Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кабинет методики преподавания элементарной математики

О методе парабол решения задач с параметром

Курсовая работа
студентки 3 курса
Ирины Сергеевны Груниной

Научный руководитель
к. ф.–м. н.
Дмитрий Викторович Копьёв

Москва, 2019

Содержание

1 Введение

В данной работе рассмотрены квадратные уравнения с одним параметром, множество значений которого необходимо определить в зависимости от условий задачи. В качестве таковых выступают варианты расположения корней квадратного уравнения на некотором промежутке или луче. Работа состоит из двух частей: теоретической, с описанием и обоснованием методов решения задач и примерами решений, и части с задачами для самостоятельного решения.

Всего в работе выделено шесть различных вариантов расположения корней на промежутке или луче. При этом в качестве промежутка может выступать отрезок, полуинтервал или интервал, а луч может быть открытым или закрытым. Подробнее о каждом варианте сказано в третьей части работы.

Для каждого из вариантов расположения корней представлен общий способ решения, не зависящий от типа границ промежутка или луча, но дающий не полное решение. Также для каждого типа границ выделены и рассмотрены все особые случаи, которые в совокупности с решением, полученным общим методом, дают полное решение задачи.

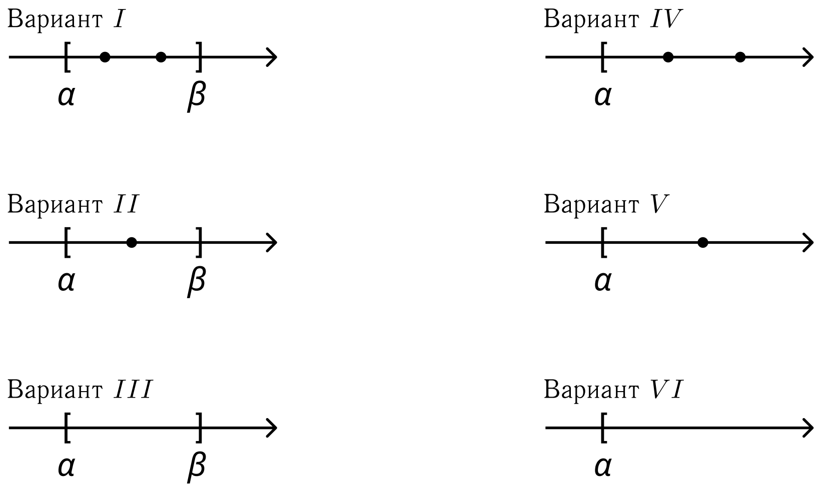
2 Обозначения

Для однозначного понимания текста работы ниже приведён список используемых обозначений:

1. $f(x) = ax^2 + bx + c$ — квадратный трёхчлен,
2. $p \in \mathbb{R}$ — параметр,
3. $a = a(p),\ b = b(p),\ c = c(p)$ — коэффициенты квадратного трёхчлены, зависящие от параметра p,
4. $D = b^2 - 4ac$ — дискриминант квадратного трёхчлена,
5. $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ — координата вершины параболы $y = f(x)$,
6. $x_{1,\,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ — корни квадратного уравнения $f(x) = 0$,
7. $\alpha \in \mathbb{R}$ — левая граница промежутка или луча,
8. $\beta \in \mathbb{R}$ — правая граница промежутка или луча.

3 Варианты расположения корней

При рассмотрении вариантов расположения корней квадратного уравнения на промежутке или луче можно выделить шесть основных вариантов, которые принципиально отличаются друг от друга:



Каждый вариант расположения корней подразумевает разные типы границ. От них и зависит количество особых случаев.

3.1 Комментарий при $D < 0$

Такие случаи интересны только в вариантах III и VI, а значения параметра, соответствующие им, автоматически включаются в множество решений. Везде далее будет рассматриваться случаи с *неотрицательным дискриминантом*. Тогда вариант VI — это практически частный случай варианта IV с тем лишь замечанием, что нужно рассматривать нахождение двух корней не на луче $[\alpha, +\infty)$, а на луче $(-\infty, \beta = \alpha]$. Поэтому детально будут рассмотрены только варианты I–V.

