T.2. Sea $f: R^n \to R^m$ una transformación matricial definida por $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$, donde A es una matriz de $m \times n$. Demuestre que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores en R^n tales que $f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ y $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, donde

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

entonces $f(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ para cualesquiera números reales c y d.

T.3. (a) Sea $O: R^n \to R^m$ la transformación matricial definida por $O(\mathbf{u}) = O\mathbf{u}$, donde O es la matriz cero de $m \times n$. Demuestre que $O(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, para toda $\mathbf{u}$ en R^n.

(b) Sea $I: R^n \to R^n$ la transformación matricial definida por $I(\mathbf{u}) = I_n\mathbf{u}$, donde I_n es la matriz identidad (vea la sección 1.4). Demuestre que $I(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ para toda $\mathbf{u}$ en R^n.

1.6 SOLUCIONES DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En esta sección sistematizaremos el método de eliminación de incógnitas que ya conocemos (analizado en la sección 1.1), con lo que obtendremos un método útil para resolver sistemas lineales. El método comienza con la matriz aumentada del sistema lineal dado, con lo cual se obtiene una matriz de una forma particular. Esta nueva matriz representa un sistema lineal que tiene exactamente las mismas soluciones que el sistema dado. Por ejemplo, si

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

representa la matriz aumentada de un sistema lineal, es fácil determinar la solución a partir de las ecuaciones correspondientes

$$\begin{aligned} x_1 + \qquad\quad 2x_4 &= 4 \\ x_2 \quad - \ \ x_4 &= -5 \\ x_3 + 3x_4 &= 6. \end{aligned}$$

El objetivo de esta sección consiste en manipular la matriz aumentada que representa un sistema lineal dado, hasta llevarla a una forma de la cual puedan deducirse fácilmente las soluciones.

DEFINICIÓN

Una matriz A de $m \times n$ está en **forma escalonada reducida por filas (renglones)** cuando satisface las propiedades siguientes:

(a) Todas las filas que constan sólo de ceros, si las hay, están en la parte inferior de la matriz.

(b) La primera entrada distinta de cero de la fila, al leer de izquierda a derecha, es un 1. Esta entrada se denomina **entrada principal** o **uno principal** de su fila.

(c) Para cada fila que no consta sólo de ceros, el uno principal aparece a la derecha y abajo de cualquier uno principal en las filas que le preceden.

(d) Si una columna contiene un uno principal, el resto de las entradas de dicha columna son iguales a cero.

En una matriz en forma escalonada reducida por filas, los unos principales describen un patrón de escalera ("escalonada") que desciende a partir de la esquina superior izquierda.

Se dice que una matriz de $m \times n$ que satisface las propiedades (a), (b) y (c) está en la **forma escalonada por filas**.

EJEMPLO 1

Las matrices siguientes están en la forma escalonada reducida por filas, ya que satisfacen las propiedades (a), (b), (c) y (d):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las matrices siguientes no están en forma escalonada reducida por filas. (¿Por qué no?)

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

EJEMPLO 2 Las matrices siguientes están en la forma escalonada por filas:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

Una propiedad útil de las matrices en forma escalonada reducida por filas (vea el ejercicio T.9), es que si A es una matriz de $n \times n$ en forma escalonada reducida por filas y no es igual a I_n, por lo menos una fila de A consiste sólo de ceros.

A continuación estudiaremos cómo transformar una matriz dada en una matriz en forma escalonada reducida por filas.

DEFINICIÓN Cualquiera de las siguientes es una **operación elemental por filas (renglones)** sobre una matriz $A = [a_{ij}]$ de $m \times n$:

(a) Intercambiar las filas r y s de A. Es decir, remplazar $a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rn}$ por $a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sn}$ y $a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sn}$ por $a_{r2}, \ldots, a_{rn}$.

(b) Multiplicar la fila r de A por $c \neq 0$. Es decir, remplazar $a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rn}$ por $ca_{r1}, ca_{r2}, \ldots, ca_{rn}$.

(c) Sumar d veces la fila r de A a la fila (renglón) s de A, $r \neq s$. Es decir, remplazar $a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sn}$ por $a_{s1} + da_{r1}, a_{s2} + da_{r2}, \ldots, a_{sn} + da_{rn}$.

Observe que cuando una matriz se considera como la matriz aumentada de un sistema lineal, las operaciones elementales por filas son equivalentes, respectivamente, al intercambio de dos ecuaciones, a la multiplicación de una ecuación por una constante distinta de cero y a la suma de un múltiplo de una ecuación a otra.

