ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие "Методы решения обыкновенные дифференциальные уравнения"содержит основные методические и практические рекомендации решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Изложение материала позволяет установить связь конкретных прикладных задач с основами классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Надеемся, что благодаря большому количеству решенных примеров, которые служат иллюстрациями к теоретическому материалу, студенты овладеют методами для самостоятельного решения аналогичных задач, встречающихся на практике.

Содержание

1 Простейшие классы интегрируемых уравнений **6**

1.1 Введение 6

1.2 Уравнения, разрешенные относительно производной первого порядка 11

1.3 Методы решения уравнений первого порядка 23

1.3.1 Уравнения с разделяющимися переменными 23

1.3.2 Однородные уравнения 28

1.3.3 Линейные уравнения первого порядка и уравнения, приводящиеся к ним 34

1.3.4 Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель 47

1.4 Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной 57

2 Дифференциальные уравнения высших порядков **66**

2.1 Линейное уравнение с постоянными коэффициентами 67

2.1.1 Однородные уравнения 68

2.1.2 Неоднородные уравнения 72

2.2 Уравнения, допускающие понижение порядка 77

2.3 Линейные уравнения с переменными коэффициентами. . . . 92

2.3.1 Условия линейной зависимости и независимости функций. 92

2.3.2 Методы решение дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. 102

3 Краевые задачи. **109**

3.1 Функция Грина 111

3.2 Задачи на собственные значения. 116

4 Системы линейных дифференциальных уравнений **125**

4.1 Фундаментальная матрица 125

4.2 Построение фундаментальной системы решений для матрицы A простой структуры 126
4.3 Фундаментальная система решений в случае кратных корней характеристического уравнения 130

5 Представление решений дифференциальных уравнений рядами 137

6 Контрольные работы. 152

1 Простейшие классы интегрируемых уравнений

1.1 Введение

Известную из математического анализа задачу отыскания всех первообразных данной функции $f(x)$ можно записать в виде уравнения

$$y' = f(x), \tag{1.1}$$

где $f(x)$ - данная непрерывная функция, $y = y(x)$ - неизвестная функция, $y' = \frac{dy}{dx}$. Оно представляет собой простейший пример обыкновенного дифференциального уравнения. Как доказывается в интегральном исчислении, если $f(x)$ непрерывна в области $Q \subset R^1$, то уравнение (1.1) имеет на нем бесконечное семейство решений, которое задается формулой

$$y = F(x) + C; \tag{1.2}$$

здесь $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, а параметр C пробегает все вещественные значения.

Рассмотрим несколько конкретных задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.

Задача 1. В благоприятных для размножения условиях находится некоторое количество N_0 бактерий. Из эксперимента известно, что скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству. Найти зависимость роста числа бактерий с течением времени.

Решение. Обозначим через $N(t)$ количество размножающихся бактерий в момент времени t: $N(0) = N_0$. Отвлекаясь от того, что численность может изменяться только целыми числами, считаем, что $N(t)$ изменяется во времени непрерывно дифференцируемо. Тогда скорость размножения есть производная от функции $N(t)$; поэтому указанный в условии задачи биологический экспериментальный закон позволяет составить дифференциальное уравнение размножения бактерий:

$$\frac{dN(t)}{dt} = kN(t), \quad k > 0. \tag{1.3}$$

Коэффициент k зависит от вида бактерий и условий, в которых они находятся. Его можно определить экспериментально. Задача свелась к математической модели: найти решение $N = N(t)$ уравнения (1.1), для которого $N(0) = N_0$.

Поскольку $N(t) > 0$, разделив обе части уравнения на $N(t)$, получим

$$\frac{d(lnN(t))}{dt} = k.$$

Отсюда

$$lnN(t) = kt + lnC,$$

$$N(t) = Ce^{kt}.$$

Чтобы из множества решений выделить то, которое описывает процесс размножения бактерий, воспользуемся условием

$$N(0) = N_0,$$

где N_0 -количество бактерий на начало эксперимента.

Откуда

$$N_0 = C.$$

Окончательно получим

$$N(t) = N_0e^{kt}, \tag{1.4}$$

т.е. численность бактерий возрастает по показательному закону.

Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy(x)}{dt} = ky(x), \tag{1.5}$$

рассмотренное в предыдущей задаче, описывает разнообразные процессы в зависимости между величинами, в которых искомая функция $y = y(x)$ может быть не только положительной. Решениями этого уравнения являются те и только те функции $y = y(x)$, производная которых в каждой точке отличается от значения функции в этой точке лишь множителем k. Ими являются все функции вида

$$y = Ce^{kx},$$

где C - произвольная постоянная. Множество этих решений обладает одним замечательным свойством: графики функций $y = Ce^{kx}$ со всевозможными числовыми значениями множителя C покрывает всю плоскость, причем через каждую точку плоскости проходит график единственной такой функции и никакие два из этих графиков не пересекаются. Чтобы выделить ту кривую, которая проходит через заданную точку (x_0, y_0), необходимо поставить дополнительно для уравнения (1.5) задачу Коши [1].

Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (1.1) состоит в том, что требуется найти среди всех решений этого уравнения такое решение $y = y(x)$, которое принимает заданное значение y_0 при заданном значении x_0 независимой переменной x:

$$y(x_0) = y_0.$$

Число y_0 называется *начальным значением* задачи Коши, число x_0 - *начальной точкой*, числа x_0, y_0 вместе взятые называются *начальными данными задачи Коши*. Будем говорить, что в этом случае задача (1.5) имеет единственное решение.

Рассмотрим задачу, которая приводит к дифференциальному уравнению другого вида.

Задача 2. Материальная точка массы m свободно падает под действием силы тяжести. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти закон движения точки.

Решение. На вертикальной оси, вдоль которой падает точка, выберем точку отсчета O и определим положительное направление - от точки O вниз. Положение точки определяется координатой $y(t)$, изменяющейся со временем t. Точка падает под действием силы тяжести $F_T = mg$; поэтому, согласно второму закону Ньютона, $F = ma$, имеем

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg,$$

или

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g. \tag{1.6}$$

Интегрируя дважды соотношение (1.6), находим:

$$\frac{dy}{dt} = gt + C_1,$$

$$y(t) = \frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2. \tag{1.7}$$

Формула (1.7) определяет закон движения ма териальной точки, однако, как и в предыдущем примере, она содержит постоянные интегрирования, в данном случае две. Задавая начальное положение падающей точки относительно точки O

$$y(0) = y_0$$

и ее начальную скорость

$$v(0) = v_0,$$

из совокупности функций (1.7) выберем одну, описывающую движение точки. Так как скорость движения точки

$$v(t) = \frac{dy}{dt},$$

то при указанных начальных условиях

$$C_1 = v_0,\ C_2 = y_0;$$

поэтому искомая функция, описывающая закон движения точки, имеет вид

$$y = \frac{gt^2}{2} + v_0t + y_0 \tag{1.8}$$

Таким образом, получили известную формулу пути, пройденного точкой при равномерно ускоренном движении. Уравнение (1.6) будем называть обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. Аналогично можно поставить задачу Коши для уравнения второго порядка.

Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y, y')$$

состоит в том, что требуется найти среди всех решений этого уравнения такое решение $y = y(x)$, *которое принимает заданные значения* y_0, y_1 *при заданном значении* x_0 *независимой переменной* x:

$$y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y_1.$$

В различных областях человеческой деятельности возникает большое число задач, решение которых сходно с решением рассмотренных выше. Характер этих задач и методику их решения можно схематично описать так. Происходит некоторый процесс, например, физический, химический, биологический. Нас интересует определенная функциональная характеристика этого процесса, например, закон изменения со временем температуры, давления, массы или положения в пространстве. Если имеется достаточно полная информация о течении этого процесса, то можно попытаться построить его математическую модель. Во многих случаях такой моделью может служить дифференциальное уравнение, одним из решений которого является искомая функциональная характеристика процесса.

Подчеркнем характерную особенность обыкновенных дифференциальных уравнений, отличающую их от прочих уравнений, содержащих производные неизвестных функций: все неизвестные должны быть функциями одного вещественного аргумента и все они и их производные должны входить в уравнение только в виде своих значений в одной и той же переменной точке (в наших обозначениях - в точке x), которая также может фигурировать в уравнении. Вот примеры нарушения этих требований:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

(неизвестная u - функция двух аргументов x и y). Это пример *дифферен-*

циального уравнения в частных производных;

$$x'(t) = x(t-1)$$

(неизвестная функция и ее производная входят в уравнение в виде значения в разных точках t, $t-1$);

$$x'(t) = \int_{t_0}^{t} x(s)ds$$

($s \in [t_0, t]$ и производная задана в точке t. Это представители так называемых *дифференциально-разностных и дифференциально-интегральных уравнений*). Ни одно из приведенных трех дифференциальных уравнений не называют обыкновенным.

Рассмотрим некоторые простейшие классы дифференциальных уравнений, общее решение которых (в явной или
неявной форме) удается найти с помощью интегрирования и некоторых элементарных преобразований.

1.2 Уравнения, разрешенные относительно производной первого порядка

В этой главе мы будем рассматривать уравнения, разрешенные относительно производной первого порядка в нормальной форме

$$y' = f(x, y). \tag{2.1}$$

Решением дифференциального уравнения (2.1) на интервале $I \subset R^1 \times R^1$ называется непрерывно - дифференцируемая функция $y = \Phi(x)$, превращающая это уравнение в тождество на I, т.е.

$$\Phi'(x) = f(x, \Phi(x)). \tag{2.2}$$

Соотношение

$$F(x, y, C) = 0$$

называется общим интегралом уравнения (2.1). Будем рассматривать x и y как прямоугольные координаты на плоскости. Тогда решению

$$y = \Phi(x)$$

уравнения (2.1) будет соответствовать некоторая кривая, которая называется *интегральной кривой* этого уравнения. Проекция графика решения на ось ординат называется *фазовой кривой* *(или траекторией)* дифференциального уравнения (2.1). Через каждую точку (x, y) из области определения уравнения (2.1) проведем прямую, тангенс угла наклона которой к оси абсцисс $k = f(x, y)$. Это семейство прямых называется *полем направлений*, соответствующих уравнению (2.1) (или полем направлений функции $f(x, y)$). *Изоклиной* называется кривая, во всех точках которой k одинаково. Все интегральные кривые, пересекающие данную изоклину, в точках пересечения наклонены к оси абсцисс под одним и тем же углом.

Рассмотрим для уравнения (2.1) задачу Коши

$$y(x_0) = y_0. \tag{2.3}$$

Если через заданную точку (x_0, y_0) проходит одна интегральная кривая, то решение единственно (правая часть уравнения (2.1) в каждой точке (x, y) задает одно направление). Следовательно, мы можем нарисовать графики интегральных кривых, не решая уравнение. Для этого из всего поля направлений выделим те линии, где наклон касательных к интегральным кривым один и тот же. Эти линии - **изоклины**.

Пример 1.

Нарисуем изоклины для уравнения

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Решение. Уравнение изоклин имеет вид:

$$-\frac{x}{y} = k = const, \quad y = -\frac{1}{k}x, \quad k \neq 0.$$

В каждой точке, принадлежащей изоклине, тангенс угла наклона касательной к интегральной кривой равен k. Нарисуем изоклины (рис.1)

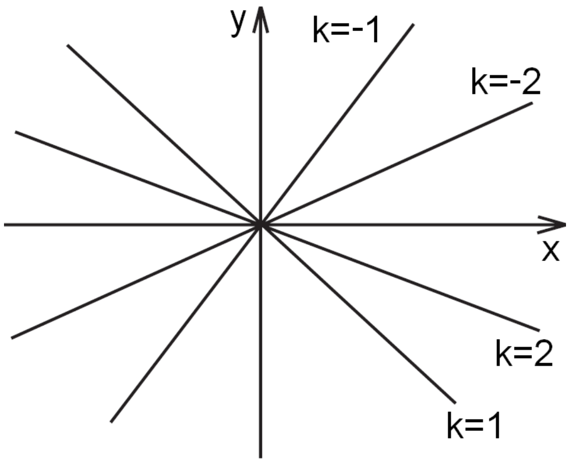

Рис. 1.

Вдоль изоклины $y = -x$ $(k = 1)$ поле направлений имеет вид (касательная к интегральной кривой составляет в каждой точке $y = -x$ угол с осью x равный $45°$):

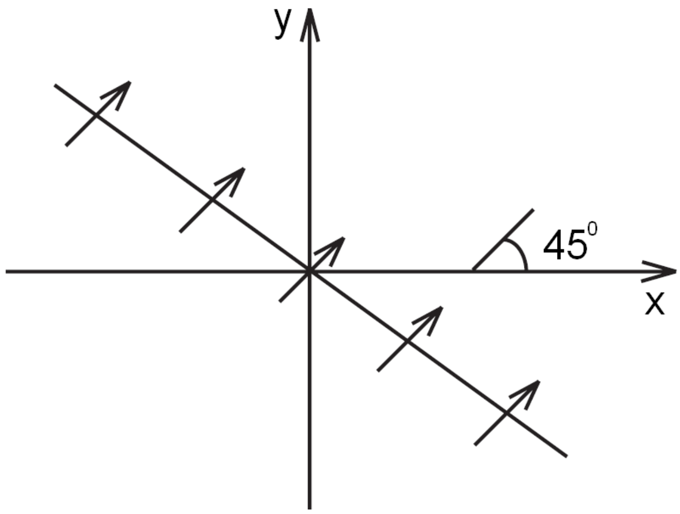

Рис. 2.

Соответственно вдоль изоклины $y = \frac{1}{2}x, \quad (k = -2):$

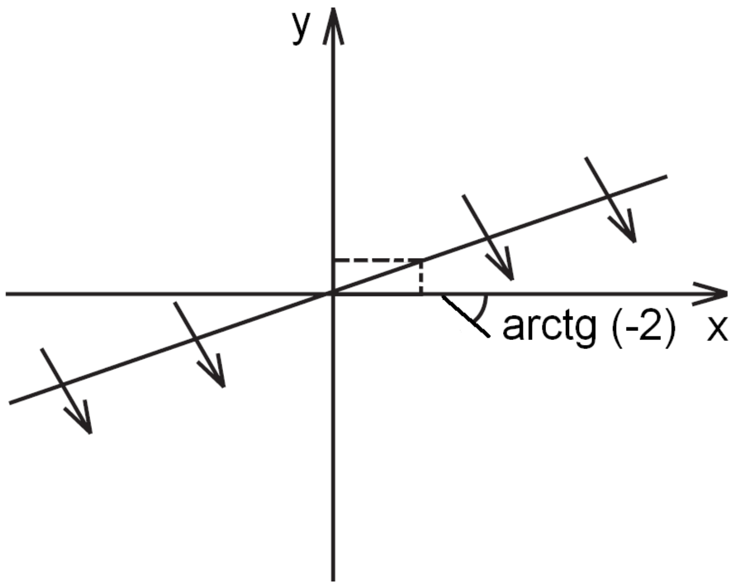

Рис. 3.

Поле направлений примера 1 имеет вид:

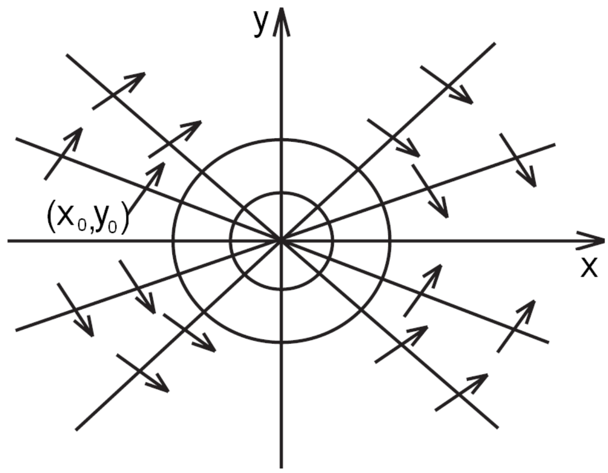

Рис. 4.

Если через заданную точку (x_0, y_0) провести интегральную кривую, которая в каждой точке имеет касательную, совпадающую с полем направлений, то получим окружность. Семейство интегральных кривых имеет вид

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

Если рассмотрим начальное условие (2.3), то получим интегральную кривую, проходящую через точку (x_0, y_0) и являющуюся решением задачи Коши для примера 1:

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2,$$

траекторией исходного уравнения является проекция данной интегральной кривой на ось OY, т.е отрезок

$$y \in [-\sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \sqrt{x_0^2 + y_0^2}].$$

Пример 2.

Нарисуем изоклины для уравнения

$$y' = \sqrt{y}.$$

Решение. Уравнение изоклин $y = k^{\frac{1}{3}}x + C$, $C = const$.

Составим таблицу значений k:

k	0	1/2	-1/2	1	-1	2	-2
$tg\alpha$	0	1/2	-1/2	1	-1	2	-2

Нарисуем изоклины

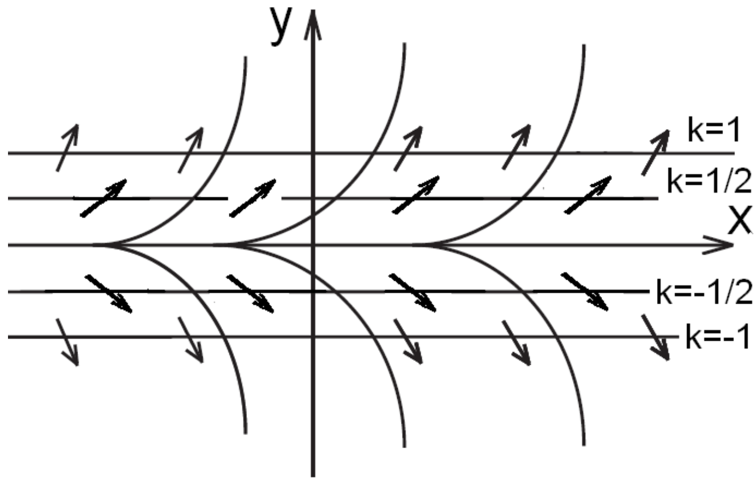

Рис. 5.

Из рис. 5 видно, что через точки $(x, 0)$ проходит более одной интегральной кривой. Действительно, задача Коши

$$y' = \sqrt{y}$$

$$y(x_0) = 0$$

имеет решения $y = 0$ и $y = \frac{1}{4}(x - x_0)^2$.

Следовательно, все точки кривой $y = 0$ являются *особыми*, так как через каждую окрестность точки $(x_0, 0)$ проходит две интегральные кривые. Решение $y = 0$ называется *особым решением* [1].

Рассмотрим задачу Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Точка (x_0, y_0) называется о*собой точкой первого рода* для уравнения $y' = f(x, y)$, если существует положительное число δ_0 такое, что задача Коши не имеет решений на любом интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ при $\delta \in (0, \delta_0)$.

Точка (x_0, y_0) называется *особой точкой второго рода* для уравнения $y' = f(x, y)$, если задача Коши имеет по крайней мере два решения $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, не совпадающие тождественно на любом интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, на которых оба этих решения определены.

Решение $y(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$ называется *особым*, если каждая точка $(x, y(x))$ является особой точкой второго рода для данного уравнения.

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на области Q, (x_0, y_0) есть точка области Q. Далее пусть G есть замкнутый прямоугольник

$$G = \{\{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\},$$

причем положительные числа a b таковы, что этот прямоугольник лежит в области Q. Определим числа M и h_0:

$$M = \max_G |f(x, y)|; \quad h_0 = \min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Отрезок $[x_0 - h_0; x_0 + h_0]$ *называется отрезком Пеано задачи Коши (2.1), (2.3)*

В теореме существования и единственности [1] доказано, что решение задачи Коши (2.1), (2.3) существует и единственно на отрезке Пеано $[x_0 - h, x_0 + h]$, если $f(x, y)$ непрерывна на $G = \{\{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$, $|f(x, y)| \leq M$ и для $f(x, y)$ выполнено условие Липшица

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2|, \tag{2.4}$$

справедливое $\forall x \in A$ $(h = \min(a, \frac{b}{M}))$. Если теперь за начальную точку взять $(x_0 + h, y(x_0 + h))$, можно продлить решение на отрезок h_1, если конечно в окрестности новой начальной точки выполнены условия теоремы существования и единственности. Но возможны случаи, когда интегральная кривая становится непродолжаемой либо из-за приближения к точке, в которой нарушены условия теоремы существования и единственности, либо интегральная кривая приближается к асимптоте параллельно оси OY.

Пример 3.

Найти решение задачи Коши

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \tag{2.5}$$

$$y(0) = 1. \tag{2.6}$$

Решение. Проверим выполнение условия (2.4). Заметим, что если

$$|f'_y| \leq C$$

, то условие (2.4) выполнено. Следовательно, условие теоремы выполнены везде, кроме точек $(x, 0)$, поэтому продлить решение за прямую $y = 0$ невозможно. Действительно, решение (2.5), (2.6) имеет вид:

а) общее решение (2.5)

$$x^2 + y^2 = C^2, y = \pm\sqrt{C^2 - x^2}$$

б) решение задачи Коши (2.5),(2.6)

$$y = \sqrt{1 - x^2},$$

График решения имеет вид:

Следовательно, решение не продолжимо за пределы $-1 \leq x \leq 1$.

Пример 4.

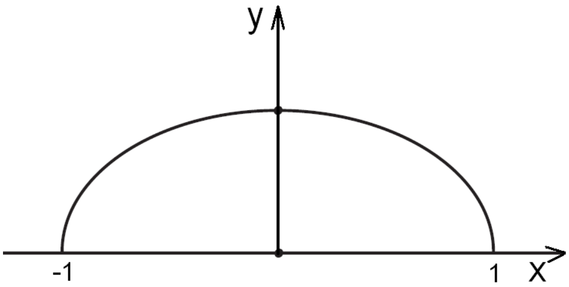

Рис. 1:

Найти решение задачи Коши

$$\frac{dy}{dx} = -y^2, \tag{2.7}$$

$$y(1) = 1. \tag{2.8}$$

Решение. Решение задачи (2.7) (2.8) имеет вид:

$$y = -\frac{1}{x-2}.$$

Следовательно, интегральная кривая продолжается лишь до асимптоты $x = 2$.

Рассмотрим более общее уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(y)}{g(x)} \tag{2.9}$$

в области

$$G = \{(x, y); \quad 0 < x < \infty, 0 < y < \infty\}.$$

Предположим, что функции $f(y)$ и $g(x)$ определены и непрерывны при всех неотрицательных значениях аргумента x, $f(0) = g(0) = 0$ и $f(y)g(x) > 0$ в области G. Попытаемся найти критерий наличия вертикальной асимптоты $x = 0$ задачи (2.9) с начальным условием

$$y(x_0) = y_0. \tag{2.10}$$

Решая задачу (2.9),(2.10), получим

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{g(x)} = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)} \tag{2.11}$$

или

$$G(x_0) - G(x) = F(y_0) - F(y). \tag{2.12}$$

Если левая часть (2.12) при $x \to 0$ имеет предел, т.е.

$$\lim_{x \to 0} (G(x_0) - G(x)) = l = const,$$

то в этом случае

$$\lim_{x \to 0} (F(y_0) - F(y)) = l,$$

а значит существует конечная координата $y(0)$. Следовательно, решение не выходит на асимптоту, график интегральной кривой приближается к точке $(0, y(0))$. Если интеграл левой части (2.11) расходится при $x \to 0$, то для выполнения равенства (2.12) интеграл правой части также должен расходиться. Если он расходится при $y \to \infty$, то $x = 0$ вертикальная асимптота, если же расходиться при $y \to a$ ($a = 0$ или $a = const$), то вертикальной асимптоты нет.

Пример 5.

Найти решение задачи Коши

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x}},$$

$$y(1) = 2.$$

Решение. Интеграл

$$\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

сходится при $x \to 0$, и решение не выходит на асимптоту.
Общее решение имеет вид

$$y = Ce^{2x^{\frac{1}{2}}}.$$

Решение задачи Коши –

$$y = 2e^{-2}e^{2\sqrt{x}} = 2e[2(\sqrt{x} - 1).$$

Интегральная кривая подходит к точке $y(0) = 2e^{-2}$

при $x \to 0$ (рис.7).

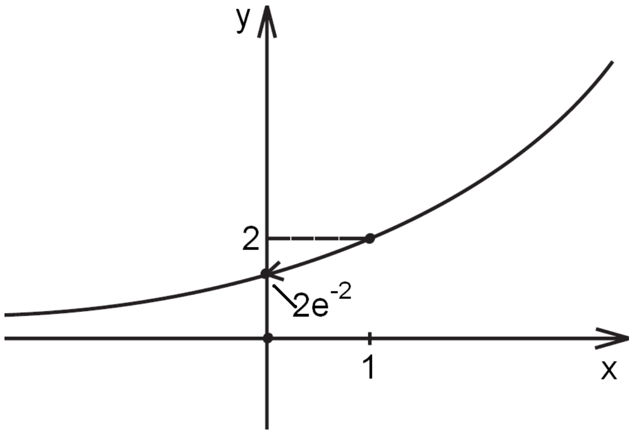

Рис. 7.

Если в правой части (2.11) интеграл расходится, то асимптота может существовать и может не существовать. Рассмотрим, когда возможны эти ситуации.

Пример 6.

Найти решение задачи Коши

$$y' = \frac{(y+1)\ln(y+1)}{x}, \quad y(1) = 2.$$

Решение. Интеграл $\displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{t}$ расходится при $x \to 0$, и

$$\lim_{x\to 0}\int_x^1 \frac{dt}{t} = +\infty.$$

Интеграл

$$\int_y^2 \frac{1}{(t+1)\ln(t+1)dt} = \ln(\ln 3) - \ln(\ln(y+1))$$

расходится при $y \to 0$ и при $y \to \infty$, но при $y \to \infty$

$$\lim_{y\to\infty}(\ln(\ln 3) - \ln(\ln(y+1))) = -\infty,$$

а при $y \to 0$

$$\lim_{y\to\infty}(\ln(\ln 3) - \ln(\ln(y+1))) = +\infty.$$

Следовательно, равенство (2.11) возможно только при $y \to 0$. Получаем, что при $x \to 0$ асимптоты нет.

Действительно, решение начальной задачи имеет вид:

$$Cx = \ln(y+1), \quad C = \ln 3,$$

или

$$y = e^{x \ln 3} - 1,$$

и при $x \to 0$ $y \to 0$

Пример 7.

Найти решение задачи Коши

$$y' = -\frac{(y+1)\ln(y+1)}{x}, \quad y(1) = 2.$$

Решение. Интеграл $\int_x^1 (-\frac{dx}{x}) \to -\infty$ при $x \to 0$, и интеграл

$$\int_y^1 \frac{1}{(t+1)\ln(t+1)dt} \to -\infty$$

при $y \to +\infty$, а значит имеет место равенство (2.12).

Следовательно, есть вертикальная асимптота $x = 0$. Действительно, решение задачи Коши имеет вид:

$$\ln(y+1) = \frac{C}{x}, \quad C = \ln 3,$$

т.е.

$$y = e^{\frac{ln3}{x}} - 1.$$

Значит, $y \to \infty$ при $x \to 0$.

