1. Пусть α – угол между векторами $\overrightarrow{a} = (x_1, y_1)$ и $\overrightarrow{b} = (x_2, y_2)$. Докажите равенство $|a| \cdot |b| \cos\alpha = x_1x_2 + y_1y_2$.

2. Докажите, что для всякого треугольника ABC выполняется неравенство
$$\cos\angle A + \cos\angle B + \cos\angle C \leq \frac{3}{2}$$
и определите, когда достигается равенство.

3. Длины сторон четырёхугольника равны a, b, c и d. Докажите неравенство
$$a^2 + b^2 + c^2 > d^2/3.$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции
$$f(x) = \frac{-5x^2 + 24x + 5}{1 + x^2}.$$

5. Докажите, что из пяти векторов всегда можно выбрать два так, чтобы длина их суммы не превосходила длины суммы оставшихся трёх векторов.

Домашнее задание

6. Для произвольного треугольника ABC докажите неравенство
$$\cos 2\angle A + \cos 2\angle B + \cos 2\angle C \geq -\frac{3}{2},$$
Для каких треугольников достигается равенство?

7. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции
$$f(x, y) = 6\sin x \cdot \cos y + 2\sin x \cdot \sin y + 3\cos x.$$

8. Докажите, что для точек P, лежащих на вписанной в треугольник ABC окружности, сумма $aPA^2 + bPB^2 + cPC^2$ постоянная.

9. Точки A_1, A_2, $\ldots$, A_n лежат на окружности с центром O, причём
$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{0}$$
Докажите, что для любой точки X справедливо неравенство
$$XA_1 + XA_2 + \ldots + XA_n \geq nR,$$
где R – радиус окружности.

10. Докажите, что в выпуклом k-угольнике сумма расстояний от любой внутренней точки до сторон постоянна тогда и только тогда, когда сумма векторов единичных внешних нормалей равна нулю.