EJEMPLO 3 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}.$$

Al intercambiar las filas 1 y 3 de A, obtenemos

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 & -9 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Al multiplicar la tercera fila de A por $\frac{1}{3}$, obtenemos

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Al sumar (-2) veces la fila 2 de A a la fila (renglón) 3 de A, obtenemos

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 6 & -5 \end{bmatrix}.$$

Observe que al obtener D a partir de A, la fila 2 de A *no cambia*. ■

DEFINICIÓN Se dice que una matriz A de $m \times n$ es **equivalente por filas (renglones)** a una matriz B de $m \times n$, si B se puede obtener al aplicar a la matriz A una serie finita de operaciones elementales por fila.

EJEMPLO 4 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si sumamos 2 veces la fila 3 de A a su segunda fila, obtenemos

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -3 & 7 & 8 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

de manera que B es equivalente por filas a A.

Si intercambiamos las filas 2 y 3 de B, obtenemos

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 7 & 8 \end{bmatrix},$$

por lo que C es equivalente por filas a A y también equivalente por filas a A.

Al multiplicar la fila 1 de C por 2, obtenemos

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 7 & 8 \end{bmatrix},$$

por lo que D es equivalente por filas a C. De lo anterior se deduce que D es equivalente por filas a A, ya que D se obtuvo D aplicando tres operaciones elementales por filas a A. ■

Resulta fácil demostrar (ejercicio T.2) que

1. toda matriz es equivalente por filas a sí misma;
2. si A es equivalente por filas a B, B es equivalente por filas a A, y
3. si A es equivalente por filas a B y B es equivalente por filas a C, A es equivalente por filas a C.

De acuerdo con 2, la pareja de afirmaciones "A es equivalente por filas a B" y "B es equivalente por filas a A" puede remplazarse por "A y B son equivalentes por filas".

TEOREMA 1.5 *Toda matriz de $m \times n$ es equivalente por filas (renglones) a una matriz en forma escalonada por filas.* ■

Ilustraremos la demostración del teorema exponiendo los pasos que deben realizarse en una matriz específica, A, para obtener una matriz en forma escalonada por filas que sea equivalente por filas a A. Utilizaremos el siguiente ejemplo para ilustrar el procedimiento.

EJEMPLO 5 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}.$$

El procedimiento para transformar una matriz a una forma escalonada reducida por filas es el siguiente.

Procedimiento

Paso 1. Determinar la primera columna (contando de izquierda a derecha) den A, tal que no todas sus entradas sean cero. Ésta es la **columna pivote**.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Columna pivote de A

Paso 2. Identificar la primera entrada (contando de arriba hacia abajo) distinta de cero en la columna pivote. Este elemento es el **pivote**, que señalamos mediante un círculo.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Pivote

Paso 3. Intercambiar, en caso necesario, la primera fila por aquella en el renglón donde aparece el pivote, de modo que éste se encuentre ahora en la primera fila (renglón). Llamamos a esta nueva matriz A_1.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Se intercambiaron la primera y tercera filas de A.

Paso 4. Multiplicar la primera fila de A_1 por el recíproco del pivote. Así, la entrada de la primera fila del pivote y la columna pivote (donde estaba el pivote) es ahora un 1. Llamamos a la nueva matriz A_2.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

La primera fila de A_1 se multiplicó por $\frac{1}{2}$.

Paso 5. Sumar los múltiplos apropiados de la primera fila de A_2 a las demás filas, para hacer que todas las entradas de la columna pivote, excepto aquella en entrada donde se encuentra el pivote, sean iguales a cero. Así, todas las entradas de la columna pivote y las filas 2, 3, . . . , m se anulan. Llamamos a la nueva matriz A_3.

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

(-2) veces la primera fila de A_2 se le sumó a su cuarta fila.

Paso 6. Identificar B como la submatriz de $(m - 1) \times n$ de A_3, obtenida al ignorar o "tapar" la primera fila de A_3. Repita los pasos 1 a 5 con B.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \end{matrix} \\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Columna pivote de B

Pivote

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \end{matrix} \\ B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se intercambiaron la primera y la segunda filas de B.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \end{matrix} \\ B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

La primera fila de B_1 se multiplicó por $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \end{matrix} \\ B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se sumó 2 veces la primera fila de B_2 se sumó 2 veces a su tercera fila.

