[221115 발표자료]

벡터장에서의 선적분을 이해하고, Openpose에서 어떻게 활용했는지 고찰

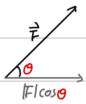
◎ 벡터장 내의 선적분

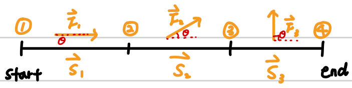
주어진 벡터장에 대해 지나간 경로를 따라 한 일을 구하는 문제

물리학에서 한 일 (Work)

$\Rightarrow W = \vec{F}\cdot\vec{s}$ (W: 일, F = 힘, S = 이동거리)

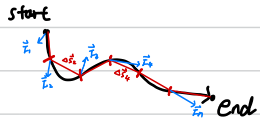
$= |\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta$





$W = \vec{F}_1\cdot\vec{s}_1 + \vec{F}_2\cdot\vec{s}_2 + \vec{F}_3\cdot\vec{s}_3$

$= \sum_{i=1}^{3} \vec{F}_i\cdot\vec{s}_i = \sum_{i=1}^{3} |\vec{F}|\cos\theta|\vec{s}|$



$W \simeq \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\cdot\Delta\vec{s}_i$

$= \lim_{|\Delta s_i|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\cdot\Delta\vec{s}_i$

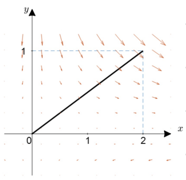
$= \int_C \vec{F}\cdot d\vec{s}$

* 벡터장 $\Rightarrow \vec{F}$: PAF

경로(선) $\Rightarrow \vec{s}$: $d_{j_1} - d_{j_2}$

(예시문제) 벡터장 $F = xy\hat{i} - y^2\hat{j}$ 으로 주어져 있을 때,

경로 $y = \frac{1}{2}x$ $\{x : 0 < x < 2\}$ 를 따라 한 일의 양은?



ex) $\int_0^2$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = (xy\hat{i} + y^2\hat{j})\cdot(\underbrace{\hat{i}dx + \hat{j}dy}_{d\vec{r}\text{을 } x,y \text{ 성분으로 나눔}})$$

$$= \underbrace{xy(dx)}_{x\text{성분}} - \underbrace{y^2(dy)}_{y\text{성분}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2\right)dx - \left(\frac{x}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)dx \quad (\because y = \frac{1}{2}x,\ dy = \frac{1}{2}dx)$$

$$= \left(\frac{3}{8}x^2\right)dx = \left[\frac{1}{8}x^3\right]_0^2 = \frac{1}{8}(8-0) = 1$$

* 이동경로를 표시한 함수는

$y = f(x)$ or $z = f(x, y)$

or 매개변수 방정식 등

다양히 국한되지 않음

* 계산은

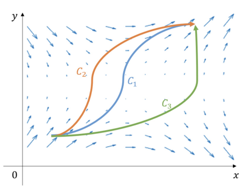
$\underbrace{x \text{ 성분}}_{\hat{i}}$과 $\underbrace{y\text{성분}}_{\hat{j}}$으로 나눠서 계산

◎ 보존적 벡터장 (미적분의 기본정리)

경로에 관계없이 시작점과 끝점이 같은 서로 다른 경로를 선적분 해주었을 때 값이 같을 때, 벡터장을 보존장이라고 함

이를 path-independence라고도 함

아래의 경우는 벡터장이 보존장일 때의 결과



⟨Conservative field⟩

$\int_{C_1} \vec{f}\cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{f}\cdot d\vec{r} = \int_{C_3} \vec{f}\cdot d\vec{r}$

($\because$ 같은 벡터장이므로 $\vec{f}$는 동일)

— 보존장의 조건

벡터장은 어떤 스칼라 함수의 gradient이어야 함 → 증명은 뒷장에서

일반적으로 우리가 알고 있는 적분의 흐름과 비슷

새로 알게된 사실 : $\underbrace{\text{벡터장이라는}}_{\text{(일의 개념)}}$ 개념 도입, 계산할 때 성분을 나누어서 계산

*보존장의 의미 이해하기

고등 적분할 때,

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

인데,

벡터장에서의 적분시에도

'벡터장이 스칼라 함수 F의 gradient 이다'

