CAPÍTULO 3

DETERMINANTES

3.1 DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

En esta sección definiremos el concepto de determinante, y estudiaremos algunas de sus propiedades. Los determinantes se utilizaron por primera vez en la solución de sistemas lineales. Aunque el método desarrollado en el capítulo 1 para resolver tales sistemas es mucho más eficiente que los métodos que involucran determinantes, éstos son útiles en otros aspectos del álgebra lineal. Consideraremos algunos de estos aspectos en el capítulo 8. En primer lugar, trataremos brevemente las permutaciones, que se utilizan después en nuestra definición de determinante. En este capítulo, todas las matrices son cuadradas.

DEFINICIÓN Sea $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ el conjunto de enteros de 1 a n, ordenados en forma ascendente. Un reordenamiento $j_1 j_2 \cdots j_n$ de los elementos de S es una **permutación** de S.

Para ilustrar esta definición, sea $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Entonces 4132 es una permutación de S. Corresponde a la función $f: S \to S$ definida por

$$\begin{aligned} f(1) &= 4 \\ f(2) &= 1 \\ f(3) &= 3 \\ f(4) &= 2. \end{aligned}$$

Podemos colocar cualquiera de los n elementos de S en la primera posición, cualquiera de los $n - 1$ elementos restantes en la segunda posición, cualquiera de los $n - 2$ elementos restantes en la tercera, y así sucesivamente, hasta llegar a la n-ésima posición, la cual sólo puede ser ocupada por el elemento que queda. Entonces, hay

$$n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 \tag{1}$$

permutaciones de S. Denotamos el conjunto de todas las permutaciones de S como S_n.

El producto indicado en la expresión (1) se denota

$$n!, \quad \textbf{\textit{n} factorial}.$$

Tenemos que

$$
\begin{aligned}
&1! = 1\\
&2! = 2 \cdot 1 = 2\\
&3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6\\
&4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24\\
&5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120\\
&6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720\\
&7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040\\
&8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40{,}320\\
&9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362{,}880.
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 1

S_1 consta sólo de $1! = 1$ permutación del conjunto $\{1\}$, a saber, 1; S_2 consta de $2! = 2 \cdot 1 = 2$ permutaciones del conjunto $\{1, 2\}$, a saber, 12 y 21; S_3 consta de $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutaciones del conjunto $\{1, 2, 3\}$, a saber, 123, 231, 312, 132, 213 y 321. ■

Se dice que una permutación $j_1 j_2 \cdots j_n$ de $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ tiene una **inversión** si un entero mayor j_r precede a uno menor j_s. Una permutación se denomina **par** o **impar** si el número total de inversiones en ella es par o impar, respectivamente. Entonces, la permutación 4132 de $S = \{1, 2, 3, 4\}$ tiene cuatro inversiones: 4 antes de 1, 4 antes de 3, 4 antes de 2 y 3 antes de 2. Por lo tanto, es una permutación par.

Si $n \geq 2$, puede demostrarse que S_n tiene $n!/2$ permutaciones pares y un número igual de permutaciones impares.

EJEMPLO 2

En S_2, la permutación 12 es par, ya que no tiene inversiones; la permutación 21 es impar, pues tiene una inversión. ■

EJEMPLO 3

Las permutaciones pares en S_3 son 123 (sin inversiones), 231 (dos inversiones: 21 y 31) y 312 (dos inversiones: 31 y 32). Las permutaciones impares en S_3 son 132 (una inversión: 32); 213 (una inversión: 21), y 321 (tres inversiones: 32, 31 y 21). ■

DEFINICIÓN

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de $n \times n$. Definimos el **determinante** de A (que se escribe $\det(A)$ o $|A|$) como

$$\det(A) = |A| = \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \tag{2}$$

donde la suma varía sobre todas las permutaciones $j_1 j_2 \cdots j_n$ del conjunto $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. El signo se toma como + o como – si la permutación $j_1 j_2 \cdots j_n$ es par o impar, respectivamente.

