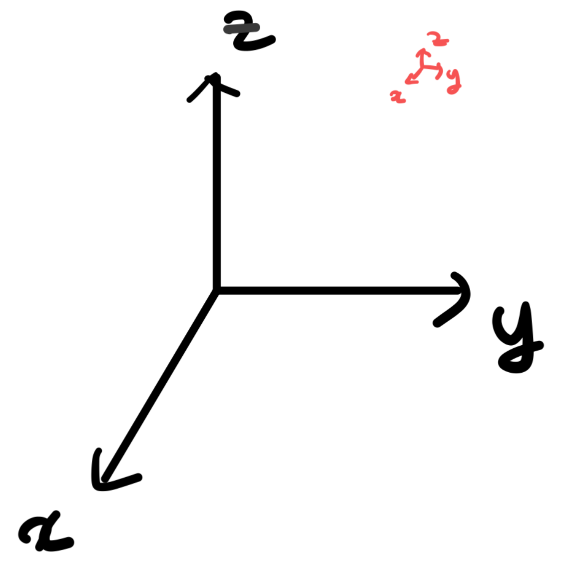
# Rotation Matrix

- orientation of a rigid body rotating in 3D space
- ***SO(3)**, Special Orthogonal Group*

  rotation matrix의 성질을 만족하는 모든 집합

  $$\mathrm{SO}(3) := \left\{ R \in \mathbb{R}^{3\times 3} \,\middle|\, R^{\top}R = RR^{\top} = \mathbf{I}_3, \det(R) = +1 \right\}$$

  - 직교행렬, 선형독립, full rank
    - 각 축들은 단위벡터
    - 각 축들은 서로 수직
  - 행렬식 = 1, 역행렬 존재
  - $R_1 + R_2 \notin SO(3) \quad \text{and} \quad R_1R_2 \in SO(3)$
- 반시계 방향 기준 (오른손 좌표계)

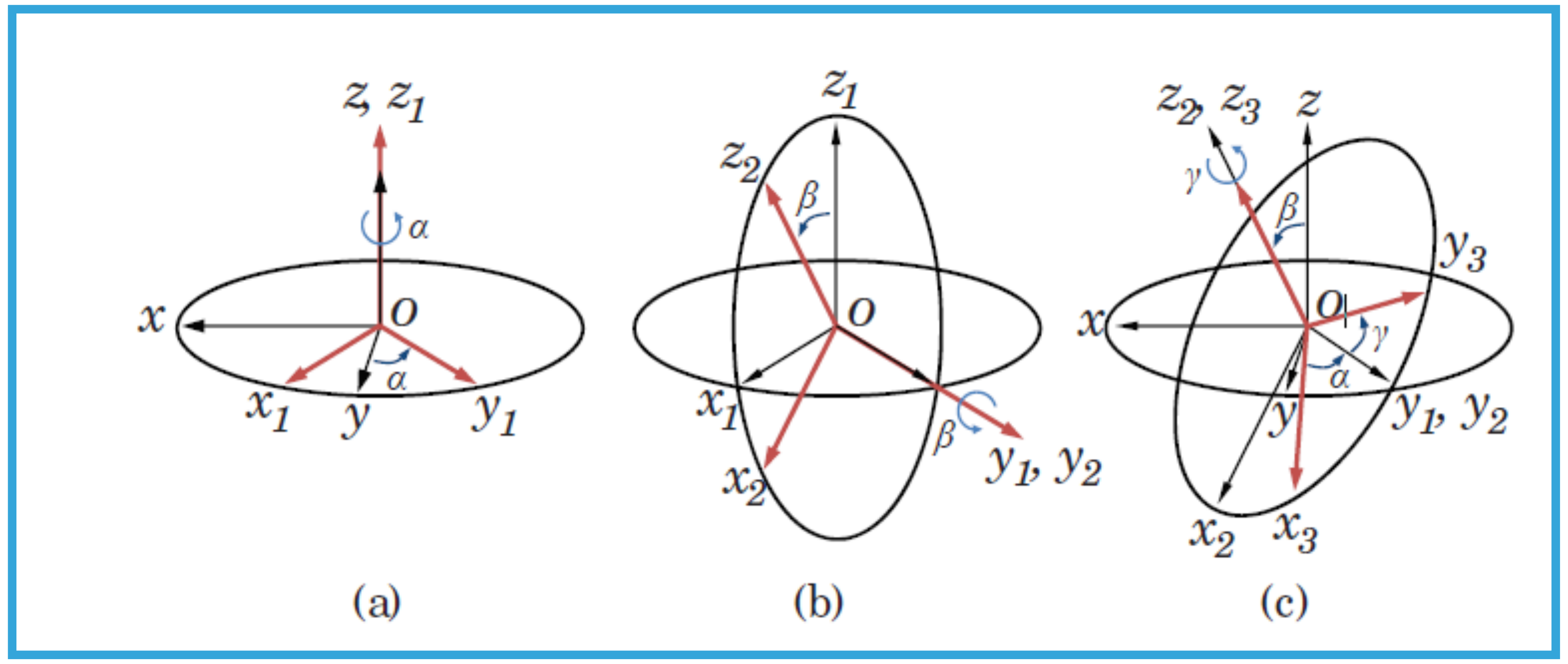



$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ \text{x축} \quad \text{y축} \quad \text{z축} \end{array}$$

