

SE-344: Computer Graphics

Proof Assignment

Jan 2020

Question 1

证明对 **Bezier** 曲线来说，起点终点切矢量方向同控制多边形第一条和最后一条边的方向相同。

证明： 首先，**Bezier** 曲线的一般演算式为

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \mathbf{P}_i (1-t)^{n-i} t^i = \binom{n}{0} \mathbf{P}_0 (1-t)^n t^0 + \binom{n}{1} \mathbf{P}_1 (1-t)^{n-1} t^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} \mathbf{P}_{n-1} (1-t)^1 t^{n-1} + \binom{n}{n} \mathbf{P}_n (1-t)^0 t^n, t \in [0, 1]$$

而当 t 取 0 和 1 两值时，恰好对应着曲线的起点和终点。在我们规定 $0^0 = 1$ 的情况下，将两端点值代入算式，得到 $B(0) = P_0$ 且 $B(1) = P_n$ 。由此可知 $\lim_{t \rightarrow 0} B(t) = P_0(t) + C$ ，同理 $\lim_{t \rightarrow 1} B(t) = P_n(t) + C$ 。

我们感兴趣的只是 t 对起点和终点的影响，因此直接将其代入得到，因此 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dB(t)}{dt} = \frac{dP_0(t)}{dt}$ ，且 $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{dB(t)}{dt} = \frac{dP_n(t)}{dt}$ 。即，**Bezier** 曲线的起点及终点的曲线走向完全由 P_0 和 P_n 两函数确定。

而对 $P(t)$ 函数求导，可以得到

$$\frac{dP(t)}{dt} = n \sum_{i=0}^n P_i [B_{i-1, n-1}(t) - B_{i, n-1}(t)]$$

于是就有

$$\frac{dP(t)}{dt} = n \sum_{i=0}^n (P_{i+1} - P_i) B_{i, n-1}(t)$$

。

将 $t = 0$ 和 $t = 1$ 代入，马上有 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dP_0(t)}{dt} = n(P_1 - P_0)$ ，且 $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{dP_n(t)}{dt} = n(P_n - P_{n-1})$ 。而我们知道两个连续控制点的差对应的就是控制多边形的一条边。特别地， $P_1 - P_0$ 和 $P_n - P_{n-1}$ 分别对应第一条边和最后一条边。

因此，原命题得证。

Question 2

证明「 P_{n-1} 、 $P_n = Q_0$ 、 Q_1 三点共线」与「他们满足 G^1 连续」互为充分必要条件。

证明： 先证充分性。

根据 G^1 连续的定义，要满足必须保证其一阶导数连续。在三点共线的情况下， $Q_1 - Q_0 = P_n - P_{n-1}$ ，即 $\frac{d(Q_1 - Q_0)}{dt} = \frac{d(P_n - P_{n-1})}{dt}$ 。这里可以保证在 P_n (Q_0) 这点的邻域内导函数处处存在且处处相等。因此可知他们满足 G^1 连续。

再证必要性。

在满足 G^1 连续的情况下，左右邻域内的导函数存在且相等。因此我们还是有原式 $\frac{d(Q_1 - Q_0)}{dt} = \frac{d(P_n - P_{n-1})}{dt}$ ，从而可知 Q_0 、 Q_1 、 P_{n-1} 三点共线。证毕。