En cada término $(\pm) a_{1_{j_1}} a_{1_{j_2}} \cdots a_{n_{j_n}}$ del $\det(A)$, los subíndices de las filas aparecen en su orden natural, mientras que los subíndices de las columnas están en el orden $j_1 j_2 \cdots j_n$. Como la permutación $j_1 j_2 \cdots j_n$ no es más que un reordenamiento de los números desde 1 hasta n, no tiene repeticiones. En consecuencia, cada término en $\det(A)$ es un producto de n elementos de A, cada uno con su signo adecuado, en el cual hay exactamente un elemento de cada fila y exactamente un elemento de cada columna. Dado que sumamos sobre todas las permutaciones del conjunto $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, la expresión para $\det(A)$ tiene $n!$ términos en la suma.

EJEMPLO 4 Si $A = [a_{11}]$ es una matriz de 1×1, entonces S_1 sólo tiene una permutación, la permutación 1, que es par. Así, $\det(A) = a_{11}$. ■

EJEMPLO 5 Si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

es una matriz de 2×2, para obtener $\det(A)$ escribimos los términos

$$a_{1\_}a_{2\_} \quad \text{y} \quad a_{1\_}a_{2\_},$$

y llenamos los espacios en blanco con todos los elementos posibles de S_2; entonces, los subíndices vienen a ser 12 y 21. Como 12 es una permutación par, el término $a_{11}a_{22}$ tiene asociado un signo $+$; como 21 es una permutación impar, el término $a_{12}a_{21}$ tiene asociado un signo $-$. Por lo tanto,

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

También podemos obtener $\det(A)$ formando el producto de las entradas en la línea que va de izquierda a derecha en el siguiente diagrama, y restando de este producto el producto de las entradas en la línea que va de derecha a izquierda.

$$\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}.$$

Por lo tanto, si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix},$$

entonces $\det(A) = (2)(5) - (-3)(4) = 22$. ■

EJEMPLO 6 Si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

para calcular $\det(A)$ escribimos los seis términos

$$a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}, \quad a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}, \quad a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}, \quad a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_},$$
$$a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_} \quad \text{y} \quad a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}.$$

Utilizamos todos los elementos de S_3 para llenar los espacios en blanco y, anteponemos a cada término el signo $+$ o el signo $-$ según si la permutación es par o impar, con lo cual obtenemos que

$$\begin{aligned} \det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ -a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned} \tag{3}$$

También podemos obtener $\det(A)$ como sigue. Repetimos la primera y segunda columnas de A, como se muestra a continuación; formamos la suma de los productos de las entradas sobre las líneas que van de izquierda a derecha, y restamos a este número los productos de las entradas en las líneas que van de derecha a izquierda (verifique).

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}.$$

■

Precaución Téngase presente que los métodos descritos en los ejemplos 5 y 6 para evaluar det(A) no se aplican para $n \geq 4$.

EJEMPLO 7 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Evaluar det(A).

Solución Al sustituir en (3), encontramos que

$$\begin{aligned} \det(A) &= (1)(1)(2) + (2)(3)(3) + (3)(2)(1) \\ &\quad - (1)(3)(1) - (2)(2)(2) - (3)(1)(3) = 6. \end{aligned}$$

Podríamos obtener el mismo resultado aplicando el sencillo método descrito al finalizar la página anterior (verifique). ■

Tal vez ya se le ha ocurrido al lector que esta forma de calcular el determinante puede ser en extremo tediosa para un valor considerable de n. De hecho, $10! = 3.6288 \times 10^6$ y $20! = 2.4329 \times 10^{18}$ son números enormes. Pronto desarrollaremos varias propiedades de los determinantes, que reducirán en gran medida la magnitud de los cálculos requeridos.

Las permutaciones se estudian con cierto detalle en el cursos de álgebra abstracta y en cursos de teoría de grupos. Nosotros no utilizaremos las permutaciones en nuestros métodos para calcular los determinantes, aunque sí nos será útil la siguiente propiedad de las permutaciones: si intercambiamos dos números en la permutación $j_1 j_2 \cdots j_n$, entonces el número de inversiones aumenta o disminuye en un número impar (ejercicio T.1).

