Álgebra Lineal Básica

Yerko Torres Nova

December 1, 2025

Álgebra Lineal Básica nace como un intento de texto en español dirigido especialmente para estudiantes de ciencias exactas con un énfasis conceptual y teórico. El ideal de este texto es ser un primer curso serio en matemática moderna y dejar un conocimiento profundo en términos técnicos del álgebra lineal, área de la matemática que es de gran importancia en el desarrollo tecnológico actual. Un lema frecuente en la ciencia moderna afirma que *una gran cantidad de problemas complejos encuentran su solución mediante una adecuada formulación en términos de álgebra lineal.*

Contenidos

C 0

Preliminares

0.1 Cuerpos de Números

Un cuerpo de números (o sólo cuerpo) es un conjunto $\mathbb{K}$ para el cual existen operaciones suma y producto, es decir, existen funciones

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2,$$
$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad (x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2,$$

tales que:

1. Hay asociatividad y commutatividad, es decir

   $$x_1 + x_2 + x_3 = (x_1 + x_2) + x_3 = x_2 + (x_2 + x_3), \quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3),$$
   $$x_1 + x_2 = x_2 + x_1, \quad x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1,$$

   para todos los $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{K}$.

2. La suma y producto se distribuyen, es decir

   $$(x_1 + x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3,$$

   para todos los $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{K}$.

3. Existen elementos neutros denotados por $0, 1 \in \mathbb{K}$ tales que

   $$x = x + 0 = 0 + x, \quad x = x \cdot 1 = 1 \cdot x,$$

   para todos los $x \in \mathbb{K}$.

4. Para cada $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, existen inversos aditivos y multiplicativos denotados por $-x, x^{-1} \in \mathbb{K}$ tales que

   $$0 = x + (-x), \quad 1 = x \cdot x^{-1},$$

   para todos los $x \in \mathbb{K}$.

En lo que sigue y por eficiencia, usualmente eliminamos el $\cdot$ del producto y simplemente escribimos $x_1 \cdot x_2 = x_1 x_2$. La importancia de un cuerpo de números es que existe el *álgebra*, es decir, la *manipulación de expresiones iteradas desde las operaciones del cuerpo.* Específicamente, existen las potencias de sumas y producto,

$$nx = \underbrace{x + ... + x}_{n}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$x^n = \underbrace{x \cdot ... \cdot x}_{n}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, ,$$

con las convenciones $0x = 0$ y $x^0 = 1$. Y la más importante, existen las inversiones iteradas $x^{-n} = (x^{-1})^n$ para todo $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Y como ya se ha visto en cursos anteriores, es interesante como todas estas operaciones se mezclan entre si. Los ejemplos más importantes de cuerpos de números son los siguientes.

Ejemplo 0.1.1. *El cuerpo de los números racionales es aquel definido por*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}.$$

Las operaciones suma y multiplicación son bien conocidas,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Notar que el inverso multiplicativo queda dado por

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a},$$

siempre que $a \neq 0$. Se deja al lector chequear que se cumplen las 4 propiedades que lo definen como cuerpo de números.

Ejemplo 0.1.2. *El cuerpo de los números reales es aquel definido (formalmente) por*

$$\mathbb{R} = \left\{ \lim_{n \to \infty} q_n : \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q} \text{ sucesión convergente} \right\}.$$

Explícitamente son todos los números que se pueden aproximar infinitesimalmente por números racionales. Por ejemplo,

$$\pi = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{4(-1)^n}{2n + 1} = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} + ...$$

Las operaciones suma y multiplicación son bien conocidas, y formalmente se definen desde las sumas y productos de limites. Siguiendo la analogía de los racionales denotaremos

$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$

para todo $x \neq 0$ en $\mathbb{R}$. Se deja al lector chequear que se cumplen las 4 propiedades que lo definen como cuerpo de números.

Ejemplo 0.1.3. *El cuerpo de los números complejos es aquel definido por*

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\},$$

donde i es la famosa unidad imaginaria que cumple $i^2 = -1$. Las operaciones suma y multiplicación son bien conocidas y definidas por

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Más aún, los inversos, aditivo y multiplicativo, quedan dados por

$$-(a + bi) = -a - bi, \quad (a + bi)^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

Se deja al lector chequear que se cumplen las 4 propiedades que lo definen como cuerpo de números.

Así como existen cuerpos infinitos, que son de interés en términos físicos por permitir el estudio de lo infinitesimal, también existen cuerpos finitos. El interés por estos es en la *criptografía*, es decir, las ténicas de cifrado y descifrado de información importante. Usualmente se denotan por $\mathbb{F}_n$ donde n es el número de elementos del cuerpo, y es un hecho clave que estos son únicos para cada n. Tambien se sabe que $\mathbb{F}_n$ es un cuerpo si y sólo si $n = p^k$ donde p es un numero primo.

Ejemplo 0.1.4. *El cuerpo más pequeño que existe es $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ donde las operaciones suma y producto quedan definidas por*

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1 = 1 + 0, \quad 1 + 1 = 0,$$

$$0 \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0, \quad 1 \cdot 1.$$

Notar que 0 y 1 son los neutros. Mientras que $1^{-1} = 1$.

Se pueden construir cuerpos finitos más grandes del siguiente modo.

Ejemplo 0.1.5. *Sea n un número primo, y sea $\mathbb{F}_n = \{0, 1, ..., n\}$ con la siguientes operaciones suma y producto,*

$$x_1 + x_2 = \begin{cases} x_1 + x_2 & si\ 0 \leq x_1 + x_2 \leq n - 1, \\ resto\ de\ dividir\ x_1 + x_2\ por\ n & otro\ caso, \end{cases}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \begin{cases} x_1 \cdot x_2 & si\ 0 \leq x_1 \cdot x_2 \leq n - 1, \\ resto\ de\ dividir\ x_1 \cdot x_2\ por\ n & otro\ caso, \end{cases}$$

Notar que 0 y 1 son los neutros. El inverso aditivo se calcula por $-x := n - x$. El inverso multiplicativo x^{-1} existe por teoremas previos de la teoría de números enteros, pero es difícil de determinarlo explícitamente.

Ejemplo 0.1.6. *El cuerpo finito $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ queda definido por las tablas de operaciones,*

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

de donde vemos que $2^{-1} = 2$ en $\mathbb{F}_3$.

Ejemplo 0.1.7. *El cuerpo finito* $\mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *queda definido por las tablas de operaciones,*

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

,

de donde vemos que $2^{-1} = 3$, $3^{-1} = 2$ *y* $4^{-1} = 4$ *en* $\mathbb{F}_3$.

0.2 Funciones

Una función entre dos conjuntos A y B es una regla que asigna a cada elemento $a \in A$ un único elemento $f(a) \in B$. Se denota como

$$f \colon A \to B, \quad a \mapsto f(a).$$

El conjunto A se llama dominio de f, y el conjunto B se llama codominio. El conjunto de todos los valores que toma f se llama imagen de f y se denota por

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(a) \in B \mid a \in A\}.$$

En particular, $f(x)$ es llamado la la imagen de x bajo f.

Ejemplo 0.2.1. *La función identidad:*

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x.$$

Esta función asigna a cada número real el mismo número.

Ejemplo 0.2.2. *La función cuadrática:*

$$g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2.$$

A cada número real le asigna su cuadrado. Por ejemplo, $g(2) = 4$, $g(-3) = 9$.

Una función $f \colon A \to B$ es inyectiva (o *uno a uno*) si:

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$

Es decir, distintos elementos del dominio se envían a distintos elementos del codominio.

Ejemplo 0.2.3. *Considere*

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x + 1.$$

Esta función es inyectiva porque si $f(x_1) = f(x_2)$, *entonces* $2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$.

Una función $f \colon A \to B$ es sobreyectiva (o *sobre*) si:

$$\text{Para todo } b \in B, \text{ existe } a \in A \text{ tal que } f(a) = b.$$

Es decir, la imagen de f es todo el codominio: $\mathrm{Im}(f) = B$. Usualmente tambien denotamos $f(A) = B$.

Ejemplo 0.2.4. *Considere*

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^3.$$

Esta función es sobreyectiva porque todo número real tiene una raíz cúbica: para cada $y \in \mathbb{R}$, $g(\sqrt[3]{y}) = y$.

Una función es biyectiva si es *inyectiva* y *sobreyectiva* a la vez. En ese caso, existe una función inversa $f^{-1}\colon B \to A$ tal que:

$$f^{-1}(f(a)) = a \quad \text{y} \quad f(f^{-1}(b)) = b.$$

Ejemplo 0.2.5. *Considere*

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = x + 5.$$

Esta función es biyectiva: es inyectiva (es lineal con pendiente distinta de cero) y sobreyectiva (cualquier número real puede escribirse como $x + 5$).

0.3 Ejercicios

C 1

Sistemas Lineales y Matrices

De aquí en adelante fijaremos un cuerpo de números $\mathbb{K}$ infinito, usualmente pensaremos en $\mathbb{R}$. El lector curioso puede interesarse también en los cuerpos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{C}$. Finalmente, el lector con un interés más profundo puede cuestionar todo lo que viene en el caso de cuerpos finitos.

1.1 Sistemas de Ecuaciones Lineales

Una ecuación lineal (L) en variables $x_1, ..., x_n$ con $n \geq 1$ un entero, es una igualdad matemática de la forma

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n = b,$$

donde $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$ son los coeficientes, y en la práctica, usualmente a b se le llama el umbral/bias.

Ejemplo 1.1.1. *Las siguientes son ecuaciones lineales,*

$$L_1 : 2x + y = 0, \qquad \textit{en variables } x, y$$

$$L_2 : 3x - 2y + z = 2, \qquad \textit{en variables } x, y, z$$

$$L_3 : 4x - 3y + 2z - t = 1, \qquad \textit{en variables } x, y, z, t$$

Un sistema de ecuaciones lineales o sistema lineal (SL) de tamaño $m \times n$ en variables $x_1, ..., x_n$ es una colección de $m \geq 1$ ecuaciones lineales denotadas por

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

Ejemplo 1.1.2. *Los siguientes son ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales.*

$$SL_1 : \begin{cases} x + y & = & 1, \\ x - y & = & 0 \end{cases}$$

$$SL_2 : \begin{cases} x + 2y + 3z & = & 9, \\ 2x - y + z & = & 4, \\ 3x + y - 2z & = & 1. \end{cases}$$

PROBLEMA Encontrar todos los $x_1, ..., x_n \in \mathbb{K}$ talque el sistema de ecuaciones lineales (SL) sea satisfecho. Dichos $x_1, ..., x_n$ son llamados soluciones al sistema lineal. Cuándo existe solución? Si existe solución, cuántas son?

Ejemplo 1.1.3. *La ecuación lineal*

$$L : x + y = 0,$$

tiene infinitas soluciones. De hecho, todos los pares (x, y) *soluciones se pueden escribir como* $(x, -x)$ *con* $x \in \mathbb{K}$.

En el caso de sistemas lineales donde hay más de una ecuación, debemos trabajar las ecuaciones lineales de modo de ir despejando las variables. Usualmente esto se hace escalando y sumando las ecuaciones del sistema.

Ejemplo 1.1.4. *Considerar*

$$SL_1 : \begin{cases} x + y & = & 1, \\ x - y & = & 0 \end{cases}$$

Tenemos dos ecuaciones lineales $L_1 : x + y = 1$ *y* $L_2 : x - y = 0$. *Las podemos* sumar *para obtener una nueva ecuacion lineal*

$$L_1 + L_2 : 2x = 1,$$

lo que nos da $x = 1/2$. *De cualquiera de las 2 previas ecuaciones lineales deducimos directamente que* $y = 1/2$. *Por lo tanto, el par* $(1/2, 1/2)$ *es la única solucion al sistema.*

Ejemplo 1.1.5. *Considerar*

$$SL_2 : \begin{cases} x + 2y + 3z & = & 9, \\ 2x - y + z & = & 4, \\ 3x + y - 2z & = & 1. \end{cases}$$

Tenemos dos ecuaciones lineales $L_1 : x + 2y + 3z = 9, L_2 : 2x - y + z = 4$ *y* $L_3 : 3x + y - 2z = 1$. *Las podemos operar para obtener una nueva ecuación lineal*

$$L_3 - L_1 - L_2 : -6z = 1 - 4 - 9 = -12,$$

de donde obtenemos $z = 2$ *determinado de forma única. Hacemos la siguiente operación de ecuaciones,*

$$L_2 - 2L_1 : -5x - 5z = 4 - 18 = -14,$$

y usando el hecho de que $z = 2$, *obtenemos* $y = 4/5$. *Finalmente, se desprende de cualquier ecuación que* $x = 7/5$. *De este modo, obtenemos solución única* $(7/5, 4/5, 2)$.

En la próxima clase, veremos con más profundidad este método. Con ello crearemos un algoritmo de resolución de sistemas lineales. Para esto, terminaremos esta clase introduciendo el lenguaje de matrices necesario para la dicha tarea.

1.2 Lenguaje de Matrices

Un matriz de tamaño $m \times n$ se un arreglo de mn elementos de $\mathbb{K}$ bi-indexados y denotados por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots. & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{K}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Por definición, dos matrices se dirán iguales si y sólo si tienen el mismo tamaño y las mismas componentes, es decir,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots. & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots. & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \iff a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall i \in \{1, ..., m\},\, j \in \{1, ..., n\}.$$

Un vector fila es una matriz de tamaño $1 \times n$, mientras que un vector columna es una matriz de tamaño $m \times 1$. De este modo, toda matriz tiene dos escrituras, en forma de filas

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots. & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}, \quad F_i = (a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn}),$$

y en forma de columnas

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots. & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{pmatrix}, \quad C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, vectores filas y columnas se pueden escalar y sumar entre mismo tipo del siguiente modo. Para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ se tiene,

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) := (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n), \quad \alpha(x_1, ..., x_n) := (\alpha x_1, ..., \alpha x_n),$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}.$$

En donde para $\alpha = -1$ usamos la convención,

$$(-1)(x_1, ..., x_n) = -(x_1, ..., x_n), \quad (-1) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Con el siguiente ejemplo clarificamos los conceptos previamente definidos.

Ejemplo 1.2.1. *Considere la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sus vectores filas son,

$$F_1 = (1,2,3), \quad F_2 = (2,-1,1), \quad F_3 = (3,1,-2),$$

mientras que sus vectores columnas son

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

A modo de ejemplo, podemos calcular

$$F_1 + F_2 + 2F_3 = (1,2,3) + (2,-1,1) + (6,2,-4) = (9,3,0),$$

$$3C_1 - C_2 + 2C_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La conexión directa entre sistemas lineales y matrices, es que todo sistema lineal

$$SL : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

tiene asociada una matriz de coeficiente y una matriz aumentada dadas por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

respectivamente. Observar tambien que a cualquier matrix $m \times (n+1)$ se puede ver como una matriz aumentada de un sistema lineal. Es decir, sistemas lineales y matrices se corresponden mutuamente.

Ejemplo 1.2.2. *La matriz*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

es la matriz aumentada del siguiente sistema lineal

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -x + y + z = -1 \end{cases}.$$

Como se verá en las siguientes clases, empezaremos a estudiar sistemas lineales desde el lenguaje de matrices. Esto lo hará increíblemente útil en términos computacionales.

Observación 1.2.3. *En otros textos las matrices pueden ser denotadas usando paréntesis cuadrados, es decir,*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots. & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

siendo una forma equivalente de escribir matrices. Cosa de gustos.

1.3 Ejercicios

1. Considere las matrices,

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -7 & 11 & 1 \\ 13 & -17 & 19 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Determine los conjunto solución de los sistemas lineales cuya matriz aumentada es B_i para cada $i = 1, 2, 3, 4$.

2. Dado $\theta \in \mathbb{R}$ resuelva, en variables x, y, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \cos(\theta)x + \sin(\theta)y = 1, \\ -\sin(\theta)x + \cos(\theta)y = 1. \end{cases}$$

3. Considere los vectores columna,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   ¿Existen $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que $xv_1 + yv_2 + zv_3 = b$?

4. Considere las matrices complejas

$$C_1 = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & -1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & i & -1 & 0 \\ i+1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Determine los conjuntos solución de los sistemas lineales cuya matriz aumentada es C_i para cada $i = 1, 2$.

C 2

Eliminación Gaussiana

2.1 Tipos de Matrices

En lo que sigue denotaremos por $\mathbb{K}^n$ al conjunto de todos los vectores columnas o filas dependiendo del contexto. Es decir, según el caso ocuparemos solo una de las siguientes descripciones

$$\mathbb{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{K} \right\}, \quad \text{ó} \quad \mathbb{K}^n = \{(x_1 \dots x_n) : x_i \in \mathbb{K}\}.$$

Notar que la única diferencia es la estructura en la cual se representa una tupla de n datos. La matriz nula de tamaño $m \times n$ se define por

$$0_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & ... & 0 \end{pmatrix},$$

de donde tambien se tienen vectores nulos columna y fila

$$0_{m\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0_{1\times n} = (0, ..., 0).$$

Más adelante cuando el contexto sea claro, solo ocuparemos el símbolo 0 para denotar matrices y vectores nulos. Una matriz cuadrada es aquella que tiene el mismo numero de filas y columnas, es decir, $m = n$. Una matriz triangular superior o inferior es cualquier matriz cuadrada que pueda tener una de las siguientes estructuras

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix},$$

respectivamente.

Ejemplo 2.1.1. *Considere las matrices*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que A_1 es triangular superior, mientras que A_2 es triangular inferior.

Dado un vector fila $(x_1, ..., x_n)$, definimos su pivote o entrada principal como la primera entra no nula de este.

Ejemplo 2.1.2. *El vector $(1,2,3)$ tiene su pivote en 1 o primera entrada. El vector $(0,0,2,4,5)$ tiene su pivote en 2 o en la tercera enterada. El vector $(0,-1,0,1)$ tiene su pivote en -1 o en la segunda entrada.*

Una matriz de tamaño $m \times n$ se dice escalonada si:

1. Todas sus filas nulas están en la parte inferior,
2. Recorriendo las filas de arriba a abajo, cada pivote está a la derecha del pivote superior.

Más aún, diremos que la matriz es escalonada reducida si además,

1. Los pivotes son 1,
2. La columna de cada pivote tiene todos sus valores nulos, salvo el pivote.

Ejemplo 2.1.3. *Ejemplos de matrices escalonadas son*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un ejemplo de matriz NO escalonada seria,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un ejemplo de matriz escalonada reducida es,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.2 Eliminación Gaussiana

Los teoremas principales de esta sección, y del cual ya vimos un poco en clase pasada, tratan de como el conjunto solución queda intacto después de operaciones lineales algebraicas. Las demostraciones pueden ser omitidas en una primera lectura.

Teorema 2.2.1. *Sea SL un sistema de ecuaciones lineales en n variables conformado por m ecuaciones lineales $L_1, ..., L_m$ dadas por*

$$L_i : a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n = b_i.$$

Sea $\hat{L}_j$ la ecuación lineal que se obtiene mediante una suma $L_j + \alpha L_k$ para cualquier otra ecuación lineal L_k y una constante $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Entonces el sistema lineal nuevo $\hat{SL}$ conformado por las ecuaciones $L_1, ..., L_{j-1}, \hat{L}_j, L_{j+1}, ..., L_m$ tiene el mismo conjunto de soluciones que SL.

Proof. SOON

□

Notar como hicimos uso implícito de este teorema en el Example 1.1.5, encontrado soluciones mediante manipulación de las ecuaciones lineales. Este teorema motiva la siguiente formalización de lo ya hecho. Las operaciones filas sobre una matriz escrita en forma de fila

$$A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}$$

son:

1. Reemplazo de la fila F_j por una fila nueva $F_j + \alpha F_k$ con $\alpha \neq 0$ y denotada por

$$A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{j-1} \\ F_j \\ F_{j+1} \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix} \xrightarrow{F_j = F_j + \alpha F_k} \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{j-1} \\ F_j + \alpha F_k \\ F_{j+1} \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}.$$

2. Escalamiento de fila F_j por un $\alpha \neq 0$ de $\mathbb{K}$, denotada por

$$A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{j-1} \\ F_j \\ F_{j+1} \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix} \xrightarrow{F_j = \alpha F_j} \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{j-1} \\ \alpha F_j \\ F_{j+1} \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}.$$

3. Intercambio de filas

$$A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_j \\ \vdots \\ F_k \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix} \xrightarrow{F_j \leftrightarrow F_k} \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_k \\ \vdots \\ F_j \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}.$$

Como consecuencia del teorema anterior es el siguiente resultado.

Corollary 2.2.2. *Considerar una sistema lineal y su matriz aumentada,*

$$SL : \begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases}, \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} & b_1, \\ a_{21} & ... & a_{2n} & b_2, \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} & b_m. \end{pmatrix}.$$

Sea B' la matriz obtenida despues de aplicar a B una operación fila. Entonces, el sistema lineal SL' asociado a B' tiene las mismas soluciones que el sistema SL.

□

La consecuencia más importante de lo anterior es lo que se conoce como la Eliminación Gaussiana o también Eliminación de Gauss-Jordan. Este es un algoritmo que sintetiza todos los previos resultados para encontrar siempre las soluciones a un sistema lineal. Nos ayudará en todo lo que sigue del curso para el analisis de sistemas lineales.

Teorema 2.2.3 (Eliminación Gaussiana)**.** *Sea B la matriz aumentada de un sistema lineal. Entonces, mediante operaciones filas siempre puedo convertir a B en una matriz escalonada. Más aún, se puede continuar hasta llegar a una escalonada reducida.*

Proof. SOON

□

Veamos un primer ejemplo de como funciona la eliminación Gaussiana para resolver sistemas.

