Lecture Notes of Essential Mathematics for Cyberspace Security

网络空间安全数学基础讲义

Victory won’t come to us unless we go to it.

作者：李晓峰

时间：July 3, 2020

邮箱: cy_lxf@163.com

北京联合大学智慧城市学院

版本: 20191210

前 言

2018 年学院成立了信息安全专业并开始招生，开始上“信息安全数学基础”一课，由于在 2015 年网络空间安全成为一级学科，故将此讲义命名为“网络空间安全数学基础”，在备课中形成此讲义，内容是汇编而来，只是希望能够在内容安排上的逻辑结构更加适合教和学，并把此讲义共享出来，以供需要的人参考。

在编写此讲义的过程中，基本思路，或者预期达到的目的是：

1. 通过不吝啬加小标题，力图更加清晰的表示概念之间的逻辑关系。
2. 在描述概念时，尽量说明此概念引入的目的，这里的“目的”也许并不是这些概念提出时的原始出发点，因为没有去考证，更多地是在本书的逻辑框架下描述概念的引入目的。
3. 为了使得结构更加紧凑，减少篇幅，省去了很多定理的证明，在讲义中尽量将形成此讲义时定理内容出处标出 (有可能有遗漏)，如果想看这些定理证明，可以看这些参考文献和书籍。以后，如果有时间，会把所有定理证明做为书的附录列出。
4. 在习题中，强调对基本概念的掌握，不去强调和训练一些数学技巧。

在备课过程中，参考了国外一些讲数论的授课计划，看到都在使用 Maple、Sagemath 等工具，所以在本书的前面，也有一些 Sagemath 的例子，但是在进入授课环节后没有使用 Sagemath，只是用他来做一些习题的验证，主要考虑就是利用工具，不利于学生理解基本算法，比如 gcd 的算法。

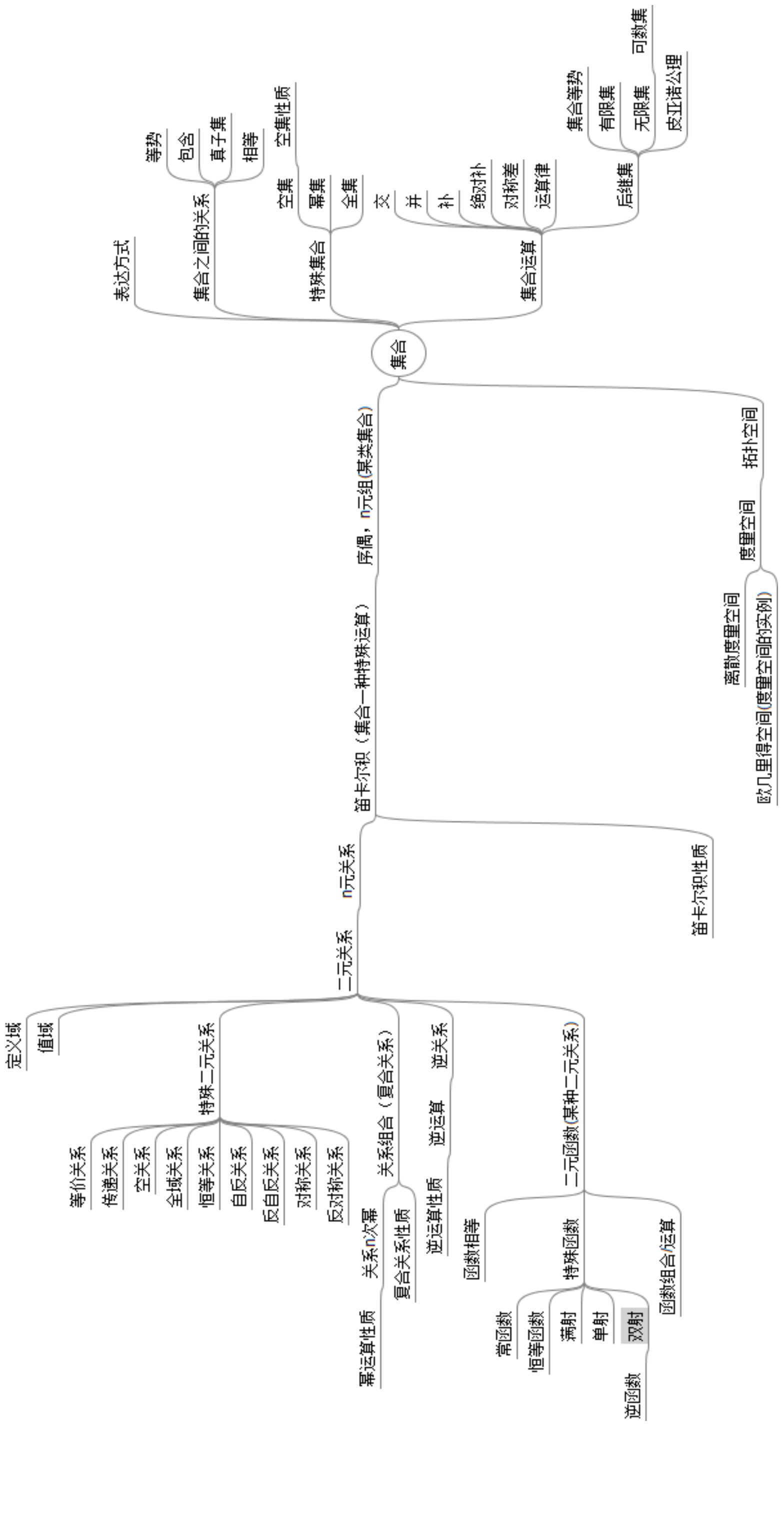
本课程在授课前，在一次闲聊中，华为的雷浩博士曾经提起，“现在的研究生、博士毕业，让写个算法找素数都不会”，由于他的这句话，使我在授课中特别注意了实验课程的安排，本课程实验让学生通过码云（gitee）提交，主要是想同学们能够熟悉一些常用的工程工具，另外课程实验是完成一个简单的命令行程序，可以执行 10 个基本的数论算法，同时要求基本算法使用 GNU MP 库来实现。

此讲义参考了很多其他老师已经完成并发表的教材，这些教材在参考文献里面列出，再此感谢这些老师所做出的出色的工作。

由于水平有限，在整理此讲义过程中，难免会出现错误，请大家不吝指出。

为了方便大家在讲课、学习中使用本讲义，本讲义的 tex 文件上传到码云上，网址为：https://gitee.com/buuer_xxtxiaofeng/FoCysMath，希望对大家有所帮助。

有关课程的其他信息可以查看课程网页http://buuer_xxtxiaofeng.gitee.io/lxf/。



集合
表达方式
集合之间的关系
等势
包含
真子集
相等
特殊集合
空集
空集性质
幂集
全集
集合运算
交
并
补
绝对补
对称差
运算律
后继集
集合等势
有限集
无限集
可数集
皮亚诺公理
拓扑空间
度量空间
离散度量空间
欧几里得空间(度量空间的实例)
序偶，n元组(某类集合)
笛卡尔积（集合一种特殊运算）
笛卡尔积性质
n元关系
二元关系
定义域
值域
特殊二元关系
等价关系
传递关系
空关系
全域关系
恒等关系
自反关系
反自反关系
对称关系
反对称关系
关系组合（复合关系）
关系n次幂
幂运算性质
复合关系性质
逆关系
逆运算
逆运算性质
二元函数(某种二元关系)
函数相等
特殊函数
常函数
恒等函数
满射
单射
双射
逆函数
函数组合/运算

图 1: 集合

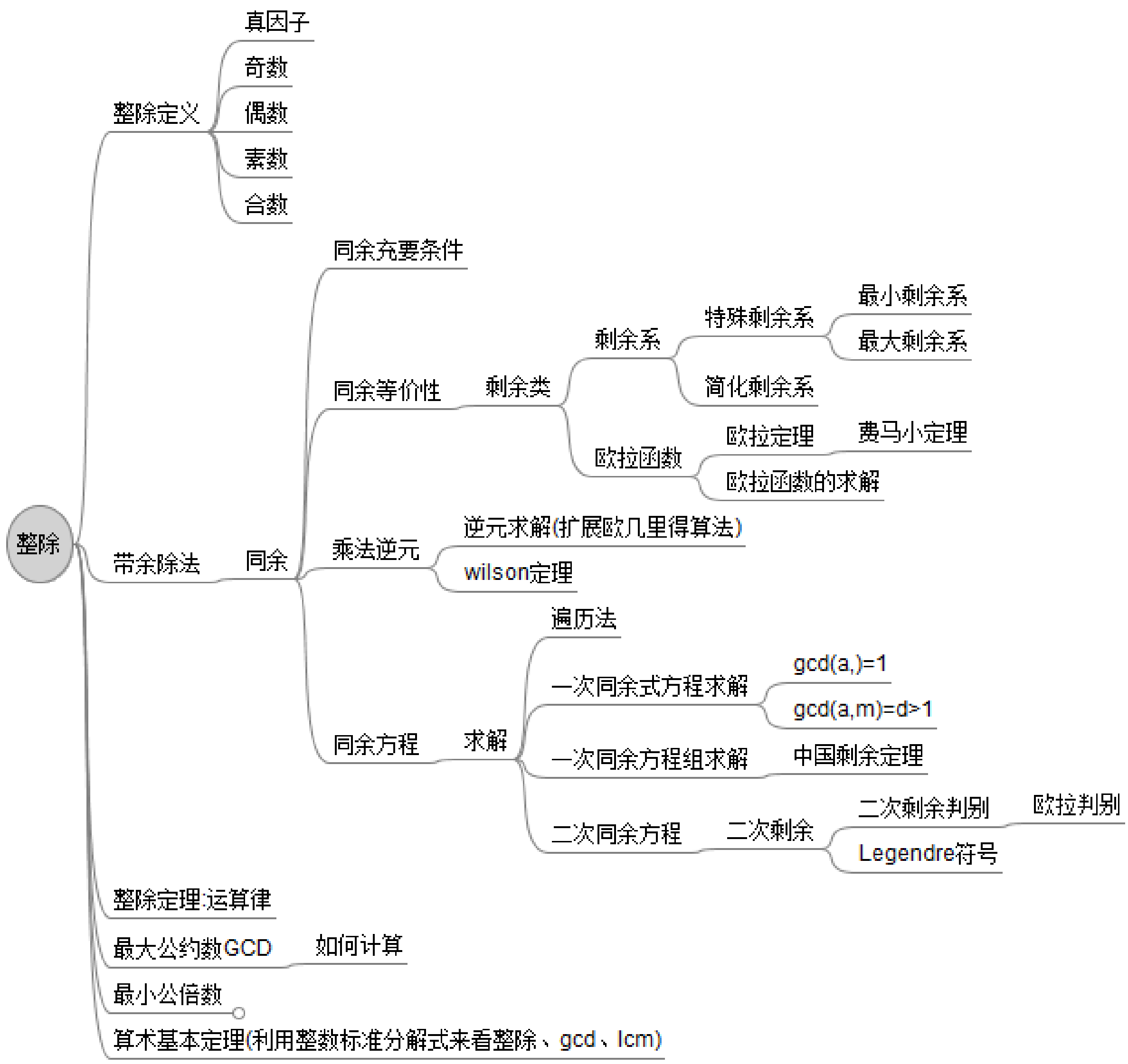

整除
整除定义
真因子
奇数
偶数
素数
合数
带余除法
同余
同余充要条件
同余等价性
剩余类
剩余系
特殊剩余系
最小剩余系
最大剩余系
简化剩余系
欧拉函数
欧拉定理
费马小定理
欧拉函数的求解
乘法逆元
逆元求解(扩展欧几里得算法)
wilson定理
同余方程
求解
遍历法
一次同余式方程求解
gcd(a,)=1
gcd(a,m)=d>1
一次同余方程组求解
中国剩余定理
二次同余方程
二次剩余
二次剩余判别
欧拉判别
Legendre符号
整除定理:运算律
最大公约数GCD
如何计算
最小公倍数
算术基本定理(利用整数标准分解式来看整除、gcd、lcm)

图 2: 整除

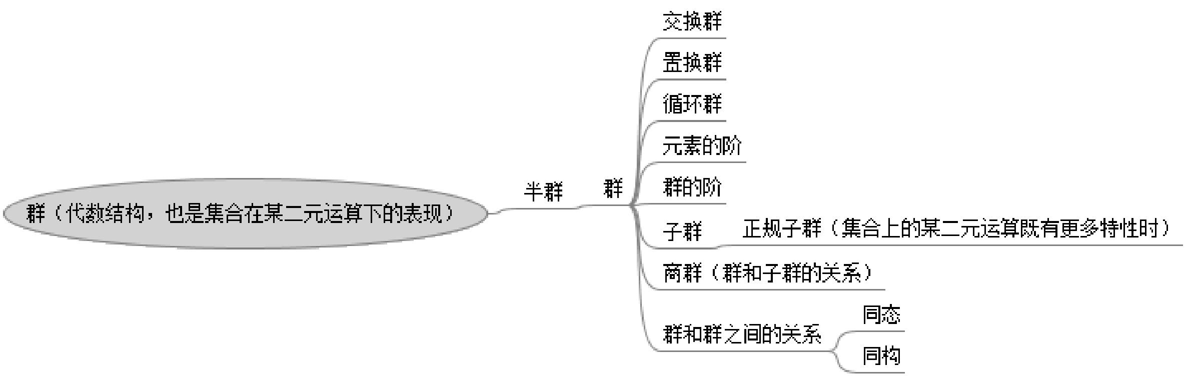

群（代数结构，也是集合在某二元运算下的表现）
半群
群
交换群
置换群
循环群
元素的阶
群的阶
子群
正规子群（集合上的某二元运算既有更多特性时）
商群（群和子群的关系）
群和群之间的关系
同态
同构

图 3: 群

目　　录

第 1 章 预备知识

1.1 集合 (set)

1.1.1 基本概念

定义 1.1: 集合 (Set)

具有共同性质的一些事物汇集成一个集体，就形成集合。这些事物称为集合的元素或成员。♣

通常用大写字母表示集合 (如：A，B，C)，用小写字母（如：a，b，c）表示元素。如何集合由有限个元素组成，此集合称为有限集，否则称为无限集。集合的表示方法通常有两种：

1. 列举法:$1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 5, 6. . . .$;
2. 叙述法:$x \mid x^2 - 1 = 0, x \mid x > 60$;

下面用 SageMath [1] 来进行集合定义方式的示例。

sagemath: 罗列方式定义有限集合

```
sage: #有限集的定义：罗列的方式
....: x=Set([1,2,3,4,5,6])
....: x
....: x.is_finite()
....:
{1, 2, 3, 4, 5, 6}
True
```

sagemath: 描述方式定义有限集合

```
sage: #有限集的定义：描述的方式
....: x=range(0,10)
....: type(x)
....: #可以看到这时的x是list类型，并非是set
....: x=Set(x)
....: x
```

[1] SageMath 是一个开源的数学计算软件

```
....: #可以看出其已经转换为一个set
....:
<type 'list'>
{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
```

sagemath: 无限集合定义

```
sage: #定义一个无限集:是一种描述方式，interpreter
....: x=R(1,5)
....: x
....: #R Interpreter
....: 2 in x
....: #True
....: 2.1 in x
....: 2.111111 in x
....:
R Interpreter
True
True
True
```

1.1.2 集合之间的关系

有了集合的定义，下面我们要展开对集合的研究，对于一个事物的研究，可以从两个大的方面展开，一个是研究其自身的构成，这是向内的方向，另外一个是研究其于周边个体的关系，这是向外的方向，下面我们就从向外的方向看看记着之间有什么样的关系。

定义 1.2: 包含 (contain)

A 包含于 B, 或 B 包含 A $\xleftrightarrow{Def} A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$ ♣

定义 1.3: 真子集 (real subset)

A 为 B 的真子集 $\xleftrightarrow{Def} A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\exists x)(x \in B \wedge x \notin A)$ ♣

定义 1.4: 相等 (equal)

A 和 B 相等 $\xleftrightarrow{Def} A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ ♣

1.1.3 特殊集合

看完集合之间的关系，下面我们看看一些特殊的集合。

定义 1.5: 空集 (empty set)

不含任何元素的集合称为空集。形式化表示为 $\emptyset = \{x|p(x) \wedge \sim p(x)\}$ 其中 p 表示任意谓词， 表示否。 ♣

定义 1.6: 幂集 (power set)

给定集合 A，由集合 A 的所有子集组成的集合称为集合 A 的幂集，记为 $\rho(A)$ 或 2^A, 即 $\rho(A) = \{B|B \subseteq A\}$。 ♣

示例 1.1:

$A = \{1, 2, 3\}$，求集合 A 的幂集。

答案： $\rho(A) = \{\Phi, A, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$

定义 1.7: 全集 (universal set)

在一定范围内，如果所有的集合均为某一个集合的子集，则称该集合为全集，记为 E。 ♣

思考

以上定义中的一定范围是指的什么？你研究的或者界定的。

全集的形式化表述是什么？$E = \{x \mid p(x) \vee \sim p(x)\}$

思考

定义完基本对象了 (此处为集合)，对象之间的关系 (或称为运算) 需要接着定义。

1.1.4 集合运算

定义 1.8: 基本运算 (operation)

1. 交集 (Intersection)：$A \cap B = \{x|x \in A \wedge x \in B\}$。
2. 并集 (Union)：$A \cup B = \{x|x \in A \vee x \in B\}$。
3. 补集（或者成为“差”）(Difference)：$A - B = \{x \in A \wedge x \notin B\} = \{x|x \in A \wedge (x \notin B)\}$。
4. 绝对补 (absolute complement)：设 E 为全集, 对任一集合 A 关于 E 的补集 E-A, 称为集合 A 的绝对补，$\sim A = E - A = \{x|x \in E \wedge x \notin A\}$。
5. 对称差 (Symmetric Difference)：A 和 B 的对称差为集合 S，$S = A \oplus B =$

$$(A-B)\cup(B-A)=\{x|(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)\}。$$ ♣

sagemath: 基本运算

```
sage: a=Set([1,2,3,4,5,6])
....: b=Set([0,1,2])
....: c=union(a,b)
....: c
....: c=a.intersection(b)
....: c
....: c=a.difference(b)
....: c
....: c=a.symmetric_difference(b)
....: c
....:
[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]
{1, 2}
{3, 4, 5, 6}
{0, 3, 4, 5, 6}
```

定理 1.1: 空集性质

（1）对于任意集合 A，$\emptyset\subseteq A$。（2）空集是唯一的。 ♡

证明： (1) 假设结论不成立，那么至少存在一个元素属于空集，但不属于 A，按照空集的定义，显然任何元素都不属于空集，所以产生矛盾，故假设错误，结论得证。

(2) 反证法：假设有两个不同的空集 ϕ_1,ϕ_2，根据空集性质 $\phi_1\subseteq\phi_2$，$\phi_2\subseteq\phi_1$，根据集合相等的定义，我们知道这两个集合相等，与假设矛盾，结论得证。 □

定理 1.2: 运算律 (Algorithm,Operational Law)

1. 幂等律

   $A\cup A=A$

   $A\cap A=A$

2. 交换律

   $A\cup B=B\cup A$

   $A\cap B=B\cap A$

   $A\oplus B=B\oplus A$

3. 结合律

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

4. 分配律

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

5. 同一律

$A \cup \emptyset = A$

$A \cap E = A$

$A - \emptyset = A$

$A \oplus \emptyset = A$

6. 零律

$A \cup E = E$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

7. 互补律

$A \cup \sim A = E$

$A \cap \sim A = \emptyset$

$\sim E = \emptyset$

$\sim \emptyset = E$

8. 吸收律

$A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

9. 摩根定律

$\sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B$

$\sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B$

$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

10. 双重否定律

$\sim (\sim A) = A$

11. 其他

$A \oplus A = \emptyset$

$A - A = \emptyset$

$A \cap B \subseteq A$

$A \cap B \subseteq B$

$A \subseteq A \cup B$

$B \subseteq A \cup B$

$A - B \subseteq A$

$A - B = A \cap \sim B$

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cap B) \cup (\sim A \cap B)$

♡

注意：文氏图 *(Venn Diagram)* 用来表示集合间的运算很直观，便于理解。

示例 1.2:

$A - B = A \cap \sim B$

证明： $A - B = \{x \mid x \in A \cap x \notin B\} = \{x \mid x \in A\} \cap \{x \mid x \notin B\} = A \cap \sim B$ □

示例 1.3:

证明幂等律 $A \cup A = A$。

证明： 对于 $A \cup A$ 中任意一个元素 x，有：

$x \in A \cup A \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \Leftrightarrow x \in A$，根据集合相等的定义，$A \cup A = A$ 成立。 □

1.2 关系 (relation)

1.2.1 序偶和 n 元组

定义 1.9: 序偶 (ordered couple)

由两个具有给定次序的个体 x 和 y(允许 x = y) 所组成的序列，称为序偶，记作 <x,y>. 其中 x 称为第一分量，y 称为第二分量。 ♣

定义 1.10: 序偶相等

设 <a,b>,<x,y> 是两个序偶，则 <a,b> <x,y> 当且仅当 a = x 且 b = y. ♣

定义 1.11: 有序 n 元组 (Ordered n-tuple)

由 n 个具有给定次序的个体 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的序列，称为有序 n 元组，记作 $\langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle$。 ♣

1.2.2 笛卡尔积

基本概念

定义 1.12: 笛卡儿积 (Cartesian product)

设 $A_1, A_2, , A_n$ 是任意给定的 n 个集合, 若有序 n 元组 $< a_1, a_2, , a_n >$ 的第一个分量是取自集合 A_1 里的元素, 第二个分量是取自集合 A_2 里的元素, ⋯, 第 n 个分量是取自集合 A_n 里的元素, 则由所有这样的有序 n 元组所组成的集合称为集合 $A_1, A_2, , A_n$ 的笛卡儿积, 并用 $A_1 \times A_2 \times \ \times A_n$ 表示, 即 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{< a_1, a_2, \ldots, a_n > | a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$。♣

注意: 笛卡尔积是一种特殊集合, 什么是"特殊"? 所谓特殊是具有某种特点的一类集合。特点是从特定视角, 也就是从某个观测点所看到他们不同于其他的区别。

示例 1.4:

$A = a, b, B = 0, 1, 2$, 求 $A \times B$ 和 $B \times A$.

答案: $A \times B = < a, 0 >, < a, 1 >, < a, 2 >, < b, 0 >, < b, 1 >, < b, 2 >$
$B \times A = < 0, a >, < 0, b >, < 1, a >, < 1, b >, < 2, a >, < 2, b >$

笛卡尔积运算律

定理 1.3: 笛卡尔积性质

1. 交换律不成立, 即 $A \times B \neq B \times A$。
2. 结合律不成立, 即 $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$。
3. 下列分配律是成立:
$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$
$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$
$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$
$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$
$$(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$$
4. 若 $C \neq \emptyset$, 则 $A \subseteq B \Leftrightarrow (A \times C \subseteq B \times C) \Leftrightarrow (C \times A \subseteq C \times B)$。
5. 设 A,B,C,D 是四个非空集合, $A \times B \subseteq C \times D \Leftrightarrow A \subseteq C \& B \subseteq D$ ♡

示例 1.5:

证明 $(A \oplus B) \times C = (A \times C) \oplus (B \times C)$.

证明: $(A \oplus B) \times C$
$= ((A - B) \cup (B - A)) \times C$

$= (A - B) \times C \cup (B - A) \times C$
$= ((A \times C) - (B \times C)) \cup ((B \times C) - (A \times C))$
$= (A \times C) \oplus (B \times C)$ □

1.2.3 关系

基本概念

定义 1.13: n 元关系 (n-ary relation)

设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是任意给定的集合, 笛卡儿积 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 的任何一个子集 R 称为 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 上的一个 n 元关系。♣

其实关系的本质仍然是一个集合。

注意: 为什么是笛卡尔积的一个子集？以笛卡尔二维坐标为例来思考关系的定义。X, Y 如果分别是两个实数集合，他俩的笛卡尔积可以组成整个二维空间，平面上的一条直线就是一个关系。

定义 1.14: 二元关系 (Binary Relation)

A,B 是任意两个集合, 则笛卡儿积 $A \times B$ 的任意一个子集 R 称为从集合 A 到集合 B 的一个二元关系, $\langle a, b\rangle \in R$ 也可表示为 aRb . 如果一个二元关系是从集合 A 到其自身的关系，则这样的二元关系称为集合 A 上的关系。♣

注意: 关系的本质仍为集合。

示例 1.6:
我们定义三个集合，A 为全中国所有大学，B 为所有中国人，$A \times B$ 是 A，B 的笛卡尔积，而联大女生显然是其一个子集，也就是说联大女生是 A，B 上的一个二元关系。

对于二元关系，除了用序偶集合表示外，还可以用矩阵表示，通常也称为关系矩阵。$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$， $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$,R 为 A 到 B 的一个二元关系，则此二元关系 R 的关系矩阵 $M_R = [r_{ij}]_{m \times n}$ 其中：

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \langle a_i, b_j\rangle \in R \\ 0, \langle < a_i, b_j\rangle \notin R \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.1}$$

注意: *(1)* 概念的表达。
(2) 表达方式：比如一个集合，可以表达为 $A = 1, 2, 3$, 同样是这个集合在 C 语言中的表达方式会发生变化。体会同一概念在不同层次和体系或语境或上下文中的表达方式的不同。

定义 1.15: 定义域 (Domain) 和与值域 (range)

设 R 是从集合 A 到集合 B 的二元关系，则 R 中所有序偶的第一个分量组成的集合称为关系 R 的定义域，记得 D(R)，由 R 中所有序偶的第二个分量组成的集合称为关系 R 的值域，记作 V(R)，即：

$D(R) = \{a \mid a \in A \wedge (\exists b)(< a, b >\in R)\}$,

$V(R) = \{b \mid b \in B \wedge (\exists a)(< a, b >\in R)\}$. ♣

示例 1.7:

$A = \{0,1\}, B = \{0,1\}$.

$A \times B = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle\}$;

关系 $R_1 = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle\}, R_1 \subset A \times B$.

$R_2 = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle\}, R_2 \subset A \times B$.

关系 R_1, R_2 的矩阵表示：

$M_{R_1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, M_{R_2} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

特殊关系

定义 1.16: 空关系 (empty relation) 与全域关系 (universal relation)

设 R 是从集合 A 到集合 B 的一个二元关系，若 $R = \emptyset$，则称 R 为空关系，若 R=A × B，则称 R 为全域关系。 ♣

定义 1.17: 恒等关系 (identity relation)

设 I_X 是从集合 X 上的一个二元关系，若 $I_X = \{< x, x >\mid x \in X\}$，则称 R 为恒等关系。 ♣

注意：空关系、全域关系和恒等关系是唯一的。

定义 1.18: 自反关系 (reflexive relation)

R 在 X 上自反 $\Longleftrightarrow \forall x, x \in X \longrightarrow xRx$。 ♣

有一些特殊关系具有一些特殊性质，下面我们讨论一些特殊的关系。

定义 1.19: 反自反关系 (anti-reflexive relation)

R 在 X 上反自反 $\Longleftrightarrow \forall x, x \notin X \longrightarrow xRx$。 ♣

定义 1.20: 对称关系 (symmetrical relation)

R 在 X 上对称 $\Longleftrightarrow \forall x \forall y, x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \longrightarrow yRx$。 ♣

定义 1.21: 反对称关系 (antisymmetric relation)

R 在 X 上反对称 $\Longleftrightarrow \forall x \forall y, x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \wedge yRx \longrightarrow y = x$。 ♣

定义 1.22: 传递关系 (transitive relation)

R 在 X 上传递 $\Longleftrightarrow \forall x \forall y \forall z, x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge xRy \wedge yRz \longrightarrow xRz$。 ♣

定义 1.23: 等价关系 (equivalence relation)

设 R 是集合 X 上的二元关系，若 R 是自反、对称和传递的，则称 R 为 X 上的等价关系。 ♣

关系运算

定义 1.24: 复合关系 (composite relation)

设 R 为 X 到 Y 的二元关系，S 为 Y 到 Z 的二元关系，则 $S \circ R$ 称为 R 和 S 的复合关系。也可写为：

$S \circ R = \{< x, z >| x \in X \wedge z \in Z \wedge (\exists y, y \in Y \wedge < x, y > \in R \wedge < y, z > \in S)\}$ ♣

关系的复合运算或者合成运算就是求复合关系。复合运算是关系的二元运算，可以由两个关系生成一个新的关系。
复合关系运算顺序是从右到左。

示例 1.8:
R 表示父子关系，$R \circ R$ 生成一个新的关系，新生成的关系是“祖孙关系”。

设 B 表示兄弟关系，$R \circ B$ 是叔侄关系，$B \circ R$ 是父子关系。

定理 1.4: 关系复合运算的性质

1. 满足结合律，$P \circ (S \circ R) = (P \circ S) \circ R$。
2. 不满足交换律，$R \circ S \neq S \circ R$。
3. 并元素满足分配率, $P \circ (S \cup R) = (P \circ S) \cup (P \circ R)$
   $(P \cup S) \circ R = (P \circ R) \cup (S \circ R)$
4. 符合运算对交运算满足包含关系,$R \circ (S \cup P) \subseteq (R \circ S) \cup (R \circ P)$
   $(S \cap P) \circ R \subseteq (S \circ R) \cap (P \circ R)$
5. 设 R 是 X 到 Y 的关系，I_X 是 X 中的恒等关系，I_Y 是 Y 中的恒等关系，则 $I_X \circ R = R \circ I_Y = R$。 ♡

定义 1.25: 关系的 n 次幂 (power)

设 R 是集合 A 上的二元关系，n 为自然数，则 R 的 n 次幂记为 R^n，定义为：

(1) $R^0 = I_A$;

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$;

♣

示例 1.9:

$X = \{0, 1\}$,X 的二元关系 $R_1 = \{\langle 1, 1\rangle\}$,$R_2 = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle\}$，分别求 R_1, R_2 各次幂。

答案： $R_1^0 = I_X = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$

$R_1^1 = R_1 = \{\langle 1, 1\rangle\}$

$R_1^2 = R_1 \circ R_1 = R_1 = \{\langle 1, 1\rangle\} = R_1$

$R_1^2 = R_1$

...

