1.7 LA INVERSA DE UNA MATRIZ

En esta sección concentraremos nuestra atención en las matrices cuadradas, y formularemos el concepto correspondiente al recíproco de un número distinto de cero.

DEFINICIÓN Una matriz A de $n \times n$ es **no singular** (o **invertible**) si existe una matriz B de $n \times n$ tal que

$$AB = BA = I_n.$$

La matriz B se denomina **inversa** de A. Si no existe tal matriz B, entonces B es **singular** (o **no invertible**).

Observación Con base en la definición anterior, se deduce que $AB = BA = I_n$;, por lo tanto, también A es una inversa de B.

EJEMPLO 1 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Como

$$AB = BA = I_2,$$

concluimos que B es una inversa de A y que A es no singular. ■

TEOREMA 1.9 *Si una matriz tiene inversa, la inversa es única.*

Demostración Sean B y C inversos de A. Entonces $BA = AC = I_n$. Por lo tanto,

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C,$$

Con lo cual concluye la demostración. ■

Ahora escribiremos la inversa de A, si existe, como A^{-1}. Así,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

EJEMPLO 2 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Para determinar A^{-1}, hacemos

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Entonces, debemos tener

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\begin{bmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 3a + 4c & 3b + 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Al igualar las entradas correspondientes de estas dos matrices, obtenemos los sistemas lineales

$$\begin{aligned} a + 2c &= 1 \\ 3a + 4c &= 0 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} b + 2d &= 0 \\ 3b + 4d &= 1. \end{aligned}$$

Las soluciones son (verifique) $a = -2$, $c = \frac{3}{2}$, $b = 1$ y $d = -\frac{1}{2}$. Además, como la matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

también satisface la propiedad de que

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

concluimos que A es no singular y que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

■

Observación No todas las matrices tienen una inversa. Como muestra, considere el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Para determinar A^{-1}, hacemos

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Entonces debemos tener

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\begin{bmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 2a + 4c & 2b + 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Al igualar las entradas correspondientes de estas dos matrices, obtenemos los sistemas lineales.

$$\begin{aligned} a + 2c &= 1 \\ 2a + 4c &= 0 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} b + 2d &= 0 \\ 2b + 4d &= 1. \end{aligned}$$

Estos sistemas lineales no tienen solución, de modo que A no tiene inversa. Por lo tanto, A es una matriz singular. ■

El método que seguimos en el ejemplo 2 para determinar la inversa de una matriz no es muy eficiente; y en breve lo modificaremos para obtener uno mejor, pero antes estableceremos varias propiedades de las matrices no singulares.

TEOREMA 1.10 **(Propiedades de la inversa)**

(a) *Si A es una matriz no singular, entonces A^{-1} es no singular y*

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

(b) *Si A y B son matrices no singulares, entonces AB es no singular y*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

(c) *Si A es una matriz no singular, entonces*

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})T.$$

Demostración (a) A^{-1} es no singular si podemos encontrar una matriz B tal que

$$A^{-1}B = BA^{-1} = I_n.$$

Como A es no singular,

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n.$$

En consecuencia, $B = A$ es una inversa de A^{-1}, y como las inversas son únicas, concluimos que

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

En consecuencia, la inversa de la inversa de una matriz A no singular es A.

(b) Tenemos

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

y

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n.$$

Por lo tanto, AB es no singular. Como la inversa de una matriz es única, concluimos que

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

En consecuencia, la inversa de un producto de dos matrices no singulares es el producto de sus inversas en orden inverso.

(c) Tenemos

$$AA^{-1} = I_n \quad \text{y} \quad A^{-1}A = I_n.$$

Al calcular las transpuestas, obtenemos

$$(AA^{-1})^T = I_n^T = I_n \quad \text{y} \quad (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n.$$

Entonces

$$(A^{-1})^T = A^T = I_n \quad \text{y} \quad A^T(A^{-1})^T = I_n.$$

Estas ecuaciones implican que

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

En consecuencia, la inversa de la transpuesta de una matriz no singular, es la transpuesta de su inversa. ■

EJEMPLO 4 Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, de acuerdo con el ejemplo 2,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad (A^{-1})^T = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Además (verifique),

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad (A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

■

COROLARIO 1.2 *Si $A_1, A_2, \ldots A_r$ son matrices no singulares de $n \times n$, entonces $A_1A_2 \cdots A_r$ es no singular y*

$$(A_1A_2 \cdots A_r)^{-1} = A_r^{-1}A_{r-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

Demostración Ejercicio T.2. ■

Anteriormente definimos una matriz B como la inversa de A si $AB = BA = I_n$. El siguiente teorema, cuya demostración omitimos, muestra que una de estas ecuaciones es consecuencia de la otra.

