А.И. Кожанов

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Учебное пособие

Новосибирск
2013

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие соответствует учебной дисциплине "Дополнительные главы математического анализа". Данная дисциплина входит в вариативную часть математического и естественнонаучного цикла образовательной программы бакалавра на факультете информационных технологий Новосибирского государственного университета (направление подготовки 230100 "Информатика и вычислительная техника"). Дисциплина читается один семестр. Структурно дисциплина разбита на три раздела:

1. Интегрирование на многообразиях (кривые и поверхности в $\mathbb{R}^n$, криволинейные и поверхностные интегралы, элементы теории поля);

2. Элементы функционального анализа (метрические, линейные и нормированные пространства, гильбертовы пространства, ряды Фурье в гильбертовых пространствах, линейные операторы в нормированных пространствах, неподвижные точки);

3. Приложения функционального анализа (разрешимость систем нелинейных алгебраических уравнений, задача о наилучшем приближении, разрешимость задачи Коши и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений).

Учебное пособие соответствует данным разделам, при этом помимо теоретических сведений, учебное пособие содержит также контрольные вопросы, задачи и упражнения (к каждому разделу отдельно); помимо собственно задач и упражнений, в них имеется большое количество примеров, иллюстрирующих те или иные теоретические понятия и построения. Отметим, что некоторые теоретические положения в пособии излагаются более широко, чем в лекциях — сделано это для более целостного восприятия материала.

Для усвоения изложенного в лекциях и пособии материала вполне достаточно знания классических понятий и теорем математического анализа, связанных с непрерывностью, дифференцируемостью и интегрируемостью числовых и векторных функций, свойствами числовых и функциональных рядов, а также некоторых простейших понятий и теорем линейной алгебры.

В соответствии со структурой курса пособие разделено на три раздела, каждый раздел разделен на пункты и подпункты. Теоремы, леммы, утверждения и формулы в пособии нумеруются тремя натуральными числами, разделенными точками. Первое из этих чисел означает номер раздела, второе — номер пункта, третье — номер теоремы, леммы и т.п. в пункте.

РАЗДЕЛ I. Интегрирование на многообразиях

1.1. Кривые в $\mathbb{R}^n$

1.1.1. Параметризованные кривые

Пусть Ω есть отрезок $[a,b]$ числовой оси, и пусть $\varphi_1(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ суть заданные функции, определенные и непрерывные на Ω.

Непрерывной кривой в $\mathbb{R}^n$ (или просто кривой) называется множество

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : x = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)), t \in \Omega\}.$$

Задание кривой Γ с помощью функций $\varphi_1(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ и переменной t называется **параметризацией** кривой, переменная t при этом называется **параметром**.

Пусть $\lambda(\tau)$ есть непрерывная строго монотонная функция, которая осуществляет отображение некоторого отрезка $[\alpha, \beta]$ на Ω. Положим $\widetilde{\varphi}_1(\tau) = \varphi_1(\lambda(\tau))$, ..., $\widetilde{\varphi}_n(\tau) = \varphi_n(\lambda(\tau))$. Очевидно, что множество

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x = (\widetilde{\varphi}_1(\tau), \ldots, \widetilde{\varphi}_n(\tau)), \tau \in [\alpha, \beta]\}$$

совпадает с Γ, и при этом функции $\widetilde{\varphi}_1(\tau)$, ..., $\widetilde{\varphi}_n(\tau)$ определяют новую параметризацию кривой, τ же представляет собой новый параметр этой кривой.

Пусть кривая Γ задана в исходной параметризации.

Точка $A = (\varphi_1(a), \ldots, \varphi_n(a))$ называется начальной точкой, точка $B = (\varphi_1(b), \ldots, \varphi_n(b))$ называется конечной точкой кривой Γ. Если выполняется $A = B$, то кривая Γ называется замкнутой кривой, или же контуром. Если существуют числа t_1 и t_2 такие, что $a \le t_1 \le b$, $a \le t_2 \le b$, $t_1 \ne t_2$, $(t_1-a)^2+(b-t_2)^2 > 0$ и при этом $(\varphi_1(t_1), \ldots, \varphi_n(t_1)) = (\varphi_1(t_2), \ldots, \varphi_n(t_2))$, то кривая Γ называется самопересекающейся, если же чисел t_1 и t_2 с указанными свойствами нет, то Γ называется кривой без самопересечений.

Задание параметризации $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ определяет **движение на кривой Γ от ее начальной точки к конечной, или, другими словами, определяет ориентацию кривой, называемую положительной**. Если при переходе от исходной параметризации начальная и конечная точки меняются местами (в случае замкнутой кривой — меняется направление движения), то происходит **смена ориентации от положительной к отрицательной**. Кривую Γ с положительной по отношению к исходной параметризации ориентацией обозначают Γ^+, с отрицательной — Γ^-.

В случае плоской ($n = 2$) замкнутой кривой Γ без самопересечений принято использовать понятие ориентации, основанное на следующем топологическом факте: замкнутая плоская кривая делит плоскость на две непересекающихся части — внутреннюю (ограниченную) и внешнюю (неограниченную). Обозначим внутреннюю часть D^+, внешнюю — D^-. **Замкнутая плоская кривая Γ без самопересечений называется положительно ориентированной, если заданной параметризации соответствует такое движение по кривой, при котором множество D^+ остается слева**.

Вернемся к кривым в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Непрерывная кривая Γ, которая определяется параметризацией $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, $t \in \Omega$, называется гладкой, если все функции $\varphi_1(t)$, $\ldots$, $\varphi_n(t)$ непрерывно-дифференцируемы на Ω, и при этом выполняется $\varphi_1'^2(t) + \ldots + \varphi_n'^2(t) > 0$ при $t \in \Omega$.[1]

Точки $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ кривой Γ, в которых выполняется неравенство $\varphi_1'^2(t) + \ldots + \varphi_n'^2(t) > 0$, называются неособыми; если выполняется равенство $\varphi_1'^2(t) + \ldots + \varphi_n'^2(t) = 0$, то такие точки называются особыми.

Уточним, что понятия особых и неособых точек кривой подразумевают, что производные $\varphi_1'(t), \ldots, \varphi_n'(t)$ существуют.

Очевидно, что гладкую кривую можно "испортить" , введя новый параметр τ с помощью строго монотонной функции $\lambda(\tau)$, $\tau \in [\alpha, \beta]$, у которой производная в некоторой точке $\tau_0 \in [\alpha, \beta]$ обращается в нуль, либо же не существует.

Если непрерывная кривая, не являясь гладкой, состоит из конечного числа гладких кривых, любые две из которых либо не пересекаются, либо пересекаются в начальных или конечных точках, то такая кривая называется кусочно-гладкой.

Очевидно, что любая ломаная является кусочно-гладкой кривой.

Связь между гладкими и кусочно-гладкими кривыми характеризует следующая лемма.

Обозначим для краткости $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$.

Лемма 1.1.1. *Пусть Γ есть непрерывная кривая в пространстве $\mathbb{R}^n$ с параметризацией $\Phi(t)$, $t \in \Omega$. Тогда для любого положительного числа ε найдется кусочно-гладкая кривая Γ_ε с параметризацией $\Psi(t) = (\psi_1(t), \ldots,$*

[1] В точках a и b производные понимаются как односторонние.

$\psi_n(t))$, $t \in \Omega$, *такая, что* $\Phi(a) = \Psi(a)$, $\Phi(b) = \Psi(b)$, $|\Phi(t) - \Psi(t)| < \varepsilon$ *при* $t \in \Omega$.

Доказательство. Пусть ε есть положительное число. Поскольку вектор-функция $\Phi(t)$ непрерывна на Ω, то она будет и равномерно непрерывной: существует положительное число δ $(= \delta(\varepsilon))$ такое, что для любых t', t'' из Ω таких, что $|t' - t''| < \delta$, выполняется неравенство $|\Phi(t') - \Phi(t'')| < \frac{\varepsilon}{2}$. Выберем натуральное число m так, чтобы выполнялось неравенство $h = \frac{b-a}{m} < \delta$. Положим $t_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, m$. Построим ломаную Γ_ε: соединим последовательно прямолинейными отрезками точки $\Phi(a)$ и $\Phi(a+h)$, $\Phi(a+h)$ и $\Phi(a+2h)$, и т.д. Полученная ломаная есть кусочно-гладкая кривая, каждый ее участок параметризуется вектор-функцией $\Psi^{(i)}(t)$, $i = 1, \ldots, m$:

$$\Psi^{(i)}(t) = (\psi_1^{(i)}(t), \ldots, \psi_n^{(i)}(t)),$$

$$\psi_k^{(i)}(t) = \varphi_k(t_{i-1}) + \frac{t - t_{i-1}}{h}[\varphi_k(t_i) - \varphi_k(t_{i-1})], \quad k = 1, \ldots, n, \quad t_{i-1} \le t \le t_i.$$

Построенная ломаная Γ_ε и будет искомой. Покажем это.

Равенства $\Phi(a) = \Psi(a)$, $\Phi(b) = \Psi(b)$ очевидны. Далее, пусть t есть произвольное число из Ω. Найдется номер i, $i \in (1, \ldots, m)$, такой что $t_{i-1} \le t \le t_i$. Имеем

$$|\Phi(t) - \Psi(t)| \le |\Phi(t_{i-1}) - \Phi(t)| + \frac{t - t_{i-1}}{h}|\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})|.$$

Поскольку $t - t_{i-1} \le t_i - t_{i-1} \le h < \delta$, то выполняется

$$|\Phi(t_{i-1}) - \Phi(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда с учетом неравенства

$$\frac{t - t_{i-1}}{h} \le 1$$

получаем требуемое неравенство $|\Phi(t) - \Psi(t)| < \varepsilon$.

Лемма доказана.

Заметим, что все кривые, определенные выше, являются ограниченными — в том смысле, что они лежат в некотором ограниченном множестве пространства $\mathbb{R}^n$. Очевидно, что существуют и неограниченные кривые — таковыми являются, например, параболы и гиперболы. Охватить подобные кривые нетрудно, если в качестве множества Ω — множества изменения параметра — рассматривать множества $(a,b]$ (a — конечное число или $-\infty$, b конечно), $[a,b)$ (a конечно, b — конечное число или $+\infty$), (a,b) (a — конечное число или $-\infty$, b — конечное число или $+\infty$).

1.1.2. Касательная к кривой

Пусть задана параметризованная кривая Γ, $\Phi(t)$, $t \in [a,b] = \Omega$ — ее параметризация. Зафиксируем число t_0 из Ω, и пусть приращение Δt таково, что $t_0 + \Delta t \in \Omega$. Далее, пусть M_0 и M есть точки $M_0 = \Phi(t_0)$, $M = \Phi(t_0 + \Delta t)$, и пусть при достаточно малых Δt выполняется $M \neq M_0$. Проведем прямую через точки M_0 и M, назовем эту прямую секущей и обозначим $l_{\Delta t}$. Далее, обозначим через $\vec{l}(\Delta t)$ какой-либо единичный вектор, параллельный прямой $l_{\Delta t}$, и пусть этот вектор выбран так, что существует предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \vec{l}(\Delta t) = \vec{l}_0. \tag{1.1.1}$$

Предельным положением секущей $\boldsymbol{l_{\Delta t}}$ называется прямая, проходящая через точку $\boldsymbol{M_0}$ и параллельная вектору $\boldsymbol{\vec{l}_0}$.

Очевидно, что предельное положение секущей существует, если существует предел (1.1.1).

Предельное положение секущей (если оно существует) называется касательной к кривой $\boldsymbol{\Gamma}$ в точке $\boldsymbol{M_0}$.

Лемма 1.1.2. *Пусть M_0 есть неособая точка кривой Γ. Тогда в точке M_0 существует касательная, и при этом вектор $\Phi'(t_0) = (\varphi_1'(t_0), \ldots, \varphi_n'(t_0))$ направлен по этой касательной.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что из условия леммы следует, что при достаточно малых $|\Delta t|$ условие $\Phi(t_0 + \Delta t) \neq \Phi(t_0)$ выполняется. Действительно, если это не так, то найдется последовательность $\{h_k\}$ такая, что $h_k \neq 0$, $h_k \to 0$ при $k \to \infty$, $\Phi(t_0 + h_k) = \Phi(t_0)$. Но тогда

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\Phi(t_0 + h_k) - \Phi(t_0)}{h_k} = 0;$$

с другой же стороны, данный предел не должен равняться нулю по условию. Полученное противоречие и доказывает выполнимость условия $\Phi(t_0 + \Delta t) \neq \Phi(t_0)$ при малых $|\Delta t|$.

Вектор $\Phi(t_0 + \Delta t) - \Phi(t_0)$ параллелен секущей. Следовательно, и вектор

$$\vec{\varepsilon}(\Delta t) = \frac{1}{\Delta t}[\Phi(t_0 + \Delta t) - \Phi(t_0)]$$

также параллелен секущей. Поскольку предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \vec{\varepsilon}(\Delta t)$$

существует, конечен и отличен от нуля, то и предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\varepsilon}(\Delta t)}{|\vec{\varepsilon}(\Delta t)|}$$

существует. А это и означает, что в точке M_0 существует касательная.

Лемма доказана.

Параметрическое представление касательной в точке M_0 имеет вид

$$\Phi_0(\tau) = \Phi(t_0) + \tau\Phi'(t_0), \quad -\infty < \tau < +\infty.$$

1.1.3. Длина кривой

Пусть Γ есть параметризованная кривая в $\mathbb{R}^n$ с параметризацией $\Phi(t)$, $t \in [a, b] = \Omega$, и пусть на отрезке $[a, b]$ задано разбиение τ — т.е. задана система точек $\{t_i\}_{i=0}^{m}$ такая, что $t_0 = a$, $t_m = b$, $t_{i-1} < t_i$, $i = 1, \ldots, m$. Положим

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{m} |\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})|.$$

Очевидно, что σ_τ есть длина ломаной с вершинами в точках $\Phi(a)$, $\Phi(t_1)$, $\ldots$, $\Phi(t_{m-1})$, $\Phi(b)$.

Определим величину S_Γ как точную верхнюю грань сумм σ_τ, предполагая, что sup берется по всевозможным разбиениям τ отрезка $[a, b]$:

$$S_\Gamma = \sup_\tau \sigma_\tau.$$

Величина S_Γ называется длиной кривой Γ; если $S_\Gamma < +\infty$, то кривая Γ называется спрямляемой.

Лемма 1.1.3. *Пусть Γ есть кривая в $\mathbb{R}^n$ с параметризацией $\Phi(t)$, $t \in [a, b]$, и пусть A и B есть начальная и конечная точки Γ, $C = \Phi(c)$, $c \in (a, b)$, есть внутренняя точка Γ, Γ_1 есть часть кривой Γ с параметризацией $\Phi(t)$, $t \in [a, c]$, Γ_2 есть часть кривой Γ с параметризацией $\Phi(t)$, $t \in [c, b]$. Тогда справедливо равенство*

$$S_\Gamma = S_{\Gamma_1} + S_{\Gamma_2}.$$

Доказательство. Пусть τ есть произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. Если τ содержит точку c, то оно порождает разбиения τ_1 и τ_2 отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$ соответственно. Если τ не содержит точку c, то добавим эту точку к разбиению τ, вследствие чего получим новое разбиение τ^*, которое уже содержит точку c и тем самым порождает разбиения τ_1 и τ_2 отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$. Очевидно, что выполняется неравенство

$$\sigma_\tau \leq \sigma_{\widetilde{\tau}},$$

где $\widetilde{\tau}$ есть само разбиение τ, если τ содержит точку c, и $\widetilde{\tau}$ есть построенное разбиение τ^*, если τ не содержит точку c. Имеем

$$\sigma_\tau \leq \sigma_{\widetilde{\tau}} = \sigma_{\tau_1} + \sigma_{\tau_2} \leq \sup_{\tau_1} \sigma_{\tau_1} + \sup_{\tau_2} \sigma_{\tau_2};$$

в последнем неравенстве точные верхние грани берутся по всевозможным разбиениям τ_1 и τ_2 отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$. Отсюда получаем $S_\Gamma \leq S_{\Gamma_1} + S_{\Gamma_2}$. Покажем, что имеет место и обратное неравенство.

Пусть τ_1 и τ_2 есть произвольные разбиения отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$ соответственно. Эти два разбиения очевидным образом порождают разбиение τ отрезка $[a,b]$. Поскольку же подобные разбиения (т.е. разбиения, представляющие собой объединение разбиений τ_1 и τ_2) не исчерпывают все разбиения отрезка $[a,b]$, то очевидным образом получаем неравенство

$$S_{\Gamma_1} + S_{\Gamma_2} \leq S_\Gamma.$$

Из доказанных двух неравенств для S_Γ и $S_{\Gamma_1} + S_{\Gamma_2}$ следует их равенство.

Лемма доказана.

Доказанное в лемме 1.1.3 свойство называется свойством **аддитивности длины кривой**.

Заметим, что в формулировке леммы 1.1.3 и в ее доказательстве не предполагалось, что рассматриваемые кривые спрямляемы.

Пусть Γ есть кривая в $\mathbb{R}^n$ с параметризацией $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, $t \in [a,b]$, и пусть функции $\varphi_k(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$. Положим

$$m_k = \inf_{[a,b]} |\varphi_k(t)|, \quad M_k = \sup_{[a,b]} |\varphi_k(t)|, \quad k = 1, \ldots, n,$$

$$m_0 = (m_1 + \ldots + m_n)^{\frac{1}{2}}, \quad M_0 = (M_1 + \ldots + M_n)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 1.1.1. *Пусть* Γ *есть кривая в* $\mathbb{R}^n$ *с непрерывно дифференцируемой на* $[a, b]$ *параметризацией* $\Phi(t)$. *Тогда кривая* Γ *спрямляема и для ее длины* S_Γ *выполняются неравенства*

$$m_0(b-a) \leq S_\Gamma \leq M_0(b-a).$$

Доказательство. Пусть τ есть произвольное разбиение отрезка $[a, b]$. Для величины σ_τ справедливо равенство

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{m} \left\{[\varphi_1(t_i) - \varphi_1(t_{i-1})]^2 + \ldots + [\varphi_n(t_i) - \varphi_n(t_{i-1})]^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Согласно теореме Лагранжа[2]

$$\varphi_k(t_i) - \varphi_k(t_{i-1}) = \varphi_k'(\xi_{k,i})(t_i - t_{i-1}), \quad k = 1, \ldots, n, \quad i = 1, \ldots, m$$

($\xi_{k,i}$ — некоторые точки из отрезков $[t_{i-1}, t_i]$). Учитывая определения чисел m_k и M_k, получаем, что имеют место неравенства

$$m_0 \sum_{i=1}^{m}(t_i - t_{i-1}) \leq \sigma_\tau \leq M_0 \sum_{i=1}^{m}(t_i - t_{i-1}).$$

Поскольку выполняется

$$\sum_{i=1}^{m}(t_i - t_{i-1}) = b - a,$$

и поскольку τ есть произвольное разбиение отрезка $[a, b]$, то из последних неравенств и следует требуемое.

Теорема доказана.

Пусть Γ есть некоторая кривая в $\mathbb{R}^n$ с параметризацией $\Phi(t)$, $t \in [a, b]$, начальной точкой A и конечной точкой B. Очевидно, что положение точки на этой кривой можно однозначно определить, задав длину дуги кривой Γ от начальной точки до нее. Поскольку же положение точки на кривой характеризуется параметром t, то, очевидно, что переменная длина дуги S есть функция от t: $S = S(t)$.

Теорема 1.1.2. *Пусть* Γ *есть кривая в* $\mathbb{R}^n$ *с непрерывно дифференцируемой на* $[a, b]$ *параметризацией* $\Phi(t)$. *Тогда функция* $s(t)$ *есть монотонно возрастающая непрерывно дифференцируемая функция от* t, *и при этом*

$$\frac{ds}{dt} = |\Phi'(t)|.$$

[2]Ж.Л. Лагранж (1736–1813) — французский математик, астроном и механик.

Доказательство. Пусть $s(t)$ есть длина дуги кривой Γ от начальной точки A до точки $\Phi(t)$, t_0 есть точка из отрезка $[a,b]$, Δt настолько малое (и знакоопределенное, если t_0 есть одна из точек a или b) приращение, то $t_0+\Delta t \in [a,b]$. Очевидно, что функция $s(t)$ монотонно возрастающая, и потому выполняется

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \geq 0.$$

Применяя неравенство теоремы 1.1.1 к отрезку $[t_0, t_0+\Delta t]$, если $\Delta t>0$, или отрезку $[t_0+\Delta t, t_0]$, если $\Delta t<0$, получим

$$m_0(\Delta t)\cdot|\Delta t| \leq |\Delta s| \leq M_0(\Delta t)|\Delta t|; \tag{1.1.2}$$

$m_0(\Delta t)$ и $M_0(\Delta t)$ есть соответственно числа

$$m_0(\Delta t)=\Big\{\inf_{[t_0,t_0+\Delta t]}\varphi_1'^2(t)+\ldots+\inf_{[t_0,t_0+\Delta t]}\varphi_n'^2(t)\Big\}^{\frac{1}{2}},$$

$$M_0(\Delta t)=\Big\{\sup_{[t_0,t_0+\Delta t]}\varphi_1'^2(t)+\ldots+\sup_{[t_0,t_0+\Delta t]}\varphi_n'^2(t)\Big\}^{\frac{1}{2}},$$

если $\Delta t>0$, или

$$m_0(\Delta t)=\Big\{\inf_{[t_0+\Delta t,t_0]}\varphi_1'^2(t)+\ldots+\inf_{[t_0+\Delta t,t_0]}\varphi_n'^2(t)\Big\}^{\frac{1}{2}},$$

$$M_0(\Delta t)=\Big\{\sup_{[t_0+\Delta t,t_0]}\varphi_1'^2(t)+\ldots+\sup_{[t_0+\Delta,t_0]}\varphi_n'^2(t)\Big\}^{\frac{1}{2}},$$

если $\Delta t<0$. в силу непрерывности функций $\varphi_k'(t)$ на всем отрезке $[a,b]$ для каждой из функций $\varphi_k'(t)$, $k=1,\ldots,n$, выполняется

$$\inf_{[t_0,t_0+\Delta t]}\varphi_k'^2(t)=\varphi_k'^2(t_0+\theta_{k,1}\cdot\Delta t),\quad 0\leq\theta_{k,1}\leq 1,$$

$$\sup_{[t_0,t_0+\Delta t]}\varphi_k'^2(t)=\varphi_k'^2(t_0+\theta_{k,2}\cdot\Delta t),\quad 0\leq\theta_{k,2}\leq 1,$$

при $\Delta t>0$, или

$$\inf_{[t_0+\Delta t,t_0]}\varphi_k'^2(t)=\varphi_k'^2(t_0+\widetilde{\theta}_{k,1}\cdot\Delta t),\quad -1\leq\widetilde{\theta}_{k,1}\leq 0,$$

$$\sup_{[t_0+\Delta t,t_0]}\varphi_k'^2(t)=\varphi_k'^2(t_0+\widetilde{\theta}_{k,2}\cdot\Delta t),\quad -1\leq\widetilde{\theta}_{k,2}\leq 0,$$

при $\Delta t < 0$. Отсюда следуют равенства

$$\lim_{\Delta t \to 0} m_0(\Delta t) = m_0(0) = |\Phi'(t_0)|,$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} M_0(\Delta t) = M_0(0) = |\Phi'(t_0)|.$$

Разделив обе части неравенства (1.1.2) на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим требуемое равенство

$$\frac{ds(t_0)}{dt} = |\Phi'(t_0)|.$$

В силу произвольности точки t_0 требуемое равенство будет справедливо всюду на отрезке $[a, b]$.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть выполняются все условия теоремы 1.1.2, и пусть* $\sigma(t)$ *есть длина дуги кривой* Γ*, отсчитываемая от конечной точки* B *до точки* $\Phi(t)$*. Тогда выполняется равенство*

$$\frac{d\sigma}{dt} = -|\Phi'(t)|.$$

Доказательство. Согласно теореме 1.1.1, кривая Γ будет спрямляемой. Очевидно, что выполняется равенство

$$\sigma(t) = S_\Gamma - s(t)$$

(S_Γ — длина кривой Γ). Из этого равенства и следует требуемое.

Следствие 2. *Для любой кривой* Γ *с непрерывно дифференцируемой на* $[a, b]$ *параметризацией* $\Phi(t)$ *без особых точек существует такая ее параметризация* $\Phi_0(s)$*, параметром* s *которой является длина дуги* Γ*, отсчитываемая от точки* A*.*

Доказательство. Пусть Γ есть кривая в пространстве $\mathbb{R}^n$ с непрерывно дифференцируемой параметризацией $\Phi(t)$, $t \in [a, b]$, без особых точек. Тогда функция $s(t)$ будет строго монотонно возрастающей на $[a, b]$ функцией, так как выполняется

$$\frac{ds(t)}{dt} \geq k_0 > 0, \quad t \in [a, b].$$

Следовательно, существует обратная к $s(t)$ функция:

$$t = g(s), \quad s \in [0, S_\Gamma],$$

причем функция $g(s)$ также будет строго монотонно возрастать на отрезке $[0, S_\Gamma]$. Но тогда $\Phi_0(s)$, определяемая равенством

$$\Phi_0(s) = \Phi(g(s)),$$

также будет давать параметризацию кривой Γ, причем сохраняющей ориентацию. Параметризация $\Phi_0(s)$ и будет искомой.

Следствие доказано.

Параметризация кривой, в которой параметром является длина дуги, отсчитываемая от некоторой точки (являющейся начальной), называется **натуральной**, сама же длина дуги называется **натуральным параметром**.

Пусть кривая Γ параметризована с помощью натурального параметра. Обозначим через α_k, $k = 1, \ldots, n$, углы, образованные вектором $\Phi_0'(s)$ (или, что то же самое положительным направлением касательной к Γ) с осями Ox_k. Поскольку вектор $\Phi_0'(s)$ единичный, то проекции вектора $\Phi_0'(s)$ на оси координат есть числа $\cos\alpha_k$. Отсюда очевидным образом получаем, что выполняются равенства

$$\varphi_{0k}'(s) = \cos\alpha_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

1.1.4. Нормаль к кривой. Кривизна

Приведем без детального обсуждения некоторые дополнительные сведения о кривых в $\mathbb{R}^n$.

Пусть Γ есть кривая в $\mathbb{R}^n$ с параметризацией $\Phi(t)$, $t \in [a, b]$, и пусть t_0 есть **неособая** точка Γ. Тогда в точке $\Phi(t_0)$ у кривой Γ имеется касательная.

Всякая прямая, проходящая через точку $\boldsymbol{\Phi(t_0)}$ и перпендикулярная касательной в этой точке, называется нормалью к кривой. Плоскость, перпендикулярная касательной и проходящая через точку касания, называется нормальной плоскостью к кривой в точке $\boldsymbol{\Phi(t_0)}$.

Пусть теперь Γ задана в натуральной параметризации $\Phi_0(s)$, $0 \le s \le S_\Gamma$, и пусть в каждой точке Γ существует касательная. Зафиксируем число s_0 из отрезка $[0, S_\Gamma]$, и пусть приращение Δs таково, что $s_0 + \Delta s \in [0, S_\Gamma]$. Обозначим через $\alpha(s)$ при $s \in [s_0, s_0 + \Delta s]$, если $\Delta s > 0$, $s \in [s_0 + \Delta s, s_0]$ при $\Delta s < 0$ угол между касательными к кривой Γ в точках $\Phi_0(s)$ и $\Phi_0(s_0)$, причем будем считать, что $\alpha(s_0) = 0$, $\alpha(s) \geq 0$ при $\Delta s > 0$, $\alpha(s) \leq 0$ при $\Delta s < 0$.

Обозначим $\psi(s) = \Phi_0'(s)$. Вектор $\psi(s)$ является единичным вектором, параллельным касательной в этой точке. Поэтому угол $\alpha(s)$ является и углом между векторами $\psi(s_0)$ и $\psi(s)$ при $s \in [s_0, s_0 + \Delta s]$, если $\Delta s > 0$, $s \in [s_0 + \Delta s, s_0]$, если $\Delta s < 0$.

Число $\boldsymbol{k = k(s_0)}$, определяемое равенством

$$\boldsymbol{k(s_0) = \alpha'(s_0),}$$

называется кривизной $\boldsymbol{\Gamma}$ в точке $\boldsymbol{\Phi_0(s_0)}$. Число

$$\boldsymbol{R(s_0) = \frac{1}{k(s_0)}}$$

называется радиусом кривизны $\boldsymbol{\Gamma}$ в точке $\boldsymbol{\Phi_0(s_0)}$.

Заметим, что радиус кривизны может оказаться и бесконечным (таковым он окажется, например, если Γ есть прямая).

Достаточные условия существования кривизны и способ ее вычисления дает следующая теорема.

Теорема 1.1.3. *Пусть кривая Γ задается дважды непрерывно дифференцируемой параметризацией $\Phi(t)$, $t \in [a, b]$, и пусть все ее точки являются неособыми. Тогда в каждой точке Γ определена кривизна, и она вычисляется по формуле*

$$k = \frac{|\Phi'(t) \times \Phi''(t)|}{|\Phi'(t)|^2}.$$

Доказывать эту теорему мы не будем.

Пусть по-прежнему кривая Γ задается дважды непрерывно дифференцируемой параметризацией $\Phi(t)$, $t \in [a, b]$, без особых точек. Тогда в натуральной параметризации функция $\Phi_0(s)$ также будет дважды непрерывно дифференцируемой вектор-функцией при $s \in [0, S_\Gamma]$. Вектор $\psi'(s)$ (напомним: $\psi(s) = \Phi_0'(s)$, вектор $\psi(s)$ является единичным вектором, параллельным касательной) перпендикулярен вектору $\psi(s)$.

Пусть в точке $\boldsymbol{M_0}$ кривой $\boldsymbol{\Gamma}$ кривизна не равна 0. Нормаль к кривой $\boldsymbol{\Gamma}$, параллельная вектору $\boldsymbol{\psi'(s_0)}$ (параметр $\boldsymbol{s_0}$ соответствует точке $\boldsymbol{M_0}$), называется главной нормалью в этой точке. Плоскость, проходящая через касательную в точке $\boldsymbol{M_0}$ и через

главную нормаль в этой же точке, называется соприкасающейся плоскостью в точке $\boldsymbol{M_0}$.

Если в точке $\boldsymbol{M_0}$ кривизна равна нулю, то соприкасающейся плоскостью называется любая плоскость, проходящая через касательную в этой точке.

1.2. Криволинейные интегралы

1.2.1. Криволинейные интегралы первого рода

Пусть Γ есть параметризованная кривая в $\mathbb{R}^n$ с параметризацией $\Phi(t)$, $t \in [a,b]$, $A = \Phi(a)$, $B = \Phi(b)$ — начальная и конечная точки Γ, Γ^- — кривая Γ с противоположной ориентацией. Далее, пусть кривая Γ спрямляема, S_Γ есть ее длина, и пусть на Γ возможен переход к натуральной параметризации $\Psi_0(s)$, $s \in [0, S_\Gamma]$. Наконец, пусть задана функция $F_0(x)$, определенная при $x \in \Gamma$, и пусть $F(s)$ есть суперпозиция, являющаяся суперпозицией функций F_0 и Φ: $F(s) = F_0(\Phi_0(s)) = F_0(\varphi_1(s, \ldots, \varphi_n(s)))$.

Криволинейным интегралом первого рода по кривой $\boldsymbol{\Gamma}$ от функции $\boldsymbol{F_0(x)}$ называется число

$$\boldsymbol{I = \int\limits_0^{S_\Gamma} F(s)\, ds}$$

(если I есть конечная величина). Обозначается криволинейный интеграл следующим образом

$$I = \int\limits_\Gamma F_0(x)\, ds.$$

Понятие криволинейного интеграла, с одной стороны, связано с некоторыми геометрическими объектами, с другой же — представляет собой понятие, связанное с обычным определенным интегралом по отрезку.

Очевидно, что если функции $F_0(x)$ и $\Phi_0(s)$ таковы, что функция $F(s)$ непрерывна на отрезке $[0, S_\Gamma]$, то криволинейный интеграл первого рода от функции F по кривой Γ существует. Другие достаточные условия существования криволинейного интеграла первого рода вытекают из условий существования определенного интеграла I.

Приведем некоторые простейшие свойства криволинейных интегралов первого рода.

<u>Свойство 1</u>. *Если $F(s) \equiv 1$, то $I = S_\Gamma$.*

Это свойство очевидно.

Свойство 2. *Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой:*

$$\int\limits_{\Gamma} F_0\, ds = \int\limits_{\Gamma^-} F_0\, ds.$$

Доказательство. Пусть $M = \Phi_0(s)$ есть точка кривой Γ, s есть длина дуги Γ между точками A и M. Положим $\sigma = S_\Gamma - s$. Очевидно, что σ есть длина дуги Γ между точками B и M. Функция $\Phi_0(S_\Gamma - \sigma)$, $\sigma \in [0, S_\Gamma]$, дает параметризацию кривой Γ^-. Имеют место равенства

$$\int\limits_{\Gamma} F_0\, ds = \int\limits_{0}^{S_\Gamma} F_0(\Phi_0(s))\, ds = \int\limits_{0}^{S_\Gamma} F_0(\Phi(S_\Gamma - \sigma))\, d\sigma = \int\limits_{\Gamma^-} F_0\, d\sigma.$$

Из этих равенств и следует требуемое.

Свойство 3. *Пусть Γ есть кривая в $\mathbb{R}^n$ с непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ параметризацией $\Phi(t)$ без особых точек. тогда справедливо равенство*

$$\int\limits_{\Gamma} F_0\, ds = \int\limits_{a}^{b} F_0(\Phi(t))[\varphi_1'^2(t) + \ldots + \varphi_n'^2(t)]^{\frac{1}{2}}\, dt. \qquad (1.1.2)$$

Доказательство. Согласно теореме 1.1.2 и следствию 2 к ней на кривой Γ возможен переход к натуральной параметризации, причем параметр s можно выразить через параметр t с помощью некоторой непрерывно-дифференцируемой на $[a, b]$ функции: $s = h(t)$. Выполняя в криволинейном интеграле первого рода замену $s = h(t)$ и учитывая равенство

$$\frac{ds}{dt} = |\Phi'(t)|$$

(см. теорему 1.1.2), получим требуемое.

Свойство 3 доказано.

Формула (1.1.2) представляет собой рабочую формулу для практических вычислений криволинейных интегралов первого рода.

Свойство 4. *Пусть $\tau = \{s_i\}_{i=0}^{m}$ есть разбиение отрезка $[0, S_\Gamma]$, ξ_i есть точки из отрезков $[s_{i-1}, s_i]$, $i = 1, \ldots, m$, $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ — длина дуги* *кривой* Γ *от точки* $\Phi_0(s_{i-1})$ *до точки* $\Phi_0(s_i)$, σ_τ — *интегральная сумма функции* $F(s)$ *по отрезку* $[0, S_\Gamma]$

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{m} F_0(\Phi_0(\xi_i))\Delta s_i.$$

Тогда, если криволинейный интеграл I *первого рода существует, то*

$$\lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sigma_\tau = I.$$

Это свойство очевидно, так как σ_τ есть обычная интегральная сумма для определенного интеграла от функции $F(s)$ по отрезку $[0, S_\Gamma]$.

Свойство 5. *Если функция* $F_0(x)$ *представляет собой комбинацию* $\alpha F_1(x) + \beta F_2(x)$, α, β — *фиксированные числа, криволинейные интегралы по кривой* Γ *от функций* $F_1(x)$ *и* $F_2(x)$ *существуют, то выполняется равенство*

$$\int\limits_\Gamma F\,ds = \alpha \int\limits_\Gamma F_1\,ds + \beta \int\limits_\Gamma F_2\,ds.$$

Это свойство также очевидно.

Определим теперь криволинейный интеграл по кусочно-гладкой кривой.

Пусть Γ есть кусочно-гладкая кривая, состоящая из двух гладких частей Γ_1 и Γ_2 таких, что общими точками Γ_1 и Γ_2 могут быть лишь их начальные и конечные точки. Далее, пусть функция $F(s)$ определена на кривых Γ_1 и Γ_2.

Криволинейным интегралом по кусочно-гладкой кривой Γ называется число

$$\int\limits_{\Gamma_1} F_0(x)\,ds + \int\limits_{\Gamma_2} F_0(x)\,ds,$$

если каждый из криволинейных интегралов по Γ_1 и Γ_2 существуют.

Замечание. Поскольку понятие определенного интеграла

$$\int\limits_0^{S_\Gamma} F\,ds$$

по отрезку можно расширить — например, до несобственного интеграла от неограниченных функций или по неограниченному промежутку — то и понятие криволинейного интеграла первого рода можно расширить, определив несобственный криволинейный интеграл первого рода, или же перейти к какой-либо иной конструкции, расширяющей понятие обычного определенного интеграла.

1.2.2. Криволинейные интегралы второго рода

Следующим объектом, связанным с интегрированием на кривых в $\mathbb{R}^n$, являются криволинейные интегралы второго рода, или криволинейные интегралы по координатам.

Пусть Γ есть кривая, параметризованная непрерывно-дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ вектор-функцией $\Phi(t)$, и пусть эта кривая не имеет особых точек. Тогда, во-первых, в каждой точке $\Phi(t)$ определена касательная к Γ, и, во-вторых, от параметризации $\Phi(t)$ можно перейти к эквивалентной ей натуральной параметризации $\Phi_0(s)$. Обозначим через $\cos\alpha_k$, $k = 1, \ldots, n$, направляющие косинусы единичного вектора $\vec{l} = \vec{l}(t)$ касательной к Γ в текущей точке (другими словами, искомый вектор $\vec{l}$ задается равенством $\vec{l} = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)$ и α_k, $k = 1, \ldots, n$, есть углы между вектором $\vec{l}$ и положительным направлением соответствующей оси Ox_k). Далее, пусть вновь задана функция $F_0(x)$, определенная при $x \in \Gamma$, и пусть $F(s)$ вновь есть суперпозиция функций F_0 и Φ: $F(s) = F_0(\Phi_0(s))$.

Криволинейным интегралом второго рода по кривой $\boldsymbol{\Gamma}$ от функции $\boldsymbol{F_0(x)}$ по координате $\boldsymbol{x_k}$, $\boldsymbol{k = 1, \ldots, n}$, называется интеграл

$$\boldsymbol{I = \int\limits_{\Gamma} F \cos\alpha_k \, ds,}$$

если последний существует.

Обозначают криволинейный интеграл второго рода так

$$I = \int\limits_{\Gamma} F \, dx_k.$$

Важнейшими свойствами криволинейного интеграла второго рода являются следующие.

1. *При изменении ориентации на кривой* Γ *криволинейный интеграл второго рода меняет знак:*

$$\int\limits_{\Gamma} F \, dx_k = -\int\limits_{\Gamma^-} F \, dx_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

2. *Для криволинейного интеграла второго рода имеет место формула*

$$\int\limits_{\Gamma} F\,dx_k = \int\limits_a^b F_0(\Phi(t))\varphi_k'(t)\,dt, \quad k1,\ldots,n.$$

Свойство 1 вытекает из того факта, что при переходе от положительного направления на кривой Γ к отрицательному криволинейный интеграл первого рода сам по себе не меняет знак, но единичный вектор касательной меняется на противоположный, и тем самым все углы α_k меняются на углы $\alpha_k + \pi$. Свойство же 2 следует из формулы (1.1.2) и из равенств

$$\varphi_k'(t)\,dt = \varphi_{0k}'(s)\,ds = \cos\alpha_k \frac{ds}{dt}dt = \cos\alpha_k |\Phi'(t)|\,dt$$

(по поводу равенств $\varphi_{0k}'(s) = \cos\alpha_k$ см. п. 1.1.3).

Свойства 1 и 2, как видно из определения криволинейного интеграла второго рода и из проведенных выше рассуждений, наследуются от определения и соответствующих свойств криволинейного интеграла первого рода. Аналогичным образом наследуются и другие свойства — свойство линейности (аналог свойства 5 криволинейного интеграла первого рода), возможность представления интеграла второго рода пределом интегральных сумм, возможность определения несобственных криволинейных интегралов второго рода. Далее, аналогично определению криволинейного интеграла первого рода по кусочно-гладким кривым нетрудно дать определение криволинейного интеграла второго рода по таким кривым.

Наконец, поскольку и криволинейный интеграл первого рода, и криволинейный интеграл второго рода сводятся к определенным интегралам по отрезкам, то они (т.е. криволинейные интегралы) в целом наследуют известные свойства определенного интеграла — например, для криволинейных интегралов можно вывести аналог интегральной теоремы о среднем, вывести оценку интеграла, и т. д.

1.2.3. Формула Грина[3]

В данном пункте будет рассматриваться двумерный случай, и для переменных здесь будут использоваться декартовы обозначения x, y (а не x_1, x_2).

[3]Д. Грин (1793–1841) — английский математик и физик.

Область G из пространства $\mathbb{R}^2$ называется элементарной относительно оси Oy областью, если ее граница состоит из графиков двух непрерывных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определенных при $x \in [a, b]$ и таких, что $\varphi(x) \leq \psi(x)$ для всех x, а также, быть может, из некоторых отрезков прямых $x = a$ и $x = b$.

Уточним, что областью в $\mathbb{R}^n$ называется открытое связное множество, и что открытое множество будет связным, если для двух любых его точек $x' = (x'_1, \ldots, x'_k)$ и $x'' = (x''_1, \ldots, x''_n)$ найдется параметризованная кривая, целиком лежащая в данном множестве и соединяющая точки x' и x''.

Вернемся к определению элементарных областей.

Область G из пространства $\mathbb{R}^2$ называется элементарной относительно оси Ox областью, если ее граница состоит из графиков двух непрерывных функций $\alpha(y)$ и $\beta(y)$, определенных на отрезке $[c, d]$ и таких, что $\alpha(y) \leq \beta(y)$ при $y \in [c, d]$, а также, быть может, из некоторых отрезков прямых $y = c$ и $y = d$.

