Lógica y métodos discretos. 19 de Junio de 2017

APELLIDOS Y NOMBRE: . . . . GRUPO: . . . . . . DNI: . . . .

Ejercicio 1 (1,5 puntos)

Sea $f : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ la función booleana definida como:

$$f(x,y,z,t) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} + \overline{x}\,y\,(\overline{z}+\overline{t}) + (x \oplus y)\overline{z}\,\overline{t} + x \downarrow (\overline{y}+\overline{z}) + x\,y\,\overline{z}$$

1. Encuentra la expresión de f como suma de mintérminos (forma canónica disyuntiva).
2. Calcula una expresión lo más reducida posible de f como suma de productos de literales.

Solución:

1. Tenemos que:

   $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} = m_0$.
   $\overline{x}\,y\,(\overline{z}+\overline{t}) = \overline{x}\,y\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,\overline{t} = (m_4 + m_5) + (m_4 + m_6) = m_4 + m_5 + m_6$.
   $(x \oplus y)\overline{z}\,\overline{t} = (\overline{x}\,y + x\,\overline{y})\overline{z}\,\overline{t} = \overline{x}\,y\,\overline{z}\,\overline{t} + x\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} = m_4 + m_8$.
   $x \downarrow (\overline{y}+\overline{z}) = \overline{x + \overline{y} + \overline{z}} = \overline{x}\,\overline{\overline{y}}\,\overline{\overline{z}} = \overline{x}\,y\,z = m_6 + m_7$.
   $x\,y\,\overline{z} = m_{12} + m_{13}$.

   Por tanto, tenemos que $f = m_0 + m_4 + m_5 + m_6 + m_4 + m_8 + m_6 + m_7 + m_{12} + m_{13} = m_0 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 + m_8 + m_{12} + m_{13}$.

2. Una vez que tenemos f en forma canónica disyuntiva reducimos la expresión de f por medio de un mapa de Karnaugh:

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}\,\overline{t}$	1	1	1	1
$\overline{z}\,t$		1	1	
$z\,t$		1		
$z\,\overline{t}$		1		

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}\,\overline{t}$	1	1	1	1
$\overline{z}\,t$		1	1	
$z\,t$		1		
$z\,\overline{t}$		1		

De donde obtenemos la siguiente expresión para f: $f(x,y,z,t) = \overline{z}\,\overline{t} + \overline{x}\,y + y\,\overline{z}$.

Ejercicio 2 (0,5 puntos)

Sea B un álgebra de Boole. Demuestra que para cualesquiera $a, b, c \in B$ se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} a \vee b = a \vee c \\ a \wedge b = a \wedge c \end{array}\right\} \Rightarrow \; b = c.$$

Solución:

Tenemos que:

$$\begin{array}{rcll} b & = & b \vee (a \wedge b) & \text{Ley de absorción} \\ & = & b \vee (a \wedge c) & \text{Hipótesis} \\ & = & (b \vee a) \wedge (b \vee c) & \text{Propiedad distributiva} \\ & = & (c \vee a) \wedge (c \vee b) & \text{Propiedad conmutativa e hipótesis} \\ & = & c \vee (a \wedge b) & \text{Propiedad distributiva} \\ & = & c \vee (a \wedge c) & \text{Hipótesis} \\ & = & c & \text{Ley de absorción} \end{array}$$

También se podría haber demostrado haciendo uso de una tabla de verdad:

a	b	c	$a \vee b$	$a \vee c$	$a \wedge b$	$a \wedge c$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Vemos que $a \vee b$ y $a \vee c$ coinciden en las filas 1,4,5,6,7,8, mientras que $a \wedge b$ y $a \wedge c$ coinciden en las filas 1,2,3,4,5,8. Por tanto, se dan las dos coincidencias en las filas 1,4,5,8. En esos cuatro casos, $b = c$.

Por tanto, cuando $a \vee b = a \vee c$ y $a \wedge b = a \wedge c$ se tiene que $b = c$.

