

1. Каждый десятый математик — шахматист, а каждый шестой шахматист — математик. Кого больше — математиков или шахматистов — и во сколько раз?
2. Докажите, что для любых множеств A , B и C справедливы равенства

$$\begin{array}{ll} a) & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \quad c) \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \\ b) & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \quad d) \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \end{array}$$

3. Может ли у множества A быть ровно на 2000 подмножеств больше, чем у множества B ?
4. Докажите, что симметрическая разность ассоциативна, т.е. для произвольных множеств A , B и C верно $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.
5. Характеристической функцией множества $X \subset U$ называют функцию χ_X , которая равна 1 на элементах X и 0 на остальных элементах U . Для подмножеств $A_1, \dots, A_n \subset U$ и элемента $u \in U$ докажите равенства:

$$\begin{array}{ll} a) & \chi_{\overline{A_1}}(u) = 1 - \chi_{A_1}(u); \quad c) \quad \chi_{A_1 \cap \dots \cap A_n}(u) = \chi_{A_1}(u) \dots \chi_{A_n}(u); \\ b) & |A_1| = \sum_{u \in U} \chi_{A_1}(u); \quad d) \quad \chi_{A_1 \cup \dots \cup A_n}(u) = 1 - (1 - \chi_{A_1}(u)) \dots (1 - \chi_{A_n}(u)). \end{array}$$

Домашнее задание

6. Докажите, что для любых множеств A_1, \dots, A_n и B_1, \dots, B_n справедливо включение $(A_1 \cap \dots \cap A_n) \Delta (B_1 \cap \dots \cap B_n) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup \dots \cup (A_n \Delta B_n)$.
7. На окружности выбраны 1000 белых точек и одна чёрная. Чего больше — треугольников с вершинами в белых точках или четырёхугольников, у которых одна вершина чёрная, а остальные три белые?
8. Верно ли, что для любых множеств A , B и C справедливы равенства:

$$\begin{array}{ll} a) & (A \setminus B) \cup B = A; \quad c) \quad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C); \\ b) & (A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B; \quad d) \quad A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C). \end{array}$$

9. В 10 коробках лежат карандаши (пустых коробок нет). Известно, что в разных коробках лежит разное число карандашей, причём в каждой коробке все карандаши разных цветов. Докажите, что из каждой коробки можно выбрать по карандашу так, что все они будут разных цветов.
10. Для множеств A_1, \dots, A_n докажите, что $|A_1 \Delta \dots \Delta A_n|$ равно

$$\sum_i |A_i| - 2 \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + 4 \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots$$

(коэффициенты перед суммами — последовательные степени двойки).