線形代数 I　第 5 講

今回は、平面と（３次元）空間におけるいくつかの重要な線形変換について説明する。今回までのところの演習問題を上げておくのでやっておくこと。演習問題の答は次回の教材とともに来週上げる。次回からは教科書に沿って 2.4 節以降を学んでいくが、次回は、それとともに、今回までの内容についてのレポート課題を出題する。

1　行列の積と線形写像補遺

1.1　積と合成写像

行列の積について、（交換法則は成り立たないことが多いが）結合法則は成り立った。すなわち、$\ell \times m$ 行列 A, $m \times n$ 行列 B, $n \times k$ 行列 C に対して、$(AB)C = A(BC)$ である。（両辺は $\ell \times k$ 行列であることに注意。）特に $k = 1$ の場合については次の重要な意味付けがなされる。

命題　A は線形写像 $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell;\quad \boldsymbol{v} \mapsto A\boldsymbol{v}$ を、B は線形写像 $\boldsymbol{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m;\ \boldsymbol{x} \mapsto B\boldsymbol{x}$ を、それぞれ表すとする。これらの合成写像 $\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{G}$ もまた線形写像で、**積 AB はこの合成写像を表す**：

$$\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell;\ \boldsymbol{x} \mapsto (AB)\boldsymbol{x}$$

実際、$(\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{G})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{F}(B\boldsymbol{x}) = A(B\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x}$ である。（最後の等号のところで積の結合法則を用いた。）

1.2　正方行列についての用語

n 次正方行列 A は n^2 個の成分が正方形に並んでいるが、そのうちの $(1,1)$ 成分、$(2,2)$ 成分、$\cdots$、(n,n) 成分の n 個は右下がりの対角線上に並んでいる。この n 個の成分を A の**対角成分**といい、右下がりの対角線を**主対角線**という。これに関して次の用語がある：

- 「$i > j$ ならば (i,j) 成分は 0」を充たす行列を**上三角行列**
- 「$i < j$ ならば (i,j) 成分は 0」を充たす行列を**上三角行列**
- 「$i \neq j$ ならば (i,j) 成分は 0」を充たす行列を**対角行列**
- 上三角行列または下三角行列であるとき**三角行列**

という。ここで挙げていない成分が 0 であるかどうかは問題ではない。例えば n 次正方行列の零行列は三角行列であり、対角行列である。そのほか、$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ は上三角行列、$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ は対角行列である。また、成分が主対角線に関して対称に並んでいる正方行列を**対称行列**という。$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ は対称行列である。

1.3　単位行列、逆行列、行列式

対角成分がすべて 1 で、そのほかの成分がすべて 0 の n 次正方行列を n 次単位行列といい、E_n または I_n と書く。誤解のおそれがなければ単に E または I と書く。この講義では E_n あるいは E と書くことにする。

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

などである。これらについて、次が成り立つ。

$$m \times n \text{ 行列 } A \text{ に対して、} \quad E_m A = A E_n = A$$

単位行列 E_n が表す $\mathbb{R}^n$ の線形変換は恒等変換である。

n 次正方行列 A に対して、$AX = XA = E_n$ を充たす n 次正方行列 X は、存在するとは限らない（例えば零行列に対してこのようなものが存在しえないことは当然であろう）が、もし存在するならば唯一つである。実際、$X_1,\ X_2$ が共にこの X の条件を充たせば、積の結合法則により $X_1 = X_1 E_n = X_1(AX_2) = (X_1 A)X_2 = E_n X_2 = X_2$ である。この条件を充たす X を A の**逆行列**といい、A^{-1} と書く。逆行列が表す線形変換は、もとの行列が表す線形変換の逆変換である。A^{-1} が存在するとき、A は**正則行列**であるという。A が正則行列かどうかの判定法および A^{-1} を求める方法は 2.5 節以降で学ぶが、2 次正方行列については簡単である。$B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ とおくと $AB = BA = (ad - bc)E_2$ となる（**問**　確かめよ）ことから次が得られる。

定理　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について

$$A \text{ が正則行列} \iff ad - bc \neq 0$$

である。A がこの条件を充たすとき、$A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$ad - bc$ を 2 次正方行列 A の**行列式**といい、

$$|A|,\ \det A,\ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},\ \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

