[서식 2]

2021 학생자율동아리 활동 보고서

자율동아리명	창의로운 수학생활	자율동아리 대표	이준석

활동 일시	2021 년 04 월 09 일 (월요일)
활동 시간	활동 시간 (3:25~4:10) (45 분)
활동 장소	과학실
참석자 (이름)	김희찬, 신정원, 양시훈, 이준석, 하장원, 배성재, 황지후, 전수아, 김민석, 박규태, 우현찬, 김문성, 이윤석, 유재희, 장우성 총 (15)명 참석

활 동 내 용 (구체적으로)

주제: 균등한 케이크 자르기

문제 해결 전략

1. 어떤 한 조각을 세 사람이 가치를 매겼을 때, 가장 적은 가치를 매긴 사람에게 케이크를 주는 것이 효율적이다.
   → 한 조각을 보고 두 사람은 1/3 이하라고 생각하고, 한 사람 A 만 1/3 이상이라고 생각한다면, A 에게 그 조각을 주면 모두가 그 단계에 대해 만족한다. 이렇게 한 후 나머지 조각을 한 사람이 자르고 다른 사람이 고르면 된다.
2. 각각의 사람이 한 조각에 대해 매기는 가치가 이상인지, 이하인지 따지면, 경우의 수가 많지만, 한 사람의 가치를 1/3 로 정한다면 경우의 수가 줄어든다.
   → 처음에 한 사람이 1/3 만큼 자른 뒤 나머지 두 사람의 의견을 물어본다.

문제 해결 과정

1. A 가 자신이 생각하기에 1/3 만큼을 잘라낸다.—이 조각을 X 라고 하자.
2. 다음 네 가지 경우에 대해 각각 따져 본다. B, C 가 생각하는 X 의 가치가...
   1) 둘 다 1/3 이하인 경우: A 가 X 를 가지고, B 와 C 가 '자를 테니, 골라라'로 가져간다.→ B 와 C 는 X 를 뺀 나머지가 2/3 보다 크다고 여겼으므로 '자를 테니, 골라라'에서 1/3 이상씩 가져간다.
   2) 둘 중 한 명(B)만 1/3 이하인 경우: 1/3 보다 크다고 생각하는 C 에게 X 를 주면, A 와 B 는 '자를 테니, 골라라'에서 1/3 이상씩 가져간다.
   3) 둘 다 1/3 보다 큰 경우: 크다고 생각하는 정도에 따라, X 에 매긴 가치가 C 보다 B 가 크거나 같을 때, B 는 X 가 자신이 생각하기에 1/3 이 되도록 조금 잘라낸다(다듬기).—이 조각을 Y 라고 하자. Y 는 C 가 생각했을 때는 1/3 이상이고, A 가 생각했을 때는 1/3 이하이므로, Y 를 C 에게 주고, A 와 B 는 '자를 테니, 골라라'고 나머지를 나누어 가져간다.

더 생각해 보기

1. 문제 해결 과정 1 에서 A 가 꼭 자르지 않고 미리 B, C 에게 물어본 뒤 자르면 자르는 횟수를 1 회 줄일 수 있다.
2. 1 번 생각을 발전시켜 케이크의 왼쪽 끝에서 오른쪽으로 칼을 천천히 움직이고, 칼로 잘릴 부분의 가치가 1/3 이 되었다고 생각하는 사람이 '그만!' 하고 외치게 하면 처음으로 '그만!' 을 외친 사람이 그 때 칼로 잘라서 가져가면 모두가 그 과정에 대해 만족한다.
3. 2 번 생각을 다시 발전시켜 n 명의 사람이 균등하게 나눌 때, 1/n 이 되었을 때 '그만!' 을 외치게 하면 된다. 그 다음 나머지 조각으로 위 과정을 다시 반복하면 모두가 1/n 이상 가져갔다고 여기게 된다.

위 내용이 사실임을 확인합니다.

2021 년 04 월 09 일

동아리대표: 이준석 서명

지도교사: 김선래 서명

케이크 균등하게 자르기(Proportional cake-cutting)

케이크를 n 명의 사람이 나누어 먹으려고 한다. 모든 사람이 자신이 생각하기에 자신의 몫이 $\frac{1}{n}$ 이상이 되도록 나누는 방법을 설계하시오.

Wikipedia article: Proportional cake-cutting

▼ 전략 1

두 명이 케이크를 균등하게 자르기 위해서는 한 명이 자르고 다른 한 명이 고르면 된다. 세 명이 모두 만족하는 단계를 거처 한 명이 케이크를 일부 가져가면 남은 케이크는 두 명이 '자를테니 골라라'의 방법으로 가져가면 된다.

▼ 전략 2

어떤 한 조각을 세 사람이 가치를 매겼을 때, 가장 적은 가치를 매긴 사람에게 케이크를 주는 것이 효율적이다.

→ 한 조각을 보고 두 사람은 $\frac{1}{3}$ 이하라고 생각하고, 한 사람 A만 $\frac{1}{3}$이상이라고 생각한다면, A에게 그 조각을 주면 모두가 그 단계에 대해 만족한다. 이렇게 한 후 나머지 조각을 한 사람이 자르고 다른 사람이 고르면 된다.

▼ 전략 3

각각의 사람이 한 조각에 대해 매기는 가치가 $\frac{1}{3}$ 이상인지, 이하인지 따지면, 경우의 수가 많지만, 한 사람의 가치를 $\frac{1}{3}$로 정한다면 경우의 수가 줄어든다.

→ 처음에 한 사람이 $\frac{1}{3}$만큼 자른 뒤 나머지 두 사람의 의견을 물어본다.

▼ 풀이

세 명의 사람 A, B, C가 케이크를 균등하게 자른다고 하자. 먼저, A가 자신이 생각하기에 $\frac{1}{3}$만큼 케이크를 잘라낸다.—이 조각을 X라고 하자.

다음 3가지 경우에 대해 각각 살펴보자: B와 C가 생각하는 X의 가치가—

둘 다 $\frac{1}{3}$ 이하인 경우

→A가 X를 가져가고, 나머지를 B와 C가 '자를 테니, 골라라' 방법으로 나누어 가져간다.

B와 C의 입장에서 X를 뺀 나머지는 모두 $\frac{2}{3}$ 이상이므로, '자를 테니, 골라라'에서 각자가 생각하기에 $\frac{1}{3}$ 이상을 가져간다.

둘 중 한 명(B)만 $\frac{1}{3}$ 이하인 경우

→$\frac{1}{3}$보다 크다고 생각하는 C가 X를 가져가고, 나머지를 A와 B가 '자를 테니, 골라라' 방법으로 나누어 가져간다.

위와 같은 이유로 A와 B의 입장에서 X를 뺀 나머지는 모두 $\frac{2}{3}$ 이상이다.

둘 다 $\frac{1}{3}$ 이상인 경우

→B가 C보다 X에 더 크거나 같은 가치를 매겼다고 하면, B는 X를 자신이 생각하기에 $\frac{1}{3}$이 되도록 조금 잘라낸다(다듬기)—이 조각을 Y라고 하자. Y는 C가 생각했을 때는 $\frac{1}{3}$ 이상이고, A와 B가 생각했을 때는 $\frac{1}{3}$ 이하이므로 첫 번째 경우에서와 같이 C에게 주고, A와 B는 '자를 테니, 골라라' 방법으로 나누어 가져간다.

▼ 응용

케이크의 왼쪽 끝에서 칼을 천천히 오른쪽으로 움직이고, 세 사람 중 칼의 왼쪽 부분이 전체의 $\frac{1}{3}$이라고 생각될 때, "그만!"을 외친다. "그만!"을 가장 먼저 외친 사람이 칼의 왼쪽 부분을 가져가면, 그 과정에서 세 사람이 모두 만족한다. 이를 일반화하면, n명의 사람이 케이크를 균등하게 자르기 위해서는 칼을 움직이는데, 칼의 왼쪽 부분이 전체의 $\frac{1}{n}$이라고 생각될 때, "그만!"을 외치게 하고, 남은 조각으로 같은 과정을 반복하면 모두가 각자 조각을 $\frac{1}{n}$ 이상이라고 여기게 된다.

[서식 2]

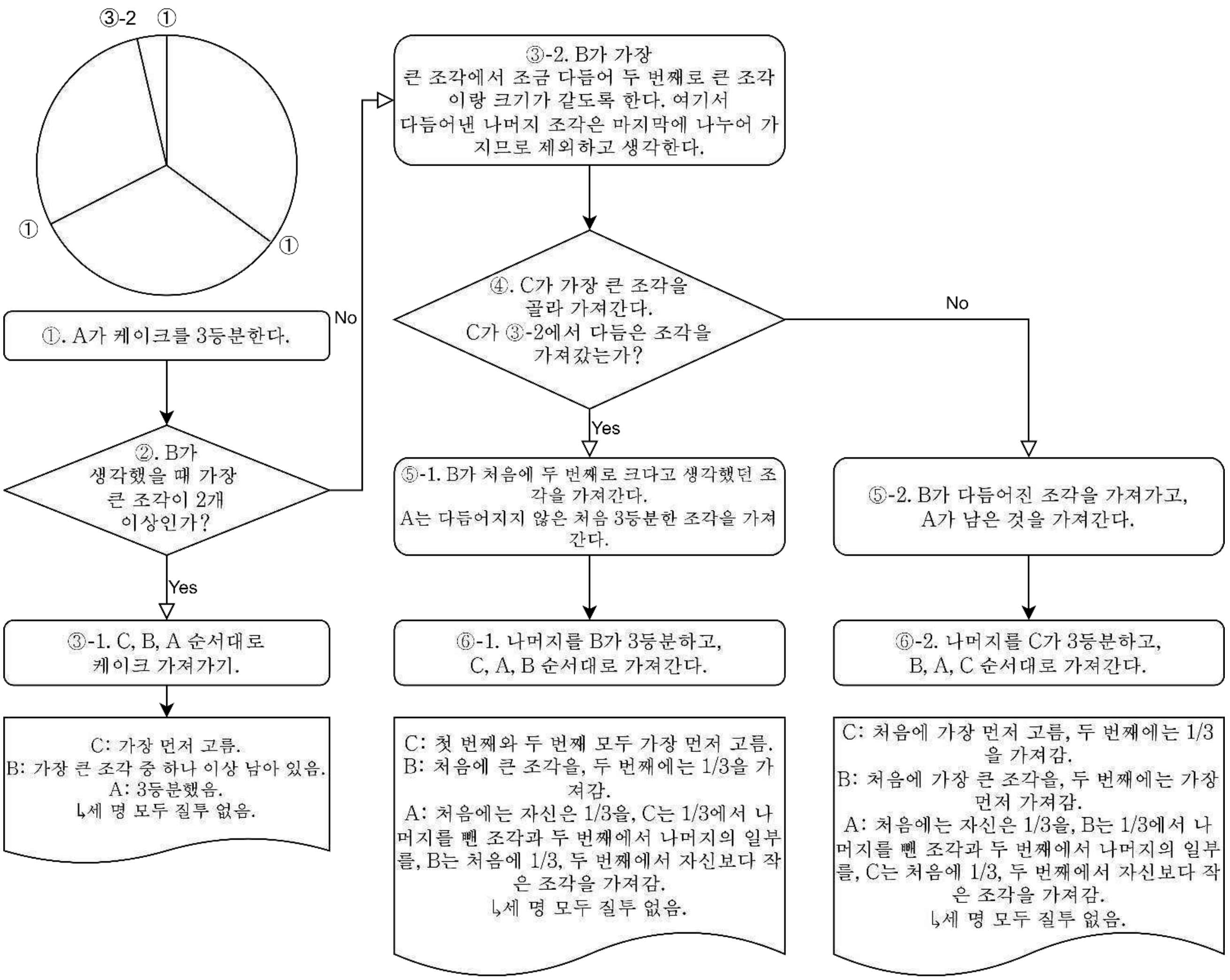
2021 학생자율동아리 활동 보고서

자율동아리명	창의로운 수학생활	자율동아리 대표	이준석

활동 일시	2021 년 04 월 19 일 (월요일)
활동 시간	활동 시간 (3:25~4:10) (45 분)
활동 장소	Zoom 회의
참석자 (이름)	김희찬, 신정원, 양시훈, 이준석, 하장원, 배성재, 황지후, 전수아, 김민석, 박규태, 우현찬, 김문성, 이윤석, 유재희, 장우성 총 (15)명 참석

활 동 내 용 (구체적으로)

주제: 질투 없는 케이크 자르기



위 내용이 사실임을 확인합니다.

2021 년 04 월 19 일

동아리대표: 이준석 서명

지도교사: 김선래 서명

케이크 질투 없게 자르기(Envy-free cake-cutting)

케이크를 n 명의 사람이 나누어 먹으려고 한다. 모든 사람이 자신이 생각하기에 자신의 몫이 나머지 모든 사람들의 몫보다 많거나 같도록 나누는 방법을 설계하시오.

