Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

Задачи на делимость
(для 7 и 8 классов)

Составила
студентка 4 курса
Ирина Сергеевна Грунина

Москва, 2020

1 Задача

Условие:

Существует ли прямоугольный треугольник с одним из катетов равным 101?

Решение:

Обозначим гипотенузу как a, а катеты как b и c. Тогда по теореме Пифагора:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

пусть катет $c = 101$, тогда

$$a^2 = b^2 + 101^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 - b^2 = 101^2$$

Теперь воспользуемся формулой разности квадратов:

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b) = 1 \cdot 101 \cdot 101$$

Из последнего равенства следует следующая система уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 101^2 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} a - b = 101^2 \\ a + b = 1 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} a - b = 101 \\ a + b = 101 \end{cases} \end{array}\right. \longrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b + 1 \\ b = \dfrac{101^2 - 1}{2} = 5100 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} a = 1 - b \\ b = \dfrac{1 - 101^2}{2} < 0 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} a = 101 - b \\ b = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Случаи 2 и 3 не подходят, потому что стороны треугольника должны быть положительными. Из системы 1 получается окончательное решение:

$$\begin{cases} a = 5101 \\ b = 5100 \end{cases}$$

Ответ:

Прямоугольный треугольник с одним из катетов равным 101 существует. Второй его катет равен 5100, а гипотенуза — 5101.

2 Задача

Условие:

Может ли сумма $1+2+3+...+(n-1)+n$ при каком-нибудь натуральном n оканчиваться цифрой 7?

Решение:

$1+2+3+...+(n-1)+n = \dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$. Чтобы это число оканчивалось на цифру 7, нужно, чтобы число $\dfrac{n\cdot(n+1)}{2} - 2 = \dfrac{n\cdot(n+1)-4}{2}$ делилось на 5, следовательно, число $n\cdot(n+1)-4 = n^2+n+1-5$ должно делиться на 5. Но это не так, потому что $n^2+n+1 \equiv (n-2)^2-3 \not\equiv 0 \pmod 5$, так как квадраты не дают остатка 3 при делении на 5.

Ответ:

Не может.

3 Задача

Условие:

В клетках квадратной таблицы 10×10 расставлены числа от 1 до 100. Пусть $S_1, S_2, ..., S_{10}$ — суммы чисел, стоящих в столбцах таблицы. Могло ли оказаться так, что среди чисел $S_1, S_2, ..., S_{10}$ каждые два соседних различаются на 1?

Решение:

Если S_i и S_{i+1} различаются на 1, то эти два числа имеют разную чётность, то есть в последовательности $S_1, S_2, ..., S_{10}$ чётные и нечётные числа строго чередуются. Значит, среди чисел $S_1, S_2, ..., S_{10}$ ровно пять чётных и пять нечётных. Отсюда следует, что сумма $S_1+S_2+...+S_{10}$ нечётна. С другой стороны, $S_1+S_2+...+S_{10} = 1+2+...+100$, а в этой сумме 50 нечётных слагаемых, поэтому она чётна. Возникает противоречие.

Ответ:

Не могло.

4 Задача

Условие:

Есть 2017 ящиков с шариками, в первом ящике 1 шарик, во втором 2 шарика, в 2017-ом ящике — 2017 шариков. Иногда из какого-нибудь ящика берут два шарика и перекладывают их по одному в два других. Может ли в какой-то момент оказаться, что каждый шарик побывал в каждом ящике ровно один раз, а в конце вернулся в свой начальный ящик?

Решение:

Во всех ящиках находится

$$N = \frac{(1 + 2017) \cdot 2017}{2} = 1009 \cdot 2017$$

шариков. Каждый шарик нужно переложить $K = 2017$ раз, чтобы он побывал в каждом ящике ровно один раз, и в итоге мог оказаться в своём первоначальном ящике.

Отсюда легко понять, что для ситуации, описанной в условии, надо совершить $M = N \cdot K = 1009 \cdot 2017^2$ вытаскиваний.

По условию всегда вытаскивают по 2 шарика, поэтому можно наблюдать противоречие: с одной стороны, количество вытаскиваний должно быть чётным числом, с другой стороны, мы вычислили, что число вытаскиваний будет нечётным.

Ответ:

Не может.

5 Задача

Условие:

Из натурального числа N_1 вычли сумму его цифр S_{N_1}, из полученного числа $N_2 = N_1 - S_{N_1}$ вновь вычли сумму уже его цифр S_{N_2} и т. д. После 11 таких итераций получился ноль. Какое число N_1 было в начале?

Подсказка: Разность между числом и суммой его цифр делится на 9.

Решение:

Разность между числом и суммой его цифр делится на 9, поэтому все числа, которые мы получали, делились на 9 (кроме, может быть, исходного). Пойдём с конца: ноль мог получиться из любого однозначного натурального числа после вычитания из него суммы цифр. Но из них на 9 делится только 9. Поэтому на предпоследнем шаге у нас было число 9. Но 9 можно получить только из одного числа, делящегося на 9, — из 18. И так далее пока не дойдём до числа 81. Тут путь раздваивается: 81 можно получить и из 90, и из 99. Сделаем последний шаг назад (теперь делимость на 9 нам уже не важна!) — 90 ни из какого числа получить нельзя, а для 99 есть целых 10 возможных предшественников: $100, 101, 102, ..., 109$.

