\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Propriétés de la covariance

Si a, $b \in \mathbb{R}$ et si Z est une variable aléatoire réelle, alors

$$\operatorname{Cov}(aX + bY, Z) = a\operatorname{Cov}(X,Z) + b\operatorname{Cov}(Y,Z), \quad \operatorname{Cov}(X,Y) = \operatorname{Cov}(Y,Z)$$
$$\operatorname{Cov}(X, aY + bZ) = a\operatorname{Cov}(X,Y) + b\operatorname{Cov}(X,Z), \quad \operatorname{Cov}(X,X) = \mathbb{V}(X).$$

Propriétés de la somme de deux variable aléatoire réelle

Si a, b et $k \in \mathbb{R}$, alors

- $\mathbb{P}(X + Y = k) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = k - x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = k - y, Y = y)$.
- $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$.
- $\mathbb{V}(aX + bY) = a^2\mathbb{V}(X) + 2ab\operatorname{Cov}(X,Y) + b^2\mathbb{V}(Y)$.

Définition

On dit que X et Y sont **indépendantes** si

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y).$$

Propriétés de l'indépendance

Si $u : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $v : Y(\Omega) \to \mathbb{R}$, et si X et Y sont indépendantes alors

- $u(X)$ et $v(Y)$ sont indépendantes.
- $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
- $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$.

⚠ Si $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$, cela ne veut pas forcément dire que X et Y sont indépendantes.

2 Vecteurs de variables aléatoires réelles

Définition

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles sur Ω.

- La **loi conjointe** de $X_1, \dots, X_n$ est la loi du n-uplet $(X_1, \dots, X_n)$.
- Les **lois marginales** de $(X_1, \dots, X_n)$ sont les lois de $X_1, \dots, X_n$.
- $X_1, \dots, X_n$ sont **indépendantes** (ou mutuellement indépendantes) si

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega),\ \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdots \mathbb{P}(X_n = x_n)$.

Lemme des coalitions

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes.

- Si $p \in [\![1, n]\!]$, alors $X_1, \dots, X_p$ sont indépendantes.
- Si $p \in [\![1, n-1]\!]$, φ est une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ et si ψ est une fonction de $\mathbb{R}^{n-p}$ dans $\mathbb{R}$, alors $\varphi(X_1, \dots, X_p)$ et $\psi(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.
- Si $u_1, \dots, u_n$ sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $u_1(X_1), \dots, u_n(X_n)$ sont indépendantes.

Espérance et variance d'une somme

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles sur Ω, alors

$$\mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_n)$$

$$\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \dots + \mathbb{V}(X_n) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \operatorname{Cov}(X_i, X_j).$$

Si, de plus, $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors

$$\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \dots + \mathbb{V}(X_n).$$

Somme de variables de Bernoulli

Si $p \in [0, 1]$ et $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, alors $X_1 + \dots + X_n \sim \mathscr{B}(n, p)$.

Ce résultat permet de justifier que, lorsque l'on effectue n expériences de Bernoulli, de paramètre p, identiques et indépendantes, alors le nombre de succès obtenus suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Les méthodes à maîtriser

Méthode 15.1 : Calculer les lois marginales à partir d'une loi conjointe

Si on connait la loi du couple (X, Y) :

- si l'ensemble des valeurs possibles pour X et Y n'est pas trop important, on peut représenter cette loi dans un tableau. Il suffit ensuite de faire la somme sur les lignes/colonnes pour récupérer les lois de X et Y.
- sinon, on utilise les formules du cours.

Exemple d'application

(1) On lance deux dés et on note X le plus petit des nombres apparus et Y le plus grand. Déterminer la loi du couple (X, Y) dans un tableau, puis en déduire ses lois marginales.

(2) Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ dont la loi conjointe est donnée par $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{4ij}{n^2(n+1)^2}$. Déterminer les lois de X et Y.

(1) On a $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. Soit $(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2$, on a

- si $i > j$, $P([X = i] \cap [Y = j]) = P(\varnothing) = 0$,
- si $i = j$, $P([X = i] \cap [Y = j]) = P(\{(i, i)\}) = \dfrac{1}{36}$,
- si $i < j$, $P([X = i] \cap [Y = j]) = P(\{(i, j), (j, i)\}) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$.

On peut représenter la loi conjointe de X et Y dans un tableau à double entrée et on en déduit les lois marginales en effectuant la somme de chaque ligne ou colonne

X \ Y	1	2	3	4	5	6	loi de X
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{11}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{9}{36}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{36}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
loi de Y	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

On lit ainsi la loi de X sur la dernière colonne et la loi de Y sur la dernière ligne. La case en bas à droite permet de vérifier que la somme des probabilités est bien égale à 1 (ce qui permet de limiter les erreurs de calcul).

(2) Si $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{4i}{n^2(n+1)^2} \sum_{j=1}^{n} j = \frac{4i}{n^2(n+1)^2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2i}{n(n+1)}.$$

De même (et par symétrie du rôle de i et j dans la loi conjointe), on obtient que

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \ \mathbb{P}(Y = j) = \frac{2j}{n(n+1)}.$$

Voir exercices **15.1**, **15.5** et **15.11**.

Méthode 15.2 : Décomposer une variable aléatoire en une somme de variables aléatoires réelles

Il peut être parfois intéressant d'exprimer une variable aléatoire dont la loi ou l'espérance peut être un peu compliquée à déterminer directement. En général, quand on a une expérience faisant intervenir une succession d'étapes, on décompose la variable avec des variables de Bernoulli portant sur chaque étape.

Exemple d'application

Soit $X \sim \mathscr{B}(n, p)$. En exprimant X comme une somme de variables de Bernoulli, retrouver $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

La variable X modélise une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et compte le nombre de ces épreuves ayant eu un succès. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i l'indicatrice de l'événement « la $i^{\text{ème}}$ épreuve a été un succès ». On obtient donc que $X = X_1 + \cdots + X_n$, les X_i étant des variables de Bernoulli de paramètre p et indépendantes. Il s'ensuit que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

et, par indépendance, que

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p).$$

Voir exercices **15.4**, **15.8**, **15.9**, **15.12** et **15.13**.

Interro de cours

1. Soient X, Y, X_1, Y_1 des variables aléatoires réelles. Parmi les propositions suivantes lesquelles sont toujours vraies ?

(a) Si (X, Y) a la même loi que (X_1, Y_1), alors X a la même loi que X_1 et Y a la même loi que Y_1.

(b) Si X a la même loi que X_1 et Y a la même loi que Y_1, alors (X, Y) a la même loi que (X_1, Y_1).

(c) Si X et Y sont indépendantes, alors la loi de X sachant $Y = y$ est la même pour tout $y \in Y(\Omega)$.

2. Un urne contient 2 boules blanches, 3 boules rouges et 4 boules bleues. On tire simultanément 3 boules dans l'urne et on note X le nombre de boules blanches et Y le nombre de boules rouges.

(a) Déterminer la loi conjointe de X et Y dans un tableau.

(b) En déduire les lois marginales X et Y dans ce même tableau.

3. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles et a et b deux réels non nuls. Déterminer, parmi les propositions suivantes, lesquelles sont équivalentes entre elles.

(a) X et Y sont indépendantes

(b) $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

(c) $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$

(d) $\mathbb{V}(aX + bY) = a^2\mathbb{V}(X) + b^2\mathbb{V}(Y)$.

4. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles. Parmi les propositions suivantes lesquelles sont toujours vraies ?

(a) Si, pour tous $i \neq j$ dans $[\![1, n]\!]$, X_i et X_j sont indépendantes, alors $X_1, \ldots, X_n$ sont (mutuellement) indépendantes.

(b) Si $X_1, \ldots, X_n$ sont (mutuellement) indépendantes, alors, pour tous $i \neq j$ dans $[\![1, n]\!]$, X_i et X_j sont indépendantes.

(c) Si $X_1, \ldots, X_n$ sont (mutuellement) indépendantes, alors, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, $X_1, \ldots, X_p$ aussi.

Exercices

Pour s'entraîner

Exercice 15.1

Soient p un réel, X et Y deux variables de Bernoulli dont la loi conjointe est donnée par le tableau :

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{2}{3} - p$	$-\frac{1}{6} + p$
1	p	$\frac{1}{2} - p$

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre p ?
2. Déterminer les lois marginales du couple. Calculer l'espérance et la variance de X et de Y.
3. Pour quelle valeur de p les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 15.2

On lance deux dés équilibrés à 6 faces et on note S la somme des valeurs obtenues.
Déterminer la loi de S.

Exercice 15.3

Agro-Veto 2016 (section TB)

On dispose d'une urne contenant 4 jetons numérotés de 1 à 4. On effectue deux tirages successifs sans remise. On appelle Y_1 le numéro du premier jeton tiré et Y_2 celui du second jeton tiré. Il est clair que Y_1 suit une loi uniforme sur $[\![1, 4]\!]$, ce que l'on pourra utiliser dans la suite.
1. Soit $j \in [\![1, 4]\!]$, justifier que :

$$\mathbb{P}(Y_2 = 1 \mid Y_1 = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 1 \\ \frac{1}{3} & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(Y_2 = 1)$. On nommera la formule utilisée.
3. En procédant de même, déterminer la loi de Y_2.
4. Déterminer l'espérance et la variance de Y_2.
5. Déterminer la loi conjointe du couple (Y_1, Y_2). On pourra représenter cette loi sous forme d'un tableau à double entrée.
6. Calculer la covariance du couple (Y_1, Y_2).
7. Les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 15.4

Soient r et n deux entiers naturels non nuls. On considère r boules numérotées de 1 à r que l'on place au hasard dans n tiroirs numérotés de 1 à n. On note

- si $i \in [\![1, n]\!]$, V_i l'indicatrice de *"le i-ème tiroir est vide"*,
- V le nombre de tiroirs vides,
- si $j \in [\![1, r]\!]$, B_j l'indicatrice de *"la j-ème boule est dans le tiroir 1"*,
- T le nombre de boules dans le tiroir 1.

1. Déterminer la loi et l'espérance des V_i et des B_j.
2. Calculer la covariance de V_i et B_j.
3. Exprimer V en fonction des V_i, et T en fonction des B_j.
4. En déduire l'espérance de V et de T puis la covariance de V et l'espérance de T.

Exercice 15.5

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et p et p' deux réels de $]0, 1[$. On considère $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ et Y telle que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la loi de Y sachant $[X = k]$ est $\mathscr{B}(n, p')$.
1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. En déduire la loi de Y.

Exercice 15.6

Soit $n \geq 2$. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne k, il y a k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard et dans celle-ci on tire une boule au hasard. On note X le numéro de l'urne choisie et Y le numéro de la boule tirée.
1. Déterminer la loi de X et la loi de Y.
2. Déterminer l'espérance de X et l'espérance de Y.
3. Déterminer la covariance de X et Y.

Exercice 15.7

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On note $Y = \max(X_1, \ldots, X_n)$.
1. Déterminer la loi de Y.
2. En déduire que $\mathbb{E}(Y) = n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

Pour aller plus loin

Exercice 15.8

On dispose d'une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On tire simultanément k jetons ($k \in [\![1, n]\!]$) et on note X la somme des valeurs des jetons tirés.
Déterminer l'espérance de X en la décomposant comme la somme de variables de Bernoulli.

Exercice 15.9

Un lecteur mp3 contient $n \geq 2$ pistes de lectures numérotées de 1 à n et fonctionne en mode aléatoire (à la fin de chaque piste, une nouvelle piste, éventuellement égale à l'ancienne, est choisie aléatoirement). Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k le nombre de pistes différentes qui ont été lues au moins une fois au cours des k premières lectures.

1. Déterminer, en fonction de n et k, les valeurs prises par X_k.

2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(X_k = 1)$ et $\mathbb{P}(X_k = k)$.

3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\mathbb{P}(X_{k+1} = i)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_k = i)$ et $\mathbb{P}(X_k = i - 1)$.

4. En déduire que $\mathbb{E}(X_{k+1}) = \dfrac{n-1}{n}\mathbb{E}(X_k) + 1$, puis déterminer une expression de $\mathbb{E}(X_k)$.

5. On note N_p l'indicatrice de l'événement « un nouveau morceau est lu à la $p^{\text{ème}}$ lecture ». Montrer que N_p suit une loi de Bernoulli de paramètre $\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{p-1}$.

6. Exprimer X_k en fonction des N_p puis retrouver l'expression de $\mathbb{E}(X_k)$.

Exercice 15.10

Agro-Veto 2014 (section TB)

Une urne contient b boules blanches et r boules rouges ($b, r \in \mathbb{N}^*$). Nous allons procéder à des tirages successifs dans cette urne de la manière suivante :

- si la boule tirée est de couleur blanche, nous replaçons la boule tirée dans l'urne avec en plus c boules blanches,
- si la boule tirée est de couleur rouge, nous replaçons la boule tirée dans l'urne avec en plus c boules rouges.

Pour tout entier naturel non nul n, nous désignerons par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule sortie au $n^{\text{ème}}$ tirage est blanche, 0 si la boule sortie au $n^{\text{ème}}$ tirage est rouge.

1. Reconnaître la loi de X_1, puis déterminer la loi de X_2 et la reconnaître.

2. Démontrer que la variable X_3 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$.
Que peut-on conjecturer ?

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

- **a.** Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Si l'événement $[S_n = k]$ est réalisé à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage, quelle est la composition de l'urne ?
- **b.** Si $k \in [\![0, n]\!]$, calculer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid S_n = k)$.
- **c.** En déduire que $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \dfrac{b + c\mathbb{E}(S_n)}{b + r + nc}$.
- **d.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ suivent une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$.
Déterminer la loi de X_{n+1} puis la reconnaître.
- **e.** Quel raisonnement mathématique nous permet de conclure sur la loi suivie par les variables aléatoires X_n, $n \in \mathbb{N}^*$?

Exercice 15.11

G2E 2016

On note $E = [\![1, n]\!]$. Les n échantillons d'une usine de traitement sont relevés par deux laboratoires L_1 et L_2 qui choisissent chacun de manière indépendante et équiprobable une partie quelconque des n échantillons. La partie des échantillons analysés par L_1 est notée $\mathscr{P}_1$ et la partie des échantillons analysés par L_2 est notée $\mathscr{P}_2$.

1. On note X_1 la variable aléatoire correspondant au nombre d'échantillons analysés par L_1 et B désigne l'événement $\mathscr{P}_1 \subset \mathscr{P}_2$.

a. Démontrer que $\forall k \in [\![0, n]\!]\,,\ \mathbb{P}(B \mid X_1 = k) = \dfrac{1}{2^k}$.

b. En déduire $\mathbb{P}(B)$.

2. On note Y la variable aléatoire correspondant au cardinal de $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$.

a. Les variables aléatoires X_1 et Y sont-elles indépendantes ?

b. Calculer $\mathbb{P}(Y = i \mid X_1 = k)$ pour tout $(i, k) \in [\![0, n]\!]^2$.

c. En déduire la loi de Y.

3. **a.** Démontrer que $\forall k \in E,\ k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$.

b. Déduire enfin des questions précédentes que $\displaystyle\sum_{(\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2) \in \mathscr{P}(E)^2} \mathrm{Card}(\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2) = n4^{n-1}$.

Exercice 15.12

Une urne contient N boules blanches ou noires, la proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est $q = 1 - p$. On tire n boules simultanément et on note X le nombre de boules blanches tirées. On suppose que les boules blanches sont numérotées de 1 à Np. Pour $i \in [\![1, Np]\!]$, on note X_i l'indicatrice de l'événement « la $i^{\text{ème}}$ boule blanche est tirée ».

1. Reconnaître la loi de X et exprimer X en fonction des X_i.

2. Déterminer l'espérance et la variance des X_i.

3. Si $i \neq j$, déterminer la covariance de (X_i, X_j).

4. En déduire l'espérance et la variance de X. Quel résultat vient-on de (re)démontrer ?

Exercice 15.13

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement toutes les boules sans remise. On dit qu'il y a rencontre au i-ème tirage si on tire la boule numéro i au i-ème tirage. On note X le nombre de rencontres.

Déterminer l'espérance et la variance de X.

Corrections

Interro de cours

1. (a) **Vrai.** Avec la loi conjointe on peut récupérer chaque loi marginale. Donc si (X, Y) et (X_1, Y_1) suivent la même loi, alors leur première loi marginale aussi, c'est-à-dire X et X_1 aussi. Il en va de même pour Y et Y_1.

   (b) **Faux.** Les variables peuvent interagir différemment entre elles.
   Si $X \sim \mathscr{B}(\frac{1}{2})$ et si on pose $Y = 1 - X$, $X_1 = X$ et $Y_1 = X$. On a $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 0$, alors que $\mathbb{P}(X_1 = 1, Y_1 = 1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$ Donc (X, Y) et (X_1, Y_1) ne suivent pas la même loi alors que X et X_1 suivent toutes les deux la loi binomiale $\mathscr{B}(\frac{1}{2})$ et que Y et Y_1 suivent toutes les deux la loi binomiale $\mathscr{B}(\frac{1}{2})$.

   (c) **Vrai.** Par indépendance, $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$, donc
$$\mathbb{P}_{Y=y}(X = x) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} = \frac{\mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} = \mathbb{P}(X = x).$$

2. Pour pouvoir raisonner par l'équiprobabilité, on considère les boules toutes différentes, donc $\text{Card}(\Omega) = \binom{9}{3} = 84$. Soient $i \in [\![0, 2]\!]$ et $j \in [\![0, 3]\!]$. Pour dénombrer $[X = i, Y = j]$, on choisit i boules blanches : $\binom{2}{i}$ possibilités ; puis on choisit j boules rouges : $\binom{3}{j}$ possibilités ; pour finir on choisit $3 - i - j$ boules bleues : $\binom{4}{3-i-j}$ possibilités.
   Après calcul, on récapitule tout ceci dans un tableau en ajoutant une ligne et une colonne pour récupérer la loi de X et la loi de Y.

$X \backslash Y$	0	1	2	3	loi de X
0	$\frac{4}{84}$	$\frac{18}{84}$	$\frac{12}{84}$	$\frac{1}{84}$	$\frac{35}{84}$
1	$\frac{12}{84}$	$\frac{24}{84}$	$\frac{6}{84}$	0	$\frac{42}{84}$
2	$\frac{4}{84}$	$\frac{3}{84}$	0	0	$\frac{7}{84}$
loi de Y	$\frac{20}{84}$	$\frac{45}{84}$	$\frac{18}{84}$	$\frac{1}{84}$	1

3. D'après la formule de Kœnig-Huygens, **(b)** et **(c)** sont équivalents. D'après la formule de $\mathbb{V}(aX + bY)$, **(c)** et **(d)** sont équivalents. Cependant $\text{Cov}(X, Y) = 0$ n'entraîne pas forcément que X et Y sont indépendants.
   Ainsi **(b)**, **(c)** et **(d)** sont équivalentes.

4. (a) **Faux.** On lance deux fois un dé à 6 faces. On note X_1 l'indicatrice de l'événement « le premier résultat est pair », X_2 l'indicatrice de l'événement « le deuxième résultat est impair » et X_3 l'indicatrice de l'événement « les deux résultats ont la même parité ». Les variables X_1 et X_2 sont indépendantes, les variables X_1 et X_3 sont indépendantes et les variables

X_2 et X_3 sont indépendantes. Cependant,

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) = 0 \neq \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 1)\mathbb{P}(X_3 = 1),$$

donc les variables X_1, X_2 et X_3 ne sont pas (mutuellement) indépendantes.

(b) Vrai. D'après le lemme de coalitions.

(c) Vrai. D'après le lemme de coalitions.

Exercice 15.1

1. Il faut que chacune des quatre probabilités données dans le tableau soit dans $[0, 1]$. Il faut donc que p appartienne à $\left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \cap [0, 1] \cap \left[\frac{1}{6}, \frac{7}{6}\right] \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right]$.

2. En rajoutant une ligne et une colonne, on obtient

$X \backslash Y$	0	1	loi de X
0	$\frac{2}{3} - p$	$-\frac{1}{6} + p$	$\frac{1}{2}$
1	p	$\frac{1}{2} - p$	$\frac{1}{2}$
loi de Y	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Ainsi X suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(\frac{1}{2})$ et Y suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(\frac{1}{3})$. Il s'ensuit que

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y) = \frac{2}{9}}.$$

3. On procède par analyse-synthèse :

- **Analyse.** Si X et Y sont indépendants, alors $\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 0)$, c'est-à-dire $p = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.
- **Synthèse.** Si $p = \frac{1}{3}$, alors

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0),$$

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 1),$$

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = \frac{1}{3} = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 0),$$

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1).$$

Donc X et Y sont indépendantes.

On conclut que X et Y sont indépendantes si et seulement si $p = \frac{1}{3}$.

Exercice 15.2

On distinguera les deux dés dans notre raisonnement. On note X la valeur obtenue par le premier dé et Y la valeur obtenue par le deuxième. Les variables aléatoires X et Y suivent la loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$ et sont indépendantes. De plus $S = X + Y$.
Ainsi $S(\Omega) = [\![2,12]\!]$ et pour tout $k \in [\![2,12]\!]$, on a

- Si $k \leq 6$, alors $\mathbb{P}(S=k) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X=i, Y=k-i) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{k-1}{36}$.
- Si $k \geq 7$, alors $\mathbb{P}(S=k) = \sum_{i=k-6}^{6} \mathbb{P}(X=i, Y=k-i) = \sum_{i=k-6}^{6} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i) = \frac{13-k}{36}$.

On conclut que $\boxed{\forall k \in [\![2,12]\!],\ \mathbb{P}(S=k) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{36} & \text{si } k \leq 6 \\ \dfrac{13-k}{36} & \text{si } k \geq 7. \end{cases}}$

Exercice 15.3

1. Si on a déjà tiré le jeton i au premier tirage, il ne reste que trois jetons. Si $j = 1$, on ne peut pas tirer le jeton 1 au second tirage, d'où $\mathbb{P}(Y_2 = 1 \mid Y_1 = 1) = 0$. Si $j \neq 1$, on a une chance sur trois de tirer le jeton 1 au second tirage, d'où $\mathbb{P}(Y_2 = 1 \mid Y_1 = j) = \frac{1}{3}$.

2. On utilise la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $([Y_1 = j])_{1 \leq j \leq 4}$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_2 = 1) &= \mathbb{P}(Y_1 = 1)\mathbb{P}_{Y_1=1}(Y_2 = 1) + \mathbb{P}(Y_1 = 2)\mathbb{P}_{Y_1=2}(Y_2 = 1) \\ &\quad + \mathbb{P}(Y_1 = 3)\mathbb{P}_{Y_1=3}(Y_2 = 1) + \mathbb{P}(Y_1 = 4)\mathbb{P}_{Y_1=4}(Y_2 = 1) \\ &= \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

3. Soit $i \in [\![2,4]\!]$. On procède de même pour obtenir

$$\mathbb{P}(Y_2 = i) = \sum_{j=1}^{4} \mathbb{P}(Y_1 = j)\mathbb{P}_{Y_1=j}(Y_2 = 1) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{4} \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}.$$

On conclut que Y_2 suit aussi la loi uniforme sur $[\![1,4]\!]$.

4. En utilisant les formules de l'espérance et de la variance sur la loi uniforme, on obtient

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_2) = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y_2) = \frac{4^2 - 1}{12} = \frac{5}{4}}$$

5. Si $i, j \in [\![1,4]\!]$, on a $\mathbb{P}(Y_1 = j, Y_2 = i) = \mathbb{P}(Y_1 = j)\mathbb{P}_{Y_1=j}(Y_2 = i)$.
En utilisant les probabilités conditionnelles déterminées aux questions **1.** et **2.**, on obtient

$Y_1 \backslash Y_2$	1	2	3	4
1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$
4	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0

6. D'après la formule de transfert, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_1Y_2) &= \sum_{1\leq i,j\leq 4} ij\mathbb{P}(Y_1=j, Y_2=i) \\
&= \sum_{\substack{1\leq i,j\leq 4 \\ i\neq j}} ij\frac{1}{12} \\
&= \frac{1}{12}\left(\sum_{1\leq i,j\leq 4} ij - \sum_{\substack{1\leq i,j\leq 4 \\ i=j}} ij\right) \\
&= \frac{1}{12}\left(\sum_{i=1}^{4} i\sum_{j=1}^{4} j - \sum_{i=1}^{4} i^2\right) \\
&= \frac{10\times 10-30}{12} \\
&= \frac{35}{6}.
\end{aligned}$$

D'après la formule de Kœnig-Huygens, on en déduit que

$$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2) = \mathbb{E}(Y_1Y_2) - \mathbb{E}(Y_1)\mathbb{E}(Y_2) = \frac{35}{6} - \frac{25}{4} = -\frac{5}{12}.$$

7. On a $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)\neq 0$, donc Y_1 et Y_2 ne sont pas indépendantes.

Exercice 15.4

1. • Soit $i\in[\![1,n]\!]$. La probabilité qu'une boule donnée n'atterrisse pas dans le tiroir i est $\dfrac{n-1}{n}$.

Ainsi $\mathbb{P}(V_i=1) = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^r$ et V_i suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}\left(\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^r\right)$.

• Soit $j\in[\![1,r]\!]$. La probabilité que la $j^{\text{ème}}$ boule soit dans le tiroir 1 est $\dfrac{1}{n}$.

Ainsi B_j suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2. Soient $i\in[\![1,n]\!]$ et $j\in[\![1,r]\!]$. On distingue deux cas.

- Si $i = 1$, on ne peut pas avoir la $j^{\text{ème}}$ boule dans le tiroir 1 et avoir le tiroir 1 vide, donc $\mathbb{P}(V_1 = 1, B_j = 1) = 0$.
- Si $i \neq 1$ et si on sait que la $j^{\text{ème}}$ boule est dans le tiroir i (donc pas dans le tiroir 1), pour que le tiroir i soit vide il faut et il suffit que les $r-1$ autres boules ne soient pas non plus dans ce tiroir i. Donc $\mathbb{P}_{B_j=1}(V_i = 1) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{r-1}$, puis
$$\mathbb{P}(V_i = 1, B_j = 1) = \mathbb{P}(B_j = 1)\mathbb{P}_{B_j=1}(V_i = 1) = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{r-1}.$$

Ainsi
$$\mathbb{E}(V_iB_j) = \sum_{0\leq k,\ell\leq 1} k\ell\,\mathbb{P}(V_i = k, B_j = \ell) = \mathbb{P}(V_i = 1, B_j = 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1 \\ \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{r-1} & \text{si } i \neq 1. \end{cases}$$

Or $\mathbb{E}(V_i) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^r$ et $\mathbb{E}(B_j) = \frac{1}{n}$. Donc, avec la formule de Kœnig-Huygens, on obtient
$$\mathrm{Cov}(V_i, B_j) = \mathbb{E}(V_iB_j) - \mathbb{E}(V_i)\mathbb{E}(B_j) = \begin{cases} -\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{r} & \text{si } i = 1 \\ \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{r-1} & \text{si } i \neq 1. \end{cases}$$

3. La variable V_i vaut 1 si le tiroir i est vide et 0 sinon, donc il suffit d'additionner les V_i pour obtenir le nombre de tiroirs vides. Ainsi $\boxed{V = \sum_{i=1}^{n} V_i}$

De même $\boxed{T = \sum_{j=1}^{r} B_j}$

4. Par linéarité de l'espérance, on obtient
$$\mathbb{E}(V) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(V_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^r = n\left(\frac{n-1}{n}\right)^r$$
et
$$\mathbb{E}(T) = \sum_{j=1}^{r} \mathbb{E}(B_j) = \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{n} = \frac{r}{n}.$$

Par linéarité à gauche et à droite de la covariance
$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(V, T) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} V_i, \sum_{j=1}^{r} B_j\right) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} \mathrm{Cov}(V_i, B_j) \\ &= \sum_{j=1}^{r} \mathrm{Cov}(V_1, B_j) + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{r} \mathrm{Cov}(V_i, B_j) \\ &= \sum_{j=1}^{r} -\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^r + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{r} \frac{1}{n^2}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{r-1} \\ &= -\frac{r}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^r + \frac{r(n-1)}{n^2}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{r-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 15.5

1. Soient $k, \ell \in [\![0, n]\!]$. On a

$$\mathbb{P}(X = k, Y = \ell) = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}_{X=k}(Y = \ell) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{n}{\ell} p'^{\ell} (1-p')^{n-\ell}.$$

2. Soit $\ell \in [\![0, n]\!]$. On utilise la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $([X = k])_{0 \leq k \leq n}$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = \ell) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k, Y = \ell) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{n}{\ell} p'^{\ell} (1-p')^{n-\ell} \\
&= \binom{n}{\ell} p'^{\ell} (1-p')^{n-\ell} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \binom{n}{\ell} p'^{\ell} (1-p')^{n-\ell} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)}_{=1} \\
&= \binom{n}{\ell} p'^{\ell} (1-p')^{n-\ell}.
\end{aligned}$$

On conclut que Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p')$.

Exercice 15.6

1. La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
Les boules sont numérotées de 1 à n, donc $Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
Soient $i, k \in [\![1, n]\!]$. Si $i < k$, il n'y a aucune boule numérotée k dans l'urne n° i, donc $\mathbb{P}_{X=i}(Y = k) = 0$. En revanche, si $i \geq k$, il y a une boulé numérotée k et i boules au total dans l'urne n° i, donc $\mathbb{P}_{X=i}(Y = k) = \dfrac{1}{i}$. Ainsi

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}_{X=i}(Y = k) = \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{i} = \frac{1}{n} \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i}.$$

2. Par propriété $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} k &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \times \frac{i(i+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} (i+1) \\
&= \frac{1}{2n} \times \frac{n((1+1) + (n+1))}{2} \\
&= \frac{n+3}{4}.
\end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) = \sum_{1\le i,k\le n} ik\,\mathbb{P}(X=i,Y=k) &= \sum_{1\le i,k\le n} ik\,\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}_{X=i}(Y=k)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i} ik\times\frac{1}{n}\times\frac{1}{i}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i} k\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2}\\ &= \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2+\sum_{i=1}^{n} i\right)\\ &= \frac{1}{2n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{6}.\end{aligned}$$

On conclut, avec la formule de Kœnig-Huygens, que

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{(n+1)(n+2)}{6}-\frac{n+1}{2}\times\frac{n+3}{4} = \frac{n^2-1}{24}.$$

Exercice 15.7

1. La variable aléatoire réelle Y est à valeurs dans $[\![1,n]\!]$.
Soit $k\in[\![1,n]\!]$. On a $F_Y(k)=\mathbb{P}(X_1\le k, X_2\le k,\dots,X_n\le k)$.
Par indépendance des $X_1,\dots,X_n$, on en déduit

$$F_Y(k)=\mathbb{P}(X_1\le k)\mathbb{P}(X_2\le k)\cdots\mathbb{P}(X_n\le k)=\left(\frac{k}{n}\right)^n.$$

De plus, $F_Y(0)=0$ car $0\le 1=\min(Y(\Omega))$. On récupère donc la loi de Y

$$\mathbb{P}(Y=k)=F_Y(k)-F_Y(k-1)=\left(\frac{k}{n}\right)^n-\left(\frac{k-1}{n}\right)^n.$$

2. On a

$$\mathbb{E}(Y)=\sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(Y=k)=\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{k}{n}\right)^n-\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{k-1}{n}\right)^n.$$

On effectue le changement d'indice $\ell=k-1$ dans la deuxième somme

$$\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{k-1}{n}\right)^n=\sum_{\ell=0}^{n-1}(\ell+1)\left(\frac{\ell}{n}\right)^n.$$

On renomme ℓ en k et on obtient

$$\mathbb{E}(Y)=\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{k}{n}\right)^n-\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\left(\frac{k}{n}\right)^n=\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{k}{n}\right)^n-\sum_{k=0}^{n-1} k\left(\frac{k}{n}\right)^n-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n.$$

Les deux premières sommes se télescopent, d'où

$$\mathbb{E}(Y) = n\left(\frac{n}{n}\right)^n - 0\left(\frac{0}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n = n - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n.$$

Exercice 15.8

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i l'indicatrice de l'événement « on tire le jeton i ». On a donc $X_i = 1$ si le jeton i est tiré et 0 sinon, d'où $iX_i = i$ si le jeton i est tiré et 0 sinon. Alors $X = \sum_{i=1}^{n} iX_i$.

Pour dénombre Ω, on choisit les k jetons tirés : $\binom{n}{k}$ possibilités. Si $i \in [\![1, n]\!]$, pour dénombrer $[X_i = 1]$, on choisit le jeton i : 1 possibilité ; puis on choisit les $k-1$ autres jetons tirés parmi les $n-1$ restants : $\binom{n-1}{k-1}$ possibilités. Par équiprobabilité

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{n}.$$

Ainsi X_i suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}\left(\frac{k}{n}\right)$ et $\mathbb{E}(X_i) = \frac{k}{n}$.

Par linéarité de l'espérance, on conclut que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} i\mathbb{E}(X_i) = \frac{k}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{k(n+1)}{2}.$$

Exercice 15.9

1. Si $k < n$, alors on a pu lire entre 1 et k pistes différentes. Si $k \geq n$, alors on a pu lire entre 1 et n pistes différentes. Donc X_k prend ses valeurs dans $[\![1, \min(k, n)]\!]$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On procède par dénombrement. On note Ω l'ensemble des listes des pistes lues au cours des k premières lectures. L'ensemble Ω correspond à un ensemble de k-listes avec répétition, donc $\mathrm{Card}(\Omega) = n^k$.

- On dénombre $[X_k = 1]$. Cela revient à choisir la seule piste qui a été lue : n choix. Donc $\mathrm{Card}([X_k = 1]) = n$ et $\boxed{\mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{n^{k-1}}}$
- On dénombre $[X_k = k]$. Cela veut dire qu'on n'a lu que des pistes différentes, il s'agit donc du nombre de k-listes sans répétition et $\mathrm{Card}([X_k = k]) = \frac{n!}{(n-k)!}$. Donc $\boxed{\mathbb{P}(X_k = k) = \frac{n!}{(n-k)!n^k}}$

3. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1, \min(k, n)]\!]$, on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_k = i], [X_k = i-1], [X_k \notin \{i-1, i\}])$ et on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{k+1} = i) &= \mathbb{P}(X_k = i)\mathbb{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1} = i) + \mathbb{P}(X_k = i-1)\mathbb{P}_{[X_k=i-1]}(X_{k+1} = i) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_k \notin \{i-1, i\})\underbrace{\mathbb{P}_{[X_k\notin\{i-1,i\}]}(X_{k+1} = i)}_{=0}.\end{aligned}$$

Pour $\mathbb{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1} = i)$, cela veut dire que la $k+1^{\text{ème}}$ piste lue a déjà été lue avant. Sachant qu'on en a lu i, on obtient $\mathbb{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1} = i) = \frac{i}{n}$.

Pour $\mathbb{P}_{[X_k=i-1]}(X_{k+1}=i)$, cela veut dire que la $k+1^{\text{ème}}$ piste lue n'a pas encore été lue. Sachant qu'on en a lu $i-1$, on obtient $\mathbb{P}_{[X_k=i-1]}(X_{k+1}=i)=\frac{n-i+1}{n}$. Ainsi

$$\boxed{\mathbb{P}(X_{k+1}=i)=\frac{i}{n}\mathbb{P}(X_k=i)+\frac{n-i+1}{n}\mathbb{P}(X_k=i-1)}$$

4. • Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Pour simplifier les calculs, on peut écrire que $\mathbb{E}(X_k)=\sum_{i=1}^{k} i\mathbb{P}(X_k=i)$, quitte à écrire des termes nuls. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} i\mathbb{P}(X_{k+1}=i)\\
&= \sum_{i=1}^{k+1}\frac{i^2}{n}\mathbb{P}(X_k=i)+\frac{i(n-i+1)}{n}\mathbb{P}(X_k=i-1)\\
&= \sum_{i=1}^{k+1}\frac{i^2}{n}\mathbb{P}(X_k=i)+\sum_{\ell=0}^{k}\frac{(\ell+1)(n-\ell)}{n}\mathbb{P}(X_k=\ell)\\
&= \frac{1}{n}\left(0+\sum_{i=1}^{k}(i^2-in+n-i^2-i)\mathbb{P}(X_k=i)+0\right)\\
&= \frac{1}{n}\left((n-1)\sum_{i=1}^{k} i\mathbb{P}(X_k=i)+n\sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}(X_k=i)\right)\\
&= \frac{1}{n}\left((n-1)\mathbb{E}(X_k)+n\right)\\
&= \frac{n-1}{n}\mathbb{E}(X_k)+1.
\end{aligned}$$

• On reconnaît une suite arithmético-géométrique. On cherche un réel α tel que $\alpha=\dfrac{n-1}{n}\alpha+1$. On trouve $\alpha=n$. La suite $(\mathbb{E}(X_k)-n)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est donc géométrique de raison $\frac{n-1}{n}$. On a $\mathbb{E}(X_1)=1$ car X_1 est la variable constante égale à 1. On en conclut donc que

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(X_k)=(1-n)\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}+n}$$

5. Soit $p\in\mathbb{N}^*$. On considère la liste des p premières lectures : Ω. Il s'agit de l'ensemble des p-listes de $[\![1,n]\!]$, donc $\mathrm{Card}(\Omega)=n^p$. Pour dénombrer l'événement $[N_p=1]$, on choisit le morceau lu à la $p^{\text{ème}}$ lecture : n possibilités ; puis on choisit les morceaux lus lors des $p-1$ premières lectures (morceaux différents de celui choisi juste avant) : $(n-1)^{p-1}$ possibilités. Par équiprobabilité, on obtient

$$\mathbb{P}(N_p=1)=\frac{n(n-1)^{p-1}}{n^p}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{p-1}.$$

La variable aléatoire N_p étant une indicatrice, on en conclut que $N_p\sim\mathscr{B}\left(\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{p-1}\right)$.

6. On a l'égalité $X_k = \sum_{p=1}^{k} N_p$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que

$$\mathbb{E}(X_k) = \sum_{p=1}^{k} \mathbb{E}(N_p) = \sum_{p=1}^{k} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{p-1} = \frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^k - 1}{\frac{n-1}{n} - 1} = (1-n)\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} + n.$$

Exercice 15.10

1.
- Au début, l'urne contient b boules blanches et $b+r$ boules au total. Ainsi $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{b}{b+r}$. On conclut que $X_1 \sim \mathscr{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$.
- Si l'événement $[X_1 = 1]$ est réalisé, l'urne contient $b+c$ boules blanches et $b+r+c$ boules. Ainsi $\mathbb{P}_{X_1=1}(X_2 = 1) = \frac{b+c}{b+r+c}$. De même, on obtient $\mathbb{P}_{X_1=0}(X_2 = 1) = \frac{b}{b+r+c}$. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_1 = 0], [X_1 = 1])$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2 = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}_{X_1=0}(X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}_{X_1=1}(X_2 = 1) \\
&= \frac{r}{b+r} \times \frac{b}{b+r+c} + \frac{b}{b+r} \times \frac{b+c}{b+r+c} \\
&= \frac{b}{b+r} \times \frac{r+(b+c)}{b+r+c} \\
&= \frac{b}{b+r}.
\end{aligned}$$

On conclut que $X_2 \sim \mathscr{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$.

2. On procède de même en appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_1 = i, X_2 = j])_{0 \le i,j \le 1}$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_3 = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0)\mathbb{P}_{[X_1=0,X_2=0]}(X_3 = 1) \\
&\quad + \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1)\mathbb{P}_{[X_1=0,X_2=1]}(X_3 = 1) \\
&\quad + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0)\mathbb{P}_{[X_1=1,X_2=0]}(X_3 = 1) \\
&\quad + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1)\mathbb{P}_{[X_1=1,X_2=1]}(X_3 = 1) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}_{X_1=0}(X_2 = 0)\mathbb{P}_{[X_1=0,X_2=0]}(X_3 = 1) \\
&\quad + \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}_{X_1=0}(X_2 = 1)\mathbb{P}_{[X_1=0,X_2=1]}(X_3 = 1) \\
&\quad + \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}_{X_1=1}(X_2 = 0)\mathbb{P}_{[X_1=1,X_2=0]}(X_3 = 1) \\
&\quad + \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}_{X_1=1}(X_2 = 1)\mathbb{P}_{[X_1=1,X_2=1]}(X_3 = 1).
\end{aligned}$$

En regardant la composition des urnes dans chacun des cas puis en factorisant astucieusement, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_3=1) &= \frac{r}{b+r}\times\frac{r+c}{b+r+c}\times\frac{b}{b+r+2c}+\frac{r}{b+r}\times\frac{b}{b+r+c}\times\frac{b+c}{b+r+2c}\\ &\quad+\frac{b}{b+r}\times\frac{r}{b+r+c}\times\frac{b+c}{b+r+2c}+\frac{b}{b+r}\times\frac{b+c}{b+r+c}\times\frac{b+2c}{b+r+2c}\\ &= \frac{b}{b+r}\left(\frac{r((r+c)+(b+c))}{(b+r+c)(b+r+2c)}+\frac{(b+c)(r+(b+2c))}{(b+r+c)(b+r+2c)}\right)\\ &= \frac{b}{b+r}\left(\frac{r}{b+r+c}+\frac{b+c}{r+b+c}\right)\\ &= \frac{b}{b+r}.\end{aligned}$$

On conclut que $X_3 \sim \mathscr{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$.

On peut donc conjecturer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $X_n\sim\mathscr{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$.

3. a. La valeur de S_n correspond au nombre de fois que l'on a tiré une boule blanche au cours des n premiers tirages. Donc si $S_n=k$, après le $n^{\text{ème}}$ tirage,

- on a rajouté c boules après chaque tirage, il y a donc $b+r+nc$ boules dans l'urne ;
- on a tiré k fois une boule blanche et donc ajouté k fois c boules blanches, il y a donc $b+kc$ boules blanches dans l'urne ;
- on a tiré $n-k$ fois une boule rouge et donc ajouté $n-k$ fois c boules rouges, il y a donc $r+(n-k)c$ boules rouges dans l'urne.

b. On déduit de la question précédente que $\mathbb{P}(X_{n+1}=1\mid S_n=k)=\dfrac{b+kc}{b+r+nc}$.

c. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([S_n=k])_{k\in[\![0,n]\!]}$ pour obtenir que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_n=k)\mathbb{P}(X_{n+1}=1\mid S_n=k)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_n=k)\times\frac{b+kc}{b+r+nc}\\ &= \frac{1}{b+r+nc}\left(b\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_n=k)}_{=1}+c\underbrace{\sum_{k=0}^{n}k\mathbb{P}(S_n=k)}_{=\mathbb{E}(S_n)}\right)\\ &= \frac{b+c\mathbb{E}(S_n)}{b+r+nc}.\end{aligned}$$

d. Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $X_k\sim\mathscr{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$, donc $\mathbb{E}(X_k)=\dfrac{b}{b+r}$.

Ainsi, par linéarité de l'espérance, on en déduit que

$$\mathbb{E}(S_n)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{b}{b+r}=\frac{nb}{b+r}.$$

En utilisant la formule démontrée à la question précédente, on obtient que

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=1)=\frac{b+c\frac{nb}{b+r}}{b+r+nc}=\frac{\frac{b(b+r)+nbc}{b+r}}{b+r+nc}=\frac{b(b+r+nc)}{(b+r)(b+r+nc)}=\frac{b}{b+r}.$$

On conclut que $X_{n+1}\sim\mathscr{B}\left(\dfrac{b}{b+r}\right)$.

e. On a utilisé une récurrence forte sur l'hypothèse, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$: « $X_n\sim\mathscr{B}\left(\dfrac{b}{b+r}\right)$. »

Exercice 15.11

1. a. Soit $k\in[\![0,n]\!]$.
Si l'événement $[X_1=k]$ est réalisé, l'événement B est réalisé si et seulement si les k échantillons choisis par le laboratoire L_1 soient aussi choisis par le laboratoire L_2.
Or un élément est choisi par L_2 (c'est-à-dire dans $\mathscr{P}_2$) avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$.
Donc par indépendance, k éléments fixés sont dans $\mathscr{P}_2$ avec la probabilité $\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.
On en déduit donc que $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}(B\mid X_1=k)=\dfrac{1}{2^k}$.

b. La variable X_1 suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n,\dfrac{1}{2}\right)$. Donc, si $k\in[\![0,n]\!]$,

$$\mathbb{P}(X_1=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}.$$

Ensuite, on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_1=k])_{k\in[\![0,n]\!]}$ pour obtenir que

$$\mathbb{P}(B)=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X_1=k)\mathbb{P}(B\mid X_1=k)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{2^k}.$$

On utilise la formule du binôme de Newton pour conclure

$$\mathbb{P}(B)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k1^{n-k}=\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2}+1\right)^n=\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

2. a. On a $\mathrm{Card}(\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2)\leq\mathrm{Card}(\mathscr{P}_1)$, donc l'événement $[X_1=0,Y=1]$ est impossible.
Ainsi $\mathbb{P}(X_1=0,Y=1)=0\neq\mathbb{P}(X_1=0)\mathbb{P}(Y=1)$.
On conclut que X_1 et Y ne sont pas indépendantes.

b. Soit $k\in[\![0,n]\!]$. Si l'événement $[X_1=k]$ est réalisé, Y correspond au nombre d'éléments de $\mathscr{P}_1$ qui sont aussi dans $\mathscr{P}_2$. Cela revient donc à compter le nombre d'éléments sélectionnés dans un ensemble à k éléments. Ainsi Y sachant $X_1=k$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(k,\dfrac{1}{2}\right)$.
Si $i\in[\![0,n]\!]$, on conclut que $\mathbb{P}(Y=i\mid X_1=k)=\dbinom{k}{i}\left(\dfrac{1}{2}\right)^i\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-i}=\dbinom{k}{i}\dfrac{1}{2^k}$ si $k\geq i$ et $\mathbb{P}(Y=i\mid X_1=k)=0$ si $k<i$.

c. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_1 = k])_{k \in [\![0,n]\!]}$ pour obtenir que

$$\mathbb{P}(Y = i) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(Y = i \mid X_1 = k) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{i}\frac{1}{2^k}.$$

3. a. Soit $k \in E$, on a

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

b. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Le nombre de couples de parties $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ de E tels que $\mathrm{Card}(\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2) = i$ est égal au cardinal de l'événement $[Y = i]$. Donc

$$\sum_{(\mathscr{P}_1,\mathscr{P}_2)\in\mathscr{P}(E)^2} \mathrm{Card}(\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2) = \sum_{\substack{(\mathscr{P}_1,\mathscr{P}_2)\in\mathscr{P}(E)^2 \\ \mathrm{Card}(\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2)=i}} i = \sum_{i=0}^{n} i\,\mathrm{Card}(Y = i) = \sum_{i=0}^{n} i\mathbb{P}(Y = i)\,\mathrm{Card}(\Omega) = \mathrm{Card}(\Omega)\mathbb{E}(Y).$$

Or $\mathrm{Card}(\Omega) = \mathrm{Card}(\mathscr{P}(E)^2) = (2^n)^2 = 4^n$ et

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=0}^{n} i\mathbb{P}(Y = i) = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n} i\binom{n}{k}\binom{k}{i}\frac{1}{2^k}.$$

On permute les symboles somme pour obtenir

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{2^k}\sum_{i=0}^{k} i\binom{k}{i}.$$

Pour la somme sur i, le terme pour $i = 0$ est nul, on peut donc la faire commencer à $i = 1$; on utilise la formule de la question précédente ; on change d'indice et on applique la formule du binôme de Newton pour arriver à

$$\sum_{i=0}^{k} i\binom{k}{i} = \sum_{i=1}^{k} k\binom{k-1}{i-1} = k\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}1^j1^{k-1-j} = k(1+1)^{k-1} = k\,2^{k-1}.$$

On réintègre ce résultat dans le calcul de $\mathbb{E}(Y)$ et on effectue exactement les mêmes opérations sur la somme que l'on obtient pour en conclure que

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{2^k} \times k2^{k-1} = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \frac{1}{2^{n+1}} \times n\,2^{n-1} = \frac{n}{4}.$$

On obtient ainsi que $\displaystyle\sum_{(\mathscr{P}_1,\mathscr{P}_2)\in\mathscr{P}(E)^2} \mathrm{Card}(\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2) = 4^n \times \frac{n}{4} = n4^{n-1}$.

Exercice 15.12

1. On reconnaît une loi hypergéométrique : $X \sim \mathscr{H}(N, n, p)$.
La variable X_i vaut 1 si la $i^{\text{ème}}$ boule blanche est tirée et 0 sinon, donc il suffit d'additionner les X_i pour obtenir le nombre de boules blanches tirées. Ainsi $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{Np} X_i$.

2. Soit $i \in [\![1, Np]\!]$. Pour dénombrer l'événement $[X_i = 1]$, on choisit la $i^{\text{ème}}$ boule blanche : 1 possibilité ; puis on choisit les $n-1$ autres boules à tirer parmi les $N-1$ boules restantes : $\binom{N-1}{n-1}$ possibilités. Ainsi

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{n}{N}.$$

On conclut que $X_i \sim \mathscr{B}\left(\frac{n}{N}\right)$, puis que $\mathbb{E}(X_i) = \frac{n}{N}$ et $\mathbb{V}(X_i) = \frac{n(N-n)}{N^2}$.

3. Soient $i, j \in [\![1, Np]\!]$ tels que $i \neq j$. D'après la formule de transfert

$$\mathbb{E}(X_iX_j) = \sum_{0 \leq k,\ell \leq 1} k\ell\, \mathbb{P}(X_i = k, X_j = \ell) = 0 + \mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1).$$

Pour dénombrer $[X_i = 1, X_j = 1]$, on choisit la $i^{\text{ème}}$ et la $j^{\text{ème}}$ boule blanche : 1 possibilité ; puis on choisit les $n-2$ autres boules à tirer parmi les $N-2$ boules restantes : $\binom{N-2}{n-2}$ possibilités. Ainsi

$$\mathbb{E}(X_iX_j) = \frac{\binom{N-2}{n-2}}{\binom{N}{n}} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}.$$

D'après la formule de Kœnig-Huygens, on conclut que

$$\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_iX_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} - \frac{n}{N} \times \frac{n}{N} = -\frac{n(N-n)}{N^2(N-1)}.$$

4. Par linéarité de l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{Np} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{Np} \frac{n}{N} = Np \times \frac{n}{N} = np.$$

On utilise la formule de la variance d'une somme pour arriver à

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{Np} \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq Np} \operatorname{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{Np} \frac{n(N-n)}{N^2} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq Np} \left(-\frac{n(N-n)}{N^2(N-1)}\right).$$

La deuxième somme est composée de $\binom{Np}{2} = \frac{Np(Np-1)}{2}$ termes (on choisit deux éléments distincts dans $[\![1, Np]\!]$ et on appelle i le plus petit des deux et j l'autre). Ainsi

$$\mathbb{V}(X) = Np \times \frac{n(N-n)}{N^2} + 2 \times \frac{Np(Np-1)}{2} \times \left(-\frac{n(N-n)}{N^2(N-1)}\right) = npq\frac{N-n}{N-1}.$$

On vient de redémontrer le formule de l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi hypergéométrique et démontrer la formule de sa variance.