Wikipedia article: Envy-free cake-cutting

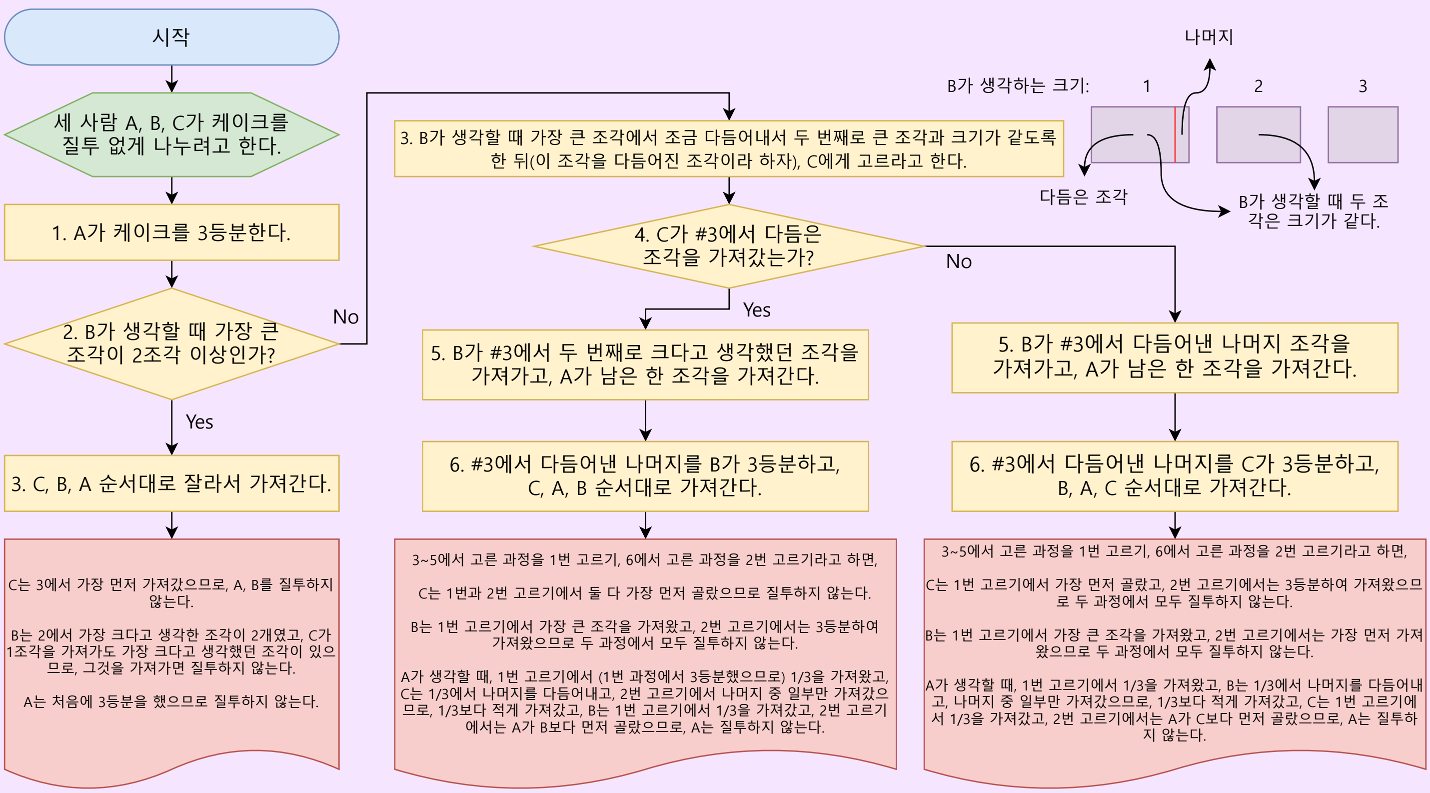
▼ 전략 1

세 사람 중 한 사람이 3등분을 했을 때, 다른 한 사람이 생각할 때 가장 큰 조각이 2개 이상인 경우(즉, 두 조각이 똑같이 가장 크다고 생각할 때)를 먼저 생각하자.

▼ 전략 2

다른 한 사람이 생각할 때 가장 큰 조각이 1개인 경우, 이를 다듬어 두 번째로 큰 조각으로 옮겨 두 조각의 크기가 같도록 한다. 이 때, 세 조각이 처음에 3등분한 사람이 생각했던 것과는 달라졌음을 주의하라.

▼ 풀이



[서식 2]

2021 학생자율동아리 활동 보고서

자율동아리명	창의로운 수학생활	자율동아리 대표	이준석

활동 일시	2021 년 04 월 26 일 (월요일)
활동 시간	활동 시간 (3:25~4:10) (45 분)
활동 장소	Zoom 회의
참석자 (이름)	김희찬, 신정원, 양시훈, 이준석, 하장원, 배성재, 황지후, 전수아, 김민석, 박규태, 우현찬, 김문성, 이윤석, 유재희, 장우성 총 (15)명 참석

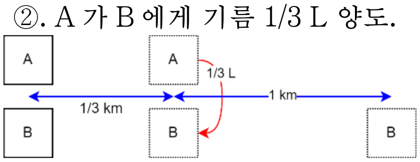
활 동 내 용 (구체적으로)

주제: 지프 사막 건너기 문제

Ⅰ. $n=2$일 때,

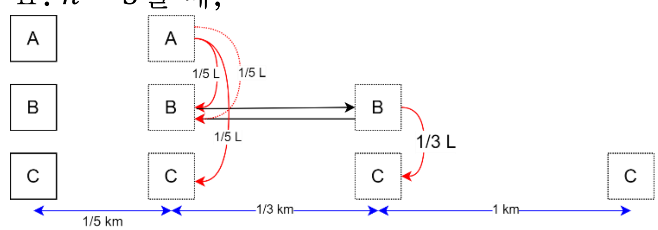
①. A, B 모두 1/3 km 씩 이동

②. A 가 B 에게 기름 1/3 L 양도.



③. A 가 기지로 다시 돌아오고, B 는 1 km 더 이동

Ⅱ. $n=3$일 때,



수학적 귀납법: 자연수 n에 관한 명제 $P(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하는 방법 중 하나.

$Claim$: 지프 n대가 있을 때, 최대 이동 거리는 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$ km 이다.

ⅰ. $n=2,3$일 때, 위에서 보였듯 성립한다.

ⅱ. $n=k$일 때, 성립한다고 가정.

ⅲ. $n=k+1$일 때,

①. k대가 $\frac{1}{2k+1}$ km 이동.

②. a_1이 $a_2, a_3, \cdots, a_{k+1}$에게, $\frac{1}{2k+1}$ L 기름 양도.

$\rightarrow a_2, a_3, \cdots, a_{k+1}$의 기름 꽉 참.

③. 기름이 꽉 찬 k대의 지프는 위 가정에 의해, $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2k-1}$ km 를 갈 수 있고,

총 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k+1}$ km 를 갈 수 있다.

④. ③에서 k대 중 가장 멀리 간 1 대를 제외하고, ② 위치로 돌아온 나머지 $k-1$대는 기름이 없다. a_1이 자신의 기름 중 $\frac{1}{2k+1}$ L 씩 $k-1$대에게 양도하면, $\frac{1}{2k+1}$ L 가 남아, 나머지 지프와 기지로 돌아올 수 있다.

따라서 최대 이동 거리는 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$ km.

위 내용이 사실임을 확인합니다.

2021 년 04 월 26 일

동아리대표: 이준석 서명

지도교사: 김선래 서명

지프 사막 건너기 문제(Jeep desert crossing problem)

지프 n대가 기지에서 길이가 L인 사막을 건너려고 한다. 각각의 지프는 기름을 최대 1통까지 채울 수 있으며, 1통으로는 1 km를 갈 수 있고, 중간에 서로 기름을 주고받을 수 있다. 모든 지프가 다시 기지로 돌아오거나 사막을 완전히 건너야 한다. 이 때, L의 최댓값은 무엇일까?

이해를 돕기 위해 $n = 2$일 때를 살펴보면, 2대의 지프 A, B가 기지에서 출발하고, 기름 $\frac{1}{3}$통을 사용했을 때($\frac{1}{3}$ km를 갔을 때), A가 B에게 기름 $\frac{1}{3}$통을 준다. 그럼, 남은 기름의 양은 A는 $\frac{1}{3}$통, B는 1통이다.(B는 최대 1통까지 채울 수 있으므로, 최대로 채운 것이다.) A는 방향을 바꾸어 기지로 다시 돌아가고(기지까지 $\frac{1}{3}$ km이므로, A는 기름을 모두 다 쓰고 도착할 수 있다.) B는 가던 방향으로 1통을 다 쓸 때까지 가면, $\frac{4}{3}$ km를 갈 수 있다. 따라서, L의 최댓값은 $\frac{4}{3}$ km이다.
Wikipedia article: Jeep problem

▼ 전략 1
지프가 3대인 경우를 구해 보면, $\frac{1}{5}$ km 갔을 때 한 지프가 나머지 두 지프에게 $\frac{1}{5}$ L의 기름을 준다. 기름을 준 지프는 $\frac{2}{5}$ L의 기름이 남아 있다. 나머지 두 지프는 1 L의 기름을 가지고 $\frac{1}{3}$ km를 더 가서 한 지프가 다른 한 지프에게 $\frac{1}{3}$ L의 기름을 준다. 기름을 준 지프는 $\frac{1}{3}$ L의 기름을 가지고 있으므로 처음 기름을 받은 $\frac{1}{5}$ km 위치로 이동하여 처음 기름을 준 지프에게 $\frac{1}{5}$ L의 기름을 받아 두 지프가 기지로 돌아오면 된다. 이 때, L의 최댓값은 $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$이다.

▼ 전략 2
L의 최댓값은 $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$임을 추측하고, 이를 이용하여 문제를 풀어보자. 지프 $(n+1)$대가 있을 때 L의 최댓값을 구하기 위해 지프 한 대가 나머지 n대가 조금 더 갈 수 있도록 자신의 기름을 나눈다고 생각해 보자. 지프 한 대가 나머지 n대의 지프가 x km 더 갈 수 있도록 자신의 기름 1 L를 준다고 하면, 기름을 주는 지프 한 대를 포함한 $(n+1)$대의 지프가 x km를 더 가고, L km를 이동하여 사막을 건너는 지프 한 대를 제외한 나머지 n대의 지프가 x km를 다시 돌아와야 한다. 따라서, 총 기름 1 L는 $(2n+1)$대의 지프가 x km를 가는데 필요한 기름을 제공하는 것이므로, $x = \frac{1}{2n+1}$이다.

▼ 전략 3
n일 때 L의 최댓값을 전략2에서 추측한 것과 같다고 가정하고, $n+1$일 때 $n+1$일 때 L의 최댓값을 전략2에서 추측한 것과 같음을 증명하면, $n = 1, 2, 3, \ldots$를 각각 대입하면 모든 자연수 n에 대하여 전략2의 추측이 참임을 보일 수 있다. 이렇게 어떤 자연수 n에 대한 명제가 모든 자연수에 대해 참임을 보이기 위해 $n = 1$인 경우를 직접 보이고, $n = k$일 때 명제가 성립하면, $n = k+1$일 때도 명제가 성립한다는 것을 증명하는 방법을 **수학적 귀납법**이라고 한다.

▼ 풀이
L의 최댓값은 $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$이다. 이를 수학적 귀납법으로 증명해 보자. 우선, 지프 n대 중 1대는 L km 떨어진 곳으로 가고, 나머지 $(n-1)$대는 기지로 돌아와야 L을 크게 만들 수 있다. $n = 2$일 때는 문제의 추가 설명에서 보인 것과 같이 L의 최댓값은 $1 + \frac{1}{3}$이다. $n = k(\geq 2)$일 때 L의 최댓값이 $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2k-1}$이라고 가정하자. $n = k+1$일 때는 $(k+1)$대의 지프가 모두 $\frac{1}{2k+1}$ km를 갔을 때, 한 지프 P가 나머지 k 대의 지프에게 $\frac{1}{2k+1}$ L씩 기름을 준다. 그럼, 기름을 준 지프 P는 1 L에서 k대의 지프에게 각각 $\frac{1}{2k+1}$ L씩 기름을 주었고, 이 지점까지 오는 데 $\frac{1}{2k+1}$ L의 기름을 사용했으므로 $\frac{k}{2k+1}$ L의 기름을, 나머지 지프는 1 L의 기름이 꽉 차있다. 이 때, 기름이 꽉 차 있는 k대의 지프는 기지에서 $\frac{1}{2k+1}$ km 떨어진 지점에서 출발해서 출발점에서 가정한 것과 같이 $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2k-1}$ km 떨어진 지점, 즉 기지에서 $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1}$ km 떨어진 지점까지 지프 한 대가 이동하고 나머지 $(k-1)$대는 다시 원래 출발했던 지점인 기지에서 $\frac{1}{2k+1}$ km 떨어진 지점으로 돌아온다. 이 때, 처음에 기름을 준 지프 P는 $\frac{k}{2k+1}$ L의 기름을 가지고 있었는데, 이를 지프 P를 포함한 k대의 지프가 기름을 $\frac{1}{2k+1}$ L씩 나누어 가지면 모두 기지로 돌아올 수 있다. 따라서 이 경우, L의 최댓값은 $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1}$이고, 수학적 귀납법에 의해 처음 주장이 참이다.
따라서 L의 최댓값은 정답은 $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$이다.

[서식 2]

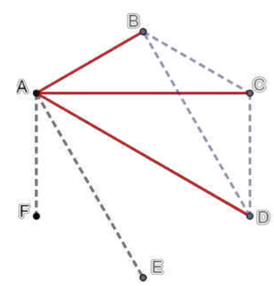
2021 학생자율동아리 활동 보고서

자율동아리명	창의로운 수학생활	자율동아리 대표	이준석

활동 일시	2021 년 05 월 10 일 (월요일)
활동 시간	활동 시간 (3:25~4:10) (45 분)
활동 장소	Zoom 회의
참석자 (이름)	김희찬, 신정원, 양시훈, 이준석, 하장원, 배성재, 황지후, 전수아, 김민석, 박규태, 우현찬, 김문성, 이윤석, 유재희, 장우성 총 (15)명 참석

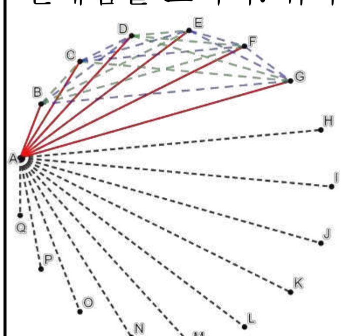
활 동 내 용 (구체적으로)

주제: Sim 게임과 램지 이론



6 개의 점이 찍혀 있을 때, 임의의 두 점이 두 가지 색, 빨간색과 파란색 중 한 가지 색으로 연결되었다고 하자. 육각형에서 각 꼭짓점은 5 개의 변을 구성하고 있다. 이때, 비둘기집의 원리에 의해, 두 가지 색으로 칠해진 5 개의 변 중 적어도 같은 색인 변 3 개가 존재한다.다음 그림과 같이, 일반성을 잃지 않고 빨간색으로 꼭짓점 A 가 세 점, B, C, D 와 연결되어 있다고 하자. 이때, 세 변의 색이 같은 삼각형을 만들지 않기 위해서는 BC, CD, DB 중 하나라도 빨간색으로 칠해지면, 그 선분과 그 선분의 양 끝 점을 A 와 연결한 선분이 빨간색 삼각형을 이루므로 모두 파란색으로 칠해져야 한다. 하지만 이 경우, 삼각형 BCD 의 세 변이 모두 파란색이므로 세 변의 색이 같은 삼각형이 된다. 따라서, Sim 게임에서는 무승부가 불가능하다.