$R_2^0 = I_X = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$

$R_2^1 = R_2 = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle\}$

$R_2^2 = R_2 \circ R_2 = I_X$

$R_2^3 = R_2 \circ R_2^2 = R_2$

$R_2^4 = R_2 \circ R_2^3 = I_X$

定理 1.5: 幂运算性质

设 R 是集合 X 中的二元关系，$m, n \in N$，则：

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$;

(2) $(R^m)^n = R^{m \times n}$.

♡

证明： 数学归纳法

当 $n = 0$ 时，$R^m \circ R^n = R^m \circ R^0 = R^m \circ I_X = R^m = R^{m+0} = R^{m+n}$.

假设 $n = k$ 时，$R^m \circ R^k = R^{m+k}$.

当 $n = k+1$ 时，$R^m \circ R^{k+1} = R^m \circ) R \circ R^k (= R^m \circ) R^k \circ R (=) R^m \circ R^k (\circ R = R^{m+k} \circ R = R^{m+k+1}$.

由上可知，对于所有 $m, n \in \mathbb{N}$.

□

定义 1.26: 逆关系 (inverse relation)

设 R 是 X 到 Y 的二元关系，若将 R 中的每一个序偶的元素顺序互换，所得到的集合称为 R 的逆关系，记做 R^c。即：

$R^c = \{< y, x > | < x, y > \in R\}$。

♣

注意： 任何一个二元关系的逆关系总是存在的。

定理 1.6: 逆运算性质

设 R_1, R_2, R_3 都是从 A 到 B 的二元关系，则下列等式成立：

(1) $(R_1 \cup R_2)^c = R_1^c \cup R_2^c$;

(2) $(R_1 \cap R_2)^c = R_1^c \cap R_2^c$;

(3) $(A \times B)^c = B \times A$;

(4) $(\bar{R})^c = \bar{R}^c$，也可以记为 $(\sim R)^c = \ \sim R^c$;

(5) $(R_1 - R_2)^c = R_1^c - R_2^c$。

♡

示例 1.10:

证明 $(R_1 \cup R_2)^c = R_1^c \cup R_2^c$.

证明： $\langle x, y \rangle \in (R_1 \cup R_2)^c \Rightarrow$

$\langle y, x \rangle \in R_1 \cup R_2 \Rightarrow$

$\langle y, x \rangle \in R_1 \vee \langle y, x \rangle \in R_2 \Rightarrow$

$\langle x, y \rangle \in R_1^c \vee \langle x, y \rangle \in R_2^c \Rightarrow$

$\langle x, y \rangle \in R_1^c \cup R_2^c$. □

1.3 函数 (function)

1.3.1 定义

在所有关系中有一类特殊二元关系，这类关系定义域和值域有特殊的对应关系。下面我们讨论这种特殊的关系。

定义 1.27: 函数 (function)/ 映射 (mapping)

f 是任意两个集合 X 到 Y 的一个关系，若对于 $\forall x \in X$，都有唯一的 $y \in Y$，使得 $< x, y > \in f$，则称关系 f 为函数，记做 $f : X \to Y$ 或 $X \xrightarrow{f} Y$。x 称为自变元，y 称为在 f 作用下 x 的像，也可记为 $y = f(x)$。函数也称为映射。 ♣

注意： 关系是笛卡尔积的一个子集，而这个子集再加上一定约束就是函数。而这个约束就是对于定义域中的任何一个元素 x_0，有且只存在一个形如 $< x_0, * >$ 的序偶。

示例 1.11:

$X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{a, b, c, d\}$, 下列哪些关系是函数。

$f_1 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, c \rangle, \langle 3, b \rangle, \langle 4, d \rangle\}$

$f_2 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, b \rangle\}$

$f_3 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 3, b \rangle, \langle 4, d \rangle\}$

$f_4 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, c \rangle, \langle 4, d \rangle\}$

答案： f_1, f_2 是函数。f_3 不是函数，因为 $f_3(x) \notin Y$。f_4 不是函数，因为 $f_4(1)$ 对应两个 Y 中元素。

1.3.2 函数间关系

定义 1.28: 函数相等

f，g 都是从 A 到 B 的函数，若他们有相同的定义域和值域，并且 $\forall x \in A$ 都有 $f(x) = g(x)$，则称函数 f 和 g 相等，记为 $f = g$。♣

1.3.3 特殊的函数

定义 1.29: 满射 (surjection)

$X \xrightarrow{f} Y$，如果 Y 中的每一个元素都是 X 中的一个或者多个元素的像，则称这个映射是满射。♣

注意： 满射我们也可以这样来描述，就是值域中的每个元素 y 都有对应的 x 存在，使得 $f(x) = y$。

定义 1.30: 单射 (injective)

从 X 到 Y 的映射中，若 X 中没有两个元素有相同的像，则称这个映射为单射。♣

定义 1.31: 双射 (Bijection)

从 X 到 Y 的映射中，若既是满射又是单射，称这个映射为双射，也称这样的映射是一一映射或一一对应。♣

定义 1.32: 常函数 (constant function)

f 称为常函数 $\iff \exists y_0 \in Y, \forall x \in X, f(x) = y_0$。♣

定义 1.33: 恒等函数 (identity function)

如果 $I_X = <x, x>| x \in X$，则称 $I_X = X \to X$ 为恒等函数。♣

定理 1.7

X 和 Y 为有限集，且 X 和 Y 的元素个数相同 (记为 $|X| = |Y|$)，则 $f : X \to Y$ 是单射，当且仅当它是一个满射。♡

证明： (1) 若 f 是单射，则 $|X| = |f(X)|$, 已知 $|X| = |Y|$, 所以 $|Y| = |f(X)|$, 因为 Y 是有限集, 因此 f 是满射。

(2) 若 f 是满射，则 $|Y| = |f(X)|$, 已知 $|X| = |Y|$, 所以 $|X| = |f(X)|$, 因为 X 是有限集。因此 f 是单射。 □

以上这个定理只有在有限集时才成立，在无限集上不一定成立，如 $f:\mathbb{I}\to\mathbb{I}$,f(x)=2x，这是将整数映射为偶整数的，显然这是一个单射，单不是满射。

定理 1.8

设 $f: X\to Y$ 是一个双射函数，那么 f^c 是 $Y\to X$ 的双射函数。♡

1.3.4 函数的运算

定义 1.34: 逆函数/反函数 (Inverse Function)

设 $f: X\to Y$ 是一个双射函数，称 $Y\to X$ 的双射函数 f^c 为 f 的逆函数，记作 f^{-1}。♣

定义 1.35: 左边可复合 (composite)

$f: X\to Y, g: W\to Z$，若 $f(X)\subseteq W$(或 $Y\subseteq W$)，则 $g\circ f = <x,z>|\ x\in X\wedge z\in Z\wedge \exists y(y\in Y\wedge y=f(x)\wedge z=g(y))$，称 g 在函数 f 的左边可复合。♣

注意： 复合运算的顺序是从右向左。

定理 1.9

两个函数的复合是一个函数。♡

定理 1.10

令 $g\circ f$ 是一个复合函数。

(1) 若 g 和 f 是满射，则 $g\circ f$ 是满射。

(2) 若 g 和 f 是单射，则 $g\circ f$ 是单射。

(3) 若 g 和 f 是双射，则 $g\circ f$ 是双射。♡

定理 1.11

$f: X\to Y \Rightarrow f = f\circ I_X = I_Y\circ f$。♡

定理 1.12

$f: X\to Y$ 是双射 $\Rightarrow (f^{-1})^{-1} = f$。♡

定理 1.13

$f: X\to Y, g: Y\to Z$ 都是双射 $\Rightarrow (g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$。♡

1.4 势 (potential)

定义 1.36: 集合等势 (equivalent set)

当且仅当集合 A 和 B 之间存在一一对应的函数，集合 A 与集合 B 称为等势，记作 $A \sim B$。♣

注意： 集合等势和集合中元素个数相同是一个概念吗？

显然不是。

示例 1.12:证明区间 $[0,1]$ 和 $(0,1)$ 等势。

证明： 设集合 $A = 0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$，显然 $A \subseteq [0,1]$, 定义 $f : [0,1] \to (0,1)$，使得

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 0 \\ \frac{1}{3} & x = 1 \\ \frac{1}{\frac{1}{x}+2} & x \in \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \\ x & x \in (0,1) - A \end{cases}$$

可知 f 是个双射函数，命题得证。□

定义 1.37: 有限集合与无限集合，可数集或可列集 (finite set, infinite set,countable set)

如果存在一个从集合 $0, 1, \ldots, n-1$ 到集合 A 的双射，那么称集合 A 是有限的，如果 A 不是有限的，那么称 A 为无限的。若有从正整数集合 $1, 2, \ldots, n, \ldots$ 到 A 的双射，则称 A 是可数集或可列集。♣

定理 1.14

在集合族上等势关系是一个等价关系。♡

定理 1.15

自然数、正奇数、正偶数、整数集是可数集。♡

1.5 皮亚诺算术公理系统

定义 1.38: 后继集 (follow set)

给定集合 A，集合 A 的后继集记为 $A^+ \Leftrightarrow A \cup \{A\}$。♣

注意： 后继集也称为集合的后继 (*successor of a set*)，是集合的一种一元运算，亦称为后继运算，或后继函数。

示例 1.13:

对于空集 $\Phi,\Phi \triangleq 0,\Phi$ 的后继集 $\Phi^+ = 0^+ = \Phi \cup \{\Phi\} = \{\Phi\} \triangleq 1$
$1^+ = \{\Phi, \{\Phi\}\} \triangleq 2$

皮亚诺公理是意大利皮亚诺所构造的算术公理系统中的公理。1889 年，在数学家戴德金工作的基础上，皮亚诺在《用一种新方法陈述的算术原理》一书中提出了一个算术公理系统，这个公理系统有九条公理，其中四条是关于“相等”的，五条是刻画数的，并且以 1 而不是 0 作为基本概念。在后来的著作中，皮亚诺对这一算术系统作了修改，去除了关于“相等”的四条公理，并且以 0 取代 1 作为基本概念，构造了沿用至今的皮亚诺算术公理系统。[3]

定理 1.16: 皮亚诺公理 (G. Peano axioms)

(1) $0 \in \mathbf{N}$

(2) $x \in \mathbf{N} \to Sx \in \mathbf{N}$

(3) $x \in \mathbf{N} \to Sx \neq 0$

(4) $x \in \mathbf{N} \land y \in \mathbf{N} \land Sx = Sy \to x = y$

(5) $0 \in M \land \forall x(x \in M \to Sx \in M) \to \mathbf{N} \subseteq M$ for any property M (axiom of induction).

注意： *Cited from Encyclopedia of Mathematics [4]. A system of five axioms for the set of natural numbers* **N** *and a function S (successor) on it, introduced by G. Peano (1889). In the first version of his system, Peano used 1 instead of 0 in axioms 1, 3, and 5. Similar axioms were proposed by R. Dedekind (1888).*

1.6 拓扑空间 (topological space)

注意： *topology(摘抄自 bing 的英英解释)*

1. the study of the properties of geometric figures that are independent of size or shape and are not changed by stretching, bending, knotting, or twisting

2. the family of all open subsets of a mathematical set, including the set itself and the empty set, which is closed under set union and finite intersection

3. the anatomy of a part of the body

4. the study of changes in topography that occur over time and, especially, of how such changes taking place in an area affect the history of that area

5. the relationships between parts linked together in a system such as a computer network

从 X 到 Y 的函数也称为映射。拓扑空间是一种数学结构（mathematical structure），数学结构是一种关系结构，确切说，拓扑是集合上的一种结构。度量空间是一种特殊

[3] 此段描述来自于 https://baike.baidu.com/item/%E7%9A%AE%E4%BA%9A%E8%AF%BA%E5%85%AC%E7%90%86，在原链接的描述总，此段话引自：彭漪涟．逻辑学大辞典：上海辞书出版社，2004 年 12 月

[4] Peano axioms. Encyclopedia of Mathematics. URL: http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Peano_axioms&oldid

的拓扑空间，费雷歇 (Fréchet) 将欧几里得空间的距离概念抽象化，于 1906 年定义了度量空间。

定义 1.39: 度量空间 (metric space)

$\mathbb{X}$ 是一个集合,$\mathbb{R}$ 是实数集,$d:\mathbb{X}\times\mathbb{X}\to\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{X}\times\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射，如果对于任意 $x,y,z\in\mathbb{X}$，有

(1) 正定性 (positive definite)：$d(x,y)\geq 0$，且 $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$;

(2) 对称性 (symmetry)：$d(x,y)=d(y,x)$;

(3) 三角不等式 (the triangle inequality)：$d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)$;

则称 d 是 $\mathbb{X}$ 的一个度量，称 $(\mathbb{X},d)$ 是一个度量空间，称实数 $d(x,y)$ 为 x 到 y 的距离。 ♣

定义 1.40: 离散度量空间 (discrete spaces)

$(\mathbb{X},d)$ 是一个度量空间，若对于每一个 $x\in\mathbb{X}$ 存在实数 $\delta_x>0$, 使得对于任意 $y\in\mathbb{X},y\neq x$，有 $d(x,y)>\delta_x$，则称此度量空间是离散度量空间。 ♣

定义 1.41: 拓扑空间 (topological space)

$\mathbb{X}$ 是一个集合，τ 是 $\mathbb{X}$ 的一个子集族，如果 τ 满足下列条件：

(1) $\mathbb{X},\emptyset\in\tau$;

(2) $A,B\in\tau\Rightarrow A\cap B\in\tau$;

(3) $\tau_1\subset\tau\Rightarrow\bigcup\limits_{A\in\tau_1}A\in\tau$;

则称 τ 是集合 $\mathbb{X}$ 的一个拓扑，称 $(\tau,\mathbb{X})$ 是一个拓扑空间。τ 中每一个元素称为 $(\tau,\mathbb{X})$ 中的开集 (open set)。 ♣

开集定义就是拓扑空间定义。

定义 1.42: 闭集和闭包 (closed set)

开集的补集称为闭集。 ♣

定义 1.43: 平凡拓扑 (trivial topology)

X 是一个集合，令 $\Gamma=\{X,\Phi\}$，则 Γ 是 X 的一个拓扑，称此类拓扑为平凡拓扑。♣

定义 1.44: 离散拓扑 (discrete topology)

X 是一个集合，令 $\Gamma=\rho(X)$ 为 X 的幂集，则 Γ 是 X 的一个拓扑，称此类拓扑为离散拓扑。 ♣

离散拓扑是最细拓扑，平凡拓扑是最粗的拓扑。

1.7 组合数学 (combinational mathematics)

现代数学可以分为两大类：一类是研究连续对象的，如分析学、方程等，另一类就是研究离散对象的数学。有人认为广义的组合数学就是离散数学，也有人认为离散数学是狭义的组合数学和图论、代数结构、数理逻辑等的总称。但这只是不同学者在叫法上的区别，随着计算机科学的日益发展，组合数学的重要性也日渐凸显，因为计算机科学的核心内容是使用算法处理离散数据。组合数学不仅在基础数学研究中具有极其重要的地位，在其它的学科中也有重要的应用，如计算机科学、编码和密码学、物理、化学、生物学等学科中均有重要应用。微积分和近代数学的发展为近代的工业革命奠定了基础。而组合数学的发展则是奠定了本世纪的计算机革命的基础。计算机之所以可以被称为电脑，就是因为计算机被人编写了程序，而程序就是算法，在绝大多数情况下，计算机的算法是针对离散的对象，而不是在做数值计算。确切地说，组合数学是计算机出现以后迅速发展起来的一门数学分支，主要研究离散对象的存在、计数以及构造等方面问题。由于计算机软件的促进和需求，组合数学已成为一门既广博又深奥的学科，其发展奠定了本世纪的计算机革命的基础，并且改变了传统数学中分析和代数占统治地位的局面。正是因为有了组合算法才使人感到，计算机好像是有思维的。组合数学不仅在软件技术中有重要的应用价值，而且在企业管理、交通规划、战争指挥、金融分析等领域都有重要的应用。在美国有一家用组合数学命名的公司，他们用组合数学的方法来提高企业管理的效益，这家公司办得非常成功。此外，试验设计也是具有很大应用价值的学科，它的数学原理就是组合数学。用组合数学的方法解决工业界中的试验设计问题，在美国已有专门的公司开发这方面的软件。[5]

1.7.1 排列与组合 (permutation and combination)

定义 1.45: 集合的一个划分 (partition)

集合 $S_1, S_2, \ldots, S_m$ 是集合 S 的子集，且 $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m, S_i \cap S_j = \emptyset, i \neq j$，则称 $S_1, S_2, \ldots, S_m$ 是 S 的一个划分。♣

定义 1.46: S 的 r 重排列

S 是一个 n 集，r 是正整数，则笛卡尔积 $\underbrace{S \times S \times \cdots \times S}_{r} = \{< a_1, a_2, \ldots, a_r >| a_i \in S, i = 1, 2, \ldots, r\}$ 的元素 $< a_1, a_2, \ldots, a_r >$ 称为 S 的一个 r 重排列，其个数记为 $RP(\infty, r)$。♣

[5] https://baike.baidu.com/item/组合数学/821134?fr=aladdin

定义 1.47: S 的 r 排列，全排列

n 集 S 的 r 重排列 $< a_1, a_2, \ldots, a_r >$ 中的分量互不相同，则称这个 r 重排列为 S 的 r 排列或称 n 集的 r 排列，n 集中所有不同的 r 排列的个数记为 $P(n, r)$，当 $n = r$ 时，n 集的 r 排列简称为 n 集的全排列。♣

定义 1.48: S 的 r 可重组合

设 S 是一个 n 集，r 是一个非负整数，则称 $[b_1, b_2, \ldots, b_r]$ 为 S 的 r 可重组合，其中 $b_1, b_2, \ldots, b_r \in S$（(但未必不相同)，S 中的元素 b 在 r 可重组合 $[b_1, b_2, \ldots, b_r]$ 中出现的次数，称为 b 在这个可重组合中的重数。♣

定义 1.49: S 的 r 组合

设 S 是一个 n 集，$[b_1, b_2, \ldots, b_r]$ 为 S 的 r 可重组合，若 S 中的每个元素在此 r 可重组合中的重数均为 0 或 1，即 $b_1, b_2, \ldots, b_r \in S$ 互不相同，则称 $[b_1, b_2, \ldots, b_r]$ 为 S 的 r 组合，或称 n 集的 r 组合，n 集中所有不同 r 组合的个数记为 $C(n, r)$ 或 $\left\{ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\}$。♣

定理 1.17: 划分的加法原理

设 $S_1, S_2, \ldots, S_m$ 是集合 S 的一个划分，则 $|S| = |S_1| + |S_2| + \cdots + |S_m|$。♡

定理 1.18: 划分的乘法原理

设 $S_1, S_2, \ldots, S_m$ 是 m 个有限集，则 $|S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m| = |S_1| \cdot |S_2| \cdot \cdots \cdot |S_m|$。♡

定理 1.19: 划分的减法原理

设 E 为全集，则 $|A| = |E| - |E - A|$。♡

定理 1.20: 划分的除法原理

设 S 为有限集合，它被划分为 m 个部分 $(S_1, S_2, \ldots, S_m)$，且每个部分所包含元素数量相同 $(|S_1| = |S_2| = \cdots = |S_m|)$，则：

$m = \dfrac{|S|}{|S_i|}, i = 1, 2, \ldots, m$ ♡

定理 1.21: r 重排列个数

n 集 S 的 r 重排列的个数为 $RP(\infty, r) = n^r$。♡

定理 1.22: r 排列个数

$P(n, r) = n(n-1)\ldots(n-r-1)$；$P(n, n) = n!$。♡

1.7.2 生成函数 (generation function)

生成函数即母函数，是组合数学中尤其是计数方面的一个重要理论和工具。生成函数有普通型生成函数和指数型生成函数两种，其中普通型用的比较多。形式上说，普通型生成函数用于解决多重集的组合问题，而指数型母函数用于解决多重集的排列问题。最早提出母函数的人是法国数学家 *LaplaceP.S.* 在其 *1812* 年出版的《概率的分析理论》中明确提出“生成函数的计算”，书中对生成函数思想奠基人——*Euler L* 在 *18* 世纪对自然数的分解与合成的研究做了延伸与发展。生成函数的理论由此基本建立。生成函数的应用简单来说在于研究未知（通项）数列规律，用这种方法在给出递推式的情况下求出数列的通项，生成函数是推导 *Fibonacci* 数列的通项公式方法之一，另外组合数学中的 *Catalan* 数也可以通过生成函数的方法得到。另外生成函数也广泛应用于编程与算法设计、分析上，运用这种数学方法往往对程序效率与速度有很大改进。[6]

定义 1.50: 生成函数

对于数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$，称 $G(x) = a_0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 为该数列的生成函数。♣

定义 1.51: n 的一个 k 拆分

将一个正整数 n 分解为 k 个正整数之和，即 $n = n_1+n_2+\cdots+n_k(k \geqslant 1; n_i \geqslant 1, i = 1, 2, \ldots, k)$，我们称该分解是 n 的一个 k 拆分，并称 n_i 为分项。若考虑 n_i 之间的顺序，称这样的拆分为有序拆分，否则称为无序拆分。♣

定义 1.52: n 的拆分数

正整数 n 的所有无序拆分的个数称为 n 的拆分数，记为 $p(n)$，即 $p(n) = \sum_{k=1}^{n} p_k(n)$。♣

整数分拆理论，主要是研究各种类型的分拆函数的性质及其相互关系。早在中世纪，就有关于特殊的整数分拆问题的研究。18 世纪 40 年代，L. 欧拉提出了用母函数法（或称形式幂级数法）研究整数分拆，证明了不少有重要意义的定理，为整数分拆奠定了理论基础。解析数论中的圆法的引进，使整数分拆理论得到了进一步发展。整数分拆与模函数有密切关系，并在组合数学、群论、概率论、数理统计学及质点物理学等方面都有重要应用。

根据是否考虑分拆部分之间的排列顺序，我们可以将整数分拆问题分为有序分拆（composition）和无序分拆（partition）。两者之间的区别如下：在有序分拆中，考虑分拆部分求和之间的顺序。假定分拆之间不同的排序记为不同的方案，称之为 n 的有序 k 拆分，如 3 的有序 2 拆分为：3=1+2=2+1。我们可以将这个问题建模为排列组合中的“隔

[6] https://baike.baidu.com/item/生成函数

板”问题，即 n 个无区别的球分为 r 份且每份至少有一个球，则需要用 r-1 个隔板插入到球之间的 n-1 个空隙，因此总共的方案数为 C(n-1,r-1)。在无序拆分中，不考虑其求和的顺序，我们称之为 n 的无序 k 拆分，如 3 的无序 k 拆分为：3=1+2。这种拆分可以理解为将 n 个无区别的球分为 r 份且每份至少有一个球。一般情况下，无序拆分的个数用 p(n) 表示，则 p(2)=1，p(3)=2，p(4)=4。在通常情况下，整数分拆是指整数的无序分拆。[7]

定理 1.23: 生成函数运算

(1) $A(x) = B(x) \Longleftrightarrow a_k = b_k, k = 0, 1, 2, \ldots$。生成函数相同，生成序列相同。

(2) $A(x) + B(x) = C(x) \Longleftrightarrow a_k + b_k = c_k, k = 0, 1, 2, \ldots$。

(3) $A(x)B(x) = C(x) \Longleftrightarrow c_0 = a_0b_0, c_1 = a_0b_1 + a_1b_0, \ldots, c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_{k-1}b_1 + a_kb_0, \ldots$。 ♡

有了生成函数的概念，就可以讨论他与组合计数的关系。

示例 1.14:4 个相同球放入 5 个不同的盒子里，要求 1，2，每盒最多不超过 1 个，4，5 最多不超过两个，问有多少放法？

答案： 用 x^k 表示放 k 个球，现设计一个符合题意的放法:1，2 盒各放一个，3 盒放 0 个，4 盒放 2 个，5 盒放 0 个，符号表示为:$x^1x^1x^0x^2x^0$。

另外, 五个盒子的方法，用多项式表示为，$(x^0+x^1)(x^0+x^1)(x^0+x^1)(x^0+x^1+x^2)(x^0+x^1+x^2) = (1+x)^3(1+x+x^2)^2$, 这个多项式中 $x^4 = x^1x^1x^0x^2x^0$ 恰是题中描述的分配方案，因此，满足题意分配方案与多项式展开式中的 x^4 正好一一对应，所以 x^4 项系数即为方案数目。

示例 1.15:有 1 克，2 克，3 克，4 克砝码各 1 枚，问能称出几种重量？每种重量有几种方案。

答案： 1 克砝码有不取和取，不取用 $x^0 = 1$ 表示，取用 x^1 表示，记做 $1 + x$。2 克 $1 + x^2$,3 克 $1 + x^3$,4 克 $1 + x^4$，生成函数 $g(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)(1 + x^4) = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 2x^7 + x^8 + x^9 + x^10$，可见，可称 10 种重量，每种重量方案数为系数，5g 方案由两种。

[7] https://baike.baidu.com/item/整数分拆

第 2 章 整除

2.1 整除与带余除法

我们通常用 $\mathbb{N}$ 表示正整数（自然数）集合，用 $\mathbb{Z}$ 表示整数集合。

定义 2.1: 整除 (to be divisible by)

$a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$, 如果存在 $q \in \mathbb{Z}$, 使得 $a = qb$, 就称 a 可被 b 整除或者 b 整除 a，记为 $b \mid a$。a 是 b 的倍数 (multiple)，b 是 a 的因子 (factor)（或约数、除数）(divisor)。若 a 不能被 b 整除，记为 $b \nmid a$。♣

备注： 给定两个数，如何判断是否是整除关系？也就是说，判断整除的算法是什么？

定义 2.2: 真因子 (proper factor)

$b \mid a, b \neq \pm 1, b \neq \pm a,$, 称 b 为 a 的真因子。♣

定理 2.1: 整除定理

$a, b, c \in \mathbb{Z}$

1. $b \mid a \Leftrightarrow -b \mid a \Leftrightarrow b \mid -a \Leftrightarrow |b| \mid |a|$;
2. $a \neq 0, b \mid a \Rightarrow |b| \leq |a|$;
3. $b \mid a, c \mid b \Rightarrow c \mid a$;
4. $b \mid a \Rightarrow b \mid ac$;
5. $c \neq 0, b \mid a \Leftrightarrow bc \mid ac$;
6. $b \mid a, b \mid c \Leftrightarrow m, n \in \mathbb{Z}, b \mid ma + nc$; ♡

定理 2.2: 良序原理 (公理)(well ordering principle)

每一个由非负整数组成的非空集合 $\mathbb{S}$ 必定含有一个最小元素。♡

良序原理与我们的直观感觉相同，但是这个原理无法证明，所以良序原理是一个公理。

定理 2.3: 带余除法 (division alogorithm)

$a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$，则存在唯一的一对整数 q 和 r，使 $a = qb + r\ (0 \leq r < b)$。其中 a 称为被除数 (dividend)，q 称为商 (quotient)，r 称为余数 (remainder)。♡

定义 2.3: 奇数 (odd number)，偶数 (even number)

$a, b, r \in \mathbb{Z}, a = 2q + r, 0 \le r < 2$, 若 $r = 0$, 称 a 为偶数，若 $r = 1$，称 a 为奇数。♣

定义 2.4: 素数 (prime)，合数 (composite number)

$p \in \mathbb{Z}, p > 1$, 如果 p 的真因子只有 1 和其自身，称 p 为素数（或质数）。除 1 以外所有非素数的正整数称为合数（或复合数）。♣

定理 2.4: 无穷素数

素数有无穷多个。♡

证明：(欧几里德证明[1])

用反证法，假定只有有限个素数 $p_1, p_2, \ldots, p_k$，设 $a = p_1 p_2 \ldots p_k + 1$，由于 a 是合数，所以 a 必有素因子，不失一般性，假设这个素因子是 $p_j (1 \le j \le k)$，显然 $p_j \mid a$，因为 $a - p_1 p_2 \ldots p_k = 1$，同时 $p_j \mid (p_1 p_2 \ldots p_k)$，故 $p_j \mid 1$，但是因为素数 $p_j \ge 2$，与 $p_j \mid 1$ 矛盾，故假定错误，定理得证。□

定理 2.5: 素数性质

- $n \in \mathbb{N}$，存在素数 p，满足 $n < p \leqslant n! + 1$。
- $n \in \mathbb{Z}, n \geqslant 2 \Rightarrow n! + 2$ 与 $n! + n$ 之间必没有素数。
- n 为合数 $\Rightarrow$ n 必有素数因子 p 满足 $p \le \sqrt{n}$。
- 若 $2^n - 1$ 为素数，则 n 必为素数。

♡

示例 2.1:证明：n 为合数 $\Rightarrow$ n 必有素数因子 p 满足 $p \le \sqrt{n}$。

证明： 设 p 为 n 的最小素因子，如果 $n = r \cdot s$,r 和 s 均为 n 的真因子，那么 $p \le r \wedge p \le s$, 所以 $p^2 \le r \cdot s = n, p \le \sqrt{n}$ □

示例 2.2:

质数判断用 2 到 $\sqrt{n}$ 之间的所有整数去除正整数 n，均无法整数，则 n 为质数，这也是通常编程判断一个数是否为质数的方法。

示例 2.3:证明：若 $2^n - 1$ 为素数，则 n 必为素数。

证明： 对于 n>1, 假设 n 为合数，n=bc，b 和 c 均为大于 1 的整数，则 $2^b - 1 \mid 2^n - 1$, 所以 $2^n - 1$ 为合数，这与条件相矛盾。□

备注： (1) 如何判断一个数是否为素数？也就是通常说的素性判定。

(2) 目前常用的素性判断方法是 Miller-Rabin 算法。

[1]公元前 300 年左右，古希腊数学家欧几里德写在《几何原本》中的一个古老定理（欧几里德定理）和它的证明，距今已有两千多年的历史了。(来自于数学科普微信公众号“职业数学家在民间”(微信号：minjianshuxuejia)，其中的一片文章“【人人都能欣赏的数学证明】为什么有无限多个素数？”)

The Sieve of Eratosthenes[2]

The Greek mathematician Eratosthenes (3rd-century B.C.E) designed a quick way to find all the prime numbers. It' s a process called the Sieve of Eratosthenes. We' re going to see how it works by finding all the prime numbers between 1 and 100. The idea is to find numbers in the table that are multiples of a number and therefore composite, to discard them as prime. The numbers that are left will be prime numbers. The Sieve of Eratosthenes stops when the square of the number we are testing is greater than the last number on the grid (in our case 100). Since 112 = 121 and 121>100, when we get to the number 11, we can stop looking.