Для существования решения задачи Коши, разрешенной относительно производной, достаточно потребовать только непрерывность правой части уравнения. Поэтому после решения уравнения из всего множества решений нужно выделить те, в которых нарушается единственность, т.е. найти особые решения. Для этого выделим кривые, вдоль которых не выполняется условие Липшица. На практике это условие удобно заменить на более сильное, а именно на условие существования ограниченной частной производной по y от функции $f(x, y)$. Если эти кривые удовлетворяют уравнению, то это особые решения.

Пример 8.

Найти особое решение уравнения

$$y' = f(x, y),$$

если

$$f(x, y) = 2 + \sqrt[3]{y - 2x}.$$

Решение. Сделаем замену

$$z = \sqrt[3]{y - 2x}$$

. Тогда

$$z' = \frac{2}{3z^2}$$

. Подставив в изначальное уравнение

$$3z^2 z\prime + 2 = 2 + z$$

, получим два решения

$$y = 2x$$

и

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{(y - 2x)^2} = x + C.$$

Найдем кривые, вдоль которых не выполнено условие Липшица, а именно – частная производная по y от функции $f(x, y)$

$$\frac{\partial}{\partial y}(2 + \sqrt[3]{y - 2x}) = \frac{1}{3}(y - 2x)^{-\frac{2}{3}}$$

не существует или не ограничена. Такой кривой для данного уравнения является прямая $y = 2x$. Следовательно, $y = 2x$ может быть особым решением.

Прямая $y = 2x$ удовлетворяет уравнению, а значит, это решение особое. Более того, через любую точку $(x_0, 2x_0)$ проходит бесконечное число интегральных кривых, являющихся решениями задачи Коши.

1.3 Методы решения уравнений первого порядка

1.3.1 Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения вида
$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y), \tag{3.1}$$
где $f(x)$ – функция зависит только от x, $\varphi(y)$ – функция зависит только от y. Решение уравнения (3.1) ищется следующим образом: при помощи умножения и деления в одной стороне оставляем только функцию от x и дифференциал dx, а в другой - функцию от y и dy, т.е. мы "разделяем переменные таким образом:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx.$$

Если дифференциалы равны, то их неопределенные интегралы удовлетворяют равенству:
$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + C, \tag{3.2}$$
где C - произвольная постоянная. Мы получили общий интеграл уравнения (3.1). Если удается разрешить его относительно y, то получим (в явном виде) общее решение данного уравнения. Если для некоторого значения $y = y_0$ мы имеем $\varphi(y_0) = 0$, то решением уравнения (3.1) кроме решений, данных формулой (3.2), будет также $y = y_0$.

Если уравнение задано в виде

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0, \tag{3.3}$$

то для разделения переменных достаточно разделить обе части на произведение $N(y)P(x)$:
$$\frac{M(x)dx}{P(x)} + \frac{Q(y)dy}{N(y)} = 0,$$
откуда получим общий интеграл:

$$\int \frac{M(x)dx}{P(x)} + \int \frac{Q(y)dy}{N(y)} = C.$$

Замечание: Отдельно рассматриваются непосредственной подстановкой в (3.3) значения y, обращающие в ноль $N(y)$. Кроме того значения $x = x_0$, обращающие в 0 функцию $P(x)$, удовлетворяют уравнению (3.3), так как

$$dx_0 = 0, \quad P(x_0) = 0.$$

Пример 9.

Найти ортогональные траектории семейства парабол $y{=}ax^2$.

Решение. *Ортогональными траекториями* заданного семейства кривых называются линии, пересекающие под прямым углом кривые данного семейства. Угловые коэффициенты y_1' и y_2' касательных к кривым данного семейства и к искомым ортогональным траекториям должны в каждой точке удовлетворять условию ортогональности

$$y_2' = -1/y_1'.$$

Для семейства парабол $y = ax^2$ находим

$$y_1' = 2ax.$$

Так как

$$a = \frac{y}{x^2},$$

получаем

$$y_1' = \frac{2y_1}{x}.$$

Следовательно, дифференциальное уравнение искомых ортогональных траекторий $y(x)$ имеет вид

$$y' = -\frac{x}{2y}$$

(угловой коэффициент к искомой ортогональной траектории). Разделяя переменные, находим

$$2ydy + xdx = 0.$$

Интегрируя, получим семейство эллипсов (рис. 8)

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = c^2.$$

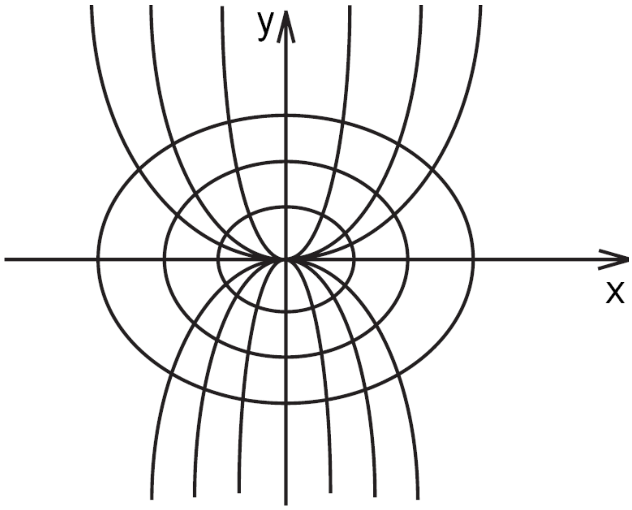

Рис. 8.

Пример 10.

Пусть $u=xy$ - потенциал скоростей плоскопараллельного течения жидкости. Найти уравнение линий тока.

Решение. Линии тока являются ортогональными траекториями семейства эквипотенциальных линий

$$xy = C$$

. Находим угловой коэффициент касательной к эквипотенциальным линиям

$$xy' + y = 0,$$

$$y' = -\frac{y}{x}$$

. Следовательно, дифференциальное уравнение линий тока имеет вид

$$y' = \frac{x}{y}$$

, или

$$ydy = xdx$$

. Интегрируя, получаем семейство парабол

$$x^2 - y^2 = C.$$

Пример 11.

Решить уравнение

$$x(y^2-1)dx+y(x^2-1)dy=0$$

и найти его особое решение.

Решение. Разделяем переменные, для чего делим обе части уравнения на

$$(y^2-1)(x^2-1),$$

получаем

$$\frac{xdx}{x^2-1}+\frac{ydy}{y^2-1}=0.$$

Интегрируем сумму двух дифференциалов:

$$\ln|x^2-1|+\ln|y^2-1|=\ln|C|,$$

или

$$(x^2-1)(y^2-1)=C.$$

Равенства $y^2-1=0$ и $x^2-1=0$ дают кривые, которые тоже могут быть решением уравнения. Непосредственной подстановкой в уравнение убеждаемся, что прямые $x=\pm1$, $y=\pm1$ входят в общее решение при $C=0$. Проверим, являются ли эти прямые особыми решениями. Для этого запишем уравнение в виде:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x(y^2-1)}{y(x^2-1)}=F(x,y),$$

$$F'=-\frac{2yx(y(x^2-1))-(x^2-1)x(y^2-1)}{y^2(x^2-1)^2}=$$

$$=\frac{2y^2x^3-2y^2x-x^3y^3+x}{y^2(x^2-1)^2}.$$

При $y=0$ и $x=\pm1$ функция F'_y неограничена. Следовательно, $x=\pm1$ – особое решение.

Задачи для самостоятельного решения

Найти решения уравнений:

1. $(1+\frac{1}{x})dx-(1-\frac{1}{y})dy=0$

   Ответ:

   $x-y+\lg(xy)=C$

2. $ctgxdx-tgydy=0$

   Ответ:

   $\sin x\cos y=C$

3. $\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}=0$

   Ответ:

   $\frac{x+y}{1-xy}=C$

4. $(x^5+1)ydx+x(y^2-1)dy=0$

   Ответ:

   $\frac{x^3}{3}+\frac{y^2}{2}+\lg(\frac{x}{y})=C$

5. $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}y'=0$

   Ответ:

   $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C$

6. $x(1+e^y)dx-e^ydy=0$

   Ответ:

   $x^2-2\ln(1+e^y)=C$

7. $x^2(y+1)dx+(x^3-1)(y-1)dy=0$

   Ответ:

   $3y+\lg(\frac{x^3-1}{(y+1)^6})=C$

8. $(1+y^2)(e^{2x}dx-e^ydy)-(1+y)dy=0$

   Ответ:

   $\frac{1}{2}e^{2x}-e^y-\lg\sqrt{1+y^2}-\mathrm{arctg}y=C$

9. $2y\sqrt{ay-y^2}dx-(a^2+x^2)dy=0$

   Ответ:

   $\sqrt{\frac{a-y}{y}}+\mathrm{arctg}(\frac{x}{a})=C$

10. Найти кривую, у которой отрезок касательной в какой-нибудь точке, заключенный между осями координат, делится пополам в этой точке.

    Ответ:

    Гипербола $xy = a^2$

11. Найти ортогональные траектории парабол $y^2 = 2px$.

    Ответ:

    $x^2 - \frac{y^2}{2} = a^2$

12. Найти ортогональные траектории семейства кривых

    $y^2 = x^3$.

    Ответ:

    $2x^2 + 3y^2 = a^2$

1.3.2 Однородные уравнения

Функция $F(x, y)$ называется *однородной функцией степени* k, если для всех $\lambda > 0$ выполняется равенство

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k F(x, y).$$

Примером однородной функции степени $0, 1, 2, k$ соответственно являются функции

$$F(x, y) = \frac{x - y}{x + y},\ F(x, y) = \frac{x^2 + xy}{x - y},$$
$$F(x, y) = x^2 + y^2 - xy,\ F(x, y) = x^{k-1}y + y^k.$$

Уравнение вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{3.4}$$

где $M(x, y)$, $N(x, y)$ - непрерывные в некоторой области $D \subset R^1 \times R^1$ и однородные функции одной и той же степени, называется *однородным.*

С помощью замены $y = x \cdot u(x)$ ($u(x)$ - неизвестная функция), уравнение вида (3.4) сводится к уравнению с разделяющимися переменными x и u.

Пример 12.

Найти общее решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Решение. Уравнение однородное. Делаем подстановку:

$$y = ux,$$

тогда

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}.$$

Уравнение примет вид

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{2u}{1 - u^2},$$

или

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u + u^3}{1 - u^2}.$$

Переменные разделяются:

$$\frac{dx}{x} + \frac{u^2 - 1}{u(u^2 + 1)}du = 0.$$

Интегрируем, разлагая второе слагаемое на простые дроби:

$$\int \frac{dx}{x} = \int (\frac{1}{u} - \frac{2u}{u^2 + 1})du$$

Получим

$$\ln|x| + \ln(u^2 + 1) - \ln|u| = \ln C,$$

или

$$\frac{x(u^2 + 1)}{u} = C.$$

Подставляя значение

$$u = \frac{y}{x}$$

, находим:

$$x^2 + y^2 = Cy$$

- семейство окружностей, касающихся оси Ox в начале координат.

Кроме того, решением являются

$$x = 0, \;\; y = 0$$

.

Уравнение вида (3.4) называется *обобщенно–однородным*, если существует такая постоянная α, что после замены $y = z^\alpha$ оно становится однородным.

Пример 13.

Найти общее решение уравнения

$$2x^2y\prime = y^3 + xy.$$

Решение. Положим

$$y = z^\alpha.$$

Требуя, чтобы уравнение было однородным , найдем α

$$2\alpha x^2 z^{\alpha-1} z' = z^{3\alpha} + xz^\alpha,$$

$$2\alpha x^2 z^{\alpha-1} dz - (z^{3\alpha} + xz^\alpha)dx = 0.$$

Отсюда следует, что функции

$$2\alpha x^2 z^{\alpha-1}$$

и

$$z^{3\alpha} + xz^\alpha$$

однородны лишь при условии

$$\alpha + 1 = 3\alpha = \alpha + 1,$$

т.е. при

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

. Таким образом, в случае $y \geq 0$ применяем замену

$$y = \sqrt{z}$$

. Тогда исходное уравнение примет вид

$$x^2dz - (z^2 + xz)dx = 0.$$

Получили однородное уравнение. Замена $z = xu(x)$ преобразует последнее уравнение в уравнение с разделяющимися переменными

$$x^2(xdu - u^2dx) = 0.$$

Если $u(x) \neq 0, x \neq 0, (z \neq 0)$, то интегрируя его, получим

$$\frac{1}{u} + \ln|x| = C,$$

или

$$\frac{x}{y^2} + \ln|x| = C.$$

Если $z = 0$, то $y = 0$ удовлетворяет исходному уравнению и также является решением. Можно заметить, что решение $y = 0$ входит в полученное семейство при $C \to \infty$. Отметим, что $x = 0$ также является решением.

Уравнения типа

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

преобразуются в однородные путем переноса начала координат в точку пересечения (x_1, y_1) прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Действительно, свободный член в уравнениях этих прямых в новых координатах $X = x - x_1,\ \ Y = y - y_1$ будет равен нулю, коэффициенты при текущих координатах остаются неизменными, а

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dx},$$

и уравнение преобразуется к виду:

$$\frac{dY}{dX} = f(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}) = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{Y}{X}}{a_2 + b_2\frac{Y}{X}}\right) = \varphi\left(\frac{Y}{X}\right),$$

которое является однородным.

Этот метод нельзя применить лишь в случае параллельных прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Но в этом случае коэффициенты пропорциональны

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k,$$

и уравнение может быть записано в виде

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y + c_3)}\right) = F(a_1x + b_1y).$$

Замена переменных

$$t = a_1 + b_1y$$

преобразует рассматриваемое уравнение в уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{1}{b_1}\frac{dt}{dx} - \frac{a_1}{b_1} = F(t), \quad a_1, b_1 = const.$$

Пример 14.

Найти общее решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}.$$

Решение. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases},$$

получим $x_1 = 1$, $y_1 = 2$.

Полагая $x = X + 1$, $y = Y + 2$, будем иметь:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y}.$$

Замена переменных $z = \frac{Y}{X}$ или $Y = zX$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными

$$z + X\frac{dz}{dX} = \frac{1 - z}{1 + z},$$

$$\frac{(1 + z)dz}{1 - 2z - z^2} = \frac{dX}{X}.$$

Интегрируя последнее равенство, получим

$$-\frac{1}{2}\ln|1-2z-z^2| = \ln|X| - \frac{1}{2}\ln C,$$

$$(1-2z-z^2)X^2 = C,$$

$$X^2 - 2XY - Y^2 = C.$$

Возвращаясь к переменным x, y запишем решение исходного уравнения:

$$x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = C_1.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти решения уравнений:

1. $y' = 3\frac{y^3}{x^3} + \frac{y}{x}$
   Ответ: $x = Ce^{-\frac{x^2}{6y^2}},\ y = 0.$

2. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$
   Ответ: $y = -\ln\ln\frac{C}{x}.$

3. $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0,\ y(2) = 1$
   Ответ: $y = x\sqrt{1 - \frac{3}{8}x}.$

4. $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$
   Ответ: $y + \sqrt{3x^2 + y^2} = Cx^3.$

5. $y' = \frac{x+2y}{2x-y}$
   Ответ: $x^2 + y^2 = Ce^{4arctg\frac{y}{x}}.$

6. $(2x - y + 4)dy + (x - 2y + 5)dx = 0$
   Ответ:$(x + y - 1)^3 = C(x - y + 3).$

7. $y' = \frac{x+2y-3}{x-1}$
   Ответ: $y = C(x-1)^2 - x + 2.$

8. $y' = \frac{1-3x-3y}{1=x=y}$
   Ответ: $3x + y + 2\ln|x + y - 1| = C.$

9. $(x - 2y + 1)dy + (2x - 4y + 5)dx = 0$
   Ответ: $(5x + 10y + 11)^3 = Ce^{-5(y+2x)}.$

10. $x^3(y'-x)=y^2$

    Ответ: $x^2=(x^2-y)\ln Cx$

11. $y'=y^2-\frac{2}{x^2}$

    Ответ: $1-xy=Cx^3(2+xy)$.

12. $xdy+y(3xy+1)dx=0$

    Ответ: $y=x^{-1}\ln^{-1}Cx^3,\ x=0,\ y=0$.

13. $y^2\sqrt{x-y^2x^2}=2xy'+y$

    Ответ: $2\sqrt{(1/xy^2)-1}=-\ln Cx,\ y=0,\ xy^2=1$.

14. $(x_y)dx+xdy=0$

    Ответ: $\lg x+\frac{x}{y}=C$

15. $(x+y)dx+xdy=0$

    Ответ: $x(x+2y)=C$

16. $(x-y)dx+(x+y)dy=0$

    Ответ: $\mathrm{arctg}(\frac{x}{y})=\lg\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{C}$

1.3.3 Линейные уравнения первого порядка и уравнения, приводящиеся к ним

Линейным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно искомой функции и ее производной. Оно имеет вид

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x). \tag{3.5}$$

Если $Q(x)=0$, то уравнение (3.5) называется *однородным.* Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$y'=P(x)y, \tag{3.6}$$

которое играет в теории обыкновенных дифференциальных уравнений важную самостоятельную роль. Переменные в уравнении не разделены, но легко разделяются: в области, где $y\neq 0$ его можно записать в виде

$$\frac{dy}{y}=P(x)dx. \tag{3.7}$$

Будем считать, что функция

$$P(x) : [a, b] \subset R \to R \ \text{ непрерывна } \ ([a, b] - \text{промежуток}). \tag{3.8}$$

Тогда (3.7) эквивалентно уравнению

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{y} = \int_{x_0}^{x} P(x)dx, \tag{3.9}$$

где нули под интегралами обозначают выбор какой-нибудь одной из первообразных. Положим

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{y} = \ln|x|, \quad \int_{x_0}^{x} P(x)dx = \int_{x_{x_0}}^{x} P(s)ds,$$

где x_0 – любая фиксированная точка промежутка J. Уравнение (3.8) запишем в виде

$$\ln|y| = \int_{x_0}^{x} P(s)ds + C$$

или

$$|y| = C_1 e^{\int_{x_0}^{x} P(s)ds}, \quad (C_1 = e^C > 0). \tag{3.10}$$

Решения уравнения (3.10) не принимают нулевых значений, т.е. каждое из них либо всюду положительно, либо всюду отрицательно. Следовательно, (3.10) эквивалентно уравнению

$$y = C_2 \exp \int_{x_0}^{x} P(s)ds, \quad (C_2 \neq 0). \tag{3.11}$$

Итак, (3.11) есть общее решение уравнения (3.7), и при выполнении условия (3.8) получим общее решение уравнения (3.6)

$$y = C\Phi_{x_0}(x). \tag{3.12}$$

Общее решение неоднородного уравнения (3.5) будем искать в том же виде (3.12), только считая С не константой , а функцией от x. Такой способ решения называется **методом вариации произвольной постоянной**. Формулу (3.12) можно рассматривать как замену старой неизвестной функции y на новую C. Подставим (3.12) в (3.5):

$$\Phi'_{x_0} + \Phi_{x_0} C' = P(x)\Phi_{x_0} C + Q(x). \tag{3.13}$$

Функция Φ_{x_0} есть одно из решений уравнения (3.6), поэтому из (3.13) получаем:

$$C' = \frac{Q(x)}{\Phi_{x_0}(x)}$$

и следовательно,

$$C = \int_{x_0^x} \frac{Q(s)}{\Phi_{x_0}(s)} ds + C_1. \tag{3.14}$$

Вместе с (3.13) это дает

$$y = \Phi_{x_0} C + \Phi_{x_0} \int_{x_0^x} \frac{Q(s)}{\Phi_{x_0}(s)} ds. \tag{3.15}$$

Формула (3.15) играет важную роль в теории дифференциальных уравнений. Константа C в ней имеет простой смысл: $C = y_0 = y(x_0)$ - в этом легко убедиться непосредственной подстановкой $x = x_0$ в (3.15). В связи с этим формулу (3.15) можно записать в виде

$$y = \Phi_{x_0} x_0 + \Phi_{x_0} \int_{x_0}^{x} \frac{Q(s)}{\Phi_{x_0}(s)} ds. \tag{3.16}$$

Если $P(x) \equiv p$ не зависит от x, то

$$\Phi_{x_0} = e^{p(x-x_0)},$$

и из (3.16) получаем часто используемую формулу

$$y = e^{p(x-x_0)} x_0 + \Phi_{x_0} \int_{x_0}^{x} y^{p(s-x} Q(s) ds. \tag{3.17}$$

Пример 15.

Найти общее решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2.$$

Решение. Интегрируем соответствующее однородное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C, \quad y = Cx.$$

Будем искать решение исходного уравнения в виде

$$y = C(x)x,$$

где $C(x)$ неизвестная функция, тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx}x + C(x).$$

Подставляя в исходное уравнение, после упрощения получаем

$$\frac{dC}{dx}x = x^2,$$

или

$$dC = xdx, \quad C(x) = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Следовательно, общее решение

$$y = C_1 x + \frac{x^3}{2}, \tag{3.18}$$

здесь $C_1 x$ - общее решение линейного однородного уравнения, а $\frac{x^3}{2}$ - частное решение.

Существует еще несколько методов решения линейных уравнений - метод Бернулли и метод интегрирующего множителя.

Метод Бернулли. Решение уравнения (3.5) будем искать в виде:

$$y(x) = u(x)v(x).$$

Имеем

$$\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} + P(x)uv = Q(x).$$

Выберем в качестве $u(x)$ одно из решений уравнения

$$\frac{du}{dx} + P(x)u = 0,$$

например

$$u(x) = e^{-\int P(x)dx}.$$

Тогда $v(x)$ находим из уравнения

$$e^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx} = Q(x),$$

т.е.

$$v(x) = C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx,$$

где C - произвольная постоянная. Перемножая $u(x)$ и $v(x)$, получим

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right]$$

Метод интегрирующего множителя. Умножим обе части уравнения (3.5) на

$$\mu = e^{-\int P(x)dx}$$

и запишем его в виде

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P(x)dx}\right) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

Интегрируя, получим

$$ye^{\int P(x)dx} = C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right]$$

Пример 16.

Найти общее решение уравнения

$$(4 - x^2)y' + xy = 4$$

Решение. Применим все три метода.

1) Метод интегрирующего множителя.

найдем интегрирующий множитель

$$\mu = \frac{1}{4-x^2}e^{\int\frac{x}{4-x^2}dx} =$$

$$= \frac{1}{4-x^2}e^{-\frac{1}{2}\lg(4-x^2)} = \frac{1}{(\sqrt{4-x^2})^3}$$

Умножим на μ обе части данного уравнения и приведем к уравнению

$$\frac{dy}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{xy-4}{(\sqrt{4-x^2})^3}dx = 0$$

левая часть которого представляет полный дифференциал.Интегрируя его, находим

$$\int\frac{dy}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{y}{\sqrt{4-x^2}} + \varphi(x);$$

$$\frac{xy}{(\sqrt{4-x^2})^3} + \varphi'(x) = \frac{xy-4}{(\sqrt{4-x^2})^3},$$

Откуда

$$\varphi'(x) = -\frac{4}{(\sqrt{4-x^2})^3},$$

и

$$\varphi(x) = -4\int\frac{dx}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

Общий интеграл уравнения будет

$$\frac{y}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = C$$

или

$$y = x + C\sqrt{4-x^2}.$$

2) метод Бернулли.

Полагаем $y = uv$ и, следовательно, $dy = udv + vdu$. После подстановки y и dy в данное уравнение оно обратиться

$$(4-x^2)(udv+vdu) + xuvdx = 4dx$$

или

$$(4-x^2)udv + v[(4-x^2)du + uxdx] = 4dx$$

Из двух функций u и v можно одну выбрать произвольно; определим поэтому функцию u так, чтобы множитель при v в уравнении обратился в 0, т.е. чтобы

$$(4-x^2)du + uxdx = 0$$

или

$$\frac{du}{u} + \frac{xdx}{4-x^2} = 0$$

Решая методом разделения переменных, получим

$$\ln u = \ln(4-x^2),$$

$$u = \sqrt{4-x^2}.$$

Тогда

$$(4-x^2)udv = 4dx$$

иди, подставив найденное значение u,

$$(\sqrt{4-x^2})^3 dv = 4dx$$

или

$$dv = \frac{4dx}{(\sqrt{4-x^2})^3}.$$

Отсюда

$$v = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + C$$

Следовательно, общий интеграл данного уравнения будет

$$y = \sqrt{4-x^2}\left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + C\right)$$

$$y = x + C\sqrt{4-x^2}$$

3). Метод Лагранжа. Интегрируя сначала уравнение

$$(4-x^2)y' + xy = 0$$

или

$$\frac{dy}{y} + \frac{xdx}{4-x^2} = 0,$$

получим

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln(4-x^2) + \ln u,$$

где $\ln u$ - произвольная постоянная, или

$$y = u\sqrt{4-x^2}.$$

Будем рассматривать u как функцию от x и подберем ее так, чтобы

$$y = u\sqrt{4-x^2}$$

было общим интегралом данного уравнения.

Дифференцируя последнее уравнение, получим

$$y = y = \sqrt{4-x^2}du - \frac{uxdx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Подставим в данное уравнение вместо y и dy соответствующие им значение. Оно примет вид

$$(4-x^2)^{\frac{3}{2}}du - ux\sqrt{4-x^2}dx + ux\sqrt{4-x^2}dx = 4dx$$

или

$$du = \frac{4dx}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

откуда

$$u = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + C.$$

Следовательно, общий интеграл данного уравнения будет

$$y = x + C\sqrt{4-x^2}$$

Некоторые уравнения становятся линейными, если в них поменять ролями функцию и аргумент.

Пример 17.

Найти общее решение уравнения

$$(2e^y - x)y' = 1.$$

Решение. Уравнение линейно относительно x. Так как

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

, то его можно записать в виде:

$$2e^y - x = x'. \tag{3.19}$$

Общим решением однородного уравнения

$$x' + x = 0$$

является функция

$$x = Ce^{-y}. \tag{3.20}$$

Считая

$$C = C(y)$$

и подставив (3.20) в (3.19), получим:

$$2e^y - Ce^{-y} = C'e^{-y} - Ce^{-y},$$

$$C' = 2e^{2y},$$

$$C(y) = e^{2y} + C_0.$$

Окончательно находим:

$$x = Ce^{-y} + e^y.$$

Многие дифференциальные уравнения путем замены переменных могут быть сведены к линейным. К линейным уравнениям приводятся уравнения следующих видов:

1. $f'(y)\dfrac{dy}{dx} + P(x)f(y) = Q(x)$.

Полагая $f(y) = z(x)$, получаем

$$f'(y)y' = z',$$

$$z' + P(x)z = Q(x).$$

2. $\dfrac{dy}{dx} + P(x) = Q(x)e^{ny}$.
В этом случае целесообразно провести замену

$$e^{-ny} = z(x).$$

Тогда получим

$$-ne^{-ny}y' = z', \quad \frac{z'}{n} + P(x)z = Q(x) \ \ (n \neq 0).$$

3. **Уравнение Бернулли:**

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^m.$$

Уравнение Бернулли приводится к линейному с помощью замены $z(x) = y^{1-m}$ $(m \neq 0, \ \ m \neq 1$, так как в этих случаях оно уже линейное).