Словосочетание "быть может" в определении элементарных относительно осей Oy и Ox означает, что соответствующие отрезки прямых $x = a$, $x = b$ и $y = c$, $y = d$ могут вырождаться в точку.

Область G из пространства $\mathbb{R}^2$ называется элементарной, если она элементарна одновременно и относительно оси Oy, и относительно оси Ox.

Примерами элементарных областей являются прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, круг с центром в начале координат. Можно привести и более сложные примеры.

Теорема 1.2.1. *Пусть Ω есть ограниченная область из пространства $\mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей Γ, ориентированной положительно, и пусть эту область можно разбить на конечное число непересекающихся элементарных областей с кусочно-гладкими положительно-ориентированными границами. Далее, пусть $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ есть заданные функции такие, что*

$$P(x, y) \in C(\overline{\Omega}), \quad Q(x, y) \in C(\overline{\Omega}), \quad \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \in C(\overline{\Omega}), \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \in C(\overline{\Omega}).$$

Тогда имеет место равенство

$$\int\limits_{\Omega}\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \int\limits_{\Gamma} P\, dx + Q\, dy. \qquad (1.2.1)$$

Доказательство. Пусть вначале сама область Ω элементарна. Для интеграла от функции $\frac{\partial Q}{\partial x}$ представим Ω в виде

$$\Omega = \{(x, y) : \quad \alpha(y) < x < \beta(y), \quad c < y < d\}.$$

Граница Ω состоит из отрезка $[\alpha(c), \beta(c)]$, возможно, вырождающегося в точку, кривой γ_1, являющейся частью графика функции $x = \beta(y)$, $c \le y \le d$, отрезка $[\beta(d), \alpha(d)]$, также, возможно, вырождающегося в точку, и кривой γ_2, являющейся частью графика функции $x = \alpha(y)$, $c \le y \le d$ (обход по границе Ω соответствует положительной ориентации). Переходя в интеграле от функции $\frac{\partial Q}{\partial x}$ к повторному и применяя далее формулу Ньютона — Лейбница[4], получим

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int\limits_{c}^{d} \left(\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx \right) dy = \int\limits_{c}^{d} [Q(\beta(y), y) - Q(\alpha(y), y)]\, dy.$$

С другой стороны, кривые γ_1 и γ_2 легко параметризовать, положив на γ_1 $y = t$, $x = \beta(t)$, $c \le t \le d$, и на γ_2 $y = t$, $x = \alpha(t)$, $c \le t \le d$. Такая параметризация и тот факт, что на кривой γ_2 ориентация соответствует кривой γ_2^-, получим равенства

$$\int\limits_{c}^{d} Q(\beta(y), y)\, dy = \int\limits_{\gamma_1} Q\, dy, \quad -\int\limits_{c}^{d} Q(\alpha(y), y)\, dy = \int\limits_{\gamma_2} Q\, dy.$$

Параметризуя теперь отрезки $[\alpha(c), \beta(c)]$ и $[\alpha(d), \beta(d)]$ стандартным образом: $x = t$, $y = c$, $\alpha(c) \le t \le \beta(c)$ и $x = t$, $y = d$, $\alpha(d) \le t \le \beta(d)$ и учитывая, что интегралы второго рода по координате y по этим отрезкам равны нулю (независимо от ориентации и от невырожденности отрезков), получим равенство

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int\limits_{\Gamma} Q\, dy. \tag{1.2.2}$$

Совершенно аналогично, но представляя теперь область Ω в виде $\{(x, y) : a < x < b, \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$, получим, что выполняется равенство

$$-\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int\limits_{\Gamma} P\, dx. \tag{1.2.3}$$

[4] И. Ньютон (1642–1727) — английский физик и математик, Г.В. Лейбниц (1646–1716) — немецкий математик и механик.

Сложив равенства (1.2.2) и (1.2.3), получим требуемую формулу для элементарной области Ω.

Пусть теперь область Ω такова, что ее можно разбить на области $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ такие, что $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ при $i \neq j$, и каждая из областей Ω_i элементарна. В силу аддитивности двойного интеграла и в силу того, что для любой непрерывной в некоторой плоской ограниченной области D функции $F(x, y)$ выполняется равенство

$$\iint\limits_{D} F(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\overline{D}} F(x,y)\,dx\,dy,$$

имеем

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \sum_{i=1}^{m} \iint\limits_{\Omega_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Применяя теперь для каждого слагаемого в правой части данного равенства доказанную выше формулу, получим

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\partial\Omega_i} Q\,dy + P\,dx.$$

В сумме, стоящей справа, содержатся интегралы по положительно ориентированным частям границ областей Ω_i, составляющим в целом границу Ω, а также содержатся интегралы по тем частям границ областей Ω_i, которые лежат внутри Ω, причем эти интегралы берутся дважды по одинаковым кривым, но с противоположной ориентацией — в силу свойств криволинейных интегралов второго рода они взаимно уничтожаются. В результате суммирования как раз и получится требуемое равенство.

Теорема доказана.

Формула (1.2.1) и называется **формулой Грина**.

На самом деле **формула Грина справедлива** для более широкого класса областей — именно, **для областей с кусочно-гладкими границами**. Доказательство этого факта основано на возможности аппроксимации кусочно-гладкой кривой с помощью ломаной — см. лемму 1.1.1 — далее на том, что получившийся в результате такой аппроксимации многоугольник представляет собой область, которую диагоналями многоугольника можно разбить на конечное число треугольников (а к любому треугольнику формула Грина применима), и, наконец, на предельном переходе. Не вдаваясь в технические подробности, дадим лишь точную формулировку.

Теорема 1.2.1$'$. *Пусть ограниченная плоская область* Ω *такова, что ее граница есть кусочно-гладкая кривая* Γ, *ориентированная положительно, и пусть* $P(x,y)$ *и* $Q(x,y)$ *есть заданные функции такие, что*

$$P(x,y) \in C(\overline{\Omega}), \quad Q(x,y) \in C(\overline{\Omega}), \quad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \in C(\overline{\Omega}), \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \in C(\overline{\Omega}).$$

Тогда имеет место формула Грина (1.2.1).

Формула Грина (1.2.1) и ее обобщение, о котором идет речь в теореме 1.2.1$'$, относятся к случаю, когда граница области Ω состоит из одной кусочно-гдадкой кривой. Рассмотрим теперь случай, когда граница Ω состоит из нескольких кривых.

Пусть ограниченная плоская область Ω такова, что ее граница состоит из попарно непересекающихся кусочно-гладких кривых Γ_0, Γ_1, ..., Γ_m, каждая из которых является замкнутым контуром без самопересечений, и пусть контур Γ_0 является внешним — т. е. он является одновременно границей неограниченной области $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$, контуры Γ_1, ..., Γ_m являются внутренними — они лежат внутри Γ_0 и одновременно являются границами ограниченных областей Ω_i, лежащих в $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$. Такие области назовем $(m+1)$-связными.

Определим ориентацию границы $(m+1)$-связной области.

Граница Γ_0, Γ_1, ..., Γ_m $(m+1)$-связной области Ω является положительно ориентированной, если на внешнем контуре Γ_0 задано направление движения, оставляющее область Ω слева, на внутренних же контурах Γ_i, $i = 1, \ldots, m$, задано направление, оставляющее области Ω_i справа.

Заметим, что при таком задании ориентации границы $(m+1)$-связной области кривые Γ_i, $i = 1, \ldots, m$, будут ориентированы отрицательно по отношению к ограниченным областям Ω_i, кривые же Γ_i^-, наоборот, будут положительно ориентированы по отношению к Ω_i.

Теорема 1.2.2. *Пусть область* Ω $(m+1)$*-связна, ее внешний и внутренние контуры* Γ_0, Γ_1, ..., Γ_m *являются замкнутыми кусочно-гладкими кривыми без самопересечений, и пусть граница области* Ω *положительно ориентирована. Далее, пусть* $P(x,y)$ *и* $Q(x,y)$ *есть заданные функции* *такие, что*

$$P(x,y) \in C(\overline{\Omega}), \quad Q(x,y) \in C(\overline{\Omega}), \quad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \in C(\overline{\Omega}), \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \in C(\overline{\Omega}).$$

Тогда имеет место равенство

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\Gamma_0} P\,dx + Q\,dy - \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\Gamma_i^-} P\,dx + Q\,dy. \qquad (1.2.4)$$

Доказательство. Соединим области Ω_i с кривой Γ_0 разрезами, каждый из которых представляет собой кусочно-гладкую кривую без самопересечений, причем эти разрезы друг с другом не пересекаются.

Обозначим через Ω^* область, полученную из Ω удалением данных разрезов, предполагая, что граница области Ω^* состоит из границы Ω (с сохранением ориентации) и из разрезов, проходимых дважды. Граница Ω^* представляет собой кусочно-гладкую кривую. Согласно теореме $1.2.1'$, имеет место равенство

$$\iint\limits_{\Omega^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\partial\Omega^*} P\,dx + Q\,dy. \qquad (1.2.5)$$

Далее, поскольку двойной интеграл не меняется при присоединении к множеству интегрирования множества нулевой двумерной меры, то имеет место равенство

$$\iint\limits_{\Omega^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \qquad (1.2.6)$$

Представляя криволинейный интеграл второго рода правой части (1.2.5) в виде суммы интегралов по кривым $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$, и по проходимым дважды в противоположных направлениях интегралов по разрезам, из (1.2.5) и (1.2.6) и получим требуемое равенство (1.2.4).

Теорема доказана.

Формула (1.2.4) называется **формулой Грина для многосвязной области**.

Пусть плоская область Ω такова, что к ней применима формула Грина (1.2.1), $P(x,y) = f(x,y) \cdot g(x,y)$, $Q(x,y) \equiv 0$, функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$

имеют производные по переменной y, непрерывные в $\overline{\Omega}$, граница Γ области Ω ориентирована положительно. Тогда имеет место равенство

$$\int\limits_{\Omega}\!\!\int f_y g\,dx\,dy = -\int\limits_{\Omega}\!\!\int f g_y\,dx\,dy - \int\limits_{\Gamma} f g\,dx. \tag{1.2.7}$$

Аналогично, если $P(x,y) \equiv 0$, $Q(x,y) \equiv f(x,y) \cdot g(x,y)$, функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ имеют производные по переменной x, непрерывные в $\overline{\Omega}$, то имеет место равенство

$$\int\limits_{\Omega}\!\!\int f_x g\,dx\,dy = -\int\limits_{\Omega}\!\!\int f g_x\,dx\,dy + \int\limits_{\Gamma} f g\,dy. \tag{1.2.8}$$

Формулы (1.2.7) и (1.2.8) являются аналогами одномерной формулы интегрирования по частям.

Пусть теперь $Q(x,y) = x$, $P(x,y) \equiv 0$, и пусть по-прежнему к области Ω применима формула Грина. Тогда имеет место равенство

$$\int\limits_{\Omega}\!\!\int dx\,dy = \int\limits_{\Gamma} x\,dy;$$

поскольку же левая часть есть площадь S_Ω области Ω, то получим формулу

$$S_\Omega = \int\limits_{\Gamma} x\,dy. \tag{1.2.9}$$

Полагая теперь $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) \equiv 0$, получим еще одну формулу

$$S_\Omega = -\int\limits_{\Gamma} y\,dx. \tag{1.2.10}$$

Заметим, что имеет место и еще одно равенство

$$S_\Omega = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} x\,dy - ydx. \tag{1.2.11}$$

Формулы (1.2.9) — (1.2.11) позволяют вычислять площадь плоской фигуры с помощью криволинейных интегралов второго рода.

1.2.4. Независимость криволинейных интегралов второго рода от пути интегрирования

Свойство независимости криволинейного интеграла второго рода в данном пункте будет изучено для случая $n = 2$. Случай $n = 3$ будет изучен позднее.

В предыдущем пункте было дано определение многосвязных ($(m+1)$-связных) областей. Расширим это понятие — будем допускать, что внутренние области Ω_i ("дыры") могут вырождаться в точку. Например, двусвязной областью будет "проколотый" круг — множество $\{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < R^2\}$, трехсвязной — дважды "проколотый" круг, и т. п.

Пусть Ω есть ограниченная плоская односвязная область, $M_0 = (x_0, y_0)$, $M_1 = (x_1, y_1)$ есть две произвольные точки Ω. Далее, пусть $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ есть заданные определенные в Ω функции. **Говорят, что для функций $\boldsymbol{P(x, y)}$ и $\boldsymbol{Q(x, y)}$ имеет место свойство независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования, если для любой кусочно-гладкой кривой $\boldsymbol{\Gamma_{M_0M}}$ без самопересечений, соединяющей точки $\boldsymbol{M_0}$ и $\boldsymbol{M}$, и целиком лежащей в $\boldsymbol{\Omega}$, значение интеграла**

$$\int\limits_{\boldsymbol{\Gamma_{M_0M}}} \boldsymbol{P\,dx + Q\,dy}$$

одно и то же для всех подобных кривых.

Теорема 1.2.3. *Пусть Ω есть плоская ограниченная односвязная область, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ есть заданные непрерывные в $\overline{\Omega}$ функции такие, что $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ существуют и непрерывны в $\overline{\Omega}$. Для функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в области Ω имеет место свойство независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:*

1. *Для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой Γ, целиком лежащей в Q, выполняется*

$$\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = 0;$$

2. *Существует функция $u(x, y)$ такая, что для любых точек (x, y) из Ω выполняется*

$$du(x, y) = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy;$$

3. *Для любых точек* (x, y) *из* Ω *выполняется*

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

Доказательство. Если криволинейный интеграл второго рода не зависит от пути интегрирования, то выполняется условие 1, поскольку любую замкнутую кусочно-гладкую кривую, целиком лежащую в Ω, можно представить как совокупность двух путей, соединяющих фиксированную точку этой кривой с другой, произвольно выбранной. Учитывая смену знака криволинейного интеграла второго рода при изменении направления движения, получаем требуемое. Обратно, пусть для любой кусочно-гладкой замкнутой кривой Γ без самопересечений выполняется

$$\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = 0,$$

и пусть $\Gamma^1_{M_0M_1}$ и $\Gamma^2_{M_0M_1}$ есть две кусочно-гладкие кривые, целиком лежащие в Ω и соединяющие точки M_0 и M_1 области Ω. Если эти кривые не пересекаются в других точках Ω, то вместе они составят замкнутую кусочно-гладкую кривую Γ без самопересечений, целиком лежащую в Ω. Из равенства нулю интеграла от $P\,dx + Q\,dy$ по этой кривой и из свойства смены знака криволинейного интеграла второго рода при смене направления движения и получаем, что выполняется равенство

$$\int\limits_{\Gamma^1_{M_0M_1}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\Gamma^2_{M_0M_1}} P\,dx + Q\,dy.$$

Если теперь кривые $\Gamma^1_{M_0M_1}$ и $\Gamma^2_{M_0M_1}$ пересекаются в каких-либо точках Ω, то на участках кривых $\Gamma^1_{M_0M_1}$ и $\Gamma^2_{M_0M_1}$ от M_0 до первой точки пересечения, от первой точки пересечения до следующей, и т.д., интегралы будут совпадать. Следовательно, и в целом интегралы по кривым $\Gamma^1_{M_0M_1}$ и $\Gamma^2_{M_0M_1}$ будут совпадать. Наконец, если кривые $\Gamma^1_{M_0M_1}$ и $\Gamma^2_{M_0M_1}$ имеют некоторые общие участки, то на таких участках криволинейные интегралы будут совпадать очевидным образом. Проведенный анализ и означает, что при выполнении условия 1 имеет место свойство независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

Докажем теперь, что из условия независимости криволинейного интеграла второго рода следует выполнимость условия 2.

Пусть $M_0 = (x_0, y_0)$ есть фиксированная точка Ω, $M = (x, y)$ есть текущая точка Ω, Γ_{M_0M} есть кусочно-гладкая кривая без самопересечений, целиком лежащая в Ω и соединяющая точки M_0 и M. Положим

$$u(x, y) = u(M) = \int\limits_{\Gamma_{M_0M}} P\,dx + Q\,dy.$$

Покажем, что функция $u(x, y)$ и будет искомой.

Прежде всего заметим, что функция $u(x, y)$ определена корректно — при выборе другой кривой, соединяющей точки M_0 и M (кусочно-гладкой, без самопересечений, целиком лежащей в Ω) значение функции $u(x, y)$ не изменится.

Пусть M_h есть точка $(x + h, y)$, $h \neq 0$, и пусть приращение h настолько мало, что выполняется $M_h \in \Omega$. Соединим точки M_0 и M_h кривой, составленной из кривой Γ_{M_0M} и отрезка L_h, параллельного оси абсцисс и соединяющего точки M и M_h. Имеет место равенство

$$u(x + h, y) - u(x, y) = \int\limits_{L_h} P\,dx + Q\,dy.$$

Отрезок L_h легко параметризуется, и на этом отрезке $dy = 0$, $dx = dt$, $x \leq t \leq x + h$. Отсюда

$$\int\limits_{L_h} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{x}^{x+h} P(t, y)\,dt.$$

Согласно интегральной теореме о среднем, выполняется равенство

$$\int\limits_{x}^{x+h} P(t, y)\,dt = P(x + \theta h, y)h,$$

в котором θ есть некоторое число, принадлежащее интервалу $(0, 1)$. Следовательно, выполняется равенство

$$\frac{u(x + hy) - u(x, y)}{h} = P(x + \theta h, y).$$

Правая часть в этом равенстве имеет предел при $h \to 0$, равный $P(x, y)$. Значит, и левая часть имеет предел при $h \to 0$, вновь равный $P(x, y)$. А это и означает, что функция $u(x,y)$ в произвольной точке M области Ω имеет частную производную $u_x(x,y)$, равную $P(x,y)$.

Совершенно аналогично, лишь с тем изменением, что вместо отрезка L_h, параллельного оси абсцисс, берется отрезок, параллельный оси ординат и соединяющий точки (x,y) и $(x,y+h)$, показывается, что функция $u(x,y)$ имеет частную производную по y, равную $Q(x,y)$.

Справедливость равенства

$$du(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

вытекает из свойств дифференциала функции двух переменных.

Выполнение условия 2 доказано.

Пусть теперь выполняется условие 2 теоремы, и пусть вначале точки M_0 и M соединены гладкой кривой Γ_{M_0M} без самопересечений, целиком лежащей в Ω и имеющей параметризацию $\Phi(t)$, $t \in [a,b]$. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma_{M_0M}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= \int\limits_a^b \left[P(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\varphi_1'(t) + Q(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\varphi_2'(t)\right]\,dt =$$

$$= \int\limits_a^b \frac{d}{dt}[u(\varphi_1(t),\varphi_2(t))]\,dt = u(\varphi_1(b),\varphi_2(b)) - u(\varphi_1(a),\varphi_2(a)) = u(M) - u(M_0).$$

Если теперь кривая Γ_{M_0M} является кусочно-гладкой, то, используя параметризацию каждого участка и учитывая, что начальная точка каждого следующего участка является конечной точкой предыдущего, вновь получим, что выполняется равенство

$$\int\limits_{\Gamma_{M_0M}} P\,dx + Q\,dy = u(M) - u(M_0).$$

Из этого равенства следует, что значение криволинейного интеграла второго рода при выполнении условия 2 определяется лишь функцией $u(x,y)$ и точками M_0 и M. Тем самым искомый интеграл не зависит от пути интегрирования.

Докажем два последних факта — то, что из свойства независимости криволинейного интеграла второго рода при выполнении условий теоремы следует выполнение условия 3, и что из условия 3 следует, что криволинейный интеграл второго рода имеет свойство независимости от пути интегрирования.

Если имеет место свойство независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования, то, согласно доказанному выше, существует функция $u(x, y)$, для которой при $(x, y) \in \Omega$ выполняются равенства

$$u_x(x, y) = P(x, y), \quad u_y(x, y) = Q(x, y).$$

Из условия теоремы следует, что функции $u_x(x, y)$ и $u_y(x, y)$ имеют частные производные по переменным y и x соответственно. Поскольку же $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ непрерывны в $\overline{\Omega}$, то частные производные $u_{xy}(x, y)$ и $u_{yx}(x, y)$ будут совпадать всюду в Ω. А это и означает выполнение равенства

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

всюду в Ω.

Обратно, пусть выполняется условие 3. Применяя формулу Грина к области, ограниченной произвольной замкнутой кусочно-гладкой кривой без самопересечений, целиком лежащей в Ω, получим, что криволинейный интеграл второго рода по любой такой кривой равен нулю. А это, согласно доказанному выше, и означает, что криволинейный интеграл второго рода обладает свойством независимости от пути интегрирования.

Теорема полностью доказана.

В заключение заметим, что условие односвязности области Ω является существенным. Действительно, пусть Ω есть "проколотый" круг $\{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < R^2\}$, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ есть функции

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Всюду в Ω выполняется равенство

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}.$$

Непосредственно же вычисляя интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy$$

по окружности $\Gamma = \{(x,y) : x^2 + y^2 = R_1^2\}$ в случае $0 < R_1 < R$, нетрудно убедиться, что он не равен нулю.

1.3. Поверхности в $\mathbb{R}^n$

1.3.1. Параметрически заданные поверхности

Необходимые сведения о поверхностях здесь будут представлены в трехмерном случае — для наших целей этого вполне достаточно. Как и в предыдущем пункте, будем использовать декартовы обозначения x, y, z (а не x_1, x_2, x_3).

Пусть Ω есть ограниченная область из пространства $\mathbb{R}^2$, $f(u,v)$, $g(u,v)$, $h(u,v)$ — определенные при $(u,v) \in \overline{\Omega}$ и непрерывные на $\overline{\Omega}$ функции. Непрерывной поверхностью S называется множество

$$S = \{(x,y,z) : x = f(u,v),\ y = g(u,v),\ z = h(u,v),\ (u,v) \in \overline{\Omega}\}.$$

Вектор-функция $\Phi(u,v) = (f(u,v), g(u,v), h(u,v))$ называется представлением, или параметризацией поверхности.

По аналогии с понятием эквивалентных параметризаций кривой определим понятие эквивалентных параметризаций поверхности.

Пусть E_1 и E_2 суть области из пространства $\mathbb{R}^2$. Непрерывное отображение F_1 множества $\overline{E}_1$ в пространство $\mathbb{R}^3$ называется эквивалентным непрерывному отображению F_2 множества $\overline{E}_2$ в пространство $\mathbb{R}^3$, если существует взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное отображение F_0 из $\overline{E}_1$ на $\overline{E}_2$ такое, что при действии F_0 внутренние точки E_1 переходят во внутренние точки E_2, граничные точки E_1 переходят в граничные точки E_2, и для каждой точки (u,v) из E_1 выполняется $F_1(u,v) = F_2(F_0(u,v))$. Отображение F_0 при этом называется отображением, осуществляющим эквивалентность отображений F_1 и F_2.

Уточним, что термин "взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное отображение" подразумевает, что непрерывными являются как само отображение, так и обратное (**взаимно-однозначные и взаимно-непрерывные отображения называются гомеоморфизмами**).

Вернемся к понятию поверхности.

Если непрерывная поверхность S задана своей параметризацией $\Phi(u,v)$, $(u,v) \in \overline{\Omega}$, и если $\Phi_0(u_1,v_1)$, $(u_1,v_1) \in \overline{\Omega}_1$, есть

эквивалентное параметризации $\Phi(u,v)$ отображение, то по определению считается, что параметризация $\Phi_0(u_1,v_1)$, $(u_1,v_1)\in\overline{\Omega}_1$, определяет ту же поверхность S.

Точки непрерывной поверхности S, в которые параметризацией $\Phi(u,v)$ отображаются по крайней мере две различные точки множества $\overline{\Omega}$, называются кратными точками, или точками самопересечения. Все остальные точки S называются простыми.

Пусть S есть непрерывная поверхность с параметризацией $\Phi(u,v)$, $(u,v)\in\Omega$, и пусть Ω_1 есть подобласть Ω. **Непрерывная поверхность S_1, заданная параметризацией $\Phi(u,v)$ при $(u,v)\in\overline{\Omega}_1$, называется частью поверхности S.**

Точка $\Phi(u_0,v_0)$ непрерывной поверхности S называется внутренней, если выполняется $(u_0,v_0)\in\Omega$. Если же $(u_0,v_0)\in\partial\Omega$, то ее образ называется краевой точкой поверхности. Множество всех краевых точек называется краем поверхности S.

Непрерывная поверхность S, заданная параметризацией $\Phi(u,v)$, $(u,v)\in\Omega$, называется непрерывно-дифференцируемой поверхностью, если выполняется $f(u,v)\in\mathbb{C}^1(\overline{\Omega})$, $g(u,v)\in\mathbb{C}^1(\overline{\Omega})$, $h(u,v)\in\mathbb{C}^1(\overline{\Omega})$.

1.3.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Ориентация поверхности

Пусть S есть непрерывно-дифференцируемая поверхность, заданная параметризацией $\Phi(u,v)$, $(u,v)\in\overline{\Omega}$. Далее, пусть (u_0,v_0) есть точка $\overline{\Omega}$, $\vec{l}_u(u_0,v_0)$ и $\vec{l}_v(u_0,v_0)$ есть векторы $(f_u(u_0,v_0),g_u(u_0,v_0),h_u(u_0,v_0))$, $(f_v(u_0,v_0),g_v(u_0,v_0),h_v(u_0,v_0))$ соответственно.

Тогда $\Phi(u_0,v_0)$ поверхности S называется неособой, если векторы $\vec{l}_u(u_0,v_0)$ и $\vec{l}_v(u_0,v_0)$ линейно независимы. Если же эти векторы линейно зависимы, то точка $\Phi(u_0,v_0)$ называется особой.

Рассмотрим кривую L на поверхности S, проходящую через точку (u_0,v_0), и пусть эта кривая задана параметризацией $\Phi(u(t),v(t))$, $t\in[a,b]$.

Плоскость, проходящая через точку $\Phi(u_0,v_0)$ поверхности S, в которой лежат касательные к всевозможным подобным кривым L, проходящим через эту точку, называется касательной плоскостью к S в точке $\Phi(u_0,v_0)$.

Известно, что если поверхность S непрерывно дифференцируема, точка $\Phi(u_0,v_0)$ есть ее неособая точка, то в ней всегда существует, и притом единственная касательная плоскость; уравнение этой плоскости в точке $(x_0, y_0, z_0) \in S$ определяется равенством

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ f_u(u_0, v_0) & g_u(u_0, v_0) & h_u(u_0, v_0) \\ f_v(u_0, v_0) & g_v(u_0, v_0) & h_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

$((x_0, y_0, z_0) = \Phi(u_0, v_0))$.

Прямая, проходящая через точку касания поверхности с касательной плоскостью и перпендикулярная этой плоскости, называется нормальной прямой к поверхности в указанной точке.

Уравнение нормальной прямой в неособой точке $\Phi(u_0, v_0)$ поверхности S имеет вид

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} g_u(u_0, v_0) & h_u(u_0, v_0) \\ g_v(u_0, v_0) & h_v(u_0, v_0) \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} h_u(u_0, v_0) & f_u(u_0, v_0) \\ h_v(u_0, v_0) & f_v(u_0, v_0) \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} f_u(u_0, v_0) & g_u(u_0, v_0) \\ f_v(u_0, v_0) & g_v(u_0, v_0) \end{vmatrix}}.$$

Ненулевой вектор, параллельный нормальной прямой, проходящей через данную точку поверхности S, называется нормалью к S в указанной точке.

Заметим, что в кратных точках поверхности (если они есть) касательная плоскость, нормальная прямая и нормаль могут определяться неоднозначно.

Нормаль $\vec{n}$ к непрерывно дифференцируемой поверхности S в ее неособой точке $\Phi(u_0, v_0)$ — точнее говоря, одна из нормалей, поскольку нормаль определяется с точностью до поворота на угол π — может быть вычислена с помощью формулы

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_u(u_0, v_0) & g_u(u_0, v_0) & h_u(u_0, v_0) \\ f_v(u_0, v_0) & g_v(u_0, v_0) & h_v(u_0, v_0) \end{vmatrix}; \qquad (1.3.1)$$

в этой формуле $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — единичные координатные векторы осей Ox, Oy, Oz соответственно.

Перейдем к понятию ориентации поверхности. Уточним, что всюду в настоящем пособии предполагается, что система координат в $\mathbb{R}^3$ ориентирована правосторонним образом (по "правилу штопора") — если смотреть из конца вектора $\vec{k}$ на плоскость Oxy, то переход от вектора $\vec{i}$ к вектору $\vec{j}$ совершается поворотом на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки.

Пусть S есть параметризованная поверхность с параметризацией $\Phi(u,v)$, $(u,v)\in\overline{\Omega}$. **Поверхность S называется гладкой, если вектор-функция $\Phi(u,v)$ непрерывно-дифференцируема на $\overline{\Omega}$, и если поверхность S не имеет особых точек**.

В каждой точке гладкой поверхности S однозначно определена нормаль, вычисляемая по формуле (1.3.1). **Если на поверхности S эта нормаль меняется непрерывно, то поверхность S называется ориентированной. При задании ориентации поверхности считается, что поверхность S является двусторонней, и та сторона поверхности, которая прилегает к нормали (1.3.1), называется положительной стороной и обозначается S^+, противоположная же сторона называется отрицательной и обозначается S^-**.

В случае, когда поверхность S является границей некоторой трехмерной области Ω, иногда поверхность представляют двусторонней иным образом — именно, выделяют внутреннюю сторону поверхности и внешнюю.

Перейдем к понятию кусочно-гладкой поверхности и к понятию ориентации на такой поверхности.

Пусть $S_1,\dots,S_m$ суть гладкие поверхности с параметризациями $\Phi_i(u,v)$, $(u,v)\in\Omega_i$, $i=1,\dots,m$, и пусть границы γ_i областей Ω_i есть замкнутые кусочно-гладкие кривые без самопересечений с параметризациями $(u_i(t),v_i(t))$, $a_i\le t\le b_i$, $i=1,\dots,m$. Обозначим

$$\Gamma_i=\{\Phi_i(u_i(t),v_i(t)),\quad a_i\le t\le b_i\},\quad i=1,\dots,m.$$

Две поверхности S_i и S_j называются соседними, если кривые Γ_i и Γ_j имеют одну или несколько общих дуг (общих участков, не вырождающихся в точку).

В дальнейшем будем предполагать, что любые два контура Γ_i и Γ_j имеют конечное число общих участков, и что любая дуга, являющаяся частью кривой Γ_i, может быть дугой не более чем одной другой кривой Γ_j.

Поверхность S, состоящая из конечного числа гладких поверхностей $S_1,\dots,S_m$, называется кусочно-гладкой поверхностью, если для любых двух ее частей S_i и S_j существуют поверхности $S_{i_1},\dots,S_{i_p}$, входящие в S и такие, что S_{i_1} является соседней с S_i, S_{i_2} является соседней с $S_{i_3},\dots,S_{i_p}$ является соседней с S_j.

Совокупность всех тех дуг кривых Γ_i, каждая из которых принадлежит только самому контуру Γ_i, называется краем кусочно-гладкой поверхности S.

Кусочно-гладкая поверхность $\boldsymbol{S}$, состоящая из $\boldsymbol{m}$ частей $\boldsymbol{S_1, \ldots, S_m}$, называется ориентируемой, если существует такая ориентация кривых $\boldsymbol{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m}$ (границ поверхностей $\boldsymbol{S_1, \ldots, S_m}$), что части (дуги) этих кривых, принадлежащие двум различным кривым $\boldsymbol{\Gamma_i}$ и $\boldsymbol{\Gamma_j}$, получают от них противоположную ориентацию. Если поверхность S ориентируема, то указанная ориентация кривых $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ называется **согласованной**.

Напомним, что ориентация кривых определяется их параметризацией.

Пусть S есть ориентируемая кусочно-гладкая поверхность, состоящая из гладких поверхностей S_1, ..., S_m. Далее, пусть на каждой гладкой поверхности S_j задана такая ее ориентация — те есть задана либо нормаль, вычисляемая по формуле (1.3.1), либо противоположная ей нормаль — что она согласуется с определенной выше ориентацией кривой Γ_j по "правилу штопора" : обход кривой Γ_j соответствует движению ручки штопора, которая расположена в конечной точке нормали, против движения часовой стрелки. **В этом случае будем говорить, что ориентации поверхностей $\boldsymbol{S_1, \ldots, S_m}$ согласованы**.

Совокупность согласованно ориентированных кривых $\boldsymbol{\Gamma_1}$, ..., $\boldsymbol{\Gamma_m}$ и согласованных ориентаций поверхностей $\boldsymbol{S_1}$, ..., $\boldsymbol{S_m}$ называется ориентацией кусочно-гладкой поверхности $\boldsymbol{S}$.

Пусть S есть ориентируемая кусочно-гладкая поверхность. Выберем согласованные ориентации на поверхностях $S_1, \ldots, S_m$ и обозначим их S_1^+, ..., S_m^+, соответственно всю поверхность S обозначим S^+. Далее, обозначим через $S_1^-, \ldots, S_m^-$ поверхности, ориентированные противоположно по отношению к поверхностям $S_1^+, \ldots, S_m^+$; всю поверхность S в этом случае будем обозначать S^-.

1.3.3. Первая квадратичная форма поверхности

Важную роль в теории поверхностей играют некоторые специальные квадратичные формы.

Пусть S есть гладкая поверхность, $\Phi(u,v) = (f(u,v), g(u,v), h(u,v))$, $(u,v) \in \overline{\Omega}$ — ее параметризация. Обозначим $E(u,v) = (\Phi_u(u,v), \Phi_u(u,v))$, $F(u,v) = (\Phi_u(u,v), \Phi_v(u,v))$, $G(u,v) = (\Phi_v(u,v), \Phi_v(u,v))$ (внешние скобки в правых частях означают скалярное произведение векторов в пространстве $\mathbb{R}^3$).

Квадратичная форма

$$\boldsymbol{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} \qquad \textbf{(1.3.2)}$$

относительно переменных $\boldsymbol{du}$ и $\boldsymbol{dv}$ называется первой квадратичной формой поверхности $\boldsymbol{S}$ (в точке $\boldsymbol{(u, v)}$, так как $\boldsymbol{E = E(u, v)}$, $\boldsymbol{F = F(u, v)}$, $\boldsymbol{G = G(u, v)}$).

Тот факт, что квадратичная форма (1.3.2) названа первой, подразумевает, что с поверхностями можно связать и другие квадратичные формы. Однако их определение не является необходимым для изложения дальнейшего материала.

Через коэффициенты первой квадратичной формы поверхности можно вычислять некоторые количественные характеристики — находить длины кривых, лежащих на поверхности, площадь поверхности или ее части и т. д.

Пусть S есть гладкая поверхность, и пусть Γ есть кривая на поверхности S, задаваемая параметризацией $\Phi(u(t), v(t))$, $a \leq t \leq b$. Длина L этой кривой вычисляется по формуле

$$L = \int\limits_a^b \left[E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt.$$

Приведем теперь формулу для площади гладкой поверхности.

Площадь гладкой поверхности $\boldsymbol{S}$, определяемой параметризацией $\boldsymbol{\Phi(u, v)}$, $\boldsymbol{(u, v) \in \Omega}$, вычисляется по формуле

$$\operatorname{mes} S = \iint\limits_{\Omega} \left(EG - F^2 \right)^{\frac{1}{2}} du\,dv.^{5}$$

Уточним, что количественные значения длины кривой на поверхности, площади поверхности и т.п., не зависят от выбора параметризации поверхности S. Строгое доказательство этих фактов, а также строгое представление о площади поверхности в настоящем пособии приводить не будем.[6]

1.4. Поверхностные интегралы

1.4.1. Поверхностные интегралы первого рода

[5] $\operatorname{mes} S$ (measure) — мера, или площадь поверхности.

[6] Все необходимые доказательства можно найти в учебниках по дифференциальной геометрии.

Пусть S есть гладкая поверхность, заданная параметризацией $\Phi(u, v)$, $(u, v) \in \overline{\Omega}$. Далее, пусть задана функция $F(u, v)$, представляющая собой суперпозицию некоторой функции $F_0(x, y, z)$ и функции Φ:

$$F(u, v) = F_0(f(u, v), g(u, v), h(u, v)).$$

Поверхностным интегралом первого рода от функции $\boldsymbol{F_0(x, y, z)}$ по поверхности $\boldsymbol{S}$ называется интеграл

$$\boldsymbol{I = \iint\limits_{\Omega} F(u, v)\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,}$$

если указанный двойной интеграл существует и конечен. Обозначается поверхностный интеграл первого рода следующим образом

$$I = \int\limits_S F_0\, ds;$$

как синоним понятия поверхностный интеграл первого рода, употребляется также термин "поверхностный интеграл по площади".

Как следует из определения, поверхностный интеграл первого рода существует, если существует двойной интеграл I.

Если поверхность $\boldsymbol{S}$ кусочно-гладкая и состоит из гладких поверхностей $\boldsymbol{S_1, \dots, S_m}$, то поверхностный интеграл первого рода определяется естественным образом как сумма соответствующих интегралов по $\boldsymbol{S_1, \dots, S_m}$.

Очевидно, что поверхностный интеграл первого рода обладает свойством линейности:

$$\int\limits_S (\alpha F_1 + \beta F_2)\, ds = \alpha \int\limits_S F_1\, ds + \beta \int\limits_S F_2\, ds.$$

Далее, очевидно, что выполняется равенство

$$\int\limits_S dS = \operatorname{mes} S.$$

Наконец, заметим, что численное значение поверхностного интеграла первого рода не зависит от выбора параметризации.

1.4.2. Поверхностные интегралы второго рода

Вновь рассмотрим вначале случай гладкой поверхности.

Пусть на гладкой поверхности S с параметризацией $\Phi(u,v)$, $(u,v)\in\overline{\Omega}$, зафиксирована нормаль $\vec{n}$ (вычисляемая с помощью формулы (1.3.1)). Определим единичную нормаль

$$\vec{\nu}=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}.$$

Единичная нормаль $\vec{\nu}$, как и просто нормаль $\vec{n}$, задает ориентацию поверхности и определяет поверхности S^+ и S^-. Обозначим через α, β, γ углы между вектором $\vec{\nu}$ и положительным направлением осей Ox, Oy и Oz соответственно.

Пусть вновь задана функция $F(u,v)$, представляющая собой суперпозицию некоторой функции $F_0(x,y,z)$ и функции $\Phi(u,v)$.

Поверхностным интегралом второго рода от функции $\boldsymbol{F_0(x,y,z)}$ по поверхности $\boldsymbol{S^+}$ и по координатам $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ называется интеграл

$$\boldsymbol{I=\int\limits_{S} F_0\cos\gamma\, ds,}$$

если последний интеграл существует. Обозначается поверхностный интеграл второго рода так

$$I=\int\limits_{S^+} F_0\,dx\,dy.$$

Вполне аналогично — **с заменой множителя $\boldsymbol{\cos\gamma}$ на множитель $\boldsymbol{\cos\alpha}$ или же $\boldsymbol{\cos\beta}$ — определяются интегралы от функции $\boldsymbol{F_0(x,y,z)}$ по поверхности $\boldsymbol{S^+}$ по координатам $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{x}$ соответственно**.

Поверхностные интегралы второго рода от функции $\boldsymbol{F_0(x,y,z)}$ по поверхности $\boldsymbol{S^-}$ по координатам $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, или $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, или $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{x}$ определяются изменением знака у соответствующего интеграла по поверхности $\boldsymbol{S^+}$ на противоположный (например,

$$\int\limits_{S^-} F_0\,dx\,dy=-\int\limits_{S^+} F_0\,dx\,dy).$$

Свойство линейности для поверхностного интеграла второго рода очевидным образом сохраняется.

Перейдем к определению поверхностного интеграла второго рода по кусочно-гладкой поверхности.

Пусть S есть кусочно-гладкая поверхность, состоящая из частей $S_1, \dots, S_m$, и пусть на S имеется согласованная ориентация S^+. Далее, пусть на S задана функция $F_0(x, y, z)$.

Поверхностным интегралом второго рода по поверхности S^+ по координатам x, y называется сумма

$$I = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{S_i^+} F_0 \, dx \, dy.$$

Интегралы по координатам y, z и z, x определяются подобным же образом. Интегралы по поверхности S^- определяются, как и в случае гладкой поверхности, изменением знака у соответствующего интеграла по поверхности S^+ на противоположный.

Замечание 1. Понятие кусочно-гладкой поверхности исключает поверхности типа конуса. Однако в ряде случаев на такие поверхности вполне можно перенести все построения, касающиеся поверхностных интегралов (как первого, так и второго рода), если смотреть на конус как на поверхность, полученную предельным переходом в семействе кусочно-гладких поверхностей (именно, усеченных конусов с "отрезанной вершиной").

Замечание 2. Поскольку и поверхностный интеграл первого рода, и поверхностный интеграл второго рода сводятся к двойному интегралу, то на поверхностные интегралы можно распространить некоторые понятия, связанные именно с двойным интегралом — например, можно построить теорию несобственных поверхностных интегралов.

1.4.3. Формула Гаусса[7] — Остроградского[8]

Формула Гаусса — Остроградского в теории поверхностных интегралов играет такую же роль, как формула Грина в теории криволинейных интегралов.

Область G из пространства $\mathbb{R}^3$ называется элементарной относительно оси Oz, если ее граница S состоит из двух поверхностей S_1 и S_2, имеющих явное представление $z = \varphi(x, y)$ и $z = \psi(x, y)$, $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ (такие поверхности очевидным образом параметризуются: $x = u$, $y = v$, $z = \varphi(u, v)$, $(u, v) \in \Omega$ или же $x = u$,

[7] К.Ф. Гаусс (1777—1855) — немецкий математик.