Ejemplo 2.2.4. *Considere el sistema lineal con su matriz aumentada,*

$$SL : \begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 2x - y + z = 4 \\ 3x + y - 2z = 1 \end{cases}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicamos las siguientes operaciones filas.

$$B \xrightarrow{F_3 = F_3 - 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -26 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 = F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -14 \\ 0 & -5 & -11 & -26 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -14 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3/(-6)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hasta aquí hemos escalonado la matriz, por lo tanto las soluciones de SL son aquellas de

$$SL' : \begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ -5y - 5z = -14 \\ \quad z = 2 \end{cases},$$

de donde obtenemos $z = 2$ y las otras soluciones. Sin embargo, yendo un poco más allá.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=F_2+5F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=F_2/(-5)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 4/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=F_1-2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 37/5 \\ 0 & 1 & 0 & 4/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1=F_1-3F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7/5 \\ 0 & 1 & 0 & 4/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

obteniendo la forma escalonada reducida de B. Por ello, SL tiene las soluciones del sistema

$$SL' : \begin{cases} x = 7/5 \\ y = 4/5 \\ z = 2 \end{cases},$$

que son las únicas soluciones encontradas anteriormente.

2.3 Ejercicios

1. En función de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, determine la solución al sistema lineal ,

$$SL : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_1 + x_2 & = & \alpha \\ x_2 + x_3 & = & \beta \\ x_3 + x_4 & = & \gamma \end{cases}$$

2. Para $a \in \mathbb{R}$ reduzca por filas la siguiente matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 2 \\ 1 & 1 & a \\ 3 & 3+a & 3+a \end{pmatrix},$$

y encuentre el conjunto solución del sistema lineal cuya matriz aumentada es B.

3. Dado el sistema lineal

$$\begin{cases} x + y + (\alpha - 1)z & = & 1 \\ x + y - z & = & 0 \\ \alpha x + y + z & = & -1 \end{cases}$$

Determine los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que el sistema tenga

a) Solución Única,

b) Infinitas Soluciones,

c) Solución Vacía.

4. Dado el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+\alpha z & = & \alpha^2 \\ x+\alpha y+z & = & \alpha \\ \alpha x+y+z & = & 1 \end{array}\right.$$

Determine los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que el sistema tenga

a) Solución Única,

b) Infinitas Soluciones,

c) Solución Vacía.

5. Determine los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si existen, de modo que el sistema lineal cuya matriz aumentada es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & \alpha & 2 & 1 \\ 4 & 1 & \beta & 1 \end{pmatrix}$$

tenga solución unica.

C 3

Conjunto Solución como Espacio Generado

3.1 Combinaciones Lineales y Generadores

Una combinación lineal de r vectores $v_1, ..., v_r \in \mathbb{K}^n$ es cualquier suma de la forma

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r \in \mathbb{K}^n, \quad \alpha_j \in \mathbb{K}.$$

Ejemplo 3.1.1. *En $\mathbb{K}^2$, dados*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

los siguientes son combinaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = v_1 + v_2, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2v_2 - 3v_2.$$

Dada una colección de vectores $v_1, ..., v_r \in \mathbb{K}^n$ definimos su espacio generado por el conjunto

$$\mathrm{Gen}\{v_1, ..., v_r\} = \{\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r : a_j \in \mathbb{K}, j = 1, ..., r\},$$

es decir, el conjunto de todas las combinaciones lineales posibles de los r vectores.

Ejemplo 3.1.2. *Considere los vectores*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notar que para cualquier vector de $\mathbb{K}^2$ podemos escribir,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xe_1 + ye_2,$$

es decir, todo vector de $\mathbb{K}^2$ *es una combinación de* e_1 *y* e_2*. Por lo tanto concluimos que*

$$Gen\{e_1, e_2\} = \mathbb{K}^n.$$

Analogamente, si definimos los vectores canonicos de $\mathbb{K}^n$ *por*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad ..., \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

entonces todo vector de $\mathbb{K}^n$ *se escribe como*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + ... + x_n e_n.$$

Es decir,

$$Gen\{e_1, ..., e_n\} = \mathbb{K}^n.$$

Ejemplo 3.1.3. *El sistema lineal de* $\mathbb{K}^2$ *dado por la ecuación* $x - y = 0$*. Es decir, su conjunto solución se escribe como*

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x - y = 0 \right\}.$$

Notar que la ecuación es equivalente a $x = y$*, es decir, basta con elegir a* $y \in \mathbb{K}$ *para obtener inmediatamente solución en* x*. En este caso decimos que* $y \in \mathbb{K}$ *queda como una variable de libre elección (o simplemente variable libre) y que* x *queda determinada por esta mediante* $x = y$*. De este modo,*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in L \iff \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{K}.$$

Por lo tanto, concluimos que

$$L = Gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ejemplo 3.1.4. *Consideremos el sistema lineal en* $\mathbb{K}^3$ *dado por la ecuación* $x + y - z = 0$*. Es decir, su conjunto solución se escribe como*

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y - z = 0 \right\}.$$

Notar que la ecuación es equivalente a $z = x + y$*. Es decir, para cualquier elección de* $x, y \in \mathbb{K}$ *obtenemos inmediatamente una solución para* z*. De este modo,* z *depende de las variables libres* x, y*. Por esto,*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in L \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ x + y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{K}.$$

Por lo tanto concluimos que

$$L = Gen\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Ejemplo 3.1.5. *Consideremos ahora el sistema lineal dado por la ecuación $x+y-z=1$. En este caso, nuevamente $x, y \in \mathbb{K}$ son variables libres determinando $z = x+y+1$. Por esto si $L \subset \mathbb{K}^3$ es el conjunto solución de sistema, entonces tenemos*

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in L \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\x+y+1\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{K}.$$

De este modo L es un espacio generado desplazado por un vector fijo, en este caso por el vector e_3. De este modo escribimos,

$$L = Gen\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

3.2 Ejercicios

1. Determine como espacio generado el conjunto solución de $x+y=0$.

2. Determine como espacio generado desplazado el conjunto solución de la ecuación $x+y=1$.

3. Para $\alpha \in \mathbb{R}$ considere los vectores

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\\alpha\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

   (a) Para $\alpha = 1$ pruebe que $\mathrm{Gen}(v_1, v_2) = \mathbb{R}^2$.

   (b) Determine todos los valores de α tal que $\mathrm{Gen}(v_1, v_2) = \mathbb{R}^2$.

4. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ considere los vectores

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\\alpha\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}\beta\\-2\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

   (a) Para $\alpha = \beta = 0$ pruebe que $\mathrm{Gen}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$.

   (b) Para $\alpha = 0$, determine todos los valores de β tal que $\mathrm{Gen}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$.

   (c) Determine todos los valores de α, β tal que $\mathrm{Gen}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$.

C 4

Independencia Lineal

4.1 Ecuación Vectorial

Dada una colección de vectores $v_1, ..., v_n, b \in \mathbb{K}^n$, podemos preguntarnos por todos los valores $x_1, ..., x_n \in \mathbb{K}^m$ tal que

$$x_1 v_1 + ... + x_n v_n = b,$$

lo que se conoce como una ecuación vectorial cuyas soluciones son dichos $x_1, ..., x_n$. Recordar que todo par de vectores del mismo tamaño son iguales si lo son componente a componente, es decir,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \iff x_i = y_i, \quad \forall i = 1, ..., n.$$

De este modo, si en la ecuación vectorial asumimos que

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, ... \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix},$$

entonces la ecuación vectorial se convierte en

$$\begin{pmatrix} x_1 a_{11} + ... + x_n a_{1n} \\ x_1 a_{21} + ... + x_n a_{2n} \\ \vdots \\ x_1 a_{m1} + ... + x_n a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Por igualación componente a componente concluimos que toda ecuacion vectorial equivale a un sistema lineal de la forma

$$SL : \begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

Ejemplo 4.1.1. *En $\mathbb{K}^2$ considere los vectores*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo anterior, ecuación vectorial $xv_1 + yv_2 = b$ es equivalente al sistema lineal

$$\begin{cases} x + y &= 0 \\ x - y &= 0 \end{cases},$$

cuya solución es única $x = y = 0$.

4.2 Dependencia

Dada una colección de vectores $S = \{v_1, ..., v_n\} \subset \mathbb{K}^m$ esta tiene una ecuación vectorial homogenea asociada dada por

$$x_1 v_1 + ... + x_n v_n = 0_{m\times 1},$$

es decir, el lado derecho es un vector nulo. Diremos que S es linealmente dependiente si la ecuación vectorial homogénea tiene solución $x_1, ..., x_n$ no trivial, es decir, existe un $j = 1, ..., n$ tal que $x_j \neq 0$.

Ejemplo 4.2.1. *En $\mathbb{K}^2$ considere los vectores*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

No es difícil ver que su ecuación vectorial homogénea $xv_1 + yv_2 = 0_{2\times 1}$ tiene una solución no trivial dada por $x = 2, y = -1$. Por esto, la colección $S = \{v_1, v_2\}$ es linealmente dependiente.

Observación 4.2.2. *Notar que la palabra dependencia viene de que si existe dicho $x_j \neq 0$, entonces el vector v_j depende completamente del conjunto $S \setminus \{v_j\}$ mediante la ecuación*

$$v_j = \frac{-1}{x_j} \left(x_1 v_1 + ... + \widehat{x_j v_j} + ... + x_n v_n \right),$$

donde $\widehat{x_j v_j}$ significa que se ha removido dicho elemento de la suma.

Si la ecuación vectorial homogénea asociada a S tiene únicamente solución trivial $(x_1, ..., x_n) = (0, ..., 0)$ diremos que S es linealmente independiente. Siguiendo la observación previa, esto significa que no existe una forma de escribir los vectores de S como combinación lineal de ellos mismos, es decir, son *independientes entre ellos*.

Ejemplo 4.2.3. *En $\mathbb{K}^2$ considere los vectores*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Anteriormente vimos que su ecuación vectorial homogénea $xv_1 + yv_2 = 0_{2\times 1}$ tiene solución única $x = y = 0$. Por esto, la colección $S = \{v_1, v_2\}$ es linealmente independiente.

Ejemplo 4.2.4. *Los vectores canónicos* $e_1, ..., e_n \in \mathbb{K}^n$ *son linealmente independientes. De hecho, su ecuacion vectorial homogenea*

$$x_1e_1 + ... + x_ne_n = 0_{n\times 1},$$

es equivalente a

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

obteniendo solución trivial única $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Ejemplo 4.2.5. *En* $\mathbb{K}^3$ *considere los vectores*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La ecuación vectorial homogenea $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$ *es equivalente al sistema lineal cuya matriz aumentada es*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando eliminación Gaussiana llegamos a que la matriz B *tiene escalonada reducida dada por*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir, el sistema lineal de B *tiene las mismas soluciones que*

$$\begin{cases} x - (1/3)z = 0 \\ y + (1/3)z = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, dejando a z *como variable libre concluimos que el sistema tiene solución dada por*

$$Gen\left\{ \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

Es decir, la ecuación vectorial homogénea tiene infinitas soluciones y por ello $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ *es linealmente dependiente.*

Teorema 4.2.6. *Sea* $S = \{v_1, ..., v_n\}$ *una colección de vectores de* $\mathbb{K}^m$. *Si* $n > m$, *entonces* S *es linealmente dependiente.*

Proof. SOON $\square$

4.3 Ejercicios

1. Sea $S = \{v_1, v_2\}$ un conjunto de vectores en $\mathbb{K}^n$. Demuestre que son linealmente dependientes si y sólo si existe $\alpha \neq 0$ tal que $v_1 = \alpha v_2$.

2. Determine si los siguientes vectores son linealmente independientes o dependientes.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

3. Pruebe que si $v, w \in \mathbb{R}^m$ son vectores linealmente independientes y $\{v, w, u\}$ es linealmente dependiente para algún otro $u \in \mathbb{R}^m$, entonces se tiene $u \in \text{Gen}(v, w)$.

4. Demuestre el siguiente TEOREMA IMPORTANTE en los siguientes pasos,

   Teorema. *Sean $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$ vectores para algún $n \geq 1$. Entonces, son linealmente independientes $\iff$ $Gen(v_1, ..., v_n) = \mathbb{R}^n$.*

   a) Chequee el caso $n = 1$

   b) ¿Cuál es el número máximo de vectores linealmente independientes que puedo tomar en $\mathbb{R}^n$? (Revise un teorema visto en clases).

   c) Supongamos que existe un vector $v \in \mathbb{R}^n$ que no pertenece a $\text{Gen}(v_1, ..., v_n)$. Usando lo anterior ¿ qué puede decir de la colección $S = \{v_1, ..., v_n, v\}$ en terminos de dependencia?

   d) Concluya el teorema.

C 5

Transformaciones Lineales en $\mathbb{K}^n$

5.1 Concepto de Tranformación Lineal

Dadod enteros positivos m, n una transformación lineal es una función $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ que satisface los siguientes axiomas:

1. Para todos los $v, w \in \mathbb{K}^n$ se tiene
$$T(v + w) = T(v) + T(w),$$
2. Para todo $v \in \mathbb{K}^n$ y todo escalar $\alpha \in \mathbb{K}^n$ se tiene
$$T(\alpha v) = \alpha T(v).$$

Observación 5.1.1. *La palabra* lineal *viene del hecho de que toda transformación lineal envía líneas de $\mathbb{K}^n$ en líneas de $\mathbb{K}^m$. De hecho, toda linea en $\mathbb{K}^n$ se define como el generado por un vector junto con un desplazamiento, i.e.,*
$$L = w + Gen\{v\} \subset \mathbb{K}^n, \quad v, w \in \mathbb{K}^n.$$
Luego, no es difícil ver que la imagen de L bajo T is denotada por $T(L)$ es simplemente
$$T(L) = \{T(u) : u \in L\} = T(w) + Gen\{T(v)\},$$
lo cual es una línea en $\mathbb{K}^m$.

Ejemplo 5.1.2. *Considere la función*
$$T : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad T(v) = v.$$
Es claramente lineal ya que
$$T(v + w) = v + w = T(v) + T(w),$$
$$T(\alpha v) = \alpha v = \alpha T(v),$$
para todos los $v, w, \alpha \in \mathbb{K}$. Analogamente, la función
$$T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \quad T(v) = v,$$
es una transformación lineal. La cual llamaremos transformación identidad.

Ejemplo 5.1.3. *Considere la función*

$$T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad T(v) = 0.$$

Es claramente transformación lineal ya que

$$T(v+w) = 0 = 0 + 0 = T(v) + T(w)$$
$$T(\alpha v) = 0 = \alpha 0 = \alpha T(v),$$

para todos los $v, w \in \mathbb{K}^n$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$. Esta se llama la transformación trivial.

Ejemplo 5.1.4. *Considere la función*

$$T : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}, \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y.$$

Veamos si satisface los axiomas de transformación lineal.

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} = x + y + x' + y' = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$
$$T\left(\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} = \alpha(x+y) = \alpha T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, es una transformación lineal.

Ejemplo 5.1.5. *Considere la función,*

$$T : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2, \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}.$$

Veamos si satisface los axiomas de transformación lineal.

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' + y + y' \\ x + x' - y - y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' + y' \\ x' - y' \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$
$$T\left(\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x+y) \\ \alpha(x-y) \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix} = \alpha T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, T es una transformación lineal.

5.2 Producto Matriz-Vector

Dados

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots. & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times n}, \quad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n,$$

definimos el producto matriz-vector mediante

$$Av := \sum_{j=1}^{n} x_j \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 5.2.1. *Para*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

se tiene

$$Av = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Teorema 5.2.2. *Dada una matriz* $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ *defina la función*

$$T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad T_A(v) = Av,$$

entonces T_A *es una transfomación lineal. Usualmente la llamamos transformación lineal asociada a la matriz* A*.*

Proof. SOON. □

Ejemplo 5.2.3. *Considere la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Su transformación lineal asociada es $T_A : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ *dada por*

$$T_A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir, T_A *es la transformación que proyecta vectores de* $\mathbb{K}^3$ *en el plano coordenado* xy*.*

5.3 Ejercicios

1. Demuestre la Remark 5.1.1.

2. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

¿Cuál es el efecto geométrico sobre $\mathbb{K}^2$ que hace la transformación T_A?

3. ¿Porqué la siguiente función

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T\left(\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right)\right) = \left(\begin{array}{c} x + y^2 \\ x - y \end{array}\right)$$

no es una transformación lineal?

4. Pruebe que la función

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T\left(\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right)\right) = \left(\begin{array}{c} x + y \\ y + z \\ z + x \end{array}\right)$$

es una transformación lineal.

5. Considere la transformación de rotación

$$T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T_\theta\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ x\sin(\theta) + y\cos\theta) \end{pmatrix}$$

en un angulo $\theta \in \mathbb{R}$ medido en radianes.

a) Pruebe que T_θ es una transformación lineal.

b) Grafique $T_\theta(e_1), T_\theta(e_2)$ y $T_\theta(e_1 + e_2)$ para $\theta \in \{0, \pi/4, \pi/2, \pi, 5\pi/4, 2\pi\}$.

c) Encuentre también las matrices de rotación A_θ asociadas a cada uno de estos $\theta \in \{0, \pi/4, \pi/2, \pi, 5\pi/4, 2\pi\}$.

6. Considere en $\mathbb{R}^4$ los siguientes vectores:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Pruebe que $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es linealmente independiente.

(b) Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal. Calcule $T(v)$ sabiendo que

$$T(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad T(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T(v_4) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

C 6

Matriz de una Transformación Lineal

6.1 Tranformaciones Lineales como productos Matriz-Vector

Considere una transformación lineal $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Todo vector $v \in \mathbb{K}^n$ se puede escribir en terminos de los vectores canónicos $e_1, ..., e_n \in \mathbb{K}^n$ mediante

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} v_j e_j.$$

Entonces, los axiomas de transformacion lineal implican

$$T(v) = T\left(\sum_{j=1}^{n} v_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} v_j T(e_j), \quad T(e_j) \in \mathbb{K}^m.$$

Es decir, si definimos la matriz cuyas columnas son $T(e_j)$, i.e,

$$[T] = (T(e_1)\, T(e_2) \ldots T(e_n)) \in \mathbb{K}^{m\times n},$$

entonces $T(v)$ se traduce en un producto matriz-vector como sigue

$$T(v) = [T]v.$$

Por ello, llamamos a $[T]$ la matriz asociada a la transformación lineal T. En terminos teoricos lo anterior nos da una correspondencia biyectiva entre tranformaciones lineales y matrices. De hecho, si denotamos por $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ el conjunto de transformaciones lineales $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, entonces

$$\Phi : \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \to \mathbb{K}^{m\times n}, \quad \Phi(T) = [T]$$

es biyectiva con inversa

$$\Phi^{-1} : \mathbb{K}^{m\times n} \to \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m), \quad \Phi^{-1}(A) = T_A.$$

Ejemplo 6.1.1. *Considere la transformación lineal*

$$T : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3, \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Su matriz asociada es

$$[T] = (T(e_1)\, T(e_2)) = \left(T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 2}.$$

Ejemplo 6.1.2. *Dado un $\beta \in \mathbb{K}$ considere la transformación de escalamiento definida por*

$$T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \quad T(v) = \beta v.$$

Notar que que $T(e_j) = \beta e_j$ para todo vector canonico, es decir, la entrada 1 de e_j simplemente para a ser β. Por esto, obtenemos que

$$[T] = (T(e_1) \dots T(e_n)) = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta \end{pmatrix}$$

la matriz diagonal cuyas entradas no nulas son todas β.

6.2 La matriz de rotación en el plano

Nos interesa estudiar en el plano $\mathbb{R}^2$ que significa rotar un vector en un ángulo $\theta \in \mathbb{R}$, en sentido anti-horario y horario. Esto se puede traducir en una función

$$T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T_\theta(v) = T_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \text{vector } v \text{ rotado en } \theta \text{ radianes en sentido anti-horario},$$

y análogamente definimos $T_{-\theta}$ como la rotación en sentido horario. Notando que,

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xe_1 + ye_2,$$

vemos que rotar a v en θ radianes, es lo mismo que rotar a los vectores canónicos e_1 y e_2 en θ radianes (Ver Figure 6.1). Es decir, lo que rotamos es el plano y así debemos tener

$$T_\theta(v) = xT_\theta(e_1) + yT_\theta(e_2),$$

es decir, T_θ debe ser una transformación lineal sobre el plano. Luego, geometricamente tenemos

$$T_\theta(e_1) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad T_\theta(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

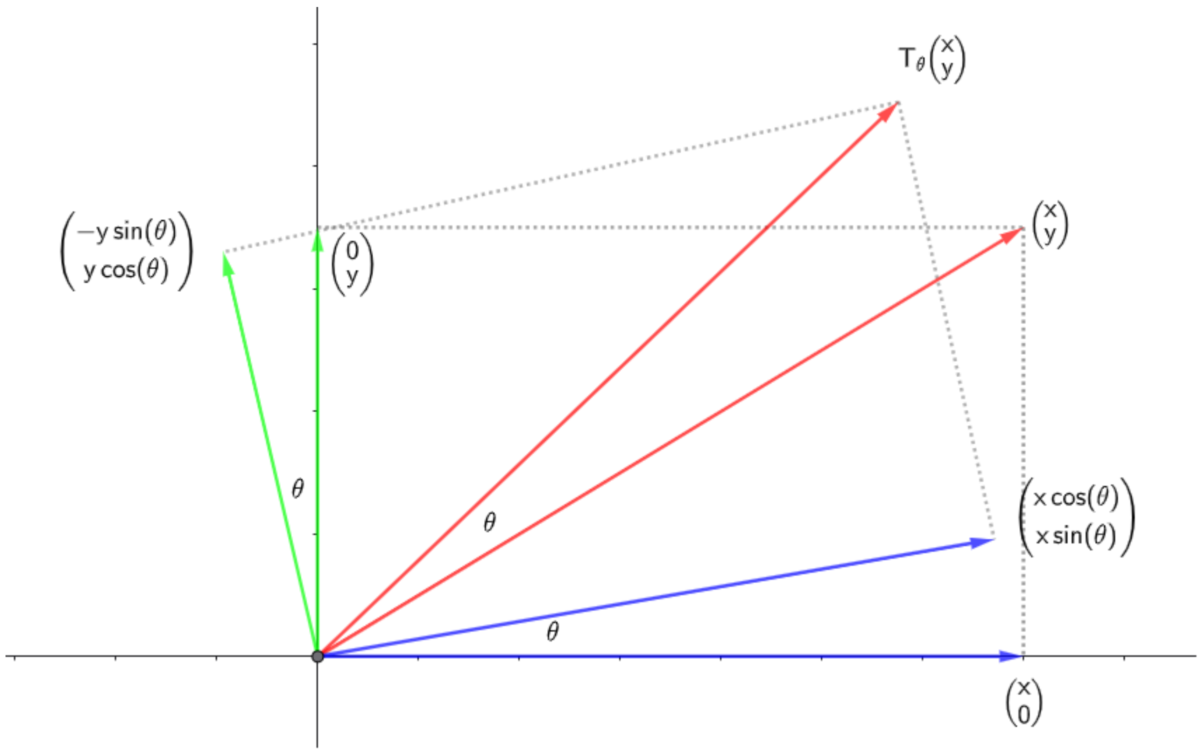


Figure 6.1: Rotación en Sentido Anti-Horario en θ radianes

y así determinamos completamente la transformación mediante

$$T_\theta\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\cos(\theta) - y\sin(\theta)\\ x\sin(\theta) + y\cos(\theta)\end{pmatrix}.$$

Más aún la matriz asociada a T_θ es conocida como la matriz de rotación en θ radianes y denotada por

$$A_\theta = [T_\theta] = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix},$$

en este caso, rotando en sentido antihorario.