Ответ:

Любое натуральное число от 100 до 109.

6 Задача

Условие:

В обращении есть монеты достоинством в $1, 2, 5, 10, 20, 50$ копеек и 1 рубль. Известно, что k монетами можно набрать m копеек. Докажите, что m монетами можно набрать k рублей.

Подсказка: Для каждой монеты достоинством в n копеек есть монета достоинством в $\frac{100}{n}$ копеек.

Доказательство:

Пусть среди k монет, дающих в сумме m копеек, есть a_1 монет по 1 копейке, a_2 — по 2 копейки, a_3 — по 5, a_4 — по 10, a_5 — по 20, a_6 — по 50 копеек и a_7 — по 1 рублю. Тогда

$$\begin{cases} a_1 + 2\cdot a_2 + 5\cdot a_3 + 10\cdot a_4 + 20\cdot a_5 + 50\cdot a_6 + 100\cdot a_7 = m \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = k \end{cases}$$

Умножим второе равенство на 100 и запишем его в виде:

$$100\cdot a_1 + 50\cdot 2\cdot a_2 + 20\cdot 5\cdot a_3 + 10\cdot 10\cdot a_4 + 5\cdot 20\cdot a_5 + 2\cdot 50\cdot a_6 + 100\cdot a_7 = 100\cdot k$$

отсюда следует, что если взять $100\cdot a_7$ монет по 1 копейке, $50\cdot a_6$ — по 2, $20\cdot a_5$ — по 5, $10\cdot a_4$ — по 10, $5\cdot a_3$ — по 20, $2\cdot a_2$ — по 50 копеек и a_1 монет по 1 рублю, то в сумме они дадут $100\cdot k$ копеек, то есть k рублей. А согласно первому равенству монет будет m.

7 Задача

Условие:

Докажите следующий признак делимости на 37: «Для того, чтобы узнать, делится ли число на 37, надо разбить его справа налево на группы по три цифры. Если сумма полученных трёхзначных чисел делится на 37, то и данное число делится на 37».

Пояснение: Слово «трёхзначные» употреблено условно: некоторые из групп могут начинаться с нулей и быть на самом деле двузначными или меньше; не трёхзначной будет и самая левая группа, если количество цифр нашего числа не кратно 3.

Доказательство:

Докажем, что полученная в условии сумма S_N даёт тот же остаток при делении на 37, что и исходное число N. Так как число 999 делится на 37, достаточно доказать, что числа N и S_N дают одинаковый остаток при делении на 999. Дальнейшее доказательство аналогично доказательству признака делимости на 9:

$$\begin{aligned} N - S_N &= ... + \overline{a_{3r+2}a_{3r+1}a_{3r}} \cdot 10^{3r} + ... + \overline{a_2a_1a_0} - S_N \\ &= ... + \overline{a_{3r+2}a_{3r+1}a_{3r}} \cdot (10^{3r} - 1) + ... + \overline{a_5a_4a_3} \cdot 999 + \overline{a_2a_1a_0} \cdot 0 \end{aligned}$$

каждое слагаемое в этой сумме делится на 999, а значит, вся сумма делится на 999. Следовательно, числа N и S дают одинаковый остаток при делении на 999.

8 Задача

Условие:

Число $\overline{f0f0...f070202...02}$, где f — некоторая цифра, делится на 37. Группы $\overline{f0}$ и $\overline{02}$ повторены 2018 раз. Найдите все возможные значения f.

Решение:

Разобьём числа на группы по три цифры справа налево. Так как в числе всего $2 \cdot 2018 + 1 + 2 \cdot 2018 = 8073$ цифр, что кратно 3, то в каждой группе будет ровно по 3 цифры.

Рассмотрим группы с конца числа: $\overline{020}$ и $\overline{202}$. Так как $111 \vdots 37$, то и $\overline{020} + \overline{202} = 222 \vdots 37$. Значит можно убирать группы вида $\overline{020202}$ с конца числа.

Теперь рассмотрим группы $\overline{f0f}$ и $\overline{0f0}$ в начале числа. Видно, что их сумма равна $\overline{f0f} + \overline{0f0} = \overline{fff}$ и кратна 37. Значит в начале числа группы $\overline{f0f0f0}$ можно тоже убирать.

Попробуем отбросить максимальное количество групп $\overline{f0f0f0}$ от начала и $\overline{020202}$ от конца числа. Так как $2 \cdot 2018 \equiv 4 \pmod 6$, то получится число $\overline{f0f070202}$.

Чтобы оно делилось на 37, нужно найти такую цифру f, что $\overline{f0f} + \overline{070} + \overline{202} = \overline{f0f} + 70 + 202 = \overline{f0f} + 272 \vdots 37$, упрощая, получим конечное уравнение $\overline{f0f} + 13 \vdots 37$.

Проверяя все цифры от 1 до 9, получаем, что подходит только $f = 5$.

Ответ:

Число $\overline{f0f0...f070202...02}$ кратно 37 только при $f = 5$.