# ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ СТАТИСТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

*Цель работы:*

1) изучить методику обработки экспериментальных данных и получить параметры модели технологического процесса методом наименьших квадратов (МНК);

2) проверить адекватность полученной модели по критерию Фишера.

В данной работе по экспериментальным данным, полученным на промышленных технологических установках ректификации, дегидрирования углеводов, сушки и т.д., необходимо выработать вид однопараметрической линии регрессии, определить параметры и оценить адекватность предложенной регрессионной модели реальному процессу.

# 1. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ

## 1.1. Общие положения

Регрессионные модели применяются для описания статических режимов технологических процессов, т.е. для установления взаимосвязи между значениями выхода (отклика) процесса и входа (фактора). Например, необходимо установить зависимости между выходом продукта химической реакции на пропущенное сырье и температурой в слое катализатора, коэффициентом извлечения целевого продукта из многокомпонентной смеси и нагрузкой на аппарат в процессе ректификации или влагосодержанием высушиваемого материала на выходе из сушилки и температурой в зоне сушки. Для получения уравнений соответствующих моделей на первом этапе проводят эксперименты по снятию данных с технологической установки в рабочих диапазонах параметров: температуры, расхода, давления и т.д. в статических режимах. Затем строится эмпирическая линия регрессии для соответствующих значений входа и выхода (например, температура

- выход на пропущенное сырье) и по типовым кривым выбирается вид соответствующей зависимости. Для процессов химической и пищевой технологии наиболее характерные кривые статических характеристик и виды соответствующих им уравнений представлены в конце методических указаний. После выбора вида зависимости производят расчет коэффициентов регрессионной модели с использованием МНК [3, С.81]. Полученные модели могут быть использованы для создания алгоритмов оптимального управления статическими режимами, например, установками брагоректификации, дозирования и измельчения, пиролиза, дегидрирования нефтепродуктов.

### 1.2. Расчет коэффициентов регрессионной модели

Рассмотрим пример получения параметров параболической линии регрессии. Для определения параметров $a, b, c$ параболической регрессии

$$\hat{y} = ax^2 + bx + c, \tag{1}$$

используя набор экспериментальных данных по фактору $x$ и отклику $y$, проводится расчет коэффициентов из условия:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} \left( y_i - \hat{y}_i \right)^2 \xrightarrow[a,b,c]{} \min, \tag{2}$$

где $N$ - объем выборки.

Исходя из условия существования экстремума функции нескольких переменных необходимым условием минимума $\Phi(a,b,c)$ является выполнение равенств:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a} = 0; \ \frac{\partial\Phi}{\partial b} = 0; \ \frac{\partial\Phi}{\partial c} = 0 \tag{3}$$

Таким образом, для случая (1) требуется решить систему уравнений:



$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{N} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{N} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i x_i^2; \\ a\sum_{i=1}^{N} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} y_i x_i; \\ a\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{N} x_i + cN = \sum_{i=1}^{N} y_i. \end{cases} \tag{4}$$

Или в общем виде:

$$\begin{cases} ak_{11} + bk_{12} + ck_{13} = p_1; \\ ak_{21} + bk_{22} + ck_{23} = p_2; \\ ak_{31} + bk_{32} + ck_{33} = p_3, \end{cases} \tag{5}$$

где $k_{11}, \dots, k_{33}$ - коэффициенты системы:

$$\begin{gathered} k_{11} = \sum_{i=1}^{N} x_i^4, \ k_{21} = \sum_{i=1}^{N} x_i^3, \ k_{13} = \sum_{i=1}^{N} x_i^2, \\ k_{21} = \sum_{i=1}^{N} x_i^3, \ k_{22} = \sum_{i=1}^{N} x_i^2, \ k_{23} = \sum_{i=1}^{N} x_i, \\ k_{31} = \sum_{i=1}^{N} x_i^2, \ k_{32} = \sum_{i=1}^{N} x_i, \ k_{33} = N. \end{gathered} \tag{6}$$

$p_1, \dots, p_3$ - правые части системы уравнений:

$$p_1 = \sum_{i=1}^{N} y_i x_i^2, \ p_2 = \sum_{i=1}^{N} y_i x_i, \ p_3 = \sum_{i=1}^{N} y_i. \tag{7}$$

Для решения системы линейных уравнений (5) используется правило Крамера:

$$\begin{aligned} \Delta = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} &= k_{11}\begin{vmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} - k_{12}\begin{vmatrix} k_{21} & k_{23} \\ k_{31} & k_{33} \end{vmatrix} + k_{13}\begin{vmatrix} k_{21} & k_{22} \\ k_{31} & k_{32} \end{vmatrix} = \\ &= k_{11}\left(k_{22}k_{33} - k_{32}k_{23}\right) - k_{12}\left(k_{33}k_{21} - k_{31}k_{23}\right) + k_{13}\left(k_{32}k_{21} - k_{31}k_{22}\right) = \\ &= k_{11}k_{22}k_{33} - k_{11}k_{32}k_{23} - k_{12}k_{33}k_{21} + k_{12}k_{31}k_{23} + k_{13}k_{32}k_{21} - k_{13}k_{31}k_{22}; \end{aligned} \tag{8}$$

$$\Delta a=\begin{vmatrix}p_1 & k_{12} & k_{13}\\ p_2 & k_{22} & k_{23}\\ p_3 & k_{32} & k_{33}\end{vmatrix}=p_1\begin{vmatrix}k_{22} & k_{23}\\ k_{32} & k_{33}\end{vmatrix}-k_{12}\begin{vmatrix}p_2 & k_{23}\\ p_3 & k_{33}\end{vmatrix}+k_{13}\begin{vmatrix}p_2 & k_{22}\\ p_3 & k_{32}\end{vmatrix}=$$