6.3 Tranformaciones Inyectivas y Sobreyectivas

El siguiente teorema da criterios para decidir cuando una transformación lineal es inyectiva o sobreyectiva directamente al mirar su matriz asociada.

Teorema 6.3.1. *Sea $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ una transformacion lineal. Entonces:*

1. T es inyectiva si y sólo si las columnas de $[T]$ son linealmente independientes.

2. T es sobreyectiva si y sólo si las columnas de $[T]$ generan a $\mathbb{K}^m$.

Proof. soon. $\square$

6.4 Ejercicios

1. Considere la transformación lineal

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T\left(\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right)\right) = \left(\begin{array}{c} x+y \\ y+z \\ z+x \end{array}\right)$$

   Encuentre su matriz asociada $[T]$ ¿ Que puede decir de la inyectividad y sobreyectividad de T?

2. Considere la transformación de rotación

$$T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T_\theta\left(\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right)\right) = \left(\begin{array}{c} x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ x\sin(\theta) + y\cos\theta) \end{array}\right)$$

   en un angulo $\theta \in \mathbb{R}$ medido en radianes. Dado cualquier θ, ¿qué puede decir de la inyectividad y sobreyectividad de T_θ?

C 7

Operaciones Matriciales

7.1 Suma, escalado, producto.

En lo que sigue expondremos las principales operaciones entre las transformaciones lineales y sus análogos en términos de matrices.

Proposition 7.1.1 (Suma)**.** *Sean $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ y $S : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ transformaciones lineales, y*

$$[T] = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad [S] = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

sus matrices asociadas. Entonces, la función

$$T + S : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad v \mapsto (T + S)(v) = T(v) + S(v),$$

es una transformación lineal con

$$[T + S] = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & b_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Proof. Soon. □

De este modo, todo par de matrices del mismo tamaño $A = (a_{ij}), B_{ij} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ siempre definen una suma matricial $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ del mismo tamaño original. Por lo tanto, en terminos de transformaciones lineales podemos resumir lo anterior en

$$[T + S] = [T] + [S].$$

Ejemplo 7.1.2. *Considere las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

y sus transformaciones asociadas

$$T_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x+4y \end{pmatrix}, \quad T_B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Entonces, la suma de matrices

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

corresponde a la transformación lineal

$$T_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + T_B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_{A+B} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2y \\ 3x+3y \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 7.1.3. *Considere las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Estas no se pueden sumar ya que son distinto orden. Esto se justifica ya que sus transformaciones se definen sobre $T_A : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ y $T_B : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$. Es decir, tienen dominios distintos.

Proposition 7.1.4 (Producto Escalar)**.** *Dada una transformación lineal $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ cuya matriz es*

$$[T] = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

y un escalar $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces la función

$$\alpha T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad \alpha T(v) = \alpha T(v),$$

es una transformación lineal cuya matriz asociada es

$$[\alpha T] = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Proof. Soon. □

De este modo, toda matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ puede ser escalar por un $\alpha \in \mathbb{K}$ mediante $\alpha A = (\alpha a_{ij})$, o en terminos de transformaciones lineales

$$[\alpha T] = \alpha [T].$$

Ejemplo 7.1.5. *Considere la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2 \times 3},$$

y el escalar $\alpha = 2$. Se tiene,

$$\alpha A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 6 & 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

En terminos se transformaciones lineales tenemos,

$$T_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 5z \\ 3x + 4y + 7z \end{pmatrix}, \quad 2T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 4y + 10z \\ 6x + 8y + 14z \end{pmatrix}.$$

Proposition 7.1.6 (Composición-Producto Matricial)**.** *Considere transformaciones lineales, $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $S : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^l$ donde $l, m, n \geq 1$ son enteros positivos, y con matrices asociadas*

$$[T] = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}, \quad [S] = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & \dots & a_{lm} \end{pmatrix}.$$

La composición de funciones,

$$S \circ T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^l, \quad S \circ T(v) = S(T(v),$$

es una transformación lineal cuya matriz asociada es

$$[S \circ T] = \left([S] \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix} \; [S] \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{m2} \end{pmatrix} \dots [S] \begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{mn} \end{pmatrix} \right) \in \mathbb{K}^{l \times n},$$

es decir, el producto matriz-vector de $[S]$ a cada una de las columnas de $[T]$.

Proof. soon. □

De este modo para dos matrices $A \in \mathbb{K}^{l \times m}, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ si

$$B = (b_1 \, b_2 \dots b_n), \quad b_j \in \mathbb{K}^m,$$

es la escritura en columnas, entonces su producto matricial queda definido por

$$AB := (Ab_1 \, Ab_2 \dots, Ab_n) \in \mathbb{K}^{l \times n}, \quad Ab_j \in \mathbb{K}^l.$$

En terminos de transformaciones lineales tenemos

$$[S \circ T] = [S][T].$$

En general, la validez de la composición depende exclusivamente del tamaño de las matrices. Una regla para recordar cuando el producto matricial es valido es considerar que en terminos de tamaños

$$(l \times m) \cdot (m \times n) = l \times n,$$

es decir, los *órdenes internos* m de la matriz deben ser iguales.

Ejemplo 7.1.7. *Considere*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$AB = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

En términos de transformaciones se tiene

$$T_A : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2, \quad T_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix},$$

$$T_B : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2, \quad T_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y + 2z \end{pmatrix}.$$

Luego su composición $T_A \circ T_B : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ queda dada por

$$T_A \circ T_B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T_A \begin{pmatrix} x - y \\ y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-y) + 2(y+2z) \\ 3(x-y) + 4(y+2z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + 4z \\ 3x + y + 8z \end{pmatrix} = T_{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 7.1.8. *Considere*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para estas matrices no existe el producto ya que son de tamaño 2×3 y en

$$(2 \times 5) \cdot (2 \times 3),$$

los órdenes internos no coinciden: $5 \neq 2$.

7.2 Algebra de Matrices

En general el producto matricial no es conmutativo, es decir, casi siempre se tiene

$$AB \neq BA.$$

Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esto se sabe también del hecho de que la composición de funciones es en general no conmutativa. Sin embargo, la no conmutatividad no es una excusa para combinar las operaciones anteriores gracias a la linealidad. Así podemos obtener una álgebra no conmutativa de matrices.

Proposition 7.2.1 (Algebra de Matrices)**.** *Sean $A \in \mathbb{K}^{l \times m}$, $\quad B \in \mathbb{K}^{m \times n}, C \in \mathbb{K}^{n \times p}$ matrices de distintos tamaños con $l, m, n, p \geq 1$ enteros. Entonces, las siguientes operaciones matriciales son validas*

1. $A(BC) = (AB)C$ *(asociatividad),*

2. $A(B + C) = AB + AC$ *(distributividad por la izquierda),*

3. $(A + B)C = AC + BC$ *(distributividad por la derecha),*

4. *Dado cualquier escalar* $\alpha \in \mathbb{K}$ *se tiene* $\alpha AB = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

Dichas operaciones se ven reflejadas en terminos de transformaciones lineales como sigue: Sean $T = T_A$, $S = T_B$ *y* $R = T_C$, *entonces*

1. $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$

2. $T \circ (S + R) = T \circ S + T \circ R$

3. $(T + S) \circ R = T \circ R + S \circ R$,

4. $\alpha T \circ S = (\alpha T) \circ S = T \circ (\alpha S)$.

Proof. Ejercicio. □

Se deja como ejercicio probar que la transformación identidad $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ tiene matriz asociada

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots. & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n},$$

llamada matriz identidad de orden n y la cual cumple que

$$AI = A = IA,$$

para toda matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. La asociatividad en el producto matricial nos permite definir lo que es potenciación con matrices. Dada $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ entonces para todo $n \in \{0, 1, 2....\}$ se define la potencia de A a la n por

$$A^0 = I_n, \quad A^1 = A, \quad A^2 = A\,A, \quad A^n = \underbrace{A\,A\,A...A}_{n \text{ veces}}.$$

7.3 Ejercicios

1. Calcule la matriz I asociada a la identidad y justifique porque $AI = A = IA$ para toda matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

2. Demuestre Proposition 7.2.1

3. Para θ, τ considere las matrices de rotación $A_\theta, A_\tau \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Demuestre que $A_\theta A_\tau = A_{\theta+\tau}$. ¿Cuál es el efecto geométrico como transformación sobre el plano $\mathbb{R}^2$?

4. Considere las transformaciones lineales

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ y \end{pmatrix}, \quad S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, S\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

   Chequee que efectivamente
$$[T \circ S] = [T][S].$$
   Encuentre la matriz de la transformación lineal
$$T \circ S \circ S \circ S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3.$$

5. Considere la matriz 2×2,
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Encuentre todas las matrices X de orden 2×2 tal que,

   (a) $XA = A^{-1}$.

   (b) $XA^2 = A^{-1}$.

6. Demuestre que si A, B son matrices $n \times n$ invertibles, entonces AB es invertible con
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

7. Considere las matrices 3×3 definidas por
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Encuentre la matriz X de orden 3×3 que satisface la ecuación
$$(I_3 - A)^3 - B^2 = CX,$$
   donde I_3 es la identidad de orden 3×3.

8. Considere la matriz,
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Pruebe por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene,
$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(-1)^n & 1-(-1)^n \\ 1-(-1)^n & 1+(-1)^n \end{pmatrix}.$$

C 8

La Matriz Inversa

8.1 Transformaciones Lineales Biyectivas

En los capitulos previous hemos visto que toda matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ está asociada a una transformación lineal $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ dada por $T(v) = Av$. De forma conversa, toda transformación lineal $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ tiene asociada una matriz $[T] = (Te_1 \ldots Te_n)$. En este capítulo nos interesan las transformaciones lineales biyectivas (o invertibles), es decir, que posean inversa. Luego, caracterizar cuáles son aquellas matrices que vienen de transformaciones invertibles.

Teorema 8.1.1. *Si $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ es una transformación lineal biyectiva, entonces $m = n$.*

Proof. Si T es biyectiva, entonces existe una inversa $T^{-1} : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ tal que

$$T \circ T^{-1} = Id_{\mathbb{K}^m}, \quad T^{-1} \circ T = Id_{\mathbb{K}^n},$$

donde $Id_{\mathbb{K}^m}$ y $Id_{\mathbb{K}^n}$ son las transformaciones identidad sobre cada dominio. En términos de matrices asociadas debiésemos tener

$$[T][T^{-1}] = I_m \in \mathbb{K}^{m\times m}, \quad [T^{-1}][T] = I_n \in \mathbb{K}^{n\times n}.$$

Sin embargo, $[T] \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $[T^{-1}] \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Por ello, el producto matricial anterior solo es compatible cuando $m = n$.

□

El teorema previo nos dice que solo las matrices cuadradas pueden venir de transformaciones invertibles. De este modo, una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es invertible si existe otra matriz $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que

$$AB = BA = I_n.$$

En este caso denotamos a B por A^{-1} y lo llamamos la inversa de A.

Proposition 8.1.2. *Si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es invertible con inversa A^{-1}, entonces la inversa de una matriz es única. Es decir, si $C \in \mathbb{A}^{n\times n}$ es otra matriz tal que*

$$AC = CA = I_n,$$

entonces $C = A^{-1}$.

Proof. Ejercicio. $\square$

Ejemplo 8.1.3. *Consideremos las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Podemos chequear directamente que

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Es decir, $B = A^{-1}$.

Ejemplo 8.1.4. *En caso* $n = 1$, *toda matriz es de la forma* $[a]$ *con* $a \in \mathbb{K}$. *Por ello, si* $a \neq 0$ *siempre tendremos inversa dada por* $[a^{-1}]$ *y así* $[a][a^{-1}] = [a^{-1}][a] = 1$.

Ejemplo 8.1.5. *Usualmente calcular inversas suele ser complicado en términos computacionales. Sin embargo para el caso* $n = 2$ *tenemos una fórmula muy fácil de recordar. Todas aquellas matrices*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2},$$

que satisfacen $ad - bc \neq 0$ *son invertibles. De hecho, se puede probar explícitamente que*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Queda de ejercicio chequear algebraicamente que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$. *Por ejemplo:*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.2 Método Gaussiano Para la Matriz Inversa

La mayor utilidad de la matriz inversa es en la resolución de sistemas lineales. Recordemos que todo sistema lineal $n \times n$ tiene la forma

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

donde $x_1, ..., x_n$ son las variables a determinar, $b_1, ..., b_n$ son parametros determinados y $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Si A es una matriz invertible, podemos usar operaciones matriciales en ambos lados de la igualdad haciendo producto con A^{-1}. Es decir,

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \iff I_n\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \iff \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Es decir, el sistema se resuelve completamente desde el producto matriz-vector $A^{-1}\mathbf{b}$.

Ejemplo 8.2.1. *El sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + y = -1 \end{cases}$$

es equivalente al sistema matricial

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La inversa de A queda determinada por

$$A^{-1} = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 3/5 & -1/5 \end{pmatrix}.$$

Por esto, el sistema queda resuelto por

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 3/5 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}.$$

La pregunta es: ¿Cómo encontramos la inversa de una matriz de tamaño $n \times n$ dado cualquier $n \geq 2$? El metodo Gaussiano es el que nos da un algortimo para calcular dichas inversas.

Teorema 8.2.2 (Método Gaussiano para la Inversa)**.** *Dada una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Considere la matriz aumentada*

$$(A|I_n).$$

Si A es equivalente por filas a I_n mediante una serie de operaciones filas $\mathcal{F}$, i.e.,

$$A \underset{\mathcal{F}}{\to} I_n,$$

entonces A es invertible, y al aplicar las mismas operaciones filas a la matriz aumentada se obtiene

$$(A|I_n) \underset{\mathcal{F}}{\to} \left(I_n|A^{-1}\right).$$

Proof. SOON

□

Ejemplo 8.2.3. *Considere la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

y su forma aumentada

$$(A|I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicaremos operaciones filas a la matriz aumentada de modo que llevamos A a la identidad I_3.

$$(A|I_3) \underset{E_{32}(1)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{E_3(1/2)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \underset{E_{12}(-2)}{\to}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \underset{E_{23}(-1)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \underset{E_{13}(-1)}{\rightarrow}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -5/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = (I_3|A^{-1}).$$

Notar que la A^{-1} obtenida es justamente la presentada en Example 8.1.3.

8.3 Ejercicios

1. Pruebe Example 8.1.5.
2. Pruebe Proposition 8.1.2.
3. Pruebe que si $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es invertible, entonces
$$(A^{-1})^{-1} = A.$$
4. Pruebe que si $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ son invertibles, entonces AB es invertible con
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$
5. Para todo $\theta \in \mathbb{R}$ encuentre la inversa A_θ^{-1} de la matriz de rotación en θ radianes. ¿Cómo se interpreta geométricamente la transformación T_θ^{-1} sobre el plano $\mathbb{R}^2$?
6. Encuentre las inversas mediante eliminación Gaussiana de las siguientes matrices,
$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
7. Determinen los $\alpha \in \mathbb{R}$, si es que existen, tal que la matriz
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix},$$
sea invertible.

C 9

Determinante en lo Teórico

9.1 Paralelepípedos y Volumen

En lo que sigue, usaremos la notación por columnas para matrices cuadradas. Es decir, dada $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ escribimos

$$A = (v_1\, v_2 \ldots v_n), \quad v_j = \begin{pmatrix} v_{1j} \\ v_{2j} \\ \vdots \\ v_{nj} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

Sobre el cuerpo de los números reales, dada cualquier $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con la forma anterior, podemos definir su paralelepípedo asociado como

$$P_A = \left\{ \sum_{j=1}^{n} t_j v_j : t_j \in [0,1] \right\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Si $n \in \{1,2,3\}$, hablaremos del volumen de P_A y denotado por $\mathrm{vol}(P_A)$ por el valor de la longitud, área o volumen de P_A en el sentido Euclidiano.

1. Si $n = 1$, entonces tenemos $A = (v_{11})$. El paralelepípedo asociado P_A es simplemente el intervalo $(0, v_{11})$ o $(v_{11}, 0)$ dependiendo de si v_{11} es positivo o negativo. De este modo,

$$\mathrm{vol}(P_A) = |v_{11}|.$$

2. Si $n = 2$, entonces P_A es un paralelogramos cuyos vértices son

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_{11}+v_{12} \\ v_{21}+v_{22} \end{pmatrix}.$$

   En este caso, es sabido que

$$\mathrm{vol}(P_A) = |v_{11}v_{22} - v_{12}v_{21}|.$$

3. Para $n = 3$ la situación es análoga. En este caso el paralelogramos tiene 8 vertices dados por

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} v_{11}+v_{12} \\ v_{21}+v_{22} \\ v_{31}+v_{32} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_{11}+v_{13} \\ v_{21}+v_{23} \\ v_{31}+v_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_{12}+v_{13} \\ v_{22}+v_{23} \\ v_{32}+v_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_{11}+v_{12}+v_{13} \\ v_{21}+v_{22}+v_{23} \\ v_{31}+v_{32}+v_{33} \end{pmatrix}.$$

   Y en este caso la formula para el volumen es algo mas sofisticada

$$\mathrm{vol}(P_A) = |v_{11}(v_{22}v_{33} - v_{32}v_{23}) - v_{12}(v_{21}v_{33} - v_{31}v_{23}) + v_{13}(v_{12}v_{32} - v_{31}v_{22})|.$$

9.2 La Función Determinante

En lo que sigue, nuestro mayor interés es poder captura la noción de volumen sobre cualquier cuerpo de números $\mathbb{K}$ y en realidad sobre cualquier *paralelepipedo* en $\mathbb{K}^n$. Observar que en las formulas anteriores, el volumen es el valor absoluto de una cantidad polinomial en términos de las coordenadas de la matriz asociada. Por ello, buscamos una función que llamaremos determinante y denotaremos por

$$\det : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}, \quad \det(A) = \det(v_1, ..., v_n)$$

la cual sea polinomial en terminos de las coordenadas de A y de modo que cuando bajemos a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ obtengamos

$$\mathrm{vol}(P_A) = |\det(P_A)|.$$

En la busqueda de dicha función determinante, debemos imponer que propiedades queremos que tenga y de forma emergente. Es decir, imponer la menor cantidad de propiedades de modo de obtener en forma *natural* lo que queremos.

1. Para la matriz identidad $I_n = (e_1, ..., e_n)$ queremos $\det(I_n) = 1$, es decir, *el volumen del cubo unitario sea la unidad.*

2. Si la matriz A tiene dos columnas iguales, entonces el *paralepipedo degenera a algo sin volumen.* Es decir, si $v_j = v_{j'}$ para algunos $j \neq j'$, entonces

$$\det(A) = \det(v_1, ..., v_n) = 0.$$

3. Si en un paralelepipedo un lado se escala por algún $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces *el volumen se escala por α.* Es decir,

$$\det(v_1, ..., v_{j-1}, \alpha v_j, v_{j+1}, ..., v_n) = \alpha \det(v_1, ..., v_j, ..., v_n).$$

4. Si un lado de extiende por un vector $w \in \mathbb{K}^n$, entonces *el paralepipedo puede ser cortado en dos y el volumen original se separa por extensión.* Es decir,

$$\det(v_1, ..., v_j + w, ...v_n) = \det(v_1, ..., v_j, ...v_n) + \det(v_1, ..., w, ...v_n).$$

Una propiedad que se desprende de las anteriores es el cambio de signo al cambiar la orden de los vertices, o tambien llamado cambio de orientación.

