§ 25 Лекция 25

Неопределенный интеграл.

Определение. Функция $F(x)$ в заданном промежутке X называется первообразной функции $f(x)$ или интегралом от $f(x)$, если во всем этом промежутке $F'(x) = f(x)$ или, что то же, $f(x)dx$ служит для $F(x)$ дифференциалом, т.е. $dF = f(x)dx$.

Разыскание для функции f всех ее первообразных, называемое интегрированием ее, составляет одну из задач интегрального исчисления; эта задача является задачей, обратной к задаче дифференцирования.

Теорема. Если в некотором (конечном или бесконечном, замкнутом или нет) промежутке X функция $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$, то и $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, также будет первообразной. Обратно, каждая функция, первообразная для f, может быть представлена в этой форме.

Доказательство. Из того факта, что $F' = (F' + C') = (F + C)' = f$, вытекает первая часть утверждения.

Пусть теперь $\Phi(x)$ есть произвольная первообразная для f, следовательно, в X имеем $\Phi' = f$. Так как F и Φ в X имеют одинаковую производную, то, как мы уже знаем, они разнятся на постоянную, т.е. $\Phi = F + C$.

Из теоремы следует, что достаточно найти для f всего лишь одну первообразную, чтобы знать все первообразные.

В силу этого, выражение $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, представляет собой общий вид функции, которая имеет производную f или дифференциал $f(x)dx$. Это выражение называется неопределенным интегралом от $f(x)$ и обозначается символом

$$\int f(x)dx.$$

Произведение fdx называется подынтегральным выражением, f подынтегральной функцией.

Свойства неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла вытекают непосредственно из его определения

1. $dF = d\int fdx = fdx$, т.е. процедура дифференцирования обратна к интегрированию.

2. Так как F есть первообразная для $F' = f$, то имеем

$$\int F'(x)dx = F(x) + C,$$

что может быть переписано так

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Происходит как бы сокращение знаков d и $\int$.

В любом учебнике, задачнике приводится так называемая таблица основных интегралов, которая фактически есть следствие таблицы дифференцирования основных элементарных функций. Но в случае, когда под знаком интеграла стоит достаточно сложное выражение, то угадать функцию, производная которой совпадает с подинтегральной функцией, становится практически неразрешимой задачей. Для этого были разработаны различные способы интегрирования, которые используют специфику подынтегральной функции. При этом, все равно, задача интегрирования остается очень сложной, и более того, не всегда возможной в элементарных функциях, так, например, не существует первообразной функции, выраженной в элементарных функциях, от функции $\cos x^2$, e^{-x^2}.

Простейшие правила интегрирования.

1. Если a – постоянная, то

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$$

Фактически нужно показать, что выражение справа есть первообразная функции $a\,f(x)$. Действительно, дифференцируя выражение справа, мы получим согласно законам дифференцирования

$$d[a\int f(x)dx] = a\,d[\int f(x)dx] = a\,f(x)dx,$$

т.е. выражение справа является первообразной для $a\,f(x)dx$, что и требовалось доказать. Таким образом, постоянный множитель можно выносить за знак интегрирования.

2.

$$\int [f \pm g]dx = \int fdx \pm \int gdx.$$

Дифференцируем выражение справа по закону дифференцирования суммы

$$d\left[\int fdx \pm \int gdx\right] = d\int fdx \pm d\int gdx = (f+g)dx.$$

Т.е. выражение справа есть первообразная для подынтегрального выражения слева, что и требовалось доказать. Неопределенный интеграл от суммы (разности) двух функций есть сумма интегралов от каждой функции отдельно. Заметим, что равенства подобного типа (как в 1.,2.) есть равенство между множествами функций: разность между правой и левой частями есть постоянная.

Интегрирование путем замены переменной. Сейчас мы представим метод, являющийся фактически основным методом аналитического интегрирования – метод замены переменной или метод подстановки. В его основе лежит следующее замечание:

если известно, что

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

то тогда

$$\int g(\omega(x))\omega'(x)dx = G(\omega(x)) + C, \quad \text{где} \quad t = \omega(x).$$

Это прямо вытекает из правил дифференцирования сложной функции

$$\frac{d}{dx}G(\omega(x)) = G'(\omega(x))\omega'(x) = g(\omega(x))\omega'(x),$$

если учесть, что $G' = g$.

Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int f(x)dx.$$

Во многих случаях удается в качестве новой переменной выбрать такую функцию от x: $t = \omega(x)$, чтобы подынтегральное выражение представилось в виде

$$f(x)dx = g(\omega(x))\omega'(x)dx, \tag{25.1}$$

где $g(t)$ – более удобная для интегрирования функция, чем f. Тогда по сказанному выше, достаточно найти интеграл

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

чтобы из него подстановкой $t = \omega(x)$ получить искомый интеграл.

Найдем, например, интеграл

$$\int \sin^3 x \cos x dx.$$

При работе с заменой переменных надо помнить, что дифференциал функции и аргумента связаны соотношением $df = f'(x)dx$. В этом выражении почти вся суть технической работы при вычислении интеграла. В данном случае, замечаем, что $\cos x dx = d \sin x$. Таким образом, делая замену $t = \sin x$, преобразуем подынтегральное выражение к виду

$$\sin^3 x \cos x dx = \sin^3 x d \sin x = t^3 dt.$$

Последний интеграл легко вычисляется

$$\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C.$$

Остается записать все через x

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

Обращаем внимание на то, что при поиске замены переменных вида $t = \omega(x)$, упрощающей исходное выражение, нужно помнить, что в составе этого подинтегрального выражения должен найтись множитель вида $\omega'(x)dx$, дающий дифференциал новой переменной t.

В этой связи рассмотрим интеграл

$$\int \sin^3 x\, dx,$$

для которого предыдущая подстановка не подходит, как раз в силу отсутствия вышеупомянутого множителя. Выделим из подинтегрального выражения множитель $-\sin x\, dx$, это приведет к подстановке $t = \cos x$, так как $dt = -\sin x\, dx$. Осталось выражение

$$-\sin^2 x = \cos^2 x - 1,$$

которое может быть записано через новую переменную t. Действительно,

$$-\sin^2 x = \cos^2 x - 1 = t^2 - 1.$$

Таким образом,

$$\int \sin^3 dx = \int (t^2 - 1) dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

Иногда при вычислении интегралов действуют по-другому. В подынтегральное выражение $f(x)dx$ непосредственно подставляют вместо x функцию $x = \phi(t)$ от новой переменной t и получают выражение

$$f(\phi(t))\phi'(t)dt = g(t)dt.$$

Заметим, что в первом случае, мы как бы не знаем ту замену, которую необходимо сделать и ищем ее работая с подынтегральным выражением. Во втором случае, подстановка заранее известна. Так будет и в дальнейшем, где часть интегралов будет собрана в группы, для которых существует стандартная подстановка, это будет в основном предметом семинарских занятий. Но к сожалению не все интегралы удается так классифицировать. Для примера найдем интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1 + \sqrt[3]{x})}.$$

Положим $x = t^6$, тогда получим

$$\sqrt{x} = t^3, \quad \sqrt[3]{x} = t^2, dx = 6t^5,$$

и после подстановки получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1 + \sqrt[3]{x})} = 6 \int \frac{t^2 dt}{1 + t^2} = 6(t - \operatorname{arctg} t) + C.$$

Осталось теперь вернуться к переменной x.

