

# EXAMEN DE LMD

25 de junio de 2015

APELLIDOS, NOMBRE: .....

DNI: .....

GRUPO:

1. a) Determina un número natural  $n$  sabiendo que el conjunto  $D(n)$  de los divisores positivos de  $n$  es un álgebra de Boole con las operaciones usuales, y que 105 y 42 son dos coátomos. Obtén además todos los elementos  $x \in D(n)$  tales que  $\overline{105} \vee x = 42$ .

- b) Representa la función booleana

$$f(x, y, z, t) = \overline{x} y z \bar{t} + y z \bar{t} + x \cdot (z \oplus t) + \overline{\overline{x} + y + z} + y z t,$$

como suma de minterminos, y halla una expresión mínima como suma de productos de literales.

## Solución:

- a) Para que el conjunto  $D(n)$  sea un álgebra de Boole es necesario que el número  $n$  sea libre de cuadrados. Es decir, en su descomposición como producto de factores primos no puede aparecer ningún número primo elevado a un exponente mayor que uno. Además, si  $x$  e  $y$  son coátomos, entonces  $x \vee y = n$  (de la misma forma que si  $x$  e  $y$  son átomos,  $x \wedge y = 1$ ). Entonces:

$$n = 105 \vee 42 = \text{mcm}(105, 42) = \text{mcm}(3 \cdot 5 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 7) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$$

Y ahora  $\overline{105} \vee x = \frac{210}{105} \vee x = 2 \vee x = \text{mcm}(2, x) = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ . Es decir, tenemos que encontrar todos los números  $x$  tales que  $\text{mcm}(2, x) = 2 \cdot 3 \cdot 7$ . Por tanto, en la descomposición de  $x$  como producto de primos deben aparecer el 3 y el 7. El 2 puede estar o no. Las únicas posibilidades son entonces  $x = 21$  y  $x = 42$ .

- b) Escribimos la tabla de la función  $f$ .

$x$	$y$	$z$	$t$	$a$ $\overline{x} y z \bar{t}$	$b$ $y z \bar{t}$	$c$ $z \oplus t$	$x \cdot (z \oplus t)$	$\overline{x} + y + z$	$d$ $\overline{\overline{x} + y + z}$	$e$ $y z t$	$f = a + b + c + d + e$
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1

Y vemos que  $f = m_6 + m_7 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{13} + m_{14} + m_{15}$ . Y esta es la forma canónica disyuntiva. O si preferimos:

$$f(x, y, z, t) = \bar{x}y z \bar{t} + \bar{x}y z t + x \bar{y} \bar{z} \bar{t} + x \bar{y} \bar{z} t + x \bar{y} z \bar{t} + x y \bar{z} t + x y z \bar{t} + x y z t$$

También podíamos haber llegado a esta expresión de  $f$  como sigue:

- $\bar{x}y z \bar{t} = m_6$ .
- $y z \bar{t} = \bar{x}y z \bar{t} + x y z \bar{t} = m_6 + m_{14}$ .
- $x \cdot (z \oplus t) = x(\bar{z}t + z\bar{t}) = x\bar{z}t + xz\bar{t} = x\bar{y}\bar{z}t + x y \bar{z}t + x \bar{y} z \bar{t} + x y z \bar{t} = m_9 + m_{13} + m_{10} + m_{14}$ .
- $\bar{x} + y + z = \bar{x}\bar{y}\bar{z} = x\bar{y}\bar{z} = x\bar{y}\bar{z}\bar{t} + x\bar{y}\bar{z}t = m_8 + m_9$ .
- $y z t = \bar{x}y z t + x y z t = m_7 + m_{15}$ .

Luego  $f = m_6 + m_6 + m_{14} + m_9 + m_{13} + m_{10} + m_{14} + m_8 + m_9 + m_7 + m_{15} = m_6 + m_7 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{13} + m_{14} + m_{15}$ .

Una vez calculada la forma canónica disyuntiva de  $f$  simplificamos esta expresión, y para eso nos valemos de los diagramas de Karnaugh.

