Prueba de clase 9 de Abril de 2019

Alumno:_______D.N.I.:______Grupo:_____

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS TEST 1

| | (a) | (b) | (c) | (d) |
|------------|-----|-----|-----|----------------|
| Pregunta 1 | V | F | V | F |
| Pregunta 2 | F | V | V | F |
| Pregunta 3 | F | V | V | \overline{F} |
| Pregunta 4 | V | F | V | F |

PREGUNTAS TEST

Ejercicio 1. Sea B un álgebra de Boole y x, y, z tres elementos de B tales que $x \le y$ y x < z. Entonces:

1.
$$\overline{x} + \overline{y} + z = 1$$
.

2.
$$x + y < z + y$$
.

3.
$$\overline{x} \downarrow z = 0$$
.

4.
$$y \le z$$
.

Solución:

Para este ejercicio tenemos en cuenta que el orden en un álgebra de Boole está definido como sigue:

$$x \le y \text{ si } x + y = y.$$

En este caso tenemos que x + y = y y que x + z = z. Con esto:

- 1. Puesto que x+z=z tenemos que $\overline{x}+z=\overline{x}+(x+z)=(\overline{x}+x)+z=1+z=1$. Por tanto, $\overline{x}+\overline{y}+z=1+\overline{y}=1$. La afirmación es por tanto verdadera.
- 2. Esta afirmación no es cierta. Basta tomar, en el álgebra \mathbb{B} , x=0, y=1 y z=1. Entonces $x\leq y$, x< z pero x+y no es menor que x+z, pues ambos valen 1.
- 3. Ahora tenemos que $\overline{x}\downarrow z=\overline{\overline{x}+z}=\overline{1}=0$. Hemos usado que $\overline{x}+z=1$, tal y como hemos visto en el apartado primero. La afirmación es verdadera.
- 4. Esta última afirmación es falsa. Por ejemplo, en el álgebra \mathbb{B}^2 tomamos $x=(0,0),\ y=(1,0)$ y z=(0,1). Entonces $x\leq y,\ x< z$ pero y no es menor o igual que z.

9 de Abril de 2019 (1)

 $^{^{1}\}mathrm{Cada}$ casilla del cuadro debe ser rellenada con V (verdadero) o F (falso).

Ejercicio 2. Sea $f: \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ la función dada por $f = M_1 \cdot M_3 \cdot M_5$. Entonces:

1.
$$f(x, y, z) = (x \downarrow y) \downarrow z$$
.

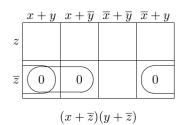
2.
$$f(x, y, z) = (x \uparrow y) \uparrow z$$
.

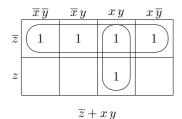
3.
$$f(x, y, z) = (x + \overline{z})(y + \overline{z})(\overline{x} + y + \overline{z}).$$

4.
$$f(x, y, z) = \overline{x} \overline{z} + xy$$
.

Solución:

Vamos, a partir de los mapas de Karnaugh, a obtener dos expresiones booleanas de f.





Una vez que tenemos estas dos expresiones para f respondemos a las cuestiones:

- 1. $(x\downarrow y)\downarrow z=\overline{x+y}\downarrow z=\overline{\overline{x+y}+z}=\overline{\overline{x+y}}\,\overline{z}=(x+y)\overline{z}=x\overline{z}+y\overline{z}.$ Y esta expresión no es igual a f(x,y,z), pues f(x,y,z)=1 mientras que $(0\downarrow 0)\downarrow 0=0.$
- 2. $(x \uparrow y) \uparrow z = \overline{xy} \uparrow z = \overline{\overline{xy}} \overline{z} = xy + \overline{z}$, que vemos que coincide con la expresión de f.
- 3. Tenemos que $x + \overline{z} = M_1 \cdot M_3$, $y + \overline{z} = M_1 \cdot M_5$ y $\overline{x} + y + \overline{z} = M_5$. Por tanto:

$$(x+\overline{z})(y+\overline{z})(\overline{x}+y+\overline{z}) = M_1 \cdot M_3 \cdot M_1 \cdot M_5 \cdot M_5 = M_1 \cdot M_3 \cdot M_5.$$

La expresión se corresponde con la función f.

