LÓGICA Y MÉTODOS DISCRETOS

1 de Julio de 2016

Alumno:______________________________ **D.N.I.:**______________ **Grupo:**_______

Ejercicio 1. *Sea B un Álgebra de Boole, y sean $x, y, z \in B$. Demuestra que*

$$xy + yz + zx = (x + y)(y + z)(z + x).$$

Sea ahora $f : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ la función dada por:

$$f(x, y, z, t) = \begin{cases} xy + yz + zx & \text{si } x = t \\ (y + z)(z + t)(t + y) & \text{si } x \neq t \end{cases}$$

Calcula la forma normal canónica disyuntiva de f.
Encuentra una expresión óptima como suma de productos, tanto de f como de $\overline{f}$.

Solución:
Partimos de la expresión $(x + y)(y + z)(z + x)$ y vamos a ir transformándola siguiendo las leyes del álgebra de Boole hasta llegar a $xy + yz + zx$.

$$\begin{array}{rcll}
(x+y)(y+z)(z+x) & = & (xy+xz+yy+yz)(z+x) & \text{Propiedad distributiva.} \\
 & = & (xy+xz+y+yz)(z+x) & \text{Idempotencia: } yy = y. \\
 & = & (y+xy+yz+xz)(z+x) & \text{Conmutativa.} \\
 & = & (y+xz)(z+x) & \text{Absorción: } y+xy+yz = y+yz = y. \\
 & = & yz+yx+xzz+xzx & \text{Distributiva.} \\
 & = & xy+yz+zzx+zxx & \text{Conmutativa.} \\
 & = & xy+yz+zx+zx & \text{Idempotencia: } zz = z;\ xx = x. \\
 & = & xy+yz+zx & \text{Idempotencia: } zx+zx = zx.
\end{array}$$

Vamos ahora a la función f. Notemos que f está definida por la expresión $xy + yz + zx$ cuando $x = t$. Por tal motivo, dicha expresión podemos sustituirla por $ty + yz + zt = yz + zt + ty$. Y por otra parte, cuando $x \neq t$, la función f está definida por la expresión $(y + z)(z + t)(t + y)$, que por lo que acabamos de probar es igual a $yz + zt + ty$. Por tanto, podemos escribir:

$$f(x, y, z, t) = \begin{cases} yz + zt + ty & \text{si } x = t \\ yz + zt + ty & \text{si } x \neq t \end{cases}$$

Es decir, $f(x, y, z, t) = yz + zt + ty$. Calculamos la forma canónica disyuntiva. Para eso, notemos que $yz = m_6 + m_7 + m_{14} + m_{15}$, $zt = m_3 + m_7 + m_{11} + m_{15}$ y $ty = m_5 + m_7 + m_{13} + m_{15}$. Por tanto, tenemos que

$$f = m_3 + m_5 + m_6 + m_7 + m_{11} + m_{13} + m_{14} + m_{15}.$$

Y ya tenemos la forma canónica disyuntiva. Representamos esta función en un mapa de Karnaugh y agrupamos para obtener una expresión óptima:

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}\,\overline{t}$				
$\overline{z}\,t$		1	1	
$z\,t$	1	1	1	1
$z\,\overline{t}$		1	1	

$yz + zt + ty$

Reservados todos los derechos.

Luego la expresión óptima de f es $f(x, y, z, t) = yz + zt + ty$.

Para escribir una expresión óptima de $\overline{f}$ como suma de productos tenemos en cuenta, a partir de lo demostrado al principio del ejercicio, que $f(x, y, z, t) = (y + z)(z + t)(t + y)$, luego:

$$\overline{f}(x, y, z, t) = \overline{(y + z)(z + t)(t + y)} = \overline{y + z} + \overline{z + t} + \overline{t + y} = \overline{y}\,\overline{z} + \overline{z}\,\overline{t} + \overline{t}\,\overline{y}.$$

Y ya tenemos una expresión reducida para $\overline{f}$.

