1. Докажите, что для произвольных натуральных a и b найдутся такие целые числа u и v, что справедливо равенство $au+bv=d$, где $d=\text{нод}(a,b)$.

Китайская теорема об остатках. *Пусть даны n попарно взаимно простых натуральных чисел $d_1, d_2, \ldots, d_n$ и целые числа $r_1, r_2, \ldots, r_n$ такие, что $0 \le r_i < d_i$ для любого i. Тогда найдётся такое целое неотрицательное число A, меньшее $d_1d_2\ldots d_n$, что остаток от деления A на d_i равен r_i для любого i. Более того, любое число B, обладающее таким свойством равно A по модулю $d_1d_2\ldots d_n$.*

2. Могут ли два соседних числа иметь более 100 делителей каждое?

3. Дан многочлен $F(x)$ с целыми коэффициентами, причём известно, что для любого целого n число $F(n)$ делится на одно из целых чисел a_1, a_2, …, a_m. Докажите, что из этих чисел можно выбрать одно число так, что $F(n)$ будет делиться на него при любом целом n.

4. Докажите, что существует 100 последовательных чисел, каждое из которых делится на куб некоторого натурального числа, большего 1.

5. (a) (Лемма Шура) Пусть $f \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg f > 0$. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел, делящих хотя бы одно из ненулевых чисел $f(k)$, $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Пусть $f \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg f > 0$. Докажите, что для произвольных n и $k \in \mathbb{N}$ найдётся такое $a \in \mathbb{N}$, что каждое из чисел $f(a)$, $f(a+1)$, …, $f(a+n-1)$ имеет хотя бы k различных простых делителей.

Домашнее задание

6. Докажите, что для произвольного $n \in \mathbb{N}$ найдутся такие целые числа a и b, что число $4a^2+9b^2-1$ делится на n.

7. (a) Докажите, что для любого множества натуральных чисел $\{a_1$, a_2, …, $a_n\}$ существует такое число b, что каждое из произведений a_ib является степенью натурального числа (с показателем большим 1).
   (b) Докажите, что для произвольного $n \in \mathbb{N}$ существует такое подмножество $M \subset \mathbb{N}$ из n элементов, что сумма произвольного количества элементов этого множества является степенью целого числа.

8. Докажите, что для каждого натурального числа n существует n последовательных натуральных чисел, ни одно из которых не является целой степенью простого числа.

9. Пусть a и b – такие натуральные числа, что $b^n+n \,\vdots\, a^n+n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $a=b$.