base 1
좌표 이해

<그림1>은 표준기저벡터 {i, j} = {(1, 0), (0, 1)}

좌표로 표현하면, (a, b)

선형결합으로 표현하면, a(1,0) + b(0,1) = a + b

<그림1>에서 <그림2>로 선형변환

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_i$$

(v = 그림1의 기저벡터)

<그림2>는 {(2, 1), (0, 1)} = {2i+j, j }

좌표로 표현하면, (a, b)

선형결합으로 표현하면, a(2, 1) + b(0,1)

선형변환은 행렬과 동형관계임

서로 다른 기저인 경우, 같은 좌표여도 가리키는 곳이 다름

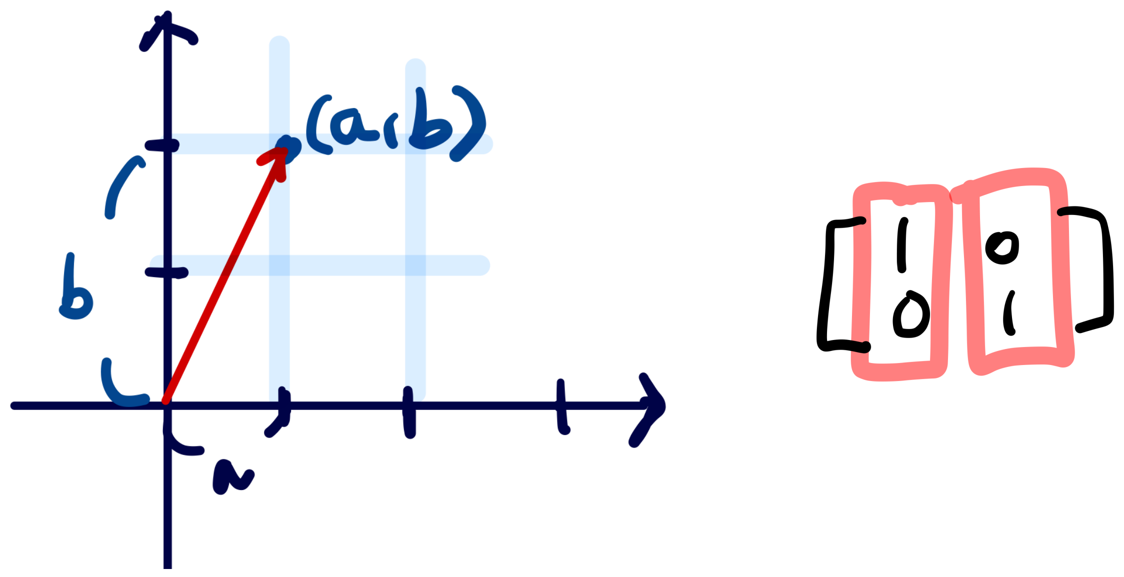


그림1

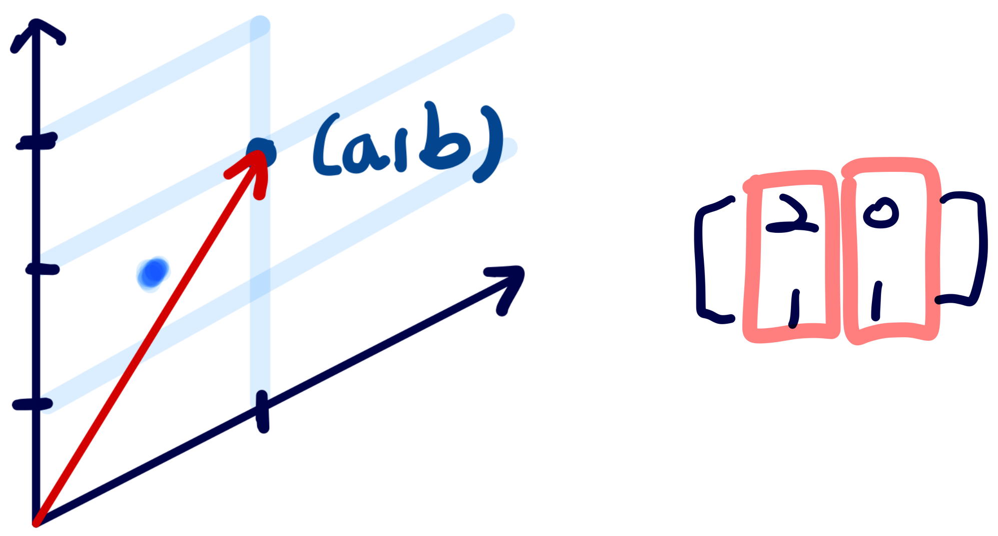
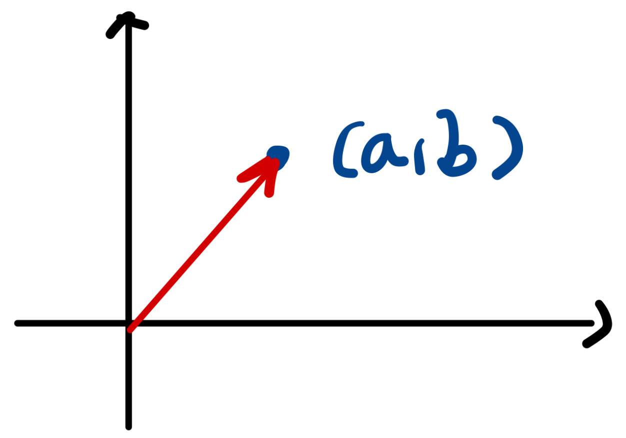
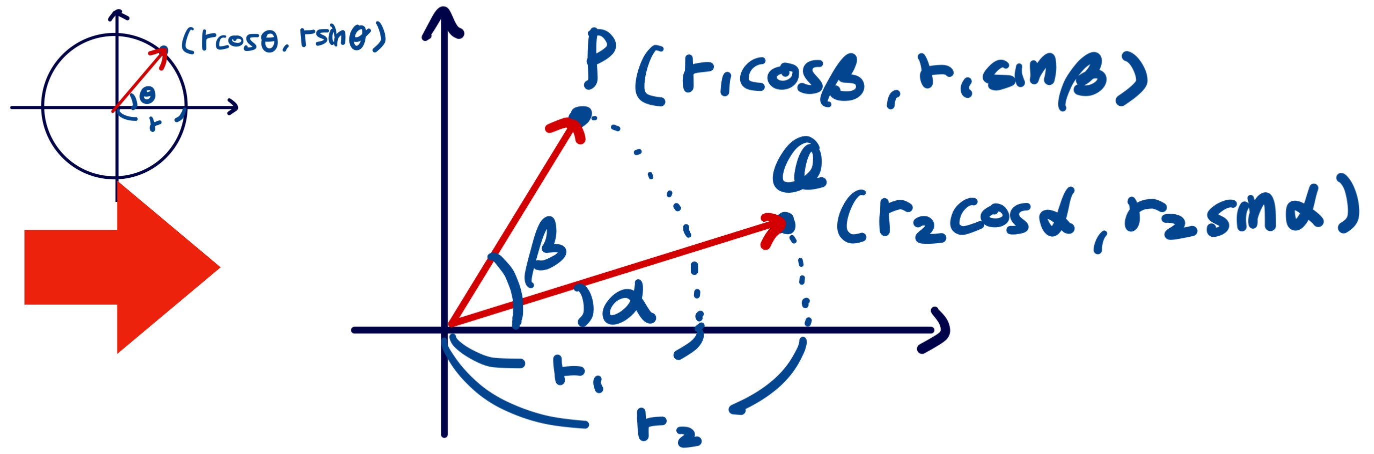


그림2

base 2
극형식

삼각함수로 좌표를 표현할 수 있음 (반지름과 편각만으로 표현)





(표준기저벡터)

$(a, b) = a + b$

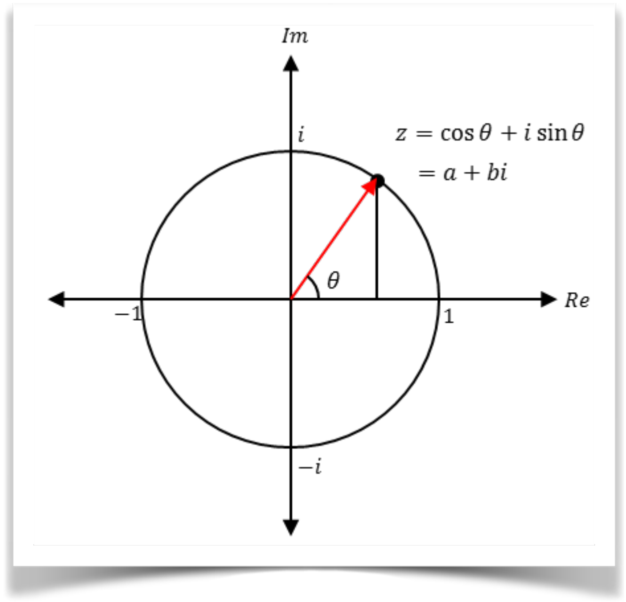
$(r\cos\Theta, r\sin\Theta) = r\cos\Theta + r\sin\Theta$

