LÓGICA Y MÉTODOS DISCRETOS

12 de Junio de 2019

Alumno:______________________________ **D.N.I.:**____________ **Grupo:**______

Ejercicio 1.

1. *Da un ejemplo de tres elementos x, y, z de un álgebra de Boole tales que $x \leq y$, $x < z$ pero y no es menor o igual que z.*

2. *Demuestra que en un álgebra de Boole, si $x \downarrow y = 0$ entonces $\overline{x} + y = y$.*

3. *Demuestra que si x, y, z son elementos de un álgebra de Boole, entonces $xyz = (x \uparrow z) \downarrow (y \uparrow z)$.*

Solución:

1. En el álgebra de Boole $\mathbb{B}$ es imposible dar el ejemplo, pues si queremos que $x < z$, x debe valer 0 y z debe valer 1, en cuyo caso $y \leq z$.

   Nos vamos entonces al álgebra $\mathbb{B}^2$, y elegimos $x = (0,0)$, $y = (1,0)$ y $z = (0,1)$. Entonces $x \leq y$, $x < z$ pero y no es menor o igual que z. También podríamos haber tomado $y = (1,1)$.

2. Si $x \downarrow y = 0$ entonces $\overline{x+y} = 0$, luego $x + y = 1$. En tal caso:

$$\overline{x} + y = (\overline{x} + y)(x + y) = \overline{x}x + \overline{x}y + yx + y = 0 + \overline{x}y + xy + y = 0 + (\overline{x} + x + 1)y = 0 + 1 \cdot y = y.$$

3. Aquí tenemos que:

$$(x \uparrow z) \downarrow (y \uparrow z) = \overline{xz} \downarrow \overline{yz} = \overline{\overline{xz} + \overline{yz}} = \overline{\overline{xz}}\,\overline{\overline{yz}} = (xz)(yz) = xyzz = xyz.$$

Ejercicio 2. *Sea* $f : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ *la función dada por:*

$$f(x,y,z,t) = \begin{cases} 1 & si \quad 2x+y-z+t \geq 2. \\ 0 & si \quad 2x+y-z+t < 2. \end{cases}$$

y sea $g : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ *la función dual.*

1. *Calcula una expresión booleana para* f *y para* g.
2. *Comprueba que* f *y* g *son iguales (es decir,* f *es autodual).*
3. *Obtén una expresión de* f*, lo más reducida posible, como suma de productos de literales y otra como producto de suma de literales.*

Solución:

1. En primer lugar, calculamos una tabla con los valores de f.

x	y	z	t	$2x+y-z+t$	f
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	-1	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	2	1
0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	2	1
1	0	0	1	3	1
1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	2	1
1	1	0	0	3	1
1	1	0	1	4	1
1	1	1	0	2	1
1	1	1	1	3	1

Una vez obtenida la tabla de f buscamos una expresión booleana para f. Vamos a dar una expresión reducida como suma de productos de literales. Para esto, nos valemos de un mapa de Karnaugh:

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}\,\overline{t}$			1	1
$\overline{z}\,t$		1	1	1
$z\,t$			1	1
$z\,\overline{t}$			1	

$$f(x,y,z,t) = x\,y + x\,\overline{z} + x\,t + y\,\overline{z}\,t$$

Con la expresión que tenemos para f calculamos una para g, sin más que cambiar sumas por productos y viceversa:

$$g(x,y,z,t) = (x+y)(x+\overline{z})(x+t)(y+\overline{z}+t).$$

2. Comprobemos ahora que f y g son iguales. Vamos a hacer esto de tres formas:

   - Obtenemos una expresión reducida de f como producto de sumas de literales:

	$x+y$	$x+\overline{y}$	$\overline{x}+\overline{y}$	$\overline{x}+y$
$z+t$	0	0		
$z+\overline{t}$	0			
$\overline{z}+\overline{t}$	0	0		
$\overline{z}+t$	0	0		0

$f(x,y,z,t) = (x+y)\cdot(x+\overline{z})\cdot(x+t)\cdot(y+\overline{z}+t)$

Y podemos ver cómo las expresiones de f y de g coinciden.

- A partir de la expresión $g(x,y,z,t) = (x+y)(x+\overline{z})(x+t)(y+\overline{z}+t)$ calculamos la tabla de la función g.

x	y	z	t	$x+y$	$x+\overline{z}$	$x+t$	$y+\overline{z}+t$	g
0	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Y vemos como f y g coinciden.

