# SE-344: Computer Graphics

Proof Assignment

Jan 2020

## Question 1

证明对 Bezier 曲线来说，起点终点切矢量方向同控制多边形第一条和最后一条边的方向相同。

**证明**：首先，Bezier 曲线的一般演算式为

$$\mathbf{B}(t)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mathbf{P}_i(1-t)^{n-i}t^i=\binom{n}{0}\mathbf{P}_0(1-t)^n t^0+\binom{n}{1}\mathbf{P}_1(1-t)^{n-1}t^1+\cdots+\binom{n}{n-1}\mathbf{P}_{n-1}(1-t)^1t^{n-1}+\binom{n}{n}\mathbf{P}_n(1-t)^0t^n\text{ , }t\in[0,1]$$

而当 $t$ 取 0 和 1 两值时，恰好对应着曲线的起点和终点。在我们规定 $0^0=1$ 的情况下，将两端点值代入算式，得到 $B(0)=P_0$ 且 $B(1)=P_n$。由此可知 $\lim_{t\to 0}B(t)=P_0(t)+C$，同理 $\lim_{t\to 1}B(t)=P_n(t)+C$。

我们感兴趣的只是 $t$ 对起点和终点的影响，因此直接将其代入得到，因此 $\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}P_0(t)}{\mathrm{d}t}$，且 $\lim_{t\to 1}\frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}P_n(t)}{\mathrm{d}t}$。即，Bezier 曲线的起点及终点的曲线走向完全由 $P_0$ 和 $P_n$ 两函数确定。

而对 $P(t)$ 函数求导，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}=n\sum_{i=0}^{n}P_i[B_{i-1,n-1}(t)-B_{i,n-1}(t)]$$

于是就有

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}=n\sum_{i=0}^{n}(P_{i+1}-P_i)B_{i,n-1}(t)$$

将 $t=0$ 和 $t=1$ 代入，马上有 $\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{d}P_0(t)}{\mathrm{d}t}=n(P_1-P_0)$，且 $\lim_{t\to 1}\frac{\mathrm{d}P_n(t)}{\mathrm{d}t}=n(P_n-P_{n-1})$。而我们知道两个连续控制点的差对应的就是控制多边形的一条边。特别地，$P_1-P_0$ 和 $P_n-P_{n-1}$ 分别对应第一条边和最后一条边。

因此，原命题得证。

## Question 2

证明「$P_{n-1}$、$P_n=Q_0$、$Q_1$ 三点共线」与「他们满足 $G^1$ 连续」互为充分必要条件。

**证明**：先证充分性。

根据 $G^1$ 连续的定义，要满足必须保证其一阶导数连续。在三点共线的情况下，$Q_1-Q_0=P_n-P_{n-1}$，即 $\frac{\mathrm{d}(Q_1-Q_0)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(P_n-P_{n-1})}{\mathrm{d}t}$。这里可以保证在 $P_n$（$Q_0$）这点的邻域内导函数处处存在且处处相等。因此可知他们满足 $G^1$ 连续。

再证必要性。

在满足 $G^1$ 连续的情况下，左右邻域内的导函数存在且相等。因此我们还是有原式 $\frac{\mathrm{d}(Q_1-Q_0)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(P_n-P_{n-1})}{\mathrm{d}t}$，从而可知 $Q_0$、$Q_1$、$P_{n-1}$ 三点共线。

证毕。