그렇다면 3 명이 Sim 게임을 비슷한 규칙으로 한다면 어떨까? 17 개의 점이 찍혀있다고 할 때, 임의의 두 점을 세 가지 색, 빨강, 파랑, 초록으로 칠하면 세 변의 색이 모두 같은 삼각형이 존재함을 보이자. 위와 비슷한 논리로 전개하면, 십칠각형에서 각 꼭짓점은 16 개의 꼭짓점과



연결되어 있다. 이때, 비둘기집의 원리에 의해, 세 가지 색으로 칠해진 16 개의 변 중 적어도 같은 색인 변 6 개가 존재한다. 마찬가지로 꼭짓점 A 가 여섯 개의 점, B, C, D, E, F, G 와 빨간색으로 연결되어 있다고 하자. 그럼, 여섯 개의 점, B~G 끼리 이은 변은 빨간색일 수 없으므로, 초록색 또는 파란색이다. 하지만, 위에서 증명한 것에 따라 여섯 개의 점이 있을 때 임의의 두 점이 두 가지 색으로 연결되어 있으므로 세 변의 색이 모두 같은 삼각형이 존재할 수밖에 없다. 따라서, 17 개의 점이 찍혀있을 때, 임의의 두 점이 세 가지 색 중 하나로 연결되어 있으면 세 변의 색이 모두 같은 삼각형이 적어도 한 개 존재한다.

위 내용이 사실임을 확인합니다.

2021 년 05 월 10 일

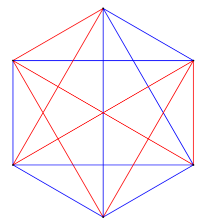
동아리대표: 이준석 서명

지도교사: 김선래 서명

Sim 게임과 램지 이론(Sim game and Ramsey theory)

여섯 개의 점이 찍혀 있는 판에서 두 사람이 게임을 한다. 두 사람은 번갈아 가면서 두 점을 선으로 연결하는데, 한 사람은 빨간색으로 다른 한 사람은 파란색으로 연결한다. 세 변이 모두 같은 색으로 이루어진 삼각형이 생기면 그 색을 칠한 사람이 진다. 모든 두 점이 서로 연결이 될 때까지 게임을 한다고 할 때, 게임이 무승부로 끝날 수 있는가?

다음은 파란색 플레이어가 이긴 모습이다.



Wikipedia article: Sim (pencil game) / Ramsey theory

▼ 전략 1

문제에서 묻는 것은 여섯 개의 점을 두 개씩 모두 연결한 그래프에서 세 변의 색이 모두 같은 삼각형이 존재하지 않을 수 있는지 묻는 것과 동일하다.

▼ 전략 2

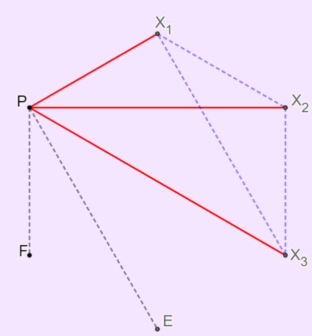
한 점과 연결된 선분의 개수가 5개이고, 그 중 적어도 3개는 같은 색이다.

▼ 전략 3

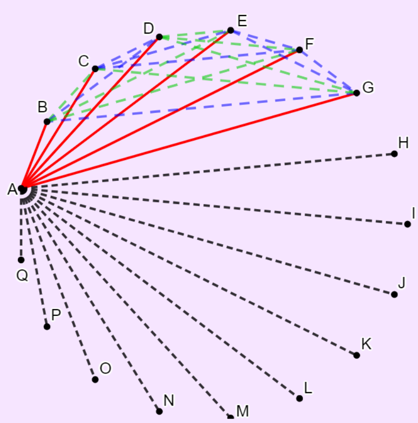
전략 2에서 한 점과 같은 색으로 연결된 세 점이 어떻게 연결되는지 생각해 보면 된다.

▼ 풀이

여섯 개의 점에서 모든 두 점이 서로 연결된 그래프를 생각하자. 이 그래프(K_6)의 모든 변(선분)을 빨간색과 파란색으로 칠할 때, 세 변의 색이 같은 삼각형이 항상 존재함을 보이자.이 그래프에서 한 점과 연결된 변은 5개이므로, 5개 중 비둘기집 원리에 의해 적어도 세 변은 같은 색이다. 일반성을 잃지 않고, 파란색으로 세 점 X_1, X_2, X_3와 한 점 P가 연결되어 있다고 하자. 이 때, 세 점 X_1, X_2, X_3를 연결하는 세 변 중 파란색 변이 있으면—X_1과 X_2가 파란색 변으로 연결되었다고 하자.—삼각형 PX_1X_2의 세 변이 모두 파란색이다. 만약 X_1, X_2, X_3를 연결하는 세 변중 파란색 변이 없다면, 모든 변이 빨간색이므로, 삼각형 $X_1X_2X_3$의 세 변이 모두 빨간색이 된다. 따라서, 항상 세 변의 색이 같은 삼각형이 항상 존재하고, Sim 게임에서 무승부가 불가능함이 증명되었다.



▼ 응용



17개의 점이 찍혀있다고 할 때, 임의의 두 점을 세 가지 색, 빨강, 파랑, 초록으로 칠하면 세 변의 색이 모두 같은 삼각형이 존재함을 보이자. 위와 비슷한 논리로 전개하면, 십칠각형에서 각 꼭짓점은 16개의 꼭짓점과 연결되어 있다.이때, 비둘기집의 원리에 의해, 세 가지 색으로 칠해진 16개의 변 중 적어도 같은 색인 변 6개가 존재한다. 마찬가지로 꼭짓점 A가 여섯 개의 점, B, C, D, E, F, G와 빨간색으로 연결되어 있다고 하자. 그럼, 여섯 개의 점, B~G끼리 이은 변은 빨간색일 수 없으므로, 초록색 또는 파란색이다. 하지만, 위에서 증명한 것에 따라 여섯 개의 점이 있을 때 임의의 두 점이 두 가지 색으로 연결되어 있으므로 세 변의 색이 모두 같은 삼각형이 존재할 수밖에 없다. 따라서, 17개의 점이 찍혀있을 때, 임의의 두 점이 세 가지 색 중 하나로 연결되어 있으면 세 변의 색이 모두 같은 삼각형이 적어도 한 개 존재한다.

[서식 2]

2021 학생자율동아리 활동 보고서

자율동아리명	창의로운 수학생활	자율동아리 대표	이준석

활동 일시	2021 년 05 월 31 일 (월요일)
활동 시간	활동 시간 (3:25~4:10) (45 분)
활동 장소	Zoom 회의
참석자 (이름)	김희찬, 신정원, 양시훈, 이준석, 하장원, 배성재, 황지후, 전수아, 박규태, 이윤석, 유재희, 장우성 총 (12)명 참석

활 동 내 용 (구체적으로)

주제: 월리스-보여이-게르빈 정리

먼저 모든 다각형은 넓이가 같은 삼각형으로 변함이 가능함을 이용하여 임의의 다각형이 있다고 생각하고, 그것을 삼각형들로 나눈다. 그 뒤 *Figure 1* 과 같이 삼각형의 높이를 h라 하면 $h/2$로 잡으면 파란색, 빨간색 삼각형이 각각 RHA합동이 되므로 그것을 밑에 붙이면 직사각형이 된다.

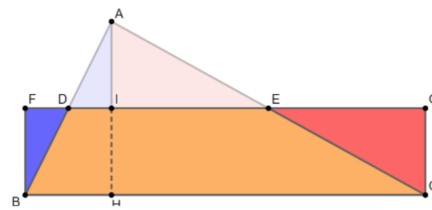


Figure 1

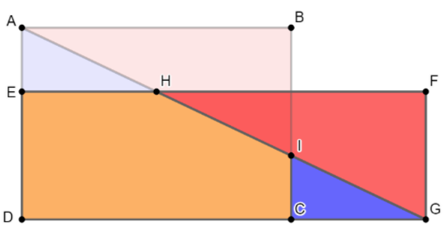


Figure 2

그 직사각형에서 *Figure 2* 와 같이 가로와 세로 길이의 비는 다르지만 넓이가 같은 직사각형이 한 꼭짓점을 공유하고 있도록 그린다. 그 후 점 A와 점 G를 이어주면 삼각형 AEH와 삼각형 ICG, 삼각형 ABI와 삼각형 HFG가 각각 합동이 된다. 따라서, 두 삼각형을 이동시켜 직사각형에서 넓이가 같은 임의의 직사각형으로의 변환이 가능하다는 것이 증명되었다.

따라서, 어떤 다각형이 주어졌다고 했을 때 넓이를 S라 하고, 넓이가 같은 삼각형들로 나눈 후 그 삼각형들을 직사각형들로 변환, 그 직사각형들의 한 변의 길이를 $\sqrt{S}$로 맞추고 길이가 $\sqrt{S}$인 변들을 맞추어 포개어주면, 그 사각형의 넓이는 S이므로 자동으로 정사각형이 된다. 이 변환 과정은 역으로도 성립하므로 어떤 넓이가 같은 두 다각형이 주어졌을 때, 한 다각형을 위 방법으로 넓이가 같은 정사각형으로 변환하고, 이 역 과정을 통해 다른 다각형으로 변환할 수 있다. 이렇게 만약 넓이가 같은 두 다각형이 주어졌을 때 조각을 잘라 이동해 다른 다각형으로 변환 할 수 있다는 것이 증명되었다.

위 내용이 사실임을 확인합니다.

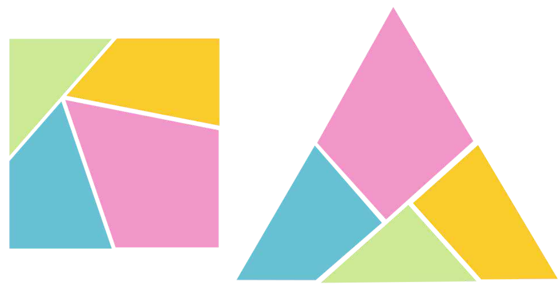
2021 년 05 월 31 일

동아리대표: 이준석 서명

지도교사: 김선래 서명

월리스-보여이-게르빈 정리(Wallace-Bolyai-Gerwien theorem)

넓이가 같은 두 다각형이 주어졌을 때 조각을 유한 번 자르고 이동하여 한 다각형에서 다른 다각형으로 변환할 수 있음을 보여라.



Wikipedia article: Wallace-Bolyai-Gerwien theorem

▼ 전략 1

모든 다각형을 문제 조건에 맞는 조작을 통해 넓이가 같은 정사각형으로 변환할 수 있음을 보이면 충분하다.

▼ 전략 2

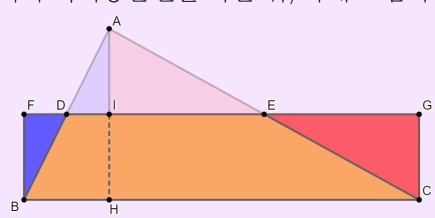
일단 모든 다각형은 삼각형 여러 개로 쪼개서 생각한다.
삼각형을 직사각형으로 변환하는 방법을 생각한다.

▼ 전략 3

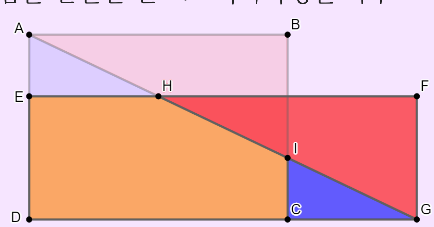
직사각형을 넓이가 같은 다른 직사각형으로 변환한다.

▼ 풀이

주어진 다각형의 넓이를 S로 두자. 일단 모든 다각형은 삼각형 여러 개로 쪼갤 수 있다. 삼각형을 직사각형으로 변환하는 과정은 다음과 같다.
삼각형의 한 꼭짓점에서 내린 수선과 그 수선의 수직이등분선을 자른 뒤, 아래 그림과 같이 180° 회전하여 아래에 이어 붙인다.



그리고 직사각형을 넓이가 같고 한 변의 길이가 $\sqrt{S}$인 직사각형으로 변환하는 과정은 다음과 같다. 두 직사각형을 겹쳐 놓았을 때, 두 직사각형에서 서로 반대편에 있는 두 꼭짓점을 연결한 선으로 직사각형을 나누고 나뉜 조각을 적절히 배치한다.



이렇게 해서 만들어진 직사각형을 모으면 넓이가 S이므로, 한 변이 길이가 $\sqrt{S}$인 정사각형이 된다.
위 과정을 반대로 하면 임의의 정사각형에서 넓이가 같은 다른 다각형으로도 변환이 가능하므로, 한 다각형에서 넓이가 같은 정사각형으로 변환한 뒤, 다시 다른 다각형으로 변환할 수 있으므로, 문제가 증명되었다.

▼ 응용

도형을 변환할 때, 각 조각끼리 한 꼭짓점을 공유한 채 떨어지지 않고 다른 도형으로 변환하는 것이 가능하다는 것도 증명되었다.

[서식 2]

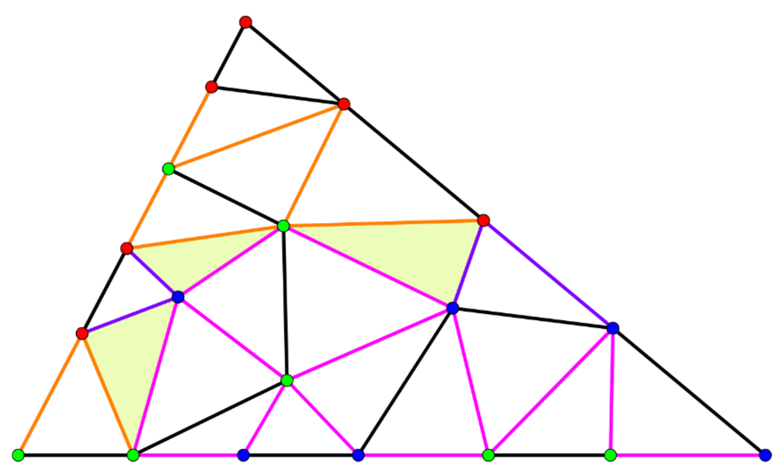
2021 학생자율동아리 활동 보고서			
자율동아리명	창의로운 수학생활	자율동아리 대표	이준석

활동 일시	2021 년 07 월 12 일 (월요일)
활동 시간	활동 시간 (3:25~4:10) (45 분)
활동 장소	Zoom 회의
참석자 (이름)	김희찬, 신정원, 양시훈, 이준석, 하장원, 배성재, 황지후, 전수아, 김민석, 박규태, 우현찬, 김문성, 이윤석, 유재희, 장우성 총 (15)명 참석

활 동 내 용 (구체적으로)

주제: Sperner 의 보조 정리

먼저, 빨강-초록 선분과 같이 양 끝 점의 색이 다른 선분을 'colorful 선분'이라고 하자. 삼각형의 세 꼭짓점의 색은 각각 빨강, 초록, 파랑이므로 변 위에 colorful 선분은—colorful 선분이 있을 때마다 꼭짓점의 색이 바뀌는데, 한 변에서 양 끝 점, 즉 두 꼭짓점의 색은 다르므로—홀수 개가 존재한다. 변 위의 양 끝 점의 색이 같은 colorful 선분을 따라 경로를 만들 때, 만약 경로를 따라 삼각형 내부로 들어갔다가 다시 외부로 나오면 두 colorful 선분이 경로에 사용된다. 그러나, 한 변 위에 colorful 선분은 홀수 개이므로, 삼각형 내부에서 나오지 못하는 경로, 즉 중간에 막히는 경로도 생기게 된다. 이 막힌 곳의 삼각형에는 colorful 선분을 따라 들어갔지만, 나갈 수 없으므로, colorful 선분은 하나만 존재하게 되고, colorful 선분 위에 있지 않은 점은 colorful 선분의 양 끝 점의 색과 다른 색의 점으로, 이 막힌 곳에서 문제에 맞는, 세 꼭짓점의 색이 다른 삼각형이 존재하게 된다.