극형식: 복소수의 크기와 편각을 이용하여 표시한 모양

복소평면으로 바뀜 = 하나의 축은 허수, 하나의 축은 실수축으로 구성됨.

$(r\cos\Theta, r\sin\Theta) = r\cos\Theta + i\, r\sin\Theta$

* 단위원(r=1)의 경우, 더 간단한 식. $\cos\Theta + i \sin\Theta$



편각만 알아도 유일한 점을 표기할 수 있음

실수에서 복소수로 확장

base3

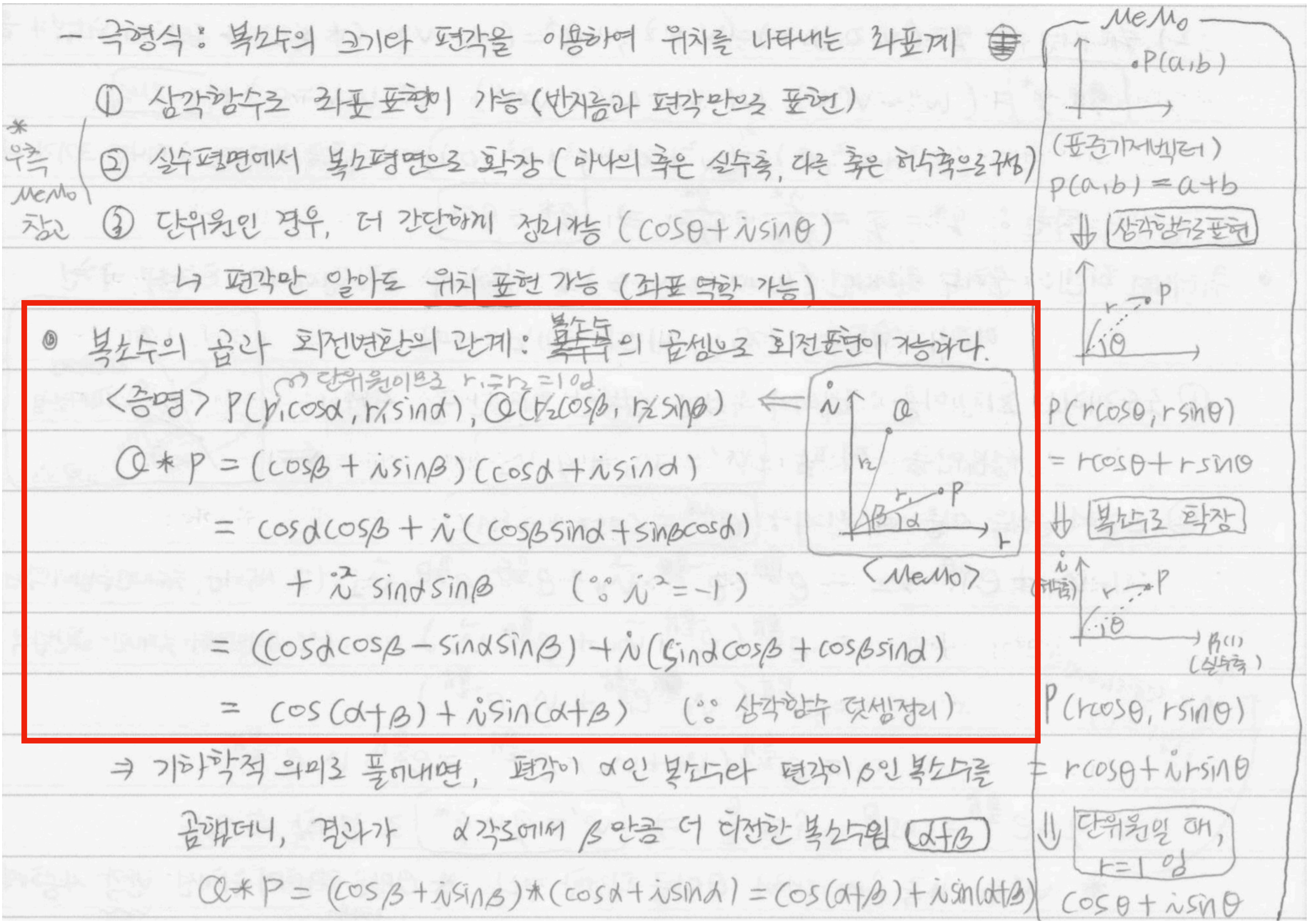
복소수의 곱과 회전변환

(단위원 기준 - 크기는 1) 복소수에 복소수를 곱하면 크기는 그대로이고 편각만 더해주는 연산이 됨

=> 이 연산의 기하학적 의미는 회전변환을 의미

Q * P = (cosb + i sinb) * (cosa + i sina)

= cos(a + b) + i sin (a+b)



쿼터니언
개념

복소수 a + bi

: 실수부 1개, 허수부 1개

=> (cosΘ, i sinΘ) = cosΘ + i sinΘ

쿼터니언 w + xi + yj + zk

: 실수부 1개, 허수부 3개

=> (cosΘ, (isinΘ, jsinΘ, ksinΘ)) = cosΘ + (i, j, k) sinΘ

순수 쿼터니언

: 실수부가 0인 경우

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

해밀턴의 쿼터니언 발견

×	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

쿼터니언 곱셈

쿼터니언의 크기
켤레 쿼터니언

복소수의 크기는 (복소수 * 켤레복소수)으로 구할 수 있음

(a + bi) * (a - bi) = a^2 + b^2 => 루트를 씌운 것이 복소수의 크기

쿼터니언도 동일

q = (w, x, y, z) = (w, v), q* = (w, -v)

q ⋆ q* = (w^2 - v(-v), w(-v) + wv + v×v)

= (w^2 + v^2, 0)

= (w^2 + x^2 + y^2 + z^2, 0)

|q| = route(q ⋆ q*)

