

## 2021 학생자율동아리 활동 보고서

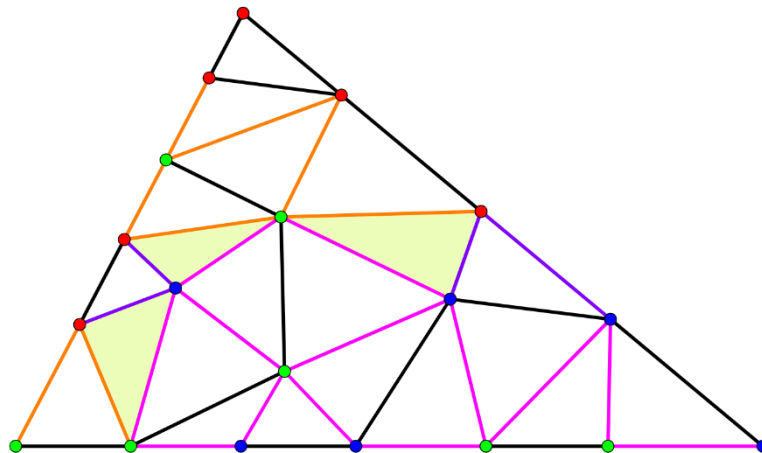
자율동아리명	창의로운 수학생활	자율동아리 대표	이준석
--------	-----------	----------	-----

활동 일시	2021 년 07 월 12 일 (월요일)
활동 시간	활동 시간 ( 3:25~4:10 ) (45 분)
활동 장소	Zoom 회의
참석자 (이름)	김희찬, 신정원, 양시훈, 이준석, 하장원, 배성재, 황지후, 전수아, 김민석, 박규태, 우현찬, 김문성, 이윤석, 유재희, 장우성 총 (15)명 참석

## 활동 내용 (구체적으로)

주제: Sperner의 보조 정리

먼저, 빨강-초록 선분과 같이 양 끝 점의 색이 다른 선분을 'colorful 선분'이라고 하자. 삼각형의 세 꼭짓점의 색은 각각 빨강, 초록, 파랑이므로 변 위에 colorful 선분은—colorful 선분이 있을 때마다 꼭짓점의 색이 바뀌는데, 한 변에서 양 끝 점, 즉 두 꼭짓점의 색은 다르므로—홀수 개가 존재한다. 변 위의 양 끝 점의 색이 같은 colorful 선분을 따라 경로를 만들 때, 만약 경로를 따라 삼각형 내부로 들어갔다가 다시 외부로 나오면 두 colorful 선분이 경로에 사용된다. 그러나, 한 변 위에 colorful 선분은 홀수 개이므로, 삼각형 내부에서 나오지 못하는 경로, 즉 중간에 막히는 경로도 생기게 된다. 이 막힌 곳의 삼각형에는 colorful 선분을 따라 들어갔지만, 나갈 수 없으므로, colorful 선분은 하나만 존재하게 되고, colorful 선분 위에 있지 않은 점은 colorful 선분의 양 끝 점의 색과 다른 색의 점으로, 이 막힌 곳에서 문제에 맞는, 세 꼭짓점의 색이 다른 삼각형이 존재하게 된다.



위 내용이 사실임을 확인합니다.

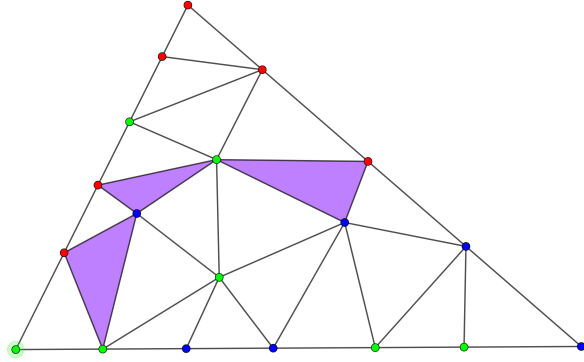
2021 년 07 월 12 일

동아리대표: 이준석 서명

지도교사: 김선래 서명

## Sperner의 보조 정리(Sperner's lemma)

삼각형 ABC가 주어졌다. 그 삼각형을 삼각형 분할(triangulation)한 뒤, 각 삼각형의 꼭짓점을 빨강, 초록, 파랑. 이렇게 세 가지 색깔로 칠한다. 이 때 삼각형 ABC의 꼭짓점 A, B, C는 각각 빨강, 초록, 파랑으로 칠하고, 변 AB, BC, CA 위의 점은 각각, 빨강 또는 초록, 초록 또는 파랑, 파랑 또는 빨강, 으로 칠한다. 삼각형 내부의 점은 세 가지 색 중 아무 색으로 칠한다. 이때, 삼각형 분할하여 만든 삼각형 중 세 꼭짓점의 색깔이 모두 서로 다른 색깔인 삼각형이 존재함을 보여라.



Wikipedia article: [Sperner's lemma](#)

### ▼ 전략 1

변  $AB$  위의 점은 모두 빨간색과 초록색으로 칠해져 있는데, 점  $A$ 는 빨간색,  $B$ 는 초록색이므로 중간에 빨간색에서 초록색으로, 또는 초록색에서 빨간색으로 변하는 경우는 홀수 번이다. 즉, 변  $AB$  위에 "빨강-초록 변"은 홀수 개가 존재한다. 변  $BC$ ,  $CA$  위에서도 마찬가지이다.

### ▼ 전략 2

"빨강-초록 변"과 같이 양 끝 점의 색이 다른 선분을 따라 이동하는 경로를 생각해 보자.

### ▼ 풀이

변  $AB$  위의 점은 모두 빨간색과 초록색으로 칠해져 있는데, 점  $A$ 는 빨간색,  $B$ 는 초록색이므로 중간에 빨간색에서 초록색으로, 또는 초록색에서 빨간색으로 변하는 경우는 홀수 번이다. 즉, 변  $AB$  위에 "빨강-초록 변"은 홀수 개가 존재한다. 변  $BC$ ,  $CA$  위에서도 마찬가지로 "초록-파랑 변"과 "파랑-빨강 변"이 각각 홀수 개씩 있다. 이 때, "빨강-초록 변"을 주황색, "초록-파랑 변"을 분홍색, "파랑-빨강 변"을 보라색으로 칠하자. 주황색 변만 통과하는 경로를 생각해 보면, 삼각형 밖에서 변  $AB$  위의 주황색 변을 통해 들어갔다가 만약 밖으로 나온다면 변  $AB$  위의 주황색 변으로 다시 나온다. 이때, 변  $AB$  위에 주황색 변은 홀수 개이므로 어떤 경로에서는 주황색 변을 따라 가다가 결국 더이상 움직일 수 없는 곳에 도착해야 한다. 이렇게 도착한 삼각형을  $P$ 라 하면,  $P$ 의 두 꼭짓점은 각각 빨간색과 초록색이고, 나머지 한 꼭짓점이 빨간색이나 초록색이면 주황변을 두 개 가지므로 주황색 변을 따라 다시 나갈 수 있다. 따라서 나머지 한 꼭짓점은 파란색이 되어야 하고, 삼각형  $P$ 는 세 꼭짓점의 색이 모두 다른 삼각형이다.

