Prueba de clase 9 de Abril de 2019

Alumno:______________________________ **D.N.I.:**____________ **Grupo:**______

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS TEST[1]

	a)	*b)*	*c)*	*d)*
Pregunta 1	*V*	*F*	*V*	*F*
Pregunta 2	*F*	*V*	*V*	*F*
Pregunta 3	*F*	*V*	*V*	*F*
Pregunta 4	*V*	*F*	*V*	*F*

PREGUNTAS TEST

Ejercicio 1. *Sea B un álgebra de Boole y x, y, z tres elementos de B tales que $x \leq y$ y $x < z$. Entonces:*

1. $\overline{x} + \overline{y} + z = 1$.

2. $x + y < z + y$.

3. $\overline{x} \downarrow z = 0$.

4. $y \leq z$.

Solución:
Para este ejercicio tenemos en cuenta que el orden en un álgebra de Boole está definido como sigue:

$$x \leq y \text{ si } x + y = y.$$

En este caso tenemos que $x + y = y$ y que $x + z = z$. Con esto:

1. Puesto que $x + z = z$ tenemos que $\overline{x} + z = \overline{x} + (x + z) = (\overline{x} + x) + z = 1 + z = 1$. Por tanto, $\overline{x} + \overline{y} + z = 1 + \overline{y} = 1$. La afirmación es por tanto verdadera.

2. Esta afirmación no es cierta. Basta tomar, en el álgebra $\mathbb{B}$, $x = 0$, $y = 1$ y $z = 1$. Entonces $x \leq y$, $x < z$ pero $x + y$ no es menor que $x + z$, pues ambos valen 1.

3. Ahora tenemos que $\overline{x} \downarrow z = \overline{\overline{x} + z} = \overline{1} = 0$. Hemos usado que $\overline{x} + z = 1$, tal y como hemos visto en el apartado primero. La afirmación es verdadera.

4. Esta última afirmación es falsa. Por ejemplo, en el álgebra $\mathbb{B}^2$ tomamos $x = (0, 0)$, $y = (1, 0)$ y $z = (0, 1)$. Entonces $x \leq y$, $x < z$ pero y no es menor o igual que z.

[1] Cada casilla del cuadro debe ser rellenada con V (verdadero) o F (falso).

Ejercicio 2. *Sea $f : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ la función dada por $f = M_1 \cdot M_3 \cdot M_5$. Entonces:*

1. $f(x, y, z) = (x \downarrow y) \downarrow z$.

2. $f(x, y, z) = (x \uparrow y) \uparrow z$.

3. $f(x, y, z) = (x + \overline{z})(y + \overline{z})(\overline{x} + y + \overline{z})$.

4. $f(x, y, z) = \overline{x}\,\overline{z} + xy$.

Solución:
Vamos, a partir de los mapas de Karnaugh, a obtener dos expresiones booleanas de f.

	$x+y$	$x+\overline{y}$	$\overline{x}+\overline{y}$	$\overline{x}+y$
z				
$\overline{z}$	0	0		0

$(x + \overline{z})(y + \overline{z})$

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}$	1	1	1	1
z			1	

$\overline{z} + x\,y$

Una vez que tenemos estas dos expresiones para f respondemos a las cuestiones:

1. $(x \downarrow y) \downarrow z = \overline{x+y} \downarrow z = \overline{\overline{x+y} + z} = \overline{\overline{x+y}}\,\overline{z} = (x+y)\overline{z} = x\overline{z} + y\overline{z}$. Y esta expresión no es igual a $f(x, y, z)$, pues $f(x, y, z) = 1$ mientras que $(0 \downarrow 0) \downarrow 0 = 0$.
2. $(x \uparrow y) \uparrow z = \overline{xy} \uparrow z = \overline{\overline{xy}\,z} = xy + \overline{z}$, que vemos que coincide con la expresión de f.
3. Tenemos que $x + \overline{z} = M_1 \cdot M_3$, $y + \overline{z} = M_1 \cdot M_5$ y $\overline{x} + y + \overline{z} = M_5$. Por tanto:
$$(x + \overline{z})(y + \overline{z})(\overline{x} + y + \overline{z}) = M_1 \cdot M_3 \cdot M_1 \cdot M_5 \cdot M_5 = M_1 \cdot M_3 \cdot M_5.$$
La expresión se corresponde con la función f.
4. Ahora tenemos que $\overline{x}\,\overline{z} = m_0 + m_2$, mientras que $xy = m_6 + m_7$, luego $\overline{x}\,\overline{z} + xy = m_0 + m_2 + m_6 + m_7$, que no coincide con f (falta el minterm 4).