2.2 最大公因子

2.2.1 基本概念

定义 2.5: 公因子 (common factor), 最大公因子 (greatest common factor), 互素 (relatively prime)

设 $a_1, a_2, \ldots a_n$ 是 n 个不全为零的整数, 若整数 d 是他们之中每一个数的因子, 那么 d 就称为 $a_1, a_2, \ldots a_n$ 的一个公因子, 所有公因子中最大的称为最大公因子, 记为 $gcd(a_1, a_2, \ldots a_n)$。若 $gcd(a_1, a_2, \ldots a_n) = 1$, 称 $a_1, a_2, \ldots a_n$ 互素 (或互质)。 ♣

2.2.2 性质

定理 2.6: 最大公因子性质

- a,b,c 是任意三个不全为零的整数, 且 $a = bq + c$, q 是整数 $\Rightarrow gcd(a, b) = gcd(b, c)$。
- 对于任意两个整数 a 和 b, 一定存在两个整数 m 和 n, 使得 $gcd(a, b) = ma + nb$, 也就是说 $gcd(a, b)$ 是 a 和 b 的整系数线性组合。
- $a, b, c \in \mathbb{Z}, c \mid a \wedge c \mid b \Rightarrow c \mid gcd(a, b)$.
- $a, b, c \in \mathbb{Z}, c > 0 \Rightarrow gcd(ac, bc) = gcd(a, b) \times c$.
- $a, b, c \in \mathbb{Z}, a \mid bc \wedge gcd(a, b) = 1 \Rightarrow a \mid c$.
- $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}, gcd(a_1, a_2) = d_2, gcd(d_2, a_3) = d_3, \ldots, gcd(d_{n-1}, a_n) = d_n \Rightarrow gcd(a_1, a_2, \ldots, a_n) = d_n$.

♡

[2]cited from https://www.smartickmethod.com/blog/math/operations-and-algebraic-thinking/divisibility/prime-numbers-sieve-eratosthenes/ ，在这个网页内有以动画方式表示的筛选过程，可以参考阅读，来理解此算法

示例 2.4: 证明上面的性质：a,b,c 是任意三个不全为零的整数，且 $a = bq + c$，q 是整数 $\Rightarrow gcd(a, b) = gcd(b, c)$。

证明： $gcd(a, b) \mid a, gcd(a, b) \mid b, c = a - bq \Rightarrow gcd(a, b)|c$
所以，$gcd(a, b)$ 是 b 和 c 的公因子
那么有，$gcd(a, b) \leq gcd(b, c)$。

$$\left.\begin{array}{r} a = bq + c \Rightarrow gcd(b, c) \mid a \\ gcd(b, c) \mid b \end{array}\right\} \Rightarrow gcd(b, c) \leq gcd(a, b)$$

由上可知 $gcd(a, b) = gcd(b, c)$. □

示例 2.5: 已知 $35 = 10 \times 3 + 5$, 可知 $gcd(35, 10) = 5, gcd(10, 5) = 5$.

示例 2.6: 已知 $529 = 130 \times 4 + 9$

答案： 我们先用 sagemath 计算一下：

sagemath: 求两数最大公约数

```
sage: gcd(529,130)
1
sage: gcd(130,9)
1
sage:
```

然后手工计算一下：

$529 = 130 \times 4 + 9, gcd(529, 130) = gcd(130, 9)$

$130 = 9 \times 14 + 4, gcd(130, 9) = gcd(9, 4)$

$9 = 4 \times 2 + 1, gcd(9, 4) = gcd(4, 1)$

$4 = 1 \times 4 + 0, gcd(4, 1) = 1$

所以，529、130 互质。

2.2.3 欧几里得除法

给定任意两个正整数 a 和 b(任意两个整数呢？)，假设 $a \geqslant b$，如何求解 a 和 b 的最大公因数呢？

辗转相除法/欧几里得除法 (Euclid's algorithm)

求 a,b 最大公因数的方法 (设 $a \geq b$)

$a = bq_1 + r_1, 0 < r_1 < b$
$b = r_1q_2 + r_2, 0 < r_2 < r_1$
$r_1 = r_2q_3 + r_3, 0 < r_3 < r_2$
$\ldots$
$r_{n-1} = r_nq_{n+1} + r_{n+1}, r_{n+1} = 0.$
$gcd(a, b) = r_n$

示例 2.7:
a=1560,b=1200，求 a,b 的最大公因子。

答案： $1560 = 1200 \times 1 + 360$
$1200 = 360 \times 3 + 120$
$360 = 120 \times 3 + 0$
$gcd(1560, 1200) = 120$
为了使得过程更加清晰，我们做一张表，展示其过程，初始 $q_0 = a = 1560, r_0 = b = 1200$：

i	q_i	r_i	m_i	r_{i+1}
0	1560	1200	1	360
1	1200	360	3	120
2	360	120	3	0

定理 2.7: 最大公因子性质

- 任给两个正整数 a 和 b，一定存在两个整数 m,n，使得 $gcd(a, b) = ma + nb$，即 gcd(a,b) 是 a 和 b 的线性组合.
- 设整数 a,b,c 满足 $c \mid a \wedge c \mid b$，则 $c \mid gcd(a, b)$.
- $a, b, c \in \mathbb{Z}, c > 0 \Rightarrow gcd(ac, bc) = gcd(a, b)c.$
- 整数 a,b 互素的充分必要条件是存在整数 x,y，使得 $xa + yb = 1$.
- 设有整数 a,b,c，若 $a \mid bc$ 且 $gcd(a, b) = 1$，则 $a \mid c$.
- 设 $a_1, a_2, , a_n \in \mathbb{Z}$，其中 $a_1 \neq 0$. 令 $gcd(a_1, a_2) = d_2, gcd(d_2a_3) = d_3, , gcd(d_{n1}, a_n) = d_n \Rightarrow gcd(a_1, a_2, , a_n) = d_n$.

♡

2.3 最小公倍数

2.3.1 基本概念

定义 2.6: 最小公倍数 (least common multiple)

设 $a_1, a_2, , a_n$ 是 n 个整数, 若 m 是这 n 个数中每一个数的倍数, 则 m 就称为这 n 个数的一个公倍数. 在 $a_1, a_2, , a_n$ 的所有公倍数中最小的正整数称为最小公倍数, 记作 $[a_1, a_2, , a_n]$ 或者 $lcm(a_1, a_2, , a_n)$. ♣

已知最小公倍数的定义，如何来求解最小公倍数，下面我们进行简单的讨论。

定理 2.8: 互素数的最小公倍数

设 a 和 b 为任意两个互素正整数, 则其乘积即为最小公倍数。♡

示例 2.8:

5 和 7 的最小公倍数是 $5 \times 7 = 35$,4 和 8 的最小公倍数数是 8，而不是 $4 \times 8 = 32$.

2.3.2 性质

定理 2.9: 最小公倍数性质

设 a 和 b 为任意正整数, 则

(1) 若 m 是 a,b 的任一公倍数, 则 $lcm(a, b) \mid m$;

(2) $lcm(a, b) = \frac{ab}{gcd(a,b)}$.

(3) $gcd(a, b) \times lcm(a, b) = a \times b$ ♡

示例 2.9:

4 和 8 的最大公约数为 4，所以 $lcm(4, 8) = \frac{4 \times 8}{4}$

定理 2.10: 最小公倍数性质

$a_1, a_2, , a_n$ 是 n 个整数,

- $lcm(a_1, a_2) = m_2, lcm(m_2, a_3) = m_3, , lcm(m_(n1), a_n) = m_n \Rightarrow lcm(a_1, a_2, , a_n) = m_n$.
- $a_1 \mid m, a_2 \mid m, , a_n \mid m \Rightarrow lcm(a_1, a_2, ..., a_n) \mid m$. ♡

由上面的定理我们可以得出，对于一组整数，求其最小公倍数时，可以转换为求解一系列两两之数的最小公倍数。也就是我们可以利用两个数最小公倍数的算法做为运算单元，求解多个数的最小公倍数。

2.4 算术基本定理

2.4.1 算术基本定理

定理 2.11: 算术基本定理 (Fundamental Theorem of arithmetric)

任一大于 1 的整数都可以表示成素数的乘积, 且在不考虑乘积顺序的情况下, 该表达式是唯一的. 即 $n = p_1p_2\dots p_s, p_1 \le p_2 \le \dots \le p_s$, 其中 $p_1p_2\dots p_s$ 是素数, 并且若 $n = q_1q_2\dots q_t, q_1 \le q_2 \le \dots \le q_t$, 其中 $q_1q_2\dots q_t$ 是素数, 则 $s = t, p_i = q_i(i = 1, 2, \dots, s)$. ♡

算术基本定理也被称为整数的唯一分解定理。

定理 2.12: 标准分解式

任一大于 1 的整数都能够唯一地表示成 $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_s^{a_s}, a_i > 0, i = 1, 2, \dots, s$, 其中 $p_i < p_j(i < j)$ 是素数。♡

2.4.2 整数分解方法

给定一个整数，计算此整数的分解式的一般方法是，用小于此整数的素数，从大到小，去除此数，能整除，则此素数是一个素因子，然后继续用此方法找商的第一个素因子，依次类推。

示例 2.10:
计算 360 的唯一分解。

答案： $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

示例 2.11:
大数分解 6596783,6596784。

答案：

sagemath: 整数分解

```
sage: factor(6596783)
6596783
sage: factor(6596784)
2^4 * 3^2 * 61 * 751
sage:
```

注意：

(1) 素数表。做整数分解，最直观的方法就是依次用素数去除，可以整除就是其一个因子，可见先有一张素数表很重要，那么怎么来准备这张素数表呢？

(2) 大数运算。编程语言通常的数的范围有限，所以通常在进行密码学上的计算或者一些数据计算时，需要有大数运算能力，这需要专有运算库来支持。

(3)C 语言 *int* 占 *2 bytes*，符号位占一位，正数最大为 $2^15 = 32768$

(4) 开源项目 *GMP(GNU multiple precision arithmetic library)*, 网站 *https://gmplib.org/*

2.4.3 标准分解式的应用

定理 2.13: 正因子个数

设正整数 n 的标准分解式为 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}, a_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, s, \tau(n)$ 表示 n 的所有正因子的个数，则 $\tau(n) = \tau(p_1^{a_1})\tau(p_2^{a_2})\tau(p_s^{a_s}) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_s + 1)$ ♡

示例 2.12:$84 = 2^2 \times 3 \times 7$, 求 $\tau(84)$

答案： $\tau(84) = (2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 12$，也就是说 84 共有 12 个正因子，下面我们罗列一下这 12 个正因子：
1,84,2,3,4,6,7,12,14,21,28,42.

示例 2.13:
计算 360 的所有正因子的个数。

答案： $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5, \tau(360) = \tau(2^3)\tau(3^2)\tau(5) = (3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$

定理 2.14: int

数 a 和 b 的整数分解式为：

$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}, \alpha_i > 0, i = 1, 2, \dots, s$

$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_1} \dots p_s^{\beta_s}, \beta_i > 0, i = 1, 2, \dots, s$

那么：

$gcd(a, b) = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_s^{\gamma_s}, \gamma_i = min(\alpha_i, \beta_i), i = 1, 2, \dots, s.$

$lcm(a, b) = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_s^{\delta_s}, \delta_i = max(\alpha_i, \beta_i), i = 1, 2, \dots, s.$

♡

2.5 完全数、梅森素数和费马素数

定理 2.15: 完全数

若正整数 n 的所有正因子之和等于 2n，则 n 称为完全数。♡

示例 2.14:
6 的正因子有 1、2、3、6，$1 + 2 + 3 + 6 = 12, 2 \times 6 = 12$，根据完全数定义，6 是一个完全数。

我们用 $\sigma(n)$ 表示正整数 n 的所有正因子之和，所以如果 n 是完全数，那么 $\sigma(n)=2n$。

完全数（Perfect number），又称完美数或完备数，是一些特殊的自然数。它所有的真因子（即除了自身以外的约数）的和（即因子函数），恰好等于它本身。例如：第一个完全数是 6，它有约数 1、2、3、6，除去它本身 6 外，其余 3 个数相加，1+2+3=6。第二个完全数是 28，它有约数 1、2、4、7、14、28，除去它本身 28 外，其余 5 个数相加，1+2+4+7+14=28。第三个完全数是 496，有约数 1、2、4、8、16、31、62、124、248、496，除去其本身 496 外，其余 9 个数相加，1+2+4+8+16+31+62+124+248=496。后面的完全数还有 8128、33550336 等等。

公元前 6 世纪的毕达哥拉斯是最早研究完全数的人，他已经知道 6 和 28 是完全数。毕达哥拉斯曾说："6 象征着完满的婚姻以及健康和美丽，因为它的部分是完整的，并且其和等于自身。" 有些《圣经》注释家认为 6 和 28 是上帝创造世界时所用的基本数字，因为上帝创造世界花了六天，二十八天则是月亮绕地球一周的日数。圣・奥古斯丁说：6 这个数本身就是完全的，并不因为上帝造物用了六天；事实上，因为这个数是一个完全数，所以上帝在六天之内把一切事物都造好了。

在中国文化里：有六谷、六畜、战国时期的六国、秦始皇以六为国数、六常（仁、义、礼、智、信、孝）、天上四方有二十八宿等等，6 和 28，在中国历史长河中，之所以熠熠生辉，是因为它是一个完全数。难怪有的学者说，中国发现完全数比西方还早呢。

完全数诞生后，吸引着众多数学家与业余爱好者像淘金一样去寻找。它很久以来就一直对数学家和业余爱好者有着一种特别的吸引力，他们没完没了地找寻这一类数字。接下去的两个完数看来是公元 1 世纪，毕达哥拉斯学派成员尼克马修斯发现的，他在其《数论》一书中有一段话如下：也许是这样，正如美的、卓绝的东西是罕有的，是容易计数的，而丑的、坏的东西却滋蔓不已；是以盈数和亏数非常之多，杂乱无章，它们的发现也毫无系统。但是完全数则易于计数，而且又顺理成章：因为在个位数里只有一个 6；十位数里也只有一个 28；第三个在百位数的深处，是 496；第四个却在千位数的尾巴颈部上，是 8128。它们具有一致的特性：尾数都是 6 或 8，而且永远是偶数。但在茫茫数海中，第五个完全数要大得多，居然藏在千万位数的深处！它是 33550336，它的寻求之路也更加扑朔迷离，直到十五世纪才由一位无名氏给出。这一寻找完全数的努力从来没有停止。电子计算机问世后，人们借助这一有力的工具继续探索。笛卡尔曾公开预言："能找出完全数是不会多的，好比人类一样，要找一个完美人亦非易事。" 时至今日，人们一直没有发现有奇完全数的存在。于是是否存在奇完全数成为数论中的一大难题。只知道即便有，这个数也是非常之大，并且需要满足一系列苛刻的条件。[3]

[3]https://baike.baidu.com/item/完全数

定理 2.16: 梅森数 (Mersenne number)

p 是一个素数，形如 $2^p - 1$ 的数叫做梅森数，记作 $M_p = 2^p - 1$，当 M_p 是素数时，则称其为梅森素数。♡

古希腊数学家欧几里得在名著《几何原本》中证明了素数有无穷多个，并论述完全数时提出：如果 $2^P - 1$ 是素数 (其中指数 P 也是素数)，则 $2^(P - 1)(2^P - 1)$ 是完全数。瑞士数学家和物理学家欧拉证明所有的偶完全数都有这种形式。因此，人们只要找到 $2^P - 1$ 型素数，就可以发现偶完全数了。数学界将 $2^P - 1$ 型素数称为“梅森素数”(Mersenne prime)，因为法国数学家和法兰西科学院奠基人梅森在这方面的研究成果较为卓著。梅森素数貌似简单，但探究难度却极大。它不仅需要高深的理论和纯熟的技巧，而且还需要进行艰巨的计算。到 2013 年 2 月 6 日为止，人类仅发现 48 个梅森素数。值得提出的是：在梅森素数的基础研究方面，法国数学家鲁卡斯和美国数学家雷默都做出了重要贡献；以他们命名的“鲁卡斯-雷默方法”(Lucas-Lehmer primality test) 是目前已知的检测梅森素数素性的最佳方法。此外，中国数学家和语言学家周海中给出了梅森素数分布的精确表达式，为人们寻找梅森素数提供了方便；这一研究成果被国际上命名为“周氏猜测”。

美国中央密苏里大学数学家库珀领导的研究小组通过参加一个名为“互联网梅森素数大搜索”(GIMPS)[4]项目，于 2016 年 1 月 7 日发现了第 49 个梅森素数——$2^{74207281} - 1$。该素数也是目前已知的最大素数，有 22,338,618 位。这是库珀教授第四次通过 GIMPS 项目发现新的梅森素数，刷新了他的记录。他上次发现第 48 个梅森素数 $2^{57885161} - 1$ 是在 2013 年 1 月，有 17425170 位。

梅森素数在当代具有重大意义和实用价值。它是发现已知最大素数的最有效途径，其探究推动了“数学皇后”——数论的研究，促进了计算技术、密码技术、程序设计技术和计算机检测技术的发展。难怪许多科学家认为，梅森素数的研究成果，在一定程度上反映了一个国家的科技水平。英国数学协会主席马科斯索托伊甚至认为它的研究进展不但是人类智力发展在数学上的一种标志，也是整个科技发展的里程碑之一。

所有的奇素数都是准梅森数 $2^N - 1$ 的因子数，凡是一个素数是四倍金字塔数 A 的因子数，都不是以后梅森合数的因子数，则留下部份素数可能都是梅森合数的因子数。

定理 2.17: 费马数 (Fermat number)

n 是非负整数，则 $F_n = 2^{2^n} + 1$ 称为费马数。当 F_n 为素数时，称其为费马素数。♡

法国数学家费马于 1640 年提出了以下猜想:

F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 都是质数，因为第六个数实在太大，费马没有计算出来，他猜测第六个数也是素数。由此提出费马数都是素数的猜想。

1732 年，欧拉算出 $F_5 = 641 \times 6700417$，也就是说 F_5 不是质数，宣布了费马的

[4]GIMPS 是 great internet Mersenne Prime search, 网站在 www.mersenne.org

这个猜想不成立，它不能作为一个求质数的公式。以后，人们又陆续找到了不少反例，如 n=6 时，$F6 = 2^{2^6} + 1 = 274177672804213 10721$ 不是质数。至今这样的反例共找到了 243 个，却还没有找到第 6 个正面的例子，也就是说只有 n=0，1，2，3，4 这 5 个情况下，F_n 才是质数。

第 3 章 同余

3.1 同余的基本概念和性质

3.1.1 基本概念

定义 3.1: 同余 (congruence)

定一个正整数 m，如果用 m 去除两个整数 a 和 b 所得的余数相同，称 a 和 b 模 (module)m 同余，记为 $a \equiv b(mod\ m)$。否则，称 a 和 b 模 m 不同余，记为 $a \not\equiv b(mod\ m)$。

示例 3.1:

1(mod 5)=1=6 (mod 5)=11 (mod 5)

2(mod 5)=2=7 (mod 5)=12 (mod 5)

3(mod 5)=3=8 (mod 5)=13 (mod 5)

4(mod 5)=4=9 (mod 5)=14 (mod 5)

5(mod 5)=0=10 (mod 5)=15 (mod 5)

3.1.2 性质

定理 3.1: 同余的等价性

同余关系是等价关系。

等价是自反、传递、对称，显而易见，自己和自己同余，x 和 y 同余，y 也一定和 x 同余，如果同时 y 和 z 同余，那么 x 和 z 也同余。

注意： 当给一个对象贴上一个有明确定义的标签时，其实就是对这个对象有了一个深刻的说明，因为这个标签后面的一切属性此对象都会具有。

定理 3.2: 同余性质

1. 数 a 和 b 模 m 同余的充要条件是 $m \mid a - b$。
2. 数 a 和 b 模 m 同余的充要条件是，存在一个整数 k 使得 $a = b + km$。[?]
3. $a + b \equiv c(mod\ m) \Rightarrow a \equiv c - b(mod\ m)$.
4. $a \equiv b(mod\ m) \Rightarrow gcd(a, m) = gcd(b, m)$.
5. $a = a_1 d, b = b_1 d, gcd(d, m) = 1, a \equiv b(mod\ m) \Rightarrow a_1 \equiv b_1(mod\ m)$.[?][a]

6. $m, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}, a_1 \equiv b_1(mod\ m), a_2 \equiv b_2(mod\ m) \Rightarrow$
   (a) $a_1x + a_2y \equiv b_1x + b_2y(mod\ m), x, y \in \mathbb{Z}$
   (b) $a_1a_2 \equiv b_1b_2(mod\ m)$
   (c) $a_1^n \equiv b_1^n(mod\ m), n > 0$
7. $f(t) = a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1t + a_0, g(t) = b_nt^n + b_{n-1}t^{n-1} + \ldots + b_1t + b_0$ 是两个整系数多项式，且 $a_i \equiv b_i(mond\ m)$，若 $x \equiv y(mod\ m)$，则 $f(x) \equiv g(y)(mod\ m)$.

[a] 公式后面这种标识，表示此公式在整理本书时的出处

♡

我们可以设 $a = k_1m + r_1, b = k_2m + r_2$, 然后去讨论证明以上定理。

设 m=5，11 和 1 同余吗？由于 $11 - 1 = 10$,10 可以整除 5，由上面的定理可知，11 和 1 模 5 同余。或者说，由于 $11 = 1 + 2 \times 5$，所以 11 和 1 模 5 同余。

那么 3879 和 3657 模 5 同余吗？$3879 - 3657 = 222, 5 \nmid 222$，所以 3879 和 3657 不同余。

前面的同余性质都是在模不变的情况下进行讨论，下面我们看看另外一些同余的性质，这些性质是模在变化的时候所保持的。

定理 3.3

- $ac \equiv bc(mod\ m), gcd(c, m) = d \Rightarrow a \equiv b(mod\ \frac{m}{d})$.
- $a \equiv b(mod\ m) \Rightarrow ak \equiv bk(mod\ mk), k \in \mathbb{Z}$.
- $a \equiv b(mod\ m), d \mid m, d \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \equiv b(mod\ d)$.
- $a \equiv b(mod\ m_i), i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow a \equiv b(mod\ lcm(m_1, m_2, \ldots, m_n))$

♡

示例 3.2:$m = 9, 5 \times 3 \equiv 2 \times 3(mod\ 9), gcd(3, 9) = 3$, 根据定理 3.1.2,$5 \equiv 2(mod\ \frac{9}{3}) \Rightarrow 5 \equiv 2(mod\ 3)$

$m = 9, 5\times6 \equiv 2\times6(mod\ 9), gcd(6, 9) = 3$, 根据定理 3.1.2,$5 \equiv 2(mod\ \frac{9}{3}) \Rightarrow 5 \equiv 2(mod\ 3)$

3.2 剩余系 (residue system)

同余为整数集合上的等价关系，所以可以利用同余关系吧整数集合 $\mathbb{Z}$ 划分为若干等价类。

定理 3.4: [?]

m 是一个给定的正整数，则全部整数可分成 m 个集合，记作 $C_0, C_1, \ldots, C_{m-1}$，其中 $C_r(r = 0, 1, \ldots, m - 1)$ 是由一切形如 $qm + r(q = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ 的整数所组成，这些集合具有下列性质：

(1) 每一个整数必包含在且仅在上述的一个集合里。

(2) 两个整数在一个集合中的充要条件是这两个整数对模 m 同余。♡

定义 3.2: 剩余类 (residue class)

m 是一个给定的正整数，C_r 表示所有与整数 r 模 m 同余的整数组成的集合，C_r 叫做模 m 的一个剩余类，一个剩余类中的任一元素叫做该类的代表元。♣

示例 3.3:

1 (mod 5)=11 (mod 5),11(mod 5)= 16 (mod 5) ⇒ 1 (mod 5)=16 (mod 5)

模 5，r=1,$C_1 = \{1, 6, 11, 16, 21, \ldots\}$;$r = 2, C_2 = \{2, 7, 12, 17, 22, \ldots\}$;$r = 3, C_3 = \{3, 8, 13, 18, 23, \ldots\}$

定义 3.3: 完全剩余系 (complete system of residues)

在模 m 的剩余类 $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{m-1}$ 中各取一代表元 $a_i \in C_i, i = 0, 1, \ldots, m-1$，则此 m 个数称为模 m 的一个完全剩余系（又称完系）。♣

示例 3.4:

模 5 的三个完全剩余系：

0,1,2,3,4

1,2,3,4,5

2,3,4,5,6

...

定义 3.4: 特殊剩余系定义

对于正整数 m

(1) $0, 1, \ldots, m-1$ 为模 m 的一个完全剩余系，并且叫做模 m 的最小非负完全剩余系。

(2) $1, 2, \ldots, m-1, m$ 为模 m 的一个完全剩余系，并且叫做模 m 的最小正完全剩余系。

(3) $-(m-1), \ldots, -1, 0$ 为模 m 的一个完全剩余系，并且叫做模 m 的最大非正完全剩余系。

(4) $-m, -(m-1), \ldots, -1$ 为模 m 的一个完全剩余系，并且叫做模 m 的最大负完全剩余系。♣

示例 3.5:

模 m=5,

0,1,2,3,4 是模 5 的最小非负完全剩余系。

1,2,3,4,5 是模 5 的最小正完全剩余系。

0,-1,-2,-3,-4 是模 5 的最大非正完全剩余系。

-1,-2,-3,-4,-5 是模 5 的最大负完全剩余系。

定理 3.5: [?]

m 是正整数，gcd(a,m)=1,b 是任意整数，若 x 遍历模 m 的一个完全剩余系，则 ax+b 也遍历模 m 的完全剩余系。♡

定理 3.6: [?]

m_1, m_2 是两个互质的正整数，x_1, x_2 分别遍历模 m_1, m_2 的完全剩余系，则 $m_2x_1 + m_1x_2$ 也遍历模 $m_1 \times m_2$ 的完全剩余系。♡

3.3 欧拉定理

3.3.1 基本概念

定义 3.5: 剩余类与 m 互素

在模 m 的一个剩余类中，若有一个数与 m 互素，则该剩余类中所有数都与 m 互素，此时称该剩余类与 m 互素。♣

示例 **3.6:**$m = 26, C_5 = 5, 31, 57, ..., gcd(5, 26) = 1, gcd(31, 26) = 1, ...$

示例 **3.7:**$m = 6, C_5 = 5, 11, 17, ..., gcd(5, 6) = 1, gcd(11, 6) = 1, ...$

定义 3.6: 欧拉函数 (Euler's totient function 或称 totient function)

设 m 是正整数，在 m 的所有剩余类中，与 m 互素的剩余类的个数称为 m 的欧拉函数，记为 $\varphi(m)$。♣

我们也可以将欧拉函数定义为，集合 $\{0, 1, ..., m-1\}$ 中与 m 互素的整数个数。

示例 **3.8:**

$\varphi(6) = 2$，这是因为 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 中与 6 互素的只有 1，5。

$\varphi(12) = 4$, 这是因为 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ 中与 12 互素的只有 1，5,7,11。

$\varphi(1) = 1$

如果 p 为素数，$\varphi(p) = p - 1$

3.3.2 欧拉函数的计算

求解欧拉函数，我们可以用定义来求解，这需要我们遍历一个完全剩余系，并且判断和其互素的数，运算量还是挺大的。

下面看一种利用整数标准分解式求解欧拉函数的方法。

定理 3.7: 欧拉函数求解定理

设 m 有标准分解式 $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}, a_i > 0, i = 1, 2, \dots, s$，则 $\varphi(m) = m\prod_{i=1}^{s}(1 - \frac{1}{p_i})$ ♡

示例 3.9: $360 = 2^2 \times 3^2 \times 5, \varphi(360) = 360(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5}) = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5}) = (2^3 - 2^2)(3^2 - 3)(5 - 5^0) = 4 \times 6 \times 4 = 96$

定理 3.8: [?]

