Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
**Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»**

Факультет математики

Есаян Армен Давидович

Обзор моделей ценообразования деривативов

Курсовая работа студента 3 курса
образовательной программы бакалавриата «Математика»

Научный руководитель:
Кандидат физико-математических наук,
доцент
Егорова Людмила Геннадьевна

Москва 2023

Содержание

Аннотация

Данная курсовая работа представляет из себя обзор моделей ценообразования деривативов и различных подходов, используемых при моделировании цен опционов на финансовых рынках. Рассматриваются ключевые концепции и математические методы, используемые в ценообразовании европейских опционов, такие как формула Блэка-Шоулза, метод Монте-Карло и биномиальные модели, а также их ограничения и преимущества. В качестве примеров использования каждого способа рассматриваются опционы на акции, торгующиеся на Московской бирже (Сбер, Лукойл) и на NASDAQ (Apple, Amazon). На практике показано, что модели сходятся к одним и тем же ценам.

1 Введение

Деривативы – производные финансовые инструменты – появились на современном финансовом рынке в 19 веке. Первыми современными деривативами были фьючерсные контракты на сельскохозяйственные товары, которые предоставлялись фермерам и другим торговцам из США в качестве способа хеджирования рисков от колебаний цен на продукцию.

По мере развития финансового рынка были введены опционы. Это вид деривативов, который дает держателю право, но не обязательство, купить или продать базовый актив по определенной цене и в установленную дату. С увеличением использования деривативов потребность в точных моделях ценообразования стала более очевидной. Модель Блэка-Шоулза-Мертона, впервые описанная в 1973 году математиками Фишером Блэком, Майроном Шоулзом [1] и Робертом Мертоном [2], стала одним из важнейших открытий конца 20 века, за которое в 1997 году профессоры Роберт Мертон из Гарвардского университета и Майрон Шоулз из Стэнфордского университета были удостоены Нобелевской премии по экономике. Несмотря на успех работы Блэка, Шоулза и Мертона, у данной модели есть ряд теоретических ограничений, однако это широко известные модели, которые доказали свою эффективность с течением времени, поэтому различные финансовые институты регулярно используют их.

Существует несколько различных подходов к ценообразованию опционов, каждый из которых имеет свои преимущества и ограничения.

Аналитический подход. Это математические формулы, которые представляют собой решение стохастических дифференциальных уравнений. Формула Блэка-Шоулза является наиболее известным примером аналитического решения, которое позволяет вычислить стоимость европейского опциона по заранее известным и зафиксированным параметрам безрисковой ставки и волатильности базового актива. Премии за европейские опционы в большинстве случаев вычисляются по формуле Блэка-Шоулза, так как их ценообразование не требует каких-либо вычислительных ресурсов.

Симуляции Монте-Карло. В результате многократного моделирования динамики цены базового актива можно оценить справедливую стоимость опциона. Методы Монте-Карло могут быть полезны для сложных деривативов с несколькими базовыми активами или не имеющих строго зафиксированной даты исполнения опциона (например, для ценообразования барьерных опционов), однако могут потребовать больших вычислительных ресурсов и количества симуляций для получения точных результатов.

Биномиальные модели. В этом подходе строится биномиальное дерево, ветви которого показывают, на сколько вырастет или упадет цена базового актива и с какой вероятностью. В каждом узле дерева опцион оценивается путем вычисления ожидаемой стоимости опциона в следующем узле. Биномиальные модели могут быть более гибкими, чем аналитические решения, с точки зрения ценообразования более сложных финансовых инструментов таких, как американские опционы или экзотические опционы, у которых не зафиксирована конкретная дата исполнения.

Деривативы играют значительную роль на современном финансовом рынке. Ценообразование деривативов становится все более важной задачей, поскольку оно влияет на прибыльность и на хеджирование рисков многих инвестиционных банков, фондов и других финансовых институтов. В данной работе рассматриваются различные подходы в моделях ценообразования, используемых на срочных финансовых рынках, и математика, которая за ними стоит.

2 Функционирование опционных рынков

2.1 Форварды, фьючерсы и опционы

В этой части вводятся основные финансовые понятия, связанные с деривативами, в особенности с опционами. Любое введение в мир деривативов и финансовой экономики начинается с таких понятий как форварды и фьючерсы.

Определение 1. ***Форвардный контракт (форварды)*** *– это соглашение между двумя контрагентами об обязательной покупке или продаже того или иного актива в определенный момент времени T в будущем (называемым временем, или датой, экспирации) по заранее определенной цене K. При этом форвардные контракты заключаются только на внебиржевых рынках (OTC – «over the counter») между двумя финансовыми организациями или клиентами.*

Определение 2. ***Фьючерсный контракт (фьючерсы)*** *– это аналогичное форвардному контракту соглашение между двумя контрагентами, однако заключается данный контракт на бирже, которая предоставляет гарантии об исполнении условий контракта.*

Определение 3. ***Опционный контракт (опционы)*** *– соглашение между двумя контрагентами, по которому покупатель опциона (потенциальный покупатель или потенциальный продавец базового актива — товара, ценной бумаги) получает право купить или продать базовый актив по заранее определенной цене K или по нефиксированной цене, но вычисляемой по заранее оговорённой формуле, в определённый момент времени T в будущем или на протяжении определённого отрезка времени при условии наступления оговорённого события или без такового.*

Важное отличие опционов от фьючерсов и форвардов заключается в том, что держатель не обязан покупать или продавать базовый актив в дату экспирации контракта, а это значит, что опцион может даже не исполниться. За такое право держатель опциона платит фиксированную премию, которая называется **ценой опциона**.

2.2 Виды опционов

Существует множество различных способов классифицировать опционные контракты в зависимости от базового актива, возможности исполнять опцион до установленной даты экспирации, разницы между страйком и текущей стоимости базового актива. Рассмотрим несколько основных классификаций.

1. Виды опционных контрактов с точки зрения прав на покупку (продажу) базового актива:

- call options (опционы колл) – дает владельцу право купить базовый актив в определенный день по определенной цене;
- put options (опционы пут) – дает его владельцу право продать базовый актив в определенный день по определенной цене.

Таким образом, рынок опционов делится на 4 вида участников и соответственно опционных позиций – покупатель опциона колл, продавец опциона колл, покупатель опциона пут и продавец опциона пут. При этом базовым активом могут быть по сути любые активы, в том числе и фьючерсы (фьючерсные опционы).

Говорят, что участник финансового рынка встает в длинную позицию по опциону, если он покупает опцион (long call, long put), и в короткую позицию по опциону, если продает (short call, short put).

2. Виды опционов с точки зрения даты экспирации:

- Европейский опцион – может реализоваться в зафиксированное в соглашении время, но не раньше и не позже;
- Американский опцион – может реализоваться в зафиксированное в соглашении время, при этом держатель опциона может реализовать опцион и не дожидаясь даты экспирации;
- «Экзотический» опцион – не европейский и не американский опцион. Американские и европейские опционы называют «ванильными» из-за относительно простого соглашения между контрагентами. К экзотическим опционам относят, например, азиатские опционы, стоимость которых зависят от средней стоимости базового актива за определенный промежуток времени. Также к экзотическим относят барьерные опционы, которые реализуются в случае преодоления базовым активом цены, которая зафиксирована в контракте, а также многие другие, которые зависят от особоых соглашений между контрагентами.

3. Виды опционов с точки зрения базового актива (основные):

- Опционы на акции (Чикагская опционная биржа, Американская фондовая биржа, Фондовая биржа Филадельфии и т.д.);
- Валютные опционы (Фондовая биржа Филадельфии);
- Опционы на фондовые индексы (S&P, NDX, DJX). Опционы на фондовые индексы, в основном, европейские, кроме S&P100 на Чикагской фондовой бирже.

Пусть X_0 – текущая цена базового актива, а K – цена исполнения (страйк).

4. Виды опционов с точки зрения разницы между текущей ценой и ценой исполнения:

- Опционы «с выигрышем» ITM (in the money): $X_0 > K$ в случае опциона колл и $X_0 < K$ в случае опциона пут;
- Опционы «без выигрыша» ATM (at the money): $X_0 = K$;
- Опционы «с проигрышем» OTM (out the money): $X_0 < K$ в случае опциона колл и $X_0 > K$ в случае опциона пут.

2.3 Примеры расчета прибыли опциона

В таблице 1 представлены основные обозначения.

