INSA Centre Val de Loire
Département STI

Année 2014-2015

7 novembre 2017

4ème année STI
Calculabilité et Complexité
(durée : 40 mn)

Note : Tous les documents (notes de cours et TD) sont autorisés. Pas de livre.

Exercice 1 : Machine de Turing (3 points)

a : [*] Construire une machine de Turing $\mathcal{M}_1$ qui reconnaît les mots sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ qui ont deux fois plus de b que de a.

b : [*] Expliquer en quelques mots comment construire une machine de Turing $\mathcal{M}_2$ qui reconnaît les mots sur Σ qui contiennent deux fois plus de b que de a et deux fois plus de c que de a. On pourra utiliser la machine $\mathcal{M}_1$.

Exercice 2 : Problème NP-complet (7 points)

Dans cet exercice, nous nous intéressons à un problème classique qui est polynomial dans le contexte classique, mais qui devient NP-complet quand les conditions sont un peu modifiées.

Le contexte : les graphes avec des transitions interdites

On appelle **transition** (a, b, c) dans un graphe orienté G le chemin constitué des deux arcs (a, b) et (b, c) consécutifs dans G.

Une **transition interdite** permet alors de représenter des impossibilités dans un chemin particulier. Par exemple, il peut être interdit de tourner à gauche à certains carrefours : si on veut malgré tout prendre cette direction, il faudra changer de stratégie et chercher un chemin plus long. Le graphe présenté dans la figure 1 met en évidence cette propriété si on interdit les transitions $\mathcal{I}nt_G = \{(y_4, y_0, y_1), (y_1, y_0, y_2), (y_2, y_0, y_3)(y_3, y_0, y_4)\}$.

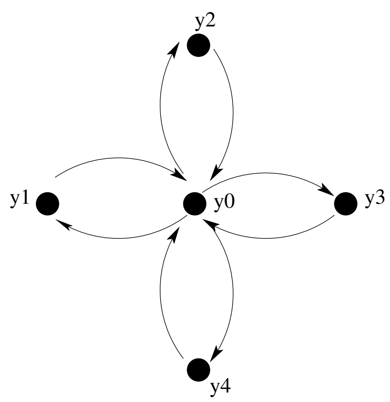

FIGURE 1 – Graphe $G = (V, A)$

La notion peut donc facilement s'étendre à tout graphe orienté $G = (V, A)$ pour lequel on associe un ensemble $\mathcal{I}nt$ de transitions interdites.

Un **circuit eulérien** dans un graphe orienté est un circuit qui couvre toutes les arcs. On s'intéresse dans ce problème aux circuits eulériens dans les graphes orientés possédant des transitions interdites.

Problème : CETI : Circuit eulérien dans les graphes orientés avec transitions interdites

Données :

— Un graphe $G = (V, A)$ (V est l'ensemble des sommets et A l'ensemble des arcs). Le nombre de sommets est n et le nombre d'arcs est m ;

— Un ensemble de transitions interdites $\mathcal{I}nt$ dans G.

Question : existe-t-il un circuit eulérien sans transition interdite dans le graphe G ?

a : [*] Trouver un circuit eulérien sans transition interdite dans le graphe de la figure 1 avec les transitions interdites $\mathcal{I}nt_G$.

b : [*] Montrer que le problème CETI est dans NP.

Pour montrer que ce problème est NP-Complet, on utilisera le problème du circuit Hamiltonien (circuit qui passe une et une seule fois par tous es sommets d'un graphe) dans les graphes orientés. Ce problème est NP-Complet.

Problème : Circuit Hamiltonien

Données :

— Un graphe $G = (V, A)$ (V est l'ensemble des sommets et A l'ensemble des arcs).

Question : existe-t-il un circuit Hamiltonien dans le graphe G ?

La réduction de Hamiltonien se fait de la manière suivante. Étant donné un graphe orienté $G = (V, A)$ avec n sommets, $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, on construit l'étoile à m branches dont les sommets extérieurs sont notés $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ et le sommet central est y_0. (le graphe de la figure 1 correspond au cas $m = 4$). Pour chaque arc (x_a, x_b) qui n'est pas dans A, on ajoute la transition interdite (y_a, y_0, y_b).

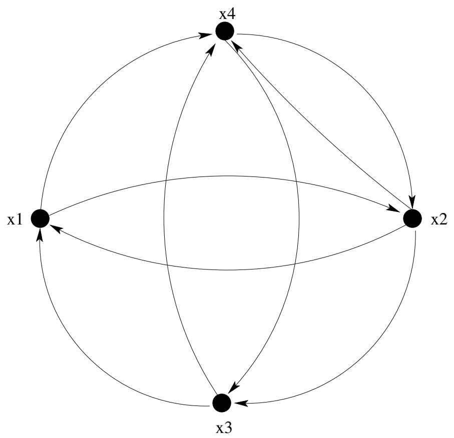

Figure 2 – Graphe orienté G_2

c : [*] Décrire le graphe obtenu à partir du graphe de la figure 2, ainsi que l'ensemble des transitions interdites que l'on obtient.

d : [*] Montrer que la transformation se fait en temps polynomial.

e : [**] Montrer qu'il existe un circuit Hamiltonien dans le graphe initial si et seulement si il existe un circuit eulérien dans le graphe transformé qui est sans transition interdite.

f : [*] Conclure que le problème CETI est NP-Complet.