EJEMPLO 8 El número de inversiones en la permutación 54132 es 8. El número de inversiones en la permutación 52134 es 5. La permutación 52134 se obtuvo intercambiando los dígitos 2 y 4 en 54132. El número de inversiones difiere en 3, un número impar. ■

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

TEOREMA 3.1 *Los determinantes de una matriz y de su transpuesta son iguales; es decir,* $\det(A^T) = \det(A)$.

Demostración Sean $A = [a_{ij}]$ y $A^T = [b_{ij}]$, donde $b_{ij} = a_{ji}$ ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$). Entonces, de acuerdo con (2), tenemos

$$\det(A^T) = \sum (\pm) b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n} = \sum (\pm) a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}. \tag{4}$$

Ahora podemos reordenar los factores en el término $a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}$ de modo que los índices de las filas aparezcan en su orden natural. Así,

$$b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n} = a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} = a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}.$$

Con base en las propiedades de las permutaciones discutidas en un curso de álgebra abstracta,* puede demostrarse que tanto la permutación $k_1 k_2 \cdots k_n$, que determina el signo

---

* Vea J. Fraleigh, *A First Course in Abstract Algebra*, 7a. ed., Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 2003; y J. Gallian, *Contemporary Abstract Algebra*, 5a. ed., Massachusetts: Houghton Mifflin, 2002.

asociado con $a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$, como la permutación $j_1j_2\cdots j_n$, que determina el signo asociado con $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$, son ambas impares o ambas pares. Por ejemplo,

$$b_{13}b_{24}b_{35}b_{41}b_{52} = a_{31}a_{42}a_{53}a_{14}a_{25} = a_{14}a_{25}a_{31}a_{42}a_{53};$$

el número de inversiones en la permutación 45123 es 6, y el número de inversiones en la permutación 34512 también es 6. Como los términos y los signos correspondientes en (2) y (4) coinciden, podemos concluir que $\det(A) = \det(A^T)$. ■

EJEMPLO 9 Sea A la matriz del ejemplo 7. Entonces

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Al sustituir en (3), tenemos que

$$\begin{aligned} \det(A^T) &= (1)(1)(2) + (2)(1)(3) + (3)(2)(3) \\ &\quad -(1)(1)(3) - (2)(2)(2) - (3)(1)(3) \\ &= 6 = \det(A). \end{aligned}$$ ■

El teorema 3.1 nos permite remplazar "fila" por "columna" en muchas de las otras propiedades de los determinantes; veremos la forma de hacerlo en el siguiente teorema.

TEOREMA 3.2 *Si la matriz B se obtiene intercambiando dos filas o intercambiando dos columnas de A entonces* $\det(B) = -\det(A)$.

Demostración Supongamos que B se obtiene a partir de A, al intercambiar las filas r y s y supongamos que $r < s$. Entonces tenemos $b_{rj} = a_{sj}$, $b_{sj} = a_{rj}$ y $b_{ij} = a_{ij}$ para $i \neq r$, $i \neq s$. Ahora,

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum (\pm) b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{rj_r} \cdots b_{sj_s} \cdots b_{nj_n} \\ &= \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{sj_r} \cdots a_{rj_s} \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{rj_s} \cdots a_{sj_r} \cdots a_{nj_n}. \end{aligned}$$

La permutación $j_1j_2\cdots j_s\cdots j_r\cdots j_n$ se obtiene de la permutación $j_1j_2\cdots j_r\cdots j_s\cdots j_n$ mediante el intercambio de dos números; el número de inversiones en la primera difiere en un número impar del número de inversiones en la segunda (vea el ejercicio T.1). Esto significa que el signo de cada término en $\det(B)$ es el negativo del signo del término correspondiente en $\det(A)$. Por lo tanto, $\det(B) = -\det(A)$.

Supongamos ahora que B se obtiene a partir de A, al intercambiar dos columnas de A. Entonces B^T se obtiene de A^T, intercambiando dos filas de A^T. De esta manera, $\det(B^T) = \det(A^T)$, pero $\det(B^T) = \det(B)$ y $\det(A^T) = \det(A)$. Por lo tanto, $\det(B) = -\det(A)$. ■

En los siguientes resultados, daremos las demostraciones sólo para las filas de A; para las demostraciones del caso correspondiente para las columnas, se procede como al final de la demostración del teorema 3.2.