$$=p_1(k_{22}k_{33}-k_{32}k_{23})-k_{12}(k_{33}p_2-p_3k_{23})+k_{13}(k_{32}p_2-p_3k_{22})= \qquad (9)$$

$$=p_1k_{22}k_{33}-p_1k_{32}k_{23}-k_{12}k_{33}p_2+k_{12}p_3k_{23}+k_{13}k_{32}p_2-k_{13}p_3k_{22};$$

$$\Delta b=\begin{vmatrix}k_{11} & p_1 & k_{13}\\ k_{21} & p_2 & k_{23}\\ k_{31} & p_3 & k_{33}\end{vmatrix}=k_{11}\begin{vmatrix}p_2 & k_{23}\\ p_3 & k_{33}\end{vmatrix}-p_1\begin{vmatrix}k_{21} & k_{23}\\ k_{31} & k_{33}\end{vmatrix}+k_{13}\begin{vmatrix}k_{21} & p_2\\ k_{31} & p_3\end{vmatrix}=$$

$$=k_{11}(p_2k_{33}-p_3k_{23})-p_1(k_{33}k_{21}-k_{31}k_{23})+k_{13}(p_3k_{21}-k_{31}p_2)= \qquad (10)$$

$$=k_{11}p_2k_{33}-k_{11}p_3k_{23}-p_1k_{33}k_{21}+p_2k_{31}k_{23}+k_{13}p_3k_{21}-k_{13}k_{31}p_2;$$

$$\Delta c=\begin{vmatrix}k_{11} & k_{12} & p_1\\ k_{21} & k_{22} & p_2\\ k_{31} & k_{32} & p_3\end{vmatrix}=k_{11}\begin{vmatrix}k_{22} & p_2\\ k_{32} & p_3\end{vmatrix}-k_{12}\begin{vmatrix}k_{21} & k_2\\ k_{31} & k_3\end{vmatrix}+p_3\begin{vmatrix}k_{21} & k_{22}\\ k_{31} & k_{32}\end{vmatrix}=$$

$$=k_{11}(k_{22}p_3-k_{32}p_2)-k_{12}(p_3k_{21}-k_{31}p_2)+p_1(k_{32}k_{21}-k_{31}k_{22})= \qquad (11)$$

$$=k_{11}k_{22}p_3-k_{11}k_{32}p_2-k_{12}p_3k_{21}+k_{12}k_{31}p_2+p_1k_{32}k_{21}-p_1k_{31}k_{22};$$

$$a=\frac{\Delta a}{\Delta};\ b=\frac{\Delta b}{\Delta};\ c=\frac{\Delta c}{\Delta};\ (\Delta\neq 0). \qquad (12)$$

### 1.3. Проверка адекватности модели

#### 1.3.1. Проверка адекватности при отсутствии параллельных опытов

Адекватность полученного уравнения регрессии при отсутствии параллельных опытов проверяется по критерию Фишера [1, С.46] сравнением остаточной дисперсии $S^2_{ост}$ и дисперсии относительно среднего $S^2_y$:



$$F=\frac{S_y^2}{S^2_{ост}}, \qquad (13)$$

где $S_y^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar y)^2}{N-1}$, $S^2_{ост}=\dfrac{\sum_{i=1}^{N}(y_i-\hat y_i)^2}{N-l}$, (14)

$\bar y=\dfrac{\sum_{i=1}^{N}y_i}{N}$ - среднее значение выхода объекта; (15)

$\hat y_i$ - значения отклика, рассчитанные по модели;

$N$ - объем выборки;

$l$ - число связей, наложенных на выборку, равное числу определенных коэффициентов в уравнении (для параболической регрессии $l$=3).

Дисперсия $S^2_{ост}$ характеризует отклонение значений $\hat y_i$, рассчитанных по модели, от экспериментальных значений $y_i$, а $S_y^2$ - отклонение экспериментальных значений $y_i$ от средних $\bar y$.

Если $F$ больше некоторого критического значения:

$$F=\frac{S_y^2}{S^2_{ост}}>F_p(f_1,f_2,p), \qquad (16)$$

то модель близка к описанию объекта, т.е. она адекватна объекту.

$F_p(f_1,f_2,p)$ - табличное (критическое) значение критерия Фишера [2, С.196], которое зависит от чисел $f_1,f_2$ степеней свободы для дисперсий $S_y^2$ и $S^2_{ост}$ соответственно, а также от уровня значимости $p$.

Число степеней свободы $f$ любой дисперсии определяется разностью между общим количеством опытов и числом характеристик, рассчитанных по этим опытам и используемых при расчете данных дисперсий:

$$f_1=N-1,\ f_2=N-l. \qquad (17)$$

Уровень значимости $p$ характеризует вероятность того, что условие (16) не будет выполняться. Наиболее часто уровень значимости принимается равным 1% или 5%.

В данном случае критерий Фишера показывает, во сколько раз уменьшается рассеяние экспериментальных значений выхода относительно полученного уравнения регрессии по сравнению с рассеянием относительно среднего значения. Чем больше расчетное значение критерия Фишера $F$ превышает табличное значение $F_p(f_1, f_2, p)$, тем эффективнее уравнение регрессии. Если $S^2_{ост}$, $S^2_y$ отличаются незначительно и не выполняется условие (16), то применять выбранную модель нецелесообразно.