Paso 7. Identificar C como la submatriz de $(m-2)\times n$, obtenida al ignorar o "tapar" la primera fila de B_3; no lo borre. Repita los pasos 1 a 5 para C.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Columna pivote de C

Pivote

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

No se intercambiaron las filas de C. La primera fila de C se multiplicó por $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La primera fila de C_2 se sumó (-2) veces el primer renglón de C_2 a su segunda fila.

Paso 8. Identifique D como la submatriz de $(m-3)\times n$ de C_3. A continuación debe tratar de repetir los pasos 1 a 5 sobre D. Sin embargo, como en este caso no existe fila pivote en D, hemos terminado. La matriz, denotada por H, que consiste en la matriz D y las filas sombreadas arriba de D, está en la forma escalonada por renglones.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \end{array}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

Observación Cuando los cálculos se realizan de manera manual, en ocasiones es posible evitar las fracciones mediante una modificación adecuada de los pasos del procedimiento.

EJEMPLO 6 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para determinar una matriz en forma escalonada por filas que sea equivalente por filas a A, modificamos el procedimiento anterior para evitar fracciones y procedemos como sigue.

Sume (-1) veces la fila 1 a la fila 2 para obtener

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Intercambie las filas 1 y 2 de A_1 para obtener

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sume (-2) veces la fila 1 a la fila 2 para obtener

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix},$$

una matriz que está en la forma escalonada y que es equivalente por filas a A. ■

Observación Puede haber más de una matriz en forma escalonada que sea equivalente por filas a una matriz A dada. Por ejemplo, si realizamos la operación siguiente en la matriz H del ejemplo 5, sumar (-1) veces la segunda fila de H a su primera fila, obtenemos la matriz

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que está en la forma escalonada por filas y es equivalente por filas a A. Por lo tanto, tanto H como W son matrices en la forma escalonada por filas, y cada una de ellas es equivalente por filas a A.

En general, si A es una matriz dada, una matriz en forma escalonada por filas que es equivalente por filas a A se denomina **forma escalonada por filas** de A.

TEOREMA 1.6 *Toda matriz de $m \times n$ es equivalente por filas a una única matriz en forma escalonada reducida por filas.* ■

La matriz del teorema 1.6 se denomina **forma escalonada reducida por filas** de A.

Ilustraremos la demostración de este teorema llevando a cabo los pasos que deben realizarse sobre una matriz A específica para obtener una matriz en la forma escalonada reducida por filas equivalente a A. Omitiremos la demostración de que la matriz obtenida es única. El ejemplo siguiente se utilizará para ilustrar el procedimiento.

EJEMPLO 7 Determine la forma escalonada reducida por filas de la matriz A del ejemplo 5.

Solución Iniciamos con la forma escalonada por filas H de A que obtuvimos en el ejemplo 5. Sumamos múltiplos adecuados de cada fila de H, que no está formada sólo por ceros, para hacer cero todas las entradas por arriba del uno principal. Así, iniciamos sumando $\left(-\frac{3}{2}\right)$ veces la tercera fila de H a su segunda fila:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora, sumamos $\frac{5}{2}$ veces la tercera fila de J_1 a su primera fila:

$$J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{19}{4} & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por último, sumamos (-1) veces la segunda fila de J_2 a su primera fila:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & \frac{19}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que está en la forma escalonada reducida por filas y es equivalente por filas a A.

Observe que en este ejemplo iniciamos con la fila inferior distinta de cero, y trabajamos hacia arriba para hacer ceros las entradas por encima de los 1 principales. ■

Observación El procedimiento que se dio aquí para determinar la forma escalonada reducida por filas no es la única posible. Como alternativa, podríamos primero hacer cero todas las entradas por debajo del 1 principal y luego, de manera inmediata, hacer cero las entradas por arriba del 1 principal. Este procedimiento no es, sin embargo, tan eficiente como el que describimos previamente. En la práctica, no perdemos tiempo identificando las matrices $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, C_1, C_2, \ldots$, etc. Sólo iniciamos con la matriz dada y la transformamos a la forma escalonada reducida por filas.

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES

A continuación aplicaremos estos resultados a la resolución de sistemas lineales.