Este ejercicio podría haberse resuelto de otras formas. Por ejemplo, la primera identidad se podría haber visto a partir de la siguiente tabla:

x	y	z	xy	yz	zx	$xy + yz + zx$	$x + y$	$y + z$	$z + x$	$(x + y)(y + z)(z + x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Y la función f se podría haber obtenido como sigue:

x	y	z	t	xy	yz	zx	$xy + yz + zx$	$y + z$	$z + t$	$t + y$	$(y + z)(z + t)(t + y)$	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$*$	0
0	0	0	1	0	0	0	$*$	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	$*$	0
0	0	1	1	0	0	0	$*$	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	$*$	0
0	1	0	1	0	0	0	$*$	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	$*$	1
0	1	1	1	0	1	0	$*$	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	$*$	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	$*$	0
1	0	1	0	0	0	1	$*$	1	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	$*$	1
1	1	0	0	1	0	0	$*$	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	$*$	1
1	1	1	0	1	1	1	$*$	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$*$	1

Y vemos que $f = m_3 + m_5 + m_6 + m_7 + m_{11} + m_{13} + m_{14} + m_{15}$, tal y como habíamos obtenido antes.

Y por último, la expresión óptima de $\overline{f}$ como suma de productos puede ser obtenida a partir del siguiente diagrama:

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}\,\overline{t}$	1	1	1	1
$\overline{z}\,t$	1			1
$z\,t$				
$z\,\overline{t}$	1			1

$\overline{y}\,\overline{z} + \overline{z}\,\overline{t} + \overline{t}\,\overline{y}$

Ejercicio 2. *Sean:*

$\alpha_1 = r \vee t \to p \vee s$.

$\alpha_2 = \neg r \wedge \neg s \to \neg p \wedge (p \vee q)$.

$\alpha_3 = r \to \neg p \wedge \neg t \wedge (\neg s \vee t)$.

$\beta = (s \to t \vee r) \to s \wedge \neg(r \vee \neg t)$.

Estudia si β es consecuencia lógica de $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}$. Caso de no serlo, da una interpretación que lo muestre.

Solución:

Si llamamos β_1 a la fórmula $s \to t \vee r$ y β_2 a $s \wedge \neg(r \vee \neg t)$, entonces lo que hemos de probar es equivalente a comprobar que $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \beta_1\} \vDash \beta_2$ y esto último es equivalente a que el conjunto

$$\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \beta_1,\ \neg\beta_2\}$$

sea insatisfacible.

Pasamos cada una de estas fórmulas a cláusulas:

$$\alpha_1 = r \vee t \to p \vee s \equiv \neg(r \vee t) \vee (p \vee s) \equiv (\neg r \wedge \neg t) \vee p \vee s \equiv (\neg r \vee p \vee s) \wedge (\neg t \vee p \vee s).$$

$$\alpha_2 = \neg r \wedge \neg s \to \neg p \wedge (p \vee q) \equiv \neg(\neg r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge (p \vee q)) \equiv r \vee s \vee (\neg p \wedge (p \vee q)) \equiv (r \vee s \vee \neg p) \wedge (r \vee s \vee p \vee q).$$

$$\alpha_3 = r \to \neg p \wedge \neg t \wedge (\neg s \vee t) \equiv \neg r \vee (\neg p \wedge \neg t \wedge (\neg s \vee t)) \equiv (\neg r \vee \neg p) \wedge (\neg r \vee \neg t) \wedge (\neg r \vee \neg s \vee t).$$

$$\beta_1 = s \to t \vee r \equiv \neg s \vee t \vee r.$$

$$\neg\beta_2 = \neg(s \wedge \neg(r \vee \neg t)) \equiv \neg s \vee r \vee \neg t.$$

Lo que nos queda entonces es comprobar si el conjunto de cláusulas

$$\{\neg r \vee p \vee s,\ \neg t \vee p \vee s,\ r \vee s \vee \neg p,\ r \vee s \vee p \vee q,\ \neg r \vee \neg p,\ \neg r \vee \neg t,\ \neg r \vee \neg s \vee t,\ \neg s \vee t \vee r,\ \neg s \vee r \vee \neg t\}$$

es o no insatisfacible, y eso lo hacemos por el algoritmo de Davis-Putnam.

$$\{\neg r \vee p \vee s,\ \neg t \vee p \vee s,\ r \vee s \vee \neg p,\ r \vee s \vee p \vee q,\ \neg r \vee \neg p,\ \neg r \vee \neg t,\ \neg r \vee \neg s \vee t,\ \neg s \vee t \vee r,\ \neg s \vee r \vee \neg t\}$$

$\lambda = q$

$$\{\neg r \vee p \vee s,\ \neg t \vee p \vee s,\ r \vee s \vee \neg p,\ \neg r \vee \neg p,\ \neg r \vee \neg t,\ \neg r \vee \neg s \vee t,\ \neg s \vee t \vee r,\ \neg s \vee r \vee \neg t\}$$

