1. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n+2}+\ldots+\dfrac{1}{3n}\right)$.

2. Функция $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируема и $b-a=4$. Докажите, что найдётся точка $x_0\in(a,b)$, для которой $f'(x_0)-f(x_0)^2<1$.

3. Вычислите интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{\mathrm{d}x}{(e^x+1)(x^2+1)}$

4. Известно, что $a_0+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\ldots+\dfrac{a_n}{n+1}=0$. Докажите, что многочлен $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ имеет хотя бы один действительный корень.

5. Пусть $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0,1]$ и $f(1)-f(0)=1$. Докажите, что $\int_0^1\big(f'(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\geq1$.

6. Пусть непрерывная функция $f(x)$ такова, что $\int_a^b x^kf(x)\,\mathrm{d}x=0$ при всех целых $0\leq k\leq n$. Докажите, что $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ обращается в нуль по крайней мере $n+1$ раз.

Домашнее задание

7. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to+\infty}\big((1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\ldots(1+\frac{n}{n})\big)^{1/n}$.

8. Найдите все непрерывные положительные функции $f(x)\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ такие, что $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$, $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=a$, $\int_0^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x=a^2$, где a – заданное действительное число.

9. Докажите, что если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и обе либо возрастают, либо убывают на отрезке $[0,1]$, то $\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\geq\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

10. Существует ли такая непрерывно дифференцируемая функция $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, что $|f(x)|<2$ и $f(x)f'(x)\geq\sin x$ при всех $x\in\mathbb{R}$?

11. Пусть $f\in C[0,1]$ и для любых x, $y\in[0,1]$ выполняется неравенство $xf(y)+yf(x)\leq1$. Докажите, что $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\leq\pi/4$.

12. (Неравенство Юнга) Пусть a, $b\geq0$, p, $q>1$ и $1/p+1/q=1$. Докажите неравенство $ab\leq\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}$.

13. Пусть $f(x)$ – непрерывная периодическая функция с периодом T. Известно, что $\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x=0$. Докажите, что найдётся такое число a, что при любом b выполняется неравенство $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geq0$.