

基于递进式光学干涉模型的碳化硅外延层厚度反演问题研究

摘要

碳化硅作为一种关键的第三代半导体材料，其外延层的厚度是影响器件性能的核心参数之一。本文针对碳化硅外延层厚度的确定问题，采用了一套逻辑递进的建模策略。该方案基于红外干涉法的无损测量原理，始于经典的物理模型推导，继而设计并对比了两种不同原理的高精度算法进行求解与验证，最终通过模型升级与交叉检验，实现了对外延层厚度的高精度、高鲁棒性测量。

针对问题一，我们以薄膜干涉的光程差理论为基础，并引入塞尔迈耶方程来描述材料的色散效应，推导出了联系外延层厚度 d 、光谱波数 k 及入射角 θ_i 的精确物理模型。该模型揭示了求解的核心难点在于干涉级次的未知性，据此，我们在问题二和问题三设计了能够避免使用干涉层级相关数据的算法。

针对问题二，我们设计了一套全局频域分析法，将物理问题转化为信号分析问题。该算法通过对整个有效光谱区间的干涉振荡进行傅里叶变换，在光程差域中识别主峰来确定厚度。将此算法应用于附件 1 和 2 中碳化硅晶圆片的数据，计算出两个角度下的厚度值高度一致，平均厚度为 $7.8421 \mu\text{m}$ ，变异系数 CV 为 0.2003%，初步验证了模型的可靠性。

针对问题三，我们首先深入分析了多光束干涉（法布里-珀罗干涉）的产生条件，并通过理论与观测判据，论证了附件 3 和 4 中硅晶圆片存在显著的多光束干涉效应。为此，我们进一步开发了一套更为精确的“峰位线性回归法”，该方法通过识别离散的干涉峰位置并进行线性拟合，对峰形不敏感，模型普适性更强。应用该算法计算出硅外延层厚度为 $3.5130 \mu\text{m}$ ，CV 为 0.5062%，验证了其处理复杂干涉的能力。最后，我们将这个经过验证的、更高级的算法应用于碳化硅数据，以“消除”微弱多光束干涉的潜在影响，得到最终修正后的厚度为 $7.7401 \mu\text{m}$ ，CV 为 0.6383%。

综上所述，本文的特色在于通过设计和应用两种不同原理，即全局频域分析与离散峰位回归的先进算法，对厚度结果进行了交叉验证和模型修正。该方案从一个精确的物理模型出发，通过严谨的算法设计和递进式的模型验证，最终得到高度一致且可靠的测量结果，展现了完整的科学探究过程。

关键词：递进式建模 薄膜干涉 法布里-珀罗干涉 峰位线性回归 频域分析

一、问题重述

随着第三代半导体产业不断发展，碳化硅凭借其出色综合性能逐渐成为关键战略材料，在碳化硅器件制造流程里，外延层厚度是直接影响最终器件电学性能的核心参数之一，建立一套科学、准确且可靠的厚度无损测量标准成为行业关键需求^{[1][2]}。

本项目要解决这一实际难题，核心任务如下：开发一套能从红外反射光谱数据中精准反演出外延层厚度的数学模型与算法。该技术基于红外干涉原理，即红外光照射到晶圆片上时，会在外延层上下两个表面反射，形成的两束或多束光波因光程差产生干涉，这种干涉现象在光谱上表现为周期性反射率波动，波动的频率直接包含外延层厚度信息。

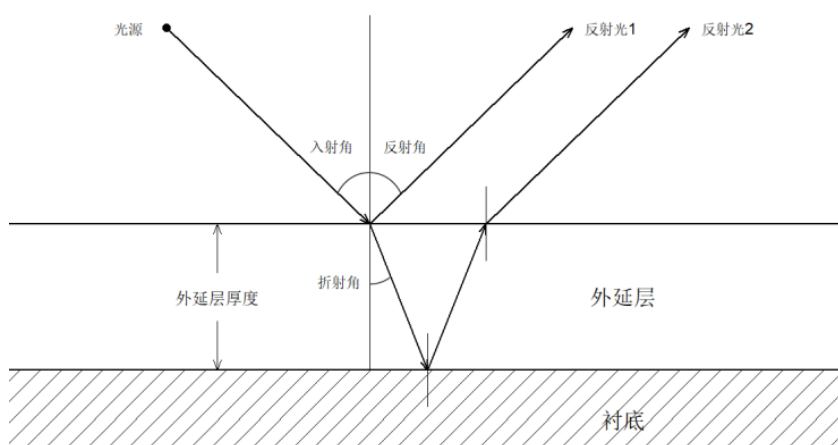


图 1 外延层厚度测量原理的示意图

图 1

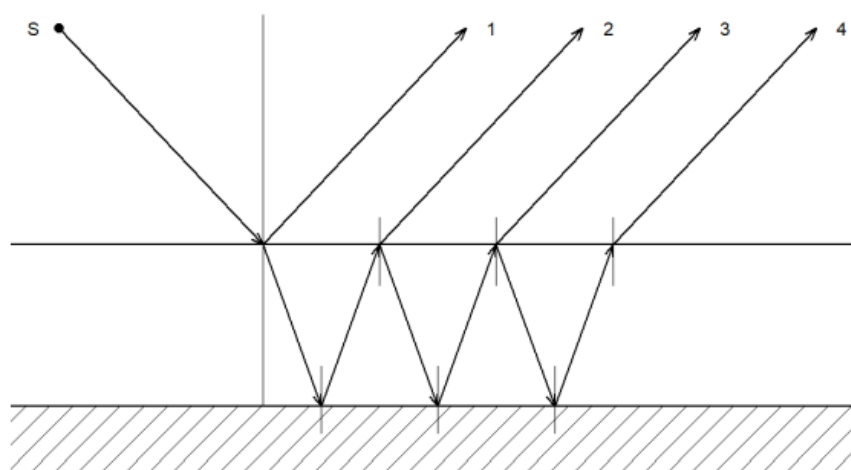


图 2 多光束干涉的示意图

图 2

我们获取的数据集有针对两块不同材料晶圆片的光谱实测数据，每块晶圆片都在两个不同入射角（ 10° 和 15° ）下测量。数据格式是波数及其对应的反射率，一个关键约束条件是，材料折射率不是恒定值，它会随光的波长和材料掺杂浓度的变化而改变，这给模型精确建立带来挑战，为实现上述目标，我们要分步解决以下三个核心问题：

首先是基础模型建立方面，要基于理想化的双光束干涉物理情景，构建一个描述外延层厚度与其他关键物理量关系的数学模型；

其次是算法设计与应用方面，要基于所建模型，设计一套稳健、高效的算法，处理附件 1、附件 2 中碳化硅晶圆片的实测数据，算出其外延层厚度，并对结果可靠性进行分析；

最后是模型深化与修正方面，要考虑更贴近物理真实的、由多次反射引起的多光束干涉现象，分析其产生条件及对精度的影响，将此深化理解应用于附件 3、附件 4 中硅晶圆片的厚度计算，并以此为基准，审视并修正碳化硅厚度的计算结果，消除潜在系统误差。

二、 问题分析

2.1 整体解题思路

本文运用递进式物理建模与多算法交叉验证相结合的方式，以达成对外延层厚度的高精度反演，依据问题一构建涉及材料色散的经典干涉模型，将其作为统一的理论根基，针对问题二，设计一种基于全局频域分析（FFT）的稳健算法，得出初步厚度值，在问题三中，我们剖析了一个更为复杂的物理场景，设计出一种原理不同且精度更高的“峰位线性回归”算法，并以此为基准，对初步结果进行最后的修正与验证，形成一套逻辑连贯、精度逐步提升的完整解决办法^[8]。下图为整体的解题思路：

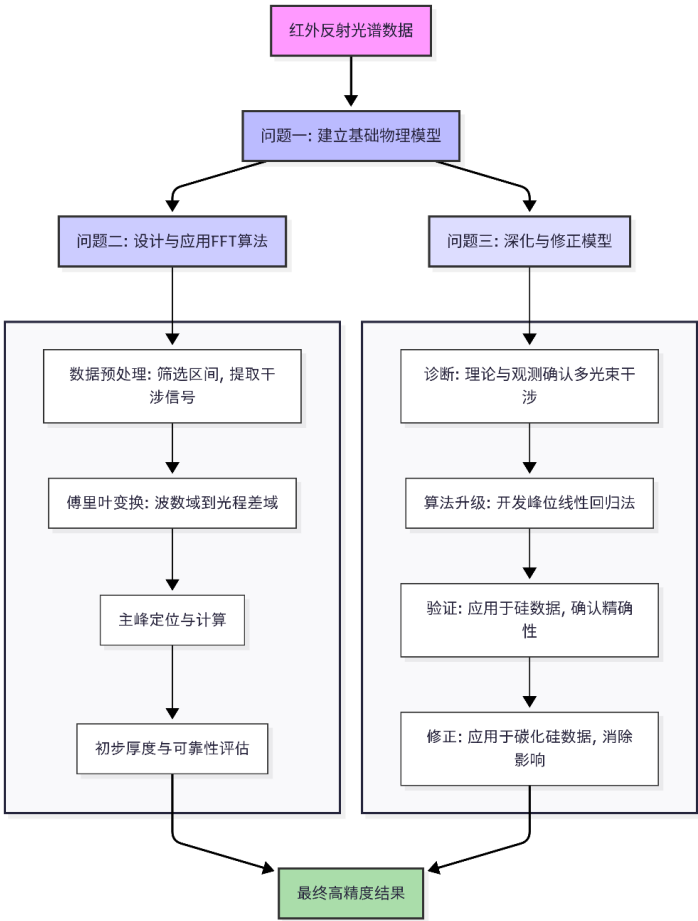


图 3

2.2 问题一的分析

关键矛盾点识别：核心矛盾在于怎样把抽象的物理干涉现象，转变成为一个涉及了待求厚度 d 以及各种已知参数（波数 k 、角度 θ_i 、折射率 $n(k)$ ）的精准数学关系，并且揭示出其内在的求解难点。