TEOREMA 1.7 *Sean $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ dos sistemas lineales, cada uno con m ecuaciones y n incógnitas. Si las matrices aumentadas $\left[A \;\vdots\; \mathbf{b}\right]$ y $\left[C \;\vdots\; \mathbf{d}\right]$ de estos sistemas son equivalentes por filas, ambos sistemas lineales tienen exactamente las mismas soluciones.*

Demostración Esto es consecuencia de la definición de equivalencias por filas, y del hecho de que las tres operaciones elementales por filas sobre la matriz aumentada resultan ser las tres modificaciones sobre un sistema lineal que se analiza en la sección 1.1, con lo cual se obtiene un sistema lineal que tiene las mismas soluciones que el sistema dado. Observe, asimismo, que si un sistema no tiene solución, el otro tampoco. ■

COROLARIO 1.1 *Si A y C son dos matrices de $m \times n$ equivalentes por filas, los sistemas lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tienen exactamente las mismas soluciones.*

Demostración Ejercicio T.3. ■

Los resultados que tenemos hasta el momento nos proporcionan dos métodos para resolver sistemas lineales. La idea central consiste en iniciar con el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, obtener la matriz por bloques $\left[C \;\vdots\; \mathbf{d}\right]$ ya sea en la forma escalonada por filas o en la forma escalonada reducida por filas que sea equivalente por filas a la matriz aumentada $\left[A \;\vdots\; \mathbf{b}\right]$. Ahora, $\left[C \;\vdots\; \mathbf{d}\right]$ representa el sistema lineal $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$, que es más fácil de resolver debido a la estructura más sencilla de $\left[C \;\vdots\; \mathbf{d}\right]$, y el conjunto de todas las soluciones para este sistema proporciona precisamente el conjunto de todas las soluciones para el sistema dado, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. El método en donde $\left[C \;\vdots\; \mathbf{d}\right]$ está reducido a la forma escalonada por filas se denomina **reducción de Gauss*-Jordan****; el método

*Carl Friedrich Gauss (1777-1855) nacido en una familia pobre de obreros en Brunswick y muerto en Gotinga, Alemania, ha sido uno de los matemáticos más famosos del mundo. Fue un niño prodigio incomprendido por su padre, quien lo llamaba "contemplador de estrellas". Sin embargo, su genio logró impresionar lo suficiente a sus maestros como para que obtuviera del duque de Brunswick una beca para que pudiera asistir a la escuela secundaria local. Durante su adolescencia realizó descubrimientos originales en teoría de números y comenzó a especular acerca de la geometría no euclidiana. Sus obras científicas incluyen importantes en donde $\left[C \;\vdots\; \mathbf{d}\right]$ está en la forma escalonada por filas se denomina **eliminación de Gauss**. Hablando estrictamente, el método alterno de Gauss-Jordan descrito en la observación anterior no es tan eficiente como el que se utilizó en los ejemplos 5 y 6. En la práctica, ni la reducción de Gauss-Jordan ni la eliminación de Gauss se utilizan tanto como el método que implica la factorización LU de A, del que hablaremos en la sección 1.8. Sin embargo la reducción de Gauss-Jordan y la eliminación de Gauss son útiles para resolver problemas de menos envergadura; en este libro emplearemos el primer procedimiento con más frecuencia.

El procedimiento de reducción de Gauss-Jordan para resolver el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es el siguiente.

Paso 1. Formar la matriz aumentada $\left[A \;\vdots\; \mathbf{b}\right]$.

Paso 2. Transformar la matriz aumentada $\left[A \;\vdots\; \mathbf{b}\right]$ a su forma escalonada reducida por filas $\left[C \;\vdots\; \mathbf{d}\right]$ mediante operaciones elementales por filas.

Paso 3. Para cada fila distinta de cero de la matriz $\left[C \;\vdots\; \mathbf{d}\right]$, se despeja la incógnita correspondiente a la entrada principal de cada fila asociada con la entrada principal de esa fila. Las filas que constan completamente de ceros se pueden ignorar, pues la ecuación correspondiente será satisfecha por cualesquiera valores de las incógnitas.

El procedimiento de eliminación gaussiano para resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es como sigue.

Paso 1. Formar la matriz aumentada $\left[A \;\vdots\; \mathbf{b}\right]$.

Paso 2. Por medio de operaciones elementales por filas, obtener una forma escalonada por filas $\left[C \;\vdots\; \mathbf{d}\right]$ de la matriz aumentada $\left[A \;\vdots\; \mathbf{b}\right]$.

Paso 3. Resolver el sistema lineal correspondiente a $\left[C \;\vdots\; \mathbf{d}\right]$ por medio de **sustitución hacia atrás** (ilustrado en el ejemplo 11). Las filas que constan únicamente de ceros pueden ignorarse, ya que la ecuación correspondiente será satisfecha por cualesquiera valores de las incógnitas.

