Derivación

1. Definición. Reglas de derivación

Ejercicio 1. Calcula la tangente de las siguientes curvas en los puntos dados:

a) $y = \frac{x}{x^2+1}$ en el origen,

b) $y = \cos(x)$ en $(\pi/2, 0)$,

c) $y = x^2 + 1$ en $(3, 10)$,

d) $y = |x|$ en $(1, 1)$.

Solución.

a) $y'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \implies y'(0) = 1$ con lo que la recta tangente en el origen es $y = x$.

b) $y'(x) = -\operatorname{sen}(x) \implies y'(\pi/2) = -1$ y la recta tangente que se pide es $y = -(x - \pi/2)$.

c) $y'(x) = 2x \implies y'(3) = 6$. y la recta tangente es $y = 10 + 6(x - 3)$.

d) $y'(x) = 1$ en $\mathbb{R}^+$ y, por tanto, $y'(1) = 1$, y la recta tangente que se pide es $y = x$.

Ejercicio 2. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \left(\sqrt[5]{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^5$,

b) $f(x) = \cos(\cos(\cos(x)))$,

c) $f(x) = x^4 e^x \log(x)$,

d) $f(x) = x^x$,

e) $f(x) = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$,

f) $f(x) = \frac{1}{2} x\,|x|$,

g) $f(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$,

h) $f(x) = \operatorname{sen}(x)\sqrt{\cos(x)}$,

i) $f(x) = \sqrt[4]{x^3 - \sqrt{1-x^2}}$,

j) $f(x) = x^x + x^{1/x}$.

Solución.

a) $f'(x) = \left(\sqrt[5]{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^4 \left(x^{-4/5} + x^{-6/5}\right)$.

b) $f'(x) = -\operatorname{sen}(\cos(\cos(x)))\operatorname{sen}(\cos(x))\operatorname{sen}(x)$.

c) $f'(x) = 4x^3 e^x \log(x) + x^4 e^x \log(x) + x^3 e^x$.

d) $f'(x) = x^x (\log(x) + 1)$.

e) $f'(x) = \sqrt{x}^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{4\sqrt{x}} \log(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$.

f) $f'(x) = |x|$.

g) $f'(x) = \dfrac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1}{\sqrt{x^2+1} + x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

h) $f'(x) = \dfrac{3\cos(x)^2 - 1}{2\sqrt{\cos(x)}}$.

i) $f'(x) = \dfrac{x\left(1 + 3x\sqrt{1 - x^2}\right)}{4\sqrt{1 - x^2}\left(x^3 - \sqrt{1 - x^2}\right)^{3/4}}$.

j) $f'(x) = x^x\,(\log(x) + 1) + x^{1/x}\left(\frac{1-\log(x)}{x^2}\right)$.

Ejercicio 3. Comprueba que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x < 0, \\ 3x^2, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

es continua pero no es derivable en el origen.

Solución. Es inmediato comprobar que la función es continua y que

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 2 \neq 0 = \lim_{x \to 0^+} f'(x).$$

Por tanto, la función no es derivable en el origen.

Ejercicio 4. Calcula los puntos donde la recta tangente a la curva $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 40$ es paralela al eje OX.

Solución. Buscamos dónde se anula la derivada:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = 2, -1.$$

2. Teorema del valor medio

Ejercicio 5. Calcula la imagen de $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{1/x}$.

Solución. Esta función es continua y derivable en todo $\mathbb{R}^+$. Calculamos su derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{x}x^{1/x-1} - \frac{1}{x^2}x^{1/x}\log(x) = x^{1/x-2}(1 - \log(x)).$$

Por tanto $f'(x) = 0 \iff x = \mathrm{e}$. En este punto se tiene un punto de máximo relativo (la función pasa de creciente en el intervalo $(0, \mathrm{e})$ a ser decreciente en $(\mathrm{e}, +\infty)$). Calculando los límites en los extremos del dominio ($\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$) se deduce que como $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}} > 1$, la imagen de la función es $f(\mathbb{R}^+) = (0, \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}]$.

Ejercicio 6. Se considera la función $f : (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida como $f(x) = \log\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x}$. Calcula el conjunto imagen de f.

Solución. La función dada es continua y derivable en su dominio. Para calcular su imagen, vamos a buscar posibles extremos relativos calculando sus puntos críticos. Para ello, derivamos f.

$$f'(x) = \frac{\frac{x-x-1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} + \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2(x+1)}.$$

La derivada de f no se anula nunca. Por tanto, f es estrictamente monótona en cada intervalo que define al dominio. De hecho, para $x < -1$ la derivada es negativa (f es estrictamente decreciente en $(-\infty,-1)$); mientras que para $x>0$, la derivada es positiva (f es estrictamente creciente en $(0,+\infty)$). Con todo esto, calculamos la imagen de f:

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(f) &= f\big((-\infty,-1)\big) \cup f\big((0,+\infty)\big)\\ &= \left(\lim_{x\to -1^-} f(x), \lim_{x\to -\infty} f(x)\right) \cup \left(\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right).\end{aligned}$$

Sólo nos queda calcular estos cuatro límites:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -\infty} f(x) &= 0\\ \lim_{x\to -1^-} f(x) &= -\infty\\ (*)\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= -\infty\\ \lim_{x\to +\infty} f(x) &= 0\end{aligned}$$

Por tanto: $\operatorname{Im}(f) = (-\infty, 0)$.

(*) Este límite presenta una indeterminación del tipo "$\infty - \infty$". Para ello, hacemos un cambio de variable: $y = \frac{1}{x}$. De esta forma nos queda:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \log\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\\ &= \lim_{y\to +\infty} \log(1+y) - y = \lim_{y\to +\infty} y\left(\frac{\log(1+y)}{y} - 1\right) = -\infty,\end{aligned}$$

ya que, utilizando la regla de L'Hôpital, $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{\log(1+y)}{y} = 0$.

Ejercicio 7. Sea $f:\ \mathbb{R}\setminus\{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \arctan(x).$$

Calcula su imagen.

Solución. La función a la que tenemos que calcularle la imagen es una función continua. Si estuviera definida en un intervalo el teorema del valor intermedio nos diría que su imagen es un intervalo; sin embargo $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ no es un intervalo. Sí es cierto que está formado por dos intervalos, $(-\infty,-1)$ y $(-1,+\infty)$, así que la imagen de la función, restringida a cada uno de los intervalos $(-\infty,-1)$ y $(-1,+\infty)$ tiene que ser un intervalo. Por otra parte la función, en cada uno de los dos intervalos anteriores, es derivable así que para calcular la imagen vamos a estudiar la derivada. Esto sabemos que nos da información sobre crecimiento, extremos relativos, etc.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{-2}{(1+x)^2+(1-x)^2} + \frac{1}{1+x^2}\\ &= \frac{-2}{2+2x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 0.\end{aligned}$$

y la función es constante (en cada uno de los intervalos donde está definida).

Para conocer las dos constantes basta entonces con evaluar en un punto de cada uno de los intervalos. En el intervalo $(-1,+\infty)$ no hay ningún problema ya que fácilmente $f(0) = \arctan(1) + \arctan(0) = \pi/4 + 0 = \pi/4$. En el otro intervalo no parece tan fácil ya que no se ve un número en $(-\infty, -1)$ en el que sea fácil evaluar la función. En este caso lo que podemos hacer es calcular el límite de la función, o bien en $-\infty$ o bien en -1 por la izquierda. Por ejemplo en $-\infty$ tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \arctan(x) = \arctan(-1) - \frac{\pi}{2}\\ &= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

Así que la imagen es el conjunto $\{-3\pi/4, \pi/4\}$.

