§ 1 Лекция 1

Понятие числа - одно из основных в математике. Первым важным классом чисел, который мы знаем фактически с первого класса, является класс натуральных чисел $\mathbb{N}$, с помощью которых мы осуществляем простой счет. Добавление к этому множеству натуральных чисел со знаком минус и нуля формирует класс целых чисел $\mathbb{Z}$. Следующим классом, включающим в себя класс $\mathbb{Z}$, является класс рациональных чисел $\mathbb{Q}$, элементы которого можно представить в виде $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$. Множество рациональных чисел, в отличие от вышеперечисленных классов, является замкнутым относительно 4 классических математических операций, т.е. сложение, умножение, вычитание и деление не выводят за пределы этого множества. Уже потребности элементарной математики приводят к необходимости расширения числовой области. Так, например, среди рациональных чисел нет числа, которое будучи возведенным в квадрат, дает 2, то есть $\sqrt{2}$ не является рациональным числом.

Для доказательства этого факта применим метод доказательства от противного: пусть существует дробь $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$ такая что $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Без ограничения общности мы можем считать эту дробь несократимой, то есть p и q лишены общих множителей. Так как $p^2 = 2q^2$, то p^2 - четное число, а значит и p - четное. Покажем, что последнее утверждение верно. Действительно, предположим, что p - нечетное, тогда $p = 2k+1$, где $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $p^2 = 4k^2 + 4k + 1$ – нечетное число, и мы получаем противоречие с тем фактом, что p^2 число четное. Таким образом, p четное число, которое можно записать в виде $p = 2k$. Но тогда q должно быть нечетным числом, иначе дробь $\frac{p}{q}$ была бы сократимой. Подставим теперь выражение полученное для p в дробь, мы получаем $q^2 = 2k^2$ и, следовательно q^2, а значит и q являются четными числами, что приводит к противоречию, так как q у нас получилось одновременно четным и нечетным.

Мы ставим себе задачей расширить область рациональных чисел, присоединив к ним числа новой природы – иррациональные, которые вместе образуют числа называемые вещественными или действительными. Естественно это расширение строится таким образом, чтобы все свойства рациональных чисел, относящиеся к арифметическим действиям над ними и к сочетанию их с помощью знаков равенства и неравенства остались справедливыми. Такое построение можно осуществлять разными способами. Есть так называемый аксиоматический способ построения вещественных чисел заключающийся в том, что формулируются определенные аксиомы, которым должны удовлетворять элементы, а затем объявляется, что все те элементы, которые удовлетворяют перечисленным аксиомам образуют множество вещественных чисел. Есть более конструктивные подходы, как, например, построение чисел с помощью сечения Дедекинда. Мы изложим построение теории вещественных чисел через их представление в виде десятичных дробей. Перед этим приведем здесь одну важную формулу. Обозначим через $n!$ (читается n-факториал) – произведение всех натуральных чисел от 1 до n. Кроме того, положим по определению, $0! = 1$. Биномом Ньютона называется формула

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n,$$

где a и b - любые вещественные числа, n - натуральное число, а коэффициенты C_n^0, C_n^1, C_n^2, C_n^k, C_n^n называются биномиальными коэффициентами и вычисляются по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Доказательство, которое мы не будем приводить, основано на методе математической индукции.

Начнем с повторения хорошо известных из курса арифметики свойств рациональных чисел.

Свойства рациональных чисел. Рациональные числа можно складывать и умножать. Операции сложения и умножения подчиняются некоторым основным правилам (или аксиомам), которые мы сейчас перечислим.

1. Для любых a и b существует единственное число $a+b$, называемое суммой a и b.
2. $a+b = b+a$ для любых a и b (коммутативность сложения).
3. $(a+b) = a+(b+c)$ для любых a, b, c (ассоциативность сложения).
4. Существует число 0 такое, что $a+0 = a$ для всех a.
5. Для всякого a существует единственное число $(-a)$, называемое противоположным и такое, что $a+(-a) = 0$.
6. Для любых a, b существует единственное число ab, называемое произведением a и b.
7. $ab = ba$ для любых a и b (коммутативность умножения).
8. $(ab)c = a(bc)$ для любых a, b, c (ассоциативность умножения).
9. $a(b+c) = ab+ac$ для любых a, b, c (дистрибутивность).
10. Существует число 1 такое, что $a \cdot 1 = a$ для любых a.
11. $1 \neq 0$.
12. Для всякого $a \neq 0$ существует единственное число a^{-1}, называемое обратным и такое, что $aa^{-1} = 1$.

Наряду со сложением и умножением можно ввести вычитание и деление по правилам:

$$a - b = a + (-b), \quad \frac{a}{b} = ab^{-1},$$

а также возведение в целую положительную степень:

$$a^1 = a, \quad a^2 = a \cdot a, \quad a^3 = a^2 \cdot a, \quad a^n = a^{n-1} \cdot a.$$

Целые неположительные степени ненулевого $a \in Q$ определяются так:

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = (a^n)^{-1}.$$

Все обычные правила школьной алгебры вытекают из аксиом 1-12.

Любая система элементов, для которых определены две операции, удовлетворяющие аксиомам 1-12, называется полем. Таким образом, множество Q рациональных чисел есть поле. Аксиомы поля не полностью характеризуют множество Q, поскольку рациональные числа еще можно сравнивать по величине, т.е. определять, какое из двух чисел больше или меньше. Правила сравнения основаны на небольшом числе простых аксиом порядка.

13. Если a и b числа, то из трех утверждений: $a = b$, $a < b$, $a > b$ – одно обязательно справедливо, а остальные два ложны.
14. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.
15. Если $a < b$, то $a + c < b + c$ для всякого c.
16. Если $a < b$ и $0 < c$, то $ac < bc$.

Следствиями этих аксиом порядка являются все обычные правила работы с неравенствами, которые мы здесь выводить не будем. Отметим лишь, что с отношением порядка естественно связано важное понятие абсолютной величины (модуля) числа. Модулем числа a называется число $|a|$, равное a в случае $a \geq 0$ и $(-a)$ в случае $a < 0$. Для любых двух чисел и b справедливо так называемое неравенство треугольника

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

легко вытекащее из аксиом 1-16.

Всякое поле называется упорядоченным, если в нем определено отношение порядка, удовлетворящее аксиомам 13-16. Таким образом, совокупность рациональных чисел Q есть упорядоченное поле.

Наконец, в Q имеется еще одно свойство, которое не вытекает из аксиом 1-16. Это свойство, называемое аксиомой Архимеда, состоит в следующем.

17. *Для каждого числа a существует целое число k такое, что $a < k$.*

Установим важное следствия из аксиомы Архимеда.

Следствие. Если $a \leq \frac{1}{n}$ для всех натуральных n, то $a \leq 0$.

Доказательство. Пусть вопреки данному утверждению для некоторого положительного a неравенство $a \leq \frac{1}{n}$ справедливо при всех натуральных n. Заметим, что $a^{-1} > 0$.

Действительно, предположив обратное, из аксиом 12, 16 получаем

$$a^{-1} < 0, \quad a^{-1}a = 1 < 0 \cdot a = 0 \quad \Longrightarrow 1 < 0 \text{ -- противоречие.}$$

То, что $1 > 0$ вытекает из утверждения, что для любого $a \neq 0$ имеем $a^2 > 0$ (аксиомы 4, 9), а $1 = 1^2$. Теперь, так как $a^{-1} > 0$, то по аксиоме Архимеда найдется такое натуральное m, что $a^{-1} < m$. Умножив обе части этого неравенства на положительное число $\frac{a}{m}$, придем к противоречию $a > \frac{1}{m}$.

Заметим, что для полного описания всех свойств рациональных чисел надо к аксиомам 1-17 добавить еще одну:

18. Для каждого рационального числа a существует такое целое число $m \neq 0$, что число ma является целым.

Таким образом, рациональные числа могут быть определены аксиоматически следующим образом: *множество элементов, удовлетворяющая аксиомам 1-18, называется множеством рациональных чисел.*

§ 1 Лекция 2

Система рациональных чисел недостаточна не только для потребностей математического анализа, но и для решения многих задач элементарной математики. Так, например, уже в средней школе было показано, что не из всякого положительного рационального числа можно извлечь квадратный корень, что длину диагонали квадрата с рациональной стороной нельзя выразить рациональным числом и т. д. Чтобы иметь возможность извлекать корни или измерять длины любых отрезков, появилась потребность во введении новых чисел, называемых иррациональными. Множество рациональных чисел вместе с иррациональными образуют все множество действительных (вещественных) чисел. Существует несколько способов определения действительных чисел. Например, аксиоматический: *множество элементов, удовлетворяющих аксиомам 1-17, называется множеством действительных чисел.*

Но для того, чтобы лучше понять природу действительных чисел и разницу между рациональными и иррациональными числами, определим все эти понятия через их представление в виде десятичной дроби.

Десятичное представление рациональных чисел С каждым неотрицательным рациональным числом можно связать бесконечную десятичную дробь по следующему правилу. Пусть a – данное число. В силу аксиомы Архимеда существуют целые числа, большие a. Выберем среди них наименьшее и обозначим его через $a_0 + 1$. Целое число a_0 обладает, очевидно, свойством

$$a_0 \leq a < a_0 + 1.$$

Рассмотрим далее десять чисел

$$a_0 + \frac{0}{10}, \quad a_0 + \frac{1}{10}, \quad \dots a_0 + \frac{9}{10}$$

и выберем среди них такое $a_0 + \frac{a_1}{10}$, что

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leq a < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}.$$

В десятичных обозначениях это неравенство имеет вид

$$a_0, a_1 \leq a < a_0, a_1 + 10^{-1}.$$

Тем же способом определим a_2 так, чтобы

$$a_0, a_1 a_2 \leq a < a_0, a_1 a_2 + 10^{-2}.$$

Продолжая действовать аналогично, мы найдем бесконечную последовательность знаков a_1, a_2, a_3 ... таких, что

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n \leq a < a_0, a_1 a_2 \dots a_n + 10^{-n}.$$

Получившаяся бесконечная десятичная дробь $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ называется десятичным представлением числа a. Может случиться так, что все знаки, начиная с некоторого a_n, будут равны нулю. В этом случае соответствующую дробь принято считать конечной и отбрасывать все, нули, которыми она оканчивается.

Итак, всякое неотрицательное рациональное число полностью определяется своим десятичным представлением. В качестве десятичного представления отрицательного рационального числа a принято использовать отрицательную десятичную дробь

$$-a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

где $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ есть десятичное представление числа $|a|$. Можно показать, что при таком построении в представлении рационального числа невозможно в десятичной записи иметь в конце бесконечный ряд девяток. Из аксиомы Архимеда можно показать, что разным рациональным числам соответствуют разные десятичные представления.

Оказывается, что десятичные представления рациональных чисел обладают чрезвычайно важным свойством: все они являются периодическими дробями. Более того, каждая периодическая десятичная дробь, не оканчивающаяся бесконечным рядом девяток, служит десятичным представлением некоторого рационального числа.

Определение периодической дроби. *Бесконечная дробь $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ называется периодической, если найдутся целое число $k \geq 0$ и натуральное t такие, что при каждом $n > k$ выполняется равенство $a_{n+t} = a_n$. Число t называется пероидом данной дроби, а сама дробь периодической и обозначается так*

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_k \overline{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+t}}.$$

Итак, между рациональными числами и периодическими десятичными дробями, не оканчивающимися бесконечным рядом девяток, существует взаимно однозначное соответствие. Это соответствие позволяет естественным образом определить на множестве периодических дробей операции сложения, умножения и отношение порядка, превратив его в упорядоченное архимедово поле. Для подсчета суммы двух десятичных дробей надо найти сумму отвечающих им рациональных чисел, а затем перевести ее в бесконечную десятичную дробь. Умножение дробей вводится аналогично.

Переходим теперь к иррациональным числам.

Определение. *Иррациональным числом называется произвольная непериодическая дробь $a = \pm a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, где a_0 – целое неотрицательное число, а a_k – цифры. Дроби со знаком плюс считаются положительными иррациональными числами, а со знаком минус – отрицательными.*

Вместе с рациональными иррациональные числа образуют множество действительных (вещественных) чисел, обозначаемое далее буквой R. Определим сложение, умножение и порядок на множестве действительных чисел так, чтобы эти определения не противоречили уже имеющимся действиям и порядку в множестве рациональных чисел и чтобы удовлетворить всем аксиомам 1–17.

Начнем с определения порядка. Пусть дроби $a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, и $b_0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$ отвечают действительным числам a и b соответственно. Первая из этих дробей считается больше второй в том и только том случае , когда $a > b$. Данное определение равносильно следующему правилу: дробь $a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ больше дроби $b_0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$, если $a_0 > b_0$ или если найдется такой индекс n, что $a_k = b_k$ при $k < n$, но $a_n > b_n$.

По определению, считается, что все положительные числа больше нуля, а все отрицательные – меньше нуля. Если $a < 0$ и $b > 0$, то положим $a < b$. Наконец, если $a < 0$ и $b < 0$, то $a < b$ при условии $|a| > |b|$. При таком определении сравнения сохраняется порядок в множестве рациональных чисел, причем понятно, что выполняются аксиомы 13, 14, 17. Еще одно важное свойство порядка в множестве действительных чисел, непосредственно вытекающее из определения и называемое плотностью рациональных и иррациональных чисел, составляет содержание следующего утверждения.

Лемма о плотности. *Каковы бы ни были действительные числа a и b ($a < b$), существует рациональное число r и иррациональное число γ такие, что $a < r < b$, $a < \gamma < b$.*

Пусть $A \subset R$. Множество A называется ограниченным сверху (снизу), если существует действительное число K (k) такое, что $x \leq K$ ($x \geq k$) для всех $x \in A$. При этом число K (k) называется верхней (нижней) гранью множества A. Наименьшая среди верхних границ множества A называется точной верхней границей или супремумом множества A и обозначается через $\sup A$ или $\sup_{x \in A} x$. Аналогично, наибольшая среди нижних границ множества A называется его точной нижней гранью или инфимумом и обозначается через $\inf A$ или $\inf_{x \in A} x$.

Теорема о существовании верхней и нижней граней. *Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) множество действительных чисел имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.*

Приступим теперь к определению арифметических операций с действительными числами. Пусть a и b – действительные числа. Составим множество S всевозможных сумм вида $\alpha+\beta$, где $\alpha,\beta \in Q$, $\alpha < a$, $\beta < b$. По определению положим

$$a + b = \sup(\alpha + \beta).$$

В заключение скажем несколько слов об операции умножения действительных чисел. Пусть a и b – положительные вещественные числа. Рассмотрим множество P всевозможных произведений вида $\alpha\beta$, где $0 < \alpha,\beta \in Q$, $\alpha < a$, $\beta < b$. По определению полагаем

$$ab = \sup P.$$

Если a и b оба отрицательны, то считаем $ab = |a||b|$; если же a и b разных знаков, то $ab = -|a||b|$. Произведение вида $a \cdot 0$ по определению равно нулю при всех вещественных a. Такое определение согласовано с умножением рациональных чисел и гарантирует выполнение аксиом 6–12 и 16.

Сформулируем в заключение один результат, связанный со свойством плотности действительных чисел.

Если заданы два числа a и b, то совокупность всех чисел x таких, что $a \le x \le b$, назывется числовым отрезком.

Определение 2.1. Пусть дана последовательность числовых отрезков $\{[a_n, b_n]\}$, $a_n < b_n$. Эту последовательность будем называть системой вложенных отрезков, если для любого n выполняются неравенства $a_n \le a_{n+1}$ и $b_{n+1} \le b_n$.

Для такой системы выполняются включения

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset$$

то есть каждый следующий отрезок содержится в предыдущем.

Теорема 2.2. Для всякой системы вложенных отрезков существует по крайней мере одна точка, которая входит в каждый из этих отрезков.

Это свойство называется свойством непрерывности действительных чисел в смысле Кантора.

Определение 2.3. Пусть задана система отрезков $\{[a_n, b_n]\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Мы скажем, что длина отрезков $[a_n, b_n]$ стремится к нулю с возрастанием n, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер n_ε такой, что для всех номеров $n \ge n_\varepsilon$ выполняется неравенство $b_n - a_n < \varepsilon$.

Теорема 2.4. Для всякой системы вложенных отрезков, по длине стремящихся к нулю, существует единственная точка, которая принадлежит всем отрезкам данной системы.

Каждому отрезку прямой сопоставим некоторое единственное положительное число, удовлетворяющее условиям:

1. равным отрезкам соответствуют равные числа;

2. Если B точка отрезка AC и отрезкам AB и BC соответствуют числа a и b, то отрезку AC соответствует число a + b;

3. некоторому отрезку соответствует число 1.

Число, соответствующее некоторому произвольному фиксированному отрезку и удовлетворяющее условиям 1-3 называется длиной этого отрезка.

Принцип Кантора позволяет доказать, что для каждого положительного числа можно найти отрезок, длина которого равна этому числу. Таким образом, между множеством положительных вещественных чисел и множеством отрезков, которые откладываются от некоторой точки прямой по заданную сторону от этой точки, можно установить взаимно однозначное соответствие. Это позволяет дать определение числовой оси и ввести соответствие между действительными числами и точками на прямой. Для этого возьмем некоторую прямую и выберем на ней точку O, которая разделит эту прямую на два луча. Один из этих лучей назовем положительным, а второй отрицательным. Тогда будем говорить, что мы выбрали направление на этой прямой.

Определение 4.3. Числовой осью будем называть прямую, на которой заданы

а) точка O, называемая началом отсчета или началом координат;

б) направление;

в) отрезок единичной длины.

Теперь каждому вещественному числу a сопоставим точку M на числовой прямой таким образом, чтобы

а) числу 0 соответствовало начало координат;

б) $|OM| = |a|$ – длина отрезка от начала координат до точки M равнялась модулю числа;

в) если a – положительно, то точка берется на положительном луче и, если оно отрицательно, то — на отрицательном. Это правило устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством вещественных чисел и множеством точек на прямой. Числовую прямую (ось) будем также называть вещественной прямой (осью). Отсюда также следует геометрический смысл модуля вещественного числа: модуль числа равен расстоянию от начала координат до точки, изображающей это число на числовой оси.

§ 3 Лекция 3

Логические кванторы. Математика оперирует предложениями, про которые мы обычно можем определенно сказать, истинны они или ложны. Такие предложения называются высказываниями. Высказывания являются объектом изучения раздела математики, который называется математической логикой. Мы не будем вдаваться в детали этого раздела, но будем использовать обозначения, которыми математическая логика пользуется. Для краткой записи математических высказываний мы будем употреблять следующие логические символы:

1. Квантор всеобщности - $\forall$, который читается как «любой», «всякий», «для любого», «для всякого».

2. Квантор существования - $\exists$, который читается как «существует», «можно найти», «найдется».

Например, запись $\forall x$, $\exists y$ такой, что $x + y = 5$ читается следующим образом:
«для любого x можно найти (существует) y такой, что $x + y = 5$».

3. Знак следования $\Rightarrow$. Если α и β два высказывания, то запись $\alpha \Rightarrow \beta$ будет означать: «из α следует β», α влечет за собой β», «если α то β».

Отметим здесь один важный момент, связанный с понятием необходимого и достаточного условия, который очень часто будет встречаться в формулировках матемтаических утверждений.

Если мы имеем, что «из α следует β», то это означает, что «для того чтобы было выполнено α необходимо, что выполнялось β» или «для того, чтобы выполнялось β, достаточно, чтобы было выполнено α».

Иными словами: α является достаточным условием для β, а β необходимым для α. Если, например, не выполнено α, то никакого заключения относительно справедливости β мы не можем сделать. Если же теперь не выполнено β, то отсюда вытекает, что и α также не выполняется.

4. Знак равносильности $\Leftrightarrow$. Запись $\alpha \Leftrightarrow \beta$ означает: «α равносильно β», «из α следует β и из β следует α, «α необходимо и достаточно для выполнения β» или «α выполнено тогда и только тогда, когда выполнено β».

5. Знак отрицания $\neg$. Запись $\neg\alpha$ означает «не α», «неверно, что α имеет место».

Замечание. Использование кванторов позволяет легко строить отрицание высказываний. Запись $\neg\forall$ («не для любого») понимается в том смысле, что «существует объект, не обладающий требуемым свойством», а запись $\neg\exists$ («не существует») можно прочитать: «любой объект не обладает указанным свойством».

Например, высказывание $\neg\forall n \in \mathbb{N}$ число $4n-1$ - простое означает: «не для всякого натурального числа n число $4n-1$ простое», что равносильно высказыванию: «существует натуральное число n, для которого число $4n-1$ составное».

А высказывание $\neg\exists$ такое n, что $(2n+1)$ - четное означает: «не существует натурального числа n, для которого $2n+1$ - четное число, что равносильно высказыванию «для всякого натурального n число $2n+1$ является четным».

Множества и операции над ними. Понятие множества – одно из основных понятий в математике, поэтому точного определения этого понятия не существует. Понятие множества настолько общее, что трудно дать ему какое-либо определение, которое не сводилось бы просто к замене слова "множество" его синонимами: совокупность, собрание элементов. Как все основные понятия, оно определяется аксиоматически, но здесь мы не будем этого делать и вместо точного определения дадим синонимы этого понятия, позволяющие понять, что это такое.

Синонимами понятия «множество» являются: совокупность, набор, а также все аналогичные слова, употребляющиеся в более конкретных ситуациях, такие как коллекция, группа, стая и т.п. Например, множество людей, служащих на одном корабле – экипаж или команда, множество томов одного автора – собрание сочинений.

Объект, входящий в данное множество, будем называть *элементом этого множества.* Количество элементов в множестве может быть любым. Если в множестве нет ни одного элемента, то такое множество будем называть пустым. Например, множество вещественных решений уравнения $x^2+6x+10=0$ пусто. Обозначать пустое множество будем символом $\varnothing$.

Если множества обозначать большими латинскими буквами, а элементы множества малыми, то запись $\alpha \in A$ будет читаться как «α есть элемент множества A» или «элемент α принадлежит множеству A», а запись $\alpha \notin A$ «α не является элементом множества A» или «элемент α не принадлежит множеству A».

Если количество элементов в множестве невелико, то множество можно задать перечислением его элементов в фигурных скобках, например, $A=\{1,3,6,10\}$. Также можно задать и бесконечные множества, если ясен закон образования их элементов. Например, $B=\{1,4,9,16,...\}$. Естественно считать, что перед нами множество квадратов натуральных чисел. Поэтому, если не возникает разночтений, в этой ситуации не задают общий член элементов множества.

Множества очень часто задаются некоторым свойством, по которому можно определить, входит взятый объект в данное множество или нет. Для записи такого множества в фигурных скобках сначала пишут, как обозначается элемент множества, затем вертикальную черту, после которой записывается характеристическое свойство. Например,

$$C = \{x \,|\, x - \text{натуральное число}, x = 4n + 1, n = 0, 1, 2, 3, ...\}$$

- множество натуральных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 1.

Определение 3.1. *Если даны два множества A и B и известно, что каждый элемент множества B является элементом множества A, то будем говорить, что множество B является подмножеством множества A или, что множество A содержит в себе множество B. Это обозначается следующей записью: $B \subset A$.*

Определение 3.2. *Два множества A и B называются равными, если $B \subset A$ и $A \subset B$.*
Очевидно, что множества равны тогда и только тогда, когда они состоят из одинаковых элементов.

Операции над множествами. Довольно часто в задачах требуется из двух (или более) данных множеств образовать тем или иным способом одно третье множество. Для этого вводится несколько операций над множествами.

Определение 3.3. *Объединением (суммой) двух множеств A и B называется называется множество $C = A \cup B$, состоящее из всех элементов, которые входят хотя бы в одно из данных множеств.*

Пример. Пусть $A = [-2, 3]$, $B = [0, 4)$. Тогда $C = [-2, 4)$.

Аналогично определяется сумма любого конечного или бесконечного числа множеств:

Определение 3.4. *Если A_n, $n = 1, 2, \ldots$ - произвольные множества, то их объединение $\bigcup A_n$ есть совокупность элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A_n.*

Определение 3.5. *Пересечением двух множеств A и B называется множество $C = A \cap B$, состоящее из всех элементов, которые входят в каждое из данных множеств.*

Пример. Пусть $A = [-2, 3]$, $B = [0, 4)$. Тогда $C = [0, 3]$.

Определение 3.6. *Если A_n, $n = 1, 2, \ldots$ - произвольные множества, то их пересечение $\bigcap A_n$ есть совокупность элементов, каждый из которых принадлежит одновременно всем множествам A_n.*

Операции объединения и пересечения множеств по своему определению коммутативны и ассоциативны

$$A \cup B = B \cup A, \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$A \cap B = B \cap A, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Кроме того, они взаимно дистрибутивны

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \tag{3.1}$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). \tag{3.2}$$

Сразу заметим, что равенство $A = B$ двух множеств равносильно тому, что $A \subset B$ и $B \subset A$. Для того, чтобы доказать, что $A \subset B$ надо показать, что из того факта, что $x \in A$ следует $x \in B$. Аналогично и для вложения $B \subset A$. Иногда бывает удобно применить отрицание принадлежности элемента множеству для доказательства, например, факта, что $A \subset B$. То есть если мы можем показать, что из того, что $x \notin B$ следует, что $x \notin A$, тогда сразу получаем, что $A \subset B$.