EJEMPLO 10 Tenemos que

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7.$$ ■

TEOREMA 3.3 *Si dos filas (columnas) de A son iguales, entonces* $\det(A) = 0$.

Demostración Supongamos que las filas r y s de A son iguales. Intercambiamos las filas r y s de A para obtener una matriz B. Entonces $\det(B) = -\det(A)$. Por otro lado, $B = A$, de modo que $\det(B) = \det(A)$. Así, $\det(A) = -\det(A)$, por lo que $\det(A) = 0$. ■

EJEMPLO 11 Utilizando el teorema 3.3, se sigue que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

■

TEOREMA 3.4 *Si una fila (columna) de A consta sólo de ceros, entonces* $\det(A) = 0$.

Demostración Supongamos que la r-ésima fila de A consta completamente de ceros. Como cada término en la definición de determinante de A contiene un factor de la r-ésima fila, entonces cada término en $\det(A)$ es igual a cero. Por lo tanto, $\det(A) = 0$. ■

EJEMPLO 12 Con base en el teorema 3.4, resulta que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

■

TEOREMA 3.5 *Si B se obtiene a partir de A multiplicando una fila (columna) de A por un número real c, entonces* $\det(B) = c\det(A)$.

Demostración Supongamos que la r-ésima fila de $A = [a_{ij}]$ se multiplica por c para obtener $B = [b_{ij}]$. Entonces, $b_{ij} = a_{ij}$ si $i \neq r$ y $b_{rj} = ca_{rj}$. Obtenemos $\det(B)$ a partir de la ecuación (2), como

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum (\pm) b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{rj_r} \cdots b_{nj_n} \\ &= \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (ca_{rj_r}) \cdots a_{nj_n} \\ &= c\left(\sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{rj_r} \cdots a_{nj_n}\right) = c\det(A). \end{aligned}$$

■

Ahora podemos utilizar el teorema 3.5 para simplificar el cálculo de $\det(A)$, factorizando los factores comunes de las filas y las columnas de A.

EJEMPLO 13 Tenemos que

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = (2)(3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6(4-1) = 18.$$

■

EJEMPLO 14 Tenemos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (2)(3)(0) = 0.$$

En este caso, primero factorizamos el factor común 2 de la tercera fila, luego 3 de la tercera columna, y finalmente empleamos el teorema 3.3, pues la primera y tercera columnas son iguales. ■

TEOREMA 3.6 *Si $B = [b_{ij}]$ se obtiene de $A = [a_{ij}]$ sumando a cada elemento de la* r*-ésima fila (columna) de A una constante c por el elemento correspondiente de la* s*-ésima fila (columna) $r \neq s$ de A, entonces* $\det(B) = \det(A)$.

Demostración Demostraremos el teorema para las filas. Tenemos que $b_{ij} = a_{ij}$ para $i \neq r$, y $b_{rj} = a_{rj} + ca_{sj}$, $r \neq s$, digamos $r < s$. Entonces

$$\begin{aligned}\det(B) &= \sum(\pm)b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{rj_r}\cdots b_{nj_n}\\ &= \sum(\pm)a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(a_{rj_r}+ca_{sj_r})\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n}\\ &= \sum(\pm)a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{rj_r}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n}\\ &\quad+\sum(\pm)a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(ca_{sj_r})\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n}.\end{aligned}$$

La primera suma en esta última expresión es $\det(A)$; la segunda suma se puede escribir como

$$c\left[\sum(\pm)a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{sj_r}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n}\right].$$

Observe que

$$\begin{aligned}&\sum(\pm)a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{sj_r}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n}\\ &\qquad= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow r\text{-ésima fila}\\ \\ \leftarrow s\text{-ésima fila}\\ \\ \\ \end{matrix}\\ &\qquad= 0,\end{aligned}$$

ya que existen dos filas iguales. Por lo tanto, $\det(B) = \det(A) + 0 = \det(A)$. ■

EJEMPLO 15 Tenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 9\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix},$$

lo cual se obtiene al sumar el doble de la segunda fila a la primera. Si ahora se aplica la definición de determinante al segundo determinante, podemos que ver que ambos tienen el valor de 4. ■

TEOREMA 3.7 *Si una matriz $A = [a_{ij}]$ es triangular superior (inferior) (vea el ejercicio T.5, sección 1.2), entonces*

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{mn};$$

es decir, el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal.

