[서식 2]

2021 학생자율동아리 활동 보고서

자율동아리명	창의로운 수학생활	자율동아리 대표	이준석

활동 일시	2021 년 04 월 26 일 (월요일)
활동 시간	활동 시간 (3:25~4:10) (45 분)
활동 장소	Zoom 회의
참석자 (이름)	김희찬, 신정원, 양시훈, 이준석, 하장원, 배성재, 황지후, 전수아, 김민석, 박규태, 우현찬, 김문성, 이윤석, 유재희, 장우성 총 (15)명 참석

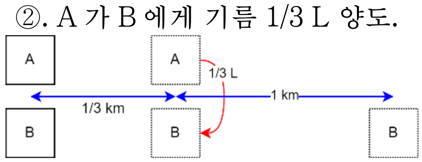
활 동 내 용 (구체적으로)

주제: 지프 사막 건너기 문제

Ⅰ. $n = 2$일 때,

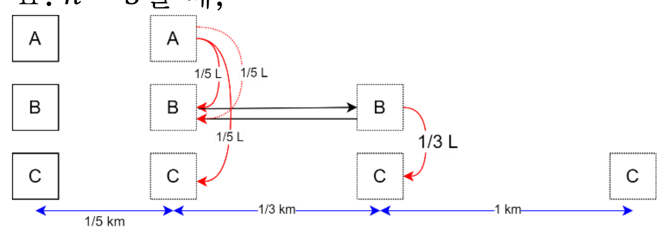
①. A, B 모두 1/3 km 씩 이동

②. A가 B에게 기름 1/3 L 양도.



③. A가 기지로 다시 돌아오고, B는 1 km 더 이동

Ⅱ. $n = 3$일 때,



수학적 귀납법: 자연수 n에 관한 명제 $P(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하는 방법 중 하나.

$Claim$: 지프 n대가 있을 때, 최대 이동 거리는 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$ km 이다.

ⅰ. $n = 2, 3$일 때, 위에서 보였듯 성립한다.

ⅱ. $n = k$일 때, 성립한다고 가정.

ⅲ. $n = k+1$일 때,

①. k대가 $\frac{1}{2k+1}$ km 이동.

②. a_1이 $a_2, a_3, \cdots, a_{k+1}$에게, $\frac{1}{2k+1}$ L 기름 양도.

$\rightarrow a_2, a_3, \cdots, a_{k+1}$의 기름 꽉 참.

③. 기름이 꽉 찬 k대의 지프는 위 가정에 의해, $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2k-1}$ km를 갈 수 있고,

총 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k+1}$ km를 갈 수 있다.

④. ③에서 k대 중 가장 멀리 간 1 대를 제외하고, ② 위치로 돌아온 나머지 $k-1$대는 기름이 없다. a_1이 자신의 기름 중 $\frac{1}{2k+1}$ L 씩 $k-1$대에게 양도하면, $\frac{1}{2k+1}$ L가 남아, 나머지 지프와 기지로 돌아올 수 있다.

따라서 최대 이동 거리는 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$ km.

위 내용이 사실임을 확인합니다.

2021 년 04 월 26 일

동아리대표: 이준석 서명

지도교사: 김선래 서명

지프 사막 건너기 문제(Jeep desert crossing problem)

지프 n대가 기지에서 길이가 L인 사막을 건너려고 한다. 각각의 지프는 기름을 최대 1통까지 채울 수 있으며, 1통으로는 1 km를 갈 수 있고, 중간에 서로 기름을 주고받을 수 있다. 모든 지프가 다시 기지로 돌아오거나 사막을 완전히 건너야 한다. 이 때, L의 최댓값은 무엇일까?

이해를 돕기 위해 $n=2$일 때를 살펴보면, 2대의 지프 A, B가 기지에서 출발하고, 기름 $\frac{1}{3}$통을 사용했을 때($\frac{1}{3}$ km를 갔을 때), A가 B에게 기름 $\frac{1}{3}$통을 준다. 그럼, 남은 기름의 양은 A는 $\frac{1}{3}$통, B는 1통이다.(B는 최대 1통까지 채울 수 있으므로, 최대로 채운 것이다.) A는 방향을 바꾸어 기지로 다시 돌아가고(기지까지 $\frac{1}{3}$ km이므로, A는 기름을 모두 다 쓰고 도착할 수 있다.) B는 가던 방향으로 1통을 다 쓸 때까지 가면, $\frac{4}{3}$ km를 갈 수 있다. 따라서, L의 최댓값은 $\frac{4}{3}$ km이다.
Wikipedia article: Jeep problem