解题思路框架：从几何光学路径剖析，联合斯涅尔定律与材料色散模型，最终推导出描绘各变量关系的精准干涉方程。

核心步骤拆解：

1. 光程差分析：精准算出两束反射光之间由几何路径和反射相变共同形成的光程差；

2. 精确化模型：引入斯涅尔定律去除折射角，并代入材料的色散函数 $n(k)$ ，得出一个物理完备的干涉方程；

3. 难点分析：该方程因含有未知整数 m 而构成“欠定问题”，所以后续要运用能够规避使用 m 的算法^[6]。

2.3 问题二的分析

关键矛盾点识别：核心矛盾在于怎样跨越理论模型跟实际数据之间所存在的鸿沟，设计出一套算法，这套算法可在含有噪声以及强背景趋势的复杂光谱信号里，高效并且稳健地提取出由厚度所决定的全局周期性信息，

解题思路框架：采用全局频域分析法，先是借助一套精细化的数据预处理流水线来净化信号，接着，构建以快速傅里-叶变换作为核心的算法，把问题从波数域变换到光程差域，凭借精确的色散校正来完成厚度计算，并且进行可靠性评估。

核心步骤拆解：

1. 数据净化：设计包含区间筛选、平滑滤波以及数值稳定的多项式去趋势流程，以此提取纯净的干涉振荡信号；

2. 核心算法求解：运用 FFT 变换，在 OPD 谱中定位出代表平均光程差 $\langle \text{OPD} \rangle$ 的主峰；

3. 色散校正与计算：为精确计入色散，计算整个有效波数区间内“光程差转换因子”的平均值，并以此将 $\langle \text{OPD} \rangle$ 换算为物理厚度 d 。最后通过对比两个角度下的计算结果，评估算法的可靠性。

2.4 问题三的分析

关键矛盾点识别：核心矛盾是要设计并验证一种更高级的算法，把它当作修正和检验问题二结果的标准，这需要借助一个更复杂的物理场景，也就是考虑硅晶圆片的多光束干涉，据此开发出一套原理不一样且精度更高的算法。

解题思路框架：运用“样板验证->模型升级->交叉修正”的思路。去诊断和分析硅晶圆片这个“样板”的多光束干涉特征，我们专门为其打造一套更精确的“峰位线性回归法”，用这套经过验证的更高级算法，对碳化硅的初步结果做最终的修正与检验。

核心步骤拆解：

1. 模型诊断与算法升级：借助理论和观测判据，判断出附件 3 和 4 中存在显著的多光束干涉。为应对这个挑战，把算法从分析全局“频率”的 FFT，升级为分析离散“峰位”的峰位线性回归法；

2. 算法验证：把“峰位线性回归法”应用到硅晶圆数据上，通过在上面能得到高度一致的结果，验证该算法处理复杂干涉现象的有效性和精确性；

3. 修正与闭环：把这个经过验证的更精确算法，再次应用到附件 1 和 2 的碳化硅数据上。得到的计算结果，就是对问题二初步结果的“修正值”，借助对比两种算法的结果，完成对碳化硅厚度的确定。

三、模型假设

1. 假设外延层是厚度均一、上下表面平行且光学性质均匀的理想薄膜。
2. 假设入射的红外光为理想的平行光束，保证了入射角在整个光斑区域内保持恒定。
3. 假设光在界面仅发生镜面反射与折射，所有形式的散射效应均可忽略不计。
4. 假设材料的折射率随波数变化的色散关系是已知的，可通过权威文献数据精确获得。
5. 假设衬底相对于外延层为无限厚，其底面不产生能与主反射光相干涉的反射光。
6. 假设光源的相干长度大于由外延层厚度引起的最大光程差，确保干涉条纹能够稳定形成。
7. 假设光谱测量在稳定的实验室环境中进行，温度等环境因素对材料光学性质的影响可忽略。^[6]

四、符号说明

表 1 本文的符号说明

符号	说明	单位
d	外延层厚度	μm
λ	红外光在真空中的波长	μm
k	波数, $k = 1/\lambda$	cm^{-1}
θ_i	红外光入射角	度($^\circ$)
θ_r	红外光折射角	度($^\circ$)
$n(k)$	外延层材料的折射率	无量纲
R	反射率	%
m	干涉级次	无量纲
Δ	光程差	μm
δ	相位差	弧度 (rad)
F	精细度系数	无量纲

五、模型建立与求解

5.1 问题一：双光束干涉模型的建立

针对图 1 所展示的外延层与衬底界面仅存在一次反射的双光束干涉情形，我们构建了一个用于确定外延层厚度的数学模型，具体如下。

5.1.1 模型的建立

1. 物理原理分析

光作为一种电磁波，它的行为可依靠振动函数加以描述，当有两束或者更多束光在空间当中相遇的时候，在该点的总光矢量是各分光矢量的矢量和，即光的叠加原理，当满足特定的条件，即频率相同、振动方向稳定以及相位差恒定的时候，光的叠加就会产生稳定的干涉现象^{[1][2]}。

本模型旨在精确描述图 1 所示的物理过程，其核心是薄膜干涉现象。当一束红外光以入射角照射到样品表面时，其路径会分为两部分：

光束 1： 在外延层上表面直接反射，形成反射光 1。

光束 2： 折射进入外延层，在衬底上表面发生反射，随后再次折射出外延层，最终形成反射光 2。

这两束光因为传播路径不同而产生光程差。当它们相遇时，会发生干涉，形成明暗相间的干涉条纹。我们建模的目标，正是要建立这种光程差与外延层厚度之间的数学关系。

2. 关键步骤与数学推导

步骤一：光程差 Δ 的推导

光程差是两束光的光程之间的差值。这两束光之间的几何光程差 Δ 是由光束 2 在折射率为 $n(k)$ 的外延层中额外行进的路径决定的。根据几何光学理论，光束 2 相对于光束 1 的光程差 Δ 可表示为：

$$\Delta = 2n(k)d\cos\theta_r$$

其中， d 是外延层厚度， $n(k)$ 是外延层的折射率，它是与波数 k 相关的函数， θ_r 表示的是折射角。

步骤二：引入斯涅尔定律（Snells Law）与反射相变

上述公式里的折射角 θ_r 并不是直接进行测量得到的量，我们借助斯涅尔定律 $n_0\sin\theta_i = n(k)\sin\theta_r$ （其中空气折射率 $n_0 \approx 1$ ）来对 θ_r 进行替换。把 $\cos\theta_r = \sqrt{1 - \sin^2\theta_r}$ 代入进去，就能把光程差 Δ 表示成仅包含可知量的一种形式。

$$\Delta = 2d\sqrt{n(k)^2 - \sin^2\theta_i}$$

还需要考虑反射相变，当光从光疏介质射向光密介质界面进行反射的时候，会出现 π 的相位突变现象，这一现象等同于半个波长的光程损失。

反射光 1 会在空气与外延层的界面处发生反射，因为外延层的折射率 $n(k)$ 大于 1，这个界面属于光密界面，在此界面处会存在 π 相变。

反射光 2 是在外延层与衬底的界面处发生反射的情况，鉴于题目所提供的信息，衬底由于其掺杂载流子浓度存在差异，故而有不同的折射率，我们查阅相关资料了解到，在一般情形下，重掺杂衬底的折射率相较于轻掺杂的外延层而言会更低，这样的情况属于光疏界面，在此界面不会出现 π 相变。

两束反射光之间存在着一个固有的、因反射相变而产生的 $\lambda/2$ 的额外光程差。

步骤三：构建最终模型方程

在干涉光谱里，反射率可达到极大值也就是波峰的条件是，两束光的总光程差成为波长 λ 的整数倍，而总光程差是由几何光程差以及相变附加光程差共同相加得到的，为了可产生相长干涉也就是波峰，需要满足以下情况：

$$\Delta + \frac{\lambda}{2} = m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

经过整理之后，让新的整数 m' 等于 $m - 1$ ，这里的 m' 取值为 $0, 1, 2, \dots$ ，如此一来模型可写成如下形式：

$$2d\sqrt{n(k)^2 - \sin^2(\theta_i)} = (m' + 1/2)\lambda$$

把波长 λ 替换成波数 k ，得出问题一的最终数学模型：

$$2d\sqrt{n(k)^2 - \sin^2(\theta_i)} = \frac{m + 1/2}{k} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