- Transformamos la expresión de g:

$$
\begin{aligned}
g(x,y,z,t) &= (x+y)(x+\overline{z})(x+t)(y+\overline{z}+t)\\
&= (x+x\,\overline{z}+y\,x+y\,\overline{z})(x+t)(y+\overline{z}+t)\\
&= (x+y\,\overline{z})(x+t)(y+\overline{z}+t)\\
&= (x+x\,t+y\,\overline{z}\,x+y\,\overline{z}\,t)(y+\overline{z}+t)\\
&= (x+y\,\overline{z}\,t)(y+\overline{z}+t)\\
&= (x\,y+x\,\overline{z}+x\,t+y\,\overline{z}\,t+y\,\overline{z}\,t+y\,\overline{z}\,t)\\
&= x\,y+x\,\overline{z}+x\,t+y\,\overline{z}\,t
\end{aligned}
$$

Y vemos que $f(x,y,z,t) = g(x,y,z,t)$.

3. Con lo hecho hasta ahora, este apartado está resuelto.

   La expresión reducida de f como suma de productos es $f(x,y,z,t) = x\,y+x\,\overline{z}+x\,t+y\,\overline{z}\,t$.

   Por ser g la función dual de f, la expresión reducida de g como producto de sumas de literales es $g(x,y,z,t) = (x+y)(x+\overline{z})(x+t)(y+\overline{z}+t)$.

   Y puesto que f es autodual tenemos que $f(x,y,z,t) = g(x,y,z,t) = (x+y)(x+\overline{z})(x+t)(y+\overline{z}+t)$.

Ejercicio 3.

Sea $\alpha = a \vee b \to \big[(a \to c) \to \big((c \to b) \to [(b \to a) \to b \wedge c]\big)\big]$.

Estudia, sin hacer uso de las tablas de verdad, si α *es tautología, satisfacible y refutable, o contradicción.*

Solución:

Es claro que si I es una interpretación para la que $I(a) = 0$ e $I(b) = 0$, entonces $I(\alpha) = 1$, ya que $I(a \vee b) = 0$ y $\alpha = a \vee b \to \beta$.

Por tanto, α es satisfacible. Lo que no sabemos es si es también refutable o es una tautología. Para ello, intentamos ver si α es consecuencia lógica del vacío. Es decir, nos preguntamos si

$$\vDash a \vee b \to \big[(a \to c) \to \big((c \to b) \to [(b \to a) \to b \wedge c]\big)\big]$$

por el teorema de la deducción, esto es equivalente a ver si

$$\{a \vee b\} \vDash (a \to c) \to \big((c \to b) \to [(b \to a) \to b \wedge c]\big)$$

de nuevo por el teorema de la deducción esto es lo mismo que

$$\{a \vee b,\ a \to c\} \vDash (c \to b) \to [(b \to a) \to b \wedge c]$$

otra vez aplicamos el teorema de la deducción, y lo que tenemos que ver entonces es si

$$\{a \vee b,\ a \to c,\ c \to b\} \vDash (b \to a) \to b \wedge c$$

seguimos aplicando el teorema de la deducción, y lo que nos queda es comprobar si

$$\{a \vee b,\ a \to c,\ c \to b,\ b \to a\} \vDash b \wedge c$$

por último, esto es equivalente a estudiar si el siguiente conjunto de fórmulas

$$\Gamma = \{a \vee b,\ a \to c,\ c \to b,\ b \to a,\ \neg(b \wedge c)\}$$

es insatisfacible.

Pasamos cada una de estas fórmulas a cláusulas (salvo la primera que ya es una cláusula):

$$a \to c \equiv \neg a \vee c; \quad c \to b \equiv \neg c \vee b; \quad b \to a \equiv \neg b \vee a; \quad \neg(b \wedge c) \equiv \neg b \vee \neg c.$$

Y nos disponemos a ver si el conjunto de cláusulas

$$\Gamma' = \{a \vee b,\ \neg a \vee c,\ \neg c \vee b,\ \neg b \vee a,\ \neg b \vee \neg c\}$$

es insatisfacible. Lo comprobamos con el algoritmo de Davis-Putnmam:

$$\{a \vee b,\ \neg a \vee c,\ \neg c \vee b,\ \neg b \vee a,\ \neg b \vee \neg c\}$$

$$\begin{array}{ccc}
\lambda = a & & \lambda = \neg a \\
\{c,\ \neg c \vee b,\ \neg b \vee \neg c\} & & \{b,\ \neg c \vee b,\ \neg b,\ \neg b \vee \neg c\} \\
\lambda = c & & \lambda = b \\
\{b,\ \neg b\} & & \{\Box,\ \neg c\} \\
\lambda = b & & \\
\{\Box\} & &
\end{array}$$

Y al llegar en ambas ramas a $\Box$ el conjunto de cláusulas es insatisfacible, luego α es una tautología.