Los siguientes ejemplos ilustran el procedimiento de Gauss-Jordan.

---

contribuciones a la teoría de números, a la astronomía matemática, a la geografía matemática, a la estadística, a la geometría diferencial y al magnetismo. Sus diarios y notas privadas contienen muchos otros descubrimientos que no publicó.

Hombre austero y conservador que tuvo pocos amigos y una vida privada poco afortunada, se preocupó mucho por dar el crédito de los descubrimientos científicos a sus fuentes originales. Cuando sus estudios se basaban en resultados de otros, tenía cuidado de reconocerlo; y cuando otros descubrían de manera independiente algunos resultados en sus notas privadas, rápidamente reclamaba su propiedad.

En sus investigaciones utilizó un método que después se generalizó para la reducción por filas de una matriz. Aunque dicho método se aplicaba en China desde casi 2000 años antes, lleva el nombre de este ilustre matemático en su honor.

** Wilhelm Jordan (1842-1899) nació en el sur de Alemania. Asistió a la Universidad en Stuttgart y en 1868 se convirtió en profesor de tiempo completo de geodesia en la escuela técnica de Karlsruhe, Alemania. Participó en la medición de varias regiones de Alemania. Jordan fue un prolífico autor cuya obra principal, *Handbuch der Vermessungskunde* (*Manual de geodesia*) fue traducido al francés, al italiano y al ruso; además de magnífico autor, se le consideraba un excelente maestro. Por desgracia, el método de reducción de Gauss-Jordan ha sido ampliamente atribuido a Camille Jordan (1838-1922), matemático francés bastante conocido. Además, parece que el método fue descubierto también, de manera independiente y en la misma época, por B. I. Clasen, un sacerdote avecindado en Luxemburgo. Este bosquejo biográfico se basa en el excelente artículo de S. C. Althoen y R. McLaughlin, "Gauss-Jordan reduction: A Brief History", *MAA Monthly,* 94, 1987, páginas 130-142.

EJEMPLO 8 Resolver el sistema lineal

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 9 \\ 2x - y + z &= 8 \\ 3x \qquad - z &= 3 \end{aligned} \tag{1}$$

mediante la reducción de Gauss-Jordan.

Solución ***Paso 1.*** La matriz aumentada de este sistema lineal es

$$\left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right].$$

Paso 2. Ahora transformamos como sigue la matriz del paso 1 a su forma escalonada reducida por filas:

$$\left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right]$$ Se sumó (-2) veces la primera fila a la segunda. Se sumó (-3) veces la primera fila a la tercera fila.

$$\left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right]$$ Se multiplicó la segunda fila por $\left(-\frac{1}{5}\right)$.

$$\left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right]$$ Se sumó 6 veces la segunda fila a su tercera fila.

$$\left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$ La tercera fila se multiplicó por $\left(-\frac{1}{4}\right)$.

$$\left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$ Se sumó (-1) veces la tercera fila a su primera fila.

$$\left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$ Se sumó (-3) veces la tercera fila a su primera fila.

$$\left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$ Se sumó (-2) veces la segunda fila a su primera fila.

En consecuencia, la matriz aumentada es equivalente por filas a la matriz

$$\left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \tag{2}$$

en forma escalonada reducida por filas.

Paso 3. El sistema lineal representado por (2) es

$$\begin{aligned} x \qquad &= 2 \\ y \quad &= -1 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

de modo que la única solución del sistema lineal dado (1) es

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= -1 \\ z &= 3. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 9 Resolver el sistema lineal

$$\begin{aligned} x + y + 2z - 5w &= 3 \\ 2x + 5y - z - 9w &= -3 \\ 2x + y - z + 3w &= -11 \\ x - 3y + 2z + 7w &= -5 \end{aligned} \tag{3}$$

mediante la reducción de Gauss-Jordan.

Solución ***Paso 1***. La matriz aumentada de este sistema lineal es

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -9 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -11 \\ 1 & -3 & 2 & 7 & -5 \end{array}\right].$$

Paso 2. La matriz aumentada es equivalente por filas a la matriz (verifique)

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \tag{4}$$

que está en forma escalonada reducida por filas.

Paso 3. El sistema lineal representado en (4) es

$$\begin{aligned} x \qquad + 2w &= -5 \\ y \quad - 3w &= 2 \\ z - 2w &= 3. \end{aligned}$$

Hemos ignorado la fila en (4), ya que consta completamente de ceros.