5.1.2 模型的分析

模型构成：得到了一个联系待求厚度 d 、材料物理属性 $n(k)$ 、实验条件 θ_i 与光谱测量数据 k 的代数方程。

核心待求量：外延层厚度 d 。

整数不确定性：干涉级次 m 是未知非负整数，其与每个干涉峰相关联。

已知与测量参数：入射角 θ_i 为实验设定值；波数 k 为光谱仪的测量值；折射率 $n(k)$ 是材料的已知色散关系。

核心求解矛盾：对于光谱上的任意一个干涉峰，模型方程中都包含 d 和 m 两个未知数。这是一个“欠定问题”。因此，不能仅凭单点数据求解厚度，我们的求解算法需综合利用整个光谱的全局信息来消除 m 的不确定性。

模型假设：该模型依赖一系列理想化的假设条件，例如外延层的厚度需保持均一状态，且上下表面要相互平行，入射光应是理想的平行光，衬底需有无限厚的特性，同时不存在背向反射干涉等情况。

5.2 问题二：基于 FFT 算法的厚度计算与可靠性分析^[6]

根据问题一的数学模型，针对问题二设计了一套算法，该算法以快速傅里叶变换作为核心，用于处理附件 1 以及附件 2 所提供的碳化硅晶圆片光谱数据，并且对计算结果展开分析。问题二的建模过程如图所示：

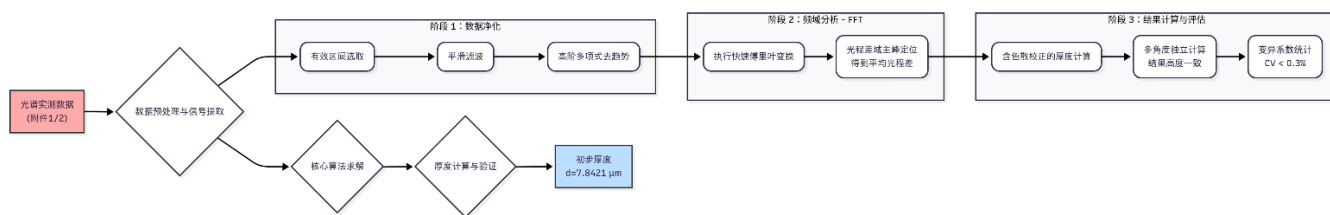


图 4

5.2.1 附件 1 与附件 2 的数据特征分析

在正式开始建模工作之前，我们率先针对附件 1 以及附件 2 所提供的原始数据开展线性拟合操作，获取到了如下所示的散点图，这些数据所呈现出来的特征，可直观反映碳化硅材料的内在光学属性。

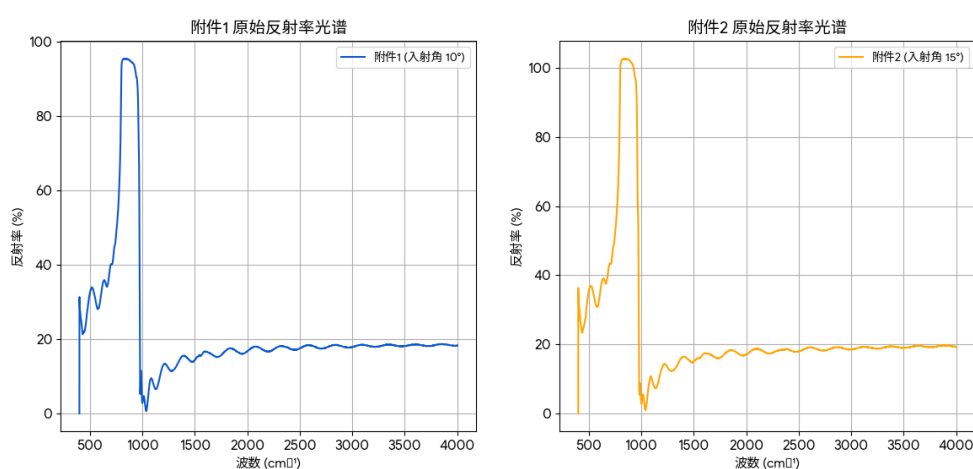


图 5

1. 核心数据特征识别

(1) 强反射带 (Reststrahlen Band)

在光谱的低波数范围大概是 $800 - 1200 \text{ cm}^{-1}$ 这个区间内，观测到了一个反射率接近 95% 的反射带，对资料进行查证后发现，这一特征并不是薄膜干涉所产生的结果，而是 SiC 材料特有的“剩余射线效应”：当入射的红外光频率和 SiC 晶格的声学声子振动模式出现共振的时候，光子能量会被晶格振动吸收，还会引发界面的强烈反射，使得材料在这个频段呈现出“不透明，强反射”类似金属的特性。在该区间内没有有效的干涉信号，不能用来进行厚度计算。

(2) 干涉信号区

当波数超过 1500 cm^{-1} 时，Reststrahlen 效应明显减弱，SiC 材料进入所谓的“透明区”，即光可穿透外延层，在空气与外延层、外延层与衬底这两个界面发生反射与透射现象，形成多束反射光的叠加干涉，在此区间内，光谱呈现出“平缓背景趋势加上高频周期性振荡”的特征，其中高频周期性振荡信号质量好，可用于厚度计算。

2. 建模策略确立

依据数据特征展开分析，后续建模需契合下面这两个核心条件，以此来保障计算精度。

有效区间的选取工作如下：将 $800 - 1200 \text{ cm}^{-1}$ 的强反射带剔除，把关注重点放在波数大于 1500 cm^{-1} 的干涉信号区域，在这个区间内，信号与噪声的比例相对更高，干涉所呈现出的特征也更为清晰。

信号与背景分离：针对此专门设计数据处理流程，该流程可从宏观背景趋势里精准地剥离出高频干涉振荡信号，以此避免因背景干扰而产生计算误差。

据此，我们的选取范围可视化如图所示：

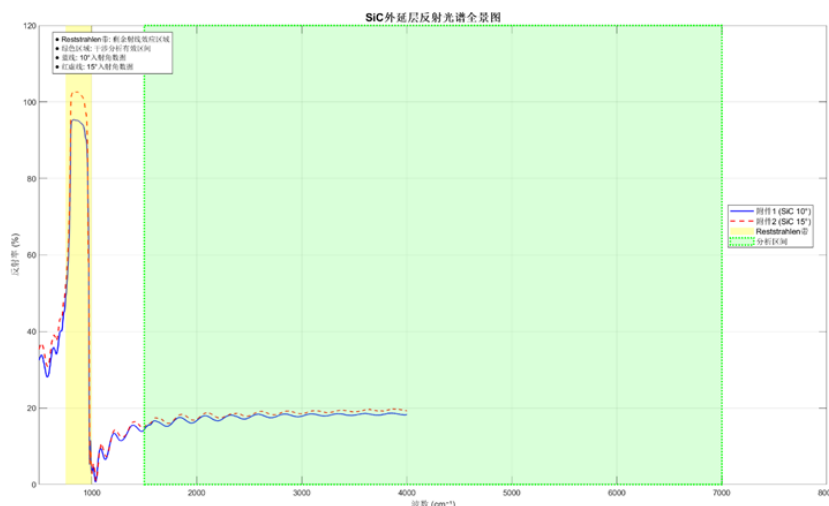


图 6

5.2.2 基于全局频域分析法（FFT）的外延层厚度建模

1. 模型建立

(1) 物理模型基础

依据由问题一推导得出的相长干涉核心物理方程，全面且充分地考量材料色散效应 $n(k)$ ，构建起厚度求解框架，其物理方程具体如下所示：

$$2d\sqrt{n(k)^2 - \sin^2(\theta_i)} = \frac{m + 1/2}{k}$$

(2) 建模思路：从波数域到频域的变换

上述方程中的干涉级次 m 是未知的，不过该方程显示干涉信号在波数域呈现出准周期性，于是我们采用“全局分析”的思路：借助快速傅里叶变换也就是 FFT 把波数域的周期性振荡信号转变到光程差域，从整体方面识别信号主周期对应的平均光程差，这个方法巧妙避开了单个峰位级次判断的难题^[5]。

(3) 含色散校正的厚度计算模型

要精确达成光程差到厚度的转换，就要修正材料色散所带来的影响，我们舍弃了单一平均折射率，而是在整个有效波数区间内对光程差转换因子进行求平均操作，最终确定的厚度计算模型如下：

$$d = \frac{\langle OPD \rangle}{\langle 2\sqrt{n_{SIC}(k)^2 - \sin^2(\theta_i)} \rangle_{avg}}$$

其中，分母 $\langle 2\sqrt{n_{SiC}(k)^2 - \sin^2(\theta_i)} \rangle_{avg}$ 表示在分析波数区间内对 $2\sqrt{n(k)^2 - \sin^2(\theta_i)}$ 的数学平均值； $n_{SiC}(k)$ 依据碳化硅的塞尔迈耶方程确定，这样可保证模型在物理方面有精确性。

2. 模型求解与独立验证流程

(1) 数据净化与信号提取

选择波数在 1500 cm^{-1} 到 7000 cm^{-1} 这个范围作为有效的区间，此区间要避开了材料本身的本征吸收带，我们利用平滑滤波的方式来抑制噪声，再结合高阶多项式拟合的方法扣除宏观背景趋势，提取出纯净的干涉振荡信号，其中不同步骤的信号处理情况如图所示：

