[서식 2]

2021 학생자율동아리 활동 보고서

자율동아리명	창의로운 수학생활	자율동아리 대표	이준석

활동 일시	2021 년 12 월 05 일 (일요일)
활동 시간	활동 시간 (20:40~22:55) (135 분)
활동 장소	Zoom 회의
참석자 (이름)	김희찬, 신정원, 양시훈, 이준석, 하장원, 배성재, 황지후, 전수아, 김민석, 박규태, 우현찬, 김문성, 이윤석, 유재희, 장우성 총 (15)명 참석

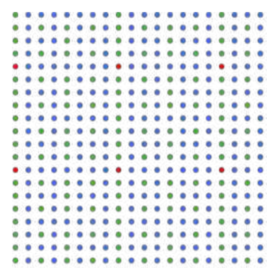
활 동 내 용 (구체적으로)

주제: Monsky's theorem

유리수에 대한 2-진 절댓값 $v:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$을 다음과 같이 정의하자. 홀수 a,b와 정수 k에 대하여 $n=2^k\frac{a}{b}$일 때, $v(n)=2^{-k}$, $v(0)=0$. 2-진 절댓값은 다음 성질을 만족한다.

$$v(ab)=v(a)v(b), \qquad v(a+b)=\max\{v(a),v(b)\},\ if\ v(a)\neq v(b)$$

또한, 선택 공리에 의하여 v는 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$로도 확장할 수 있다.



단위 정사각형을 좌표평면의 제 1 사분면 위에 놓은 뒤, 홀수 n에 대하여 n개의 넓이가 같은 삼각형으로 정사각형을 나누었다고 가정하자. 삼각형 분할에 이용된 점을 오른쪽 그림과 같이 다음 규칙에 따라 세 가지 색으로 색칠하자.

$$(x,y)\ is\ colored=\begin{cases} blue, & if\ v(x)\geq 1, v(x)\geq v(y)\\ green, & if\ v(y)\geq 1, v(x)\leq v(y)\\ red, & if\ v(x)<1, v(y)<1\end{cases}$$

변 AB 위에는 $x=0$이므로 빨간색 또는 초록색이, 변 BC 위에는 $y=0$이므로 빨간색 또는 파란색이, 변 CD와 DA 위에는 각각 $x=1, y=1$이므로 초록색 또는 파란색이 칠해질 수 있다. 이때, 빨강-파랑 변은 $\overline{BC}$ 위에 홀수 번 나타나는데, Sperner's lemma 와 같은 방법으로 빨강-파랑 변을 따라 길을 이동할 때, 홀수 개의 빨강-파랑 변 중 1 개 이상은 다시 도형 밖으로 나오지 않고 중간에 어떤 삼각형에 멈추게 되는데, 이 삼각형은 세 꼭짓점의 색이 각각 파랑, 초록, 빨강이다. 이러한 삼각형–"무지개 삼각형"–의 넓이의 v값을 계산하여 모순을 보이자.

무지개 삼각형의 파랑 꼭짓점을 (x_b,y_b), 초록 꼭짓점을 (x_g,y_g), 빨강 꼭짓점을 (x_r,y_r)이라고 할 때, 삼각형의 넓이 S를 신발끈 공식을 이용하여 계산하면,

$$\begin{vmatrix} x_b & x_g & x_r & x_b\\ y_b & y_g & y_r & y_b\end{vmatrix}=x_by_g+x_gy_r+x_ry_b-x_gy_b-x_ry_g-x_by_r=d$$

$$S=\frac{1}{2}d, \qquad v(S)=v\left(\frac{1}{2}\right)v(d)=v\left(\frac{1}{2}\right)v(x_b)v(y_g)\geq 2\cdot 1\cdot 1=2$$

한편, 이 삼각형은 정사각형을 n등분한 것으로 넓이가 $\frac{1}{n}$이다. 즉, $S=\frac{1}{n}$이고, $v(S)=v\left(\frac{1}{n}\right)=1$ 모순이다. 따라서 정사각형은 홀수 개의 넓이가 같은 삼각형으로 분할할 수 없다.