회전행렬 예시

# 오일러각 (Fixed Angle과 비교)

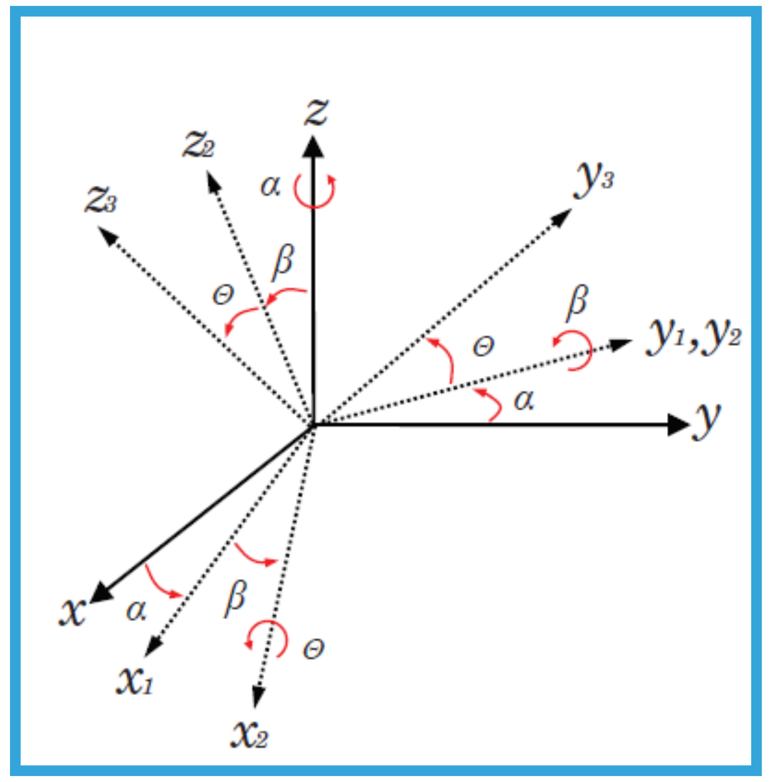
- Euler Angle
  - 회전 축을 돌릴 때, 그 **직전의 회전 축을 기준**으로 회전하는 경우
  - body-fixed, post-multiplication
    - α (또는 ψ): z-축을 회전축으로 하여 회전된 x-y 좌표축의 각도
    - β (또는 θ): **회전**된 x-축을 회전축으로 하여 회전된 z-y 좌표축의 각도
    - γ (또는 φ): **위에서 회전**된 z-축을 회전축으로 하여 회전된 x-y 좌표축의 각도
- Fixed Angle(Roll Pitch Yaw)
  - 고정된 회전 축을 기준으로 회전하는 경우
  - space-fixed, pre-multiplication
- pre and post multiplication
  - 행렬곱은 교환법칙이 성립 X
  - pre = 벡터 * 행렬 (vR), post = 행렬 * 벡터 (Rv)




(b): (a)에서 바뀐 축을 기준으로 회전, (c): (b)에서 바뀐 축을 기준으로 회전

$$\boxed{R(\alpha,\beta,\gamma) = Rot(\text{axis }1,\alpha)Rot(\text{axis }2,\beta)Rot(\text{axis }3,\gamma)}$$

오일러각 일반화



모두 global 좌표축 기준으로 회전

# 짐벌락

- 현상: 가운데 축이 90도 회전하면서, 가장 바깥 축과 안의 축이 겹침
- 해결: 가운데 축을 회전시켜 짐벌락 상태를 벗어나야 함. (해결 방법이지 피하는 방법 아님)
- 상세설명 - 문제상황
  - 자유도 손실: 3개의 자유도 중 1개의 자유도를 잃어버림
  - xyz 오일러 회전 행렬

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\beta\cos\gamma & -\cos\beta\sin\gamma & \sin\beta \\ \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & -\sin\alpha\cos\beta \\ -\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+\sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}$$

