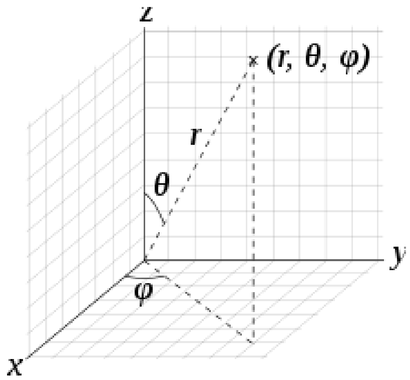
維基百科

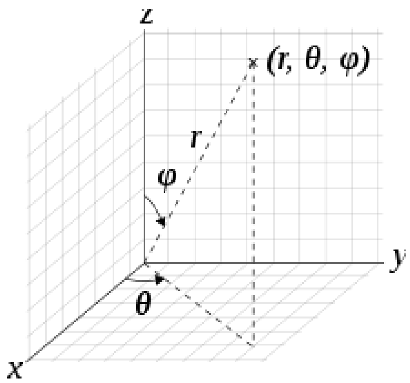
球坐标系

维基百科，自由的百科全书

球坐标系（英语：spherical coordinate system）是数学上利用球坐标(r, θ, φ)表示一个点P在三维空间的位置的三维正交坐标系。右图显示了球坐标的几何意义：原点与点P之间的“径向距离”（*radial distance*）r，原点到点P的连线与正z-轴之间的“极角”（*polar angle*）θ，以及原点到点P的连线在xy-平面的投影线，与正x-轴之间的“方位角”（*azimuth angle*）φ。它可以被视为极坐标系的三维推广。球坐标的概念，延伸至高维空间，则称为超球坐标。



物理学中通常使用的球坐标(r, θ, φ) (ISO 约定)：径向距离r，极角θ（theta）与方位角φ（phi）。



数学中通常使用的球坐标(r, θ, φ)：径向距离r，方位角θ（theta）与极角φ（phi）。

目录

符号约定

在学术界内，关于球坐标系的标记有好几个不同的约定。按照国际标准化组织建立的约定（ISO 31-11），球坐标标记为(r, θ, φ)，其中r代表径向距离，θ代表极角，φ代表方位角，极角也称为倾斜（inclination）角、法线角或天顶（zenith）角。这种标记通常为物理界的学者所采用，在世界各地有许多使用者，本条目采用的是物理学界标记约定。方位角（azimuth）、高度（altitude或elevation）角和天顶的概念出自关于天球的地平坐标系。在极坐标系中，角度坐标θ常被称为极角[1]。

在数学界，球坐标标记也是(r, θ, φ)，但倾斜角与方位角的标记正好相反：θ代表方位角，φ代表倾斜角。数学界的标记被认为“提供了对常用的极坐标系记号的逻辑扩展，θ仍是在xy-平面上的角度而φ是在这个平面之外的角度”[2]；一些作者将倾斜角列在方位角之前而写为(r, φ, θ)，还有作者对径向距离使用ρ而写为(ρ, φ, θ)或(ρ, θ, φ)[3]。

定义

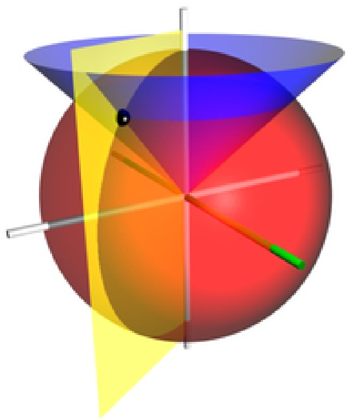
假设P点在三维空间的位置的三个坐标是(r, θ, φ)。那么，$0 \leq r$是从原点到P点的距离，$0 \leq \theta \leq \pi$是从原点到P点的连线与正z-轴的夹角，$0 \leq \varphi < 2\pi$是从原点到P点的连线在xy-平面的投影线，与正x-轴的夹角。

这里，θ代表倾斜角，φ代表方位角。当$r = 0$时，θ与φ都一起失去意义。当$\theta = 0$或$\theta = \pi$时，φ失去意义。

如想要用球坐标，找出点P在空间的地点，可按照以下步骤：

1. 从原点往正z-轴移动r单位，

2. 用右手定则，大拇指往y-轴指，x-轴与z-轴朝其他手指的指向旋转θ角值，
3. 用右手定则，大拇指往z-轴指，x-轴与y-轴朝其他手指的指向旋转φ角值。



球坐标系的几个坐标曲面。红色圆球面的$r = 2$。蓝色圆锥面的$\theta = 45°$。黄色半平面的$\varphi = -60°$（黄色半平面与xz-半平面之间的二面角角度是$|\varphi|$）。z-轴是垂直的，以白色表示。x-轴以绿色表示。三个坐标曲面相交于点P（以黑色的圆球表示）。直角坐标大约为$(0.707, -1.225, 1.414)$。

