1. Определите количество действительных корней (с учётом кратности) многочлена $1+\dfrac{x}{1!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}$, $n\in\mathbb{N}$.
2. Функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[0,1]$, причём $f(0)=0$ и $|f'(x)|\le\lambda|f(x)|$ для некоторой постоянной λ. Докажите, что $f(x)\equiv 0$.
3. (a) Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$ и дифференцируема на интервале $(0,1)$. Докажите, что если $f(0)=f(1)=0$, то $f'(x_0)=$ $=f(x_0)$ в некоторой точке $x_0\in(0,1)$.

   (b) Функция $f(x)\in D^n(I)$ обращается в нуль в $n+1$ точке интервала I. Докажите, что если все нули многочлена $a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ вещественные, то найдётся такое число $\xi\in I$, что
$$a_0f(\xi)+a_1f'(\xi)+a_2f''(\xi)+\ldots+a_nf^{(n)}(\xi)=0.$$
4. Пусть функция $f(x)\in C^n([a,b])$ имеет на отрезке $[a,b]$ не менее n нулей (с учётом кратности). Докажите, что $\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|\le\dfrac{(b-a)^n}{n!}\max\limits_{x\in[a,b]}|f^{(n)}(x)|$.

Домашнее задание

5. Докажите неравенство $(x+1)\cos\dfrac{\pi}{x+1}>1+x\cos\dfrac{\pi}{x}$ при $x\ge 2$.
6. Пусть x_1, x_2, …, x_n – положительные числа, не все равные между собой. Обозначим $\sigma_1=x_1+x_2+\ldots+x_n$, …, $\sigma_n=x_1x_2\ldots x_n$. Докажите, что

   (a) $\dfrac{\sigma_1}{C_n^1}>\left(\dfrac{\sigma_2}{C_n^2}\right)^{1/2}>\ldots>\left(\dfrac{\sigma_n}{C_n^n}\right)^{1/n}$;

   (b) $\dfrac{\sigma_{k-1}}{C_n^{k-1}}\cdot\dfrac{\sigma_{k+1}}{C_n^{k+1}}<\left(\dfrac{\sigma_k}{C_n^k}\right)^2$ при $2\le k\le n-1$.
7. Пусть $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ – дифференцируемая функция, причём $f(0)=0$, $f(1)=1$. Обязательно ли найдётся $\xi\in[0,1]$ такое, что $f(\xi)f'(\xi)^2\ge 4/9$?
8. Функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и $f(0)=0$, $f(1)=1$. Докажите, что для любого $n\in\mathbb{N}$ найдутся такие различные числа x_1, x_2, …, $x_n\in[0,1]$, что $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{f'(x_i)}=n$.
9. (a) Пусть $\lambda\in\mathbb{R}$ и $P(x)\in\mathbb{R}[x]$. Докажите, что многочлен $\lambda P(x)+P'(x)$ имеет не больше мнимых корней, чем $P(x)$.

   (b) Докажите, что если уравнение $a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n=0$ имеет лишь вещественные корни, то для произвольного многочлена $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ многочлен $a_0P(x)+a_1P'(x)+\ldots+a_nP^{(n)}(x)$ имеет не более мнимых корней, чем сам многочлен $P(x)$.

   (c) Докажите, что если уравнение $a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n=0$ имеет лишь вещественные корни, то тем же свойством обладает и уравнение
$$a_0+\frac{a_1}{1!}x+\frac{a_2}{2!}x^2+\ldots+\frac{a_n}{n!}x^n=0.$$