

电报传输理论中的某些主题

作者: H. 奈奎斯特

美国电气工程师协会会员

摘要 - 确定电报信号失真的最明显方法是计算电报系统的瞬态。这种方法已被多位作者论述过，并且对于具有简单终端条件的电报线路已有解决方案。众所周知，将相同方法扩展到代表通常终端设备的更复杂终端条件，会带来巨大的困难。

本文从系统的稳态特性的替代角度来研究同一问题。这种方法相对于瞬态方法的优势在于，使用终端设备导致的电路复杂性不会实质性地使计算复杂化。这种处理方法需要根据稳态特性来表达无失真传输的标准。因此，本文相当一部分内容描述并说明了一种进行这种转换的方法。

讨论了以给定信号传输速率进行传输所需的最小频率范围。在载波电报的情况下，此讨论包括单边带和双边带传输的比较。还讨论了若干相关主题。

范围

本文的目的是阐述不时对电报系统进行的理论研究结果。这些结果自然是零散的，为了形成一个连贯的叙述，有必要包含一些电报工程师已经熟知的内容。讨论了以下主题：

1. 所需频带与信号传输速率成正比。
2. 一个重复的电报信号（任意长度）可以被认为是由正弦分量组成的。当这些分量的幅度和相位，或实部和虚部，以其频率为横坐标、以其值为纵坐标绘制，并且当频率轴被划分为每个宽度在数值上等于信号传输速率的频带时，发现在任何频带中传达的信息基本上与其他频带中传达的信息相同；并且可以说这些频带是相互冗余的。
3. 无歧义解释所需的最小带宽在数值上基本等于信号传输速率，并且基本与所采用的电流值数量无关。
4. 选择了一个完美传输的标准；并讨论了接收波必须具备的特性，以使其在频率范围不大于必要值的要求下无失真。
5. 概述了为满足此要求而指定系统的方向。
6. 考虑了无失真传输的几个替代标准，并解释和说明了计算电路相应传输特性的方法。
7. 对载波进行了分析，表明在同等条件下，通常的载波电报所需的频率范围是相应直流电报的两倍。
8. 讨论了克服载波电报这种低效性的两种替代方法，即使用相位鉴别和单边带。
9. 在对直流和载波进行如此分析之后，对任意波形进行了相应的分析，包括这两种作为特殊情况。给出了关于整形发送波以使接收波完美的计算。
10. 讨论了电报波的双重性。可以将波形视为 ω 的函数，需要所谓的稳态处理方法；或者视为 t 的函数，需要所谓的瞬态方法。证明了稳态理论可以提供指定理想系统特性所需的信息。
11. 讨论了干扰和偏离理想条件的影响。

第2点和第3点中指出的频率范围的经济性应被视为理论极限，在实践中无法达到但可以接近，接近程度取决于满足必要条件的程度。在实践中，限制终端设备的成本至关重要，而这反过来又可能导致对频率范围的不完全利用。

在本文的某些部分，讨论限于理想的电报系统，并且上述（第4、5和6点）指的就是此类系统的特性。这些理想系统具有某些理想的传输特性；虽然向读者提供了指定合适的均衡器以产生理想系统的足够信息，但未给出如何构建满足要求的均衡器的信息。本文的范围不包括涉及信号整形设备的成本和详细构造的实际问题。虽然这些主题非常重要，但最好将本文局限于理论。为了防止读者认为缺乏均衡器理论是整个理论的一个致命弱点，请注意关于广义波形的讨论；其中给出了通过整形发送波来处理传输特性中任何残留的不完美，从而任意接近理想情况的方法。最后，在关于干扰的讨论中，提到了在信号传输速率、传输特性等方面偏离理想情况的影响。

符号

- $A(t)$ 指数导纳。
 A_n, A 傅里叶级数中第 n 项余弦项的系数。
 a_h, a 第 h 个信号元素的幅度因子。
 a 公式中的通用量。
 B_n, B 傅里叶级数中第 n 项正弦项的系数。
 b_h, b 矩形阶梯信号元素第 h 个阶梯的幅度。
 b 公式中的通用量。
 b, b_0, b_1, b_2 电纳（转移导纳的虚部系数）。
 C_n 鉴别因子的实部。
 C'_n, C''_n 在附录 IV 中定义。
 γ (204 接近 1 的数值因子。
 δ 频率的任意增量。
 $E(t)$ (20 作为 t 的函数的波（通常是电压波）。
 e (204 自然对数的底。
 $F(\omega), F$ 形状因子。
 $F'(\omega), F''(\omega)$ 在附录 IV 中定义。
 $F_0 F_\Delta$ 特定的形状因子。
 $f(t)$ (20 波形。
 g, g_0, g_1, g_2 电导（转移导纳的实部）。
 $g(t)$ 载波的包络。
任何正整数，表示信号元素的阶数。
 $H(\omega) \sin \omega/4s Y(\omega)e^-$ 的缩写。
 θ 载波的相位角。
 $I(t), I$ 作为 t 的函数的波。
 I_h 由第 h 个信号元素产生的波。
 i 虚数单位， $i^2 = -1$
整数或零。
 λ 积分符号下的变量。
 m 整数或零。
 N 信号一次重复中的信号元素数量。
 n 任何整数或零，表示正弦分量的阶数。
 p 信号重复频率的 2π 倍。
整数或零。
 R 常数。
下标，指接收端。
 S_n, S 鉴别因子虚部的系数。
 S'_n, S''_n 在附录 IV 中定义。

s 信号传输速率。

下标，指发送端。

T 一次信号重复的持续时间。

t, t' 时间。

τ 时间的任意间隔。

$Y(\omega), Y, Y_0$ 转移导纳。

Y_1 和 Y_2 是 Y 的分量。

\bar{Y} Y 的共轭。

ϕ 给定电路的相移。

当为正时，等于 $+2\pi$ 乘以频率；当为负时，等于 -2π 乘以频率。

ω 角频率。

ω_c 载波频率的 2π 倍。

初步讨论

一个简单的电报系统是通过在一端将电报电键和电池与线路串联连接而获得的，线路的另一端连接到一个发声器，系统的两端都接地。通过打开和关闭电键来传输信号，如果系统设计正确且调整得当，这会导致接收端发声器的相应移动。假设希望通过系统传输莫尔斯字母 a 。这可以通过在一个单位时间内闭合电键，打开一个单位时间，闭合三个单位时间，最后打开足够长的时间以确保接收操作员信号完成来实现。这个简单的电报系统说明了电报通信的两个特征（此处使用该术语），有助于将电报与其他形式的电气通信区分开来。这些特征是：

1. 时间被划分为近似相等的单位，称为时间单位。
2. 存在有限数量的状态，并且每个时间单位以这些状态中的一个为特征。

在所给的简单示例中，第一个时间单位以闭合为特征，结果是字母 a 的“点”。第二个时间单位以打开电键为特征。因此，状态总数是两个：打开和关闭。这与电话的情况形成鲜明对比，在电话中，既没有各个时间间隔之间的简单数值关系，也没有有限数量的可能电流值。

在这个简单的例子中，新状态在整个系统中建立起来的速率在打开和关闭时通常不同。这是因为终端阻抗和施加的电压都发生了变化。如果电键被安排为用等于电池阻抗的阻抗替代电池，则系统在数学上会更简单。在本文中，将假设当一个状态被另一个状态替代时阻抗不会改变。这对于极电报法大体成立，但对于单线电报法则不成立。

在所讨论的系统中，有两种状态：电池和无电池。在通常的极电报形式中，也有两种状态，对应于在发送端施加的正负电池电位。在众所周知的海底电报形式中，有三种状态，对应于正电池、负电池和接地或零电压。在整篇论文中，除非另有说明，讨论将适用于任意数量的状态，因此将包括作为特殊情况的枚举情况。

由于电报电路的失真效应，最初与给定时间单位相关联的总信号波部分不会在整个过程中保持局限于一个时间单位。源自连续时间单位的波形部分存在重叠。当然，重要的是跟踪给定信号波贡献的历史，无论它是否延长到比最初占据更多的时间。为此，引入了术语信号元素，并将其定义为归因于给定时间单位的信号贡献。虽然时间单位具有由信号传输速率唯一确定的确定持续时间，但通过使用信号整形，归因于特定时间单位的信号元素可以扩展到相邻的时间单位。

在术语“状态”下讨论的概念是一个重要的概念，更精确地表述它是可取的。将假设，除非另有说明，连续信号元素的形状是相同的，因此它们仅相差一个因子，该因子可能因元素而异。例如：在海底电缆系统的情况下，施加电压的波形在所有三种状态下都是相同的，是矩形的，并且有三个比例因子 $+a$ 、 0 和 $-a$ 。在一般情况下，任何信号元素都可以由乘积表示

$$a_h f(t)$$

其中 a_h 是一个实因子，可能因信号元素而异，而 $f(t)$ 是时间的函数。当然， t 的原点是相对于信号元素固定的瞬间。函数 $f(t)$ 将被称为波形。它由发送端的波形以及发送端到所考虑点之间的系统传输特性决定。它不受在系统上传输的特定信号或信息形式的影响。因子 a_h 将被称为幅度因子。它因信号元素而异，但在系统的所有部分中相同，实际上，在传输相同信号的所有系统中都相同。

信号传输速率 s 通常以每秒点数指定，定义为每秒信号元素数除以二。

直流电报以矩形信号元素为特征；在整个时间单位内电压保持恒定。

电报电路可以被视为一个网络，在其上在一个点（称为发送端）施加一个信号波，并在另一点（称为接收端）导出信号波。在给出的示例中，发送波是电压波。为了使讨论适用，这不一定是必需的。发送波可以是电流波，甚至不必是电的。通过提供合适的耦合，发送波可以是机械的，或者以光束变化的形式。所有要求是系统应该是线性的，包括机械和电路元件之间的耦合。类似地，对于接收端，可以考虑接收设备两端的电压、通过它的电流或接收设备的运动作为接收波；前提是该设备是线性的。一个重要的排除项是普通的电报继电器，它配备有止动装置，因此是非线性设备。另一方面，虹吸记录仪可能是基本线性的。本文不涉及机械阻抗以及机械和电气阻抗元件之间耦合的理论。

信号传输速率与传输频带之间的比例关系

假设所考虑的信号以相等间隔无限期重复将有助于讨论。虽然这很方便，但它并不构成对分析通用性的真正限制，因为重复间隔可以做得尽可能大。没有什么能阻止我们使间隔非常大，例如一小时或一年。

首先考虑由任意数量的元素和任意有限数量的不同幅度因子（电流值）组成的所有任意信号，并无限重复多次的情况。这样的周期波可以分解为直流和一系列正弦分量。最低频率分量的周期等于信号重复的周期。下一个分量具有双倍频率或第一分量周期的一半。第三分量具有三倍频率或三分之一周期，依此类推。当然，某些分量的幅度可能为零，即完全缺失。虽然总有一个确定的最低频率分量，但通常没有最高分量；换句话说，分量总数通常是无限的。

传输介质可能会改变正弦分量的幅度和相位。其中一些可能被基本完全抑制。此外，介质可能会引入分量，因为它非线性或因为存在干扰波。最终结果是原始波的变形。

现在考虑另一个信号，除了发送波的信号元素持续时间减半这一区别外，其他都与讨论过的信号相同，也就是说，一切都以两倍的速度发生，信号重复频率是两倍。显然，正弦项的分析与刚刚考虑的情况逐项对应，区别在于对应项的频率正好是两倍。现在，如果第二个电报系统传输高达第一个系统两倍频率的电流，并且如果此外，所传输的电流在衰减、相移、干扰和其他修改因素方面受到与第一个系统中相应电流（即一半频率的电流）相同的处理，那么第二种情况下的接收波将是第一种情况下的波的精确对应物；也就是说，它的变形将是相同的。概括来说，可以得出结论：对于接收信号的任何给定变形，传输频率范围必须与信号传输速率成正比增加，并且系统在任何对应频率下的影响必须相同。结论是频带与速率成正比。

检查现有电报系统可以发现，实际上，关联带宽和线路速率的因子因系统而异。原因是不同系统以不同的效率利用可用范围。首先，各种分量在不同系统中遭受不同的衰减和相位变化。其次，干扰因系统而异；并且还存在次要的不完美之处。那么问题出现了：在理想条件下，这个因子的极限值是多少？以下分析的目的之一是回答这个问题。

直流波分析

最初，我们将假设一个在所有相关方面都理想的系统。稍后，我们将指出如何近似这些理想条件，以及轻微偏离理想条件会有什么影响。

让我们再次考虑一个以规则间隔重复的任意信号。如上所述，这样的信号有无限多个分量，并且可以用傅里叶级数表示。假设在接收端测量每个分量，并且假设对已知的电路对每个分量的影响进行了适当的补偿，那么就可以构建每个分量在施加到发送端时的样子。如果所有分量都被接收和测量，就有可能重建原始的、无变形的波。现在，对于给定的波形（在这种情况下是矩形的），施加波各个正弦分量的幅度和相位角由信号元素的数量 a_h 决定，并且可以建立方程来计算每个分量。相反，如果选取足够多的方程使得 a 被完全确定，这些方程就可以求解。现在， a 的数量是有限的，而正弦分量的数量是无限的。从简单的方程理论可以得出，所有方程不可能是独立的；事实上，由于每个分量（除罕见例外）² 产生两个常数，因此大约等于信号元素数量一半的分量数应该足以完全确定 a ，前提是这些分量被选择为相互独立。结论是，需要完全了解 $N/2$ 个正弦分量才能完全确定波。下面将证明这个数目也是充分的。

将波分解为其正弦分量的数学工作在附录 I 中完成。那里表明，如果 N 个连续信号元素的幅度因子被赋予值 a_1, a_2, a_3 等，直到 a_N ，并且然后信号被重复，则施加电压的表达式可以写成以下形式：

$$E(t) = A_0/2 + A_1 \cos pt + A_2 \cos 2pt + \dots + B_1 \sin pt + B_2 \sin 2pt + \dots$$