坐标系变换

三维空间里，有各种各样的坐标系。球坐标系只是其中一种。球坐标系与其他坐标系的变换需要用到特别的方程式。

直角坐标系

使用以下等式，可从直角坐标变换为球坐标：

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right),$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{x}{r\sin\theta}\right) = \arcsin\left(\frac{y}{r\sin\theta}\right) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)。$$

计算 φ 时：

1. 必须依照 $(x,\ y)$ 所处的象限来计算正确的反正切值。
2. 当 $x = 0$ 时，判断 y 的值：

$$\text{若 } y > 0\text{，则 } \varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{若 } y < 0\text{，则 } \varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ 或 } \frac{3\pi}{2},$$

$$\text{若 } y = 0\text{，则 } \varphi \text{ 为未定值（因为 } \frac{0}{0} \text{ 为未定式）。}$$

反过来，也可从球坐标变换为直角坐标：

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi,$$

$$z = r\cos\theta。$$

圆柱坐标系

圆柱坐标系是极坐标系在三维空间往z-轴的延伸。z坐标用来表示高度。使用以下方程式，可以从球坐标变换为圆柱坐标$(\rho,\ \varphi,\ z)$：

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}、$$

$$\theta = \arctan\frac{\rho}{z}、$$

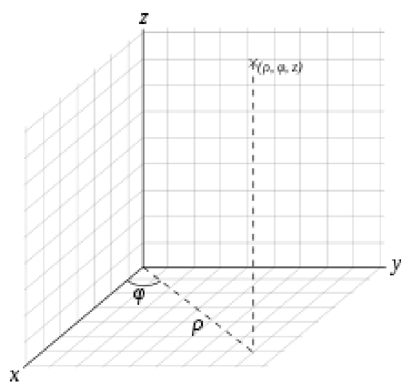
$$\varphi = \varphi。$$

反过来，可以从圆柱坐标变换为球坐标：

$$\rho = r\sin\theta、$$

$$\varphi = \varphi、$$

$$z = r\cos\theta。$$



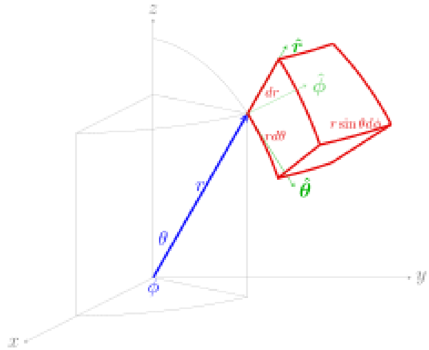
用圆柱坐标来表示一个点的位置

球坐标系下的微积分公式

假定θ是从原点到P点的连线与正z-轴的夹角，球坐标系的标度因子分别为：

$h_r = 1$、
$h_\theta = r$、
$h_\varphi = r\sin\theta$。

微分公式：



- 线元素是一个从(r,θ,φ)到$(r+\mathrm{d}r,\ \theta+\mathrm{d}\theta,\ \varphi+\mathrm{d}\varphi)$的无穷小位移，表示为公式：

  $$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}r\,\hat{\boldsymbol{r}} + r\,\mathrm{d}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}};$$

  其中的$\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}$是在$r,\theta,\varphi$的各自的增加的方向上的单位矢量。

- 面积元素1：在球面上，固定半径，天顶角从θ到$\theta+\mathrm{d}\theta$，方位角从φ到$\varphi+\mathrm{d}\varphi$变化，公式为：

  $$\mathrm{d}S_r = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi。$$

- 面积元素2：固定天顶角θ，其他两个变量变化，则公式为：

  $$\mathrm{d}S_\theta = r\ \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi。$$

- 面积元素3：固定方位角φ，其他两个变量变化，则公式为：

  $$\mathrm{d}S_\varphi = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta。$$

- 体积元素，径向坐标从r到$r+\mathrm{d}r$，天顶角从θ到$\theta+\mathrm{d}\theta$，并且方位角从φ到$\varphi+\mathrm{d}\varphi$的公式为：

  $$\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi。$$

微分算子，如∇f、$\nabla\cdot\mathbf{F}$、$\nabla\times\mathbf{F}$、$\nabla^2 f$，都可以用$(r,\ \theta,\ \varphi)$坐标表示，只要将标度因子代入在正交坐标系条目内对应的一般公式，即可得到如下公式：