§ 26 Лекция 26

Интегрирование по частям. Пусть заданы функции $u = f(x)$ и $v = g(x)$, имеющие непрерывные производные u' и v'. Тогда по правилу дифференцирования произведения имеем

$$(uv)' = u'v + uv', \quad uv' = (uv)' - u'v.$$

Проинтегрируем последнее равенство

$$\int uv'\,dx = \int u\,dv = \int (uv)'\,dx - \int u'v\,dx = \int d(uv) - \int v\,du = uv - \int v\,du.$$

Таким образом, имеем так называемое правило интегрирования по частям

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Вычислим интеграл

$$\int x\cos x\,dx = \int xd(\sin x).$$

Полагаем $u = x$, $v = \sin x$. Тогда из формулы интегрирования по частям сразу вытекает

$$\int xd(\sin x) = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x.$$

Заметим, что при вычислении интеграла по частям мы разбиваем подинтегральное выражение на 2 части, одну из которых мы дифференцируем, а другую интегрируем. С первой частью обычно проблем не возникает, а вот вторую часть надо подбирать так, чтобы интегрировать было легко, иначе не имеет смысла, с точки зрения процедуры вычисления, так интегрировать.

Выделим некоторые классы интегралов, которые вычисляются именно с помощью этого метода, который может применяться конечное число раз

$$\int x^k \ln{}^m x\,dx,\ \int x^k \sin bx\,dx,\ \int x^k \cos bx\,dx,\ \int x^k e^{ax}\,dx,\ k, m\ -\ \text{натуральные числа.}$$

Многократное применение формулы интегрирования по частям приводит нас к следующей формуле

$$\int uv^{(n+1)}\,dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \ldots + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\,dx.$$

В качестве последнего примера применения формулы интегрирования по частям выведем рекуррентную формулу для вычисления интеграла

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Положим

$$u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}, \quad dv = dx, \quad du = -\frac{2nxdx}{(x^2+a^2)^{n+1}}, \quad v = x.$$

Откуда получаем

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx.$$

Последний интеграл преобразуется следующим образом

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx =$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - a^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = J_n - a^2 J_{n+1}.$$

Подставляя это выражение в предыдущее равенство, получаем

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}J_n.$$

Легко подсчитать, что

$$J_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$$

Простые дроби и их интегрирование. Рассмотрим следующие подынтегральные выражения:

$$R(x)dx,\ R\left(x,\ \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx,\ R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,\ R(\sin x, \cos x)dx,$$

где R – рациональная функция своих аргументов, биномиальные дифференциалы вида $x^m(a+bx^n)^p dx$. В каждом из упомянутых выражений можно осуществить специальные замены переменных или подстановки, с помощью которых можно вычислить интеграл в конечном виде, т.е. представить его через элементарные функции. Все классы, начиная со второго, специальными заменами переменных сводятся к интегрированию рациональных функций. Поэтому мы с вами рассмотрим именно этот класс в качестве примера.

Но прежде, чем проинтегрировать рациональные функции, сделаем одно важное замечание, доказательство которого приводится в курсе алгебры и на нем останавливаться не будем. Касается это разложения правильных дробей на простые множители:
каждая правильная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ может быть представлена в виде суммы конечного числа простых дробей вида

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}, \quad k, m \geq 1 - \text{натуральные числа.}$$

Как известно, если $x = a$ является корнем многочлена $Q(x)$, то многочлен может быть записан в виде $Q = (x-a)Q_1(x)$. Если в свою очередь многочлен Q_1 имеет корнем $x = a$, тогда имеем $Q=(x-a)^2Q_2$ и так далее. Если же многочлен Q можно представить в виде $Q=(x-a)^kQ_k$, где $Q_k(a)\neq 0$, тогда корень $x=a$ называется корнем кратности k. Более того, то же самое имеет место и для комплексных корней, которые как известно образуются парами комплексно-сопряженных корней. Таким образом, многочлен Q степени n можно представить в виде

$$Q=(x-a_1)^{k_1}\dots(x-a_l)^{k_l}(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}\dots(x^2+p_mx+q_m)^{r_m},$$

где $a_1,\dots a_l$ – действительные корни многочлена, а квадратным трехчленам соответствует произведение комплексно-сопряженных корней, которых m пар. Заметим, что

$$\sum_{s=1}^{l}k_s+2\sum_{s=1}^{m}r_s=n.$$

Теперь для дроби можно записать следующее представление

$$\frac{P}{Q}=\frac{A_{11}}{x-a_1}+\frac{A_{12}}{(x-a_1)^2}+\dots+\frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}+\dots+\frac{A_{l1}}{x-a_l}+\frac{A_{l2}}{(x-a_l)^2}+\dots+\frac{A_{lk_l}}{(x-a_l)^{k_l}}+$$
$$\frac{M_{11}x+N_{11}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_{12}x+N_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\dots+\frac{M_{1r_1}x+N_{1r_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}}+\cdots$$
$$\frac{M_{m1}x+N_{m1}}{x^2+p_mx+q_m}+\frac{M_{m2}x+N_{m2}}{(x^2+p_mx+q_m)^2}+\cdots\frac{M_{mr_m}x+N_{mr_m}}{(x^2+p_mx+q_m)^{r_m}}.$$

Из представления выше сразу вытекает, что для того, чтобы проинтегрировать рациональную функцию достаточно уметь интегрировать простые дроби. Простые дроби первого вида интегрируются достаточно просто

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|,\quad \int\frac{A}{(x-a)^k}dx=\frac{A}{1-k}x^{1-k}.$$

Интегрирование дробей второго вида основано на использовании следующей подстановки, которая вытекает из процедуры выделения полного квадрата

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right),$$

причем последнее число больше нуля и мы можем положить его для удобства равным $a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$. Прибегнем теперь к подстановке

$$x+\frac{p}{2}=t,\quad dx=dt,\quad x^2+px+q=t^2+a^2,\quad Mx+N=Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right).$$