Ejercicio 3. *Sea δ la fórmula $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma) \to \alpha$. Entonces:*

1. *δ es una tautología.*
2. *δ es satisfacible y refutable.*
3. *$\alpha \to \delta$ es una tautología.*
4. *$\beta \to \delta$ es una tautología.*

Solución:
Calculamos las tablas de verdad de las distintas fórmulas:

α	β	γ	$\alpha \to \beta$	$\beta \to \gamma$	$(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)$	$\delta = (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma) \to \alpha$	$\alpha \to \delta$	$\beta \to \delta$
0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Y vemos como δ es satisfacible y refutable, $\alpha \to \delta$ es tautología y $\beta \to \delta$ no lo es.

Ejercicio 4. *Sea* $\Gamma = \{\neg a \wedge b \to c,\ b \to \neg a \wedge \neg c,\ \neg c \to b\}$. *Entonces:*

1. $\alpha = c$ *es consecuencia lógica de* Γ.
2. $\alpha = c \to \neg a$ *es consecuencia lógica de* Γ.
3. $\alpha = a \vee \neg b$ *es consecuencia lógica de* Γ.
4. $\alpha = a \to b$ *es consecuencia lógica de* Γ.

Solución:
Calculamos la forma clausulada de cada una de las fórmulas de Γ:

- $\neg a \wedge b \to c \equiv \neg(\neg a \wedge b) \vee c \equiv a \vee \neg b \vee c$.
- $b \to \neg a \wedge \neg c \equiv \neg b \vee (\neg a \wedge \neg c) \equiv (\neg b \vee \neg a) \wedge (\neg b \vee \neg c)$.
- $\neg c \to b \equiv c \vee b$.

Y ahora estudiamos cada uno de los casos:

1. Para ver si c es consecuencia de Γ estudiamos si $\{a \vee \neg b \vee c,\ \neg a \vee \neg b,\ \neg b \vee \neg c,\ c \vee b,\ \neg c\}$ es o no insatisfacible. Lo hacemos por el algoritmo de Davis-Putnam.

$$
\begin{array}{rc}
 & \{a \vee \neg b \vee c,\ \neg a \vee \neg b,\ \neg b \vee \neg c,\ c \vee b,\ \neg c\} \\
\lambda = \neg c & \Big| \\
 & \{a \vee \neg b,\ \neg a \vee \neg b,\ b\} \\
\lambda = b & \Big| \\
 & \{a,\ \neg a\} \\
\lambda = a & \Big| \\
 & \{\square\}
\end{array}
$$

   Al llegar a la cláusula vacía, el conjunto es insatisfacible, luego la implicación semántica es cierta.

2. Al igual que antes, estudiamos si el conjunto $\{a \vee \neg b \vee c,\ \neg a \vee \neg b,\ \neg b \vee \neg c,\ c \vee b,\ c,\ a\}$ es insatisfacible:

$$
\begin{array}{rc}
 & \{a \vee \neg b \vee c,\ \neg a \vee \neg b,\ \neg b \vee \neg c,\ c \vee b,\ c,\ a\} \\
\lambda = c & \Big| \\
 & \{\neg a \vee \neg b, \neg b,\ a\} \\
\lambda = a & \Big| \\
 & \{\neg b\} \\
\lambda = \neg b & \Big| \\
 & \emptyset
\end{array}
$$

   Y puesto que hemos llegado al conjunto vacío, la implicación semántica no es cierta. Podemos ver que para la interpretación $I(a) = 1$, $I(b) = 0$ e $I(c) = 1$ se tiene que $I(\neg a \wedge b \to c) = 1$, $I(b \to \neg a \wedge \neg c) = 1$, $I(\neg c \to b) = 1$ e $I(c \to \neg a) = 0$.

3. Ahora tenemos que ver si el conjunto $\{a \vee \neg b \vee c,\ \neg a \vee \neg b,\ \neg b \vee \neg c,\ c \vee b,\ \neg a,\ b\}$ es o no insatisfacible. Lo hacemos por resolución:

$$
\begin{array}{ccc}
a \vee \neg b \vee c & & \neg b \vee \neg c \\
| & \diagup & \\
a \vee \neg b & & \neg a \\
| & \diagup & \\
b & & \neg b \\
| & \diagup & \\
\square & &
\end{array}
$$

Y como hemos llegado a la cláusula vacía, el conjunto es insatisfacible luego la fórmula $a \vee \neg b$ es consecuencia lógica de Γ.

