

1. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n – некоторые числа, принадлежащие отрезку $[0, 1]$. Докажите, что на этом отрезке найдётся такое число x , что

$$\frac{|x - x_1| + |x - x_2| + \dots + |x - x_n|}{n} = \frac{1}{2}.$$

2. Пусть $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция такая, что $f(0) = f(1)$. Докажите, что для произвольного натурального числа n найдётся такое действительное число $x \in [0, 1 - 1/n]$, что $f(x) = f(x + 1/n)$.

3. Докажите, что любой приведённый многочлен степени n с вещественными коэффициентами является средним арифметическим двух приведённых многочленов степени n с действительными корнями.

4. Существует ли такая непрерывная функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что

$$f(x+1)f(x) + f(x+1) + 1 = 0 \quad \text{при всех } x \in \mathbb{R}.$$

5. Пусть $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция такая, что $f(0) = f(1) = 0$ и $f(x) > 0$ при $0 < x < 1$. Докажите, что существует квадрат с двумя вершинами на интервале $(0, 1)$ оси Ox и двумя другими вершинами на графике функции f .

Домашнее задание

6. Пусть $P(x)$ – многочлен нечётной степени с действительными коэффициентами. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет не меньше различных действительных корней, чем уравнение $P(x) = 0$.
7. Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Докажите, что для некоторого действительного числа $c \in [a, b]$ верно равенство $\int_a^b f(t) dt = f(c)(b-a)$.
8. Непрерывная функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ принимает значения разных знаков. Докажите, что найдётся арифметическая прогрессия $a < b < c$ такая, что $f(a) + f(b) + f(c) = 0$.
9. Существует ли непрерывная функция, принимающая каждое действительное значение ровно а) 2 раза; б) 3 раза?
10. Вуга и Лёка играют в игру с многочленом степени не ниже 4:

$$x^{2n} + \square x^{2n-1} + \square x^{2n-2} + \dots + \square x + 1.$$

Они по очереди вписывают действительные числа в пустые клетки. Если получившийся многочлен не имеет действительных корней, то выигрывает Вуга; в противном случае выигрывает Лёка. У кого из игроков есть выигрышная стратегия, если Вуга ходит первой?