其中 $p/2\pi$ 是信号重复的频率， A 和 B 可以从公式计算

$$(A_n - iB_n) = F(\omega)(C_n - iS_n)$$

其中 $F(\omega) = \frac{8 \sin \omega/4s}{\omega/s}$

$$C_n = (1/N)(a_1 \cos n\pi/N + a_2 \cos 3n\pi/N + \dots + a_N \cos(2N-1)n\pi/N)$$

$$S_n = (1/N)(a_1 \sin n\pi/N + a_2 \sin 3n\pi/N + \dots + a_N \sin(2N-1)n\pi/N)$$

s 是信号传输速率，并且

ω 是分量频率的 2π 倍。

$F(\omega)$ 与 a 的值无关，仅取决于 n 和一个信号元素内的波形，在当前情况下是矩形的。例如，如果使用受限制的信号，它的值就会改变。为了方便，可以称之为形状因子。应该强调 $F(\omega)$ 与传输的信息无关。另一方面， $C_n - iS_n$ 与所采用的波类型无关，但仅取决于所考虑的特定信号。因此， $C_n - iS_n$ 由正在传输的特定信息决定，并进而完全决定该信息。这个因子可以称为鉴别因子。检查 C_n 和 S_n 的表达式揭示了上面预测的依赖关系，并将使我们能够选择独立的分量。 C_n 和 S_n 都由周期项组成，即余弦和正弦。如果 n 的值增加 $2N$ ，每个周期函数的参数增加 2π 的整数倍，因此保持不变。类似地，如果 n 增加 N ，参数增加 π 的奇数倍，所有项简单地改变符号。此外，如果为值 $N - n$ 写下 C_n 和 S_n 的表达式，并且记住 $\cos(\pi - x) = -\cos x$ 和 $\sin(\pi - x) = +\sin x$ ，将会发现

$$C_{N-n} = -C_n \text{ and } S_{N-n} = S_n$$

结果可以写成

$$C_{N+n} = -C_n, S_{N+n} = -S_n$$

$$C_{2N+n} = C_n, \text{ and } S_{2N+n} = S_n$$

最后公式的连续应用得到

$$C_{2kN+n} = C_n, \text{ and } S_{2kN+n} = S_n$$

其中 k 是任意整数。

这些关系在图 1 中说明，其中

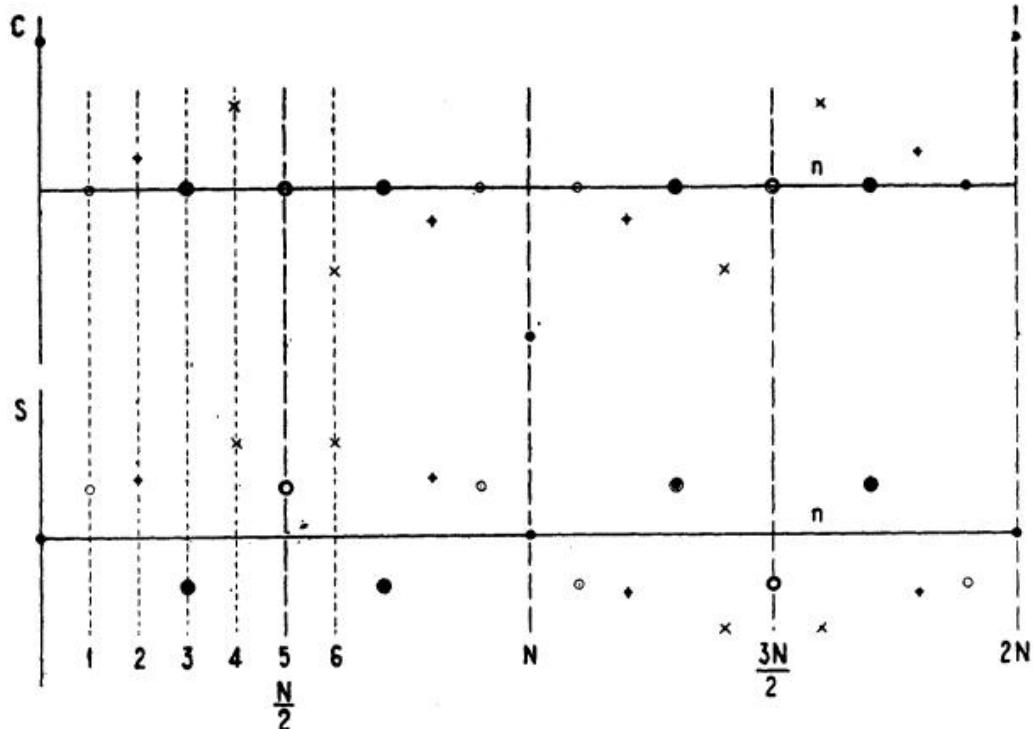


图 1 - C 信号的鉴别因子

显示了连续频带的对称性和冗余性。各个频带中的对应点由相同符号表示

鉴别因子作为 n 的函数绘制。图中所示的信号可以称为 c 信号。它由 10 个信号元素组成，其连续的幅度因子是 $1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0$ 。检查该图将显示宽度为 $N/2$ （在此特定示例中为 5）的相邻频带中点之间的对称关系。假设 c 信号在 T 秒内发送。那么对于五次谐波的频率是 $5/T$ （通常是 $N/2T$ ），这也是信号传输速率。

如果在任何一个频带中确定了 C_n 和 S_n ，则从零到无穷大的整个范围内的值（以及 $F(\omega)$ 已知， A_n 和 B_n 的值）立即可知。每一个这样的频带包含有关信号的所有信息，这些信息包含在从零到无穷大的全部频带中。一个这样的频带（或其等效物）对于确定原始信号是必要且充分的。将理解，关于 $F(\omega)$ 的信息不是这里所考虑意义上的信息。接收端不需要拥有关于发送端 $F(\omega)$ 的任何信息，因此，不需要分配频率范围或线路时间来传输此类信息。为指定一个频带而必须传输的频率范围在数值上等于信号传输速率。

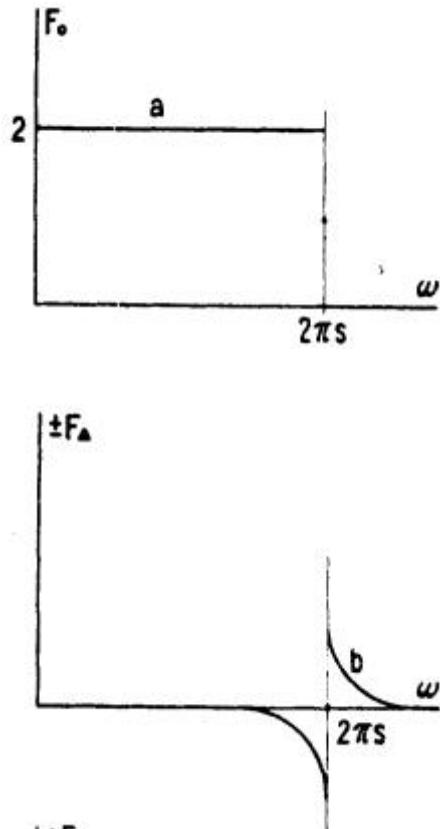
如果所选的传输频带使得形状因子在其中某点为零，则会出现特殊情况。那么对应于该项的 A_n 和 B_n 将为零，并且 C_n 和 S_n 的值是不确定的。这种情况的数学处理将漫长而困难，并且，此外，认为这些情况实际意义不大。因此，将不再进一步讨论它们。

无失真传输

显然，在有限的传输频率范围和矩形发送波的情况下，波形将发生变形。然而，可能存在变形的波，并存在一个接收设备使得接收到完美的信号。例如，假设接收设备记录每个信号元素对应的时间单位中间时刻的波值。那么唯一重要的是该瞬间的波值；在中间间隔内波变形多少并不重要。为了方便，将引入术语无失真波，并将其定义为产生完美信号的波。无失真波可能变形，也可能不变形。无失真波的标准将随接收信号的方式而变化。在本文中，除非另有说明，将采用刚刚指示的示例作为标准，即，当任何时间单位的中间时刻的值与对应元素的幅度因子成正比时，称波为无失真。在附录 II-A 中，计算了这种波的形状因子。当系统的传输特性使得接收波具有此形状因子时，无论采用多少不同的幅度因子，接收波都是无失真的。将理解，此标准仅是示例性的。稍后将说明和讨论替代标准，以使读者能够为自己感兴趣的系统构建合适的标准。

在继续确定确保刚刚讨论的理想形状因子的电报系统特性之前，通过考虑哪些其他形状因子能够产生相同结果来稍微扩展主题是值得的。附录 II-A 推导了更通用的满足理想要求的形状因子。在图 2 中，*a* 是上面推导为理想的形状因子的示意图。附录 II-A 表明，以 $2\pi s$ 为中心的对称形状因子，如图 2 中 *b* 所示，对信号元素中间时刻的电流值没有任何贡献。因此推导出，如图 *c* 所示的形状因子在相同意义上也是理想的。显然，存在无限多个这样的形状因子。此外，还有无限多个纯虚形状因子，它们具有关于 $2\pi s$ 的对称性，且对信号元素中间时刻的波值没有贡献。当然，这无限多个虚形状因子中的每一个都可以与上面提到的无限多个实形状因子中的任何一个组合。

为了更好地可视化迄今为止获得的理论结果，将根据电报电路的设计来阐述这些结果。为了使一个矩形电压波（其形状因子为 F_s ）的应用能够产生刚刚讨论的无失真接收波（其形状因子可取为



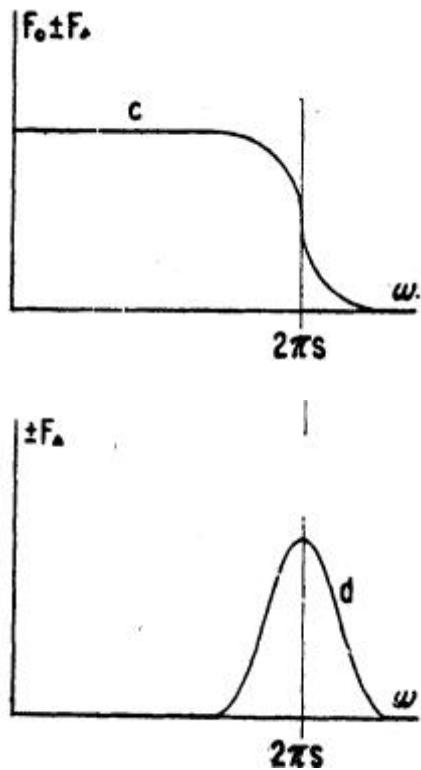


图 2 - 理想形状因子

这里无失真传输的标准是每个信号元素中间的高度应无失真

a 和 c 表示产生无失真波的实形状因子， $-b$ 和 d 表示可以添加而不产生失真的形状因子，前者表示实值，后者表示虚值

F_r ），电报电路必须具有什么特性？一个答案是电路的转移导纳 Y 应使得 $F_r = YF_s$ 。将理解，量 Y 和 F_r 可能是复数。如果满足刚刚陈述的条件，传输将是瞬时的。这对转移导纳 Y 施加了不必要的限制。如果所有分量都遭受恒定的滞后 τ ，信号仍将是无失真的。如果所有分量都被赋予一个相位滞后，当以角度度量指定时，该滞后与频率成正比，则接收波的形状不变

4. 术语导纳和符号 Y 用于表示两个波的数值之比，无论其性质如何。这是对习惯用法的方便概括，在习惯用法中，此术语仅限于比率的分子是电流，分母是电压的情况。

但只是在时间上发生了位移，这当然是允许的。这导致以下表达式：

$$Y = \frac{F_r}{F_s} (\cos \omega \tau - i \sin \omega \tau)$$

用于转移导纳，其中 τ 是延迟。一旦通过此方法找到了所需的 Y 值，问题就简化为测量电路的相位和衰减特性，并设计合适的衰减和相位校正器，使总转移导纳等于 Y 。衰减和相位校正器的实际设计不在本文的讨论范围之内。

添加了附录 II-B 以进行具体应用。可以省略它而不会损失理论的连续性。

前述完美传输的标准是时间单位中点的电流值与施加电压成恒定比例。将注意到，这与普通的双状态电报情况有很大不同，在普通电报中，完美传输的标准是电流通过平均值（或其他特定值）的瞬间之间的间隔与发送端的相应间隔相同。上述未使用此标准的主要原因是，在一般情况下使用两个以上状态时，相应的接收方法不那么容易获得。然而，它具有相当大的实际重要性，因此，在（附录 III）中给出了具有所述特性（即在普通陆线电报中给出无失真波）的波的形状因子的计算。虽然附录 III 中的数学是针对任意数量的幅度因子进行的，

但建议读者设想只有两个幅度因子来简化理解。那么讨论适用于普通的陆线电报。在那里发现，满足此条件的接收波形状因子是

$$F_r = 2 \cos \omega / 4s, \text{ 当 } 0 < \omega < 2\pi s$$

$$F_r = 0, \text{ 当 } 2\pi s < \omega$$

对于直流电报（矩形发送波），这对应于由以下方程给出的传输特性：

$$\begin{aligned} Y &= \frac{F_r}{F_s} (\cos \omega \tau' - i \sin \omega \tau') \\ &= \frac{\omega}{4s} \cot \frac{\omega}{4s} (\cos \omega \tau' - i \sin \omega \tau'), \end{aligned}$$

当 $0 < \omega < 2\pi s$ 且 $Y = 0$, 当 $\omega \geq 2\pi s$

这个特定的形状因子的缺点是幅度是信号组合的函数；特别是，长连续的极性反转最终幅度趋近于零。为了克服这个问题，可以添加关于信号频率对称的形状因子，如图 3 所示，并在附录 III 中更全面地讨论。

为了进一步说明该方法，还计算了具有以下特性的接收波的形状因子：一个时间单位下波的面积与发送端的电流成正比。这种情况可能在某些图片传输方法中具有意义，其中在小时间间隔内的积分曝光可能是重要的。无失真传输的其他标准也自然出现。例如，当波在时间单位的中间五分之一部分的面积与发送电流成正比时，可以认为信号无失真。这种情况可能对某些类型的打印机接收感兴趣，其中每个元素中间五分之一部分流动的电流可能是有意义的量。作为另一个例子，可能是接收电流的斜率以及电流值决定了接收设备的操作，在这种情况下， $aI + b\frac{dI}{dt}$ 这样的函数可能是定义无失真传输的合适量。认为对任何特定接收设备感兴趣的读者，无论是制定合适的标准还是根据所示方法计算相应的形状因子都不会有困难。同时，将取信号元素中心的电流作为标准。

载波分析

类似于上面讨论的直流波的载波电流波的分析在附录 IV 中进行。那里表明，当不采取措施关联信号传输速率和载波频率时，不再有

像直流电报情况下观察到的那样简单地分离为形状因子和鉴别因子。正弦分量的表达式是：

$$A_n - iB_n = F'(\omega) (C'_n - iS'_n) + F''(\omega) (C''_n - iS''_n)$$

然而，如果载波频率取为信号传输速率的偶数倍，使得载波电流与 $\cos(2\pi qst - \theta)$ 成正比，其中 q 是偶数，则发现

$$C''_n - iS''_n = e^{i2\theta} (C'_n - iS'_n) = e^{i(\pi q/2 + \theta)} (C_n - iS_n)$$

所以

$$\begin{aligned} A_n - iB_n \\ = [e^{-i(\pi q/2 + \theta)} F'(\omega) + e^{i(\pi q/2 + \theta)} F''(\omega)] (C_n - iS_n) \end{aligned}$$

可以写成

$$A_n - iB_n = F(\omega) (C_n - iS_n)$$

其中 C_n 和 iS_n 具有与直流情况下相同的值。

$F(\omega)$ 在当前情况下当然是不同的，并且除其他因素外，还取决于信号元素开始时载波的相位。更具体地说，形状因子的值由以下表达式给出：

$$F(\omega) = e^{-i(\pi q/2+\theta)} F'(\omega) + e^{i(\pi q/2+\theta)} F''(\omega)$$

$$F'(\omega) = \frac{4s \sin(\omega_c - \omega)/4s}{\omega_c - \omega}$$

$$F''(\omega) = \frac{4s \sin(\omega_c + \omega)/4s}{\omega_c + \omega}$$

附录 IV 表明，当载波频率是信号传输速率的奇数倍时， $(A_n - iB_n)$ 呈现略微不同的形式。然而，无论 q 是奇数还是偶数，以下讨论同样适用。

$F'(\omega)$ 代表关于载波频率对称的两个频带，每个频带除符号外与为直流情况确定的频带相同。 $F''(\omega)$ 是一个非对称频带，干扰了上下边带之间的对称性。附录 IV 表明，这个因子是由于调制波中存在高于载波频率的分量引起的。因此，抑制这个因子并保持边带对称的一种方法是在调制发生前从调制波中移除这些分量。使形状因子对称的第二种方法是使用均衡设备，该设备被设计为将每个分量乘以比值

$$\frac{F'(\omega)}{F'(\omega) + e^{i2\theta} F''(\omega)}$$

最后应该注意，如果带宽与载波频率相比很小，则 $F''(\omega)$ 与 $F'(\omega)$ 相比很小，因此，无需任何特殊预防措施即可获得基本对称性。

如果两个边带对称，则

距离载波频率等距的对应频率组合形成一个波，其频率等于载波频率，其包络是一个正弦波，对应于直流情况下的一个分量。包络的频率等于载波频率与形成该对的每个分量的频率之间的差值。由于两个边带相互冗余，对称载波情况（即载波频率位于传输范围中间的情况）中给定信号传输速率所需的总频率范围正好是直流情况下所需的两倍。除此之外，关于所需带宽和接收波理想形状因子的结果与上面直流情况下获得的结果相同，因此无需重复。

显然，这种类型的载波电报在利用可用频率范围方面相对低效，因此探究如何改善这种情况变得非常有意义。一个明显的想法是将载波频率移向可用频带的一个边缘，并按照载波频率与传输范围远边缘之间间隔的比例增加信号传输速率。如果进行这样的实验，除非满足某些严格的要求（如下所述），否则结果将令人失望。不仅不会增加信号传输速率，通常会发现重新定位载波频率反而会降低它。这将在下文和附录 V 中更详细地解释。

