

Компьютерное моделирование кинетического и гидродинамического приближения сложных статистических систем

Отчет о выполненных работах

Ернур Байболатов

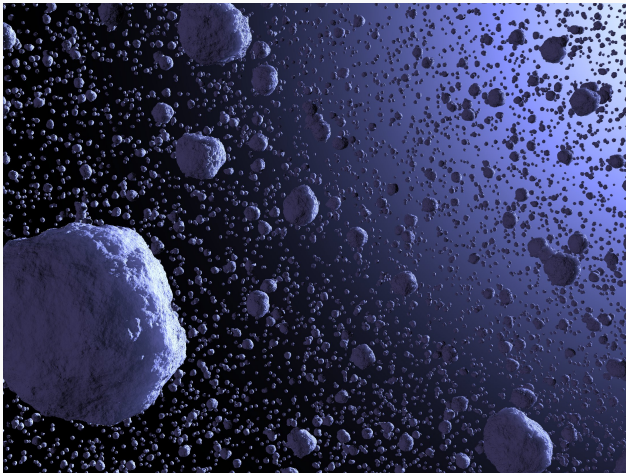
STEM парк, КазНПУ им. Абая

1. Введение
2. Кинетическое описание
3. Гидродинамическое описание
4. Conclusion

Введение

Гранулярные газы

Гранулярными называются вещества состоящие из отдельных макроскопических тел



Основное свойство — диссипативность. При каждом столкновении частиц, энергия системы понижается

Коэффициент реституции

$$\mathbf{g}'_{12} = -\varepsilon \mathbf{g}_{12} \quad (1)$$

где $0 \leq \varepsilon \leq 1$.

По аналогии с термодинамической температурой

$$\frac{3}{2}T = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{m\mathbf{v}_i^2}{2} \quad (2)$$

По причине постоянной диссипации, предоставленный самому себе гранулярный газ постепенно охлаждается

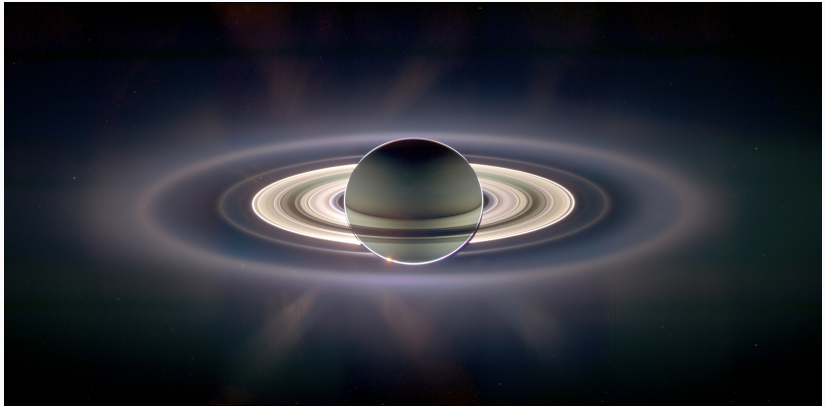
$$T(t) = \frac{T_0}{(1 + t/\tau_0)^2}, \quad (3)$$

где

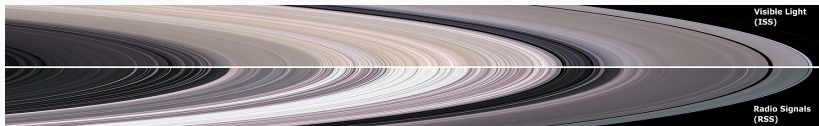
$$\tau_0^{-1} \propto n\sigma^2 (1 - \varepsilon^2) \sqrt{T_0} \quad (4)$$

Кольца Сатурна

Природным примером массивных гранулярных газов являются планетарные кольца



Материал колец Сатурна в основном состоит из водяного льда, и варьируется в размерах от нескольких микрометров до нескольких десятков метров



Кинетическое описание

Статистическая система описывается функцией распределения $f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ в фазовом пространстве \mathbf{r}, \mathbf{v} и имеет следующее свойство

$$dN(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) dv_x dv_y dv_z \quad (5)$$

где $dN(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ — число частиц локализованных вокруг координаты \mathbf{r} и имеющих скорости в диапазоне от \mathbf{v} до $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$