Proposition 9.2.1. *Si* $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ *existe, entonces*

$$\det(v_1, ..., v_j, ..., v_{j'}, ..., v_n) = -\det(v_1, ..., v_{j'}, ..., v_j, ..., v_n).$$

Proof. La propiedad (2) nos dice que

$$D = \det(v_1, ..., v_j + v_{j'}, ..., v_j + v_{j'}, ..., v_n) = 0.$$

Luego la propiedad (4) nos da

$$D = \det(v_1, ..., v_j, ..., v_{j'}, ..., v_n) + \det(v_1, ..., v_{j'}, ..., v_j, ..., v_n) + \det(v_1, ..., v_j, ..., v_j, ..., v_n) + \det(v_1, ..., v_{j'}, ..., v_{j'}, ..., v_n).$$

Usando nuevamente (2), nos queda

$$D = \det(v_1, ..., v_j, ..., v_{j'}, ..., v_n) + \det(v_1, ..., v_{j'}, ..., v_j, ..., v_n),$$

obteniendo el resultado. □

Ejemplo 9.2.2. *En* $n = 1$ *siempre tenemos que* $A = (v_{11}) = v_{11}(1)$*. Por ello, la propiedad* (3) *nos dice que*

$$\det(A) = \det(v_{11}(1)) = v_{11}\det(1) = v_{11}.$$

Por lo tanto en $n = 1$*, la función determinante queda completamente determinada para cualquier cuerpo de numeros* $\mathbb{K}$*. Más aún, cuando* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *la función encontrada nos permite escribir* $vol(P_A) = |\det(A)|$*.*

Ejemplo 9.2.3. *En* $n = 2$*, procedemos a calcular de la siguiente forma*

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det(v_1, v_2) = \det(v_{11}e_1 + v_{21}e_2, v_{12}e_1 + v_{22}e_2) \\
&= \det(v_{11}e_1, v_{12}e_1 + v_{22}e_2) + \det(v_{21}e_2, v_{12}e_1 + v_{22}e_2) \\
&= \det(v_{11}e_1, v_{12}e_1) + \det(v_{11}e_1, v_{22}e_2) + \det(v_{21}e_2, v_{12}e_1) + \det(v_{21}e_2, v_{22}e_2) \\
&= v_{11}v_{12}\det(e_1, e_1) + v_{11}v_{22}\det(e_1, e_2) + v_{21}v_{12}\det(e_2, e_1) + v_{21}v_{22}\det(e_2, e_2).
\end{aligned}$$

en donde usamos (3) para sacar los escalares. Ahora sabemos por (2) que $\det(e_1, e_1) = \det(e_2, e_2) = 0$ *para obtener,*

$$\det(A) = v_{11}v_{22}\det(e_1, e_2) + v_{21}v_{12}\det(e_2, e_1).$$

Ahora por (1) y Proposition 9.2.1 sabemos que $\det(e_1, e_2) = -\det(e_2, e_1) = 1$*. Por lo tanto,*

$$\det(A) = v_{11}v_{22} - v_{21}v_{12}.$$

Es decir, encontramos el determinante para $n = 2$ *y más aún para* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *obtenemos*

$$vol(P_A) = |\det(A)|,$$

como hemos predicho.

Teorema 9.2.4. *Existe una única función* $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ *que cumple las propiedades (1), (2), (3) y (4). Más aún, explícitamente se calcula de forma recursiva como*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_j),$$

donde A_j *es la matriz cuadrada obtenida de sacar la primera fila y la* j*-esima columna de* A.

Proof. soon □

Ejemplo 9.2.5. *En el caso* $n = 2$ *tenemos explicitamente el la siguiente formula,*

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Ejemplo 9.2.6. *En el caso* $n = 3$ *tenemos explícitamente el la siguiente formula,*

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a \det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \det \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \det \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}.$$

De este modo cuando $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ para toda matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ definimos el volumen del paralelepípedo asociado P_A por

$$\mathrm{vol}(P_A) = |\det(A)|.$$

9.3 Ejercicios

1. Calcule $\det(A)$ para $n = 3$ siguiendo de forma análoga los pasos de Example 9.2.3.
2. Para todo angulo $\theta \in \mathbb{R}$ medido en radianes pruebe que $\det(A_\theta) = 1$ para la matriz de rotación A_θ.
3. Chequee el calculo de los siguientes determinantes,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 35, \quad \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 11 & 13 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -5 & -7 \\ 0 & 5 & 13 & -3 & -15 & -7 \\ 7 & 3 & 1 & -1 & 15 & 7 \end{pmatrix} = -210.$$

C 10

Determinante en lo Practico

10.1 Técnicas de Calculo de Determinante

Todo vector fila puede ser llevado a un vector columna y viceversa mediante la transposición. Esta operación se denota por

$$(x_1, ..., x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T = (x_1, ..., x_n).$$

Del mismo modo si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ es escrita en forma de columnas mediante $A = (v_1\, v_2 \ldots v_n)$ con $v_j \in \mathbb{K}^m$, entonces definimos su transpuesta por

$$A^T = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times m}.$$

La utilidad teórica de la transpuesta se ve reflejada en las transformaciones T_{A^T}, pero por ahora no es necesario en este libro. Por ahora solo nos interesa su utilidad calculatoria.

Ejemplo 10.1.1. *Considere*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 3}.$$

Su vectores columna son,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

y sus transpuestos son

$$v_1^T = (1, 0), \quad v_2^T = (2, -1), \quad v_3^T = (3, -2).$$

Entonces la transpuesta de A es

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 2}.$$

Teorema 10.1.2 (Propiedades del Determinante). *Sea* $A = (v_1 \dots v_n) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *una matrix cuadrada escrita en forma de columnas con* $v_j \in \mathbb{K}^n$*. Se tienen las siguientes propiedades para* $\det(A)$.

1. *Si* $v_j = v_{j'}$ *para* $j \neq j'$*, entonces* $\det(A) = 0$.
2. *Si* $A' = (v_1, ..., v_{j'}, ..., v_j, ..., v_n)$ *con* $j' < j$*, es decir, un intercambio de columnas, entonces* $\det(A') = -\det(A)$.
3. $\det(A) = \det(A^T)$
4. *Si* $E_{jk}A$ *es la matriz proveniente de intercambiar las filas* j *y* k*, entonces* $\det(E_{jk}A) = -\det(A)$.
5. *Si* $E_{jk}(\alpha)A$ *es la matriz proveniente de intercambiar las filas de sumarle a la fila* j *la fila* k *escalada por* $\alpha \in \mathbb{K}$*, entonces* $\det(E_{jk}(\alpha)A) = \det(A)$.
6. *Si* $E_j(\alpha)A$ *es la matriz proveniente de escalar la fila* j *por* $\alpha \in \mathbb{K}$*, entonces* $\det(E_j(\alpha)A) = \alpha \det(A)$.
7. *Si* A *es escalonada, entonces* $\det(A)$ *es el producto de las entradas en la diagonal.*
8. *Si* $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$*, entonces*
$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Proof. SOON, la gran mayoria de la clase anterior.

□

Ejemplo 10.1.3. *Calcule el determinante de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

En este caso, sabemos que

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Y desde la formula del determinante de la clase pasada tenemos,

$$\det(A) = \det(A^T) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = (6 \cdot 9 - 7 \cdot 8) = -2.$$

Ejemplo 10.1.4. *Calcule el determinante de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 7 \\ 1 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

En este caso, aplicar aplicamos operaciones filas para obtener

$$E_{31}(-1)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Luego analogamente al ejemplo anterior,

$$\det(A) = \det(E_{31}(-1)A) = \det((E_{31}(-1)A)^T) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 6 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} = 36 - 42 = -6.$$

10.2 Teorema Fundamental del Álgebra Lineal

El siguiente teorema resume el concepto de invertibilidad sobre todas nuestras construcciones previas, desde los sistemas lineales, matrices y transformaciones lineales.

Teorema 10.2.1 (Teorema Fundamental del Álgebra Lineal)**.** *Sea $A = (v_1 \dots v_n) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz cuadrada escrita en forma de columnas $v_j \in \mathbb{K}^n$. Entonces son equivalentes las siguientes proposiciones.*

1. *A es invertible.*
2. *Todo sistema lineal de la forma $Ax = b$ con $x, b \in \mathbb{K}^n$ tiene solución única $x = A^{-1}b$.*
3. *La transformación lineal asociada a T_A es biyectiva, es decir, existe $T_A^{-1} = T_{A^{-1}}$.*
4. $\det(A) \neq 0$.
5. *Las columnas $v_1, ..., v_n \in \mathbb{K}^n$ de A son linealmente independientes.*
6. *$Gen(v1_, ..., v_n) = \mathbb{K}^n$.*

Proof. SOON. □

Ejemplo 10.2.2. *Demostrar que la transformación lineal*

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 5x + 7y \end{pmatrix}$$

es biyectiva o que el sistema lineal

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ 5x + 7y = 0, \end{cases}$$

tenga solución solución única es simplemente chequear el determinante de la matriz asociada. En este caso la matriz es

$$[T] = A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Calculamos,

$$\det(A) = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 5 = -1 \neq 0.$$

Por lo tanto concluimos que A es invertible, el sistema lineal es invertible y la transformación lineal T es biyectiva.

10.3 Ejercicios

1. Si A es una matriz de orden $n \times n$ tal que $\det(A) = 2$. ¿Cual es el valor del determinante de A^{10}?

2. Considere una matriz $n \times n$ tal que $AA^T = I_n$. Muestre que $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

3. Suponga que una matriz,
$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$
tiene $det(A) = 1$. Calcule el valor del determinante de las siguientes matrices,
$$A_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 5g & 5h & 5i \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} g & h & i \\ 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} g & h & i \\ a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

4. Calcule el determinante de las siguientes matrices,
$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ -1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$
y con esta información chequee la invertibilidad de estas para los distintos valores de α.

5. Determine si los siguientes vectores son linealmente independientes usando determinantes,
$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6. Determine para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ los siguientes vectores,
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad v_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
son linealmente independientes.

C 11

Espacios Vectoriales

11.1 Espacios Vectoriales

Un conjunto V es un *espacio vectorial* sobre $\mathbb{K}$ si existen dos operaciones (como funciones), la suma

$$+ : V \times V \to V,\ (v, w) \mapsto v + w$$

y la multiplicación por escalares,

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V,\ (\alpha, v) \mapsto \alpha \cdot v,$$

las cuales satisfacen los siguientes axiomas: Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y todo $v, w, u \in V$ se debe satisfacer,

1. La conmutatividad de la suma $v + w = w + v$,
2. La asociatividad de la suma $(u + v) + w = u + (v + w)$,
3. Existe un elemento neutro $0_V \in V$ tal que $v + 0_V = 0_V + v = v$,
4. Existen inversos aditivos $-v \in V$ tal que $v + (-v) = 0_V$,
5. El $1 \in \mathbb{K}$ es un escalar neutro, es decir, $1 \cdot v = v$,
6. Los escalares se distribuyen aditiva y multiplicativamente, es decir, $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$, $(\alpha + \beta)v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$, y $(\alpha \cdot \beta)v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$.

Teorema 11.1.1 (Primeras Propiedades)**.** *Todo espacio vectorial V satisface.*

1. *El vector nulo 0_V es único.*
2. *Los inversos aditivos $(-v)$ son únicos.*
3. *$0 \cdot v = O_V$ para todo $v \in V$,*
4. *$\alpha \cdot 0_V = 0_v$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$,*
5. *Para todo $v \in V$ se tiene $-v = (-1) \cdot v$.*

Proof. asdf

□

Ejemplo 11.1.2. *1. Los conjuntos $\mathbb{K}^n$ de vectores (fila o columnas) de n entradas son naturalmente espacios vectoriales con la forma usual de sumar y multiplicar por escalar. En este caso, el vector nulo es*

$$0_{\mathbb{K}^n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. El conjunto $\mathbb{K}^{m\times n}$ de las matrices de tamaño $m\times n$ son un espacio vectorial mediante las operaciones matriciales usuales de suma y multiplicación por escalar. En este caso, el vector nulo es

$$0_{\mathbb{K}^{m\times n}} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Sea X un conjunto cualquier y considere el conjunto

$$\mathbb{K}^X = \{f : X \to \mathbb{K} : f \text{ función}\}.$$

Este conjunto es naturalmente un espacio vectorial bajo la suma de funciones y producto por escalar de funciones

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x),$$

para todo $f, g \in \mathbb{K}^X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. En este caso, el vector nulo es la función nula

$$0 : X \to \mathbb{K}, \quad 0(x) = 0.$$

4. Un caso importante del espacio vectorial previo, es cuando $X = \mathbb{N}$. En este caso obtenemos el espacio vectorial de vectores infinitos. *Cada función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ se puede representar como un vector infinito de la forma,*

$$(f(n))_{n\in\mathbb{N}} = (f(1), f(2), f(3), f(4), ...),$$

codificando todos sus posibles valores. Podemos obviar la función y simplemente denotar los elementos de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, ...)$. Por ejemplo,

$$(n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 2, 3, 4, 5, ...) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}.$$

En este caso la suma y producto funcionarían como sigue

$$(1, 2, 3, 4, 5, ...) + (1, 1, 1, 1, 1, ...) = (2, 3, 4, 5, 6, ...), \quad 2 \cdot (1, 2, 3, 4, 5, ...) = (2, 4, 6, 8, 10, ...).$$

Observación 11.1.3. *En lo que sigue, los productos por escalares $\alpha \cdot v$ simplemente se denotaran como αv y los vectores nulos 0_V se denotaran simplemente como 0. Todo esto cuando el contexto sea fijo.*

11.2 Subespacios Vectoriales

Dado un espacio vectorial V, un subconjunto $H \subset V$ se dirá que es un *subespacio vectorial* si

1. H contiene al vector nulo de V, es decir, $0_V \in H$,
2. para todos los $v, w \in H$ se tiene $v + w \in H$,
3. para todo $v \in H$ y todo escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ se tiene $\alpha v \in H$.

Observación 11.2.1. *Todo subespacio vectorial es en si mismo un espacio vectorial.*

Ejemplo 11.2.2. 1. *Todo espacio vectorial V contiene al* subespacio trivial $H = \{0_V\}$. *Esto dado que $0_V + 0_V = 0_V$ y $\alpha 0_V = 0_V$ para todo escalar $\alpha \in \mathbb{K}$.*

2. *El espacio vectorial $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ de las funciones $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ contiene al subespacio vectorial de los polinomios,*
$$\mathbb{K}[x] = \{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n : a_i \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \subset \mathbb{K}^{\mathbb{K}}.$$
La razón de esto es que la suma de polinomios y multiplicación por escalares de polinomios sigue siendo un polinomio.

3. *Más aún, si fijamos un entero $n \geq 1$, el espacio vectorial de los polinomios tiene como subespacio al conjunto de polinomios de grado a lo más n,*
$$\mathbb{K}_n[x] = \{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n : a_i \in \mathbb{K}\} \subset \mathbb{K}[x].$$
La razón de esto es que la suma y multiplicacion por escalares de polinomios de grado $\leq n$, nos da un polinomio de grado $\leq n$.

4. *Considere,*
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{K} \right\} \subset \mathbb{K}^3.$$
Este es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^3$. De hecho, tomando $s = t = 0$ obtenemos
$$0_{\mathbb{K}^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in H,$$
mientras que para todo $s, s', t, t', \alpha \in \mathbb{K}$ se tiene
$$\begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s' \\ t' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s + s' \\ t + t' \\ 0 \end{pmatrix} \in H, \quad \alpha \begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha s \\ \alpha t \\ 0 \end{pmatrix} \in H.$$

11.3 Subespacio Generado

Considere una colección finita de elementos $v_1, ..., v_n$ de un espacio vectorial V. Cualquier suma de la forma,

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n, \quad \alpha_i \in \mathbb{K},$$

es llamada una *combinación lineal* de los $v_1, ..., v_n$ y los α_i son llamados los *pesos* de la combinación en cada v_i. El *subespacio generado* por los $v_1, ..., v_n$ se define como,

$$\text{Gen}_{\mathbb{K}}\{v_1, ..., v_n\} := \{\text{Todas las combinaciones lineales de los } v_1, ..., v_n\}.$$

Teorema 11.3.1. *$Gen_{\mathbb{K}}\{v_1, ..., v_n\}$ es un subespacio vectorial de V.*

Proof. asd

□

Ejemplo 11.3.2. *1. Siguiendo con el subespacio vectorial,*

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{K} \right\} \subset \mathbb{K}^3.$$

Observemos que la estructura de sus elementos se puede descomponer como,

$$\begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde en este caso $s, t \in \mathbb{K}$ son arbitrarios. Por lo tanto,

$$H = Gen_{\mathbb{K}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

2. Un NO ejemplo de sub-espacio vectorial es el espacio

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + H = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{K} \right\}.$$

La razón es sencilla, dado que la tercera entrada tiene a 1 de forma fija, es IMPOSIBLE tener la condición $0_{\mathbb{K}^3} \in H$. En general, todas las traslaciones $v + H = \{v + h : h \in H\}$ de subespacios, no serán un subespacio vectorial al momento de tener $v \neq H$. La razón es la misma, $0_V \notin v + H$.

11.4 Ejercicios

1. Determine si los siguientes conjuntos son (sub)espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ y de serlo, encuentre un conjunto generador.

(a) El conjunto

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) El conjunto

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a+c \\ a-b \\ a+b+c \\ b-c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

(c) El conjunto

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ a-b \\ a+b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

(d) El conjunto

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

(e) El conjunto

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & -c \\ c & a-b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

(f) El conjunto

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 4 \\ c & b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

(g) El conjunto

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a+b & 0 \\ b+c & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

(h) El conjunto

$$H = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det(A) \neq 0 \right\}.$$

(i) El conjunto de todos los polinomios de grado exactamente 2. Recordar que $\mathbb{R}_2[x]$ contiene a los de grado menor o igual a 2.

(j) El conjunto de funciones

$$O = \{\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

donde $\omega \in \mathbb{R}$ es un valor fijo.

(k) El conjunto

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

(l) El conjunto

$$Z = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] : p(0) = 0\}.$$

Sugerencia: Para encontrar generadores empiece con $n = 1$, $n = 2$ y luego en general.

2. Sea $S = \{v_1, ..., v_r\}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial V. Sea $H = \text{Gen}(S)$ el subespacio vectorial de V generado por S. Pruebe que si algún v_j es combinación lineal de $S' = S \setminus \{v_j\}$, entonces $H = \text{Gen}(S')$.

C 12

Kernel e Imagen

12.1 Transformaciones Lineales en Espacios Vectoriales

Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Una función $T : V \to W$ es una *transformación lineal* si cumple,

1. Para todo par $v, w \in V$ se tiene $T(v + w) = T(v) + T(w)$.
2. Para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y todo $v \in V$, se tiene $T(\alpha v) = \alpha T(v)$.

Ejemplo 12.1.1. *1. Considere,*

$$T : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3, \quad T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x - y \end{pmatrix}.$$

Es una transformación lineal ya que dados $x, y, x', y', \alpha \in \mathbb{K}$ se tiene,

$$\begin{aligned} T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ (x + x') - (y + y') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ x - y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ x' - y' \end{pmatrix} = T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right), \end{aligned}$$

$$T\left(\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha(x - y) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ x - y \end{pmatrix} = \alpha T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right).$$

2. Considere,

$$T : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^{2\times 2}, \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ x + y & x - y \end{pmatrix}$$

Es una transformación lineal ya que dados $x, y, x', y', \alpha \in \mathbb{K}$ se tiene,

$$\begin{aligned} T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} x + x' & y + y' \\ (x + x') + (y + y') & (x + x') - (y + y') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \\ x + y & x - y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & y' \\ x' + y' & x' - y' \end{pmatrix} = T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$T\left(\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha y \\ \alpha(x + y) & \alpha(x - y) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x & y \\ x + y & x - y \end{pmatrix} = \alpha T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right).$$

3. *Considere,*

$$T : \mathbb{K}_2[x] \to \mathbb{K}^3, \quad T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

es una transformación lineal ya que dados $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, q(x) = b_0 + b_1x + x^2 \in \mathbb{K}_2[x]$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ se tiene,

$$T(p(x)+q(x)) = T((a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2) = \begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = T(p(x))+T(q(x)),$$

$$T(\alpha p(x)) = T(\alpha a_0 + \alpha a_1x + \alpha a_2x^2) = \begin{pmatrix} \alpha a_0 \\ \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \alpha T(p(x)).$$

4. *Considere,*

$$T : \mathbb{K}_n[x] \to \mathbb{K}_{n-1}[x], \quad T(p(x)) = p'(x),$$

donde $p'(x)$ es la derivada respecto a x de $p(x)$. Esta función es una transformación lineal ya que dados $p(x), q(x) \in \mathbb{K}_n[x]$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ se tiene,

$$T(p(x) + q(x)) = (p(x) + q(x))' = p'(x) + q'(x) = T(p(x)) + T(q(x)),$$

$$T(\alpha p(x)) = (\alpha p(x))' = \alpha p'(x) = \alpha T(p(x)).$$

12.2 Kernel o Espacio Nulo

Dada una transformación lineal $T : V \to W$ entre espacios vectoriales, definimos su *Kernel o Núcleo o Espacio Nulo* por el conjunto

$$\text{Ker}(T) = \{v \in V : T(v) = 0_W\}.$$

Observación 12.2.1. *Notar que siempre $0_V \in Ker(T)$ ya que la propiedad $0_V = 20_V$ nos da,*

$$T(0_V) = T(20_V) = 2T(0_V) \implies T(0_V) = 0_W.$$

Ejemplo 12.2.2. *1. Calculamos el Kernel para*

$$T : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3, \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x-y \end{pmatrix}$$

como sigue. Notemos que,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in Ker(T) \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{K}^2}.$$

Por lo tanto $Ker(T) = \{0_{\mathbb{K}^2}\}$.