TEOREMA 1.11 *Suponga que A y B son matrices de $n \times n$;*

(a) *Si $AB = I_n$, entonces $BA = I_n$.*

(b) *Si $BA = I_n$, entonces $AB = I_n$.* ■

UN MÉTODO PRÁCTICO PARA DETERMINAR A^{-1}

Ahora desarrollaremos un método práctico para determinar A^{-1}. Si A es una matriz dada de $n \times n$, estamos buscando una matriz $B = [b_{ij}]$ de $n \times n$ tal que

$$AB = BA = I_n.$$

Denotamos las columnas de B mediante las matrices $n \times 1$ $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, donde

$$\mathbf{x}_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{ij} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} \qquad (1 \leq j \leq n).$$

Denotamos las columnas de I_n como las matrices de $n \times 1$ $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Por lo tanto,

$$\mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \longleftarrow j\text{-ésima fila.}$$

De acuerdo con el ejercicio T.9(a) de la sección 1.3, la j-ésima columna de AB es la matriz $A\mathbf{x}_j$ de $n \times 1$. Como las matrices iguales deben coincidir columna a columna, el problema de determinar una matriz $B = A^{-1}$ de $n \times n$ tal que

$$AB = I_n \tag{1}$$

es equivalente al problema de determinar n matrices (cada una de $n \times 1$) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, tales que

$$A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j \ (1 \leq j \leq n). \tag{2}$$

En consecuencia, determinar B es equivalente a resolver n sistemas lineales (cada uno con n ecuaciones en n incógnitas). Esto es precisamente lo que hicimos en el ejemplo 2.

Cada uno de estos sistemas puede resolverse mediante el método de reducción de Gauss-Jordan. Para resolver el primer sistema lineal, formamos la matriz aumentada $\left[A \mid \mathbf{e}_1\right]$ y la escribimos en forma escalonada reducida por filas. Hacemos lo mismo con

$$\left[A \mid \mathbf{e}_2\right], \ldots, \left[A \mid \mathbf{e}_n\right].$$

Sin embargo, si observamos que la matriz de coeficientes de cada uno de estos n sistemas lineales siempre es A, podemos resolver todos estos sistemas de manera simultánea. Formamos la matriz de $n \times 2n$

$$\left[A \mid \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_n\right] = \left[A \mid I_n\right]$$

y la transformamos a la forma escalonada reducida por filas $\left[C \mid D\right]$. La matriz C de $n \times n$ es la forma escalonada reducida por filas equivalente por filas de A. Sean $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_n$ las n columnas de D. Entonces, la matriz $\left[C \mid D\right]$ da lugar a los n sistemas lineales

$$C\mathbf{x}_j = \mathbf{d}_j \qquad (1 \leq j \leq n) \tag{3}$$

o la ecuación matricial

$$CB = D. \tag{4}$$

Ahora existen dos casos posibles:

Caso 1. $C = I_n$. En esta situación, la ecuación (3) se convierte en

$$I_n\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j = \mathbf{d}_j,$$

y $B = D$, de modo que hemos obtenido A^{-1}.

Caso 2. $C \neq I_n$. En este caso, el ejercicio T.9 de la sección 1.6 implica que C tiene una fila que consta completamente de ceros. Con base en el ejercicio T.3 de la sección 1.3, observamos que el producto CB de la ecuación (4) tiene una fila de ceros. La matriz D en (4) surgió de I_n mediante una serie de operaciones elementales, pero resulta evidente que D no puede tener una fila de ceros. Esta afirmación puede demostrarse formalmente en este momento, pero pediremos al lector que acepte el resultado sin solicitar demostraciones por ahora;. En la sección 3.2, un argumento mediante determinantes mostrará su validez. En consecuencia, una de las ecuaciones $C\mathbf{x}_j = \mathbf{d}_j$ no tiene solución, de modo que $A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j$ tampoco la tiene y, en este caso, A es singular.

El procedimiento práctico para calcular la inversa de la matriz A es el siguiente.

Paso 1. Formar la matriz de $n \times 2n$ $\left[A \mid I_n\right]$, que se obtiene al adjuntar la matriz identidad I_n con la matriz dada A.

