Measurement, Phase and Composite system

2.2.5 ~ 2.2.8

Projective measurements

PVM : measurement의 한 종류

⇒ 만일 unitary transformation 의 형태를 취한다면, 일반적인 measurement operator 과 동일하게 취급

⇒ Hermitian, idempotent, orthogonal

⇒ observable 라 부르고, M 으로 표기

⇒ M = $\sum_m mP_m$ $where\ Pm\ is\ the\ projector\ onto$
$the\ eigenspace\ of\ M\ with\ eigen\ value\ m$

Projective measurements

Copenhagen interpretation

: 만약 입자의 상태가 $|\Psi\rangle$ 일 때, Measurement operator M으로 이를 측정 시 M의 고유값 중 하나인 ω_i 를 $p(\omega_i) \propto |\langle\omega_i|\Psi\rangle|^2$의 확률로 나타냄

: 측정 후 입자의 상태는 $|\omega_i\rangle$로 붕괴

: Measurement의 Expected value는 $\langle M\rangle = \langle\Psi|M|\Psi\rangle$

Variance value는 $[\Delta(C)]^2 = \langle M^2\rangle - \langle M\rangle^2$

Projective measurements

예시

$$M = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

만약 $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ 일 때, M으로 얻은 측정 A,

1이 측정될 확률은 $\left|\langle 0|(a|0\rangle + b|1\rangle)\right|^2 = a^2$,

-1이 측정될 확률은 $\left|\langle 1|(a|0\rangle + b|1\rangle)\right|^2 = b^2$.

이때, M의 Expected value는 $\begin{pmatrix} a^* & b^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Projective measurements

The Heisenberg uncertainty principle

: 두 개의 observable로 동시에 측정할 때, 둘 사이의 정확도에는 물리적 한계가 존재함.

: 많은 수의 동일한 quantum system을 준비할 때, 두 개의 observable C, D로 이들을 각각 측정하면 다음과 같은 부등식을 만족한다.

$$\Delta(C)\Delta(D) \geq \frac{|< \varphi|[C,D]|\varphi >|}{2}$$

Projective measurements

$$\Delta(C)\Delta(D) \geq \frac{|<\varphi|[C,D]|\varphi>|}{2}$$

만일 두 observable C, D가 서로 commute 하다면,

[C, D] = 0 이므로 두 observable 로 동시에 정확히 측정 가능 (이론상)

그렇지 않은 경우, 두 observable C, D로 동시에 정확히 측정할 수 없다.

i.e. C와 D의 정확도는 trade-off 관계

POVM measurements

Positive Operator-Valued Measurement

: Project measurement(PVM)보다 더 유연하고, 현실적 측정 장치의 한계를 더 잘 반영한 operators를 모아둔 set

: no idempotent or orthogonal restrictions

Properties

(1) 각 operator E_i 들은 Positive operator

(2) Completeness relation을 만족한다. $\sum_m E_m = I$

POVM measurements

PVM에 비해, original state에 대한 더 많은 정보를 얻게 할 수 있음

⇒ Non-orthonormal한 quantum states들을 잘못 분류할 수 있는 PVM에 비해, 적어도 POVM은 잘못 분류할 가능성이 없게 setting 가능

※ 주어진 POVM $\{E_m\}$에 대해서, 결과 m이 나올 확률은

$$P(m) = \langle \varphi | Em | \varphi \rangle$$

POVM measurements

예시

$$E_1 = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} |1\rangle\langle 1| \qquad E_3 = I - E_1 - E_2.$$

$$E_2 = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \frac{(|0\rangle - |1\rangle)(\langle 0| - \langle 1|)}{2}$$

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle, \quad |\psi_2\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}.$$

$$p(1) = \langle \psi_1 | E_1 | \psi_1 \rangle = 0 \qquad (\because \langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0)$$

$\therefore$ Bob의 측정 결과가 E_1이면, 그가 받은 상태는 $|\psi_2\rangle$라고 안전하게 결론 지을 수 있음.

$$p(2) = \langle \psi_2 | E_2 | \psi_2 \rangle = 0 \qquad (\because (\langle 0| + \langle 1|)(|0\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$= (\langle 0| - \langle 1| - \langle 0| + \langle 1|)(|0\rangle + |1\rangle) = 0$$

$\therefore$ Bob의 측정 결과가 E_2이면, 그가 받은 상태는 $|\psi_1\rangle$라고 안전하게 결론 지을 수 있음.

POVM measurements

단, POVM 이후 post-measurement state를 구체화할 수 없음

⇒ 방법 중 하나인 Kraus decomposition을 이용하면, 구체화 가능

(1) Define A_i, $E_i = A_i^{\dagger} A_i$ with $A_i = \sqrt{E_i}$

(2) Then, the post-measurement of POVM is

$$\rho_{post}^{(i)} = \frac{A_i \rho A_i}{\mathrm{tr}(A_i^{\dagger} A_i \rho)}$$

Phase

Global phase factor

: quantum state 의 전체적인 위상

: statistics of measurement 관점에서 아무런 영향을 주지 못하는 요소

i.e. $e^{i\theta}|\Psi\rangle \equiv |\Psi\rangle$

($\because$ If M_m is a measurement operator, then the prob. for outcome m occurring are $\langle\Psi|M_m^\dagger M_m|\Psi\rangle$

and $\langle\Psi|e^{-i\theta}M_m^\dagger M_m e^{i\theta}|\Psi\rangle = \langle\Psi|M_m^\dagger M_m|\Psi\rangle$)

Phase

Relative phase

: 상태 내부의 상태 간 상대적인 위상의 차이를 의미

i.e. 각 상태 간 진폭의 크기는 같지만, 부호가 다를 때를 의미

: 두 번째 상태의 진폭의 크기는 같지만, 부호가 다르기 때문에 이를

'relative phase에 의해 구별된다' 라고 표현

$$\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{and} \quad \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

Composite systems

두개(혹은 그 이상)의 distinct한 systems들로 하나의 quantum system을 합성하는 방법?

Postulate 4.

: The state space of a composite physical system is the tensor product of the state spaces

: If we have systems 1 ~ n, and system number i is prepared in the state $|\Psi_i\rangle$, then the joint state of the total system is

$$|\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\Psi_n\rangle$$

Composite systems

Entanglement (얽힘)

: A pure state $|\Psi\rangle$ is called separable iff it can be written as $|\Psi\rangle = |\phi\rangle_1 \otimes |\phi\rangle_2$, otherwise it is entangled

: 즉, 하나의 양자에 대한 측정 결과가 다른 양자에 대한 상태에 즉시 영향을 미치는 현상

E.g. Bell states

: maximally entangled quantum states of two qubits.

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle)$$

Thank you

2024. 7. 9.