Ejercicio 4.

1. *Sean* $\alpha = \forall y(Q(a,y) \to \exists z(P(z) \wedge R(z,y)))$ *y* $\beta = \exists x R(x,a) \to \forall z \exists y(R(z,y) \wedge Q(y,z))$ *dos fórmulas de un lenguaje de primer orden, y consideramos la estructura siguiente:*
   - *Dominio: Números naturales* ($\mathbb{N}$).
   - *Asignación de constantes:* $a = 1$.
   - *Asignación de funciones:* $f(x) = x + 1$.
   - *Asignación de predicados:* $P(x) \equiv x$ *es primo;* $Q(x,y) \equiv x < y$*;* $R(x,y) \equiv y$ *es múltiplo de* x.

   Estudia si las fórmulas α *y* β *se interpretan como verdaderas o falsas en esta estructura.*
2. *Expresa en esta estructura los siguientes enunciados:*
   - *El* 3 *es un número primo.*
   - *Los múltiplos de un número son siempre mayores que el número.*

Solución:

1. α es de la forma $\forall y \alpha_1$. Por tanto, tenemos que ver cuál es el valor de verdad de α_1 para los distintos valores de y. Teniendo en cuenta la estructura que tenemos, la fórmula α_1 significa:

   Si $y > 1$ entonces existe z, que es primo, e y es múltiplo de z.
   Si $y > 1$ entonces existe z, primo y divisor de y.
   Si $y > 1$ entonces y tiene un divisor primo.

   Y eso sabemos que es cierto para cualquier número $y > 1$. Por tanto, $I(\alpha) = 1$ (en esta estructura).

   La fórmula β podemos ver que es de la forma $\beta_1 \to \beta_2$. Calculamos el valor de verdad de cada una de estas subfórmulas:
   - $\beta_1 = \exists x R(x,a)$, es decir, existe un número natural x que es divisor de 1. Puesto que el propio 1 es divisor de 1, entonces $I(\beta_1) = 1$.
   - $\beta_2 = \forall z \exists y(R(z,y) \wedge Q(y,z))$, es decir, para todo z existe un y que es múltiplo de z y más pequeño que z. Esto no es cierto, pues para $z = 0$ no existe ningún número (múltiplo o no) que sea más pequeño. Por tanto, $I(\beta_2) = 0$.

   Puesto que $I(\beta_1) = 1$ e $I(\beta_2) = 0$ tenemos que $I(\beta) = 0$.
2. Vamos a escribir ambos enunciados en este lenguaje de primer orden.
   - Tenemos que 3 lo podemos escribir como $(1+1)+1 = f(1)+1 = f(f(1)) = f(f(a))$. Por tanto, 3 es primo lo podemos decir con la siguiente fórmula: $P(f(f(a)))$.
   - Vamos a ir transformando este enunciado en otros similares, pero aproximándonos cada vez más a la sintaxis del lenguaje de primer orden:
     - Los múltiplos de un número son siempre mayores que el número.
     - Si x es un número, los múltiplos de x son mayores que x.
     - Si x es un número e y es un múltiplo de x entonces $y > x$.
     - Para cualquier número x y cualquier número y, si y es múltiplo de x entonces $y > x$.
     - Para todo x y para todo y, y múltiplo de x implica que $x < y$.
     - $\forall x \forall y(R(x,y) \to Q(x,y))$.

Ejercicio 5. *Considera las siguientes fórmulas:*

- $\alpha_1 = \forall x(\exists y R(f(x), y) \to Q(x, x))$.
- $\alpha_2 = \forall x(Q(x, a) \to P(f(x)))$.
- $\alpha_3 = \exists x \exists y R(x, y) \to \forall x \neg Q(x, x)$.
- $\alpha_4 = \exists y \forall x(P(x) \to R(x, y))$.
- $\beta = \exists x(\neg R(f(x), x) \wedge \neg Q(a, x))$.

