Решение однородного линейного рекуррентного соотношения

Для записи общего решения однородного линейного рекуррентного соотношения

$$a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} + \ldots + p_k a_n = 0, \qquad p_k \neq 0, \tag{1}$$

необходимо найти корни его характеристического многочлена

$$p(\lambda) = \lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \ldots + p_k. \tag{2}$$

Для каждого вещественного корня λ кратности r в общее решение рекуррентного соотношения включается слагаемое $(c_0 + c_1 n + \ldots + c_{r-1}n^{r-1})\lambda^n$. Таким образом, если многочлен (2) имеет t корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ кратностей $r_1, \ldots, r_t$ (где $\sum r_i = k$), то общим решением соотношения (1) будет последовательность

$$a_n = \sum_{i=1}^{t} (c_{i,0} + c_{i,1}n + \ldots + c_{i,r_i-1}n^{r_i-1})\lambda_i^n. \tag{3}$$

Если для последовательности a_n заданы начальные данные, а именно k первых членов $a_0,\ a_1, \ldots,\ a_{k-1}$, то из множества решений, представленных формулой (3), находится единственное решение, удовлетворяющее начальным данным. Для этого начальные данные подставляются в (3). В результате такой подстановки получается система k линейных уравнений на k неизвестных коэффициентов $c_{i,j}$.

Пример 1. Найти общее решение рекуррентного соотношения

$$a_{n+3} = -9a_{n+2} - 15a_{n+1} + 25a_n.$$

Переносим все слагаемые в левую часть и записываем характеристический многочлен заданного соотношения:

$$a_{n+3} + 9a_{n+2} + 15a_{n+1} - 25a_n = 0,$$
$$\lambda^3 + 9\lambda^2 + 15\lambda - 25 = 0.$$

Заметим, что один из корней многочлена равен $\lambda_1 = 1$. После этого легко находим $\lambda_{2,3} = -5$. Таким образом, имеется один корень кратности 1 и один — кратности 2. Теперь все готово для записи общего решения исходно рекуррентного соотношения:

$$a_n = c_1 \cdot 1^n + (c_2 + c_3 n) \cdot (-5)^n = c_1 + (c_2 + c_3 n)(-5)^n.$$

Пример 2. Найти решение рекуррентного соотношения с начальными данными:

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0,\ a_0 = 5,\ a_1 = 12.$$

Выписываем характеристический многочлен:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

Находим его корни $\lambda_{1,2} = 3$, то есть имеется один корень кратности 2. Записываем общее решение:

$$a_n = (c_1 + c_2 n) \cdot 3^n.$$

Для того, чтобы найти последовательность, удовлетворяющую заданным начальным данным, подставим их в найденное общее решение. Получаем:

$$a_0 = (c_1 + c_2 \cdot 0) \cdot 3^0 = c_1 = 5,$$
$$a_1 = (c_1 + c_2 \cdot 1) \cdot 3^1 = 3c_1 + 3c_2 = 12.$$

Из последних равенств выводим, что $c_1 = 5, c_2 = -1$.

Тогда решение исходного рекуррентного соотношения с начальными данными принимает вид

$$a_n = (5 - n)3^n.$$

Случай комплексных корней

Комплексные корни многочлена с вещественными коэффициентами обладают следующим свойством.

Утверждение 1. *Если многочлен $p(\lambda)$ имеет вещественные коэффициенты и число $\lambda_1 = x + iy$ его корень кратности k, то комплексно сопряженное с λ_1 число $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = x - iy$ также является корнем кратности k многочлена $p(\lambda)$.*

Таким образом, если характеристический многочлен (2) имеет комплексные корни, то их как минимум два, причем комплексно сопряженные корни имеют одинаковую кратность. Несмотря на то, что среди корней характеристического многочлена есть комплексные, решение рекуррентного соотношения (1) возможно записать в вещественной форме следующим образом.

