Дана система точек X_1, X_2, ..., X_n с массами m_1, m_2, ..., m_n, соответственно, и выбрана ещё некоторая точка P. Моментом инерции этой системы точек относительно точки P называется величина

$$J_P = m_1 \cdot PX_1^2 + m_2 \cdot PX_2^2 + \ldots + m_n \cdot PX_n^2.$$

1. (Теорема Лагранжа) Пусть C – центр тяжести системы материальных точек (X_1, m_1), (X_2, m_2), ..., (X_n, m_n), а P – произвольная точка. Докажите равенство $J_P = J_C + (m_1 + m_2 + \ldots + m_n) \cdot CP^2$.

2. Зная длины сторон треугольника ABC, найдите длину биссектрисы CL.

3. (a) Пусть C – центр тяжести системы материальных точек (X_1, m_1), (X_2, m_2), ..., (X_n, m_n). Докажите, что момент инерции J_C вычисляется по формуле
$$J_C = \frac{1}{M} \sum_{i<j} m_i m_j X_i X_j^2, \quad \text{где} \quad M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n.$$
   (b) В окружность радиуса R вписан правильный 100-угольник. Вычислите сумму квадратов длин всех его диагоналей и всех его сторон.

4. Зная радиус R окружности, описанной около данного треугольника ABC, и радиус r окружности, вписанной в этот же треугольник, вычислите расстояние d между их центрами.

Домашнее задание

5. (a) Зная стороны a, b и c треугольника ABC, вычислите расстояние между точкой G пересечения медиан этого треугольника и точкой H пересечения его высот.
   (b) В некотором треугольнике расстояние между точкой пересечения медиан и центром описанной окружности в три раза меньше радиуса этой окружности. Докажите, что треугольник прямоугольный.

6. Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $a \cdot IA^2 + b \cdot IB^2 + c \cdot IC^2 = abc$, где $a = BC$, $b = CA$ и $c = AB$.

7. Найдите геометрическое место точек плоскости, для которых сумма квадратов расстояний от вершин заданного квадрата $A_1A_2A_3A_4$ со стороной a есть постоянная величина c.

8. (Неравенство Коши - Буняковского) Докажите, что для любых действительных чисел a_1, a_2, ..., a_n и b_1, b_2, ..., b_n справедливо неравенство
$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2.$$