Prueba de clase 21 de Mayo de 2019[1]

Alumno:__________________________________ **D.N.I.:**______________ **Grupo:**______

Ejercicio 1. *Sean* $\alpha = \forall x \forall y \exists z P(f(x,y), g(z,a))$ *y* $\beta = \forall x \forall y (Q(x,y) \to P(g(x,y), b))$ *dos fórmulas de un lenguaje de primer orden. Consideramos la estructura siguiente:*

- **Dominio:** $D = \mathbb{Z}_{12}$.
- **Asignación de constantes:** $a = 1$, $b = 0$.
- **Asignación de funciones:** $f(x,y) = x \cdot y$, $g(x,y) = x + y$.
- **Asignación de predicados:** $P(x,y) \equiv x = y$, $Q(x,y) \equiv x^2 = y^2$.

1. *Calcula el valor de verdad de las fórmulas* α *y* β *en la estructura dada.*
2. *¿Es alguna de las fórmulas universalmente válida? Razona la respuesta.*
3. *Expresa en este lenguaje el siguiente enunciado:*

Los únicos elementos de $\mathbb{Z}_{12}$ *que son iguales a su cuadrado son* 0 *y* 1.

Solución:

1. Puesto que $f(x,y) = x \cdot y$ y $g(z,a) = z + 1$, la fórmula α significa en este caso:

$$\forall x \forall y \exists z (x \cdot y = z + 1).$$

Es decir, dados x, y cualesquiera elementos de $\mathbb{Z}_{12}$, existe un elemento $z \in \mathbb{Z}_{12}$ tal que $x \cdot y = z + 1$. Esto es cierto, pues basta tomar como z el elemento $x \cdot y - 1$. Por ejemplo:

Si $x = 2$, $y = 3$ tomamos $z = 5$.
Si $x = 4$, $y = 5$ tomamos $z = 20 - 1 = 19 = 7$.
Si $x = 0$, $y = 3$ tomamos $z = 0 - 1 = -1 = 11$.

Por tanto, $I(\alpha) = 1$.

En cuanto a β, lo que nos dice es:

$$\forall x \forall y (x^2 = y^2 \to x + y = 0).$$

Esto no es cierto, pues si tomamos $x = 1$ e $y = 5$ entonces, puesto que $5^2 = 25 = 1$, $x^2 = y^2$, pero $x + y = 1 + 5 = 6 \neq 0$. Por tanto, para un valor de x e y se tiene que $I^v(Q(x,y)) = 1$ mientras que $I^v(P(g(x,y), b)) = 0$.

En conclusión, $I(\beta) = 0$.

2. Es claro que β no es universalmente válida, pues tenemos una estructura en la que se interpreta como falsa.

[1] Hay que hacer cuatro ejercicios: el quinto, y tres a elegir entre los cuatro restantes.

En cuanto a α, tampoco lo es. Basta tomar cualquier estructura en la que $P(x, y) = 0$. Por ejemplo:

- **Dominio:** $D = \mathbb{N}$.
- **Asignación de constantes:** $a = 1$, $b = 0$.
- **Asignación de funciones:** $f(x, y) = x \cdot y$, $g(x, y) = x + y$.
- **Asignación de predicados:** $P(x, y) \equiv x + y < 0$, $Q(x, y) \equiv x^2 = y^2$.

Es claro que el valor de verdad de α en esta estructura es 0.

3. Lo que tenemos que decir es que si $x = x^2$ entonces $x = 0$ ó $x = 1$. Puesto que x^2 lo podemos poner como $f(x, x)$, lo anterior lo podemos decir como sigue:

$$\forall x(P(x, f(x, x)) \to P(x, a) \vee P(x, b)).$$

Sin embargo, con esta fórmula estamos diciendo que de haber algún número que sea igual a su cuadrado, este número debe ser 0 ó 1. Pero no estamos diciendo que el 0 y el 1 cumplan esa condición. Para eso, podemos modificar la anterior fórmula:

$$\forall x(P(x, f(x, x)) \leftrightarrow P(x, a) \vee P(x, b)).$$

También podría decirse de la siguiente forma:

$$P(a, f(a, a)) \wedge P(b, f(b, b)) \wedge \forall x(P(x, f(x, x)) \to P(x, a) \vee P(x, b)).$$

Por último, notemos que esta fórmula es falsa, pues en $\mathbb{Z}_{12}$ se tiene que $4^2 = 4$ y $9^2 = 9$.