Exercice 15.13

On modélise le problème en notant le numéro de chaque boule tirée dans une liste. Ainsi Ω est l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ et $\operatorname{Card}(\Omega) = n!$.
Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i l'indicatrice de l'événement « il y a rencontre au $i^{\text{ème}}$ tirage ».
La variable X_i vaut 1 s'il y a rencontre au $i^{\text{ème}}$ tirage et 0 sinon, donc il suffit d'additionner les X_i pour obtenir le nombre de rencontres obtenues. Ainsi $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Pour dénombrer l'événement $[X_i = 1]$, on place la boule numéro i à la $i^{\text{ème}}$ place : 1 possibilité ; puis on place les $n-1$ boules restantes dans les $n-1$ places restantes : $(n-1)!$ possibilités. Donc $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. Ainsi $X_i \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{n}\right)$, puis

$$\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_i) = \frac{n-1}{n^2}.$$

- Par linéarité de l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = n \times \frac{1}{n} = 1.$$

- Pour la variance de X, il nous faut d'abord calculer la covariance des X_i et X_j.
  Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$. D'après la formule de transfert, on a

$$\mathbb{E}(X_i X_j) = \sum_{0 \leq k, \ell \leq 1} k\ell\, \mathbb{P}(X_i = k, X_j = \ell) = 0 + \mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1).$$

  Pour dénombrer $[X_i = 1, X_j = 1]$, on place la boule numéro i à la $i^{\text{ème}}$ place : 1 possibilité ; puis on place la boule numéro j à la $j^{\text{ème}}$ place : 1 possibilités ; pour finir on place les $n-2$ boules restantes dans les $n-2$ places restantes : $(n-2)!$ possibilités. Donc $\mathbb{E}(X_i X_j) = \dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)}$.
  Ensuite, d'après la formule de Kœnig-Huygens, on obtient

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2(n-1)}.$$

  On conclut avec la formule de la variance d'une somme

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-1}{n^2} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{n^2(n-1)}.$$

  La deuxième somme est composée de $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ termes (on choisit deux éléments dans $[\![1, n]\!]$ et on appelle i le plus petit des deux et j l'autre). Ainsi

$$\mathbb{V}(X) = n \times \frac{n-1}{n^2} + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{1}{n^2(n-1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1.$$

On a donc démontré (sans trouver la loi de X) que $\boxed{\mathbb{E}(X) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = 1}$

Partie 4

Algèbre linéaire

CHAPITRE 16

Espaces vectoriels

L'essentiel du cours

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$. On définit la somme et la multiplication par un scalaire sur $\mathbb{K}^n$ de la façon suivante :

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

On dit que $\mathbb{K}^n$ muni de ces deux lois, $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$, est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel).
Les éléments de $\mathbb{K}^n$ sont appelés des **vecteurs** et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des **scalaires**.

- Ce nom d'espace vectoriel vient du fait que l'on s'autorise les mêmes calculs qu'avec des vecteurs du plan et de l'espace.
- On note en général les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ avec des lettres romaines minuscules (avec parfois des flèches dessus, comme en géométrie) et les scalaires avec des lettres grecques.
- On pourra faire le parallèle entre $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) et l'ensemble des vecteurs du plan (resp. de l'espace).
- Vous verrez en deuxième année d'autres espaces vectoriels que $\mathbb{K}^n$.
- Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in \mathbb{K}^n$, on écrira en général plus simplement λu plutôt que $\lambda \cdot u$.

Règles de calcul dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les règles de calcul suivantes dans $\mathbb{K}^n$:
- Associativité de la loi $+$: $\forall u, v, w \in \mathbb{K}^n, (u+v)+w = u+(v+w)$
- Existence d'un neutre $0_{\mathbb{K}^n} = (0, \ldots, 0)$ vérifiant $\forall u \in \mathbb{K}^n, u + 0_{\mathbb{K}^n} = 0_{\mathbb{K}^n} + u = u$
- Existence d'un symétrique pour la loi $+$: $\forall u \in \mathbb{K}^n, \exists v \in \mathbb{K}^n, u + v = v + u = 0_{\mathbb{K}^n}$
- Commutativité de la loi $+$: $\forall u, v \in \mathbb{K}^n, u + v = v + u$
- Distributivité à gauche : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in \mathbb{K}^n,\ (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$
- Distributivité à droite : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in \mathbb{K}^n,\ \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
- Compatibilité de la multiplication : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in \mathbb{K}^n,\ \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$
- Neutre à gauche pour la loi $\cdot$: $\forall u \in \mathbb{K}^n,\ 1 \cdot u = u$.

- S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera 0 le vecteur nul de $\mathbb{K}^n$, au lieu de $0_{\mathbb{K}^n}$.
- Le symétrique de u pour la loi $+$ est unique et noté $-u$.

Proposition

- $\forall u, v, w \in \mathbb{K}^n,\ u + w = v + w \Rightarrow u = v$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot 0_{\mathbb{K}^n} = 0_{\mathbb{K}^n}$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in \mathbb{K}^n,\ \lambda \cdot u = 0_{\mathbb{K}^n} \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } u = 0_{\mathbb{K}^n})$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in \mathbb{K}^n,\ (-\lambda) \cdot u = \lambda \cdot (-u) = -\lambda \cdot u.$

2 Sous-espaces vectoriels

Définition

Une **combinaison linéaire** des vecteurs $u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{K}^n$ est un vecteur de la forme

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p \quad \text{avec} \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}.$$

Définition

On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de $\mathbb{K}^n$ si

(1) $F \subset \mathbb{K}^n$

(2) $0_{\mathbb{K}^n} \in F$

(3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in F,\ \lambda u + v \in F.$

- Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ est donc un sous-ensemble de $\mathbb{K}^n$ contenant le vecteur nul et étant stable par combinaison linéaire.
- Les ensembles $\{0\}$ et $\mathbb{K}^n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$.

Intersection de sous-espaces vectoriels

L'intersection d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

La réunion de sous-espaces vectoriels n'est, en général, pas un sous-espace vectoriel.

Définition

On appelle sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{K}^n$, le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ contenant $u_1, \ldots, u_p$. On le note $\operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$.

On dit aussi qu'il s'agit du sous-espace vectoriel engendré par la famille $(u_1, \ldots, u_p)$.

Caractérisation des sous-espace vectoriel engendrés

Soient $u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{K}^n$. Le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1, \ldots, u_p$:

$$\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p) = \{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p \ / \ \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}\}.$$

3 Familles libres, familles génératrices, bases

Définition

Soient F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ et $u_1, \ldots, u_p \in F$. On dit que $(u_1, \ldots, u_p)$ est une **famille génératrice** de F si $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$.

Une famille est génératrice de F si et seulement si tout vecteur de F s'écrit d'au moins une façon comme la combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_p$.

Définition

Soient $u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{K}^n$. On dit que $(u_1, \ldots, u_p)$ est une **famille libre** si

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \ \Big(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0\Big).$$

Une famille qui n'est pas libre est une **famille liée**.

- Dire qu'un famille est libre revient à dire qu'il n'y a pas de vraie relation pouvant les relier. La seule pouvant les relier est la relation triviale revenant à $0 = 0$.
- Une famille est libre si et seulement si tout vecteur de $\mathbb{K}^n$ s'écrit d'au plus une façon comme la combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_p$.
- Une famille est donc liée si on peut exprimer un vecteur en fonction des autres (on peut lier les vecteurs).

Caractérisation des familles libres de 1 ou 2 vecteur(s)

- Soit $u \in \mathbb{K}^n$. La famille (u) est libre si et seulement si $u \neq 0$.
- Soient $u, v \in \mathbb{K}^n$. La famille (u, v) est libre si et seulement si u et v ne sont pas colinéaires.

Une famille, d'au moins 3 vecteurs, dont les vecteurs sont deux à deux non colinéaires n'est pas forcément libre.

Définition

Soient F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ et $u_1, \ldots, u_p \in F$. On dit que $\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_p)$ est une **base** de F si tout vecteur de F s'écrit d'une et une seule façon comme combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_p$:

$$\forall v \in F, \exists\,!\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \ v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p.$$

Dans ce cas, on appelle **coordonnées** de v dans $\mathscr{B}$ les coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

Caractérisation des bases

Une famille d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}^n$ est une base de F si et seulement si elle est libre et génératrice de F.

Définition

Soient F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{B}$ une base de F. Soit $v \in F$ de coordonnées $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ dans la base $\mathscr{B}$. On définit la matrice de v dans la base $\mathscr{B}$ par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}).$$

Soient $v_1, \ldots, v_m$ sont des vecteurs de F tels que, si $i \in [\![1, m]\!]$, v_i a pour coordonnées $(\lambda_{1,i}, \lambda_{2,i}, \ldots, \lambda_{p,i})$ dans la base $\mathscr{B}$. On définit la matrice de la famille $(v_1, \ldots, v_m)$ dans la base $\mathscr{B}$ par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_m) = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,m} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \cdots & \lambda_{2,m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda_{p,1} & \lambda_{p,2} & \cdots & \lambda_{p,m} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,m}(\mathbb{K}).$$

Définition

La **base canonique** de $\mathbb{K}^n$ est la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ où $e_i = (0, \ldots, 0, \underset{i^{\text{ème}}\ \text{place}}{\underset{\uparrow}{1}}, 0, \ldots, 0)$ si $i \in [\![1, n]\!]$.

Coordonnées dans la base canonique

Si $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

La lecture des coordonnées dans la base canonique est donc transparente (elle découle de l'écriture standard du vecteur).

Caractérisation matricielle des bases de $\mathbb{K}^n$

Soit $\mathscr{B}$ une base de $\mathbb{K}^n$. Une famille $(u_1, \ldots, u_p)$ de $\mathbb{K}^n$ est une base de $\mathbb{K}^n$ si et seulement si $p = n$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_p)$ est inversible.

4 Dimension

Théorème

Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ non réduit à $\{0\}$ admet une base et toutes ses bases ont le même cardinal.

Définition

On appelle **dimension** d'un sous-espace vectoriel $F \neq \{0\}$ de $\mathbb{K}^n$ le cardinal d'une base de F. On la note $\dim(F)$. Par convention, si $F = \{0\}$, alors $\dim(F) = 0$.

$\mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ et il est de dimension n.

Dimension et familles de vecteurs

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ de dimension p. On a

- Toute famille libre de F a au plus p éléments
- Une famille libre de F ayant p éléments est une base de F
- Toute famille génératrice de F a au moins p éléments
- Une famille génératrice de F ayant p éléments est une base de F.

Le deuxième point est très souvent utilisé pour montrer qu'une famille est une base (cf méthode **16.5**).

Théorème de la base extraite

De toute famille génératrice on peut extraire une base.

Dimension et sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$.

- Si $F \subset G$, alors $\dim(F) \leq \dim(G)$
- Si $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$, alors $F = G$.

Définition

Soient $u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{K}^n$. On appelle **rang** de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par cette famille, c'est-à-dire

$$\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_p) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left(u_1, \ldots, u_p\right)\right).$$

Caractérisation matricielle du rang

Soient $u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{K}^n$ et $\mathscr{B}$ une base de $\mathbb{K}^n$. Le rang de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est égal au rang de sa matrice dans la base $\mathscr{B}$, c'est-à-dire

$$\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_p) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_p)).$$

- Le calcul du rang d'une famille se ramène donc au simple calcul du rang d'une matrice (en utilisant le pivot de Gauss par exemple).
- Le rang ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie.

Les méthodes à maîtriser

Méthode 16.1 : Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$

Pour montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, on peut

- Dans les cas les plus simples, on montre que F est le sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs. Pour ce faire, on peut partir des équations caractérisant F, résoudre le système linéaire obtenu et transformer les inconnues secondaires en paramètres (comme en géométrie pour passer d'un représentation cartésienne à paramétrique).
- Sinon, on applique la définition d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Exemple d'application

(1) Montrer que $\boldsymbol{E = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \;/\; x + 2y + 3z = 0\}}$ est un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{\mathbb{K}^3}$.

(2) Soient $\boldsymbol{a, b \in \mathbb{K}}$, montrer que $\boldsymbol{F = \{(x,y) \in \mathbb{K}^2 \;/\; ax + by = 0\}}$ est un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{\mathbb{K}^2}$.

(1) L'ensemble E est déterminé par une équation explicite, on va donc la résoudre, faire apparaître des inconnues secondaires et exhiber une famille engendrant cet ensemble :

$$\begin{aligned} E &= \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \;/\; x = -2y - 3z\} \\ &= \{(-2y - 3z, y, z) \;/\; y, z \in \mathbb{K}\} \\ &= \{(-2y, y, 0) + (-3z, 0, z) \;/\; y, z \in \mathbb{K}\} \\ &= \{(y(-2,1,0) + z(-3,0,1) \;/\; y, z \in \mathbb{K}\} \\ &= \operatorname{Vect}((-2,1,0), (-3,0,1)). \end{aligned}$$

Ainsi E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$.

(2) Si on voulait procéder comme à la question précédente, il faudrait distinguer des cas ($(a,b) = (0,0)$; $b \neq 0$). On va plutôt revenir à la définition :

- $F \subset \mathbb{K}^2$ par définition
- $(0,0) \in F$ car $a \times 0 + b \times 0 = 0$
- Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2) \in F$. On a

$$\lambda u + v = \lambda(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2)$$

Si on note $X = \lambda x_1 + x_2$ et $Y = \lambda y_1 + y_2$, on a $\lambda u + v = (X, Y)$. De plus :

$$aX + bY = a(\lambda x_1 + x_2) + b(\lambda y_1 + y_2) = \lambda \underbrace{(ax_1 + by_1)}_{=0 \text{ car } u \in F} + \underbrace{(ax_2 + by_2)}_{=0 \text{ car } v \in F} = 0.$$

Ainsi $\lambda u + v = (X, Y)$ avec $aX + bY = 0$, d'où $\lambda u + v \in F$.

On a donc montré que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^2$.

Voir exercices **16.1** et **16.4**.

Méthode 16.2 : Montrer qu'une famille est libre

Pour montrer qu'une famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre :

- Si elle ne contient qu'un ou deux vecteur(s), on applique la caractérisation des familles libres de 1 ou 2 vecteur(s) (cf page 303).
- Sinon, on prend des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ vérifiant $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0$. On traduit cette égalité en un système linéaire d'inconnues $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ que l'on résout pour montrer que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$.

Exemple d'application

Soient $u = (0,1,1), v = (1,0,1)$ et $w = (1,1,0)$. Montrer que (u,v,w) est libre.

Soient $\lambda, \mu, \eta \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda u + \mu v + \eta w = 0$. On a donc

$$(\mu+\eta, \lambda+\eta, \lambda+\mu) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \mu + \eta = 0 \\ \lambda + \eta = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \mu + \eta = 0 \\ \lambda + \eta = 0 \\ -2\eta = 0. \end{cases}$$

On obtient donc que $\lambda = \mu = \eta = 0$.
Ainsi, la famille (u,v,w) est libre.

Voir exercices **16.1**, **16.2** et **16.4**.

Méthode 16.3 : Déterminer une base d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$

Pour déterminer une base d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}^n$, on commence par montrer que F est le sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs (cf méthode **16.1**) pour obtenir une famille génératrice $\mathscr{F}$ de F. On montre ensuite que $\mathscr{F}$ est libre (ce qui sera toujours le cas si on détermine correctement $\mathscr{F}$).
La famille ainsi obtenue est libre et génératrice de F. C'est ainsi une base de F et son cardinal nous donne la dimension de F.

Exemple d'application

Déterminer la dimension de $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \ / \ x + 2y + 3z = 0\}$.

En reprenant les calculs de l'exemple de la méthode **16.1**, on obtient

$$E = \text{Vect}\left((-2,1,0), (-3,0,1)\right).$$

Ainsi $((-2,1,0),(-3,0,1))$ est une famille génératrice de E. Or les deux vecteurs la constituant ne sont clairement pas colinéaires, cette famille est donc libre.
Alors $((-2,1,0),(-3,0,1))$ est une base de E. Elle contient 2 vecteurs, donc $\dim(E) = 2$.

Voir exercices **16.2**, **16.3** et **16.8**.

Méthode 16.4 : Montrer une égalité ensembliste à l'aide des dimensions

Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels E et F de $\mathbb{K}^n$ sont égaux, on peut éviter de procéder par double inclusion si on connaît leur dimension. Dans ce cas, il suffit de montrer une inclusion et qu'ils ont la même dimension.

Exemple d'application

Montrer que $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \ / \ x+y+z=0\right\} = \mathrm{Vect}\,((1,1,-2),(-3,2,1))$.

On commence par noter $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \ / \ x+y+z=0\right\}$ et $F = \mathrm{Vect}\,((1,1,-2),(-3,2,1))$.
On a

$$\begin{aligned} E &= \{(x,y,-x-y) \ / \ x,y \in \mathbb{K}\} \\ &= \{x(1,0,-1)+y(0,1,-1) \ / \ x,y \in \mathbb{K}\} \\ &= \mathrm{Vect}\,((1,0,-1),(0,1,-1)) . \end{aligned}$$

ce qui montre, entre autres, que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$.
Les deux vecteurs obtenus n'étant clairement pas colinéaires, ils forment une famille libre.
Ainsi $((1,0,-1),(0,1,-1))$ est une base de E et $\dim(E)=2$.
La famille $((1,1,-2),(-3,2,1))$ est, par définition, une famille génératrice de F.
Les deux vecteurs la constituant n'étant pas colinéaires, la famille est libre.
Ainsi $((1,1,-2),(-3,2,1))$ est une base de F et $\dim(F)=2$.
On a $(1,1,-2) \in E$ (car $1+1+(-2)=0$) et $(-3,2,1) \in E$ (car $-3+2+1=0$).
Donc, par stabilité,

$$F = \mathrm{Vect}\,((1,1,-2),(-3,2,1)) \subset E.$$

Ainsi E et F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^3$ tels que $F \subset E$ et $\dim E = \dim F$.
On conclut que $E=F$.

Voir exercices **16.4** et **16.7**.

Méthode 16.5 : Montrer qu'une famille est une base

Pour montrer qu'une famille $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ est une base d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}^n$, on a plusieurs méthodes :

- Si $F = \mathbb{K}^n$, on montre que la matrice de la famille $\mathscr{F}$ dans une base $\mathscr{B}$ (en général, la base canonique) est inversible.
- Si on connaît la dimension de F et qu'elle vaut p (sinon la famille $\mathscr{F}$ ne peut pas en être une base), il suffit de montrer que $\mathscr{F}$ est libre **ou** génératrice de F pour être une base de F.
- Sinon, on montre que la famille $\mathscr{F}$ est libre **et** génératrice de F.

Exemple d'application

Montrer que la famille, de vecteurs de $\mathbb{K}^3$, $\mathscr{F} = ((1,1,-1),(-5,1,1))$ est une base de $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \ / \ x+2y+3z=0\right\}$.

D'après l'exemple de la méthode **16.3**, E est de dimension 2 et la famille $\mathscr{F}$ est composée de 2 vecteurs également. Les deux vecteurs de $\mathscr{F}$ sont clairement non colinéaires, donc $\mathscr{F}$ est libre.
On a donc $\mathscr{F}$ une famille libre de E et $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = \dim(E)$, alors $\mathscr{F}$ est une base de E.

Voir exercice **16.2**.

Méthode 16.6 : Trouver une/des équation(s) d'un espace vectoriel engendré

Pour trouver une/des équation(s) caractérisant un sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $(u_1, \ldots, u_p)$, on prend un élément quelconque $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et on pose le système

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = (x_1, \ldots, x_n)$$

d'inconnues $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. On le résout par pivot de Gauss et on cherche des conditions sur $x_1, \ldots, x_n$ pour que le système soit compatible. Ces conditions nous fournissent une/des équation(s) du sous-espace vectoriel.

Exemple d'application

Déterminer une/des équations caractérisant $F = \mathrm{Vect}\,((1,1,-3,1),(-2,2,1,-1))$.

Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4$. On résout le système, d'inconnues λ et $\mu \in \mathbb{K}$,

$$\lambda(1,1,-3,1) + \mu(-2,2,1,-1) = (x,y,z,t) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - 2\mu = x \\ \lambda + 2\mu = y \\ -3\lambda + \mu = z \\ \lambda - \mu = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -x + 2t \\ \mu = -x + t \\ 0 = -2x + z + 5t \\ 0 = 3x + y - 4t \end{cases}.$$

Ainsi $(x,y,z,t) \in \mathrm{Vect}\,((1,1,-3,1),(-2,2,1,-1)) \Leftrightarrow (-2x + z + 5t = 0 \text{ et } 3x + y - 4t = 0)$.
D'où

$$\mathrm{Vect}\,((1,1,-3,1),(-2,2,1,-1)) = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 \;\; / \; -2x + z + 5t = 0 \text{ et } 3x + y - 4t = 0.\right\}$$

Voir exercices **16.5** et **16.7**.

Méthode 16.7 : Extraire une base d'une famille génératrice

Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel F. Pour en extraire une base, on prend des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ vérifiant $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0$ et on résout le système en découlant. On exprime les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires et on va « faire disparaître » les vecteurs associés aux inconnues secondaires sans perdre le caractère générateur de la famille. En procédant ainsi, il ne reste plus que les vecteurs associés aux inconnues principales. On se sert de nouveau du système initial pour montrer la liberté de la nouvelle famille.

Exemple d'application

Déterminer une base de $F = \mathrm{Vect}\,((1,1,1),(1,2,3),(0,1,2),(-2,0,2))$.

On note u_1, u_2, u_3 et u_4 les quatre vecteurs engendrant F (dans l'ordre de l'énoncé). On résout le système, d'inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{K}$, par pivot de Gauss,

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 + 4\lambda_4 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 - 2\lambda_4. \end{cases}$$

Pour $\lambda_3 = 1$ et $\lambda_4 = 0$, on obtient que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (1, -1, 1, 0)$ est solution du système.
On obtient donc la relation $u_1 - u_2 + u_3 = 0$ et $u_3 = -u_1 + u_2 \in \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2)$.
De même, avec $\lambda_3 = 0$ et $\lambda_4 = 1$, on obtient $u_4 = -4u_1 + 2u_2 \in \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2)$.
Ainsi $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3, u_4) = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2)$ et (u_1, u_2) est une famille génératrice de F.
En reprenant le système avec $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, on obtient que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$, ce qui entraîne la liberté de la famille (u_1, u_2).
Ainsi (u_1, u_2) est une famille libre et génératrice de F. C'est donc une base de F.

Voir exercice **16.7**.

Interro de cours

1. Montrer que $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \ / \ x - y - z = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$.

2. Déterminer la dimension de $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \ / \ x - y - z = 0\right\}$.

3. Les propositions suivantes sont-elles toujours vraies ?

(a) L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

(b) L'union de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

(c) Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

4. Donner la définition d'une famille libre, d'une famille génératrice et d'une base.

5. Donner la base canonique de $\mathbb{K}^4$.

6. Déterminer la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{K}^3$, de la famille $\mathscr{F} = ((1,1,1),(1,2,3))$.

7. Montrer que la famille $((1,1,1,1),(0,1,1,1),(1,0,1,1))$ est libre.

8. Montrer que la famille $((1,1,1),(1,2,3),(1,-1,1))$ est une base de $\mathbb{K}^3$.

9. Soit $\mathscr{F}$ une famille d'un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{K}^n$.
Les propositions suivantes sont-elles toujours vraies ?

(a) Si $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = \dim E$, alors $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si $\mathscr{F}$ est génératrice de E.

(b) Si $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \leq \dim E$, alors $\mathscr{F}$ est libre.

(c) Si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E, alors $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \geq \dim E$.

10. Déterminer une équation caractérisant $\mathrm{Vect}\left((1,1,1),(1,-1,1)\right)$ dans $\mathbb{K}^3$.

11. Montrer que $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \ / \ x - y - z = 0\right\} = \mathrm{Vect}\left((2,1,1),(3,2,1)\right)$.

12. Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

(a) $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) \leq n$

(b) $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = n$ si et seulement si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$

(c) Si $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \geq n$, alors $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = n$

(d) $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) \leq \mathrm{Card}(\mathscr{F})$

(e) $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{Card}(\mathscr{F})$ si et seulement si $\mathscr{F}$ est libre.

Exercices

Pour s'entraîner

Exercice 16.1

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1. $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y - 3z = 0\right\}$
2. $B = \left\{(x + y, x - y, 2y) \ / \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$
3. $C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y - z = 2\right\}$
4. $D = \left\{(2x - 3y, x + 1, -x + 3y) \ / \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$
5. $E = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ \middle/ \ \begin{cases} x + 2y - 2t = 0 \\ x - 3y + 9z = 2 \end{cases}\right\}$.

Exercice 16.2

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{K}^3$.

1. On pose $u_1 = e_2 + 2e_3$, $u_2 = e_3 - e_1$ et $u_3 = e_1 + 2e_2$.
Montrer que $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{K}^3$.

2. On pose $v_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ et $v_2 = e_2 + e_3$.

- **a.** Montrer que (v_1, v_2) est une famille libre.
- **b.** Déterminer un vecteur v_3 tel que (v_1, v_2, v_3) soit une base de $\mathbb{K}^3$.

3. On pose $w_1 = (1, 1, 1)$, $w_2 = (1, 2, 3)$ et $w_3 = (2, 3, 1)$.

- **a.** Montrer que $\mathscr{B}' = (w_1, w_2, w_3)$ est une base de $\mathbb{K}^3$.
- **b.** Déterminer les coordonnées de $(1, 1, 4)$ dans $\mathscr{B}'$.

Exercice 16.3

Déterminer la dimension de

1. $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + y - 3z = 0\right\}$
2. $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = 2y = 3z\right\}$
3. $\left\{(x - y, 2x + 3y, -x + y) \ / \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$
4. $\left\{(-x - y, x + 2y, 2x + y) \ / \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Exercice 16.4

Montrer que

1. $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y - 3z = 0\right\} = \mathrm{Vect}\left((1, 1, 1), (-1, 2, 1)\right)$
2. $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y - z = 0\right\} = \mathrm{Vect}\left((1, 1, 3), (1, -1, -1)\right)$
3. $\left\{(x + y, x - y, 2y) \ / \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}\left((1, 0, 1), (3, 1, 2)\right)$
4. $\left\{(2x - 3y, x, -x + 3y) \ / \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}\left((-1, 1, 2), (1, 2, 1)\right)$.

Exercice 16.5

Déterminer une/des équation(s) caractérisant les sous-espaces vectoriels suivants :

1. $E = \text{Vect}\,((1,1,1),(2,-1,2))$ dans $\mathbb{K}^3$
2. $F = \text{Vect}\,((1,1,-1,-1),(-2,-1,1,2))$ dans $\mathbb{K}^4$.

Exercice 16.6

Déterminer le rang de

1. $((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$
2. $((1,2,3),(2,4,6),(3,6,9))$
3. $((1,1,1),(2,2,2),(0,1,2))$
4. $((0,1,2),(1,2,3),(2,3,4),(3,4,5))$
5. $((1,0,2,0),(1,1,1,1),(0,1,-1,1),(2,1,3,1))$.

Pour aller plus loin

Exercice 16.7

Soit $\mathscr{F} = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ une famille de $\mathbb{K}^4$ où

$u_1 = (1,1,1,1), \qquad u_2 = (1,2,3,4), \qquad u_3 = (3,1,4,2) \qquad u_4 = (10,4,13,7), \qquad u_5 = (1,7,8,14).$

1. Déterminer le rang de la famille $\mathscr{F}$. La famille $\mathscr{F}$ est-elle libre ?
2. Extraire de $\mathscr{F}$ une base de $E = \text{Vect}\,(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5)$.
3. Déterminer une équation caractérisant E.

Exercice 16.8

Soient $\quad F_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y+z=0\right\}, \quad F_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+2y-z=0\right\},$

$$G_1 = \text{Vect}\,((1,1,1),(1,1,0)) \quad \text{et} \quad G_2 = \text{Vect}\,((1,-1,1),(1,0,0))\,.$$

Déterminer une base, ainsi que la dimension, de : $F_1 \cap F_2$, $F_1 \cap G_1$ et $G_1 \cap G_2$.

Exercice 16.9

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \quad \Leftrightarrow \quad F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

Corrections

Interro de cours

1. On peut éviter de passer par le critère de sous-espace vectoriel, en exhibant une famille génératrice. On exprime x en fonction de y et z pour obtenir

$$E = \{(y+z, y, z) \ / \ y, z \in \mathbb{K}\} = \{y(1,1,0) + z(1,0,1) \ / \ y, z \in \mathbb{K}\} = \mathrm{Vect}\left((1,1,0),(1,0,1)\right).$$

Ainsi E est un sous-espace vectoriel engendré de $\mathbb{K}^3$, donc est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$.

2. D'après la question précédente, la famille $((1,1,0),(1,0,1))$ est génératrice de E. Or les deux vecteurs la constituant ne sont clairement pas colinéaires, donc cette famille est libre.
Ainsi $((1,1,0),(1,0,1))$ est une base de E et on en conclut que $\dim(E) = 2$.

3. **(a) Vrai.**

(b) Faux. Si $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathrm{Vect}\left((1,0)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left((0,1)\right)$, alors F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. Cependant, $u = (1,0) \in F$, donc $u \in F \cup G$ et $v = (0,1) \in G$ donc $v \in F \cup G$, alors que $u + v = (1,1) \notin F \cup G$. Ainsi $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

(c) Faux. C'est même toujours faux car il ne contient pas 0_E.

4. • Une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ de E est libre si :

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \ \Big(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0\Big).$$

• Une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est génératrice de E si : $E = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_n)$.
• Une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E si :

$$\forall v \in F, \exists!\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \ v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

5. La base canonique de $\mathbb{K}^4$ est $((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$.

6. Pour déterminer la matrice dans la base canonique, il suffit de « mettre les vecteurs en colonne » puis les ranger côte à côte dans une matrice. Ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(\mathscr{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

7. On note u, v et w les trois vecteurs de cette famille. Soient $\lambda, \mu, \eta \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda u + \mu v + \eta w = 0$. On a donc

$$\begin{cases} \lambda \quad\quad + \eta = 0 \\ \lambda + \mu \quad\quad = 0 \\ \lambda + \mu + \eta = 0 \\ \lambda + \mu + \eta = 0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \eta = 0 \\ \mu = 0. \end{cases}$$

Ainsi la famille (u, v, w) est libre.

8. On note u, v et w les trois vecteurs de cette famille. Soient $\lambda, \mu, \eta \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda u + \mu v + \eta w = 0$. On a donc

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \eta = 0 \\ \lambda + 2\mu - \eta = 0 \\ \lambda + 3\mu + \lambda = 0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \eta = 0 \\ \mu = 0. \end{cases}$$

Ainsi la famille (u, v, w) est une famille libre de $\mathbb{K}^3$.
Or $\dim(\mathbb{K}^3) = 3 = \mathrm{Card}(u, v, w)$, donc la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{K}^3$.

9. **(a)** **Vrai.** Si $\mathscr{F}$ est une famille libre de E, alors $\mathscr{F}$ est une base de E car $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = \dim(E)$; la réciproque est clairement vraie. Si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E, alors $\mathscr{F}$ est une base de E car $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = \dim(E)$; la réciproque est clairement vraie. Ainsi $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E.

(b) **Faux.** Si $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{F} = ((1,1,1),(2,2,2))$, alors $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = 2 \leq 3 = \dim(E)$. Cependant les deux vecteurs composant $\mathscr{F}$ sont colinéaires, donc la famille $\mathscr{F}$ est liée.

(c) **Vrai.** Cf. cours

10. On note u et v les deux vecteurs de l'énoncé. Soit $w = (x,y,z) \in \mathbb{K}^3$. On résout l'équation, d'inconnues λ et μ, suivante, dont on code directement le système linéaire obtenu,

$$\lambda u + \mu v = w \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \\ 1 & 1 & z \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & y-x \\ 0 & 0 & z-x \end{array}\right).$$

Ainsi l'équation admet au moins une solution si et seulement si $z - x = 0$.
On conclut que $(x,y,z) \in \mathrm{Vect}\,((1,1,1),(1,-1,1)) \Leftrightarrow x = z$.

11. On note $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \ / \ x - y - z = 0\right\}$, $u = (2,1,1)$, $v = (3,2,1)$ et $F = \mathrm{Vect}\,(u,v)$.
D'après la question **2.**, E est de dimension 2.
Par définition de F, la famille (u,v) est génératrice de F. Le vecteurs u et v ne sont clairement pas colinéaires, donc la famille (u,v) est libre. Ainsi (u,v) est une base de F et $\dim(F) = 2$.
De plus $u \in E$ (car $2 - 1 - 1 = 0$) et $v \in E$ (car $3 - 2 - 1 = 0$), donc $F = \mathrm{Vect}\,(u,v) \subset E$.
On a donc montré que E et F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^3$ vérifiant $F \subset E$ et $\dim E = \dim F$. Donc $E = F$.
On en conclut que $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \ / \ x - y - z = 0\right\} = \mathrm{Vect}\,((2,1,1),(3,2,1))$.

12. **(a)** **Vrai.** On a $\mathrm{Vect}\,(\mathscr{F}) \subset \mathbb{K}^n$, donc $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \dim\left(\mathrm{Vect}\,(\mathscr{F})\right) \leq n$.

(b) **Vrai.** On a $\mathrm{Vect}\,(\mathscr{F}) \subset \mathbb{K}^n$ et $\dim(\mathrm{Vect}\,(\mathscr{F})) = \mathrm{rg}(\mathscr{F}) = n = \dim(\mathbb{K}^n)$.
Donc $\mathrm{Vect}\,(\mathscr{F}) = \mathbb{K}^n$ et on en conclut que $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$.

(c) **Faux.** Si $n = 2$ et $\mathscr{F} = ((1,1),(2,2),(3,3))$, alors $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \geq 2$ mais $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = 1 \neq 2$.

(d) **Vrai.** La famille $\mathscr{F}$ est génératrice de $\mathrm{Vect}\,(\mathscr{F})$, donc $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \geq \dim(\mathrm{Vect}\,(\mathscr{F})) = \mathrm{rg}(\mathscr{F})$.

(e) **Vrai.** La famille $\mathscr{F}$ est génératrice de $\mathrm{Vect}\,(\mathscr{F})$, donc : $\mathscr{F}$ est une base de $\mathrm{Vect}\,(\mathscr{F})$ si et seulement si $\mathscr{F}$ est libre.
En utilisant les propriétés des dimensions et des familles de vecteurs, on a aussi : $\mathscr{F}$ est une base de $\mathrm{Vect}\,(\mathscr{F})$ si et seulement si $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = \dim(\mathrm{Vect}\,(\mathscr{F})) = \mathrm{rg}(\mathscr{F})$.

Exercice 16.1

1. On a $A = \{(-2y + 3z, y, z) \ / \ y, z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,((-2,1,0),(3,0,1))$.
On conclut que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. On a $B = \{(x,x,0) + (y,-y,2y) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,((1,1,0),(1,-1,2))$.
On conclut que B est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3. On a $0 + 2 \times 0 - 0 = 0 \neq 2$, donc $(0,0,0) \notin C$.
On conclut que C n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

4. Si on suppose que $(0,0,0) \in D$, alors on dispose de $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $2x - 3 = 0$, $x + 1 = 0$ et $-x + 3y = 0$. Après résolution, on en déduit que $x = y = 0$ et $1 = 0$, ce qui est absurde.
Ainsi $(0,0,0) \notin D$. On conclut que D n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

5. On a $0 - 3 \times 0 + 9 \times 0 = 0 \neq 2$, donc $(0,0,0,0) \notin E$.
On conclut que E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 16.2

1. Soient λ, μ et $\eta \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda u_1 + \mu u_2 + \eta u_3 = 0$. On obtient

$$(-\mu + \eta)e_1 + (\lambda + 2\eta)e_2 + (2\lambda + \mu)e_3 = 0.$$

La famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{K}^3$, donc est libre. On en déduit que

$$\begin{cases} -\mu + \eta = 0 \\ \lambda + 2\eta = 0 \\ 2\lambda + \mu = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lambda = \mu = \eta = 0.$$

On conclut que la famille $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une famille libre de $\mathbb{K}^3$ constituée de trois vecteurs. Ainsi $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{K}^3$.

2. **a.** Les vecteurs v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires, donc la famille (v_1, v_2) est libre.

b. On cherche un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire de v_1 et v_2. On pose donc par exemple $v_3 = e_2$. On montre que (v_1, v_2, v_3) est libre : soient λ, μ et $\eta \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda v_1 + \mu v_2 + \eta v_3 = 0$.
On obtient

$$\lambda e_1 + (2\lambda + \mu + \eta)e_2 + (2\lambda + \mu)e_3 = 0.$$

La famille (e_1, e_2, e_3) étant libre, on en déduit que $\lambda = 0$, $2\lambda + \mu + \eta = 0$ et $2\lambda + \mu = 0$, donc $\lambda = \mu = \eta = 0$.
Ainsi la famille (v_1, v_2, v_3) est une famille libre de $\mathbb{K}^3$ constituée de trois vecteurs.
On en conclut que la famille (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{K}^3$.

3. **a.** Soient λ, μ et $\eta \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda w_1 + \mu w_2 + \eta w_3 = 0$, c'est-à-dire tels que

$$(\lambda + \mu + 2\eta, \lambda + 2\mu + 3\eta, \lambda + 3\mu + \eta) = (0, 0, 0).$$

On identifie composante par composante et on code le système linéaire obtenu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ \eta = 0 \end{cases}$$

Ainsi $\mathscr{B}'$ est une famille libre de $\mathbb{K}^3$ avec $\mathrm{Card}(\mathscr{B}') = 3 = \dim(\mathbb{K}^3)$.
On en conclut que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{K}^3$.

b. Soient λ, μ, η les coordonnées de $a = (1, 1, 4)$ dans la base $\mathscr{B}'$.
On a $\lambda w_1 + \mu w_2 + \eta w_3 = a$, c'est-à-dire

$$(\lambda + \mu + 2\eta, \lambda + 2\mu + 3\eta, \lambda + 3\mu + \eta) = (1, 1, 4).$$

On identifie composante par composante et on code le système linéaire obtenu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = 1 \\ \eta = -1 \end{cases}$$

On en conclut que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(a) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 16.3

1. On a
$$\begin{aligned} E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x+y-3z=0\right\} &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y=-2x+3z\right\} \\ &= \{(x,-2x+3z,z) \ / \ x,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,-2x,0)+(0,3z,z) \ / \ x,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,-2,0)+z(0,3,1) \ / \ x,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}\left((1,-2,0),(0,3,1)\right). \end{aligned}$$
Donc la famille $((1,-2,0),(0,3,1))$ est génératrice de E.
De plus les deux vecteurs $(1,-2,0)$ et $(0,3,1)$ ne sont pas colinéaires, alors ils forment une famille libre. Ainsi $((1,-2,0),(0,3,1))$ est une base de E constituée de deux vecteurs.
On en conclut que $\dim(E)=2$.

2. On a
$$\begin{aligned} E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x=2y=3z\right\} &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \Big/ \ y=\frac{x}{2} \text{ et } z=\frac{x}{3}\right\} \\ &= \left\{\left(x,\frac{x}{2},\frac{x}{3}\right) \ / \ x \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\frac{x}{6}(6,3,2) \ / \ x \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left((6,3,2)\right). \end{aligned}$$
Donc la famille $((6,3,2))$ est génératrice de E.
De plus le vecteur $(6,3,2)$ est non nul, alors il forme une famille libre. Ainsi $((6,3,2))$ est une base de E constituée d'un vecteur.
On en conclut que $\dim(E)=1$.

3. On a
$$\begin{aligned} E = \left\{(x-y,2x+3y,-x+y) \ / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} &= \{(x,2x,-x)+(-y,3y,y) \ / \ x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,2,-1)+y(-1,3,1) \ / \ x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}\left((1,2,-1),(-1,3,1)\right). \end{aligned}$$
Donc la famille $((1,2,-1),(-1,3,1))$ est génératrice de E.
De plus les deux vecteurs $(1,2,-1)$ et $(-1,3,1)$ ne sont pas colinéaires, alors ils forment une famille libre. Ainsi $((1,2,-1),(-1,3,1))$ est une base de E constituée de deux vecteurs.
On en conclut que $\dim(E)=2$.

4. On a
$$\begin{aligned} E = \left\{(-x-y,x+2y,2x+y) \ / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} &= \{(-x,x,2x)+(-y,2y,y) \ / \ x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(-1,1,2)+y(-1,2,1) \ / \ x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}\left((-1,1,2),(-1,2,1)\right). \end{aligned}$$
Donc la famille $((-1,1,2),(-1,2,1))$ est génératrice de E.
De plus les deux vecteurs $(-1,1,2)$ et $(-1,2,1)$ ne sont pas colinéaires, alors ils forment une famille libre. Ainsi $((-1,1,2),(-1,2,1))$ est une base de E constituée de deux vecteurs.
On en conclut que $\dim(E)=2$.

Exercice 16.4

1. On note $E=\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+2y-3z=0\right\}$, $u=(1,1,1)$, $v=(-1,2,1)$ et $F=\operatorname{Vect}(u,v)$.
On a $E=\{(-2y+3z,y,z) \ / \ y,z \in \mathbb{R}\}=\operatorname{Vect}\left((-2,1,0),(3,0,1)\right)$ et les deux vecteurs $(-2,1,0)$ et $(3,0,1)$ ne sont pas colinéaires. Ils forment donc une base de E et $\dim(E)=2$.
De plus, $u \in E$ (car $1+2-3=0$) et $v \in E$ (car $-1+2\times 2-3=0$). Alors $F=\operatorname{Vect}(u,v) \subset E$.
Or les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires, d'où $\dim(F)=2$.

On a donc montré que E et F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $F \subset E$ et $\dim E = \dim F$. Ainsi $E = F$.
On en conclut que $\{(-2y+3z, y, z) \ / \ y, z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,((1,1,1), (-1,2,1))$.

2. On note $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+2y-z=0\right\}$, $u = (1,1,3)$, $v = (1,-1,-1)$ et $F = \mathrm{Vect}\,(u,v)$.
On a $E = \{(-2y+z, y, z) \ / \ y, z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,((-2,1,0), (1,0,1))$ et les deux vecteurs $(-2,1,0)$ et $(1,0,1)$ ne sont pas colinéaires. Ils forment donc une base de E et $\dim(E) = 2$.
De plus, $u \in E$ (car $1+2-3=0$) et $v \in E$ (car $1+2\times(-1)+1=0$). Alors $F = \mathrm{Vect}\,(u,v) \subset E$. Or les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires, d'où $\dim(F) = 2$.
On a donc montré que E et F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $F \subset E$ et $\dim E = \dim F$. Ainsi $E = F$.
On en conclut que $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+2y-z=0\right\} = \mathrm{Vect}\,((1,1,3), (1,-1,-1))$.

3. On note $E = \left\{(x+y, x-y, 2y) \ / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$, $u = (1,0,1)$, $v = (3,1,2)$ et $F = \mathrm{Vect}\,(u,v)$.
On a $E = \{(x,x,0) + (y,-y,2y) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,((1,1,0), (1,-1,2))$ et les deux vecteurs $(1,1,0)$ et $(1,-1,2)$ ne sont pas colinéaires. Ils forment donc une base de E et $\dim(E) = 2$.
De plus, $u = (x+y, x-y, 2y)$ avec $x = y = \frac{1}{2}$, donc $u \in E$. Et $v = (x+y, x-y, 2y)$ avec $x = 2$ et $y = 1$, donc $v \in E$. Alors $F = \mathrm{Vect}\,(u,v) \subset E$. Or les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires, d'où $\dim(F) = 2$.
On a donc montré que E et F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $F \subset E$ et $\dim E = \dim F$. Ainsi $E = F$.
On en conclut que $\{(x,x,0) + (y,-y,2y) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,((1,0,1), (3,1,2))$.

4. On note $E = \left\{(2x-3y, x, -x+3y) \ / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$, $u = (-1,1,2)$, $v = (1,2,1)$, $F = \mathrm{Vect}\,(u,v)$.
On a $E = \{(2x, x, -x) + (-3y, 0, 3y) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,((2,1,-1), (-3,0,3))$ et les deux vecteurs $(2,1,-1)$ et $(-3,0,3)$ ne sont pas colinéaires. Ils forment donc une base de E et $\dim(E) = 2$.
De plus, $u = (2x-3y, x, -x+3y)$ avec $x = y = 1$, donc $u \in E$. Et $v = (2x-3y, x, -x+3y)$ avec $x = 2$ et $y = 1$, donc $v \in E$. Alors $F = \mathrm{Vect}\,(u,v) \subset E$. Or les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires, d'où $\dim(F) = 2$.
On a donc montré que E et F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $F \subset E$ et $\dim E = \dim F$. Ainsi $E = F$.
On en conclut que $\left\{(2x-3y, x, -x+3y) \ / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}\,((-1,1,2), (1,2,1))$.

Exercice 16.5

1. On note $u = (1,1,1)$ et $v = (2,-1,2)$. Soit $w = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On résout l'équation suivante, d'inconnues λ et μ, dont on code directement le système linéaire obtenu,

$$\lambda u + \mu v = w \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 1 & -1 & y \\ 1 & 2 & z \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -3 & y-x \\ 0 & 0 & z-x \end{array}\right).$$

Ainsi l'équation admet au moins une solution si et seulement si $z - x = 0$.
On conclut que $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = z\right\}$.

2. On note $u = (1,1,-1,-1)$ et $v = (-2,-1,1,2)$. Soit $w = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On résout l'équation suivante, d'inconnues λ et μ, dont on code directement le système linéaire obtenu,

$$\lambda u + \mu v = w \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x \\ 1 & -1 & y \\ -1 & 1 & z \\ -1 & 2 & t \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & -1 & z+x \\ 0 & 0 & t+x \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & z+y \\ 0 & 0 & t+x \end{array}\right).$$

Ainsi l'équation admet au moins une solution si et seulement si $z+y=0$ et $t+x=0$.
On conclut que $F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \ / \ x+t=0 \text{ et } y+z=0\right\}$.

Exercice 16.6

On utilise la matrice dans la base canonique de la famille de vecteurs. On note $\mathscr{F}$ la famille de vecteurs dont on doit déterminer le rang.

1. On a $\operatorname{rg}(\mathscr{F})=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix} \underset{\substack{L_1\leftrightarrow L_2\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix} \underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}\boxed{1}&0&1\\0&\boxed{1}&1\\0&0&\boxed{-1}\end{pmatrix}=3.$

2. On a $\operatorname{rg}(\mathscr{F})=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-3L_1}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}\boxed{1}&2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=1.$

3. On a $\operatorname{rg}(\mathscr{F})=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&2&0\\1&2&1\\1&2&2\end{pmatrix} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&2\end{pmatrix} \underset{L_3\leftarrow L_3-2L_2}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}\boxed{1}&2&0\\0&0&\boxed{1}\\0&0&0\end{pmatrix}=2.$

4. On a $\operatorname{rg}(\mathscr{F})=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}0&1&2&3\\1&2&3&4\\2&3&4&5\end{pmatrix} \underset{\substack{L_1\leftrightarrow L_2\\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&-1&-2&-3\end{pmatrix} \underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}\boxed{1}&2&3&4\\0&\boxed{1}&2&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}=2.$

5. On a $\operatorname{rg}(\mathscr{F})=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&0&2\\0&1&1&1\\2&1&-1&3\\0&1&1&1\end{pmatrix} \underset{L_3\leftarrow L_3-2L_1}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&0&2\\0&1&1&1\\0&-1&-1&-1\\0&1&1&1\end{pmatrix} \underset{\substack{L_3\leftarrow L_3+L_2\\ L_4\leftarrow L_4-L_2}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}\boxed{1}&1&0&2\\0&\boxed{1}&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=2.$

Exercice 16.7

1. On a

$$\operatorname{rg}(f)=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&3&10&1\\1&2&1&4&7\\1&3&4&13&8\\1&4&2&7&14\end{pmatrix} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1\\ L_4\leftarrow L_4-L_1}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&3&10&1\\0&1&-2&-6&6\\0&2&1&3&7\\0&3&-1&-3&13\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3\leftarrow L_3-2L_2\\ L_4\leftarrow L_4-3L_2}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&3&10&1\\0&1&-2&-6&6\\0&0&5&15&-5\\0&0&5&15&-5\end{pmatrix}$$

$$\underset{L_4\leftarrow L_4-L_3}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}\boxed{1}&1&3&10&1\\0&\boxed{1}&-2&-6&6\\0&0&\boxed{5}&15&-5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

On conclut que $\operatorname{rg}(\mathscr{F})=3$.
Ainsi $\operatorname{rg}(\mathscr{F})<\operatorname{Card}(\mathscr{F})$, donc $\mathscr{F}$ n'est pas une famille libre.

2. On cherche des relations entre ces vecteurs. Soient $\lambda_1,\ \dots,\ \lambda_5\in\mathbb{K}$ tels que $\lambda_1u_1+\cdots+\lambda_5u_5=0$. En identifiant composante par composante, on obtient le système linéaire homogène codé par la matrice de $\mathscr{F}$ dans la base canonique. En effectuant les mêmes opérations qu'à la question précédente, on en déduit que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & + & 10\lambda_4 & + & \lambda_5 & = 0 \\ & & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & - & 6\lambda_4 & + & 6\lambda_5 & = 0 \\ & & & & 5\lambda_3 & + & 15\lambda_4 & - & 5\lambda_5 & = 0 \end{pmatrix}.$$

Si on force $\lambda_4 = 1$ et $\lambda_5 = 0$, alors $\lambda_3 = -3$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 = -1$.
Donc $-u_1 + 0 \times u_2 - 3u_3 + u_4 = 0$, puis $u_4 = u_1 + 3u_3 \in \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.
De même, en forçant $\lambda_4 = 0$ et $\lambda_5 = 1$, on obtient $u_5 = 4u_2 - u_3 \in \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.
Ainsi $u_4, u_5 \in \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$, donc $E = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.
Alors (u_1, u_2, u_3) est une famille génératrice de E.
Or si $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$, alors $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_5 u_5 = 0$ avec $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$. En réutilisant le système ci-dessus, on obtient $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, donc la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.
On en conclut que (u_1, u_2, u_3) est une base de E.

3. Soit $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4$. On résout l'équation suivante, d'inconnues λ_1, λ_2 et λ_3, dont on code directement le système linéaire obtenu. On résout ce système en effectuant exactement les mêmes opérations qu'à la question **1.**.

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = v \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 3 & 4 & z \\ 1 & 4 & 2 & t \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & -2 & -x+y \\ 0 & 0 & 5 & x-2y+z \\ 0 & 0 & 0 & x-y-z+t \end{array}\right).$$

On en conclut que $E = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \ / \ x - y - z + t = 0\right\}$.

Exercice 16.8

- Pour $F_1 \cap F_2$, on résout un système linéaire de deux équations à trois inconnues. On a

$$(x, y, z) \in F_1 \cap F_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3z \\ y = 2z. \end{cases}$$

Donc $F_1 \cap F_2 = \{(-3z, 2z, z) \ / \ z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-3, 2, 1))$.
Le vecteur $(-3, 2, 1)$ étant non nul, il forme une base de $F_1 \cap F_2$.
On en conclut que $\dim(F_1 \cap F_2) = 1$.

- Pour $F_1 \cap G_1$, on exprime le fait d'appartenir à G_1 à l'aide de deux paramètres, puis on utilise l'équation de F_1 pour exprimer un de ces paramètres en fonctions de l'autre. On a

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in F_1 \cap G_1 &\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = \lambda \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = \lambda \\ (\lambda + \mu) + (\lambda + \mu) + (\lambda) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -\dfrac{\lambda}{2} \\ y = -\dfrac{\lambda}{2} \\ z = \lambda \\ \mu = -\dfrac{3\lambda}{2}. \end{cases}\end{aligned}$$

Donc $F_1 \cap G_1 = \left\{\left(-\dfrac{\lambda}{2}, -\dfrac{\lambda}{2}, \lambda\right) \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}((-1, -1, 2))$.

Le vecteur $(-1,-1,2)$ étant non nul, il forme une base de $F_1 \cap G_1$.
On en conclut que $\dim(F_1 \cap G_1) = 1$.

- Pour $G_1 \cap G_2$, on exprime le fait d'appartenir à G_1 à l'aide de deux paramètres et le fait d'appartenir à G_2 à l'aide de deux autres paramètres. Puis, on identifie composante par composante pour exprimer tous ces paramètres en fonction d'un seul. On a

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in G_1 \cap G_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \lambda,\mu,s,t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = \lambda \end{cases} \text{et} \begin{cases} x = \ \ s \ + t \\ y = -s \\ z = \ \ s \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists \lambda,\mu,s,t \in \mathbb{R}, \begin{cases} s + t = \lambda + \mu \\ \ \ -s = \lambda + \mu \\ \quad\ s = \lambda \end{cases} \text{et} \begin{cases} x = \ \ s \ + t \\ y = -s \\ z = \ \ s \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists \lambda,\mu,s,t \in \mathbb{R}, \begin{cases} t = -2s \\ \mu = -2s \\ \lambda = \ \ s \end{cases} \text{et} \begin{cases} x = -s \\ y = -s \\ z = \ \ s. \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $G_1 \cap G_2 = \{(-s,-s,s) \ / \ s \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\,((-1,-1,1))$. Le vecteur $(-1,-1,1)$ étant non nul, il forme une base de $G_1 \cap G_2$.
On en conclut que $\dim(G_1 \cap G_2) = 1$.