4 Два корня внутри промежутка

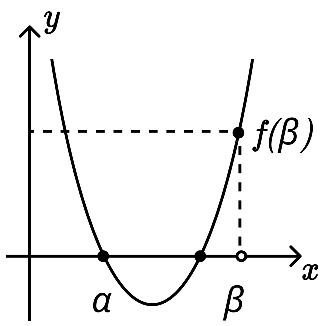
Расположение двух корней внутри промежутка (Вариант I) допускает границы четырёх типов:

1. $[\alpha, \beta]$
2. $[\alpha, \beta)$
3. $(\alpha, \beta]$
4. (α, β)

Особый случай для границ типов 1–3 — это попадание одного корня уравнения $f(x) = 0$ на включённый конец промежутка, а второго — либо внутрь промежутка, либо на его включенную границу.

4.1 Границы второго типа

Например, особому случаю второго типа границ будет соответствовать следующая ситуация:



Чтобы обработать этот случай, необходимо рассмотреть прохождение параболы $y = f(x)$ через точку α, то есть решить уравнение

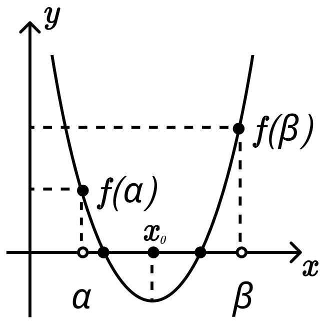
$$f(\alpha) = 0$$

Если полученное уравнение сводится к уравнению, которое вы умеете решать, то в результате получится конечное число параметров p. Чтобы понять, какие параметры p подходят, можно подставить каждое значение в трёхчлен $f(x)$ и проверить, принадлежит ли второй корень уравнения $f(x) = 0$ промежутку $[\alpha, \beta)$. Это можно сделать с помощью теоремы Виета, так как один из корней уже известен ($x_1 = \alpha$), или проверкой соответствующих условий:

$$\begin{cases} \alpha < x_0 < \beta, \\ a \cdot f(\beta) > 0. \end{cases}$$

4.2 Границы четвёртого типа. Общий случай

Границы четвёртого типа исключают особые случаи и являются, вообще говоря, общим случаем:



Чтобы оба корня были внутри интервала (α, β) необходимо выполнение следующих условий:

- существует 2 корня
- вершина параболы лежит внутри промежутка
- на концах промежутка значения квадратного трёхчлена положительны (с точностью до умножения на коэффициент a)

получаем следующую систему:

$$\begin{cases} D > 0, \\ \alpha < x_0 < \beta, \\ a \cdot f(\alpha) > 0, \\ a \cdot f(\beta) > 0. \end{cases}$$

Как уже говорилось, чтобы получить полное решение задачи, нужно объединить особые случаи с общим решением.

5 Один корень внутри промежутка

Так же, как и в первом случае, здесь возможны четыре типа границ. Напомним их:

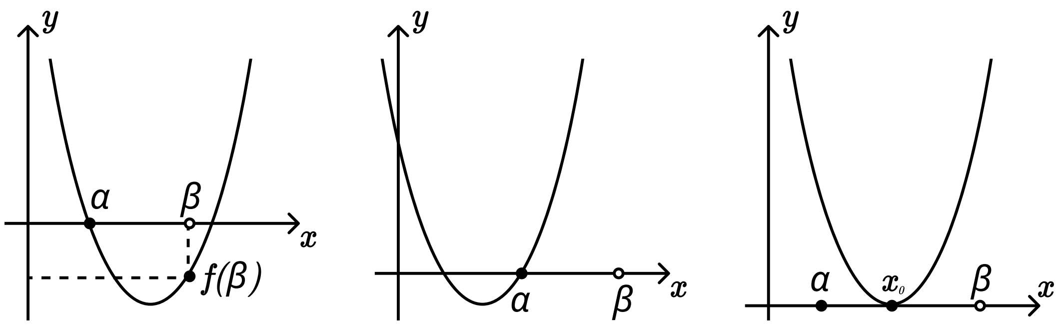
1. $[\alpha, \beta]$
2. $[\alpha, \beta)$
3. $(\alpha, \beta]$
4. (α, β)

