Ejercicios para evaluación de los temas 9 y 10

Yeray López Ramírez
364507G8W

8'5

Ejercicio 1: Estudiar los puntos críticos

a) $f(x,y) = x^4 + 8x^2 + y^2 - 4y$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(f(x,y))}{\partial x} = 4x^3 + 16x \\ \dfrac{\partial(f(x,y))}{\partial y} = 2y - 4 \end{cases}$$

$4x^3 + 16x = 0 \to (4x^2+16)x = 0 \to \boxed{x=0}$; $4x^2+16=0$ $x^2=-4$ No tiene solución

$2y - 4 = 0 \quad y = 2$

$\boxed{P_1 = (0,2)}$ Punto crítico ✓

1

$$\frac{\partial^2(f(x,y))}{\partial x^2} = 12x^2 + 16 \qquad \frac{\partial^2(f(x,y))}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2(f(x,y))}{\partial y \partial x} = 0 \qquad \frac{\partial^2(f(x,y))}{\partial y^2} = 2$$

$$H = \begin{pmatrix} 12x^2+16 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$|H| = \boxed{24x^2 + 32} \to P_1 = 32 > 0$ $\boxed{\text{Mínimo}}$

P_1 es un mínimo relativo

te falta un paso

b) $f(x,y) = x^3 + xy + y^2 + 3$

$$\frac{\partial(f(x,y))}{\partial x} = 3x^2 + y \qquad \frac{\partial(f(x,y))}{\partial y} = x + 2y$$

$3x^2 + y = 0 \to -6x^2 - 2y = 0$

$x + 2y = 0 \to x + 2y = 0$

$-6x^2 + x = 0 \to x(-6x+1) = 0$; $\boxed{x=0}$ $\boxed{y=0}$; $-6x+1=0$ $\boxed{x=\frac{1}{6}}$ $y = \frac{-1/6}{2} = \boxed{-\frac{1}{12}}$

Puntos críticos
$$\begin{cases} P_1 = (0,0) \\ P_2 = \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2(f(x,y))}{\partial x^2} = \boxed{6x} \qquad \frac{\partial^2(f(x,y))}{\partial x \partial y} = \boxed{1}$$

$$\frac{\partial^2(f(x,y))}{\partial y \partial x} = \boxed{1} \qquad \frac{\partial^2(f(x,y))}{\partial y^2} = \boxed{2}$$

$$H = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |H| = 12x - 1$$

$$\begin{cases} P_1 = -1 < 0 \text{ Punto de silla} \\ P_2 : 1 > 0 \Rightarrow 1 > 0 \ \boxed{\text{Mínimo}} \end{cases}$$

