

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

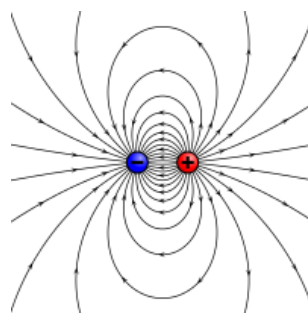
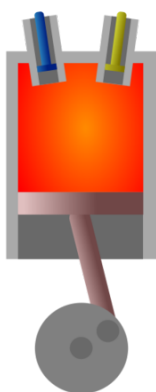
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

## ФИЗИКА 2

### СБОРНИК ЗАДАЧ

Молекулярная физика и термодинамика. Электричество и магнетизм

к.ф.-м.н. *Абдуллаев Расул Нажмудинович*  
профессор, к.ф.-м.н. *Валишев Абрик Ибрагимович*  
доцент, к.ф.-м.н. *Захаров Михаил Иванович*  
профессор, к.ф.-м.н. *Кочеев Андрей Андреевич*



Новосибирск, 2020

# Содержание

<b>Предисловие</b>	<b>2</b>
<b>Физические постоянные</b>	<b>3</b>
<b>Математический справочник</b>	<b>4</b>
<b>1 Термодинамика и молекулярная физика</b>	<b>9</b>
1.1 Семинар 1 . . . . .	9
1.2 Семинар 2 . . . . .	12
1.3 Семинар 3 . . . . .	18
1.4 Семинар 4 . . . . .	21
1.5 Семинар 5 . . . . .	25
1.6 Семинар 6 . . . . .	31
1.7 Семинар 7 . . . . .	36
1.8 Семинар 8 . . . . .	42
<b>2 Электричество и магнетизм</b>	<b>48</b>
2.1 Семинар 9 . . . . .	48
2.2 Семинар 10 . . . . .	54
2.3 Семинар 11 . . . . .	59
2.4 Семинар 12 . . . . .	66
2.5 Семинар 13 . . . . .	71
2.6 Семинар 14 . . . . .	75
2.7 Семинар 15 . . . . .	82
2.8 Семинар 16 . . . . .	87

# Предисловие

В данном учебном пособии приведены примеры задач, предлагающихся студентам второго курса факультета информационных технологий НГУ на семинарах, в качестве заданий для самостоятельной работы, а также на курсовых контрольных работах. Помимо ряда оригинальных задач, включено некоторое количество заданий из учебной литературы.

Данный сборник содержит задачи по молекулярной физике, термодинамике, электростатике и магнитостатике. В качестве основной системы единиц используется СИ. Сборник состоит из двух модулей «Молекулярная физика и термодинамика» и «Электричество и магнетизм». Каждый модуль тематически разделен на семинары. В содержание семинаров входят краткое теоретическое введение, примеры решения задач и список задач для разбора на семинарах и самостоятельного решения.

Учебное пособие предназначено для студентов ФИТ НГУ и преподавателей, ведущих соответствующие семинарские занятия. Задачник соответствует полугодовому курсу дисциплины «Физика 2» (осенний семестр второго курса). Пособие может быть полезно студентам других направлений подготовки.

## Физические постоянные

Постоянная Авогадро —  $N_A \approx 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$

Нормальное давление —  $P_0 = 1 \text{ атм} = 760 \text{ мм.рт.ст.} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Па}$

Нуль шкалы Цельсия —  $T_0 = 273,15 \text{ К}$

Универсальная газовая постоянная —  $R \approx 8,314 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$

Постоянная Больцмана —  $k_B = \frac{R}{N_A} \approx 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$

Молярный объем идеального газа при нормальных условиях —  
 $V_{m0} = \frac{\nu R T_0}{P_0} \approx 22,4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$

Гравитационная постоянная —  $G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$

Ускорение свободного падения —  $g \approx 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

Постоянная Стефана-Больцмана —  $\sigma \approx 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$

Элементарный заряд —  $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$

Масса покоя электрона —  $m_e \approx 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$

Масса покоя протона —  $m_p \approx 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$

Электрическая постоянная —  $\varepsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$

Магнитная постоянная —  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}}{\text{А}}$

Скорость света в вакууме —  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

# Математический справочник

## Полезные интегралы

1) Интегралы с экспонентой:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_0^{\infty} x^n \cdot e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) / \alpha^{\frac{n+1}{2}} & (n > -1, \alpha > 0) \\ \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1} \alpha^k} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} & (n = 2k, k \text{ целое}, \alpha > 0) \\ \frac{k!}{2 \alpha^{k+1}} & (n = 2k + 1, k \text{ целое}, \alpha > 0) \end{cases}$$

Интеграл вероятности (функция ошибок):

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$$

Дополнительная функция ошибок:

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-t^2) dt$$

Получить значения  $\operatorname{erf}(x)$  и  $\operatorname{erfc}(x)$  можно здесь <https://www.wolframalpha.com/>.

2)

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \text{const}$$

3)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + \text{const}$$

4)

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right| + \text{const}$$

## Якобианы преобразований

1) Переход элементарного объема  $dV = dxdydz$  от декартовых координат  $(x; y; z)$  к цилиндрическим координатам  $(r; \varphi; z)$ :

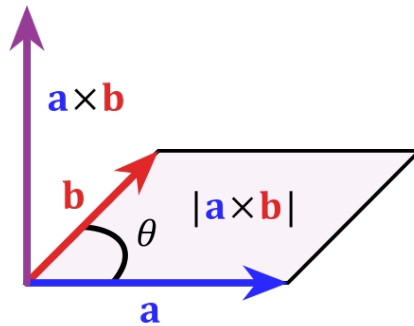
$$dxdydz \rightarrow r dr d\varphi dz$$

2) Переход элементарного объема  $dV = dxdydz$  от декартовых координат  $(x; y; z)$  к сферическим координатам  $(r; \theta; \varphi)$ :

$$dxdydz \rightarrow r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

## Векторное произведение

Векторное произведение двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  в трёхмерном евклидовом пространстве — вектор  $[\vec{a} \times \vec{b}]$ , перпендикулярный обоим исходным векторам, длина которого равна площади параллелограмма, образованного исходными векторами, а выбор из двух направлений определяется так, чтобы тройка из по порядку стоящих в произведении векторов и получившегося вектора была правой.



Модуль векторного произведения:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$$

Выражение векторного произведения в координатах:

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y; a_z b_x - a_x b_z; a_x b_y - a_y b_x)$$

## Векторные дифференциальные операторы

1) **Градиент.** Стандартные обозначения:

$$\text{grad } f \text{ или с использованием оператора набла } \vec{\nabla} f,$$

где  $f$  — скалярная функция.

Для трехмерного пространства, в декартовых координатах:

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

в цилиндрических координатах:

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

в сферических координатах:

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

2) **Дивергенция.** Стандартные обозначения:

$$\text{div } \vec{f} \text{ или с использованием оператора набла } \vec{\nabla} \cdot \vec{f},$$

где  $\vec{f}$  — векторное поле, каждая компонента которого является функцией от координат.

Для трехмерного пространства, в декартовых координатах:

$$\text{div } \vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

в цилиндрических координатах:

$$\text{div } \vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r f_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

в сферических координатах:

$$\text{div } \vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (f_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi}$$

3) **Ротор.** Стандартные обозначения:

$$\operatorname{rot} \vec{f} \text{ или с использованием оператора набла } \left[ \vec{\nabla} \times \vec{f} \right],$$

где  $\vec{f}$  — векторное поле, каждая компонента которого является функцией от координат.

Для трехмерного пространства, в декартовых координатах:

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \left[ \vec{\nabla} \times \vec{f} \right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

в цилиндрических координатах:

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \left[ \vec{\nabla} \times \vec{f} \right] = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & (r\vec{e}_\varphi) & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_r & (rf_\varphi) & f_z \end{vmatrix}$$

в сферических координатах:

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \left[ \vec{\nabla} \times \vec{f} \right] = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & (r\vec{e}_\theta) & (r \sin \theta \vec{e}_\varphi) \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ f_r & (rf_\theta) & (r \sin \theta f_\varphi) \end{vmatrix}$$

4) **Лапласиан (оператор Лапласа).** Стандартные обозначения:

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f \text{ или с использованием оператора набла } \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f),$$

где  $f$  — скалярная функция.

Для трехмерного пространства, в декартовых координатах:

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

в цилиндрических координатах:

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



в сферических координатах:

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

# 1 Термодинамика и молекулярная физика

## 1.1 Семинар 1

**Идеальный газ. Давление. Температура. Объем. Количество вещества.  
Уравнение состояния идеального газа.**

### Краткая теория

Количество вещества задается физической величиной  $\nu$  [моль]. При заданных массе вещества  $m$  [кг] или числе молекул  $N$  в нем (или числе атомов, если вещество одноатомное) количество вещества  $\nu$  (число молей) можно найти с помощью следующих соотношений:

$$\nu = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}, \quad (1)$$

где  $M \left[ \frac{\text{кг}}{\text{моль}} \right]$  — молярная масса вещества,  $N_A \approx 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$  — постоянная Авогадро (количество молекул в одном моле вещества).

Термодинамическое состояние вещества задается следующими параметрами: давление  $P$  [Па], объем  $V$  [м<sup>3</sup>] и температура  $T$  [К] =  $T$  [°C] + 273,15 К. Нормальные условия определяются следующими константами: нормальное атмосферное давление  $P_0 = 1 \text{ атм} = 760 \text{ мм.рт.ст.} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Па}$  и температура плавления льда  $T_0 = 0^\circ \text{C} = 273,15 \text{ К}$ .

Связь между параметрами состояния вещества описывается уравнением состояния вида  $f(P, V, T) = 0$ . Уравнение состояния для  $\nu$  молей идеального газа (уравнение Клапейрона-Менделеева):

$$PV = \nu RT, \quad (2)$$

где  $R \approx 8,314 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$  — универсальная газовая постоянная. Иной вид уравнения (2) следует из (1):

$$P = nk_B T, \quad (3)$$

где  $n [\text{м}^{-3}] = \frac{N}{V}$  — концентрация молекул в веществе, а  $k_B = \frac{R}{N_A} \approx 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$  — постоянная Больцмана.

Для удобства в расчетах полезно использовать следующее равенство:

$$\frac{m}{k_B} = \frac{M}{R}, \quad (4)$$

здесь  $m$  — масса одной частицы газа.

### Примеры решения задач

Пример 1. Определить объем 1 моля идеального газа при нормальных условиях.

Решение. Ранее были приведены параметры нормального состояния газа, давление и температура при нормальных условиях равны  $P_0 = 1,01325 \cdot 10^5$  Па и  $T_0 = 273,15$  К. При известных количестве вещества, давлении и температуре идеального газа, можно воспользоваться уравнением состояния (2) для поиска объема:

$$V_0 = \frac{\nu RT_0}{P_0} = \frac{1 \text{ моль} \cdot 8,314 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 273,15 \text{ К}}{1,01325 \cdot 10^5 \text{ Па}} \approx 22,4 \text{ л}$$

Ответ: 1 моль идеального газа при нормальных условиях занимает  $V_0 \approx 22,4$  л.

Пример 2. Сколько молекул содержится в 100 г воды? Плотность воды — 1000 кг/м<sup>3</sup>, молярная масса водорода — 1 г/моль, кислорода — 16 г/моль.

Решение. Переведем данную массу воды  $m = 100$  г в количество вещества  $\nu$ . Для этого определим молярную массу воды  $M_{\text{H}_2\text{O}}$  из ее химической формулы  $\text{H}_2\text{O}$ . В молекуле воды на один атом кислорода приходится два атома водорода. Тогда:

$$M_{\text{H}_2\text{O}} = 2 \cdot M_{\text{H}} + M_{\text{O}} = 18 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$$

С использованием выражения (1) получаем  $\nu \approx 5,56$ . Тогда, с учетом (1), получаем:

$$N_{\text{H}_2\text{O}} = \nu \cdot N_A \approx 3,3 \cdot 10^{24}$$

Ответ: В 100 г воды содержится примерно  $3,3 \cdot 10^{24}$  молекул.

Пример 3. Оценить среднее расстояние между соседними молекулами газа в воздухе при нормальных условиях.

Решение. Для оценки расстояния рассмотрим воздух как идеальный газ. Тогда, как следует из примера 1, 1 моль воздуха при нормальных условиях занимает объем  $22,4 \text{ л} = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ . Следовательно, на каждую молекулу воздуха в среднем приходится объем  $V_0 = \frac{22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3}{N_A} \approx 3,7 \cdot 10^{-26} \text{ м}^3$ . Далее, в соответствии с моделью идеального газа, пренебрегаем размерами молекул по сравнению с расстоянием между ними. Представим, что молекулы воздуха в определенный момент времени расположились в узлах кубической решетки со стороной  $a$ . Тогда оценить среднее расстояние между ними можно следующим образом  $a = \sqrt[3]{V_0} \approx 3,3 \cdot 10^{-9} \text{ м} = 3,3 \text{ нм}$ .

Ответ: Среднее расстояние между соседними молекулами воздуха при нормаль-

ных условиях примерно равно 3,3 нм.

### Задачи

1. Какой объем занимает 1 моль идеального газа при давлении 3 атм и температуре 400 К?
2. Имеется стакан с поршнем, расположенным на расстоянии  $l$  от дна стакана. Под поршнем идеальный газ. На поршень установили груз массой  $m$ . На каком расстоянии от дна при этом окажется поршень? Площадь сечения стакана  $S$ , поршень невесом и движется по стакану без трения со стенками. Атмосферное давление  $P_0$ .
3. Оценить число молекул в воздушном шарике (наполненном воздухом) диаметром 20 см при нормальных условиях.
4. Оценить число молекул в капле струйного принтера, приняв диаметр капли 10 мкм, а её молекулы — в основном молекулы этилового спирта  $C_2H_5OH$ .
5. Плотность воздуха при температуре  $0^\circ C$  и давлении 760 мм.рт.ст. составляет  $\rho = 0,001293 \text{ г/см}^3$ . Определить массу литра воздуха при температуре  $27,3^\circ C$  и давлении 750 мм.рт.ст.
6. Оценить средний размер молекулы воды.
7. Какое давление оказывает идеальный газ на стенки сосуда, если в  $1 \text{ см}^3$  содержится миллиард молекул при температуре  $20^\circ C$ .
8. На какой глубине объем всплывающего из воды пузырька в 2 раза меньше, чем у поверхности? Атмосферное давление  $P_0 = 10^5 \text{ Па}$ , плотность воды  $1000 \text{ кг/м}^3$ .
9. Два баллона с идеальным газом вместимостью 3 л и 9 л соединили трубкой. Какое давление установится в баллонах, если до соединения оно, соответственно, составляло  $10^5 \text{ Па}$  и  $0,5 \cdot 10^5 \text{ Па}$ . Температура в баллонах одинакова и постоянна.
10. Имеется стакан с невесомым поршнем. Сила трения покоя между стенками стакана и поршнем —  $F_{\text{тр}}$ . Площадь сечения поршня —  $S$ . Начальная температура газа —  $T$ , начальное давление как в стакане так и вне его равно атмосферному. До какой температуры следует нагреть газ в стакане, чтобы поршень начал двигаться?

## 1.2 Семинар 2

**Краткое введение в теорию вероятностей. Давление и температура с молекулярно-кинетической точки зрения. Распределение Максвелла по скоростям.**

### Краткая теория

Пусть  $x$  — непрерывная случайная величина, определенная в интервале  $(a; b)$ . Вероятность того, что выпадет значение  $x$  из интервала  $(x_0; x_0 + dx)$  равна:

$$dw(x \in (x_0; x_0 + dx)) = f(x_0) dx, \quad (5)$$

где функция  $f(x)$  — плотность распределения вероятности для случайной величины  $x$ . При этом  $\int_a^b f(x) dx = 1$ . Пусть нас интересует интервал  $(c; d)$  внутри  $(a; b)$ , тогда вероятность выпадения  $x$  в интервале  $(c; d)$  равна:

$$w(x \in (c; d)) = \int_c^d f(x) dx$$

Среднее значение непрерывной случайной величины  $x$  в интервале  $(c; d)$  —  $\langle x \rangle$  определяется как:

$$\langle x \rangle = \int_c^d x \cdot f(x) dx \quad (6)$$

Среднее значение некоторой непрерывной функции  $g(x)$  в интервале  $(c; d)$  —  $\langle g(x) \rangle$  определяется следующим соотношением:

$$\langle g(x) \rangle = \int_c^d g(x) \cdot f(x) dx \quad (7)$$

Движение частиц газа, называемое тепловым, носит случайный характер. При этом любое направление движения частиц равновероятно, а значение скорости — случайная величина, вероятность выпадения которой имеет собственную функцию распределения.

Для идеального газа можно показать, что равновесное давление газа на стенку сосуда связано со средним значением квадрата проекции скорости на нормаль к стенке  $\langle v_n^2 \rangle$ . Пусть ось  $x$  сонаправлена с нормалью к стенке сосуда. Тогда давление

газа на нее связано с  $\langle v_x^2 \rangle$  следующим соотношением:

$$P = nm\langle v_x^2 \rangle, \quad (8)$$

где  $m$  — масса одной частицы газа. Т.к. все направления движения частиц газа равновероятны, то  $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle \Rightarrow \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3}\langle v^2 \rangle$ , где  $\langle v^2 \rangle$  — среднее значение квадрата скорости частицы идеального газа. Тогда зависимость (8) можно представить следующим образом:

$$P = \frac{1}{3}nm\langle v^2 \rangle \quad (9)$$

С учетом уравнения состояния (3) и зависимостей (8, 9) можно выразить температуру как функцию среднего квадрата скорости частиц идеального газа:

$$T = \frac{m\langle v_x^2 \rangle}{k_B} = \frac{1}{3} \frac{m\langle v^2 \rangle}{k_B}, \quad (10)$$

что определяет температуру как меру теплового движения в газах.

Распределение Максвелла описывает статистическое поведение и задает плотности распределения вероятности случайных величин  $v_{x,y,z}$  и  $v$ :

$$f(v_{x,y,z}) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{mv_{x,y,z}^2}{2k_B T}\right) \quad (11)$$

$$g(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) \quad (12)$$

Согласно определениям (6, 7) и с использованием функций (11) и (12) можно найти ряд полезных средних величин:

среднюю скорость

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v \cdot g(v) dv = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}, \quad (13)$$

среднее значение квадрата скорости

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 \cdot g(v) dv = \frac{3k_B T}{m},$$

среднеквадратичную скорость

$$v_{\text{ср. кв.}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}},$$

среднее значение модуля проекции скорости на ось  $x$

$$\langle |v_x| \rangle = 2 \int_0^{\infty} v_x \cdot f(v_x) dv_x = \sqrt{\frac{2k_B T}{\pi m}}$$

Вследствие теплового движения выражения для  $\langle |v_y| \rangle$  и  $\langle |v_z| \rangle$  будут теми же, что и для  $\langle |v_x| \rangle$ .

Следует подчеркнуть, что средняя скорость и средний модуль проекции скорости на некоторое направление есть разные величины.

### Примеры решения задач

Пример 1. Пользуясь распределением Максвелла, найти среднее значение скорости частицы идеального газа.

Решение. Для поиска среднего значения скорости частиц идеального газа воспользуемся определением (6) и видом функции распределения плотности вероятности (12):

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v \cdot 4\pi v^2 \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left( -\frac{mv^2}{2k_B T} \right) dv$$

Для удобства введем обозначение  $\alpha = \frac{m}{2k_B T}$ . Тогда:

$$\langle v \rangle = 4\pi \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} v^3 \exp(-\alpha v^2) dv$$

Сделаем замену  $t = v^2$ . Тогда:

$$\langle v \rangle = 2\pi \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} t \exp(-\alpha t) dt$$

Заметим, что подинтегральное выражение с точностью до знака совпадает с производной от экспоненты по параметру  $\alpha$ :

$$t \exp(-\alpha t) = -\frac{d \exp(-\alpha t)}{d\alpha}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}\langle v \rangle &= -2\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} \frac{d \exp(-\alpha t)}{d\alpha} dt = -2\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{d}{d\alpha} \int_0^{\infty} \exp(-\alpha t) dt = \\ &= -2\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi\alpha}}\end{aligned}$$

Подставив  $\alpha$ , в итоге получим:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$$

Ответ:  $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$

Пример 2. Пользуясь распределением Максвелла по скоростям, найти наиболее вероятную скорость частицы идеального газа. Нарисовать график функции распределения по абсолютной величине скорости. Как меняется график с ростом температуры?

