Question 2

You are given function f and g such that $f(n) = O(g(n))$.

Is $f(n) \times log_2(f(n)^c) = O(g(n) \times log_2(g(n)))$? (Here c is some positive constant.) You should assume that f and g are nondecreasing and always bigger than 1.

Решение:

$f(n) \times log_2(f(n)^c) = O(g(n) \times log_2(g(n)))$

По определению может быть представленно как:

$f(n) \times log_2(f(n)^c) \leq k \times g(n) \times log_2(g(n))$, где k некоторая константа.

Используя свойство логарифма, выражение выше может быть представлено как: $f(n) \times c \times log_2(f(n)) \leq k \times g(n) \times log_2(g(n))$

Разделив обе стороны выражения на $log_2(f(n))$ получим:
$f(n) \times c \leq k \times g(n) \times \dfrac{log_2(g(n))}{log_2(f(n))}$

Используя свойство $log_b(x) = \dfrac{log_k(x)}{log_k(b)}$ выражение выше примет вид:

$f(n) \times c \leq k \times g(n) \times log_{f(n)}(g(n))$

Разделив обе стороны на c получим:

$f(n) \leq \dfrac{k}{c} \times g(n) \times log_{f(n)} g(n)$

Поскольку $f(n) = O(g(n))$ следовательно $f(n) \geq g(n)$, тогда

$log_{f(n)} g(n) = \dfrac{1}{t}$, где $f(n)^{\frac{1}{t}} = g(n)$. Тогда выражение принимает вид:

$f(n) \leq \dfrac{k}{t \times c} \times g(n)$

поскольку значение c определено изначально, существует такое значение k при котором выражение:

$f(n) \leq \dfrac{k}{t \times c} \times g(n)$ истинно.

Следовательно:

$f(n) \times log_2(f(n)^c) = O(g(n) \times log_2(g(n)))$ является истинным.