Relación 4
Ejercicio 6

$\xi$: "tiempo, en minutos, que transcurre entre dos llegadas consecutivas a una tienda"
función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} k e^{-x/2}, & x>0 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

a) Determinar el valor de K

(1) $f(x) \geq 0 \Rightarrow k e^{-x/2} \geq 0 \Leftrightarrow k \geq 0$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} 0 dx + \int_{0}^{\infty} k e^{-x/2} dx = 1$

$\Rightarrow (-k) \int_{0}^{\infty} -e^{-x/2} dx = 1 \Rightarrow (-k)\, 2e^{-x/2} \Big]_0^{\infty} = 1$

$\Rightarrow -k \left( 2 \cdot \lim_{x\to\infty} e^{-x/2} - 2e^0 \right) = -k(0-2) = 2k = 1$

$\Rightarrow k = \frac{1}{2}$

teniendo en cuenta (1) y (2) $\rightarrow k = 1/2$

solución: $k = 1/2$

b) Determinar la función de distribución

$F(x) = P[\xi \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

- si $x<0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{x} 0 dt = 0 \Rightarrow F(x) = 0$

• si $x \geq 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0 dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2} e^{-t/2} dt$

$= 0 + \left[ -e^{-t/2} \right]_0^x = -e^{-x/2} + e^0 =$

$= 1 - e^{-x/2}$

solución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x/2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

c) Determinar la probabilidad de que el tiempo entre dos llegadas consecutivas se encuentre entre 2 y 6 minutos.

$X$: "tiempo entre llegadas consecutivas"

$P[2 \leq X \leq 6] = F(6) - F(2) = (1 - e^{-6/2}) - (1 - e^{-2/2})$

$= 1 - 1 + e^{-1} - e^{-3} = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^3} = 0'3181$

d) La probabilidad de que transcurran menos de 8 minutos entre 2 llegadas consecutivas.

$P[X \leq 8] = F(8) = 1 - e^{-8/2} = 1 - e^{-4} = 0'9817$

e) Determinar la probabilidad de que el tiempo entre dos llegadas consecutivas exceda los 8 minutos.

$P[\xi > 8] = 1 - P[\xi \leq 8] = 1 - F(8) = 1 - 0'9817 = 0'0183$

## Ejercicio 7

$\xi$: "proporción de accidentes automovilísticos fatales en Estados Unidos"

$$f(x) = \begin{cases} 42x(1-x)^5 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

a) Demostrar que $f$ es una función de densidad

(1) $f(x) \geq 0 \iff 42x(1-x)^5 \geq 0$ con $0 < x \leq 1$

$x(1-x)^5 \geq 0 \iff x \geq 0$ y $(1-x)^5 \geq 0$

$x \geq 0$ se cumple porque $0 < x \leq 1$

$(1-x)^5 \geq 0 \iff 1-x \geq 0 \iff 1 \geq x$

$x \leq 1$ se cumple porque $0 < x \leq 1$

por lo que (1) se cumple

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} 42x(1-x)^5 dx + \int_{1}^{\infty} 0dx =$$

integración por partes: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

tomando $x = u \quad du = dx$

$(1-x)^5 dx = dv \quad \frac{(1-x)^6}{6}(-1) = v$

$$\int x(1-x)^5 dx = x\frac{(1-x)^6}{6}(-1) + \int \frac{(1-x)^6}{6} dx = -\left(\frac{x(1-x)^6}{6} + \frac{(1-x)^7}{42}\right)$$

$$= 42 \cdot \left[-\left(\frac{x(1-x)^6}{6} + \frac{(1-x)^7}{42}\right)\right]_0^1 = 42 \cdot \left(-0 + \frac{1}{42}\right) = \frac{42}{42} = 1$$

por lo que (2) se cumple

solución: f(x) es una función de densidad porque se cumplen las condiciones (1) $f(x) \geq 0$ y (2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

b) Calcular $f\left(\frac{1}{4}\right)$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 42 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)^5 = 42 \cdot 0'25 \cdot 0'75^5 = 2'4917$$

c) Calcular la función de distribución

$$F(x) = P[\xi \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

- si $x < 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

- si $x > 1 \rightarrow \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} 42t(1-t)^5 dt + \int_{1}^{x} 0\,dt$

$= 1$ (visto en a))