falta un paso

P_1 es punto de silla

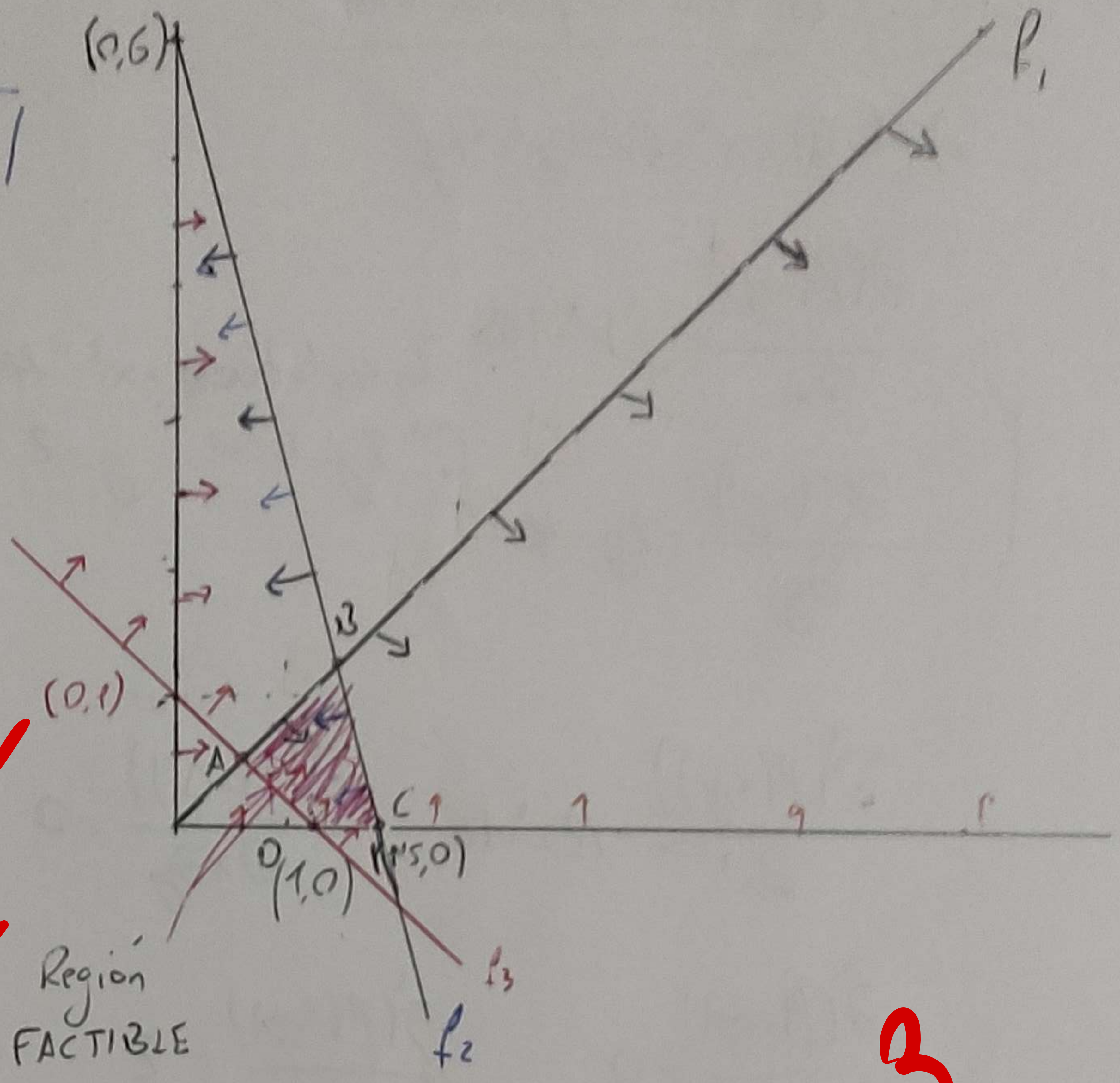
P_2 es un mínimo relativo

1'5

Veray López Ramírez
26050768W

Ejercicio 2 Maximizar $f(x,y) = x - \frac{1}{2}y$ con restricciones:

$$\begin{cases} f_1 \Rightarrow x \geq y \\ f_2 \Rightarrow 4x + y \leq 6 \\ f_3 \Rightarrow x + y \geq 1 \\ f_4 \Rightarrow x \geq 0 \\ f_5 \Rightarrow y \geq 0 \end{cases}$$



$f_2 \Rightarrow (x=0\ y=6), (x=3/2\ y=0)$ ✓

$A\begin{cases} x=y \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow (x=\frac{1}{2}\ y=1/2)$ $A=(0'5, 0'5)$ ✓

$B\begin{cases} 4x+y=6 \\ x=y \end{cases} \Rightarrow (x=\frac{6}{5}, y=\frac{6}{5})$ $B=(1'2, 1'2)$ ✓

Vértices	$f(x,y)$
$A=(0'5, 0'5)$	0'25
$B=(1'2, 1'2)$	0'6
$C=(1'5, 0)$	1'5
$0=(1,0)$	1

✓

3/

Solución: El punto óptimo para la función $f(x,y) = x - 1/2y$ con las restricciones es el vértice $C=(1'5, 0)$ con un valor de 1'5. ✓

Ejercicio 3 - Función maxima en C, función mínima en B y una arista

Máximo en C:

Por ejemplo $-2x+y-2=0 <$ si $x=0$ $y=2$; si $y=0$ $x=1$

Puntos $\begin{cases} P(0,2) \\ P(1,0) \end{cases}$

✓

$f(x,y) = -2x+y+2=0$ en C toma el valor

$f(1,4) = -2+4+2=0$

en el resto de vértices $\begin{cases} f(3,0) = -8\ (A) \\ f(0,1) = -1\ (B) \\ f(5,5) = -7\ (D) \\ f(4,2) = -8\ (E) \end{cases}$

$f(x,y)$ es máxima en C

Mínimo en B

Yeray López Ramírez
26050768W

Por ejemplo

$+3x+2y-5=0 \begin{cases} \text{si } x=0 & y=2'5 \\ \text{si } y=0 & x=1'\overline{6} \end{cases}$

$f(x,y)=+3x+2y-5=0$ en B toma el valor

$f(0,1)=2-5=-3$//

en el resto de vértices $\begin{cases} f(3,0)=4\cdot(A) \\ f(1,4)=6\ (C) \\ f(5,5)=+20(C) \end{cases}$ ✓

$f(x,y)$ es mínima en B

Obtener como solución (máximo o mínimo) una arista

Cogemos los puntos $A(3,0)$ y $E(4,2)$.

Ejemplo

$-2x+y+6=0 \begin{cases} \text{si } x=0 & y=6 \\ \text{si } y=0 & x=3 \end{cases}$

$f(x,y)=-2x+y+6=0$ en E toma el valor

$f(4,2)=-8+2+6=0 \Rightarrow 0$//

y en A:

$f(3,0)=-2\cdot3+0+6=0 \Rightarrow 0$//

resto de vertices $\begin{cases} f(0,1)=7(B) \\ f(1,4)=8(C) \\ f(5,5)=11(D) \end{cases}$ ✓

La arista que une A y E es un mínimo

3/