Límites y Continuidad

Ejercicio 1. Calcula los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{|x-1|}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{|x-1|}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-6}-\sqrt{3}}{x-3}$.

Solución.

a) Tengamos en cuenta que la función numerador nos impone, de forma implícita, que $x>1$. Por lo que, $|x-1|=x-1$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{|x-1|}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x-1}}=+\infty.$$

b) No existe $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{|x-1|}$ ya que los límites laterales no coinciden. Más concretamente,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{|x-1|}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{|x-1|}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{x}},$$

que, dependiendo de por dónde nos acerquemos a 1 tiende a $\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$.

c) Se presenta una indeterminación del tipo "$\frac{0}{0}$", por lo que vamos a multiplicar y dividir por el conjugado del numerador, para intentar factorizar y simplificar la expresión:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^2-6}-\sqrt{3}}{x-3}&=\frac{\left(\sqrt{x^2-6}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x^2-6}+\sqrt{3}\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x^2-6}+\sqrt{3}\right)}\\&=\frac{x^2-6-3}{(x-3)\left(\sqrt{x^2-6}+\sqrt{3}\right)}=\frac{x^2-9}{(x-3)\left(\sqrt{x^2-6}+\sqrt{3}\right)}\\&=\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)\left(\sqrt{x^2-6}+\sqrt{3}\right)}=\frac{x+3}{\sqrt{x^2-6}+\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Por tanto, $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-6}-\sqrt{3}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{\sqrt{x^2-6}+\sqrt{3}}=\frac{6}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$

Ejercicio 2. Calcula los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2e^{-x}+e^x}{3e^x+5e^{-x}+\log(\sqrt{x})}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x})^{\frac{1}{\log(x^2)}}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\log(\sqrt{x})-\log(\sqrt{x}+5)\right)$.

Solución.

a) En este caso se presenta una indeterminación del tipo "$\frac{\infty}{\infty}$", y para resolverla, y aplicando la escala de infinitos, vamos a dividir, tanto el numerador como el denominador, por la expresión e^x:

$$\frac{x^2+2e^{-x}+e^x}{3e^x+5e^{-x}+\log(\sqrt{x})}=\frac{\frac{x^2}{e^x}+\frac{2e^{-x}}{e^x}+1}{3+\frac{5e^{-x}}{e^x}+\frac{\log(x)}{2\,e^x}}=\frac{\frac{x^2}{e^x}+\frac{2}{e^{2x}}+1}{3+\frac{5}{e^{2x}}+\frac{\log(x)}{2\,e^x}}$$

Y usando la escala de infinitos,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2e^{-x}+e^x}{3e^x+5e^{-x}+\log(\sqrt{x})} = \frac{1}{3}.$$

b) En este límites se presenta una indeterminación del tipo "∞^∞". Aplicamos la fórmula del número e y las propiedades de la función logaritmo:

$$(\sqrt{x})^{\frac{1}{\log(x^2)}} = e^{\frac{1}{\log(x^2)}\log(\sqrt{x})} = e^{\frac{\log(\sqrt{x})}{\log(x^2)}} = e^{\frac{\log(x)}{4\log(x)}} = e^{1/4}$$

Por tanto, $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x})^{\frac{1}{\log(x^2)}} = e^{1/4}$.

c) En primer lugar, escribimos la función protagonista de esta otra forma, usando las porpiedades del logaritmo:

$$\sqrt{x}\left[\log(\sqrt{x})-\log(\sqrt{x}+5)\right] = \sqrt{x}\,\log\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}\right) = \log\left[\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}\right)^{\sqrt{x}}\right].$$

En la última expresión obtenida, nos olvidamos del logaritmo, por ahora, y nos dedicamos a resolver la indeterminación de "1^∞" que se presenta. Para ello, aplicamos la regla del número e:

$$\sqrt{x}\left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}-1\right] = \sqrt{x}\left[\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}\right] = \frac{-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}.$$

Como $\lim_{x\to+\infty} \frac{-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5} = -5 \implies \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}\right)^{\sqrt{x}} = e^{-5}$.

Y de lo anterior, $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left[\log(\sqrt{x})-\log(\sqrt{x}+5)\right] = \log(e^{-5}) = -5$.