  - If cosb = 0, then

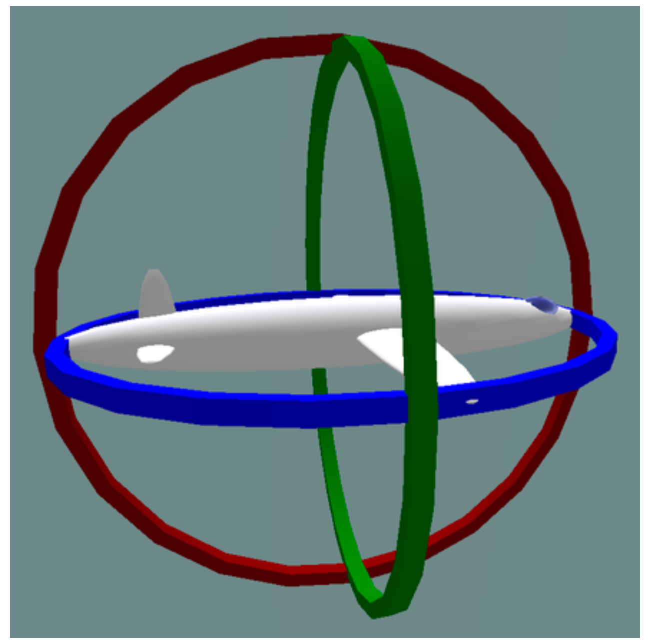
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin(\alpha+\gamma) & \cos(\alpha+\gamma) & 0 \\ -\cos(\alpha+\gamma) & \sin(\alpha+\gamma) & 0 \end{bmatrix}$$

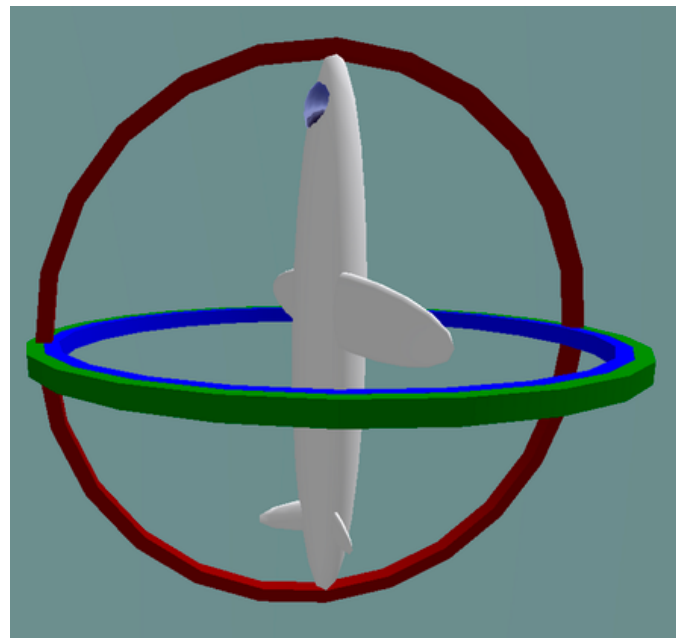
( sin b = 1 일 때, (cos b = 0 => sin b = 1 or-1) )

  - if b = +/-90도, then det(R) = 0 (not full rank)
    - a, r 의 유일한 해를 찾을 수 없음 (무한한 해), 이때, R을 singular matrix라고 함.

- 결과: b가 +/-90도일 때, R은 singular matrix가 됨.
- 결론: 짐벌락을 피하기 위해 b의 범위를 제한함.
  - b 범위(가운데 축의 각도) $\{-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}\}$

보충 https://pasus.tistory.com/85





# Inverse Problem

- Inverse Problem: 방향을 주어졌을 때, 각도 구하기
  - 각 축마다 얼마큼의 각도만큼 움직였는지 알아낼 때도 문제 발생

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{SO}(3) \begin{cases} \det(R) = +1 \\ R^\top R = RR^\top = \mathbf{I}_3 \end{cases}$$

$$R_{(\phi,\theta,\psi)} = R_{(90,90,90)} = R_{(0,90,0)} = R_{(45,90,45)} = R_{(\star,90,\star)} = \cdots = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  - 가운데 축의 각도가 90도일 때, infinte solution이 됨 (not unique)
- 상세설명
  - 문제: $\begin{pmatrix} c_\alpha c_\beta & c_\alpha s_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma \\ s_\alpha c_\beta & s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma \\ -s_\beta & c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$ 주어졌을 때, a, b, r 구하기
  - 각도 구하기: $\alpha = atan2(\frac{r_{21}}{c_\beta}, \frac{r_{11}}{c_\beta})$, $\gamma = atan2(\frac{r_{32}}{c_\beta}, \frac{r_{33}}{c_\beta})$ $\begin{cases} \beta = atan2(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}) \\ \text{or} \\ \beta = atan2(-r_{31}, -\sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}) \end{cases}$ (제약조건: B != 0)
  - **cos B = 0 일 때, a, r의 분모가 0이 되면서 풀 수 없는 문제가 됨 => 무한한 해 => B = +/-90는 singularity에 해당**