Для оценки силы связи $x$ и $y$ при линейной зависимости вычисляется коэффициент парной корреляции $r$:

$$r = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{\sqrt{\left[N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2\right]\left[N\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)^2\right]}}. \quad (18)$$

Коэффициент $r$ может изменяться от 0 до $\pm 1$. Чем ближе $|r|$ к единице, тем теснее связь между случайными величинами $x$ и $y$.

В случае нелинейной связи между $x$ и $y$ (например, для параболической трансцендентной регрессии) оценка тесноты связи характеризуется величиной корреляционного отношения $\theta$.

$$\theta = \sqrt{1-\xi}\ , \quad (19)$$

где $\xi = \dfrac{(N-l)S^2_{ост}}{(N-1)S^2_y}$. (20)

Величина корреляционного отношения $\theta$ также может изменяться от 0 до 1. Чем больше $\theta$, тем сильнее связь. При $\theta$=1 наблюдается функциональная зависимость между $x$ и $y$.



1.3.2. Проверка адекватности при наличии параллельных опытов

Адекватность полученного уравнения при наличии параллельных опытов проверяется также по критерию Фишера, но дисперсионное отношение $F$ определяется соотношением [1, С.45]:

$$F = \frac{S^2_{ад}}{S^2_{восп}}, \quad (21)$$

где $S^2_{восп}$ - дисперсия воспроизводимости;

$S^2_{ад}$ - дисперсия адекватности.

Дисперсия воспроизводимости рассчитывается по формуле:

$$S^2_{восп} = \frac{\sum_{i=1}^{N} S_i^2}{N}, \quad (22)$$

где $S_i^2$ - выборочные дисперсии: $S_i^2 = \dfrac{\sum_{u=1}^{m}(y_{iu} - \bar{y}_i)^2}{m-1}, i = \overline{1, N}$, (23)

$m$ - число параллельных опытов;

$y_{iu}$ - результат $u$-го параллельного опыта;

$\bar{y}_i$ - среднее из результатов параллельных опытов $y_{iu}, (u = \overline{1, m})$:

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{u=1}^{m} y_{iu}}{m}, i = \overline{1, N}. \quad (24)$$

Дисперсия адекватности рассчитывается по формуле:

$$S^2_{ад} = \frac{m\sum_{i=1}^{N}(\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2}{N\ m - l}, \quad (25)$$

где $\hat{y}_i$ - значения отклика, рассчитанные по модели.

$S^2_{ad}$ характеризует разброс между выходом модели $\hat{y}_i$ и выходом объекта $\overline{y}_i$.

С помощью критерия Фишера проверяется гипотеза: дисперсия адекватности и дисперсия воспроизводимости относятся к одной и той же генеральной совокупности.

Если $F$ меньше некоторого критического значения:

$$F = \frac{S^2_{ad}}{S^2_{восп}} < F_p\left(f_1, f_2, p\right), \qquad (26)$$

то модель близка к описанию объекта, т.е. она адекватна объекту.

Для определения критического значения критерия (26):

$$f_1 = Nm\text{-}l,\ f_2 = N(m-1). \qquad (27)$$

<u>Пример</u>

Установить адекватность модели $\hat{y} = 1{,}2 + 0{,}01x$, описывающей зависимость потерь изопентана с изоамиленовой фракцией от нагрузки на колонну в процессе экстрактивной ректификации изопентан-изоамиленовой смеси, используя экспериментальные данные из табл. 1. Параллельные опыты при этом отсутствовали.

$x$ - нагрузка на колонну (расход сырья);

$y$ - концентрация изопентана в изоамиленовой фракции.

Таблица 1.

Экспериментальные данные

| № опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| x, т/ч | 25 | 28 | 30 | 31 | 33 |
| y, % | 1,44 | 1,48 | 1,51 | 1,51 | 1,54 |

Среднее значение выхода объекта определяется из (15):

$$\overline{y} = \frac{1{,}44 + 1{,}48 + 1{,}51 + 1{,}51 + 1{,}54}{5} = 1{,}496.$$



Используя исследуемую модель находятся значения $\hat{y}$ путем подстановки $x$ в данное уравнение линии регрессии (табл. 2).

Таблица 2

Расчетные значения

| $x$ | 25 | 28 | 30 | 31 | 33 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\hat{y}$ | 1,45 | 1,48 | 1,5 | 1,51 | 1,53 |

В соответствии с (14) проводится расчет остаточной дисперсии $S^2_{ост}$ и дисперсии относительно среднего $S^2_y$:

$$S^2_{ост} = \frac{(1{,}44-1{,}45)^2 + (1{,}48-1{,}48)^2 + (1{,}51-1{,}5)^2 + (1{,}51-1{,}51)^2 + (1{,}54-1{,}53)^2}{5-2} = 0{,}0001;$$

$$S^2_y = \frac{(1{,}44-1{,}496)^2 + (1{,}48-1{,}496)^2 + (1{,}51-1{,}496)^2 + (1{,}51-1{,}496)^2 + (1{,}54-1{,}496)^2}{5-1} = 0{,}002.$$

Из (13) находим дисперсионное отношение:

$$F = \frac{0{,}002}{0{,}0001} = 20.$$

Числа степеней свободы согласно (17) будут равны:

$$f_1 = 5 - 1 = 4;\ f_2 = 5 - 2 = 3.$$

Критическое значение критерия Фишера для уровня значимости $p$=5% и чисел степеней свободы $f_1 = 4$ и $f_2 = 3$ составляет $F_p(f_1, f_2, p) = 9{,}1172$ [2, С.198].

$$F > F_p(f_1, f_2, p).$$

Из неравенства следует, что модель, описывающая взаимосвязь нагрузки на колонну и концентрации потерь изопентана, адекватна объекту.