Ejercicio 8. Calcula la imagen de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-x^2}\left(x^2-3\right)$.

Solución. La función f es continua y derivable en toda la recta real. Para estudiar su monotonía, calculamos la derivada y vemos cuándo se anula

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2xe^{-x^2} - \left(x^2-3\right)2xe^{-x^2}\\ &= e^{-x^2}2x\left(4-x^2\right) = 0 \iff x = 0, \pm 2.\end{aligned}$$

Por tanto, f es estrictamente monótona en los intervalos $(-\infty,-2]$, $[-2,0]$, $[0,2]$, $[2,+\infty)$. Para averiguar qué tipo de monotonía tenemos podemos evaluar la derivada en un punto de cada uno de dichos intervalos

$$+ \quad -2 \quad - \quad 0 \quad + \quad 2 \quad -$$

De modo que su imagen es

$$\begin{aligned}f(\mathbb{R}) &= f((-\infty,-2]) \cup f([-2,0]) \cup f([0,2]) \cup f((2,+\infty))\\ &= \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(-2)\right] \cup [f(0), f(-2)] \cup [f(0), f(2)] \cup \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), f(2)\right]\\ &= \left(0, e^{-4}\right] \cup \left[-3, e^{-4}\right] = \left[-3, e^{-4}\right]\end{aligned}$$

usando que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, que $f(0) = -3$ y que $f(2) = f(-2) = e^{-4}$.

Observación: Podíamos habernos ahorrado algunos cálculos utilizando que la función f es par y, por tanto, $f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}_0^+)$.

Ejercicio 9. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

a) Estudia la continuidad de f y los límites en $-\infty$ y $+\infty$.

b) Calcula la imagen de f.

Solución. La función es derivable por ser composición de funciones derivables. Vamos a calcular los límites en $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Para calcular su imagen en primer lugar estudiamos la monotonía. Como la función arcotangente es creciente, sólo tenemos que fijarnos en $\frac{1+x}{1-x}$ y

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{2}{(1-x)^2} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Esto nos dice que f es estrictamente creciente *si estamos en un intervalo*. En otras palabras, f es estrictamente creciente en $(-\infty, 1)$ y en $(1, +\infty)$. Su imagen será

$$\begin{aligned} f\big(\mathbb{R} \setminus \{1\}\big) &= f\big((-\infty, 1)\big) \cup f\big((1, +\infty)\big) = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}. \end{aligned}$$

Ejercicio 10. Prueba que $\operatorname{arc\,sen}(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ para todo $x \in [-1, 1]$.

Solución. Sea $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x) + \arccos(x)$. Como f es derivable en $(-1, 1)$ y además $f'(x) = 0$, para todo $x \in (-1, 1)$ tenemos que f es constante en el intervalo $(-1, 1)$. Si evaluamos la función en el cero, obtenemos $f(x) = \pi/2$, para todo $x \in (-1, 1)$. Utilizando la continuidad de f en todo $[-1, 1]$, se deduce que $f(x) = \pi/2$ en el intervalo cerrado.

Ejercicio 11. Demuestra que

$$\frac{x}{1 + x^2} < \arctan(x) < x,$$

para cualquier x positivo.

Solución. Este ejercicio se puede hacer de varias formas. Vamos a hacerlo de dos maneras. En primer lugar aplicaremos directamente el teorema del valor medio y acotaremos la derivada. Para la segunda manera, demostraremos cada una de las desigualdades por separado.

a) Vamos a comprobar cada desigualdad por separado.

   a) Para demostrar que $\frac{x}{1+x^2} < \arctan(x)$ para cualquier $x > 0$, vamos a estudiar la función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

   $$f(x) = \arctan(x) - \frac{x}{1 + x^2}.$$

   Esta función es derivable y

   $$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1 + x^2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1 + x^2)^2} > 0,$$

   y, por tanto, f es estrictamente creciente. En particular,

   $$f(x) > \lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

   b) Similar al apartado anterior, pero estudia la función $f(x) = x - \arctan(x)$.

b) Sea x un número positivo fijo y consideremos la función $f : [0, x] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(t) = \arctan(t)$. El teorema del valor medio nos dice que existe $c \in [0, x]$ verificando que $f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0)$, o sea, $\arctan(x) = \frac{x}{1+c^2}$. Ahora acotemos

$$\begin{aligned} 0 \le c \le x \iff 0 \le c^2 \le x^2 \iff 1 \le 1 + c^2 \le 1 + x^2 \\ \iff \frac{1}{1 + x^2} \le \frac{1}{1 + c^2} \le 1. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{x}{1 + x^2} < \arctan(x) = \frac{x}{1 + c^2} < x.$$

Ejercicio 12. Comprueba la desigualdad siguiente: $x - 1 \le \log(x^x)$, para todo $x > 0$.

Solución. Utilizando propiedades de la función logaritmo tenemos:

$$x - 1 \le \log(x^x),\ \forall x > 0 \iff x - 1 \le x\ \log(x),\ \forall x > 0.$$

Vamos entonces a estudiar la función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = x \log(x) - x + 1.$$

Para comprobar la desigualdad propuesta tendremos que comprobar que $f(x) \ge 0$, para todo $x > 0$. La función f es derivable en su dominio. Calculamos su derivada:

$$f'(x) = \log(x) + x\,\frac{1}{x} - 1 = \log(x) + 1 - 1 = \log(x).$$

Por tanto, $f'(x) = \log(x) = 0 \iff x = 1$. La función f tiene un único punto crítico en $x = 1$. Si volvemos a derivar:

$$f''(x) = 1/x \implies f''(1) = 1 > 0,$$

de lo que deducimos que f alcanza en 1 un mínimo relativo, que al ser el único punto crítico, se convierte en el mínimo absoluto. Como además $f(1) = 0$ obtenemos que

$$f(x) \ge f(1) = 0, \quad \forall x > 0,$$

como queríamos demostrar.

Ejercicio 13.

a) Determina el número de ceros de la función $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 7$.

b) Calcula $f([1,3])$.

Solución.

a) La función f es polinómica de grado impar, por tanto, aplicando el teorema de Bolzano, al menos tendrá un cero. Vamos a precisar exactamente cuantos ceros tiene estudiando la monotonía y los cambios de signo de la función.

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-1)(x-2).$$

Tenemos por tanto dos puntos críticos de f: $x = 1$ y $x = 2$. Calculemos los intervalos de monotonía para decidir si los puntos críticos son puntos de extremo relativo o no:

$$\begin{aligned}
\text{Si } x < 1 &\implies f'(x) > 0 \implies f \text{ es estric. creciente en } (-\infty, 1],\\
\text{Si } 1 < x < 2 &\implies f'(x) < 0 \implies f \text{ es estric. decreciente en } [1, 2],\\
\text{Si } x > 2 &\implies f'(x) > 0 \implies f \text{ es estric. creciente en } [2, +\infty).
\end{aligned}$$

Se deduce entonces que en el punto $x = 1$ se alcanza un máximo relativo y en el punto $x = 2$ se alcanza un mínimo relativo. Además,

$$f(1) = 12,\ f(2) = 11,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \ \text{ y } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

De lo anterior se deduce que f sólo tiene un cero para un valor de la variable < 1, y a partir de dicho valor, la función siempre es positiva.

b) Para calcular la imagen de f sobre el intervalo compacto $[1,3]$ nos apoyamos en todos los cálculos realizados en el apartado anterior y en la propiedad de Compacidad, que nos asegura que $f([1,3])$ ha de ser otro intervalo compacto. Como en el punto $x = 2$ teníamos un punto crítico y además:

$$f(1) = 12, \; f(2) = 11, \; f(3) = 16,$$

tenemos entonces que $f([1,3] = [f(2), f(3)] = [11, 16]$.

