Podemos utilizar las propiedades de la sección 3.1 para introducir muchos ceros en una fila o columna dadas, y luego desarrollar a lo largo de esa fila o columna. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Considere el determinante del ejemplo 2. Tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right|_{\mathbf{c}_4+\mathbf{c}_1\to\mathbf{c}_4} &= \left|\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -3 & 5 \\ -4 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 5 \end{array}\right| \\
&= (-1)^{3+1}(3)\left|\begin{array}{rrr} 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \end{array}\right|_{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_1} \\
&= (-1)^4(3)\left|\begin{array}{rrr} 0 & -4 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \end{array}\right| \\
&= (-1)^4(3)(-2)(-8) = 48.
\end{aligned}$$

■

LA INVERSA DE UNA MATRIZ

Es interesante preguntarse qué es $a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn}$ para $i \neq k$, ya que tan pronto tengamos la respuesta obtendremos otro método para determinar la inversa de una matriz no singular.

TEOREMA 3.10 *Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de $n \times n$, entonces*

$$a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + \cdots + a_{in} A_{kn} = 0 \quad \textit{para} \quad i \neq k; \tag{5}$$

$$a_{1j} A_{1k} + a_{2j} A_{2k} + \cdots + a_{nj} A_{nk} = 0 \quad \textit{para} \quad j \neq k. \tag{6}$$

Demostración Sólo demostraremos la primera fórmula; la segunda se deduce de la primera por medio del teorema 3.1.

Considere la matriz B que se obtiene a partir de A, reemplazando la k-ésima fila de A por su i-ésima fila. Entonces, B es una matriz que tiene dos filas idénticas: las filas i y k. Entonces, $\det(B) = 0$. Ahora desarrollamos $\det(B)$ a lo largo de la k-ésima fila. Los elementos de la k-ésima fila de B son $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$. Los cofactores de la k-ésima fila son $A_{k1}, A_{k2}, \ldots, A_{kn}$. Por lo tanto, de acuerdo con la ecuación (1), tenemos

$$0 = \det(B) = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in} A_{kn},$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

Este teorema dice que si sumamos los productos de los elementos de cualquier fila (columna) por los cofactores correspondientes de cualquiera otra fila (columna), el resultado es cero.

EJEMPLO 4 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 19, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -14,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3.$$

Ahora

$$a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} = (4)(19) + (5)(-14) + (-2)(3) = 0$$

y

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = (1)(19) + (2)(-14) + (3)(3) = 0. \qquad \blacksquare$$

Podemos combinar (1) y (5) como

$$\begin{aligned} a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} &= \det(A) \quad \text{si } i = k \\ &= 0 \qquad\quad\ \text{si } i \neq k. \end{aligned} \tag{7}$$

En forma similar, podemos combinar (2) y (6) como

$$\begin{aligned} a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} &= \det(A) \quad \text{si } j = k \\ &= 0 \qquad\quad\ \text{si } j \neq k. \end{aligned} \tag{8}$$

DEFINICIÓN Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de $n \times n$. La matriz adj A de $n \times n$, llamada la **adjunta** de A, es la matriz cuyo elemento i, j-ésimo es el cofactor A_{ji} de a_{ji}. En consecuencia,

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Observaciones

1. La adjunta de A se forma tomando la transpuesta de la matriz de cofactores de los elementos de A.
2. Tenga en cuenta que, además del uso que se le da en la definición anterior, el término *adjunta* tiene otros significados en álgebra lineal.

EJEMPLO 5 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Calcule adj A.

Solución Los cofactores de A son

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -18; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 17;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -10; \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 28.$$

Entonces

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix}.$$

■

TEOREMA 3.11 *Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de $n \times n$, entonces*

$$A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = \det(A)I_n.$$

Demostración Tenemos

$$A(\operatorname{adj} A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{j1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{j2} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{jn} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

El elemento i, j-ésimo en el producto matricial $A(\operatorname{adj} A)$ es, de acuerdo con (7),

$$\begin{aligned} a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} &= \det(A) \quad && \text{si } i = j \\ &= 0 && \text{si } i \neq j. \end{aligned}$$

Esto significa que

$$A(\operatorname{adj} A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)I_n.$$

El elemento i, j-ésimo en el producto matricial $(\operatorname{adj} A)A$ es, de acuerdo con (8),

$$\begin{aligned} A_{1i}a_{1j} + A_{2i}a_{2j} + \cdots + A_{ni}a_{nj} &= \det(A) \quad && \text{si } i = j \\ &= 0 && \text{si } i \neq j. \end{aligned}$$

En consecuencia, $(\operatorname{adj} A)A = \det(A)I_n$. ■

EJEMPLO 6 Considere la matriz del ejemplo 5. Entonces

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -94 & 0 & 0 \\ 0 & -94 & 0 \\ 0 & 0 & -94 \end{bmatrix}$$

$$= -94\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} = -94\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

Ahora tenemos un nuevo método para determinar la inversa de una matriz no singular, que establecemos en el corolario siguiente.

COROLARIO 3.3 *Si A es una matriz de $n \times n$ y* $\det(A) \neq 0$, *entonces*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\operatorname{adj} A) = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{\det(A)} & \frac{A_{21}}{\det(A)} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\det(A)} \\ \frac{A_{12}}{\det(A)} & \frac{A_{22}}{\det(A)} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\det(A)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{\det(A)} & \frac{A_{2n}}{\det(A)} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\det(A)} \end{bmatrix}.$$

Demostración De acuerdo con el teorema 3.11, $A(\operatorname{adj} A) = \det(A)I_n$, por lo que si $\det(A) \neq 0$, entonces

$$A\frac{1}{\det(A)}(\operatorname{adj} A) = \frac{1}{\det(A)}\left[A(\operatorname{adj} A)\right] = \frac{1}{\det(A)}(\det(A)I_n) = I_n.$$

En consecuencia,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\operatorname{adj} A).$$

■

EJEMPLO 7 Considere una vez más la matriz del ejemplo 5. Entonces, $\det(A) = -94$, y

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\operatorname{adj} A) = \begin{bmatrix} \frac{18}{94} & \frac{6}{94} & \frac{10}{94} \\ -\frac{17}{94} & \frac{10}{94} & \frac{1}{94} \\ \frac{6}{94} & \frac{2}{94} & -\frac{28}{94} \end{bmatrix}.$$

■