若 m_1, m_2 是互质正整数，则，$\varphi(m_1m_2) = \varphi(m_1)\varphi(m_2)$. ♡

3.3.3 简化剩余系

定义 3.7: 缩剩余系/简化剩余系 (reduced residue system)

设 m 是正整数，在与模 m 互素的 $\varphi(m)$ 个剩余类中，各取一个代表元组成一个集合，此集合叫做模 m 的缩剩余系 (有时简称缩系) 或者简化剩余系。♣

简化剩余系中元素的个数为 $\varphi(m)$.

示例 3.10:

{1,5} 是 m=6 的一个缩系；

{1，2，3，4，5，6} 是 m=7 的一个缩系；

{1,5,7,11} 是 m=12 的一个缩系。

利用以下定理可以构造简化剩余系。

定理 3.9: 简化剩余系构造定理

设 m 是正整数，整数 a 满足 gcd(a,m)=1。若 x 遍历模 m 的一个简化剩余系，则 ax 也遍历模 m 的一个简化剩余系。♡

示例 3.11:

整数 5 与 6 互素，a=5，m=6，x 遍历 {1,5}，ax 遍历 {5,25}，{5,25} 是 m=6 的一个缩系；

整数 3 与 7 互素，a=3，m=7，x 遍历 {1，2，3，4，5，6}，ax 遍历 {3，6，9，12，15，18}，{3，6，9，12，15，18} 是 m=7 的一个缩系；

整数 5 与 12 互素，a=5，m=12，x 遍历 {1,5,7,11}，x 遍历 {5,25,35,55}，{5,25,35,55} 是 m=12 的一个缩系。

定理 3.10: [?]

$gcd(m_1, m_2) = 1, x_1, x_2$ 分别遍历 m_1, m_2 的简化剩余系，则 $m_2x_1 + m_1x_2$ 遍历模 $m1 \times m_2$ 的简化剩余系。♡

3.3.4 欧拉定理

定理 3.11: 欧拉定理 (Euler Theorem)

设 m 是大于 1 的整数，若 a 是满足 $gcd(a, m) = 1$ 的整数，则 $a^{\varphi(m)} \equiv 1\ (mod\ m)$。♡

示例 3.12:

$\varphi(6) = 2, gcd(5, 6) = 1$，计算 $a^{\varphi(6)} = 5^2 = 25 \equiv 1(mod6)$。
$\varphi(12) = 4, gcd(5, 12) = 1$，计算 $a^{\varphi(12)} = 5^4 = 625 \equiv 1(mod6)$。

3.4 乘法逆元

本节研究模正整数的乘法运算的可逆性问题，先看一个例子。

模 10 的最小非负完全剩余系 { 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} 中，在模 10 的运算下有：

$$
\begin{aligned}
1 \times 1 &\equiv 1(mod10) \\
3 \times 7 &\equiv 1(mod10) \\
9 \times 9 &\equiv 1(mod10)
\end{aligned}
$$

也就是说当 $a \in \{1, 3, 7, 9\}$ 时，存在 $a' \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, 使得 $aa' \equiv 1(mod\ 10)$, 而对于 { 0,2,4,5,6,8} 集合中的数，不具有这样的性质，而集合 {1,3,7,9} 恰好是 10 的简化剩余系。

3.4.1 逆元 (inverse) 定义

定理 3.12: 逆元存在性

若 a 是满足 $gcd(a, m) = 1$ 的整数，则存在唯一的整数 $a', 1 \le a' < m$，且 $gcd(a', m) = 1$, 使得 $aa' \equiv (mod\ m)$。♡

示例 3.13:

{1,5} 是 m=6 的一个简化剩余系系；$1 \times 1 \equiv 1(mod\ 6), 5 \times 5 \equiv 1(mod\ 6)$

{1，2，3，4，5，6} 是 m=7 的一个简化剩余系；$1{\times}1 \equiv 1(mod\ 7), 2{\times}4 \equiv 1(mod\ 7), 3{\times}5 \equiv 1(mod\ 7), 4 \times 2 \equiv 1(mod\ 7), 5 \times 3 \equiv 1(mod\ 7), 6 \times 6 \equiv 1(mod\ 7)$

{1,5,7,11} 是 m=12 的一个简化剩余系;$1 \times 1 \equiv 1(mod\ 12), 5 \times 5 \equiv 1(mod\ 12), 7 \times 5 \equiv 1(mod\ 12), 7 \times 5 \equiv 1(mod\ 12), 11 \times 1 \equiv 1(mod\ 12)$。

定义 3.8: 乘法逆元 (multiplicative inverse)

对于正整数 m 和整数 a，满足 $gcd(a, m) = 1$，存在唯一一个 m 的剩余类，其中对于每一个元素 a'，都会使 $aa' \equiv 1(mod\ m)$ 成立，此时称 a' 为 a 模 m 的乘法逆元，记作 $a'(mod\ m)$ 或 $a^{-1}(mod\ m)$。 ♣

3.4.2 逆元求解

逆元的求解在公钥密码学中非常重要，但是当 m 和 a 比较大时，直接利用定义很难求解，所以如何快速求解逆元，是一个重要的研究内容。扩展欧几里得算法就是一种快速求解逆元的算法。

定理 3.13: 贝祖定理 (Bézout's identity)

任何整数 a、b, 一定存在整数 x,y，使 $ax + by = gcd(a, b)$ 成立。 ♡

欧几里得算法的数学基础是 $a = bq + r \Rightarrow gcd(a, b) = gcd(b, r), r = a - [\frac{a}{b}]b$, 根据贝祖定理，我们有，$gcd(a, b) = ax_1 + by_1, gcd(b, r) = bx_2 + (a - [\frac{a}{b}]b)y_2$, 对于第二个式子我们进行重新整理，$bx_2 + (a - [\frac{a}{b}]b)y_2 = bx_2 + ay_2 - [\frac{a}{b}]by_2 = ay_2 + b(x_2 - [\frac{a}{b}]y_2)$, 由于 $gcd(a, b) = gcd(b, r)$，所以有 $ax_1 + by_1 = ay_2 + b(x_2 - [\frac{a}{b}]y_2) \Rightarrow x_1 = y_2, y_1 = x_2 - [\frac{a}{b}]y_2$，一直计算下去，就可以得出扩展欧几里得算法。

定理 3.14: 扩展欧几里得算法

extend Euclid's Algorithm)fubi 设 r_0, r_1 是两个正整数，且 $r_0 > r_1$，设 $r_i(i = 1, 2, \ldots, n)$ 是使用欧几里得算法计算 $gcd(r_0, r_1)$ 时所得到的余数序列且 $r_{n+1} = 0$，则可以使用如下算法求整数 s_n 和 t_n，使得 $gcd(r_0, r_1) = s_n r_0 + t_n r_1$。$s_n, t_n$ 是如下递归定义的序列的第 n 项。

$s_0 = 1, t_0 = 0$

$s_1 = 0, t_1 = 1$

$s_i = s_{i-2} - q_{i-1}s_{i-1}, t_i = t_{i-2} - q_{i-1}t_{i-1}$，其中 $q_i = r_{i-1}/r_i, i = 2, 3, \ldots, n.$ ♡

扩展欧几里得算法是在计算贝祖 (Bézout, 也有翻译为“裴蜀”的) 等式 $ax + bx = gcd(a, b)$ 的整数解，而贝祖等式是 a，b 和它们的最大公约数 d 之间的线性丢番图

方程。当 $gcd(r_0, r_1) = 1$ 时，有 $s_n r_0 + t_n r_1 = 1$, 等式两边同取模，等式不变，所以有 $s_n r_0 + t_n r_1 \equiv s_n r_0 (mod\ r_1)$, 由逆元定义知 $r_0^{-1} = s_n (mod\ r_1)$, 同理，可以知道 r_1 的逆元，$r_1^{-1} = t_n (mod\ r_0)$.

示例 3.14:

a=529,m=130，求 a 模 m 的乘法逆元。

答案： 由前面最大公约数的计算（见下），可知 a 和 m 互素。

$529 = 130 \times 4 + 9$

$130 = 9 \times 14 + 4$

$9 = 4 \times 2 + 1$

$4 = 1 \times 4 + 0$

$gcd(529, 130) = 1$

下面我们求解模 130 时，529 的逆元，或者模 529，130 的逆元。

为了使得过程更加清晰，我们做一张表，展示其过程：

i	r_i	q_i	$s_i = s_{i-2} - q_{i-1}s_{i-1}$	$t_i = t_{i-2} - q_{i-1}t_{i-1}$
0	529	-	$s_0 = 1$	$t_0 = 0$
1	130	4	$s_1 = 0$	$t_1 = 1$
2	9	14	$s_2 = s_0 - q_1 s_1 = 1 - 4 \times 0 = 1$	$t_2 = t_0 - q_1 t_1 = 0 - 4 \times 1 = -4$
3	4	2	$s_3 = s_1 - q_2 s_2 = 0 - 14 \times 1 = -14$	$t_3 = t_1 - q_2 t_2 = 1 - 14 \times (-4) = 57$
4	1	4	$s_4 = s_2 - q_3 s_3 = 1 - 2 \times (-14) = 29$	$t_4 = t_2 - q_3 t_3 = -4 - 2 \times 57 = -118$
5	0	-	-	-

$529 \times 29 \equiv 1(mod\ 130)$

$130 \times (-118) \equiv -528 \equiv 1(mod\ 529)$.

3.5 费马小定理

定理 3.15: 费马小定理 (Fermat's little theorem,1963)

p 是素数,a 为任意整数, 则 $a^p \equiv a(mod\ p)$。[?] ♡

上面的定理也有写作, 若 p 是素数，则对任意整数 a，如果 a 和 p 互素，有 $a^{p-1} \equiv 1(mod\ p)$。这种写法要求 a 和 p 互素

费马小定理是欧拉定理的一种特殊情况。

示例 3.15:

3 是素数，$2^3 = 8 \equiv 2(mod3), 4^3 = 64 \equiv 1 \equiv 4(mod\ 3), 6^3 = 216 \equiv 0 \equiv 6(mod3)$;

7 是素数，$2^7 = 128 \equiv 2(mod7), 4^7 = 16384 \equiv 4(mod7), 6^7 = 279936 \equiv 6(mod7)$;

可以用费马小定理来求逆元呢.

由费马小定理 $a^{p-1} \equiv 1$, 变形得 $aa^{p-2} \equiv 1(mod\ p)$，很明显了, 若 a,p 互质, 因为 $aa^{p-2} \equiv 1(mod\ p)$, 则 $a^{-1} = a^{p-2}(mod\ p)$, 用快速幂可快速求之。

3.6 威尔逊定理

威尔逊定理、欧拉定理、孙子定理（中国剩余定理）、费马小定理并称数论四大定理。下面我们看看威尔逊定理。

定理 3.16: 威尔逊定理 (Wilson’s theorem)

p 是一个素数 $\Leftrightarrow (p-1)! \equiv -1(mod\ p)$. ♡

威尔逊定理给出了素数的充要条件，那么我们可以用 p-1 的阶乘来判断 p 是否为素数，但由于阶乘的计算量太大，通常不会使用。

示例 3.16:

$(3-1)! = 2 \equiv 2(mod3) \equiv -1(mod3)$;

$(5-1)! = 24 \equiv 4(mod5) \equiv -1(mod5)$;

$(7-1)! = 720 \equiv 6(mod7) \equiv -1(mod7)$;

$(11-1)! = 3628800 \equiv 10(mod11) \equiv -1(mod11)$;

3.7 RSA 12 位密码系统示例

RSA 加密算法是一种非对称加密算法。在公开密钥加密和电子商业中 RSA 被广泛使用。RSA 是 1977 年由罗纳德 • 李维斯特（Ron Rivest）、阿迪 • 萨莫尔（Adi Shamir）和伦纳德 • 阿德曼（Leonard Adleman）一起提出的，后来这三个人创立了有名的安全公司 RSA(网站 www.rsa.com)。当时他们三人都在麻省理工学院工作。RSA 就是他们三人姓氏开头字母拼在一起组成的。对极大整数做因数分解的难度决定了 RSA 算法的可靠性。到目前为止，世界上还没有任何可靠的攻击 RSA 算法的方式。只要其钥匙的长度足够长，用 RSA 加密的信息实际上是不能被解破的。[1]

下面以 12 位演算 RSA 的加密解密与暴力破方法，讲解 RSA 的基本原理[2]。

3.7.1 加密系统

(1) 生成公私钥对

[1]本段内容摘自 https://baike.baidu.com/item/RSA 算法/263310?fr=aladdin ，可以从网页上获得更多的介绍信息，并且此条信息由百度的“科普中国科学百科词条编写与应用工作项目" 审核

[2]此节采用的例子素材来源于 https://www.jianshu.com/p/4e302869d057

RSA 是非对称加密，有公钥和私钥，公钥公开给加密方加密，私钥留给自己解密，是不公开的。

1. 随机选两个素数，用 p、q 来代替（素数的数值越大，位数就越多，可靠性就越高。假设我们取 p = 47，q = 59。

注意：如何实现一个算法实现随机选两个素数？

2. 计算这两个素数的乘积，$n = p \times q = 47 \times 59 = 2773$,n 的长度就是公钥长度。2773 写成二进制是 101011010101，一共有 12 位，所以这个密钥就是 12 位。实际应用中，RSA 密钥一般是 1024 位，重要场合则为 2048 位。

注意：*在实际的 RSA 系统中，比如密钥是 1024 位，也就是意味着要在限定一个数的位数情况下，如何选取两个素数，乘积满足这样的要求。*

3. 计算 n 的欧拉函数 $\phi(n)$,$\phi(n) = (p-1)(q-1)$,$\phi(2773) = (47-1) \times (59-1) = 46 \times 58 = 2668$.

4. 随机选择一个整数 e，$1 < e < \phi(n)$，且 e 与 $\phi(n)$ 互素（我们知道，此时 $e^{\phi(n)} \equiv 1(modn)$）. 例如我们在 1 到 2668 之间，随机选择了 17，e = 17。

5. 计算 e 对于 $\phi(n)$ 的模乘法逆元 d，当 $gcd(e, \phi(n)) = 1$，$ed \equiv 1(mod\ \phi(n)) \Rightarrow d = (1 + k\phi(n))/e, k \in \mathbb{Z}$, 代入各值，$d = (1 + 2668k)/17$, 可以依次给 k 赋值，取 d 为整数的序偶，得到一系列 (k,d),(1,157)、(18,2825)、(35,5493) . . ., 随机选一个序偶，比如 (1,157)，也就是 d=157.

6. 将 n 和 e 封装成公钥，n 和 d 封装成私钥，即公钥为：n = 2773，e = 17，私钥为：n = 2773，d = 157。

(2) 用公钥加密字符串

假设我们加密一个字符"A"，首先字符要用数值表示 () 这就是编码，信源编码)，一般用 Unicode 或 ASCII 码表示，此处我们用 ASCII 码表示，"A" 的 ASCII 码十进制为 65(十六进制 0x41)，我们用 m 来代替明文 (message)，c 来代替密文 (cipher)，m = 65，RSA 加密公式:$m^e \equiv c(modn)$, 代入各值 $65^{17}(mod\,2773) \equiv 6,599,743,590,836,592,050,933,837,890,625(m$ $332(mod\ 2773), c = 332$

(3) 用私钥解密密文

RSA 解密公式:$c^d \equiv m(mod\,n)$, 代入各值,$c^d \equiv 332^{157} \equiv 6.586870748401411733989125396820\,3e+$ $395 \equiv 65(mod\,2773), m = 65$.

3.7.2 暴力破解

RSA 的可靠性在于因数分解的难度，因为 p、q、n、$\phi(n)$、e、d 这六个数字之中，公钥用到了两个 n 和 e，其余四个数字都是不公开的。其中最关键的是 d，因为 n 和 d 组成了私钥，一旦 d 泄漏，就等于私钥泄漏.

(1) $ed \equiv 1(mod\ \phi(n))$。只有知道 e 和 $\phi(n)$，才能算出 d。

(2) $\phi(n) = (p-1)(q-1)$。只有知道 p 和 q，才能算出 $\phi(n)$。

(3) $n = pq$。只有将 n 因数分解，才能算出 p 和 q。

由此可见推导出 d 就必须因数分解出 p 和 q, 公钥里面有 n = 2773, 那么暴力破解的方法就是把 2773 因数分解出两个相乘的素数。可以编程对此例进行暴力破解。

3.8 线性同余方程

3.8.1 基本概念

定义 3.9: 同余方程

多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, n > 0, a_i\ (i = 0, 1, \ldots, n)$ 是整数，设 $m > 0$，则同余式 $f(x) \equiv 0(mod\ m)$ 称为模 m 的同余方程，若 a_n 不能被 m 整除，则 n 称为 $f(x)$ 的次数，记为 $deg\ f(x)$。若 x_0 满足 $f(x_0) \equiv 0(mod\ m)$, 则 $x \equiv x_0(mod\ m)$ 叫做此同余方程的解。不同的解是指互不同余的解。♣

3.8.2 求解方法

求解同余方程，最直观的方法是采用遍历所有取值的方法。

示例 3.17:

求 $x^4 + 3x^2 - 2x + 1 \equiv 0(mod\ 5)$

答案： $x = 0, 0 + 0 - 0 + 1 = 1 \equiv 1(mod\ 5)$

$x = 1, 1 + 3 \times 1 - 2 \times 1 + 1 = 3 \equiv 3(mod\ 5)$

$x = 2, 16 + 12 - 4 + 1 = 25 \equiv 0(mod\ 5)$

$x = 3, 729 + 27 - 6 + 1 = 751 \equiv 1(mod\ 5)$

$x = 4, 256 + 48 - 8 + 1 = 297 \equiv 2(mod\ 5)$

注意： 是不是遍历一个完全剩余系，就算遍历了？我们以上面为例，先看模 5 的 $C_2 = 2, 7, 12, 17, \ldots$,*x=7* 带入 x^4+3x^2-2x+1 有, $7^4+3\times7^2-2\times7+1 = 2535 \equiv 0(mod\ 5)$,*x=12* 带入，有 $12^4+3\times12^2-2\times12+1 = 21145 \equiv 0(mod\ 5)$，再看 $C_0 = 0, 5, 10, 15, 20, \ldots$,*x=5* 带入，有 $5^4+3\times5^2-2\times5+1 = 690 \equiv 1(mod\ 5)$, *x=10* 带入，有 $10^4+3\times10^2-2\times10+1 = 10281 \equiv 1(mod\ 5)$.

如何想证明，我们就要看各个运算是否同余相等，比如 $a \equiv b(mod\ m), c \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + c \equiv b + c(mod\ m)$.

示例 3.18:

求 $x^2 + 1 \equiv 0(mod7)$

答案： 遍历后无解。

3.8.3 线性 (or 一次) 同余方程

定理 3.17

设 $m > 1, gcd(a,m) = 1$, 同余方程 $ax \equiv b(mod\ m)$ 有且仅有一个解 $x_0, x_0 \equiv ba^{\varphi(m)-1}(mod\ m)$. ♡

证明： $1, 2, \ldots, m$ 组成模 m 的一个完全剩余系，因为 gcd(a,m)=1，故 $a, 2a, \ldots, ma$ 也组成一个模 m 的完全剩余系，那么有且只有一个数 aj，满足 $aj = b(mod\ m)$，所以 x=j 是上式的唯一解。

因为 gcd(a,m)=1，由欧拉定理，有 $a^{\phi}(m) \equiv 1(mod\ m)$, 根据同余的性质，我们有 $a^{\phi}(m)b \equiv b(mod\ m) \Rightarrow aa^{\phi}(m-1)b \equiv b(mod\ m) \Rightarrow x = a^{\phi}(m-1)b$ 是上式同余方程唯一解。 □

示例 3.19:

求 $5x \equiv 3(mod 6)$ 的解。

答案：

已知 $gcd(5,6) = 1, \varphi(6) = 2$，由以上定理知其有且只有一个解 $x \equiv 3 \cdot 5 \equiv 15(mod 6) \equiv 3(mod 6)$.

定理 3.18: [?]

设 $m > 1, gcd(a,m) = d > 1$, 同余方程 $ax \equiv b(mod\ m)$ 有解的充要条件是 $d \mid b$, 并且在此同余方程有解时，其解的个数是 d，若 $x \equiv x_0(mod\ m)$ 是此方程的特解，则它的 d 个解为 $x \equiv x_0 + \frac{m}{d}t\ (mod\ m)\ t = 0, 1, \ldots, d-1$。 ♡

示例 3.20:

求解 $28x \equiv 21(mod 35)$

答案： $gcd(28, 35) = 7$，且 $7 \mid 21$, 故此方程有解。

$4x \equiv 3(mod 5)$,$x_0 = 2$ 是一个特解。

$x \equiv 2 + \frac{35}{7}t, t = 0, 1, 2, \ldots, 6$, 可求得解为 2，7，12，17，22，17，32.

3.9 同余方程组的求解

3.9.1 中国剩余定理

我国古代的一部数学著作《孙子算经》中，有一类叫做“物不知数”的问题，原文为：今有物不知其数（四声），三三数（三声）之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？

这个问题就是求解同余方程组：

$$\begin{cases} x \equiv 2(mod\ 3) \\ x \equiv 3(mod\ 5) \\ x \equiv 2(mod\ 7) \end{cases}$$

我国明代数学家程大位在《算法统宗》这部著作中，把此题解法用一首优美的诗来总结：

三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，
七子团圆整半月，除百零五便得知。

这首诗翻译为现代汉语的意识就是，此未知数除 3 所得余数乘 70，除 5 所得余数乘 21，除 7 所得余数乘 15，然后相加除 105 便是此未知数的取值。用算式表示为：

$$(2 \times 7 + 3 \times 21 + 2 \times 15) \equiv 23(mod\ 105)$$

计算知此数为 23。

由上计算方法可见，2，3，2 为余，7，21，15 分别为模 7，模 3× 模 7，模 3× 模 5，是否有规律可循，对于此思路的详细阐述，见 [?] 中相应部分的描述 (第 71 页)。

定理 3.19: 中国剩余定理 (chinese remainder theorem,CRT)[?]

设 $m_1, m_2, \ldots, m_k$ 是 k 个两两互素的正整数，若令 $m = m_1m_2 \ldots m_k, M_i = m_1m_2 \ldots m_{i-1}m_{i+1} \ldots m_k, m = m_iM_i$, 则对于任意的整数 $b_1, b_2, \ldots, b_k$, 同余方程组

$$\begin{cases} x \equiv b_1(mod\ m_1) \\ x \equiv b_1(mod\ m_1) \\ \ldots \\ x \equiv b_k(mod\ m_k) \end{cases}$$

有唯一解 $x \equiv M_1'M_1b_1 + M_2'M_2b_2 + \ldots + M_k'M_kb_k(mod\ m)$, 其中 M_i' 为 M_i 的逆元，$M_i'M_i \equiv 1(mod\ m_i), i = 1, 2, \ldots, k$ 。

示例 3.21:

韩信点兵，有兵一队，若列五行纵队，末行一人，列六行纵队，末列五人，列七行纵队，末行四人，列十一行纵队，末行十人，求兵数。

答案： 转化为同余方程组：

$$\begin{cases} x \equiv 1(mod\ 5) \\ x \equiv 5(mod\ 6) \\ x \equiv 4(mod\ 7) \\ x \equiv 10(mod\ 11) \end{cases}$$

应用 CRT,$m = 5 \times 6 \times 7 \times 11 = 2310$。
$M_1 = 2310/5 = 462, M_1^{-1} \equiv 3(mod\ 5)$
$M_2 = 2310/6 = 385, M_2^{-1} \equiv 1(mod\ 6)$
$M_3 = 2310/7 = 330, M_3^{-1} \equiv 1(mod\ 7)$
$M_4 = 2310/11 = 210, M_4^{-1} \equiv 1(mod\ 11)$
$x \equiv 462 \cdot 3 \cdot 1 + 385 \cdot 1 \cdot 5 + 330 \cdot 1 \cdot 4 + 210 \cdot 1 \cdot 10 \equiv 6731 \equiv 2111(mod\ 2310)$

3.9.2 一般一次同余方程组的解

在中国剩余定理中，要求 $m_1, m_2, \ldots, m_k$ 两两互素，如果不互素，如何求解同余方程组的解？我们看下面的定理。

定理 3.20

同余方程组 $\begin{cases} x \equiv b_1(mod\ m_1) \\ x \equiv b_2(mod\ m_2) \end{cases}$ 有解的充要条件是 $gcd(m_1, m_2) \mid (b_1 - b_2)$. 如果这个条件成立，则此同余方程组模 $lcm(m_1, m_2)$ 有唯一解。[?]

对于一次同余方程组

$$\begin{cases} x \equiv b_1(mod\ m_1) \\ x \equiv b_1(mod\ m_1) \\ \ldots \\ x \equiv b_k(mod\ m_k) \end{cases}$$

$k \geq 3$, 若 $gcd(m_1, m_2) \mid (b_1 - b_2)$，可先求得前两个方程解 $x \equiv b_2'(mod\ lcm(m_1, m_2))$. 若 $gcd(lcm(m_1, m_2), m_3) \mid (b_2', b_3)$, 则 $x \equiv b_2'(mod\ lcm(m_1, m_2))$ 与 $x \equiv b_3(mod\ m_3)$ 进行联立求解，以此类推，可以求得最后的解。

示例 3.22:[?] 判断以下方程是否有解

$$\begin{cases} x \equiv 11(mod\ 36) \\ x \equiv 7(mod\ 40) \\ x \equiv 32(mod\ 75) \end{cases}$$

答案： $gcd(36,40)=4, gcd(36,75)=3, gcd(40,75)=5$
$b_1-b_2=11-7=4, b_1-b_3=11-32=-21, b_2-b_3=7-32=-25$
因为 $4\mid 4, 3\mid -21, 5\mid -25$, 所以此方程组一定有解, 且解的模数为 $lcm(36,40,75)=1800$。
依次联立解方程组，最后可得 $x\equiv 407(mod\ 1800)$.

3.10 高次同余方程的解

本节只是初步讨论一下高次同余方程的解的情况。

定理 3.21: [?][3]

若 $m_1, m_2, \dots, m_k$ 是 k 个两两互质的正整数，$m=m_1m_2\dots m_k$，则同余方程 $f(x)\equiv 0(mod\ m)$ 与同余方程组 $f(x)\equiv 0(mod\ m_i), i=1,2,\dots,k$ 等价。用 T_i 表示方程 $f(x)\equiv 0(mod\ m_i), i\in\{1,2,\dots,k\}$ 的解数,T 表示 $f(x)\equiv 0(mod\ m)$ 的解数，则有 $T=T_1\times T_2\times\dots\times T_k$. ♡

示例 3.23:求解同余式 $x^4+2x^3+8x+9\equiv 0(mod\ 35)$.[?]

