

# INTEGRACIÓN

## 1. Teorema fundamental del Cálculo

**Ejercicio 1.** Halla las derivadas de cada una de las funciones siguientes:

1)  $F(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen}(\log(1+t)) \, dt,$

2)  $F(x) = \int_{x^2}^1 \operatorname{sen}^3(t) \, dt,$

3)  $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \cos^3(t) \, dt.$

**Ejercicio 2.** Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$f(x) = \int_0^{x^3-x^2} e^{-t^2} \, dt.$$

Como consecuencia, estudiar los extremos relativos de dicha función.

**Ejercicio 3.** Calcula los siguientes límites:

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x \operatorname{sen}(t^2) \, dt}{\operatorname{sen}(x^4)},$

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{x^2+x}^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2} \, dt}{\operatorname{sen}^2(x)},$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{x^2} \log(\sqrt{t}) \, dt}{2x^2 \log(x) - x^2},$

4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \operatorname{arcsen}(t^2) \, dt}{\sqrt{x} \operatorname{sen}(x)}.$

**Ejercicio 4.** Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\log(x)}}{x} \cdot \int_2^x \frac{dy}{\sqrt{\log(y^2)}}.$$

**Ejercicio 5.** Calcula el máximo absoluto de la función  $f: [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \int_0^{x-1} (e^{-t^2} - e^{-2t}) \, dt.$$

Sabiendo que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{\pi} - 1)$ , calcula el mínimo absoluto de  $f$ .

**Ejercicio 6.** Se considera  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2 e^{-x}$ .

1) Calcula una primitiva,  $F$ , de  $f$ .

2) Calcula, si existen, los puntos donde la pendiente de la recta tangente de  $F$  es mínima y donde es máxima.

**Ejercicio 7.** Demostrar que, para cualquier  $x \in \mathbb{R}^+$ , se verifica que

$$\int_1^{\cosh(x)} \sqrt{t^2 - 1} \, dt = \frac{\cosh(x) \sinh(x)}{2} - \frac{x}{2}.$$

**Ejercicio 8.** Se considera la función  $f(x) = \int_0^{x^3-x^2} e^{-t^2} \, dt$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

- 1) Encuentra los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función  $f$  en  $\mathbb{R}$ .
- 2) Calcula los extremos relativos de  $f$ .
- 3) Calcula  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin(x^3 - x^2)}$ .

**Ejercicio 9.** Sea  $f: ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(x) = \int_0^{1/x} e^{-t^2} \, dt$ .

- 1) Estudia los intervalos de monotonía de  $f$ .
- 2) Sabiendo que  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , calcula  $f(]0, +\infty[)$ .

**Ejercicio 10.** Calcula el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en el origen de la función  $f(x) = \int_x^{x^2} \cos(t^2) \, dt$ .

## 2. Cálculo de primitivas

### 2.1. Integrales inmediatas y cambio de variable

**Ejercicio 11.** Calcula las siguientes primitivas

- |  |   |                                    |
|--|---|------------------------------------|
| 1) $\int 2x^5 \, dx$ ,                         | 2) $\int \frac{dx}{2x^5}$ ,                 | 3) $\int (4x^7 + 2)^5 x^6 \, dx$ , |
| 4) $\int \frac{2x+1}{1+x^2} \, dx$ ,           | 5) $\int (\sqrt[3]{1+x})^4 \, dx$ ,         | 6) $\int \sin(x/2) \, dx$ ,        |
| 7) $\int \tan(2x) \, dx$ ,                     | 8) $\int \frac{\cos(x)}{\sin^4(x)} \, dx$ , | 9) $\int \cos(e^x) e^x \, dx$ .    |
| 10) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\log(x)}}{x} \, dx$ | 11) $\int \frac{dx}{e^x+1}$                 | 12) $\int x(2x+5)^{10} \, dx$      |

### 2.2. Integración por partes

**Ejercicio 12.** Calcula las siguientes primitivas

- |                                     |                                   |                              |
|-------------------------------------|-----------------------------------|------------------------------|
| 1) $\int \log(x) \, dx$             | 2) $\int \arctan(x) \, dx$ ,      | 3) $\int \arcsen(x) \, dx$ , |
| 4) $\int x \sin(x) \, dx$ ,         | 5) $\int x e^{-x} \, dx$ ,        | 6) $\int x^2 e^{3x} \, dx$ , |
| 7) $\int x \sin(x) \cos(x) \, dx$ , | 8) $\int e^{2x} \cos(5x) \, dx$ , | 9) $\int x \log(x) \, dx$    |

## 2.3. Integración de funciones racionales

**Ejercicio 13.** Calcula las siguientes primitivas

$$\begin{array}{lll} 1) \int \frac{x+1}{x^2-2x+1} dx, & 2) \int \frac{x^3}{x^3+2x^2-x-2} dx, & 3) \int \frac{x}{(x+1)(x-1)^2} dx, \\ 4) \int \frac{dx}{3x^2+4}, & 5) \int \frac{2x}{x^2+3} dx, & 6) \int \frac{dx}{(x^2-1)(x^2+1)}, \\ 7) \int \frac{dx}{(x^2+4)^2} & 8) \int \frac{(x-1)x^2(2x+3)}{(x^2+1)^2}, & 9) \int \frac{2x^3-3x+7}{x+1} dx. \end{array}$$

## 2.4. Integración de funciones trigonométricas

**Ejercicio 14.** Calcula las siguientes primitivas

$$\begin{array}{lll} 1) \int \sin^3(x) dx, & 2) \int \cos^4(x) dx, & 3) \int \tan^5(x) dx, \\ 4) \int \cos^3(5x) dx, & 5) \int \tan^2(x) \sec^2(x) dx, & 6) \int \sin^2(x) \cos^2(x) dx, \\ 7) \int \sin^2(x) \cos^3(x) dx, & 8) \int \sin^3(x) \cos^3(x) dx, & 9) \int \frac{dx}{\sin(x)}, \\ 10) \int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} dx, & 11) \int \frac{dx}{\cos^3(x)}, & 12) \int \frac{\sin^5(x)}{\cos^3(x)} dx. \end{array}$$

**Ejercicio 15.** Calcula las siguientes primitivas

$$\begin{array}{ll} 1) \int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)} dx & 2) \int \frac{1+\operatorname{tg}(x)}{1-\operatorname{tg}(x)} dx \\ 3) \int \frac{dx}{1+\cos^2(3x)} & 4) \int \frac{dx}{3\sin^2(x)+5\cos^2(x)} \\ 5) \int \frac{\sin(2x)}{1+\sin^2(x)} dx & 6) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)} dx \end{array}$$

## 3. Integrales impropias

**Ejercicio 16.** Prueba que existen las siguientes integrales y que tienen el valor que se indica en cada caso:

$$\begin{array}{ll} 1) \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = 1 + \log\left(\frac{2}{1+e}\right) & 2) \int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5} dx = \frac{3\pi + \log(2)}{10} \\ 3) \int_0^{+\infty} \frac{x}{3+x^4} dx = \frac{\sqrt{3}\pi}{12} & 4) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{\pi}{2} \\ 5) \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2} & 6) \int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos(x))^2 dx = 3\pi \\ 7) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin(x)|^3 dx = \frac{4}{3} & 8) \int_0^{\pi/2} \sin^2(y) \cos^2(y) dy = \frac{\pi}{16} \end{array}$$