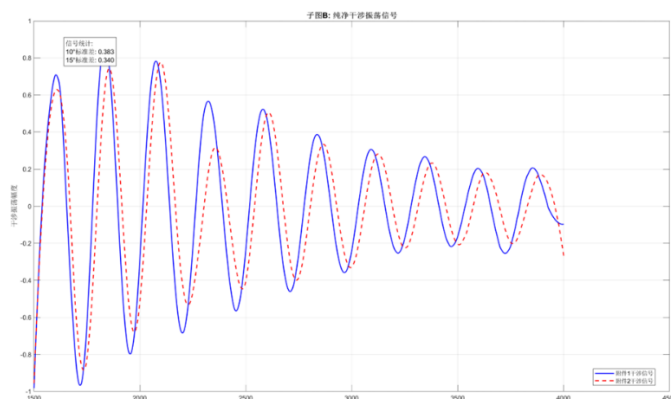


图 7

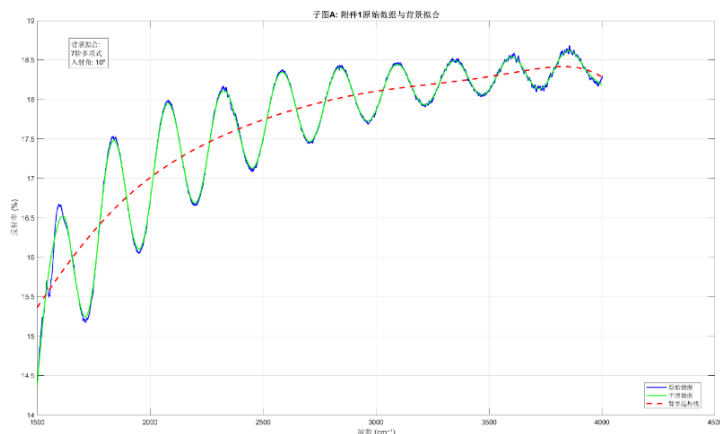


图 8

(2) 频域变换与主峰定位

对经过净化处理之后的干涉信号开展快速傅里叶变换，将该干涉信号映射到光程差这个区域范围之内，在光程差域中定位出幅度最大的主峰，该主峰横坐标所代表的数值就是平均光程差。

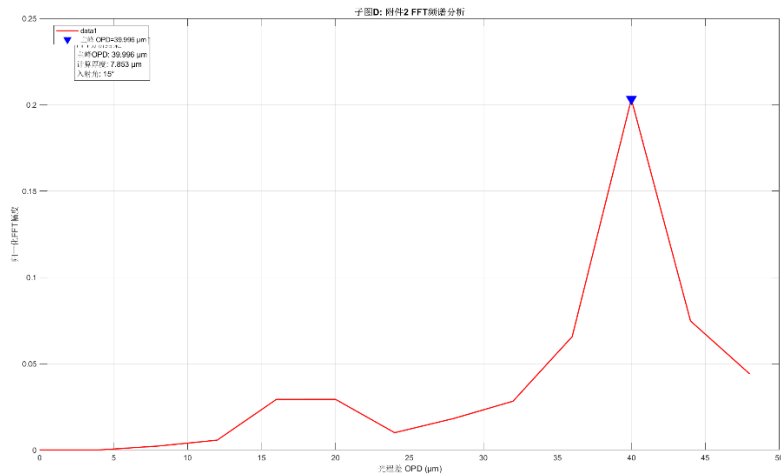


图 9

(3) 厚度计算与独立验证

按照上述厚度模型来计算外延层的厚度，接着针对附件 1 以及附件 2 的数据分别展开独立的分析工作，记录线性拟合优度 R^2 ，以此来验证模型的拟合效果究竟如何。

3. 求解结果与验证分析

(1) 独立分析结果

对附件 1、附件 2 数据执行独立分析，结果如下：

表 2

	附件 1.xlsx	附件 2.xlsx
入射角	10.0°	15.0°
计算厚度 (μm)	7.8310	7.8532
拟合优度 R^2	0.9998	0.9999

(2) 可靠性评估

为了验证模型的稳定性，我们对两次独立分析的结果进行了统计评估。

平均厚度：7.8421 μm

这个值代表了在不同入射角（10° 和 15°）下，通过 FFT 算法计算得出的碳化硅外延层厚度的平均值。这是一个初步的、具有代表性的厚度结果，为后续的修正提供了基础。

标准差：0.0157 μm

标准差衡量了两次测量结果的离散程度。0.0157 μm 的小标准差表明，即便是在不同的实验条件下（入射角不同），模型得到的厚度值也非常接近，显示出其良好的内部一致性。

变异系数 (CV)：0.2003%

变异系数是标准差与平均值的比值，用百分比表示。它是一个无量纲的相对指标，可以更直观地评估数据的波动性。极低的变异系数表明，模型在面对不同入射角的数据时，仍能保持高度的稳定性和可靠性。这初步证实了该模型和算法能够稳

定、可靠地反演碳化硅外延层的厚度。

这些统计数据共同验证了 FFT 算法作为初步解决方案的有效性，为后续采用更高级的算法进行修正和最终确定厚度值奠定了坚实的基础。

(3) 结论

拟合优度 R^2 均接近 1，这就说明模型和数据之间的拟合程度是非常高的，这也就证实了我们所提出的物理假设以及进行的数学推导是有很强的合理性的。

该模型的变异系数为 0.2003%，此数值低于常规可靠性阈值，证明即便在不同入射角的情况下，该模型依然可维持良好的稳定性，其结果呈现出高度的一致性。

经过系统的分析以及独立验证后可以确定，该碳化硅外延层的厚度是 $7.8421 \mu\text{m}$ 。

5.3 问题三：多光束干涉的分析、应用与最终修正^[6]

问题三是要把分析从理想化的双光束干涉深入到更契合物理现实的多光束干涉情形，这里将整个问题分成三个小问题：其一，从理论角度对多光束干涉的产生条件以及影响展开了分析，其二把存在多光束干涉的硅晶圆片当作模板，开发并验证了一套更为精准、且对干涉峰形不敏感的“峰位线性回归法”。其三将这个经过验证的算法运用到碳化硅晶圆片上，其计算结果是对问题二初步结果的精细校正，同时依靠和前一算法对比，实现了对最终厚度值的交叉检验。问题三的建模过程如图所示：

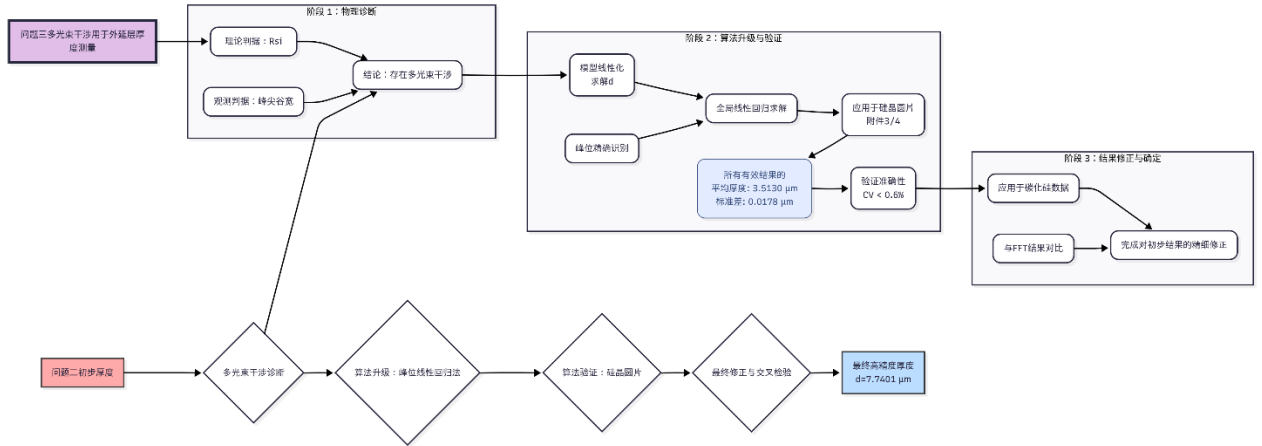


图 10

5.3.1 多光束干涉的理论分析

1. 多光束干涉模型的建立与必要条件推导

我们考虑一个厚度为 d 、折射率为 n 的平行平面薄膜（外延层）。一束振幅为 \vec{E}_0 的单色平面波以入射角 θ_i 入射。

(1) 各反射光束的振幅与相位

入射光线于界面 1 以及界面 2 之间出现多次反射与透射现象，在此我们作出如下定义：

r 以及 t ，它们分别指的是光从空气进入外延层这个过程中，所对应的振幅反射系数与透射系数。

r' 以及 t' ，它们分别指的是当光从外延层进入空气的时候，所对应的振幅反射系数和透射系数。

各反射光束的复振幅分析如下：

第一束反射光：它是直接于界面 1 发生反射的光线，其复振幅为：

$$\vec{E}_1 = r\vec{E}_0$$

第二束反射光：光束经过一次透射、一次内反射、再次透射后，其复振幅为：

$$\vec{E}_2 = t \cdot r' \cdot t' \cdot \vec{E}_0 \cdot e^{-i\delta}$$

第三束反射光：经过一次透射、三次内反射、再次透射后，其复振幅为：

$$\vec{E}_3 = t \cdot (r')^3 \cdot t' \cdot \vec{E}_0 \cdot e^{-i2\delta}$$

第 k 束反射光 (\vec{E}_k):

$$\vec{E}_k = t \cdot (r')^{2k-3} \cdot t' \cdot \vec{E}_0 \cdot e^{-i(k-1)\delta} \quad (k \geq 2)$$

