

Замену чисел  $a < b$  на числа  $a + t, b - t$ , где  $t \in [0, (b - a)/2]$ , назовём *сближением с фиксированной суммой*, а замену на числа  $ta, b/t$ , где  $t \in [1, \sqrt{b/a}]$ , – *сближением с фиксированным произведением*.

1. Пусть  $0 < a < b \in \mathbb{R}$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Как при сближении ведут себя величины:

(a)  $ab$ ;      (b)  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ;      (c)  $a^n + b^n$ ;      (d)  $1/a^n + 1/b^n$ ?

2. Сумма неотрицательных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$  равна 1. Докажите, что

$$(1 + x_1)(2 + x_2) \dots (n + x_n) \leq 2 \cdot n!.$$

3. Для действительных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 1$  докажите неравенство

$$\frac{1}{1 + x_1} + \frac{1}{1 + x_2} + \dots + \frac{1}{1 + x_n} \geq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}.$$

4. Для неотрицательных чисел  $a, b$  и  $c$  докажите, что верно неравенство

$$(a + b + c)^5 \geq 81abc(a^2 + b^2 + c^2).$$

5. Докажите, что из всех выпуклых  $n$ -угольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет правильный  $n$ -угольник.

### Домашнее задание

6. (Неравенство о средних) Докажите, что если  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ , то

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}}.$$

7. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$  и  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ . Докажите неравенство

$$\frac{(1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_n)}{x_1 x_2 \dots x_n} \geq (n - 1)^n.$$

8. Сумма неотрицательных чисел  $x, y$  и  $z$  равна 1. Докажите неравенства

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

9. Докажите, что из всех выпуклых  $n$ -угольников, вписанных в данную окружность, наибольший периметр имеет правильный  $n$ -угольник.

10. Пусть  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – монотонная нечётная функция. Докажите, что

$$f(a)f(b) + f(b)f(c) + f(a)f(c) \leq 0, \quad \text{если} \quad a + b + c = 0.$$