$\lambda = s$: $\{\neg r \vee \neg p,\ \neg r \vee \neg t,\ \neg r \vee t,\ t \vee r,\ r \vee \neg t\}$

- $\lambda = r$: $\{\neg p,\ \neg t,\ t\}$ — $\lambda = t$: $\{\neg p,\ \Box\}$
- $\lambda = \neg r$: $\{t,\ \neg t\}$ — $\lambda = t$: $\{\Box\}$

$\lambda = \neg s$: $\{\neg r \vee p,\ \neg t \vee p,\ r \vee \neg p,\ \neg r \vee \neg p,\ \neg r \vee \neg t\}$

- $\lambda = r$: $\{p,\ \neg t \vee p,\ \neg p,\ \neg t\}$ — $\lambda = p$: $\{\Box,\ \neg t\}$
- $\lambda = \neg r$: $\{\neg t \vee p,\ \neg p\}$ — $\lambda = \neg p$: $\{\neg t\}$ — $\lambda = \neg t$: $\emptyset$

Al llegar una rama al conjunto vacío deducimos que el conjunto de cláusulas es satisfacible, luego la implicación semántica no es cierta. Si exploramos esta rama obtenemos una interpretación que nos muestra que esta implicación no es cierta. Esta interpretación es $I(p) = I(r) = I(s) = I(t) = 0$ e $I(q) = 1$. Para esta interpretación se da que $I(\alpha_1) = I(\alpha_2) = I(\alpha_3) = 1$ mientras que $I(\beta) = 0$, como puede comprobarse con facilidad.

Ejercicio 3. *Dado un lenguaje de primer orden con dos símbolos de constante* a, b*, y dos símbolos de predicado binarios* E, R *consideramos la estructura siguiente:*

- *Dominio:* $D = \mathbb{N}$.
- *Asignación de constantes:* $a = 0$, $b = 1$.
- *Asignación de predicados:* $E(x, y) \equiv x = y$; $\quad R(x, y) \equiv x$ *es múltiplo de* y.

Determina el valor de verdad de cada una de las siguientes fórmulas:

1. $R(a, b)$.
2. $\forall x R(a, x)$.
3. $\forall x \forall y (R(x, y) \to \neg E(x, y))$.
4. $\forall x (\exists y (R(x, y) \wedge \forall z (R(y, z) \to E(z, y) \vee E(z, b))))$.

Solución:
Traduciremos el significado de cada fórmula y a partir de esto calcularemos su valor de verdad.

1. $R(a, b)$ significa que a es múltiplo de b. Puesto que $a = 0$ y $b = 1$, la fórmula en este caso dice que 0 es múltiplo de 1, lo cual es cierto.

2. $\forall x R(a, x)$. Esta fórmula viene a decir que para cualquier número natural x, el 0 es múltiplo de x. Es decir, el 0 es múltiplo de todos los números. Esto también es cierto, luego el valor de verdad de esta fórmula es 1.

3. $\forall x \forall y (R(x, y) \to \neg E(x, y))$. Esta fórmula dice que si x es múltiplo de y entonces x es distinto de y. Esto es falso, pues 2 es múltiplo de 2 pero 2 no es distinto de 2. Su valor de verdad es entonces 0.

4. $\forall x (\exists y (R(x, y) \wedge \forall z (R(y, z) \to E(z, y) \vee E(z, b))))$.

   Esta fórmula afirma que para cualquier número natural x debe existir un número natural y que cumpla dos condiciones: $R(x, y)$ y $\forall z (R(y, z) \to E(z, y) \vee E(z, b))$. La primera de las condiciones significa que y debe ser un divisor de x. Vamos a analizar que significa la segunda condición.

   $\forall z (R(y, z) \to E(z, y) \vee E(z, b))$ quiere decir que para cualquier z que sea divisor de y ($R(y, z)$), ese número z, o es igual a y, o es igual a 1. Dicho de otra forma. Cualquier divisor de y, o vale y o vale 1. O si queremos, los únicos divisores de y son 1 y él mismo.

   Por tanto, nuestra fórmula dice que cualquier número natural x tiene un divisor (y) cuyos únicos divisores son 1 y él mismo. Esto es cierto, pues podemos tomar como y el número 1, o cualquier divisor primo de x (cuando lo tenga).