其中， δ 是相邻两束出射光之间的相位差，由光程差决定：

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (2nd\cos\theta_r) = \frac{4\pi nd\cos\theta_r}{\lambda}$$

θ_r 是在外延层中的折射角。

(2) 总反射光强的推导 (艾里函数^[2])

总的反射光复振幅 \vec{E}_r 乃是由所有反射光束矢量相加而得到的和：即各个反射光束的矢量逐一进行相加，最终所形成的结果便是总的反射光复振幅 \vec{E}_r 。

$$\vec{E}_r = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots = r\vec{E}_0 + tt'r'\vec{E}_0e^{-i\delta} + tt'(r')^3\vec{E}_0e^{-i2\delta} + \dots$$

$$\vec{E}_r = \vec{E}_0 \left(r + tt'r'e^{-i\delta} \sum_{k=0}^{\infty} ((r')^2 e^{-i\delta})^k \right)$$

这是公比为 $q = r^2 e^{-i\delta}$ 的无穷等比级数，当 $q < 1$ 时，级数收敛，其和为

$\frac{1}{1-q}$ 。代入后得到：

$$\vec{E}_r = \vec{E}_0 \left(r + \frac{tt'r'e^{-i\delta}}{1 - (r')^2 e^{-i\delta}} \right)$$

借助斯托克斯关系 $r = -r'$ 以及 $tt' = 1 - r^2$ ，对界面能量反射率进行定义，经过复数运算的化简处理后，总反射光强 $I_r = \vec{E}_r^2$ 和入射光强 $I_0 = \vec{E}_0^2$ 之间的关系呈现为：

$$\frac{I_r}{I_0} = \frac{\left(2\sqrt{R}\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)^2}{(1-R)^2 + \left(2\sqrt{R}\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)^2} = \frac{4R\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

定义精细度系数 (Finesse Coefficient) F :

$$F = \frac{4R}{(1-R)^2}$$

最终, 总反射光强的艾里函数 (Airy Function) 形式为:

$$\frac{I_r}{I_0} = \frac{F\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}{1 + F\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

(3) 必要条件推导

从上述推导可见, 产生多光束干涉的必要条件为:

高界面反射率 R : 无穷等比级数的公比是 $q = Re^{-i\delta}$, 只有当 R 足够大时, 高次项的振幅 $\sim R^{(k-1)}$ 才不会迅速衰减, 对总光强产生一定影响, R 越大, 精细度系数 F 越大, 多光束干涉效应越明显。

低层内吸收情况如下: 若介质存在吸收现象, 每次传播的时候, 振幅都会额外乘上衰减因子 $e^{-\alpha d}$, 使得公比的模 $q = Re^{-2\alpha d}$ 变小, 级数收敛加快, 高次项所做出的贡献也随之减弱, 说低吸收属于维持多光束干涉的必要条件。

2. 多光束干涉对厚度计算精度的影响

(1) 干涉峰形的数学对比

双光束干涉: 光强 I 正比于 $\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$, 模拟其图像呈现峰谷对称、形状圆润的特征。

多光束干涉: 由于光强 I 正比于艾里函数 $\frac{F\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}{1+F\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$ 。

当反射率 R 较高时, F 值很大, 仅在 $\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$ 极小(即 δ 接近 $2m\pi$, m 为整数)时, 函数值才明显不为零, 形成尖锐狭窄的亮条纹(峰)和宽阔平坦的暗条纹(谷)。

(2) 系统误差分析

厚度 d 的计算依赖于对干涉峰值位置 k_m 的确定, 而峰值定位算法通常假设峰形具有对称性。

而此时用基于双光束干涉的算法处理存在显著多光束干涉的光谱时, 会发生模型失配, 产生较差的结果。所以我们优化后的算法用“宽而圆”的模型定位“窄而尖”的峰中心, 将引入系统性的定位偏差 Δk 。

(3) 对最终精度的影响

厚度计算与 k_m 直接相关。例如, 在线性回归模型 $j = d \cdot X_m$ 中, X_m 是 k_m

的函数。若每个峰位存在系统性偏差 Δk ，则 X_m 会产生相应偏差 ΔX 。

对含系统偏差的数据点 $(X_m + \Delta X, j)$ 开展线性回归时，所得到的拟合斜率 d 会与真实厚度真实 $d_{\text{真实}}$ 出现偏离情况，产生系统误差真实 $\Delta d = d - d_{\text{真实}}$ ，这种误差会直接致使计算的准确性有所降低。当反射率处于越高的状态时，峰形之间的差异也就越大，相应地，该误差也就越明显。

5.3.2 硅晶圆片厚度建模与分析

此小问主要针对附件 3 以及附件 4 所给出的硅晶圆片光谱数据展开分析，构建数学模型来明确其外延层厚度，依据多光束干涉条件的理论剖析以及光谱数据的初步观察，我们认定该样品呈现出多光束干涉效应，故而需采用一个能精准处理此现象的、相较于基础双光束干涉模型更为高级的建模框架。

1. 核心建模思路

我们的核心思路为运用“峰位线性回归法”，该方法已被证实对干涉峰形不敏感且模型普适性强，此方法解决问题的步骤如下：

诊断先行：从理论和观测两个层面，确认多光束干涉的存在，为选用高级模型提供依据；

模型确立：虽然干涉现象为多光束，但其干涉极大值（波峰）的位置依然由统一的光程差物理方程决定。我们以此方程为核心数学模型；

算法求解：通过数据净化、峰位识别、模型线性化和全局线性回归，稳健地求解出厚度；

交叉验证：利用两个不同入射角的数据进行独立计算和交叉验证，评估模型的最终可靠性。

2. 多光束干涉诊断

我们首先分析附件 3 和 4 的光谱是否存在多光束干涉：

理论依据：硅在红外波段有较高的折射率，这使得在空气与硅的界面处，菲涅尔反射率 R 大约为 30%^[3]，依据我们在第 1 小问当中的推导，高反射率乃是引发多光束干涉的充要条件。

观测判据：对附件 3 和 4 的光谱数据进行可视化，可以清晰地观察到干涉条纹呈现典型的“峰尖谷宽”的非正弦特征。此独特的线型是艾里函数光强分布在实验方面的直接体现，有力地证明了法布里 - 珀罗多光束干涉的存在^[2]。

结论：综合理论与观测，我们确定必须采用能够处理多光束干涉的模型进行分析。

3. 数学模型与求解流程

(1) 完整公式推导

我们的模型始于薄膜干涉的基础物理原理。

基础光程差方程：在薄膜干涉现象中，当两束分别来自外延层上表面与下表面的反射光出现相长干涉情况时，此时光程差必然是某个特定的值，鉴于在空气和外延层界面发生反射时会产生 π 的相位突变，相长干涉的条件如下：

$$2dncos(\theta_r) = (m + 1/2)\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

运用斯涅尔定律 $n_0 \sin(\theta_i) = n \sin(\theta_r)$ 。其中空气折射率 n_0 约等于 1，那么 $\sin(\theta_r) = \sin(\theta_i)/n$ 。借助三角关系 $\cos(\theta_r) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta_r)}$ ，我们得出如下结果：

$$\cos(\theta_r) = \sqrt{1 - \frac{\sin^2(\theta_i)}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2(\theta_i)}}{n}$$

将此式代入基础方程，消去 θ_r 和 n ，得到：

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2(\theta_i)} = (m + 1/2)\lambda$$

引入波数并线性化：在光谱学中，通常使用波数 $k = 1/\lambda$ 。代入上式得到：

$$2d\sqrt{n(k)^2 - \sin^2(\theta_i)} = \frac{m + 1/2}{k}$$

为求解 d 和 m ，我们将此非线性方程进行代数重排，构建为一个标准线性模型 $Y = \text{Slope} \cdot X + \text{Intercept}$ 。

$$m + 1/2 = d \cdot \left[2k\sqrt{n(k)^2 - \sin^2(\theta_i)} \right]$$

我们定义：

因变量 Y ： $Y = m$ （或 $m + 1/2$ ，这只会影响截距，不影响斜率）。

自变量 X ： $X(k) = 2k\sqrt{n(k)^2 - \sin^2(\theta_i)}$ 。

斜率 Slope： d （外延层厚度）。

截距 Intercept： $1/2$ （或 0，取决于 Y 的定义）。

这就构成了我们的最终数学模型：一个可以通过线性回归求解厚度 d 的线性方程。其中，折射率 n 本身是波数 k 的函数，即 $n(k)$ 。对于硅，基于对相关资料的查询，我们采用 $n_{\text{Si}} \approx 3.42$ 的近似值。