Решение. Из определения вероятности (5) следует, что наиболее вероятная скорость  $v_{н.в.}$ , какую может иметь частица идеального газа, соответствует значению, при котором плотность вероятности (12) достигает максимума. Для поиска положения локального максимума функции  $g(v)$  приравняем к нулю ее производную. Для удобства введем обозначение  $\alpha = \frac{m}{2k_B T}$ . Тогда:

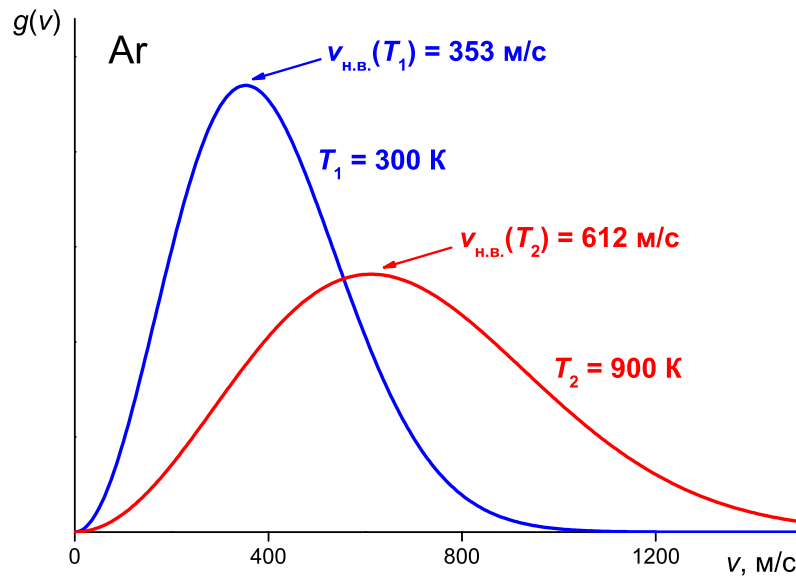
$$\begin{aligned}\frac{dg(v)}{dv} &= \frac{d}{dv} \left[ 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp(-\alpha v^2) \right] = \\ &= 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \exp(-\alpha v^2) [2v - 2\alpha v^3] = 0\end{aligned}$$

Видно, что производная обнуляется при  $v_1 = 0$  и  $v_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ . При этом  $v_1$  соответствует локальному минимуму, а  $v_2$  — локальному максимуму плотности вероятности  $g(v)$ . Тогда, подставив  $\alpha$ , находим:

$$v_{н.в.} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$$

Ниже на рисунке приведены графики функции распределения по абсолютной величине скорости атомов аргона при температурах  $T_1 = 300$  К и  $T_2 = 3T_1 = 900$  К. Видно, как график функции  $g(v)$  растягивается с увеличением температуры, а её максимум уменьшается.





Ответ:  $v_{\text{н.в.}} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$

### Задачи

1. Оценить среднюю скорость молекул воздуха при нормальных условиях.
2. Броуновская частица диаметром 5 мкм хаотически движется в воде. Чему равна средняя кинетическая энергия броуновской частицы, плотность которой примерно равна плотности воды? Чему равна среднеквадратичная скорость этой частицы?
3. Герметичный баллон заполнен молекулярным азотом. Для полной диссоциации молекул температуру баллона увеличили в 4 раза. Во сколько раз изменилась среднеквадратичная скорость частиц идеального газа в баллоне? Считать объем баллона неизменным.
4. Рассмотрите с молекулярно-кинетической точки зрения соотношение концентраций различных газов в Земной атмосфере. Почему концентрация азота в атмосфере намного превышает концентрацию водорода?
5. Найти среднее значение компоненты скорости молекулы идеального газа в некотором направлении. Температура газа  $T$ , масса молекулы  $m$ .
6. Пользуясь распределением Максвелла по скоростям, получить распределение по кинетическим энергиям частиц идеального газа. Найти наиболее вероятную

энергию молекул газа и среднюю кинетическую энергию молекул. Сравнить среднюю кинетическую энергию с энергией при средней скорости.

7. Смоделируем пленку какого-нибудь масла (с молярной массой  $M$ ) на воде идеальным двумерным газом. Выведите распределение по скоростям в таком газе. Определить среднюю энергию одной молекулы.
8. Определить среднюю скорость молекулы двумерного идеального газа из предыдущей задачи.
9. Определить какая доля молекул идеального газа имеет компоненту скорости  $v_x$  в интервале  $0 \leq v_x \leq \langle v \rangle$ . Результат выразить через интеграл вероятности  $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$ .
10. Определить какая доля молекул идеального газа имеет модуль скорости меньше средней скорости.

### 1.3 Семинар 3

#### Газ во внешнем поле. Распределение Больцмана. Барометрическая формула.

##### Краткая теория

Пусть дан столб идеального газа, расположенный в поле тяжести (ускорение свободного падения  $g$ ). Температура газа  $T$  во всем столбе одинакова, давление у основания столба  $P_0$ . С учетом (3), концентрация молекул идеального газа у основания  $n_0 = \frac{P_0}{k_B T}$ . Распределение Больцмана в поле тяжести — зависимость концентрации молекул идеального газа от расстояния  $h$  от основания столба газа:

$$n(h) = n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{k_B T}\right) \quad (14)$$

С учетом (3), зависимость (14) можно представить в форме барометрической формулы — зависимости давления идеального газа от расстояния  $h$  от основания столба газа:

$$P(h) = P_0 \exp\left(-\frac{mgh}{k_B T}\right) \quad (15)$$

Если идеальный газ находится во внешнем поле с потенциалом  $U(x, y, z)$  [Дж], распределение Больцмана записывается следующим образом:

$$n(x, y, z) = n(x_0, y_0, z_0) \exp\left[-\frac{U(x, y, z)}{k_B T}\right] \quad (16)$$

##### Примеры решения задач

Пример 1.  $N$  молекул идеального газа массы  $m$  помещены в герметичный цилиндрический сосуд высотой  $H$  и радиусом  $R$ . Сосуд вращается вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ . Выразить распределение концентрации молекул в зависимости от расстояния  $r$  от оси цилиндра.

Решение. При вращении на молекулы газа действует сила  $F = m\omega^2 r$ . Из курса механики известно, что в поле действия этой силы молекула имеет потенциальную энергию:

$$U(r) = -\int_0^r F(r) dr = -\frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

Тогда, согласно (16), распределение концентрации выглядит следующим образом:

$$n(r) = n_0 \exp \left[ -\frac{U(r)}{k_B T} \right] = n_0 \exp \left[ \frac{m\omega^2 r^2}{2k_B T} \right]$$

Остается найти константу  $n_0$  (концентрацию молекул на оси цилиндра). Для этого выразим полное число молекул в цилиндре, проинтегрировав полученное распределение концентрации по объему цилиндра:

$$\begin{aligned} N &= \iiint n(r) dV = \int_0^R \int_0^H n_0 \exp \left[ \frac{m\omega^2 r^2}{2k_B T} \right] \cdot 2\pi r dr dz = \\ &= n_0 \frac{2\pi H k_B T \left( \exp \left[ \frac{m\omega^2 R^2}{2k_B T} \right] - 1 \right)}{m\omega^2} \end{aligned}$$

Отсюда концентрация молекул  $n_0$  на оси цилиндра равна:

$$n_0 = \frac{Nm\omega^2}{2\pi H k_B T \left( \exp \left[ \frac{m\omega^2 R^2}{2k_B T} \right] - 1 \right)}$$

Следовательно распределение  $n(r)$ :

$$n(r) = \frac{Nm\omega^2 \exp \left[ \frac{m\omega^2 r^2}{2k_B T} \right]}{2\pi H k_B T \left( \exp \left[ \frac{m\omega^2 R^2}{2k_B T} \right] - 1 \right)}$$

### Задачи

1. Найти на какой высоте атмосферное давление уменьшится в два раза по сравнению с давлением на уровне моря. Считать атмосферный воздух однородным газом с молярной массой 29 г/моль. Температуру атмосферы считать постоянной и равной 0 °C.
2. Найти на какой высоте концентрация молекул водорода в атмосфере по сравнению с концентрацией азота увеличится в два раза. Температуру атмосферы считать постоянной и равной 300 К.
3. Смог представляет собой взвешенную в воздухе пыль. Характерный размер пылинки составляет 0.1 мкм, плотность вещества 1,5 г/см<sup>3</sup>. На какой высоте

концентрация пыли в смоге уменьшится в 2 раза? Температуру пылевого смога считать постоянной и равной 300 К.

4. В столбе газа высотой  $H$  и сечением  $S$ , находящимся в поле тяжести, концентрации молекул у нижнего и верхнего оснований равны  $n_0$  и  $n_1$ , соответственно. Найти полное число молекул газа в этом объеме.
5. Барометр в кабине летящего самолета постоянно показывает одинаковое давление  $P = 79 \text{ кПа}$ , благодаря чему летчик считает высоту полета неизменной. Однако температура воздуха за бортом самолета изменилась с  $5^\circ\text{C}$  до  $1^\circ\text{C}$ . Какую ошибку в определении высоты допустил летчик? Давление у поверхности земли считать нормальным.
6. В земле вырыта яма глубиной  $H$ . При какой температуре давление воздуха на дно ямы будет минимальным? Концентрацию воздуха  $n_0$  на поверхности земли считать постоянной. Молярная масса воздуха равна  $M$ .
7. Давление на поверхности Венеры 93 атм, температура 750 К. На высоте 1 км давление равно 87,355 атм. Определить из какого вещества в основном состоит атмосфера Венеры? Ускорение свободного падения на Венере  $8,87 \text{ м/с}^2$ .
8. Ротор центрифуги, заполненный радоном (молярная масса —  $222 \text{ г/моль}$ ), вращается с частотой  $n = 50 \text{ с}^{-1}$ . Радиус ротора равен 0,5 м. Определить давление газа на стенки ротора, если в его центре нормальное атмосферное давление. Температура 300 К всюду одинакова.
9. Идеальный газ находится в поле тяжести в закрытом цилиндрическом сосуде высотой  $h$ . Во сколько раз изменится давление газа на дно сосуда, если его температуру увеличить в два раза?  $T_0$  — первоначальная температура газа,  $m$  — масса молекулы газа.
10. Теплоизолированный герметичный цилиндрический сосуд высоты  $H$ , наполненный газом, подвешен в вертикальном положении в однородном поле тяжести с ускорением свободного падения  $g$ . Температура газа  $T$  везде одинакова. Найди среднюю потенциальную энергию молекулы газа.

## 1.4 Семинар 4

**Поток молекул через малое отверстие. Частота столкновения молекул.  
Длина свободного пробега.**

### Краткая теория

Поток  $dN$  молекул идеального газа  $j$ , вылетающих из сосуда через малое отверстие площадью  $S$  за время  $dt$ , равен:

$$j = \frac{1}{S} \frac{dN}{dt} = \frac{n\langle v \rangle}{4} \quad (17)$$

Имеется сосуд с идеальным газом, состоящим из молекул одного сорта с характерным радиусом  $r$ . Масса молекул  $m$ , концентрация  $n$ , температура газа  $T$ . Тогда средняя частота столкновений молекул в сосуде  $\langle \nu \rangle$  равна:

$$\langle \nu \rangle = \frac{\langle \text{число столкновений} \rangle}{\Delta t} = \sqrt{2} \sigma n \langle v \rangle, \quad (18)$$

где  $\sigma = \pi(r + r)^2$  — сечение столкновения молекул.

Средняя длина свободного пробега  $\langle \lambda \rangle$  — среднее расстояние, которое молекула проходит между столкновениями:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle \nu \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma} \quad (19)$$

Рассмотрим случай двухкомпонентного газа. Для молекул 1-го сорта: характерный радиус  $r_1$ , масса молекул  $m_1$ , концентрация  $n_1$ ; для молекул 2-го сорта, соответственно,  $r_2$ ,  $m_2$  и  $n_2$ . Тогда средняя частота столкновения молекул 1-го сорта  $\langle \nu_1 \rangle$  суммируется из столкновений с молекулами того же вида  $\langle \nu_{11} \rangle$  и столкновений с молекулами 2-го сорта  $\langle \nu_{12} \rangle$ :

$$\langle \nu_1 \rangle = \langle \nu_{11} \rangle + \langle \nu_{12} \rangle = \sqrt{2} \sigma_{11} n_1 \langle v_1 \rangle + \sigma_{12} n_2 \langle v_{\text{отн}} \rangle, \quad (20)$$

где  $\sigma_{11} = \pi(r_1 + r_1)^2$  — сечение столкновения между молекулами 1-го сорта,  $\sigma_{12} = \pi(r_1 + r_2)^2$  — сечение столкновения между молекулами 1-го и 2-го сорта. А  $\langle v_{\text{отн}} \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi \mu}}$  — среднее значение относительной между молекулами 1-го и 2-го сорта скорости, которая выражается так же как средняя скорость (13), но вместо массы молекулы односортного газа в выражение (13) подставляется приведенная масса

$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ . Тогда, согласно (19), средняя длина свободного пробега  $\langle \lambda_1 \rangle$  молекул 1-го сорта равна:

$$\langle \lambda_1 \rangle = \frac{\langle v_1 \rangle}{\langle \nu_1 \rangle} = \left( \sqrt{2} \sigma_{11} n_1 + \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_2}} \sigma_{12} n_2 \right)^{-1} \quad (21)$$

Выражения для средней частоты столкновения и средней длины свободного пробега молекул 2-го сорта можно выразить подобным образом.

### Примеры решения задач

Пример 1. Оценить давление и длину пробега молекул на высоте  $h = 10$  км над поверхностью Земли. Температуру воздуха считать постоянной и равной  $-20^\circ\text{C}$ , давление у поверхности Земли нормальным.

Решение. Для расчета давления воспользуемся барометрической формулой (15) и (4):

$$P(h) \approx 10^5 \text{ Па} \cdot \exp \left( - \frac{29 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}} \cdot 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 10^4 \text{ м}}{8,314 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 253 \text{ К}} \right) \approx 2,5 \cdot 10^4 \text{ Па}$$

Как следует из формулы (19), для расчета длины свободного пробега на высоте  $h$  нужно знать концентрацию воздуха на этой высоте  $n(h)$  и сечение столкновения молекул воздуха  $\sigma$ . Оценку сечения столкновения можно провести, приняв за средний радиус молекул воздуха  $r = 0,15 \text{ нм} \Rightarrow \sigma = \pi(r+r)^2 \approx 0,28 \text{ нм}^2$ . Концентрацию  $n(h)$  можно получить с помощью (3):

$$n(h) = \frac{P(h)}{k_B T} \approx \frac{2,5 \cdot 10^4 \text{ Па}}{1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \cdot 253 \text{ К}} \approx 71,6 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$$

Тогда длина пробега:

$$\langle \lambda(h) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} n(h) \sigma} \approx 3,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

Ответ: На высоте 10 км давление воздуха равно  $2,5 \cdot 10^4 \text{ Па}$ , длина пробега равна  $3,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ .

Пример 2. В тонкостенном сосуде объема  $V$  находится идеальный газ, температура которого поддерживается постоянной. Вне сосуда вакуум. Как будет меняться с течением времени концентрация молекул  $n$  газа внутри сосуда, если в его стенке

сделать малое отверстие площадью  $S$ ? Концентрация молекул в начальный момент времени  $n_0$ . Молярная масса газа  $M$ .

Решение. Как следует из (17), поток частиц идеального газа через малое отверстие равно  $j = \frac{n\langle v \rangle}{4}$ . Тогда за время  $dt$  число частиц в сосуде уменьшается на число  $dN$ , равное:

$$dN = -jSdt = -Sdt \cdot \frac{n\langle v \rangle}{4}$$

Ясно, что концентрация молекул в сосуде будет уменьшаться на величину  $dn = \frac{dN}{V}$ . Представим предыдущее уравнение в следующем виде:

$$\frac{dn}{n} = -jSdt = -Sdt \cdot \frac{\langle v \rangle}{4V}$$

В левой части уравнения имеем выражение, зависящее только от концентрации, а в правой — от времени (остальные величины неизменны в ходе истечения газа). Это дает возможность проинтегрировать обе части уравнения от момента появления отверстия ( $t = 0$ ) до текущего момента  $t$ :

$$\int_{n_0}^{n(t)} \frac{dn}{n} = - \int_0^t S \frac{\langle v \rangle}{4V} dt$$

Интегрирование дает:

$$\ln \left( \frac{n(t)}{n_0} \right) = - \frac{St\langle v \rangle}{4V}$$

Учитывая (13) и (4), получаем зависимость концентрации молекул в сосуде от времени:

$$n(t) = n_0 \cdot \exp \left( \frac{St}{4V} \cdot \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \right)$$

### Задачи

1. В двух одинаковых сосудах первоначально поддерживалась равная температура и была одинаковая концентрация. Далее в одном из сосудов температуру повышают в 2 раза и их соединяют тонкой трубкой (диаметр сечения меньше длины свободного пробега). Как изменятся концентрации в сосудах и длина свободного пробега?
2. На малое отверстие откачанного до глубокого вакуума сосуда, направлен поток молекул с одинаковой скоростью  $V_0$ , с концентрацией их в пучке  $n_0$ . Найти установившуюся концентрацию и температуру молекул в сосуде.



3. На гладкой поверхности находится сосуд объемом  $V$  с идеальным газом при температуре  $T$ . На короткое время  $\tau$  в боковой стенке сосуда открывается малое отверстие площадью  $S$ . Какова скорость сосуда, если его массой можно пренебречь по сравнению с массой газа? Струя газа из отверстия параллельна поверхности. Газ идеальный, масса молекулы  $m$ . Вне сосуда вакуум.
4. Вывести зависимости длины свободного пробега от давления и температуры газа.
5. Оценить частоту столкновений и длину свободного пробега молекул воздуха при нормальных условиях. Средний диаметр молекул воздуха принять равным 0,3 нм.
6. Найти концентрацию и частоту столкновений молекул водяного пара при температуре 150 °С. Длина свободного пробега молекул воды 1 мкм. Использовать размер молекулы воды из решения задачи 6 семинара (1.1).
7. Как меняются частота столкновения и длина свободного пробега частиц газа в задаче 3 семинара (1.2) после полной диссоциации молекул азота?
8. Давление в сосуде с аргоном 100 мПа, температура 300 К. Характерный размер сосуда 20 см. Насколько хорош вакуум в сосуде?
9. Длина свободного пробега молекул сорта  $A$  в газе сорта  $B_1$  равна  $\lambda_1$ , а в газе сорта  $B_2$  —  $\lambda_2$ . Найти длину свободного пробега молекул сорта  $A$  в смеси газов  $B_1$  и  $B_2$ . Концентрации молекул  $B_1$  и  $B_2$  в смеси равны  $n_1$  и  $n_2$ , соответственно. Пренебречь концентрацией молекул  $A$  во всех случаях.
10. Вывести выражение для ослабления пучка молекул в газе.

## 1.5 Семинар 5

### Явления переноса. Диффузия. Вязкость. Теплопроводность.

#### Краткая теория

Следствием возникновения локальных флуктуаций (отклонений от равновесных значений термодинамических параметров) в веществе является процесс выравнивания возмущенного параметра ( $T$ ,  $P$ ,  $n$ ) по всему объему. Подобный процесс называется релаксацией. Рассмотрим явления релаксации на примерах процессов переноса вещества, импульса и тепловой энергии.

Диффузия — процесс выравнивания концентрации вещества в объеме в процессе хаотического движения молекул. По закону Фика, в случае наличия в смеси газов градиента концентрации молекул 1-го сорта  $\vec{\nabla}n_1$ , возникает поток данного типа молекул  $j_{n_1}$ , направленный в сторону меньшей концентрации и равный:

$$\vec{j}_{n_1} = -D \cdot \vec{\nabla}n_1,$$

где  $D \left[ \frac{\text{м}^2}{\text{с}} \right]$  — коэффициент диффузии молекул 1-го сорта в смеси. Для одномерной задачи можно записать:

$$j_{n_1} = -D \cdot \frac{dn_1}{dx} \quad (22)$$

Для молекул идеального газа коэффициент диффузии связан со средней скоростью и длиной свободного пробега следующим соотношением:

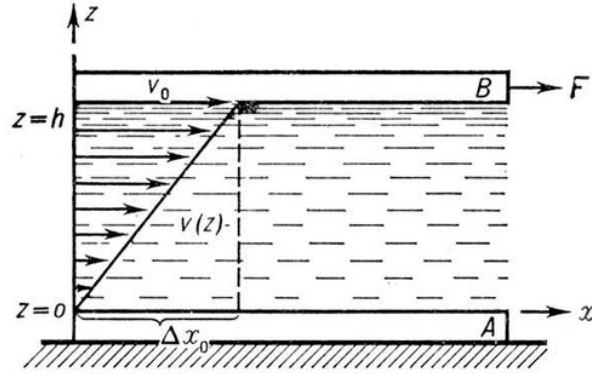
$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \quad (23)$$

Вязкость. Вязкое трение в газах и жидкостях возникает вследствие движения слоев газа или жидкости друг относительно друга. Ниже на рисунке продемонстрировано данное явление. Между двумя пластинами находится слой газа или жидкости. При приложении силы к верхней пластине, движение начнет передаваться молекулам газа или жидкости послойно вниз. Согласно закону Ньютона, сила возникающего при этом трения между слоями равна:

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -\eta \cdot \frac{dv}{dz} \cdot S \cdot \vec{e}_x, \quad (24)$$

где  $\eta \left[ \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}} \right]$  — коэффициент динамической вязкости жидкости или газа,  $v$  — ско-

рость движения слоев жидкости или газа,  $S$  — площадь соприкосновения слоев.