Докажем равенство (3.1). Пусть $x \in (A \cup B) \cap C$. Это означает, что $x \in C$ и по крайней мере одному из множеств A или B. Но тогда x принадлежит по крайней мере одному из множеств $A \cap C$ или $B \cap C$. Таким образом мы показали , что $(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Докажем теперь обратное вложение. Пусть $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Тогда $x \in A \cap C$ или $x \in B \cap C$. Следовательно $x \in C$ и, кроме того, $x \in A$ или $x \in B$, то есть $x \in A \cup B$.

Определим для множеств операцию вычитания.

Определение 3.7. *Разностью двух множеств A и B называется множество $C = A \setminus B$, состоящее из всех элементов, которые входят в A, но не входят в B.*

Пример. Пусть $A = [-2, 3]$, $B = [0, 4)$. Тогда $C = [-2, 0)$.

Часто приходится рассматривать тот или иной запас множеств, являющихся подмножествами некоторого основного множества S, например, различные множества точек на числовой прямой.

Определение 3.8. *Разность $S \setminus A$ называется дополнением множества A. Это множество, состоящее из всех элементов, которые входят в S, но не входят в A.*

Пример. Пусть $S = \mathbb{R}$, $A = [0, +\infty)$. Дополнением множества A будет множество $(-\infty, 0)$.

В теории множеств и ее приложениях весьма важную роль играет так называемый принцип двойственности, который основан на следующих соотношениях:

$$S \setminus \bigcup_{\alpha} A_\alpha = \bigcap_{\alpha} (S \setminus A_\alpha), \quad S \setminus \bigcap_{\alpha} A_\alpha = \bigcup_{\alpha} (S \setminus A_\alpha),$$

где параметр α пробегает некоторое множество индексов.

Отображение множеств. Общее понятие функции. Понятие функции, известное со школы, когда вы отображали действительные числа в действительные числа, может быть легко обобщено на множества любой природы.

Определение 3.8. *Пусть X и Y – два произвольных множества. Правило f, по которому для каждого элемента $x \in X$ можно найти единственный элемент $y \in Y$, называется отображением.*

При специализации природы множеств X и Y возникают специальные типы отображений: функция, вектор-функция, оператор, функционал.

Множество X называется областью определения отображения f, а Y - множеством значений. Элемент $y = f(x)$ называется образом элемента x. Пусть $A \subset X$. Тогда множество $\{f(a) : a \in A\}$ называется образом множества A и обозначается $f(A)$. Совокупность всех тех элементов $x_1, x_2, \dots \in X$, образом которых является элемент $y \in Y$, называется полным прообразом элемента y и обозначается $f^{-1}(y)$.

Будем говорить, что f есть отображение множества X на Y, если $f(X) = Y$; такое отображение также называют сюръекцией. В общем случае, когда $f(X) \subset Y$, говорят, что f есть отображение X в Y. Если для любых двух различных элементов x_1 и x_2 из X образы $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ также различны, то f называют инъекцией. Отображение $f : X \to Y$, которое одновременно является сюръекцией и инъекцией, называется биекцией или взаимнооднозначным отображением.

Приведем основные свойства отображений:

$$1. f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B),$$

$$2. f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

Свойства 1,2 остаются в силе для объединений любого числа (конечного и бесконечного) множеств.

Доказательство второго утверждения в 2: пусть $y \in f(A \cap B)$, тогда x, для которого $y = f(x)$, принадлежит $A \cap B$. Таким образом, $x \in A$ и $x \in B$, следовательно, $f(x) = y \in f(A) \cap f(B)$.

В качестве контрпримера на обратное соотношение, можно привести операцию проектирования плоскости на ось x: отрезки $x \in [0, 1]$, $y = 0$, $x \in [0, 1]$, $y = 1$; а также функцию $y = x^2$ и отрезки $[-2, -1/2]$, $[1/2, 2]$.

§ 4 Лекция 4

Счетные и несчетные множества. Понятие мощности множества. Рассматривая различные множества, мы замечаем, что иногда можно указать число элементов в данном множестве или по крайней мере оценить его количество. Например, количество вершин в многоугольнике или количество молекул в некотором объеме газа. Эти множества содержат конечное, хотя может быть и неизвестное количество элементов. В математике часто встречаются множества, имеющие бесконечное множество элементов: натуральные числа, множество всех точек на прямой, множество кругов на плоскости. При этом, говоря, что множество бесконечно, мы имеем в виду, что из него можно извлечь один элемент, два элемента и т.д., причем после каждого такого шага в этом множестве останутся элементы.

Два конечных множества можно сравнивать по числу элементов. Можно ли подобным образом сравнивать два бесконечных множества? Очевидно, что непосредственным пересчетом это сделать невозможно. В то же время заметим, что в случае конечных множеств, можно определить еще один способ сравнения этих множеств по числу элементов. Можно вместо подсчета элементов, попытаться установить биекцию, т.е. взаимно-однозначное соответствие между элементами этих множеств. Ясно, что для конечных множеств биекция существует только для множеств с одинаковым количеством элементов.

Заметим, что если первый способ годится только для сравнения конечных множеств, то второй годится и для бесконечных тоже. Второй способ и кладется в основу сравнения любых двух множеств вне зависимости от количества элементов в них.

Простейшим среди бесконечных множеств является множество натуральных чисел.

Определение 4.1. Назовем счетным множеством всякое множество, элементы которого можно биективно сопоставить со всеми натуральными числами.

Пример 4.2. Множество целых чисел

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \end{array}$$

или

$$\begin{array}{rcll} n & \leftrightarrow & 2n+1, & n \geq 0 \\ n & \leftrightarrow & 2|n|, & n < 0. \end{array}$$

Пример 4.3. Множество всех четных натуральных чисел. Соответствие $n \leftrightarrow 2n$.

Пример 4.4. Покажем, что множество всех рациональных чисел счетно. Каждое рациональное число однозначно записывается в виде несократимой дроби $\alpha = \frac{p}{q}$, $q > 0$. Назовем сумму $|p| + q$ высотой рационального числа α. Ясно, что число дробей с данной высотой n конечно. Например, высоту 1 имеет число 0/1, высоту 2 – числа 1/1 и -1/1, высоту 3 – числа 2/1, 1/2, -2/1 и -1/2 и т.д. Будем нумеровать все рациональные числа по возрастанию высоты, т.е. сначала выпишем все числа высоты 1, потом высоты 2 и т.д. При этом каждое рациональное число получит некоторый номер, т.е. будет установлено взаимно-однозначное соответствие между всеми натуральными числами и рациональными числами.

Перечислим некоторые свойства счетных множеств.

1. Всякое подножество счетного множества конечно или счетно.

2. Сумма любого конечного или счетного множества счетных множеств есть снова счетное множество.

Несколько менее тривиальное свойство, которое говорит о том, что переход к несчетному множеству является качественным моментом, т.е. в рамках счетной процедуры получить несчетное множество невозможно.

3. Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

Фактически это утверждение показывает, что среди бесконечных множеств счетные множества являются самыми маленькими.

Определение 4.5. Бесконечное множество, не являющееся счетным, называется несчетным множеством.

Эквивалентность множеств. Определение счетного множества мы дали через понятие натурального ряда. В основе этого определения лежит метод, по которому мы сравниваем между собой любые два множества. В связи с этим определим понятие эквивалентности, которое является обобщением понятия равенства для случая конечных множеств.

Определение 4.6. Два множества, A и B, называются эквивалентными (обозначение $A \sim B$), если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Это понятие применимо как конечным, так и к бесконечным множествам. Если множества конечны, то эквивалентность означает равное количество элементов в множествах.

Определение 4.7. Множество называется счетным, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел.

4. Всякое бесконечное множество эквивалентно некоторому своему собственному подмножеству. В качестве примера можно привести все натуральные числа и четные натуральные; все рациональные числа и целые.

Существуют ли вообще несчетные множества?

Теорема 4.8. Множество действительных чисел, заключенных между нулем и единицей, несчетно.

Доказательство. Предположим, что дано какое-то счетное множество (всех или только некоторых) действительных чисел, лежащих на $[0,1]$, тогда между этим множеством и множеством $\mathcal{N}$ можно составить биекцию. Фактически это означает, что все числа можно пронумеровать. Отметим также, что каждое вещественное число можно записать единственным образом в виде десятичной дроби. Суммируя вышесказанное получаем следующее представление

$$\begin{array}{llllllll}
\alpha_1 & = & 0, & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} & \dots \\
\alpha_2 & = & 0, & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} & \dots \\
\alpha_3 & = & 0, & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} & \dots \\
\dots \\
\alpha_n & = & 0, & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} & \dots \\
\dots
\end{array}$$

Построим десятичную дробь $\beta = 0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$ с помощью диагональной процедуры Кантора. За b_1 примем произвольную цифру, не совпадающую с α_{11}; за b_2 – произвольную цифру, не совпадающую с α_{22}; за b_n примем произвольную цифру не совпадающую с α_{nn} и так далее. Легко видеть, что построенная таким образом дробь, не может совпадать ни с одной дробью, входящей в вышеуказанный перечень, поскольку от всех этих дробей она отличается по крайней мере одной цифрой. Таким образом, ни одна счетная система действительных чисел на $[0,1]$ не исчерпывает это множество и, следовательно, оно несчетно. Оказывается, что все множество вещественных чисел не порождает множество большее, чем множество $[0,1]$. Действительно, легко показать, что эти два множества эквивалентны. Для этого надо взять суперпозицию 2 отображений: $[0,1] \to (0,1)$ и отображения $y = \operatorname{tg} \pi(x - 1/2)$, осуществляющее биекцию этих множеств.

Теорема Кантора-Бернштейна. Пусть A и B – два произвольных множества. Если существуют биекция f множества A на $B_1 \subset B$ и биекция g множества B на $A_1 \subset A$, то A и B эквивалентны.

Определение 4.9. Говорят, что два произвольных множества A и B имеют одинаковую мощность (равномощны), если они эквивалентны.

Одинаковая мощность заменяет понятие одинакового количества элементов для конечных множеств.

Отношения между мощностями исчерпываются следующими случаями. Пусть $m(A)$ – мощность множества A, тогда, если:

1. A эквивалентно части B, а B эквивалентно части $A \Longrightarrow m(A) = m(B)$.

2. A содержит некоторую часть эквивалентную B, но в B нет части эквивалентной части $A \Longrightarrow m(A) > m(B)$.

3. B содержит некоторую часть эквивалентную A, но в A нет части эквивалентной части $B \Longrightarrow m(A) < m(B)$.

Гипотеза континуума: есть ли множество, мощность которого больше мощности натуральных чисел и меньше мощности действительных чисел? В рамках различных теоретико-множественных аксиоматик она решается по-разному. Мы, в частности, при изложении теории математического анализа, придерживаемся аксиоматики, в которой ни доказать, ни опровергнуть эту гипотезу невозможно.

Теорема 4.10. Пусть A – некоторое множество и пусть $\mathcal{A}$ –множество, элементами которого являются всевозможные подмножества множества A. Тогда $m(A) < m(\mathcal{A})$.

Напомним некоторые математические законы, известные вам из школьного курса математики. Процедура возведения некоторого вещественного числа x в степень $n > 1$, где $n \in \mathbb{N}$ состоит в достаточно простой процедуре (возможно самой простой из нетривиальных).

$$x^n = x \cdot x \cdots x.$$

Для $x \neq 0$ положим $x^0 = 1$. Определив $x^{-1} = \frac{1}{x}$, будем писать

$$x^{-2} = (x^{-1})^2 = \frac{1}{x^2}, \quad x^{-3} = \frac{1}{x^3} \quad \text{и т.д.}$$

Пусть c – положительное действительное число. Верно следующее утверждение:

Теорема 4.11. Для каждого положительного числа c и каждого целого $n > 1$ существует единственное положительное действительное число x такое, что $x^n = c$.

Это число называется корнем n-ой степени из c и обозначается $\sqrt[n]{c} = x$. Мы полагаем, что $\sqrt[n]{0} = 0$, а для нечетного n также $\sqrt[n]{-c} = -\sqrt[n]{c} = x$. Действительно, $0^n = 0$, и для нечетных n имеем $\left(-\sqrt[n]{c}\right)^n = (-1)^n \left(\sqrt[n]{c}\right)^n = -c$.

Определим теперь понятие дробной степени, понятие возведения в иррациональную степень мы оставим на попозже. Придадим смысл выражению c^r, где c – положительное число и r – рациональное число. По определению,

$$c^r = c^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{c^p} = \left(\sqrt[q]{c}\right)^p,$$

где p, q – целые числа, $q > 0$, а дробь предполагается несократимой. Если c – отрицательное число, то c^r можно определить только в том случае, когда рациональная дробь имеет нечетный знаменатель. В этом случае мы применяем указанное выше определение. Наконец, при $c = 0$ полагают $c^r = 0$. Заметим, что это определение возведения в степень выбрано таким образом, чтобы сохраняли силу законы для степеней

$$a^n b^n = (ab)^n, \quad a^{n+m} = a^n a^m, \quad (a^n)^m = a^{nm},$$

где n, m – произвольные целые числа, a, b – произвольные вещественные числа с одним лишь ограничением, что значения $a = 0$, $b = 0$ исключаются, когда соответствующие выражения теряют смысл.

Метод математической индукции. Мы с вами сфрмулировали теорему о существовании супремума и инфимума у любого ограниченного сверху, соответственно снизу, множества. Легко видеть, что имеет место следующее утверждение:

Утверждение 4.12. Пусть S – некоторое непустое множество целых чисел. Если S ограничено снизу, то S содержит наименьший элемент.

То есть инфимум этого множества принадлежит самому множеству. Это достаточно очевидное утверждение мы сформулировали здесь, поскольку оно лежит в основе всем известного метода математической индукции.

Выведем формулу

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{4.1}$$

Мы утверждаем, что формула верна для всех натуральных n. Если это утверждение ложно, то существует натуральное число, для которого соотношение (4.1) неверно: множество натуральных чисел, для которого ложно (4.1) не пусто и, следовательно, согласно Утверждению 4.12, в нем имеется наименьшее число r, поскольку множество натуральных чисел ограничено снизу. Тогда либо $r = 1$ (случай 1); либо $r > 1$ (случай 2).

Случай 1) невозможен, причем это проверяется непосредственно. Покажем, что и случай 2) тоже невозможен. Действительно, в этом случае имеем

$$1 + 2 + \cdots + r \neq \frac{r(r+1)}{2}, \tag{4.2}$$

причем

$$1 + 2 + \cdots + (r-1) = \frac{(r-1)r}{2}. \tag{4.3}$$

Прибавляя к обеим частям формулы (4.3) число r, после простых преобразований, получаем

$$1 + 2 + \cdots + (r-1) + r = \frac{(r-1)r}{2} + r = \frac{r(r+1)}{2},$$

что противоречит (4.2). Таким образом (4.1) справедливо для всех натуральных n. В итоге получаем, что если мы хотим доказать некоторое утверждение для всех натуральных чисел сразу, то поступаем следующим образом:

1. Первый шаг: показываем, что утверждение справедливо для $n = 1$.

2. Второй шаг: показываем, что если утверждение верно для некоторого $n = k$, то оно верно и для $n = k + 1$.

§ 5 Лекция 5

Начнем с установления понятия числовой последовательности. Представим себе натуральный ряд чисел

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots, n', \ldots, \tag{5.1}$$

записанных в порядке возрастания, т.е. мы считаем, что в этой записи $n' > n$. Если теперь в ряде (5.1) заменить, по какому-нибудь закону $n \to f(n) = x_n$, каждое натуральное число n некоторым вещественным числом x_n, то получится новая последовательность

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots, x_{n'}, \ldots, \tag{5.2}$$

члены или элементы x_n которой занумерованы всеми натуральными числами и расположены в порядке возрастания номеров. Обратим внимание, что последовательность упорядочена по номерам, т.е. важно на каком месте находится выбранный для рассмотрения элемент. Таким образом, в последовательности важен порядок, в котором записываются числа. Т.е. с точки зрения математического анализа, последовательности

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots; \quad 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0 \ldots$$

разные.

Также отметим, что при $n' > n$ элемент x_n предшествует $x_{n'}$ независимо от того $x_n > x_{n'}$ или $x_n < x_{n'}$.

Подчеркнем, что числа, образующие последовательность, не должны быть обязательно различными. Обычно последовательность задается формулой для вычисления x_n, который называется общим членом последовательности:

$$x_n = 1, \quad x_n = (-1)^{n+1}, \quad x_n = \frac{1}{n}, \quad x_n = \frac{1 + (-1)^n}{n};$$

либо записью первых нескольких элементов, из которой видно как можно определить элемент данной последовательности, стоящий на произвольном месте, т.е. существует может быть не формула, но по крайней мере правило вычисления общего члена. Последовательность (5.2) часто обозначают через x_n, $\{x_n\}$, отождествляя ее с общим членом этой последовательности.

И последнее замечание, которое фактически вытекает из (5.1), (5.2): членов последовательности всегда бесконечно много, т.е. мы не рассматриваем последовательности, которые содержат конечное число элементов; а вот множество значений, которое принимают элементы может быть как конечным, так и бесконечным.

Предел последовательности.

Определение 5.1. Постоянное число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для каждого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$, существует такой номер N, что все значения x_n, у которых номер $n > N$, удовлетворяют неравенству

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{5.3}$$

С применением логических кванторов определение выглядит следующим образом:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N$ имеет место $|x_n - a| < \varepsilon$.
Формальная запись данного утверждения выглядит так: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Важный момент в этом определении это возможная бесконечная малость параметра ε, участвующего в определении предела. Т.е. согласно определению мы получаем, что какое бы мы ни взяли маленькое число в качестве ε, все члены последовательности, начиная с некоторого, будут попадать в интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, т.е. будут находиться сколь угодно близко к a. Интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ часто называют ε-окрестностью числа a.

Также заметим, что согласно определению, число a является пределом, если в любой окрестности числа a находится бесконечное число элементов, а вне только конечное число.

Теорема 5.2. Последовательность $\{x_n\}$ не может стремиться одновременно к двум пределам.

Доказательство. Действительно, предположим противное: последовательность $\{x_n\}$ одновременно стремится к двум пределам: $x_n \to a$, $x_n \to b$. Возьмем любое число $a < c < b$. Пусть $\varepsilon_1 = c - a$, $\varepsilon_2 = b - c$. Поскольку $x_n \to a$, то по заданному ε_1 найдется такой номер N_1, что для $n > N_1$ будет выполняться $x_n < c$. С другой стороны, поскольку $x_n \to b$, то по заданному ε_2 найдется такой номер N_2, что для $n > N_2$ будет выполняться $x_n > c$. Таким образом, при $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ и $N > \max\{N_1, N_2\}$ мы одновременно будем иметь $x_n < c$ и $x_n > c$ для всех $n > N$, что невозможно. Это противоречие доказывает наше утверждение.

Пример. Докажем, что $\lim \frac{1}{n} = 0$. Нам нужно по заданному ε найти N, для которого выполняется, согласно определению $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Из последнего неравенства мы немедленно получаем $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Откуда легко видно, что $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

Только для постоянных последовательностей зависимости N от ε нет.

Определение 5.3. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно малой, если $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Термин *бесконечно малая* надо понимать именно в смысле предела, а не каких-то фиксированных значений элементов последовательности. Ни одно число, какое бы маленькое оно не было, не является бесконечно малым. Т.е. понятие бесконечно малой определяется для некоторой изменяющейся величины, в частности, принимающей значения, определяющие заданную последовательность.

Пример. Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}=\frac{1}{3}.$$

Рассмотрим разность

$$x_n-\frac{1}{3}=\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}-\frac{1}{3}=\frac{-5n+10}{3(3n^2+2n-4)}$$

и оценим ее абсолютную величину при $n>2$. Этого будет достаточно, так как по определению предела неравенство (5.3) должно выполняться начиная с некоторого N. Имеем

$$\left|x_n-\frac{1}{3}\right|=\frac{5n-10}{3(3n^2+2n-4)}<\frac{5n}{3(3n^2-4)}<\frac{1}{n}.$$

Таким образом, $\left|x_n-\frac{1}{3}\right|<\frac{1}{n}$ и, как следствие, мы имеем, что $\left|x_n-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$ при $n>N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

Пример. Рассмотрим бесконечную убывающую геометрическую прогрессию

$$1,q,q^2,\dots q^n,\dots,\quad |q|<1.$$

Под суммой s_n конечного числа элементов заданной геометрической прогрессии мы понимаем

$$s_n=1+q+q^2+\dots+q^{n-1}.$$

Как известно,

$$s_n=\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Легко видеть, что сумма s бесконечного числа членов геометрической прогрессии будет равна $\lim_{n\to\infty}s_n=s$. Покажем, что

$$s=\frac{1}{1-q}.$$

Действительно,

$$|s_n-s|=\left|\frac{1-q^n}{1-q}-\frac{1}{1-q}\right|=\frac{1}{1-q}q^n<\varepsilon$$

при

$$q^n<(1-q)\varepsilon\quad\Rightarrow\quad n\ln q<\ln((1-q)\varepsilon),$$

откуда, в силу того, что $|q|<1$

$$n>\frac{\ln((1-q)\varepsilon)}{\ln q},\quad N=\left[\frac{\ln((1-q)\varepsilon)}{\ln q}\right]$$

Теоремы о последовательностях, имеющих предел.

1. Если $\lim x_n=a$, и $a>p$, $(a<q)$, то и все члены последовательности, начиная с некоторого, тоже будут $>p$ $(<q)$.

Действительно, при любом $p < a$ легко подобрать число $\varepsilon > 0$ так, чтобы было $a - \varepsilon > p$. Для этого достаточно взять $\varepsilon < a - p$. Но по определению предела, найдется такой номер N, что для всех $n > N$ выполнено неравенство

$$x_n > a - \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad x_n > p.$$

2. Если $\lim x_n = a > 0$, то и общий член $x_n > 0$, начиная с некоторого номера N $(p = 0)$.
3. Если $\lim x_n = a \neq 0$, то существует $r > 0$ такой, что общий член $|x_n| > r$, начиная с некоторого номера N (если $a > 0$, то $r = p > 0$; если $a < 0$, то $r = q > 0$).
4. Если $\{x_n\}$ имеет предел, то она ограничена, т.е. существует $M > 0$ такое, что $|x_n| \leq M$ для всех значений n.

Действительно, в определении предела зафиксируем $\varepsilon = 1$, тогда мы имеем, что при всех $n > N(1)$ все члены последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < 1$, т.е. $a - 1 < x_n < a + 1$. Этому неравенству могут не удовлетворять лишь первые N членов последовательности. Положим

$$M = \max\{|a-1|, |a+1|, |x_1|, \ldots, |x_N|\},$$

тогда очевидно $x_n \leq M$ для всех значений n.

Утверждение 4. не может быть обращено: не всякая ограниченная последовательность имеет предел, например, последовательность $x_n = (-1)^n$.

Определение 5.4. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого сколь угодно большого наперед заданного числа $M > 0$ существует номер $N(M)$ такой, что $|x_n| > M$ для всех $n > N$.

Пример. Последовательность $\{x_n = n\}$ является бесконечно большой. А вот последовательность $x_{2n-1} = 0$, $x_{2n} = 2n$, бесконечно большой уже не является. Это сразу следует из того факта, что при любом фиксированном M для любого N существуют номера $n > N$ такие, что $x_n = x_{2m} = 0 < M$.

§ 6 Лекция 6

Существует простая связь между бесконечно большими и бесконечно малыми последовательностями:

если последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно большой, то последовательность $\alpha_n = \frac{1}{x_n}$, состоящая из обратных к ченам исходной последовательности величин, будет бесконечно малой;

если последовательность $\{\alpha_n\}$ (не обращающаяся в ноль) является бесконечно малой, то последовательность $x_n = \frac{1}{\alpha_n}$, состоящая из обратных к ченам исходной последовательности величин, будет бесконечно большой.

При арифметических действиях над последовательностями мы всегда будем предполагать, что эти действия происходят со значениями последовательностей с одинаковым номером. Например, если заданы две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, то под их суммой мы будем понимать последовательность

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots.$$

Предельный переход в равенстве и неравенстве.

1. Если для последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ начиная с некоторого номера N имеет место равенство $x_n = y_n$, $\forall n > N$, причем каждая из них имеет конечный предел

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

тогда $a = b$. Если одна из них является бесконечно большой, то и другая будет тоже бесконечно большой.

Этой теоремой пользуются обычно в форме предельного перехода в равенстве: из $x_n = y_n$ вытекает, что и $\lim x_n = \lim y_n$.

2. Если для последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ начиная с некоторого номера N имеет место равенство $x_n \geq y_n$, $\forall n > N$, причем каждая из них имеет конечный предел

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

тогда $a \geq b$.