위 내용이 사실임을 확인합니다.

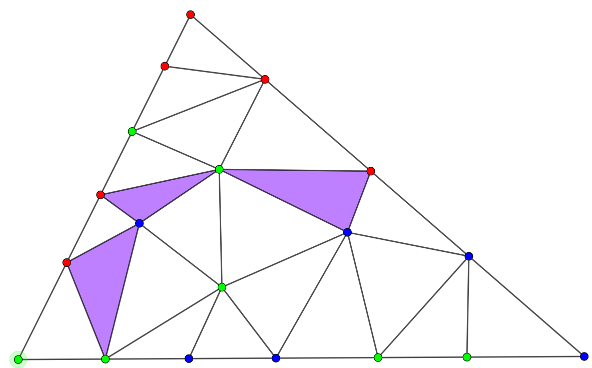
2021 년 07 월 12 일

동아리대표: 이준석 서명

지도교사: 김선래 서명

Sperner의 보조 정리(Sperner's lemma)

삼각형 ABC가 주어졌다. 그 삼각형을 삼각형 분할(triangulation)한 뒤, 각 삼각형의 꼭짓점을 빨강, 초록, 파랑. 이렇게 세 가지 색깔로 칠한다. 이 때 삼각형 ABC의 꼭짓점 A, B, C는 각각 빨강, 초록, 파랑으로 칠하고, 변 AB, BC, CA 위의 점은 각각, 빨강 또는 초록, 초록 또는 파랑, 파랑 또는 빨강, 으로 칠한다. 삼각형 내부의 점은 세 가지 색 중 아무 색으로 칠한다. 이때, 삼각형 분할하여 만든 삼각형 중 세 꼭짓점의 색깔이 모두 서로 다른 색깔인 삼각형이 존재함을 보여라.



Wikipedia article: Sperner's lemma

▼ **전략 1**

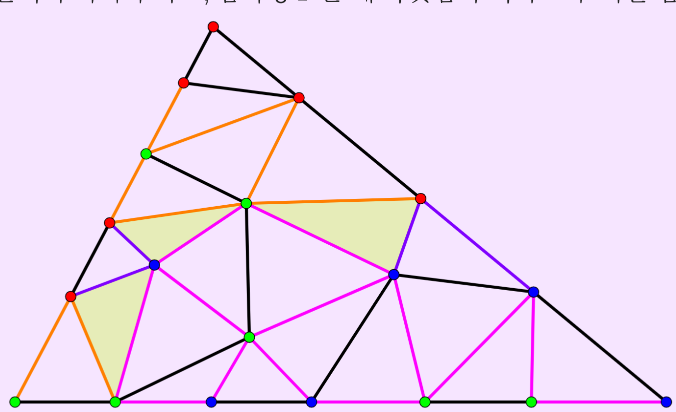
변 AB 위의 점은 모두 빨간색과 초록색으로 칠해져 있는데, 점 A는 빨간색, B는 초록색이므로 중간에 빨간색에서 초록색으로, 또는 초록색에서 빨간색으로 변하는 경우는 홀수 번이다. 즉, 변 AB 위에 "빨강-초록 변"은 홀수 개가 존재한다. 변 BC, CA 위에서도 마찬가지이다.

▼ **전략 2**

"빨강-초록 변"과 같이 양 끝 점의 색이 다른 선분을 따라 이동하는 경로를 생각해 보자.

▼ **풀이**

변 AB 위의 점은 모두 빨간색과 초록색으로 칠해져 있는데, 점 A는 빨간색, B는 초록색이므로 중간에 빨간색에서 초록색으로, 또는 초록색에서 빨간색으로 변하는 경우는 홀수 번이다. 즉, 변 AB 위에 "빨강-초록 변"은 홀수 개가 존재한다. 변 BC, CA 위에서도 마찬가지로 "초록-파랑 변"과 "파랑-빨강 변"이 각각 홀수 개 씩 있다. 이 때, "빨강-초록 변"을 주황색, "초록-파랑 변"을 분홍색, "파랑-빨강 변"을 보라색으로 칠하자. 주황색 변만 통과하는 경로를 생각해보면, 삼각형 밖에서 변 AB 위의 주황색 변을 통해 들어갔다가 만약 밖으로 나온다면 변 AB 위의 주황색 변으로 다시 나온다. 이때, 변 AB 위에 주황색 변은 홀수 개이므로 어떤 경로에서는 주황색 변을 따라 가다가 결국 더이상 움직일 수 없는 곳에 도착해야 한다. 이렇게 도착한 삼각형을 P라 하면, P의 두 꼭짓점은 각각 빨간색과 초록색이고, 나머지 한 꼭짓점이 빨간색이나 초록색이면 주황변을 두 개 가지므로 주황색 변을 따라 다시 나갈 수 있다. 따라서 나머지 한 꼭짓점은 파판색이 되어야 하고, 삼각형 P는 세 꼭짓점의 색이 모두 다른 삼각형이다.



[서식 2]

2021 학생자율동아리 활동 보고서

자율동아리명	창의로운 수학생활	자율동아리 대표	이준석

활동 일시	2021 년 09 월 06 일 (월요일)
활동 시간	활동 시간 (3:35~4:20) (45 분)
활동 장소	과학실
참석자 (이름)	김희찬, 신정원, 양시훈, 이준석, 하장원, 배성재, 전수아, 김민석, 박규태, 우현찬, 김문성, 이윤석, 유재희, 장우성 총 (14)명 참석

활 동 내 용 (구체적으로)

주제: 가장 어려운 논리 퍼즐

전략1: *da* 와 *ja* 를 예와 아니요 중 각각 무엇인지 알아내기
질문: 참과 거짓이 모두 예라고 답하는 질문을 한다. "'1+ 1=2 입니까?'라는 질문에 대해 당신은 어떻게 대답하시겠습니까?"를 세 사람에게 똑같이 물어봄.
해석:참은 이 질문에 대해 "예"라고 할 것이며 거짓은—실제로 1+ 1 은 2 입니까? 에 대해 "아니요"라고 대답을 할 것이므로 거짓말을
하여—"예"라고 할 것이다. 즉, 위 똑같은 질문을 세 사람에게 한 번씩 질문하면 대답 *da* 와 *ja* 중 2 개 이상인 것이 있는데 이는 "예"가 될 것이다.
예시: 세 사람의 대답 중 *ja* 가 2 번 이상 나왔다고 가정하자. 즉, *ja*="예", *da*="아니요".

전략2: 랜덤 제거하기
질문: 참과 거짓이 다른 대답을 하는 질문을 한다. "당신은 랜덤입니까?"를 세 사람에게 똑같이 물어봄. 다른 대답을 한 한 사람에게, 옆 사람 중 한 명을 가르키며, "저 사람은 랜덤입니까?"라고 물어봄.
해석: 랜덤을 제거하기 위해, 참과 거짓이 다른 답변을 하는 질문을 한다 "당신은 랜덤입니까?"라고 세 사람에게 똑같이 세 번 질문을 한다. 세 사람의 대답 중 참과 거짓의 답변은 다를 텐데, 세 명의 대답 중 나머지 둘과 다른 한 명은 랜덤이 아니다(만약 랜덤이면 나머지 같은 대답을 한 두 사람이 참, 거짓이 되기 때문) 따라서 그 사람(나머지 둘과 대답이 다른 한 사람)은 전략 1 에서 *da* 와 *ja* 의 의미를 알아내었는데, 만약 "아니요"의 뜻을 가진 말을 했다면, 참말을 한 것이므로 참, "예"의 뜻을 가진 말을 했다면, 거짓말을 한 것이므로 거짓이다. 그다음, 그 사람에게 옆 사람 중 한 명을 가르키며, "저 사람은 랜덤입니까?" 라고 물어보면, 대답을 할 것이고, *da* 와 *ja* 의 뜻, 그리고 대답한 사람이 참인지 거짓인지 알고 있으므로, 저 사람이 랜덤인지 아닌지 알 수 있다. 따라서 이렇게 7 번의 질문으로 참, 거짓, 랜덤이 각각 누구인지 밝혀낼 수 있다.

위 내용이 사실임을 확인합니다.

2021 년 09 월 06 일

동아리대표: 이준석 서명

지도교사: 김선래 서명

가장 어려운 논리 퍼즐(Hardest logic puzzle ever)

세 명의 사람 A, B, C가 있다. 한 명은 '참', 한 명은 '거짓', 나머지 한 명은 '랜덤'이다. '참'은 참말만, '거짓'은 거짓만, '랜덤'은 랜덤하게 대답을 한다. 세 사람 중 한 사람을 골라 "예-아니요 질문"만을 할 수 있다. 그들은 우리의 언어를 알아듣지만 대답은 '예' 혹은 '아니요'의 뜻을 지닌 그들의 언어 'da'와 'ja'로 대답하는데, 어떤 단어가 '예'이고 '아니요'인지는 모른다. 이 때, 최소한의 질문으로 A, B, C가 각각 '참' '거짓' '랜덤' 중 누구인지 알아내는 방법을 모색하여라.

보충 설명: 한 사람에게 두 번 이상 질문할 수 있다(그렇게 되면 질문을 받지 못하는 사람도 생긴다) 첫 번째 질문의 답변에 따라 두 번째 질문의 내용과 대상을 지정할 수 있다.(세 번째 질문도 마찬가지) '랜덤'은 '예-아니요 질문'을 하면, 머릿속에서 던진 동전의 앞뒷면에 따라, 앞면이면 "ja", 뒷면이면 "da"라고 대답한다.

Wikipedia article: The Hardest Logic Puzzle Ever

▼ 전략 1

"da"와 "ja" 중 각각 어느 것이 "예"이고, 어느 것이 "아니요"인지를 구별해 내자. 참과 거짓이 둘다 "예"라고 답하는 질문을 생각해 보자.

▼ 전략 2

참과 거짓을 구별하기 전에 랜덤을 먼저 구별해 내야 한다. 참과 거짓이 같은 대답을 하는 질문을 생각해 보자.

▼ 전략 3

질문 수를 줄이기 위해, "da"와 "ja"를 구별하지 않고, 참 또는 거짓에게 한 번만 질문하여 어떤 질문이 참인지, 거짓인지 알아내는 방법을 생각해 보자.

▼ 풀이

먼저, "da"와 "ja"를 구별하기 위해, 참과 거짓이 둘다 "예"라고 답하는 질문을 생각해 보자. "'1+1=2입니까'라는 질문에 당신은 어떻게 대답을 할 것입니까?"라고, 같은 질문을 세 사람에게 물어 보자. '참'은 '1+1=2입니까'라는 질문에 "예"라고 대답을 할 것이다. 따라서, "'1+1=2입니까'라는 질문에 당신은 어떻게 대답을 할 것입니까?"라는 질문에 "예"라고 답할 것이다. '거짓'은 '1+1=2입니까?'라는 질문에 "아니요"라고 답할 것이다. 따라서, '거짓'은 거짓말만 하므로, "'1+1=2입니까?'라는 질문에 당신은 어떻게 대답을 할 것입니까?"라는 질문에는 자신의 실제 대답인 "아니요"와 다르게 "예"라고 답할 것이다. 따라서, '참'과 '거짓' 모두 이 질문에 "예"라고 답한다. 즉, 세 사람에게 같은 질문을 세 번 했을 때, 세 명 중 적어도 두 명은 같은 대답을 할 것이고, 그것은 "예"를 뜻하는 대답이다. 예를 들어, 세 사람의 대답이 각각 "da", "da", "ja"이면, "da"는 "예"를, "ja"는 "아니요"를 의미한다.
다음으로, 랜덤이 아닌 한 사람을 찾기 위해, 참과 거짓이 다른 대답을 하는 질문을 생각해 보자. 세 사람에게 질문 "1+1=2입니까?"를 세 번 해 보자. '참'은 "예"를 뜻하는 대답을(위에서 알아낸 것), '거짓'은 "아니요"를 뜻하는 대답을 할 것이다. 이 질문에 세 사람의 대답 중 나머지 두 사람과 다른 대답을 하는 사람이 있을 것인데, 다른 대답을 한 사람이 "예"라고 답했다면, 이 사람은 '참'(이 사람이 만약 랜덤이라면 참과 거짓이 같은 대답을 한 것이 되어 모순이다.), "아니요"라고 답했다면 '거짓'이다. 이 사람에게, 옆에 한 사람을 가르키며, "저 사람은 '랜덤'입니까?"라고 물으면, 그 사람이 '참'인지 '거짓'인지, "da"와 "ja"가 각각 어떤 의미인지를 알고 있으므로, 가르킨 사람이 '랜덤'인지 알 수 있다. 따라서, 나머지 한 명도 알 수 있고, 세 사람을 '참', '거짓', '랜덤'으로 구별하였다.

▼ **응용**

실제로 이 문제를 제시한 조지 불로스는 이 문제에 대한 해답으로 다음을 제시했다.

