FUNCIONES ELEMENTALES

Ejercicio 1. Calcula el dominio de las siguientes las funciones:

1) $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$
2) $f(x) = \log\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2+4x+6}\right)$
3) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-|x|}}$
4) $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
5) $f(x) = \log(|x| - 7)$
6) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(2x)$

Solución.

1) El dominio es $(-\infty, -2) \cup [2, +\infty)$.
2) El dominio es $\mathbb{R} \setminus [2, 3]$.
3) El dominio es $(-\infty, -1) \cup [0, 1)$.
4) El dominio es $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
5) El dominio es $(-\infty, -7) \cup (7, +\infty)$.
6) Utilizando el dominio de la función arcoseno, el dominio de f está formado por los números reales x que verifican que $|2x| \leq 1$. Es decir, $x \in [-1/2, 1/2]$.

Ejercicio 2. Comprueba que si $f(x) = \frac{1}{1-x}$, entonces $(f \circ f \circ f)(x) = x$.

Solución.

$$(f \circ f \circ f)(x) = (f \circ f)\left(\frac{1}{1-x}\right) = f\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}}\right) = f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = x.$$

Ejercicio 3. Estudia si son pares o impares las siguientes funciones:

1) $f(x) = |x+1| - |x-1|$
2) $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
3) $f(x) = e^x + e^{-x}$
4) $f(x) = e^x - e^{-x}$
5) $f(x) = \operatorname{sen}(|x|)$
6) $f(x) = \cos(x^3)$

Solución.

1) $f(x) = |x+1| - |x-1|$ es impar.
2) $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ es impar.
3) $f(x) = e^x + e^{-x}$ es par.
4) $f(x) = e^x - e^{-x}$ es impar.
5) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ es par.
6) $f(x) = \cos(x^3)$ es par.

Ejercicio 4. Comprueba la monotonía de las siguientes funciones:

1) $f(x) = \arctan(\log(x))$, $\forall\, x > 0$,
2) $f(x) = x^6 + x^2$, $\forall\, x > 0$,
3) $f(x) = x + \sqrt{x}$, $\forall\, x > 0$,
4) $f(x) = (e^x + \arctan(x))^2$, $\forall\, x > 0$,
5) $f(x) = \frac{1}{x+e^x}$, $\forall\, x > 0$,
6) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(x))$, $\forall\, x \in [0, \pi/2]$.

Solución.

1) Es estrictamente creciente por ser composición de dos funciones estrictamente crecientes, como son la función arco tangente y la función logaritmo.

2) Es estrictamente creciente por ser suma de dos funciones estrictamente crecientes y positivas.

3) Análogo al apartado anterior.

4) Es estrictamente creciente ya que es suma de e^x y $\arctan(x)$, funciones estrictamente crecientes y positivas; compuesta con la potencia de exponente dos que es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$.

5) Es estrictamente decreciente ya que:

$$0 < x < y \implies x + e^x < y + e^y \implies \frac{1}{x+e^x} > \frac{1}{y+e^y} \implies f(x) > f(y).$$

6) Es estrictamente decreciente al ser composición de una función est. creciente (la función seno) con una función est. decreciente (la función coseno), siempre trabajando en $[0, \pi/2]$.

Ejercicio 5. ¿Para qué números reales es cierta la desigualdad $e^{3x+8}(x+7) > 0$?
Solución. Como la función exponencial es siempre positiva, la desigualdad es cierta si $x > -7$.

Ejercicio 6. Comprueba que la igualdad $a^{\log(b)} = b^{\log(a)}$ es cierta para cualquier par de números positivos a y b.
Solución. Tomando logaritmos en la primera parte de la expresión:

$$\log\left(a^{\log(b)}\right) = \log(b)\log(a)$$

y, haciendo lo mismo en la segunda parte:

$$\log\left(b^{\log(a)}\right) = \log(a)\log(b).$$

Por tanto, por la inyectividad de la función logaritmo, tendríamos que ambas expresiones coinciden; es decir:

$$\log\left(a^{\log(b)}\right) = \log\left(b^{\log(a)}\right) \implies a^{\log(b)} = b^{\log(a)}.$$

Ejercicio 7. Prueba que $\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\log\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=0$.

Solución. Aplicando las propiedades del logaritmo tenemos que:

$$\begin{aligned}\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\log\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)&=\log\left(\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\right)\\&=\log\left(1+x^2-x^2\right)=\log(1)=0.\end{aligned}$$

Ejercicio 8. Resuelve la ecuación $x^{\sqrt{x}}=\left(\sqrt{x}\right)^x$.