- 梯度公式：

  $$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}。$$

- 散度公式：

  $$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}。$$

- 旋度公式：

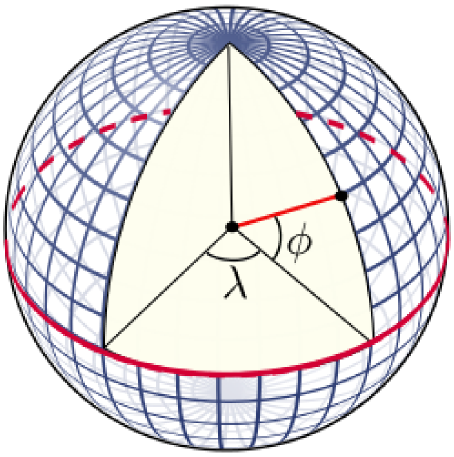
  $$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\varphi\sin\theta\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\varphi\right)\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

  。

- 拉普拉斯算子是

  $$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}。$$

地理坐标系



地理坐标系，当采用球面时地心纬度ψ和大地纬度φ一致。

地理坐标系是自古以来主要用于地理学的另一种版本的球坐标系。地理坐标标记为(λ, ψ, h)，其中λ表示方位角并称为经度，ψ表示高度角并称为地心纬度，h表示相对高度。在地理学里，通常不直接使用表示到地心距离的绝对高度，日常中所用地图中可能不标示任何高度。

纬度ψ的定义域是$-90^\circ \le \psi \le 90^\circ$，以赤道为纬度$0^\circ$，正值往北负值往南。使用以下公式，可从关于天极的天顶角θ变换为地心纬度ψ：

$\psi = 90^\circ - \theta$，正值可称北纬，负值去负号可称南纬。

经度λ的定义域是$-180^\circ \le \lambda \le 180^\circ$。设定经过伦敦格林维治天文台的子午线为经度$0^\circ$，正值往东或负值往西。使用以下公式，可从在赤道参考平面上的方位角φ变换为经度λ：

$\varphi \le 180^\circ$： $\lambda = \varphi$，正值可称东经，
$\varphi \ge 180^\circ$： $\lambda = \varphi - 360^\circ$，负值去负号可称西经。

东经和西经都有180°经线，二者等同并有关于国际日期变更线。

采用扁椭球时，一般采用椭球面一点的法线与赤道参考平面交角为高度角并称为大地纬度，而地心纬度ψ和大地纬度φ的关系为：

$$\tan(\psi) = \frac{b^2}{a^2}\tan(\varphi),$$

径向距离即到地心距离r是关于地心纬度ψ的函数：

$$r(\psi) = \frac{b}{\sqrt{1-(e\cos\psi)^2}},$$

其中a为参考椭球体的半长轴，b为半短轴，e为偏心率。采用球面时径向距离r是固定值，地心纬度ψ和大地纬度φ一致。

应用

正如二维直角坐标系专精在平面上，二维球坐标系可以很简易的设定圆球表面上的点的位置。在这里，我们认定这圆球是个单位圆球；其半径是1。通常我们可以忽略这圆球的半径。在解析旋转矩阵问题上，这方法是非常有用的。

球坐标系适用于分析一个对称于点的系统。举例而言，一个圆球，其直角坐标方程式为$x^2+y^2+z^2=c^2$，可以简易的用球坐标系$\rho = c$来表示。

用来描述与分析拥有球状对称性质的物理问题，最自然的坐标系，莫非是球坐标系。例如，一个具有质量或电荷的圆球形位势场。两种重要的偏微分方程式，拉普拉斯方程与亥姆霍兹方程，在球坐标里，都可以成功的使用分离变数法求得解答。这种方程式在角部分的解答，皆呈球谐函数的形式。

参阅

- 天球坐标系统
- 欧拉角
- 雅可比矩阵
- 在圆柱和球坐标系中的del

引用

1. the angular coordinate, often called the polar angle (http://mathworld.wolfram.com/PolarCoordinates.html).

2. Eric W. Weisstein. Spherical Coordinates. MathWorld. 2005-10-26 [2010-01-15]. （原始内容存档于2018-06-23）.
3. **引用错误：没有为名为**http://mathworld.wolfram.com/SphericalCoordinates.html 页面存档备份(https://web.archive.org/web/20180623061900/http://mathworld.wolfram.com/SphericalCoordinates.html)，存于互联网档案馆**的参考文献提供内容**

取自“https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=球座標系&oldid=63151171”