Для каждой пары комплексно сопряженных корней $\lambda_1 = x + iy$ и $\lambda_2 = x - iy$ кратности r в формулу общего решения включаются слагаемые вида

$$(c_0 + c_1 n + \ldots + c_{r-1} n^{r-1})\rho^n \cos n\varphi + (d_0 + d_1 n + \ldots + d_{r-1} n^{r-1})\rho^n \sin n\varphi, \qquad (4)$$

где ρ и φ — модуль и аргумент одного из двух корней, λ_1 или λ_2. Модуль комплексного числа $\lambda_1 = x + iy$ равен $|\lambda_1| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Аргумент этого числа находится из равенств $\cos\varphi = \dfrac{x}{\rho}, \sin\varphi = \dfrac{y}{\rho}$.

Вместо записи решения в виде (4), также вполне справедливо записывать его в привычном виде со степенями комплексных корней:

$$(c_0 + c_1 n + \ldots + c_{r-1} n^{r-1})\lambda_1^n + (d_0 + d_1 n + \ldots + d_{r-1} n^{r-1})\lambda_2^n. \qquad (5)$$

При этом дальнейшие вычисления выполняются по правилам обращения с комплексными числами. Откуда получается вещественная форма (4) и как она связана с решением вида (5), любознательный читатель может узнать из последнего пункта этой заметки. Сейчас же обратимся к примерам.

Пример 3. Выпишем общее решение для соотношения $a_{n+2} + 3a_n = 0$. Корни характеристического многочлена равны $\lambda_1 = i\sqrt{3}$ и $\lambda_2 = -i\sqrt{3}$. Далее вычисляем $|\lambda_1| = \sqrt{3}$, а из равенств $\cos\varphi = 0$, $\sin\varphi = 1$ находим, что $\varphi = \pi/2$. Таким образом, общее решение исходного рекуррентного соотношения имеет вид

$$a_n = 3^{n/2} c_1 \cos\frac{\pi n}{2} + 3^{n/2} c_2 \sin\frac{\pi n}{2}.$$

Пример 4. Найти общее решение рекуррентного соотношения

$$a_{n+3} - 5a_{n+2} + 10a_{n+1} - 12a_n = 0.$$

Характеристический многочлен $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 10\lambda - 12 = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 2\lambda + 4)$ имеет корни $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{3}$. Для числа $\lambda_2 = 1 + i\sqrt{3}$ находим $\rho = 2$ и $\varphi = \pi/3$. Значит общее решение есть

$$a_n = 3^n c_1 + 2^n c_2 \cos\frac{\pi n}{3} + 2^n c_3 \sin\frac{\pi n}{3}.$$

Решение неоднородного линейного рекуррентного соотношения

Решение неоднородного линейного рекуррентного соотношения

$$a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} + \ldots + p_k a_n = f(n), \qquad p_k \neq 0, \tag{6}$$

в правой части которого может быть произвольная функция $f(n)$, состоит из двух этапов.

На первом этапе описанным выше способом ищется общее решение a_n^0 соответствующего *однородного* рекуррентного соотношения, с нулевой правой частью:

$$a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} + \ldots + p_k a_n = 0, \qquad p_k \neq 0,$$

На втором этапе происходит поиск *одного* произвольного частного решения a_n^* для неоднородного соотношения (6). Общим решением a_n неоднородного соотношения (6) является сумма частного решения для (6) и общего решения однородного соотношения (1), то есть

$$a_n = a_n^0 + a_n^*.$$

Методы отыскания частного решения a_n^* зависят от вида функции $f(n)$. Рассмотрим здесь случай, когда $f(n) = Q(n)\mu^n$, где $Q(n)$ — некоторый многочлен степени s, иначе говоря

$$a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} + \ldots + p_k a_n = Q(n)\mu^n, \qquad p_k \neq 0, \tag{7}$$

В этом случае частное решение a_n^* ищется методом неопределенных коэффициентов в виде

$$a_n^* = n^r (C_0 + C_1 n + \ldots + C_s n^s))\mu^n, \tag{8}$$

где степень s многочлена в скобках совпадает со степенью многочлена $Q(n)$, а

$$r = \begin{cases} \text{кратность}, & \text{если } \mu \text{ — корень характеристического многочлена (2);} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Подставляя частное решение (8) в исходное неоднородное соотношение (7) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях n в левой и правой частях, получим систему уравнений относительно неизвестных C_i. Решаем ее и находим частное решение a_n^* в явном виде.