   La fórmula entonces se interpreta como verdadera.

Ejercicio 4. *Comprueba que la fórmula* $\exists x(B(x) \wedge \neg C(x))$ *es consecuencia lógica de*

$$\{\forall x(\exists y(P(x,y) \wedge R(x,y)) \to B(x));\ \exists x(\neg C(x) \wedge \forall y(\neg Q(y) \to R(x,y)));\ \forall x(\forall y(Q(y) \vee \neg P(x,y)) \to C(x))\}$$

Solución:

Pasamos a cláusulas cada una de las fórmulas del conjunto que nos dan así como la negación de $\exists x(B(x) \wedge \neg C(x))$. Vamos tomando cada una de las fórmulas y la transformamos hasta que esté en forma clausulada:

$$\begin{array}{ll}
\forall x(\exists y(P(x,y) \wedge R(x,y)) \to B(x)) & \exists x(\neg C(x) \wedge \forall y(\neg Q(y) \to R(x,y))) \\
\forall x(\neg\exists y(P(x,y) \wedge R(x,y)) \vee B(x)) & \exists x(\neg C(x) \wedge \forall y(Q(y) \vee R(x,y))) \\
\forall x(\forall y \neg(P(x,y) \wedge R(x,y)) \vee B(x)) & \exists x \forall y(\neg C(x) \wedge (Q(y) \vee R(x,y))) \\
\forall x(\forall y(\neg P(x,y) \vee \neg R(x,y)) \vee B(x)) & \forall y(\neg C(a) \wedge (Q(y) \vee R(a,y))). \\
\forall x \forall y((\neg P(x,y) \vee \neg R(x,y)) \vee B(x)) & \\
\forall x \forall y(\neg P(x,y) \vee \neg R(x,y) \vee B(x)). &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\forall x(\forall y(Q(y) \vee \neg P(x,y)) \to C(x)) & \neg\exists x(B(x) \wedge \neg C(x)) \\
\forall x(\neg\forall y(Q(y) \vee \neg P(x,y)) \vee C(x)) & \forall x \neg(B(x) \wedge \neg C(x)) \\
\forall x(\exists y \neg(Q(y) \vee \neg P(x,y)) \vee C(x)) & \forall x(\neg B(x) \vee C(x)). \\
\forall x(\exists y(\neg Q(y) \wedge P(x,y)) \vee C(x)) & \\
\forall x \exists y((\neg Q(y) \wedge P(x,y)) \vee C(x)) & \\
\forall x((\neg Q(f(x)) \wedge P(x,f(x))) \vee C(x)) & \\
\forall x((\neg Q(f(x)) \vee C(x)) \wedge (P(x,f(x)) \vee C(x))). &
\end{array}$$

Nos queda probar entonces que el conjunto de cláusulas

$$\{\neg P(x,y) \vee \neg R(x,y) \vee B(x),\ \neg C(a),\ Q(y) \vee R(a,y),\ \neg Q(f(x)) \vee C(x),\ P(x,f(x)) \vee C(x),\ \neg B(x) \vee C(x)\}$$

es insatisfacible. Lo hacemos por resolución. Puesto que las variables de cláusulas distintas son diferentes, cuando vayamos a calcular una resolvente renombraremos las variables de una de las cláusulas para que no tenga variables comunes con la otra.

$$\begin{array}{lcl}
\neg B(x) \vee C(x) & & \neg P(z,y) \vee \neg R(z,y) \vee B(z) \\
 & & (z|x) \\
C(x) \vee \neg P(x,y) \vee \neg R(x,y) & & Q(z) \vee R(a,z) \\
(x|a) & & (z|y) \\
C(a) \vee \neg P(a,y) \vee Q(y) & & \neg Q(f(x)) \vee C(x) \\
(y|f(x)) & & \\
C(a) \vee \neg P(a,f(x)) \vee C(x) & & P(y,f(y)) \vee C(y) \\
(x|a) & & (y|a) \\
C(a) & & \neg C(a) \\
\square & &
\end{array}$$

Al llegar a la cláusula vacía, el conjunto de cláusulas es insatisfacible, luego $\exists x(B(x) \wedge \neg C(x))$ es consecuencia lógica de las fórmulas del conjunto

$$\{\forall x(\exists y(P(x,y) \wedge R(x,y)) \to B(x));\ \exists x(\neg C(x) \wedge \forall y(\neg Q(y) \to R(x,y)));\ \forall x(\forall y(Q(y) \vee \neg P(x,y)) \to C(x))\}$$

Reservados todos los derechos.