Для типов границ 1–3 возможны два особых случая:

- существует два корня, при этом один из них попадает на включённую границу промежутка, а второй — за его пределы
- существует два корня, при этом один из них попадает на выколотую границу промежутка, а второй — на промежуток
- существует ровно один корень, который попадает внутрь промежутка

5.1 Границы 2 типа

Особым случаям 2 типа границ будет соответствовать следующие ситуации:



5.1.1 Первый особый случай

Чтобы обработать первый случай, нужно рассмотреть прохождение параболы $y = f(x)$ через точку $x = \alpha$. То есть решить уравнение

$$f(\alpha) = 0$$

Далее, подставить полученные значения параметра p в трёхчлен $f(x)$ и выбрать параметры, при которых второй корень существует и лежит за пределами промежутка $[\alpha, \beta)$. Это можно сделать с помощью теоремы Виета или проверки соответствующего условия:

$$a \cdot f(\beta) \leqslant 0$$

5.1.2 Второй особый случай

Во втором случае нужно рассмотреть прохождение параболы через выколотую точку $x = \beta$:

$$f(\beta) = 0$$

Далее, подставить полученные значения параметра p в трёхчлен $f(x)$ и выбрать параметры, при которых второй корень существует и лежит внутри промежутка $[\alpha, \beta)$. Это можно сделать с помощью теоремы Виета или проверки соответствующих условий:

$$\begin{cases} D > 0, \\ a \cdot f(\alpha) \geqslant 0, \\ \alpha \leqslant x_0 < \beta. \end{cases}$$

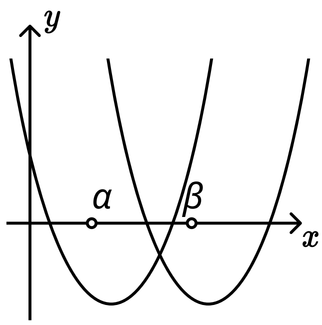
5.1.3 Третий особый случай

Чтобы обработать третий случай, нужно рассмотреть равенство дискриминанта нулю, а потом подставить полученные значения параметра p в трёхчлен $f(x)$ и выбрать параметры, при которых x_0 лежит внутри промежутка $[\alpha, \beta)$. Это можно сделать с помощью проверки условий:

$$\alpha \leqslant x_0 < \beta$$

5.2 Границы 4 типа. Общий случай

Для границ 4 типа существует три особых случая, которые описаны выше. В данном пункте на примере этих границ мы разберем общий случай:



Чтобы ровно один корень был внутри интервала (α, β) необходимо существование двух корней, положительное значение трёхчлена $f(x)$ на одном конце и отрицательное на другом. Получаем следующую совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\cdot f(\alpha)<0\\ a\cdot f(\beta)>0\end{cases}\\ \begin{cases}a\cdot f(\alpha)>0\\ a\cdot f(\beta)<0\end{cases}\end{array}\right.$$

Как уже говорилось, чтобы получить полное решение задачи, нужно объединить особые случаи с общим случаем.

6 Ни одного корня внутри промежутка

Расположение двух корней вне промежутка (Вариант III) допускает границы четырёх типов:

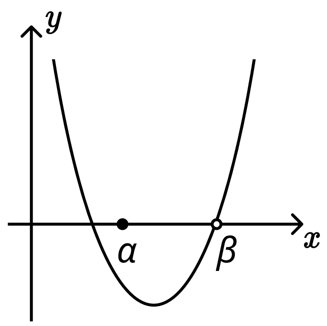
1. $[\alpha, \beta]$
2. $[\alpha, \beta)$
3. $(\alpha, \beta]$
4. (α, β)

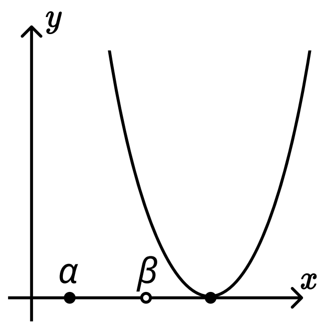
Для типов границ 2–4 возможны два особых случая:

- существует два корня, при этом один из них попадает в выколотый конец промежутка
- существует ровно один корень, который попадает либо в выколотый конец промежутка, либо за его пределы