答案：

35 = 5 × 7，且 $gcd(5,7)=1$, 由此可知题中方程与以下方程组等价：

$$\begin{cases} x^4+2x^3+8x+9\equiv 0(mod\ 5) \\ x^4+2x^3+8x+9\equiv 0(mod\ 7) \end{cases}$$

采用遍历的方法可知方程组中第一个方程有两个解 $x\equiv 1,4(mod\ 5)$，第二个方程有三个解 $x\equiv 3,5,6(mod\ 7)$，根据上述定理，题中同余方程解有 $2\times 3=6$ 个解。

下面我们看看如何求出题中方程的解。

方程等价于以下方程组：

$$\begin{cases} x\equiv 1(mod\ 5) \\ x\equiv 4(mod\ 5) \\ x\equiv 3(mod\ 7) \\ x\equiv 5(mod\ 7) \\ x\equiv 6(mod\ 7) \end{cases}$$

我们有 $7\times 3\equiv 1(mod\ 5), 5\times 3\equiv 1(mod\ 7)$ 利用中国剩余定理有 $x\equiv 21b_1+15b_2, b_1\in\{1,4\}, b_2\in\{3,5,6\}$, 计算所有组合，(例如，$b_1=1, b_2=3, x=21\times 1+15\times 3=66\equiv 31(mod\ 35)$), 可得题中方程全部解为 $x\equiv 31,26,6,24,19,34(mod\ 35)$.

[3]为了便于初学者理解，在闵嗣鹤先生的《初等数论》一书中此定理的描述上做了一点修改

第 4 章 二次剩余

中学学过的一元二次方程理论，讨论了实系数的一元二次方程的根如何求解。但到目前为止，人们还没有找到一般方法求解一般的多项式同余方程。除了求根问题，还有一个相关问题就是判断是否有解。二次同余方程有着较多的研究成果，这就是本节所涉及到的核心内容。

4.1 二次同余方程

二次同余方程的一般表达式为：$ax^2+bx+c\equiv 0(mod\ m), a\not\equiv 0(mod\ m)$，下面我们讨论一般二次同余方程解的问题，讨论过程主要参考 [?](第 73 页).

对于一个二次同余方程，有可能有解，有可能无解，例如 $x^2-3\equiv 0(mod\ 7)$ 就无解，所以首先讨论方程什么时候有解。

设 m 的标准分解式是 $m = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$, 根据定理 3.10, 二次同余方程等价于方程组 $f(x)\equiv 0(mod\ p_i^{\alpha_i}), i=1,2,\ldots,k$.

对于方程 $f(x)\equiv 0(mod\ p_i^{\alpha_i}), i\in\{1,2,\ldots,k\}$，根据同余的性质 $(a\equiv b(mod\ m), d\mid m, d>0\Rightarrow a\equiv b(mod\ d))$，等价于 $f(x)\equiv 0(mod\ p_i), i\in\{1,2,\ldots,k\}$，我们将问题转换为考虑此种形式 ($ax^2+bx+c\equiv 0(mod\ p)$,p 为素数) 的二次同余方程的解。下面我们对此种形式进行讨论。

1. 若 $p\mid gcd(a,b,c)$，可知 x 的任何取值都满足方程。
2. 若 $p\nmid gcd(a,b,c)$
   (a) 若 $p\mid a, p\mid b$，则 $p\nmid c$,$ax^2+bx+c\equiv 0(mod\ p)$ 无解。
   (b) 若 $p\mid a, p\nmid b$, 同余方程等价于 $bx+c\equiv 0(mod\ p)$, 因为 gcd(b,p)=1，所以此方程一定有解。具体解法参见前面线性同余方程的求解方法。
   (c) 若 $p\nmid a, p>2$, 则 gcd(4a,p)=1[1]，$ax^2+bx+c\equiv 0(mod\ p)$ 两边同乘 4a，配方后得 $(2ax+b)^2-(b^2-4ac)\equiv 0(mod\ p)$，设 $y\equiv 2ax+b(mod\ m), d\equiv b^2-4ac(mod\ m)$, 原方程可写为 $y\equiv d(mod\ m)$, 如果 y_0 是其一个解，则 $y_0\equiv 2ax+b(mod\ m)$,$x_0\equiv(2a)^{-1}(y-b)(mod\ m)$ 为原方程的一个解。

通过以上讨论，我们可以得出，对于一般的二次同余方程，我们都可以转化为讨论形如 $x^2\equiv a(mod\ m), gcd(a,m)=1$ 的二次同余方程的讨论。

示例 4.1:求解 $5x^2-6x+2\equiv(mod\ 13)$.

[1]p>2,p 为素数，a 和 p 互素，如果 4a 和 p 不互素，那么 4 和 p 一定不互素，显然不成立，所以 4a 和 p 互素。

答案： $gcd(20, 13) = 1, a = 5, b = -6, c = 2$
$(2ax + b)^2 \equiv b^2 - 4ac(mod\ p)$
$y = 2ax + b = 10x - 6$
$d = b^2 - 4ac = 36 - 4 \times 5 \times 2 \equiv -4$
$y^2 \equiv -4 \equiv 9(mod\ 13) \Rightarrow y \equiv 3or10(mod\ 13)$, 我们可得
$10x - 6 \equiv 3(mod\ 13)\ or\ 10x - 6 \equiv 10(mod\ 13)$, 这两个方程可以用前面介绍的方法，也可以用 10 的逆元为 4 来求解：
$10x \times 4 \equiv 9 \times 4(mod\ 13) \Rightarrow x \equiv 36(mod\ 13) \equiv 10(mod\ 13)$
$10x \times 4 \equiv 16 \times 4(mod\ 13) \Rightarrow x \equiv 36(mod\ 13) \equiv 12(mod\ 13)$

定义 4.1: 二次剩余 (quadratic residue)

设 m 为正整数，若同余式 $x^2 \equiv a(modm), gcd(a, m) = 1$, 有解，则称 a 为模 m 的平方剩余，也叫二次剩余；否则称 a 为模 m 的二次非剩余或平方非剩余。 ♣

示例 4.2:
求模 7 的平方剩余。

答案：
$1^2 \equiv 1(mod7)$,$2^2 \equiv 4(mod7)$,$3^2 \equiv 2(mod7)$,$4^2 \equiv 2(mod7)$,$5^2 \equiv 4(mod7)$,$6^2 \equiv 1(mod7)$,$7^2 \equiv 0(mod7)$,$8^2 \equiv 1(mod7)$, $9^2 \equiv 4(mod7)$, $10^2 \equiv 2(mod7)$, $11^2 \equiv 2(mod7)$
计算所得余数中与 7 互素的有 1，4，2，可得模 7 的二次剩余是 1，2，4.

4.2 欧拉判别条件

有时候我们往往需要判断二次同余方程是否有解，欧拉判别条件就是解决这个判定的。

定理 4.1: 欧拉判别条件 (Euler's Criterion)[?]

设 p 是奇素数，$gcd(a, p) = 1$，则:
(1) a 是模 p 的二次剩余的充要条件是 $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1(mod\ p)$;
(2) a 是模 p 的二次非剩余的充要条件是 $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1(mod\ p)$;
并且当 a 是模 p 的二次剩余时，同余方程 $x^2 \equiv a(mod\ p)$ 恰有两个解。 ♡

示例 4.3:
$i = 1, 2, \ldots, 13$，我们计算 $i^2(mod\ 13)$，但是要注意在二次剩余的定义中互素的条件。然后我们可以检验一下上面的欧拉判别条件的正确性。

示例 4.4:

8 是不是模 17 的平方剩余？

答案：

gcd(8,17)=1,17 为奇素数

$8^{(17-1)/2} = 8^8 = 16777216 \equiv 1(mod 7)$, 因此 8 是模 17 的平方剩余。

示例 4.5:

137 是不是模 227 的平方剩余？

答案：

227 是奇素数，gcd(137,227)=1

$137^{(227-1)/2} = 137^{113}(mod\ 227)$

$\because\ 137^2 = 18769(mod 227) \equiv 155(mod\ 227)$

$\therefore\ 137^{113}(mod 227) \equiv 155^{56} \cdot 137(mod\ 227)$

$\because\ 155^2 = 24025(mod 227) \equiv 190(mod\ 227)$

$\therefore\ 137^{113}(mod 227) \equiv 190^{28} \cdot 137(mod\ 227)$

$\because\ 190^2 = 36100(mod 227) \equiv 7(mod 227)$

$\therefore\ 137^{113}(mod 227) \equiv 7^{14} \cdot 137(mod\ 227)$

$\because\ 7^{14} = 49^7 = 49^6 \cdot 49 = 131^3 \cdot 49 \equiv 136 \cdot 131 \cdot 49(mod\ 227)$

$\therefore\ 137^{113} \equiv 136 \cdot 131 \cdot 49 \cdot 137(mod\ 227)$

$136 \cdot 131 \equiv 17816 \equiv 110(mod\ 227)$

$110 \cdot 49 = 5390 \equiv 169(mod\ 227)$

$169 \cdot 137 = 23153 \equiv 226 \equiv -1(mod\ 227)$

由于余数为-1，故 137 是模 227 的平方非剩余。

我们也可以用 SageMath 编写程序来判断 137 是否是模 227 的二次剩余。

sagemath: 判断二次剩余

```
sage: if mod(227,2)==0:
....: print "227 is odd"
....: elif is_prime(227):
....: print "227 is prime"
....: if mod(137^((227-1)/2),227)==1:
....:   print "137 is quadratic residue of module 227"
....: else:
....:   print "137 is not quadratic residue of module 227"
....: else:
....:   print "227 is not prime"
....:
227 is prime
```

```
137 is not quadratic residue of module 227
sage:
```

4.3 勒让德符号

从上面的计算我们基本可以看出，当 p 比较大时，用欧拉判定方法来判定一个数是否为 p 的二次剩余时，计算量很大。引入 Legendre 符号，可以给出一种更有效的判定方法。

4.3.1 概念

定义 4.2: 勒让德符号 (Legendre symbol)[?]

p 是奇素数，$gcd(a,p)=1$，定义勒让德（legendre）符号为：

$$\left[\frac{a}{p}\right]=\begin{cases}1, \text{若 a 是模 p 的二次剩余}\\-1, \text{若 a 是模 p 的二次非剩余}\end{cases} \tag{4.1}$$

♣

下面给出 [?] 中的 Legendre 符号定义的方法，请注意比较。

定义 4.3: 勒让德符号 (Legendre symbol)

p 是奇素数，a 是整数，定义勒让德（legendre）符号为：

$$\left[\frac{a}{p}\right]=\begin{cases}1, \text{若 a 是模 p 的二次剩余}\\-1, \text{若 a 是模 p 的二次非剩余}\\0, \text{若 p|a}\end{cases} \tag{4.2}$$

♣

示例 4.6:

求 13 的 Legendre 符号。

答案:

可以通过计算得知 1，3，4，9，10，12 是模 13 的二次剩余，2，5，6，7，8，11 为模 13 的二次非剩余。所以我们有：

$$\left[\frac{1}{13}\right]=\left[\frac{3}{13}\right]=\left[\frac{4}{13}\right]=\left[\frac{9}{13}\right]=\left[\frac{10}{13}\right]=\left[\frac{12}{13}\right]=1 \tag{4.3}$$

$$\left[\frac{2}{13}\right]=\left[\frac{5}{13}\right]=\left[\frac{6}{13}\right]=\left[\frac{7}{13}\right]=\left[\frac{8}{13}\right]=\left[\frac{11}{13}\right]=-1 \tag{4.4}$$

利用勒让德符号，我们可以将欧拉判别条件利用勒让德符号进行改写。

定理 4.2: 欧拉判别条件的勒让德符号表示 [?]

设 p 是齐素数，a 是与 p 互素的整数，则 $[\frac{a}{p}] \equiv a^{\frac{p-1}{2}}(mod\ p)$. 显然 $[\frac{1}{p}] = 1$. ♡

4.3.2 勒让德符号的运算律

定理 4.3: Legendre 符号的性质 [?]

设 p 是齐素数，a,b 都是与 p 互素的整数，则有：

(1) 若 $a \equiv b(mod\ p) \Rightarrow \left[\frac{a}{p}\right] = \left[\frac{b}{p}\right]$

(2) $\left[\frac{ab}{p}\right] = \left[\frac{a}{p}\right]\left[\frac{b}{p}\right]$

(3) $\left[\frac{a^2}{p}\right] = 1$

♡

定理 4.4: [?]

设 p 是齐素数，我们有 $[\frac{-1}{p}] = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} 1, p \equiv 1(mod\ 4) \\ -1, p \equiv 3(mod\ 4) \end{cases}$. ♡

定理 4.5: [?]

设 p 是齐素数，则 $[\frac{2}{p}] = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$. ♡

4.3.3 勒让德符号的计算

定理 4.6: 二次剩余的高斯引理 [?]

p 是奇素数，a 是与 p 互素的整数，如果 $\frac{p-1}{2}$ 个整数 $a \times 1, a \times 2, a \times 3, \ldots, a \times \frac{p-1}{2}$ 模 p 后得到的最小正剩余中大于 $\frac{p}{2}$ 的个数是 m，则 $\left[\frac{a}{p}\right] = (-1)^m$ ♡

示例 4.7:[?]

利用高斯引理判断 5 是否为模 13 的二次剩余。

答案：

13 是奇素数，5 和 13 互素，$(13-1)/2 = 6$，可得整数序列 5，10，15，20，25，30，这些数模 13 后得：5，10，2，7，12，4，其中大于 13/2 的数有 10，7，12，共 3 个 (m=3)，那么根据高斯引理有：

$\left[\frac{5}{13}\right] = (-1)^3 = -1$
5 是模 13 的二次非剩余。

定理 4.7: 二次互反率 (quadratic reciprocity law)[?]

p、q 是奇素数，$p \neq q$，则 $\left[\frac{p}{q}\right]\left[\frac{q}{p}\right] = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$。

在实际应用中，我们有时也把二次互反率写为：$\left[\frac{q}{p}\right] = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}\left[\frac{p}{q}\right]$

示例 4.8:[?]
3 是否为模 17 的二次剩余。

答案：
由二次互反率，有：
$\left[\frac{3}{17}\right] = (-1)^{\frac{3-1}{2}\frac{17-1}{2}}\left[\frac{17}{3}\right] = \left[\frac{17}{3}\right]$
$\because 17 = 6 \times 3 - 1 \equiv -1(mod\ 3)$
$\therefore [\frac{17}{3}] = [\frac{-1}{3}]$
根据定理 4.3.2，我们有：
$[\frac{-1}{3}] = (-1)^{\frac{3-1}{2}} = -1$
故 3 是模 17 的二次非剩余。

示例 4.9:[?]
同余方程 $x^2 \equiv 137(mod 227)$ 是否有解？

答案： 227 是素数，则:
$\left[\frac{137}{227}\right] = \left[\frac{-90}{227}\right] = \left[\frac{-1}{227}\right]\left[\frac{2\cdot 3^2\cdot 5}{227}\right] = -\left[\frac{2}{227}\right]\left[\frac{5}{227}\right]$
根据定理 4.3.2, 有 $\left[\frac{2}{227}\right] = (-1)^{\frac{227^1-1}{8}} = (-1)^{\frac{226\cdot 228}{8}} = -1$
根据二次互反律有，$\left[\frac{5}{227}\right] = (-1)^{\frac{5-1}{2}\frac{227-1}{2}}\left[\frac{227}{5}\right] = \left[\frac{227}{5}\right] = \left[\frac{2}{5}\right] == (-1)^{\frac{5^2-1}{8}} = -1$
因此，$\left[\frac{137}{227}\right] = -1$, 也就是说原同余方程无解。

4.4 雅克比符号 (Jacobi Symbol)

我们在利用勒让德符号判断二次同余方程是否有解时，通常需要将符号上方的数分解成标准分解式，而把一数分解成标准分解式是没有什么一般方法的，因此，利用勒让德符号来判断实际计算时，还有一定程度的缺点。引入雅可比符号就是为了去掉这一缺点。[?]

4.4.1 概念

定义 4.4: 雅克比符号 (Jacobi Symbol)

正奇数 $m = p_1p_2\dots p_r$ 是奇素数 p_i $(i = 1, 2, \dots, r)$ 的乘积，定义雅克比符号为 $\left(\frac{a}{m}\right) = \left[\frac{a}{p_1}\right]\left[\frac{a}{p_2}\right]\dots\left[\frac{a}{p_r}\right]$。 ♣

雅可比符号是用勒让德符号定义的，但是，雅可比符号将 Legendre 符号从奇素数的限制，扩大到正奇数。“扩大后其意义也发生了变化，如果 a 对 p 的勒让德符号为 1，可知 a 是模 p 的二次剩余，但当 a 对 m 的雅可比符号为 1 时，却不能得到 a 是模 m 的二次剩余这个结论。

雅可比符号的好处就是它一方面具有很多与勒让德符号一样的性质，当 r=1 是，雅可比符号和勒让德符号相等，另一方面，他并没有限制 m 必需是素数，因此要想计算勒让德符号的值，只须把他看成雅可比符号来计算。在计算雅可比符号值时，由于不用考虑 m 是不是素数，所以在实际计算上就非常方便了，并且利用雅可比符号最后一定能把勒让德符号的值计算出来。” [**?**](第 88 页)

第 5 章 原根与指数

本章讨论同余方程 $x^n \equiv a(mod\ m)$ 在什么条件下有解，在讨论过程中引入原根和指数的概念，通过讨论，对某些特殊的 m 有解的条件利用指数表达出来。[?]

5.1 次数 (order)

5.1.1 基本概念

定义 5.1: 次数 (order)

m 是大于 1 的整数，a 是与 m 互素的整数，使 $a^l \equiv 1(mod\ m)$ 成立的最小正整数 l 叫做 a 对模 m 的次数，记作 $ord_m(a)$ 或 $\delta_m(a)$。♣

对于任意大于 1 的整数 m，我们可以知道 $ord_m(1) = 1, ord_m(-1) = 2.$

示例 5.1:

求 $ord_{11}(a)$, 其中 $a = 1, 2, 3 \ldots, 10.$

答案： 我们可以把所有可能列出来，从而进行解答。

	a=1	a=2	a=3	a=4	a=5	a=6	a=7	a=8	a=9	a=10
$a^1(mod\ 11)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a^2(mod\ 11)$	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1
$a^3(mod\ 11)$	1	8	5	9	4	7	2	6	3	
$a^4(mod\ 11)$	1	5	4	3	9	9	3	4	5	
$a^5(mod\ 11)$	1	10	1	1	1	10	10	10	1	
$a^6(mod\ 11)$	1	9				5	4	3		
$a^7(mod\ 11)$	1	7				8	6	2		
$a^8(mod\ 11)$	1	3				4	9	5		
$a^9(mod\ 11)$	1	6				2	8	7		
$a^{10}(mod\ 11)$	1	1				1	1	1		

由上表可知 $ord_{11}(1) = 1, ord_{11}(2) = 10, ord_{11}(3) = 5, ord_{11}(4) = 5, ord_{11}(5) = 5, ord_{11}(6) = 10, ord_{11}(7) = 10, ord_{11}(8) = 10, ord_{11}(9) = 5, ord_{11}(10) = 2$。

在次数定义时，只考虑与 m 互素的整数 a，如果 a 和 m 不互素，不可能存在一个正整数 l, 使得 $a^l \equiv 1(modm)(l \geq 1)$, 所以通常只要谈到 a 对模 m 的次数，隐含条件都是 a 和 m 互素。

sagemath:a 与 m 不互素时，不存在次数

```
sage: a=5
....: m=15
....: for l in range(20):
....:   print a,"^",l,"=",mod(a^l,m),"(mod ",m,")"
....:
5 ^ 0 = 1 (mod  15 )
5 ^ 1 = 5 (mod  15 )
5 ^ 2 = 10 (mod  15 )
5 ^ 3 = 5 (mod  15 )
5 ^ 4 = 10 (mod  15 )
5 ^ 5 = 5 (mod  15 )
5 ^ 6 = 10 (mod  15 )
5 ^ 7 = 5 (mod  15 )
5 ^ 8 = 10 (mod  15 )
5 ^ 9 = 5 (mod  15 )
5 ^ 10 = 10 (mod  15 )
5 ^ 11 = 5 (mod  15 )
5 ^ 12 = 10 (mod  15 )
5 ^ 13 = 5 (mod  15 )
5 ^ 14 = 10 (mod  15 )
5 ^ 15 = 5 (mod  15 )
5 ^ 16 = 10 (mod  15 )
5 ^ 17 = 5 (mod  15 )
5 ^ 18 = 10 (mod  15 )
5 ^ 19 = 5 (mod  15 )
sage:
```

5.1.2 次数性质和计算

那么如何计算某个整数对某个模的次数呢？

定理 5.1

n 为非负整数，$a^n \equiv 1(mod\ m) \Leftrightarrow ord_m(a) \mid n$ ♡

定理 5.2: [?]

$a^0, a^1, \ldots, a^{ord_m(a)-1}$ 对模 m 两两不同余，其中 $a^0 = 1$. ♡

定理 5.3: [?]

若 a 对模 m 的指数是 δ, 则 $a^\gamma \equiv a^{\gamma'}(mod\ m)$ 成立的充要条件是 $\gamma \equiv \gamma'(mod\ \delta)$, 特别地，$a^\gamma \equiv 1(mod\ m) \Leftrightarrow \delta \mid \gamma$. ♡

定理 5.4: 次数性质 [?]

设 a 对模 m 的次数是 $ord_m(a)$，则有：

(1)$ord_m(a) \mid \varphi(m)$;

(2)$b \equiv a(mod\ m) \Rightarrow ord_m(b) = ord_m(a)$. ♡

利用上面的次数性质，可以再求次数时减少计算量。

示例 5.2:

计算 5 对模 17 的次数。

答案:

由于 $\varphi(17) = 16$，根据次数性质 5.1.2, 次数可以被 $\varphi(17)$ 整除 (也就是 16 的因子)，而 16 的因子有 1，2，4，8，16，所以只需计算 5 的 1，2，4，8，16 次方：

$$
\begin{aligned}
5^1 &\equiv 5(mod\ 17)\\
5^2 &\equiv 10(mod\ 17)\\
5^4 &\equiv 13(mod\ 17)\\
5^8 &\equiv 16(mod\ 17)\\
5^{16} &\equiv 1(mod\ 17)
\end{aligned}
$$

可见 $ord_{17}(5) = 16$.

定理 5.5: 幂的周期性 [?]

s,t 是任意非负整数，$a^s \equiv a^t(mod\ m) \Leftrightarrow s \equiv t(mod\ ord_m(a))$ ♡

以上定理揭示了一个事实，当 $m > 1, gcd(a, m) = 1$, 序列 $a^i(mod\ m)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ 是周期序列, 周期为 $ord_m(a)$。

示例 5.3:

我们先看 $5^x(mod\ 12)$ 序列的周期性，我们知道 $ord_{12}(5) = 2$:

sagemath: 幂的周期性示例

```
sage: a=5
....: m=12
....: for l in range(50):
....: ^Iprint a,"^",l,"=",mod(a^l,m),"(mod ",m,")"
....:
5 ^ 0 = 1 (mod  12 )
5 ^ 1 = 5 (mod  12 )
5 ^ 2 = 1 (mod  12 )
5 ^ 3 = 5 (mod  12 )
5 ^ 4 = 1 (mod  12 )
5 ^ 5 = 5 (mod  12 )
5 ^ 6 = 1 (mod  12 )
5 ^ 7 = 5 (mod  12 )
5 ^ 8 = 1 (mod  12 )
5 ^ 9 = 5 (mod  12 )
5 ^ 10 = 1 (mod  12 )
5 ^ 11 = 5 (mod  12 )
5 ^ 12 = 1 (mod  12 )
5 ^ 13 = 5 (mod  12 )
5 ^ 14 = 1 (mod  12 )
5 ^ 15 = 5 (mod  12 )
5 ^ 16 = 1 (mod  12 )
5 ^ 17 = 5 (mod  12 )
5 ^ 18 = 1 (mod  12 )
5 ^ 19 = 5 (mod  12 )
5 ^ 20 = 1 (mod  12 )
5 ^ 21 = 5 (mod  12 )
5 ^ 22 = 1 (mod  12 )
5 ^ 23 = 5 (mod  12 )
5 ^ 24 = 1 (mod  12 )
5 ^ 25 = 5 (mod  12 )
5 ^ 26 = 1 (mod  12 )
5 ^ 27 = 5 (mod  12 )
5 ^ 28 = 1 (mod  12 )
5 ^ 29 = 5 (mod  12 )
```

```
5 ^ 30 = 1 (mod  12 )
5 ^ 31 = 5 (mod  12 )
5 ^ 32 = 1 (mod  12 )
5 ^ 33 = 5 (mod  12 )
5 ^ 34 = 1 (mod  12 )
5 ^ 35 = 5 (mod  12 )
5 ^ 36 = 1 (mod  12 )
5 ^ 37 = 5 (mod  12 )
5 ^ 38 = 1 (mod  12 )
5 ^ 39 = 5 (mod  12 )
5 ^ 40 = 1 (mod  12 )
5 ^ 41 = 5 (mod  12 )
5 ^ 42 = 1 (mod  12 )
5 ^ 43 = 5 (mod  12 )
5 ^ 44 = 1 (mod  12 )
5 ^ 45 = 5 (mod  12 )
5 ^ 46 = 1 (mod  12 )
5 ^ 47 = 5 (mod  12 )
5 ^ 48 = 1 (mod  12 )
5 ^ 49 = 5 (mod  12 )
sage:
```

5.2 原根 (primitive root)

5.2.1 基本概念

定义 5.2: 原根 (primitive root)

m 是大于 1 的整数，a 是与 m 互素的整数，如果 $ord_m(a) = \varphi(m)$，则 a 称为 m 的原根。 ♣

设 a 对模 m 的次数为 l，符号化描述为 $ord_m(a) = l$, 欧拉函数 $\varphi(m)$ 表示完全剩余系中与 m 互素的元素个数。也就是说欧拉函数只和 m 有关，而次数与 m 和 a 有关。

[?] 中对原根的定义为：若 a 对模 m 的次数[1]是 $\varphi(m)$, 则 a 叫做模 m 的一个原根。

示例 5.4:

[1]在闵先生的原书中称为指数，把本书中的指数称为指标，这是对英文的不同翻译造成的。

5 是否是 6 的原根？是否是 8 的原根？

答案：

5,6 互素，已知 $\varphi(6)=2$，且 $5^1\equiv 5(mod\ 6), 5^2\equiv 1(mod\ 6)$，得 $ord_6(5)=2$，所以 $ord_6(5)=\varphi(6)$，由定义可知 5 是 6 的原根。

由于 5，8 互素，$\varphi(8)=4$，且 $5^1\equiv 5(mod\ 8), 5^2\equiv 1(mod\ 8)$，得 $ord_8(5)=2$，所以 $ord_8(5)\neq\varphi(8)$，由定义可知 5 不是 8 的原根。

5.2.2 原根的等价概念

定理 5.6: 原根充要条件

$ord_m(a)=\varphi(m)\Leftrightarrow 1,a,a^2,\ldots,a^{\varphi(m)}$ 是模 m 的一个缩系。

也可叙述为：a 是 m 原根的充要条件是 $1,a,a^2,\ldots,a^{\varphi(m)}$ 是模 m 的一个缩系。♡

定理 5.7: 原根充要条件

a 是 m 的一个原根，t 是非负整数，则 a^t 也是 m 的原根的充要条件是 $gcd(t,\varphi(m))=1$。♡

5.2.3 原根存在性判断

对于任意模数 m，不一定存在原根。所以探讨什么情况下原根存在是有意义的。

定理 5.8: 奇素数原根存在性 [?]

设 p 是奇素数，则 p 的原根存在。♡

定理 5.9: 奇素数次幂原根存在性 [?]

设 p 是奇素数，则对于任意正整数 l，存在 p^l 的原根。♡

定理 5.10: 奇素数次幂倍数原根存在性 [?]

设 p 是奇素数，则对于任意正整数 l，存在 $2p^l$ 的原根。♡

定理 5.11: 无原根整数 [?]

设 a 是一个奇数，则对任意整数 $k\geq 3$，有 $a^{\frac{1}{2}\varphi(2^k)}\equiv a^{2^{k-2}}\equiv 1(mod\ 2^k)$，即 $2^k(k\geq 3)$ 没有原根。♡

有了上面这些定理，可以推出原根存在的充要条件。

定理 5.12: 原根存在性判定 [?]

设 m 是大于 1 的整数，则 m 的原根存在的充要条件是 m 为 2，4，$p^l, 2p^l$ 之一，其中 $l \geq 1$,p 为奇素数。♡

5.2.4 原根的计算

上面我们讨论了原根的存在性判定，还有两个重要问题就是判定有几个原根和这几个原根是什么。

定理 5.13: [?]

设 m 是大于 2 的整数，$\varphi(m)$ 的所有不同的素因子是 $q_1, q_2, \ldots, q_s$，则与 m 互素的正整数 g 是 m 的一个原根的充要条件是 $g^{\frac{\varphi(m)}{q_1}} \not\equiv 1(mod\ m), i = 1, 2, \ldots, s$。♡

示例 5.5:[?]