Exercice 16.9

On procède par double implication.

- <u>$\Leftarrow$:</u> On suppose que $F \subset G$ ou $G \subset F$. On distingue deux cas.
  - ◇ Si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$. Or G est un sous-espace vectoriel de E, donc $F \cup G$ aussi.
  - ◇ Si $G \subset F$, alors $F \cup G = F$. Or F est un sous-espace vectoriel de E, donc $F \cup G$ aussi.

  Dans les deux cas, $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.

- <u>$\Rightarrow$:</u> On suppose que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.
  On suppose, par l'absurde, que $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$.
  On dispose donc de $f \in F \backslash G$ car $F \not\subset G$, et de $g \in G \backslash F$ car $G \not\subset F$.
  Or $F \subset (F \cup G)$ et $G \subset (F \cup G)$, donc f et g sont de vecteurs de $F \cup G$. Comme $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E, on en déduit que $f + g \in F \cup G$. On distingue deux cas.
  - ◇ Si $f + g \in F$, alors $g = \underbrace{f+g}_{\in F} - \underbrace{f}_{\in F} \in F$, ce qui est absurde.
  - ◇ Si $f + g \in G$, alors $f = \underbrace{f+g}_{\in G} - \underbrace{g}_{\in G} \in G$, ce qui est absurde.

  Dans les deux cas, on aboutit à une absurdité. On en conclut que $F \subset G$ ou $G \subset F$.

CHAPITRE

Applications linéaires 17

L'essentiel du cours

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et p, q, n désigneront des entiers naturels non nuls.

1 Applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$

Définition

- Une **application linéaire** f de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ est une application de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ vérifiant
$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in \mathbb{K}^p,\ f(\lambda u) = \lambda f(u) \quad \text{et} \quad f(u+v) = f(u) + f(v).$$
On note $\mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.
- Si de plus $p = n$, on dit alors que f est un **endomorphisme** de $\mathbb{K}^n$.
On note $\mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{K}^n$.

Une application linéaire est donc une application qui préserve les deux opérations des espaces vectoriels $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ (la somme et la multiplication par un scalaire).

Critère de linéarité

Une application f de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ est linéaire si et seulement si
$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in \mathbb{K}^p,\ f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v).$$

Proposition

Soient $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_q \in \mathbb{K}$ et $u_1, \ldots, u_q \in \mathbb{K}^p$. On a
$$f(0_{\mathbb{K}^p}) = 0_{\mathbb{K}^n} \quad \text{et} \quad f\left(\sum_{k=1}^{q} \lambda_k u_k\right) = \sum_{k=1}^{q} \lambda_k f(u_k).$$

Propriétés des opérations sur les applications linéaires

- Si $f, g \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et $f + g \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$
- Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^q)$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^n)$, alors $g \circ f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$
- Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ est bijective, alors $f^{-1} \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$.

2 Noyau et image

Dans toute cette partie f désignera une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.

Définition

Le **noyau** de f est l'ensemble $\ker f = \{u \in \mathbb{K}^p \ / \ f(u) = 0_{\mathbb{K}^n}\}$.

Le noyau de f est l'ensemble des antécédents de 0 par f.

Propriétés du noyau

- Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.
- L'application f est injective si et seulement si $\ker f = \{0_{\mathbb{K}^p}\}$.

Définition

L'**image** de f est l'ensemble $\operatorname{Im} f = \{f(u) \ / \ u \in \mathbb{K}^p\}$.

L'image de f est l'ensemble des valeurs prises par f. Il s'agit donc de $f(\mathbb{K}^p)$.

Propriétés de l'image

- L'image de f est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
- L'application f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = \mathbb{K}^n$.
- Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de $\mathbb{K}^p$, alors $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_p)\right)$.

Proposition

- Si f est injective, alors $p \geq n$
- Si f est surjective, alors $p \leq n$
- Si f est bijective, alors $p = n$
- Si $p = n$, alors

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ bijective} \Leftrightarrow f \text{ surjective.}$$

- Cette proposition permet de voir si f peut être injective (ou surjective) juste en regardant p et n.
- Si f peut être bijective (c'est-à-dire si $p = n$), il n'est alors pas nécessaire de montrer de montrer l'injectivité **et** la surjectivité pour montrer que f est bijective. Il suffit de montrer l'un des deux.

3 Matrice d'une application linéaire

Théorème

Soient $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\mathbb{K}^p$ et $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de $\mathbb{K}^n$. Il existe une et une seule application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ vérifiant $\forall k \in [\![1, p]\!],\ f(e_k) = u_k$.

Définition

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de $\mathbb{K}^p$ et $\mathscr{C}$ une base de $\mathbb{K}^n$. On définit la **matrice** de f relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ par

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f(e_1), \dots, f(e_p)) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

La **matrice canoniquement associée** est la matrice relativement aux bases canoniques.

Définition

Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'**application linéaire canoniquement associée** à M est l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ dont la matrice canoniquement associée est M.

Propriétés matricielles des opérations sur les applications linéaires

Soient $\mathscr{B}$ une base de $\mathbb{K}^p$, $\mathscr{C}$ une base de $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{D}$ une base de $\mathbb{K}^q$.

- Si $u \in \mathbb{K}^p$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.
- Si $f, g \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda f) = \lambda\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f+g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g).$$
- Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^q)$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^n)$, alors
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{D},\mathscr{C}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(f).$$
- Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, alors f est bijective si et seulement si : $p = n$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible. Dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f))^{-1}$.

4 Rang d'une application linéaire

Dans toute cette partie f désignera une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.

Définition

Le **rang** de f, noté $\mathrm{rg}\, f$, est la dimension de $\mathrm{Im}\, f$.

Propriétés du rang

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de $\mathbb{K}^p$ et $\mathscr{C}$ une base de $\mathbb{K}^n$.

- On a $\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}(f(e_1), \dots, f(e_p)) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f))$
- L'application f est surjective si et seulement si $\mathrm{rg}\, f = n$
- L'application f est injective si et seulement si $\mathrm{rg}\, f = p$.

Les méthodes à maîtriser

Méthode 17.1 : Montrer qu'une application est linéaire

Pour montrer qu'une application est linéaire on se sert du critère linéarité. On prend deux vecteurs u et v et λ scalaire et on montre que $f(\lambda u+v)=\lambda f(u)+f(v)$.

Exemple d'application

Montrer que $\boldsymbol{f :} \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \boldsymbol{(x,y,z)} & \mapsto & \boldsymbol{(x+y+2z, x+2y+3z, x-y)} \end{array}$

est une application linéaire.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $u=(x,y,z)$ et $v=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda u+v) & = & f(\lambda x+a, \lambda y+b, \lambda z+c) \\ & = & \big(\lambda x+a+\lambda y+b+2(\lambda z+c), \\ & & \lambda x+a+2(\lambda y+b)+3(\lambda z+c), \\ & & \lambda x+a-(\lambda y+b)\big) \\ & = & \lambda(x+y+2z, x+2y+3z, x-y)+(a+b+2c, a+2b+3c, a-b) \\ & = & \lambda f(x,y,z)+f(a,b,c). \end{array}$$

Ainsi, $f(\lambda u+v)=\lambda f(u)+f(v)$ et on conclut que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Voir exercices **17.1** et **17.8**.

Méthode 17.2 : Déterminer le noyau d'une application linéaire

Pour déterminer le noyau d'une application linéaire f, il suffit de résoudre, à l'aide d'un système d'équations linéaires, l'équation $f(u)=0$ (d'inconnue u). Le système en résultant étant codé par la matrice de f relativement aux bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée, on peut directement pivoter sur cette matrice.

Exemple d'application

Déterminer le noyau de $\boldsymbol{f :} \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \boldsymbol{(x,y,z)} & \mapsto & \boldsymbol{(x+y+2z, x+2y+3z, x-y).} \end{array}$

On code directement le système que l'on obtient pour avoir

$$(x,y,z)\in\ker f \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \underset{L_3\leftarrow L_3+2L_2}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $(x,y,z)\in\ker f$ si et seulement si $y=-z$ et $x=-z$. On en déduit donc que

$$\ker f=\{(-z,-z,z)\ /\ z\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}\left((-1,-1,1)\right).$$

Voir exercices **17.2**, **17.4**, **17.5**, **17.6** et **17.8**.

Méthode 17.3 : Déterminer une base de l'image d'une application linéaire.

Pour déterminer une base de l'image d'une application linéaire f de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$, on commence par choisir une base de $\mathbb{K}^p$ (en général la base canonique) $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$. On utilise ensuite le fait que la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$. Il suffit ensuite d'extraire une base de cette famille génératrice (cf. méthode **16.7**). Le système sur lequel on finit par pivoter est codé par la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ choisie au départ. On pourra donc reprendre les calculs éventuellement effectués pour déterminer le noyau de f.

Exemple d'application

Déterminer une base de l'image de f : $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x+y+2z, x+2y+3z, x-y). \end{array}$

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. En codant directement, on obtient

$$\lambda f(e_1) + \mu f(e_2) + \eta f(e_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{cf. } \ker f}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda = -\eta \\ \mu = -\eta. \end{cases}$$

Ainsi $(\lambda, \mu, \eta) = (-1, -1, 1)$ est solution du système, donc

$$(-1)f(e_1) + (-1)f(e_2) + f(e_3) = 0,$$

c'est-à-dire $f(e_3) = f(e_1) + f(e_2) \in \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2))$.
On en déduit que

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2)).$$

De plus, en reprenant le même système avec $\eta = 0$, on obtient que

$$\lambda f(e_1) + \mu f(e_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0.$$

On en déduit donc que la famille $(f(e_1), f(e_2))$ est libre.
La famille $(f(e_1), f(e_2))$ est donc libre et génératrice de $\operatorname{Im} f$. En explicitant ces deux vecteurs, on obtient donc que la famille $((1,1,1), (1,2,-1))$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

Voir exercices **17.2** et **17.7**.

Interro de cours

1. Donner la définition d'une application linéaire et la définition d'un endomorphisme.

2. Montrer que $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$ est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}^2$.

3. Soit $v = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & u \cdot v \text{ (produit scalaire)} \end{array}$$

est une application linéaire et déterminer son noyau. Que représente géométriquement $\ker f$?

4. Soit l'application linéaire

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z,\ x-y+z,\ x+y-z,\ -x+y+z). \end{array}$$

(a) Déterminer la matrice canoniquement associée à f.

(b) Déterminer le rang de f.

5. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $f(1,-1,1)$.

6. Soient $\mathscr{B}$ une base de $\mathbb{K}^p$ et $\mathscr{C}$ une base de $\mathbb{K}^n$.
Parmi les propositions suivantes lesquelles sont toujours vraies ?

(a) Si $f, g \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f+g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g)$

(b) Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^q)$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^n)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$

(c) Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ est bijective, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f))^{-1}$

(d) Si $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{K}^p$ et $\mathscr{C}'$ une base de $\mathbb{K}^n$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$.

Exercices

Pour s'entraîner

Exercice 17.1

Les application suivantes sont-elles linéaires ?

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (xz, x-y) \end{array}$
2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x, x-y) \end{array}$
3. $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x, x+z+3) \end{array}$
4. $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, y+z, z^2). \end{array}$

Exercice 17.2

Déterminer la matrice canoniquement associée, le noyau, le rang et une base de l'image des applications linéaires suivantes.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$
2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x, x+z) \end{array}$
3. $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, x+y+z, x+y-z) \end{array}$
4. $v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y, x+2y). \end{array}$

Exercice 17.3

Déterminer les applications linéaires canoniquement associées aux matrices suivantes.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 4 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}$.

Pour aller plus loin

Exercice 17.4

Si f est un endomorphisme, on note $f^2 = f \circ f$ et $f^3 = f \circ f \circ f$.

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.
   - **a.** Déterminer une base ainsi que la dimension de $\ker f$ et de $\ker(f^2)$.
   - **b.** Déterminer $\ker(f^3)$.
   - **c.** Que remarque-t-on ?
2. Si f est un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$, montrer que $\{0\} \subset \ker f \subset \ker(f^2) \subset \ker(f^3)$.
3. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ tel que les inclusions $\{0\} \subset \ker f \subset \ker(f^2) \subset \ker(f^3)$ sont strictes. Déterminer f^3.

Exercice 17.5

Soient f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathscr{C} = (u_1, u_2, u_3)$ la famille définie par

$$u_1 = (1,1,1), \quad u_2 = (1,-1,0) \quad \text{et} \quad u_3 = (1,0,1).$$

1. Montrer que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{K}^3$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{C}$.
3. En déduire une base de $\ker f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 17.6

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé à

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le noyau de f.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que f soit bijective.
3. Montrer que $f^3 + af^2 + bf + c\,\mathrm{Id} = 0$.
(On pourra calculer les images par f des vecteurs de la base canonique).
4. Lorsque M est inversible, en déduire une expression de M^{-1} en fonction de M.

Exercice 17.7

Soient $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ de rang 1 et M sa matrice relativement à des bases de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$. Montrer que toutes les colonnes de M sont proportionnelles entre elles.

Exercice 17.8

Soient $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2z, -x-y-z, x+2y). \end{array}$

1. **a.** Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa matrice relativement à $\mathscr{B}$.
b. Déterminer une base du noyau de f (on la notera (u_2)), puis le rang de f.
c. Déterminer toutes les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ telles que $f - \lambda\,\mathrm{Id}$ n'est pas bijective. On les notera λ_1, λ_2 et λ_3 (avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$).
d. Déterminer une base de $\ker(f - \lambda_1\,\mathrm{Id})$ (on la notera (u_1)) puis une base de $\ker(f - \lambda_3\,\mathrm{Id})$ (on la notera (u_3)).
e. Montrer que $\mathscr{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. On cherche à déterminer tous les endomorphismes g de $\mathbb{R}^3$ tels que $g^2 = f$ (où $g^2 = g \circ g$). On suppose qu'il existe un tel endomorphisme g.
a. Montrer que f et g commutent (c'est-à-dire $f \circ g = g \circ f$).
b. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que $g\big(\ker(f - \lambda\,\mathrm{Id})\big) \subset \ker(f - \lambda\,\mathrm{Id})$.
c. En déduire que la matrice de g relativement à la base $\mathscr{C}$ est diagonale.
d. Conclure.

Corrections

Interro de cours

1. Une application linéaire f de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ est une application de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ vérifiant

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in \mathbb{K}^p,\ f(\lambda u) = \lambda f(u) \quad \text{et} \quad f(u+v) = f(u) + f(v).$$

Un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ est une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^n$.

2. Soient $u = (x,y), v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\lambda u + v = (\lambda x + a, \lambda y + b)$, donc

$$f(\lambda u + v) = (\lambda x + a + \lambda y + b, \lambda x + a - \lambda y - b) = \lambda(x+y, x-y) + (a+b, a-b) = \lambda f(u) + f(v).$$

Ainsi f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. L'ensemble de départ et d'arrivée étant identiques, on peut donc dire que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

3. Soient $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$f(\lambda u_1 + u_2) = (\lambda u_1 + u_2) \cdot v = \lambda u_1 \cdot v + u_2 \cdot v = \lambda f(u_1) + f(u_2).$$

Ainsi f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.
De plus $u \in \ker f$ si et seulement si $u \cdot v = 0$.
On en conclut que $\ker f$ représente l'ensemble des vecteurs orthogonaux à v.

4. **(a)** Si on note $\mathscr{B}_3$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}_4$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on obtient

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_4}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) On utilise la matrice de f déterminée à la question précédente. On a

$$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 + L_2 + L_3}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

5. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et $u = (1,-1,1)$. On a

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f(u)) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

On en conclut que $f(1,-1,1) = (1,-1,-6)$.

6. **(a)** **Vrai.** Cf. cours

(b) **Faux.** Il faut bien faire attention aux bases avec lesquelles on définit les matrices. Si on note $\mathscr{D}$ une base de $\mathbb{K}^q$, la bonne formule est $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g \circ f) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{D},\mathscr{C}}(g) \times \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(f)$.

(c) **Faux.** Il faut encore une fois faire attention aux bases. En considérant f^{-1}, on inverse l'ensemble de départ et celui d'arrivée, il faut donc faire de même avec les bases utilisées. la formule correcte est $\operatorname{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1}) = \left(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\right)^{-1}$.

(d) **Faux.** Soient f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x,y) = (x+y, x-y)$, $\mathscr{B} = ((1,0),(0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathscr{B}' = ((1,1),(1,-1))$ une base de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{C} = \mathscr{C}' = \mathscr{B}$.
On a $f(1,1) = (2,0) = 2(1,0) + 0(0,1)$ et $f(1,-1) = (0,2) = 0(1,0) + 2(0,1)$.
Ainsi $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.

Exercice 17.1

1. **Non.** On pose $u = (1,0,0)$ et $v = (0,0,1)$. On a $f(u) + f(v) = (0,1) + (0,0) = (0,1)$ et $f(u+v) = f(1,0,1) = (1,1) \neq f(u+v)$. Donc f n'est pas une application linéaire.
2. **Oui.** Soient $u = (x,y)$, $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
$$f(\lambda u + v) = (\lambda x + a, \lambda x + a - \lambda y - b) = \lambda(x, x-y) + (a, a-b) = \lambda f(u) + f(v).$$
Ainsi f est une application linéaire.
3. **Non.** On a $f(0,0,0) = (0,3) \neq (0,0)$. Donc f n'est pas une application linéaire.
4. **Non.** On pose $u = (0,0,1)$. On a $f(u) = (0,1,1)$ et $f(2u) = f(0,0,2) = (0,2,4) \neq 2f(u)$. Donc f n'est pas une application linéaire.

Exercice 17.2

On note $\mathscr{B}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{B}_3$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. On a $\mathrm{Mat}_{B_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 \\ 0 & \boxed{-2} \end{pmatrix} = 2.$
Ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f)$ est inversible et f est bijectif. On en conclut que $\ker f = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$, donc que $\mathscr{B}_2$ est une base de $\mathrm{Im}\, f$.
2. On a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_2}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} = 2.$
On a $\mathrm{rg}(g) = \dim(\mathbb{R}^2)$, donc g est surjective et $\mathrm{Im}\, g = \mathbb{R}^2$. Pour le noyau :
$$(x,y,z) \in \ker g \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = z = 0.$$
Ainsi $\ker g = \{(0,y,0) \ / \ y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\left((0,1,0)\right)$. Le vecteur $(0,1,0)$ étant non nul, il forme une base de $\ker g$.
3. On a $\mathrm{Mat}_{B_3}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et
$$\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$
Pour le noyau, en reprenant les mêmes calculs par pivot que pour le rang, on obtient
$$(x,y,z) \in \ker u \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$
Donc $\ker u = \{(-y,y,0) \ / \ y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\left((-1,1,0)\right)$. Le vecteur $(-1,1,0)$ étant non nul, il forme une base de $\ker u$.
Ensuite, $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}\left(u(1,0,0), u(0,1,0), u(0,0,1)\right) = \mathrm{Vect}\left((1,1,1),(1,1,1),(0,1,-1)\right) = \mathrm{Vect}\left((1,1,1),(0,1,-1)\right).$
Or les deux vecteurs $(1,1,1)$ $(0,1,-1)$ ne sont pas colinéaires, donc ils forment une base de $\mathrm{Im}\, u$.

4. On a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et

$$\mathrm{rg}(v) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

On a $\mathrm{rg}(v) = \dim(\mathbb{R}^2)$, donc v est injective et $\ker v = \{0\}$.
Ensuite $\mathrm{Im}\, v = \mathrm{Vect}\,(v(1,0), v(0,1)) = \mathrm{Vect}\,((1,1,1),(1,-1,2))$. Or les deux vecteurs $(1,1,1)$ et $(1,-1,2)$ ne sont pas colinéaires, donc ils forment une base de $\mathrm{Im}\, v$.

Exercice 17.3

1. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \to & \mathbb{K}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (z,y,x) \end{array}$

2. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{K}^4 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, -x+y, 2x+3y, x) \end{array}$

3. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \to & \mathbb{K}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (y+z, x+y+2z, 2x+y+z) \end{array}$

4. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^4 & \to & \mathbb{K}^2 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x+3z+5t, 4x+8y+9z+8t). \end{array}$

Exercice 17.4

1. a. • On a

$$(x,y,z) \in \ker f \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = 0. \end{cases}$$

Donc $\ker f = \mathrm{Vect}\,((-2,1,0))$ avec $(-2,1,0)$ non nul.
On en conclut que $((-2,1,0))$ est une base de $\ker f$ et que $\dim(\ker f) = 1$.

• Après calcul, on a $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi

$$(x,y,z) \in \ker(f^2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -2y - z.$$

Donc $\ker(f^2) = \{(-2y-z, y, z) \ / \ y, z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,((-2,1,0),(-1,0,1))$ avec les deux vecteurs $(-2,1,0)$ et $(-1,0,1)$ non colinéaires.
On en conclut que $((-2,1,0),(-1,0,1))$ est une base de $\ker(f^2)$ et que $\dim(\ker(f^2)) = 2$.

b. Après calcul, on a $M^3 = 0$, donc $f^3 = 0$ et $\ker(f^3) = \mathbb{R}^3$.

c. On remarque que $\ker f \subset \ker(f^2) \subset \ker(f^3)$.

2. On démontre chacune des inclusions.

• L'ensemble $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, il contient donc 0. D'où $\{0\} \subset \ker f$.

- Si $x \in \ker f$, alors $f(x) = 0$ puis $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$. Donc $x \in \ker(f^2)$.
  On en conclut que $\ker f \subset \ker(f^2)$.
- On montre exactement de la même manière que $\ker(f^2) \subset \ker(f^3)$.

3. Si les inclusions sont strictes, alors $\dim(\{0\}) < \dim(\ker f) < \dim(\ker(f^2)) < \dim(\ker(f^3))$. On en déduit que $\dim(\ker(f^3)) \geq 3$. Or $\ker(f^3)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, donc $\dim(\ker(f^3)) \leq 3$. Alors $\dim(\ker(f^3)) = 3$.
Ainsi $\ker(f^3)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et $\dim(\ker(f^3)) = \dim(\mathbb{R}^3)$, d'où $\ker(f^3) = \mathbb{R}^3$. On en conclut que $f^3 = 0$.

Exercice 17.5

1. Soient $\lambda, \mu, \eta \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda u_1 + \mu u_2 + \eta u_3 = 0$. On obtient le système linéaire homogène

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftrightarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = \mu = \eta = 0.$$

Ainsi la famille $\mathscr{C}$ est une famille libre composée de trois éléments dans un espace vectoriel de dimension 3. Alors $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. On calcule les images de u_1, u_2 et u_3 par f et on les exprime en fonction de u_1, u_2 et u_3 : $f(u_1) = (1,1,1) = 1u_1 + 0u_2 + 0u_3$, $f(u_2) = (2,-2,0) = 0u_1 + 2u_2 + 0u_3$ et $f(u_3) = (0,0,0)$. Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.
- La famille $\mathscr{C}$ étant une base de $\mathbb{R}^3$, on a

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(u_1), f(u_2), f(u_3)) = \mathrm{Vect}\,(u_1, 2u_2, 0) = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2)\,.$$

  Or les deux vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, donc la famille (u_1, u_2) est libre.
  On en conclut que (u_1, u_2) est une base de $\mathrm{Im}\, f$.
- Soient $v \in \mathbb{R}^3$ et λ, μ, η les coordonnées de v dans la base $\mathscr{C}$. On a

$$v \in \ker f \Leftrightarrow f(\lambda u_1 + \mu u_2 + \eta u_3) = 0 \Leftrightarrow \lambda u_1 + 2\mu u_2 = 0 \underset{(u_1,u_2)\text{ libre}}{\Leftrightarrow} \lambda = \mu = 0 \Leftrightarrow v = \eta u_3.$$

  On en déduit que $\ker f = \mathrm{Vect}\,(u_3)$.
  Or le vecteur u_3 est non nul.
  On en conclut que (u_3) est une base de $\ker f$.

Exercice 17.6

1. On a $(x,y,z) \in \ker f \Leftrightarrow \begin{cases} cz &= 0 \\ x &= bz \\ y &= az \end{cases}$. On distingue donc deux cas.

- Si $c \neq 0$, alors $\ker f = \{0\}$.
- Si $c = 0$, alors $\ker f = \{(bz, az, z) \ / \ z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,((b, a, 1))$.

2. Comme f est un endomorphisme de $\mathbb{K}^3$, alors :

$$f \text{ bijective} \Leftrightarrow f \text{ injective} \Leftrightarrow \ker f = \{0\}.$$

On en conclut, d'après la question précédente, que : f est bijective si et seulement si $c \neq 0$.

3. On note e_1, e_2 et e_3 les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^3$.
On a $f(e_1) = (0,1,0) = e_2$, $f^2(e_1) = f(f(e_1)) = f(e_2) = (0,0,1) = e_3$ et

$$f^3(e_1) = f(f^2(e_1)) = f(e_3) = (-c,-b,-a) = -ce_1 - be_2 - ae_3 = -c\,\mathrm{Id}(e_1) - bf(e_1) - af^2(e_1).$$

On en déduit

$$f^3(e_1) + af^2(e_1) + bf(e_1) + c\,\mathrm{Id}(e_1) = 0. \qquad (*)$$

Si on applique f à l'égalité $(*)$, comme $f(e_1) = e_2$, on obtient

$$f^3(e_2) + af^2(e_2) + bf(e_2) + c\,\mathrm{Id}(e_2) = 0$$

et si on applique une nouvelle fois f à cette égalité, comme $f(e_2) = e_3$, on obtient

$$f^3(e_3) + af^2(e_3) + bf(e_3) + c\,\mathrm{Id}(e_3) = 0.$$

Or une application linéaire est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base.
On en conclut que $f^3 + af^2 + bf + c\,\mathrm{Id} = 0$.

4. Si M est inversible, c'est-à-dire si $c \neq 0$, on traduit matriciellement le résultat démontré à la question précédente : $M^3 + aM^2 + bM + cI_3 = 0$.
On obtient donc que $I_3 = -\dfrac{1}{c}\left(M^3 + aM^2 + bM\right)$ car $c \neq 0$. En multipliant par M^{-1}, on en conclut que

$$M^{-1} = -\frac{1}{c}\left(M^2 + aM + bI_3\right).$$

Exercice 17.7

On note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ la base de $\mathbb{K}^p$ et $\mathscr{C}$ la base de $\mathbb{K}^n$ telles que $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.
Pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, on note C_j la $j^{\text{ème}}$ colonne de M et on a $C_j = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f(e_j))$.
Comme f est de rang 1, on dispose de $u \in \mathbb{K}^n$ tel que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\,(u)$.
Soit $j \in [\![1,p]\!]$. On a $f(e_j) \in \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\,(u)$, donc on dispose de $\lambda_j \in \mathbb{K}$ tel que $f(e_j) = \lambda_j u_j$. Donc $C_j = \lambda_j\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u)$. Ainsi toutes les colonnes de M sont proportionnelles à $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) \neq 0$.
On en conclut que toutes les colonnes de M sont proportionnelles entre elles.

Exercice 17.8

1. a. Soient $(x,y,z), (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
f\big(\lambda(x,y,z) + (a,b,c)\big) &= f\big(\lambda x + a, \lambda y + b, \lambda z + c\big) \\
&= \Big(\lambda x + a + 2(\lambda z + c), -(\lambda x + a) - (\lambda y + b) - (\lambda z + c), \\
&\qquad \lambda x + a + 2(\lambda y + b)\Big) \\
&= \lambda(x + 2z, -x - y - z, x + 2y) + (a + 2c, -a - b - c, a + 2c) \\
&= \lambda f(x,y,z) + f(a,b,c).
\end{aligned}$$

Donc f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, alors c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Et de plus $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}$

b. On résout l'équation $f(x,y,z)=(0,0,0)$ qui est équivalente au système homogène codé par la matrice ci-dessus. Donc

$$(x,y,z)\in\ker f \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&2\\-1&-1&-1\\1&2&0\end{pmatrix} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\0&2&-2\end{pmatrix} \underset{L_3\leftarrow L_3+2L_2}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

On décode pour obtenir

$$(x,y,z)\in\ker f \Leftrightarrow \begin{cases}x \quad\quad + 2z = 0\\ \quad - y + \ z = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -2z\\ y = \ z.\end{cases}$$

Ainsi $\ker f = \{(-2z,z,z)\ /\ z\in\mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}((-2,1,1))$. On notera donc $\boxed{u_2=(-2,1,1)}$

On reprend les mêmes opérations effectuées sur le système pour obtenir que

$$\operatorname{rg}(f)=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&-1&-1\\1&2&0\end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=2.$$

c. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. On calcule $\operatorname{rg}(f-\lambda\operatorname{Id})$ en utilisant les matrices

$$\operatorname{rg}(f-\lambda\operatorname{Id})=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1-\lambda&0&2\\-1&-1-\lambda&-1\\1&2&-\lambda\end{pmatrix} \underset{\substack{L_1\leftrightarrow L_3\\L_2\leftarrow L_2+L_1\\L_3\leftarrow L_3-(1-\lambda)L_1}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&2&-\lambda\\0&1-\lambda&-1-\lambda\\0&2\lambda-2&-\lambda^2+\lambda+2\end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3+2L_2}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&2&-\lambda\\0&1-\lambda&-1-\lambda\\0&0&-\lambda^2-\lambda\end{pmatrix}.$$

Comme $f-\lambda\operatorname{Id}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, il n'est pas bijectif si et seulement si $\operatorname{rg}(f-\lambda\operatorname{Id})<3$, ce qui est le cas si et seulement si : $1-\lambda=0$ ou $\lambda^2+\lambda=0$.

On obtient donc les trois valeurs $\boxed{\lambda_1=-1,\ \lambda_2=0 \text{ et } \lambda_3=1}$

d. On réutilise le calcul fait à la question précédente pour obtenir, avec $\lambda=-1$,

$$(x,y,z)\in\ker(f+\operatorname{Id}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

On décode et on obtient que $(f+\operatorname{Id})(x,y,z)=(0,0,0)\Leftrightarrow x=-z$ et $y=0$.

Ainsi $\ker(f+\operatorname{Id})=\{(-z,0,z)\ /\ z\in\mathbb{R}\}=\operatorname{Vect}((-1,0,1))$ et $\boxed{u_1=(-1,0,1)}$

On procède de même avec $\lambda=1$ pour obtenir,

$$(x,y,z)\in\ker(f-\operatorname{Id}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&2&-1\\0&0&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

On décode et on obtient que $(f-\operatorname{Id})(x,y,z)=(0,0,0)\Leftrightarrow x=-2y$ et $z=0$.

Ainsi $\ker(f-\operatorname{Id})=\{(-2y,y,0)\ /\ y\in\mathbb{R}\}=\operatorname{Vect}((-2,1,0))$ et $\boxed{u_3=(-2,1,0)}$

e. Après résolution d'un système, on a $\lambda u_1+\mu u_2+\eta u_3=0\Rightarrow\lambda=\mu=\eta=0$.

Donc $\mathscr{C}$ est une famille libre de $\mathbb{K}^3$ telle que $\operatorname{Card}(\mathscr{C})=\dim(\mathbb{K}^3)$. Alors $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

De plus $f(u_1)=-u_1$, $f(u_2)=0$ et $f(u_3)=u_3$, d'où

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(f)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

2. On cherche à déterminer tous les endomorphismes g de $\mathbb{R}^3$ tels que $g^2 = f$ (où $g^2 = g \circ g$). On suppose qu'il existe un tel endomorphisme g.

a. On a $f \circ g = g^2 \circ g = g^3 = g \circ g^2 = g \circ f$.

b. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y \in g\big(\ker(f - \lambda\,\mathrm{Id})\big)$. On dispose de $x \in \ker(f - \lambda\,\mathrm{Id})$ tel que $y = g(x)$ et

$$(f - \lambda\,\mathrm{Id})(y) = f \circ g(x) - \lambda g(x) = g(f(x)) - g(\lambda x) = g(f(x) - \lambda x) = g(0) = 0.$$

Donc $y \in \ker(f - \lambda\,\mathrm{Id})$.
Ainsi $g\big(\ker(f - \lambda\,\mathrm{Id})\big) \subset \ker(f - \lambda\,\mathrm{Id})$.

c. On a $u_1 \in \ker(f + \mathrm{Id})$, donc $g(u_1) \in \ker(f + \mathrm{Id})$ d'après la question précédente.
Or $\ker(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\,(u_1)$. Alors, il existe $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ tel que $g(u_1) = \alpha_1 u_1$.
De même il existe $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que $g(u_2) = \alpha_2 u_2$ et $g(u_3) = \alpha_3 u_3$.
On en conclut que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(g) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

d. Si g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2 = f$, alors il existe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(g) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(g^2) = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3^2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\alpha_1^2 = -1$ avec $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ ce qui est impossible.
Alors il n'y a aucun endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donc le carré est égal à f.

Partie 5

Analyse réelle

CHAPITRE 18

Suites réelles

L'essentiel du cours

1 Généralités

Définition

Une **suite réelle** est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On note u_n l'image de n par cette suite (et non $u(n)$ comme on le note classiquement pour une application) et on l'appelle le **terme général** de la suite. On note u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera plus simplement (u_n) au lieu de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Il ne faut pas confondre (u_n) qui est la suite et u_n qui est le terme général de la suite (c'est un nombre). Il s'agit de la même différence qu'il y a entre f et $f(x)$.

Définition

Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit les opérations suivantes sur les suites :

$$\lambda(u_n)+(v_n) = (\lambda u_n+v_n), \quad (u_n)(v_n) = (u_n v_n) \quad \text{et} \quad \text{si } \forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0, \text{ alors } \frac{(u_n)}{(v_n)} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right).$$

Définition

On dit qu'une suite réelle (u_n) est

- **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$. Un tel réel M est appelé un **majorant** de la suite (u_n).
- **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$. Un tel réel m est appelé un **minorant** de la suite (u_n).
- **bornée** si elle est majorée et minorée.

Caractérisation des suites bornées

La suite (u_n) est bornée si et seulement si $(|u_n|)$ est majorée, c'est-à-dire

$$\exists K \geq 0, \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq K.$$

Définition

On dit qu'une suite réelle (u_n) est
- **croissante** (resp. **strictement croissante**) si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n < u_{n+1}$).
- **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_{n+1}$ (resp. $u_n > u_{n+1}$).
- **monotone** (resp. **strictement monotone**) si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

2 Suites usuelles

Définition

Une suite réelle (u_n) est une **suite arithmétique** de raison $r \in \mathbb{R}$ si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Propriétés des suites arithmétiques

Soient n, $p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$, $r \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite arithmétique de raison r. On a

$$u_n = u_0 + nr \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$$

$$u_n = u_p + (n-p)r \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{(u_p + u_n)(n-p+1)}{2}.$$

Définition

Une suite réelle (u_n) est une **suite géométrique** de raison $q \in \mathbb{R}$ si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q\, u_n$.

Propriétés des suites géométriques

Soient n, $p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$, $q \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ et (u_n) une suite géométrique de raison q. On a

$$u_n = u_0 q^n \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$u_n = u_p q^{n-p} \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.$$

Définition

Une suite réelle (u_n) est une **suite arithmético-géométrique** s'il existe a et $b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$

On peut déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique en utilisant les propriétés des suites géométriques (cf. méthode **18.3**).

Définition

Une suite (u_n) est une **suite récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe a et $b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On appelle alors **équation caractéristique** de (u_n) l'équation $r^2 = ar + b$, d'inconnue r.

Propriétés des suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ et (u_n) une suite réelle vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. On note r_1 et $r_2 \in \mathbb{C}$ les solutions de l'équation caractéristique de (u_n) et Δ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$ (ie $r_1 \neq r_2$ réels), alors il existe λ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$
- Si $\Delta = 0$ (ie $r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$), alors il existe λ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n) r_1^n.$$
- Si $\Delta < 0$ (ie $\overline{r_2} = r_1 = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$), alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \rho^n \left(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\right).$$

3 Notion de limite

Définition

La suite réelle (u_n) **converge** vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$, ce que l'on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

La suite (u_n) **diverge** si elle ne converge vers aucun réel.

Définition

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que

- (u_n) **diverge vers $+\infty$**, ce que l'on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, si
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ u_n \geq A$$
- (u_n) **diverge vers $-\infty$**, ce que l'on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, si
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ u_n \leq A.$$

On pourra plus simplement dire que (u_n) tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, plutôt que diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Unicité de la limite

Si une suite réelle admet une limite (finie ou infinie), alors cette limite est unique.

Si une suite réelle (u_n) admet une limite, étant unique, on la note $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$.

Proposition

Toute suite convergente est bornée.

Opérations sur les limites

Soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ et $(u_n), (v_n)$ des suites réelles. On a les opérations suivantes sur les limites

$u_n + v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

$u_n v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \neq 0$	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell' \neq 0$	$\ell\ell'$	0	∞
0	0	0	FI
∞	∞	FI	∞

$\dfrac{u_n}{v_n}$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \neq 0$	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell' \neq 0$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	∞
0	∞	FI	∞
∞	0	0	FI

- FI est l'acronyme de « Forme Indéterminée ». Cela signifie qu'il n'est pas toujours suffisant de connaître les limites de (u_n) et (v_n) pour trouver la limite de leur somme, produit ou quotient (il faudra donc modifier l'expression).
- Pour le produit et le quotient, il suffit de suivre la règle des signes sur les produits et les quotients pour déterminer si on obtient $+\infty$ ou $-\infty$ comme limite finale.

Proposition

Soit (u_n) une suite réelle admettant une limite ℓ (finie ou infinie).
- Si $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, c'est-à-dire $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ u_n > 0$.
- Si $\ell < 0$, alors $u_n < 0$ à partir d'un certain rang, c'est-à-dire $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ u_n < 0$.

Passage à la limite dans les inégalités

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles admettant respectivement pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$. Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$, alors $\ell \leq \ell'$.

Ceci ne fonctionne qu'avec des inégalités larges. Si à partir d'un certain rang $u_n < v_n$, on ne peut en conclure que l'inégalité $\ell \leq \ell'$ (on perd le côté strict de l'inégalité). On dit que le passage à la limite élargit les inégalités (elle les rend larges peu importe comment elles étaient avant le passage à la limite).

4 Théorèmes de convergence

Composition des limites

Soient (u_n) une suite réelle, f une fonction définie sur un intervalle I, $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}$. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$, alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$.

Ce résultat reste vrai si a et/ou b sont $+\infty$ ou $-\infty$.

Théorème de la limite monotone

- Si (u_n) est une suite réelle croissante majorée alors elle converge.
- Si (u_n) est une suite réelle croissante non majorée elle diverge vers $+\infty$.
- Si (u_n) est une suite réelle décroissante minorée alors elle converge.
- Si (u_n) est une suite réelle décroissante non minorée alors elle diverge vers $-\infty$.

Ce théorème peut se résumer, de manière un peu moins précise, en « Toute suite réelle monotone admet une limite (finie ou infinie) ».

Théorème d'encadrement (ou des gendarmes)

Soient (u_n), (v_n), (w_n) trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$. Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors (v_n) converge vers ℓ.

Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$.
- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

Théorème

Une suite réelle (u_n) admet une limite ℓ (finie ou infinie) si et seulement si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) admettent ℓ comme limite.

Ce théorème a deux principales utilisations :

- Il permet de montrer que (u_n) admet une limite : s'il est plus simple d'étudier (u_{2n}) et (u_{2n+1}) que la suite de départ (comme dans la méthode **18.7**), on peut déterminer leurs limites respectives et si on obtient les mêmes on peut conclure avec le théorème.
- Il permet de montrer que (u_n) n'a pas de limite : si on arrive à montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) n'ont pas la même limite, on peut directement en déduire que (u_n) n'a pas de limite.

Définition

On dit que deux suites sont des **suites adjacentes** si l'une est croissante, l'autre est décroissante et si leur différence converge vers 0.

Théorème des suite adjacentes

Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

5 Relations de comparaison

Dans toute cette partie, (u_n), (v_n), (w_n), (x_n) et (y_n) seront des suites réelles.

Définition

On dit que (u_n) est **négligeable** devant (v_n) s'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et une suite (ε_n), définie à partir de n_0, qui converge vers 0 tels que

$$\forall n \geq n_0,\ u_n = \varepsilon_n v_n.$$

On note $u_n = o(v_n)$ et on le lit « (u_n) est un petit o de (v_n) » .

Théorème

Si, à partir d'un certain rang, (v_n) ne s'annule pas, alors

$$u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Dans la pratique, pour montrer qu'une suite est négligeable devant une autre, on calculera presque tout le temps la limite de leur quotient.

Opérations et négligeabilité

On a les propriétés suivantes sur les opérations avec la négligeabilité :

Hypothèses	Conclusion
$u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$	$u_n + v_n = o(w_n)$
$\lambda \in \mathbb{R}$ et $u_n = o(w_n)$	$\lambda u_n = o(w_n)$
$u_n = o(w_n)$	$u_n v_n = o(w_n v_n)$
$u_n = o(x_n)$ et $v_n = o(y_n)$	$u_n v_n = o(x_n y_n)$
$u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$	$u_n = o(w_n)$

Croissances comparées

On notera, uniquement dans cette proposition, que $u_n \ll v_n$ pour dire que $u_n = o(v_n)$. Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $a > 1$. On a

$$\big(\ln(n)\big)^{\alpha} \ll n^{\beta} \ll a^n \ll n! \ll n^n.$$

Ce résultat s'utilise lorsque l'on rencontre des formes indéterminées pour les calculs de limites. En cas de litige, il faut en retenir que l'exponentielle l'emporte sur la puissance qui l'emporte sur le logarithme.

Définition

On dit que (u_n) est **équivalente** à (v_n) s'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et une suite (a_n), définie à partir de n_0, qui converge vers 1 tels que

$$\forall n \geq n_0,\ u_n = a_n v_n.$$

On note $u_n \sim v_n$.

Si $u_n \sim v_n$, alors $v_n \sim u_n$. On peut donc dire que des suites sont équivalentes.

Théorème

Si, à partir d'un certain rang, (v_n) ne s'annule pas, alors

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Dans la pratique, pour montrer que deux suites sont équivalentes, on calculera presque tout le temps la limite de leur quotient.

Équivalence et signe

Si $u_n \sim v_n$, alors, à partir d'un certain rang, (u_n) et (v_n) sont de même signe.

Équivalence et limite

- Si $u_n \sim v_n$ et si (v_n) admet une limite (finie ou infinie), alors (u_n) admet la même limite.
- Si $\ell \in \mathbb{R}^*$, on a $u_n \sim \ell \Leftrightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Proposition

On a $u_n = o(v_n)$ si et seulement si $u_n + v_n \sim v_n$.

Opérations et équivalence

On a les propriétés suivantes sur les opérations avec l'équivalence :

Hypothèses	Conclusion
$u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$	$u_n \sim w_n$
$u_n \sim x_n$ et $v_n \sim y_n$	$u_n v_n \sim x_n y_n$
$u_n \sim x_n$ et $v_n \sim y_n$ (v_n) et (y_n) ne s'annulent pas	$\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{x_n}{y_n}$
$\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_n \sim v_n$	$u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$

⚠ Il y a trois choses qu'il ne faut absolument pas faire avec des équivalents :

(1) **Ajouter des équivalents**
Il n'y a aucune règle pour traiter la somme d'équivalents si ce n'est de dire que, d'après la proposition ci-dessus, $u_n + v_n \sim v_n$ si $u_n = o(v_n)$.

(2) **Composer des équivalents**
Il n'y a aucune règle permettant de dire que $f(u_n) \sim f(v_n)$ si $u_n \sim v_n$.

(3) **Être équivalent à 0**
Si $u_n \sim 0$, cela revient à dire que la suite (u_n) est nulle à partir d'un certain rang (ce qui n'arrive jamais dans la pratique).

Équivalents usuels

Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$\ln(1+u_n) \sim u_n, \quad e^{u_n} - 1 \sim u_n, \quad \sin(u_n) \sim u_n, \quad \tan(u_n) \sim u_n,$$

$$\cos(u_n) - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2} \quad \text{et} \quad (1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n.$$

Les méthodes à maîtriser

Méthode 18.1 : Déterminer le sens de variation d'une suite

Pour étudier les variations d'une suite (u_n) :
- Si $u_n = f(n)$ (où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$), il suffit d'étudier les variations de f.
- Si (u_n) est définie à l'aide de sommes, on simplifie $u_{n+1} - u_n$ pour déterminer son signe.
- Si (u_n) ne s'annule pas, ne change pas de signe et est définie à l'aide de produits, on simplifie $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour déterminer si ce quotient est plus grand ou plus petit que 1.

Exemple d'application
Déterminer les variations de

$$\textbf{(1) } \boldsymbol{u_n = \frac{e^{-n}}{n+1}} \qquad \textbf{(2) } \boldsymbol{v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}} \qquad \textbf{(3) } \boldsymbol{w_n = \frac{(n+1)!}{2^n}}.$$

(1) En définissant la fonction f sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x+1}$, on obtient que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f(n)$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, par quotient, et $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = -\dfrac{(x+2)e^{-x}}{(x+1)^2} \leq 0$.

Ainsi f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et (u_n) est décroissante.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = -\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} < 0.$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} < v_n$ et la suite (v_n) est strictement décroissante.

(3) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{(n+2)!}{2^{n+1}} \times \dfrac{2^n}{(n+1)!} = \dfrac{n+2}{2} \geq 1$.

Or la suite (w_n) est à termes strictement positifs.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} \geq w_n$ et la suite (w_n) est croissante.

Voir exercices **18.5**, **18.6**, **18.12**, **18.13**, **18.14**, **18.15** et **18.16**.

Méthode 18.2 : Exploiter les équivalents pour un calcul de limite

Pour déterminer la limite d'une suite à l'aide des équivalents, à moins de repérer des simplifications évidentes, on commence par transformer l'expression pour avoir le plus possible des produits, des quotients ou des puissances d'exposant constant. Ensuite on utilise les équivalents usuels et les propriétés de l'équivalence :
- compatibilité avec le produit, le quotient et la puissance d'exposant constant,
- si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n + v_n \sim v_n$.

Si l'expression fait apparaître des composées, on veillera bien à ne pas composer les équivalents, mais à simplement composer les limites.

Exemple d'application

Déterminer les limites de :

(1) $\boldsymbol{u_n = \dfrac{(n^2+\sin(n))(2^n+\ln(n)+2)\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)}{\sqrt{4^n+3^n}}}$

(2) $\boldsymbol{v_n = \dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)} - \dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{1}{n}\right)}}$ **(3)** $\boldsymbol{w_n = \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n.}$

(1) L'expression est déjà factorisée. On cherche un équivalent de chacun des facteurs.

- On a $n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\sin(n)$ bornée, donc $\dfrac{\sin(n)}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\sin(n) = o(n^2)$. Ainsi $n^2+\sin(n) \sim n^2$.
- Par croissances comparées $\ln(n)+2 = o(2^n)$, donc $2^n+\ln(n)+2 \sim 2^n$.
- Comme $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on utilise un équivalent usuel pour obtenir que $1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{2n^2}$.
- Enfin, $3^n = o(4^n)$ car leur quotient vaut $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi $4^n+3^n \sim 4^n$. Grâce à la compatibilité de l'équivalence avec les puissances d'exposant constant, on en déduit que
$$\sqrt{4^n+3^n} = (4^n+3^n)^{\frac{1}{2}} \sim (4^n)^{\frac{1}{2}} = 2^n.$$

Par produits et quotient, $u_n \sim \dfrac{n^2\times 2^n \times \dfrac{1}{2n^2}}{2^n} = \dfrac{1}{2}$. Ainsi $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

(2) On commence par factoriser l'expression (c'est-à-dire réduire au même dénominateur dans notre cas) :
$$v_n = \frac{1}{\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)} - \frac{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)} = \frac{1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)}.$$

Comme $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on peut utiliser les équivalents usuels pour obtenir que $v_n \sim \dfrac{\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{2n}$.
Ainsi $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(3) On est en présence d'une puissance variable, on commence par modifier l'expression pour ne plus avoir que des produits et quotients. Cela revient à mettre sous forme exponentielle ici :
$$w_n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right).$$

On ne peut pas composer des équivalents par la fonction exponentielle. On va donc utiliser les équivalents pour chercher la **limite** de l'expression dans l'exponentielle.
Or $\dfrac{2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right) \sim \dfrac{2}{n}$. Ainsi par produit $n\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right) \sim n\times\dfrac{2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.
Alors, par composition des **limites**, $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^2$.

Voir exercice **18.3**.

Méthode 18.3 : Expliciter une suite arithmético-géométrique

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique définie par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}.$$

Si $a = 1$, la suite est arithmétique.
Si $a \neq 1$, on commence par chercher le réel ℓ vérifiant

$$\ell = a\ell + b.$$

En soustrayant l'égalité ci-dessus à l'égalité exprimant u_{n+1} en fonction de u_n, on montre que la suite $(u_n - \ell)$ est géométrique de raison a. On en déduit l'expression de $u_n - \ell$, puis de u_n.

Exemple d'application

Déterminer le terme général de la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - 4$.

On cherche le réel ℓ tel que $\ell = 3\ell - 4$, c'est $\ell = 2$. En soustrayant l'égalité précédente à l'égalité exprimant u_{n+1} en fonction de u_n, on obtient que

$$u_{n+1} - \ell = 3u_n - 4 - (3\ell - 4) = 3(u_n - \ell).$$

Ainsi la suite $(u_n - \ell)$ est géométrique de raison 3. Donc, si $n \in \mathbb{N}$, $u_n - \ell = 3^n(u_0 - \ell)$.
On conclut que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^n + 2$.

Voir exercices **18.4** et **18.7**.

Méthode 18.4 : Expliciter une suite récurrente linéaire d'ordre 2

Soit (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}.$$

On cherche les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation caractéristique associée $r^2 = ar + b$.
On en déduit une expression de u_n en fonction de deux paramètres réels λ et μ.
Pour finir on utilise les valeurs de u_0 et u_1 pour trouver λ et μ, en résolvant un système.

Exemple d'application

Déterminer le terme général de la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

On considère l'équation caractéristique $r^2 = r + 2$, c'est-à-dire $r^2 - r - 2 = 0$. Son discriminant vaut 9 et ses solutions sont (-1) et 2. On dispose donc de deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n.$$

À l'aide des conditions initiales on obtient les équations : $3 = u_0 = \lambda + \mu$ et $0 = u_1 = -\lambda + 2\mu$.
Après résolution, on obtient que $\lambda = 2$ et $\mu = 1$.
On conclut que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2(-1)^n + 2^n$.

Voir exercices **18.4**, **18.8**, **18.9** et **18.10**.

Méthode 18.5 : Montrer la convergence d'une suite

Pour montrer la convergence d'une suite :

- Dans les cas les plus simples, on peut calculer la limite à l'aide des opérations sur les limites, des équivalents et des croissance comparées.
- Si on est en présence d'un terme qui n'a pas de limite (par exemple $\sin(n)$), on essaye de s'en « débarrasser » à l'aide d'inégalité(s). On conclut ensuite grâce au théorème d'encadrement ou au théorème de comparaison.
- Dans les cas où l'on n'a pas une expression simple de u_n, on commence par déterminer le sens de variation de la suite et une éventuelle majoration ou minoration pour utiliser le théorème de la limite monotone (qui ne donne cependant pas la valeur de la limite).

Exemple d'application

Montrer la convergence des suites :

(1) $\boldsymbol{u_n = \dfrac{2^n}{n!} + n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}$ **(2)** $\boldsymbol{v_n = \dfrac{\sin(n)}{n+1}}$ **(3)** $\boldsymbol{w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^k}}$

(1) Par croissances comparées, on a $\dfrac{2^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Grâce aux équivalents usuels, on a $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim n \times \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Par somme, on conclut que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

(2) On va se « débarrasser » du terme $\sin(n)$ qui n'a pas de limite.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On commence par remarquer que $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ et donc $-\dfrac{1}{n+1} \leq v_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

Or $\dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On conclut donc, par théorème d'encadrement que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(3) On n'a pas une expression assez simple de ,w_n pour chercher la limite par un calcul direct. On commence par déterminer les variations de (w_n). Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} > 0.$$

Ainsi la suite (w_n) est croissante.

