1. (a) На стороне AC треугольника ABC взята такая точка D, что $AD : DC = m : n$. Докажите равенство $\overrightarrow{BD} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{BA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{BC}$.
   (b) Докажите, что точка D находится на прямой AC тогда и только тогда, когда для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ и произвольной точки B верно равенство $\overrightarrow{BD} = \lambda\overrightarrow{BA} + (1-\lambda)\overrightarrow{BC}$.
   (c) Точки M и N делят отрезки AB и CD соответственно в равных отношениях, т.е. $AM : MB = CN : ND = m : n$. Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{BD}$.
2. Докажите, что середины оснований, точка пересечений диагоналей и точка пересечения боковых сторон трапеции лежат на одной прямой.
3. (a) Пусть G – точка пересечения медиан треугольника ABC, а P – произвольная точка. Докажите равенство $\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$.
   (b) Для какой точки P величина $PA^2 + PB^2 + PC^2$ принимает минимальное значение?
   (c) Пусть P – произвольная точка внутри треугольника ABC. Докажите равенство $S_{BPC} \cdot \overrightarrow{PA} + S_{CPA} \cdot \overrightarrow{PB} + S_{APB} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$.
4. Дан треугольник ABC и точка M на стороне BC. Докажите неравенство
$$AM \cdot BC \leq AB \cdot MC + AC \cdot BM.$$
5. Точки K, L, M и N – середины сторон BC, CD, DE и EA пятиугольника $ABCDE$, точки P и Q – середины отрезков KM и LN. Докажите, что отрезки PQ и AB параллельны и найдите отношения их длин.

Домашнее задание

6. Вершина параллелограмма соединена с серединами противоположных сторон. В каком отношении делят проведённые отрезки диагональ параллелограмма, противоположную данной вершине?
7. Точки P и Q делят стороны CA и CB треугольника ABC в данных отношениях: $CP/PA = \alpha$ и $CQ/QB = \beta$. Пусть X – точка пересечения прямых AQ и BP. Найдите отношение площадей треугольников ABX и ABC.
8. Точки M и N – середины соответственно сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Докажите, что середины диагоналей четырехугольников $AMND$ и $BMNC$ являются вершинами параллелограмма.
9. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 – высоты треугольника ABC. Докажите равенство $a^2 \cdot \overrightarrow{AA_1} + b^2 \cdot \overrightarrow{BB_1} + c^2 \cdot \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{0}$.
10. Даны треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Точки A, B и C делят соответственно отрезки A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 в одном и том же отношении. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ и ABC лежат на одной прямой.