Demuestra que

$$\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4\} \models \beta$$

Solución:

Vamos a demostrar que el conjunto $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \neg\beta\}$ es insatisfacible. Para eso, hallamos una forma clausulada de cada una de estas fórmulas:

$$\begin{array}{lcl}
\bullet\ \alpha_1 & = & \forall x(\exists y R(f(x), y) \to Q(x, x)) \\
 & \equiv & \forall x(\neg\exists y R(f(x), y) \vee Q(x, x)) \\
 & \equiv & \forall x(\forall y \neg R(f(x), y) \vee Q(x, x)) \\
 & \equiv & \forall x \forall y(\neg R(f(x), y) \vee Q(x, x))
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
\bullet\ \alpha_2 & = & \forall x(Q(x, a) \to P(f(x))) \\
 & \equiv & \forall x(\neg Q(x, a) \vee P(f(x)))
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
\bullet\ \alpha_3 & = & \exists x \exists y R(x, y) \to \forall x \neg Q(x, x) \\
 & \equiv & \neg\exists x \exists y R(x, y) \vee \forall x \neg Q(x, x) \\
 & \equiv & \forall x \forall y \neg R(x, y) \vee \forall x \neg Q(x, x) \\
 & \equiv & \forall x \forall y \neg R(x, y) \vee \forall z \neg Q(z, z) \\
 & \equiv & \forall x \forall y(\neg R(x, y) \vee \forall z \neg Q(z, z)) \\
 & \equiv & \forall x \forall y \forall z(\neg R(x, y) \vee \neg Q(z, z))
\end{array}$$

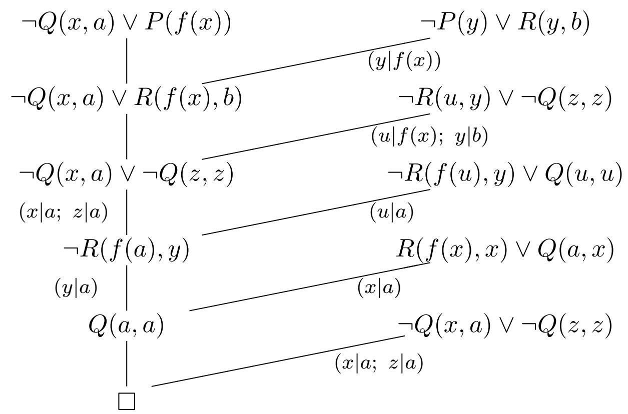
$$\begin{array}{lcl}
\bullet\ \alpha_4 & = & \exists y \forall x(P(x) \to R(x, y)) \\
 & \equiv & \exists y \forall x(\neg P(x) \vee R(x, y)) \\
 & & \forall x(\neg P(x) \vee R(x, b))
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
\bullet\ \neg\beta & = & \neg\exists x(\neg R(f(x), x) \wedge \neg Q(a, x)) \\
 & \equiv & \forall x \neg(\neg R(f(x), x) \wedge \neg Q(a, x)) \\
 & \equiv & \forall x(\neg\neg R(f(x), x) \vee \neg\neg Q(a, x)) \\
 & \equiv & \forall x(R(f(x), x) \vee Q(a, x))
\end{array}$$

Y ahora, mediante resolución, demostramos que el conjunto de cláusulas

$$\{\neg R(f(x), y) \vee Q(x, x);\ \neg Q(x, a) \vee P(f(x));\ \neg R(x, y) \vee \neg Q(z, z);\ \neg P(x) \vee R(x, b);\ R(f(x), x) \vee Q(a, x)\}$$

es insatisfacible, para lo cual daremos una deducción de la cláusula vacía. Cuando tomemos las cláusulas para hacer una resolvente es posible que renombremos algunas variables para que las dos cláusulas no tengan variables comunes.



Al llegar a la cláusula vacía concluimos que el conjunto de cláusulas es insatisfacible y por tanto β es consecuencia lógica de $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4\}$.

Ejercicio 6.

Demuestra por inducción que para $n \geq 0$ se tiene que $9^{n+1} + 2^{6n+1}$ es múltiplo de 11.

Solución:

Para demostrarlo por inducción procedemos comprobando el caso base ($n = 0$), estableceremos la hipótesis de inducción y daremos el paso inductivo:

- Caso base. Tenemos que $9^{0+1} + 2^{6\cdot 0+1} = 9^1 + 2^1 = 11$, que claramente es múltiplo de 11. Por tanto, el caso base es cierto.