Этой теоремой пользуются обычно в форме предельного перехода в неравенстве: из $x_n \geq y_n$ вытекает, что и $\lim x_n \geq \lim y_n$.

Обращаем внимание на то, что из строго неравенства $x_n > y_n$, вообще говоря, НЕ вытекает строгое же неравенство для пределов $\lim x_n > \lim y_n$. Это легко видеть на примере $x_n = \frac{1}{n}$ и $y_n = -\frac{1}{n}$.

3. Пусть для последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ начиная с некоторого N выполняются неравенства

$$x_n \leq y_n \leq z_n,$$

причем последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ стремятся к общему пределу a:

$$\lim x_n = \lim z_n = a,$$

тогда и последовательность $\{y_n\}$ стремится к тому же пределу: $\lim y_n = a$.

Отметим, что во всех случаях результаты могут быть распространены на случай бесконечных пределов.

Леммы о бесконечно малых.

Лемма 1. Сумма любого конечного числа бесконечно малых есть также бесконечно малая величина.

Доказательство. Без ограничения общности, проведем доказательство для случая двух бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно определению бесконечно малой, она может быть сделана сколь угодно малой, в частности, меньше чем $\frac{\varepsilon}{2}$, таким образом, по заданному ε найдется номер N' такой, что при $n > N'$ будет

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично для последовательности $\{\beta_n\}$ найдется такой номер N'', что при $n > N''$ будет

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $N = \max\{N', N''\}$. Тогда при таком выборе N для всех $n > N$ будем иметь

$$|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

следовательно последовательность $\{\alpha_n + \beta_n\}$ является бесконечно малой.

Лемма 2. Произведение ограниченной последовательности $\{x_n\}$ на бесконечно малую последовательность $\{\alpha_n\}$ есть бесконечно малая.

Доказательство. Пусть для всех значений n выполняется $|x_n| \leq M$. Если задано число $\varepsilon > 0$, то по числу $\frac{\varepsilon}{M}$ для бесконечно малой $\{\alpha_n\}$ найдется такой номер N, что при $n > N$ будет выполено

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Тогда для тех же значений n, очевидно,

$$|\alpha_n x_n| = |\alpha_n||x_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon,$$

откуда немедленно следует, что последовательность $\{\alpha_n x_n\}$ является бесконечно малой.

Арифметические операции над последовательностями. Следующие свойства пределов облегчают вычисление пределов, делая ненужным восхождение каждый раз к определению предела и поиску $N(\varepsilon)$.

1. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют конечные пределы

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

то и их сумма (разность) также имеет конечный предел

$$\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b.$$

Доказательство. Замечаем, что если $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$, то последовательности $\alpha_n = x_n - a$, $\beta_n = y_n - b$ являются бесконечно малыми. Нетрудно показать, что и обратно тоже верно: если, например, $x_n = a + \alpha_n$ и α_n бесконечно мала, то $\lim x_n = a$. Доказательство следует непосредственно из определения предела последовательности. Таким образом, мы можем записать $x_n = a + \alpha_n$ и $y_n = b + \beta_n$. Тогда

$$x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n + \beta_n).$$

Согласно Лемме 1, последовательность $\{\alpha_n + \beta_n\}$ является бесконечно малой. Следовательно, из вышесказанного следует, что $x_n \pm y_n$ имеет пределом число $a \pm b$. $\square$

Очевидно, что результаты, приведенные в 1. имеют место для любого конечного числа слагаемых.

2. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют конечные пределы

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

то и их произведение имеет конечный предел

$$\lim x_n y_n = ab.$$

Доказательство. Исходя из равенств

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n,$$

имеем

$$x_n y_n = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n).$$

Выражение в скобках, в силу лемм 1,2 есть величина бесконечно малая. Отсюда немедленно следует, что последовательность $\{x_n y_n\}$ имеет своим пределом ab.

3. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют конечные пределы

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

причем $b \neq 0$, то и их частное имеет конечный предел

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

В силу того, что $b \neq 0$, начиная с некоторого n все члены последовательности будут удовлетворять неравенству $|y_n| > r$, где r – некоторое постоянное число и, следовательно, все частные вида $\frac{x_n}{y_n}$ будут иметь смысл.

Неопределенные выражения. До этого мы рассматривали выражения

$$x_n \pm y_n, \quad x_n y_n, \quad \frac{x_n}{y_n} \tag{6.1}$$

в предположении, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют конечные пределы, из которых, в случае частного $\lim y_n \neq 0$. Мы пока не рассматривали случаи, когда пределы последовательностей (один или оба) бесконечны. Или, например, в случае частного, когда знаменатель обращается в нуль. В некоторых случаях это не приводит к дополнительным трудностям, а в некоторых мы получаем так называемые неопределенности, в том смысле, что без дополнительных знаний о самих последовательностях ничего нельзя сказать и об их пределе; и этот самый предел зависит от того, как стремится к своему пределу каждая из последовательностей.

Рассмотрим некоторые случаи. Пусть

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

1. Если a конечно, а $b = \infty$, то

$$\lim(x_n \pm y_n) = \infty, \quad \lim x_n y_n = \infty, \quad \text{при} \quad a \neq 0, \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = 0.$$

Первый случай достаточно простой. Во втором случае из того факта, что $\lim x_n \neq 0$ следует, что начиная с некоторого n имеем $|x_n| > r$, где r – некоторое число. Из того, что последовательность $\{y_n\}$ бесконечно большая вытекает, что по любому заданному M существует n такой, что $|y_n| > \frac{M}{r}$, но тогда

$$\forall M, \exists n : \quad |x_n y_n| > r\frac{M}{r} = M,$$

что означает, что $\{x_n y_n\}$ является бесконечно большой. В третьем же случае, $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ есть произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую, что, как известно, является бесконечно малой последовательностью.

2. Если $a = \pm\infty$, а $b = \pm\infty$, то

$$\lim(x_n + y_n) = \pm\infty, \quad \lim x_n y_n = \infty.$$

3. Если $a = \infty$, а b конечно, то

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \infty.$$

Здесь легко заметить, что при $b = 0$ мы имеем произведение бесконечно больших последовательностей, при b конечном мы имеем ситуацию, описанную в 1. для второго подслучая.

Переходим теперь к случаям, которые составляют действительную неопределенность.

4. Если $a = b = 0$, тогда $\lim \frac{x_n}{y_n}$ представляет из себя неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Пример. Предел равен 0: $x_n = \frac{1}{n^2}$, $y_n = \frac{1}{n}$; предел равен ∞: $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n^2}$; нет предела: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, y_n = \frac{1}{n}$.

5. Если $a = b = \pm\infty$, тогда $\lim \frac{x_n}{y_n}$ представляет из себя неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример. Предел равен 0: $x_n = n$, $y_n = n^2$; предел равен ∞: $x_n = n^2$, $y_n = n$; нет предела: $x_n = (2 + (-1)^n)n, y_n = n$.

6. Если $a = 0$, $b = \pm\infty$, тогда $\lim x_n y_n$ представляет из себя неопределенность вида $0 \cdot \infty$.

Пример. Предел равен 0: $x_n = \frac{1}{n^4}$, $y_n = n^2$; предел равен ∞: $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = n^2$; нет предела: $y_n = (2 + (-1)^n)n, x_n = \frac{1}{n}$.

7. Рассмотрим сумму $x_n + y_n$ в случае, когда $a = +\infty$, $b = -\infty$, т.е. стремятся к бесконечностям разного знака. В этом случае неопределенность имеет вид $\infty - \infty$.

Пример. Предел равен 0: $x_n = \frac{1}{n^4}$, $y_n = -\frac{1}{n^4}$; предел равен ∞: $x_n = n^2$, $y_n = n$; нет предела: $x_n = n + (-1)^n, y_n = -n$.

8. Если последовательность имеет вид $x_n^{y_n}$, где $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$.

Пример. Пусть $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Можно показать, что $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$. Причем последовательность $\{x_n\}$ возрастающая. Легко видеть, что

$$1 \leq \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} \leq e^{\frac{1}{n}} \to 1, \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

откуда из теоремы о двух милиционерах вытекает сразу, что $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n^2})^n = 1$. Можно таким же образом показать, что $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2n})^n = \frac{1}{2}$.

В случаях 4-8 учитывается закон изменения последовательностей и осуществляются преобразования исходных соотношений, приводящие либо к полному исчезновению неопределенностей, либо к одному из случаев 1-3. Подобное исследование носит название раскрытия неопределенности и в целом является нетривиальной задачей.

§ 7 Лекция 7

Приведем пример раскрытия неопределенности. Нужно вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}.$$

Эта неопределенность имеет вид $\frac{\infty}{\infty}$. Проведем преобразования как числителя, так и знаменателя, таким образом, чтобы указанная неопределенность исчезла. Для этого разделим числитель и знаменатель на 3^n и получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n(\frac{2}{3})^n + 1}{(-1)^n 2(\frac{2}{3})^n + 3} = \frac{1}{3},$$

в силу того, что

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

и как следствие

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} (-1)^n 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

Предел монотонной последовательности. Последовательность x_n называется неубывающей, если $x_n \le x_{n+1}$. Последовтельности называют также возрастающими (или строго возрастающими), если $x_n < x_{n+1}$. Аналогично вводится понятие невозрастающей или убывающей последовательности. Последовательности обоих видов называются общим названием – монотонные последовательности.

Теорема 7.1. Пусть дана неубывающая последовательность $\{x_n\}$. Если она ограничена сверху, то необходимо имеет конечный предел, в противном же случае – она стремится к $+\infty$. Точно также всегда имеет предел невозрастающая последовательность, ограниченная снизу. В противном же случае ее пределом является $-\infty$.

Доказательство. Докажем первую часть теоремы. Пусть последовательность ограничена сверху. Так как все члены последовательности образуют некоторое числовое множество, то оно, как ограниченное сверху, имеет $\sup\{x_n\} = a$, откуда, в силу свойств пределов сразу вытекает, что $\lim_{n\to\infty} x_n \le a$. Рассмотрим характерные свойства точных верхних граней. Во-первых, для всех n имеем $x_n \le a$. Во-вторых, для $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ такой, что $x_N > a - \varepsilon$. Так как последовательность x_n является монотонно возрастающей, то при $n > N$ также будет выполняться неравенство $x_n > a - \varepsilon$, откуда немедленно следует тот факт, что $\lim x_n = a$.

Если же монотонно возрастающая последовательность не ограничена сверху, тогда $\forall M$ найдется по крайней мере один член последовательности x_k, для которого выполнено $x_k > M$, но тогда, в силу монотонного возрастания, для всех $n > k$ также будет иметь место $x_n > M$, что является определением бесконечно большой последовательности.

Пример. Рассмотрим последовательность задаваемую следующим образом

$$x_1 = \sqrt{c}, \quad x_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}}, \quad x_3 = \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c}}} \quad \ldots .$$

Эта последовательность очевидно возрастает, так как подкоренное выражение все время увеличивается. Это легко заметить из рекуррентной формулы

$$x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}.$$

Докажем, что она ограничена числом $\sqrt{c} + 1$. Проводим доказательство ограниченности с помощью индукции. Действительно, $x_1 = \sqrt{c} < \sqrt{c} + 1$; если теперь $x_n < \sqrt{c} + 1$, то для следующего значения будем иметь

$$x_{n+1} < \sqrt{c + \sqrt{c} + 1} < \sqrt{c + 2\sqrt{c} + 1} = \sqrt{c} + 1.$$

Таким образом, из доказанной выше теоремы мы получаем существования предела. Сам предел мы находим из равенства

$$x_{n+1}^2 = c + x_n,$$

вытекающего из рекуррентной формулы, переходя в равенстве к пределу и пользуясь теоремой о предельном переходе в равенствах.

Следующий пример посвящен среднему арифметико-геометрическому. Пусть заданы положительные $a > b$ числа. Составим их среднее арифметическое и геометрическое

$$a_1 = \frac{a + b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{ab}.$$

Очевидно, что эти числа лежат между исходными. Легко показать, что первое среднее больше второго. Это следует из того, что квадрат разности всегда больше 0, т.е.

$$a > a_1 > b_1 > b.$$

Для чисел a_1 и b_1 тоже построим оба средних

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1},$$

причем

$$a_1 > a_2 > b_2 > b_1.$$

Таким образом, если члены a_n и b_n определены, то оба средних определяются по формулам

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},$$

причем

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n.$$

Таким образом образуются две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, из которых первая убывающая, а вторая возрастающая и в то же время

$$a > a_n > b_n > b.$$

Т.е. обе последовательности ограничены и, следовательно, стремятся к конечным пределам. Т.е. факт существования пределов у обоих последовательностей доказан. Пусть

$$\alpha = \lim a_n, \quad \beta = \lim b_n.$$

Теперь мы можем перейти к пределу в равенстве

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

и получить

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{откуда} \quad \alpha = \beta,$$

т.е. обе последовательности и средних арифметических и геометрических стремятся к общему пределу, который часто, согласно Гауссу, обозначают $\mu(a, b)$. Выражение для этого числа дается через эллиптический интеграл.

Число e. Рассмотрим последовательность $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. И попытаемся применить к ней теорему о монотонных последовательностях. Монотонный характер последовательности не очевиден, так как основание степени уменьшается. Для доказательства монотонности прибегнем к биному Ньютона:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \cdots$$

$$+ \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n} =$$

$$2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \quad (7.1)$$

Если теперь перейти от x_n к x_{n+1}, то прежде всего добавится положительный член, а каждый из написанных выше уменьшится за счет увеличения знаменателя. Отсюда сразу следует $x_n < x_{n+1}$, т.е. последовательность является возрастающей. Покажем, что она ограничена сверху. Все множители в (7.1) в скобках меньше 1, следовательно, если их опустить, то выражение (7.1) увеличится, так что

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots + \frac{1}{n!} = y_n.$$

Далее в знаменателях дробей все числа, начиная с 3, заменим на 2 и, таким образом, еще увеличим правую часть последнего неравенства

$$y_n < 2 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3,$$

откуда $x_n < 3$. Следовательно, по доказанной теореме, эта последовательность имеет предел, который мы обозначаем через

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Сформулируем один результат, касающийся монотонных последовательностей, изменяющихся навстречу друг другу:
пусть даны монотонно возрастающая последовательность $\{x_n\}$ и монотонно убывающая последовательность $\{y_n\}$, причем всегда $x_n < y_n$. Если их разность $y_n - x_n$ стремится к 0, то обе последовательности имеют общий конечный предел:

$$c = \lim x_n = \lim y_n.$$

Заметим, что фактически этот результат есть перефразировка леммы о вложенных отрезках $[a_n, b_n]$, где роль последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ играют концы числовых промежутков, т.е. $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$.

§ 8 Лекция 8

Принцип сходимости. Пусть задана последовательность $\{x_n\}$. Можно ли сформулировать общий признак существования предела, не требующий знание предела, как это было в самом определении предела. То есть по членам самой последовательности определять сходится она или нет. Эту задачу решает теорема, принадлежащая чешскому математику Больцано о французскому математику Коши; ее называют принципом сходимости или чаще критерием Коши.

Критерий Коши. Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела конечный предел необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал номер N такой, что неравенство

$$|x_n - x'_n| < \varepsilon \tag{8.1}$$

выполнялось, лишь только $n, n' > N$.

Иногда вместо неравенства (8.1) пишут другое неравенство

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon \tag{8.2}$$

которое должно выполняться при $n > N$ и произвольном p.

Доказательство. Необходимость. Пусть последовательность x_n имеет предел равный a. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$, по числу $\frac{\varepsilon}{2}$ найдется номер N такой, что для всех $n > N$ имеет место неравенство

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем теперь любые два номера $n > N$ и $n' > N$, тогда для них одновременно будет выполняться

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |x'_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда сразу имеем

$$|x_n - x'_n| = |x_n - a + a - x'_n| < |x_n - a| + |x'_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

Достаточность непосредственно доказывается достаточно сложно. Поэтому доказательство достаточности мы отложим на попозже. Проведем ее после того, как докажем одну фундаментальную теорему, принадлежащую Больцано-Вейерштрассу, с использованием которой доказательство достаточности критерия Коши существенно упрощается.

Запишем теперь отрицание критерия Коши в краткой кванторной записи. Т.е. сформулируем критерий того, что заданная последовательность расходится:

$\exists\ \varepsilon > 0$ такой, что $\forall\ N$, $\exists\ n > N$ и p такие, что

$$|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon.$$

Частичные последовательности и частичные пределы. Рассмотим некоторую последовательность x_n и выберем из нее по некоторому закону $n_k = f(k)$, $k = 1, \ldots, m, \ldots$ элементы с номерами n_k. Будем предполагать, что функция f возрастающая, т.е. $n_{k_1} < n_{k_2}$ при $k_1 < k_2$, а также считать, что k пробегает весь натуральный ряд. Таким образом, мы организуем новую последовательность x_{n_k}, состоящую из членов старой последовательности, и которая упорядочена также как и x_n. Последовательность x_{n_k} называют подпоследовательностью последовательности x_n.

Теорема 8.1. Если последовательность x_n имеет предел a (конечный или нет), то тот же предел имеет и любая подпоследовательность x_{n_k}.

Доказательство. Рассмотрим случай конечного a. Пусть для заданного $\varepsilon > 0$ нашлось N такое, что при $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Ввиду того, что $n_k \to \infty$, существует такое K, что при $k > K$ будет $n_k > N$, а значит выполняется

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon. \quad \square$$

Если теперь, у последовательности x_n нет предела, то могут существовать подпоследовательности у которых есть пределы.

Определение 8.2. Если последовательность x_{n_k} имеет предел a (конечный или нет), то он называется частичным пределом.

Пример. У последовательности $x_n = (-1)^{n+1}$ предела не существует. Тем не менее у нечетной подпоследовательности предел равен 1, а у четной – (-1). Для последовательности $x_n = n^{(-1)^{n+1}}$ можно аналогично показать, что у нечетной подпоследовательности предел равен $+\infty$, а у четной – 0.

Всегда ли существуют частичные пределы у произвольной последовательности x_n? Этот вопрос легко решается для неограниченных последовательностей. Если, например, она неограничена сверху, то для каждого M_1 найдется, в силу определения неограниченной последовательности, член x_{n_1} такой, что $x_{n_1} > M_1$. Для $M_2 > x_{n_1} > M_1$ мы найдем $x_{n_2} > M_2$, причем то, что найдется элемент с номером большим, чем n_1 (ведь $n_1 < n_2$), вытекает из неограниченности исходной последовательности. И так далее, полагая , что $\lim_{k\to\infty} M_k = +\infty$. Таким образом, мы строим последовательность, имеющую вид

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots,$$

причем для любого сколь угодно большого числа M мы находим, в силу $\lim_{k\to\infty} M_k = +\infty$, $M_k > M$, такое что для всех x_{n_m} с $n_m > n_k$ выполнено $x_{n_m} > M_k > M$, а это есть определение бесконечного предела уже для подпоследовательности, то $+\infty$ является частичным пределом.

Лемма Больцано-Вейерштрасса. Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ содержится между a и b. Разделим этот промежуток пополам, тогда хотя бы в одной из половин содержится бесконечное количество членов последовательности. Обозначим через $[a_1, b_1]$ тот из двух отрезков, который содержит бесконечное число членов, либо любую их них. Аналогично из промежутка $[a_1, b_1]$ выделим его половину $[a_2, b_2]$ при условии, чтобы в ней содержалось бесконечное число членов полседовательности. Продолжая этот процесс до бесконечности, на k-ой стадии его выделим промежуток $[a_k, b_k]$, также содержащий бесконечное число членов последовательности. Заметим, что длина промежутка $[a_k, b_k]$ равная

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k},$$

стремится к нулю с возрастанием k. Из свойства монотонных последовательностей, изменяющихся навстречу друг другу, мы сразу заключаем, что a_k и b_k стремятся к общему пределу c.

Построение частичной последовательности $\{x_{n_k}\}$, имеющей предел по формулировке, произведем следующим образом. В качестве x_{n_1} возьмем любой элемент последовательности $\{x_n\}$, лежащий в $[a_1, b_1]$. В качестве x_{n_2} возьмем любой элемент последовательности $\{x_n\}$, лежащий в $[a_2, b_2]$ и следующий за x_{n_1} в последовательности $\{x_n\}$ (т.е. $n_2 > n_1$). Вообще, в качестве x_{n_k} возьмем член последовательности $\{x_n\}$, лежащий в $[a_k, b_k]$ и следующий за ранее выделенными

$$x_{n_1}, \quad x_{n_2}, \quad \ldots, \quad x_{n_{k-1}}, \quad x_{n_k}.$$

Возможность такого выбора, производимого последовательно, обуславливается именно тем, что каждый из промежутков $[a_k, b_k]$ содержит бесконечное множество элементов последовательности $\{x_n\}$, т.е. содержит элементы со сколь угодно большими номерами. Это позволяет строить из $\{x_n\}$ новую последовательность с сохранением порядка, т.е. подпоследовательность. Далее, в силу того, что

$$a_k \le x_{n_k} \le b_k, \quad \lim a_k = \lim b_k = c,$$

вытекает, что

$$\lim x_{n_k} = c.$$

Доказательство достаточности критерия Коши. Итак, пусть выполнено условие критерия и по заданному ε найден номер N такой, что при $n, n' > N$ выполнено неравенство

$$|x_n - x'_n| < \varepsilon. \tag{8.3}$$

Заметим, что (8.3) равносильно

$$x'_n - \varepsilon \leq x_n \leq x'_n + \varepsilon. \tag{8.4}$$

Если теперь зафиксировать $x_{n'}$, то из (8.4) ясно, что последовательность $\{x_n\}$ будет ограниченной. Нетрудно эти границы раздвинуть так, чтобы туда попали первые N членов $\{x_n\}$. Из леммы Б-В сразу вытекает, что существует частичная подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к некоторому конечному пределу

$$\lim x_{n_k} = c.$$

Осталось показать, что к этому пределу стремится вся последовательность $\{x_n\}$. Выберем k настолько большим, чтобы было

$$|x_{n_k} - c| < \varepsilon \tag{8.5}$$

и, одновременно, $n_k > N$. Следовательно, в (8.3) можно взять $n' = n_k$

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon \tag{8.6}$$

откуда уже легко получаем

$$|x_n - c| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - c| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - c| < 2\varepsilon,$$

что и доказывает наше утверждение. $\square$

Итак, для любой последовательности, ограничена она или нет, существуют частичные пределы. Эти пределы образуют некоторое множество. Оказывается, что среди этих пределов всегда найдутся наибольший и наименьший, которые обозначаются соответствующим образом

$$\overline{\lim} x_n, \quad \underline{\lim} x_n.$$

Верна следующая теорема

Теорема. Наибольший и наименьший пределы для любой последовательности $\{x_n\}$ существуют. Их равенство есть условие, необходимое и достаточное для существования предела последовательности $\{x_n\}$.

Понятно, что в случае, если последовательность неограничена сверху, то $\overline{\lim} x_n = +\infty$, если снизу, то $\underline{\lim} x_n = -\infty$. Если же последовательность ограничена, то наибольший и наименьший пределы конечные числа.

Что касается арифметических свойств наибольших и наименьших пределов, то они немного отличаются от случая, когда существуют обычные пределы, а именно

$$\underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n \leq \underline{\lim}(x_n + y_n), \quad \overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n,$$

и в случае, когда $x_n, y_n \geq 0$

$$\underline{\lim} x_n \cdot \underline{\lim} y_n \leq \underline{\lim}(x_n \cdot y_n), \quad \overline{\lim}(x_n \cdot y_n) \leq \overline{\lim} x_n \cdot \overline{\lim} y_n.$$

§ 9 Лекция 9

Функции одного переменного.

Определение 9.1. Пусть дано множество $X \subset \mathbb{R}$. Отображение множества X в $\mathbb{R}$ будем называть вещественнозначной функцией одной вещественной переменной или просто числовой функцией.

Множество X, на котором действует правило, задающее функцию f, называется областью определения функции и обозначается $D(f)$. Переменную x, которая принимает значения из этой области, будем называть аргументом функции или независимой переменной. Образ каждого элемента $x \in D(f)$ называют значением функции, а множество $f(D(f))$ – множеством значений или областью изменения функции. Область изменения функции будем обозначать через $Im(f)$.

Две функции будем называть равными, если совпадают их области определения, и для каждого значения аргумента совпадают значения функции.

Определение 9.2. Множество точек декартовой плоскости, координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$, называется графиком функции.

Мы будем называть функцией только такое соответствие, при котором каждому значению аргумента соответствует единственное значение функции, то есть прямая, проведенная параллельно оси ординат, пересекает график функции не более одного раза.

Определение 9.3. Пусть заданы две функции $f(t)$, $D(f) = G_1$, $Im(f) = G_2$ и $g(x)$, $D(g) = G_3$, $Im(g) = G_4$, причем $G_1 \cap G_4 \neq \emptyset$. Пусть $E = g^{-1}(G_1 \cap G_4)$ – прообраз множества $G_1 \cap G_4 \neq \emptyset$. Очевидно, что $E \subset G_3$. Тогда, взяв некоторое значение $x \in E$, можно найти $t = g(x) \in G_1$ и по найденному значению переменной t найти значение $y = f(t) = f(g(x))$. Таким образом, определена функция, сопоставляющая каждому значению $x \in E$ значение $y \in G_2$, которую называют сложной функцией, композицией или суперпозицией функций.

Определение 9.4. Пусть функция $f(x)$ отображает множество $D(f)$ на множество $Im(f)$ взаимно однозначно. Тогда, функция, которая каждому элементу $s \in Im(f)$ сопоставляет элемент $t \in D(f)$ такой, что $f(t) = s$, называется обратной к функции $f(x)$. Функцию, обратную к функции $f(x)$, будем обозначать f^{-1}. Очевидно, что $D(f^{-1}) = Im(f)$ и $Im(f^{-1}) = D(f)$. Если взаимнообратные функции записать как функции одной и той же независимой переменной, то графики этих функций будут симметричными относительно биссектриссы первого квадранта.

Способы описания функций.

Способ 1. Описательный

Правило можно задать словесным описанием действий, которые нужно проделать с аргументом, чтобы получить значение функции или просто перечислением значений функции, которые сопоставляются каждому значению аргумента. Например, функции Дирихле:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \quad \text{рациональное} \\ 0, & x \quad \text{иррациональное} \end{cases}$$

Способ 2. Аналитический

Правило задается формулой, в которой используются некоторые уже изученные простейшие функции и арифметические действия. Постепенно запас функций и действий, которые над ними можно совершать будет увеличиваться, и, таким образом, будет раскрываться понятие аналитического задания функции.

Способ 3. Графический

Функцию можно задать с помощью графика. Такое задание функции используется на практике, когда прибор рисует график какой-либо зависимости. Такое задание используется также в изложении курса математики для иллюстрации свойств функций.

Способ 4. Табличный

На практике часто снимают дискретные показания приборов и составляют из них таблицу, которая дает значения некоторой зависимой переменной для отдельных дискретных значений аргумента. Такое задание называется табличным. График такой функции будет состоять из отдельных точек, которые можно связать непрерывной кривой, например, графиком многочлена, заменив тем самым имеющуюся функцию многочленом.

Способ 5. Неявная функция

Функция задается с помощью уравнения вида $F(x, y) = 0$, которое не разрешено относительно какой-либо из переменных. Если удается, например, для каждого $x \in X$ определить из этого уравнения $y \in Y$, то говорят, что посредством уравнения $F(x, y) = 0$ неявно задана функция $y = y(x)$. Например уравнение $x^2 + y^2 = 1$ есть неявное задание функции $y(x)$ или $x(y)$.

Способ 6. Параметрическое задание

Пусть на некотором множестве E заданы две функции $x = \phi(t)$ и $y = \psi(t)$, причем функция $x = \phi(t)$ обратима. Если можно образовать сложную функцию $f(x) = \psi(\phi^{-1}(x))$, то будем говорить, что уравнения $x = \phi(t)$ и $y = \psi(t)$ определяют функцию $f(x)$, заданную параметрически. Например, параметрическое уравнение эллипса имеет вид: $x = aR\cos t$, $y = bR\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Для астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Основные свойства функций.

Четность-нечетность. Функция $y = f(x)$ называется четной, если

1. $\forall x \in D(f) \Longrightarrow (-x) \in D(f)$,

2. $\forall x \in D(f) \Longrightarrow f(-x) = f(x)$.

Первое условие в определении означает, что $D(f)$ – область определения четной функции, симметрична относительно начала координат. Из определения четной функции следует что, если точка $M_1(x, y)$ лежит на графике функции, то точка $M_2(-x, y)$ тоже лежит на графике этой функции, следовательно, график четной функции будет симметричен относительно оси OY .

Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если

1. $\forall x \in D(f) \Longrightarrow (-x) \in D(f)$,

2. $\forall x \in D(f) \Longrightarrow f(-x) = -f(x)$.

Область определения нечетной функции тоже симметрична относительно начала координат и, если точка $M_1(x, y)$ лежит на графике функции, то на этом же графике будет лежать точка $M_2(-x, -y)$. Следовательно, график будет симметричен относительно начала координат. Существуют функции, которые не являются ни четными, ни нечетными.

Определение монотонности. Будем говорить, что функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на множестве E, если для любых значений x_1, x_2 из E таких, что $x_1 > x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$.

Возрастающие и убывающие на множестве E функции называют монотонными на этом множестве. В определениях выше можно рассматривать нестрогие неравенства $f(x_1) \geq f(x_2)$ $(f(x_1) \leq f(x_2))$. Тогда говорят, что функция является неубывающей или, соответственно, невозрастающей. Заметим, что если функция возрастает (убывает) на всей области определения, то она взаимно однозначно отображает множество $D(f)$ на множество $Im(f)$, поэтому строго монотонная на области определения функция обратима.

Важнейшие классы функций. Прежде чем перейти непосредственно к важнейшим классам функций, мы определим понятие возведения положительного вещественного числа в вещественную степень. Пусть заданы числа α и $\beta > 1$. Определим β^α следующим образом: рассмотрим множество $S = \{a \in Q : a < \alpha\}$ и положим

$$\beta^\alpha = \sup_{a \in S} \beta^a.$$

Если же $\beta < 1$, положим $\beta^\alpha = \left(\frac{1}{\beta}\right)^{-\alpha}$.

Целая и дробная рациональные функции. В этот класс входят многочлены

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n,$$

$a_0, \dots, a_n$ – постоянные, n – целое неотрицательное число. Отношение двух таких многочленов дает дробную рациональную функцию

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m},$$

$b_0, \dots, b_n$ – постоянные, m – целое неотрицательное число.

Степенная функция. Это функции вида

$$y = x^\alpha,$$

где α – постоянное вещественное число. При целом α получается рациональная функция. При α дробном получается радикал. Например, пусть m – натуральное число, тогда функция

$$y = x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x}$$

определена для всех значений x, если m – нечетное, и для неотрицательных значений x, если m – четное. Наконец, если α – иррациональное число, то мы будем предполагать $x > 0$. Надо иметь в виду, что 0^0 не определен.

Показательная функция. Это функции вида

$$y = a^x,$$

где a – положительное число отличное от 1; x принимает любое вещественное значение.

Логарифмическая функция. Это функция вида

$$y = \log_a x,$$

где a – положительное число отличное от 1; x принимает только положительные значения. Она является функцией обратной к показательной. Т.е., если $y = \log_a x$, то это означает, что $x = a^y$. График. Некоторые простые свойства, связанные с суммой и разностью. Как известно, графики взаимнообратных функций симметричны относительно биссектриссы первого квадранта. Очевидно, что чем больше a, тем быстрее растет функция $y = a^x$, а, следовательно, тем медленнее растет $y = \log_a x$. Тоже самое можно сказать и про убывание.

Тригонометрические функции. Это функции

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad y = \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

Важно помнить, что аргументы тригонометрических функций, если их рассматривать как меры углов, всегда выражают эти углы в радианах. Можно писать и в градусах, но это потребует дополнительных замечаний при получении разных результатов. Запоминаем, что мы всегда, при получении каких бы то ни было результатов, имеем x измеренный в радианах. Это наглядно можно продемонстрировать на примере предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Если записать $\sin x$ в градусах, а именно, $\sin\frac{\pi y}{180}$, то он значение не поменяет, так как мы просто используем другие единицы измерения, но в неравенстве

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,$$

которое мы получаем, надо будет внести изменения для x и в итоге будем иметь

$$\sin y < \frac{\pi y}{180} < \operatorname{tg} y,$$

откуда уже будет следовать, что

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\frac{\pi}{180}.$$

Функции $\sin x$ и $\cos x$ определены для всех значений x; $\operatorname{tg} x$ определен везде, где не обращается в ноль $\cos x$, т.е. в точках не равных $\pi/2+\pi k$, k – целое; $\operatorname{ctg} x$ определен везде, где не обращается в ноль $\sin x$, т.е. в точках не равных πk, k – целое.

Гиперболические функции. Это функции вида

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \operatorname{th} x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\quad \operatorname{cth} x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

Все функции, кроме $\operatorname{cth} x$ определены везде. Функция $\operatorname{cth} x$ теряет смысл в точке $x=0$. Имеют место следующие формулы

$$\operatorname{ch}(x\pm y)=\operatorname{ch} x\operatorname{ch} y\pm\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y,\quad \operatorname{sh}(x\pm y)=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} y\pm\operatorname{ch} x\operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1,\quad \operatorname{sh} 2x=2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x,\quad \operatorname{ch} 2x=\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x.$$

Обратные тригонометрические функции. Это функции вида

$$y=\arcsin x,\quad y=\arccos x,\quad y=\operatorname{arctg} x,\quad y=\operatorname{arcctg} x.$$

Исследуем на примере первой из них построение обратных тригонометрических функций. Функция $y=\sin x$ определена на всем $\mathbb{R}$, причем ее значения заполняют промежуток $[-1,1]$. Параллель оси Ox пересекает график функции бесконечное число раз, что следует также из периодичности функции, поскольку $\sin x=\sin(x+2\pi)$. Поэтому каждому значению $y\in[-1,1]$ соответствует бесконечное множество значений x. Поэтому для построения обратной функции к $y = \sin x$ мы должны выделить, если есть такая возможность, множества, на которых она осуществляет взаимно-однозначное соответствие. Таковыми, легко видеть, являются отрезки $[-\pi/2+\pi k, \pi/2+\pi k]$. При каждом фиксированном k мы получаем одну из обратных функций для $y = \sin x$, которые называются ветвями многозначного арксинуса. Ту ветвь, которая соответствует $k = 0$ называют главной ветвью и обозначают $y = \arcsin x$. Если нарисовать график $y = \arcsin x$, то выпуклости, которые необходимо обозначить, можно определить через тот факт, что $y = \arcsin x$ симметричен $y = \sin x$ относительно биссектриссы первого квадранта.

В случае построения обратной функции к $y = \cos x$, замечаем, что области взаимной-однозначности имеют вид $[\pi k, \pi(k+1)]$, и $y = \arccos x$ есть обратная функция для $y = \cos x$ на промежутке $[0, \pi]$. Отметим соотношение

$$\arccos x = \pi/2 - \arcsin x.$$

Когда мы пишем $y = \operatorname{arctg} x$ мы имеем в виду функцию обратную к функции $y = \operatorname{tg} x$, обращенную на промужутке $(-\pi/2, \pi/2)$. Заметим, что концы интервала не включаются, так как в этих точках $\operatorname{tg} x$ обращается в бесконечность. $y = \operatorname{arctg} x$ удовлетворяет неравенству

$$-\pi/2 < \operatorname{arctg} x < \pi/2.$$

Когда мы пишем $y = \operatorname{arcctg} x$ мы имеем в виду функцию обратную к функции $y = \operatorname{ctg} x$, обращенную на промужутке $(0, \pi)$. Заметим, что концы интервала не включаются, так как в этих точках $\operatorname{ctg} x$ обращается в бесконечность. $y = \operatorname{arcctg} x$ удовлетворяет неравенству

$$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi.$$

Имеет место следующее соотношение

$$\operatorname{arcctg} x = \pi/2 - \operatorname{arctg} x.$$

Завершая обзор важнейших классов функций, которые называются основными элементарными. Заметим, что весь класс элементарных функций описывается через основные элементарные функции с помощью 4 арифметических действий и суперпозиций, примененных последовательно конечное число раз.

§ 10 Лекция 10

Предел функции. Рассмотрим числовое множество $X = \{x\}$. Напомним, что любой открытый интервал вида $(a-\delta, a+\delta)$ называется δ-окрестностью точки a. Точка a называется точкой сгущения этого множества, если в любой окрестности точки a содержатся точки этого множества отличные от a. Сама точка сгущения может как принадлежать множеству, так и не принадлежать. Например, точка $x = 1$ является точкой сгущения для множества $(0,1)$, которая не принадлежит множеству; для множества $(0,1]$ она также будет точкой сгущения, но к тому же и принадлежать множеству. Для множества $X = (0,1) \cup \{2\}$ точка $x = 2$ не будет точкой сгущения, так как сущесвтует ее $\delta = 0.5$-окрестность, в которой нет ни одной точки X.

Пусть в области X, для которой a является точкой сгущения, задана функция $f(x)$.

Определение 10.1. Говорят, что функция $f(x)$ имеет пределом число A при стремлении x к a (или в точке a), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

лишь только

$$0 < |x - a| < \delta.$$

Обозначают этот факт

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

В качестве примера рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Покажем, что $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Действительно, для любого $x \neq 0$ имеем $f(x) = 0$ и следовательно, при $0 < |x| < \delta$ имеем $|f(x)| = 0 < \varepsilon$, что и означает, что $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Пусть точка a является точкой сгущения множества X, на котором определена функция f. Тогда из X бесчисленным множеством способов можно извлечь последовательность

$$x_1, \dots, x_n, \dots \tag{10.1}$$

значений x отличных от a, которая бы имела своим пределом точку a. Это можно сделать выбирая последовательность $\delta_n \to 0$ или $\Delta_n \to \infty$, и для каждой из них находить свой x_n. Последовательности (10.1) соответствует последовательность

$$f(x_1), \dots, f(x_n), \dots . \tag{10.2}$$

Если имеет место $\lim_{x\to a} f(x) = A$, то из определения предела сразу следует, что

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Действительно, по числу $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$, а по числу $\delta > 0$, ввиду сходимости последовательности (10.1), найдем N такой, что для $n > N$ будет выполняться $|x_n - a| < \delta$, а, следовательно и

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon.$$

Предположим теперь наоборот, что для любой последовательности вида (10.1) имеем $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Покажем, что тогда A является пределом $f(x)$ согласно первому определению. Рассуждая от противного, предположим, что A не будет пределом функции в смысле первого определения. Тогда для некоторого числа $\varepsilon > 0$, при любом $\delta > 0$ существует бы по крайней мере одно значение x отличное от a, для которого

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{и} \quad |f(x) - A| > \varepsilon.$$

Выберем последовательность $\delta_n \to 0$ и для каждого такого δ_n будем иметь с одной стороны x_n, для которого

$$0 < |x_n - a| < \delta_n \quad \text{и} \quad |f(x_n) - A| > \varepsilon, \tag{10.3}$$

с другой стороны, построенная таким образом последовательность $\{x_n\}$, в силу того, что $\delta_n \to 0$, сходится к a, но по условию мы имеем, что тогда последовательность $\{f(x_n)\} \to A$, что противоречит (10.3).

Определение 10.2. Говорят, что функция $f(x)$ имеет пределом число A при стремлении x к a справа (слева), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

лишь только

$$a < x < a + \delta \quad (a - \delta < x < a).$$

Обозначают этот факт

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = A, \quad (\lim_{x\to a^-} f(x) = A).$$

Теорема 10.3. Для того, чтобы функция $f(x)$ имела пределом число A при стремлении x к a, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = A.$$

Дадим теперь определение того, что означает, что $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$: для любого $E > 0$ $\exists\delta > 0$ такое, что как только $0 < |x-a| < \delta$, следует, что $|f(x)| > \Delta$. Аналогично определяются понятия $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$.

Примеры. В некоторых случаях можно непосредственно пользоваться самим определением предела, так получается в случае

$$1. \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \quad a > 1.$$

$$2. \quad \lim_{x\to x_0} x^2 = x_0^2.$$

В первом случае легко видеть, что E и Δ связаны равенством $\Delta = \log_a E$. А во втором случае имеем из оценки

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{вытекает} \quad |x + x_0| < 2|x_0| + \delta.$$

Где в итоге получаем оценку

$$|x^2 - x_0^2| < 2\delta(|x_0| + \delta),$$

откуда из квадратного уравнения определяем δ через $\varepsilon > 0$.

$$3. \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x} = 0, \quad a > 1.$$

Используем результат, полученный для последовательностей. Тогда для заданного $\varepsilon > 0$ существует такое N, что

$$\frac{\log_a n}{n} < \varepsilon.$$

Положим $x > N+1$ и положим $[x] = n$. Тогда имеем $n \leq x < n+1$ и зажимаем соотношение с x через соотношения с n

$$\frac{\log_a n}{n+1} < \frac{\log_a x}{x} < \frac{\log_a (n+1)}{n},$$

откуда легко следует необходимый результат с применением леммы о 2 милиционерах.

$$4. \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0, \quad a > 1, \quad \alpha > 0.$$

При произвольном $\varepsilon > 0$ возьмем Δ таким, чтобы выполнялось при $x > \Delta$ неравенство

$$\frac{\log_a x}{x} < \alpha\varepsilon.$$

Заметим, что при $x > \Delta^{\frac{1}{\alpha}}$ имеем $x^\alpha > \Delta$, а значит верно предыдущее неравенство для числа $x^\alpha > \Delta$, т.е.

$$\frac{\log_a x^\alpha}{x^\alpha} < \alpha\varepsilon \quad \text{или} \quad \frac{\log_a x}{x^\alpha} < \varepsilon.$$

Сделав замену переменных $t = \frac{1}{x}$ получим следующий важный результат

$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha \log_a x = 0.$$

Замечательные пределы. Дадим вывод первого замечательного предела

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

В круге радиуса R с центром в точке O, выберем две точки A и B на окружности так, чтобы угол $\angle AOB$ был острым. Восстановим из точки A перпендикуляр к отрезку OA до пересечения с лучом OB. Точку пересечения обозначим через C. Имеем

$$\text{площадь}\, \triangle AOB < \text{площадь сектора}\, AOB < \text{площадь}\, \triangle AOC.$$

Если через x обозначить радианную меру угла $\angle AOB$, так что длина дуги AB выразится произведением Rx, то эти неравенства перепишутся следующим образом

$$\frac{1}{2}R^2 \sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x.$$

Отсюда сокращая на $\frac{1}{2}R$ приходим к неравенствам

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \tag{10.4}$$

В предположении, что $0 < x < \frac{\pi}{2}$, разделим $\sin x$ на каждый из членов неравенства (10.4) и получим

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x,$$

откуда

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

Но

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} < 2 \sin \frac{x}{2} < x,$$

в силу (10.4) и, как следствие,

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x,$$

которое имеет место также и для модулей – это следует из того, что разность в неравенстве больше нуля; и также имеет место и для отрицательных x, в силу нечетности $\sin x$, т.е. для $x \neq 0$, $|x| < \pi/2$:

$$\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < |x|,$$

откуда уже непосредственно следует утверждение.

Для второго замечательного предела сначала доказывается предел

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

на основании предела

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Подход мы обрисовали в примере 3. Затем показываем, что при замене $x=-y$ мы имеем

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^y =$$

$$\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e.$$

Пользуясь этими двумя пределами и используя последовательно замену переменных $z=\frac{1}{x}$, учитывая, то что из равенства односторонних пределов вытекает существование самого предела, получаем

$$\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = e.$$

Примеры. У нас есть два определения: $\varepsilon-\delta$ определение, или как часто говорят определение предела по Коши; и определение с помощью последовательностей, или определение предела по Гейне. Определение по Гейне часто используется при доказательстве отсутствия предела, как, например, в случае функции $\sin\frac{1}{x}$ при $x\to 0$. Для того, чтобы показать отсутствие предела достаточно построить две последовательности, по которым мы будем получать разные пределы. Легко проверить, что такими последовательностями являются

$$x_n' = \frac{1}{\pi n}, \quad x_n'' = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}.$$

Заметим, что в последствии мы изучим правило Лопиталя, существенно упрощающее вычисления пределов. Но нужно всегла помнить, что есть примеры, когда данное правило не выполнимо, как, например, в случае $x\sin\frac{1}{x}$ при $x\to 0$.

§ 11 Лекция 11

Распространение теории пределов. Учитывая тот факт, что можно определять понятие предела по Гейне, легко можно перенести все теоремы о пределах на случай пределов функций.

1. Если при стремлении x к a функция $f(x)$ имеет конечный предел A, и $A > p$ $(A < q)$, то для достаточно близких к a значений x (отличных от a) и сама функция удовлетворяет неравенству

$$f(x) > p, \quad f(x) < q.$$

Доказательство есть непосредственное следствие из определения предела.

2. Если при стремлении x к a функция $f(x)$ имеет конечный предел A, то для достаточно близких к a значений x (отличных от a) функция f будет ограниченной

$$\exists M, \delta \quad \text{такие, что} \quad |f(x)| \leq M \quad \text{при} \quad |x - a| < \delta.$$

Напомним, что при доказательстве аналогичного факта для последовательностей, мы тоже сначала доказывали, что последовательность ограничена для $n > N$, а затем пользовались тем фактом, что полученному неравенству могут не удовлетворять только лишь конечное число членов последовательности и, таким образом, получали, что вся последовательность ограничена. В случае функций этого добиться нельзя, так как вне интервала $|x - a| < \delta$ может оказаться бесконечное множество значений x, для которых $|f(x)| > M$. Так, например происходит в случае функции $y = \frac{1}{x}$ при $x > 0$ и стремлении $x \to 1$. В любой δ-окрестности точки $x = 1$ при $\delta < 1$ функция будет ограниченной, но при $\delta \to 1$ функция будет неограничено возрастать.

3. Пусть в области X с точкой сгущения a заданы $f(x)$ и $g(x)$, для которых имеет место

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \quad \lim_{x \to a} g(x) = B,$$

где A и B – конечны. Тогда имеют место следующие соотношения

$$\lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B, \quad \lim_{x \to a} f(x)g(x) = AB, \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad \text{при} \quad B \neq 0.$$

Неопределенные выражения. Как и в случае последовательностей возникают неопределенности при вычислении пределов. Ситуация в случае функций фактически ничем не отличается от той, которая была с последовательностями. Пусть

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \quad \lim_{x \to a} g(x) = B,$$

1. Если A конечно, а $B = \infty$, то

$$\lim(f(x) \pm g(x)) = \infty, \quad \lim f(x)g(x) = \infty, \quad \text{при} \quad A \neq 0, \quad \lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

2. Если $A = \pm\infty$, а $B = \pm\infty$, то

$$\lim(f(x) + g(x)) = \pm\infty, \quad \lim f(x)g(x) = +\infty.$$

3. Если $A = \infty$, а B конечно, то

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Переходим теперь к случаям, которые составляют действительную неопределенность.

4. Если $A = B = 0$, тогда $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ представляет из себя неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Рассмотрим предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[m]{1+x} - 1}{x}.$$

Сделаем замену переменной $\sqrt[m]{1+x} - 1 = y$, откуда $x = (1+y)^m - 1$, а, следовательно, из $x \to 0$ следует $(1+y)^m \to 1$ откуда $y \to 0$. Таким образом, исходный предел равен следующему пределу

$$\lim_{y \to 0} \frac{y}{(1+y)^m - 1},$$

который легко находится с помощью бинома Ньютона.

5. Если $A = B = \pm\infty$, тогда $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ представляет из себя неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 6x + 2}{2x^3 - 10x^2 + 100} = \frac{1}{2}.$$

6. Если $A = 0$, $B = \pm\infty$, тогда $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ представляет из себя неопределенность вида $0 \cdot \infty$.

$$\lim_{x \to 0} x^2 \frac{\cos x}{1 - \cos x}.$$

Сначала покажем, что $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$, что вытекает из следующих рассуждений

$$|1 - \cos x| = 2\sin^2 \frac{x}{2} \leq 2|\sin x| < 2|x|,$$

откуда следует искомый результат. Таким образом, мы сразу показали, что имеем неопределенность указанного вида. Затем уже пользуемся первым замечательным пределом

$$\lim_{x \to 0} x^2 \frac{\cos x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \cos x \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{4\frac{x^2}{4}}{\sin^2 \frac{x}{2}} = 2.$$

7. Рассмотрим сумму $f(x) + g(x)$ в случае, когда $A = +\infty$, $B = -\infty$, т.е. стремятся к бесконечностям разного знака. В этом случае неопределенность имеет вид $\infty - \infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 - 1}).$$

Эта неопределенность раскрывается с помощью домножения исходного выражения на так называемое сопряженное выражение $\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-1}$.

Предел монотонной функции. Пусть $f(x)$ определена в некоторой области X. Функция называется возрастающей (убывающей) в этой области, если для любой пары точек x, x' из

$$x' > x \quad \text{следует} \quad f(x') > f(x)\,(f(x') < f(x)).$$

Если же из

$$x' > x \quad \text{следует} \quad f(x') \geq f(x)\,(f(x') \leq f(x)),$$

то f называется неубывающей (невозрастающей).

Теорема 11.1. Пусть f неубывающая функция на интервале (a,b), тогда в точках a и b у функции f существуют (конечные или бесконечные) односторонние пределы и

$$\lim_{x\to b^-} = \sup f, \quad \lim_{x\to a^+} = \inf f.$$

Если же функция f не возрастает на интервале (a,b), тогда

$$\lim_{x\to b^-} = \inf f, \quad \lim_{x\to a^+} = \sup f.$$

Следствие. Монотонная на интервале функция f имеет конечный предел как справа, так и слева в каждой точке интервала.

Критерий Коши-Больцано. Пусть точка a является точкой сгущения множества X, на котором определена функция f. Будем считать, что a либо конечно, либо $a=\pm\infty$. Для того, чтобы функция $f(x)$ при стремлении к a имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовало такое $\delta>0$ $(\Delta>0)$, чтобы неравенство

$$|f(x)-f(x')| < \varepsilon$$

выполнялось, лишь только

$$|x-a|<\delta, \quad |x'-a|<\delta \quad (x>\Delta, x'>\Delta) \quad (x<-\Delta, x'<-\Delta).$$

Непрерывность и разрывы функций.

Определение 11.2. Пусть $a\in D(f)$ – точка сгущения $D(f)$. Будем говорить, что функция $f(x)$ непрерывна в точке a, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Таким образом, функция $f(x)$ непрерывна в точке a, если

1) $f(x)$ определена в точке a; 2) существует $\lim_{x\to a} f(x)$; 3) предел функции в точке a равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Используя определения предела, это определение можно перефразировать на $\varepsilon - \delta$ языке или на языке последовательностей:

1. Функция $f(x)$ будет непрерывной в точке $a \in D(f)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon, x_0)$ такое, что

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

лишь только

$$|x - a| < \delta.$$

2. Функция $f(x)$ будет непрерывной в точке $a \in D(f)$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \in D(f)$ и $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, будет выполнено $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$

Если выполняется соотношение

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a), \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a),$$

то говорят о непрерывности в точке a , соответственно, справа или слева.

Точки разрыва.

Определение 11.3. Если точка a является предельной точкой области $D(f)$, но функция не является непрерывной в этой точке, то точка a называется точкой разрыва функции $f(x)$.

Для исследования поведения функции вблизи точки разрыва полезно вспомнить, что предел функции в точке существует тогда и только тогда, когда существуют ее пределы справа и слева и они равны между собой. Поэтому определение удобно сформулировать следующим образом:

Определение. Функция $f(x)$ непрерывна в точке a, если

1) Функция f определена в точке a;

2) Существуют односторонние пределы

$$\lim_{x\to a^-} f(x), \quad \lim_{x\to a^+} f(x).$$

3) Справедливо равенство

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a).$$

Если нарушено хотя бы одно из условий 1) – 3), то точка a будет точкой разрыва функции $f(x)$.

§ 12 Лекция 12

Свойства непрерывных функций.

Свойство 1. Если функция непрерывна в точке a, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Свойство 2. Если для функций $f(x)$ и $g(x)$ в некоторой окрестности точки a выполняется неравенство $f(x) \leq g(x)$ при $x \neq a$ и обе эти функции непрерывны в точке a , то $f(a) \leq g(a)$.

Свойство 3. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a и $f(a) > 0$, то существует окрестность этой точки такая, что для всех значений аргумента, взятых из этой окрестности, будет справедливо неравенство $f(x) > 0$. (Аналогично, если $f(a) < 0$, то для всех значений аргумента, взятых из некоторой окрестности точки a, выполнено $f(x) < 0$).

Свойство 4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то в этой точке будут непрерывны

a) их сумма $f(x) + g(x)$;

b) их произведение $f(x)g(x)$;

c) если $g(a) \neq 0$, будет непрерывно их частное $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Замечание. Это свойство легко распространяется на сумму и произведение любого фиксированного числа компонент.

Свойство 5. Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывной в точке $a \in D(f)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $f(x) = f(a) + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая в точке a функция, то есть имеет место следующий предел

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0.$$

Свойства 1-5 очевидно следуют из свойств пределов функции.

Примеры непрерывных функций.

Многочлены и дробно-рациональные функции. Покажем непрерывность функции $f(x) = x$ в произвольной точке x_0. Действительно, из определения непрерывности вытекает, что нам надо показать, что $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такое, что как только $|x - x_0| < \delta$ следует $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$. Но это очевидно выполняется при $\varepsilon = \delta$.

Любая натуральная степень x непрерывна как произведение непрерывных функций. Это можно показать и непосредственно, например, для $f = x^2$. Дробные рациональные функции будут непрерывными на области определения, т.е. там где не обращается в ноль знаменатель.

Показательная функция. Для доказательства непрерывности этой функции нужно установить, что

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}.$$

Докажем сначала, что

$$\lim_{x \to 0} a^x = 1.$$

Этот факт базируется на пределе $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$. Одновременно с этим пределом, очевидно, $\lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$. Очевидно, при $x \to 0$ мы всегда найдем n такое, что $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$ и, следовательно,

$$a^{-\frac{1}{n}} < a^x < a^{\frac{1}{n}}.$$

Откуда уже следует (из леммы о двух милиционерах), что $\lim_{x\to 0} a^x = 1$. Запишем теперь разность $a^x - a^{x_0}$ в виде

$$a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1).$$

Делая замену переменных $x - x_0 = t$, мы легко получаем

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}.$$

Логарифмическая функция. Рассмотрим случай $a = e > 1$. Случай $a < 1$ доказывается аналогично. Покажем, что

$$\lim_{x \to a} \ln x = \ln a.$$

Из того, что

$$\lim_{x \to a} x = a$$

вытекает, что

$$\lim_{x \to a} \frac{x}{a} = 1.$$

Следовательно, для любых $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что выполняется

$$1 - \varepsilon < \frac{x}{a} < 1 + \varepsilon$$

как только $|x - a| < \delta$. В силу того, что $\lim_{\varepsilon\to 0} e^{\varepsilon} = 1$, найдутся ε_1 и ε_2 такие, что

$$e^{-\varepsilon_1} = 1 - \varepsilon, \quad e^{\varepsilon_2} = 1 + \varepsilon.$$

Причем легко заметить, что $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ и $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ когда $\varepsilon \to 0$. Откуда сразу получаем

$$-e^{\varepsilon_1} < \frac{x}{a} < e^{\varepsilon_2}.$$

Прологарифмируем последнее неравенство и получим

$$-\varepsilon_1 < \ln \frac{x}{a} = \ln x - \ln a < \varepsilon_2,$$

или (для стандартной записи)

$$-\varepsilon_1 < \ln\frac{x}{a} = \ln x - \ln a < \varepsilon_1,$$

так как $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Откуда уже сразу следует, что

$$\lim_{x\to a}\ln x = \ln a.$$

Непрерывность степенной суперпозиции. Положим

$$\lim_{x\to a} u(x) = A, \quad \lim_{x\to a} v(x) = B.$$

Докажем, что тогда

$$\lim_{x\to a}\left(u(x)\right)^{v(x)} = A^B.$$

Действительно, используя непрерывность логарифмической функций, имеем

$$\lim_{x\to a}\ln u(x) = \ln A,$$

что доказывается заменой переменных $t = u(x)$, откуда при $x \to a$ следует $t \to A$. Далее, из того, что предел произведения равен произведению пределов при их конечности, вытекает, что

$$\lim_{x\to a} v(x)\ln u(x) = B\ln A.$$

Используя теперь непрерывность показательной функций, имеем

$$\lim_{x\to a}\left(u(x)\right)^{v(x)} = \lim_{x\to a} e^{v(x)\ln u(x)} = e^{B\ln A} = A^B = \left(\lim_{x\to a} u(x)\right)^{\lim_{x\to a} v(x)}.$$

Пример. Исследуем предел

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

Идея вычисления таких пределов, неопределенность которых имеет вид 1^∞, базируется на втором замечательном пределе и состоит в том, чтобы представить основание в виде $1+\phi(x)$. Следуя этому получаем

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}\left[\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}\right]^{-\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Пример. Исследуем предел

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}},$$

который представляет из себя неопределенность вида ∞^0. Положим $y = (\ln x)^{\frac{1}{x}}$ и прологарифмируем его

$$\ln y = \frac{\ln(\ln x)}{x} = \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\frac{\ln x}{x} \to 0,$$

так как
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0.$$
Отсюда $\lim y = e^0 = 1$

Тригонометрические функции. Докажем непрерывность $\sin x$. Непрерывность остальных тригонометрических функций доказывается аналогично, через известные тождества. Надо показать, что
$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a.$$
Действительно, из тождества
$$\sin x-\sin a=2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}$$
вытекает следующая оценка
$$|\sin x-\sin a|=2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|\leq 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|<2\left|\frac{x-a}{2}\right|=|x-a|,$$
где последнее неравенство было доказано при доказательстве первого замечательного предела. Вся же оценка дает нам искомый предел при выборе $\varepsilon=\delta$.

§ 13 Лекция 13

Классификация бесконечно малых и бесконечно больших величин. Будем говорить, что функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки a, является бесконечно малой (бесконечно большой), если $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ ($\lim_{x\to a} f(x) = \infty$).

Часто необходимо, например, при исследовании неопределенностей, получить информацию о том, насколько мала та или иная функция по сравнению с другой, также бесконечно малой величиной. Т.е. знать качественное поведение бесконечно малой величины. В качестве тех бесконечно малых функций, с которыми идет сравнение, обычно берутся наиболее простые функции, такие как, например, $(x-a)^\alpha$.

Рассмотрим две бесконечно малые функции f и g, всегда имея в виду, что они являются бесконечно малыми лишь в окрестности какой-либо точки. Например $\ln(1+x)$ является бесконечно малой в окрестности точки $x = 0$.

1. Если

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = k,$$

где k отлично от 0 и от бесконечности, тогда бесконечно малые f и g считаются величинами одного порядка.

2. Если

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

тогда бесконечно малая f считается величиной более высокого порядка малости по отношению к бесконечно малой g.

Например, функции $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ являются в окрестности точки $x = 0$ бесконечно малыми одного порядка с x. В то же время $\sin^2 x$ является бесконечно малой более высокого порядка относительно x при $x \to 0$.

Заметим, что если f в окрестности $x = a$ является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с g, тогда пишем $f = o(g)$. Т.е. если про некоторую функцию вам известно, что она имеет вид $o(g)$, то это означает

$$\lim_{x\to a} \frac{o(g(x))}{g(x)} = 0.$$

Может случиться так, что отношение бесконечно малых не стремится ни к какому пределу, как, например, в случае x и $x \sin \frac{1}{x}$. В этом случае говорят, что две бесконечно малых не сравнимы.

1. Если бесконечно малые f и g удовлетворяют соотношению

$$\lim_{x\to a} \frac{f}{g^m} = k,$$

где k отлично от 0 и от бесконечности, тогда бесконечно малые f и g^k считаются величинами одного порядка, или бесконечно малая f считается величиной k-ого порядка малости по отношению к бесконечно малой g.

Так, например, из того, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

вытекает, что $1 - \cos x$ при $x \to 0$ является бесконечно малой 2-го порядка относительно x.

4. Если бесконечно малые f и g удовлетворяют соотношению

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

то они называются эквивалентными. Легко видеть, что f и g эквивалентны, если их разность оказывается бесконечно малой более высокого порядка, чем каждая из них.

Выделение главной части. Пусть выбрана основная бесконечно малая величина, обычно это величина, с которой наиболее удобно работать. Обозначим ее через g. Легко показать, что все величины вида cg^k при $k > 0$, где c – некоторая постоянная, являются самыми простыми бесконечно малыми величинами Пусть

$$\lim_{x \to a} \frac{f}{g^k} = 1,$$

тогда бесконечно малая величина g^k является главной частью бесконечно малой величины f в окрестности точки $x = a$.

Аналогичную шкалу можно построить и для бесконечно больших величин. Таким образом, если мы, для двух бесконечно больших величин f и g в окрестности точки a, пишем $f = o(g)$, то мы имеем в виду, что

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Так, например, символ $f = o(x^k)$ при $x \to \infty$ означает, что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^k} = 0,$$

т.е. f имеет скорость роста на бесконечности не более чем x^m, где $m < k$.

Если же

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty,$$

то f называют бесконечно большой более высокого порядка, чем g.

Приведем один пример, позволяющий вычислить предел с помощью выделения главной части. Вычислим предел

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(1 + 2^x) \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right).$$

Сделаем замену переменных $x = \frac{1}{t}$, тогда предел примет вид

$$\lim_{t\to 0^+} \ln\left(1+2^{\frac{1}{t}}\right)\ln(1+3t) = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{t}\ln 2 + \ln\left(1+2^{-\frac{1}{t}}\right)\right)\ln(1+3t).$$

Как известно,

$$\lim_{z\to 0}\frac{\ln(1+z)}{z} = 1,$$

что оначает, что $\ln(1+z)$ и z являются экивалентными бесконечно малыми и, следовательно,

$$\ln(1+z) = z + o(z).$$

Таким образом, так как $2^{-\frac{1}{t}} \to 0$ при $t\to\infty$, то

$$\ln\left(1+2^{-\frac{1}{t}}\right) = 2^{-\frac{1}{t}} + o\left(2^{-\frac{1}{t}}\right), \quad \ln(1+3t) = 3t + o(t).$$

Откуда

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{t}\ln 2 + \ln\left(1+2^{-\frac{1}{t}}\right)\right)\ln(1+3t) = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{t}\ln 2 + 2^{-\frac{1}{t}} + o\left(2^{-\frac{1}{t}}\right)\right)(3t + o(t)) =$$

$$3\ln 2 + \frac{o(t)}{t}\ln 2 + \dots = 3\ln 2.$$

Классификация точек разрыва функции.

а) Если односторонние пределы в точке a существуют и равны между собой, но функция в этой точке не определена то точка a называется точкой устранимого разрыва. Примером такой функции является $\frac{\sin x}{x}$.

б) Если существуют конечные односторонние пределы, но они не равны между собой, то точка a, называется точкой разрыва первого рода или точкой конечного разрыва. Примером является ступенька.

Будем говорить, что в этой точке функция имеет скачок и величина скачка равна

$$|f(a^+) - f(a^-)|,$$

где

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a^-), \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a^+),$$

если функция не определена в точке a; если же функция непрерывна слева или справа, то

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a), \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a);$$

либо величина скачка равна

$$|f(a^+) - f(a)|, \quad |f(a^-) - f(a)|$$

если функция определена в точке, но рвется как справа, так и слева.

в) Если в точке a хотя бы один односторонний предел не существует или существует и бесконечен, то эта точка называется точкой разрыва второго рода. Примером является $\frac{1}{x}$, $\sin\frac{1}{x}$.

Непрерывность и разрывы монотонной функции. Невозрастающая (неубывающая) функция $f(x)$ может иметь в области определения только лишь разрывы первого рода., т.е. скачки. Таким образом, если невозрастающая (неубывающая) функция $f(x): X \longrightarrow Y$ и значения ее сплошь заполняют Y (каждое значение из $y \in Y$ принимается функцией хоть раз), то эта функция непрерывна.

Суперпозиция непрерывных функций.

Теорема 13.1. Пусть функция $\phi(y)$ определена в промежутке Y, а функция $f(x)$ – в промежутке X, причем значения последней функции не выходят за пределы Y, когда x меняется в X. Если $f(x)$ непрерывна в точке $a \in X$, а $\phi(y)$ непрерывна в $b = f(a)$, то и сложная функция $\phi(f(x))$ будет непрерывна в a.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $\phi(y)$ непрерывна в $b = f(a)$, то по ε найдется такое σ, что

$$|y - b| < \sigma \quad \text{влечет} \quad |\phi(y) - \phi(b)| < \varepsilon.$$

Сдругой стороны, ввиду непрерывности $f(x)$ в точке $a \in X$, по σ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|x - a| < \delta \quad \text{влечет} \quad |f(x) - f(a)| < \sigma.$$

Но тогда по самому выбору числа σ сразу следует

$$|\phi(y) - \phi(b)| = |\phi(f(x)) - \phi(b)| = |\phi(f(x)) - \phi(f(a))| < \varepsilon$$

при $|x - a| < \delta$, что означает непрерывность суперпозиции.

Несколько важных пределов, использующих непрерывность. Рассмотрим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$$

Имеем

$$\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Так как

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

то из непрерывности логарифма сразу вытекает исследуемый предел.

Переходим к пределу

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a.$$

Положим $a^x-1=y$, тогда из $x\to 0$ следует по непрерывности показательной функции $y\to 0$. Далее, имеем $x=\log_a(1+y)$, так что, используя предыдущий результат, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$

Переходим к пределу

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu.$$

Положим $(1+x)^\mu-1=y$. По непрерывности степенной функции, из $x\to 0$ следует $y\to 0$. Логарифмируя равенство $(1+x)^\mu=y+1$, получим

$$\mu\ln(1+x)=\ln(1+y).$$

С помощью этого соотношения преобразуем исходное выражение в пределе следующим образом

$$\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=\frac{y}{x}=\frac{y}{\ln(1+y)}\mu\frac{\ln(1+x)}{x}\to\mu\quad\text{при}\quad x,y\to 0$$

так как каждый из множителей справа и слева имеет пределом 1.

§ 14 Лекция 14

Теорема Больцано-Коши. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a, b]$ и на концах этого промежутка принимает значения разных знаков. Тогда между a и b необходимо найдется точка c, в которой функция обращается в 0.

Доказательство. Доказательство проведем по методу Больцано – последовательным делением промежутка. Для определенности пусть $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам точкой $\frac{a+b}{2}$. Может получиться так, что $f = 0$ в этой точке, тогда на этом завершается доказательство. Пусть $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$; тогда на концах одного из промежутков $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ функция будет принимать значения разных знаков, причем отрицательное на левом, положительное – на правом. Обозначим этот промежуток $[a_1, b_1]$. Тогда имеем

$$f(a_1) < 0, \quad f(b_1) > 0.$$

Продолжая эту процедуру и останавливаясь, если значение функции в середине отрезка равно 0, мы получим либо конечную процедуру, либо бесконечную последовательность вложенных один в другой промежутков. В последнем случае имеем для $[a_n, b_n]$

$$f(a_n) < 0, \quad f(b_n) > 0,$$

причем длина этого промежутка равна $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Построенная последовательность удовлетворяет лемме о вложенных промежутках, поэтому существует точка c такая, что $\lim b_n = \lim a_n = c$. Переходя к пределу в двух выносных неравенствах, одновременно получаем

$$f(c) = \lim f(a_n) \leq 0, \quad f(c) = \lim f(b_n) \geq 0,$$

следовательно, $f(c) = 0$.

Применение теоремы Больцано-Коши к решению уравнений. Рассмотрим уравнение

$$2^x = 4x.$$

Одно решение сразу бросается в глаза $x = 2$. А вот наличие еще одного заметить труднее. Функция $f = 2^x - 4x$ принимает значение $f(0) = 1 > 0$ и $f(1/2) = \sqrt{2} - 2 < 0$. Следовательно, из теоремы Б-К сразу вытекает, что у уравнения есть еще одно решение на интервале $(0, 1/2)$. Можно продолжить деление отрезка и, например, вычислив ее значение в $f(1/4) = \sqrt[4]{2} - 1 > 0$, прийти к выводу, что корень находится на промежутке $(1/4, 1/2)$.

Вторая теорема Больцано-Коши. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a, b]$ и на концах этого промежутка принимает неравные значения

$$f(a) = A, \quad f(b) = B,$$

тогда каково бы ни было число C, лежащее между A и B, найдется тока c между a и b, в которой $f(c) = C$.

Доказательство. Будем считать, что $A < C < B$. Введем вспомогательную функцию $\phi(x) = f(x) - C$. Эта функция непрерывна на $[a, b]$ и на концах этого отрезка имеет разные знаки

$$\phi(a) = f(a) - C = A - C < 0, \quad \phi(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

Тогда, по первой теореме Б-К получаем, что найдется точка $a < c < b$ такая, что $\phi(c) = 0$ или $f(c) = C$.

Существование непрерывной обратной функции.

Теорема 14.1. Пусть функция $y = f(x)$ определена, монотонно возрастает (убывает) и непрерывна в некотором промежутке X. Тогда в соответствующем промежутке $Y = f(X)$ существует обратная функция $x = g(y)$, также монотонно возрастающая (убывающая) и непрерывная.

Напомню, что функция $f(x)$ называется ограниченной на промежутке X, если существует число $M > 0$ такое, что $|f(x)| \leq M$ для всех значений $x \in X$. Функция $f(x)$ называется неограниченной на промежутке X, если для любого $M > 0$ существует $x_0 \in X$ такой, что $|f(x_0)| > M$.

Первая теорема Вейерштрасса. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$, то она ограничена. Т.е. существуют такие значения m и M. что

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in [a, b].$$

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Пусть f неограничена. В этом случае для каждого натурального n найдется $x_n \in [a, b]$ такой, что $|f(x_n| > n$. По лемме Б-В, из последовательности $\{x_n\}$, в силу ее ограниченности, можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0.$$

Причем $a \leq x_0 \leq b$. Вследствие непрерывности функции f, мы имеем

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0),$$

а это невозможно, так как $f(x_0)$ конечно, а $f(x_{n_k}) \to \infty$. Получили противоречие, доказывающее теорему.

Вторая теорема Вейерштрасса. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$, то она достигает в этом промежутке своего максимума и минимума. Иными словами, в промежутке $[a, b]$ найдутся точки $x = x_0$ и $x = x_1$ такие, что

$$f(x_0) = \inf f(x), \quad f(x_1) = \sup f(x).$$

Доказательство. Положим $M = \sup f(x)$. По первой теореме Вейерштрасса, это число конечное. Допустим противное, т.е. для любого $x \in [a, b]$ имеем $f(x) < M$. Тогда можно рассмотреть функцию

$$\phi(x) = \frac{1}{M - f(x)},$$

которая в силу допущения, определена и непрерывна во всех точках отрезка $[a, b]$. Согласно первой теореме Вейерштрасса, она ограничена, т.е. $\phi(x) \leq \mu \, (\mu > 0)$. Но тогда легко получаем, что

$$f(x) \leq M - \frac{1}{\mu},$$

что невозможно, так как мы предположили, что именно M является супремумом f. Полученное противоречие доказывает теорему.

Понятие о равномерной непрерывности. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в некотором промежутке X, например, в точке x_0, то это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\text{из} \quad |x - x_0| < \delta \quad \text{следует} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Мы отмечали, что δ зависит от ε, но как легко заметить, δ зависит еще и от точки x_0. Если бы речь шла о конечном числе значений x_0, то тогда мы могли бы выбрать наименьшее из всех δ, и это последнее годилось бы для всех рассматриваемых точек. Но по отношению к бесконечному множеству точек x_0 такие рассуждения уже не применимы. Таким образом, по отношению к непрерывной функции $f(x)$ встает вопрос: существует ли при заданном ε, такое δ, которое годилось бы для всех точек рассматриваемого промежутка X?

Определение 14.2. Если для каждого числа ε найдется такое $\delta(\varepsilon)$, что для произвольных точек x_1, x_2 промежутка X выполняется

$$\text{из} \quad |x_1 - x_2| < \delta \quad \text{следует} \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

то функцию f называют равномерно непрерывной на промежутке X.

Следующий пример показывает, что в общем случае, это не всегда так. Рассмотрим функцию $f = \sin\frac{1}{x}$. Запишем отрицание того, что функция является равномерно непрерывной: если существует ε такое, что для любого δ, существуют точки x и a из промежутка X для которых выполняется

$$|x-a|<\delta \quad \text{следует} \quad |f(x)-f(a)|>\varepsilon,$$

то функция f не будет равномерно непрерывной на промежутке X. Рассматриваемая функция очевидно непрерывна на промежутке $\left(0, \frac{2}{\pi}\right)$. Положим

$$a_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}, \quad x_n = \frac{1}{\pi n},$$

откуда

$$|f(x_n)-f(a_n)| = 1.$$

Выберем $\varepsilon = 1$. Тогда осталось показать, что расстояние между выбранными точками может быть сделано сколь угодно мало. Действительно,

$$|x_n - a_n| = \frac{1}{n(2n+1)\pi} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Однако в замкнутом промежутке, как оказалось, аналогичных ситуаций быть не может.

Теорема Кантора. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a,b]$, то она будет также и равномерно непрерывной в этом промежутке.

Из этой теоремы вытекает интересное следствие, которое используется при доказательстве очень важного утверждения, которое мы приведем ниже.

Следствие из теоремы Кантора. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a,b]$. Тогда по заданному ε можно найти такое δ, что если промежуток произвольно разбить на частичные промежутки длины меньшей чем δ, то в каждом из них колебание функции будет меньше чем ε.

§ 15 Лекция 15. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Задача о вычислении скорости движущейся точки.

Рассмотрим свободное падение тяжелой материальной точки без учета сопротивления воздуха из положения O. Есть известная формула, определяющая пройденный путь s за данное время t

$$s = \frac{1}{2}gt^2, \tag{15.1}$$

где $g = 9,81$ – ускорение свободного падения. Требуется определить скорость движения точки в фиксированный момент t, когда она будет находится в положении M.

Придадим переменной t некоторое приращение Δt и рассмотрим момент $t + \Delta t$, когда точка будет в положении M_1. За это время Δt тело пролетит некоторое расстояние, которое мы обозначим через Δs. Подставим значение $t + \Delta t$ в уравнение (15.1) и получим следующую связь

$$s + \Delta s = \frac{1}{2}g(t + \Delta t)^2,$$

откуда

$$\Delta s = \frac{1}{2}g(2t\Delta t + (\Delta t)^2).$$

Разделив Δs на Δt мы получим среднюю скорость движения тела за время Δt на участке MM_1

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = gt + \frac{1}{2}g\Delta t.$$

Очевидно, что чем меньше время Δt тем меньше расстояние, пройденное точкой, и тем точнее полученная средняя скорость характеризует скорость точки в положении M.

Таким образом, скоростью v падающей точки в момент времени t в положении M называют предел, к которому стремится средняя скорость за промежуток Δt, когда $\Delta t \to 0$. В нашем случае мы получаем

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} gt + \frac{1}{2}g\Delta t = gt.$$

Аналогично можно вычислять скорость в общем случае. Для этого достаточно знать закон движения тела $s = f(t)$.

Задача о проведении касательной к кривой.

Пусть дана некоторая кривая, описываемая функцией $f(x)$ и на ней некоторая точка M; обратимся к установлению самого понятия касательной к кривой в точке M.

Возьмем на кривой $f(x)$, кроме точки M, еще точку M_1 и проведем секущую MM_1. Посмотрим, что будет происходить, когда точка M_1 будет перемещаться вдоль кривой, приближаясь к точке M.

Определение 15.1. Касательной к кривой $f(x)$ в точке M называется предельное положение произвольной секущей MM_1, когда точка M_1 вдоль по кривой стремится к совпадению с M.

Заметим, что касательная является прямой, а, следовательно, зная, что она проходит через фиксированную точку M, достаточно определить угловой коэффициент $\operatorname{tg}\alpha$ касательной к точке M. Придав абсциссе x некоторое приращение Δx, от точки M перейдем к точке M_1 с абсциссой $x+\Delta x$ и ординатой

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$

Угловой коэффициент секущей MM_1, составляющей угол ϕ с положительным направлением оси OX определится из прямоугольного треугольника MNM_1. В нем катет MN равен Δx – приращению абсциссы, а катет NM_1 равен Δy – приращению ординаты. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\phi=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Для получения углового коэффициента касательной, нам надо перейти к пределу при стремлении точки M_1 к точке M, т.е. при стремлении $\Delta x\to 0$

$$\operatorname{tg}\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Таким образом, угловой коэффициент касательной, а значит и сама касательная существует, если существует вышеуказанный предел.

Заметим, что, как в случае нахождения скорости точки, так и в случае построении касательной, мы решали нашу задачу делением приращения функции на приращение аргумента и нахождением предела этого соотношения.

Пусть задана функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0. Придадим приращение Δx незавимой переменной x, и рассмотрим точку $x_0+\Delta x$ в предположении, что она остается в окрестности, где определена функция $f(x)$. Имеем $y_0=f(x_0)$, $y_0+\Delta y=f(x_0+\Delta x)$ и

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

Определение 15.2. Если существует конечный предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, при стремлении $\Delta x\to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

то этот предел называется производной функции $f(x)$ в точке x_0, обозначается $f'(x_0)$, а функция называется дифференцируемой в точке x_0.

Возвращаясь к примерам, с которых мы начинали, получаем, что скорость есть производная по времени от расстояния, а угловой коэффициент касательной есть производная от функции, описывающей кривую по своему аргументу.

Вычисление производных элементарных функций.

Вычислим производную функции $\sqrt{x}$. Будем обозначать фиксированную точку через x, чтобы получать общую формулу сразу. Имеем

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}, \quad \Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x},$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}},$$

следовательно, из непрерывности корня,

$$f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Для степенной функции $f = x^\mu$ имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^\mu - x^\mu}{\Delta x} = x^{\mu - 1} \frac{(1 + \frac{\Delta x}{x})^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Если теперь сделать замену $\frac{\Delta x}{x} = t$ и заметить, что при каждом фиксированном $x \neq 0$, $t \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то легко получим

$$\lim_{t \to 0} \frac{(1 + t)^\mu - 1}{t} = \mu,$$

и, как следствие, что

$$f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mu x^{\mu - 1}.$$

Для показательной функции $f = a^x$ получим

$$f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Для функции $f = \sin x$ имеем, пользуясь непрерывностью косинуса и первым замечательным пределом,

$$f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

Производная обратной функции. Пусть функция $f(x)$ является монотонно возрастающей непрерывной функцией; в точке x_0 имеет конечную, отличную от нуля производную $f'(x_0)$. Тогда для обратной (также непрерывной) функции $g(y)$ в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$ также существует производная, равная $\frac{1}{f'(x_0)}$.

Доказательство. Придадим значению $y = y_0$ приращение Δy, тогда соответственное приращение Δx получит и функция $x = g(y)$. В виду однозначности самой функции $y = f(x)$, получаем, что при $\Delta y \neq 0$ также и $\Delta x \neq 0$. Имеем

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

В силу непрерывности функции $x = g(y)$, при $\Delta y \to 0$ имеем $\Delta x \to 0$, откуда сразу вытекает требуемое соотношение. Таким образом, имеем

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Вычисление производной от обратной тригонометрической функции. С помощью теоремы о производной обратной функции вычислим производную от функции $y = \arcsin x$. Заметим, что $y = \arcsin x$ есть функция обратная к $x = \sin y$ на промежутке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Согласно теореме о производной обратной функции получаем

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{(\cos y)}.$$

Для окончательного решения задачи нам нужно выразить производную в терминах переменной x. Заметим, что из $x = \sin y$ следует, что $|\cos y| = \sqrt{1-x^2}$. Но, принимая во внимание тот факт, что $y = \arcsin x$ есть функция обратная к $x = \sin y$ на промежутке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, на котором $\cos y$ положителен, мы имеем $\cos y = \sqrt{1-x^2}$. Откуда окончательно

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Формула для приращения функции. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке (a, b); $x_0, x_0 + \Delta x \in (a, b)$.

1. Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет конечную производную $f'(x_0)$, то приращение функции может быть представлено в виде

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x,$$

где $\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$. Так как отсюда следует, что $\alpha\Delta x = o(\Delta x)$, то мы в итоге получаем

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Заметим, что если приращение функции в точке может быть представлено в виде

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x),$$

то функция называется дифференцируемой в точке, а $A = f'(x_0)$. В случае одной переменной эти два понятия равносильны. Но, как мы увидим позже, в случае многих переменных существование производных и дифференцируемость являются неравносильными утверждениями. Отметим также, что Δx называют дифференциалом независимой переменной, а вот дифференциалом зависимой переменной называют только лишь линейную часть приращения дифференцируемой функции и обозначают через $dy = f'(x_0)\Delta x$. Для симметрии обычно вместо Δx пишут dx и, таким образом, пишут $dy = f'(x_0)\Delta x$.

2. Из представления для приращения функции немедленно вытекает, что дифференцируемая функция (или, что то же самое - функция, имеющая производную) является непрерывной.

§ 16 Лекция 16

Простейшие правила вычисления производных.

1. Если функция $u = \phi(x)$ имеет производную, то имеет производную и функция $y = cu$, $c = const$, причем $y' = cu'$.

2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные f' и g'. Тогда производную имеют также их сумма и разность, а именно,

$$(f \pm g)' = f' \pm g'.$$

3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные f' и g'. Тогда производную имеет также их произведение

$$y' = (fg)' = f'g + fg'.$$

Докажем последнее утверждение. Придадим переменной x приращение Δx, тогда соответствующие приращения получат все функции Δf, Δg, Δy, при этом $y + \Delta y = (f + \Delta f)(g + \Delta g)$. Откуда

$$\Delta y = \Delta f g + f \Delta g + \Delta f \Delta g$$

и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} g + f \frac{\Delta g}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x} \Delta g.$$

Переходя к пределу в последнем выражении и пользуясь непрерывностью всех входящих в соотношение функций, мы получаем искомый результат. С помощью математической индукции легко получить аналогичную формулу для производной от произведение более чем двух множителей, которая имеет вид

$$y' = (uvw \dots s)' = u'vw \dots s + uv'w \dots s + uvw' \dots s + \dots + uvw \dots s'.$$

4. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные f' и g'. Тогда производную имеют также и их частное при условии отличия от нуля функции g

$$y' = \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Производная сложной функции. Дадим теперь правило вычисления производной от сложной функции. Пусть задана функция $y = y(u)$, которая имеет производную $y'(u_0)$ в некоторой точке u_0; пусть функция $u = u(x)$ имеет производную $u'(x_0)$ в некоторой точке x_0 и $u_0 = u(x_0)$. Тогда суперпозиция $y = y(u(x))$ будет иметь в точке x_0 производную, которая вычисляется по следующей формуле

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{dy}{du}(u_0) \frac{du}{dx}(x_0).$$

Придадим переменной x в точке x_0 приращение Δx, тогда переменная u получит приращение Δu в точке u_0. Так как функция $y = y(u)$ дифференцируема по переменной u, то ее приращение в точке u_0 может быть представлено в виде

$$\Delta y(u_0) = y'_u(u_0)\Delta u + \alpha\Delta u,$$

где α стремится к нулю при стремлении к нулю Δu. Очевидно, $\Delta y(u_0) = \Delta y(x_0)$. Разделив обе части последнего равенства на Δx, будем иметь

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}(x_0) = y'_u(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{16.1}$$

Устремив теперь приращение Δx к нулю, мы также получим стремление к нулю приращения по переменной u, так как функция u непрерывна по x, а поэтому и α стремится к нулю. В итоге в пределе мы получаем из (16.1)

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{dy}{du}(u_0)\frac{du}{dx}(x_0).$$

Пример. Вычислим производную от сложной функции $y = \ln^2(\sin^3 x^2)$ с помощью записи ее в виде композиции функций и дифференцирования по своим переменным. Положим

$$y = w^2, \quad w = \ln u, \quad u = v^3, \quad v = \sin z, \quad z = x^2.$$

Тогда из доказанной формулы, распространенной на случай композиции более чем двух переменных с помощью метода математической индукции, вытекает, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw}\frac{dw}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dz}\frac{dz}{dx} =$$

$$2w\frac{1}{u}3v^2 \cos z \, 2x =$$

$$2\ln(\sin^3 x^2)\frac{1}{\sin^3 x^2}3\sin^2 x^2 \cos x^2 \, 2x.$$

Пример. Надем производную степенно-показательной функции вида $y = (f(x))^{g(x)}$. Для этого прологарифмируем исходную функцию и после этого продифференцируем ее

$$\ln y = g(x)\ln f(x), \quad (\ln y)' = \frac{1}{y}y' = g'\ln f + g\frac{1}{f}f'.$$

Откуда

$$y' = y\left(g'\ln f + g\frac{1}{f}f'\right) = (f(x))^{g(x)}\left(g'\ln f + g\frac{1}{f}f'\right).$$

Односторонние производные. Как и в случае непрерывности, можно ввести понятие односторонних производных в точке. Это понятие может определяться как для границ отрезка на котором мы рассматриваем функцию, так и во внутренних точках отрезка. Таким образом, мы имеем, что

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'_+,\quad \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'_-$$

являются соответственно правой и левой производной в точке x_0, где как всегда $\Delta x = x - x_0$.

Пример. Найдем односторонние производные функции $y=|x|$ в точке $x=0$. Как известно,

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}\qquad (|x|)'=\begin{cases} 1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

Таким образом,

$$|x|'_+(0)=1,\quad |x|'_-(0)=-1.$$

Бесконечные производные. Если отношение

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\infty(\pm\infty),$$

то тогда говорят, что производная равна $\infty(\pm\infty)$, выделяя этот случай из ситуации, когда производной не существует. Заметим, что в этом случае сохраняется и геометрический смысл производной, ведь тогда, например, $\operatorname{tg}\alpha = +\infty$ означает, что $\alpha=\pi/2$, т.е касательная в этой точке будет вертикальной. Аналогично устанавливается понятие односторонней бесконечной производной. Так, например, для функции $y=\sqrt{x}$ получаем, что правая производная в точке $x=0$ обращается в $+\infty$. В случае же функции $y=1/x$, правая производная в точке $x=0$ обращается в $+\infty$, а левая обращается в $-\infty$.

Рассмотрим теперь функции $x\sin(1/x)$ и $x^2\sin(1/x)$. Нетрудно видеть, что у каждой из них существуют производные для любой точки $x\neq 0$. Это вытекает из свойств операции дифференцирования и производной суперпозиции. Более того,

$$\lim_{x\to 0}x\sin(1/x)=0,\quad \lim_{x\to 0}x^2\sin(1/x)=0,$$

т.е. обе эти функции по непрерывности доопределяются нулем в точке $x=0$. Легко посчитать формальную производную в точках $x\neq 0$ по известным правилам дифференцирования

$$(x\sin(1/x))'=\sin(1/x)-\frac{1}{x}\cos(1/x),\quad \left(x^2\sin(1/x)\right)'=2x\sin(1/x)-\cos(1/x).$$

В обоих случаях предельный переход при $x\to 0$ не дает существование предела. Означает ли это отсутствие производной у этих функций в $x=0$? Легко видеть, что у первой функции нет производной в нуле, вычисленной согласно определению. Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(1/x)}{x}=\lim_{x\to 0}\sin(1/x)\nrightarrow .$$

Для проверки последнего факта можно взять две последовательности вида

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi n},\quad \beta_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n},$$

которые стремятся к 0 и на которых предел принимает разные значения, а, следовательно, из определения предела по Гейне, вытекает несуществование такового. У второй функции производная равна нулю. Действия аналогично предыдущему случаю получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin(1/x)=0.$$

Таким образом, отсутствие предела при x стремящемся к некоторой фиксированной точке x_0 в формально вычисленной производной, не означает обязательно отсутствие соответствующей производной. Отметим, что если у функции $f(x)$ существует на каком-либо промежутке производная, то она (производная) либо непрерывна в точках этого промежутка, либо имеет в них разрыв второго рода (никак не первого!).

Основные теоремы дифференциального исчисления.

Лемма. Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке конечную производную. Если $f'(x_0)>0$ ($f'(x_0)<0$), то для значений x, достаточно близких к x_0 справа, будет $f(x)>f(x_0)$ ($f(x)<f(x_0)$), а для значений x, достаточно близких к x_0 слева, будет $f(x)<f(x_0)$ ($f(x)>f(x_0)$). Иными словами, функция $f(x)$ в точке x_0 возрастает (убывает).

Доказательство. По определению производной,

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Рассмотрим случай $f'(x_0)>0$. Найдется такая окрестность $(x_0-\delta,x_0+\delta)$, в которой выражение под знаком предела будет иметь знак предела, т.е.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0.$$

Для $x_0<x<x_0+\delta$ имеем $x-x_0>0$ и, следовательно, $f(x)-f(x_0)>0$. Если же $x_0-\delta<x<x_0$, тогда $x-x_0<0$ и, как следствие, $f(x)-f(x_0)<0$. Лемма доказана.

Теорема Ферма. Пусть $f(x)$ определена в некотором промежутке X и во внутренней точке $x=c$ этого промежутка принимает наибольшее (наименьшее) значение. Если существует конечная производная $f'(c)$, то необходимо $f'(c)=0$.

Доказательство. Пусть для определенности $f(x)$ принимает наибольшее значение в точке c. Предположение, что $f'(c) \neq 0$ приводит к противоречию: либо $f'(c) > 0$, и тогда по лемме $f(x) > f(c)$, для достаточно близких $x > c$, либо $f'(c) < 0$, и тогда $f(x) > f(c)$, для достаточно близких $x < c$. В обоих случаях $f(c)$ не является наибольшим значением $f(x)$ в промежутке X. Заметим, что геометрически это означает, что касательная, в точке внутренного максимума параллельна оси OX. Заметим, что требование достижения максимума (минимума) во внутренней точке существенно. Без этого предположения теорема была бы неверной. Например, функция $y = x$ на промежутке $[-1, 1]$ принимает максимальное значение в точке $x = 1$ и, очевидно, $x' = 1$ в любой точке отрезка.

§ 17 Лекция 17

Теорема Ролля. Пусть 1) $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$; 2) существует конечная производная f', по крайней мере, в (a,b); 3) на концах промежутка $f(a) = f(b)$. Тогда между a и b найдется точка $a < c < b$, что $f'(c) = 0$.

Доказательство. $f(x)$ непрерывна в замкнутом промежутке и потому, по второй теореме Вейерштрасса, принимает как свое наибольшее значение M, так и наименьшее m. Рассмотрим 2 случая:

1. $M = m$. Тогда $f(x)$ в промежутке $[a,b]$ сохраняет постоянное значение и, следовательно, $f' \equiv 0$ во всем промежутке, так что в качестве точки c можно взять любую точку отрезка.
2. $M > m$. Мы знаем, что оба значения достигаются, но, так как $f(a) = f(b)$, то хоть одно значение достигается в некоторой точке c внутри $[a,b]$. Но тогда из Теоремы Ферма сразу вытекает, что $f'(c) = 0$. Теорема доказана.

Отметим контрпримеры на невыполнение условий теоремы. $f = x - [x]$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля на отрезке $[0,1]$, за исключением непрерывности в точке $x = 1$, а производная $f' = 1$ везде внутри промежутка. $f = x$ при $x \in [0, 1/2]$ и $f = 1 - x$ при $x \in [1/2, 1]$ удовлетворяет всем условиям теоремы, кроме дифференцируемости в точке $x = 1/2$. В то же время, очевидно, что производная нигде не обращается в ноль. Наконец, $f = x$ удовлетворяет всем условиям теоремы на $[0,1]$ за исключением равенства функции на концах отрезка, ну и производняя нигде не равна не нулю.

Формула конечных приращений Лагранжа. Пусть 1) $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$; 2) существует конечная производная f', по крайней мере, в (a,b). Тогда между a и b найдется точка $a < c < b$, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию на $[a,b]$

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Она непрерывна как разность между f и линейной функцией. В промежутке $[a,b]$ она имеет конечную производную

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что $F(a) = F(b)$. Следовательно, к $F(x)$ применима теорема Ролля, откуда следует существование точки c такой, что $F'(c) = 0$, что дает

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Геометрическое толкование формулы Лагранжа. Отношение

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

равно угловому коэффициенту секущей AB, где $f(a)=A$, $f(b)=B$. $f'(c)$ определяет угловой коэффициент касательной к графику функции в точке c. Таким образом, утверждение теоремы Лагранжа равносильно следующему: на дуге AB всегда найдется по крайней мере одна точка $M=f(c)$, в которой касательная к f параллелтна хорде AB.

Формулой конечных приращений формула Лагранжа называется в силу следующих причин: если взять любое значение $x_0 \in [a,b]$ и придать ему приращение Δx, не выводящее его за пределы отрезка, тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$. Применим формулу Лагранжа к промежутку $[x_0, x_0+\Delta x]$ или к промежутку $[x_0-\Delta x, x_0]$ в зависимости от знака Δx. Число c из теоремы можно поедставить в следующем виде

$$c = x_0 + \theta\Delta x, \quad 0<\theta<1.$$

Тогда формула Лагранжа примет следующий вид

$$\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x.$$

Это равенство дает точное значение приращения функции при любом конечном приращении Δx. И даже слабый момент, заключающийся в неизвестном c не мешает большому количеству приложений, который имеет эта формула. Одна из немногих, если ни единственная, связывающая равенством функцию и ее производную.

Следствие из формулы Лагранжа. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в некотором промежутке X, и имеет внутри него конечную производную. Тогла для того, чтобы f была постоянной, необходимо и достаточно, чтобы $f'=0$ внутри X.

Доказательство. Рассмотрим две произвольных точки $x_1 > x_2 \in X$. Легко видеть, что функция удовлетворяет условиям, гарантирующим справедливость формулы Лагранжа, следовательно,

$$f(x_1)-f(x_2) = f'(c)(x_1-x_2), \quad x_2<c<x_1.$$

Так как $f'(c)=0$ для любой внутренней точки c промежутка X, то получаем, что для произвольных $x_1>x_2\in X$ имеем $f(x_1)=f(x_2)$.

Формула Коши. Пусть 1) $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$; 2) существует конечные производные f' и g', по крайней мере, в (a,b); 3) $g'(x)\neq 0$ в (a,b). Тогда между a и b найдется точка $a<c<b$, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство. Сразу заметим, что $g(a) \neq g(b)$ и дробь в левой части равенства имеет смысл. Действительно, если бы $g(a) = g(b)$, то, по теореме Ролля, производная g' обращалась бы в ноль в промежуточной точке отрезка, что противоречит условию 3). Введем вспомогательную функцию на $[a, b]$

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Она непрерывна так как непрерывны f и g. В промежутке $[a, b]$ она имеет конечную производную

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x).$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что $F(a) = F(b) = 0$. Следовательно, к $F(x)$ применима теорема Ролля, откуда следует существование точки c такой, что $F'(c) = 0$, что дает

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c) - f'(c) = 0$$

или

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Геометрическое толкование формулы Коши такое же как и формулы Лагранжа. Рассмотрим кривую, заданную параметрически

$$u = g(x), \quad v = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Тогда

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

равно угловому коэффициенту секущей AB, где $A = (g(a), f(a))$, $B = (g(b), f(b))$. А отношение $v'_u((g(c)) = f'(c)/g'(c)$ определяет угловой коэффициент касательной к графику функции в точке $M = (g(c), f(c))$. Таким образом, утверждение теоремы Лагранжа равносильно следующему: на дуге AB всегда найдется по крайней мере одна точка M, в которой касательная к $v = v(u)$ параллельна хорде AB.

Производные высших порядков. Если функция f имеет конечную производную f' в некотором промежутке X, то она в свою очередь представляет из себя функцию. Если эта функция, в свою очередь, имеет конечную производную в некоторой точке x_0 этого промежутка, то говорят, что функция f имеет вторую производную в точке x_0. Заметим, что можно говорить о второй производной, которая обращается в бесконечность, но для того, чтобы это имело место, все равно надо требовать конечность первой производной. Т.е., если первой производной нет, то второй нет и подавно. Это легко заметить из определения производной, так как для записи соответствующего разностного соотношения нам надо будет брать значения первой производной, а она у нас не определена. Дадим определение второй производной через разностное соотношение

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0).$$

Формально можно записать $f'' = (f')'$. Часто вторую производную записывают в виде $\frac{d^2 f}{dx^2}$. Как известно, скорость движения определяется как производная от пути по времени. Производная же от скорости по времени определяет физическую величину, называемую ускорением. Значит ускорение есть вторая производная от пути по времени.

Аналогично можно определить производную любого порядка, применяя для определения одну и ту же процедуру. Производные третьего порядка часто записывают в виде f'''. Для производных более высокого порядка применяют следующую символику: $f^{(n)}$. Т.е. пусть у функции f существует $(n-1)$-ая производная $f^{(n-1)}$ в некоторой окрестности точки x_0, тогда если существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = f^{(n)}(x_0),$$

то говорят, что существует производная порядка n от функции f в точке x_0. Таким образом, понятие производной высокого порядка определяется рекуррентным образом, через производную предыдущего порядка $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Общие формулы для производных высших порядков. Сразу отметим, что для производных высокого порядка имеют место непосредственные обобщения для дифференцирования произведения постоянной на функцию и дифференцирования суммы

$$(cy)^{(n)} = cy^{(n)}, \quad (y \pm z)^{(n)} = y^{(n)} \pm z^{(n)}.$$

Для производной n-ого порядка от произведения двух функций имеет место формула Лейбница. Возьмем произведение и продифференцируем его 3 раза и сделаем замечание по поводу того, на что это похоже. С помощью метода математической индукции можно доказать следующую формулу (Лейбница)

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)},$$

где $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$.

Последовательным дифференцированием и применением метода математической индукции можно получить следующие формулы

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1) x^{\alpha - n},$$

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}, \quad (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a,$$
$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2}), \quad (\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$$

Пример. Рассмотрим функцию $x \sin x$ и вычислим ее производную порядка 100. Для удобства вычисления возьмем в качестве $u = \sin x$, а в качестве $v = x$. Тогда

$$(x \sin x)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\sin x)^{(n-k)} x^{(k)} = (\sin x)^{100} x + 100(\sin x)^{99} = x \sin x - 100 \cos x.$$

§ 18 Лекция 18

Формула Тейлора. Получим теперь очень важную формулу, дающую возможность осуществлять приближение функций с помощью целых многочленов. Рассмотрим следующий многочлен

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n.$$

Продифференцировав последовательно его n раз, получим

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1}.$$

$$p''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

$$p'''(x) = 2 \cdot 3a_3 + \dots + n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3}.$$

$$\dots$$

$$p(x) = 2 \cdots 3 \cdot \ldots n a_n.$$

Полагая теперь в этих формулах $x = 0$, получим выражение для коэффициентов многочлена через значения самого многочлена и его производных в точке $x = 0$

$$a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Таким образом, исходный многочлен мы можем записать в виде

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!} x + \frac{p''(0)}{2!} x^2 + \frac{p'''(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Вместо того, чтобы разлагать многочлен по степеням x, можно разложить его по степеням $x - x_0$

$$p(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + A_3(x - x_0)^3 + \dots + A_n(x - x_0)^n.$$

Полагая $x - x_0 = \eta$, $p(x) = p(x_0 + \eta) = P(\eta)$, получим для коэффициентов многочлена

$$P(\eta) = A_0 + A_1 \eta + A_2 \eta^2 + A_3 \eta^3 + \dots + A_n \eta^n$$

известные выражения

$$A_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Но

$$P^{(k)}(0) = p^{(k)}(x_0)$$

и, следовательно,

$$A_k = \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Т.е. в случае записи многочлена $p(x)$ по степеням $x-x_0$, мы получаем аналогичное представление для него через его же значения и значения его производных, но уже в точке x_0

$$p(x)=p(x_0)+\frac{p'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{p''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{p'''(x_0)}{1!}(x-x_0)^3+\cdots+\frac{p^{(n)}(x_0)}{1!}(x-x_0)^n.$$

Это и есть формула Тэйлора для многочлена. Иногда, в случае $x_0=0$, эту формулу называют формулой Маклорена.

Формула Тейлора для произвольной функции. Дополнительный член в форме Пеано.

Обратимся теперь к разложению произвольной функции $f(x)$. В случае многочлена, формула Тейлора давала точное равенство, так как приближали многочлен многочленом. В общем случае, равенства не будет. Для получения равенства мы будем прибавлять так называемый дополнительный член, который записывается в разных видах. Мы начнем с дополнительного члена в форме Пеано.

Предположим, что в некоторой окрестности точки x_0 у f существуют производные всех порядков до $n-1$-го включительно, а также производная порядка n в самой точке. Составим по предыдущим образцам многочлен Тейлора, соответствующий функции f:

$$p_f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{1!}(x-x_0)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{1!}(x-x_0)^n.$$

Легко заметить, что многочлен Тейлора функции f и сама функция f, включая их производные до порядка n, имеют одинаковые значения в точке x_0. Тем не менее, многочлен Тейлора дает всего лишь некоторое приближение. Попытаемся понять насколько это приближение хорошее и какова оценка погрешности этого приближения.

Для этого рассмотрим разность $r(x)=f(x)-p_f(x)$. Исследование этой разности ответит нам на все вопросы. Докажем сначала, что при $x\to x_0$ эта разность представляет собой следующую бесконечно малую величину

$$r(x)=o((x-x_0)^n).$$

В силу отмеченной выше связи между функциями f и p, имеем

$$r(x_0)=r'(x_0)=r''(x_0)=\cdots=r^{(n)}(x_0)=0. \tag{18.1}$$

Докажем следующее утверждение: если для какой-либо функции $r(x)$, имеющей в точке x_0 производные до n-го порядка, выполнены условия (18.1), то имеет место соотношение $r(x)=o((x-x_0)^n)$.

Доказательство. Доказательство проведем по методу индукции. При $n = 1$ мы имеем, что выполнены соотношения (18.1): $r(x_0) = r'(x_0) = 0$, откуда с помощью определения производной получаем

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{r(x) - r(x_0)}{x - x_0} = r'(x_0) = 0,$$

что означает требуемое соотношение в случае $n = 1$. Предполагаем выполненным искомое соотношение для некоторого $n > 1$ и докажем, что тогда оно выполнено и для $n + 1$. Т.е. мы считаем известным, что при выполнении условий (18.1), $r(x) = o((x - x_0)^n)$. Теперь предполагаем, что выполнены условия

$$r(x_0) = r'(x_0) = r''(x_0) = \cdots = r^{(n)}(x_0) = r^{(n+1)}(x_0) = 0. \tag{18.2}$$

Если рассмотреть функцию $r'(x)$, то она удовлетворяет условиям типа (18.1), а значит для нее имеет место по предположенному

$$r'(x) = o((x - x_0)^n).$$

По формуле конечных приращений Лагранжа имеем

$$r(x) = r(x) - r(x_0) = r'(c)(x - x_0), \tag{18.3}$$

где $x_0 < c < x$ и, следовательно, $|c - x_0| < |x - x_0|$, значит

$$r'(c) = o((c - x_0)^n) = o((x - x_0)^n)$$

и мы приходим к тому, что требовалось доказать, используя (18.3). Таким образом, наше утверждение имеет место, и мы получаем следующую формулу

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{1!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{1!}(x - x_0)^n +$$
$$o((x - x_0)^n). \tag{18.4}$$

Формула (18.4) называется формулой Тейлора для функции f в точке x_0 с дополнительным (остаточным) членом в форме Пеано. Замечаем, что формула Тейлора первого порядка является линейным приближением, и мы узнаем в ней (без остаточного члена) формулу для касательной к функции.

Можно показать, что такое представление для f является единственным, действуя от противного. Пусть у нас есть два различных представления для f

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} A_n (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} A_n'(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).$$

Тогда из тождества

$$\sum_{k=0}^{n} A_n(x-x_0)^k=\sum_{k=0}^{n} A_n'(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$$

при $x\to x_0$ сразу получаем $A_0=A_0'$. Уничтожив эти члены и деля на $x-x_0$ получим

$$\sum_{k=1}^{n} A_n(x-x_0)^{k-1}=\sum_{k=1}^{n} A_n'(x-x_0)^{k-1}+o((x-x_0)^{n-1}),$$

откуда аналогично после перехода к пределу получаем $A_1=A_1'$, и т.д.

Приведем несколько примеров стандартных разложений:

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\dots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n),$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5\dots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+o(x^{2n})$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4\dots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n+1}),$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n).$$

Заметим, что полученная нами формула хоть и дает нам представление о том, что формула Тейлора для функции f дает нам некоторое приближение самой функции, тем не менее проводить приближенные вычисления с оценкой погрешности не представляется возможным, в силу самого понятия $o(x^n)$.

Чтобы можно было использовать формулу Тейлора для приближенных исследований, нужно найти такие формы остаточных членов, которые позволяют устанавливать для каких значений x формула воспроизводит функцию с заданной точностью. Мы приведем два типа остаточных членов: в форме Лагранжа (наиболее употребимый в силу простоты)

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\quad x_0<c<x,\quad x_0>c>x$$

и в форме Коши

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1},\quad 0<\theta<1.$$

Приближенные формулы. Если отбросить остаточный член в формуле Тейлора, то получится приближенная формула

$$f(x)\approx f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{1!}(x-x_0)^3+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{1!}(x-x_0)^n,$$

заменяющая функцию сложной природы целым многочленом. Но имея остаточный член в форме Лагранжа или Коши, мы уже в состоянии оценить погрешность этой формулы, ибо по абсолютной величине она как раз и равна отброшенному остаточному члену.

Пример. Вычислим погрешность формулы Тейлора при вычислении числа e. Запишем формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Таким образом, имеем

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}, \quad 0 < c < 1.$$

Отсюда вытекает, что

$$e \approx 2 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}, \quad 0 < c < 1.$$

с точностью

$$\frac{e^c}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}.$$

Если наперед задана точность, с которой нам нужно посчитать число e, тогда нужно будет решить соответствующее неравенство. Например, чтобы посчитать число e с точночтью до 0.1 нужно решить неравенство

$$\frac{3}{(n+1)!} \leq \frac{1}{10}, \quad (n+1)! > 30 \Longrightarrow n > 4.$$

Т.е.

$$e \approx 2 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{5!}$$

с точностью не превышающей 0.1.

§ 19 Лекция 19

Исследование функций с помощью производных.

Условие монотонности функции. Пусть $f(x)$ непрерывна в некотором промежутке X и имеет в нем конечную производную f'. Для того, чтобы f была неубывающей (невозрастающей) в X, необходимо и достаточно, чтобы $f' \geq 0$ ($f' \leq 0$).

Необходимость. Если f неубывает, то взяв x внутри X и придав ему приращение $\Delta x > 0$, не выводящее за пределы X, будем иметь

$$f(x + \Delta x) \geq f(x), \quad \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0,$$

и в пределе при $\Delta x \to 0$, получим $f' \geq 0$.

Достаточность. Пусть теперь дано, что $f' \geq 0$ внутри X. Возьмем два значения $x_1 < x_2$ из промежутка X и применим в промежутке $[x_1, x_2]$ формулу Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad x_1 < c < x_2.$$

Так как $f' \geq 0$, то очевидно $f(x_2) \geq f(x_1)$, что означает неубывание f.

Сразу заметим, что из приведенного доказательства немедленно следует, что достаточным условием возрастания (убывания) функции в X является условие $f' > 0$ ($f' < 0$). На самом деле верна более сильная теорема, которая говорит:

Теорема о ворастании (убывании) функции. Пусть $f(x)$ непрерывна в некотором промежутке X и имеет в нем конечную производную f'. Для того, чтобы f была ворастающей (убывающей) в X, необходимо и достаточно, чтобы

1) $f' \geq 0$ ($f' \leq 0$) внутри X;

2) f' не обращается тождественно в нуль ни в каком промежутке, составляющем часть X.

Необходимое условие минимума, максимума. Предположим, что у f в промежутке (a, b) существует конечная производная. Будем говорить, что в точке x_0 функция имеет локальный экстремум, если существует δ-окрестность точки x_0 такая, что $f(x_0) \geq f(x)$ (либо $f(x_0) \leq f(x)$) для любой точки x из этой окрестности. Применяя теорему Ферма к промежутку $(x_0 - \delta, x + \delta)$, мы заключаем, что $f'(x_0) = 0$. Это и есть необходимое условие экстремума. Такие точки мы называем стационарными. Пример функции $y = x^3$ показывает нам, что это условие всего лишь необходимое. Заметим, однако, что этими точками не исчерпывается класс точек, в которых может быть экстремум, это видно из примера функции $y = x^{2/3}$ или $y = |x|$. Следовательно, точки в которых не существует производной, тоже могут доставлять экстремум.

Достаточные условия. Первое правило. Предположим, что в некоторой орестности точки x_0 существует f', и как слева от x_0, так и справа от x_0 эта производная сохраняет знак. Тогда возможны 3 случая:

1) $f' > 0$ при $x < x_0$ и $f' < 0$ при $x > x_0$, т.е. производная меняет знак с + на - при переходе через x_0. Тогда слева от точки x_0 функция возрастает, а справа от x_0, убывает, т.е. в точке x_0 функция имеет максимум.

2) $f' < 0$ при $x < x_0$ и $f' > 0$ при $x > x_0$, т.е. производная меняет знак с - на + при переходе через x_0. Тогда слева от точки x_0 функция убывает, а справа от x_0, ворастает, т.е. в точке x_0 функция имеет минимум.

3) $f' > 0$ как при $x < x_0$, так и при $x > x_0$; либо $f' < 0$ как при $x < x_0$, так и при $x > x_0$, т.е. производная не меняет знак при переходе через x_0. Тогда функция либо все время возрастает, либо все время убывает, т.е. в точке x_0 функция не имеет ни максимума ни минимума.

Это правило полностью решает вопрос в том случае, когда в промежутке (a, b) всего лишь конечное число стационарных точек или точек, где отсутствует конечная производная

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b.$$

Во-первых, в этом случае, мы всегда можем выделить окрестность каждой из выделенных точек так, чтобы туда не попали другие, подобные им точки, поскольку их конечное число; в каждом промежутке (x_{k-1}, x_k) существует конечная производная у f; в каждом таком промежутке f' сохраняет знак. Последнее вытекает из следующей торемы:

Теорема Дарбу. Если функция f имеет конечную производную в промежутке $[c, d]$, то функция принимает все значения содержащиеся между $f'(c)$ и $f'(d)$.

Доказательство. Сперва предположим, что $f'(c) > 0$ и $f'(d) < 0$ и докажем существование точки, в которой производная обращается в ноль. Из существования производной вытекает, что f непрерывна в $[c, d]$, следовательно, по второй теореме Вейерштрасса она достигает своего максимума в некоторой точке μ. Так как $f'(c) > 0$ и $f'(d) < 0$, то μ не может совпадать ни с c, ни с d. Откуда, в силу того, что μ внутренняя точка, из Теоремы Ферма получаем $f'(\mu) = 0$. Возьмем теперь произвольне число $f'(c) > L > f'(d)$. Рассмотрим вспомогательную функцию $\phi(x) = f(x) - Lx$. Она непрерывна и имеет производную $\phi'(x) = f'(x) - L$. Так как

$$\phi'(c) > 0, \quad \phi'(d) < 0,$$

то из предыдущих рассуждений вытекает, что существует точка l, такая что $\phi'(l) = 0$, а, следовательно, $f'(l) = L$. $\square$

Заметим, что f удовлетворяет теореме Дарбу на любом отрезке $[c, d] \subset (x_{k-1}, x_k)$, следовательно, сохраняет знак на каждом из них, потому что иначе мы имели бы $f' = 0$ внутри, а этого быть не может, так как все нули производной уже находятся среди перечисленных выше точек. Тут основная проблема была в том, что производная всего лишь существует, а это значит, что она не непрерывна и, следовательно, смена знака концах не означает сразу обращение в ноль где-нибудь (по теореме Больцано). Поэтому пришлось использовать более тонкий результат – теорему Дарбу.

Пример. Рассмотрим функцию $f = x^{2/3} - (x^2-1)^{1/3}$. Вычислив производную и приравняв ее к нулю, мы получаем, что нули производной это $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Сама производная имеет вид

$$f' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}2x = \frac{2}{3}\frac{(x^2-1)^{2/3} - x^{4/3}}{x^{1/3}(x^2-1)^{2/3}}.$$

В точках $x = \pm 1$ и $x = 0$ производной не существует. Таким образом, мы имеем пять критических точек. Используя представление для производной и сформулированный выше критерий, мы приходим к заключению, что в точках $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ имеем максимум, в точке $x = 0$ – минимум, а в точках $x = \pm 1$ экстремума нет.

Заметим, что в некоторых случаях указанное правило неприложимо. Это происходит в тех случаях, когда в любой окрестности испытуемой точки содержится бесконечное множество других подобных точек. Рассмотрим функцию

$$f = x^2 \sin\frac{1}{x} \quad \text{при} \quad x \neq 0; \quad f(0) = 0.$$

Мы знаем, что $f'(0) = 0$. Заметим, что

$$f' = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

В точках $x_k = \frac{1}{2\pi k}$ имеем $f' = -1$, а в точках $x_l = \frac{1}{(2l+1)\pi}$ имеем $f' = 1$, причем обе последовательности стремятся к нулю. Здесь, в точках вида $x_m = \frac{1}{\pi/2 + m\pi}$ сама функция принимает то положительные то отрицательные значения, причем последовательность этих точек стремится к нулю вместе со значениями функции и в точке $x = 0$ нет экстремума.

Точно также для функции

$$f = x^2\left(1 + \sin\frac{1}{x}\right) \quad \text{при} \quad x \neq 0; \quad f(0) = 0$$

можно показать наличие бесконечной смены знака производной, но из вида функции сразу видно, что в $x = 0$ у нее минимум. Здесь, описанное выше правило тоже не применимо.

Второе правило. Критерий второй производной. Пусть теперь функция определена в некоторой окрестности x_0 вместе со своей первой производной; пусть x_0 является стационарной точкой и пусть существует $f''(x_0)$. Если $f''(x_0) > 0$, то функция $f'(x)$ вблизи точки

x_0 возрастает, т.е. слева от точки x_0 имеем $f'(x) < f'(x_0) = 0$, а справа $f'(x) > f'(x_0) = 0$. Таким образом, производная меняет свой знак с минуса на плюс, а значит, по первому правилу, имеет в этой точке минимум. Аналогично показывается, что в случае $f''(x_0) < 0$, точка x_0 будет точкой максимума фунции f.

Пример. Рассмотрим функцию $y = |x^2 - 3x + 2|$ на отрезке $[-10, 10]$ на исследование локальных максимумов и минимумов, а также глобальных минимаксов, с применением первого и второго правил. Согласно определению понятия модуля будем иметь

$$|x^2 - 3x + 2| = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x \in [-10, 1] \cup [2, 10] \\ -x^2 + 3x - 2, & x \in (1, 2) \end{cases}$$

Следовательно,

$$(|x^2 - 3x + 2|)' = \begin{cases} 2x - 3, & x \in [-10, 1) \cup (2, 10] \\ -2x + 3, & x \in (1, 2) \end{cases}$$

Таким образом, в точке $x = 1.5$ производная обращается в ноль, а в точках $x = 1$ и $x = 2$ функция не имеет производную. Вычислив вторую производную в точке $x = 1.5$, получим, что она равна -2, а значит в этой точке мы имеем локальный максимум равный 0.25. Применяя первое правило к оставшимся точкам, получаем, что $x = 1$ является точкой минимума со значением 0, а $x = 2$ – точкой минимума со значением 0. Чтобы найти глобальные максимум и минимум, нужно сравнить все значения в локальных экстремумах и значения на концах исследуемого отрезка.

Использование высших производных. Может случиться так, что и $f''(x_0) = 0$. В этом случае второе правило не отвечает на вопрос о существовании минимакса в этой точке. В этом случае, при достаточной гладкости функции, можно продолжить исследование производных высокого порядка в этой точке. Предположим теперь, что f имеет в точке x_0 производные вплоть до n-го порядка, причем все они, до порядка $n-1$ включительно, обращаются в ноль:

$$f'(x_0) = 0, \quad \cdots, f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Запишем формулу Тейлора для разности $f(x) - f(x_0)$ по степеням $x - x_0$ с дополнительным членом в форме Пеано. Так как все производные до порядка $n - 1$ включительно обращаются в ноль, то формула принимает вид

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0) + \alpha}{n!}(x - x_0)^n.$$

Так как $\alpha \to 0$ при $x \to x_0$, то при достаточной близости x к точке x_0 знак суммы в числителе будет совпадать со знаком $f^{(n)}(x_0)$ как при $x < x_0$, так и при $x > x_0$. Рассмотрим

2 случая.

1. $n = 2k + 1$. При переходе через точку x_0 множитель $(x - x_0)^n$ будет менять знак, а значит в окрестности точки x_0 функция f будет принимать значения как большие, так и меньшие, чем $f(x_0)$. Следовательно, в точке x_0 никакого экстремума нет.

2. $n = 2k$. В этом случае $(x - x_0)^n$ не меняет знака, оставаясь все время положительным, и знак разности будет полностью определяться знаком производной. Таким образом, получаем максимум если $f^{(n)}(x_0) < 0$ и минимум, если $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Получаем следующее правило:

Если первая производная отличная от нуля в точке x_0 есть производная нечетного порядка, функция не имеет в этой точке экстремума. Если же такой производной является производная четного порядка, то функция в точке x_0 имеет максимум, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, минимум, если $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Заметим, что патологические случаи есть и для этого правила. То есть функции, бесконечно дифференцируемые, для которых это правило тем не менее не применимо. Примером такой функции является $f = e^{-\frac{1}{x^2}}$, которая в точке $x = 0$ имеет производные всех порядков равные нулю. Непосредственно можно убедиться, что в этой точке у функции иминимум.

§ 20 Лекция 20

Выпуклые функции. Функция f, непрерывная в промежутке X, называется выпуклой вниз, если для любых точек x_1, x_2 выполняется неравенство

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \leq q_1f(x_1) + q_2f(x_2),$$

каковы бы не были положительные числа $q_1 + q_2 = 1$.

Функция f, непрерывная в промежутке X, называется выпуклой вверх, если для любых точек x_1, x_2 выполняется неравенство

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \geq q_1f(x_1) + q_2f(x_2),$$

каковы бы не были положительные числа $q_1 + q_2 = 1$.

Очевидно, что если f выпукла вверх, то $(-f)$ выпукла вниз. Геометрический смысл этих определений: выпуклая функция характеризуется тем, что все точки любой ее дуги находятся все либо над, либо под хордой, соединяющей эти 2 точки.

Простейшие предложения о выпуклых функциях.

1. Произведение выпуклой функции на постоянную оставляет ее выпуклой.

2. Сумма двух или нескольких выпуклых вниз (вверх) функций тоже выпукла вниз (вверх).

3. Произведение двух выпуклых вниз (вверх) функций может не оказаться выпуклой вниз (вверх) функцией (пример: $-x^{1/3}$ выпукла вниз, а квадрат ее выпукла вверх).

4. Выпуклая вниз (вверх) в промежутке X функция, отличная от постоянной, не может достигать своего максимального (минимального) значения внутри промежутка.

5. Если промежуток $[x_1, x_2]$, $x_1 < x_2$, содержится в промежутке X, в котором функция выпукла, то неравенства, определяющие выпуклую функцию, выполняются всегда либо со знаком равенства, либо всегда со знаком неравенства. Геометрически это означает, что либо дуга сливается с хордой, либо, за исключением концов, лежит под или над хордой.

Условие выпуклости функции.

Теорема 20.1. Пусть f непрерывна в промежутке X и имеет в нем конечную производную f'. Для того, чтобы f была выпуклой вниз, необходимо и достаточно, чтобы ее производная f' неубывала.

Доказательство. Необходимость. Пусть f выпукла вниз. Рассмотрим основное неравенство и положим $x = q_1x_1 + q_2x_2$, тогда

$$q_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad q_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Откуда основное тождество можно переписать в виде

$$(x_2 - x)f(x_1) + (x_1 - x_2)f(x) + (x - x_1)f(x_2) \geq 0. \tag{20.1}$$

Предполагая $x_1 < x < x_2$, перепишем его в виде

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \tag{20.2}$$

Если устремить x к x_1 и к x_2, то в пределе получим

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad f'(x_2) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

откуда $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, так что функция f является неубывающей.

Достаточность. Пусть теперь выполнено условие неубывания функции, выраженное последним неравенством. Для того, чтобы доказать неравенство (20.2), применим к каждой из его частей формулу Лагранжа соответственно на отрезках $[x_1, x]$, $[x, x_2]$

$$f'(\eta_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \quad f'(\eta_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

где $x_1 < \eta_1 < x < \eta_2 < x_2$. Так как по предположению $f'(\eta_1) \leq f'(\eta_2)$, то соотношение (20.1) имеет место, а из него следует основное неравенство, обуславливающее выпуклость функции вниз.

Теорема 2. Пусть f непрерывна в промежутке X вместе со своей производной f' и имеет внутри X конечную вторую производную. Для того, чтобы f была выпуклой вниз, необходимо и достаточно, чтобы внутри X выполнялось $f' \geq 0$.

Доказательство. Для доказательства этой теоремы достаточно применить к функции f' теорему о достаточном условии неубывания функции, а затем применить теорему 1.

Аналогично для выпуклых вверх функциий мы имеем невозрастание первой производной и неположительность второй внутри промежутка X.

Точка перегиба. Точка $M(x_0, f(x_0))$ кривой f называется точкой перегиба, если она отделяет участок кривой, где функция выпукла вниз, от участка, где функция выпукла вверх (и наоборот).

Из теорем 1,2 вытекает, что для смены характера выпуклости, необходимо и достаточно, чтобы производная с одной стороны от предполагаемой точки перегиба возрастала, а с другой убывала. Если допустить существование второй производной в точке, то необходимо, чтобы $f''(x_0) = 0$. Это только лишь необходимое условие точки перегиба. Легко видеть, что функция $y = x^4$ имеет вторую производную в нуле равную нулю, тем не менее, в точке $x = 0$ эта функция имеет минимум.

Для распознавания точки перегиба можно дать следующее правило: если при переходе через предполагаемую точку перегиба (вторая производная обращается в ноль либо не существует) f'' меняет знак, то x_0 является точкой перегиба. Как и в случае экстремумов, можно привлечь производные высокого порядка для определения точек перегиба: если первая из производных (выше второго порядка), не обращающаяся в ноль, есть производная нечетного порядка, то это точка перегиба, если четного, то перегиба нет.

Схема постороения графика. Предположим, что на $[a, b]$ функция f дважды дифференцируемая, исключая отдельные точки, в которых производная имеет бесконечные значения.

1. определить значения x, для которых производная обращается в ноль и бесконечность, и подвергнуть их исследованию на экстремум.

2. определить значения x, для которых вторая производная обращается в ноль, и подвергнуть их исследованию на перегиб.

3. вычислить значения f, отвечающие всем этим значениям x, а также концам a и b.

§ 21 Лекция 21

Бесконечные ряды с постоянными членами. Пусть задана некоторая последовательность чисел

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots . \tag{21.1}$$

Составленный из этих чисел символ

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \cdots \tag{21.2}$$

называется бесконечным рядом, а сами числа из (21.1) – членами ряда. Вместо (21.2), пользуясь знаком суммы, часто пишут

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{21.3}$$

Дадим определение суммы ряда, т.е. то как мы понимаем сложение бесконечного количества членов. Введем следующие суммы конечного числа членов

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

которые называются частичными суммами ряда (21.3). Очевидно, что при стремлении n к бесконечности, частичная сумма начинает все больше напоминать исходную бесконечную сумму, которая в итоге получается из частичной сумму предельным переходом при $n \to \infty$.

Определение 21.1. Конечный или бесконечный предел A частичных сумм A_n ряда (21.3) при $n \to \infty$

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n$$

называют суммой ряда и пишут

$$A = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Еслии ряд имеет конечную сумму, то он называется сходящимся, в противном случае ($\pm\infty$ или вовсе нет предела) он называется расходящимся.

Таким образом, сходимость ряда равносильна сходимости последовательности его частичных сумм. Обратно, какую бы мы последовательность $\{x_n\}$ ни взяли, вопрос о наличии у нее предела может быть сведен к вопросу о сходимости ряда

$$x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1}) + \cdots ,$$

для которого $A_n = x_n$.

Примеры.

Простейшим примером сходящегося ряда является бесконечная геометрическая прогрессия при коэффициенте прогрессии $|q| < 1$:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots .$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Заметим , что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} [\ln(n+1) - \ln n],$$

для которого частичными суммами являются $A_n = \ln(n+1) \to +\infty$ при $n \to \infty$ и, следовательно ряд расходится, а сумма его равна бесконечности.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)}.$$

Заметим , что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(a+n)} - \frac{1}{(a+n+1)}\right].$$

Откуда сразу замечаем, что $A_n = \frac{1}{(a+1)} - \frac{1}{(a+n+1)} \to A = \frac{1}{(a+1)}$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - \cdots .$$

Заметим, что $A_{2n-1} = -1$, $A_{2n} = 0$, откуда сразу вытекает, что это расходящийся ряд, который не имеет суммы.

Основные теоремы. Если в ряде (21.3) отбросить первые m членов, то получится ряд

$$a_{m+1} + \cdots + a_{m+k} + \cdots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n, \tag{21.4}$$

называемый остатком ряда (21.3) после m члена.

1. Если сходится ряд (21.3), то сходится и любой из его остатков (21.4); обратно, из сходимости (21.4) вытекает сходимость исходного ряда. Т.е. на сходимость не влияет сумма любого конечного числа первых членов ряда, но безусловно влияет на саму сумму, в случае сходимости.

2. Если сходится ряд (21.3), то сумма $\alpha_m = \sum\limits_{n=m+1}^{\infty} a_n$ стремится к нулю при стремлении $m \to \infty$.

3. Если члены сходящегося ряда домножить на один и тот же множитель c, то сходимость его не нарушится (а сумма лишь умножится на c).

4. Пусть заданы два сходящихся ряда

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$$

также сходится и его сумма равна $A \pm B$.

5. Общий член a_n сходящегося ряда (21.3) стремится к нулю. Это есть необходимое условие сходимости ряда. Т.е. если ряд сходится, тогда общий член стремится к нулю, но из сходимости к нулю общего члена не следует, что ряд сходится.

Доказательство. Так как A_n и A_{n-1} имеют один и тот же конечный предел в силу сходимости ряда, то $a_n = A_n - A_{n-1} \to 0$ при $n \to \infty$. $\square$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

у которого, очевидно, общий член стремится к нулю. Тем не менее этот ряд расходится. Для того, чтобы это показать оценим частичные суммы следующим образом,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

и, следовательно, стремятся к бесконечности вместе с ростом n.

Сформулируем необходимое и достаточное условие сходимости ряда (21.3), которое фактически есть перефразировка критерия Коши для последовательностей.

Критерий Коши для рядов. Для того, чтобы ряд (21.3) сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого числа ε существовал номер N такой, что при $n > N$ неравенство

$$|A_{n+m} - A_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon \tag{21.5}$$

выполнялось бы для любого $m \geq 1$.

Заметим, что если в (21.5) взять $m = 1$, то получим $|a_{n+1}| < \varepsilon$, и мы снова приходим к необходимому условию сходимости ряда.

Сходимость знакопостоянных рядов. Рассмотрим знакопостоянные ряды, т.е. такие ряды, у которых все члены одного знака или нули. Для определенности будем считать, что все члены неотрицательны. Для таких рядов, очевидно, $A_{n+1} \geq A_n$, т.е. последовательность $\{A_n\}$ является возрастающей. Таким образом, мы приходим к следующему основному результату в теории знакопостоянных рядов:

неотрицательный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ всегда имеет сумму; эта сумма будет конечной, а ряд сходящимся, если частичные суммы ограничены сверху; и бесконечной, а ряд расходящимся, в противном случае. Все признаки сходимости и расходимости основаны на этом факте, который является сдедствием определения суммы ряда и теоремы о монотонных последовательностях.

Прежде чем перейти к так называемым теоремам сравнения, которые устанавливают факт сходимости или расходимости ряда через сравнение его с заведомо сходящимся или расходящимся рядом, приведем пример таких заведомо сходящихся и расходящихся рядов. Рассмотрим так называемый гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Применим отрицание критерия Коши к частичной последовательности, соответствущей данному ряду: $\exists \varepsilon > 0$ такой, что $\forall N$, $\exists n > N, m > 0$ такие, что

$$|A_{n+m} - A_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| \geq \varepsilon.$$

Положим $\varepsilon = 1/2$, $m = n$, тогда

$$|A_{2n} - A_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}| = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

и, таким образом, из отрицания критерия Коши следует его расходимость.

Если же теперь рассмотреть более общие ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad 0 < s < 1,$$

то их расходимость вытекает из того факта, что любая частичная сумма $A_n^s \geq A_n^1$ и, следовательно ряды упомянутого вида все расходятся. В случае же $s \leq 0$ ситуация становится еще проще для исследования, так как мы сразу видим, что общий член не стремится к 0, а значит не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

Рассмотрим теперь ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1, \quad s = 1 + \sigma, \quad \sigma > 0.$$

Для начала заметим, что

$$\frac{1}{(n+1)^s} + \cdots + \frac{1}{(2n)^s} < n\frac{1}{n^s} = \frac{1}{n^\sigma}.$$

Отбросив первые два члена и группируя все остальные по принципу: сначала 2, затем 4, затем 8 и так далее, используя оценку из критерия Коши, замечаем, что подставляя

$n = 2, 4, 8, 16$ и т.д. мы имеем оценку суммы 2,4,8,16,...членов через члены геометрической прогрессии

$$\frac{1}{2^\sigma}, \quad \frac{1}{4^\sigma} = \frac{1}{(2^\sigma)^2}, \ldots, \frac{1}{(2^{k-1})^\sigma} = \frac{1}{(2^\sigma)^{k-1}}, \ldots.$$

Таким образом получаем, что любая частичная сумма данного ряда будет меньше чем число

$$L = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{\frac{1}{2^\sigma}}{1 - \frac{1}{2^\sigma}},$$

следовательно, ряд сходится по теореме о монотонных последовательностях.

§ 22 Лекция 22

Теоремы сравнения неотрицательных рядов.

Теорема 22.1. Пусть заданы два положительных ряда

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{22.1}$$

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots . \tag{22.2}$$

Если начиная с некоторого $n > N$ выполняется неравенство $a_n \leq b_n$, то из сходимости ряда (22.2) вытекает сходимость ряда (22.1); из расходимости ряда (22.1) следует расходимость ряда (22.2).

Доказательство. Так как отбрасывание любого конечного числа членов не нарушает сходимость ряда, то можно, без ограничения общности, считать, что $a_n \leq b_n$ при всех значениях n. Обозначим частичные суммы рядов через A_n и B_n, откуда сразу следует $A_n \leq B_n$. Пусть ряд (22.2) сходится, тогда B_n ограничены

$$B_n \leq L, \quad L = const; \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Тогда и подавно $A_n \leq L$, что в силу монотонности A_n влечет за собой сходимость ряда (22.1). В случае же, когда ряд (22.1) расходится, из $A_n \leq B_n$ немедленно следует расходимость (22.2).

Теорема 22.2. Если существует предел (предполагаем, что $b_n \neq 0$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K, \quad (0 \leq K \leq \infty),$$

то из сходимости ряда (22.2), при $K < \infty$, вытекает сходимость ряда (22.1); а из расходимости ряда (22.2), при $K > 0$, вытекает расходимость ряда (22.1). Таким образом, при $0 < K < \infty$, оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

Теорема 22.3. Если начиная с некоторого $n > N$ выполняется неравенство (предполагаем, что a_n и b_n отличны от нуля)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

то из сходимости ряда (22.2) вытекает сходимость ряда (22.1); из расходимости ряда (22.1) следует расходимость ряда (22.2).

Примеры.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \quad \text{расходится} \quad \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad \text{сходится} \quad \frac{n!}{n^n} < \frac{2}{n^2}, \quad n > 3;$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \quad \text{сходится} \quad \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln \ln n}} < \frac{1}{n^2} \quad \text{при больших} \quad n;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \quad \text{расходится} \quad \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} : \frac{1}{n} \to 1;$$

Сравнение некоторого заданного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad (A)$$

с различными стандартными рядами, заведомо сходящимися или расходящимися, может быть проведено в более организованной форме. Возьмем для сравнения, в качестве ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, сходящуюся геометрическую прогрессию

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \ldots, \quad |q| < 1,$$

а сдругой стороны, расходящуюся геометрическую прогрессию

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 + \ldots$$

Признак Коши. Составим для ряда (A) последовательность

$$C_n = \sqrt[n]{a_n}.$$

Если, при достаточно больших n выполняется неравенство

$$C_n \le q,$$

где $q < 1$ – постоянное число, то ряд сходится. Если же, начиная с некоторого места

$$C_n \ge 1,$$

то ряд расходится.

Доказательство. Действительно, неравенства $\sqrt[n]{a_n} \le q$ и $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ равносильны неравенствам $a_n \le q^n$ и $a_n \ge 1$. Следовательно, по теореме сравнения в первом случае имеем сходимость, так как оцениваем сверху a_n членами сходящейся геометрической прогрессии, а во втором случае не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

Чаще всего этим признаком пользуются в его предельной форме:

Пусть

$$\lim C_n = c.$$

Если $c < 1$, то ряд (A) сходится, если $c > 1$, то ряд расходится, а если $c = 1$, то признак Коши в предельной форме не дает ответа на вопрос о сходимости и расходимости.

Признак Даламбера. Составим для ряда (A) последовательность

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Если, при достаточно больших n выполняется неравенство

$$D_n \leq q,$$

где $q < 1$ – постоянное число, то ряд сходится. Если же, начиная с некоторого места

$$D_n \geq 1,$$

то ряд расходится.

Доказательство. Действительно, из условий теоремы вытекает, что ряд (A) можно оценить сверху сходящимся рядом

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_N q_{n-N} = a_N + a_N q + \cdots + a_N q^n + \ldots,$$

а значит и ряд (A) сходится. Расходимость доказывается аналогично предыдущему признаку.

Чаще всего этим признаком пользуются в его предельной форме:

Пусть

$$\lim D_n = d.$$

Если $d < 1$, то ряд (A) сходится, если $d > 1$, то ряд расходится, а если $d = 1$, то признак Даламбера в предельной форме не дает ответа на вопрос о сходимости и расходимости.

Можно отметить следующий факт: значение $c = 1$ и $d = 1$ являются критическими. Мы не можем ничего в этом случае сказать о сходимости, но тем не менее, в определенных случаях, о расходимости мы можем сделать вывод: если удается показать, что $\lim D_n = 1$ (либо $\lim C_n = 1$) осуществляется невозрастающей последовательностью D_n (C_n), тогда это означает, что $a_{n+1} \geq a_n$ (либо $a_n \geq 1$ начиная с некоторого n) и, следовательно, общий член не стремится к нулю.

Приведем пример признака, который порожден сравнением исходного ряда с обобщенными гармоническими рядами. В силу того, что в случае сходимости, обобщенный гармонический ряд сходится намного медленнее геометрической прогрессии, и расходится также медленнее, признак Раабе намного сильнее обоих ранее сформулированных. Его обобщением является признак Гаусса. Признак Раабе используется редко, так как чаще применяется признак Гаусса.

Признак Раабе (в предельной форме). Положим

$$R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

Пусть

$$\lim R_n = r.$$

Тогда, если $r > 1$, то ряд сходится, если $r > 1$, то ряд расходится, если $r = 1$, то как и в предыдущих случаях этот признак не дает ответа о поведении ряда.

Приведем теперь несколько примеров:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n} \quad C_n = \frac{1}{\ln n}, \quad c = 0 \quad \text{сходится;}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad D_n = \frac{x}{n+1}, \quad d = 0 \quad \text{сходится;}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n \quad D_n = \frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}, \quad d = \frac{x}{e},$$

который сходится при $x < e$, расходится при $x > e$. При $x = e$ признак Даламбера в предельной форме ничего не дает. Но так как $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ возрастающая, то $D_n > 1$ и, следовательно, расходится.

Рассмотрим применение признака Раабе.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1} \quad D_n = \frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)} \to 1, \quad D_n < 1.$$

Составим

$$R_n = n\left(\frac{2n(2n+1)}{(2n-1)^2} - 1\right) = \frac{(6n-1)n}{(2n-1)^2} \to \frac{3}{2} > 1,$$

следовательно, ряд сходится.

Признак Гаусса. Допустим, что для данного ряда (A) выполнено

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta}{n^{1+\varepsilon}},$$

где $\varepsilon > 0$, λ и μ – постоянные, θ есть ограниченная величина: $|\theta| \le L$; тогда ряд сходится, если $\lambda > 1$ или если $\lambda = 1$, $\mu > 1$, и расходится – если $\lambda < 1$ или если $\lambda = 1$, $\mu \le 1$.

Наконец сформулируем еще один признак, принадлежащий Коши, который иногда называют **телескопическим**:

Пусть члены ряда (A) представляют из себя невозрастающую последовательность, тогда ряд (A) сходится и расходится вместе с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}.$$

В качестве примеров можно рассмотреть применение телескопического признака для рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Сходимость произвольных рядов.

При исследовании сходимости произвольных рядов, как и в случае знакоопределенных рядов, применяется критерий Коши, носящий характер необходимого и достаточного условия. Кроме этого, мы приведем несколько достаточных признаков сходимости ряда, удобных при использовании на практике.

Напомним, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots \tag{22.3}$$

называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k| + \cdots \tag{22.4}$$

Теорема 22.4. Если сходится ряд (22.4), то сходится также и ряд (22.3).

Доказательство немедленно вытекает из критерия Коши

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}| < \varepsilon,$$

в силу сходимости (22.4).

§ 23 Лекция 23

Напомним, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (23.1)$$

называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots \qquad (23.2)$$

Возьмем теперь все положительные члены ряда (23.1), составим их них ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n + \cdots\,. \qquad (23.3)$$

То же самое сделаем и с отрицательными членами ряда и составим ряд из их абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n = q_1 + q_2 + \cdots + q_n + \cdots\,. \qquad (23.4)$$

Теорема 23.2. Если ряд (23.1) абсолютно сходится, тогда сходятся также и ряды (23.3), (23.4). Если обозначить через A, P и Q соответствующие суммы

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n = P, \quad \sum_{n=1}^{\infty} q_n = Q,$$

то

$$A = P - Q.$$

Определение 23.3. Если ряд (23.1) сходится, а ряд (23.2) расходится, то такой ряд называют условно (неабсолютно) сходящимся.

Для установления абсолютной сходимости можно применять все признаки, которые были сформулированы для знакопостоянных рядов и из абсолютной сходимости получать одновременно и просто сходимость. Но нужно быть аккуратными с признаками расходимости, так как ряд (23.2) может разойтись, а (23.1) будет тем не менее сходиться (условно). Исключение составляют признаки Коши и Даламбера, которые констатируют расходимость в случае, когда не выполнено необходимое условие сходимости ряда. Таким образом, мы имеем следующие критерии, которые мы сформулируем в предельной форме.

Признак Коши. Составим для ряда (23.1) последовательность

$$C_n = \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Пусть

$$\lim C_n = c.$$

Если $c < 1$, то ряд (23.1) сходится абсолютно, если $c > 1$, то ряд (23.1) расходится.

Признак Даламбера. Составим для ряда (23.1) последовательность

$$D_n = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Пусть

$$\lim D_n = d.$$

Если $d < 1$, то ряд (23.1) сходится абсолютно, если $d > 1$, то ряд (23.1) расходится.

Знакочередующиеся ряды. Знакочередующимися называются ряды, члены которых поочередно имеют то положительный знак, то отрицательный, т.е. имеют вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}c_n = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots\,, \tag{23.5}$$

где $c_n > 0$.

Теорема Лейбница. Если члены знакочередующегося ряда (23.5) монотонно убывают по абсолютной величине $c_{n+1} < c_n$ и

$$\lim c_n = 0,$$

то ряд (23.5) сходится.

Доказательство. Частичную сумму четного порядка можно записать в виде

$$C_{2m} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \cdots + (c_{2m-1} - c_{2m}).$$

Так как члены последовательности монотонно убывают, то каждая скобка есть положительное число и, следовательно, с возрастанием m сумма C_{2m} тоже возрастает. С другой стороны, если переписать C_{2m} в виде:

$$C_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - \cdots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m},$$

то можно заметить, что C_{2m} ограничена сверху, так как

$$C_{2m} < c_1.$$

Таким образом, C_{2m}, как монотонно возрастающая последовательность ограниченная сверху, имеет предел

$$\lim C_{2m} = C.$$

Переходя к частичным суммам нечетного порядка, имеем $C_{2m+1} = C_{2m} + c_{2m+1}$. Так как общий член стремится к нулю, то

$$\lim C_{2m+1} = C.$$

Отсюда уже следует, что C будет суммой данного ряда.

Замечание. Перепишем нечетные частичные суммы в виде

$$C_{2m-1} = c_1 - (c_2 - c_3) - \cdots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}),$$

видим, что суммы нечетного порядка стремятся к C убывая. Таким образом, всегда

$$C_{2m} < C < C_{2m-1}.$$

В частности, получаем, что

$$0 < C < C_1 = c_1.$$

Рассмотрим остатки рядов вида (23.5)

$$\gamma_{2m} = C - C_{2m} = c_{2m+1} - c_{2m+2} + \cdots, \quad \gamma_{2m-1} = C - C_{2m-1} = -c_{2m} + c_{2m+1} - \cdots = -(c_{2m} - c_{2m+1} + \cdots).$$

Очевидно,

$$0 < \gamma_{2m} = C - C_{2m} \leq C_{2m+1} - C_{2m} = c_{2m+1},$$

$$0 > \gamma_{2m-1} = C - C_{2m-1} \geq C_{2m} - C_{2m-1} = -c_{2m} \Longrightarrow |\gamma_{2m-1}| \leq c_{2m}.$$

Таким образом, любой остаток лейбницевского ряда имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{x}{n}, \quad x \neq 0.$$

Заметим, что при достаточно большом n, $\sin \frac{x}{n}$ приобретает знак x и по абсолютной величине является убывающей с ростом n. Таким образом, к некоторому остатку этого ряда применима теорема Лейбница, а следовательно, он сходится.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1}.$$

Очевидно, что общий член ряда стремится к нулю. Но, не выполняется монотонный характер этого стремления. Для частичной суммы $2n$ его членов получаем

$$\sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{k}-1} - \frac{1}{\sqrt{k}+1} \right) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{2}{k-1}$$

и бесконечно возрастает с ростом n и ряд расходится.

Замечание. Можно показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right]$$

расходится. В то же время ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

сходится как лейбницевский ряд. Легко проверить, что отношение общих членов стремится к 1, что показывает, что предельные теоремы, сформулированные для знакопостоянных рядов, в случае произвольных рядов не имеют места.

Преобразование Абеля. Рассмотрим следующую сумму

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_m\beta_m. \tag{23.6}$$

Во многих случаях оказывается полезным преобразование, указанное Абелем. Введем в рассмотрение следующие суммы

$$B_1 = \beta_1, \quad B_2 = \beta_1 + \beta_2, \quad B_m = \beta_1 + \cdots + \beta_m.$$

Тогда

$$\beta_1 = B_1, \quad \beta_2 = B_2 - B_1, \quad \beta_3 = B_3 - B_2, \quad \beta_m = B_m - B_{m-1}.$$

Тогда исходную сумму можно записать в виде

$$S = \alpha_1 B_1 + \alpha_2(B_2 - B_1) + \cdots + \alpha_m(B_m - B_{m-1}).$$

Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые следующим образом

$$S = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\beta_i = \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) B_i + \alpha_m B_m. \tag{23.7}$$

Лемма Абеля. Если множители α_i не возрастают (не убывают), а суммы B_i все ограничены по абсолютной величине числом L:

$$|B_i| \le L, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

то

$$|S| = |\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\beta_i| \le L(|\alpha_1| + 2|\alpha_m|).$$

Доказательство. Так как в (23.7) все скобки одного знака, то

$$|S| \le \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i - \alpha_{i+1}| L + |\alpha_m| L = L(|\alpha_1 - \alpha_m| + |\alpha_m|) \le L(|\alpha_1| + 2|\alpha_m|).$$

Если же множители α_i не возрастают и положительны, тогда оценку можно упростить

$$|S| \le L\alpha_1.$$

§ 24 Лекция 24

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n, \tag{24.1}$$

где a_n и b_n две последовательности чисел.

Признак Абеля. Рассмотрим ряд (24.1). Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + \cdots + b_n \tag{24.2}$$

сходится, а числа a_n образуют монотонную ограниченную последовательность

$$|a_n| \leq K, \quad n = 1, 2, \ldots, n,$$

то ряд (24.1) сходится.

Признак Дирихле. Если частичные суммы ряда (24.1) в совокупности ограничены:

$$|B_n| \leq M, \quad n = 1, 2, \ldots, n,$$

а числа a_n образуют монотонную последовательность, стремящуюся к нулю

$$\lim a_n = 0,$$

то ряд (24.1) сходится.

Доказательство. Доказательство в обоих случаях основано на применении критерия Коши и леммы Абеля. Докажем признак Дирихле (заметим, что признак Абеля вытекает из признака Дирихле). По предположению Дирихле имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что

$$|a_n| < \varepsilon.$$

Кроме того, очевидно

$$|b_{n+1} + \cdots + b_{n+p}| = |B_{n+p} - B_n| \leq 2M.$$

Положим в лемме Абеля $L = 2M$. Тогда, при $n > N$ и любом m

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k \right| \leq 2M(|a_{n+1}| + 2|a_{n+m}|) \leq 6M\varepsilon,$$

и, следовательно, ряд сходится.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{\ln n}.$$

В качестве ряда (24.2) возьмем
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n},$$
а в качестве последовательности $a_n = \sqrt[n]{n}$.

Свойства сходящихся рядов. Понятие суммы бесконечного числа слагаемых существенно отличается от понятия суммы конечного числа слагаемых. Но все же некоторые свойства обычных сумм переносятся и на бесконечные ряды. Рассмотрим сходящийся ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{24.3}$$
и станем объединять члены этого ряда, не меняя при этом их расположения
$$a_1 + \dots + a_{n_1}, \dots, a_{n_{k-1}+1} + \cdots a_{n_k},$$
где $\{n_k\}$ – некоторая подпоследовательность натурального ряда.

Теорема 24.1. Ряд, составленный из этих сумм
$$(a_1 + \dots + a_{n_1}) + \dots + (a_{n_{k-1}+1} + \cdots a_{n_k}) + \cdots \tag{24.4}$$
всегда сходится и имеет ту же сумму, что и исходный ряд: сходящийся ряд обладает сочетательным свойством.

Доказательство. Действительно, последовательность частичных сумм нового ряда
$$\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_k, \dots$$
есть не что иное, как подпоследовательность
$$A_{n_1}, \dots, A_{n_k}, \dots$$
сумм исходного ряда, а так как он сходится, то сходятся и имеют тот же предел новые частичные суммы.

Легко видеть, что аналогия, о которой мы говорили, нарушается если попытаться применить сочетательное свойство в обратном порядке. Пусть дан ряд сходящийся ряд вида (24.4), члены которого в отдельности представляют из себя конечные суммы, тогда опустив скобки, мы можем получить расходящийся ряд. В качестве примера, взять ряд с прибавлением и отниманием единичек, причем изначально записать его со скобками так, чтобы были в разности нули и он сходился; затем скобки опустить. Но, если опустив скобки, мы получим сходящийся ряд, то он по теореме будет иметь ту же сумму, что и ряд со скобками. Тем не менее, при определенных условиях, можно из сходимости ряда со скобками гарантировать сходимость исходного ряда. Так, пусть ряд (24.4) сходится и все члены в отдельно взятой скобке имеют один и тот же знак, тогда ряд (24.3) тоже будет сходиться.

Теорема 24.2. Рассмотрим ряд (24.3). Пусть он абсолютно сходится, тогда ряд, полученный из него перестановкой членов, также сходится и имеет ту же сумму, что и исходный ряд. Абсолютно сходящийся ряд обладает переместительным свойством.

Пусть даны два ряда

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Рассмотрим произведение двух этих рядов, подражая правилу перемножения конечных сумм. Можно выписать их в виде бесконечной матрицы и записывать в сумму по диагоналям или квадратами. Составленный подобным образом ряд называется произведением двух рядов.

Теорема 24.3. Пусть оба ряда абсолютно сходятся. Тогда и их произведение, составленное в любом порядке из указанных слагаемых, также сходится и имеет сумму AB.

Теорема Римана. Если ряд (24.3) сходится неабсолютно (условно), то какое бы ни взять наперед заданное число S (конечное или равное $\pm\infty$), можно так переставить члены в этом ряде, чтобы преобразованный ряд имел своей суммой S.