라는 조건이 만족하면, 위의 식이

성립한다는 것이 key Point ①

경로 안의 내용은 중요하지 않다는

것이 key point ②

<증명>

$$\begin{cases} \vec{f}(x, y) = \nabla F \\ \quad = \dfrac{\partial F}{\partial x}\hat{i} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\hat{j} \\ d\vec{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} \end{cases}$$

매개변수 t에 대해 선적분하기 (이때 t는 $\{t \mid a \le t \le b\}$

$$\Rightarrow \vec{f}\cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\hat{j}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt}dt\,\hat{i} + \frac{dy}{dt}dt\,\hat{j}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}dt}_{x\text{성분}(\hat{i})} + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}dt}_{y\text{성분}(\hat{j})}$$

$$\Rightarrow \int_c \vec{f}\cdot d\vec{r}$$ <뒷장으로>

$$\int_c \vec{f}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)dt$$

$$= \int_a^b \frac{dF}{dt}dt = \int_a^b dF = F(b) - F(a)$$

$\frac{\partial F}{\partial t}dt$ 아님 → 착각주의 : x성분 + y성분이므로 scalar 더하기의미 아님

ⓞ Openpose

ⓞ Test (예측한 PAF로 E를 구함, E=가중치가 됨)

score each candidate limb

$$E = \int_{u=0}^{u=1} \mathbf{L}_c(\mathbf{p}(u)) \cdot \frac{\mathbf{d}_{j_2} - \mathbf{d}_{j_1}}{\|\mathbf{d}_{j_2} - \mathbf{d}_{j_1}\|_2} du$$

$$\mathbf{p}(u) = (1-u)\mathbf{d}_{j_1} + u\mathbf{d}_{j_2}$$

d_{j_1} : 예측한 관절 위치의 후보 → 관절위치는 이미 예측한 것으로 업데이트 관심대상 아님.

$P(u)$: (d_{j_1}, d_{j_2})의 내분선

$L_c(P(u))$: 특정 좌표 한 개의 예측한 PAF (벡터)

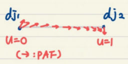
(한 픽셀) ↔ $L_c(P)$: 전체 좌표에서의 예측한 PAF

예측한 PAF는 보조도구로,

예측한 관절들 간의 관계 (d_{j_1}, d_{j_2})와 내적함으로써

연관정도를 측정

C_i : j1과 j2의 limb라고 한다면 C_i의 confidence를 측정한 값으로 생각해도 ok..?



: 얼만큼 잘 정렬되어있냐를 수치화 ⇒ E는 클수록 좋다.

⇒ 예측한 관절들을 잇고, 그 선 위에서의

예측된 PAF의 정렬의 정도를 수치화

$L_c P(u) \Rightarrow$ 벡터장

unit vector $(d_{j_1} - d_{j_2}) \Rightarrow$ 경로

⇒ 시작점과 끝점이 중요

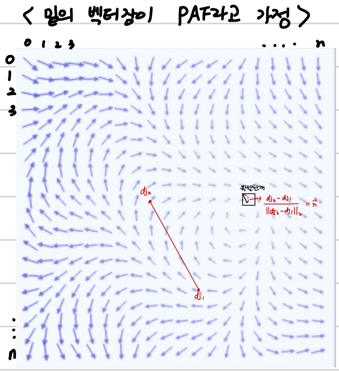
⇒ openpose에서는 예측한 관절 d에 대한 가중치를 만들기 위함 (관절 끼리의 관계)

d를 단위벡터로 변환 후 적용

일정 간격 → 픽셀단위 (이미지)

$$\int_{d_{j_1}}^{d_{j_2}} PAF(\vec{F}) \cdot \text{단위벡터}(d\vec{r})$$

< 밑의 벡터장이 PAF라고 가정 >



$$\Rightarrow \begin{pmatrix} P(0) = d_{j_1} \\ \wr \\ P(1) = d_{j_2} \end{pmatrix}$$ ⇝ PAF 벡터장에서

$(d_{j_1} \sim d_{j_2})$ 경로를 따라 한일

궁극적 목표 : 두 개의 관절위치 d의 연결 방향의 가중치 구하기

보조지표 : PAF