更仔细地检查对称载波，我们发现在于两个对称边带中的冗余赋予了接收波一个重要特性。其频率是恒定的，因为零值时刻以恒定间隔分布。将发现此特性将给定频率范围的信息承载能力恢复到与在直流电报中使用的相同范围相同的水平。让接收信号为 $g(t) \sin \omega t$ ，其中因子 $\sin \omega t$ 表示频率是恒定的。考虑一个设备，它有两组输入端子，其响应与施加的两个波的乘积成正比。让施加到一组的波为 $g(t) \sin \omega t$ ，让另一个施加波为 $\sin \omega t$ 。那么一个周期内的平均响应众所周知与 $g(t)$ （即包络）成正比。如果第二个施加波是 $\cos \omega t$ ，则一个周期内的平均响应为零。有多种设备的响应与两个输入的乘积成正比。为了本文的目的，将方便地考虑一个具有一个固定线圈和一个可动线圈的功率计。

相位鉴别。基于这些原理的电报系统（可称为相位鉴别系统）已被提出。提供两个载波

电流，一个可以表示为 $\sin \omega t$ ，另一个为 $\cos \omega t$ 。然后根据单独的信号对每一个进行调制，并将信号的混合物施加到线路上。在接收端，复合信号波被施加到两个功率计上，它们的其他绕组分别由值为 $\sin \omega t$ 和 $\cos \omega t$ 的电流激励。因此，每个功率计响应一个信号，并且基本上没有相互干扰。

显然，在这个系统中，对于给定的带宽，传输的信息总量是未利用相位鉴别的对称载波情况的两倍，实际上与直流情况相同。

单边带传输。我们现在可以开始讨论单边带情况。附录 V 表明，当载波频率从传输频带的中心移开时，接收波可以被认为由三个分量波组成。其中第一个是同相波，并以与低通系统（其带宽等于从载波频率到传输频带远边缘的距离）中直流波相同的方式建立。这显然是我们试图获得的波；如果它单独存在，问题就解决了，上面提到的实验就会成功。第二个波也是同相的，但建立速度较慢，即对应于从载波频率到传输频带较近边缘的距离。由于这些分量同相，它们在任意给定时间代数相加，显然，建立时间往往由较慢的分量决定。因此，将载波从中心移开的正常结果是减慢而不是相反。此外，还有第三个分量波。这是一个正交分量，其大小和建立速率由载波与远边缘的分离超过载波与近边缘分离的频率带宽决定。此外，这个分量不是建立到信号波，而是建立到近似于信号包络的一阶导数的某个东西。显然，必须消除第二和第三个分量。此外，还有一个关于相位校正的重要条件。普通滤波器在传输频带边缘附近会受到相当大的相位失真。重要的是通过适当的方式校正这种相位失真。单边带传输问题现在可以分为三个部分。

1. 相位校正。
2. 消除正交分量，即讨论的第三个分量。
3. 消除缓慢的同相分量，即讨论的第二个分量。

这些问题中的第一个，即相位校正网络的设计，不在本文的讨论范围之内。问题的第二部分，即消除正交分量，通过上述相位鉴别电报的方法解决。问题的第三部分，即消除缓慢的同相分量，通过将载波移向边缘足够远以致其消失来解决。附录中阐述了需要满足的确切要求。

广义波形

已经讨论了两种施加波形，直流电报中使用的矩形波和载波电报中使用的正弦波。将施加波的处理推广到涵盖可能考虑的任何其他波形，并将这两种作为特殊情况包含在内，是很有意义的。将施加限制：连续信号元素除了一个常数因子外是相同的，该常数因子对于各个信号元素被赋予值 a_1, a_2 等。不需要将元素限制在单个时间单位内。它可以重叠到相邻的时间单位。为了便于可视化波形，绘制了图 4，该图指示了施加波如何可能重叠到前面

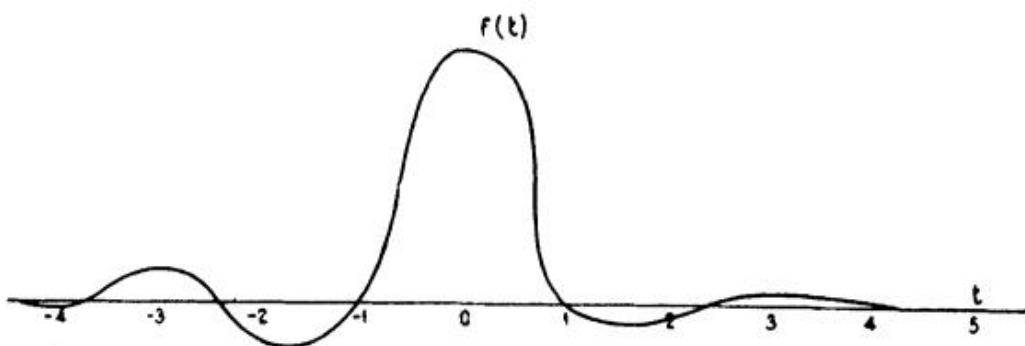


图 4 - 广义波形示例

和随后的元素。在数学上，可以通过说第 h 个信号元素对施加波的贡献由表达式表示来表达

$$I_h = a_h f(t)$$

其中 $f(t)$ 是时间 t 的任意函数，其原点按照惯例取在所讨论信号元素的中心。将记住 a_h 被称为幅度因子， $f(t)$ 被称为波形。顺便提一下，假设波形在各个元素之间相同，排除了载波频率不是信号传输速率偶数倍的载波。因此，我们可以避免分析那些波时出现的一些复杂情况。当然，在任何给定时间的总波是此时存在的所有分量的代数和。

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots$$

傅里叶分析在附录 VI 中给出。那里表明，正弦分量由表达式给出

$$A - iB = F \cdot (C - iS)$$

换句话说，仍然简单地分离为两个因子，形状因子和鉴别

因子。后者与先前情况下获得的相同。形状因子由 $f(t)$ 的已知值通过表达式确定

$$F(\omega) = 4s \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

现在将回顾，接收波的形状因子由表达式给出

$$F_r = YF_s$$

在我们先前的工作中，我们评估了电路的传输特性 Y ，以便对于给定的 F_s 获得所需的 F_r 值。换句话说，通过电路设计获得具有给定发送波的所需接收电流。目前的结果表明，所需的 F_r 也可以通过修改 F_s 来部分获得；换句话说，所需的接收电流可以部分通过电路设计和部分通过在发送端的信号整形来获得。

虽然信号整形和均衡是等效的，但并不意味着它们在实践上同样可行。可以说，在通常条件下，当只需要中等精度时，使用网络更简单；而使用信号整形提供更高的精度但更复杂。

存在无限多种发送波可以导致无失真的接收波。因此，例如，允许使用由一系列矩形波组成的发送信号元素，如图 9 所示；前提是变化之间的间隔不要做得太大。这种情况的计算在附录 VII 中给出。

在论文的引言部分提到，均衡器的设计将不被涵盖。还指出将讨论一种信号整形方法，以弥补由此产生的理论不完整性。当前章节的讨论，以及附录 VII，在该处涉及的事项。

信号波的双重性

从前面的内容可以明显看出，有两种不同的指定波的方法。一种方法基于以时间 t 作为独立变量。这个方面可以称为渐进方面，将信号波视为从第一个到第 N 个以恒定时间间隔相互跟随的一系列信号元素。另一个方面可以称为循环方面，基于以 ω 作为独立变量。这将信号波视为直流和一系列正弦分量的和，从基波开始，并包括至少到第 $N/2$ 次谐波。在循环方面，只需要知道连续分量的幅度和相位。在指定信号时，传输信号花了多少时间并不重要。从经济角度了解信号传输的速度可能有一定意义，但从技术角度来看， t 非常处于背景中。类似地，在波的渐进方面，频率非常处于背景中。指定波不需要它，但具有经济意义，因为了解传输所需的频率范围是有意义的。

现在将列举两个方面下的类似过程和量。信号元素被认为是渐进波时构成信号的基本单位；当被认为是循环波时，相应的基本单位是正弦分量。信号元素用 I_h 表示，整个波用 $I = \sum I_h$ 表示：正弦分量由 A_n 和 B_n 指定，整个波由 $I = \sum (A_n \cos npt + B_n \sin npt)$ 表示。传输的信息在循环方面由鉴别因子 $C_n - iS_n$ 指定；在渐进方面，这个职责由幅度因子 a_h 承担。

波形 $f(t)$ 指定信号元素的形状或形式，包括变形程度。循环情况下的类比是形状因子 $F(\omega)$ 。由电路或任何电路部分引起的波的改变，在循环方面由相位和幅度变化指定；为明确起见，可以将其视为转移导纳 $Y(\omega)$ ，它是 ω 的函数，并且可以定义为由于在驱动点施加单位正弦波而在受驱动点产生的波（指定幅度和相位）。渐进情况下的类比是指数导纳 $A(t)$ ，可以定义为由于突然在驱动点施加单位波（恒定）而在受驱动点产生的作为 t 的函数的波。

为了从一种考虑方法转换到另一种，需要拥有可用的方程来将适合一种方法的量集转换到适合另一种方法的量集。这些方程分为三组。第一组关联波形和形状因子，定义所用波类型的量。第二组关联鉴别因子和幅度因子，定义特定信号的量。第三组关联转移导纳和指数组合，定义电路对信号波影响的量。

方程是：

$$\begin{aligned} F(\omega) &= 4s \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \\ f(t) &= \frac{1}{8\pi s} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{-i\omega t} d\omega \\ C_n - iS_n &= \frac{1}{N} \sum_{h=1}^N a_h e^{-i(2\pi n/N)(h-1/2)} \\ a_h &= \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} (C_n - iS_n) e^{i2\pi n(h-1/2)/N} \\ Y(\omega) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \omega e^{-i\omega t} A(t) dt \\ A(t) &= \frac{Y(0)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Y(\omega)e^{i\omega t}}{i\omega} d\omega \end{aligned}$$

参数 ω 的负值不需要负频率的概念。频率可以被认为是无符号的，并且由 ω 的正值和负值或两者来表示。

使用给定或通过方程找到的任一量集，可以在两个系统中进行相应的计算。例如，当发送波的形状因子和转移导纳已知时，可以从表达式计算接收波的形状因子

$$F_r(\omega) = F_s(\omega)Y(\omega)$$

类似地，如果发送波形和指数组合已知，则可以从表达式计算接收波形

$$f_r(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) f_s(t - \lambda) d\lambda$$

或等效的其他形式。此外，如果两个串联连接的电路的传输特性已知，则它们的组合特性可以从

$$Y(\omega) = RY_1(\omega)Y_2(\omega)$$

在一个系统中计算，并从

$$A(t) = R \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} A_1(\lambda) A_2(t - \lambda) d\lambda$$

或等效形式计算。 R 是这些公式中的常数。本文的目的不是超出明确展示两个系统的并行性和各自自足性所必需的程度深入探讨电路关系。关于各种 ω 函数之间关系的更全面阐述，请读者参考 K. S. Johnson 的著作《电话通信传输电路》，关于 t 函数的更全面处理，请参考 J. R. Carson 的著作《电路理论和运算微积分》。

上一段所示的公式表明，两种函数之间的基本并行性延伸到了接收波的计算。存在一个差异，从纯理论的角度来看，这个差异并不重要，但从实际计算的角度来看很重要。可以看到，在 ω 函数的情况下，操作包括两个特性的乘法。实际上，通过以通常的方式用 Y 的对数函数表达特性，可以将这些操作简化为加法。在 t 函数的情况下，计算要复杂得多，涉及微分、两个函数的乘法以及积分的求值。微分和积分过程通常是本质上的图形操作，无法像

本质上是算术的过程那样以相同的精度执行。因此，作为一个实际问题，安排计算以便可以用 ω 函数进行是非常有利的。

重要的事实是，对于电报目的，两种方法在结果上基本等效，尽管过程和工作量不同。这种差异的根本原因是，根据本文发展的理论，不需要计算作为 t 的函数的接收波。⁵

本文使用的分析方法是傅里叶级数法。应该在此提及，存在一种称为傅里叶积分法的替代方法。傅里叶积分可以产生与本文中获得的数学公式基本相同的公式。此外，如果小心处理，可以获得基本相同的解释。附录 IX 阐述了级数和积分之间的关系，并指出了应用积分时需要特别注意的问题。

干扰

到目前为止，一直假设电路没有外部干扰。在任何实际情况中，总是存在一些干扰，有必要将其考虑在内。干扰波的作用是将其自身叠加在信号波上，并给合成的接收波一个不同的值，否则它不会有这个值。如果干扰足够大，接收波将被解释为不同于预期。如果干扰是不可预测的（正的可能性与负的可能性一样大），其算术值必须小于信号传输中采用的任何两个电流值之间差值的一半。事实上，不同幅度因子的数量，从而可以在电路上传输的信息量，是明确地

5. 海底电缆电报，J. W. Milnor, A. I. E. E. 学报, 第 41 卷, p. 20; 特别是第 38 页最后一段的建议。

受干扰限制。因此，考虑干扰的性质并确定它可以在多大程度上（如果有的话）被克服是很重要的。

干扰可能有很多种类和来源，包括串扰和双工不平衡等电报电流。我们将更进一步，将电报波中由于偏离理想电报电流而产生的部分也视为干扰。因此，实际波与期望的理想波之间的差异就是干扰。认识到这种约定不符合通常用法，但为了本文的目的，由于所产生的简化而被证明是合理的。为了将这种干扰与其他形式区分开来，可以称之为特性干扰。术语符号间干扰也用于这种效应。它与特性失真密切相关。[6]

干扰通常可以通过适当的方式减少：可以通过改善平衡来减少双工不平衡电流；可以通过改善传输特性来减少特性干扰；可以通过减少耦合来减少来自其他电路的干扰。但是，当一切可行的方法都用来减少干扰时，通常会有残留的干扰导致信号失真。干扰的总量设定了可以采用的明显幅度因子的数量的限制，从而设定了可以在电路上传输信息的速率。可以容忍的干扰取决于信号电流中的能量大小。这再次受到线路功率承载能力的限制，要么是因为某些设备过载，要么是因为对其他电路的干扰变得太大。

确定最适合于克服给定干扰的信号功率谱分布是相当有趣的。将假设最大功率受到明确限制。附录 VIII 表明，当形状因子从零到频率 s 为常数，对于其他频率为零时，平均总功率与

$$\frac{1}{N} \sum_{h=1}^N a_h^2$$

成正比，因此，对于这种情况，所有由幅度因子的极值组成的信号（假设正值和负值在数值上相等）对系统的负载程度相同。如果使用其他形状因子，通常会导致只有最有利的信号组合才能达到最大功率；对于其他组合，功率会更小。结论是，为了

6. 电报失真的测量，Nyquist, Shanck 和 Corv, A. I. E. E. J.L., 第 46 卷, p. 231, 1927.

在当线路的功率承载能力是限制因素时克服干扰，刚刚考虑的形状因子在引入干扰的点是最合适的。

在讨论上面的干扰时，假设电路是线性的。如果某些电路元件是非线性的，结果可以被视为在这些元件中产生的干扰电流。这种干扰是可预测的，理论上可以通过引入产生补偿失真的元件来消除或减少它。

已经假设信号元素的持续时间都相等，并且系统被专门设计来处理该特定持续时间的信号元素。换句话说，系统被设计用于给定的信号传输速率，而不是其他更快或更慢的速率。很自然地会询问，当速度与系统设计的速度略有不同时，信号元素长度相等，会产生什么影响。

假设一个系统被设计为在信号传输速率 s 下无失真，并假设它被用来传输速率为 γs 的信号，其中 γ 是一个与 1 相差不大的因子。设系统使得导纳由下式给出

$$Y(\omega)(\cos \omega\tau - i \sin \omega\tau)$$

那么一个在速率 γs 下给出无失真传输的导纳由表达式给出

$$Y(\omega/\gamma)(\cos \omega\tau - i \sin \omega\tau)$$

第一个表达式给出的实际导纳与第二个表达式给出的理想导纳之间的差异代表了一个引起干扰电流的导纳。忽略恒定延迟，该导纳由表达式给出

$$Y(\omega) - Y(\omega/\gamma)$$

对应于该导纳的电流是来源于速度改变的那部分特性干扰。

可以从该表达式推导出干扰波的公式，但为了我们的目的，注意到特定频率下干扰波与信号波的比率就足够了。这个比率由表达式给出

$$\frac{Y(\omega) - Y(\omega/\gamma)}{Y(\omega)}$$

或近似地

$$\frac{(\omega - \omega/\gamma)}{Y(\omega)} \cdot \frac{dY}{d\omega} .$$

将会看到，对于理想速度和实际速度之间的微小差异，失真量很大程度上由转移导纳曲线的斜率决定。转移导纳变化越突然，信号传输速率的微小变化伴随的干扰就越大。

假设速度变化是均匀的，即所有信号元素按相同比例延长或缩短。当速度变化没有这种规律性时，即当一些信号元素被缩短，一些被延长，并且各个元素不是按相同比例改变时，探究会发生什么具有相当大的实际意义。首先考虑一个由单个具有有限电流值的元素组成的信号，其余信号元素的电流值为零。显然，当电流值为零时，信号元素的末端取在哪里并不重要，因此，这个特定信号可以被认为属于已经讨论过的情况。换句话说，任何一个元素引起的干扰如上所述。此外，在任何时刻的总干扰电流是所有元素引起的干扰之和。由此可以得出结论，在一阶近似下，干扰与上述为规则延长或缩短推导出的干扰相同。

已经指出，如果来自外部来源的干扰保持较低，转移导纳满足某些要求，并且信号传输速率保持恒定，则有可能以非常小的失真传输信号，使用的频率范围仅略大于信号传输速率。保持失真小的一个优点是，可以采用大量电流值，从而增加线路的信息承载能力。如上所述，总干扰电流应小于相邻电流值之间差值的一半。在实际实践中，可能会发现最好保持在这些限度之内相当多，以留出明确的裕量。另一方面，将干扰降低到超出信号能够被确定且容易解译的程度是没有意义的。

附录 I.

