Метод перераспределения весов является частным случаем метод подсчёта двумя способами. При решении задачи этим методом строят вспомогательный граф (нередко двудольный), вершинам которого назначают некоторые числа (веса). После чего исходные величины перераспределяют (например, равномерно) между смежными вершинами или инцидентными рёбрами. Отметим, что суммарный вес при перераспределении не меняется.

1. Пусть A и B – множество вершин первой и второй долей двудольного графа G, соответственно. Оказалось, что в доле A нет изолированных вершин и для любых двух смежных вершин $a \in A$ и $b \in B$ верно неравенство $\deg a \geq \deg b$. Докажите, что $|A| \leq |B|$.
2. На плоскости дано n окружностей радиуса 1, причём известно, что каждая пересекается хотя бы с одной другой окружностью и никакая пара не касается. Докажите, что все вместе окружности образуют не меньше n точек пересечения (в одной точке могут пересекаться более двух окружностей).
3. В библиотеке на полках стоят книги, при этом ровно k полок пусты. Книги переставили так, что теперь пустых полок нет. Докажите, что найдётся хотя бы $k+1$ книга, которая теперь стоит на полке с меньшим числом книг, чем стояла раньше.
4. Таблица $n \times n$ заполнена нулями и единицами так, что если в какой-то клетке стоит 0, то сумма всех чисел в объединении её столбца и строки не меньше 1000. В каждой строке и в каждом столбце стоит хотя бы один ноль. Докажите, что сумма чисел в таблице не меньше $500n$.
5. Пусть S_1, S_2, …, S_m – различные подмножества множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Известно, что $|S_i \cap S_j| = 1$ при всех $i \neq j$. Докажите, что $m \leq n$.

Домашнее задание

6. В некоторых клетках прямоугольной таблицы нарисованы звёздочки. Известно, что для любой отмеченной клетки количество звёздочек в её столбце совпадает с количеством звёздочек в её строке. Докажите, что число строк в таблице, в которых есть хотя бы одна звёздочка, равно числу столбцов таблицы, в которых есть хотя бы одна звёздочка.
7. На фестиваль приехало D гномов и E эльфов. После фестиваля каждый гном подрался по крайней мере с одним эльфом, а каждый эльф – не более чем с десятью гномами. Также известно, что у каждого гнома соперников-эльфов было больше, чем у любого из них – соперников-гномов. Докажите, что $11D \leq 10E$.