	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$	$xy$	$x\bar{y}$
$\bar{z}\bar{t}$				1
$\bar{z}t$			1	1
$zt$		1	1	
$z\bar{t}$		1	1	1

	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$	$xy$	$x\bar{y}$
$\bar{z}\bar{t}$				1
$\bar{z}t$			1	1
$zt$		1	1	
$z\bar{t}$		1	1	1

Y nos queda la siguiente expresión de  $f$ :

$$f(x, y, z, t) = yz + x\bar{z}t + x\bar{y}\bar{t}$$

que es la expresión reducida como suma de producto de literales.

2. Clasifica la proposición lógica siguiente:

$$\left( (t \vee p) \wedge \neg q \rightarrow r \right) \wedge \left( \neg r \wedge (p \vee t) \right) \rightarrow q \vee s.$$

**Solución:**

Vamos a llamar  $\alpha$  a esta proposición lógica. Tenemos que decidir si  $\alpha$  es tautología, satisfacible y refutable o contradicción.

Fácilmente vemos que  $\alpha$  no es contradicción pues para una interpretación  $I$  en la que  $I(q) = 1$  (o  $I(s) = 1$ ) se tiene que  $I(\alpha) = 1$ .

Por tanto tenemos que decidir entre si  $\alpha$  es tautología o  $\alpha$  es refutable. Dicho de otra forma, tenemos que ver si  $\models \alpha$  ( $\alpha$  es tautología) ó  $\not\models \alpha$  ( $\alpha$  es refutable).

Por el teorema de la deducción sabemos que  $\models \alpha$  es equivalente a

$$\left( (t \vee p) \wedge \neg q \rightarrow r \right) \wedge \left( \neg r \wedge (p \vee t) \right) \models q \vee s$$

Y esto último es equivalente a que el siguiente conjunto de fórmulas

$$\{((t \vee p) \wedge \neg q \rightarrow r) \wedge (\neg r \wedge (p \vee t)), \neg(q \vee s)\}$$

sea insatisfacible.

Calculamos la forma clausular de cada una de estas fórmulas.

- $((t \vee p) \wedge \neg q \rightarrow r) \wedge (\neg r \wedge (p \vee t))$ 

$$\equiv \neg((t \vee p) \wedge \neg q) \vee r \wedge (\neg r \wedge (p \vee t))$$

$$\equiv ((\neg(t \vee p) \vee \neg\neg q) \vee r) \wedge (\neg r \wedge (p \vee t))$$

$$\equiv (\neg(t \vee p) \vee \neg\neg q \vee r) \wedge (\neg r \wedge (p \vee t))$$

$$\equiv ((\neg t \wedge \neg p) \vee q \vee r) \wedge (\neg r \wedge (p \vee t))$$

$$\equiv ((\neg t \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)) \wedge (\neg r \wedge (p \vee t))$$

$$\equiv (\neg t \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge \neg r \wedge (p \vee t)$$
- $\neg(q \vee s) \equiv \neg q \wedge \neg s$

Luego hemos de comprobar si el conjunto de cláusulas

$$\{\neg t \vee q \vee r; \neg p \vee q \vee r; \neg r; p \vee t; \neg q; \neg s\}$$

es o no insatisfacible. Para ello, nos valemos del algoritmo de Davis-Putnam o del método de resolución.

$\{\neg t \vee q \vee r; \neg p \vee q \vee r; \neg r; p \vee t; \neg q; \neg s\}$ <div style="margin-left: 40px;"> <math>\downarrow \lambda = \neg r</math> </div> $\{\neg t \vee q; \neg p \vee q; p \vee t; \neg q; \neg s\}$ <div style="margin-left: 40px;"> <math>\downarrow \lambda = \neg q</math> </div> $\{\neg t; \neg p; p \vee t; \neg s\}$ <div style="margin-left: 40px;"> <math>\downarrow \lambda = \neg t</math> </div> $\{\neg p; p; \neg s\}$ <div style="margin-left: 40px;"> <math>\downarrow \lambda = \neg p</math> </div> $\{\square; \neg s\}$	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> <math display="block">\neg p \vee q \vee r</math> <math display="block">\downarrow</math> <math display="block">t \vee q \vee r</math> <math display="block">\downarrow</math> <math display="block">q \vee r</math> <math display="block">\downarrow</math> <math display="block">r</math> <math display="block">\downarrow</math> <math display="block">\square</math> </div> <div style="width: 45%;"> <math display="block">p \vee t</math> <math display="block">\swarrow</math> <math display="block">\neg t \vee q \vee r</math> <math display="block">\swarrow</math> <math display="block">\neg q</math> <math display="block">\swarrow</math> <math display="block">\neg r</math> </div> </div>
--	--

