

## Реферат

### **Компьютерное моделирование кинетического и гидродинамического приближения сложных статистических систем**

Перечень ключевых слов: нейтронное рассеяние, наносистемы и материалы, дифракция нейтронов, рентгеновская дифракция, нейтронная спектроскопия, камера высокого давления, импульсные источники нейтронов, конструкционные материалы, высокопрочные сплавы, нанотрубки, каркасно-нанокластерные бориды, углеволокно, высокотемпературные сверхпроводники, эластомеры. Объектами исследования и разработки в данной работе являются наносистемы и наноматериалы, твердые сплавы, функциональные материалы, в том числе каркасно-нанокластерные бориды, композиты из углеродных волокон, карбид кремния, высокотемпературные сверхпроводники нового поколения и родственные им соединения, моносилициды переходных металлов, сложные оксиды, кобальтиты.

Целью данной работы является получение новых знаний и результатов в области структурных и динамических свойств наносистем и наноматериалов, исследование наносистем и материалов методом рассеяния тепловых и эпитепловых нейтронов, рентгеновской дифракции, обеспечение научно-исследовательских работ, проводимых организациями Российской Федерации, с предоставлением им возможности использования методов научных исследований, разработанных или освоенных для уникальной установки – Нейтронного комплекса ИЯИ РАН.

Метод проведения работы: настоящая работа была выполнена при использовании нейтронных методик исследования конденсированных сред в сочетании с комплементарными рентгеновскими методами. Использовались нейтронная дифракция, нейтронная спектроскопия, рентгеновская дифракция, Мессбауэровская спектроскопия.

Результаты работы: На Нейтронном комплексе ИЯИ РАН, прочих нейтронных источниках, на рентгеновских дифрактометрах в ИЯИ РАН, на Мёссбауэровском спектрометре в ИЯИ РАН были исследованы структурные и динамические свойства материалов, в том числе наносистем, включающих в себя твердые сплавы с нановключениями, каркасно-кластерные бориды с высокими термоэлектрическими свойствами, высокотемпературные сверхпроводники нового поколения и родственные им системы, сложные оксиды на основе переходных металлов, композитные материалы на основе углеволокна для авиакосмических приложений, система углерод-кремний с высокими механическими качествами и химической стойкостью. Была проведена работа по дальнейшему совершенствованию экспериментальной базы Нейтронного комплекса ИЯИ РАН, предназначенной для нейтронной спектроскопии и нейтронной дифракции. В ходе работ по реализации задач этапа было привлечено в исследования по тематике Госконтракта несколько студентов и аспирантов.

Основные конструктивные, технологические и технико-эксплуатационные характеристики: все нейтронные установки Нейтронного комплекса ИЯИ РАН основаны на

методике регистрации нейтронов по времени пролета. Особенности источника являются относительно жесткий нейтронный спектр и возможность вариации длительности импульса. Важной для повышения эффективности измерений особенностью рентгеновского оборудования ИЯИ РАН является наличие позиционно-чувствительного детектора (imageplate).

Степень внедрения: степень внедрения результатов НИР будет выяснена после завершения работ по Госконтракту.

Рекомендации по внедрению или итоги внедрения результатов НИР: рекомендации по внедрению результатов НИР будут сделаны после завершения работ по Госконтракту. Область применения: исследуемые наносистемы и материалы будут применяться в энергетике, научном приборостроении, химической промышленности, авиакосмической промышленности, атомной энергетике.

Экономическая эффективность или значимость работы: оценка экономической эффективности и значимости работы будет сделана после завершения работ по Госконтракту.

Прогнозные предположения о развитии объекта исследования: прогнозные предположения будут сделаны после завершения работ по Госконтракту.

## Содержание

1	Введение . . . . .	6
2	Кинетическое описание полидисперсной системы . . . . .	10
2.1	Уравнения Больцмана . . . . .	10
2.2	Механика столкновений . . . . .	11
2.3	Интеграл столкновений . . . . .	13
2.4	Эволюция энергии системы . . . . .	13
3	Гидродинамическое описание системы . . . . .	14
3.1	Уравнения переноса . . . . .	14
3.1.1	Перенос массы . . . . .	16
3.1.2	Перенос импульса . . . . .	16
3.1.3	Перенос энергии . . . . .	17
3.1.4	Вектор потока тепла и тензор вязких напряжений . . . . .	18
3.2	Скорость охлаждения системы . . . . .	18
3.2.1	Анализ диссипации для диска . . . . .	19
3.2.2	Усредненные по ансамблю динамические параметры смеси гра- нулярных газов . . . . .	23
3.2.3	Нормальное решение и приближение по среднему полю . . . . .	26
4	Диск с дифференциальным вращением . . . . .	28
4.1	Азимутальная симметрия . . . . .	28
4.2	Стационарное решение . . . . .	30
5	Экспериментальный раздел . . . . .	31
	Заключение . . . . .	32
	Список использованных источников . . . . .	33
А	Картинки . . . . .	34
Б	Еще картинки . . . . .	35

## Глоссарий

**Распределённый** — Слово, которое нельзя употреблять. Но надо протестировать длинные строки в глоссарии.

## **Обозначения и сокращения**

**АИС** — Автоматизированная информационная система. Но надо протестировать длинные строки в определениях.

# 1 Введение

В природе гранулярная материя является одним из самых распространенных типов вещества, начиная от песка под нашими ногами, сахара для чая, различных порошков для строительства и техногенного производства, заканчивая космической пылью в аккреционных дисках зарождающихся звездных и галактических системах. Гранулярная материя характеризуется в основном диссипативными свойствами при контактном взаимодействии составных частиц. Частный случай гранулярных систем, так называемый *гранулярный газ*, является объектом интереса в нашей работе [1]. Под газообразной мы будем подразумевать систему в которой все контактные взаимодействия бинарные, т.е. в любой момент времени во всех взаимодействиях участвуют только два объекта, а тройные, четверные и т.д. взаимодействия исключены. Таким образом, подобная система может быть описана классическими уравнениями Больцмана-Энскога.

Объектом наших исследований являются кольца Сатурна. Данный выбор был неслучаен, и был стимулирован успехом масштабного проекта NASA, Европейского Космического Агентства и Итальянского Космического Агентства – миссия Кассини-Гюйгенс. В рамках этого проекта, 15 октября 1997 года, на орбиту вокруг Сатурна был отправлен космический исследовательский аппарат Кассини. Целью данной миссии было исследование планеты Сатурн, его колец и лун. На борту космического аппарата находилась автоматическая станция Гюйгенс, предназначенная для посадки на Титан, крупнейший из лун Сатурна. 1 июля 2004 года, комплекс вышел на орбиту вокруг Сатурна. 25 декабря 2004 года, станция Гюйгенс отделилась от основного комплекса и 14 января 2005 года вошла в атмосферу Титана. Изначально миссия была запланирована до 2008 года, однако была несколько раз продлена, и в итоге 15 сентября 2017 года космический аппарат Кассини завершил свою миссию, пролетев в непосредственной близости от колец и вошел в атмосферу Сатурна. Пример снимка сделанного аппаратом Кассини в 2009 году показан на Рис. 1.1. Весь масштаб данной миссии можно привести в виде статистических данных (Табл. 1.1).

Таблица 1.1 — Итоговая статистика миссии Кассини-Гюйгенс по окончании 20 летнего периода активности

Общая стоимость проекта	около 3,26 миллиард долларов США
Длительность миссии	19 лет, 335 дней
Объем полученных научных данных	635 Гб
Найдено новых лун	6 наименованных
Количество стран участниц	27 стран со всего мира
Опубликовано научных публикаций	3 948
Сделано снимков	453 048

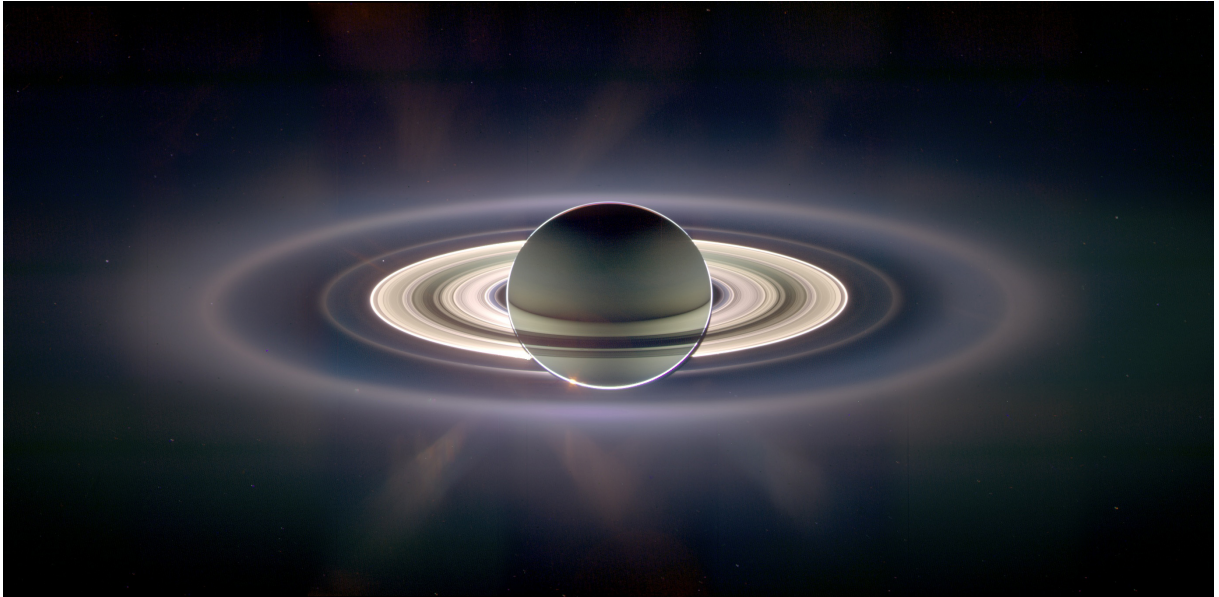


Рисунок 1.1 — Фотография Сатурна и его колец отправленная аппаратом Кассини в октябре 2009 года

Большая доля этих исследований посвящено изучению динамики и свойств колец Сатурна, которые являются ярким примером гранулярных газов в природе. Сами кольца состоят в основном из водяного льда и силикатных образований. Размеры частиц материала кольца составляют от микрометров до нескольких десятков метров. Объекты больших размеров, от нескольких сот метров до километров и более, классифицируются уже как отдельные луны Сатурна. Некоторые из подобных лун, как Пан и Дафнис (которые были обнаружены аппаратом Кассини), вращаются вокруг Сатурна на орбитах, находящихся внутри самих колец, имеют свое гравитационное поле которое серьезно воздействует на динамику мелких объектов кольца. Однако в нашей работе мы ограничимся системами, размеры составляющих частиц которых не превышают порядка нескольких метров. В этом случае можно исключить из рассмотрения гравитационные взаимодействия и сконцентрироваться только на контактных, механических взаимодействиях при описании динамики гранулярного газа.

Для простоты описания механики столкновения частиц газа, будем рассматривать их как сферические объекты с заданными параметрами как масса  $m$ , радиус  $r$ , модуль Юнга  $Y$ , коэффициент Пуассона  $\eta$ , поверхностная энергия (адгезивность)  $\gamma$ , коэффициент вязкой диссипации  $A$ . Обозначенные выше параметры будут использованы для построения компьютерной модели столкновений, однако для теоретического описания системы все механические свойства объединены в единый параметр, так называемый *коэффициент реституции* —  $\varepsilon$ . Для описания динамики сухих гранулярных газов, коэффициент реституции играет ключевую роль, и показывает количество диссипированной энергии при столкновениях. Математически описывается следующим образом:

$$g'_{12} = -\varepsilon g_{12} , \quad (1.1)$$

где  $g_{12}$  – относительная скорость частиц 1 и 2 до столкновения,  $g'_{12}$  – относительная скорость после столкновения. Коэффициент реституции в общем случае всегда лежит в пределах  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ . При  $\varepsilon = 0$  – мы имеем абсолютно неупругое столкновение, при  $\varepsilon = 1$  – абсолютно упругое столкновение. В данной работе мы будем рассматривать только сухие гранулярные системы, т. е. такие системы для которых коэффициент адгезивности  $\gamma = 0$ . Таким образом, контактные взаимодействия частиц можно полностью описать двумя параметрами:  $\sigma$  – линейный размер частицы, который характеризует массу ( $m \propto \sigma^3$ ), и т.д., и  $\varepsilon$  – коэффициент реституции, который описывает диссипативные свойства материала частицы. Мы будем предполагать, что материал частиц везде единообразен, и для всех столкновений  $\varepsilon$  будет одинаковый.

Основным свойством гранулярного газа является его диссипативность, и как результат его *гранулярная температура* имеет свойство всегда уменьшаться, т.е. предоставленный самому себе гранулярный газ, всегда будет *охлаждаться*. Данное явление носит название закона Хаффа:

$$T(t) = \frac{T_0}{(1 + t/\tau_0)^2}, \quad (1.2)$$

где

$$\tau_0^{-1} \propto n\sigma^2 (1 - \varepsilon^2) \sqrt{T_0}. \quad (1.3)$$

Таким образом, если в систему не подводить внешний источник энергии, то со временем гранулярный газ придет к состоянию с нулевой энергией. Здесь мы коротко упомянули понятие гранулярной температуры, по аналогии с температурой обычных систем, однако оно не является температурой материала частицы в обычном понимании. Более детально мы рассмотрим ее в основной части работы.

Следующим важным моментом является *полидисперсность* системы. До этого мы считали что все частицы в газе одинакового размера, однако в реальных системах планетарных колец, размеры частиц очень сильно варьируются. Данное свойство привносит в систему один существенный эффект: если рассматривать полидисперсную систему как смешение большого количества монодисперсных гранулярных газов с различными размерами, то парциальная температура каждого из этих газов становится отличной друг от друга. Чем больше разница между размерами частиц этих монодисперсных газов, тем больше их разница в гранулярной температуре. Конечно, без внешнего источника энергии, все эти температуры со временем сравняются и станут нулевыми. Однако планетарные кольца находятся в центральном гравитационном поле своей планеты, и на самом деле являются дисками с дифференциальным вращением, и гранулярная система подпитывается за счет гравитационной энергии своей планеты. Более подробно мы остановимся на данном явлении в основной части работы. Здесь же, укажем что за счет данной подкачки энергии, температуры всех отдельных частей системы остановятся на определенном и различном стационарном значении, что является одним из результатов нашей работы. А также, мы покажем что подобная разница в стационарных температурах системы, оказывает влияние



на радиальное распределение размеров частиц друг относительно друга. Данный эффект неодинакового распределения частиц по размерам относительно центрального поля хорошо виден на Рис. 1.2.

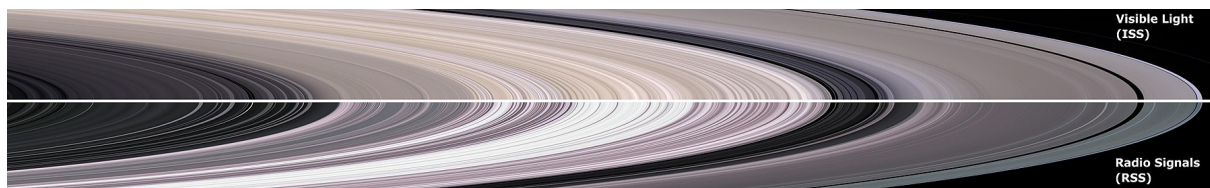


Рисунок 1.2 — Фотография колец Сатурна в радиальном срезе. Верхняя часть показана в оптическом диапазоне, нижняя в радиоволновом диапазоне, где цвета соотнесены с размерами частиц

## 2 Кинетическое описание полидисперсной системы

Для статистического описания неравновесной системы, мы будем исходить из кинетических уравнений Больцмана. Перед этим нам необходимо определить фазовое пространство в котором происходит эволюция динамики отдельно взятой частицы, а также более детально рассмотреть механику столкновений для составления интегралов столкновений.

### 2.1 Уравнения Больцмана

Рассмотрим весь газ как смесь из однородных газов, массы частиц в которых обозначим через  $m$ . Пусть  $N_m$  будет количеством частиц массы  $m$  в системе. Если общее количество частиц равно  $N$ , то

$$\eta_m = \frac{N_m}{N} , \quad (2.1)$$

относительное количество частиц массы  $m$  в полной системе. Учитывая что количество частиц в планетарных кольцах огромно, так же как и разновидность частиц по массе, то мы можем ввести функцию распределения особей в системе по массам как

$$\eta(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(m)}{N} , \quad (2.2)$$

либо

$$\int \eta(m) dm = 1 . \quad (2.3)$$

Здесь следует отметить, что как видно из 2.3,  $\eta(m) \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ , что согласовывается с реальными наблюдениями. Таким образом, масса частицы  $m$  будет показывать род подсистемы как непрерывная переменная.

Динамика отдельно взятой частицы массы  $m$  описывается его векторами координат  $\mathbf{r}$  и скоростей  $\mathbf{v}$  в фазовом пространстве. В этом фазовом пространстве введем функцию распределения  $f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v})$  которое имеет следующее важное свойство:

$$dN(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} , \quad (2.4)$$

где  $dN(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v})$  – функция числа частиц локализованных вокруг координаты  $\mathbf{r}$  и имеющих скорости в диапазоне от  $\mathbf{v}$  до  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ . Так как газообразные системы являются разреженными, то макропараметры системы могут быть определены как некие интегралы от одночастичной функции распределения.

Нулевой момент дает нам функцию количественной плотности частиц

$$n(t, m, \mathbf{r}) = \int f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} , \quad (2.5)$$

либо функцию плотности масс

$$\rho(t, m, \mathbf{r}) = mn(t, m, \mathbf{r}) = \int mf(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} , \quad (2.6)$$

и так далее. Более подробно макропараметры системы будут описаны при гидродинамическом описании системы. Здесь же мы видим что параметры системы нестационарны и зависят от времени  $t$ , тогда как сама эволюция функции распределения по времени подчиняется уравнению Больцмана:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{w} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = I_c(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) , \quad (2.7)$$

где  $I_c(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v})$  – полный интеграл столкновений,  $\mathbf{w}$  – ускорение частицы под воздействием внешних сил. Полный интеграл столкновений пишется через бинарный интеграл столкновений как:

$$I_c(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \int \eta(m') I_c(t, m', m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) dm' . \quad (2.8)$$

Для нахождения точной формы интегралов столкновений необходимо более подробно изучить механику самих столкновений частиц.

## 2.2 Механика столкновений

Везде в дальнейшем мы будем предполагать, что все частицы в газе являются абсолютно сферическими и однородными, с одинаковыми коэффициентами реституции  $\varepsilon$ . При столкновении двух таких частиц, закон сохранения импульса запишется как:

$$m_i \mathbf{v}_i + m_j \mathbf{v}_j = m_i \mathbf{v}'_i + m_j \mathbf{v}'_j , \quad (2.9)$$

где знаками штриха ' обозначены скорости частиц после столкновения. Обмена массами и прилипания не происходит по условию задачи. Для гранулярных газов закон сохранения энергии (механической) нарушается, а изменение относительных скоростей задается как:

$$\mathbf{g}'_n = -\varepsilon \mathbf{g}_n , \quad (2.10)$$

где  $\mathbf{g} = \mathbf{g}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$ , а  $\mathbf{g}_n$  – является нормальной составляющей относительной скорости. Определим нормальное направление столкновения как проходящей через центры сталкивающихся частиц в момент столкновения, и введем вектор нормали:

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_{ij} = \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{\sigma_i - \sigma_j} , \quad (2.11)$$

где  $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$  – координаты частиц в момент столкновения. Далее запишем изменение относительных скоростей следующим образом:

$$(\mathbf{g}' \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = -\varepsilon (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} , \quad (2.12)$$

и подставляя в (2.9) получаем скорости частиц после столкновения:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_i &= \mathbf{v}_i - \frac{\mu}{m_i} (1 + \varepsilon) (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} , \\ \mathbf{v}'_j &= \mathbf{v}_j + \frac{\mu}{m_j} (1 + \varepsilon) (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} , \end{aligned} \quad (2.13)$$

где  $\mu = \mu_{ij} = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}$  – эффективная масса столкновения. Здесь следует иметь ввиду что вектор  $\mathbf{n}$  свободен и не зависит от значений скоростей.

Рассмотрим теперь изменение импульса частицы после столкновения:

$$\delta \mathbf{p}_i = -\delta \mathbf{p}_j = \pm \mu(1 + \varepsilon)(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} . \quad (2.14)$$

Знак переноса импульса зависит от взаимной конфигурации векторов  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{n}$ , однако полное изменение импульса конечно же  $\delta \mathbf{p}_i + \delta \mathbf{p}_j = 0$ .

Теперь рассмотрим изменение кинетической энергии после столкновения:

$$\begin{aligned} \delta E_i &= \frac{m_i \mathbf{v}_i'^2}{2} - \frac{m_i \mathbf{v}_i^2}{2} = -\mu(1 + \varepsilon)(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}) + \frac{\mu^2}{2m_i}(1 + \varepsilon)^2(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})^2 , \\ \delta E_j &= \frac{m_j \mathbf{v}_j'^2}{2} - \frac{m_j \mathbf{v}_j^2}{2} = +\mu(1 + \varepsilon)(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{n}) + \frac{\mu^2}{2m_j}(1 + \varepsilon)^2(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})^2 , \end{aligned} \quad (2.15)$$

или перейдя в систему отсчета центра масс со скоростью  $M\mathbf{v}_C = m_i \mathbf{v}_i + m_j \mathbf{v}_j$ , где  $M = M_{ij} = m_i + m_j$ , получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_C + \frac{\mu}{m_i} \mathbf{g} , \\ \mathbf{v}_j &= \mathbf{v}_C - \frac{\mu}{m_j} \mathbf{g} , \end{aligned} \quad (2.16)$$

и соответственно

$$\begin{aligned} \delta E_i &= -\mu(1 + \varepsilon)(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{n}) - \frac{1 - \varepsilon^2}{2} \frac{\mu^2}{m_i} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})^2 , \\ \delta E_j &= +\mu(1 + \varepsilon)(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{n}) - \frac{1 - \varepsilon^2}{2} \frac{\mu^2}{m_j} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})^2 . \end{aligned} \quad (2.17)$$

Как видим, первые члены в правой части уравнений одинаковы и противоположны в знаках. Это означает что данная часть кинетической энергии передается от одной частицы к другой, и остается в самой системе, не диссипируя. Вторые же члены как мы видим всегда отрицательны и при разных массах  $m_i \neq m_j$  также отличны друг от друга. Именно эта часть отвечает за диссипацию энергии в системе, и диссипация тем больше чем меньше коэффициент реституции  $\varepsilon$ , т.е. чем менее упругим будет столкновение, что вполне ожидаемо. Однако, как мы видим, диссипация также зависит и от массы самой частицы, и чем *меньше* масса частицы, тем *больше* потери энергии:

$$\left( \frac{\delta E_i}{\delta E_j} \right)_{diss} = \frac{m_j}{m_i} . \quad (2.18)$$

Именно этот эффект приводит к нарушению равномерного распределения энергии в полидисперсной системе гранулярных газов, что в свою очередь приводит к неодинаковости гранулярных температур подсистем. Полная потеря энергии при столкновении равна

$$\delta E_i + \delta E_j = -\frac{1 - \varepsilon^2}{2} \mu (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})^2 . \quad (2.19)$$

### 2.3 Интеграл столкновений

После описания механики столкновений, перейдем к самому виду интеграла столкновений в (2.7). В общем виде интеграл столкновений для гранулярных газов имеет вид:

$$I_c(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{v}_i) = \int dm_j g_2(\sigma_{ij}) \eta(m_j) \sigma_{ij}^{D-1} \int d\mathbf{v}_j \int d\mathbf{n} \Theta(-\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) |\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}| \times \\ \times \left( \frac{1}{\varepsilon^2} f(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{v}_i'') f(t, m_j, \mathbf{r}, \mathbf{v}_j'') - f(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{v}_i) f(t, m_j, \mathbf{r}, \mathbf{v}_j) \right), \quad (2.20)$$

где  $\sigma_{ij} = \sigma_i + \sigma_j$  – расстояние между центрами частиц,  $g_2(\sigma_{ij})$  – параметр Энскога, который учитывает разницу в координатах центров частиц во время столкновений, который мы примем равным единице  $g_2(\sigma_{ij}) = 1$ ,  $\Theta(x)$  – функция Хевисайда, которая включена для того чтобы учитывать только те соотношения скорости, при которых они сближаются,  $\mathbf{v}_i''$ ,  $\mathbf{v}_j''$  – скорости обратных столкновений,  $D$  – размерность системы. По смыслу, интеграл столкновений показывает изменения в функции распределения за счет столкновений частиц. Интеграл столкновений имеет одно важное свойство, а именно, если взять некую динамическую функцию системы  $\psi_i(\mathbf{v}_i)$ , и ее изменение после прямого столкновения записать как  $\Delta\psi_i(\mathbf{v}_i) = \psi_i(\mathbf{v}_i') - \psi_i(\mathbf{v}_i)$ , то получим:

$$\frac{d}{dt} \langle \psi_i(\mathbf{v}_i) \rangle_c = \int \psi_i(\mathbf{v}_i) \frac{\partial f_i}{\partial t} d\mathbf{v}_i = \int \psi_i(\mathbf{v}_i) I_c(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{v}_i) d\mathbf{v}_i = \\ = \int dm_j \eta(m_j) \sigma_{ij}^{D-1} \int d\mathbf{v}_i d\mathbf{v}_j \int d\mathbf{n} \Theta(-\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) |\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}| \times \\ \times f(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{v}_i) f(t, m_j, \mathbf{r}, \mathbf{v}_j) \Delta\psi_i(\mathbf{v}_i). \quad (2.21)$$

Это свойство интеграла столкновения мы будем использовать в дальнейшем при описании эволюции энергии всей системы в целом.

### 2.4 Эволюция энергии системы

Для того чтобы оценить изменение энергии всей системы в целом за счет столкновений, возьмем функцию кинетической энергии частицы как  $\psi_i(\mathbf{v}_i) = \frac{m_i v_i^2}{2}$ , а вместо  $\Delta\psi_i(\mathbf{v}_i) = \delta E_i$  из уравнения (2.17) и подставим в (2.21). В итоге получаем:

$$\int \frac{m_i v_i^2}{2} I_c(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{v}_i) d\mathbf{v}_i = \int dm_j \eta(m_j) \sigma_{ij}^{D-1} \int d\mathbf{v}_i d\mathbf{g} \int d\mathbf{n} \Theta(-\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) |\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}| \times \\ \times f(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{v}_i) f(t, m_j, \mathbf{r}, \mathbf{v}_j) \delta E_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{g}), \quad (2.22)$$

здесь мы сделали замену переменных  $d\mathbf{v}_i d\mathbf{v}_j = d\mathbf{v}_i d\mathbf{g}$ . Для дальнейшего продвижения, нам необходимо знать вид самой функции распределения.

### 3 Гидродинамическое описание системы

Перейдем теперь к более грубому, гидродинамическому описанию системы. Для начала нужно определить возможность такого перехода в рассматриваемой нами системе. Через  $L$  обозначим линейный размер всей системы в целом. Для кинетического описания нам было достаточно что линейные размеры частиц  $\sigma$  были намного меньше размера всей системы, т.е. выполнение условия  $\sigma \ll L$ . Соответственно все кинетические уравнения пишутся на уровне детализации  $\sigma$ . Однако гидродинамическое описание происходит на другом уровне, который мы обозначим  $\ell$ , и который удовлетворяет условию  $\sigma \ll \ell \ll L$ . Если мы можем вести изучение системы в таком масштабе, то можно говорить что мы рассматриваем систему в гидродинамическом приближении. Линейные размеры колец Сатурна, т.е. ширина колец, растягивается примерно на  $L \sim 66000$  км, в то время как размеры самих частиц варьируются в пределах  $\sigma \sim 10^{-2} \div 10^2$  см. Отсюда хорошо видно что можно подобрать такое значение  $\ell \sim 1 \div 2$  км, в пределах которого гидродинамическое описание системы будет вполне оправдано. Таким образом, в дальнейшем мы можем говорить что в пределах  $\ell$  вокруг координаты  $\mathbf{r}$  находится достаточно большое количество частиц, по которым можно определить макропараметры системы в зависимости от самой координаты  $\mathbf{r}$ . Перейдем к непосредственным определениям самих макропараметров, необходимых для полного гидродинамического описания системы, и написанию уравнений переноса этих параметров.

#### 3.1 Уравнения переноса

Зная функцию распределения, можно вводить пространственно распределенные параметры, описывающие систему в целом, а не через отдельно взятые частицы. Такие параметры называются макропараметрами системы. Мы будем вводить их как моменты вектора скорости частиц  $\mathbf{v}$ . Так, нулевой момент, как мы уже ранее определили, дает нам функцию числовой плотности:

$$n(t, m, \mathbf{r}) = \int f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} , \quad (3.1)$$

либо функцию плотности масс

$$\rho(t, m, \mathbf{r}) = mn(t, m, \mathbf{r}) = \int m f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} . \quad (3.2)$$

Данная функция читается так:  $\rho(t, m, \mathbf{r})$  – это масса в единичном объеме участка кольца в координате  $\mathbf{r}$  во время  $t$ , при этом масса вещества данного участка кольца равна  $m$ . Остальные параметры имеют схожий физический смысл.

Первый момент по скорости дает нам функцию плотности импульса

$$\rho \mathbf{u}(t, m, \mathbf{r}) = \int m \mathbf{v} f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} , \quad (3.3)$$

где  $\mathbf{u}$  – дает нам среднюю скорость участка кольца. Введем понятие локальной скорости частиц

$$\mathbf{c} = \mathbf{v} - \mathbf{u}(t, m, \mathbf{r}) , \quad (3.4)$$

которая показывает скорость (хаотического движения) частиц в системе отсчета движущейся вместе с участком кольца со скоростью  $\mathbf{u}$ . Таким образом введем понятие *гранулярной температуры* системы, по аналогии с термодинамической температурой как второй момент по скорости

$$\frac{D}{2} n T(t, m, \mathbf{r}) = \int \frac{m \mathbf{c}^2}{2} f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} , \quad (3.5)$$

где  $D = 3$  – для трехмерной системы, однако мы будем рассматривать двумерную систему  $D = 2$ . Нам также понадобятся и другие моменты по скорости, которые уже являются тензорными величинами. Во первых, это тензор *напряжения*:

$$\Pi_{\alpha\beta}(t, m, \mathbf{r}) = m \int v_{\alpha} v_{\beta} f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} , \quad (3.6)$$

который можно разделить на две части используя (3.4)

$$\Pi_{\alpha\beta}(t, m, \mathbf{r}) = \rho u_{\alpha} u_{\beta} + P_{\alpha\beta} . \quad (3.7)$$

Первая часть является динамической частью тензора напряжения, а вторая часть называется тензором *внутренних напряжений*:

$$P_{\alpha\beta}(t, m, \mathbf{r}) = m \int c_{\alpha} c_{\beta} f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} . \quad (3.8)$$

Разделяя далее данный тензор на часть с нулевой сверткой и на диагональную часть, получаем:

$$P_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} p_{id} + \pi_{\alpha\beta} , \quad \pi_{\alpha\alpha} = 0 , \quad (3.9)$$

где

$$p_{id} = \frac{1}{D} \int m \mathbf{c}^2 f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} = n T , \quad (3.10)$$

давление идеального газа. Часть тензора с нулевой сверткой  $\pi_{\alpha\beta}$  также называется тензором *вязких напряжений*.

Наконец, введем следующий тензор

$$Q_{\alpha\beta\gamma} = m \int c_{\alpha} c_{\beta} c_{\gamma} f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} , \quad (3.11)$$

или точнее его свертку по двум индексам

$$q_{\alpha} = \mathbf{q} = \frac{1}{2} Q_{\alpha\beta\beta} = \int \frac{m \mathbf{c}^2}{2} c_{\alpha} f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} , \quad (3.12)$$

который называется вектором *потока тепла*.

Теперь приступим к написанию уравнений переноса для вышеперечисленных макропараметров. Для начала напомним уравнение переноса для некоторой обобщенной динамической функции  $A(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ . Умножим данную функцию на уравнение Больцмана (2.7) и проинтегрируем по всему пространству скоростей:

$$\int A \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} + \int A \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{v} + \int A \mathbf{w} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = \int A I_c(f, f') d\mathbf{v} = \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle_c, \quad (3.13)$$

где правая часть показывает среднее изменение динамической функции по времени за счет столкновений. Далее можно написать

$$\int \left( \frac{\partial}{\partial t} (Af) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (A\mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (A\mathbf{w}) - f \left[ \frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial A}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{w} \frac{\partial A}{\partial \mathbf{v}} \right] \right) d\mathbf{v} = \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle_c. \quad (3.14)$$

Третий член в данном уравнении можно переписать используя теорему Гаусса

$$\int \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (A\mathbf{w}) d\mathbf{v} = \oint A\mathbf{w} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0. \quad (3.15)$$

Здесь, интегрирование по всему пространству скоростей заменено на интегрирование по контуру вокруг этого пространства, где  $v \rightarrow \pm\infty$ . Однако функция распределения  $f$  обращается в нуль в этом пределе по своей природе. Таким образом, мы видим что этот интеграл исчезает. В конечном итоге у нас остается уравнение переноса в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int Af d\mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int A\mathbf{v} d\mathbf{v} - \int f \left[ \frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial A}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{w} \frac{\partial A}{\partial \mathbf{v}} \right] d\mathbf{v} = \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle_c. \quad (3.16)$$

Теперь, подставляя вместо  $A$  необходимые нам макропараметры системы, мы можем вывести соответствующие уравнения переноса для них.

### 3.1.1 Перенос массы

Заменяя в уравнении (3.16) динамическую функцию на массу,  $A(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = m$ , получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int mf d\mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int m\mathbf{v} f d\mathbf{v} = 0, \quad (3.17)$$

теперь используя (3.2) и (3.3), получаем уравнение переноса плотности массы, или так называемое *уравнение непрерывности*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (3.18)$$

### 3.1.2 Перенос импульса

Теперь вместо динамической функции подставляем импульс частицы  $A(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = m\mathbf{v} = mv_\alpha$ , и получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int m\mathbf{v} f d\mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \int mf v_\alpha v_\beta d\mathbf{v} - \mathbf{w} \int mf d\mathbf{v} = \left\langle \frac{\partial (mv_\alpha)}{\partial t} \right\rangle_c. \quad (3.19)$$



Правая часть этого уравнения показывает изменение среднего импульса системы в целом, однако по закону сохранения импульса, оно равняется нулю. Подставляя выражения соответствующих макропараметров, получаем:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial r_\alpha} = \rho \mathbf{w} , \quad (3.20)$$

где правая часть  $\rho \mathbf{w} = \mathbf{F}_{ext}$  – плотность внешних сил действующих на участок системы. В нашем случае внешней силой является гравитационное воздействие планеты, которое записывается как  $\mathbf{w} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \mathbf{r}}$ , где  $r$  – расстояние до центра планеты. Теперь разделяя тензор напряжений получаем уравнение переноса импульса

$$\frac{\partial(\rho u_\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_\beta}(\rho u_\alpha u_\beta) = -\frac{\partial(nT)}{\partial r_\alpha} - \frac{\partial \pi_{\alpha\beta}}{\partial r_\beta} + \rho w_\alpha . \quad (3.21)$$

### 3.1.3 Перенос энергии

Теперь подставим функцию кинетической энергии  $A(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{m\mathbf{v}^2}{2}$  и запишем уравнение переноса

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int m (\mathbf{c}^2 + 2c_\alpha u_\alpha + \mathbf{u}^2) f d\mathbf{v} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int m (\mathbf{c}^2 + 2c_\alpha u_\alpha + \mathbf{u}^2) v_\beta f d\mathbf{v} - \\ & - w_\beta \int m f v_\alpha \frac{\partial v_\alpha}{\partial v_\beta} d\mathbf{v} = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{m\mathbf{v}^2}{2} \right) \right\rangle_c = -T\xi(t, m, \mathbf{r}, T) . \end{aligned} \quad (3.22)$$

По причине диссипативной природы гранулярных газов, закон сохранения энергии не выполняется, и соответственно правая часть уравнения показывает среднее изменение энергии за счет столкновений. Здесь мы ввели положительную функцию  $\xi(t, m, \mathbf{r}, T)$ , которая отвечает за скорость охлаждения газа. Точный вид этой функции мы выведем позднее. Продвигаясь далее записываем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{m\mathbf{c}^2}{2} f d\mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{m\mathbf{u}^2}{2} f d\mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial r_\beta} \int \frac{m\mathbf{c}^2}{2} v_\beta f d\mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial r_\beta} \int \frac{m\mathbf{u}^2}{2} v_\beta f d\mathbf{v} + \\ & + \frac{\partial}{\partial r_\beta} \int m c_\alpha u_\alpha v_\beta f d\mathbf{v} = \delta_{\alpha\beta} w_\beta \rho u_\alpha - T\xi = u_\alpha \cdot \rho w_\alpha - T\xi , \end{aligned} \quad (3.23)$$

где мы использовали условие  $\int c_i f d\mathbf{v} = 0$ . Выражая через макропараметры, получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{D}{2} nT + \frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial r_\beta} \int \frac{m\mathbf{c}^2}{2} (c_\beta + u_\beta) d\mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial r_\beta} \int m f u_\alpha c_\alpha (c_\beta + u_\beta) d\mathbf{v} + \\ & + \frac{\partial}{\partial r_\beta} \left( \frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} u_\beta \right) = \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} - T\xi , \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{D}{2} nT + \frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} \right) + \frac{\partial q_\alpha}{\partial r_\alpha} + \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \left( \frac{D}{2} u_\alpha nT \right) + \frac{\partial}{\partial r_\alpha} u_\beta \int m f c_\alpha c_\beta d\mathbf{v} + \\ & + \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \left( \frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} u_\alpha \right) = \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} - T\xi , \end{aligned} \quad (3.25)$$

и используя выражение для тензора внутренних напряжений, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{D}{2} nT + \frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \left( \frac{D}{2} u_\alpha nT + \frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} u_\alpha + \delta_{\alpha\beta} u_\beta nT + \pi_{\alpha\beta} u_\beta + q_\alpha \right) = \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} - T\xi, \quad (3.26)$$

и в итоге получаем уравнение переноса энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{D}{2} nT + \frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial r_\alpha} u_\alpha \left( \frac{D+2}{2} nT + \frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial r_\alpha} (\pi_{\alpha\beta} u_\beta) + \frac{\partial q_\alpha}{\partial r_\alpha} = \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} - T\xi. \quad (3.27)$$

### 3.1.4 Вектор потока тепла и тензор вязких напряжений

Во время вывода уравнений переноса, мы получили два неизвестных нам параметра, а именно  $q_\alpha$  – вектор потока тепла, и  $\pi_{\alpha\beta}$  – тензор вязких напряжений. Выше, во время гидродинамического перехода, мы ввели некий размер в системе  $\ell \ll L$ . Если теперь рассмотреть малый параметр  $x = \ell/L \ll 1$  вокруг которого разложим все макропараметры в ряд, то в нулевом приближении оба параметра  $q_\alpha$  и  $\pi_{\alpha\beta}$  исчезают, так как в этом приближении мы имеем дело с идеальной жидкостью. В линейном приближении по этому параметру, получаем  $q_\alpha, \pi_{\alpha\beta} \sim x$ , и они получают следующий вид

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha\beta} &= -\nu \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial r_\alpha} - \frac{2}{D} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial r_\alpha} \right), \\ q_\alpha &= -\lambda \text{grad } T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r_\alpha}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

где  $\nu$  – коэффициент вязкости и  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности.

### 3.2 Скорость охлаждения системы

Выше, при выводе уравнения переноса энергии, мы получили некую функцию  $\xi(t, m, \mathbf{r}, T)$  которая показывает охлаждение гранулярного газа за счет диссипативных столкновений. В общем виде эта функция определяется через интеграл столкновений, как среднее изменение кинетической энергии:

$$-T_i \xi(t, m_i, \mathbf{r}, T_i) = \int \frac{m_i \mathbf{v}^2}{2} I_c(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (3.29)$$

Здесь мы учли тот факт, что температуры отдельных подсистем могут быть отличны друг от друга, и показали эту зависимость через индекс  $i$ . Используя свойство интеграла столкновений (2.21), выпишем заново уравнение эволюции энергии системы за счет столкновений (2.22)б в следующем виде:

$$\begin{aligned} -T_i \xi(t, m_i, \mathbf{r}, T_i) &= \int dm_j \eta(m_j) \sigma_{ij}^{D-1} \int d\mathbf{v}_j d\mathbf{g} \int d\mathbf{n} \Theta(-\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) |\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}| \times \\ &\times f(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{v}_i) f(t, m_j, \mathbf{r}, \mathbf{v}_i - \mathbf{g}) \delta E_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{g}). \end{aligned} \quad (3.30)$$

До сих пор мы ничего не говорили о виде самой функции распределения  $f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ , и все выводы получали для общего случая. Однако для дальнейшего продвижения нам необходимо указать вид этой функции. Функцию распределения можно

представить как разложение в ряд по малому параметру  $x = \ell/L \ll 1$ :

$$f = f^{(0)} + c_1 x f^{(1)} + c_2 x^2 f^{(2)} + \dots, \quad (3.31)$$

где  $c_i$  – коэффициенты полина Сонина,  $f^{(0)}$  – нулевое приближение функции распределения, не что иное как функция распределения Максвелла. Для простоты мы ограничимся этим приближением, так как его достаточно для описания исследуемых нами эффектов. Таким образом, в дальнейшем принимаем:

$$f(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{v}_i) = n_i \left( \frac{m_i}{2\pi T_i} \right)^{D/2} \cdot \exp \left\{ -\frac{m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{u})^2}{2T_i} \right\}, \quad (3.32)$$

где  $n_i$  – числовая плотность частиц. Средняя скорость движения  $\mathbf{u}$  в нашем случае является скоростью на кеплеровской орбите, и зависит только от расстояния до центра планеты  $\mathbf{r}$ , и не зависит от массы частицы. Таким образом можно сделать замену переменных:

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{u}(\mathbf{r}), \quad d\mathbf{c}_i = d\mathbf{v}_i, \quad (3.33)$$

и переписать функцию распределения в следующем виде:

$$f(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{c}_i) = n_i \left( \frac{\kappa_i}{\pi} \right)^{D/2} \cdot \exp(-\kappa_i c_i^2), \quad (3.34)$$

где  $\kappa_i = \frac{m_i}{2T_i}$ , и далее пишем:

$$f(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{c}_i) f(t, m_j, \mathbf{r}, \mathbf{c}_j) = n_i n_j \left( \frac{\kappa_i \kappa_j}{\pi^2} \right)^{D/2} \cdot \exp(-\kappa_i c_i^2 - \kappa_j c_j^2). \quad (3.35)$$

Используя  $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j = \mathbf{c}_i - \mathbf{c}_j$  и соответственно  $\mathbf{c}_j = \mathbf{g} - \mathbf{c}_i$ , перепишем выражение под экспонентой в следующем виде:

$$\begin{aligned} \kappa_i c_i^2 + \kappa_j c_j^2 &= \kappa_i c_i^2 + \kappa_j (\mathbf{g} - \mathbf{c}_i)^2 = \kappa_i c_i^2 + \kappa_j (g^2 + c_i^2 - 2\mathbf{g} \cdot \mathbf{c}_i) = \\ &= (\kappa_i + \kappa_j) c_i^2 + \kappa_j g^2 - 2\kappa_j g c_i \cos \gamma, \end{aligned} \quad (3.36)$$

где  $\gamma$  – угол между векторами  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{c}_i$ . Теперь, среднее изменение некоторой динамической функции по времени за счет столкновений можно представить с следующим виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \psi_i(\mathbf{c}_i) \rangle &= \int dm_j n_i n_j \eta(m_j) \sigma_{ij}^{D-1} \left( \frac{\kappa_i \kappa_j}{\pi^2} \right)^{D/2} \times \\ &\times \int d\mathbf{c}_i d\mathbf{g} \int d\mathbf{n} \Theta(-\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) |\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}| \times \\ &\times \exp(-(\kappa_i + \kappa_j) c_i^2 - \kappa_j g^2 + 2\kappa_j g c_i \cos \gamma) \Delta \psi_i(\mathbf{g}, \mathbf{c}_i). \end{aligned} \quad (3.37)$$

### 3.2.1 Анализ диссипации для диска

Для дальнейшего анализа, используем то обстоятельство, что кольца Сатурна являются чрезвычайно тонким и плоским образованием. При радиальной ширине около

$L \sim 66000$  км, и азимутальной протяженности более полумиллиона километров, имеет толщину порядка нескольких метров. Данный факт делает кольцо Сатурна самым тонким природным образованием в солнечной системе. Нас же интересует радиальное распределение макропараметров, а не их распределение по толщине. Поэтому, во всех дальнейших анализах примем рассматриваемую нами систему двумерной  $D = 2$ . Полученные результаты будут отличаться от трехмерной системы  $D = 3$  лишь некоторыми числовыми коэффициентами. Таким образом, интегрирование по сечению  $dn\Theta(-\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})$  приводит к интегралу по полуокружности, и дает нам  $\pi$ . Обозначая через  $\theta$  угол между векторами  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{n}$ , можно написать  $|\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}| = g \cos \theta$ , где  $\theta$  меняется между  $-\pi/2$  и  $+\pi/2$ . Перейдя в полярные координаты, получаем  $d\mathbf{c}_i d\mathbf{g} = g c_i dg dc_i d\theta d\gamma$ , где  $\gamma \in [0 \div 2\pi]$ . Подставляя все это в интеграл столкновений, пишем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \psi_i(\mathbf{c}_i) \rangle &= \frac{n_i \kappa_i}{\pi} \int dm_j n_j \kappa_j \eta(m_j) \sigma_{ij} \int dg dc_i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\gamma g^2 c_i \cos \theta \times \\ &\times \exp \left( -(\kappa_i + \kappa_j) c_i^2 - \kappa_j g^2 + 2\kappa_j g c_i \cos \gamma \right) \Delta \psi_i(\mathbf{g}, \mathbf{c}_i) . \end{aligned} \quad (3.38)$$

Теперь вместо  $\psi_i(\mathbf{c}_i)$  подставим (2.15) и получаем:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dE_i}{dt} \right\rangle_c &= \frac{n_i \kappa_i}{\pi} \int dm_j n_j \kappa_j \eta(m_j) \sigma_{ij} \int dg dc_i g^2 c_i \exp \left( -(\kappa_i + \kappa_j) c_i^2 - \kappa_j g^2 \right) \times \\ &\times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos \theta \int_0^{2\pi} d\gamma \exp(2\kappa_j g c_i \cos \gamma) \times \\ &\times \left( -\mu(1 + \varepsilon) g c_i \cos \theta \cos(\gamma - \theta) + \frac{\mu^2}{2m_i} (1 + \varepsilon)^2 g^2 \cos^2 \theta \right) , \end{aligned} \quad (3.39)$$

здесь мы использовали  $\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{n} = c_i \cos(\gamma - \theta)$ . Рассмотрим отдельно угловые интегралы:

$$\begin{aligned} S_{\theta\gamma,1} &= -\mu(1 + \varepsilon) g c_i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos^2 \theta \int_0^{2\pi} d\gamma \cos(\theta - \gamma) \exp(R \cos \gamma) , \\ S_{\theta\gamma,2} &= \frac{\mu^2 g^2}{2m_i} (1 + \varepsilon)^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos^3 \theta \int_0^{2\pi} d\gamma \exp(R \cos \gamma) , \end{aligned} \quad (3.40)$$

где  $R = 2\kappa_j g c_i \geq 0$ . Разложим первый интеграл по  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} S_{\gamma,1} &= \cos \theta \int_0^{2\pi} \cos \gamma \exp(R \cos \gamma) d\gamma + \sin \theta \int_0^{2\pi} \sin \gamma \exp(R \cos \gamma) d\gamma = \\ &= \cos \theta \int_0^{2\pi} \cos \gamma \exp(R \cos \gamma) d\gamma = 2 \cos \theta \int_0^{\pi} \cos \gamma \exp(R \cos \gamma) d\gamma . \end{aligned} \quad (3.41)$$

Здесь функция под первым интегралом четная, поэтому ее можно разделить пополам, а функция под вторым интегралом нечетная, и поэтому исчезает. Таким образом у нас остаются два интеграла по  $\gamma$ , которые не интегрируются в квадратурах, и представляются в виде модифицированных функций Бесселя:

$$\begin{aligned} S_{\gamma,1} &= \int_0^{\pi} \cos \gamma \exp(R \cos \gamma) d\gamma = \pi I_1(R) , \\ S_{\gamma,2} &= \int_0^{\pi} \exp(R \cos \gamma) d\gamma = \pi I_0(R) , \end{aligned} \quad (3.42)$$

где

$$I_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos t} \cos(\nu t) dt - \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi} \int_0^\infty e^{-x \cosh t - \nu t} dt, \quad (3.43)$$

называется *модифицированной функцией Бесселя*. Для значений параметра  $\nu = 0, 1$  мы получаем наши интегралы по  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} S_{\theta\gamma,1} &= -\frac{8}{3}\pi\mu(1+\varepsilon)gc_i I_1(R), \\ S_{\theta\gamma,2} &= \frac{4\pi\mu^2 g^2}{3m_i}(1+\varepsilon)^2 I_0(R), \end{aligned} \quad (3.44)$$

где интеграл по  $\theta$  элементарен:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}. \quad (3.45)$$

Теперь исходный интеграл записывается в виде:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dE_i}{dt} \right\rangle_c &= \frac{4n_i\kappa_i}{3}(1+\varepsilon) \int dm_j \mu n_j \kappa_j \eta(m_j) \sigma_{ij} \int dg dc_i g^3 c_i \times \\ &\times \exp(-(\kappa_i + \kappa_j)c_i^2 - \kappa_j g^2) \times \\ &\times \left( (1+\varepsilon) \frac{\mu}{m_i} g I_0(R) - 2c_i I_1(R) \right), \end{aligned} \quad (3.46)$$

или в более развернутом виде:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dE_i}{dt} \right\rangle_c &= \frac{4n_i\kappa_i}{3}(1+\varepsilon) \int dm_j \mu n_j \kappa_j \eta(m_j) \sigma_{ij} \int_0^\infty dg g^3 e^{-\kappa_j g^2} \times \\ &\times \int_0^\infty dc_i c_i \exp(-(\kappa_i + \kappa_j)c_i^2) \times \\ &\times \left\{ (1+\varepsilon) \frac{\mu}{m_i} g I_0(2\kappa_j g c_i) - 2c_i I_1(2\kappa_j g c_i) \right\}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Интегралы по функциям Бесселя могут быть рассчитаны с помощью следующих формул:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-px^2} I_\nu(cx) dx &= A_\nu^\alpha, \quad [\Re(p), \Re(\alpha + \nu) > 0, |\arg c| < \pi], \\ A_\nu^\alpha &= 2^{-\nu-1} c^\nu p^{-(\alpha+\nu)/2} \cdot \frac{\Gamma((\alpha + \nu)/2)}{\Gamma(\nu + 1)} \cdot {}_1F_1\left(\frac{\alpha + \nu}{2}; \nu + 1; \frac{c^2}{4p}\right), \end{aligned} \quad (3.48)$$

где

$${}_1F_1(a; b; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{(a)} z^n}{b^{(n)} n!}, \quad (3.49)$$

называется *вырожденной гипергеометрической функцией*. Для наших интегралов, нам нужны два специальных случая:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x e^{-px^2} I_0(cx) dx &= A_0^2, \\ \int_0^\infty x^2 e^{-px^2} I_1(cx) dx &= A_1^3, \end{aligned} \quad (3.50)$$

где

$$\begin{aligned} p &= \kappa_i + \kappa_j , \\ c &= 2\kappa_j g . \end{aligned} \quad (3.51)$$

Если выполняется условие  $\alpha = \nu + 2$ , то интегральная формула может быть сильно упрощена:

$$A_\nu^{\nu+2} = \frac{c^\nu}{(2p)^{\nu+1}} \exp\left(\frac{c^2}{4p}\right) . \quad (3.52)$$

В итоге получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x e^{-px^2} I_0(cx) dx &= \frac{1}{2p} \exp\left(\frac{c^2}{4p}\right) , \\ \int_0^\infty x^2 e^{-px^2} I_1(cx) dx &= \frac{c}{(2p)^2} \exp\left(\frac{c^2}{4p}\right) . \end{aligned} \quad (3.53)$$

Подставляя все выражения на места, и имея ввиду табличный интеграл:

$$\int_0^\infty x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8a^2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} , \quad (3.54)$$

получаем:

$$\left\langle \frac{dE_i}{dt} \right\rangle_c = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int dm_j \Lambda_{ij} \mu (1 + \varepsilon) \frac{\kappa_i + \kappa_j}{\kappa_i \kappa_j} \sqrt{\frac{\kappa_i + \kappa_j}{\kappa_i \kappa_j}} \left( \frac{1 + \varepsilon}{2} \frac{\mu}{m_i} - \frac{\kappa_j}{\kappa_i + \kappa_j} \right) , \quad (3.55)$$

где

$$\Lambda_{ij} = n_i n_j \eta(m_j) \sigma_{ij} . \quad (3.56)$$

Обозначая  $\eta(m_j) dm_j = d\chi_j$  – количество частиц подсистемы  $j$  в элементарном объеме вокруг  $\mathbf{r}$ , получаем

$$\left\langle \frac{dE_i}{dt} \right\rangle_c = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot n_i (1 + \varepsilon) \int d\chi_j n_j \sigma_{ij} \mu_{ij} \frac{\kappa_i + \kappa_j}{\kappa_i \kappa_j} \sqrt{\frac{\kappa_i + \kappa_j}{\kappa_i \kappa_j}} \left( \frac{1 + \varepsilon}{2} \frac{\mu_{ij}}{m_i} - \frac{\kappa_j}{\kappa_i + \kappa_j} \right) , \quad (3.57)$$

Продвигаемся далее. Так как:

$$\frac{\kappa_j}{\kappa_i + \kappa_j} = \frac{m_j T_i}{m_i T_j + m_j T_i} , \quad (3.58)$$

и

$$\mu_{ij} \cdot \frac{\kappa_i + \kappa_j}{\kappa_i \kappa_j} = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j} \frac{\frac{m_i}{2T_i} + \frac{m_j}{2T_j}}{\frac{m_i m_j}{4T_i T_j}} = 2 \cdot \frac{m_i T_j + m_j T_i}{m_i + m_j} , \quad (3.59)$$

преобразуем выражение под интегралом

$$\begin{aligned} S &= \mu_{ij} (1 + \varepsilon) \frac{\kappa_i + \kappa_j}{\kappa_i \kappa_j} \times \left( \frac{\mu_{ij} (1 + \varepsilon)}{2m_i} - \frac{\kappa_j}{\kappa_i + \kappa_j} \right) = \\ &= \frac{m_i T_j + m_j T_i}{m_i + m_j} \left( \frac{m_j}{m_i + m_j} (1 + \varepsilon)^2 - \frac{2(1 + \varepsilon) m_j T_i}{m_i T_j + m_j T_i} \right) = \\ &= \frac{m_j}{(m_i + m_j)^2} ((m_i T_j + m_j T_i)(1 + \varepsilon)^2 - 2(1 + \varepsilon)(m_i + m_j) T_i) = \\ &= \frac{m_j}{(m_i + m_j)^2} ((1 + \varepsilon)^2 T_j - 2(1 + \varepsilon) T_i) m_i + [(1 + \varepsilon)^2 - 2(1 + \varepsilon)] m_j T_i = \\ &= \frac{m_j}{(m_i + m_j)^2} (-(1 - \varepsilon^2) m_j T_i + (1 + \varepsilon)[(1 + \varepsilon) T_j - 2T_i] m_i) , \end{aligned}$$

далее, имея ввиду что  $2 = 1 + \varepsilon + 1 - \varepsilon$ , пишем:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{m_j}{(m_i + m_j)^2} \left( - (1 - \varepsilon^2) m_j T_i + m_i (1 + \varepsilon) [(1 + \varepsilon) T_j - (1 + \varepsilon) T_i - (1 - \varepsilon) T_i] \right) = \\
&= \frac{m_j}{(m_i + m_j)^2} \left( - (1 - \varepsilon^2) m_j T_i + m_i (1 + \varepsilon)^2 (T_j - T_i) - m_i (1 - \varepsilon^2) T_i \right) = \\
&= \frac{m_j}{(m_i + m_j)^2} \left( - (1 - \varepsilon^2) (m_i + m_j) T_i + m_i (1 + \varepsilon)^2 (T_j - T_i) \right) = \\
&= - (1 - \varepsilon^2) \frac{m_j}{m_i + m_j} T_i + (1 + \varepsilon)^2 \frac{m_i m_j}{(m_i + m_j)^2} (T_j - T_i) ,
\end{aligned}$$

и наконец

$$S = - (1 - \varepsilon^2) \frac{\mu}{m_i} T_i + (1 + \varepsilon)^2 \frac{\mu^2}{m_i m_j} (T_j - T_i) . \quad (3.60)$$

Вставляя полученное выражение в исходный интеграл, получаем:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{dE_i}{dt} \right\rangle_c &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot n_i \int d\chi_j n_j \sigma_{ij} \sqrt{\frac{m_i T_j + m_j T_i}{m_i m_j}} \times \\
&\times \left( - (1 - \varepsilon^2) \frac{\mu}{m_i} T_i + (1 + \varepsilon)^2 \frac{\mu^2}{m_i m_j} (T_j - T_i) \right) .
\end{aligned} \quad (3.61)$$

### 3.2.2 Усредненные по ансамблю динамические параметры смеси гранулярных газов

Рассмотрим некоторые динамические параметры смеси гранулярных газов, которые будут необходимы нам для дальнейшего анализа. Возьмем некоторую функцию зависящую от двухчастичного распределения  $\alpha_{ij}$ . В общем виде, среднее значение двухчастичной функции задается следующим выражением:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_{ij} \rangle &= \frac{\int \alpha_{ij} \cdot f(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{c}_i) f(t, m_j, \mathbf{r}, \mathbf{c}_j) d\mathbf{c}_i d\mathbf{c}_j}{\int f(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{c}_i) f(t, m_j, \mathbf{r}, \mathbf{c}_j) d\mathbf{c}_i d\mathbf{c}_j} = \\
&= \frac{1}{n_i n_j} \int \alpha_{ij} \cdot f(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{c}_i) f(t, m_j, \mathbf{r}, \mathbf{c}_j) d\mathbf{c}_i d\mathbf{c}_j ,
\end{aligned} \quad (3.62)$$

и принимая во внимание что функцию распределения мы выбрали в виде Максвелловского распределения (3.32), и следуя такой же схеме рассуждений как и в предыдущей главе, пишем:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_{ij} \rangle &= \frac{\kappa_i \kappa_j}{\pi^2} \int_0^\infty dg g e^{-\kappa_j g^2} \int_0^\infty d\mathbf{c}_i c_i \alpha_{ij} e^{-(\kappa_i + \kappa_j) c_i^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\gamma \exp(2\kappa_j g c_i \cos \gamma) = \\
&= 4\kappa_i \kappa_j \int_0^\infty dg g e^{-\kappa_j g^2} \int_0^\infty d\mathbf{c}_i c_i \alpha_{ij} I_0(2\kappa_j g \cdot c_i) \exp(-(\kappa_i + \kappa_j) c_i^2) ,
\end{aligned} \quad (3.63)$$

где под  $\alpha_{ij}$  мы понимаем некоторую функцию по комбинациям скоростей частиц. Сначала положим  $\alpha_{ij} = g_{ij}$ , и в итоге получаем среднюю скорость столкновений для частиц подсистем  $i$  и  $j$  для двумерного газа:

$$\langle g_{ij} \rangle = 4\kappa_i \kappa_j \int_0^\infty dg g^2 e^{-\kappa_j g^2} \int_0^\infty d\mathbf{c}_i c_i I_0(\lambda \cdot c_i) \exp(-p c_i^2) , \quad (3.64)$$

где  $p = \kappa_i + \kappa_j$ ,  $\lambda = 2\kappa_j g$ . Нам также понадобятся и другие динамические параметры. Это среднее по ансамблю квадрата скорости столкновения, которое присутствует в выражениях для энергии в системе.

$$\langle g_{ij}^2 \rangle = 4\kappa_i \kappa_j \int_0^\infty dg g^3 e^{-\kappa_j g^2} \int_0^\infty dc_i c_i I_0(\lambda \cdot c_i) \exp(-pc_i^2) . \quad (3.65)$$

Также запишем следующую функцию  $\alpha_{ij} = \mathbf{g}_{ij} \cdot \mathbf{c}_i = g_{ij} c_i \cos \gamma$ , и получаем:

$$\langle \mathbf{g}_{ij} \cdot \mathbf{c}_i \rangle = 4\kappa_i \kappa_j \int_0^\infty dg g^2 e^{-\kappa_j g^2} \int_0^\infty dc_i c_i^2 I_1(\lambda \cdot c_i) \exp(-pc_i^2) . \quad (3.66)$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} \langle g_{ij} \rangle &= 4\kappa_i \kappa_j \int_0^\infty dg g^2 e^{-\kappa_j g^2} \cdot \frac{1}{2p} \exp\left(\frac{\lambda^2}{4p}\right) , \\ \langle g_{ij}^2 \rangle &= 4\kappa_i \kappa_j \int_0^\infty dg g^3 e^{-\kappa_j g^2} \cdot \frac{1}{2p} \exp\left(\frac{\lambda^2}{4p}\right) , \\ \langle \mathbf{g}_{ij} \cdot \mathbf{c}_i \rangle &= 4\kappa_i \kappa_j \int_0^\infty dg g^2 e^{-\kappa_j g^2} \cdot \frac{\lambda}{4p^2} \exp\left(\frac{\lambda^2}{4p}\right) , \end{aligned} \quad (3.67)$$

или

$$\begin{aligned} \langle g_{ij} \rangle &= 2R \int_0^\infty dg g^2 e^{-Rg^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{R}} , \\ \langle g_{ij}^2 \rangle &= 2R \int_0^\infty dg g^3 e^{-Rg^2} = \frac{1}{R} , \\ \langle \mathbf{g}_{ij} \cdot \mathbf{c}_i \rangle &= \frac{2R^2}{\kappa_i} \int_0^\infty dg g^3 e^{-Rg^2} = \frac{1}{\kappa_i} , \end{aligned} \quad (3.68)$$

где

$$R = \frac{\kappa_i \kappa_j}{\kappa_i + \kappa_j} = \frac{1}{2} \frac{m_i m_j}{m_i T_j + m_j T_i} . \quad (3.69)$$

В конечном итоге получаем:

$$\begin{aligned} \langle g_{ij} \rangle &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{\frac{m_i T_j + m_j T_i}{m_i m_j}} , \\ \langle g_{ij}^2 \rangle &= 2 \cdot \frac{m_i T_j + m_j T_i}{m_i m_j} , \\ \langle \mathbf{g}_{ij} \cdot \mathbf{c}_i \rangle &= \frac{2T_i}{m_i} . \end{aligned} \quad (3.70)$$

Оценим частоту столкновений частицы подсистемы  $i$  с частицами подсистемы  $j$ . Представим что размер частицы  $i$  пренебрежимо мал, и она движется среди других частиц с размерами  $\sigma_{ij} = \sigma_i + \sigma_j$ , и плотностью  $n_j$ . В таком случае частота столкновений равна:

$$\omega_{ij} = \sigma_{ij} n_j \langle g_{ij} \rangle = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sigma_{ij} n_j \sqrt{\frac{m_i T_j + m_j T_i}{m_i m_j}} . \quad (3.71)$$



Теперь посчитаем среднее по ансамблю изменение энергии при столкновениях (2.17):

$$\begin{aligned}
\langle \delta E_i \rangle &= -\mu(1+\varepsilon)\langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_C \rangle - \frac{1-\varepsilon^2}{2} \frac{\mu^2}{m_i} \langle g^2 \rangle = \\
&= -\frac{\mu^2}{m_j}(1+\varepsilon)\langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{c}_i \rangle - \frac{\mu^2}{m_i}(1+\varepsilon)\langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{c}_j \rangle - \frac{1-\varepsilon^2}{2} \frac{\mu^2}{m_i} \langle g^2 \rangle = \\
&= -\frac{\mu^2}{m_j}(1+\varepsilon)\langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{c}_i \rangle - \frac{\mu^2}{m_i}(1+\varepsilon)\langle \mathbf{g} \cdot (\mathbf{c}_i - \mathbf{g}) \rangle - \frac{1-\varepsilon^2}{2} \frac{\mu^2}{m_i} \langle g^2 \rangle = \\
&= -\mu(1+\varepsilon)\langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{c}_i \rangle + \frac{\mu^2}{m_i}(1+\varepsilon)\langle g^2 \rangle - \frac{1-\varepsilon^2}{2} \frac{\mu^2}{m_i} \langle g^2 \rangle = \\
&= -\mu(1+\varepsilon)\langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{c}_i \rangle + \frac{\mu^2}{m_i} \frac{(1+\varepsilon)^2}{2} \langle g^2 \rangle ,
\end{aligned} \tag{3.72}$$

далее пишем:

$$\begin{aligned}
\langle \delta E_i \rangle &= -\mu(1+\varepsilon) \frac{2T_i}{m_i} + \frac{\mu^2}{m_i}(1+\varepsilon)^2 \cdot \frac{m_i T_j + m_j T_i}{m_i m_j} = \\
&= \frac{\mu}{m_i}(1+\varepsilon) \left( (1+\varepsilon) \cdot \frac{m_i T_j + m_j T_i}{m_i + m_j} - 2T_i \right) = \\
&= \frac{\mu}{m_i} \frac{1+\varepsilon}{m_i + m_j} [(1+\varepsilon)m_i T_j + (1+\varepsilon)m_j T_i - 2m_i T_i - 2m_j T_i] = \\
&= \frac{\mu}{m_i} \frac{1+\varepsilon}{m_i + m_j} [(1+\varepsilon)m_i(T_j - T_i) - (1-\varepsilon)(m_i + m_j)T_i] ,
\end{aligned} \tag{3.73}$$

и в итоге получаем:

$$\langle \delta E_i \rangle = - (1 - \varepsilon^2) \frac{\mu}{m_i} T_i + (1 + \varepsilon)^2 \frac{\mu^2}{m_i m_j} (T_j - T_i) . \tag{3.74}$$

Данное выражение равно выражению под скобкой в уравнении (3.61), и в итоге ее можно переписать в следующем виде:

$$\left\langle \frac{dE_i}{dt} \right\rangle_c = n_i \int d\chi_j \omega_{ij} \langle \delta E_i \rangle . \tag{3.75}$$

Вспомним что скорость изменения энергии системы за счет столкновений мы выразили через функцию охлаждения  $\xi(t, m_i, \mathbf{r}, T_i)$ , и теперь мы можем написать вид этой функции следующим образом:

$$\left\langle \frac{dE_i}{dt} \right\rangle_c = -T_i \xi(t, m_i, \mathbf{r}, T_i) , \tag{3.76}$$

или

$$\xi(t, m_i, \mathbf{r}, T_i) = -\frac{n_i}{T_i} \int d\chi_i \omega_{ij} (-A_{ij} T_i + B_{ij} (T_j - T_i)) , \tag{3.77}$$

где

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= (1 - \varepsilon^2) \frac{\mu}{m_i} , \\
B_{ij} &= (1 + \varepsilon)^2 \frac{\mu^2}{m_i m_j} .
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Здесь, параметр  $A_{ij}$  показывает скорость охлаждения системы из-за диссипации при столкновениях, параметр  $B_{ij}$  показывает скорость обмена энергии между подсистемами  $i$  и  $j$ . Данная часть энергии остается в системе, и не диссипирует.

### 3.2.3 Нормальное решение и приближение по среднему полю

Рассматриваемая нами система полидисперсных гранулярных газов, после начального релаксационного периода, приходит к универсальному, т.н. *нормальному* решению. Смысл этого решения в том, что все зависимости функции распределения от времени и пространства выражаются только через гидродинамические (макроскопические) параметры системы, такие как плотность числа, гранулярная температура, средняя скорость потока и т.д. Самой важной особенностью данного решения в том, что все подсистемы охлаждаются с одинаковой скоростью. Отсюда мы понимаем, что неодинаковость температур подсистем, появляется в начальной стадии эволюции системы, затем можно предположить что они эволюционируют независимо друг от друга, с различными начальными температурами, до тех пор пока системы не приходят к стационарному состоянию, при котором диссипация компенсируется подкачкой энергии в систему, и все подсистемы приходят к своим собственным стационарным температурам. Одинаковость скорости охлаждения выражается следующим образом:

$$\frac{1}{T_i} \frac{dT_i}{dt} = \frac{1}{T_j} \frac{dT_j}{dt} = -\xi(t) . \quad (3.79)$$

Используя нормальное решение системы, введем понятие *среднего поля*. Это некая мнимая подсистема, с некоторой массой мнимых частиц  $\bar{m}$ , и некоторой мнимой температурой  $\bar{T}$ . Эти величины характеризуются полидисперсностью системы в целом и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \int d\chi_i T_i , \\ \bar{m} &= \int d\chi_i m_i . \end{aligned} \quad (3.80)$$

Теперь возьмем уравнение для охлаждения системы (3.77), и проинтегрируем по всему ансамблю:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int d\chi_i T_i &= - \int d\chi_i T_i \xi_i(t) = - \int d\chi_i \int d\chi_j \omega_{ij} (A_{ij} T_i - B_{ij} (T_j - T_i)) = \\ &= - \int d\chi_i T_i \int d\chi_j \omega_{ij} A_{ij} + \iint d\chi_i d\chi_j \omega_{ij} B_{ij} (T_j - T_i) . \end{aligned} \quad (3.81)$$

Так как параметр  $B_{ij}$  отвечает за перенос энергии внутри системы, и не участвует в диссипации, то при интегрировании по всей системе, последний интеграл исчезает, это также видно по тому факту, что выражение под интегралом является антисимметричным. Таким образом, получаем:

$$\frac{d\bar{T}}{dt} = - \int d\chi_i T_i \int d\chi_j \omega_{ij} A_{ij} . \quad (3.82)$$

С другой стороны, для нормального решения, мы также можем написать:

$$\frac{dT_i}{dt} = -\xi(t) T_i , \quad (3.83)$$

и интегрируя по всему ансамблю получаем:

$$\int d\chi_i \frac{dT_i}{dt} = - \int d\chi_i \xi(t) T_i , \quad (3.84)$$

или

$$\frac{d\bar{T}}{dt} = -\xi(t)\bar{T} . \quad (3.85)$$

Приравнивая к (3.82), получаем:

$$\xi(t) = \frac{\int d\chi_i T_i \int d\chi_j \omega_{ij} A_{ij}}{\int d\chi_i T_i} . \quad (3.86)$$

Для дальнейшего продвижения, сделаем т.н. *аппроксимацию по среднему полю*. Предположим, что всю систему можно заменить монодисперсной системой с макропараметрами, поведение которых такое же как и у изначальной системы. В таком случае, напомним:

$$\xi(t) \approx \frac{\bar{T} \cdot \int d\chi_i \omega_{ij} A_{ij}}{\bar{T}} = \bar{\omega} \bar{A} , \quad (3.87)$$

где  $\bar{\omega}$  – средняя частота столкновений. Для колец Сатурна нам известно, что

$$\bar{\omega} \approx 3\Omega\tau , \quad (3.88)$$

где  $\tau$  – оптическая толщина кольца. Диссипативный параметр  $\bar{A}$  имеет форму:

$$\bar{A} \propto \frac{1 - \varepsilon^2}{2} , \quad (3.89)$$

и в итоге можно написать:

$$\xi(t) = \xi \approx \frac{3}{2} (1 - \varepsilon^2) \Omega\tau . \quad (3.90)$$

## 4 Диск с дифференциальным вращением

Мы вывели гидродинамические уравнения переноса и скорость охлаждения системы за счет столкновений. Выпишем эти уравнения заново:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_\alpha}(\rho u_\alpha) &= 0 \\ \frac{\partial(\rho u_\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_\beta}(\rho u_\alpha u_\beta) &= -\frac{\partial(nT)}{\partial r_\alpha} - \frac{\partial \pi_{\alpha\beta}}{\partial r_\beta} + \rho w_\alpha, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( nT + \frac{\rho u_\beta u_\beta}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial r_\alpha} u_\alpha \left( 2nT + \frac{\rho u_\beta u_\beta}{2} \right) &= \rho w_\beta u_\beta - \frac{\partial}{\partial r_\alpha}(\pi_{\alpha\beta} u_\beta) - \frac{\partial q_\alpha}{\partial r_\alpha} - T\xi. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Эти уравнения выписаны в общем виде для двумерной системы. Рассматриваемая нами система является плоским диском с дифференциальным вращением и с азимутальной симметрией. Поэтому займемся упрощением выведенных гидродинамических уравнений.

### 4.1 Азимутальная симметрия

Сделаем переход на полярные координаты  $x, y \rightarrow r, \theta$ , где  $r$  – расстояние до центра планеты,  $\theta$  – азимутальная позиция, тогда дифференциальное вращение означает что угловая скорость вращения зависит от  $r$ , т.е. в нашем случае кеплеровской, а азимутальная симметрия означает что макропараметры системы не зависят от  $\theta$ :

$$f = f(t, m, r, \dot{r}, \dot{\theta}). \quad (4.2)$$

Гравитационный потенциал имеет следующий вид:

$$U(r) = -\frac{GM_P}{r}, \quad (4.3)$$

где  $G$  – гравитационная постоянная,  $M_P$  – масса планеты. Ускорение частицы в этом поле равна:

$$\mathbf{w} = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{GM_P}{r^2} \mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} -GM_P/r^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

где  $\mathbf{e}_r$  – единичный вектор в радиальном направлении. Средняя скорость потока на кеплеровской орбите равна:

$$\mathbf{u} = \Omega r \cdot \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega r \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

где  $\mathbf{e}_\theta$  – единичный вектор в азимутальном направлении. Также, векторный оператор набла в полярных координатах имеет следующий вид:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r_\alpha} = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Таким образом, уравнение непрерывности принимает вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho \Omega r)}{\partial \theta} = 0, \quad (4.7)$$

и далее получаем совершенно естественный результат для нашей системы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 . \quad (4.8)$$

Теперь рассмотрим уравнение переноса импульса. Для этого сначала необходимо вывести выражения для нескольких тензоров. Первый тензор получается как внешнее произведение двух векторов:

$$\rho u_i u_j = \rho \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega r \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & \Omega r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho \Omega^2 r^2 \end{pmatrix} , \quad (4.9)$$

и далее получаем:

$$\frac{\partial}{\partial r_\beta} (\rho u_\alpha u_\beta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho \Omega^2 r^2 \end{pmatrix} = 0 . \quad (4.10)$$

Второй, это тензор вязких напряжений (3.28). В нашем случае он имеет вид:

$$\pi_{\alpha\beta} = -\nu \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial(\Omega r)}{\partial r} \\ \frac{\partial(\Omega r)}{\partial r} & 0 \end{pmatrix} , \quad (4.11)$$

и так как:

$$\frac{\partial(\Omega r)}{\partial r} = -\frac{\Omega}{2} , \quad (4.12)$$

получаем:

$$\pi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \nu \Omega \\ \nu \Omega & 0 \end{pmatrix} . \quad (4.13)$$

Его пространственные производные имеют вид:

$$\frac{\partial \pi_{\alpha\beta}}{\partial r_\beta} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \nu \Omega \\ \nu \Omega & 0 \end{pmatrix} , \quad (4.14)$$

и так как:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r} = -\frac{3}{2} \frac{\Omega}{r} , \quad (4.15)$$

в итоге получаем:

$$\frac{\partial \pi_{\alpha\beta}}{\partial r_\beta} = -\frac{3}{4} \frac{\nu \Omega}{r} \mathbf{e}_\theta = - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \frac{\nu \Omega}{r} \end{pmatrix} . \quad (4.16)$$

В конечном итоге, уравнение переноса импульса принимает вид:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla(nT) + \frac{3}{4} \frac{\nu}{r^2} \mathbf{u} - \rho \nabla U(r) , \quad (4.17)$$

которое также тривиальным образом обнуляется. Теперь рассмотрим уравнение переноса энергии. Необходимые в этом случае тензорные операции выглядят следующим образом:

$$\pi_{\alpha\beta} u_\beta = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \nu \Omega \\ \nu \Omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega r \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \nu \Omega^2 r & 0 \end{pmatrix} , \quad (4.18)$$

и соответственно:

$$\frac{\partial(\pi_{\alpha\beta}u_{\beta})}{\partial r_{\alpha}} = -\nu\Omega^2 . \quad (4.19)$$

Поток тепла записывается:

$$\frac{\partial q_{\alpha}}{\partial r_{\alpha}} = -\lambda\Delta T . \quad (4.20)$$

Так как оператор Лапласа в полярных координатах выглядят следующим образом:

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} . \quad (4.21)$$

то в конечном итоге получаем уравнение переноса энергии в системе:

$$n \frac{\partial T}{\partial t} = \nu\Omega^2 + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - T\xi . \quad (4.22)$$

Анализируя полученное уравнение эволюции температуры в системе, видим что она зависит от подкачки гравитационной энергии  $\nu\Omega^2$ , диссипации  $-\xi$ , и также переноса тепла в радиальном направлении  $\lambda\Delta T$ .

## 4.2 Стационарное решение

Произведем анализ стационарного решения уравнения (4.22). Если пренебречь радиальной зависимостью температуры, то получаем:

$$(k_1\nu_l + k_2\nu_{nl})\Omega^2 = k_3(1 - \varepsilon^2)\Omega\tau \cdot \bar{T} , \quad (4.23)$$

где  $k_1, k_2, k_3$  – некоторые константы. Коэффициент вязкости мы разделили на две части, т.н. локальную и нелокальную:

$$\begin{aligned} \nu_l &\approx \frac{\bar{T}}{\Omega\bar{m}} \frac{\tau}{1 + \tau^2} , \\ \nu_{nl} &\approx \Omega\bar{\sigma}^2\tau , \end{aligned} \quad (4.24)$$

где

$$\bar{\sigma} = \int d\chi_i \sigma_i , \quad (4.25)$$

среднее сечение. Теперь можно написать стационарное значение температуры среднего поля:

$$\bar{T} = \frac{k_2 \cdot \bar{m}\Omega^2\bar{\sigma}^2(1 + \tau^2)}{k_3 \cdot \bar{m}(1 - \varepsilon^2)(1 + \tau^2) - k_1} . \quad (4.26)$$

## 5 Экспериментальный раздел

В данном разделе проводятся вычислительные эксперименты. А на рис. 5.1 показана схема мыслительного процесса автора...

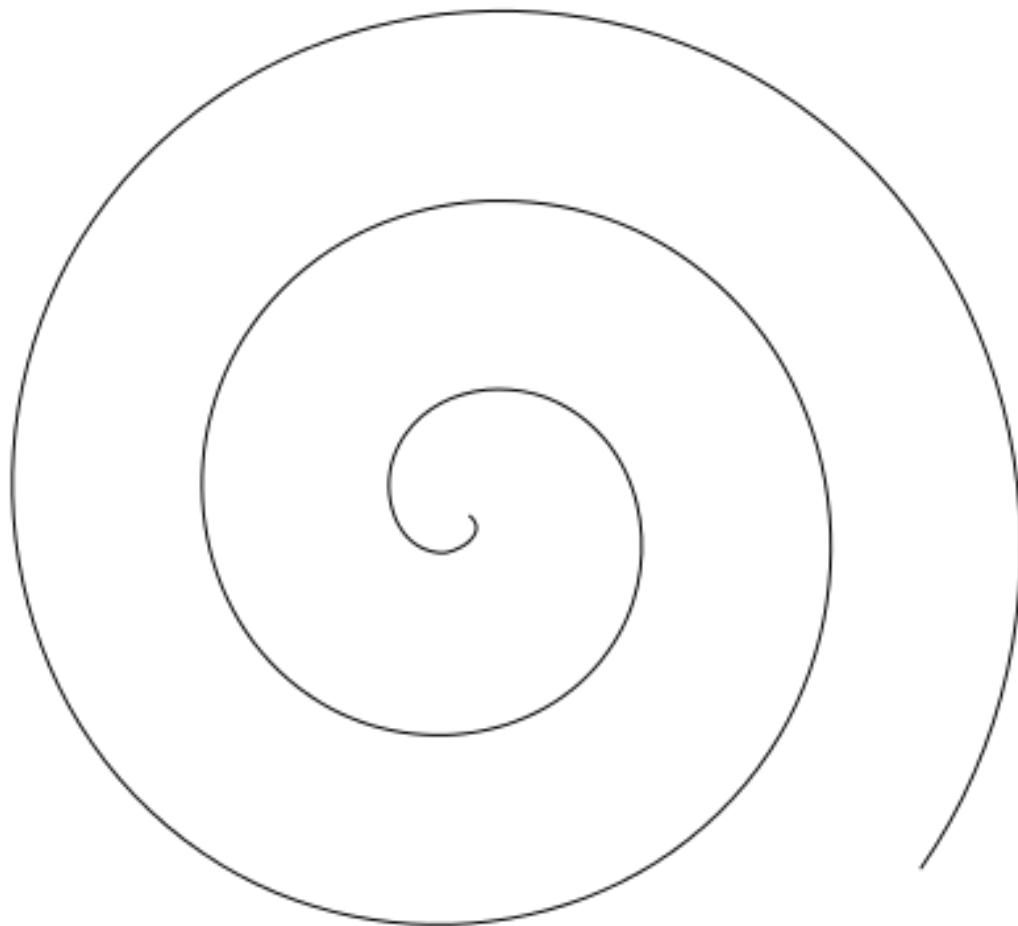


Рисунок 5.1 — Как страшно жить

## **Заключение**

В результате проделанной работы стало ясно, что ничего не ясно...



## **Список использованных источников**

1. *Brilliantov, N. V.* Kinetic Theory of Granular Gases / N. V. Brilliantov, T. Pöschel.  
— 1st edition. — Oxford University Press, 2004.

## **Приложение А    Картинки**

Рисунок А.1 — Картинка в приложении. Страшная и ужасная.

## **Приложение Б    Еще картинки**

Рисунок Б.1 — Еще одна картинка, ничем не лучше предыдущей. Но надо же как-то заполнить место.