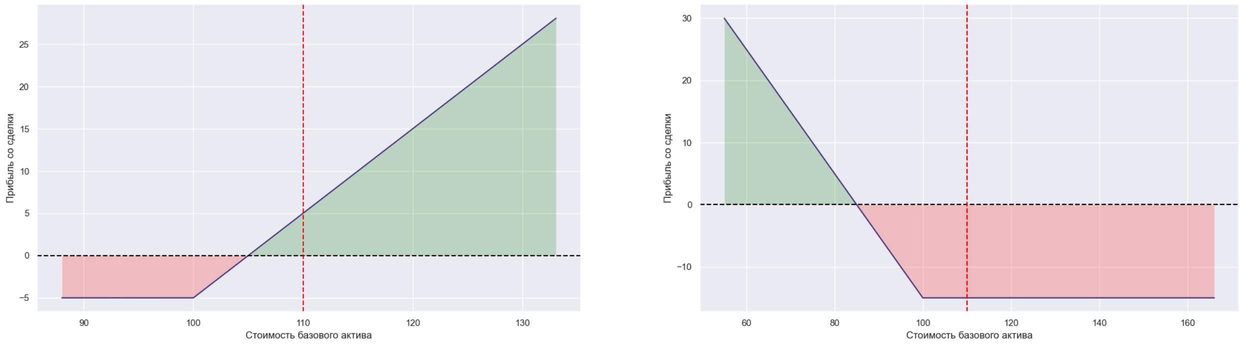


Рис. 1: Зависимость прибыли от стоимости базового актива (a) $c = 5$, $K = 100$, $X_T = 110$ (b) $p = 15$, $K = 100$, $X_T = 110$

Таблица 1. Основные обозначения	
X_0	текущая цена базового актива (например, акции)
K	цена исполнения деривативa (страйк)
T	срок действия опциона (от текущего момента до даты экспирации)
X_T	цена базового актива в дату экспирации деривативa
σ	волатильность базового актива
ρ	безрисковая ставка, $\rho \in (0; 1)$
c	стоимость европейского опциона колл
p	стоимость европейского опциона пут

Почему опционы вообще должны что-то стоить? Сравнивая опционы с фьючерсами и форвардами, можно понять, что в ситуации с контрактами с обязательным исполнением контрагентом не берется премия за обладание данным контрактом. В ситуации с опционом один из агентов имет право не исполнять свой договор, но за такое преимущество он должен платить премию своему контрагенту, то есть инвестору, у которого он купил или которому продал данный опцион. Расчет этой премии, содержащей в себе риск базового актива, время исполнения и множество различных параметров опциона, и является задачей ценообразования опциона.

Рассмотрим пример сделки с использованием опционов на акцию. Допустим, что Высшая школа экономики решила стать публичным акционерным обществом и разместила свои акции на Московской бирже (MOEX). Текущая стоимость акции равна $X_0 = 90\$$. Пусть на Московской бирже появились европейские опционы на акции ВШЭ на месяц со страйковой ценой $K = 100\$$. Стоимость колл опциона равна $c = 5\$$, срок экспирации опциона $T = 1$ месяц. Мы решили встать в позицию лонг по колл опциону на акцию ВШЭ. Допустим, что цена в момент времени T равна выросла до $X_T = 110\$$.

В таком случае прибыль со сделки в дату экспирации будет вычисляться по следующей формуле:

$$profit_{call,long} = \max(X_T - K - c, -c)$$

Таким образом, если цена акции вырастет до 110\$, то наш общий заработок составит $profit_{call,long} = 110\$ - 100\$ - 5\$ = 5\$$ (рис. 1a).

В свою очередь, инвестор, вставший в позицию лонг по пут опциону, даже не реализует опцион, так как его прибыль со сделки вычисляется по формуле:

$$profit_{put,long} = \max(K - X_T - p, -p)$$

$K - X_T = 100\$ - 110\$ = -10\$$. Значит, опцион не будет реализован, а сам инвестор потеряет 15\$, которые потратил на премию пут опциона (рис. 1b).

Инвестор, стоящий в длинной позиции по опциону колл, надеется на то, что стоимость базового актива в будущем будет выше, чем страйк K, так как тогда он купит актив по меньшей цене с учетом премии c, чем та, что будет на рынке в будущем. Иначе опцион не будет исполнен, так как тогда инвестор потеряет деньги.

В свою очередь, инвестор, стоящий в длинной позиции по опциону пут, желает, чтобы стоимость базового актива в будущем была ниже страйка K, так как тогда он может купить базовый актив по низкой рыночной цене с учетом премии p и исполнить опцион, продав базовый актив дороже рыночной цены.

2.4 Параметры, влияющие на стоимость опционов

Основные факторы, влияющие на цены опционов:

1. Текущая цена базового актива X_0 (spot price);
2. Цена исполнения K (strike price);
3. Срок действия опциона T;
4. Волатильность цены базового актива σ;
5. Безрисковая ставка ρ (в расчетах часто берутся ключевые ставки Центральных банков или LIBOR);
6. Дивиденды, ожидаемые в течения срока действия опциона.

В дальнейшем мы будем рассматривать, что данные параметры являются постоянными величинами для выбранного опциона, чью стоимость мы рассчитываем.

2.5 Паритет колл и пут опционов

Будем говорить, что арбитражной возможностью будет обладать участник финансового рынка в том случае, если он может извлечь прибыль без какого-либо риска. В моделях ценообразования мы будем использовать важное ограничение – это отсутствие арбитража на рынке. Более формальное определение этого термина будет дано в дальнейшем.

При отсутствии арбитражных возможностей на финансовом рынке возникает паритет опционов на определенный базовый актив. Паритет опционов колл и пут – это связь между стоимостью опционов колл и пут на базовый актив, позволяющая вычислить стоимость одного опциона, зная стоимость второго.

Возьмем следующие инвестиционные портфели:

- Портфель θ_1 состоит из европейского опциона колл стоимостью c и $Ke^{-\rho T}$ наличными;
- Портфель θ_2 состоит из европейского опциона пут стоимостью p и одной акции стоимостью X_0 на данный момент.

Поскольку европейские опционы можно исполнить только в дату экспирации, значит, на данный момент два портфеля стоят одинаково в случае отсутствия арбитража. Стоимость портфеля θ_1 равна $c + Ke^{-\rho T}$, стоимость портфеля θ_2 равна $p + X_0$. Таким образом, получаем паритет для европейских опционов:

$$c + Ke^{-\rho T} = p + X_0$$

.

3 Финансовая математика: случайные процессы и теория арбитража

3.1 Винеровские случайные процессы и лемма Ито

В данной части работы определим понятия из стохастического исчисления, которые позволяют описывать движения цен акций, валюты и других базовых активов.

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Sigma, \mathcal{F}, \mathcal{P})$.

Определение 4. ***Случайный процесс*** *- это совокупность случайных величин $X = (X_t)$, $t \in I$, где $I \subset \mathbb{R}$ - интервал, в рамках которого мы рассматриваем наш процесс.*

Параметр t естественно называть временем процесса. В каждый момент времени t мы имеем случайную величину X_t, которая $\mathcal{F}$-измерима.

В данной работе мы будем интересоваться только непрерывными случайными процессами.

Определение 5. ***Фильтрация*** *- это возрастающая последовательность вложенных сигма-алгебр $(\mathcal{F}_t)$, для $s \le t$ $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.*

Если для любого момента времени t случайная величина X_t – $\mathcal{F}_t$-измерима, то будем называть случайным процесс X_t **$\mathcal{F}_t$-адаптированным**. Это понятие можно интерпретировать следующим образом: в каждый момент времени мы обладаем набором событий, информацией, которая выражена в сигма-алгебре $\mathcal{F}_t$ и на основе которой мы строим случайную величину. Адаптированность процесса – естественная математическая модель с точки зрения моделирования динамики цен.

Перейдем сразу к наиболее важному случайному процессу – винеровскому процессу. Винеровский процесс представляет из себя математическую модель броуновского движения. Этот процесс позволяет учитывать некий случайный «шум» в динамике цен, который нормально распределен в каждый момент времени t.