위 내용이 사실임을 확인합니다.

2021 년 12 월 05 일

동아리대표: 이준석 서명

지도교사: 김선래 서명

Monsky의 정리(Monsky's theorem)

정사각형은 넓이가 같은 홀수 개의 삼각형으로 분할할 수 없다.

Wikipedia article: Monsky's theorem

▼ 전략 1

먼저, 정사각형을 좌표평면 위에 놓고 Sperner의 보조 정리를 이용한다. 이 보조 정리를 활용하기 위해 정사각형을 홀수 개의 삼각형으로 분할한 후, 각 삼각형의 꼭짓점을 적절하게 색칠하자.

▼ 전략 2

삼각형의 꼭짓점을 빨강, 파랑, 초록으로 색칠할 때, 실수의 2-진수 값의 조건에 따라 나누어 세 가지 색으로 칠하자. 이때, 전략 1과 아래 전략 3을 참고하여 Sperner의 보조 정리에서 꼭짓점의 색이 빨강, 파랑, 초록인 삼각형의 넓이를 구할 때, 문제의 조건과 모순을 이끌어 내야 한다.

▼ 전략 3

정사각형을 홀수 개의 삼각형으로 분할했을 때, 그 삼각형의 넓이를 신발끈 정리로 구한다.

▼ 풀이

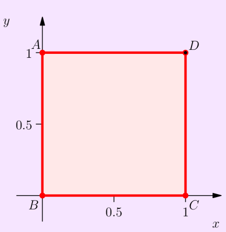
유리수에 대한 '2-진 절댓값' $v:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$을 다음과 같이 정의하자.

$$\text{홀수 } a, b\text{와 정수 } k\text{에 대하여 } n = 2^k\frac{a}{b}\text{일 때, } v(n) = 2^{-k} = \frac{1}{2^k},\ v(0) = 0$$

'2-진 절댓값'은 다음과 같은 성질을 가진다.(증명은 아래 부록 참고)

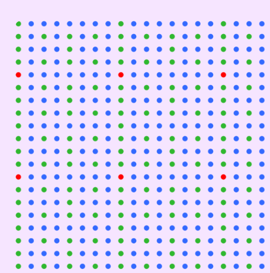
$$v(xy) = v(x)v(y)$$
$$v(x+y) = \max\{v(x), v(y)\}, \quad \text{if} \quad v(x)\neq v(y)$$

또한, v는 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$로 확장할 수 있다.



단위 정사각형을 다음과 같이 좌표평면의 제1 사분면 위에 놓은 뒤, 홀수 n에 대하여 n개의 넓이가 같은 삼각형으로 정사각형을 나누었다고 생각하자. 분할된 삼각형의 꼭짓점을 오른쪽 그림과 같이 다음 규칙에 따라 세 가지 색으로 색칠하자.

$$(x,y)\text{ is colored} = \begin{cases} \text{blue}, & \text{if } v(x)\geq 1,\ v(x)\geq v(y) \\ \text{green}, & \text{if } v(y)\geq 1,\ v(x)\leq v(y) \\ \text{red}, & \text{if } v(x)<1,\ v(y)<1 \end{cases}$$



변 AB 위에는 $x=0$이므로 빨간색 또는 초록색이, 변 BC 위에는 $y=0$이므로 빨간색 또는 파란색이, 변 CD와 DA 위에서는 각각 $x=1, y=1$이므로 초록색 또는 파란색이 칠해져 있다. 또, 점 $A(0,1)$은 초록색, $B(0,0)$은 빨간색, $C(1,0)$과 $D(1,1)$은 파란색이므로, $\overline{BC}$ 위에 빨강-파랑 변은 홀수 번 나타나는데, Sperner의 보조 정리와 같은 방법으로 $\overline{BC}$ 위의 빨강-파랑 변으로 들어가 빨강-파랑 변만 통과하여 나오는 경로를 생각했을 때, 다시 도형 밖으로 나오지 않고 중간에 어떤 삼각형에서 멈추게 되는 경로가 존재하는데, 이 삼각형은 세 꼭짓점의 색이 각각 파랑, 초록, 빨강인 '무지개 삼각형'이 된다.

