1. Пусть F – некоторое поле и $A \subset F$ – его подмножество мощности $d+1$. Докажите, что для произвольного многочлена $f(x) \in F[x]$ степени $\deg f \le d$ коэффициент при мономе x^d в $f(x)$ равен $\sum\limits_{a\in A} \dfrac{f(a)}{\prod\limits_{b\in A\setminus\{a\}}(a-b)}$.
2. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset F$ – подмножества размеров $|A_i| = d_i+1$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Рассмотрим многочлен f от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такой, что для любого его монома $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$ с ненулевым коэффициентом либо $(k_1, k_2, \ldots, k_n) = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, либо найдётся индекс i такой, что $k_i < d_i$. Через $D(A_i, a_i)$ обозначим $\prod_{b\in A_i\setminus\{a_i\}}(a_i-b)$. Докажите, что коэффициент при мономе $x_1^{d_1}x_2^{d_2}\ldots x_n^{d_n}$ в f равен $\sum\limits_{a_1\in A_1,\ldots,a_n\in A_n} \dfrac{f(a_1,\ldots,a_n)}{D(A_1,a_1)\ldots D(A_n,a_n)}$.

Combinatorial Nullstellensatz. *Пусть $f \in F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Если $\deg f = \sum_{i=1}^n d_i$ и коэффициент при мономе $x_1^{d_1}x^{d_2}\ldots x_n^{d_n}$ отличен от нуля, то для произвольных подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset F$ таких, что $|A_i| > d_i$, найдутся такие их элементы $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$, что $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \ne 0$.*

3. В каждой вершине выпуклого 100-угольника написано по два различных числа. Докажите, что можно вычеркнуть по одному числу в каждой вершине так, чтобы оставшиеся числа в любых двух соседних вершинах были различными.
4. Для произвольных подмножеств A, $B \subset G$ аддитивной группы G через $A + B$ обозначим $\{a + b\colon a \in A, b \in B\}$.
   (a) (**Коши–Дэвенпорт**) Докажите, что для непустых подмножеств A и $B \subset \mathbb{Z}_p$, где p – простое число, верно $|A+B| \ge \min(p, |A|+|B|-1)$.
   (b) Докажите, что для произвольного простого числа p найдутся 5 целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_5$ таких, что $p \nmid a_i$, но $a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_5^4 \,\vdots\, p$.
   (c) Докажите, что для произвольных конечных непустых подмножеств A и $B \subset \mathbb{R}$ верно неравенство $|A + B| \ge |A| + |B| - 1$, при этом равенство достигается тогда и только тогда, когда или $|A| = 1$, или $|B| = 1$, или элементы подмножеств A и B образуют арифметические прогрессии с одинаковой разностью.
5. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Найдите минимальное количество плоскостей, объединение которых включает множество $\{(x, y, z)\colon\ x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}, x + y + z > 0\}$, состоящее из $(n + 1)^3 - 1$ точки, но не содержит начало координат.

Домашнее задание

6. Пусть p – простое число. Для произвольного подмножества $A \subset \mathbb{Z}_p$ через $A\hat{+}A$ обозначим $\{a_1 + a_2\colon a_1, a_2 \in A, a_1 \ne a_2\}$. Докажите, что

$$|A\hat{+}A| \ge \min(p, 2|A| - 3).$$