Эволюция функции распределения подчиняется уравнению Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{w} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = I_c(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) , \quad (6)$$

где $I_c(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ — интеграл столкновений

Скорости частиц после столкновения

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_i' &= \mathbf{v}_i - \frac{\mu}{m_i}(1 + \varepsilon)(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} , \\ \mathbf{v}_j' &= \mathbf{v}_j + \frac{\mu}{m_j}(1 + \varepsilon)(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} ,\end{aligned}\tag{7}$$

где $\mu = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}$ — эффективная масса столкновения

Изменение кинетической энергии при столкновении

$$\begin{aligned}\delta E_i &= -\mu(1 + \varepsilon)(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{n}) - \frac{1 - \varepsilon^2}{2} \frac{\mu^2}{m_i} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})^2, \\ \delta E_j &= +\mu(1 + \varepsilon)(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{n}) - \frac{1 - \varepsilon^2}{2} \frac{\mu^2}{m_j} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})^2,\end{aligned}\tag{8}$$

где $(m_i + m_j)\mathbf{v}_C = m_i\mathbf{v}_i + m_j\mathbf{v}_j$ — скорость центра масс

Нарушение равнораспределения энергии

Частицы с разными массами диссипируют разное количество энергии

$$\left(\frac{\delta E_i}{\delta E_j} \right)_{diss} = \frac{m_j}{m_i} \quad (9)$$

чем **меньше** масса частицы, тем **больше** энергии она теряет. Полная потеря энергии

$$\delta E_i + \delta E_j = -\frac{1 - \varepsilon^2}{2} \mu (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})^2 \quad (10)$$

В общем виде интеграл столкновений для гранулярных газов имеет вид

$$I_c(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{v}_i) = \int dm_j \eta(m_j) \sigma_{ij} \int d\mathbf{v}_j \int d\mathbf{n} \Theta(-\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) |\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}| \times \\ \times \left(\frac{1}{\varepsilon^2} f(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{v}_i'') f(t, m_j, \mathbf{r}, \mathbf{v}_j'') - f(t, m_i, \mathbf{r}, \mathbf{v}_i) f(t, m_j, \mathbf{r}, \mathbf{v}_j) \right) \quad (11)$$

где \mathbf{v}_i'' и \mathbf{v}_j'' — скорости обратных столкновений

Гидродинамическое описание

Гидродинамическое приближение подразумевает описание системы только через его **макроскопические** параметры. Для существования возможности такого описания необходимы условия

$$\sigma \ll \ell \ll L \quad (12)$$

Все макропараметры определяются как моменты вектора скорости частиц

$$\begin{aligned}\rho(t, m, \mathbf{r}) &= \int m f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} , \\ \rho \mathbf{u}(t, m, \mathbf{r}) &= \int m \mathbf{v} f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} , \\ \frac{3}{2} n T(t, m, \mathbf{r}) &= \int \frac{m \mathbf{c}^2}{2} f(t, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} ,\end{aligned}\tag{13}$$

где $\mathbf{c} = \mathbf{v} - \mathbf{u}(t, m, \mathbf{r})$ — локальная скорость частиц

Интегрируя уравнение Больцмана по соответствующим моментам скоростей частиц получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_\alpha}(\rho u_\alpha) &= 0, \\ \frac{\partial(\rho u_\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_\beta}(\rho u_\alpha u_\beta) &= -\frac{\partial(nT)}{\partial r_\alpha} - \frac{\partial \pi_{\alpha\beta}}{\partial r_\beta} + \rho w_\alpha, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} nT + \frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial r_\alpha} u_\alpha \left(\frac{5}{2} nT + \frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} \right) &+ \\ + \frac{\partial}{\partial r_\alpha} (\pi_{\alpha\beta} u_\beta) + \frac{\partial q_\alpha}{\partial r_\alpha} &= \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} - T \cdot \xi.\end{aligned}\tag{14}$$

Скорость охлаждения системы

$$\begin{aligned}\xi(t, m_i, \mathbf{r}, T_i) &= -\frac{n_i}{T_i} \int d\chi_i \omega_{ij} (-A_{ij} T_i + B_{ij} (T_j - T_i)) , \\ A_{ij} &= (1 - \varepsilon^2) \frac{\mu}{m_i} , \\ B_{ij} &= (1 + \varepsilon)^2 \frac{\mu^2}{m_i m_j} .\end{aligned}\tag{15}$$

где ω_{ij} — частота столкновений частиц.