Al despejar en cada ecuación la incógnita correspondiente a la entrada principal de cada fila de (4), obtenemos

$$\begin{aligned} x &= -5 - 2w \\ y &= 2 + 3w \\ z &= 3 + 2w. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si hacemos $w = r$, cualquier número real, una solución del sistema lineal (3) es

$$\begin{aligned} x &= -5 - 2r \\ y &= 2 + 3r \\ z &= 3 + 2r \\ w &= r. \end{aligned} \tag{5}$$

Como r puede tener asignado cualquier número real en (5), el sistema lineal dado (3) tiene una infinidad de soluciones. ■

EJEMPLO 10 Resolver el sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} - 3x_4 + x_5 \phantom{{}+2x_6} &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 + 2x_6 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} - 3x_4 + 2x_5 + x_6 &= 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 9x_4 + 4x_5 + 3x_6 &= 9 \end{aligned} \tag{6}$$

mediante la reducción de Gauss-Jordan.

Solución ***Paso 1.*** La matriz aumentada de este sistema lineal es

$$\left[\begin{array}{cccccc:c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & -9 & 4 & 3 & 9 \end{array}\right].$$

Paso 2. La matriz aumentada es equivalente por filas a la matriz (verifique)

$$\left[\begin{array}{cccccc:c} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{7}$$

Paso 3. El sistema lineal representado en (7) es

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} - 3x_4 \phantom{{}+x_5} - x_6 &= 0 \\ x_3 \phantom{{}-3x_4+x_5} + 2x_6 &= 1 \\ x_5 + x_6 &= 2. \end{aligned}$$

Al despejar en cada ecuación la incógnita correspondiente a la entrada principal de cada fila de (7), obtenemos

$$\begin{aligned} x_1 &= x_6 + 3x_4 - 2x_2 \\ x_3 &= 1 - 2x_6 \\ x_5 &= 2 - x_6. \end{aligned}$$

Haciendo $x_6 = r$, $x_4 = s$ y $x_2 = t$, una solución para el sistema lineal (6) es

$$\begin{aligned} x_1 &= r + 3s - 2t \\ x_2 &= t \\ x_3 &= 1 - 2r \\ x_4 &= s \\ x_5 &= 2 - r \\ x_6 &= r, \end{aligned} \tag{8}$$

donde r, s y t son cualesquiera números reales. Así, (8) es la solución para el sistema lineal dado en (6); y como a r, s y t se les puede asignar cualesquiera números reales, el sistema lineal dado en (6) tiene una infinidad de soluciones. ■

El ejemplo siguiente ilustra el procedimiento de eliminación gaussiana y la sustitución hacia atrás.

EJEMPLO 11 Resuelva mediante eliminación gaussiana el sistema lineal dado en el ejemplo 8.

Solución ***Paso 1.*** La matriz aumentada del sistema es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right].$$

Paso 2. Una forma escalonada por filas de la matriz aumentada es (verifique)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Esta matriz aumentada corresponde al sistema lineal equivalente

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 9 \\ y + z &= 2 \\ z &= 3. \end{aligned}$$

Paso 3. El proceso de sustitución hacia atrás inicia con la ecuación $z = 3$. Después, sustituimos este valor de z en la ecuación que le precede, $y + z = 2$, y despejamos y para obtener $y = 2 - z = 2 - 3 = -1$. Por último, sustituimos en la primera ecuación, $x + 2y + 3z = 9$, los valores para y y z que acabamos de obtener, y despejamos x para obtener $x = 9 - 2y - 3z = 9 + 2 - 9 = 2$. En consecuencia, la solución es $x = 2$, $y = -1$ y $z = 3$. ■

EJEMPLO 12 Resolver el sistema lineal

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4w &= 5 \\ x + 3y + 5z + 7w &= 11 \\ x - z - 2w &= -6 \end{aligned} \tag{9}$$

mediante la reducción de Gauss-Jordan.

Solución ***Paso 1.*** La matriz aumentada de este sistema lineal es

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -6 \end{array}\right].$$

Paso 2. La matriz aumentada es equivalente por filas a la matriz (verifique)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \tag{10}$$

Paso 3. La última ecuación del sistema lineal representada en (10) es

$$0x + 0y + 0z + 0w = 1,$$

la cual no tiene valores para x, y, z y w que la satisfagan. En consecuencia, el sistema lineal (9) dado no tiene solución. ■

El último ejemplo es característico de la forma en que un sistema lineal no tiene solución. Es decir, un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en n incógnitas no tiene solución si y sólo si su matriz aumentada es equivalente por filas (renglones) a una matriz en forma escalonada reducida por filas o en forma escalonada por filas, la cual tiene unas filas cuyos primeros n elementos son iguales a cero, y cuyo $(n + 1)$-ésimo elemento es 1 (ejercicio T.4).

