[서식 2]

2021 학생자율동아리 활동 보고서

자율동아리명	창의로운 수학생활	자율동아리 대표	이준석

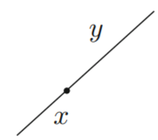
활동 일시	2021 년 12 월 03 일 (금요일)
활동 시간	활동 시간 (3:35~4:20) (45 분)
활동 장소	과학실
참석자 (이름)	김희찬, 신정원, 양시훈, 이준석, 하장원, 배성재, 황지후, 전수아, 김민석, 박규태, 우현찬, 김문성, 이윤석, 유재희, 장우성 총 (15)명 참석

활 동 내 용 (구체적으로)

주제: 뷔퐁의 바늘 문제

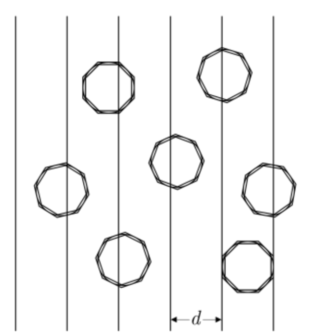
바늘을 떨어뜨렸을 때 가로선과의 교점 개수의 '기댓값'을 E라 하자. 가로선 i개에 걸칠 확률이 p_i일 때, $E = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \cdots$ 로 표현할 수 있다. 이 때, $l \le d$이면, $p_2 = p_3 = \cdots = 0$이므로, $E = p_1$이 되고, 이는 문제에서 구하려는 바늘이 줄무늬에 걸칠 확률과도 같다.

길이가 l인 바늘을 두 조각으로 쪼개어 길이가 x인 바늘과 길이가 y인 바늘이 붙어있다고 생각해보자. 길이가 l인 바늘을 떨어뜨렸을 때의 기댓값을 $E(l)$이라고 하면, 길이가 l인 바늘과 가로선의 교점 개수의 기댓값은 두 바늘과 가로선의 교점 개수의 기댓값을 더한 것과 같으므로, $E(l) = E(x+y) = E(x) + E(y)$가 성립한다. 위 식에서 자연수 n에 대하여 $E(nx) = nE(x)$임을 이끌어낼 수 있고, $mE\left(\frac{n}{m}x\right) = E\left(m \times \frac{n}{m}x\right) = E(nx)$에서 유리수 r에 대하여 $E(rx) = rE(x)$임을 알 수 있다. $x \ge 0$에서 $E(x)$는 단조증가하므로 모든 실수 l에 대해, $E(l) = cl$임을 알 수 있다. (코시 함수 방정식의 풀이를 적용했다.) 이는 바늘의 모양과 상관없이 성립하며, 둘레의 길이가 l인 다각형 모양의 바늘을 떨어뜨릴 때에도 가로선과 교점 개수의 기댓값이 각 변의 교점 개수의 기댓값을 모두 더한 것과 같으므로 $E = cl$이 성립한다.



지름이 d인 원 모양의 바늘을 떨어뜨린다고 생각하자. 지름이 d인 원 모양의 바늘은 항상 가로선과 두 점에서 만나므로, 교점 개수의 기댓값은 2 이다. 원은 내접정다각형과 외접정다각형으로 근사할 수 있는데, 내접정다각형과 외접정다각형의 변의 수를 매우 크게 증가시키면 두 다각형의 둘레의 길이는 원의 둘레의 길이인 $d\pi$에 근접할 것이고, 이는 $E = cl = cd\pi = 2$이 성립함을 의미하여 $c = \frac{2}{d\pi}$,

$$E = cl = \frac{2}{\pi}\frac{l}{d} = p.$$



따라서 확률 $p = \frac{2}{\pi}\frac{l}{d}$.

위 내용이 사실임을 확인합니다.

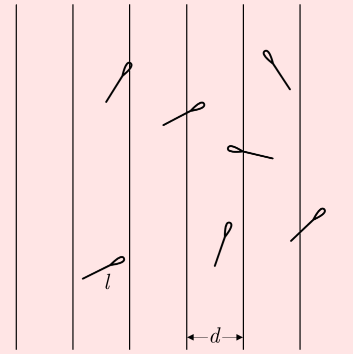
2021 년 12 월 03 일

동아리대표: 이준석 서명

지도교사: 김선래 서명

뷔퐁의 바늘 문제(Buffon's needle problem)

간격이 d인 가로 줄무늬에 길이 $l(\leq d)$인 바늘을 임의로 떨어뜨릴 때, 바늘이 줄무늬에 걸칠 확률을 구하시오.



Wikipedia article: Buffon's needle problem

▼ 전략 1

바늘을 떨어뜨렸을 때 가로선과의 교점 개수의 '기댓값'을 생각해 보자.

▼ 전략 2

기댓값이 바늘 길이에 비례함을 보이자.

▼ 전략 3

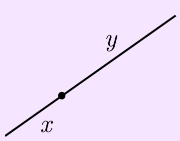
항상 가로선과의 교점 개수의 기댓값이 일정한 바늘, 즉 항상 가로선과 교점 개수가 일정한 경우를 생각해 보면, 지름이 d인 원 모양의 바늘을 떠올릴 수 있다. 지름이 d인 원 모양의 바늘을 떨어뜨리면 항상 가로선과의 교점 개수가 2개이다.

▼ 풀이

먼저, 바늘이 가로선 i개와 만날 확률을 p_i라 할 때, 바늘을 떨어뜨렸을 때 가로선과의 교점 개수의 기댓값 E는 다음과 같다.

$$E = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \cdots$$

이때, $l \leq d$이므로, $p_2 = p_3 = \cdots = 0$이고, 우리가 구하는 바늘이 가로선에 걸칠 확률, $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots = p_1$이고, 가로선과의 교점 개수의 기댓값 $E = p_1$이다.길이가 l인 바늘을 두 조각으로 쪼개어 길이가 x인 바늘과 길이가 y인 바늘이 붙어있다고 생각해보자. 길이가 l인 바늘을 떨어뜨렸을 때의 기댓값을 $E(l)$이라고 하면, 길이가 l인 바늘과 가로선의 교점 개수의 기댓값은 두 바늘과 가로선의 교점 개수의 기댓값을 더한 것과 같으므로, $E(l) = E(x+y) = E(x) + E(y)$가 성립한다. 이때, 함수 $E(x)$는 단조증가(x가 커지면, 즉 바늘의 길이가 길어지면, $E(x)$, 가로선과의 교점 개수의 기댓값은 증가)하므로 코시 함수 방정식에 의해 어떤 상수 c에 대하여 $E(l) = cl$이 성립한다. 이는 바늘의 모양과 상관없이 성립하므로 둘레의 길이가 l인 다각형 모양의 바늘을 떨어뜨렸을 때에도 가로선과 교점 개수의 기댓값이 각 변의 교점 개수의 기댓값을 모두 더한 것과 같으므로 $E = cl$이 성립한다.



지름이 d인 원 모양의 바늘을 떨어뜨린다고 생각하자. 지름이 d인 원 모양의 바늘은 항상 가로선과 두 점에서 만나므로, 교점 개수의 기댓값은 2이다. 한편, 원에 내접정다각형과 외접정다각형을 그릴 때, 내접정다각형과 외접정다각형의 변의 수를 매우 크게 잡으면 두 다각형의 둘레의 길이는 원의 둘레의 길이인 $d\pi$에 근접할 것이고, 이는 $E = cl = cd\pi = 2$임을 의미하며, $c = \frac{2}{d\pi}$,

$$E = cl = \frac{2}{d\pi} l = p$$

따라서, 확률 $p = \frac{2}{\pi}\frac{l}{d}$이다.