먼저, 어떤 질문 Q를 참 또는 거짓에게 물었을 때, *da*와 *ja*의 뜻을 모르고, 물어보는 사람이 참인지 거짓인지 모를 때, 질문 한 번만으로 Q가 참인지 거짓인지 알아내는 방법은 다음과 같다.

> "당신에게 'Q'라고 물으면, 당신은 *ja*라고 대답하시겠습니까?"

대답이 *ja*이면 Q는 참, *da*이면 Q는 거짓이다. (실제로 Q가 참, 거짓일 때, *da*가 '예'일 때와 '아니요'일 때, 그리고 물어본 사람이 참일 때와 거짓일 때, 즉 이 8가지 경우에 대해 각각 따져보면 알 수 있다.) 이를 이용하여 다음과 같은 해답을 얻을 수 있다.

> Q1: B에게, "당신에게 'A는 랜덤입니까'라고 물으면, 당신은 *ja*라고 대답하시겠습니까?"라고 묻는다.

B가 *ja*라고 답하면, B가 랜덤이어서 무작위로 대답하고 있거나, B가 랜덤이 아니고 대답은 A가 랜덤임을 의미한다. 두 경우 모두 C는 랜덤이 아니다. 마찬가지 방법으로 B가 *da*라고 답하면, A가 랜덤이 아니다.

> Q2: 앞 질문에서 랜덤이 아닌 것으로 밝혀진 사람(A 또는 C)에게, "당신에게 '당신은 거짓입니까'라고 물으면, 당신은 *ja*라고 대답하시겠습니까?"라고 묻는다.

대답한 사람은 랜덤이 아니므로, 대답을 통해 그가 참인지 거짓인지 알 수 있다.

> Q3: 두 번째와 같은 사람에게, "당신에게 'B는 랜덤입니까'라고 물으면, 당신은 *ja*라고 대답하시겠습니까?"라고 묻는다.

만약 *ja*라고 답하면, B는 랜덤이고, 그러지 않았다면, 아직 질문하지 않은 사람이 랜덤이다. 따라서, 3번의 질문으로 참, 거짓, 랜덤이 각각 누구인지 밝혀낼 수 있다.

[서식 2]

2021 학생자율동아리 활동 보고서

자율동아리명	창의로운 수학생활	자율동아리 대표	이준석

활동 일시	2021 년 09 월 13 일 (월요일)
활동 시간	활동 시간 (3:35~4:20) (45 분)
활동 장소	Zoom 회의
참석자 (이름)	김희찬, 신정원, 양시훈, 이준석, 하장원, 배성재, 황지후, 전수아, 김민석, 박규태, 우현찬, 김문성, 이윤석, 유재희, 장우성 총 (15)명 참석

활 동 내 용 (구체적으로)

주제: 카드 게임의 필승 전략

이 게임을 끝까지 진행하여 모든 카드를 내게 되면 $n \times (2n+1)$ 이므로 $2n+1$의 배수가 되므로 B 가 무조건 이긴다. (혹은, 중간에 이길 수 있는 카드를 내서 이기는 방법도 당연히 존재한다)

따라서 B 는 A 가 이기는 것을 막을 수 있어야 한다. B 가 내는 차례에는 A 보다 카드가 한 장 더 많아 A 가 이기지 못하도록 하는 카드를 가지고 있음을 보이자.
B 의 카드 $k+1$장은 $2n+1$로 나눈 나머지가 모두 다르므로, 총 카드의 합 s에 B 의 카드를 한 장 냈을 때, 만들 수 있는 나머지는 $k+1$가지이다. 그런데, A 의 카드는 k장이므로, A 가 '이길 수 있는' 나머지는 k가지이다. 즉, B 의 $k+1$가지 중 A 가 이길 수 없는 1 가지가 존재하므로 그 카드를 내면 된다.

B 가 그 카드를 내고 A 가 임의의 카드를 하나 냈을 때 낸 모든 카드의 합은 S_1 이라 하자. 같은 원리로 B 는 계속해서 한 개의 카드를 더 가지고 있기 때문에 $S_1, S_2, \cdots$ 끝까지 진행하여 B 의 카드 1 개만이 남았을 때까지 지속하거나 중간에 A 가 이기는 것을 막음과 동시에 이길 수 있는 카드를 내서 B 가 항상 이길 수 있다.

위 내용이 사실임을 확인합니다.

2021 년 09 월 13 일

동아리대표: 이준석 서명

지도교사: 김선래 서명

카드 게임의 필승 전략(Winning strategy in a card game)

n은 자연수이고, 두 학생 A와 B가 1부터 $2n$까지 숫자가 적힌 $2n$장의 카드를 가지고 다음 규칙에 따라 게임을 한다.
$2n$장의 카드를 섞어 두 명의 학생에게 임의로 n장씩 나누어 준다. A부터 시작해 두 학생은 번갈아 가며 자신의 카드를 한 장씩 낸다. 두 학생이 낸 카드에 적힌 모든 숫자의 합이 $2n+1$의 배수가 될 때, 이 게임은 끝나고, 마지막에 카드를 낸 학생이 승리한다.
이때, 이 게임의 필승전략은 누구에게 존재하는가?

출처: Canada winter camp 2020—Game theory-Jacob Tsimerman

▼ **전략 1**
쉽게 예상할 수 있겠지만, 필승전략은 B에게 있다.

▼ **전략 2**
A가 이기지 못하도록 하는 카드를 B가 항상 가지고 있음을 보이면 된다.

▼ **전략 3**
$\bmod (2n+1)$에서 생각을 한다.(즉, 두 학생이 낸 카드에 적힌 모든 숫자의 합을 $2n+1$로 나눈 나머지를 생각한다.)

▼ **전략 4**
B가 카드를 내는 순간 B가 가지고 있는 카드의 수는 A가 가지고 있는 카드의 수보다 1개 더 많다.

▼ **풀이**
필승전략을 $\boxed{B}$에게 있다. 이제, A가 이기지 못하게 하는 카드를 B가 항상 가지고 있음을 보이자.
A와 B가 가지고 있는 카드에 적힌 모든 숫자들은 서로 다르고, B가 카드를 내는 차례에, B는 A보다 카드를 한 장 더 가지고 있다.
B 차례에, A가 가지고 있는 카드에 적힌 수들이 $a_1, a_2, \ldots, a_k$이면, B가 카드를 냈을 때 $\bmod 2n+1$에서 $-a_1, -a_2, \ldots, -a_k$가 되지 않도록 해야 한다.
B는 A보다 카드가 한 장 많으므로, $b_1, b_2, \ldots, b_k, b_{k+1}$을 가지고 있다면, 현재까지 낸 모든 숫자의 합을 s라 할 때,
B는 자신의 차례에 $s+b_1, s+b_2, \ldots, s+b_{k+1}$를 만들 수 있고, 이들은 $\bmod 2n+1$에서 서로 다르다.
즉, B가 만들 수 있는 합은 $k+1$가지이고, 만들지 말아야 할 합은 k가지 이다. 따라서, 만들지 말아야 할 합을 만들지 않을 수 있다.
1부터 $2n$까지의 모든 자연수의 합은 $n(2n+1)$로, $(2n+1)$의 배수이므로, 중간에 승부가 나지 않을 경우, 마지막 카드를 내는 B가 결국 승리를 하게 된다.

[서식 2]

2021 학생자율동아리 활동 보고서

자율동아리명	창의로운 수학생활	자율동아리 대표	이준석

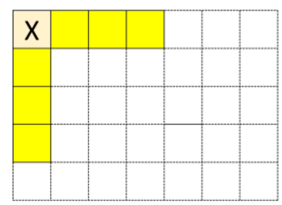
활동 일시	2021 년 10 월 05 일 (화요일)
활동 시간	활동 시간 (3:35~4:20) (45 분)
활동 장소	과학실
참석자 (이름)	신정원, 양시훈, 이준석, 하장원, 배성재, 황지후, 전수아, 김민석, 박규태, 우현찬, 김문성, 이윤석, 유재희, 장우성 총 (14)명 참석

활 동 내 용 (구체적으로)

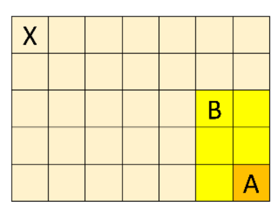
주제 : Chomp 게임

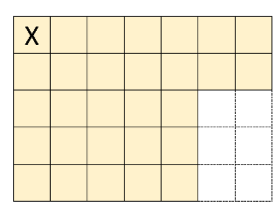
Chomp 게임은 일정한 직사각형 판에서 한 칸(독이 있는 칸)을 선택하면 그 칸의 왼쪽과 아래쪽에 있는 칸들을 모두 가져가고, 마지막 칸을 가져가는 사람이 지게 되는 게임이다.

<u>대칭 만들기 전략</u>: 독이 있는 칸을 기준으로 대칭을 만들면 승리하게 된다. 아래 [그림 1]과 같이 독이 있는 칸을 기준으로 대칭을 이룰 때, 두 개의 $1\times n$ 판에서 상대가 가져가는 판과 다른 판에서 상대가 선택한 것을 그대로 대칭적으로 선택하면 대칭 상태를 만든 플레이어가 독이 있는 칸을 제외한 마지막 칸을 가져가게 되므로 상대가 독이 있는 칸을 가져가게 된다. 따라서 승리가 가능하다.



<u>전략 훔치기 전략</u>: 처음 A 의 선택과 상관 없이 B 가 항상 이길 수 있다면, A 가 가장 오른쪽 아래 조각을 선택했을 때 B 의 선택을 훔쳐 이를 처음에 선택하여 승리할 수 있게 된다.
두 플레이어 A 와 B 가 게임을 할 때, 어떤 칸을 선택하더라도 a 는 항상 가져가게 된다. B 에게 필승전략이 있다고 가정하자. 즉, A 가 어떤 칸을 선택하더라도 이길 수 있는 칸이 있다. A 가 임의의 조각 a 를 가져갔을 때, B 는 가져가면 승리가 가능한 조각 b 가 존재한다. A 가 가장 오른쪽 밑 조각 1 개를 선택했을 때 B 는 어떤 조각 b 를 선택하여 항상 이길 수 있는 상태라고 가정하자. 즉, 상태 1 과 같은 상황에서 A 의 차례일 때, B 는 항상 이길 수 있다. 만약, 1 번째 플레이어인 A 가 b 을 먼저 선택하여 상태 1 을 만들면, A 는 B 의 필승전략을 가로채게 되고, 승리가 가능하다. A 가 B 의 전략을 훔칠 수 있다는 것은 B 가 필승전략을 가지고 있다는 전제에 모순이 생기기 때문에 A 에게 필승 전략이 있다.





[상태1]

위 내용이 사실임을 확인합니다.

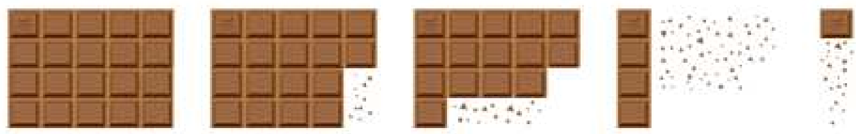
2021 년 10 월 05 일

동아리대표: 이준석 서명

지도교사: 김선래 서명

Chomp 게임의 필승 전략(Winnig strategy of Chomp)

일정한 직사각형 판에서 두 플레이어가 번갈아 가며 블럭을 가져간다. 한 블럭을 선택하면 그 블럭의 오른쪽과 아래쪽에 있는 블럭을 모두 가져가고, 마지막 블럭을 가져가는 사람이 지게 된다. Chomp 게임에서 첫 번째 플레이어에게 필승 전략이 있음을 보여라.



Wikipedia article: Chomp

Chomp Game Online: Chomp Game

▼ 전략 1

귀류법을 사용하여, 두 번째 플레이어가 필승전략을 가지고 있다고 가정하자.

▼ 전략 2

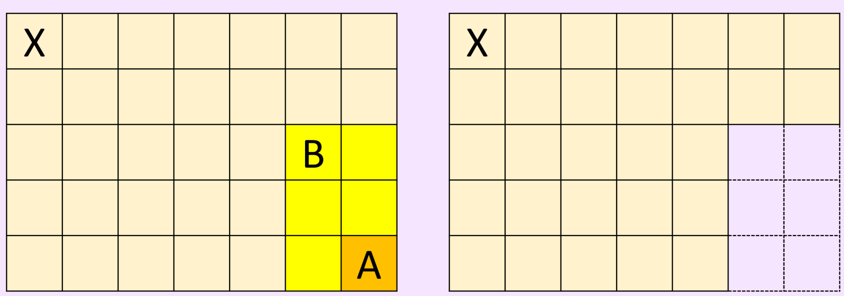
'전략 훔치기'의 전략을 사용한다.

▼ 전략 3

두 번째 플레이어의 전략을 훔치기 위해 첫 번째 플레이어가 가장 오른쪽 아래 위치한 블럭을 가져간다고 생각하자.

▼ 풀이

귀류법을 사용하여 두 번째 플레이어가 필승전략을 가지고 있다고 가정하자. 첫 번째 플레이어가 가장 오른쪽 아래 위치한 블럭(A)을 가져갔을 때, 두 번째 플레이어가 필승전략에 따라 선택하는 블럭을 B라고 하자.



[상태1]

그러면 B 블럭을 선택한 이후 위 [상태 1]을 만드는 사람이 필승전략을 가지고 있다.

하지만 첫 번째 플레이어가 처음에 B블럭을 선택하면 [상태 1]을 만들 수 있고, 이는 두 번째 플레이어가 필승전략을 가지고 있다는 가정에 모순이다.

이에 우리는 아래 Remark의 내용에 따라 첫 번째 플레이어가 필승전략을 가진다는 결론을 내릴 수 있다.

▼ Remark

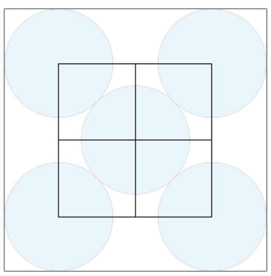
위 풀이에서 두 번째 플레이어가 필승전략이 없다는 것은 증명이 되었다. 하지만 첫 번째 플레이어에게 필승전략이 존재한다는 결론을 내기 위해서는 Chomp 게임에 두 플레이어 중 적어도 한 명에게 필승전략이 존재함을 보여야 한다. 이는 체르멜로 정리에 따라 Chomp 게임도 필승전략이 존재하므로 B에게 필승전략이 없다면, A에게 필승전략이 있다는 논리가 성립한다.