On essaye ensuite de majorer la suite en remarquant que, si $k \geq 2$, alors $\dfrac{1}{k^k} \leq \dfrac{1}{2^k}$. On a donc

$$w_n = \frac{1}{0^0} + \frac{1}{1^1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^k} \leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k},$$

puis

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{4} \times \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi (w_n) est croissante et majorée par $2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$, donc elle converge vers une limite $\ell \leq \dfrac{5}{2}$.

Voir exercices **18.1**, **18.2**, **18.3**, **18.11**, **18.12**, **18.13**, **18.14**, **18.15** et **18.16**.

Méthode 18.6 : Étudier une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f croissante

Pour étudier une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue croissante, on peut commencer par représenter la suite au brouillon en traçant la courbe de f et la première bissectrice (c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$). On place u_0 sur l'axe des abscisses et on détermine graphiquement u_1 grâce à la courbe de f. On reporte u_1 sur la première bissectrice pour récupérer u_1 sur l'axe des abscisses afin de pouvoir recommencer le procédé. On peut ainsi conjecturer le comportement de la suite. Pour l'étude théorique :

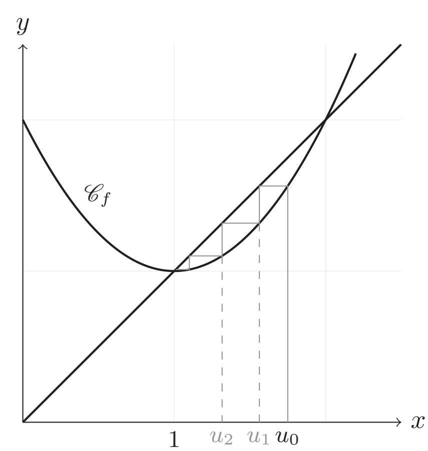
1. On commence par étudier les variations de f et le signe de $g(x) = f(x) - x$ dans un même tableau. On remarquera que les zéros de la fonction g correspondent aux points fixes de f (c'est-à-dire les réels c tels que $f(c) = c$).
2. On repère un intervalle fermé I contenant u_0 et stable par f (c'est-à-dire tel que $f(I) \subset I$). Pour le trouver, il suffit de se servir du tableau précédent et de déterminer deux zéros consécutifs de g encadrant u_0.
3. Une récurrence immédiate donne que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$. En effet $u_0 \in I$ et si $u_n \in I$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in f(I) \subset I$.
4. On utilise ensuite le signe de g sur I pour déterminer le sens de variation de (u_n). En effet, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$. On trouvera que la suite est monotone.
5. Pour finir, il y a deux cas :

- Si la suite (u_n) est croissante et majorée (resp. décroissante et minorée), alors elle converge vers un réel ℓ. Pour déterminer cette limite, on passe à la limite la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour obtenir que $f(\ell) = \ell$ (car f est continue), c'est-à-dire $g(\ell) = 0$. Il suffit donc de se référer au tableau de signe de g pour trouver la limite.
- Sinon, on suppose par l'absurde qu'elle est majorée (resp. minorée). Donc elle converge vers un réel ℓ vérifiant $g(\ell) = 0$. On justifie avec le sens de variation et la valeur de u_0 que c'est impossible. Donc (u_n) est croissante non majorée (resp. décroissante non minorée). Ainsi, d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Exemple d'application
Étudier les suites définies par

(1) $\boldsymbol{u_0 = \frac{7}{4}}$ **et** $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2}$ **(2)** $\boldsymbol{v_0 = \frac{9}{4}}$ **et** $\boldsymbol{v_{n+1} = v_n^2 - 2v_n + 2}$**.**

(1) On représente graphiquement la suite (u_n) ci-contre.



On conjecture qu'elle reste dans le segment $[1, 2]$, qu'elle est décroissante et qu'elle converge vers 1. Sur ce segment la fonction f est bien croissante, on peut donc appliquer la méthode ci-dessus.
Place à l'étude théorique.
On pose les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$

et

$$g(x) = f(x) - x = x^2 - x + 2.$$

Une simple étude de fonction et une simple factorisation de trinôme donnent le tableau suivant

x	$-\infty$		1	u_0	2		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit donc que $[1,2]$ est un intervalle stable par f contenant u_0. Donc, par une récurrence évidente, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1,2]$. De plus, g est négative sur $[1,2]$, donc, si $n \in \mathbb{N}$,

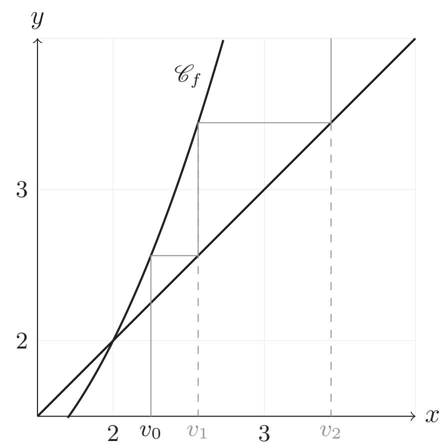
$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \leq 0 \quad \text{car } u_n \in [1,2].$$

Ainsi, (u_n) est décroissante et minorée par 1. Elle converge donc vers une limite $\ell \in [1,2]$. Par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient que $f(\ell) = \ell$ (car f est continue), c'est-à-dire $g(\ell) = 0$. Le tableau de signe de g nous donne que $\ell = 1$ ou $\ell = 2$. Or $u_0 < 2$ et (u_n) est décroissante. La seule valeur possible est donc $\ell = 1$.
Pour conclure, (u_n) est une suite décroissante qui converge vers 1.

(2) On représente graphiquement la suite (v_n) ci-contre.
On conjecture qu'elle reste dans l'intervalle $[2,+\infty[$, qu'elle est croissante et qu'elle diverge vers $+\infty$. Sur cet intervalle la fonction f est bien croissante, on peut donc appliquer la méthode ci-dessus.
Place à l'étude théorique.
On reprend les mêmes notations et le même tableau de variations et signe qu'à la question précédente. On obtient que $[2,+\infty[$ est intervalle stable par f contenant v_0.
Ainsi, par une récurrence évidente,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \in [2,+\infty[.$$

De plus, g est positive sur $[2,+\infty[$, donc, si $n \in \mathbb{N}$,



$$v_{n+1} - v_n = f(v_n) - v_n = g(v_n) \geq 0 \quad \text{car } v_n \in [2,+\infty[.$$

Ainsi, la suite (v_n) est croissante. Si on suppose, par l'absurde, qu'elle est majorée, alors elle convergerait vers une limite $\ell \in [2,+\infty[$. Par passage à la limite dans l'égalité $v_{n+1} = f(v_n)$, on obtient que $f(\ell) = \ell$ (car f est continue), c'est-à-dire $g(\ell) = 0$. Le tableau de signe de g nous donne que $\ell = 2$ (car $\ell \in [2,+\infty[$). Or $v_0 > 2$ et (v_n) est croissante. Donc (v_n) ne peut pas converger vers 2, ce qui est absurde. Alors (v_n) est croissante non majorée, donc elle diverge vers $+\infty$.
Pour conclure, (v_n) est une suite croissante qui diverge vers $+\infty$.

Voir exercice **18.5**.

Méthode 18.7 : Étudier une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f décroissante

Pour étudier une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue décroissante, on peut commencer par tracer la suite au brouillon de la même manière qu'à la méthode **18.6**. Pour l'étude théorique, on commence par trouver un intervalle fermé I contenant u_0 et stable par f (on pourra s'aider de la conjecture graphique ou d'une étude succincte de la fonction f pour le déterminer). Comme f est décroissante sur I, alors, par stabilité de I, $f \circ f$ est croissante sur I. Il suffit donc de considérer les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) qui sont des suites récurrentes via la fonction $f \circ f$ qui est croissante sur I. En effet

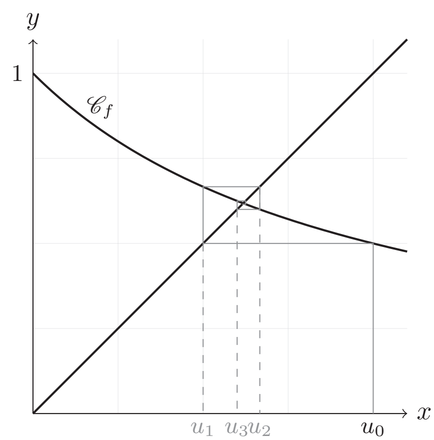
$$u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f \circ f(u_{2n}),$$

et il en va de même pour $u_{2(n+1)+1} = f \circ f(u_{2n+1})$.
On se ramène à appliquer la méthode **18.6** aux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). On trouvera que ces deux suites sont monotones, de monotonies inverses l'une de l'autre. Si elles tendent toutes les deux vers la même limite, alors (u_n) tendra aussi vers cette limite. Sinon, (u_n) n'aura pas de limite.

Exemple d'application
Étudier les suites définies par :

(1) $\boldsymbol{u_0 = 1}$ **et** $\boldsymbol{u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}}$ **(2)** $\boldsymbol{v_0 = 0}$ **et** $\boldsymbol{v_{n+1} = 1 - v_n^2}$**.**

(1) On représente graphiquement la suite (u_n) ci-contre. On conjecture qu'elle reste dans le segment $[0,1]$,qu'elle converge vers un réel (environ $0,61$), que (u_{2n}) est croissante et que (u_{2n+1}) est décroissante.



Place à l'étude théorique. On pose la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$. On commence par remarquer que f est clairement décroissante et que $f(\mathbb{R}_+) =]0,1]$. Ainsi le segment $[0,1]$ est stable par f et contient u_0. De plus

$$f \circ f(x) = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{x+1}} = \frac{x+1}{x+2}$$

et

$$g(x) = f \circ f(x) - x = \frac{-x^2 - x + 1}{x+2}.$$

En étudiant le trinôme au numérateur de g, on obtient que les zéros de g sont

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

On obtient donc le tableau suivant

x	0	u_1	x_2		$u_0 = 1$
$f \circ f$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	x_2	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

On en déduit que $[x_2, 1]$ est un intervalle stable par $f \circ f$ contenant u_0 et que g est négative sur cet intervalle. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \in [x_2, 1]$ et (u_{2n}) est décroissante. Étant minorée par x_2, elle converge vers un réel ℓ vérifiant $g(\ell) = 0$. Il s'ensuit que $\ell = x_2$.
De même, en utilisant l'intervalle $[0, x_2]$, la suite (u_{2n+1}) est croissante majorée par x_2 et converge vers x_2.

On peut donc conclure que (u_n) converge vers $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

(2) En calculant les premiers termes, on remarque que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{2n} = 0 \quad \text{et} \quad v_{2n+1} = 1.$$

On montre ce résultat par une récurrence évidente car $f \circ f(0) = 0$ et $f \circ f(1) = 1$. Ainsi (v_{2n}) converge vers 0, alors que (v_{2n+1}) converge vers 1.
On conclut que (v_n) n'a pas de limite.

Voir exercice **18.5**.

La fonction `terme_suite_rec(a,f,n)` renvoie le terme d'indice n de la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ et la fonction `liste_suite_rec(a,f,n)` renvoie la liste des termes de u_0 à u_n de cette même suite.

```
def terme_suite_rec(a,f,n):
    u = a
    for i in range(n):
        u = f(u)
    return u
```

```
def liste_suite_rec(a,f,n):
    u = [a]
    for i in range(n):
        u += [f(u[i])]
    return u
```

Interro de cours

1. Parmi les énoncés suivant, lesquels sont toujours vrais ?

(a) Si (u_n) converge vers un réel ℓ, alors $u_n = \ell$ à partir d'un certain rang.

(b) Si $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors (u_n) converge.

(c) Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

(d) Si (u_n) est bornée, alors elle converge.

(e) Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes telles que $u_n < v_n$, alors $\lim u_n < \lim v_n$.

(f) Si (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n + v_n)$ diverge forcément.

(g) Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors $(u_n + v_n)$ diverge.

(h) Si (u_n) est monotone, alors elle admet une limite (finie ou infinie).

(i) Si (u_n) est décroissante et minorée par 0, alors elle converge vers 0.

(j) Si (u_n) est bornée et si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(k) Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \geq 0$, alors, à partir d'un certain rang, $u_n \geq 0$.

2. Déterminer le terme général de la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = -u_n + 2$.

3. Citer le théorème d'encadrement.

4. Montrer que si $u_n \sim \alpha w_n$ et $v_n \sim \beta w_n$ avec $\alpha + \beta \neq 0$, alors $u_n + v_n \sim (\alpha + \beta) w_n$.

5. Parmi les énoncés suivant, lesquels sont toujours vrais ?

(a) Si $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $u_n \sim v_n$.

(b) Si $\ell \neq 0$, on a : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \Leftrightarrow u_n \sim \ell$.

(c) On a $u_{n+1} \sim u_n$.

(d) On a $e^n + \cos(n) \sim e^n$.

(e) Si (u_n) et (v_n) sont positives et si $u_n \sim v_n$, alors $\sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}$.

6. Donner la définition de deux suites adjacentes.

Exercices

Pour s'entraîner

Exercice 18.1

Déterminer la limite des suites suivantes

1. $u_n = \dfrac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}$

2. $u_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}$

3. $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n + \ln(n^3)}$

4. $u_n = \sqrt[n]{n^2}$

5. $u_n = \dfrac{\sin(n!)}{n + (-1)^{n+1}}$

6. $u_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n}$.

Exercice 18.2

Déterminer la limite des suites suivantes

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k^2}$

3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$

4. $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 18.3

Déterminer un équivalent simple puis la limite des suites suivantes

1. $u_n = n^2 - n$

2. $u_n = \sin\left(\dfrac{n+1}{n^2}\right)$

3. $u_n = \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$

4. $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$

5. $u_n = \sqrt{n^2+1} + n$

6. $u_n = \dfrac{\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{e^{\frac{1}{n^3}} - 1}$.

Exercice 18.4

Déterminer le terme général des suites suivantes

1. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$

2. $u_0 = 3$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$.

Exercice 18.5

Étudier les suites suivantes

1. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$

2. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$

3. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$

4. $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1} = (u_n - 1)^3 + 1$

5. $u_0 = \dfrac{5}{2}$ et $u_{n+1} = (u_n - 1)^3 + 1$

6. $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = 1 - u_n^2$.

Exercice 18.6

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$.

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2. En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Pour aller plus loin

Exercice 18.7

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n.$$

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est constante.
2. Prouver que (u_n) est une suite arithmético-géométrique.
3. Exprimer les termes généraux des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 18.8

Déterminer le terme général de la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = \sqrt{2u_{n+1}^2 + 3u_n^2}$.

Exercice 18.9

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n = 2^n. \tag{$\mathscr{R}$}$$

1. Déterminer α pour que $t_n = \alpha 2^n$ vérifie la relation $(\mathscr{R})$.
2. Montrer que $(u_n - t_n)$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
3. En déduire le terme général de (u_n).

Exercice 18.10

Soient la suite (x_n) définie par $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$,

$$x_{n+3} = 2x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n$$

et la suite (u_n) définie par $u_n = x_{n+1} - x_n$.
1. Montrer que (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 et en déduire son terme général.
2. Déterminer le terme général de la suite (x_n).

On pourra considérer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

Exercice 18.11

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 2}{u_n + 2}$.
1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$.
2. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$ est géométrique.
3. En déduire le terme général de (u_n) ainsi que sa limite.

Exercice 18.12

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
2. La suite (H_n) converge-t-elle ?

Exercice 18.13

Soit (a_n) une suite décroissante convergeant vers 0. On définit $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$.

1. Montrer que les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. En déduire que la suite (S_n) converge.

Exercice 18.14

Soit (u_n) une suite croissante convergeant vers ℓ. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$.

1. Montrer que (v_n) est croissante.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_{2n} \geq \dfrac{u_n + v_n}{2}$.
3. En déduire que (v_n) converge vers ℓ.

Exercice 18.15

Soit (u_n) une suite vérifiant $u_0 \in]0, 1[$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.
1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$.
2. En déduire que (u_n) est décroissante et converge vers 0.
3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{u_{n-1}} - \dfrac{1}{u_n}$.
Montrer que (v_n) est croissante et converge vers -1.
4. En utilisant le résultat de l'exercice **18.14**, déterminer un équivalent simple de (u_n).

Exercice 18.16

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

(1) Montrer que f_n admet un unique zéro sur $\mathbb{R}$ que l'on notera u_n.

(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

(3) Montrer que $f_{n+1}(u_n) > 0$ et en déduire que la suite (u_n) est décroissante.

(4) Montrer que (u_n) converge vers 0.
On pourra procéder par l'absurde pour déterminer la valeur de la limite.

(5) Déterminer un équivalent simple de u_n.

Corrections

Interro de cours

1. (a) **Faux.** La suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers 0 mais n'est jamais égale à 0.

   (b) **Faux.** Si $u_n = \ln(n)$, alors $u_{n+1} - u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais (u_n) diverge vers $+\infty$.

   (c) **Vrai.**

   (d) **Faux.** Si $u_n = (-1)^n$, alors (u_n) est bornée. Cependant $u_{2n} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $u_{2n+1} = -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$, donc (u_n) diverge.

   (e) **Faux.** Si $u_n = \dfrac{1}{2n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$, alors $u_n < v_n$ mais $\lim u_n = 0 = \lim v_n$.

   (f) **Faux.** Si $u_n = (-1)^n$ et $v_n = 1 - (-1)^n$, alors (u_n) et (v_n) divergent.
   Cependant, $u_n + v_n = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

   (g) **Vrai.** Si on suppose par l'absurde que (u_n+v_n) converge, alors, comme $v_n = (u_n+v_n)-u_n$, on a (v_n) qui converge, ce qui est absurde.
   Ainsi $(u_n + v_n)$ diverge.

   (h) **Vrai.** Cf. théorème de la limite monotone.

   (i) **Faux.** Si $u_n = 1+\dfrac{1}{n}$, alors (u_n) est décroissante et minorée par 0. Cependant $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
   En fait, si (u_n) est décroissante et minorée par 0, on peut en déduire que (u_n) converge vers une limite $\ell \geq 0$.

   (j) **Vrai.** Comme (u_n) est bornée, on dispose d'un réel K tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq K$. Par produit, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq |u_n v_n| \leq K\,|v_n|$. Or $K\,|v_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc, d'après le théorème d'encadrement $|u_n v_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, d'où $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   (k) **Faux.** Si $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \geq 0$, mais (u_n) n'est pas positive à partir d'un certain rang.

2. Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. On commence par chercher un réel α tel que $\alpha = -\alpha + 2$. On obtient $\alpha = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a donc

$$u_{n+1} = -u_n + 2,$$

$$\alpha = -\alpha + 2.$$

   Donc, en soustrayant ces deux égalités, on obtient que $u_{n+1} - \alpha = -(u_n - \alpha)$.
   Ainsi la suite $(u_n - \alpha)$ est géométrique de raison -1.
   On en déduit que $u_n - \alpha = (-1)^n(u_0 - \alpha)$.
   Or $\alpha = 1$ et $u_0 = 2$. On en conclut que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 + (-1)^n$.

3. Soient (u_n), (v_n), (w_n) trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$. Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors (v_n) converge vers ℓ.

4. On dispose de deux suites (a_n) et (b_n) convergeant vers 1 et telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha w_n a_n$ et $v_n = \beta w_n b_n$. Ainsi, si $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n + v_n = \alpha w_n a_n + \beta w_n b_n = (\alpha+\beta) w_n \underbrace{\left(\frac{\alpha a_n + \beta b_n}{\alpha+\beta}\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}.$$

On en conclut que $u_n + v_n \sim (\alpha+\beta) w_n$.

5. **(a)** **Faux.** Si $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$, alors $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Cependant $\dfrac{u_n}{v_n} = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc $u_n \not\sim v_n$.

(b) **Vrai.** Cf. cours.

(c) **Faux.** Si $u_n = 2^n$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2 \neq 1$.
On en conclut que $u_{n+1} \not\sim u_n$.

(d) **Vrai.** On a $\dfrac{\cos n}{e^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $(\cos n)$ est bornée. Donc $\cos n = o(e^n)$ et $\cos n + e^n \sim e^n$.

(e) **Vrai.** L'équivalence est compatible avec les puissances d'exposant constant.
Donc $(u_n)^{\frac{1}{2}} \sim (v_n)^{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire $\sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}$.

6. On dit que deux suites sont des suites adjacentes si l'une est croissante, l'autre est décroissante et si leur différence converge vers 0.

Exercice 18.1

1. On a $\dfrac{(-2)^n}{3^n} = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $(-2)^n = o(3^n)$. Ainsi $u_n \sim \dfrac{3^n}{3^n} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
On en conclut que (u_n) converge vers 1.

2. On multiplie et divise par la quantité conjuguée

$$u_n = \frac{(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}} = \frac{\sqrt{n^2+2}^2 - \sqrt{n^2+1}^2}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}}.$$

On en conclut que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3. On a $\dfrac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $(-1)^n = o(n)$, et $\dfrac{\ln(n^3)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées, donc $\ln(n^3) = o(n)$. Ainsi

$$u_n \sim \frac{n}{n} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

4. On est en présence d'une puissance d'exposant variable, on transforme donc l'expression sous forme exponentielle.

$$u_n = (n^2)^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{2}{n}} = \exp\left(\frac{2}{n}\ln(n)\right).$$

Or, par croissances comparées, $\dfrac{2}{n}\ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Donc par composition des limites, on en déduit que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

5. On a $n+(-1)^{n+1} \geq n-1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc, par comparaison, $n+(-1)^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Ainsi

$$0 \leq |u_n| \leq \frac{1}{|n+(-1)^{n+1}|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc, par théorème d'encadrement $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et on en conclut que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

6. On est en présence d'une puissance d'exposant variable, on transforme donc l'expression sous forme exponentielle.

$$u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(2+(-1)^n\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(0) = 1.$$

Exercice 18.2

On ne cherchera pas à calculer les sommes, mais on va les encadrer. On peut minorer une somme par son plus petit terme multiplié par le nombre de termes de la somme. On peut majorer une somme de la même manière avec le plus grand terme multiplié par le nombre de termes de la somme.

1. Si $k \in [\![1,n]\!]$, alors $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Donc

$$u_n \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = n \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Par comparaison, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

2. Si $k \in [\![1,n]\!]$, alors $0 \leq \dfrac{1}{n^2+k^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$. Donc

$$0 \leq u_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = n \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par encadrement, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3. Si $k \in [\![1,n]\!]$, alors $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n^2}} = \dfrac{1}{n}$. Donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}, \text{ puis } \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq 1.$$

Or $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Par encadrement, on en conclut que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

4. Si $k \in [\![n+1,2n]\!]$, on a $0 \leq \dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$. Donc

$$0 \leq u_n \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{n^2} = n \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par encadrement, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 18.3

1. On a $n = o(n^2)$, donc $u_n \sim n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

2. On a $\dfrac{n+1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc, comme $\sin x \sim_0 x$,

$$u_n \sim \frac{n+1}{n^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

> Il faut bien faire attention à l'ordre dans lequel on effectue les équivalents. Le raisonnement suivant est **faux**
> $$\sin\left(\frac{n+1}{n^2}\right) \sim \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \text{ car } \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
> En effet, dans ce raisonnement, on est parti de l'équivalent $\frac{n+1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$ et on a composé à gauche par la fonction sinus. Or la composition à gauche ne conserve par forcément les équivalents.

3. On a $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Ainsi

$$u_n = \ln\Bigg(1 + \underbrace{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}\Bigg) \sim \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \sim -\frac{1}{2n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

4. On commence par factoriser par le terme dominant sous la racine.

$$u_n = \sqrt{n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} - n = n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - n = n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1\right) \sim n \times \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

5. On commence par factoriser par le terme dominant sous la racine.

$$u_n = \sqrt{n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} + n = n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + n = n\Bigg(\underbrace{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 2 \neq 0}\Bigg) \sim n \times 2 = 2n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

6. On a $1 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{2n^2}$ et $e^{\frac{1}{n^3}} - 1 \sim \dfrac{1}{n^3}$. Donc par quotient d'équivalents

$$u_n \sim \frac{\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n^3}} = \frac{n}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Exercice 18.4

1. Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique.
On cherche le réel α tel que $\alpha = 2\alpha - 3$. On trouve $\alpha = 3$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} = 2u_n - 3,$$
$$\alpha = 2\alpha - 3.$$

En soustrayant ces deux égalités, on obtient $u_{n+1} - \alpha = 2(u_n - \alpha)$.
Donc la suite $(u_n - \alpha)$ est géométrique de raison 2.
On en déduit que $u_n - \alpha = 2^n(u_0 - \alpha)$.
On en conclut que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 - 2^n}$

2. L'équation caractéristique de cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 est $r^2 - 2r - 3 = 0$ dont les solutions sont -1 et 3.
On dispose donc de deux réels λ et μ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda(-1)^n + \mu 3^n$.
En utilisant les conditions initiales, on obtient

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ -\lambda + 3\mu = 1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = 1. \end{cases}$$

On en conclut que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2(-1)^n + 3^n}$

Exercice 18.5

1. Une représentation graphique permet de conjecturer que la suite reste dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
On pose f et g les deux fonctions définies sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = f(x) - x$.
La fonction g est dérivable et si $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, alors $g'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0$.
On obtient donc le tableau de variations suivant

x	0		$\frac{\pi}{2}$
f	0	$\nearrow$	1
g	0	$\searrow$	

Ainsi $f\left(\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]\right) = [0,1] \subset \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
Comme $u_0 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on montre par une récurrente simple que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
On en déduit que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \leq 0$ car la fonction g est négative sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 0, alors elle converge vers un réel $\ell \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
Ainsi $u_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ et $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(\ell)$ car f est continue. Par unicité de la limite, on a $\ell = f(\ell)$, c'est-à-dire $g(\ell) = 0$. D'après l'étude de g sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\ell = 0$.
On conclut que (u_n) est une suite décroissante convergeant vers 0.

2. Une représentation graphique permet de conjecturer que la suite reste dans $\mathbb{R}_+$.
On pose f et g les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 1 - e^{-x}$ et $g(x) = f(x) - x$.

Les fonctions f et g sont dérivables et si $x \in \mathbb{R}_+$, alors $f'(x) = e^{-x} > 0$ et $g'(x) = e^{-x} - 1 \leq 0$. On obtient donc le tableau de variations suivant

x	0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	1
g	0	$\searrow$	

Ainsi $f(\mathbb{R}_+) = [0, 1[\subset \mathbb{R}_+$.
Comme $u_0 \in \mathbb{R}_+$, on montre par une récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{R}_+$.
On en déduit que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \leq 0$ car la fonction g est négative sur $\mathbb{R}_+$.
La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 0, alors elle converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}_+$.
Ainsi $u_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ et $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(\ell)$ car f est continue. Par unicité de la limite, on a $\ell = f(\ell)$, c'est-à-dire $g(\ell) = 0$. D'après l'étude de g sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $\ell = 0$.
On conclut que (u_n) est une suite décroissante convergeant vers 0.

3. Une représentation graphique permet de conjecturer que la suite reste dans $[1, +\infty[$.
On pose f et g les deux fonctions définies sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = f(x) - x = \dfrac{1}{x}$.
La fonction f est dérivable et si $x \geq 1$, alors $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2} \geq 0$.
Le signe de g étant évident, on obtient donc le tableau suivant

x	1		$+\infty$
f	2	$\nearrow$	$+\infty$
$g(x)$		$+$	

Ainsi $f([1, +\infty[) = [2, +\infty[\subset [1, +\infty[$.
Comme $u_0 \in [1, +\infty[$, on montre par une récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [1, +\infty[$.
On en déduit que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \geq 0$ car la fonction g est positive sur $[1, +\infty[$.
La suite (u_n) est donc croissante. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge ou elle tend vers $+\infty$. On suppose par l'absurde qu'elle converge vers un réel $\ell \in [1, +\infty[$.
Ainsi $u_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ et $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(\ell)$ car f est continue. Par unicité de la limite, on a $\ell = f(\ell)$, c'est-à-dire $g(\ell) = 0$. Or la fonction g ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$, ce qui est absurde.
On conclut que (u_n) est une suite croissante divergeant vers $+\infty$.

4. On pose f et g les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^3 + 1$ et $g(x) = f(x) - x$.
Les fonctions f et g sont dérivables et si $x \in \mathbb{R}$, alors $f'(x) = 3(x-1)^2 \geq 0$ et

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 - x = x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2).$$

La fonction g s'annule donc en 0, 1 et 2. Comme u_0 se situe entre 1 et 2, on continue l'étude des fonctions sur $[1, 2]$. On obtient donc le tableau suivant

x	1	u_0	2
$g(x)$		$-$	
f	1	$\nearrow$	2

Ainsi $f([1, 2]) = [1, 2]$.
Comme $u_0 \in [1, 2]$, on montre par une récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [1, 2]$.
On en déduit que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \leq 0$ car la fonction g est négative sur $[1, 2]$.
La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 1, alors elle converge vers un réel $\ell \in [1, 2]$.
Ainsi $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$ car f est continue. Par unicité de la limite, on a $\ell = f(\ell)$, c'est-à-dire $g(\ell) = 0$. D'après l'étude de g sur $[1, 2]$, on en déduit que $\ell = 1$ ou $\ell = 2$.
La suite étant décroissante et de premier terme $u_0 < 2$, on a $\ell \neq 2$, donc $\ell = 1$.
On conclut que (u_n) est une suite décroissante convergeant vers 1.

5. On pose f et g les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^3 + 1$ et $g(x) = f(x) - x$. Les fonctions f et g sont dérivables et si $x \in \mathbb{R}$, alors $f'(x) = 3(x-1)^2 \geq 0$ et

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 - x = x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2).$$

La fonction g s'annule donc en 0, 1 et 2. Comme u_0 se situe entre 2 et $+\infty$, on continue l'étude des fonctions sur $[2, +\infty[$. On obtient donc le tableau suivant

x	2	u_0	$+\infty$
$g(x)$		$+$	
f	2	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi $f([2, +\infty[) = [2, +\infty[$.
Comme $u_0 \in [2, +\infty[$, on montre par une récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [2, +\infty[$.
On en déduit que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \geq 0$ car la fonction g est positive sur $[2, +\infty[$.
La suite (u_n) est donc croissante. D'après le théorème de la limite monotone elle converge ou elle tend vers $+\infty$. On suppose par l'absurde qu'elle converge vers un réel $\ell \in [2, +\infty[$.
Ainsi $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$ car f est continue. Par unicité de la limite, on a $\ell = f(\ell)$, c'est-à-dire $g(\ell) = 0$. D'après l'étude de g sur $[2, +\infty[$, on en déduit que $\ell = 2$.
Or (u_n) est croissante et de premier terme $u_0 > 2$, ce qui est absurde.
On conclut que (u_n) est une suite croissante divergeant vers $+\infty$.

6. Une représentation graphique permet de conjecturer que la suite reste dans $[0, 1]$.
On pose f, h et g les fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f(x) = 1 - x^2$, $h(x) = f \circ f(x)$ et $g(x) = h(x) - x$.
La fonction f est dérivable et si $x \in [0, 1]$, on a $f'(x) = -2x \leq 0$, donc f est décroissante.
Si $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h(x) = 1 - \left(1 - x^2\right)^2 = 1 - 1 + 2x^2 - x^4 = 2x^2 - x^4$$

et

$$g(x) = 2x^2 - x^4 - x = -x(x^3 - 2x + 1).$$

On remarque que 1 est racine du polynôme $X^3 - 2X + 1$.
Après factorisation, on obtient $X^3 - 2X + 1 = (X-1)(X^2 + X - 1)$.
Après étude du trinôme $X^2 + X - 1$, on obtient que la fonction g s'annule en $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \notin [0,1]$, 0, $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et 1.
On obtient donc le tableau suivant

x	0		α		1
$g(x)$	0	$-$	0	$+$	0
f	1	$\searrow$	α	$\searrow$	0

Ainsi $f([0,\alpha]) = [\alpha, 1]$ et $f([\alpha,1]) = [0,\alpha]$. Comme $u_0 \in [0,\alpha]$ et $u_1 = \dfrac{3}{4} \in [\alpha, 1]$, et comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2(n+1)} = h(u_{2n})$ et $u_{2(n+1)+1} = h(u_{2n+1})$, on montre par une récurrence simple que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} \in [0,\alpha] \text{ et } u_{2n+1} \in [\alpha, 1].$$

On en déduit que $u_{2(n+1)} - u_{2n} = g(u_{2n}) \leq 0$ car g est négative sur $[0,\alpha]$.
La suite (u_{2n}) est donc décroissante et minorée par 0, alors elle converge vers un réel $\ell \in [0,\alpha]$.
Ainsi $u_{2(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $h(u_{2n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} h(\ell)$ car h est continue. Par unicité de la limite, on a $\ell = h(\ell)$, c'est-à-dire $g(\ell) = 0$. D'après l'étude de g sur $[0,\alpha]$, on en déduit que $\ell = 0$ ou $\ell = \alpha$.
La suite étant croissante et de premier terme $u_0 < \alpha$, on obtient $\ell = 0$.
On conclut que (u_{2n}) est une suite décroissante convergeant vers 0. On montre de même que (u_{2n+1}) est une suite croissante convergeant vers 1.
On a donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) qui convergent vers deux limites différentes.
On en conclut que (u_n) n'a pas de limite.

Exercice 18.6

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{2\sqrt{n(n+1)} - (2n+1)}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{4n^2+4n} - \sqrt{4n^2+4n+1}}{\sqrt{n+1}} \leq 0,$$

et

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1} = \frac{2\sqrt{(n+1)(n+2)} - (2n+1)}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{4n^2+6n+8} - \sqrt{4n^2+4n+1}}{\sqrt{n+1}} \geq 0,$$

donc la suite (u_n) est décroissante et le suite (v_n) est croissante. Pour finir

$$v_n - u_n = -2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = 2\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = -\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On en conclut que (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes.

2. On déduit de la question précédente que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ. Ainsi

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}}{2\sqrt{n}} = \frac{2\sqrt{n}+u_n}{2\sqrt{n}} = 1 + \frac{u_n}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

On en conclut que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}$.

Exercice 18.7

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - v_{n+1} = 3u_n + 2v_n - 2u_n - 3v_n = u_n - v_n$.
Donc la suite $(u_n - v_n)$ est constante égale à $u_0 - v_0 = -1$.

2. D'après la question précédente, $v_n = 1 + u_n$. Donc $u_{n+1} = 3u_n + 2(1+u_n) = 5u_n + 2$.

3. On cherche un réel α tel que $\alpha = 5\alpha + 2$. On trouve $\alpha = -\frac{1}{2}$. On a

$$u_{n+1} = 5u_n + 2,$$
$$\alpha = 5\alpha + 2.$$

En soustrayant ces deux égalités, on obtient $u_{n+1} - \alpha = 5(u_n - \alpha)$.
La suite $(u_n - \alpha)$ est donc géométrique de raison 5, d'où $u_n - \alpha = 5^n(u_0 - \alpha)$.

On en conclut que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3}{2}5^n - \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad v_n = 1 + u_n = \frac{3}{2}5^n + \frac{1}{2}}$

Exercice 18.8

On commence par remarquer que u_0 et u_1 sont positifs et $u_{n+2} = \sqrt{2u_{n+1}^2 + 3u_n^2} \geq 0$.
Donc la suite (u_n) est à valeurs positives.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $v_n = u_n^2$ donc $u_n = \sqrt{v_n}$ car $u_n \geq 0$. On a

$$v_{n+2} = u_{n+2}^2 = \sqrt{2u_{n+1}^2 + 3u_n^2}^{\,2} = 2u_{n+1}^2 + 3u_n^2 = 2v_{n+1} + 3v_n.$$

La suite (v_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est $r^2 - 2r - 3 = 0$ dont les solution sont -1 et 3. On dispose donc de deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \lambda(-1)^n + \mu 3^n.$$

Or $v_0 = u_0^2 = 1$ et $v_1 = u_1^2 = 4$, d'où

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ -\lambda + 3\mu = 4 \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{4} \\ \mu = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

On en conclut que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\sqrt{(-1)^{n+1} + 5 \times 3^n}}{2}}$

Exercice 18.9

1. La suite (t_n) vérifie la relation $(\mathscr{R})$ si et seulement si

$$(\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha 2^{n+2} - \alpha 2^{n+1} - 6\alpha 2^n = 2^n) \Leftrightarrow 4\alpha - 2\alpha - 6\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{4}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n = 2^n,$$

$$t_{n+2} - t_{n+1} - 6r_n = 2^n.$$

En soustrayant ces deux inégalités, on obtient $(u_{n+2} - t_{n+2}) - (u_{n+1} - t_{n+1}) - 6(u_n - t_n) = 0$. On en conclut que la suite $(u_n - t_n)$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

3. L'équation caractéristique de cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 est $r^2 - r - 6 = 0$ dont les solutions sont -2 et 3. On dispose donc de deux réels λ et μ tels que

$$u_n - t_n = \lambda(-2)^n + \mu 3^n.$$

Or $u_0 - t_0 = \dfrac{5}{4}$ et $u_1 - t_1 = \dfrac{5}{2}$, d'où

$$\begin{cases} \lambda + \mu = \dfrac{5}{4} \\ -2\lambda + 3\mu = \dfrac{5}{2} \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{4} \\ \mu = 1. \end{cases}$$

On en conclut que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{(-2)^n + 4 \times 3^n - 2^n}{4}}$

Exercice 18.10

1. • Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+2} = x_{n+3} - x_{n+2} = x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n.$$

Or $x_{n+2} = u_{n+1} + x_{n+1}$, donc

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2x_{n+1} - 2x_n = u_{n+1} + 2u_n.$$

• L'équation caractéristique de cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 est $r^2 - r - 2 = 0$ dont les solutions sont -1 et 2. On dispose donc de deux réels λ et μ tels que

$$u_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n.$$

Or $u_0 = x_1 - x_0 = 1$ et $u_1 = x_2 - x_1 = 1$, d'où

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ -\lambda + 2\mu = 1 \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{3} \\ \mu = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

On en conclut que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{(-1)^n + 2^{n+1}}{3}}$

2. On a, par télescopage

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = x_n - x_0 = x_n.$$

De plus,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k + 2\sum_{k=0}^{n-1} 2^k\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} + 2\frac{1-2^n}{1-2}\right) = \frac{2^{n+2}-3-(-1)^n}{6}.$$

On en conclut que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \dfrac{2^{n+2}-3-(-1)^n}{6}}$

Exercice 18.11

1. On montre par récurrence, sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}(n)$: « $u_n \neq 1$ ».

- **Initialisation.** On a $u_0 = 0 \neq 1$, ce qui montre $\mathscr{P}(0)$.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathscr{P}(n)$. On a

$$u_{n+1} = 1 \Leftrightarrow 5u_n - 2 = u_n + 2 \Leftrightarrow 4u_n = 4 \Leftrightarrow u_n = 1.$$

Or $u_n \neq 1$, donc $u_{n+1} \neq 1$, ce qui montre $\mathscr{P}(n+1)$.

On en conclut que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}-1} = \dfrac{\frac{5u_n-2}{u_n+2}-2}{\frac{5u_n-2}{u_n+2}-1} = \dfrac{3u_n-6}{4u_n-4} = \dfrac{3}{4}\dfrac{u_n-2}{u_n-1} = \dfrac{3}{4}v_n.$

Ainsi la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$.

3. D'après la question précédente, $v_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n v_0 = 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$. On a

$$v_n = \frac{u_n-2}{u_n-1} \Leftrightarrow v_n(u_n-1) = u_n - 2 \Leftrightarrow (v_n-1)u_n = v_n - 2 \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n-2}{v_n-1}.$$

On en conclut que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2\left(\frac{3}{4}\right)^n - 2}{2\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}}$

Exercice 18.12

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $H_{2n} - H_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

Or si $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, alors $\dfrac{1}{k} \geq \dfrac{1}{2n}$. Ainsi

$$H_{2n} - H_n \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

2. On a $H_{n+1} - H_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$, donc la suite (H_n) est strictement croissante.
D'après le théorème de la limite monotone, (H_n) converge ou diverge vers $+\infty$.
On suppose par l'absurde que (H_n) converge vers ℓ. Alors $H_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
Donc si on passe à la limite dans l'inégalité démontrée à la question précédente, on obtient $\ell - \ell \geq \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire $0 \geq \dfrac{1}{2}$, ce qui est absurde.
On en conclut que (H_n) est une suite croissante qui diverge vers $+\infty$.

Exercice 18.13

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+2}a_{2n+2} + (-1)^{2n+1}a_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$$

car (a_n) est décroissante. Donc la suite (S_{2n}) est décroissante.
De même,

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+3}a_{2n+3} + (-1)^{2n+2}a_{2n+2} = -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geq 0$$

car (a_n) est décroissante. Donc la suite (S_{2n+1}) est croissante.
Pour finir,

$$S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1}a_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On en conclut que les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

2. Étant adjacentes, les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$.
On en conclut que (S_n) converge vers cette limite commune ℓ.

Exercice 18.14

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} u_k}{n+1} - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} u_k}{n} = \frac{n\left(u_{n+1} + \sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right) - (n+1)\sum\limits_{k=1}^{n} u_k}{n(n+1)} = \frac{nu_{n+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} u_k}{n(n+1)}.$$

Or, si $k \in [\![1, n]\!]$, on a $u_k \leq u_{n+1}$ car la suite (u_n) est croissante. Ainsi

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \leq \sum_{k=1}^{n} u_{n+1} = nu_{n+1}.$$

On en déduit $v_{n+1} - v_n \geq 0$ et on en conclut que la suite (v_n) est croissante.

2. On a

$$v_{2n} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{2n} u_k}{2n} - \frac{u_n}{2} - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} u_k}{2n} = \frac{\left(\sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k\right) - nu_n}{2n}.$$

Or si $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, on a $u_k \geq u_n$ car la suite (u_n) est croissante. Ainsi

$$\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} u_n = nu_n,$$

puis $v_{2n} - \dfrac{u_n + v_n}{2} \geq 0$.

On en conclut que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{2n} \geq \dfrac{u_n + v_n}{2n}$.

3. Sur le même principe, comme (u_n) est croissante, on a

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_n = u_n.$$

Or (u_n) est croissante et converge vers ℓ, d'où : $v_n \leq u_n \leq \ell$.

Ainsi la suite (v_n) est croissante et majorée par ℓ, donc (v_n) converge vers un réel $\ell' \leq \ell$.

En passant à la limite dans l'inégalité démontrée à la question précédente, on obtient

$$\ell' \geq \frac{\ell + \ell'}{2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \ell' \geq \ell.$$

Or $\ell' \leq \ell$, d'où $\ell' = \ell$.

On en conclut que (v_n) converge vers ℓ.

Exercice 18.15

1. On montre par récurrence, sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}(n)$: « $u_n \in]0, 1[$ ».

- **Initialisation.** On a $u_0 \in]0, 1[$ d'après l'énoncé, ce qui montre $\mathscr{P}(0)$.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathscr{P}(n)$.
  On a $0 < u_n < 1$, donc $0 < u_n^2 < u_n$ car u_n est positif, puis $u_{n+1} = u_n - u_n^2 > 0$.
  De plus $u_n < 1$ et $-u_n^2 < 0$, donc par somme, $u_{n+1} = u_n - u_n^2 < 1$.
  On a ainsi montré que $u_{n+1} \in]0, 1[$, c'est-à-dire $\mathscr{P}(n+1)$.

On en conclut que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 < 0$, donc (u_n) est décroissante.

Or (u_n) est minorée par 0, donc elle converge vers un réel ℓ.

Si on passe à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, on obtient $\ell = \ell - \ell^2$, c'est-à-dire $\ell^2 = 0$.

On en conclut que (u_n) est décroissante et converge vers 0.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $v_n = \dfrac{u_n - u_{n-1}}{u_n u_{n-1}} = \dfrac{-u_{n-1}^2}{u_{n-1}(u_{n-1} - u_{n-1}^2)} = -\dfrac{1}{1 - u_{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$.

De plus, comme la suite (u_n) est décroissante à valeurs dans $]0, 1[$, on a $u_n \leq u_{n-1} < 1$, donc $1 - u_n \geq 1 - u_{n-1} > 0$, puis $\dfrac{1}{1 - u_n} \leq \dfrac{1}{1 - u_{n-1}}$.

On en déduit que $v_{n+1} \geq v_n$ et on en conclut que la suite (v_n) est croissante.

4. D'après le résultat de l'exercice précédent, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$.

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k}\right) = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_n}$. Ainsi $\dfrac{1}{nu_n} = \dfrac{1}{nu_0} - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 - (-1)$.

On en déduit que $\dfrac{1}{nu_n} \sim 1$ et on en conclut que $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{n}}$

Exercice 18.16

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, si $x \in \mathbb{R}$, on a $f_n'(x) = 5x^4 + n > 0$ (sauf en $x = 0$ si $n = 0$). La fonction f_n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus $f_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $f_n(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$.
Ainsi, la fonction f_n est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et change de signe. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (que l'on appellera plutôt « Théorème de la bijection continue » à partir du chapitre suivant), la fonction f_n s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $f_n(0) = -1 < 0 = f_n(u_n)$. Si on suppose par l'absurde que $u_n \leq 0$, alors, comme f_n est croissante, on aurait $f_n(u_n) \leq f_n(0)$, ce qui est absurde.
On en conclut que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $f_{n+1}(u_n) = u_n^5 + (n+1)u_n - 1 = u_n^5 + nu_n - 1 + u_n = f_n(u_n) + u_n = u_n > 0$.
On en déduit donc que $f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$. Alors, de même qu'à la question précédente, on en déduit que $u_n > u_{n+1}$.
On en conclut que (u_n) est une suite strictement décroissante.

4. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel $\ell \geq 0$.
On suppose par l'absurde que $\ell > 0$. On réutilise la seule information calculatoire en notre possession : $f_n(u_n) = 0$. On a $u_n^5 \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell^5$ et $nu_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ car $\ell > 0$, donc

$$0 = f_n(u_n) = u_n^5 + nu_n - 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty,$$

ce qui est absurde.
On en conclut que la suite (u_n) converge vers 0.

5. On réutilise encore la seule information calculatoire en notre possession et on sépare les termes dont on connaît la limite et les termes dont on ne connaît pas la limite. On obtient donc

$$nu_n = 1 - u_n^5 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.$$

Donc $nu_n \sim 1$ et $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{n}}$

CHAPITRE

19

Limites et continuité

L'essentiel du cours

Dans tout le chapitre I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$.

1 Notion de limite

Définition

Soit a est un élément ou une borne de I.
On appelle **voisinage** de a tout intervalle de la forme :

- $]a-\eta, a+\eta[$ avec $\eta > 0$, si $a \in \mathbb{R}$
- $]A, +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$, si $a = +\infty$
- $]-\infty, A[$ avec $A \in \mathbb{R}$, si $a = -\infty$.

On dit qu'une fonction f définie sur I vérifie une propriété au voisinage de a s'il existe un voisinage V de a tel que f vérifie cette propriété sur $V \cap I$.

Définition

Soient f une fonction définie sur I et a un élément ou une borne de I.
On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a, noté $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$, si

- cas $a \in \mathbb{R}$
  - ◇ cas $\ell \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$
  - ◇ cas $\ell = +\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq A.$
  - ◇ cas $\ell = -\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \leq A.$
- cas $a = +\infty$
  - ◇ cas $\ell \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ x \geq B \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$
  - ◇ cas $\ell = +\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A.$
  - ◇ cas $\ell = -\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ x \geq B \Rightarrow f(x) \leq A.$
- cas $a = -\infty$
  - ◇ cas $\ell \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ x \leq B \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$
  - ◇ cas $\ell = +\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ x \leq B \Rightarrow f(x) \geq A.$
  - ◇ cas $\ell = -\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ x \leq B \Rightarrow f(x) \leq A.$

Ces neufs définitions peuvent se résumer en : pour tout voisinage V de ℓ, il existe un voisinage U de a dont l'image par f reste dans V (c'est-à-dire tel que $f(U \cap I) \subset V$).

Unicité de la limite

Si une fonction admet une limite (finie ou infinie), alors cette limite est unique.

Si une fonction f admet une limite en a, étant unique, on la note $\lim\limits_{x\to a}(f(x))$.

Définition

Soient f une fonction définie sur I et a un point ou l'extrémité gauche de I (si elle est finie). On dit que $f(x)$ admet ℓ comme **limite à droite**, noté $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} \ell$ si

- cas $\ell \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I,\ a \leq x \leq a+\eta \Rightarrow |f(x)-\ell| \leq \varepsilon$.
- cas $\ell = +\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I,\ a \leq x \leq a+\eta \Rightarrow f(x) \geq A$.
- cas $\ell = -\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I,\ a \leq x \leq a+\eta \Rightarrow f(x) \leq A$.

On définit de même la notion de **limite à gauche**, notée $f(x) \xrightarrow[x\to a^-]{} \ell$.

Proposition

Une fonction f admet une limite en a si et seulement si elle admet une limité à gauche et à droite en a et que ces deux limites sont égales.

Opérations sur les limites

Soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ et f, g des fonctions définies sur I et a un élément ou une borne de I.
On a les opérations suivantes sur les limites

$\boldsymbol{f(x)+g(x)}$		$\lim\limits_{x\to a}(f(x))$: ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(g(x))$	ℓ'	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
	$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

$\boldsymbol{f(x)g(x)}$		$\lim\limits_{x\to a}(f(x))$: $\ell \neq 0$	0	∞
$\lim\limits_{x\to a}(g(x))$	$\ell' \neq 0$	$\ell\ell'$	0	∞
	0	0	0	FI
	∞	∞	FI	∞

$\boldsymbol{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$		$\lim\limits_{x\to a}(f(x))$: $\ell \neq 0$	0	∞
$\lim\limits_{x\to a}(g(x))$	$\ell' \neq 0$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	∞
	0	∞	FI	∞
	∞	0	0	FI

- FI est l'acronyme de « Forme Indéterminée ». Cela signifie qu'il n'est pas toujours suffisant de connaître les limites de f et g pour trouver la limite de leur somme, produit ou quotient (il faudra donc modifier l'expression).
- Pour le produit et le quotient, il suffit de suivre la règle des signes sur les produits et les quotients pour déterminer si on obtient $+\infty$ ou $-\infty$ comme limite finale.

Composition des limites

Si f et g sont deux fonctions telles que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ et $g(x) \xrightarrow[x \to b]{} \ell$, alors $g \circ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Proposition

Soit f une fonction admettant une limite ℓ (éventuellement infinie) en a.

- Si $\ell > 0$, alors $f(x) > 0$ au voisinage de a.
- Si $\ell < 0$, alors $f(x) < 0$ au voisinage de a.

Passage à la limite dans les inégalités

Soient f et g deux fonctions admettant respectivement pour limites, en a, $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$. Si, au voisinage de a, $f(x) \leq g(x)$, alors $\ell \leq \ell'$.

En passant à la limite, les inégalités strictes deviennent larges.

Limite de l'image d'une fonction

Soient (u_n) une fonction réelle, f une fonction définie sur un intervalle I, $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}$. Si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$ et $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$, alors $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} b$.

Ce résultat reste vrai si a et/ou b sont $+\infty$ ou $-\infty$.

Théorème de la limite monotone

Soient f une fonction croissante sur I et a et b les bornes de I.

- Si f est majorée au voisinage de b alors elle admet une limite finie en b, sinon $f(x) \xrightarrow[x \to b]{} +\infty$.
- Si f est minorée au voisinage de a alors elle admet une limite finie en a, sinon $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$.

On a un résultat analogue si f est décroissante.

Théorème d'encadrement (ou des gendarmes)

Soient f, g, h trois fonctions définies au voisinage de a et $\ell \in \mathbb{R}$. Si, au voisinage de a, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et si f et h tendent vers la même limite ℓ en a, alors $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Théorème de comparaison

Soient f et g deux fonctions telles que, au voisinage de a, $f(x) \leq g(x)$.

- Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$, alors $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.
- Si $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$, alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$.

2 Relations de comparaison

Dans toute cette partie, f, g, h, u et v seront des fonctions.

Définition

On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de a s'il existe un voisinage V de a et une fonction ε, définie sur V, qui tend vers 0 en a tels que

$$\forall x \in V \cap I, \ f(x) = \varepsilon(x) g(x).$$

On note $f(x) = o(g(x))$ et le lit « f est un petit o de g » .