Определение 6. ***Винеровский процесс*** *- это случайный процесс W_t, который удовлетворяет следующим условиям:*

1) W_t - гауссовский процесс, то есть для любых зафиксированных моментов времени $t_1, ..., t_k$ случайный вектор $(X_{t_1}, ..., X_{t_k})$ имеет многомерное гауссовское распределение

2) В любой момент времени t $\mathbb{E}[W_t] = 0$

3) Ковариация $cov(W_t, W_s) = \min(t, s)$ для любых моментов времени s и t

Важные свойства винеровского процесса: зафиксировав время t случайная величина X_t будет иметь нулевое математическое ожидание, а его дисперсия будет расти линейно по t и будет равна $\sigma^2 t$.

Пусть W_t – винеровский случайный процесс, H_t - случайный процесс (достаточно «хороший» – непрерывный, локально ограниченный и адаптированный). Тогда можно определить **интеграл Ито** от случайного процесса следующим образом:

$$\int_0^t H_s dW_s = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} H_{t_i}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}), \tag{1}$$

где t_i – разбиение отрезка $[0, t]$.

Многие свойства интеграла Ито наследуются от интеграла Римана – линейность, ассоциативность, возможность выносить константу.

Посчитаем интеграл $\int_0^t dW_s$. Выпишем его интегральную сумму по определению (1)

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 1(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) = \lim_{n \to \infty} (W_t - W_0) = W_t \tag{2}$$

Определение 7. ***Процессом Ито*** *называют адаптированный случайный процесс, который представляется в виде суммы интегралов относительно броуновского движения и относительно времени. Более формально, X_t – процесс Ито, если*

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, w)\, ds + \int_0^t b(s, w)\, dW_s$$

Процесс Ито можно записать и в дифференциальной форме:

$$dX_t = a(t, w)\, dt + b(t, w)\, dW_t,$$

где W_t – стандартное броуновское движение, $a(t, w)$ и $b(t, w)$ – адаптированные случайные процессы.

Моделируя динамику цен активов, мы будем допускать, что цена – это процесс Ито, где $a(t, w)$ - «дрифт», который отвечает за общую направленность цены, а $b(t, w)$ отвечает за волатильность актива.

Как мы видели ранее, стоимость опциона – это функция от цены актива. Если взять достаточно хорошую функцию F, то $F(t, X_t)$ – тоже будет процессом Ито. Лемма Ито позволяет описать вид такого процесса.

Лемма 1. ***(Лемма Ито)*** *Рассмотрим процесс Ито X_t и вещественную функцию $F(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F \in C^2(\mathbb{R})$.*

Тогда $F(t, X_t)$ также является процессом Ито, причем

$$F(t, X_t) = F(0, X_0) + \int_0^t [\frac{\partial F}{\partial t} + a(t, w)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}b(t, w)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}]\, ds + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}b(s, w)\, dW_s$$

3.2 Основные понятия теории арбитража

Ранее использовались такие понятия как «отсутствие арбитража», «рынок», «портфель». Для моделирования цен акций и других базовых активов необходимо понимать, как описать эти понятия математически. В этой главе введем базовые понятия из теории арбитража.

Определение 8. ***Рынком*** *будем называть $\mathcal{F}_t$-адаптированный и измеримый многомерный случайный процесс $X_t = (X_t^0, X_t^1, ..., X_t^d)$, причем $X^0 > 0$ и имеет ограниченную вариацию.*

Проще говоря, рынок - это вектор из «хороших» случайных процессов, размерность которого - количество рассматриваемых активов, а элементы выступают в качестве стоимости этих активов в момент времени t соответственно. X_0 можно интерпретировать как денежный актив, инвестированный под безрисковую ставку (например, положив деньги в надежный банк под ставку Центрального банка для российского рынка или купив американские облигации).

Определение 9. ***Портфелем*** *на рынке X_t будем называть многомерный случайный процесс $\theta_t = (\theta_t^0, \theta_t^1, ..., \theta_t^d)$.*

Имея информацию о рынке и портфеле, можно посчитать стоимость портфеля V_t^θ в момент времени t: $V_t^\theta =< \theta_t, X_t >$, где $<>$ - обычное евклидово скалярное произведение.

Определение 10. ***Самофинансируемым портфелем*** *называют такой портфель θ_t, что $dV_t =< \theta_t, dX_t >$.*

Инвесторы во время торгов на биржах могут покупать или продавать активы, формируя таким образом свой инвестиционный портфель. Для моделирования цены активов мы будем рассматривать ситуацию, когда портфель не изменяется. В таком случае изменение стоимости портфеля зависит только от изменений рынка dX_t.

3.3 Отсутствие арбитража в финансовой математике

Важным условием в теории арбитража является отсутствие арбитражных возможностей на рынке.

Определение 11. *Самофинансируемый портфель θ_t называют **допустимым** на рынке X_t, если стоимость этого портфеля ограничена снизу. Более формально, существует случайная величина $K(w)$ такая, что $V_t^\theta(t,w) >= -K(w)$ в любой момент времени t.*

Это довольно техническое ограничение, которое имеет естественное экономическое обоснование: в реальности есть отрицательный предел стоимости портфеля, к которому инвестор будет толерантен.

Определение 12. *Самофинансируемый допустимый портфель θ_t называют **арбитражным** на рынке X_t, если для него выполняются следующие условия:*
1) $V_0^\theta = 0$;
2) $V^\theta(T) >= 0$ почти наверное;
3) $P[V^\theta(T) > 0] > 0$.

Другими словами, арбитражный портфель позволяет получить прибыль на рынке без какого-либо риска с ненулевой вероятностью.

4 Модель Блэка-Шоулза

4.1 Ограничения модели и использование

Формула Блэка-Шоулза позволяет дать аналитический ответ на вопрос, какова справедливая стоимость европейского опциона в данный момент. Однако модель имеет ряд допущений, о которых стоит упомянуть с самого начала, прежде чем мы перейдем к математическому обоснованию модели.

1. Дивиденды по базовому активу не выплачиваются до момента экспирации опциона. На самом деле, этим условием можно пренебречь, если учесть в формуле годовую доходность с дивидендов, но в рамках данной работы будем считать, что дивидендов нет;

2. Рассматриваемый опцион – европейский. Для американских опционов формула Блэка-Шоулза не поможет вычислить справедливую стоимость, так как в таком случае время экспирации становится также случайной величиной;

3. Отсутствие комиссионных и транзакционных издержек. На реальном финансовом рынке любая биржа, на которой происходят торги, берет комиссию за открытие и закрытие сделок, которая отличается на разных биржах;

4. Безрисковая процентная ставка и волатильность являются постоянными величинами и заранее известны;

5. На рынке отсутствуют арбитражные возможности;

6. Цена базового актива в любой момент времени подчиняется логнормальному распределению.

4.2 Описание модели

В обобщенной модели Блэка-Шоулза рассматривается ситуация, когда рынок X_t состоит из двух активов $X_0(t)$ и $X_1(t)$, где X_0, X_1 – процессы Ито, удовлетворяющие системе линейных стохастических дифференциальных уравнений:

$$dX_0(t) = \rho(t,w)X_0(t)dt, X_0(0) = 1$$

$$dX_1(t) = \alpha(t,w)X_1(t)dt + \sigma(t,w)X_1(t)dW_t, X_1(0) = x_1 > 0, \tag{3}$$

где W_t – одномерное броуновское движение, $\alpha(t,w), \sigma(t,w)$ – одномерные случайные процессы.

Для данной системы стохастических дифференциальных уравнений можно записать общее решение:

$$X_0(t) = \exp(\int_0^t \rho(s,w)\, ds)$$

$$X_1(t) = x_1 \exp(\int_0^t \sigma(s,w)\, dW_s + \int_0^t [\alpha(s,w) - \frac{1}{2}\sigma^2(s,w)])\, ds \tag{4}$$

Используя данную модель поведения цены базового актива, мы можем рассматривать ситуации не только опционов, но и других производных финансовых инструментов, например, фьючерсов, свопов и других. Для каждого такого деривативa можно записать функцию выплаты по контракту F, математической ожидание которой и является стоимостью данного контракта. Нас же будет интересовать частный, наиболее популярный, случай колл опциона, когда выплата по контракту F записывается следующим образом:

$$F_c(X_1) = \max(X_1(T,w) - K, 0), \tag{5}$$

где $K > 0$ - константа. Для примера для пут опциона соответственно функция выплаты выглядит наоборот:

$$F_p(X_1) = \max(K - X_1(T,w), 0) \tag{6}$$

Условие Новикова устанавливает существование эквивалентной риск-нейтральной меры, что является одним из главных критериев отсутствия арбитража. Условие Новикова записывается следующим образом:

$$\mathbb{E}[\exp(\frac{1}{2}\int_0^T \frac{(\alpha(s,w) - \rho(s,w))^2}{\sigma^2(s,w)})] < \infty \tag{7}$$

При отсутствии абитража можно можно выписать справедливую цену опциона по формуле:

$$c = \psi(T)\mathbb{E}[F(X_1(T)] = \psi(T)\mathbb{E}[F(x_1 \exp(\int_0^t \sigma(s,w) dW_s + \int_0^t [\alpha(s,w) - \frac{1}{2}\sigma^2(s,w)]\, ds))], \tag{8}$$

где $\psi(t) := X_0^{-1}(t)$.