Тогда для $m=1$

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Mt+(N-\frac{Mp}{2})}{t^2+a^2}dt=\frac{M}{2}\int\frac{2tdt}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$
$$\frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right)+\frac{1}{a}\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.$$

Для $m > 1$ будем иметь

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} = \int \frac{Mt + (N - \frac{Mp}{2})}{(t^2+a^2)^m} dt = \frac{M}{2} \int \frac{2tdt}{(t^2+a^2)^m} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}.$$

Первый из интегралов справа вычисляется подстановкой

$$t^2 + a^2 = u, \quad 2tdt = du,$$

откуда

$$\int \frac{2tdt}{(t^2+a^2)^m} = \int \frac{du}{u^m} = \frac{1}{m-1} u^{1-m} + C = \frac{1}{m-1} (t^2+a^2)^{1-m} + C.$$

Второй же интеграл при любом m может быть вычислен по рекуррентной формуле, полученной нами ранее с помощью метода интегрирования по частям.

Теперь, если у нас есть произвольная дробь вида $\frac{P}{Q}$, то мы можем записать ее в виде

$$\frac{P}{Q} = R(x) + \frac{P_1}{Q_1},$$

где R – целый многочлен, который легко интегрируется, а $\frac{P_1}{Q_1}$ – уже правильная дробь. Далее, мы знаем, что такая дробь разлагается определенным образом в сумму простых дробей. Неизвестными остаются коэффициенты этого разложения. Общим знаменателем этих дробей является Q_1. Приводя разложение на простые дроби к общему знаменателю и затем отбрасывая Q_1, мы придем к равенству двух многочленов тождественно относительно x. Чтобы они были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы равнялись коэффициенты при равных степенях. Таким образом, мы получаем систему n линейных уравнений относительно n неизвестных, однозначная разрешимость которой вытекает из самого представления для дроби. Этот метод называется методом неопределенных коэффициентов.

Есть еще один способ нахождения коэффициентов в разложении на простые дроби, который может быть использован только для коэффициентов при членах, соответствующих действительным корням. Пусть

$$\frac{P}{Q} = \frac{P}{(x-a)^n Q_1} = \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{R}{Q_1}.$$

Умножим это тождество на $(x-a)^n$

$$\frac{P}{Q_1} = A_n + (x-a)A_{n-1} + \dots + (x-a)^{n-1}A_1 + (x-a)^n \frac{R}{Q_1}. \tag{26.1}$$

Все слагаемые, кроме первого, в правой части (26.1) обращаются в ноль при $x = a$, следовательно,

$$A_n = \frac{P}{Q_1}\Big|_{x=a}.$$

Продифференцировав равенство (26.1), получим

$$\left(\frac{P}{Q_1}\right)' = A_{n-1} +$$

$$2(x-a)A_{n-2} + \cdots + (n-1)(x-a)^{n-2}A_1 + (x-a)^n \left(\frac{R}{Q_1}\right) + n(x-a)^{n-1}\frac{R}{Q_1}. \tag{26.2}$$

Откуда положив $x = a$, получаем

$$A_{n-1} = \left(\frac{P}{Q_1}\right)'\Big|_{x=a}.$$

Продолжая этот процесс, в итоге получаем

$$A_{n-k} = \frac{1}{k!}\left(\frac{P}{Q_1}\right)^{(k)}\Big|_{x=a} \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

§ 27 Лекция 27

Определенный интеграл.

Задача о вычислении площади подграфика. Рассмотрим задачу о нахождении площади криволинейной трапеции, образуемой графиком неотрицательной функции f, отрезком $[a, b]$ и прямыми, перпендикулярными оси OX и проходящими через точки a и b. Разделим основание $[a, b]$ нашей фигуры произвольным образом на части точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Проведем ординаты $y_k = f(x_k)$, соответствующие этим точкам, тогда трапеция разобьется на ряд криволинейных полосок. Заменим каждую полоску на прямоугольники, с тем же самым основанием и высотой, совпадающей с одной из ординат исходной полоски, скажем с крайней слева. Таким образом, криволинейная трапеция заменится некоторой ступенчатой фигурой, составленной из прямоугольников.

Заметим, что площадь основания i-го прямоугольника равна $f(x_i)(x_{i+1}-x_i) = f(x_i)\Delta x_i$. Просуммировав все площади прямоугольников, получим приближенное значение площади криволинейной трапеции

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i.$$

Если f функция непрерывная на $[a, b]$, то погрешность приближения стремится к нулю при стремлении к нулю всех Δx_i. Это сразу вытекает из определения непрерывности, поскольку разность между значениями функции на каждом из интервалов стремится к нулю при стремлении к нулю Δx_i. Точное значение P получится в пределе

$$P = \lim \sum f(x_i)\Delta x_i,$$

в предположении, что все длины Δx_i стремятся к нулю одновременно.

Возникает вопрос: для какого класса функций возможен этот предельный переход, дающий площадь подграфика? Заметим, однако, что такой предельный переход не всегда дает площадь подграфика. Можно сказать так, что интуитивное представление о площади, которое мы использовали, и которое имеет место для непрерывных функций, должно быть обосновано. Для этого необходимо исследование упомянутых выше пределов.

Определенный интеграл. Рассмотрим упомянутое выше разбиение отрезка $[a, b]$. Предположим, что функция f определена на этом промежуте. Будем обозначать наибольшую разность между x_{i+1} и x_i через $\lambda = \max_i \Delta x_i$. В каждом из промежутков вида $[x_i, x_{i+1}]$ зафиксируем точку η_i и составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\eta_i)\Delta x_i.$$

Определение. Число I называется пределом суммы σ при $\lambda \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что лишь только $\lambda < \delta$ следует $|\sigma - I| < \varepsilon$, т.е.

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma.$$

Если существует конечный предел I суммы σ при $\lambda \to 0$, не зависящий ни от способа дробления промежутка $[a, b]$, ни от выбора точек η_i, то I называется определенным интегралом функции f от a до b и обозначается через

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Функция f в этом случае называется интегрируемой на $[a, b]$. Суммы σ называются интегральными суммами Римана.

Заметим, что из самого определения интеграла сразу вытекает, что функция должна быть ограничена, поскольку в обратном случае вообще невозможно будет говорить о конечном пределе. Действительно, тогда при любом разбиении промежутка, функция будет оставаться неограниченной по крайней мере на одном из участков разбиения, а значит за счет выбора точки η_i на этом участке, произведение $f(\eta_i)\Delta x_i$ может быть сделано сколь угодно большим. Т.е. ограниченность функции есть необходимое условие интегрируемости функции, но как мы увидим впоследствии, не является достаточным условием.