Théorème

Si, au voisinage de a, g ne s'annule pas, alors

$$f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0.$$

Dans la pratique, pour montrer qu'une fonction est négligeable devant une autre, on calculera presque tout le temps la limite de leur quotient.

Opérations et négligeabilité

On a les propriétés suivantes sur les opérations avec la négligeabilité :

Hypothèses	Conclusion
$f(x) = o(h(x))$ et $g(x) = o(h(x))$	$f(x) + g(x) = o(h(x))$
$\lambda \in \mathbb{R}$ et $f(x) = o(h(x))$	$\lambda f(x) = o(h(x))$
$f(x) = o(h(x))$	$f(x)g(x) = o(h(x)g(x))$
$f(x) = o(u(x))$ et $g(x) = o(v(x))$	$f(x)g(x) = o(u(x)v(x))$
$f(x) = o(g(x))$ et $g(x) = o(h(x))$	$f(x) = o(h(x))$

Croissances comparées

On notera, uniquement dans cette proposition, $f(x) \ll g(x)$ pour dire que $f(x) = o(g(x))$. Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $a > 1$. On a, au voisinage de $+\infty$,

$$\big(\ln(x)\big)^{\alpha} \ll x^{\beta} \ll a^{x}.$$

Ce résultat s'utilise lorsque l'on rencontre des formes indéterminées pour les calculs de limites. En cas de litige, il faut en retenir que l'exponentielle l'emporte sur la puissance qui l'emporte sur le logarithme.

Définition

On dit que f est **équivalente** à g au voisinage de a, noté $f(x) \sim_a g(x)$, s'il existe un voisinage V de a et une fonction u, définie sur V, qui converge vers 1 en a tels que

$$\forall x \in V \cap I,\ f(x) = u(x)g(x).$$

Théorème

Si, au voisinage de a, g ne s'annule pas, alors

$$f(x) \sim_a g(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1.$$

Dans la pratique, pour montrer que deux fonctions sont équivalentes, on calculera presque tout le temps la limite de leur quotient.

Équivalence et signe

Si $f(x) \sim_a g(x)$, alors, au voisinage de a, $f(x)$ et $g(x)$ sont de même signe.

Équivalence et limite

- Si $f(x) \sim_a g(x)$ et si g admet une limite (finie ou infinie) en a, alors f admet la même limite en a.
- Si $\ell \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x) \sim_a \ell \Leftrightarrow f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

Proposition

Au voisinage de a, on a $f(x) = o(g(x))$ si et seulement si $f(x) + g(x) \sim_a g(x)$.

Opérations et équivalence

On a les propriétés suivantes sur les opérations avec l'équivalence :

Hypothèses	Conclusion
$f(x) \sim_a g(x)$ et $g(x) \sim_a h(x)$	$f(x) \sim_a h(x)$
$f(x) \sim_a u(x)$ et $g(x) \sim_a v(x)$	$f(x)g(x) \sim_a u(x)v(x)$
$f(x) \sim_a u(x)$ et $g(x) \sim_a v(x)$ g et v ne s'annulent pas	$\dfrac{f(x)}{g(x)} \sim_a \dfrac{u(x)}{v(x)}$
$\alpha \in \mathbb{R}$ et $f(x) \sim_a g(x)$	$f(x)^\alpha \sim_a g(x)^\alpha$

⚠ Il y a trois choses qu'il ne faut absolument pas faire avec des équivalents

(1) **Ajouter des équivalents**
Il n'y a aucune règle pour traiter la somme d'équivalents si ce n'est de dire que, d'après la proposition ci-dessus, $f(x) + g(x) \sim_a g(x)$ si $f(x) = o(g(x))$.

(2) **Composer des équivalents**
Il n'y a aucune règle permettant de dire que $h(f(x)) \sim_a h(g(x))$ si $f(x) \sim_a g(x)$.

(3) **Être équivalent à 0**
Si $f(x) \sim_a 0$, cela revient à dire que la fonction f est nulle au voisinage de a (ce qui n'arrive jamais dans la pratique).

Équivalents usuels

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$\ln(1+x) \sim_0 x, \quad e^x - 1 \sim_0 x, \quad \sin(x) \sim_0 x, \quad \tan(x) \sim_0 x,$$

$$\cos(x) - 1 \sim_0 -\frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x.$$

3 Continuité

Définition

Soient f une fonction définie sur I et $a \in I$. On dit que

- f est **continue** en a si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$.
- f est **continue à gauche** en a si $f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} f(a)$.
- f est **continue à droite** en a si $f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} f(a)$.
- f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

On note $\mathscr{C}(I)$ ou $\mathscr{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

Opérations et continuité

Soient f et g deux fonctions continues sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Les fonctions $\lambda f + g$ et fg sont continues sur I.
- Si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.

Composition et continuité

Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ sont continues avec $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Prolongement par continuité

Soit $a \in I$. Si $f : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ est continue et admet une limite finie ℓ en a, alors on peut prolonger f en une fonction continue sur I en posant $f(a) = \ell$.

4 Théorèmes de continuité

Théorème des valeurs intermédiaires

Soient f une fonction continue sur I, a et $b \in I$ tels que $a < b$. Si $\lambda \in [f(a), f(b)]$ (ou $[f(b), f(a)]$ si $f(b) < f(a)$), alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $\lambda = f(c)$.

- Cela revient à dire que toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$ sont atteintes par f.
- Ce théorème peut se reformuler en disant que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- Ce théorème permet de montrer la surjectivité de fonctions et l'existence de solutions à une équation (cf méthode **19.3**).

Théorème des bornes atteintes

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Si f est continue sur le segment $[a, b]$, alors elle est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe α et $\beta \in [a, b]$ tels que

$$\forall x \in [a, b],\ \ f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta).$$

- Dans ce cas, $m = f(\alpha)$ est le minimum de f sur $[a, b]$ et $M = f(\beta)$ son maximum.
- Ce théorème peut se reformuler en disant que l'image d'un segment par une fonction continue est un segment, ici $f([a, b]) = [f(\alpha), f(\beta)] = [m, M]$.

5 Bijections continues

Théorème de la bijection continue

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur I, alors f réalise une bijection de I dans l'intervalle $f(I)$ et f^{-1} est continue sur $f(I)$ et strictement de même monotonie que f.

Ce théorème permet de montrer qu'une fonction est bijective et de montrer qu'une équation admet une unique solution.

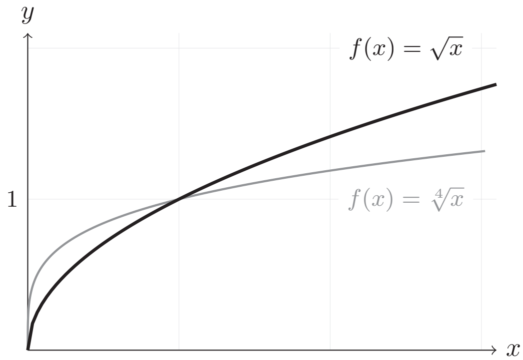
Il faut bien identifier $f(I)$ pour pouvoir dire vers quoi f réalise une bijection (et donc sur quel intervalle f^{-1} est définie). La fonction f étant monotone et continue, il suffit de regarder les valeurs ou limites aux bornes de I (cf méthode **19.4**).

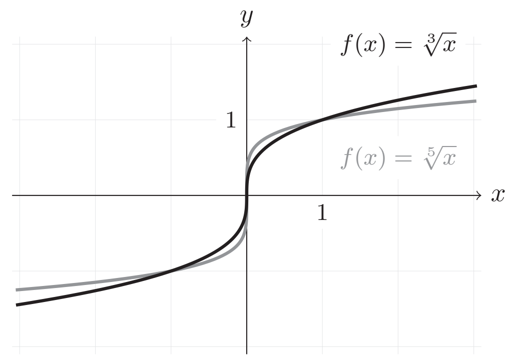
Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si n est pair, on définit la fonction
$$\begin{array}{rccc} \sqrt[n]{\cdot} : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$$
comme la bijection réciproque de
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^n \end{array}.$$
La fonction $\sqrt[n]{\cdot}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

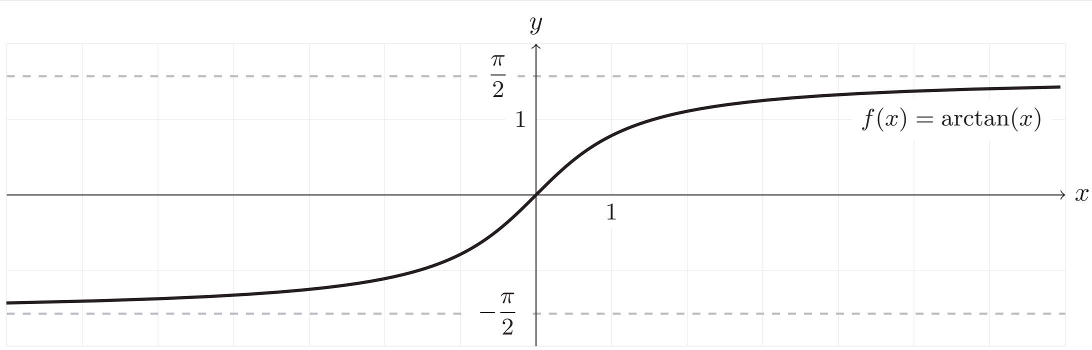
- Si n est impair, on définit la fonction
$$\begin{array}{rccc} \sqrt[n]{\cdot} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$$
comme la bijection réciproque de
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}.$$
La fonction $\sqrt[n]{\cdot}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.





Définition

On définit la fonction
$$\begin{array}{rccc} \arctan : & \mathbb{R} & \to & \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\\ & x & \mapsto & \arctan(x) \end{array}$$
comme la bijection réciproque de la fonction
$$\begin{array}{rccc} \tan : & \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \tan(x) \end{array}.$$
La fonction arctan est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et impaire.



Les méthodes à maîtriser

Méthode 19.1 : Exploiter les équivalents pour un calcul de limite

Le principe d'utilisation des équivalents pour un calcul de limite est le même que pour les suites (cf méthode **18.2**). La différence se situe dans le fait que les limites calculées ne sont pas forcément en $+\infty$. On effectuera donc en général un changement de variable pour se ramener en 0 car les équivalents usuels sont donnés en 0. Pour ce faire,

- si on cherche une limite en un réel a, on effectuera le changement de variable $h = x - a$ (ou $h = a - x$ si la limite est en a^- de sorte que h tende vers 0^+)
- si on cherche une limite en $\pm\infty$, on effectuera le changement de variable $h = \dfrac{1}{x}$.

Exemple d'application

Calculer les limites des fonctions suivantes

(1) $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\cos\left(x\frac{\pi}{2}\right)}}$ **en 1** **(2)** $\boldsymbol{g(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x}$ **en** $\boldsymbol{+\infty}$**.**

(1) On pose $h = x - 1 \to 0$. On a donc $x = 1 + h$ et

$$f(x) = \frac{\ln(1+h)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + h\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\ln(1+h)}{-\sin\left(h\frac{\pi}{2}\right)} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{h}{-h\frac{\pi}{2}} \xrightarrow[h\to 0]{} -\frac{2}{\pi}.$$

On conclut que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\dfrac{2}{\pi}$.

(2) On pose $h = \dfrac{1}{x} \to 0$. On a donc $x = \dfrac{1}{h}$ et $g(x) = (1+h)^{\frac{1}{h}} = \exp\left(\dfrac{1}{h}\ln(1+h)\right)$.

Or $\dfrac{1}{h}\ln(1+h) \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{1}{h} \times h \xrightarrow[h\to 0]{} 1$. On conclut, par composition des limites, que $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = e$.

Voir exercices **19.2**, **19.5**.

Méthode 19.2 : Montrer la continuité d'une fonction

Pour montrer la continuité d'une fonction

- S'il s'agit de sommes, produits ou quotients de fonctions usuelles, il suffit d'utiliser les propriétés des opérations sur les fonctions continues (en précisant que le dénominateur ne s'annule pas s'il y en a un).
- S'il s'agit de la composée de deux fonctions continues, il faut bien vérifier que l'image de la première fonction est inclus dans le domaine de continuité de la deuxième fonction ($f(I) \subset J$ pour reprendre les notations du cours) puis conclure par composition de fonctions continues.
- S'il ne reste plus qu'à montrer la continuité en certains points, on revient à la définition : $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$.

Exemple d'application

Montrer que $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ est continue.

Du fait de la définition de f, on sépare la justification sur $\mathbb{R}_+^*$ et en 0.

- Sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \exp(x\ln(x))$. La fonction $x \mapsto x\ln(x)$ est continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ (par produit) et la fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$. Donc par composition de fonctions continues, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- En 0 : par croissances comparées $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Par composition des limites
$$f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} e^0 = 1 = f(0).$$
Donc f est continue en 0.

On conclut que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

⚠ Ne pas écrire « $x\ln(x)$ est continue » car $x\ln(x)$ n'est pas une fonction mais un réel. La fonction que l'on veut mentionner est $x \mapsto x\ln(x)$.

Voir exercices **19.4**, **19.5**, **19.6**, **19.7**, **19.8** et **19.9**.

Méthode 19.3 : Montrer qu'une équation admet au moins une solution

Si on cherche à montrer qu'une équation $(\mathscr{E})$ du type $f(x) = g(x)$ admet au moins une solution, on commence par modifier l'équation en $f(x)-g(x) = 0$. On pose $h(x) = f(x)-g(x)$ et l'équation $(\mathscr{E})$ devient $h(x) = 0$. La fonction h est continue (sur un ensemble à déterminer). Il suffit ensuite de montrer que h change de signe (en général il suffit de regarder les valeurs de h aux bornes de son ensemble de définition). On conclut, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que h s'annule et que l'équation $(\mathscr{E})$ admet au moins une solution.

Exemple d'application

Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ continue. Montrer que f admet au moins un point fixe (c'est-à-dire un réel c tel que $f(c) = c$).

On est ramené à montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution.
On pose donc $g(x) = f(x) - x$ qui est continue sur $[a, b]$, par somme de fonctions continues.
On regarde les valeurs de g aux bornes de son ensemble de définition :
$$g(a) = f(a) - a \geq 0 \text{ car } f(a) \in [a, b] \quad \text{et} \quad g(b) = f(b) - b \leq 0 \text{ car } f(b) \in [a, b].$$
Donc g est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et qui change de signe.
Alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on dispose de $c \in [a, b]$ tel que $g(c)$, c'est-à-dire tel que $f(c) = c$.

Voir exercices **19.10**, **19.12**, **19.13** et **19.14**.

Pour trouver une valeur approchée d'une solution de $f(x) = 0$ sur $[a, b]$, on peut utiliser l'algorithme de dichotomie ci-dessous. La fonction `dicho(f,a,b,eps)` renvoie une valeur approchée d'une solution de $f(x) = 0$ sur $[a, b]$ à `eps` près.

```
def dicho(f,a,b,eps):
    while b-a >= eps:
        c = (a+b)/2
        if f(a)*f(c) < 0:
            b = c
        else:
            a = c
    return (a+b)/2
```

Tant que la précision n'est pas assez bonne, on coupe le segment en 2 en définissant c son milieu. Si $f(a)$ et $f(c)$ sont de signe contraires, alors la solution est entre a et c et b prend la valeur de c. Sinon, elle est entre c et b et a prend la valeur de c. Dans les deux cas, l'écart entre a et b est divisé par 2. En réitérant l'opération, cet écart va finir par devenir inférieur à `eps`.

Méthode 19.4 : Montrer qu'une fonction réalise une bijection

Pour montrer, à l'aide du théorème de la bijection continue, qu'une fonction f définie sur un intervalle I induit une bijection :

1. On montre que f est continue
2. On montre que f est strictement monotone
3. On détermine son intervalle image J (dont les bornes sont données par les images ou limites de f aux bornes de son intervalle de définition).

On conclut que f réalise une bijection de I dans J.

Exemple d'application

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = (x+1)e^{-x}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un ensemble à déterminer.

Par produit, f est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est aussi dérivable et si $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = -xe^{-x}$. On a f' strictement négative sauf en un point (en 0), donc f est strictement décroissante.
De plus $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ par croissances comparées.
Donc, comme f est continue et décroissante,

$$f([0, +\infty[) = \left] \lim_{x\to+\infty} f(x), f(0) \right] =]0, 1].$$

Ainsi, d'après le théorème de la bijection continue, f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $]0, 1]$.

Voir exercices **19.7**, **19.8** et **19.12**.

Interro de cours

1. Parmi les énoncés suivants lesquels sont toujours vrais ?

(a) Si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, alors f est croissante au voisinage de $+\infty$.

(b) Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$, alors f ne peut pas se prolonger par continuité en a.

(c) Si f admet une limite en a à gauche et une limite à droite, alors elle admet une limite en a.

(d) Si f admet une limite en a et si g n'en admet pas, alors $f+g$ n'a pas de limite en a.

2. Déterminer les limites à gauche et à droite de $f(x) = \dfrac{\ln(1+|x|)}{x}$ en 0. La fonction f admet-elle une limite en 0 ?

3. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \geq 0$, alors f est-elle forcément positive au voisinage de a ?

4. Soit f une fonction définie sur $]a,b[$. Parmi les énoncés suivants lesquels sont toujours vrais ?

(a) Si f est croissante et majorée par M, alors $f(x) \xrightarrow[x\to b]{} M$.

(b) Si f est croissante et minorée, alors elle admet une limite finie en a.

(c) Si f est décroissante et majorée, alors elle admet une limite finie en b.

(d) Si f est décroissante et non minorée, alors $f(x) \xrightarrow[x\to b]{} -\infty$.

5. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ peut se prolonger par continuité sur $\mathbb{R}$.

6. Justifier (proprement) que la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[-1,1]$.

7. Montrer que la fonction sin réalise une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ dans un intervalle à déterminer.

Exercices

Pour s'entraîner

Exercice 19.1

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pour que :

a. Au voisinage de 0, on ait $x^\alpha = o\left(x^\beta\right)$.

b. Au voisinage de $+\infty$, on ait $x^\alpha = o\left(x^\beta\right)$.

2. Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n \in \mathbb{N}$ et $P(x) = \sum_{k=p}^{n} a_k x^k$ avec $a_n \neq 0$ et $a_p \neq 0$. Montrer que

a. $P(x) \sim_0 a_p x^p$.

b. $P(x) \sim_{+\infty} a_n x^n$.

Exercice 19.2

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x \ln(1+x^2)}{x \tan x}$

2. $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + x - 2) \tan \dfrac{\pi x}{2}$

3. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^x - 1}{\ln\left(1 + \sqrt{x^2 - 1}\right)}$

4. $\lim\limits_{x \to e^-} (\ln x)^{\ln(e-x)}$

5. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{2}{1-x^2} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$

6. $\lim\limits_{x \to 0} (\ln(e+x))^{\frac{1}{x}}$

7. $\lim\limits_{x \to \pi} (1 + \sin x)^{\dfrac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}$

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(3x) - \sin(x)}{\sin(4x)}$.

Exercice 19.3

Déterminer des équivalents simples de

1. $(x + \sin(x))(e^x + \ln(x) - 2)$ au voisinage de $+\infty$

2. $\ln(\cos(x))$ au voisinage de 0

3. $x^{\frac{1}{x}} - 1$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 19.4

Justifier que les fonctions suivantes sont continues :

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+\sin(x)}}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

2. $g(x) = \sqrt{\ln(1+e^{-x})}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19.5

Montrer que les fonctions suivantes sont continues

1. $$f : \begin{array}{rcl}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

2. $$g : \begin{array}{rcl} \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = \pm\dfrac{\pi}{2} \\ -2 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\sin(x)(e^x-1)}{\ln(\cos(x))} & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Exercice 19.6

Étudier la continuité de $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}. \end{array}$

Exercice 19.7

Soit la fonction f définie par $f : \begin{array}{rcl} [-1,+\infty[& \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}. \end{array}$

1. Montrer que f est continue.
2. Montrer que f est bijective.

Exercice 19.8

Soit la fonction f définie par $f : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 + \sqrt{2e^{-x} - 1}. \end{array}$

1. Déterminer l'ensemble de définition I de f.
2. Montrer que f est continue.
3. Déterminer un réel α tel que f réalise une bijection de I dans $[\alpha, +\infty[$.

Exercice 19.9

Soit la fonction f définie par $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right). \end{array}$

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
2. La fonction f admet-elle une limite à droite en 0 ? à gauche en 0 ?
3. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 19.10

Montrer qu'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Pour aller plus loin

Exercice 19.11

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique avec $T > 0$.
Montrer que si f admet une limite finie en $+\infty$, alors elle est constante.

Exercice 19.12

Montrer qu'une fonction f continue et décroissante sur $\mathbb{R}$ admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire un unique réel c tel que $f(c) = c$).

Exercice 19.13

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue et telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell < 1$.
Montrer que f admet au moins un point fixe sur $\mathbb{R}_+$ (c'est-à-dire $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(c) = c$).

Exercice 19.14

Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = f\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$ possède au moins une solution dans $[0,1]$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = f\left(x + \dfrac{1}{n}\right)$ possède au moins une solution dans $[0,1]$.

On pourra introduire la fonction $h(x) = f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - f(x)$ *et calculer* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right)$.

Exercice 19.15

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que $\forall x \in [a,b],\ f(x) > g(x)$.
Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq g(x) + m$.

Exercice 19.16

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Montrer que f possède un minimum.

Exercice 19.17

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$.
Montrer que f est constante.

Corrections

Interro de cours

1. **(a)** **Faux.** Si $f(x) = x + 2\sin(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$, alors $f(x) \geq x - 2 \xrightarrow[x\to+]{} \infty$.

Cependant, $f'(x) = 1 + 2\cos(x)$ qui n'est positif ou nul sur aucun voisinage de $+\infty$.

(b) **Vrai.** Pour pouvoir prolonger par continuité en a, il faut avoir une limite finie en a.

(c) **Faux.** Il faut que la limite à gauche et la limite à droite soient égales.

(d) **Faux.** Le résultat est vrai si on parle de limite finie. Mais si on pose $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ et $g(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, on a que $f \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$ et que g n'a pas de limite en $+\infty$. Cependant $f(x) + g(x) \geq \dfrac{1}{x^2} + 1 \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$, donc $f + g$ admet une limite (infinie).

2. Au voisinage de 0, on a

$$f(x) \sim_0 \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Ainsi $f(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} -1$ et $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$.

La limite à gauche et la limite à droite de f en 0 ne sont pas les mêmes, donc f n'admet pas de limite en 0.

3. **Non.** Il faudrait supposer que $\ell > 0$. On a $f(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ mais f n'est de signe constant sur aucun voisinage de 0.

4. **(a)** **Faux.** Si on définit $f(x) = 1 - e^{-x}$, alors f est croissante et majorée par 2. Cependant, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

(b) **Vrai.** Cf théorème de la limite monotone.

(c) **Faux.** Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, alors f est décroissante et majorée par 0 sur $]-1, 0[$. Cependant $f(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty$.

(d) **Vrai.** Cf théorème de la limite monotone.

5. Par quotient, f est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, au voisinage de 0, on a $f(x) \sim_0 \dfrac{x}{x} = 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

On peut donc prolonger f par continuité en posant $f(0) = 1$.

6. La fonction $x \mapsto 1 - x^2$ est continue de $[-1, 1]$ dans $[0, 1]$ et la fonction $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $[0, 1]$.

Ainsi, par composition de fonctions continues, la fonction f est continue sur $[-1, 1]$.

7. La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

De plus $\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

Alors, d'après le théorème de la bijection continue, la fonction sinus réalise une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1, 1]$.

Exercice 19.1

1. **(a)** Au voisinage de 0, on a

$$x^\alpha = o(x^\beta) \Leftrightarrow \frac{x^\alpha}{x^\beta} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \Leftrightarrow x^{\alpha-\beta} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha > \beta.$$

(b) Au voisinage de $+\infty$, on a

$$x^\alpha = o(x^\beta) \Leftrightarrow \frac{x^\alpha}{x^\beta} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^{\beta-\alpha}} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0 \Leftrightarrow \beta - \alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < \beta.$$

2. **(a)** Au voisinage de 0, on a

$$\frac{P(x)}{a_p x^p} = 1 + \sum_{k=p+1}^{n} \frac{a_k x^{k-p}}{a_p} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 + 0.$$

On en conclut que $P(x) \sim_0 a_p x^p$.

(b) Au voisinage de $+\infty$, on a

$$\frac{P(x)}{a_n x^n} = \sum_{k=p}^{n-1} \frac{a_k}{a_n x^{n-k}} + 1 \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0 + 1.$$

On en conclut que $P(x) \sim_{+\infty} a_n x^n$.

Exercice 19.2

Pour chaque question, on notera $f(x)$ l'expression dont on cherche la limite.

1. On utilise les équivalents usuels en 0 pour obtenir que

$$\frac{\sin x \ln(1+x^2)}{x \tan x} \sim_0 \frac{x \times x^2}{x \times x} = x.$$

On en conclut que $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0}$

2. Il s'agit d'une forme indéterminée. On change de variable pour se ramener en 0 en posant $h = x - 1 \xrightarrow[x\to 1]{} 0$. On a

$$f(x) = f(1+h) = ((1+h)^2 + (1+h) - 2) \tan\left(\frac{\pi(1+h)}{2}\right) = (3h + h^2)\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi h}{2}\right).$$

Or, si $\alpha \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, alors

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\frac{1}{\tan\alpha}.$$

On en déduit que

$$f(x) = (3h + h^2) \times \frac{-1}{\tan\frac{\pi h}{2}} \underset{h\to 0}{\sim} 3h \times \frac{-1}{\frac{\pi h}{2}} = -\frac{6}{\pi}.$$

On en conclut que $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} -\frac{6}{\pi}}$

3. On change de variable pour se ramener en 0 en posant $h = x - 1 \xrightarrow[x\to 1^+]{} 0^+$. On a

$$x^x - 1 = \exp(\underbrace{x\ln x}_{\xrightarrow[x\to 1]{} 0}) - 1 \sim_1 x\ln x = (1+h)\ln(1+h) \sim 1 \times h$$

et

$$\ln(1 + \underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{\xrightarrow[x\to 1]{} 0}) \sim_1 \sqrt{x^2-1} = \sqrt{2h+h^2} \underset{h\to 0^+}{\sim} \sqrt{2h}.$$

Ainsi, par quotient d'équivalents $f(x) \sim_{h\to 0^+} \dfrac{h}{\sqrt{2h}} = \sqrt{\dfrac{h}{2}}$.

On en conclut que $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} 0}$

4. On change de variable pour se ramener en 0 en posant $h = e - x \xrightarrow[x\to e^-]{} 0^+$. On a

$$(\ln x)^{\ln(e-x)} = \exp\big(\ln(e-x)\ln(\ln x)\big) = \exp\big(\ln(h)\ln(\ln(e-h))\big).$$

Or

$$\ln(\ln(e-h)) = \ln\left(\underbrace{\ln(e)}_{=1} + \underbrace{\ln\left(1 - \frac{h}{e}\right)}_{\xrightarrow[h\to 0^+]{} 0}\right) \underset{h\to 0^+}{\sim} \ln\left(1 - \frac{h}{e}\right).$$

Donc $\ln(h)\ln\big(\ln(e-h)\big) \underset{h\to 0^+}{\sim} -\dfrac{h\ln h}{e} \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0$.

On en conclut, par composition des limites, que $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to e^-]{} 1}$

5. On change de variable pour se ramener en 0 en posant $h = x - 1 \xrightarrow[x\to 1]{} 0$. On a

$$f(x) = \frac{2}{-2h-h^2} - \frac{3}{-3h-3h^2-h^3} = \frac{1}{h} \times \frac{-3h-2h^2}{(2+h)(3+3h+h^2)} \underset{h\to 0^+}{\sim} \frac{-3h}{6h} = -\frac{1}{2}.$$

On en conclut que $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} -\dfrac{1}{2}}$

6. On a $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x}\ln\big(\ln(e+x)\big)\right)$. Or

$$\ln\big(\ln(e+x)\big) = \ln\left(\ln\left(e\left(1+\frac{x}{e}\right)\right)\right) = \ln\left(1 + \ln\left(1+\frac{x}{e}\right)\right) \sim_0 \ln\left(1+\frac{x}{e}\right) \sim_0 \frac{x}{e}.$$

Donc $\dfrac{1}{x}\ln(\ln(e+x)) \sim_0 \dfrac{1}{x} \times \dfrac{x}{e} = \dfrac{1}{e}$.

On en conclut, par composition des limites, que $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \exp\left(\dfrac{1}{e}\right)}$

7. On change de variable pour se ramener en 0 en posant $h = x - \pi \xrightarrow[x\to \pi]{} 0$. On a

$$f(x) = \exp\left(\frac{\ln(1+\sin x)}{\cos(\frac{x}{2})}\right) = \exp\left(\frac{\ln(1+\sin(\pi+h))}{\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{h}{2})}\right) = \exp\left(\frac{\ln(1-\sin h)}{-\sin(\frac{h}{2})}\right).$$

Or $\dfrac{\ln(1-\sin h)}{-\sin(\frac{h}{2})} \underset{h\to 0^+}{\sim} \dfrac{-\sin h}{-\frac{h}{2}} \underset{h\to 0^+}{\sim} 2$.

On en conclut, par composition des limites, que $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to\pi]{} e^2}$

8. Au voisinage de 0, on a $f(x) \sim_0 \dfrac{\sin(3x)-\sin(x)}{4x} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\sin(3x)}{x} - \dfrac{\sin(x)}{x}\right)$.

Or $\dfrac{\sin(x)}{x} \sim_0 \dfrac{x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ et $\dfrac{\sin(3x)}{x} \sim_0 \dfrac{3x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 3$.

On en conclut, par somme de limites, que $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{2}}$

Exercice 19.3

1. On a $\dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, donc $\sin(x) = o(x)$ puis $x + \sin(x) \sim_{+\infty} x$.
Par croissances comparées, $\ln(x) - 2 = o(e^x)$, d'où $e^x + \ln(x) - 2 \sim_{+\infty} e^x$.
Par produit, on en conclut que $(x+\sin(x))(e^x + \ln(x) - 2) \sim_{+\infty} xe^x$.

2. On a $\ln(\cos(x)) = \ln\big(1 + \cos(x) - 1\big)$. Or $\cos(x) - 1 \xrightarrow[x\to 0]{}$, donc

$$\ln(\cos(x)) \sim_0 \cos(x) - 1 \sim_0 -\frac{x^2}{2}.$$

3. On a

$$x^{\frac{1}{x}} - 1 = \exp\left(\frac{1}{x}\ln x\right) - 1 \sim_{+\infty} \frac{1}{x}\ln x \quad \text{car } x\ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Exercice 19.4

1. La fonction $x \mapsto 1+\sin x$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $[0,2]$ et la fonction $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $[0,2]$.
Par composition, $x \mapsto \sqrt{1+\sin x}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, la fonction $x \mapsto 1 + x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas. Ainsi, par quotient de fonctions continues, avec le dénominateur qui ne s'annule pas, on en conclut que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction $x \mapsto 1+e^{-x}$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $]1,+\infty[$, la fonction ln est continue de $]1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
On en conclut, par composition de fonctions continues, que g est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19.5

1. Par quotient, la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}-1}$ est continue sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$.
De plus, au voisinage de 0, on a $\sqrt{1+x} - 1 \sim_0 \dfrac{x}{2}$ et $\ln(1+x) \sim_0 x$.
Ainsi, par quotient,

$$f(x) \sim_0 \frac{x}{\frac{x}{2}} \xrightarrow[x\to 0]{} 2 = f(0).$$

On en déduit que la fonction f est continue en 0.
On en conclut que la fonction f est continue sur $]-1,+\infty[$.

2. La fonction cos est continue de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ dans $]0,1]$ et la fonction ln est continue sur $]0,1]$.
Alors, par composition, la fonction $x \mapsto \ln(\cos(x))$ est continue sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
De plus, $\ln(\cos x))$ est non nul sur $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Donc, par produit et quotient de fonctions continues, la fonction g est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Ensuite, on a $g(x) \xrightarrow[x \to \pm\frac{\pi}{2}]{} 0 = g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, donc g est continue en $\dfrac{\pi}{2}$ et en $-\dfrac{\pi}{2}$.
De plus, au voisinage de 0, on a $\sin x \sim_0 x$, $e^x - 1 \sim_0 x$ et

$$\ln(\cos x) = \ln\big(1 + (\cos(x) - 1)\big) \sim_0 \cos(x) - 1 \sim_0 -\frac{x^2}{2}.$$

Ainsi $g(x) \sim_0 \dfrac{x \times x}{-\frac{x^2}{2}} = -2 \xrightarrow[x \to 0]{} -2 = g(0)$. Donc g est continue en 0.
On en conclut que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19.6

La fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est continue de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ dans $[0,1[$ et la fonction $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $[0,1[$.
Par composition, $x \mapsto \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
La fonction $\lfloor \cdot \rfloor$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
Alors, par somme, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a $f(n) = n + \sqrt{n - n} = n$. Si $x \in]n, n+1[$, alors $\lfloor x \rfloor = n$ et

$$f(x) = n + \sqrt{x - n} \xrightarrow[x \to n^+]{} n + \sqrt{n - n} = n = f(n).$$

Si $x \in]n-1, n[$, alors $\lfloor x \rfloor = n - 1$ et

$$f(x) = n - 1 + \sqrt{x - (n-1)} \xrightarrow[x \to n^-]{} n - 1 + \sqrt{n - n + 1} = n - 1 + 1 = n = f(n).$$

Ainsi $f(x) \xrightarrow[x \to n]{} f(n)$ et f est continue en n.
On en conclut que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19.7

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1+x}{2}$ est continue de $[-1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$ et la fonction $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
On en conclut, par composition, que la fonction f est continue sur $[-1, +\infty[$.

2. La fonction $x \mapsto \dfrac{1+x}{2}$ est strictement croissante de $[-1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$ et la fonction $\sqrt{\cdot}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc par composition, la fonction f est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$.
De plus $f\left([-1, +\infty[\right) = [f(-1), \lim\limits_{+\infty} f[= \mathbb{R}_+$.
Ainsi la fonction f est continue et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. Donc, d'après le théorème de la bijection continue, la fonction f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 19.8

1. On a $x \in I \Leftrightarrow 2e^{-x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \geq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -x \geq -\ln 2 \Leftrightarrow x \leq \ln 2$.
Ainsi $I =]-\infty, \ln 2]$.

2. La fonction $x \mapsto 2e^{-x} - 1$ est continue de I dans $\mathbb{R}_+$ et la fonction $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
On en conclut, par composition, que f est continue.

3. La fonction $x \mapsto 2e^{-x} - 1$ est strictement décroissante de I dans $\mathbb{R}_+$ et la fonction $\sqrt{\cdot}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc, par composition, la fonction f est strictement décroissante sur I.
De plus, $f(\ln 2) = 0$ et $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$. Donc $f(I) = f\left(]-\infty, \ln 2]\right) = [f(\ln 2), \lim\limits_{-\infty} f[= \mathbb{R}_+$.
Ainsi la fonction f est continue et strictement décroissante sur I. Donc, d'après le théorème de la bijection continue, la fonction f réalise une bijection de I dans $\mathbb{R}_+$ (c'est-à-dire dans $[\alpha, +\infty[$ avec $\alpha = 0$).

Exercice 19.9

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ et la fonction arctan est continue sur $\mathbb{R}^*$.
On en conclut, par composition, que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

2. On a $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$ et $\arctan(y) \xrightarrow[y \to +\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$.
Donc, par composition des limites, $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} \dfrac{\pi}{2}$ et f admet une limite à droite en 0.
On a $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^-]{} -\infty$ et $\arctan(y) \xrightarrow[y \to -\infty]{} -\dfrac{\pi}{2}$.
Donc, par composition des limites, $f(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} -\dfrac{\pi}{2}$ et f admet une limite à gauche en 0.

3. D'après la question précédente, la fonction f admet une limite à gauche en 0 et une limite à droite en 0 qui sont différentes. Donc la fonction f n'admet pas de limite en 0 et ne peut donc pas être prolongée par continuité en 0.

Exercice 19.10

On note aX^n le terme dominant de P avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $n = \deg(P)$ qui est impair.

- Si $a > 0$, alors $P(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $P(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$.
- Si $a < 0$, alors $P(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$ et $P(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$.

Dans les deux cas, $P(x)$ change de signe. Or la fonction $x \mapsto P(x)$ est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}$.
Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, P s'annule au moins une fois.

Exercice 19.11

On note $\ell \in \mathbb{R}$ la limite de f en $+\infty$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x) = f(x+T) = f((x+T)+T) = f(x+2T) = f(x+3T).$$

On montre ainsi par une récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f(x+nT)$.

Or, si $n \in \mathbb{N}$, on a $x + nT \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc par composition des limites, on obtient que $f(x + nT) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
Alors si on passe à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'égalité $f(x) = f(x + nT)$, on obtient que $f(x) = \ell$.
On en conclut que f est constante et égale à ℓ.

Exercice 19.12

On pose la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$. Par différence, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ sont tels que $a < b$, alors $f(a) \geq f(b)$ car f est décroissante. De plus $-a > -b$, donc en ajoutant ces deux inégalités, on obtient que $f(a) - a > f(b) - b$, c'est-à-dire $g(a) > g(b)$.
Ainsi la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Si $x > 0$, alors $f(x) \leq f(0)$ car f est décroissante, donc $g(x) = f(x) - x \leq f(0) - x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.
Ainsi, par comparaison, $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.
De même, si $x < 0$, alors $g(x) \geq f(0) - x \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$, donc par comparaison, $g(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$.
La fonction g est donc continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et elle change de signe. D'après le théorème de la bijection continue, g s'annule une fois et une seule.
On dispose donc d'un unique $c \in \mathbb{R}$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(c) = c$.

Exercice 19.13

On pose la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$.
Par différence, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$.
On a $g(0) = f(0) \geq 0$ et, si $x > 0$, $g(x) = x \underbrace{\left(\frac{f(x)}{x} - 1\right)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell - 1 < 0} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.
La fonction g est donc continue et change de signe. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+$. On dispose donc d'un réel $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(c) = c$.

Exercice 19.14

1. On pose la fonction g définie par $g(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x)$ et on note $\mathscr{D}_g$ son domaine de définition. On a

$$x \in \mathscr{D}_g \Leftrightarrow \left(x \in \mathscr{D}_f = [0,1] \text{ et } x + \frac{1}{2} \in \mathscr{D}_f\right) \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Ainsi $\mathscr{D}_g = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
Par différence de fonctions continues, la fonction g est continue.
De plus $g(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right) = -g(0)$.

La fonction g est donc continue et change de signe. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule au moins une fois sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. On dispose donc d'un réel $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire tel que $f\left(c + \frac{1}{2}\right) = f(c)$.

2. On pose la fonction h définie par $h(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$ et on note $\mathscr{D}_h$ son domaine de définition. On a

$$x \in \mathscr{D}_h \Leftrightarrow x \in \mathscr{D}_f = [0,1] \text{ et } x + \frac{1}{n} \in \mathscr{D}_f \Leftrightarrow x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right].$$

Ainsi $\mathscr{D}_h = \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$.
Par différence de fonctions continues, la fonction h est continue.
Par télescopage, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = f(1) - f(0) = 0.$$

Tous les termes $h\left(\frac{k}{n}\right)$ ne peuvent pas être strictement du même signe (sinon la somme ci-dessus serait aussi strictement de ce signe). On en déduit que h change de signe.
La fonction h est donc continue et change de signe. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction h s'annule au moins une fois sur $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$. On dispose donc d'un réel $c \in \left]0, 1 - \frac{1}{n}\right[$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire tel que $f\left(c + \frac{1}{n}\right) = f(c)$.

Exercice 19.15

On pose h la fonction définie sur $[a,b]$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.
Par différence de fonctions continues, la fonction h est continue sur $[a,b]$.
La fonction h est continue sur le segment $[a,b]$, donc, d'après le théorème des bornes atteintes, elle admet un minimum m.
Le minimum étant atteint, on dispose de $c \in [a,b]$ tel que $m = h(c) = f(c) - g(c) > 0$.
Comme m est le minimum de h, si $x \in [a,b]$, on a $h(x) \geq m$, c'est-à-dire $f(x) - g(x) \geq m$.
On en conclut qu'il existe un réel $m > 0$ tel que $\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq g(x) + m$.

Exercice 19.16

La fonction f tend vers $+\infty$ en $+\infty$, donc on dispose de $b > 0$ tel que $\forall x > b, f(x) \geq f(0)$.
La fonction f tend vers $+\infty$ en $-\infty$, donc on dispose de $a < 0$ tel que $\forall x < a, f(x) \geq f(0)$.
Sur le segment $[a,b]$, la fonction f est continue, donc, d'après le théorème des bornes atteintes, elle admet un minimum m sur $[a,b]$. Comme $0 \in [a,b]$ (par construction de a et b), on a $f(0) \geq m$.
Montrons que m est le minimum de f sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < a$, alors $f(x) \geq f(0) \geq m$
- Si $a \leq x \leq b$, alors $f(x) \geq m$ car m est le minimum de f sur $[a,b]$
- Si $x > b$, alors $f(x) \geq f(0) \geq m$.

Dans tous les cas, $f(x) \geq m$ avec m atteint par f (car c'est le minimum de f sur $[a, b]$).
On en conclut que m est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19.17

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x) = f\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{4}\right).$$

On montre par une récurrence simple que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

Or si $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{x}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, donc $f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(0)$ car f est continue en 0. Ainsi

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(0).$$

On en déduit que $f(x) = f(0)$, pour n'importe quelle valeur de $x \in \mathbb{R}$.
On en conclut que f est constante.

CHAPITRE 20

Dérivation

L'essentiel du cours

Dans tout ce chapitre I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point.

1 Dérivée

Dans toute cette partie, f désignera une fonction définie sur I et $a \in I$.

Définition

On dit que la fonction f est **dérivable** en a si le **taux d'accroissement** $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie en a.
On appelle alors **dérivée** de f en a cette limite et on la note $f'(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

Le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ correspond à la pente de la corde reliant les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$. La dérivée de f en a correspond donc à la pente de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en le point de coordonnées $(a, f(a))$.

Théorème

Si f est dérivable en a alors elle est continue en a.

La réciproque est fausse ! La fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

Proposition

Si f est dérivable en a et que $f'(a) \neq 0$, alors $f(x)-f(a) \sim_a f'(a)(x-a)$.

Définition

On dit que f est **dérivable à droite** (resp. **dérivable à gauche**) en a si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie à droite (resp. à gauche) en a.
On appelle alors **dérivée à droite** (resp. **dérivée à gauche**) de f en a cette limite à droite (resp. à gauche) et on la note $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$).

Proposition

La fonction f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Équation de la tangente

- Si la fonction f est dérivable en a, alors sa courbe $\mathscr{C}_f$ possède une tangente au point de coordonnées $(a, f(a))$. Cette tangente a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
- Si f est continue en a et si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$, alors sa courbe $\mathscr{C}_f$ possède une tangente verticale au point de coordonnées $(a, f(a))$. Cette tangente a pour équation $x = a$.

Définition

On dit que f est **dérivable** sur I si f est dérivable en tout point de I.
Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée** de f, notée f' ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, la fonction $x \mapsto f'(x)$.
On note $\mathscr{D}(I)$ ou $\mathscr{D}^1(I)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I.

Toutes les dérivées usuelles sont dans le formulaire **Dérivées usuelles** en appendice (page 486).

Opérations sur les dérivées

Soient f et g dérivables sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les fonctions $\lambda f + g$ et fg sont dérivables sur I et

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g' \quad \text{et} \quad (fg)' = f'g + fg'.$$

De plus si la fonction g ne s'annule pas sur I, alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables sur I et

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Dérivée et composition

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(I) \subset J$. La fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.

Dérivée et bijection réciproque

Si f est dérivable sur I, si f réalise une bijection de I dans J et si f' ne s'annule pas sur I, alors la fonction f^{-1} est dérivable sur J et

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si n est pair, la fonction $\sqrt[n]{\cdot}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt[n]{x}}{nx}$.
- Si n est impair, la fonction $\sqrt[n]{\cdot}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt[n]{x}}{nx}$.

Proposition

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

2 Théorème de Rolle et conséquences

Extremum et dérivée

Si f est dérivable en $a \in I$ et si f admet un extremum local en a, qui n'est pas une borne de I, alors $f'(a) = 0$.

- Le résultat est faux si a est une borne de I : $x \mapsto x$ sur $[0,1]$ admet un maximum en 1, mais sa dérivée en 1 n'est pas nulle.
- La réciproque est fausse : la fonction $x \mapsto x^3$ n'a pas d'extremum mais voit sa dérivée s'annuler en 0.

Théorème de Rolle

Soient $a < b$ et f une fonction telle que
(1) f est continue sur $[a,b]$
(2) f est dérivable sur $]a,b[$
(3) $f(a) = f(b)$.
Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Si on a à faire à une fonction dérivable sur $[a,b]$, elle sera aussi continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ aussi.

Théorème des accroissements finies

Soient $a < b$ deux réels et f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Dérivée et variations

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- $f' = 0$ sur I si et seulement si f est constante sur I.
- $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) sur I si et seulement si f est croissante (resp. décroissante) sur I.
- Si $f' > 0$ sur I (resp. $f' < 0$) sauf en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I (resp. strictement décroissante).

3 Dérivées d'ordre supérieur

Dans toute cette partie n désignera un entier naturel ($n \in \mathbb{N}$).

Définition

On définit par récurrence la notion de fonction **dérivable n fois** et de **dérivée $n^{\text{ème}}$** de f, notée $f^{(n)}$.

- Toute fonction est dérivable 0 fois et $f^{(0)} = f$.
- La fonction f est dérivable $n+1$ fois si elle est dérivable n fois et si $f^{(n)}$ est dérivable. On pose alors $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$.

Si $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est de **classe $\mathscr{C}^n$** si f est dérivable n fois et si $f^{(n)}$ est continue. On note $\mathscr{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.
On dit que f est de **classe $\mathscr{C}^\infty$** si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On note $\mathscr{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

Dire qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^0$ revient donc à dire qu'elle est continue, ce qui justifie la notation $\mathscr{C}^0(I)$ pour l'ensemble des fonctions continues sur I.

Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

Soient f et g de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les fonctions $\lambda f + g$ et fg sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et $(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}$.

De plus si la fonction g ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.

Il existe aussi une formule pour la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'un produit (appelée formule de Leibniz), mais elle n'est pas au programme.

Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ et composition

Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^n$ telles que $f(I) \subset J$, alors la fonction $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.

Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ et bijection réciproque

Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, si f réalise une bijection de I dans J et si f' ne s'annule pas sur I, alors la fonction f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J.

Les méthodes à maîtriser

Méthode 20.1 : Montrer la dérivabilité d'une fonction

Pour montrer la dérivabilité d'une fonction

- S'il s'agit de sommes, produits ou quotients de fonctions usuelles, il suffit d'utiliser les propriétés des opérations sur les fonctions dérivables (en précisant que le dénominateur ne s'annule pas s'il y en a un).
- S'il s'agit de la composée de deux fonctions dérivables, il faut bien vérifier que l'image de la première fonction est incluse dans le domaine de dérivabilité de la deuxième fonction ($f(I) \subset J$ pour reprendre les notations du cours) puis conclure par composition de fonctions dérivables.
- S'il ne reste plus qu'à montrer la dérivabilité en certains points, on en revient à la définition : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie en a.

Exemple d'application

Montrer que $\boldsymbol{f} :$ $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} & \mapsto & \begin{cases} \boldsymbol{x^{(x^2)}} & \textbf{si } \boldsymbol{x > 0} \\ \boldsymbol{1} & \textbf{si } \boldsymbol{x = 0} \end{cases} \end{array}$ **est dérivable.**

Du fait de la définition de f, on sépare la justification sur $\mathbb{R}_+^*$ et en 0.

- Sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \exp(x^2 \ln(x))$. La fonction $x \mapsto x^2 \ln(x)$ est dérivable de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ (par produit) et la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  Donc par composition de fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- En 0 : par croissances comparées $x^2 \ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Donc

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\exp(x^2\ln(x))-1}{x} \sim_0 \frac{x^2\ln(x)}{x} = x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

  Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

On conclut que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

En montrant la dérivabilité de f, on a aussi montré sa continuité (y compris en 0).

Voir exercices **20.1**, **20.2** et **20.4**.

Méthode 20.2 : Montrer la caractère $\mathscr{C}^n$ d'une fonction

Pour montrer qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^n$

- S'il s'agit de sommes, produits ou quotients de fonctions usuelles, il suffit d'utiliser les propriétés des opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ (en précisant que le dénominateur ne s'annule pas s'il y en a un).
- S'il s'agit de la composée de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$, il faut bien vérifier que l'image de la première fonction est incluse dans le domaine de la deuxième fonction ($f(I) \subset J$ pour reprendre les notations du cours) puis conclure par composition de fonctions de classe $\mathscr{C}^n$.

Exemple d'application

Montrer que $\boldsymbol{f : \begin{array}{rcl}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{1-x^2} \end{array}}$ **est de classe** $\mathscr{C}^\infty$**.**

La fonction $x \mapsto 1 - x^2$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $\sqrt{\cdot}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors par composition de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

Voir exercice **20.2**.

Méthode 20.3 : Utiliser le théorème de Rolle

Si une fonction f, dérivable sur un intervalle I, prend deux fois la même valeur, alors sa dérivée f' s'annule au moins une fois. Ce résultat peut être utile dans des exercices demandant de montrer que la dérivée d'une fonction s'annule une fois (ou un nombre de fois exigé par l'énoncé).

Exemple d'application

Soient $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}}$ **et** $\boldsymbol{f}$ **dérivable sur** $\boldsymbol{[a,b]}$ **s'annulant au moins** $\boldsymbol{n+1}$ **fois sur** $\boldsymbol{[a,b]}$**. Montrer que** $\boldsymbol{f'}$ **s'annule au moins** $\boldsymbol{n}$ **fois sur** $\boldsymbol{[a,b]}$**.**

En représentant graphiquement le problème, on se rend compte que f' s'annule entre deux zéros consécutifs de f. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème de Rolle plusieurs fois et à compter le nombre de zéros de f' obtenus.

On note $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1}$ des zéros de f, classés par ordre croissant.

Soit $k \in [\![1,n]\!]$. La fonction f est continue sur $[x_k, x_{k+1}]$, dérivable sur $]x_k, x_{k+1}[$ et

$$f(x_k) = 0 = f(x_{k+1}).$$

On peut donc appliquer le théorème de Rolle à f sur $[x_k, x_{k+1}]$. On dispose ainsi de $y_k \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que $f'(y_k) = 0$.

On a

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < x_3 < \cdots < x_n < y_n < x_{n+1}.$$

Ainsi les y_k sont deux à deux distincts. Il y en a donc n et ce sont des zéros de la fonction f' sur $[a,b]$.

Alors f' s'annule au moins n fois sur $[a,b]$

Voir exercices **20.6**, **20.8** et **20.11**.

Interro de cours

1. Parmi les énoncés suivants lesquels sont toujours vrais ?

(a) Si f est continue en a, alors elle est dérivable a.

(b) Soit ℓ une constante réelle. Si $f(a) = \ell$, alors $f'(a) = 0$.

(c) Si f est bijective, dérivable en a et telle que que $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$.

(d) Si f est dérivable en a, alors f est dérivable à droite et à gauche en a.

2. Calculer la dérivée de $f : x \mapsto \arctan(\sqrt[4]{x})$.

3. Parmi les énoncés suivants lesquels sont toujours vrais ?

(a) Si f est dérivable en a et si f' s'annule en a, alors f admet un extremum local en a.

(b) Si f est dérivable sur un intervalle I et si f admet un extremum local en $a \in I$, alors $f'(a) = 0$.

(c) Si f est dérivable sur $[a, b]$ et admet un minimum local en a, alors $f'(a) \geq 0$.

(d) Si f est dérivable sur $[a, b]$ et admet un minimum local en b, alors $f'(b) \geq 0$.

4. Énoncer le théorème de Rolle.

5. Parmi les énoncés suivants lesquels sont toujours vrais ?

(a) Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ est dérivable.

(b) Une fonction dérivable est de classe $\mathscr{C}^1$.

(c) Si f est de classe $\mathscr{C}^n$, alors, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f^{(k)}$ est continue.