También este último razonamiento se podría haber expresado mediante una tabla. A partir de la que ya tenemos añadimos varias columnas: una primera en la que expresamos el valor de verdad de $a \vee b = a \vee c$; una segunda en la que expresamos el valor de verdad de $a \wedge b = a \wedge c$; en una tercera expresamos cuando ambas igualdades son ciertas; una cuarta columna en la que expresamos la igualdad $b = c$; y en la quinta y última columna expresamos la implicación $\left.\begin{array}{l} a \vee b = a \vee c \\ a \wedge b = a \wedge c \end{array}\right\} \Rightarrow \; b = c$.

a	b	c	$\overbrace{a \vee b}^{\alpha_1}$	$\overbrace{a \vee c}^{\alpha_2}$	$\overbrace{a \wedge b}^{\alpha_3}$	$\overbrace{a \wedge c}^{\alpha_4}$	$\overbrace{\alpha_1 = \alpha_2}^{\beta_1}$	$\overbrace{\alpha_3 = \alpha_4}^{\beta_2}$	$\overbrace{\beta_1 \wedge \beta_2}^{\gamma}$	$b = c$	$\gamma \Rightarrow (b = c)$
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Puesto que la última columna son todo unos, deducimos que la implicación es cierta.

Ejercicio 3 (1,5 puntos) Dadas las fórmulas:

$$\alpha_1 = r \vee t \to p \vee s$$
$$\alpha_2 = \neg r \wedge \neg s \to \neg p \wedge (\neg p \to q)$$
$$\alpha_3 = r \to (\neg(p \vee t) \to (\neg s \vee t))$$
$$\beta = \neg(s \to t \vee r) \vee (s \wedge \neg(t \to r))$$

Estudia si la consecuencia lógica $\{\alpha_1 \alpha_2, \alpha_3\} \models \beta$ es cierta o no. Caso de no ser cierta encuentra una interpretación que lo pruebe.

Solución:

Para ver si β es consecuencia lógica de $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$, estudiamos si $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \neg\beta\}$ es insatisfacible. Y para ello, pasamos cada una de las fórmulas a forma clausulada:

$$\begin{array}{lcl}
\alpha_1 & = & r \vee t \to p \vee s \\
 & \equiv & \neg(r \vee t) \vee p \vee s \\
 & \equiv & (\neg r \wedge \neg t) \vee p \vee s \\
 & \equiv & (\neg r \vee p \vee s) \wedge (\neg t \vee p \vee s) \\
 & \equiv & (p \vee \neg r \vee s) \wedge (p \vee s \vee \neg t) \\
 & & \\
\alpha_2 & = & \neg r \wedge \neg s \to \neg p \wedge (\neg p \to q) \\
 & \equiv & \neg(\neg r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge (p \vee q)) \\
 & \equiv & r \vee s \vee (\neg p \wedge (p \vee q)) \\
 & \equiv & (r \vee s \vee \neg p) \wedge (r \vee s \vee p \vee q) \\
 & \equiv & (\neg p \vee r \vee s) \wedge (p \vee q \vee r \vee s) \\
 & & \\
\alpha_3 & = & r \to (\neg(p \vee t) \to (\neg s \vee t) \\
 & \equiv & \neg r \vee (\neg(p \vee t) \to (\neg s \vee t) \\
 & \equiv & \neg r \vee (p \vee t) \vee (\neg s \vee t) \\
 & \equiv & p \vee \neg r \vee \neg s \vee t \\
 & & \\
\neg\beta & = & \neg(\neg(s \to t \vee r) \vee (s \wedge \neg(t \to r))) \\
 & \equiv & (s \to t \vee r) \wedge \neg(s \wedge \neg(t \to r)) \\
 & \equiv & (s \to t \vee r) \wedge (\neg s \vee (t \to r)) \\
 & \equiv & (\neg s \vee t \vee r) \wedge (\neg s \vee \neg t \vee r) \\
 & \equiv & (r \vee \neg s \vee t) \wedge (r \vee \neg s \vee \neg t)
\end{array}$$

Luego hemos de comprobar si el conjunto de cláusulas

$$\{p \vee \neg r \vee s,\ p \vee s \vee \neg t,\ \neg p \vee r \vee s,\ p \vee q \vee r \vee s,\ p \vee \neg r \vee \neg s \vee t,\ r \vee \neg s \vee t,\ r \vee \neg s \vee \neg t\}$$

es o no insatisfacible. Esto lo hacemos por el algoritmo de Davis-Putnam:

$$\{p \vee \neg r \vee s,\ p \vee s \vee \neg t,\ \neg p \vee r \vee s,\ p \vee q \vee r \vee s,\ p \vee \neg r \vee \neg s \vee t,\ r \vee \neg s \vee t,\ r \vee \neg s \vee \neg t\}$$

$\lambda = p$ $\qquad\qquad$ $\lambda = \neg p$

$$\{r \vee s,\ r \vee \neg s \vee t,\ r \vee \neg s \vee \neg t\}$$

$\lambda = r$

$$\emptyset$$

Al haber llegado una rama al conjunto vacío concluimos que el conjunto de cláusulas es satisfacible, y no necesitamos explorar la otra rama.