直流波分析。需要求出一个持续时间为 T 秒、由 N 个矩形信号元素组成并无限重复的电报波的正弦分量。用 $E(t)$ 表示任何时刻的波值，其中

$$E(t) = a_1 \text{ 对于 } 0 < t < T/N, (\text{时间单位 } 1),$$

$$E(t) = a_2 \text{ 对于 } T/N < t < 2T/N, (\text{时间单位 } 2),$$

$$E(t) = a_h \text{ 对于 } (h-1)T/N < t < hT/N, (\text{时间单位 } h).$$

表示为傅里叶级数，该波为

$$E(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos npt + B_n \sin npt), \quad (1)$$

其中 $p/2\pi = 1/T$ 是基波的频率。问题是从 a 的已知值找到 A 的表达式

和 B 以便计算它们。

将方程两边乘以 $\cos kptdt$ 并从 0 积分到 T 。在这个表达式中 k 是一个正整数。

$$\begin{aligned} \int_0^T E(t) \cos kptdt &= \frac{A_0}{2} \int_0^T \cos kptdt \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^T \cos kpt \cos nptdt \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^T \cos kpt \sin nptdt, \end{aligned} \quad (2)$$

根据一个众所周知的三角公式

$$\cos kpt \cos npt = \frac{\cos(k+n)pt + \cos(k-n)pt}{2}.$$

积分在一个整数个周期上进行，因此结果等于零，唯一的例外是当 $n = k$ 时，被积函数的平均值为 $1/2$ ，积分为 $T/2$ 。

同样，

$$\cos kpt \sin npt = \frac{\sin(k+n)pt - \sin(k-n)pt}{2}$$

这些的积分显然也为零。因此，方程 (2) 的右边简化为单项

$$A_k T/2.$$

方程 (2) 的左边可以写成

$$a_1 \int_0^{T/N} \cos kptdt + a_2 \int_{T/N}^{2T/N} \cos kptdt + \text{等等.}$$

或

$$\sum_{h=1}^N a_h \int_{(h-1)T/N}^{hT/N} \cos kptdt.$$

将 t 的原点改变到每个积分所涉及的时间单位的中心，即，令

$$t = (h - 1/2)T/N + t'$$

并去掉撇号，我们得到：

$$\begin{aligned} & \sum_{h=1}^N a_h \int_{-T/2N}^{T/2N} \cos \left[k \left(h - \frac{1}{2} \right) \frac{T}{N} p + kpt \right] dt \\ &= \sum_{h=1}^N a_h \left[\cos k \left(h - \frac{1}{2} \right) \frac{T}{N} p \int_{-T/2N}^{T/2N} \cos kpt dt \right. \\ &\quad \left. - \sin k \left(h - \frac{1}{2} \right) \frac{T}{N} p \int_{-T/2N}^{T/2N} \sin kpt dt \right]. \end{aligned}$$

第二项中的积分等于零。重新排列并用 n 替换 k ，这个表达式变为：

$$\int_{-T/2N}^{T/2N} \cos np t dt \sum_{h=1}^N a_h \cos n \left(h - \frac{1}{2} \right) \frac{T p}{N} = \frac{A_n T}{2}. \quad (3)$$

积分的值是：

$$\frac{2 \sin npT/2N}{np}.$$

记住 $T \cdot p = 2\pi$, $N/2 \cdot T = s$, 信号传输速率, 以及 $np = 2\pi n/T = \omega$, 角频率, 结果变为

$$\frac{A_n T}{2} = \frac{2 \sin \omega/4s}{\omega} \sum_{h=1}^N a_h \cos \frac{2\pi n}{N} \left(h - \frac{1}{2} \right)$$

或

$$A_n = \frac{8 \sin \omega/4s}{\omega/s} \frac{1}{N} \sum_{h=1}^N a_h \cos \frac{2\pi n}{N} \left(h - \frac{1}{2} \right). \quad (4)$$

现在已经为除零以外的所有 n 值建立了这个公式。如果对方程 (1) 不乘以 $\cos kpt$ 进行相同的过程，将会发现这个公式实际上对 A_0 也成立。此外，如果将方程 (1) 乘以 $\sin kpt$ 并执行相同的操作，将会发现

$$B_n = \frac{8 \sin \omega/4s}{\omega/s} \frac{1}{N} \sum_{h=1}^N a_h \sin \frac{2\pi n}{N} \left(h - \frac{1}{2} \right). \quad (5)$$

$$\text{令 } F(\omega) = \frac{8 \sin \omega/4s}{\omega/s} \quad (6)$$

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^N a_h \cos \frac{2\pi n}{N} \left(h - \frac{1}{2} \right) \quad (7)$$

$$S_n = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^N a_h \sin \frac{2\pi n}{N} \left(h - \frac{1}{2} \right), \quad (8)$$

现在，表达式 (4) 和 (5) 可以写成

$$A_n - iB_n = F(\omega) (C_n - iS_n) \quad (9)$$

函数 F 由波形决定，而 $(C_n - iS_n)$ 由正在传输的信息决定。前者将被称为形状因子，后者将被称为鉴别因子。

在方程 (9) 中选择加号还是减号是惯例问题。所做的选择与更常用的约定一致。

附录 II-A

无失真传输的具体标准。研究如何通过使用矩形来准确传输信息是很有趣的。

在发送端使用矩形波形，并以最小频率带宽实现。图 1 表明，当传输带宽等于 s 时，这通常是可能的。一个重要的实际案例是传输从零到信号传输速率的频率。当使用如此有限的频率范围时，接收波当然不同于发送波。为了使接收波传达信息，只要每个时间单位中波的某个属性与发送端每个信号元素的幅度因子成比例或相等就足够了。首先，假设接收波在每个时间单位的中间值（由理想接收设备测量）代表在该时间单位内发送的信号元素。将不会注意时间单位中任何其他点的波，因此其他点的波形变形将无关紧要。下面将计算接收波必须具有什么形状因子，才能使其在每个时间单位中间的值等于发送波的相应幅度。

假设接收端在第 h 个时间单位的中间时刻的电流等于 a_h 。现在，在时间单位的中间， $t = (h - 1/2)T/N$ ，傅里叶级数变为：

$$a_h = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N/2} [A_n \cos \frac{2\pi n}{N} (h - \frac{1}{2}) + B_n \sin \frac{2\pi n}{N} (h - \frac{1}{2})]. \quad (1)$$

有 N 个这样的方程，因为 h 可以依次取值 $1, 2, \dots, N$ 。还有 N 个 A 和 B 的未知值。（注意， $B_0 = 0$ 且 $A_{N/2} = 0$ 。）这些未知数可以通过求解联立方程的常用方法确定，或者更简单地用以下方式确定：将所有

方程从 $h = 1$ 到 $h = N$ 乘以 $\cos \frac{2\pi k}{N} h - (\frac{1}{2})$

并将它们相加：

$$\sum_{h=1}^N a_h \cos \frac{2\pi k}{N} \left(h - \frac{1}{2} \right)$$

(a)

$$= \frac{A_0}{2} \sum_{h=1}^N \cos \frac{2\pi k}{N} \left(h - \frac{1}{2} \right) \\ + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^N \sum_{n=1}^{N/2} \left\{ A_n \left[\cos(n+k) \frac{2\pi}{N} \left(h - \frac{1}{2} \right) \right. \right.$$

(c)

$$\left. \left. + \cos(k-n) \frac{2\pi}{N} \left(h - \frac{1}{2} \right) \right] \right\}$$

(d)

$$+ B_n \left[\sin(n+k) \frac{2\pi}{N} \left(h - \frac{1}{2} \right) \right]$$

(e)

$$- \sin(k-n) \frac{2\pi}{N} \left(h - \frac{1}{2} \right) \right] \Big\}. \quad (2)$$

在方程 (2) 中，使用了三角公式：

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$

$$\cos a \sin b = \frac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{2}$$

为了简化方程 (2)，我们将使用恒等式：

$$\sum_{h=1}^N \cos x \left(h - \frac{1}{2} \right) = \frac{\cos Nx/2 \sin Nx/2}{\sin x/2} \quad (3)$$

$$\sum_{h=1}^N \sin x \left(h - \frac{1}{2} \right) = \frac{\sin^2 Nx/2}{\sin x/2}, \quad (4)$$

为了证明这些恒等式，将 (4) 的左边乘以 i 并加到 (3) 的左边：

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^N \cos(h - \frac{1}{2})x + i \sin(h - \frac{1}{2})x &= \sum_{h=1}^N e^{i(h-1/2)x} \\ &= e^{-\frac{ix}{2}} \sum_{h=1}^N e^{ihx} = e^{\frac{ix}{2}} (1 + e^{ix} + e^{i2x} + \dots + e^{i(N-1)x}) \\ &= \frac{e^{\frac{ix}{2}} (1 - e^{iNx})}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{\frac{iNx}{2}} \left(e^{-\frac{iNx}{2}} - e^{\frac{iNx}{2}} \right)}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}} = \frac{e^{\frac{iNx}{2}} \sin Nx/2}{\sin x/2} \\ &= \frac{\cos Nx/2 \sin Nx/2}{\sin x/2} + i \frac{\sin^2 Nx/2}{\sin x/2}. \end{aligned} \quad (5)$$

令实部和虚部分别相等，得到方程 (3) 和 (4)。

通过将公式 (3) 应用于方程 (2) 的 (a)、(b) 和 (c) 项，并将公式 (4) 应用于 (d) 和 (e) 项，

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^N a_h \cos \frac{2\pi k}{N} \left(h - \frac{1}{2} \right) &= \frac{A_0}{2} \frac{\cos k\pi \sin k\pi}{\sin k\pi/N} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N/2} \left[A_n \left(\frac{\cos(n+k)\pi \sin(n+k)\pi}{\sin(n+k)\pi/N} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\cos(k-n)\pi \sin(k-n)\pi}{\sin(k-n)\pi/N} \right) \right. \\ &\quad \left. + B_n \left(\frac{\sin^2(n+k)\pi}{\sin(n+k)\pi/N} - \frac{\sin^2(k-n)\pi}{\sin(k-n)\pi/N} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

当 k 接近 n 的任意整数值时，例如 m ，从 0 到 $N/2 - 1$ 包括在内，方程 (6) 右边项的所有分子都趋近于零。因此，这些项趋近于零，除了一项

$$\frac{A_m}{2} \frac{\cos(k-m)\pi \sin(k-m)\pi}{\sin(k-m)\pi/N}$$

其分母也趋近于零。这一项变为 $NA_m/2$ 。令 $k = m$ ，从方程 (6) 解出 A_m ：

$$A_m = \frac{2}{N} \sum_{h=1}^N a_h \cos \frac{2\pi m}{N} \left(h - \frac{1}{2} \right) = 2C_m. \quad (7)$$

改变下标：

$$A_n = 2C_n. \quad (8)$$

现在，如果我们改为将方程 (1) 乘以

$\sin \frac{2\pi k}{N} (h - \frac{1}{2})$ ，类似的过程给出：

$$B_n = 2S_n, \quad (n < N/2). \quad (9)$$

但是当 $n = N/2$ 时，这个过程给出：

$$B_{N/2} = S_{N/2}. \quad (10)$$

从方程(8)到(10)可以看出,将用 $F_0(\omega)$ 表示的形状因子,从零频率到信号传输速率等于2,在信号传输速率处突然下降到该值的一半。高于此频率, $F_0(\omega)$ 等于零,如图2曲线a所示。

接下来将证明,存在无限多种形状因子可以添加到曲线a上,而这些形状因子不会改变时间单位中间时刻的电流。例如,曲线b显示了这种形状因子的一个样本,它可以是任何单值曲线,只要它关于信号传输速率对称,除了符号改变。当这个形状因子加到曲线a的形状因子时,可能会得到像c这样的总形状因子曲线,它也是理想的。用 $F_\Delta(\omega)$ 表示曲线b的形状因子。由于这种形状因子产生的波是:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=N/2-m}^{N/2+m} F_\Delta(\omega) (C_n \cos npt + S_n \sin npt) \\ &= \sum_{n=0}^m F_\Delta(\omega) (C_{N/2-n} \cos(2\pi s - np)t \\ &\quad + S_{N/2-n} \sin(2\pi s - np)t) \\ &\quad + \sum_{n=1}^m F_\Delta(\omega) (C_{N/2+n} \cos(2\pi s + np)t \\ &\quad + S_{N/2+n} \sin(2\pi s + np)t) \end{aligned} \quad (11)$$

其中 m 是任何小于 $N/2$ 的正整数。根据附录I的方程(7)和(8)可得:

$$-C_{N/2-n} = C_{N/2+n} \quad (12)$$

$$S_{N/2-n} = S_{N/2+n}. \quad (13)$$

将这些关系代入方程(11),并利用三角公式:

$$\cos(a - b) + \cos(a + b) = 2 \cos a \cos b \quad (14)$$

$$-\sin(a - b) + \sin(a + b) = 2 \cos a \sin b \quad (15)$$

并设 $F_\Delta(2\pi s) = 0$ 和 $F_\Delta(2\pi s + np) = -F_\Delta(2\pi s - np)$,使得波的公式变为:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^m 2F_\Delta(2\pi s + np)(\cos 2\pi st)(C_{N/2+n} \cos np t \\ &\quad + S_{N/2+n} \sin np t). \end{aligned} \quad (16)$$

由于该表达式包含因子 $\cos 2\pi st$,该因子在时间单位的中间时刻为零,因此当后者仅记录时间单位中间时刻的电流值时,该波对接收设备没有任何影响。曲线b是任何实形状因子,关于点频率对称,除了符号改变。因此,每一个这样的实形状因子加到曲线a上时,得到的合成形状因子都是理想的。

接下来希望证明,添加一个纯虚形状因子(它可以是任何单值函数,只要其幅度和符号都关于点频率对称)不会对时间单位中间时刻的波值有贡献。考虑图2的曲线d,它表示任何对称的虚形状因子 $iF_\Delta(\omega)$ 的幅度。

$$A_n - iB_n = iF_\Delta(\omega) (C_n - iS_n) = F_\Delta(\omega) (S_n + iC_n). \quad (17)$$

令方程(17)的实部和虚部分别相等,确定了 A_n 和 B_n 的值,从而波可以表示如下:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=N/2-m}^{N/2+m} F_\Delta(\omega) (S_n \cos npt + C_n \sin npt) \\ &= \sum_{n=0}^m F_\Delta(\omega) (S_{N/2-n} \cos(2\pi s - np)t \\ &\quad + C_{N/2-n} \sin(2\pi s - np)t) \\ &\quad + \sum_{n=1}^m F_\Delta(\omega) (S_{N/2+n} \cos(2\pi s + np)t \\ &\quad + C_{N/2+n} \sin(2\pi s + np)t). \end{aligned} \quad (18)$$

