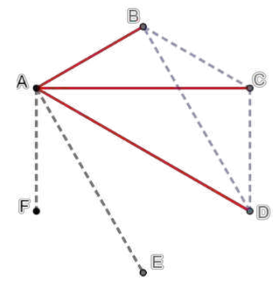
[서식 2]

2021 학생자율동아리 활동 보고서			
자율동아리명	창의로운 수학생활	자율동아리 대표	이준석

활동 일시	2021 년 05 월 10 일 (월요일)
활동 시간	활동 시간 (3:25∼4:10) (45 분)
활동 장소	Zoom 회의
참석자 (이름)	김희찬, 신정원, 양시훈, 이준석, 하장원, 배성재, 황지후, 전수아, 김민석, 박규태, 우현찬, 김문성, 이윤석, 유재희, 장우성 총 (15)명 참석

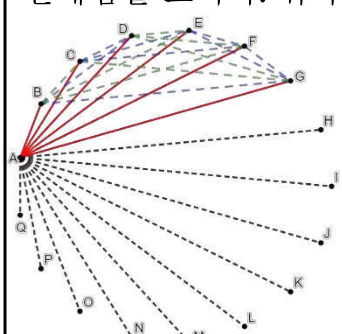
활 동 내 용 (구체적으로)

주제 : Sim 게임과 램지 이론



6 개의 점이 찍혀 있을 때, 임의의 두 점이 두 가지 색, 빨간색과 파란색 중 한 가지 색으로 연결되었다고 하자. 육각형에서 각 꼭짓점은 5 개의 변을 구성하고 있다. 이때, 비둘기집의 원리에 의해, 두 가지 색으로 칠해진 5 개의 변 중 적어도 같은 색인 변 3 개가 존재한다.다음 그림과 같이, 일반성을 잃지 않고 빨간색으로 꼭짓점 A 가 세 점, B, C, D 와 연결되어 있다고 하자. 이때, 세 변의 색이 같은 삼각형을 만들지 않기 위해서는 BC, CD, DB 중 하나라도 빨간색으로 칠해지면, 그 선분과 그 선분의 양 끝 점을 A 와 연결한 선분이 빨간색 삼각형을 이루므로 모두 파란색으로 칠해져야 한다. 하지만 이 경우, 삼각형 BCD 의 세 변이 모두 파란색이므로 세 변의 색이 같은 삼각형이 된다. 따라서, Sim 게임에서는 무승부가 불가능하다.

그렇다면 3 명이 Sim 게임을 비슷한 규칙으로 한다면 어떨까? 17 개의 점이 찍혀있다고 할 때, 임의의 두 점을 세 가지 색, 빨강, 파랑, 초록으로 칠하면 세 변의 색이 모두 같은 삼각형이 존재함을 보이자. 위와 비슷한 논리로 전개하면, 십칠각형에서 각 꼭짓점은 16 개의 꼭짓점과



연결되어 있다. 이때, 비둘기집의 원리에 의해, 세 가지 색으로 칠해진 16 개의 변 중 적어도 같은 색인 변 6 개가 존재한다. 마찬가지로 꼭짓점 A 가 여섯 개의 점, B, C, D, E, F, G 와 빨간색으로 연결되어 있다고 하자. 그럼, 여섯 개의 점, B∼G 끼리 이은 변은 빨간색일 수 없으므로, 초록색 또는 파란색이다. 하지만, 위에서 증명한 것에 따라 여섯 개의 점이 있을 때 임의의 두 점이 두 가지 색으로 연결되어 있으므로 세 변의 색이 모두 같은 삼각형이 존재할 수밖에 없다. 따라서, 17 개의 점이 찍혀있을 때, 임의의 두 점이 세 가지 색 중 하나로 연결되어 있으면 세 변의 색이 모두 같은 삼각형이 적어도 한 개 존재한다.

위 내용이 사실임을 확인합니다.

2021 년 05 월 10 일

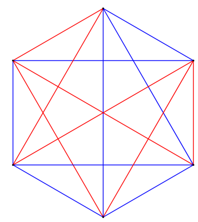
동아리대표: 이준석 서명

지도교사: 김선래 서명

Sim 게임과 램지 이론(Sim game and Ramsey theory)

여섯 개의 점이 찍혀 있는 판에서 두 사람이 게임을 한다. 두 사람은 번갈아 가면서 두 점을 선으로 연결하는데, 한 사람은 빨간색으로 다른 한 사람은 파란색으로 연결한다. 세 변이 모두 같은 색으로 이루어진 삼각형이 생기면 그 색을 칠한 사람이 진다. 모든 두 점이 서로 연결이 될 때까지 게임을 한다고 할 때, 게임이 무승부로 끝날 수 있는가?