Esto nos dice que la implicación semántica no es cierta. Para cualquiera de las 8 interpretaciones en las que $I(p) = I(r) = 1$ se tiene que $I(\alpha_1) = I(\alpha_2) = I(\alpha_3) = 1$ mientras que $I(\beta) = 0$.

Ejercicio 4 (0,5 puntos) Llega un grupo de meteorólogos a la isla de los mentirosos y los veraces interesados en saber si durante la jornada de ayer estuvo lloviendo en la isla. Encuentran a tres nativos, que dicen llamarse Ana, Bruno y Carmen y les plantean la cuestión que les interesaba. Las respuestas que dieron son:

Ana: Ayer no llovió aquí.

Bruno: Ayer sí llovió aquí.

Carmen: Si ayer llovió yo soy una mentirosa.

A la vista de esto. ¿Puedes deducir que tiempo hizo ayer en la isla, y de paso, saber quien miente y quien dice la verdad?

Solución:

Vamos a representar por a a la afirmación *Ana es veraz*, por b a la afirmación *Bruno es veraz*, por c a la afirmación *Carmen es veraz* y por l a la afirmación *Ayer llovió*.

Entonces, lo que afirmó Ana es $\neg l$. Esto no sabemos si es cierto o no, pero lo que sí sabemos es que tiene el mismo valor de verdad que a. Por tanto, concluimos que el valor de verdad de $a \leftrightarrow \neg l$ es 1.

De la misma forma, el valor de verdad de $b \leftrightarrow l$ es 1 así como el de $c \leftrightarrow (l \to \neg c)$.

El enunciado nos asegura que las fórmulas $a \leftrightarrow \neg l,\ b \leftrightarrow l,\ c \leftrightarrow (l \to \neg c)$ son todas verdaderas. Buscamos entonces todas las interpretaciones en las que estas tres fórmulas se interpretan como ciertas. Esto podemos hacerlo mediante una tabla de verdad o por el algoritmo de Davis-Putnam.

Tabla de verdad

a	b	c	l	$a \leftrightarrow \neg l$	$b \leftrightarrow l$	$l \to \neg c$	$c \leftrightarrow (l \to \neg c)$
0	0	0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	0	0

La única interpretación en la que son ciertas las tres fórmulas es $I(a) = 1$, $I(b) = 0$, $I(c) = 1$ e $I(l) = 0$, lo que nos dice que Ana y Carmen dicen la verdad, Bruno miente y ayer no llovió en la isla.

Algoritmo de Davis-Putnman

Lo que tenemos es que buscar todas la interpretaciones que hagan ciertas las tres fórmulas. Para eso, tomamos cada una de las fórmulas y la pasamos a cláusula:

$a \leftrightarrow \neg l \equiv (a \to \neg l) \wedge (\neg l \to a) \equiv (\neg a \vee \neg l) \wedge (l \vee a)$.

$b \leftrightarrow l \equiv (b \to l) \wedge (l \to b) \equiv (\neg b \vee l) \wedge (\neg l \vee b)$.

$c \leftrightarrow (l \to \neg c) \equiv (c \to (l \to \neg c)) \wedge ((l \to \neg c) \to c) \equiv (\neg c \vee \neg l \vee \neg c) \wedge (\neg(\neg l \vee \neg c) \vee c) \equiv (\neg c \vee \neg l) \wedge ((l \wedge c) \vee c) \equiv (\neg c \vee \neg l) \wedge (l \vee c) \wedge c$.

Esta última podría simplificarse hasta $\neg l \wedge c$.