6.1 Границы 2 типа

Например, особым случаям 2 типа границ будет соответствовать следующая ситуация:





6.1.1 Первый особый случай

Чтобы обработать первый особый случай, нужно рассмотреть прохождение параболы $y = f(x)$ через точку β. То есть решить уравнение:

$$f(\beta) = 0$$

Далее, подставить полученные значения параметра p в трёхчлен $f(x)$ и выбрать параметры, при которых второй корень существует и лежит за пределами промежутка $[\alpha, \beta)$. Это можно сделать с помощью теоремы Виета или проверки соответствующего условия:

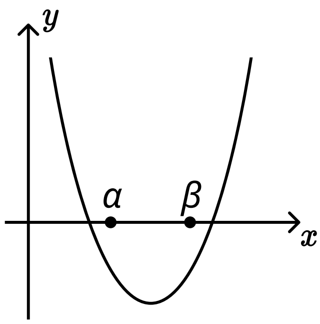
$$a \cdot f(\alpha) < 0$$

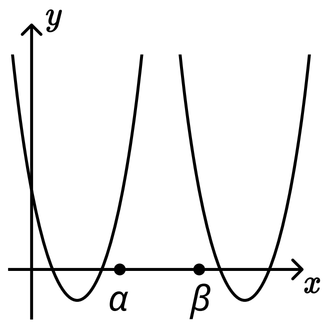
6.1.2 Второй особый случай

Чтобы обработать второй особый случай, нужно рассмотреть равенство дискриминанта нулю, подставить полученные значения параметра p в трёхчлен $f(x)$ и выбрать параметры, при которых x_0 не попадает внутрь промежутка. Это можно сделать с помощью соответствующего условия:

$$\left[\begin{array}{l} x_0 \geqslant \beta \\ x_0 < \alpha \end{array}\right.$$

6.2 Границы 1 типа. Общий случай





Чтобы отрезок $[\alpha, \beta]$ лежал внутри параболы, необходимо выполнение следующих условий:

- существует два корня
- на концах промежутка значения квадратного трёхчлена отрицательны (с точностью до умножения на коэффициент a)

А чтобы оба корня уравнения находились справа или слева от отрезка, необходимо выполнение следующих условий:

- существует два корня
- вершина параболы левее левого конца отрезка или правее правого
- значения функции в этих концах отрезка положительно (с точностью до умножения на коэффициент a)

Получаем следующую совокупность трёх систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \cdot f(\alpha) < 0 \\ a \cdot f(\beta) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} D > 0 \\ x_0 < \alpha \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} D > 0 \\ x_0 > \beta \\ a \cdot f(\beta) > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Как уже говорилось, чтобы получить полное решение, нужно объединить особые случаи с общим решением задачи.

7 Два корня на луче

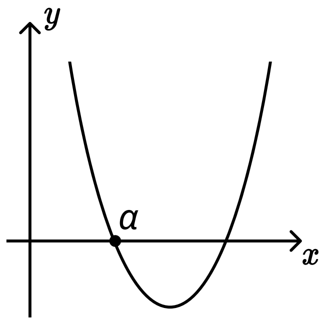
Расположение двух корней на луче (Вариант IV) допускает границы четырёх типов:

1. $[\alpha, +\infty)$
2. $(\alpha, +\infty)$
3. $(-\infty, \beta]$
4. $(-\infty, \beta)$

Особый случай для границ типов 1 и 3 — это попадание одного корня уравнения $f(x) = 0$ в начало луча.

7.1 Границы 1 типа

Например, особому случаю 1 типа границ будет соответствовать следующая ситуация:



Чтобы обработать этот случай, необходимо рассмотреть прохождение параболы $y = f(x)$ через точку α. То есть решить уравнение

