240911 CT

집합과 조합론

2. 수학적 귀납법으로 $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$임을 증명하라

① $n=1$ 일때

$(x+y)^1 = x+y$

우변

↳ $\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x^1 y^0 + \binom{1}{1} x^0 y^1 = x+y$

∴ $n=1$ 일때 성립

② 귀납 가정

$n=m$ 일때, 즉 $(x+y)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} y^k$ 가 성립한다고 가정

③ 귀납 단계 $n=m+1$ 일때 이항식 증명

$(x+y)^{m+1} = (x+y)(x+y)^m$

$= (x+y)\left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} y^k\right)$

$x+y$를 각 항에 곱하기

$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} y^{k+1}$

두개의 합을 하나로 합치면

$= x^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \left(\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}\right) x^{m-k+1} y^k + y^{m+1}$

파스칼의 삼각형 성질 $\binom{m+1}{k} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}$을 적용하면

$(x+y)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} x^{m+1-k} y^k$

∴ $n=m+1$ 일때도 성립

3. 위의 결과를 이용해서 n개의 원소를 가진 집합의 가능한 부분집합의 종류는 2^n개임을 증명하라

$x=1$, $y=1$을 대입

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

좌변은 2^n

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

집합의 부분집합은 각 원소를 포함하거나 포함하지 않는 두 가지 경우로 나뉨.

각 부분집합의 크기는 K개의 원소를 가질 수 있음.

크기가 K인 부분집합의 수는 $\binom{n}{k}$이므로, 모든 가능한 부분집합의 수는 $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

따라서 n개의 원소를 가진 집합의 부분집합의 종류는 2^n개

6. 다음이 사실임을 증명하라

$$(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A - B) \cup (B - A)$$

① 왼쪽 : $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c$

- $A \cup B$: 집합 A 또는 집합 B에 속하는 모든 원소의 집합
- $A \cap B$: 집합 A와 B 모두에 속하는 모든 원소의 집합
- $(A \cap B)^c$: 집합 A와 집합 B 중 적어도 하나에 속하지만 둘다에 속하지 않는 원소의 집합

⇒ $A \cup B$에 속하면서 $A \cap B$에는 속하지 않는 원소의 집합

$= (A-B) \cup (B-A)$

② 오른쪽 : $(A-B) \cup (B-A)$

- $A-B$: 집합 A에 속하지만 B에 속하지 않는 원소의 집합
- $B-A$: 집합 B에 속하지만 A에 속하지 않는 원소의 집합
- $(A-B) \cup (B-A)$: 집합 A와 B 중 하나에만 속하는 집합

⇒ 왼쪽의 결과와 동일

$\therefore (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A-B) \cup (B-A)$

10. 비밀번호를 0부터 9까지의 숫자만 가지고 만든다고 하자. 4개 이상 6개 이하의 숫자를 쓸 수 있다고 할 때 가능한 비밀번호의 가지수는 얼마인가? (중복 X)

→ 순열

① 4자리 비밀번호

$$P(10,4) = \frac{10!}{(10-4)!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

② 5자리 비밀번호

$$P(10,5) = \frac{10!}{(10-5)!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240$$

③ 6자리 비밀번호

$$P(10,6) = \frac{10!}{(10-6)!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151200$$

④ 전체 경우의 수

$$5040 + 30240 + 151200 = 186,480$$

13. 52개의 카드를 이용해서 만들 수 있는 5개 카드 조합 중 같은 무늬의 카드가 정확히 3개인 경우는 몇가지인가?

기초수식

다음 재귀식들을 O() notation 수준으로 풀어라

$$T(n) = T(n-1) + n, \quad T(0) = 1$$

① 재귀식 전개

$T(n) = T(n-1) + n$

$T(n-1) = T(n-2) + T(n-1)$

$T(n-2) = T(n-3) + T(n-2)$

$T(n) = T(0) + 1 + 2 + \cdots + n = 1 + (1 + 2 + \cdots + n)$

② 합 계산

$1 + 2 + \cdots + n$ 은 등차수열의 합으로 계산 $\rightarrow \frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore T(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$

③ Big-O 표기

주요항 $\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow O(n^2)$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + n, \quad T(1) = 1$$

* 마스터 정리

⟶ 점화식이 특정한 형태일 때, 점화식의 해를 구할 수 있는 일반적인 방법 제공

* 마스터 정리가 가능한 재귀식

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

a = 재귀 호출의 수

b = 문제 크기의 비율

$f(n)$ = 추가적으로 필요한 작업의 양

문제에서 $a, b, f(n)$

$a = 1$ (재귀호출이 한 번 일어남)

$b = 2$ (문제 크기가 절반으로 줄어듦)

$f(n) = n$ (추가적으로 n만큼의 작업 필요)

마스터 정리에 따르면 복잡도는 세가지 경우 중 하나로 결정

1. $a > b^d$일 때 $O(n^{\log_b a})$

2. $a = b^d$일 때 $O(n^d \log n)$

3. $a < b^d$일 때 $O(n^d)$

위 식에서 $a = 1$, $b^d = 2^1 = 2$ 이므로 $a < b^d$

세 번째 경우가 적용되며 시간 복잡도는 $O(n^1) = O(n)$