2. Para

$$T : \mathbb{K}_2[x] \to \mathbb{K}^3, \quad T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

podemos calcular su kernel como sigue. Se tiene,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 \in Ker(T) \iff \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0(x).$$

Por lo tanto $Ker(T) = \{0(x)\}$*, donde recordamos que* $0(x)$ *es el polinomio nulo.*

3. Considere la transformación lineal (ejercicio),

$$T : \mathbb{K}_2[x] \to \mathbb{K}_1[x], \quad T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + (a_2 - a_0)x.$$

Su Kernel se calcula como sigue.

$$a_0+a_1x+a_2x^2 \in Ker(T) \iff a_1+(a_2-a_0)x = 0 \iff a_1 = 0,\, a_2-a_0 = 0 \iff a_0 = a_2,\, a_1 = 0,$$

de donde obtenemos a a_2 *como parametro libre (podemos escoger a* a_0 *tambien). Luego,*

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in Ker(T) \iff p(x) = a_2 + a_2x^2 = a_2(1 + x^2),\, a_2 \in \mathbb{K},$$

es decir,

$$Ker(T) = Gen_{\mathbb{K}}\left\{1 + x^2\right\}.$$

4. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

y la transformación lineal $A : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ *que define. Su Kernel se calcula como,*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in Ker(A) \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x+y & = & 0 \\ 2x+2y & = & 0 \end{cases},$$

donde obtenemos $x = -y$*, es decir, a* $y \in \mathbb{K}$ *como paramentro libre. Por lo tanto,*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in Ker(A) \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\, x \in \mathbb{K},$$

o mejor escrito,

$$Ker(A) = Gen_{\mathbb{K}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

12.3 Imágen o Espacio Columna

Dada una transformación lineal $T : V \to W$ entre espacios vectoriales, definimos su *Imágen o Espacio Columna* por el conjunto

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(v) \in W : v \in V\}.$$

Un hecho rapido que se deduce de la unidad pasada es el siguiente.

Teorema 12.3.1. *Si $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ es una transformación lineal, entonces*

$$Im(T) = Gen_{\mathbb{K}}\{T(e_1), ..., T(e_n)\}.$$

En particular, $Im(T)$ es generado por las columnas de la matriz asociada $[T]$.

Ejemplo 12.3.2. *1. Para la transformación lineal*

$$T : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3, \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x-y \end{pmatrix},$$

su matriz asociada viene dada por

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Del teorema anterior concluimos entonces que

$$Im(T) = Gen_{\mathbb{K}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Teorema 12.3.3. *Dada una transformación lineal $T : V \to W$ se tiene.*

1. *$Ker(T)$ es un subespacio vectorial de V.*
2. *$Im(T)$ es un subespacio vectorial de W.*

12.4 Ejercicios

1. Considere las siguientes transformaciones lineales $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que definidas por la siguientes matrices de orden $m \times n$, y encuentre $\mathrm{Ker}(T_A)$ y $\mathrm{Im}(T_A)$ como conjuntos generados.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Considere la función entre espacios vectoriales

$$T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{3\times 2}, \quad T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b \\ c & d-c \\ a+c & a+d \end{pmatrix}.$$

(a) Pruebe que T es una transformación lineal.

(b) Determine $\mathrm{Ker}(T)$ como un conjunto generado.

3. Considere la función entre espacios vectoriales

$$T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_4[x], \quad T(p(x)) = (x^2 + 1)p(x).$$

(a) Pruebe que T es una transformación lineal.

(b) Determine $\mathrm{Ker}(T)$ como un conjunto generado.

(c) ¿Si $1 - x^4 \in \mathbb{R}_4[x]$, se tiene que $1 - x^4 \in \mathrm{Im}(T)$?

C 13

Base de un Espacio Vectorial

13.1 Independencia Lineal

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un conjunto $S = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$ se dice *linealmente independiente* (l.i) si la *ecuacion vectorial homogenea*

$$x_1 v_1 + ... + x_n v_n = 0, \quad x_i \in \mathbb{K}$$

implica $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ como solución única. En caso contrario, se dira que S es *linealmente dependiente* (l.d).

Observación 13.1.1. *Si $v \in V$ es multiplo de $w \in V$, es decir, $v = \alpha w$ con $\alpha \neq 0$, entonces $S = \{v, w\}$ es linealmente dependiente.*

Ejemplo 13.1.2.

1. *El conjunto de matrices*

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{K}^{2\times 2},$$

es linealmente independiente. De hecho, la ecuacion homogenea

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_2 \\ x_3 & x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

implica $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ de forma única.

2. *El conjunto de matrices*

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{K}^{2\times 2},$$

es linealmente dependiente, ya que $x_1 = x_2 = 1$ y $x_3 = -1$ resuelven la ecuación homogénea.

3. *El conjunto de polinomios*

$$S = \{1 + x, x^2\} \subset \mathbb{R}_2[x],$$

es linealmente independiente. De hecho,

$$a_0(1+x)+a_1x^2=0 \iff a_0+a_0x+a_1x^2=0,$$

que por igualación de coeficientes nos da $a_0=a_1=a_2=0$.

13.2 Bases

Una *base* para un espacio vectorial V es cualquier conjunto $S\subset V$ tal que

1. es linealmente independiente,
2. genera al espacio, es decir
$$V=\mathrm{Gen}_{\mathbb{K}} S.$$

Ejemplo 13.2.1. *En la unidad anterior vimos que*

$$S=\{v_1,...,v_n\}\subset \mathbb{K}^n \textit{es linealmente independiente} \iff \mathbb{K}^n=Gen_{\mathbb{K}}(S) \iff S \textit{ es base.}$$

Usando esto tenemos que,

$$S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\},$$

es base de $\mathbb{K}^2$ *o que*

$$S=\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\},$$

es base de $\mathbb{K}^3$.

Ejemplo 13.2.2. *Siempre que se trabaja con un espacio vectorial, necesitamos fijar una base y que todos estemos de acuerdo con esta elección. Una vez hecho esto, dicha base queda con el nombre de* canónica.

1. *Una base canónica para el espacio* $\mathbb{K}^n$ *es dada por los vectores canónicos* $S=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ *donde*
$$e_j=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},$$
donde el 1 *va ubicado en la* j*-esima entrada.*
2. *El espacio* $\mathbb{K}^{m\times n}$ *tiene como base a*
$$S=\{e_{11},e_{12},...,e_{1n},e_{21},e_{22},...,e_{2n},...,e_{m1},...,e_{mn}\}=\{e_{ij}:1\leq i\leq m,\, 1\leq j\leq n\},$$

donde

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

donde el 1 *va ubicado en la* (i, j)*-esima entrada. Por dar un ejemplo numérico, el espacio* $\mathbb{K}^{2\times 2}$ *tiene base canónica dada por*

$$S = \{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. *El espacio* $\mathbb{K}_n[x]$ *tiene base canónica dada por*

$$S = \{1, x, x^2, ..., x^n\} = \{x^j : j = 0, 1, ..., n\}.$$

Es directo que genera el $\mathbb{K}_n[x]$ *ya que todo polinomio de grado* $\leq n$ *es de la forma* $a_0+a_1x+...+a_nx^n$. *Más aún, la ecuación homogénea*

$$a_0 + a_1x + ... + a_nx^n = 0,$$

implica $a_0 = ... = a_n = 0$ *por igualación de coeficientes. Probando que* S *es base.*

4. *El espacio de polinomios* $\mathbb{K}[x]$ *tiene una base infinita dada por*

$$S = \{1, x, x^2, ...\} = \{x^j : j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$$

5. *El espacio de vectores infinitos* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *tiene una base infinita dada por*

$$S = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}, \quad e_n = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$$

donde el 1 *aparece en la* n*-ésima posición continuando con infinitos ceros.*

El siguiente teorema cierra esta sección diciendo que cualquier espacio vectorial que consideremos tendrá una base. Su demostración se omite, pero se deja al lector buscar sobre el uso del *axioma de elección* para este hecho.

Teorema 13.2.3. *Todo espacio vectorial tiene una base.*

□

13.3 Imagen de una Matriz

Recordar que toda matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ define una transformación lineal,

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad A(x) = A \cdot x.$$

Sea A^* la matriz escalonada dada por aplicar eliminación Gaussiana a A. Las *columnas pivotes* de A son aquellas indexadas por los pivotes de A^*.

Teorema 13.3.1. *Una base para Im(A), la imágen de la transformación lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, es el conjunto de las columnas pivotes de A.*

□

Ejemplo 13.3.2. *Consideremos la transformación lineal $A : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^3$ dada por la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando eliminación Gaussiana,

$$A \xrightarrow{F_2 = F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = A^*.$$

Luego, las columnas pivotes de A son,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y forman una base para Im(A).

13.4 Ejercicios

1. Determine los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que los vectores,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix},$$

son una base de $\mathbb{R}^2$.

2. Determine los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que los vectores,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \alpha \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

son una base de $\mathbb{R}^4$.

3. Determine los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que los vectores,

$$p_1(x) = 1 + x,\, p_2(x) = \alpha x - 1,$$

son una base de $\mathbb{R}_1[x]$.

4. Determine los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que los vectores,

$$p_1(x) = 1 + x,\, p_2(x) = \alpha x - x^2,\, p_3(x) = 1 - x^2,$$

son una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

5. Determine los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que los vectores,

$$p_1(x) = 1 + x,\, p_2(x) = \alpha x - x^2,\, p_3(x) = 1 - x^2, p_4(x) = 1 + x^3$$

son una base de $\mathbb{R}_3[x]$.

6. En los problemas 12.1, 12.2, 12.3 calcule bases para el kernel e imagen de las transformaciones lineales asociadas.

7. Pruebe que una transformación lineal $T : V \to W$ es inyectiva si y sólo si $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$.

C 14

Sistemas de Coordenadas

14.1 Representación Única

Teorema 14.1.1 (Teorema de Representación Única)**.** *Sea V un espacio vectorial y $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base para V. Entonces, para todo $v \in V$ existen únicos $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tal que,*

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n.$$

Proof. asdasd

$\square$

Dado $v \in V$ y una base $B = \{v_1, ..., v_n\}$ para V. Las *B-coordenadas* de v son los únicos escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ dados en el teorema anterior. De este modo definimos su *vector de B-coordenadas*,

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

Observación 14.1.2. *Si $V = \mathbb{K}^n$ y $B = \{e_1, ..., e_n\}$ es la base canónica, entonces*

$$v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in V \implies [v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Es decir, las entradas de una elemento de $\mathbb{K}^n$ son precisamente sus coordenadas en la base canónica.

Ejemplo 14.1.3. *En $\mathbb{K}^2$ consideremos $v = (3, 5)^T$. Sobre la base canonica $B = \{e_1, e_2\}$ se tiene directamente que*

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = v$$

como vimos en la observación. Consideremos ahora la base

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Buscamos las B'-coordenadas de v como sigue,

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + 2y &= 3 \\ x - y &= 5 \end{cases} \iff x = 5,\, y = -1.$$

Por lo tanto

$$[v]_{B'} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Más aún,

$$[e_1]_{B'} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \quad [e_e]_{B'} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 14.1.4. *Considere $\mathbb{K}_2[x]$, su base canónica $B = \{1, x, x^2\}$ y otra base $B' = \{1-x, x, x^2-1\}$. Sea $p(x) = 3 + 2x + x^2 \in \mathbb{K}_2[x]$. En la base canónica se tiene*

$$[p(x)]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3.$$

En la base B' buscamos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tal que

$$\begin{aligned} \alpha_1(1-x) + \alpha_2 x + \alpha_3(x^2-1) = 3 + 2x + x^2 &\iff (\alpha_1 - \alpha_3) + (\alpha_2 - \alpha_1)x + \alpha_3 x^2 = 3 + 2x + x^2 \\ &\iff \alpha_1 - \alpha_3 = 3,\, \alpha_2 - \alpha_1 = 2,\, \alpha_3 = 1 \\ &\iff \alpha_1 = 4,\, \alpha_2 = 6,\, \alpha_3 = 1, \end{aligned}$$

es decir,

$$[p(x)]_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

14.2 Isomorfismo de Coordenadas

Una transformación lineal $T : V \to W$ entre espacios vectoriales es *invertible* si es biyectiva, es decir, existe una inversa $T^{-1} : W \to V$. Diremos que los espacios vectoriales V y W son *isomorfos* (del griego, *misma forma*) si existe una transformación lineal $T : V \to W$ invertible entre ellos.

Teorema 14.2.1. *Dado un espacio vectorial V y una base $B = \{v_1, ..., v_n\}$ para V, la función*

$$T_B : V \to \mathbb{K}^n, \quad T_B(v) = [v]_B,$$

es invertible. Es decir, los espacios V y $\mathbb{K}^n$ son isomorfos.

Proof. hgf

□

En conclusión trabajar con una espacio vectorial de base finita se convertirá en trabajar con un espacio del tipo $\mathbb{K}^n$.

14.3 Ejercicios

1. Encuentre las coordenadas de $e_1, e_2, e_1 + 2e_2 \in \mathbb{R}^2$ en la siguiente base de $\mathbb{R}^2$,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Encuentre las coordenadas de $e_1, e_2, e_3, e_1 + 2e_2 + 3e_3 \in \mathbb{R}^3$ en la siguiente base de $\mathbb{R}^3$,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Pruebe que el conjunto $S = \{1-t, t+t^2, 1-2t+t^2\}$ es una base para $\mathbb{R}_2[x]$ y calcule las coordenadas $[p(x)]_S$ de $p(x) = 1 + 2t + 3t^2$ en esta base.

4. Pruebe que el conjunto $S = \{1, 2t, -2 + 4t^2, -12t + 8t^3\}$ definen una base para $\mathbb{R}_3[x]$. Encuentre las coordenadas $[p(x)]_S$ de $p(x) = 1 + 2t + 3t^2 + 4t^3$ en esta base.

5. Muestre que si $T : V \to W$ es una transformación lineal invertible de espacios vectoriales, entonces $S = \{v_1, ..., v_n\}$ es base de V si y sólo si $S' = \{T(v_1), ..., T(v_n)\}$ es base de W. De este modo las coordenadas se conservan sobre cada base. Por ello, V y W se pueden tratar como un mismo $\mathbb{K}^n$.

C 15

Dimensión y Rango

15.1 Dimensión

Teorema 15.1.1. *Sea V es un espacio vectorial y $B \subset V$ una base finita. Si $B' \subset V$ es cualquier otra base, entonces en términos de cardinalidad*

$$|B| = |B'|.$$

Es decir, todas las base de V son del mismo tamaño.

Proof. □

Ejemplo 15.1.2. *1. Por convención siempre se tiene*

$$\dim_{\mathbb{K}} V = 0 \iff V = \{0\}.$$

2. *Si $n \geq 1$, entonces $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$. Esto es directo del hecho de tener una base canónica $B = \{e_1, ..., e_n\}$ con $|B| = n$.*

3. *Para $m, n \geq 1$ se tiene $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{m \times n} = mn$. Esto es directo del hecho que su base canónica,*

$$B = \{e_{11}, ..., e_{1n}, e_{21}, ..., e_{2n}, ..., e_{m1} ..., e_{mn}\}$$

tiene mn elementos.

4. *El espacio $\mathbb{K}_n[x]$ de los polinomios de grado $\leq n$ tiene dimensión*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[x] = n + 1$$

ya que su base canónica es dada por

$$B = \{1, x, ..., x^n\} = \{x^j : j = 0, ..., n\}.$$

El teorema anterior nos permite definir la *dimensión* de un espacio vectorial como

$$\dim_{\mathbb{K}} V = |B|,$$

para alguna base $B \subset V$. Si la base de V es infinita, en este caso simplemente denotamos

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \infty.$$

Observación 15.1.3. *Notar que en la definición hacemos énfasis en el cuerpo $\mathbb{K}$. Esto se debe a que el cuerpo a considerar afecta la dimensión. Por ejemplo, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ entonces*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1.$$

Sin embargo, $\mathbb{C}$ es generado por 1 y i sobre los numeros reales dado que todo numero complejo es de la forma $a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Es decir,

$$\mathbb{C} = Gen_{\mathbb{R}}\{1, i\}.$$

Más aún $a + bi \iff a = b = 0$, y por esto, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

Ejemplo 15.1.4. *1. Por convención siempre se tiene*

$$\dim_{\mathbb{K}} V = 0 \iff V = \{0\}.$$

2. Si $n \geq 1$, entonces $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$. Esto es directo del hecho de tener una base canónica $B = \{e_1, ..., e_n\}$ con $|B| = n$.

3. Para $m, n \geq 1$ se tiene $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{m\times n} = mn$. Esto es directo del hecho que su base canónica,

$$B = \{e_{11}, ..., e_{1n}, e_{21}, ..., e_{2n}, ..., e_{m1} ..., e_{mn}\}$$

tiene mn elementos.

4. El espacio $\mathbb{K}_n[x]$ de los polinomios de grado $\leq n$ tiene dimensión

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[x] = n + 1$$

ya que su base canónica es dada por

$$B = \{1, x, ..., x^n\} = \{x^j : j = 0, ..., n\}.$$

5. El espacio de los polinomios $\mathbb{K}[x]$ tiene dimensión

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x] = \infty,$$

dado que su base es $B = \{1, x, x^2, ...\} = \{x^j : j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$.

6. Considere el siguiente subespacio de $\mathbb{K}^4$ dado por

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a+b+c \\ a+2b \\ b-c \\ c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{K} \right\}.$$

Encontraremos su dimensión como sigue. Primero buscamos generadores mediante,

$$\begin{pmatrix} a+b+c \\ a+2b \\ b-c \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto el conjunto

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

genera a H, y más aún no es difícil ver que es linealmente independiente (ejercicio). Por lo tanto S es base. De este modo concluimos que

$$\dim_{\mathbb{K}} H = 3.$$

Teorema 15.1.5 (Propiedades de la Dimensión)**.** *Sea V un espacio vectorial de dimensión n.*

1. *Si $H \subset V$ es un subespacio vectorial, entonces*

$$\dim_{\mathbb{K}} H < n.$$

2. *Si $B \subset V$ es cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes, entonces B es base de V.*

□

15.2 Rango

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita. Definimos el *rango* de T como

$$\operatorname{rg}(T) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(T).$$

Teorema 15.2.1 (del Rango)**.** *Se tiene*

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} Ker(T) + \dim_{\mathbb{K}} Im(T).$$

□

Este teorema tiene consecuencias técnicas importantes. En términos aplicados, nos permite conocer el rango y la dimensión del kernel de una transformación sólo con calcular una de ellas. Una consecuencia importante de este teorema es la siguiente.

Teorema 15.2.2. *Sea $T : V \to W$ una transformación lineal entre espacios vectoriales con $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W$. Las siguientes son equivalentes.*

1. *T es invertible,*
2. *$Ker(T) = \{0\}$,*

3. La ecuación $T(v) = 0$ tiene solución única $v = 0$.

4. $Im(T) = W$,

5. La ecuación $T(v) = b$ tiene solución única para cualquier $b \in W$.

$\square$

Ejemplo 15.2.3. *Para cada $n \geq 1$ consideremos la transformación lineal*

$$T : \mathbb{K}_n[x] \to \mathbb{K}^{n+1}, \quad T(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ddots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Este corresponde a las B-coordenadas sobre la base canónica $B = \{1, x, ..., x^n\}$. Notar que $Ker(T) = \{0\}$ y como $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[x] = n + 1$, se concluye directamente que T es invertible. Es decir, $\mathbb{K}_n[x]$ y $\mathbb{K}^{n+1}$ son isomorfos.

Ejemplo 15.2.4. *Consideremos la transformación lineal $A : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^3$ dada por la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Encontraremos las dimensiones de $Ker(A)$ y $Im(A)$. Usamos eliminación Gaussiana para obtener la matriz escalonada

$$A \xrightarrow{\text{operaciones filas}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, sabemos que las columnas pivotes de A

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

forman una base de $Im(A)$ con $\dim_{\mathbb{K}} Im(A) = 3$. Por el teorema del rango sabemos que debemos tener

$$\dim_{\mathbb{K}} Ker(A) = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^4 - \dim_{\mathbb{K}} Im(A) = 4 - 3 = 1.$$

De hecho, usando la matriz escalonada podemos concluir que

$$Ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -21 \\ 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

15.3 Ejercicios

1. Para los problemas 12.1, 12.2, 12.3 de la parte I, encuentre las dimensiones de los Kernels e Imagenes de las transformaciones lineales respectivas.

2. Determine la dimensión de los espacios vectoriales del problema 1) de parte I.

3. Determine la dimensión del subespacio

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a-4b-c \\ a-b \\ a-c \\ a+2b+3c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Muestre que si H es un subespacio vectorial de V, entonces $\dim H \leq \dim V$. **Pista:** Pruebe que toda base de H se puede completar a una base de V.

5. Muestre que si $\dim V = n$ y $S = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$ es linealmente independiente, entonces S es base de V.

C 16

Cambio de Coordenadas

16.1 La Matriz de una Transformación Lineal

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Sean $B_V = \{v_1, ..., v_n\}$ una base para V y $W = B_W = \{w_1, ..., w_n\}$ una base para W. Definimos la *matriz asociada a T en bases B_V y B_W* por

$$[T]_{B_V}^{B_W} = \left([T(v_1)]_{B_W} \dots [T(v_n)]_{B_W}\right).$$

Ejemplo 16.1.1. *Considere la transformación lineal*

$$T : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3, \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x-y \end{pmatrix}.$$

En las bases canonicas $B_2 = \{e_1, e_2\}$ para $\mathbb{K}^2$ y $B_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ se tiene

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + e_3 \implies [T(e_1)]_{B_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$T(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = e_1 - e_3 \implies [T(e_1)]_{B_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

por lo tanto

$$[T]_{B_2}^{B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si cambiamos las bases a

$$B_2' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{K}^2, \quad B_3' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{K}^3,$$

entonces ahora tenemos que

$$T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \implies \left[T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_{B_3'} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = (-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (-3)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \implies \left[T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_{B_3'} = \begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$[T]_{B_2'}^{B_3'} = \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & -3\\0 & 2\end{pmatrix}.$$

□

Observación 16.1.2. *Si $T:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m$ es un transformación lineal, su matriz asociada T en las bases canónicas $B_n=\{e_1,...,e_n\}$ y $B_m=\{e_1,...,e_m\}$ coincide precisamente con $[T]$ definida en la unidad anterior.*

La gran utilidad de lo anterior es que nos permite analizar cualquier transformación lineal como una matriz. Más aun, tenemos

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "T_{B_V}"'] & W \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "{[T]_{B_V}^{B_W}}"'] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "T_{B_W}^{-1}"'] \end{tikzcd} \quad , \quad T = T_{B_W}^{-1}\circ[T]_{B_V}^{B_W}\circ T_{B_V}.$$

recordando que T_{B_V} y T_{B_W} son las funciones coordenadas en las respectivas bases. Vamos ahora con un ejemplo un poco mas general, pero importante de conocer.

