[서식 2]

2021 학생자율동아리 활동 보고서

자율동아리명	창의로운 수학생활	자율동아리 대표	이준석

활동 일시	2021 년 09 월 13 일 (월요일)
활동 시간	활동 시간 (3:35~4:20) (45 분)
활동 장소	Zoom 회의
참석자 (이름)	김희찬, 신정원, 양시훈, 이준석, 하장원, 배성재, 황지후, 전수아, 김민석, 박규태, 우현찬, 김문성, 이윤석, 유재희, 장우성 총 (15)명 참석

활 동 내 용 (구체적으로)

주제: 카드 게임의 필승 전략

이 게임을 끝까지 진행하여 모든 카드를 내게 되면 $n \times (2n+1)$ 이므로 $2n+1$의 배수가 되므로 B 가 무조건 이긴다. (혹은, 중간에 이길 수 있는 카드를 내서 이기는 방법도 당연히 존재한다)

따라서 B 는 A 가 이기는 것을 막을 수 있어야 한다. B 가 내는 차례에는 A 보다 카드가 한 장 더 많아 A 가 이기지 못하도록 하는 카드를 가지고 있음을 보이자.
B 의 카드 $k+1$장은 $2n+1$로 나눈 나머지가 모두 다르므로, 총 카드의 합 s에 B 의 카드를 한 장 냈을 때, 만들 수 있는 나머지는 $k+1$가지이다. 그런데, A 의 카드는 k장이므로, A 가 '이길 수 있는' 나머지는 k가지이다. 즉, B 의 $k+1$가지 중 A 가 이길 수 없는 1 가지가 존재하므로 그 카드를 내면 된다.

B 가 그 카드를 내고 A 가 임의의 카드를 하나 냈을 때 낸 모든 카드의 합은 S_1 이라 하자. 같은 원리로 B 는 계속해서 한 개의 카드를 더 가지고 있기 때문에 $S_1, S_2, \cdots$ 끝까지 진행하여 B 의 카드 1 개만이 남았을 때까지 지속하거나 중간에 A 가 이기는 것을 막음과 동시에 이길 수 있는 카드를 내서 B 가 항상 이길 수 있다.

위 내용이 사실임을 확인합니다.

2021 년 09 월 13 일

동아리대표: 이준석 서명

지도교사: 김선래 서명

카드 게임의 필승 전략(Winning strategy in a card game)

n은 자연수이고, 두 학생 A와 B가 1부터 $2n$까지 숫자가 적힌 $2n$장의 카드를 가지고 다음 규칙에 따라 게임을 한다.
$2n$장의 카드를 섞어 두 명의 학생에게 임의로 n장씩 나누어 준다. A부터 시작해 두 학생은 번갈아 가며 자신의 카드를 한 장씩 낸다. 두 학생이 낸 카드에 적힌 모든 숫자의 합이 $2n+1$의 배수가 될 때, 이 게임은 끝나고, 마지막에 카드를 낸 학생이 승리한다.
이때, 이 게임의 필승전략은 누구에게 존재하는가?

출처: Canada winter camp 2020—Game theory-Jacob Tsimerman

▼ 전략 1
쉽게 예상할 수 있겠지만, 필승전략은 B에게 있다.

▼ 전략 2
A가 이기지 못하도록 하는 카드를 B가 항상 가지고 있음을 보이면 된다.

▼ 전략 3
$\bmod (2n+1)$에서 생각을 한다.(즉, 두 학생이 낸 카드에 적힌 모든 숫자의 합을 $2n+1$로 나눈 나머지를 생각한다.)

▼ 전략 4
B가 카드를 내는 순간 B가 가지고 있는 카드의 수는 A가 가지고 있는 카드의 수보다 1개 더 많다.

▼ 풀이
필승전략을 $\boxed{B}$에게 있다. 이제, A가 이기지 못하게 하는 카드를 B가 항상 가지고 있음을 보이자.
A와 B가 가지고 있는 카드에 적힌 모든 숫자들은 서로 다르고, B가 카드를 내는 차례에, B는 A보다 카드를 한 장 더 가지고 있다.
B 차례에, A가 가지고 있는 카드에 적힌 수들이 $a_1, a_2, \ldots, a_k$이면, B가 카드를 냈을 때 $\bmod 2n+1$에서 $-a_1, -a_2, \ldots, -a_k$가 되지 않도록 해야 한다.
B는 A보다 카드가 한 장 많으므로, $b_1, b_2, \ldots, b_k, b_{k+1}$을 가지고 있다면, 현재까지 낸 모든 숫자의 합을 s라 할 때,
B는 자신의 차례에 $s+b_1, s+b_2, \ldots, s+b_{k+1}$를 만들 수 있고, 이들은 $\bmod 2n+1$에서 서로 다르다.
즉, B가 만들 수 있는 합은 $k+1$가지이고, 만들지 말아야 할 합은 k가지 이다. 따라서, 만들지 말아야 할 합을 만들지 않을 수 있다.
1부터 $2n$까지의 모든 자연수의 합은 $n(2n+1)$로, $(2n+1)$의 배수이므로, 중간에 승부가 나지 않을 경우, 마지막 카드를 내는 B가 결국 승리를 하게 된다.