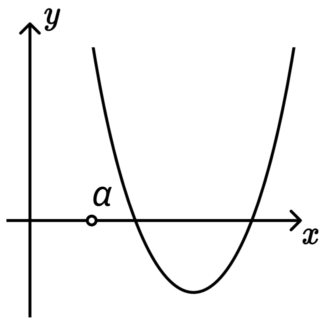
$$f(\alpha) = 0$$

Подставляем полученные параметры в трёхчлен $f(x)$, и выбираем из них те, при которых второй корень существует и лежит на луче $[\alpha, +\infty)$. Это можно сделать с помощью теоремы Виета или проверки соответствующих условий:

$$x_0 > \alpha$$

7.2 Границы 2 и 4 типов. Общий случай

Границы 2 и 4 типов исключают особые случаи и являются, вообще говоря, общим случаем. Например, особому случаю второго типа границ будет соответствовать следующая ситуация:



Чтобы оба корня были внутри луча $[\alpha, +\infty)$, необходимо выполнение следующих условий:

- существует два корня
- вершина параболы лежит на луче
- на конце луча значение квадратного трёхчлена положительно (с точностью до умножения на коэффициент a)

Получаем следующую систему:

$$\begin{cases} D > 0 \\ x_0 > \alpha \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \end{cases}$$

Как уже говорилось, чтобы получить полное решение, нужно объединить особые случаи с общим решением задачи.

8 Один корень на луче

Расположение одного корня на луче (Вариант V) допускает границы четырёх типов:

1. $[\alpha, +\infty)$
2. $(\alpha, +\infty)$
3. $(-\infty, \beta]$
4. $(-\infty, \beta)$

Для типов границ 1 и 3 возможны два особых случая:

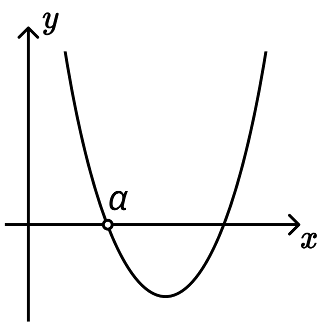
- существует два корня, при этом один из них попадает на включённый конец луча, а второй — за его пределы
- существует ровно один корень, который попадает на луч

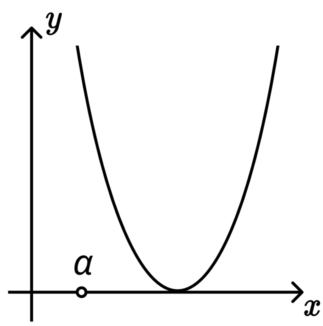
Для типов границ 2 и 4 возможны два особых случая:

- существует два корня, при этом один из них попадает на выколотый конец луча, а второй — на луч
- существует ровно один корень, который попадает на луч

8.1 Границы типа 2

Например, особому случаю 2 типа границ будет соответствовать следующая ситуация:





8.1.1 Первый особый случай

Первый особый случай — существует два корня, при этом один из них попадает на выколотый конец луча, а второй - на луч. Чтобы обработать этот случай, необходимо рассмотреть прохождение параболы $y = f(x)$ через точку α. То есть решить уравнение:

$$f(\alpha) = 0$$

Подставляем полученные параметры в трёхчлен $f(x)$ и выбираем из них те, при которых второй корень существует и лежит на луче $[\alpha, +\infty)$. Это можно сделать с помощью теоремы Виета или проверки соответствующих условий:

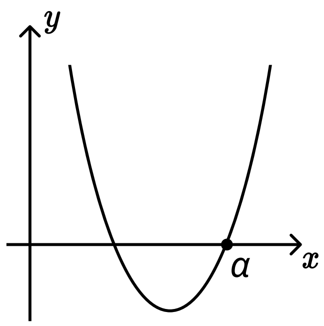
$$x_0 > \alpha$$

8.1.2 Второй особый случай

Второй особый случай — существует ровно один корень, который попадает на луч. Чтобы обработать этот особый случай, нужно рассмотреть равенство дискриминанта нулю, подставить полученные значения параметра p в трёхчлен $f(x)$ и выбрать параметры, при которых x_0 попадает внутрь луча $[\alpha, +\infty)$. Это можно сделать с помощью проверки соответствующего условия:

$$x_0 > \alpha$$

8.2 Границы типа 1



Разберём первый особый случай для первого типа границ (второй особый случай такой же, как и в предыдущем пункте).