Стоит отметить, что $\psi(t)$ соответствует экономическому понятию стоимости денег с учётом фактора времени. Действительно, вычисляя математическое ожидание выплаты по опциону, мы понимаем, что эти деньги могли быть вложены под процентную ставку ρ в банк, а значит сегодня они для нас дороже, чем в будущем. Математически этот член означает переход от мартингальной меры, в котором считается математическое ожидание выплаты по контракту, к риск-нейтральной мере.

4.3 Классическая формула Блэка-Шоулза для европейского опциона

В классической формуле Блэка-Шоулза добавляется ограниечение: функции α и σ постоянные.

Рассмотрим рынок $X_t = (X_0(t), X_1(t))$. Пусть рынок X_t подчиняется детерминированной модели Блэка-Шоулза, то есть

$$dX_0(t) = \rho X_0(t), X_0(0) = 1$$

$$dX_1(t) = \alpha X_1(t)dt + \sigma X_1(t)dW_t, X_1(0) = x_1 > 0,$$

где α, σ - ненулевые константы.

Тогда стоимость колл опциона $F = \max(X_1 - K, 0)$ равна

$$c = \psi(T)\mathbb{E}[F] = x_1 N(d_1) - Ke^{-\rho T} N(d_2), \tag{9}$$

$$d_1 = \frac{\frac{\ln(X_0)}{K} + (\rho + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

где $N(x)$ – кумулятивная функция стандартного нормального распределения.

Формулу Блэка-Шоулза легко вывести, воспользовавшись решением (8) более общего стохастического дифференциального уравнения и леммой Ито для функции $F(X_T) = \max(X_T - K, 0)$. Так как α и σ – константы, интегралы $\int_0^t \sigma dW_s = \sigma W_t$ по (2) и $\int_0^t [\alpha(s, w) - \frac{1}{2}\sigma^2(s, w)]\, ds = \alpha t - \frac{1}{2}\sigma^2 t$ считаются явно.

Заметим, что для того, чтобы найти стоимость пут опциона, достаточно воспользоваться паритетом колл и пут опциона.

5 Ценообразование опционов методом Монте-Карло

В этой главе разберем ценообразование опционов с помощью метода Монте-Карло.

Метод Монте-Карло – это общий вычислительный метод, позволяющий приблизительно вычислить значение интеграла, реализуя случайные величины.

Для линейной модели рынка имеем цену базового актива по формуле (4):

$$X_1(t) = x_1 \exp(\int_0^t \sigma\, dW_s + \int_0^t [\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2])\, ds \tag{10}$$

После преобразований с интегралами получим, что в момент времени t цена базового актива равна

$$X_1(t) = x_1 \exp(\sigma\sqrt{t}N(0, 1) + [\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2]t), \tag{11}$$

где $N(0, 1)$ – стандартное нормальное распределение.

Процесс $X_1(t)$ также называют **геометрическим броуновским движением**. Пример геометрического броуновского движения показан на рис. 2. Цена базового актива, подчиняющаяся геометрическому броуновскому движению, распределена по логнормальному закону, что является одним из главных ограничений и в классической формуле Блэка-Шоулза (рис. 3).

Сгенерировав большое количество нормальных псевдослучайных величин на компьютере и посчитав выборочное среднее цены в момент времени T, по закону больших чисел мы можем быть уверены, что получим математическое ожидание цены базового актива в дату экспирации. Пошаговое вычисление цены опциона описано в алгоритме «Вычисление стоимости европейского опциона методом Монте-Карло».

$$c = \psi(T)\mathbb{E}[F(X_1(T)] = e^{-\rho T} \lim_{\substack{N_{steps}\to\infty \\ N_{paths}\to\infty}} \overline{F(\overline{X_T^i})}$$

Стоит отметить, что для европейских опционов метод Монте-Карло на самом деле избыточен для линейной модели цены базового актива – если нам требуется посчитать стоимость сразу большого количества опционов, этот метод будет работать намного дольше, чем вычисление по формуле Блэка-Шоулза. Однако метод Монте-Карло очень хорошо справляется с барьерными и другими экзотическими опционами, в которых нет конкретно оговоренной заранее даты экспирации, что означает, что ценообразование таких финансовых инструментов по формуле Блэка-Шоулза будет попросту неправильным.

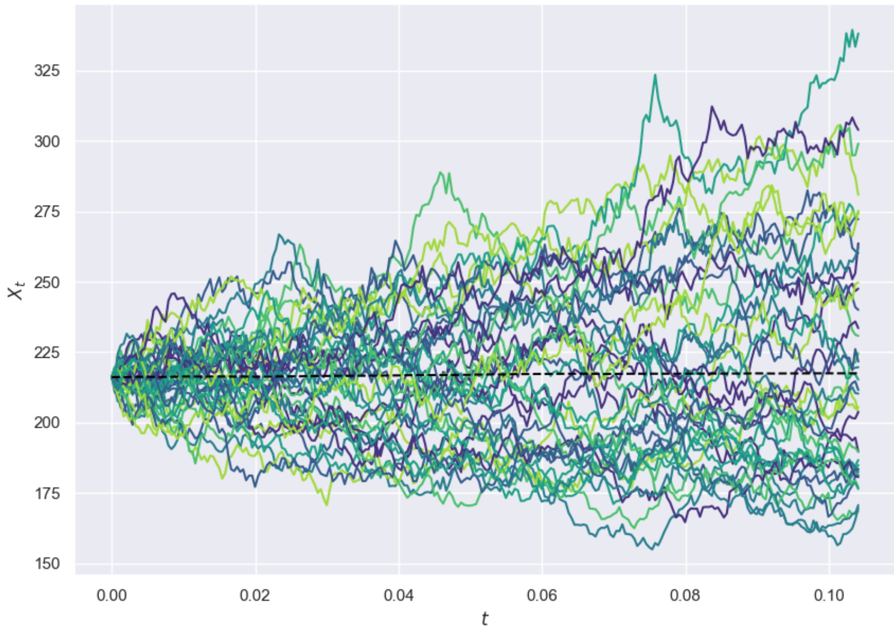


Рис. 2: Симуляция движения цены акций SBER методом Монте-Карло

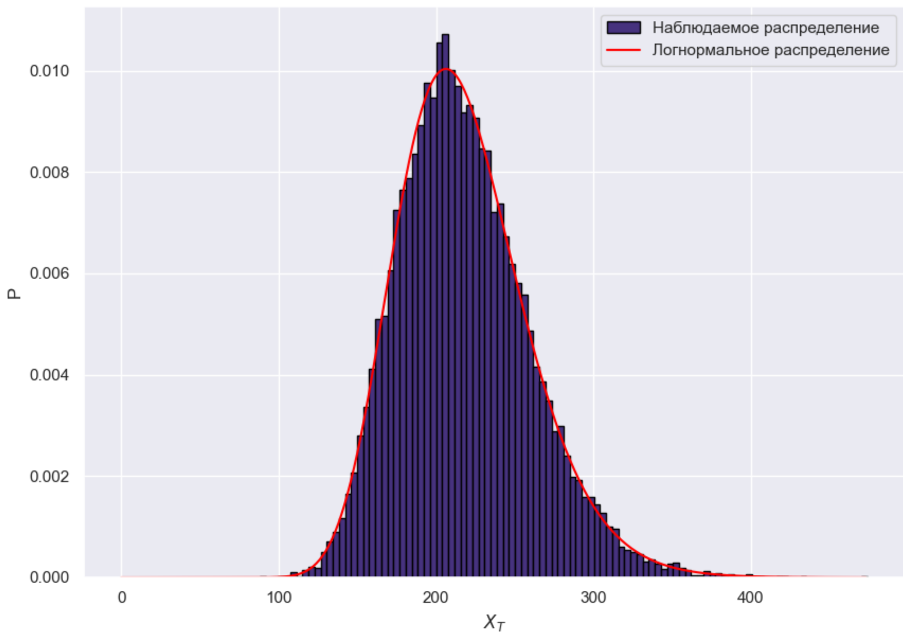


Рис. 3

6 Биномиальные модели

В этой главе рассмотрим иной подход к ценообразованию опционов, более интуитивно понятный – модель биномиального дерева. Если для европейских опционов проще всего использовать готовую формулу Блэка-Шоулза, учитывая постоянную величину волатильности и безрисковой ставки, то для американских опционов на биржах чаще всего используют бино-