곱셈의 역원

$$q^{-1} = \frac{1}{q} = \frac{q^*}{qq^*} = \frac{q^*}{|q|^2}$$

q* = q-1

쿼터니언 회전

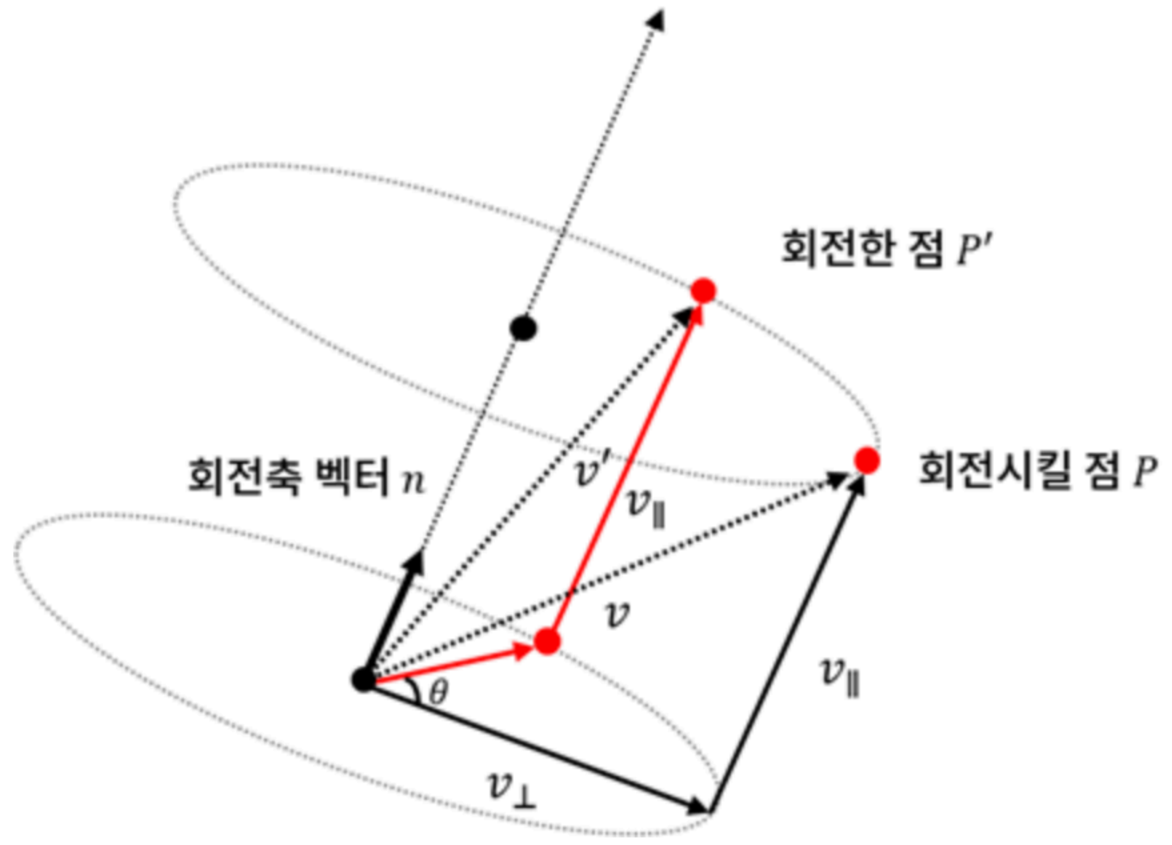
3차원에서의 회전을 4차원 쿼터니언으로 구현할 수 있는 방법

순수 쿼터니언(0, (x, y, z))을 이용하면, 3차원에서의 회전을 구현할 수 있음.
이때, (x, y, z)는 크기가 1인 단위 벡터임

로드게리스 회전 이용

$$v' = v_{\parallel} + q \cdot v_{\perp}$$

*** 벡터의 수직인 성분만 회전한 후, 수평인 성분만큼 더해주면 된다.**



위의 식을 간략화하면, 오일러공식 $e^{ix} = cosx + isinx$

$$= \mathbf{1} \cdot \overrightarrow{v_{\parallel}} + e^{\vec{n}\theta} \cdot \overrightarrow{v_{\perp}}$$

1) $$= e^{\vec{n}(\frac{\theta}{2})} \cdot e^{\vec{n}(-\frac{\theta}{2})} \cdot \overrightarrow{v_{\parallel}} + e^{\vec{n}(\frac{\theta}{2})} \cdot e^{\vec{n}(\frac{\theta}{2})} \cdot \overrightarrow{v_{\perp}}$$

2) $$= e^{\vec{n}(\frac{\theta}{2})} \cdot \left(\overrightarrow{v_{\parallel}} + \overrightarrow{v_{\perp}}\right) \cdot e^{\vec{n}(-\frac{\theta}{2})}$$

* Θ가 아니라 반각임.

$$= e^{\vec{n}(\frac{\theta}{2})} \cdot e^{\vec{n}(-\frac{\theta}{2})} \cdot \overrightarrow{v_{\parallel}} + e^{\vec{n}(\frac{\theta}{2})} \cdot e^{\vec{n}(\frac{\theta}{2})} \cdot \overrightarrow{v_{\perp}}$$

$$= e^{\vec{n}(\frac{\theta}{2})} \cdot \overrightarrow{v_{\parallel}} \cdot e^{\vec{n}(-\frac{\theta}{2})} + e^{\vec{n}(\frac{\theta}{2})} \cdot \overrightarrow{v_{\perp}} \cdot e^{\vec{n}(-\frac{\theta}{2})}$$