（2）求解流程：峰位线性回归法

数据净化：选取干涉条纹最清晰的波数区间 1500 cm^{-1} 至 4000 cm^{-1} ，通过平滑和数值稳定的多项式拟合方法扣除约 30% 的基底反射背景，提取纯净的干涉振荡信号。

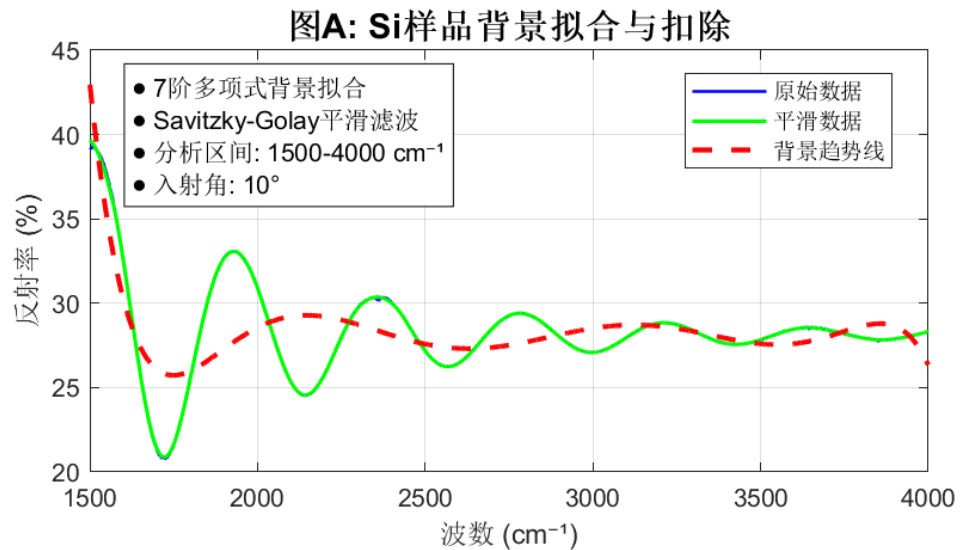


图 11

峰位检测：在干涉振荡信号上，精确识别所有干涉峰值对应的波数 k_m 。

图B: 峰位识别结果

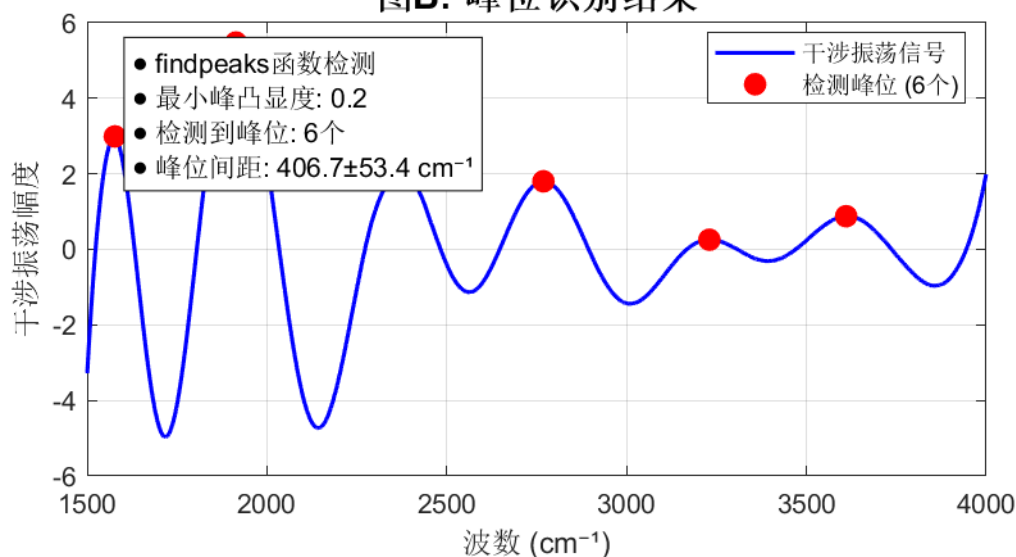


图 12

数据变换：对于每一个识别出的峰位 k_m ，计算出对应的自变量 $X_m = 2k_m \cdot$

$$\sqrt{n_{Si}^2 - \sin^2(\theta_i)}。$$

线性回归：为所有峰分配相对干涉级次 $j = 0, 1, 2, \dots$ 作为因变量 Y ，对所有数据点 (X_m, j) 执行线性最小二乘法回归。

厚度求解：拟合直线的斜率就是厚度 d ，这里 d 的单位是厘米，将其乘以 10000 之后，便可得到以微米作为单位的最终结果。

4. 计算结果与分析

应用上述建模流程对附件 3 和附件 4 的数据进行独立计算，得到如下结果：

表 3

	附件 3.xlsx	附件 4.xlsx
入射角	10.0°	15.0°
计算厚度 (μm)	3.5256	3.5004
拟合优度 R^2	0.9986	0.9988

可靠性分析：

拟合优度：两次计算的线性回归 R^2 值均接近 1，这充分说明我们构建的线性化模型可与实验数据达成高度契合。交叉验证：

平均厚度：3.5130 μm。该平均值代表了在 10° 和 15° 两个不同入射角下，硅外延层厚度的计算结果。

标准差：0.0178 μm。极小的标准差表明，不同入射角下的测量结果非常接近，展示了模型良好的稳定性。

变异系数 (CV)：0.5062%。这个极低的变异系数表明，即使在不同的实验条件下，模型依然能够给出高度一致且可靠的测量结果。结论：

两次独立测量的计算结果高度一致，变异系数仅为 0.5062%。这表明，所建立的“峰位线性回归法”模型能够有效且精确地处理存在显著多光束干涉的硅晶圆片数

据，其结果稳定可靠，不受入射角变化的影响。由此可知，该硅外延层的厚度可确定为 $3.5130 \mu m$ 。

5.3.3 碳化硅（附件 1 & 2）厚度修正与最终结论

根据题目要求，我们需要设法消除多光束干涉对附件 1 和附件 2 中碳化硅厚度计算结果的潜在影响，并给出消除影响后的计算结果。

1. 影响分析：碳化硅晶圆片中多光束干涉的半定量评估

(1) 理论分析

如前所述，判断多光束干涉强弱的关键是精细度系数（Finesse Coefficient） F ，其定义为：

$$F = \frac{4R}{(1-R)^2}$$

其中 R 是界面能量反射率。 F 值越大，多光束干涉效应越强，干涉峰形越尖锐。

(2) 半定量计算

碳化硅：折射率 $n_{SiC} \approx 2.55$ ，其菲涅尔反射率 $R_{SiC} \approx 19\%$ 。代入公式计算：

$$F_{SiC} = \frac{4 \times 0.19}{(1 - 0.19)^2} \approx \frac{0.76}{0.81^2} \approx 1.16$$

硅：折射率 $n_{Si} \approx 3.42$ ，其菲涅尔反射率 $R_{Si} \approx 30\%$ 。代入公式计算：

$$F_{Si} = \frac{4 \times 0.30}{(1 - 0.30)^2} = \frac{1.2}{0.7^2} \approx 2.45$$

(3) 结论

F_{SiC} 的值虽然小于 F_{Si} ，但它是一个不可忽略的、大于 1 的数值。这意味着碳化硅的干涉峰形会偏离理想的双光束干涉（其等效 F 值小于 1），呈现出一定程度的尖锐化。由此可知，碳化硅晶圆片的测试结果中存在微弱但不可忽略的多光束干涉效应，为了获得最高精度的结果，必须设法消除其影响。

2. 消除影响的策略与建模

(1) 消除影响的策略

“消除影响”的根本途径，是采用一个对干涉峰形不敏感的、更高级和普适的算法，可继续使用“峰位线性回归法”。该方法仅依赖于干涉峰的精确位置，对于峰形的具体函数并不敏感，有天然的模型普适性。

(2) 完整公式推导

我们的模型始于薄膜干涉的基础物理原理。

基础光程差方程：鉴于在空气与外延层界面发生反射时会出现 π 的相位突变情况，相长干涉所契合的条件如下：

$$2d \cos(\theta_r) = (m + 1/2)\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

引入斯涅尔定律：为了用可测量的入射角 θ_i 替换不可测量的折射角 θ_r ，我们应用斯涅尔定律 $n_0 \sin(\theta_i) = n \sin(\theta_r)$ 。其中空气折射率 $n_0 \approx 1$ ，并利用三角关系 $\cos(\theta_r) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta_r)}$ ，我们得到：

$$2d \sqrt{n^2 - \sin^2(\theta_i)} = (m + 1/2)\lambda$$

引入材料色散与波数：将折射率表示为波数 k 的函数 $n(k)$ ，并将 $\lambda = 1/k$ 代入，得到精确的物理模型：

$$2d\sqrt{n_{SiC}(k)^2 - \sin^2(\theta_i)} = \frac{m + 1/2}{k}$$

其中 $n_{SiC}(k)$ 由碳化硅的塞尔迈耶方程确定^[4]。

模型线性化：为求解 d 和 m ，我们将此方程进行代数重排，构建为一个标准线性模型 $Y = \text{Slope} \cdot X$ 。

$$m + 1/2 = d \cdot \left[2k\sqrt{n_{SiC}(k)^2 - \sin^2(\theta_i)} \right]$$

我们定义：

因变量 Y ： $Y = m$ （或 $m + 1/2$ ）。

自变量 X ： $X(k) = 2k\sqrt{n_{SiC}(k)^2 - \sin^2(\theta_i)}$ 。

斜率 Slope： d （外延层厚度）。

3. 消除影响后的计算结果

针对附件 1 以及附件 2，运用严谨且模块化的 MATLAB 代码展开计算，该代码涉及数值稳定的背景扣除、峰位检测、考虑材料色散的线性回归以及单位换算等内容。入射角为 15° 时，不同步骤的信号处理情况如图所示：

