1. 좌표계 변환

<N-Dimensional Ellipsoidal convex Model>

$$\begin{array}{c|c} & \overbrace{a_1\ a_2 \cdots a_N}^{N\text{차원}} \\ \hline M\text{개 Point}\ \begin{matrix}1\\ \vdots \\ M\end{matrix} & \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \end{array}$$

N차원이 M개의 데이터 포인트일 때,

: $a_i\ (i=1,2,\cdots,N)$, $a^{(r)}\ (r=1,2,\cdots,M)$.

→ ellipsoidal convex model

$$= (a-a^{\circ})^T G (a-a^{\circ}) \leq 1$$

* a° = a의 중심좌표 ($(N \times 1)$ 차원)

* G = 타원체의 size, 특징을 나타내는 행렬. (추후에 구할 것)

기존 a좌표에서 b라는 rotation된 좌표를 구해야 함.

T_N을 Transformation matrix라고 할 때, $\boxed{b = T_N \cdot a}$.

$(T_N = T_N(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{N-1}))$.

☆ rotation이라는 개념은 projection 개념을 통해 바꿀수 있음. T_N을 구하려면,

즉, 그람 슈미트 직교화 필요 (Gram-Schmidt Orthogonalization).

V를 u에 projection 시킬 때, (V가 주어졌을 때)

$$\mathrm{Proj}_u(V) = \frac{V^T u}{u^T u} u.$$

$$u_1 = V_1$$

$$u_2 = V_2 - \mathrm{Proj}_{u_1}(V_2)$$

$$u_3 = V_3 - \mathrm{Proj}_{u_1}(V_2) - \mathrm{Proj}_{u_2}(V_3)$$

$$\vdots$$

$$u_k = V_k - \sum_{j=1}^{k-1} \mathrm{Proj}_{u_j}(V_k).$$

N차원에서 주어진 독립된 벡터 집합을 V_k라 할 때,

$$\left.\begin{aligned} W_k &= V_k - \sum_{i=1}^{k-1} (U_i^T V_k) U_i \neq 0 \quad (k \leq N) \\ U_k &= \frac{W_k}{\sqrt{W_k^T W_k}} \end{aligned}\right] \quad (1)$$

initial 벡터 V_k 는 선형독립인 아무 벡터나 가능. 즉,

$$V_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 \\ \vdots \\ \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{N-2} \cos\theta_{N-1} \\ \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{N-2} \sin\theta_{N-1} \end{bmatrix} ; \quad V_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \delta_{i,k-1} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$* \ \delta_{i,j} =$ kronecker delta $= \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$

아까 도출한 그람-슈미트 W_k, U_k 를 통해,

$$\left[\ U_1 = V_1 \ ; \quad U_k = \begin{bmatrix} O_{k-2} \\ \overline{U_k} \end{bmatrix}. \quad (k = 2, 3, \cdots, N). \right] \quad (2)$$

$* \ O_{k-2}$ = k-2개의 0 벡터행렬

$$* \ \overline{U_k} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_{k-1} \\ \cos\theta_{k-1} \cos\theta_k \\ \vdots \\ \cos\theta_{k-1} \sin\theta_k \cdots \sin\theta_{N-2} \cos\theta_{N-1} \\ \cos\theta_{k-1} \sin\theta_k \cdots \sin\theta_{N-2} \sin\theta_{N-1} \end{bmatrix}$$

그래서, $\underline{T_N(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{N-1}) = [U_1, U_2, \cdots, U_N]}$, 이를 (2)식을 통해 구함.

(ex) $N=3$ 차원, $\boxed{T_3(\underline{\theta_1, \theta_2}) = [U_1, U_2, U_3]}$.

$$U_1 = V_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cancel{\cos\theta_3} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ \sin\theta_1 \sin\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$U_2 = \cancel{V_2} = \begin{bmatrix} O_0 \\ \overline{U_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 \\ \cos\theta_1 \cos\theta_2 \\ \cos\theta_1 \sin\theta_2 \cancel{\cos\theta_3} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 \\ \cos\theta_1 \cos\theta_2 \\ \cos\theta_1 \sin\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$U_3 = \cancel{V_3} \begin{bmatrix} O_1 \\ \overline{U_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\theta_2 \\ \cos\theta_2 \cancel{\cos\theta_3} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\theta_2 \\ \cos\theta_2 \end{bmatrix}.$$

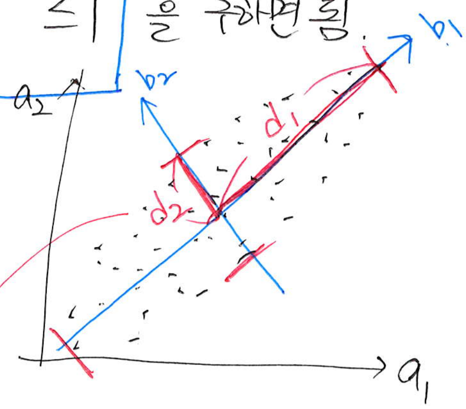
$$\boxed{\therefore T_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 \cos\theta_2 & \cos\theta_1 \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_1 \sin\theta_2 & \cos\theta_1 \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}}$$

이제 T_N이 구해졌으므로,

새로운 b좌표계는 $b = T_N \cdot a$ 로 구할 수 있음, M point들 모두 변환.

2. 데이터 point에 맞는 ellipsoid 구하기

변환된 b에 대해, 이제 $\boxed{\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{b_k - b_k^0}{g_k}\right)^2 \le 1}$ 을 구하면 됨.



* b_k^0는 b_k의 중심 좌표

* 그런데 g_k을 어떻게 구해?

일단, $d_k = \dfrac{\max_r \{b_k^{(r)}\} - \min_r \{b_k^{(r)}\}}{2}$

N차원에서 모든 점을 포함하는 ellipsoid 식을 세운 뒤, (임의로)

그 ellipsoid의 부피를 minimize하는 방식을 통해 g_k을 구할 수 있음.

(부피 구해서 → minimize → 라그랑주 이용 → g_k 도출). (식복잡해서 생략.)

구해진 $\boxed{g_k = \sqrt{N} \cdot d_i}$ $(i = 1, \cdots, N)$.

$$\eta = \sqrt{\max_r \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{b_k^{(r)} - b_k^0}{g_k}\right)^2} \le 1.$$

$$D = \mathrm{diag}\{(\eta g_1)^{-2}, (\eta g_2)^{-2}, \cdots, (\eta g_N)^{-2}\}.$$

☆ 최종적으로 변환된 ellipsoid 식.

: $\boxed{\{b - b^0\}^T D \{b - b^0\} \le 1.}$