Ejemplo 16.1.3. *Fijando $n\geq 1$, considere la transformación lineal*

$$T:\mathbb{K}_n[x]\to\mathbb{K}_{n-1}[x],\quad T(p(x))=p'(x).$$

Consideremos las bases canónicas,

$$B=\{1,x,...,x^n\}\subset\mathbb{K}_n[x],\quad B'=\{1,x,...,x^{n-1}\}\subset\mathbb{K}_{n-1}[x]$$

para cada espacio. Notar que para cada elemento de la base B se tiene

$$T(x^j)=\begin{cases}0 & j=0\\ jx^{j-1} & j=1,...,n.\end{cases}$$

En términos de coordenadas en la base B' se obtiene

$$[T(x^j)]_{B'} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & j = 0 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & j = 1, ..., n. \end{cases},$$

donde el valor j va en la j-esima posición. Por lo tanto,

$$[T]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & n \end{pmatrix}.$$

□

16.2 Matriz Cambio de Base

¿Qué ocurre con $[T]_{B_V}^{B_W}$ si cambiamos las bases? Esta pregunta la responderemos en dos pasos.

16.2.1 Cambio de base sobre un espacio

Para el espacio vectorial V supongamos que tenemos dos bases, digamos, B y B_V. Tomemos un vector $v \in V$ y supongamos que conocemos a $[v]_B$. Queremos encontrar a $[v]_{B'}$ en términos de $[v]_B$. Para ello, observamos el siguiente diagrama

$$\mathbb{K}^n \xrightarrow[T_B^{-1}]{} V \xrightarrow[T_{B'}]{} \mathbb{K}^n \quad ,$$

$$[v]_B \longrightarrow v \longrightarrow [v]_{B'}$$

de donde se deduce que $[v]_{B'} = T_{B'} \circ T_B^{-1}[v]_B$. Finalmente, como $T_{B'} \circ T_B^{-1}$ es una transformación invertible sobre $\mathbb{K}^n$, este debe quedar definido por una matriz de orden $n \times n$ sobre la base canonica. En otras palabras diremos que,

$$C_{B \to B'} := [T_{B'} \circ T_B^{-1}] = \left(T_{B'} \circ T_B^{-1}(e_1) ... T_{B'} \circ T_B^{-1}(e_n)\right)$$

es la *cambio de base* entre B y B', y que actua como

$$[v]_{B'} = C_{B \to B'} \cdot [v]_B.$$

Observar la siguiente propiedad por invertibilidad de la situación anterior,

$$C_{B' \to B} = C_{B \to B'}^{-1}.$$

Ejemplo 16.2.1. *Consideremos el espacio $\mathbb{K}_2[x]$ las siguientes bases para este*

$$B = \{1, x, x^2\}, \quad B' = \{1-x, x, x^2 - x\}.$$

Notemos que sobre la base canonica B se tiene

$$T_B(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_0 e_1 + a_1 e_2 + a_2 e_3,$$

$$T_B^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Por lo tanto,

$$C_{B\to B'} = \left(T_{B'} \circ T_B^{-1}(e_1)\ T_{B'} \circ T_B^{-1}(e_2)\ T_{B'} \circ T_B^{-1}(e_3)\right) = \left(T_{B'}(1)\ T_{B'}(x)\ T_{B'}(x^2)\right).$$

Calculamos,

$$1 = 1\cdot(1-x) + 1\cdot x + 0\cdot(x^2 - x) \implies T_{B'}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x = 0\cdot(1-x) + 1\cdot x + 0\cdot(x^2 - x) \implies T_{B'}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x^2 = 0\cdot(1-x) + 1\cdot x + 1\cdot(x^2 - x) \implies T_{B'}(x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$C_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En base B	$\mathbb{K}^3 \xrightarrow{C_{B\to B'}} \mathbb{K}^3$	En base B'
1	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$1\cdot(1-x) + 1\cdot x + 0\cdot(x^2 - x)$
x	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$0\cdot(1-x) + 1\cdot x + 0\cdot(x^2 - x)$
x^2	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$0\cdot(1-x) + 1\cdot x + 1\cdot(x^2 - x)$
$1 + 2x + 3x^2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$	$1\cdot(1-x) + 6\cdot x + 3\cdot(x^2 - x)$

Table 16.1: Tabla esquemática del funcionamiento de $C_{B\to B'}$.

16.2.2 Cambio de base en ambos espacios

Supongamos ahora que B_V y B'_V son bases para V, y que B_W y B'_W son bases para W. Supongamos además que V es de dimensión n, y W es de dimensión m. Dada una transformación lineal $T : V \to W$ se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "{[T]_{B'_V}^{B'_W}}"] \arrow[d, "T_{B'_V}^{-1}"'] & \mathbb{K}^m \\
V \arrow[r, "T"'] \arrow[d, "T_{B_V}"'] & W \arrow[u, "T'_{B_W}"'] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "{[T]_{B_V}^{B_W}}"'] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "T_{B_W}^{-1}"']
\end{tikzcd}.$$

Usando el hecho de que en términos matriciales se tiene,

$$C_{B'_V \to B_V} = T_{B_V} \circ T_{B'_V}^{-1}$$

y

$$C_{B_W \to B'_W} = T_{B_V} \circ T_{B'_V}^{-1}$$

concluimos que

$$[T]_{B'_V}^{B'_W} = C_{B_W \to B'_W} \cdot [T]_{B_V}^{B_W} \cdot C_{B'_V \to B_V},$$

lo que se conoce como la *formula del cambio de base.*

Ejemplo 16.2.2. *Considere la transformación lineal*

$$T : \mathbb{K}_2[x] \to \mathbb{K}_1[x], \quad T(p(x)) = p'(x),$$

de la cual sabemos que en bases canónicas $B_2 = \{1, x, x^2\} \subset \mathbb{K}_2[x]$ *y* $B_1 = \{1, x\} \subset \mathbb{K}_1[x]$ *se tiene matriz asociada,*

$$[T]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Consideremos nuevas bases dadas por

$$B'_2 = \{1 - x, x, x^-1\} \subset \mathbb{K}_2[x], \quad B'_1 = \{1 - x, x\} \subset \mathbb{K}_1[x].$$

Podemos calcular (ejercicio) que

$$C_{B'_2 \to B_2} = C_{B_2 \to B'_2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{B_1 \to B'_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$[T]_{B'_2}^{B'_1} = C_{B_1 \to B'_1} [T]_{B_2}^{B_1} C_{B'_2 \to B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

16.3 Ejercicios

1. Considere las bases de $\mathbb{R}^3$
$$S=\{e_1,e_2,e_3\},\quad S'=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\},\quad S''=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right\}.$$
Calcule las matrices cambio de base $C_{S\to S'},C_{S\to S''},C_{S'\to S''}$. Qué observa al hacer el producto matricial $C_{S'\to S''}C_{S\to S'}$? Es algo general?

2. Considere la transformación lineal
$$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4,\quad T\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x+y\\x+z\\z+y\\x-y+z\end{pmatrix},$$
y las bases
$$S_3=\{e_1,e_2,e_3\},\quad S_3'=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\},$$
para $\mathbb{R}^3$ y las bases
$$S_4=\{e_1,e_2,e_3,e_4\},\quad S_4'=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\},$$
para $\mathbb{R}^4$. Calcule las matrices $[T]_{S_3}^{S_4},[T]_{S_3'}^{S_4}$, $[T]_{S_3}^{S_4'}$ y $[T]_{S_3'}^{S_4'}$. ¿Cómo usaría las matrices cambio de bases para acelerar los otros calculos desde la matriz $[T]_{S_3}^{S_4}$?

3. Considere las bases $S=\{1,x,x^2\}$ y $S'=\{1-t,t+t^2,1-2t+t^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$. Encuentre la matriz cambio de base $C_{S\to S'}$.

4. Considere la transformación lineal
$$T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}_2[x],\quad T(p(x))=p'(x),$$
y las bases
$$S_3=\{1,x,x^2,x^3\},\quad S_3'=\left\{1,2t,4t^2-2,8t^3-12t\right\},$$
para $\mathbb{R}_3[x]$ y las bases
$$S_2=\{1,x,x^2\},\quad S_2'=\left\{1-x,x,x^2-x\right\},$$
para $\mathbb{R}_2[x]$. Calcule las matrices $[T]_{S_3}^{S_2},[T]_{S_3'}^{S_2}$, $[T]_{S_3}^{S_2'}$ y $[T]_{S_3'}^{S_2'}$. ¿Cómo usaría las matrices cambio de bases para acelerar los otros calculos desde la matriz $[T]_{S_3}^{S_2}$?

C 17

Valores y Vectores Propios

17.1 La Ecuación Característica

Sea $T : V \to V$ una transformación lineal sobre un mismo espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ de dimensión $n > 0$. Un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio de T si la ecuación vectorial

$$T(v) = \lambda v,$$

tiene solución $v \neq 0$. Dichas soluciones se llaman vectores propios de T asociados a λ.

Ejemplo 17.1.1. *Considere la transformación lineal $A : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ dada por la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Los vectores $v = (1, 0)^T$, $w = (1, 1)^T$ son vectores propios de A, de hecho

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2v,$$

$$A \cdot w = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3w,$$

asociados a los valores propios $\lambda = 2$ y $\lambda = 3$ respectivamente.

Ejemplo 17.1.2. *Considere la transformación lineal,*

$$T : \mathbb{K}_2[x] \to \mathbb{K}_2[x], \quad T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 2a_0 + (a_0 + 2a_1)x + (a_1 + 2a_2)x^2.$$

Considerar el vector $x^2 \in \mathbb{K}_2[x]$, y notar que

$$T(x^2) = 2x^2,$$

por lo tanto x^2 es vector propio de T asociado al valor propio $\lambda = 2$.

¿Cómo encontramos todos los valores/vectores propios de una transfomación lineal $T : V \to V$? En general procedemos de la siguiente manera:

1. Hallamos la matriz $A = [T]_B^B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ en alguna base para V (usualmente la base canónica).
2. Usando B-coordenadas traducimos la ecuación $T(v) = \lambda v$ a
$$A[v]_B = \lambda[v]_B, \quad [v]_B \in \mathbb{K}^n,$$
lo cual es equivalente al sistema lineal
$$(A - \lambda I_{n\times n})x = 0, \quad x \in \mathbb{K}^n.$$
3. Si $A-\lambda I_{n\times n}$ es invertible, entonces el sistema tiene solución única $x = 0$. Dado que pedimos $v \neq 0$, no podemos tener $x \neq 0$. Luego si queremos valores propios, la matriz $A - \lambda I_{n\times n}$ debe ser NO invertible.
4. Esto ultimo se traduce a que, λ es valor propio de T si y sólo si
$$\det(A - \lambda I_{n\times n}) = 0.$$
Esto ultimo se conoce como la ecuación característica.

Reescribimos lo anterior también para matrices.

Teorema 17.1.3. *Sea $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ una transformación lineal dada por una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio de A si y sólo si*
$$\det(A - \lambda I_{n\times n}) = 0.$$
□

17.2 Espectro y Espacios Propios

Dada una transformación lineal $T : V \to V$ definimos su espectro por
$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda \text{ es valor propio de } T\},$$
y cada valor propio $\lambda \in \sigma(T)$ tiene asociado un espacio propio definido por
$$E_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\} = \mathrm{Ker}(T - \lambda I),$$
donde $I : V \to V$ es la identidad sobre V dada por $I(v) = v$.

Ejemplo 17.2.1. *Considere la transformación lineal $A : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ dada por la matriz*
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

del ejemplo anterior. En este caso, la ecuación característica es

$$\det(A - \lambda I_{2\times 2}) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-3) = 0,$$

lo que nos da

$$\sigma(A) = \{2, 3\}.$$

Calculamos ahora los espacios propios. Para $\lambda = 2$ *se tiene*

$$E_2 = Ker(A - 2I_{2\times 2}) = Ker \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2 \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff y = 0.$$

Por lo tanto

$$E_2 = Gen_{\mathbb{K}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Para $\lambda = 3$ *se tiene*

$$E_3 = Ker(A - 3I_{2\times 2}) = Ker \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_3 \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = y.$$

Por lo tanto

$$E_3 = Gen_{\mathbb{K}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

17.3 Teoremas Elementales

Teorema 17.3.1. *Los valores propios de una matriz triangular son las entradas de su diagonal.*

□

Ejemplo 17.3.2. *Por ejemplo, para las matrices*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 7 & 12 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

se tiene

$$\sigma(A_1) = \{1, 4, -1\}, \quad \sigma(A_2) = \{-2, -3, 1\}.$$

□

Ejemplo 17.3.3. *Considere la transformación lineal previa,*

$$T : \mathbb{K}_2[x] \to \mathbb{K}_2[x], \quad T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 2a_0 + (a_0 + 2a_1)x + (a_1 + 2a_2)x^2.$$

En la base canónica $B = \{1, x, x^2\}$ se tiene

$$T(1) = 2 + x,\ [T(1)]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(x) = 2x + x^2,\ [T(x)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(x^2) = 2x^2,\ [T(x^2)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

por lo tanto

$$A = [T]_B^B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Al ser una matriz triangular se tiene,

$$\sigma(T) = \sigma(A) = \{2\}.$$

Calculamos el espacio propio asociado a λ_2. Por definición, $E_2 = Ker(T - 2I)$. Luego,

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in E_2 \iff T(p(x)) - 2p(x) = 0 \iff a_0x + a_1x^2 = 0 \iff a_0 = a_1 = 0.$$

Por lo tanto $p(x) \in E_2$ si y sólo si $p(x) = a_2x^2$ con a_2 libre, o en otras palabras

$$E_2 = Gen_{\mathbb{K}}\{x^2\}.$$

Teorema 17.3.4. *Sea $T : V \to V$ transformación lineal con $\sigma(T) = \{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$. Sean $S = \{v_1, ..., v_r\}$ vectores propios con $T(v_i) = \lambda_i v_i$, entonces S es un conjunto linealmente independiente.*

□

17.4 Ejercicios

1. Encuentre los valores propios y espacios propios de las siguientes matrices.

$$a) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad e) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad g) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \\ -7 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad j) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Encuentre los valores propios de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

sabiendo que $\lambda = 4$ es un valor propio de multiplicidad 2 en la ecuación característica.

3. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, encuentre los valores y espacios propios de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix},$$

en función de α.

4. Muestre que λ es un valor propio de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si y sólo si es un valor propio de A^T. **Pista:** Piense en como se relacionan las cantidades $\det(A - \lambda I_n)$ y $\det(A^T - \lambda I_n)$

5. Considere una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con la siguiente propiedad: Fijado un $\alpha \in \mathbb{R}$, las entradas de cada fila suman α. Muestre que α es un valor propio de A.

C 18

Diagonalización en lo Teórico

18.1 Construcción de la Matriz Diagonal

Sea $T : V \to V$ una transformación lineal con V de dimensión finita $n > 0$. Supongamos que

$$\sigma(T) = \{\lambda_1, ..., \lambda_r\},$$

son los valores propios de T. Supongamos que los espacios propios son generados por las siguientes bases

$$E_{\lambda_i} = \mathrm{Gen}_{\mathbb{K}} \{v_{i1}, v_{i2}, ..., v_{in_i}\}, \quad T(v_{ij}) = \lambda_i v_{ij}.$$

Si imponemos la condición de que la union de estas bases

$$B = \{v_{11}, ..., v_{1n_1}, v_{21}, ..., v_{2n_2}, ..., v_{r1}, ..., v_{rn_r}\}$$

sea una base de $\mathbb{K}^n$, entonces al menos debemos tener

$$n_1 + n_2 + ... + n_r = n = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n.$$

Bajo esta condición, podemos considerar calcular la matriz asociada

$$[T]_B^B = \left([T(v_{11})]_B \quad ... \quad [T(v_{1n_1})]_B \quad ...... \quad [T(v_{r1})]_B \quad ... \quad [T(v_{rn_r})]_B\right),$$

en esta base. De hecho,

$$T(v_{ij}) = \lambda_i v_{ij} \implies [T(v_{ij})]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n,$$

donde los λ_i se repiten entre las entradas n_{i-1}-esima y n_i-esima. Por lo tanto,

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \underset{n_1}{\ddots} & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \lambda_r & & \\ & & & & & & \underset{n_r}{\ddots} & \\ & & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}, \tag{18.1}$$

donde las entradas en blanco son rellenas con 0. A esta matriz diagonal se le llama la diagonalización de T. Lo anterior se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 18.1.1. *Los vectores propios de T forman una base para de $\mathbb{K}^n$ si y sólo si la matriz de T es diagonal sobre dicha base*

□

18.2 Diagonalización de Matrices

Como hemos visto anteriormente toda transformación lineal $T : V \to V$ puede verse desde una transformación matricial $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ proveniente de una matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Por esto, nos enfocaremos en este tipo de transformaciones para ilustrar el proceso de diagonalización.

Ejemplo 18.2.1. *Considerar la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dado que es triangular superior, tenemos

$$\sigma(A) = \{-1, 2\}.$$

Calculamos los espacios propios. Primero para $\lambda = 2$. Se tiene,

$$E_2 = Ker(A - 2I_2) = Ker \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2 \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff y = 0,$$

y por lo tanto,

$$E_2 = Gen_{\mathbb{K}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Para $\lambda = -1$, se tiene

$$E_{-1} = Ker(A - (-1)I_2) = Ker \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2 \iff \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 3x + y = 0,$$

y por lo tanto,

$$E_2 = Gen_{\mathbb{K}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Los vectores propios

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

forman una base de $\mathbb{K}^2$. Por lo tanto,

$$[A]_B^B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

¿Cómo se conecta la matriz A con la matriz $[A]_B^B$?

Sea $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ una transformación matricial dada por una matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Sabemos que sobre la base canónica B_c cumple $A = [A]_{B_c}^{B_c}$. Por lo tanto, la relación entre A y la matriz diagonal $D = [A]_B^B$, es precisamente

$$A = PDP^{-1}$$

donde $P = C_{B \to B_c}$ es la matriz de cambio de base. Explícitamente, si la matriz D es de la forma Equation (18.1), entonces la matriz P se construye desde los vectores propios siguiendo el orden de la diagonal como sigue,

$$P = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n_1} & \dots & & \dots & v_{r1} & \dots & v_{rn_r} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 18.2.2. *Siguiendo el ejemplo de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

tenemos

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Finalmente P^{-1} se calcula la usando eliminación Gaussiana o directamente alguna formula de preferencia como,

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así se chequea que $A = PDP^{-1}$.

La importancia de la diagonalización es la siguiente. Si $A = PDP^{-1}$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$A^n = (PDP^{-1})^n = \underbrace{PD\cancel{P^{-1}P}DP^{-1}...PD\cancel{P^{-1}P}DP^{-1}}_{n \text{ veces}} = PD^nP^{-1},$$

en donde se han cancelado todos los productos internos PP^{-1} por la identidad I_3. Más aun se puede calcular facilmente

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & & & & & & \\ & \underset{n_1}{\ddots} & & & & & & \\ & & \lambda_1^n & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \lambda_r^n & & \\ & & & & & & \underset{n_r}{\ddots} & \\ & & & & & & & \lambda_r^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}. \tag{18.2}$$

Por lo tanto, la diagonalización permite entender y calcular las potencias iteradas de una matriz reduciendo tremendamente la cantidad de cálculos. Terminamos con un teorema dejado como ejercicio al lector.

Teorema 18.2.3. *Si una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tiene n valores propios distintos entre si, entonces A es diagonalizable.*

□

18.3 Ejercicios

1. Si A es invertible y diagonalizable con descomposición $A = PDP^{-1}$. ¿Cómo se descompone A^{-1}? ¿Cómo sería su matriz diagonal?

C 19

Diagonalización en lo Práctico

19.1 Manual de Diagonalización

Dada una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ (proveniente de una transformación lineal) buscamos saber si es posible escribir

$$A = PDP^{-1}$$

donde

- D es una matriz diagonal de valores propios,
- P es la matriz de vectores propios ordenada según D.

Para esto, seguimos los siguientes pasos:

1. Encontramos el espectro de A, es decir, el conjunto

$$\sigma(A) = \{\lambda : \lambda \text{ valor propio de } A\}.$$

2. Encontramos generadores (base) a cada espacio propio $E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$ para cada $\lambda \in \sigma(A)$.
3. Si los generadores juntos forman una base de $\mathbb{K}^n$, entonces A es diagonalizable!
4. Si A es diagonalizable, puedo construir D y P.

19.2 Ejemplos

Ejemplo 19.2.1. *Considerar la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) La matriz es triangular inferior, por lo tanto

$$\sigma(A) = \{-1, 1\}.$$

2) Calculamos los espacios propios. Primero para $\lambda = 1$:

$$E_1 = Ker(A - 1 \cdot I_3) = Ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 4x - 2z = 0 \end{cases},$$

es decir, $y = x, z = 2x$ usando a x como variable libre. Por lo tanto,

$$E_1 = Gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Para $\lambda = -1$:

$$E_{-1} = Ker(A - (-1) \cdot I_3) = Ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 4x = 0 \end{cases}.$$

Por lo tanto, $x = 0$ y así

$$E_{-1} = Gen \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejemplo 3) Consideramos el conjunto de generadores de espacios propios

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

ordenados por valor propio. Claramente es una base de $\mathbb{K}^3$. Por lo tanto, A es diagonalizable!.

4) Construimos,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con $A = PDP^{-1}$.

Un NO ejemplo Considere la matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Dado que A es triangular inferior, se tiene $\sigma(A) = \{2\}$.