Paso 2. Transformar la matriz obtenida en el paso 1 a su forma escalonada reducida por filas mediante operaciones elementales por filas. Recuerde que todo lo que se haga a una fila de A también debe hacerse a la fila correspondiente de I_n.

Paso 3. Suponga que el paso 2 ha producido la matriz $\left[C \mid D\right]$ en forma escalonada reducida por filas.

(a) Si $C = I_n$, entonces $D = A^{-1}$.

(b) Si $C \neq I_n$, entonces C tiene una fila de ceros. En este caso, A es singular y A^{-1} no existe.

EJEMPLO 5 Determinar la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución ***Paso 1.*** La matriz $\left[A \;\vdots\; I_3\right]$ de 3×6 es

$$\left[A \;\vdots\; I_3\right] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & A & & & I_3 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}.$$

Paso 2. Ahora transformamos la matriz obtenida en el paso 1 a su forma escalonada reducida por filas.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & A & & & I_3 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Sumamos (-5) veces la primera fila a la tercera fila.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Se multiplicó la segunda fila por $\frac{1}{2}$.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Se multiplicó la tercera fila por $\left(-\frac{1}{4}\right)$.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Se sumó $\left(-\frac{3}{2}\right)$ veces la tercera fila a la segunda fila.
Se sumó (-1) veces la tercera fila a la primera fila.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Se sumó (-1) veces la segunda fila a la primera fila.

Paso 3. Como $C = I_3$, concluimos que $D = A^{-1}$. Por lo tanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Es fácil verificar que $AA^{-1} = A^{-1} = I_3$. ■

Si la matriz escalonada reducida por filas bajo A tiene una fila de ceros, entonces A es singular. Como cada matriz bajo A es equivalente por filas a A, una vez que una matriz bajo A tiene una fila de ceros, todas las matrices posteriores que sean equivalentes por filas a A tendrán una fila de ceros. De esta manera, podemos concluir el procedimiento tan pronto encontremos una matriz F que sea equivalente por filas a A y tenga una fila de ceros. En este caso, A^{-1} no existe.

EJEMPLO 6 Determine la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \text{ si ésta existe.}$$

Solución ***Paso 1.*** La matriz $\left[A \;\vdots\; I_3\right]$ de 3×6 es

$$\begin{array}{c} \\ \left[A \;\vdots\; I_3\right] = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \qquad A \qquad & & \qquad I_3 \qquad \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \end{array}$$

Paso 2. Transformamos la matriz obtenida en el paso 1 a su forma escalonada reducida por filas. Para determinar A^{-1}, procedemos como sigue:

$$\begin{array}{ccc} A & & I_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$ Se sumó (-1) veces la primera fila a la segunda fila.

$$\left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 12 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$ Se sumó (-5) veces la primera fila a la tercera fila.

$$\left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$ Se sumó (-3) veces la segunda fila a la tercera fila.

En este punto, A es equivalente por filas a

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como F tiene una fila de ceros, nos detenemos y concluimos que A es una matriz singular. ■

Observe que, para determinar A^{-1}, no es preciso saber de antemano si existe o no. Simplemente iniciamos el procedimiento anterior y obtenemos A^{-1}, o bien, concluimos que A es singular.

El análisis anterior acerca del método práctico para obtener A^{-1} establece el siguiente teorema.

TEOREMA 1.12 *Una matriz de $n \times n$ es no singular si y sólo si es equivalente por filas a I_n.* ■

SISTEMAS LINEALES E INVERSAS

Si A es una matriz de $n \times n$, el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un sistema de n ecuaciones en n incógnitas. Supongamos que A es no singular. Entonces A^{-1} existe y podemos multiplicar ambos lados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por A^{-1} para obtener

$$\begin{aligned} A^{-1}(A\mathbf{x}) &= A^{-1}\mathbf{b} \\ (A^{-1}A)\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \\ I_n\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Además, es evidente que $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ es una solución del sistema lineal dado. En consecuencia, si A es no singular, tenemos una única solución.