Ejercicio 2. *Calcula una forma normal prenexa (con el menor número posible de cuantificadores), una forma de Skolem y una forma clausulada para la fórmula*

$$\alpha = \exists x \forall y(\forall x \forall y R(a,x) \to \neg \forall z(\neg R(z,y) \to \forall x S(g(x),z))).$$

Solución:

Notemos en primer lugar que el radio de acción del segundo $\forall y$ es $R(a,x)$, donde la variable y no aparece. Por tanto, podemos suprimir ese cuantificador.

También podemos ver que en el radio de acción del $\exists x$ que hay al principio no hay ninguna aparición libre de x (todas las que hay son ligadas). Por tanto, también puede suprimirse ese cuantificador. La fórmula α es entonces equivalente a:

$$\forall y(\forall x R(a,x) \to \neg \forall z(\neg R(z,y) \to \forall x S(g(x),z)))$$

Ahora vamos transformando esta fórmula hasta llegar a la forma prenexa:

$$\begin{array}{rcl}
\alpha & \equiv & \forall y(\forall x R(a,x) \to \neg \forall z(\neg R(z,y) \to \forall x S(g(x),z))) \\
& \equiv & \forall y(\neg \forall x R(a,x) \vee \neg \forall z(\neg\neg R(z,y) \vee \forall x S(g(x),z))) \\
& \equiv & \forall y(\exists x \neg R(a,x) \vee \neg \forall z(R(z,y) \vee \forall x S(g(x),z))) \\
& \equiv & \forall y(\exists x \neg R(a,x) \vee \exists z \neg(R(z,y) \vee \forall x S(g(x),z))) \\
& \equiv & \forall y(\exists x \neg R(a,x) \vee \exists z(\neg R(z,y) \wedge \neg \forall x S(g(x),z))) \\
& \equiv & \forall y(\exists x \neg R(a,x) \vee \exists z(\neg R(z,y) \wedge \exists x \neg S(g(x),z))) \\
& \equiv & \forall y(\exists z \neg R(a,z) \vee \exists z(\neg R(z,y) \wedge \exists x \neg S(g(x),z))) \\
& \equiv & \forall y \exists z(\neg R(a,z) \vee (\neg R(z,y) \wedge \exists x \neg S(g(x),z))) \\
& \equiv & \forall y \exists z(\neg R(a,z) \vee \exists x(\neg R(z,y) \wedge \neg S(g(x),z))) \\
& \equiv & \forall y \exists z \exists x(\neg R(a,z) \vee (\neg R(z,y) \wedge \neg S(g(x),z)))
\end{array}$$

Y ya tenemos una forma prenexa.

Para calcular una forma de Skolem tenemos que eliminar los cuantificadores existenciales y sustituir las variables z y x por dos símbolos de función monarios (distintos, y distitnos de g) aplicados a la variable y. Sustituimos z por $f(y)$ y x por $h(y)$. Una forma de Skolem es entonces:

$$\forall y(\neg R(a,f(y)) \vee (\neg R(f(y),y) \wedge \neg S(g(h(y)),f(y)))).$$

Por último, para calcular una forma clausulada, aplicamos la propiedad distributiva y nos queda:

$$\forall y((\neg R(a,f(y)) \vee \neg R(f(y),y)) \ \wedge \ (\neg R(a,f(y)) \vee \neg S(g(h(y)),f(y)))).$$

Ejercicio 3. *Demuestra que la fórmula*

$$\alpha = \forall x(\neg P(x,x) \wedge \exists y P(x,y)) \wedge \forall x \forall y \forall z(P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z))$$

es satisfacible y refutable.

