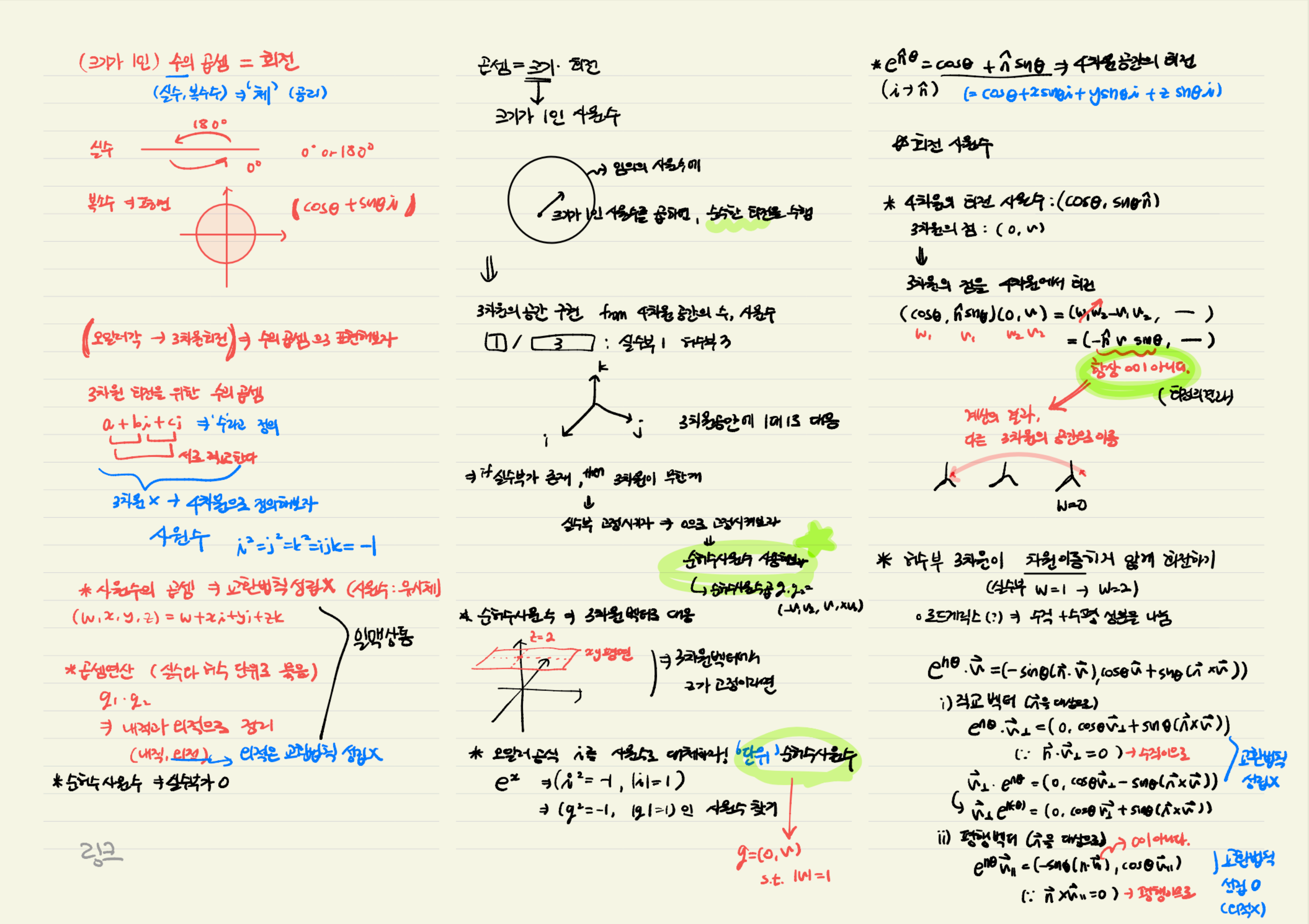
쿼터니언 - 문제점


(크기가 1인) 수의 곱셈 = 회전
(실수, 복소수) ⇒ '체' (공리)
180°
실수
0°
0° or 180°
복소수 → 평면
(cosθ + sinθ i)
(오일러각 → 3차원회전) ⇒ 수의 곱셈으로 표현해보자
3차원 회전을 위한 수의 곱셈
a + bi + cj ⇒ '수'라고 정의
서로 직교한다
3차원 X → 4차원으로 정의해보자
사원수 i² = j² = k² = ijk = −1
* 사원수의 곱셈 ⇒ 교환법칙 성립 X (사원수 : 유사체)
(w, x, y, z) = w + xi + yj + zk
일맥상통
* 곱셈연산 (실수와 허수 단위로 묶음)
q₁ · q₂
⇒ 내적과 외적으로 정리
(내적, 외적) → 외적은 교환법칙 성립 X
* 순허수 사원수 ⇒ 실수부가 0
링크
곱셈 = 크기 · 회전
크기가 1인 사원수
임의의 사원수에
크기가 1인 사원수를 곱하면, 순수한 회전을 수행
3차원의 공간 구현 from 4차원 공간의 수, 사원수
1 / 3 : 실수부 1 허수부 3
k
i
j
3차원공간에 1대1로 대응
⇒ if 실수부가 존재, then 3차원이 무한개
실수부 고정시키자 ⇒ 0으로 고정시켜보자
순허수사원수 사용해보자
순허수사원수곱 q₁ · q₂
(−v₁·v₂, v₁×v₂)
* 순허수사원수 ⇒ 3차원 벡터로 대응
z = 2
xy 평면
⇒ 3차원벡터에서 크기 고정이라면
* 오일러공식 i를 사원수로 대체하자! '단위' 순허수사원수
eˣ ⇒ (i² = −1, |i| = 1)
⇒ (q² = −1, |q| = 1) 인 사원수 찾기
q = (0, v)
s.t. |v| = 1
* e^(n̂θ) = cosθ + n̂ sinθ ⇒ 4차원공간의 회전
(i → n̂)
(= cosθ + x sinθ i + y sinθ j + z sinθ k)
회전 사원수
* 4차원의 회전 사원수 : (cosθ, sinθ n̂)
3차원의 점 : (0, v)
3차원의 점을 4차원에서 회전
(cosθ, n̂ sinθ)(0, v) = (w₁w₂ − v₁·v₂, —)
w₁ v₁ w₂ v₂
= (−n̂·v sinθ, —)
항상 0이 아니다.
(직선의 경우)
계산의 결과, 다른 3차원의 공간으로 이동
w=0
* 허수부 3차원이 차원이동하지 않게 회전하기
(실수부 w=1 → w=2)
○ 로드리게스 (?) ⇒ 수직 + 수평 성분을 나눔
e^(nθ) · v = (−sinθ(n̂·v), cosθ v + sinθ(n̂ × v))
i) 직교 벡터 (n을 대상으로)
e^(nθ) · v⊥ = (0, cosθ v⊥ + sinθ(n̂ × v))
(∵ n̂ · v⊥ = 0) → 수직이므로
v⊥ · e^(nθ) = (0, cosθ v⊥ − sinθ(n̂ × v))
교환법칙 성립X
v⊥ e^(−nθ) = (0, cosθ v⊥ + sinθ(n̂ × v))
ii) 평행벡터 (n을 대상으로) → 0이 아니다.
e^(nθ) v∥ = (−sinθ(n·v), cosθ v∥)
(∵ n̂ × v∥ = 0) → 평행이므로
교환법칙 성립 O (외적X)

쿼터니언 - 문제점

$$e^{n\theta} = e^{n\frac{\theta}{2}} \cdot e^{n\frac{\theta}{2}}$$

$$v' = v_{\parallel} + q \cdot v_{\perp}$$

$$= 1 \cdot v_{\parallel} + q \cdot v_{\perp}$$

→ 교환법칙성립