Y al llegar a la cláusula vacía, el conjunto de cláusulas es insatisfacible, luego  $\alpha$  es una tautología.

También podíamos haber llegado a esta conclusión calculando la tabla de verdad de  $\alpha$ .

Llamemos  $\alpha_1$  a la fórmula  $(t \vee p) \wedge \neg q \rightarrow r$ ,  $\alpha_2$  a la fórmula  $\neg r \wedge (p \vee t)$  y  $\beta$  a la fórmula  $q \vee s$ . Entonces  $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \rightarrow \beta$ .

$p$	$q$	$r$	$s$	$t$	$t \vee p$	$(t \vee p) \wedge \neg q$	$\alpha_1$ $(t \vee p) \wedge \neg q \rightarrow r$	$\alpha_2$ $\neg r \wedge (p \vee t)$	$\alpha_1 \wedge \alpha_2$	$\beta$ $q \vee s$	$\alpha$
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1

Y vemos que  $\alpha$  es tautología.

También podríamos haber razonado como sigue:

Imaginemos que hay una interpretación para la que  $I(\alpha) = 0$ . Entonces  $I(q \vee s) = 0$  e  $I((t \vee p) \wedge \neg q \rightarrow r) \wedge (\neg r \wedge (p \vee t)) = 1$ .

- $I(q \vee s) = 0$  significa que  $I(q) = 0$  e  $I(s) = 0$ .
- Si  $I((t \vee p) \wedge \neg q \rightarrow r) \wedge (\neg r \wedge (p \vee t)) = 1$  entonces:
  - $I((t \vee p) \wedge \neg q \rightarrow r) = 1$ .
  - $I(\neg r) = 1$ , es decir,  $I(r) = 0$ .
  - $I(p \vee t) = 1$ .

Puesto que  $I(p \vee t) = 1$  e  $I(\neg q) = 1$  se tiene que  $I((p \vee t) \wedge \neg q) = 1$ , con lo que  $I((t \vee p) \wedge \neg q \rightarrow r) = 0$ , pero acabamos de ver que el valor de verdad de esa fórmula debía ser 1. Por tanto, no existe esa interpretación para la que  $I(\alpha) = 0$ .

3. a) Sea  $\alpha$  la siguiente fórmula:

$$\alpha = \forall y (P(a, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y))$$

Calcula el valor de verdad de  $\alpha$  en cada una de las estructuras siguientes:

- Estructura  $\mathcal{E}_1$ .
  - Dominio:  $\mathbb{N}$ .
  - Asignación de constantes:  $a = 0$ .
  - Asignación de predicados:  $P(x, y) \equiv y = x + 1$ .
- Estructura  $\mathcal{E}_2$ .
  - Dominio:  $\mathbb{Z}_9$ .
  - Asignación de constantes:  $a = 0$ .
  - Asignación de predicados:  $P(x, y) \equiv y = x + 1$ .

- b) Traduce a un lenguaje de primer orden la frase

“Todo grupo de la asignatura LMD tiene más de un alumno”

usando los símbolos de predicado  $G^1, A^1, E^2, P^2$  con los significados siguientes:

$G(x)$  :  $x$  es un grupo de la asignatura LMD;  
 $A(x)$  :  $x$  es un alumno;  
 $E(x, y)$  : el objeto  $x$  es igual al objeto  $y$ ;  
 $P(x, y)$  :  $x$  pertenece a  $y$ .