Если посмотреть на проблему существования предела, то легко заметить, что ситуация не такая уж и простая, поскольку сам принцип построения предполагает большую степень свободы в организации интегральных сумм Римана. Во-первых, выбор точек деления интервала, во-вторых, выбор точек, в которых вычисляется значение функции. В дальнейшем будем уже предполагать, что на $[a, b]$

$$m \le f \le M.$$

Суммы Дарбу. Обозначим через m_i и M_i точные нижние и верхние грани функции f на промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ и составим суммы Дарбу, нижнюю и верхнюю

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i.$$

Легко видеть, что из

$$m_i \le f(\eta_i) \le M_i$$

домножая на Δx_i и суммируя, получим

$$s \le \sigma \le S.$$

При фиксированном разбиении суммы s и S будут постоянными числами, в то время как σ остается переменной в виду произвольности чисел η_i. Так как за счет выбора точек η_i мы можем значениями функции на каждом $[x_i, x_{i+1}]$ сколько угодно близко приблизиться к m_i и к M_i, а, следовательно, в силу конечного числа слагаемых в сумме, сколь угодно близко приблизиться может σ к s и S. Таким образом, суммы Дарбу s и S являются точными нижними и верхними гранями для σ.

Свойства сумм Дарбу.

1. Если к имеющимся точкам разбиения интервала добавить новые точки, то нижняя сумма Дарбу может разве что возрасти, а верхняя сумма – разве что уменьшиться.

2. Любая нижняя сумма Дарбу не превосходит любую верную сумму Дарбу, хотя бы и отвечающую другому разбиению промежутка.

3. Заметим, что существуют

$$\lim_{\lambda \to 0} s = I_*, \quad \lim_{\lambda \to 0} S = I^*.$$

Этот результат есть содержание теоремы Дарбу (весьма нетривиальное доказательство которой мы приводить не будем). Величины I_*, I^* называются нижним и верхним интегралами Дарбу соответственно. Из 1, 2 следует

$$s \le I_* \le I^* \le S.$$

Условия существования интеграла. Для того, чтобы существовал определенный интеграл Римана, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0. \tag{27.1}$$

Необходимость. Предположим, что существует I. Тогда по любому ε найдется такое δ, что при $\lambda < \delta$ сразу следует

$$|\sigma - I| < \varepsilon, \quad I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon,$$

при любых значениях η_i. Но суммы s и S являются, при заданном разбиении промежутка, нижней и верхней гранями для интегральных сумм σ и, следовательно,

$$I - \varepsilon \le s \le S \le I + \varepsilon,$$

и, таким образом, немедленно получаем

$$\lim_{\lambda \to 0} s = I, \quad \lim_{\lambda \to 0} S = I.$$

Достаточность. Пусть выполнено (27.1). Тогда очевидно, $I_* = I^*$. Обозначим их общее значение через I, тогда $s \le I \le S$. С другой стороны, мы имеем $s \le \sigma \le S$. Согласно (27.1), при достаточно малом λ имеем $S - s < \varepsilon$. Но тогда из неравенств для σ и I через s и S, сразу следует

$$|\sigma - I| < \varepsilon,$$

что означает, что $\lim_{\lambda\to 0} \sigma = I$ независимо от разбиения и выбора точек на промежутках разбиения, т.е. I является определенным интегралом от f.

Если обозначить колебание $M_i - m_i$ функции f на i-ом частичном промежутке через ω_i, то будем иметь

$$S - s = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$$

и, таким образом, условие существования интеграла может быть записано в виде

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

Классы интегрируемых функций.

1. Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема.

Доказательство. Раз функция непрерывна на замкнутом промежутке, то по теореме Кантора она равномерно непрерывна. Это значит, что мы можем по любому $\varepsilon > 0$ найти δ такое, что разбив промежуток на частичные промежутки длины меньше δ, колебание функции на всех частичных промежутках сразу будет меньше ε. Значит

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon(b - a).$$

Отсюда уже сразу следует, что

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

2. Если ограниченная функция f в $[a, b]$ непрерывна за исключением конечного числа точек, то она интегрируема.

3. Монотонная ограниченная функция f всегда интегрируема.

Доказательство. Пусть f монотонна (неубывает для определенности). Тогда ее колебание в промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ будет

$$\omega_i = f(x_{i+1}) - f(x_i).$$

Зададимся любым ε и положим

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Как только $\lambda < \delta$, сразу будем иметь

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \delta \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1} - f(x_i)] = \delta [f(b) - f(a)] = \varepsilon,$$

откуда следует интегрируемость.

Свойства интегрируемых функций.

1. Если функция f интегрируема на промежутке $[a, b]$, то и функции kf, (k – постоянная), $|f|$ также интегрируемы в этом промежутке.

2. Если две функции f и g интегрируемы в промежутке $[a, b]$, то их сумма, разность и произведение тоже интегрируемы.

3. Если f интегрируема на промежутке $[a, b]$, то она интегрируема и в любой части этого промежутка. Наоборот, если промежуток разложен на части, и в каждой части f интегрируема, тогда она интегрируема на всем промежутке.

4. Если изменить значения f в конечном числе точек, то интегрируемость ее не нарушится, причем и значение интеграла не изменится. Это легко заметить из того факта, что изменения коснутся лишь конечного числа членов суммы $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$, а значит при $\lambda \to 0$ эти слагаемые исчезнут. Таким образом, мы можем интегрировать функцию даже не определенную в конечном числе точек, надо просто доопределить ее каким-нибудь образом.

В заключении приведем пример функции Дирихле, являющейся ограниченной, но не интегрируемой по Риману. Рассмотрим функцию Дирихле на отрезке $[0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \quad \text{рациональное число} \\ 0, & x \quad \text{иррациональное число.} \end{cases}$$

Легко видеть, что если при составлении интегральных сумм Римана брать в качестве η_i рациональные точки, то $\sigma = 1$ для любого разбиения; если же в качестве η_i брать иррациональные точки, то $\sigma = 0$ для любого разбиения. Следовательно, предел зависит от выбора точек в частичных промежутках разбиения, а значит функция Дирихле, будучи ограниченной, интегрируемой по Риману не является.

§ 28 Лекция 28

Свойства определенных интегралов.

1. Если f интегрируема в промежутке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

2. По определению полагаем, что

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3. Пусть f интегрируема в $[a, b]$ и $c \in (a, b)$. Тогда f интегрируема на каждом из промежутков $[a, c]$ и $[c, b]$ и

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Если предположить теперь, что f интегрируема на каждом из промежутков $[a, c]$ и $[c, b]$, то она интегрируема в $[a, b]$ и имеет место указанная выше формула.