▼ 전략 1

지프가 3대인 경우를 구해 보면, $\frac{1}{5}$ km 갔을 때 한 지프가 나머지 두 지프에게 $\frac{1}{5}$ L의 기름을 준다. 기름을 준 지프는 $\frac{2}{5}$ L의 기름이 남아 있다. 나머지 두 지프는 1 L의 기름을 가지고 $\frac{1}{3}$ km를 더 가서 한 지프가 다른 한 지프에게 $\frac{1}{3}$ L의 기름을 준다. 기름을 준 지프는 $\frac{1}{3}$ L의 기름을 가지고 있으므로 처음 기름을 받은 $\frac{1}{5}$ km 위치로 이동하여 처음 기름을 준 지프에게 $\frac{1}{5}$ L의 기름을 받아 두 지프가 기지로 돌아오면 된다. 이 때, L의 최댓값은 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$이다.

▼ 전략 2

L의 최댓값은 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$임을 추측하고, 이를 이용하여 문제를 풀어보자. 지프 $(n+1)$대가 있을 때 L의 최댓값을 구하기 위해 지프 한 대가 나머지 n대가 조금 더 갈 수 있도록 자신의 기름을 나눈다고 생각해 보자. 지프 한 대가 나머지 n대의 지프가 x km 더 갈 수 있도록 자신의 기름 1 L를 준다고 하면, 기름을 주는 지프 한 대를 포함한 $(n+1)$대의 지프가 x km를 더 가고, L km를 이동하여 사막을 건너는 지프 한 대를 제외한 나머지 n대의 지프가 x km를 다시 돌아와야 한다. 따라서, 총 기름 1 L는 $(2n+1)$대의 지프가 x km를 가는데 필요한 기름을 제공하는 것이므로, $x=\frac{1}{2n+1}$이다.

▼ 전략 3

n일 때 L의 최댓값을 전략2에서 추측한 것과 같다고 가정하고, $n+1$일 때 $n+1$일 때 L의 최댓값을 전략2에서 추측한 것과 같음을 증명하면, $n=1,2,3,\ldots$를 각각 대입하면 모든 자연수 n에 대하여 전략2의 추측이 참임을 보일 수 있다. 이렇게 어떤 자연수 n에 대한 명제가 모든 자연수에 대해 참임을 보이기 위해 $n=1$인 경우를 직접 보이고, $n=k$일 때 명제가 성립하면, $n=k+1$일 때도 명제가 성립한다는 것을 증명하는 방법을 **수학적 귀납법**이라고 한다.

▼ 풀이

L의 최댓값은 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$이다. 이를 수학적 귀납법으로 증명해 보자. 우선, 지프 n대 중 1대는 L km 떨어진 곳으로 가고, 나머지 $(n-1)$대는 기지로 돌아와야 L을 크게 만들 수 있다. $n=2$일 때는 문제의 추가 설명에서 보인 것과 같이 L의 최댓값은 $1+\frac{1}{3}$이다. $n=k(\geq 2)$일 때 L의 최댓값이 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2k-1}$이라고 가정하자. $n=k+1$일 때는 $(k+1)$대의 지프가 모두 $\frac{1}{2k+1}$ km를 갔을 때, 한 지프 P가 나머지 k 대의 지프에게 $\frac{1}{2k+1}$ L씩 기름을 준다. 그럼, 기름을 준 지프 P는 1 L에서 k대의 지프에게 각각 $\frac{1}{2k+1}$ L씩 기름을 주었고, 이 지점까지 오는 데 $\frac{1}{2k+1}$ L의 기름을 사용했으므로 $\frac{k}{2k+1}$ L의 기름을, 나머지 지프는 1 L의 기름이 꽉 차있다. 이 때, 기름이 꽉 차 있는 k대의 지프는 기지에서 $\frac{1}{2k+1}$ km 떨어진 지점에서 출발해서 출발점에서 가정한 것과 같이 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2k-1}$ km 떨어진 지점, 즉 기지에서 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k+1}$ km 떨어진 지점까지 지프 한 대가 이동하고 나머지 $(k-1)$대는 다시 원래 출발했던 지점인 기지에서 $\frac{1}{2k+1}$ km 떨어진 지점으로 돌아온다. 이 때, 처음에 기름을 준 지프 P는 $\frac{k}{2k+1}$ L의 기름을 가지고 있었는데, 이를 지프 P를 포함한 k대의 지프가 기름을 $\frac{1}{2k+1}$ L씩 나누어 가지면 모두 기지로 돌아올 수 있다. 따라서 이 경우, L의 최댓값은 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k+1}$이고, 수학적 귀납법에 의해 처음 주장이 참이다. 따라서 L의 최댓값은 정답은 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$이다.