### Solución:

- a) Calculamos el valor de verdad de  $\alpha$  en ambas estructuras.

- En la estructura  $\mathcal{E}_1$  la fórmula  $\forall y \exists x P(x, y)$  nos dice que en el conjunto de los números naturales,  $\forall y \exists x (y = x + 1)$ . Esta afirmación es falsa, pues cuando  $y = 0$  no podemos encontrar ningún número natural  $x$  tal que  $x + 1 = y$ . Sin embargo, la fórmula  $P(a, y)$  se interpreta como verdadera para  $y = 1$ . Por tanto, cuando  $y = 1$  el valor de verdad de  $P(a, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$  es cero. Entonces, el valor de verdad de  $\alpha$  es cero. Puede ser que cree un poco de confusión el hecho de que se haya tomado el valor de  $y = 1$  para que la fórmula  $P(a, y)$  sea verdadera, mientras que para probar que  $\forall y \exists x P(x, y)$  es falsa hayamos tomado otro valor de la variable  $y$  (concretamente  $y = 0$ ). Para evitar esta confusión podemos ver que la fórmula  $\alpha$  es equivalente a  $\forall y (P(a, y) \rightarrow \forall z \exists x P(x, z))$ .
- En la estructura  $\mathcal{E}_2$ , la fórmula  $\forall y \exists x P(x, y)$  se interpreta como verdadera, pues para cualquier  $y \in \mathbb{Z}_9$  podemos encontrar  $x \in \mathbb{Z}_9$  (concretamente  $x = y - 1 = y + 8$ ) tal que  $x + 1 = y$ .

En tal caso es fácil comprobar que el valor de verdad de  $\alpha$  es uno.

- b) Vamos a escribir la frase e ir transformándola hasta que quede expresada en un lenguaje de primer orden:

Todo grupo de la asignatura LMD tiene más de un alumno

Si  $x$  es un grupo de la asignatura LMD entonces  $x$  tiene más de un alumno

Si  $x$  es un grupo de la asignatura LMD entonces  $x$  tiene al menos dos alumnos

Si  $x$  es un grupo de la asignatura LMD entonces existen  $y, z$ , que son alumnos del grupo  $x$  y son distintos

Para cualquier  $x$ , si  $x$  es un grupo de LMD entonces existen  $y, z$ , que son alumnos, que son distintos y que pertenecen al grupo  $x$ .

$\forall x (x \text{ grupo de LMD}) \rightarrow \exists y \exists z (y, z \text{ alumnos}; y \neq z; y, z \text{ pertenecen a } x)$

$\forall x (G(x) \rightarrow \exists y \exists z (A(y) \wedge A(z) \wedge P(y, x) \wedge P(z, x) \wedge \neg E(y, z)))$

4. Consideramos las fórmulas siguientes de un lenguaje de primer orden:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \forall x (\exists y Q(y, x) \rightarrow \neg P(x)), \\ \alpha_2 &= \forall x (Q(x, f(x)) \wedge \forall y Q(y, g(y))), \\ \alpha_3 &= \forall x (P(x) \rightarrow P(f(x)) \vee P(g(x))), \\ \beta &= \forall x \neg P(x).\end{aligned}$$

Estudia si  $\beta$  es o no consecuencia lógica del conjunto  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ .

**Solución:**

Vamos a ver si el conjunto  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \neg\beta\}$  es o no insatisfacible. Para ello, calculamos la forma clausular de estas fórmulas y tratamos de deducir por resolución la cláusula vacía.

- Cálculo de la forma clausular de cada fórmula.