[8] М.В. Остроградский (1801—1861) — русский математик.

$y = v$, $z = \psi(u, v)$, $(u, v) \in \Omega$) и таких, что при $(x, y) \in \Omega$ выполняется неравенство $\varphi(x, y) \le \psi(x, y)$ и, быть может, части S_0 цилиндра, составленного из отрезков прямых, параллельных оси Oz и соединяющих точки $(x, y, \varphi(x, y))$ и $(x, y, \psi(x, y))$, $(x, y) \in \partial\Omega$.

Аналогично определяются области, **элементарные относительно осей Ox и Oy**.

Область G из пространства $\mathbb{R}^3$ называется элементарной, если она элементарна относительно всех трех осей Ox, Oy, Oz.

Если поверхность S является границей некоторой области G из пространства $\mathbb{R}^3$, то тогда эту поверхность можно представить как поверхность S^+ — т.е. как поверхность, прилегающую к нормали, вычисляемой по формуле (1.3.1), либо же как поверхностьS^- — как поверхность, противоположную нормали (1.3.1), и при этом может оказаться, что разные части S будут по разному ориентированы. В ряде случаев более удобным является другой подход к ориентации границ областей — подход, предполагающий ориентацию поверхности с помощью внутренней либо внешней нормали. При таком подходе граница S области G является либо внутренней — прилегающей к внутренней нормали, либо внешней — прилегающей к внешней нормали стороной поверхности S.

Теорема 1.4.1. *Пусть область G из пространства $\mathbb{R}^3$ такова, что ее можно разбить кусочно-гладкими поверхностями на конечное число элементарных областей. Далее, пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, а также их частные производные $P_x(x, y, z)$, $Q_y(x, y, z)$, $R_z(x, y, z)$ определены и непрерывны при $(x, y, z) \in \overline{G}$. Тогда имеет место равенство*

$$\int_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, ds = \int\!\!\int_G\!\!\int (P_x + Q_y + R_z)\, dx\, dy\, dz, \quad (1.4.1)$$

в котором $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ есть направляющие косинусы вектора внешней нормали к границе S области G.

Доказательство. Пусть вначале сама область G элементарна. Рассмотрим интеграл

$$\int\!\!\int_G\!\!\int R_z(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Вследствие элементарности G относительно оси Oz имеем

$$\int\!\!\int_G\!\!\int R_z(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\!\!\int_\Omega \Big(\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} R_z(x,y,z)\,dz\Big)\,dx\,dy =$$

$$= \int\!\!\int_\Omega [R(x,y,\psi(x,y)) - R(x,y,\varphi(x,y))]\,dx\,dy.$$

С другой стороны, учитывая представление $z = \varphi(x,y)$ и $z = \psi(x,y)$, $(x,y) \in \Omega$, поверхностей S_1 и S_2, вычисляя нормаль (1.3.1), получим

$$\int\!\!\int_\Omega R(x,y,\psi(x,y))\,dx\,dy = \int_{S_2^+} R\,dx\,dy,$$

$$\int\!\!\int_\Omega R(x,y,\varphi(x,y))\,dx\,dy = \int_{S_1^+} R\,dx\,dy.$$

Вспоминая далее определение поверхностного интеграла второго рода, учитывая, что на поверхности S_2^+ нормаль (1.3.1) является внешней, на поверхности же S_1^+ — внутренней, переходя к единой — внешней — нормали, придем к равенствам

$$\int_{S_2^+} R\,dx\,dy = \int_{S_2} R\cos\gamma\,ds,$$

$$\int_{S_1^+} R\,dx\,dy = -\int_{S_1} R\cos\gamma\,ds.$$

Наконец, учитывая равенство

$$\int_{S_0} R\cos\gamma\,dS = 0$$

(являющееся следствием равенства $\cos\gamma = 0$), получаем окончательно, что имеет место формула

$$\int\!\!\int_G\!\!\int R_z(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_S R\cos\gamma\,ds.$$

Совершенно аналогично показывается, что имеют место формулы

$$\iiint\limits_G P_x(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_S P\cos\alpha\,ds,$$

$$\iiint\limits_G Q_y(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_S Q\cos\beta\,ds.$$

Суммируя последние три формулы, получим требуемое равенство (1.4.1).

Пусть теперь область G есть множество $G = G_1 \cup G_2 \cup S^*$, причем G_1 и G_2 есть элементарные области, S^* есть разделяющая их кусочно-гладкая поверхность. Представляя интеграл по области G в виде суммы интегралов по областям G_1 и G_2 (что возможно вследствие свойства аддитивности тройного интеграла), применяя формулу (1.4.1) к каждой области G_1 и G_2, учитывая, что внешняя нормаль на поверхности S^* направлена взаимно противоположно по отношению к областям G_1 и G_2, а также то, что оставшиеся части границ областей G_1 и G_2 составят вместе границу G, получим требуемую формулу (1.4.1) для составной области G.

Очевидно, что если область G составлена из более чем двух областей G_1 и G_2 и разделяющих их поверхностей, то рассуждения будут вполне аналогичны, и тем самым формула (1.4.1) будет справедлива и для такой области.

Теорема доказана.

Формула (1.4.1) и называется **формулой Гаусса — Остроградского**. Как и формула Грина, формула Гаусса — Остроградского справедлива для более широкого класса областей.

Теорема 1.4.1$'$. *Пусть область G ограничена в $\mathbb{R}^3$, ее граница S представляет собой кусочно-гладкую поверхность. Далее, пусть функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, а также их частные производные $P_x(x,y,z)$, $Q_y(x,y,z)$, $R_z(x,y,z)$ определены и непрерывны при $(x,y,z) \in \overline{G}$. Тогда имеет место равенство* (1.4.1).

Доказательство этой теоремы основано на возможности аппроксимации кусочно-гладкой поверхности кусочно-плоской поверхностью, области G — областью, являющейся многогранником. Поскольку для многогранника формула (1.4.1) справедлива, то, переходя к пределу по параметру аппроксимации, получим, что формула (1.4.1) будет справедлива и для области, ограниченной кусочно-гладкой поверхностью. Непосредственное осуществление описанной процедуры требует больших технических усилий, и потому приводиться здесь не будет.

Пусть $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ есть функции

$$P(x, y, z) = f(x, y, z) \cdot g(x, y, z), \quad Q(x, y, z) \equiv R(x, y, z) \equiv 0.$$

Формула Гаусса — Остроградского для таких функций дает равенство

$$\int\!\!\int_G\!\!\int f_x g\,dx\,dy\,dz = -\int\!\!\int_G\!\!\int f g_x\,dx\,dy\,dz + \int_S f g \cos\alpha\,ds. \qquad (1.4.2)$$

Аналогично, если $P(x, y, z) \equiv R(x, y, z) \equiv 0$, $Q(x, y, z) = f(x, y, z) \cdot g(x, y, z)$, либо $P(x, y, z) \equiv Q(x, y, z) \equiv 0$, $R(x, y, z) = f(x, y, z) \cdot g(x, y, z)$, из формул (1.4.1) можно вывести равенства

$$\int\!\!\int_G\!\!\int f_y g\,dx\,dy\,dz = -\int\!\!\int_G\!\!\int f g_y\,dx\,dy\,dz + \int_S f g \cos\beta\,ds, \qquad (1.4.3)$$

$$\int\!\!\int_G\!\!\int f_z g\,dx\,dy\,dz = -\int\!\!\int_G\!\!\int f g_z\,dx\,dy\,dz + \int_S f g \cos\gamma\,ds. \qquad (1.4.4)$$

Равенства (1.4.2)—(1.4.4) представляют собой **формулы интегрирования по частям в трехмерном случае**.

1.4.4. Формула Стокса[9] и независимость криволинейных интегралов второго рода от пути интегрирования

Пусть S есть поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3$, заданная параметризацией $\Phi(u, v)$, $(u, v) \in \overline{\Omega}$, и пусть вектор-функция $\Phi(u, v)$ есть дважды непрерывно дифференцируемая при $(u, v) \in \overline{\Omega}$ функция, поверхность S при этом не имеет особых точек. Далее, пусть Ω есть плоская ограниченная область такая, что для нее выполняется формула Грина (1.2.1) (при выполнении нужных условий гладкости для подынтегральных функций), γ_0 есть граница области Ω, и эта граница представляет собой замкнутую кусочно-гладкую кривую без самопересечений с положительным направлением обхода и с параметризацией $(u(t), v(t))$, $t \in [a, b]$. На поверхности S определена нормаль $\vec{\nu}$ (см. (1.4.1)), и пусть эта нормаль есть вектор $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Определим кривую γ в пространстве $\mathbb{R}^3$ как кривую с параметризацией $\Phi(u(t), v(t))$, $t \in [a, b]$, и пусть эта **кривая представляет собой границу,**

[9] Д. Стокс (1819—1903) — английский механик и математик.

или край поверхности $\boldsymbol{S}$ (говорят также, что поверхность S натянута на кривую γ).

Наконец, пусть область G из пространства $\mathbb{R}^3$ есть такая область, что выполняется вложение $S \subset G$, и пусть функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ определены при $(x,y,z) \in G$.

Теорема 1.4.2. *Пусть функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны в области G вместе со всеми своими первыми частными производными, для поверхности S, для кривых γ_0 и γ выполняются сделанные выше предположения. Тогда выполняется равенство*

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \int\limits_{S} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] ds. \tag{1.4.5}$$

Доказательство. В соответствии с определением криволинейного интеграла второго рода для первого слагаемого левой части (1.4.5) имеем

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx = \int\limits_{a}^{b} P(f(u(t),v(t)), g(u(t),v(t)), h(u(t),v(t))) \frac{d}{dt}[f(u(t),v(t))]\,dt$$

(напомним, что $\Phi(u,v) = (f(u,v), g(u,v), h(u,v))$). Вычисляя полную производную $\frac{d}{dt}[f(u(t),v(t))]$, получим

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx = \int\limits_{a}^{b} P(f(u(t),v(t)), g(u(t),v(t)), h(u(t),v(t))) \times$$

$$\times [f_u(u(t),v(t))u'(t) + f_v(u(t),v(t))]\,dt.$$

С другой стороны, рассмотрим криволинейный интеграл по кривой γ_0 в плоскости (u,v) от функции $P(f(u,v), g(u,v), h(u,v)) f_v(u,v)$ по координате v. Имеет место равенство

$$\int\limits_{\gamma_0} P(f(u,v), g(u,v), h(u,v)) f_u(u,v)\,du + P(f(u,v), g(u,v), h(u,v)) f_v(u,v)\,dv$$

$$= \int\limits_a^b P(f(u(t),v(t)), g(u(t),v(t)), h(u(t),v(t))) f_u(u(t),v(t)) u'(t)\, dt +$$

$$+ \int\limits_a^b P(f(u(t),v(t)), g(u(t),v(t)), h(u(t),v(t))) f_v(u(t),v(t)) v'(t)\, dt.$$

Отсюда

$$\int\limits_\gamma P\, dx = \int\limits_{\gamma_0} P(f(u,v), g(u,v), h(u,v))[f_u(u,v)\, du + f_v(u,v)\, dv]. \qquad (1.4.6)$$

Обозначим

$$P_1(u,v) = P(f(u,v), g(u,v), h(u,v)) f_u(u,v),$$
$$Q_1(u,v) = P(f(u,v), g(u,v), h(u,v)) f_v(u,v).$$

Интеграл по кривой γ_0 преобразуем, используя формулу Грина:

$$\int\limits_{\gamma_0} P_1\, du + Q_1\, dv = \iint\limits_\Omega \left(\frac{\partial Q_1}{\partial u} - \frac{\partial P_1}{\partial v}\right) du\, dv = \iint\limits_\Omega \left\{ \left[\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}\frac{\partial f(u,v)}{\partial u} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}\frac{\partial g(u,v)}{\partial u} + \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial h(u,v)}{\partial u}\right] \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} + P(x,y,z)\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u \partial v} -$$

$$- \left[\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}\frac{\partial f(u,v)}{\partial v} + \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}\frac{\partial g(u,v)}{\partial v} + \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial h(u,v)}{\partial v}\right] \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}$$

$$\left. - P(x,y,z)\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u \partial v}\right\} du\, dv =$$

$$= \iint\limits_\Omega \left\{ \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\left[\frac{\partial h(u,v)}{\partial u}\cdot\frac{\partial f(u,v)}{\partial v} - \frac{\partial h(u,v)}{\partial v}\cdot\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}\left[\frac{\partial g(u,v)}{\partial u}\cdot\frac{\partial f(u,v)}{\partial v} - \frac{\partial g(u,v)}{\partial v}\cdot\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\right]\right\} du\, dv.$$

Вычисляя далее поверхностные интегралы первого рода по поверхности S от функции $\frac{\partial P}{\partial x}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma$ (с вычислением коэффициентов первой квадратичной формы поверхности S и нормали $\vec{\nu}$), получим равенство

$$\int\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial x}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) ds = \iint\limits_\Omega \left\{ \frac{\partial P}{\partial z}\left[\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u}\right] - \right.$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y}\left[\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u}\right]\right\} du\,dv.$$

Полученное равенство и равенство (1.4.6) дают

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx=\int\limits_{S}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)ds. \qquad (1.4.7)$$

Действуя аналогично, нетрудно получить еще два равенства

$$\int\limits_{\gamma} Q\,dy=\int\limits_{S}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma-\frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right)ds, \qquad (1.4.8)$$

$$\int\limits_{\gamma} R\,dz=\int\limits_{S}\left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha-\frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right)ds. \qquad (1.4.9)$$

Сложив (1.4.7), (1.4.8) и (1.4.9), получим требуемое равенство (1.4.5).

Теорема доказана.

Равенство (1.4.5) и представляет собой **формулу Стокса**.

Для запоминания формулы Стокса можно предложить следующее: подынтегральное выражение в равенстве (1.4.5) представляет собой определитель

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

если при раскрытии его заменить умножение на действие соответствующих операторов $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$.

В условии теоремы 1.4.2 **условие дважды непрерывной дифференцируемости вектор-функции $\boldsymbol{\Phi(u,v)}$ можно заменить условием гладкости поверхности $\boldsymbol{S}$**. Доказательство справедливости равенства (1.4.5) в этом случае будет основано на аппроксимации функций $f(u,v)$, $g(u,v)$, $h(u,v)$ бесконечно дифференцируемыми в $\overline{\Omega}$ функциями и предельном переходе. Осуществлять всю эту процедуру ввиду ее громоздкости мы не будем.

И еще одно замечание — формулу Стокса можно применять и для кусочно-гладких поверхностей S с согласованной ориентацией: подразумевается, что поверхность S представляется как объединение конечного числа гладких поверхностей, к каждой из них применяется формула Стокса, интегралы же по кривым, являющимся общей частью границы соседних поверхностей, взаимно сокращаются.

Обсудим теперь вопрос о независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования в трехмерном случае.

Будем называть поверхности $\boldsymbol{S}$ из пространства $\mathbb{R}^3$, к которым применима формула Стокса, допустимыми.

Область $\boldsymbol{G}$ из пространства $\mathbb{R}^3$ называется поверхностно односвязной, если для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\boldsymbol{\gamma}$ без самопересечений, лежащей в $\boldsymbol{G}$, существует допустимая поверхность $\boldsymbol{S}$, также лежащая в $\boldsymbol{G}$ и натянутая на эту кривую.

Теорема 1.4.3. *Пусть G есть поверхностно односвязная область из пространства $\mathbb{R}^3$, $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ есть заданные определенные в G непрерывные вместе со всеми своими первыми частными производными функции. Для функций $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ имеет место свойство независимости криволинейного интеграла второго рода от формы $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ от пути интегрирования тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:*

1. *Для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой γ, целиком лежащей в G, выполняется*

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0;$$

2. *Существует функция $u(x,y,z)$ такая, что для любых точек (x,y,z) из G выполняется*

$$du(x,y,z) = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz;$$

3. *Для любых точек (x,y,z) из G выполняются равенства*

$$\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}.$$

Доказательство. Эквивалентность условия 1 и свойства независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования показывается также, как устанавливался аналогичный факт в двумерном случае — см. доказательство теоремы 1.2.3. Далее, вновь аналогично доказательству теоремы 1.2.3 показывается, что из свойства независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования следует выполнимость условия 2, и что из выполнимости условия 2 следует, что криволинейный интеграл второго рода от формы $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ обладает свойством независимости от пути интегрирования.

Докажем эквивалентность свойства независимости криволинейного интеграла второго рода и условия 3.

Если криволинейный интеграл второго рода от формы $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ не зависит от пути интегрирования, то существует функция $u(x, y, z)$ такая, что

$$u_x(x, y, z) = P(x, y, z), \quad u_y(x, y, z) = Q(x, y, z), \quad u_z(x, y, z) = R(x, y, z).$$

Поскольку функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ имеют непрерывные частные производные по всем переменным, то функции $u_x(x, y, z)$, $u_y(x, y, z)$, $u_z(x, y, z)$ также имеют непрерывные частные производные по всем переменным, и при этом вторые смешанные производные от функции $u(x, y, z)$, взятые в разном порядке, будут совпадать. Из равенств вторых смешанных производных функции $u(x, y, z)$ и следуют равенства

$$\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial R(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z}.$$

Обратно, пусть выполняется условие 3, и пусть γ есть замкнутая кусочно-гладкая кривая без самопересечений, лежащая в G. Согласно условию теоремы, существует допустимая поверхность S, лежащая в G и натянутая на кривую γ. Для криволинейного интеграла второго рода

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

имеет место формула Стокса. Вследствие условия 3 правая часть формулы Стокса равна нулю. Но тогда будет выполняться условие 1. Согласно доказанному выше, из условия 1 вытекает, что криволинейный интеграл второго рода от формулы $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ обладает в G свойством независимости от пути интегрирования.

Теорема полностью доказана.

Заметим, что условие поверхностной односвязности области G понадобилось лишь на последнем шаге.

1.5. Элементы векторного анализа

1.5.1. Градиент, дивергенция, ротор, циркуляция и поток векторного поля

Язык векторного анализа удобен как при описании многих математических объектов, так и при описании ряда физических понятий и законов.

Как и ранее, ограничимся трехмерным случаем. И, как и ранее, будем считать, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ задан стандартный декартов базис с единичными координатными векторами $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Пусть G есть некоторая область из пространства $\mathbb{R}^3$, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ есть заданные функции, определенные при $(x, y, z) \in G$. **Эти три функции каждой точке (x, y, z) ставят в соответствие вектор $(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$; совокупность таких векторов образует векторное поле $\vec{a}(x, y, z)$**.

Пусть $u(x, y, z)$ есть **числовая**, или **скалярная**, функция, определенная при $(x, y, z) \in G$ и имеющая все первые частные производные. **Вектор $(u_x(x, y, z), u_y(x, y, z), u_z(x, y, z))$ называется градиентом функции $u(x, y, z)$; обозначается градиент grad$u$. Совокупность векторов grad$u(x, y, z)$ образует векторное поле градиентов. Обратно, пусть в области G задано векторное поле $\vec{a}(x, y, z)$, и пусть существует определенная в G функция $u(x, y, z)$ такая, что $\vec{a}(x, y, z) =$ grad$u(x, y, z)$. Тогда функция $u(x, y, z)$ называется потенциальной функцией, или потенциалом векторного поля $\vec{a}$**.

Определим оператор ∇ ("набла"):

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Используя этот вектор, можно записать

$$\mathrm{grad}\, u = \nabla u.$$

Пусть векторное поле $\vec{a}(x, y, z)$ таково, что функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ имеют всюду в G частные производные по переменным x, y, z соответственно. **Функция $P_x(x, y, z) + Q_y(x, y, z) + R_z(x, y, z)$ называется дивергенцией векторного поля $\vec{a}$ и обозначается div $\vec{a}(x, y, z)$**.

Используя вектор ∇, дивергенцию векторного поля $\vec{a}$ можно определить как скалярное произведение векторов ∇ и $\vec{a}$: $\operatorname{div}\vec{a} = \nabla\vec{a}$.

Пусть теперь функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ всюду в G имеют все первые частные производные.

Вектор

$$\boldsymbol{\left(\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z}, \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} - \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}\right)}$$

называется вихрем, или ротором векторного поля $\boldsymbol{\vec{a}}$ и обозначается $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\vec{a}(x,y,z)}$.

Символически вектор $\operatorname{rot}\vec{a}$ можно представить как определитель

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Определим еще некоторые понятия, связанные теперь с интегральными характеристиками векторного поля.

Пусть γ есть замкнутая кусочно-гладкая кривая, без самопересечений, лежащая в G. **Интеграл**

$$\int\limits_{\gamma} \boldsymbol{P\,dx + Q\,dy + R\,dz}$$

называется циркуляцией векторного поля $\boldsymbol{\vec{a}(x,y,z)}$ по кривой $\boldsymbol{\gamma}$.

Пусть S есть некоторая ориентированная поверхность, лежащая в G, и пусть ее ориентацию определяет единичная нормаль $\vec{\nu}$, вычисляемая с помощью формулы (1.3.1), в случае если поверхность S не является границей некоторой области G', лежащей в G, или же внешняя нормаль, если поверхность S является границей области G'. **Интеграл**

$$\int\limits_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{(\vec{a},\vec{\nu})\,ds}$$

($\boldsymbol{(\vec{a},\vec{\nu})}$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{\vec{a}}$ и $\boldsymbol{\vec{\nu}}$) называется потоком векторного поля $\boldsymbol{\vec{a}(x,y,z)}$ через поверхность $\boldsymbol{S}$.

Используя введенные понятия векторного анализа, нетрудно теперь переформулировать теоремы 1.4.1′ и 1.4.2.

Теорема 1.4.1$''$. *Пусть выполняются все условия теоремы* 1.4.1$'$. *Тогда интеграл от дивергенции векторного поля* $\vec{a}(x, y, z)$ *по области* G *равен потоку этого поля через границу* G.

Теорема 1.4.2$'$. *Пусть выполняются все условия теоремы* 1.4.2. *Тогда циркуляция векторного поля* $\vec{a}(x, y, z)$ *по контуру* γ *равна потоку ротора этого поля через поверхность* S, *натянутую на* γ.

1.5.2. Потенциальные и соленоидальные векторные поля

Пусть G есть некоторая область из пространства $\mathbb{R}^3$, и пусть в G задано векторное поле $\vec{a}(x, y, z)$.

Если циркуляция векторного поля $\vec{a}(x, y, z)$ по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой без самопересечений, лежащей в области G, равна нулю, то это поле называется потенциальным.

Теорема 1.5.1. *Пусть область* G *поверхностно односвязна, и пусть в* G *задано непрерывно-дифференцируемое векторное поле* $\vec{a}(x, y, z)$. *Это векторное поле будет потенциальным в* G *тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:*

1. *криволинейный интеграл второго рода от формы* $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ *обладает свойством независимости от пути интегрирования*;

2. *существует функция* $u(x, y, z)$ *такая, что для любых точек* (x, y, z) *из* G *выполняется*

$$du(x, y, z) = P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz;$$

3. *векторное поле* $\vec{a}(x, y, z)$ *является безвихревым в* G: $\operatorname{rot}\vec{a}(x, y, z) = 0$ *при* $(x, y, z) \in G$.

Доказательство теоремы 1.5.1 совпадает с доказательством теоремы 1.4.3.

Пусть G' есть произвольная ограниченная подобласть области G. **Если граница области G' является кусочно-гладкой поверхностью, любые две части которой можно соединить цепочкой ее гладких составляющих, то область G' называется допустимой. Поверхность S', лежащая в G и являющаяся границей допустимой области G', называется допустимой поверхностью**.

Область G из пространства $\mathbb{R}^3$ называется объемно-односвязной, если для любой замкнутой поверхности S', лежащей в G и являющейся границей ограниченной трехмерной области G', вся область G' содержится в G.

Заданное в области G векторное поле $\vec{a}(x,y,z)$ называется соленоидальным, если его поток через любую лежащую в G допустимую поверхность равен нулю.

Теорема 1.5.2. *Непрерывно-дифференцируемое в объемно-односвязной области G векторное поле $\vec{a}(x,y,z)$ будет соленоидальным тогда и только тогда, когда его дивергенция в каждой точке G равна нулю.*

Доказательство. Если $\operatorname{div}\vec{a}(x,y,z) = 0$ в каждой точке G, то соленоидальность поля $\vec{a}(x,y,z)$ следует из объемной односвязности G и теоремы 1.4.1$''$.

Пусть теперь векторное поле $\vec{a}(x,y,z)$ соленоидально в области G. Зафиксируем точку $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ из G. Обозначим через $S_R(M_0)$ семейство сфер с центром в точке M_0 радиуса R. Вследствие открытости G существует положительное число R_0 такое, что при $R < R_0$ все эти сферы будут лежать в G. Имеет место равенство

$$\iiint\limits_{B_R(M_0)} \operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz = 0$$

($B_R(M_0)$ — соответствующие шары радиуса R с центром в точке M_0). С другой стороны, вследствие интегральной теоремы о среднем в каждом шаре $B_R(M_0)$ найдется точка $(x(R), y(R), z(R))$ такая, что

$$\iiint\limits_{B_R(M_0)} \operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz = \operatorname{div}\vec{a}(x(R), y(R), z(R)) \cdot \operatorname{mes} B_R(M_0).$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{div}\vec{a}(x(R), y(R), z(R)) = 0.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $R \to 0$ и учитывая, что векторное поле $\vec{a}(x,y,z)$ непрерывно в G, получим

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_0) = 0.$$

В силу произвольности точки M_0 получаем требуемое: $\operatorname{div}\vec{a}(x,y,z) = 0$ всюду в G.

Теорема доказана.

1.6. Гладкие многообразия

Кривые в пространстве $\mathbb{R}^n$, поверхности в пространстве $\mathbb{R}^3$ представляют собой частный случай геометрических объектов, называемых **многообразиями**.

Пусть n и m есть натуральные числа, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$.

Многообразием в пространстве $\mathbb{R}^{n+m}$ называется множество S такое, что для любой точки (x^0, y^0), $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, $y^0 = (y_1^0, \ldots, y_m^0)$, из S и для любого положительного числа ε найдутся параллелепипеды Π_x и Π_y

$$\boldsymbol{\Pi_x = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x_i - x_i^0| \leq \delta_i, \quad i = 1, \ldots, n\},}$$

$$\boldsymbol{\Pi_y = \{y \in \mathbb{R}^m : \quad |y_j - y_j^0| \leq \sigma_j, \quad j = 1, \ldots, m\}}$$

и функция $f(x)$ такие, что

$$\boldsymbol{\left[(x_1 - x_1^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2 + (y_1 - y_1^0)^2 + \ldots + (y_m - y_m^0)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \varepsilon,}$$

и при $x \in \Pi_x$, $y \in \Pi_y$ выполняется $y = f(x)$.

Если функция $f(x)$ непрерывна при $x \in \Pi_x$, то многообразие S называется непрерывным, если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема при $x \in \Pi_x$, то многообразие S называется непрерывно-дифференцируемым, или гладким.

Число n называется **размерностью** многообразия.

Параметризованная кривая в $\mathbb{R}^{\ltimes}$ является одномерным многообразием, параметризованная поверхность в $\mathbb{R}^3$ — двумерным многообразием.

Интегрирование на многообразиях в целом — раздел математического анализа, требующий построения весьма серьезного математического аппарата. В рамках настоящего курса сделать это не представляется возможным.

1.7. Контрольные вопросы, задачи и упражнения

1. Как задаются непрерывные кривые в пространстве $\mathbb{R}^n$?

2. Всегда ли во внутренней точке непрерывной кривой существует касательная?

3. Какие кривые называются спрямляемыми?

4. Существуют ли неспрямляемые кривые? Существуют ли неспрямляемые кривые, расположенные в ограниченной части плоскости (например, в круге $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$)?

5. Как определяется нормаль к кривой?

6. Как определяются и какие свойства имеют криволинейные интегралы первого рода?

7. Как определяются и какие свойства имеют криволинейные интегралы второго рода?

8. Можно ли определить криволинейные интегралы первого и второго рода в случае кривых бесконечной длины?

9. Можно ли определить криволинейные интегралы первого и второго рода в случае, если подынтегральная функция неограничена на данной кривой?

10. Всегда ли криволинейные интегралы второго рода на плоскости не зависят от пути интегрирования?

11. Пусть Γ есть плоская гладкая кривая без особых точек, A и B — ее начальная и конечная точки, C_1 и C_2 — две внутренние (различные) точки Γ. Справедливо ли равенство

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AC_1}} F\,dx + \int\limits_{\overset{\frown}{C_1B}} F\,dx = \int\limits_{\overset{\frown}{AC_2}} F\,dx + \int\limits_{\overset{\frown}{C_2B}} F\,dx$$

(F — заданная непрерывная функция)?

12. Можно ли вычислить площадь плоской области с помощью формулы Грина?

13. Что представляет собой формула Грина для многосвязной области?

14. Пусть Ω есть плоская область с гладкой границей Γ, $u(x,y)$ есть дважды непрерывно дифференцируемая в $\overline{\Omega}$ функция. Доказать, что выполняется равенство

$$\iint\limits_{\Omega} u(u_{xx}+u_{yy})\,dx\,dy = -\iint\limits_{\Omega}(u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy + \int\limits_{\Gamma} u\frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds$$

(ν — внешняя нормаль к Γ в текущей точке).

15. Можно ли с помощью криволинейных интегралов находить длину кривой?

16. Доказать, что величина интеграла

$$\int\limits_{\Gamma} (2xy-y)\,dx + x^2dy$$

в случае, если Γ есть замкнутая гладкая кривая без самопересечений, есть площадь области, ограниченной этой кривой.

17. При каких n криволинейный интеграл второго рода от функции

$$\frac{(x-y)\,dx+(x+y)\,dy}{(x^2+y^2)^n}$$

не зависит от пути интегрирования?

18. При каких a, b и c криволинейный интеграл второго рода от формы $P\,dx+Q\,dy$ не зависит от пути интегрирования:

а) в случае $P(x,y)=x+ay$, $Q(x,y)=bx+cy$;

б) в случае $P(x,y)=e^{ax}\cos by$, $Q(x,y)=e^{ax}\sin cy$?

19. Какие множества в $\mathbb{R}^3$ называются поверхностями?

20. Как задается касательная плоскость к поверхности в неособой точке?

21. Как задается нормаль к поверхности в неособой точке?

22. Пусть S есть гладкая поверхность. Как определяются поверхности S^+ и S^-?

23. Как определяется ориентация поверхности в случаях, если эта поверхность является кусочно-гладкой?

24. Как определяется первая квадратичная форма поверхности?

25. Как определяются и какие свойства имеют поверхностные интегралы первого рода?

26. Как определяются и какие свойства имеют поверхностные интегралы второго рода?

27. Можно ли определить поверхностные интегралы, если подынтегральная функция неограничена в некоторой точке поверхности?

28. Какие области называются элементарными?

29. Как преобразуется формула Гаусса — Остроградского, если вместо внешней нормали использовать внутреннюю?

30. Можно ли вычислить объем трехмерной области с помощью поверхностных интегралов?

31. Что представляет собой формула интегрирования по частям

а) в двумерном случае,

б) в трехмерном случае?

32. Имеет ли место и что представляет собой формула Гаусса — Остроградского для многосвязных областей?

33. Как вычисляется длина гладкой кривой, лежащей на гладкой поверхности?

34. Можно ли, имея формулу Стокса, доказать формулу Грина?

35. При выполнении каких условий криволинейный интеграл второго рода от формы $P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$ не будет зависеть от пути интегрирования?

36. Для каких чисел a, b, c криволинейный интеграл второго рода от формы $P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$ не зависит от пути интегрирования, если

а) $P(x, y, z) = ax + by + cz$, $Q(x, y, z) = bx + cy + az$, $R(x, y, z) = cx + ay + bz$;

б) $P(x, y, z) = e^{ax} \cos by$, $Q(x, y, z) = e^{ax} \sin by$, $R(x, y, z) = cz$?

37. Можно ли криволинейный интеграл второго рода по замкнутой кривой преобразовать к двойному?

38. Пусть Ω есть ограниченная область из пространства $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей S, $u(x, y, z)$ есть дважды непрерывно-дифференцируемая в Ω и непрерывная на $\overline{\Omega}$ функция. Доказать, что если выполняется $u(x, y, z) = 0$ при $(x, y, z) \in S$, $u_{xx}(x, y, z) + u_{yy}(x, y, z) + u_{zz}(x, y, z) = 0$ при $(x, y, z) \in \Omega$, то $u(x, y, z)$ есть тождественно нулевая в $\overline{\Omega}$ функция.

39. Пусть Ω есть ограниченная область из пространства $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей S, $u(x, y, z)$ есть дважды непрерывно дифференцируемая в Ω функция, причем она сама и все ее частные производные первого порядка непрерывны на $\overline{\Omega}$. Доказать, что если выполняется $u_{xx}(x, y, z)+u_{yy}(x, y, z)+u_{zz}(x, y, z) = 0$ при $(x, y, z) \in \Omega$, $\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial \nu} = 0$ при $(x, y, z) \in S$, то $u(x, y, z)$ есть функция, постоянная на множестве $\overline{\Omega}$ (здесь ν есть внешняя нормаль к S).

40. Что представляют собой векторные поля?

41. Как определяются циркуляция, дивергенция, поток и ротор?

42. Какие поля называются потенциальными?

43. Какие поля называются соленоидальными?

44. В каком случае векторное поле имеет потенциал?

45. Если дивергенция векторного поля всюду равна нулю, то каким будет это поле?

46. Пусть $u(x, y, z)$ есть непрерывно-дифференцируемая скалярная функция. Доказать, что имеют место равенства

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}.$$

47. Пусть $\vec{a}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ есть векторное поле такое, что функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывно диффе-

ренцируемы. Доказать, что имеет место равенство

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0.$$

48. Существуют ли векторные поля, являющиеся одновременно потенциальными и соленоидальными?

49. При каких a, b, c векторное поле (ax^2, by^2, cz^2) будет потенциальным? соленоидальным?

50. При каких a, b, c векторное поле $(ax + by, cz + ay, bx + cy)$ будет потенциальным? соленоидальным?

51. Является ли эллипсоид пространства $\mathbb{R}^n$

$$\left\{x = (x_1, \ldots, x_n) : \quad \frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1\right\} \quad (n \geq 2)$$

двумерным многообразием?

РАЗДЕЛ II. Элементы функционального анализа

2.1. Функциональный анализ: методы и объекты

Функциональный анализ как отдельная математическая дисциплина возник в результате взаимодействия и последующего обобщения идей и методов математического анализа, геометрии и алгебры. Важнейшая особенность функционального анализа — абстрактная формулировка рассматриваемых задач, позволяющая объединить и исследовать на основе единого подхода внешне далекие друг от друга вопросы. Потребность перехода на новую степень абстракции была вызвана появлением задач, для которых не годились традиционные методы, а также желанием объединить однотипные по сути методы, применяемые в различных дисциплинах. Сегодня идеи, концепции, методы, терминология, обозначения и стиль функционального анализа пронизывают чуть ли не все области математики, зачастую объединяя их в единое целое. Возрастает и внешняя прикладная направленность функционального анализа — идеи и методы функционального анализа играют огромную роль в современной физике, экономике, кристаллографии, в других научных дисциплинах.

Основными объектами в функциональном анализе являются **функциональные пространства и операторы**. Функциональные пространства определяют уровень абстракции, дающий возможность перейти от числовых множеств к множествам, состоящим из элементов произвольной природы, от конечномерного пространства к бесконечномерному. Операторы, или отображения, в функциональном анализе представляют собой объекты, обобщающие понятие числовой функции и дающие возможность ставить в соответствие элементу одного функционального пространства элемент другого функционального пространства (например, функции можно поставить в соответствие функцию, или же функции поставить в соответствие число, и т.п.).

В настоящем пособии изложены лишь начальные сведения из функционального анализа. Главной задачей было ввести начинающих в курс основных понятий и определений с тем, чтобы они в дальнейшем смогли ориентироваться как в многообразии полученных на сегодняшний день результатов, так и в возможности их применения (о некоторых применениях методов функционального анализа будет сказано в Разделе III).

2.2. Метрические, линейные и нормированные пространства

2.2.1. Метрические пространства

Классический математический анализ во многом базируется на предельном переходе. В функциональном анализе концепция предельного перехода реализуется прежде всего в метрических пространствах.

Пусть $\boldsymbol{X}$ есть некоторое множество. Числовая функция $\boldsymbol{\rho : X \times X \to \mathbb{R}}$, определенная для всех элементов $\boldsymbol{(x, y)}$ множества $\boldsymbol{X \times X}$, называется метрикой, или расстоянием, если имеют место свойства:

1. $\rho(x, y) \geq 0, \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

(здесь x, y, z — произвольные элементы множества X). **Множество $\boldsymbol{X}$ вместе с определенной на нем метрикой $\boldsymbol{\rho}$ называется метрическим пространством**.

Метрическое пространство X с метрикой ρ обозначается (X, ρ); если же по смыслу утверждения, теоремы или задачи ясно, о какой метрике идет речь, то просто X.

Пусть (X, ρ) есть метрическое пространство, a — его элемент, R — положительное число. **Множества**

$$B_R(a) = \{x \in X : \quad \rho(x, a) < R\},$$
$$\overline{B}_R(a) = \{x \in X : \quad \rho(x, a) \leq R\},$$
$$S_R(a) = \{x \in X : \quad \rho(x, a) = R\}$$

называются соответственно открытым шаром (или просто шаром), замкнутым шаром и сферой радиуса $\boldsymbol{R}$ с центром в точке $\boldsymbol{a}$ пространства $\boldsymbol{X}$.

Пусть $\boldsymbol{(X, \rho)}$ есть метрическое пространство, $\boldsymbol{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}$ — последовательность элементов множества $\boldsymbol{X}$. Элемент $\boldsymbol{a}$ множества $\boldsymbol{X}$ называется пределом последовательности $\boldsymbol{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}$, если выполняется $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0}$.

Обозначается предел последовательности обычным образом: $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Всюду ниже под подмножеством метрического пространства (X, ρ) понимается подмножество множества X, наделенное той же метрикой ρ.

Пусть M есть некоторое подмножество метрического пространства (X, ρ). Точка x пространства X называется точкой прикосновения для множества M, если всякий открытый шар с центром в точке x содержит элементы множества M. Точка x пространства X называется предельной точкой множества M, если всякий открытый шар с центром в точке x содержит элементы множества M, отличные от x. Точка x называется внутренней точкой множества M, если найдется положительное число δ такое, что шар $B_\delta(x)$ целиком лежит в M. Точка x множества M называется изолированной точкой M, если найдется положительное число δ такое, что шар $B_\delta(x)$ не содержит точек множества M, отличных от x. Наконец, точка x пространства X называется граничной точкой множества M, если любой открытый шар с центром в точке x содержит как элементы, принадлежащие множеству M, так и элементы, не принадлежащие M.

Имеет место следующее весьма полезное утверждение: **точка x является предельной для множества M из метрического пространства X тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ точек множества M, сходящаяся к x.**

Пусть M есть некоторое подмножество метрического пространства (X, ρ). Множество M называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки. Множество M называется открытым, если все его точки внутренние. Множество M называется совершенным, если оно замкнуто и при этом каждая точка M является его предельной точкой.

Пусть M есть некоторое подмножество метрического пространства (X, ρ). Совокупность всех точек прикосновения множества M называется внутренностью M, или же ядром M. Совокупность внутренних, предельных и граничных точек множества M обозначается M^0 (или $\operatorname{int} M$), M' и ∂M соответственно.

Пусть M есть некоторое подмножество метрического пространства X. Замыканием множества M называется множество, состоящее из всех точек M, а также из всех его предельных точек. Замыкание множества M обозначается $\overline{M}$.

Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства (X, ρ) называется фундаментальной, если для любого поло-

жительного числа ε найдется номер N, зависящий от ε такой, что для всех натуральных чисел n больших N и всех натуральных чисел m выполняется $\rho(x_n, x_{n+m}) < \varepsilon$.

Метрическое пространство (X, ρ) называется полным, если для всякой фундаментальной последовательности $\{x_n\}$ элементов множества X найдется элемент a, принадлежащий X и такой, что $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Подмножество M метрического пространства (X, ρ) называется ограниченным, если найдутся точка $x_0 \in X$ и положительное число R такие, что $\rho(x, x_0) \leq R$ для всех элементов x множества M.

Житейское представление о метрическом пространстве как о чем-то безграничном может подвести. На самом деле метрическое пространство есть просто множество, наделенное некоторой дополнительной структурой. Эта структура такова, что, например, всё метрическое пространство может быть ограниченным множеством. Эта же структура может породить и кажущийся парадокс "шар большего радиуса лежит внутри шара меньшего радиуса" .

Пусть (X, ρ) есть метрическое пространство, M — его подмножество. Множество M называется всюду плотным множеством в пространстве X, если выполняется $\overline{M} = X$.

Пусть (X, ρ) есть метрическое пространство, M — его подмножество. Множество M называется нигде не плотным в пространстве X множеством, если любой открытый шар пространства X содержит открытый шар, свободный от точек множества M.

Метрическое пространство (X, ρ) называется сепарабельным, если оно имеет счетное всюду плотное подмножество.

Подмножество M метрического пространства (X, ρ) называется множеством первой категории, если его можно представить в виде не более чем счетного объединения нигде не плотных в X множеств. Подмножество M, не являющееся множеством первой категории, называется множеством второй категории.

Пусть X есть метрическое пространство, M_1 и M_2 — два непустых подмножества X. Множества M_1 и M_2 называются отделимыми, если они не пересекаются и ни одно из них не содержит предельных точек другого.

Множество M метрического пространства X называется связным, если его нельзя представить в виде объединения двух непу-

стых отделимых множеств M_1 и M_2.