4. **Уравнение Риккати:**

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x).$$

Уравнение Риккати в общем случае не решается в квадратурах. Если же известно одно частное решение $y_1(x)$, то заменой $y = y_1 + z$ уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли.

Пример 18

Найти общее решение уравнения

$$\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\frac{dy}{dx} + \sqrt{y^2+1} = x^2 + 1.$$

Решение. Произведем замену

$$z(x) = \sqrt{y^2+1}$$

. Тогда получим

$$z' = \frac{y'}{\sqrt{y^2+1}},$$

$$z' + z = x^2 + 1.$$

Проделав всю необходимую процедуру, требуемую в методе вариации произвольной постоянной, найдем:

$$z = C(x)e^{-x},$$

где

$$C(x) = e^{x}(x^2 - 2x + 3) + C_0.$$

Итак,

$$\sqrt{y^2 + 1} = x^2 - 2x + 3 + Ce^{-x}$$

– общее решение исходного уравнения.

Пример 19.

Найти общее решение уравнения

$$3dy + (1 + e^{x+3y})dx = 0.$$

Решение. Преобразуем уравнение к виду

$$3\frac{dy}{dx} + 1 = -e^{x}e^{3y}.$$

Сделаем замену переменных

$$z(x) = e^{-3y}$$

, тогда получим

$$z'(x) = -3e^{-3y}y', \quad -\frac{z'}{z} + 1 = -\frac{e^{x}}{z},$$

$$z' - z = e^{x}.$$

Находим общее решение линейного уравнения

$$z(x) = Ce^{x} + xe^{x}.$$

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = -\frac{1}{3}\ln(C + x) - \frac{x}{3}.$$

Пример 20.

Найти общее решение уравнения

$$x\frac{dy}{dx} - 4y = x^2\sqrt{y}.$$

Решение. Это уравнение является уравнением Бернулли, $m = \frac{1}{2}$. Делим обе части на $x\sqrt{y}$:

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x.$$

Вводим новую переменную

$$z = \sqrt{y},$$

где

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx},$$

тогда получим линейное неоднородное уравнение

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2}.$$

Решаем однородное линейное уравнение:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2z}{x}, \quad \frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x}, \quad \ln z = 2\ln x + \ln C, \quad z = Cx^2.$$

Применяем метод вариации постоянной:

$$\frac{dz}{dx} = 2cx + x^2\frac{dC}{dx};$$

подставляем в неоднородное уравнение:

$$2Cx + x^2\frac{dC}{dx} - \frac{2Cx^2}{x} = \frac{x}{2},$$

или

$$\frac{dC}{dx} = \frac{1}{2x}, \quad C = \frac{1}{2}\ln x + C_1.$$

Следовательно,

$$z = x^2(C_1 + \frac{1}{2}\ln x)$$

и, наконец,

$$y = x^4(c_1 + \frac{1}{2}\ln x^2).$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти общие решения уравнений и частные решения, если даны начальные условия:

1. $(x + y)y' - 2y = (x + 1)^4$
   Ответ: $y = (x + 1)^2(x^2/2 + x + C)$.
2. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}$
   Ответ: $y = 4/x^2 + Cx$.
3. $y' + \frac{2y}{x} = x^3$
   Ответ: $y = x^4/6 + C/x^2$.
4. $y' - ytgx = \frac{1}{\cos x},\ y(0) = 0$
   Ответ: $y = \frac{x}{\cos x}$.
5. $xy' + y = x\sin x,\ y(\pi) = \frac{1}{\pi}$
   Ответ: $y = -\cos x + (\sin x - \pi + 1)/x$.
6. $(\sin^2 y + xctgy)y' = 1$
   Ответ: $x = (C - \cos y)\sin y$.
7. $dx = (\sin y + 3\cos y + 3x)dy$
   Ответ: $x = -\sin y\cos y + C\sin y$.
8. $4y^2dx + (e^{\frac{2}{2y}} + x)dy = 0$
   Ответ: $y = e^{1/(2y)} + Ce^{1/(4y)}$.
9. $\cos yy' - 3\sin y/x = x^3$
   Ответ: $\sin y = x^4 + Cx^3$.
10. $\frac{y'}{y} - \frac{2x\ln y}{x^2-1} = x + 1$
    Ответ: $\ln y = (x^2 - 1)\ln|x - 1| + C(x^2 - 1)$.

1.3.4 Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Рассмотрим уравнение вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{3.21}$$

Пусть (3.21) является *уравнением в полных дифференциалах*, т.е. существует такая дифференцируемая функция $\Phi(x, y)$, что

$$d\Phi(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{3.22}$$

Тогда следующее уравнение является его *полным интегралом*:

$$\Phi(x, y) = C. \tag{3.23}$$

Для уравнения с разделяющимися переменными

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

существует функция

$$\Phi(x, y) = F(x) - G(y),$$

дифференциал которой совпадает с левой частью этого уравнения. Следовательно, это есть частный случай уравнения в полных дифференциалах. Например, рассмотрим уравнение

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0.$$

Оно является "симметричным т.е. содержит две неизвестные функции и не содержит явно аргумента t. Умножим обе части на dt, получим уравнение с разделяющимися переменными, интегрируя которое получим:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C,$$

или

$$x^2 + y^2 = C.$$

Будем предполагать, что в уравнении (3.21) функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ заданы на прямоугольнике $J_1 \times J_2$ (J_1, J_2 - промежутки в R) и непрерывны на нем вместе со своими частными производными $\partial M/\partial x$, $\partial N/\partial y$. Если в этих условиях уравнение (3.21) есть уравнение в полных дифференциалах, то

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = M(x, y), \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = N(x, y) \tag{3.25}$$

и, следовательно

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x},$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

Поэтому из известной теоремы о равенстве смешанных производных вытекает следующий необходимый признак уравнения в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{3.26}$$

Покажем, что он является и достаточным. При этом опишем алгоритм нахождения функции $\Phi(x, y)$. Из (3.24) получим

$$\Phi = \int_{x_0}^{x} M(\xi, y) d\xi + C(y)$$

и

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^{x} M(\xi, y) d\xi + C'(y) = N(x, y),$$

т.е.

$$C' = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^{x} M(\xi, y) d\xi.$$

Воспользовавшись известным правилом Лейбница дифференцирования интеграла по параметру, получим

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^{x} M(\xi, y) d\xi = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(\xi, y)}{\partial y} d\xi = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(\xi, y)}{\partial x} d\xi =$$

$$= N(x,y) - N(x_0,y).$$

Поэтому

$$C' = N(x_0,y), \quad C(y) = \int_{y_0}^{y} N(s,y)ds + C_1.$$

Таким образом, при выполнении условия (3.36) в качестве функции Φ можно взять функцию

$$\Phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi,y)d\xi - \int_{y_0}^{y} N(x_0,s)ds, \qquad (3.27)$$

где x_0, y_0 - произвольные фиксированные точки промежутков J_1 и J_2 соответственно.

Итак, если $M(x,y)$ и $N(x,y)$ непрерывные на $J_1 \times J_2$ вместе с $\partial M/\partial y$ и $\partial N/\partial x$ и удовлетворяют условию (3.26), то (3.21) есть уравнение в полных дифференциалах, для которого функция Φ находится с помощью описанного алгоритма или непосредственно по формуле (3.27).

Пример 21.

Решить уравнение

$$(3x^2 - y^2)dx - (3y^2 - 2xy)dy = 0.$$

Решение. Для него

$$M(x,y) = 3x^2 - y^2; \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -2y;$$

$$N(x,y) = 3y^2 - -2xy; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2y.$$

Условие полного дифференциала (3.26) выполнено в $R \times R$. Найдем $\Phi(x,y)$. Поскольку

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 3y^2 - 2xy,$$

то интегрируя, получим

$$\Phi = \int_0^y (3\xi^2 - 2x\xi)d\xi + C(x) = \left[\xi - x\xi^2\right]_0^y = y^3 - xy^2 = C(x),$$

а так как
$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -y^2 + C'(x) = 3x^2 - y^2,$$
очевидно, что
$$C'(x) = 3x^2$$
. Поэтому
$$C(x) = x^3 + C_1$$
и, следовательно,
$$\Phi(x, y) = y^3 - xy^2 + x^3.$$
Полный интеграл:
$$y^3 - xy^2 + x^3 = C.$$

Если для уравнения (3.21) условие полного дифференциала (3.26) не выполнено, то иногда удается найти функцию $\mu(x, y)$, такую, что для уравнения

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0 \tag{3.28}$$

оно выполнено.

В этом случае функция $\mu(x, y)$ называется **интегрирующим множителем.**

Для нахождения интегрирующего множителя $\mu(x, y)$ надо подобрать хотя бы одно тождественно не равное нулю частное решение уравнения в частных производных:
$$\frac{(\partial\mu M)}{\partial y} = \frac{(\partial\mu N)}{\partial x},$$
или в развернутом виде:
$$\frac{\partial\mu}{\partial y}M + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial\mu}{\partial x}N + \mu\frac{\partial N}{\partial x},$$
которое после деления на μ и переноса некоторых членов в другую часть равенства приводится к виду
$$\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}M - \frac{\partial\ln\mu}{\partial x}N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{3.29}$$

В общем случае интегрирование этого уравнения в частных производных является более сложной задачей, чем интегрирование исходного уравнения, однако, в некоторых случаях нахождение интегрирующего множителя не вызывает затруднений. Рассмотрим несколько таких случаев.

1) Исходное уравнение имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x, т.е. $\mu(x,y)=\mu(x)$, если выражение

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)}$$

есть функция, зависящая только от x.

2) Если исходное уравнение допускает интегрирующий множитель как функцию одной переменной y, т.е. $\mu(x,y)=\mu(y)$, то в этом случае

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M(x,y)}$$

есть функция, зависящая от y.

Пример 22.

Найти общее решение уравнения

$$(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3})dx+(x^2+y^2)dy=0.$$

Решение. Выпишем уравнение (3.14) для интегрирующего множителя $\mu(x,y)$:

$$(x^2+y^2)\frac{\partial \ln\mu}{\partial x}-(2xy+X^2y+\frac{y^3}{3})\frac{\partial \ln\mu}{\partial y}=(2x+x^2+y^2-2x),$$

из которого следует, что интегрирующий множитель может быть выбран как функция от x, так как имеет место случай 1), следовательно

$$\frac{\partial \ln\mu}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial \ln\mu}{\partial x}=1,\quad \mu=e^x,$$

$$e^x(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3})dx+e^x(x^2+y^2)dy=0.$$

Получили уравнение в полных дифференциалах, следовательно

$$U = \int e^x(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})dx + \varphi(y) =$$

$$= y\int e^x(2x + x^2)dx + \frac{y^3}{3}\int e^x dx + \varphi(y),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = e^x(x^2 + y^2) + \varphi(y)\prime = e^x(x^2 + y^2).$$

Следовательно,

$$\varphi(y)' = 0$$

и

$$\varphi(y) = C$$

. Решение:

$$ye^x(x^2 + \frac{y^2}{3}) = C.$$

Замечание. Для линейного уравнения вида

$$dy - f(x,y)dx = 0$$

интегрирующий множитель – величина, зависящая только от x:

$$\mu = e^{-\int \varphi(x)dx}, \quad \varphi(x) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Пример 23.

Найти общее решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} - y\mathrm{tg}x = \cos x.$$

Решение.

$$\mu = e^{\int \mathrm{tg}x dx} = e^{\ln\cos x} = \cos x,$$

$$\cos x dy - (y\sin x + \cos^2 x)dx = 0.$$

Интегрируем полученное уравнение:

$$y\cos x + y\cos x - \int \cos^2 x dx = C,$$

$$y\cos x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x\cos x = C.$$

Для уравнений вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{3.30}$$

где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ функции одной степени однородности, интегрирующий множитель имеет вид

$$\mu = \frac{1}{xM(x,y) + yN(x,y)}, \tag{3.31}$$

если знаменатель (3.31) не обращается в ноль.

Покажем, что уравнение (3.30), умноженное на интегрирующий множитель (3.31), есть полный дифференциал. Так как функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – одинаковой степени однородности, то замена $y = tx$ приводит уравнение (3.30) к виду:

$$M(x,y) = x^{\alpha}P(t);$$

$$N(x,y) = x^{\alpha}Q(t);$$

$$dy = tdx + xdt;$$

$$\frac{x^{\alpha}(P(t)dx + tQ(t)dx + Q(t)xdt)}{x^{\alpha}(P(t)x + Q(t)tx)} = 0,$$

$$\frac{(P(t) + Q(t)t)dx}{(P(t) + Q(t)t)x} + \frac{xQ(t)dt}{x(Q(t) + P(t))} = 0.$$

В левой части получили полный дифференциал некоторой функции $F(x,t)$, у которой

$$F'_x = \frac{1}{x}$$

и

$$F'_t = \frac{Q(t)}{Q(t)t + P(t)}.$$

Следовательно,

$$F'_{xt} = F'_{tx} = 0,$$

а значит имеем

$$dF(x,y)=0.$$

Пример 24.

Найти общее решение уравнения

$$(x-y)dx+(x+y)dy=0.$$

Решение. Найдем интегрирующий множитель

$$\mu=\frac{1}{x(x-y)+y(x+y)}=\frac{1}{x^2+y^2},$$

тогда

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}+\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$$

или

$$\frac{1}{2}d(\ln(x^2+y^2))+d(arctg\frac{y}{x})=0,$$

Интегрируя, получим

$$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}.$$

Замечание Если уравнение представимо в виде

$$M_1(x,y)dx+N_1(x,y)+M_2(x,y)dx+N_2(x,y)=0,$$

где функции $M_1(x,y)$, $N_1(x,y)$ имеют однородность степени p_1, а $M_2(x,y)$, $N_1(x,y)$ – p_2, то для каждой степени однородности p_1, p_2 рекомендуется найти свой интегрирующий множитель.

Пример 25.

Найти общее решение уравнения

$$(2x^3y^2-y)dx+(2x^2y^3-x)dy=0.$$

Решение. Преобразуем:

$$2x^3y^2dx+2x^2y^3dy=ydx+xdy,$$

Запишем в виде
$$ydx + xdy = \frac{1}{2}d(xy).$$
Интегрирующий множитель
$$\mu_1 = \frac{1}{x2x^3y^2 + y2x^2y^3} = \frac{1}{2y^2x^2(x^2+y^2)}.$$
Заметим, что
$$\frac{xdx + ydy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}d\ln(x^2+y^2).$$

Умножим и разделим левую часть на интегрирующий множитель μ_1, получим
$$2y^2x^2(x^2+y^2)\big[\frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy\big] = y^2x^2(x^2+y^2)d\ln(x^2+y^2),$$
или
$$y^2x^2(x^2+y^2)d\ln(x^2+y^2) = \frac{1}{2}d(xy).$$
Сделаем замену
$$xy = t, \quad x^2+y^2 = z$$
, тогда последнее уравнение имеет вид
$$t^2z\frac{1}{z}dz = \frac{1}{2}dt.$$
Интегрируя при $t \neq 0$, получим
$$\int dz = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2}.$$
Общее решение:
$$x^2+y^2 = -\frac{1}{2}\frac{1}{xy} + C.$$

Если $t = 0$, то нужно проверить, будут ли решениями уравнения функции $x = 0, \quad y = 0$. Подставляя в уравнение, получим, что $x = 0, \; y = 0$ являются решениями. Исследуем уравнение на существование особого решения. Для этого перепишем его в виде
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3y^2 - y}{2x^2y^3 - x} = F(x,y).$$

$F'_y = \infty$ при $y = 0,\ x = 0$. Значит. решения $y = 0,\ x = 0$ - особые решения.

Задачи для самостоятельного решения

Найти решения уравнений:

1. $(xy - 1)dx + x^2 dy = 0$

   Ответ: $x = Ce^{xy}$

2. $ydx - x(xy + 1)dy = 0$

   Ответ: $xy^2 + 2y = Cx$

3. $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$

   Ответ: $x^2 - y^2 = Cx^3$

4. $ydx - (e^x - 1)dy = 0$

   Ответ: $e^x(1 + Cy) = 1$

5. $(x^2 + y^2 + 1)dx + xydy = 0$

   Ответ: $x^4 + 2x^2y^2 + 2x^2 = C$

6. $(x^2 + x + y)dx + x(2xy - 1)dy = 0$

   Ответ: $x + \lg x - \frac{y}{x} + y^2 = C$

7. $(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0$

   Ответ: $xy + \frac{1}{x} - \frac{y^2}{2} = C$

8. $x^3e^x dx = xdy - ydx$

   Ответ: $e^x(x - 1) - \frac{y}{x} = C$

9. $(1 - 4x + 2y)dx + (1 + x)dy = 0$

   Ответ: $(1 + x)^2y + x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 = C$

10. Найти ортогональные семейства кривых:

    $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - b^2} = 1$, где a - параметр семейства.

    Ответ: $2x^2 - 2xy - y^2 = b^2$

1.4 Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной

Общий вид уравнений такого типа может быть записан так:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{4.1}$$

После замены $y' = p$ имеем

$$F(x, y, p) = 0. \tag{4.2}$$

Согласно теореме о неявной функции, уравнение (4.2) в окрестности (x_0, y_0, p_0) задает функцию $y' = \varphi(x, y)$, если $F'_p \neq 0$.

В этом случае для выделения единственного решения задачи Коши (4.1),

$$y(x_0) = y_0$$

нужно ставить еще условие

$$y'(x_0) = p_0.$$

Предположим, что уравнение (4.1) можно разрешить относительно производной $y' = f_1(x, y)$ и $y' = f_2(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0), т.е. уравнение (4.2) задает в окрестности (x_0, y_0) более одного поля направлений. В этом случае будем говорить, что решение задачи Коши единственно, если через каждую точку проходит столько интегральных кривых, сколько задано полей направлений.

Пример 26.

Найти общее решение уравнения

$$y'^2 = 1.$$

Решение. Данное уравнение в каждой точке (x, y) задает два поля направлений:

$$y' = 1 \text{ и } y' = -1,$$

и решение задачи Коши при $y(x_0) = y_0$ имеет вид

$$y_1 = x + y_0 - x_0,$$

$$y_2 = -x + y_0 + x_0,$$

В этом случае будем говорить, что решение задачи Коши единственно, хотя через точку (x_0, y_0) проходит две интегральных кривых.

Если из уравнения (4.1) нельзя выразить y', то решение будем искать в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} y &= \varphi(p, C) \\ x &= \psi(p, C); \end{aligned} \tag{4.3}$$

здесь p - параметр, C - константа.

Для этого из уравнения (4.2) выразим $x = u(y, p)$ или $y = \omega(y, p)$, а затем продифференцируем соответствующее равенство, тогда получим

$$dx = \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial p} dp \tag{4.4}$$

либо

$$dx = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial p} dp. \tag{4.5}$$

Учитывая, что $dy = pdx$, из (4.4) или (4.5) имеем соответственно дифференциальные уравнения первого порядка, решая которые получим общее решение (4.3).

Пример 27.

Найти общее решение уравнения

$$x - y = \frac{4}{9} {y'}^2 - \frac{8}{27} {y'}^3.$$

Решение. Сделаем замену

$$y' = p,$$

тогда

$$F(x, y, p) = -y + x - \frac{4}{9} p^2 + \frac{8}{27} p^3 = 0.$$

Из этого равенства получим либо

$$x = \frac{4}{9}p^2 - \frac{8}{27}p^3 + y, \tag{4.6}$$

либо

$$y = x - \frac{4}{9}p^2 + \frac{8}{27}p^3 + y. \tag{4.7}$$

Дифференцируя (4.6), получим уравнение вида (4.4):

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{8}{9}pdp - \frac{24}{27}p^2dp + dy,$$

или

$$(1-p)dy = \frac{24}{27}p^2dp. \tag{4.8}$$

решая (4.8), имеем:

$$dy = \frac{24}{27}p^2dp; \quad p = 1.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения с учетом (4.6) в параметрическом виде:

$$\begin{cases} y = \frac{8}{27}p^3 + C \\ x = \frac{4}{9}p^2 + C, \end{cases} \tag{4.9}$$

и

$$x = \frac{4}{27} + y.$$

Если дифференцировать (4.7), то получим

$$dy = dx - \frac{8}{9}pdp + \frac{24}{27}p^2dp,$$

$$pdx - dx = (\frac{8}{9}p^2 - \frac{8}{9}p)dp.$$

Следовательно,

$$dx = \frac{8}{9}pdp; \quad p = 1.$$

И тогда решение исходного уравнения:

$$\begin{cases} x = \frac{4}{9}p^2 + C \\ x = \frac{8}{27}p^3 + C, \end{cases}$$

и
$$y = x - \frac{4}{27}.$$
Таким образом, выбор равенства вида (4.6) или (4.7) диктуется только простотой уравнения для переменной x или y.

Замечание. Имея решение в параметрическом виде, можно записать общее решение, исключив параметр p из системы (4.9).

Из первого уравнения (4.9) выразим p:
$$p = \frac{3}{2}(y - C)^{\frac{1}{3}},$$
и подставив во второе уравнение (4.9), получим семейство интегральных кривых (общее решение):
$$y = (x - C)^{\frac{3}{2}} + C$$
и решение
$$y = x - \frac{4}{27}.$$
Кривая, удовлетворяющая условию $\dfrac{\partial F}{\partial p} = 0$, называется *дискриминантной кривой*, и если уравнение кривой удовлетворяет уравнению (4.2), то это особое решение [2].

Пример 28.

Найти особое решение, если оно существует, для уравнения примера 27

Решение. Запишем уравнение для нахождения дискриминантных кривых:
$$\frac{\partial F}{\partial p} = -\frac{8}{9}p + \frac{8}{9}p^2 = 0.$$
Оно имеет решение при $p = 0, p = 1$. Подставляем в (4.6) или в (4.7) $p = 0, p = 1$, получим
$$y = x \text{ и } -y + x - \frac{4}{9} + \frac{8}{27} = 0.$$
Следовательно, дискриминантные кривые для рассматриваемого уравне-

ния
$$y = x - \frac{4}{27} \text{ и } y = x. \tag{4.10}$$
Проверим, являются ли функции (4.10) решением уравнения. Для этого подставим $y = x$ в дифференциальное уравнение примера 26:
$$x - x \neq \frac{4}{9} - \frac{8}{27},$$
следовательно, $y = x$ не будет решением уравнения. Подставляя $y = x - \frac{4}{27}$, получим тождество.

Следовательно,
$$y = x - \frac{4}{27}$$
- особое решение.

Замечание. Из примеров 27, 28 видно, что вопрос нахождения особого решения сводится к нахождению дискриминантной кривой. С другой стороны, если найдено семейство интегральных кривых для уравнения (4.1) и это семейство имеет общую огибающую, то огибающая и есть особое решение. Действительно, огибающая в каждой точке касается интегральной кривой, а в разных точках касается разных интегральных кривых семейства. Предположим, что мы нашли семейство интегральных кривых для уравнения (4.1):
$$\Phi(x, y(x), C) = 0. \tag{4.11}$$
Тогда уравнение огибающей:
$$\Phi(x, y(x), C(x)) = 0, \tag{4.12}$$
и для нее выполнено условие
$$\frac{\partial C}{\partial x} \neq 0, \tag{4.13}$$
обеспечивающее касание в двух разных точках разных интегральных кривых. Дифференцируя по x (4.11) и (4.12), получим
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial x} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial x} = 0. \tag{4.14}$$

Из (4.14) с учетом (4.13) получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0.$$

Следовательно, огибающая удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0. \end{cases} \tag{4.15}$$

Если эта система разрешима, то ее решение $\varphi(x, y) = 0$ есть особое решение уравнения (4.1).

Заметим, что система (4.15) дает не только огибающую, но и геометрическое место особых точек (узловые точки, точки возврата), но в этом случае вдоль кривой $\varphi(x, y) = 0$ будет выполняться условие

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0.$$

Пример 29.

Для задачи примера 27 найдем огибающую решений, если она есть, и покажем, что это особое решение.

Решение. В примере 26 было найдено семейство кривых, являющихся общим решением:

$$\Phi(x, y, C) = y - (x - C)^{\frac{3}{2}} - C = 0.$$

Для определения огибающей выпишем систему (4.15):

$$\begin{cases} y - (x - C)^{\frac{3}{2}} - C = 0 \\ \frac{3}{2}(x - C)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы

$$x - C = \frac{4}{9}.$$

Подставляя $C(x)$ в первое уравнение, находим

$$y = x - \frac{4}{9} + (\frac{4}{9})^{\frac{3}{2}} = x - \frac{4}{27}.$$

Если это огибающая, то вдоль этой кривой либо

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \neq 0$$

, либо

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \neq 0$$

. Действительно,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{3}{2}(x - C)^{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2}\frac{2}{3} = -1, \quad (C = x - \frac{4}{9})$$

и

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 1.$$

Получили уравнение огибающей семейства кривых, найденных в примере 26. Однако, если семейство интегральных кривых примера 26 записать в виде

$$(y - C)^2 = (x - C)^3,$$

то тогда система (4.15) имеет два решения

$$(y - C)^2 = (x - C)^3,$$

$$y - C = \frac{3}{2}(x - C)^2.$$

Исключая C, получим два решения

$$a) C = x, \quad y = x$$

$$б) C = x - \frac{4}{9}, \quad y = x - \frac{4}{27}$$

В случае а) прямая $y = x$ есть прямая точек возврата ($\frac{d\Phi}{dx} = 0$).

Замечание. Рассмотрим уравнение, неразрешенное относительно производной, следующего вида (**уравнение Клеро**):

$$y = xy' + f(y').$$

Вводя параметр p, найдем его решение:

$$y = xp + f(p), \tag{4.16}$$

$$dy = xdp + pdx + fdp,$$

$$(x + f')dp = 0.$$

Следовательно, $dp = 0$ дает общее решение

$$p = C$$

, т.е.

$$\frac{dy}{dx} = C$$

и

$$y = Cx + C_1.$$

Причем полученная функция есть решение только в том случае, если

$$C_1 = f(C)$$

и

$$y = Cx + f(x).$$

Из (4.16) и уравнения

$$x = -f'(p)$$

получим частное решение в параметрической форме.

Пример 30.

Найти решение уравнения

$$y = xy' - (y')^2.$$

Решение. Сделаем замену $y' = p$, тогда

$$y = xp - p^2, \tag{4.17}$$

$$dy = xdp + pdx - 2pdp.$$

Так как $dy = pdx$, имеем

$$xdp = 2pdp,$$

или

$$dp = 0,\, ,\ \ ,\ p = C \text{и} x = 2p.$$

Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = xC - C^2.$$

Частное решение

$$x = 2p$$

,

$$y = 2p^2 - p^2 = p^2$$

, или

$$y = \frac{x^2}{4}.$$

Будет ли частное решение особым?

Найдем огибающую семейства решения:

$$\begin{cases} y = xC - C^2 \\ x - 2C = 0, \end{cases}$$

или

$$C = \frac{x}{2},$$

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}.$$

Следовательно, частное решение уравнения Клеро

$$y = \frac{x^2}{4}$$

является особым решением.