Solución:

Vemos que α es la conjunción de dos fórmulas: $\forall x(\neg P(x,x) \wedge \exists y P(x,y))$ por una parte y $\forall x \forall y \forall z(P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z))$ por otra. Además, la primera subfórmula es equivalente a $\forall x \neg P(x,x) \wedge \forall x \exists y P(x,y)$.

Por tanto, podemos ver a α como la conjunción de tres fórmulas:

$\alpha_1 = \forall x \neg P(x,x)$.

$\alpha_2 = \forall x \exists y P(x,y)$.

$\alpha_3 = \forall x \forall y \forall z(P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z))$.

En primer lugar, elegimos una estructura cualquiera, y calculamos su valor de verdad. Por ejemplo, tomamos:

- **Dominio:** $D = \mathbb{N}$.
- **Asignación de predicados:** $P(x,y) \equiv x = y$. .

Y vemos que en esta estructura $I(\alpha_1) = 0$, pues α_1 dice en este caso que para cualquier $x \in \mathbb{N}$, $x \neq x$. Lo cual es falso.

Por tanto, $I(\alpha) = 0$ lo que nos dice que α es refutable.

Buscamos ahora una estructura en la que α se interprete como verdadera.

- **Dominio:** $D = \mathbb{N}$.
- **Asignación de predicados:** $P(x,y) \equiv x < y$. .

En esta estructura, α_1 significa que para cualquier $x \in \mathbb{N}$, el número x no es menor que x. Claramente eso es cierto.

En cuanto a α_2, lo que nos dice es que para cualquier $x \in \mathbb{N}$ existe $y \in \mathbb{N}$ tal que $y > x$. Esto también es claramente cierto (basta tomar $y = x + 1$).

Por último, α_3 dice que para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{N}$, si $x < y$ e $y < z$ entonces $x < z$. Esto último también es cierto.

Por tanto, en esta estructura, y puesto que $\alpha \equiv \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$, tenemos que $I(\alpha) = 1$.

Con esto vemos que α es también satisfacible.

Ejercicio 4. *Estudia si los siguientes conjuntos de cláusulas son satisfacibles o insatisfacibles:*

1. $\{P(x, f(x)) \vee P(f(z), y),\ \neg P(f(a), f(b))\}$.
2. $\{P(f(x, y), g(z, b)) \vee P(f(g(a, y), a), x),\ \neg P(f(x, b), z)\}$.
3. $\{P(f(y), x) \vee P(x, f(y)),\ \neg P(f(a), x) \vee \neg P(y, f(b))\}$.

Solución:

1. $\{P(x, f(x)) \vee P(f(z), y),\ \neg P(f(a), f(b))\}$.

   Este conjunto es satisfacible, pues por resolución nunca podremos llegar a la cláusula vacía, ya que los literales $P(x, f(x))$ y $P(f(a), f(b))$ no son unificables:

   $$\begin{array}{rcl} x & = & f(a) \\ f(x) & = & f(b) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x & = & f(a) \\ x & = & b \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x & = & f(a) \\ f(a) & = & b \end{array}$$

   También podemos ver que en la estructura

   - **Dominio:** $D = \mathbb{N}$.
   - **Asignación de constantes:** $a = 2$, $b = 1$.
   - **Asignación de funciones:** $f(x) = x + 1$.
   - **Asignación de predicados:** $P(x, y) \equiv x < y$.

   ambas cláusulas se interpretan como verdaderas.

2. $\{P(f(x, y), g(z, b)) \vee P(f(g(a, y), a), x),\ \neg P(f(x, b), z)\}$.

   Este conjunto también es satisfacible, pues los literales $P(f(g(a, y), a), x)$ y $P(f(u, b), z)$ no son unificables (hemos cambiado la variable x del segundo literal por u para que no coincida con ninguna variable del primero):

   $$\begin{array}{rcl} f(g(a, y), a) & = & f(u, b) \\ x & = & z \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g(a, y) & = & u \\ a & = & b \\ x & = & z \end{array}$$

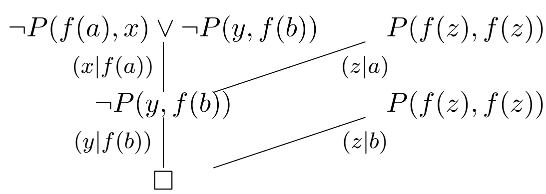
   Y al llegar a la ecuación $a = b$ el sistema no tiene solución.