(d) Soient $p \leq n$. Une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ est de classe $\mathscr{C}^p$.

(e) Une fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si et seulement si elle est indéfiniment dérivable.

6. Justifier que la fonction $x \mapsto \ln(2 + \sin(x))$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercices

Pour s'entraîner

Exercice 20.1

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$

2. $g : x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}$.

Exercice 20.2

Déterminer si les fonctions suivantes sont dérivables et si elles sont de classe $\mathscr{C}^1$:

1. $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2. $g : x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Exercice 20.3

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer une expression la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ et de $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$.

2. En déduire une expression de la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$.

Exercice 20.4

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On définit la fonction

$$\begin{array}{rccl} g : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} f(2x) & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ f(2x-1) & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

À quelle(s) condition(s) sur f la fonction g est-elle dérivable ?

Exercice 20.5

En utilisant le théorème des accroissements finis, déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right)$.

Exercice 20.6

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. On suppose que

$$\forall x \in [a, b], \ g'(x) \neq 0.$$

1. Montrer que $g(a) \neq g(b)$.

2. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Indications : on pourra poser $h(x) = f(x) - \lambda g(x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ bien choisi.

3. Démontrer la règle de l'Hôpital : si $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \ell$, alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Pour aller plus loin

Exercice 20.7

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0 telle qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

1. Calculer $f(0)$ et montrer que, si $x \in \mathbb{R}^*$, la suite $\left(\dfrac{f(\alpha^n x)}{\alpha^n x}\right)$ est constante.

2. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{f(\alpha^n x)}{\alpha^n x}\right)$ de deux façons différentes, puis en déduire qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.

Exercice 20.8

1. Soient f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle I et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si f s'annule au moins $n + 1$ fois sur I, alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur I.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ admet seulement un nombre fini de solutions.

Exercice 20.9

Soit f une fonction dérivable et bornée sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$.

1. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(2x) - f(x)}{x} = \ell$.

2. En déduire que $\ell = 0$.

Exercice 20.10

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in [0, 1]$, $f'(x) > 0$.
Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) \geq mx$.

Exercice 20.11

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a < b$ et f une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.
Montrer que la courbe représentative de f admet une tangente passant par l'origine.

On pourra considérer la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$.

Corrections

Interro de cours

1. **(a)** **Faux.** La fonction valeur absolue est continue en 0 sans être dérivable en 0.

(b) **Faux.** La valeur $f(a)$ est toujours une constante (il s'agit d'une valeur). Pour avoir une dérivée nulle, il faut que la fonction soit constante sur un intervalle (non vide et non réduit à un point).

(c) **Vrai.** Cf. cours.

(d) **Vrai.** Cf. cours.

2. Il s'agit de la dérivée d'une composée. On note, si $x \in \mathbb{R}_+$, $u(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$.
La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et si $x > 0$, on a

$$u'(x) = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}.$$

La fonction arctan étant dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et si $x > 0$, on a

$$f'(x) = u'(x)\arctan'(u(x)) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} \times \frac{1}{1 + \left(\sqrt[4]{x}\right)^2} = \frac{1}{4(\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^5})}.$$

3. **(a)** **Faux.** C'est la réciproque qui est vraie. Si $f(x) = x^3$, alors f est strictement croissante et n'a donc pas d'extremum local. Cependant, $f'(0) = 0$.

(b) **Faux.** Il faut préciser que a n'est pas une borne de I. Si on définit la fonction f sur $[0, 1]$ par $f(x) = x$, alors f atteint son maximum en 1, mais $f'(1) = 1 \neq 0$.

(c) **Vrai.** Si $x \in [a, b]$, alors $f(x) - f(a) \geq 0$, car $f(a)$ est le minimum de f sur $[a, b]$, et $x - a \geq 0$ car $a \leq x \leq b$. Ainsi

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 \quad \text{et} \quad f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

(d) **Faux.** En raisonnant de manière identique à la question **3.(c)**, on montre que $f'(b) \leq 0$.

4. Soient $a < b$ et f une fonction telle que
(1) f est continue sur $[a, b]$
(2) f est dérivable sur $]a, b[$
(3) $f(a) = f(b)$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

5. **(a)** **Vrai.** Par définition, si f est $\mathscr{C}^1$, elle est dérivable et f' est continue. Elle est donc, entre autres, dérivable.

(b) **Faux.** Si f est dérivable, f' n'est pas nécessairement continue. Si on définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, alors f est dérivable en 0 mais f' n'a pas de limite en 0 et n'est donc pas continue en 0.

(c) **Vrai.** Si $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f^{(k)}$ est dérivable, donc continue. Et par définition de la classe $\mathscr{C}^n$, $f^{(n)}$ est continue.

(d) **Vrai.** Si $p = n$, le résultat est évident. Si $p < n$, comme f est n fois dérivable, elle est, entre autres, p fois dérivable. De plus $f^{(p)}$ est dérivable, donc est continue.

(e) **Vrai.** Si f est $n+1$ fois dérivable, elle est n fois dérivable et $f^{(n)}$ est dérivable donc continue. Alors f est de classe $\mathscr{C}^n$.

Donc si f est indéfiniment dérivable, alors elle est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$.

La réciproque est évidente.

6. La fonction $x \mapsto 2+\sin(x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $[1,3]$ et la fonction ln est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[1,3]$. Donc, par composition de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$, la fonction $x \mapsto \ln\big(2+\sin(x)\big)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20.1

1. Par quotient de fonctions dérivables, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Au voisinage de 0, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{1}{1+|x|} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. Donc f est dérivable en 0.

On en conclut que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. On note $\mathscr{D}_g$ le domaine de définition de g. On a

$$x \in \mathscr{D}_g \Leftrightarrow x^2 - x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

Ainsi la fonction g est définie sur $\mathscr{D}_g =]-\infty, 1]$.

La fonction $\sqrt{\cdot}$ n'est pas dérivable en 0 et

$$x^2 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

On note $K = \mathscr{D}_g \setminus \{0,1\}$.

- La fonction $x \mapsto x^2 - x^3$ est dérivable de K dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $\sqrt{\cdot}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc par composition de fonctions dérivables, g est dérivable sur K.
- Au voisinage de 0, si $x \in \mathscr{D}_g \setminus \{0\}$,

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x^2(1-x)}}{x} = \frac{|x|\sqrt{1-x}}{x} = \begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{si } x > 0 \\ -\sqrt{1-x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

  Ainsi

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1 \quad \text{et} \quad \frac{g(x)-g(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0^-]{} -1.$$

  Le taux d'accroissement de g en 0 n'a donc pas de limite et g n'est donc pas dérivable en 0.
- Au voisinage de 1, si $x \in \mathscr{D}_g \setminus \{1\}$,

$$\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2(1-x)}}{-\sqrt{(1-x)^2}} = -\sqrt{\frac{x^2}{1-x}} \xrightarrow[x\to 1^-]{} -\infty.$$

  Donc la fonction g n'est pas dérivable en 1.

On en conclut que la fonction g est dérivable uniquement sur $]-\infty, 0[\cup]0,1[$.

Exercice 20.2

1. Par produit et composition, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Puis, si $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \quad \text{car } \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ bornée.}$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. De plus, si $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \frac{-1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Étant la différence d'un terme convergeant et d'un terme n'ayant pas de limite, $f'(x)$ n'a pas de limite en 0 et f' n'est donc pas continue en 0.
On en conclut que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ uniquement sur $\mathbb{R}^*$.

2. Par produit et composition, g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Puis, si $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \quad \text{car } \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ bornée.}$$

Donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$. De plus, si $x \in \mathbb{R}^*$,

$$g'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^3 \times \frac{-1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 = g'(0).$$

Donc g' est continue en 0.
On en conclut que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20.3

1. Si $x \neq \pm 1$, on note $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$.
En calculant les dérivées successives de ces fonctions on conjecture une expression de leur dérivée $n^{\text{èmes}}$, que l'on démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ avec l'hypothèse

$$\mathscr{P}(n) : \text{« } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} \text{ et } g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} \text{ »}$$

- **Initialisation.** Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. On a

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{x-1} = \frac{(-1)^0 0!}{(x-1)^{0+1}} \qquad \text{et} \qquad g^{(0)}(x) = g(x) = \frac{1}{x+1} = \frac{(-1)^0 0!}{(x+1)^{0+1}},$$

ce qui montre $\mathscr{P}(0)$.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathscr{P}(n)$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. On a $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$, donc

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = (-1)^n n! \frac{-(n+1)}{(x-1)^{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x-1)^{n+2}}.$$

De même, on a $g^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$, donc

$$g^{(n+1)}(x) = \left(g^{(n)}\right)'(x) = (-1)^n n! \frac{-(n+1)}{(x+1)^{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}.$$

Nous avons donc bien démontré $\mathscr{P}(n+1)$.

On en conclut que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},\ f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} \text{ et } g^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}}$

2. Si $x \neq \pm 1$, on note $h(x) = \frac{1}{x^2-1}$.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. On décompose $h(x)$ de la manière suivante

$$h(x) = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{f(x)-g(x)}{2}.$$

Par linéarité de la dérivation, on obtient que, si $n \in \mathbb{N}$,

$$h^{(n)}(x) = \frac{f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)}{2} = \frac{(-1)^n n!}{2(x-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{2(x+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n! \left((x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1}\right)}{2(x-1)^{n+1}(x+1)^{n+1}}.$$

On en conclut que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}\,,\ h^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! \left((x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1}\right)}{2(x^2-1)^{n+1}}}$

Exercice 20.4

On procède par analyse-synthèse.

- **Analyse.** Supposons que g soit dérivable sur $[0, 1]$. On a

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} g(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(2x) = f(1) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} g(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(2x-1) = f(0).$$

La fonction g étant continue en $\dfrac{1}{2}$, on en déduit que $f(0) = f(1)$.
De plus

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{g(x) - g(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{2x \to 1^-} 2\frac{f(2x) - f(1)}{2x - 1} = 2f'(1),$$

et

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{g(x) - g(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{2x-1 \to 0^+} 2\frac{f(2x-1) - f(0)}{(2x-1) - 0} = 2f'(0).$$

La fonction g étant dérivable en $\dfrac{1}{2}$, on en déduit que $f'(0) = f'(1)$.

- **Synthèse.** On suppose que $f(0) = f(1)$ et $f'(0) = f'(1)$.
Par composition de fonctions dérivables, g est dérivable sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right[$ et sur $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right]$.
De plus, si $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[$, $\dfrac{g(x) - g(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} = 2\dfrac{f(2x) - f(1)}{2x - 1} \xrightarrow[x \to \frac{1}{2}^-]{} 2f'(1)$.
Et si $x \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right]$, comme $g(\frac{1}{2}) = f(1) = f(0)$,

$$\frac{g(x) - g(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} = 2\frac{f(2x-1) - f(0)}{(2x-1) - 0} \xrightarrow[x \to \frac{1}{2}^+]{} 2f'(0) = 2f'(1).$$

Ainsi g est dérivable en $\dfrac{1}{2}$.
Alors g est dérivable sur $[0, 1]$.

On en conclut que g est dérivable sur $[0, 1]$ si et seulement si $f(0) = f(1)$ et $f'(0) = f'(1)$.

Exercice 20.5

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.
Par produit et composition de fonctions dérivables, f est dérivable. Et si $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + x \times \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On applique le théorème des accroissements finis à la fonction f sur le segment $[x, x+1]$. On dispose donc de $c_x \in]x, x+1[$ tel que $f'(c_x) = \dfrac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$.
Or $c_x \geq x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. Donc, par comparaison, $c_x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. Ainsi

$$f'(c_x) = \left(1 - \frac{1}{c_x}\right) e^{\frac{1}{c_x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} (1-0)e^0.$$

On en déduit que $\boxed{(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1}$

Exercice 20.6

1. On suppose par l'absurde que $g(a) = g(b)$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle à la fonction g sur le segment $[a, b]$. On dispose ainsi de $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.
   Or $\forall x \in [a, b],\ g'(x) \neq 0$, ce qui est absurde.
   On en déduit que $g(a) \neq g(b)$.
2. On définit la fonction h sur $[a, b]$ par $h(x) = f(x) - \lambda g(x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ de sorte que $h(a) = h(b)$. On a

   $$h(a) = h(b) \Leftrightarrow f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b) \Leftrightarrow \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \quad \text{car } g(b) - g(a) \neq 0.$$

   Par différence de fonctions dérivables, la fonction h est dérivable sur $[a, b]$.
   Ainsi h est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $h(a) = h(b)$.
   D'après le théorème de Rolle, on dispose de $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$, c'est-à-dire $f'(c) = \lambda g'(c)$, c'est-à-dire

   $$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \quad \text{car } g'(c) \neq 0.$$

3. Soit $x \in]a, b]$. D'après le résultat de la question précédente, on dispose de $c_x \in]a, x[$ tel que

   $$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}.$$

   Or $a < c_x < x$, donc d'après le théorème d'encadrement, $c_x \xrightarrow[x \to a^+]{} a$.

   Donc par composition des limites $\dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

   On en déduit que $\dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Exercice 20.7

1. On a $f(0) = f(\alpha \times 0) = \alpha f(0)$, donc $(1-\alpha)f(0) = 0$ et $f(0) = 0$ car $\alpha \neq 1$.
De plus, si $x \in \mathbb{R}^*$ et si $n \in \mathbb{N}$, on a $f(\alpha^{n+1}x) = f(\alpha \times \alpha^n x) = \alpha f(\alpha^n x)$, donc

$$\frac{f(\alpha^{n+1}x)}{\alpha^{n+1}x} = \frac{\alpha f(\alpha^n x)}{\alpha^{n+1}x} = \frac{f(\alpha^n x)}{\alpha^n x}.$$

On en déduit que la suite $\left(\dfrac{f(\alpha^n x)}{\alpha^n x}\right)$ est constante.

2. La suite $\left(\dfrac{f(\alpha^n x)}{\alpha^n x}\right)$ est constante, donc $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{f(\alpha^n x)}{\alpha^n x} = \frac{f(\alpha^0 x)}{\alpha^0 x} = \frac{f(x)}{x} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{f(x)}{x}.$$

De plus, $\alpha^n x \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ car $\alpha \in]0,1[$, donc

$$\frac{f(\alpha^n x)}{\alpha^n x} = \frac{f(\alpha^n x) - f(0)}{\alpha^n x - 0} \xrightarrow[n \to +\infty]{} f'(0).$$

Par unicité de la limite $\dfrac{f(x)}{x} = f'(0)$.
On a donc montré que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = f'(0)x$.
Cette égalité reste vraie pour $x = 0$ car $f(0) = 0$.
On en conclut que si on pose $a = f'(0) \in \mathbb{R}$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.

Exercice 20.8

1. Soit I un intervalle. On réutilise le résultat démontré dans l'exemple d'application de la méthode **20.3**. On montre par récurrence, sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition

$\mathscr{P}(n)$: « Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I s'annulant au moins $n+1$ fois sur I, alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur I. »

- **Initialisation.** Soit f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I s'annulant au moins $0+1$ fois sur I.
  Alors $f^{(0)} = f$ s'annule au moins une fois sur I, ce qui montre $\mathscr{P}(0)$.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathscr{P}(n)$.
  Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I et s'annulant au moins $n+2$ fois sur I. D'après le résultat démontré dans l'exemple d'application de la méthode **20.3**, f' s'annule au moins $n+1$ fois sur I. Or f' est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.
  On peut donc appliquer $\mathscr{P}(n)$ à f'. On en déduit que $(f')^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur I, c'est-à-dire $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur I, ce qui montre $\mathscr{P}(n+1)$.

On en conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I s'annulant au moins $n+1$ fois sur I, alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur I.

2. Si $P = 0$, le résultat est évident. On supposera $P \neq 0$ dans la suite de l'exercice.
On suppose par l'absurde que l'équation $P(x) = e^x$ admet une infinité de solutions. On note $n = \deg(P)$ et on définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = P(x) - e^x$. Si $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f^{(n+1)}(x) = P^{(n+1)}(x) - e^x = -e^x.$$

L'équation $P(x) = e^x$ ayant une infinité de solutions, la fonction f s'annule au moins $n+2$ fois sur $\mathbb{R}$. Donc, d'après la question précédente, $f^{(n+1)} = -\exp$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$, ce qui est absurde.
On en conclut que l'équation $P(x) = e^x$ admet seulement un nombre fini de solutions.

Exercice 20.9

1. Soit $x > 0$. On applique le théorème des accroissements finis à f sur le segment $[x, 2x]$.
On dispose de $c_x \in]x, 2x[$ tel que $f'(c_x) = \dfrac{f(2x) - f(x)}{2x - x} = \dfrac{f(2x) - f(x)}{x}$.
De plus, $c_x > x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. Donc, par comparaison, $c_x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.
Par composition des limites, on a donc $f'(c_x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$. Ainsi

$$\frac{f(2x) - f(x)}{x} = f'(c_x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell.$$

2. La fonction f est bornée, donc on dispose de $K > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq K$. Ainsi, si $x > 0$,

$$0 \leq \left| \frac{f(2x) - f(x)}{x} \right| \leq \frac{|f(2x)| + |f(x)|}{x} \leq \frac{2K}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

Donc d'après le théorème d'encadrement, $\dfrac{f(2x) - f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.
D'après la question précédente et par unicité de la limite, on en déduit que $\ell = 0$.

Exercice 20.10

Soit $x \in]0, 1]$. On applique le théorème des accroissements finis à f sur le segment $[0, x]$.
On dispose de $c_x \in]0, x[$ tel que $f'(c_x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x)}{x}$.
De plus la fonction f' est continue sur le segment $[0, 1]$, car f est de classe $\mathscr{C}^1$.
D'après le théorème des bornes atteintes, f' admet un minimum m sur $[0, 1]$, atteint en $\alpha \in [0, 1]$.
On a $m = f'(\alpha) > 0$. Ainsi $\dfrac{f(x)}{x} = f'(c_x) \geq m$. On en déduit que $\forall x \in]0, 1],\ f(x) \geq mx$.
L'inégalité reste valable pour $x = 0$.
On en conclut que $\forall x \in [0, 1],\ f(x) \geq mx$ avec $m = \min\limits_{[0,1]}(f') > 0$.

Exercice 20.11

On définit la fonction g sur $[a, b]$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.
Par quotient, la fonction g est dérivable sur $[a, b]$ et si $x \in [a, b]$, $g'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$.
De plus, $g(a) = g(b) = 0$. Donc, d'après le théorème de Rolle, on dispose de $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$, c'est-à-dire tel que $cf'(c) - f(c) = 0$.
Si $\alpha \in [a, b]$, l'équation de la tangente T_α à la courbe représentative de f en le point de coordonnées $(\alpha, f(\alpha))$ est $y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$. On a

$$O \in T_\alpha \Leftrightarrow 0 = f'(\alpha)(0 - \alpha) + f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha f'(\alpha) - f(\alpha) = 0.$$

Cette relation est vérifiée si $\alpha = c$. On en déduit que la tangente T_c passe par l'origine.

CHAPITRE

Développements limités 21

L'essentiel du cours

1 Notion de développement limité

Définition

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a. On dit que f possède un développement limité d'ordre n en a s'il existe $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ tels qu'au voisinage de a,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Tous les développements limités usuels sont dans le formulaire **Développements limités usuels** en appendice (page 488).

Il suffit d'effectuer le changement de variable $h = x - a$ pour se ramener en 0 avec

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} b_k h^k + o(h^n).$$

On ne considèrera donc que des développements limités en 0 dans la suite du chapitre.

Unicité du développement limité

Soient f définie au voisinage de 0, $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ tels qu'au voisinage de 0,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n).$$

Alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = b_k$.

Développement limité et parité

Soient D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ centré en 0 et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un développement limité d'ordre n en 0 : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$.

- Si f est paire, alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = 0$ si k est impair ;
- Si f est impaire, alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = 0$ si k est pair.

2 Calcul de développement limité

Combinaison linéaire et produit de développements limités

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions possédant un développement limité d'ordre n en 0 :

$$f(x) = P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = Q(x) + o(x^n).$$

Le fonctions $\lambda f + \mu g$ et fg possèdent un développement limité d'ordre n en 0 :

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda P + \mu Q)(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad f(x)g(x) = R(x) + o(x^n)$$

où R est le polynôme PQ auquel on a retiré les termes de degrés strictement supérieurs à n.

Pour un produit, si le terme de plus petit degré dans le développement limité de f est $a_p x^p$, il suffit alors d'effectuer le développement limité de g à l'ordre $n-p$. En effet, les termes du développement limité de f vont « rehausser » tous ceux du développement limité de g.
Cette remarque permet simplement d'alléger potentiellement les calculs, mais n'est pas nécessaire.

Composition de développements limités

Soient f et g deux fonctions possédant un développement limité d'ordre n en 0 avec $f(0) = 0$:

$$f(x) = P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = Q(x) + o(x^n).$$

La fonction $g \circ f$ possède un développement limite d'ordre n en 0 : $g \circ f(x) = R(x) + o(x^n)$ où R est le polynôme $Q \circ P$ auquel on a retiré les termes de degrés strictement supérieurs à n.

Il n'est pas non plus toujours nécessaire d'effectuer le développement limité de g jusqu'à l'ordre n (cf méthode **21.1**).

Développement limité de l'inverse d'une fonction

Soit f une fonction possédant un développement limité d'ordre n en 0 avec $f(0) = 0$. Alors $\dfrac{1}{1+f}$ possède un développement limité à l'ordre n en 0.

- Ce développement limité s'obtient en composant celui de f avec celui de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.
- Ceci permet de calculer des développements limités de quotient (cf méthode **21.2**).

Primitivation d'un développement limité

Soit f possédant un développement limité d'ordre n en 0 : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$.

Si F est une primitive de f, alors F admet un développement limité d'ordre $n+1$ en 0 :

$$F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o\left(x^{n+1}\right).$$

Formule de Taylor-Young

Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage d'un réel a, alors, au voisinage de a,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right).$$

Ceci entraîne le fait que toute fonction de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage de a admet un développement limité d'ordre n en a (la réciproque est fausse pour $n \geq 2$).

3 Applications

Développement limité et équivalent

Soit f une fonction possédant un développement limité d'ordre n en 0 :

$$f(x) = a_p x^p + \cdots + a_n x^n + o(x^n), \quad \text{avec } a_p \neq 0 \text{ et } p \leq n.$$

Alors $f(x) \sim_0 a_p x^p$.

Il suffit donc d'effectuer un développement limité à un ordre assez grand pour avoir un terme non nul afin d'obtenir un équivalent.

Définition

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.

- Si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = \ell$.
- Si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\infty$,
  - ⋆ si $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\infty$, on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une **branche parabolique** de direction (Oy).
  - ⋆ si $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une **branche parabolique** de direction (Ox).
  - ⋆ si $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} a \in \mathbb{R}$,
    - ◇ si $f(x) - ax \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\infty$, on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une **branche parabolique** de direction la droite d'équation $y = ax$.
    - ◇ si $f(x) - ax \xrightarrow[x\to+\infty]{} b \in \mathbb{R}$, on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une **asymptote** d'équation $y = ax + b$.

- On a des définitions analogues en $-\infty$.
- Pour déterminer des asymptotes, il suffit d'effectuer un développement limité de $hf\left(\dfrac{1}{h}\right)$ quand $h \to 0$ (cf méthode **21.4**).

Les méthodes à maîtriser

Méthode 21.1 : Calculer le développement limité d'une composée

Pour calculer le développement limité d'ordre n en 0 d'une composée $g \circ f(x)$:

1. On commence par déterminer le développement limité de f d'ordre n en 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

2. Ensuite, à l'aide des propriétés calculatoires de la fonction g, on transforme l'expression pour obtenir $Q \in \mathbb{R}[X]$ avec $Q(0) = 0$ et h une fonction telle que $g \circ f(x) = h(Q(x) + o(x^n))$.

3. En effectuant le développement limité de h d'ordre r en 0 :

$$h(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_r x^r + o(x^r),$$

on obtient donc que

$$h(Q(x) + o(x^n)) = b_0 + b_1 Q(x) + \cdots + b_r Q(x)^r + o(x^n) + o(Q(x)^r).$$

Si $Q(x) \sim_0 \alpha x^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \neq 0$, alors $Q(x)^r \sim_0 \alpha^r x^{rp}$.
Il suffit donc que $rp \geq n$ pour ne pas « perdre de précision » en composant.

4. Il ne reste plus qu'à tout développer pour finir. Pour éviter de se perdre dans les calculs, il peut être préférable de récupérer les termes degré par degré : d'abord tous les termes constants, puis tous les termes en x, puis tous les termes en x^2, etc, puis tous les termes en x^n (les autres termes sont d'une puissance trop grande et vont finir dans le $o(x^n)$).

Quelques pistes pour exécuter le deuxième point ci-dessus :

- Si $g = \exp$, alors $g \circ f(x) = \exp(a_0) \times \exp(\underbrace{a_1 x + \cdots + a_n x^n}_{=Q(x)} + o(x^n))$.
- Si $g = \ln$ et $a_0 \neq 0$, alors $g \circ f(x) = \ln(a_0) + \ln\left(1 + \underbrace{\frac{a_1}{a_0} x + \cdots + \frac{a_n}{a_0} x^n}_{=Q(x)} + o(x^n)\right)$.
- Si $g(x) = x^\alpha$ et $a_0 \neq 0$, alors $g \circ f(x) = a_0^\alpha \left(1 + \underbrace{\frac{a_1}{a_0} x + \cdots + \frac{a_n}{a_0} x^n}_{=Q(x)} + o(x^n)\right)^\alpha$.
- Si $g = \cos$, $\sin$ ou $\tan$, on utilise les formules de duplication ($\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$).

Exemple d'application

Calculer les développements limités suivantes

(1) $\mathrm{DL}_4(0)$: $e^{\cos(x)}$ (2) $\mathrm{DL}_2(0)$: $\sin\left(\dfrac{\pi}{2(1+x)}\right)$ (3) $\mathrm{DL}_2(0)$: $\ln(1+\sqrt{1+x})$.

(1) On commence par effectuer le développement limité de $\cos(x)$ en 0 à l'ordre 4 : $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$. Ensuite

$$e^{\cos(x)} = \exp\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = e \times \exp\Bigg(\underbrace{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}_{=u \sim_0 -\frac{x^2}{2} \to 0}\Bigg).$$

Il ne reste plus qu'à faire le développement limité de e^u. Or, u est de l'ordre de x^2, il suffit donc de faire le développement limité de e^u à l'ordre 2 en u pour obtenir un développement limité à l'ordre 4 en x (cf troisième point de la méthode) : $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. Il s'ensuit

$$\begin{aligned} e^{\cos(x)} &= e \times \left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^4)\right) \\ &= e \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + x^4\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{8}\right) + o(x^4)\right) \\ &= e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

(2) On commence par effectuer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\frac{\pi}{2(1+x)}$:

$$\frac{\pi}{2(1+x)} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{1+x} = \frac{\pi}{2}(1 - x + x^2 + o(x^2)) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}x^2 + o(x^2).$$

On utilise ensuite la formule de trigonométrie $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2(1+x)}\right) &= \cos\Big(\underbrace{-\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}x^2 + o(x^2)}_{=u\sim_0 -\frac{\pi}{2}x\to 0}\Big) \\ &= 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}x^2\right)^2 + o(x^2) \\ &= 1 - \frac{\pi^2}{8}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

(3) On procède encore de la même manière, en utilisant le DL de $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \ln(1 + \sqrt{1+x}) &= \ln\left(1 + 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) \\ &= \ln(2) + \ln\Big(1 + \underbrace{\frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + o(x^2)}_{=u\sim_0 \frac{1}{4}x\to 0}\Big) \\ &= \ln(2) + u - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \\ &= \ln(2) + \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2\right)^2 + o(x^2) \\ &= \ln(2) + \frac{1}{4}x + x^2\left(-\frac{1}{16} - \frac{1}{32}\right) + o(x^2) \\ &= \ln(2) + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Voir exercices de **21.1** à **21.7**.

Méthode 21.2 : Calculer le développement limité d'un quotient

Pour effectuer le développement limité d'un quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ en 0 à l'ordre n

1. On commence par calculer les premiers termes du développement limité de $g(x)$ pour repérer son terme non nul de plus petit degré $b_p x^p$, avec $p \in \mathbb{N}$ et $b_p \neq 0$.
2. On effectue le développement limité de f et de g à l'ordre $n+p$ et on factorise celui de g par $b_p x^p$.
3. On obtient donc que

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n+p}x^{n+p} + o(x^{n+p})}{b_p x^p} \times \frac{1}{1 + \underbrace{c_1 x + \cdots + c_n x^n + o(x^n)}_{=u \to 0}} \\ &= \left(\frac{a_0}{b_p} \cdot \frac{1}{x^p} + \cdots + \frac{a_p}{b_p} + \cdots + \frac{a_{n+p}}{b_p} x^n + o(x^n)\right) \times \frac{1}{1+u}.\end{aligned}$$

4. On finit en utilisant la méthode **21.1** pour calculer le développement limité de $\dfrac{1}{1+u}$ en 0 à l'ordre n et en développant le produit.

En général, les termes en $\dfrac{1}{x^k}$ disparaissent au cours du calcul (sinon il ne s'agit plus d'un développement limité en 0, mais simplement d'un développement au voisinage de 0).

Exemple d'application

Déterminer le développement limité d'ordre 2 en 0 de $\dfrac{1-\cos(x)}{x\sin(x)}$.

On repère que le développement limité de $x\sin(x)$ commence par x^2. On va donc « perdre deux ordres » au cours du calcul. On effectue donc tous les développements limités à l'ordre 4.

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos(x)}{x\sin(x)} &= \frac{\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)}{x^2 - \dfrac{x^4}{6} + o(x^4)} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + o(x^2)\right) \times \frac{1}{1 \underbrace{- \frac{x^2}{6} + o(x^2)}_{=u \sim_0 -\frac{x^2}{6} \to 0}} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + o(x^2)\right)(1 - u + o(u)) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + o(x^2)\right)\left(1 - \left(-\frac{x^2}{6}\right) + o(x^2)\right) \\ &= \frac{1}{2} + x^2\left(-\frac{1}{12} - \frac{1}{24}\right) + o(x^2) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2).\end{aligned}$$

Voir exercices **21.2**, **21.3**, **21.4**, **21.5** et **21.6**.

Méthode 21.3 : Étudier une tangente

Si on cherche la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à sa tangente en a, on fait un développement limité en a de la forme $f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$ où $p \geq 2$ et $b_p \neq 0$. Ainsi, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a a pour équation $y = b_0 + b_1(x-a)$ et

$$f(x) - (b_0 + b_1(x-a)) \sim_a b_p(x-a)^p$$

qui est donc du signe de $b_p(x-a)^p$ au voisinage de a, ce qui va donner la position de la courbe par rapport à sa tangente.

Exemple d'application

Étudier la tangente en 0 de f : $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$

Au voisinage de 0, $f(x) = \dfrac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} + o(x^2)$.
Ainsi

$$f(x) - \left(1 - \frac{x}{2}\right) = \frac{x^2}{3} + o(x^2) \sim_0 \frac{x^2}{3} \xrightarrow[x\to 0]{} 0^+.$$

On conclut que la droite d'équation $y = -\dfrac{x}{2} + 1$ est la tangente de $\mathscr{C}_f$ en l'origine et $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de cette tangente au voisinage de 0.

Voir exercice **21.4**.

Méthode 21.4 : Étudier une asymptote

Le principe est d'écrire un développement limité en $\pm\infty$ (on parle alors plutôt de développement asymptotique) de $\frac{f(x)}{x}$. Si on pose $h = \frac{1}{x}$, on est ramené à regarder le développement limité de $hf\left(\frac{1}{h}\right)$ en 0. Si on a $hf\left(\frac{1}{h}\right) = a_0 + a_1 h + a_p h^p + o(h^p)$ avec $p \geq 2$ et $a_p \neq 0$, on obtient $f(x) = a_0 x + a_1 + \frac{a_p}{x^{p-1}} + o\left(\frac{1}{x^{p-1}}\right)$, et on conclut de la même manière que pour la tangente (cf méthode **21.3**).

Exemple d'application

Étudier le comportement asymptotique en $+\infty$ de $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.

On pose $h = \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et on a $\dfrac{f(x)}{x} = e^h = 1 + h + \dfrac{h^2}{2} + o(h^2) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
On en déduit que $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $f(x) - (x+1) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0^+$.
On conclut que la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

Voir exercice **21.5**.

Interro de cours

1. Déterminer la limite en 0 de $\dfrac{x - \sin(x)}{\ln(1 + x^3)}$.

2. Parmi les énoncés suivants lesquels sont toujours vrais ?

(a) Si f est dérivable en 0, alors, au voisinage de 0, $f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x)$.

(b) Si f admet une développement limité d'ordre 1 en 0, $f(x) = a_0 + a_1x + o(x)$, alors f est dérivable en 0 et $a_0 = f(0)$ et $a_1 = f'(0)$.

(c) Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de 0, alors f admet un développement limité d'ordre 2 en 0.

(d) Si f admet un développement limité d'ordre 2 en 0, alors f est de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de 0.

3. Déterminer le développement limité d'ordre 3 en 0 de $(1 + x)^x$.

4. Déterminer le développement limité d'ordre 3 en 0 de $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

5. Étudier les branches infinies de $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^4}{x^2 + 1}}$.

Exercices

Dans les exercices ci-dessous $\mathrm{DL}_n(a)$ désigne le développement limité d'ordre n en a.

Pour s'entraîner

Exercice 21.1

Soient $0 < a < b$. Calculer les limites suivantes

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sqrt{1+4x}}{\sin(2x) - \ln(1+x)}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

3. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 2\tan x}{1+\cos 4x}$

4. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x}\right)$

6. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - ex^3 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$

7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

8. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{(\ln x)^2 + 1}{\ln x + 2}\right).$

Exercice 21.2

Calculer les développements limités suivants

1. $\mathrm{DL}_3(0),\ \dfrac{x+1}{x^2+x+2}$

2. $\mathrm{DL}_3(1),\ \cos(\ln(x))$

3. $\mathrm{DL}_3(0),\ \ln(3e^x + e^{-x})$

4. $\mathrm{DL}_2(0),\ \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}}$

5. $\mathrm{DL}_1(0),\ \exp\left(\sqrt{\ln(2+x)}\right)$

6. $\mathrm{DL}_2(0),\ \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$

7. $\mathrm{DL}_{10}(0),\ \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$

8. $\mathrm{DL}_2\left(\dfrac{\pi}{6}\right),\ e^{\sin x}.$

Exercice 21.3

Déterminer un équivalent simple de

1. $\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$ en 0

2. $(e+x)^e - e^{e+x}$ en 0

3. $\ln\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right) - \dfrac{1}{x}$ en $+\infty$.

Exercice 21.4

Dans chacun des cas suivants, montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0, puis étudier la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en ce point.

1. $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$

2. $f(x) = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$

3. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

4. $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.

Exercice 21.5

Dans chacun des cas suivants, étudier les branches infinies de la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

1. $f(x) = \dfrac{x^2-x+2}{x+1}e^{-\frac{1}{x}}$

2. $f(x) = x + \sqrt{|x^2-1|}$

3. $f(x) = x^2 \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

Pour aller plus loin

Exercice 21.6

On définit la fonction G sur $]0,1[$ par $G(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

1. Justifier l'existence d'une primitive F de $x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$ sur $]0,1[$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 0 en 1 de $\dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1}$.
3. En déduire que la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1}$ définie sur $]0,1[$ se prolonge par continuité sur $]0,1]$. On renommera h la fonction ainsi prolongée.
4. Justifier l'existence d'une primitive H de h sur $]0,1]$.
5. En déduire le développement limité à l'ordre 1 en 1 de $F(x) - \ln(1-x)$, puis l'existence d'une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que
$$F(x) = \ln(1-x) + k + \frac{x-1}{2} + \underset{x\to 1}{o}(x-1).$$
6. En déduire la limite de G en 1^-.

Exercice 21.7

1. Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^{x^2} \end{array}$ est bijective.
2. Montrer que f^{-1} possède un développement limité d'ordre 5 en 0.
3. Montrer que ce développement limité est de la forme $f^{-1}(y) = ay + by^3 + cy^5 + o(y^5)$.
4. Calculer le développement limité d'ordre 5 en 0 de $f^{-1}(f(x))$ en fonction de a, b et c.
5. En déduire le développement limité de f^{-1} d'ordre 5 en 0.

Corrections

Interro de cours

1. Au voisinage de 0, on a $x - \sin(x) = x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim_0 \frac{x^3}{6}$.
De plus, $\ln(1+x^3) \sim_0 x^3$. Donc par quotient d'équivalents, on obtient

$$\frac{x - \sin(x)}{\ln(1+x^3)} \sim_0 \frac{\frac{x^3}{6}}{x^3} = \frac{1}{6} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{6}.$$

2. **(a)** **Vrai.** Si f est dérivable en 0, alors $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} f'(0)$.
On peut réécrire ceci en $\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) + o(1)$ puis $f(x) - f(0) = xf'(0) + o(x)$.
On en conclut que $f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x)$.

(b) **Vrai.** Si, au voisinage de 0, $f(x) = a_0 + a_1 x + o(x)$, alors $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} a_0$.
La fonction f admet une limite en 0, donc nécessairement cette limite est $f(0)$.
Donc $a_0 = f(0)$, puis

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{a_1 x + o(x)}{x} = a_1 + o(1) \xrightarrow[x \to 0]{} a_1.$$

On en conclu que f est dérivable en 0 et que $a_1 = f'(0)$.

(c) **Vrai.** D'après le théorème de Taylor-Young

(d) **Faux.** Si on définit le fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, alors au voisinage de 0, on a $f(x) = o(x^2)$, donc f admet bien un développement limité d'ordre 2 en 0. Cependant f'' n'a pas de limite en 0 donc f n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$ en 0.

Dans la question **(b)**, il peut sembler curieux d'affirmer que si f admet une limite en 0, alors nécessairement cette limite vaut $f(0)$. Si on regarde bien la vraie définition de « $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ »

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathscr{D}_f, |x - a| < \eta \Leftarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

si $x = a$, alors $|a - a| = 0 < \eta$, donc $|f(a) - \ell| < \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$.
On en déduit que $\ell = f(a)$.
Dans la pratique, en général, quand on cherche à justifier la continuité en un point a particulier, on ne regarde pas $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ mais $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$. Dans ce cas, il est bien nécessaire de vérifier que la limite obtenue est égale à $f(a)$ pour obtenir la continuité.

3. On est en présence d'une puissance d'exposant variable, on modifie donc son expression en mettant sous forme exponentielle :

$$(1+x)^x = \exp(x \ln(1+x)) = \exp\left(x\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\right) = \exp\left(x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right).$$

On continue en utilisant le développement limité de $\exp(u)$ avec $u = x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$.

Dès le terme u^2, il n'y a que des exposants supérieurs ou égaux à 4, termes qui vont être « absorbés » par le $o(x^3)$.
Ainsi

$$(1+x)^x = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2) = 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

4. On applique le développement limité du quotient

$$\tan x = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)}_{= u \sim -\frac{x^2}{2} \to 0}} = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

5. On pose $h = \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$. On a

$$\frac{f(x)}{x} = hf\left(\frac{1}{h}\right) = h\sqrt{\frac{\frac{1}{h^4}}{\frac{1}{h^2}+1}} = h\sqrt{\frac{1}{h^2(1+h^2)}} = \frac{h}{\sqrt{h^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+h^2}}.$$

Or $\sqrt{h^2} = |h|$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1+h^2}} = \left(1+h^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{1}{2}h^2 + o(h^2)$.

- Si $x \to +\infty$, alors $h \to 0^+$ et $|h| = h$. Donc

$$\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{1}{2}h^2 + o(h^2) = 1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

  et $f(x) = x - \dfrac{1}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Ainsi $f(x) - x \sim_{+\infty} -\dfrac{1}{2x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0^-$.
  On conclut que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de cette asymptote au voisinage de $+\infty$.
- Si $x \to -\infty$, alors $|h| = -h$ et on obtient de la même manière que $f(x) = -x + \dfrac{1}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
  Ainsi $f(x) + x \sim_{-\infty} \dfrac{1}{2x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0^-$.
  On conclut que la droite d'équation $y = -x$ est une asymptote oblique de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de cette asymptote au voisinage de $-\infty$.

Dans la question **5.**, on aurait aussi pu utiliser la parité de la fonction f pour l'étude de l'asymptote en $-\infty$.

Exercice 21.1

Pour chaque question, on notera $f(x)$ l'expression dont on cherche la limite.

1. Au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned} e^x - \sqrt{1+4x} = 1 + x + o(x) - \left(1 + \frac{1}{2}(4x) + o(x)\right) &= 1 + x - 1 - 2x + o(x) \\ &= -x + o(x) \sim_0 -x, \end{aligned}$$

et

$$\sin(2x) - \ln(1+x) = 2x + o(x) - x + o(x) = x + o(x) \sim_0 x.$$

Ainsi $f(x) \sim_0 \dfrac{-x}{x} = -1$.
On en conclut que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -1$.

2. On commence par mettre sous forme exponentielle $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)\right)$.
Ensuite, on effectue le développement limité de l'expression dans le ln :

$$\begin{aligned}\frac{a^x + b^x}{2} = \frac{e^{x\ln a} + e^{x\ln b}}{2} &= \frac{1 + x\ln(a) + o(x) + 1 + x\ln(b) + o(x)}{2}\\ &= 1 + x\frac{\ln(a) + \ln(b)}{2} + o(x)\\ &= 1 + x\ln\sqrt{ab} + o(x).\end{aligned}$$

On continue en utilisant le développement limité de $\ln(1+u)$ avec $u = x\ln\sqrt{ab} + o(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$,

$$\ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right) = u + o(u) = x\ln\sqrt{ab} + o(x).$$

Ainsi $\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right) = \ln\sqrt{ab} + o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} \ln\sqrt{ab}$.
On en conclut, par composition des limites que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \sqrt{ab}$.

3. On commence en utilisant l'identité $\frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$ pour obtenir

$$f(x) = \frac{1 + \tan^2(x) - 2\tan(x)}{1 + \cos(4x)} = \frac{(\tan(x) - 1)^2}{1 + \cos(4x)}.$$

Ensuite, on change de variable pour se ramener en 0 en posant $h = x - \dfrac{\pi}{4} \to 0$, et on a

$$\begin{aligned}\tan(x) - 1 = \tan\left(h + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = \frac{\tan(h) + \tan(\frac{\pi}{4})}{1 - \tan(h)\tan(\frac{\pi}{4})} - 1 &= \frac{\tan(h) + 1 - (1 - \tan(h))}{1 - \tan(h)}\\ &= \frac{2\tan(h)}{1 - \tan(h)}.\end{aligned}$$

Or $\tan(h) \sim_0 h$ et $1 - \tan(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 1 \neq 0$, donc $1 - \tan(h) \sim_0 1$. Ainsi $\tan(x) - 1 \underset{h\to 0}{\sim} 2h$.
De plus $1 + \cos(4x) = 1 + \cos(4h + \pi) = 1 - \cos(4h) \sim_0 \dfrac{1}{2}(4h)^2 = 8h^2$.
Donc, par quotient,

$$f(x) = \frac{(\tan(x) - 1)^2}{1 + \cos(4x)} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{(2h)^2}{8h^2} = \frac{1}{2}.$$

On en conclut que $f(x) \xrightarrow[x\to \frac{\pi}{4}]{} \dfrac{1}{2}$.

4. On pose $h = x - 1 \to 0$. On a $x^x = \exp\big(x\ln(x)\big)$ et

$$x\ln(x) = (1+h)\ln(1+h) = (1+h)\left(h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right) = h + \frac{h^2}{2} + o(h^2).$$

Ainsi $x^x = \exp\underbrace{\left(h + \dfrac{h^2}{2} + o(h^2)\right)}_{=u\sim h\to 0} = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + o(u^2) = 1 + h + h^2 + o(h^2)$,

et $x^x - x = 1 + h + h^2 + o(h^2) - (1+h) = h^2 + o(h^2) \sim_0 h^2$.

De plus, $1 - x + \ln(x) = -h + \ln(1+h) = -h + h - \frac{h^2}{2} + o(h^2) = -\frac{h^2}{2} + o(h^2) \sim_0 -\frac{h^2}{2}$.

Donc par quotient $f(x) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{h^2}{-\frac{h^2}{2}} = -2$.

On en conclut que $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} -2$.

5. On a $f(x) = \frac{\tan^2(x) - x^2}{x^2\tan^2(x)} = \frac{(\tan(x)-x)(\tan(x)+x)}{x^2\tan^2(x)}$.

Or $\tan(x) + x = x + o(x) + x = 2x + o(x) \sim_0 2x$ et

$$\tan(x) - x = x + \frac{x^3}{3} - x + o(x^3) = \frac{x^3}{3} + o(x^3) \sim_0 \frac{x^3}{3}.$$

Ainsi, par produit et quotient, on obtient que $f(x) \sim_0 \frac{2x \times \frac{x^3}{3}}{x^2 \times x^2} = \frac{2}{3}$.

On en conclut que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{2}{3}$.

6. On a $f(x) = x^2\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - ex\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$.

On pose $h = \frac{1}{x} \to 0$ et on effectue un développement limité de chacun des deux termes dans l'expression ci-dessus. Pour savoir à quel ordre on effectue ces développements limités, on remarque que cette somme de deux termes est multipliée par $x^2 = \frac{1}{h^2}$. On va donc perdre deux ordres (en h) à la fin du calcul. Or on cherche la limite (si elle existe) de cette expression. Il nous suffit donc d'avoir un développement limité d'ordre 0 à la fin. On va donc calculer le développement limité de chacun des deux termes à l'ordre 2.

On a $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$ et

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{h}\ln(1+h) = \frac{1}{h}\left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)\right) = 1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2).$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc } \left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \exp\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2)\right)\\
&= \exp(1) \times \exp\left(-\frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2)\right)\\
&= e\left(1 + \left(-\frac{h}{2} + \frac{h^2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{h}{2} + \frac{h^2}{3}\right)^2 + o(h^2)\right)\\
&= e\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{11h^2}{24} + o(h^2)\right).
\end{aligned}$$

De plus, d'après le calcul précédent

$$ex\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{e}{h}\ln(1+h) = e\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2)\right).$$

Ainsi $f(x) = \frac{e}{h^2}\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{11h^2}{24} - 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{3} + o(h^2)\right) = \frac{e}{h^2}\left(\frac{h^2}{8} + o(h^2)\right) = \frac{e}{8} + o(1)$.

On en conclut que $f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} \frac{e}{8}$.

7. On a $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{\sin(x)} \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)\right)$ et

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln\left(\frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2) \sim_0 -\frac{x^2}{6}.$$

Ainsi $\dfrac{1}{\sin(x)} \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right) \sim_0 \dfrac{1}{x} \times \dfrac{-x^2}{6} = -\dfrac{x}{6} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$

On en conclut, par composition des limites, que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} e^0 = 1$.

8. On commence par s'occuper de ce qu'il y a en argument de l'exponentielle. On factorise par le terme dominant au numérateur et par le terme dominant au dénominateur,

$$\frac{(\ln x)^2 + 1}{\ln x + 2} = \frac{(\ln x)^2(1 + \frac{1}{(\ln x)^2})}{(\ln x)(1 + \frac{2}{\ln x})} = (\ln x)\frac{1 + \frac{1}{(\ln x)^2}}{1 + \frac{2}{\ln x}}.$$

On effectue le changement de variable $h = \dfrac{1}{\ln x} \to 0$ et on obtient

$$\frac{1 + \frac{1}{(\ln x)^2}}{1 + \frac{2}{\ln x}} = \frac{1 + h^2}{1 + 2h} = (1 + h^2)(1 - 2h + o(h)) = 1 - 2h + o(h) = 1 - \frac{2}{\ln x} + o\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

$$\begin{aligned}\text{Ainsi}\quad f(x) = \frac{1}{x^2}\exp\left((\ln x)\left(1 - \frac{2}{\ln x} + o\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)\right) &= \frac{1}{x^2}\exp\big(\ln(x) - 2 + o(1)\big)\\ &= \frac{1}{x^2}\exp(\ln x)\exp(-2 + o(1)).\end{aligned}$$

Or $-2 + o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} -2$, donc par composition des limites, $\exp(-2 + o(1)) \xrightarrow[x\to 0]{} e^{-2}$.

De plus $\dfrac{1}{x^2}\exp(\ln x) = \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$

On en conclut, par produit de limites, que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Exercice 21.2

Pour chaque question, on notera $f(x)$ l'expression dont on cherche le développement limité et on effectuera des calculs valables pour x au voisinage du point donné par l'énoncé.

1. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1+x}{2} \times \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}}_{= u \to 0}}\\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right)\left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\right)^3 + o(x^3)\right)\\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{8}x^3 + o(x^3)\right)\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

2. On pose $h = x - 1 \to 0$ et on a

$$\begin{aligned} f(x) = \cos\big(\ln(1+h)\big) &= \cos\underbrace{\left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)\right)}_{=u\to 0} \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3}\right)^4 + o(h^3) \\ &= 1 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{2}h^3 + o(h^3) \\ &= 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right). \end{aligned}$$

3. On commence par calculer le développement limité de ce qui est dans le ln.

$$\begin{aligned} 3e^x + e^{-x} &= 3 + 3x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{6}x^3 + 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\ &= 4 + 2x + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Ensuite, on compose par ln. Cependant l'expression ci-dessus ne tend pas vers 1, on va donc factoriser par le terme dominant, qui est 4.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(4\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)\right)\right) \\ &= \ln 4 + \ln\Bigg(1 + \underbrace{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)}_{=u\to 0}\Bigg) \\ &= \ln 4 + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3\right)^3 + o(x^3) \\ &= \ln 4 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

4. On a $f(x) = \exp\left(\frac{3}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)$. En partant de $\sin x$, on remarque que notre expression va être divisée par x puis par x^2. On va donc « perdre » 3 ordres en cours de route. Si on veut une précision à l'ordre 2 à la fin, il faut commencer avec un ordre 5.

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) &= \ln\left(\frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{x}\right) \\ &= \ln\Bigg(1 \underbrace{- \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)}_{=u\to 0}\Bigg) \\ &= \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right)^2 + o(x^4). \\ &= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4) \end{aligned}$$

Puis, dans l'exponentielle, on sépare les termes qui tendent vers 0 des autres.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \exp\left(\frac{3}{x^2}\left(-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}+o(x^4)\right)\right)\\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}-\frac{x^2}{60}+o(x^2)\right)\\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\right)\exp\underbrace{\left(-\frac{x^2}{60}+o(x^2)\right)}_{=u\to 0}\\
&= \frac{1}{\sqrt{e}}\left(1-\frac{x^2}{60}+o(x^2)\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{e}}-\frac{x^2}{60\sqrt{e}}+o(x^2).
\end{aligned}$$

5. On y va étape par étape. On commence par s'occuper du ln. L'expression dans le ln ne tend pas vers 1, donc on factorise par son terme dominant c'est-à-dire 2.

$$\begin{aligned}
\ln(2+x) &= \ln\left(2\left(1+\frac{x}{2}\right)\right)\\
&= \ln 2+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)\\
&= \ln 2+\frac{x}{2}+o(x).
\end{aligned}$$

Ensuite, on compose par la racine carrée. Encore une fois ce qui se trouve sous la racine ne tend pas vers 1, donc on factorise par le terme dominant c'est-à-dire $\ln 2$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{\ln 2+\frac{x}{2}+o(x)} &= \sqrt{\ln 2}\sqrt{1+\frac{x}{2\ln 2}+o(x)}\\
&= \sqrt{\ln 2}\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{x}{2\ln 2}+o(x)\right)\\
&= \sqrt{\ln 2}+\frac{x}{4\sqrt{\ln 2}}+o(x).
\end{aligned}$$

Pour finir, on compose par l'exponentielle. On sépare les termes qui tendent vers 0 des autres termes.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \exp\left(\sqrt{\ln 2}+\frac{x}{4\sqrt{\ln 2}}+o(x)\right)\\
&= \exp(\sqrt{\ln 2})\exp\left(\frac{x}{4\sqrt{\ln 2}}+o(x)\right)\\
&= e^{\sqrt{\ln 2}}\left(1+\frac{x}{4\sqrt{\ln 2}}+o(x)\right)\\
&= e^{\sqrt{\ln 2}}+\frac{e^{\sqrt{\ln 2}}}{4\sqrt{\ln 2}}x+o(x).
\end{aligned}$$

6. On commence par la petite racine carrée.

$$\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2+o(x^2)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2).$$

Ensuite, on compose par la racine carrée. Ce qui se trouve sous la racine ne tend pas vers 1, donc on factorise par le terme dominant c'est-à-dire 2.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)} \\ &= \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}x^2+o(x^2)} \\ &= \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}x^2\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}x^2\right)^2+o(x^2)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{8}x-\frac{5}{128}x^2+o(x^2)\right) \\ &= \sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{8}x-\frac{5\sqrt{2}}{128}x^2+o(x^2). \end{aligned}$$

7. On ne sait pas calculer de manière simple cette intégrale. On commence donc par effectuer un développement limité de l'expression sous l'intégrale que l'on primitivera ensuite. On demande un développement limité d'ordre 10. Comme on va « gagner » un ordre en primitivant, on va effectuer le développement limité d'ordre 9 de l'expression sous l'intégrale.