$\cdot$ si $0 \leq x < 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} 42t(1-t)^5 dt$

$$= 42 \cdot \left( - \frac{t(1-t)^6}{6} - \frac{(1-t)^7}{42} \right) \Big]_0^x = \frac{-7}{6} x(1-x)^6 - (1-x)^7 + 1$$

en resumen:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - (1-x)^7 - \frac{7}{6}x(1-x)^6 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

d) $P[X \leq 0'25]$

$P[X \leq 0'25] = F(0'25) = 1 - 0'75^7 - \frac{7}{6} 0'25 \cdot 0'75^6 = 0'8146$

## Ejercicio 9

variable aleatoria $X$ con función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{(x-2)^3}{8} & \text{si } 2 < x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

a) Calcular la función de densidad

$\dfrac{\partial \frac{(x-2)^3}{8}}{\partial x} = \dfrac{3(x-2)^2}{8}$ cuando $2 < x < 4$

Solución: La función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3(x-2)^2}{8} & \text{si } 2 < x < 4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

b) calcular $P[3 \leq \xi]$, $P[1 < \xi < 3]$, $P[\xi < 3]$ y $P[\xi > 4]$

$$P[3 \leq \xi] = P[\xi \geq 3] = 1 - P[\xi < 3] = 1 - P[\xi \leq 3] = 1 - F(3)$$

$$= 1 - \frac{(3-2)^3}{8} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0'875$$

$$P[1 < \xi < 3] = P[1 < \xi \leq 3] = F(3) - F(1) = F(3) - 0 =$$

$$= F(3) = \frac{(3-2)^3}{8} = \frac{1}{8} = 0'125$$

$$P[\xi < 3] = P[\xi \leq 3] = F(3) = \frac{(3-2)^3}{8} = \frac{1}{8} = 0'125$$

$$P[\xi > 4] = 1 - P[\xi \leq 4] = 1 - F(4) = 1 - 1 = 0$$

Ejercicio 10

$\xi$ variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} K x^2 (1-x^3) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

Calcular la función de distribución.

En primer lugar hallamos el valor de $K$

(1) $f(x) \geq 0 \Rightarrow Kx^2(1-x^3) \geq 0$ con $0 < x < 1$

Como $x^2 \geq 0$ y $1-x^3$ es también $\geq 0$

tenemos que $K \geq 0$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} Kx^2(1-x^3)dx + \int_{1}^{\infty} 0dx = 1$

$$\Rightarrow K\int_0^1 x^2(1-x^3)dx = 1 \Rightarrow K\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6}\right)\Big]_0^1 = 1$$

$$\Rightarrow K\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) = 1 \Rightarrow K\left(\frac{2}{6} - \frac{1}{6}\right) = 1 \Rightarrow K\frac{1}{6} = 1$$

$$\Rightarrow K = 6$$

teniendo en cuenta (1) y (2), la solución es $K=6$

La función de distribución se calcula:

$$F(x) = P[\xi \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

- si $x < 0 \Rightarrow F(x) = 0$
- si $x > 1 \Rightarrow F(x) = 1$
- si $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow F(x) = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^6}{6}\right)\Big]_0^x = 6\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6}\right)$

Solución: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 6\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6}\right) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

# Ejercicio 11

$\xi$: "duración en segundos de un tipo de circuitos"

densidad:
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x^2} & 100<x<1000\\ 0 & \text{en el resto de casos}\end{cases}$$

a) Calcular $a$ para que $f$ sea una función de densidad.

(1) $f(x)\geq 0 \Rightarrow \dfrac{a}{x^2}\geq 0$ con $100<x<1000$

se cumple cuando $a\geq 0$

(2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{100} 0\,dx+\int_{100}^{1000}\frac{a}{x^2}dx+\int_{1000}^{\infty}0\,dx=1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{-a}{x}\right]_{100}^{1000}=1 \Rightarrow \frac{-a}{1000}+\frac{a}{100}=1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{100}-\frac{a}{1000}=1 \Rightarrow \frac{10a-a}{1000}=1 \Rightarrow 9a=1000$$

$$\Rightarrow a=\frac{1000}{9}$$

Solución: teniendo en cuenta (1) y (2) $\Rightarrow a=\dfrac{1000}{9}$

b) Calcular la probabilidad de que un circuito dure exactamente 200 segundos.