Demostración Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz triangular superior (es decir, $a_{ij} = 0$ para $i > j$). Entonces, un término $a_{1j_1}a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ de la expresión para det(A) sólo puede ser distinto de cero si $1 \leq j_1, 2 \leq j_2, \ldots, n \leq j_n$. Ahora, $j_1j_2 \ldots j_n$ debe ser una permutación o reordenamiento de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Por lo tanto, debemos tener $j_n = n, j_{n-1} = n - 1, \ldots, j_2 = 2, j_1 = 1$. En consecuencia, el único término de det(A) que puede ser distinto de cero es el producto de los elementos de la diagonal principal de A. Como la permutación $12 \cdots n$ no tiene inversiones, el signo asociado a ella es $+$. Por lo tanto, $\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

Dejamos al lector la demostración del caso de una matriz triangular inferior (ejercicio T.2). ■

COROLARIO 3.1 *El determinante de una matriz diagonal es el producto de las entradas de su diagonal principal.*

Demostración Ejercicio T.17. ■

EJEMPLO 16 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 6 & -8 & -4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Calcular det(A), det(B), det(C).

Solución De acuerdo con el teorema 3.7, $\det(A) = -24$, $\det(B) = -60$. Por el corolario 3.1, $\det(C) = 120$. ■

Ahora presentamos una forma de denotar operaciones elementales por filas y por columnas, en las matrices y en los determinantes.

- Intercambiar filas (columnas) i y j:

$$\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_j \qquad (\mathbf{c}_i \leftrightarrow \mathbf{c}_j).$$

- Reemplazar la fila (columna) i por k veces ($k \neq 0$) la fila (columna) i:

$$k\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}_i \qquad (k\mathbf{c}_i \to \mathbf{c}_i).$$

- Reemplazar la fila (columna) j por k veces ($k \neq 0$) la fila (columna) i + la fila (columna) j:

$$k\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j \to \mathbf{r}_j \qquad (k\mathbf{c}_i + \mathbf{c}_j \to \mathbf{c}_j).$$

Con esta notación es fácil seguir el rastro de las operaciones elementales entre filas o entre columnas realizadas a una matriz. Por ejemplo, con $A_{\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_j}$ indicamos que hemos intercambiado las filas i y j de la matriz A. Procedemos de manera similar en el caso de operaciones entre columnas.

Podemos interpretar los teoremas 3.2, 3.5 y 3.6 en términos de esta notación así:

$$\begin{aligned} \det(A_{\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_j}) &= -\det(A), \quad i \neq j \\ \det(A_{k\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}_i}) &= k \det(A) \\ \det(A_{k\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j \to \mathbf{r}_j}) &= \det(A), \qquad i \neq j. \end{aligned}$$

Es conveniente rescribir estas propiedades en términos de det(A):

$$\det(A) = -\det(A_{\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_j}), \qquad i \neq j$$

$$\det(A) = \frac{1}{k}\det(A_{k\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}_i}), \qquad k \neq 0$$

$$\det(A) = \det(A_{k\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j \to \mathbf{r}_j}), \qquad i \neq j.$$

Para las operaciones entre columnas procedemos de manera análoga.

Los teoremas 3.2, 3.5, 3.6 y 3.7 son muy útiles en la evaluación de det(A). Lo que hacemos es transformar A por medio de operaciones elementales por filas en una matriz triangular. Por supuesto, debemos registrar cómo cambia el determinante de las matrices resultantes al realizar tales operaciones.

EJEMPLO 17 Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$. Calcular det($A$).