Algorithm Вычисление стоимости европейского опциона методом Монте-Карло

N_{steps} ▷ Размер выборки для оценки математического ожидания выплаты

N_{paths} ▷ Размер выборки для оценки математического ожидания $X_1(T)$

1. Генерируем вектор $(\xi_1, ..., \xi_{N_{paths}})$ из псевдослучайных нормальных величин, $\xi_i \sim N(0,1)$;
2. Вычисляем цену базового актива по формуле (11), считая, что α равна безрисковой ставке и считаем среднюю цену $\overline{X_T}$;
3. Повторяем пункты (1)-(2) N_{steps} раз;
4. Считаем выборочное среднее выплат по опционам $\frac{1}{N_{steps}} \sum_i^{N_{steps}} F(\overline{X_T^i})$;
5. Дисконтируем оцененную стоимость опциона, домножая на $e^{-\rho T}$;
6. Итоговый результат – стоимость опциона.

миальные модели[1] из-за своей простой интерпретации. В качестве вершин дерева рассматриваются варианты возможных значений цен базового актива или инвестиционного портфеля в разные промежутки времени.

6.1 Одношаговая модель биномиального дерева

Рассмотрим рынок $X_t = (X_0(t), X_1(t))$, где $t \in \{0,1\}$, $X_0(0) = 1$, $X_1(0) = x_1$, на котором отсутствуют арбитражные возможности. Это дискретный случайный процесс, который можно интерпретировать как стоимость активов «сегодня» и «завтра». Так как X_0 – это то, сколько денег инвестировано по безрисковой ставке, то мы знаем, что

$$X_0(0) = 1, X_0(1) = e^{\rho}$$

Как мы можем работать с $X_1(t)$? Предположим, что в момент времени $t = 1$ стоимость базового актива может увеличиться в $u > 1$ раз с вероятностью p_u и уменьшиться в $d < 1$ раз с вероятностью p_d, причем $p_u + p_d = 1$.

$$X_1(1) = \begin{cases} ux_1 & p = p_u \\ dx_1 & p = p_d \end{cases}$$

В условиях отсутствия арбитража ожидаемая доходность базового актива должна быть равна доходности по безрисковой ставке ρ, то есть $e^{\rho} = p_u u + p_d d$. Значит, вероятности p_u и p_d вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} p_u = \dfrac{e^{\rho} - d}{u - d} \\ p_d = \dfrac{u - e^{\rho}}{u - d} \end{cases} \tag{12}$$

Такая модель называется **одношаговой биномиальной моделью** ценообразования опциона (рис. 4). Можно заметить, что такая модель будет слишком упрощенной, так как в течение времени до экспирации опциона базовый актив может как увеличиваться в стоимости, так и уменьшаться. Чтобы приблизиться к решению данной проблемы, мы увеличиваем количество шагов (рис. 5, 6), тем самым увеличивая глубину дерева и учитывая различные флуктуации в динамике цены.

[1]https://www.nasdaq.com/docs/app-5-Fair-Value.pdf

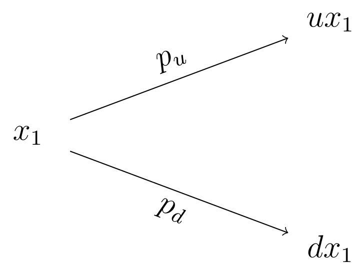


Рис. 4: Одношаговая биномиальная модель

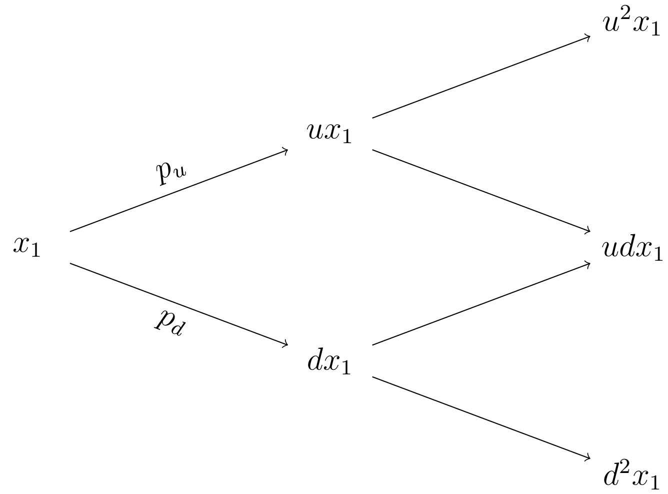


Рис. 5: Двухшаговая биномиальная модель

6.2 Общая биномиальная модель ценообразования опционов

При увеличении количества шагов $t \in \{0, 1, ..., N\}$ увеличивается количество ветвей дерева и возможных вариантов движения цены базового актива. Тогда цены базового актива в k вершинах дерева в момент времени t будут равны (в вершине (t, k) всего биномиального дерева):

$$X_t = x_1 u^k d^{t-k},$$

где $k \in \{0, 1, ..., t\}$.

Нам будет удобно смотреть не просто на биномиальное дерево из цен базового актива, а на биномиальное дерево, в котором рассчитываются стоимости портфелей $V_t(k)$ с европейским опционом в момент времени t в k-ой ветви дерева (рис. 6).

Рассмотрим опционный контракт $F(X_t) = \max(X_t - K, 0)$. Пусть стоимость портфеля в вершине (t, k) биномиального дерева равна $V_t(k)$ и на рынке отсутствуют арбитражные возможности. Тогда вычисляя стоимость портфеля по следующей реккурентной формуле:

$$\begin{cases} V_t^k = e^{-\rho/N}(p_u V_{t+1}(k+1) + p_d V_{t+1}(k)) \\ \qquad\qquad V_N(k) = \max(x_1 u^k d^{N-k} - K) \end{cases} \tag{13}$$

в каждой вершине (t, k), можно получить стоимость портфеля $V_0(0)$, которая будет равна справедливой стоимости опциона.

Заметим, что для вычисления стоимости контракта необходимо знать параметры u, d, p_u и p_d и их связь между собой. Есть различные способы задать вероятности и коэффициенты изменения цены базового актива, которые в свою очередь задают разное построение дерева.