Ejercicio 14. Calcula el número de soluciones de la ecuación $x + \mathrm{e}^{-x} = 2$.

Solución. Para determinar el número de soluciones de la ecuación que nos plantean, vamos a determinar el número de ceros de la función

$$f(x) = x + \mathrm{e}^{-x} - 2, \; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se trata de una función derivable en todo $\mathbb{R}$ por ser suma de funciones derivables y su derivada es:

$$f'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

Observamos que la derivada únicamente se anula en un punto

$$1 - \mathrm{e}^{-x} = 0 \iff 1 = \mathrm{e}^{-x} \iff x = 0.$$

Utilizando entonces el Teorema de Rolle, si f' sólo tiene un cero, la función f puede tener, como mucho, dos ceros (si tuviera tres ceros, la derivada se tendría que anular en dos puntos, y ése no es el caso). Vamos a comprobar si efectivamente tiene dos ceros.

El punto $x = 0$ es el único punto crítico que tiene f. Calculamos la derivada segunda en dicho punto para decidir si es máximo o mínimo relativo:

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-x} \iff f''(0) = 1 > 0.$$

Por tanto, en cero la función f alcanza un mínimo relativo, y por tratarse de el único punto de extremo que hemos encontrado, es también su mínimo absoluto. Además, como el comportamiento de f en los extremos de $\mathbb{R}$ es de divergencia a $+\infty$ y $f(0) = -1 < 0$, concluimos, aplicando ahora el Teorema de Bolzano que: existe un punto $x_1 < 0$ donde $f(x_1) = 0$ y, existe otro punto $x_2 > 0$ donde $f(x_2) = 0$. Por tanto, la función f admite dos ceros y, en consecuencia, la ecuación planteada admite dos soluciones reales.

Ejercicio 15. Determina el número de soluciones reales de la ecuación:

$$3x^5 - 5x^3 = 1.$$

Solución. Se considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 1$. Se trata, entonces, de determinar el número de ceros de f, que es una función continua y derivable en todo el dominio al ser polinómica. Además, al ser su grado impar, sabemos que al menos se anulará una vez. Tendremos que precisar si se anula más veces y por qué.

Calculamos su derivada:

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15(x^4 - x^2) = 15x^2(x^2 - 1) = 15x^2(x + 1)(x - 1).$$

Los puntos críticos de f, es decir, aquellos que resuelven la ecuación $f'(x) = 0$, son $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$. Por tanto, f se anulará, como mucho, 4 veces. Vamos a deducir si estos puntos son de extremo, o no, derivando otra vez:

$$f''(x) = 15(4x^3 - 2x) \quad \text{y} \quad f'''(x) = 15(12x^2 - 2)$$

y evaluamos en los puntos críticos:

$$\begin{aligned}
f''(0) = 0,\ f'''(0) = 30 \neq 0 &\implies f \text{ no alcanza un extremo relativo en } x = 0,\\
f''(1) = 30 &\implies f \text{ alcanza un mínimo relativo en } x = 1,\\
f''(-1) = -30 &\implies f \text{ alcanza un máximo relativo en } x = -1.
\end{aligned}$$

Además, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $f(-1) = 1$, por lo que antes de -1, utilizando el teorema de Bolzano, la función se anula una vez; $f(-1) = 1 > 0$, y $f(1) = -1 < 0$, por lo que entre -1 y 1, la función se anula por segunda vez; y, por último, $f(1) = -1 < 0$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, por tanto, la función después de 1 se anula por tercera vez. En conclusión, la función f tiene tres ceros, o, lo que es lo mismo, la ecuación dada tiene tres soluciones reales.

Ejercicio 16.

a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = x^2\,e^{|x|}$. Calcula su imagen.

b) Determina el número de soluciones de la ecuación $f(x) = 7$.

Solución.

a) La función dada se puede escribir como una función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2\,e^{x}, & \text{si } x \geq 0,\\ x^2\,e^{-x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Se trata de una función continua y derivable en $\mathbb{R}^*$, en principio. Comenzamos con la derivada de f en los puntos distintos de cero:.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\,e^{x} + x^2\,e^{x}, & \text{si } x > 0,\\ 2x\,e^{-x} - x^2\,e^{-x}, & \text{si } x < 0, \end{cases} = \begin{cases} xe^{x}(2 + x), & \text{si } x > 0,\\ xe^{-x}(2 - x), & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Vamos ahora a analizar si la función es derivable en cero. Para ello, calculamos los límites laterales de la derivada:

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = 0 = \lim_{x\to0^-} f'(x) \implies \exists f'(0) = 0.$$

Sólo hay un punto crítico ($x = 0$), ya que la derivada no se anula ni en los negativos, ni en los positivos.

Analizamos los intervalos de monotonía de la función:

- Si $x < 0 \implies f'(x) < 0$, por lo que f es estrictamente decreciente.
- Si $x > 0 \implies f'(x) > 0$, por lo que f es estrictamente creciente.

Entonces, en el punto $x = 0$ la función alcanza un mínimo relativo. Pero al ser el único punto crítico de la función, es su mínimo absoluto. Además, $f(0) = 0$ y, como se trata de una función par ($f(-x) = f(x)$), para calcular la imagen, solo nos queda estudiar el comportamiento de la función en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 e^x = +\infty .$$

Por tanto, el conjunto imagen es: $f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}_0^+) = [0, +\infty)$.

b) Para determinar el número de soluciones de $f(x) = 7$, repetimos el estudio, pero ahora para la función $g(x) = f(x) - 7$, y vamos a calcular el número de ceros de g. Esta nueva función tiene la misma derivada de f y su mismo mínimo absoluto en 0. Además:

$$g(0) = f(0) - 7 = -7 < 0$$

El único cero la derivada de g nos asegura, gracias al teorema de Rolle, que la función g tendrá, como mucho, dos ceros.

Por otra parte, el comportamiento en $-\infty$ y en $+\infty$ es análogo al de f (tiende a $+\infty$ en los dos casos). Por tanto, la función pasa de tomar valores positivos, cuando la variable tiende a $-\infty$, a valer $-7 < 0$ en el mínimo. Por el teorema de Bolzano, sabemos que hay un cero antes de $x = 0$. Por otra parte, la función pasa de ser negativa en $x = 0$ a tomar valores positivos cuando x tiende a $+\infty$. Nuevamente, por el teorema de Bolzano, sabemos que g tendrá otro cero después de $x = 0$. Y como sabíamos que, como mucho, podía tener dos ceros, la ecuación dada tiene dos soluciones.

Ejercicio 17. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 < 3b$. Demuestra que la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tiene una solución real única.

Solución. Definimos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Se trata de una función polinómica de grado impar luego, por el teorema de Bolzano, sabemos que al menos se anula en un punto de la recta real. Estudiamos la derivada para deducir la unicidad de la solución de la ecuación $f(x) = 0$ utilizando el teorema de Rolle.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0 \iff x = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 12b}}{6} .$$

Teniendo en cuenta que $a^2 < 3b \implies 4a^2 - 12b < 0$; se tiene que la derivada no se anula en ningún punto real, por lo que la solución de la ecuación $f(x) = 0$ que teníamos es única ya que la función es estrictamente creciente.

3. Reglas de L'Hôpital

Ejercicio 18. Sea $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{\log(1 - \operatorname{sen}(x)) - 2\log(\cos(x))}{\operatorname{sen}(x)} ,$$

si $x \neq 0$ y $f(0) = a$. Estudia para qué valor de a la función f es continua en cero.

Solución. Calculamos el límite de f en el cero aplicando la regla de L'Hôpital y nos queda

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\cos(x)}{1-\operatorname{sen}(x)} + \frac{2\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}{\cos(x)} = -1.$$

Por tanto, f es continua en cero si, y sólo si, $a = -1$.