Особое решение этого уравнения можно было найти, не решая уравнения, путем нахождения дискриминантной кривой. Дифференцируя (4.17) по p, получим $0 = x - 2p$, $p = \frac{x}{2}$. Подставляя в уравнение, получаем уравнение дискриминантной кривой:

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}.$$

Если эта кривая является решением уравнения (а мы уже это показали), то это решение является особым.

Это утверждение справедливо для любого уравнения Клеро. Действительно, уравнение для нахождения огибающей (4.17) имеет вид

$$\begin{cases} y - xC - f(C) = 0 \\ \quad -x - f'(C) = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $x = -f'(C)$, а это и есть частное решение.

2 Дифференциальные уравнения высших порядков

При решении дифференциального уравнения порядка n нам в простейшем случае приходится интегрировать его n раз. Отсюда понятно, что общее решение уравнения n должно содержать n постоянных интегрирования. Всякое решение, которое мы получим из общего, давая постоянным интегрирования какие-либо определенные значения, называется *частным* решением.

Дифференциальные уравнения n - го порядка имеют вид:

$$y^{(n)} = f(x, y, y\prime, \ldots, y^{(n-1)}) \tag{2.1}$$

или, если они не разрешены относительно старшей производной

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Теорема существования и единственности задачи Коши для уравнения n - го порядка легко может быть получено путем сведения (2.1) к системе уравнений, в которой неизвестными функциями считаются не только $y(x)$, но и $y'(x) = y_1(x), y'' = y_2(x), \ldots, y^{(n-1)} = y_{n-1}(x)$

$$\begin{cases} y'(x) = y_1(x) \\ y_1'(x) = y_2(x) \\ \vdots \\ y_{n-2}'(x) = y_{n-1}(x) \\ y_{n-1}'(x) = f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}) \end{cases},$$

После чего можно применить теорему о существовании и единственности решения системы [1].

2.1 Линейное уравнение с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное уравнение относительно переменной y и ее производных

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x). \tag{2.2}$$

Если при этом коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ постоянны, то мы имеем линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Этот тип уравнений является одним из самых важных в практических приложениях.

При исследовании этого уравнения удобно символ операции $\frac{d}{dx}$ заменить более коротким символом D. Уравнение (2.2) тогда примет вид

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n) y = f(x). \tag{2.3}$$

Данное дифференциальное уравнение мы сопоставим с алгебраическим уравнением, называющимся *характеристическим*

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0, \tag{2.4}$$

и имеющим те же самые коэффициенты, что и данное уравнение (2.2), но правая часть которого есть нуль. Обозначая корни этого уравнения (2.4) через $r_1, r_2, \ldots, r_n$ мы можем записать уравнение (2.3) в виде

$$(D - r_1)(D - r_2) \ldots (D - r_n) y = f(x) \tag{2.5}$$

Производя над y операцию $D - r_1$, мы получаем

$$(D - r_1)y = \frac{dy}{dx} - r_1 y;$$

производя над этим членом в свою очередь операцию $D - r_2$, мы находим:

$$(D - r_2)(D - r_1)y = \frac{d^2y}{dx^2} - (r_1 + r_2)\frac{dy}{dx} + r_1 r_2 y.$$

Подобным же образом легко убедиться, что, производя над y все n операций $(D-r_1), (D-r_2), \ldots, (D-r_n)$ в каком угодно порядке, мы получим тот же результат, как если бы мы произвели одну операцию (2.5), являющуюся их произведением.

2.1.1 Однородные уравнения

Линейное уравнение называется однородным, если его правая часть равна нулю. Рассмотрим уравнение

$$(D - r_1)(D - r_2)\ldots(D - r_n)y = 0. \tag{2.6}$$

Функция

$$y = C_1 e^{r_1 x}$$

удовлетворяет этому уравнению. В самом деле,

$$(D - r_1)C_1 e^{r_1 x} = C_1 r_1 e^{r_1 x} - r_1 C_1 e^{r_1 x} = 0,$$

а следовательно и

$$(D - r_1)(D - r_2)\ldots(D - r_n)C_1 e^{r_1 x} = (D - r_n)\ldots(D - r_2)0 = 0.$$

Подобным же образом каждая функция вида

$$y = C_2 e^{r_2 x}, y = C_3 e^{r_3 x}, \ldots$$

представляет собой одно из решений данного уравнения. Наконец, функция

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x} \tag{2.7}$$

так же есть решение данного уравнения.

Если все корни $r_1, r_2, \ldots, r_n$ различны между собою, то можно показать, что постоянные C_1, C_2, $\ldots$,C_n, входящие соотношение (2.7), независимы, и следовательно, соотношение (2.7) есть общее решение уравнения (2.6).

Если же два из этих корней, например r_1 и r_2 равны между собой, то выражение

$$C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = (C_1 + C_2) e^{r_1 x}$$

содержит только одну постоянную $C_1 + C_2$, и поэтому соотношение (2.7) содержит менее, нежели n, постоянных, независимых между собой. Но в этом случае функция $x e^{r_1 x}$ также служит решением данного уравнения. Поэтому часть общего решения, соответствующая этим двум корням, может быть записана в виде

$$(C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}.$$

В более общем случае, когда

$$r_1 = r_2 = r \ldots = r_m,$$

часть общего решения, соответствующая этим корням, принимает вид

$$(C_1 + C_2 x + \ldots + C_m x^{m-1}) e^{r_1 x}.$$

Если

$$r_1 = \alpha + \beta i, \quad r_2 = \alpha - \beta i,$$

то часть общего решения, соответствующая паре сопряженных мнимых корней $\alpha \pm \beta i$, имеет вид

$$e^{\alpha x}[C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x].$$

Если характеристический многочлен имеет комплексный корень $\alpha \pm \beta i$ кратности m, то этой паре соответствует множество решений

$$y = e^{\alpha x}[(C_0 + C_1 x + \ldots + C_{m-1} x^{m-1}) \cos \beta x +$$

$$+(B_0 + B_1 x + \ldots + B_{m-1} x^{m-1}) \sin \beta x].$$

Рассмотрим несколько примеров решения однородного уравнения на каждый приведенный случай.

Пример 31.

Найти общее решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0.$$

Решение. Мы можем иначе записать это уравнение в виде

$$(D^2 - D - 2)y = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$r^2 - r - 2 = 0$$

есть -1 и 2, поэтому общим решением будет

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Пример 32.

Найти общее решение уравнения

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

Решение. Корни характеристического уравнения

$$r^3 + r^2 - 5r + 32 = 0$$

есть 1, 1 и -3.

Часть общего решения, соответствующая двум корням, равным единице, есть

$$(C_1 + c_2 x)e^x$$

. Следовательно, общим решением будет

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 e^{-3x}.$$

Пример 33.

Найти общее решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

Решение. Корни характеристического уравнения

$$r^2 + 2r^2 + 2 = 0$$

есть $-1 \pm i$.

Поэтому $\alpha = -1, \beta = 1$, и общее решение принимает вид:

$$y = e^{-x}[C_1 \cos x + C_2 \sin x].$$

Задачи для самостоятельного решения

1. $y'' - y = 0.$

   Ответ: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$

2. $y''' - y'' - y' + y = 0.$

   Ответ: $y = (C_0 + C_1)e^x + C_2 e^{-x}.$

3. $y''' + y = 0.$

   Ответ: $y = C_1 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin \frac{\sqrt{3}}{2}).$

4. $2y'' + 7y' - 15y = 0.$

   Ответ: $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{\frac{3}{2}x}.$

5. Найти решение уравнения

   $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0,$

   удовлетворяющее условиям

   $y = 2, \quad \frac{dy}{dx} = 4 \quad \text{при} x = 0.$

   Ответ: $y = e^{-x}(2\cos 2x + 3\sin 2x).$

6. $y''' - 3y' + 2y = 0.$

   Ответ: $y = C_1 e^{-2x} + (C_1 + C_2 x)e^x.$

7. $y^{IV} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0.$

   Ответ: $y = e^x((C_0 + C_1 x)\cos x + (B_0 + B_1 x)\sin x).$

8. $y''' - 2y'' + 5y' + 26 = 0$
   Ответ: $C_1 e^{-2x} + e^{2x}(C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x)$

9. Найти решение уравнения
   $\frac{d^3y}{dx^3} - 7\frac{dy}{dx} + 6y = 0,$
   удовлетворяющее условиям
   $y = 2, \quad \frac{dy}{dx} = 8 \;\; \frac{d^2y}{dy^2} = 0 \text{при} x = 0.$
   Ответ: $y = e^x + 2e^{2x} - e^{-3x}$.

10. $\frac{d^4y}{dx^4} - a^4 y = 0$
    Ответ: $y = C_1 e^a + C_2 e^{-ax} + C_3 \cos ax + C_4 \sin ax.$

11. $\frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{d^3y}{dx^3} + 10\frac{d^2y}{dx^2} - 12\frac{dy}{dx} + 5y = 0$
    Ответ: $y = e^x(C_1 + C_2 x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x).$

12. $\frac{d^5y}{dx^5} - 6\frac{d^4y}{dx^4} + 16\frac{d^3y}{dx^3} - 32\frac{d^2y}{dx^2} + 18\frac{dy}{dx} - 32y = 0$
    Ответ: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^{2x}(C_3 + C_4 x + C_5 x^2).$

2.1.2 Неоднородные уравнения

Пусть $y = u$ есть общее решение уравнения

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n) y = 0 \qquad (2.8)$$

и пусть, с другой стороны, $y = v$ есть какое-нибудь решение уравнения

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n) y = f(x); \qquad (2.9)$$

в таком случае функция

$$y = u + v$$

дает решение уравнения (2.9).

Чтобы решить неоднородное уравнение вида (2.9) надо сначала решить однородное уравнение , а затем прибавить к его общему решению какое-либо решение уравнения неоднородного (частного решения).

В некоторых случаях частное решение неоднородного уравнения можно найти *методом неопределенных коэффициентов* при помощи одного из ниже перечисленных правил:

а) Функция $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = P_m(x) \cdot e^{\alpha x},$$

где $P_m(x)$ – многочлен степени m.

Если число α не является корнем характеристического многочлена, то частное решение ищется в виде

$$y_0(x) = Q_m(x) \cdot e^{\alpha x},$$

где $Q_m(x)$ – многочлен степени m

$$Q_m(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \ldots + q_{m-1} x + q_m$$

с неопределенными коэффициентами.

Подставляя функцию $y_0(x)$ в исходное неоднородное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим алгебраическую систему из $m+1$-го уравнения для нахождения $m+1$-го коэффициента $q_0, q_1, \ldots, q_m$. Найдя эти коэффициенты, мы найдем и искомое частное решение.

Если число α является корнем характеристического многочлена кратности k, то частное решение ищется в виде

$$y_0(x) = x^k Q_m(x) \cdot e^{\alpha x},$$

б) Функция $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = [P_m(x) \cos \beta x + Q_l(x) \sin \beta x] \cdot e^{\alpha x},$$

где $P_m(x)$ и $Q_l(x)$– многочлены степеней m и l соответственно.

Если число $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического многочлена, то частное решение ищется в виде

$$y_0(x) = [R_p(x) \cos \beta x + T_p(x) \sin \beta x] \cdot e^{\alpha x},$$

где $R_p(x)$ и $T_p(x)$– многочлены степени p с неопределенными коэффициентами, $p = \max(m, l)$.

Если число $\alpha + \beta i$ является корнем характеристического многочлена кратности k, то частное решение ищется в виде

$$y_0(x) = x^k[R_p(x)\cos\beta x + T_p(x)\sin\beta x] \cdot e^{\alpha x}.$$

В обоих случаях коэффициенты многочленов $R_p(x)$ и $T_p(x)$ определяются непосредственной подстановкой функции $y_0(x)$ в исходное уравнение.

в) Функция $f(x)$ есть сумма различных функций вида а) или б).
В этом случае решение есть сумма частных решений, построенных по каждому слагаемому, входящему в функцию $f(x)$.

Пример 34.

Найти общее решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 2x + 3.$$

Решение. Частное решение ищем в виде $y = Ax + B$. Подставляя в уравнение, находим, что $A = \frac{1}{2}$, $\quad B = \frac{3}{4}$,
т.е. частное решение –

$$y = \frac{1}{4}(2x + 3).$$

С другой стороны, общее решение однородного уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$$

есть

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x,$$

так как характеристическое уравнение имеет корни $r_1 = r_2 = 2\imath$. Следовательно, общим решением первоначального уравнения будет

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{4}(2x + 3).$$

Пример 35.

Найти общее решение уравнения

$$y'' + 3y' + 2y = 2 + e^x.$$

Решение. Имеем:

$$(D^2 + 3D + 2) = 2 + e^x.$$

Положим

$$y = A + Be^x.$$

Подставляя это выражение в данное уравнение, находим:

$$2A + 6Be^x = 2 + e^x.$$

Следовательно,

$$2A = 2, \qquad 6B = 1$$

и

$$A + Be^x = 1 + \frac{1}{6}e^x.$$

характеристическое уравнение имеет корни $r_1 = -2, r_2 = -1$. Таким образом, общим решением данного уравнения будет

$$y = 1 + \frac{1}{6} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Пример 36.

Найти общее решение уравнения

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} = x^2.$$

Решение. Корни характеристического уравнения есть 0, 0, -1. Таким образом, ноль является двойным корнем, поэтому мы полагаем

$$y = x^2(Ax^2 + Bx + C).$$

Подставляя в данное уравнение, получаем:

$$12Ax^2 + (24A + 6B)x + 6B + 2C = x^2,$$

откуда

$$12A = 1, \quad 24A + 6B = 0, \quad 6B + 2C = 0,$$

или

$$A = \frac{1}{12}, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = 1.$$

Общее решение:

$$y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 + C_1 + C_2x + C_3e^{-x}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. $y''' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x$.

   Ответ: $C_1e^{-x} + C_2 + C_3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + e^x(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4})$.

2. $y'' - y = e^x x \cos x$.

   Ответ: $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + e^x((-\frac{1}{5}x + \frac{14}{25})\cos x + (\frac{2}{5}x + \frac{2}{25})\sin x)$.

3. $y'' - 4y' + 4y = x^2$.

   Ответ: $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \frac{1}{8}(2x^2 + 4x + 3)$.

4. $y'' + y = e^x$.

   Ответ: $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}e^x$.

5. $y'' + y = 2\cos^3 x(\sec^2 x - 1)$.

   Ответ: $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{16}(4x\sin x + \cos 3x)$.

6. $y'' - 2y' + y + \sin ax$

   Ответ: $y = (C_1 + C_2x)e^x + \frac{(1-a^2)\sin ax + 2a\cos ax}{(1+a^2)^2}$

7. Найти решение уравнения

   $y'' + 4y = \sin x$,

   удовлетворяющее условию $y = 1, \quad y' = 1$ при $x = 0$.

   Ответ: $y = \cos 2x + \frac{1}{3}(\sin x + \sin 2x)$

8. $y'' - 6y' + 9y = \frac{2+6x+9x^2}{x^3}$,

   Ответ: $y = (C_1 + C_2x)e^{3x} + \frac{1}{x}$.

9. $y'' + y' - 6y = a^x$

   Ответ: $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} - \frac{a^x}{(2-\ln a)(3+\ln a)}$

10. $y''' + y'' + y' + y = x^3 + 3x^2 + 6x + 6,$

    Ответ: $y = C_1e^{-x} + C_2\cos x + C_3\sin x + x^3.$

11. $\frac{d^4y}{dx^x} + 5\frac{d^2y}{dx^2} + 6y = \sin ax$

    Ответ: $y = C_1\cos x\sqrt{2} + C_2\sin x\sqrt{2} + C_3\cos x\sqrt{3} + C_4\sin x\sqrt{3} + \frac{\sin ax}{a^4-5a^2+6.}$

2.2 Уравнения, допускающие понижение порядка

Одним из основных методов, применяемых при интегрировании дифференциальных уравнений высших порядков, является понижение порядка уравнения, т.е сведение уравнения путем замены переменных к другому уравнению, имеющему порядок ниже данного.

Следует заметить, что понижение порядка возможно далеко не для всякого уравнения. Изучим некоторые типы уравнений второго порядка, допускающие понижение порядка.

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{2.10}$$

Рассмотрим **первый тип**

$$F(x, y'') = 0 \tag{2.11}$$

или

$$y'' = f(x) \tag{2.12}$$

Это уравнение не содержит искомой функции и ее производной первого порядка. Если $f(x)$ функция непрерывная на некотором интервале $a < x < b$ оси OX, то непосредственно интегрируя уравнение (2.12) в полосе $\{a < x < b, -\infty < y < +\infty\}$ понижаем порядок и получаем:

$$y' = \int f(x)dx + C_1$$

$$y = \int dx \int f(x)dx + C_1x + C_2 \tag{2.13}$$

здесь $_{1,2}$ - некоторые постоянные и (2.13) есть общий интеграл уравнения (2.11). Непосредственной подстановкой убеждаемся, что (2.13) при любых C_1, C_2 удовлетворяет уравнению (2.11)

Пример 37.

Решить уравнение

$$y'' = \frac{1}{2}e^{2x},$$

и найти частное решение, удовлетворяющее условию:

$$x_0 = 0,\ \ y_0 = 1,\ \ y_0' = -1.$$

Решение. Проинтегрируем уравнение:

$$y' = \frac{1}{2}\int e^{2x} = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1,$$

$$y = \frac{1}{8}e^{2x} + C_1 x + C_2$$

Подставив начальные данные, получим

$$C_1 = -\frac{5}{4},\ C_2 = \frac{7}{8}$$

Искомое частное решение будет иметь вид:

$$y = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{5}{4}x + \frac{7}{8}$$

Замечание. Так можно решать любое дифференциальное уравнение n -го порядка, имеющее вид $y^n = f(x)$

Рассмотрим **второй тип** - уравнение, не содержащего явно искомую функцию:

$$F(x, y', y'') = 0.\ \ y'' = f(x, y') \tag{2.14}$$

Введем новую переменную $z(x) = y'(x)$, тогда

$$y'' = \frac{d}{dx}y'(x) = \frac{dz}{dx} = z'$$

и (2.14) можно записать $F(x, z, z') = 0$. Интегрируя полученное уравнение имеем

$$\varphi(x, z, C_1) = 0$$

Подставляя $z = y'$

$$\varphi(x, y', C_1) = 0 \tag{2.15}$$

(2.15) - уравнение первого порядка, интегрируя которое получим

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0,$$

что является общим интегралом для уравнения (2.14).

Пример 38.

Найти частное решение уравнения

$$xy'' + y' + x = 0,$$

удовлетворяющее условию:

$$y = 0, y' = 0 \text{ при} x = 0$$

.

Решение. Сделаем замену переменных

$$y' = z$$

и, подставив в уравнение, получим линейное уравнение первого порядка относительно переменной z:

$$xz' + z + x = 0.$$

1) Пусть $x \neq 0$, тогда разделив на x получим

$$z' + \frac{z}{x} = -1.$$

Однородное уравнение решаем методом разделения переменных

$$\frac{1}{z}dz = -\frac{1}{x}dx,$$

$$\ln z = \ln\frac{C}{x}, \;\; z = \frac{C}{x}$$

Неоднородное уравнение будем решать методом вариации постоянных. Считаем, что

$$z = \frac{C(x)}{x}$$

и подставим в уравнение, получим

$$\frac{C'_x(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = -1,$$

$$C'_x = -x, \quad C = -\frac{x^2}{2} + C_1$$

Следовательно,

$$z = \frac{x}{2} + C_1$$

- общее решение. 2) При $x = 0$, имеем $z = 0$ и решение будет удовлетворять условию $y = 0$ при $C_2 = 0$. Из 1) и 2) получаем общее решение первого уравнения первого порядка

$$z = -\frac{x}{2}$$

или

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2}.$$

Интегрируя его, получим

$$y = -\frac{x^2}{4} + C_2$$

- общее решение исходного уравнения.

Так как $y = 0$ при $x = 0 \Rightarrow C_2 = 0$. Частное решение имеет вид :

$$y = -\frac{x^2}{4}$$

Замечание. Аналогичным способом можно проинтегрировать уравнение

$$y^n = f(x, y^{(n-1)})$$

Полагая

$$z = y^{(n-1)}$$

и найдя z, получим уравнение типа 1), которое умеем решать.

Пример 39.

Решить уравнение

$$\frac{d^5y}{dx^5} - \frac{1}{x}\frac{d^4y}{dx^4} = 0$$

Решение. Сделаем замену

$$z(x) = \frac{d^4y}{dx^4},$$

получим уравнение

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = 0$$

Уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, в случае если $z \neq 0$, и интегрируя будем иметь:

$$\frac{dz}{z} = \frac{1}{x}dx,$$

$$\ln \mid x \mid + \ln C.$$

Следовательно,

$$z(x) = \frac{d^4y}{dx^4} = Cx. \tag{2.16}$$

$z = 0$ также является решением, которое получается из общего решения (2.16) при С = 0. Интегрируя (2.16) несколько раз, приходим к решению уравнения.

$$y^{(3)}(x) = \int Cxdx = C_1x^2 + C_2;$$

$$y^{(2)}(x) = \int (C_1x^2 + C_2)dx = C_3x^3 + C_4x + C_5;$$

$$y^{(1)}(x) = \int (C_3x^3 + C_4x + C_5)dx = C_6x^4 + C_7x^2 + C_8x + C_9;$$

$$y(x) = \int (C_6x^4 + C_7x^2 + C_8x + C_9)dx = C_{10}x^5 + C_{11}x^3 + C_{12}x^2 + C_{13}x + C_{14}.$$

Ответ. $y(x) = \widetilde{C_1}x^5 + \widetilde{C_2}x^3 + \widetilde{C_3}x^2 + \widetilde{C_4}x + \widetilde{C_5}$

Тип 3. Уравнение, не содержащее явным образом независимого переменного

$$F(y, y', y'') \tag{2.17}$$

Делаем замену переменных

$$\frac{dy}{dx} = z,$$

но функция z уже зависит не от x, как в предыдущем случае, а от y ($y' = z(y)$).

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{dy'}{dx} = \frac{d(z(y))}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z'_y z$$

и тогда подставляя в (2.17) имеем уравнение первого порядка:

$$F(y, z, z') = 0. \tag{2.18}$$

Интегрируя его, получим

$$\varphi(y, z, C_1) = 0 \tag{2.19}$$

Подставляя $z = y'$ в (2.19) получим еще одно уравнение первого порядка

$$\varphi(y, y', C_1) = 0$$

Решая его, получим

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0 \tag{2.20}$$

(2.20) - общее решение (общий интеграл) для уравнения (2.17)

Пример 40.

Найти общее решение уравнения

$$yy'' = y^2y\prime + y\prime^2$$

Решение. Сделаем замену

$$y' = z(y)$$

,

$$y'' = z'_y z.$$

Тогда

$$yz'_y z = y^2 z + z^2$$

1).$yz \neq 0$ Тогда получим уравнение

$$z'_y = y + \frac{1}{y}z$$

или

$$z'_y - \frac{1}{y}z = y$$

- линейное уравнение первого порядка.

Решая однородное уравнение методом разделения переменных, получим

$$z = Cy$$

Неоднородное уравнение решаем методом вариации постоянной. Пусть

$$z = C(y)y$$

, тогда подставляя в уравнение, будем иметь

$$C'(y)y + C(y) - C(y) = y,$$

$$C(x) = y + C_1$$

Следовательно,

$$z = y^2 + C_1 y.$$

2) Если $yz = 0$, то $z = 0$.

Возвращаясь к замене, получим

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + C_1 y,$$

$$\int \frac{1}{y(y+C_1)}dy = \int dx,$$

$$\frac{1}{C_1}\int \frac{1}{y}dy - \frac{1}{C_1}\frac{1}{(y+C_1)}dy = x + \ln C_2 = \ln e^x + \ln C_2,$$

$$\frac{1}{C_1}\int \frac{1}{y}dy - \frac{1}{C_1}\frac{1}{(y+C_1)}dy = \ln e^x C_2,$$

$$\frac{y}{y+C_1} = (e^x C_2)^{C_1}$$

или

$$x = \frac{1}{C_1} \ln \mid \frac{y}{y + C_1} \mid + C_2.$$

Во втором случае имеем:

$$\frac{dy}{dx} = 0, \; y = C$$

Ответ: $y = C_3, x = \frac{1}{C_1} \ln \mid \frac{y}{y+C_1} \mid + C_2, \;\; C_1, C_2, C_3$ - произвольные константы.

тип 4. Однородные уравнения.

Пусть левая часть уравнения (2.10) есть однородная функция аргументов y, y', y'', т.е. выполняется

$$F(x, ky, ky', ky'') = k^m F(x, y, y', y'')$$

для любого k, здесь m - показатель однородности.

Заметим, что если $y_1(x)$ есть решение такого уравнения, то и $Cy_1(x)$ (C - произвольная постоянная, $C \neq 0$) есть также решение уравнения. Действительно, подставляя $Cy_1(x)$ в уравнение (2.10), получим тождество

$$F(x, Cy_1, Cy_1', Cy_1'') = C^m F(x, y_1, y_1', y_1'') = 0.$$

Введем новую функцию

$$u = \ln y$$

и в качестве новой переменной функцию

$$z = u'.$$

Заметим, что при такой замене

$$y = e^{\int z dx.}$$

Использование этой замены позволяет понизить порядок уравнения на единицу. Действительно, в этом случае

$$y' = z e^{\int z dx}, , , y'' = (z' + z^2) e^{\int z dx}.$$

Подставляя в уравнение (2.10), с учетом однородности функции F, получим

$$F(x,y,y',y'') = e^{m\int z dx} F(x,1,z,(z'+z^2)) = 0.$$

Учитывая, что $e^{m\int z dx} \neq 0$, получим уравнение первого порядка

$$F(x,1,z,(z'+z^2)) = 0. \qquad (2.21)$$

Если уравнение (2.21) удается решить, то выражение z известно, а значит, из соотношения $y = e^{\int z dx.}$ найдем решение исходного уравнения.

Пример 41.

Найти общее решение уравнения

$$x^2yy'' = (y - xy')^2$$

Решение. Проверим функцию

$$F(x,y,y',y'') = x^2yy'' - (y - xy')^2$$

на однородность

$$F(x,ky,ky',ky'') = x^2k^2yy'' - k^2(y - xy')^2$$

Следовательно, уравнение второго порядка однородности. Сделаем замену

$$y = e^{\int z dx}$$

, получим уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $z(x)$:

$$x^2 \cdot 1 \cdot (z' + z^2) - (1 - xz)^2 = 0$$

или

$$x^2z' - 1 + 2xz = 0$$

Решаем полученное линейное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$z' - \frac{2}{x}z = \frac{1}{x^2}.$$

Решением этого уравнения есть сумма общего решения однородного уравнения

$$z_0' = -\frac{2}{x}z_0, \quad z_0 = \frac{C}{x^2}$$

и частного решения неоднородного уравнения

$$z_1 = C(x)x^{-2},$$

где произвольная функция $C(x)$ удовлетворяет уравнению

$$C'(x) \cdot x^{-2} = \frac{1}{x^2}.$$

Следовательно,

$$C(x) = x$$

Таким образом,

$$z(x) = Cx^{-2} + \frac{1}{x}$$

Отсюда

$$y(x) = e^{\int z(x)dx} = e^{\int (Cx^{-2}+x^{-1})dx} = e^{-\frac{C}{x}+\ln x+\ln C_1} = e^{-\frac{C}{x}} \cdot x \cdot C_1.$$

Пример 42.