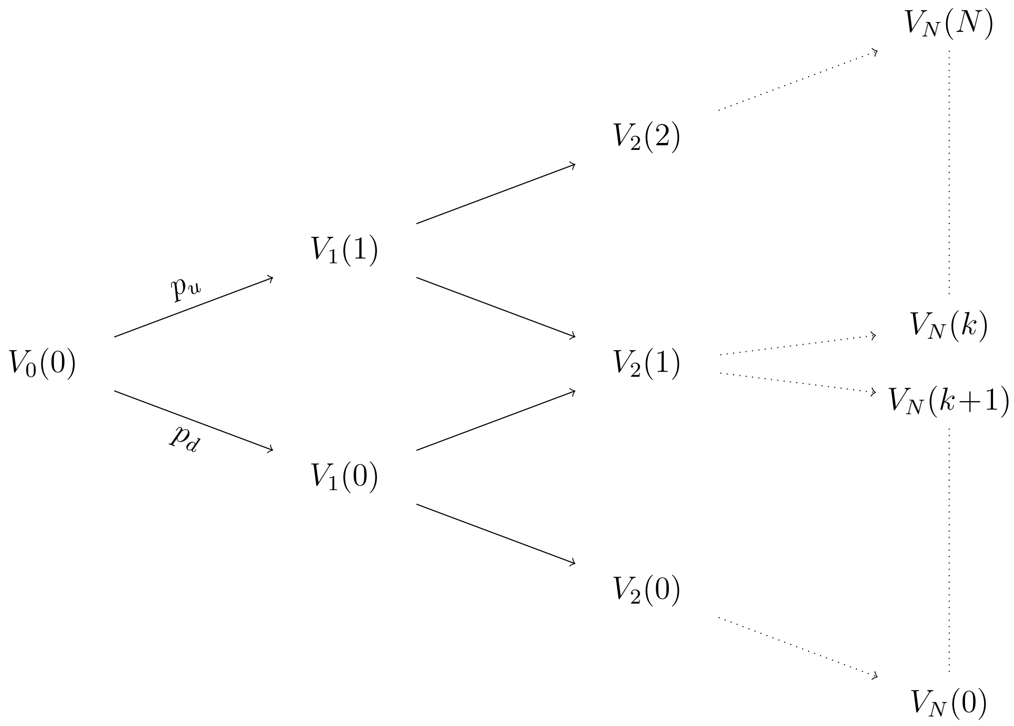


Рис. 6: Динамика стоимости портфеля в биномиальной модели

6.3 Биномиальная модель Кокса–Росса–Рубинштейна

Положим, что $d = \frac{1}{u}$. Данное условие влияет на вид биномиального дерева следующим образом: если стоимость базового актива увеличилась сначала в u раз, а потом уменьшилась в d раз, то тогда стоимость актива после двух таких итераций станет такой же, как была изначально, так как $ud = 1$. В таком случае мы получим биномиальную модель Кокса-Росса-Рубинштейна [4].

При N шагах биномиальной модели мы можем выразить вероятности p_u и p_d по аналогичному способу, что в случае с одношаговой биномиальной моделью:

$$\begin{cases} p_u = \dfrac{e^{\rho\Delta t} - d}{u - d} \\ p_d = \dfrac{u - e^{\rho\Delta t}}{u - d} \end{cases} \tag{14}$$

где $\Delta t = \frac{T}{N}$.

Для поиска u и d воспользуемся логнормальностью распределения цены базового актива (11). В таком случае подберем u и d таким образом, чтобы дисперсии цены в каждый момент времени t были равны:

$$Var(X_{t+\Delta t}) = X_t^2\sigma^2\Delta t \tag{15}$$

$$Var(X_{t+\Delta t}) = \mathbb{E}[X_{t+\Delta t}^2] - \mathbb{E}[X_{t+\Delta t}]^2 \tag{16}$$

Уравнение (16) решается подстановкой $d = \frac{1}{u}$. Тогда учитывая, что $\Delta t \to 0$ – достаточно маленькое, при этом $(\Delta t)^2 = 0$, то выражаются коэффициенты u и d следующим образом:

$$\begin{cases} u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \end{cases} \tag{17}$$

6.4 Биномиальная модель Джерроу-Руда

Построение дерева Джерроу-Руда [5] отличается от стандартного способа, предложенного Коксом, Россом и Рубинштейном, тем, что теперь мы используем ограничение не на коэффициенты изменения цены базового актива, а на вероятности этих событий. Наиболее простой способ задать какое-либо ограничение на вероятности – сказать, что они равны, то есть $p_u = p_d = 0.5$. При этом решая уравнение (16) аналогичным способом мы получим уже другие коэффициенты u и d. Биномиальную модель Джерроу-Руда еще называют равновероятностной биномиальной моделью.

В таком случае коэффициенты u и d будут равны:

$$\begin{cases} u = e^{(\rho - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}} \\ d = e^{(\rho - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}} \end{cases} \tag{18}$$

Как мы видим, обе биномиальные модели используют ограничение на логнормальность распределения цены базового актива, а это значит, что при увеличении количества шагов N все биномиальные модели сходятся к теоретической стоимости европейского опциона.

7 Применение моделей на биржевых данных

В этой части рассмотрим практическое применение моделей ценообразования опционов. В качестве базовых активов взяты акции крупных американских (Apple, Amazon) и российских (Сбер, Лукойл) компаний, для которых сравниваются результаты ценообразования с помощью формулы Блэка-Шоулза, метода Монте-Карло и биномиальных моделей.

7.1 Данные

В качестве источника данных о торгуемых опционах для российских компаний была выбрана доска опционов Московской биржи[2], которая является крупнейшей биржей в России. Для американских компаний использовались данные биржи NASDAQ[3].

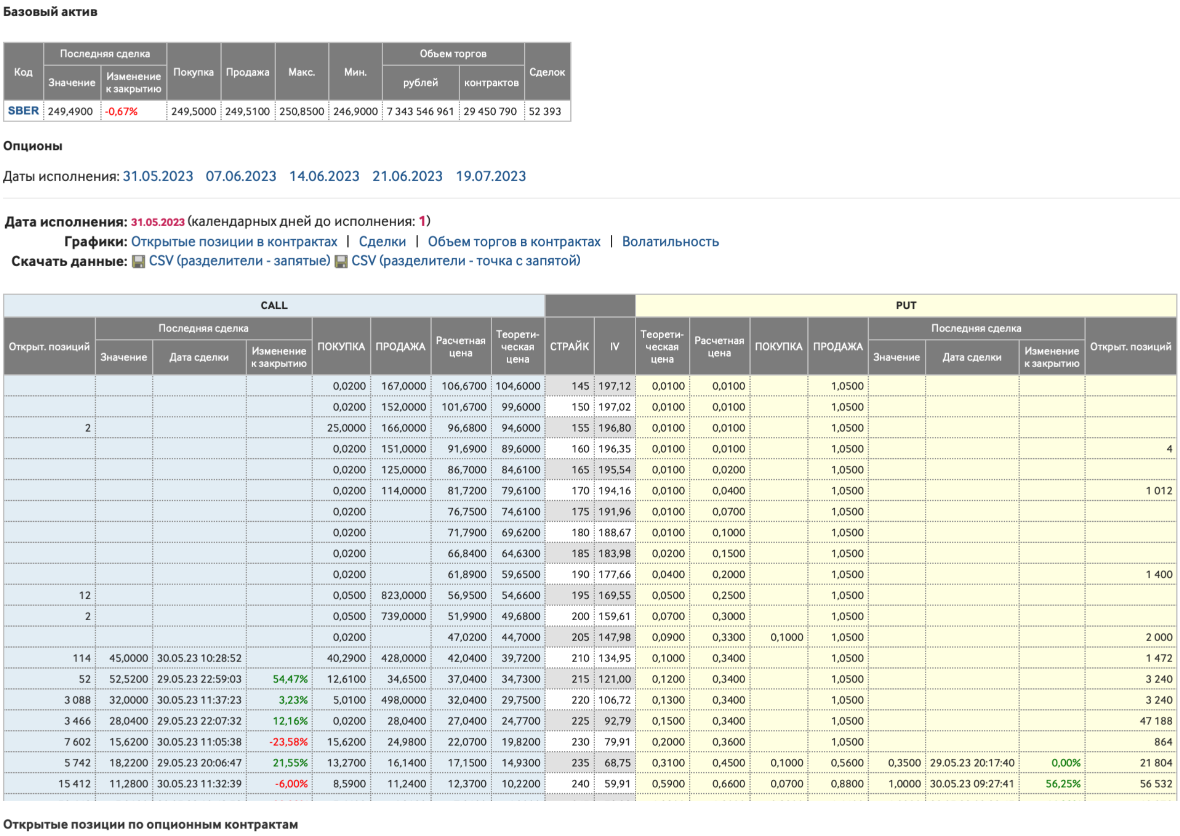
Биржи предоставляют данные в виде «доски опционов» (англ. «option chain», рис. 7), на которой отображаются основные параметры опционов, доступные для инвестора: цена страйка, стоимость колл и пут опциона, текущая стоимость базового актива. Также на Московской бирже для инвестора сразу рассчитывают подразумеваемую волатильность (implied volatility, IV) – волатильность базового актива, которая используется биржей при ценообразовании.

Для бэктестирования опционов данные котировок акций были получены через API Тинькофф Инвестиции[4] для российских компаний и через API Yahoo.Finance[5] для американских компаний. В таблице 2 указаны основные параметры рассматриваемых опционов, используемые для ценообразования всех опционов.

