1. Пусть x_1, x_2, …, x_n – некоторые числа, принадлежащие отрезку $[0,1]$. Докажите, что на этом отрезке найдётся такое число x, что
$$\frac{|x-x_1|+|x-x_2|+\ldots+|x-x_n|}{n}=\frac{1}{2}.$$

2. Пусть $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ – непрерывная функция такая, что $f(0)=f(1)$. Докажите, что для произвольного натурального числа n найдётся такое действительное число $x\in[0,1-1/n]$, что $f(x)=f(x+1/n)$.

3. Докажите, что любой приведённый многочлен степени n с вещественными коэффициентами является средним арифметическим двух приведённых многочленов степени n с n действительными корнями.

4. Существует ли такая непрерывная функция $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, что
$$f(x+1)f(x)+f(x+1)+1=0 \quad \text{при всех} \quad x\in\mathbb{R}.$$

5. Пусть $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ – непрерывная функция такая, что $f(0)=f(1)=0$ и $f(x)>0$ при $0<x<1$. Докажите, что существует квадрат с двумя вершинами на интервале $(0,1)$ оси Ox и двумя другими вершинами на графике функции f.

Домашнее задание

6. Пусть $P(x)$ – многочлен нечётной степени с действительными коэффициентами. Докажите, что уравнение $P\big(P(x)\big)=0$ имеет не меньше различных действительных корней, чем уравнение $P(x)=0$.

7. Пусть $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ – непрерывная функция. Докажите, что для некоторого действительного числа $c\in[a,b]$ верно равенство $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t=f(c)(b-a)$.

8. Непрерывная функция $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ принимает значения разных знаков. Докажите, что найдётся арифметическая прогрессия $a<b<c$ такая, что $f(a)+f(b)+f(c)=0$.

9. Существует ли непрерывная функция, принимающая каждое действительное значение ровно а) 2 раза; б) 3 раза?

10. Вуга и Лёка играют в игру с многочленом степени не ниже 4:
$$x^{2n}+\Box x^{2n-1}+\Box x^{2n-2}+\ldots+\Box x+1.$$
Они по очереди вписывают действительные числа в пустые клетки. Если получившийся многочлен не имеет действительных корней, то выигрывает Вуга; в противном случае выигрывает Лёка. У кого из игроков есть выигрышная стратегия, если Вуга ходит первым?