- Hipótesis de inducción. Asumimos que para un número natural n se tiene que $9^{n+1} + 2^{6n-1}$ es múltiplo de 11. Es decir, $9^{n+1} + 2^{6n+1} = 11 \cdot a$ para algún número natural a. O lo que es lo mismo, $9^{n+1} = 11 \cdot a - 2^{6n+1}$.

- Paso inductivo. Tratamos de demostrar que $9^{n+1+1} + 2^{6(n+1)+1}$ es múltiplo de 11. Procedemos como sigue:

$$\begin{array}{rcll}
9^{n+1+1} + 2^{6(n+1)+1} & = & 9^{n+2} + 2^{6n+7} & \text{Pues } 6(n+1)+1 = 6n+7. \\
& = & 9 \cdot 9^{n+1} + 2^{6n+7} & \text{Ya que } 9 \cdot 9^{n+1} = 9^{n+2}. \\
& = & 9 \cdot (11 \cdot a - 2^{6n+1}) + 2^{6n+7} & \text{Hipótesis de inducción.} \\
& = & 99 \cdot a - 9 \cdot 2^{6n+1} + 2^{6n+7} & \text{Operando.} \\
& = & 99 \cdot a - 9 \cdot 2^{6n+1} + 2^6 \cdot 2^{6n+1} & \text{Pues } 2^6 \cdot 2^{6n+1} = 2^{6n+7}. \\
& = & 99 \cdot a + 2^{6n+1}(-9 + 2^6) & \text{Sacando factor común } 2^{6n+1}. \\
& = & 99 \cdot a + 55 \cdot 2^{6n+1} & \text{Pues } -9 + 2^6 = -9 + 64 = 55. \\
& = & 11(9 \cdot a - 5 \cdot 2^{6n+1}) &
\end{array}$$

  Y vemos que $9^{n+1+1} + 2^{6(n+1)+1}$ es múltiplo de 11.

Ejercicio 7. *Sea* $x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{0}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$, *para* $n \geq 0$.

1. *Calcula los cinco primeros términos de la sucesión.*
2. *Calcula una expresión recurrente para* x_n.
3. *Calcula una expresión cerrada para* x_n.
4. *Demuestra que para* $n \geq 3$ *se tiene que* $x_{n-3} = 5x_{n-2} - 8x_{n-1} + 4x_n$.

Solución:

1. Calculamos x_0, x_1, x_2, x_3 y x_4.
   - $x_0 = \frac{0}{2^0} = 0$.
   - $x_1 = \frac{0}{2^0} + \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$.
   - $x_2 = \frac{0}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1$.
   - $x_3 = \frac{0}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} = 1 + \frac{3}{8} = \frac{11}{8}$.
   - $x_4 = \frac{0}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} = \frac{11}{8} + \frac{4}{16} = \frac{11}{8} + \frac{2}{8} = \frac{13}{8}$.

2. Es claro que $x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = \frac{0}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}}$. Por tanto:

$$x_n = \frac{0}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} = x_{n-1} + \frac{n}{2^n}.$$

   Es decir: $x_0 = 0$, $x_n = x_{n-1} + \frac{n}{2^n}$.

3. Tenemos que la sucesión x_n satisface una relación de recurrencia lineal no homogénea con coeficientes constantes. La relación la podemos escribir:

$$x_n = x_{n-1} + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

   Y vemos que la parte no homogénea tiene la forma $p(n) \cdot b^n$, donde $p(n) = n$ (un polinomio de grado 1) y $b = \frac{1}{2}$.

   Sabemos entonces que x_n satisface una relación de recurrencia homogénea con coeficientes constantes cuyo polinomio característico es producto de dos factores: $(x - 1)$, que se corresponde con la parte homogénea de la recurrencia; y $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ que se corresponde con la parte no homogénea.

   Esto nos dice que la expresión de la sucesión x_n tendrá la forma $x_n = a + \frac{b}{2^n} + \frac{cn}{2^n}$.