Найти общее решение уравнения

$$yy'' - {y'}^2 = 0$$

Решение.Данное уравнение можно отнести к типу 3 или к типу 4 (однородное относительно y, y', y''.) Решаем по типу 3, делаем замену

$$y'(x) = (z(y(x)),$$

тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z' \cdot z$$

Получим уравнение первой степени

$$yz'z - z^2 = 0$$

Уравнение с разделяющимися переменными

$$yz^2(\frac{z'}{z} - \frac{1}{y}) = 0$$

Решения частные:

$$y = 0, \;\; y = C$$

и общее

$$z = C_1 y$$

или

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y,$$
$$\ln y = C_1 x + C_2.$$

Следовательно, решение исходного уравнения имеет вид

$$y = e^{C_1 x + C_2}, \;\; y = 0.$$

Замечание. Второе частное решение $y = C$ вошло в общее при $C_1 = 0$. Решаем по типу 4.

$$z = u', \;\; u' = \ln y, \;\; y = e^{\int z(x)dx}.$$

$z(x)$ - неизвестная функция удовлетворяет уравнению

$$1(z' + z^2) - z^2 = 0, \;\; \Longrightarrow \;\; z' = 0.$$

Следовательно

$$z = C$$

или

$$y = e^{\int C dx} = e^{Cx + C_1}$$

Заметим, что при такой замене $y \neq 0$, следовательно $y = 0$ нужно в этом случае всегда проверять на решение. Для данного уравнения $y = 0$ есть также частное решение.

Тип 5. Уравнения однородные относительно x, y, dx, dy, d^2y

Запишем уравнение (2.10) в виде

$$\Phi(x, y, dx, dy, d^2y) = 0 \tag{2.22}$$

Функция Φ однородна (степени m) относительно всех своих аргументов, если имеет место тождество

$$\Phi(kx, ky, kdx, kdy, kd^2y) = k^m\Phi(x, y, dx, dy, d^2y) = 0,$$

т.е. вид уравнения не изменится, если x заменит на Cx, а y на Cy (C - постоянное).

Если ввести новые независимые переменных $t = \ln x$ и $u = \frac{y}{x}$, то

$$x = e^t,$$

$$y = u(t)e^t$$

и

$$dx = e^t dt,$$

$$dy = e^t(du + udt)$$

. Следовательно

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dt} + u;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}(\frac{du}{dt} + u) \cdot \frac{dt}{dx} = (\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt})e^{-t};$$

или

$$d^2y = e^t(d^2u + dudt).$$

Подставляя в (2.22) и учитывая однородность функции Φ относительно всех аргументов, получим

$$\Phi(1, u, du + udt, d^2u + dudt) = 0$$

- уравнение, в которое явно не входит независимое переменное t, т.е. свели к типу 3.

Пример 43.

Найти общее решение уравнения

$$x^4\frac{d^2y}{dx^2}-x^3(\frac{dy}{dx})^3+3x^2y(\frac{dy}{dx})^2-(3x^2y+2x^3)\frac{dy}{dx})+2x^2y+y^3=0.$$

Решение. Умножим на $(dx)^3$, чтобы получит уравнение вида (2.22) шестого порядка однородности относительно x, y, dx, dy, d^2y. Действительно,

$$\Phi(Cx, Cy, Cdx, Cdy, Cd^2y)=$$

$$=(Cx)^4\cdot Cdy^2\cdot Cdx-(Cx)^3\cdot(Cdy)^3+3(Cx)^2\cdot Cy\cdot(Cdy)^2\cdot Cdx-$$

$$-(3(Cx)^2\cdot Cy+2(Cx)^3)Cdy\cdot(Cdx)^2+2(Cx)^2Cy\cdot(Cdx)^3+(Cy)^3\cdot(Cdx)^3=$$

$$=C^6\cdot\Phi(x, y, dx, dy, d^2y).$$

Делаем замену

$$x=e^t,\ \ y=u(t)e^t.$$

Подставляя в уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(ue^t)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=(u'e^t+ue^t)\cdot\frac{\frac{1}{x}dx}{dx}=u'+u,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(u'+u)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=(u''+u')e^{-t}$$

получим

$$e^{4t}\cdot e^{-t}(u'+u)-e^{3t}\cdot(u'+u)^3+3e^{2t}\cdot e^t\cdot(u'+u)^2-$$

$$-(3e^2t\cdot e^t\cdot u+2e^{3t})(u'+u)+2e^{2t}\cdot e^t\cdot u+u^3\cdot e^{3t}=0$$

Сокращая e^{3t} и раскрывая скобки:

$$u''-u'+u'^3=0$$

Уравнение не содержит ни t, ни u. Можно решать по типу 2 или 3. Будем решать по типу 3.

$$u'=z(t)$$

$$zz'-z-z^3=0.$$

Решением будет $z = 0$ и уравнение с разделяющими переменными

$$\frac{dz}{du} = 1 + z^2,$$

$$\text{arctg} z = u + C,$$

$$z = tg(u + C).$$

Следовательно,

$$\frac{du}{dt} = tg(u + C)$$

или

$$dt = \frac{du}{tg(u + C)}, \ \ln \sin(u + C) = t + C_1$$

$$\sin(u + C) = C_2 e^t$$

Переходя к начальным переменным

$$\sin(\frac{y}{x} + C) = C_2 x$$

или

$$y = x \cdot \arcsin C_2 x - Cx$$

Решение $z = 0, \quad u = C_3$ или $y = C_3 x$ входит в общее решение при $C_2 = 0$.

Ответ: $y = x \cdot \arcsin C_2 x - Cx$.

Задачи для самостоятельного решения

1. $yy''' + 3y''y' = 0$
   Ответ: $C_2 y^2 - C_1 = C_2^2 (x + C_3)^2; y = C$
2. $y'' = xy' + y + 1 = 0$
   Ответ: $y = e^{\frac{x^2}{2}} (C_1 \int e^{\frac{x^2}{2}} dx + C_2) - 1$.
3. $xyy'' - xy'^2 = yy'$
   Ответ:$y = C_2 e^{Cx2}$
4. $(x^2 + 1)(y'^2 - yy'') = xyy'$
   Ответ:$y = C_2 (x + \sqrt{x2 + 1})_1^C$
5. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{1-y} \frac{dy}{dx}^2 = 0$.

Ответ: $y = \frac{x+C_1}{x+C_2}$

6. $y\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}^2$.

   Ответ:$y = C_1e^{C_2x}$.

7. $2y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}^2 = 0$.

   Ответ: $4y^3 = 9C_1(x - C_2)^2$

8. $y\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}^2 = \frac{1}{1+x} \cdot y\frac{dy}{dx}$.

   Ответ: $4y = e^{C_1(x+\frac{x^2}{2})+C_2}$.

9. $y\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0$. Ответ: $y = C_1e^{C_3x} + C_2e^{-C_3x}$.

10. $x^4\frac{d^2y}{dx^2} + (x\frac{dy}{dx} - y)^3 = 0$.

    Ответ: $y = x(C_1 = \arcsin\frac{C_2}{x})$.

11. $x^2y\frac{d^2y}{dx^2} - 2x^2(\frac{dy}{dx})^2 + xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$.

    Ответ: $y = \frac{C_1x}{C_2+x^2}$.

12. $y^3\frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0$.

    Ответ: $x = \frac{1}{C_1}\sqrt{C_1y^2 + 1} + C_2$

13. $a^2\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$

    Ответ: $y = C_1e^{\frac{x}{a}} + C_2e^{-\frac{x}{a}}$

14. $a^2\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

    Ответ: $y = C_1\sin\frac{x}{a} + C_2\cos -\frac{x}{a}$

15. $\sin^3 x\frac{d^3y}{dx^3} = 2\cos x$.

    Ответ: $y = \ln\sin x + C_1x^2 + C_3$.

16. $\frac{d^3y}{dx^3} - a\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

    Ответ: $y = C_1xe^{ax} + C_2x + C_3$.

17. $\frac{d^3y}{dx^3} - (\frac{d^2y}{dx^2})^3 = 0$

    Ответ: $\begin{cases} x = C_1 - \frac{1}{2}(C_2 - p)^2 \\ y = C_3 + \frac{1}{2}C_2p^2 - \frac{1}{3}p^3. \end{cases}$

18. $(\frac{d^3y}{dx^3})^2 + (\frac{d^2y}{dx^2})^2 = 1$.

    Ответ: $C_1 + C_2x - \sin(x - C_3)$.

19. $2y\frac{d^2y}{dx^2}+(\frac{dy}{dx})^2+(\frac{dy}{dx})^4=0$

Ответ: $\begin{cases} x=C_2+\frac{2C_1}{3p^3} \\ y=\frac{C_1(1+p^2)}{p^2} \end{cases}$

2.3 Линейные уравнения с переменными коэффициентами.

2.3.1 Условия линейной зависимости и независимости функций.

Однородное уравнение n -го порядка с переменными коэффициентами имеет вид:

$$L(y)=y^{(n)}+h_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+h_{n-1}(x)y'+h_n(x)y=0, \tag{2.23}$$

где функции $h_i(x)$ непрерывны на $I=(a,b), i=1,2,\ldots,n$. Приведем основные свойства решений этого уравнения.

1.Если $y_1,y_2,\ldots,y_m$ - решения уравнения (2.23), то и любая их линейная комбинация

$$\sum_{i=1}^{n}C_iy_i,,$$

где $C_i=const(i=1,2,\ldots,m)$, является решением уравнения (2.23)

2. Если линейное однородное уравнение (2.23) с действительными коэффициентами имеет комплексное решение $y=u+iv$, то функции

$$u=Re\,y,\quad v=Im\,y$$

в отдельности являются решениями уравнения (2.23).

Функции $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_m(x)$ называются *линейно зависимыми* на множестве I, если существуют постоянные $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ такие, что

$$\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+\cdots+\alpha_m\varphi_m(x)=0,\ x\in I, \tag{2.24}$$

причем

$$\sum_{i=1}^{m}{\alpha_i}^2>0.$$

Если же тождество (2.24) имеет место лишь при

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots \alpha_m = 0,$$

то функции

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$$

называются *линейно независимыми* на I.

Любая система из n линейно независимых решений

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$$

линейного однородного уравнения (2.23) называется **фундаментальной системой** решений уравнения (2.23). Фундаментальная система решений

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$$

называется **нормальной** (при $x = x_0$,) если

$$y_1(x_0) = 1, y_1'(x_0) = 0, \dots, y_1^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

$$y_2(x_0) = 0, y_2'(x_0) = 1, \dots, y_2^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$y_n(x_0) = 1, y_n'(x_0) = 0, \dots, y_n^{(n-1)}(x_0) = 1,$$

где $x_0 \in I$.

Общее решение линейного уравнения (2.23) имеет вид

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ - произвольные постоянные, а

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$$

- фундаментальная система решений уравнения (2.23).

Если

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$$

- нормальная фундаментальная система решений уравнения (2.23), то решение задачи Коши для уравнения (2.23) с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

имеет вид

$$y = y_0 y_1 + y'_0 y_2(x) + \ldots + y_0^{(n-1)} y_n(x)$$

3. Для того чтобы функции

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x),$$

непрерывные вместе со своими производными до $(m-1)$ порядка включительно на I, были линейно независимы на I, достаточно, чтобы определитель Вронского (вронскиан)

$$W(x) \equiv W[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)]$$

системы функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$$

был отличен от нуля хотя бы в одной точке x интервала I, т.е.

$$W[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)] \equiv W(x) \equiv$$

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x), & \varphi_2(x), & \ldots, & \varphi_m(x) \\ \varphi'_1(x), & \varphi'_2(x), & \ldots, & \varphi'_m(x) \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \varphi_1^{(m-1)}(x), & \varphi_2^{(m-1)}(x), & \ldots, & \varphi_m^{(m-1))}(x) \end{vmatrix} \neq 0, \quad x \in I.$$

4. Если функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$, непрерывные вместе со своими производными до $m-1$ - го порядка включительно на $I = (a, b)$, линейно зависимы на I, то

$$W(x) \equiv W[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)] \equiv 0, x \in I.$$

5. Для того чтобы решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейного однородного уравне-

ния n - го порядка были линейно независимы на $I=(a,b)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$W(x)\equiv W[y_1,y_2,\dots,y_n]\neq 0, \forall x\in I.$$

6. Для вронскиана n решений линейного однородного уравнения (2.23) имеет место формула Остроградского - Лиувилля

$$W(x)\equiv W[y_1,y_2,\dots,y_n]=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}h_1(s)ds}.$$

Из формулы Остроградского = Лиувилля вытекает следующее условие.
7. Для того, чтобы решения

$$y_1,y_2,\dots,y_n$$

линейного однородного уравнения n -го порядка были линейно независимы на $I=(a,b)$, необходимо и достаточно, чтобы вронскиан

$$W(x)=W[y_1,y_2,\dots,y_n]$$

не обращался в нуль хотя бы в одной точке $x_0\in I$.

Пример 44.

Пусть функции

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots,\varphi_m(x)$$

определены и $(m-1)$ непрерывно дифференцируемы на $I=(a,b)$. Доказать, что, если

$$W(x)=W[\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots,\varphi_m(x)]\neq 0$$

на I, то функции

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots,\varphi_m(x)$$

линейно независимы на I.

Решение. Предположив, что функции

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$$

линейно зависимы на I, получим, что $W(x) \equiv 0$, а это невозможно.

Пример 45.

Показать, что: 1) если

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \neq const$$

на $I = (a, b)$, то функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ линейно независимы на I;
2) если

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = const$$

на $I = (a, b)$, то функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ линейно зависимы на I.

Решение. 1) Предположим, что

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \neq const$$

на $I = (a, b)$, но функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ линейно зависимы на I. Тогда на I имеет место тождество

$$\alpha_1 \cdot \varphi_1(x) + \alpha_2 \cdot \varphi_2(x) \equiv 0, \tag{2.25}$$

причем

$$\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 > 0.$$

Пусть, например, $\alpha_1 \neq 0$ на I, тогда из тождества (2.25), учитывая, что $\varphi_2(x) \neq 0$ на I, имеем

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \equiv const.$$

Это противоречит сделанному предположению.

2)Предположим, что

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = const = C$$

на I. Тогда на I имеет место тождество

$$\varphi_1(x) - C\varphi_2(x) \equiv 0,$$

причем ${\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2 = 1^2 + (-C)^2 > 0$. Поэтому функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ линейно зависимы на I.

Пример 46.

1) Найти определитель Вронского систем произвольных функций:

а) $e^x,\ \ xe^x,\ \ x^2e^x;\quad I = (-\infty, +\infty)$;
б) $10,\ \ \arcsin x,\ \ \arccos x;\quad I = (-1, 1)$
в) $5,\ \cos^2 x,\ \ \sin^2 x;\quad I = (-\infty, +\infty)$;
г)$x^2, x \mid x \mid;\ \ I = (-\infty, +\infty)$.
2) Какие выводы относительно линейной зависимости данных функций на I можно сделать по их определителю Вронского.

Решение. Находим а)

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & (x+1)e^x & (x+2x)e^x \\ e^x & (x+2)e^x & (x^2+4x+2)e^x \end{vmatrix} =$$

$$= e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & (x+1) & (x+2x) \\ 1 & (x+2) & (x^2+4x+2) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 2 & 4x+2 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{3x}(4x + 2 - 4x) = 2e^{3x};$$

б)

$$W(x)=\begin{vmatrix} 10 & \arcsin x & \arccos x \\ 0 & (1-x^2)^{-1/2} & -(1-x^2)^{-1/2} \\ 0 & x(1-x^2)^{-3/2} & -x(1-x^2)^{-3/2} \end{vmatrix}=0$$

в)

$$W(x)=\begin{vmatrix} 5 & \cos^2 x & \sin^2 x \\ 0 & -\sin 2x & \sin 2x \\ 0 & -2\cos 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}=0$$

г)

$$W(x)=\begin{vmatrix} x^2 & x\mid x\mid \\ 2x & 2\mid x\mid \end{vmatrix}=0$$

2,а) Поскольку $W(x)=2e^{3x}\neq 0$ на I, данные функции линейно независимы на I. В случаях б) -г) вывод о линейной зависимости данных функций по их определителю Вронского сделать нельзя.

б) Данные функции линейно зависимы на I, так как на I имеет место тождество

$$\alpha_1\cdot 10+\alpha_2\cdot\arcsin x-\alpha_3\cdot\arccos x\equiv 0$$

, где $\alpha_1=-\pi/20$, $\alpha_2=\alpha_3=1$.

в) Данные функции линейно зависимы на I, так как на I имеет место тождество

$$\alpha_1\cdot 5+\alpha_2\cdot\cos^2 x-\alpha_3\cdot\sin^2 x\equiv 0$$

, где $\alpha_1=-1/5$, $\alpha_2=\alpha_3=1$.

г) Данные функции линейно независимы на I, так как тождество $\alpha_1\cdot x^2+\alpha_2\cdot x\mid x\mid\equiv 0\,(x\in I)$, выполняется только при $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. Действительно, при $x=1$ из тождества получаем

$$\alpha_1+\alpha_2=0;$$

при $x = -1$ из тождества имеем

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0.$$

Система имеет единственное решение

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Пример 47.

Показать, что функции $y_1 = x, y_2 = x^2, y_3 = e^x$ образуют фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного уравнения третьего порядка. Составить это уравнение.

Решение. Найдем $W[y_1, y_2, y_3]$:

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} x & x^2 & e^x \\ 1 & 2x & e^x \\ 0 & 2 & e^x \end{vmatrix} =$$

$$= -2\begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} + e^x \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} =$$

$$= -2(xe^x - e^x) + e^x(2x^2 - x^2)$$
$$= e^x\left[(x-1)^2 + 1\right] \neq 0, \qquad \forall x \in \Re$$

Следовательно, данные функции образуют фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного уравнения третьего порядка:

$$y''' + h_1(x)y'' + h_2(x)y' + h_3(x)y = 0. \tag{2.26}$$

Найдем $h_1(x), h_2(x)$ и $h_3(x)$.

Подставив в (2.26) последовательно $y_1 = x, y_2 = x^2, y_3 = e^x$, для определения $h_1(x), h_2(x)$ и $h_3(x)$ получим систему линейных неоднородных уравнений:

$$0 \cdot h_1(x) + 1 \cdot h_2(x) + x \cdot h_3(x) = 0$$

$$2 \cdot h_1(x) + 2x \cdot h_2(x) + x^2 \cdot h_3(x) = 0$$

$$e^x \cdot h_1(x) + e^x \cdot h_2(x) + e^x \cdot h_3(x) = -e^x.$$

Эту систему решаем по правилу Крамера:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 2 & 2x & x^2 \\ e^x & e^x & e^x \end{vmatrix} = W[y_1, y_2, y_3] = -e^x(x^2 - 2x + 2),$$

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & 2x & x^2 \\ -e^x & e^x & e^x \end{vmatrix} = -e^x(x^2 - 2x) = x^2 e^x,$$

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & x \\ 2 & 0x & x^2 \\ e^x & -e^x & e^x \end{vmatrix} = x(-e^x) = -2xe^x,$$

$$\triangle_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2x & 0 \\ e^x & e^x & -e^x \end{vmatrix} = -e^x(-2) = 2e^x,$$

$$h_1(x) = \frac{\triangle_1}{\triangle} = -\frac{x^2}{x^2 - 2x + 2},$$

$$h_2(x) = \frac{\triangle_2}{\triangle} = -\frac{2x}{x^2 - 2x + 2},$$

$$h_3(x) = \frac{\triangle_3}{\triangle} = -\frac{2}{x^2 - 2x + 2}.$$

Искомое уравнение

$$(x^2 - 2x + 2)y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0.$$

Пример 48.

Построить линейное однородное уравнение, для которого функции

$$y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}, y_3 = \sin x, y_4 = \cos x$$

образуют фундаментальную систему решений.

Решение. Поскольку

$$W[y_1, y_2, y_3, y_4] = 8 \neq 0,$$

в силу результата примера 46 искомое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \sin x & \cos x & y \\ e^x & -e^{-x} & \cos x & -\sin x & y' \\ e^x & e^{-x} & -\sin x & -\cos x & y'' \\ e^x & -e^{-x} & -\cos x & \sin x & y''' \\ e^x & e^{-x} & \sin x & \cos x & y^{IV} \end{vmatrix} = 0$$

$$y^{IV} 8 - y''' \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \sin x & \cos x \\ e^x & -e^{-x} & \cos x & -\sin x \\ e^x & e^{-x} & -\sin x & -\cos x \\ e^x & e^{-x} & \sin x & \cos x \end{vmatrix} +$$

$$+y'' \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \sin x & \cos x \\ e^x & -e^{-x} & \cos x & -\sin x \\ e^x & -e^{-x} & -\cos x & \sin x \\ e^x & e^{-x} & \sin x & \cos x \end{vmatrix} -$$

$$-y' \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \sin x & \cos x \\ e^x & e^{-x} & -\sin x & -\cos x \\ e^x & -e^{-x} & -\cos x & \sin x \\ e^x & e^{-x} & \sin x & \cos x \end{vmatrix}$$

$$+y\begin{vmatrix} e^x & -e^{-x} & \cos x & -\sin x \\ e^x & e^{-x} & -\sin x & -\cos x \\ e^x & -e^{-x} & -\cos x & \sin x \\ e^x & e^{-x} & \sin x & \cos x \end{vmatrix}+$$

или

$$8y^{IV} - 8y = 0,\ y^{IV} - y = 0.$$

2.3.2 Методы решение дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

В отличие от уравнений с постоянными коэффициентами общего метода нахождения решения уравнения (2.23) не существует.Однако известны некоторые специальные методы, позволяющие в ряде случаев упростить заданное уравнение и получить окончательное решение. Одним из таких методов является метод замены переменных, который позволяет в ряде случаев свести задачу решения уравнения с переменными коэффициентами к задаче решения уравнения с постоянными коэффициентами. В частности этот метод применим для решения **уравнения Эйлера**.
Линейное уравнение вида

$$x^n y^n + a_1 x^{n-1} y^{n-1} + \ldots a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \tag{2.27}$$

где все a_i - постоянные, называется уравнением Эйлера. Это уравнение сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами заменой независимого переменного: $x = e^t$ при $x > 0$ (или $x = -e^t$ при $x < 0$). Для полученного уравнения с постоянными коэффициентами характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2) \cdot \ldots \cdot (\lambda - n + 1) + \ldots + a_{n-2} \cdot \lambda \cdot (\lambda - 1) + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

При составлении этого уравнения каждое произведение $x^k y^{(k)}$ в (2.27) заменяется на произведение k убывающих на 1 чисел

$$\lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2) \cdot \ldots \cdot (\lambda - k + 1).$$

Замечание 1. Уравнение вида

$$(ax+b)^n y^n + a_1(ax+b)^{n-1}y^{n-1} + \dots a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = f(x)$$

так же называется уравнением Эйлера и сводиться к линейному уравнению с постоянными коэффициентами заменой

$$ax+b=e^t$$

Замечание 2. Частные решения уравнения Эйлера можно сразу искать в виде

$$y=x^{\lambda}.$$

Пример 49.

Решить уравнение

$$x^2y''-4xy'+6y=0.$$

Решение. Первый способ. Сразу ищем характеристическое уравнение и решаем его

$$\lambda(\lambda-1)-4\lambda+6=0$$

$$\lambda^2-5\lambda+6=0,$$

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=3.$$

Следовательно, общим решением преобразованного уравнения будет функция

$$y=C_1e^2t+C_2e^3t$$

Так как

$$x=e^t$$

, то

$$y=C_1x^2+C_2x^3.$$

Второй способ. Будем искать решение данного уравнения в виде

$$y=x^{\lambda},$$

где λ - неизвестное число. Подставив

$$y = x^{\lambda}$$

в уравнение, получаем

$$x^2\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} - 4x\lambda x^{\lambda-1} + 6x^{\lambda} = 0$$

или

$$x^{\lambda}\left[\lambda(\lambda-1) - 4\lambda + 6\right] = 0,$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3.$$

Им соответствует фундаментальная система решений

$$y_1 = x^2, y_2 = x^3,$$

и общее решение по прежнему будет иметь вид

$$C_1x^2 + C_2x^3$$

Пример 50.

Решить уравнение

$$x^2y'' + xy' + y = 0$$

Решение. Запишем характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\lambda(\lambda - 1\lambda) + \lambda + 1 = 0,$$

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \imath$$

Общим решением преобразованного уравнения будет

$$y = C_1\sin t + C_2\sin\cos t$$

Учитывая , что

$$x = e^t$$

и, переходя к переменной x , получим общее решение исходного уравнения

$$y = C_1 \sin \ln x + C_2 \sin \cos \ln x.$$

Пример 51.

Решить уравнение

$$(x-2)^2 \cdot y'' - 3(x-2)y' + 4y = x.$$

Решение. Сделаем замену независимой переменной по формуле

$$x - 2 = e^t$$

, тогда

$$y''_{t^2} - 4y'_t + 4y = e^t + 2$$

Характеристическое уравнение имеет корни

$$\lambda_{1,2} = 2$$

, следовательно, общее решение однородного уравнения

$$y = e^2 t(C_1 + C_2 t) = (x-2)^2 (C_1 + C_2 \ln |x-2|)$$

Правая часть неоднородного уравнения равна

$$e^t + 2,$$

поэтому следует искать частное решение по принципу суперпозиции в виде

$$Z = Ae^t + B.$$

Подставив в уравнение, получим

$$A = 1, B = 0,5$$

и

$$Z = e^t + 0,5 = x - 2 + 0,5 = x - 1,5.$$

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения

$$y = (x-2)^2(C_1 + C_2 \ln|x-2|) + z - 1,5$$

<u>Пример 52</u>.

Составить линейное однородное дифференциальное уравнение(возможно меньшего порядка), имеющее частные решения

$$y_1 = x^4,\ y_1 = x^4 \ln x$$

Решение. Очевидно, функции y_1 и y_2 линейно независимые, следовательно, они могут быть фундаментальной системой решений линейного однородного уравнения второго порядка, которое может быть получено по формуле

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y''(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Заметим, что такие частные решения имеет уравнение Эйлера. Составим это уравнение. Корни характеристического уравнения кратные: $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, следовательно, само уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$

Этому уравнению соответствует промежуточное уравнение

$$y''(t) - 8y'(t) + 16y(t) = 0,\ \ t = \ln x,\ \ x > 0.$$

Переходя к новой переменной x, получим уравнение Эйлера

$$x^2y'' - 8xy' + 16y = 0.$$

Если известно частное решение $y = y_1(x_)$ линейного однородного уравнения, соответствующего уравнения (2.23), то его порядок можно понизить на единицу, сохраняя линейность уравнения. Для этого в уравнении сделаем подстановку $y = y_1 \cdot z$, где z - новая неизвестная функция и затем понизим порядок заменой $z' = u$.

Чтобы найти общее решение однородного уравнения второго порядка, у которого известно одно частное решение y_1, можно понизить порядок уравнения указанным способом. Однако удобнее воспользоваться **формулой Остроградского - Лиувилля**:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int h_1(x)dx}, \ y_2 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int h_1(x)dx}}{y_1^2} dt$$

<u>**Пример 53**.</u>

Решить уравнение

$$(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0.$$

Решение. Общего метода для отыскания частного решения линейного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами не существует. В некоторых случаях решение удается найти **путем подбора.**

Ищем частное решение данного уравнения в виде многочлена

$$y = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

Коэффициент при старшем члене можно считать равным единице, так как решение линейного однородного уравнения можно умножить на произвольное постоянное.Подставляя многочлен в исходное уравнения и требуя, чтобы коэффициент при старшей степени обратился в нуль, получим $4n - 4 = 0$, откуда $n = 1$.

Если бы мы не получили ни одного целого положительного корня, то не существовало бы решения, имеющего вид многочлена. Итак, решение однородного уравнения может иметь вид $x + a$. Подставляя его в уравнение, получим $a = 0$. Теперь можно понизить порядок данного уравнения на единицу подстановкой $y = xz,\ z' = u$, или воспользоваться формулой формулой Остроградского - Лиувилля

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int h_1(x)dx} = y^{\int \frac{4x}{2x+1}dx} = C(2x+1)e^{-2x}$$

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = C(2x+1)e^{-2x}$$

Так как функция y_1 известна, то мы получили линейное уравнение первого порядка относительно y_2. Проще всего оно решается следующим способом. Разделив обе части уравнения на y_1^2, получим слева производную от дроби $\frac{y_2}{y_1}$:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{C(2x+1)e^{-2x}}{y_1^2}$$

Так как $y_1 = x$, то

$$\frac{y_2}{y_1} = C\int \frac{C(2x+1)e^{-2x}}{x^2} = -C\frac{e^{-2x}}{x};$$

$$y_2 = -Ce^{-2x}$$

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 x + C_2 e^{-2x}$$

Замечание. Второе частное решение можно было бы искать в виде показательной функции $y_2 = e^{ax}$.

Пример 54.

Решить уравнение

$$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0.$$

Решение. Ищем частное решение в виде показательной функции $y_1 = e^{ax}$. Подставляя ее в исходное уравнение, получим $a = 1$. Как и в предыдущем примере, находим

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{Ce^{\int \frac{2x+1}{x}dx}}{e^{2x}} = C \cdot x$$

$$y_2 = C \cdot \int x dx = C \cdot \frac{x^2}{2} \cdot e^x$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 x^2 E^x = (C_1 + C_2 x^2) e^x.$$

3 Краевые задачи.

Для отыскания решения краевой задачи

$$p_0(x) y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = f(x), \ x_0 \leq x \leq x_1, \tag{2.28}$$

$$\alpha y'(x_0) + \beta y(x_0) = 0, \ \gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = 0 \tag{2.29}$$

надо подставить общее решение уравнения (2.28) в краевые условия (2.29) и из этих условий определить , если это возможно, значения произвольных постоянных, входящих в формулу общего решения. В отличие от задачи с начальными условиями (задача Коши), краевая задача не всегда разрешима, а если разрешима, то не обязательно единственным образом.

Пример 55.

Найти решение уравнения

$$y'' - y = 2x,$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$y(0) = 0, \quad y(1) = -1.$$

Решение. Подставляя общее решение

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2x$$

поочередно в краевые условия, получим

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 e^{-1} - 2 = -1 \end{cases}$$

Откуда

$$C_1 = (e - e^{-1})^{-1}, \ \ C_2 = -(e - e^{-1})^{-1},$$

так что искомым решением будет функция

$$y = \frac{shx}{sh1} - 2x$$

П**Пример 56**.

Решить краевую задачу

$$y'' + y' = 1$$

$$y'(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Решение. Общее решение данного уравнения

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + x,$$

отсюда

$$y' = -C_2 e^{-x} + 1$$

учитывая краевые условия, получим для нахождения значений постоянных C_1 и C_2 линейную систему

$$\begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 + C_2 e^{-1} = 0 \end{cases}$$

Откуда

$$C_2 = 1, \ C_1 = -e^{-1}.$$

Поэтому искомым решением будет функция

$$y = x + e^{-x} - e^{-1}.$$

Пример 57.

Решить краевую задачу

$$x^2y'' - 2y = 0$$

$$y(1) = 1, \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} y'(x) = 0.$$

Решение. Общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = \frac{C_1}{x} + C_2x^2$$

Выберем C_1 и C_2 так, чтобы удовлетворялись краевые условия. Из условия

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} y'(x) = 0$$

следует, что

$$C_2 = 0,$$

а из условия

$$y(1) = 1$$

находим, что

$$C_1 = 1.$$

Таким образом, указанная краевая задача имеет решение

$$y = \frac{1}{x.}$$

3.1 Функция Грина

В случае, если общее решение не удовлетворяет краевым условиям, строим решение, используя функцию Грина [1].

Функцией Грина краевой задачи (2.28), (2.29) называется функция $G(x, s)$ при $x_0 \le x \le x_1,\ x_0 \le s \le x_1$, и при каждом фиксированном $s \in (x_0; x-1)$ обладающая свойствами: 1) при $x \ne s$ она удовлетворяет уравнению

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0; \tag{2.30}$$

2) при $x = x_0$ и $x = x_1$ она удовлетворяет краевым условиям (2.29);

3) при $x = s$ она непрерывна по x, а ее производная по x терпит разрыв

первого рода со скачком , равный $\frac{1}{p_0(s)}$ т.е.

$$G(s+0,s) = G(s-0,s), \;\; G'_x \mid_{x=s+0} = G'_x \mid_{x=s-0} + \frac{1}{p_0(s)}. \qquad (2.31)$$

Чтобы найти функцию Грина краевой задачи (2.28), (2.29), надо найти два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ (отличные от $y(x) \equiv 0$) уравнения (2.30), удовлетворяющие соответственно первому и второму из краевых условий (2.29). Если $y_1(x)$ не удовлетворяет сразу обеим краевым условиям, то функция Грина существует и ее можно искать в виде

$$G(x,s) = \begin{cases} \varphi(s)y_1(x) & x_0 \le x \le s \\ \psi(s)y_2(x) & s \le x \le x_1 \end{cases}, \qquad (2.32)$$

где $\varphi(s), \psi(s)$ подбираются так, чтобы функция (2.32) удовлетворяла условиям (2.31), т.е. чтобы

$$\psi(s)y_2(x) = \varphi(s)y_1(x), \;\; \text{при} x = s;$$

$$\psi(s)y_2(x) - \varphi(s)y_1(x) = \frac{1}{p_0(s)}, \;\; \text{при} x = s.$$

Если найдена функция Грина $G(x,s)$, то решение краевой задачи (2.28), (2.29) выражается формулой

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x,s)f(s)ds.$$

Пример 58.

Построить функцию Грина для краевой задачи

$$y'' + y = f(x)$$

$$y(0) = y(\pi), \;\; y\prime(0) = y\prime(\pi).$$

Решение. Рассмотрим однородное уравнение

$$y'' + y = 0$$

. Пусть $y_1(x)$ -общее решение уравнения, удовлетворяющее первому краевому условию:

$$y_1 = C_1 \sin x + C_2 \cos x,$$

$y_2(x)$ -общее решение уравнения, удовлетворяющее второму краевому условию:

$$y_2 = C_3 \sin x + C_4 \cos x.$$

Из краевых условий имеем

$$C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = C_3 \sin \pi + C_4 \cos \pi$$

$$C_1 \cos 0 - C_2 \sin 0 = C_3 \cos \pi - C_4 \sin \pi$$

Из системы получаем

$$C_2 = -C_4, \quad C_1 = -C_3. \tag{2.33}$$

или, взяв $C_3 = C_4 = -1$, получим

$$y_1 = \sin x + \cos x,$$

$$y_2 = -\sin x + \cos x.$$

Из непрерывности $G(x, s)$ при $x = s$, а также скачка производной G'_x при $x = s$ следуют соотношения

$$\begin{cases} \varphi(s)(\sin s + \cos s) = -\psi(s)(\sin s + \cos s) \\ -\psi(s)(\cos s - \sin s) - \varphi(s)(\cos s - \sin s) = 1 \end{cases} \tag{2.34}$$

Из (2.33) и (2.34) находим

$$\varphi(s) = -\frac{1}{2}\cos s,$$

$$\psi(s) = \frac{1}{2}\sin s.$$

Таким образом имеем

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(s - x), & 0 \le x \le s \\ \frac{1}{2}\sin(x - s), & s \le x \le \pi \end{cases}$$

или

$$G(x,s) = \frac{1}{2}\sin|x-s|, \qquad 0 \le x \le \pi.$$

Пример 59.

При каких a существует функция Грина краевой задачи

$$y'' + ay = f(x),$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

Решение. Пусть $a \neq 0$. В этом случае функция Грина имеет вид

$$G(x,s) = \begin{cases} C_1 e^{\sqrt{-a}x} + C_2 e^{-\sqrt{-a}x}, & 0 \le x < s \\ C_3 e^{\sqrt{-a}x} + C_4 e^{-\sqrt{-a}x}, & s < x \le 1. \end{cases}$$

Из краевых условий и свойств функции Грина следует система уравнений относительно $C_i, \;\; i = 1,2,3,4$

$$C_1 + C_2 = 0,$$

$$C_3 e^{\sqrt{-a}} + C_4 e^{-\sqrt{-a}} = 0,$$

$$C_1 e^{\sqrt{-a}s} + C_2 e^{-\sqrt{-a}s} = C_3 e^{\sqrt{-a}s} + C_4 e^{-\sqrt{-a}s},$$

$$\sqrt{-a}(C_3 e^{\sqrt{-a}s} - C_4 e^{-\sqrt{-a}s} - C_1 e^{\sqrt{-a}s} + C_2 e^{-\sqrt{-a}s}) = 1.$$

Полученная система уравнений неоднородная, поэтому для существования ее решения необходимо и достаточно, чтобы для определителя системы выполнялось условие

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\sqrt{-a}} & e^{\sqrt{-a}} \\ e^{\sqrt{-a}s} & e^{-\sqrt{-a}s} & -e^{\sqrt{-a}s} & -e^{-\sqrt{-a}s} \\ -e^{\sqrt{-a}s} & e^{-\sqrt{-a}s} & e^{\sqrt{-a}s} & -e^{-\sqrt{-a}s} \end{vmatrix} \neq 0, \quad 0 < s < 1$$

или

$$\mathrm{sh}\sqrt{-a} \neq 0.$$

Очевидно, что если $a < 0$, то последнее условие выполняется. Если $a > 0$, то в силу равенства

$$\mathrm{sh}\imath\sqrt{-a} = \imath\sin\sqrt{a}$$

определитель системы не равен нулю при условии

$$\sin\sqrt{a} \neq 0.$$

Следовательно,

$$\sqrt{a} \neq k\pi \ \ (k \in Z),$$

или

$$a \neq k^2\pi^2.$$

Пусть $a = 0$. Тогда

$$G(x,s) = \begin{cases} C_1x + C_2 & 0 \leq x < s \\ C_3x + C_4, & s < x \leq 1. \end{cases}$$

Относительно постоянных $C_i, \ (i = 1,2,3,4)$ имеем систему уравнений

$$C_2 = 0, \qquad C_3 + C_4 = 0,$$

$$C_1s = C_3s + C_4 \qquad C_3 - C_1 = 1.$$

из которых находим

$$C_1 = s - 1, \quad C_3 = s, \quad C_4 = -s.$$

Следовательно,

$$G(x,s) = \begin{cases} (s-1)x & 0 \leq x < s \\ s(x-1), & s < x \leq 1. \end{cases}$$

Таким образом, если $a \neq k^2\pi^2, \ (k \in N)$, то функция Грина данной задачи существует и единственна.

3.2 Задачи на собственные значения.

Однородная краевая задача ($f(x) = 0$) всегда имеет тривиальное решение $y \equiv 0$. Однако в прикладных исследованиях часто для однородной задачи представляют интерес решения $y \neq 0$.. В этом случае в дифференциальное уравнение или краевые условия вводят параметр, изменяя который можно добиться, чтобы при некоторых его значениях однородная краевая задача помимо тривиального имела решение, отличное от тождественно нулевого. Эти значения параметра называют **собственными значениями**, а соответствующие им решения - **собственными функциями**. Нахождение собственных значений и собственных функций составляет содержание так называемой **задачи на собственные значения** или **задачи Штурма - Лиувилля**.Например, многие задачи квантовой механики, физики в частных переменных методом разделения переменных сводятся к задачами на собственные значения.

Рассмотрим общую схему нахождения собственных функция и собственных значений в одномерном случае следующей задачи Штурма-Лиувилля :

$$Ly + \lambda\rho y \equiv \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dy}{dx}\right) - qy + \lambda\rho y = 0, \;\; 0 < x < \ell \tag{2.35}$$

$$P_1(y) \equiv \alpha_1\frac{dy}{dx} - \beta_1 y|_{x=0} = 0, \;\; |\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0, \tag{2.36}$$

$$P_2(y) \equiv \alpha_2\frac{dy}{dx} - \beta_2 y|_{x=\ell} = 0, \;\; |\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0, \tag{2.37}$$

Обозначим через

$$\{y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda)\}$$

фундаментальную систему решений уравнения (2.35). Фундаментальные решения y_1, y_2 зависят от λ как от параметра. Общее решение уравнения (2.35) можно записать в виде

$$y(x) = C_1 y_1(x,\lambda) + C_2 y_2(x,\lambda) \tag{2.38}$$

Подставляя (2.38) в граничные условия (2.36), (2.37), получим

$$C_1 \{\alpha_1 y_1'(0,\lambda) - \beta_1 y_1(0,\lambda)\} + C_2 \{\alpha_1 y_2'(0,\lambda) - \beta_1 y_2(0,\lambda)\} = 0,$$

$$C_1 \{\alpha_2 y_1'(\ell,\lambda) + \beta_2 y_1(\ell,\lambda)\} + C_2 \{\alpha_2 y_2'(\ell,\lambda) + \beta_2 y_2(\ell,\lambda)\} = 0 \qquad (2.39)$$

Соотношения (2.39) представляют собой однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2. Эта система имеет ненулевое решение только в том случа, когда ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 y_1'(0,\lambda) - \beta_1 y_1(0,\lambda) & \alpha_1 y_2'(0,\lambda) - \beta_1 y_2(0,\lambda) \\ \alpha_2 y_1'(\ell,\lambda) + \beta_2 y_1(\ell,\lambda) & \alpha_2 y_2'(\ell,\lambda) + \beta_2 y_2(\ell,\lambda) \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.40)$$

Соотношение (2.40) представляет собой уравнение для определения собственных значений λ. Это уравнение называется **дисперсионным**. Пусть $\{\lambda_n\}$ - корни уравнения (2.40). Каждому λ_n соответствует ненулевое решение уравнения (1.39) и, следовательно, ненулевое решение уравнения (3.35), представимое в виде (3.38).

Выше был рассмотрен алгоритм построения собственных значений и собственных функций. В ряде случаев его можно упростить. Пусть фундаментальная система уравнения (2.35) выбрана так, что на одном из концов отрезка, например, при $x = 0$ функции $y_1(x,\lambda)$ и $y_2(x,\lambda)$ удовлетворяют граничным условиям

$$P_1(y_1)|_{x=0} = 0, \quad P_1(y_2)|_{x=0} = 1.$$

Тогда, подставляя (2.38) в граничное условие (2.36), сразу находим $C_2 = 0$. Следовательно, собственная функция, согласно (2.38), должна представляться в виде

$$y(x) = C_1 y_1(x,\lambda).$$

Подстановка в граничное условие (2.37) дает дисперсионное уравнение для λ:

$$P_2(y_1) \equiv \alpha_2 \frac{dy_1}{dx}(x,\lambda) + \beta_2 y_1(x,\lambda)|_{x=\ell} =$$

Рассмотрим теперь частный случай $Ly = y''$. В этом случае общее решение (2.38) может быть записано в виде

$$y(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad (p \equiv 1). \tag{2.41}$$

Коэффициенты определяются из системы

$$\left\{\begin{array}{c} -C_1\beta_1 + C_2\alpha_1\sqrt{\lambda} = 0 \\ C_1\{-\alpha_2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\ell + \beta_2\cos\sqrt{\lambda}\ell\} + \\ +_2\{\alpha_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\ell + \beta_2\sin\sqrt{\lambda}\ell\} \end{array}\right. \tag{2.42}$$

Уравнение (2.40) имеет вид

$$(\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 \operatorname{tg}\sqrt{\lambda}\ell) = \sqrt{\lambda}(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) \tag{2.43}$$

Легко убедиться (например, графическим методом), что уравнение (2.43) имеет бесконечное счетное множество корней $\{\lambda_n\}_1^\infty$. Для каждого корня λ_n находим ненулевое решение системы (2.42):

$$C_1 = C\frac{\alpha_1\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n\alpha_1^2 + \beta_1^2}}, \quad C_2 = C\frac{\beta_1\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n\alpha_1^2 + \beta_1^2}}, \tag{2.44}$$

где C - произвольная постоянная, отличная от нуля ($C \neq 0$). Величина

$$N_n = \parallel y_n \parallel = \left\{\int_0^\ell y_n^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

представляет собой норму собственной функции Если постоянная выбрана так, что $N_n = 1$, то собственные функции y_n будут ортонормированные. Итак, ненормированные собственные функции задачи Штурма -Лиувилля

$$y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < \ell,$$

$$\alpha_1 y' - \beta_1 y|_{x=0} = 0, \quad \alpha_2 y' - \beta_2 y|_{x=\ell} = 0$$

можно записать в виде

$$y_n(x) = \frac{\beta_1\sin\sqrt{\lambda_n}x + \alpha_1\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x}{\sqrt{\lambda_n\alpha_1^2 + \beta_1^2}}; \tag{2.45}$$

при этом

$$\| y_n \| = \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}\frac{(\beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1)(\lambda_n\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)}{(\lambda_n\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\lambda_n\alpha_2^2 + \beta_2^2)}, \tag{2.46}$$

где λ_n - корни уравнения (2.43). Формулу (2.45) для собственной функции можно привести к виду

$$y_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n}x + \delta_n),$$

где величина δ_n определяется соотношениями:

$$\cos\delta_n = \frac{\beta_1}{\sqrt{\lambda_n\alpha_1^2 + \beta_1^2}}, \quad \sin\delta_n = \frac{\alpha_1\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n\alpha_1^2 + \beta_1^2}}.$$

Уравнение (2.43) имеет нулевое решение $\lambda_0 = 0$. Ему будет соответствовать ненулевая функция $y_0(x)$, определяемая (2.45), если $\beta_1 = 0$ и $\beta_2 = 0$, и эта функция равна 1. Следовательно, при $\lambda_0 = 0$ $\| y_0 \|^2 = \ell$. Выделим частные случаи.

1. Граничные условия:

$$y(0) = y(\ell) = 0;$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,\ \beta_1 = \beta_2 = 1.$$

Общее решение данного уравнения

$$y'' = \lambda y$$

имеет вид

$$y = C_1 \operatorname{sh}\sqrt{\lambda}x + C_2 \operatorname{ch}\sqrt{\lambda}x$$

Использовав краевые условия, находим , то

$$C_2 = 0, \quad C_1 \operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\ell = 0.$$

Так как мы ищем те значения λ, при которых существуют ненулевые решения, то из последней системы уравнений следует, что

$$\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\ell = 0 \ \ (\lambda \neq 0).$$

Отсюда, в силу тождества

$$\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\ell = \imath \sin \sqrt{-\lambda}\ell$$

получаем

$$\sqrt{-\lambda}\ell = k\pi,$$

$$\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{\ell^2} \quad (k \in \aleph)$$

Полагая $C_1 = \imath$, находим собственные функции

$$y_k = \sin\frac{k\pi x}{\ell}\ (k \in \aleph)$$

Замечание. Собственные функции находятся, вообще говоря с точностью до произвольного числового множителя. Однако для многих целей удобно записывать собственные функции в нормированном виде, подбирая каким-либо способом произвольный множитель. В данном случае множитель C_1 был выбран из условий:

$$\frac{1}{\ell}\int_0^1 \mid y_k \mid^2 dx$$

и y_k - действительная функция.

2. Граничные условия:

$$y'(0) = y'(\ell) = 0;$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1,\ \beta_1 = \beta_2 = 0.$$

Собственные значения и собственные функции:

$$y_n = \cos\sqrt{\lambda_n}x,\ \ \lambda_n = (\frac{\pi n}{\ell})^2,\ \ \parallel y_n \parallel^2 = \frac{\ell}{2}(1+\delta_{n0}),$$

$$n = 1, 2, \ldots, \infty$$

Заметим, что в этом случае существует нулевое собственное значение $\lambda_0 = 0$, которому соответствует собственная функция $y_0(x) \equiv 1$.

3. Граничные условия:

$$y(0) = y'(\ell) = 0;$$

$$\alpha_1 = \beta_2 = 0,\ \beta_1 = \alpha_2 = 1.$$

Собственные значения и собственные функции:

$$y_n = \sin\sqrt{\lambda_n}x, \;\; \lambda_n = \left[\frac{\pi n}{\ell}(n+\frac{1}{2})\right]^2, \;\; \| \, y_n \, \|^2 = \frac{\ell}{2},$$

$$n = 1, 2, \ldots, \infty$$

4. Граничные условия:

$$y'(0) = y(\ell) = 0;$$

$$\beta_1 = \alpha_2 = 0, \; \beta_2 = \alpha_1 = 1.$$

Собственные значения и собственные функции:

$$y_n = \cos\sqrt{\lambda_n}x, \;\; \lambda_n = \left[\frac{\pi n}{\ell}(n+\frac{1}{2})\right]^2, \;\; \| \, y_n \, \|^2 = \frac{\ell}{2},$$

$$n = 1, 2, \ldots, \infty$$

5. Граничные условия:

$$y(0) = 0, \; y' + h_2 y|_(x = \ell) = 0;$$

$$\alpha_1 = 0, \;\; \beta_1 = 1, \;\; \alpha_2 = 1, \;\; \beta_2 = h_2.$$

Собственные значения и собственные функции:

$$y_n = \sin\sqrt{\lambda_n}x, \;\; \| \, y_n \, \|^2 = \frac{\ell}{2} + \frac{h_2}{2(\lambda_n + h_2^2)},$$

$$n = 1, 2, \ldots, \infty$$

λ_n - корни уравнения

$$\mathrm{tg}\sqrt{\lambda}x = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h_2}$$

6. Граничные условия:

$$y'(0) = 0, \;\; y'(\ell) + h_2 y(\ell) = 0;$$

$$\alpha_1 = 1, \;\; \beta_1 = 0, \;\; \alpha_2 = 1, \;\; \beta_2 = h_2.$$

Собственные значения и собственные функции:

$$y_n = \cos\sqrt{\lambda_n}x, \;\; \| \, y_n \, \|^2 = \frac{\ell}{2} + \frac{h_2}{2(\lambda_n + h_2^2)},$$

$$n = 1, 2, \ldots, \infty$$

λ_n - корни уравнения

$$\mathrm{tg}\sqrt{\lambda}x = \frac{\sqrt{\lambda}}{h_2}$$

7. Граничные условия:

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0, \quad y(\ell) = 0;$$

$$\alpha_1 = 1, \ \ \beta_1 = h_1, \ \ \alpha_2 = 0, \ \ \beta_2 = 1.$$

Собственные значения и собственные функции:

$$y_n = \sin\sqrt{\lambda_n}(\ell - x), \ \ \| \, y_n \, \|^2 = \frac{\ell}{2} + \frac{h_1}{2(\lambda_n + h_1^2)},$$

$$n = 1, 2, \ldots, \infty$$

λ_n - корни уравнения

$$\mathrm{tg}\sqrt{\lambda}x = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h_1}$$

8. Граничные условия:

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0, \quad y'(\ell) = 0;$$

$$\alpha_1 = 1, \ \ \beta_1 = h_1, \ \ \alpha_2 = 1, \ \ \beta_2 = 0.$$

Собственные значения и собственные функции:

$$y_n = \cos\sqrt{\lambda_n}(\ell - x), \ \ \| \, y_n \, \|^2 = \frac{\ell}{2} + \frac{h_1}{2(\lambda_n + h_1^2)},$$

$$n = 1, 2, \ldots, \infty$$

λ_n - корни уравнения

$$\mathrm{tg}\sqrt{\lambda}x = \frac{\sqrt{\lambda}}{h_1}$$

9. Граничные условия:

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0, \quad y'(\ell) + h_2 y(\ell) = 0;$$

$$\alpha_1 = 1, \ \ \beta_1 = h_1, \ \ \alpha_2 = 1, \ \ \beta_2 = h_2.$$

Собственные значения и собственные функции:

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n + h_1^2}}(h_1 \sin sqrt\lambda_n x + \sqrt{\lambda}_n \cos sqrt\lambda_n x,$$

$$\| \, y_n \, \|^2 = \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}\frac{(h_1 + h_2)(\lambda_n + h_1 h_2)}{,}(\lambda_n + h_1^2)(\lambda_n + h_2^2)$$

$$n = 1, 2, \ldots, \infty$$

λ_n - корни уравнения

$$\mathrm{tg}\sqrt{\lambda}x = \sqrt{\lambda}\frac{h_1 + h_2}{\lambda - h_1 h_2}$$

Заметим, что в этом случае собственную функцию можно записать в виде

$$y_n(x) = \frac{h_2 \sin \sqrt{\lambda_n}(\ell - x) + \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n}(\ell - x)}{\sqrt{\lambda_n + h_2^2}}$$

где λ_n - корни уравнения

$$\mathrm{tg}\sqrt{\lambda}x = \sqrt{\lambda}\frac{h_1 - h_2}{\lambda + h_1 h_2}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. $y'' - y = 2x; \quad y(0) = 0, \; y(1) = -1$

   Ответ: $y = (\operatorname{sh} x / \operatorname{sh} 1) - 2x$.

2. $y'' + y' = 1; \quad y'(0) = 0, \; y(1) = 1$

   Ответ: $y = x + e^{-x} - e^{-1}$.

3. $y'' - y' = 0; \quad y(0) = -1, \; y'(1) - y(1) = 2$

   Ответ: $e^x - 2$.

4. $y'' + y = 1; \quad y(0) = 0, \; y(\frac{\pi}{2}) = 0$

   Ответ: $y = 1 - \sin x - cosx$.

5. $y'' + y = 1; \quad y(0) = 0, \; y(\pi) = 0$

   Ответ: Решений нет

6. $y'' + y = 2x - \pi; \quad y(0) = 0, \; y(\pi) = 0$

   Ответ: $y = 2x - \pi + \pi \cos x + C \sin x$

7. $y'' - y' - 2y = 0; \quad y'(0) = 2, \; y(\infty) = 0$

Ответ: $y = -2e^{-x}$

Для каждой из краевых задач построить функцию Грина.

8. $y'' = fx; \quad y(0) = 0, \; y(1) = 0$

Ответ: $G = \begin{cases} (s-1)x, & (0 \le x < s) \\ s(x-1), & (s \le x < 1) \end{cases}.$

9. $y'' + y = fx; \quad y'(0) = 0, \; y(\pi) = 0$

Ответ: $G = \begin{cases} \sin s \cos x, & (0 \le x < s) \\ \cos s \sin x, & (s \le x < \pi) \end{cases}.$

10. $y'' + y' = fx; \quad y(0) = 0, \; y'(1) = 0$

Ответ: $G = \begin{cases} e^s(e^{-x} - 1), & (0 \le x < s) \\ 1 - e^s, & (s \le x < 1) \end{cases}.$

11. $y'' - y = fx; \quad y'(0) = 0, \; y'(2) + y(2) = 0$

Ответ: $G = \begin{cases} e^{-s}\mathrm{ch}x, & (0 \le x < s) \\ e^{-x}\mathrm{ch}s, & (s \le x < 2) \end{cases}.$

12. $y'' + y = fx; \quad y(0) = y(\pi) = 0, \; y'(0) = y'(\pi)$

Ответ: $G = \frac{1}{2}\sin|x - s|.$

13. $x^2y'' + 2xy' = fx; \quad y(1) = 0, \; y'(3) = 0$

Ответ: $G = \begin{cases} \frac{1}{x} - 1, & (1 \le x < s) \\ \frac{1}{s} - 1, & (s \le x < 3) \end{cases}.$

14. $xy'' - y' = fx; \quad y'(1) = 0, \; y(2) = 0$

Ответ: $G = \begin{cases} \frac{s^2-4}{2s^2} - 1, & (1 \le x < s) \\ \frac{x^2-4}{2s^2} - 1, & (s \le x < 2) \end{cases}.$

15. $x2y'' - 2y = fx; \quad y(1) = 0, \; y(2) + 2y'(2) = 0$

Ответ: $G = \begin{cases} \frac{1-x^3}{3s^3x} - 1, & (1 \le x < s) \\ \frac{1-s^3}{3s^3x} - 1, & (s \le x < 2) \end{cases}.$

16. $y'' = fx; \quad y(0) = 0, \; y(x)$ограничено при $x \to \infty$

Ответ: $G = \begin{cases} -x, & (0 \le x < s) \\ -s, & (s \le x < \infty) \end{cases}.$

Найти собственные значения и собственные функции.

17. $y'' = \lambda y;\quad y(0) = 0,\quad y(\ell) = 0$

Ответ:$\lambda_k = -k^2\pi^2/\ell^2,\ \ y_k = \sin(k\pi x/\ell),\quad k = 1, 2, 3, \ldots$

18. $y'' = \lambda y;\quad y'(0) = 0,\quad y'(\ell) = 0$

Ответ:$\lambda_k = -k^2\pi^2/\ell^2,\ \ y_k = \cos(k\pi x/\ell),\quad k = 1, 2, 3, \ldots$

19. $y'' = \lambda y;\quad y(0) = 0,\quad y'(\ell) = 0$

Ответ: $\lambda_k = (k - \frac{1}{2})^2\pi^2/\ell^2,\ \ y_k = \sin(k - \frac{1}{2})\pi x/\ell,\quad k = 1, 2, 3, \ldots$

20. $x^2y'' = \lambda y;\quad y(1) = 0,\quad y(a) = 0\ (a > 1)$

Ответ: $\lambda_k = -(\frac{k\pi)}{\ln a})^2 - \frac{1}{4},\ \ y_k = \sqrt{x}\sin\frac{k\pi \ln x}{\ln a},\quad k = 1, 2, 3, \ldots$

4 Системы линейных дифференциальных уравнений

4.1 Фундаментальная матрица

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots a_{1n}y_n = b_1(t),$$

$$\frac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n = b_2(t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots a_{nn}y_n = b_n(t),$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ - искомые функции, $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ - постоянные действительные коэффициенты, $b_1(t), b_2(t), \ldots, b_n(t)$ – заданные непрерывные функции.

Если $b_1(t) \equiv b_2(t) \equiv \ldots \equiv b_n(t) \equiv 0$, то система называется *однородной.* Систему удобно записывать в векторной форме. Если обозначить

$$\overrightarrow{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \ldots \\ y_n(t) \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \ldots \\ b_n(t) \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то можем записать

$$\overrightarrow{y}' = A(t)\overrightarrow{y} + \overrightarrow{b}(t). \tag{3.1}$$

Рассмотрим случай $\overrightarrow{b} \equiv 0$.

Пусть G - множество решений системы (3.1) на промежутке I. Фундаментальной системой решений (3.1) называется любой базис в пространстве решений G.

Пусть $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{x_1}(t), \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x_2}(t), \cdots, \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x_n}(t)$ - есть решения системы (3.1). Если эти решения линейно независимы, то они составляют фундаментальную систему решений и общее решение при этом можно записать в виде

$$y(t, \overrightarrow{C}) = C_1\overrightarrow{x_1}(t) + C_2\overrightarrow{x_2}(t) + \ldots + C_n\overrightarrow{x_n}(t). \tag{3.2}$$

Матрица, столбцами которой являются векторы фундаментальной системы решений, называется *фундаментальной матрицей* системы (3.1).Она обозначается

$Y(t) = (\overrightarrow{x_1}(t), \overrightarrow{x_2}(t), \ldots, \overrightarrow{x_n}(t))$.

Общее решение с помощью фундаментальной матрицы можно записать в виде $\overrightarrow{y}(t, \overrightarrow{C}) = Y(t)\overrightarrow{C}$, где $\overrightarrow{C}$ – вектор произвольных постоянных. Следовательно, столбцы матрицы $Y(t)$ есть частное решение системы (3.1).

4.2 Построение фундаментальной системы решений для матрицы A простой структуры

Для построения $Y(t)$ необходимо найти n линейно независимых решений уравнения (3.1). Пусть $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$, - линейно независимые собственные вектора матрицы A; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ - соответствующие собственные значения (не обязательно различные). Если матрица A имеет ровно n линейно независимых собственных векторов (в этом случае говорят, что матрица A имеет простую структуру, такая матрица подобна диагональной), тогда фундаментальная система имеет вид

$$\overrightarrow{x_1}(t) = \overrightarrow{x_1}e^{\lambda_1 t}; \overrightarrow{x_2}(t) = \overrightarrow{x_2}e^{\lambda_2 t}; \ldots \overrightarrow{x_n}(t) = \overrightarrow{x_n}e^{\lambda_n t}.$$

Фундаментальная матрица –

$$Y(t) = (\overrightarrow{x_1}e^{\lambda_1 t}, \overrightarrow{x_2}(t)e^{\lambda_2 t}, \ldots, \overrightarrow{x_n}(t)e^{\lambda_n t}). \tag{3.3}$$

Таким образом, построение фундаментальной системы решений осуществляется путем определения собственных векторов и собственных значений матрицы A. Дополнительно необходимо исследовать, являются ли полученные собственные векторы линейно независимыми. Из курса линейной алгебры известно, что если все собственные значения матрицы A различны, то соответствующие им собственные векторы образуют линейно независимую систему векторов, то есть матрица A имеет простую структуру (простую структуру имеет также любая симметричная матрица).

Для определения собственных значений матрицы A следует составить характеристическую матрицу $A - \lambda E$, где E – единичная матрица, λ – комплексная переменная. Далее необходимо найти определитель матрицы (он называется *характеристическим многочленом*). Корни характеристического многочлена есть собственные значения матрицы. Собственный вектор $\overrightarrow{x_k}$, отвечающий собственному значению λ_k есть нетривиальное решение уравнения

$$(A - \lambda_k E)\overrightarrow{x} = 0. \tag{3.4}$$

Так как определитель матрицы равен нулю, то нетривиальное решение всегда существует. Выписать решение (3.4) можно по следующему правилу: в качестве компонент вектора $\overrightarrow{x_k}$ надо взять алгебраические дополнения к какой-нибудь строке матрицы $A - \lambda_k$. При этом следует придерживаться двух рекомендаций: 1) строку надо выбирать так, чтобы подсчет алгебраических дополнений был максимально простым; 2) алгебраические дополнения не должны все обращаться в нуль (иначе не получим тривиальное решение).

Если собственное значение λ_k – комплексное, то $\overrightarrow{x_k}$ и $\overrightarrow{x_k}e^{\lambda_k t}$ тоже будут комплексными. При этом в (3.4) будем иметь два комплексно-сопряженных вектора. Вместо этих двух комплексно сопряженных векторов можно взять два действительных вектора: действительную и мнимую части вектора $\overrightarrow{x_k} e^{\lambda_k t}$.

Пример 60.

Найти фундаментальную систему решений, фундаментальную матрицу и общее решение системы

$$y_1' = 2y_1 + y_2,$$

$$y_2' = 3y_1 + 4y_2.$$

Решение. Здесь $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad (A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix}$.

Выпишем характеристический многочлен

$$d(\lambda) = |A - \lambda E| = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5.$$

Корни характеристического многочлена $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$, они же есть собственные значения матрицы A.

Собственные векторы – это решения уравнения

$$(A - \lambda_k E)x = 0, k = 1, 2.$$

При $k = 1$ и $\lambda_1 = 5$ имеем

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Компоненты вектора $\overrightarrow{x_1}$ находим как алгебраическое дополнение к элементам первой строки

$\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Тогда

$$\overrightarrow{x_1(t)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t} = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{pmatrix}.$$

При $k = 2$, и $\lambda_2 = 1$ получим $\quad A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Фундаментальная матрица –

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} & -e^{t} \\ 3e^{5t} & e^{t} \end{pmatrix}.$$

Общее решение имеет вид

$$\overrightarrow{y}(t, \overrightarrow{C}) = Y(t) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{5t} - C_2 e^{t} \\ 3C_1 e^{5}t + C_2 e^{t} \end{pmatrix}.$$

Пример 61.

Найти фундаментальную матрицу и общее решение системы

$$\frac{dy_1}{dt} = -7y_1 + y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -2y_1 - 5y_2.$$

Решение. Здесь

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}, \quad A - \lambda E = \begin{pmatrix} -7-\lambda & 1 \\ -2 & -5-\lambda \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен

$$d(\lambda) = \begin{vmatrix} -7-\lambda & 1 \\ -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 12\lambda + 37,$$

$$\lambda_{1,2} = -6 \pm i,$$

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Взяв алгебраические дополнения ко второй строке, получим

$\overrightarrow{x}^*_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$, или $\quad \overrightarrow{x}^*_1 = \begin{pmatrix} e^{it} \\ (1+i)e^{it} \end{pmatrix} \cdot e^{-6t}$.

Учтем, что $e^{it} = \cos t + i\sin t$, получим

$$\overrightarrow{x}_1^* = \begin{pmatrix} \cos t + i\sin t \\ \cos t - \sin t + i(\cos t + \sin t) \end{pmatrix} \cdot e^{-6t}.$$

Решение $\overrightarrow{x}_2^*$, соответствующее $\lambda_2 = -6 - i$, имеет вид

$$\overrightarrow{x}_2^* = \begin{pmatrix} \cos t - i\sin t \\ \cos t - \sin t - i(\cos t + \sin t) \end{pmatrix} \cdot e^{-6t},$$

то есть комплексно сопряжено с $\overrightarrow{x}_1^*$.

В качестве вещественных решений $\overrightarrow{x}_1$, $\overrightarrow{x}_2$ берем действительную и мнимую составляющие векторов $\overrightarrow{x}_1^*$ и $\overrightarrow{x}_2^*$

$$\overrightarrow{x}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} \cdot e^{-6t}$$

$$\overrightarrow{x}_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} \cdot e^{-6t}$$

Фундаментальная матрица –

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-6t} \cdot \cos t & e^{-6t} \cdot \sin t \\ e^{-6t} \cdot (\cos t - \sin t) & e^{-6t} \cdot (\cos t + \sin t) \end{pmatrix}.$$

Общее решение –

$$\overrightarrow{y}(t, \overrightarrow{C}) = \begin{pmatrix} C_1 e^{-6t} \cos t + C_2 e^{-6t} \sin t \\ C_1 e^{-6t}(\cos - \sin t)t + C_2 e^{-6t}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}.$$

4.3 Фундаментальная система решений в случае кратных корней характеристического уравнения

В случае кратных корней построение фундаментальной системы решений осложняется тем, что матрица A может не иметь полной системы собственных векторов, составляющих базис рассматриваемого векторного пространства.Пусть λ_k – корень $D(\lambda)$ кратности r, а ранг матрицы $A - \lambda_k E$ равен m. Число линейно независимых собственных векторов A в этом случае равно $n - m$ (числу линейно независимых решений системы $(A - \lambda_k E)\overrightarrow{x} =$

0).

Если $n-m=r$, то λ_k соответствует r линейно независимых векторов, они могут быть приняты для построения базиса в R^n и фундаментальной системы решений. Действительно, из системы (3.4) получаем уже r независимых решений $\overrightarrow{x}_1^{(k)}, \overrightarrow{x}_2^{(k)}, \ldots \overrightarrow{x}_r^{(k)}$, и фундаментальная система решений будет состоять из $\overrightarrow{x}_1^{(k)}e^{\lambda_k t}, \overrightarrow{x}_2^{(k)}e^{\lambda_k t}, \ldots \overrightarrow{x}_r^{(k)}e^{\lambda_k t}$, число их равно кратности корня.

Если $n-m<r$, то число линейно независимых решений системы (3.4) меньше кратности корня, и возникает необходимость дополнить базис. Для этого каждому собственному вектору, соответствующему λ_k, сопоставляется серия присоединенных векторов: $\vec{h}_1^k,\ \vec{h}_2^k,\ \ldots,\ \vec{h}_r^k$. Здесь $\vec{h}_1^k$ - собственный вектор, соответствующий r-кратному $\lambda_k(\vec{h}_1^k \neq 0)$, остальные векторы определяются формулами:

$$A\vec{h}_2^k = \lambda_k \vec{h}_2^k + \vec{h}_1^k, \quad A\vec{h}_3^k = \lambda_k \vec{h}_3^k + h_2, \ \ldots \ A\vec{h}_r^k = \lambda_k \vec{h}_r^k + \vec{h}_{r-1}^k,$$

или

$$(A-\lambda_k E)\overrightarrow{h}_i^{(k)} = \overrightarrow{h}_{i-1}^{(k)}; \quad i = 2, 3, \ldots, r.$$

Если λ_k – простой корень, уравнение для $\overrightarrow{h}_2^{(k)}$ не совместно, и серия обрывается на первом векторе. После дополнения каждого собственного вектора присоединенной серией получим линейно независимую систему векторов, с помощью которых строится фундаментальная система решений. Серия $\vec{h}_1^k, \vec{h}_2^k, \ldots, \vec{h}_r^k$ определяет набор решений

$$\vec{h}_1^k e^{\lambda_k t}; \ \ (\vec{h}_2^k + t\vec{h}_1^k)e^{\lambda_k t}; \ \ (\vec{h}_3^k + t\vec{h}_2^k + \frac{t^2}{2!}\vec{h}_1^k)e^{\lambda_k t} \quad \ldots$$

$$(\vec{h}_r^k + t\vec{h}_{r-1}^k + \ldots + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\vec{h}_1^k)e^{\lambda_k t},$$

входящих в фундаментальную систему решений.

В общем случае кратному λ_k может соответствовать несколько собственных векторов и их присоединенных серий. При этом каждая из таких серий будет состоять меньше, чем из r векторов.

Итак, процедура определения решений, соответствующая кратным корням, состоит в следующем:

1) определяется число собственных векторов, соответствующих λ_k и находятся сами векторы;

2) если это число равно r, то далее построение фундаментальной системы ведется так, как указано в п.3.2;

3) если число собственных векторов меньше r, то к каждому добавляется серия присоединенных векторов и по формулам выписываются частные решения;

4) совокупность всех частных решений дает фундаментальную систему решений.

Пример 62.

Найти фундаментальную систему решений и общее решение для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_2.$$

Решение. Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}, \quad d(\lambda) = (1-\lambda)^2,$$

$\lambda_{1,2} = 1$ - двукратный корень.

Ранг матрицы $A - \lambda E$ равен 0, следовательно, для $\lambda_1 = 1$ существует два линейно независимых собственных вектора, они находятся как решения системы

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, фундаментальная система решений –

$$\overrightarrow{x_1}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{e}^t, \quad \overrightarrow{x_2}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dot{e}^t, \ \ Y(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Общее решение –

$$\overrightarrow{y}(t, \overrightarrow{C}) = \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^t \end{pmatrix}.$$

Пример 63.

Найти фундаментальную систему решений и общее решение для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_1}{dt} = 0,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_1.$$

Решение. Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \ A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}, \ \ d(\lambda) = \lambda^2,$$

$\lambda_{1,2} = 0$ - двукратный корень.

Ранг матрицы $A - \lambda_1 E$ равен 1, поэтому имеем только один собственный вектор $\overrightarrow{h_1}$, он получается как решение системы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \end{pmatrix} = 0,$$

откуда получаем $h_{11} = 0, \quad h_{12} = 1$. Итак,

$$\overrightarrow{h_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Присоединенный вектор $\overrightarrow{h_2}$ удовлетворяет системе

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда имеем

$$h_{21} = 0;$$

h_{22} можно взять произвольно, но так чтобы $\overrightarrow{h_1}$ и $\overrightarrow{h_2}$ были линейно независимы. Положим $h_{22} = t$. Итак,

$$\overrightarrow{h_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная система решений –

$$\overrightarrow{x_1}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{0 \cdot t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Общее решение –

$$\overrightarrow{y}(t, \overrightarrow{C}) = \begin{pmatrix} C_2 \\ C_1 t + C_2 \end{pmatrix}.$$

<u>Пример 64</u>.

Найти фундаментальную систему решений и общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_1}{dt} = 10y_1 - 9y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_1 + 4y_2.$$

Решение. Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A - \lambda E = \begin{pmatrix} 10 - \lambda & -9 \\ 1 & 4 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение

$$d(\lambda) = (\lambda)^2 - 14\lambda + 49 = (\lambda - 7)^2 = 0$$

имеет двойной корень $\lambda_{1,2} = 7$.

Матрица

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

имеет ранг 1, поэтому корню $\lambda_1 = 7$ соответствует лишь один собственный вектор, и надо искать собственную серию векторов $\overrightarrow{h_1}, \overrightarrow{h_2}$ для $\lambda_1 = 7$. Вектор $\overrightarrow{h_1}$ есть собственный вектор A, получаем его как вектор алгебраических дополнений к первой строке матрицы $(A - \lambda_1 E)$:

$$\overrightarrow{h_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для $\overrightarrow{h_2}$ получаем систему

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

из которой видно, что первое уравнение есть следствие второго:

$$h_{21} - 3h_{22} = 1.$$

Итак, собственная серия имеет вид

$$\overrightarrow{h_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{h_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная система имеет вид

$$\overrightarrow{x_1}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{7t}; \quad \overrightarrow{x_2}(t) = \begin{pmatrix} 3t + 1 \\ t \end{pmatrix} \cdot e^{7t}.$$

Общее решение –

$$\overrightarrow{y}(t, \overrightarrow{C}) = \begin{pmatrix} 3C_1 + (3t + 1)C_2 \\ C_1 + tC_2 \end{pmatrix} \cdot e^{7t}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти общее решение системы:

1. $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z - y \\ \frac{dz}{dx} = -y - 3z \end{cases}$

   Ответ: $\begin{cases} y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} \\ z = (C_2 - C_1 - C_2 x)e^{-2x} \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{dy}{dx} + z = 0 \\ \frac{dz}{dx} + 4y = 0 \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} \\ z = -2(C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}) \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + 5z \\ \frac{dz}{dx} + y + 3z = 0 \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) \\ z = e^{-x}\{\frac{1}{5}(C_2 - 2C_1)\cos x - \frac{1}{5}(C_1 + 2C_2)\sin x\} \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{dy}{dx} + 2y + z = \sin x \\ \frac{dz}{dx} - 4y - 2z = \cos x \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} y = C_1 + C_2 x + 2\sin x \\ z = -2C_1 - C_2(2x+1) - 3\sin x - 2\cos x \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{dy}{dx} + 3y + 4z = 2x \\ \frac{dz}{dx} - y - z = x \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} y = (C_2 - 2C_1 - 2C_2 x)e^{-x} - 6x + 14 \\ z = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + 5x - 9 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \frac{dy}{dx} - 3z + 4u = 0 \\ \frac{dz}{dx} + u = 0 \\ \frac{du}{dx} + 2y - z = 0 \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} z = C_1 e^{-x} + \frac{2}{5}C_2 e^{-2x} + \frac{1}{5}C_3 e^{3x} \\ y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{3x} \\ u = C_1 e^{-x} + \frac{4}{5}C_2 e^{-2x} - \frac{3}{5}C_3 e^{3x} \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z \\ \frac{dy}{dt} = x + z \\ \frac{dz}{dt} = x + y \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} \\ y = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t} \\ z = -(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2 e^{2t} \end{cases}$

8. $\begin{cases} \frac{dy}{dx} + 2y + 4z = 1 + 4x \\ \frac{dz}{dx} + y - z = \frac{3}{2}x^2 \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} y = x + x^2 + C_1 - 2C_1e^{2x} + 4C_2e^{-3x} \\ z = -\frac{1}{2}x^2 + C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} \end{cases}$

9. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 4x - y + 36t = 0 \\ \frac{dy}{dt} + 2x - y + 2e^t = 0 \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x = 6t - 1 - e^t + C_1e^{2t} + C_2e^{3t} \\ z = 12t + 10 + 3e^t - 2C_1e^{2t} - C_2e^{3t} \end{cases}$

5 Представление решений дифференциальных уравнений рядами

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \ldots, y_n), \quad i = \overline{1, n}, \tag{4.1}$$

где функции f_i голоморфные в окрестности точки

$$(t_0, {y_1}^0, {y_2}^0, \ldots {y_n}^0)$$

.

Функция $F(x_1, \ldots, x_n)$ называется *голоморфной* в окрестности точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ функцией, если она в этой окрестности представляется сходящимся степенным рядом

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} a_{k_1,\ldots,k_n} \cdot (x_1 - x_1^0)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x_n - x_n^0)^{k_n},$$

где $|k| = k_0 + k_1 + \ldots + k_n$. Голоморфная функция имеет частные производные любых порядков по всем переменным.

Задача Коши (4.1) с начальными условиями

$$y_i(t_0) = {y^0}_i, \quad i = \overline{1, n} \tag{4.2}$$

имеет единственное решение, голоморфное в окрестности точки $t = t_0$.

Однако, если правая часть (4.1) линейна:

$$\frac{dy_i}{dt} = f_{i0}(t) + f_{i1}(t)y_1(t) + f_{i2}(t)y_2(t) + ... + f_in(t)y_n(t), \tag{4.3}$$

где $f_{ij}(t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ – голоморфные функции в области $|t - t_0| < r$, то существует единственное решение задачи (4.3), (4.2), голоморфное во всей области $|t - t_0| < r$ [3].

Согласно этой теореме, решение задачи Коши (4.3), (4.2) можно искать в виде степенного ряда

$$y_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{ik}(t - t_0)^k. \tag{4.4}$$

Заметим, что если ряд (4.4) сходится абсолютно и равномерно в любой замкнутой области $|t - t_0| \le r_0 < r$, то его можно почленно дифференцировать любое число раз и все полученные ряды имеют такой же радиус сходимости [2].

Пример 41.

Решить задачу Коши

$$y'' + y = 0, \tag{4.5}$$

$$y(0) = 1,$$

$$y'(0) = 0.$$

Понятно, что решение задачи (4.5) может быть найдено согласно п. 2.1 данного пособия с помощью подстановки $y = e^{\alpha t}$, но мы будем искать его в виде ряда, опираясь на сформулированную выше теорему. Линейное уравнение второго порядка (4.5) эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = -y \end{cases} \tag{4.6}$$

с начальными данными

$$y(0) = 1, \quad z(0) = 0. \tag{4.7}$$

Система (4.6) – линейная с голоморфной правой частью, и для задачи (4.6), (4.7) существует единственное решение голоморфное в области $|t| < \infty$. Ищем решение задачи (4.5) в виде ряда (4.4)

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k.$$

Первое равенство (4.5) будет иметь вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)C_k t^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k = 0. \tag{4.8}$$

Обе части уравнения (4.8) – степенные ряды, и если степенные ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_o)^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(t-t_o)^n$ сходятся в круге $|t-t_0| < R$ и выполняется

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_o)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(t-t_o)^n$$

в этом круге, то $a_n = b_n$. Следовательно, имеем

$$2 \cdot 1 C_2 + C_0 = 0,$$

$$3 \cdot 2 C_3 + C_1 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$k(k-1)C_k + C_{k-2} = 0.$$

Решая эту систему, получим

$$C_k = \frac{(-1)^n C_0}{(2n)!}, \quad k = 2n, n = 1, 2, \ldots$$

$$C_k = \frac{(-1)^n C_1}{(2n+1)!}, \quad k = 2n+1, n = 1, 2, \ldots$$

Общее решение имеет вид

$$y(t) = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n} + C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}.$$

Начальные данные задачи позволяют определить коэффициенты ряда (4.4):

$$y(0) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k|_{t=0} = C_0 = 1,$$

$$y'(0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k t^{k-1}|_{t=0} = C_1 = 0.$$

Учитывая это, получим решение задачи (4.5) в виде равномерно сходящегося в области $|t| < \infty$ ряда

$$y(t) = 1 + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + \dots$$

Рассмотрим общий вид линейного уравнения второго порядка

$$y''(x) + p(x)y' + q(x) = 0. \tag{4.9}$$

Уравнения такого типа имеют большое прикладное значение, так как описывают многие математические модели, построенные при изучении окружающего мира [1].