2) Calculamos el espacio propio asociado a $\lambda = 2$:

$$E_2 = \text{Ker}(A - 2I_2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = 0.$$

Un NO ejemplo Por lo tanto

$$E_2 = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3) Tenemos que el conjunto de generadores de espacios propios es,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

el cual no puede ser una base de $\mathbb{K}^2$. Por lo tanto la matriz A NO es diagonalizable.

19.3 Aplicaciones en Dinámica Discreta

En muchas situaciones de la ciencia e ingenieria, podemos tener sistemas modelados de la forma

$$v^t = Av^{t-1}, \quad A \in \mathbb{K}^{n \times n}, v^t \in \mathbb{K}^n$$

para cada $t = 0, 1, 2....$ Donde v^t es un vector de ciertas cantidades medidas en cada tiempo t. La recursión nos permite obtener,

$$v^t = A(Av^{t-2}) = A^2 v^{t-2} = A^2(Av^{t-3}) = A^3 v^{t-3} = ... = A^t v^0,$$

donde v^0 es llamado el vector inicial.

Ejemplo 19.3.1. *En un estudio sobre una población M, en cada año $t = 0, 1, 2, ...$ se determinó que las cantidades*

$$x^t = \textit{Número de niños en } M \textit{ en el año } t,$$
$$y^t = \textit{Número de jóvenes en } M \textit{ en el año } t,$$
$$z^t = \textit{Número de adultos en } M \textit{ en el año } t,$$

se modelan dinamicamente de la siguiente forma

$$v^t = Av^{t-1}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad v^t = \begin{pmatrix} x^t \\ y^t \\ z^t \end{pmatrix} \in \mathbb{N}^3.$$

¿Cómo se comporta la dinámica en cada tiempo t? *Dinámicamente, sabemos que $v^t = A^t v^0$. Pero si usamos la diagonalización de A, se tiene que*

$$v^t = A^t v^0 = (PDP^{-1})^t v^0 = PD^t P^{-1} v^0.$$

Por lo tanto, solo nos interesa saber que ocurre con

$$D^t = \begin{pmatrix} 1^t & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^t & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^t \end{pmatrix}.$$

Luego,

1. *Si t es año par, se tiene $A^t = PI_3P^{-1} = I_3$. Por lo tanto, en año par obtenemos la misma data inicial.*

2. *Si t es año impar, se tiene $D^t = D$. Por lo tanto, $v^t = Av^0$.*

Ejemplo 19.3.2. *En cierta reacción química, a cada minuto $t = 0, 1, 2, ...$ las concentraciones $[mol/L]$ de dos reactivos x^t e y^t en el instante t se modelan experimentalmente como,*

$$v^t = Av^{t-1}, \quad A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ -1 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad v^t = \begin{pmatrix} x^t \\ y^t \end{pmatrix}.$$

¿ Qué ocurre con las concentraciones después de mucho tiempo ($t \to \infty$)?

1) Tenemos $\sigma(A) = \{0.1, 0.2\}$. 2) Calculamos espacios propios. Para $\lambda = 0.1$:

$$E_{0.1} = Ker(A - 0.1I_2) = Ker \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{0.1} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = 0.1y.$$

Por lo tanto,

$$E_{0.1} = Gen \left\{ \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Para $\lambda = 0.2$:

$$E_{0.2} = Ker(A - 0.2I_2) = Ker \begin{pmatrix} -0.1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{0.2} \iff \begin{pmatrix} -0.1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = 0.$$

Por lo tanto,

$$E_{0.2} = Gen \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Luego, tenemos

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}.$$

Por lo tanto, la dinamica de la reacción es

$$v^t = A^t v^0 = PD^t P^{-1} v^0,$$

donde

$$D^t = \begin{pmatrix} 0.1^t & 0 \\ 0 & 0.2^t \end{pmatrix}.$$

Observar que,

$$\lim_{t\to\infty} D^t = \begin{pmatrix} \lim_{t\to\infty} 0.1^t & 0 \\ 0 & \lim_{t\to\infty} 0.2^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Concluimos que

$$\lim_{t\to\infty} v^t = \lim_{t\to\infty} A^t v^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto las concentraciones de los reactivos decaen a 0 después de mucho tiempo.

19.4 Ejercicios

1. Determine si las matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ del ejercicio 17.1 se pueden diagonalizar o no. De ser el caso, considere la matriz diagonal D asociada a la base de vectores propios de A y determine las matrices cambio de base P tal que $A = PDP^{-1}$. Finalmente exprese, en términos de n, el valor de A^n para cualquier entero n.

2. Considere la matriz,
$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0 \\ -1 & 2 & 0.3 \end{pmatrix}$$
usando diagonalización, pruebe que
$$\lim_{n\to\infty} A^n = 0_{n\times n}.$$

3. Diagonalice la matriz
$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$
y estudie la dinámica del modelo discreto $v^t = A^t v^0$ donde $v^t = (x^t, y^t, z^t)^T \in \mathbb{R}^3$, con $t = 0, 1, 2, 3, ...$ medido en alguna unidad de tiempo. ¿Qué ocurre en tiempos pares, impares o cuando $t \to \infty$? Experimente con algunos vectores iniciales v^0 de preferencia.

4. Diagonalice la matriz
$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0.2 & 0.9 & 0.9 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
y estudie la dinámica del modelo discreto $v^t = A^t v^0$ donde $v^t = (x^t, y^t, z^t)^T \in \mathbb{R}^3$, con $t = 0, 1, 2, 3, ...$ medido en alguna unidad de tiempo. ¿Qué ocurre en tiempos pares, impares o cuando $t \to \infty$? Experimente con algunos vectores iniciales v^0 de preferencia.

5. Muestre que el conjunto

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 3-x \\ 0 & x+3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

es formado solo por matrices diagonalizables.

6. Muestre que el conjunto

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 3x+1 & 1-x \\ 3-3x & x+3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

es formado solo por matrices diagonalizables.

7. (Sobre $\mathbb{C}$) Diagonalice la matriz de rotación

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

para cada $\theta \in \mathbb{R}$. Más aún estudie el modelo dinámico $v^t = A^t v^0$ para distintos ángulos θ y distinto valores iniciales v^0.

C 20

Producto Interno y Longitud

20.1 Definiciones Básicas

En los capítulos que siguen nos restringimos a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ya que la definición de producto interno cambia para distintos $\mathbb{K}$. Considerar dos vectores columna

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix},$$

en $\mathbb{R}^n$. Definimos su producto interno como un producto matricial de vector fila por columna,

$$v \bullet w := v^T w = (v_1, ..., v_n) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = v_1 w_1 + ... + v_n w_n.$$

Ejemplo 20.1.1. *Tomar*

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $v \bullet w = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 8$. □

Considerar dos matrices, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Si en notación fila y columna escribimos

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_p \end{pmatrix},$$

donde los $a_i \in \mathbb{R}^n$ son vectores fila y los $b_i \in \mathbb{R}^n$ son vectores columnas. Luego, el producto matricial de matrices siempre estuvo definido mediante productos internos como sigue

$$AB = \begin{pmatrix} a_1^T \bullet b_1 & a_1^T \bullet b_2 & \ldots & a_1^T \bullet b_p \\ a_2^T \bullet b_1 & a_2^T \bullet b_2 & \ldots & a_2^T \bullet b_p \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_m^T \bullet b_1 & a_m^T \bullet b_2 & \ldots & a_m^T \bullet b_p \end{pmatrix}.$$

Entonces en terminos computaciones definir el producto de matrices es sólo definir el producto internos. Este ultimo tiene las siguientes propiedades las cuales se dejan como ejercicio.

Teorema 20.1.2 (Propiedades del Producto Interno)**.** *Para todo $v, w, u \in \mathbb{R}^n$ y todo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene*

1. $v \bullet w = w \bullet v,$
2. $u \bullet (v + w) = u \bullet v + u \bullet w$
3. $(\alpha v) \bullet w = \alpha(v \bullet w) = v \bullet (\alpha w),$
4. $v \bullet v \geq 0$. *Más aún,* $v \bullet v = 0$ *si y sólo si* $v = 0$.

□

La longitud o módulo o norma de un vector $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$ se define como

$$\|v\| := \sqrt{v \bullet v} = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}.$$

Notar que si $v = (x, y)^T \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

con que coincide con la longitud del vector usando el teorema de Pitágoras clásico. Más aún, si $v = (x, y, z)^T$ entonces

$$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

lo cual también coincide con la longitud de v al calcularlo usando geometría clásica.

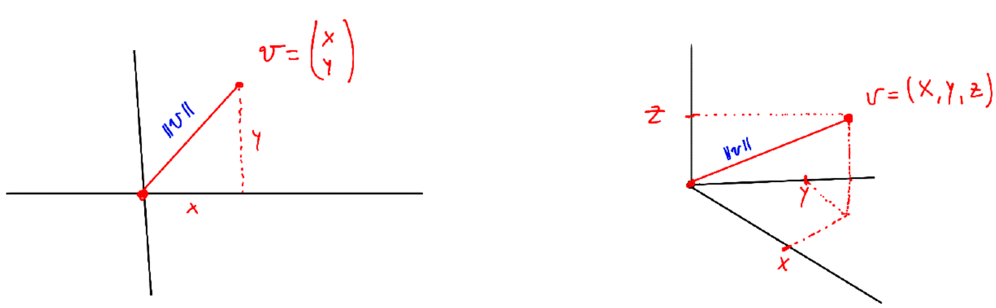


Figure 20.1: Casos $\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $\mathbb{R}^2$ y $\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ en $\mathbb{R}^3$.

Un propiedad interesante de la longitud es que es escalable, es decir, para todo $v \in \mathbb{R}^n$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|.$$

De este modo, si $\|v\| = 1$ todo dependería solo del escalara α tomado. Los vectores tales que $\|v\| = 1$ son llamados unitarios. Más aún, todo vector $v \in \mathbb{R}^n$ puede ser normalizado para obtener un vector unitario del siguiente modo,

$$u = \frac{v}{\|v\|},$$

el cual cumple con

$$\|u\| = \left\|\frac{v}{\|v\|}\right\| = \frac{\|v\|}{\|v\|} = 1$$

y se llama la normalización de v.

Ejemplo 20.1.3. *Considere el vector*

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene $\|v\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$. *Por lo tanto, la normalización de* v *es el vector*

$$u = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

□

La distancia entre dos vectores $v, w \in \mathbb{R}^m$ se define por

$$\operatorname{dist}(v, w) := \|v - w\| = \|w - v\|.$$

Ejemplo 20.1.4. *Considere los vectores,*

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$v - w = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \implies dist(v, w) = \|v - w\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

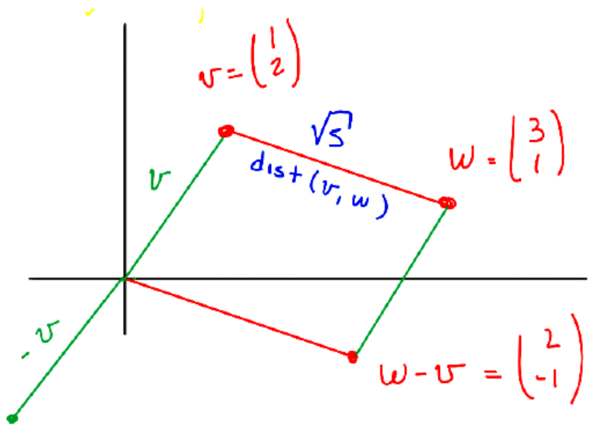


Figure 20.2: Distancia en $\mathbb{R}^2$

$\square$

Ejemplo 20.1.5. *Considere los vectores,*

$$v = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Luego,

$$v - w = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} \implies dist(v, w) = \|v - w\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

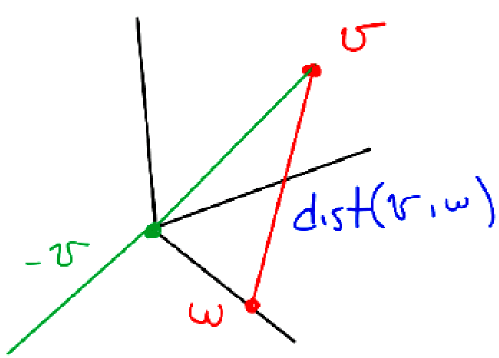


Figure 20.3: Distancia en $\mathbb{R}^3$

$\square$

20.2 Ángulos entre vectores

Dados dos vectores $v, w \in \mathbb{R}^n$, en el proximo capitulo, veremos como podemos proyectar ortogonalmente a w sobre $\text{Gen}\{v\}$, i.e., la lineal que define v. Esta proyección tiene una longitud determinada por

$$\frac{v \bullet w}{\|v\|}.$$

Por ello, podemos medir el angulo entre v y w dado por un $\theta \in \mathbb{R}$ como

$$\cos(\theta) = \frac{v \bullet w}{\|v\|\|w\|}.$$

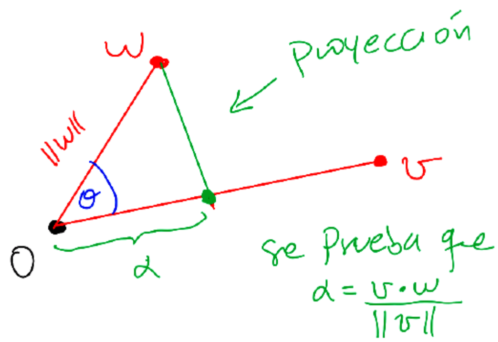


Figure 20.4: Ángulo entre vectores

Ejemplo 20.2.1. *Dados los vectores,*

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

se tiene

$$\cos(\theta) = \frac{v \bullet w}{\|v\|\|w\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\pi/4).$$

Por lo tanto, el angulo entre v y w es de $\pi/4$. □

De lo anterior, diremos que dos vectores $v, w \in \mathbb{R}^n$ son ortogonales y denotado por $v \perp w$ si

$$\theta = \frac{\pi}{2} \iff \cos(\theta) = 0 \iff v \bullet w = 0.$$

Ejemplo 20.2.2. *Los vectores canónicos $\{e_1, ..., e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ son ortogonales a pares distintos y unitarios, es decir,*

$$e_i \bullet e_j = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j. \end{cases}$$

Ejemplo 20.2.3. *Los vectores*

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

son ortogonales ya que $v \bullet w = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$.

Terminamos este capitulo con el famosos teorema de Pitágoras ahora generalizado en toda dimensión.

Teorema 20.2.4 (Teorema de Pitágoras)**.** *Dos vectores* $v, w \in \mathbb{R}^n$ *son ortogonales si y sólo si*

$$\|v + w\|^2 = \|v - w\|^2 = dist(v, w)^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

Proof. Notemos que

$$\begin{aligned} \|v - w\|^2 &= (v - w) \bullet (v - w) = v \bullet v - w \bullet v - v \bullet w + w \bullet w \\ &= \|v\|^2 - 2v \bullet w + \|w\|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto $v \bullet w = 0$ si y sólo si $\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$. La versión con $\|v + w\|$ es simplemente notar que $v \bullet w = 0 \iff v \bullet (-w) = 0$. □

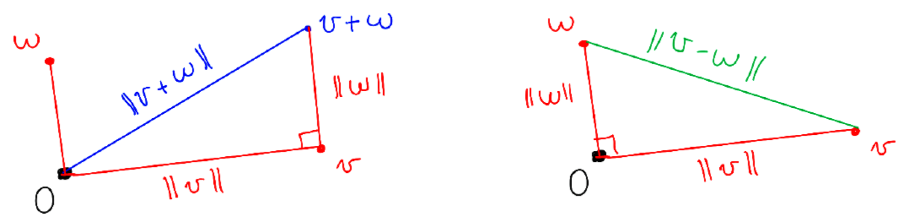


Figure 20.5: Versiones del Teorema de Pitágoras

20.3 Ejercicios

1. Considere los vectores

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

Dibuje dichos vectores y calcule.

a) Calcule las normas de cada vector.

b) Calcule sus normalizaciones.

c) Calcule las distancias entre ellos.

d) Determine los ángulos entre ellos. ¿Son ortogonales?

e) Considerando a $\{u, v, w\}$ como los vértices de un triangulo. ¿Cuál es el área de esta figura?

2. Considere los vectores

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dibuje dichos vectores y calcule.

a) Calcule las normas de cada vector.

b) Calcule sus normalizaciones.

c) Calcule las distancias entre ellos.

d) Determine los ángulos entre ellos. ¿Son ortogonales?

e) Agregando el vector 0, y considerando a $\{0, u, v, w\}$ como los vértices de un tetraedro. ¿Cuál es el volumen de este cuerpo?

3. Chequee el teorema de Pitagoras para los vectores

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4. En $\mathbb{R}^2$ determine el lugar geométrico de todos los vectores v unitarios.

5. Para dos vectores $v, w \in \mathbb{R}^n$ calcule $\|v + w\|^2$ y $\|v - w\|^2$ usando producto interno. Con esto demuestre la *identidad del paralelogramo*

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\| + 2\|w\|.$$

Grafique la situación. Finalmente, deduzca el teorema de Pitágoras cuando $v \bullet w = 0$.

C 21

Ortogonalidad

21.1 Bases Ortogonales

Recordar el producto interno,

$$v \bullet w := v^T \cdot w = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2 \dots + v_n w_n,$$

para vectores columna $v, w \in \mathbb{R}^n$. Decimos que v, w son ortogonales ($v \perp w$) si

$$v \bullet w = 0 \iff \text{el ángulo que forman es } \frac{\pi}{2}.$$

Dado un sub-espacio vectorial $H \subset \mathbb{R}^n$, una base ortogonal de H es cualquier base $B = \{v_1, ..., v_r\}$ de H tal que

$$v_i \bullet v_j = 0,$$

para todos los $i \neq j$. Es decir, hay ortogonalidad a pares distintos.

Ejemplo 21.1.1. *La base canónica $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ dado que*

$$e_i \bullet e_j = 0,$$

para todos los $i \neq j$.

Ejemplo 21.1.2. *El conjunto*

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

es una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 21.1.3. *El sub-espacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ dado por*

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y+z \\ 0 \\ y-z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

es generado por la base,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

la cual es ortogonal. □

Teorema 21.1.4. *Si $B = \{v_1, ..., v_r\}$ es un conjunto de vectores no nulos de $\mathbb{R}^n$ los cuales son ortogonales a pares distintos ($v_i \bullet v_j = 0$), entonces B es linealmente independiente.*

□

Conclusión: Dado cualquier sub-espacio vectorial $H \subset \mathbb{R}^n$, si tengo $\dim H = r$ y $B \subset H$ tiene r vectores ortogonales a pares distintos, entonces B es base de H.

Proof. Tomemos la ecuación vectorial homogénea

$$x_1 v_1 + ... + x_r v_r = 0, \quad x_i \in \mathbb{R}^n.$$

Aplicando producto interno por v_j a ambos lados para cada $j = 1, ..., n$,

$$x_1 \cancel{(v_1 \bullet v_j)} + ... + x_j (v_j \bullet v_j) + ... + x_r \cancel{(v_r \bullet v_j)} = 0 \bullet v_j = 0.$$

Sólo queda $x_j(v_j \bullet v_j) = x_j \|v_j\|^2 = 0$, lo que implica $x_j = 0$ y así para todo j.

□

21.2 Proyección Ortogonal

Todo sub-espacio vectorial $H \subset \mathbb{R}^n$ tiene un sub-espacio ortogonal asociado,

$$H^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : v \bullet h = 0, \forall h \in H\},$$

es decir, todos los vectores ortogonales a los de H. Se tiene

$$H \cap H^\perp = \{0\}.$$

La razón de esto es sencillo, supongamos que $h \in H \cap H^\perp$. Entonces h es ortogonal consigo mismo, es decir, $h \bullet h = \|h\|^2 = 0$. Esto sólo es posible si $h = 0$.

Ejemplo 21.2.1. *En $\mathbb{R}^3$ podemos considerar el sub-espacio $H = Gen\{e_1, e_2\}$ dado por el plano xy. Luego,*

$$H^\perp = \left\{ v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : v \bullet e_1 = v \bullet e_2 = 0 \right\}.$$

Cómo $v \bullet e_1 = v \bullet e_2 = 0$, es equivalente a $x = y = 0$. Solo nos queda z como variable libre, y así

$$H^\perp = \left\{ v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = Gen\{e_3\}.$$

$\therefore$ *El plano xy es ortogonal al eje z.* □

Teorema 21.2.2. *Sea $H \subset \mathbb{R}^n$ un sub-espacio vectorial y $B = \{v_1, ..., v_r\}$ una base ortogonal de H. Entonces, todo vector $v \in \mathbb{R}^n$ se puede descomponer en una suma de vectores*

$$v = \hat{v} + v^{\perp}, \quad \hat{v} \in H,\, v^{\perp} \in H^{\perp},$$

donde

$$\hat{v} = \frac{v_1 \bullet v}{\|v_1\|^2} v_1 + \ldots + \frac{v_r \bullet v}{\|v_r\|^2} v_r.$$

Moraleja: Todo sub-espacio de $\mathbb{R}^n$ rompe el espacio en dos partes, $\mathbb{R}^n = H \oplus H^{\perp}$. Usualmente denotaremos $\text{proy}_H v = \hat{v}$ y lo llamamos la proyección ortogonal de v en H.