Ejercicio 5.

1. *Encuentra una expresión no recurrente para la sucesión siguiente:*

$$x_0 = 2;\ x_1 = 2;\ x_n = x_{n-2} + 2^n + (-1)^n \ \textit{para}\ n \geq 2$$

2. *Demuestra por inducción que para cada número natural $n \geq 1$ se tiene que*

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$$

Solución:

1. Podemos ver que se trata de una recurrencia lineal no homogénea con coeficientes constantes, donde la parte no homogénea es una función que es suma de dos exponenciales.

   Si transformamos esta recurrencia en una homogénea nos queda una recurrencia de grado 4 donde el polinomio característico es $(x^2-1)(x-2)(x+1)$. El factor x^2-1 viene de la relación de recurrencia homogénea asociada, mientras que los factores $x-2$ y $x+1$ vienen de las dos exponenciales de la función no homogénea.

   Puesto que $x^2-1 = (x+1)(x-1)$, el polinomio $(x^2-1)(x-2)(x+1)$ tiene tres raíces, que son $x=1$, $x=-1$ y $x=2$. Las multiplicidades son respectivamente $1, 2, 1$.

   A la vista de esto podemos sacar que x_n adopta la forma $x_n = a + b(-1)^n + cn(-1)^n + d\,2^n$. Puesto que tenemos 4 incógnitas necesitamos cuatro términos de la sucesión.

   $x_0 = 2;$

   $x_1 = 2;$

   $x_2 = x_0 + 2^2 + (-1)^2 = 2 + 4 + 1 = 7;$

   $x_3 = x_1 + 2^3 + (-1)^3 = 2 + 8 - 1 = 9.$

   El sistema a resolver es entonces:

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=0 & a & + & b & & & + & d & = & 2 \\
n=1 & a & - & b & - & c & + & 2d & = & 2 \\
n=2 & a & + & b & + & 2c & + & 4d & = & 7 \\
n=3 & a & - & b & - & 3c & + & 8c & = & 9
\end{array}$$

   Resolvemos el sistema, para lo cual tomamos la matriz ampliada y la transformamos hasta llegar a una matriz escalonada reducida por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & -3 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{E_{21}(-1) \\ E_{31}(-1) \\ E_{41}(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -3 & 7 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2\left(\frac{-1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -3 & 7 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\substack{E_{12}(-1) \\ E_{42}(2)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{E_{13}\left(\frac{1}{2}\right) \\ E_{23}\left(\frac{-1}{2}\right) \\ E_{43}(2)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{4} & \frac{13}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{4} & \frac{-5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{E_{14}\left(\frac{-1}{4}\right) \\ E_{24}\left(\frac{5}{36}\right) \\ E_{34}\left(\frac{-1}{6}\right) \\ E_{4}\left(\frac{1}{9}\right)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

   De donde obtenemos que $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{5}{12}$, $c = \frac{1}{2}$ y $d = \frac{4}{3}$. La fórmula no recurrente para la sucesión x_n es:

$$x_n = \frac{1}{4} + \frac{5}{12}(-1)^n + \frac{1}{2}n(-1)^n + \frac{4}{3}2^n = \frac{3 + 5\cdot(-1)^n + 6\cdot n\cdot(-1)^n + 16\cdot 2^n}{12}$$

2. Demostramos la identidad que nos piden:

   - Caso base: $n = 1$. Por una parte, $\prod_{k=1}^{1}\left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$ y por otra, $= \frac{1+2}{2\cdot 1+2} = \frac{3}{4}$. Vemos que son iguales.
   - Hipótesis de inducción. Asumimos que para un número $m \geq 1$ se tiene que

$$\prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{m+2}{2m+2}.$$

   - Paso inductivo. Basándonos en la hipótesis de inducción tratamos de demostrar que

$$\prod_{k=1}^{m+1}\left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{m+1+2}{2(m+1)+2}$$

   Llamamos A al producto de la derecha y desarrollamos esa expresión.