4. Ahora tenemos que $\overline{x}\overline{z} = m_0 + m_2$, mientras que $xy = m_6 + m_7$, luego $\overline{x}\overline{z} + xy = m_0 + m_2 + m_6 + m_7$, que no coincide con f (falta el minterm 4).

Ejercicio 3. Sea δ la fórmula $(\alpha \to \beta) \land (\beta \to \gamma) \to \alpha$. Entonces:

1. δ es una tautología.

2. δ es satisfacible y refutable.

3. $\alpha \to \delta$ es una tautología.

4. $\beta \rightarrow \delta$ es una tautología.

Solución:

Calculamos las tablas de verdad de las distintas fórmulas:

| α | β | γ | $\alpha \to \beta$ | $\beta \to \gamma$ | $(\alpha \to \beta) \land (\beta \to \gamma)$ | $\delta = (\alpha \to \beta) \land (\beta \to \gamma) \to \alpha$ | $\alpha \to \delta$ | $\beta \to \delta$ |
|----------|---|----------|--------------------|--------------------|---|---|---------------------|--------------------|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Y vemos como δ es satisfacible y refutable, $\alpha \to \delta$ es tautología y $\beta \to \delta$ no lo es.

9 de Abril de 2019 (3)

Ejercicio 4. Sea $\Gamma = \{ \neg a \land b \rightarrow c, \ b \rightarrow \neg a \land \neg c, \ \neg c \rightarrow b \}$. Entonces:

1. $\alpha = c$ es consecuencia lógica de Γ .

2. $\alpha = c \rightarrow \neg a$ es consecuencia lógica de Γ .

3. $\alpha = a \vee \neg b$ es consecuencia lógica de Γ .

4. $\alpha = a \rightarrow b$ es consecuencia lógica de Γ .

Solución:

Calculamos la forma clausulada de cada una de las fórmulas de Γ :

$$\bullet b \to \neg a \land \neg c \equiv \neg b \lor (\neg a \land \neg c) \equiv (\neg b \lor \neg a) \land (\neg b \lor \neg c).$$

$$\neg c \to b \equiv c \lor b.$$

Y ahora estudiamos cada uno de los casos:

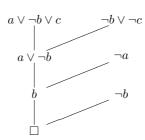
1. Para ver si c es consecuencia de Γ estudiamos si $\{a \vee \neg b \vee c, \neg a \vee \neg b, \neg b \vee \neg c, c \vee b, \neg c\}$ es o no insatisfacible. Lo hacemos por el algoritmo de Davis-Putnam.

Al llegar a la cláusula vacía, el conjunto es insatisfacible, luego la implicación semántica es cierta.

2. Al igual que antes, estudiamos si el conjunto $\{a \lor \neg b \lor c, \neg a \lor \neg b, \neg b \lor \neg c, c \lor b, c, a\}$ es insatisfacible:

Y puesto que hemos llegado al conjunto vacío, la implicación semántica no es cierta. Podemos ver que para la interpretación $I(a)=1,\ I(b)=0$ e I(c)=1 se tiene que $I(\neg a \land b \to c)=1,\ I(b\to \neg a \land \neg c)=1,\ I(\neg c\to b)=1$ e $I(c\to \neg a)=0$.

3. Ahora tenemos que ver si el conjunto $\{a \lor \neg b \lor c, \ \neg a \lor \neg b, \ \neg b \lor \neg c, \ c \lor b, \ \neg a, \ b\}$ es o no insatisfacible. Lo hacemos por resolución:



Y como hemos llegado a la cláusula vacía, el conjunto es insatisfacible luego la fórmula $a \vee \neg b$ es consecuencia lógica de Γ .