Proof. Si consideramos una base para $H^{\perp}$ dada por $B^{\perp} = \{w_1, ..., w_s\}$, la unión $B \cup B^{\perp} = \{v_1, ..., v_r, w_1, ..., w_s\}$ debe ser una base para $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, existirán $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ tal que

$$v = \underbrace{\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r}_{\hat{v}} + \underbrace{\beta_1 w_1 + ... + \beta_s w_s}_{v^{\perp}}.$$

Si hacemos producto interno con v_j, sabiendo que $w_i \bullet v_j = 0$ para todo i y que $v_i \bullet v_j = 0$ con $i \neq j$, entonces se tiene

$$v_j \bullet v = \alpha_j v_j \bullet v_j = \alpha_j \|v_j\|^2.$$

Por lo tanto,

$$\alpha_j = \frac{v_j \bullet v}{\|v_j\|^2}.$$

□

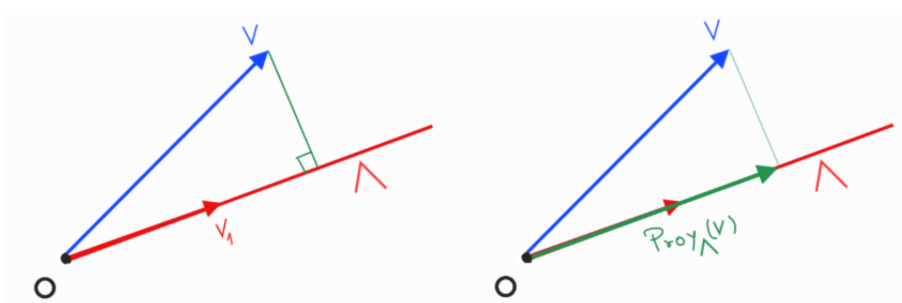
21.3 Aplicaciones

Una linea Λ en $\mathbb{R}^n$ es un sub-espacio de dimensión 1, es decir,

$$\Lambda = \text{Gen}\{v_1\} = \{\alpha v_1 : \alpha \in \mathbb{R}\}, \quad v_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

En general todas las lineas afines (o lineas que no pasan por el origen) en $\mathbb{R}^n$ son de la forma $w + \Lambda$, la traslación de una linea por un vector $w \in \mathbb{R}^n$. Sea $v \in \mathbb{R}^n$ un vector no nulo cualquiera. Usando la descomposición ortogonal, podemos calcular la proyección de v sobre Λ como sigue

$$\text{proy}_{\Lambda} v = \frac{v_1 \bullet v}{\|v_1\|^2} v_1 = \left(\frac{v_1 \bullet v}{\|v_1\|}\right) \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$



Ejemplo 21.3.1. *Consideremos las lineas en* $\mathbb{R}^2$ *dadas por los ejes coordenados*

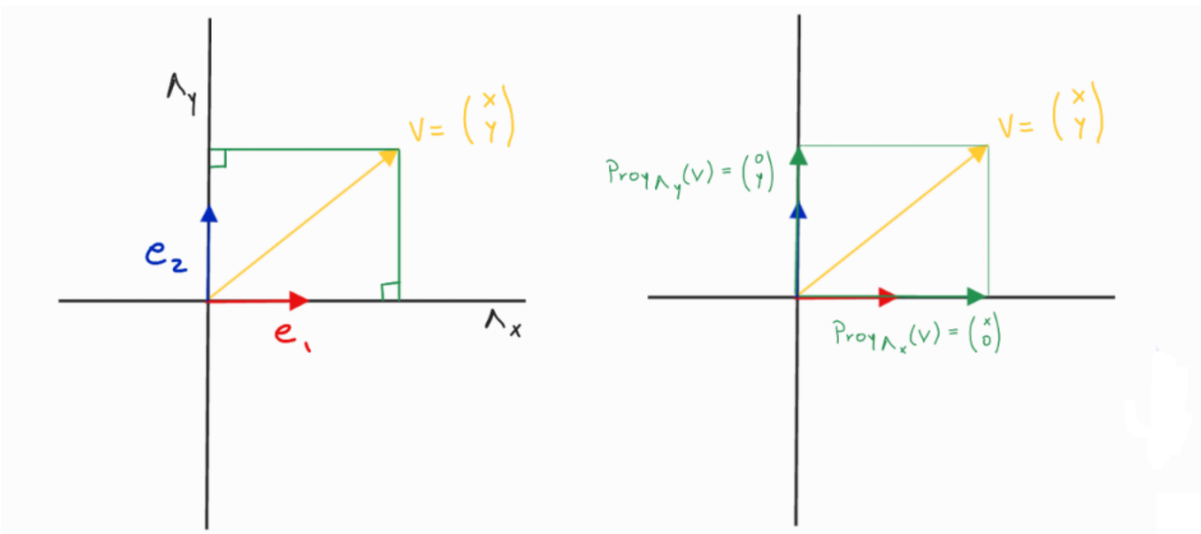
$$\Lambda_x = Gen(e_1), \quad \Lambda_y = Gen(e_2).$$

Para todo $v = (x, y)^T$ *tenemos*

$$proy_{\Lambda_x}(v) = \frac{e_1 \bullet v}{\|e_1\|^2} e_1 = x e_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$proy_{\Lambda_y}(v) = \frac{e_2 \bullet v}{\|e_2\|^2} e_2 = y e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}.$$

Es decir, la proyección sobre los ejes coordenados es exactamente extraer las coordenadas del eje asociado al vector.



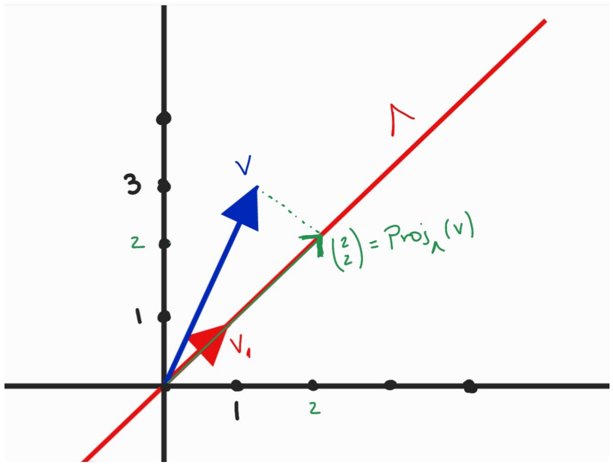
□

Ejemplo 21.3.2. *En* $\mathbb{R}^2$ *considere la linea*

$$\Lambda = Gen\{v_1\}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos el vector $v = (1, 3)^T$. *La proyección de* v *sobre* Λ *es*

$$proy_{\Lambda}(v) = \frac{v_1 \bullet v}{\|v_1\|^2} v_1 = \frac{4}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

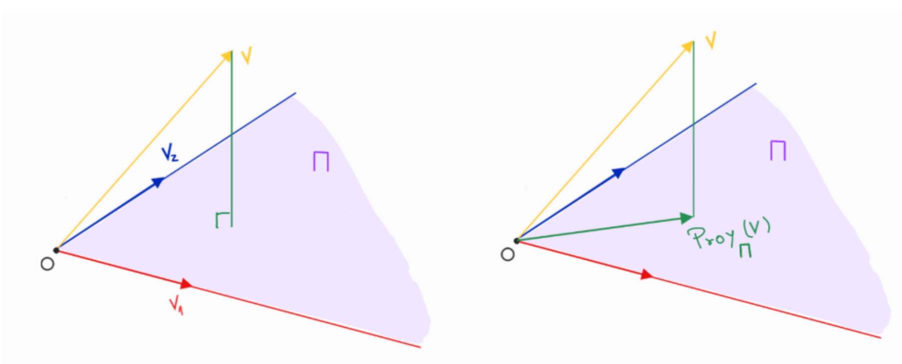


Un plano Π en $\mathbb{R}^n$ es un sub-espacio de dimensión 2, es decir,

$$\Pi = \text{Gen}\{v_1, v_2\} = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}, \quad v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

En general todas los planos afines (o planos que no pasan por el origen) en $\mathbb{R}^n$ son de la forma $w + \Pi$, la traslación de un plano. Sea $v \in \mathbb{R}^n$ un vector no nulo cualquiera. Usando la descomposición ortogonal, podemos calcular la proyección de v sobre Π como sigue

$$\text{proy}_{\Pi} v = \frac{v_1 \bullet v}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{v_2 \bullet v}{\|v_2\|^2} v_2 = \left(\frac{v_1 \bullet v}{\|v_1\|}\right) \frac{v_1}{\|v_1\|} + \left(\frac{v_2 \bullet v}{\|v_2\|}\right) \frac{v_2}{\|v_2\|}$$



Ejemplo 21.3.3. *Consideremos en $\mathbb{R}^3$ el plano generado por los ejes x e y dado por*

$$\Pi_{xy} = Gen(e_1, e_2).$$

Para todo $v = (x, y, z)^T$ tenemos

$$proy_{\Pi_{xy}}(v) = \frac{e_1 \bullet v}{\|e_1\|^2} e_1 + \frac{e_2 \bullet v}{\|e_2\|^2} e_2 = x e_1 + y e_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\square$

Es decir, la proyección sobre el plano de ejes coordenados xy es exactamente extraer las coordenadas de los ejes x e y del vector.

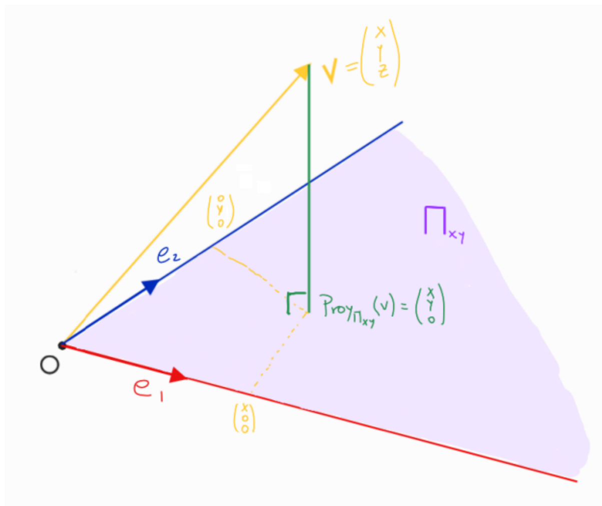


Figure 21.1: Proyección sobre Π_{xy}

21.4 Ejercicios

1. Sea $H = \text{Gen}\{v, w\}$ un sub-espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ generado por los vectores $v, w \in \mathbb{R}^n$. Si u es un vector ortogonal a v y w, entonces pruebe que u es ortogonal a todos los vectores de H. ¿Qué puede decir en el caso general con $H = \text{Gen}\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ y u ortogonal a cada v_i?

2. Considere los siguientes conjuntos de vectores.

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}, \quad B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

   Chequee si B_1 o B_2 es base ortogonal de $\mathbb{R}^3$, y que si B_3 es base ortogonal de $\mathbb{R}^4$.

3. Considere los subespacios vectoriales,

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}, \quad H_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

   Encuentre, como conjunto generado por una base, los sub-espacios ortogonales $H_1^\perp, H_2^\perp, H_3^\perp, H_4^\perp$. Bosqueje la situación para el caso 2D y 3D.

4. Considere la linea $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ definida por,

$$\Lambda = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Determine las proyecciones sobre Λ de los vectores $(1,5)^T$, $(1,-1)^T$, $(2,-5)^T$. Dibuje la situación.

5. Considere el plano $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ definido por,

$$\Pi = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Determine las proyecciones sobre Π de los vectores $(0,0,1)^T$, $(1,1,1)^T$, $(3,0,-2)^T$. Dibuje la situación.

C 22

Matrices Simétricas y Formas Cuadráticas

22.1 El Teorema Espectral

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica si
$$A = A^T,$$
es decir, hay una reflexión respecto a su diagonal.

Ejemplo 22.1.1. *Las matrices*
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix},$$
son simétricas.

Una matriz $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es ortogonal si al escribirla por columnas $C = (v_1\, v_2 \ldots v_n)$ se tiene
$$v_i \bullet v_j = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Se deja como ejercicio demostrar que
$$C^{-1} = C^T, \quad \det(C) \in \{-1, 1\},$$
para toda matriz ortogonal C. Hace tiempo se comentó como la invertibilidad y diagonalización son propiedades independientes entre si. Más aún, tener un criterio preciso y automático para diagonalizar también parece una tarea difícil. Uno de los descubrimientos más importantes, es que las matrices simetricas siempre se diagonalizan.

Teorema 22.1.2 (Teorema Espectral)**.** *Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica si y sólo si A es diagonalizable ortogonalmente, es decir, existen $D, \overline{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que*

$$A = \overline{P} D \overline{P}^T,$$

donde D es una matriz diagonal de valores propios y $\overline{P}$ una matriz ortogonal. Más aún, $\overline{P}$ se obtiene después de normalizar las columnas de P en la diagonalización clásica $A = PDP^{-1}$.

Observación 22.1.3. *Recordar que en la diagonalización clásica $A = PDP^{-1}$ teníamos $P^{-1} = C_{B_c \to B_p}$ la matriz de cambio de base entre la base canónica B_c y la base de vectores propios B_p. Recordar que la base canónica es una base ortogonal y unitaria, es decir, vectores de longitud 1. La importancia de que A sea simétrica es que en la diagonalización ortogonal $A = \overline{P} D \overline{P}^T$, la matriz $\overline{P}^{-1} = \overline{P}^T$, como cambio de base, es simplemente una rotación de los ejes canónicos. La razón es que cambia los vectores canónicos por otros vectores ortogonales y unitarios, y mas aún $|\det(\overline{P})| = 1$, es decir la matriz no modifica los volumenes no los cuerpos. Por lo tanto, rota el espacio dejando a las columnas de $\overline{P}$ como los nuevos vectores canónicos. Más aún, si $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$ en B_c -coordenadas, entonces*

$$[v]_{B_p} = \overline{P}^T v.$$

Ejemplo 22.1.4. *Consideremos la matriz simétrica*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se calculan los vectores propios $\sigma(A) = \{1/2, 3/2\}$ y sus espacios propios

$$E_{1/2} = Gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_{3/2} = Gen\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Por lo tanto,

$$A = PDP^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los vectores columna de P tienen norma $\sqrt{2}$, por lo tanto construimos la matriz $\overline{P}$ como sigue

$$\overline{P} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

con $\overline{P}^T = \overline{P}$ obteniendo la diagonalización ortogonal $A = \overline{P} D \overline{P}^T$. Notar que el cambio de base es simplemente una rotación de los ejes coordenados en un angulo de $\pi/4$.

22.2 Formas Cuadráticas

La importancia de las matrices simétricas es que nos permiten estudiar el problema NO lineal mas básico: Los niveles de formas cuadráticas. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Una forma cuadrática es una función de la forma

$$Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad Q(v) = v^T A v,$$

usando producto matricial con v vector columna.

Ejemplo 22.2.1. *Para $n = 2$ en coordenadas $v = (x, y)^T$ la matriz identidad $A = I_2$ nos da la forma cuadrática*

$$Q(v) = (x, y)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = (x, y)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = x^2 + y^2 = v \bullet v = \|v\|^2.$$

En general, si $A = I_n$ se tiene $Q(v) = v \bullet v = \|v\|^2 = v_1^2 + ... + v_n^2$, recuperando el cuadrado de la longitud usual.

Ejemplo 22.2.2. *Para $n = 2$ en coordenadas $v = (x, y)^T$ la matriz*

$$A = \begin{pmatrix}1 & -1/2\\ -1/2 & 1\end{pmatrix}$$

nos da la forma cuadrática

$$Q(v) = (x, y)\begin{pmatrix}1 & -1/2\\ -1/2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = (x, y)\begin{pmatrix}x - y/2\\ -x/2 + y\end{pmatrix} = x^2 - xy + y^2.$$

Ejemplo 22.2.3. *Para $n = 4$ en coordenadas $v = (x, y, z, t)^T$ la matriz*

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

nos da la forma cuadrática

$$Q(v) = (x, y, z, t)A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix} = (x, y, z, t)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ -t\end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2 - t^2.$$

Conocida como la métrica/norma/longitud de Minkowski ampliamente usada en relatividad.

Fijada una constante $c \in \mathbb{R}$ y dada una forma cuadratica $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nos interesa la geometría del niveles

$$Q_c := \{v \in \mathbb{R}^n : Q(v) = c\}.$$

Ejemplo 22.2.4. *Para $n = 2$ y $\alpha > 0$, la forma cuadrática asociada a la matriz simétrica*

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$$

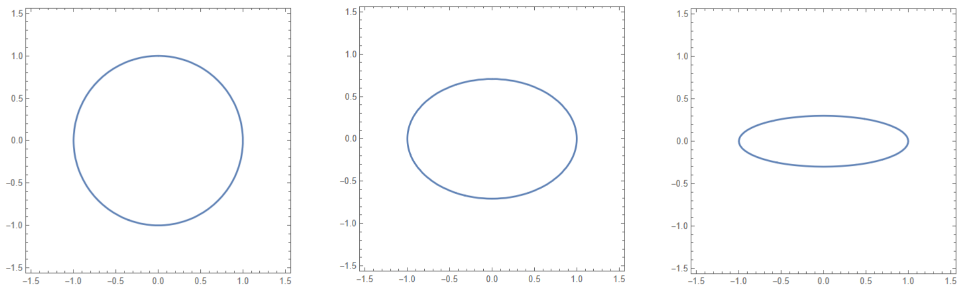
tiene los siguientes niveles

$$Q_c = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \alpha y^2 = c\}.$$

Es decir,

$$Q_c = \begin{cases} \emptyset & c < 0\\ (0, 0) & c = 0\\ \textit{elipses de centro } (0, 0) & c > 0 \end{cases},$$

en particular si $c = 1$, entonces Q_1 es una elipse de centro $(0, 0)$ con semiejes $(0, \pm 1)$, $(\pm 1/\sqrt{\alpha}, 0)$. Observar que para $\alpha = 1$ obtenemos la circunferencia de radio 1.



(a) $\alpha = 1$ (b) $\alpha = 2$ (c) $\alpha = 11$

Figure 22.1: $x^2 + \alpha y^2 = 1$ para distintos α.

¿Qué ocurre cuando la matriz no es diagonal? Diagonalizamos!

Ejemplo 22.2.5. *Para $n = 2$ la forma cuadrática asociada a la matriz simétrica*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene los siguientes niveles

$$Q_c = \{v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 - xy + y^2 = c\}.$$

Usando un software obtenemos

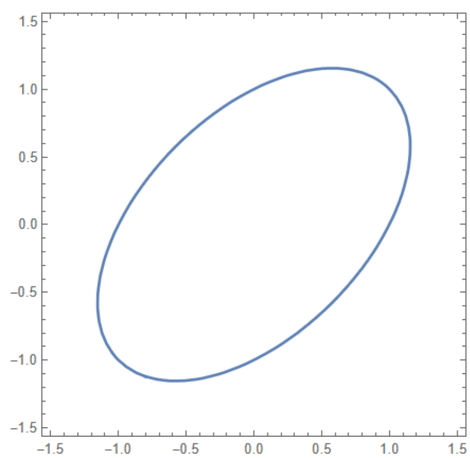


Figure 22.2: Nivel $Q_1 : x^2 - xy + y^2 = 1$

Si usamos su diagonalización previamente calculada,

$$D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}, \overline{P} = \overline{P}^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

tenemos

$$Q(v) = v^T A v = v^T \overline{P} D \overline{P}^T v.$$

Finalmente, si denotamos

$$w = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = [v]_{B_p} = \overline{P}^T v$$

a las coordenadas de v *en la base de vectores propios normalizados, entonces la propiedad de matrices*

$$w^T = (\overline{P}^T v)^T = v^T \overline{P},$$

nos permite reescribir

$$Q(v) = v^T \overline{P} D \overline{P}^T v = w^T D w = (s,t) \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \frac{s^2}{2} + \frac{3t^2}{2}.$$

Es decir, después de rotar la base canónica nos damos cuenta que en estas nuevas coordenadas

$$Q_c = \left\{ (s,t)^T : \frac{s^2}{2} + \frac{3t^2}{2} = c \right\}$$

por lo tanto,

$$Q_c = \begin{cases} (0,0) & c = 0, \\ \textit{elipse de centro } (0,0) & c > 0. \end{cases}$$

En particular, para $c = 1$ *nos queda una elipse con semiejes*

$$\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$$

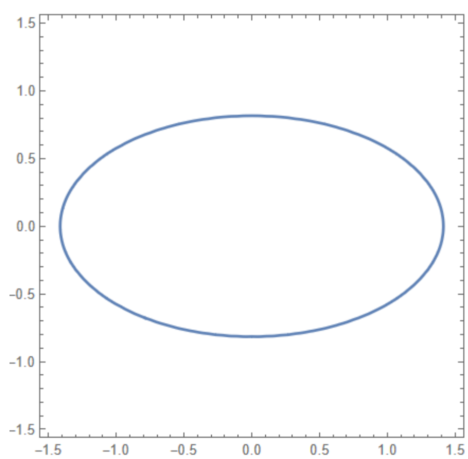


Figure 22.3: Nivel $Q_1 : s^2/2 + 3t^2/2 = 1$

22.3 Ejercicios

1. Encuentre explícitamente la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $Q(v) = v^T A v$ para cada una de las siguientes $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrices simetricas:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}4 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

   Determine la geometría de los niveles Q_{-1}, Q_0 y Q_1 (usando diagonalización ortogonal si es necesario). ¿Se pueden clasificar geométricamente los conjuntos Q_c dependiendo del signo de cada $c \in \mathbb{R}$? **Sugerencia:** Para el caso $n = 3$ puede investigar sobre elipsoides, hiperboloides y paraboloides.

2. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}.$$

   Determine la geometría de los niveles Q_c dependiendo del signo de $c \in \mathbb{R}$ y de $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. En $\mathbb{R}^3$, determine la geometría de los niveles $\hat{Q}_{-1}, \hat{Q}_0, \hat{Q}_1$ para las formas cuadráticas restringidas a $z = 1$, es decir, aquellas $\hat{Q} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\hat{Q}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix} = (x, y, 1)A\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix},$$

   donde $Q(v) = v^T A v$ para las matrices simétricas A dadas por:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1/2\\ 0 & -1/2 & -1/2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 0\\ 1/2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

4. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix}1 & -1/2\\ -1/2 & \alpha\end{pmatrix}.$$

   Determine la geometría de los niveles Q_c dependiendo del signo de $c \in \mathbb{R}$ y de $\alpha \in \mathbb{R}$.