다음은 파란색 플레이어가 이긴 모습이다.



Wikipedia article: Sim (pencil game) / Ramsey theory

▼ **전략 1**

문제에서 묻는 것은 여섯 개의 점을 두 개씩 모두 연결한 그래프에서 세 변의 색이 모두 같은 삼각형이 존재하지 않을 수 있는지 묻는 것과 동일하다.

▼ **전략 2**

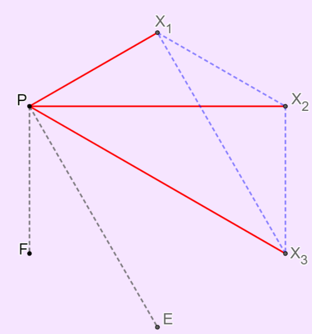
한 점과 연결된 선분의 개수가 5개이고, 그 중 적어도 3개는 같은 색이다.

▼ **전략 3**

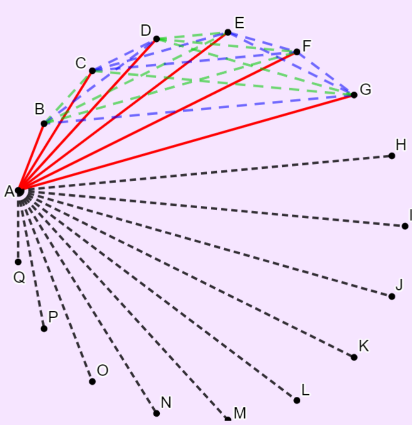
전략 2에서 한 점과 같은 색으로 연결된 세 점이 어떻게 연결되는지 생각해 보면 된다.

▼ **풀이**

여섯 개의 점에서 모든 두 점이 서로 연결된 그래프를 생각하자. 이 그래프(K_6)의 모든 변(선분)을 빨간색과 파란색으로 칠할 때, 세 변의 색이 같은 삼각형이 항상 존재함을 보이자.이 그래프에서 한 점과 연결된 변은 5개이므로, 5개 중 비둘기집 원리에 의해 적어도 세 변은 같은 색이다. 일반성을 잃지 않고, 파란색으로 세 점 X_1, X_2, X_3와 한 점 P가 연결되어 있다고 하자. 이 때, 세 점 X_1, X_2, X_3를 연결하는 세 변 중 파란색 변이 있으면—X_1과 X_2가 파란색 변으로 연결되었다고 하자.—삼각형 PX_1X_2의 세 변이 모두 파란색이다. 만약 X_1, X_2, X_3를 연결하는 세 변중 파란색 변이 없다면, 모든 변이 빨간색이므로, 삼각형 $X_1X_2X_3$의 세 변이 모두 빨간색이 된다. 따라서, 항상 세 변의 색이 같은 삼각형이 항상 존재하고, Sim 게임에서 무승부가 불가능함이 증명되었다.



▼ **응용**



17개의 점이 찍혀있다고 할 때, 임의의 두 점을 세 가지 색, 빨강, 파랑, 초록으로 칠하면 세 변의 색이 모두 같은 삼각형이 존재함을 보이자. 위와 비슷한 논리로 전개하면, 십칠각형에서 각 꼭짓점은 16개의 꼭짓점과 연결되어 있다.이때, 비둘기집의 원리에 의해, 세 가지 색으로 칠해진 16개의 변 중 적어도 같은 색인 변 6개가 존재한다. 마찬가지로 꼭짓점 A가 여섯 개의 점, B, C, D, E, F, G와 빨간색으로 연결되어 있다고 하자. 그럼, 여섯 개의 점, B~G끼리 이은 변은 빨간색일 수 없으므로, 초록색 또는 파란색이다. 하지만, 위에서 증명한 것에 따라 여섯 개의 점이 있을 때 임의의 두 점이 두 가지 색으로 연결되어 있으므로 세 변의 색이 모두 같은 삼각형이 존재할 수밖에 없다. 따라서, 17개의 점이 찍혀있을 때, 임의의 두 점이 세 가지 색 중 하나로 연결되어 있으면 세 변의 색이 모두 같은 삼각형이 적어도 한 개 존재한다.