Los sistemas lineales de los ejemplos 8, 9 y 10 tuvieron por lo menos una solución, mientras que el sistema del ejemplo 12 no tuvo solución alguna. Los sistemas lineales que tienen por lo menos una solución se denominan **consistentes**; a los sistemas lineales sin solución se les llama **inconsistentes**. Cada sistema lineal inconsistente produce la situación que se ilustra en el ejemplo 12.

Observaciones

1. Conforme realizamos operaciones elementales por filas, en el proceso de transformar la matriz aumentada a la forma escalonada reducida por filas podemos encontrarnos con una fila que tiene n entradas que son ceros y una entrada $(n{+}1)$-ésima distinta de cero. En este caso, podemos detener nuestros cálculos y concluir que el sistema lineal dado es inconsistente.
2. En ocasiones es necesario resolver k sistemas lineales

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1, \qquad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2, \ldots, \qquad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_k,$$

con la misma matriz $m \times n$ de coeficientes, A. En lugar de resolver cada sistema de forma separada, procedemos como sigue. Formamos la matriz aumentada de $m \times (n + k)$

$$\left[A \;\vdots\; \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_k\right].$$

La forma escalonada reducida por filas

$$\left[C \;\vdots\; \mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{d}_k\right]$$

de esta matriz corresponde a los sistemas lineales

$$C\mathbf{x} = \mathbf{d}_1, \qquad C\mathbf{x} = \mathbf{d}_2, \ldots, \qquad C\mathbf{x} = \mathbf{d}_k,$$

que tiene las mismas soluciones que el correspondiente sistema lineal dado. Este enfoque será útil en la sección 6.7. Los ejercicios 35 y 36 le piden investigar esta técnica.

SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Un sistema lineal de la forma

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \tag{11}$$

es un **sistema homogéneo**. También podemos escribir (11) en forma matricial como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{12}$$

La solución

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

del sistema homogéneo (12) se conoce como **solución trivial**. Una solución $x_1, x_2, \ldots x_n$ de un sistema homogéneo en donde no todas las x_i se anulen es una **solución no trivial**. Vemos que un sistema homogéneo siempre es consistente, pues siempre tiene solución trivial.

EJEMPLO 13 Considere el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ -x + 3y + 2z &= 0 \\ 2x + y - 2z &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

La matriz aumentada de este sistema,

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right],$$

es equivalente por filas (verifique) a

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

que está en forma escalonada reducida por filas. Por lo tanto, la solución de (13) es

$$x = y = z = 0,$$

lo cual significa que el sistema homogéneo (13) sólo tiene la solución trivial. ■

EJEMPLO 14 Considere el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 0 \\ x + w &= 0 \\ x + 2y + z &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

La matriz aumentada de este sistema,

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

es equivalente por filas (verifique) a

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

que está en forma escalonada reducida por filas. Por lo tanto, la solución de (14) es

$$\begin{aligned} x &= -r \\ y &= r \\ z &= -r \\ w &= r, \end{aligned}$$

donde r es cualquier número real. Por ejemplo, si hacemos $r = 2$, entonces

$$x = -2, \quad y = 2, \quad z = -2, \quad w = 2$$

es una solución no trivial para este sistema homogéneo. Esto es,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(Verifique calculando el producto matricial del lado izquierdo.) En consecuencia, este sistema lineal tiene una infinidad de soluciones. ■

El ejemplo 14 muestra que un sistema homogéneo puede tener una solución no trivial. El siguiente teorema trata un caso donde esto ocurre.

TEOREMA 1.8 *Un sistema homogéneo de m ecuaciones en n incógnitas siempre tiene una solución no trivial si $m < n$, es decir, si el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones.*

Demostración Sea C la matriz en forma escalonada reducida por filas, equivalente por filas a A. Entonces los sistemas homogéneos $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ son equivalentes. Si r es el número de filas distintas de cero en C, entonces $r \leq m$. Si $m < n$, concluimos que $r < n$. Así, estamos resolviendo r ecuaciones en n incógnitas, y podemos despejar r incógnitas en términos de las $n - r$ restantes, de modo que estas últimas pueden asumir cualquier valor. En consecuencia, si una de estas $n - r$ incógnitas es distinta de cero, obtenemos una solución no trivial de $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y, con ello, de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. ■

También utilizaremos el teorema 1.8 en la siguiente forma equivalente. Si A es $m \times n$ y $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial, entonces $m \geq n$.