Ejercicio 3. Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{x-4}\right), & \text{si } x\neq 4 \\ a, & \text{si } x = 4 \end{cases}$$

siendo $a\in\mathbb{R}$.

Encuentra el valor de a para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$. Estudia también la existencia de límites de f en $+\infty$ y $-\infty$.

Solución. El carácter local de la continuidad nos da que f es continua en los números x, tales que $x\neq 4$. Veamos qué ocurre en el punto 4. Para ello estudiamos el límite en 4:

$$\lim_{x\to4} f(x) = \lim_{x\to4}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{x-4}\right) = \lim_{x\to4}\left(\frac{4-x}{4x}\right)\left(\frac{1}{x-4}\right) = \lim_{x\to4}\frac{-1}{4x} = -\frac{1}{16}.$$

Por tanto, el valor de a necesario para que f sea continua es $a = \frac{-1}{16}$.

Por último, los límites en infinito valen

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{4x} = 0.$$

Y análogamente:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{4x} = 0.$$

Ejercicio 4. Se define $f : [-1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, & \text{si } x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \\ 1, & \text{si } x = 0, \\ \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Estudia la continuidad de f y la existencia de límite en $+\infty$.

Solución. Volvemos a usar el carácter local de la continuidad de f para concluir que la función es continua en los números $x \in [-1, +\infty)$, con $x \neq 0$ y $x \neq 1$.

Veamos qué ocurre, en primer lugar, en el cero. Para ello estudiamos el límite de f en 0, multiplicando y dividiendo por el conjugado de la expresión con radicales,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = 1 = f(0). \end{aligned}$$

Por tanto, f es continua en cero.

Vamos a estudiar ahora la continuidad en 1. Para ello, como la función tiene expresiones distintas a ambos lados del punto, estudiamos los límites laterales. Si calculamos el límite lateral derecho en 1:

$$\lim_{x\to 1_+} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) = \sqrt{2} - 1.$$

Si calculamos ahora el límite lateral izquierdo en 1:

$$\lim_{x\to 1_-} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \sqrt{2}.$$

Por tanto, al no coincidir los límites laterales en 1, f no es continua en dicho punto.

Calculemos ahora el límite de f en $+\infty$ multiplicando y dividiendo por el conjugado:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) \cdot \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Para este último límite, dividimos numerador y denominador por $\sqrt{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x}}+1} = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{R}^+ \setminus \{e\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^{\frac{1}{\log(x)-1}}$, para todo $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$. Estudia el comportamiento de f en 0, e, y $+\infty$.

Solución.

- Veamos en primer lugar el comportamiento en 0:

$$\lim_{x\to 0} \log(x) = -\infty \implies \lim_{x\to 0} \frac{1}{\log(x)-1} = 0,$$

por tanto, tenemos una indeterminación del tipo 0^0. Tomemos logaritmos para resolverla:

$$\lim_{x\to 0} \log\left(x^{\frac{1}{\log(x)-1}}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\log(x)}{\log(x)-1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-\frac{1}{\log(x)}} = 1$$
$$\implies \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{\log(x)-1}} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}.$$

- En e vamos a estudiar los límites laterales:

$$\lim_{x\to \mathrm{e}^-} x^{\frac{1}{\log(x)-1}} = \text{“}\mathrm{e}^{-\infty}\text{”} = 0, \text{ y } \lim_{x\to \mathrm{e}^+} x^{\frac{1}{\log(x)-1}} = \text{“}\mathrm{e}^{+\infty}\text{”} = +\infty.$$

- Por último, en $+\infty$ de nuevo tomamos logaritmos para resolver la indeterminación:

$$\lim_{x\to +\infty} \log\left(x^{\frac{1}{\log(x)-1}}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x)}{\log(x)-1} = 1 \implies \lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{\log(x)-1}} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}.$$

Ejercicio 6. Sea $f : (0, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \left(\frac{1}{\tan(x)}\right)^{\operatorname{sen}(x)}$. Prueba que f tiene límite en los puntos 0 y $\pi/2$ y calcula dichos límites.