8.2.1 Первый особый случай

Первый особый случай - существует два корня, при этом один из них попадает на включённый конец луча, а второй — за его пределы. Чтобы обработать этот случай, необходимо рассмотреть прохождение параболы $y = f(x)$ через точку α. То есть решить уравнение:

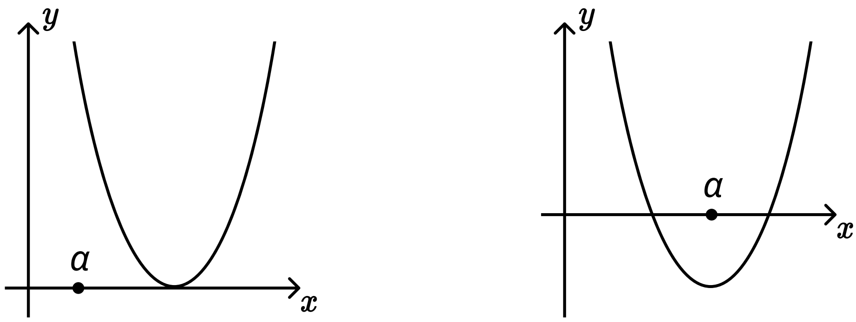
$$f(\alpha) = 0$$

Подставляем полученные параметры в трёхчлен $f(x)$ и выбираем те, при которых второй корень существует и не лежит на луче $[\alpha, +\infty)$. Это можно сделать с помощью теоремы Виета или проверки условия:

$$x_0 < \alpha$$

8.3 Границы типа 1. Общий случай

Для границ типа 1 существует два особых случая, которые описаны выше. В данном пункте на примере этих границ мы разберем общий случай:



Чтобы ровно один корень был внутри луча $[\alpha, +\infty)$, необходимо выполнение следующих условий:

- существует два корня
- на конце луча значение квадратного трёхчлена отрицательно (с точностью до умножения на коэффициент a)

Получаем следующее уравнение:

$$a \cdot f(\alpha) < 0$$

Как уже говорилось, чтобы получить полное решение задачи, нужно объединить особые случаи с общим решением.

9 Нет корней на луче

Как уже говорилось, случай отсутствия корней на луче — это дополнение к случаю двух корней на луче. Поэтому будем считать, что он уже рассмотрен.

10 Примеры

Задача 1

Найти все значения параметра p, при которых квадратное уравнение $(p-1)\cdot x^2 - 2p\cdot x + (p+3) = 0$ имеет ровно два корня на луче $[0, +\infty)$.

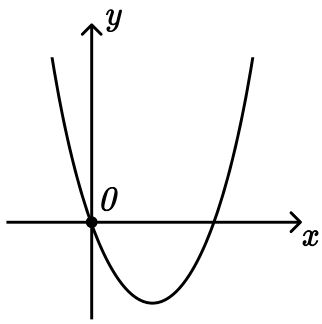
Решение

Для начала рассмотрим особый случай. Им является попадание одного из корней в точку $x = 0$ при нахождении второго корня на луче $[0, +\infty)$. Чтобы учесть этот случай, решим уравнение $f(0) = p + 3 = 0$ и проверим, попадает ли второй корень на луч $[0, +\infty)$. Подставляем значение параметра $p = -3$ в исходное уравнение и находим его корни:

$$-4x^2 + 6x = 0 \quad \longrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x_1 = 0 \\ &x_2 = 1.5 \end{aligned}\right.$$

корень $x_2 > 0$, следовательно, значение параметра $p = -3$ подходит.

Теперь можно рассмотреть общий случай. Один из корней уравнения должен находиться на луче $[0, +\infty)$, а второй лежать левее точки $x = 0$.



Этим условиям удовлетворяет следующая система уравнений:

$$\begin{cases} D = p^2 - (p-1)(p+3) > 0 \\ (p-1)\cdot f(0) = (p-1)(p+3) > 0 \\ x_0 = \dfrac{p}{p-1} > 0 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} p \in (-\infty, 1.5) \\ p \in \mathbb{R} \setminus [-3, 1] \\ p \in \mathbb{R} \setminus [0, 1] \end{cases}$$

решаем её и находим значения параметра: $p \in (-\infty, -3) \cup (1, 1.5)$.