4. Podemos ver que con la interpretación que pusimos en el apartado 2, es decir, $I(a) = 1$, $I(b) = 0$ e $I(c) = 1$ el valor de verdad de todas las fórmulas de Γ es 1 mientras que $I(a \to b) = 0$. Por tanto, no es consecuencia lógica de Γ.

FIN DE LAS PREGUNTAS TEST

Ejercicio 5. *Sea $f : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ la función booleana dada por*

$$f(x, y, z, t) = x + y\overline{z} + t \downarrow (x \downarrow z).$$

Y sea $g : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ la función dual de f.

1. *Calcula la forma normal canónica disyuntiva de f y la forma normal canónica conjuntiva de $\overline{f}$.*
2. *Simplifca la expresión de f obtenida en el apartado anterior.*
3. *Calcula la forma normal canónica conjuntiva de g y una expresión simplificada como producto de sumas de literales.*

Solución:

1. Para calcular la forma normal canónica disyuntiva de f tenemos en cuenta que $t \downarrow (x \downarrow z) = \overline{t + \overline{x + z}} = \overline{t}\,(x + z) = \overline{t}\,x + \overline{t}\,z$. Y ahora:

   - $x = m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13} + m_{14} + m_{15}$.
   - $y\,\overline{z} = m_4 + m_5 + m_{12} + m_{13}$.
   - $\overline{t}\,x = m_8 + m_{10} + m_{12} + m_{14}$.
   - $\overline{t}\,z = m_2 + m_6 + m_{10} + m_{14}$.

   Y por tanto $f = m_2 + m_4 + m_5 + m_6 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13} + m_{14} + m_{15}$. Y esta es la forma disyuntiva, que podemos escribir así:

   $$f(x, y, z, t) = \overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{t} + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,\overline{t} + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,t + \overline{x}\,y\,z\,\overline{t} + x\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} + x\,\overline{y}\,\overline{z}\,t + x\,\overline{y}\,z\,\overline{t} + x\,\overline{y}\,z\,t + x\,y\,\overline{z}\,\overline{t} + x\,y\,\overline{z}\,t + x\,y\,z\,\overline{t} + x\,y\,z\,t.$$

   Para calcular la forma normal conjuntiva de $\overline{f}$ tenemos en cuenta que $\overline{m_i} = M_i$, luego

   $$\begin{aligned}
   \overline{f} &= \overline{m_2 + m_4 + m_5 + m_6 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13} + m_{14} + m_{15}} \\
   &= \overline{m_2} \cdot \overline{m_4} \cdot \overline{m_5} \cdot \overline{m_6} \cdot \overline{m_8} \cdot \overline{m_9} \cdot \overline{m_{10}} \cdot \overline{m_{11}} \cdot \overline{m_{12}} \cdot \overline{m_{13}} \cdot \overline{m_{14}} \cdot \overline{m_{15}} \\
   &= M_2 \cdot M_4 \cdot M_5 \cdot M_6 \cdot M_8 \cdot M_9 \cdot M_{10} \cdot M_{11} \cdot M_{12} \cdot M_{13} \cdot M_{14} \cdot M_{15}.
   \end{aligned}$$

   Es decir:

   $$\overline{f}(x, y, z, t) = (x+y+\overline{z}+t)(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{t})(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{t})(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{t})(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{t})(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{t})(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{t})(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{t})(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{t})(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{t})(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{t})(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{t}).$$

2. Vamos a simplificar la expresión de f. Esto lo hacemos mediante un diagrama de Karnaugh:

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}\,\overline{t}$		1	1	1
$\overline{z}\,t$		1	1	1
$z\,t$			1	1
$z\,\overline{t}$	1	1	1	1

   Y tenemos que $f(x, y, z, t) = x + z\,\overline{t} + y\,\overline{z}$.

3. Para calcular una forma normal canónica conjuntiva de g, y al ser esta función la dual de f, tomamos la forma normal canónica disyuntiva de f y intercambiamos sumas por productos. Nos queda entonces que la forma normal canónica conjunta de g es:

$$(\overline{x}+\overline{y}+z+\overline{t})(\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{t})(\overline{x}+y+\overline{z}+t)(\overline{x}+y+z+\overline{t})(x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{t})(x+\overline{y}+\overline{z}+t)(x+\overline{y}+z+\overline{t})(x+\overline{y}+z+t)(x+y+\overline{z}+\overline{t})(x+y+\overline{z}+t)(x+y+z+\overline{t})(x+y+z+t)$$

Es decir, $g = M_{13} \cdot M_{11} \cdot M_{10} \cdot M_8 \cdot M_7 \cdot M_6 \cdot M_5 \cdot M_4 \cdot M_3 \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot M_0$