Подмножество M метрического пространства X называется областью, если оно связно и открыто.

Пусть A и B суть два непустых подмножества метрического пространства X. Расстоянием $\rho(A, B)$ между множествами A и B называется число $\rho(A, B) = \inf\limits_{x \in A,\, y \in B} \rho(x, y)$.
Уточним, что любое из множеств A или B, или же оба могут быть одноэлементными.

2.2.2. Линейные векторные пространства

Следующим важным для функционального анализа объектом является **линейное векторное пространство**.

В дальнейшем в качестве числовых множителей λ, μ, ... будут использоваться либо действительные, либо комплексные числа. В первом случае будет определено действительное линейное векторное пространство, во втором — комплексное линейное векторное пространство. Вместе с тем практически всегда мы будем иметь дело с вещественными пространствами, и потому специально оговаривать тот факт, что числовые множители берутся из поля действительных чисел, не будем; наоборот, если числовые множители могут быть комплексными, будем эту ситуацию оговаривать. Следует отметить, что к каким-либо противоречиям эти два случая — вещественного или комплексного пространства — приводить не будут. В дальнейшем вместо термина "действительное линейное векторное пространство" будем использовать термин "линейное векторное пространство".

Непустое множество M называется линейным многообразием, если для любых двух его элементов x,y и любых двух действительных чисел λ и μ элемент $\lambda x + \mu y$ определен и также принадлежит M.

Множество X называется линейным векторным пространством, если

а) для любых двух элементов x и y этого множества определена их сумма $x + y$, также являющаяся элементом множества X;

б) для любого вещественного числа λ и любого элемента x множества X определено произведение λx, также являющееся элементом этого множества;

с) для операций сложения и умножения на число выполняются

следующие аксиомы:

$c_1)$ $x + y = y + x$,

$c_2)$ $(x + y) + z = x + (y + z)$,

$c_3)$ **в** X **существует такой элемент** Θ, **что для любого** $x \in X$ **выполняется** $0 \cdot x = \Theta$,

$c_4)$ $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,

$c_5)$ $\lambda(x + y) = \lambda x + \mu y$,

$c_6)$ $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$,

$c_7)$ $1 \cdot x = x$

(здесь x, y, z **— элементы множества** X, λ, μ **— действительные числа).**

Пусть x **и** y **есть фиксированные точки линейного пространства** X. **Множество точек** $\{z : \quad z = x + t(y - x)\}$ **называется отрезком, если действительный параметр** t **пробегает отрезок** $[0, 1]$; **интервалом, если действительный параметр** t **пробегает интервал** $(0, 1)$; **полуинтервалом, если действительный параметр** t **пробегает полуинтервал** $(0, 1]$ **или** $[0, 1)$; **лучом, проходящим через точку** y **с вершиной в точке** x, **если действительный параметр** t **пробегает полуинтервал** $[0, +\infty)$; **открытым лучом, проходящим через точку** y **с вершиной в точке** x, **если действительный параметр** t **пробегает интервал** $(0, +\infty)$; **прямой, проходящей через точки** x **и** y, **если действительный параметр** t **пробегает интервал** $(-\infty, +\infty)$.

Отрезок и интервал обозначаются $[x, y]$ и (x, y) соответственно, полуинтервал обозначается $(x, y]$ или же $[x, y)$.

Пусть X **— линейное пространство,** $x_1, \ldots, x_n$ **— элементы** X. **Эти элементы называются линейно независимыми, если равенство**

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = \Theta$$

возможно тогда и только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Линейное пространство X **называется конечномерным, если в нем существует конечное множество** $x_1, \ldots, x_n$ **линейно независимых элементов такое, что для любого элемента** x **пространства** X **выполняется равенство** $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ **с некоторыми действительными числами** $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. **Минимальная по количеству элементов подобная система** $\{x_1, \ldots, x_n\}$ **называется бази-**

сом пространства X, число n — его размерностью.

Линейное пространство X называется бесконечномерным, если для любого натурального числа n в нем найдется n линейно независимых элементов.

Подмножество X_0 линейного пространства X называется его подпространством, если оно само является линейным пространством относительно определенных в X операций сложения и умножения.

Линейной оболочкой системы $M = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ (конечной или бесконечной) элементов линейного пространства X называется совокупность всех конечных линейных комбинаций $\{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m\}$, где x_1, ..., x_m есть элементы множества M, λ_1, ..., λ_m — произвольные действительные числа.

Подмножество M линейного пространства X называется выпуклым, если для любых двух элементов множества M и любых двух действительных чисел λ и μ таких, что $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$, элемент $\lambda x + \mu y$ также принадлежит множеству M.

Пусть M есть подмножество линейного пространства X. Выпуклой оболочкой множества M называется множество всевозможных выпуклых комбинаций элементов множества M, т.е. элементов $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$, где $x_1, \ldots, x_n$ есть элементы множества M, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ есть действительные числа такие, что $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_n \geq 0$, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$, n есть произвольное натуральное число.

Пусть M, M_1 и M_2 — подмножества линейного подмножества линейного пространства X, λ есть действительное число. Множеством λM называется множество $\{z : \exists\, x \in M : z = \lambda x\}$. Множеством $M_1 + M_2$ называется множество $\{z : \exists\, x \in M, \exists\, y \in M : z = x + y\}$.

2.2.3. Нормированные пространства

Нормированные пространства являются объектом функционального анализа, объединяющим в себе метрические пространства и линейные векторные пространства.

Линейное пространство X называется нормированным, если каждому элементу x из X можно поставить в соответствие число $\|x\|$, и при этом будут иметь место свойства

1. $\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(здесь x и y — произвольные элементы пространства X, λ — произвольное действительное число). Число $\|x\|$ называется нормой элемента x.

В любом нормированном пространстве можно ввести метрику $\rho(x, y)$ равенством $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Следовательно, всякое нормированное пространство одновременно является и метрическим пространством. Все введенные ранее определения и понятия, относящиеся к метрическим пространствам, очевидным образом переносятся и на нормированные пространства.

В частности, всюду далее сходимость в нормированном пространстве X понимается в смысле сходимости по метрике $\|x - y\|$.

Нормированное пространство X называется строго нормированным, если в нем равенство $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ при $x \neq 0$, $y \neq 0$ возможно лишь в случае $y = \lambda x$, $\lambda > 0$.

Нормированное пространство X называется равномерно выпуклым, если для любых двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ его элементов таких, что $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$, $\|x_n + y_n\| \underset{n\to\infty}{\to} 2$, выполняется $\|x_n - y_n\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Нормированное пространство, полное по метрике $\|x - y\|$, называется банаховым[10] пространством.

Пусть X есть линейное пространство, $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ — две нормы в X. Эти нормы называются эквивалентными, если существуют положительные числа C_1 и C_2 такие, что для любого элемента x из X выполняются неравенства

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1.$$

Пусть X есть нормированное пространство. Подпространством X называется подмножество L пространства X, являющееся замкнутым линейным многообразием.

[10] Банаховы пространства названы в честь одного из основоположников функционального анализа польского математика С. Банаха (1892–1945).

Приведем некоторые простейшие свойства нормы. Первым из этих свойств будет свойство непрерывности нормы — элементарное, но весьма важное свойство.

Утверждение 2.2.1. *Пусть последовательность* $\{x_n\}$ *элементов нормированного пространства* X *сходится к элементу* x_0 *того же пространства. Тогда выполняется*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x_0\|.$$

Доказательство. Имеют место следующие цепочки равенств и неравенств

а) $\|x_n\| = \|x_n - x_0 + x_0\| \le \|x_n - x_0\| + \|x_0\|$;

б) $\|x_0\| = \|x_0 - x_n + x_n\| \le \|x_0 - x_n\| + \|x_n\| = \|x_n - x_0\| + \|x_n\|$.

Эти цепочки дают неравенства

$$-\|x_n - x_0\| \le \|x_n\| - \|x_0\| \le \|x_n - x_0\|.$$

Поскольку $\|x_n - x_0\| \to 0$ при $n \to \infty$, то из этих неравенств и следует требуемое.

Утверждение доказано.

Лемма 2.2.1 (лемма Рисса[11]). *Пусть* L *есть подпространство нормированного пространства* X *такое, что* $L \ne X$. *Тогда для любого числа* ε *из интервала* $(0, 1)$ *найдется элемент* z_ε *такой, что* $\|z_\varepsilon\| = 1$, $\rho(z_\varepsilon, L) > 1 - \varepsilon$.

Доказательство. Пусть x есть не принадлежащий L элемент пространства X. Обозначим $d = \rho(x, L)$. Заметим, что выполняется $d > 0$. Действительно, если окажется $d = 0$, то, согласно определению точной нижней грани, найдется последовательность $\{x_n\}$ элементов подпространства L такая, что $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$. Но тогда будет выполняться $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Поскольку множество L замкнуто, то элемент x должен принадлежать L, а это не так. Полученное противоречие и означает, что выполняется $d > 0$.

Согласно определению расстояния между множествами (в данном случае — между одноэлементным множеством и подпространством) и вновь определению точной нижней грани для любого числа ε из интервала $(0, 1)$ найдется элемент u_ε из L такой, что выполняется

$$d \le \|u_\varepsilon - x\| \le \frac{d}{1 - \varepsilon}.$$

[11]Ф. Рисс (1880—1956) — венгерский математик.

Положим
$$z_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon - x}{\|u_\varepsilon - x\|}.$$
Покажем, что элемент z_ε является искомым.

Очевидно, что выполняется $\|z_\varepsilon\| = 1$. Далее, z_ε не является элементом L — иначе $u_\varepsilon - x \in L$ и тем самым $x \in L$, а это не так. Имеем
$$\|z_\varepsilon - u\| = \left\|\frac{u_\varepsilon - x}{\|u_\varepsilon - x\|} - u\right\| = \frac{\|x - (u_\varepsilon - u\|u_\varepsilon - x\|)\|}{\|u_\varepsilon - x\|} > \frac{d(1-\varepsilon)}{d} = 1 - \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Лемма Рисса называется иногда в литературе "лемма о почти перпендикуляре".

Теорема 2.2.1. *Пусть X есть конечномерное линейное пространство. Тогда любые две нормы в этом пространстве будут эквивалентными.*

Доказательство. Пусть X есть n-мерное линейное пространство, $\{e_k\}_{k=1}^n$ есть базис в X. Тогда любой элемент x из X можно разложить по базису:
$$x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n.$$
Определим норму $\|x\|_e$:
$$\|x\|_e = \left(\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
(эта норма называется **евклидовой**[12]). Пусть $\|x\|$ есть другая норма в пространстве X. Прежде всего имеем
$$\|x\| = \|\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n\| \le |\alpha_1|\|e_1\| + \ldots + |\alpha_n|\|e_n\| \le$$
$$\le \max_{1\le k\le n} \|e_k\| \cdot (|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|) \le n(\max_{1\le k\le n} \|e_k\|)\left(\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2\right)^{\frac{1}{2}} = N_1\|x\|_e.$$

Рассмотрим функцию $f(x)$:
$$f(x) = \|x\|.$$
Обозначим $S = \{x \in X : \quad \|x\|_e = 1\}$. Множество S можно эквивалентным образом рассматривать как сферу $S_1(0)$ единичного радиуса с центром в точке $(0, \ldots, 0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Функция $f(x)$ как числовая функция непрерывна (см. утверждение 2.2.1), множество $S_1(0)$ замкнуто и

[12]Евклид (ок.365 до н.э.–ок.300 до н.э.) — древнегреческий математик.

ограничено в $\mathbb{R}^n$. Следовательно, функция $f(x)$ достигает на $S_1(0)$ своего минимального значения: $\exists\, x_0 \in S : f(x) \geq f(x_0) = \|x_0\|$ при $x \in S$. Пусть x есть произвольный ненулевой элемент пространства X. Положим $y = \frac{x}{\|x\|_e}$. Имеем $\|y\|_e = 1$. Отсюда

$$f(y) = \left\| \frac{x}{\|x\|_e} \right\| \geq \|x_0\| = N_0$$

или

$$\|x\| \geq N_0 \|x\|_e.$$

Очевидно, что это неравенство справедливо и для нулевого элемента пространства X.

Полученные неравенства $\|x\| \leq N_1 \|x\|_e$, $N_0 \|x\|_e \leq \|x\|$ означают, что произвольно взятая норма пространства X эквивалентна евклидовой норме. Поскольку свойство эквивалентности норм является транзитивным, то отсюда и следует, что любые две нормы в конечномерном пространстве эквивалентны.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь задачу о наилучшем приближении.

Пусть X есть нормированное пространство L — его подпространство такое, что $L \neq X$, x — не принадлежащий L элемент X, d есть расстояние между x и L. **Если в $\boldsymbol{L}$ найдется элемент $\boldsymbol{u^*}$ такой, что $\boldsymbol{d = \|x - u^*\|}$, то $\boldsymbol{u^*}$ называется элементом наилучшего приближения к элементам $\boldsymbol{L}$**. Элемент наилучшего приближения может существовать, может не существовать, может быть единственным, может быть неединственным. Приведем две простые теоремы, касающиеся существования и единственности элемента наилучшего приближения.

Теорема 2.2.2. *Пусть L есть конечномерное подпространство нормированного пространства X. Тогда для любого элемента x из X в L существует элемент наилучшего приближения.*

Доказательство. Если элемент x принадлежит L, то элементом наилучшего приближения будет он сам. Пусть x есть не принадлежащий L элемент. Тогда выполняется $d > 0$ (см. доказательство леммы 2.2.1). Далее, пусть размерность пространства L равна n, и пусть $\{e_k\}_{k=1}^n$ есть базис пространства L. Снабдим L как самостоятельное пространство евклидовой нормой; пространство L с этой нормой будем обозначать L_n. Рассмотрим на L_n функцию $f(x)$:

$$f(x) = \|x - u\|.$$

Эта функция непрерывна на L_n.

На пространстве L как на конечномерном подпространстве исходная норма (пришедшая из пространства X) и евклидова норма эквивалентны: существуют положительные числа α и β такие, что для $u \in L$ выполняется

$$\alpha\|u\|_e \leq \|u\| \leq \beta\|u\|_e.$$

Положим

$$R = \frac{1}{\alpha}(d + 1 + \|x\|), \quad B_R = \{u \in L : \|u\|_e \leq R\}.$$

Пусть выполняется $\|u\|_e > R$. Тогда

$$\|x - u\| \geq \|u\| - \|x\| \geq \alpha\|u\|_e - \|x\| > \alpha R - \|x\| = d + 1.$$

Отсюда следует, что вне шара B_R точная нижняя грань функции $f(x)$ достигаться не может. С другой стороны, шар B_R является замкнутым, ограниченным в L_n множеством, и, значит, функция $f(x)$ на нем достигает своего минимума. Этот минимум реализуется на некотором элементе u^*, который и является элементом наилучшего приближения.

Теорема доказана.

Теорема 2.2.3. *Пусть X есть строго нормированное пространство. Тогда для любого элемента x из X и для любого подпространства L пространства X не может существовать более одного элемента наилучшего приближения.*

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы не верно: существует элемент x, принадлежащий X, и существует подпространство L такие, что для x и L имеются два элемента u_1 и u_2, являющиеся элементами наилучшего приближения. Для таких элементов u_1 и u_2 выполняется

$$\|x - u_1\| = \|x - u_2\| = d = \inf_{u \in L} \|x - u\|.$$

Если $d = 0$, то $u_1 = u_2$. Пусть $d > 0$. Имеем

$$\left\|x - \frac{u_1 + u_2}{2}\right\| = \left\|\frac{x - u_1}{2} + \frac{x - u_2}{2}\right\| \leq \frac{1}{2}\|x - u_1\| + \frac{1}{2}\|x - u_2\| = d.$$

Следовательно, выполняется

$$\left\|x - \frac{u_1 + u_2}{2}\right\| = d.$$

Отсюда

$$2d = \|x - u_1\| + \|x - u_2\| = \|(x - u_1) + (x - u_2)\|.$$

Вследствие условия строгой нормированности существует положительное число λ такое, что выполняется $x - u_2 = \lambda(x - u_1)$. Если $\lambda \neq 1$, то тогда $x = \frac{1}{1-\lambda}(u_2 - \lambda u_1)$ и тем самым $x \in L$, что невозможно, ибо $d > 0$. Значит, $\lambda = 1$. Но тогда будет выполняться требуемое равенство $u_1 = u_2$.

Теорема доказана.

Заметим, что элемент наилучшего приближения может быть неединственным и в случае конечномерного пространства X.

2.3. Изометрия, изоморфизм и вложение пространств

Понятия изометрии и изоморфизма позволяют выделить пространства, устроенные в том или ином смысле одинаково.

Метрические пространства (X, ρ_1) и (Y, ρ_2) называются изометричными, если существует взаимно-однозначное отображение $J(x)$ множества X на множество Y такое, что для любых x_1, x_2 из X выполняется

$$\boldsymbol{\rho_1(x_1, x_2) = \rho_2(J(x_1), J(x_2)).}$$

Линейные пространства X и Y называются изоморфными, если существует взаимно-однозначное отображение J пространства X на пространство Y такое, что для любых x_1, x_2 из X и любых действительных чисел λ и μ выполняется

$$\boldsymbol{J(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda J(x_1) + \mu J(x_2).}$$

Приведем примеры изометричных и изоморфных пространств.

Пусть X есть пространство $\mathbb{R}^n$ с евклидовым базисом $\{e_k\}_{k=1}^n$ ($e_k = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, 1 стоит на k-м месте), $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ есть вектор из X, Y есть пространство столбцов $(\alpha_k)_{k=1}^n$ с нормой

$$\|y\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Отображение $J(x)$ зададим равенством

$$J(x) = y.$$

Это отображение и будет отображением изометрии.

Приведем теперь пример изоморфных пространств.

Пусть X есть пространство многочленов с действительными коэффициентами степени, не превышающей заданного натурального числа n. Каждому многочлену $P(x)$ вида

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

поставим в соответствие вектор y из пространства $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$y = J(x) = (a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

Очевидно, что отображение $J : X \to \mathbb{R}^{n+1}$ будет отображением изоморфизма, а тем самым пространства X и $\mathbb{R}^{n+1}$ будут изоморфными.

Содержательные примеры изометричных и изоморфных бесконечномерных пространств будут построены далее.

Пусть X и Y есть нормированные пространства (с различными, вообще говоря, нормами).

Нормированное пространство $\boldsymbol{X}$ называется вложенным в нормированное пространство $\boldsymbol{Y}$, если существует отображение $\boldsymbol{J(x)}$, определенное на всем $\boldsymbol{X}$ и такое, что

1. $\boldsymbol{J(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda J(x_1) + \mu J(x_2)}$, $\boldsymbol{x_1 \in X}$, $\boldsymbol{x_2 \in X}$, $\boldsymbol{\lambda \in \mathbb{R}}$, $\boldsymbol{\mu \in \mathbb{R}}$;

2. $\boldsymbol{\exists\, M \geq 0 : \quad \|J(x)\|_Y \leq M\|x\|_X \quad \forall\, x \in X}$.

Понятие вложения пространств является обобщением понятий изометрии и изоморфизма. В частности, если выполняется $\|J(x)\|_Y = \|x\|_X$, то пространства X и Y будут изометричны. Если $J(x)$ есть взаимно-однозначное отображение X на Y, то пространства X и Y будут изоморфны. Примером пространств, для которых имеет место свойство вложения, являются пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ при $n < m$. Важнейшим примером бесконечномерных пространств, обладающих свойствами вложения, являются пространства Соболева[13].

2.4. Фактор-пространство

2.4.1. Классы смежности. Фактор-пространство

[13] С.Л. Соболев (1908–1989) — советский математик, академик.

Пусть X есть линейное векторное пространство, L — его подпространство, x — элемент X. **Классом смежности $\pi(x)$ называется множество $\pi(x) = \{y \in X : y = x + z, z \in L\}$.**

Утверждение 2.4.1. *Любые два класса смежности либо не пересекаются, либо совпадают.*

Доказательство. Пусть два класса $\pi(x_1)$ и $\pi(x_2)$ имеют непустое пересечение, и пусть y_0 есть элемент, принадлежащий одновременно $\pi(x_1)$ и $\pi(x_2)$. Имеют место равенства

$$y_0 = x_1 + z_1 = x_2 + z_2,$$

в которых z_1 и z_2 есть элементы L. Из этих равенств следует

$$x_1 - x_2 + z_1 - z_2 = \Theta$$

или

$$x_1 - x_2 = z_2 - z_1.$$

Отсюда получаем, что $x_1 - x_2$ есть элемент подпространства L. Пусть y есть произвольный элемент из $\pi(x_1)$. Имеет место цепочка равенств

$$y = x_1 + z = x_2 + x_1 - x_2 + z.$$

Поскольку z и $x_1 - x_2$ есть элементы L, то получаем, что y есть элемент $\pi(x_2)$. Таким образом, всякий элемент y из класса $\pi(x_1)$ принадлежит классу $\pi(x_2)$. Очевидно, что имеет место и обратное — всякий элемент y из класса $\pi(x_2)$ является элементом класса $\pi(x_1)$. Следовательно, если классы $\pi(x_1)$ и $\pi(x_2)$ имеют непустое пересечение, то они будут совпадать

Утверждение доказано.

В множестве всех классов смежности определим операции сложения классов смежности и умножения класса смежности на число. Именно, **результатом сложения двух классов смежности $\pi(x_1)$ и $\pi(x_2)$ назовем класс смежности $\pi(x_1 + x_2)$; результатом умножения класса смежности $\pi(x)$ на действительное число λ назовем класс $\pi(\lambda x)$**. Определенные таким образом операции наделяют множество всех классов смежности структурой линейного векторного пространства (выполнение всех аксиом линейного векторного пространства легко проверяется). Называется это пространство **фактор-пространством** (пространства X по подпространству L) и обозначается $X/_L$.

2.4.2. Нормируемость фактор-пространства

Утверждение 2.4.2. *Если X есть нормированное пространство, то любой класс смежности есть замкнутое множество.*

Доказательство. Пусть x есть произвольный элемент нормированного пространства X, $\pi(x)$ есть порожденный этим элементом класс смежности, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть последовательность элементов из $\pi(x)$, сходящаяся к некоторому элементу y_0. Имеем

$$y_n = x + z_n, \quad z_n \in L.$$

Элемент y_0 представим через элемент x:

$$y_0 = x + z_0.$$

Сходимость последовательности $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ означает, что имеет место сходимость $z_n \to z_0$. Поскольку подпространство L есть замкнутое множество, то z_0 есть элемент L. А это и означает, что $y_0 \in \pi(x)$.

Утверждение доказано.

Покажем теперь, что **если X есть нормированное пространство, то и фактор-пространство будет нормируемым**.

Положим

$$\|\pi(x)\|_{X/_L} = \inf_{y\in\pi(x)} \|y\|.$$

Проверим, что для этой функции выполняются все аксиомы нормы.

Прежде всего заметим, что нулевым элементом фактор-пространства является класс $\pi(\Theta)$, или же само подпространство L. Поскольку Θ содержится в L, то $\inf\limits_{y\in\pi(\Theta)} \|y\| = 0$. Следовательно, выполняется

$$\|\pi(\Theta)\|_{X/_L} = 0.$$

Обратно, если выполняется последнее равенство, то

$$\inf_{y\in\pi(\Theta)} \|y\| = 0.$$

Согласно определению точной нижней грани, найдется последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов из класса $\pi(x)$ такая, что $\|y_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Данная сходимость означает, что $y_n \to \Theta$ в классе $\pi(x)$. Вследствие замкнутости классов смежности (утверждение 2.4.2) получаем $\Theta \in \pi(x)$. Но тогда класс смежности $\pi(x)$ будет совпадать с классом $\pi(\Theta)$ (утверждение 2.4.1).

Таким образом, если норма элемента в фактор-пространстве равна нулю, то этот элемент является нулевым.

Выполнение первой аксиомы для определенной выше нормы фактор-пространства доказано.

Пусть λ есть действительное число. Имеет место цепочка равенств

$$\|\lambda\pi(x)\|_{X/L} = \|\pi(\lambda x)\|_{X/L} = \inf_{y\in\pi(\lambda x)} \|y\|.$$

Если $y \in \pi(\lambda x)$, то $y = \lambda x + z$. Положим $z = \lambda\widetilde{z}$. Тогда $y = \lambda(x + \widetilde{z})$, $\|y\| = |\lambda|\|x + \widetilde{z}\|$. Совокупность элементов $\widetilde{z}$ пробегает все подпространство L. Следовательно, выполняется

$$\inf_{y\in\pi(\lambda x)} \|y\| = |\lambda| \inf_{\widetilde{z}\in L} |\|x + \widetilde{z}\| = |\lambda|\|\pi(x)\|_{X/L}.$$

Из всей цепочки приведенных выше равенств следует выполнимость второй аксиомы для нормы фактор-пространства.

Наконец, покажем, что выполняется и третья аксиома.

Пусть x_1 и x_2 есть два произвольных элемента пространства X. Согласно определению точной нижней грани, для произвольного положительного числа ε найдутся элементы y_1 из $\pi(x_1)$, y_2 из $\pi(x_2)$ такие, что

$$\|y_1\| \le |\|\pi(x_1)\|_{X/L} + \varepsilon, \quad \|y_2\| \le |\|\pi(x_2)\|_{X/L} + \varepsilon.$$

Далее, имеем

$$\|y_1 + y_2\| \le \|y_1\| + \|y_2\| \le \|\pi(x_1)\|_{X/L} + \|\pi(x_2)\|_{X/L} + 2\varepsilon.$$

Поскольку y_1+y_2 есть элемент $\pi(x_1+x_2)$, то имеет место также неравенство

$$\|\pi(x_1 + x_2)\|_{X/L} \le \|y_1 + y_2\|.$$

Наконец, из равенства $\pi(x_1 + x_2) = \pi(x_1) + \pi(x_2)$ и из предыдущих неравенств следует, что выполняется неравенство

$$\|\pi(x_1) + \pi(x_2)\|_{X/L} \le \|\pi(x_1)\|_{X/L} + \|\pi(x_2)\|_{X/L} + 2\varepsilon.$$

В силу произвольности ε получаем требуемое неравенство треугольника

$$\|\pi(x_1) + \pi(x_2)\|_{X/L} \le \|\pi(x_1)\|_{X/L} + \|\pi(x_2)\|_{X/L}.$$

Выполнимость третьего свойства для определенной выше нормы фактор-пространства доказано.

Итак, если пространство X нормируемо, то и фактор-пространство есть нормированное пространство.

В заключение приведем без доказательства теорему о свойстве полноты фактор-пространства.

Теорема 2.4.1. *Пусть X есть банахово пространство, L — его подпространство, X/L — фактор-пространство с нормой*

$$\|\pi(x)\|_{X/L} = \inf_{y \in \pi(x)} \|y\|.$$

Тогда X/L есть банахово пространство.

2.5. Гильбертовы[14] пространства

2.5.1. Пространства со скалярным произведением. Ортогональность

Пусть X есть линейное векторное пространство, наделенное операцией умножения на комплексные числа (другими словами, X есть линейное векторное пространство со скалярами из поля комплексных чисел). Это **пространство называется унитарным, если каждой паре $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ его элементов поставлено в соответствие комплексное число $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$** — скалярное произведение x на y — **и если при этом выполняются следующие условия:**

(1) $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$;

(2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

(3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;

(4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

(здесь x, y, z — произвольные элементы из пространства X, λ — произвольное комплексное число).

Если X есть линейное пространство над полем действительных чисел, наделенным отображением из множества $X \times X$ в множество действительных чисел со свойствами (1)—(4) (в (3) подразумевается, что λ есть действительное число), то **такое пространство называется евклидовым**.

В евклидовом и в унитарном пространствах для скалярного произведения выполняется неравенство Коши[15] — Буняковского[16]

$$|(x, y)| \leq (x, x)^{\frac{1}{2}} \cdot (y, y)^{\frac{1}{2}}.$$

[14] Д. Гильберт(1862–1943) — немецкий математик.

[15] О.Л. Коши (1789–1857) — французский математик.

[16] В.Я. Буняковский (1804–1889) — русский математик.

Для доказательства этого неравенства достаточно в верном неравенстве

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) \geq 0$$

в случае $(y, y) \neq 0$ положить

$$\lambda = -\frac{(x, y)}{(y, y)}.$$

Получим

$$(x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} + \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} \geq 0;$$

отсюда в случае $(y, y) \neq 0$ получаем требуемое неравенство. А в случае $(y, y) = 0$ неравенство Коши — Буняковского очевидно.

Пусть X есть евклидово или унитарное пространство. Если x и y есть элементы пространства X, и **если выполняется $(x, y) = 0$, то элементы x и y называются ортогональными**.

Пусть $\{x_1, x_2, \ldots\}$ — конечная или бесконечная система элементов пространства X. Если **выполняется $(x_k, x_j) = 0$ при $k \neq j$, $k, j = 1, 2, \ldots,$ то система $\{x_1, x_2, \ldots\}$ называется ортогональной**. Если дополнительно **выполняется $(x_k, x_k) = 1$, $k = 1, 2, \ldots,$ то система $\{x_1, x_2, \ldots\}$ называется ортонормируемой**.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.5.1. *Если система $\{x_k\}_{k=1}^m$ есть ортогональная система, и при этом все векторы x_k ненулевые, то система $\{x_k\}_{k=1}^m$ линейно независима.*

Доказательство этого простого утверждения оставим читателю.

Пусть M есть некоторое множество элементов пространства X. **Совокупность элементов, ортогональных всем элементам M, называется ортогональным дополнением к M и обозначается $M^\perp$**.

Приведем еще одно простое утверждение, касающееся скалярного произведения.

Утверждение 2.5.2. *В евклидовом или унитарном пространстве для любых двух элементов x и y выполняется равенство*

$$(x + y, x + y) + (x - y, x - y) = 2[(x, x) + (y, y)].$$

Доказательство этого утверждения очевидно.

2.5.2. Гильбертовы пространства

В евклидовом или унитарном пространстве X функция $f(x)$, определенная при $x \in X$ равенством $f(x) = (x,x)^{\frac{1}{2}}$, обладает всеми свойствами нормы. Действительно, первое и второе свойства нормы для этой функции очевидны. Далее, имеем

$$[f(x+y)]^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) \leq$$
$$\leq [f(x)]^2 + |(x,y)| + |(y,x)| + [f(y)]^2 \leq$$
$$\leq [f(x)]^2 + 2f(x) \cdot f(y) + [f(y)]^2 = [f(x) + f(y)]^2$$

(здесь использовалось неравенство Коши — Буняковского). Отсюда получаем третье свойство нормы (неравенство треугольника):

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y).$$

Итак, в пространстве со скалярным произведением — унитарным или евклидовым — функция $f(x)$ определяет **норму, называемую нормой, порожденной скалярным произведением:**

$$\boldsymbol{\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}.}$$

Унитарное или евклидово пространство, полное по норме, порожденной имеющимся в этом пространстве скалярным произведением, называется гильбертовым пространством.

Гильбертовы пространства будем обозначать в дальнейшем буквой H. И будем дальше рассматривать гильбертовы пространства, исходящие из евклидова пространства (случай гильбертова пространства, определенного по исходному унитарному пространству, будет отличаться от рассмотренного лишь незначительными техническими деталями).

Утверждение 2.5.3. *Пусть H есть гильбертово пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть две последовательности его элементов такие, что $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ в H при $n \to \infty$. Тогда имеет место сходимость*

$$(x_n, y_n) \to (x_0, y_0) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Имеет место равенство

$$(x_n, y_n) - (x_0, y_0) = (x_n - x_0, y_n) + (x, y_n - y_0).$$

Из этого равенства и из неравенства Коши — Буняковского следует

$$|(x_n, y_n) - (x_0, y_0)| \leq \|x_n - x_0\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y_0\|.$$

Из сходимостей $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ и свойства непрерывности нормы (см. утверждение 2.2.1) следует, что $\|x_n - x_0\| \to 0$, $\|y_n - y_0\| \to 0$ при $n \to \infty$, и что последовательность $\{\|y_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена. Отсюда и вытекает требуемое.

Утверждение доказано.

Замечание. Доказанное выше утверждение 2.5.2 в терминах нормы гильбертова пространства имеет вид

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right];$$

данное равенство представляет собой аналог известного в планиметрии свойства диагоналей параллелограмма: сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон.

2.5.3. Ортогональное проектирование

Вернемся к рассмотренной в п. 2.2.1 задаче о нахождении элемента наилучшего приближения.

Теорема 2.5.1. *Пусть H есть гильбертово пространство, L — его подпространство, x есть фиксированный элемент из H, не принадлежащий L. Тогда в L имеется ровно один элемент z, являющийся элементом наилучшего приближения для x.*

Доказательство. Обозначим $d = \rho(x, L)$. Согласно определению расстояния от x до подпространства L и согласно определению точной нижней грани, для любого натурального числа n найдется элемент z_n, принадлежащий L и такой, что выполняются неравенства

$$d \leq \|x - z_n\| < d + \frac{1}{n}.$$

Покажем, что последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ будет фундаментальной.

Используя утверждение 2.5.2 для элементов $z_n - x$ и $z_m - x$, получим

$$\|z_n - z_m\|^2 = \|z_n - x + x - z_m\|^2 = 2\|x - z_n\| + 2\|x - z_m\| - \|2x - z_n - z_m\|^2.$$

Имеем

$$\|2x - z_n - z_m\|^2 = 4\left\|x - \frac{z_n + z_m}{2}\right\|^2.$$

Поскольку элемент $\frac{z_n+z_m}{2}$ принадлежит L, то выполняется

$$\|2x - z_n - z_m\|^2 \geq 4d^2.$$

Далее, имеют место неравенства

$$\|x - z_n\|^2 < \left(d + \frac{1}{n}\right)^2, \quad \|x - z_m\|^2 < \left(d + \frac{1}{m}\right)^2.$$

Отсюда

$$\|z_n - z_m\|^2 < 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 + 2d\left(1 + \frac{1}{m}\right)^2 - 4d^2 = \frac{4d}{n} + \frac{4d}{m} + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2}.$$

Из последнего неравенства и следует, что последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ будет фундаментальной.

Поскольку последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, и подпространство L замкнуто, то при $n \to \infty$ имеет место сходимость $z_n \to x \in L$. Переходя теперь к пределу в неравенствах

$$d \le \|x - z_n\| < d + \frac{1}{n},$$

получим

$$\|x - z\| = d.$$

А это и означает существование элемента наилучшего приближения.

Покажем, что элемент наилучшего приближения существует ровно один.

Предположим, что элементов наилучшего приближения два — z и z^*. Имеем

$$4d^2 = 2(\|x-z\|^2 + \|x-z^*\|^2) = \|z-z^*\|^2 + 4\left\|x - \frac{z+z^*}{2}\right\|^2 \ge \|z-z^*\| + 4d^2.$$

Отсюда

$$\|z - z^*\| \le 0,$$

что и дает $z = z^*$.

Теорема доказана.

Заметим, что теорема остается справедливой, если подпространство L заменить замкнутым выпуклым множеством M.

Теорема 2.5.2 (теорема об ортогональном проектировании). *Пусть H есть гильбертово пространство, L — его подпространство. Тогда для любого элемента x из H существуют единственный элемент z из L и единственный элемент w из $L^{\perp}$ такие, что справедливо разложение $x = z + w$.*

Доказательство. Если x есть элемент L, то в качестве z можно взять сам элемент x, в качестве w — нулевой элемент пространства H; требуемое разложение тем самым имеет место.

Пусть теперь x не принадлежит L, и пусть z есть элемент наилучшего приближения для x из подпространства L. Покажем, что $x - z$ есть элемент $L^{\perp}$.

Пусть y есть произвольный элемент L, t есть произвольное действительное число. Поскольку z есть элемент наилучшего приближения, $z - th$ есть элемент L, то выполняется

$$\|x - z + th\|^2 \geq \|x - z\|^2.$$

Отсюда

$$(x - z + th, x - z + th) \geq (x - z, x - z),$$

и далее

$$2t(x - z, h) + t^2(h, h) \geq 0.$$

Положим

$$t = -\frac{(x - z, h)}{\|h\|^2}.$$

Получим

$$-\frac{|(x - z, h)|^2}{\|h\|^2} \geq 0.$$

Следовательно, $(x - z, h) = 0$. Это и означает, что $x - z$ есть элемент $L^{\perp}$.

Доказанное дает нужное представление:

$$x = z + w, \quad z \in L, \quad w = x - z \in L^{\perp}.$$

Покажем теперь, что найденное представление является единственным. Пусть имеется два элемента z^* из L и w^* из $L^{\perp}$ такие, что $x = z + w = z^* + w^*$. Справедливо равенство

$$z - z^* = w^* - w.$$

Умножим левую и правую части этого равенства скалярно на $w^* - w$. Получим

$$\|w - w^*\| = 0.$$

Следовательно, $w = w^*$. Второе равенство $z = z^*$ очевидно. Теорема доказана.

Элемент $\boldsymbol{z}$ (элемент наилучшего приближения) **называется ортогональной проекцией элемента $\boldsymbol{x}$ на подпространство $\boldsymbol{L}$.**

Следствие. *Имеет место равенство*

$$\|x\|^2 = \|z\|^2 + \|w\|^2.$$

Доказательство следствия очевидно.

2.6. Пространства последовательностей

Пространства бесконечных последовательностей дают важные примеры нормированных и гильбертовых пространств.

2.6.1. Неравенства Гёльдера[17] и Минковского[18] для сумм

Неравенства Гёльдера и Минковского играют важную роль в математическом и функциональном анализе, а также в других разделах математики.

Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^m$ есть фиксированный набор неотрицательных чисел, $\{\xi_k\}_{k=1}^m$ и $\{\eta_k\}_{k=1}^m$ — произвольные наборы комплексных чисел, p и q — действительные числа такие, что $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. **Справедливо неравенство**

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k |\xi_k \eta_k| \leq \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^m |\alpha_k |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Это неравенство в случае $\alpha_k = 1$, $k = 1, \ldots m$, называется **неравенством Гёльдера**, в случае $\alpha_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, m$, — **весовым неравенством Гёльдера**.

Пусть теперь p есть действительное число такое, что $p \geq 1$. **Справедливо неравенство**

$$\left(\sum_{k=1}^m \alpha_k |\xi_k + \eta_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k |\eta_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

В случае $\alpha_k = 1$, $k = 1, \ldots, m$, это неравенство называется **неравенством Минковского**, в случае $\alpha_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, m$, — **весовым неравенством Минковского**.

Уточним, что в неравенствах Гёльдера и Минковского (весовых или невесовых) наборы $\{\alpha_k\}$, $\{\xi_k\}$, $\{\eta_k\}$ могут быть конечными или бесконечными, участвующие в них суммы могут содержать как конечное число слагаемых, так и бесконечное.

[17] О. Л. Гёльдер (1859–1937) — немецкий математик.
[18] Г. Минковский (1864–1909) — немецкий математик.

2.6.2. Пространства l_p и l_∞

Пусть p есть действительное число такое, что $p \geq 1$. Рассмотрим множество всевозможных последовательностей $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty$ действительных чисел таких, что ряд

$$\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p$$

сходится. Определим операции сложения и умножения на действительное число: если x и y есть последовательности $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{y_k\}_{k=1}^\infty$, то суммой $x+y$ назовем последовательность $\{x_k + y_k\}_{k=1}^\infty$; результатом умножения числа λ на элемент x назовем последовательность $\{\lambda x_k\}_{k=1}^\infty$. Из неравенства Минковского следует, что элемент $x+y$ будет принадлежать рассматриваемому множеству. Легко проверить, что все требуемые для линейного пространства свойства будут выполняться, и тем самым **рассматриваемое множество есть линейное пространство; обозначается это пространство l_p.**

Пространство l_p есть нормированное пространство; норма в нем определяется равенством

$$\|x\|_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(выполнение первого и второго свойств нормы очевидно, выполнение третьего следует из неравенства Минковского).

Утверждение 2.6.1. *Пространство l_p банахово.*

Доказательство. Пусть $\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ есть фундаментальная последовательность элементов пространства l_p. Тогда для любого положительного числа ε найдется номер n_0 такой, что при $n > n_0$, $m > 0$ выполняется

$$\left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^{(n)} - x_k^{(n+m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что для всех натуральных чисел k имеет место неравенство

$$|x_k^{(n)} - x_k^{(n+m)}| < \varepsilon.$$

Но тогда каждая числовая последовательность $\{x_k^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ будет фундаментальной. Фундаментальность этих последовательностей означает, что существует последовательность $x^{(0)}$ такая, что $x_k^{(n)} \to x_k^{(0)}$ при $n \to \infty$,

$k = 1, 2, \ldots$. Покажем, что элемент $x^{(0)}$ будет принадлежать пространству l_p.

Для всех натуральных чисел k имеют место неравенства

$$|x_k^{(0)}|^p \le (|x_k^{(n)} - x_k^{(0)}| + |x_k^{(n)}|)^p.$$

Суммируя и извлекая корень степени $\frac{1}{p}$, получим

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(0)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(|x_k^{(n)} - x_k^{(0)}| + |x_k^{(n)}|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Используя далее неравенство Минковского, нетрудно перейти к следующей оценке

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(0)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(0)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \|x^{(n)} - x^{(0)}\|_{l_p} + \|x^{(n)}\|_{l_p}.$$

Первое слагаемое правой части конечно вследствие сходимости $x^{(n)}$ к $x^{(0)}$, второе же — вследствие принадлежности $x^{(n)}$ пространству l_p. Но тогда конечной будет и левая часть. А это и означает принадлежность элемента $x^{(0)}$ пространству l_p.

Существование предела у всякой фундаментальной в пространстве l_p последовательности и принадлежность этого предела вновь пространству l_p и дает его полноту.

Утверждение доказано.