Solución Tenemos

$$\begin{aligned}
\det(A) &= 2\det(A_{\frac{1}{2}\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3}) && \text{Multiplicar la fila 3 por } \tfrac{1}{2}. \\
&= 2\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\right) \\
&= 2\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_3}\right) && \text{Intercambiar las filas 1 y 3.} \\
&= (-1)2\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}\right) \\
&= -2\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{\substack{-3\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 \\ -4\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3}}\right) && \text{Obtener ceros debajo de la entrada (1, 1).} \\
&= -2\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & -5 & -10 \end{bmatrix}\right) \\
&= -2\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & -5 & -10 \end{bmatrix}_{-\frac{5}{8}\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3}\right) && \text{Obtener ceros debajo de la entrada (2, 2).} \\
&= -2\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{30}{4} \end{bmatrix}\right).
\end{aligned}$$

En seguida calculamos el determinante de la matriz triangular superior.

$$\det(A) = -2(1)(-8)\left(-\frac{30}{4}\right) = -120 \qquad \text{De acuerdo con el teorema 3.7.}$$

Las operaciones que seleccionamos no son las más eficientes, pero con ellas evitamos el uso de fracciones durante los primeros pasos. ■

Observación Haremos referencia al método utilizado en el ejemplo 17 para calcular un determinante, como **cálculo por reducción a la forma triangular**.

Omitiremos la demostración del siguiente e importante teorema.

TEOREMA 3.8 *El determinante del producto de dos matrices es el producto de sus determinantes; es decir,*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

EJEMPLO 18 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$|A| = -2 \quad \text{y} \quad |B| = 5.$$

Además,

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

y

$$|AB| = -10 = |A||B|.$$

Observación En el ejemplo 18 también tenemos (verifique)

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 10 \end{bmatrix},$$

de manera que $AB \neq BA$. Sin embargo, $|BA| = |B||A| = -10 = |AB|$.

Como consecuencia inmediata del teorema 3.8, podemos calcular fácilmente $\det(A^{-1})$ a partir de $\det(A)$, como demuestra el siguiente corolario.

COROLARIO 3.2 *Si A es no singular, entonces* $\det(A) \neq 0$ *y*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Demostración Ejercicio T.4.

EJEMPLO 19 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Entonces $\det(A) = -2$ y

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ahora,

$$\det(A^{-1}) = -\frac{1}{2} = \frac{1}{\det(A)}.$$

DETERMINANTE DE MATRICES BINARIAS (OPCIONAL)

Las propiedades y técnicas para el cálculo de determinantes desarrolladas en esta sección se aplican también a matrices binarias; sólo que en éste caso los cálculos se hacen con aritmética binaria.

EJEMPLO 20 El determinante de la matriz binaria de 2×2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

calculado por medio de la técnica desarrollada en el ejemplo 5, es

$$\det(A) = (1)(1) - (1)(0) = 1.$$ ■

EJEMPLO 21 El determinante de la matriz binaria de 3×3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

calculado por medio de la técnica desarrollada en el ejemplo 6, es

$$\begin{aligned} \det(A) &= (1)(1)(1) + (0)(0)(0) + (1)(1)(1) \\ &\quad -(1)(0)(1) - (1)(0)(1) - (0)(1)(1) \\ &= 1 + 0 + 1 - 0 - 0 - 0 = 1 + 1 = 0. \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 22 Utilice el cálculo por reducción a la forma triangular para evaluar el determinante de la matriz binaria

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

De acuerdo con el teorema 3.3, $\det(A) = 0$. ■

Términos clave

Permutación
n factorial
Inversión
Permutación par
Permutación impar
Determinante
Cálculo por reducción a la forma triangular

3.1 Ejercicios

1. Determine el número de inversiones en cada una de las siguientes permutaciones de $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

(a) 52134 (b) 45213 (c) 42135
(d) 13542 (e) 35241 (f) 12345

2. Decida, en cada una de las siguientes permutaciones de $S = \{1, 2, 3, 4\}$, si es par o si es impar.

(a) 4213 (b) 1243 (c) 1234
(d) 3214 (e) 1423 (f) 2431