## 1.4. Схема алгоритма решения

Представленный алгоритм (рисунок) предназначен для вычисления параметров модели, величины корреляционного отношения и установления адекватности параболической модели при отсутствии параллельных опытов в эксперименте.

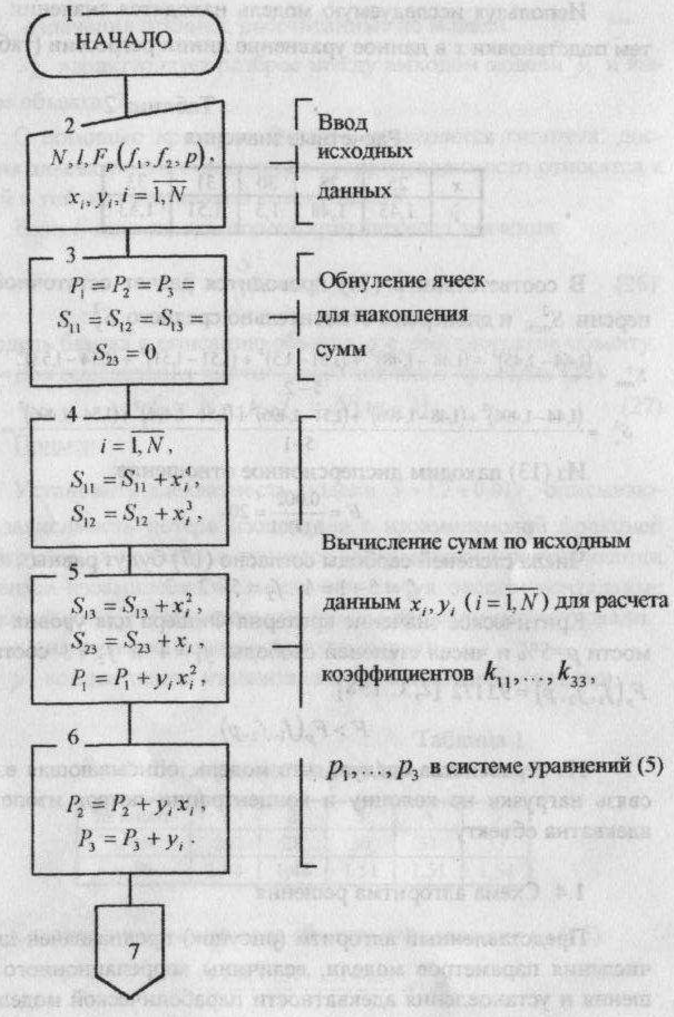



Рисунок. Схема алгоритма решения задачи




Рисунок. Продолжение

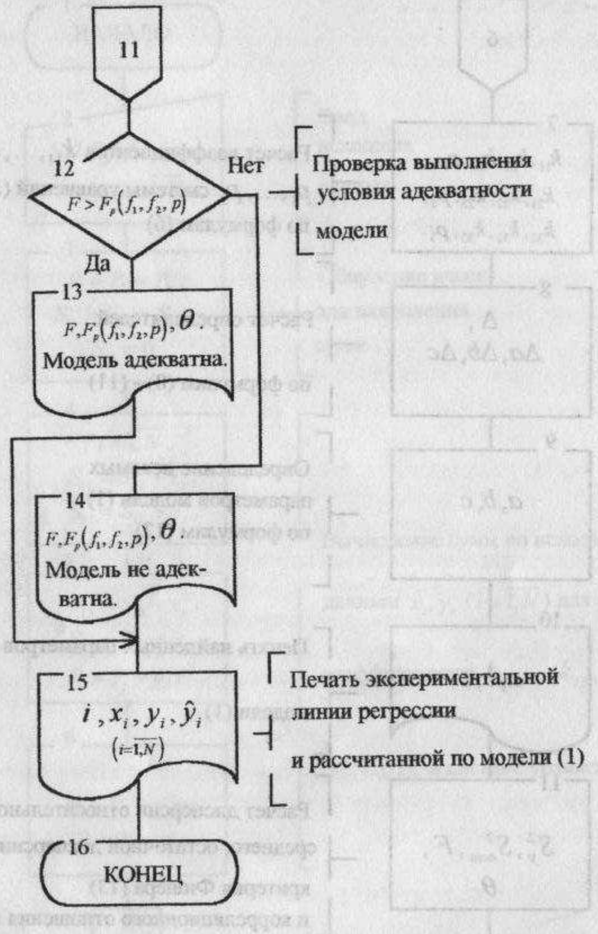



Рисунок. Окончание



Схема алгоритма (рисунок) позволяет разработать программу решения и просчитать рассматриваемый пример.

Для составления схемы алгоритма определения параметров другого вида зависимости (гиперболической, логарифмической и т.д.) необходимо составить и решить систему уравнений, аналогичную (4). Выбор вида зависимости (1) осуществляется по характеру изменения эмпирической линии регрессии, построенной на корреляционном поле. Получение неадекватной модели свидетельствует о неправильном выборе вида линии регрессии или ошибках при составлении алгоритма и программы. Поэтому выбирается новый вид зависимости из табл. 4, более точно описывающий экспериментальные данные, или проверяется программа, после чего расчет выполняется сначала.