Solución. En primer lugar, veamos el límite en 0:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\tan(x)}\right)^{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\right)^{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)^{\operatorname{sen}(x)}}{\operatorname{sen}(x)^{\operatorname{sen}(x)}} = \frac{1}{1} = 1,$$

ya que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x)^{\operatorname{sen}(x)} = 1$, usando que $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$.

En $\pi/2$,

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\tan(x)}\right)^{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)^{\operatorname{sen}(x)}}{\operatorname{sen}(x)^{\operatorname{sen}(x)}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Ejercicio 7. Sea $f : (0, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = \big(1 + \operatorname{sen}(x)\big)^{\operatorname{cotan}(x)}.$$

Estudia la continuidad de f y su comportamiento en 0 y $\pi/2$.

Solución. La función f es continua en $(0, \pi/2)$ ya que $1 + \operatorname{sen}(x)$ es una función continua y positiva en dicho intervalo y $\operatorname{cotan}(x)$ también es una función continua en este intervalo.

Veamos el comportamiento en $\frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (1 + \operatorname{sen}(x))^{\operatorname{cotan}(x)} = 2^0 = 1\ .$$

En 0, $\lim_{x\to 0}(1 + \operatorname{sen}(x))^{\operatorname{cotan}(x)} = \text{“}1^\infty\text{”}$, con lo que aplicamos la regla del número e para resolverlo:

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{cotan}(x)\,(1 + \operatorname{sen}(x) - 1) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \operatorname{sen}(x) = \lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$$
$$\implies \lim_{x\to 0}(1 + \operatorname{sen}(x))^{\operatorname{cotan}(x)} = \mathrm{e}.$$

Ejercicio 8. Estudia el comportamiento en cero de las funciones $f, g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \arctan\left(\frac{7}{x}\right) - \arctan\left(\frac{-5}{x}\right), \quad g(x) = xf(x).$$

Solución. Comencemos con la función f. Dado que $\lim_{x\to 0^+} 7/x = +\infty$ y $\lim_{x\to 0^+} -5/x = -\infty$, se tiene que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \pi/2 - (-\pi/2) = \pi$ y, análogamente, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\pi/2 - \pi/2 = -\pi$.

La función f está acotada (es suma de dos funciones acotadas) y, por tanto, $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, por ser producto de algo que tiende a cero y algo acotado.

Ejercicio 9. Prueba que existe un número real positivo x tal que $\log(x) + \sqrt{x} = 0$.

Solución. Consideremos la función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \log(x) + \sqrt{x}$. La función f es continua y esta definida en un intervalo. Además

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \;\text{ y }\; \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty.$$

Por tanto f cambia de signo y tiene que anularse en $\mathbb{R}^+$.

Ejercicio 10. Prueba que la ecuación $x + e^x + \arctan(x) = 0$ tiene una sola raíz real. Da un intervalo de longitud uno en el que se encuentre dicha raíz.

Solución. Consideremos $f(x) = x + e^x + \arctan(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. f es una función continua definida en un intervalo, además $f(-1) < 0 < f(0)$ y por tanto f se anula en el intervalo $(-1, 0)$. Para comprobar que sólo se anula en un punto basta observar que f es una función estrictamente creciente, en particular inyectiva, por ser suma de tres funciones estrictamente crecientes.

Ejercicio 11. Determina la imagen de la función $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctan(\log|x|)$.

Solución. Como la función es par, $f(x) = f(-x)$, se tiene que $f(\mathbb{R}^*) = f(\mathbb{R}^+)$. En este caso, f es la composición de la función arcotangente y la función logaritmo neperiano. Dado que ambas son estrictamente crecientes, su composición también lo es. Por tanto

$$f(\mathbb{R}^*) = f(\mathbb{R}^+) = \left(\lim_{x\to 0} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Ejercicio 12. Sea $f : [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(x)$. Prueba que f tiene un punto fijo, es decir, que existe $c \in [0, \pi/2]$ tal que $\cos(c) = c$.

Solución. Consideremos la función $g : [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = f(x) - x = \cos(x) - x$. La función g es continua por ser diferencia de funciones continuas, además $g(0) = 1 > 0$ y $g(\pi/2) = -\pi/2 < 0$. Como g cambia de signo en el dominio, por el Teorema de los ceros de Bolzano se asegura la existencia de un cero de g o, lo que es mismo, un punto fijo de f.