Y ahora, con las cláusulas que nos han salido, buscamos por el algoritmo de Davis-Putnam todas las interpretaciones que las hacen ciertas (es decir, tenemos que ver todas las ramas que llegan a $\emptyset$).

$$\{\neg a \vee \neg l,\ l \vee a,\ \neg b \vee l,\ \neg l \vee b,\ \neg c \vee \neg l,\ l \vee c,\ c\}$$

$$\lambda = c$$

$$\{\neg a \vee \neg l,\ l \vee a,\ \neg b \vee l,\ \neg l \vee b,\ \neg l\}$$

$$\lambda = \neg l$$

$$\{a,\ \neg b\}$$

$$\lambda = \neg b$$

$$\{a\}$$

$$\lambda = a$$

$$\emptyset$$

La interpretación que buscamos es entonces $I(a) = 1$, $I(b) = 0$, $I(c) = 1$ e $I(l) = 0$.

También se podría haber resuelto el ejercicio como sigue:

Supongamos que Carmen es mentirosa. En tal caso, su enunciado debe ser falso. Esto significa que la primera parte de la implicación debe ser verdadera (es decir, ayer llovió) y la segunda parte debe ser falsa (es decir, Carmen no es mentirosa). Como vemos esto no es posible, por tanto, nuestra suposición inicial no puede ser cierta. Deducimos por tanto que **Carmen dice la verdad**.

Imaginemos que ayer llovió. En tal caso, y puesto que lo que dice Carmen es verdad, llegaríamos a la conclusión de que Carmen es mentirosa. Esto tampoco es posible. Deducimos entonces que **ayer no llovió**.

Puesto que ayer no llovió, entonces **Ana dice la verdad** y **Bruno miente**.

Ejercicio 5 (1 puntos) Traduce a un lenguaje de primer orden con dominio $\mathbb{N}$ las frases

1. *1 es mayor que 2*
2. *El doble de cualquier número es divisible por 2*
3. *2 es un número primo*
4. *Todo número natural mayor que 1 tiene al menos dos divisores distintos*

usando los símbolos de predicado P^2, E^2, Q^2 con los significados

$$\begin{array}{lcl} P(x,y) & : & x > y; \\ E(x,y) & : & x = y; \\ Q(x,y) & : & x \text{ es un divisor de } y. \end{array}$$

la función $f(x,y) = x + y$ y el símbolo de constante a con valor igual a 1.

Solución:

1. Es claro que el valor del término $f(a,a)$ es 2. Con esto, la fórmula $P(a, f(a,a))$ significa que 1 es mayor que 2.
2. Hay que decir que para cualquier x, el número $x+x$ es múltiplo de 2 (o lo que es lo mismo, 2 es divisor de $x+x$). Por tanto puede decirse como sigue: $\forall x Q(f(a,a), f(x,x))$.
3. Vamos a ver cómo decimos que x es un número primo. Sabemos que un número x es primo si x es distinto de 1 y sus únicos divisores son 1 y x. Por tanto, para decir que x es primo debemos decir:
   - x es distinto de 1.
   - 1 es divisor de x.
   - x es divisor de x.
   - Si y es un divisor de x entonces $y = x$ ó $y = 1$.

   Las afirmaciones segunda y tercera podrían darse por supuestas, e incluso la primera
   Con esto, la siguiente fórmula significa que 2 es primo:

   $$\neg E(f(a,a), a) \wedge Q(a, f(a,a)) \wedge Q(f(a,a), f(a,a)) \wedge \forall y (Q(y, f(a,a)) \rightarrow E(y, f(a,a)) \vee E(y,a)).$$

   En el caso de que diéremos por supuestas las tres afirmaciones primeras nos quedaría:

   $$\forall y (Q(y, f(a,a)) \rightarrow E(y, f(a,a)) \vee E(y,a)).$$

4. Hay que decir que para cualquíer número natural x mayor que 1 hay dos números, y, z, que son divisores de x y que son distintos.

   $$\forall x (P(x,a) \rightarrow \exists y \exists z (Q(y,x) \wedge Q(z,x) \wedge \neg E(y,z))).$$

Ejercicio 6 (1 punto) Dada la fórmula

$$\alpha = \exists y \forall x [R(x,y) \to E(x,y) \vee E(x,b)]$$

calcula su valor de verdad en la estructura $\mathcal{E}$ dada por $\begin{cases} D = \mathbb{N} \\ b = 1 \\ R(x,y) := \text{" x divide a y"} \\ E(x,y) := \text{" x=y"} \end{cases}$

Clasifica semánticamente la fórmula α (es decir, estudia si es universalmente válida, contradicción o satisfacible y refutable). Justifica tu elección.