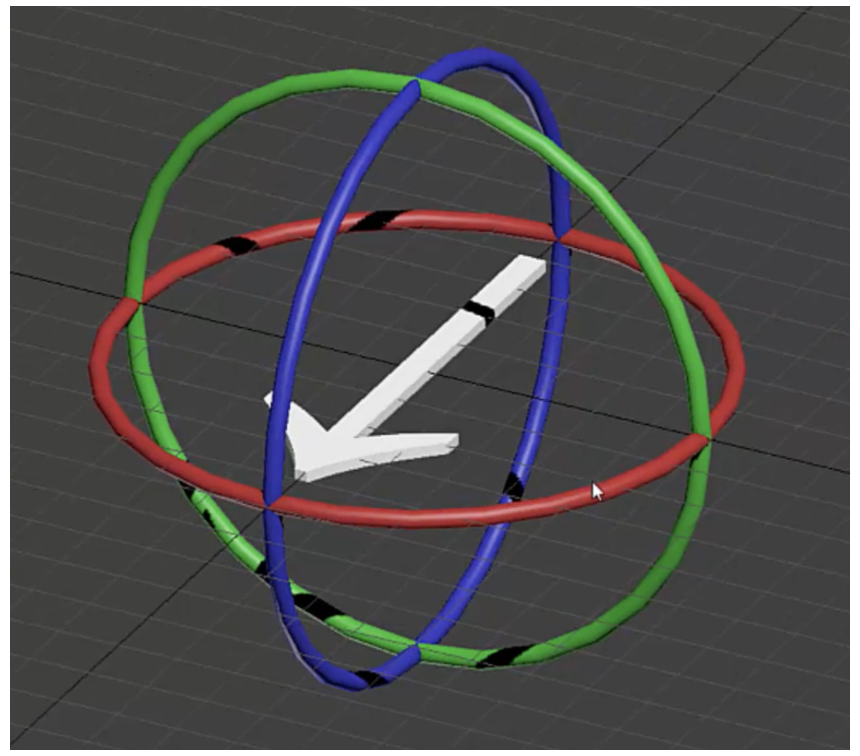
1과 2의 중간계산: 곱의 순서를 변경

3) 결론

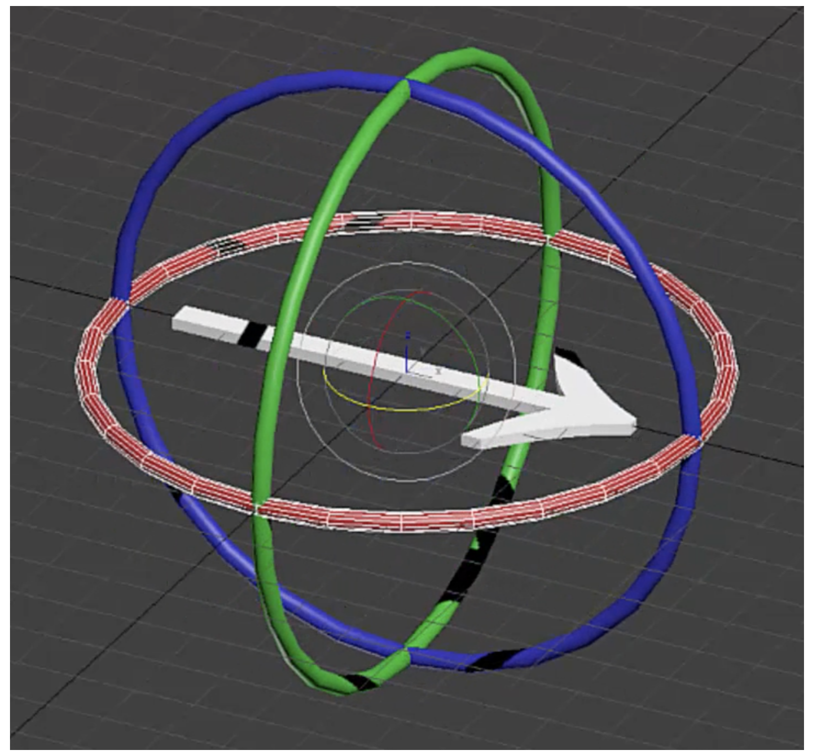
$$v' = q \cdot v \cdot q^{*}$$

($q = (cos\frac{\theta}{2}, sin\frac{\theta}{2}\vec{n})$)