4. Podemos ver que con la interpretación que pusimos en el apartado 2, es decir, I(a)=1, I(b)=0 e I(c)=1 el valor de verdad de todas las fórmulas de Γ es 1 mientras que $I(a\to b)=0$. Por tanto, no es consecuencia lógica de Γ .

9 de Abril de 2019 (5)

FIN DE LAS PREGUNTAS TEST

Ejercicio 5. Sea $f: \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ la función booleana dada por

$$f(x, y, z, t) = x + y\overline{z} + t \downarrow (x \downarrow z).$$

 $Y sea g : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B} la función dual de f.$

- 1. Calcula la forma normal canónica disyuntiva de f y la forma normal canónica conjuntiva de \overline{f} .
- 2. Simplifca la expresión de f obtenida en el apartado anterior.
- 3. Calcula la forma normal canónica conjuntiva de g y una expresión simplificada como producto de sumas de literales.

Solución:

- 1. Para calcular la forma normal canónica disyuntiva de f tenemos en cuenta que $t\downarrow(x\downarrow z)=\overline{t+\overline{x+z}}=\overline{t}\,(x+z)=\overline{t}\,x+\overline{t}\,z$. Y ahora:

 - $y\overline{z} = m_4 + m_5 + m_{12} + m_{13}.$
 - $\bar{t} x = m_8 + m_{10} + m_{12} + m_{14}.$
 - $\bar{t}z = m_2 + m_6 + m_{10} + m_{14}.$

Y por tanto $f = m_2 + m_4 + m_5 + m_6 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13} + m_{14} + m_{15}$. Y esta es la forma disyuntiva, que podemos escribir así:

$$f(x,y,z,t) = \overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{t} + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,\overline{t} + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,t + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,\overline{t} + x\,y\,z\,\overline{t} + x\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} + x\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} + x\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} + x\,\overline{y}\,z\,\overline{t} + x\,y\,z\,\overline{t} +$$

Para calcular la forma normal conjuntiva de \overline{f} tenemos en cuenta que $\overline{m_i} = M_i$, luego

$$\overline{f} = \overline{m_2 + m_4 + m_5 + m_6 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13} + m_{14} + m_{15} }$$

$$= \overline{m_2} \cdot \overline{m_4} \cdot \overline{m_5} \cdot \overline{m_6} \cdot \overline{m_8} \cdot \overline{m_9} \cdot \overline{m_{10}} \cdot \overline{m_{11}} \cdot \overline{m_{12}} \cdot \overline{m_{13}} \cdot \overline{m_{14}} \cdot \overline{m_{15}}$$

$$= M_2 \cdot M_4 \cdot M_5 \cdot M_6 \cdot M_8 \cdot M_9 \cdot M_{10} \cdot M_{11} \cdot M_{12} \cdot M_{13} \cdot M_{14} \cdot M_{15}.$$

Es decir:

2. Vamos a simplificar la expresión de f. Esto lo hacemos mediante un diagrama de Karnaugh:

| | $\overline{x}\overline{y}$ | $\overline{x}y$ | xy | $x \overline{y}$ |
|----------------------------|----------------------------|-----------------|----|-------------------|
| $\overline{z}\overline{t}$ | | 1 | 1 | 1 |
| $\overline{z} t$ | | 1 | 1 | 1 |
| z t | | | 1 | 1 |
| $z \overline{t}$ | 1 | 1 | 1 | 1 |

Y tenemos que $f(x, y, z, t) = x + z \overline{t} + y \overline{z}$.