Пусть точка $x = x_0$ будет особой точкой для уравнения (4.9), т.е. функции $p(x)$ и $q(x)$ в окрестности $x = x_0$ имеют вид:

$$p(x) = \frac{1}{x - x_0}\tilde{p}(x),$$

$$q(x) = \frac{1}{(x - x_0)^2}\tilde{q}(x); \tag{4.10}$$

здесь $\tilde{p}(x)$ и $\tilde{q}(x)$ – голоморфные функции в окрестности точки x_0:

$$\tilde{p}(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

$$\tilde{q}(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \dots \tag{4.11}$$

Пусть условие (4.10) выполнено в окрестности точки $x = x_0$, тогда заменив $x - x_0$ на x, получим (4.10) в окрестности
$x_0 = 0$. Будем искать решение (4.9) в виде

$$y(x) = x^\rho(C_0 + C_1x + C_2x^2 + ...) = x^\rho \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n. \tag{4.12}$$

Ряд (4.12) предполагается сходящимся в некоторой окрестности точки $x = 0$, причем $C_0 \neq 0$. Подставляя ряды (4.10), (4.12) в уравнение (4.9), мы должны получить тождество, т.к. (4.12) определяет решение уравнения (4.9). Приравнивая нулю коэффициенты при последовательных степенях x в этом тождестве, получим уравнения для нахождения чисел ρ и C_i $(i = \overline{0, n})$. Для младшей ρ–й степени x из тождества имеем уравнение

$$[\rho(\rho - 1) + a_0\rho + b_0]C_0 = 0$$

т.к. $C_0 \neq 0$, для определения ρ получим уравнение, которое называют определяющим:

$$d(\rho) = \rho(\rho - 1) + a_0\rho + b_0. \tag{4.13}$$

Возьмем в формуле (4.12) $\rho = \widetilde{\rho}$, где $\widetilde{\rho}$ – корень уравнения (4.13), а в качестве C_0 можем взять любое число, т.к. если функция $y(x)$ - решение уравнения (4.9), то и всякая функция вида $C \cdot y(x)$ - тоже решение [1]. Приравнивая нулю коэффициент при $x^{\widetilde{\rho}+n}$, мы получим уравнение

$$C_n d(\widetilde{\rho} + n) + P_{n-1} = 0, \tag{4.14}$$

где P_{n-1} - некоторый многочлен от коэффициентов $C_1, \cdots, C_{n-1}, a_0, a_1, \cdots, a_n, b_0, \cdots, b_n$. Коэффициент при C_n - величина $d(\widetilde{\rho} + n)$ - может оказаться равной нулю только в том случае, если один корень определяющего уравнения (4.13) отличается от другого на целое число. Например, если $\rho_1 = \rho_2 + m$, то в качестве коэффициента при C_m в уравнении (4.14) получим величину $d(\rho_2 + m) = d\rho_1 = 0$, однако в этом случае $d(\rho_1 + n) \neq 0$ (для всех n). Таким образом, для каждого корня ρ определяющего уравнения (4.13) при условии, что $\rho_1 \neq \rho_2 + m$, где m - целое положительное число или нуль, получаем два ряда вида (4.12), определяющих в случае своей сходимости два линейно независимых решения (фундаментальную систему) уравнения (4.9).

Пусть теперь определяющее уравнение имеет кратный корень

$$\rho_1 = \rho_2 = r.$$

В этом случае невозможно получить два различных решения вида

$$y_1 = x^r(1 + C_1x + C_2x^2 + \ldots),$$

$$y_2 = x^r(1 + C_1'x + C_2'x^2 + \ldots), \tag{4.15}$$

где не все C_k равны C_k', так как если функции (4.15) есть решение уравнения (4.8), то и сумма

$$y_1 - y_2 = x^{r'}(h_0 + h_1x + h_2x^2 + \ldots),$$

где $r' = r + k$ (k - целое положительное число) и $h_0 \neq 0$, также решение (4.8). Тогда определяющее уравнение должно иметь кроме корня r еще и корень r'.

Таким образом, если уравнение (4.11) имеет один кратный корень, то уравнение (4.8) может иметь только одно решение вида (4.15).

В случае, когда корни определяющего уравнения связаны соотношением $\rho_1 = \rho_2 + m$, где m - целое число или ноль, мы найдем только один ряд вида (4.10). Если указанный ряд сходящийся, это одно частное решение (4.8). Второе решение, дающее фундаментальную систему для уравнения

$$x^2y'' + \widetilde{p}(x)xy' + \widetilde{q}(x) = 0, \tag{4.16}$$

будем искать в виде

$$y_2(x) = y_1(x)z(x). \tag{4.17}$$

Подставляя (4.17) в (4.16), получим

$$x_2(y_1''z + 2y_1'z' + y_1z'') + \widetilde{p}(x)x(y_1'z + y_1z') + \widetilde{q}(x)y_1z = 0;$$

так как y_1 есть решение (4.16), то

$$x^2y_1z'' + 2(y_1'x^2 + \widetilde{p}(x)xy_1)z' = 0. \tag{4.18}$$

Умножая (4.18) на $y_1(x)$ и разделяя переменные, получим

$$\frac{1}{y_1^2z'}d(y_1^2z') = -\frac{\widetilde{p}(x)}{x}dx,$$

или

$$y_1^2 z' = Ce^{-\int \frac{\widetilde{p}(x)}{x} dx}, \quad C = const.$$

Выбирая $C = 1$ и еще раз интегрируя, получим второе линейно – независимое решение (4.16), т.е. фундаментальную систему решений

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot \int_\xi^x \frac{1}{y_1^2(t)} \cdot e^{-\int_\xi^t \frac{\widetilde{p}(\tau)}{\tau} d\tau} dt. \tag{4.19}$$

Здесь точка ξ – любая точка окрестности $x = 0$. Так как ρ_1 и ρ_2 – корни определяющего уравнения, то

$$\rho_1 + \rho_2 = -(a_0 - 1),$$

и, следовательно, $2\rho_1 + a_0 = m + 1$ есть целое положительное число. Из (4.19), учитывая, что $\widetilde{p}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots$, получим

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot \int_\xi^x \frac{dt}{y_1^2(t)} \cdot e^{-\int_\xi^t \frac{\widetilde{p}(\tau)}{\tau} d\tau} =$$

$$= y_1(x) \int_{x_0}^x t^{-(2\rho_1 + a_0)} \frac{\varphi(t)}{[1 + C_1 t + C_2 t^2 + \ldots]^2} dt.$$

Поскольку $\varphi(x)$ – голоморфная функция, она представима в виде ряда (4.11) с коэффициентами g_i. Тогда

$$y_2 = y_1(x) \int_\xi^x \left(\frac{g_0}{t^{m+1}} + \frac{g_1}{t^m} + \ldots + \frac{g_m}{t} + g_{m+1} + g_{m+2} t + \ldots\right) dt =$$

$$= y_1(x)(\ln|x| g_m + \chi(x)).$$

Таким образом, в случае, когда корни определяющего уравнения различаются на целое число, $y_2(x)$ имеет логарифмическую особенность в точке $x = 0$, если $g_m \neq 0$. Функция $\chi(x)$ голоморфна в окрестности $x = 0$, если $m = 0$, и имеет вид

$$\chi(x) = \frac{1}{x^m} \widetilde{\chi}(x)$$

при $m \neq 0$ (здесь $\widetilde{\chi}(x)$ – голоморфная функция в окрестности $x = 0$) Итак, мы нашли два линейно независимых решения уравнения (4.16) y_1 и y_2, образующие фундаментальную систему (4.8).

Пример 65.

Найти решение уравнения

$$xy'' + 2y' + xy = 0.$$

Решение. В окрестности точки $x = 0$ имеем

$$p(x) = \frac{2}{x}, \quad a_0 = 2, \ q(x) = 1, \quad b_0 = 0.$$

Ищем решение в виде

$$y(x) = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k.$$

Выпишем определяющее уравнение:

$$d(\rho) = \rho(\rho - 1) + 2\rho + 0 = 0,$$

$$\rho^2 + rho = 0,$$

$$\rho = 0, \quad \rho = 0.$$

Следовательно, решение будем искать в виде ряда

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k.$$

Имеем

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k C_k x^{k-1},$$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) C_k x^{k-2}.$$

Подставим y, y' и y'' в исходное уравнение, записанное в следующем виде:

$$x^2 y'' + 2xy' + x^2 y = 0.$$

Получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k k(k-1)x^k + 2\sum_{k=0}^{\infty} C_k k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+2} = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, имеем систему для определения коэффициентов

$$2 \cdot C_1 = 0$$

$$2 \cdot C_2 + 4 \cdot C_2 + C_0 = 0$$

$$3 \cdot 2 \cdot C_3 + 2 \cdot 3 \cdot C_3 + C_1 = 0$$

$$4 \cdot 3 \cdot C_4 + 2 \cdot 4 \cdot C_4 + C_2 = 0$$

$$5 \cdot 4 \cdot C_5 + 2 \cdot 5 \cdot C_5 + C_3 = 0$$

$$\dots$$

Все нечетные коэффициенты равны нулю. Для четных коэффициентов имеем формулу

$$C_2 = -\frac{C_0}{6} = \frac{-C_0}{3!}, \qquad C_4 = -\frac{C_0}{6 \cdot 20} = \frac{C_0}{5!}.$$

Следовательно, ряд имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot C_0}{(2k+1)!} x^{2k}.$$

Проверим, сходится ли этот ряд в окрестности точки $x = 0$. Используем признак Даламбера: если

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1,$$

то ряд $\sum |a_n|$ сходится.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(-1)^{n+1} C_0 x^{2(n+1)}|(2n+1)!}{(2(n+1)+1)!|(1)^n C_0 x^{2n}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} < 1$$

для всех x.

Следовательно, одно решение получили:

$$y_1(x) = C_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k} = C_0 (1 + \frac{x^2}{3!} + \ \ldots). \tag{4.20}$$

Если положить $C_0 = 1$ (или любому другому числу), то одно частное решение имеет вид

$$y_1(x) = \frac{1}{x} \sin x.$$

Для определения второй функции фундаментальной системы можно воспользоваться формулой (4.19), т.к.
$\rho_1 = \rho_2 + 1$ (ρ_1 отличается от ρ_2 на целое число). Согласно формуле Остроградского-Лиувилля для однородного уравнения второго порядка

$$y''(x) + a(x)y' + b(x)y = 0$$

имеем

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = Ce^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt}, \tag{4.21}$$

$C = const$ есть начальное значение определителя Вронского, при $x = x_0$,

$$(y_1(x), y_2(x))$$

- фундаментальная система решений. Пусть

$$y_2(x)$$

есть неизвестная функция, а

$$y(x) = \frac{\sin x}{x}$$

; тогда раскрывая определитель из (4.21), получим

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = Ce^{\int -\frac{2}{x}dx} = Cx^{-2}.$$

Умножив правую и левую часть на

$$\frac{1}{y_1^2}$$

, получим
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = C\frac{x^2}{x^2\sin x^2}.$$
Интегрируя и полагая
$$C = -1$$
, т.к. ищем функцию $y_2(x)$, являющуюся частным решением, получим
$$\frac{y_2}{y_1} = -\int \frac{1}{\sin x^2}dx = \frac{\cos x}{\sin x} + C_1, \quad (C_1 = 0).$$
Следовательно,
$$y_2 = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{\cos x}{x}.$$
Фундаментальная система для данного уравнения –
$$\left(\frac{\sin x}{x}; \frac{\cos x}{x}\right),$$
общее решение имеет вид
$$y(x) = C_1\frac{\sin x}{x} + C_2\frac{\cos x}{x},$$
или решением этого уравнения являются два ряда: (4.20) и
$$y_1(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \frac{x^5}{6!} + \ldots$$

Пример 66.

Указать, имеет ли данное уравнение решение в виде степенного ряда (или обобщенного степенного ряда):
$$x^2y'' + (3x - 1)y' + y = 0.$$

Решение. Заметим, что функция $p(x)$ из (4.8) имеет вид
$$\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$$
, а не (4.10). Попробуем и в этом случае искать решение в виде ряда
$$y(x) = x^m\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k. \tag{4.22}$$

Подставляя (4.22) в уравнение, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}(m+k)(m+k-1)C_k x^{k+m-1} + 3\sum_{k=0}^{\infty}(m+k)C_k x^{k+m} -$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}(m+k)C_k x^{k+m-1} + \sum_{k=0}^{\infty}C_k x^{k+m} = 0.$$

Собирая коэффициенты при младшей степени x, получим

$$mC_0 = 0$$

. Так как $C_0 \neq 0$, то $m = 0$. Собирая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$-C_1 + C_0 = 0,$$

$$3{\cdot}C_1 - 2{\cdot}C_2 + C_1 = 0,$$

$$2{\cdot}1{\cdot}C_2 + 3{\cdot}2{\cdot}C_2 - 3{\cdot}C_3 + C_2 = 0,$$

$$3{\cdot}2{\cdot}C_3 + 3\cdot 3{\cdot}C_3 - 4{\cdot}C_4 + C_3 = 0.$$

Полагая $C_0 = 1$, находим, что $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, $C_3 = 6$. Можно вывести общую формулу

$$C_{k+1} = \frac{k(k_1) + 3k + 1}{k+1}.$$

И следовательно,

$$y(x) = 1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad (4.23)$$

где $a_n = n!$.

Найдем радиус сходимости данного ряда, используя теорему Коши-Адамара [4]

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty.$$

Так как полученный ряд (4.23) имеет нулевой радиус сходимости, следовательно, искать решение в виде ряда нельзя.

Замечание 1 Формальное нахождение решения в виде ряда без исследования его на сходимость может привести к неверному решению.

Замечание 2 Этот метод нахождения решения посредством степенных рядов применим к большому числу уравнений, встречающихся в физике и механике, таких как уравнения Бесселя и Лежандра.

Задачи для самостоятельного решения

I. Построить интегральные кривые (не решая уравнения), проходящие через заданные точки.

1. $y' = x^2 + y^2;\ (1,1)$.
2. $y' = x^2 - y^2;\ (0,0), (1,0)$.
3. $y' = \dfrac{y-3x}{x+3y};\ (0,0)$.

II. Найти общее решение или решить начальную задачу.

1. $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$.

   Ответ: $y = tg(C - arctgx)$

2. $y'\sin x - y\cos x = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

   Ответ: $y = \sin x$

3. $2x^2y' = x^2 + y^2, \quad y(1) = -1$.

   Ответ: $y(x) = x - \frac{2x}{\ln(ex)}$

4. $(4x-3y)dx + (2y-3x)dy = 0$.

   Ответ: $y^2 - 3xy + 2x^2 = C$

5. $e^{-y}(1+y') = 1$.

   Ответ: $e^x = C(1-e^{-y})$

6. $y' + \sin(x-y) = \sin(x+y), \quad y(\pi) = \frac{\pi}{2}$.

   Ответ: $tg(\frac{y}{2}) = e^{2\sin x}$

7. $xy' = y(\ln y - \ln x)$.

   Ответ: $y = xe^{(1+Cx)}$

8. $(3x-y)y' = x+y$.

   Ответ: $\exp\frac{x}{x-y} = C(y-x)$, $y = x$.

9. $y' + 2xy = 2xy^2$.

   Ответ: $y = \frac{1}{1+Ce^{x^2}}$

10. $y' + 2y = e^{-x}$.

    Ответ: $y = Ce^{-2x} + e^{-x}$

11. $xy' - 2y = x^3 \cos x$.

    Ответ: $y = Cx^2 + x^2 \sin x$

12. $3xy^2y' - y^3 = x^3$.

    Ответ: $y = \sqrt[3]{x^3 + Cx^2}$

13. $x^2 + xy' = y, \quad y(1) = 0$.

    Ответ: $y = x - x^2$

14. $y' - y\cos x = y^2 \cos x, \quad y(0) = 1$.

    Ответ: $y = xe^{1+x}$

15. $y' = \frac{y}{2y\ln x + y - x}, \quad y(1) = 1$.

    Ответ: $y = \frac{1}{y} + y \ln y$

III. Решить уравнения и найти особые решения, если они есть:

1. $2y' + \cos(x+y) = \cos(x-y)$.

   Ответ: $\cos x + \ln|\mathrm{tg}\frac{y}{2}| = C$, особых решений нет.

2. $(\sqrt{x}y + \sqrt{x})dx + (\sqrt{x}y - \sqrt{y})dy = 0$

   Ответ: $y + x - 2\sqrt{y} + \sqrt{x} + \ln(\sqrt{y}+1)|\sqrt{x} - 1| = C$, $x = 0$, особых решений нет.

3. $x^3y' + \cos 2y = 1$.

   Ответ: $\frac{1}{2}\mathrm{ctg}y + \frac{1}{2}x^{-2} = C$, $y = \pi k$, особых решений нет.

4. $8y' = \sqrt{4y + 5x + 1} - 10$.

   Ответ: $\sqrt{4y+5x+1} = \frac{x}{4} + C$, $y = -\frac{5}{4} - \frac{1}{4}$ - особое решение.

5. $y' = |y|$.

6. $y' = \sqrt{y - x}$.

7. $y' = \sqrt{y-x} + 1.$

D. Найти общие решения уравнений:

1. $(x^2+1)dx + (y^2+1)dy = 0.$

   Ответ: $x^3 + y^3 + 3(x+y) = C.$

2. $(e^x = 2)dy - ydx = 0.$

   Ответ: $y = C(1+2e^{-x})^{-1/2}.$

3. $2(x^2y - y)dy + \sqrt{3+y^2}dx = 0.$

   Ответ: $4\sqrt{3+y^2} = \ln\left|\frac{C(x+1}{x-1}\right|, x = \pm 1.$

4. $tgx \sin^2 ydx + \cos^2 xctgydy = 0.$

   Ответ: $ctg^2 y = tg^2 x + C.$

5. $(x-1)y' = y^2 x.$

   Ответ: $-\frac{1}{y} = x + \ln|x-1| + C, y = 0.$

6. $(\cos 2x - 1)y' = y^2 - 1$ Ответ: $\frac{y-1}{y+1} = Ce^{ctgx}, y = -1.$

7. $e^{2x-y}dx = e^{6x+y}dy$

   Ответ: $e^{2y} + e^{-4x}/2 = C.$

   IV. Найти частные решения, удовлетворяющие начальным условиям:

8. $y'ctgx + y = 2, \quad y(0) = -1.$

   Ответ:$y = -3\cos x + 2.$

9. $y' \sin x = \ln y, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1.$

   Ответ:$y = 1.$

10. $2xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx, \quad y(0) = 1.$

    Ответ:$3(1+x^2) = 2 + y^2.$

    V. Найти общие решения уравнений:

11. $y' = (3x - y + 1)^2$

    Ответ: $3x - y + 1 + \sqrt{3} = C(3x - y + 1 - \sqrt{3})e^{2\sqrt{3}x}.$

12. $y' = (x+y)^2.$

    Ответ: $y = \mathrm{tg}(x+C) - x.$

13. $y' = \sqrt{4x+2y-1}$.

Ответ: $\sqrt{4x+2y-1} - 2\ln(2+\sqrt{4x+2y-1}) = x + C$.

14. $y' = -tg^2(x-y)$.

Ответ:$y = \frac{1}{2}\sin 2(x-y) - x + C$.

15. $y'' - y = 0$.

Ответ: $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$.

16. $y''' - y'' - y' + y = 0$.

Ответ: $y = (C_0 + C_1)e^x + C_2e^{-x}$.

17. $y''' + y = 0$.

Ответ: $y = C_1e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\frac{\sqrt{3}}{2})$.

18. $y^{IV} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$.

Ответ: $y = e^x((C_0 + C_1x)\cos x + (B_0 + B_1x)\sin x)$.

19. $y''' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x$.

Ответ: $C_1e^{-x} + C_2 + C_3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + e^x(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4})$.

20. $y'' - y = e^x x\cos x$.

Ответ: $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + e^x((-\frac{1}{5}x + \frac{14}{25})\cos x +$
$(+\frac{2}{5}x + \frac{2}{25})\sin x)$.

21. $y'' - 4y' + 4y = x^2$.

Ответ: $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \frac{1}{8}(2x^2 + 4x + 3)$.

22. $y'' + y = e^x$.

Ответ: $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}e^x$.

23. $y'' + y = 2\cos^3 x(\sec^2 x - 1)$.

Ответ: $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{16}(4x\sin x + \cos 3x)$.

6 Контрольные работы.

Контрольная работа 1.

Задание 1. Решить дифференциальное уравнение.

1.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

2.

$$(x - y^2)dx + 2xydy = 0.$$

3.

$$y = xy' + \sqrt{-ay'}.$$

4.

$$2yp\frac{dp}{dy} = 3p^2 + 4y^2.$$

5.

$$xy(xy^2 + 1)dy - dx = 0$$

6. Найти решение уравнения

$$y''(1 + \ln x) + \frac{1}{x}y' = 2\ln x,$$

удовлетворяющее условию

$$y(1) = \frac{1}{2}, \;\; y'(1) = 1$$

Задание 2. Решить уравнение

$$y'' = \frac{2y}{x^2}$$

*Задание 3.*Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + z \\ \frac{dz}{dx} = z + y + z \end{cases}$$

Контрольная работа 2.

Задание 1. Решить дифференциальное уравнение.

1.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x).$$

2.

$$\frac{dy}{dx}(x^2y^3 + xy) = 1.$$

3.

$$x^2(y+1)dx + (x^3-1)(y-1)dy = 0.$$

4.

$$(3x^2+2xy-y^2)dx + (x^2-2xy-3y^2)dy = 0.$$

5.

$$y = 2xy' + \sqrt{1+y'^2}.$$

6. Найти решение уравнения

$$y'' = \frac{y'}{x}(1+\ln\frac{y'}{x}),$$

удовлетворяющее условию

$$y(1) = \frac{1}{2}, \;\; y'(1) = 1$$

Задание 2. Решить уравнение

$$y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0$$

*Задание 3.*Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y+z \\ \frac{dy}{dt} = x+y \\ \frac{dz}{dt} = x+z \end{cases}$$

Контрольная работа 3.

Задание 1. Решить дифференциальное уравнение.

1.

$$y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx}.$$

2.

$$y' - \frac{xy}{2(x^2-1)} - \frac{x}{2y}0.$$

и найти интегральную кривую, проходящую через точку $x = 0.y = 1$ 3.

$$(1+y)(e^{2x} - e^y dy) - (1+y)dy = 0.$$

4.

$$2y = xy' + \frac{1}{{y'}^2}.$$

5.

$$xdy + ydx = y^2dx.$$

6. Найти решение уравнения

$$3y'y'' = y + \ln x) + {y'}^3 + 1,$$

удовлетворяющее условию

$$y(0) = -2, \;\; y'(0) = 0$$

Задание 2. Решить уравнение

$$x2y'' - 4xy' + 6y = x$$

*Задание 3.*Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = x \end{cases}$$

Контрольная работа 4.

Задание 1. Решить дифференциальное уравнение.

1.

$$(y + x)dy = (y - x)\ dx.$$

2.

$$xy' + y = xy^2 \ln x.$$

3.

$$y' - y\frac{2x - 1}{x^2} = 1.$$

4.

$$xy{y'}^2 - (x^2 + y^2)y' + xy = 0.$$

5.

$$y'(x + \sin y) = 1.$$

6. Найти решение уравнения

$$y^2 + y'^2 - 2yy'' = 0,$$

удовлетворяющее условию

$$y(0) = 1, \ \ y'(0) = 1$$

Задание 2. Решить уравнение

$$(1 + x2)y'' - 3(1 + x)y' + 4y = (1 + x)^3$$

*Задание 3.*Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -3y - z \\ \frac{dz}{dx} = y - z \end{cases}$$

Контрольная работа 5.

Задание 1. Решить дифференциальное уравнение.

1.

$$(x - y\cos\frac{y}{x})dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0.$$

2.

$$(x - 2yx - y^2)dy + y^2dx = 0.$$

3.

$$ye^y = (y^3 + 2xe^y)y'.$$

4.

$$\sqrt{a^2 = x^2}dy + (x + y - \sqrt{a^2 = x^2})dx = 0.$$

5.

$$y\frac{dp}{dy} = -p + p^2$$

6. Найти решение уравнения

$$yy' + y'^2 + yy'' = 0,$$

удовлетворяющее условию

$$y(0) = 1, \;\; y(-1) = 0$$

Задание 2. Решить уравнение

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0$$

*Задание 3.*Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + 5z \\ \frac{dz}{dx} + y + 3z = 0 \end{cases}$$

Контрольная работа 6.

Задание 1. Решить дифференциальное уравнение.

1.

$$3y - 7x + 7 = (3x - 7y - 3)\frac{dy}{dx}.$$

2.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{1}{x(1+x^2)}.$$

3.

$$y' + y\cos x = \sin x \cos x.$$

4.

$$\mathrm{tg} x\frac{dy}{dx} - y = a.$$

5.

$$x^3dx - (x^4 + y^3)dy = 0$$

6. Найти решение уравнения

$$2y' + ({y'}^2 - 6x)y'' = 0,$$

удовлетворяющее условию

$$y(2) = 0, \;\; y'(2) = 2$$

Задание 2. Решить уравнение

$$(3x+2)y''+7y'=0$$

*Задание 3.*Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx}+3y+4z=2x \\ \frac{dz}{dx}-y-z=x, \end{cases}$$

$$y(0)=0, \quad z(0)=0.$$

Контрольная работа 7.

Задание 1. Решить дифференциальное уравнение.

1.

$$(x+2y+1)\frac{dy}{dx}=2x+4y+3.$$

2.

$$\frac{dy}{dx}=2xy-x^3+x.$$

3.

$$(1-x^2)y'+xy=a.$$

4.

$$(x^2-1)^{\frac{3}{2}})dy+(x^3+3xy\sqrt{x^2-1})dx=0$$

5.

$$xy^3dx=(x^2y+2)dy$$

6. Найти решение уравнения

$$y'y^2+yy''-y'^2=0,$$

удовлетворяющее условию

$$y(0)=1, \; y'(0)=2$$

Задание 2. Решить уравнение

$$x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=0$$

Задание 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + 2y + z = \sin x \\ \frac{dz}{dx} - 4y - 2z = \cos x. \end{cases}$$

Контрольная работа 8.

Задание 1. Решить дифференциальное уравнение.

1.

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y+2}{x-y-1}\right)^2.$$

2.

$$\frac{dy}{dx} + y\frac{d\varphi}{dx} = \varphi(x)\frac{d\varphi}{dx},$$

φ - данная функция от x. 3.

$$(1-x^2)y' + xy = a.$$

4.

$$xdy - ydx = y^2dx.$$

5.

$$(x^2y - x^2 + y - 1)dx + (xy + 2x - 3y - 6)dy = 0)$$

6. Найти решение уравнения

$$2yy'' - xy' + 4y = 0,$$

удовлетворяющее условию

$$y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0$$

Задание 2. Решить уравнение

$$x^2y'' + xy' + 4y = 0$$

Задание 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z \\ \frac{dz}{dx} = -y \end{cases}$$

Контрольная работа 9.

Задание 1. Решить дифференциальное уравнение.

1.
$$(x+y)^2\frac{dy}{dx} = a^2.$$

2.
$$\cos x\frac{dy}{dx} = y\sin x + \cos x^2$$

3.
$$y'(x\cos y + a\sin 2y) = 1.$$

4.
$$a(xy\prime + 2y) = xyy'.$$

5.
$$y' = \left(1 + \frac{y-1}{2x}\right)^2.$$

6. Найти решение уравнения

$$2yy'' + y^2 + {y'}^2 = 0,$$

удовлетворяющее условию

$$y(0) = 1, \;\; y'(0) = 1$$

Задание 2. Решить уравнение

$$y'' = \frac{2y}{x^2}$$

Задание 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 4x - y + 36t = 0 \\ \frac{dy}{dt} + 2x - y + 2e^t = 0, \end{cases}$$

$$x(0) = 0, \;\;\; y(0) = 1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Амандус Н.Е., Кожанов А.И., Шваб И.В. Обыкновенные дифференци-

альные уравнения. Часть1. Основной курс. НГУ, Новосибирск, 2008.

2 Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа, т.1 М.: "Высшая школа 1981.

3 Фукс Б.Л., Левин В.И. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. Специальные главы. Ленинград, 1951.

4 Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2. М.: Физматлит, 2001.

5 Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: "Высшая школа 1963.

6 Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: Физматлит, 2005.