## 2. ЗАДАНИЕ НА САМОСТОЯТЕЛЬНУЮ РАБОТУ

Для указанного преподавателем варианта исходных данных из табл. 3 построить эмпирическую линию регрессии $y$ по $x$. По виду построенной линии подобрать уравнение регрессии, пользуясь табл. 4. Используя МНК составить систему уравнений, аналогичную (4), и решить ее относительно определяемых параметров. Построить схему алгоритма и составить программу расчета параметров модели, критерия Фишера, а также коэффициента парной корреляции (корреляционного отношения).

Программа составляется на языке *Си* или с использованием одного из известных математических пакетов (*MatCad*, *Matlab*, *Maple* и др.)

Произвести расчет на ПЭВМ и сделать вывод о пригодности модели к использованию.

## 3. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

3.1. Изучить методические указания.
3.2. Построить график по исходным данным из табл. 3.
3.3. Выбрать из табл. 4 вид уравнения регрессии.

3.4. Составить алгоритм решения для определения параметров модели в соответствии с выбранным уравнением, проверки адекватности и установления корреляционной связи.

3.5. Составить схему алгоритма решения.

3.6. Составить и отладить программу решения.

3.7. Ввести исходные данные (табл. 3) в ПЭВМ и провести расчет параметров модели и оценки адекватности.

3.8. Оформить и представить преподавателю отчет о работе.

## 4. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

Отчет должен оформляться в тетради для лабораторных работ и содержать следующие разделы:

4.1. Название и цель работы, номер варианта.

4.2. Вывод алгоритма решения.

4.3. Схема алгоритма с пояснениями.

4.4. Листинг программы.

4.5. Распечатка исходных данных, результатов расчетов, построенных графиков экспериментальной и расчетной кривых.

4.6. Выводы.

## 5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

5.1. Что такое объем выборки?

5.2. В чем суть МНК при определении параметров регрессионной модели? 4

5.3. Какие параметры технологических процессов относятся к факторам, какие к откликам? 1

5.4. Что оценивает коэффициент парной корреляции? 8

5.5. Какие дисперсии вы знаете, и как они рассчитываются? 7, 9

5.6. Каким образом определяются числа степеней свободы дисперсий? 2

5.7. Чем отличаются методы проверки адекватности при наличии и отсутствии параллельных опытов?

5.8. Как определить критическое значение критерия Фишера? 7

5.9. Что такое эмпирическая линия регрессии?

5.10. Что такое корреляционное поле?



Таблица 3

Варианты заданий к выполнению работы

| № вар. | № опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 | 10,0 |
| | y | 3,95 | 7,95 | 11,95 | 15,95 | 19,95 | 23,95 | 27,97 | 32,0 | 36,03 | 39,95 |
| 2 | x | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 4,5 | 5,0 | 5,5 | 6,0 | 6,5 |
| | y | 4,95 | 6,45 | 7,95 | 9,45 | 10,95 | 12,45 | 13,96 | 15,5 | 17,03 | 18,35 |
| 3 | x | 1,0 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 |
| | y | 12,95 | 14,95 | 16,78 | 18,46 | 20,02 | 21,47 | 22,84 | 24,15 | 25,38 | 26,43 |
| 4 | x | 1,0 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 |
| | y | 6,95 | 7,47 | 8,03 | 8,63 | 9,27 | 9,95 | 10,69 | 11,48 | 12,31 | 13,07 |
| 5 | x | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 | 10,0 |
| | y | 1,25 | 2,0 | 3,12 | 4,81 | 7,35 | 11,16 | 16,01 | 23,61 | 38,60 | 57,41 |
| 6 | x | 1,0 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 |
| | y | 9,95 | 10,67 | 11,44 | 12,26 | 13,15 | 14,10 | 15,12 | 16,23 | 17,44 | 18,61 |
| 7 | x | 1,0 | 1,07 | 1,14 | 1,21 | 1,28 | 1,35 | 1,42 | 1,49 | 1,56 | 1,63 |
| | y | 10,82 | 11,61 | 12,45 | 13,30 | 14,34 | 15,38 | 16,51 | 17,75 | 19,07 | 20,37 |
| 8 | x | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 | 10,0 |
| | y | 0,385 | 0,412 | 0,440 | 0,454 | 0,469 | 0,493 | 0,528 | 0,50 | 0,485 | 0,47 |
| 9 | x | 0,01 | 0,09 | 0,18 | 0,25 | 0,33 | 0,41 | 0,49 | 0,57 | 0,65 | 0,73 |
| | y | 24,89 | 24,30 | 23,60 | 22,81 | 21,94 | 21,02 | 20,09 | 13,16 | 18,23 | 17,2 |

Продолжение табл, 3

| № опыта / № вар. | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | x | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 | 10,0 |
| | y | 19,95 | 33,28 | 42,81 | 49,95 | 55,51 | 59,35 | 63,7 | 66,67 | 69,26 | 71,38 |
| 11 | x | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 | 1,1 |
| | y | 900 | 450,0 | 287,5 | 210,0 | 166,6 | 139,8 | 121,8 | 109,3 | 100,0 | 92,9 |
| 12 | x | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 | 10,0 |
| | y | 4,12 | 3,59 | 3,39 | 3,28 | 3,20 | 3,18 | 3,16 | 3,17 | 3,18 | 3,09 |
| 13 | x | 0,1 | 0,26 | 0,36 | 0,46 | 0,56 | 0,66 | 0,76 | 0,86 | 0,96 | 1,06 |
| | y | 37,9 | 59,1 | 77,9 | 94,2 | 107,9 | 119,3 | 128,4 | 135,7 | 141,1 | 145,0 |
| 14 | x | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 | 10,0 |
| | y | 0,95 | 1,56 | 1,91 | 2,16 | 2,35 | 2,51 | 2,64 | 2,76 | 2,86 | 2,95 |
| 15 | x | 1,0 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 |
| | y | 129,71 | 128,12 | 126,67 | 125,33 | 124,07 | 122,85 | 121,65 | 120,44 | 119,2 | 117,9 |
| 16 | x | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
| | y | 1,21 | 4,79 | 10,62 | 18,49 | 28,06 | 38,96 | 50,75 | 62,96 | 75,10 | 86,69 |
| 17 | x | 0,0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 |
| | y | 2,28 | 2,26 | 2,19 | 2,09 | 1,97 | 1,85 | 1,74 | 1,65 | 1,666 | 1,58 |
| 18 | x | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
| | y | 7,0 | 7,05 | 7,10 | 7,20 | 7,20 | 7,28 | 7,36 | 7,16 | 7,59 | 7,76 |

