1. (Теорема Цекендорфа) Докажите, что каждое натуральное число можно однозначно представить в виде суммы различных чисел Фибоначчи, никакие два из которых не являются последовательными.
2. За какое наименьшее число ходов конь может пройти из левого нижнего угла доски 100×100 в правый верхний угол?
3. На плоскости дан набор из 200 векторов. Двое по очереди берут себе по одному вектору, пока они не кончатся. Выигрывает тот, у кого длина суммы векторов окажется больше. Кто выигрывает при правильной игре?
4. На поле стоят n снопов весом 1 кг, 2 кг, $\ldots$, 2^{n-1} кг. Стоимость объединения двух снопов в один сноп численно равна их общей массе. Найдите наименьшую стоимость объединения всех снопов в один большой сноп.
5. На отрезке длины 1 расположено несколько отрезков, полностью покрывающих его. Докажите, что можно выбросить некоторые из них так, чтобы оставшиеся по-прежнему покрывали отрезок и сумма их длин не превосходила 2.

Домашнее задание

6. Два игрока по очереди проводят диагонали в правильном 111-угольнике. После каждого своего хода игрок платит противнику число рублей равное количеству пересечённых диагоналей. Кто из игроков может заведомо не остаться в проигрыше?
7. Камни общей массой 9 тонн нужно перевезти самосвалами грузоподъёмностью 3 тонны. Масса каждого из камней не больше 1 тонны. Какое минимальное количество грузовиков наверняка достаточно для перевоза всех камней за один раз?
8. (Лемма Витали) На прямой задан конечный набор отрезков Δ_1, Δ_2, $\ldots$, Δ_n. Докажите, что можно выбрать из этого набора такие непересекающиеся отрезки Δ_{i_1}, Δ_{i_2}, $\ldots$, Δ_{i_m}, что $\Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n \subset 3\Delta_{i_1} \cup \ldots \cup 3\Delta_{i_m}$.
9. Есть 10 одинаковых сосудов; в одном налито x литров воды, а остальные пустые. Разрешено брать по два сосуда и распределять поровну общее количество воды в них. С помощью таких переливаний получите минимальное количество воды в первоначально полном сосуде.
10. Квадрат со стороной 1 покрыт несколькими меньшими квадратами со сторонами, параллельными его сторонам. Докажите, что среди них можно выбрать непересекающиеся квадраты, сумма площадей которых не меньше $1/9$.