Иными словами возникает поток импульса  $\vec{j}_v$ , направленный в сторону уменьшения скорости и равный:

$$\vec{j}_v = -\eta \cdot \frac{dv}{dz} \cdot \vec{e}_z$$

Коэффициент вязкости  $\eta$  для идеальных газов:

$$\eta = \frac{1}{3}nm \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \quad (25)$$

Теплопроводность. Согласно закону Фурье, в объеме вещества с градиентом температур  $\vec{\nabla}T$  в объеме возникает поток тепловой энергии  $j_\epsilon$ , направленный в сторону уменьшения температуры и равный:

$$\vec{j}_\epsilon = -\kappa \cdot \vec{\nabla}T,$$

где  $\kappa \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \right]$  — коэффициент теплопроводности вещества. Для одномерной задачи:

$$j_\epsilon = -\kappa \cdot \frac{dT}{dx} \quad (26)$$

Коэффициент теплопроводности идеального газа:

$$\kappa = \frac{1}{3}n \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \cdot \frac{c_V}{N_A}, \quad (27)$$

где  $c_V$  — удельная молярная теплоемкость газа при постоянном объеме (подробней о ней на следующем семинаре (1.6)).

Нестационарное уравнение теплопроводности:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q,$$

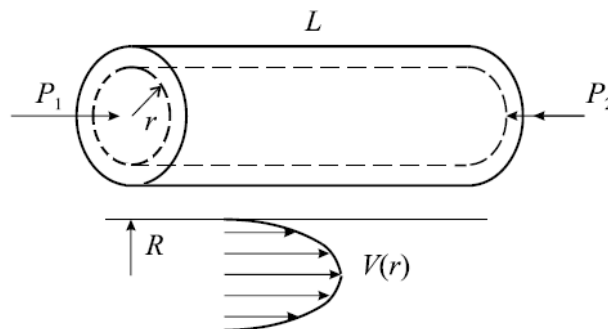
где  $c$  — теплоемкость вещества,  $q$  — объемный источник тепла в веществе. В стационарном случае, в отсутствии источников тепла в объеме вещества, уравнение теплопроводности значительно упрощается:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0 \quad (28)$$

Уравнение (28), с учетом граничных условий, позволяет рассчитать профиль температуры в веществе в стационарном случае.

### Примеры решения задач

Пример 1. Вода течет по трубе длины  $L$  и радиуса  $R$ . Давление воды на входе трубы  $P_1$ , на выходе  $P_2$ . Коэффициент динамической вязкости воды  $\eta$ . Найти профиль скорости воды в трубе.



Решение. Течение воды по трубе (известное как течение Пуазейля) возникает за счет перепада давлений  $P_1 - P_2$ . В стационарном режиме перепад давлений уравновешивается силами вязкого трения. Выделим в трубе цилиндр радиуса  $r < R$  соосный с трубой. Пользуясь (24), запишем условие равновесия сил для этого цилиндра:

$$-2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} = (P_1 - P_2) \pi r^2$$

Разделяя переменные, запишем:

$$dv = - \frac{(P_1 - P_2) r dr}{2L\eta}$$

Интегрируя, получим:

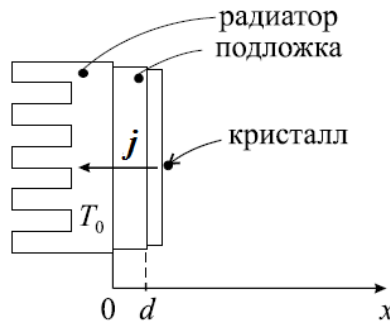
$$v(r) = -\frac{(P_1 - P_2) r^2}{4L\eta} + C$$

Константа интегрирования  $C$  определяется из условия прилипания приграничного к внутренней стороне трубы слоя воды:  $v(R) = 0$ . Окончательно находим:

$$v(r) = \frac{(P_1 - P_2)}{4L\eta} \cdot (R^2 - r^2)$$

Ответ: Профиль скорости воды в трубе  $v(r) = \frac{(P_1 - P_2)}{4L\eta} \cdot (R^2 - r^2)$

Пример 2. Найти температуру микропроцессора, выделяющего тепловую мощность  $W$ . Микропроцессор с площадью  $S$  через подложку толщиной  $d$  и с коэффициентом теплопроводности  $\kappa$  соединен с радиатором, температура  $T_0$  которого поддерживается постоянной.



Решение. В стационарном режиме тепловой поток  $j$  через подложку выражается через выделяемую тепловую мощность  $j = \frac{W}{S}$ . Первое интегрирование уравнения теплопроводности (28) дает:

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial x} = -C_1,$$

где  $C_1$  — константа интегрирования, которая согласно закону Фурье (26) равна потоку  $j$ . В результате повторного интегрирования получаем:

$$T(x) = \frac{Wx}{S\kappa} + C_2,$$

где  $C_2$  — константа интегрирования. Из условия известно, что  $T(0) = T_0$ . Тогда

$C_2 = T_0$ . Следовательно, температура микропроцессора равна:

$$T(d) = T_0 + \frac{Wd}{S\kappa}$$

Ответ: Температура микропроцессора равна  $T = T_0 + \frac{Wd}{S\kappa}$ .

### Задачи

1. Коэффициент диффузии молекул кислорода при температуре  $27^\circ\text{C}$  равен  $0,19 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$ . Найти среднюю длину свободного пробега молекулы кислорода.
2. Коэффициент диффузии молекулы сорта  $A$  в газах сорта  $B_1$  (концентрация  $n$ ) и  $B_2$  (концентрация  $n$ ) равен соответственно  $D_1$  и  $D_2$ . Найти коэффициент диффузии молекулы  $A$  в смеси газов  $B_1$  и  $B_2$  (концентрации  $n_1$  и  $n_2$ , соответственно).
3. В 19-м веке Джордж Стокс показал, что на сферические объекты радиуса  $R$ , движущиеся в вязкой жидкости со скоростью  $v$ , действует сила вязкого трения, равная  $F_{\text{тр}} = 6\pi\eta vR$ . Найти до какой скорости может разогнаться металлический шар плотности  $\rho$ , свободно падающий в воде в поле тяжести.
4. Выразить отношение коэффициента динамической вязкости  $\eta$  к плотности  $\rho$  и коэффициента теплопроводности  $\kappa$  к  $\eta$  для идеальных газов. Почему  $\eta$  и  $\kappa$  газов не зависят от концентрации или плотности?
5. Найти отношение  $\kappa$  водорода (радиус молекулы  $0,14 \text{ нм}$ ) к  $\kappa$  воздуха (средний радиус молекулы  $0,18 \text{ нм}$ ).
6. В примере 1 найти расход воды из трубы (объем воды вытекающий из трубы в секунду).
7. Длинная вертикальная трубка длины  $L$  и радиуса  $R$  заполнена жидкостью, плотность которой равна  $\rho$ , а коэффициент динамической вязкости равен  $\eta$ . За какое время  $t$  вся жидкость вытечет из трубки под действием силы тяжести? Влиянием сил поверхностного натяжения пренебречь. Процесс установления скорости жидкости считать мгновенным.
8. Найти стационарный профиль температуры воздуха между двумя пластинами пластикового окна (расстояние между пластинами  $5 \text{ см}$ ). Температура одной пластины  $-20^\circ\text{C}$  (со стороны улицы), другой  $20^\circ\text{C}$  (со стороны комнаты).

Учесть зависимость коэффициента теплопроводности воздуха (рассматривать как идеальный газ) от температуры.

9. В слое вещества толщиной  $l$  коэффициент теплопроводности линейно меняется от  $\kappa_1$  на нижней границе до  $\kappa_2$  на верхней. Температура нижней границы поддерживается равной  $T_1$ , а верхней  $T_2$ . Найти распределение температуры в слое.
10. Представим, что пластина из нержавеющей стали разделяет два широких жидких слоя: под пластиной — жидкий свинец, температура которого поддерживается равной  $500^\circ\text{C}$ , над пластиной — вода при температуре кипения. Оценить какая масса воды испаряется с  $1\text{ м}^2$  поверхности? Толщина пластины —  $0,5\text{ см}$  (считать толщину малой), коэффициент теплопроводности стали —  $40 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ , удельная теплота парообразования воды  $q_m \approx 2000\text{ кДж/кг}$ .

## 1.6 Семинар 6

**Первое начало термодинамики. Внутренняя энергия газа. Работа газа.  
Квазиравновесные процессы. Теплоемкость.**

### Краткая теория

Термодинамическое равновесие — состояние системы, при котором остаются неизменными во времени макроскопические параметры этой системы ( $P$ ,  $V$ ,  $T$ ,  $\nu$ ).

Квазиравновесный процесс — процесс, состоящий из непрерывно следующих друг за другом состояний равновесия.

Термодинамика опирается на несколько фундаментальных законов или начал. Первое начало термодинамики — закон сохранения энергии для термодинамических систем. При переходе системы из термодинамического состояния 1 в 2 выполняется равенство:

$$Q_{1\rightarrow 2} = U_2 - U_1 + A_{1\rightarrow 2}, \quad (29)$$

где  $U$  — внутренняя энергия системы,  $A_{1\rightarrow 2}$  — работа, совершенная системой (или над системой) при переходе из состояния 1 в 2,  $Q_{1\rightarrow 2}$  — тепло, подведенное (или отведенное) к системе в процессе перехода из состояния 1 в 2.

Внутренняя энергия системы частиц складывается из их кинетической энергии движения и потенциальной энергии взаимодействия между ними. Для идеального газа  $U$  складывается лишь из кинетических энергий движения частиц (с учетом поступательных и вращательных степеней свободы). Тогда для одного моля идеального газа можно записать:

$$U = \begin{cases} \frac{3}{2}RT, & \text{одноатомные молекулы} \\ \frac{5}{2}RT, & \text{двухатомные или линейные молекулы} \\ 3RT, & \text{многоатомные нелинейные молекулы} \end{cases}$$

Работа газа по расширению на бесконечно малый элемент объема  $dV$  в ходе квазиравновесного процесса равна  $\delta A = PdV$ . Тогда работу газа при квазиравновесном переходе из состояния 1 в 2 можно найти с помощью соотношения:

$$A_{1\rightarrow 2} = \int_{V_1}^{V_2} PdV \quad (30)$$



Первое начало термодинамики (29) в дифференциальном виде можно записать в виде:

$$\delta Q = dU + PdV \quad (31)$$

Удельная молярная теплоемкость  $\frac{\delta Q}{dT}$  — количество тепла необходимое для увеличения температуры одного моля вещества на 1 К. Измеряется в  $\left[ \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \right]$ . Введем две важные характеристики вещества:  $c_V$  — удельная молярная теплоемкость при постоянном объеме и  $c_P$  — удельная молярная теплоемкость при постоянном давлении:

$$c_V = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_V ; c_P = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_P \quad (32)$$

Для одного моля идеальных газов  $dU = c_V dT$ , а  $c_P$  и  $c_V$  связаны друг с другом уравнением Майера:

$$c_P = c_V + R \quad (33)$$

Тогда  $c_V$  для идеальных газов:

$$c_V = \begin{cases} \frac{3}{2}R, & \text{одноатомные молекулы} \\ \frac{5}{2}R, & \text{двухатомные или линейные молекулы} \\ 3R, & \text{многоатомные нелинейные молекулы} \end{cases}$$

А  $c_P$  находится с использованием (33).

На практике обычно рассматриваются следующие квазиравновесные процессы:

1. Изобарический процесс — процесс, происходящий при постоянном давлении.
2. Изохорический процесс — процесс, происходящий при постоянном объеме.
3. Изотермический процесс — процесс, происходящий при постоянной температуре.
4. Адиабатический процесс — процесс, при котором система (газ) не обменивается теплотой с окружающим пространством ( $\delta Q = 0$ ). При этом  $PV^\gamma = \text{const}$  — уравнение адиабаты, где  $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$  — показатель адиабаты.
5. Политропический процесс — процесс, при котором теплоемкость газа остается неизменной ( $c = \text{const}$ ). При этом  $PV^n = \text{const}$  — уравнение политропы, где  $n = \frac{c - c_P}{c - c_V}$  — показатель политропы.

Первое начало термодинамики (31) для одного моля идеального газа, термодинамические параметры которого меняются в ходе квазиравновесного процесса, записывается как:

$$\delta Q = c_V dT + PdV \quad (34)$$

### Примеры решения задач

Пример 1. Найти работу 1 моля идеального газа по расширению от  $V_1$  до  $V_2$  при 1) изобарическом, 2) изохорическом, 3) изотермическом и 4) адиабатическом процессах.

Решение. Во всех случаях пользуемся соотношениями (2) и (30):

$$1. \text{ Изобарический процесс } \Rightarrow P = \text{const} \Rightarrow A_{1 \rightarrow 2} = \int_{V_1}^{V_2} PdV = P(V_2 - V_1).$$

$$2. \text{ Изохорический процесс } \Rightarrow V = \text{const} \Rightarrow A_{1 \rightarrow 2} = 0.$$

$$3. \text{ Изотермический процесс } \Rightarrow T = \text{const} \Rightarrow A_{1 \rightarrow 2} = \int_{V_1}^{V_2} PdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT}{V} dV = RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

$$4. \text{ Адиабатический процесс } \Rightarrow PV^\gamma = \text{const} = P_1 V_1^\gamma \Rightarrow A_{1 \rightarrow 2} = \int_{V_1}^{V_2} PdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{P_1 V_1^\gamma}{V^\gamma} dV = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right].$$

### Задачи

1. При нагревании 1 кг неизвестного газа при постоянном давлении на 1 К требуется передать ему 912 Дж тепла, а при постоянном объеме — 649 Дж. Какой это газ?
2. При нагреве моля идеального газа на 1 К при постоянном объеме, его давление увеличивается на 10 Па. При нагреве его на 1 К при постоянном давлении, объем увеличивается на 1 Дм<sup>3</sup>. Найти начальные давление, объем и температуру газа.
3. Кислород нагревается от начальной температуры  $T_1 = 50^\circ\text{C}$ , до конечной  $T_2 = 60^\circ\text{C}$ . Масса газа  $m = 160$  г. Определить количество тепла, подведенное к газу  $\Delta Q$  и изменение внутренней энергии  $\Delta U$  при а) изохорическом, б) изобарическом процессах.

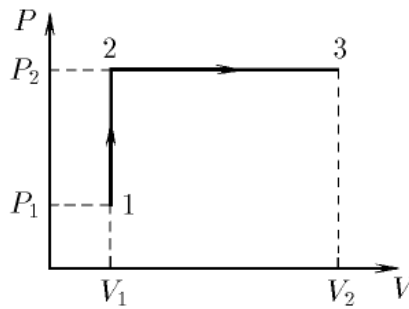
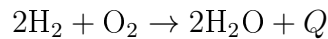


Рисунок к задаче 4

4. Найти тепло, которое получает 1 моль идеального газа в процессе  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ .
5. В адиабатически изолированной бомбе осуществляется взрыв гремучего газа:



Рассчитать конечную температуру паров воды, если тепловой эффект реакции  $Q = 473$  кДж/моль, а начальная температура смеси комнатная.

6. Сосуд заполнен смесью двухатомного и трехатомного газов. Трехатомный газ состоит из нелинейных молекул. После размораживания всех колебательных степеней свободы теплоемкость смеси увеличилась в 1,5 раза. Найти отношение количеств молекул газов в сосуде.
7. Найти мощность двигателя компрессора, если он изотермически, за одну секунду повышает давление моля идеального газа в три раза. Чему будет равна необходимая мощность, если процесс адиабатический? Исходные состояния газа одинаковы и соответствуют нормальным условиям.
8. Найти работу расширения газа от  $V_1$  до  $V_2$  при политропическом процессе.
9. 1 моль идеального двухатомного газа сжимается до давления в  $k$  раз превышающего начальное. Сравнить работу, совершаемую над газом при а) изотермическом сжатии; б) адиабатическом сжатии.
10. Нагревается или охлаждается газ при расширении от  $V_0$  до  $2V_0$ , если в этом процессе  $PV^2 = \text{const}$ ? Найти тепло, которое нужно подводить или отводить в этом процессе.

11. Нагревается или охлаждается газ при расширении от  $V_0$  до  $2V_0$ , если в этом процессе  $P^2V = \text{const}$ ? Найти тепло, которое нужно подводить или отводить в этом процессе.

## 1.7 Семинар 7

### Второе начало термодинамики. Циклические процессы. Энтропия. Цикл Карно. Тепловые насосы. Холодильники.

#### Краткая теория

Циклические процессы — череда изменений системы, возвращающая её в исходное состояние. Большинство тепловых машин в своей основе используют циклические процессы. Для оценки эффективности тепловой машины используют коэффициент полезного действия  $\eta$  или КПД:

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{н}}} = \frac{Q_{\text{н}} - |Q_{\text{х}}|}{Q_{\text{н}}}, \quad (35)$$

где  $A$  — полезная работа, совершенная системой за цикл;  $Q_{\text{н}}$  — тепло, полученное системой от окружающей среды (от нагревателя);  $Q_{\text{х}}$  — тепло, отданное системой окружающей среде (холодильнику). Первое начало термодинамики запрещает существование тепловой машины с  $\eta > 1$  (вечный двигатель первого рода). Второе начало термодинамики запрещает существование тепловой машины с  $\eta = 1$  (вечный двигатель второго рода).

Наиболее эффективной (с наибольшим КПД) с заданными температурами нагревателя и холодильника ( $T_{\text{н}}$  и  $T_{\text{х}}$ ) является тепловая машина, работающая по циклу Карно (состоит из двух изотерм и двух адиабат):

$$\eta_K = \frac{A}{Q_{\text{н}}} = \frac{T_{\text{н}} - T_{\text{х}}}{T_{\text{н}}} \quad (36)$$

Если запустить цикл тепловой машины в обратном направлении, то тепло будет передаваться от холодильника нагревателю за счет совершения системой работы. Так работают холодильные устройства и тепловые насосы. Для оценки эффективности холодильного устройства используют холодильный коэффициент  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{Q_{\text{х}}}{A},$$

где  $A$  — работа, совершенная холодильным устройством за цикл;  $Q_{\text{х}}$  — тепло, полученное системой от холодильника. Для оценки эффективности теплового насоса используют коэффициент трансформации  $k_{\text{тр}}$ :

$$k_{\text{тр}} = \frac{Q_{\text{н}}}{A},$$

где  $A$  — работа, совершенная тепловым насосом за цикл;  $Q_{\text{н}}$  — тепло, отданное системой нагревателю. Если холодильное устройство или тепловой насос работают по обратному циклу Карно то:

$$\varepsilon = \frac{T_{\text{х}}}{T_{\text{н}} - T_{\text{х}}}; k_{\text{тр}} = \frac{T_{\text{н}}}{T_{\text{н}} - T_{\text{х}}}$$

Для любого цикла, состоящего из квазиравновесных процессов, справедливо следующее равенство (равенство Клаузиуса):

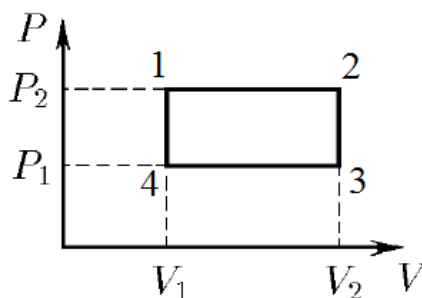
$$\oint_{\text{по циклу}} \frac{\delta Q}{T} = 0,$$

откуда следует, что для обратимых (квазиравновесных) процессов существует еще одна функция состояния — энтропия  $S$ , дифференциал которой равен  $dS = \frac{\delta Q}{T}$ . Изменение энтропии системы при переходе из состояния 1 в 2 определяется следующим образом:

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$$

### Примеры решения задач

Пример 1. Найти КПД цикла, состоящего из двух изобар  $P_1$  и  $P_2$ , и двух изохор  $V_1$  и  $V_2$ . Рабочим телом считать один моль одноатомного идеального газа.



Решение. Для поиска КПД данного цикла найдем работу, совершаемую рабочим телом за цикл, и тепло, получаемое газом. Так как работа квазиравновесного процесса считается интегралом от  $PdV$  (или как площадь под графиком функции  $P(V)$ ), то работа цикла равна его площади на  $(P, V)$  диаграмме. В данном случае цикл на  $(P, V)$  диаграмме — прямоугольник и его площадь считается легко  $A_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4} = (P_2 - P_1)(V_2 - V_1)$ .

Из вида цикла ясно, что газ получает тепло на участках  $1 \rightarrow 2$  (газ расширяется при постоянном давлении) и  $4 \rightarrow 1$  (давление газа увеличивается при постоянном объеме). Рассчитать тепло можно с использованием теплоемкостей (32):

$$Q_{1 \rightarrow 2} = c_P (T_2 - T_1)$$

и

$$Q_{4 \rightarrow 1} = c_V (T_1 - T_4)$$

С учетом того, что рабочее тело — один моль одноатомного идеального газа (2, 32), запишем:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{5}{2} P_2 (V_2 - V_1)$$

и

$$Q_{4 \rightarrow 1} = \frac{3}{2} V_1 (P_2 - P_1)$$

Тогда КПД данного цикла равен (35):

$$\eta = \frac{A_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4}}{Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{4 \rightarrow 1}} = \frac{(P_2 - P_1)(V_2 - V_1)}{\frac{5}{2} P_2 (V_2 - V_1) + \frac{3}{2} V_1 (P_2 - P_1)}$$

Ответ:  $\eta = \frac{(P_2 - P_1)(V_2 - V_1)}{\frac{5}{2} P_2 (V_2 - V_1) + \frac{3}{2} V_1 (P_2 - P_1)}$

### Задачи

1. Один моль газа участвует в циклическом процессе, состоящим из двух изохор и двух изобар. Температура в точках 1 и 3 равна  $T_1$  и  $T_3$ , соответственно. Определить работу, совершенную газом за цикл, если известно, что точки 2 и 4 лежат на одной изотерме.

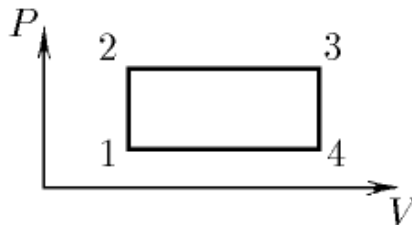


Рисунок к задаче 1

2. Определить КПД тепловой машины, работающей по замкнутому циклу, состоящему из двух изотерм  $T_2$ ,  $T_1$ , и двух изохор  $V_2$ ,  $V_1$ . Рабочим телом считать 1 моль одноатомного идеального газа.

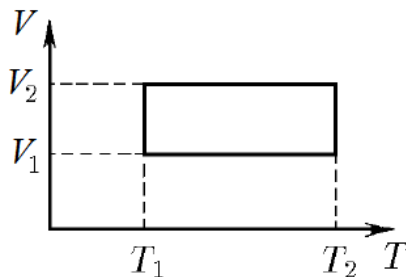


Рисунок к задаче 2

3. Определить КПД тепловой машины, работающей по циклу Отто, состоящему из двух адиабат и двух изохор  $V_2$ ,  $V_1$ . Рабочим телом считать 1 моль двухатомного идеального газа.

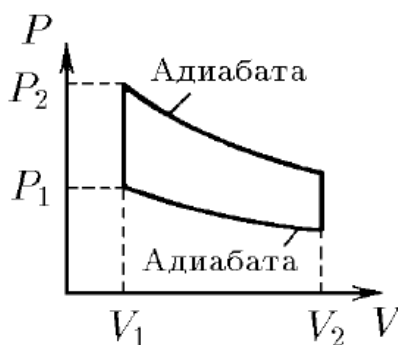


Рисунок к задаче 3

4. Тепловая машина работает по циклу, состоящему из изохоры, адиабаты и изотермы. В ходе изохорического процесса температура рабочего тела увеличивается в 2 раза. Найти КПД этого цикла. Рабочим телом считать 1 моль одноатомного идеального газа. Изобразить цикл на  $(T, S)$  диаграмме.
5. Тепловая машина работает по циклу, состоящему из изохоры, адиабаты и изобары. В ходе изобарического процесса объем рабочего тела уменьшается в 2 раза. Найти КПД этого цикла. Рабочим телом считать 1 моль двухатомного идеального газа. Изобразить цикл на  $(P, S)$  диаграмме.



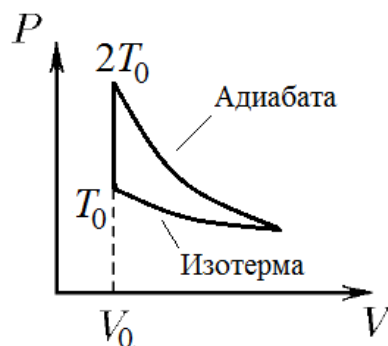


Рисунок к задаче 4

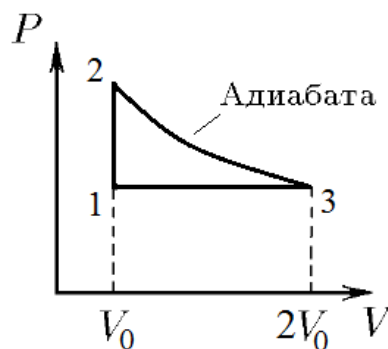


Рисунок к задаче 5

6. Холодильная машина работает по обратному циклу Карно и располагается в помещении с температурой  $25^\circ\text{C}$ . Температура морозильной камеры холодильника равна  $-5^\circ\text{C}$ . Какую работу должна совершить машина, чтобы заморозить 1 кг воды, находящейся изначально при температуре помещения. Теплоемкость воды равна  $4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{K}}$ , удельная массовая теплота плавления льда равна  $333 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$ .
7. Холодильная установка, работающая по обратному циклу Карно, извлекает 45 кДж тепла из термостата при низкой температуре и возвращает 67 кДж термостату при высокой температуре  $T_2 = 300 \text{ K}$ . Найти температуру термостата с низкой температурой  $T_1$ .
8. Для поддержания комфортной температуры  $+20^\circ\text{C}$  в коттедже при температуре окружающей среды  $-10^\circ\text{C}$  требуется мощность нагревателей 20 кВт. Оценить мощность двигателя кондиционера, работающего как тепловой насос по обратному циклу Карно, для поддержания такой же температуры в коттедже.

9. Найти изменение энтропии моля идеального газа при изотермическом расширении в вакуум. Начальный объем  $V_1$ , конечный  $V_2$ .
10. Найти изменение энтропии моля идеального одноатомного газа при политропическом процессе сжатия газа, если конечный объем вдвое меньше начального, а приращение внутренней энергии составляет половину от работы сжатия газа. Считать  $n = \frac{4}{3}$ .

## 1.8 Семинар 8

Равновесие фаз. Фазовые переходы первого рода. Фазовые диаграммы.

Уравнение Клапейрона-Клаузиуса. Давление насыщенного пара.

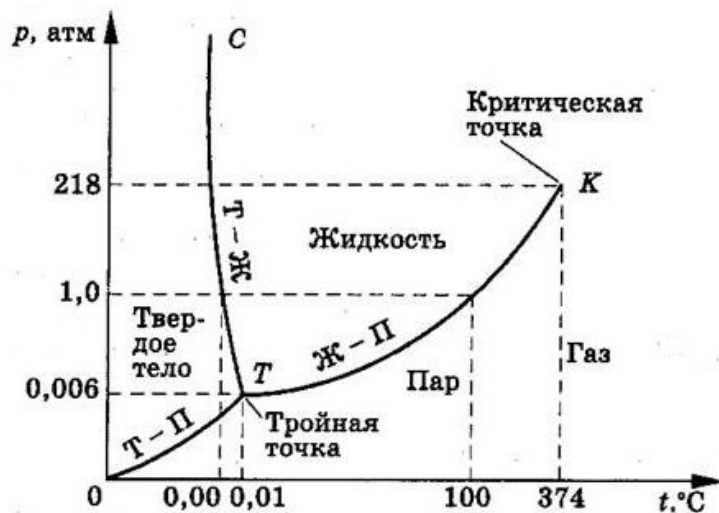
Термодинамика излучения. Закон Стефана-Больцмана.

### Краткая теория

Фазовые переходы первого рода — переходы, сопровождающиеся тепловым эффектом (выделением или поглощением тепла) и скачкообразным изменением удельного объема вещества. Например, фазовые переходы между различными агрегатными состояниями (плавление, парообразование и т.п.). Одним из условий протекания фазовых переходов (равновесия между фазами) является равенство давлений и температур фаз ( $P = \text{const}$ ,  $T = \text{const}$  при фазовом переходе). Другое условие равновесия фаз описывается уравнением Клапейрона-Клаузиуса:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{S_1 - S_2}{V_1 - V_2},$$

где  $S_1, S_2$  — энтропия фазы 1 и 2 (на 1 моль), соответственно;  $V_1, V_2$  — объем фазы 1 и 2 (на 1 моль), соответственно. Равновесные значения давлений и температур ( $P$  и  $T$ , при которых фазы находятся в состоянии равновесия друг другу) для определенного вещества наносятся на его  $(P, T)$  диаграмму (см. рис. снизу).



Фазовая диаграмма воды

Количество тепла необходимое на фазовый переход вещества массой  $m$  —  $Q = \pm q_m m$ ; на переход  $\nu$  молей вещества —  $Q = \pm q_\nu \nu$ . Здесь  $q_m (\nu)$  — удельная массовая

(молярная) теплота фазового перехода, знак «+» относится к фазовым переходам, сопровождающимся выделением тепла (плавление, парообразование, сублимация), а знак «−» — к переходам, сопровождающимся поглощением тепла (кристаллизация, конденсация, десублимация). Величины  $q_m$  и  $q_\nu$  связаны друг с другом следующим образом  $q_\nu = q_m M$ , где  $M$  — молярная масса вещества. С учетом связи удельной молярной теплоты фазового перехода с температурой перехода  $T$  и изменением энтропии  $S_1 - S_2$ :

$$q_\nu = T (S_1 - S_2),$$

можно переписать уравнение Клапейрона-Клаузиуса в следующем виде:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{q_\nu}{T (V_1 - V_2)} \quad (37)$$

Если считать рассматриваемое вещество в парообразном состоянии как идеальный газ и считать молярный объем газа много большим молярного объема жидкости, то с использованием (37) можно выразить связь давления насыщенного пара  $P$  вещества с его температурой кипения  $T$ :

$$P = P_0 \cdot \exp \left[ -\frac{q_\nu}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right], \quad (38)$$

где  $q_\nu$  — удельная молярная теплота парообразования (испарения),  $P_0$  — давление насыщенного пара вещества при температуре кипения  $T_0$  (к примеру, при нормальном атмосферном давлении  $P_0$  температура кипения воды  $T_0 = 100^\circ\text{C}$ ).

Термодинамика излучения. Тепловая энергия может переноситься не только за счет теплопроводности и конвекции, но и за счет теплового излучения. Данное явление достаточно хорошо описывается с применением модели абсолютно черного тела, поглощающего все падающее на него излучение. В состоянии равновесия, чтобы температура тела  $T$  оставалась неизменной, излучаемая энергия должна быть равна поглощаемой и при этом плотность потока излучения для абсолютно черного тела выражается законом Стефана-Больцмана:

$$j = \sigma T^4, \quad (39)$$

где  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$  — постоянная Стефана-Больцмана. Для реальных (серых) тел вводится поправочный коэффициент (степень черноты)  $\varepsilon$ :

$$j = \varepsilon \sigma T^4 \quad (40)$$

### Примеры решения задач

Пример 1. Температура кипения жидкости (молярная масса  $M$ ) у поверхности земли равна  $T_0$ , а на высоте  $H$  равна  $T = \frac{2}{3}T_0$ . Температура окружающего воздуха равна  $T_v$ . Молярная масса воздуха  $M_v$ . Найти теплоту парообразования этой жидкости. Считать, что она не зависит от температуры и давления.

Решение. Согласно барометрической формуле (15) давление воздуха  $P_v(H)$  на высоте  $H$  связано с давлением воздуха  $P_0$  у поверхности земли следующим образом:

$$P_v(H) = P_0 \exp\left(-\frac{M_v g H}{RT_v}\right)$$

Согласно уравнению (38) давление насыщенных паров жидкости  $P_{\text{нпж}}(H)$  на высоте  $H$  связано с давлением  $P_{\text{нпж}}(0)$  у поверхности следующим образом:

$$P_{\text{нпж}}(H) = P_{\text{нпж}}(0) \cdot \exp\left[-\frac{q_v}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right]$$

Так как одним из условий начала кипения является равенство давления насыщенных паров жидкости давлению окружающей атмосферы, то  $P_v(H) = P_{\text{нпж}}(H)$  и  $P_0 = P_{\text{нпж}}(0)$ . Тогда из соотношений, выписанных выше, следует, что показатели степени при экспонентах должны быть равны:

$$\frac{M_v g H}{RT_v} = \frac{q_v}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)$$

Тогда, с учетом того, что  $T = \frac{2}{3}T_0$ , для удельной молярной теплоты парообразования этой жидкости получаем:

$$q_v = M_v g H \cdot \frac{2T_0}{T_v}$$

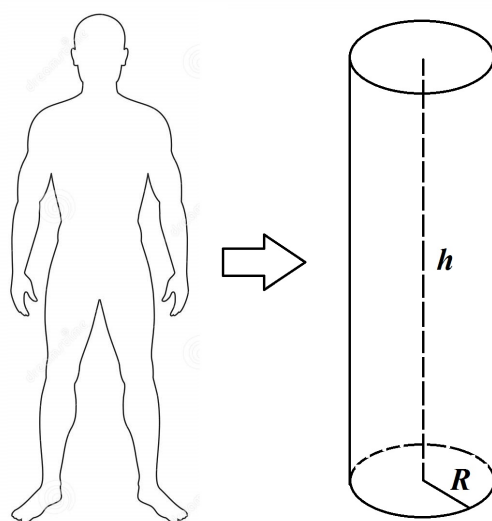
Следовательно удельная массовая теплота парообразования этой жидкости равна:

$$q_m = \frac{q_v}{M} = g H \cdot \frac{M_v}{M} \cdot \frac{2T_0}{T_v}$$

Ответ:  $q_v = M_v g H \cdot \frac{2T_0}{T_v}$ ;  $q_m = \frac{q_v}{M} = g H \cdot \frac{M_v}{M} \cdot \frac{2T_0}{T_v}$

Пример 2. Оценить мощность теплового излучения с поверхности среднестатистического студента. Считать степень черноты студента  $\varepsilon = 0,3$ .

Решение. Смоделируем нашего среднестатистического студента как цилиндр вы-



сотой  $h = 1,7$  м и радиусом  $R = 0,3$  м. Температура студента  $T = 36,6^\circ\text{C}$ . Согласно (40) плотность потока излучения равна  $j = \varepsilon\sigma T^4$ , а мощность теплового излучения с поверхности нашего студента  $P = j \cdot S_{\text{цилиндр}} = \varepsilon\sigma T^4 \cdot (2\pi Rh + 2\pi R^2) \approx 270$  Вт.

Ответ:  $P \approx 270$  Вт

### Задачи

1. Найти изменение энтропии 1 моля льда при а) плавлении, б) нагревании до  $100^\circ\text{C}$ , г) испарении. Удельная теплота кристаллизации воды  $333 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$ . Удельная массовая теплота парообразования воды  $2260 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$ . Теплоемкость воды  $4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$ .
2. Какая часть переохлажденной до  $-4^\circ\text{C}$  воды замерзнет если бросить в нее кусочек льда и вызвать тем самым кристаллизацию? Удельная теплота кристаллизации воды  $333 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$ .
3. В сосуде находится вода при температуре  $0^\circ\text{C}$ . Откачивая пар из сосуда всю воду заморозили. Какая доля воды испарилась? Удельная массовая теплота кристаллизации воды  $333 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$ . Удельная массовая теплота парообразования воды  $2260 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$ .
4. На какую высоту должен подняться альпинист, чтобы снизить температуру кипения воды до  $90^\circ\text{C}$ ? Температуру воздуха считать равной  $0^\circ\text{C}$ . Удельная массовая теплота парообразования воды  $2260 \text{ кДж/кг}$ .

5. На какую глубину должен опуститься шахтер, чтобы повысить температуру кипения воды до  $105^\circ\text{C}$ ? Температуру воздуха считать равной  $20^\circ\text{C}$ . Удельная массовая теплота парообразования воды  $2260 \text{ кДж/кг}$ .
6. Оцените температуру спирали электроплитки мощностью  $0,5 \text{ кВт}$  и нити накаливания электролампы мощностью  $150 \text{ Вт}$ . Принять, что теплопередача осуществляется только излучением.
7. Температура  $T$  средней нагретой пластины поддерживается постоянной. Чему равна температура боковых экранирующих пластин в состоянии равновесия?

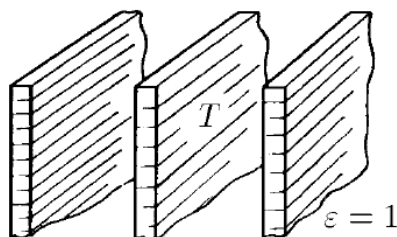


Рисунок к задаче 7

8. Температура  $T$  средней нагретой пластины поддерживается постоянной. Сколько экранирующих пластин нужно установить по обеим сторонам средней пластины, чтобы уменьшить температуру внешней экранирующей пластины до  $T/2$ ?
9. Нить накаливания радиуса  $r$  экранируется тремя цилиндрами с радиусами  $R$ ,  $2R$  и  $3R$ . Температура нити  $T_0$ . Определите температуру внешнего экрана. Материал нити и экранов одинаков, степень черноты  $\varepsilon = 1$ .

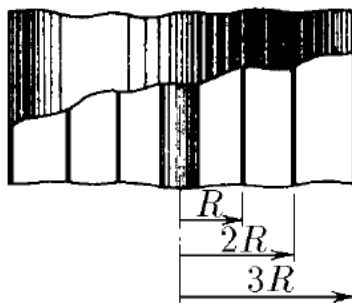


Рисунок к задаче 9

10. Приняв среднюю температуру поверхности Земли равной  $20^{\circ}\text{C}$ , оценить температуру поверхности Солнца. Считать Землю и Солнце абсолютно черными телами, и считать Солнце единственным источником нагрева Земли. Расстояние от Солнца до Земли  $\approx 1,5 \cdot 10^8$  км, радиус Солнца  $\approx 0,7 \cdot 10^6$  км, радиус Земли  $\approx 6400$  км



## 2 Электричество и магнетизм

### 2.1 Семинар 9

Электрический заряд. Сила Кулона. Электрическое поле в вакууме.

Принцип суперпозиции. Потенциал электрического поля. Работа электрического поля по перемещению заряда.

#### Краткая теория

Электрический заряд — физическая скалярная величина, определяющая свойство частиц или тел вступать в электромагнитные силовые взаимодействия. Обычно обозначается символами  $q$ ,  $Q$ . Единица измерения в СИ — кулон [1 Кл].

Электрический заряд может иметь разные знаки, т. е. быть положительным или отрицательным.

Электрические заряды могут передаваться (например, при непосредственном контакте) от одного тела к другому.

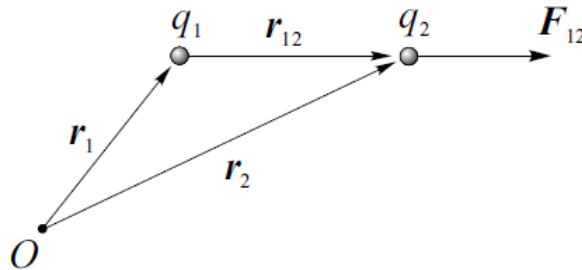
Электрический заряд какого-либо заряженного тела состоит из целого числа элементарных электрических зарядов, равных  $\approx 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. Отрицательным элементарным зарядом обладает электрон ( $q_e$ ), а положительным — протон ( $q_p$ ).

Закон сохранения электрического заряда: в изолированной системе алгебраическая сумма зарядов всех тел остается постоянной.

Закон Кулона — экспериментально установленный закон, определяющий силу взаимодействия двух точечных заряженных тел в вакууме:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \cdot \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad (41)$$

Здесь  $\vec{F}_{12}$  — сила, действующая на заряд  $q_2$  со стороны заряда  $q_1$ ;  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  — радиус-векторы зарядов;  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$  — электрическая постоянная. Из вида фор-



мулы (41) видно, что, если  $q_1$  и  $q_2$  одного знака (одноименные), то тела отталкиваются, а если разного (разноименные) — притягиваются.

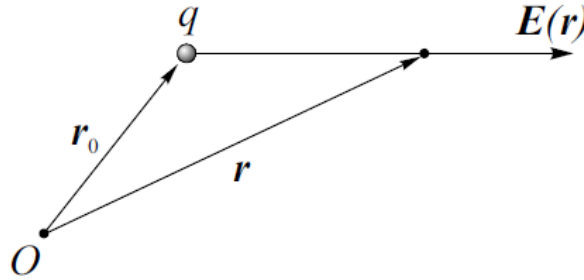
Электрические заряды взаимодействуют друг с другом на расстоянии, поэтому введем понятие электрического поля  $\vec{E}_1$ , создаваемого вокруг заряженного тела  $q_1$ . В терминах электрического поля закон Кулона (41) переписывается в следующем виде:

$$\vec{F}_{12} = \vec{E}_1(\vec{r}_2) \cdot q_2 \quad (42)$$

Здесь  $\vec{F}_{12}$  — сила, действующая на заряд  $q_2$  со стороны электрического поля напряженностью  $\vec{E}_1(\vec{r}_2)$ , создаваемого зарядом  $q_1$  в точке  $\vec{r}_2$ . То есть напряженность электрического поля  $\vec{E}(\vec{r})$  в точке  $\vec{r}$  от заряда  $q$ , расположенного в точке  $\vec{r}_0$ , выражается следующим образом:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \quad (43)$$

Единица измерения напряженности электрического поля  $\vec{E}$  — вольт на метр  $\left[\frac{\text{В}}{\text{м}}\right]$ .



Для электрического поля справедлив принцип суперпозиции. Так, напряженность электрического поля  $\vec{E}(\vec{r})$  в точке  $\vec{r}$  от системы зарядов  $\{q_i\}$ , расположенных в точках  $\{\vec{r}_i\}$ , выражается следующим образом:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (44)$$

Работа поля напряженностью  $\vec{E}(\vec{r})$  по перемещению пробного заряда  $q$  из точки  $P_1$  в точку  $P_2$  равна:

$$A = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{l} = q \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{l} = U(P_1) - U(P_2) \quad (45)$$

Здесь  $U(P_1)$  и  $U(P_2)$  — потенциальная энергия заряда  $q$  в точках  $P_1$  и  $P_2$ , соответственно. Работа поля напряженностью  $\vec{E}(\vec{r})$  по перемещению пробного заряда  $q$  по замкнутому контуру равна 0. Следовательно векторное поле  $\vec{E}(\vec{r})$  потенциально:

$$\text{rot } \vec{E} = [\vec{\nabla} \times \vec{E}] = 0 \quad (46)$$

Иначе говоря, существует скалярная функция  $\varphi(\vec{r})$ , для которой выполняется следующее соотношение:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \quad (47)$$

Величину  $\varphi(\vec{r})$  называют потенциалом электрического поля в точке  $\vec{r}$ . Единица измерения потенциала — вольт [В]. Из (47) следует, что  $\varphi(\vec{r})$  определяется с точностью до константы. Для однозначного определения потенциала электрического поля выбирается точка  $P_0$  (для зарядов, размещенных в ограниченной области пространства, обычно на бесконечности), в которой потенциалу присваивается определенное значение  $\varphi(P_0) = 0$ . Тогда потенциал электрического поля напряженностью  $\vec{E}(\vec{r})$  в какой-либо точке  $P$  определяется следующим интегралом:

$$\varphi(P) = \int_P^{P_0} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{l}, \quad (48)$$

не зависящим от формы пути от точки  $P$  к точке  $P_0$ . Потенциальная энергия заряда  $q$  в электрическом поле с потенциалом  $\varphi(\vec{r})$  определяется следующим образом:

$$U(\vec{r}) = q\varphi(\vec{r}) \quad (49)$$

### Примеры решения задач

Пример 1. Определить потенциал точечного заряда  $q$ .

Решение. Выберем систему координат с началом в точке расположения заряда. Напряженность электрического поля точечного заряда нам известна (43), она имеет только радиальную компоненту  $E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$ . Примем потенциал на бесконечности (та самая точка  $P_0$ ) равным нулю. Чтобы найти потенциал в точке  $P$  (на расстоянии  $r$  от начала координат), выберем за путь интегрирования в (48) радиальный луч, проходящий через точку  $P$ . В итоге получим:

$$\varphi(P) = \int_P^{P_0} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_r^\infty \frac{q}{\xi^2} d\xi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$$

Ответ: Потенциал точечного заряда  $\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$ .

Пример 2. Пользуясь принципом суперпозиции, найти зависимость напряженности электрического поля однородно заряженной бесконечной прямой нити (линейная плотность заряда  $\rho$ ) от расстояния  $r$  от нити.

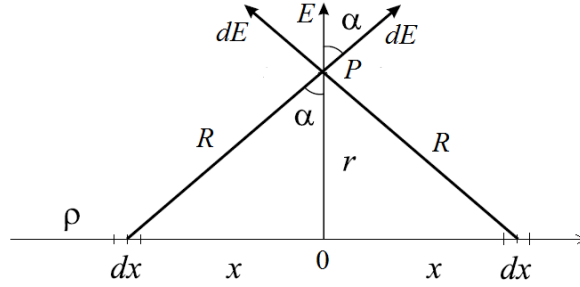


Рисунок к примеру 2

Решение. Примем за ось  $x$  направление вдоль заряженной нити (как на рисунке). Поле в точке  $P$ , создаваемое каждым дифференциально малым зарядом  $dq = \rho dx$  на участке нити  $dx$ , согласно (43), равно:

$$d\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{|\vec{R}|^2} \cdot \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$$

Согласно принципу суперпозиции, для поиска итогового поля  $\vec{E}(P)$  нужно векторно суммировать  $d\vec{E}(P)$  от всех участков  $dx$ . Из симметрии задачи ясно, что суммирование по положительным и отрицательным  $x$  дадут равные по модулю вклады в  $E_x(P)$  и  $E_y(P)$ , однако вклады в  $E_x(P)$  имеют противоположные знаки и, следовательно, сократятся. Поэтому достаточно дважды провести суммирование по  $dE_y(P)$  для положительных значений координаты  $x$  (от 0 до  $\infty$ ):

$$E(P) = \int dE_y(P) = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{\rho}{R^2} \cdot \frac{r}{R} dx$$

Для удобства расчета интеграла выразим  $x$  и  $R$  через расстояние до нити  $r$  и угол  $\alpha$ . Сделаем соответствующие замены:

$$x = r \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow dx = r d \operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$R = \frac{r}{\cos \alpha}$$

Применив замены, получим простой интеграл:

$$E(P) = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \, d\alpha = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Ответ: Напряженность электрического поля однородно заряженной бесконечной прямой нити на расстояния  $r$  от нити равна  $E(r) = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 r}$ .

### Задачи

1. Какой заряд приобрел бы  $1 \text{ см}^3$  железа, если бы удалось убрать 1% содержащихся в нем электронов. Атомный номер железа в периодической таблице Менделеева — 26, молярная масса железа —  $55,845 \text{ г/моль}$ , плотность железа —  $7880 \text{ кг/м}^3$ .
2. Две достаточно малых заряженных сферы с зарядами величиной  $q_1$  и  $q_2$  находятся на относительно большом расстоянии, так, что электростатическая сила равна величине  $F$ . Сферы привели в контакт и вновь развели на прежнее расстояние. Во сколько раз изменилась сила взаимодействия. Рассмотреть случаи  $q_2 = 2q_1$ ,  $q_2 = -2q_1$ .
3. Одноименные точечные заряды расположены в вершинах ромба со стороной  $l$  (как на рисунке). Заряды  $Q$  соединены нитью длиной  $l$ . Найти силу натяжения этой нити.

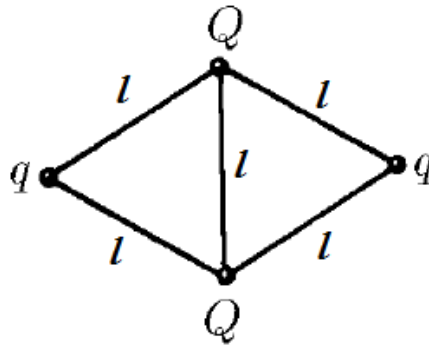


Рисунок к задаче 3

4. Приняв верной планетарную модель атома водорода, найти с какой скоростью должен вращаться электрон вокруг протона, чтобы оставаться на своей орбите. Принять радиус орбиты равным  $10^{-10} \text{ м}$ , масса электрона  $m_e \approx 9 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ .

5. При какой массе протона, электростатическая сила взаимодействия с себе подобным равна гравитационной? Гравитационная постоянная  $G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ .
6. Разность потенциалов (напряжение) между катодом и анодом равна 220 В. Из катода стартует электрон с нулевой скоростью. Какова скорость электрона вблизи анода?
7. Протон покоится. С большого расстояния прямо на него налетает другой протон, имевший вначале энергию  $\varepsilon$ . Найти минимальное расстояние между частицами. Масса протона  $m_p \approx 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ .
8. Заряды  $q$  находятся в вершинах квадрата со стороной  $l$  (как на рисунке). Найти разность потенциалов между центром квадрата (1) и серединой одной из сторон квадрата (2).

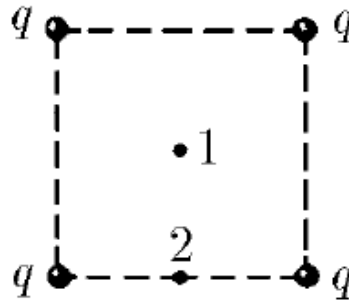


Рисунок к задаче 8

9. Две одинаковые, равномерно заряженные палочки образуют две стороны равностороннего треугольника. Напряженность поля в центре треугольника  $E_0$  потенциал  $\varphi_0$ . Чему будут равны эти величины, если убрать одну из палочек?
10. Найти напряженность электрического поля и потенциал, создаваемые равномерно заряженным кольцом в центре кольца и на расстоянии  $h$  над центром. Заряд кольца —  $Q$ , радиус —  $R$ .

## 2.2 Семинар 10

**Теорема Гаусса. Уравнения Максвелла для электрического поля в вакууме. Граничные условия для электрического поля в вакууме. Проводники в электрическом поле.**

### Краткая теория

Теорема Гаусса и уравнения Максвелла для электрического поля в вакууме. Рассчитать поле от системы зарядов всегда можно с помощью принципа суперпозиции. Однако, в ряде симметричных случаев, намного удобнее воспользоваться так называемой теоремой Гаусса. Пусть заряд непрерывно распределен в некоторой области  $V_0$ . Полный заряд равен  $Q$ , объемная плотность заряда —  $\rho(\vec{r})$ . Окружим область  $V_0$  замкнутой поверхностью  $S$ . Теорема Гаусса утверждает, что поток напряженности поля через эту поверхность равен:

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) d\vec{S} = \oint_S (\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}) dS = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (50)$$

Здесь  $\vec{n}$  — нормаль к поверхности  $S$ . Пусть замкнутая поверхность  $S$  содержит внутри себя объем  $M$ . Тогда, пользуясь теоремой Гаусса-Остроградского и соотношением (50) получим:

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) d\vec{S} = \iiint_M \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) dV = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \iiint_M \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} dV$$

Отсюда вытекает первое уравнение Максвелла для электростатики в вакууме:

$$\operatorname{div} \vec{E} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (51)$$

Вторым уравнением Максвелла будем считать (46). Из (47) и (51) следует уравнение Пуассона для потенциала:

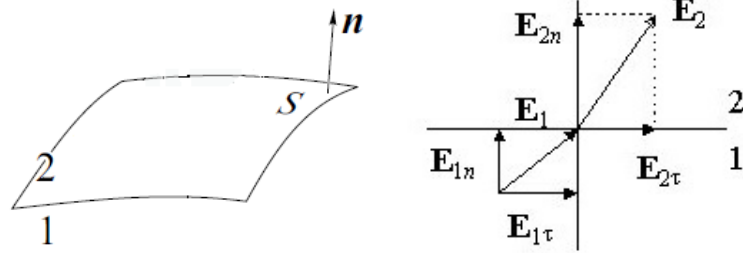
$$\Delta\varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (52)$$

Граничные условия для поля  $\vec{E}$ . Пусть имеется некоторая поверхность  $S$ , которая разделяет область определения поля на два полупространства 1 и 2 (как на рисунке ниже). Предположим, что по этой поверхности распределен заряд с поверхностной плотностью  $\sigma$ , поле в области 1 —  $\vec{E}_1$ , в области 2 —  $\vec{E}_2$ . Вектор нормали  $\vec{n}$  к поверхности направим в сторону второй области. Из первых двух уравнений

Максвелла следуют граничные условия для нормальной компоненты поля  $E_n$  и для касательной компоненты поля  $E_\tau$  в вакууме на границе раздела областей 1 и 2:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \oint_S \vec{E}(\vec{r}) d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (53)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \oint_L \vec{E}(\vec{r}) d\vec{l} = 0 \Rightarrow E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \Rightarrow E_{2\tau} = E_{1\tau} \quad (54)$$



Проводники в электрическом поле. Представим, что проводник попал во внешнее однородное поле  $\vec{E}_0$ . В проводнике начнется движение свободных зарядов (отрицательные заряды будут двигаться против направления поля  $\vec{E}_0$ , а положительные — вдоль линий  $\vec{E}_0$ ). В рамках электростатики, на поверхности проводника будут накапливаться заряды (индуцированные) до тех пор, пока поле внутри проводника не занулится. Другими словами, проводник выталкивает из себя поле за счет появления на его поверхности индуцированного заряда. При этом поле снаружи искажается, на границе сохраняется лишь нормальная к поверхности проводника составляющая поля, а потенциал на поверхности проводника становится постоянным, то есть поверхность проводника становится эквипотенциальной.

### Примеры решения задач

Пример 1. Пользуясь теоремой Гаусса, найти зависимость напряженности электрического поля однородно заряженной бесконечной прямой нити (линейная плотность заряда  $\rho$ ) от расстояния  $r$  от нити.

Решение. Воспользуемся осевой симметрией задачи, из которой ясно, что итоговое поле  $\vec{E}$  будет иметь только компоненту  $E_r$  в цилиндрической системе координат. Для того, чтобы воспользоваться теоремой Гаусса, в качестве замкнутой поверхности  $S_0$  выберем цилиндр (коаксиальный с заряженной нитью) с радиусом  $r$  и длиной  $L$ . Внутри такого цилиндра остается участок нити длиной  $L$  и с зарядом  $Q = \rho L$ . Пусть



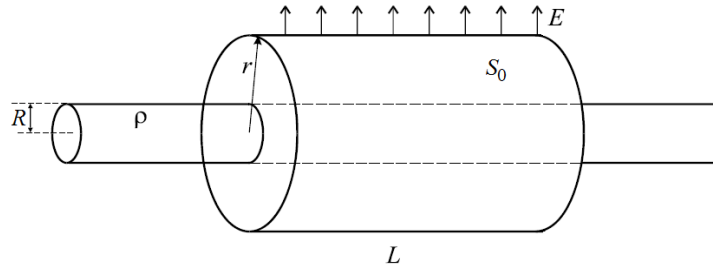


Рисунок к примеру 1

$S_1$  — площадь основания цилиндра,  $S_2$  — площадь боковой поверхности цилиндра. Тогда, согласно (50):

$$\oint_{S_0} \vec{E}(r) d\vec{S} = 2 \cdot \iint_{S_1} \vec{E}(r) d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E}(r) d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho L}{\varepsilon_0}$$

Так как вектор поля ортогонален нормали к основаниям цилиндра, то поток  $\vec{E}$  через эти поверхности нулевой. Следовательно:

$$\iint_{S_2} \vec{E}(r) d\vec{S} = E(r) \cdot 2\pi r L = \frac{\rho L}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho}{2\pi r \varepsilon_0}$$

Не удивительно, что ответ получился таким же, как в аналогичной задаче из прошлого семинара. Однако, решение с использованием теоремы Гаусса было проще и лаконичней.

Ответ:  $E(r) = \frac{\rho}{2\pi r \varepsilon_0}$

Пример 2. Найти распределение напряженности электрического поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ .

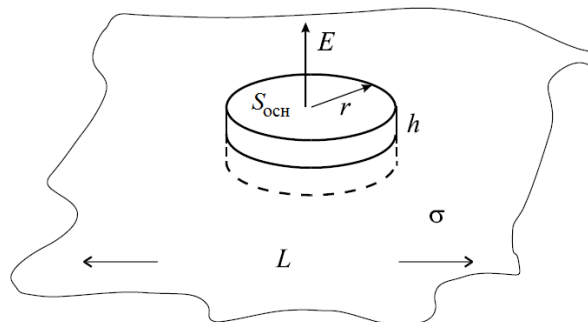


Рисунок к примеру 2

Решение. Воспользуемся теоремой Гаусса. Выберем в качестве замкнутой поверхности  $S_0$  цилиндр с основанием площадью  $S_{\text{осн}}$  и боковой поверхностью площадью  $S_{\text{бок}}$ . Ориентируем цилиндр так, чтобы заряженная поверхность делила его высоту  $2h$  пополам и, чтобы нормали к его основаниям были сонаправлены с нормальными к заряженной поверхности. В данном случае цилиндр вырезает из заряженной поверхности участок площадью  $S_{\text{осн}}$  с зарядом  $Q = \sigma S_{\text{осн}}$ . Запишем теорему Гаусса для этого случая:

$$\oint_{S_0} \vec{E} d\vec{S} = \iint_{S_{\text{бок}}} (\vec{E} \cdot \vec{n}_{\text{бок}}) dS + 2 \iint_{S_{\text{осн}}} (\vec{E} \cdot \vec{n}_{\text{осн}}) dS = \frac{\sigma S_{\text{осн}}}{\varepsilon_0}$$

В силу плоской симметрии задачи ясно, что итоговое поле будет одинаковым на одном и том же расстоянии  $h$  от поверхности по обе ее стороны. Так же из симметрии ясно, что вектор поля сонаправлен нормали к поверхности. Отсюда:

$$\iint_{S_{\text{бок}}} (\vec{E} \cdot \vec{n}_{\text{бок}}) dS + 2 \iint_{S_{\text{осн}}} (\vec{E}(h) \cdot \vec{n}_{\text{осн}}) dS = 0 + 2E(h)S_{\text{осн}} = \frac{\sigma S_{\text{осн}}}{\varepsilon_0}$$

Отсюда следует, что напряженность электрического поля от равномерно заряженной бесконечной плоскости всюду одинакова и равна:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Если заряд плоскости положителен, то поле  $\vec{E}$  сонаправлено нормали к поверхности. И, наоборот, если заряд плоскости отрицателен, то поле  $\vec{E}$  направлено в противоположную сторону нормали к поверхности.

Ответ:  $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

### Задачи

1. Найти распределение напряженности и потенциала электрического поля снаружи и внутри равномерно заряженной сферы с зарядом  $Q$  и радиусом  $R$ .
2. Напряженность поля в верхнем полупространстве над достаточно большой плоской поверхностью  $E_1$ , в нижнем полупространстве  $E_2$ . Найти давление, создаваемое электростатическими силами на плоскость.
3. Даны две параллельные, равномерно заряженные, бесконечные плоскости с поверхностными плотностями заряда  $+\sigma$  и  $-\sigma$ , соответственно. Расстояние

между плоскостями —  $d$ . Найти распределение напряженности электрического поля во всем пространстве.

4. Найти распределение напряженности и потенциала электрического поля снаружи и внутри равномерно заряженного шара с зарядом  $Q$  и радиусом  $R$ . Изобразить на графике.
5. Внутри шара радиуса  $R$ , равномерно заряженного по объему с плотностью  $\rho$ , имеется незаряженная шарообразная полость, радиус которой  $R_1$ , а центр полости отстоит от центра шара на расстояние  $a$  ( $a + R_1 < R$ ). Найти электрическое поле  $E$  в полости.
6. Найти распределение напряженности электрического поля снаружи и внутри бесконечно длинного, равномерно заряженного цилиндра с объемной плотностью заряда  $\rho$  и радиусом  $R$ . Изобразить на графике.
7. Найти распределение напряженности электрического поля снаружи и внутри бесконечного плоского слоя толщиной  $2a$  и с объемной плотностью заряда  $\rho$ .
8. Сфера радиуса  $a$  расположена концентрично внутри сферы радиуса  $b$ . Сферы имеют заряды  $q_1$  и  $q_2$  соответственно. Найти напряженность и потенциал электрического поля во всем пространстве. Как изменится результат, если сферы соединить проводящей перемычкой?
9. Сфера радиуса  $a$  расположена концентрично внутри сферы радиуса  $b$  и имеет заряд  $q$ . Сфера с радиусом  $b$  заземлена. Найти напряженность и потенциал результирующего электрического поля во всем пространстве.
10. Металлический шар радиуса 10 см помещен внутрь (концентрически) металлического сферического слоя с внешним радиусом 30 см и толщиной 10 см. На шаре находится заряд  $10^{-5}$  Кл, на оболочке — заряд  $8 \cdot 10^{-5}$  Кл. Постройте график зависимости напряженности и потенциала электрического поля от расстояния до центра шара.
11. С какой силой притягивается заряд величиной  $q$  к проводящей плоскости, если заряд находится на расстоянии  $h$  от плоскости.
12. Точечный заряд  $q$  помещен вне проводящей сферы радиуса  $R$  на расстоянии  $l$  от ее центра. Сфера заземлена. Будет ли взаимодействовать точечный заряд со сферой? Если да, то чему равна сила взаимодействия?

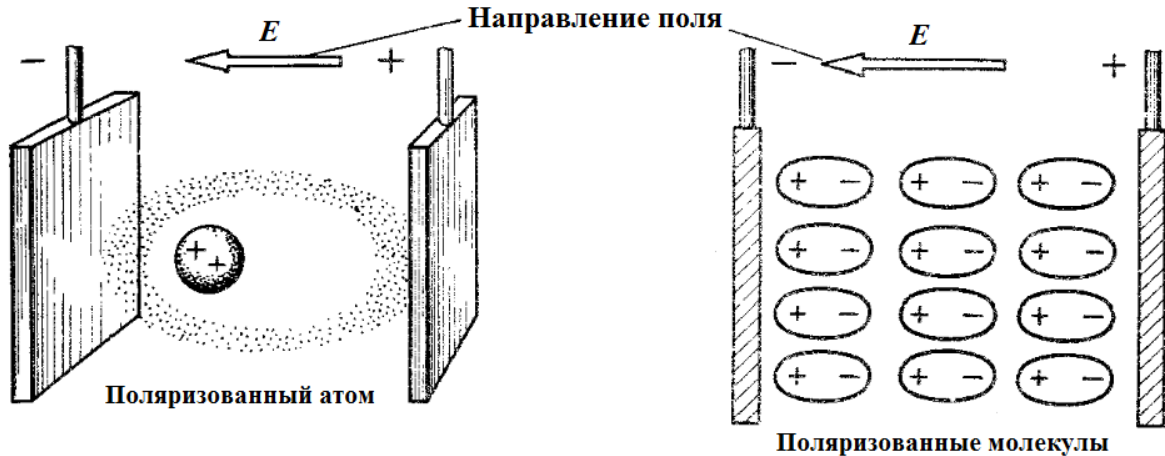
## 2.3 Семинар 11

**Диэлектрики в электрическом поле. Напряженность и индукция электрического поля. Уравнения Максвелла для электрического поля в среде. Граничные условия для электрического поля в среде.**

**Конденсаторы.**

### Краткая теория

Пусть дана непроводящая среда (диэлектрик), в которой отсутствуют свободные заряды. Электроны атомов (или молекул) среды связаны с соответствующими ядрами и не участвуют в проводимости при наложении внешнего электрического поля. Будем считать, что для разрушения этих связей необходимы очень сильные воздействующие факторы. Под действием внешнего электрического поля происходит смещение ядер атомов диэлектрика и их электронных оболочек (как на рисунке снизу). Другими словами, диэлектрик поляризуется. При этом в диэлектрике возникает дополнительное поле, направленное против внешнего поля. В общем случае, в среде могут находиться свободные заряды, тогда суммарное электрическое поле в среде создается как свободными, так и связанными зарядами.



Характеристики непроводящей среды (диэлектрика), определяющие характер взаимодействия среды с электрическим полем и способность среды к поляризации: коэффициент поляризации  $\chi$  и диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon = \chi + 1$ . Для удобства решения задач нахождения полей в присутствии диэлектриков, вводятся дополнительные векторы: вектор поляризации среды  $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$  и вектор индукции электрического поля  $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ .

Теорема Гаусса для потока индукции электрического поля в среде:

$$\oint_S \vec{D}(\vec{r}) d\vec{S} = Q \quad (55)$$

Первые два уравнения Максвелла (в дифференциальном и интегральном виде) для электрического поля в среде, а также граничные условия для электрического поля записываются следующим образом:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \Leftrightarrow \oint_S \vec{D}(\vec{r}) d\vec{S} = Q \Rightarrow D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad (56)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \oint_L \vec{E}(\vec{r}) d\vec{l} = 0 \Rightarrow E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \Rightarrow E_{2\tau} = E_{1\tau} \quad (57)$$

Уравнение Пуассона для потенциала в среде имеет следующий вид:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon} \quad (58)$$

Конденсатор — устройство для накопления заряда и энергии электрического поля. Емкость конденсатора  $C$  — мера его способности накапливать электрический заряд. Емкость конденсатора связана с накопленным зарядом  $Q$  и разностью потенциалов между обкладками конденсатора  $U$  следующим образом:

$$C = \frac{Q}{U} \quad (59)$$

Единица измерения ёмкости — фарад [Ф]. Для одиночного проводника ёмкость равна отношению заряда проводника к потенциалу на его поверхности (при условии, что все другие проводники бесконечно удалены и что потенциал бесконечно удалённой точки принят равным нулю).

## Примеры решения задач

Пример 1. Найти емкость плоского конденсатора. Расстояние между обкладками  $d$ , площадь обкладок  $S$ . Рассмотреть случаи, когда а) пространство между обкладками ничем не заполнено, б) пространство между обкладками заполнено диэлектриком с проницаемостью  $\varepsilon$ .

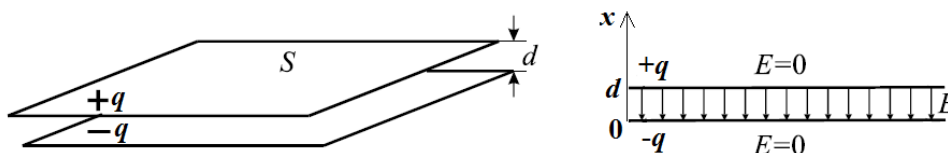


Рисунок к примеру 1

Решение. а) Пусть на конденсаторе накоплен заряд  $q$  (как на рисунке). Также будем считать что размеры обкладок конденсатора много больше расстояния между ними. Тогда, для выражения напряженности поля от верхней  $E_v$  и нижней  $E_n$  обкладок, можно воспользоваться решением примера 1 из семинара 10 (2.2):

$$E_v = E_n = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{q}{2\varepsilon_0 S}$$

При этом ясно, что вектора  $\vec{E}_v$  и  $\vec{E}_n$  в области вне конденсатора направлены в противоположную сторону друг другу, а внутри сонаправлены. Поэтому, с учетом принципа суперпозиции, итоговое поле вне конденсатора равно 0, а между обкладками:

$$E = E_v + E_n = \frac{q}{\varepsilon_0 S}$$

Теперь, когда известна напряженность поля в конденсаторе, можно найти разность потенциалов между его обкладками (напряжение), пользуясь (48):

$$U = \Delta\varphi = - \int_0^d E_x dx = \int_0^d \frac{q}{\varepsilon_0 S} dx = \frac{qd}{\varepsilon_0 S}$$

Пользуясь (59), найдем емкость конденсатора:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

б) Как и в предыдущем случае, сначала выразим напряженность поля в конденсаторе. Представим, что заряженная плоскость из примера 1 семинара 10 (2.2) рас-

полагается не в вакууме, а в среде. Тогда применение теоремы Гаусса (55) позволяет рассчитать индукцию поля от бесконечной заряженной плоскости в среде  $D = \frac{\sigma}{2S}$ . Применим это для выражения индукции от верхней  $D_{\text{в}}$  и нижней  $D_{\text{н}}$  обкладок:

$$D_{\text{в}} = D_{\text{н}} = \frac{\sigma}{2} = \frac{q}{2S}$$

Тогда итоговая индукция поля между обкладками:

$$D = D_{\text{в}} + D_{\text{н}} = \frac{q}{S}$$

С учетом связи индукции и напряженности электрического поля в однородной среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  выразим напряженность поля в конденсаторе:

$$E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}$$

Как видно, в данном случае напряженность поля в  $\varepsilon$  раз меньше, чем в вакууме. Теперь, когда известна напряженность поля в конденсаторе, можно найти разность потенциалов между его обкладками (напряжение), пользуясь (48):

$$U = \Delta\varphi = - \int_0^d E_x dx = \int_0^d \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S} dx = \frac{qd}{\varepsilon\varepsilon_0 S}$$

Пользуясь (59), найдем емкость конденсатора:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$$

Ответ: а)  $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$ ; б)  $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$ .

### Задачи

1. Плоский конденсатор, состоящий из двух прямоугольных пластин, площадью  $S$  заряжен зарядом  $q$ . Найти силу притяжения между пластинами.
2. Оценить емкость среднестатистического студента. *Указание:* для оценки рассмотреть студента в форме шара, имеющего соответствующую массу и плотность как у воды.
3. Найти емкость, эквивалентную емкости двух конденсаторов  $C_1$ ,  $C_2$ , соединенных а) последовательно, б) параллельно. Определить распределение зарядов

на обкладках.

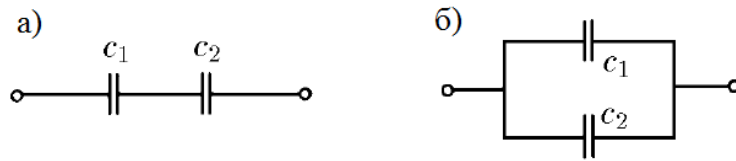


Рисунок к задаче 3

4. Расстояние между обкладками плоского конденсатора  $d$ . Обкладки соединены друг с другом и заземлены так, как показано на рисунке. Между обкладками вставлена, параллельно им, пластина с зарядом  $q$ . Какой заряд протечет по проводнику, соединяющему обкладки, если пластину передвинуть на расстояние  $x$ ?

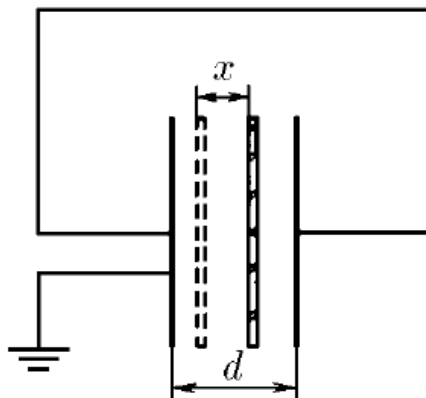


Рисунок к задаче 4

5. Найти погонную емкость (емкость на единицу длины) цилиндрического конденсатора, радиус внутренней обкладки которого  $r$ , радиус внешней –  $R$ . Как изменится емкость конденсатора, если пространство между обкладками заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ .
6. Найти емкость сферического конденсатора, радиус внутренней обкладки которого  $r$ , радиус внешней –  $R$ . Как изменится емкость конденсатора, если пространство между обкладками заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ .



7. Разность потенциалов между плоскими пластинами заряженного конденсатора увеличилась в  $q$  раз после вытекания из зазора жидкого диэлектрика. Найти диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$  диэлектрика.
8. Батарея из  $n$  последовательно соединенных конденсаторов заряжена до разности потенциалов  $U$ . Конденсаторы заполнены жидким диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Как изменится разность потенциалов, если из  $k$  конденсаторов вытечет диэлектрик?
9. Найти емкость плоского конденсатора а) после заполнения половины зазора между обкладками конденсатора диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$ . Считать, что ёмкость конденсатора до заполнения диэлектриком равна  $C_0$ . То же, б) если диэлектриком заполнен зазор между обкладками на половине площади конденсатора. Нарисовать графики распределение заряда, электрического поля и напряжения на обкладках и в зазоре конденсатора.
10. Имеется плоский конденсатор с поверхностной плотностью заряда на обкладках  $\sigma$ . Расстояние между обкладками  $d$ . В зазор плоского конденсатора вставили пластину толщиной  $h < d$  и с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Площадь поверхности пластины совпадает с площадью обкладок. Найти поверхностную плотность поляризованного на пластине заряда, напряженность электрического поля в пространстве между обкладками конденсатора и разность потенциалов между ними.
11. Пластина из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  помещена в однородное электрическое поле напряженностью  $E_0$  так, что нормаль к поверхности пластины составляет угол  $\alpha$  к  $\vec{E}_0$ . Найти напряженность и индукцию электрического поля внутри пластины.

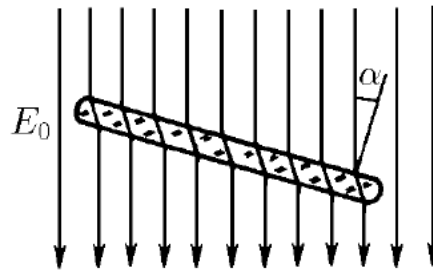


Рисунок к задаче 11

12. В трубе с непроводящими стенками расположены два металлических поршня площадью  $S$  (обкладки плоского конденсатора). Объем между поршнями заполнен идеальным газом при атмосферном давлении  $P_0$  и с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Поршням передали заряды  $+Q$  и  $-Q$ , соответственно. Во сколько раз изменится расстояние между обкладками конденсатора и его емкость? Считать, что трение между поршнями и трубой отсутствует, а газ сжимается изотермически. Зазор между поршнями существенно меньше  $\sqrt{S}$ .

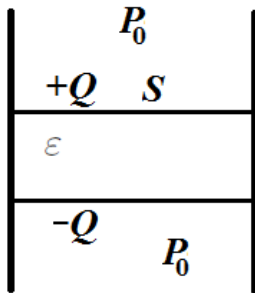


Рисунок к задаче 12

## 2.4 Семинар 12

**Плотность энергии электрического поля. Энергия электрического поля в конденсаторах. Напряжение, ток, сопротивление. Закон Ома. Простые электрические цепи.**

### Краткая теория

Плотность энергии электрического поля напряженностью  $\vec{E}$  равна:

$$\omega = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}, & \text{в вакууме} \\ \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}, & \text{в среде с диэлектрической проницаемостью } \varepsilon \end{cases} \quad (60)$$

Энергия электрического поля в объеме  $V_0$  находится интегрированием плотности энергии  $\omega$  по объему:

$$W = \iiint_{V_0} \omega dV$$

Энергия электрического поля, накопленная в заряженном конденсаторе равна:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{QU}{2}, \quad (61)$$

где  $C$  — емкость конденсатора,  $Q$  — заряд, накопленный на конденсаторе,  $U$  — напряжение (разность потенциалов) между обкладками конденсатора.

Электрический ток. В проводниках при наличии поля  $\vec{E}$  возникает движение свободных отрицательных  $q^-$  и положительных  $q^+$  зарядов:

$$\vec{j} = (n^+ q^+ \mu^+ + n^- q^- \mu^-) \vec{E},$$

где  $\vec{j}$  — плотность потока зарядов (плотность тока);  $n^+$ ,  $n^-$  — соответственно, концентрации положительных и отрицательных заряженных частиц в проводнике;  $\mu^+$ ,  $\mu^-$  — соответственно, подвижности положительных и отрицательных заряженных частиц в проводнике. Полный ток  $I$  через проводник с сечением  $S_0$  определяется следующим образом:

$$I = \iint_{S_0} \vec{j} d\vec{S}$$

Единица измерения тока — ампер [A].

Закон Ома в дифференциальной форме связывает плотность тока  $\vec{j}$  с локальной напряженностью электрического поля:

$$\vec{j} = n_e q_e \mu_e \vec{E} = \sigma \vec{E},$$

где  $\sigma$  — проводимость (удельная электропроводность) материала. Измеряется в  $\left[ \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}} \right]$  или  $\left[ \frac{\text{См}}{\text{м}} \right]$ .

Закон Ома в интегральной форме:

$$U = RI,$$

где  $U$  — напряжение на концах проводника,  $I$  — ток через проводник,  $R = \frac{\sigma S}{L}$  — сопротивление проводника ( $S$  — площадь сечения проводника,  $L$  — длина проводника). Единица измерения сопротивления — ом [Ом].

Закон Джоуля-Ленца выражает электрическую мощность  $P$ , которая выделяется в проводнике в виде тепла при протекании тока  $I$  через сопротивление  $R$ :

$$P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$

Для появления стационарного тока в замкнутых электрических цепях необходимо наличие сторонних непотенциальных сил не электростатического характера. Такие силы есть в любом источнике тока (аккумуляторах, батареях и т.д.). Источник характеризуется величиной электродвижущей силы (ЭДС)  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$ . Если действие сторонних сил рассматривать как действие непотенциального поля  $\vec{E}_{\text{стр}}$  на электроны, то ЭДС можно определить как циркуляцию поля  $\vec{E}_{\text{стр}}$  по замкнутому контуру-цепи:

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E}_{\text{стр}} d\vec{L} \quad (62)$$

### Примеры решения задач

Пример 1. Найти энергию электрического поля, создаваемого равномерно заряженной сферой с зарядом  $Q$  и радиусом  $R$ .

Решение. Из предыдущих семинаров мы знаем, что поле внутри равномерно за-

ряженной сферы равно нулю, а снаружи ведет себя как поле от точечного заряда:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2},$$

где  $r$  — расстояние от центра сферы. Тогда, согласно (60), плотность энергии электрического поля равна:

$$\omega = \begin{cases} 0, & 0 < r < R \\ \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}, & r \geq R \end{cases}$$

Осталось рассчитать полную энергию поля, с учетом сферической симметрии:

$$W = \iiint \omega dV = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0} \cdot \int_R^\infty \frac{1}{r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

Ответ:  $W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$

Пример 2. Делитель напряжения. В разрыв цепи включены последовательно соединенные сопротивления  $R_1$  и  $R_2$ . На концах сопротивлений приложено напряжение  $U$ . Найти напряжение на каждом сопротивлении.

Решение. Поскольку сопротивления включены последовательно, ток  $I$  через них течет один и тот же. Поэтому из закона Ома общее напряжение в цепи равно:

$$U = I(R_1 + R_2)$$

Следовательно ток в цепи равен:

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2}$$

А напряжение на каждом сопротивлении, соответственно:

$$U_1 = IR_1 = U \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$U_2 = IR_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

## Задачи

1. Оценить емкость и энергию электростатического поля Земли. Напряжённость поля вблизи поверхности Земли  $\sim 130$  В/м . Считать, что заряд распределен по поверхности Земли равномерно.
2. Показать, что давление электрического поля на поверхность проводника равно плотности энергии электрического поля.
3. Отрезок коаксиального кабеля длиной  $L$  с радиусами внутренней и внешней цилиндрических поверхностей  $a$  и  $b$ , соответственно, заполнен диэлектриком с проницаемостью  $\varepsilon$ . Найти электростатическую энергию отрезка кабеля, подключенного к источнику постоянного напряжения  $U$ .
4. Какую работу против электрических сил нужно совершить, чтобы уменьшить в два раза радиус заряженной сферы? Заряд сферы  $Q$ , начальный радиус  $R$ .
5. Найти энергию электрического поля равномерно заряженного шара радиуса  $R$ . Полный заряд шара  $Q$ .
6. Пользуясь соотношением Эйнштейна  $W = mc^2$ , определить классический радиус электрона. Считать, что вся энергия  $W$  электрона «электрическая» (имеет электрическую природу), а заряд электрона равномерно распределен по его объему.
7. Прямолинейный провод глубоко погружен в однородный проводящий грунт. Ток утечки с единицы поверхности провода в грунт составляет величину  $i$ . Найти плотность тока в грунте  $j(r)$  на расстоянии  $r$  от провода.
8. Цилиндрический проводник из материала с удельной проводимостью  $\sigma$  имеет длину  $l$  и поперечное сечение  $S$ . К торцам проводника приложено напряжение  $U$ . Найти ток в проводнике.
9. Радиусы внутренней и внешней обкладок сферического конденсатора  $r$  и  $R$ , соответственно, заряды на обкладках  $\pm q$ . Зазор между обкладками заполнен слабо проводящим диэлектриком с проницаемостью  $\varepsilon$  и удельной проводимостью  $\sigma$ . Найти сопротивление и ток утечки в конденсаторе.
10. Найти установившийся в цепи ток, потребляемый от источника, заряд и напряжение на конденсаторе, включенного в схему на рисунке.

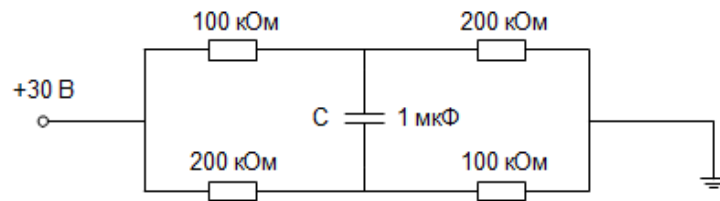


Рисунок к задаче 10

11. Источник напряжения  $U$  с внутренним сопротивлением  $r$  подключается к нагрузке. Какова должна быть величина сопротивления нагрузки  $R_n$ , чтобы: а) напряжение на нагрузке было максимальным; б) через нагрузку тек максимальный ток; в) на нагрузке выделялась максимальная мощность?
12. В цепь включены сопротивление  $R$  и элемент с сопротивлением, зависящим от падения напряжения  $V$  на нем по закону  $r = r_0 - \alpha V$ , где  $\alpha, r_0$  — постоянные. Найти ток в цепи, если к ее концам подведено напряжение  $U$ .

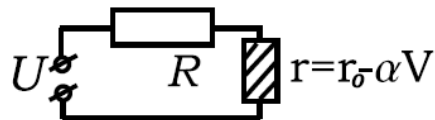


Рисунок к задаче 12

## 2.5 Семинар 13

**Магнитное поле в вакууме. Сила Лоренца. Сила Ампера. Движение заряда в электрическом и магнитном полях.**

### Краткая теория

Введем понятие индукции магнитного поля  $\vec{B}$ . Единица измерения  $B$  — тесла [Тл].

Сила Лоренца описывает силу действия магнитного поля индукции  $\vec{B}$  на движущийся со скоростью  $\vec{v}$  электрический заряд  $q$ :

$$\vec{F} = q [\vec{v} \times \vec{B}] \quad (63)$$

При совместном действии электрического и магнитного полей на движущийся со скоростью  $\vec{v}$  заряд действует сила:

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}] \right) \quad (64)$$

Сила Ампера описывает силу действия магнитного поля индукции  $\vec{B}$  на участок проводника длины  $d\vec{l}$  с током  $I$ :

$$d\vec{F} = I [d\vec{l} \times \vec{B}] \quad (65)$$

Здесь вектор  $d\vec{l}$  сонаправлен с направлением тока  $I$  в проводнике.

### Задачи

1. Протон, ускоренный напряжением 20 кВ, влетает в однородное магнитное поле индукции 0,1 Тл перпендикулярно полю. Найти радиус окружности, по которой движется протон в магнитном поле.
2. Определить частоту обращения (циклотронную частоту) частицы массы  $m$  с зарядом  $q$  в магнитном поле индукции  $B$ .
3. Электрон влетает в область однородного магнитного поля шириной  $l$ . Скорость электрона  $v$  перпендикулярна как индукции поля  $B$ , так и границам области. Под каким углом к границе области электрон вылетит из магнитного поля.



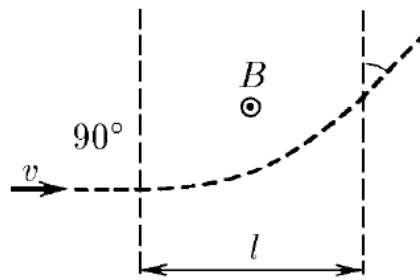


Рисунок к задаче 3

4. Определить, какую максимальную скорость разовьет заряженное тело, скользящее по наклонной плоскости в магнитном поле индукции  $B$  и в поле тяжести. Масса и заряд тела  $m$  и  $q$ . Магнитное поле параллельно наклонной плоскости и перпендикулярно полю тяжести. Угол наклона плоскости к горизонту  $\alpha$ . Коэффициент трения тела о плоскость  $\mu$ .

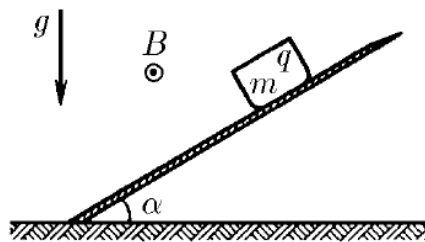


Рисунок к задаче 4

5. Квадратная рамка с током закреплена так, что может свободно вращаться вокруг горизонтальной стороны. Рамка помещена в вертикальное однородное магнитное поле индукции  $B$ . Угол наклона рамки к горизонту  $\alpha$ , ее масса  $m$ , длина стороны  $a$ . Найти ток в рамке.
6. Кольцо радиуса  $R$ , по которому циркулирует ток  $I$ , помещено в неоднородное аксиально-симметричное магнитное поле. Ось кольца совпадает с осью симметрии магнитного поля. Индукция магнитного поля  $B$ , действующего на ток, направлена под углом  $\alpha$  к оси симметрии. Масса кольца  $m$ . Найти ускорение кольца.
7. Пространство разделено на две области плоскостью (как на рисунке). В одной области создано магнитное поле индукции  $B_1$ , а в другой — индукции  $B_2$ . Поля  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$  однородны и параллельны друг другу. С плоскости раздела стартует электрон со скоростью  $v$  в сторону области с индукцией поля  $B_1$

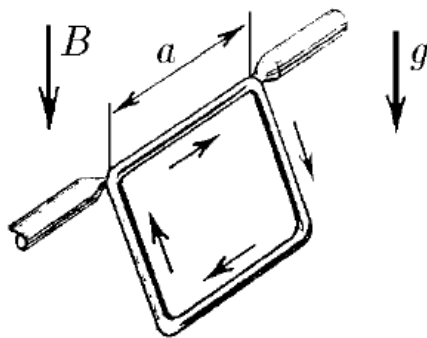


Рисунок к задаче 5

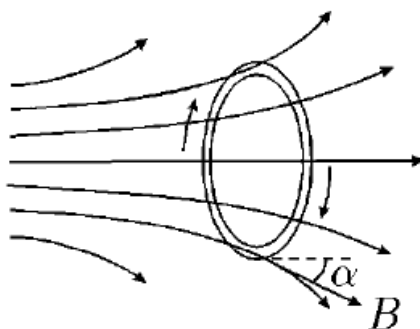


Рисунок к задаче 6

(по нормали к поверхности). Описать траекторию движения электрона в данной картине полей. Определить среднюю (дрейфовую) скорость перемещения электрона вдоль границы раздела магнитных полей, пронизываемой для него.

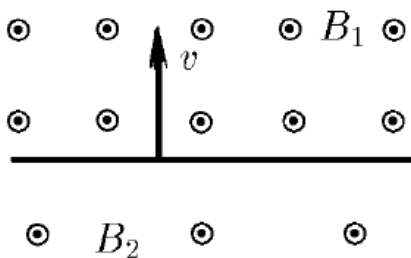


Рисунок к задаче 7

8. Области однородных магнитного и электрического полей разделены плоской границей (как на рисунке). Магнитное поле индукции  $B$  параллельно плоскости раздела. Электрическое поле напряженностью  $E$  перпендикулярно плоскости раздела. В электрическом поле на расстоянии  $l$  от границы помещается частица массы  $m$  с зарядом  $q$ . Описать траекторию движения заряженной ча-

стицы в данной конфигурации полей. Найти скорость дрейфа частицы вдоль проникаемой для нее границы раздела полей.

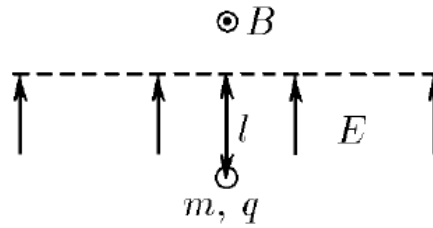


Рисунок к задаче 8

9. Плоский конденсатор помещен в однородное магнитное поле индукции  $B$ , параллельное пластинам (как на рисунке). Расстояние между пластинами  $h$ . Из точки  $A$  вылетают электроны в направлении, перпендикулярном магнитному полю и параллельно обкладкам конденсатора. Напряжение, приложенное к пластинам, равно  $V$ . При каком условии электроны будут проходить через конденсатор?

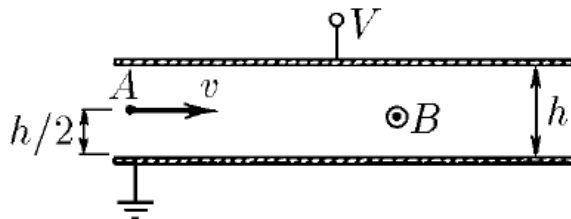


Рисунок к задаче 9

10. Самолет пролетает над северным магнитным полюсом Земли со скоростью  $v = 400$  км/ч. Размах крыльев самолета  $l = 10$  м. Индукция магнитного поля Земли  $B = 60$  мкТл. Оценить разность потенциалов между концами крыльев самолета.

## 2.6 Семинар 14

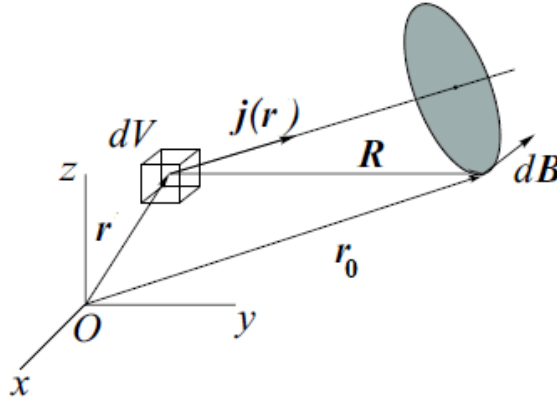
**Закон Био-Савара-Лапласа. Магнитное поле в вакууме. Поток и циркуляция магнитного поля. Уравнения Максвелла для магнитного поля в вакууме. Граничные условия для магнитного поля в вакууме.**

### Краткая теория

Магнитное поля создают не неподвижные заряды, как это имело место для электрического поля («магнитных» зарядов, по-видимому, не существует), а токи. Закон Био-Савара-Лапласа определяет величину индукции магнитного поля  $d\vec{B}(\vec{r}_0)$  в точке  $\vec{r}_0$ , порождемого током плотностью  $\vec{j}(\vec{r})$  в элементе объема  $dV$  в точке  $\vec{r}$ :

$$d\vec{B}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{R}]}{|\vec{R}|^3} dV, \quad (66)$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}}{\text{А}}$  — магнитная постоянная,  $\vec{R} = \vec{r}_0 - \vec{r}$ . Принцип суперпозиции (с использованием (66)) позволяет найти индукцию магнитного поля  $\vec{B}$  в заданной пространственной точке от любой системы токов.



Для проводника с однородной плотностью тока и полным током  $I$  можно заменить  $\vec{j}dV$  на  $I d\vec{l}$  ( $d\vec{l}$  — элемент длины проводника, сонаправленный с направлением тока) закон Био-Савара-Лапласа можно записать в следующем виде:

$$d\vec{B}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}(\vec{r}) \times \vec{R}]}{|\vec{R}|^3} \quad (67)$$

По аналогии с электростатикой (теорема Гаусса (50)) и с учетом отсутствия «магнитных» зарядов можно записать для потока вектора индукции магнитного поля

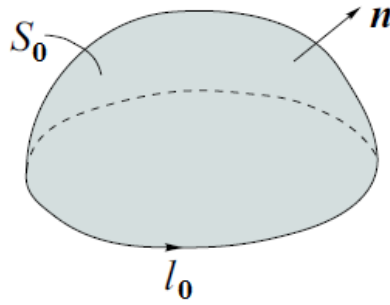
через замкнутую поверхность  $S_0$ :

$$\oint_{S_0} \vec{B}(\vec{r}) d\vec{S} = 0 \quad (68)$$

В отличие от электростатического поля, которое является потенциальным (согласно (46)), магнитное поле является вихревым. Теорема о циркуляции магнитного поля утверждает, что циркуляция вектора индукции магнитного поля по замкнутому контуру  $l_0$  равна произведению магнитной постоянной на полный ток  $I$ , пронизывающий контур  $l_0$ :

$$\oint_{l_0} \vec{B}(\vec{r}) d\vec{l} = \mu_0 \iint_{S_0} \vec{j} d\vec{S} = \mu_0 I \quad (69)$$

При этом направление обхода контура  $l_0$  и положительное направление нормали  $\vec{n}$  к поверхности  $S_0$  взаимно согласованы, как на рисунке:



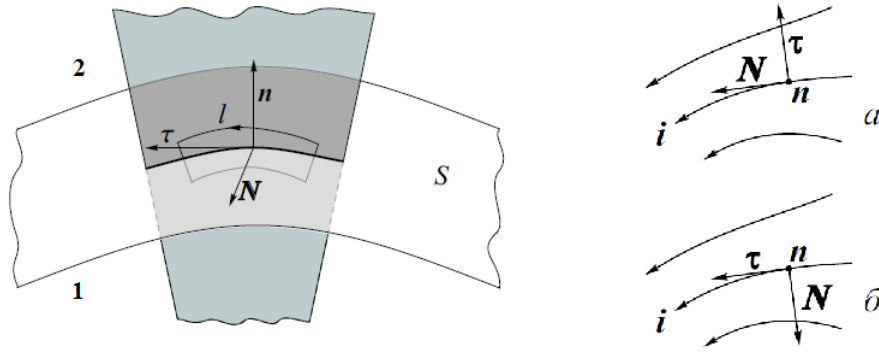
Интегральные соотношения (68, 69) для потока и циркуляции индукции магнитного поля эквивалентны дифференциальным уравнениям для индукции стационарного магнитного поля в вакууме:

$$\oint_{S_0} \vec{B}(\vec{r}) d\vec{S} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (70)$$

$$\oint_{l_0} \vec{B}(\vec{r}) d\vec{l} = \mu_0 \iint_{S_0} \vec{j} d\vec{S} \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (71)$$

Уравнения (70, 71) в дифференциальной форме являются третьим и четвертым уравнениями Максвелла для индукции магнитного поля в вакууме.

Граничные условия для поля  $\vec{B}$ . Пусть имеется некоторая поверхность  $S$ , которая разделяет область определения поля на два полупространства 1 и 2 (как на рисунке снизу). Предположим, что по этой поверхности течет ток с поверхностной



плотностью  $i$ , поле в области 1 —  $\vec{B}_1$ , в области 2 —  $\vec{B}_2$ . Вектор нормали  $\vec{n}$  к поверхности направим в сторону второй области. Из третьего и четвертого уравнений Максвелла следуют граничные условия для нормальной компоненты поля  $B_n$  и для касательной компоненты поля  $B_\tau$  в вакууме на границе раздела областей 1 и 2:

$$\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow B_{2n} - B_{1n} = 0 \quad (72)$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow B_{2\tau} - B_{1\tau} = \mu_0 i_N, \quad (73)$$

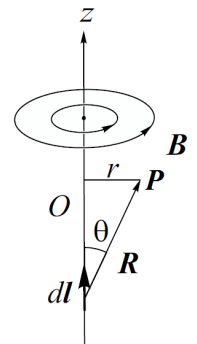
где направление  $\vec{N}$  определяется следующим образом  $\vec{N} = [\vec{n} \times \vec{\tau}]$ . Таким образом, при наличии поверхностного тока касательная компонента магнитного поля терпит разрыв при переходе границы раздела, причем величина разрыва определяется проекцией плотности тока  $\vec{i}$  на направление  $\vec{N}$ . К примеру, в случае (а) на рисунке сверху проекция  $i_N$  максимальна, и  $B_\tau$  будет терпеть скачок. А в случае (б) на рисунке сверху проекция  $i_N = 0$ , и разрыва  $B_\tau$  при переходе через границу не произойдет.

### Примеры решения задач

Пример 1. Пользуясь законом Био-Савара-Лапласа, найти индукцию магнитного поля, создаваемого бесконечным прямым проводом с током  $I$ .

Решение. Используем цилиндрическую систему координат. Ось  $z$  направим вдоль проводника, по направлению  $I$ . Тогда, согласно (67), индукция магнитного поля  $d\vec{B}(P)$  в точке  $P$  от элемента проводника  $d\vec{l} = dz \cdot \vec{e}_z$  равна:

$$d\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idz [\vec{e}_z \times \vec{R}]}{|\vec{R}|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\sin \theta}{R^2} dz \vec{e}_\varphi$$



Для нахождения итогового поля  $\vec{B}(P)$  в точке  $P$ , исходя из принципа суперпозиции, нужно проинтегрировать  $d\vec{B}(P)$  по всей длине проводника. Прежде чем перейти к интегрированию, выразим  $z$  и  $R$  через расстояние до проводника  $r$  и угол  $\theta$ :

$$z = -r \operatorname{ctg} \theta \Rightarrow dz = \frac{r}{\sin^2 \theta} d\theta$$

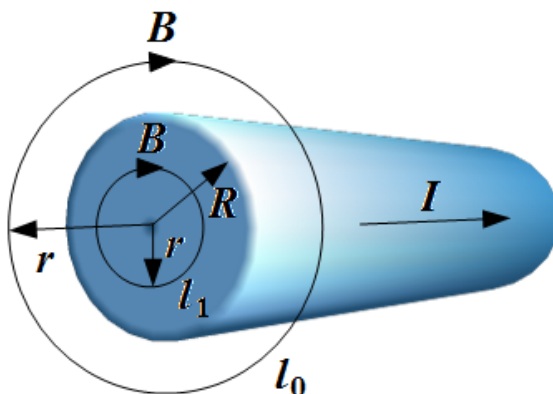
$$R = \frac{r}{\sin \theta}$$

Перейдем к интегрированию:

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{e}_\varphi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \theta}{R^2} dz = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \vec{e}_\varphi \cdot \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$$

Ответ: Модуль вектора индукции магнитного поля, создаваемого бесконечным прямым проводом равен  $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ . Силовые линии представляют собой концентрические окружности в плоскостях  $z = \text{const}$ , перпендикулярных току.

Пример 2. Пользуясь теоремой о циркуляции магнитного поля, найти индукцию магнитного поля от бесконечного прямого провода радиуса  $R$  с током  $I$  а) снаружи провода ( $r > R$ ), б) внутри провода ( $0 \leq r \leq R$ ).



Решение. а) Для использования теоремы о циркуляции (69) выберем окружность радиуса  $r > R$  с центром на оси провода в качестве замкнутого контура  $l_0$ . Из соображений осевой симметрии ясно, что силовые линии магнитного поля направлены по касательной к окружности  $l_0$  и поле одинаково в каждой её точке. Запишем цир-

куляцию по этому контуру:

$$\oint_{l_0} \vec{B}(r) d\vec{l} = B(r) \cdot 2\pi r$$

Через контур  $l_0$  протекает весь ток  $I$ . Тогда, согласно теореме о циркуляции (69):

$$\oint_{l_0} \vec{B}(r) d\vec{l} = \mu_0 I$$

Следовательно, индукция поля  $B(r)$ , как и в прошлом примере, равна:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

б) Для использования теоремы о циркуляции (69) также выберем окружность радиуса  $r \leq R$  с центром на оси провода в качестве замкнутого контура  $l_1$ . Из соображений осевой симметрии ясно, что силовые линии магнитного поля направлены по касательной к окружности  $l_1$  и поле одинаково в каждой её точке. Запишем циркуляцию по этому контуру:

$$\oint_{l_1} \vec{B}(r) d\vec{l} = B(r) \cdot 2\pi r$$

Поскольку ток  $I$  равномерно распределен по сечению провода, то плотность тока  $j = \text{const} = \frac{I}{\pi R^2}$ . Поэтому через контур  $l_1$  протекает ток:

$$I_r = jS_1 = j\pi r^2 = I \frac{r^2}{R^2}$$

Тогда, согласно теореме о циркуляции (69):

$$\oint_{l_1} \vec{B}(r) d\vec{l} = \mu_0 I_r = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2}$$

Следовательно, поле  $B(r)$  равно:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

Ответ: а)  $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  ; б)  $B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$ .



### Задачи

1. Найти силу, с которой действует один линейный проводник с током  $I_1$  на единицу длины другого с током  $I_2$ . а) Токи  $I_1$  и  $I_2$  параллельны и сонаправлены, б) токи  $I_1$  и  $I_2$  параллельны и направлены в противоположные стороны.
2. Найти индукцию магнитного поля на оси и в центре кругового витка радиуса  $R$  с током  $I$ .
3. Прямой провод имеет виток радиуса  $R$ . По проводу течет ток  $I$ . Определить индукцию магнитного поля в центре витка и на его оси на расстоянии  $h$  от центра витка.



Рисунок к задаче 3

4. Найти индукцию магнитного поля на оси равномерно заряженного диска радиуса  $R$ , вращающегося вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ , на расстоянии  $h$  от диска. Полный заряд диска равен  $Q$ .
5. Вектор индукции магнитного поля  $\vec{B}$ , переходя через плоскую поверхность, меняет угол наклона к ней с  $\alpha$  на  $\beta$ . Во сколько раз изменяется величина индукции поля при переходе через границу? Чему равна линейная плотность тока на поверхности, если направление поверхностного тока перпендикулярно касательной компоненте поля?
6. а) Ток  $I$  идет по длинному прямому проводу, перпендикулярному проводящей плоскости, и растекается по ней. Определите распределение индукции магнитного поля в пространстве. б) Длинный провод с током  $I$  пересекает проводящую плоскость в перпендикулярном ей направлении. Ток, растекающийся по плоскости равен  $I'$ . Определите распределение индукции магнитного поля в этой системе.
7. Используя результат задачи 2, найти индукцию магнитного поля а) на оси круглого соленоида в точке, из которой его края видны под углами  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ; б) на конце полубесконечного соленоида; в) внутри бесконечного соленоида. Число витков на единицу длины соленоидов  $n$ . Ток витка  $I$ .

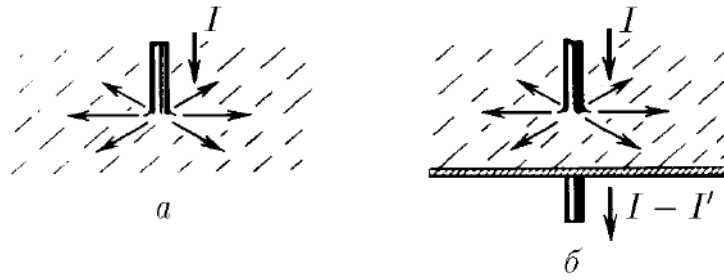


Рисунок к задаче 6

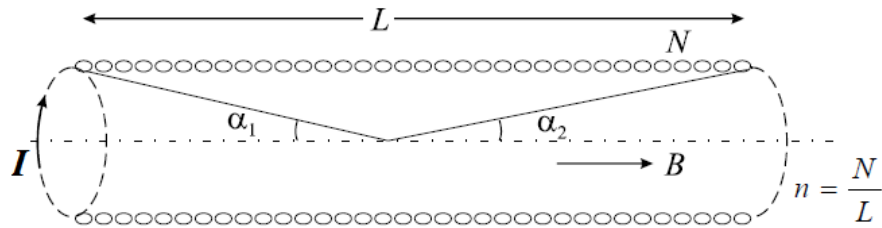


Рисунок к пункту а) задачи 7

8. Пользуясь теоремами о циркуляции и потоке магнитного поля, найти поле внутри и снаружи бесконечного соленоида с числом витков на единицу длины  $n$ , током витка  $I$ . Сравнить с результатами задачи 7.
9. Определить индукцию магнитного поля внутри тороидального соленоида с числом витков  $N$ , током  $I$ , внутренним радиусом  $R_1$  и внешним радиусом  $R_2$ .
10. Внутри тонкой проводящей цилиндрической оболочки радиуса  $R_2$  находится коаксиальный с ней сплошной провод радиуса  $R_1$ . По этим проводникам текут в противоположных направлениях постоянные токи  $I_1$  и  $I_2$ , соответственно. Определить индукцию магнитного поля во всем пространстве.

## 2.7 Семинар 15

**Магнитное поле в среде. Напряженность и индукция магнитного поля. Уравнения Максвелла для магнитного поля в среде. Граничные условия для магнитного поля в среде.**

### Краткая теория

Характеристики среды, определяющие характер взаимодействия среды с магнитным полем: магнитная восприимчивость  $\chi$  и магнитная проницаемость  $\mu = \chi + 1$ . Для удобства решения задач нахождения полей в средах, вводятся дополнительные векторы: вектор напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  и вектор намагниченности среды  $\vec{M}$ . В пределе малых полей зависимости  $B(H)$  и  $M(H)$  линейны:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \quad (74)$$

$$\vec{M} = \chi\vec{H} \quad (75)$$

Единица измерения напряженности магнитного поля  $\vec{H} - \left[ \frac{\text{A}}{\text{м}} \right]$ .

По характеру реакции на внешнее поле среды делятся на:

- Диамагнетики.  $\mu \lesssim 1$  или  $\chi \lesssim 0$ . Диамагнитный образец выталкивается из области с сильным магнитным полем.
- Парамагнетики.  $\mu \gtrsim 1$  или  $\chi \gtrsim 0$ . Парамагнитный образец втягивается в область с сильным магнитным полем.
- Ферромагнетики.  $\mu \gg 1$ . Для ферромагнетиков характерна сложная зависимость  $\vec{M}$  от  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$  от  $\vec{H}$ . Намагниченность ферромагнетиков зависит от предыстории.

Третье и четвертое уравнения Максвелла (в дифференциальном и интегральном виде) для стационарного магнитного поля в среде, а также граничные условия для магнитного поля принимают вид:

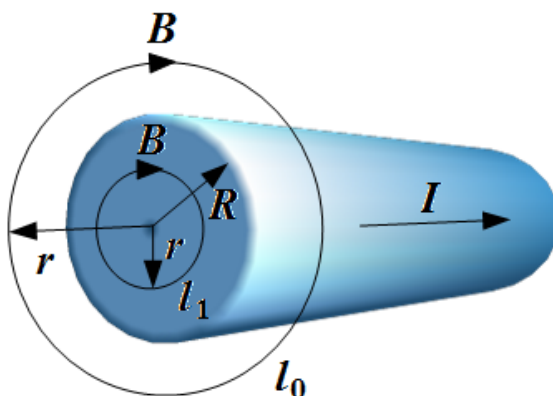
$$\text{div } \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \oint_S \vec{B}(\vec{r}) d\vec{S} = 0 \Rightarrow B_{2n} = B_{1n} \quad (76)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} \Leftrightarrow \oint_L \vec{H}(\vec{r}) d\vec{l} = I \Rightarrow H_{2\tau} - H_{1\tau} = i_N \quad (77)$$

Примечание. Исторически сложилось так, что магнитное поле  $\vec{B}$ , которое оказывает силовое действие на движущиеся заряды и вызывает ЭДС в проводниках, называли «вектором магнитной индукции». А вспомогательное поле  $\vec{H}$ , которое мы будем использовать для расчета  $\vec{B}$ , называли «напряженностью магнитного поля». Данная терминология до сих пор сохраняется во многих учебниках, тогда как в ряде современных пособий (как, например, в книге Яковлева В.И. Классическая электродинамика, НГУ, 2003 г.) символом  $\vec{B}$  более справедливо обозначают просто магнитное поле, не называя его вектором магнитной индукции. В данном учебном пособии мы сохраним старую терминологию, дабы избежать путаницы.

### Примеры решения задач

Пример 1. Пользуясь теоремой о циркуляции магнитного поля, найти индукцию и напряженность магнитного поля от бесконечного прямого провода радиуса  $R$  и с током  $I$  а) снаружи провода ( $r > R$ ), б) внутри провода ( $0 \leq r \leq R$ ). Магнитная проницаемость материала провода  $\mu$ .



Решение. а) Для использования теоремы о циркуляции (77) выберем окружность радиуса  $r > R$  с центром на оси провода в качестве замкнутого контура  $l_0$ . Из соображений осевой симметрии ясно, что силовые линии магнитного поля направлены по касательной к окружности  $l_0$  и поле одинаково в каждой её точке. Запишем циркуляцию напряженности поля по этому контуру:

$$\oint_{l_0} \vec{H}(r) d\vec{l} = H(r) \cdot 2\pi r$$

Через контур  $l_0$  протекает весь ток  $I$ . Тогда, согласно теореме о циркуляции (77):

$$\oint_{l_0} \vec{H}(r) d\vec{l} = I$$

Снаружи проводника — вакуум. Следовательно напряженность  $H(r)$  и индукция  $B(r)$  поля равны:

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r}$$

$$B(r) = \mu_0 H(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

б) Для использования теоремы о циркуляции (77) также выберем окружность радиуса  $r \leq R$  с центром на оси провода в качестве замкнутого контура  $l_1$ . Из соображений осевой симметрии ясно, что силовые линии магнитного поля направлены по касательной к окружности  $l_1$  и поле одинаково в каждой её точке. Запишем циркуляцию напряженности поля по этому контуру:

$$\oint_{l_1} \vec{H}(r) d\vec{l} = H(r) \cdot 2\pi r$$

Поскольку ток  $I$  равномерно распределен по сечению провода, то плотность тока  $j = \text{const} = \frac{I}{\pi R^2}$ . Поэтому через контур  $l_1$  протекает ток:

$$I_r = jS_1 = j\pi r^2 = I \frac{r^2}{R^2}$$

Тогда, согласно теореме о циркуляции (77):

$$\oint_{l_1} \vec{H}(r) d\vec{l} = I_r = I \frac{r^2}{R^2}$$

Магнитная проницаемость материала провода  $\mu$ . Следовательно напряженность  $H(r)$  и индукция  $B(r)$  поля равны:

$$H(r) = \frac{I_r}{2\pi R^2}$$

$$B(r) = \mu\mu_0 H(r) = \frac{\mu\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

Ответ: а)  $H(r) = \frac{I}{2\pi r}$  ,  $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  ; б)  $H(r) = \frac{I r}{2\pi R^2}$  ,  $B(r) = \frac{\mu\mu_0 I r}{2\pi R^2}$ .

### Задачи

1. В соленоиды из задач 8 и 9 предыдущего семинара помещены сердечники из материала с магнитной проницаемостью  $\mu$ . Определить индукцию и напряженность магнитного поля внутри соленоидов в присутствии сердечника.
2. Вектор индукции магнитного поля  $\vec{B}$ , переходя через плоскую поверхность, меняет угол наклона к ней с  $\alpha$  на  $\beta$ . Плоскость разделяет пространство на области с магнитными проницаемостями  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Во сколько раз изменяется величина индукции поля при переходе через границу? Чему равна линейная плотность тока на поверхности, если направление поверхностного тока перпендикулярно касательной компоненте поля?
3. Найти индукцию магнитного поля в зазоре электромагнита (обмотка состоит из  $N$  витков провода), по которому течет ток  $I$ . Сердечник электромагнита имеет длину  $l$ , проницаемость  $\mu$ , радиус сердечника  $R$ . Величина зазора  $d \ll R$ .

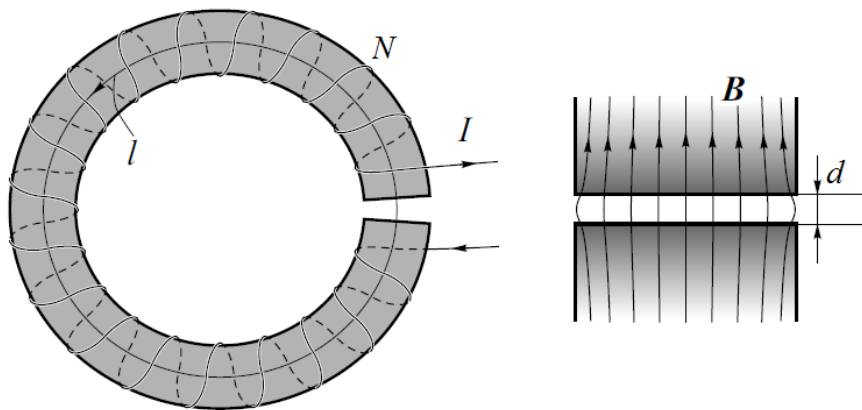


Рисунок к задачам 3 и 4

4. Стирающая головка магнитофона представляет собой кольцевой сердечник из ферромагнетика с  $\mu = 500$ , средним радиусом  $r = 5$  мм. На сердечник намотана обмотка с числом витков  $N = 200$ . При каком токе  $I$  в обмотке, в зазоре головки шириной  $d = 0,1$  мм индукция магнитного поля будет равна  $B = 0,2$  Тесла?
5. По железной трубе с внутренним радиусом  $R_1$ , внешним  $R_2$  течет ток  $I$ . Относительная магнитная проницаемость железа равна  $\mu$ . Найти зависимость напряженности и индукции магнитного поля от расстояния от оси трубы во всем пространстве.

6. По железной трубе с внутренним радиусом  $R_1$ , внешним  $R_2$  течет ток  $I_1$ . Относительная магнитная проницаемость железа равна  $\mu$ . По тонкому прямому проводу, проходящему по оси трубы, течет ток  $I_2$  в обратном направлении. Найти зависимость напряженности и индукции магнитного поля от расстояния от оси трубы во всем пространстве.
7. По бесконечному прямому проводу протекает ток  $I$ . Во сколько раз изменятся индукция поля  $B$  и напряженность поля  $H$ , если провод положить на бесконечное полупространство с магнитной проницаемостью  $\mu = 100$ .
8. Прямой провод с током  $I$  проходит перпендикулярно через плоскую границу раздела двух полубесконечных сред с магнитными проницаемостями  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Найти индукцию и напряженность магнитного поля в обеих средах.
9. Ток  $I$  по длинному прямому проводу входит в проводящее полупространство (с магнитной проницаемостью  $\mu$ ) перпендикулярно его поверхности и равномерно растекается по нему. Определить индукцию и напряженность магнитного поля во всем пространстве.

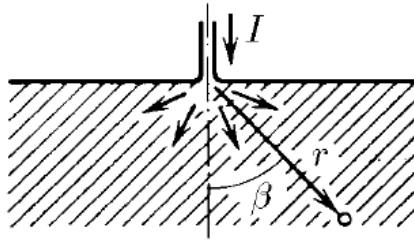


Рисунок к задаче 9

10. Диск радиуса  $R$  и толщины  $h \ll R$  из материала с магнитной проницаемостью  $\mu = 1 + \chi$ , где  $\chi \ll 1$ , помещен поперек однородного магнитного поля индукции  $B_0$ . На сколько индукция магнитного поля в центре диска будет отличаться от  $B_0$ ?

## 2.8 Семинар 16

### Нестационарные поля. Уравнения Максвелла. Закон Фарадея. Индуктивность. Энергия магнитного поля.

#### Краткая теория

Плотность энергии магнитного поля напряженностью  $\vec{H}$  равна:

$$\omega = \begin{cases} \frac{\mu_0 H^2}{2}, & \text{в вакууме} \\ \frac{\vec{H} \vec{B}}{2} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}, & \text{в среде с магнитной проницаемостью } \mu \end{cases} \quad (78)$$

Энергия магнитного поля в объеме  $V_0$  находится интегрированием плотности энергии  $\omega$  по объему:

$$W = \iiint_{V_0} \omega dV \quad (79)$$

Закон Фарадея (электромагнитной индукции) утверждает, что при изменении во времени потока индукции магнитного поля  $\Phi$  через проводящий контур в контуре возникает электродвижущая сила индукции  $\mathcal{E}$  (ЭДС), равная:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} d\vec{S} \quad (80)$$

Вспомним, что ЭДС в проводящем контуре определяется через циркуляцию по контуру напряженности электрического поля (62), порожденного сторонними силами. Тогда третье уравнение Максвелла для нестационарных полей в интегральной и дифференциальной формах можно переписать следующим образом:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} d\vec{S} = \oint_L \vec{E} d\vec{L} = \iint_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S} \Rightarrow \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (81)$$

Экспериментально показано, что поток магнитного потока  $\Phi$  через замкнутый проводящий контур прямо пропорционален текущему в контуре току  $I$ :  $\Phi = LI$ , где коэффициент пропорциональности  $L$  — индуктивность (коэффициент самоиндукции) контура. Единица измерения индуктивности — генри [Гн]. Для соленоида (катушки индуктивности), где поток магнитного поля создается  $N$  числом витков в катушке, используют потокосцепление  $\Psi = N\Phi$ . С учетом (80), можно выразить



связь ЭДС в катушке индуктивности  $L$  (или в каком-нибудь замкнутом контуре) со скоростью изменения тока в катушке:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -L \frac{\partial I}{\partial t} \quad (82)$$

Энергия магнитного поля, накопленная в катушке индуктивности:

$$W = \frac{LI^2}{2}, \quad (83)$$

где  $L$  — индуктивность катушки,  $I$  — ток, текущий в катушке.

Согласно (81) изменение во времени магнитного поля в пространстве приводит к возникновению электрического поля. Максвелл показал, что справедливо обратное — изменение во времени электрического поля в пространстве приводит к возникновению магнитного поля. Для этого Максвелл ввел понятие токов смещения  $\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  (здесь  $\vec{D}$  — индукция электрического поля), вдобавок к обычному току проводимости  $\vec{j}$ . Тогда для нестационарных полей четвертое уравнение Максвелла записывается в следующем виде:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{см}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (84)$$

Приведем систему уравнений Максвелла для нестационарных полей (в дифференциальном и интегральном виде):

$$\text{div } \vec{D} = \rho \Leftrightarrow \oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q \quad (85)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} d\vec{S} \quad (86)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (87)$$

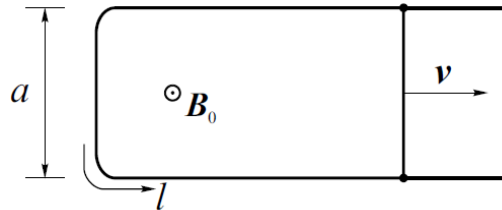
$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_L \vec{H} d\vec{l} = I + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{D} d\vec{S} \quad (88)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \quad (89)$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \quad (90)$$

## Примеры решения задач

Пример 1. Рассмотрим контур в однородном магнитном поле  $B_0$ . Одно из звеньев этого контура может свободно перемещаться (без трения). Магнитное поле перпендикулярно плоскости контура, скорость подвижного звена равна  $v$ . Определить возникающее в контуре ЭДС.



Решение. Согласно закону Фарадея (80), ЭДС в данном контуре возникает за счет изменения его площади во времени и равна:

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B}_0 d\vec{S} = -B_0 \cdot \frac{\partial S}{\partial t} = -B_0 a v$$

Другой способ расчета ЭДС заключается в определении сторонних сил, заставляющих циркулировать электроны в контуре. В данном случае в качестве такой сторонней силы выступает сила Лоренца (63), действующая на свободные электроны проводимости в движущемся звене контура. Выберем направление обхода контура так, чтобы нормаль к контуру была сонаправлена с  $\vec{B}_0$ . Тогда согласно 62:

$$\mathcal{E} = \oint \frac{\vec{f}_{\text{стр}}}{q_e} d\vec{l} = \int_a \left[ \vec{v} \times \vec{B}_0 \right] d\vec{l} = -B_0 a v,$$

как и в предыдущем случае.

Ответ:  $\mathcal{E} = -B_0 a v$

Пример 2. Найти коэффициент самоиндукции на единицу длины бесконечного цилиндрического соленоида с густой намоткой и произвольной (не обязательно круглой) формой сечения. Площадь сечения —  $S$ , число витков на единицу длины —  $n$ , магнитная проницаемость материала сердечника —  $\mu$ . Найти энергию магнитного поля, заключенную в единице длины соленоида.

Решение. Из предыдущих семинаров и лекций известно, что, если в таком соленоиде течет ток  $I$ , то индукция магнитного поля внутри соленоида однородна и

равна:

$$B = \mu\mu_0 In$$

Силовые линии магнитного поля направлены вдоль оси соленоида и перпендикулярно каждому витку с током. Поэтому поток поля через какой-нибудь из витков находится просто:

$$\Phi = BS = \mu\mu_0 InS$$

Тогда потокосцепление на единицу длины равно:

$$\Psi_l = \Phi \cdot \frac{N}{l} = \mu\mu_0 In^2 S,$$

где  $N$  — число витков на участке соленоида длиной  $l$ . Так как  $\Psi = LI$ , то индуктивность на единицу длины бесконечного соленоида равна:

$$L_l = \mu\mu_0 n^2 S$$

А энергия магнитного поля, заключенная в единице длины соленоида равна:

$$W_l = \frac{L_l I^2}{2} = \frac{\mu\mu_0 n^2 S I^2}{2}$$

Ответ:  $L_l = \mu\mu_0 n^2 S$ ;  $W_l = \frac{\mu\mu_0 n^2 S I^2}{2}$ .

### Задачи

1. Линия состоит из двух коаксиальных тонких цилиндрических оболочек с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , пространство между которыми заполнено материалом с магнитной проницаемостью  $\mu$ . Найти коэффициент самоиндукции на единицу длины линии.
2. Вычислить индуктивность единицы длины коаксиального кабеля, жила которого имеет радиус  $R_0$ , а оболочка: внутренний радиус  $R_1$ , наружный —  $R_2$ . Магнитная проницаемость проводов  $\mu_1$ , изоляции между ними —  $\mu_2$ .
3. На железное ярмо с малым зазором  $d$  намотана обмотка из  $N$  витков. Сечение железа  $S$ , магнитная проницаемость  $\mu$ , длина  $l$ . Найти индуктивность.
4. Прямоугольная рамка, размеры которой  $a \times b$ , вращается с угловой скоростью  $\omega$  в однородном магнитном поле вокруг оси, лежащей в плоскости контура и

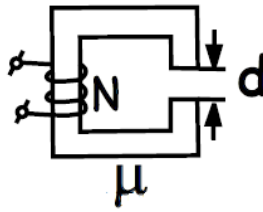


Рисунок к задаче 3

перпендикулярной к полю. Индукция магнитного поля равна  $B$ . Определить ЭДС индукции в этом контуре. Найти зависимость тока в рамке от времени, если сопротивление рамки равно  $R$ .

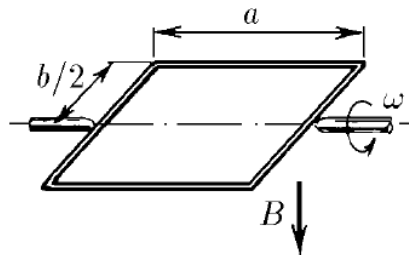


Рисунок к задаче 4

5. Самоиндукция плоского контура в воздухе ( $\mu = 1$ ) равна  $L$ . Найти самоиндукцию этого контура, если его положить на плоскую границу полупространства, заполненного магнетиком с проницаемостью  $\mu$ .
6. Найти индуктивность, эквивалентную индуктивности двух катушек  $L_1$  и  $L_2$ , соединенных а) последовательно, б) параллельно.
7. Горизонтальный стержень массы  $m$  и длиной  $l$  скользит без трения по двум вертикальным рельсам, соединенным внизу резистором с сопротивлением  $R$ . Имеется однородное магнитное поле  $B$ , перпендикулярное плоскости падения стержня. Система находится в поле тяготения Земли. Найти максимальную скорость падения стержня, пренебрегая электрическим сопротивлением стержня и рельсов. В какие виды энергии переходит работа силы тяжести?
8. Тонкое проводящее кольцо помещено в магнитное поле  $B$ , перпендикулярное плоскости кольца. Радиус кольца увеличивается с постоянной скоростью  $v$ . Определите зависимость тока в кольце от времени, если в начальный момент сопротивление кольца  $R_0$ , а радиус кольца  $r_0$ . Считать, что плотность и проводимость материала кольца при растяжении не меняются.

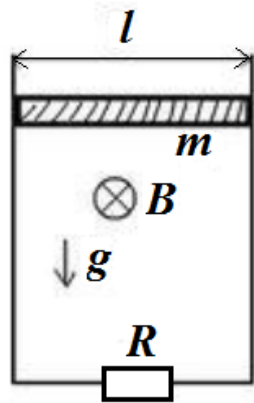


Рисунок к задаче 7

9. На рисунке изображена модель двигателя постоянного тока. ЭДС батареи  $\mathcal{E}$ , индукция магнитного поля  $B$ , сопротивление цепи  $R$ , длина перемычки  $L$ . Найти установившуюся угловую скорость перемычки и ток в цепи, если сила трения в подвижном контакте  $F$ .

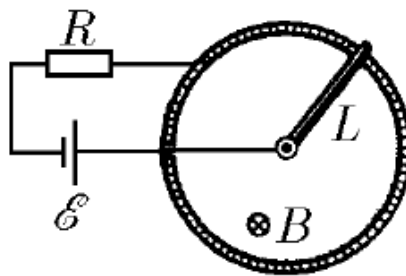


Рисунок к задаче 9