Продолжение табл. 3

| № опыта / № вар. | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 19 | x | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 4,5 | 5,0 | 5,5 | 6,0 |
| | y | 29,5 | 29,6 | 29,7 | 29,8 | 29,9 | 31,0 | 31,1 | 31,8 | 32,6 | 33,8 |
| 20 | x | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 | 10,0 |
| | y | 11,0 | 12,3 | 13,2 | 14,1 | 14,0 | 11,5 | 11,2 | 12,0 | 12,8 | 14,0 |
| 21 | x | 0,01 | 0,3 | 0,6 | 0,9 | 1,2 | 1,5 | 1,8 | 2,1 | 2,4 | 2,7 |
| | y | 24,89 | 23,20 | 21,69 | 20,36 | 19,18 | 18,14 | 17,21 | 16,40 | 25,66 | 14,88 |
| 22 | x | 0,10 | 0,11 | 0,12 | 0,13 | 0,14 | 0,15 | 0,16 | 0,17 | 0,18 | 0,19 |
| | y | 1040 | 856 | 734,4 | 613,7 | 550,2 | 481,4 | 430,6 | 386,6 | 387,0 | 348,7 |
| 23 | x | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 | 0,10 |
| | y | 1003 | 504 | 337,3 | 254 | 204 | 170,6 | 146,8 | 129,0 | 115,1 | 104,0 |
| 24 | x | 2,0 | 4,0 | 6,0 | 8,0 | 10,0 | 12,0 | 14,0 | 16,0 | 18,0 | 20,0 |
| | y | 71,0 | 71,6 | 71,9 | 72,6 | 73,4 | 74,2 | 75,0 | 75,6 | 76,2 | 76,6 |
| 25 | x | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,5 | 8,0 | 9,0 | 10,0 |
| | y | 14,0 | 12,8 | 11,2 | 11,0 | 10,8 | 10,8 | 108 | 10,8 | 10,8 | 10,8 |
| 26 | x | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 | 10,0 |
| | y | 17,1 | 15,0 | 13,1 | 12,6 | 12,5 | 12,8 | 13,0 | 13,6 | 13,9 | 14,2 |





Продолжение табл. 3

| № опыта / № вар. | | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x | 11,0 | 12,0 | 13,0 | 14,0 | 15,0 | 16,0 | 17,0 | 18,0 | 19,0 | 20,0 |
| | y | 44,03 | 48,04 | 52,03 | 55,67 | 60,0 | 63,98 | 68,01 | 72,05 | 75,94 | 80,02 |
| 2 | x | 7,0 | 7,5 | 8,0 | 8,5 | 9,0 | 9,5 | 10,0 | 10,5 | 11,0 | 11,5 |
| | y | 20,03 | 21,54 | 23,03 | 24,47 | 26,0 | 27,48 | 29,01 | 30,55 | 31,96 | 33,52 |
| 3 | x | 2,0 | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 | 2,6 | 2,7 | 2,8 | 2,9 |
| | y | 27,59 | 28,62 | 29,6 | 30,46 | 31,38 | 32,27 | 33,08 | 33,08 | 33,91 | 34,58 |
| 4 | x | 2,0 | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 | 2,6 | 2,7 | 2,8 | 2,9 |
| | y | 14,03 | 14,95 | 15,91 | 16,85 | 17,92 | 18,98 | 20,13 | 21,33 | 22,44 | 23,74 |
| 5 | x | 11,0 | 12,0 | 13,0 | 14,0 | 15,0 | 16,0 | 17,0 | 18,0 | 19,0 | 20,0 |
| | y | 88,66 | 129,90 | 194,8 | 291,8 | 437,9 | 656,8 | 985,3 | 1478 | 2216 | 2285 |
| 6 | x | 2,0 | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 | 2,6 | 2,7 | 2,8 | 2,9 |
| | y | 20,03 | 21,47 | 23,01 | 24,59 | 26,38 | 28,27 | 30,33 | 32,57 | 34,78 | 37,54 |
| 7 | x | 1,7 | 1,77 | 1,84 | 1,91 | 1,98 | 2,05 | 1,12 | 2,19 | 2,26 | 2,33 |
| | y | 21,92 | 23,32 | 25,22 | 26,38 | 28,97 | 31,05 | 33,34 | 35,73 | 38,29 | 41,13 |
| 8 | x | 11,0 | 12,0 | 13,0 | 14,0 | 15,0 | 16,0 | 17,0 | 18,0 | 19,0 | 20,0 |
| | y | 0,465 | 0,454 | 0,441 | 0,427 | 0,412 | 0,398 | 0,384 | 0,371 | 0,359 | 0,348 |
| 9 | x | 0,81 | 0,89 | 0,97 | 1,05 | 1,13 | 1,21 | 1,29 | 1,37 | 1,45 | 1,53 |
| | y | 16,5 | 15,48 | 14,63 | 13,75 | 13,01 | 12,27 | 11,62 | 11,01 | 10,322 | 9,81 |