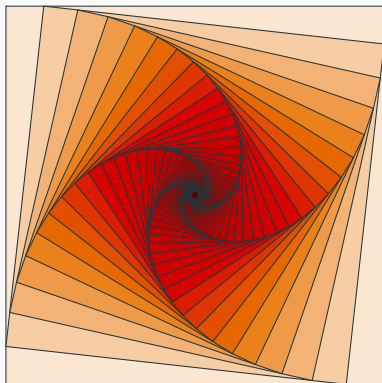


Рис. 1: Rotated square from texample.net.

Таблица 1: Largest cities in the world (source: Wikipedia)

City	Population
Mexico City	20,116,842
Shanghai	19,210,000
Peking	15,796,450
Istanbul	14,160,467

Three different block environments are pre-defined and may be styled with an optional background color.

Default

Block content.

Alert

Block content.

Example

Block content.

Default

Block content.

Alert

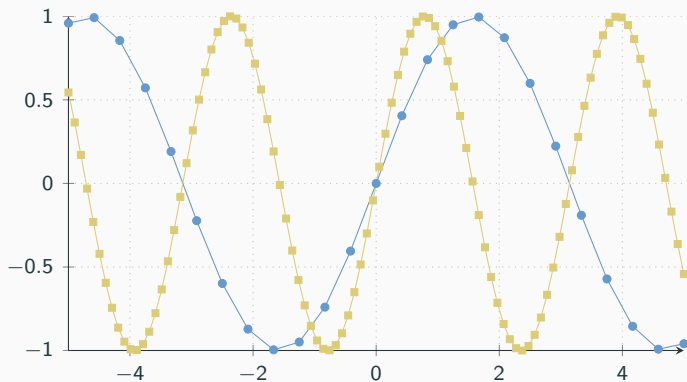
Block content.

Example

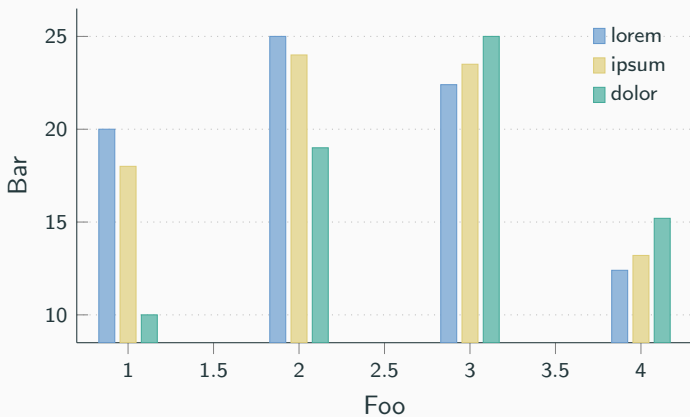
Block content.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Line plots



Bar charts



Veni, Vidi, Vici

metropolis defines a custom beamer template to add a text to the footer. It can be set via

```
\setbeamertemplate{frame footer}{My custom footer}
```

Some references to showcase `[allowframebreaks]` [4, 2, 5, 1, 3]

Conclusion

Get the source of this theme and the demo presentation from

`github.com/matze/mtheme`

The theme *itself* is licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License.



Questions?

Backup slides

Sometimes, it is useful to add slides at the end of your presentation to refer to during audience questions.

The best way to do this is to include the `appendixnumberbeamer` package in your preamble and call `\appendix` before your backup slides.

metropolis will automatically turn off slide numbering and progress bars for slides in the appendix.



P. Erdős.

A selection of problems and results in combinatorics.

In *Recent trends in combinatorics (Matrahaza, 1995)*, pages 1–6.
Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.



R. Graham, D. Knuth, and O. Patashnik.

Concrete mathematics.

Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.



G. D. Greenwade.

The Comprehensive Tex Archive Network (CTAN).

TUGBoat, 14(3):342–351, 1993.



D. Knuth.

Two notes on notation.

Amer. Math. Monthly, 99:403–422, 1992.



H. Simpson.

Proof of the Riemann Hypothesis.

preprint (2003), available at

<http://www.math.drofnats.edu/riemann.ps>, 2003.