$$P[\xi = 200] = \int_{200}^{200} f(x)dx = F(200) - F(200) = 0$$

c) Calcular la esperanza de $\xi$

$$E[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{100} x \cdot 0 dx + \int_{100}^{1000} x \cdot \frac{1000}{9} \frac{1}{x^2} dx + \int_{1000}^{\infty} 0 dx$$

$$= \int_{100}^{1000} \frac{1000}{9} \frac{1}{x} dx = \frac{1000}{9} \ln(x) \Big]_{100}^{1000} =$$

$$= \frac{1000}{9}\left(\ln(1000) - \ln(100)\right) = \frac{1000}{9} \cdot (6'9078 - 4'6052)$$

$$= 255'8428$$

d) Calcular $P[200 < \xi < 300]$

$$P[200 < \xi < 300] = \int_{200}^{300} \frac{1000}{9} \cdot \frac{1}{x^2} dx = \frac{1000}{9}\left(\frac{-1}{x}\right)\Big]_{200}^{300}$$

$$= \frac{1000}{9}\left(\frac{1}{200} - \frac{1}{300}\right) = 0'1852$$

e) Calcular $P[200 \leq \xi \leq 300]$

$$P[200 \leq \xi \leq 300] = \int_{200}^{300} \frac{1000}{9} \frac{1}{x^2} dx = 0'1852$$

## Ejercicio 13

$X$ variable aleatoria
con función de densidad :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{7+x}{k} & -7 < x \leq 0 \\ \dfrac{7-x}{k} & 0 < x \leq 7 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

a) Determinar el valor de $k$

(1) $f(x) \geq 0$

– Cuando $-7 \leq x \leq 0$ tenemos $f(x) = \dfrac{7+x}{k}$

el numerador $7+x$ es ~~positivo~~ por ser $-7 \leq x \leq 0$
con lo cual $k$ debe ser $k > 0$ (no negativo)

– Cuando $0 < x \leq 7$ tenemos $f(x) = \dfrac{7-x}{k}$

el numerador $7-x$ es ~~positivo~~ por ser $0 < x \leq 7$
con lo cual $k$ debe ser $k > 0$ (no negativo)

(2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{-7} 0\,dx + \int_{-7}^{0} \frac{7+x}{k}\,dx + \int_{0}^{7} \frac{7-x}{k}\,dx + \int_{7}^{\infty} 0\,dx = 1$$

$$\int_{-7}^{0} \frac{7+x}{k}\,dx = \frac{1}{k}\left(7x + \frac{x^2}{2}\right)\Big]_{-7}^{0} = \frac{1}{k}\left(49 - \frac{49}{2}\right) = \frac{1}{k}\,\frac{49}{2}$$

$$\int_{0}^{7} \frac{7-x}{k}\,dx = \frac{1}{k}\left(7x - \frac{x^2}{2}\right)\Big]_{0}^{7} = \frac{1}{4}\left(49 - \frac{49}{2}\right) = \frac{1}{k}\,\frac{49}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k}\frac{49}{2} + \frac{1}{k}\frac{49}{2} = \frac{1}{k}\cdot 49 = 1 \Leftrightarrow k = 49$$

solución: $k=49$ y la densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{7+x}{49} & -7 < x \leq 0 \\ \frac{7-x}{49} & 0 < x \leq 7 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

b) Determinar la función de distribución

$$F(x) = P[\xi \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

- si $x \leq -7 \Rightarrow F(x) = 0$
- si $-7 < x \leq 0 \Rightarrow F(x) = \int_{-7}^{x} \frac{7+t}{49}\,dt = \left(\frac{7}{49}t + \frac{t^2}{2\cdot 49}\right)\Big]_{-7}^{x}$

$$= \frac{1}{49}\left(7x - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{49}\left(-49 - \frac{49}{2}\right) = \frac{1}{49}7x - \frac{x^2}{2\cdot 49} + \frac{1}{2}$$

- si $0 \leq x < 7 \Rightarrow F(x) = \int_{-7}^{0} \frac{7+t}{49}\,dt + \int_{0}^{x} \frac{7-t}{49}\,dt = F(0) + \int_{0}^{x} \frac{7-t}{49}\,dt$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{7}t - \frac{t^2}{2\cdot 49}\right)\Big]_{0}^{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7}x - \frac{x^2}{2\cdot 49}$$

si $x \geq 7 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = F(7) = 1$

Solución:

La función de distribución de la variable $X$ es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -7 \\ \dfrac{-x^2}{98} + \dfrac{x}{7} + \dfrac{1}{2} & \text{si } -7 < x \leq 0 \\ -\dfrac{x^2}{98} + \dfrac{x}{7} + \dfrac{1}{2} & \text{si } 0 < x \leq 7 \\ 1 & \text{si } x > 7 \end{cases}$$

es decir:
(simplificando)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -7 \\ \dfrac{-x^2}{98} + \dfrac{x}{7} + \dfrac{1}{2} & \text{si } -7 < x \leq 7 \\ 1 & \text{si } x > 7 \end{cases}$$

c) $P[X > 0]$

$$P[X>0] = 1 - F(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

d) $P[X \leq 1]$

$$P[X \leq 1] = F(1) = \frac{-1}{98} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2} = 0'6327$$

# Ejercicio 14

$X$ variable aleatoria

función de densidad : $f(x) = \begin{cases} ae^{-3x} & , x>0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$

a) Determinar $F(x)$

Antes vamos a calcular el valor de $a$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\infty} ae^{-3x}dx = 1$$

$$\Rightarrow a\left(\frac{-1}{3}\right)e^{-3x}\Big]_0^{\infty} = 1 \Rightarrow a\left(\frac{-1}{3}\right)\left(\lim_{x\to\infty} e^{-3x} - 1\right) = 1$$

$$\Rightarrow a\left(\frac{-1}{3}\right)(-1) = 1 \Rightarrow \frac{a}{3} = 1 \Leftrightarrow a = 3$$

La función de distribución se calcula $F(x) = P[X \leq x] =$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

- si $x \leq 0 \rightarrow F(x) = 0$
- si $x>0 \rightarrow \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} 3e^{-3t}dt$

$$= \frac{-3}{3}e^{-3t}\Big]_0^{x} = -1e^{-3x} - (-1) = 1 - e^{-3x}$$

Solución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-3x} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

b) Determinar $P[1<X<2]$

$$P[1<X<2]=F(2)-F(1)=(1-e^{-3\cdot 2})-(1-e^{-3\cdot 1})=$$

$$=e^{-3}-e^{-6}=\frac{1}{e^3}-\frac{1}{e^6}=0'0473$$

c) Determinar $P[2\leq X]$

$$P[2\leq X]=P[X\geq 2]=1-P[X\leq 2]=1-F(2)=$$

$$=1-(1-e^{-3\cdot 2})=e^{-6}=\frac{1}{e^6}=0'0248$$

d) Determinar $P[0'5\leq X\leq 1]$

$$P[0'5\leq X\leq 1]=F(1)-F(0'5)=(1-e^{-3})-(1-e^{-1'5})$$

$$=e^{-1'5}-e^{-3}=0'1733$$

e) $P[3>X]$

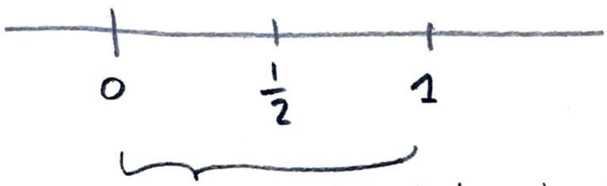
$$P[3>X]=P[X<3]=F(3)=1-e^{-9}=0'9999$$

## Ejercicio 15

Dada la función

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x^2, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1-3(x-x^2), & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

a) Calcular la función de densidad de la variable aleatoria asociada.



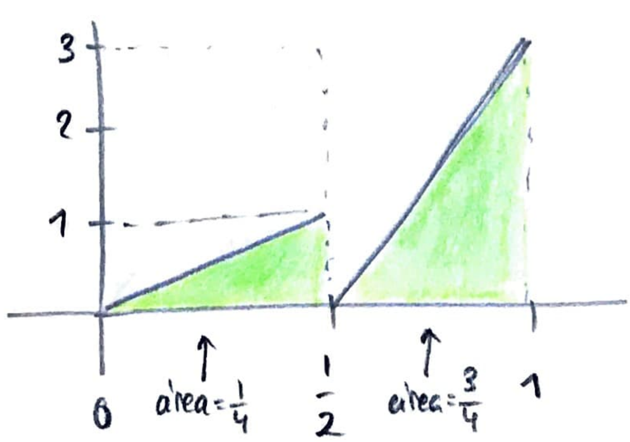

aquí está definida la densidad de forma distinta de 0

$$\frac{\partial x^2}{\partial x} = 2x \rightarrow f(x) = 2x \text{ cuando } 0 \leq x < \frac{1}{2}$$