Продолжение табл, 3

| № опыта / № вар. | | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | x | 11,0 | 12,0 | 13,0 | 14,0 | 15,0 | 16,0 | 17,0 | 18,0 | 19,0 | 20,0 |
| | y | 73,37 | 75,08 | 76,50 | 77,74 | 78,95 | 79,98 | 80,97 | 81,87 | 82,57 | 83,56 |
| 11 | x | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 2,0 | 2,1 |
| | y | 87,5 | 83,2 | 79,6 | 76,6 | 74,2 | 72,1 | 70,4 | 68,9 | 67,5 | 66,3 |
| 12 | x | 11,0 | 12,0 | 13,0 | 14,0 | 15,0 | 16,0 | 17,0 | 18,0 | 19,0 | 20,0 |
| | y | 3,16 | 3,15 | 3,13 | 3,14 | 3,07 | 3,08 | 3,07 | 3,06 | 3,08 | 3,07 |
| 13 | x | 1,16 | 1,26 | 1,36 | 1,46 | 1,56 | 1,66 | 1,76 | 1,86 | 1,96 | 2,06 |
| | y | 147,8 | 149,4 | 150,2 | 150,1 | 149,6 | 148,6 | 147,2 | 145,6 | 143,6 | 143,6 |
| 14 | x | 11,0 | 12,0 | 13,0 | 14,0 | 15,0 | 16,0 | 17,0 | 18,0 | 19,0 | 20,0 |
| | y | 3,04 | 3,11 | 3,18 | 3,25 | 3,31 | 3,36 | 3,42 | 3,47 | 3,51 | 3,56 |
| 15 | x | 2,0 | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 | 2,6 | 2,7 | 2,8 | 2,9 |
| | y | 116,51 | 114,98 | 113,27 | 111,3 | 108,9 | 105,9 | 102,0 | 96,62 | 88,25 | 73,3 |
| 16 | x | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 2,0 |
| | y | 97,26 | 106,40 | 113,73 | 118,9 | 121,9 | 122,4 | 120,5 | 116,2 | 109,7 | 101,3 |
| 17 | x | 2,0 | 2,2 | 2,4 | 2,6 | 2,8 | 3,0 | 3,2 | 3,4 | 3,6 | 3,8 |
| | y | 1,6 | 1,65 | 1,71 | 1,78 | 1,84 | 1,87 | 1,88 | 1,86 | 1,8 | 1,74 |
| 18 | x | 1,0 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 |
| | y | 7,99 | 8,35 | 8,95 | 10,12 | 13,61 | 37,21 | 132,2 | 10,65 | 7,28 | 6,21 |

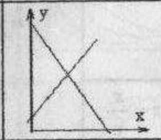
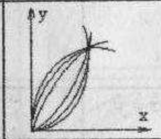
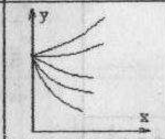
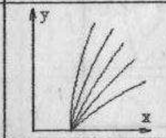
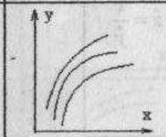
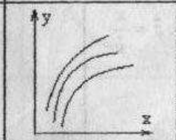
Окончание табл. 3

| № опыта / № вар. | | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 19 | x | 6,5 | 7,0 | 7,5 | 8,0 | 8,5 | 9,0 | 9,5 | 10,0 | 10,5 | 11,0 |
| | y | 34,7 | 35,8 | 36,8 | 37,7 | 38,3 | 38,7 | 38,9 | 39,2 | 39,3 | 39,3 |
| 20 | x | 11,0 | 12,0 | 13,0 | 14,0 | 15,0 | 16,0 | 17,0 | 18,0 | 19,0 | 20,0 |
| | y | 14,1 | 11,6 | 11,0 | 12,1 | 13,6 | 14,3 | 12,1 | 11,1 | 12,2 | 13,7 |
| 21 | x | 3,0 | 3,3 | 3,6 | 3,9 | 4,2 | 4,5 | 4,8 | 5,1 | 5,4 | 5,7 |
| | y | 14,52 | 15,74 | 13,19 | 12,69 | 12,61 | 11,74 | 11,38 | 11,04 | 10,60 | 10,33 |
| 22 | x | 0,2 | 0,21 | 0,22 | 0,23 | 0,24 | 0,25 | 0,26 | 0,27 | 0,28 | 0,29 |
| | y | 290,0 | 266,8 | 246,6 | 229,0 | 213,0 | 199,9 | 188,0 | 177,2 | 167,5 | 158,9 |
| 23 | x | 0,11 | 0,121 | 0,13 | 0,14 | 0,15 | 0,16 | 0,17 | 0,18 | 0,19 | 0,20 |
| | y | 94,9 | 87,4 | 81,0 | 75,4 | 70,7 | 66,5 | 62,8 | 59,6 | 56,6 | 54,0 |
| 24 | x | 22,0 | 24,0 | 26,0 | 28,0 | 30,0 | 32,0 | 34,0 | 36,0 | 38,0 | 40,0 |
| | y | 77,1 | 77,5 | 77,8 | 78,2 | 78,4 | 78,6 | 78,8 | 78,9 | 79,0 | 79,1 |
| 25 | x | 11,0 | 12,0 | 13,0 | 14,0 | 15,0 | 16,0 | 17,0 | 18,0 | 19,0 | 20,0 |
| | y | 10,8 | 10,8 | 10,8 | 10,8 | 10,8 | 10,8 | 11,0 | 11,2 | 12,8 | 14,0 |
| 26 | x | 11,0 | 12,0 | 13,0 | 14,0 | 15,0 | 16,0 | 17,0 | 18,0 | 19,0 | 20,0 |
| | y | 14,6 | 14,8 | 15,2 | 15,4 | 15,6 | 15,8 | 16,0 | 16,2 | 16,4 | 16,5 |