Ejercicio 19. Se considera la función $g(x) = \log(x^2 - 2x + e^2 + 1)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

a) Calcula la imagen de g.

b) Calcula $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2\,g(x)}{x^2+1}$.

c) Comprueba que la ecuación $\frac{2}{x^2+1}\, g(x) = 1$ tiene, al menos, una solución positiva.

Solución.

a) La función g es derivable. Comenzamos calculando su derivada y los puntos críticos:

$$g'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+e^2+1} = 0 \iff x = 1.$$

Como $g'(0) < 0$ y $g'(2) > 0$,

- g es estrictamente decreciente en $(-\infty, 1]$, y
- g es estrictamente creciente en $[1, +\infty)$.

Por tanto,

$$\begin{aligned} g(\mathbb{R}) &= g\left((-\infty,1]\right) \cup g\left([1,+\infty)\right) \\ &= \left[g(1), \lim_{x\to-\infty} g(x)\right) \cup \left[g(1), \lim_{x\to+\infty} g(x)\right) \\ &= [2, +\infty), \end{aligned}$$

ya que $g(1) = \log(e^2) = 2$ y, $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty$.

b) El límite del cociente se puede calcular usando la escala de infinitos o la segunda regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{2g(x)}{x^2+1} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\log(x^2-2x+e^2+1)}{x^2+1} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cdot\frac{2x-2}{x^2-2x+e^2+1}}{2x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-2}{x\,(x^2-2x+e^2+1)} = 0. \end{aligned}$$

c) Para comprobar que la ecuación $\frac{2}{x^2+1}\, g(x) = 1$ tiene una solución positiva, es suficiente con fijarse en que la función $f(x) = \frac{2}{x^2+1}\, g(x)$ es una función continua verificando que

$$f(0) = 2\log(e^2+1) > 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 < 1,$$

con lo que el teorema del valor intermedio nos asegura la existencia de un un punto donde la función vale 1.

Observación: se puede razonar de la misma forma usando $f(x) - 1$ y aplicando el teorema de los ceros de Bolzano.

Ejercicio 20. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{x}$, c) $\lim\limits_{x\to \pi/2^-} \dfrac{2x-\pi}{\cos(x)}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$, e) $\lim\limits_{x\to +\infty} (5^x+1)^{1/x}$, f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log(2+3e^x)}{\sqrt{2+3x^2}}$.

Solución.

a) Usando la primera regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}}{2x} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{2\sqrt{x^2+5}} = \frac{1}{6} \implies \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4} = \frac{1}{6}.$$

b) Aplicamos las reglas de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\cos(3x)}{1} = 3 \implies \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x} = 3.$$

c) Usamos las reglas de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{2}{-\operatorname{sen}(x)} = -2 \implies \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{2x-\pi}{\cos(x)} = -2.$$

d) Aplicamos la regla de L'Hôpital dos veces:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{2x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\cos(x) = \frac{1}{2}.$$

e) En este límite se presenta una indeterminación del tipo "∞^0". Por tanto, usando la fórmula del número e:

$$\lim_{x\to +\infty} (5^x+1)^{1/x} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\log(5^x+1)}$$

Nos ocupamos, entonces, del exponente:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\log(5^x+1) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log(5^x+1)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log(5)5^x}{5^x+1} = \log(5),$$

donde hemos aplicado dos veces consecutivas la regla de L'Hôpital al presentarse indeterminación del tipo "∞/∞".

El límite pedido es: $\lim\limits_{x\to +\infty} (5^x+1)^{1/x} = e^{\log(5)} = 5$.

f) Para estudiar el límite de f en $+\infty$ aplicamos la segunda regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3\,e^x}{2+3e^x} \cdot \frac{\sqrt{2+3x^2}}{3x} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Por tanto el límite de f es $\sqrt{3}/3$.

Ejercicio 21. Calcula los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)+3x-1}{2x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x+e^{-x}-2\cos(x)}{x\operatorname{sen}(2x)}$,

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log(\log(x))}{\log(x)}$, d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}\right)^{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}}$.

Solución.

a) Aplicamos la primera regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(x)+3}{2} = \frac{3}{2} \implies \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)+3x-1}{2x} = \frac{3}{2}.$$

b) Sabemos que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$, por tanto $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} = 1$, con lo que si multiplicamos y dividimos por 2x nos queda lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2\cos(x)}{x\operatorname{sen}(2x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2\cos(x)}{x\operatorname{sen}(2x)} \cdot \frac{2x}{2x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2\cos(x)}{2x^2} \\
&\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} + 2\operatorname{sen}(x)}{4x} \\
&\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} + 2\cos(x)}{4} = 1.
\end{aligned}$$

c) Usamos la segunda regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1/x}{\log(x)}}{1/x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\log(x)} = 0 \implies \lim_{x\to +\infty} \frac{\log(\log(x))}{\log(x)} = 0.$$

d) En primer lugar, vamos a analizar el límite de la función que aparece en la base de la expresión que, evidentemente, tiende a 1, cuando la variable tiende a cero. Mientras que la expresión que aparece en el exponente, presenta una indeterminación del tipo "$\frac{0}{0}$". Para resolver dicha indeterminación, utilizamos la siguiente descomposición y un límite conocido:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty,$$

donde hemos usado que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$. Y notemos que no es necesario precisar si el límite es más infinito o menos. En consecuencia, el límite pedido presenta una indeterminación del tipo "1^∞".

Aplicamos ahora la regla del número e. Esto es, estudiamos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}\right)^{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}} = e^L \iff \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}\left[\frac{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{1+x^2} - 1\right] = L.$$

Para resolver este límite, volvemos a descomponer la expresión y utilizar el límite recordado más arriba:

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}\left[\frac{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{1+x^2} - 1\right] = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,\frac{1}{1+x^2}\left[\frac{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)-1-x^2}{x}\right].$$

Las dos primeras fracciones que aparecen, sabemos que tienden a 1 cuando x tiende a cero; por tanto, nos ocupamos de la última fracción que presenta una indeterminación del tipo “0/0”. Aplicamos la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \operatorname{sen}(x) - 1 - x^2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(x) - \cos(x) - 2x}{1} = -1.$$

Por tanto, el límite que nos pedían es:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{1 + x^2} \right)^{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}} = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}} .$$

Ejercicio 22. Calcula los límites de las siguientes funciones en el punto indicado:

a) $\lim_{x\to 0^+} (\cos(x) + 2\operatorname{sen}(3x))^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))\operatorname{sen}(4x)}{x^3 \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$

c) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x + \operatorname{sen}(x)}{x - \cos(x)}$

d) $\lim_{x\to 1} \left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

Solución.

a) Utilizamos la regla del número e y estudiamos el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x) + 2\operatorname{sen}(3x) - 1}{x} = \frac{0}{0}.$$

Esta indeterminación la resolvemos utilizando la primera regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen}(x) + 6\cos(3x)}{1} = 6,$$

con lo que $\lim_{x\to 0^+} (\cos(x) + 2\operatorname{sen}(3x))^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^6$.

b) Usando que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x} = 1$ y que $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))\operatorname{sen}(4x)}{x^3 \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} &= \lim_{x\to 0} \frac{4x(1-\cos(x))}{x^3} \cdot \frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{4\sqrt{2}(1-\cos(x))}{x^2}.\end{aligned}$$