(6) 9 de Abril de 2019

3. Para calcular una forma normal canónica conjuntiva de g, y al ser esta función la dual de f, tomamos la forma normal canónica disyuntiva de f y intercambiamos sumas por productos. Nos queda entonces que la forma normal canónica conjunta de g es:

 $(\overline{x}+\overline{y}+z+\overline{t})(\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{t})(\overline{x}+y+\overline{z}+t)(\overline{x}+y+z+\overline{t})(x+\overline{y}+z+\overline{t})(x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{t})(x+\overline{y}+z+\overline{t})(x+\overline{y}+z+\overline{t})(x+y+\overline{z}+\overline{t})(x+y+z+\overline{t})(x+y$

Es decir,
$$g = M_{13} \cdot M_{11} \cdot M_{10} \cdot M_8 \cdot M_7 \cdot M_6 \cdot M_5 \cdot M_4 \cdot M_3 \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot M_0$$

Por último, para la expresión reducida como producto de suma de literales, partimos de la expresión de f obtenida en el apartado segundo e intercambiamos sumas con productos. Esta expresión de f es $f(x,y,z,t)=x+z\,\bar{t}+y\,\bar{z}$. Por tanto:

$$g(x, y, z, t) = x(z + \overline{t})(y + \overline{z}).$$

9 de Abril de 2019 (7)

Ejercicio 6. Dadas las siguientes fórmulas:

- \bullet $\alpha_1 = a \wedge b \rightarrow c$.
- $\bullet \alpha_2 = \neg c \to ((a \lor d) \land (d \land e \to a) \land (b \lor e)).$
- $\bullet \ \alpha_3 = a \to \neg e \land (b \lor e).$
- $\beta = \neg c \to b \land c \land d.$

Estudia si $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \models \beta$. En caso de no ser cierto da una interpretación que lo muestre.

Solución:

Tenemos que comprobar si $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \models \neg c \rightarrow b \land c \land d$. Aplicando primero el teorema de la deducción y después el teorema de refutación nos queda comprobar si el siguiente conjunto de fórmulas

$$\{a \land b \rightarrow c, \neg c \rightarrow ((a \lor d) \land (d \land e \rightarrow a) \land (b \lor e)), a \rightarrow \neg e \land (b \lor e), \neg c, \neg (b \land c \land d)\}$$

es o no insatisfacible. Pasamos cada una de las fórmulas a cláusulas:

$$\bullet \alpha_1 = a \wedge b \to c$$

$$\equiv \neg(a \wedge b) \vee c$$

$$\equiv \neg a \vee \neg b \vee c.$$

$$\begin{array}{lll} \bullet \ \alpha_2 & = & \neg c \to ((a \lor d) \land (d \land e \to a) \land (b \lor e)) \\ & \equiv & c \lor ((a \lor d) \land (\neg (d \land e) \lor a) \land (b \lor e)) \\ & \equiv & c \lor ((a \lor d) \land (\neg d \lor \neg e \lor a) \land (b \lor e)) \\ & \equiv & (c \lor a \lor d) \land (c \lor \neg d \lor \neg e \lor a) \land (c \lor b \lor e). \end{array}$$

$$\bullet \alpha_3 = a \rightarrow \neg e \land (b \lor e)
\equiv \neg a \lor (\neg e \land (b \lor e))
\equiv (\neg a \lor \neg e) \land (\neg a \lor b \lor e).$$

- $\bullet \neg c = \neg c.$
- $\bullet \neg (b \land c \land d) \equiv \neg b \lor \neg c \lor \neg d.$

Y nos queda el siguiente conjunto de cláusulas:

$$\Sigma = \{ \neg a \lor \neg b \lor c, \ c \lor a \lor d, \ c \lor \neg d \lor \neg e \lor a, \ c \lor b \lor e, \ \neg a \lor \neg e, \ \neg a \lor b \lor e, \ \neg c, \ \neg b \lor \neg c \lor \neg d \}.$$

Comprobamos si es o no insatisfacible por el algoritmo de Davis-Putnmam.

Puesto que una rama ha llegado al conjunto vacío el conjunto es satisfacible, y la implicación no es cierta. Una interpretación que lo muestra es I(a) = 0, I(b) = 1, I(c) = 0, I(d) = 1, I(e) = 0.

Podemos ver que con esa interpretación, $I(\alpha_1) = I(\alpha_2) = I(\alpha_3) = 1$ mientras que $I(\beta) = 0$.

(8) 9 de Abril de 2019