Por último, para la expresión reducida como producto de suma de literales, partimos de la expresión de f obtenida en el apartado segundo e intercambiamos sumas con productos. Esta expresión de f es $f(x, y, z, t) = x + z\,\overline{t} + y\,\overline{z}$. Por tanto:

$$g(x, y, z, t) = x(z + \overline{t})(y + \overline{z}).$$

Ejercicio 6. *Dadas las siguientes fórmulas:*

- $\alpha_1 = a \wedge b \to c$.
- $\alpha_2 = \neg c \to ((a \vee d) \wedge (d \wedge e \to a) \wedge (b \vee e))$.
- $\alpha_3 = a \to \neg e \wedge (b \vee e)$.
- $\beta = \neg c \to b \wedge c \wedge d$.

Estudia si $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\} \vDash \beta$*. En caso de no ser cierto da una interpretación que lo muestre.*

Solución:

Tenemos que comprobar si $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\} \vDash \neg c \to b \wedge c \wedge d$. Aplicando primero el teorema de la deducción y después el teorema de refutación nos queda comprobar si el siguiente conjunto de fórmulas

$$\{a \wedge b \to c,\ \neg c \to ((a \vee d) \wedge (d \wedge e \to a) \wedge (b \vee e)),\ a \to \neg e \wedge (b \vee e), \neg c,\ \neg(b \wedge c \wedge d)\}$$

es o no insatisfacible. Pasamos cada una de las fórmulas a cláusulas:

$$\begin{aligned} \bullet\ \alpha_1 &= a \wedge b \to c \\ &\equiv \neg(a \wedge b) \vee c \\ &\equiv \neg a \vee \neg b \vee c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet\ \alpha_2 &= \neg c \to ((a \vee d) \wedge (d \wedge e \to a) \wedge (b \vee e)) \\ &\equiv c \vee ((a \vee d) \wedge (\neg(d \wedge e) \vee a) \wedge (b \vee e)) \\ &\equiv c \vee ((a \vee d) \wedge (\neg d \vee \neg e \vee a) \wedge (b \vee e)) \\ &\equiv (c \vee a \vee d) \wedge (c \vee \neg d \vee \neg e \vee a) \wedge (c \vee b \vee e). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet\ \alpha_3 &= a \to \neg e \wedge (b \vee e) \\ &\equiv \neg a \vee (\neg e \wedge (b \vee e)) \\ &\equiv (\neg a \vee \neg e) \wedge (\neg a \vee b \vee e). \end{aligned}$$

- $\neg c = \neg c$.

- $\neg(b \wedge c \wedge d) \equiv \neg b \vee \neg c \vee \neg d$.

Y nos queda el siguiente conjunto de cláusulas:

$$\Sigma = \{\neg a \vee \neg b \vee c,\ c \vee a \vee d,\ c \vee \neg d \vee \neg e \vee a,\ c \vee b \vee e,\ \neg a \vee \neg e,\ \neg a \vee b \vee e,\ \neg c,\ \neg b \vee \neg c \vee \neg d\}.$$

Comprobamos si es o no insatisfacible por el algoritmo de Davis-Putnmam.

$$\{\neg a \vee \neg b \vee c,\ c \vee a \vee d,\ c \vee \neg d \vee \neg e \vee a,\ c \vee b \vee e,\ \neg a \vee \neg e,\ \neg a \vee b \vee e,\ \neg c,\ \neg b \vee \neg c \vee \neg d\}$$

$$\downarrow \lambda = \neg c$$

$$\{\neg a \vee \neg b,\ a \vee d,\ \neg d \vee \neg e \vee a,\ b \vee e,\ \neg a \vee \neg e,\ \neg a \vee b \vee e\}$$

$\lambda = a$:

$$\{\neg b,\ b \vee e,\ \neg e\} \xrightarrow{\lambda = \neg b} \{e,\ \neg e\} \xrightarrow{\lambda = e} \{\square\}$$

$\lambda = \neg a$:

$$\{d,\ \neg d \vee \neg e,\ b \vee e\} \xrightarrow{\lambda = d} \{\neg e,\ b \vee e\} \xrightarrow{\lambda = \neg e} \{b\} \xrightarrow{\lambda = b} \emptyset$$

Puesto que una rama ha llegado al conjunto vacío el conjunto es satisfacible, y la implicación no es cierta. Una interpretación que lo muestra es $I(a) = 0$, $I(b) = 1$, $I(c) = 0$, $I(d) = 1$, $I(e) = 0$.

Podemos ver que con esa interpretación, $I(\alpha_1) = I(\alpha_2) = I(\alpha_3) = 1$ mientras que $I(\beta) = 0$.