1. Докажите, что функция $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, если $x^2+y^2 \neq 0$, и $f(0,0)=0$, непрерывна по каждой переменной x и y в отдельности (при фиксированном значении другой переменной), но не является непрерывной по совокупности этих переменных.

2. Докажите, что если функция $f(x,y)$ непрерывна по каждой переменной x и y в отдельности и монотонна по одной из них, то эта функция непрерывна по совокупности переменных.

3. Докажите, что произвольный многочлен $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ достигает минимальное по модулю значение на числовой прямой. Верно ли аналогичное утверждение для многочленов от двух переменных?

4. Существует ли непрерывная функция $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что для любой непрерывной функции $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ найдётся такое действительное число t, что $g(x) = f(t,x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$?

5. Пусть $f\colon X \to X$, где $X \subset \mathbb{R}^2$ замкнуто и ограничено. Докажите, что если
   (a) f не уменьшает расстояние между точками, то f – изометрия
   (b) f является изометрией, то f – биекция.

Домашнее задание

6. Функция $f(x,y)\colon X \to \mathbb{R}$ непрерывна в круге $X = \{(x,y)\colon x^2+y^2 \leq 1\}$. Докажите, что для любого $a \in (0, \sqrt{2}]$ существует квадрат $ABCD \subset X$ со стороной a такой, что $f(A)+f(C) = f(B)+f(D)$.

7. Функция $f(x,y)$, непрерывная на $[0,1]\times[0,1]$, обладает таким свойством: при всяком фиксированном x минимум $f(x,y)$ достигается ровно в одной точке $y = g(x)$. Докажите, что полученная так функция $g(x)$ непрерывна.

8. Существует ли непрерывная инъекция из окружности в отрезок?

9. Пусть $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Докажите, что

$$\min_x \max_y f(x,y) \geq \max_y \min_x f(x,y).$$

   При этом неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда существует седловая точка (x_0,y_0) функции f, т.е.

$$f(x_0,y) \leq f(x_0,y_0) \leq f(x,y_0), \quad x,y \in [0,1].$$