[서식 2]

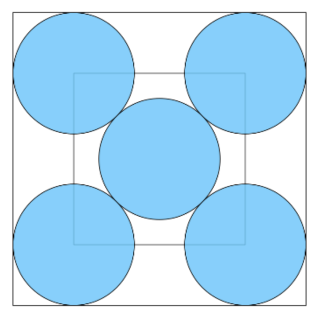
2021 학생자율동아리 활동 보고서			
자율동아리명	창의로운 수학생활	자율동아리 대표	이준석

활동 일시	2021 년 10 월 15 일 (월요일)
활동 시간	활동 시간 (3:35~4:20) (45 분)
활동 장소	Zoom 회의
참석자 (이름)	김희찬, 신정원, 양시훈, 이준석, 하장원, 배성재, 황지후, 전수아, 김민석, 박규태, 우현찬, 김문성, 이윤석, 유재희, 장우성 총 (15)명 참석
활 동 내 용 (구체적으로)	

주제: 정사각형 안에 원 채우기



정사각형 안에 5 개의 크기가 같은 원을 겹치지 않게 배치하려면 비둘기 집의 원리를 이용하여 해결할 수 있다. 비둘기 집의 원리는 $n+1$개의 물건을 n개의 상자에 넣을 때 적어도 어느 한 상자에는 두 개 이상의 물건이 들어 있다는 원리를 말한다. 이때 비둘기=원의 중심(원은 넓이가 있는 도형으로 고려하기 힘들어서 중심만 고려함)으로 하고, 원의 중심이 위치할 수 있는 공간을 비둘기 집의 전체라고 가정하면, 변의 길이가 2 인 정사각형에 원이 꼭 맞게 들어갈 때 원의 중심은 왼쪽, 오른쪽, 위쪽, 아래쪽에서 각각 r(원의 반지름)만큼 떨어진 공간이 전체 비둘기 집이 된다. 원의 중심은 5 개이므로, 왼쪽과 같이 비둘기 집을 4 개로 나누면, 비둘기 집의 원리에 의해 나누어진 네 비둘기 집 중 원의 중심이 2 개 이상 들어가는 집이 존재하고, 작은 정사각형(비둘기집) 하나에 오른쪽 그림과 같이 마주보는 두 꼭짓점에 위치해야 원의 중심 사이의 거리가 최대가 되고, 그래야 반지름이 최대가 될 수 있다. 나머지 네 개의 원도 같은 결과가 나온다. 따라서 아래와 같이 원을 배치했을 때, 원의 반지름의 최댓값이 나온다.



위 내용이 사실임을 확인합니다.

2021 년 10 월 15 일

동아리대표: 이준석 서명

지도교사: 김선래 서명

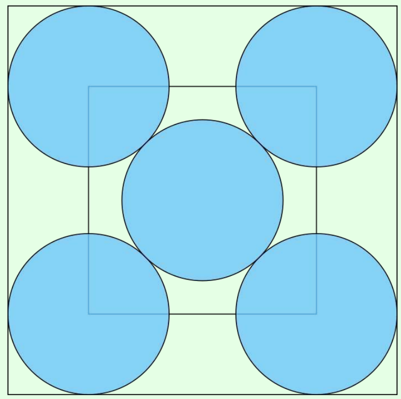
정사각형 안에 원 채우기(Circle packing in a square)

한 변의 길이가 2인 정사각형 안에 크기가 같은 원 5개를 겹치지 않게 채워 넣으려고 한다. 이 때, 원의 반지름의 최댓값을 구하시오.

Wikipedia article: Circle packing in a square

▼ **전략 1**

다음과 같은 형태에서 원의 반지름이 최대가 된다고 추측해 볼 수 있다.



▼ **전략 2**

비둘기집 원리를 적용하라. 비둘기집 원리를 적용하기 위해서는 비둘기와 집을 어떻게 설정할지 정해야 한다.

▼ **전략 3**

원을 그 도형 자체로 고려하지 말고 간단하게 나누어 생각하자.

→도형 원을 원의 중심과 반지름으로 나누어 생각하자. 여기서 원의 중심은 비둘기에 해당한다.

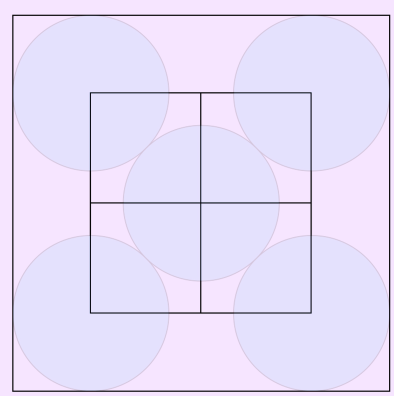
▼ **전략 4**

비둘기집 원리를 적용할 때 비둘기는 원의 중심 5개이면, 집은 원의 중심이 들어갈 수 있는 공간이어야 하고, 원의 중심보다 개수가 하나 적은 4개여야 한다.

▼ **풀이**

한 변의 길이가 2인 정사각형 안에 원 5개를 채우는데, 원의 중심과 반지름으로 나누어 생각하면, 점 5개를 잡고, 점과 점, 점과 정사각형의 변 사이의 거리가 각각 원의 반지름 r보다 크거나 같아야 한다.

정사각형의 네 변에서 각각 r만큼 떨어진 변으로 작은 정사각형을 만들고 오른쪽 같이 네 개로 나누자.원의 중심 5개를 작은 정사각형 4개 안에 넣으면, 비둘기집 원리에 의해 원의 중심을 두 개 이상 포함하는 작은 정사각형이 존재한다. 한 변의 길이가 정해진 정사각형에서 두 점 사이의 거리가 최대가 되도록 하려면 정사각형의 마주보는 두 꼭짓점에 두 점을 잡아야 한다. 이 때, 작은 정사각형의 한 변의 길이는 $1-r$이므로 아래 그림과 같이 5개의 원의 중심이 위치할 때,



$$\sqrt{2}(1-r)=r$$
$$r=2-\sqrt{2}$$

따라서, 원의 반지름의 최댓값은 $2-\sqrt{2}$이다.

[서식 2]

2021 학생자율동아리 활동 보고서

자율동아리명	창의로운 수학생활	자율동아리 대표	이준석

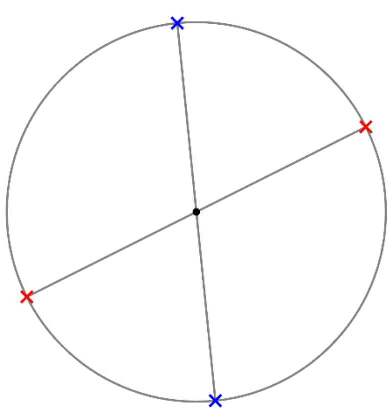
활동 일시	2021 년 11 월 01 일 (월요일)
활동 시간	활동 시간 (3:35~4:20) (45 분)
활동 장소	과학실
참석자 (이름)	김희찬, 신정원, 양시훈, 이준석, 하장원, 배성재, 황지후, 전수아, 김민석, 박규태, 우현찬, 김문성, 이윤석, 유재희 총 (14)명 참석

활 동 내 용 (구체적으로)

주제: 원 위의 세 점이 원의 중심을 포함할 확률

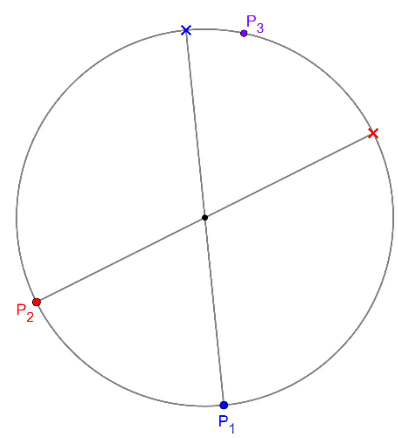
임의의 세 점을 무작위로 잡는 대신 임의의 두 지름을 정하여 각 지름의 양 끝 점 중 무작위로 한 점에 P_1, P_2를 각각 잡는다. 즉, 임의로 두 지름을 정하면 P_1, P_2를 잡는 방법은 네 가지가 존재하고, 이는 무작위로 두 점을 잡는 것과 동일하다.

여기서 P_3를 임의로 고르면 위 네 가지 경우 중 한 가지(호 P_1P_2의 반대쪽에 점 P_3가 놓이는 경우)만 삼각형 $P_1P_2P_3$가 원의 중심을 포함하게 되고, 따라서 확률은 1/4 이다. 이는 임의로 세 점을 잡았을 때 삼각형이 원의 중심을 포함할 확률과 동일하므로 정답은 1/4.



왼쪽과 같이 두 지름을 잡았을 때, 파랑 ×에는 P_1, 빨강 ×에는 P_2가 올 수 있다.

P_3가 오른쪽과 같이 정해지면, 두 점 P_1, P_2도 오른쪽과 같이 정해진다.



위 내용이 사실임을 확인합니다.

2021 년 11 월 01 일

동아리대표: 이준석 서명

지도교사: 김선래 서명

원 위의 세 점이 원의 중심을 포함할 확률

원 위에 임의로 점 세 개를 잡았을 때, 세 점을 꼭짓점으로 갖는 삼각형이 원의 중심을 포함할 확률을 구하시오.

▼ **전략 1**

세 점을 모두 임의로 잡았을 때는 확률을 계산하기 어렵다. 점 몇 개를 고정시키고 생각해 보자.

▼ **전략 2**

세 점 중 두 점이 고정되었을 때 나머지 한 점이 올 수 있는 곳을 생각해 보자.

▼ **전략 3**

세 점 중 두 점을 고정시키는 것은 임의의 경우가 아니다. 지름을 두 개 임의로 선택한 뒤 한 지름의 양 끝 점 중 임의로 한 점을 선택하는 방법으로 두 점을 임의로 고른다고 생각해 보자. 이때 나머지 한 점이 임의로 주어졌을 때 지름 위의 두 점이 문제의 조건을 만족시키도록 올 확률을 계산해 보자.

▼ **풀이**

원 위에 세 점 A, B, C를 선택한다고 하자. 원 위에 임의로 두 지름 a, b를 선택하자. 이때, 지름 a의 양 끝 점 중 임의로 점 A를, 지름 b의 양 끝 점 중 임의로 점 B를 선택한다고 생각하자. 이때 점 C를 임의로 선택하면, 두 지름에 의해 잘린 네 호 중 한 곳에 위치할 것이고, 점 A와 B는 호의 양 끝 점이 아닌 나머지 두 점에 위치해야 한다. 즉, 지름 a, b 위에 점 A, B를 선택하는 방법은 각각 2가지로 총 $2 \times 2 = 4$가지이고, 문제의 조건을 만족시키는 경우는 1가지이다. 따라서 임의로 세 점을 잡았을 때 세 점으로 이루어진 삼각형이 꼭짓점을 포함할 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

▼ **응용**

이 문제를 3차원으로 확장시켜 보자. 구의 표면 위에 임의로 점 네 개를 잡았을 때, 네 점으로 만든 사면체가 구의 중심을 포함할 확률을 구해 보자. 비슷한 방법으로 구 위에 임의로 지름 세 개를 잡고, 각 지름의 양 끝 점 중 하나에 한 점을 잡는다고 하자. 이때, 나머지 한 점이 임의로 주어지면 지름으로 나누어진 구 표면에서 그 점을 포함한 면의 반대쪽에 세 점이 위치해야 한다. 따라서 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{8}$이다.

[서식 2]

2021 학생자율동아리 활동 보고서

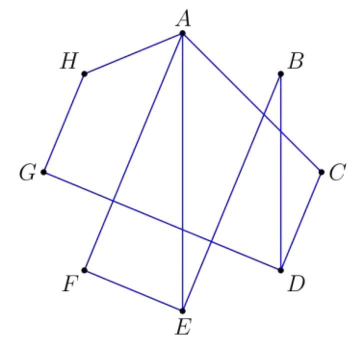
자율동아리명	창의로운 수학생활	자율동아리 대표	이준석

활동 일시	2021 년 11 월 08 일 (월요일)
활동 시간	활동 시간 (3:35~4:20) (45 분)
활동 장소	Zoom 회의
참석자 (이름)	김희찬, 양시훈, 이준석, 하장원, 배성재, 황지후, 전수아, 김민석, 박규태, 우현찬, 김문성, 이윤석, 유재희, 장우성 총 (14)명 참석

활 동 내 용 (구체적으로)

주제: Friendship Paradox

문제: 친구가 적어도 1 명 이상 존재하는 사람들의 집합이 있다. 여기서 자신의 친구들 중 자신 이상의 친구를 가진 친구가 존재하는 사람이 그렇지 않은 사람보다 많음을 보여라.



예시: 아래 그림에서 자신의 친구들 중 자신 이상의 친구를 가진 친구가 존재하는 사람은 B, C, E, F, G, H로 6 명이고, 그렇지 않은 사람은 A, D로 2 명이다. 따라서 $6 > 2$ 이므로 성립한다.

보조 정리: 각 점의 차수가 1 이상인 이분그래프 $G(A, B)$에서 $|A| \geq |B|$ 이면 $\deg(b) \geq \deg(a)$인 인접한 두 정점 $a \in A, b \in B$가 존재한다. (증명 없이 활용한다.)

풀이: 문제의 조건을 만족하는 사람들의 집합을 A, 그렇지 않은 사람들의 집합을 B로 두고 사람들을 정점, 친구 관계를 변으로 생각하자. 여기서 $|A| > |B|$임을 보이면 된다. 귀류법을 사용하여, $|B| \geq |A|$라 가정하자.
B에 속한 두 원소 b_1, b_2가 인접하면 $\deg(b_1) > \deg(b_2) > \deg(b_1)$가 되어 모순이다.
A에 속한 두 원소 a_1, a_2가 인접할 경우, 변 $\{a_1, a_2\}$를 제거하자.
그렇게 해서 얻어진 그래프를 H라고 하면 $H(A, B)$는 이분그래프이다.
앞에서 $|B| \geq |A|$라 가정하였으므로, 위 보조 정리에 의해 $\deg_{\mathrm{H}}(a) \geq \deg_{\mathrm{H}}(b)$인 인접한 두 점 $a \in A, b \in B$가 존재한다. 여기서 $\deg_{\mathrm{G}}(a) \geq \deg_{\mathrm{H}}(a) \geq \deg_{\mathrm{H}}(B) = \deg_{\mathrm{G}}(b)$이므로 b와 인접한 점들 중에서 차수가 b의 차수 이상인 점이 존재하므로 모순이다. 따라서 $|A| > |B|$임이 증명되었다.