이 무지개 삼각형의 넓이의 v 값을 구하여 모순을 보이자. 무지개 삼각형의 파랑 꼭짓점을 (x_b, y_b), 초록 꼭짓점을 (x_g, y_g), 빨강 꼭짓점을 (x_r, y_r)이라고 할 때, 삼각형의 넓이 S를 신발끈 공식을 이용하여 계산하면,

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_b & x_g & x_r & x_b \\ y_b & y_g & y_r & y_b \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x_b y_g + x_g y_r + x_r y_b - x_g y_b - x_r y_g - x_b y_r)$$

한편, 여섯 개의 항 $x_b y_g, x_g y_r, \cdots$의 v 값을 비교하면, 처음에 색칠한 조건에서, $v(x_b) \geq 1, v(y_g) \geq 1$이므로, $v(x_b y_g) \geq 1$, $v(x_b) \geq v(y_b), v(y_g) \geq v(x_g) \implies v(x_b y_g) \geq v(x_g y_b)$, 비슷한 방법으로
$1 > v(y_r),\ 1 > v(y_r)$이므로 여섯 개의 항 중 $x_b y_g$가 v 값이 가장 크다.

$$\begin{aligned} v(S) &= v\left(\frac{1}{2}\right) v(x_b y_g + x_g y_r + x_r y_b - x_g y_b - x_r y_g - x_b y_r) \\ &= v\left(\frac{1}{2}\right) v(x_b y_g) = v\left(\frac{1}{2}\right) v(x_b) v(y_g) \geq 2 \times 1 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

$$v(S) \geq 2$$

한편, 이 삼각형은 정사각형을 홀수 n에 대해 n등분한 것으로 넓이가 $\frac{1}{n}$이다. 즉, $v(\mathbf{S}) = v\left(\frac{1}{n}\right) = 1$이므로 모순이다. 따라서 정사각형은 홀수 개의 넓이가 같은 삼각형으로 분할할 수 없다.

▼ **부록**

2-진 절댓값의 성질 증명

(i) $v(xy) = v(x)v(y)$

(ii) $v(x+y) = \max\{v(x), v(y)\}, \quad \text{if} \quad v(x) \neq v(y)$

증명: $x = 2^k \frac{a}{b}$ $y = 2^l \frac{c}{d}$로 표현하고, $k \geq l$라고 가정하자. 그러면, $v(x) = 2^{-k} \leq 2^{-l} = v(y)$이다. 이때, $v(xy) = v\left(2^k \frac{a}{b} \cdot 2^l \frac{c}{d}\right) = v\left(2^{k+l} \frac{ac}{bd}\right) = 2^{-(k+l)} = 2^{-k} \cdot 2^{-l} = v(x)v(y)$

또, (ii)의 증명에서는 위와 같이 x, y를 설정하고, $v(x) \neq v(y)$이므로, $k > l$라고 가정할 수 있고, $v(x) = 2^{-k} < 2^{-l} = v(y)$이다. 그러면, $x + y = 2^k \frac{a}{b} + 2^l \frac{c}{d} = 2^l \left(2^{k-l} \frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = 2^l \left(\frac{2^{k-l}ad + bc}{bd}\right)$이고, bc, bd는 홀수이므로, $v(x+y) = v\left(2^l \left(\frac{2^{k-l}ad + bc}{bd}\right)\right) = 2^{-l} = v(y) = max\{v(x), v(y)\}$