Este último límite se resuelve aplicando la primera regla de L'Hôpital y se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))\operatorname{sen}(4x)}{x^3 \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = 2\sqrt{2}.$$

c) Si aplicamos la regla de L'Hôpital, llegamos al límite $\lim_{x\to +\infty} \frac{1+\cos(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}$ que no existe y, por tanto, no podemos decir nada sobre el límite original. En cambio, dividiendo numerador y denominador por x se resuelve fácilmente:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x + \operatorname{sen}(x)}{x - \cos(x)} = \lim_{x\to \infty} \frac{1 + \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}{1 - \frac{\cos(x)}{x}} = 1,$$

usando que $\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$.

d) Estamos ante una indeterminación del tipo "1^∞". Por tanto

$$\lim_{x\to 1}\left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = e^L \iff \lim_{x\to 1}\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)-1\right) = L.$$

Calculemos el límite de la derecha:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)-1\right) &= \lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\cdot\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}\cdot\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\end{aligned}$$

y, como $\lim_{x\to 1}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)=1$ y $\lim_{x\to 1}\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}.$$

Para resolver este último límite aplicamos la primera regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{-\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \frac{-1}{\sqrt{2}},$$

y por tanto

$$\lim_{x\to 1}\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)-1\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = -1 \implies \lim_{x\to 1}\left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = e^{-1}.$$

Ejercicio 23. Estudia el comportamiento de la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ en el punto α en cada uno de los siguientes casos:

a) $A = (2,+\infty)$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}$, $\alpha = 2$.

b) $A = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $f(x) = \dfrac{1}{\log(x)} - \dfrac{1}{x-1}$, $\alpha = 1$.

c) $A = (1,+\infty)$, $f(x) = \dfrac{x^x - x}{1-x-\log(x)}$, $\alpha = 1$.

Solución.

a) Aplicando la primera regla de L'Hôpital tenemos

$$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x-2}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}} = \lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x}\right)\sqrt{x^2-4}}{2x\sqrt{x(x-2)}}$$

simplificando el factor $\sqrt{x-2}$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x}\right)\sqrt{x+2}}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2}.$$

Por tanto $\lim_{x\to 2} f(x) = 1/2$.

b) Juntamos en una sola fracción y aplicamos la primera regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log(x)} - \frac{1}{x-1}\right) &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1-\log(x)}{(x-1)\log(x)} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\log(x)+\frac{x-1}{x}} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\log(x)+x-1}{x}} = \lim_{x\to 1} = \frac{x-1}{x\log(x)+x-1} \\
&\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{1}{\log(x)+2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

c) Aplicamos L'Hôpital y nos queda $\lim_{x\to 1}\frac{x^x(1+\log(x))-1}{-1-1/x} = 0$. Por tanto $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$.

Ejercicio 24. Calcula:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - \operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)}\right)^{1/x^2}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right) + x$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{3\sin(x) - 3x\cos(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{x}}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2}\left(\frac{2-2\sin(x)}{\cos(x)^2}\right)^{\tan(x)}$.

Solución.

a) Se presenta una indeterminación del tipo "1^∞", por lo que aplicamos la regla del número e. Tendremos que calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left[\frac{e^x - \operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)} - 1\right] = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - \operatorname{sen}(x) - 1 - \operatorname{sen}^2(x)}{x^2\left(1+\operatorname{sen}^2(x)\right)}$$

Pero como $\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen}^2(x)) = 1$, nos limitaremos a calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - \operatorname{sen}(x) - 1 - \operatorname{sen}^2(x)}{x^2}$$

donde se presenta una indeterminación del tipo "$\frac{0}{0}$". Aplicamos entonces la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - \cos(x) - 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{2x}$$

y volvemos a aplicarla ya que se sigue presentando la misma indeterminación:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x + \operatorname{sen}(x) - 2\cos^2(x) + 2\operatorname{sen}^2(x)}{2} = \frac{-1}{2}.$$

Por tanto el límite que nos pedían es:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - \operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)}\right)^{1/x^2} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

b) Como x tiende a cero,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right) + x &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2\ \operatorname{sen}(x)}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{2x\ \operatorname{sen}(x) + x^2\ \cos(x)} \\
&\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{2\ \operatorname{sen}(x) + 2x\cos(x) + 2x\ \cos(x) - x^2\operatorname{sen}(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{2\ \operatorname{sen}(x) + 4x\cos(x) - x^2\operatorname{sen}(x)} \\
&\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{6\ \cos(x) - 6x\operatorname{sen}(x) - x^2\cos(x)} = \frac{-1}{6}.
\end{aligned}$$

c) Calculamos a qué tiende la base aplicando la primera regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\cos(x) - 3\cos(x) + 3x\sin(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

Dado que tenemos una indeterminación del tipo "1^∞", se tiene que

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3\sin(x) - 3x\cos(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{x}} = e^L \iff \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{3\sin(x) - 3x\cos(x)}{x^3} - 1\right) = L.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{3\sin(x) - 3x\cos(x)}{x^3} - 1\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{3\sin(x) - 3x\cos(x) - x^3}{x^4} \\
&\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3\sin(x) - 3x}{4x^2} \\
&\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3\cos(x) - 3}{8x} \\
&\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-3\sin(x)}{8} = 0
\end{aligned}$$

con lo que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3\sin(x) - 3x\cos(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$

d) En primer lugar, en la base de la función se presenta una indeterminación del tipo "$\frac{0}{0}$". Aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{2 - 2\sin(x)}{\cos(x)^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to \pi/2} \frac{-2\cos(x)}{-2\cos(x)\ \operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to \pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} = 1.$$

Estamos ante una indeterminación del tipo "1^∞". Por tanto

$$\lim_{x\to \pi/2}\left(\frac{2 - 2\sin(x)}{\cos(x)^2}\right)^{\tan(x)} = e^L \iff \lim_{x\to \pi/2} \tan(x)\left[\left(\frac{2 - 2\sin(x)}{\cos(x)^2}\right) - 1\right] = L.$$

Arreglamos la función del límite de la derecha:

$$\begin{aligned}
\tan(x)\left[\left(\frac{2 - 2\sin(x)}{\cos(x)^2}\right) - 1\right] &= \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\left[\frac{2 - 2\sin(x) - \cos(x)^2}{\cos(x)^2}\right] \\
&= \operatorname{sen}(x)\left[\frac{2 - 2\sin(x) - \cos(x)^2}{\cos(x)^3}\right].
\end{aligned}$$

Calculemos el límite de la expresión derecha, ya que $\lim_{x\to\pi/2} \operatorname{sen}(x) = 1$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi/2} \frac{2-2\sin(x)-\cos(x)^2}{\cos(x)^3} &\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\pi/2} \frac{-2\cos(x)+2\cos(x)\operatorname{sen}(x)}{-3\cos(x)^2\operatorname{sen}(x)} \\
&= \lim_{x\to\pi/2} \frac{-2+2\operatorname{sen}(x)}{-3\cos(x)\operatorname{sen}(x)} \\
&= \lim_{x\to\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \cdot \lim_{x\to\pi/2} \frac{-2+2\operatorname{sen}(x)}{-3\cos(x)}
\end{aligned}$$

y, como $\lim_{x\to\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} = 1$,

$$\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\pi/2} \frac{2\cos(x)}{3\operatorname{sen}(x)} = 0,$$

y por tanto

$$\lim_{x\to\pi/2} \tan(x)\left[\left(\frac{2-2\sin(x)}{\cos(x)^2}\right)-1\right] = 0 \implies \lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{2-2\sin(x)}{\cos(x)^2}\right)^{\tan(x)} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

4. Optimización

Ejercicio 25. Estudia la monotonía, extremos y convexidad de las siguientes funciones.

a) $y = 6 - 2x - x^2$, b) $y = 3x^4 - 4x^3$, c) $y = (x-1)^3$.