Aplicaciones Este método es útil para la resolución de problemas industriales. Muchos modelos físicos se describen por medio de sistemas lineales. Esto significa que si se utilizan como entrada n valores (que se pueden ordenar como la matriz $\mathbf{x}$ de $n \times 1$), se obtienen m valores como resultado (mismos que pueden ordenarse como la matriz $\mathbf{b}$ de $m \times 1$) mediante la regla $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. La matriz A forma parte intrínseca del procedimiento. Así, supongamos que hay una matriz A asociada a cierto proceso químico. Cualquier cambio en el mismo puede producir una nueva matriz. De hecho, hablamos de una **caja negra**, lo cual significa que la estructura interna del proceso no nos interesa. El problema que aparece con frecuencia en el análisis de sistemas es la determinación de la entrada que debe utilizarse para obtener el resultado deseado. Es decir, queremos resolver el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para $\mathbf{x}$, al variar $\mathbf{b}$. Si A es una matriz cuadrada no singular, una forma eficiente de manejar esto es la siguiente: calculamos A^{-1} una vez, y siempre que modifiquemos $\mathbf{b}$, determinamos la solución correspondiente $\mathbf{x}$ formando $A^{-1}\mathbf{b}$.

EJEMPLO 7 **(Proceso industrial)** Considere un proceso industrial cuya matriz es la matriz A del ejemplo 5. Si $\mathbf{b}$ es la matriz resultante

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 24 \\ 8 \end{bmatrix},$$

la matriz de entrada $\mathbf{x}$ es la solución del sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. De esta manera,

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, si $\mathbf{b}$ es la matriz resultante

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 16 \end{bmatrix},$$

entonces (verifique)

$$\mathbf{x} = A^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

■

TEOREMA 1.13 *Si A es una matriz de $n \times n$, el sistema homogéneo*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{5}$$

tiene una solución no trivial si y sólo si A es singular.

Demostración Supongamos que A es no singular. Entonces, A^{-1} existe, y al multiplicar ambos lados de (5) por A^{-1}, tenemos

$$\begin{aligned} A^{-1}(A\mathbf{x}) &= A^{-1}\mathbf{0} \\ (A^{-1}A)\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ I_n\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la única solución de (5) es $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Dejaremos la demostración del recíproco —si A es singular, entonces (5) tiene una solución no trivial— como ejercicio (T.3). ■

EJEMPLO 8 Considere el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, donde A es la matriz del ejemplo 5. Como A es no singular,

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

También podemos resolver este sistema mediante la reducción de Gauss-Jordan. En este caso, determinamos la matriz en forma escalonada reducida por filas que es equivalente a la matriz aumentada del sistema dado,

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

es

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

lo cual demuestra de nuevo que la solución es

$$\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$ ■

EJEMPLO 9 Considere el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, donde A es la matriz singular del ejemplo 6. En este caso, la matriz en forma escalonada reducida por filas que es equivalente por filas a la matriz aumentada del sistema dado,

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right],$$

es (verifique)

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} x &= r \\ y &= r \\ z &= r, \end{aligned}$$

donde r es cualquier número real. En consecuencia, el sistema dado tiene una solución no trivial. ■

La demostración del siguiente teorema se deja en manos del lector (ejercicio complementario T.18).

TEOREMA 1.14 *Si A es una matriz de $n \times n$, entonces A es no singular si y sólo si el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada matriz* $\mathbf{b}$ de $n \times 1$. ■

Podemos resumir nuestros resultados acerca de los sistemas homogéneos y las matrices no singulares mediante la siguiente lista de equivalencias no singulares.

Lista de equivalencias no singulares

Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. A es no singular.
2. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la única solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3. A es equivalente por filas a I_n.
4. El sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada matriz $\mathbf{b}$ de $n \times 1$.

Esto significa que al resolver un problema podemos utilizar cualquiera de las cuatro afirmaciones anteriores, es decir, que son intercambiables. Como verá a lo largo del curso, suele ocurrir que un problema dado se puede resolver de varias formas, y a veces un procedimiento de solución es más fácil de aplicar que otro. Esta lista de equivalencias no singulares irá creciendo conforme avancemos. Al final del apéndice B aparece la lista completa, que consta de 12 afirmaciones equivalentes.

INVERSA DE MATRICES BINARIAS (OPCIONAL)

Las definiciones y teoremas desarrollados en esta sección son válidos para matrices binarias. Los ejemplos 10 y 11 ilustran los procedimientos computacionales de esta sección para matrices binarias en donde, por supuesto, utilizamos aritmética de base 2.

EJEMPLO 10 Determine la inversa de la matriz binaria

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución ***Paso 1.*** La matriz $\left[A \;\vdots\; I_3\right]$ de 3×6 es

$$\left[A \;\vdots\; I_3\right] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Paso 2. Ahora calculamos la forma escalonada reducida por filas de la matriz obtenida en el paso 1. Para determinar A^{-1}, procedemos como sigue:

$$\begin{array}{cc} A & I_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$ Se intercambiaron la primera y la segunda fila.