Solución. Tomamos logaritmos en ambos miembros de la ecuación:

$$\begin{aligned}x^{\sqrt{x}}=\left(\sqrt{x}\right)^x &\iff \log\left(x^{\sqrt{x}}\right)=\log\left(\sqrt{x}^x\right) \iff \sqrt{x}\log(x)=x\log\left(\sqrt{x}\right)\\&\iff \sqrt{x}\log(x)=\frac{x}{2}\log(x) \iff \log(x)\left(\sqrt{x}-\frac{x}{2}\right)=0.\end{aligned}$$

Para que el producto valga cero, alguno de los dos factores tiene que ser cero. La primera solución que tenemos es $x=1$, obtenida de resolver $\log(x)=0$. Por otra parte, tenemos que resolver la ecuación:

$$\sqrt{x}-\frac{x}{2}=0 \implies 2\sqrt{x}=x \implies 4x=x^2 \implies x(x-4)=0.$$

Por tanto, y como $x\neq 0$, tendremos que $x=4$. En resumen, la ecuación planteada tiene dos soluciones: $x=1$ y $x=4$.

Ejercicio 9. Simplifica las siguientes expresiones:

1) $a^{\log(\log a)/\log a}$,
2) $\log_a\left(\log_a(a^{a^x})\right)$.

Solución.

1) Tomamos logaritmos y nos queda:

$$\log\left(a^{\log(\log a)/\log a}\right)=\frac{\log(\log(a)}{\log(a)}\log(a)=\log(\log(a)).$$

Por tanto, por la inyectividad de la función logaritmo:

$$a^{\log(\log a)/\log a}=\log(a).$$

2) Utilizamos la definición de logaritmo en base a:

$$\begin{aligned}\log_a\left(\log_a(a^{a^x})\right)&=\frac{\log\left(\frac{\log(a^{a^x})}{\log(a)}\right)}{\log(a)}=\frac{\log\left(a^x\,\frac{\log(a)}{\log(a)}\right)}{\log(a)}=\frac{\log(a^x)}{\log(a)}\\&=x\cdot\frac{\log(a)}{\log(a)}=x.\end{aligned}$$

Ejercicio 10. Utiliza las fórmulas de adición del seno y coseno para calcular el valor de $\operatorname{sen}(7\pi/12)$ y $\cos(\pi/12)$.

Solución. Es fácil comprobar que

$$\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{4\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}=\frac{7\pi}{12}$$

y que

$$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{4\pi}{12}-\frac{3\pi}{12}=\frac{\pi}{12}.$$

Aplicamos ahora las formulas de adición:

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Análogamente,

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Resumiendo, $\operatorname{sen}(7\pi/12)=\cos(\pi/12)\approx 0.96592$.

Ejercicio 11. Discute si son ciertas las siguientes identidades:

1) $\arccos(\cos(\pi/4))=\pi/4$,

2) $\operatorname{arc sen}(\operatorname{sen}(10))=10$,

3) $\arctan(\tan(3\pi/2))=3\pi/2$,

4) $\arccos(\cos(x))=x$.

Solución.

1) Verdadera.

2) Falsa.

3) Falsa.

4) Es cierta únicamente para $x\in[0,\pi]$.

Ejercicio 12. Comprueba que

$$(\operatorname{sen}(x)+\cos(x))^4=1+2\operatorname{sen}(2x)+\operatorname{sen}^2(2x).$$

Solución. Desarrollamos el miembro de la izquierda:

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen}(x)+\cos(x))^4&=\operatorname{sen}^4(x)+4\operatorname{sen}^3(x)\cos(x)+6\operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)\\&\quad+4\operatorname{sen}(x)\cos^3(x)+\cos^4(x).\end{aligned}$$

Obsérvese que

$$1=\left(\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)\right)^2=\operatorname{sen}^4(x)+2\operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)+\cos^4(x),$$

con lo que

$$\operatorname{sen}^4(x)+\cos^4(x)=1-2\operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x).$$

Sustituimos:

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen}(x)+\cos(x))^4&=1+4\left(\operatorname{sen}^3(x)\cos(x)+\operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)+\operatorname{sen}(x)\cos^3(x)\right)\\&=1+4\operatorname{sen}(x)\cos(x)\left(\operatorname{sen}^2(x)+\operatorname{sen}(x)\cos(x)+\cos^2(x)\right)\\&=1+4\operatorname{sen}(x)\cos(x)+4\operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)\\&=1+2\operatorname{sen}(2x)+\operatorname{sen}^2(2x).\end{aligned}$$