[서식 2]

2021 학생자율동아리 활동 보고서

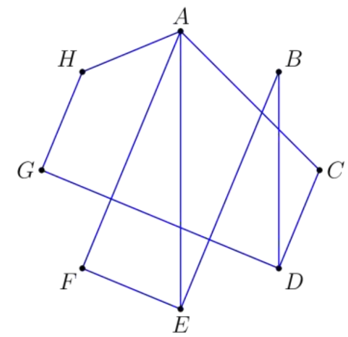
자율동아리명	창의로운 수학생활	자율동아리 대표	이준석

활동 일시	2021 년 11 월 08 일 (월요일)
활동 시간	활동 시간 (3:35~4:20) (45 분)
활동 장소	Zoom 회의
참석자 (이름)	김희찬, 양시훈, 이준석, 하장원, 배성재, 황지후, 전수아, 김민석, 박규태, 우현찬, 김문성, 이윤석, 유재희, 장우성 총 (14)명 참석

활 동 내 용 (구체적으로)

주제: Friendship Paradox

문제: 친구가 적어도 1 명 이상 존재하는 사람들의 집합이 있다. 여기서 자신의 친구들 중 자신 이상의 친구를 가진 친구가 존재하는 사람이 그렇지 않은 사람보다 많음을 보여라.



예시: 아래 그림에서 자신의 친구들 중 자신 이상의 친구를 가진 친구가 존재하는 사람은 B, C, E, F, G, H로 6 명이고, 그렇지 않은 사람은 A, D로 2 명이다. 따라서 $6 > 2$ 이므로 성립한다.

보조 정리: 각 점의 차수가 1 이상인 이분그래프 $G(A, B)$에서 $|A| \geq |B|$ 이면 $\deg(b) \geq \deg(a)$인 인접한 두 정점 $a \in A, b \in B$가 존재한다. (증명 없이 활용한다.)

풀이: 문제의 조건을 만족하는 사람들의 집합을 A, 그렇지 않은 사람들의 집합을 B로 두고 사람들을 정점, 친구 관계를 변으로 생각하자. 여기서 $|A| > |B|$임을 보이면 된다. 귀류법을 사용하여, $|B| \geq |A|$라 가정하자.
B에 속한 두 원소 b_1, b_2가 인접하면 $\deg(b_1) > \deg(b_2) > \deg(b_1)$가 되어 모순이다.
A에 속한 두 원소 a_1, a_2가 인접할 경우, 변 $\{a_1, a_2\}$를 제거하자.
그렇게 해서 얻어진 그래프를 H라고 하면 $H(A, B)$는 이분그래프이다.
앞에서 $|B| \geq |A|$라 가정하였으므로, 위 보조 정리에 의해 $\deg_{\mathrm{H}}(a) \geq \deg_{\mathrm{H}}(b)$인 인접한 두 점 $a \in A, b \in B$가 존재한다. 여기서 $\deg_{\mathrm{G}}(a) \geq \deg_{\mathrm{H}}(a) \geq \deg_{\mathrm{H}}(B) = \deg_{\mathrm{G}}(b)$이므로 b와 인접한 점들 중에서 차수가 b의 차수 이상인 점이 존재하므로 모순이다. 따라서 $|A| > |B|$임이 증명되었다.

위 내용이 사실임을 확인합니다.

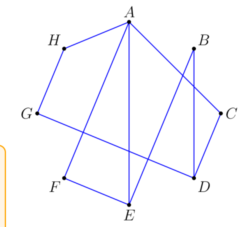
2021 년 11 월 08 일

동아리대표: 이준석 서명

지도교사: 김선래 서명

Friendship paradox

친구가 적어도 1명 이상 존재하는 사람들의 집합이 있다. 여기서 자신의 친구들 중 자신 이상의 친구를 가진 친구가 존재하는 사람이 그렇지 않은 사람보다 많음을 보여라.



이해를 돕기 위해 다음 그림을 예시로 들면, 자신의 친구들 중 자신 이상의 친구를 가진 친구가 존재하는 사람은 B, C, E, F, G, H로 6명이고, 그렇지 않은 사람은 A, D로 2명이다. 따라서 $6 > 2$ 이므로 성립한다.
다음 보조정리는 증명없이 사용할 수 있다.

각 점의 차수가 1 이상인 이분그래프 $G(A, B)$에서 $|A| \geq |B|$ 이면 $\deg(b) \geq \deg(a)$인 인접한 두 정점 $a \in A, b \in B$가 존재한다.

Wikipedia article: Friendship paradox

▼ **전략 1**
문제의 조건을 만족하는 사람들의 집합을 A, 그렇지 않은 사람들의 집합을 B로 두고 사람들을 정점, 친구 관계를 변으로 생각하자. 여기서 $|A| > |B|$ 임을 보이면 된다.

▼ **전략 2**
귀류법을 사용하여, $|B| \geq |A|$라 가정하자.

▼ **전략 3**
집합 B에 속한 두 원소가 인접할 수 없음을 보이고, 집합 A에 속한 두 원소가 인접한 경우 그 변을 제거하여 이분그래프 $H(A, B)$를 만든다.

▼ **전략 4**
위에서 $|B| \geq |A|$라 가정한 것을 이용하여 보조정리를 그래프 H에 적용한다.

▼ **전략 5**
B에 속한 한 원소와 인접한 점들 중에서 차수가 그 원소의 차수 이상인 점이 존재함을 보여 모순을 이끌어낸다.

▼ **풀이**
문제의 조건을 만족하는 사람들의 집합을 A, 그렇지 않은 사람들의 집합을 B로 두고 사람들을 정점, 친구 관계를 변으로 생각하자. 여기서 $|A| > |B|$ 임을 보이면 된다. 귀류법을 사용하여, $|B| \geq |A|$라 가정하자.

B에 속한 두 원소 b_1, b_2가 인접하면 $\deg(b_1) > \deg(b_2) > \deg(b_1)$ 가 되어 모순이다.
A에 속한 두 원소 a_1, a_2가 인접할 경우, 변 $\{a_1, a_2\}$를 제거하자.
그렇게 해서 얻어진 그래프를 H라고 하면 $H(A, B)$는 이분그래프이다.

앞에서 $|B| \geq |A|$라 가정하였으므로, 위 보조정리에 의해 $\deg_H(a) \geq \deg_H(b)$인 인접한 두 점 $a \in A, b \in B$가 존재한다. 여기서

$$\deg_G(a) \geq \deg_H(a) \geq \deg_H(b) = \deg_G(b)$$

이므로 b와 인접한 점들 중에서 차수가 b의 차수 이상인 점이 존재하므로 모순이다. 따라서 $|A| > |B|$임이 증명되었다.