使用公式 (12) 到 (15) 并设 $F_{\Delta}(2\pi s + np) = F_{\Delta}(2\pi s - np)$, 波变为:

$$\sum_{n=0}^m 2F_{\Delta}(2\pi s + np)(\cos 2\pi st)(S_{N/2+n} \cos npt + C_{N/2+n} \sin npt), \quad (19)$$

由于因子 $\cos 2\pi st$, 该波在时间单位的中间时刻为零。由于这对任何对称函数 $F_{\Delta}(\omega)$ 都成立, 因此存在无限多个虚形状因子, 它们不影响波在时间单位中间时刻的值。

附录 II-B

无失真传输网络。本附录的目的是具体说明

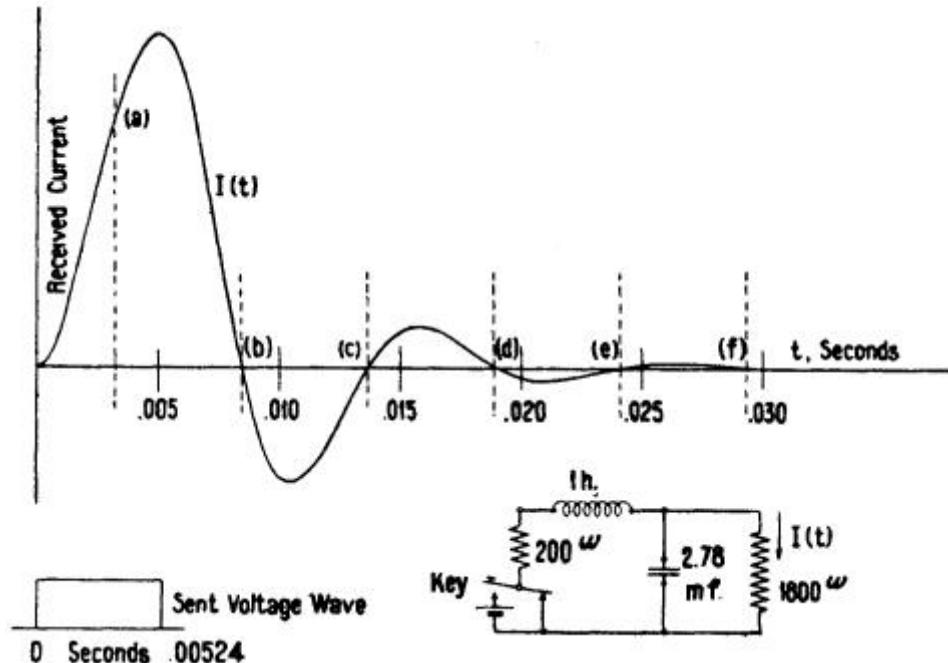


图 5 - 无失真波示例

附录 II-A 及相关正文部分讨论的内容。本附录不构成主要理论推理链的任何部分, 因为此处讨论或推导的任何内容在后续都不需要。因此, 主要对主要理论推导感兴趣的读者可以略过。

附录 II-A 表明, 某些

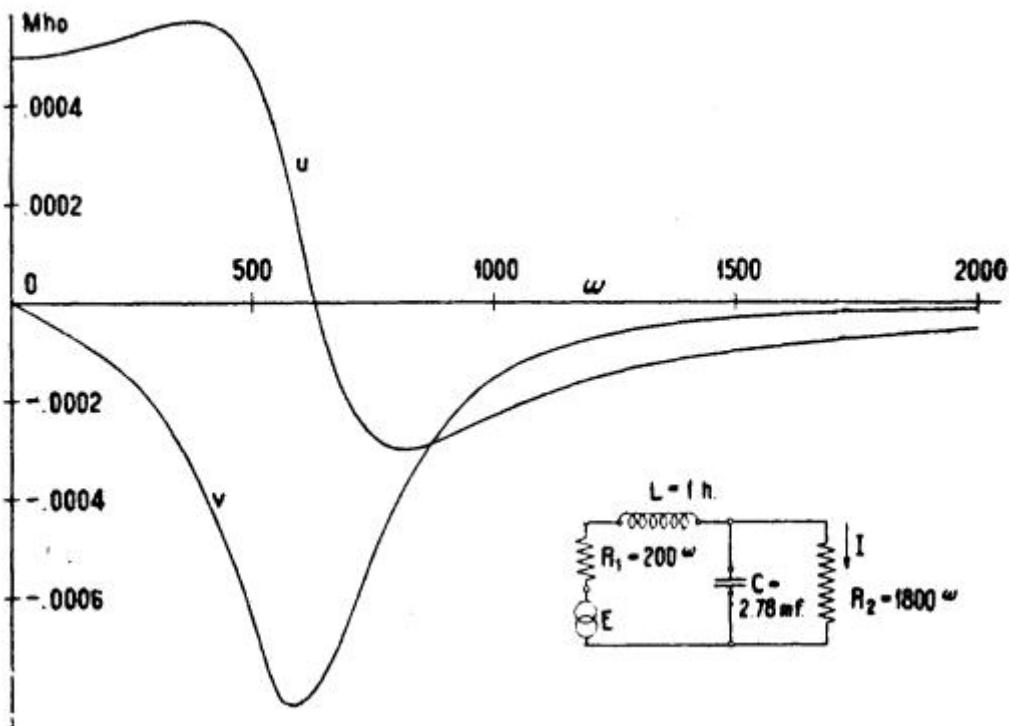


图 6 - 与图 5 所示无失真波对应的转移导纳 $u + iv$

理想形状因子可以通过添加具有关于等于信号传输速率的频率的特定对称性的其他形状因子来修改。显然，经过考虑，具有关于频率 $2s$ 、 $3s$ 等类似对称性的类似形状因子也可以以类似方式添加，而不影响形状因子的主要特性。在考虑的案例中，这些考虑并不具有很大的实际重要性，因为假设重要的电报问题是再最小频率范围内传输最大信息量。然而，这些考虑将有助于理解本附录的主题内容。

图 5 显示了一个非常简单的电路，该电路旨在说明无失真波。该电路仅包含两个电抗元件，具有非常简单的瞬态形式，即均匀阻尼的正弦波。现在一个重要的

属性是正弦波的零点位于等间隔的位置，这正是附录 II-A 中讨论的标准下无失真波所需具备的属性。所选示例中连续零点之间的间隔是 0.00524 秒；并且这也被设为发送信号时间单位的持续时间，如图所示。将记住，在讨论的标准下，选取信号元素的一个特定点来代表该元素。在所示案例中，该点应取在第一个零点之前的 0.00524 秒间隔处。显然，如果这样做，由于之前所有信号元素引起的干扰为零，因为每一个元素引起的干扰都为零。由此可见，任何在该点电流作用下动作的接收设备就相邻信号元素的干扰而言将是无失真的。

图 6 显示了同一网络的转移导纳。信号传输速率对应于横坐标为 600 的点。将观察到这些曲线不具有附录 II-A 中讨论的简单对称特性，但这是因为附录 II-A 局限于不超过信号范围太多的窄频率范围。如果考虑到这一事实，以及本附录第二段讨论的事实，将会发现这个简单网络说明了该理论。

在当前情况下，转移导纳和电流曲线的值都很容易计算。转移导纳由表达式给出：

$$Y = \frac{1}{R_1 + R_2 + i\omega(L + R_1 R_2 C) - \omega^2 L C R_2}.$$

从时间 $t = 0$ 到时间 $t = 0.00524$ 秒的电流，由以下形式的表达式给出（对于所给数值）：

$$A(t) = \frac{1}{2000} \left[1 - e^{-200t} \left(\cos 600t + \frac{1}{3} \sin 600t \right) \right].$$

在时间 $t = 0.00524$ 秒之后，电流由表达式给出：

$$A(t) - A(t - 0.00524) \\ = \frac{-e^{-200t}}{2000} (1 + e^{1.048}) (\cos 600t + \frac{1}{3} \sin 600t).$$

附录 III

无失真传输的替代标准。无失真传输的另一个标准是，接收波通过平均值（或其他特定值）的瞬间之间的间隔应与发送端的相应间隔相同。响应时间单位末端波值的接收设备将给出无失真传输，前提是元素 h 末端的波与 $(a_h + a_{h+1})/2$ 成正比。这是普通陆线电报中的标准。严格来说，我们还要求波不在位于时间单位内的点通过此值。认为引入此条件所带来的复杂性是不合理的。我们将首先确定对于频率范围限制在 0 到 s 之间的情况，该接收波的傅里叶展开系数。我们有：

$$\frac{a_h + a_{h+1}}{2} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N/2} (A_n \cos \frac{2\pi nh}{N} + B_n \sin \frac{2\pi nh}{N}), \quad (h = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

因为在第 h 个时间单位结束时 $t = hT/N$ 。

与附录 II-A 一样，我们有 N 个联立方程和 N 个未知数，即 A 和 B 。求解的性质与之前相同，只是在相加之前方程乘以 $\cos \frac{2\pi kh}{N}$ 而不是

$\cos \frac{2\pi k}{N} (h - \frac{1}{2})$ 。对于 $n < N/2$ 的值，通过类似推理我们发现：

$$A_n = \frac{2}{N} \sum_{h=1}^N \frac{a_h + a_{h+1}}{2} \cos \frac{2\pi nh}{N} \\ = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^N a_h \left[\cos \frac{2\pi nh}{N} + \cos \frac{2\pi n(h-1)}{N} \right]. \quad (2)$$

借助三角公式

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)$$

我们发现方程 (2) 可以写成：

$$A_n = \frac{2}{N} \left(\cos \frac{n\pi}{N} \right) \sum_{h=1}^N a_h \cos \frac{2\pi nh}{N} \left(h - \frac{1}{2} \right) \\ = 2 \cos \frac{\omega}{4s} C_n \quad (3)$$

类似的推理给出：

$$B_n = 2 \cos \frac{\omega}{4s} S_n. \quad (4)$$

形状因子为 $2 \cos \omega/4s$ (图 3, 曲线 a)，适用于频率最高到 s 的情况，对于更高频率保持为零。当发送波为矩形时，将产生这种形式的波的转移导纳是：

$$Y = \frac{\omega}{4s} \cot \frac{\omega}{4s}, \text{ 当 } \omega < 2\pi s \quad (5a)$$

$$Y = 0, \quad \text{当 } \omega \geq 2\pi s. \quad (5b)$$

这是通过接收端的形状因子除以发送端的形状因子得到的比值。

这样的系统将无法传输普通的极性反转，因为对于频率等于或大于点速度时传输的电流为零。这个缺陷可以通过添加关于信号频率对称且对时间单位末端的波没有贡献的形状因子来弥补。通过类似于附录 II-A 末尾给出的推理，可以得出，任何关于信号传输速率在幅度和符号上对称的实形状因子（图 3，曲线 *d*）产生的波包含因子 $\sin 2\pi st$ ，因此在时间单位的末端变为零。类似地，可以证明，任何关于点频率在幅度上对称但符号上不对称的虚形状因子（图 3，曲线 *b*）产生的波也在时间单位的末端变为零。将曲线 *d* 加到曲线 *a* 上得到曲线 *c*，这也是一个理想的形状因子。

无失真传输的第三个标准是，接收波下的面积在每一时间单位内与发送波下的面积具有相同的值。因此，在时间单位 *h* 期间，接收波下的面积必须是：

$$a_h T/N = \int_{l=(h-1)T/N}^{hT/N} \left[\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N/2} (A_n \cos npt + B_n \sin npt) \right] dt. \quad (6)$$

这个方程可以乘以 N/T ，积分，并借助三角公式

$$\begin{aligned} \sin a - \sin b &= 2 \cos \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{1}{2}(a-b) \\ -\cos a + \cos b &= 2 \sin \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{1}{2}(a-b) \end{aligned}$$

它可以简化为以下形式：

$$a_h = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N/2} \left(\frac{N}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{N} \right) \times \left[A_n \cos \frac{2\pi n}{N} \left(h - \frac{1}{2} \right) + B_n \sin \frac{2\pi n}{N} \left(h - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (7)$$

该方程与附录 II-A 的方程 (1) 相同，除了因子：

$$\left(\frac{N}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{N} \right) = \left(\frac{4s}{\omega} \sin \frac{\omega}{4s} \right)$$

因此，该波的形状因子等于图 2 曲线 *a* 的形状因子除以 $4s/\omega \sin \omega/4s$ ，简化为：

$$F_0(\omega) = \frac{\omega/2s}{\sin \omega/4s}, \quad \text{对于 } 0 \leq \omega < 2\pi s, \quad (8)$$

$$F_0(\omega) = \pi/2, \quad \text{对于 } \omega = 2\pi s, \quad (9)$$

$$F_0(\omega) = 0, \quad \text{对于 } 2\pi s < \omega, \quad (10)$$

如果发送波是矩形的，则对应于转移导纳：

$$Y(\omega) = \left(\frac{\omega/4s}{\sin \omega/4s} \right)^2, \quad \text{对于 } 0 \leq \omega < 2\pi s, \quad (11)$$

$$Y(\omega) = \frac{\pi^2}{8}, \quad \text{对于 } \omega = 2\pi s, \quad (12)$$

$$Y(\omega) = 0, \quad \text{对于 } 2\pi s < \omega. \quad (13)$$

为了确定可以加到 $F_0(\omega)$ 上而不改变接收信号的形状因子，可以使用以下方法。设 $F_\Delta(\omega)$ 表示要添加的形状因子。由于该形状因子产生的波包含位于点速度上方和下方的频率分量。设 δ 等于任何不大于 s 的方便的频率增量。然后考虑在频率 $(s + \delta)$ 和 $(s - \delta)$ 处的任意一对分量，并找出这些频率下 $F_\Delta(\omega)$ 的什么值将产生不改变接收信号的分量。由于这些分量产生的波部分是：

$$\begin{aligned}
I = & \bar{F}_\Delta(2\pi(s - \delta)) (C_{N/2-n} \cos 2\pi(s - \delta)t \\
& + S_{N/2-n} \sin 2\pi(s - \delta)t) \\
& + F_\Delta(2\pi(s + \delta)) (C_{N/2+n} \cos 2\pi(s + \delta)t \\
& + S_{N/2+n} \sin 2\pi(s + \delta)t)
\end{aligned} \tag{14}$$

为了使这部分波不增加任何接收信号， $\int Idt$ 必须在 $h/2s$ 和 $(h - 1)/2s$ 之间为零，这是单位 h 的时间。执行积分并简化结果得到一个表达式，当满足以下条件时该表达式简化为零：

$$F_\Delta(2\pi(s - \delta))/(s - \delta) = -F_\Delta(2\pi(s + \delta))/(s + \delta) \tag{15}$$

因此，只要满足方程 (15) 表达的对称性条件， $F_\Delta(\omega)$ 可以具有任何实值。这对任何 $\delta < s$ 的值都成立，因此对所有 $\delta < s$ 的值都成立。对于不改变信号的虚形状因子 $iF_\Delta(\omega)$ 的类似推理给出：

$$iF_\Delta(2\pi(s - \delta))/(s - \delta) = iF_\Delta(2\pi(s + \delta))/(s + \delta). \tag{16}$$

小于信号传输速率的范围不充分性。已经证明，对于没有限制不同幅度因子数量的情况，在数值上等于信号传输速率的频率范围是必要的。当这个数量很小时，可能会质疑这个命题是否成立。考虑只有两个不同幅度因子 $+1$ 和 -1 的情况，并且以时间单位中间时刻的电流作为传输标准。由于只涉及两个幅度因子，因此可以考虑必要且充分的是，每个时间单位中点的波应具有正确的符号，而不考虑幅度。我们现在将证明，当传输范围小于信号传输速率时，这无法得到保证。

首先假设传输范围从零延伸到低于信号传输速率的点，因此缺失部分在范围 $0 - s$ 的高端。设 $N/2$ 为奇数，并设前 $N/2$ 个信号元素为 $+ - + - \dots - + \dots$ 。设接下来的 $N/2$ 个信号元素为此信号的重复，并让信号无限重复。低于频率 s 的这个信号的最重要的谐波是第 $(N/2 - 1)$ 次谐波，它对应于频率 $s(1 - 2/N)$ 。通过取足够大的 N ，我们可以确保抑制该谐波。如果所有高达 s 的频率都被传输并均衡以获得无失真传输，然后移除频率 $s(1 - 2/N)$ ，则发现，由于该分量的巨大幅度，信号在某些关键点（中点）符号反转。问题是，是否可以通过改变剩余分量来纠正这一点。我们接下来表明这是不可能的。

