240910 CT

논리와 증명

1 - 2) 다음 명제가 항진명제라는 것을 진리표를 이용해서 보이시오

$(\neg p \vee q) \vee (p \wedge \neg q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee q$	$p \wedge \neg q$	$(\neg p \vee q) \vee (p \wedge \neg q)$
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	F	T

- ~p : p가 거짓일때 참, q가 참일때 거짓
- ∨ : 또는 (OR)
- ∧ : 그리고 (AND)

2-2) 다음 명제가 모순명제라는 것을 진리표를 이용해서 보이시오

$(p \wedge q) \wedge (p \wedge \neg q)$

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge q) \wedge (p \wedge \neg q)$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	F
F	T	F	F	F
F	F	F	F	F

P∧q : P와 q 모두 참일때 참.

P∧~q : P가 참, q가 거짓일때 참

두 조건을 모두 만족하는 경우가 없으므로 (P∧q)∧(P∧~q)는 항상 거짓

3-2) 다음 명제의 쌍에 대해서 두 명제가 동등한지를 진리표를 이용해 확인하시오

$\neg p \vee \neg q$와 $\neg(p \vee q)$

p	q	$(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	T	F	T
F	T	T	T	F	F	T
F	F	F	T	T	T	T

~P∨~q 와 ~(P∨q)의 결과가 다르기 때문에 두 명제는 동등하지 않음.

4-2) 명제식의 변형을 통해 다음 명제를 간소화하시오

$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ → $\sim q$

① 분배법칙 적용 : AND 연산이 OR 연산에 대해 분배되는법칙

↳ $(A \vee B) \wedge C$ 는 $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ 로 변형 가능

$[(P \wedge \sim P) \vee (P \wedge \sim q)] \vee [(\sim P \wedge \sim P) \vee (\sim P \wedge \sim q)]$

② 모순 제거 : 어떤 명제와 그 명제의 부정이 동시에 참일 수 없는 것

↳ $P \wedge \sim P$ 는 항상 거짓

↳ $\sim P \wedge \sim P$ 역시 항상 거짓

$(P \wedge \sim q) \vee (\sim P \wedge \sim q)$

③ 공통 인수 분해

$(P \vee \sim P) \wedge \sim q$

④ 항등 법칙 적용 : 어떤 명제와 그 명제의 부정을 OR 연산하면 항상 참이 되는 법칙

↳ $P \vee \sim P$ 는 항상 참

$\sim q$

5) 다음 명제가 참인지 확인하시오 (단, R은 실수의 집합을 의미하고, Z는 정수의 집합을 의미)

$5-2)\quad \forall x \in Z, x^2 \geq x$

→ 모든 정수 x에 대해, x의 제곱은 x보다 크거나 같다. (거짓)

- $x=0$ 일때 $0^2=0$ 이므로 부등식이 성립하지 않음
- $x=1$ 일때 $1^2=1$ 이므로 부등식이 성립하지 않음
- x가 음수일 때 음수를 제곱하면 양수가 되므로 부등식이 성립하지 않음

$5-4)\quad \exists x \in Z, x^2 < x$

→ 어떤 정수 x에 대해 x의 제곱은 x보다 작다. (거짓)

정수의 제곱은 항상 0보다 크거나 같기 때문에,

어떤 정수를 제곱해도 자신보다 작은 값을 얻을 수 없음

7) n이 홀수이면 n^2+n은 짝수임을 증명하라

n이 홀수이므로 어떤 정수 k에 대해 $n=2k+1$로 나타낼 수 있음

n^2+n에 대입

$$\begin{aligned} n^2+n &= (2k+1)^2+(2k+1) \\ &= 4k^2+4k+1+2k+1 \\ &= 4k^2+6k+2 \\ &= 2(2k^2+3k+1) \end{aligned}$$

→ $2(2k^2+3k+1)$는 2를 곱한 형태이기 때문에 반드시 짝수

9) (대우를 증명) 자연수 n에 대해 n^2+5가 홀수이면, n은 짝수임을 증명하라

주어진 명제의 대우 : 만약 n이 홀수면 n^2+5는 짝수이다.