4. Если f интегрируема в $[a, b]$, тогда kf, $k = const$, тоже интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

5. Если f и g интегрируемы в $[a, b]$, то $f \pm g$ тоже интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

6. Если f интегрируема в $[a, b]$, неотрицательна и $a < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Заметим, что если на каком-нибудь частичном промежутке, лежащем в $[a, b]$, функция f положительна, тогда имеет место

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

7. Если f и g интегрируемы в $[a, b]$ и $f \leq (<) g$ на $[a, b]$, $a < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx, \quad \int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$$

8. Если f интегрируема в $[a, b]$ и $a < b$, то

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

9. Если f интегрируема в $[a, b]$, где $a < b$, и во всем промежутке имеет место неравенство

$$m \leq f(x) \leq M,$$

то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Теорема о среднем значении. Пусть f интегрируема в $[a,b]$, $a<b$ и во всем промежутке имеет место неравенство $m \leq f(x) \leq M$; тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a),$$

где $m \leq \mu \leq M$.

Доказательство. Заметим, что из условия $m \leq f(x) \leq M$ вытекает

$$m\sum \Delta x_i \leq \sum f(\eta_i)\Delta x_i \leq M\sum \Delta x_i,$$

откуда, переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Следовательно,

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Положив

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu,$$

получаем требуемое равенство. Заметим, что если $a>b$, то формула продолжает иметь место.

В случае непрерывной функции f равенство принимает вид, напоминающий формулу Лагранжа конечных приращений, которую, кстати, тоже иногда называют теоремой о среднем. Если функция непрерывна, тогда по теореме Вейерштрасса постоянные m и M являются соответственно минимумом и максимумом функции f. Тогда, по теореме Больцано о промежуточном значении непрерывной функции, значение μ, будучи промежуточным, должно приниматься в какой-нибудь точке $c \in [a,b]$. Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

Обобщенная теорема о среднем значении. Пусть 1) f и g интегрируемы в $[a,b]$, $a<b$; 2) $m \leq f(x) \leq M$; 3) g во всем промежутке не меняет знак: $g \geq 0$, $(g \leq 0)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx,$$

где $m \leq \mu \leq M$.

Доказательство. Докажем теорему для случая $g \geq 0$. Имеем

$$mg \leq fg \leq Mg.$$

Из этого неравенства и свойств 4 и 7, получаем

$$m\int_a^b g\,dx \le \int_a^b fg\,dx \le M\int_a^b g\,dx.$$

В силу неотрицательности g. имеем

$$\int_a^b g\,dx \ge 0.$$

Если этот интеграл равен нулю, то сразу получаем равенство нулю интеграла от произведениия fg и утверждение леммы имеет место для любого μ. Если же интеграл больше нуля, тогда положим

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx},$$

и придем к требуемуму результату. Случаи $a < b$ и $g \le 0$ рассматриваются аналогично. Если f непрерывна, то эта формула может быть записана в виде

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx,$$

где $c \in [a, b]$.

Определенный интеграл как функция верхнего предела. Предположим интегрируемость f на промежутке $[a, b]$. Значит она интегрируема на любом $[a, x]$, $a \le x \le b$ и мы можем рассмотреть интеграл

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x), \tag{28.1}$$

называемый интегралом с переменным верхним пределом. Таким образом, мы определили некоторую функцию от x. Изучим свойства этой функции. Как всегда будем предполагать, что на промежутке $[a, b]$ выполняется $m \le f \le M$.

1. Если f интегрируема на $[a, b]$, то Φ непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. Придав x произвольное приращение $\Delta x = h$, получим

$$\Phi(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt,$$

так что

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Применим теорему о среднем к последнему интегралу и получим

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \mu h,$$

где μ содержится между точными верхними и нижними границами m' и M' функции $f(t)$ в промежутке $[x, x+h]$, а следовательно, и между m и M. Если устремить $h \to 0$, то очевидно

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) \to 0,$$

что и доказывает непрерывность функции Φ.

2. Если предположить, что f непрерывна в точке $t = x$, то в этой точке Φ будет иметь производную $\Phi' = f$.

Доказательство. Из предыдущего доказательства имеем

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \mu, \quad m' \le \mu \le M'.$$

В силу непрерывности f в $t = x$, по любому $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $|h| < \delta$

$$f(x) - \varepsilon < f(t) < f(x) + \varepsilon$$

для всех значений $t \in [x, x+h]$. И таком случае имеют место и неравенства

$$f(x) - \varepsilon \le m' \le \mu \le M' \le f(x) + \varepsilon,$$

так что

$$|\mu - f(x)| \le \varepsilon.$$

Отсюда получаем

$$\Phi'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \mu = f(x),$$

что и требовалось доказать.

Мы пришли к заключению, имеющему огромное теоретическое и прикладное значение. Если предположить f непрерывной на всем промежутке $[a, b]$, то она интегрируема и предыдущее утверждение приложимо к любой точке x из этого промежутка: для непрерывной функции f в промежутке $[a, b]$ всегда существует первообразная; примером ее является определенный интеграл (28.1) с переменным верхним пределом.

Заметим, что все эти утверждения распространяются на случай интеграла с переменным нижним пределом, так как

$$\Phi(x) = \int_x^b f(t)dt = -\int_b^x f(t)dt,$$

и в случае непрерывности f

$$\Phi'(x) = -f(x).$$

Основная формула интегрального исчисления. Мы получили, что для непрерывной f интеграл

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

является первообразной для f. Если F есть любая другая первообразная для f, то, как известно,

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

Определим постоянную C, положив $x = a$

$$0 = \Phi(a) = F(a) + C, \quad C = -F(a),$$

откуда окончательно

$$\Phi(x) = F(x) - F(a).$$

В частности, при $x = b$ получим

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Это и есть основная формула интегрального исчисления. Заметим, что, применив теорему о среднем к интегралу

$$F(b) - F(a) = f(c)(b - a) = F'(c)(b - a),$$

получим формулу конечных приращений Лагранжа.

Основная формула может быть выведена несколько более сложным образом и в более общем случае. Пусть f интегрируема на $[a, b]$, а непрерывная в $[a, b]$ функция $F(x)$ имеет f своей производной: $F' = f$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

§ 29 Лекция 29

Формулы приведения. Покажем как выглядит формула интегрирования по частям в случае определенных интегралов

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Пример. Вычислить интеграл

$$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx.$$

Интегрируя по частям, найдем

$$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x\,d(-\cos x) = -\sin^{m-1} x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^2 x\,dx.$$

Внеинтегральный член обращается в ноль. Заменяя $\cos^2 x$ через $1 - sin^2x$, получим

$$J_m = (m-1)J_{m-2} - (m-1)J_m,$$

откуда уже вытекает рекуррентная формула

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2},$$

по которой интеграл J_m последовательно приводится либо к J_1 либо к J_0. Так при $m = 2n$ имеем

$$J_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}.$$

Если же $m = 2n+1$, то

$$J_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

В обоих случаях n начинается с 1.

Формулы замены переменных в определенном интеграле. Пусть требуется вычислить интеграл на $[a,b]$ от непрерывной функции f. Положим $x = \phi(t)$, подчинив $\phi(t)$ следующим условиям:

1. $\phi(t)$ непрерывна в некотором промежутке $[\alpha,\beta]$ и не выходит за пределы промежутка $[a,b]$, когда t изменяется в промежутке $[\alpha,\beta]$;

2. $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$;

3. существует непрерывная производная ϕ' в $[\alpha,\beta]$.

Тогда имеет место формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Если же теперь требуется вычислить интеграл от $[a, b]$ от интегрируемой функции f. То тогда для $x = \phi(t)$ к условиям 1.2.3. надо добавить следующее условие:
4. $\phi(t)$ монотонно меняется от $a = \phi(\alpha)$, $b = \phi(\beta)$ при изменении t от α до β.
Тогда имеет место формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Выражение площади интегралом. Рассмотрим площадь трапеции, ограниченной графиком $f > 0$ на интервале $[a, b]$ и прямыми $x = a$ и $x = b$. Разобьем промежуток $[a, b]$ на части с помощью точек

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Составим составим суммы Дарбу

$$s = \sum m_i \Delta x_i, \quad S = \sum M_i \Delta x_i.$$

Они представляют из себя площади ступенчатых фигур, составленных из прямоугольников вписанных в трапецию и описанных вокруг трапеции. Поэтому

$$s < P < S.$$

Но, если f интегрируема, то обе суммы сходятся к интегралу

$$\int_a^b f(x)dx,$$

с одной стороны, а с другой, имея общий предел, дадут в пределе площадь трапеции, таким образом, получим

$$P = \int_a^b f(x)dx.$$

Если же теперь трапеция ограничена кривыми $f_1 \leq f_2$ и прямыми $x = a$, $x = b$, то

$$P = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx.$$

Несобственные интегралы. Мы рассмотрели интеграл Римана, который определяется для ограниченных функций на конечном промежутке. В случае, когда функция неограничена на конечном промежутке, или ограничена, на каждом ограниченном интервале, но промежуток интегрирования бесконечен, тогда говорят о понятии несобственного интеграла. Мы рассмотрим на примере интегралов на бесконечных промежутках этот класс интегралов, а затем скажем несколько слов об интегралах от неограниченных функций на конечном промежутке.

Пусть f определена на $[a, +\infty)$ и интегрируема на любом конечном участке $[a, A]$ в смысле Римана. Несобственным интегралом функции f от a до $+\infty$ называется предел

$$\lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx. \tag{29.1}$$

Если этот предел существует, то говорят, что интеграл (29.1) сходится, а f называют интегрируемой в несобственном смысле на бесконечном промежутке $[a, +\infty)$. Если предел либо равен бесконечности, либо вообще не существует, то интеграл (29.1) называют расходящимся.

Заметим, что прямо из определения вытекает способ вычисления несобственных интегралов. К вычислению собственного интеграла Римана с помощью основной формулы интегрального исчисления, добавляется предельный переход. Вычислим для примера

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Согласно данному выше определению имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \to \infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \to \infty} arctgA = \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично определяются интегралы по следующим бесконечным промежуткам

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{A \to -\infty} \int_A^a f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A' \to -\infty, A \to +\infty} \int_{A'}^A f(x)dx.$$

В последнем случае можно разбить этот интеграл на два несобственных, которые можно рассматривать отдельно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Существование исходного интеграла равносильно существованию интегралов, его составляющих. Значение, как и сходимость этого интеграла не зависит от выбора точки a.

Аналогии между рядами и несобственными интегралами:

$$a_n \to f, \quad \sum^N a_n \to \int_a^A f\,dx, \quad \sum a_n \to \int_a^{+\infty} f\,dx, \quad \sum_{N+1} a_n \to \int_A^{+\infty} f\,dx.$$

Перечислим простейшие теоремы о несобственных интегралах

1. Если сходится $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, то сходится также и $\int_A^{+\infty} f(x)dx$, $A > a$, и наоборот. При этом

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^A f(x)dx + \int_A^{+\infty} f(x)dx.$$

2. В случае сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ имеем

$$\lim_{A \to +\infty} \int_A^{+\infty} f(x)dx = 0.$$

3. В случае сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ имеем сходимость и следующего интеграла

$$\int_a^{+\infty} cf(x)dx = c\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

4. В случае сходимости интегралов $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, сходятся и интегралы

$$\int_a^{+\infty} [f \pm g]dx = \int_a^{+\infty} f\,dx \pm \int_a^{+\infty} g\,dx.$$

Сходимость интеграла в случае положительной функции. Если f положительна (неотрицательна), то интеграл

$$\Phi(A) = \int_a^{A} f(x)dx \tag{29.2}$$

представляет из себя неубывающую функцию от переменной A. Вопрос о существовании для нее конечного предела при $A \to +\infty$ решается очень просто:

Для сходимости несобственного интеграла (29.1) – в случае неотрицательной функции $f(x)$ – необходимо и достаточно, чтобы интеграл (29.1) при возрастании A оставался ограниченным сверху:

$$\int_a^{A} f(x)dx \leq L.$$

Если это условие не выполнено, то интеграл равен $+\infty$.

Теорема сравнения 1. Если при всех $x \geq A$, $A \geq a$, имеет место неравенство $f(x) \leq g(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$; из расходимости $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Теорема сравнения 2. Если существует предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} = K, \quad (0 \leq K \leq +\infty),$$

то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, при $K < +\infty$, следует сходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$; из расходимости $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, при $K > 0$, следует расходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Как и в случае рядов, интегралы сходятся и расходятся одновременно при $0 < K < +\infty$.

Вычислив интеграл ($a > 0$, $\lambda \neq 1$)

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{A\to\infty} \int_a^{A} \frac{dx}{x^\lambda} = -\frac{1}{1-\lambda}a^{1-\lambda} + \lim_{A\to\infty} \frac{1}{1-\lambda}x^{1-\lambda},$$

легко замечаем, что этот интеграл сходится при $\lambda > 1$ и расходится при $\lambda < 1$. В случае $\lambda = 1$ также имеем расходимость в силу того, что

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to\infty} \int_a^{A} \frac{dx}{x} = -\ln a + \lim_{A\to\infty} \ln A = \infty,$$

Из указанных теорем сравнения немедленным следствием сразу получаем следующий практический критерий:

Пусть для достаточно больших x функция f имеет вид

$$f = \frac{\phi(x)}{x^\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

Тогда: 1) если $\lambda > 1$ и $\phi(x) \leq c < +\infty$, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, 2) если же $\lambda \leq 1$ и $\phi(x) \geq c > 0$, то этот интеграл расходится.