求 41 的原根。

答案:

$\varphi(m) = \varphi(41) = 40 = 2^3 \times 5$, 所以 $\varphi(m)$ 的素因子是 $q_1 = 5, q_2 = 2$，可计算得:

$$\frac{\varphi(m)}{q_1} = \frac{40}{5} = 8, \frac{\varphi(m)}{q_2} = \frac{40}{2} = 20$$

与 m 互素的正整数 g=2,3,4,5,6，分别验算 g^8, g^{20}, 得:

$2^8 \equiv 10(mod\ 41), 2^{20} \equiv 1(mod\ 41)$, 不符合原根条件;

$3^8 \equiv 1(mod\ 41)$, 不符合原根条件;

$4^8 \equiv 18(mod\ 41), 2^{20} \equiv 1(mod\ 41)$, 不符合原根条件;

$5^8 \equiv 10(mod\ 41), 2^{20} \equiv 1(mod\ 41)$, 不符合原根条件;

$6^8 \equiv 10(mod\ 41), 2^{20} \equiv 40(mod\ 41)$, 符合原根条件;

t 遍历 $\varphi(m) = 40$ 的缩系 $1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 31, 33, 37, 39, 6^t$ 遍历 41 的原根, 可得:

$6^1 \equiv 6(mod\ 41); 6^3 \equiv 11(mod\ 41); 6^7 \equiv 29(mod\ 41);$

$6^9 \equiv 19(mod\ 41); 6^{11} \equiv 28(mod\ 41); 6^{13} \equiv 24(mod\ 41);$

$6^{17} \equiv 26(mod\ 41); 6^{19} \equiv 34(mod\ 41); 6^{21} \equiv 35(mod\ 41);$

$6^{23} \equiv 30(mod\ 41); 6^{27} \equiv 12(mod\ 41); 6^{29} \equiv 22(mod\ 41);$

$6^{31} \equiv 13(mod\ 41); 6^{33} \equiv 17(mod\ 41); 6^{37} \equiv 15(mod\ 41);$

$6^{39} \equiv 7(mod\ 41);$

所以，41 的原根为:6,7,11,12,13,15,17,19,22,24,26,28,29,30,34,35

5.3 指数/离散对数

“如果 m 是一个原根 g，根据定理 5.2.2可知，$1, g, g^2, \ldots, g^{\varphi(m)-1}$ 是模 m 的一个缩系，因此，对任何一个与 m 互素的整数 a，存在唯一的非负整数 r，$0 \le r < \varphi(m)$, 使得 $g^r \equiv a(mod\ m)$, 由于原根具有以上性质，我们可以给出下面的定义”。[?](第 103 页)

定义 5.3: 指数 (index)[?]

设 m 是大于 1 的整数，g 是 m 的一个原根，a 是与 m 互素的整数，则存在唯一的非负整数 r，$0 \le r < \psi(m)$，满足 $a \equiv g^r(mod\ m)$，称 r 为以 g 为底 a 对模 m 的指数，记作 $ind_g a$,$a \equiv g^{ind_g a}(mod\ m)$, 有时也把指数称为离散对数，记为 $log_g a, a \equiv g^{log_g a}(mod\ m)$。 ♣

备注： 对于实数来说 $a^c = b \to \log_a b = c$,c 叫做以 a 为底 b 的对数（logarithm）。所以我们通常也把 $ind_g a$ 叫做离散对数，记作 $\log_g a$.

离散对数的计算问题是一个计算上困难的问题，目前没有找到一个有效的算法。

示例 5.6:

m=7，有原根 g=3，计算指数表。

答案：

$3^x \equiv a(mod\ 7)$, 可知 x 和 a 的关系为：

$x = 1, a = 3^1 = 3 \equiv 3(mod\ 7)$

$x = 2, a = 3^2 = 9 \equiv 2(mod\ 7)$

$x = 3, a = 3^3 = 27 \equiv 6(mod\ 7)$

$x = 4, a = 3^4 = 81 \equiv 4(mod\ 7)$

$x = 5, a = 3^5 = 243 \equiv 5(mod\ 7)$

$x = 6, a = 3^6 = 729 \equiv 1(mod\ 7)$

整理以上计算结果，可得指数表。

定理 5.14: 原根的幂

g 是 m 的一个原根，$g^x \equiv g^y(mod\ m) \Leftrightarrow x \equiv y(mod\ \varphi(m))$ ♡

定理 5.15: 原根的次数

g 是 m 的一个原根，整数 a,b 均与 m 互素，$a \equiv b(mod\ m) \Leftrightarrow ind_g a \equiv ind_g b(mod\ \varphi(m))$ ♡

可见离散指数与实数中的指数的性质很相似，我们可以利用原根做出指数表。

示例 5.7:[?]

做出模 41 的指数表

答案：

已知 6 是 41 的一个原根，所以 g=6，又知 $\varphi(41)=40$，直接计算 $g^r(mod\ m), g=6, m=41, r=0,1,\ldots,39$:(下表中中的值为 $6^{a+b}(mod\ 41), a\in\{0,1,2,3,4,5\}, b\in\{0,6,12,18,24,30,36\}$)

	a=0	a=1	a=2	a=3	a=4	a=5
b=0	$6^{(a+b)}\equiv 1(mod\ 41)$	6	36	11	25	27
b=6	39	29	10	19	32	28
b=12	4	24	21	3	18	26
b=18	33	34	40	35	5	30
b=24	16	14	2	12	31	22
b=30	9	13	37	17	20	38
b=36	23	15	8	7	-	-

根据计算结果，我们构造指数表，第一行表示 $g^r(mod\ m)$ 的个位数，第一列表示 $g^r(mod\ m)$ 的十位数，交叉位置即为 r：

模 41 的指数表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-	0	26	15	12	22	1	39	38	30
1	8	3	27	31	25	37	24	33	16	9
2	34	14	29	36	13	4	17	5	11	7
3	23	28	10	18	19	21	2	32	35	6
4	20	-	-	-	-	-	-	-	-	-

5.4 n 次剩余

定义 5.4: n 次剩余

m 是大于 1 的整数，a 是与 m 互素的整数，若 $n(n\geq 2)$ 次同余方程 $x^n\equiv a(mod\ m)$ 有解，则把 a 称为模 m 的 n 次剩余，否则（无解），a 叫作模 m 的 n 次非剩余。♣

定理 5.16: 高次同余方程有解充要条件

g 是 m 的一个原根，a 是与 m 互素的整数，则同余方程 $x^n\equiv a(mod\ m)$ 有解 $\Leftrightarrow gcd(n,\varphi(m))\mid ind_g a$，且解的个数为 $gcd(n,\varphi(m))$. ♡

示例 5.8:

求解同余方程 $x^{12}\equiv 37(mod\ 41)$.

答案：

$\varphi(41) = 40, gcd(12, 40) = 4$，查模 41 的指数表，知 $ind_g 37 = 32$, 所以 $4 \mid 32$，可知同余方程有解。

原同余方程与 $12 ind_g x \equiv ind_g 37 = 32 (mod\, 40)$ 等价, 有 $3 ind_g x \equiv 8 (mod\, 10)$,3 模 10 的逆元是 7，两边同乘 7，得到 $ind_g x \equiv 56 \equiv 6 (mod\, 10)$, 可解得 $ind_g x \equiv 6, 16, 26, 36 (mod\, 40)$, 通过查模 41 的指数表可得到原同余方程的解为 $x \equiv 39, 18, 2, 23 (mod\, 41)$.

第 6 章 群

6.1 基本概念

定义 6.1: 二元运算 (binary operation)

集合 G 上的二元运算是一个如下的函数：$*: G \times G \to G$. ♣

在不引起歧义的情况下，二元运算 $*(a, b)$ 通常写成 $a * b$，这里需要注意的是，二维及以上向量的点积运算不是我们这里定义的二元运算，如 $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2), a \cdot b = x_1x_2 + y_1y_2$，因为参与运算的是两个向量，结果是一个数，显然不是同一个集合，不符合定义。

定义 6.2: 代数系统 (algebra system)

对于非空集合 S 以及 S 上的运算 $\star$, 若运算满足封闭性 (closure)，则称 S 和运算构成一个代数系统，记为 $(S, \star)$. ♣

定义 6.3: 半群 (semigroup)

G 是一个非空集合，$*$ 是定义在集合 G 上的一个二元运算，$(G, *)$ 被称为半群，如果 $(G, *)$ 满足以下条件：

(1) 封闭 (closure)：对于任意 $a, b \in G \Rightarrow a * b \in G$.

(2) 结合律 (associative)：对于任意 $a, b, c \in G \Rightarrow a * (b * c) = (a * b) * c$. ♣

示例 6.1:整数集 $\mathbb{Z}$，有理数集 (Q)，实数集 $\mathbb{R}$，复数集 $\mathbb{C}$ 在普通加法下满足封闭性和结合律，所以构成半群, 同样在普通乘法下满足封闭性和结合律，所以也构成半群。

定义 6.4: 幺半群或单位半群 (monoid)

具有单位元 (identity element) 的半群称为独异点，也叫幺半群. ♣

定义 6.5: 群 (group)

半群 $(G, *)$ 被称为群，如果满足以下条件：

(1) 单位元 (identity element)：$\exists e \in G, \forall a \in G \Rightarrow e * a = a$，此时我们称 e 为 G 的左幺员 (member of the upper-left)。

(2) 逆元 (inverse element)：$\forall a \in G, \exists a' \in G, a' * a = e$，此时我们称元素 a' 为 a 的左逆元 (left inverse element)。. ♣

群的另外一个定义是：G 中每个元素都有逆元的独异点叫群。

注意：以上各个定义是渐进定义，也就是不断加入新的限制，如封闭 (*closure*)、结合律 (*associative*), 还有以后要用到的消去律 (*cancellation law*) 和交换律 (*commutative law*).

示例 6.2:$(\mathbb{Z},+)$, 单位元是 0，任何一个整数 a 都存在逆元-a，所以 $(\mathbb{Z},+)$ 为群。同样，有理数集 $\mathbb{Q}$，实数集 $\mathbb{R}$，复数集 $\mathbb{C}$ 在普通加法下构成群。$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}\backslash\{0\}, (\mathbb{Q}^*,\times)$, 单位元是 1，任何一个有理数 a，存在逆元 $\frac{1}{a}$，所以 $(\mathbb{Q}^*,\times)$ 为群, 同样 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ 在普通乘法下也构成群。$(\mathbb{Z}^*,\times)$ 存在单位元，但是不存在逆元，所以 $(\mathbb{Z}^*,\times)$ 仅能构成半群。

定理 6.1: 群的幺元和逆元性质

G 是一个群，e 是 G 的左幺元，则有：

(1) 任意 $a \in G$，b 是 a 的左逆元，则 b 也是 a 的右逆元，称 b 是 a 的逆元。

(2)e 也是 G 的右幺元，称 e 是 G 的幺元。

(3) 任意 $a \in G$，其逆元是唯一的。 ♡

证明：(1) 设 c 为 b 的左逆元，$a*b = e*(a*b) = (c*b)*(a*b) = c*(b*a)*b = c*e*b = c*b = e$，可见 b 也是 a 的右逆元.

(2) 设 b 为 a 的逆元，$a*e = a*(b*a) = (a*b)*a = e*a = a$，可见 e 也是右逆元。

(3) 设 b，d 均为 a 的逆元，$b = b*e = b*(a*d) = (b*a)*d = e*d = d$，可见逆元唯一. □

定义 6.6: 群的阶 (group order)

群 $(G,*)$ 的元素个数称为此群的阶，记为 $|G|$，如果 $|G|$ 有限，则称 $(G,*)$ 为有限群 (finite group), 否则称为无限群 (infin group)。 ♣

示例 6.3:

$\mathbb{Z}_n = \{0,1,2,\ldots,n-1\}$，定义 $(\mathbb{Z}_n+)$, 二元运算 + 为模 n 的加法，$(\mathbb{Z}_n+)$ 为群，为有限群。

定义 6.7: 元素的阶 (order)

群 $(G,*)$ 中的元素 a，使 $a^n = \mathbf{1}$ 的最小正整数 n 称为元素 a 的阶，记为 $ord(a)$。如果不存在这样的正整数，我们称 a 为无限阶元素。 ♣

备注：在谈到任意群的幺元时，通常用 **1** 来表示，但是其并不是 1，只是一个记号，例如整数加法群里面幺元是 0. 用 a^{-1} 表示 a 的逆元。

示例 6.4:

(1) 在任何群中，只有单位元的阶为 1，即 $ord(\mathbf{1}) = 1$.

(2) 普通加法下，$\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ 中，每个非零数都是无限阶。整数中幺元为 0，任何一个非零数连加都不会是 0，所以是无限阶。

(3) 普通乘法下，$\mathbb{Q}*,\mathbb{R}*,\mathbb{C}*$ 中，$ord(1) = 1, ord(-1) = 1$, 幺元为 1，非 1 和-1，没有任何数连乘会是 1，所以其他都是无限阶。

定理 6.2: 关于方程解

G 是一个群，$a, b \in G$，则方程 $ax = b$ 和 $ya = b$ 有唯一的解。♡

定理 6.3: 群中元素幂的性质

对于正整数 m 和 n，群中元素 a 的幂满足：

(1)$(a^{-1})^n = (a^n)^{-1}$;

(2)$a^{n+m} = a^n a^m$;

(3)$(a^n)^m = a^{nm}$; ♡

定理 6.4: 元素阶的性质

有限群 G 中元素 a 的阶必为有限数。♡

示例 6.5:

Klein[1]四元群为集合 $G = a, b, c, e$，其上二元运算 · 定义如下表 (通常有限群的运算关系用以下表格方式给出，此表称为 G 的群表)：

·	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	b	c
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

答案：

观察群表，可知，$\forall x \in G, x \cdot e = e \cdot x = x$, 所以 e 是单位元或幺元，$\forall x \in G, x \cdot x = e$，所以 x 的逆元就是 x 自身。同样可以验证 $\forall x, y, z \in G, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, 即满足结合律。

$(G, \cdot)$ 对于二元运算是封闭的，满足结合律，所以是一个半群，由于存在单位元和逆元，所以其是群。

[1]Klein 是个德国人，中文又是音译为克莱因，Klein 群是一个最小非循环群，有时常用 V 来表示，因为德文的四元群单词为 Vierergruppe

6.2 子群

定义 6.8: 子群 (subgroup), 平凡子群 (trivial subgroup), 真子群 (proper subgroup)

设 $(G,*)$ 是一个群，$H \subset G$，如果 H 对于运算 * 也构成群，那么称 H 是 G 的子群，记为 $H \leq G$. 由于 $\{\mathbf{1}\}$ 和 G 都是 G 的子群，我们称 $\{\mathbf{1}\}$ 和 G 为 G 的平凡子群，否则称为非平凡子群。如果子群 $H \neq G$，我们认为 H 是真子群，记为 $H < G$ 。 ♣

示例 6.6:

在普通加法下，$\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{C}$。

示例 6.7:

在普通加法下 $\mathbb{R}$ 是群，普通乘法下 $\mathbb{Q}*$ 是群，而且 $\mathbb{Q}* \subset \mathbb{R}$, 但 $(\mathbb{Q}*, \times)$ 不是 $(\mathbb{R},+)$ 子群，因为这两个群的二元运算不同。

定理 6.5: 子群的等价条件

G 是一个群，H 是它的非空子集，则：

$H \leq G \Leftrightarrow$

$\mathbf{1} \in H; a \in H\ then\ a^{-1} \in H; a,b \in H\ then\ ab \in H \Leftrightarrow$

$a,b \in H\ then\ ab \in H, a^{-1} \in H \Leftrightarrow$

$\forall a,b \in H, ab^{-1} \in H$ ♡

由于这些条件都是与 H 是 G 子群的等价条件，所以也可以用于子群的判断。

示例 6.8:

$n \in \mathbb{Z}, n\mathbb{Z} = \{n \times k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, 则 $(n\mathbb{Z},+)$ 是 $(\mathbb{Z},+)$ 的子群。

证明： $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}, \forall a,b \in n\mathbb{Z}$, 存在 $i,j \in \mathbb{Z}$, 使得 $a = n \times i, b = n \times j$, 我们有 $a+b = n \times i + n \times j = n \times (i+j) \in n\mathbb{Z}$, 单位元为 0，$a^{-1} = -n \times i \in n\mathbb{Z}$，根据上述定理 $(a,b \in H\ then\ ab \in H, a^{-1} \in H)$，我们可知 $(n\mathbb{Z},+)$ 是 $(\mathbb{Z},+)$ 的子群。 □

定理 6.6: 有限群的子群判定

G 是一个有限群，他的非空子集 H 是子群 ⇔H 在 G 的二元运算下是封闭的。 ♡

上述定理只有在 G 是有限群时才成立，下面我们给出一个示例。

示例 6.9:

在普通加法下 $\mathbb{Z}$ 是一个无限群，$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$，且加法下封闭，但其不是 $\mathbb{Z}$ 的子群。我们如果从群的定义出发，会发现自然数集合在加法下是一个半群，但是不是一个群。

定义 6.9: 正规子群 (normal subgroup)

K 是 G 的子群，如果对于任意 $k \in K, g \in G$，有 $gkg^{-1} \in K$，则称 K 是 G 的正规子群，记为 $K \lhd G$. ♣

示例 6.10:

$n > 1, (n\mathbb{Z}, +) \lhd (\mathbb{Z}, +)$。

答案:

任意 $g \in \mathbb{Z}, k \in n\mathbb{Z}$, 加法满足交换律，g 逆元为-g，所以 $g + k + (-g) = g + (-g) + k = \mathbf{1} + k = 0 + k = k \in n\mathbb{Z}$，所以 $n\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的正规子群。

定理 6.7: 正规子群的等价条件

$H \leq G$，则：

$H \lhd G \Leftrightarrow$

$\forall g \in G, gHg^{-1} = H \Leftrightarrow$

$\forall g \in G, gH = Hg; \Leftrightarrow$

$\forall g_1, g_2 \in G, g_1Hg_2H = g_1g_2H.$ ♡

示例 6.11:$(n\mathbb{Z}, +) \lhd (\mathbb{Z}, +)$, 举例来验证以上等价条件。

6.3 交换群/阿贝尔群

定义 6.10: 阿贝尔群 (Abelian groups)

如果群 $(G, *)$ 中的二元运算 $*$ 满足交换律 (commutative law)，那么群 $(G, *)$ 称为阿贝尔群 (Abelian groups) 或交换群 (commutative groups)。 ♣

定理 6.8: 交换群子群的正规性

任意交换群的子群都是正规子群。 ♡

6.4 循环群

定义 6.11: 循环子群 (cyclic sub-group)

G 是一个群，$a \in G$，集合 $\{a^n \mid n \in \mathcal{Z}\}$ 称为由元素 a 生成的 G 的循环子群，记为 $< a >$。 ♣

注意： 在循环子群的定义中注意理解 a^n 的含义，其是指对于群 $(G, *)$$\underbrace{a * a * \ldots * a}_{n}$.

定理 6.9: <a> 是子群

<a> 是一个群，且为 G 的子群。 ♡

定义 6.12: 循环群 (cyclic group)

G 是一个群，如果 $\exists a \in G, G =< a >$，则称 G 为循环群，称 a 为 G 的生成元。♣

由前面的定义和定理可知，任何循环群的子群必定是循环群。一个循环群可以有不止一个生成元，例如，集合 $G =< a >= \{a^n \mid N \in \mathbb{Z}\}$, 因为 $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{(a^{-1})^n \mid n \in \mathbb{Z}\} =< a^{-1}$, 所以 $G =< a^{-1} >$.

示例 6.12:

$(\mathbb{Z}, +)$ 是交换群，任取 $a \in \mathbb{Z}, < a >= \{na \mid n \in \mathbb{Z}\}$,$(< a >, +)$ 是 $(\mathbb{Z}, +)$ 的循环子群。

当 $a = 0$ 时，这个子群只有一个元素 0 组成。

当 $a = 1$ 时，$< 1 >= \mathbb{Z}$，所以 $(\mathbb{Z}, +)$ 是循环群，1 是 $\mathbb{Z}$ 的生成元。

当 $a = 2\ or\ -2$ 时，$< 2 >=< -2 >=$ 偶数集合，所以 2 和-2 是偶数集合的生成元。

奇数集合不是 $\mathbb{Z}$ 的循环子群，奇数集合根本不是群，因为不包含单位元 ⊮。

示例 6.13:

集合 $\mathbb{Z}_6 = 0, 1, 2, \ldots, 5$(此处二元运算是什么？[2]),1 是 $\mathbb{Z}_6$ 的生产元，另一个明显的生成元是 5[3]。他的子集 {0,3} 是一个循环群，该子群的生成元只有一个是 3，另一个子集 {0,2,4} 也是循环群，生成元是 2，4.

示例 6.14:

$\mathbb{Z}_5^* = \{1, 2, 3, 4\}$,2 和 3 都是他的生成元[4]。该集合的子集 { 1,4 } 是 $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$ 的一个循环子群，生成元是 4.

定理 6.10: 循环群的生成元

G=<a> 是一个循环群，且 $\mid G \mid= n$，则当且仅当 $gcd(k, n) = 1$ 时，a^k 是 G 的生成元。 ♡

定理 6.11: 循环群的生成元

n 阶循环群共有 $\varphi(n)$ 个生成元。 ♡

---

[2]模 6 加

[3]此处 5^n 表示 n 个 5 相加模 6，所以有 $5 \equiv 5(mod\ 6); 5^2 = 10 \equiv 4(mod\ 6); 5^3 = 15 \equiv 3(mod\ 6); 5^4 = 20 \equiv 2(mod\ 6); 5^5 = 10 \equiv 1(mod\ 6); 5^6 = 30 \equiv 0(mod\ 6)$;5 生成所有元素。

[4]这种说法其实很迷惑人，因为并没有说明其二元运算是什么，根据本题后面的描述，我们可以假设其二元运算是模 5 乘法，验算一下，$2^1 = 2 \equiv 2(mod\ 5); 2^2 = 4 \equiv 4(mod\ 5); 2^3 = 8 \equiv 3(mod\ 5); 2^4 = 16 \equiv 1(mod\ 5)$，同样验证 3 是生成元，$3^1 = 3 \equiv 3(mod\ 5); 3^2 = 9 \equiv 4(mod\ 5); 3^3 = 27 \equiv 2(mod\ 5); 3^4 = 81 \equiv 1(mod\ 5)$，但是我们也可以看出如果二元运算是模 5 加法，也成立，读者可以自行验算一下

定理 6.12: 循环群的子群生成元

G=<a> 是一个循环群，$S \leq G$，则 S 必定是一个循环群，且如果 k 是使得 $a^k \in S$ 的最小正整数，则 a^k 是 S 的生成元。♡

定理 6.13: 有限循环群的阶

G 是有限群，且 $a \in G$, 则 $ord(a) = |< a >|$. ♡

定理 6.14: 有限循环群的子群

G=<a> 是一个有限循环群，$|G| = n$，则对于任意整除 n 的正整数 d，一定存在一个唯一的阶为 d 的循环子群 $< a^{\frac{n}{d}} >$. ♡

6.4.1 循环子群的构造

定理 6.15: 子群的交集

子群的交集还是子群. ♡

定义 6.13: 集合生成的子群

$(G, \cdot)$ 是群，S 是 G 的子集，设 $(H_i \mid i \in I, \cdot)$ 是 $(G, \cdot)$ 的所有包含集合 S 的子群，即 $S \subset H_i (i \in I)$, 则 $(H_i \mid i \in I, \cdot)$ 称为由集合 S 生成的子群，记为 $(< S >, \cdot)$,S 中的元素叫子群 $(< S >, \cdot)$ 的生成元。♣

6.5 置换群

定义 6.14: 置换 (permutation)

给定非空集合 X，我们将任意一个双射 $\alpha : X \to X$ 称作集合 X 的一个置换。♣

把函数的的复合 “∘” 看作一种置换间的二元运算 (注意：此处群的二元运算是置换的复合)，那么非空集合 X 的所有置换组成的集合 S_X 就是一个群，我们把这个群记为 $(S_X, \circ)$，满足：

(1) 封闭性 (closure): 任意两个置换的复合也是置换，所以"∘" 是 S_X 上的封闭二元运算。

(2) 结合律 (associative): 一般函数的复合满足结合律，所以 ∘ 满足结合律。

(3) 单位元 (identity element): 定义恒等置换 $I_X X \to X \Leftrightarrow x \in X, I_X(x) = x$，则对于任意置换 α,$\alpha \circ I_X = I_X \circ \alpha = \alpha$, 所以 I_X 是单位元。

(4) 逆元 (inverse element): 对于任意置换 $\alpha : X \to X$，因为是双射，所以存在逆函数 $\alpha^(-1) : X \to X, \alpha \circ \alpha^(-1) = \alpha^(-1) \circ \alpha = I_X$，所以置换 $\alpha^(-1)$ 是 α 的逆元。

由上可见 $(S_X, \circ)$ 满足所有的群条件，所以其是一个群。

定义 6.15: 全变换群 (transformation group)

$(S_X, \circ)$ 称为集合 X 上的全变换群或对称群，当 $X = 1, 2, \ldots, n$ 时，称 S_X 为 n 次变换群 (n 次对称群)，记作 S_n。♣

利用排列组合的知识我们知道 S_n 的元素数量是 $n!$。

定义 6.16: r-轮换

设 $\alpha \in S_n, A = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}, B = \{1, 2, \ldots, n\} - A$, 如果置换 α 满足：

(1) 对 A 中的元素有 $\alpha(i_1) = i_2, \alpha(i_2) = i_3, \ldots, \alpha(i_{r-1}) = i_r, \alpha(i_r) = i_1$[a]; (2)$i \in B, \alpha(i) = i$; 我们称置换 α 是一个 r-轮换，记为 $\alpha(i_1, i_2, \ldots, i_r)$, 我们也把“2-轮换”称为对换。

[a]这是按照变换进行了排序，前一个变换结果是下一个变换的变量，这样 A 的变换其实是形成了一个循环，画图更容易看一些。

♣

示例 6.15:

一个“3-轮换” $\alpha = (2, 1, 3) \in S_5$，其置换的含义是 $\alpha(2) = 1, \alpha(1) = 3, \alpha(3) = 2, \alpha(4) = 4, \alpha(5) = 5$. 也可以表示为：

$$\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

任意置换可以分解为多个轮换的复合，为了称呼简单一些，我们以后将置换的复合称为“乘积”，以此来简化轮换的复合表示。

示例 6.16:

如下置换 $\alpha \in S_5$ 可以用两种不同的轮换乘积来表示：$\alpha = (1, 2)(1, 3, 4, 2, 5)(2, 5, 1, 3) = (1, 4)(3, 5)(2)$

复合运算是从右向左，我们可以验证上面是相等的：

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ - & - & - & - & - \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ - & - & - & - & - \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \overset{rearrange}{=} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (2)(5, 3)(1, 4)$$

定义 6.17: 轮换不相交

$\alpha, \beta \in S_n$ 是两个轮换，且两个轮换记号中没有共同的数字，称轮换 α, β 不相交，如果一组轮换中任意两个轮换都不相交，称改组轮换不相交。♣

1-轮换都等于恒等置换，对于恒等置换写作 $\mathbf{1}_n$，对于任意轮换 $\alpha \in S_n$，如果已知他的轮换分解，求出逆置换的方法是将轮换分解的每一个轮换中的数字倒排，例如 $\alpha = (1,4)(5,3) \to \alpha^{-1} = (4,1)(5,3), \alpha\alpha = \mathbf{1}_{S_5}$. 可以计算验证一下。

S_2 只有两个元素，明显是个交换群，但是 $S_n \quad (n \geq 3)$ 是非交换群。

示例 6.17:

对于 $S_n \quad (n \geq 3)$ 有：

$(1,2)(1,3) = (1,3,2)$

$(1,3)(1,2) = (1,2,3)$

可见 $(1,2)(1,3) \neq (1,3)(1,2)$.

尽管 $S_n(n \geq 3)$ 是非交换群，但是不相交的轮换是可交换的。

定理 6.16: 不相交轮换可交换

不相交的轮换是可交换的。♡

对于一个置换的不相交轮换分解来说，随意调整其中各个轮换的次序不会改变该轮换。

定理 6.17: 置换唯一分解

S_n 中的任意置换一定能够分解为不相交轮换的乘积，且这种分解式唯一的[a]。

[a]这种唯一性是要有约束条件的，分解的形式必须满足以下条件：
(1) 对于一个置换的不相交轮换分解，随意调整其中各轮换的次序，把这些记法看做同一个轮换分解。
(2) 把一个轮换的不同记法看做一个轮换。
(3) 一个置换的不相交轮换分解中去掉任何 **1**-轮换。 ♡

定义 6.18: 轮换和置换的阶

对于一个 r-轮换 $\alpha, ord(\alpha) = r$, 对于任意置换，先将置换进行不相交轮换分解，该置换的阶就等于所有轮换因子长度的最小公倍数。♣

示例 6.18:

3-轮换 $(1,2,3) \in S_3$, 我们用定义求解其阶。

$(1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

$(1,2,3)(1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$(1,2,3)(1,2,3)(1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

可见 (1,2,3) 的阶是 3.

示例 6.19:

求 $\alpha = (1,2,3)(4,5) \in S_5$ 的阶。

答案:

ord(α)=lcm(3,2)=6.