   Con la ayuda de los términos que hemos calculado en el primer apartado, planteamos un sistema de ecuaciones para determinar a, b, c.

$$\begin{array}{lrclclcl} n=0; & 0 & = & a & + & b & & \\ n=1; & \frac{1}{2} & = & a & + & \frac{b}{2} & + & \frac{c}{2} \\ n=2; & 1 & = & a & + & \frac{b}{4} & + & \frac{2c}{4} \end{array}$$

   Y ahora resolvemos el sistema. Para ello, escribimos la matriz ampliada y buscamos su forma escalonada reducida por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3(2)]{E_2(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-4)]{E_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[E_{32}(-3)]{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3(-1)]{E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{23}(1)]{E_{13}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Lo que nos da la solución $a = 2$, $b = -2$, $c = -1$. Por tanto, tenemos que

$$x_n = 2 - \frac{2}{2^n} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

4. Sabemos que x_n satisface una relación de recurrencia homogénea cuyo polinomio característico es $(x-1)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$. Calculamos ese polinomio:

$$(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = (x-1)\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right) = x^3-x^2+\frac{x}{4}-x^2+x-\frac{1}{4} = x^3-2x^2+\frac{5x}{4}-\frac{1}{4}.$$

Por tanto, x_n satisface la relación $x_n - 2x_{n-1} + \frac{5x_{n-2}}{4} - \frac{x_{n-3}}{4} = 0$. Si multiplicamos por 4 y despejamos x_{n-3} tenemos:

$$x_{n-3} = 5x_{n-2} - 8x_{n-1} + 4x_n.$$

También podríamos haber llegado a esta relación como sigue:

Tenemos $x_n = x_{n-1} + \frac{n}{2^n}$.
Lo llevamos todo a un miembro:
$x_n - x_{n-1} - \frac{n}{2^n} = 0$.
Escribimos la misma relación para un término anterior:
$x_{n-1} - x_{n-2} - \frac{n-1}{2^{n-1}} = 0$
Multiplicamos la primera relación por 2:
$2x_n - 2x_{n-1} - \frac{n}{2^{n-1}} = 0$.
Restamos estas dos últimas expresiones:
$2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} - \frac{1}{2^{n-1}} = 0$.
Por una parte, escribimos esta relación desplazada un término, y por otra la multiplicamos por dos:
$2x_{n-1} - 3x_{n-2} + x_{n-3} - \frac{1}{2^{n-2}} = 0$; $4x_n - 6x_{n-1} + 2x_{n-2} - \frac{1}{2^{n-2}} = 0$.
Y al igual que antes, a la segunda le restamos la primera:
$4x_n - 8x_{n-1} + 5x_{n-2} - x_{n-3} = 0$.
Ya sólo queda despejar x_{n-3}:
$x_{n-3} = 5x_{n-2} - 8x_{n-1} + 4x_n$.

Ejercicio 8.

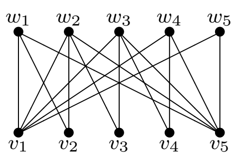
En este ejercicio, cuando hablemos de un grafo supondremos que no tiene autolazos ni lados paralelos.

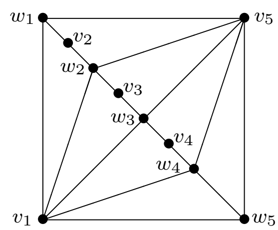
1. *¿Cuántos lados puede tener, como máximo, un grafo plano con* 50 *vértices?*
2. *¿Cuántos lados habría que quitarle, como mínimo, a* $K_{5,5}$ *para tener un grafo plano?*
3. *¿Cuál es el menor número de vértices que puede tener un grafo con* 600 *lados?*
4. *¿Cuántas hojas tiene un árbol con* 5 *vértices de grado* 6*,* 8 *vértices de grado* 5*,* 15 *vértices de grado* 4*,* 32 *vértices de grado* 3*,* 50 *vértices de grado* 2 *(suponemos que no tiene vértices de grado mayor que* 6*)? ¿Y si en lugar de* 50 *vértices de grado* 2 *tuviera* 100*?*
5. *¿Puede haber un grafo con* 12 *vértices, cuyos grados sean* $3,4,3,5,3,6,3,4,3,5,3,6$*? Si consiguiéramos un grafo plano con esos vértices, ¿en cuántas regiones quedaría dividido el plano al dibujar ese grafo?*

Solución:

1. Sabemos que en un grafo plano (sin lados paralelos ni autolazos), si l es el número de lados y v el número de vértices, entonces $l \leq 3v - 6$, y que la igualdad puede alcanzarse. Puesto que nos dicen que $v = 50$ tenemos que $l \leq 50 \cdot 3 - 6 = 144$, es decir, el número máximo de lados es 144.
2. Si el grafo es bipartido y plano, la relación entre número de vértices y lados es $l \leq 2v - 4$ (pues el grafo no tiene ciclos de longitud impar). Puesto que $K_{5,5}$ tiene 10 vértices, el número máximo de lados que podemos tener es $2 \cdot 10 - 4 = 16$. Ya que $K_{5,5}$ tiene 25 lados hemos de quitar al menos 9 lados.