Solución:

La fórmula α, en la estructura dada nos dice que debe haber un número natural y para el que sea cierto $\forall x[R(x,y) \to E(x,y) \vee E(x,b)]$. Esto último significa que todo x, que sea divisor de y debe ser igual a y o igual a 1.

Es decir, la fórmula α dice que existe un número natural y cuyos únicos divisores son 1 y él mismo. Basta tomar y cualquier número primo o $y = 1$.

Por tanto, el valor de verdad de α en esta estructura es 1.

Con esto tenemos que α no es una contradicción. Ahora podemos proceder de dos formas:

- Buscando una estructura en la que α se interprete como falsa.

  Por ejemplo, podemos tomar la siguiente:
  $\begin{cases} D = \mathbb{N} \\ b = 1 \\ R(x,y) := \text{" x >y"} \\ E(x,y) := \text{" x=y"} \end{cases}$
  En este caso, la fórmula afirma que hay un número natural y de forma que todo número mayor que él, o es igual a 1 o es igual a y. Ese número no existe, luego la fórmula es falsa en esta estructura.

  Al tener dos estructuras, una en la que α se interpreta como verdadera y otra en la que α se interpreta como falsa concluimos que α es satisfacible y refutable.

- Intentando comprobar si α es o no universalmente válida, es decir, si α es consecuencia lógica del vacío.

  Es decir, vamos a estudiar si $\vDash \alpha$, o lo que es lo mismo, si $\{\neg\alpha\}$ es insatisfacible.

  Pasamos $\neg\alpha$ a forma clausulada:
  $$\begin{array}{rcl} \neg\alpha & = & \neg\exists y \forall x[R(x,y) \to E(x,y) \vee E(x,b)] \\ & \equiv & \forall y \neg\forall x[R(x,y) \to E(x,y) \vee E(x,b)] \\ & \equiv & \forall y \exists x \neg[R(x,y) \to E(x,y) \vee E(x,b)] \\ & \equiv & \forall y \exists x \neg[\neg R(x,y) \vee E(x,y) \vee E(x,b)] \\ & \equiv & \forall y \exists x[R(x,y) \wedge \neg E(x,y) \wedge \neg E(x,b)] \\ & & \forall y[R(f(y),y) \wedge \neg E(f(y),y) \wedge \neg E(f(y),b)] \end{array}$$
  Luego hay que estudiar si el conjunto de cláusulas $\{R(f(y),y),\ \neg E(f(y),y),\ \neg E(f(y),b)\}$ es o no insatisfacible. Es evidente que este conjunto es satisfacible, pues no podemos calcular ninguna resolvente.

  Al no ser el conjunto insatisfacible, no es cierto que α sea universalmente válida, por lo que es refutable. Ya sabíamos de antes que α era satisfacible. Por tanto, α es satisfacible y refutable.

Ejercicio 7 (1,5 puntos) Sean:

- $\alpha_1 = \forall x\, [\exists y R(x,y) \rightarrow \neg Q(x)]$
- $\alpha_2 = \forall x\, [\exists z R(f(x),z) \vee Q(x)] \vee \forall x \forall y R(y,x)$
- $\alpha_3 = \forall y\, [Q(y) \rightarrow \exists x R(f(x),y)]$
- $\beta = \neg \forall x Q(f(x))$.

Demuestra que $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \models \beta$.

Solución:

Tenemos que demostrar que el conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \neg\beta\}$ es insatisfacible. Para ello, pasamos cada una de estas fórmulas a cláusulas:

$$
\begin{array}{lll}
\alpha_1 & = & \forall x\, [\exists y R(x,y) \rightarrow \neg Q(x)] \\
 & \equiv & \forall x\, [\neg \exists y R(x,y) \vee \neg Q(x)] \\
 & \equiv & \forall x\, [\forall y \neg R(x,y) \vee \neg Q(x)] \\
 & \equiv & \forall x \forall y (\neg R(x,y) \vee \neg Q(x)).
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\alpha_2 & = & \forall x\, [\exists z R(f(x),z) \vee Q(x)] \vee \forall x \forall y R(y,x) \\
 & \equiv & \forall x \exists z (R(f(x),z) \vee Q(x)) \vee \forall x \forall y R(y,x) \\
 & \equiv & \forall x \exists z (R(f(x),z) \vee Q(x)) \vee \forall u \forall y R(y,u) \\
 & \equiv & \forall x \exists z (R(f(x),z) \vee Q(x) \vee \forall u \forall y R(y,u)) \\
 & \equiv & \forall x \exists z \forall u \forall y (R(f(x),z) \vee Q(x) \vee R(y,u)) \\
 & & \forall x \forall u \forall y (R(f(x),g(x)) \vee Q(x) \vee R(y,u)).
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\alpha_3 & = & \forall y\, [Q(y) \rightarrow \exists x R(f(x),y)] \\
 & \equiv & \forall y\, [\neg Q(y) \vee \exists x R(f(x),y)] \\
 & \equiv & \forall y \exists x (\neg Q(y) \vee R(f(x),y)) \\
 & & \forall y (\neg Q(y) \vee R(f(h(y)),y)).
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\neg\beta & = & \neg\neg \forall x Q(f(x)) \\
 & \equiv & \forall x Q(f(x)).
\end{array}
$$

Ahora hemos de comprobar que el conjunto de cláusulas siguiente

$$\{\neg R(x,y) \vee \neg Q(x),\ R(f(x),g(x)) \vee Q(x) \vee R(y,u),\ \neg Q(y) \vee R(f(h(y)),y),\ Q(f(x))\}$$

es insatisfacible. Para ello, buscamos una deducción de la cláusula vacía.

$$
\begin{array}{ccc}
\neg R(x,y) \vee \neg Q(x) & & \neg Q(z) \vee R(f(h(z)),z) \\
(x|f(h(y))) & & (z|y) \\
\neg Q(f(h(y))) \vee \neg Q(y) & & Q(f(x)) \\
 & & (x|h(y)) \\
\neg Q(y) & & Q(f(x)) \\
(y|f(x)) & & \\
\square & &
\end{array}
$$

Como conclusión tenemos que β es consecuencia lógica de α_1, α_2 y α_3.

Ejercicio 8 (1 punto)

La sucesión de los números de Fibonacci se define de la siguiente forma:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ y } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ para } n \geq 2.$$

Demuestra que para todo $n \geq 0$

$$\sum_{i=0}^{n} (F_i)^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$$

Solución:

Hacemos la demostración por inducción:

Caso base En esta ocasión es $n = 0$. Por una parte se tiene que $\sum_{i=0}^{0} (F_i)^2 = (F_0)^2 = 0^2 = 0$ y por otra $F_0 \cdot F_1 = 0 \cdot 1 = 0$. Y vemos que coinciden.

Hipótesis de inducción Para un número natural m asumimos que

$$(F_0)^2 + (F_1)^2 + \cdots + (F_m)^2 = F_m \cdot F_{m+1}.$$

Paso inductivo Vamos a comprobar que $(F_0)^2 + (F_1)^2 + \cdots + (F_m)^2 + (F_{m+1})^2 = F_{m+1} \cdot F_{m+2}$.

$$\begin{array}{rcll} (F_0)^2 + (F_1)^2 + \cdots + (F_m)^2 + (F_{m+1})^2 & = & F_m \cdot F_{m+1} + (F_{m+1})^2 & \text{Hipótesis de inducción} \\ & = & F_{m+1} \cdot (F_m + F_{m+1}) & \text{Sacamos factor común} \\ & = & F_{m+1} \cdot F_{m+2} & \text{Pues } F_{m+2} = F_m + F_{m+1}. \end{array}$$

Ejercicio 9 (0,5 puntos) Determina para cuáles de las siguientes relaciones de recurrencia una solución particular (para cualquier conjunto de condiciones iniciales) puede encontrarse desde la expresión:

$$x_n = A + Bn + Cn^2 + D \cdot 2^n$$

1. $x_n = x_{n-1} + 2^n \cdot (n+1)$
2. $x_n = 2x_{n-1} + n^2 + 1$
3. $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} + 2^n$

Solución:

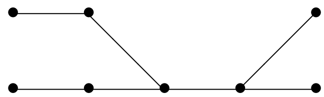
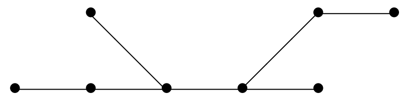
En cada uno de los casos vamos a calcular que forma tendría una solución de la recurrencia correspondiente, y a partir de ahí veremos si puede encontrarse desde la expresión dada.