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^4}} = (1+t^4)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}t^4+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2}\left(t^4\right)^2+o(t^9) = 1-\frac{1}{2}t^4+\frac{3}{8}t^8+o(t^9).$$

Si on note G une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$. On en déduit que

$$G(x) = G(0)+x-\frac{1}{10}x^5+\frac{1}{24}x^9+o(x^{10}).$$

Comme $x^2 \to 0$, on a aussi

$$G(x^2) = G(0)+x^2-\frac{1}{10}x^{10}+\frac{1}{24}x^{18}+o(x^{20}) = G(0)+x^2-\frac{1}{10}x^{10}+o(x^{10}).$$

Ainsi

$$f(x) = G(x^2)-G(x) = -x+x^2+\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{24}x^9-\frac{1}{10}x^{10}+o(x^{10}).$$

8. On pose $h = x-\dfrac{\pi}{6} \to 0$.

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right) \\ &= \sin\frac{\pi}{6}\cos h+\cos\frac{\pi}{6}\sin h \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}(h+o(h^2)) \\ &= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}h-\frac{h^2}{4}+o(h^2). \end{aligned}$$

Ensuite, on compose par l'exponentielle. On sépare les termes qui tendent vers 0 des autres termes.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \exp\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}h-\frac{h^2}{4}+o(h^2)\right)\\
&= \exp\left(\frac{1}{2}\right)\exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h-\frac{h^2}{4}+o(h^2)\right)\\
&= \sqrt{e}\left(1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h-\frac{h^2}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h-\frac{h^2}{4}\right)^2+o(h^2)\right)\\
&= \sqrt{e}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}h+\frac{1}{8}h^2+o(h^2)\right)\\
&= \sqrt{e}+\frac{\sqrt{3e}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{e}}{8}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2+o\left(\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2\right).
\end{aligned}$$

Exercice 21.3

Pour chaque question, on notera $f(x)$ l'expression dont on cherche un équivalent et on effectuera des calculs valables pour x au voisinage du point donné par l'énoncé.

1. On a $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x}\right)=\ln\left(1-\dfrac{x^2}{6}+o(x^2)\right)=-\dfrac{x^2}{6}+o(x^2)\sim_0-\dfrac{x^2}{6}$.

2. On a
$$\begin{aligned}
(e+x)^e=e^e\left(1+\frac{x}{e}\right)^e &= e^e\left(1+e\left(\frac{x}{e}\right)+\frac{e(e-1)}{2}\left(\frac{x}{e}\right)^2+o(x^2)\right)\\
&= e^e\left(1+x+\frac{e-1}{2e}x^2+o(x^2)\right)
\end{aligned}$$

et
$$e^{e+x}=e^ee^x=e^e\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right).$$

Ainsi
$$f(x)=e^e\left(\frac{e-1}{2e}x^2-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=-\frac{e^e}{2e}x^2+o(x^2)\sim_0-\frac{e^{e-1}}{2}x^2.$$

3. On pose $h=\dfrac{1}{x}\to 0$ et on obtient
$$\begin{aligned}
\ln\left(1+\frac{1}{1+x}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{1+\frac{1}{h}}\right)=\ln\left(1+\frac{h}{1+h}\right) &= \ln\left(\frac{1+2h}{1+h}\right)\\
&= \ln(1+2h)-\ln(1+h)\\
&= (2h)-\frac{(2h)^2}{2}-h+\frac{h^2}{2}+o(h^2)\\
&= h-\frac{3h^2}{2}+o(h^2).
\end{aligned}$$

On en déduit que $f(x)=h-\dfrac{3h^2}{2}+o(h^2)-h=-\dfrac{3h^2}{2}+o(h^2)\underset{h\to 0}{\sim}-\dfrac{3h^2}{2}$.

On en conclut que $f(x)\sim_{+\infty}-\dfrac{3}{2x^2}$.

Exercice 21.4

Pour chaque question, on effectuera des calculs valables pour x au voisinage de 0 et on notera $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Par quotient, f est dérivable sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$. On a

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x}{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)} &= \frac{1}{1\underbrace{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}_{=u\to 0}} \\ &= 1-\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)^2+o(x^2) \\ &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}+o(x^2). \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ et on peut prolonger f par continuité en 0 par $f(0)=1$.
De plus,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}+o(x^2)}{x} = \frac{1}{2}-\frac{x}{12}+o(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}.$$

Donc, la fonction f ainsi prolongée est dérivable en 0 et $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.
Pour finir

$$f(x)-\frac{x}{2}-1 = -\frac{x^2}{12}+o(x^2) \sim_0 -\frac{x^2}{12} \xrightarrow[x\to 0]{} 0^-.$$

Alors la droite d'équation $y=\dfrac{1}{2}x+1$ est la tangente à $\mathscr{C}_f$ en le point d'abscisse 0 et $\mathscr{C}_f$ est en dessous de cette tangente.

2. Par différence, f est dérivable sur $]-\pi,0[\cup]0,\pi[$. On a

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x-\sin(x)}{x\sin(x)} = \frac{x-x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}+o(x^5)}{x\big(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\big)} &= \frac{\frac{x}{6}-\frac{x^3}{120}+o(x^3)}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)} \\ &= \left(\frac{x}{6}-\frac{x^3}{120}+o(x^3)\right)\left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^3)\right) \\ &= \frac{x}{6}+\frac{7}{360}x^3+o(x^3). \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et on peut prolonger f par continuité en 0 par $f(0)=0$.
De plus,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x}{6}+\frac{7}{360}x^3+o(x^3)}{x} = \frac{1}{6}+\frac{7}{360}x^2+o(x^2) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{6}.$$

Donc, la fonction f ainsi prolongée est dérivable en 0 et $f'(0)=\dfrac{1}{6}$.
Pour finir

$$f(x)-\frac{x}{6} = \frac{7}{360}x^3+o(x^3) \sim_0 \frac{7}{360}x^3 \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Alors la droite d'équation $y=\dfrac{1}{6}x$ est la tangente à $\mathscr{C}_f$ en le point d'abscisse 0 et $\mathscr{C}_f$ est en dessous de cette tangente à gauche de 0 et au-dessus à droite de 0.

3. Par quotient, f est dérivable sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$. On a

$$f(x) = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) - x}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + o(x^2).$$

Ainsi, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}$ et on peut prolonger f par continuité en 0 par $f(0) = -\frac{1}{2}$.
De plus,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + o(x^2)}{x} = \frac{1}{3} - \frac{x}{4} + o(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{3}.$$

Donc, la fonction f ainsi prolongée est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{3}$.
Pour finir

$$f(x) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{3}\right) = -\frac{x^2}{4} + o(x^2) \sim_0 -\frac{x^2}{4} \xrightarrow[x\to 0]{} 0^-.$$

Alors la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{3}$ est la tangente à $\mathscr{C}_f$ en le point d'abscisse 0 et $\mathscr{C}_f$ est en dessous de cette tangente.

4. Par quotient, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. On a

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} &= \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)} \\ &= 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^2 + o(x^2) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2). \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ et on peut prolonger f par continuité en 0 par $f(0) = 1$.
De plus,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)}{x} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{12} + o(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}.$$

Donc, la fonction f ainsi prolongée est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
Pour finir

$$f(x) + \frac{x}{2} = \frac{x^2}{12} + o(x^2) \sim_0 \frac{x^2}{12} \xrightarrow[x\to 0]{} 0^+.$$

Alors la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x$ est la tangente tangente à $\mathscr{C}_f$ en le point d'abscisse 0 et $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de cette tangente.

Exercice 21.5

Pour chaque question, on notera $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Pour x au voisinage de $\pm\infty$, on pose $h = \dfrac{1}{x} \to 0$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} = hf\left(\frac{1}{h}\right) &= h \times \frac{\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h} + 2}{\frac{1}{h} + 1} e^{-h} \\
&= (1 - h + 2h^2) \times \frac{1}{1+h} \times e^{-h} \\
&= (1 - h + 2h^2)(1 - h + h^2 + o(h^2)) \left(1 - h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right) \\
&= 1 - 3h + \frac{13}{2}h^2 + o(h^2) \\
&= 1 - \frac{3}{x} + \frac{13}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi $f(x) = x - 3 + \dfrac{13}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

On en déduit que $f(x) - (x-3) \sim_{\pm\infty} \dfrac{13}{2x} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$.

On en conclut que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x - 3$ est une asymptote oblique de $\mathscr{C}_f$ et que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{D}$ au voisinage de $+\infty$ et en dessous de $\mathscr{D}$ au voisinage de $-\infty$.

2. On commence par remarquer que si x est au voisinage de $\pm\infty$, alors $x^2 - 1 > 0$, donc $\left|x^2 - 1\right| = x^2 - 1$.

- Pour x au voisinage de $+\infty$, on pose $h = \dfrac{1}{x} \to 0^+$. Comme $h > 0$, on a $\sqrt{h^2} = h$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} = hf\left(\frac{1}{h}\right) &= h\left(\frac{1}{h} + \sqrt{\frac{1}{h^2} - 1}\right) \\
&= 1 + h\sqrt{\frac{1-h^2}{h^2}} \\
&= 1 + h\frac{\sqrt{1-h^2}}{h} \\
&= 1 + \left(1 - h^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2} \times (-h^2) + o(h^2) \\
&= 2 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).
\end{aligned}$$

  Ainsi $f(x) = 2x - \dfrac{1}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

  On en déduit que $f(x) - 2x \sim_{\pm\infty} -\dfrac{1}{2x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0^-$.

  On en conclut que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique de $\mathscr{C}_f$ et que $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de $\mathscr{D}$ au voisinage de $+\infty$.

- Pour x au voisinage de $-\infty$, on pose $h = \dfrac{1}{x} \to 0^-$. Comme $h < 0$, on a $\sqrt{h^2} = |h| = -h$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} = hf\left(\frac{1}{h}\right) &= h\left(\frac{1}{h} + \sqrt{\frac{1}{h^2} - 1}\right) \\
&= 1 + h\sqrt{\frac{1-h^2}{h^2}} \\
&= 1 + h\frac{\sqrt{1-h^2}}{-h} \\
&= 1 - \left(1 - h^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 1 - 1 - \frac{1}{2} \times (-h^2) + o(h^2) \\
&= \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi $f(x) = \dfrac{1}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

On en déduit que $f(x) \sim_{\pm\infty} \dfrac{1}{2x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0^-$.

On en conclut que l'axe (Ox) des abscisses est une asymptote horizontale de $\mathscr{C}_f$ et que $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de (Ox) au voisinage de $-\infty$.

3. Pour x au voisinage de $\pm\infty$, on pose $h = \dfrac{1}{x} \to 0$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} = hf\left(\frac{1}{h}\right) &= h \times \frac{1}{h^2} \ln\left(\frac{\frac{1}{h} + 1}{\frac{1}{h} - 1}\right) \\
&= \frac{1}{h} \ln\left(\frac{1+h}{1-h}\right) \\
&= \frac{1}{h}\big(\ln(1+h) - \ln(1-h)\big) \\
&= \frac{1}{h}\left(\left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)\right) - \left((-h) - \frac{(-h)^2}{2} + \frac{(-h)^3}{3} + o(h^3)\right)\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(2h + \frac{2}{3}h^3 + o(h^3)\right) \\
&= 2 + \frac{2}{3}h^2 + o(h^2) \\
&= 2 + \frac{2}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi $f(x) = 2x + \dfrac{2}{3x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

On en déduit que $f(x) - 2x \sim_{\pm\infty} \dfrac{2}{3x} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$.

On en conclut que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique de $\mathscr{C}_f$ et que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{D}$ au voisinage de $+\infty$ et en dessous de $\mathscr{D}$ au voisinage de $-\infty$.

Exercice 21.6

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$ est continue sur $]0,1[$, donc elle admet une primitive sur $]0,1[$.

2. Si x est au voisinage de 1, on pose $u = x - 1 \xrightarrow[x\to 1]{} 0$ et on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{\ln(1+u)} - \frac{1}{u} = \frac{1}{u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)} - \frac{1}{u} &= \frac{1}{u}\left(\frac{1}{1-\frac{u}{2}+o(u)} - 1\right)\\ &= \frac{1}{u}\left(1 + \frac{u}{2} + o(u) - 1\right)\\ &= \frac{1}{2} + o(1).\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{2} + \underset{x\to 1}{o}(1)}$

3. Par quotients et différences, h est continue sur $]0,1[$. On déduit de la question précédente que $h(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \dfrac{1}{2}$. On peut donc prolonger h par continuité sur $]0,1]$ en posant $h(1) = \dfrac{1}{2}$.

4. La fonction h étant continue sur $]0,1]$, elle admet une primitive sur $]0,1]$.

5. La fonction $x \mapsto F(x) - \ln(1-x)$ est une primitive de h sur $]0,1[$. On dispose donc de $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in]0,1[$, $H(x) = F(x) - \ln(1-x) + C$. Donc, par primitivation du développement limité de h, on obtient

$$H(x) = H(1) + \frac{x-1}{2} + \underset{x\to 1}{o}(x-1).$$

puis

$$F(x) - \ln(1-x) = H(1) - C + \frac{x-1}{2} + \underset{x\to 1}{o}(x-1).$$

En posant $k = H(1) - C$, on en conclut que $\boxed{F(x) = \ln(1-x) + k + \dfrac{x-1}{2} + \underset{x\to 1}{o}(x-1)}$

6. Soit $x \in]0,1[$. On a $G(x) = F(x^2) - F(x)$, donc, comme $x^2 \xrightarrow[x\to 1]{} 1$, on obtient au voisinage de 1 que

$$\begin{aligned} G(x) &= \ln(1-x^2) + k + \frac{x^2-1}{2} + o(x^2-1) - \ln(1-x) - k - \frac{x-1}{2} - o(x-1)\\ &= \ln(1+x) + o(1).\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{G(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \ln 2}$

Exercice 21.7

1. La fonction f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ (par produit et composition). Et de plus si $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = (1 + 2x^2)e^{(x^2)} > 0.$$

Donc f est strictement croissante et continue. Alors, d'après le théorème de la bijection continue, f admet une application réciproque f^{-1} définie sur $f(\mathbb{R})$. Or

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$

donc $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.
Ainsi f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et f^{-1} est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \neq 0$ et f est clairement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donc f^{-1} est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et elle possède donc, d'après le théorème de Taylor-Young, un développement limité à l'ordre 5 en 0.

3. La fonction f est clairement impaire, on va montrer qu'il en est de même pour f^{-1}. Soit $y \in \mathbb{R}$, vu que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$. On a donc $x = f^{-1}(y)$ et

$$f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y).$$

Alors f^{-1} est impaire donc les termes de degré pair dans son développement limité en 0 sont nuls, ce qui nous donne bien le résultat demandé.

4. On commence par déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f.
On obtient, au voisinage de 0,

$$f(x) = x\left(1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} + o(x^4)\right) = x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5).$$

Maintenant, on va faire le développement limité de $f^{-1}(f(x))$ à l'ordre 5 en 0 :

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= a\left(x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5)\right) + b\left(x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5)\right)^3 \\ &\quad + c\left(x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5)\right)^5 + o(x^5) \\ &= ax + x^3(a+b) + x^5\left(\frac{a}{2} + 3b + c\right) + o(x^5). \end{aligned}$$

5. Par définition, $f^{-1}(f(x)) = x$, donc son développement limité d'ordre 5 en 0 est $x + o(x^5)$. Par unicité du développement limité, on en déduit que

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ \frac{a}{2} + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Ainsi, on a, au voisinage de 0,

$$f^{-1}(y) = y - y^3 + \frac{5}{2}y^5 + o(x^5).$$

CHAPITRE 22

Intégration

L'essentiel du cours

1 Notion d'intégrale

Définition

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$, on appelle **intégrale** de f de a à b le réel

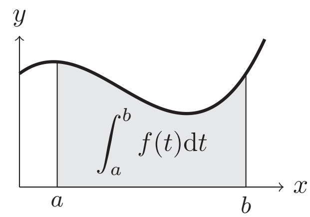
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a),$$

où F est une primitive de f.

- L'intégrale de f est indépendant du choix de la primitive.
- Par aspect pratique, on note $F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$.
- On a $\displaystyle\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$ et $\displaystyle\int_b^a f(t)\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Aire et intégrale

Si f est une fonction continue et positive sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ correspond à l'aire sous la courbe représentative de f, entre les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.



Proposition

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$.

2 Propriétés de l'intégrale

Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et λ un réel. On a alors

$$\int_a^b (\lambda f(t)+g(t))\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Relation de Chasles

Soient f une fonction continue sur I et $a,\ b,\ c \in I$. Alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Le théorème de Chasles n'impose pas d'ordre sur les réels a, b et c.

Positivité et croissance de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$.

- Si f est positive sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq 0$
- Si, pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) \leq g(t)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

Intégrale et encadrement

Soient $m,\ M \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $\forall x \in [a,b],\ m \leq f(x) \leq M$. Alors

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq (b-a)M.$$

Inégalité triangulaire sur les intégrales

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Il faut bien vérifier que $a < b$ pour utiliser ce résultat.

Proposition

Soit f une fonction continue positive sur $[a, b]$. Si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$, alors f est la fonction nulle.

Théorème fondamental de l'analyse

Soient f une fonction continue sur I, $a \in I$. Alors f admet une unique primitive F sur I s'annulant en a et F est définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Valeur moyenne

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Cette valeur est appelée **valeur moyenne** de f sur $[a, b]$.

3 Fonctions continues par morceaux

Définition

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$. On dit que f est **continue par morceaux** s'il existe $n+1$ réels $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ tels que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de f à $]x_k, x_{k+1}[$ est continue et se prolonge par continuité sur $[x_k, x_{k+1}]$.
On dit que $(x_0, \ldots, x_n)$ est une subdivision adaptée à f.

Ceci revient à dire qu'une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est continue sauf en un nombre fini de points et que, en chacun de ces points, elle admet une limite finie à droite et à gauche (pas nécessairement égales).

Définition

Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$ et $x_0 < \cdots < x_n$ une subdivision adaptée à f. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note f_k la fonction qui prolonge la restriction de f sur $]x_k, x_{k+1}[$. Alors l'intégrale de f de a à b est

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k(t)\mathrm{d}t.$$

- Pour calculer l'intégrale d'une fonction continue par morceaux, il suffit donc de calculer les intégrales sur chacun des morceaux et de les ajouter.
- La linéarité, la positivité, la croissance et l'encadrement de l'intégrale ainsi que la relation de Chasles restent vrais pour des fonctions continues par morceaux.

Définition

Soit f une fonction définie sur $[a,b]$. On dit que f est une **fonction en escalier** s'il existe $n+1$ réels $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ tels que, pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, f est constante sur $]x_k,x_{k+1}[$, c'est-à-dire il existe $\lambda_0,\ldots,\lambda_{n-1}$ des réels tels que

$$\forall k\in[\![0,n-1]\!]\,,\ \forall x\in]x_k,x_{k+1}[,\ f(x)=\lambda_k.$$

Proposition

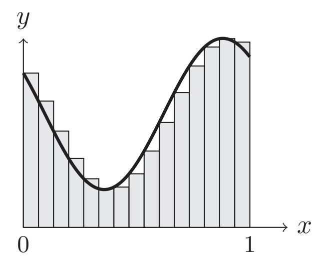
Soient f une fonction en escalier sur $[a,b]$, $(x_0,\ldots,x_n)$ une subdivision adaptée à f et $\lambda_0,\ldots,\lambda_{n-1}$ des réels tels que, pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, $f(x)=\lambda_k$. Alors l'intégrale de f de a à b est

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\left(x_{k+1}-x_k\right).$$

Sommes de Riemann

Si f est une fonction continue sur $[0,1]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$



Ce théorème revient à approximer l'intégrale de f par celle d'une fonction en escalier.

4 Calcul intégral

Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t=[u(t)v(t)]_a^b-\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t.$$

Bien vérifier (et mentionner) que les deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$.

Changement de variable

Soient I et J deux intervalles, f une fonction continue sur I et φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur J telle que $\varphi(J)\subset I$. On a alors pour tout α, β dans J

$$\int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\mathrm{d}t=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\mathrm{d}u.$$

On dit qu'on a effectué le changement de variable $u=\varphi(t)$.

Les méthodes à maîtriser

Méthode 22.1 : Utiliser les sommes de Riemann

Si on arrive à mettre une suite définie comme une somme, en se forçant à la factoriser par $\frac{1}{n}$, sous la forme $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec f continue sur $[0,1]$, alors elle convergera vers $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Exemple d'application

Calculer la limite de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

On a $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ qui est continue sur $[0,1]$.

Ainsi

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Voir exercice **22.3**.

Méthode 22.2 : Effectuer un changement de variable

Il a deux façons d'appréhender le calcul $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ à l'aide d'un changement de variables.

- Si on a repéré une fonction qu'il nous arrangerait de remplacer dans l'expression de f, on pose $u = \varphi(t)$ cette fonction (de classe $\mathscr{C}^1$) puis on met en forme pour utiliser pour la formule

$$\int_a^b g(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\mathrm{d}u.$$

  Dans la pratique :

  1. On se force à faire apparaître le « futur du » : $\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

  2. On exprime l'expression restante uniquement en fonction de $\varphi(t)$.

  3. On calcule l'image des bornes : si $t = a$, alors $u = \varphi(a)$ et si $t = b$, alors $u = \varphi(b)$ puis on effectue le changement de variable.

- Si au contraire, on veut faire apparaître une fonction dans l'expression de f, on pose $t = \psi(u)$ cette fonction (de classe $\mathscr{C}^1$) puis on utilise le fait que si $\psi(c) = a$ et $\psi(d) = b$, alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_c^b f(\psi(u))\psi'(u)\mathrm{d}u.$$

  Dans la pratique :

  1. On « calcule dt » : $\psi'(u)\mathrm{d}u$.

  2. On cherche une solution de $\psi(u) = a$ pour trouver c (si $t = a$, alors $\psi(u) = a$ et donc $u = c$ convient). On procède de même pour d puis on effectue le changement de variable.

Exemple d'application
Calculer les intégrales suivantes :

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\mathrm{d}t$ **en posant** $u = \sin(t)$. **(2)** $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ **en posant** $t = \sin(u)$.

(1) La fonction sin est de classe $\mathscr{C}^1$, on est donc en droit d'effectuer ce changement de variable. On doit faire apparaître $\mathrm{d}u = \cos(t)\mathrm{d}t$ pour effectuer le changement de variable

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \times \cos(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(t))\underbrace{\cos(t)\mathrm{d}t}_{=\mathrm{d}u} = \int_{\sin(0)}^{\sin(\frac{\pi}{2})} (1-u^2)\mathrm{d}u.$$

Il ne reste plus qu'à finir le calcul

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\mathrm{d}t = \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

(2) La fonction sin est de classe $\mathscr{C}^1$, on est donc en droit d'effectuer ce changement de variable. On a $\mathrm{d}t = \cos(u)\mathrm{d}u$. Et si $t = 0$, alors $\sin(u) = 0$ et $u = 0$ convient. De même si $t = \frac{1}{2}$, alors $u = \frac{\pi}{3}$ convient. Ainsi

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(u)}} \times \cos(u)\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sqrt{\cos^2(u)}} \times \cos(u)\mathrm{d}u.$$

Or, sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\cos(u) \geq 0$, donc $\sqrt{\cos^2(u)} = |\cos(u)| = \cos(u)$. Ainsi

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}u = \frac{\pi}{3}.$$

- Il est important de bien vérifier (et mentionner) que le changement de variable est de classe $\mathscr{C}^1$.
- Contrairement à ce qu'on entend/lit souvent, le changement de variable n'a en aucun cas l'obligation d'être bijectif (même si, dans la pratique, cela sera très souvent le cas).

On effectue le changement de variable d'un seul coup. Il ne faut pas avoir l'ancienne et la nouvelle variable mélangées sous la même intégrale.

Voir exercices **22.2** et **22.6**.

Interro de cours

1. Parmi les énoncés suivants lesquels sont toujours vrais ?

(a) Une fonction en escalier est continue par morceaux.

(b) La fonction $\lfloor \cdot \rfloor$ est continue par morceaux.

(c) Une fonction continue est continue par morceaux.

2. Soient f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et a et b deux réels. Parmi les énoncés suivants lesquels sont toujours vrais ?

(a) Si f est positive, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq 0$.

(b) Si $a < b$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq 0$, alors f est positive.

(c) Si $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \int_b^x f(t)\mathrm{d}t - \int_b^a f(t)\mathrm{d}t$.

(d) Si g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$, alors $f = g$ sur $[a, b]$.

3. Par encadrement, calculer la limite, quand $n \to +\infty$, de la suite $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t^n)}{n}\mathrm{d}t$.

4. Calculer $\displaystyle\int_1^e t\ln(t)\mathrm{d}t$ par intégration par parties.

5. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $u = e^t$.

6. Calculer la limite, quand $n \to +\infty$, de $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$.

Exercices

Pour s'entraîner

Exercice 22.1

En se servant d'intégration(s) par parties, calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\mathrm{d}t$ **2.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$ **3.** $\displaystyle\int_0^1 \arctan(t)\mathrm{d}t.$

Exercice 22.2

Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué.

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^3 t\mathrm{d}t \quad (u=\sin t)$ **2.** $\displaystyle\int_0^a \sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}\mathrm{d}t \quad (t=a\sin u)$

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t \quad (u=\tan t)$ **4.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^{2t}}\mathrm{d}t \quad (u=e^t)$

5. $\displaystyle\int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{\ln(t)+1}} \quad (u=\ln(t))$ **6.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{2+t}}{1+t}\mathrm{d}t \quad (t=u^2-2).$

Exercice 22.3

Montrer que les suites suivantes convergent et préciser leur limite :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$ **2.** $\displaystyle\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ **3.** $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$

4. $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$ **5.** $\displaystyle\prod_{k=1}^n \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$ **6.** $\displaystyle\prod_{k=n+1}^{2n} k^{\frac{1}{k}}.$

Exercice 22.4

Calculer les limites suivantes, quand $n\to+\infty$:

1. $\displaystyle\frac{1}{n!}\int_0^1 (\arctan x)^n\,\mathrm{d}x$ **2.** $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{x+n}\mathrm{d}x$ **3.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\exp(-nx)}{1+x}\mathrm{d}x.$

Exercice 22.5

Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[0,1]$, on pose $f_n(x)=\dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$.

1. Pour $x\in[0,1]$ fixé, préciser $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ et préciser $I=\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

2. Calculer $I_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$. A-t-on $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t\right)=\int_0^1\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t$?

Pour aller plus loin

Exercice 22.6

Soient $C = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\mathrm{d}t$ et $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\mathrm{d}t$.

1. À l'aide d'un changement de variable, montrer que $C = S$.
2. Calculer $C + S$ puis en déduire les valeurs de C et S.
3. À l'aide d'un changement de variable, calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{1-t^2}}$.

Exercice 22.7

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 22.8

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, avec g à valeurs positives ou nulles.
Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 22.9

Soient f un fonction continue sur $\mathbb{R}$ et G définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. On définit, sur $\mathbb{R}$, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Déterminer le développement limité à l'ordre 1 de F en 0 en fonction de $f(0)$ et en déduire que G est continue sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $G'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
3. On suppose désormais f de classe $\mathscr{C}^1$ en 0.
  a. Montrer que G est dérivable en 0 et calculer $G'(0)$.
  b. Montrer que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 22.10

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les intégrales de Wallis : $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x$.

1. Calculer W_0 et W_1.
2. Déterminer une relation W_{n+2} et W_n. *(On pourra effectuer une intégration par parties).*
3. En déduire que la suite $((n+1)W_nW_{n+1})$ est constante et déterminer son expression.
4. Montrer que la suite (W_n) est décroissante et en déduire que $W_n \sim W_{n+1}$.
5. Déterminer un équivalent simple de W_n.

Corrections

Interro de cours

1. **(a)** **Vrai.** Si f est une fonction en escaliers, il existe une subdivision telle que, sur chaque morceau ouvert de cette subdivision, f soit constante. Elle peut donc se prolonger en une fonction continue sur le morceau fermé. Elle est donc continue par morceaux.

(b) **Vrai.** C'est une fonction en escaliers.

(c) **Vrai.** Elle est continue sur un seul morceau.

2. **(a)** **Faux.** Il faut supposer que $a \leq b$.

(b) **Faux.** Si f est la fonction définie sur $[-1, 2]$ par $f(x) = 2x$, alors $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(t)\mathrm{d}t = 3 \geq 0$, alors que f n'est pas positive, car $f(-1) = -2$ par exemple.

(c) **Vrai.** D'après la relation de Chasles

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_b^x f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t + \int_b^x f(t)\mathrm{d}t.$$

(d) **Faux.** Sur $[-\pi, \pi]$, si on définit $f(x) = x$ et $g(x) = \sin x$. On a clairement $f \neq g$ alors que, ces deux fonctions étant impaires, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = 0 = \int_{\pi}^{\pi} g(t)\mathrm{d}t$.

3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1]$. On a $-1 \leq \sin(t^n) \leq 1$, donc $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\sin(t^n)}{n} \leq \dfrac{1}{n}$. Comme $0 < 1$, on a

$$\int_0^1 -\frac{1}{n}\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{\sin(t^n)}{n}\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{1}{n}\mathrm{d}t \quad \text{donc} \quad -\frac{1}{n} \leq I_n \leq \frac{1}{n}.$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Alors, d'après le théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(I_n) = 0$.

4. On effectue une intégration par parties avec les fonctions u et v de sorte que $u'(t) = t$ et $v(t) = \ln(t)$. On pose donc $u(t) = \dfrac{t^2}{2}$ et $v(t) = \ln(t)$ sur $[1, e]$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$, donc

$$\int_1^e t\ln(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_1^e - \int_1^e \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \frac{e^2}{2} - 0 - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^e = \frac{1+e^2}{4}.$$

5. Si on pose $u = e^t$, alors $\mathrm{d}u = e^t\mathrm{d}t$. Et si $t = 0$, alors $u = e^0 = 1$; si $t = 1$, alors $u = e^1 = e$. D'où

$$\int_0^1 \frac{e^t}{e^t+1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{e^t+1} \times e^t\mathrm{d}t = \int_1^e \frac{1}{u+1}\mathrm{d}u = [\ln|u+1|]_1^e = \ln(e+1) - \ln(2).$$

6. On a $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ qui est continue sur $[0, 1]$. Ainsi

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = [\ln|1+t|]_0^1 = \ln(2).$$

Exercice 22.1

1. On effectue une intégration par parties avec les fonctions u et v de sorte que $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(1+t^2)$. On pose donc $u(t) = t$ et $v(t) = \ln(1+t^2)$ sur $[0,1]$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$, donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 1 \times \ln(1+t^2)\mathrm{d}t = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^1 - \int_0^1 t \times \frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t &= \ln(2) - 2\int_0^1 \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\mathrm{d}t \\ &= \ln(2) - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \ln(2) - 2\left[t - \arctan(t)\right]_0^1 \\ &= \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

2. On effectue une intégration par parties avec les fonctions u et v de sorte que $u'(t) = \dfrac{1}{\cos^2(t)}$ et $v(t) = t$. On pose donc $u(t) = \tan(t)$ et $v(t) = t$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$, donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2(t)}\mathrm{d}t = \left[t\tan(t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 \times \tan(t)\mathrm{d}t.$$

Or $\tan(t) = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)} = -\dfrac{\cos'(t)}{\cos(t)}$. Donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)\mathrm{d}t = \left[-\ln|\cos(t)|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + 0 = \frac{1}{2}\ln(2)$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2(t)}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$.

3. On effectue une intégration par parties avec les fonctions u et v de sorte que $u'(t) = 1$ et $v(t) = \arctan(t)$. On pose donc $u(t) = t$ et $v(t) = \arctan(t)$ sur $[0,1]$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$, donc

$$\int_0^1 \arctan(t)\mathrm{d}t = \left[t\arctan(t)\right]_0^1 - \int_0^1 t \times \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2).$$

Exercice 22.2

1. Si on pose $u = \sin t$, alors $\mathrm{d}u = \cos t\mathrm{d}t$. Et si $t = 0$, alors $u = 0$; si $t = \dfrac{\pi}{2}$, alors $u = 1$. D'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^3 t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t(1-\sin^2 t) \times \cos t\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(u^2 - u^4\right)\mathrm{d}u = \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{15}.$$

2. Si on pose u de sorte que $t = a\sin u$, alors $\mathrm{d}t = a\cos u\mathrm{d}u$. Pour avoir $t = 0$, $u = 0$ convient ; pour avoir $t = a$, $u = \dfrac{\pi}{2}$ convient. D'où

$$\int_0^a \sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 u} \times a\cos u\mathrm{d}u = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos u|\cos u\mathrm{d}u.$$

De plus, si $u \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos u \geq 0$, donc $|\cos u| = \cos u$. Ainsi

$$\int_0^a \sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}}\mathrm{d}t = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\mathrm{d}u = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2u)}{2}\mathrm{d}u = \frac{a}{2}\left[u + \frac{\sin(2u)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a\pi}{4}.$$

3. Si on pose $u = \tan t$, alors $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$. Si $t = 0$, alors $u = 0$; si $t = \dfrac{\pi}{4}$, alors $u = 1$. On utilise aussi l'identité $\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$. D'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 t}+1} \times \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2+\tan^2 t} \times \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{2+u^2}$$

Pour finir, on se ramène à la dérivée d'une arctangente.

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

4. Si on pose $u = e^t$, alors $\mathrm{d}u = e^t\mathrm{d}t$. Si $t = 0$, alors $u = 1$; si $t = 1$, alors $u = e$. D'où

$$\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^{2t}}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+(e^t)^2} \times e^t\mathrm{d}t = \int_1^e \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u = [\arctan(u)]_1^e = \arctan(e) - \frac{\pi}{4}.$$

5. Si on pose $u = \ln t$, alors $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{t}$. Si $t = 1$, alors $u = 0$; si $t = e$, alors $u = 1$. D'où

$$\int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{\ln(t)+1}} = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{\ln(t)+1}} \times \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u+1}} = \left[2\sqrt{u+1}\right]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2.$$

6. Si on pose u de sorte que $t = u^2 - 2$, alors $\mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u$. Pour avoir $t = 0$, $u = \sqrt{2}$ convient ; pour avoir $t = 1$, $u = \sqrt{3}$ convient. D'où

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{2+t}}{1+t}\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{2u^2}{u^2-1}\mathrm{d}u = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{2(u^2-1)+2}{u^2-1}\mathrm{d}u = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left(2 + \frac{2}{u^2-1}\right)\mathrm{d}u.$$

Or $\dfrac{2}{u^2-1} = \dfrac{1}{u-1} - \dfrac{1}{u+1}$.

On en conclut que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sqrt{2+t}}{1+t}\mathrm{d}t &= [2u + \ln|u-1| - \ln|u+1|]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \\ &= 2\sqrt{3} + \ln(\sqrt{3}-1) - \ln(\sqrt{3}+1) - 2\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2}-1) + \ln(\sqrt{2}+1).\end{aligned}$$

Exercice 22.3

Pour chaque question, on notera (u_n) la suite dont on cherche la limite.

1. On a $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ qui est continue sur $[0,1]$. Ainsi

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

2. On a $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f : x \mapsto \sqrt{x}$ qui est continue sur $[0,1]$. Ainsi

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \sqrt{t}\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

3. On a $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+2\frac{k}{n}}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$ qui est continue sur $[0,1]$.

Ainsi

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+2t}} = \left[\sqrt{1+2t}\right]_0^1 = \sqrt{3}-1.$$

4. En effectuant le changement d'indices $\ell = k-n$ puis en renommant ℓ en k, on a $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ qui est continue sur $[0,1]$. Ainsi

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = [\ln|1+t|]_0^1 = \ln(2).$$

5. On a $\ln(u_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f : x \mapsto \ln\left(1+x^2\right)$ qui est continue sur $[0,1]$. Ainsi

$$\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln(1+t^2)\mathrm{d}t = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2} \quad \text{(cf. exercice } \mathbf{22.1}\text{, question } \mathbf{1.}\text{).}$$

On en conclut que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp\left(\ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}\right)$.

6. On a $\ln(u_n) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}\ln k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}\ln(k+n) = \ln(n) \times \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(1+\frac{k}{n})}{1+\frac{k}{n}}$.

Or $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} > 0$ et $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(1+\frac{k}{n})}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t}\mathrm{d}t$.

Ainsi $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 22.4

Pour chaque question, on notera I_n l'intégrale dont on cherche la limite.

1. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, alors $0 \leq \frac{1}{n!}(\arctan x)^n \leq \frac{1}{n!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n$, par croissance de la fonction arctan.

Donc, en intégrant sur le segment $[0,1]$, on obtient

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'après le théorème d'encadrement, on en conclut que $\lim_{n\to+\infty}(I_n) = 0$.

2. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,\pi]$, alors $0 \leq \frac{\sin x}{x+n} \leq \frac{1}{n}$.

Donc, en intégrant sur le segment $[0,\pi]$, on obtient

$$0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'après le théorème d'encadrement, on en conclut que $\lim_{n\to+\infty}(I_n) = 0$.

3. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, alors $0 \leq \dfrac{e^{-nx}}{1+x} \leq e^{-nx}$.
Donc, en intégrant sur le segment $[0,1]$, on obtient

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 e^{-nx}\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^1 = \frac{1-e^{-n}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'après le théorème d'encadrement, on en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty}(I_n) = 0$.

Exercice 22.5

1. Si $x \in]0,1]$, alors $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^n x}{n2^n x^2} = \dfrac{1}{nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. De plus, $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Ainsi f est la fonction nulle et $I = 0$.

2. On a $I_n = \dfrac{1}{2n}\displaystyle\int_0^1 \frac{n2^n \times 2x}{1+n2^nx^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2n}\left[\ln\left|1+n2^nx^2\right|\right]_0^1 = \frac{1}{2n}\ln(1+n2^n)$.
On calcule ensuite la limite de cette intégrale.

$$I_n = \frac{1}{2n}\ln\left(n\times 2^n \times\left(\frac{1}{n2^n}+1\right)\right) = \underbrace{\frac{1}{2n}\ln n}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0} + \underbrace{\frac{1}{2n}\ln(2^n)}_{=\frac{\ln 2}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2n}\ln\left(\frac{1}{n2^n}+1\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ln 2}{2}.$$

On en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t\right) = \dfrac{\ln 2}{2} \neq 0 = \displaystyle\int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 22.6

1. On effectue le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ pour obtenir

$$C = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)} \times(-\mathrm{d}u) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin u}{\sin u + \cos u}\mathrm{d}u = S.$$

2. On a $C + S = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$. Comme $C = S$, on en déduit que $\boxed{C = S = \dfrac{\pi}{4}}$.

3. On effectue le changement de variable $t = \sin(u)$ et on obtient

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin u + \sqrt{1-\sin^2 u}} \times \cos u\mathrm{d}u.$$

Or, sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, cosinus est positif, donc $\sqrt{1-\sin^2 u} = \sqrt{\cos^2 u} = \cos u$. Ainsi

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\sin u + \cos u}\mathrm{d}u = C = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 22.7

On effectue une intégration par parties pour obtenir

$$\int_a^b f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{f(t)\sin(nt)}{n}\right]_a^b}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0} - \int_a^b \frac{f'(t)\sin(nt)}{n}\mathrm{d}t.$$

Or la fonction f' est continue sur le segment $[a,b]$ (car f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$). Donc, d'après le théorème des bornes atteintes, la fonction f' est bornée sur $[a,b]$. On dispose donc de $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in [a,b],\ |f(x)| \leq K$. Ainsi

$$0 \leq \left|\int_a^b \frac{f'(t)\sin(nt)}{n}\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b \frac{|f'(t)\sin(nt)|}{n}\mathrm{d}t \leq \int_a^b \frac{K}{n}\mathrm{d}t = \frac{K(b-a)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par encadrement $\displaystyle\int_a^b \frac{f'(t)\sin(nt)}{n}\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en conclut que $\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On procède de même pour montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 22.8

La fonction f est continue sur le segment $[a,b]$, donc, d'après le théorème des bornes atteintes, f admet un minimum et un maximum. On dispose donc de $\alpha, \beta \in [a,b]$ tels que

$$\forall x \in [a,b],\ f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta).$$

La fonction g étant positive, on en déduit que

$$\forall x \in [a,b],\ f(\alpha)g(x) \leq f(x)g(x) \leq f(\beta)g(x).$$

En intégrant sur le segment $[a,b]$, on obtient

$$\int_a^b f(\alpha)g(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(\beta)g(t)\mathrm{d}t.$$

Si g est la fonction nulle, le résultat demandé est vrai pour n'importe quelle valeur de $c \in [a,b]$. Sinon, comme g est continue, on a $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t > 0$. Ainsi

$$f(\alpha) \leq \frac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} \leq f(\beta).$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on dispose de c entre α et β (donc dans $[a,b]$) tel que $f(c) = \dfrac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}$, c'est-à-dire tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 22.9

1. La fonction f étant continue, on en déduit que F est de classe $\mathscr{C}^1$.
Donc au voisinage de 0, on a $F(x) = F(0) + xF'(0) + o(x)$.
Comme $F(0) = 0$ et $F' = f$, on en déduit qu'au voisinage de 0, $F(x) = xf(0) + o(x)$.
Si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $G(x) = \dfrac{1}{2x}(F(x) - F(-x))$. Par somme et quotient, la fonction G est continue sur $\mathbb{R}^*$.
De plus, au voisinage de 0, on a

$$G(x) = \frac{1}{2x}(xf(0) + o(x) - (-xf(0) + o(x))) = f(0) + o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} f(0) = G(0).$$

On en conclut que la fonction G est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $G(x) = \dfrac{1}{2x}(F(x) - F(-x))$. Par somme et quotient, la fonction G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

De plus, si $x \neq 0$, alors
$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{(F'(x) - (-F'(-x))) \times 2x - (F(x) - F(-x)) \times 2}{(2x)^2} \\ &= \frac{x(f(x) + f(-x)) - F(x) + F(-x)}{2x^2}. \end{aligned}$$

3. a. La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^1$ en 0, on en déduit que F est de classe $\mathscr{C}^2$ en 0.
Donc au voisinage de 0, on a $F(x) = F(0) + xF'(0) + \dfrac{F''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$.
Comme $F(0) = 0$ et $F' = f$, on en déduit qu'au voisinage de 0,

$$F(x) = xf(0) + x^2\frac{f'(0)}{2} + o(x^2).$$

Alors

$$\frac{G(x) - G(0)}{x} = \frac{f(0) + o(x) - f(0)}{x} = o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

On en conclut que G est dérivable en 0 et que $G'(0) = 0$.

b. Au voisinage de 0, on a
$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{1}{2x^2}\Bigg(x(f(0) + xf'(0) + f(0) + (-x)f'(0) + o(x)) \\ &\qquad -xf(0) - \frac{f'(0)}{2}x^2 + (-x)f(0) + \frac{f'(0)}{2}(-x)^2 + o(x^2)\Bigg) \\ &= \frac{o(x^2)}{2x^2} = o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = G'(0). \end{aligned}$$

On en conclut que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 22.10

1. On a $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On procède par intégration par parties :

$$\begin{aligned} W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\sin^{n+1}(x)\mathrm{d}x \underset{\text{IPP}}{=} & \left[-\cos(x)\sin^{n+1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin^n(x)\mathrm{d}x \\ = & \ 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(x))\sin^n(x)\mathrm{d}x \\ = & \ (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \end{aligned}$$

On en conclut que $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $(n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+2)W_{n+1} \times \dfrac{n+1}{n+2} W_n = (n+1)W_nW_{n+1}$.

On en conclut que la suite $\big((n+1)W_nW_{n+1}\big)$ est constante.

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)W_nW_{n+1} = (0+1)W_0W_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

On en conclut que $\forall n \in \mathbb{N},\ W_nW_{n+1} = \dfrac{\pi}{2n+1)}$.

4.
- Soient $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $n \in \mathbb{N}$. On a $0 \leq \sin(x) \leq 1$, donc $\sin^{n+1}(x) \leq \sin^n(x)$. En intégrant sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient $W_{n+1} \leq W_n$. Ainsi la suite (W_n) est décroissante.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction $x \mapsto \sin^n x$ est continue, positive et pas identiquement nulle. Ainsi $W_n > 0$.

  De plus, par décroissance de la suite (W_n), on a $\underbrace{\dfrac{W_{n+2}}{W_n}}_{=\frac{n+1}{n+2}\to 1} \leq \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$.

  Ainsi par théorème d'encadrement, $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, d'où $W_n \sim W_{n+1}$.

5. Comme $W_n \sim W_{n+1}$, on a $W_n^2 \sim W_nW_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)} \sim \dfrac{\pi}{2n}$.

Comme $W_n > 0$, on en conclut que $W_n = \left(W_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \sim \left(\dfrac{\pi}{2n}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

CHAPITRE 23

Équations différentielles

L'essentiel du cours

1 Équation différentielle linéaire du premier ordre

Dans toute cette partie, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ et a, b deux fonctions continues sur I.

Définition

Une équation différentielle linéaire du premier ordre est de la forme

$$y' + a(t)y = b(t), \qquad (\mathscr{E})$$

son équation différentielle linéaire homogène associée est

$$y' + a(t)y = 0. \qquad (\mathscr{H})$$

Résolution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre

Soit $\mathscr{H}$ une équation différentielle linéaire homogène $y' + a(t)y = 0$.
Alors les solutions de $\mathscr{H}$ sont les fonctions de la forme

$$y_h(t) = Ke^{-A(t)} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R},$$

où A est une primitive de a.

Structure des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre

Soit y_p une solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre $\mathscr{E}$. Alors les solutions de $\mathscr{E}$ sont les fonctions de la forme

$$y = y_p + y_h$$

avec y_h solution de l'équation différentielle linéaire homogène $\mathscr{H}$ associée à $\mathscr{E}$.

Pour trouver une solution particulière y_p :
- Si on a une idée de sa forme, on réinjecte dans l'équation $\mathscr{E}$ pour déterminer y_p.
- Sinon, on peut utiliser la méthode de la variation de la constante (cf méthode **23.1**).

2 Équation différentielle linéaire du second ordre

Dans toute cette partie, a, b désigneront des réels et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Définition

Une équation différentielle linéaire du second ordre à cœfficients constants est de la forme

$$y'' + ay' + by = f(t), \qquad (\mathscr{E})$$

son équation différentielle linéaire homogène associée est

$$y'' + ay' + by = 0. \qquad (\mathscr{H})$$

On appelle **équation caractéristique** de $\mathscr{H}$ l'équation $ar^2 + br + c = 0$, d'inconnue r.

Résolution d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre

Soit $\mathscr{H}$ une équation différentielle linéaire homogène $y'' + ay' + by = 0$.
On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique de $\mathscr{H}$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 et les solutions de l'équation $\mathscr{H}$ sont
$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une solution réelle double r_0 et les solutions de l'équation $\mathscr{H}$ sont
$$y(x) = (\lambda x + \mu)e^{r_0 x} \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
- Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées : $\rho + i\omega$ et $\rho - i\omega$ (où $\rho \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}^*$) et les solutions de l'équation $\mathscr{H}$ sont
$$y(x) = e^{\rho x}\left(\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)\right) \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Structure des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre

Soit y_p une solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre $\mathscr{E}$.
Alors les solutions de $\mathscr{E}$ sont les fonctions de la forme

$$y = y_p + y_h$$

avec y_h solution de l'équation différentielle linéaire homogène $\mathscr{H}$ associée à $\mathscr{E}$.

On verra dans la méthode **23.2** comment trouver une solution particulière y_p en fonction de la forme du second membre $f(t)$.

Principe de superposition

Soient f_1 et f_2 deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et λ et μ deux réelles. On suppose que

- y_1 est solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = f_1(t)$,
- y_2 est solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = f_2(t)$.

Alors $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = \lambda f_1(t) + \mu f_2(t)$.

On parle de linéarité des « sorties » (y_1 et y_2) par rapport aux « entrées » (f_1 et f_2).

Les méthodes à maîtriser

Méthode 23.1 : Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre

Pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre $y' + a(t)y = b(t)$ $(\mathscr{E})$.

1. On commence par déterminer les solutions de l'équation homogène associée $(\mathscr{H})$. Ces solutions sont de la forme $y_h : t \mapsto K\varphi(t)$ où $K \in \mathbb{R}$ et $\varphi(t) = e^{-A(t)}$ avec A une primitive de a.

2. Ensuite, à moins d'avoir une idée sur la forme d'une solution particulière, on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(t) = K(t)\varphi(t) \quad (\textbf{méthode de la variation de la constante}).$$

3. On réinjecte y_p dans l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ pour en déduire une expression de $K'(t)$. En effectuant un calcul de primitive, on détermine ainsi une fonction K qui convient puis une solution particulière de $(\mathscr{E})$: $y_p : t \mapsto K(t)\varphi(t)$.

4. On somme cette solution particulière de $(\mathscr{E})$ aux solutions de $(\mathscr{H})$ pour avoir les solutions de $(\mathscr{E})$.

5. Si on dispose d'une condition initiale, on l'utilise pour déterminer la valeur de la constante figurant dans l'expression des solutions trouvées.

Exemple d'application

Résoudre l'équation différentielle $\boldsymbol{y' - \dfrac{y}{t} = t\cos(t)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $\boldsymbol{y(\pi) = \pi}$.

On note $(\mathscr{E})$ l'équation différentielle. Une primitive de $t \mapsto -\dfrac{1}{t}$ est $t \mapsto -\ln(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme

$$y_h : t \mapsto K\exp(-(-\ln(t))) = Kt \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de la forme $y_p(t) = K(t)t$. On a $y_p'(t) = K'(t)t + K(t)$. Ainsi

$$y_p \text{ est solution de } (\mathscr{E}) \Leftrightarrow (K'(t)t + K(t)) - \frac{K(t)t}{t} = t\cos(t) \Leftrightarrow K'(t) = \cos(t).$$

Donc la fonction $K : t \mapsto \sin(t)$ convient et $y_p : t \mapsto t\sin(t)$ est une solution de l'équation $(\mathscr{E})$. Alors, les solutions de $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme

$$y : t \mapsto t(\sin(t) + K) \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

On utilise la condition initiale

$$y(\pi) = \pi \Leftrightarrow \pi K = \pi \Leftrightarrow K = 1.$$

Ainsi la seule solution répondant au problème posé est la fonction $t \mapsto t(\sin(t) + 1)$.

Voir exercices **23.1**, **23.5**, **23.3**, **23.8**, **23.9** et **23.10**.

Méthode 23.2 : Résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre

Pour résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre à cœfficients constants $(\mathscr{E})$ de la forme

$$y'' + ay' + by = P(t)e^{\alpha t} \quad \text{avec } P \in \mathbb{R}[X] \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. On commence par déterminer les solutions de l'équation homogène associée $(\mathscr{H})$.

2. On note $m \in \{0, 1, 2\}$ la multiplicité de α comme solution de l'équation caractéristique de l'équation différentielle. On cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(t) = t^m Q(t)e^{\alpha t} \quad \text{avec } Q \in \mathbb{R}[X] \text{ et } \deg(Q) = \deg(P).$$

3. On réinjecte y_p dans l'équation différentielle de départ, on divise par $e^{\alpha t}$ (qui est non nul) et on identifie les coefficients de l'égalité polynômiale obtenue. On obtient un système linéaire d'inconnues les coefficients de Q. On le résout pour déterminer Q puis y_p.