① n이 홀수라고 가정

n이 홀수이므로 어떤 정수 k에 대해 $n=2k+1$로 나타낼 수 있음

② n^2+5를 계산

$$n^2+5=(2k+1)^2+5$$
$$=4k^2+4k+1+5$$
$$=2(2k^2+2k+3)$$

↳ n^2+5는 짝수

∴ 자연수 n이 홀수이면, n^2+5는 짝수이다.

11) 자연수 n에 대해 n^2+5n+3은 항상 홀수임을 증명하라

(n이 짝수인 경우와 홀수인 경우를 따로 증명)

1. n이 짝수인 경우

- n이 짝수이므로 어떤 정수 k에 대해 $n=2k$로 나타낼 수 있음
- n^2+5n+3에 $n=2k$ 대입

$$n^2+5n+3=(2k)^2+5(2k)+3$$
$$=4k^2+10k+3$$
$$=2(2k^2+5k+1)+1$$

↳ $2(2k^2+5k+1)$은 2의 배수이므로 항상 짝수

짝수 + 1은 항상 홀수

∴ n이 짝수일 때 n^2+5n+3은 항상 홀수

2. n이 홀수인 경우

- n이 홀수이므로 어떤 정수 k에 대해 $n=2k+1$로 나타낼 수 있음
- n^2+5n+3에 $n=2k+1$ 대입

$$n^2+5n+3=(2k+1)^2+5(2k+1)+3$$
$$=4k^2+4k+1+10k+5+3$$
$$=4k^2+14k+9$$
$$=2(2k^2+7k+4)+1$$

↳ $2(2k^2+7k+4)$는 2의 배수이므로 항상 짝수

짝수 + 1은 항상 홀수

∴ n이 홀수일 때 n^2+5n+3은 항상 홀수

수와 표현

3) n이 충분히 큰 값일 때 다음 중 어느 값이 더 큰가? 각 쌍에 대해 비교하고 그 이유를 작성하시오

$3-2) \quad 2^{\frac{n}{2}} \quad (<) \quad \sqrt{3^n}$

① 각 수식을 지수형태로 변환

$$2^{\frac{n}{2}} = (2^1)^{\frac{n}{2}} = 2^{n/2}$$

$$\sqrt{3^n} = (3^n)^{\frac{1}{2}} = 3^{n/2}$$

② 두 값을 비교

두 값의 지수가 n/2로 동일하므로 밑수 비교

$$2^{n/2} < 3^{n/2}$$

$3-4) \quad log2^{2n} \quad (<) \quad n\sqrt{n}$

① 각 수식을 간단하게 변환

$$\log 2^{2n} = 2n \underbrace{\log(2)}_{\rightarrow \text{상수}} = 2n$$

$$n\sqrt{n} = n \cdot n^{1/2} = n^{3/2}$$

② 두 값을 비교

$2n$ = 선형함수 형태

$n^{3/2}$ = 지수함수 형태

5-2) 다음 함수의 역함수를 구하시오

$f(x) = 3log(x+3)+1$

① $y = f(x)$로 놓기

$y = 3\log(x+3)+1$

② y에서 x에 대한 식으로 풀기

양 변에서 1 빼기

$y-1 = 3\log(x+3)$

양 변을 3으로 나누기

$\frac{y-1}{3} = \log(x+3)$

로그 제거를 위해 양 변을 지수함수로 변환

$x+3 = 10^{\frac{y-1}{3}}$

양 변에서 3 빼기

$x = 10^{\frac{y-1}{3}} - 3$

③ x와 y를 바꾸기

$f^{-1}(x) = 10^{\frac{x-1}{3}} - 3$