Утверждение 2.6.2. *Пространство l_p сепарабельно.*

Доказательство. Обозначим через l_p^0 множество элементов пространства l_p таких, что у соответствующих последовательностей лишь конечное число членов отлично от нуля (такие последовательности называются финитными). Далее, через $l_{p,Q}^0$ обозначим подмножество l_p^0, состоящее из последовательностей, у которых отличные от нуля члены есть рациональные числа. Заметим, что множество $l_{p,Q}^0$ счетно. Покажем, что именно множество $l_{p,Q}^0$ будет искомым всюду плотным подмножеством пространства l_p.

Пусть $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть произвольный элемент пространства l_p, ε есть произвольное положительное число. Согласно критерию Коши сходимости числовых рядов, существует натуральное число N такое, что выполняется

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Положим $x^{(1)} = (x_1, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots)$, $x^{(2)} = x - x^{(1)}$. Для каждого из чисел x_1, …, x_N найдутся рациональные числа $x_{1,рац.}$, …, $x_{N,рац.}$ такие, что

$$|x_k - x_{k,рац.}|^p < \frac{\varepsilon^p}{2N}.$$

Определим элемент $x_{рац.}$: $\quad x_{рац.} = (x_{1,рац.}, \ldots, x_{N,рац.}, 0, \ldots)$. Имеем

$$\|x - x_{рац.}\|_{l_p}^p = \sum_{k=1}^{N} |x_k - x_{k,рац.}|^p + \sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p.$$

Поскольку элемент $x_{рац.}$ принадлежит $l^0_{p,Q}$, то полученное неравенство и означает, что множество $l^0_{p,Q}$ плотно в l_p.

Утверждение доказано.

В дополнение к доказанному заметим, что пространство l_2 будет гильбертовым — скалярное произведение элементов $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ в этом пространстве задается равенством

$$(x, y)_{l_2} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

Выполнение всех свойств скалярного произведения легко проверяется.

Рассмотрим теперь множество всевозможных последовательностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ действительных чисел таких, что

$$\sup_{k\geq 1} |x_k| < +\infty.$$

Сложение двух элементов и умножение на действительное число в этом множестве определим как покоординатное сложение и покоординатное умножение на число соответственно. Введенные операции превращают **рассматриваемое множество в линейное пространство; обозначается это пространство $\boldsymbol{l_\infty}$**.

Пространство $\boldsymbol{l_\infty}$ есть нормированное пространство; норма в нем определяется равенством

$$\|x\|_{l_\infty} = \sup_{k\geq 1} |x_k|.$$

Пространство l_∞ есть банахово пространство — доказывается это также, как доказывалось утверждение 2.6.1. Но вот свойство сепарабельности для пространства l_∞ не имеет места.

Утверждение 2.6.3. *Пространство l_∞ несепарабельно.*

Доказательство. Предположим противное — пусть пространство l_∞ сепарабельно, и пусть E_0 есть счетное всюду плотное подмножество пространства l_∞. Обозначим через M_0 множество последовательностей, составленных из чисел 0 и 1. Далее, рассмотрим совокупность всевозможных шаров радиуса $\frac{1}{3}$ с центром в точках множества E_0. Таких шаров счетное число; их объединение покрывает все пространство l_∞. С другой стороны, множество M_0 несчетно. Но тогда хотя бы в одном из построенных шаров должно быть более одного элемента из множества M_0. Получаем противоречие, поскольку расстояние между любыми двумя различными элементами M_0 равно 1. Данное противоречие опровергает предположение о сепарабельности пространства l_∞.

Утверждение доказано.

Замечание 1. Наряду с обычными пространствами l_p можно ввести и весовые пространства $l_{p,\alpha}$ с помощью последовательности $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ неотрицательных действительных чисел и нормы

$$\|x\|_{l_{p,\alpha}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Изучение свойств этих пространств оставляем читателю.

Замечание 2. Пространства l_p, l_∞ нетрудно определить и для последовательностей $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ комплексных чисел (с использованием в качестве поля скаляров поля комплексных чисел).

2.7. Пространства ограниченных, непрерывных и дифференцируемых функций

Следующие важные примеры пространств связаны с множествами функций, обладающих теми или иными свойствами.

Пусть Q есть некоторое множество из пространства $\mathbb{R}^n$, **$M(Q)$ есть совокупность всевозможных ограниченных функций, определенных на Q, с естественными операциями сложения и умножения на число: суммой двух функций f и g из $M(Q)$ назовем функцию, значение которой на векторе x равно $f(x) + g(x)$; результатом**

умножения числа $\boldsymbol{\lambda}$ на функцию $\boldsymbol{f}$ назовем функцию, значение которой на векторах $\boldsymbol{x}$ равно $\boldsymbol{\lambda f(x)}$. Очевидно, что $M(Q)$ есть линейное векторное пространство. Нормируем $M(Q)$, положив

$$\|f\|_{M(Q)} = \sup_Q |f(x)|;$$

выполнение свойств нормы легко проверяется. Покажем, что **пространство $\boldsymbol{M(Q)}$ банахово**.

Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть фундаментальная последовательность элементов пространства $M(Q)$. Тогда для любого положительного числа ε найдется номер n_0 такой, что при $n > n_0$, $m > 0$ выполняется

$$\sup_Q |f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Отсюда при $x \in Q$ имеем

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Следовательно, числовая последовательность $\{f_k(x)\}$ фундаментальна при всех x из Q. Согласно критерию Коши сходимости, существует конечный предел $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$; численное значение этого предела определяет функцию $f(x)$, $x \in Q$. Переходя к пределу при $m \to \infty$ в последнем неравенстве, получим

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Из этого неравенства следует, что при $n > n_0$ выполняется

$$\sup_Q |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

В силу произвольности ε получаем

$$\|f_n - f\|_{M(Q)} \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Очевидно, что функция $f(x)$ будет ограниченной.

Итак, для любой фундаментальной в пространстве $M(Q)$ последовательности $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ найдется функция $f(x)$, принадлежащая пространству $M(Q)$ и такая, что $f_k \to f$ при $k \to \infty$ в $M(Q)$. А это и означает, что пространство $M(Q)$ банахово.

Пусть теперь Q есть **замкнутое ограниченное множество из пространства** $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. Обозначим через **$\boldsymbol{C(Q)}$ линейное пространство непрерывных на $\boldsymbol{Q}$ функций с естественными операциями сложения и**

умножения на скаляр (такими же, как в пространстве $M(Q)$). Это **пространство нормируемо** — норму в нем определим равенством

$$\|f\|_{C(Q)} = \max_{Q} |f(x)|$$

(свойства нормы легко проверяются). Далее, это пространство будет **банаховым** (ключевым моментом доказательства этого факта является то, что сходимость по определенной выше норме эквивалентна равномерной сходимости, и что предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций представляет собой непрерывную функцию; прочие детали доказательства оставляем читателю).

Пространство $\boldsymbol{C(Q)}$ сепарабельно; счетным всюду плотным подмножеством в нем является совокупность всевозможных многочленов от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ (этот факт следует из теоремы Вейерштрасса[19] о возможности представить любую непрерывную функцию как равномерный предел последовательности многочленов, и из того, что произвольный многочлен можно приблизить с произвольной точностью многочленом с рациональными коэффициентами).

Обратимся теперь к дифференцируемым функциям.

Пусть по-прежнему Q есть замкнутое ограниченное множество из $\mathbb{R}^n$, и пусть k есть натуральное число. **Через $\boldsymbol{C^k(Q)}$ обозначим линейное пространство функций, непрерывных в $\boldsymbol{Q}$ и таких, что их всевозможные частные производные до суммарного порядка $\boldsymbol{k}$ включительно существуют и непрерывны в $\boldsymbol{Q}$**[20] (операции сложения и умножения на число в этом пространстве определяются естественным образом также, как определялись операции сложения и умножения на число в пространстве $M(Q)$).

Пространство $\boldsymbol{C^k(Q)}$ нормируемо: норму в нем определим равенством

$$\|f\|_{C^k(Q)} = \sum_{|\alpha|=0}^{k} \|D^\alpha f\|_{C(Q)}$$

(здесь $D^\alpha f$ подразумевает набор всевозможных частных производных от

[19] К. Вейерштрасс (1815–1927) — немецкий математик.

[20] Частные производные на границе Q определяются как предельное значение этих же производных изнутри Q.

функции $f(x)$ вида

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

при $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leq k$). Более того, **это пространство банахово и сепарабельно** (доказательство оставляем читателю).

Для удобства примем обозначение $C^0(Q) = C(Q)$. Имеют место естественные вложения

$$C^k(Q) \subset C^m(Q) \quad \textit{при} \quad k \geq m, \quad k, m = 0, 1, \ldots$$

(естественное вложение подразумевает, что функции $f(x)$ из пространства $C^k(Q)$ при $k \geq m$ ставится в соответствие она же, но уже как элемент пространства $C^m(Q)$; понятие естественного вложения полностью соответствует ранее введенному общему понятию вложения нормированных пространств — см. п. 2.3).

Наряду с банаховыми пространствами $M(Q)$ и $C^k(Q)$ в приложениях (математическом анализе, теории уравнений с обыкновенными или же частными производными, вычислительной математике) часто возникают их обобщения — например, **весовые пространства** (примером таких пространств может служить

— **множество** $C(e^{-x}; [0, +\infty))$ непрерывных на промежутке $[0, +\infty)$ функций $f(x)$, для которых величина

$$\sup_{x\geq 0} |e^{-x} f(x)|$$

ограничена (норма в этом пространстве определяется равенством

$$\|f\|_{C(e^{-x};[0,+\infty))} = \sup_{x\geq 0} |e^{-x} f(x)|);$$

— **пространства Гёльдера** H^α, в простейшем одномерном случае представляющие собой совокупность всех непрерывных на некотором отрезке $[a, b]$ функций $f(x)$, для которых при всех x_1 и x_2 из $[a, b]$ выполняется неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|^\alpha$$

с некоторым неотрицательным числом K и с фиксированным числом α из полуинтервала $(0, 1]$ (норма в этом пространстве определяется равенством

$$\|f\|_{H^\alpha} = \max_{[a,b]} |f(x)| + \sup_{\substack{a\leq x_1\leq b\\ a\leq x_2\leq b}} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha});$$

— **пространства ограниченных или непрерывных отображений** из множества Q нормированного пространства X в множество E нормированного пространства Y;

— и многие другие).

2.8. Неравенства Гёльдера и Минковского для интегралов. Пространства интегрируемых функций

Построение пространств интегрируемых функций основано на концепции меры Лебега[21] и интеграла Лебега. Не углубляясь в эту концепцию, отметим следующее.

1. Множества, измеримые по мере Жордана[22] (напомним, что концепция интеграла Римана[23] основана на использовании меры Жордана), будут измеримы и по мере Лебега, множества же, измеримые по мере Лебега, не всегда будут измеримы по мере Жордана. Чтобы подтвердить это утверждение, приведем важное для дальнейшего определения множеств нулевой лебеговой меры.

Множество $\boldsymbol{E}$ из пространства $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ называется множеством нулевой лебеговой меры (имеет лебегову меру, равную нулю), **если для любого положительного числа $\boldsymbol{\varepsilon}$ найдется конечная или счетная система открытых шаров $\{\boldsymbol{B_m}\}$ такая, что их суммарный объем не превышает $\boldsymbol{\varepsilon}$ и при этом**

$$\boldsymbol{E \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m.}$$

Согласно этому определению, множество, состоящее из конечного или счетного числа точек, будет измеримо по Лебегу и будет иметь нулевую меру; в тоже время, как известно, множества, состоящие из счетного числа точек, не будут измеримы по Жордану.

2. Интеграл Лебега обладает рядом специфических свойств (например, свойством интегрируемости любой измеримой[24] функции, модуль которой ограничен сверху интегрируемой по Лебегу функцией), позволяющих расширить класс интегрируемых функций, но в тоже время классические свойства определенного интеграла — свойства линейности, аддитивности

[21] А.Л. Лебег (1875–1941) — французский математик.

[22] М. Жордан (1838–1922) — французский математик.

[23] Б. Риман (1826–1866) — немецкий математик.

[24] Измеримые функции — функции, почти всюду на области определения совпадающие с пределом почти всюду сходящейся последовательности кусочно-непрерывных функций ("почти всюду" означает "с точностью до множества нулевой лебеговой меры").

по множеству интегрирования, справедливость формулы интегрирования по частям в одномерном и многомерном случаях (см. Раздел I), справедливость формулы замены переменных — сохраняются и для интеграла Лебега.

Как и для пространств последовательностей, важную роль в теории пространств интегрируемых функций играют неравенства Гёльдера и Минковского.

Всюду ниже Q есть ограниченное измеримое по Лебегу множество из пространства $\mathbb{R}^n$.

Пусть $f(x)$, $g(x)$ и $\varphi(x)$ есть определенные в Q функции, причем функция $\varphi(x)$ неотрицательна. Далее, пусть p и q есть действительные числа такие, что $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. **Справедливо неравенство**

$$\Big| \int\limits_Q \varphi(x) f(x) g(x)\, dx \Big| \leq \Big(\int\limits_Q \varphi(x) |f(x)|^p\, dx \Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\int\limits_Q \varphi(x) |g(x)|^q\, dx \Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Это неравенство в случае $\varphi(x) \equiv 1$ называется **неравенством Гёльдера**, в случае $\varphi(x) \geq 0$ — **весовым неравенством Гёльдера**.

Пусть теперь p есть действительное число такое, что $p \geq 1$. **Справедливо неравенство**

$$\Big(\int\limits_Q \varphi(x) |f(x) + g(x)|^p\, dx \Big)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \Big(\int\limits_Q \varphi(x) |f(x)|^p\, dx \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int\limits_Q \varphi(x) |g(x)|^p\, dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

В случае $\varphi(x) \equiv 1$ это неравенство называется неравенством Минковского, в случае $\varphi(x) \geq 0$ — **весовым неравенством Минковского**.

Перейдем теперь к изучению непосредственно пространств интегрируемых функций.

Рассмотрим множество функций $f(x)$ таких, что для фиксированного числа $p \geq 1$ функция $|f(x)|^p$ интегрируема (по Лебегу) по множеству Q. Из неравенства Минковского следует, что **это множество есть линейное векторное пространство**; обозначается это пространство $L_p(Q)$.

Далее, **пространство $\boldsymbol{L_p(Q)}$ нормируемо**: норму в $L_p(Q)$ определим

равенством
$$\|f\|_{L_p(Q)} = \Big(\int\limits_Q |f(x)|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$
свойства нормы здесь легко проверяются; уточним лишь, что равенство $f(x) \equiv 0$ для элементов пространства $L_p(Q)$ означает, что функция $f(x)$ принимает в Q значение 0 всюду за исключением, быть может, некоторого множества Q_0 нулевой лебеговой меры.

Для пространств $L_p(Q)$ имеют место естественные вложения
$$L_{p_1}(Q) \subset L_{p_2}(Q), \quad \textit{при} \quad p_1 \geq p_2 \geq 1;$$
доказывается этот факт с помощью неравенства Гёльдера.

Дальнейшие свойства пространств $L_p(Q)$ приведем без доказательства:

1. *Пространства $L_p(Q)$ банаховы*;

2. *Пространства $L_p(Q)$ сепарабельны; счетным всюду плотным в $L_p(Q)$ подмножеством является, например, совокупность всех многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_n$ с рациональными коэффициентами.*

В дополнение к этим свойствам заметим, что пространство $L_2(Q)$ будет гильбертовым; скалярное произведение в этом пространстве определяется равенством
$$(f,g)_{L_2(Q)} = \int\limits_Q f(x)g(x)\,dx.$$

По аналогии с пространствами $L_p(Q)$ нетрудно определить соответствующие весовые пространства: Если $\varphi(x)$ есть определенная в Q неотрицательная функция, то **пространством $L_{p,\varphi}(Q)$ назовем множество функций $f(x)$ таких, что функция $\varphi(x)|f(x)|^p$ интегрируема (по Лебегу) по множеству Q**. Это пространство нормируемо; норма в нем определяется равенством
$$\|f\|_{L_{p,\varphi}(Q)} = \Big(\int\limits_Q \varphi(x)|f(x)|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Определим теперь пространство $L_\infty(Q)$.

Функция $f(x)$ называется существенно ограниченной на множестве Q функцией, если для некоторого неотрицательного числа M n-мерная лебегова мера множества
$$\{x \in Q: \quad |f(x)| > M\}$$

равна нулю. Точная нижняя грань M_0 подобных чисел M называется существенным максимумом функции $|f(x)|$ на множестве Q; обозначается существенный максимум так

$$M_0 = \operatorname{vrai}\max_Q |f(x)|.$$

Множество измеримых в Q функций $f(x)$, имеющих конечный существенный максимум, обозначается $L_\infty(Q)$. Это множество есть линейное векторное пространство. Более того, это пространство есть нормированное пространство, причем полное (т.е. банахово); норма в этом пространстве определяется равенством

$$\|f\|_{L_\infty(Q)} = \operatorname{vrai}\max_Q |f(x)|.$$

2.9. Ряды Фурье[25] в гильбертовом пространстве

Все построения и теоремы в данном пункте будут относиться к бесконечномерному гильбертову пространству над полем действительных чисел. В случае гильбертова пространства над полем комплексных чисел (т.е. в случае полного унитарного пространства) все выкладки лишь незначительно усложняются. В целом же все результаты, изложенные ниже, будут справедливы и для гильбертова пространства над полем комплексных чисел, и для конечномерного случая (с заменой ряда на конечную сумму).

2.9.1. Ряды Фурье по ортонормированным системам

Пусть в гильбертовом пространстве H задана ортонормированная система $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ его элементов, и пусть x есть произвольный элемент из H. **Числа** $\lambda_k = (x, e_k)$ (здесь и далее $(\ ,\ )$ есть скалярное произведение в H) **называются коэффициентами Фурье элемента x по системе $\{e_k\}_{k=1}^\infty$. Ряд**

$$\sum_{k=1}^\infty \lambda_k e_k$$

называется рядом Фурье элемента x по системе $\{e_k\}_{k=1}^\infty$, частичная сумма

$$u_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$$

[25] Ж. Фурье (1788–1830) — французский математик.

называется многочленом Фурье элемента $\boldsymbol{x}$. Вопрос, который будет нас интересовать далее — сходится ли ряд Фурье элемента x к самому элементу x? (или, другими словами, сходится ли последовательность частичных сумм, или многочленов Фурье, к элементу x?).

Обозначим через S_n конечномерное подпространство H, базисом в котором являются первые n элементов ортонормированной системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Вычислим расстояние между произвольным элементом x пространства H и произвольным элементом s пространства S_n. Имеем

$$s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k,$$

$$\|x - s\|^2 = (x - s, x - s) = \left(x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, \quad x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right) =$$

$$= (x, x) - 2 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x, e_k) + \sum_{k,m=1}^{n} \alpha_k \alpha_m (e_k, e_m) =$$

$$= \|x\|^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \lambda_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

Пусть теперь $s = u_n$ — т.е. s есть многочлен Фурье элемента x. Тогда выполняется

$$\|x - u_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

Далее, вычислим расстояние между x и S_n. Имеем

$$d_n^2 = \rho^2(x, S_n) = \inf_{s \in S_n} \|x - s\|^2 = \inf_{s \in S_n} \left[\|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \lambda_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \right].$$

Отсюда получаем, что **расстояние от элемента $\boldsymbol{x}$ до подпространства $\boldsymbol{S_n}$ реализуется на элементе $\boldsymbol{u_n}$, т.е. на многочлене Фурье элемента $\boldsymbol{x}$**. Доказанное свойство называется **минимальным свойством коэффициентов Фурье элемента $\boldsymbol{x}$**; другими словами это свойство можно переформулировать так: **элементом наилучшего приближения к элементу $\boldsymbol{x}$ из подпространства $\boldsymbol{S_n}$ является многочлен Фурье элемента $\boldsymbol{x}$**.

Итак, имеет место равенство

$$d_n^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \leq \|x\|^2.$$

Из этого неравенства вытекает, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2$$

сходится, и что справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \leq \|x\|^2.$$

Данное неравенство называется **неравенством Бесселя**[26] **для коэффициентов Фурье элемента** x **по ортонормированной системе** $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Заметим, что из неравенства Бесселя следует, что коэффициенты Фурье элемента x обладают свойством

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0.$$

2.9.2. Полные и замкнутые системы. Равенство Парсеваля[27]

Пусть H есть гильбертово пространство.

Ортонормированная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов H называется полной в H, если ее ортогональное дополнение состоит из одного — именно, нулевого — элемента.

Теорема 2.9.1. *Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть полная ортонормированная система в гильбертовом пространстве H. Тогда*

1. *для любого элемента x из H справедливы равенства*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2;$$

[26] Ф. Бессель (1784–1846) — немецкий математик и астроном.
[27] Ж.-А. Парсеваль (1755–1836) — французский математик.

2. *если* $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$, $y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k e_k$ *есть два произвольных элемента из* H, *то выполняется*

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mu_k.$$

Доказательство. Пусть x есть произвольный элемент из H. Рассмотрим последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ многочленов Фурье элемента x. Покажем, что при выполнении условий теоремы эта последовательность будет фундаментальной и будет сходиться к элементу x.

Для произвольных натуральных чисел n и m имеем

$$u_{n+m} - u_n = \sum_{k=1}^{n+m} \lambda_k e_k - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = \sum_{k=n+1}^{n+m} \lambda_k e_k.$$

Отсюда

$$\|u_{n+m} - u_n\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{n+m} \lambda_k e_k, \quad \sum_{j=n+1}^{n+m} \lambda_j e_j \right) = \sum_{k=n+1}^{n+m} \lambda_k^2.$$

Поскольку ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2$$

сходится, то вследствие критерия Коши сходимости числовых рядов для любого положительного числа ε существует натуральное число n_0 такое, что при $n > n_0$, $m > 0$ выполняется

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} \lambda_k^2 < \varepsilon.$$

Следовательно, имеет место свойство: для любого положительного числа ε существует натуральное число n_0 такое, что при $n > n_0$, $m > 0$ выполняется

$$\|u_{n+m} - u_n\|^2 < \varepsilon.$$

А это и означает, что последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна.

Поскольку пространство H банахово, то последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел: существует элемент z, принадлежащий H и такой, что

$$z = \lim_{n\to\infty} u_n.$$

Покажем, что выполняется $x = z$.

Пусть $n > m$. Имеем

$$(x - u_n, e_m) = \lambda_m - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (e_k, e_m) = \lambda_m - \lambda_m = 0.$$

Отсюда

$$(x - z, e_m) = (x - \lim_{n\to\infty} u_n, e_m) = \lim_{n\to\infty} (x - u_n, e_m) = 0.$$

Следовательно, элемент $x - z$ ортогонален всем элементам e_k, $k = 1, 2, \ldots$. Поскольку система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна в H, то выполняется $x - z = \Theta$, или $x = z$.

Итак, при выполнении условий теоремы для любого элемента x из пространства H справедливо равенство

$$x = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right).$$

Это равенство и означает, что элемент x представим своим рядом Фурье:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k.$$

Далее, имеем

$$\|x - u_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = \|x\|^2 - \|x - u_n\|^2.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ получаем требуемое равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_k^2 = \|x\|^2.$$

Первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь x и y есть два произвольных элемента пространства H. Согласно установленному выше, имеют место равенства

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k = \lim_{n\to\infty} u_n, \quad \lambda_k = (x, e_k), \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k,$$

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k e_k = \lim_{n\to\infty} v_n, \quad \mu_k = (y, e_k), \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k.$$

Из утверждения 2.5.3 следует, что имеет место равенство

$$(x, y) = \lim_{n\to\infty} (u_n, v_n).$$

Это равенство и дает требуемое:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mu_k$$

(уточним, что ряд в правой части последнего равенства всегда сходится — вследствие сходимости рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k^2$).

Теорема полностью доказана.

Установленное в теореме 2.9.1 равенство

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2$$

называется **равенством Парсеваля**. Очевидным следствием теоремы является утверждение: **если система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть полная ортонормированная система, то неравенство Бесселя превращается в равенство Парсеваля**.

Перейдем к понятию замкнутой системы.

Ортонормированная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов гильбертова пространства H называется замкнутой, если замыкание множества всевозможных конечных линейных комбинаций с действительными коэффициентами элементов этой системы совпадает с H.

Теорема 2.9.2. *Ортонормированная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов гильбертова пространства H полна тогда и только тогда, когда она замкнута.*

Доказательство. Пусть ортонормированная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна в H. Тогда любой элемент гильбертова пространства H представим своим рядом Фурье; поскольку же сходимость ряда Фурье эквивалентна сходимости последовательности частичных сумм — т.е. последовательности некоторых конечных линейных комбинаций — то отсюда и следует, что любой элемент из H либо является конечной линейной комбинацией элементов системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ (в случае, если ряд Фурье содержит лишь конечное число членов), либо является пределом последовательности элементов, каждый из которых является конечной линейной комбинацией элементов системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Обратно, пусть ортонормированная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута в H, и пусть элемент x_0 из H ортогонален всем элементам e_k, $k = 1, 2, \ldots$. Если элемент x_0 имеет вид

$$x_0 = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j,$$

то, умножая x_0 скалярно на элемент e_k и учитывая ортогональность x_0 всем таким элементам, получим $\alpha_j = 0$, $j = 1, \ldots, m$. Пусть теперь x_0 есть предел семейства элементов $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$, каждый из которых есть конечная линейная комбинация элементов системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, и пусть ε есть фиксированное положительное число. Для данного числа ε найдется натуральное число m_0 такое, что при $m > m_0$ выполняется

$$\|x_0 - z_m\| < \varepsilon.$$

Пусть элемент z_m принадлежит подпространству S_N (напомним, что S_l есть конечномерное подпространство, базисом в котором являются элементы e_1, …, e_l), и пусть λ_k есть коэффициенты Фурье элемента x_0 по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Согласно минимальному свойству коэффициентов Фурье, имеет место неравенство

$$\|x_0 - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k e_k\| < \|x_0 - z_m\|.$$

Отсюда следует, что при $m > m_0$ выполняется

$$\left\| x_0 - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k e_k \right\| < \varepsilon.$$

Пусть $n > N$. Имеем

$$d_n^2 = \rho^2(x_0, S_n) = \|x_0\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \leq \|x_0\|^2 - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^2 = \rho^2(x_0, S_N) < \varepsilon^2.$$

Отсюда

$$\rho(x_0, S_n) = \left\| x_0 - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\| < \varepsilon.$$

В силу произвольности n и ε получаем, что выполняется равенство

$$x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k.$$

Умножая это равенство скалярно на элемент e_j, используя свойство непрерывности скалярного произведения (т.е. используя утверждение 2.5.3 и учитывая ортогональность элемента x_0 всем элементам e_j, получим $\lambda_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots$). Это означает, что $x_0 = \Theta$, и далее — что система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна в H.

Теорема доказана.

2.9.3. Гильбертов базис. Существование гильбертова базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве

Пусть H есть гильбертово пространство.

Гильбертовым базисом пространства H называется замкнутая ортонормированная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ его элементов.

Теорема 2.9.3. *В любом сепарабельном гильбертовом пространстве существует гильбертов базис.*

Доказательство. Сепарабельность пространства H означает, что в этом пространстве имеется последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ его элементов, представляющая собой всюду плотное в H множество. Пусть n_1 есть первый ненулевой элемент в этой последовательности. Положим

$$e_1 = \frac{x_{n_1}}{\|x_{n_1}\|}.$$

В последовательности $\{x_n\}_{n=n_1}^{\infty}$ выберем элемент с наименьшим номером, линейно независимый с элементом e_1; обозначим этот элемент y_2. Далее, обозначим через L_1 подпространство H, базисом в котором является элемент e_1. Поскольку y_2 линейно независим с e_1, то y_2 не принадлежит L_1; в тоже время все элементы, предшествующие элементу y_2, принадлежат L_1. Согласно теореме 2.5.2 (теореме об ортогональном проектировании) существуют элементы z_2 и w_2 такие, что $z_2 \in L_1$, $w_2 \in L_1^{\perp}$, $y_2 = z_2 + w_2$. Положим

$$e_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}.$$

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=n_2}^{\infty}$, в которой n_2 есть номер элемента y_2 в исходной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Выберем в этой последовательности элемент с наименьшим номером, линейно независимый с элементами e_1 и e_2; обозначим этот элемент y_3. Далее, обозначим через L_2 подпространство H, базисом в котором являются элементы e_1 и e_2. Заметим, что элемент y_3 не принадлежит L_2 — в противном случае имеем линейную зависимость элементов e_1, e_2 и y_3. Вновь по теореме 2.5.2 существуют элементы z_3 и w_3 такие, что $z_3 \in L_2$, $w_3 \in L_2^{\perp}$, $y_3 = z_3 + w_3$. Положим

$$e_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|}.$$

Продолжая процесс далее, получим ортонормированную систему $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов пространства H. Покажем, что построенная система является искомой.

Пусть x есть произвольный элемент из H, ε есть произвольное положительное число. Тогда существует натуральное число l такое, что выполняется

$$\|x - x_l\| < \varepsilon.$$

Далее, процесс построения системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ таков, что найдется натуральное число m такое, что $x_l \in L_m$. Имеем

$$x_l = \sum_{j=1}^{m} \beta_j e_j.$$

Пусть λ_j есть коэффициенты Фурье элемента x. Согласно минимальному свойству коэффициентов Фурье, справедливо неравенство

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j \right\| \leq \|x - x_l\|.$$

Повторяя рассуждения предыдущей теоремы, получаем, что при $n > m$ выполняется

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\| < \varepsilon.$$

В силу произвольности n и ε элемент x есть сумма ряда Фурье по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j.$$

Это означает, что система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна в пространстве H. Но тогда, как было показано в предыдущем пункте, она будет замкнута. Теорема доказана.

Заметим, что имеет место и обратная теорема.

Теорема 2.9.4. *Если в гильбертовом пространстве H существует замкнутая ортонормированная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, то это пространство будет сепарабельным.*

Доказательство. По теореме 2.9.2 система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ будет полной в пространстве H. Рассмотрим множество E, состоящее из всевозможных конечных линейных комбинаций элементов системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ с рациональными коэффициентами. Это множество и будет искомым счетным всюду плотным в H множеством.

Теорема доказана.

2.9.4. Изоморфизм и изометричность гильбертовых пространств

Как будет показано ниже, сепарабельные гильбертовы пространства (бесконечномерные) устроены одинаково.

Теорема 2.9.5. *Всякое бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство изоморфно и изометрично пространству l_2.*

Доказательство. Пусть H есть сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство. Согласно теореме 2.9.3, в H существует гильбертов базис — замкнутая ортонормированная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ его элементов. Пусть x есть элемент H, $\lambda_k = (x, e_k)$ есть его коэффициенты Фурье по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Определим отображение A из H в множество числовых последовательностей:

$$A(x) = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

В силу неравенства Бесселя ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2$$

сходится. Следовательно, оператор A действует из H в l_2. Покажем, что этот оператор действует на все пространство l_2.

Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть элемент пространства l_2. Положим

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k.$$

Имеет место равенство

$$\|u_{n+m} - u_n\| = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{n+k}^2.$$

Но тогда сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2$ очевидным образом дает фундаментальность в H последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. Следовательно, существует элемент x_0, принадлежащий H и такой, что

$$x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k.$$

Очевидно, что выполняется

$$A(x_0) = \{\lambda_k\}.$$

А это и означает, что оператор A переводит H на все пространство l_2.

Очевидно, что оператор A взаимно однозначен. Далее, очевидно, что выполняются условия изоморфности оператора A. Свойство же изометричности вытекает из равенства Парсеваля, которое приводит к равенству

$$\|x\|^2 = \|A(x)\|_{l_2}^2.$$

2.9.5. Ряды Фурье кусочно-непрерывных функций

Приведем без доказательства классические теоремы математического анализа о представлении непрерывных и кусочно-непрерывных функций рядами Фурье.

Система функций

$$\mathbf{1, \cos\, x, \sin\, x, \cos\, 2x, \sin\, 2x, \ldots}$$

называется тригонометрической системой.

Ряд

$$\boldsymbol{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos\, kx + b_k \sin\, kx],}$$

в котором $\boldsymbol{a_0}$, $\boldsymbol{a_k}$, $\boldsymbol{b_k}$, $\boldsymbol{k = 1, 2, \ldots}$, суть произвольные действительные числа, называется тригонометрическим рядом.

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема[28] **на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тригонометрический ряд, коэффициенты которого определяются равенствами**

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\,kx\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\,kx\,dx,$$

называется рядом Фурье функции $f(x)$, числа a_0, a_k, b_k, $k = 1, 2, \ldots$ — коэффициентами Фурье функции $f(x)$.

Основной вопрос теории тригонометрических рядов Фурье — сходится ли ряд Фурье и, если сходится, то чему равна его сумма?

Функция $f(x)$, определенная на интервале (x_0, b), называется функцией, удовлетворяющей справа условию Гёльдера порядка α, $0 < \alpha \leq 1$, в точке x_0, если существует предел $f(x_0+0)$, и существуют положительные числа M и δ такие, что при $h \in (0, \delta)$ выполняется неравенство

$$|f(x_0+h) - f(x_0+0)| \leq Mh^{\alpha}.$$

Функция $f(x)$, определенная на интервале (a, x_0), называется функцией, удовлетворяющей слева условию Гёльдера порядка α, $0 < \alpha \leq 1$, в точке x_0, если существует предел $f(x_0-0)$, и существуют положительные числа M и δ такие, что при $h \in (0, \delta)$ выполняется неравенство

$$|f(x_0-h) - f(x_0-0)| \leq Mh^{\alpha}.$$

Функция $f(x)$, определенная на интервале (a, b), называется функцией, удовлетворяющей условию Гёльдера порядка α, $0 < \alpha \leq 1$, в точке $x_0 \in (a, b)$, если она удовлетворяет обобщенному условию Гёльдера как слева, так и справа.

Теорема 2.9.6. *Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Если она удовлетворяет в точке x интервала $(-\pi, \pi)$ условию*

[28]Функция $f(x)$ называется абсолютно интегрируемой на отрезке $[a, b]$, если ее модуль есть интегрируемая на этом же отрезке функция.

Гёльдера порядка α, $0 < \alpha \leq 1$, то ее ряд Фурье сходится в этой точке, и его сумма равна

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера порядка α, $0 < \alpha \leq 1$, в точке $-\pi$ справа и в точке π слева, то ее ряд Фурье сходится в этих точках, и его сумма равна

$$\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}.$$

Приведем достаточные условия, при выполнении которых будет справедлива теорема 2.9.6.

Пусть функция $f(x)$ имеет конечный предел $f(x_0-0)$. Тогда, если существует предел, конечный или бесконечный,

$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0-0)}{x-x_0},$$

то будем называть его левой производной $f'_-(x_0)$. Если существует конечный предел $f(x_0+0)$, и существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0+0)}{x-x_0},$$

то будем называть его правой производной $f'_+(x_0)$.

Теорема 2.9.7. *Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi,\pi]$. Если в точке x интервала $(-\pi,\pi)$ существуют конечные $f(x+0)$, $f(x-0)$, $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в этой точке, и его сумма равна*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Если существуют конечные $f(-\pi+0)$, $f(\pi-0)$, $f'_+(-\pi)$ и $f'_-(\pi)$, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точках $-\pi$ и π, и его сумма равна

$$\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}.$$

Следствие. *При выполнении условий теорем 2.9.6 или 2.9.7 в каждой точке x интервала $(-\pi,\pi)$, являющейся точкой непрерывности функции $f(x)$, сумма ряда Фурье функции $f(x)$ равна значению $f(x)$.*

2.10. Линейные операторы в нормированных пространствах

2.10.1. Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность

Линейные операторы нам уже встречались — при определении изоморфизма пространств. Но сейчас эти операторы будут изучаться с некоторых более общих позиций.

Приведем вначале общее определение линейного оператора.

Пусть $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ есть линейные векторные пространства, $\boldsymbol{A}$ есть отображение из $\boldsymbol{X}$ в $\boldsymbol{Y}$. Это отображение называется линейным отображением, или линейным оператором, если

1. **при принадлежности элементов $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_2}$ пространства $\boldsymbol{X}$ области определения отображения $\boldsymbol{A}$ элемент $\boldsymbol{\lambda x_1 + \mu x_2}$ с произвольными действительными числами $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\mu}$ также принадлежит области определения отображения $\boldsymbol{A}$**;

2. **для любых $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_2}$ из области определения отображения $\boldsymbol{A}$ и любых действительных чисел $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\mu}$ выполняется**

$$\boldsymbol{A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda A(x_1) + \mu A(x_2).}$$

Утверждение 2.10.1. *Область значений любого линейного оператора есть линейное многообразие.*

Доказательство. Пусть y_1 и y_2 есть элементы из области значений оператора A, λ и μ — произвольные действительные числа, x_1 и x_2 — элементы пространства X такие, что $y_1 = A(x_1)$, $y_2 = A(x_2)$. Имеем

$$\lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda A(x_1) + \mu A(x_2) = A(\lambda x_1 + \mu x_2).$$

Следовательно, элемент $\lambda y_1 + \mu y_2$ принадлежит области значений оператора A. Это и означает требуемое.

Утверждение доказано.

В дальнейшем будем считать, что

1. **$\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ есть нормированные пространства с нормами $\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{X}}$ и $\|\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{Y}}$**;

2. **оператор $\boldsymbol{A}$ определен на всем пространстве $\boldsymbol{X}$** (если не оговорено противное).

Итак, пусть A есть линейный оператор, определенный на всем нормированном пространстве X и действующий в нормированное пространство Y. **Оператор $\boldsymbol{A}$ называется непрерывным в точке $\boldsymbol{x_0}$ пространства $\boldsymbol{X}$, если для любой последовательности $\boldsymbol{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}$ из $\boldsymbol{X}$ такой, что $\boldsymbol{x_n \to x_0}$ при $\boldsymbol{n \to \infty}$, выполняется $\boldsymbol{Ax_n \to Ax_0}$.**

Заметим, что данное определение непрерывности использует понятие непрерывности по Гейне[29]. Можно было бы использовать определение непрерывности по Коши (точную формулировку такого определения непрерывности линейного оператора в точке x_0 предоставим читателю), однако, как доказывается в курсе математического анализа, в конечномерных пространствах понятия предела по Коши и предела по Гейне эквивалентны. В нормированных пространствах, в том числе бесконечномерных, эквивалентность понятий предела по Коши и по Гейне также имеет место, и доказывается это вполне аналогично соответствующему доказательству для конечномерного случая.

Будем обозначать через Θ_X и Θ_Y нулевые элементы пространств X и Y соответственно.

Утверждение 2.10.2. *Линейный оператор A непрерывен всюду на пространстве X тогда и только тогда, когда он непрерывен в точке Θ_X.*

Доказательство этого утверждения предоставим читателю.

Определим нуль-множество линейного оператора A.

Нуль-множеством, или ядром, линейного оператора $\boldsymbol{A}$ называется множество

$$\{x \in X : A(x) = \Theta_Y\}.$$

Обозначается это множество $\boldsymbol{\ker A}$, или $\boldsymbol{N(A)}$.

Очевидно, что нуль-множество всегда не пусто, поскольку для любого линейного оператора A выполняется $A(\Theta_X) = \Theta_Y$.

Важнейшим подклассом класса линейных операторов являются **ограниченные операторы**.

Линейный оператор $\boldsymbol{A}$, действующий из нормированного пространства $\boldsymbol{X}$ в нормированное пространство $\boldsymbol{Y}$, называется ограниченным, если существует неотрицательное число $\boldsymbol{M}$ такое, что для всех элементов $\boldsymbol{x}$ из $\boldsymbol{X}$ выполняется

$$\|A(x)\|_Y \le M\|x\|_X.$$

[29]Г. Гейне (1821–1881) — немецкий математик.

Непрерывность и ограниченность линейных операторов тесно связаны.

Теорема 2.10.1. *Пусть X и Y есть нормированные пространства, A есть линейный оператор, действующий из X в Y. Для того, чтобы оператор A был непрерывен всюду в пространстве X, необходимо и достаточно, чтобы он был ограничен.*

Доказательство. Если оператор A ограничен, то он очевидным образом будет непрерывен в точке Θ_X. Согласно утверждению 2.10.2, отсюда следует, что он будет непрерывен всюду.

Обратно, пусть оператор A непрерывен всюду в пространстве X. Предположим, что он не является ограниченным. Тогда для любого натурального числа n найдется элемент x_n из X такой, что

$$\|A(x_n)\|_Y \geq n\|x_n\|_X.$$

Положим $\widetilde{x}_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|_X}$. Имеем

$$\|\widetilde{x}_n\|_X = \frac{1}{n}, \quad \|A(\widetilde{x}_n)\|_Y = \frac{1}{n\|x_n\|_X}\|A(x_n)\|_Y \geq 1.$$

Получим противоречие: $\|\widetilde{x}_n\|_X$ стремится к нулю, но $\|A(\widetilde{x}_n)\|_Y$ не стремится к нулю (при $n \to \infty$). Это противоречие и доказывает, что оператор A обязан быть ограниченным.

Теорема доказана.

2.10.2. Норма линейного оператора. Пространство линейных ограниченных операторов

Пусть X и Y есть нормированные пространства. Рассмотрим множество всевозможных линейных операторов, действующих из X в Y. В этом множестве нетрудно ввести структуру линейного пространства, определив сумму $A+B$ линейных операторов как оператор, действующий по правилу

$$(A+B)(x) = A(x) + B(x),$$

и определив оператор λA как оператор, действие которого определяется равенством

$$(\lambda A)(x) = \lambda A(x).$$

Очевидно, что операторы $A+B$ и λA снова будут линейными операторами, и что все свойства линейного пространства для множества линейных операторов имеют место. Выделим подмножество построенного линейного пространства — **совокупность всевозможных линейных ограниченных операторов, действующих из X; обозначается эта совокупность $\mathcal{L}(X, Y)$**. Покажем, что $\mathcal{L}(X, Y)$ можно наделить структурой нормированного пространства.