Пример 5. Найти решение неоднородного рекуррентного соотношения с начальными условиями:

$$a_{n+1} = a_n + n, \quad a_0 = 1.$$

Перепишем в каноническом виде и запишем соответствующее однородное соотношение и его характеристический многочлен:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= n, \\ a_{n+1} - a_n &= 0, \\ \lambda - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, имеется один корень $\lambda = 1$ кратности 1. На основе этого записываем общее решение однородного соотношения в виде

$$a_n^0 = c_0 \cdot 1^n = c_0$$

(константная последовательность, что соответствует равенству $a_{n+1} - a_n = 0$).

Далее найдем частное решение a_n^* неоднородного соотношения. Правая часть в этом случае имеет вид $Q(n)\mu^n$, где $Q(n) = n$ — многочлен первой степени, а $\mu = 1$ — совпадает с корнем характеристического многочлена. Исходя из этого, будем искать частное решение в виде

$$a_n^* = n(C_0 + C_1 n) \cdot 1^n = C_0 n + C_1 n^2.$$

Подставляем в исходное неоднородное соотношение:

$$\begin{gathered} C_0(n+1) + C_1(n+1)^2 - (C_0 n + C_1 n^2) = n, \\ (C_0 + C_1) + 2C_1 n = n. \end{gathered}$$

В последнем равенстве приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях n в левой и правой частях. Получаем систему

$$\begin{aligned} C_0 + C_1 &= 0, \\ 2C_1 &= 1. \end{aligned}$$

Отсюда находим, что $C_0 = -1/2, C_1 = 1/2$, и частное решение

$$a_n^* = \frac{n^2 - n}{2}.$$

Теперь все готово, чтобы для заданного неоднородного рекуррентного соотношения записать *общее решение*:

$$a_n = a_n^0 + a_n^* = c_0 + \frac{n^2 - n}{2}.$$

Осталось учесть начальное условие $a_0 = 1$ (постольку, поскольку оно задано в задаче). Подставляем его в найденную последовательность:

$$a_0 = c_0 + 0 = 1,$$

так что итоговое решение принимает вид

$$a_n = \frac{n^2 - n + 2}{2}.$$

Связь степенной и тригонометрической форм решения

Для того, чтобы проследить связь между двумя формами записи общего решения однородного линейного рекуррентного соотношения, нам понадобится формула Муавра

$$[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Начнем со случая простых комплексных корней. Иначе говоря, пусть комплексные корни $\lambda_{1,2} = x \pm iy = \rho(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$ имеют кратность 1. Запишем решение в степенной форме и преобразуем его, используя формулу Муавра:

$$\begin{aligned} a_n &= c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n = c_1[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n + c_2[\rho(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))]^n = \\ &= c_1\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) + c_2\rho^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi) = \\ &= (c_1 + c_2)\rho^n\cos n\varphi + (c_1 - c_2)i\rho^n\sin n\varphi = C_1\rho^n\cos n\varphi + C_2\rho^n\sin n\varphi. \end{aligned}$$

Далее предположим, что корни λ_1 и λ_2 имеют кратность 2. В этом случае общее решение принимает вид:

$$\begin{aligned} a_n &= (c_0 + c_1 n)\lambda_1^n + (d_0 + d_1 n)\lambda_2^n = \\ &= (c_0 + c_1 n)\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) + (d_0 + d_1 n)\rho^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi) = \\ &= [(c_0 + d_0) + (c_1 + d_1)n]\rho^n\cos n\varphi + [(c_0 - d_0)i + (c_1 - d_1)in]\rho^n\sin n\varphi = \\ &= (C_0 + C_1 n)\rho^n\cos n\varphi + (D_0 + D_1 n)\rho^n\sin n\varphi. \end{aligned}$$

Для корней большей кратности преобразование одной формы в другую проводится точно также (проверьте!).