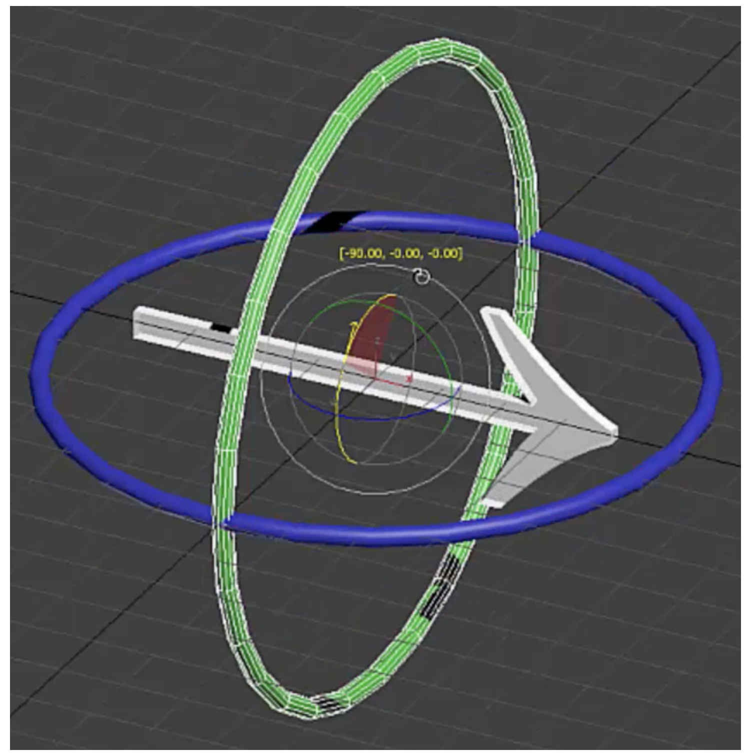
짐벌락
오일러각



x축-r, y축-b, z축-g



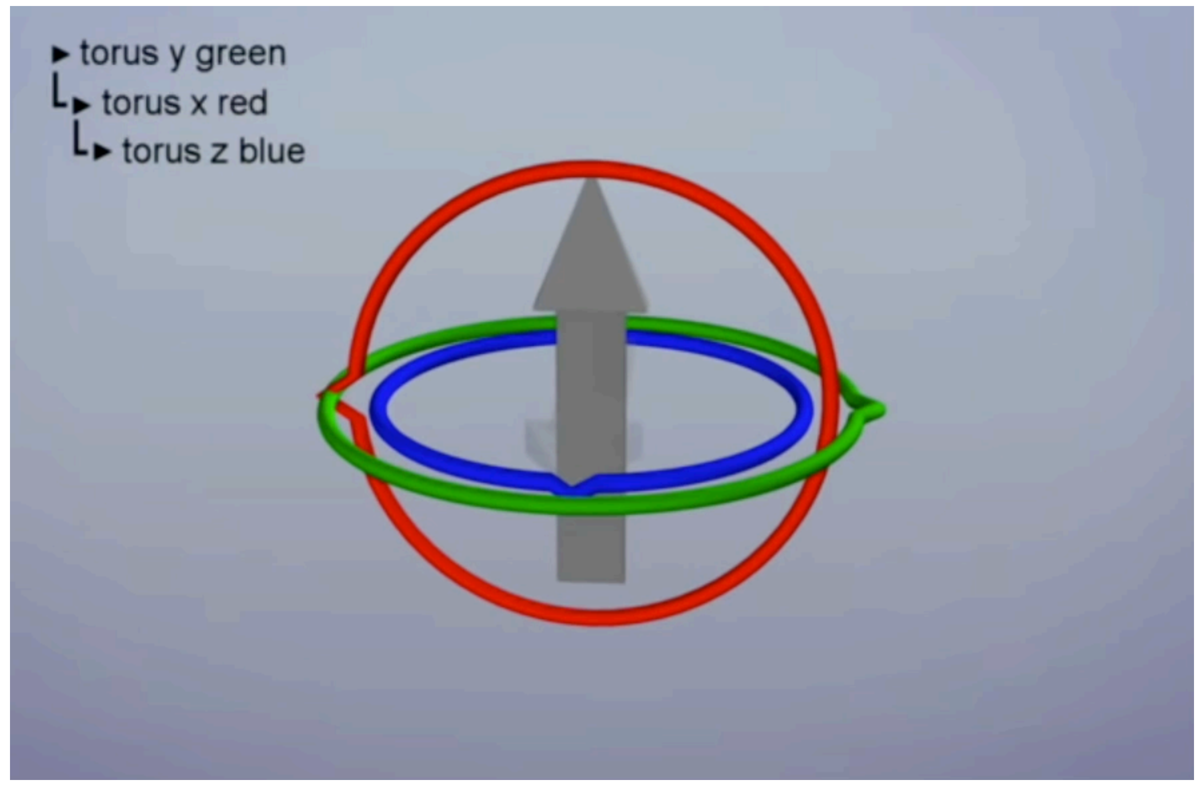
x축 90도 회전



y축 90도 회전

z축과 x축이 한 축으로 겹쳐짐

=> 짐벌락 현상



짐벌락 영상