Замену чисел $a < b$ на числа $a+t$, $b-t$, где $t \in [0, (b-a)/2]$, назовём *сближением с фиксированной суммой*, а замену на числа ta, b/t, где $t \in [1, \sqrt{b/a}]$, – *сближением с фиксированным произведением.*

1. Пусть $0 < a < b \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$. Как при сближении ведут себя величины:
   (a) ab; (b) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$; (c) $a^n + b^n$; (d) $1/a^n + 1/b^n$?
2. Сумма неотрицательные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна 1. Докажите, что
$$(1+x_1)(2+x_2)\ldots(n+x_n) \le 2 \cdot n!.$$
3. Для действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 1$ докажите неравенство
$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} \ge \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}}.$$
4. Для неотрицательных чисел a, b и c докажите, что верно неравенство
$$(a+b+c)^5 \ge 81abc(a^2+b^2+c^2).$$
5. Докажите, что из всех выпуклых n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет правильный n-угольник.

Домашнее задание

6. (`Неравенство о средних`) Докажите, что если $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, то
$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \le \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}}.$$
7. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ и $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Докажите неравенство
$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}{x_1 x_2 \ldots x_n} \ge (n-1)^n.$$
8. Сумма неотрицательных чисел x, y и z равна 1. Докажите неравенства
$$0 \le xy + yz + zx - 2xyz \le \frac{7}{27}.$$
9. Докажите, что из всех выпуклых n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольший периметр имеет правильный n-угольник.
10. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – монотонная нечётная функция. Докажите, что
$$f(a)f(b) + f(b)f(c) + f(a)f(c) \le 0, \quad \text{если} \quad a+b+c=0.$$