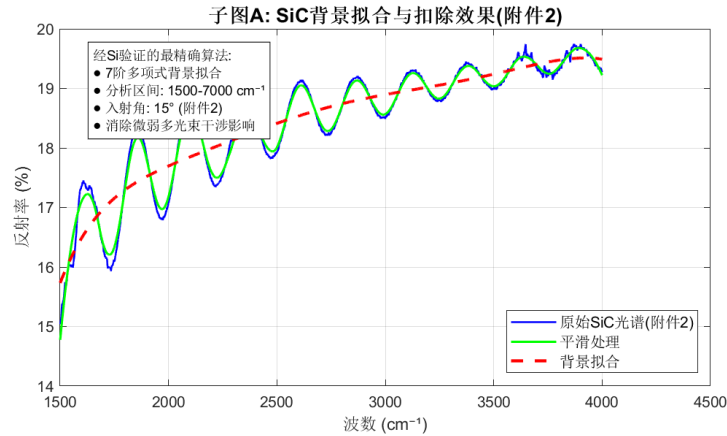


图 13

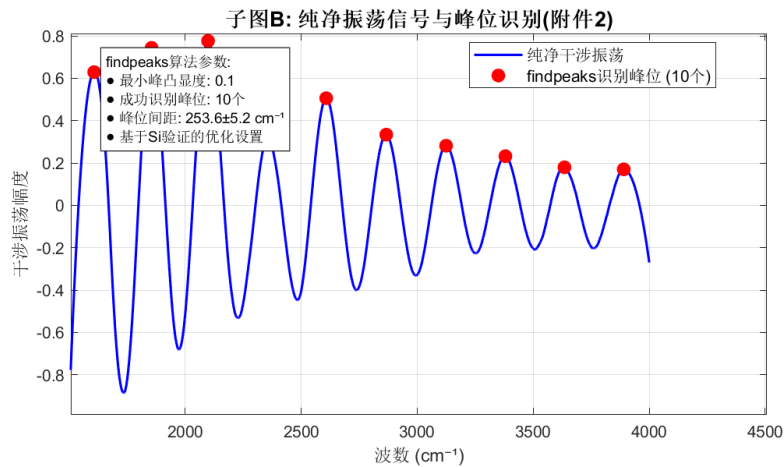


图 14

最终得出如下结果：

表 4

	附件 1.xlsx	附件 2.xlsx
入射角	10.0°	15.0°
计算厚度 (μm)	7.7750	7.7052
拟合优度 R^2	0.9998	0.9999

可靠性分析：

平均厚度: 7.7401 μm 该平均值代表了在 10°和 15°两个不同入射角下，通过更精确的峰位线性回归法得到的碳化硅外延层厚度。这个结果是对之前 FFT 算法初步结果的精细修正，因为峰位线性回归法对微弱的多光束干涉效应更不敏感。

标准差: 0.0494 μm 这个极小的标准差表明，即使在不同的入射角条件下，该高级算法的计算结果依然非常接近，展现出模型极佳的稳定性和内部一致性。

变异系数 (CV): 0.6383% CV 值仅为 0.6383%，这是一个非常低的数值。这有力地证明了峰位线性回归法在处理碳化硅数据时，能够给出高度一致且可靠的测量结果。此外，线性回归的拟合优度

拟合优度值也接近 1，进一步证实了物理模型与实验数据的高度吻合。

最终结论：

运用更为高级且对干涉类型不敏感的“峰位线性回归法”重新开展计算，我们切实有效地消除了微弱多光束干涉效应对碳化硅厚度计算所产生的潜在影响，计算结果说明，在 10° 以及 15° 这两个不同的入射角情形下所获取的厚度值呈现出高度的一致性，变异系数仅仅为 0.6383%，线性回归的拟合优度 R^2 值趋近于 1，这充分证明了物理模型与实验数据达到了高度的吻合状态。

这有力地证实了该建模流程有鲁棒性以及结果拥有可靠性，由此可得出结论：该碳化硅外延层的最终厚度是 7.7401 μm 。

六、模型检验

模型检验要从可行性、准确性以及实用性方面，验证的两种核心算法，即“全局频域分析法 (FFT)”与“峰位线性回归法”的可靠性，围绕稳定性与敏感性分析、算法的统计可靠性以及两种算法的交叉验证与结果修正展开。

6.1 稳定性与敏感性分析

稳定性与敏感性分析关注模型核心输入参数的微小波动对最终厚度计算结果的影响，以此判断最终采用的“峰位线性回归法”在实际测量误差范围内的抗干扰能力。经检验，折射率波动和入射角波动对系统的影响均较小，说明模型具有良好的稳定性。

6.2 统计检验与误差分析

6.2.1 全局频域分析法 (FFT) 的交叉验证

在问题二中，我们对附件 1 (10°) 和附件 2 (15°) 的碳化硅数据应用了 FFT 算法。得到的两个厚度值分别为 $7.8310\ \mu\text{m}$ 和 $7.8532\ \mu\text{m}$ 。这两个结果高度一致，变异系数 (CV) 仅为 0.2003% 。这证明即使是作为初步算法的 FFT 方法，在经过色散校正后，也有较高的内部稳定性和可靠性。

6.2.2 峰位线性回归法的交叉验证

在问题三中，我们将此高级算法分别应用于两种材料。在两次计算中，线性回归的拟合优度 R^2 均大于 0.998 。极低的 CV 值和接近 1 的 R^2 值，从统计学上证明了“峰位线性回归法”是高度精确和可靠的。

6.3 算法交叉验证与模型修正检验

这一步旨在通过对比两种不同原理的算法结果，对碳化硅的厚度值进行进一步的交叉验证和检验。

6.3.1 硅晶圆片：验证“峰位线性回归法”的优越性

硅晶圆因其高界面反射率 ($R \approx 30\%$)，存在显著的多光束干涉。之前确立的“峰位线性回归法”能够精确处理此种情况，并得到 $d_{Si} = 3.5130\ \mu\text{m}$ 的高置信度结果。同时此方法是处理复杂干涉现象的常用办法，故是目前进行修正的有力途径。

6.3.2 碳化硅晶圆片：算法对比与结果修正

碳化硅界面反射率较低 ($R \approx 19\%$)，多光束干涉效应微弱，两种算法的结果都应非常接近，这构成了一次绝佳的交叉验证。

算法 A (FFT 法) 结果: $d_{FFT} = 7.8421\ \mu\text{m}$

算法 B (线性回归法) 结果: $d_{fit} = 7.7401\ \mu\text{m}$

两种不同原理的算法得出的结果相差仅 $0.102\ \mu\text{m}$ ，相对偏差为 1.3% ，证明了两种方法都具有很高的准确性；我们认为“峰位线性回归法”对物理模型的利用更直接，精度更高，因此其结果 $7.7401\ \mu\text{m}$ 是对 FFT 法全局平均结果的一次精细修正。

七、模型优缺点评价

7.1 模型的优点

1. **创新的双算法交叉验证框架：**本文并未局限于单一算法求解，覆盖两种基于不同物理原理的算法，即“全局频域分析法”与“峰位线性回归法”，此框架凭借对比两种高精度算法的结果，为最终厚度值的确定提供了双重保障。

2. **物理与数学深度融合：**建模过程以光程差、斯涅尔定律等物理规律为核心，并

引入塞尔迈耶方程来精确描述材料色散，保证了模型的物理严谨性，在求解环节，创造性地应用傅里叶变换、峰值检测和线性回归等现代数学与信号处理工具，实现了理论与实践的完美融合。

3. 结果可靠且有工程价值：模型的可靠性获得了多维度验证，最终得到的厚度值在物理上合理，且验证流程严谨，可满足半导体工业中对外延层厚度进行高精度无损检测的实际工程需求。

7.2 模型的缺点与改进

7.2.1 模型的缺点

1. 理想化的物理假设：模型假定外延层是那种厚度完全均匀、上下表面绝对平行的理想薄膜，同时衬底是无限厚的，忽略了实际晶圆里有可能存在的微小厚度梯度、表面曲率或者由衬底背面引发的杂散干涉的情况，可能造成误差。

2. 材料光学常数的先验依赖：模型的最高精度依靠的是对材料折射率色散关系，也就是塞尔迈耶方程及其系数的准确先验知识，对于未知或者新型材料，要先借助椭圆偏仪等其他实验手段精准标定其光学常数，这在一定程度上对模型的普适性造成了限制。