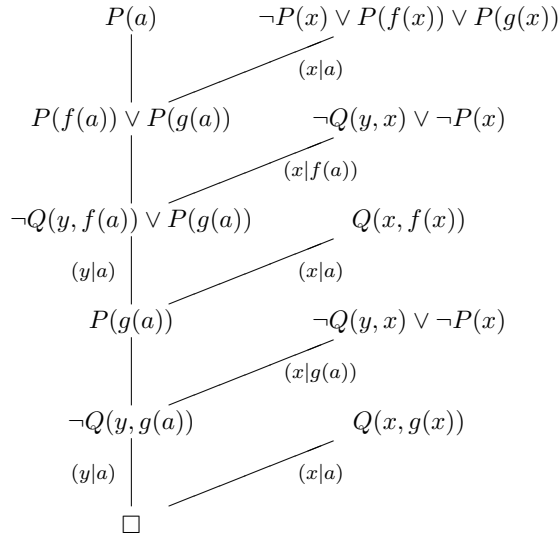
$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \forall x (\exists y Q(y, x) \rightarrow \neg P(x)) \\ &\equiv \forall x (\neg \exists y Q(y, x) \vee \neg P(x)) \\ &\equiv \forall x (\forall y \neg Q(y, x) \vee \neg P(x)) \\ &\equiv \forall x \forall y (\neg Q(y, x) \vee \neg P(x)) \\ \alpha_2 &= \forall x (Q(x, f(x)) \wedge \forall y Q(y, g(y))) \\ &\equiv \forall x \forall y (Q(x, f(x)) \wedge Q(y, g(y))) \\ \alpha_3 &= \forall x (P(x) \rightarrow P(f(x)) \vee P(g(x))) \\ &\equiv \forall x (\neg P(x) \vee P(f(x)) \vee P(g(x))) \\ \neg\beta &= \neg \forall x \neg P(x) \\ &\equiv \exists x \neg \neg P(x) \\ &\equiv \exists x P(x) \\ &\quad P(a)\end{aligned}$$

- Deducción de la cláusula vacía.

A partir del conjunto de cláusulas:

$$\{\neg Q(y, x) \vee \neg P(x); Q(x, f(x)); Q(y, g(y)); \neg P(x) \vee P(f(x)) \vee P(g(x)); P(a)\}$$

vamos a encontrar una deducción de la cláusula vacía.



Al obtener la cláusula vacía concluimos que  $\beta$  es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ .  
 Notemos que si hubiéramos empezado como sigue:

$$\begin{array}{ccc}
 P(a) & & \neg Q(y, x) \vee \neg P(x) \\
 | & \nearrow & (x|a) \\
 \neg Q(y, a) & & 
 \end{array}$$

Llegamos a una cláusula de la que no podemos obtener ninguna resolvente. Pero eso no significa que el conjunto de cláusulas sea satisfacible.

5. Sea la sucesión de números enteros definida para  $n \geq 0$  mediante la recurrencia

$$\begin{cases} x_0 = 4, & x_1 = 14, \\ x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2} + 2^n & \text{para } n \geq 2. \end{cases}$$

- a) Basándose en la recurrencia anterior, demuestra por inducción que para cualquier  $n \geq 0$ ,  $x_n$  es un número par.  
b) Encuentra una expresión no recurrente para el término  $x_n$ .

**Solución:**

- a) Vamos a utilizar el segundo principio de inducción para demostrar que  $x_n$  es par para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ .

- Casos base:  $x_0 = 4$ , que es par y  $x_1 = 14$  que también es par. Luego el resultado es cierto para  $n = 0$  y  $n = 1$ .
- Hipótesis de inducción: Si  $n \geq 2$  entonces para  $k < n$  se tiene que  $x_k$  es par. En particular,  $x_{n-1}$  y  $x_{n-2}$  son números pares.
- Paso inductivo: Sea  $n \geq 2$ . Probemos que el término  $x_n$  es par.  
Esto último es fácil de probar, pues  $x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2} + 2^n$ , y tanto  $6x_{n-1}$  es par (esto lo sabemos, bien por la hipótesis de inducción, bien porque es múltiplo de 6) como  $-9x_{n-2}$  (por la hipótesis de inducción) como también  $2^n$  (pues es múltiplo de 2). Como la suma de números pares es un número par concluimos que  $x_n$  es un número par.

Con esto hemos demostrado que para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n$  es par.

- b) Vemos que la sucesión  $x_n$  satisface una relación de recurrencia lineal no homogénea con coeficientes constantes. La relación de recurrencia lineal homogénea asociada es  $x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}$  cuya ecuación característica es  $x^2 - 6x + 9 = 0$ , mientras que el término no homogéneo es  $2^n$ .