$$F\left(\tfrac{1}{2}\right) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4} \rightarrow \text{hasta } x=\tfrac{1}{2} \text{ se acumula } \tfrac{1}{4}$$

$$\frac{\partial\, 1-3(x-x^2)}{\partial x} = -3+6x \rightarrow f(x) = 6x-3 \text{ cuando } \frac{1}{2} \leq x < 1$$

$$F(1) = 1-3(1-1) = 1$$



Solución: $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 6x-3 & \text{si } \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$

b) $P[X > 0'75]$

$P[X > 0'75] = 1 - P[X \le 0'75] = 1 - F(0'75) =$

$= 1 - \left(1 - 3(0'75 - 0'75^2)\right) = 3\left(0'75 - 0'75^2\right) =$

$= 0'5625$

c) $P[0'25 < X < 0'75]$

$P[0'25 < X < 0'75] = F(0'75) - F(0'25) = 0'5625 - 0'25^2$

$= 0'5$

d) Comprobar que F es una función de distribución

- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
- F(x) continua y no decreciente

Comprobación:

$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ ya que $F(x) = 0$ si $x < 0$

$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ ya que $F(x) = 1$ si $x \ge 1$

F(x) continua porque

- $x^2$ es continua para $0 \leq x < \frac{1}{2}$
- $1-3(x-x^2)$ es continua para $\frac{1}{2} \leq x < 1$

y tenemos:

- $\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} F(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} F(x) = \frac{1}{4}$
- $\lim_{x \to 0^+} F(x) = F(0) = 0$
- $\lim_{x \to 1^-} F(x) = F(1) = 1$

## Ejercicio 16

$X$ variable aleatoria con función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^n, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

a) Calcular la función de densidad.

Para calcular la función de densidad de $X$ derivamos:

$$\frac{\partial x^n}{\partial x} = n x^{n-1}$$

de forma que $f(x) = \begin{cases} n x^{n-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$

b) Calcular la media y la varianza

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 dx + \int_{0}^{1} x \cdot n x^{n-1} dx + \int_{1}^{\infty} x 0 dx$$

$$= \int_{0}^{1} n x^n dx = \frac{n}{n+1} x^{n+1} \Big]_0^1 = \frac{n}{n+1}$$

$$Var[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - E[X]^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{0}^{1} x^2 n x^{n-1} dx = \int_{0}^{1} n x^{n+1} dx =$$

$$= \frac{n}{n+2} x^{n+2} \Big]_0^1 = \frac{n}{n+2}$$

$$\rightarrow Var[X] = \frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

Ejercicio 18

$X$ variable aleatoria

función de densidad $f(x) = ke^{-|x|} \quad -\infty < x < \infty$

a) Determinar el valor de $k$

(1) Para que $f(x) \geq 0$ imponemos $k > 0$

(2) Imponemos $\int_{-\infty}^{+\infty} k e^{-|x|} dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} ke^{x}dx + \int_{0}^{\infty} ke^{-x}dx = ke^{x}\Big]_{-\infty}^{0} + k(-1)e^{-x}\Big]_{0}^{\infty}$$

$$= k\left(1 - \lim_{x\to-\infty} e^{x}\right) + k(-1)\left(\lim_{x\to\infty} e^{-x} - 1\right)$$

$$= k + k = 2k = 1 \iff k = \frac{1}{2}$$

b) Determinar la función de distribución

- si $x<0 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{t}dt = \frac{1}{2}e^{t}\Big]_{-\infty}^{x}$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{x} - \lim_{x\to-\infty} e^{-x}\right) = \frac{1}{2}e^{x}$$

- si $x \geq 0 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{t}dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}e^{-t}dt =$

$$= \frac{1}{2}e^{t}\Big]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2}(-1)e^{-t}\Big]_{0}^{x}$$

$$= \frac{1}{2}(1-0) + \frac{1}{2}(-1)\left(e^{-x} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$$

solución:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & \text{si } x<0 \\ 1-\frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

c) Determinar $P[-1 < X < 1]$ y $P[X \geq 2]$

$$P[-1 < X < 1] = F(1) - F(-1) = 1 - \frac{1}{2}e^{-1} - \left(\frac{1}{2}e^{-1}\right) = 1 - e^{-1}$$

$$= 1 - \frac{1}{e} = 0'6321$$

$$P[X \geq 2] = 1 - F(2) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2}e^{-2}\right) = \frac{1}{2}e^{-2} = \frac{1}{2e^2} = 0'0677$$