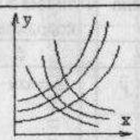
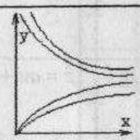
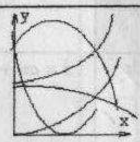
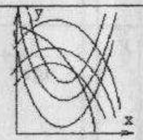
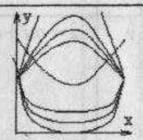
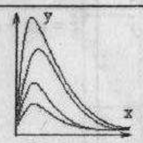


Таблица 4

## Типы уравнений регрессии

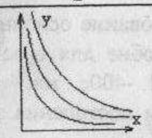
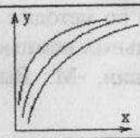
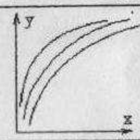
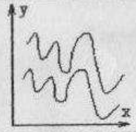
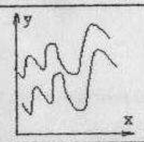
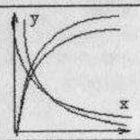
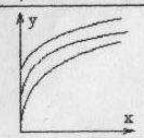
| № п/п | Тип кривой | Уравнение регрессии | Замена $x$ | Замена $y$ | Функция в новых координатах |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 |  | $\hat y = ax + b$ | $u = x$ | $\hat z = \hat y$ | $\hat z = au + b$ |
| 2 |  | $\hat y = bx^a$ | $u = \lg x$ | $\hat z = \lg \hat y$ | $\hat z = au + \lg b$ |
| 3 |  | $\hat z = \dfrac{u}{\lg a} + \dfrac{\lg b}{\lg a}$ | $u = x$ | $\hat z = \ln \hat y$ | $\hat z = au + \ln b$ |
| 4 |  | $\hat y = \log_a bx$ | $u = \lg x$ | $\hat z = \hat y$ | $\hat z = \dfrac{u}{\lg a} + \dfrac{\lg b}{\lg a}$ |
| 5 |  | $\hat y = a \ln bx$ | $u = \ln x$ | $\hat z = \hat y$ | $\hat z = au + a \ln b$ |
| 6 |  | $\hat y = a \lg bx$ | $u = \lg x$ | $\hat z = \hat y$ | $\hat z = au + a \lg b$ |

Продолжение табл . 4

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 |  | $\hat{y}=\dfrac{1}{ax+b}$ | $u=x$ | $\hat{z}=\dfrac{1}{\hat{y}}$ | $\hat{z}=au+b$ |
| 8 |  | $\hat{y}=\dfrac{x}{ax+b}$ | $u=x$ | $\hat{z}=\dfrac{x}{\hat{y}}$ | |
| 9 |  | $\hat{y}=ax^2+bx+c$ | $u=x$ | $\hat{z}=\hat{y}$ | $\hat{z}=au^2+bu+c$ |
| 10 |  | $\hat{y}^2=ax^2+bx+c$ | $u=x$ | $\hat{z}=\hat{y}^2$ | |
| 11 |  | $\hat{y}=\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ | $u=x$ | $\hat{z}=\dfrac{1}{\hat{y}}$ | |
| 12 |  | $\hat{y}=\dfrac{x}{ax^2+bx+c}$ | $u=x$ | $\hat{z}=\dfrac{x}{\hat{y}}$ | |



Окончание табл . 4

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 13 |  | $\hat{y}=\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{x}+c$ | $u=\dfrac{1}{x}$ | $\hat{z}=\hat{y}$ | $\hat{z}=au^2+bu+c$ |
| 14 |  | $\hat{y}=a\lg^2 x+b\lg x+c$ | $u=\lg x$ | $\hat{z}=\hat{y}$ | |
| 15 |  | $\hat{y}=a\ln^2 x+b\ln x+c$ | $u=\ln x$ | $\hat{z}=\hat{y}$ | |
| 16 |  | $\hat{y}=a\sin^2 x+b\sin x+c$ | $u=\sin x$ | $\hat{z}=\hat{y}$ | |
| 17 |  | $\hat{y}=a\cos^2 x+b\cos x+c$ | $u=\cos x$ | $\hat{z}=\hat{y}$ | |
| 18 |  | $\hat{y}=a\,\mathrm{tg}^2 x+b\,\mathrm{tg}\,x+c$ | $u=\mathrm{tg}\,x$ | $\hat{z}=\hat{y}$ | |
| 19 |  | $\hat{y}=a\,\mathrm{ctg}^2 x+b\,\mathrm{ctg}\,x+c$ | $u=\mathrm{ctg}\,x$ | $\hat{z}=\hat{y}$ | |

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кафаров В.В. Математическое моделирование основных процессов химических производств: Учеб. пособие для вузов / В.В. Кафаров, М.Б. Глебов. -М.: Высш. шк., 1991. -400с.: ил.

2. Львовский Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул. -М.: Высш. шк., 1982. -224с.: ил.

3. Ракитин В.И. Практическое руководство по методам вычислений с приложением программ для персональных компьютеров: Учеб. пособие / В.И. Ракитин, В.Е. Первушин. -М.: Высш. шк., 1998. -383с.: ил.