a : [*] Trouver un circuit eulérien sans transition interdite dans le graphe de la figure 1 avec les transitions interdites $\mathcal{I}nt_G$.

Circuit : 0, 4, 0, 3, 0, 2, 0, 1, 0

b : [*] Montrer que le problème CETI est dans NP.

Oracle :

Pour chaque transition, dire si ça appartient au circuit eulérien sans les transitions interdites

O(m^3)

Vérification

Vérifier que toutes les transitions choisies ne sont pas interdites O(m^3)

Vérifier que pour chaque arc *a = (i, j)* appartenant à *A*, on peut trouver une unique transition choisie (k, m, p) tel que m=i et p=j => détermine si le circuit eulérien existe O(m^4)

c : [*] Décrire le graphe obtenu à partir du graphe de la figure 2, ainsi que l'ensemble des transitions interdites que l'on obtient.

A faire

d : [*] Montrer que la transformation se fait en temps polynomial.

Ecrire les sommets : O(n + 1)
Créer arcs : O(2n)
Déterminer les transitions interdites : O(m^2)

e : [**] Montrer qu'il existe un circuit Hamiltonien dans le graphe initial si et seulement si il existe un circuit eulérien dans le graphe transformé qui est sans transition interdite.

Un circuit hamiltonien existe dans le graphe initial => un circuit eulérien existe dans le graphe transformé qui est sans transition interdite

Soit ((x_0, x_1), (x_1, x_2).....(x_i,_x_i+1)....(x_n-1,x_0)) un circuit hamiltonien du graphe initial.
Alors quelque soit 0 <= i < n, (x_i,y_0, x_(i+1)%n) n'est pas une transition interdite, et (x_i,y_0), (y_0, x_(i+1)%n) existe.
Donc le circuit C = ((x_0, y_0), (y_0, y_1), (x_1, y_0),(y_0, x_2), ... (x_i, y_0), (y_0,x_i+1),...,(x_n-1, y_0),(y_0, x_0)) existe.
Or l'ensemble des arêtes dans le graphe transformé est l'ensemble des (x_i,y_0), (y_0, x_i) tel que 0 <=i < n
Donc l'ensemble des arêtes du graphe transformé est dans le circuit C
Donc C est un circuit eulérien

un circuit eulérien existe dans le graphe transformé qui est sans transition interdite => Un circuit hamiltonien existe dans le graphe initial

Soit le circuit eulérien sans transition interdite C = ((x_0, y_0), (y_0, y_1), (x_1, y_0),(y_0, x_2), ... (x_i, y_0), (y_0,x_i+1),...,(x_n-1, y_0),(y_0, x_0)).

Donc quelque soit 0 <= i < n, (x_i, x_(i+1)%n) existe dans le graphe initial
Donc il existe un chemin C ((x_0, x_1), (x_1, x_2).....(x_i,_x_i+1)....(x_n-2, x_n-1)) dans le graphe initial.

Dans ce circuit quelque soit 0 <= i < n, x_i n'est traversé qu'une seule fois
Donc tous les sommets du graphe initial sont traversé une seule et unique fois par ce chemin.
Donc C est un chemin hamiltonien
Or (x_n-1, x_0) existe

Donc il existe un circuit hamiltonien dans le graphe initial

f : [*] Conclure que le problème CETI est NP-Complet.

CETI appartient à NP
HAMILTONIEN est NP-Complet
Il existe une transformation polynomiale de HAMILTONIEN vers CETI
Donc CETI est NP-Complet