De aquí sacamos que la sucesión  $x_n$  satisface una relación de recurrencia lineal homogénea de grado 3 y cuya ecuación característica es  $(x^2 - 6x + 9)(x - 2) = 0$ . Esta ecuación tiene como raíces  $\alpha_1 = 2$  (simple) y  $\alpha_2 = 3$  (doble) pues  $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ . Una vez calculadas estas raíces sabemos que el término  $x_n$  puede escribirse de la forma  $x_n = a \cdot 2^n + b \cdot 3^n + c \cdot n \cdot 3^n$ . Puesto que tenemos 3 incógnitas necesitamos tres términos de la sucesión. Conocemos los dos primeros, así que calculamos el tercero:  $x_2 = 6x_1 - 9x_0 + 2^2 = 6 \cdot 14 - 9 \cdot 4 + 4 = 84 - 36 + 4 = 52$ .

El sistema que tenemos que resolver es:

$$\begin{array}{rclcl} n=0 & a & + & b & = & 4 \\ n=1 & 2a & + & 3b & + & 3c = 14 \\ n=2 & 4a & + & 9b & + & 18c = 52 \end{array}$$

Calculamos la forma normal de Hermite de la matriz ampliada:

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 14 \\ 4 & 9 & 18 & 52 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 18 & 36 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Luego la solución del sistema es  $a = 4$ ,  $b = 0$ ,  $c = 2$ . Entonces, el término general de la sucesión  $x_n$  es:

$$x_n = 4 \cdot 2^n + 2n \cdot 3^n = 2^{n+2} + 2n \cdot 3^n$$



6. Sea  $G$  el grafo cuyo conjunto de vértices es  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  y cuya matriz de adyacencia es

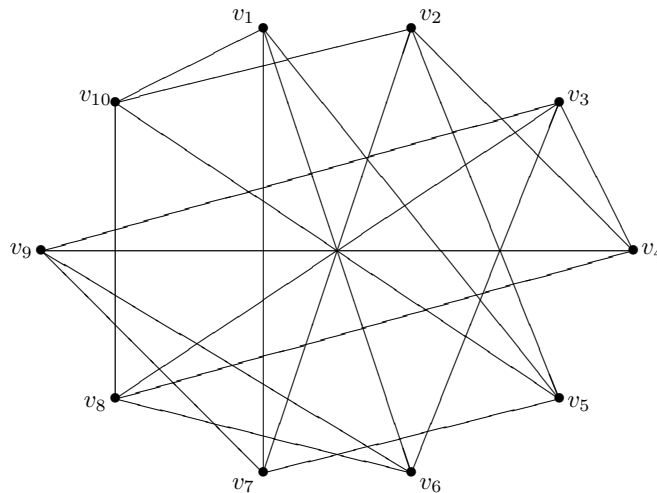
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- ¿Hay algún camino o circuito de Euler en  $G$ ? Si la respuesta es afirmativa, muestra uno.
- ¿Hay algún ciclo de Hamilton en  $G$ ? Si la respuesta es afirmativa, muestra uno.
- ¿Es  $G$  un grafo plano? Si la respuesta es afirmativa, obtén una representación plana de  $G$ .
- Calcula el número cromático de  $G$ . ¿Es  $G$  un grafo bipartido?

**Solución:**

La matriz de adyacencia nos indica los vértices que están unidos por un lado de la siguiente forma: si  $a_{ij} = 1$  significa que hay un lado que une el vértice  $i$  con el vértice  $j$ . Si  $a_{ij} = 0$  ese lado no existe.

Basándonos en esto vamos en primer lugar a dibujar el grafo. Para esto, vamos a llamar a los vértices  $v_i$ , y los colocamos como los vértices de un polígono de 10 lados. Dibujamos los lados entre estos vértices:



Vamos a cambiar la distribución de los vértices para que se vea más claro:

Bien porque el número cromático no es 2, bien porque hay ciclos de longitud impar, vemos que el grafo no es bipartido.