Calculabilité et Complexité

TD 3 – Problèmes NP-Complets

Afin de montrer qu'un problème $\mathcal{P}_1$ est NP-Complet, il faut déterminer une réduction polynomiale de celui-ci dans un autre. C'est-à-dire, il faut partir d'un problème $\mathcal{P}$ connu comme étant NP-complet et transformer une instance quelconque du problème $\mathcal{P}$ dans une instance du problème $\mathcal{P}_1$ de telle sorte que la réponse soit la même dans les deux problèmes. Les deux difficultés sont alors :

— trouver un bon problème candidat : la liste est assez longue, comme le montre l'étude de Garey et Johnson, en 1978, dans leur livre sur la NP-complétude, et qui fait encore référence actuellement.

— trouver la réduction adéquate. Pour cela, il faut une certaine expérience de ces transformations et une imagination importante.

Dans ce TD, nous étudierons quelques problèmes *historiques*.

Exercice 1 : NP-complétude de 3-CNF-SAT

Problème : 3-SAT

Données :

— Un ensemble U de variables, une collection C de clauses sur U de sorte que chaque clause est de longueur 3.

Question : existe-t-il une affectection des variables telle que toutes les clauses sont vérifiées ?

a : Montrer que 3-SAT est dans NP.

b : Montrer que 3-SAT est NP-Complet à partir de SAT

Exercice 2 : Vertex-Cover (exam 2010)

Problème : Vertex Cover

Données :

— Un graphe $G = (V, E)$ (V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes). Le nombre de sommets est n et le nombre des arêtes est m ;

— Un entier k.

Question : exite-t-il une couverture des arêtes S de taille au plus k dans le graphe G, c'est-à-dire, un ensemble de sommets tels que pour toute arête (x, y), on ait $x \in S$ ou $y \in S$?

a : [*] Montrer que Vertex Cover est dans NP.

b : [*] On effectue la réduction avec le problème 3-Sat de la manière suivante. Soit I une instance de 3-Sat avec n variables et m clauses. Pour chaque variable x, on construit deux sommets x et $\bar{x}$ reliés par une arête. Pour chaque clause c, on construit un triangle dont les sommets sont étiqueté c_1, c_2 et c_3, représentant chacun l'un des termes de la clause. Ensuite, on relie dans le graphe les clauses et les littéraux de la manière suivante : si x est la première variable d'une clause c sous forme positive alors, on relie c_1 et x dans le graphe, si c'est sous la forme négative, on relie c_1 et $\bar{x}$. On fait de même avec les autres littéraux.

Construire le graphe correpondant à la formule suivante :

$$F = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4)$$

c : [*] Montrer que la tranformation précédente est polynomiale en temps.

d : [**] Montrer que la formule à m clauses et n variables est satisfiable si et seulement si le graphe a un Vertex Cover de taille $K = n + 2m$.

e : [*] Conclure.

Exercice 3 : Ensemble dominant (Exam 2008)

On appelle un ensemble dominant d'un graphe un sous-sensemble des sommets qui *voit* tous les autres sommets. Par exemple, si le graphe est une grille 3×3, le sommet du milieu (de degré 4) ne constitue pas à lui seul un ensemble dominant. En effet, les coins (sommets de degré 2) ne sont pas couverts par ce sommet (il n'existe pas d'arête joignant le sommet central avec les sommets du bord).

Problème : Ensemble Dominant

Données :
- Un graphe $G = (V, E)$ (V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes). Le nombre de sommets est n et le nombre des arêtes est m ;
- Un entier k.

Question : existe-t-il un ensemble dominant D de G de taille inférieure à k (c'est-à-dire, pour tout sommet v de G, il existe un sommet d de D tel que $(v, d) \in E$) ?

a : [*] Sur une chaîne de longueur 6, donner la taille d'un ensemble dominant minimum.

b : [*(cours)] Rappeler la méthodologie pour montrer qu'un problème est NP-complet.

c : [*] Montrer que le problème de l'ensemble dominant est dans NP.

On définit une réduction par rapport au problème de la couverture des arêtes d'un graphe. On supposera que ce dernier problème est NP-Complet. Une instance de ce problème est défini comme suit :

Problème : Couverture des arêtes (Vertex Cover)

Données :
- Un graphe $G = (V, E)$ (V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes). Le nombre de sommets est n et le nombre des arêtes est m ;
- Un entier k.

Question : existe-t-il un ensemble de sommets S de taille inférieure à k tel que toute arête du graphe soit incidente à un sommet S ?

On considère la réduction suivante d'un graphe $G_1 = (V_1, E_1)$. On construit un nouveau graphe $G_2 = (V_2, E_2)$ à partir de G_1 en ajoutant des sommets et des arêtes comme suit : Pour chaque arête (v, w) de G_1, on ajoute un sommet vw à G_2 et les arêtes (v, vw) et (vw, v). On élimine par ailleurs tous les sommets isolés.

d : [*] Construire le graphe obtenu par la réduction d'un carré ($V = \{a, b, c, d\}$, et $E = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$).

e : [***] Montrer que G_2 admet un dominant de taille k si et seulement si G_1 admet une couverture des arêtes de taille k.

f : [*] Conclure