などと書く。行列式は負の値をとることも当然ある。例えば $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ に対し、$|A| = 1 \times 4 - 2 \times 3 = 4 - 6 = -2$ である。記号から絶対値と勘違いしてはならない。なお、高等学校で学んだように、2 つの平面ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ が張る平行四辺形の面積は $|ad - bc|$ である。このことから 2 次正方行列 A の行列式は、A を 2 つのベクトルが並んだものとみて、その 2 つのベクトルが張る平行四辺形の面積に符号をつけたもの、と考えることができる。一般の正方行列の行列式は第 3 章で学ぶがそれほど簡単ではない。なお、教科書 22 頁の外積の説明をみておくこと。

2　正射影と鏡映

2.1　正射影

$\boldsymbol{a}(\neq \boldsymbol{0})$ が与えられたとき、$\boldsymbol{x}$ に対して、$\dfrac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}$ を、$\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{a}$ **方向への正射影**あるいは**直交射影**という。図形的にいえば、$\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{a}$ 方向への正射影は、2 つのベクトルの始点をそろえておいて、$\boldsymbol{a}$ の垂直な方向から平行な光線を当てたときに、始点を通って $\boldsymbol{a}$ に映る $\boldsymbol{x}$ の影である。内積の性質により、

$$\begin{cases} \dfrac{(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a} = \dfrac{(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}+\dfrac{(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a} \\ \dfrac{(r\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a} = r\dfrac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a} \end{cases}$$

であるから、平面ベクトル $\boldsymbol{a}(\neq \boldsymbol{0})$ は平面の線形変換

$$P_{\boldsymbol{a}}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\ \boldsymbol{x}\mapsto\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}$$

を定める。この線形変換を $\boldsymbol{a}$ **方向への正射影**あるいは**直交射影**という。$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ について、$\boldsymbol{a}$ 方向への正射影 $P_{\boldsymbol{a}}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を表す行列（これも $P=P_{\boldsymbol{a}}$ と書こう）を求めよう。$\mathbb{R}^2$ の基本単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の像を求めて並べればよい。

$$\frac{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\boldsymbol{a}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} a^2 \\ ab \end{pmatrix},\quad \frac{(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\boldsymbol{a}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} ab \\ b^2 \end{pmatrix}$$

これらを順に横に並べて

$$P_{\boldsymbol{a}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$$

を得る。原点を通り、$\boldsymbol{a}$ に平行な直線を ℓ とする。$P_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x}=\dfrac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}$ を位置ベクトルとする点は、$\boldsymbol{x}$ を位置ベクトルとする点から ℓ に下ろした垂線の足である。

<u>問</u>　$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ について、行列 $P_{\boldsymbol{a}}$ を求めよ。また $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ について、上のことを確かめよ。

$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$ に対し、$\boldsymbol{x}_1=P_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1=(E-P_{\boldsymbol{a}})\boldsymbol{x}$ とおこう。（E は単位行列。）このとき、$\boldsymbol{x}_1$ は $\boldsymbol{a}$ に平行なベクトル、$\boldsymbol{x}_2$ は $\boldsymbol{a}$ に垂直なベクトルであり、$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ が成り立つ。$\boldsymbol{x}_1$ を $\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{a}$ **に平行な成分**、$\boldsymbol{x}_2$ を $\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{a}$ **に垂直な成分**あるいは $\boldsymbol{a}$ **に直交する成分**という。

全く同様に、$(\boldsymbol{0}\neq)\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^3$ は、$\mathbb{R}^3$ の線形変換

$$P_{\boldsymbol{a}}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3;\quad \boldsymbol{x}\mapsto\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}$$

を定める。これを $\boldsymbol{a}$ **方向への正射影**という。

<u>問</u>　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (\neq \boldsymbol{0})$ について、$\boldsymbol{a}$ 方向への正射影 $P_{\boldsymbol{a}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を表す行列が $P_{\boldsymbol{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$ であることを確かめよ。

