Module : Techniques d'estimation pour l'ingénieur

Niveau : $3^{\text{ème}}$ année A-B | Année universitaire : 2020-2021

TD1 : Variables aléatoires continues

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1-|X| & si \quad |X| \leq 1, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

1) *Tracer le graphe de f et vérifier que f est bien une densité de probabilité*

2) *Déterminer la fonction de répartition de X.*

3) *Calculer l'espérance et la variance de X.*

4) *Calculer la probabilité des évènements suivants :*

$$\frac{-1}{2} \leq X \leq \frac{1}{4} \quad et \quad |X| \geq \frac{1}{2}$$

Exercice 2

Une variable aléatoire X a pour densité de probabilité la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} k(9-x^2) & si\ x \in [-3,3], \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

1) *Déterminer la constante k pour que $f$soit bien une densité de probabilité.*

2) *Déterminer la fonction de répartition F de X.*

3) *Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.*

4) *calculer $P(|X| \leq 3), P(X > -2)$ et $P(X < -4)$.*

Exercice 3

En moyenne, les programmes télévisés de 30 minutes sont composés de 22 minutes de fiction. Supposons que la distribution de probabilité des minutes de fiction peut être approchée par une distribution uniforme entre 18 et 26 minutes.

1) *Représenter graphiquement la fonction de densité de probabilité.*

2) *Quelle est la probabilité que la fiction dure au moins 25 minutes ?*

3) *Quelle est la probabilité que la fiction dure entre 21 et 25 minutes ?*

Exercice 4

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, des troupeaux sur la route, etc... Un autocar part de son entrepôt. On note X la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident. On admet que la variable X suit une loi de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \; e^{\frac{-x}{82}} \;\; si \;\; x \geq 0, \\ 0 \qquad sinon. \end{cases}$$

1) *Déterminer la constante α pour que la fonction f soit une densité de probabilité. .*

2) *Montrer que la fonction de répartition est égale à $F(x) = 1 - e^{-\alpha x};\; x \geq 0$.*

3) **a)** *Calculer la probabilité pour que la distance parcourue sans incident soit comprise entre 50 et 100 km.*

b) *Calculer la probabilité pour que la distance parcourue sans incident soit supérieure à 25 km.*

4) *Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 km sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains km ?*

5) *Comparez avec le résultat précédent. Conclure.*

6) *On veut déterminer la distance moyenne parcourue sans incident. Calculer l'espérance de X.*

Exercice 5

En 1955, Wechler a proposé de mesurer le QI (Quotient Intellectuel) des adultes grâce à deux échelles permettant de mesurer les compétences verbales et les compétences non verbales. On compare le score global de la personne testée avec la distribution des scores obtenue par un échantillon représentatif de la population d'un âge donné, dont les performances suivent une loi normale ayant pour moyenne 100 et pour écart-type 15.

1) *Quel est le pourcentage de personnes dont le QI est inférieur à 80 ?*

2) *Quelle chance a-t-on d'obtenir un QI compris entre 100 et 110 ?*

3) *Trouvons la valeur du QI telle que 5 % des patients présentent un score qui lui est supérieur.*

4) *En dessous de quel QI se trouve le tiers des individus ?*

Exercice 6

D'après le responsable de la mise en marché de l'entreprise Sicom, la demande annuelle D pour les imprimantes laser suit approximativement une loi normale. Il précise également qu'il y a une probabilité de 0.195 pour que la demande soit inférieure à 1500 unités et une probabilité de 0.025 d'être supérieure à 2910 unités

1) *Déterminer la moyenne et l'écart-type de la demande annuelle D.*

2) *Déterminer la probabilité que la demande annuelle D soit comprise entre 2000 et 2500 unités .*

3) *Déterminer la valeur particulière d_0 de D tel que $P(D \geq d_0) = 0.25$*