定义 6.19: 置换群 (Permutation group)

将任意全变换群的任意子群称为一个置换群。♣

6.6 陪集和商群

群和她的子群之间有一定的关系，陪商和商群就是研究群和子群之间关系的。

定义 6.20: 左陪集 (Coset)

设 $(G,\bullet)$ 为群，$H \leq G, a \in G, a \bullet H = \{a \bullet h \mid h \in H\}$, 我们称 $a \bullet H$ 这样的子集为群 G 关于子群 H 的左陪集,a 称为代表元。♣

示例 6.20:令 $< 3 >= \{n \times 3 \mid n \in \mathbf{Z}\}$,$(< 3 >, +) \leq (\mathbf{Z}, +)$，求 $(< 3 >, +)$ 的所有左陪集。

答案: 令 a=0，则相应的左陪集为 $\{0 + n \times 3 \mid n \in \mathbf{Z}\}$，也就是说这个集合是所有 3 的倍数组成的集合，用同余的概念，我们也可以表示为 $\{k \mid k \equiv 0(mod\ 3)\}$。
令 a=1，则相应的左陪集为 $\{1 + n \times 3 \mid n \in \mathbf{Z}\}$，用同余的概念，我们也可以表示为 $\{k \mid k \equiv 1(mod\ 3)\}$。
令 a=3，则相应的左陪集为 $\{2 + n \times 3 \mid n \in \mathbf{Z}\}$，用同余的概念，我们也可以表示为 $\{k \mid k \equiv 2(mod\ 3)\}$。
我们再设 a 为其他整数，不难发现，a 为其他整数时，都是以上三个集合之一。所以 $(< 3 >, +)$ 的左陪集为 $\{k \mid k \equiv 0(mod\ 3)\}$、$\{k \mid k \equiv 1(mod\ 3)\}$、$\{k \mid k \equiv 2(mod\ 3)\}$。

定义 6.21: 左陪集关系 (Coset relation)

设 $(H,\bullet) \leq (G,\bullet)$，我们确定 G 上的一个关系 $\equiv$[a],$a \equiv b \Leftrightarrow a^{-1} \bullet b \in H$, 这个关系叫 G 上关于 H 的左陪集关系。也可以写为 $\{< a, b >| a, b \in G \wedge (a^{-1} \bullet b) \in H\}$.

[a]此处只是使用了与同余相等同样的符号，两者没有任何关系 ♣

示例 6.21:对于群 $(\mathbb{Z}, +)$，幺元为 0，$\forall a, a^{-1} = -a$, 此时我们看子群 $(< 3 >, +)$，可知其关于 $(< 3 >, +)$ 的左陪集关系满足 $\{< a, b >| a, b \in \mathbb{Z} \wedge (b - a) \in < 3 >\}$，也就是说 b 和 a 的差是 3 的倍数，那这个关系根据前面的同余关系讨论，显然是模 3 的同余关系。

定理 6.18: 左陪集关系的等价性

设 $(H,\bullet) \leq (G,\bullet)$，则 G 上关于 H 的左陪集关系是等价关系。♡

因为左陪集关系是一个等价关系，所以可以利用左陪集关系对 G 进行划分。

定义 6.22: a 为代表元的等价类

群 $(G, \bullet)$ 的子群 $(H, \bullet)$ 所确定的左陪集关系 $\equiv$ 对 G 划分等价类，将 $[a] = \{x \mid x \in G, a \equiv x\}$ 等价类叫作以 a 为代表元的等价类。♣

示例 6.22: 在前面一个例子的讨论中，我们知道，同余关系是群 $(\mathbb{Z}, +)$ 上关于 $(<3>, +)$ 左陪集关系，以 a 为代表元的等价类 $[a] = C_a$,C_a 就是前面定义的同余等价类。

定理 6.19: 等价类与左陪集关系

设 $(H, \bullet) \leq (G, \bullet)$，则 $[a] = a \bullet H$。♡

定理 6.20: 拉格朗日定理

设 $(H, \bullet) \leq (G, \bullet), (G, \bullet)$ 是有限群，则 $|H|$ 是 $|G|$ 的因子。♡

定义 6.23: 商集 (quotient set)

设群 $(G, \bullet)$ 有一个子群 $(H, \bullet)$，则 H 在 G 中的两两不相交左陪集组成的集合称为 H 在 G 中的商集，记为 G/H,G/H 中两两不想交的左陪集个数叫做 H 在 G 中的指标，记为 $[G : H]$。♣

示例 6.23: 同余关系是群 $(\mathbb{Z}, +)$ 上关于 $(<3>, +)$ 左陪集关系，那么关于同余关系子群 $(<3>, +)$ 的左陪集根据上面的定理，我们知道有 $[0], [1], [2]$, 所以 <3> 在 $\mathbb{Z}$ 中的商集为 $\{[0], [1], [2]\}$。

示例 6.24: 更一般的，$(n\mathbb{Z}, +)$ 在整数加法群 $(\mathbb{Z}, +)$ 中的商集为 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$.

定理 6.21: 正规子群的充要条件

群 $(G, \bullet)$ 的子群 $(H, \bullet)$ 是正规子群的充要条件是，$\forall a \in G, aN = Na$。♡

根据以上定理可知，正规子群形成的陪集没有左右之分。

定理 6.22: 商群 (quotient group) 的定义

设群 $(G, \bullet)$ 有一个正规子群 $(N, \bullet)$，$T = G/N$ 是 N 在 G 中的商集，在商集 T 上定义二元运算 $\odot$:

对于任意 $aN, bN \in T \quad (a, b \in G), aN \odot bN = (a \bullet b)N$

则 $(T, \odot)$ 构成群，并称为群 $(G, \bullet)$ 对正规子群 $(N, \bullet)$ 的商群，记为 $(T, \odot) = (G, \bullet)/(N, \bullet) = (G/N, \bullet)$[a]。

[a] 在不引起混淆的情况下，有时将 $\odot$ 也写为 $\bullet$

♡

示例 6.25: 同余关系是群 $(\mathbb{Z}, +)$ 上关于 $(<3>, +)$ 左陪集关系，<3> 在 $\mathbb{Z}$ 中的商集

$T = \{[0],[1],[2]\}$，因为整数上的加法运算满足分配律 (distributive law)，根据商群定义，群 $(\mathbb{Z},+)$ 对正规子群 $(<3>,+)$ 的商群为 (T,+)

注意： 商群 $(T,\odot)$ 是群 $(G,\bullet)$ 的子群吗？

显然不是，集合不是子集关系，二元运算也可能不同。在代数中，商的概念是"元素划分的集合"而非元素的一部分，这个需要体会一下。

6.7 同态和同构

" 在代数学中，我们主要关心的是代数结构的抽象运算，而元素用什么表示，运算用何符号无关紧要，因此，我们需要建立两个代数结构的比较方法"[?].

看看下面两个代数结构 $(A,\cdot),(B,\circ)$

$\cdot$	N	Y
N	N	N
Y	N	Y

$\circ$	0	1
0	0	0
1	0	1

显然，凭直觉，我们可以看出这两个结构相同，但对于复杂代数结构，我们如何判断？当两个代数结构不完全相同时，我们又如何探讨他们某个侧面的相同性？同态和同构的概念就是解决这个问题的。

定义 6.24: 同态 (homomorphism)

设 $(X,\bullet),(Y,*)$ 是两个群，如果存在一个映射 $f:X\to Y$，使得对任意 $x_1,x_2\in X$，都有 $f(x_1\bullet x_2)=f(x_1)*f(x_2)$，称 f 是一个从 $(X,\bullet)$ 到 $(Y,*)$ 的同态映射，或称这两个群同态，记为 $(X,\bullet)\sim(Y,*)$，简记为 $X\sim Y$。如果 f 是单射，称为单同态，f 是满射，称为满同态。 ♣

定义 6.25: 同构 (isomorphism)

如果 $(X,\bullet)\sim(Y,*)$，并且映射 f 是双射，则称这两个群同构，记为 $(X,\bullet)\cong(Y,*)$，简记为 $X\cong Y$。 ♣

一个群到自身的同态叫自同态，到自身的同构叫自同构。当我们根据定义判断两个代数结构是否时同构或者同态时，关键是，是否能找到或者构造出一个映射？

示例 6.26:

群 $(\mathbb{Z},+)$ 到群 $(\mathbb{Z}_n,+)$ 的映射 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n$ 为 $f(a)=a\ mod\ n$ 是一个同态映射。

示例 6.27:

群 $(\mathbb{R},+)$ 和 $(\mathbb{R}^+,\times)$ [5] 同构。在此构造映射 $f(x)=e^x, f(a+b)=e^{a+b}=f(a)\times f(b)$,

[5] $\mathbb{R}^+$ 表示正实数集合

其存在函数，$g(x) = \ln x, g(a \times b) = \ln(a \times b) = \ln a + \ln = g(a) + g(b)$，$\mathbb{R}, \mathbb{R}^{+}$ 存在双射。

在此类教科书中，通常介绍完同态和同构定义后，都会后继进行展开讨论，但我们往往看到，后面的讨论都是围绕同态展开，为什么？难道是遗忘了？其实这个原因是，如果两个代数结构同构，那么从结构的角度看，他们是一样的。

这也就是通常在不同的领域，如果两个结构式同构的，那么一个结构中成立的命题在另一个结构中也成立，比如实数序偶加法和平面向量加法，是两个同构的代数结构，这也就是为什么在计算这类问题时，我们可以根据需要随意的切换到序偶运算和向量运算，而不用担心计算结果的一致性。

定理 6.23: 同态性质

两个群满足 $(S, \bullet)$ $(G, \odot)$，e 和 e' 分别是他们的单位元，同态映射为 $f: S \to G$，则有：

$(1) f(e) = e'$;

$(2) \forall a \in S, f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$;

$(3) \forall n \in \mathbb{Z} \quad a \in S, f(a^{n}) = f(a)^{n}$;

♡

定义 6.26: 同态映射的核、像集合

两个群满足 $(S, \bullet)$ $(G, \odot)$,e 和 e' 分别是他们的单位元，同态映射为 $f: S \to G$，令集合 $ker\ f = \{a \mid a \in S, f(a) = e'\}$, 称集合 $ker\ f$ 为同态映射 f 的核；令集合为 $im\ f = f(S) = \{f(a) \mid a \in S\}$, 称集合 $im\ f$ 为同态映射 f 的像。

♣

定理 6.24: 核子群和像子群

两个群满足 $(S, \bullet)$ $(G, \odot)$,e 和 e' 分别是他们的单位元，同态映射为 $f: S \to G$，则有：

$(1) ker\ f \leq S, ker\ f$ 称为同态映射 f 的核子群，且 f 是单同态的充要条件是 $ker\ f = \{e\}$;

$(2) im\ f \leq G, im\ f$ 称为同态映射 f 的像子群，且 f 是满同态的充要条件是 $f(S) = G$;

(3) 如果 $G' \leq G, f^{-1}(G') = \{a \mid a \in S, f(a) \in G'\}$, 则 $f^{-1}(G') \leq S$.

♡

定理 6.25: 核子群的正规性

两个群满足 $(S, \bullet)$ $(G, \odot)$,e 和 e' 分别是他们的单位元，同态映射为 $f: S \to G$，则有 $ker\ f \lhd S$.

♡

定理 6.26: 同态商群构造

两个群满足 $(N, \bullet) \lhd (S, \odot)$, 构造商群 $(S/N, \odot)$, 且定义映射 $f: S \to S/N, f(a) = aN$，则 f 是一个同态映射，且 $ker\ f = N$.

♡

定理 6.27: 同态基本定理

设 $f: S \to G$ 是群 $(S, \bullet)$ 到群 $(G, \times)$ 的同态映射，则存在 S/ker f 到 im f 的一一映射 $h: S/ker\ f \to im\ f$，使得 $(S/ker\ f, \odot) = (im\ f, \times)$. ♡

第 7 章 环

7.1 环 (ring)

群时一种由集合和集合上的一个二元运算构成的数学结构，显然他并不能包含所有的代数结构，例如，我们如果考虑有两个二元运算呢？环就是有两个二元运算的代数结构。

定义 7.1: 环 (ring) 和交换环 (communicative ring)

设 R 是一个给定的集合，在其上定义了两种二元运算 $+, \circ$，且满足以下条件:
(1)$(R, +)$ 是一个交换群。
(2)$(R, \bullet)$ 是一个半群。
(3)$a, b, c \in R, a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c)$。
我们称 $(R, +, \bullet)$ 为环, 若 $(R, \bullet)$ 是一个交换群，则称其为交换环。 ♣

为了后面描述方便，将运算 + 下的单位元称为环的零元，记为 0，元素 a 在 + 运算下的逆元称为元素 a 的负元，记为-a。如果 R 中存在运算 • 的单位元[1]，称为环的幺元，记为 1，如果元素 a 在运算 • 下存在逆元，称该逆元为元素 a 的逆元，记为 a^{-1},a 称为可逆元素。

示例 7.1:

可以根据定义验证，$(\mathbb{Z}, +, \times)$ 是一个交换环，零元是 0，幺元是 1，可逆元素只有-1 和 1。$(\mathbb{Q}, +, \times), (\mathbb{R}, +, \times), (\mathbb{C}, +, \times)$ 都是交换环，零元都是 0，幺元都是 1，除了 0 以外，所有其它元素都是可逆元素。

定义 7.2: 零因子 [?]

$R = (S, +, \times)$ 是一个环，如果存在 $a, b \in S, b \neq 0, a \neq 0$, 但 $ab = 0$（0 为 + 运算的单位元）成立，称环 R 是有零因子环，a 为 R 的左零因子（left zero divisor），b 是 R 的右零因子（right zero divisor），否则 R 是无零因子环。若 a 既是左零因子又是右零因子，称 a 为零因子。环内既不是左零因子，也不是右零因子的元素称为正则元。 ♣

定义 7.3: 幺环

$(R, +, \times)$ 是一个环，若 $(R, \times)$ 是一个含幺元的半群，$(R, +, \times)$ 称为幺环。 ♣

[1]由于 $(R, \bullet)$ 是半群，所以不一定有单位元和逆元，所以在描述中使用“如果”。

定义 7.4: 无零因子环

$(R,+,\times)$ 是一个环，若任意两个元素 $a,b\in R, ab\neq 0$，$(R,+,\times)$ 称为无零因子环。♣

定义 7.5: 整环

$(R,+,\times)$ 是无零因子的幺环，则称为整环。♣

定义 7.6: 体

$(R,+,\times)$ 是一个环，若非零元对 $\times$ 构成群，则称为体（或除环）。♣

定义 7.7: 域

$(R,+,\times)$ 是一个环，若非零元对 $\times$ 构成阿贝尔群（交换群），则称域。♣

7.2 子环

定义 7.8: 子环

如果环 R 的一个子集 S 满足以下三个条件：

(1)$0\in S$;

(2)$a,b\in S\Rightarrow a-b\in S$;[a]

(3)$a,b\in S\Rightarrow ab\in S$;[b]

称 S 是 R 的子环，R 是 S 的扩环（或扩张）。如果 S=R 或 S={0}，显然 S 是 R 的子环，称为平凡子环，其他子环称为真子环。

[a] a-b 是 a+(-b) 的简写，否则-这个运算并没有定义，后面都使用相同的简写方式。

[b] ab 是 $a\bullet b$ 的简写，后面使用相同的简写方式。

♣

7.3 同态和同构

定义 7.9: 同态和同构

X 和 Y 是两个环，如果存在一个映射 $f:X\to Y$，使得 $\forall x_1,x_2\in X$，有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2), f(x_1\bullet x_2)=f(x_1)\bullet f(x_2)$，则称 f 是一个从 X 到 Y 的同态映射或称环 X 和 Y 同态，记作 $X\ Y$，其中 + 和 $\bullet$ 是两个环中相应的“加法”和“乘法”. 如果 f 是单射，称为单同态，f 是满射，称为满同态，如果 f 是双射，称此同态为同构记为 $X=Y$. ♣

7.4 理想和商环

定义 7.10: 理想

I 是环 R 的子环，如果满足 $RI \subset I(\forall i \in I, r \in R, ri \in I)$，则 I 是 R 的左理想，类似可以定义右理想，同时左理想和右理想的子环称为理想。♣

理想是一类特殊的子环，对于交换环来说，左理想就是右理想就是理想。

示例 7.2:

证明 $n\mathbb{Z}$ 是交换环 $(\mathbb{Z}, +, \times)$ 的一个理想。

定理 7.1: 商环

R' 是环 $(R, +, \bullet)$ 的子环，则可在 R 中定义等价关系：$a, b \in R, a\ b \Leftrightarrow a + (-b) = a - b \in R'$.a 所在的等价类记为 $a + R'$. 若 R' 是 R 的理想，则可在商集合 $R/\ = R/R'$ 中定义 +,• 为：$(a + R') + (b + R') = a + b + R', (a + R') \bullet (b + R') = ab + R'$. 可知集合 $R/$ 对上述定义的 +,• 构成环，称为 R 对 R' 的商环。♡

定义 7.11: 理想的生成元

$(R, +, \bullet)$ 是一个交换环，H 是 R 的非空子集，$\{H_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ 是 R 的所有包含集合 H 的理想，即 $H \subseteq H_i(i \in \mathbb{N})$, 则 $\bigcap_{i \in \mathbb{N} H_i}$ 称为由子集 H 生成的理想，记为 (H),H 中的元素叫做理想 (H) 的生成元。如果 $H = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}(n \in \mathbb{N})$, 则理想 (H) 记为 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，并称为有限生成的理想，由一个元素生成的理想 <a> 叫主理想。♣

定义 7.12: 主理想环

如果交换环 R 的所有理想都是主理想，则交换环 R 称为主理想环。♣

示例 7.3:

求证 $(\mathbb{Z}, +, \times)$ 是主理想环。

7.5 多项式环

定义 7.13: 环上的一元多项式

$(R, +, \times)$ 交换环，x 是一个变元，n 是非负整数，$a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$，则 $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^{na}$称为交换环 R 上的一元多项式，$a_0, a_1, \ldots, a_n$ 称为此多项式的系数，a_0 称为常数项；如果 $a_n \neq 0$，a_n 称为首项系数，n 称为一元多项式 f(x) 的次数，记为 $deg\ f(x) = n$。所有交换环 R 上的一元多项式组成的集合记为 $R[x]$.

[a]这里的 + 和 × 只是一个运算的记号，不代表任何特定的运算。 ♣

定义 7.14: R 上的一元多项式环

$(R,+,\times)$ 是交换环，称 $(R[x],+,\times)$ 为 R 上的一元多项式环，也称为 R 上添加 x 生成的环。 ♣

定义 7.15: R 上的 n 元多项式环

$(R,+,\times)$ 是交换环，称 $(R[x_1,...,x_n],+,\times)$ 为 R 上的 n 元多项式环。 ♣

定义 7.16: 代数元

如果在交换幺环 R 中存在有限多个元素 $a_1,...,a_n,a_n \neq 0$，使得 $a_nu^n+...+a_1u+a_0=0$, 称 u 为 R 上的代数元，使上述关系成立的最小正整数 n 称为代数元的次数，记为 $deg(u,R)$, 称 $f(x)=a_nx^n+a_1x+x \in R[x]$ 为 u 在 R 上的不可约多项式，记为 Irr(u,R)。 ♣

定义 7.17: 超越元

如果在交换幺环 R 中任意不全为零元素 $a_1,...,a_n$，均有 $a_nu^n+...+a_1u+a_0 \neq 0$, 称 u 为 R 上的超越元。 ♣

第 8 章 域

8.1 域上的多项式

域的概念产生于方程求解。

定义 8.1: 域上的一元多项式

F 是域，若 $a_0, a_1, \ldots, a_n \in F, a_n \neq 0$，则 $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ 为域 F 上的一元多项式或多项式，称 n 为该多项式的次数，记为 deg f=n. 若记 $F[x] = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mid a_0, a_1, \ldots, a_n \in F\}$，则 F[x] 构成环，称之为 F 上的一元多项式环或多项式环。 ♣

定义 8.2: 整除，可约或不可约 [?]

若 F 上的多项式 f(x) 等于 F 上其他两个非零次多项式 g(x),h(x) 的乘积，即 $f(x) = g(x)h(x)$，且 deg g 和 deg h 均不为 0，则称多项式 f(x) 是可约的，g(x),h(x) 称为 f(x) 的因式或 g(x),h(x) 整除 f(x)，记为 $g(x) \mid f(x)$; 否则称之为不可约，记为 $g(x) \nmid f(x)$。 ♣

定理 8.1: 带余除法 [?]

若 $f(x), g(x) \in F[x], g(x) \neq =$，则存在唯一的 $q(x), r(x) \in F[x]$，使 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$，其中 $deg\ r \leq deg\ g$ 或 $r(x) = 0$。这里，称 q(x) 为 g(x) 除 f(x) 的商式，r(x) 为 g(x) 除 f(x) 的余式。 ♡

定义 8.3: 最大公因式 [?]

若 d(x) 为 f(x) 和 g(x) 公因式，且 d(x) 能被 f(x),g(x) 任何一个公因式整除，则称 d(x) 是 f(x) 和 g(x) 的最大公因式，记为 gcd(f(x),g(x)) 或 (f(x),g(x))。 ♣

定理 8.2: 最大公因式表示

若 d(x) 为 f(x) 和 g(x) 公因式，且 d(x) 能被 f(x),g(x) 任何一个公因式整除，则称 d(x) 是 f(x) 和 g(x) 的最大公因式，记为 gcd(f(x),g(x)) 或 (f(x),g(x))。 ♡

定义 8.4: 互素多项式 [?]

若 $gcd(f(x), g(x)) = 1$，则称 $f(x), g(x)$ 互素，记为 $gcd(f(x), g(x)) = 1$。 ♣

定理 8.3: 互素多项式性质 [?]

$gcd(f(x), g(x)) = 1 \Leftrightarrow \exists u(x), v(x) \in F[x], u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1.$ ♡

定理 8.4: 互素多项式性质 [?]

$gcd(f(x), g(x)) = 1, f(x) \mid g(x)h(x) \Rightarrow f(x) \mid h(x).$ ♡

定理 8.5: 因式分解唯一定理

设 F 是一个域，F 上的任何一个次数大于等于 1 的多项式 f(x) 都可分解成 F[x] 中若干不可约多项式的乘积，若不考虑因式的次序，分解式唯一的。♡

定义 8.5: 多项式的根 [?]

$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \in F[x]$，若 $\alpha \in F$，使 $f(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = \mathbf{0}$, 则称 α 为 f(x) 在 F 中的根。♣

8.2 同态和同构

定义 8.6: 同构、自同构

设 F_1, F_2 为域，$\delta : F_1 \to F_2$, 满足 $\forall a, b \in F_1, \delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b), \delta(ab) = \delta(a)\delta(b)$，则称 δ 为 F_1 到 F_2 的同构，若 $F_1 = F_2$，则称 δ 自同构。♣

8.3 域的代数扩张

定义 8.7: 扩域 [?]

设集合 K' 是域 K 集合的非空子集，如果对于域 K 的运算，K' 可构成一个域，则 K' 叫作 K 的子域，K 叫作域 K' 的扩域。♣

定义 8.8: 素域

不包含任何非平凡子域的域称为素域。♣

定义 8.9: 添加 S 所得的域

设 K 为域 F 的扩域，S 为 K 的子集，K 中所有包含 $F \cup S$ 的子域的交，即由 F 与 S 生成的子域，称为 F 上添加 S 所得的域，记为 F(S)。♣

定义 8.10: 代数元和超越元

设 K 为域 F 的扩域，$\alpha \in K$，若存在域上的非零多项式 f(x) 满足 $f(\alpha) = 0$，则称 α 为 F 上的代数元，否则称 α 为 F 上的超越元。K 包含的 F 上的代数元的集合，称为 F 在 K 中的代数闭包，F 上所有代数元的集合称为 F 的代数闭包，记为 $\bar{F}$。♣

定义 8.11: 代数闭域

域 K 是自身的代数闭包，即 K 上多项式的根均在 K 中，则称 K 为代数闭域。 ♣

定义 8.12: 扩张

设 K 为域 F 的扩域，且 $\alpha \in K, K = F(\alpha)$，则称 K 为 F 的单扩张。若 α 为 F 上的代数元，则称 K 为 F 的单代数扩张；若 α 为 F 上的超越元，则称 K 为 F 的单超越扩张。 ♣

定义 8.13: 不可约多项式

设 K 为域 F 的扩域，且 $\alpha \in K$ 为 F 上的代数元，F[x] 中以 α 为根的不可约的首一多项式称为 α 在 F 上的不可约多项式，记为 Irr(α,F)，其次数称为 α 在 F 上的次数，记为 $deg\ (\alpha, F)$。 ♣

定义 8.14: 等价扩张

设 K_1, K_2 为域 F 的扩域，若存在 K_1, K_2 同构 ϕ，使得 $\phi\ |_F = id_F$, 则称 K_1, K_2 为 F 的等价扩张，称 ϕ 为 F 同构，若 $K_1 = K_2, \phi$ 为 F 自同构。 ♣

定义 8.15: 代数扩张

设 K 为域 F 的扩域，若 K 中的每个元素都是 F 上的代数元，则称 K 为 F 的代数扩张。 ♣

定义 8.16: 有限扩张，维数

设 K 为域 F 的扩域，K 作为 F 上的线性空间是有限维的，则称 K 为 F 的有限扩张，该维数称为 K 在 F 上的维数，记为 $[K : F]$；若 K 作为 F 上的线性空间是无限维的，则称 K 为 F 的无限扩张。 ♣

第 9 章 椭圆曲线

9.1 基本概念

椭圆曲线是指由韦尔斯特拉 (Weierstrass) 方程确定的平面，韦尔斯特拉方程为：$E: y^2 + axy + by = x^3 + cx^2 + dx + c$,E 是 Elliptic curve 的缩写，表示这个方程描述了一个椭圆曲线, 其中 a，b，c，d 和 c 属于域 F，F 可以是有理数域、复数域、有限域，密码学中通常采用有限域。

第 10 章 习题

10.1 预备知识

10.1.1 集合

Exercise 1

设 $A=\{a,\{a\}\}$, 下列各式成立吗？写出判断过程。

$\{a\}\in\rho(A);\{a\}\subseteq\rho(A);\{\{a\}\}\in\rho(A);\{\{a\}\}\subset\rho(A)$

Answer of exercise 1

答：

先计算幂集，然后判断幂集和各个各部分的关系。

Exercise 2

全集 $E=\{1,2,3,4,5\},A=\{1,4\},B=\{1,2,5\},C=\{2,4\}$, 计算：

1) $A\cap\sim B$

2) $(A\cup B)\cap(A\cup C)$

3) $\sim(A\cup B)$

4) $\rho(A)-\rho(C)$

Answer of exercise 2

答：

$\sim B=\{3,4\},\rho(A)=\{\phi,\{1,4\},\{1\},\{4\}\},\rho(C)=\{\phi,\{2,4\},\{2\},\{4\}\}$

1) $A\cap\sim B=\{4\}$

2) $(A\cup B)\cap(A\cup C)=\{1,2,4\}$

3) $\sim(A\cup B)=\{3\}$

4) $\rho(A)-\rho(C)=\{\{1,4\},\{1\}\}$

Exercise 3

A,B,C 是任意三个集合，证明 $A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C$.

Answer of exercise 3

答：

先按照对称差的定义，用基本运算来表示，然后在组合为右边形式。

10.1.2 关系

Exercise 4

集合 $A = \{16, 17, 18, 19\}$,R 为 A 上的关系 $R = \{< 16, 17 >, < 17, 18 >, < 18, 19 >\}$，请问 R 的逆关系存在吗？如果存在请写出来。

Answer of exercise 4

答：

这道题来源于 16 级的学生做 17 级的班助，17 级的做 18 级的，18 级做 19 级的这种关系，二元逆关系总是存在的，将所有序偶倒着写就是二元逆关系。

Exercise 5

$\mathbb{Z}$ 为整数集合，请问此集合上的相等关系是等价关系吗？如果是请证明。

Answer of exercise 5

答：

首先要知道什么是等价关系：自反，传递，对称，很容易验证整数集上的相等关系符合等价定义。

Exercise 6

请证明笛卡尔积不满足结合律。

Answer of exercise 6

答：

证明不满足，其实只需要给出一个反例即可，设 $A = \{1\}, B = \{a, b\}, C = \{x, y\}$，$(A \times B) \times C = \{<< 1, a >, x >, << 1, a >, y >, << 1, b >, x >, << 1, b >, y >\}, A \times (B \times C) = \{< 1, < a, x >>, < 1, < a, y >>, < 1, < b, x >>, < 1, < b, y >>\}$, 显然这两个集合是不相等的。

10.1.3 函数

Exercise 7

$\mathbb{R}$ 为实数集合，二维向量定义为 $V_2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$，矩阵 $C = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, 定义矩阵与二维向量的乘运算 $A \cdot v_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot (x, y) = (a \times x + b \times y, c \times x + d \times y)$, 请问 $C \cdot v, v \in V_2$ 是从 V_2 到 V_2 的一个函数吗？并说明理由。

Answer of exercise 7

答：

判断关系是不是一个函数，就要看是否每个 x 是否有唯一的 y 对应，显然这是符合定义的。

Exercise 8

请分别给出实数域上的满射函数、单射函数、双射函数的例子，并说出原因。

Answer of exercise 8

答：

满射就是值域中所有的元素都有一个像对应，单射是定义域中没有两个不同的元素像相同，双射就是既是满射又是单射。

10.2 整除

Exercise 9

证明，若 $2 \mid n, 5 \mid n, 7 \mid n$，那么 $70 \mid n$.