考虑函数 $\cos 2\pi s(1 - 2/N)t$ 。（该函数在所有关键点与发送信号具有相同的符号。）接下来考虑通过将该函数与关键点处接收波值的乘积相加得到的和。如果波的符号正确，则这些乘积中的每一个都是正的，因此和是正的。现在，很容易证明，

对于任何低于 $s(1 - 2/N)$ 频率的接收波分量，对该和的贡献为零，负乘积与正乘积平衡。因此，接收波在所有关键点具有正确符号的假设，以及它完全由低于 $s(1 - 2/N)$ 的频率组成的假设，是不一致的。

如果被抑制的范围不在范围 $0 - s$ 的高端，则过程类似。首先找到一个相对于 s 为质数的频率，该频率位于被抑制范围内，并且是周期 T 的偶次谐波。设其频率为 s' 。构造函数 $\cos 2\pi s't$ 。接下来构造一个由 $+1$ 和 -1 元素组成的信号，其在每个关键点的符号与 $\cos 2\pi s't$ 的符号相同。然后论证按前面进行。

可以为其他标准产生类似的证明。

附录 IV

载波分析。需要求出一个持续时间为 T 秒、由 N 个时间单位组成并无限重复的载波电报波的正弦分量。载波

电流在每个时间单位期间被矩形包络调制，因此波具有以下值：

$$\begin{aligned} E(t) &= a_1 \cos(\omega_c t - \theta), \text{ 对于 } 0 < t < T/N, (\text{时间单位 } 1), \\ E(t) &= a_2 \cos(\omega_c t - \theta), \text{ 对于 } T/N < t < 2T/N, \\ &\quad (\text{时间单位 } 2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(t) &= a_h \cos(\omega_c t - \theta), \text{ 对于 } (h-1)T/N < t < hT/N, \\ &\quad (\text{时间单位 } h), \text{ 等等.} \end{aligned}$$

让总波由傅里叶级数表示：

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos npt + B_n \sin npt). \quad (1)$$

通过类似于附录 I 的推理：

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \sum_{h=1}^N \int_{(h-1)T/N}^{hT/N} a_h \cos npt \cos(\omega_c t - \theta) dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{h=1}^N a_h \left[\frac{\sin[(\omega_c - np)hT/N - \theta] - \sin[(\omega_c - np)(h-1)T/N - \theta]}{\omega_c - np} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin[(\omega_c + np)hT/N - \theta] - \sin[(\omega_c + np)(h-1)T/N - \theta]}{\omega_c + np} \right] \\ &= \frac{2}{T} \sum_{h=1}^N a_h \left[\frac{\sin(\omega_c - np)(T/2N) \cos[(\omega_c - np)(h-1/2)T/N - \theta]}{\omega_c - np} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin(\omega_c + np)(T/2N) \cos[(\omega_c + np)(h-1/2)T/N - \theta]}{\omega_c + np} \right] \\ &= \frac{2 \sin(\omega_c - np)(T/2N)}{T(\omega_c - np)} \sum_{h=1}^N a_h \cos[(\omega_c - np)(h-1/2)T/N - \theta] \\ &\quad + \frac{2 \sin(\omega_c + np)(T/2N)}{T(\omega_c + np)} \sum_{h=1}^N a_h \cos[(\omega_c + np)(h-1/2)T/N - \theta]. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\therefore A_n = F'(\omega)C'_n + F''(\omega)C''_n, \quad (3)$$

$$\text{其中: } F'(\omega) = \frac{2N \sin(\omega_c - np)T/2N}{T(\omega_c - np)}$$

$$= \frac{4s \sin(\omega_c - \omega) \frac{1}{4s}}{\omega_c - \omega},$$

$$\begin{aligned} F''(\omega) &= \frac{2N \sin(\omega_c + np)T/2N}{T(\omega_c + np)} \\ &= \frac{4s \sin(\omega_c + \omega) \frac{1}{4s}}{\omega_c + \omega}, \end{aligned}$$

$$C'_n = 1/N \sum_{h=1}^N a_h \cos \left[(\omega_c - np) \left(h - \frac{1}{2} \right) T/N - \theta \right],$$

$$C''_n = 1/N \sum_{h=1}^N a_h \cos \left[(\omega_c + np) \left(h - \frac{1}{2} \right) T/N - \theta \right].$$

以类似的方式可以推导出

$$B_n = F'(\omega)S'_n + F''(\omega)S''_n, \quad (4)$$

其中：

$$\begin{aligned} S'_n &= -1/N \sum_{h=1}^N a_h \sin \left[(\omega_c - np) \left(h - \frac{1}{2} \right) T/N - \theta \right], \\ S''_n &= 1/N \sum_{h=1}^N a_h \sin \left[(\omega_c + np) \left(h - \frac{1}{2} \right) T/N - \theta \right]. \end{aligned}$$

将方程(4)乘以*i*并从(3)中减去得到:

$$A_n - iB_n = F'(\omega)(C'_n - iS'_n) + F''(\omega)(C''_n - iS''_n). \quad (5)$$

显然,当载波频率是点速度的整数倍时,即 $\omega_c = 2\pi q s$ 时, $(C'_n - iS'_n)$ 和 $(C''_n - iS''_n)$ 之间存在特殊关系。当*q*为偶数时,通过观察我们看到:

$$\begin{aligned} C'_n - iS'_n &= \frac{e}{N}^{-i\left(\frac{\pi q}{2} + \theta\right)} \\ \sum_{h=1}^N a_h e^{-inp(h-1/2)\mathrm{T}/N} &= e^{-i\left(\frac{\pi q}{2} + \theta\right)} (C_n - iS_n), \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $(C_n - iS_n)$ 与直流情况相同。另外:

$$C''_n - iS''_n = \frac{e}{N}^{-i\left(\frac{\pi q}{2} + \theta\right)} \sum_{h=1}^N a_h e^{-inp(h-1/2)T/N}, \quad (7)$$

由此:

$$\begin{aligned} C''_n - iS''_n &= e^{i(\pi q+2\theta)} (C'_n - iS'_n) = e^{i2\theta} (C'_n - iS'_n) \\ &= e^{i\left(\frac{\pi q}{2} + \theta\right)} (C_n - iS_n). \end{aligned} \quad (8)$$

将(6)和(8)代入(5)得到:

$$A_n - iB_n = \left[e^{-i\left(\frac{\pi q}{2} + \theta\right)} F'(\omega) + e^{i\left(\frac{\pi q}{2} + \theta\right)} F''(\omega) \right]$$

当*q*为奇数时,类似的推理给出:

$$\begin{aligned} A_n - iB_n &= \left[e^{-i\left(\frac{\pi(q-1)}{2} + \theta\right)} F'(\omega) \right. \\ &\quad \left. + e^{i\left(\frac{\pi(q-1)}{2} + \theta\right)} F''(\omega) \right] (C_{N/2-n} + iS_{N/2-n}). \end{aligned} \quad (10)$$

$F'(\omega)$ 在幅度上关于载波频率对称,但 $F''(\omega)$ 不对称。接下来将证明,当调制波不包含高于载波频率的分量时, $(A_n - iB_n)$ 关于载波频率对称。由此可以推断, $F''(\omega)$ 在调制发生之前已从调制波中移除这些分量时为零。例如,让调制波为:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{qN/2} (A_n \cos npt + B_n \sin npt). \quad (11)$$

将(11)乘以 $\cos(\omega_c t - \theta)$ 并利用三角公式:

$$\cos a \cos b = (1/2) \cos(a+b) + (1/2) \cos(a-b)$$

$$\cos a \sin b = (1/2) \sin(a+b) - (1/2) \sin(a-b),$$

给出载波波:

$$\begin{aligned} \frac{A_0}{2} \cos(\omega_c t - \theta) &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{qN/2} \{ [A_n \cos(\omega_c t + npt - \theta) \\ &+ B_n \sin(\omega_c t + npt - \theta)] + [A_n \cos(\omega_c t - npt - \theta) \\ &- B_n \sin(\omega_c t - npt - \theta)] \}. \end{aligned} \quad (12)$$

通过观察,我们看到该波的分量在距离 ω 等距 $\pm np$ 处具有相同的振幅 $\sqrt{A_n^2 + B_n^2}$,其中 np 从不大于 ω_c 。因此,通过类似于本附录前面部分给出的方法分析该波,不会产生像 $F''(\omega)$ 这样的非对称形状因子。

附录 V

单边带传输。以下讨论中将使用的原理是，当要通过任何复杂的导纳确定接收波时，可以将导纳细分为多个部分，以确定每个部分的接收波，并将所有部分的合成接收波相加以获得完整的波。为了阐明这一原理的使用，我们将从图 7 中 *a* 处所示的转移导纳开始。严格来说，这个导纳只是假设性的，但它说明了原理，并且是实际带通滤波器情况的一阶近似。

导纳被视为实数量。也就是说，要么没有延迟，要么有任何延迟时，它被均衡并选择新的时间原点，以便

导纳。假设载波频率位于 ω_c ，并且系统的转移导纳从该频率向两个方向不对称地延伸，如图所示。

有无限多种方法可以将该区域细分为分量转移导纳，但最适合我们讨论的一种是

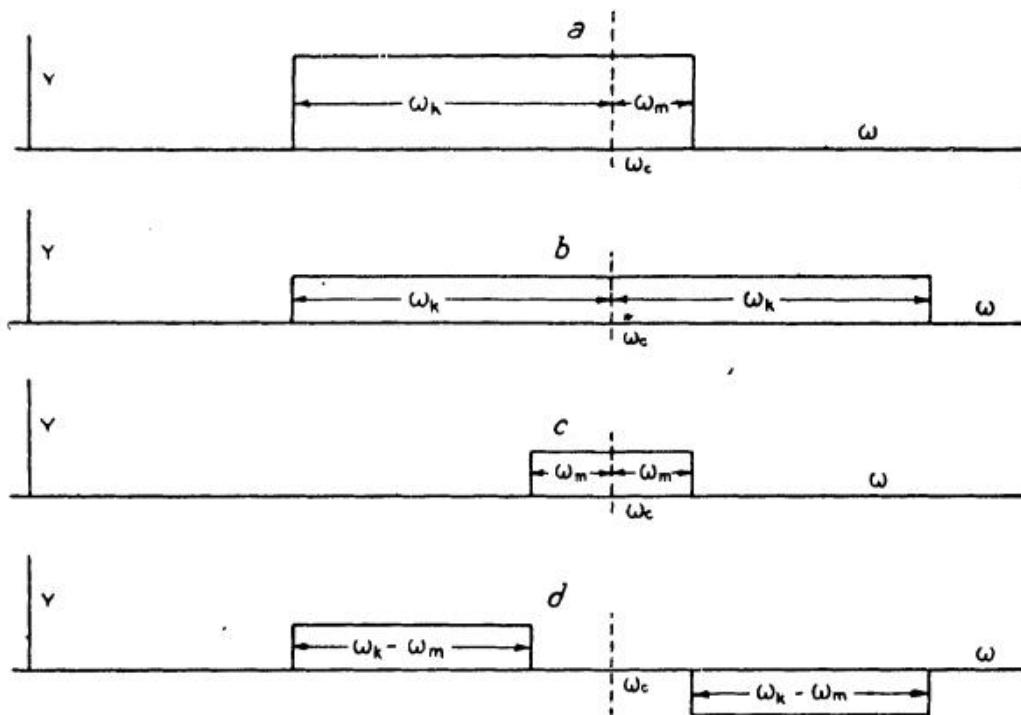


图 7 - 传输特性的图形分析

b、*c* 和 *d* 处所示的转移导纳之和等于 *a* 处所示的转移导纳。选择分量 *b*、*c* 和 *d* 使其具有关于载波频率的对称性

显示在图 7 的其余部分。将观察到，如果将三个导纳 (*b*, *c*, 和 *d*) 加在一起，结果就是 *a* 处所示的导纳。根据上述原理，我们得出结论，在 *a* 处所示导纳的情况下，接收波等于从其他三个导纳推导出的接收波之和。

首先考虑 *b* 处所示的导纳，我们在这里具有关于载波频率的完全对称性；并且从对称载波情况的讨论可以得出，接收波与载波频率具有相同的频率和相位，并被一个低频波调制，该低频波与在使用从 0 延伸到 ω_k 的转移导纳的直流电报中获得的波相同。为简单起见，假设最初用于调制载波的波不包含高达载波频率的分量。对 *c* 处所示导纳的讨论与 *b* 相同。比较这两个分量，可以得出结论，它们彼此同相，并且由于 *b* 引起的分量比由于 *c* 引起的分量建立得更快。显然，由于这两个分量导致的结果达到稳态所需的时间由两者中较慢的一个决定。我们可以暂时得出结论，当载波频率位于频带一端附近时，是从载波频率到传输频带较近边缘的频率范围决定了建立速率。

d 处所示的导纳也是关于载波频率对称的，但它具有不同类型的对称性。为了对比这种对称性与先前讨论的对称性的效果，让我们假设载波由 $\cos \omega_c t$ 表示，并且调制波由 $A_n \cos npt$ 表示。那么调制波是 $A_n \cos npt \cos \omega_c t$ 。这可以按通常方式分成两个关于载波频率对称的分量。这两个分量是

$(A_n/2) \cos(\omega_c - np)t$ 和 $(A_n/2) \cos(\omega_c + np)t$. (1) 显然，在 *b* 所示的情况下，这些分量被传输而没有任何相对变化，因此除了可能乘以常数外，组合形成原始的调制波而没有任何修改。然而，在 *d* 所示导纳的情况下，这些分量发生了相对变化。如果其中一个保持不变，另一个乘以 -1 ，则两个分量变为

$(A_n/2) \cos(\omega_c - np)t$ 和 $-(A_n/2) \cos(\omega_c + np)t$. (2) 合成波是 $A_n \sin npt \sin \omega_c t$ 。由 *d* 所示类型的导纳产生的重要变化是载波频率发生了 90 度的相移。一个附带的变化是代表信号的调制频率也发生了 90 度的变化。只要它们的

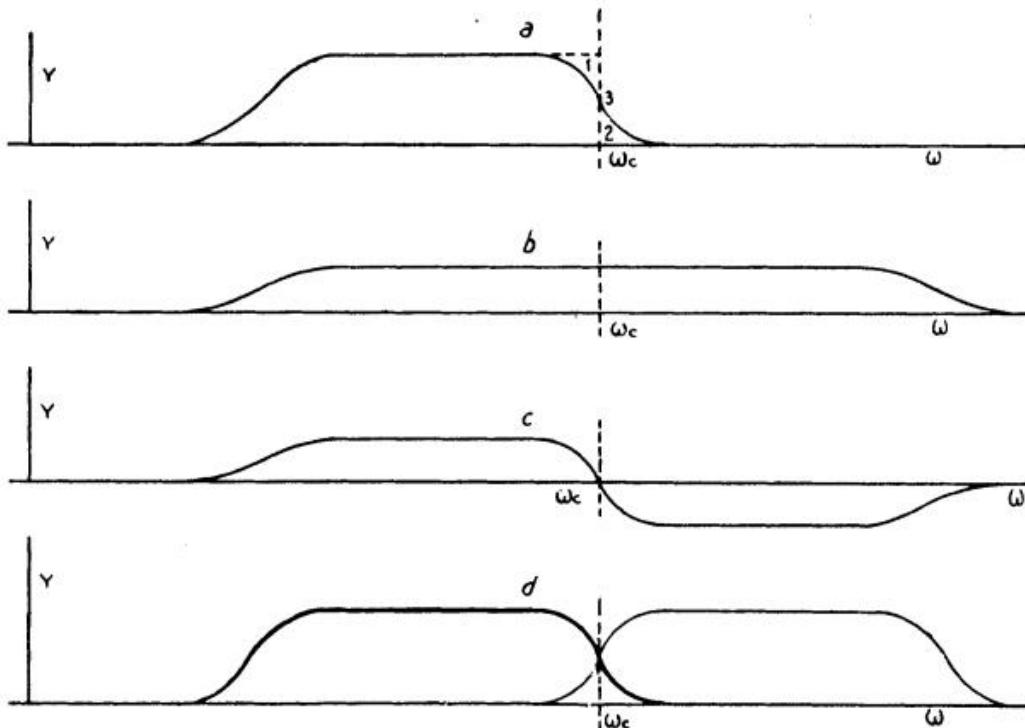


FIG. 8—GRAPHICAL ANALYSIS OF A TRANSMISSION CHARACTERISTIC

b 和 *c* 处所示的对称转移导纳之和等于 *a* 处所示。*d* 处的粗线与 *a* 处的曲线相同；细线是粗线的镜像。*b* 处所示的曲线等于 *d* 处所示两条曲线之和的一半，而 *c* 处所示的曲线等于 *d* 处所示两条曲线之差的一半