Solución.

a) Sea $f(x) = 6 - 2x - x^2$, definida en todo $\mathbb{R}$ con lo que $f'(x) = -2 - 2x = -2(1+x)$. Tenemos que $x = -1$ es el único punto crítico de f y como $f''(x) = -2 < 0$, se concluye que en el punto $x = -1$ se alcanza un máximo relativo (que al ser el único punto crítico de la fución, se convierte en el punto donde se alcanza el máximo absoluto). Y además, al ser la derivada segunda negativa, la función es cóncava en todo $\mathbb{R}$.

b) Sea $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ definida en todo $\mathbb{R}$. Como $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$, tiene dos puntos críticos: $x = 0$ y $x = 1$.

   Vamos con la derivada segunda: $f''(x) = 36x^2 - 24x = 12x(3x-2)$, así que $f''(0) = 0$ y $f''(1) = 12 > 0$. Por tanto, en el punto $x = 1$ se alcanza un mínimo relativo, pero en $x = 0$, por ahora no lo podemos decidir.

   Volvemos a derivar: $f'''(x) = 72x - 24$ y $f'''(0) \neq 0$, por lo que no se alcanza extremo relativo en 0.

   Con respecto a la convexidad de la función, vemos dónde se anula la derivada segunda, que es en $x = 0$ y en $x = 2/3$. Estudiando el signo de f'' concluimos que f es convexa en $(-\infty, 0) \cup (2/3, +\infty)$ y cóncava en $(0, 2/3)$.

c) Sea $f(x) = (x-1)^3$ definida en todo $\mathbb{R}$. Hacemos la primera derivada: $f'(x) = 3(x-1)^2$, con lo que el único punto crítico es $x = 1$. Volvemos a derivar: $f''(x) = 6(x-1)$, con lo que $f''(1) = 0$. Con la derivada tercera: $f'''(x) = 6 > 0$. Así que la función f no alcanza extremo relativo en 0, y la función es cóncava en $(-\infty, 1)$ y convexa en $(1, +\infty)$.

Ejercicio 26. Encuentra dos números positivos cuya suma sea 20 y su producto sea máximo.

Solución. Sean x e y dichos números. Entonces $x + y = 20$. Como $y = 20 - x$, tenemos que buscar el máximo de la función $f(x) = x(20 - x)$. Derivamos y calculamos sus puntos críticos:

$$f'(x) = 20 - 2x = 0 \iff x = 10.$$

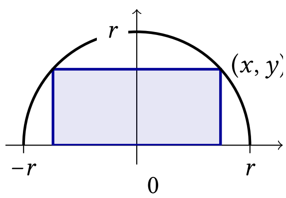
Puesto que $f''(x) = -2$, la función tiene su máximo en $x = 10$ y los dos números que estábamos buscando son 10 y 10.

Ejercicio 27. Calcula las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de radio r.

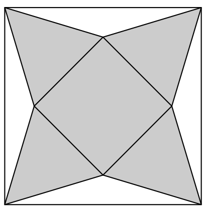
Solución. Salvo multiplicar por 4, podemos trabajar en el primer cuadrante. Tenemos que maximizar la función $f : [0, r] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x\sqrt{r^2 - x^2}$. Los puntos críticos son

$$f'(x) = \sqrt{r^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \iff r^2 - 2x^2 = 0 \iff x = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

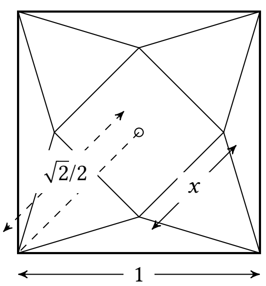
Salvo Es inmediato comprobar que en dicho punto la función alcanza el máximo.

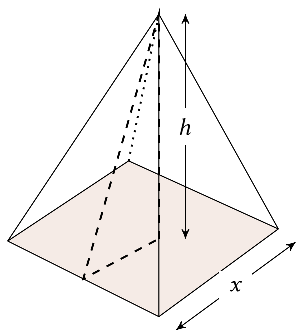


Ejercicio 28. De un cuadrado de lado 1 se recortan cuatro triángulos isósceles iguales. ¿Cuál es el volumen máximo de la pirámide que se puede formar? (Indicación: el volumen de una pirámide es $\frac{1}{3}Ah$, donde A es el área de la base y h su altura).



Solución. Llamaremos x al lado del cuadrado que queda en el interior. Este cuadrado va a ser la base de la pirámide que queremos construir, luego su área va a ser x^2. Nos falta determinar la altura h de la pirámide en función de x.





Teniendo en cuenta que la diagonal del cuadrado entero mide $\sqrt{2}$. La mitad de la diagonal, que mide $\sqrt{2}/2$, al doblarla da lugar al triángulo rectángulo que aparece dibujado en la gráfica con linea discontinua. La base mide $x/2$, la hipotenusa, lo que la falta hasta $\sqrt{2}/2$, esto es, $\sqrt{2}/2 - x/2$, y la altura h es el otro cateto. Por tanto, la altura h que estamos buscando es

$$h^2 + \frac{x^2}{4} = \left(\sqrt{2}/2 - x/2\right)^2 \implies h = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{2}x}$$

Como el volumen de una pirámide es $\frac{1}{3}Ah$, donde A es el área de la base y h su altura, la función volumen a maximizar es :

$$f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2}}x^2\sqrt{1-\sqrt{2}x}, \ \forall x \in [0, \sqrt{2}/2].$$

Se trata de una función continua en un intervalo cerrado y acotado así que, por la propiedad de compacidad, alcanza su máximo y mínimo absoluto. Buscamos puntos críticos en el interior del intervalo:

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(2x\sqrt{1-\sqrt{2}x} + x^2\frac{(-\sqrt{2})}{2\sqrt{1-\sqrt{2}x}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(\frac{4x-5\sqrt{2}x^2}{\sqrt{1-\sqrt{2}x}}\right).$$

Con lo que $f'(x) = 0$ tiene como solución

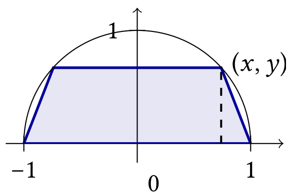
$$4x - 5\sqrt{2}x^2 = 0 \iff x\left(4-5\sqrt{2}x\right) = 0 \iff x = \frac{4}{5\sqrt{2}} \text{ ó } x = 0.$$

El máximo de la función se alcanza en los extremos del intervalo o en $2\sqrt{2}/5$. Como $f(0) = f(\sqrt{2}/2) = 0$, y $f\left(2\sqrt{2}/5\right)\right) > 0$, ese es el máximo de la función. Por tanto, el volumen máximo es

$$f\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right) = \frac{2^{\frac{5}{2}}}{3\cdot 5^{\frac{5}{2}}}.$$

Ejercicio 29. Calcula las dimensiones del trapecio con mayor área que puede inscribirse en una semicircunferencia de radio 1.

Solución. Vamos a escribir el área que queremos que sea máxima como una función de una variable. Hay varias posibilidades de hacerlo aunque el resultado, evidentemente, tiene que ser el mismo. El área del trapecio será la media aritmética de la base mayor M y la base menor m multiplicado por la altura h; $A = \frac{M+m}{2}h$. Si llamamos (x, y) al vértice del trapecio que se aprecia en el dibujo tendremos que



$$A = \frac{2+2x}{2}y = (1+x)y.$$

Si no se recuerda el área del trapecio siempre puede hacerse sumando el área del rectángulo central y los dos triángulos simétricos que quedan a los lados. Esta función anterior depende de dos variables pero es claro que el punto (x, y) está en la circunferencia de radio 1 y por tanto $x^2 + y^2 = 1$ de donde $y = \sqrt{1-x^2}$ con lo que la función a considerar es $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2}$. Esta función es continua en el intervalo de definición y por tanto alcanza máximo y mínimo absoluto. Además es claro que el mínimo se alcanza cuando $x = 1$, que el área vale 0. Para calcular el máximo vamos a calcular los puntos críticos (obsérvese que la función no es derivable en 0).

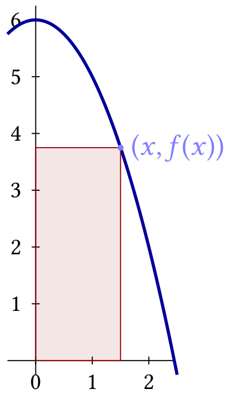
$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} + (1+x)\frac{(-x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}, \ \forall x \in [0, 1).$$

Y $f'(x) = 0 \iff 2x^2 + x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$ o $x = -1$. Evidentemente el valor que nos interesa es $x = \frac{1}{2}$. Además si $0 < x < 1/2$ se tiene que $f'(x) > 0$ y si $1/2 < x \leq 1$ $f'(x) < 0$ con lo que f alcanza máximo (relativo y absoluto) en $x = 1/2$ (entonces la altura será $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$) y el área máxima es $f(1/2) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Ejercicio 30. Calcula las dimensiones del rectángulo de mayor área que tiene un vértice en el punto $(0,0)$ y cuyo vértice opuesto se encuentra sobre la parábola $y = 6 - x^2$.

Solución. Utilizando la simetría de la función $f(x) = 6 - x^2$ (es par) y observando la figura, el rectángulo cuya área debemos maximizar tiene base igual a x, con $x > 0$, y altura $f(x)$; por lo que la función a maximizar es:

$$g(x) = x f(x) = x(6 - x^2) = 6x - x^3, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$



Se trata de una función polinómica, por tanto, es derivable. Calculamos los candidatos a puntos de extremo calculando los puntos críticos de la función g:

$$g'(x) = 6 - 3x^2 = 3(2 - x^2),$$
$$g'(x) = 0 \iff 2 - x^2 = 0 \iff x = \sqrt{2}.$$

Hemos descartado la solución $x = -\sqrt{2}$, ya que estamos trabajando en el primer cuadrante.

Además, usando el test de la derivada segunda:

$$g''(x) = -6x \implies g''(\sqrt{2}) = -6\sqrt{2} < 0.$$

Entonces, en el punto $x = \sqrt{2}$ la función alcanza un máximo relativo. Pero al ser el único punto crítico de la función, es su máximo absoluto.

Respondiendo, entonces, al enunciado del ejercicio, las dimensiones del rectángulo de área máxima son: base igual a $\sqrt{2}$ y altura igual a $f(\sqrt{2}) = 6 - 2 = 4$.

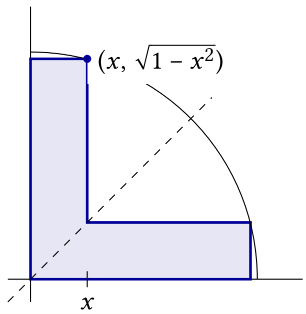
Ejercicio 31. Calcula las dimensiones de la cruz simétrica respecto de los ejes y con área máxima que se puede inscribir en una circunferencia de radio 1.

Solución. Utilizando la simetría de la cruz respecto de los ejes y llamando (x, y) al vértice de la cruz que se apoya sobre ella, la función área sería cuatro veces la que escribimos a continuación:

$$xy + x(y - x)$$

y, considerando que (x, y) está en la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1, se tiene que $x^2 + y^2 = 1$. Por tanto, la función que vamos a maximizar es:

$$f(x) = x\sqrt{1 - x^2} + x\left(\sqrt{1 - x^2} - x\right) = 2x\sqrt{1 - x^2} - x^2, \ \forall x \in [0,1].$$



Se trata de una función continua en $[0,1]$ y derivable en $]0,1[$, pero nosotros sólo la vamos a estudiar en el intervalo $[0, 1/\sqrt{2}]$. Observa que si el punto $(x, \sqrt{1 - x^2})$ está más allá de la bisectriz, esto es, si x es mayor que $1/\sqrt{2}$ entonces no nos sale una cruz.

Calculamos la derivada de f y la igualamos a cero:

$$f'(x) = 2\left(\frac{1 - 2x^2 - x\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}\right).$$

Por tanto, la derivada de f se anula siempre y cuando se verifique:

$$1-2x^2 = x\sqrt{1-x^2} \implies 5x^4-5x^2+1 = 0 \implies x = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \text{ ó } x = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}.$$

Sólo la segunda está en el dominio. El máximo se alcanzará en dicho punto o en los extremos: como se ve, el máximo se alcanza en $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$,

$$f(0) = 0,\ f\left(\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{10}}\right) \approx 0.61,\ f(1/\sqrt{2}) = 1/2.$$

Por tanto, las dimensiones de la cruz de área máxima son:

$$x = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \text{ e } y = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}.$$

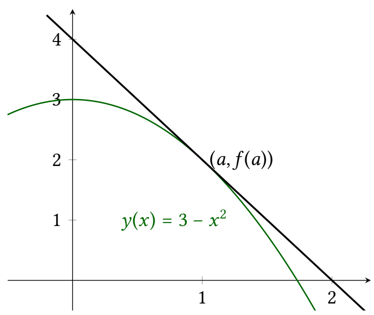
Ejercicio 32. Calcula el punto (a,b) de la parábola $y = 3-x^2$ de forma que el triángulo determinado por la recta tangente a la parábola en dicho punto y los ejes de coordenadas tenga área mínima.

Solución. Para poder calcular el triángulo de área mínima que genera la tangente a la parábola $y = 3-x^2$ y los ejes tenemos que, en primer lugar, calcular la recta tangente en un punto a que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que es positivo. La recta tangente que pasa por el punto $(a, f(a))$ es $y-(3-a^2) = -2a(x-a)$.

Los puntos de corte con los ejes son:

a) Si $x = 0$, entonces $y = a^2+3$, y

b) si $y = 0$, entonces $x = \frac{a^2+3}{2a}$.



Por tanto, la función a la que tenemos que calcularle el mínimo es, en función del punto a,

$$f(a) = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{(a^2+3)^2}{4a},$$

con $a > 0$. Su derivada vale

$$f'(a) = \frac{3a^4+6a^2-9}{4a^2} = 0 \iff a^4+2a^2-3 = 0.$$

Resolvemos este polinomio bicuadrático mediante el cambio usual $a^2 = 1$ y obtenemos que la única solución positiva es $a = 1$. ¿Es aquí donde f alcanza su mínimo absoluto? Observa que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty,$$

y que, por tanto, f es estrictamente decreciente en $(0,1]$. En cambio, como $f'(3) > 0$, f es estrictamente creciente en $[1,+\infty)$. En consecuencia, f alcanza su mínimo absoluto en $a = 1$.

5. Polinomio de Taylor

Ejercicio 33. Expresa el polinomio $x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6$ en potencias de $(x-2)$.

Solución. Vamos a calcular el polinomio de Taylor de orden 4 centrado en $a = 2$ de $f(x) = x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6 &&\Longrightarrow f(2) = -16,\\
f'(x) &= 4x^3 - 15x^2 - 6x + 7 &&\Longrightarrow f'(2) = -33,\\
f''(x) &= 12x^2 - 30x - 6 &&\Longrightarrow f''(2) = -18,\\
f'''(x) &= 24x - 30 &&\Longrightarrow f'''(2) = 18,\\
f^{(4)}(x) &= 24 &&\Longrightarrow f^{(4)}(2) = 24.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4\\
&= -16 - 33(x-2) - 9(x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4.
\end{aligned}$$

Ejercicio 34. Calcula un valor aproximado del número real α con un error menor de 10^{-2} en cada uno de los casos siguientes:

a) $\alpha = \sqrt{e}$,

b) $\alpha = \operatorname{sen}(1/2)$,

c) $\alpha = \cos(-1/2)$,

d) $\alpha = \log(3/2)$.

