

Calculabilité et complexité TD 7

STI 2A Année 2012-2013

Quelques problèmes NP-Complets

Afin de montrer qu'un problème \mathcal{P}_1 est NP-Complet, il faut déterminer une réduction polynomiale de celui-ci dans un autre. C'est-à-dire, il faut partir d'un problème \mathcal{P} connu comme étant NP-complet et transformer une instance quelconque du problème \mathcal{P} dans une instance du problème \mathcal{P}_1 de telle sorte que la réponse soit la même dans les deux problèmes. Les deux difficultés sont alors :

- trouver un bon problème candidat : la liste est assez longue, comme le montre l'étude de Garey et Johnson, en 1978, dans leur livre sur la NP-complétude, et qui fait encore référence actuellement.
- trouver la réduction adéquate. Pour cela, il faut une certaine expérience de ces transformations et une imagination importante.

Dans ce TD, nous étudierons quelques problèmes *historiques*.

Exercice 1 : Le problème Partition

Ce problème est posé de la manière suivante :

Données :

- Un ensemble fini X
- Une collection \mathcal{C} de sous ensembles de X

$$\mathcal{C} = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$$

Question : existe-t-il un sous-ensemble de \mathcal{C} qui forme une partition de X ?

a : Montrer que PARTITION est dans NP.

b : On effectue une réduction à partir du problème 3-SAT. Soit F une formule booléenne sous forme 3-SAT. F est la conjonction de k clauses, w_1, \dots, w_k , qui sont des disjonctions d'au plus trois littéraux. On suppose qu'il y a m variables booléennes : x_1, \dots, x_m .

On construit un graphe biparti de la manière suivante :

- les sommets du graphe sont étiquetés par les variables et les termes : $V = \{x_1, \dots, x_m, w_1, \dots, w_k\}$
- pour chaque clause, par exemple $w_1 = (x_1 \vee x_3 \vee \neg x_5)$, on ajoute les arêtes reliant le sommet correspondant à la clause aux sommets correspondant aux variables, ici, on ajoute (w_1, x_1) , (w_1, x_3) et (w_1, x_5) .

La réduction vers le problème PARTITION s'effectue de la manière suivante :

- Soit \mathcal{C}' , l'ensemble contenant tous les ensembles de la forme : $\{w_i\} \cup E'$ où E' est un sous-ensemble strict des arêtes incidentes à w_i . En reprenant l'exemple précédent, la clause w_1 génère les ensembles $\{w_i\}$, $\{w_i\} \cup \{(w_1, x_1)\}$, $\{w_i\} \cup \{(w_1, x_3)\}$, $\{w_i\} \cup \{(w_1, x_5)\}$, ..., sans $\{w_i\} \cup \{(w_1, x_1), (w_1, x_3), (w_1, x_5)\}$.
- Soit \mathcal{C}'' l'ensemble contenant tous les ensembles ayant l'une des formes suivantes :
 - $\{x_j\} \cup E'_j$ avec E'_j est l'ensemble de toutes les arêtes (x_i, w_j) telles que x_i apparaît dans la clause w_j (sous sa forme positive) ;

- $\{x_j\} \cup E_j''$ avec E_j'' est l'ensemble de toutes les arêtes (x_i, w_j) telles que $\neg x_i$ apparaît dans la clause w_j (sous sa forme négative).
- Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}' \cup \mathcal{C}''$

Effectuer la transformation pour la formule booléenne suivante :

$$F = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4)$$

c : Montrer que la transformation s'effectue de manière polynomiale.

d : Montrer que si F est une formule booléenne satisfiable, alors l'instance I de PARTITION correspondante admet une réponse positive.

e : Montrer que si l'instance I , venant de la transformation, admet une réponse positive, alors la formule F est satisfiable.

f : Conclure

Exercice 2 : Problème : Circuit Hamiltonien

Un problème classique en théorie des graphes est le circuit Hamiltonien : il s'agit de trouver un chemin qui passe une et une seule fois par chaque sommet. Il faut noter que le problème qui consiste à passer par toutes les arêtes est polynomial : il s'agit du problème des circuits eulériens. On s'intéresse au cas où le graphe est orienté.

a : Montrer que le problème est dans NP

La réduction s'effectue à partir de PARTITION et est assez fastidieuse.

b : Montrer que l'on peut déduire que la version non orientée de ce problème est aussi NP-complet. Pour cela, on peut remplacer chaque sommet v du graphe orienté par trois sommets v', v'', v''' et rajouter les arêtes $\{v', v''\}$ et $\{v'', v'''\}$; pour chaque arc (v_1, v_2) , on rajoute les arêtes $\{v'_1, v''_2\}$.