4. On somme la solution particulière aux solutions de $(\mathscr{H})$ pour avoir les solutions de $(\mathscr{E})$.

5. Si on dispose de conditions initiales (ou d'autres conditions), on les utilise pour déterminer la valeur des constantes figurant dans l'expression des solutions trouvées.

Exemple d'application

Résoudre l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = (2t + 3)e^{2t}$.

On note $(\mathscr{E})$ l'équation différentielle. Son équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 1 et 2. Donc les solutions de l'équation homogène associée à $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme

$$y_h : t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{2t} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On remarque que le cœfficient dans l'exponentielle du second membre (égal à 2) est une solution d'ordre 1 de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière de la forme

$$y_p(t) = (at + bt^2)e^{2t}.$$

Après calcul, on obtient que $y_p''(t) - 3y_p'(t) + 2y_p(t) = ((-2a + 4b)t + a + 2b)e^{2t}$. Ainsi

$$y_p \text{ est solution de } (\mathscr{E}) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ (-2a + 4b)t + a + 2b = 2t + 3.$$

Par identification des cœfficients, on obtient

$$y_p \text{ est solution de } (\mathscr{E}) \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 4b = 2 \\ a + 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Donc $y_p : t \mapsto (t + t^2)e^{2t}$ est une solution particulière de $(\mathscr{E})$.
Alors, les solutions de $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme

$$y : t \mapsto \lambda e^t + (\mu + t + t^2)e^{2t} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Dans le cas où le cœfficient dans l'exponentielle est une solution double de l'équation caractéristique, il est plus rapide de laisser la solution particulière sous la forme $R(t)e^{\alpha t}$ sans chercher à expliciter plus le polynôme R. En réinjectant dans l'équation différentielle, on obtient $R'' = P$.
- Si le second membre est de la forme $\cos(\omega t)$ ou $\sin(\omega t)$, on cherchera plutôt une solution de la forme $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$.
- Si le second membre est de la forme $t\cos(\omega t)$ ou $t\sin(\omega t)$, on cherchera plutôt une solution de la forme $(at + b)\cos(\omega t) + (ct + d)\sin(\omega t)$.

Voir exercices **23.2**, **23.3**, **23.4** et **23.7**.

Interro de cours

1. Déterminer les solutions de $y' + ay = 0$ avec $a \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer les solutions de $ty' - y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer les solutions de $y' - \dfrac{2y}{t} = t$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Déterminer la solution de $\begin{cases} y' - 2y = 2te^{2t} \\ y(0) = 1. \end{cases}$
5. Déterminer les solutions de $y'' - 6y' + 10y = 0$.
6. Déterminer les solutions de $y'' - 4y' + 4y = 0$.
7. Déterminer les solutions de $y'' - 2y' - 3y = 0$.
8. Dans chaque cas, déterminer sous quelle forme rechercher une solution particulière (sans chercher à la calculer explicitement).
   (a) $y'' - 6y' + 10y = e^t$
   (b) $y'' - 4y' + 4y = te^t$
   (c) $y'' - 2y' - 3y = e^{-t}$
   (d) $y'' - 2y' + y = (t^2 + 1)e^t$.

Exercices

Pour s'entraîner

Exercice 23.1

Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $y' + y = t^2 + t + 1$
2. $y' + y = \dfrac{1}{1+e^t}$
3. $y' + y \tan t = \cos^2 t$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$
4. $2ty' + y = t^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
5. $(t \ln t)y' - y = -\dfrac{1+\ln t}{t}$ sur $]1, +\infty[$
6. $y' \sin t - y \cos t = 1$ sur $]0, \pi[$.

Exercice 23.2

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1. $y'' - 3y' + 2y = e^{-t}$
2. $y'' - 3y' + 2y = e^t$
3. $y'' - 4y' + 4y = te^{2t}$
4. $y'' - 2y' + 2y = t^2$
5. $y'' - 5y' + 6y = e^t + e^{2t}$
6. $y'' + 2y' + 2y = t \cos t$.

Exercice 23.3

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ et f une solution de $ay'' + by' + cy = 0$. Montrer que $f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

Exercice 23.4

Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y'' = -\omega^2 y$ sont de la forme

$$t \mapsto \rho \cos(\omega t + \varphi).$$

Pour aller plus loin

Exercice 23.5

1. Montrer que si une solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre s'annule, alors c'est la fonction nulle.
2. En déduire que si deux solutions d'une même équation différentielle linéaire du premier ont une valeur en commun, alors ces deux fonctions sont égales.

Exercice 23.6

Soit f une solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = |y|$.

1. On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) = 0$.
   - **a.** Déterminer le signe de f sur $]-\infty, t_0]$ et le signe de f sur $[t_0, +\infty[$.
   - **b.** En déduire f.
2. Exprimer f en fonction de $y_0 = f(0)$.

Exercice 23.7

Déterminer les fonctions réelles f définies sur $\mathbb{R}$, vérifiant $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = f(-t)$.

Exercice 23.8

Soient a, b deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0. \qquad (\mathscr{H})$$

1. On suppose que φ est une solution de $(\mathscr{H})$ définie sur $\mathbb{R}$ et qui ne s'annule jamais.

a. Soit f une fonction deux fois dérivable définie sur $\mathbb{R}$. On définit la fonction g par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \varphi(t)g(t).$$

Vérifier que g est deux fois dérivable.

b. Montrer que f est solution de $(\mathscr{H})$ si et seulement si g' est solution de

$$z' + \left(\frac{2\varphi'(t)}{\varphi(t)} + a(t)\right) z = 0 \quad \text{(d'inconnue } z).$$

En déduire une méthode pour résoudre $(\mathscr{H})$ lorsqu'on connaît φ.

2. Application. On considère l'équation différentielle

$$(1+t^2)^2 y'' - 2t(1+t^2)y' + 2(t^2-1)y = 0. \qquad (\mathscr{H})$$

a. Déterminer un polynôme de degré 2 solution de $(\mathscr{H})$.

b. Résoudre $(\mathscr{H})$.

Exercice 23.9

On peut modéliser l'évolution d'une population à l'aide de la fonction logistique N (issue du modèle de Verhulst) définie par l'équation différentielle

$$N' = r\left(1 - \frac{N}{K}\right) N \quad \text{et} \quad N(0) = N_0 \geq 0, \qquad (\mathscr{E})$$

où $r > 0$ est le taux de croissance et $K > 0$ est la capacité d'accueil.

1. Quelles sont les solutions constantes de $(\mathscr{E})$?

2. On pose $y = \dfrac{1}{N}$. Montrer que y est solution d'une équation différentielle linéaire.

3. En déduire une expression de N, ainsi que la limite de $N(t)$ en $+\infty$.

4. On suppose que $N_0 \in]0, K[$.

a. Montrer que $\forall t \geq 0,\ N(t) \in]0, K[$.

b. En revenant à l'équation différentielle, montrer que N est croissante.

5. Que dire si $N_0 > K$?

Exercice 23.10

On peut modéliser l'évolution d'une population avec le modèle de Gompertz régi par l'équation différentielle

$$N' = r \ln\left(\frac{K}{N}\right) N \quad \text{et} \quad N(0) = N_0 \geq 0, \qquad (\mathscr{E})$$

où $r > 0$ est le taux de croissance et $K > 0$ est la capacité d'accueil.

1. On pose $y = \ln(N)$. Montrer que y est solution d'une équation différentielle linéaire.

2. En déduire une expression de N, ainsi que la limite de $N(t)$ en $+\infty$.

Corrections

Interro de cours

1. Les solutions sont les fonctions de la forme $t \mapsto Ke^{-at}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

2. On commence par transformer l'équation différentielle pour que le terme y' n'ait aucun facteur devant lui : $y' - \dfrac{1}{t}y = 0$. On note $(\mathscr{E})$ l'équation différentielle. Une primitive de $t \mapsto -\frac{1}{t}$ est $t \mapsto -\ln t$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, si $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\exp(-(-\ln t)) = t$.
On en conclut que les solutions de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions de la forme

$$y : t \mapsto Kt \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

3. On note $(\mathscr{E})$ l'équation différentielle. Une primitive de $t \mapsto -\frac{2}{t}$ est $t \mapsto -2\ln t$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, si $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\exp(-(-2\ln t)) = t^2$. Ainsi les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme

$$y_h : t \mapsto Kt^2 \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de la forme $y_p(t) = K(t)t^2$. On a $y_p'(t) = K'(t)t^2 + 2K(t)t$. Ainsi

$$y_p \text{ est solution de } (\mathscr{E}) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ K'(t)t^2 + 2K(t)t - \frac{2K(t)t^2}{t} = t \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ K'(t) = \frac{1}{t}.$$

Donc la fonction $K : t \mapsto \ln t$ convient et $y_p : t \mapsto t^2 \ln t$ est une solution de l'équation $(\mathscr{E})$.
On en conclut que les solutions de $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme

$$y : t \mapsto (\ln t + K)t^2 \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

4. On note $(\mathscr{E})$ l'équation différentielle. Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme

$$y_h : t \mapsto Ke^{2t} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de la forme $y_p(t) = K(t)e^{2t}$.
On a $y_p'(t) = K'(t)e^{2t} + 2K(t)e^{2t}$. Ainsi

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } (\mathscr{E}) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ K'(t)e^{2t} + 2K(t)e^{2t} - 2K(t)e^{2t} = 2te^{2t} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ K'(t) = 2t. \end{aligned}$$

Donc la fonction $K : t \mapsto t^2$ convient et $y_p : t \mapsto t^2 e^{2t}$ est une solution de l'équation $(\mathscr{E})$.
Alors, les solutions de $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme

$$y : t \mapsto (K + t^2)e^{2t} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

On utilise la condition initiale

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow 1 \times (K + 0) = 1 \Leftrightarrow K = 1.$$

On en conclut que la seule solution répondant au problème posé est la fonction $t \mapsto (1 + t^2)e^{2t}$.

5. On note $(\mathscr{E})$ l'équation différentielle. Son équation caractéristique est $r^2 - 6r + 10 = 0$ dont les solutions sont $3 - i$ et $3 + i$.
On en conclut que les solutions de l'équation homogène associée à $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme

$$y : t \mapsto e^{3t}\left(\lambda \cos(t) + \mu \sin(t)\right) \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

6. On note $(\mathscr{E})$ l'équation différentielle. Son équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = 0$ dont la seule solution est 2.
On en conclut que les solutions de l'équation homogène associée à $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme
$$y : t \mapsto (\lambda + \mu t)\, e^{2t} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

7. On note $(\mathscr{E})$ l'équation différentielle. Son équation caractéristique est $r^2 - 2r - 3 = 0$ dont les solutions sont -1 et 3.
On en conclut que les solutions de l'équation homogène associée à $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme
$$y : t \mapsto \lambda e^{-t} + \mu e^{3t} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

8. **(a)** Le cœfficient dans l'exponentielle du second membre (égal à 1) n'est pas solution de l'équation caractéristique de l'équation différentielle. On cherche donc une solution particulière de la forme $t \mapsto ae^t$ avec $a \in \mathbb{R}$.

(b) Le cœfficient dans l'exponentielle du second membre (égal à 1) n'est pas solution de l'équation caractéristique de l'équation différentielle. On cherche donc une solution particulière de la forme $t \mapsto (at + b)e^t$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

(c) Le cœfficient dans l'exponentielle du second membre (égal à -1) est une solution d'ordre 1 de l'équation caractéristique de l'équation différentielle. On cherche donc une solution particulière de la forme $t \mapsto ate^{-t}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

(d) Le cœfficient dans l'exponentielle du second membre (égal à 1) est une solution d'ordre 2 de l'équation caractéristique de l'équation différentielle. On cherche donc une solution particulière de la forme $t \mapsto R(t)e^t$ où $R = aX^4 + bX^3 + cX^2$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 23.1

1. On note $(\mathscr{E})$ l'équation différentielle. Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme
$$y_h : t \mapsto Ke^{-t} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$
On cherche une solution particulière de la même forme que le second membre $y_p(t) = at^2+bt+c$. On a $y_p'(t) = 2at + b$. Ainsi
$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } (\mathscr{E}) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ at^2 + (2a+b)t + (b+c) = t^2 + t + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad (a = 1, b = -1, c = 2). \end{aligned}$$
Donc la fonction $y_p : t \mapsto t^2 - t + 2$ est une solution de l'équation $(\mathscr{E})$.
On en conclut que les solutions de $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme
$$y : t \mapsto t^2 - t + 2 + Ke^{-t} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

> On aurait aussi pu passer par la méthode de la variation de la constante dans cette question. Les calculs auraient été plus fastidieux (détermination d'une primitive de $t \mapsto (t^2 + t + 1)e^t$).
> Lorsqu'on est en présence d'une équation différentielle linéaire à cœfficients constants avec un second membre d'une forme simple, on peut essayer de chercher une solution particulière de la même forme ou d'une forme analogue..

2. On note $(\mathscr{E})$ l'équation différentielle. Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme
$$y_h : t \mapsto Ke^{-t} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$
On cherche une solution particulière de la forme $y_p(t) = K(t)e^{-t}$.
On a $y_p'(t) = K'(t)e^{-t} - K(t)e^{-t}$. Ainsi
$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } (\mathscr{E}) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ K'(t)e^{-t} - K(t)e^{-t} + K(t)e^{-t} = \frac{1}{1+e^t} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ K'(t) = \frac{e^t}{1+e^t}. \end{aligned}$$
Donc la fonction $K : t \mapsto \ln(1+e^t)$ convient et $y_p : t \mapsto e^{-t}\ln(1+e^t)$ est une solution de l'équation $(\mathscr{E})$.
On en conclut que les solutions de $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme
$$y : t \mapsto (\ln(1+e^t) + K)e^{-t} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

3. On note $(\mathscr{E})$ l'équation différentielle. Une primitive de $t \mapsto \tan t = -\dfrac{\cos'(t)}{\cos(t)}$ est $t \mapsto -\ln|\cos t|$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. De plus, si $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\exp\big(-(-\ln|\cos t|)\big) = |\cos t| = \cos t$.
Ainsi les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme
$$y_h : t \mapsto K\cos t \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$
On cherche une solution particulière de la forme $y_p(t) = K(t)\cos t$.
On a $y_p'(t) = K'(t)\cos t - K(t)\sin t$. Ainsi
$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } (\mathscr{E}) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ K'(t)\cos t - K(t)\sin t + K(t)\underbrace{\cos t \tan t}_{=\sin t} = \cos^2 t \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ K'(t) = \cos t. \end{aligned}$$
Donc la fonction $K : t \mapsto \sin t$ convient et $y_p : t \mapsto \cos t \sin t$ est une solution de l'équation $(\mathscr{E})$.
On en conclut que les solutions de $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme
$$y : t \mapsto (\sin t + K)\cos t \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

4. On commence par transformer l'équation différentielle pour que le terme y' n'ait aucun facteur devant lui :
$$y' + \frac{1}{2t}y = \frac{t^{n-1}}{2}.$$
On note $(\mathscr{E})$ l'équation différentielle. Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{2t}$ est $t \mapsto \dfrac{1}{2}\ln t$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, si $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\exp\left(-\dfrac{1}{2}\ln t\right) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. Ainsi les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme
$$y_h : t \mapsto \frac{K}{\sqrt{t}} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$
On cherche une solution particulière de la forme $y_p(t) = \dfrac{K(t)}{\sqrt{t}}$. On a $y_p'(t) = \dfrac{K'(t)}{\sqrt{t}} - \dfrac{K(t)}{2t\sqrt{t}}$.
Ainsi
$$y_p \text{ est solution de } (\mathscr{E}) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \frac{K'(t)}{\sqrt{t}} - \frac{K(t)}{2t\sqrt{t}} + \frac{K(t)}{2t\sqrt{t}} = \frac{t^{n-1}}{2} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ K'(t) = \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{2}.$$

Donc la fonction $K : t \mapsto \dfrac{t^{n+\frac{1}{2}}}{2(n+\frac{1}{2})} = \dfrac{t^n\sqrt{t}}{2n+1}$ convient et $y_p : t \mapsto \dfrac{t^n}{2n+1}$ est une solution de l'équation $(\mathscr{E})$.
On en conclut que les solutions de $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme

$$y : t \mapsto \frac{K}{\sqrt{t}} + \frac{t^n}{2n+1} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

5. On commence par transformer l'équation différentielle pour que le terme y' n'ait aucun facteur devant lui :

$$y' - \frac{1}{t\ln t}y = -\frac{1+\ln t}{t^2 \ln t}.$$

On note $(\mathscr{E})$ l'équation différentielle. Une primitive de $t \mapsto -\dfrac{1}{t\ln t} = -\dfrac{\ln'(t)}{\ln(t)}$ est $t \mapsto \ln(\ln t)$ sur $]1, +\infty[$. De plus, si $t \in]1, +\infty[$, $\exp\big(-(-\ln(\ln t))\big) = \ln t$. Ainsi les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme

$$y_h : t \mapsto K\ln t \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de la forme $y_p(t) = K(t)\ln t$. On a $y_p'(t) = \mathbb{K}'(t)\ln t + \dfrac{K(t)}{t}$.
Ainsi

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } (\mathscr{E}) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ K'(t)\ln t + \frac{K(t)}{t} - \frac{K(t)}{t} = -\frac{1+\ln t}{t^2\ln t} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ K'(t) = -\frac{1+\ln t}{(t\ln t)^2}. \end{aligned}$$

Or la dérivée de la fonction $t \mapsto t\ln t$ est $t \mapsto 1 + \ln t$. On reconnaît ainsi une forme $-\dfrac{u'}{u^2}$.
Donc la fonction $K : t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ convient et $y_p : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est une solution de l'équation $(\mathscr{E})$.
On en conclut que les solutions de $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme

$$y : t \mapsto \frac{1}{t} + K\ln t \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

6. On commence par transformer l'équation différentielle pour que le terme y' n'ait aucun facteur devant lui :

$$y' - \frac{\cos t}{\sin t}y = \frac{1}{\sin t}.$$

On note $(\mathscr{E})$ l'équation différentielle. Une primitive de $t \mapsto -\dfrac{\cos t}{\sin t} = -\dfrac{\sin'(t)}{\sin(t)}$ est $t \mapsto -\ln(\sin t)$ sur $]0, \pi[$. De plus, si $t \in]0, \pi[$, $\exp\big(-(-\ln(\sin t))\big) = \sin t$. Ainsi les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme

$$y_h : t \mapsto K\sin t \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de la forme $y_p(t) = K(t)\sin t$.
On a $y_p'(t) = K'(t)\sin t + K(t)\cos t$. Ainsi

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } (\mathscr{E}) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ K'(t)\sin t + K(t)\cos t - K(t)\sin t\frac{\cos t}{\sin t} = \frac{1}{\sin t} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ K'(t) = \frac{1}{\sin^2 t}. \end{aligned}$$

En s'inspirant du fait que, si $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\tan' t = \frac{1}{\cos^2 t}$ et en échangeant le rôle de cos et sin, on remarque que, sur $]0, \pi[$, la dérivée de $t \mapsto \frac{\cos t}{\sin t}$ est $t \mapsto -\frac{1}{\sin^2 t}$.
Donc la fonction $K : t \mapsto -\frac{\cos t}{\sin t}$ convient et $y_p : t \mapsto -\cos t$ est une solution de l'équation $(\mathscr{E})$.
On en conclut que les solutions de $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme

$$y : t \mapsto -\cos t + K \sin t \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

Exercice 23.2

1. On note $(\mathscr{E})$ l'équation différentielle. Son équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 1 et 2. Donc les solutions de l'équation homogène associée à $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme

$$y_h : t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{2t} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On remarque que le cœfficient dans l'exponentielle du second membre (égal à -1) n'est pas solution de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière de la forme

$$y_p(t) = ae^{-t}.$$

On obtient que $y_p''(t) - 3y_p'(t) + 2y_p(t) = 6ae^{-t}$. Ainsi

$$y_p \text{ est solution de } (\mathscr{E}) \Leftrightarrow 6a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{6}.$$

Donc $y_p : t \mapsto \frac{1}{6}e^{-t}$ est une solution particulière de $(\mathscr{E})$.
On en conclut que les solutions de $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme

$$y : t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{2t} + \frac{1}{6}e^{-t} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. On note $(\mathscr{E})$ l'équation différentielle. Son équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 1 et 2. Donc les solutions de l'équation homogène associée à $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme

$$y_h : t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{2t} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On remarque que le cœfficient dans l'exponentielle du second membre (égal à 1) est une solution d'ordre 1 de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière de la forme

$$y_p(t) = ate^t.$$

Après calcul, on obtient que $y_p''(t) - 3y_p'(t) + 2y_p(t) = -ae^t$. Ainsi

$$y_p \text{ est solution de } (\mathscr{E}) \Leftrightarrow -a = 1.$$

Donc $y_p : t \mapsto -te^t$ est une solution particulière de $(\mathscr{E})$.
On en conclut que les solutions de $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme

$$y : t \mapsto (\lambda - t)e^t + \mu e^{2t} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3. On note $(\mathscr{E})$ l'équation différentielle. Son équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = 0$ dont la solution est 2. Donc les solutions de l'équation homogène associée à $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme
$$y_h : t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{2t} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$
On remarque que le cœfficient dans l'exponentielle du second membre (égal à 2) est une solution d'ordre 2 de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière de la forme
$$y_p(t) = R(t)e^{2t}.$$
Après calcul, on obtient que $y_p''(t) - 4y_p'(t) + 4y_p(t) = R''(t)e^{2t}$. Ainsi
$$y_p \text{ est solution de } (\mathscr{E}) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ R''(t) = t.$$
Le polynôme $R = \dfrac{X^3}{6}$ convient. Donc $y_p : t \mapsto \dfrac{t^3}{6}e^{2t}$ est une solution particulière de $(\mathscr{E})$.
On en conclut que les solutions de $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme
$$y : t \mapsto \left(\lambda + \mu t + \frac{t^3}{6}\right)e^{2t} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

4. On note $(\mathscr{E})$ l'équation différentielle. Son équation caractéristique est $r^2 - 2r + 2 = 0$ dont les solutions sont $1 + i$ et $1 - i$. Donc les solutions de l'équation homogène associée à $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme
$$y_h : t \mapsto e^t(\lambda \cos t + \mu \sin t) \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$
On remarque que le cœfficient dans l'exponentielle du second membre (égal à 0) n'est pas solution de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière de la forme
$$y_p(t) = at^2 + bt + c.$$
Après calcul, on obtient que $y_p''(t) - 2y_p'(t) + 2y_p(t) = 2at^2 + (2b - 4a)t + (2c - 2b + 2a)$. Ainsi
$$y_p \text{ est solution de } (\mathscr{E}) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ 2at^2 + (2b - 4a)t + (2c - 2b + 2a) = t^2.$$
Par identification des cœfficients, on obtient
$$y_p \text{ est solution de } (\mathscr{E}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 2b - 4a = 0 \\ 2c - 2b + 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = \frac{1}{2}. \end{cases}$$
Donc $y_p : t \mapsto \dfrac{t^2}{2} + t + \dfrac{1}{2}$ est une solution particulière de $(\mathscr{E})$.
On en conclut que les solutions de $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme
$$y : t \mapsto \frac{t^2}{2} + t + \frac{1}{2} + e^t(\lambda \cos t + \mu \sin t) \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

5. On note $(\mathscr{E})$ l'équation différentielle. Son équation caractéristique est $r^2 - 5r + 6 = 0$ dont les solutions sont 2 et 3. Donc les solutions de l'équation homogène associée à $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme
$$y_h : t \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{3t} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- On cherche une solution particulière de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_1)$:
$$y'' - 5y' + 6y = e^t.$$
On remarque que le cœfficient dans l'exponentielle du second membre (égal à 1) n'est pas solution de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière de la forme
$$y_{p,1}(t) = ae^t.$$
On obtient que $y''_{p,1}(t) - 5y'_{p,1}(t) + 6y_{p,1}(t) = 2ae^t$. Ainsi
$$y_{p,1} \text{ est solution de } (\mathscr{E}_1) \Leftrightarrow 2a = 1.$$
Donc $y_{p,1} : t \mapsto \dfrac{1}{2}e^t$ est une solution particulière de $(\mathscr{E}_1)$.
- On cherche une solution particulière de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_2)$:
$$y'' - 5y' + 6y = e^{2t}.$$
On remarque que le cœfficient dans l'exponentielle du second membre (égal à 2) est une solution d'ordre 1 de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière de la forme
$$y_{p,2}(t) = ate^{2t}.$$
Après calcul, on obtient que $y''_{p,2}(t) - 5y'_{p,2}(t) + 6y_{p,2}(t) = -ae^{2t}$. Ainsi
$$y_{p,2} \text{ est solution de } (\mathscr{E}_2) \Leftrightarrow -a = 1.$$
Donc $y_{p,2} : t \mapsto -te^{2t}$ est une solution particulière de $(\mathscr{E}_2)$.

Par principe de superposition, $y_{p,1} + y_{p,2} : t \mapsto \dfrac{1}{2}e^t - te^{2t}$ est une solution particulière de $(\mathscr{E})$. On en conclut que les solutions de $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme
$$y : t \mapsto \frac{1}{2}e^t + (\lambda - t)e^{2t} + \mu e^{3t} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

6. On note $(\mathscr{E})$ l'équation différentielle. Son équation caractéristique est $r^2 + 2r + 2 = 0$ dont les solutions sont $-1 - i$ et $-1 + i$. Donc les solutions de l'équation homogène associée à $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme
$$y_h : t \mapsto e^{-t}(\lambda \cos t + \mu \sin t) \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$
On cherche une solution particulière d'une forme analogue au second membre
$$y_p(t) = (at + b)\cos t + (ct + d)\sin t.$$
Après calcul, on obtient que
$$\begin{aligned} y''_p(t) + 2y'_p(t) + 2y_p(t) &= \Big((a + 2c)t + (2a + b + 2c + 2d)\Big)\cos t \\ &\quad + \Big((-2a + c)t + (-2a - 2b + 2c + d)\Big)\sin t. \end{aligned}$$
Ainsi, par identification des cœfficients, on obtient
$$y_p \text{ est solution de } (\mathscr{E}) \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2c = 1 \\ 2a + b + 2c + 2d = 0 \\ -2a + c = 0 \\ -2a - 2b + 2c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = -\frac{2}{25} \\ c = \frac{2}{5} \\ d = -\frac{14}{25}. \end{cases}$$

Donc $y_p : t \mapsto \left(\frac{t}{5} - \frac{2}{25}\right)\cos t + \left(\frac{2t}{5} - \frac{14}{25}\right)\sin t$ est une solution particulière de $(\mathscr{E})$.
On en conclut que les solutions de $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme

$$y : t \mapsto \left(\frac{t}{5} - \frac{2}{25}\right)\cos t + \left(\frac{2t}{5} - \frac{14}{25}\right)\sin t + e^{-t}(\lambda\cos t + \mu \sin t) \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 23.3

On note $(\mathscr{E})$ l'équation différentielle. Comme $a \neq 0$, l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ est équivalente à $y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = 0$, dont l'équation caractéristique est $r^2 + \frac{b}{a}r + \frac{c}{a} = 0$, c'est-à-dire $ar^2 + br + c = 0$.
On note $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, alors les deux solutions de l'équation caractéristique sont

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

  Or, $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, donc $b^2 - 4ac < b^2$ puis $\sqrt{\Delta} < b$. Ainsi $r_1 < 0$ et $r_2 < 0$.
  Or f est solution de $(\mathscr{E})$ donc on dispose de $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}.$$

  Comme $r_1 < 0$ et $r_2 < 0$, on a $\lim_{t \to +\infty} e^{r_1 t} = \lim_{t \to +\infty} e^{r_2 t} = 0$.
  On en conclut que $f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

- Si $\Delta = 0$, alors la seule solution de l'équation caractéristique est $r_0 = -\frac{b}{2a} < 0$.
  Or f est solution de $(\mathscr{E})$ donc on dispose de $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = (\lambda + \mu t)e^{r_0 t}.$$

  Comme $r_0 < 0$, on a $\lim_{t \to +\infty} e^{r_0 t} = 0$.
  On en conclut, par croissances comparées, que $f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

- Si $\Delta < 0$, alors les deux solutions de l'équation caractéristique sont $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.
  Or f est solution de $(\mathscr{E})$ donc on dispose de $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = e^{-\frac{bt}{2a}}\left(\lambda \cos\left(t\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) + \mu \sin\left(t\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\right).$$

  Comme $-\frac{b}{2a} < 0$, on a $\lim_{t \to +\infty} e^{-\frac{bt}{2a}} = 0$.
  De plus, $t \mapsto \lambda \cos\left(t\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) + \mu \sin\left(t\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$ est bornée.
  On en conclut, d'après le théorème d'encadrement, que $f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

Dans tous les cas, on a $f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

Exercice 23.4

On note $(\mathscr{E})$ l'équation différentielle. Son équation caractéristique est $r^2 = -\omega^2$ dont les solutions sont $i\omega$ et $-i\omega$. Les solutions de $(\mathscr{E})$ sont donc les fonctions de la forme

$$y : t \mapsto \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t).$$

On considère une telle solution y. On pose $\rho = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$.

- Si $\rho = 0$, cela signifie que $\lambda = \mu = 0$ et on a bien $y : t \mapsto \rho\cos(\omega t + \varphi)$ pour n'importe quelle valeur de φ.
- Si $\rho \neq 0$, on a $\left(\dfrac{\lambda}{\rho}\right)^2 + \left(-\dfrac{\mu}{\rho}\right)^2 = 1$. On dispose donc de φ tel que

  $$\cos\varphi = \frac{\lambda}{\rho} \quad \text{et} \quad \sin\varphi = -\frac{\mu}{\rho}.$$

  Ainsi

  $$y(t) = \rho\left(\cos(\omega t)\cos\varphi - \sin(\omega t)\sin\varphi\right) = \rho\cos(\omega t + \varphi).$$

Exercice 23.5

1. Soient $(\mathscr{H})$ une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre : $y' + a(t)y = 0$, et f une solution de $(\mathscr{H})$ s'annulant en t_0. On dispose de $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = Ke^{-A(t)},$$

où A est une primitive de a. Or $f(t_0) = 0$, donc $Ke^{-A(t_0)} = 0$. Comme $e^{-A(t_0)} \neq 0$, on a $K = 0$. On en conclut que f est la fonction nulle.

2. Soient $(\mathscr{E})$ une équation différentielle linéaire du premier ordre : $y' + a(t)y = b(t)$, et f_1 et f_2 deux solutions de $(\mathscr{E})$ ayant la même valeur en t_0. Par principe de superposition, $f_1 - f_2$ est solution de l'équation différentielle linéaire homogène $y' + a(t)y = 0$. Or $f_1(t_0) - f_2(t_0) = 0$. On en conclut, d'après la question précédente, que $f_1 - f_2 = 0$, puis que $f_1 = f_2$.

Exercice 23.6

1. **a.** On a $f' = |f| \geq 0$, donc la fonction f est croissante. Or elle s'annule en t_0. On en conclut que f est négative sur $]-\infty, t_0]$ et positive sur $[t_0, +\infty[$.

b. D'après la question précédente, sur $]-\infty, t_0]$, la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' = -y$. On dispose donc de $K_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in]-\infty, t_0],\ f(t) = K_1 e^{-t}.$$

De même, sur $[t_0, +\infty[$, la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' = y$. On dispose donc de $K_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in [t_0, +\infty[,\ f(t) = K_2 e^{t}.$$

Or $f(t_0) = 0$, donc, comme $t_0 \in]-\infty, t_0]$, $0 = f(t_0) = K_1 e^{-t_0}$ et $K_1 = 0$. De même $K_2 = 0$. On en conclut que f est la fonction nulle.

2. On déduit de la question précédente que f est de signe strictement constant. En effet, si f changeait strictement de signe, étant continue, elle s'annulerait d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Elle serait donc nulle d'après la question précédente, ce qui est absurde car la fonction nulle ne change pas strictement de signe.

- Si f est strictement positive, alors elle est solution de l'équation différentielle $y' = y$. On dispose donc de $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in [t_0, +\infty[,\ f(t) = Ke^t$. Puis $f(0) = K$.
- Si f est strictement négative, alors elle est solution de l'équation différentielle $y' = -y$. On dispose donc de $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in [t_0, +\infty[,\ f(t) = Ke^{-t}$. Puis $f(0) = K$.

Au final

$$\begin{cases} \text{si } y_0 > 0, \text{ alors} & \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = f(0)e^t \\ \text{si } y_0 = 0, \text{ alors} & \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = 0 \\ \text{si } y_0 < 0, \text{ alors} & \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = f(0)e^{-t}. \end{cases}$$

Exercice 23.7

On procède par analyse-synthèse.

- **Analyse.** Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = f(-t)$.
Par composition de fonctions dérivables, $t \mapsto f(-t)$ est dérivable. Donc f' est dérivable.
Soit $t \in \mathbb{R}$. Si on dérive l'égalité $f'(t) = f(-t)$, on obtient $f''(t) = -f'(-t)$. Or $f'(-t) = f(-(-t)) = f(t)$. On en déduit que $f''(t) = -f(t)$. Ainsi f est solution de l'équation différentielle $y'' = -y$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à cœfficients constants. Son équation caractéristique est $r^2 = -1$ dont les solutions sont i et $-i$. On dispose donc de $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t.$$
Il s'ensuit que, pour $t = 0$,
$$f'(0) = f(-0), \quad \text{donc} \quad -\lambda \sin 0 + \mu \cos 0 = \lambda \cos 0 - \mu \sin 0, \quad \text{donc} \quad \mu = \lambda.$$
On obtient
$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \lambda(\cos t + \sin t).$$
- **Synthèse.** Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \lambda(\cos t + \sin t)$.
Par somme de fonctions dérivables, f est dérivable. Et si $t \in \mathbb{R}$, on a
$$f'(t) = \lambda(-\sin t + \cos t) = \lambda(\cos(-t) + \sin(-t)) = f(-t).$$

On en conclut que les fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = f(-t)$ sont les fonctions de la forme $f : t \mapsto \lambda(\cos t + \sin t)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 23.8

1. On suppose que φ est une solution de $(\mathscr{H})$ définie sur $\mathbb{R}$ et qui ne s'annule jamais.

a. Comme φ ne s'annule jamais, on a
$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \frac{f(t)}{\varphi(t)}.$$
Ainsi g est le quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule jamais, alors g est deux fois dérivable.

b. On a $f' = \varphi' g + \varphi g'$ et $f'' = \varphi'' g + 2\varphi' g' + \varphi g''$. Donc si $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} & f''(t) + a(t)f'(t) + b(t)f(t) \\ & \quad = \varphi''(t)g(t) + 2\varphi'(t)g'(t) + \varphi(t)g''(t) + a(t)\left(\varphi'(t)g(t) + \varphi(t)g'(t)\right) + b(t)\varphi(t)g(t) \\ & \quad = g(t)\underbrace{\left(\varphi''(t) + a(t)\varphi'(t) + b(t)\varphi(t)\right)}_{=0} + \varphi(t)\left(g''(t) + \left(\frac{2\varphi'(t)}{\varphi(t)} + a(t)\right)g'(t)\right). \end{aligned}$$

Or la fonction φ ne s'annule jamais. On en déduit que

$$f \text{ est solution de } (\mathscr{H}) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ g''(t) + \left(\frac{2\varphi'(t)}{\varphi(t)} + a(t)\right)g'(t) = 0.$$

On en conclut que f est solution de $(\mathscr{H})$ si et seulement si g' est solution de l'équation différentielle

$$z' + \left(\frac{2\varphi'(t)}{\varphi(t)} + a(t)\right)z = 0.$$

2. a. En notant $P = aX^2 + bX + c$ et en remplaçant la fonction $t \mapsto P(t)$ dans $(\mathscr{H})$, on obtient aisément que $P = 1 + X^2$ est solution de $(\mathscr{H})$.

b. On pose $\varphi(t) = 1 + t^2$ qui ne s'annule jamais et qui est solution de $(\mathscr{H})$. On commence par chercher une solution de $z' + \left(\frac{2\varphi'(t)}{\varphi(t)} + a(t)\right)z = 0$. Ici $a(t) = -\frac{2t}{1+t^2}$ et $\frac{2\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{4t}{1+t^2}$.
Ainsi, on cherche g' solution de

$$z' + \frac{2t}{1+t^2}z = 0.$$

Ainsi $g'(t) = \dfrac{\lambda}{1+t^2}$ avec λ un réel et donc $g(t) = \lambda \arctan(t) + \mu$ avec μ un réel.
On en conclut que les solutions de $(\mathscr{H})$ sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto (1+t^2)(\lambda \arctan(t) + \mu) \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 23.9

1. Si N est constante, alors $N' = 0$, d'où $r\left(1 - \frac{N}{K}\right)N = 0$. Comme $r \neq 0$, on en déduit que $1 - \frac{N}{K} = 0$ ou $N = 0$.
On en conclut que les deux seules solutions constantes sont 0 et K.

2. On a

$$y' = -\frac{N'}{N^2} = -r\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{K}\right) = -ry + \frac{r}{K}.$$

On en conclut que y est bien solution d'une équation différentielle linéaire.

3. Après résolution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre obtenue, on dispose de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \lambda e^{-rt} + \frac{1}{K}.$$

Or, $y(0) = \dfrac{1}{N_0}$ et $y(0) = \lambda + \dfrac{1}{K}$. On en déduit que $\lambda = \dfrac{1}{N_0} - \dfrac{1}{K}$. D'où

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \frac{(K - N_0)e^{-rt} + N_0}{KN_0}.$$

Comme $N = \dfrac{1}{y}$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R},\ N(t) = \frac{KN_0}{(K - N_0)e^{-rt} + N_0}.$$

De plus, $r > 0$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-rt} = 0$ et on en conclut que

$$N(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \frac{KN_0}{N_0} = K.$$

4. **a.** Soit $t \geq 0$. On a $N(t) = \dfrac{K}{(\frac{K}{N_0} - 1)e^{-rt} + 1}$.

Puisque $0 < N_0 < K$, on a $\left(\dfrac{K}{N_0} - 1\right) e^{-rt} + 1 > 1$, donc $0 < \dfrac{1}{(\frac{K}{N_0} - 1)e^{-rt} + 1} < 1$.

Comme $K > 0$, on en conclut que $0 < N(t) < K$.

b. Puisque $N(t) \in]0, K[$, on a $1 - \dfrac{N}{K} > 0$ et $N > 0$, donc $N' = r\left(1 - \dfrac{N}{K}\right) N > 0$.

On en conclut que N est croissante.

5. En procédant de la même manière, on montre que $\forall t \geq 0,\ N(t) > K$ et que N est décroissante.

Exercice 23.10

1. On a

$$y' = \frac{N'}{N} = r \ln\left(\frac{K}{N}\right) = -r \ln N + r \ln K = -ry + r \ln K.$$

On en conclut que y est bien solution d'une équation différentielle linéaire.

2. Après résolution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre obtenue, on dispose de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \lambda e^{-rt} + \ln K.$$

Or, $y(0) = \ln N_0$ et $y(0) = \lambda + \ln K$. On en déduit que $\lambda = \ln N_0 - \ln K = \ln\left(\dfrac{N_0}{K}\right)$. D'où

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \ln\left(\frac{N_0}{K}\right) e^{-rt} + \ln K.$$

Comme $N = e^y$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R},\ N(t) = K\left(\frac{N_0}{K}\right)^{e^{-rt}}.$$

De plus, $r > 0$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-rt} = 0$ et on en conclut que

$$N(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} K\left(\frac{N_0}{K}\right)^0 = K.$$

CHAPITRE 24

Fonctions de deux variables réelles

L'essentiel du cours

1 Généralités

Définition

Un **pavé ouvert** de $\mathbb{R}^2$ est un ensemble de la forme $I \times J$ avec I et J des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

Définition

Une **fonction de deux variables** à valeurs réelles définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ est une application de D dans $\mathbb{R}$.

Définition

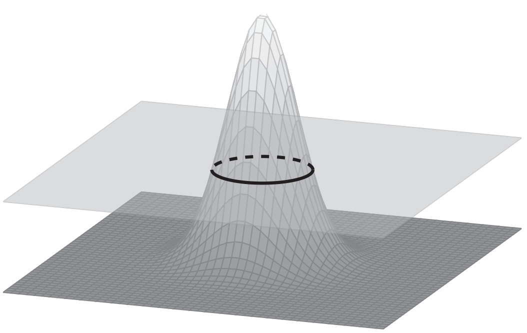
Soient $f : D \to \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. La **surface représentative** de f est l'ensemble

$$\{(x, y, f(x, y)) \ / \ (x, y) \in D\}$$

et la **courbe de niveau** λ est l'ensemble des éléments de D tels que

$$f(x, y) = \lambda.$$

Sur une carte topographique, les lignes de niveau permettent d'identifier les points à la même altitude.



La surface représentative de $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ et sa ligne de niveau e^{-1} en noir.

Définition

Soient $D = I \times J$ un pavé ouvert, $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et $a = (\alpha, \beta) \in D$.
La **première fonction partielle** de f en a est la fonction $f_1 : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(t, \beta). \end{array}$
La **deuxième fonction partielle** de f en a est la fonction $f_2 : \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(\alpha, t). \end{array}$

- La définition formelle de la continuité pour les fonctions de deux variables est hors programme. Il faudra se contenter d'un argument graphique : f est continue en a si sa surface ne se « déchire » pas en a.
- On justifiera la continuité par somme, produit, etc de fonctions continues (les fonctions polynomiales en x et y étant continues sur $\mathbb{R}^2$).

2 Dérivées partielles

Définition

Soient $D = I \times J$ un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ et $a = (\alpha, \beta) \in D$.

- Si la première fonction partielle de f en a est dérivable en α, sa dérivée s'appelle **nombre dérivé partiel** de f par rapport à x en a, que l'on note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$. On appelle **dérivée partielle première** par rapport à x de f et on note $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ la fonction $\begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(u). \end{array}$
- Si la deuxième fonction partielle de f en a est dérivable en β, sa dérivée s'appelle **nombre dérivé partiel** de f par rapport à y en a, que l'on note $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$. On appelle **dérivée partielle première** par rapport à y de f et on note $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ la fonction $\begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial y}(u). \end{array}$

Pour calculer ces dérivées partielles, il suffit de dériver par rapport à une variable et de considérer l'autre comme une constante. On peut donc utiliser toutes les formules vues auparavant pour la dérivation des fonctions d'une variable (somme, produit, etc)

Dérivées et extrema

Soient D un pavé ouvert, $f : D \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en $a \in D$. Si f admet un extremum en a, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$.

La réciproque est fausse (comme pour les fonctions d'une variable).

Définition

On dit qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un pavé ouvert D si elle admet des dérivées partielles premières sur D et que celles-ci sont continues sur D.

Petites variations

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le pavé ouvert D et si $a = (\alpha, \beta) \in D$, alors pour tous $h, k \in \mathbb{R}$ au voisinage de 0, on a $f(\alpha + h, \beta + k) = f(a) + h\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + k\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) + o(h, k)$.

- Pour faire simple, $o(h, k)$ désigne une fonction négligeable devant $\max(|h|, |k|)$.
- Cela revient à dire qu'on a approximé, au voisinage de a, la surface représentative de f par son plan tangent.

Dérivée de fonctions paramétrées

Soient E un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur la pavé ouvert $D = I \times J$, x une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de E dans I et y une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de E dans J. La fonction $F : t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur E et, pour tout $t \in E$,

$$F'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).$$

Cela justifie l'égalité utilisée dans les sciences physiques : $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$.

Définition

Soient D un pavé ouvert, $f : D \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ $a \in D$. On appelle **gradient** de f en a le vecteur de $\mathbb{R}^2$:

$$\overrightarrow{\nabla} f(a) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}.$$

Le gradient donne la direction de plus forte pente en a et il est orthogonal à la ligne de niveau $f(a)$.

Définition

Soit D un pavé ouvert et f de classe $\mathscr{C}^1$ sur D. Si les dérivées partielles de f admettent des dérivées partielles, on définit les **dérivées partielles d'ordre deux** de f comme suit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^2$ si ses dérivées partielles secondes existent et sont continues.

Théorème de Schwarz

Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur D, alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Les méthodes à maîtriser

Méthode 24.1 : Déterminer les potentiels extrema

Pour déterminer les potentiels extrema d'une fonction f admettant des dérivées partielles premières.

1. On commence par calculer les dérivées partielles de f.
2. On cherche en quel(s) point(s) ces deux dérivées partielles sont nulles.
3. On est ramené à un système (pas nécessairement linéaire) de deux équations à deux inconnues, que l'on résout.

Les points ainsi déterminés s'appellent des points critiques de f.

Exemple d'application

Déterminer les points critiques de f : $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy(x+y-1). \end{array}$

On calcule les dérivées partielles premières de f.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + y^2 - y = y(2x+y-1) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 2xy - x = x(x+2y-1).$$

Le point (x,y) est un point critique si et seulement si $y(2x+y-1)=0$ et $x(x+2y-1)=0$. On a donc 4 cas à distinguer :

- Si $x=0$ et $y=0$, alors (x,y) est un point critique.
- Si $x=0$ et $y\neq 0$, alors $2x+y-1=0$ puis $y=1$.
- Si $x\neq 0$ et $y=0$, alors $x+2y-1=0$ puis $x=1$.
- Si $x\neq 0$ et $y\neq 0$, alors $2x+y-1=0$ et $x+2y-1=0$. On résout le système linéaire obtenu

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \underset{L_1\leftarrow L_1-2L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -3y = -1 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{3}.$$

Ainsi f admet quatre points critiques : $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ et $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Voir exercice **24.2**.

Interro de cours

1. Parmi les propositions suivantes lesquelles sont toujours vraies ?

(a) La courbe de niveau λ de f est la courbe obtenue comme l'intersection de la surface représentative de f et du plan d'équation $z = \lambda$.

(b) La courbe représentative de la première fonction partielle de f en $a = (\alpha, \beta)$ s'obtient comme étant l'intersection de la surface représentative de f et du plan $x = \alpha$.

(c) Si les deux fonctions partielles de f sont croissantes, alors f est croissante.

2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de $f(x, y) = x^2 + 2xy^2$.

3. Donner la définition du gradient d'une fonction de deux variables.

4. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer la dérivée de $g : t \mapsto f(\cos(t), \sin(t))$.

5. Citer le théorème de Schwarz.

Exercices

Pour s'entraîner

Exercice 24.1

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de f et ses dérivées partielles premières.

1. $f(x,y) = xy^2 + yx^2$
2. $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$
3. $f(x,y) = \exp\left(x^2 + 2xy\right)$.

Exercice 24.2

Dans chacun des cas, déterminer en quel(s) point(s) f peut admettre un extremum.

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$
2. $f(x,y) = x^2 - y^2$
3. $f(x,y) = x^3 + y^3$
4. $f(x,y) = x^4$
5. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy$
6. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 8(x-y)^4$.

Pour aller plus loin

Exercice 24.3

Dans chacun des cas suivants, préciser les fonctions f vérifiant

1. f est une fonction de (x,y) telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$
2. f est une fonction de (x,y) telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y$
3. f est une fonction de (x,y) telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3f$.

Corrections

Interro de cours

1. (a) **Vrai.** Cf. cours.
   (b) **Faux.** Si on fixe $x = \alpha$, on obtient plutôt la deuxième fonction partielle de f.
   (c) **Faux.** La notion de croissance pour une fonction de plusieurs variables n'a pas de sens.
2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2y^2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4xy$, puis
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4y = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4x.$$
3. Soient D un pavé ouvert, $f : D \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ $a \in D$.
   On appelle gradient de f en a le vecteur de $\mathbb{R}^2$:
$$\overrightarrow{\nabla} f(a) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}.$$
4. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a $g'(t) = -\sin(t)\dfrac{\partial f}{\partial x}\big(\cos(t), \sin(t)\big) + \cos(t)\dfrac{\partial f}{\partial y}\big(\cos(t), \sin(t)\big)$.
5. Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur D, alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Exercice 24.1

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 + 2xy$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + x^2$.
2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x \neq -y$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2y}{(x+y)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{2x}{(x+y)^2}$.
3. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x+2y)\exp\left(x^2 + 2xy\right)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x\exp\left(x^2 + 2xy\right)$.

Exercice 24.2

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$. Ainsi $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0. \end{cases}$
   On en conclut que f peut admettre un extremum en $(0,0)$.
2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$. Ainsi $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0. \end{cases}$
   On en conclut que f peut admettre un extremum en $(0,0)$.

3. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3y^2$. Ainsi

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x^2 &= 0\\ 3y^2 &= 0.\end{cases}$$

On en conclut que f peut admettre un extremum en $(0,0)$.

4. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x^3$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$. Ainsi

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x^3 &= 0\\ 0 &= 0.\end{cases}$$

On en conclut que f peut admettre un extremum en tous les points $(0,y)$ avec $y\in\mathbb{R}$.

5. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2-9y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3y^2-9x$. Ainsi

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 &= 3y\\ y^2 &= 3x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^4 &= 9y^2 = 27x\\ y^2 &= 3x\\ y &\geq 0.\end{cases}$$

On en conclut que f peut admettre un extremum en $(3,3)$

6. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x^3-32(x-y)^3$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=4y^3+32(x-y)^3$. Ainsi

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^3 &= 8(x-y)^3\\ y^3 &= -8(x-y)^3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x &= 2(x-y)\\ y &= -2(x-y)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x &= -y\\ y &= 2y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x &= 0\\ y &= 0.\end{cases}$$

On en conclut que f peut admettre un extremum en $(0,0)$.

Exercice 24.3

1. La première fonction partielle de f est constante. Donc on dispose d'une fonction C d'une variable telle que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=C(y).$$

2. La première fonction partielle de f est constante par rapport à x. Donc on dispose d'une fonction C d'une variable telle que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=xe^y+C(y).$$

3. À y fixé, la première fonction partielle de f vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. Donc on dispose d'une fonction C d'une variable telle que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=C(y)e^{3x}.$$

Annexes

Formulaire de trigonométrie

Valeurs particulières

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/

Translations

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a alors :

- $\cos(-t) = \cos t$
- $\cos(t+\pi) = -\cos t$
- $\cos(t-\pi) = -\cos t$
- $\cos(\pi - t) = -\cos t$
- $\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin t$
- $\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right) = \sin t$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \sin t$
- $\sin(-t) = -\sin t$
- $\sin(t+\pi) = -\sin t$
- $\sin(t-\pi) = -\sin t$
- $\sin(\pi - t) = \sin t$
- $\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = \cos t$
- $\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos t$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \cos t$

Duplications

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a alors :

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$
- $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$
- $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$

Dérivées usuelles

La fonction f est dérivable sur l'ensemble I, de dérivée f'.

$f(x)$	$f'(x)$	I
$x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$
$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z})$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
e^{ax}	ae^{ax}	$\mathbb{R}$
$a^x \quad (a > 0)$	$\ln(a) \cdot a^x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[\quad (k \in \mathbb{Z})$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

Primitives usuelles

La fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

$f(x)$	$F(x)$	I
$x^n \quad (n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\})$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ si $n < 0$
$u'(x)(u(x))^n \quad (n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\})$	$\dfrac{(u(x))^{n+1}}{n+1}$	$\mathscr{D}_u$ si $n \geq 0$ I tel que u ne s'annule pas sur I si $n < 0$
$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$u'(x)(u(x))^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})$	$\dfrac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	I tel que u est strictement positive sur I
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\|u(x)\|$	I tel que u est non nulle sur I
$e^{ax} \quad (a \in \mathbb{C}^*)$	$\dfrac{e^{ax}}{a}$	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$x\ln x - x$	$\mathbb{R}_+^*$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\|\cos x\|$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[\quad (k \in \mathbb{Z})$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$

Développements limités usuels

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a les développements limités suivants en 0

$f(x)$	Développement limité en 0
e^x	$1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n).$
$\dfrac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n).$
$\dfrac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n).$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$
$\ln(1+x)$	$x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n).$
$\ln(1-x)$	$-x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \cdots - \dfrac{x^n}{n} + o(x^n).$
$\sin x$	$x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$
$\cos x$	$1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$

Index