$$\begin{aligned}
A &= \prod_{k=1}^{m+1}\left(1 - \tfrac{1}{(k+1)^2}\right) \\
&= \left[\prod_{k=1}^{m}\left(1 - \tfrac{1}{(k+1)^2}\right)\right] \cdot \left(1 - \tfrac{1}{(m+1+1)^2}\right) \\
&= \tfrac{m+2}{2m+2} \cdot \left(1 - \tfrac{1}{(m+2)^2}\right) \\
&= \tfrac{m+2}{2(m+1)} \tfrac{(m+2)^2-1}{(m+2)^2} \\
&= \tfrac{m+2}{2(m+1)} \tfrac{m^2+4m+3}{(m+2)^2} \\
&= \tfrac{(m+2)(m^2+4m+3)}{2(m+1)(m+2)^2} \\
&= \tfrac{m^2+4m+3}{2(m+1)(m+2)} \\
&= \tfrac{(m+1)(m+3)}{2(m+1)(m+2)} \\
&= \tfrac{m+3}{2(m+2)}
\end{aligned}$$

   Que es justo lo que queríamos obtener, pues $\frac{m+1+2}{2(m+1)+2} = \frac{m+3}{2m+4} = \frac{m+3}{2(m+2)}$.

Ejercicio 6.

1. *Estudia si los árboles siguientes son o no isomorfos:*

2. *Sea G un grafo y A su matriz de adyacencia. Sabemos que:*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) *¿Es G conexo?*
   b) *¿Es G un grafo de Euler?*
   c) *¿Es G un árbol?*
   d) *¿Es G bipartido?*
   e) *¿Cuántos caminos de longitud 5 hay de v_1 a v_5?. Â¿Y de v_1 a v_6?*

Solución:

1. Podemos ver que ambos grafos no son isomorfos. Un motivo podría ser el siguiente.

   En ambos grafos hay exactamente dos vértices de grado 3. Pero en el grafo de la derecha ambos vértices son adyacentes (están unidos por un lado), mientras que en el de la izquierda no lo son (están unidos por un camino de longitud 2, pero no por un lado). Por tanto, no pueden ser isomorfos.

2. Respondemos a las distintas cuestiones.

   a) El grafo es conexo. Basta ver que el vértice v_1 está unido a los vértices v_2 y v_6 por caminos de longitud 2 (como nos indica la matriz A^2) y a v_3, v_4 y v_5 por caminos de longitud 3. Por tanto, v_1 está unido por algún camino a cada uno de los restantes vértices.

   b) Puesto que el grafo no tiene lados paralelos, el número de caminos de longitud 2 de un vértice a él mismo es igual al grado de ese vértice (pues para cada lado que incide en un vértice v hay un camino de longitud 2 de v a v. Concretamente el que sale por ese lado y regresa a v por el mismo lado). Vemos entonces, observando la diagonal de la matriz A^2, que el grado de cada vértice es 2.

   Como el grafo es conexo, y todos los vértices tienen grado par el grafo es un grafo de Euler.

   c) No puede ser un árbol, pues tiene un circuito de Euler. También podemos comprobarlo calculando el número de lados. Este número es la mitad de la suma de los grados de los vértices, es decir, $\frac{1}{2}(2+2+2+2+2+2) = 6$.

   Al tener el grafo 6 vértices, para ser un árbol debería tener 5 lados.

   d) Para ver si es bipartido hemos de comprobar si tiene o no ciclos de longitud impar. Ciclos de longitud 3 no tiene, pues todos los elementos de la diagonal de A^3 valen 0. Comprobemos que no tienen ciclos de longitud 5, para lo cual calculamos A^5 (bastaría con calcular los elementos de la diagonal).

$$A^5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 11 & 10 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 11 & 10 & 0 \\ 11 & 11 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 10 & 11 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 11 & 10 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 11 & 0 \end{pmatrix}$$

Y tampoco tiene ciclos de longitud 5. Por tanto, el grafo es bipartido (al tener 6 vértices no tiene sentido que nos preguntemos si tiene ciclos de longitud 7, etc.)

e) Con los cálculos hechos en el apartado anterior podemos responder esta pregunta. El número de caminos de longitud 5 de v_1 a v_5 es igual al coeficiente $(1, 5)$ de la matriz A^5. Y el número de caminos de v_1 a v_6 viene dado por el coeficiente $(1, 6)$.

Vemos entonces que hay 11 caminos de longitud 5 de v_1 a v_5 y no hay ningún camino de longitud 5 de v_1 a v_6.

Reservados todos los derechos.