위 내용이 사실임을 확인합니다.

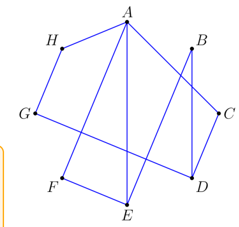
2021 년 11 월 08 일

동아리대표: 이준석 서명

지도교사: 김선래 서명

Friendship paradox

친구가 적어도 1명 이상 존재하는 사람들의 집합이 있다. 여기서 자신의 친구들 중 자신 이상의 친구를 가진 친구가 존재하는 사람이 그렇지 않은 사람보다 많음을 보여라.



이해를 돕기 위해 다음 그림을 예시로 들면, 자신의 친구들 중 자신 이상의 친구를 가진 친구가 존재하는 사람은 B, C, E, F, G, H로 6명이고, 그렇지 않은 사람은 A, D로 2명이다. 따라서 $6 > 2$ 이므로 성립한다.
다음 보조정리는 증명없이 사용할 수 있다.

각 점의 차수가 1 이상인 이분그래프 $G(A, B)$에서 $|A| \geq |B|$ 이면 $\deg(b) \geq \deg(a)$인 인접한 두 정점 $a \in A, b \in B$가 존재한다.

Wikipedia article: Friendship paradox

▼ 전략 1

문제의 조건을 만족하는 사람들의 집합을 A, 그렇지 않은 사람들의 집합을 B로 두고 사람들을 정점, 친구 관계를 변으로 생각하자. 여기서 $|A| > |B|$ 임을 보이면 된다.

▼ 전략 2

귀류법을 사용하여, $|B| \geq |A|$라 가정하자.

▼ 전략 3

집합 B에 속한 두 원소가 인접할 수 없음을 보이고, 집합 A에 속한 두 원소가 인접한 경우 그 변을 제거하여 이분그래프 $H(A, B)$를 만든다.

▼ 전략 4

위에서 $|B| \geq |A|$라 가정한 것을 이용하여 보조정리를 그래프 H에 적용한다.

▼ 전략 5

B에 속한 한 원소와 인접한 점들 중에서 차수가 그 원소의 차수 이상인 점이 존재함을 보여 모순을 이끌어낸다.

▼ 풀이

문제의 조건을 만족하는 사람들의 집합을 A, 그렇지 않은 사람들의 집합을 B로 두고 사람들을 정점, 친구 관계를 변으로 생각하자. 여기서 $|A| > |B|$ 임을 보이면 된다. 귀류법을 사용하여, $|B| \geq |A|$라 가정하자.

B에 속한 두 원소 b_1, b_2가 인접하면 $\deg(b_1) > \deg(b_2) > \deg(b_1)$ 가 되어 모순이다.
A에 속한 두 원소 a_1, a_2가 인접할 경우, 변 $\{a_1, a_2\}$를 제거하자.
그렇게 해서 얻어진 그래프를 H라고 하면 $H(A, B)$는 이분그래프이다.

앞에서 $|B| \geq |A|$라 가정하였으므로, 위 보조정리에 의해 $\deg_H(a) \geq \deg_H(b)$인 인접한 두 점 $a \in A, b \in B$가 존재한다. 여기서

$$\deg_G(a) \geq \deg_H(a) \geq \deg_H(b) = \deg_G(b)$$

이므로 b와 인접한 점들 중에서 차수가 b의 차수 이상인 점이 존재하므로 모순이다. 따라서 $|A| > |B|$임이 증명되었다.

[서식 2]

2021 학생자율동아리 활동 보고서

자율동아리명	창의로운 수학생활	자율동아리 대표	이준석

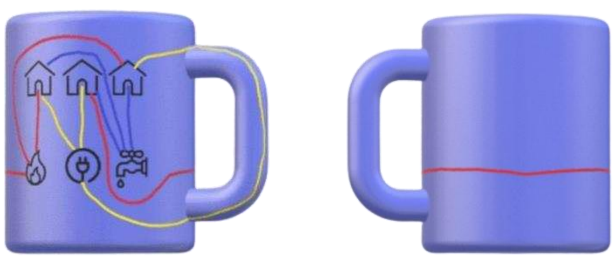
활동 일시	2021 년 11 월 15 일 (월요일)
활동 시간	활동 시간 (3:35~4:20) (45 분)
활동 장소	Zoom 회의
참석자 (이름)	김희찬, 신정원, 양시훈, 이준석, 하장원, 배성재, 황지후, 전수아, 김민석, 박규태, 우현찬, 김문성, 이윤석, 유재희, 장우성 총 (15)명 참석

활 동 내 용 (구체적으로)

주제: 머그컵 위의 세 유틸리티 문제

먼저, 세 집과 세 유틸리티를 연결한 선이 서로 교차하지 않는 경우, 이는 평면 그래프로 볼 수 있다. 평면그래프에서는 오일러 다면체 공식, v(꼭짓점의 수) − e(변의 수) + f(면의 수) = 2가 성립한다.
이 때, v(꼭짓점의 수)는 집 3 개와 유틸리티 3 개로 총 6 개, e(변의 수)는 집과 유틸리티를 모두 연결했으므로 9 이다. 이를 대입하면 f(면의 수)는 5 가 된다.
각 면은 집-유틸리티-다른 집-다른 유틸리티-처음 집으로 돌아와야 면이 형성되기 때문에 최소 4 개의 변으로 둘러싸여있다.
각 변은 최대 두 개의 면에 포함될 수 있으므로, 총 필요한 변의 수는 최소 $5 \times 4 \div 2 =$ 10 개이다.
그런데 이 때, e(변의 수)는 9 이므로 모순이다.

한편, 이 문제에서 머그잔의 손잡이를 이용하면 아래와 같은 방법으로 문제를 해결할 수 있다.



위 내용이 사실임을 확인합니다.

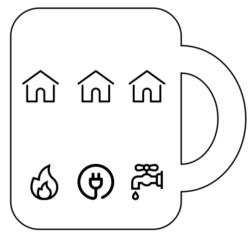
2021 년 11 월 15 일

동아리대표: 이준석 서명

지도교사: 김선래 서명

머그컵 위의 세 유틸리티 문제(Three utilities problem on a coffee mug)

머그컵 위에 세 집과 세 유틸리티, 불, 전기, 물이 그려져 있다. 세 집과 세 유틸리티를 선으로 각각 연결하여 모든 집에 불, 전기, 물을 연결하려고 할 때, 선이 서로 교차하지 않게 연결할 수 있는가?



Wikipedia article: Three utilities problem

▼ 전략 1

그래프 이론으로 생각한다면, 점 6개를 3개씩 두 집합으로 나누었을 때, 같은 집합 안의 두 점은 연결되어 있지 않고, 다른 집합 안의 임의의 두 점은 모두 연결이 되어 있는, 완전이분그래프, $K_{3,3}$이다. 선으로 그래프를 그릴 때, 선이 서로 교차하지 않게 연결할 수 있는 그래프는 '평면 그래프'이므로, 이 문제는 '$K_{3,3}$은 평면 그래프인가?'로 바꾸어 생각할 수 있다.

▼ 전략 2

평면 그래프에서 꼭짓점의 개수(v), 변의 개수(e), 면의 개수(f)는 다음과 같은 관계, 오일러 다면체 공식을 따른다.

$$v - e + f = 2$$

▼ 전략 3

오일러 다면체 공식을 적용할 때, 꼭짓점의 개수 $v = 6$이고, 변의 개수는 세 집을 세 유틸리티와 모두 연결하므로 $e = 9$이다. 이때, 이 그래프가 평면 그래프라면 오일러 다면체 공식 $v - e + f = 2$를 만족하므로 $f = 5$가 되어야 한다. 여기서 면을 이루기 위한 조건을 생각하여 모순을 보이면 된다.

▼ 풀이

먼저, 이 문제는 '$K_{3,3}$ 완전이분그래프가 평면 그래프인가?'로 바꿀 수 있다. 평면 그래프에서 꼭짓점의 개수(v), 변의 개수(e), 면의 개수(f)는 오일러 다면체 공식, $v - e + f = 2$를 만족한다. 여기서, 꼭짓점의 수는 집 3개와 유틸리티 3개로 총 6개($v = 6$), 변의 수는 집 3개와 유틸리티 3개를 모두 연결하므로 $3 \times 3 = 9$, 총 9개($e = 9$)이다. 오일러 다면체 정리, $v - e + f = 2$를 적용하면, $f = 5$이다. 한편, 면을 만들기 위해서 변이 필요한데, 면을 이루는 변을 면의 한 꼭짓점에서 변을 따라 이동할 때, 한 집에서 출발하면, 집은 유틸리티와만 연결이 되어 있으므로 한 유틸리티로 이동하게 되고, 다시 다른 집으로 갔다가 다른 유틸리티으로 이동한 다음 처음 출발한 집으로 돌아오는(집→유틸리티→다른 집→다른 유틸리티→처음 집) 경로로 최소 4개의 변을 거쳐야 처음 출발한 곳으로 돌아올 수 있다. 따라서, 위 그래프에서 한 면은 최소 4개의 변으로 이루어져 있다. 또, 한 변은 최대 2개의 면에 포함될 수 있다(변의 양쪽으로 두 면이 생기는 경우). 따라서, 면이 5개가 생기려면 최소 $5 \times 4 \div 2 = 10$개의 변이 필요하다. 그런데 위 그래프에서 변은 9개이므로 면이 5개가 만들어질 수 없다. 따라서, 위 그래프는 평면 그래프가 아니다.

▼ 응용

한편, 머그컵의 손잡이를 3차원에서 이용하면 다음과 같은 방법으로 가능하다.

[서식 2]

2021 학생자율동아리 활동 보고서			
자율동아리명	창의로운 수학생활	자율동아리 대표	이준석

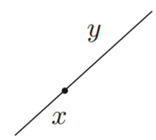
활동 일시	2021 년 12 월 03 일 (금요일)
활동 시간	활동 시간 (3:35~4:20) (45 분)
활동 장소	과학실
참석자 (이름)	김희찬, 신정원, 양시훈, 이준석, 하장원, 배성재, 황지후, 전수아, 김민석, 박규태, 우현찬, 김문성, 이윤석, 유재희, 장우성 총 (15)명 참석

활 동 내 용 (구체적으로)

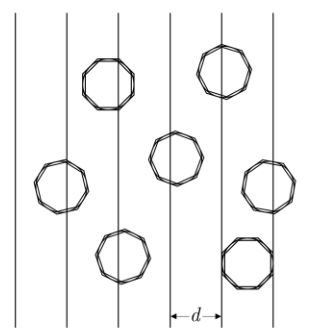
주제: 뷔퐁의 바늘 문제

바늘을 떨어뜨렸을 때 가로선과의 교점 개수의 '기댓값'을 E라 하자. 가로선 i개에 걸칠 확률이 p_i일 때, $E = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \cdots$ 로 표현할 수 있다. 이 때, $l \le d$이면, $p_2 = p_3 = \cdots = 0$이므로, $E = p_1$이 되고, 이는 문제에서 구하려는 바늘이 줄무늬에 걸칠 확률과도 같다.

길이가 l인 바늘을 두 조각으로 쪼개어 길이가 x인 바늘과 길이가 y인 바늘이 붙어있다고 생각해보자. 길이가 l인 바늘을 떨어뜨렸을 때의 기댓값을 $E(l)$이라고 하면, 길이가 l인 바늘과 가로선의 교점 개수의 기댓값은 두 바늘과 가로선의 교점 개수의 기댓값을 더한 것과 같으므로, $E(l) = E(x+y) = E(x) + E(y)$가 성립한다. 위 식에서 자연수 n에 대하여 $E(nx) = nE(x)$임을 이끌어낼 수 있고, $mE\left(\frac{n}{m}x\right) = E\left(m \times \frac{n}{m}x\right) = E(nx)$에서 유리수 r에 대하여 $E(rx) = rE(x)$임을 알 수 있다. $x \ge 0$에서 $E(x)$는 단조증가하므로 모든 실수 l에 대해, $E(l) = cl$임을 알 수 있다. (코시 함수 방정식의 풀이를 적용했다.) 이는 바늘의 모양과 상관없이 성립하며, 둘레의 길이가 l인 다각형 모양의 바늘을 떨어뜨릴 때에도 가로선과 교점 개수의 기댓값이 각 변의 교점 개수의 기댓값을 모두 더한 것과 같으므로 $E = cl$이 성립한다.



지름이 d인 원 모양의 바늘을 떨어뜨린다고 생각하자. 지름이 d인 원 모양의 바늘은 항상 가로선과 두 점에서 만나므로, 교점 개수의 기댓값은 2 이다. 원은 내접정다각형과 외접정다각형으로 근사할 수 있는데, 내접정다각형과 외접정다각형의 변의 수를 매우 크게 증가시키면 두 다각형의 둘레의 길이는 원의 둘레의 길이인 $d\pi$에 근접할 것이고, 이는 $E = cl = cd\pi = 2$이 성립함을 의미하여 $c = \frac{2}{d\pi}$,



$$E = cl = \frac{2}{\pi}\frac{l}{d} = p.$$

따라서 확률 $p = \frac{2}{\pi}\frac{l}{d}$.

위 내용이 사실임을 확인합니다.

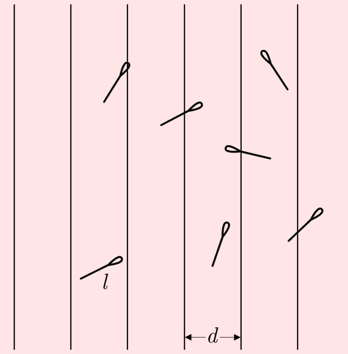
2021 년 12 월 03 일

동아리대표: 이준석 서명

지도교사: 김선래 서명

뷔퐁의 바늘 문제(Buffon's needle problem)

간격이 d인 가로 줄무늬에 길이 $l(\le d)$인 바늘을 임의로 떨어뜨릴 때, 바늘이 줄무늬에 걸칠 확률을 구하시오.



Wikipedia article: Buffon's needle problem

▼ **전략 1**

바늘을 떨어뜨렸을 때 가로선과의 교점 개수의 '기댓값'을 생각해 보자.

▼ **전략 2**

기댓값이 바늘 길이에 비례함을 보이자.