Пусть A есть элемент линейного пространства $\mathcal{L}(X, Y)$. Положим

$$M_0(A) = \inf\{M : \quad \|A(x)\|_Y \le M\|x\|_X \quad \forall\, x \in X\}.$$

Число $M_0(A)$ однозначно определено, и оно определяет функцию, действующую из $\mathcal{L}(X, Y)$ в множество неотрицательных действительных чисел. Покажем, что эта функция обладает всеми свойствами нормы.

Прежде всего заметим, что при всех x из X выполняется неравенство

$$\|A(x)\|_Y \le M_0(A)\|x\|_X.$$

Далее, покажем, что выполняется равенство

$$M_0(A) = \sup_{x\colon \|x\|_X \le 1} \|A(x)\|_Y.$$

С одной стороны, имеет место очевидное неравенство

$$\sup_{x\colon \|x\|_X \le 1} \|A(x)\|_Y \le M_0(A).$$

С другой стороны, согласно определению точной нижней грани, для любого положительного числа ε найдется элемент x_ε из пространства X такой, что выполняется неравенство

$$\|A(x_\varepsilon)\|_Y \ge (M_0(A) - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|_X.$$

Положим $\widetilde{x}_\varepsilon = \frac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|_X}$. Имеем

$$\|A(\widetilde{x}_\varepsilon)\|_Y = \frac{1}{\|x_\varepsilon\|_X}\|A(x_\varepsilon)\|_Y \ge \frac{1}{\|x_\varepsilon\|_X}(M_0(A) - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|_X = M_0(A) - \varepsilon.$$

Отсюда

$$\sup_{x\colon \|x\|_X \le 1} \|A(x)\|_Y \ge \|A(\widetilde{x}_\varepsilon)\|_Y \ge M_0(A) - \varepsilon.$$

В силу произвольности ε отсюда следует, что справедливо неравенство

$$\sup_{x\colon \|x\|_X \le 1} \|A(x)\|_Y \ge M_0(A).$$

Вместе с полученным ранее противоположным неравенством это означает справедливость равенства

$$\sup_{x\colon \|x\|_X \le 1} \|A(x)\|_Y = M_0(A).$$

Исходя из этого равенства, мы и покажем, что функция $M_0(A)$ обладает всеми свойствами нормы.

Если A есть нулевой оператор, то равенство $M_0(A) = 0$ очевидно. Обратно, если $M_0(A) = 0$, то из полученного выше равенства следует, что всюду на замкнутом единичном шаре пространства X выполняется $A(x) = \Theta_Y$. Пусть теперь x есть элемент пространства X такой, что $\|x\|_X > 1$. Имеем

$$A\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) = \Theta_Y = \frac{1}{\|x\|_X} A(x).$$

Отсюда следует, $A(x) = \Theta_Y$, и тем самым получаем, что $A(x) = \Theta_Y$ для всех элементов x из пространства X. Другими словами, если $M_0(A) = 0$, то A есть нулевой оператор.

Первое свойство нормы для функции $M_0(A)$ доказано.

Пусть λ есть действительное число. Имеем

$$M_0(\lambda A) = \sup_{x\colon \|x\|_X \le 1} \|(\lambda A)(x)\|_Y = \sup_{x\colon \|x\|_X \le 1} |\lambda| \|A(x)\|_Y =$$

$$= |\lambda| \sup_{x\colon \|x\|_X \le 1} \|A(x)\|_Y = |\lambda| M_0(A).$$

Следовательно, для функции $M_0(A)$ имеет место второе свойство нормы.

Наконец, пусть A_1 и A_2 есть два оператора из пространства $\mathcal{L}(X, Y)$, x есть элемент пространства X такой, что $\|x\|_X \le 1$. Имеем

$$\|(A_1 + A_2)(x)\|_Y = \|A_1(x) + A_2(x)\|_Y \le \|A_1 x\|_Y + \|A_2 x\|_Y \le$$

$$\le \sup_{x\colon \|x\|_X \le 1} \|A_1(x)\|_Y + \sup_{x\colon \|x\|_X \le 1} \|A_2(x)\|_Y = M_0(A_1) + M_0(A_2).$$

Отсюда следует неравенство

$$M_0(A_1 + A_2) \le M_0(A_1) + M_0(A_2),$$

которые и означают, что для функции $M_0(A)$ имеет место третье свойство нормы.

Итак, **функция $M_0(A)$ действительно определяет норму в линейном векторном пространстве $\mathcal{L}(X,Y)$**. Покажем дополнительно, что для этой функции имеет место равенство

$$M_0(A) = \sup_{x\colon \|x\|_X = 1} \|A(x)\|_Y.$$

Очевидно, что выполняется неравенство

$$\sup_{x\colon \|x\|_X \le 1} \|A(x)\|_Y \ge \sup_{x\colon \|x\|_X = 1} \|A(x)\|_Y.$$

Далее, пусть x есть элемент пространства X такой, что $0 < \|x\|_X \le 1$. Положим $\widetilde{x} = \frac{x}{\|x\|_X}$. Имеем

$$\|A(\widetilde{x})\|_Y = \frac{1}{\|x\|_X} \|A(x)\|_Y \ge \|A(x)\|_Y.$$

Отсюда

$$\sup_{x\colon \|x\|_X \le 1} \|A(x)\|_Y \le \sup_{x\colon \|x\|_X = 1} \|A(x)\|_Y.$$

Два полученных противоположных неравенства дают равенство

$$\sup_{x\colon \|x\|_X \le 1} \|A(x)\|_Y = \sup_{x\colon \|x\|_X = 1} \|A(x)\|_Y.$$

Учитывая равенство

$$M_0(A) = \sup_{x\colon \|x\|_X \le 1} \|A(x)\|_Y,$$

получаем требуемое.

Суммируем доказанное выше.

Теорема 2.10.2. *Пространство $\mathcal{L}(X,Y)$ нормируемо, функция $M_0(A)$ является нормой в нем:*

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \inf\{M : \quad \|A(x)\|_Y \le M\|x\|_X \quad \forall\, x \in X\}.$$

Следствие. *Для нормы в пространстве $\mathcal{L}(X,Y)$ имеют место неравенство*

$$\|A(x)\|_Y \le \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|x\|_X;$$

равенства

$$\|A\| = \sup_{x\colon \|x\|_X \le 1} \|A(x)\|_Y = \sup_{x\colon \|x\|_X = 1} \|A(x)\|_Y.$$

Обсудим теперь вопрос полноты пространства $\mathcal{L}(X,Y)$.

Теорема 2.10.3. *Если пространство Y банахово, то и пространство $\mathcal{L}(X,Y)$ будет банаховым.*

Доказательство. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть фундаментальная последовательность элементов пространства $\mathcal{L}(X,Y)$ — т.е. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть такая последовательность линейных ограниченных операторов, действующих из нормированного пространства X в банахово пространство Y, что для любого положительного числа ε найдется натуральное число N такое, что при $n > N$ и $m > 0$ выполняется

$$\|A_{n+m} - A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \varepsilon.$$

Пусть x есть произвольный элемент пространства X. Рассмотрим последовательность $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ элементов пространства Y. Из неравенства

$$\|A_{n+m}x - A_n x\|_Y \leq \|A_{n+m} - A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|x\|_X$$

следует, что эта последовательность фундаментальна в пространстве Y. Поскольку пространство Y банахово, то существует элемент y, принадлежащий Y и такой, что

$$\lim_{n\to\infty} A_n x = y.$$

Это равенство ставит в соответствие элементу x из пространства X однозначно определенный элемент y из пространства Y. Другими словами, это равенство определяет оператор A, действующий из X в Y. Покажем, что оператор A есть предел семейства $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, и что он принадлежит пространству $\mathcal{L}(X,Y)$.

Линейность оператора A следует из линейности каждого оператора A и из свойств предела. Далее, заметим, что числовая последовательность $\{\|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\}_{n=1}^{\infty}$ также будет фундаментальной — это следует из неравенства (свойства непрерывности нормы):

$$\big|\|A_{n+m}\|_{\mathcal{L}(X,Y)} - \|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\big| \leq \|A_{n+m} - A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

Но тогда эта последовательность ограничена: существует число M такое, что

$$\|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq M, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Отсюда

$$\|A_n x\|_Y \leq \|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|x\|_X \leq M\|x\|_X.$$

Вновь из свойств предела вытекает неравенство

$$\|Ax\|_Y \le M\|x\|_X.$$

А это и означает, что оператор A ограничен.

Вернемся к неравенству, которое дало фундаментальность последовательности $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\|A_{n+m}x - A_n x\|_Y < \varepsilon\|x\|_X \quad \textit{при} \quad n > N, \quad m > 0, \quad x \in X.$$

Переходя в этом неравенстве при фиксированном x к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\|Ax - A_n x\|_Y \le \varepsilon|x\|_X.$$

Отсюда

$$\sup_{x:\,\|x\|\le 1} \|(A - A_n)x\|_Y \le \varepsilon$$

или

$$\|A_n - A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \le \varepsilon$$

при $n > N$. Произвольность числа ε в этом неравенстве означает, что в пространстве $\mathcal{L}(X,Y)$ имеет место сходимость

$$A_n \to A \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Доказанное выше означает, что для любой фундаментальной в пространстве $\mathcal{L}(X,Y)$ последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует ее предел, принадлежащий этому же пространству. А это и означает полноту пространства $\mathcal{L}(X,Y)$.

Теорема доказана.

Приведем без доказательства еще одну теорему, характеризующую свойства полноты пространства $\mathcal{L}(X,Y)$.

Определим понятие поточечной сходимости семейства операторов.

Последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ операторов из пространства $\mathcal{L}(X,Y)$ называется поточечно сходящейся к оператору A, если для любого элемента x из пространства X выполняется

$$\boldsymbol{A_n x \to Ax \quad \text{при} \quad n \to \infty.}$$

Теорема 2.10.4. *Пусть пространства X и Y банаховы, и пусть для любого элемента x из X последовательность $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в пространстве Y. Тогда существует оператор A, принадлежащий $\mathcal{L}(X,Y)$ и такой, что последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ поточечно сходится к оператору A.*

Замечание. Из сходимости последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ операторов из пространства $\mathcal{L}(X,Y)$ следует поточечная сходимость. Обратное неверно. Приведем пример.

Пусть H есть бесконечномерное гильбертово пространство, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть гильбертов базис этого пространства. Семейство операторов A_n зададим равенствами

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k$$

($x \in H$, $(\quad,\quad)$ — скалярное произведение в H). Очевидно, что $A_n x \to Ix$ (I — тождественный оператор пространства H), но при этом

$$\|A_n e_{n+1} - I e_{n+1}\|_H = \|A_n e_{n+1} - e_{n+1}\|_H = \|e_{n+1}\|_H = 1.$$

Это и означает, что A_n не стремится к I в норме пространства $\mathcal{L}(H,H)$.

2.10.3. Продолжение операторов. Продолжение линейного оператора с всюду плотного линейного многообразия

Пусть X и Y есть нормированные пространства, L есть подмножество X, являющееся линейным многообразием. Далее, пусть A_0 есть линейный оператор, определенный на L и действующий в Y. **Для таких операторов можно определить норму, положив**

$$\|A_0\|_{\mathcal{L}(L,Y)} = \sup_{x \in L:\, \|x\|_X \le 1} \|A(x)\|_Y.$$

Если эта норма конечна, то оператор A_0 называется ограниченным на L оператором.

Пусть существует оператор A, определенный на всем пространстве X и такой, что $Ax = A_0 x$ при $x \in L$. Оператор A называется продолжением, или расширением оператора A_0 с линейного многообразия L на все пространство X.

Теорема 2.10.5. *Пусть A_0 есть линейный оператор, действующий из линейного многообразия L нормированного пространства X в нормированное пространство Y. Если многообразие L всюду плотно в X, оператор A_0 ограничен на L и пространство Y банахово, то существует линейный оператор A, являющийся продолжением оператора A_0 с L на X, причем выполняется равенство*

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|A_0\|_{\mathcal{L}(L,Y)}.$$

Доказательство. Пусть x есть элемент пространства X, не принадлежащий многообразию L. Вследствие плотности L в X существует последовательность $\{x_n\}$ элементов L такая, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Определим оператор A вначале на элементах многообразия L, положив $Ax = A_0x$ при $x \in L$, затем на элементах x, не принадлежащих L, положив

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_0x_n.$$

Покажем, что оператор A определен корректно, и что он будет линейным и ограниченным на всем пространстве X.

Прежде всего заметим, что последовательность $\{A_0x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна — это следует из неравенства

$$\|A_0x_{n+m} - A_0x_n\|_{\mathcal{L}(L,Y)} \leq \|A_0\|_{\mathcal{L}(L,Y)}\|x_{n+m} - x_n\|_X.$$

Поскольку пространство Y банахово, то из фундаментальности следует, что последовательность $\{A_0x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел. Пусть теперь $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть другая последовательность элементов многообразия L, сходящаяся при $n \to \infty$ к элементу x. Последовательность $\{A_0x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ также имеет предел; обозначим

$$y_0 = \lim_{n\to\infty} A_0x_n, \quad y'_0 = \lim_{n\to\infty} A_0x'_n.$$

Имеем

$$\|y_0 - y'_0\|_Y = \|y_0 - A_0x_n + A_0x_n - A_0x'_n + A_0x'_n - y'_0\|_Y \leq$$

$$\leq \|y_0 - A_0x_n\|_Y + \|y'_0 - A_0x'_n\|_Y + \|A_0x_n - A_0x'_n\|_Y \leq$$

$$\leq \|y_0 - A_0x_n\|_Y + \|y'_0 - A_0x'_0\|_Y + \|A_0\|_{\mathcal{L}(L,Y)}\|x_n - x'_n\|_X \leq$$

$$\leq \|y_0 - A_0x_n\|_Y + \|y'_0 + A_0x'_0\|_Y + \|A_0\|_{\mathcal{L}(L,Y)}\left[\|x_n - x\|_X + \|x'_n - x\|_X\right].$$

Правая часть здесь при увеличении n может быть сделана сколь угодно малой. А это и означает, что $y_0 = y_0'$.

Из доказанного следует, что последовательность $\{A_0 x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел, и что этот предел будет один и тот же для любой последовательности, сходящейся к элементу x. Другими словами, оператор A определен на всем пространстве X, и определен корректно.

Покажем, что оператор A есть линейный ограниченный оператор.

Пусть λ и μ есть действительные числа, x' и x'' есть два элемента пространства X. Если оба этих элемента принадлежат L, то равенство

$$A(\lambda x' + \mu x'') = \lambda A x' + \mu A x''$$

очевидно. Пусть x' и x'' не принадлежат L, и пусть $\{x_n'\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{x_n''\}_{n=1}^{\infty}$ есть последовательности элементов L, сходящиеся к x' и x'' соответственно. Имеем

$$A(\lambda x' + \mu x'') = \lim_{n\to\infty} A(\lambda x_n' + \mu x_n'') = \lambda \lim_{n\to\infty} A x_n' + \mu \lim_{n\to\infty} A x_n'' =$$

$$= \lambda A x' + \mu A x''.$$

В случае если x' принадлежит L, а x'' не принадлежит L, равенство

$$A(\lambda x' + \mu x'') = \lambda A x' + \mu A x''$$

теперь очевидно.

Из доказанного следует, что оператор A линеен на всем пространстве X.

Покажем, что оператор A ограничен.

Если элемент x принадлежит L, то неравенство

$$\|A(x)\|_Y \le \|A_0\|_{\mathcal{L}(L,Y)} \cdot \|x\|_X$$

очевидно. Пусть x не принадлежит L, и пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть последовательность элементов L, сходящаяся к x. Имеем

$$\|A_0(x_n)\|_Y \le \|A_0\|_{\mathcal{L}(L,Y)} \cdot \|x_n\|_X.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве при $n \to \infty$ (и используя свойство непрерывности нормы), получим

$$\|A(x)\|_Y \le \|A_0\|_{\mathcal{L}(L,Y)} \cdot \|x\|_X.$$

Отсюда и из аналогичного неравенства для элементов L и получаем, что оператор A ограничен на всем пространстве X.

Осталось доказать, что построенное продолжение сохраняет норму.

Из полученного выше неравенства

$$\|A(x)\|_Y \leq \|A_0\|_{\mathcal{L}(L,Y)} \cdot \|x\|_X$$

следует , что выполняется неравенство

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \|A_0\|_{\mathcal{L}(L,Y)}.$$

Но обратное неравенство

$$\|A_0\|_{\mathcal{L}(L,Y)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$$

очевидно. Следовательно, выполняется равенство

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|A_0\|_{\mathcal{L}(L,L)}.$$

Теорема полностью доказана.

Построенное продолжение оператора A_0 с всюду плотного в X линейного многообразия называется **продолжением по непрерывности**. Процедура продолжения по непрерывности используется в математике весьма часто; хорошо известным примером использования этой процедуры является теория действительных чисел, в которой операции сложения и умножения иррациональных чисел можно определить именно с помощью продолжения по непрерывности с множества рациональных чисел.

2.10.4. Обратные операторы

Пусть X и Y есть линейные векторные пространства, A есть оператор, определенный на всем пространстве X и действующий во все пространство Y. Обозначим через I_X и I_Y тождественные операторы пространств X и Y соответственно.

Оператор $\boldsymbol{B_1}$, действующий из пространства $\boldsymbol{Y}$ в пространство $\boldsymbol{X}$, называется левым обратным к $\boldsymbol{A}$ оператором, если выполняется $\boldsymbol{B_1 A = I_X}$. Оператор $\boldsymbol{B_2}$, действующий из пространства $\boldsymbol{Y}$ в пространство $\boldsymbol{X}$, называется правым обратным к $\boldsymbol{A}$ оператором, если выполняется $\boldsymbol{A B_2 = I_Y}$. Оператор $\boldsymbol{B}$, действующий из пространства $\boldsymbol{Y}$ в пространство $\boldsymbol{X}$, называется обратным к $\boldsymbol{A}$ оператором, если выполняется $\boldsymbol{BA = I_X}$, $\boldsymbol{AB = I_Y}$. Если оператор

***A* имеет обратный, то он называется обратимым. Обозначается обратный оператор A^{-1}**.

Очевидно, что если оператор A обратим, то левый обратный и правый обратный операторы совпадают; в то же время существуют операторы, у которых правый и левый обратные не совпадают (в этом случае, очевидно, оператор A не будет обратимым).

Утверждение 2.10.3. *Если оператор A есть линейный обратимый оператор, то оператор A^{-1} также будет линейным.*

Доказательство этого утверждения очевидно.

Напомним определение взаимно-однозначного оператора.

Оператор A, действующий из пространства X в пространство Y, называется взаимно-однозначным, если разным элементам x_1 и x_2 из X соответствуют разные элементы Ax_1 и Ax_2.

Следующие четыре утверждения также очевидны; их доказательство предоставляется читателю.

Утверждение 2.10.4. *Если оператор A есть взаимно-однозначный оператор, действующий из пространства X во все пространство Y, то оператор A обратим.*

Утверждение 2.10.5. *Если A есть линейный оператор, действующий из линейного пространства X во все линейное пространство Y, и если дополнительно $N(A) = \{\Theta_X\}$, то оператор A обратим.*

Утверждение 2.10.6. *Если пространства X и Y есть нормированные пространства, A есть линейный оператор, действующий из пространства X во все пространство Y, и если существует положительное число m такое, что для всех x из X выполняется неравенство*

$$\|A(x)\|_Y \geq m\|x\|_X,$$

то оператор A обратим.

Замечание. В утверждениях 2.10.4—2.10.6 вместо всего пространства Y можно брать область значений $R(A)$ оператора A: обратный оператор тогда будет отображать множество $R(A)$ в X.

Пусть X и Y есть нормированные пространства.

Линейный оператор A, действующий из пространства X на все пространство Y, называется непрерывно обратимым, если оператор A^{-1} существует и является линейным ограниченным оператором (т.е. принадлежит $\mathcal{L}(Y, X)$).

Утверждение 2.10.7. *Пусть выполняются условия утверждения 2.10.4. Тогда оператор A будет непрерывно обратим.*

Приведем без доказательства теорему, играющую важную роль в функциональном анализе и в приложениях.

Теорема 2.10.6 (теорема Банаха об обратном отображении). *Если A есть линейный ограниченный оператор, действующий из банахова пространства X на банахово пространство Y, и если этот оператор взаимнооднозначен, то обратный оператор A^{-1} будет непрерывен.*

Следующая теорема также играет важную роль в приложениях.

Теорема 2.10.7. *Пусть A есть линейный оператор, действующий из банахова пространства X в себя, и пусть этот оператор ограничен, причем выполняется $\|A\|_{\mathcal{L}(X,X)} < 1$. Тогда оператор $I_X + A$ будет непрерывно обратим.*

Доказательство. Рассмотрим формальный операторный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k A^k.$$

Сходимость любого ряда, в том числе и операторного, определяется сходимостью его частичных сумм. Положим

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k A^k.$$

Частичная сумма S_n корректно определена, она представляет собой ограниченный линейный оператор. Покажем, что последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть фундаментальная в пространстве $\mathcal{L}(X,X)$ последовательность. Имеем

$$\|S_{n+m} - S_n\|_{\mathcal{L}(X,X)} = \|(-1)^{n+m}A^{n+m} + \ldots + (-1)^{n+1}A^{n+1}\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq$$

$$\leq \|A^{n+m}\|_{\mathcal{L}(X,X)} + \ldots + \|A^{n+1}\|_{\mathcal{L}(X,X)}.$$

Заметим, что для любых двух линейных операторов L и M, действующих из X в X и ограниченных, имеет место неравенство

$$\|LM\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq \|L\|_{\mathcal{L}(X,X)} \cdot \|M\|_{\mathcal{L}(X,X)}.$$

Отсюда

$$\|S_{n+m} - S_n\|_{\mathcal{L}(X,X)} = \|A\|^{n+m}_{\mathcal{L}(X,X)} + \ldots + \|A\|^{n+1}_{\mathcal{L}(X,X)}.$$

Пусть q есть такое число, что $\|A\|_{\mathcal{L}(X,X)} \le q < 1$. Тогда

$$\|S_{n+m} - S_n\|_{\mathcal{L}(X,X)} \le q^{n+1}(1 + q + \ldots + q^{m-1}) \le \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Поскольку число q^{n+1} с ростом n можно сделать сколь угодно малым, то и величину $\|S_{n+m} - S_n\|_{\mathcal{L}(X,X)}$ можно сделать сколь угодно малой (не зависимо от m). А это и означает, что последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в пространстве $\mathcal{L}(X,X)$.

Поскольку пространство X банахово, то и пространство $\mathcal{L}(X,X)$ будет банаховым (см. теорему 2.10.3). Значит существует линейный ограниченный оператор S, действующий из X в себя и такой, что

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k A^k.$$

Имеем

$$S(I_X + A) = [\lim_{n\to\infty} S_n](I_X + A) = \lim_{n\to\infty}[S_n(I_X + A)] = \lim_{n\to\infty}[I_X - A^{n+1}] = I_X.$$

Аналогичным образом показывается, что

$$(I_X + A)S = I_X.$$

Следовательно, оператор S является обратным к оператору $I_X + A$.

Покажем, что оператор S ограничен. Имеем

$$\|S_n\|_{\mathcal{L}(X,X)} \le \sum_{k=0}^{n} \|A^k\| \le \sum_{k=0}^{n} q^k \le \frac{1}{1-q}.$$

Отсюда получаем предельным переходом

$$\|S\|_{\mathcal{L}(X,X)} \le \frac{1}{1-q}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Очевидно, что для оператора S имеет место оценка

$$\|S\|_{\mathcal{L}(X,X)} \le \frac{1}{1 - \|A\|_{\mathcal{L}(X,X)}}.$$

Теорема 2.10.8. *Пусть X и Y есть банаховы пространства, операторы A и B есть операторы из пространства $\mathcal{L}(X,Y)$, оператор A непрерывно обратим, выполняется неравенство*

$$\|(B-A)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < 1.$$

Тогда оператор B будет непрерывно обратим.

Доказательство. Имеет место равенство

$$B = [I_X - (A-B)A^{-1}]A.$$

Оператор $(A-B)A^{-1}$ как оператор из Y в Y будет непрерывно обратим в силу условия и в силу теоремы 2.10.7. Другими словами, имеет место равенство

$$B = CA,$$

в котором операторы C и A непрерывно обратимы. Очевидно теперь, что оператор $A^{-1}C^{-1}$ будет непрерывным обратным к оператору B.

Теорема доказана.

2.10.5. Линейные функционалы. Сопряженное пространство

Функционалом в широком смысле слова над данным множеством M (вообще говоря, произвольной структуры) **называется отображение, действующее из M в множество скаляров — множество комплексных или действительных чисел** (в нашем случае — в множество действительных чисел).

Пусть X есть нормированное пространство. **Множество $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ всевозможных линейных ограниченных функционалов называется сопряженным к X пространством; обозначается это пространство X^***. Поскольку пространство $\mathbb{R}$ банахово, то, согласно теореме 2.10.3, пространство X^* также будет банаховым.

В пространстве X^*, как ив любом нормированном пространстве, имеется сходимость по норме:

$$f_n \to f \quad \textit{в} \quad X^* \quad \textit{при} \quad n\to\infty, \quad \textit{если} \quad \lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_{X^*} = 0.$$

Можно определить и другую сходимость, называемую **$*$–слабой: последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов пространства X^* $*$–слабо сходится к элементу f в пространстве X^*, если выполняется**

$$\boldsymbol{f_n(x) \to f(x) \text{ при } n\to\infty \text{ для всех } x \text{ из } X.}$$

В ряде случаев структуру сопряженного пространства можно легко описать.

Теорема 2.10.9 (теорема Рисса об общем виде линейных ограниченных функционалов над гильбертовым пространством). *Пусть H есть гильбертово пространство, f есть линейный ограниченный функционал над H. Тогда в H найдется единственный элемент y такой, что для всех x из H выполняется*

$$f(x) = (x, y)$$

((,) — скалярное произведение в H), и при этом будет справедливо равенство $\|f\|_{X^*} = \|y\|_H$.

Доказательство. Пусть N есть нуль-множество (ядро) функционала f:

$$N = \{x \in H : \quad f(x) = 0\}.$$

Если окажется $N = H$, то, очевидно, в качестве элемента y можно взять нулевой элемент пространства H. Пусть $N \neq H$, и пусть x^* есть элемент H, не принадлежащий N. Поскольку N есть подпространство H, то, согласно теореме об ортогональном разложении (теореме 2.5.2), найдутся элементы z из H и w из $N^\perp$ такие, что $x^* = z + w$.

Положим

$$y = \frac{f(w)}{\|w\|_H^2} w.$$

Покажем, что элемент y есть искомый элемент.

Пусть x принадлежит N. Имеем

$$(x, y) = \frac{f(w)}{\|w\|_H^2}(w, x) = 0 = f(x).$$

Другими словами, для элементов N требуемое равенство выполняется.

Пусть теперь x есть элемент вида λw. Тогда

$$(x, y) = \lambda(w, y) = \frac{\lambda f(w)}{\|w\|_H^2}(w, w) = \lambda f(w) = f(\lambda w) = f(x),$$

и тем самым требуемое равенство на таких элементах x также выполняется.

Пусть x есть произвольный элемент из H. Положим $\lambda = \frac{f(x)}{f(w)}$ (заметим, что $f(w) \neq 0$, так как w не принадлежит N). Элемент $x - \lambda w$ принадлежит N. Отсюда

$$f(x) = f(x - \lambda w) + f(\lambda w) = (x - \lambda w, y) + (\lambda w, y) = (x, y).$$

Следовательно, требуемое равенство имеет место для всех элементов x из H.

Покажем, что элемент y такой, что $f(x) = (x, y)$, для всех x из H, существует только один. Предположим, что таких элементов два — y и y_1. Имеем $f(x) = (x, y) = (x, y_1)$. Отсюда $(x, y - y_1) = 0$. Положим $x = y - y_1$. Получим $\|y - y_1\|_H = 0$, что и означает равенство $y = y_1$.

Итак, элемент y, дающий требуемое представление функционала f, существует ровно один. Покажем, что для этого элемента и для функционала f имеет место равенство $\|y\|_H = \|f\|_{H^*}$.

Имеем

$$|f(x)| \leq \|f\|_{H^*} \cdot \|x\|_H, \quad |f(x)| = |(x, y)| \leq \|x\|_H \cdot \|y\|_H.$$

Отсюда $\|f\|_{H^*} \leq \|y\|_H$. Далее,

$$|f(y)| \leq \|f\|_{H^*} \cdot \|y\|_H, \quad |f(y)| = |(y, y)| \leq \|y\|_H^2.$$

Следовательно, выполняется $\|y\|_H \leq \|f\|_{H^*}$. Из доказанных двух неравенств и вытекает требуемое равенство $\|f\|_{H^*} = \|y\|_H$.

Теорема полностью доказана.

Теорема Рисса позволяет установить взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее норму, причем это соответствие будет линейным, между пространствами H и H^* (другими словами, гильбертово пространство изоморфно и изометрично своему сопряженному). Эта теорема играет весьма значительную роль в функциональном анализе, в теории дифференциальных уравнений, в вычислительной математике.

Приведем без доказательства еще две теоремы об общем виде линейных ограниченных функционалов.

Теорема 2.10.10. *Пусть Q есть ограниченное измеримое по Лебегу множество из пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда для любого линейного ограниченного функционала f над пространством $L_p(Q)$, $p > 1$, найдется функция $\psi(x)$, принадлежащая пространству $L_q(Q)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, такая, что для любой функции $\varphi(x)$ из пространства $L_p(Q)$ имеет место равенство*

$$f(\varphi) = \int\limits_Q \varphi(x)\psi(x)\, dx.$$

Теорема 2.10.11. *Для любого линейного ограниченного функционала f над пространством l_p, $p > 1$, найдется элемент $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, принадлежащий пространству l_q, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, такой, что для любого элемента*

$x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ *из пространства* l_p *выполняется*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

В п. 2.10.3 было определено понятие продолжения операторов, и была доказана теорема (теорема 2.10.5) о возможности продолжения линейного оператора с всюду плотного в нормированном пространстве X линейного многообразия на все пространство. Приведем без доказательства классическую теорему функционального анализа о возможности продолжения функционалов, более сильную по сравнению с теоремой 2.10.5.

Теорема 2.10.12 (теорема Хана[30]-Банаха). *Всякий функционал f, заданный на линейном многообразии L из нормированного пространства X, линейный и ограниченный на этом многообразии, можно продолжить на все пространство с сохранением нормы.*

Важную роль играют следствия из теоремы Хана-Банаха.

Следствие 1. *Пусть X есть нормированное пространство, $x_0 \neq \Theta_X$ есть фиксированный элемент из X. Тогда существует линейный функционал $F(x)$, принадлежащий X^* и такой, что $\|F\|_{X^*} = 1$, $F(x_0) = \|x_0\|_X$.*

Следствие 2. *Пусть в нормированном пространстве X заданы линейное многообразие L и элемент x_0, не принадлежащий L и лежащий на расстоянии d ($d > 0$) от L. Тогда существует функционал $F(x)$, принадлежащий X^* и такой, что $F(x) = 0$ при $x \in L$, $F(x_0) = 1$, $\|F\|_{X^*} = \frac{1}{d}$.*

Следствие 2 называют также **теоремой отделимости**.

2.11. Компактные множества в нормированных пространствах

2.11.1. Компактные и относительно компактные множества

Пусть X есть нормированное пространство. **Множество M из X называется относительно компактным, если из любой последовательности его элементов можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.**

Множество M из X называется компактным множеством (или компактом), если из любой последовательности его элементов можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к элементу в M.

Справедливо следующее утверждение.

[30]Г. Хан (1879–1934) — австрийский математик

Утверждение 2.11.1. *Пусть M есть компактное множество из нормированного пространства X. Тогда M замкнуто и ограничено.*

Доказательство этого утверждения предоставляем читателю.

Заметим, что обратное утверждение — если множество замкнуто и ограничено, то оно компактно — не верно. Пусть H есть бесконечномерное гильбертово пространство, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная система в H. Эта система представляет собой замкнутое ограниченное множество, но поскольку

$$\|e_k - e_m\|_H = \sqrt{2},$$

то оно не может быть компактным (сходящуюся подпоследовательность выбрать нельзя).

Для функционалов над компактными множествами имеет место аналог известной теоремы Вейерштрасса.

Теорема 2.11.1. *Пусть M есть компактное множество, f есть действительный функционал над M. Если этот функционал непрерывен на M, то он ограничен и достигает на M своих наибольших и наименьших значений.*

Доказательство этой теоремы проводится полностью аналогично доказательству соответствующей теоремы для числовых функций.

Приведем еще одну теорему — аналог принципа вложенных отрезков.

Теорема 2.11.2. *Пусть X есть банахово пространство, $\{Q_m\}_{m=1}^{\infty}$ есть семейство компактных в X множеств таких, что* $Q_{j+1} \subset Q_j, j = 1, 2, \ldots$.
Тогда пересечение всех множеств Q_m не пусто.

Доказательство. Выберем по одной точке x_m из каждого множества Q_m. Получим последовательность $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ элементов пространства X. Вся эта последовательность лежит в множестве Q_1. Поскольку Q_1 есть компакт, то у последовательности $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ имеется подпоследовательность $\{x_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $x_{m_k} \to x_0$ при $k \to \infty$, причем x_0 есть элемент Q_1. Покажем, что точка x_0 принадлежит всем компактам Q_m.

Поскольку элемент x_{m_k} лежит в Q_{m_k}, то и элементы $x_{m_{k+p}}$, $p \geq 1$, также лежат в Q_{m_k}. Эти элементы образуют сходящуюся подпоследовательность исходной последовательности $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$; вследствие компактности множества Q_{m_k} предел x_0 этой подпоследовательности будет принадлежать ему же. Но тогда элемент x_0 будет принадлежать и всем предыдущим множествам $Q_1, \ldots, Q_{m_{k-1}}$.

Пусть Q_j есть произвольное множество из заданного семейства. Для числа j найдется число k_0 такое, что $m_{k_0} > j$. Поскольку, согласно доказанному, элемент x_0 принадлежит множеству $Q_{m_{k_0}}$ и принадлежит всем предыдущим множествам, то x_0 будет принадлежать и множеству Q_j. А это и означает, что x_0 лежит в пересечении всех множеств Q_m, $m = 1, 2, \ldots$.

Теорема доказана.

Пусть $\boldsymbol{X}$ есть нормированное пространство, $\boldsymbol{M}$ есть некоторое множество из $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ есть положительное число. Множество $\boldsymbol{M_\varepsilon}$ называется $\boldsymbol{\varepsilon}$–сетью для множества $\boldsymbol{M}$, если для любого элемента $\boldsymbol{x}$ из $\boldsymbol{M}$ найдется элемент $\boldsymbol{x_\varepsilon}$ из $\boldsymbol{M_\varepsilon}$ такой, что $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_\varepsilon}\|_{\boldsymbol{X}} < \boldsymbol{\varepsilon}$.

Теорема 2.11.3 (теорема Хаусдорфа)[31]. *Множество M из нормированного пространства X относительно компактно тогда и только тогда, когда для любого положительного числа ε в X существует конечная ε–сеть для множества M.*

Доказательство. Пусть M относительно компактно, ε есть произвольное положительное число. Зафиксируем произвольный элемент x_1 из M. Если окажется, что $\|x - x_1\| < \varepsilon$ для всех элементов M, то множество $\{x_1\}$ будет ε–сетью для M (т.е. ε–сеть будет состоять из одного элемента). Пусть теперь в множестве M имеются элементы такие, что $\|x - x_1\| \geq \varepsilon$. Выберем из таких элементов элемент x_2 и зафиксируем. Если окажется, что для всех элементов x из M выполняется $\|x - x_1\| < \varepsilon$ или $\|x - x_2\| < \varepsilon$, то множество $\{x_1, x_2\}$ и будет искомой ε–сетью. Продолжая процесс, мы получим, что либо процесс оборвется на некотором шаге — что и даст существование искомой ε–сети — либо будет построена последовательность $\{x_n\}$ элементов M такая, что $\|x_n - x_m\| \geq \varepsilon$ для всех n, m при $n \neq m$. Построенная последовательность не будет фундаментальной, и никакая ее подпоследовательность также не будет фундаментальной. Наличие такой последовательности противоречит определению относительной компактности. Следовательно, процесс построения ε–сети обязательно оборвется за конечное число шагов, и тем самым существование конечной ε–сети будет доказано (заметим, что построенная ε–сеть состоит из элементов M).

Пусть теперь известно, что у множества M для любого положительного числа ε имеется конечная ε–сеть. Возьмем последовательность $\{\varepsilon_n\}$ такую, что $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, и пусть M_{ε_n} есть ε_n–сеть для M.

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть последовательность элементов множества M. Со-

[31] Ф. Хаусдорф (1868–1946) — немецкий математик.

гласно определению ε–сети, имеет место включение

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{k_1} B_{\varepsilon_1}(x_{i,1})$$

($x_{i,1}$ — элементы множества M_{ε_1}), k_1 — число элементов в нем. Так как последовательность $\{x_n\}$ имеет бесконечно много элементов, то хотя бы в одном из шаров $B_{\varepsilon_1}(x_{i,1})$ имеется бесконечно много элементов $\{x_n\}$. Обозначим искомый шар через B_1, через N_1 — содержащуюся в B_1 бесконечную часть последовательности $\{x_n\}$.

Выберем элемент x_{n_1} из N_1, имеющий наименьший номер. Пусть M_{ε_2} есть ε_2–сеть множества M. Вновь имеет место включение

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{k_2} B_{\varepsilon_2}(x_{i,2}).$$

Поскольку N_1 есть некоторое подмножество M, то множество N_1 покрыто конечной системой шаров радиуса ε_2, и вновь найдется шар, содержащий бесконечное множество элементов N_1. Обозначим этот шар B_2, часть же множества N_1 (бесконечную), содержащуюся в B_2 — N_2. Выберем в N_2 элемент x_{n_2} с наименьшим номером n_2 таким, что $n_2 > n_1$ (это возможно). Продолжая процесс, мы получим, что имеется последовательность вложенных шаров $\{B_k\}$, диаметры которых стремятся к нулю, и получим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ исходной последовательности такую, что $x_{n_k} \in B_k$, $x_{n_l} \in B_k$ при $l > k$. Покажем, что подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ фундаментальна.

Имеем

$$\|x_{n_k} - x_{n_{k+p}}\| \leq \|x_{n_k} - x_k^0\| + \|x_k^0 - x_{n_{k+p}}\| < 2\varepsilon_k.$$

Полученное неравенство и означает фундаментальность подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$.

Возможность выбора из произвольной последовательности множества M фундаментальной (т.е. сходящейся) подпоследовательности и означает его относительную компактность.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если для любого положительного числа ε для множества M существует компактная ε–сеть в X, то M относительно компактно.*

Доказательство. Пусть ε есть произвольное положительное число, M_ε — относительно компактная ε–сеть для M. По теореме Хаусдорфа для множества M_ε существует конечная ε–сеть, которую мы обозначим M'_ε. Множество M'_ε будет 2ε–сетью для множества M, причем будет конечным. Вновь используя теорему Хаусдорфа, получим, что множество M относительно компактно.

Следствие доказано.

Следствие 2. *Всякое относительно компактное множество M нормированного пространства X сепарабельно.*

Доказательство. Пусть множество M относительно компактно. Возьмем последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ положительных чисел такую, что $\varepsilon_n \to 0$, и пусть M_{ε_n} есть конечная ε_n-сеть для M. Заметим, что из теоремы 2.11.3 вытекает, что M_{ε_n}-сеть можно выбрать состоящей из элементов множества M. Положим

$$M_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_{\varepsilon_n}.$$

Очевидно, что множество M_0 счетно. Докажем, что множество M_0 всюду плотно в M. Для любого положительного числа ε найдется номер n такой, что выполняется $\varepsilon_n < \varepsilon$. Далее, для любого элемента x из M найдется элемент x_n из M_{ε_n} такой, что $\|x - x_n\| < \varepsilon_n$. Поскольку элемент x_n принадлежит M, то получаем требуемое.

Утверждение доказано.

Система $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ открытых множеств из нормированного пространства X называется открытым покрытием множества M из X, если имеет место включение

$$\boldsymbol{M \subset \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha.}$$

Теорема 2.11.4. *Замкнутое множество M из нормированного пространства X компактно тогда и только тогда, когда из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.*

Доказательство. Пусть $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ есть открытое покрытие компактного множества M такое, что из него нельзя выбрать конечное подпокрытие. Возьмем последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ положительных чисел такую, что $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Множество M имеет конечную ε_1-сеть. Пусть эта ε_1-сеть образована точками $x_1, \ldots, x_{n_1}$. Положим $M_i = M \cap \overline{B}_{\varepsilon_1}(x_i)$.

Очевидно, что имеет место равенство

$$M = \bigcup_{i=1}^{n_1} M_i.$$

Если множество M не имеет конечного подпокрытия множествами системы $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$, то конечного покрытия нет хотя бы у одного из множеств M_i. Пусть это будет множество M_{i_1}; обозначим его K_1. Множество K_1 компактно, оно имеет конечную ε_2–сеть. Повторяя предыдущие рассуждения для множества K_1, получим, что найдется компактное подмножество K_2 этого множества, которое не имеет конечного подпокрытия множествами семейства $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$, т.д. В результате получим последовательность $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ вложенных компактов, диаметры которых стремятся к нулю. Эта последовательность имеет непустое пересечение. Пусть x^* есть точка, принадлежащая всем множествам K_n. Тогда x^* есть точка множества M. Следовательно, найдется индекс α_0 такой, что $\alpha_0 \in A$, $x^* \in G_{\alpha_0}$. В силу открытости множества G_{α_0} и в силу того, что диаметры множеств K_n стремятся к нулю, найдется такой номер n_0, что при $n > n_0$ будет выполняться $K_n \subset G_{\alpha_0}$. Но это противоречит построению семейства $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$. Данное противоречие и означает, что исходное множество M имеет конечное подпокрытие множествами $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

Пусть теперь множество M таково, что из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. Предположим, что множество M не компактно. Тогда найдется последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов множества M, не имеющая сходящихся подпоследовательностей. Рассмотрим семейство $\{B_{\varepsilon_x}(x)\}$ открытых шаров с центром в произвольной точке x множества M произвольного радиуса ε_x. Уменьшим радиус ε_x настолько, чтобы в каждом таком шаре содержалось не более одной точки последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — это возможно! Семейство $\{B_{\varepsilon_x}(x)\}$ образует открытое покрытие множества M; у этого покрытия найдется конечное подпокрытие. Но в этом подпокрытии не может (по построению) содержаться бесконечная последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Полученное противоречие опровергает предположение о некомпактности множества M.

Теорема полностью доказана.

Теоремы 2.11.3 и 2.11.4 дают общие критерии компактности множеств в нормированных пространствах. Для конкретных пространств имеются свои, адаптированные именно к данному пространству, критерии. Приведем без доказательства наиболее важные для приложений критерии компактности (точнее говоря, относительной компактности) множеств в пространствах C, L_p и l_p.

Пусть Q есть компактное в $\mathbb{R}^n$ множество. Напомним, что $C(Q)$ в случае компактности в пространстве $\mathbb{R}^n$ множества Q есть пространство непрерывных на Q функций с нормой

$$\|f\|_{C(Q)} = \max_{Q} |f(x)|.$$

Множество $\mathfrak{M}$ из пространства $C(Q)$ называется равномерно ограниченным, если существует постоянная K такая, что выполняется $|f(x)| \leq K$ для всех x из Q и всех f из $\mathfrak{M}$.

Множество $\mathfrak{M}$ из пространства $C(Q)$ называется равностепенно непрерывным, если для любого положительного числа ε найдется определяющееся числом ε положительное число δ такое, что для любых точек x_1 и x_2 из Q таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$, выполняется $|f(x_1) - f(x_2)|$ для любой функции $f(x)$ из множества $\mathfrak{M}$.

Теорема 2.11.5 (теорема Арцела[32]). *Для того, чтобы множество $\mathfrak{M}$ из пространства $C(Q)$ было относительно компактно, необходимо и достаточно, чтобы оно было равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным.*

Приведем теперь критерий компактности множества в пространстве $L_p(Q)$.

Пусть Q есть ограниченное измеримое по Лебегу множество из пространства $\mathbb{R}^n$. Будем считать, что всякая функция из пространства $L_p(Q)$ продолжена вне множества Q как нулевая функция (т.е. считаем $f(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^n \setminus Q$).

Теорема 2.11.6 (теорема Рисса). *Для того, чтобы множество $\mathfrak{M}$ из пространства $L_p(Q)$, $1 \leq p < +\infty$ было относительно компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограничено, и чтобы для любого положительного числа ε нашлось бы положительное число δ, определяющееся лишь числом ε и такое, что для всех функций $f(x)$ из $\mathfrak{M}$ из неравенства $|h| < \delta$ следует неравенство*

$$\Big(\int\limits_Q |f(x+h) - f(x)|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

[32] Ч. Арцела (1847–1912) — итальянский математик.

Рассмотрим теперь пространство l_p.

Теорема 2.11.7. *Для того, чтобы множество* $\mathfrak{M}$ *из пространства* $l_p(Q)$, $1 \le p < +\infty$ *было относительно компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограничено, и чтобы для любого положительного числа* ε *нашлось бы натуральное число* N, *определяющееся лишь числом* ε *и такое, что для всех элементов* $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *из* $\mathfrak{M}$ *при* $n > N$ *выполняется неравенство*

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

2.12. Вполне непрерывные операторы

С понятием компактного множества тесно связано понятие вполне непрерывного оператора. В данном пункте мы рассмотрим лишь некоторые аспекты теории линейных вполне непрерывных операторов.

2.12.1. Линейные вполне непрерывные операторы

Линейный непрерывный оператор $\boldsymbol{A}$, действующий из нормированного пространства $\boldsymbol{X}$ в нормированное пространство $\boldsymbol{Y}$, называется вполне непрерывным, если он замкнутый единичный шар пространства $\boldsymbol{X}$ переводит в относительно компактное множество пространства $\boldsymbol{Y}$.

Непосредственно из определения линейного вполне непрерывного оператора следует, что он всякое ограниченное множество пространства X переводит в относительно компактное.

Справедливо также следующее утверждение.

Теорема 2.12.1. *Множество всех линейных вполне непрерывных операторов есть подпространство пространства* $\mathcal{L}(X, Y)$.

Доказательство. Необходимо установить два свойства:

1. *если операторы* A_1 *и* A_2 *вполне непрерывны,* λ_1, λ_2 *есть действительные числа, то оператор* $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$ *также вполне непрерывен*;

2. *если* $\{A_n\}$ *есть последовательность линейных вполне непрерывных операторов, сходящаяся в пространстве* $\mathcal{L}(X, Y)$ *к оператору* A, *то этот оператор также будет вполне непрерывным.*

Докажем первое свойство. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть последовательность элементов пространства X такая, что $\|x_n\| \le 1$. Положим $y_n = \lambda_1 A_1 x_n +$

$\lambda_2 A_2 x_n$. Поскольку оператор A_1 вполне непрерывен, то из последовательности $\{A_1 x_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выбрать подпоследовательность $\{A_1 x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, являющуюся фундаментальной в пространстве Y. Далее, в силу вполне непрерывности оператора A_2 из подпоследовательности $\{A_2 x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ можно выбрать новую подпоследовательность $\{A_2 x_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$, являющуюся фундаментальной в пространстве Y. Очевидно, что последовательность $\{y_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ будет фундаментальной. А это и дает вполне непрерывность оператора $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$.

Докажем, что имеет место и свойство 2.

Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть последовательность линейных вполне непрерывных операторов такая, что $A_n \to A$ по норме пространства $\mathcal{L}(X, Y)$, и пусть $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ есть последовательность элементов из единичного шара пространства X. Для любого положительного числа ε найдется номер n_0 такой, что для всех x_m будет выполняться неравенство

$$\|A_{n_0} x_m - A x_m\|_Y < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Обозначим $y_m = A_{n_0} x_m$. Поскольку оператор A_{n_0} вполне непрерывен, то из последовательности $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{y_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Покажем, что последовательность $\{A x_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ будет фундаментальной. Имеем

$$\|A x_{m_k} - A x_{m_l}\|_Y = \|A x_{m_k} - A_{n_0} x_{m_k} + A_{n_0} x_{m_k} - A_{n_0} x_{m_l} + A_{n_0} x_{m_l} - A x_{m_l}\|_Y \leq$$

$$\leq \|A x_{m_k} - A_{n_0} x_{m_k}\|_Y + \|A_{n_0} x_{n_k} - A_{n_0} x_{m_k}\|_Y + \|A_{n_0} x_{m_k} - A x_{m_l}\|_Y \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \|A_{n_0} x_{n_k} - A_{n_0} x_{m_l}\|_Y + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Поскольку оператор A_{n_0} непрерывен, то последнее неравенство и даст фундаментальность последовательности $\{A x_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Свойство 2 доказано; в целом доказано выполнение требуемых свойств, необходимых для того, чтобы множество всех вполне непрерывных линейных операторов было подпространством пространства $\mathcal{L}(X, Y)$.

Теорема доказана.

Легко доказываются следующие утверждения.

1. *Если пространство X или пространство Y конечномерно, то всякий линейный ограниченный оператор, действующий из пространства X в пространство Y, будет вполне непрерывным.*

2. *Всякий линейный непрерывный функционал над пространством X будет вполне непрерывным оператором.*

3. *Если X, Y, Z есть нормированные пространства, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $B \in \mathcal{L}(X,Y)$, и один из операторов A или B вполне непрерывен, то оператор BA будет вполне непрерывен.*

Приведем без доказательства некоторые результаты о разрешимости функциональных уравнений с линейными вполне непрерывными операторами.

Пусть $\boldsymbol{A}$ **есть линейный ограниченный оператор**, определенный на всем нормированном пространстве X и действующий в нормированное пространство Y. Далее, пусть $\varphi(y)$ есть линейный непрерывный функционал над пространством Y. Определим функционал $f(x)$, $x \in X$:

$$f(x) = \varphi(Ax).$$

Очевидно, что $f(x)$ есть линейный непрерывный функционал над пространством X. Таким образом, по заданному линейному ограниченному оператору A построен оператор, действующий из пространства Y^* в пространство X^* и ставящий в соответствие функционалу φ функционал f, определенный указанным выше способом. **Этот оператор называется сопряженным к $\boldsymbol{A}$ оператором; обозначается сопряженный оператор $\boldsymbol{A^*}$**.

Имеют место следующие свойства, доказывать которые не будем:

1. *Оператор A^* является линейным ограниченным операторам, действующим из пространства Y^* в пространство X^*, и при этом выполняется равенство*

$$\|A^*\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)} = \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

2. *Оператор A^* вполне непрерывен тогда и только тогда, когда вполне непрерывным является оператор A.*

Пусть теперь A есть **линейный вполне непрерывный оператор**, действующий из банахова пространства X в себя. **Уравнение**

$$\boldsymbol{x - Ax = y, \quad y \in X,}$$

называется линейным уравнением Фредгольма 2-го рода; в случае $\boldsymbol{y = \Theta_Y}$ будем называть данное уравнение однородным. Уравнение

$$\boldsymbol{f - A^* f = g, \quad g \in X^*,}$$

будем называть сопряженным к исходному уравнению; в случае $g = \Theta_{X^*}$ будем называть данное уравнение однородным сопряженным уравнением.

Уравнение Фредгольма 2-го рода и сопряженные к ним возникают во многих ситуациях — при исследовании разрешимости алгебраических уравнений (систем уравнений), интегральных и дифференциальных уравнений, функциональных уравнений. Совокупность результатов о разрешимости уравнений 2-го рода можно объединить в утверждение, называемое альтернативой Фредгольма: **уравнения $Ax - x = y$ и $A^*f - f = g$ с линейным вполне непрерывным оператором A, действующим из банахова пространства X в себя, либо одновременно разрешимы для любых правых частей y и g, и в этом случае однородные уравнения $Ax - x = \Theta_Y$ и $A^*f - f = \Theta_{X^*}$ имеют лишь нулевые решения, либо однородные уравнения $Ax - x = \Theta_Y$ и $A^*f - f = \Theta_{X^*}$ имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений, и в этом случае для того, чтобы уравнение $Ax - x = y$ (или же уравнение $A^*f - f = g$) имело решение для данного элемента y из X (функционала g из X^*) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $f(y) = 0$ для любого функционала f из множества $N(A^* - I)$ (соответственно $g(x) = 0$ для любого элемента x из множества $N(A - I)$)**. (Доказывать это утверждение не будем).

Пусть теперь A есть линейный вполне непрерывный оператор, действующий из нормированного пространства X в нормированное пространство Y. **Уравнение**

$$Ax = y, \quad y \in Y,$$

называется уравнением Фредгольма 1-го рода. Теория таких уравнений в случае $Y = X$ существенно отличается — в худшую сторону! — от теории линейных уравнений Фредгольма 2-го рода; некоторые из этих отличий видны из нижеприведенных теорем (эти теоремы будут даны без доказательства).

Теорема 2.12.2. *Пусть A есть линейный вполне непрерывный оператор, действующий из бесконечномерного нормированного пространства X в нормированное пространство Y, причем на множестве $R(A)$ его значений этот оператор обратим. Тогда оператор $A^{-1}: \quad R(A) \to X$ будет неограниченным.*

Уточним, что неограниченность того или иного оператора означает, в частности, что он не будет непрерывным.

Теорема 2.12.3. *Если X есть бесконечномерное банахово пространство, A есть вполне непрерывный оператор, действующий из X в X, то существует элемент y из X такой, что уравнение $Ax = y$ не имеет решений.*

Замечание. Если пространство X конечномерно, то различий в теории операторных уравнений 1-го и 2-го рода нет.

2.12.2. Нелинейные вполне непрерывные операторы

Теория нелинейных вполне непрерывных операторов столь же важна, сколь и теория линейных вполне непрерывных операторов.

Пусть A есть оператор, переводящий нормированное пространство X в нормированное пространство Y, и пусть D есть некоторое подмножество из области определения оператора A. **Оператор $\boldsymbol{A}$ называется вполне непрерывным на множестве $\boldsymbol{D}$, если он непрерывен на $\boldsymbol{D}$ и при этом переводит каждое ограниченное подмножество $\boldsymbol{D}$ в относительно компактное в $\boldsymbol{Y}$ множество** (уточним, что оператор A здесь не обязательно линейный).

Пусть оператор A отображает некоторое множество M в себя. **Точка $\boldsymbol{x^*}$ из $\boldsymbol{M}$ называется неподвижной точкой оператора $\boldsymbol{A}$, если выполняется равенство $\boldsymbol{Ax^* = x^*}$**. К задачам на нахождение или же на доказательство существования неподвижных точек приводятся многие задачи математики и математического моделирования.

Одной из важнейших теорем о существовании неподвижных точек является теорема Шаудера[33].

Теорема 2.12.4 (теорема Шаудера). *Пусть оператор A отображает замкнутое выпуклое ограниченное множество M банахова пространства X в себя. Тогда, если оператор A вполне непрерывен на M, то он имеет в M неподвижную точку.*

Доказательство теоремы Шаудера основано на построении специального семейства операторов, аппроксимирующих исходный оператор A и обладающих свойствами, характерными для операторов, действующих из конечномерного пространства в себя, и на использовании для этих (конечномерных!) операторов классической теоремы математического анализа — теоремы Брауэра[34] о существовании неподвижных точек у непрерывного отображения, переводящего замкнутое выпуклое ограниченное множество

[33] Ю. Шаудер (1868–1943) — польский математик.
[34] Л. Брауэр (1881–1966) — голландский математик.

пространства $\mathbb{R}^n$ в себя. Полное же доказательство теоремы Шаудера мы приводить не будем.

Весьма важными с точки зрения доказательства теорем существования решений тех или иных задач являются нижеследующие теоремы, доказательство которых основано на теореме Шаудера.

Теорема 2.12.5. *Если непрерывный оператор A отображает замкнутое выпуклое множество M банахова пространства X в свое относительно компактное подмножество, то он имеет в M неподвижную точку.*

Теорема 2.12.6. *Пусть X есть банахово пространство, оператор A действует из замкнутого шара $\overline{B}_R(\Theta_X)$ в пространство X и вполне непрерывен. Если для всех действительных чисел λ таких, что $\lambda > 1$, и для всех элементов x из пространства X таких, что $\|x\|_X = R$, выполняется $Ax \neq \lambda x$, то оператор A имеет в шаре $\overline{B}_R(\Theta_X)$ неподвижную точку.*

Теорема 2.12.7. *Пусть X есть банахово пространство, оператор A действует из замкнутого шара $\overline{B}_R(\Theta_X)$ пространства X в пространство X и вполне непрерывен. Если для всех элементов x пространства X таких, что $\|x\|_X = R$, выполняется $\|Ax\|_X \leq \|x\|_X$, то оператор A имеет в шаре $\overline{B}_R(\Theta_X)$ неподвижную точку.*

Следующая теорема говорит о фундаментальной роли в математике так называемых априорных оценок.

Теорема 2.12.8 (теорема Лерэ[35] — Шаудера). *Пусть оператор A отображает банахово пространство X в себя и вполне непрерывен. Далее, пусть для всех возможных решений уравнения*

$$x = \lambda Ax$$

при $\lambda \in [0, 1]$ выполняется оценка

$$\|x\|_X \leq K$$

с некоторым неотрицательным числом K. Тогда оператор A имеет в пространстве X неподвижную точку.

Требуемая условием данной теоремы оценка $\|x\|_X \leq K$ устанавливается для предполагаемых решений уравнений $x = \lambda Ax$, и именно поэтому она называется априорной (a priori в буквальном переводе с латинского означает "до опыта").

[35]Ж. Лерэ (1906–1998) — французский математик.

Теорема 2.12.9. *Пусть оператор A отображает банахово пространство в себя и вполне непрерывен. Если выполняется условие*

$$\lim_{\|x\|_X\to\infty}\frac{\|Ax\|_X}{\|x\|_X}=q<1,$$

то уравнение $x - Ax = y$ имеет решение для любого элемента y из пространства X.

Замечание. Теоремы 2.12.4 — 2.12.9 ничего не говорят о единственности решений.

2.13. Метод малого параметра и метод продолжения по параметру. Сжимающие операторы

Приведем еще некоторые результаты о разрешимости операторных уравнений.

Пусть X и Y есть нормированные пространства, $\{A(\lambda)\}$ есть семейство операторов, определенных при $\lambda \in (-R_0, R_0)$ и таких, что $A(\lambda) \in \mathcal{L}(X, Y)$ при $\lambda \in (-R_0, R_0)$. Далее, пусть $\{y(\lambda)\}$ есть семейство элементов из пространства Y, определенных при $\lambda \in (-R_0, R_0)$. Рассмотрим уравнение

$$A(\lambda)x = y(\lambda).$$

Пусть семейство операторов $\{A(\lambda)\}$ и семейство элементов $\{y(\lambda)\}$ аналитичны по λ при $\lambda = 0$ — т.е. пусть имеют место представления

$$A(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\lambda^k,\quad y(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}y_k\lambda^k$$

с фиксированными операторами A_k и элементами y_k, причем числовые ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|A_k\|_{\mathcal{L}(X,Y)}|\lambda|^k,\quad \sum_{k=0}^{\infty}\|y_k\|_Y|\lambda|^k$$

имеют ненулевые радиусы сходимости R_1 и R_2 такие, что $R_1 \le R_0$, $R_2 \le R_0$. Наконец, пусть оператор $A(0)$ непрерывно обратим.

Из аналитичности оператор-функции в точке $\lambda = 0$ следует, что семейство $\{A(\lambda)\}$ непрерывно по λ в точке $\lambda = 0$. Следовательно, найдется положительное число ρ_0 такое, что на интервале $|\lambda| < \rho_0$ выполняется

$$\|[A(0)-A(\lambda)]A^{-1}(0)\|_{\mathcal{L}(Y,Y)}<1.$$

Вследствие равенства $A(\lambda) = [I + (A(\lambda) - A(0))A^{-1}(0)]A(0)$, указанного выше неравенства и теоремы 2.10.8 оператор $A(\lambda)$ при $|\lambda| < \rho_0$ будет непрерывно обратим. Следовательно, для чисел λ таких, что $|\lambda| < \rho_0$ уравнение $A(\lambda)x = y(\lambda)$ будет иметь единственное решение $x(\lambda) : x(\lambda) = A^{-1}(\lambda)y(\lambda)$. Функция $x(\lambda)$ будет аналитична по λ в окрестности точки $\lambda = 0$, радиус сходимости соответствующего степенного ряда равен $\min(R_0, \rho_0)$. Покажем, как можно построить $x(\lambda)$, используя разложения $A(\lambda)$ и $y(\lambda)$.

Будем искать $x(\lambda)$ в виде степенного ряда

$$x(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \lambda^k.$$

Подставляя представления элемента $x(\lambda)$ в исходное уравнение, учитывая разложение функций $A(\lambda)$ и $y(\lambda)$, приходим к следующей цепочке равенств

$$A_0x_0 = y_0, \quad A_0x_1 + A_1x_0 = y_1, \quad A_0x_2 + A_1x_1 + A_2x_0 = y_2, \ldots$$

или

$$\sum_{k=0}^{n} A_k x_{n-k} = y_n, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Учитывая, что оператор A_0 ($A_0 = A(0)$) непрерывно обратим, получаем формулы

$$x_0 = A_0^{-1}y_0, \quad x_1 = A_0^{-1}y_1 - A_0^{-1}A_1A_0^{-1}y_0, \ldots.$$

Возникающие здесь формулы будут громоздкими, но тем не менее они позволяют вычислить все коэффициенты x_k, причем каждый из них за конечное число операций.

Описанный выше метод построения решений операторных уравнений называется **методом малого параметра**; этот метод позволяет доказывать разрешимость уравнений $Bx = y$ в случае, когда оператор B "мало" отличается от некоторого обратимого оператора A. Следующая теорема и основанный на ней **метод продолжения по параметру** позволяет изучать разрешимость уравнения $Bx = y$ в случае, когда оператор B "достаточно сильно" отличается от оператора A.

Теорема 2.13.1. *Пусть дано непрерывное по λ при $\lambda \in [0, 1]$ семейство операторов $A(\lambda)$, причем при каждом $\lambda \in [0, 1]$ операторы $A(\lambda)$ являются линейными ограниченными операторами, действующими из банахова пространства X в банахово пространство Y, и пусть оператор $A(0)$*

непрерывно обратим, для всех λ *из отрезка* $[0,1]$ *и для всех элементов* x *из пространства* X *выполняется неравенство*

$$\|A(\lambda)x\|_Y \geq \gamma\|x\|_X, \quad \gamma > 0.$$

Тогда оператор $A(1)$ *непрерывно обратим, причем выполняется оценка* $\|A^{-1}(1)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \gamma^{-1}$.

Доказательство. Мы будем использовать следующее топологическое утверждение, называемое иногда **"принципом топологической индукции"** :

Если на отрезке $[a,b]$ числовой оси дано множество E, непустое, одновременно открытое и замкнутое, то E совпадает со всем отрезком $[a,b]$.

Доказательство этого утверждения можно найти в учебнике Ю.Г. Решетняка "Курс математического анализа" .

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы.

Обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0,1]$, для которых оператор $A(\lambda)$ непрерывно обратим. Это множество не пусто, поскольку число 0 по условию есть элемент Λ. Докажем, что множество Λ открыто.

Пусть λ_0 есть элемент множества Λ. Заметим, что выполняется неравенство $\|A^{-1}(\lambda_0)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \gamma^{-1}$. Действительно, пусть $x \in X$, $y = A(\lambda_0)x$, тогда $x = A^{-1}(\lambda_0)y$. Из условия теоремы следует, что выполняется неравенство $\|y\|_Y \geq \gamma\|A^{-1}(\lambda_0)y\|_X$. Отсюда получаем неравенство $\|A^{-1}(\lambda_0)y\|_X \leq \gamma^{-1}\|y\|_Y$, которое и даст требуемое неравенство $\|A^{-1}(\lambda_0)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \gamma^{-1}$.

Для всех чисел λ из отрезка $[0,1]$ имеет место неравенство

$$\|[A(\lambda) - A(\lambda_0)]A^{-1}(\lambda_0)\|_{\mathcal{L}(Y,Y)} \leq \gamma^{-1}\|A(\lambda) - A(\lambda_0)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

Вследствие непрерывности оператор-функции $A(\lambda)$ в точке λ_0 для любого положительного числа ε найдется положительное число δ, определяющееся числом ε и такое, что при $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ выполняется $\|A(\lambda) - A(\lambda_0)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \varepsilon$. Возьмем в качестве ε число γ. Тогда при $|\lambda - \lambda_0| < \delta(\gamma)$, $\lambda \in [0,1]$ выполняется неравенство

$$\|[A(\lambda) - A(\lambda_0)]A^{-1}(\lambda_0)\|_{\mathcal{L}(Y,Y)} < 1.$$

Имеют место равенства

$$A(\lambda) = A(\lambda_0) - (A(\lambda_0) - A(\lambda)) = [I + (A(\lambda) - A(\lambda_0))A^{-1}(\lambda_0)]A(\lambda_0).$$

Для чисел λ таких, что $|\lambda - \lambda_0| < \delta(\gamma)$, как показано выше, норма оператора $\widetilde{A}$, определенного равенством $\widetilde{A} = (A(\lambda) - A(\lambda_0))A^{-1}(\lambda_0)$, будет меньше единицы. Согласно теореме 2.10.7, оператор $I + \widetilde{A}$ будет непрерывно обратим. Поскольку и оператор $A(\lambda_0)$ непрерывно обратим, то непрерывно обратимым будет и оператор $(I + \widetilde{A})A(\lambda_0)$ — т. е. оператор $A(\lambda)$. Следовательно, множество $\{\lambda : \lambda \in [0,1], |\lambda - \lambda_0| < \delta(\gamma)\}$ будет входить в множество Λ. А это и означает открытость Λ.

Докажем теперь, что множество Λ замкнуто.

Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть последовательность элементов множества Λ такая, что $\lambda_n \to \lambda_0$ при $n \to \infty$. Покажем, что число λ_0 будет элементом множества Λ.

Для операторов $A(\lambda_n)$ выполняется неравенство $\|A^{-1}(\lambda_n)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \gamma^{-1}$ (выполнение данного неравенства показано при доказательстве открытости множества Λ). Отсюда

$$\|(A(\lambda_n) - A(\lambda_0))A^{-1}(\lambda_n)\|_{\mathcal{L}(Y,Y)} \leq \gamma^{-1}\|A(\lambda_n) - A(\lambda_0)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

Вследствие непрерывности оператор-функции $A(\lambda)$ по λ для любого положительного числа ε найдется номер N, определяющийся числом ε и такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $\|A(\lambda_n) - A(\lambda_0)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \varepsilon$. Положим $\varepsilon = \gamma$. Получим, что $\|(A(\lambda_n) - A(\lambda_0))A^{-1}(\lambda_n)\|_{\mathcal{L}(Y,Y)} < 1$. Данное неравенство, равенство $A(\lambda_0) = [I + (A(\lambda_0) - A(\lambda_n))A^{-1}(\lambda_n)]A(\lambda_n)$ и вновь теорема 2.10.7 дают непрерывную обратимость оператора $A(\lambda_0)$. А это и означает, что множество Λ замкнуто.

Итак, множество Λ не пусто, открыто и замкнуто. В соответствие с принципом топологической индукции, множество Λ будет совпадать со всем отрезком $[0,1]$. Но тогда оператор $A(1)$ будет непрерывно обратим.

Требуемая оценка нормы оператора $A^{-1}(1)$ очевидна.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $\{A(\lambda)\}$ есть семейство линейных непрерывных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y, непрерывное по λ при $\lambda \in [0,1]$, и пусть для всех возможных решений уравнения $A(\lambda)x = y$ для всех λ из отрезка $[0,1]$ справедлива оценка*

$$\|x\|_X \leq c\|y\|_Y, \quad c > 0,$$

с постоянной c, не зависящей от элементов x и y, а также от числа λ. Если оператор $A(0)$ непрерывно обратим, то и оператор $A(1)$ будет *непрерывно обратимым.*

Доказательство. Из неравенства условия следствия вытекает неравенство $\|A(\lambda)x\|_Y \geq c^{-1}\|x\|_X$ для всех x из пространства X и всех чисел λ из отрезка $[0, 1]$. Поскольку же все остальные условия теоремы 2.13.1 выполняются, то из данной теоремы и вытекает справедливость следствия.

Заметим, что теорему Лерэ — Шаудера (теорема 2.12.8) также можно рассматривать как теорему, связанную с продолжением по параметру (задачу теоремы 2.12.8 можно трактовать как задачу нахождения решения семейства уравнений $(\lambda A - I_X)x = \Theta_X$; в этом семействе, очевидно, имеет место непрерывность по параметру λ, и при $\lambda = 0$ задача, очевидно, является разрешимой). С одной стороны, в ситуации теоремы 2.12.8, в отличие от ситуации теоремы 2.13.1, задача может быть и нелинейной, с другой же — в теореме Лерэ — Шаудера требуется вполне непрерывность основного оператора задачи, чего нет в теореме 2.13.1.

Приведем еще один классический результат о разрешимости операторных уравнений (точнее говоря, о существовании неподвижных точек).

Пусть A есть оператор, определенный на нормированном пространстве X, действующий снова в пространство X и, вообще говоря, нелинейный. **Оператор $\boldsymbol{A}$ называется сжимающим, если существует число $\boldsymbol{q}$, принадлежащее промежутку $\boldsymbol{[0, 1)}$ и такое, что для любых элементов $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_2}$ из пространства $\boldsymbol{X}$ выполняется неравенство**

$$\boldsymbol{\|A(x_1) - A(x_2)\|_X \leq q\|x_1 - x_2\|_X.}$$

Теорема 2.13.2. *Пусть оператор A отображает банахово пространство X в себя и является сжимающим оператором на этом пространстве. Тогда оператор A имеет в пространстве X неподвижную точку, и при том только одну.*

Доказательство. Выберем произвольным образом точку x_0 из пространства X. Положим

$$x_n = A(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Оценим величину $\|x_{k+1} - x_k\|_X$, используя условие сжимаемости:

$$\|x_{k+1} - x_k\|_X = \|A(x_k) - A(x_{k-1})\|_X \leq q\|x_k - x_{k-1}\|_X =$$

$$= q\|A(x_{k-1}) - A(x_{k-2})\|_X \leq q^2\|x_{k-1} - x_{k-2}\|_X \leq \ldots$$
$$\leq q^k\|x_1 - x_0\|_X, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Оценим теперь величину $\|x_{n+m} - x_n\|_X$ для произвольных n и m. Имеем

$$\|x_{n+m} - x_n\|_X = \|x_{n+m} - x_{n+m-1} + x_{n+m-1} - x_{n+m-2} + \ldots + x_{n+1} - x_n\|_X \leq$$

$$\leq \|x_{n+m} - x_{n+m-1}\|_X + \|x_{n+m-1} - x_{n+m-2}\|_X + \ldots + \|x_{n+1} - x_n\|_X \leq$$
$$\leq q^{n+m-1}\|x_1 - x_0\|_X + q^{n+m-2}\|x_1 - x_0\|_X + \ldots + q^n\|x_1 - x_0\|_X =$$
$$= q^n(q^{m-1} + q^{m-2} + \ldots + 1)\|x_1 - x_0\|_X \leq \frac{q^n}{1-q}\|x_1 - x_0\|_X.$$

Из полученной оценки следует, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел x^*, принадлежащий этому же пространству. Покажем, что элемент x^* и будет неподвижной точкой оператора A.

Из условия сжимаемости очевидным образом следует, что оператор A непрерывен на всем пространстве X. Непрерывность оператора A и сходимость последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ к x^* дают возможность в равенстве $x_n = A(x_{n-1})$ перейти к пределу при $n \to \infty$. Предельное равенство

$$x^* = A(x^*)$$

и означает, что элемент x^* является неподвижной точкой оператора A.

Покажем, что оператор A не может иметь более одной неподвижной точки.

Предположим, что оператор A, помимо точки x^*, имеет еще одну неподвижную точку x^{**}. Имеем

$$x^* - x^{**} = A(x^*) - A(x^{**}), \quad \|x^* - x^{**}\|_X = \|A(x^*) - A(x^{**})\|_X \leq q\|x^* - x^{**}\|_X.$$

Отсюда $\|x^* - x^{**}\|_X \leq 0$. Но это неравенство возможно лишь в случае $x^* = x^{**}$. Отсюда и следует, что оператор A имеет лишь одну неподвижную точку.

Теорема доказана.

Следствие. *При выполнении условий теоремы 2.13.2 имеет место оценка сходимости*

$$\|x_n - x^*\|_X \leq \frac{q^n}{1-q}\|A(x_0) - x_0\|_X.$$

Доказательство. Переходя в неравенстве

$$\|x_{n+m} - x_n\|_X \leq \frac{q^n}{1-q}\|A(x_0) - x_0\|_X,$$

полученном при доказательстве теоремы 2.13.2, к пределу при $m \to \infty$, мы и придем к нужному неравенству.

Следствие доказано.

Теорема 2.13.3. *Пусть оператор A отображает замкнутое множество M из нормированного пространства X в себя и является сжимающим оператором на этом множестве. Тогда оператор A имеет в множестве M неподвижную точку, и при том только одну.*

Доказательство этой теоремы проводится полностью аналогично доказательству теоремы 2.13.2.

Условие сжимаемости оператора A нельзя, вообще говоря, заменить более слабым условием

$$\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y) \quad \text{\textit{при}} \quad x \in M, \quad y \in M, \quad x \neq y.$$

Действительно, пусть X есть пространство $\mathbb{R}$ (множество всех действительных чисел), A есть оператор, ставящий в соответствие числу x число $|x| + (1 + |x|)^{-1}$. Имеем

$$|Ax - Ay| = \big||x| - |y|\big| \left|1 - (1 + |x|)^{-1}(1 + |y|)^{-1}\right| < |x - y|.$$

Но неподвижных точек у оператора A нет.

Теорема 2.13.4. *Пусть M есть компактное подмножество метрического пространства X, и пусть A есть оператор, действующий из M в M и такой, что для всех x, y из M при $x \neq y$ выполняется неравенство*

$$\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y).$$

Тогда в множестве M имеется ровно одна неподвижная точка оператора A.

Доказательство. Определим функцию $f(x)$:

$$f(x) = \rho(x, Ax).$$

Эта функция непрерывна. Согласно теореме Вейерштрасса (теореме 2.11.1), она достигает на компактном множестве M своего наименьшего значения: существует элемент x^*, принадлежащий M и такой, что $f(x^*) = \min\limits_{x \in M} f(x)$. Это наименьшее значение обязано равняться нулю, так как в противном случае для элемента Ax^* будет выполняться

$$f(Ax^*) = \rho(Ax^*, AAx^*) < \rho(x^*, Ax^*) = f(x^*).$$

Следовательно, выполняется $Ax^* = x^*$.

Если существует вторая неподвижная точка x^{**}, то будет выполняться

$$\rho(x^*, x^{**}) = \rho(Ax^*, Ax^{**}) < \rho(x^*, x^{**}),$$

чего не может быть.

Теорема доказана.

2.14. Контрольные вопросы, задачи и упражнения

1. Какие множества называются метрическими пространствами?

2. Можно ли произвольное непустое множество наделить структурой метрического пространства?

3. Какие подмножества данного метрического пространства называются открытыми? замкнутыми?

4. Существуют ли подмножества в метрическом пространстве, являющиеся не замкнутыми и не открытыми одновременно? открытыми и замкнутыми одновременно?

5. Какие подмножества в метрическом пространстве являются всюду плотными? нигде не плотными?

6. Может ли метрическое пространство содержать в себе несчетное всюду плотное подмножество?

7. Можно ли в метрическом пространстве определить операцию предельного перехода?

8. Возможна ли ситуация, в которой последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов данного множества X сходится в метрическом пространстве (X, ρ_1) и не сходится в метрическом пространстве (X, ρ_2)?

9. Пусть $(X_1, \rho_1), \ldots, (X_n, \rho_n)$ есть метрические пространства. Доказать, что в множестве $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ метрикой будет функция $\rho_1 + \ldots + \rho_n$.

10. Существуют ли множество X и метрики ρ_1 и ρ_2 такие, что (X, ρ_1) будет полным метрическим пространством, а (X, ρ_2) не будет таковым?

11. Какой должна быть функция $f(x)$, чтобы она определяла метрику на множестве всех действительных чисел?

12. Существуют ли несепарабельные метрические пространства?

13. Пусть $E = \{(x, y, z)\}$ есть множество точек из пространства $\mathbb{R}^3$ такое, что $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, и при этом существует треугольник со сторонами x, y, z. Доказать, что множество E открыто.

14. Пусть (X, ρ) есть метрическое пространство, $f:\ X \to \mathbb{R}$ есть непрерывная функция. Доказать, что множество $\{x \in X : f(x) \leq a\}$ (a —

заданное действительное число) замкнуто.

15. Доказать, что в метрическом пространстве (X, ρ) пересечение любого числа и объединение конечного числа замкнутых множеств есть множество замкнутое.

16. Доказать, что в метрическом пространстве (X, ρ) объединение любого числа и пересечение конечного числа открытых множеств есть множество открытое.

17. Какие множества называются линейными векторными пространствами?

18. Какие системы элементов данного линейного векторного пространства называются линейно независимыми? линейно зависимыми?

19. Если система $\{x_1, \ldots, x_n\}$ элементов линейного векторного пространства линейно независима, то всегда ли любая ее подсистема также линейно независима?

20. Если система $\{x_1, \ldots, x_n\}$ элементов линейного векторного пространства линейно зависима, то всегда ли любая ее подсистема также линейно зависима?

21. В каком случае линейное векторное пространство является конечномерным? бесконечномерным?

22. Какие множества из линейного векторного пространства называются выпуклыми?

23. Что представляет собой выпуклая оболочка множества в линейном векторном пространстве?

24. Пусть A и B есть выпуклые множества из линейного векторного пространства X. Какие из следующих множеств обязательно будут выпуклыми а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A + B$?

25. Доказать, что в конечномерном линейном векторном пространстве любые два базиса имеют одинаковое число элементов.

26. Пусть в линейном векторном пространстве X заданы элементы x_1, …, x_n, и пусть элементы y_1, …, y_m являются их линейными комбинациями:

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik} x_k, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Доказать, что если $m > n$, то элементы y_1, …, y_m линейно зависимы.

27. Какие множества называются нормированными пространствами? банаховыми пространствами?

28. Какие множества называются строго нормированными пространствами?

29. Можно ли нормированное пространство превратить в метрическое пространство?

30. Что означает сходимость и соответственно расходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

элементов нормированного пространства?

31. Доказать, что пространство определенных на отрезке $[a, b]$ многочленов $P(t)$ с нормой

$$\|P(t)\| = \max_{a \le x \le b} |P(t)|$$

не будет банаховым.

32. Пусть X есть множество всех непрерывных на множестве $[0, +\infty)$ функций таких, что функция $g(x) = e^{-x} f(x)$ ограничена на $[0, +\infty)$. Доказать, что X есть банахово пространство с нормой

$$\|f\|_X = \sup_{x \ge 0} |e^{-x} f(x)|.$$

33. Доказать, что в пространстве $L_p([a, b])$, $1 < p < \infty$, равенство $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ возможно лишь при выполнении условия $y = \lambda x$.

34. Доказать, что в пространстве $C([a, b])$ равенство $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ возможно при выполнении соотношений $x \ne \Theta$, $y \ne \Theta$, $y \ne \lambda x$.

35. Являются ли пространства $C([a, b])$, l_p, $1 < p < \infty$, l_∞ сепарабельными?

36. Пусть A есть произвольное замкнутое подмножество из отрезка $[a, b]$, M_A — совокупность всех функций из пространства $C([a, b])$ таких, что каждая из них неотрицательна по крайней мере в одной точке множества A. Доказать, что M_A есть замкнутое подмножество пространства $C([a, b])$.

37. Пусть A есть произвольное непустое подмножество из отрезка $[a, b]$, V_A — совокупность всех функций из пространства $C([a, b])$ таких, что каждая из них положительна хотя бы в одной точке множества A. Доказать, что V_A есть открытое подмножество пространства $C([a, b])$.

38. Пусть A есть замкнутое подмножество отрезка $[a, b]$, U_A — совокупность всех функций $f(x)$ из пространства $C([a, b])$ таких, что $f(x) > 0$

во всех точках множества A. Доказать, что U_A есть открытое подмножество пространства $C([a,b])$. Верно ли это заключение, если множество A не будет замкнутым?

39. Доказать, что множество всех дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций не является замкнутым подмножеством пространства $C([a,b])$.

40. Доказать, что нормированное пространство будет полным тогда и только тогда, когда в нем всякий абсолютно сходящийся ряд сходится.

41. Пусть L есть линейное многообразие функций $f(t)$ из пространства $C([a,b])$, обращающихся в нуль в фиксированной точке t_0 отрезка $[a,b]$. Доказать, что $^{C([a,b])}\!/_{L}$ изоморфно пространству $\mathbb{R}$.

42. Пусть нормированное пространство X есть сумма двух подпространств L_1 и L_2. Доказать, что $^{X}\!/_{L_1}$ изоморфно L_2.

43. Может ли последовательность вложенных непустых замкнутых выпуклых ограниченных множеств в банаховом пространстве иметь пустое пересечение?

44. Всегда ли линейное векторное пространство со скалярным произведением является гильбертовым?

45. Пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ есть система взаимно-ортогональных элементов гильбертова пространства, среди которых нет нулевых. Доказать, что элементы $x_1, \ldots, x_n$ являются линейно независимыми.

46. В вещественном гильбертовом пространстве определим угол между ненулевыми элементами x и y с помощью равенства

$$\cos \widehat{xy} = \frac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Доказать, что для таких элементов выполняется равенство

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \widehat{xy}.$$

47. Пусть M есть подмножество вещественного гильбертова пространства H. Доказать, что множество $M^{\perp}$ является подпространством H.

48. Доказать, что в любом непустом замкнутом подмножестве M вещественного гильбертова пространства найдется ровно один элемент с минимальной нормой.

49. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть две последовательности элементов вещественного гильбертова пространства H такие, что $(x_n, y_n) \to 1$ при $n \to \infty$, $\|x_n\| \leq 1$, $\|y_n\| \leq 1$ для всех натуральных n. Доказать, что имеет место сходимость $\|x_n - y_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

50. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть две последовательности элементов гильбертова пространства H такие, что $\|x_n + y_n\| \to 2$ при $n \to \infty$, $\|x_n\| \le 1$, $\|y_n\| \le 1$ для всех натуральных n. Доказать, что имеет место сходимость $\|x_n - y_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

51. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть последовательность элементов вещественного гильбертова пространства H такая, что при $n \to \infty$ выполняется $(x_n, y) \to (x, y)$ для любого элемента y из H, $\|x_n\| \to \|x\|$. Доказать, что имеет место сходимость $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$.