3. $\{P(f(y), x) \vee P(x, f(y)),\ \neg P(f(a), x) \vee \neg P(y, f(b))\}$

   Este conjunto es insatisfacible. Vamos a verlo obteniendo una deducción de la cláusula vacía.

   En primer lugar, calculamos un factor de la primera cláusula, realizando la sustitución $(x|f(z); y|z)$. Nos queda entonces $P(f(z), f(z))$.

   Y ahora con esta cláusula y $\neg P(f(a), x) \vee \neg P(y, f(b))$ vamos a deducir la cláusula vacía:



Ejercicio 5. *Sean:*

1. $\alpha_1 = \forall x(\exists y(R(x,y) \wedge T(x,y)) \to P(x))$.
2. $\alpha_2 = \exists x(\neg Q(x) \wedge \forall y(\neg S(y) \to T(x,y)))$.
3. $\alpha_3 = \forall x(\forall y(S(y) \vee \neg R(x,y)) \to Q(x))$.
4. $\alpha_4 = \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$.

Comprueba que α_4 *es consecuencia lógica de* $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}$ *pero* α_1 *no es consecuencia lógica de* $\{\alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4\}$.

Solución:

En primer lugar vamos a ver que el conjunto $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \neg\alpha_4\}$ es insatisfacible. Para eso, pasamos cada una de esas fórmulas a cláusulas:

- $$\begin{array}{lcl} \alpha_1 & = & \forall x(\exists y(R(x,y) \wedge T(x,y)) \to P(x)) \\ & \equiv & \forall x(\neg\exists y(R(x,y) \wedge T(x,y)) \vee P(x)) \\ & \equiv & \forall x(\forall y\neg(R(x,y) \wedge T(x,y)) \vee P(x)) \\ & \equiv & \forall x(\forall y(\neg R(x,y) \vee \neg T(x,y)) \vee P(x)) \\ & \equiv & \forall x\forall y((\neg R(x,y) \vee \neg T(x,y)) \vee P(x)) \\ & \equiv & \forall x\forall y(\neg R(x,y) \vee \neg T(x,y) \vee P(x)) \end{array}$$

- $$\begin{array}{lcl} \alpha_2 & = & \exists x(\neg Q(x) \wedge \forall y(\neg S(y) \to T(x,y))) \\ & \equiv & \exists x(\neg Q(x) \wedge \forall y(\neg\neg S(y) \vee T(x,y))) \\ & \equiv & \exists x\forall y(\neg Q(x) \wedge (S(y) \vee T(x,y))) \\ & & \forall y(\neg Q(a) \wedge (S(y) \vee T(a,y))) \end{array}$$

- $$\begin{array}{lcl} \alpha_3 & = & \forall x(\forall y(S(y) \vee \neg R(x,y)) \to Q(x)) \\ & \equiv & \forall x(\neg\forall y(S(y) \vee \neg R(x,y)) \vee Q(x)) \\ & \equiv & \forall x(\exists y\neg(S(y) \vee \neg R(x,y)) \vee Q(x)) \\ & \equiv & \forall x(\exists y(\neg S(y) \wedge R(x,y)) \vee Q(x)) \\ & \equiv & \forall x\exists y((\neg S(y) \wedge R(x,y)) \vee Q(x)) \\ & & \forall x((\neg S(f(x)) \wedge R(x,f(x))) \vee Q(x)) \\ & \equiv & \forall x((\neg S(f(x)) \vee Q(x)) \wedge (R(x,f(x)) \vee Q(x))) \end{array}$$

- $$\begin{array}{lcl} \neg\alpha_4 & = & \neg\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \\ & \equiv & \forall x\neg(P(x) \wedge \neg Q(x)) \\ & \equiv & \forall x(\neg P(x) \vee Q(x)). \end{array}$$

Puesto que lo vamos a necesitar después calculamos una forma clausulada de $\neg\alpha_1$ y de α_4.