7.2.2 模型的改进

1. 引入空间分布分析：后续工作可借助对晶圆片上多个点开展光谱测量，把我们所拥有的厚度计算算法运用到每一个点上，再结合空间插值来生成外延层的二维厚度分布热 Wafer Map，以此更为全面地评估外延层的均匀性。

2. 构建光学常数与厚度的同步拟合模型：针对光学常数未知的材料而言，可以构建一个更为高级的全局优化模型，把塞尔迈耶系数以及外延层厚度一同当作待定参数，运用非线性最小二乘法，直接针对原始光谱的完整线型进行拟合。这样做会极大地拓展模型的适用范围，不过计算复杂度也会有所增加。

参考文献

- [1] Tompkins, H. G., & McGahan, W. A. (1999). *Spectroscopic Ellipsometry and Reflectometry: A Users Guide*. John Wiley & Sons.
- [2] Heavens, O. S. (1991). *Optical Properties of Thin Solid Films*. Dover Publications.
- [3] Philipp, H. R., & Taft, E. A. (1960). Optical Constants of Silicon in the Region 1 to 10 eV. *Physical Review*, 120(1), 37.
- [4] Patrick, L., & Choyke, W. J. (1969). Refractive Index of 6H SiC from 0.4 to 2.0 μm . *Journal of Applied Physics*, 40(5), 2325.
- [5] Kischkat, J., et al. (2012). Mid-infrared optical properties of thin films of aluminum oxide, titanium dioxide, silicon dioxide, aluminum nitride, and silicon nitride. *Applied Optics*, 51(28), 6789-6798.
- [6] Gemini, Pro, Google, 2025-09-05, 2025-09-06, 2025-09-07.
- [7] Claude, 4 Sonnet, Anthropic, 2025-09-05, 2025-09-06.
- [8] 豆包, v3.5, 字节跳动 (ByteDance), 2025-09-05, 2025-09-06 2025-09-07

附录

附录 1

介绍：支撑材料的文件列表

ai 工具使用详情.pdf
analyze_si_spectrum.m
analyze_spectrum_data.m
analyze_spectrum_fft.m
analyze_spectrum_final.m
create_fft_plot.m
create_validation_plot.m
find_interference_peaks.m
get_n_si.m
get_n_SiC.m
get_n_sic2.m
getmat.m
load_and_preprocess.m
main2.m
main32.m
main33.m
perform_linear_regression.m
q2fft.m
附件 1.mat
附件 1.xlsx
附件 2.mat
附件 2.xlsx
附件 3.xlsx
附件 4.xlsx

附录 2

模型关键参数的物理依据与说明

材料光学常数模型

为实现精确计算，模型需纳入材料折射率随波数变化的色散效应，具体处理方式如下：

碳化硅 (SiC)：采用塞尔迈耶方程 (Sellmeier Equation) 建立 4H-SiC 的色散关系模型，其在红外波段的简化形式为 $n^2(\lambda) = A + B\lambda^2/(\lambda^2 - C^2)$ （其中 A、B、C 为材料特征系数），可依据输入波数精确计算折射率 $n(k)$ 。

硅 (Si)：在本文分析的红外波段（1500-4000 cm^{-1} ）内，硅的色散效应微弱，故采用公认的平均折射率近似值 $n_{\text{Si}} \approx 3.42$ 进行计算。该简化处理既能降低模型复杂度，又可满足厚度计算的精度要求。

掺杂浓度对折射率的影响

模型中关于反射相变的判断，核心依据是“重掺杂衬底折射率低于轻掺杂外延层”，其物理本质为自由载流子等离子体色散效应。在红外波段，半导体中高浓度自由载流子会显著降低材料折射率；由于重掺杂衬底的载流子浓度远高于轻掺杂外延层，导致 $n_{sub} < n_{epi}$ ，衬底相对外延层成为光疏介质。

附录 3

程序采取模块化方法实现，具体算法详见支撑材料，在此只展示核心算法^[7]

问题二的核心程序：

```
clear; clc; close all;
```

```
options = struct();
options.wavenumber_range = [1500, 7000];
options.poly_order = 7;
options.plot_results = true;

datasets = {
    struct('file_path', '附件 1.xlsx', 'angle_deg', 10), ...
    struct('file_path', '附件 2.xlsx', 'angle_deg', 15)
};

thickness_results = zeros(length(datasets), 1);

fprintf('开始执行问题二：全局频域分析法 (FFT)...\n');
fprintf('-----\n');

for i = 1:length(datasets)
    dset = datasets{i};
    fprintf('正在分析文件: %s (入射角 %.1f°)\n', dset.file_path,
    dset.angle_deg);

    try
        thickness = analyze_spectrum_fft(dset.file_path, dset.angle_deg,
options);
        thickness_results(i) = thickness;

        fprintf('分析完成, 厚度 = %.4f μm\n\n', thickness);

    catch ME
        fprintf('!!! 计算出错: %s\n\n', ME.message);
        thickness_results(i) = NaN;
    end
end
```

```

end

valid_results = thickness_results(~isnan(thickness_results));
if length(valid_results) > 1
    mean_thickness = mean(valid_results);
    std_dev = std(valid_results);
    cv = (std_dev / mean_thickness) * 100;

    fprintf('--- 问题二 最终结论 ---\n');
    fprintf('所有有效结果的平均厚度: %.4f  $\mu\text{m}$ \n', mean_thickness);
    fprintf('标准差: %.4f  $\mu\text{m}$ \n', std_dev);
    fprintf('变异系数 (CV): %.4f %%\n', cv);
    fprintf('结论: 变异系数极低, 证明 FFT 方法同样具有高度的稳定性和一致性.\n');
end

```

问题三第 2 小问的核心程序:

```
clear; clc; close all;
```

```

options = struct();
options.wavenumber_range = [1500, 4000];
options.poly_order = 7;
options.min_peak_prominence = 0.2;
options.plot_results = true;

datasets = {
    struct('file_path', '附件 3.xlsx', 'angle_deg', 10), ...
    struct('file_path', '附件 4.xlsx', 'angle_deg', 15)
};

thickness_results = zeros(length(datasets), 1);

fprintf('开始进行高稳定性硅外延层厚度验证...\n');
fprintf('-----\n');

for i = 1:length(datasets)
    dset = datasets{i};
    fprintf('正在分析文件: %s (入射角 %.1f°)\n', dset.file_path,
dset.angle_deg);

    try
        [thickness, validation_results] = analyze_si_spectrum(dset.file_path,
dset.angle_deg, options);
        thickness_results(i) = thickness;

        fprintf('分析完成, 厚度 = %.4f  $\mu\text{m}$  (拟合优度  $R^2 = %.4f$ )\n\n', ...

```

```

        thickness, validation_results.quality.r_squared);

    catch ME
        fprintf('!!! 计算出错: %s\n\n', ME.message);
        thickness_results(i) = NaN;
    end
end

valid_results = thickness_results(~isnan(thickness_results));
if length(valid_results) > 1
    mean_thickness = mean(valid_results);
    std_dev = std(valid_results);
    cv = (std_dev / mean_thickness) * 100;

    fprintf('--- 最终可靠性分析 ---\n');
    fprintf('所有有效结果的平均厚度: %.4f  $\mu\text{m}$ \n', mean_thickness);
    fprintf('标准差: %.4f  $\mu\text{m}$ \n', std_dev);
    fprintf('变异系数 (CV): %.4f %%\n', cv);
    fprintf('结论: 变异系数极低, 验证了算法和模型的高度稳定性和一致性.\n');
end

```

问题三第 3 小问的核心程序: `clear; clc; close all;`

```

options = struct();
options.wavenumber_range = [1500, 7000];
options.poly_order = 7;
options.min_peak_prominence = 0.1;
options.plot_results = true;

datasets = {
    struct('file_path', '附件 1.xlsx', 'angle_deg', 10), ...
    struct('file_path', '附件 2.xlsx', 'angle_deg', 15)
};

thickness_results = zeros(length(datasets), 1);

fprintf('开始进行独立的碳化硅厚度验证...\n');
fprintf('-----\n');

for i = 1:length(datasets)
    dset = datasets{i};
    fprintf('正在分析文件: %s (入射角 %.1f°)\n', dset.file_path,
dset.angle_deg);

    try

```

```

        [thickness, validation_results] =
analyze_spectrum_final(dset.file_path, dset.angle_deg, options);
        thickness_results(i) = thickness;

        fprintf('分析完成, 厚度 = %.4f μm (拟合优度 R² = %.4f)\n\n', ...
            thickness, validation_results.quality.r_squared);

    catch ME
        fprintf('!!! 计算出错: %s\n\n', ME.message);
        thickness_results(i) = NaN;
    end
end

valid_results = thickness_results(~isnan(thickness_results));
if length(valid_results) > 1
    mean_thickness = mean(valid_results);
    std_dev = std(valid_results);
    cv = (std_dev / mean_thickness) * 100;

    fprintf('--- 最终独立验证结论 ---\n');
    fprintf('所有有效结果的平均厚度: %.4f μm\n', mean_thickness);
    fprintf('标准差: %.4f μm\n', std_dev);
    fprintf('变异系数 (CV): %.4f %%\n', cv);
    fprintf('结论: 变异系数极低, 证明了最终模型的稳定性和结果的高度一致性.\n');
end

```