频率低于载波频率，这个推理可以针对构成调制波的所有分量进行。由此可见，由于 *d* 所示导纳产生的总波的零点，相对于用 *b* 和 *c* 获得的相应波的零点，位移了载波周期的四分之一。

显然，如果可以消除由于 *c* 和 *d* 产生的分量，则合成波将

由载波频率与传输频带远边缘之间的分离决定。*d* 所示导纳产生的波可以通过“相位鉴别”下讨论的方法在接收波时消除。由于 *c* 产生的波则不那么容易处理。可能认为通过将载波频率移近频带边缘，*c* 所示的导纳可以扩展到非常窄的频率范围，从而可以忽略不计。然而，应该注意，接收波的稳态值无论带宽如何都是相同的，并且只要 *c* 的任何部分存在，就总会有缓慢的干扰波。唯一令人满意的答案是将载波频率精确地定位在频带的边缘，使得边缘和载波频率之间没有任何分离，无论多小。这种特殊情况是由于我们假设了具有 abrupt cut-off（急剧截止）的转移导纳。

在实际情况下，截止是渐进的，而非 abrupt。 a 处（图 8）所示的转移导纳代表了一个适用于单边带传输的转移导纳（实部）。它可以按照分别显示在 b 和 c 处的方式分成两部分： c 具有导致正交相位分量的那种对称性； b 具有理想的那种对称性。

严格来说，将术语“单边带传输”应用于图 8 所示的情况，或者实际上应用于传输双边带部分的情况，有些不准确。因为对于电报波来说，严格意义上的单边带传输似乎是不可能的，所以应该没有理由反对这个名称。

与图 8 相关的结果可以用稍微不同的术语描述。参考 a ，虚线可以说是单边带传输的理想情况。数字 1 标记了由于导纳曲线 gradual cut-off（逐渐截止）而从理想情况移除的区域。移除该区域会导致主边带产生的波受损。数字 2 指示的区域代表残留边带，并导致受损。简单来说，获得的结果是：如果区域 1 和 2 相等，即当任一区域绕点 3 旋转时可以与另一区域重合，则主边带缺失部分引起的损伤正好被残留边带产生的波补偿。

上述讨论仅限于实导纳的特殊情况。下面将消除此限制，并考虑一般的复导纳。这些不容易进行图形表示，因此将采用代数处理。然而，下面的分析与图 8 给出的分析有密切的相似之处，认为参考该图将是有用的。

设给定系统的转移导纳用 $Y(\omega - \omega_c)$ 表示。考虑由 $Y(\omega_c - \omega)$ 表示的导纳。这两个特性是关于载波频率彼此的镜像。它们在 d 处（图 8）说明。接下来让 $Y(\omega - \omega_c)$ 按照上面讨论的方式分解为两个分量

$$Y(\omega - \omega_c) = Y_1(\omega - \omega_c) + Y_2(\omega - \omega_c) \quad (3)$$

其中

$$Y_1(\omega - \omega_c) = \frac{1}{2}[Y(\omega - \omega_c) + Y(\omega_c - \omega)] \quad (4)$$

且

$$Y_2(\omega - \omega_c) = \frac{1}{2}[Y(\omega - \omega_c) - Y(\omega_c - \omega)] \quad (5)$$

这两个分量对应于 b 和 c 处的图形分解， Y_1 在幅度和符号上都关于载波频率对称， Y_2 在幅度上对称但在符号上相反。

令 $\cos npt$ 为施加波的一个分量，并让它调制载波 $\cos \omega_c t$ 。得到的波是

$$\cos npt \cos \omega_c t$$

$$= \frac{1}{2} \cos(\omega_c - np)t + \frac{1}{2} \cos(\omega_c + np)t \quad (6)$$

首先考虑将其中一个（下边带）施加到导纳 $Y_1(\omega - \omega_c)$ 上所产生的波。让该导纳用 $g_1(\omega - \omega_c) + ib_1(\omega - \omega_c)$ 表示，量 g_1 和 b_1 为实数。将波 $\frac{1}{2} \cos(\omega_c - np)t$ 施加到 g_1 上，得到的波是

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} g_1(\omega - \omega_c) \cos(\omega_c - np)t \\ \text{或 } & \frac{1}{2} g_1(np) \cos(\omega_c - np)t \end{aligned} \quad (7)$$

类似地， $i b_1$ 产生接收波

$$-\frac{1}{2} b_1(np) \sin(\omega_c - np)t \quad (8)$$

对上边带执行类似操作，并记住 Y_1 的对称性，通过 Y_1 传输的总波是

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}g_1(np)[\cos(\omega_c - np)t + \cos(\omega_c + np)t] \\ & - \frac{1}{2}b_1(np)[\sin(\omega_c - np)t + \sin(\omega_c + np)t] \end{aligned} \quad (9)$$

也可以写成

$$g_1(np) \cos npt \cos \omega_c t - b_1(np) \cos npt \sin \omega_c t \quad (10)$$

以类似的方式，通过 $Y_2(\omega - \omega_c)$ 接收的波是

$$-g_2(np) \sin npt \sin \omega_c t - b_2(np) \sin npt \cos \omega_c t \quad (11)$$

现在，如果在接收端通过乘以因子 2 $\cos(\omega_c t - \phi)$ 对波进行解调，并忽略高频，则解调后得到的接收波为

$$\begin{aligned} & g_1(np) \cos \phi \cos npt - b_1(np) \sin \phi \cos npt \\ & -g_2(np) \sin \phi \sin npt - b_2(np) \cos \phi \sin npt \end{aligned} \quad (12)$$

现在可以得出，调制、通过滤波器、解调以及抑制高频这三个操作，等效于通过具有以下特性的滤波器

$$Y_0(np) = g_0(np) + i b_0(np) \quad (13)$$

$$\text{其中 } g_0(np) = g_1(np) \cos \phi - b_1(np) \sin \phi \quad (14)$$

$$b_0(np) = g_2(np) \sin \phi + b_2(np) \cos \phi \quad (15)$$

这个公式然后允许直接计算接收波。将注意到， ϕ 可以被赋予任意值。作为简化假设，我们可以使 ϕ 等于载波频率的相移，即

$$\tan \phi = -\frac{b_1(0)}{g_1(0)} \quad (16)$$

附录 VI

广义波形分析。设需要求一个周期电报波的正弦分量，其信号元素值为：

$$I_h = a_h f(t - (h - 1/2)T/N) \quad (1)$$

其中 a_h 是幅度因子且

$$f(t - (h - 1/2)T/N)$$

是时间的任意函数，并且可能重叠到前面和后面的时间单位。 t 的原点取在波的开头。

在时间 t 的总电流为：

$$I(t) = \sum_{h=1}^N I_h = \sum_{h=1}^N a_h f(t - (h - 1/2)T/N) \quad (2)$$

前提是周期 T 的持续时间大于波形持续时间。

令 $I(t)$ 表示为傅里叶级数；然后，通过遵循类似于附录 I 的方法

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T \sum_{h=1}^N a_h f(t - (h - 1/2)T/N) \cos npt dt. \quad (3)$$

将 t 的原点改变到求和项中每个项所指的信号元素的中心，即，令

$$t = (h - 1/2)T/N + t'$$

并去掉撇号，我们得到：

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \sum_{h=1}^N a_h \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(npt) \\ &\quad + \frac{2\pi n}{N} (h - \frac{1}{2}) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos npt dt \sum_{h=1}^N a_h \cos \frac{2\pi n}{N} (h - \frac{1}{2}) \\ &\quad - \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin npt dt \sum_{h=1}^N a_h \sin \frac{2\pi n}{N} (h - \frac{1}{2}) \\ &= 4s \left[C_n \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos npt dt - S_n \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin npt dt \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

以类似的方式可以证明：

$$B_n = 4s \left[C_n \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin npt dt + S_n \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos npt dt \right]. \quad (5)$$

将方程 (5) 乘以 i ，并从 (4) 中减去：

$$A_n - iB_n = F(\omega) (C_n - iS_n) \quad (6)$$

其中

$$F(\omega) = 4s \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-inp} dt = 4s \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (7)$$

为了求解从 $F(\omega)$ 求 $f(t)$ 的逆问题，设

$$f(t - T/2N) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos npt + B_n \sin npt) \quad (8)$$

这是表示由单个点组成的信号的傅里叶级数，其 $a_1 = 1$ 且其他 a_h 值等于零。

根据附录 I 中 A_n 和 B_n 的定义，可以如下排列该表达式：

$$f(t - T/2N) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_n - iS_n) F(\omega) e^{inp}. \quad (9)$$

代入：

$$C_n = \frac{1}{N} \cos \frac{n\pi}{N} \quad (10)$$

$$S_n = \frac{1}{N} \sin \frac{n\pi}{N} \quad (11)$$

我们得到

$$f(t - T/2N) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{N} e^{i(npt - \frac{n\pi}{N})}. \quad (12)$$

令 $t = T/2N + t'$ 并去掉撇号

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{N} e^{i n p t} \quad (13)$$

当周期趋近于无穷大时，波形趋近于

$$f(t) = \frac{1}{8\pi s} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (14)$$

现在，为了观察对形状因子的影响，让我们考虑一个特殊的波形，例如通过削波获得的波。对于这种类型的信号，矩形波在每时间单位开始和结束时的一小部分时间 x 被截断，使得

$$f(t) = 1, \text{ 对于 } (-T/2N + x) < t < (T/2N - x)$$

且

$$f(t) = 0$$

对于

$$-T/2N < t < (-T/2N + x)$$

$$\text{和 } (T/2N - x) < t < T/2N.$$

对于这种波形，方程 (7) 简化为

$$\begin{aligned} F(\omega) &= 4s \int_{-T/2N+x}^{T/2N-x} [\cos npt - i \sin npt] dt \\ &= \frac{2 \sin[n\pi/N - 2\pi nx/T]}{n\pi/N}. \end{aligned} \quad (15)$$

令 $x = T/8N$,

这对应于将电池施加到电缆的时间缩短到总时间单位长度的 $\frac{3}{4}$ ，并在剩余部分接地。对于这种情况

$$F(\omega) = \frac{8s \sin(3\omega/16s)}{\omega}. \quad (16)$$

将该形状因子与非削波波的相应形状因子（在附录 I 中给出）方程 (6) 进行比较，可以看出削波的效果是将形状因子乘以 $\sin \frac{3\omega}{16s} / \sin \frac{\omega}{4s}$ 。在传输范围内具有此特性的网络将等效于削波。

附录 VII

通过信号整形进行失真校正。问题是：给定任意转移导纳，即

非理想的一个，应如何整形发送波以使接收波无失真？建议针对以下情况推导解：其中取接收波在时间单位中间时刻的值作为无失真传输的标准。这个问题有许多解，我们在一开始将自己限制在发送波信号元素特定类型的波形；即每个信号元素由一系列矩形阶梯组成，每个阶梯持续一个时间单位（图 9）。问题在于找到每个阶梯的高度。

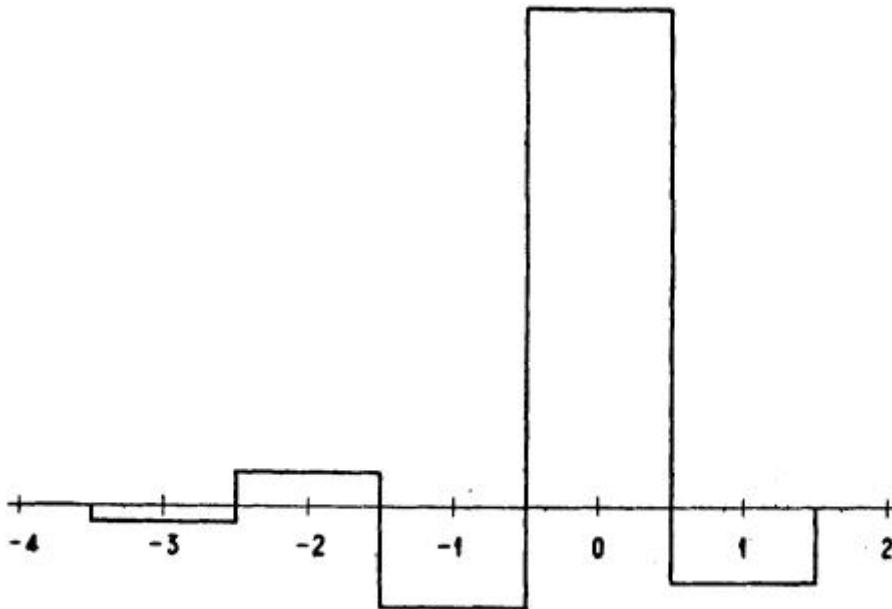


图 9 - 信号整形以产生无失真接收信号的示例

通过稍微改变观点，可以利用一些先前获得的结果。让我们暂时将未知信号元素，不是看作信号元素，而是看作由一系列矩形元素组成的信号。未知信号元素的波形是 $f_s(t)$ ，各个矩形元素的幅度因子是未知量 b_1, b_2, \dots, b_N 。我们有

$$f_s(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos npt + B_n \sin npt). \quad (1)$$

矩形信号元素的形状因子是

$$\frac{8 \sin \omega/4s}{\omega/s}$$

并且通过将所求信号元素视为信号而获得的鉴别因子可以取为 $(C_n - iS_n)$ 。问题现在简化为找到所有从 0 到 $N/2$ 的 n 值的 C_n 和 S_n ，因为已知这些值， b 就被唯一地确定。方程 (1) 可以排列如下：

$$f_s(t) = 4s \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_n - iS_n) \frac{\sin \omega/4s}{\omega} e^{int} \quad (2)$$

任何网络的转移导纳可以用 $Y(\omega)$ 表示。为了更一般化，将 $Y(\omega)$ 乘以 $e^{-i\omega\tau}$ ；其中 τ 是一个任意常数，具有恒定延迟的性质。令 $Y(-\omega) = \bar{Y}(\omega)$ ，其中横杠表示 $Y(\omega)$ 的共轭。

通过具有此转移导纳的电路接收到的波是：

$$f_r(t) = 4s \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_n - iS_n) \frac{\sin \omega/4s}{\omega} Y(\omega) e^{-i\omega\tau} e^{int} \quad (3)$$

$$\text{令 } H(\omega) = \frac{\sin \omega/4s}{\omega} Y(\omega) e^{-i\omega\tau} \quad (4)$$

并重新排列项

$$f_r(t) = 4s \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} \sum_{q=-\infty}^{\infty} (C_{qN+n} - iS_{qN+n}) \times H(4\pi s[q + n/N]) e^{i(qN+n)pt} \quad (5)$$

可以从附录 I 的方程 (7) 和 (8) 推导出

$$C_{qN+n} - iS_{qN+n} = (-1)^q (C_n - iS_n) \quad (6)$$

假设接收机制响应接收波在每个时间单位中间时刻的纵坐标（作为该单位信号的表示），此时

$$pt = \frac{\pi}{N}(2h - 1) \quad (7)$$

其中 h 对于连续的时间单位取值 $1, 2, 3, \dots, N$ 。我们注意到

$$e^{i(qN+n)pt} = e^{i(qN+n)(2h-1)\pi/N} = (-1)^q e^{i2\pi n(h-1/2)/N}. \quad (8)$$

将方程 (6) 和 (8) 代入 (5)，得到：

$$f_r(t) = 4s \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} (C_n - iS_n) e^{i2\pi n(h-1/2)/N} \sum_{q=-\infty}^{\infty} H(4\pi s[q + n/N]) \quad (9)$$

在时间单位的中间时刻。

如果我们设 $f_r(t) = 1$ 对于 $h = 1$ ，并且 $f_r(t) = 0$ 对于 $h = 2, 3$ 等，那么接收波具有单独一个点孤立存在的效果。