Ответ

Объединяя множества значений параметра, полученные в особом и общем случаях, получаем ответ задачи:

$$\boxed{p \in (-\infty, -3] \cup (1, 1.5)}$$

11 Задачи

Задача 1

Найдите все действительные значения параметра p, при которых уравнение $x-2=\sqrt{2(p-1)\cdot x-1}$ имеет единственное решение.
Ответ: $p\in[\frac{3}{4},+\infty)$.

Задача 2

При каких значениях p уравнение $2p\cdot(x+1)^2-|x+1|+1=0$ имеет четыре различных корня?
Ответ: $p\in(0,\frac{1}{8})$

Задача 3

При каких значениях параметра p имеется ровно один корень у уравнения $(p-1)\cdot 4^x+(2p-3)\cdot 6^x=(3p-4)\cdot 9^x$?
Ответ: $p\in(-\infty,1]\cup\{\frac{5}{4}\}\cup[\frac{4}{3},+\infty)$

Задача 4

Найдите все значения p, при каждом из которых среди корней уравнения $p\cdot x^2+(p+4)\cdot x+(p+1)=0$ имеется ровно один отрицательный.
Ответ: $p\in(-1,0]\cup\{\frac{2+2\sqrt{13}}{3}\}$.

Задача 5

При каких значениях p один из корней уравнения больше $x=1$, а другой меньше? $(p^2+p+1)\cdot x^2+(2p-3)\cdot x+(p-5)=0$.
Ответ: $p\in(-2-\sqrt{11},-2+\sqrt{11})$

Задача 6

Найдите все значения p, при которых существует единственное решение уравнения $3\cdot\sqrt[5]{x+2}-16p^2\cdot\sqrt[5]{32x+32}=\sqrt[10]{x^2+3x+2}$.
Ответ: $p\in(-\infty,-\frac{1}{2\sqrt{2}}]\cup[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]\cup[\frac{1}{2\sqrt{2}},+\infty)$

Задача 7

При каких значениях параметра p уравнение имеет ровно три различных корня? $16^x - 3 \cdot 2^{3x+1} + 2 \cdot 4^{x+1} - (4-4p) \cdot 2^{x-1} - (p^2 - 2p + 1) = 0$.
Ответ: $p \in (0,1) \cup (1,4) \cup (4,5)$

Задача 8

Найдите все p, при которых существует два различных корня уравнения $(\log_2(x+1) - \log_2(x-1))^2 - 2(\log_2(x+1) - \log_2(x-1)) - (p^2 - 1) = 0$.
Ответ: $p \in (-1,0) \cup (0,1)$

Задача 9

Найдите все значения параметра p, при которых оба корня квадратного уравнения $p \cdot x^2 - (2p-1) \cdot x + (3p-1) = 0$ больше нуля.

Задача 10

При каких значениях параметра p уравнение $\frac{1}{9^{|x-2|}} - \frac{p}{3^{|x-2|}} - 4 = 0$ имеет ровно один корень?

Задача 11

Для уравнения $x^2 - 2x \cdot \log_p(p+1) + \log_p(p-4) = 0$ найдите все значения p, при которых оба корня находятся внутри интервала $(0,1)$.

Задача 12

При каких p уравнение $2\cos^2(x) + p^2\cos(x) + 1 = 0$ не имеет решений?

Задача 13

Необходимо найти все значения параметра p, при которых уравнение $2p \cdot x^2 - 2x - (3p+2) = 0$ имеет ровно один корень на луче $(1, +\infty)$.

Задача 14

Найдите все значения параметра p при которых оба корня квадратного уравнения $(p-1) \cdot x^2 - (p+1) \cdot x + p = 0$ лежат в интервале $(1,3)$?

Задача 15

При каких значениях параметра p нет ни одного вещественного корня у уравнения $25^{p+x}+25^{p-x}+2(p+1)\cdot 5^{2p+x}+2(p+1)\cdot 5^{2p-x}=(3-p^2)\cdot 5^{2p}$?

12 Литература

- М. Л. Галицкий, А. М. Гольдман, Л. И. Звавич «Сборник задач по алгебре»
- А. И. Козко, В. С. Панфёров, И. Н.Сергеев, В. Г.Чирский «Задачи с параметрами, сложные и нестандартные задачи»