[서식 2]

2021 학생자율동아리 활동 보고서

자율동아리명	창의로운 수학생활	자율동아리 대표	이준석

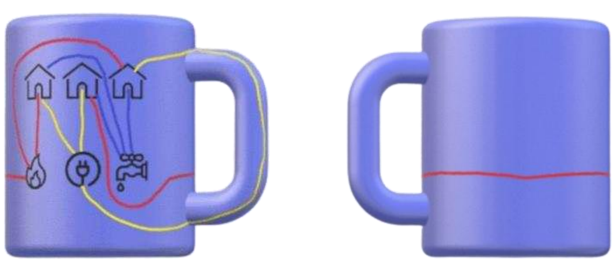
활동 일시	2021 년 11 월 15 일 (월요일)
활동 시간	활동 시간 (3:35~4:20) (45 분)
활동 장소	Zoom 회의
참석자 (이름)	김희찬, 신정원, 양시훈, 이준석, 하장원, 배성재, 황지후, 전수아, 김민석, 박규태, 우현찬, 김문성, 이윤석, 유재희, 장우성 총 (15)명 참석

활 동 내 용 (구체적으로)

주제: 머그컵 위의 세 유틸리티 문제

먼저, 세 집과 세 유틸리티를 연결한 선이 서로 교차하지 않는 경우, 이는 평면 그래프로 볼 수 있다. 평면그래프에서는 오일러 다면체 공식, v(꼭짓점의 수) $-$ e(변의 수) $+$ f(면의 수) $=$ 2가 성립한다.
이 때, v(꼭짓점의 수)는 집 3 개와 유틸리티 3 개로 총 6 개, e(변의 수)는 집과 유틸리티를 모두 연결했으므로 9 이다. 이를 대입하면 f(면의 수)는 5 가 된다.
각 면은 집-유틸리티-다른 집-다른 유틸리티-처음 집으로 돌아와야 면이 형성되기 때문에 최소 4 개의 변으로 둘러싸여있다.
각 변은 최대 두 개의 면에 포함될 수 있으므로, 총 필요한 변의 수는 최소 $5 \times 4 \div 2 =$ 10 개이다.
그런데 이 때, e(변의 수)는 9 이므로 모순이다.

한편, 이 문제에서 머그잔의 손잡이를 이용하면 아래와 같은 방법으로 문제를 해결할 수 있다.



위 내용이 사실임을 확인합니다.

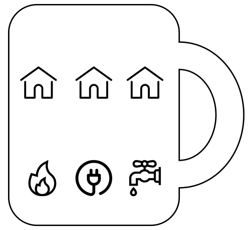
2021 년 11 월 15 일

동아리대표: 이준석 서명

지도교사: 김선래 서명

머그컵 위의 세 유틸리티 문제(Three utilities problem on a coffee mug)

머그컵 위에 세 집과 세 유틸리티, 불, 전기, 물이 그려져 있다. 세 집과 세 유틸리티를 선으로 각각 연결하여 모든 집에 불, 전기, 물을 연결하려고 할 때, 선이 서로 교차하지 않게 연결할 수 있는가?



Wikipedia article: Three utilities problem

▼ 전략 1

그래프 이론으로 생각한다면, 점 6개를 3개씩 두 집합으로 나누었을 때, 같은 집합 안의 두 점은 연결되어 있지 않고, 다른 집합 안의 임의의 두 점은 모두 연결이 되어 있는, 완전이분그래프, $K_{3,3}$이다. 선으로 그래프를 그릴 때, 선이 서로 교차하지 않게 연결할 수 있는 그래프는 '평면 그래프'이므로, 이 문제는 '$K_{3,3}$은 평면 그래프인가?'로 바꾸어 생각할 수 있다.

▼ 전략 2

평면 그래프에서 꼭짓점의 개수(v), 변의 개수(e), 면의 개수(f)는 다음과 같은 관계, 오일러 다면체 공식을 따른다.

$$v - e + f = 2$$

▼ 전략 3

오일러 다면체 공식을 적용할 때, 꼭짓점의 개수 $v = 6$이고, 변의 개수는 세 집을 세 유틸리티와 모두 연결하므로 $e = 9$이다. 이때, 이 그래프가 평면 그래프라면 오일러 다면체 공식 $v - e + f = 2$를 만족하므로 $f = 5$가 되어야 한다. 여기서 면을 이루기 위한 조건을 생각하여 모순을 보이면 된다.

▼ 풀이

먼저, 이 문제는 '$K_{3,3}$ 완전이분그래프가 평면 그래프인가?'로 바꿀 수 있다. 평면 그래프에서 꼭짓점의 개수(v), 변의 개수(e), 면의 개수(f)는 오일러 다면체 공식, $v - e + f = 2$를 만족한다. 여기서, 꼭짓점의 수는 집 3개와 유틸리티 3개로 총 6개($v = 6$), 변의 수는 집 3개와 유틸리티 3개를 모두 연결하므로 $3 \times 3 = 9$, 총 9개($e = 9$)이다. 오일러 다면체 정리, $v - e + f = 2$를 적용하면, $f = 5$이다. 한편, 면을 만들기 위해서 변이 필요한데, 면을 이루는 변을 면의 한 꼭짓점에서 변을 따라 이동할 때, 한 집에서 출발하면, 집은 유틸리티와만 연결이 되어 있으므로 한 유틸리티로 이동하게 되고, 다시 다른 집으로 갔다가 다른 유틸리티으로 이동한 다음 처음 출발한 집으로 돌아오는(집→유틸리티→다른 집→다른 유틸리티→처음 집) 경로로 최소 4개의 변을 거쳐야 처음 출발한 곳으로 돌아올 수 있다. 따라서, 위 그래프에서 한 면은 최소 4개의 변으로 이루어져 있다. 또, 한 변은 최대 2개의 면에 포함될 수 있다(변의 양쪽으로 두 면이 생기는 경우). 따라서, 면이 5개가 생기려면 최소 $5 \times 4 \div 2 = 10$개의 변이 필요하다. 그런데 위 그래프에서 변은 9개이므로 면이 5개가 만들어질 수 없다. 따라서, 위 그래프는 평면 그래프가 아니다.

▼ 응용

한편, 머그컵의 손잡이를 3차원에서 이용하면 다음과 같은 방법으로 가능하다.