§ 30 Лекция 30

Сходимость несобственных интегралов в общем случае. Рассмотрим функцию

$$\Phi(A) = \int_a^A f(x)dx. \tag{30.1}$$

Применяя к этой функции критерий Коши, получаем:
Для сходимости несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы для любого ε существовало $A_0 > a$ такое, что при $A, A' > A_0$ выполнялось неравенство

$$|\Phi(A') - \Phi(A)| = \left| \int_a^{A'} f(x)dx - \int_a^A f(x)dx \right| = \left| \int_A^{A'} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Из этого критерия немедленно следует, что если сходится интеграл от модуля функции, то и подавно сходится интеграл от самой функции. Обратное не верно. Как и в случае рядов, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называют абсолютно сходящимся, а функцию f – абсолютно интегрируемой.
Утверждение. Если функция f абсолютно интегрируема в промежутке $[a, +\infty]$, а g ограничена, то и произведение fg будет функцией абсолютно интегрируемой в том же промежутке.

Для доказательства достаточно заметить, что

$$|F(x)| = |f(x)g(x)| \leq L|f(x)|.$$

Тогда в силу теоремы сравнения 1, получаем абсолютную интегрируемость функции F.

Прежде чем привести два классических признака сходимости несобственных интегралов в случае, когда подынтегральная функция не имеет определенного знака, сформулируем вторую теорему о среднем для собственных интегралов.
Вторая теорема о среднем для собственного интеграла. Если в промежутке $[a, b]$ $(a < b)$ функция $f(x)$ монотонна, а $g(x)$ интегрируема, то

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\eta g(x)dx + f(b) \int_\eta^b g(x)dx,$$

где $\eta \in [a, b]$.
Признак Абеля. Пусть f и g определены в промежутке $[a, +\infty)$, причем
1) f интегрируема в этом промежутке, так что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится (хотя бы и не абсолютно),
2) g монотонна и ограничена:

$$|g(x)| \leq L, \quad L = const, \quad a \leq x < \infty.$$

Тогда интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \tag{30.2}$$

сходится.
Доказательство. По второй теореме о среднем, при любых значениях $A' > A > a$, будем иметь

$$\int_A^{A'} f(x)g(x)dx = g(A) \int_A^\eta f(x)dx + g(A') \int_\eta^{A'} f(x)dx,$$

где $A \le \eta \le A'$. В виду 1), для произвольного ε найдется такое $A_0 > a$, что при $A > A_0$ будет

$$\left|\int_A^{\eta} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L}, \quad \left|\int_{\eta}^{A'} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L}.$$

Учитывая 2), получим

$$\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)dx\right| = |g(A)|\left|\int^{\eta} f(x)dx\right| + |g(A')|\left|\int_{\eta}^{A'} f(x)dx\right| < L\frac{\varepsilon}{2L} + L\frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon,$$

что, согласно критерию Коши, означает сходимость исходного интеграла.

Признак Дирихле. Пусть f и g определены в промежутке $[a, +\infty)$, причем

1) f интегрируема в любом конечном промежутке $[a, A]$, так что интеграл

$$\left|\int_a^A f(x)dx\right| \le K, \quad K = const,$$

оказывается ограниченным для любого $a \le A < \infty$,

2) g монотонно стремится к нулю при $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$

Тогда интеграл (30.2) сходится.

Доказательство. По второй теореме о среднем, при любых значениях $A' > A > a$, будем иметь

$$\int_A^{A'} f(x)g(x)dx = g(A)\int_A^{\eta} f(x)dx + g(A')\int_{\eta}^{A'} f(x)dx,$$

где $A \le \eta \le A'$. В виду 2), для произвольного ε найдется такое $A_0 > a$, что при $A, A' > A_0$ будет

$$|g(A)| < \frac{\varepsilon}{2K}, \quad |g(A')| < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

Учитывая 1), получим

$$\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)dx\right| = |g(A)|\left|\int_A^{\eta} f(x)dx\right| + |g(A')|\left|\int_{\eta}^{A'} f(x)dx\right| < K\frac{\varepsilon}{2K} + K\frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon,$$

что означает сходимость исходного интеграла.

Пример. Покажем сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\lambda}}dx, \quad a > 0,\ \lambda > 0.$$

Применим признак Дирихле к заданному интегралу. Заметим, что для любого $A \ge a$ имеем

$$\left|\int_a^A \sin x\, dx\right| = |\cos a - \cos A| \le 2.$$

Более того, $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{\lambda}} = 0$ при указанных значениях λ. Откуда из признака Дирихле мы сразу получаем сходимость исходного интеграла.

Пример. Покажем расходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}dx.$$

Для этого применим оценку на функцию $\sin x$, следующую из того факта, что эта функция по модулю не превосходит единицу

$$|\sin x| \geq \sin^2 x,$$

из которой сразу следует, что

$$\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx.$$

Покажем, что последний интеграл расходится. Действительно, используя известные тригонометрические тождества, получаем

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$$

Второй интеграл, в силу признака Дирихле, сходится; а первый, как известно, расходится. Значит и сумма интегралов тоже расходится. Тогда уже из теоремы сравнения будет вытекать расходимость исходного интеграла.

Несобственные интегралы от неограниченных функций. Рассмотрим теперь функцию на заданную на конечном промежутке, но неограниченную в этом промежутке. Считаем, что на любом интервале $[a, b-\eta]$ функция ограничена и интегрируема, но оказывается неограниченной в промежутке $[b-\eta, b]$.

Предел интеграла $\int_a^{b-\eta} f(x)dx$ при $\eta \to 0$ называется несобственным интегралом от функции f от a до b и обозначается как обычно

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \to 0} \int_a^{b-\eta} f(x)dx.$$

В случае, если этот предел конечен, говорят, что интеграл сходится, а функцию интегрируемой в промежутке $[a, b]$. Если же предел бесконечен или вовсе не существует, то говорят, что он расходится.

Аналогично вводится понятие и в случае, когда функция неограничена в каждом промежутке вида $[a, a+\eta]$.