Answer of exercise 9

答：

$2 \mid n, 5 \mid n, 7 \mid n \Rightarrow lcm(2,5,7) \mid m \Rightarrow 70 \mid n$

Exercise 10

证明任意三个连续的正整数的乘积都被 6 整除。

Answer of exercise 10

答：

$m(m+1)(m+2)$

$m = 1, 1 \times 2 \times 3 = 6$, 成立。

设 m=k 也成立。

$m = k+1, (k+1)(k+2)(k+3) = (k+1)(k+2)k + 3(k+1)(k+2)$，可见式子的第一部分可被 6 整除，要想证明 $3(k+1)(k+2)$ 可被 6 整除，可证明 $(k+1)(k+2)$ 可被 2 整除, 不管 k 是奇数还是偶数，两个成绩项一定有个偶数项，所以可以被 2 整除。

Exercise 11

证明每个奇数的平方都具有 8k+1 的形式。

Answer of exercise 11

答：

奇数可以写为 $2k+1$, 奇数的平凡是 $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1$, 可知 $k(k+1)$ 是偶数，所以可以写成 2m 的形式，$4k(k+1)+1$ 可以写成 $8m+1$ 形式。

Exercise 12

求如下整数对的最大公因子，并写出求解过程。

(1)(55,85) (2)(202,282) (3)(666,1414) (4)(20785,44350)

Answer of exercise 12

答：

$gcd(55,85)=5, gcd(55,85)=2, gcd(666,1414)=2, gcd(20785,44350)=5$，下面给出第一对数的实际计算过程：

$85=55\times1+30$

$55=30\times1+25$

$30=25\times1+5$

$25=5\times5$

$gcd(55,85)=5$

Exercise 13

求如下整数对的最小公倍数，并写出求解过程。

(1)(231,732)　　(2)(-871,728)

Answer of exercise 13

答：

先求 $gcd(231,732), lcm(231,732)=(231\times732)\div gcd(231,732)$，计算结果如下：$lcm(231,732)=56364, lcm(-871,728)=48776$

Exercise 14

求以下整数的标准分解式，并写出求解过程。

(1)36　　(2)69　　(3)200　　(4)289

Answer of exercise 14

答：

利用小于次数的素数去依次除次数，可以整除，则找到一个素因子，依次可以找到所有素因子。分解结果如下 (sagemath factor)：
$36=2^2*3^2, 69=3*23, 200=2^3*5^2, 289=17^2$

Exercise 15

求以下整数的标准分解式，并写出求解过程。

(1)625　　(2)2154　　(3)2838　　(4)3288

Answer of exercise 15

答：

利用小于次数的素数去依次除次数，可以整除，则找到一个素因子，依次可以找到所有素因子。分解结果如下:

$625=5^4, 2154=2*3*359, 2838=2*3*11*43, 3288=2^3*3*137$

10.3 同余

Exercise 16

设模 m=16, 求解 1,9,16,17,25,160 模 16 余数, 并找出同余的数来。

Answer of exercise 16

答:

依次计算上面各数模 16 的余数，余数分别为 1、9、0、1、9、0, 根据同余定义，我们有 $1 \equiv 17(mod\ 16), 9 \equiv 25(mod\ 26), 16 \equiv 160(mod\ 26)$。

Exercise 17

求 7^{2046} 写成十进制数时的个位数。

Answer of exercise 17

答:

答案是：9, 计算过程如下：

$7^2 = 49 \equiv 9(mod10), 9^2 = 81 \equiv 1(mod10), 2046 = 4 \times 511 + 2 \Rightarrow 7^{2046} \equiv ((7^2)^2)^{511} \times 7^2 \equiv 9(mod10)$

Exercise 18

求 2^{1000} 的十进制表示中的末尾两位数字。

Answer of exercise 18

答:

答案为：76，计算过程如下：

$2^0 = 1(mod100), 2^1 = 2(mod100), \underline{2^2 = 4(mod100)}, 2^3 = 8(mod100), 2^4 = 16(mod100)$
$2^5 = 32(mod100), 2^6 = 64(mod100), 2^7 = 28(mod100), 2^8 = 56(mod100), 2^9 = 12(mod100)$
$2^{10} = 24(mod100), 2^{11} = 48(mod100), 2^{12} = 96(mod100), 2^{13} = 92(mod100), 2^{14} = 84(mod100)$
$2^{15} = 68(mod100), 2^{16} = 36(mod100), 2^{17} = 72(mod100), 2^{18} = 44(mod100), 2^{19} = 88(mod100)$
$2^{20} = 76(mod100), 2^{21} = 52(mod100), \underline{2^{22} = 4(mod100)}, 2^{23} = 8(mod100), 2^{24} = 16(mod100)$
$2^{25} = 32(mod100), 2^{26} = 64(mod100), 2^{27} = 28(mod100), 2^{28} = 56(mod100), 2^{29} = 12(mod100)$
$2^{30} = 24(mod100), 2^{31} = 48(mod100), 2^{32} = 96(mod100), 2^{33} = 92(mod100), 2^{34} = 84(mod100)$
$2^{35} = 68(mod100), 2^{36} = 36(mod100), 2^{37} = 72(mod100), 2^{38} = 44(mod100), 2^{39} = 88(mod100)$
$1000 = 20 \times 50 \Rightarrow 2^{1000} = 2^{20^5}0 \equiv 2^{20} \equiv 76(mod\ 100)$

Exercise 19

已知 2019 年 9 月 29 日是星期天，问之后的 2^{100} 天是星期几？第 2^{200} 天呢？

Answer of exercise 19

答：

由于 $2^1 \equiv 2(mod\ 7), 2^2 \equiv 4(mod\ 7), 2^3 \equiv 1(mod\ 7)$

所以 $2^{3\times33} \equiv 1(mod\ 7)$

又因为 $100 = 3 \times 33 + 1$, 所以 $2^{100} = 2^{3\times33+1} = 2^{3\times33} \times 2 \equiv 2(mod\ 7)$，所以第 2^{100} 天是星期三。同理 $200 = 3 \times 66 + 2, 2^{200} = 2^{3\times66+2} = 2^{3\times66} \times 2^2 \equiv 4(mod\ 7)$, 所以第 2^{200} 天是星期五.

Exercise 20

求 $1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + 99^5$ 之和被 4 除的余数。

Answer of exercise 20

答：

$4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 \equiv 0 + 1^5 + 2^5 + 3^5 (mod 4)$

...

$96^5 + 97^5 + 98^+ 99^5 \equiv 0 + 1^5 + 2^5 + 3^5 (mond 4)$ 共有 24 组，$24 \times (1 + 32 + 3^5) \equiv 0(mod 4)$

Exercise 21

写出模 9 的一个完全剩余系，它的每个数都是奇数。

Answer of exercise 21

答：

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, 2k + 1, \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$

Exercise 22

写出模 9 的一个完全剩余系，它的每个数都是偶数。

Answer of exercise 22

答：

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, 2k, \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$

Exercise 23

用模 5 和模 6 的完全剩余系，表示模 30 的完全剩余系。

Answer of exercise 23

答：

模 5 的完全剩余系 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

模 6 的完全剩余系 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

5，6 互质,$30 = 5 \times 6$

$m_i\times5+n_j\times6, \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 11, 17, 23, 29, 35, 10, 16, 22, 28, 34, 40, 15, 21, 27, 31, 39, 45, 20, 26, 32, 38,$

Exercise 24

写出 12 的最小正缩系。

Answer of exercise 24

答:

最小正完全系 { 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 }, 与 12 互素的有 {1,5,7,11}

Exercise 25

用模 5 和模 6 的缩系，表示模 30 的缩系。

Answer of exercise 25

答:

5 和 6 互素,x 和 y 遍历 5 和 6 的缩系，$5x + 6y$ 也遍历模 5×6 的缩系。模 5 的缩系 $\{1, 2, 3, 4\}$，模 6 的缩系 $\{1, 5\}$，模 30 的缩系 $11, 16, 21, 30, 35, 40, 45, 50$

Exercise 26

计算以下整数的欧拉函数。

(1)24 (2)64 (3)187 (4)360

Exercise 27

计算 $8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13(mod\ 7)$.

Answer of exercise 27

答:

$\because 8 \equiv 1(mod\ 7)$

$9 \equiv 2(mod\ 7)$

$10 \equiv 3(mod\ 7)$

$11 \equiv 4(mod\ 7)$

$12 \equiv 5(mod\ 7)$

$13 \equiv 6(mod\ 7)$

$\therefore 720 \equiv 6(mod\ 7)$

Exercise 28

求 $229^{-1}(mod\ 281)$

Answer of exercise 28

答:

229 模 281 逆元是 27.

具体解法是首先判断 $gcd(229, 281) = 1$，逆元存在，然后利用扩展欧几里得算法求逆

元 $s_i = s_{i-2} + q_{i-1}s_{i-1}, t_i = t_{i-2} + q_{i-1}t_{i-1}$：

i	r_i	q_i	s_i	t_i
0	281	-	1	0
1	229	1	0	1
2	52	4	1	-1
3	21	2	-4	5
4	10	2	9	-11
5	1	10	-22	27
5	0	-	-	-

Exercise 29

求 $3169^{-1}(mod\ 3571)$.

Answer of exercise 29

答：

利用欧几里得扩展算法计算，计算结果为：2887.

sagemath 验证语句：3169.inverse_mod(3571)

Exercise 30

解方程 $105x + 121y = 1(x, y \in \mathbb{Z})$.

Answer of exercise 30

答：

根据欧几里得扩展算法，我们有 $gcd(r_0, r_1) = s_n r_0 + t_n r_1$，我们设 $r_0 = 121, r_1 = 105$, 同时我们可知 105 与 121 互素 ($gcd(121, 105) = 1$)，可见欧几里得扩展算法最后的等式为 $121s_n + 105t_n = 1$，与所求的方程相同，我们利用扩展欧几里得算法进行计算：

	r_i	q_i	s_i	t_i
0	121	-	1	0
1	105	1	0	1
2	16	6	1	-1
3	9	1	-6	7
4	7	1	7	-8
5	2	3	-13	15
6	1	2	46	-53
7	0			

Exercise 31

求解一次同余方程 $27x \equiv 12(mod\ 15)$

Answer of exercise 31

答：

gcd(27,15)=3，所以同余方程共有 3 个解，同余方程 $9x \equiv 4(mod\ 5)$ 的一个特解是 x=1, 所以原方程全部解为 $x \equiv 1 + \frac{15}{3}t(mod\ 15), t \in 0, 1, 2$，求得其解为 1，6，11.

Exercise 32

求解一次同余方程 $24x \equiv 6(mod\ 81)$

Answer of exercise 32

答：

gcd(24,81)=3，所以同余方程共有 3 个解，同余方程 $8x \equiv 2(mod\ 27)$ 的一个特解是 x=7, 所以原方程全部解为 $x \equiv 7 + \frac{81}{3}t(mod\ 81), t \in 0, 1, 2$，求得其解为 7,34,61.

Exercise 33

求解一次同余方程 $91x \equiv 26(mod\ 169)$

Answer of exercise 33

答：

gcd(91,169)=13，并且 $13 \mid 26$, 所以同余方程共有 13 个解，同余方程 $7x \equiv 2(mod\ 13)$ 的一个特解是 x=4(可以通过遍历的方法求得), 所以原方程全部解为 $x \equiv 4 + \frac{169}{13}t(mod\ 169), t \in 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$，求得其解为4,17,30,43,56,69,82,95,108,121,134,147,1

Exercise 34

确定以下同余式不同解的个数，无须求出具体解。

1. $72x \equiv 47(mod\ 200)$
2. $4183x \equiv 5781(mod\ 15087)$
3. $1537x \equiv 2863(mod\ 6731)$

Answer of exercise 34

答：

gcd(72,200)=8, 但是 $8 \nmid 47$, 所以第一个方程无解。gcd(4183,15087)=47，且 $47 \mid 5781$，故第二方程有解，且解的个数为 47.gcd(1537,6731)=53, 但是 $53 \nmid 2863$，故此方程无解。

Exercise 35

求解同余方程组：$\begin{cases} x \equiv 9(mod\ 12) \\ x \equiv 6(mod\ 25) \end{cases}$

Answer of exercise 35

答：

gcd(12,25)=1, 利用中国剩余定理，唯一解为 $x \equiv 25\times1\times9+12\times23\times6(mod\ 12\times25) \equiv 1881 \equiv 81(mod\ 300)$

Exercise 36

求解同余方程组：$\begin{cases} x \equiv 5(mod\ 7) \\ x \equiv 12(mod\ 15) \\ x \equiv 18(mod\ 22) \end{cases}$

Answer of exercise 36

答：

$gcd(7,15) = 1, gcd(15,22) = 1, gcd(7,22) = 1$，可以看出以上方程组的模两两互素，根据中国剩余定理，我们有:

$x \equiv 5(mod\ 7), m = 7 \times 15 \times 22 = 2310$

$M_1 = 15 \times 22 = 330, M_1' = 1(mod\ 7)$

$M_2 = 7 * 22 = 154, M_2' = 4(mod\ 15)$

$M_3 = 7 * 15 = 105, M_3' = 13(mod\ 22)$

$x = M_1M_1'b_1 + M_2M_2'b_2 + M_3M_3'b_3 = 15 \times 1 \times 5 + 154 \times 4 \times 12 + 105 \times 13 \times 18(mod\ 2310) \equiv 1272(mod\ 2310)$

Exercise 37

求解同余方程组：$\begin{cases} x \equiv 5(mod\ 9) \\ 3x \equiv 12(mod\ 5) \\ 4x \equiv 18(mod\ 7) \end{cases}$

Answer of exercise 37

答：

先看 $3x \equiv 12(mod\ 5)$ 的解，由于 $gcd(3,5) = 1$，所以 $x \equiv 12 \times 3^{\varphi(5)-1} \equiv 12 \times 3^3 \equiv 324 \equiv 4(mod\ 5)$

再看 $4x \equiv 18(mod\ 7)$ 的解，由于 $gcd(4,7) = 1$，所以 $x \equiv 4 \times 18^{\varphi(7)-1} \equiv 4 \times 18^5 \equiv 1(mod\ 5)$

也可以直接化简为以下方程组。

方程组等价于：

$\begin{cases} x \equiv 5(mod\ 9) \\ x \equiv 4(mod\ 5) \\ x \equiv 1(mod\ 7) \end{cases}$

由于 9,5,7 两两互素，根据中国剩余定理计算可得 x=239.

Exercise 38

有总数不满 50 人的一队士兵，一至三报数，最后一人报一，一至五报数，最后一人报二，一至七报数，最后一人报二，这支队伍共有士兵多少人。

Answer of exercise 38

答：

根据题意列出方程：

$$\begin{cases} x \equiv 1(mod\ 3) \\ x \equiv 2(mod\ 5) \\ x \equiv 2(mod\ 7) \end{cases}$$

3,5,7 两两互素，根据中国剩余定理，$m = 3 \times 5 \times 7 = 105, M_1 = 35, M_1' = 2, M_2 = 21, M_2' = 1, M_3 = 15, M_3' = 1, x \equiv 35 \times 2 \times 1 + 21 \times 1 \times 2 + 15 \times 1 \times 2 \equiv 142 \equiv 37(mod\ 105)$

10.4 二次剩余

Exercise 39

求模 23 的二次剩余和非二次剩余

Answer of exercise 39

答：

23 的一个完全剩余系为 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23，依次计算 $i^2(mod\ 23)$，计算结果组成的集合就是模 23 二次剩余组成的集合，完全剩余系中不包含在此集合中的元素就是非二次剩余。

$1^2 = 1(mod23), 2^2 = 4(mod23), 3^2 = 9(mod23), 4^2 = 16(mod23)$
$5^2 = 2(mod23), 6^2 = 13(mod23), 7^2 = 3(mod23), 8^2 = 18(mod23)$
$9^2 = 12(mod23), 10^2 = 8(mod23), 11^2 = 6(mod23), 12^2 = 6(mod23)$
$13^2 = 8(mod23), 14^2 = 12(mod23), 15^2 = 18(mod23), 16^2 = 3(mod23)$
$17^2 = 13(mod23), 18^2 = 2(mod23), 19^2 = 16(mod23), 20^2 = 9(mod23)$
$21^2 = 4(mod23), 22^2 = 1(mod23), 23^2 = 0(mod23)$
二次剩余为 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 16, 18

非二次剩余 5，7，10，11，14，15，17，19，20，21，22

Exercise 40

求满足方程 $E : y^2 \equiv x^2 - 2x + 1(mod\ 7)$ 的所有点。

Answer of exercise 40

答：

首先观察方程的左边是 $y^2(mod\ 7)$ 的形式，其最终结果是模 7 的二次剩余，我们计算模 7 的二次剩余，可知为：0，1，2，4。

$1^2 = 1(mod7), 2^2 = 4(mod7), 3^2 = 2(mod7), 4^2 = 2(mod7), 5^2 = 4(mod7), 6^2 = 1(mod7), 7^2 = 0(mod7)$

$(7k)^2 \equiv 0(mod\ 7), (7k+1or6)^2 \equiv 1(mod\ 7), (7k+3or4)^2 \equiv 2(mod\ 7), (7k+2or5)^2 \equiv 4(mod\ 7)$ 以上方程等价于：

$x^2 - 2x + 1 \equiv 0(mod\ 7)$ or $x^2 - 2x + 1 \equiv 1(mod\ 7)$ or $x^2 - 2x + 1 \equiv 2(mod\ 7)$ or

$x^2-2x+1\equiv 4(mod\ 7)$, 对这四个同余式进一步变形，得

$(x-1)^2\equiv 0(mod\ 7)$ or $(x-1)^2\equiv 1(mod\ 7)$ or $(x-1)^2\equiv 2(mod\ 7)$ or $(x-1)^2\equiv 4(mod\ 7)$, 根据模 7 的二次剩余，进一步知道：

$x\equiv 1(mod\ 7), x\equiv 9(mod\ 7), x\equiv 4(mod\ 7), x\equiv 6(mod\ 7)$

所以满足以上方程的点为 (0,1)(1,9)(6,9)(3,4)(4,4)(2,6)(5,6) 只要对应的 y 和 x 于这些点同余就满足方程。

Exercise 41

利用欧拉判别条件判断 2 是否是 29 的二次剩余。

Answer of exercise 41

答：

29 是奇素数，gcd(2,29)=1，根据欧拉判别条件 $a^{\frac{p-1}{2}}=2^{\frac{29-1}{2}}=2^14=16384\equiv -1(mod\ 29)$, 所以 2 不是 29 的二次剩余。

Exercise 42

利用勒让德符号判断 2 是否是 73 的二次剩余。

Answer of exercise 42

答：

73 为奇素数，根据书中定理我们有

$(\frac{2}{73})=\begin{cases}1, if\ p\equiv \pm 1(mod\ 8)\\ -1, if\ p\equiv \pm 3(mod\ 8)\end{cases}$,

$\because 73(mod\ 8)\equiv 1, \therefore (\frac{2}{73})=1$,2 是 73 的二次剩余。

Exercise 43

计算勒让德符号 $(\frac{17}{37})$.

Exercise 44

计算勒让德符号 $(\frac{37}{25411})$(备注：25411 为素数)

Answer of exercise 44

答：

$gcd(37,25411)=1$

根据二次互反定律，我们有：

$\left(\frac{37}{25411}\right)=(-1)^{\frac{37-1}{2}\frac{25411-1}{2}}(\frac{25411}{37})=(\frac{29}{37})=(-1)^{\frac{29-1}{2}\frac{37-1}{2}}(\frac{37}{29})=(\frac{8}{29})$, 然后可以根据二次剩余的定义，知 $(\frac{8}{29})=8^{\frac{29-1}{2}}(mod\ 29)\equiv 28\equiv -1(mod\ 29)$

10.5 原根与指数

Exercise 45

34 对模 37 的次数是多少？

Answer of exercise 45

答：

解法一：可以按照定义去求，遍历一个完全系：$34^0 = 134^1 = 34, 34^2 = 9, 34^3 = 10, 34^4 = 7, 34^5 = 16, 34^6 = 26, 34^7 = 33, 34^8 = 12, \underline{34^9 = 1}, 34^{10} = 34, 34^{11} = 9, 34^{12} = 10, 34^{13} = 7, 34^{14} = 16, 34^{15} = 26, 34^{16} = 33, 34^{17} = 12, \underline{34^{18} = 1}, 34^{19} = 34, 34^{20} = 9, 34^{21} = 10, 34^{22} = 7, 34^{23} = 16, 34^{24} = 26, 34^{25} = 33, 34^{26} = 12, \underline{34^{27} = 1}, 34^{28} = 34, 34^{29} = 9, 34^{30} = 10, 34^{31} = 7, 34^{32} = 16, 34^{33} = 26, 34^{34} = 33, 34^{35} = 12, 34^{36} = 1$

由计算结果可知 34 对模 37 的次数为 9.

解法二：

可以证明，$ord_m(a) \mid \varphi(m)$，所以，37 的欧拉函数是 36，6 的所有因子是 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36，依次计算 $a^l (mod\ 37), l \in 1,2,3,4,6,9,12,18,36$, 结果为 1 的 l 最小取值为次数。

Exercise 46

判断 47，55，59 的原根是否存在。若存在，求出其所有原根。

Answer of exercise 46

答：

47 是奇素数，根据定理，我们知道 47 的原根存在。

55 的标准分解式 5×11，根据定理其不是 $2, 4, p^l, 2p^l$ 的形式，故 55 没有原根。

59 是奇素数，根据定理，我们知道 59 的原根存在。

Exercise 47

求 47 所有原根。

Answer of exercise 47

答：

47 是奇素数，根据定理，我们知道 47 的原根存在。

$\varphi(47) = 46$,46 的标准分解式为 2×23,46 互素的因子 g 为 3，5，7，9，...，计算 g^{23}, g^2：

$3^{23} \equiv 1, 3^2 \equiv 9$,3 不是原根

$4^{23} \equiv 1, 4^2 \equiv 16$,4 不是原根

$5^{23} \equiv 46, 5^2 \equiv 25$,5 是原根

5^l，l 遍历 46 的缩系，{ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45 }，得到所有原根为 { 5, 10, 11, 13, 15, 19, 20, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 33, 35,

38, 39, 40, 41, 43, 44, 45 }.

10.6 课程编程练习

1、实现一个简单的交互式命令行界面，可以输入要计算的函数，输入 exti 退出。参考工程为 gitee 上的 calculator 项目（(https://github.com/btmills/calculator)。

2、利用 GNU MP 实现以下算法（不能直接使用 GNU MP 已有函数）。

序号	命令行接口	输出示例	
1	prime_erat(n,m)	3,5,7	利用 Eratosthenese 筛选
2	gcd(n,m)	5	利
3	lcm(n,m)	12	
4	factor(n)	$2\hat{2}$*3*5	
5	eulerfun(n)	2	
6	inverse(n,m)	550	实现扩展
7	crt(a,b,c,d,e,f)	28	
8	order(a,m)	5	
9	primroot(m)	6,7,11,12,13,15,17,19,22,24,26,28,29,30,34,35	
10	legendresym(a,p)	-1	

3、实验报告中要有框架和功能测试，要编写测试用例。测试用例的基础知识可以在网上查阅相关资料了解.

4、实验报告中的流程图绘制要求参考百度百科“程序流程图”.

附录 特定标识说明

$\mathbb{N}$ 自然数集合

$\mathbb{Z}$ 整数集合

$\mathbb{Q}$ 有理数集合

$\mathbb{C}$ 复数集合

gcd greatest common divider

lcm Lowest Common Multiple

$[\frac{a}{b}]$ a 除 b 的余数

[?] 这个表示引自的参考文献，如果是一条定理有此标识，表示在整理此书时，此定理的表述参考的文献。

附录 工具说明

本书编写环境是 TexStudio+MikTex。

TexStudio 是一个 Tex 的编辑环境，并且集成了编译环境环境，其目前是一个开源项目，网址为 *http://texstudio.sourceforge.net/* 。

MikTex 是 TeX/Latex 的一个具体实现的引擎（）也就是可以将 tex 文件转换为便于阅读的 pdf 或 ps 文件），其中还包含包管理功能, 目前是一个开源项目，网址为 *https://miktex.org/* 。

书中的脑图是用 freemind 绘制，其为一个开源项目，java 开发，跨平台性好，网址为： *http://freemind.sourceforge.net/wiki/index.php/Main_Page*

在书的编写前期，还使用了 Mathpix Snipping Tool，这个工具可以将看到的任何公式，转换为 Tex 的公式描述，识别率很高，一个不错的工具，网址：*https://mathpix.com/* 。

在本书使用到了 SageMath 工具软件，SageMath 是一个开源的数学软件，整合了许多开源的 Python 包 (如：NumPy, SciPy, matplotlib, Sympy, Maxima, GAP, FLINT, R 等)，采用 Python 语言编写，同时也是一个编程环境，使用 Python 语言可以编写计算程序，官网为：http://www.sagemath.org/，官网上有很多说明文档，可以参考。本课程选择他，首先是因为他是开源软件，另外他是基于 Python 的，比较容易上手，另外其对数论和代数支持比较好。

附录　用到的模板

首先本书的模板来自于 *https://github.com/ElegantLaTeX/ElegantBook*，此模板的信息来自于“Latex 开源小屋”网址上的一个帖子 *https://www.latexstudio.net/archives/51589.html*。本书使用的试卷模板信息也是来自于这个网站，从下载的模板信息中可知，模板作者“高星”，作者来自于湖南潇湘技师学院，湖南九嶷 (yi) 职业技术学院，试卷模板地址是 *https://github.com/gnixoag/myworks2017/tree/master/16jidazhuan*。

谢谢！

附录 课程中有关 SageMath 函数

本部分内容主要参考的是 SageMath 网站上的参考文献，其中参考最多的是一个快速参考 [**?**].

1. 求余 remainder，n%m
2. 最大公约数,gcd(n,m)gcd(list)

3. extended gcd(扩展欧几里得算法) g,s,t=xgcd(a,b)

4. 最小公倍数,lcm(a,b)lcm(list)

5. 是否能整除,n.divides(m), 返回 true，表示 $n \mid m$
6. 某数的所有因子,n.divisors()
7. 整数标准分解,factor(n), 整数 n 的标准分解
8. 素性检测,is_prime(n)，n 是素数返回 true，否则返回 false
9. 欧拉方程,euler_phi(n)
10. 次数,Mod(a,m).multiplicative_order(), 求 a 模 m 的次数
11. 二次剩余,quadratic_residures(n)，示例：Q = quadratic_residues(23); Q
12. 原根，primitive_root(n)，求 n 的原根
13. 逆元,n.inverse_mod(m),n 的模 m 逆元
14. power_mod(a,n,m), 计算的是 $a^n(mod\ m)$
15. 中国剩余定理，x=crt(a,b,m,n), 表示的是满足 $x \equiv a(mod\ m), x \equiv b(mod\ n)$ 的 x

附录 Latex 编写格式说明

E.1 使用的环境

E.2 定义

整除定义示例。

```
\begin{definition}{整除}{int}
$a,b \in \mathbb{Z},b \neq 0$,如果存在$q \in \mathbb{Z}$,使得$a=qb$,
就称a可被b整除或者b整除a，记为$b\mid a$。
a是b的倍数，b是a的因子（或约数、除数）。若a不能被b整除，记为$b \nmid a$。
\end{definition}
```

E.3 定理

```
\begin{theorem}{}{set}
X和Y为有限集，且X和Y的元素个数相同(记为$|X|=|Y|$)，则$f:X\rightarrow Y$是单射，当且仅当它是一个满
\end{theorem}
```

E.4 示例

```
\begin{example}
证明幂等律$A \cup A=A$。
\end{example}
```

E.5 示例解答

```
\begin{solution}
    bla bla bla。
\end{solution}
```

E.6 证明

```
\begin{proof}
(1) 假设结论不成立，那么至少存在一个元素属于空集，但不属于A，按照空集的定义，显然任何元素都不属于
(2) 反证法：假设有两个不同的空集$\phi_1，\phi_2$，根据空集性质$\phi_1 \subseteq \phi_2$，$\phi_2 \
\end{proof}
```

E.7 SageMath 示例代码

```
\begin{SageMath}{罗列方式定义有限集合}
\begin{lstlisting}
sage: #有限集的定义：罗列的方式
....: x=Set([1,2,3,4,5,6])
....: x
....: x.is_finite()
....:
{1, 2, 3, 4, 5, 6}
True
\end{lstlisting}
\end{SageMath}
```

E.8 贴图

```
\begin{figure}[!htbp]
\centering
\includegraphics[width=0.6\textwidth]{mpg.png}
\caption{MPG 和 Weight 的关系图\label{fig:mpg}}
\end{figure}
```