52. Пусть m есть натуральное число, λ есть комплексное число такое, что $\lambda^m = 1$, $\lambda^2 \ne 1$. Доказать, что в комплексном гильбертовом пространстве H выполняется равенство

$$(x, y) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \|x + \lambda^k y\|^2 \cdot \lambda^k.$$

53. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{m}$ есть ортонормированная система в вещественном гильбертовом пространстве H. Доказать, что для любого элемента x из H выполняется равенство

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{m} |(x, x_k)|^2 + \left\| x - \sum_{k=1}^{m} (x, x_k) x_k \right\|^2.$$

54. Найти многочлен 2-й степени, наилучшим образом приближающий в пространстве $L_2([-1, 1])$ функцию

а) x^3; б) $\sin \pi x$; в) $|x|$.

55. Найти многочлен первой степени, наилучшим образом приближающий в пространстве $L_2(Q)$ функцию $x_1^2 - x_2^2$, если Q есть множество

а) круг $\{(x_1, x_2) : \quad x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$;

б) квадрат $\{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$.

56. Доказать, что любая последовательность вложенных непустых замкнутых выпуклых ограниченных множеств в вещественном гильбертовом пространстве имеет непустое пересечение.

57. Показать, что существует последовательность вложенных непустых замкнутых ограниченных множеств из пространства l_2, имеющая пустое пересечение.

58. Доказать, что многочлены Чебышева

$$T_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

образуют ортонормированную систему в пространстве $L_{2,\varphi}([-1,1])$ для функции $\varphi(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

59. Существуют ли неограниченные линейные операторы?

60. Всегда ли можно линейный оператор, определенный на всюду плотном в банаховом пространстве X многообразии L, продолжить на все пространство до ограниченного на X оператора?

61. Пусть на линейном векторном пространстве X заданы две эквивалентные нормы, и пусть A есть линейный оператор, действующий из X в X. Доказать, что оператор A либо по обеим нормам одновременно ограничен, либо по обеим нормам одновременно неограничен.

62. Доказать, что нуль-множество $N(A)$ линейного ограниченного оператора, действующего из банахова пространства X в банахово пространство Y, будет подпространством пространства X.

63. Пусть X и Y есть нормированные пространства, A есть линейный оператор, действующий из X в Y. Является ли область значений оператора A подпространством пространства Y?

64. Пусть X и Y есть нормированные пространства, A есть линейный оператор, действующий из X в Y и такой, что область его значений есть конечномерное линейное многообразие. Следует ли отсюда, что оператор A есть ограниченный оператор?

65. Всегда ли совокупность всех линейных ограниченных операторов, действующих из нормированного пространства X в нормированное пространство Y, образует банахово пространство?

66. Какие отображения называются функционалами?

67. Будут ли следующие отображения линейными непрерывными функционалами над пространством $C([-1,1])$

а) $f(x) = \frac{1}{3}[x(-1) + x(0)]$; б) $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\,dt$; в) $f(x) = \int\limits_{-1}^1 x(t)\,dt - x(0)$;

г) $f(x) = \int\limits_{-1}^0 x(t)\,dt - \int\limits_0^1 x(t)\,dt$? Здесь $x(t)$ — произвольная функция из пространства $C([-1,1])$.

68. Будут ли ограниченными в пространстве $C([0,1])$ функционалы

а) $f(x) = \int\limits_0^1 x(\sqrt{t})\,dt$; б) $f(x) = \int\limits_0^1 x(t^2)\,dt$?

69. Пусть X есть нормированное пространство. Является ли множество всех линейных непрерывных функционалов над пространством X банахо-

вым пространством?

70. Пусть X есть вещественное нормированное пространство, $f(x)$ есть неограниченный линейный функционал над X. Доказать, что в любой окрестности нулевого элемента пространства X функционал $f(x)$ принимает все вещественные значения.

71. Пусть X есть нормированное пространство . Доказать, что линейный функционал $f(x)$, определенный при $x \in X$, будет непрерывным тогда и только тогда, когда его нуль-множество замкнуто в X.

72. Какие линейные операторы называются обратимыми? непрерывно обратимыми?

73. Какие операторы называются правыми обратными к данному оператору? левыми обратными?

74. Может ли линейный оператор быть обратимым, если он не является взаимно-однозначным?

75. Пусть X есть нормированное пространство, A есть линейный оператор, действующий из X в X и такой, что для некоторого натурального числа n и для некоторых действительных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ выполняется $I + \lambda_1 A + \ldots + \lambda_n A^n = \Theta$ (I — тождественный оператор, Θ — нулевой оператор). Доказать, что оператор A обратим.

76. Доказать, что оператор дифференцирования $A = \frac{d}{dt}$, определенный на пространстве $C^1([0,1])$ и действующий в пространство $C([0,1])$, имеет правый обратный, но не имеет левого обратного.

77. Пусть X есть банахово пространство, A есть оператор из пространства $\mathcal{L}(X,X)$ такой, что $\|I - A\| < 1$. Доказать, что оператор A непрерывно обратим.

78. Пусть X есть банахово пространство. Доказать, что в пространстве $\mathcal{L}(X,X)$ множество всех непрерывно обратимых операторов будет открытым.

79. Какие множества в метрическом пространстве называются относительно компактными? компактными?

80. Справедлива ли в метрическом пространстве теорема Вейерштрасса о достижении непрерывной функцией своих наибольших и наименьших значений?

81. Возможно ли, что у компактного в нормированном пространстве X множества имеется несчетная ε-сеть?

82. Является ли замыкание относительно компактного множества ком-

пактом?

83. Доказать, что множество функций $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ замкнуто и ограничено в пространстве $L_2([-\pi, \pi])$, но не компактно (в этом же пространстве).

84. Пусть X есть банахово пространство, M есть его компактное подмножество. Доказать, что для любого элемента x из X найдется элемент x_M, принадлежащий множеству M и такой, что $\rho(x, M) = \|x - x_M\|$.

85. Пусть X есть банахово пространство, M_1 есть компактное подмножество X, M_2 — замкнутое подмножество X. Доказать, что если $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, то расстояние между множествами M_1 и M_2 положительно.

86. Доказать, что в банаховом пространстве любая последовательность вложенных компактов имеет непустое пересечение.

87. Существуют ли несчетные открытые покрытия у ограниченного множества?

88. Пусть f есть непрерывное отображение банахова пространства X в банахово пространство Y, и пусть M есть компактное множество из X. Будет ли множество $f(M)$ компактным?

89. Пусть M есть подмножество пространства $C([a, b])$ такое, что для любого положительного числа ε и для любого числа t_0 из $[a, b]$ найдется положительное число δ, зависящее от t_0 и ε, и при этом для любой функции $f(t)$ из M из неравенства $|t - t_0| < \delta$ следует неравенство $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$. Будет ли множество M равностепенно непрерывным?

90. Пусть M есть равномерно ограниченное множество из пространства $C([a, b])$, M_1 есть множество

$$M_1 = \{g(t): \quad \exists\, f(t) \in M, \quad g(t) = \int\limits_a^b f(\tau)\, d\tau\}.$$

Доказать, что множество M_1 относительно компактно в пространстве $C([a, b])$.

91. Доказать, что множество функций

$$\{f(t) \in C^1([a, b]): \quad |f(a)| \le K_1, \quad \int\limits_a^b |f'(t)|^2\, dt \le K_2\}$$

будет относительно компактным в пространстве $C([a, b])$.

92. Будут ли следующие множества

а) $\{t^n\}_{n=1}^{\infty}$; б) $\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$; в) $\{\sin(t+n)\}_{n=1}^{\infty}$; г) $\{\operatorname{arctg} \alpha t\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$;
д) $\{e^{t-\alpha}\}_{\alpha\in\mathbb{R},\,\alpha\geq 0}$
относительно компактными в пространстве $C([0,1])$?

93. Какие операторы называются вполне непрерывными?

94. Является ли множество всех линейных вполне непрерывных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y, подпространством пространства $\mathcal{L}(X,Y)$?

95. Будут ли следующие операторы

а) $Ax(t)=tx(t)$; б) $Ax(t)=\int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau$; в) $Ax(t)=x(0)+tx(1)$;

г) $Ax(t)=\int\limits_0^1 e^{ts}x(s)\,ds$; д) $Ax(t)=x(t^2)$

вполне непрерывными как операторы из пространства $C([0,1])$ в пространство $C([0,1])$?

96. При каком условии на функцию $\varphi(t)$ оператор A, действие которого определяется равенством $Ax(t)=\varphi(t)x(t)$, будет вполне непрерывен как оператор из $C([0,1])$ в $C([0,1])$?

97. Пусть X и Y есть нормированные пространства, A и B — операторы из пространства $\mathcal{L}(X,Y)$, причем A вполне непрерывен, и область значений оператора B есть подмножество области значений оператора A. Доказать, что оператор B вполне непрерывен.

98. Пусть X и Y есть нормированные пространства, $A:\ X\to Y$ есть линейный оператор. Будет ли оператор A вполне непрерывен, если
а) X есть конечномерное пространство;
б) Y есть конечномерное пространство?

99. Пусть H есть гильбертово пространство, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть ортонормированный базис пространства H, A есть вполне непрерывный оператор, действующий из H в H. Доказать, что имеет место сходимость $Ae_k\to\Theta$ при $k\to\infty$.

100. Пусть A есть интегральный оператор, действие которого определяется равенством

$$(Ax)(t)=\int\limits_a^b K(t,s)x(s)\,ds.$$

При каком условии на функцию $K(t,s)$ этот оператор будет вполне непрерывен как оператор

а) из $C([0,1])$ в $C([0,1])$;
б) из $L_2([0,1])$ в $L_2([0,1])$?

101. Пусть X есть нормированное пространство. Может ли тождественный оператор $I : X \to X$ быть вполне непрерывным? не быть вполне непрерывным?

102. Что представляет собой метод малого параметра?

103. Можно ли, используя метод малого параметра, построить решение уравнения $Ax - \lambda Cx = y$, если A и C есть линейные ограниченные операторы, действующие из банахова пространства X в банахово пространство Y, причем оператор A непрерывно обратим. Насколько малым должно быть число λ?

104. Используя метод малого параметра, найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t - s + \lambda ts)\varphi(s)\, ds = \psi(t),$$

принадлежащее пространству $C([-\pi,\pi])$ ($\psi(t)$ — заданная функция из пространства $C([-\pi,\pi])$).

105. В чем суть метода продолжения по параметру?

106. Используя метод продолжения по параметру, доказать, что интегральное уравнение

$$\varphi(t) - \int_{0}^{t} K(t,\tau)\varphi(\tau)\, df\tau = \psi(t)$$

разрешимо в пространстве $L_2([0,T])$, если функция $K(t,\tau)$ равномерно ограничена ($|K(t,\tau)| \le K_0$ при $t \in [0,T]$, $\tau \in [0,T]$), а функция $\psi(t)$ принадлежит пространству $L_2([0,T])$.

107. Пусть функция $f(t)$ определена и непрерывно дифференцируема на всей действительной оси, причем для всех t из $\mathbb{R}$ выполняется неравенство $|f'(t)| \ge k_0 > 1$. Доказать, что уравнение $f(t) = t$ имеет решение, причем ровно одно.

108. Доказать, что всякое непрерывное отображение отрезка в себя имеет неподвижную точку.

109. Пусть $f(t)$ есть непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ функция. При каких λ отображение $t \to t - \lambda f(t)$ будет сжимающим на $[a,b]$?

110. Пусть A есть отображение из банахова пространства X в себя такое, что оператор A^n при некотором натуральном n является сжимающим. Доказать, что оператор A имеет в X неподвижную точку.

111. Пусть A есть оператор, ставящий в соответствие действительному числу x число $\frac{\pi}{2}+x-\arcsin x$. Доказать, что для оператора A выполняется неравенство

$$|Ax_1 - Ax_2| < |x_1 - x_2| \quad \textit{для всех} \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 \in \mathbb{R},$$

но он не имеет неподвижных точек.

РАЗДЕЛ III. Приложения функционального анализа

Приведем некоторые простейшие приложения функционального анализа, связанные прежде всего с **задачей наилучшего приближения** и с **разрешимостью алгебраических, интегральных и дифференциальных уравнений**.

3.1. Задача о наилучшем приближении в пространстве непрерывных функций

Многие экстремальные задачи в нормированных и гильбертовых пространствах связаны с **задачей о наилучшем приближении**. Некоторые теоретические основы задачи о наилучшем приближении в нормированных пространствах изложены в п. 2.2.3, в гильбертовых — в п. 2.5.3. Приведем некоторые результаты, связанные с конкретными реализациями теорем о существовании элементов наилучшего приближения.

Теорема 3.1.1. *Пусть $w(x)$ есть заданная непрерывная положительная на отрезке $[a, b]$ функция, n — заданное неотрицательное целое число. Тогда для любой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ найдется ровно один многочлен $P_n(x)$ степени n такой, что величина*

$$\max_{a \le x \le b} |f(x) - w(x)P_n(x)|$$

достигает своего минимального значения.

Существование решения здесь следует из теоремы 2.2.2, единственность же, вообще говоря, не очевидна — поскольку пространство непрерывных функций не является строго нормированным — и доказываться нами не будет (единственность установлена русским математиком П.Л. Чебышевым[36], одним из основоположников современной теории приближений).

В нормированных пространствах, если они не гильбертовы, к сожалению, не существует простого алгоритма нахождения элемента наилучшего приближения. Опишем несколько подходов к построению многочлена наилучшего приближения в пространстве непрерывных функций:

1. *Если функция $f(x)$ представима рядом Фурье (см. п. 2.9.5)*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

[36]П.Л. Чебышев (1821–1894) — русский математик.

то приближением к ней может служить тригонометрический многочлен Фурье

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

(*метод Фурье*);

2. *Если функция $f(x)$ представима рядом Фурье, то приближением к ней может служить тригонометрический многочлен Фейера*[37]

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(x)$$

(*метод Фейера*);

3. *Если функция $f(x)$ представима рядом Фурье, то приближением к ней может служить многочлен*

$$v_{2n-1}(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} S_k(x)$$

(*метод Валле Пуссена*[38]);

4. *Пусть $f(x)$ есть функция из пространства $C([0,1])$, $B_n(x)$ есть многочлен*

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Тогда последовательность $\{B_n(x)\}$ равномерно сходится к функции $f(x)$ на отрезке $[0,1]$ (*метод Бернштейна*[39]);

5. *Пусть $f(x)$ есть функция из пространства $C^n([-1,1])$ ($n \geq 0$ — целое) такая, что*

$$|f^{(n)}(x)| \leq R.$$

Пусть x_k, $k = \overline{1,n}$, есть точки из отрезка $[-1,1]$ такие, что $-1 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq 1$. Положим

$$w_n(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i), \quad l_k(x) = \prod_{i:\, i \neq k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i},$$

[37] Л. Фейер (1880–1959) — венгерский математик.

[38] Ш. Валле Пуссен (1866–1962) — бельгийский математик.

[39] С.Н. Бернштейн (1880–1968) — русский математик.

$$L_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) l_k(x), \quad R_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} w_k(x) \quad (\xi \in [-1, 1])$$

(*многочлены* $L_{n-1}(x)$ *называются* **интерполяционными многочленами Лагранжа**). *Тогда имеет место равенство*

$$f(x) = L_{n-1}(x) + R_{n-1}(x),$$

и при этом имеет место оценка

$$\max_{-1 \le x \le 1} |f(x) - L_{n-1}(x)| \le \frac{R}{n!} \max_{-1 \le x \le 1} |w_n(x)|$$

(*метод интерполяционных многочленов Лагранжа*).

Описание многих других методов теории приближений, методов решения других экстремальных задач приведены в учебнике В.И. Лебедева "Функциональный анализ и вычислительная математика".

3.2. Разрешимость алгебраических уравнений и систем уравнений

Основой для исследования разрешимости алгебраических уравнений и систем алгебраических уравнений будет теорема о неподвижных точках сжимающих отображений — то есть теорема 2.13.2.

Пусть требуется найти корень уравнения

$$f(x) = 0,$$

и пусть это уравнение можно эквивалентным образом перевести в уравнение

$$x - \varphi(x) = 0$$

(в простейшем случае $\varphi(x) = x - f(x)$). Если теперь на некотором отрезке $\Omega = \{x : (x - a) \le b\}$ выполняется условие

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \le q|x' - x''|, \quad x' \in \Omega, \quad x'' \in \Omega,$$

и при этом число q будет принадлежать промежутку $[0, 1)$, то последовательность $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, определенная равенствами $x_0 = a$, $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, будет сходиться к искомому корню уравнения $f(x) = 0$.

Заметим, что условие на функцию $\varphi(x)$ при произвольном q представляет собой известное условие Липшица[40].

[40] Р. Липшиц (1832–1903) — немецкий математик.

Рассмотрим теперь систему уравнений

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0,$$
$$\vdots$$
$$f_n(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

и пусть эта система преобразована к виду

$$x_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}.$$

Определим в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ метрику

$$\rho(x', x'') = \max_{1 \le i \le n} |x'_i - x''_i| \quad (x' = (x'_1, \dots, x'_n), \quad x'' = (x''_1, \dots, x''_n)).$$

Пусть на некотором замкнутом шаре $\overline{B}_R(x^*)$ пространства $\mathbb{R}^n$ с данной метрикой выполняется

$$\max_{1 \le i \le n} |\varphi_i(x') - \varphi_i(x'')| \le q\rho(x', x''), \quad x' \in \overline{B}_R(x^*), \quad x'' \in \overline{B}_R(x^{**}),$$

и при этом число q принадлежит промежутку $[0, 1)$. Тогда вновь можно применить теорему 2.13.2, и тем самым получить, что последовательность $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, определенная равенствами

$$x^{(0)} = x^*, \quad x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}) \quad (\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))),$$

будет сходиться к решению исходной системы.

Рассмотрим частный случай общей системы — именно, систему линейных уравнений

$$x_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Нетрудно проверить, что требуемое условие для функций $\varphi_i(x)$ будет выполняться, если будет справедливо неравенство

$$\max_{1 \le i \le n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) < 1.$$

Если изначально в пространстве $\mathbb{R}^n$ ввести евклидову метрику

$$\rho(x', x'') = \left(\sum_{i=1}^{n} |x'_i - x''_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

вновь провести анализ возможности применения теоремы 2.13.2, то получиться, что достаточным условием разрешимости для рассматриваемой линейной системы будет условие

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} < 1.$$

Отсюда следует, что тот или иной оператор может быть сжимающим в одной метрике и не быть сжимающим в другой. В построении подходящей метрики и состоят зачастую главные трудности при изучении разрешимости тех или иных задач.

3.3. Разрешимость интегральных уравнений

Вновь будем опираться на теорему 2.13.2.

Пусть $K(t,s)$ есть действительная непрерывная на множестве $\Omega = \{(t,s) : a \le t \le b, \quad a \le s \le b\}$ функция, $f(t)$ есть заданная функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$. Рассмотрим задачу нахождения решения $\varphi(t)$ интегрального уравнения

$$\varphi(t) - \int_a^b K(t,s)\varphi(s)\,ds = f(t).$$

Обозначим через A оператор, действие которого на функциях $\psi(t)$ из пространства $C([a,b])$ определяется равенством

$$(A\psi)(t) = \int_a^b K(t,s)\psi(s)\,ds.$$

Искомое интегральное уравнение теперь можно трактовать как уравнение Фредгольма второго рода

$$\varphi - A\varphi = f$$

с вполне непрерывным оператором A, действующим из пространства $C([a,b])$ в это же пространство; разрешимость этого уравнения (или неразрешимость) определяется альтернативой Фредгольма. Вместе с тем заметим, что конструктивных методов построения решения (или приближенного решения) альтернатива Фредгольма не дает.

Пусть выполняется условие

$$\max_{a\le t\le b}\left(\int\limits_a^b |K(t,s)|\,ds\right) = q < 1.$$

Нетрудно проверить, что оператор A тогда будет сжимающим в пространстве $C([a,b])$, и тем самым искомое решение или же приближенное решение можно найти с помощью семейства $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$, построенного с помощью стандартной рекуррентной процедуры.

Пусть теперь функция $K(t,s)$ принадлежит пространству $L_2(\Omega)$. Тогда интегральный оператор A можно рассматривать как оператор, действующий из пространства $L_2(\Omega)$ в это же пространство, и если будет выполняться условие

$$\left(\int\limits_{\Omega} K^2(t,s)\,dt\,ds\right)^{\frac{1}{2}} < 1,$$

то оператор A будет сжимающим. Искомое решение вновь можно построить с помощью рекуррентной процедуры.

Замечание. Вполне непрерывность интегрального оператора A в пространстве $C([a,b])$ при принадлежности функции $K(t,s)$ пространству $C(\Omega)$ нетрудно установить с помощью теоремы 2.11.5 (теоремы Арцела). Если же функция $K(t,s)$ принадлежит пространству $L_2(\Omega)$, то интегральный оператор A будет вполне непрерывным в пространстве $L_2([a,b])$, что нетрудно установить с помощью теоремы 2.11.6.

3.4. Разрешимость задачи Коши и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

При доказательстве разрешимости задачи Коши и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений будут использоваться теорема о неподвижных точках сжимающих операторов (теорема 2.13.2), теорема о неподвижных точках вполне непрерывных операторов (теорема 2.12.4) и теорема о методе продолжения по параметру (теорема 2.13.1)).

Пусть Q есть область из пространства $\mathbb{R}^2$, $f(x,y)$ есть заданная в Q функция. **Задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка называется задача нахождения функции $y(x)$, являющейся решением дифференциального уравнения**

$$\boldsymbol{y' = f(x,y)}$$

и такой, что для нее выполняется условие

$$\boldsymbol{y(x_0) = y_0}$$

(здесь x_0 и y_0 — заданные числа такие, что $(x_0, y_0) \in Q$).

Теорема 3.4.1. *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на области Q и пусть для любых точек (x, y_1), (x, y_2) из Q выполняется условие*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|.$$

Тогда найдется положительное число h такое, что на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$ задача Коши имеет решение, причем ровно одно.

Доказательство. Пусть a и b есть положительные числа такие, что замкнутый прямоугольник

$$G = \{(x, y) : \quad |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b\}$$

целиком лежит в области Q. Далее, пусть M есть число

$$M = \max_G |f(x, y)|,$$

h есть положительное число такое, что $h \leq a$, $Mh \leq b$, $Kh < 1$. Всюду ниже будем отождествлять, где это необходимо, функцию $y_0(x)$, тождественно равную y_0, и само число y_0. Обозначим через $\mathcal{B}$ шар пространства $C([x_0-h, x_0 + h])$:

$$\mathcal{B} = \{y(x) \in C([x_0 - h, x_0 + h]) : \|y - y_0\|_{C([x_0-h,x_0+h])} \leq b\}.$$

Наконец, на функциях из пространства $C([x_0 - h, x_0 + h])$ определим оператор A:

$$A : \, y(x) \to (Ay)(x), \quad (Ay)(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt.$$

Покажем, что для выбранного выше числа h оператор A будет переводить шар $\mathcal{B}$ в себя и будет сжимающим на нем.

Пусть вначале x есть точка отрезка $[x_0, x_0 + h]$, и пусть $y(x)$, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ есть функции из шара $\mathcal{B}$. Справедливы следующие неравенства

$$|(Ay)(x) - y_0| \leq \int\limits_{x_0}^{x} |f(t, y(t))|\, dt \leq Mh \leq b;$$

$$|(Ay_1)(x) - (Ay_2)(x)| \leq \int\limits_{x_0}^{x} |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))|\, dt \leq$$

$$\leq K \int\limits_{x_0}^{x} |y_1(t) - y_2(t)|\, dt \leq Kh\|y_1 - y_2\|_{C([x_0-h, x_0+h])}.$$

Если теперь точка x принадлежит отрезку $[x_0 - h, x_0]$, то, меняя пределы интегрирования местами, нетрудно получить аналогичные неравенства и для таких x.

Итак, при всех x из отрезка $[x_0 - h, x_0 + h]$ выполняются неравенства

$$|(Ay)(x) - y_0| \leq b;$$

$$|(Ay_1)(x) - (Ay_2)(x)| \leq Kh\|y_1 - y_2\|_{C([x_0-h, x_0+h])}.$$

Из данных неравенств и вытекает, что оператор A переводит шар $\mathcal{B}$ в себя, и что он является сжимающим на нем (последнее — вследствие неравенства $Kh < 1$).

Сжимаемость оператора A и теорема 2.13.2 означают, что в пространстве $C([x_0 - h, x_0 + h])$ существует единственная функция $y = \varphi(x)$, для которой выполняется равенство $\varphi = A\varphi$, или же

$$\varphi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt.$$

Правая часть данного равенства есть функция, имеющая производную (это следует из свойств определенного интеграла с переменным верхним пределом). Следовательно, и левая часть будет иметь производную. Более того, производные правой и левой частей будут совпадать. Но тогда функция $\varphi(x)$ будет решением уравнения $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$. Выполнение равенства $\varphi(x_0) = y_0$ очевидно. Другими словами, функция $\varphi(x)$ представляет собой искомое решение задачи Коши.

Единственность решений задачи Коши (при выполнении условий теоремы) вытекает из того, что всякое решение необходимо является неподвижной точкой оператора A. Поскольку же неподвижная точка единственна, то и решение задачи Коши единственно.

Теорема доказана.

Следующий вариант теоремы существования решения задачи Коши докажем с помощью теоремы Шаудера (теоремы 2.12.4).

Пусть по-прежнему функция $f(x,y)$ непрерывна на некоторой плоской области Q, G есть замкнутый прямоугольник

$$G = \{(x,y): \quad |x-x_0| \le a, \quad |y-y_0| \le b\},$$

целиком лежащий в Q. Определим число h_0:

$$h_0 = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

(число M определено ранее).

Отрезок $[x_0 - h_0, x_0 + h_0]$ называется отрезком Пеано[41] **задачи Коши**.

Теорема 3.4.2 (теорема Пеано). *При выполнении условия непрерывности функции f на области Q задача Коши разрешима на отрезке Пеано.*

Доказательство. В пространстве $C([x_0-h_0, x_0+h_0])$ определим оператор A так же, как мы его определяли при доказательстве теоремы 3.4.1. Пусть $\mathcal{B}$ есть шар

$$\mathcal{B} = \{y(x) \in ([x_0-h_0, x_0+h_0]): \ \|y(x)-y_0\|_{([x_0-h_0,x_0+h_0])} \le b\}.$$

Покажем, что оператор A вполне непрерывен на этом шаре.

Если последовательность $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ функций из шара $\mathcal{B}$ сходится в норме пространства $C([x_0-h_0, x_0+h_0])$ к некоторой функции $y(x)$, то она будет равномерно сходиться на отрезке $[x_0-h_0, x_0+h_0]$ к этой же функции. Из равномерной сходимости и из классических теорем математического анализа (см., например, Л.Д. Кудрявцев "Курс математического анализа") вытекает равномерная сходимость при $n \to \infty$

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt \to \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

при всех x из отрезка $[x_0-h_0, x_0+h_0]$. Равномерная же сходимость влечет сходимость по норме пространства $C([x_0-h_0, x_0+h_0])$, сходимость по норме, в свою очередь, влечет непрерывность оператора A.

[41] Д. Пеано (1858–1932) — итальянский математик.

Пусть $y(x)$ есть произвольная функция из шара $\mathcal{B}$. Имеют место неравенства

$$|(Ay)(x)| \leq |y_0| + \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt\right| \leq |y_0| + Mh_0;$$

$$|(Ay)(x_1) - (Ay)(x_2)| \leq \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} |f(t, y(t))\,dt\right| \leq M|x_1 - x_2|.$$

Эти неравенства означают, что если $\mathcal{B}_0$ есть произвольное подмножество шара $\mathcal{B}$, то семейство функций $\{Ay\}_{y(x)\in\mathcal{B}_0}$ будет равномерно ограничено и равностепенно непрерывно в пространстве $C([x_0 - h_0, x_0 + h_0])$. Но тогда это семейство будет относительно компактно в том же пространстве. Вместе с непрерывностью оператора A это означает, что оператор A вполне непрерывен на шаре $\mathcal{B}$.

Покажем, что оператор A переводит шар $\mathcal{B}$ в себя.

Пусть $y(x)$ есть произвольная функция из шара $\mathcal{B}$. Имеем

$$\|(Ay)(x) - y_0\|_{C([x_0-h_0,x_0+h_0])} = \max_{x_0-h_0\leq x\leq x_0+h_0} \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt\right| \leq$$

$$\leq Mh_0 \leq M \cdot \frac{b}{M} = b.$$

Отсюда и следует, что функция $(Ay)(x)$ принадлежит шару $\mathcal{B}$.

Замкнутость, ограниченность и выпуклость шара $\mathcal{B}$ имеют место. Следовательно, для шара $\mathcal{B}$ и оператора A выполняются все условия теоремы Шаудера. Согласно этой теореме, существует функция $\varphi(x)$, лежащая в множестве $\mathcal{B}$ и такая, что на отрезке $[x_0 - h_0, x_0 + h_0]$ выполняется равенство

$$\varphi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt.$$

Функция $\varphi(x)$ и будет искомым решением рассматриваемой задачи Коши.

Теорема доказана.

Заметим, что при выполнении условий теоремы Пеано единственность решений не гарантируется (как и теоремой Шаудера не гарантируется существование единственной неподвижной точки). Рассмотрим задачу Коши

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(x_0) = 0.$$

Эта задача имеет решения $y(x) = \frac{1}{4}(x - x_0)^2$ и $y(x) \equiv 0$, то есть для данной задачи имеет место неединственность решений.

Приведем теперь пример задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешимость которой устанавливается с помощью метода продолжения по параметру.

Пусть $a(x)$, $b(x)$ и $f(x)$ — заданные при $x \in [0,1]$ функции такие, что $a(x) \in C^1([0,1])$, $b(x) \in C([0,1])$, $f(x) \in C([0,1])$. Рассмотрим задачу: *найти функцию* $y(x)$, *являющуюся на интервале* $(0,1)$ *решением уравнения*

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \tag{i}$$

и такую, что выполняются условия

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{ii}$$

(подобного вида задачи называются **краевыми задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений**). Покажем, что разрешимость этой задачи легко установить с помощью теоремы 2.13.1.

Определим пространства X и Y: $\quad X = C^2([0,1]), Y = C([0,1])$. Пусть λ есть число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим семейство краевых задач: *найти функцию* $y(x)$, *являющуюся на интервале* $(0,1)$ *решением уравнения*

$$y'' + \lambda[a(x)y' + b(x)y] = f(x) \tag{i_λ}$$

и такую, что выполняются условия (ii). Очевидно, что семейство задач (i_λ), (ii) непрерывно по λ. Далее, очевидно, что при $\lambda = 0$ данная задача разрешима в пространстве $C^2([0,1])$ — это легко показать, непосредственно построив решение методом вариации постоянных. Таким образом, чтобы задача (i_1), (ii) — то есть исходная задача — была разрешима в пространстве X для любой функции $f(x)$ из пространства Y, достаточно показать, что имеет место априорная оценка

$$\|y\|_X \leq K$$

всевозможных решений задачи (i_λ), (ii), постоянная K в которой определяется лишь функциями $a(x)$, $b(x)$ и $f(x)$.

Пусть выполняется условие

$$b(x) - \frac{1}{2}a'(x) \leq 0 \quad \textit{при} \quad x \in [0,1]. \tag{iii}$$

Умножим уравнение (i_λ) на функцию $-y(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[0, 1]$. Применяя формулу интегрирования по частям, получим равенство

$$\int\limits_0^1 y'^2(x)\,dx - \lambda\int\limits_0^1 \left[b(x) - \frac{1}{2}a'(x)\right] y^2(x)\,dx = -\int\limits_0^1 f(x)y(x)\,dx.$$

Следствием этого равенства является неравенство

$$\int\limits_0^1 y'^2(x)\,dx \leq \int\limits_0^1 |f(x)||y(x)|\,dx.$$

Воспользуемся числовым неравенством

$$|\alpha\beta| \leq \frac{\delta^2\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2\delta^2},$$

в котором δ есть произвольное положительное число (это неравенство называется **неравенством Юнга**[42]) Получим

$$\int\limits_0^1 y'^2(x)\,dx \leq \frac{\delta^2}{2}\int\limits_0^1 y^2(x)\,dx + \frac{1}{2\delta^2}\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx.$$

Для функции $y(x)$ имеет место представление

$$y(x) = \int\limits_0^x y'(t)\,dt.$$

Из этого представления и неравенства Гёльдера вытекает оценка

$$y^2(x) \leq \int\limits_0^1 y'^2(t)\,dt.$$

Предыдущее неравенство и данная оценка дают следующее:

$$\int\limits_0^1 y'^2(x)\,dx \leq \frac{\delta^2}{2}\int\limits_0^1 y'^2(x)\,dx + \frac{1}{2\delta^2}\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx.$$

[42]В. Юнг (1863–1942) — английский математик.

Положив $\delta = 1$, получим интегральную оценку

$$\int\limits_0^1 {y'}^2(x)\,dx \le \int\limits_0^1 f^2(x)\,dx.$$

Вновь учитывая представление функции $y(x)$ через производную, получим априорную оценку

$$\|y\|_{C([0,1])} \le \|f\|_{C([0,1])}.$$

Умножим уравнение (i_λ) на функцию $y''(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,1]$. Получим равенство

$$\int\limits_0^1 {y''}^2(x)\,dx = \int\limits_0^1 f(x)y''(x)\,dx - \lambda\int\limits_0^1 [a(x)y'(x) + b(x)y(x)]y''(x)\,dx.$$

Используя неравенство Юнга и полученные выше интегральную оценку и оценку $\|y\|_{C([0,1])}$, придем ко второй интегральной оценке

$$\int\limits_0^1 {y''}^2(x)\,dx \le K_1\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx,$$

в которой число K_1 определяется функциями $a(x)$ и $b(x)$. Поскольку функция $y(x)$ обращается в нуль в точках 0 и 1, то найдется точка x^*, в которой выполняется $y'(x^*) = 0$. Отсюда следует, что имеет место представление

$$y'(x) = \int\limits_{x^*}^{x} y''(t)\,dt.$$

Из этого представления и неравенства Гёльдера следует оценка

$${y'}^2(x) \le \int\limits_0^1 {y''}^2(t)\,dt.$$

Вторая интегральная оценка и данная оценка означают, что имеет место неравенство

$$\|y'\|_{C([0,1])} \le K_2\|f\|_{C([0,1])},$$

в котором число K_2 определяется функциями $a(x)$ и $b(x)$.

Из самого уравнения (i_λ) и полученных оценок $\|y\|_{C([0,1])}$ и $\|y'\|_{C([0,1])}$ следует неравенство

$$\|y''\|_{C([0,1])} \leq K_3 \|f\|_{C([0,1])};$$

суммируя, получим требуемую оценку

$$\|y\|_X \leq K.$$

Как уже говорилось выше, из этой оценки и теоремы 2.13.1 и следует разрешимость краевой задачи (i), (ii).

В заключение приведем еще одну теорему о разрешимости задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, в некотором смысле объединяющую теоремы 3.4.1 и 3.4.2.

Теорема 3.4.3 (теорема Пикара)[43]. *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на области Q, и пусть для любых точек (x, y_1), (x, y_2) из Q выполняется условие*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|.$$

Тогда задача Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ разрешима на отрезке Пеано, причем ее решение единственно.

Доказательство. Определим последовательность функций $\{y_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ рекуррентным образом:

$$y_0(x) \equiv y_0, \quad y_{m+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_m(t))\, dt, \quad m = 0, 1, \ldots .$$

Любая из функций $y_m(x)$ определена на отрезке $[x_0 - h_0, x_0 + h_0]$ и непрерывна на нем. Докажем, что выполняются неравенства

$$|y_{m+1}(x) - y_m(x)| \leq \frac{MK^m |x - x_0|^{m+1}}{(m+1)!}.$$

При $m = 0$ имеем

$$|y_1(x) - y_0(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt \right| \leq M|x - x_0|.$$

Следовательно, при $m = 0$ требуемая оценка имеет место.

Пусть теперь требуемая оценка выполняется для $m = n$. Покажем, что она будет выполняться и при $m = n + 1$.

Имеет место следующая цепочка равенств и неравенств

$$|y_{n+2}(x) - y_{n+1}(x)| = \Big|\int\limits_{x_0}^{x} [f(t, y_{n+1}(t)) - f(t, y_n(t))]\, dt\Big| \le$$

$$\le \Big|\int\limits_{x_0}^{x} |f(t, y_{n+1}(t)) - f(t, y_n(t))|\, dt\Big| \le K\Big|\int\limits_{x_0}^{x} |y_{n+1}(t) - y_n(t)|\, dt\Big| \le$$

$$\le K\Big|\int\limits_{x_0}^{x} \frac{MK^n|t - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\, dt\Big| = \frac{MK^{n+1}}{(n+1)!}\Big|\int\limits_{x_0}^{x} |t - x_0|^{n+1}\, dt\Big| =$$

$$= \frac{MK^{n+1}|x - x_0|^{n+2}}{(n+2)!}.$$

Эта цепочка и дает требуемую оценку для $m = n + 1$. Принцип математической индукции позволяет нам теперь утверждать, что требуемое неравенство действительно будет выполняться для всех натуральных чисел n.

Положим $u_m(x) = y_{m+1}(x) - y_m(x)$. Рассмотрим функциональный ряд

$$y_0 + \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x).$$

Для каждого члена этого ряда, как было показано выше, имеет место оценка

$$|u_m(x)| \le \alpha_m = \frac{MK^m h_0^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Докажем, что числовой ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \tag{$*$}$$

сходится. Для искомой сходимости достаточно иметь равномерную ограниченность его частичных сумм. Справедлива цепочка

$$\sum_{m=0}^{n} \alpha_m = Mh_0 + \frac{MKh_0^2}{2!} + \ldots + \frac{MK^{n+1}h_0^{n+1}}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{M}{K}\left[1 + Kh_0 + \frac{(Kh_0)^2}{2!} + \ldots + \frac{(Kh_0)^{n+1}}{(n+1)!} - 1\right] \le$$

$$\leq \frac{M}{K}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(Kh_0)^n}{n!}-1\right]=\frac{M}{K}\left(e^{Kh_0}-1\right).$$

Эта цепочка и дает нужную ограниченность частичных сумм и далее — сходимость ряда $(*)$.

Вернемся к определенному выше функциональному ряду. Неравенства

$$|u_m| \leq \alpha_m,$$

справедливые на отрезке $[x_0-h_0, x_0+h_0]$, сходимость ряда $(*)$ и признак Вейерштрасса означают, что рассматриваемый функциональный ряд равномерно сходится на отрезке $[x_0-h_0, x_0+h_0]$ к некоторой функции $y(x)$.

Сходимость ряда к своей сумме означает сходимость к ней его частичных сумм:

$$\lim_{n\to\infty}\left[y_0+\sum_{m=0}^{n}u_m(x)\right]=y(x).$$

Имеют место равенства

$$\lim_{n\to\infty}\left[y_0+\sum_{m=0}^{n}u_m(x)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}[y_0+y_1(x)-y_0+y_2(x)-y_1(x)+\ldots+y_{n+1}-y_n(x)]=\lim_{n\to\infty}y_{n+1}(x).$$

Таким образом, не только частичные суммы построенного функционального ряда сходятся к функции $y(x)$, но и сама последовательность $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ будет сходиться к той же функции $y(x)$. Поскольку функциональный ряд сходится на отрезке $[x_0-h_0, x_0+h_0]$ равномерно, то и последовательность его частичных сумм будет сходиться равномерно на том же отрезке. Возвращаясь к рекуррентному соотношению

$$y_{n+1}(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(t,y_n(t))\,dt,$$

переходя к пределу в этом соотношении при $n\to\infty$, получаем, что для функции $y(x)$ на отрезке $[x_0-h_0, x_0+h_0]$ будет выполняться равенство

$$y(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(t,y(t))\,dt.$$

Как было показано при доказательстве теоремы 3, из этого равенства следует, что функция $y(x)$ будет решением задачи Коши.

Покажем, что решение задачи Коши может быть только одно.

Предположим, что имеется еще одно решение $\widetilde{y}(x)$. Обозначим $z(x) = y(x) - \widetilde{y}(x)$. Имеют место равенства

$$z'(x) = f(x, y(x)) - f(x, \widetilde{y}(x)), \quad z(x_0) = 0.$$

Интегрируя от x_0 до текущей точки, получим

$$z(x) = \int_{x_0}^{x} [f(t, y(t)) - f(t, \widetilde{y}(t))] \, dt.$$

Следствием данного равенства является неравенство

$$|z(x)| \le K \int_{x_0}^{x} |z(t)| \, dt.$$

Обозначим $F(x) = \int_{x_0}^{x} |z(t)| \, dt$. Последнее неравенство можно записать в виде

$$F'(x) \le KF(x)$$

и далее преобразовать в неравенство

$$\left[e^{-Kt} F(t)\right]' \le 0, \quad t \in [x_0 - h_0, x_0 + h_0].$$

Интегрируя и учитывая равенство $F(x_0) = 0$, получим

$$e^{-Kx} F(x) \le 0,$$

откуда следует $F(x) \equiv 0$, и далее $|z(x)| \equiv 0$. А это и означает, что второе решение $\widetilde{y}(x)$ совпадает с найденным.

Теорема полностью доказана.

Замечание. Аналоги теорем 3.4.1–3.4.3 можно доказать и для задачи Коши для систем уравнений.

Использованная литература

1. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Т. 1, М.: "Высшая школа" , 1973; Т. 2. М.: "Высшая школа" , 1973.

2. Решетняк Ю.Г. Курс математического анализа. Часть I. Книга 1. Новосибирск: Институт математики СО РАН, 1999; Часть I. Книга 2. Новосибирск: Институт математики СО РАН; Часть II. Книга 1. Новосибирск: Институт математики СО РАН, 1999; Часть II. Книга 2. Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2001.

3. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

4. Вулих В.З. Введение в функциональный анализ. М.: Гос. изд-во физ. мат. лит., 1958.

5. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Физматлит, 2005.

6. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука, 1984.

7. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.