▼ **전략 3**

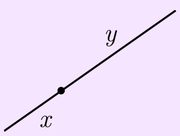
항상 가로선과의 교점 개수의 기댓값이 일정한 바늘, 즉 항상 가로선과 교점 개수가 일정한 경우를 생각해 보면, 지름이 d인 원 모양의 바늘을 떠올릴 수 있다. 지름이 d인 원 모양의 바늘을 떨어뜨리면 항상 가로선과의 교점 개수가 2개이다.

▼ **풀이**

먼저, 바늘이 가로선 i개와 만날 확률을 p_i라 할 때, 바늘을 떨어뜨렸을 때 가로선과의 교점 개수의 기댓값 E는 다음과 같다.

$$E = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \cdots$$

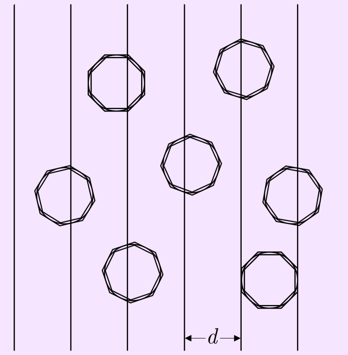
이때, $l \le d$이므로, $p_2 = p_3 = \cdots = 0$이고, 우리가 구하는 바늘이 가로선에 걸칠 확률, $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots = p_1$이고, 가로선과의 교점 개수의 기댓값 $E = p_1$이다.



길이가 l인 바늘을 두 조각으로 쪼개어 길이가 x인 바늘과 길이가 y인 바늘이 붙어있다고 생각해보자. 길이가 l인 바늘을 떨어뜨렸을 때의 기댓값을 $E(l)$이라고 하면, 길이가 l인 바늘과 가로선의 교점 개수의 기댓값은 두 바늘과 가로선의 교점 개수의 기댓값을 더한 것과 같으므로, $E(l) = E(x+y) = E(x) + E(y)$가 성립한다. 이때, 함수 $E(x)$는 단조증가(x가 커지면, 즉 바늘의 길이가 길어지면, $E(x)$, 가로선과의 교점 개수의 기댓값은 증가)하므로 코시 함수 방정식에 의해 어떤 상수 c에 대하여 $E(l) = cl$이 성립한다. 이는 바늘의 모양과 상관없이 성립하므로 둘레의 길이가 l인 다각형 모양의 바늘을 떨어뜨렸을 때에도 가로선과 교점 개수의 기댓값이 각 변의 교점 개수의 기댓값을 모두 더한 것과 같으므로 $E = cl$이 성립한다.

지름이 d인 원 모양의 바늘을 떨어뜨린다고 생각하자. 지름이 d인 원 모양의 바늘은 항상 가로선과 두 점에서 만나므로, 교점 개수의 기댓값은 2이다. 한편, 원에 내접정다각형과 외접정다각형을 그릴 때, 내접정다각형과 외접정다각형의 변의 수를 매우 크게 잡으면 두 다각형의 둘레의 길이는 원의 둘레의 길이인 $d\pi$에 근접할 것이고, 이는 $E = cl = cd\pi = 2$임을 의미하며, $c = \frac{2}{d\pi}$,

$$E = cl = \frac{2}{d\pi} l = p$$



따라서, 확률 $p = \frac{2}{\pi}\frac{l}{d}$이다.

[서식 2]

2021 학생자율동아리 활동 보고서

자율동아리명	창의로운 수학생활	자율동아리 대표	이준석

활동 일시	2021 년 12 월 05 일 (일요일)
활동 시간	활동 시간 (20:40~22:55) (135 분)
활동 장소	Zoom 회의
참석자 (이름)	김희찬, 신정원, 양시훈, 이준석, 하장원, 배성재, 황지후, 전수아, 김민석, 박규태, 우현찬, 김문성, 이윤석, 유재희, 장우성 총 (15)명 참석

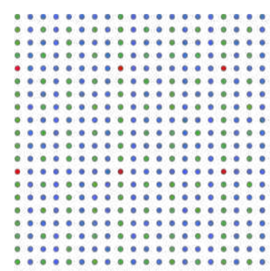
활 동 내 용 (구체적으로)

주제 : Monsky's theorem

유리수에 대한 2-진 절댓값 $v:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$을 다음과 같이 정의하자. 홀수 a,b와 정수 k에 대하여 $n=2^k\frac{a}{b}$일 때, $v(n)=2^{-k}$, $v(0)=0$. 2-진 절댓값은 다음 성질을 만족한다.

$$v(ab)=v(a)v(b),\qquad v(a+b)=\max\{v(a),v(b)\},\ if\ v(a)\neq v(b)$$

또한, 선택 공리에 의하여 v는 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$로도 확장할 수 있다.



단위 정사각형을 좌표평면의 제 1 사분면 위에 놓은 뒤, 홀수 n에 대하여 n개의 넓이가 같은 삼각형으로 정사각형을 나누었다고 가정하자. 삼각형 분할에 이용된 점을 오른쪽 그림과 같이 다음 규칙에 따라 세 가지 색으로 색칠하자.

$$(x,y)\ is\ colored=\begin{cases} blue, & if\ v(x)\geq 1, v(x)\geq v(y)\\ green, & if\ v(y)\geq 1, v(x)\leq v(y)\\ red, & if\ v(x)<1, v(y)<1\end{cases}$$

변 AB 위에는 $x=0$이므로 빨간색 또는 초록색이, 변 BC 위에는 $y=0$이므로 빨간색 또는 파란색이, 변 CD와 DA 위에는 각각 $x=1, y=1$이므로 초록색 또는 파란색이 칠해질 수 있다. 이때, 빨강-파랑 변은 $\overline{BC}$ 위에 홀수 번 나타나는데, Sperner's lemma 와 같은 방법으로 빨강-파랑 변을 따라 길을 이동할 때, 홀수 개의 빨강-파랑 변 중 1 개 이상은 다시 도형 밖으로 나오지 않고 중간에 어떤 삼각형에 멈추게 되는데, 이 삼각형은 세 꼭짓점의 색이 각각 파랑, 초록, 빨강이다. 이러한 삼각형–"무지개 삼각형"–의 넓이의 v값을 계산하여 모순을 보이자.

무지개 삼각형의 파랑 꼭짓점을 (x_b,y_b), 초록 꼭짓점을 (x_g,y_g), 빨강 꼭짓점을 (x_r,y_r)이라고 할 때, 삼각형의 넓이 S를 신발끈 공식을 이용하여 계산하면,

$$\begin{vmatrix} x_b & x_g & x_r & x_b\\ y_b & y_g & y_r & y_b\end{vmatrix}=x_by_g+x_gy_r+x_ry_b-x_gy_b-x_ry_g-x_by_r=d$$

$$S=\frac{1}{2}d,\qquad v(S)=v\left(\frac{1}{2}\right)v(d)=v\left(\frac{1}{2}\right)v(x_b)v(y_g)\geq 2\cdot 1\cdot 1=2$$

한편, 이 삼각형은 정사각형을 n등분한 것으로 넓이가 $\frac{1}{n}$이다. 즉, $S=\frac{1}{n}$이고, $v(S)=v\left(\frac{1}{n}\right)=1$ 모순이다. 따라서 정사각형은 홀수 개의 넓이가 같은 삼각형으로 분할할 수 없다.

위 내용이 사실임을 확인합니다.

2021 년 12 월 05 일

동아리대표: 이준석 서명

지도교사: 김선래 서명

Monsky의 정리(Monsky's theorem)

정사각형은 넓이가 같은 홀수 개의 삼각형으로 분할할 수 없다.

Wikipedia article: Monsky's theorem

▼ **전략 1**

먼저, 정사각형을 좌표평면 위에 놓고 Sperner의 보조 정리를 이용한다. 이 보조 정리를 활용하기 위해 정사각형을 홀수 개의 삼각형으로 분할한 후, 각 삼각형의 꼭짓점을 적절하게 색칠하자.

▼ **전략 2**

삼각형의 꼭짓점을 빨강, 파랑, 초록으로 색칠할 때, 실수의 2-진수 값의 조건에 따라 나누어 세 가지 색으로 칠하자. 이때, 전략 1과 아래 전략 3을 참고하여 Sperner의 보조 정리에서 꼭짓점의 색이 빨강, 파랑, 초록인 삼각형의 넓이를 구할 때, 문제의 조건과 모순을 이끌어 내야 한다.

▼ **전략 3**

정사각형을 홀수 개의 삼각형으로 분할했을 때, 그 삼각형의 넓이를 신발끈 정리로 구한다.

▼ **풀이**

유리수에 대한 '2-진 절댓값' $v : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$을 다음과 같이 정의하자.

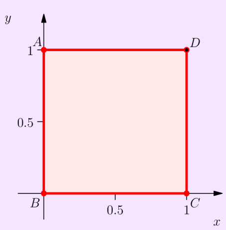
$$\text{홀수 } a, b\text{와 정수 } k\text{에 대하여 } n = 2^k \frac{a}{b}\text{일 때}, v(n) = 2^{-k} = \frac{1}{2^k}, v(0) = 0$$

'2-진 절댓값'은 다음과 같은 성질을 가진다.(증명은 아래 부록 참고)

$$v(xy) = v(x)v(y)$$

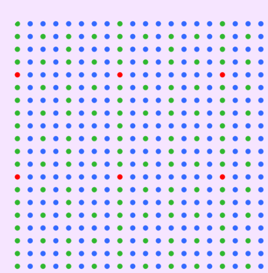
$$v(x+y) = \max\{v(x), v(y)\}, \quad \text{if} \quad v(x) \neq v(y)$$

또한, v는 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$로 확장할 수 있다.



단위 정사각형을 다음과 같이 좌표평면의 제1 사분면 위에 놓은 뒤, 홀수 n에 대하여 n개의 넓이가 같은 삼각형으로 정사각형을 나누었다고 생각하자. 분할된 삼각형의 꼭짓점을 오른쪽 그림과 같이 다음 규칙에 따라 세 가지 색으로 색칠하자.

$$(x, y) \text{ is colored} = \begin{cases} \text{blue}, & \text{if } v(x) \geq 1,\ v(x) \geq v(y) \\ \text{green}, & \text{if } v(y) \geq 1,\ v(x) \leq v(y) \\ \text{red}, & \text{if } v(x) < 1,\ v(y) < 1 \end{cases}$$



변 AB 위에는 $x = 0$이므로 빨간색 또는 초록색이, 변 BC 위에는 $y = 0$이므로 빨간색 또는 파란색이, 변 CD와 DA 위에서는 각각 $x = 1, y = 1$이므로 초록색 또는 파란색이 칠해져 있다. 또, 점 $A(0,1)$은 초록색, $B(0,0)$은 빨간색, $C(1,0)$과 $D(1,1)$은 파란색이므로, $\overline{BC}$ 위에 빨강-파랑 변은 홀수 번 나타나는데, Sperner의 보조 정리와 같은 방법으로 $\overline{BC}$ 위의 빨강-파랑 변으로 들어가 빨강-파랑 변만 통과하여 나오는 경로를 생각했을 때, 다시 도형 밖으로 나오지 않고 중간에 어떤 삼각형에서 멈추게 되는 경로가 존재하는데, 이 삼각형은 세 꼭짓점의 색이 각각 파랑, 초록, 빨강인 '무지개 삼각형'이 된다.

이 무지개 삼각형의 넓이의 v 값을 구하여 모순을 보이자. 무지개 삼각형의 파랑 꼭짓점을 (x_b, y_b), 초록 꼭짓점을 (x_g, y_g), 빨강 꼭짓점을 (x_r, y_r)이라고 할 때, 삼각형의 넓이 S를 신발끈 공식을 이용하여 계산하면,

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_b & x_g & x_r & x_b \\ y_b & y_g & y_r & y_b \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x_by_g + x_gy_r + x_ry_b - x_gy_b - x_ry_g - x_by_r)$$

한편, 여섯 개의 항 $x_by_g, x_gy_r, \cdots$의 v 값을 비교하면, 처음에 색칠한 조건에서, $v(x_b) \geq 1, v(y_g) \geq 1$이므로, $v(x_by_g) \geq 1, v(x_b) \geq v(y_b), v(y_g) \geq v(x_g) \implies v(x_by_g) \geq v(x_gy_b)$, 비슷한 방법으로
$1 > v(y_r),\ 1 > v(y_r)$이므로 여섯 개의 항 중 x_by_g가 v 값이 가장 크다.

$$\begin{aligned} v(S) &= v\left(\frac{1}{2}\right)v(x_by_g + x_gy_r + x_ry_b - x_gy_b - x_ry_g - x_by_r) \\ &= v\left(\frac{1}{2}\right)v(x_by_g) = v\left(\frac{1}{2}\right)v(x_b)v(y_g) \geq 2 \times 1 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

$$v(S) \geq 2$$

한편, 이 삼각형은 정사각형을 홀수 n에 대해 n등분한 것으로 넓이가 $\frac{1}{n}$이다. 즉, $v(\mathbf{S}) = v\left(\frac{1}{n}\right) = 1$이므로 모순이다. 따라서 정사각형은 홀수 개의 넓이가 같은 삼각형으로 분할할 수 없다.

▼ **부록**

2-진 절댓값의 성질 증명

(i) $v(xy) = v(x)v(y)$

(ii) $v(x+y) = \max\{v(x), v(y)\}, \quad \text{if} \quad v(x) \neq v(y)$

증명: $x = 2^k\frac{a}{b}\ y = 2^l\frac{c}{d}$로 표현하고, $k \geq l$라고 가정하자. 그러면, $v(x) = 2^{-k} \leq 2^{-l} = v(y)$이다. 이때, $v(xy) = v\left(2^k\frac{a}{b} \cdot 2^l\frac{c}{d}\right) = v\left(2^{k+l}\frac{ac}{bd}\right) = 2^{-(k+l)} = 2^{-k} \cdot 2^{-l} = v(x)v(y)$

또, (ii)의 증명에서는 위와 같이 x, y를 설정하고, $v(x) \neq v(y)$이므로, $k > l$라고 가정할 수 있고, $v(x) = 2^{-k} < 2^{-l} = v(y)$이다. 그러면, $x + y = 2^k\frac{a}{b} + 2^l\frac{c}{d} = 2^l\left(2^{k-l}\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = 2^l\left(\frac{2^{k-l}ad+bc}{bd}\right)$이고, bc, bd는 홀수이므로, $v(x+y) = v\left(2^l\left(\frac{2^{k-l}ad+bc}{bd}\right)\right) = 2^{-l} = v(y) = max\{v(x), v(y)\}$