- $$\begin{array}{lcl} \neg\alpha_1 & = & \neg\forall x(\exists y(R(x,y) \wedge T(x,y)) \to P(x)) \\ & \equiv & \exists x\neg(\neg\exists y(R(x,y) \wedge T(x,y)) \vee P(x)) \\ & \equiv & \exists x(\exists y(R(x,y) \wedge T(x,y)) \wedge \neg P(x)) \\ & \equiv & \exists x\exists y(R(x,y) \wedge T(x,y) \wedge \neg P(x)) \\ & & R(b,c) \wedge T(b,c) \wedge \neg P(b) \end{array}$$

- $$\begin{array}{lcl} \alpha_4 & = & \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \\ & & P(d) \wedge \neg Q(d) \end{array}$$

Y ahora, comprobamos que el conjunto $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \neg\alpha_4\}$ es insatisfacible. Para ello, tomamos las cláusulas que hemos obtenido a partir de esas fórmulas:

$$\{\neg R(x,y)\vee\neg T(x,y)\vee P(x),\ \neg Q(a),\ S(y)\vee T(a,y),\ \neg S(f(x))\vee Q(x),\ R(x,f(x))\vee Q(x),\ \neg P(x)\vee Q(x)\}.$$

Y buscamos por resolución la cláusula vacía:

$$\begin{array}{cc}
\neg R(x,y)\vee\neg T(x,y)\vee P(x) & S(z)\vee T(a,z)\\
(x|a) & (z|y)\\
\neg R(a,y)\vee P(a)\vee S(y) & R(x,f(x))\vee Q(x)\\
(y|f(a)) & (x|a)\\
P(a)\vee S(f(a))\vee Q(a) & \neg S(f(x))\vee Q(x)\\
 & (x|a)\\
P(a)\vee Q(a) & \neg P(x)\vee Q(x)\\
 & (x|a)\\
Q(a) & \neg Q(a)\\
\square &
\end{array}$$

Al haber llegado a la cláusula vacía concluimos que α_4 es consecuencia lógica de $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}$.

Ahora tenemos que ver si $\{\alpha_4,\ \alpha_3,\ \alpha_2\}\vDash\alpha_1$. Para eso, tenemos que ver si $\{\alpha_4,\ \alpha_3,\ \alpha_2,\ \neg\alpha_1\}$ es o no insatisfacible, y por lo que hemos hecho antes eso es equivalente a comprobar si el conjunto de cláusulas

$$\{P(d),\ \neg Q(d),\ \neg S(f(x))\vee Q(x),\ R(x,f(x))\vee Q(x),\ \neg Q(a),\ S(y)\vee T(a,y),\ R(b,c),\ T(b,c),\ \neg P(b)\}$$

es o no insatisfacible.

Puesto que el predicado R y el predicado T no aparecen negados en ninguna cláusula, en una deducción de la cláusula vacía no podríamos usar la cláusula $R(x,f(x))\vee Q(x)$ ni la cláusula $R(b,c)$, ni la cláusula $T(b,c)$ ni la cláusula $S(y)\vee T(a,y)$. Esto impide que se use también la cláusula $\neg S(f(x))\vee Q(x)$ (ya que el literal $\neg S(f(x))$ no puede eliminarse con ninguno). Nos queda entonces que si queremos obtener una deducción de la cláusula vacía hemos de hacerlo con las cláusulas del conjunto

$$\{P(d),\ \neg Q(d),\ \neg Q(a),\ \neg P(b)\}$$

Y con ellas no se puede hacer ninguna resolvente. Por tanto, no podemos deducir por resolución la cláusula vacía.

Esto nos dice que el conjunto $\{\alpha_4,\ \alpha_3,\ \alpha_2,\ \neg\alpha_1\}$ es satisfacible luego α_1 no es consecuencia lógica de $\{\alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4\}$.