$$= e^{n\frac{\theta}{2}} \cdot e^{n-\frac{\theta}{2}} \cdot v_{\parallel} + e^{n\frac{\theta}{2}} e^{n\frac{\theta}{2}} v_{\perp}$$

→ 교환법칙성립X

$$= e^{n\frac{\theta}{2}} v_{\parallel} e^{n(-\frac{\theta}{2})} + e^{n\frac{\theta}{2}} v_{\perp} e^{n(-\frac{\theta}{2})}$$

$$= e^{n\frac{\theta}{2}} \cdot (v_{\parallel} + v_{\perp}) \cdot e^{n(-\frac{\theta}{2})} = q \cdot v \cdot q^{*}$$

사원수 회전 정리

① 회전벡터는 단위 순허수 사원수 $q = (0, \vec{v})$ s.t. $|\vec{v}| = 1$

* 회전 ⇒ 크기가 1인 수의 곱
  회전벡터는 단위벡터를 사용한다.
  크기를 신경쓰지 않고 회전의 영향만을 알 수 있다

② $q \cdot \vec{v}$ 아니라 $q \vec{v} q^{*}$ (q는 반각) 일 때,

사원수 (4차원공간) 에서 3차원공간의 회전을 구할 때, 차원이동없이 회전한 벡터의 값을 구할 수 있다

순허수 사원수 (실수부는 0인 상태)에 회전 (곱)을 취할 때, 회전된 사원수의 실수부도 0이어야한다.
($w=0 \rightarrow w=1$) : 3차원 (허수부)가 차원이동한 것과 같음

③ θ만큼의 회전을 위해서 반각이용
$q = (\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2} n)$

쿼터니언 - ~~다른 PDF 참고~~ 1-2p 참고

- v: 순허수쿼터니언 - 결과도 순허수 쿼터니언으로 나와야함
  - $$\begin{aligned} v' &= q \cdot v \cdot q^* \\ &= (w, \vec{r}) \cdot (0, \vec{v}) \cdot (w, -\vec{r}) \end{aligned}$$
  - $$q_1 \cdot q_2 = (w_1 w_2 - (v1 \cdot v2), w_1 v_2 + w_2 v_1 + v_1 \times v_2)$$
  - $$\begin{aligned} \vec{v}' &= q \cdot \vec{v} \cdot q^* \\ &= (w, \vec{r}\,) \cdot (0, \vec{v}) \cdot (w, -\vec{r}\,) \\ &= (-(\vec{r} \cdot \vec{v}),\ w\vec{v} + \vec{r} \times \vec{v}) \cdot (w, -\vec{r}\,) \\ &= (-(\vec{r} \cdot \vec{v})\, w - (w\vec{v} + \vec{r} \times \vec{v}) \cdot (-\vec{r}), \\ &- (\vec{r} \cdot \vec{v}) \cdot -\vec{r} + w\,(w\vec{v} + \vec{r} \times \vec{v}) + (w\vec{v} + \vec{r} \times \vec{v}) \times -\vec{r}) \end{aligned}$$
- 실수부 계산 결과 = 0
  - $$\begin{aligned} -(\vec{r} \cdot \vec{v})w + (\vec{r} \cdot \vec{v})w + (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{r} \\ = (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{r} \\ = 0 \end{aligned}$$