我们的下一步是求解 N 个这样的方程（如 (9)），得到 N 个未知的 $(C_n - iS_n)$ 值，以便我们能够在计算发送波时使用结果。以类似于附录 II 的方式，将每个联立方程乘以 $\cos \frac{2\pi k}{N}(h - 1/2)$ ，并将所有方程相加：

$$\begin{aligned} \cos \pi k / N &= 2s \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} (C_n - iS_n) \times \\ &\left(\frac{\cos(n+k)\pi \sin(n+k)\pi}{\sin(n+k)\pi/N} \right. \\ &+ \frac{\cos(k-n)\pi \sin(k-n)\pi}{\sin(k-n)\pi/N} + i \frac{\sin^2(n+k)\pi}{\sin(n+k)\pi/N} \\ &\left. - i \frac{\sin^2(k-n)\pi}{\sin(k-n)\pi/N} \right) \sum_{q=-\infty}^{\infty} H(4\pi s[q + n/N]) \end{aligned} \quad (10)$$

当 k 趋近于从 $-N/2$ 到 $N/2$ 包括在内的任何整数值 m 时，方程 (10) 求和中每一项的中间因子的分子趋近于零。因此，这些因子为零，除了一个 $n = +m$ 的因子和一个 $n = -m$ 的因子，其中某些分母也趋近于零，结果是方程 (10) 简化为

$$\begin{aligned} \cos \pi m / N &= 2Ns (C_m - iS_m) \sum_{q=-\infty}^{\infty} H(4\pi s[q + n/N]) \\ &+ 2Ns (C_{-m} - iS_{-m}) \sum_{q=-\infty}^{\infty} H(4\pi s[q - n/N]). \end{aligned} \quad (11)$$

当每个像 (9) 这样的 N 个方程乘以 $\sin \frac{2\pi k}{N}(h - 1/2)$ 时，类似的推理给出

$$\begin{aligned} \sin \pi m/N &= i2Ns(C_m - iS_m) \sum_{q=-\infty}^{\infty} H(4\pi s[q + n/N]) \\ &- i2Ns(C_{-m} - iS_{-m}) \sum_{q=-\infty}^{\infty} H(4\pi s[q - n/N]) \end{aligned} \quad (12)$$

将 (12) 乘以 i , 从 (11) 中减去, 并令 $m = n$, 得到

$$\cos \pi n/N - i \sin \pi n/N$$

$$= 4Ns(C_n - iS_n) \sum_{q=-\infty}^{\infty} H(4\pi s[q + n/N]) \quad (13)$$

$$\therefore C_n - iS_n = \frac{e^{-in\pi/N}}{4Ns \sum_{q=-\infty}^{\infty} H(4\pi s[q + n/N])} \quad (14)$$

在发送端, 第 h 个阶梯的高度, 对于该时间间隔内任何方便的 t 值, 由公式 (2) 给出。当阶梯是矩形时, 使用公式更方便

$$\begin{aligned} b_h &= C_0 + \text{的实部} 2 \sum_{n=1}^{N/2-1} (C_n - iS_n) e^{i\frac{2\pi n}{N}(h-1/2)} \\ &+ S_{N/2} \sin \pi(h-1/2). \end{aligned} \quad (15)$$

从 (14) 和 (4) 代入:

$$\begin{aligned} b_h &= \frac{1}{N} \left(\frac{1}{Y(0)} + \text{实部} \right. \\ &\left[2 \sum_{n=1}^{N/2-1} \frac{e^{i\frac{2\pi n}{N}(h-1+2s\tau)}}{\sin \frac{\pi n}{N} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \frac{Y(4\pi s[q+n/N])}{\pi[q+n/N]}} e^{-i(4s\tau+1)q\pi} \right. \\ &\left. \left. + \frac{e^{i\pi(h-1+2s\tau)}}{\sum_{q=-\infty}^{+\infty} \frac{Y(4\pi s[q+1/2])}{4\pi s[q+1/2]} e^{-i(4s\tau+1)q\pi}} \right] \right] \end{aligned} \quad (16)$$

在使用公式 (16) 计算 b_h 时, 将理解 Y 和 s 是问题的给定量。除了 Y 和 s 之外出现的量 N 和 τ 需要说明。首先, τ 是一个任意量, 例如, 可以赋值为零。通过依次赋予它从 0 到 $1/2s$ 之间的所有值, 可以获得无限多个不同的解。从实际角度来看, 可以在完成一些 τ 值的计算后选择最优的解。至于 N , 应选择与所需精度成比例的大值。它应该是一个偶数, 并且最好不小于要使用的阶梯数的两倍。

分母中出现的和是一个无穷级数, 但它收敛迅速, 在大多数实际情况下, 使用三到四项应该足够了。函数 Y 在此表达式中以负参数出现。这并不意味着负频率, 而仅仅是为了方便记法。表达式 $Y(-\omega)$ 仅被解释为 $Y(\omega)$ 的共轭, 其中 ω 为正。

附录 VIII

需要计算具有以下形状因子的波的平均功率:

$$F(\omega) = 2, \text{ 对于 } 0 < \omega < 2\pi s,$$

$$F(\omega) = \sqrt{2}, \text{ 对于 } \omega = 2\pi s,$$

$$F(\omega) = 0, \text{ 对于 } \omega > 2\pi s.$$

这样的波是

$$A_0/2 + \sum_{n=1}^{N/2} (A_n \cos npt + B_n \sin npt). \quad (1)$$

将正弦振幅的平方除以 2 后相加，再加上直流分量的平方就足够了。这给出平均功率为

$$A_0^2/4 + \left(\sum_{n=1}^{N/2-1} (A_n^2 + B_n^2)/2 \right) + \frac{B_{N/2}^2}{2}. \quad (2)$$

由于

$$A_n = 2C_n, \quad \text{对于 } n < N/2,$$

$$B_n = 2S_n, \quad \text{对于 } n < N/2,$$

$$B_{N/2} = \sqrt{2}S_{N/2},$$

功率为：

$$C_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{(N/2)-1} (C_n^2 + S_n^2) + S_{N/2}^2, \quad (3)$$

现在

$$C_n^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^N \sum_{q=1}^N a_h a_q \cos \frac{2\pi n}{N} \times \\ (h - 1/2) \cos \frac{2\pi n}{N} (q - 1/2), \quad (4)$$

$$S_n^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^N \sum_{q=1}^N a_h a_q \sin \frac{2\pi n}{N} \\ (h - 1/2) \sin \frac{2\pi n}{N} (q - 1/2). \quad (5)$$

相加

$$C_n^2 + S_n^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^N \sum_{q=1}^N a_h a_q \cos \frac{2\pi n}{N} (h - q). \quad (6)$$

将方程 (6) 代入 (3)，并记住 $C_{N/2}$ 和 S_0 恒等于零，总功率变为：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^N \sum_{q=1}^N a_h a_q \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{(N/2)-1} \cos \frac{2\pi n}{N} (h - q) \right. \\ & \left. + \cos \pi(h - q) \right) \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^N \sum_{q=1}^N a_h a_q \left[\sum_{n=0}^{(N/2)-1} \cos \frac{2\pi n}{N} (h - a) \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{N/2} \cos \frac{2\pi n}{N} (h - q) \right] \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^N \sum_{q=1}^N a_h a_q \left(\frac{\cos \frac{\pi}{N} (h - q) \sin \pi(h - q)}{\sin \pi(h - q)/N} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

括号中的表达式等于零，除非 $h = q$ ，此时它等于 N 。因此功率为：

$$\frac{1}{N} \sum_{h=1}^N a_h^2. \quad (8)$$

附录 IX

傅里叶积分。到目前为止，分析中使用了傅里叶级数定理，排除了与之密切相关的傅里叶积分定理，似乎有必要在此处对傅里叶积分进行简要讨论。为了保持讨论简洁，有必要在细节方面使其简略和不完整。将使用复数记法，因为它紧凑。

傅里叶积分定理指出

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) \cos u(t - \lambda) d\lambda, \quad (1)$$

无论函数 $f(t)$ 的形式如何，只要它满足某些要求。在电报理论中重要的要求是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \text{一个有限的数}. \quad (2)$$

量 u 到目前为止是一个数学量，仅用作积分号下的变量，就像 λ 一样。在研究被积函数时，将假设 u 与出现在阻抗和导纳表达式中的量 ω 相同。在此假设下，方程 (1) 表示的定理可以用复数记法写成：

$$I(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} J(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (3)$$

$$J(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} I(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (4)$$

$I(t)$ 将波表示为时间的函数， $J(\omega)$ 将其表示为频谱或频率的函数。

为了比较，我们现在以类似的形式写下傅里叶级数定理：

$$I(t) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} K(\omega) e^{i\omega t} \Delta\omega, \quad (5)$$

$$K(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/\Delta\omega}^{+\pi/\Delta\omega} I(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (6)$$

其中 ω 取值 $0, \pm\Delta\omega, \pm2\Delta\omega$ 等，并且 $\Delta\omega$ 是级数基本周期倒数的 2π 倍。显然，一方面，方程 (3) 和 (4) 与另一方面，方程 (5) 和 (6) 之间在形式上有密切的相似性。

现在让波 $I(t)$ 表示由 N 个信号元素组成的任意电报信号。公式 (4) 和 (6) 给出了表达波谱的替代方法。后者将波表示为离散频率分量的级数；前者将其表示为连续频谱。如果正确解释，两种表示都是精确的，尽管它们形式不同；因为当分别代入公式 (5) 和 (3) 时，它们精确地产生原始波。这两种表示都限于有限数量的信号元素——级数是因为其周期必须是有限的，而积分是因为方程 (2)。

虽然这些分析对于可以选择的 N 个信号元素的任何序列都是正确的，但它们的效用取决于对要分析的信号之前和之后的信号元素的严格限制。为了在电路理论中有价值，该级数要求后续和先前的元素由要分析的信号的无限多次重复组成。类似地，积分的效用取决于它之前和之后是幅度为零的无限元素序列的假设。这些限制通常并不严重，因为除了 N 应该是有限的之外，对 N 没有其他限制。除了同样精确之外，这两种方法在表示电报信号的复杂性方面似乎基本同样通用（或受限）。

正如可能猜测的那样，本文中获得的大多数结果都来自任一种处理方法。首先，如果用积分法分析直流波，将会发现 $J(\omega)$ 分离为两个因子，一个鉴别因子和一个形状因子。鉴别因子具有落入等效频带的特性，每个宽度等于信号传输速率。由此得出结论，必要的频率范围不超过信号传输速率。对应于各种标准的各种理想形式因子以稍大的难度得出。而级数处理导致线性代数方程组，积分处理导致积分方程组。

积分分析唯一突出的困难似乎在于建立最小频带等于信号传输速率这一事实。换句话说，虽然很容易证明一个宽度为 (s) 的频带中包含的信息足以传输信息，但很难证明它也是必要的。在本文使用的级数分析中，这个结果很容易从众所周知的原则得出，即可求解的未知数数量不超过给定方程的数量。当频率分量不是离散的而是形成连续频谱时，似乎没有这样简单的论证可用。将给出相当充分的讨论。

考虑这个问题，显然困难源于缺乏对传输信息含义的精确表述。在傅里叶级数处理的情况下不需要正式标准，但要满意地推进积分处理，将有必要制定一个。用一般术语陈述，对接收波的要求是，应该能够在其上扩展到有限区间的测量，并从这些测量（连同导纳的已知特性）确定发送波。更具体地说，应该能够将发送波的幅度因子表示为接收波测量值的线性和（或积分）。如果发送波和接收波表示为 ω 的函数，并相应地修改计算，显然操作可以在发送波上进行，在这种情况下接收波将是无失真的。然后我们可以制定一个电报系统传输信息能力的标准：应该能够整形发送信号以使接收波无失真。在本附录的其余部分，将使用此标准。显然，引入此标准在某种意义上是一个新的开始。

以波在时间单位中心点具有正确幅度作为无失真波的标准，并将讨论限制在频率限制在 $0 - s$ 范围内的情况，接收波的形状因子被唯一确定，并且在该范围内为 2。发送波的形状因子是 $2/Y$ ，发送端的波形是

$$f_s(t) = \int_{-2\pi s}^{+2\pi s} \frac{2e^{i\omega t} d\omega}{Y(\omega)}. \quad (7)$$

如果 $1/Y$ 在此范围内有限，则该积分具有确定值。如果 Y 在 $\omega = \omega_a$ 处有一个简单零点，则该积分可以写成

$$f_s(t) = e^{i\omega_a t} \int_{-2\pi s}^{+2\pi s} \frac{2e^{i(\omega-\omega_a)t} d\omega}{Y(\omega)}. \quad (8)$$

现在可以评估定积分对 t 的一阶导数。该导数是确定的，通过对 t 积分，可以获得 $f(t)$ 的合适值。

如果 Y 有有限个简单零点，函数 $1/Y$ 可以分解为若干项，每项最多有一个简单零点；并且各项可以如上处理。

当函数 Y 有二重零点，或任何有限重数的零点时，可以通过相同方法的扩展找到函数 $f(t)$ 的合适值。

现在将陈述简单情况的重要结果。假设转移导纳在原点有一个简单零点（如通过变压器进行电报传输）；给出无失真接收波的发送波，在 t 趋近于 $+\infty$ 时并不趋近于零，而是趋近于常数 a 。如果原点的零点是二重的（通过一个串联电容器和一个并联线圈组成的高通滤波器进行电报传输），则发送波在 t 趋近于 ∞ 时应趋近于值 bt 。对于三重零点，相应的渐近值形式为 ct^2 ，等等。显然，随着零点重数的增加，表示发送波的函数迅速变得越来越难以处理。现在，如果 Y 在原点的有限区间内变为零，我们可以认为它具有无限阶零点。那么可以预期，应该没有有限函数能够满足要求。

专业术语中英文对照表

英文术语	中文翻译
Telegraph	电报
Signaling speed / Speed of signaling	信号传输速率
Signal element	信号元素
Magnitude factor	幅度因子
Wave form	波形
Time unit	时间单位
Distortionless transmission	无失真传输
Steady-state characteristics	稳态特性
Transients	瞬态
Transfer admittance	转移导纳
Indicial admittance	指数导纳
Shape factor	形状因子
Discrimination factor	鉴别因子
Frequency band / Bandwidth	频带 / 带宽
D-C. telegraph (Direct-current telegraph)	直流电报
Carrier telegraphy	载波电报
Carrier wave	载波
Carrier frequency	载波频率
Modulation	调制
Envelope	包络
Sideband	边带
Single-sideband transmission	单边带传输
Double-sideband transmission	双边带传输
Phase discrimination	相位鉴别
Symmetrical carrier	对称载波
Quadrature component	正交分量
In-phase component	同相分量
Phase correction	相位校正
Attenuation	衰减
Phase shift	相移
Equalizer	均衡器
Signal shaping	信号整形
Fourier series	傅里叶级数
Fourier integral	傅里叶积分
Sinusoidal component	正弦分量
Harmonic	谐波
Fundamental (wave)	基波
Interference	干扰

英文术语	中文翻译
Characteristic interference	特性干扰
Intersymbol interference	符号间干扰
Characteristic distortion	特性失真
Power / Mean power	功率 / 平均功率
Spectral distribution	谱分布
Admittance	导纳
Conductance	电导
Susceptance	电纳
Impedance	阻抗
Reactance	电抗
Inductance	电感
Capacitance	电容
Linear / Non-linear	线性 / 非线性
Terminal apparatus	终端设备
Network / Circuit	网络 / 电路
Indicial response	指数响应
Criterion (plural: criteria)	标准
Redundancy	冗余
Ideal system	理想系统
Perfect transmission	完美传输
Distortion	失真 / 变形
Deformation	变形
Curbing	削波
Rectangular wave	矩形波
Sinusoidal wave	正弦波
Generalized wave form	广义波形
Overlapping	重叠
Period of repetition	重复周期
Fundamental period	基本周期
Cyclical aspect	循环方面
Progressive aspect	渐进方面
Dual aspect	双重性
Analogous	类似的
Mirror image	镜像
Vestigial sideband	残留边带
Abrupt cut-off	急剧截止
Gradual cut-off	逐渐截止
Dynamometer	功率计
Siphon recorder	虹吸记录仪
Telegraph relay	电报继电器