2.2　平面における鏡映

平面において、$\boldsymbol{a}(\neq \boldsymbol{0})$ に平行で、原点を通る直線 ℓ に関する鏡映 (対称移動) を考えよう。$\boldsymbol{x}$ を位置ベクトルとする点を Q とし、点 Q を ℓ に関して対称移動した点を Q' とする。点 Q から ℓ に下ろした垂線の足を H とすれば、

$$\boldsymbol{x} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} + \overrightarrow{\mathrm{HQ}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}'} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} + \overrightarrow{\mathrm{HQ}'} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{HQ}}$$

上で説明したように、$\boldsymbol{a}$ 方向への正射影を表す行列を $P = P_{\boldsymbol{a}}$ とすれば $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = P\boldsymbol{x}$ であるから、$\overrightarrow{\mathrm{HQ}} = \boldsymbol{x} - P\boldsymbol{x} = (E-P)\boldsymbol{x}$ であり

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}'} = P\boldsymbol{x} - (E-P)\boldsymbol{x} = (2P-E)\boldsymbol{x}$$

よって $A = 2P - E$ とおけば $\overrightarrow{\mathrm{OQ}'} = A\boldsymbol{x}$ であり、直線 ℓ に関する鏡映は、行列 A が表す線形変換である。これを $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ の場合にやれというのが教科書 15 頁の**例題 1.4** であった。

<u>問</u>　直線 ℓ が原点を通り、$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ に平行であるとする。ℓ に関する鏡映を表す行列 A を求めよ。

2.3　空間における鏡映

（３次元）空間において、原点を通り、$\boldsymbol{a}(\neq \boldsymbol{0})$ に垂直な平面 Π に関する鏡映（対称移動）を考えよう。原点における Π の法線すなわち原点を通り $\boldsymbol{a}$ に平行な直線を ℓ とする。$\boldsymbol{x}$ を位置ベクトルとする点を Q、点 Q を Π に関する鏡映でうつした点を Q'、点 Q から Π に下ろした垂線の足を H とし、点 Q から ℓ に下ろした垂線の足を H_1 とする。

$$\boldsymbol{x} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} + \overrightarrow{\mathrm{HQ}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}'} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} + \overrightarrow{\mathrm{HQ}'} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{HQ}}$$

ここで $\boldsymbol{a}$ 方向への正射影を表す行列を $P = P_{\boldsymbol{a}}$ とすると、$\overrightarrow{\mathrm{HQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}_1} = P\boldsymbol{x}$, $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \boldsymbol{x} - P\boldsymbol{x} = (E-P)\boldsymbol{x}$ であるから、

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}'} = (E-P)\boldsymbol{x} - P\boldsymbol{x} = (E-2P)\boldsymbol{x}$$

よって $A = E - 2P$ とおくと、$\overrightarrow{\mathrm{OQ}'} = A\boldsymbol{x}$ であり、平面 Π に関する鏡映は行列 A が表す線形変換である。

<u>問</u>　平面 $8x + y + 4z = 0$ に関する鏡映を表す行列を求めよ。

<u>問</u>　直線 ℓ が原点を通り、$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (\neq \mathbf{0})$ に平行であるとする。ℓ に関する軸対称移動（すなわちを回転軸とする角 π の回転）を表す行列 A を求めよ。

3　平面における回転

平面において、原点を中心として、点を（反時計回りを正として）角 θ 回転させる変換は線形変換である。このことを確認し、それを表す行列を求めよう。まず原点は原点にうつる。原点とは異なる点 P の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{x}$ は、$r = \|\boldsymbol{x}\|$ とおくと

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

と書ける。点 P を原点を中心として角 θ 回転させた点を P' とすると、点 P' の位置ベクトルは、三角関数の加法定理により、

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}'} = r \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta \\ \sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ y\cos\theta + x\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

よって、原点を中心とする角 θ の回転は線形変換であり、行列

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

によって表される。この行列 A を、角 θ の**回転行列**という。

<u>注意</u>

- 回転行列は回転を表す行列であるが、対称行列は対称移動を表す行列であるとは限らない。上でみたように、対称移動を表す行列は確かに対称行列であるが、正射影を表す行列も対称行列であった。正射影は対称移動ではないことに注意せよ。
- 空間における一般の回転はこれほど簡単ではない。第 3 章の終わりに取り上げることになっているが、後期にまわすかもしれない。