1. Докажите, что для действительных чисел x и y справедливы неравенства:

$$a)\quad \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 1 \geqslant \lfloor x+y\rfloor \geqslant \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor; \qquad c)\quad \left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor = \lfloor 2x\rfloor - \lfloor x\rfloor;$$

$$b)\quad \lceil x\rceil + \lceil y\rceil - 1 \leqslant \lceil x+y\rceil \leqslant \lceil x\rceil + \lceil y\rceil; \qquad d)\quad \left\lceil x-\frac{1}{2}\right\rceil = \lceil 2x\rceil - \lceil x\rceil.$$

2. Докажите, что для действительного числа x и натурального числа n справедливы равенства:

$$a)\quad \lfloor \lfloor x\rfloor/n\rfloor = \lfloor x/n\rfloor; \qquad c)\quad \sum_{i=1}^{n}\left\lfloor x+\frac{i-1}{n}\right\rfloor = \lfloor nx\rfloor;$$

$$b)\quad \lceil \lceil x\rceil/n\rceil = \lceil x/n\rceil; \qquad d)\quad \sum_{i=1}^{n}\left(\left\{x+\frac{i}{n}\right\}-\frac{1}{2}\right) = \{nx\}-\frac{1}{2}.$$

3. Докажите, что простое число p входит в разложение числа $n!$ с показателем $v_p(n!) = \left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{p^2}\right\rfloor + \ldots + \left\lfloor\frac{n}{p^{s-1}}\right\rfloor$, где натуральное число s таково, что $p^{s-1} \leqslant n < p^s$.

4. Пусть $p, q \in \mathbb{N}$ — взаимно простые числа. Докажите путём подсчета целых точек в области $1 \leqslant x \leqslant p-1$, $1 \leqslant y \leqslant qx/p$, что

$$\left\lfloor\frac{q}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2q}{p}\right\rfloor + \ldots + \left\lfloor\frac{(p-1)q}{p}\right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

5. Пусть $\tau(k)$ — число всех натуральных делителей числа $k \in \mathbb{N}$. Для натурального n докажите равенство $\tau(1)+\tau(2)+\ldots+\tau(n) = n+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\ldots+\left\lfloor\frac{n}{n}\right\rfloor$.

Домашнее задание

1. Для чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ докажите неравенство $\left\lfloor\sum_{i=1}^{n} x_i\right\rfloor \geqslant \sum_{i=1}^{n}\lfloor x_i\rfloor$.

2. Докажите, что для любого натурального n число $\left\lfloor(2+\sqrt{3})^n\right\rfloor$ — нечётно.

3. Докажите равенство $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor = \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$ при $n \in \mathbb{N}$.

4. Пусть $\sigma(k)$ — сумма всех натуральных делителей числа $k \in \mathbb{N}$. Для натурального n докажите равенство $\sigma(1)+\ldots+\sigma(n) = n+2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\ldots+n\left\lfloor\frac{n}{n}\right\rfloor$.

5. Пусть α, $\beta > 1$. Докажите, что каждое натуральное число встречается в последовательности $\lfloor\alpha\rfloor$, $\lfloor\beta\rfloor$, $\lfloor 2\alpha\rfloor$, $\lfloor 2\beta\rfloor$, $\lfloor 3\alpha\rfloor$, $\lfloor 3\beta\rfloor$, … единожды, тогда и только тогда, когда α иррациональное число и $1/\alpha + 1/\beta = 1$.