   Vamos a dar un subgrafo plano de $K_{5,5}$ con 16 lados. Daremos dos representaciones: en una se vea claramente que es un subgrafo de $K_{5,5}$ y la otra es una representación plana.

3. Para responder a esta pregunta, nos planteamos cuál es el número máximo de lados que puede tener un grafo con n vértices. Este número viene dado por el número de lados del grafo K_n, y vale $\frac{n(n-1)}{2}$.

   Igualamos esa expresión a 600 y tenemos:

   $$\frac{n(n-1)}{2} = 600 \Longrightarrow n^2 - n - 1200 = 0 \Longrightarrow n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4800}}{2} = \frac{1 + \sqrt{4801}}{2} = 35'14...$$

   Esto nos dice que con 35 vértices es imposible tener 600 lados (K_{35} tiene 595 lados, y con 36 vértices sí es posible (K_{36} tiene 630 lados). Por tanto, el menor número de vértices que puede tener un grafo con 600 lados es 36 (habría que quitarle 30 lados a K_{36}).
4. Nos falta conocer el número de vértices de grado 1 (es decir, el número de hojas). Llamemos x a este número.

   Para determinarlo, calculamos en primer lugar el número total de vértices, al que llamaremos v. Este número será la suma del número de vértices de cada uno de los grados posibles. Tenemos que:

   $$v = 5 + 8 + 15 + 32 + 50 + x = 110 + x.$$

   Puesto que estamos hablando de un árbol, el número de lados es igual a $v-1$. Por tanto, $l = 109+x$.

   Calculamos la suma de los grados de los vértices. Esta suma será igual al doble del número de lados. Tenemos entonces:

$$2(109+x) = 5\cdot 6 + 8\cdot 5 + 15\cdot 4 + 32\cdot 3 + 50\cdot 2 + x = 30+40+60+96+100+x = 326+x.$$

Resolvemos la ecuación que nos queda:

$$2(109+x) = 326+x \Longrightarrow 218+2x = 326+x \Longrightarrow 2x-x = 326-218 \Longrightarrow x = 108.$$

Luego este árbol tiene 108 hojas.

En el caso de que hubiera 100 vértices de grado 2, el número de hojas sería el mismo. En este caso, el número de vértices sería $160+x$, el número de lados $159+x$, la suma de los grados de los vértices $426+x$ y la ecuación $2(159+x) = 426+x$ tiene como solución $x = 108$.

5. Para ver si es posible dibujar un grafo con 12 vértices y esos grados, utilizamos el algoritmo de Havel-Hakimi para ver si la sucesión que nos dan es gráfica. La reordenamos de mayor a menor y aplicamos el algoritmo:

6	6	5	5	4	4	3	3	3	3	3	3
	5	4	4	3	3	2	3	3	3	3	3
	5	4	4	3	3	3	3	3	3	3	2
		3	3	2	2	2	3	3	3	3	2
		3	3	3	3	3	3	2	2	2	2
			2	2	2	3	3	2	2	2	2
			3	3	2	2	2	2	2	2	2
				2	1	1	2	2	2	2	2
				2	2	2	2	2	2	1	1
					1	1	2	2	2	1	1
					2	2	2	1	1	1	1
						1	1	1	1	1	1
							0	1	1	1	1
							1	1	1	1	0
								0	1	1	0
								1	1	0	0
									0	0	0

Al llegar a una sucesión con todo cero concluimos que la sucesión inicial es gráfica, luego el grafo que nos dicen existe.

Si tuviéramos una representación plana del grafo, entonces $v-l+c=2$, luego $c = 2+l-v$. Sabemos que $v = 12$. Para hallar l, sumamos los grados de los vértices y dividimos por 2.

$$l = \frac{6+6+5+5+4+4+3+3+3+3+3+3}{2} = \frac{48}{2} = 24.$$

Luego $c = 2+24-12 = 14$. Una representación plana de un grafo de tales características (y conexo) dividiría al plano en 14 regiones.

A continuación damos una posible representación de un tal grafo: