

Реферат

Компьютерное моделирование кинетического и гидродинамического приближения сложных статистических систем

Перечень ключевых слов: нейтронное рассеяние, наносистемы и материалы, дифракция нейтронов, рентгеновская дифракция, нейтронная спектроскопия, камера высокого давления, импульсные источники нейтронов, конструкционные материалы, высокопрочные сплавы, нанотрубки, каркасно-нанокластерные бориды, углеволокно, высокотемпературные сверхпроводники, эластомеры. Объектами исследования и разработки в данной работе являются наносистемы и наноматериалы, твердые сплавы, функциональные материалы, в том числе каркасно-нанокластерные бориды, композиты из углеродных волокон, карбид кремния, высокотемпературные сверхпроводники нового поколения и родственные им соединения, моносилициды переходных металлов, сложные оксиды, кобальтиты.

Целью данной работы является получение новых знаний и результатов в области структурных и динамических свойств наносистем и наноматериалов, исследование наносистем и материалов методом рассеяния тепловых и эпитепловых нейтронов, рентгеновской дифракции, обеспечение научно-исследовательских работ, проводимых организациями Российской Федерации, с предоставлением им возможности использования методов научных исследований, разработанных или освоенных для уникальной установки – Нейтронного комплекса ИЯИ РАН.

Метод проведения работы: настоящая работа была выполнена при использовании нейтронных методик исследования конденсированных сред в сочетании с комплементарными рентгеновскими методами. Использовались нейтронная дифракция, нейтронная спектроскопия, рентгеновская дифракция, Мессбауэровская спектроскопия.

Результаты работы: На Нейтронном комплексе ИЯИ РАН, прочих нейтронных источниках, на рентгеновских дифрактометрах в ИЯИ РАН, на Мёссбауэровском спектрометре в ИЯИ РАН были исследованы структурные и динамические свойства материалов, в том числе наносистем, включающих в себя твердые сплавы с нановключениями, каркасно-кластерные бориды с высокими термоэлектрическими свойствами, высокотемпературные сверхпроводники нового поколения и родственные им системы, сложные оксиды на основе переходных металлов, композитные материалы на основе углеволокна для авиакосмических приложений, система углерод-кремний с высокими механическими качествами и химической стойкостью. Была проведена работа по дальнейшему совершенствованию экспериментальной базы Нейтронного комплекса ИЯИ РАН, предназначенной для нейтронной спектроскопии и нейтронной дифракции. В ходе работ по реализации задач этапа было привлечено в исследования по тематике Госконтракта несколько студентов и аспирантов.

Основные конструктивные, технологические и технико-эксплуатационные характеристики: все нейтронные установки Нейтронного комплекса ИЯИ РАН основаны на

методике регистрации нейтронов по времени пролета. Особенности источника являются относительно жесткий нейтронный спектр и возможность вариации длительности импульса. Важной для повышения эффективности измерений особенностью рентгеновского оборудования ИЯИ РАН является наличие позиционно-чувствительного детектора (imageplate).

Степень внедрения: степень внедрения результатов НИР будет выяснена после завершения работ по Госконтракту.

Рекомендации по внедрению или итоги внедрения результатов НИР: рекомендации по внедрению результатов НИР будут сделаны после завершения работ по Госконтракту. Область применения: исследуемые наносистемы и материалы будут применяться в энергетике, научном приборостроении, химической промышленности, авиакосмической промышленности, атомной энергетике.

Экономическая эффективность или значимость работы: оценка экономической эффективности и значимости работы будет сделана после завершения работ по Госконтракту.

Прогнозные предположения о развитии объекта исследования: прогнозные предположения будут сделаны после завершения работ по Госконтракту.

Содержание

1	Введение	6
2	Кинетическое описание полидисперсной системы	10
2.1	Уравнения Больцмана	10
2.2	Механика столкновений	11
2.3	Интеграл столкновений	13
2.4	Эволюция энергии системы	13
3	Гидродинамическое описание системы	14
3.1	Уравнения переноса	14
3.1.1	Перенос массы	16
3.1.2	Перенос импульса	16
3.1.3	Перенос энергии	17
3.1.4	Вектор потока тепла и тензор вязких напряжений	18
3.2	Скорость охлаждения системы	18
4	Технологический раздел	23
5	Экспериментальный раздел	25
	Заключение	26
	Список использованных источников	27
А	Картинки	28
Б	Еще картинки	29

Глоссарий

Распределённый — Слово, которое нельзя употреблять. Но надо протестировать длинные строки в глоссарии.

Обозначения и сокращения

АИС — Автоматизированная информационная система. Но надо протестировать длинные строки в определениях.

1 Введение

В природе гранулярная материя является одним из самых распространенных типов вещества, начиная от песка под нашими ногами, сахара для чая, различных порошков для строительства и техногенного производства, заканчивая космической пылью в аккреционных дисках зарождающихся звездных и галактических системах. Гранулярная материя характеризуется в основном диссипативными свойствами при контактном взаимодействии составных частиц. Частный случай гранулярных систем, так называемый *гранулярный газ*, является объектом интереса в нашей работе [1]. Под газообразной мы будем подразумевать систему в которой все контактные взаимодействия бинарные, т.е. в любой момент времени во всех взаимодействиях участвуют только два объекта, а тройные, четверные и т.д. взаимодействия исключены. Таким образом, подобная система может быть описана классическими уравнениями Больцмана-Энскога.

Объектом наших исследований являются кольца Сатурна. Данный выбор был неслучаен, и был стимулирован успехом масштабного проекта NASA, Европейского Космического Агентства и Итальянского Космического Агентства – миссия Кассини-Гюйгенс. В рамках этого проекта, 15 октября 1997 года, на орбиту вокруг Сатурна был отправлен космический исследовательский аппарат Кассини. Целью данной миссии было исследование планеты Сатурн, его колец и лун. На борту космического аппарата находилась автоматическая станция Гюйгенс, предназначенная для посадки на Титан, крупнейший из лун Сатурна. 1 июля 2004 года, комплекс вышел на орбиту вокруг Сатурна. 25 декабря 2004 года, станция Гюйгенс отделилась от основного комплекса и 14 января 2005 года вошла в атмосферу Титана. Изначально миссия была запланирована до 2008 года, однако была несколько раз продлена, и в итоге 15 сентября 2017 года космический аппарат Кассини завершил свою миссию, пролетев в непосредственной близости от колец и вошел в атмосферу Сатурна. Пример снимка сделанного аппаратом Кассини в 2009 году показан на Рис. 1.1. Весь масштаб данной миссии можно привести в виде статистических данных (Табл. 1.1).

Таблица 1.1 — Итоговая статистика миссии Кассини-Гюйгенс по окончании 20 летнего периода активности

Общая стоимость проекта	около 3,26 миллиард долларов США
Длительность миссии	19 лет, 335 дней
Объем полученных научных данных	635 Гб
Найдено новых лун	6 наименованных
Количество стран участниц	27 стран со всего мира
Опубликовано научных публикаций	3 948
Сделано снимков	453 048

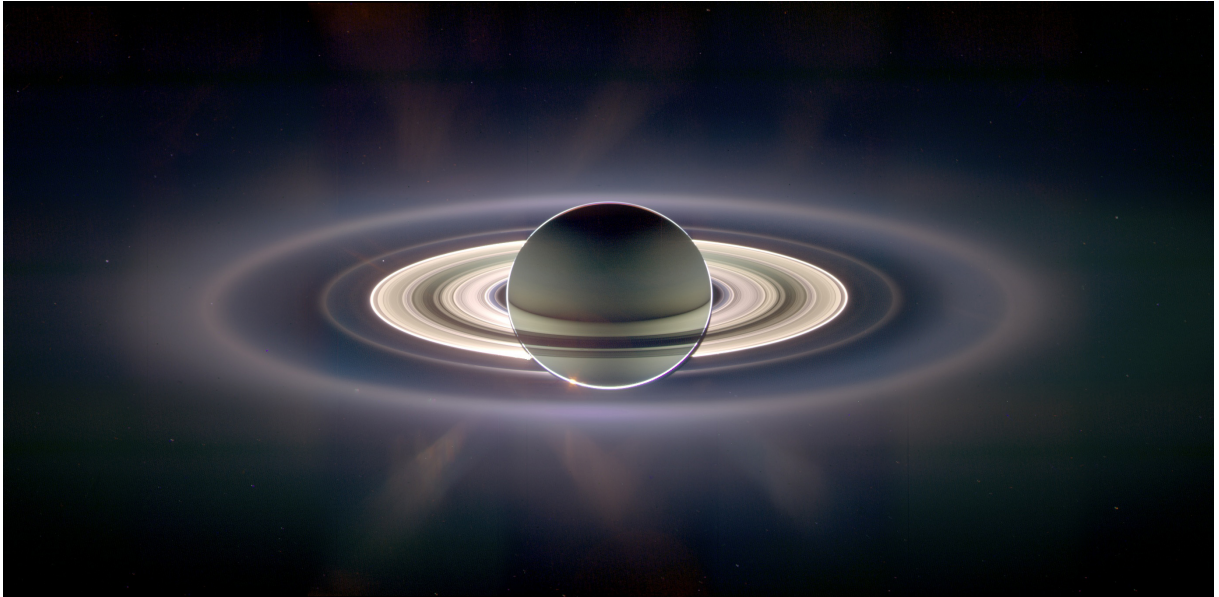


Рисунок 1.1 — Фотография Сатурна и его колец отправленная аппаратом Кассини в октябре 2009 года

Большая доля этих исследований посвящено изучению динамики и свойств колец Сатурна, которые являются ярким примером гранулярных газов в природе. Сами кольца состоят в основном из водяного льда и силикатных образований. Размеры частиц материала кольца составляют от микрометров до нескольких десятков метров. Объекты больших размеров, от нескольких сот метров до километров и более, классифицируются уже как отдельные луны Сатурна. Некоторые из подобных лун, как Пан и Дафнис (которые были обнаружены аппаратом Кассини), вращаются вокруг Сатурна на орбитах, находящихся внутри самих колец, имеют свое гравитационное поле которое серьезно воздействует на динамику мелких объектов кольца. Однако в нашей работе мы ограничимся системами, размеры составляющих частиц которых не превышают порядка нескольких метров. В этом случае можно исключить из рассмотрения гравитационные взаимодействия и сконцентрироваться только на контактных, механических взаимодействиях при описании динамики гранулярного газа.

Для простоты описания механики столкновения частиц газа, будем рассматривать их как сферические объекты с заданными параметрами как масса m , радиус r , модуль Юнга Y , коэффициент Пуассона η , поверхностная энергия (адгезивность) γ , коэффициент вязкой диссипации A . Обозначенные выше параметры будут использованы для построения компьютерной модели столкновений, однако для теоретического описания системы все механические свойства объединены в единый параметр, так называемый *коэффициент реституции* — ε . Для описания динамики сухих гранулярных газов, коэффициент реституции играет ключевую роль, и показывает количество диссипированной энергии при столкновениях. Математически описывается следующим образом:

$$g'_{12} = -\varepsilon g_{12} , \quad (1.1)$$

где g_{12} – относительная скорость частиц 1 и 2 до столкновения, g'_{12} – относительная скорость после столкновения. Коэффициент реституции в общем случае всегда лежит в пределах $0 \leq \varepsilon \leq 1$. При $\varepsilon = 0$ – мы имеем абсолютно неупругое столкновение, при $\varepsilon = 1$ – абсолютно упругое столкновение. В данной работе мы будем рассматривать только сухие гранулярные системы, т. е. такие системы для которых коэффициент адгезивности $\gamma = 0$. Таким образом, контактные взаимодействия частиц можно полностью описать двумя параметрами: σ – линейный размер частицы, который характеризует массу ($m \propto \sigma^3$), и т.д., и ε – коэффициент реституции, который описывает диссипативные свойства материала частицы. Мы будем предполагать, что материал частиц везде единообразен, и для всех столкновений ε будет одинаковый.

Основным свойством гранулярного газа является его диссипативность, и как результат его *гранулярная температура* имеет свойство всегда уменьшаться, т.е. предоставленный самому себе гранулярный газ, всегда будет *охлаждаться*. Данное явление носит название закона Хаффа:

$$T(t) = \frac{T_0}{(1 + t/\tau_0)^2}, \quad (1.2)$$

где

$$\tau_0^{-1} \propto n\sigma^2 (1 - \varepsilon^2) \sqrt{T_0}. \quad (1.3)$$

Таким образом, если в систему не подводить внешний источник энергии, то со временем гранулярный газ придет к состоянию с нулевой энергией. Здесь мы коротко упомянули понятие гранулярной температуры, по аналогии с температурой обычных систем, однако оно не является температурой материала частицы в обычном понимании. Более детально мы рассмотрим ее в основной части работы.

Следующим важным моментом является *полидисперсность* системы. До этого мы считали что все частицы в газе одинакового размера, однако в реальных системах планетарных колец, размеры частиц очень сильно варьируются. Данное свойство привносит в систему один существенный эффект: если рассматривать полидисперсную систему как смешение большого количества монодисперсных гранулярных газов с различными размерами, то парциальная температура каждого из этих газов становится отличной друг от друга. Чем больше разница между размерами частиц этих монодисперсных газов, тем больше их разница в гранулярной температуре. Конечно, без внешнего источника энергии, все эти температуры со временем сравняются и станут нулевыми. Однако планетарные кольца находятся в центральном гравитационном поле своей планеты, и на самом деле являются дисками с дифференциальным вращением, и гранулярная система подпитывается за счет гравитационной энергии своей планеты. Более подробно мы остановимся на данном явлении в основной части работы. Здесь же, укажем что за счет данной подкачки энергии, температуры всех отдельных частей системы остановятся на определенном и различном стационарном значении, что является одним из результатов нашей работы. А также, мы покажем что подобная разница в стационарных температурах системы, оказывает влияние

на радиальное распределение размеров частиц друг относительно друга. Данный эффект неодинакового распределения частиц по размерам относительно центрального поля хорошо виден на Рис. 1.2.

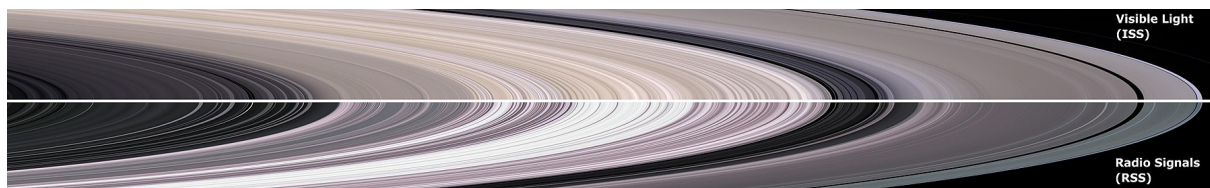


Рисунок 1.2 — Фотография колец Сатурна в радиальном срезе. Верхняя часть показана в оптическом диапазоне, нижняя в радиоволновом диапазоне, где цвета соотнесены с размерами частиц

2 Кинетическое описание полидисперсной системы

Для статистического описания неравновесной системы, мы будем исходить из кинетических уравнений Больцмана. Перед этим нам необходимо определить фазовое пространство в котором происходит эволюция динамики отдельно взятой частицы, а также более детально рассмотреть механику столкновений для составления интегралов столкновений.

2.1 Уравнения Больцмана

Рассмотрим весь газ как смесь из однородных газов, массы частиц в которых обозначим через m . Пусть N_m будет количеством частиц массы m в системе. Если общее количество частиц равно N , то

$$\eta_m = \frac{N_m}{N} , \quad (2.1)$$

относительное количество частиц массы m в полной системе. Учитывая что количество частиц в планетарных кольцах огромно, так же как и разновидность частиц по массе, то мы можем ввести функцию распределения особей в системе по массам как

$$\eta(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(m)}{N} , \quad (2.2)$$

либо

$$\int \eta(m) dm = 1 . \quad (2.3)$$

Здесь следует отметить, что как видно из 2.3, $\eta(m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, что согласовывается с реальными наблюдениями. Таким образом, масса частицы m будет показывать род подсистемы как непрерывная переменная.

Динамика отдельно взятой частицы массы m описывается его векторами координат \mathbf{r} и скоростей \mathbf{v} в фазовом пространстве. В этом фазовом пространстве введем функцию распределения $f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ которое имеет следующее важное свойство:

$$dN(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} , \quad (2.4)$$

где $dN(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ – функция числа частиц локализованных вокруг координаты \mathbf{r} и имеющих скорости в диапазоне от \mathbf{v} до $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$. Так как газообразные системы являются разреженными, то макропараметры системы могут быть определены как некие интегралы от одночастичной функции распределения.

Нулевой момент дает нам функцию количественной плотности частиц

$$n(t, m, \mathbf{r}) = \int f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} , \quad (2.5)$$

либо функцию плотности масс

$$\rho(t, m, \mathbf{r}) = mn(t, m, \mathbf{r}) = \int m f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} , \quad (2.6)$$

и так далее. Более подробно макропараметры системы будут описаны при гидродинамическом описании системы. Здесь же мы видим что параметры системы нестационарны и зависят от времени t , тогда как сама эволюция функции распределения по времени подчиняется уравнению Больцмана:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{w} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = I_c(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) , \quad (2.7)$$

где $I_c(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ – полный интеграл столкновений, \mathbf{w} – ускорение частицы под воздействием внешних сил. Полный интеграл столкновений пишется через бинарный интеграл столкновений как:

$$I_c(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \int \eta(m') I_c(t, m', m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) dm' . \quad (2.8)$$

Для нахождения точной формы интегралов столкновений необходимо более подробно изучить механику самих столкновений частиц.

2.2 Механика столкновений

Везде в дальнейшем мы будем предполагать, что все частицы в газе являются абсолютно сферическими и однородными, с одинаковыми коэффициентами реституции ε . При столкновении двух таких частиц, закон сохранения импульса запишется как:

$$m_i \mathbf{v}_i + m_j \mathbf{v}_j = m_i \mathbf{v}'_i + m_j \mathbf{v}'_j , \quad (2.9)$$

где знаками штриха ' обозначены скорости частиц после столкновения. Обмена массами и прилипания не происходит по условию задачи. Для гранулярных газов закон сохранения энергии (механической) нарушается, а изменение относительных скоростей задается как:

$$\mathbf{g}'_n = -\varepsilon \mathbf{g}_n , \quad (2.10)$$

где $\mathbf{g} = \mathbf{g}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$, а \mathbf{g}_n – является нормальной составляющей относительной скорости. Определим нормальное направление столкновения как проходящей через центры сталкивающихся частиц в момент столкновения, и введем вектор нормали:

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_{ij} = \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{\sigma_i - \sigma_j} , \quad (2.11)$$

где $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$ – координаты частиц в момент столкновения. Далее запишем изменение относительных скоростей следующим образом:

$$(\mathbf{g}' \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = -\varepsilon (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} , \quad (2.12)$$

и подставляя в (2.9) получаем скорости частиц после столкновения:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_i &= \mathbf{v}_i - \frac{\mu}{m_i} (1 + \varepsilon) (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} , \\ \mathbf{v}'_j &= \mathbf{v}_j + \frac{\mu}{m_j} (1 + \varepsilon) (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} , \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $\mu = \mu_{ij} = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}$ – эффективная масса столкновения. Здесь следует иметь ввиду что вектор \mathbf{n} свободен и не зависит от значений скоростей.

Рассмотрим теперь изменение импульса частицы после столкновения:

$$\delta \mathbf{p}_i = -\delta \mathbf{p}_j = \pm \mu(1 + \varepsilon)(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} . \quad (2.14)$$

Знак переноса импульса зависит от взаимной конфигурации векторов \mathbf{g} и \mathbf{n} , однако полное изменение импульса конечно же $\delta \mathbf{p}_i + \delta \mathbf{p}_j = 0$.

Теперь рассмотрим изменение кинетической энергии после столкновения:

$$\begin{aligned} \delta E_i &= \frac{m_i \mathbf{v}_i'^2}{2} - \frac{m_i \mathbf{v}_i^2}{2} = -\mu(1 + \varepsilon)(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}) + \frac{\mu^2}{2m_i}(1 + \varepsilon)^2(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})^2 , \\ \delta E_j &= \frac{m_j \mathbf{v}_j'^2}{2} - \frac{m_j \mathbf{v}_j^2}{2} = +\mu(1 + \varepsilon)(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{n}) + \frac{\mu^2}{2m_j}(1 + \varepsilon)^2(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})^2 , \end{aligned} \quad (2.15)$$

или перейдя в систему отсчета центра масс со скоростью $M\mathbf{v}_C = m_i \mathbf{v}_i + m_j \mathbf{v}_j$, где $M = M_{ij} = m_i + m_j$, получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_C + \frac{\mu}{m_i} \mathbf{g} , \\ \mathbf{v}_j &= \mathbf{v}_C - \frac{\mu}{m_j} \mathbf{g} , \end{aligned} \quad (2.16)$$

и соответственно

$$\begin{aligned} \delta E_i &= -\mu(1 + \varepsilon)(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{n}) - \frac{1 - \varepsilon^2}{2} \frac{\mu^2}{m_i} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})^2 , \\ \delta E_j &= +\mu(1 + \varepsilon)(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{n}) - \frac{1 - \varepsilon^2}{2} \frac{\mu^2}{m_j} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})^2 . \end{aligned} \quad (2.17)$$

Как видим, первые члены в правой части уравнений одинаковы и противоположны в знаках. Это означает что данная часть кинетической энергии передается от одной частицы к другой, и остается в самой системе, не диссипируя. Вторые же члены как мы видим всегда отрицательны и при разных массах $m_i \neq m_j$ также отличны друг от друга. Именно эта часть отвечает за диссипацию энергии в системе, и диссипация тем больше чем меньше коэффициент реституции ε , т.е. чем менее упругим будет столкновение, что вполне ожидаемо. Однако, как мы видим, диссипация также зависит и от массы самой частицы, и чем *меньше* масса частицы, тем *больше* потери энергии:

$$\left(\frac{\delta E_i}{\delta E_j} \right)_{diss} = \frac{m_j}{m_i} . \quad (2.18)$$

Именно этот эффект приводит к нарушению равномерного распределения энергии в полидисперсной системе гранулярных газов, что в свою очередь приводит к неодинаковости гранулярных температур подсистем. Полная потеря энергии при столкновении равна

$$\delta E_i + \delta E_j = -\frac{1 - \varepsilon^2}{2} \mu (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})^2 . \quad (2.19)$$

2.3 Интеграл столкновений

После описания механики столкновений, перейдем к самому виду интеграла столкновений в (2.7). В общем виде интеграл столкновений для гранулярных газов имеет вид:

$$I_c(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{v}_i) = \int dm_j g_2(\sigma_{ij}) \eta(m_j) \sigma_{ij}^{D-1} \int d\mathbf{v}_j \int d\mathbf{n} \Theta(-\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) |\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}| \times \\ \times \left(\frac{1}{\varepsilon^2} f(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{v}_i'') f(t, m_j, \mathbf{r}, \mathbf{v}_j'') - f(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{v}_i) f(t, m_j, \mathbf{r}, \mathbf{v}_j) \right), \quad (2.20)$$

где $\sigma_{ij} = \sigma_i + \sigma_j$ – расстояние между центрами частиц, $g_2(\sigma_{ij})$ – параметр Энскога, который учитывает разницу в координатах центров частиц во время столкновений, который мы примем равным единице $g_2(\sigma_{ij}) = 1$, $\Theta(x)$ – функция Хевисайда, которая включена для того чтобы учитывать только те соотношения скорости, при которых они сближаются, \mathbf{v}_i'' , \mathbf{v}_j'' – скорости обратных столкновений, D – размерность системы. По смыслу, интеграл столкновений показывает изменения в функции распределения за счет столкновений частиц. Интеграл столкновений имеет одно важное свойство, а именно, если взять некую динамическую функцию системы $\psi_i(\mathbf{v}_i)$, и ее изменение после прямого столкновения записать как $\Delta\psi_i(\mathbf{v}_i) = \psi_i(\mathbf{v}_i') - \psi_i(\mathbf{v}_i)$, то получим:

$$\frac{d}{dt} \langle \psi_i(\mathbf{v}_i) \rangle_c = \int \psi_i(\mathbf{v}_i) \frac{\partial f_i}{\partial t} d\mathbf{v}_i = \int \psi_i(\mathbf{v}_i) I_c(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{v}_i) d\mathbf{v}_i = \\ = \int dm_j \eta(m_j) \sigma_{ij}^{D-1} \int d\mathbf{v}_i d\mathbf{v}_j \int d\mathbf{n} \Theta(-\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) |\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}| \times \\ \times f(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{v}_i) f(t, m_j, \mathbf{r}, \mathbf{v}_j) \Delta\psi_i(\mathbf{v}_i). \quad (2.21)$$

Это свойство интеграла столкновения мы будем использовать в дальнейшем при описании эволюции энергии всей системы в целом.

2.4 Эволюция энергии системы

Для того чтобы оценить изменение энергии всей системы в целом за счет столкновений, возьмем функцию кинетической энергии частицы как $\psi_i(\mathbf{v}_i) = \frac{m_i v_i^2}{2}$, а вместо $\Delta\psi_i(\mathbf{v}_i) = \delta E_i$ из уравнения (2.17) и подставим в (2.21). В итоге получаем:

$$\int \frac{m_i v_i^2}{2} I_c(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{v}_i) d\mathbf{v}_i = \int dm_j \eta(m_j) \sigma_{ij}^{D-1} \int d\mathbf{v}_i d\mathbf{g} \int d\mathbf{n} \Theta(-\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) |\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}| \times \\ \times f(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{v}_i) f(t, m_j, \mathbf{r}, \mathbf{v}_j) \delta E_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{g}), \quad (2.22)$$

здесь мы сделали замену переменных $d\mathbf{v}_i d\mathbf{v}_j = d\mathbf{v}_i d\mathbf{g}$. Для дальнейшего продвижения, нам необходимо знать вид самой функции распределения.

3 Гидродинамическое описание системы

Перейдем теперь к более грубому, гидродинамическому описанию системы. Для начала нужно определить возможность такого перехода в рассматриваемой нами системе. Через L обозначим линейный размер всей системы в целом. Для кинетического описания нам было достаточно что линейные размеры частиц σ были намного меньше размера всей системы, т.е. выполнение условия $\sigma \ll L$. Соответственно все кинетические уравнения пишутся на уровне детализации σ . Однако гидродинамическое описание происходит на другом уровне, который мы обозначим ℓ , и который удовлетворяет условию $\sigma \ll \ell \ll L$. Если мы можем вести изучение системы в таком масштабе, то можно говорить что мы рассматриваем систему в гидродинамическом приближении. Линейные размеры колец Сатурна, т.е. ширина колец, растягивается примерно на $L \sim 66000$ км, в то время как размеры самих частиц варьируются в пределах $\sigma \sim 10^{-2} \div 10^2$ см. Отсюда хорошо видно что можно подобрать такое значение $\ell \sim 1 \div 2$ км, в пределах которого гидродинамическое описание системы будет вполне оправдано. Таким образом, в дальнейшем мы можем говорить что в пределах ℓ вокруг координаты \mathbf{r} находится достаточно большое количество частиц, по которым можно определить макропараметры системы в зависимости от самой координаты \mathbf{r} . Перейдем к непосредственным определениям самих макропараметров, необходимых для полного гидродинамического описания системы, и написанию уравнений переноса этих параметров.

3.1 Уравнения переноса

Зная функцию распределения, можно вводить пространственно распределенные параметры, описывающие систему в целом, а не через отдельно взятые частицы. Такие параметры называются макропараметрами системы. Мы будем вводить их как моменты вектора скорости частиц \mathbf{v} . Так, нулевой момент, как мы уже ранее определили, дает нам функцию числовой плотности:

$$n(t, m, \mathbf{r}) = \int f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} , \quad (3.1)$$

либо функцию плотности масс

$$\rho(t, m, \mathbf{r}) = mn(t, m, \mathbf{r}) = \int m f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} . \quad (3.2)$$

Данная функция читается так: $\rho(t, m, \mathbf{r})$ – это масса в единичном объеме участка кольца в координате \mathbf{r} во время t , при этом масса вещества данного участка кольца равна m . Остальные параметры имеют схожий физический смысл.

Первый момент по скорости дает нам функцию плотности импульса

$$\rho \mathbf{u}(t, m, \mathbf{r}) = \int m \mathbf{v} f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} , \quad (3.3)$$

где \mathbf{u} – дает нам среднюю скорость участка кольца. Введем понятие локальной скорости частиц

$$\mathbf{c} = \mathbf{v} - \mathbf{u}(t, m, \mathbf{r}) , \quad (3.4)$$

которая показывает скорость (хаотического движения) частиц в системе отсчета движущейся вместе с участком кольца со скоростью \mathbf{u} . Таким образом введем понятие *гранулярной температуры* системы, по аналогии с термодинамической температурой как второй момент по скорости

$$\frac{D}{2} n T(t, m, \mathbf{r}) = \int \frac{m \mathbf{c}^2}{2} f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} , \quad (3.5)$$

где $D = 3$ – для трехмерной системы, однако мы будем рассматривать двумерную систему $D = 2$. Нам также понадобятся и другие моменты по скорости, которые уже являются тензорными величинами. Во первых, это тензор *напряжения*:

$$\Pi_{\alpha\beta}(t, m, \mathbf{r}) = m \int v_\alpha v_\beta f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} , \quad (3.6)$$

который можно разделить на две части используя (3.4)

$$\Pi_{\alpha\beta}(t, m, \mathbf{r}) = \rho u_\alpha u_\beta + P_{\alpha\beta} . \quad (3.7)$$

Первая часть является динамической частью тензора напряжения, а вторая часть называется тензором *внутренних напряжений*:

$$P_{\alpha\beta}(t, m, \mathbf{r}) = m \int c_\alpha c_\beta f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} . \quad (3.8)$$

Разделяя далее данный тензор на часть с нулевой сверткой и на диагональную часть, получаем:

$$P_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} p_{id} + \pi_{\alpha\beta} , \quad \pi_{\alpha\alpha} = 0 , \quad (3.9)$$

где

$$p_{id} = \frac{1}{D} \int m \mathbf{c}^2 f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} = n T , \quad (3.10)$$

давление идеального газа. Часть тензора с нулевой сверткой $\pi_{\alpha\beta}$ также называется тензором *вязких напряжений*.

Наконец, введем следующий тензор

$$Q_{\alpha\beta\gamma} = m \int c_\alpha c_\beta c_\gamma f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} , \quad (3.11)$$

или точнее его свертку по двум индексам

$$q_\alpha = \mathbf{q} = \frac{1}{2} Q_{\alpha\beta\beta} = \int \frac{m \mathbf{c}^2}{2} c_\alpha f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} , \quad (3.12)$$

который называется вектором *потока тепла*.

Теперь приступим к написанию уравнений переноса для вышеперечисленных макропараметров. Для начала напомним уравнение переноса для некоторой обобщенной динамической функции $A(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v})$. Умножим данную функцию на уравнение Больцмана (2.7) и проинтегрируем по всему пространству скоростей:

$$\int A \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} + \int A \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{v} + \int A \mathbf{w} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \int A I_c(f, f') d\mathbf{v} = \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle_c, \quad (3.13)$$

где правая часть показывает среднее изменение динамической функции по времени за счет столкновений. Далее можно написать

$$\int \left(\frac{\partial}{\partial t} (Af) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (A\mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (A\mathbf{w}) - f \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial A}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{w} \frac{\partial A}{\partial \mathbf{v}} \right] \right) d\mathbf{v} = \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle_c. \quad (3.14)$$

Третий член в данном уравнении можно переписать используя теорему Гаусса

$$\int \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (A\mathbf{w}) d\mathbf{v} = \oint A\mathbf{w} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0. \quad (3.15)$$

Здесь, интегрирование по всему пространству скоростей заменено на интегрирование по контуру вокруг этого пространства, где $v \rightarrow \pm\infty$. Однако функция распределения f обращается в нуль в этом пределе по своей природе. Таким образом, мы видим что этот интеграл исчезает. В конечном итоге у нас остается уравнение переноса в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int Af d\mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int A\mathbf{v} d\mathbf{v} - \int f \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial A}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{w} \frac{\partial A}{\partial \mathbf{v}} \right] d\mathbf{v} = \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle_c. \quad (3.16)$$

Теперь, подставляя вместо A необходимые нам макропараметры системы, мы можем вывести соответствующие уравнения переноса для них.

3.1.1 Перенос массы

Заменяя в уравнении (3.16) динамическую функцию на массу, $A(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = m$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int mf d\mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int m\mathbf{v} f d\mathbf{v} = 0, \quad (3.17)$$

теперь используя (3.2) и (3.3), получаем уравнение переноса плотности массы, или так называемое *уравнение непрерывности*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}} (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (3.18)$$

3.1.2 Перенос импульса

Теперь вместо динамической функции подставляем импульс частицы $A(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = m\mathbf{v} = mv_\alpha$, и получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int m\mathbf{v} f d\mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \int mf v_\alpha v_\beta d\mathbf{v} - \mathbf{w} \int mf d\mathbf{v} = \left\langle \frac{\partial (mv_\alpha)}{\partial t} \right\rangle_c. \quad (3.19)$$

Правая часть этого уравнения показывает изменение среднего импульса системы в целом, однако по закону сохранения импульса, оно равняется нулю. Подставляя выражения соответствующих макропараметров, получаем:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial r_\alpha} = \rho \mathbf{w} , \quad (3.20)$$

где правая часть $\rho \mathbf{w} = \mathbf{F}_{ext}$ – плотность внешних сил действующих на участок системы. В нашем случае внешней силой является гравитационное воздействие планеты, которое записывается как $\mathbf{w} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \mathbf{r}}$, где r – расстояние до центра планеты. Теперь разделяя тензор напряжений получаем уравнение переноса импульса

$$\frac{\partial(\rho u_\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_\beta}(\rho u_\alpha u_\beta) = -\frac{\partial(nT)}{\partial r_\alpha} - \frac{\partial \pi_{\alpha\beta}}{\partial r_\beta} + \rho w_\alpha . \quad (3.21)$$

3.1.3 Перенос энергии

Теперь подставим функцию кинетической энергии $A(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{m\mathbf{v}^2}{2}$ и запишем уравнение переноса

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int m (\mathbf{c}^2 + 2c_\alpha u_\alpha + \mathbf{u}^2) f d\mathbf{v} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int m (\mathbf{c}^2 + 2c_\alpha u_\alpha + \mathbf{u}^2) v_\beta f d\mathbf{v} - \\ & - w_\beta \int m f v_\alpha \frac{\partial v_\alpha}{\partial v_\beta} d\mathbf{v} = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m\mathbf{v}^2}{2} \right) \right\rangle_c = -T\xi(t, m, \mathbf{r}, T) . \end{aligned} \quad (3.22)$$

По причине диссипативной природы гранулярных газов, закон сохранения энергии не выполняется, и соответственно правая часть уравнения показывает среднее изменение энергии за счет столкновений. Здесь мы ввели положительную функцию $\xi(t, m, \mathbf{r}, T)$, которая отвечает за скорость охлаждения газа. Точный вид этой функции мы выведем позднее. Продвигаясь далее записываем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{m\mathbf{c}^2}{2} f d\mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{m\mathbf{u}^2}{2} f d\mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial r_\beta} \int \frac{m\mathbf{c}^2}{2} v_\beta f d\mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial r_\beta} \int \frac{m\mathbf{u}^2}{2} v_\beta f d\mathbf{v} + \\ & + \frac{\partial}{\partial r_\beta} \int m c_\alpha u_\alpha v_\beta f d\mathbf{v} = \delta_{\alpha\beta} w_\beta \rho u_\alpha - T\xi = u_\alpha \cdot \rho w_\alpha - T\xi , \end{aligned} \quad (3.23)$$

где мы использовали условие $\int c_i f d\mathbf{v} = 0$. Выражая через макропараметры, получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{D}{2} nT + \frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial r_\beta} \int \frac{m\mathbf{c}^2}{2} (c_\beta + u_\beta) d\mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial r_\beta} \int m f u_\alpha c_\alpha (c_\beta + u_\beta) d\mathbf{v} + \\ & + \frac{\partial}{\partial r_\beta} \left(\frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} u_\beta \right) = \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} - T\xi , \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{D}{2} nT + \frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} \right) + \frac{\partial q_\alpha}{\partial r_\alpha} + \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \left(\frac{D}{2} u_\alpha nT \right) + \frac{\partial}{\partial r_\alpha} u_\beta \int m f c_\alpha c_\beta d\mathbf{v} + \\ & + \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \left(\frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} u_\alpha \right) = \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} - T\xi , \end{aligned} \quad (3.25)$$

и используя выражение для тензора внутренних напряжений, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{D}{2} nT + \frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \left(\frac{D}{2} u_\alpha nT + \frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} u_\alpha + \delta_{\alpha\beta} u_\beta nT + \pi_{\alpha\beta} u_\beta + q_\alpha \right) = \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} - T\xi, \quad (3.26)$$

и в итоге получаем уравнение переноса энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{D}{2} nT + \frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial r_\alpha} u_\alpha \left(\frac{D+2}{2} nT + \frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial r_\alpha} (\pi_{\alpha\beta} u_\beta) + \frac{\partial q_\alpha}{\partial r_\alpha} = \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} - T\xi. \quad (3.27)$$

3.1.4 Вектор потока тепла и тензор вязких напряжений

Во время вывода уравнений переноса, мы получили два неизвестных нам параметра, а именно q_α – вектор потока тепла, и $\pi_{\alpha\beta}$ – тензор вязких напряжений. Выше, во время гидродинамического перехода, мы ввели некий размер в системе $\ell \ll L$. Если теперь рассмотреть малый параметр $x = \ell/L \ll 1$ вокруг которого разложим все макропараметры в ряд, то в нулевом приближении оба параметра q_α и $\pi_{\alpha\beta}$ исчезают, так как в этом приближении мы имеем дело с идеальной жидкостью. В линейном приближении по этому параметру, получаем $q_\alpha, \pi_{\alpha\beta} \sim x$, и они получают следующий вид

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha\beta} &= -\nu \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial r_\alpha} - \frac{2}{D} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial r_\alpha} \right), \\ q_\alpha &= -\lambda \text{grad } T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r_\alpha}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

где ν – коэффициент вязкости и λ – коэффициент теплопроводности.

3.2 Скорость охлаждения системы

Выше, при выводе уравнения переноса энергии, мы получили некую функцию $\xi(t, m, \mathbf{r}, T)$ которая показывает охлаждение гранулярного газа за счет диссипативных столкновений. В общем виде эта функция определяется через интеграл столкновений, как среднее изменение кинетической энергии:

$$-T_i \xi(t, m_i, \mathbf{r}, T_i) = \int \frac{m_i \mathbf{v}^2}{2} I_c(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (3.29)$$

Здесь мы учли тот факт, что температуры отдельных подсистем могут быть отличны друг от друга, и показали эту зависимость через индекс i . Используя свойство интеграла столкновений (2.21), выпишем заново уравнение эволюции энергии системы за счет столкновений (2.22)б в следующем виде:

$$\begin{aligned} -T_i \xi(t, m_i, \mathbf{r}, T_i) &= \int dm_j \eta(m_j) \sigma_{ij}^{D-1} \int d\mathbf{v}_j d\mathbf{g} \int d\mathbf{n} \Theta(-\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) |\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}| \times \\ &\times f(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{v}_i) f(t, m_j, \mathbf{r}, \mathbf{v}_i - \mathbf{g}) \delta E_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{g}). \end{aligned} \quad (3.30)$$

До сих пор мы ничего не говорили о виде самой функции распределения $f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v})$, и все выводы получали для общего случая. Однако для дальнейшего продвижения нам необходимо указать вид этой функции. Функцию распределения можно

представить как разложение в ряд по малому параметру $x = \ell/L \ll 1$:

$$f = f^{(0)} + c_1 x f^{(1)} + c_2 x^2 f^{(2)} + \dots, \quad (3.31)$$

где c_i – коэффициенты полина Сонина, $f^{(0)}$ – нулевое приближение функции распределения, не что иное как функция распределения Максвелла. Для простоты мы ограничимся этим приближением, так как его достаточно для описания исследуемых нами эффектов. Таким образом, в дальнейшем принимаем:

$$f(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{v}_i) = n_i g(m_i, \mathbf{r}) \left(\frac{m_i}{2\pi T_i} \right)^{D/2} \cdot \exp \left\{ -\frac{m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{u}_i)^2}{2T_i} \right\}, \quad (3.32)$$

где $g(m_i, \mathbf{r})$ – распределение Больцмана в центральном гравитационном поле. Пока мы оставим его в данном виде, и вернемся к нему в дальнейшем. Средняя скорость движения \mathbf{u} в нашем случае является скоростью на кеплеровской орбите, и зависит только от расстояния до центра планеты \mathbf{r} , и не зависит от массы частицы. Таким образом можно сделать замену переменных:

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{u}(\mathbf{r}), \quad d\mathbf{c}_i = d\mathbf{v}_i, \quad (3.33)$$

и переписать функцию распределения в следующем виде:

$$f(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{c}_i) = n_i g(m_i, \mathbf{r}) \left(\frac{\kappa_i}{\pi} \right)^{D/2} \cdot \exp(-\kappa_i c_i^2), \quad (3.34)$$

где $\kappa_i = \frac{m_i}{2T_i}$, и далее пишем:

$$f(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{c}_i) f(t, m_j, \mathbf{r}, \mathbf{c}_j) = n_i n_j g(m_i, \mathbf{r}) g(m_j, \mathbf{r}) \left(\frac{\kappa_i \kappa_j}{\pi^2} \right)^{D/2} \cdot \exp(-\kappa_i c_i^2 - \kappa_j c_j^2). \quad (3.35)$$

Используя $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j = \mathbf{c}_i - \mathbf{c}_j$ и соответственно $\mathbf{c}_j = \mathbf{g} - \mathbf{c}_i$, перепишем выражение под экспонентой в следующем виде:

$$\begin{aligned} \kappa_i c_i^2 + \kappa_j c_j^2 &= \kappa_i c_i^2 + \kappa_j (\mathbf{g} - \mathbf{c}_i)^2 = \kappa_i c_i^2 + \kappa_j (g^2 + c_i^2 - 2\mathbf{g} \cdot \mathbf{c}_i) = \\ &= (\kappa_i + \kappa_j) c_i^2 + \kappa_j g^2 - 2\kappa_j g c_i \cos \gamma, \end{aligned} \quad (3.36)$$

где γ – угол между векторами \mathbf{g} и \mathbf{c}_i . Теперь, среднее изменение некоторой динамической функции по времени за счет столкновений можно представить с следующим виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \psi_i(\mathbf{c}_i) \rangle &= \int dm_j n_i n_j g(m_i, \mathbf{r}) g(m_j, \mathbf{r}) \eta(m_j) \sigma_{ij}^{D-1} \left(\frac{\kappa_i \kappa_j}{\pi^2} \right)^{D/2} \int d\mathbf{c}_i d\mathbf{g} \int d\mathbf{n} \Theta(-\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) |\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}| \times \\ &\times \exp(-(\kappa_i + \kappa_j) c_i^2 - \kappa_j g^2 + 2\kappa_j g c_i \cos \gamma) \Delta \psi_i(\mathbf{g}, \mathbf{c}_i). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Для дальнейшего анализа, используем то обстоятельство, что кольца Сатурна являются чрезвычайно тонким и плоским образованием. При радиальной ширине около $L \sim 66000$ км, и азимутальной протяженности более полумиллиона километров, имеет

толщину порядка нескольких метров. Данный факт делает кольцо Сатурна самым тонким природным образованием в солнечной системе. Нас же интересует радиальное распределение макропараметров, а не их распределение по толщине. Поэтому, во всех дальнейших анализах примем рассматриваемую нами систему двумерной $D = 2$. Полученные результаты будут отличаться от трехмерной системы $D = 3$ лишь некоторыми числовыми коэффициентами. Таким образом, интегрирование по сечению $d\mathbf{n}\Theta(-\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})$ приводит к интегралу по полуокружности, и дает нам π . Обозначая через θ угол между векторами \mathbf{g} и \mathbf{n} , можно написать $|\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}| = g \cos \theta$, где θ меняется между $-\pi/2$ и $+\pi/2$. Перейдя в полярные координаты, получаем $d\mathbf{c}_i d\mathbf{g} = g c_i dg dc_i d\theta d\gamma$, где $\gamma \in [0 \div 2\pi]$. Подставляя все это в интеграл столкновений, пишем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \psi_i(\mathbf{c}_i) \rangle &= \frac{n_i \kappa_i}{\pi} \int dm_j n_j g_i(\mathbf{r}) g_j(\mathbf{r}) \kappa_j \eta(m_j) \sigma_{ij} \int dg dc_i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\gamma g^2 c_i \cos \theta \times \\ &\times \exp \left(-(\kappa_i + \kappa_j) c_i^2 - \kappa_j g^2 + 2\kappa_j g c_i \cos \gamma \right) \Delta \psi_i(\mathbf{g}, \mathbf{c}_i) . \end{aligned} \quad (3.38)$$

Теперь вместо $\psi_i(\mathbf{c}_i)$ подставим (2.15) и получаем:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dE_i}{dt} \right\rangle_c &= \frac{n_i \kappa_i}{\pi} \int dm_j n_j g_i(\mathbf{r}) g_j(\mathbf{r}) \kappa_j \eta(m_j) \sigma_{ij} \int dg dc_i g^2 c_i \exp \left(-(\kappa_i + \kappa_j) c_i^2 - \kappa_j g^2 \right) \times \\ &\times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos \theta \int_0^{2\pi} d\gamma \exp(2\kappa_j g c_i \cos \gamma) \times \\ &\times \left(-\mu(1 + \varepsilon) g c_i \cos \theta \cos(\gamma - \theta) + \frac{\mu^2}{2m_i} (1 + \varepsilon)^2 g^2 \cos^2 \theta - 2u(\mathbf{r}) \mu(1 + \varepsilon) g \cos \theta \right) , \end{aligned} \quad (3.39)$$

здесь мы использовали $\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{n} = c_i \cos(\gamma - \theta)$. Рассмотрим отдельно угловые интегралы:

$$\begin{aligned} S_{\theta\gamma,1} &= -\mu(1 + \varepsilon) g c_i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos^2 \theta \int_0^{2\pi} d\gamma \cos(\theta - \gamma) \exp(R \cos \gamma) , \\ S_{\theta\gamma,2} &= \frac{\mu^2 g^2}{2m_i} (1 + \varepsilon)^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos^3 \theta \int_0^{2\pi} d\gamma \exp(R \cos \gamma) , \\ S_{\theta\gamma,3} &= -2u(\mathbf{r}) \mu(1 + \varepsilon) g \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos^2 \theta \int_0^{2\pi} d\gamma \exp(R \cos \gamma) , \end{aligned} \quad (3.40)$$

где $R = 2\kappa_j g c_i \geq 0$. Разложим первый интеграл по γ :

$$\begin{aligned} S_{\gamma,1} &= \cos \theta \int_0^{2\pi} \cos \gamma \exp(R \cos \gamma) d\gamma + \sin \theta \int_0^{2\pi} \sin \gamma \exp(R \cos \gamma) d\gamma = \\ &= \cos \theta \int_0^{2\pi} \cos \gamma \exp(R \cos \gamma) d\gamma = 2 \cos \theta \int_0^{\pi} \cos \gamma \exp(R \cos \gamma) d\gamma . \end{aligned} \quad (3.41)$$

Здесь функция под первым интегралом четная, поэтому ее можно разделить пополам, а функция под вторым интегралом нечетная, и поэтому исчезает. Таким образом у нас остаются два интеграла по γ , которые не интегрируются в квадратурах, и представляются

в виде модифицированных функций Бесселя:

$$\begin{aligned} S_{\gamma,1} &= \int_0^\pi \cos \gamma \exp(R \cos \gamma) d\gamma = \pi I_1(R) , \\ S_{\gamma,2} &= \int_0^\pi \exp(R \cos \gamma) d\gamma = \pi I_0(R) , \end{aligned} \quad (3.42)$$

где

$$I_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos t} \cos(\nu t) dt - \frac{\sin(\pi \nu)}{\pi} \int_0^\infty e^{-x \cosh t - \nu t} dt , \quad (3.43)$$

называется *модифицированной функцией Бесселя*. Для значений параметра $\nu = 0, 1$ мы получаем наши интегралы по γ :

$$\begin{aligned} S_{\theta\gamma,1} &= -\frac{8}{3}\pi\mu(1+\varepsilon)gc_i I_1(R) , \\ S_{\theta\gamma,2} &= \frac{4\pi\mu^2 g^2}{3m_i}(1+\varepsilon)^2 I_0(R) , \\ S_{\theta\gamma,3} &= -\pi^2 u(\mathbf{r})\mu(1+\varepsilon)gI_0(R) , \end{aligned} \quad (3.44)$$

где интегралы по θ элементарны:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta &= \frac{\pi}{2} , \\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta &= \frac{4}{3} . \end{aligned} \quad (3.45)$$

Теперь исходный интеграл записывается в виде:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dE_i}{dt} \right\rangle_c &= \frac{4n_k \kappa_i}{3}(1+\varepsilon) \int dm_j \mu n_j g_i(\mathbf{r}) g_j(\mathbf{r}) \kappa_j \eta(m_j) \sigma_{ij} \int dg dc_i g^3 c_i \times \\ &\times \exp(-(\kappa_i + \kappa_j) c_i^2 - \kappa_j g^2) \times \\ &\times \left((1+\varepsilon) \frac{\mu}{m_i} g I_0(R) - \frac{3}{4} \pi u(\mathbf{r}) I_0(R) - 2c_i I_1(R) \right) , \end{aligned} \quad (3.46)$$

или в более развернутом виде:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dE_i}{dt} \right\rangle_c &= \frac{4n_k \kappa_i}{3}(1+\varepsilon) \int dm_j \mu n_j g_i(\mathbf{r}) g_j(\mathbf{r}) \kappa_j \eta(m_j) \sigma_{ij} \int_0^\infty dg g^3 e^{-\kappa_j g^2} \times \\ &\times \int_0^\infty dc_i c_i \exp(-(\kappa_i + \kappa_j) c_i^2) \times \\ &\times \left\{ \left((1+\varepsilon) \frac{\mu}{m_i} g - \frac{3}{4} \pi u(\mathbf{r}) \right) I_0(2\kappa_j g c_i) - 2c_i I_1(2\kappa_j g c_i) \right\} . \end{aligned} \quad (3.47)$$

Интегралы по функциям Бесселя могут быть рассчитаны с помощью следующих формул:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-px^2} I_\nu(cx) dx &= A_\nu^\alpha , \quad [\Re(p), \Re(\alpha + \nu) > 0, |\arg c| < \pi] , \\ A_\nu^\alpha &= 2^{-\nu-1} c^\nu p^{-(\alpha+\nu)/2} \cdot \frac{\Gamma((\alpha + \nu)/2)}{\Gamma(\nu + 1)} \cdot {}_1F_1\left(\frac{\alpha + \nu}{2}; \nu + 1; \frac{c^2}{4p}\right) , \end{aligned} \quad (3.48)$$

где

$${}_1F_1(a; b; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{(a)} z^n}{b^{(n)} n!} , \quad (3.49)$$

называется *вырожденной гипергеометрической функцией*. Для наших интегралов, нам нужны два специальных случая:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x e^{-px^2} I_0(cx) dx &= A_0^2, \\ \int_0^\infty x^2 e^{-px^2} I_1(cx) dx &= A_1^3, \end{aligned} \quad (3.50)$$

где

$$\begin{aligned} p &= \kappa_i + \kappa_j, \\ c &= 2\kappa_j g. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Если выполняется условие $\alpha = \nu + 2$, то интегральная формула может быть сильно упрощена:

$$A_\nu^{\nu+2} = \frac{c^\nu}{(2p)^{\nu+1}} \exp\left(\frac{c^2}{4p}\right). \quad (3.52)$$

В итоге получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x e^{-px^2} I_0(cx) dx &= \frac{1}{2p} \exp\left(\frac{c^2}{4p}\right), \\ \int_0^\infty x^2 e^{-px^2} I_1(cx) dx &= \frac{c}{(2p)^2} \exp\left(\frac{c^2}{4p}\right), \end{aligned} \quad (3.53)$$

4 Технологический раздел

В данном разделе описано изготовление и требование всячины. Кстати, в LaTeX нужно эскейпить подчёркивание (писать «some_function» для **some_function**).

Для вставки кода есть пакет **listings**. К сожалению, пакет **listings** всё ещё работает криво при появлении в листинге русских букв и кодировке исходников utf-8. В данном примере он (увы) на лету конвертируется в koi-8 в ходе сборки pdf.

Есть альтернатива **listingsutf8**, однако она работает лишь с **\lstinputlisting**, но не с окружением **\lstlisting**

Вот так можно вставлять псевдокод (питоноподобный язык определен в **listings.inc.tex**):

Листинг 4.1 — Алгоритм оценки дипломных работ

```
1 def EvaluateDiplomas():
2     for each student in Masters:
3         student.Mark ← 5
4     for each student in Engineers:
5         if Good(student):
6             student.Mark ← 5
7         else:
8             student.Mark ← 4
```

Еще в шаблоне определен псевдоязык для BNF:

Листинг 4.2 — Грамматика

```
1 ifstmt → "if" "(" expression ")" stmt |
2         "if" "(" expression ")" stmt1 "else" stmt2
3 number → digit digit *
```

В листинге 4.3 работают русские буквы. Сильная магия. Однако, работает только во включаемых файлах, прямо в **TeX** нельзя.

Листинг 4.3 — Пример (**test.c**)

```
1 #include <stdio.h>
2 int main()
3 {
4     return 0;
5 }
```

Можно также использовать окружение **verbatim**, если **listings** чем-то не устраивает. Только следует помнить, что табы в нём «съедаются». Существует так же команда **\verbatiminput** для вставки файла.

```
a_b = a + b; // русский комментарий
if (a_b > 0)
    a_b = 0;
```


5 Экспериментальный раздел

В данном разделе проводятся вычислительные эксперименты. А на рис. 5.1 показана схема мыслительного процесса автора...

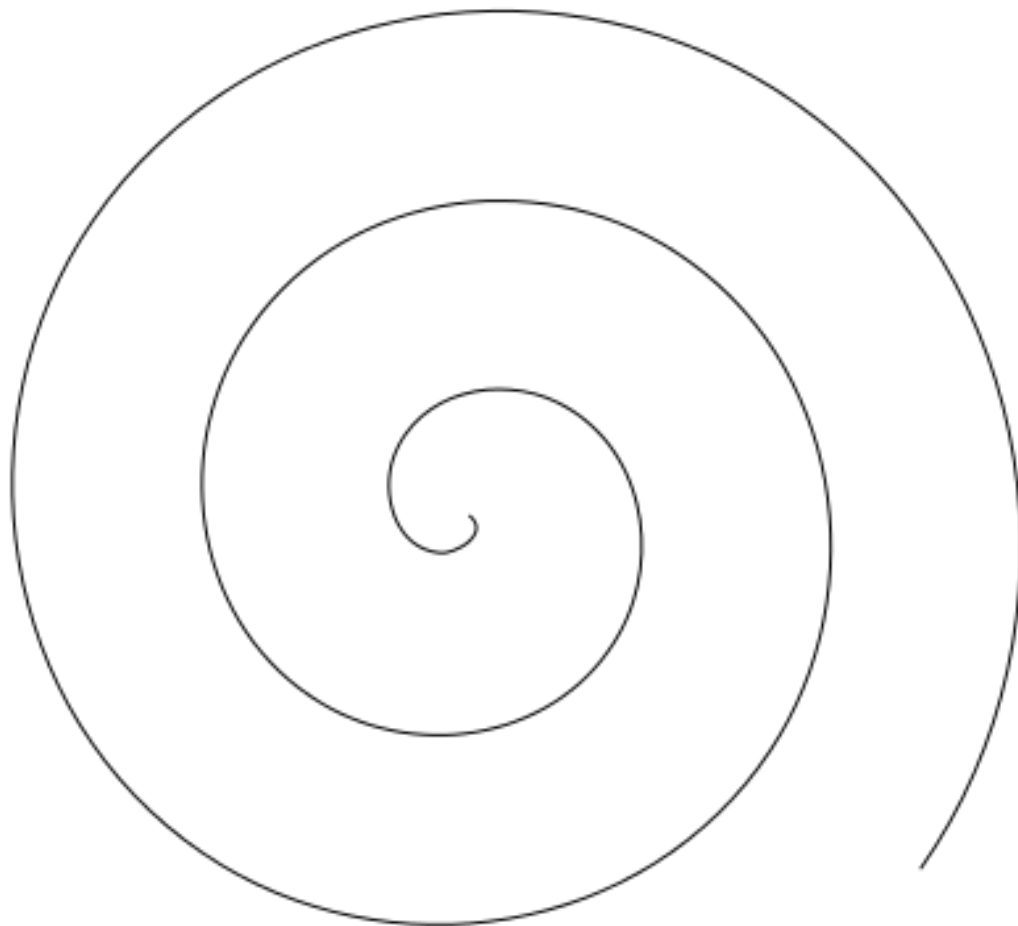


Рисунок 5.1 — Как страшно жить

Заключение

В результате проделанной работы стало ясно, что ничего не ясно...

Список использованных источников

1. *Brilliantov, N. V.* Kinetic Theory of Granular Gases / N. V. Brilliantov, T. Pöschel.
— 1st edition. — Oxford University Press, 2004.

Приложение А Картинки

Рисунок А.1 — Картинка в приложении. Страшная и ужасная.

Приложение Б Еще картинки

Рисунок Б.1 — Еще одна картинка, ничем не лучше предыдущей. Но надо же как-то заполнить место.