

## 2021 학생자율동아리 활동 보고서

자율동아리명	창의로운 수학생활	자율동아리 대표	이준석
--------	-----------	----------	-----

활동 일시	2021 년 05 월 31 일 (월요일)
활동 시간	활동 시간 ( 3:25~4:10 ) (45 분)
활동 장소	Zoom 회의
참석자 (이름)	김희찬, 신정원, 양시훈, 이준석, 하장원, 배성재, 황지후, 전수아, 박규태, 이윤석, 유재희, 장우성 총 (12)명 참석

## 활동 내용 (구체적으로)

주제: 윌리스-보여이-게르빈 정리

먼저 모든 다각형은 넓이가 같은 삼각형으로 변함이 가능함을 이용하여 임의의 다각형이 있다고 생각하고, 그것을 삼각형들로 나눈다. 그 뒤 Figure 1 과 같이 삼각형의 높이를  $h$ 라 하면  $h/2$ 로 잡으면 파란색, 빨간색 삼각형이 각각  $RHA$  합동이 되므로 그것을 밑에 붙이면 직사각형이 된다.

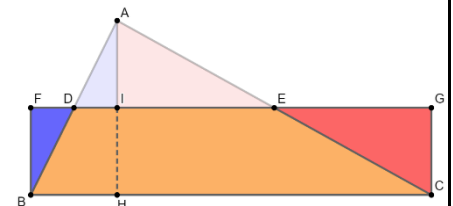


Figure 1

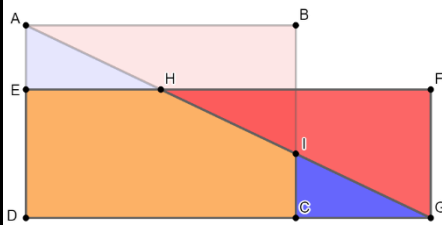


Figure 2

그 직사각형에서 Figure 2와 같이 가로와 세로 길이의 비는 다르지만 넓이가 같은 직사각형이 한 꼭짓점을 공유하고 있도록 그린다. 그 후 점 A와 점 G를 이어주면 삼각형 AEH와 삼각형 ICG, 삼각형 ABI와 삼각형 HFG가 각각 합동이 된다. 따라서, 두 삼각형을 이동시켜 직사각형에서 넓이가 같은 임의의 직사각형으로의 변환이 가능하다는 것이 증명되었다.

따라서, 어떤 다각형이 주어졌다고 했을 때 넓이를  $S$ 라 하고, 넓이가 같은 삼각형들로 나눈 후 그 삼각형들을 직사각형들로 변환, 그 직사각형들의 한 변의 길이를  $\sqrt{S}$ 로 맞추고 길이가  $\sqrt{S}$ 인 변들을 맞추어 포개어주면, 그 사각형의 넓이는  $S$ 이므로 자동으로 정사각형이 된다. 이 변환 과정은 역으로도 성립하므로 어떤 넓이가 같은 두 다각형이 주어졌을 때, 한 다각형을 위 방법으로 넓이가 같은 정사각형으로 변환하고, 이 역 과정을 통해 다른 다각형으로 변환할 수 있다. 이렇게 만약 넓이가 같은 두 다각형이 주어졌을 때 조각을 잘라 이동해 다른 다각형으로 변환 할 수 있다는 것이 증명되었다.

위 내용이 사실임을 확인합니다.

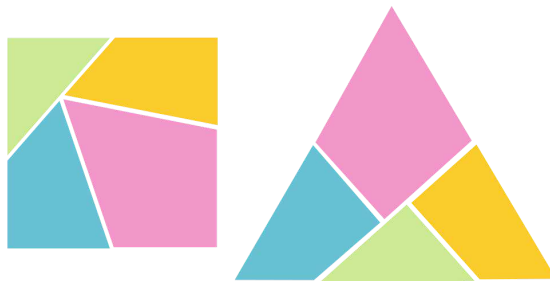
2021 년 05 월 31 일

동아리대표: 이준석 서명

지도교사: 김선래 서명

# 월리스-보여이-게르빈 정리(Wallace-Bolyai-Gerwien theorem)

넓이가 같은 두 다각형이 주어졌을 때 조각을 유한 번 자르고 이동하여 한 다각형에서 다른 다각형으로 변환할 수 있음을 보여라.



Wikipedia article: [Wallace-Bolyai-Gerwien theorem](#)

## ▼ 전략 1

모든 다각형을 문제 조건에 맞는 조각을 통해 넓이가 같은 정사각형으로 변환할 수 있음을 보이면 충분하다.

## ▼ 전략 2

일단 모든 다각형은 삼각형 여러 개로 쪼개서 생각한다.

삼각형을 직사각형으로 변환하는 방법을 생각한다.

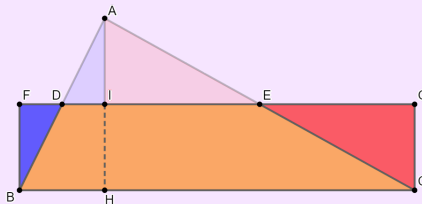
## ▼ 전략 3

직사각형을 넓이가 같은 다른 직사각형으로 변환한다.

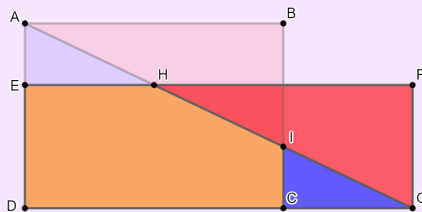
## ▼ 풀이

주어진 다각형의 넓이를  $S$ 로 두자. 일단 모든 다각형은 삼각형 여러 개로 쪼갤 수 있다. 삼각형을 직사각형으로 변환하는 과정은 다음과 같다.

삼각형의 한 꼭짓점에서 내린 수선과 그 수선의 수직이등분선을 자른 뒤, 아래 그림과 같이  $180^\circ$  회전하여 아래에 이어 붙인다.



그리고 직사각형을 넓이가 같고 한 변의 길이가  $\sqrt{S}$ 인 직사각형으로 변환하는 과정은 다음과 같다. 두 직사각형을 겹쳐 놓았을 때, 두 직사각형에서 서로 반대편에 있는 두 꼭짓점을 연결한 선으로 직사각형을 나누고 나뉜 조각을 적절히 배치한다.



이렇게 해서 만들어진 직사각형을 모으면 넓이가  $S$ 이므로, 한 변이 길이가  $\sqrt{S}$ 인 정사각형이 된다.

위 과정을 반대로 하면 임의의 정사각형에서 넓이가 같은 다른 다각형으로도 변환이 가능하므로, 한 다각형에서 넓이가 같은 정사각형으로 변환한 뒤, 다시 다른 다각형으로 변환할 수 있으므로, 문제가 증명되었다.

## ▼ 응용

도형을 변환할 때, 각 조각끼리 한 꼭짓점을 공유한 채 떨어지지 않고 다른 도형으로 변환하는 것이 가능하다는 것도 증명되었다.