1. La recurrencia $x_n = x_{n-1} + 2^{n-1} \cdot (n+1)$ es una recurrencia lineal no homogénea con coeficientes constantes. Para calcular que forma tendría una solución de esta recurrencia calculamos el polinomio característico de una relación de recurrencia lineal homogénea que es satisfecha por la sucesión x_n. Este polinomio se puede obtener como el producto de dos factores: por una parte $(x-1)$, que viene de la parte homogénea de la recurrencia dada y por otra parte $(x-2)^2$ que viene de la parte no homogénea (pues esta parte es 2^n por un polinomio de grado 1).

   Por tanto, una solución de la recurrencia tendrá la forma $A + B \cdot 2^n + Cn \cdot 2^n$, y ésta no puede obtenerse de la expresión $A + Bn + Cn^2 + D \cdot 2^n$.
2. Para la recurrencia $x_n = 2x_{n-1} + n^2 + 1$ el polinomio característico es $(x-2) \cdot (x-1)^3$ (el factor $x-2$ de la parte homogénea y el factor $(x-1)^3$ de la parte no homogénea). Una solución adopta entonces la forma $A + Bn + Cn^2 + D \cdot 2^n$, luego sí puede obtenerse de la expresión dada.
3. Ahora, para la recurrencia $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} + 2^n$, el polinomio característico es $(x^2 - 2x + 1) \cdot (x-2) = (x-1)^2 \cdot (x-2)$. Una solución de esta recurrencia tiene la forma $A + Bn + C \cdot 2^n$. En este caso, también puede encontrarse desde la expresión $A + Bn + Cn^2 + D \cdot 2^n$ (tomando $C = 0$).

Ejercicio 10 (1 punto)

1. Estudia si los dos grafos siguientes son o no isomorfos.

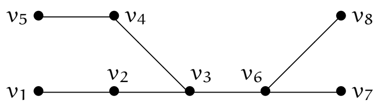
2. Un grafo plano tiene 2 vértices de grado 3, dos vértices de grado 4, dos vértices de grado 5 y el resto de grado 6.

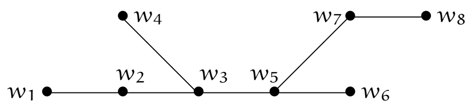
   En una representación plana nos salen 16 regiones.

   ¿Cuántos lados tiene el grafo?

Solución:

1. Para facilitar la respuesta vamos a ponerle nombre a los vértices de ambos grafos:





   Vemos que ambos grafos tienen 8 vértices, de los cuales 4 son de grado 1, 2 son de grado 2 y otros dos son de grado 3. Sin embargo, no son isomorfos. Vamos a dar algunas razones por las que no son isomorfos:

   - En el segundo grafo hay dos vértices que se encuentra a distancia 5 (w_1 y w_8), mientras que en el primero no hay dos vértices a esa distancia.
   - En el segundo grafo, el vértice w_3 está unido a uno de grado 1 (w_4), a otro de grado 2 (w_2) y a otro de grado 3 (w_5). En el primero, ninguno de los vértices de grado 3 es adyacente a uno de grado 1, otro de grado 2 y otro de grado 3.
   - Los vértices v_7 y v_8, de grado 1 están a distancia 2. En el segundo grafo no hay dos vértices de grado 1 que se encuentren a distancia 2.

2. Vamos a denotar por v al número de vértices, l al número de lados y x al número de vértices de grado 6. Entonces tenemos las siguientes relaciones:

   $v = x + 6$. Esta relación es evidente.
   $2l = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 6x$ (pues en un grafo, la suma de los grados de los vértices es el doble del número de lados).
   $v - l + 16 = 2$. Por la fórmula de Euler para grafos planos conexos.

   La segunda relación la podemos escribir como $24 + 6x = 2l$, es decir, $l = 12 + 3x$.

   Sustituimos v y l en la tercera ecuación y tenemos $x + 6 - (12 + 3x) + 16 = 2$, es decir, $-2x + 10 = 2$, cuya solución es $x = 4$.

   Por tanto, nuestro grafo tiene 10 vértices y $12 + 3 \cdot 4 = 24$ lados.