El siguiente resultado es importante en el estudio de las ecuaciones diferenciales. (Vea la sección 9.2.)

Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, un sistema lineal consistente. Si $\mathbf{x}_p$ es una solución particular del sistema no homogéneo dado y $\mathbf{x}_h$ es una solución del sistema homogéneo asociado, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$ es una solución del sistema dado $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Además, cada solución $\mathbf{x}$ del sistema lineal no homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede escribirse como $\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$, donde $\mathbf{x}_p$ es una solución particular del sistema no homogéneo dado y $\mathbf{x}_h$ es una solución del sistema homogéneo asociado, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Para una demostración, vea el ejercicio T.13.

EJEMPLO 15 Considere el sistema lineal dado en el ejemplo 9. Una solución para este sistema lineal estaba dada por

$$\begin{aligned} x &= -5 - 2r \\ y &= 2 + 3r \\ z &= 3 + 2r \\ w &= r, \end{aligned}$$

donde r es cualquier número real. Si hacemos

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix},$$

la solución puede expresarse como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -5 - 2r \\ 2 + 3r \\ 3 + 2r \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2r \\ 3r \\ 2r \\ r \end{bmatrix}.$$

Hacemos

$$\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_h = \begin{bmatrix} -2r \\ 3r \\ 2r \\ r \end{bmatrix}.$$

Entonces $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$. Además, $\mathbf{x}_p$ es una solución particular del sistema dado y $\mathbf{x}_h$ es una solución del sistema homogéneo asociado [verifique que $A\mathbf{x}_p = \mathbf{b}$ y $A\mathbf{x}_h = \mathbf{0}$, donde A es la matriz de coeficientes del ejemplo 9 y $\mathbf{b}$ es el lado derecho de la ecuación (3)]. ■

Observación Los sistemas homogéneos son especiales y desempeñan un papel clave en los últimos capítulos del libro.

INTERPOLACIÓN POLINOMIAL

Suponga que nos dan n puntos distintos (x_1, y_1), (x_2, y_2),. . . , (x_n, y_n). ¿Es posible determinar un polinomio de grado $n - 1$ o menor que "interpole" los datos, es decir, que pase por los n puntos? De acuerdo con lo anterior, el polinomio que buscamos tiene la forma

$$y = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0.$$

Los n puntos dados pueden utilizarse para obtener un sistema lineal $n \times n$, cuyas incógnitas son a_0, a_1,. . . , a_{n-1}. Se puede demostrar que este sistema lineal tiene una única solución. En consecuencia, existe un único polinomio de interpolación.

Consideremos a detalle el caso en que $n = 3$. En ese caso tenemos dados los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), donde $x_1 \neq x_2$, $x_1 \neq x_3$ y $x_2 \neq x_3$ y buscamos el polinomio

$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0. \tag{15}$$

Al sustituir los puntos dados en (15), obtenemos el sistema lineal

$$\begin{aligned} a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 &= y_1 \\ a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0 &= y_2 \\ a_2x_3^2 + a_1x_3 + a_0 &= y_3. \end{aligned} \tag{16}$$

En la sección 3.2 demostraremos que el sistema lineal (16) tiene una única solución. De acuerdo con ello, hay un único polinomio cuadrático de interpolación. En general, existe un único polinomio de interpolación de grado, a lo más, $n - 1$ que pase por n puntos dados.

EJEMPLO 16 Determinar el polinomio cuadrático que interpola los puntos (1, 3), (2, 4), (3, 7).

Solución Al plantear el sistema lineal (16) tenemos

$$\begin{aligned} a_2 + a_1 + a_0 &= 3 \\ 4a_2 + 2a_1 + a_0 &= 4 \\ 9a_2 + 3a_1 + a_0 &= 7 \end{aligned}$$

cuya solución es (verifique)

$$a_2 = 1, \qquad a_1 = -2, \qquad a_0 = 4.$$

Por lo tanto, el polinomio cuadrático de interpolación es

$$y = x^2 - 2x + 4.$$

Su gráfica, que se muestra en la figura 1.17, pasa por los tres puntos dados. ■

En este momento pueden estudiarse las secciones 2.4, circuitos eléctricos, y 2.5, cadenas de Markov, así como el capítulo 11, programación lineal, en los cuales se utiliza el material analizado en esta sección.