Таблица 2. Параметры опционов

	SBER	LKOH	AAPL	AMZN
Дата рассмотрения опциона	09.04.2023	09.04.2023	27.05.2023	27.05.2023
Дата экспирации T	17.05.2023	17.05.2023	07.07.2023	07.07.2023
Стоимость акции X_0	216 RUB	4600 RUB	175$	120$
Ключевая ставка ρ	7,15%	7,15%	5,15%	5,15%

[2]https://www.moex.com/ru/derivatives/optionsdesk.aspx
[3]https://www.nasdaq.com/market-activity/quotes/option-chain
[4]https://tinkoff.github.io/investAPI/
[5]https://finance.yahoo.com



Базовый актив

Код	Последняя сделка		Покупка	Продажа	Макс.	Мин.	Объем торгов		Сделок
	Значение	Изменение к закрытию					рублей	контрактов	
SBER	249,4900	-0,67%	249,5000	249,5100	250,8500	246,9000	7 343 546 961	29 450 790	52 393

Опционы

Даты исполнения: 31.05.2023 07.06.2023 14.06.2023 21.06.2023 19.07.2023

Дата исполнения: 31.05.2023 (календарных дней до исполнения: 1)

Графики: Открытые позиции в контрактах | Сделки | Объем торгов в контрактах | Волатильность

Скачать данные: CSV (разделители - запятые) CSV (разделители - точка с запятой)

CALL									
Открыт. позиций	Последняя сделка			ПОКУПКА	ПРОДАЖА	Расчетная цена	Теоретическая цена	СТРАЙК	IV
	Значение	Дата сделки	Изменение к закрытию						
				0,0200	167,0000	106,6700	104,6000	145	197,12
				0,0200	152,0000	101,6700	99,6000	150	197,02
2				25,0000	166,0000	96,6800	94,6000	155	196,80
				0,0200	151,0000	91,6900	89,6000	160	196,35
				0,0200	125,0000	86,7000	84,6100	165	195,54
				0,0200	114,0000	81,7200	79,6100	170	194,16
				0,0200		76,7500	74,6100	175	191,96
				0,0200		71,7900	69,6200	180	188,67
				0,0200		66,8400	64,6300	185	183,98
				0,0200		61,8900	59,6500	190	177,66
12				0,0500	823,0000	56,9500	54,6600	195	169,55
2				0,0500	739,0000	51,9900	49,6800	200	159,61
				0,0200		47,0200	44,7000	205	147,98
114	45,0000	30.05.23 10:28:52		40,2900	428,0000	42,0400	39,7200	210	134,95
52	52,5200	29.05.23 22:59:03	54,47%	12,6100	34,6500	37,0400	34,7300	215	121,00
3 088	32,0000	30.05.23 11:37:23	3,23%	5,0100	498,0000	32,0400	29,7500	220	106,72
3 466	28,0400	29.05.23 22:07:32	12,16%	0,0200	28,0400	27,0400	24,7700	225	92,79
7 602	15,6200	30.05.23 11:05:38	-23,58%	15,6200	24,9800	22,0700	19,8200	230	79,91
5 742	18,2200	29.05.23 20:06:47	21,55%	13,2700	16,1400	17,1500	14,9300	235	68,75
15 412	11,2800	30.05.23 11:32:39	-6,00%	8,5900	11,2400	12,3700	10,2200	240	59,91

	PUT							
СТРАЙК	Теоретическая цена	Расчетная цена	ПОКУПКА	ПРОДАЖА	Последняя сделка			Открыт. позиций
					Значение	Дата сделки	Изменение к закрытию	
145	0,0100	0,0100		1,0500				
150	0,0100	0,0100		1,0500				
155	0,0100	0,0100		1,0500				
160	0,0100	0,0100		1,0500				4
165	0,0100	0,0200		1,0500				
170	0,0100	0,0400		1,0500				1 012
175	0,0100	0,0700		1,0500				
180	0,0100	0,1000		1,0500				
185	0,0200	0,1500		1,0500				
190	0,0400	0,2000		1,0500				1 400
195	0,0500	0,2500		1,0500				
200	0,0700	0,3000		1,0500				
205	0,0900	0,3300	0,1000	1,0500				2 000
210	0,1000	0,3400		1,0500				1 472
215	0,1200	0,3400		1,0500				3 240
220	0,1300	0,3400		1,0500				3 240
225	0,1500	0,3400		1,0500				47 188
230	0,2000	0,3600		1,0500				864
235	0,3100	0,4500	0,1000	0,5600	0,3500	29.05.23 20:17:40	0,00%	21 804
240	0,5900	0,6600	0,0700	0,8800	1,0000	30.05.23 09:27:41	56,25%	56 532

Открытые позиции по опционным контрактам

Рис. 7: Доска опционов Московской биржи

Премии, которые указывают биржи для европейских опционов, чаще всего рассчитаны по формуле Блэка-Шоулза. Технические детали ценообразования указаны в спецификациях расчета теоретической цены опциона бирж MOEX[6] и NASDAQ[7]. В качестве волатильности использованы IV опционов с Московской биржи. Для европейских опционов американских компаний подразумеваемая волатильность рассчитана вручную с помощью метода Эйлера для решения обыкновенного дифференциального уравнения и вычисления частной производной по волатильности (коэффициент «вега») в силу того, что биржа NASDAQ не публиковал подразумеваемую волатильность акций данных компаний. Алгоритм вычисления подразумеваемой волатильности представлен на рис. 8.

Для американских компаний с помощью данного алгоритма выделяется подразумеваемая волатильность, на основе которой вычисляется стоимость опционов на акции Apple и Amazon с помощью метода Монте-Карло и биномиальных моделей.

7.2 Сравнение моделей

В таблице 3 представлен пример результатов применения методов ценообразования европейского опциона на акции Сбера. Волатильность базового актива IV и стоимость колл опциона «Price» получены по данным биржи, расчеты цен методом Монте-Карло «MC Price» и биномиальными моделями «BMCRR Price» и «BMJR Price» вычислены с помощью языка программирования Python. Более подробные результаты ценообразования и код выложен на Github[8] в публичном репозитории, в данной работе приведем основные результаты, связанные со схожестью цен опционов, вычисленных разными методами.

Параметры моделей для вычисления цены опциона:

- Метод Монте-Карло: $N_{steps} = 250$, $N_{paths} = 20000$;

[6]https://fs.moex.com/files/4720

[7]https://www.nasdaq.com/docs/app-5-Fair-Value.pdf

[8]https://github.com/yes-armen/review-option-pricing

```
def bs_call(S0, K, T, r, sigma):
    d1 = (np.log(S0 / K) + (r + 0.5 * sigma ** 2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))
    d2 = (np.log(S0 / K) + (r - 0.5 * sigma ** 2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))
    V = S0 * norm.cdf(d1) - K * np.exp(-r * T) * norm.cdf(d2)
    return V

def vega(S0, K, T, r, sigma):
    d1 = ((np.log(S0 / K) + (r + 0.5 * sigma ** 2) * T) / (sigma * np.sqrt(T)))
    vega = S0 * norm.cdf(d1, 0.0, 1.0) * np.sqrt(T)
    return vega

def implied_vol(S0, K, T, r, C0):
    sigma_est = 1
    it = 100
    for i in range(it):
        sigma_est -= (bs_call(S0, K, T, r, sigma_est) - C0) /
        vega(S0, K, T, r, sigma_est)
    return sigma_est
```

Рис. 8: Вычисление подразумеваемой волатильности с помощью метода Эйлера

- Биномиальные модели: $N = 1000$.

Результаты моделей ценообразования сравниваются с ценами бирж, на которых торговались данные опционы, схожесть рассчитывается по метрикам MSE (таблица 4) и $1 - R^2$ (таблица 5).

Таблица 4. MSE

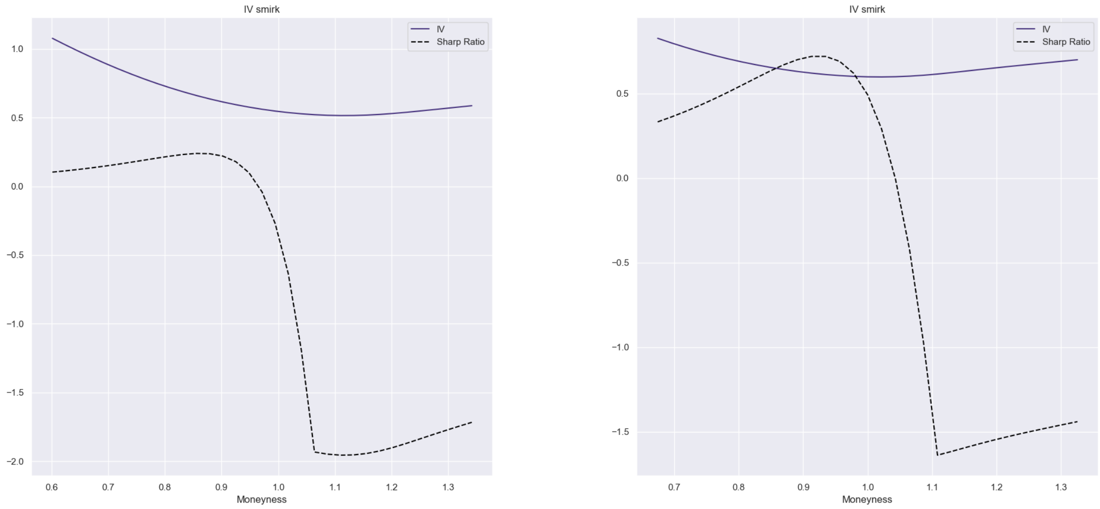
Ticker	MC Price	BMCRR Price	MBJR Price
AAPL	0.005850	0.004820	0.004834
AMZN	0.000624	0.000571	0.000571
LKOH	77.464230	78.466207	78.556913
SBER	0.065903	0.063626	0.063241

Таблица 5. Доля необъясненной дисперсии, в %

Ticker	MC Price	BMCRR Price	MBJR Price
AAPL	0.00035	0.00028	0.00029
AMZN	0.00026	0.00024	0.00024
LKOH	0.03638	0.03685	0.03689
SBER	0.00843	0.00813	0.00808

В таблице 5 приведены значения метрики $1 - R^2$, выраженная в процентах и показывающая, какая доля дисперсии зависимой величины (стоимость опциона на бирже, рассчитанная по формуле Блэка-Шоулза) объясняется моделью (соответственно моделями Монте-Карло и биномиальных моделей).

Можно заметить, что результаты моделей сходятся к теоретической стоимости на бирже, вычисленной по формуле Блэка-Шоулза, что подтверждает теоретическую эквивалентность этих моделей для ценообразования европейских опционов.



(a) (b)

Рис. 9: IV & Sharp Ratio vs Moneyness (a) Сбер (b) Лукойл

7.3 Бэктестирование инвестиционных стратегий

В данной части рассмотрим инвестиционную привлекательность опционов на акции Сбера и Лукойла с помощью коэффициента Шарпа.

Определение 13. ***Коэффициент Шарпа*** *– финансовый показатель, показывающий доходность инвестиционного портфеля θ с учетом риска:*

$$S = \frac{\mathbb{E}[\mu_\theta - \rho]}{\sigma_\theta},$$

где μ_θ – доходность портфеля θ, σ_θ – волатильность, ρ – безрисковая ставка.

Данный финансовый показатель позволяет рассматривать доходность инвестиционной стратегии с учетом риска, который выражается в волатильности инвестиционного портфеля.

Рассматривая инвестиционный портфель из опциона на акции компании, можно оценить доходность сделки с данным опционом, учитывая его подразумеваемую волатильность.

На рисунке 9 представлены графики зависимости коэффициента Шарпа и подразумеваемой волатильности от денежности опциона (отношение страйка к текущей стоимости базового актива) для российских компаний Сбер и Лукойл.

На ретроспективных данных можно заметить, что ITM колл опционы (опционы, у которых текущая стоимость базового актива выше, чем страйк) более рисковые, так как подразумеваемая волатильность у них выше. При этом чем ниже страйковая цена, тем соответственно выше прибыль со сделки в абсолютном выражении (таблица 3). Однако по теоретической формуле Блэка-Шоулза (9) мы видели, что с уменьшением страйка растет премия за опцион, что учитывается в процентной доходности данного опциона (поле «Return, %»).

Зависимости на рис. 9 интерпретируется следующим образом: для среднесрочных (месячных) опционов выгоднее всего приобретать колл-опционы со страйковой ценой 0.85-0.9 от стоимости X_0, так как их относительно средний риск компенсируется высокой доходностью в случае, если мы уверены, что цена акции будет расти.

Таблица 3. Оценки стоимости опциона на акции Сбера								
Strike	IV	Black-Sholes	MC	BMCRR	BMJR	Payoff	Profit	Return, %
130.00	1.08	88.95	88.86	88.85	88.86	99.50	10.55	11.9
135.00	1.03	84.14	84.05	84.03	84.03	94.50	10.36	12.3
140.00	0.98	79.34	79.26	79.21	79.22	89.50	10.16	12.8
145.00	0.94	74.55	74.41	74.42	74.42	84.50	9.95	13.3
150.00	0.90	69.80	69.65	69.65	69.66	79.50	9.70	13.9
155.00	0.86	65.09	64.94	64.92	64.93	74.50	9.41	14.5
160.00	0.82	60.41	60.24	60.24	60.24	69.50	9.09	15.0
165.00	0.78	55.80	55.60	55.60	55.61	64.50	8.70	15.6
170.00	0.75	51.25	51.03	51.04	51.04	59.50	8.25	16.1
175.00	0.72	46.79	46.55	46.56	46.56	54.50	7.71	16.5
180.00	0.69	42.43	42.16	42.18	42.18	49.50	7.07	16.7
185.00	0.66	38.19	37.91	37.93	37.93	44.50	6.31	16.5
190.00	0.64	34.11	33.81	33.82	33.82	39.50	5.39	15.8
195.00	0.61	30.20	29.89	29.90	29.90	34.50	4.30	14.2
200.00	0.59	26.49	26.17	26.18	26.18	29.50	3.01	11.4
205.00	0.58	23.02	22.66	22.69	22.69	24.50	1.48	6.4
210.00	0.56	19.81	19.44	19.47	19.46	19.50	-0.31	-1.6
215.00	0.55	16.88	16.52	16.53	16.53	14.50	-2.38	-14.1
220.00	0.54	14.26	13.90	13.91	13.90	9.50	-4.76	-33.4
225.00	0.53	11.94	11.59	11.59	11.59	4.50	-7.44	-62.3
230.00	0.52	9.94	9.60	9.59	9.60	0.00	-9.94	-100.0
235.00	0.52	8.24	7.92	7.90	7.91	0.00	-8.24	-100.0
240.00	0.52	6.82	6.51	6.50	6.51	0.00	-6.82	-100.0
245.00	0.52	5.65	5.36	5.36	5.36	0.00	-5.65	-100.0
250.00	0.52	4.72	4.43	4.44	4.44	0.00	-4.72	-100.0
255.00	0.52	3.97	3.71	3.71	3.71	0.00	-3.97	-100.0
260.00	0.53	3.37	3.13	3.13	3.13	0.00	-3.37	-100.0
265.00	0.54	2.89	2.67	2.67	2.67	0.00	-2.89	-100.0
270.00	0.55	2.51	2.30	2.30	2.30	0.00	-2.51	-100.0

8 Результаты работы

Основные результаты, которые были сделаны в рамках данной работы:

- Разобраны ограничения и преимущества модели Блэка-Шоулза с постоянной волатильностью и безрисковой ставкой, показана эквивалентность формулы Блэка-Шоулза, биномиальных моделей и метода Монте-Карло в случае ценообразования европейских опционов;

- На данных Московоской биржи и NASDAQ продемонстрирована сходимость этих моделей к формуле Блэка-Шоулза для европейских опционов;

- На ретроспективных данных с помощью коэффициента Шарпа показаны самые прибыльные опционы на Сбер и Лукойл с точки зрения доходности с учетом рисков.

Список литературы

[1] Black, Fischer; Myron Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy

[2] Merton, Robert C. Theory of Rational Option Pricing // Bell Journal of Economics and Management Science

[3] Hull, John C. Options, Futures, and Other Derivatives. — Prentice Hall, 1997. — ISBN 0-13-601589-1

[4] Cox, J. C.; Ross, S. A.; Rubinstein, M. (1979). «Option pricing: A simplified approach» // Journal of Financial Economics. 7 (3): 229

[5] Option pricing: Robert Jarrow and Andrew Rudd, (Irwin, Homewood, IL, 1983) // Journal of Banking Finance

[6] Tomas Björk, Arbitrage Theory in Continuous Time

[7] Øksendal, B. K. (Bernt Karsten), Stochastic Differential Equations: an Introduction with Applications.