Solución.

a) Consideramos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Lo que se nos pide es el valor aproximado de $f(1/2)$ con un error menor que 10^{-2}. Aplicando el teorema de Taylor en el punto cero, sabemos que existe $c \in (0, 1/2)$ verificando

$$f(1/2) = 1 + 1/2 + \frac{1}{2^2\,2!} + \frac{1}{2^3\,3!} + \cdots + \frac{1}{2^n\,n!} + R_n(1/2)$$

donde $R_n(x)$ representa el resto de Taylor de la función exponencial de orden n, y por tanto

$$R_n(1/2) = \frac{e^c}{2^{n+1}\,(n+1)!}\,.$$

Entonces, sólo nos queda encontrar el n suficiente para que $|R_n(1/2)|$ sea menor que 10^{-2} . Como $e < 3$ y $c < 1/2$, entonces $e^c < 2$. Luego, si encontramos el natural suficiente para que

$$\frac{1}{2^n\,(n+1)!} < 10^{-2} \iff 2^n\,(n+1)! > 100$$

y para ello basta que $n \geq 3$.

El valor aproximado que se nos pide es: $\sqrt{e} \approx 1 + 1/2 + \frac{1}{2^2\,2!} + \frac{1}{2^3\,3!} = 1,6458$.

b) Repetimos el ejercicio anterior, pero ahora la función es $f(x) = \text{sen}(x)$, la desarrollamos en torno al cero, y calculamos su valor aproximado en $x = 1/2$. Como el desarrollo de Taylor de la función seno en el cero es

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + R_n(x)$$

donde $R_n(x) = \text{sen}\left(c + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, al ser la función seno una función acotada en valor absoluto por 1, sólo tenemos que exigir que

$$|R_n(1/2)| < \frac{1}{2^{n+1}\,(n+1)!} < 10^{-2} \iff 100 < 2^{n+1}\,(n+1)! \iff n \geq 3.$$

Por tanto, el valor aproximado que se nos pide es

$$\text{sen}\left(\frac{1}{2}\right) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3\,3!} \approx 0.479.$$

c) Igual que en el ejercicio anterior, pero ahora con la función $f(x) = \cos(x)$, la desarrollamos en torno al cero, y calculamos su valor aproximado en $x = -1/2$. Como el desarrollo de Taylor de la función seno en el cero es

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + R_n(x)$$

donde $R_n(x) = \cos\left(c + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, al ser la función coseno una función acotada en valor absoluto por 1, sólo tenemos que exigir que

$$|R_n(-1/2)| < \frac{1}{2^{n+1}\,(n+1)!} < 10^{-2} \iff 100 < 2^{n+1}\,(n+1)! \iff n \geq 3.$$

Por tanto, el valor aproximado que se nos pide es

$$\cos(-1/2) \approx 1 - \frac{1}{8} \approx 0.875.$$

d) Consideramos la función $f(x) = \log(1+x)$ que es derivable todas las veces que queramos (es de clase C^∞). El valor α que hay que aproximar sería el valor de $f(1/2)$. Para ello, calculamos los coeficientes del polinomio de Taylor en el cero, y nos vamos a parar en la derivada de orden 4:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \log(1+x) \implies f(0) = 0\\
f'(x) &= \frac{1}{1+x} \implies f'(0) = 1\\
f''(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2} \implies f''(0) = -1\\
f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \implies f''(0) = 2\\
f^{(iv)}(x) &= \frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4} \implies f^{(iv)}(0) = -2\cdot 3\\
f^{(v)}(x) &= \frac{4!}{(1+x)^5}
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$P_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(iv)}(0)}{4!}x^4 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}.$$

Vamos a verificar que, en efecto, el error que se comete al aproximar $f(1/2)$ con el polinomio P_4, es menor que 10^{-2}:

$$\text{error} = |R_4(1/2)| = \left|\frac{f^{(v)}(c)\,(1/2)^5}{5!}\right| = \left|\frac{4!}{(1+c)^5\,2^5\,5!}\right| = \frac{1}{2^5\,5}\,\frac{1}{(1+c)^5}$$
$$< \frac{1}{160} = 0.00625 < 10^{-2}\,,$$

donde hemos utilizado que $0 < c < 1/2$ y, por tanto, $\frac{1}{(1+c)^5} < 1$.

Luego, el valor aproximado que nos piden es:

$$\log(3/2) \approx P_4(1/2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} \approx 0.40104$$

Hay que observar que en este ejercicio no hemos calculado la derivada n-sima de f, sino que hemos ido acotando el error en cada caso (para $n = 2$ y $n = 3$) y ha sido al llegar a $n = 4$ cuando hemos conseguido que el error fuera menor que 10^{-2}.

Ejercicio 35. Sea f una función cuyo polinomio de Taylor de grado 3 centrado en 0 es

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Calcula el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en cero de la función $g(x) = xf(x)$.

Solución. Recordemos que el polinomio de grado 3 de la función f centrado en 0 es

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Despejando en la fórmula anterior se tiene que $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 1$ y $f'''(0) = 2$.

Para calcular el polinomio de Taylor de la función $g(x) = xf(x)$ centrado en el origen y de orden 3 necesitamos el valor de las 3 primeras derivada en 0:

$$\begin{aligned}
g(x) &= xf(x) &&\Longrightarrow\ g(0) = 0,\\
g'(x) &= f(x) + xf'(x) &&\Longrightarrow\ g'(0) = 1\\
g''(x) &= 2f'(x) + xf''(x) &&\Longrightarrow\ g''(0) = 2,\ \text{y}\\
g'''(x) &= 3f''(x) + xf'''(x) &&\Longrightarrow\ g'''(0) = 3.
\end{aligned}$$

Por tanto, el polinomio de orden 3 de g es

$$g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3 = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3.$$

Ejercicio 36. El polinomio de Taylor de orden 2 centrado en el origen de una función dada f es $2 + x + 2x^2$. Calcula el polinomio de Taylor del mismo orden y centro de la función $g(x) = x\,e^{f(x)-1}$.

Solución. Sabemos que el polinomio dado es el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en el origen de una función dada f; esto es:

$$P_2(x) = 2 + x + x^2 = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2.$$

De lo anterior, igualando coeficientes, obtenemos que:

$$f(0) = 2,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 4.$$

Calculemos ahora $T_2(x)$, el polinomio de Taylor centrado en cero y de orden 2 de la función $g(x) = x\,\mathrm{e}^{f(x)-1}$; es decir:

$$T_2(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2.$$

Para ello, calculamos los coeficientes:

$$\begin{aligned} g(x) = x\,\mathrm{e}^{f(x)-1} &\implies g(0) = 0 \\ g'(x) = \mathrm{e}^{f(x)-1} + x\,f'(x)\mathrm{e}^{f(x)-1} = \mathrm{e}^{f(x)-1}(1 + xf'(x)) &\implies g'(0) = \mathrm{e} \\ g''(x) = f'(x)\,\mathrm{e}^{f(x)-1}(1 + xf'(x)) + \mathrm{e}^{f(x)-1}(f'(x) + xf''(x)) &\implies g''(0) = 2\mathrm{e}. \end{aligned}$$

Entonces, el polinomio de Taylor pedido es:

$$T_2(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 = \mathrm{e}\,x + \mathrm{e}\,x^2.$$