Пример. Исследуем при каких значениях показателя λ сходится несобственный интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda}, \quad b > a.$$

Легко вычислив первообразную от подынтегральной функции при $\lambda \neq 1$, получим

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} = \lim_{x \to a} \left(\frac{1}{1-\lambda}(b-a)^{1-\lambda} - \frac{1}{1-\lambda}(x-a)^{1-\lambda} \right).$$

Откуда видно, что при $\lambda < 1$ интеграл сходится, а при $\lambda > 1$ интеграл расходится. Аналогично можно показать, что расходимость сохраняется при $\lambda = 1$.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Так как

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}},$$

то особенность подынтегральная функция имеет только лишь в точке $x = 1$ и определяется эта особенность функцией $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Из примера, который был рассмотрим выше, непосредственно следует сходимость этого интеграла, в этом случае имеем $\lambda = \frac{1}{2}$.

В общем случае мы предполагаем, что промежуток $[a, b]$ может содержать конечное число особых точек $c_0, c_1, \ldots, c_n$, вблизи которых функция неограничена, между как в каждой части этого промежутка, не содержащей особых точек функция интегрируема. В этом случае мы разбиваем сначала $[a, b]$ на промежутки $[c_k, c_{k+1}]$. А затем берем в каждом из получившихся промежутков по произвольной точке α_k, разбивая каждый из этих промежутков на $[c_k, \alpha_k]$, $[\alpha_k, c_{k+1}]$. Тогда в каждом из получившихся промежутков будет по одной особой точке и можно применить вышеизложенные определения. Весь интеграл будет сходящимся, если сходится по отдельности каждый из интегралов на частичных промежутках.

Заметим, что все, что было сказано относительно несобственных интегралов на бесконечных промежутках имеет место и в раасматриваемом случае. Мы имеем в виду всевозможные свойства несобственных интегралов, теоремы сравнения, признаки Абеля и Дирихле.

Интересно отметить следующий момент, связанный с применением формулы Ньютона-Лейбница к несобственным интегралам

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \to 0} F(b - \eta) - F(a).$$

Если предел существует, то его логично взять за значение первообразной в точке $x = b$. Таким образом, мы получим

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Если предположить, что f имеет особые точки внутри промежутка, то эта формула продолжает иметь место, при непременном условии!, чтобы первообразная F, имеющая f своей производной всюду, исключая особые точки, была непрерывна и в этих особых точках.

На примере интеграла

$$\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}},$$

читателю предлагается вычислить этот интеграл сначала по стандартному подходу к несобственным интегралам, а затем, используя последнее замечание.

§ 31 Лекция 31

Функциональные последовательности и ряды. Предположим, что дана последовательность функций

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots, \qquad (31.1)$$

определенных на одном и том же промежутке X. Пусть для каждого $x \in X$ эта, уже числовая последовательность, имеет предел; получив такие пределы для всех $x \in X$, мы определим функцию от x

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

которую мы будем называть предельной функцией для последовательности (31.1).

Определение сходимости функционального ряда не отличается от определения сходимости числового, поскольку мы все равно исследуем сходимость (31.1) при каждом фиксированном $x \in X$. Главный вопрос, который нас будет здесь интересовать, заключается в свойствах предельной функции $f(x)$. Из следующих примеров видно, что пределом последовательности непрерывных функций может быть как непрерывная функция, так и разрывная.

Пример. Рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x) = x^n, \quad X = [0, 1].$$

Если $x = 0$, то $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. Также при $0 < x < 1$ имеем из теории числовых пределов $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. А при $x = 1$, очевидно, $f(1) = 1$. Таким образом, мы получили, что пределом последовательности непрерывных функций является разрывная функция.

Пример. Рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}, \quad X = [0, 1].$$

При $x = 0$ имеем $f(0) = 0$. При каждом фиксированном x имеем $\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0 = f(x)$, так как имеем предел рациональной функции, где в знаменателе стоит полином более высокого порядка, чем в числителе.

Мы найдем условия, гарантирующие непрерывность предельной функции, при условии непрерывности функций, составляющих последовательность.

Аналогичные вопросы, возникают при исследовании функциональных рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \qquad (31.2)$$

Будет ли сумма бесконечного ряда, состоящего из непрерывных функций, непрерывна?

Равномерная и неравномерная сходимости. Согласно определению предела функциональной последовательности, имеем:
последовательность (31.1) сходится в точке $x \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon, x)$, что при всех $n > N$ следует $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Вообще говоря, если взять другое x, получим другое N. Тем не менее бывают случаи, когда такое N можно найти сразу для всех $x \in X$.

Рассмотрим два примера:
1)
$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}, \quad f = 0, \quad X = [0, 1],$$
для которого такой N можно найти, и
2)
$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}, \quad f = 0, \quad X = [0, 1],$$
для которого такое N найти не удается. Действительно, в случае 1) найдем максимум $f_n(x)$ при фиксированном n. Из теории дифференциального исчисления вытекает, что этот максимум достигается в точке $x_n = \frac{1}{n}$, в которой $f_n(x_n) = \frac{1}{2n}$. Таким образом,
$$|f(x) - f_n(x)| \le \frac{1}{2n} < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > \frac{1}{2\varepsilon},$$
что означает равномерную сходимость последовательности. В случае 2) максимум $f_n(x)$ будет достигаться также в точках $x_n = \frac{1}{n}$, в которых $f_n(x_n) = \frac{1}{2}$. Таким образом, разность $|f(x) - f_n(x)|$ не может быть сделана меньше, чем $\frac{1}{2}$ сразу для всех x, в силу существования точек вида $x_n = \frac{1}{n}$, в которых функции $f_n(x)$ все принимают значение $\frac{1}{2}$. Для этого достаточно взять $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

Определение. 1) Если последовательность (31.1) имеет в X предельную функцию $f(x)$ и 2) для любого ε существует $N = N(\varepsilon)$, что при $n > N$ неравенство $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ выполняется сразу для всех $x \in X$, то говорят, что (31.1) сходится к предельной функции равномерно относительно x на промежутке X.

Таким образом, последовательность 1) сходится равномерно, а последовательность 2) – неравномерно.

Предполагая теперь ряд (31.2) сходящимся, введем в рассмотрение его сумму f, частичную сумму f_n и остаток после n-го члена
$$\phi_n(x) = f(x) - f_n(x).$$

При любом фиксированном x имеем
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = 0.$$

Если частичная сумма f_n стремится к сумме f равномерно согласно определению, данному выше, или, что то же, остаток ϕ_n равномерно стремится к 0, то говорят, что ряд (31.2) равномерно сходится.

Рассмотрим пример геометрической прогрессии

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}, \quad X = (-1, 1),$$

которая, как известно сходится на указанном промежутке. Замечаем, что

$$\lim_{x \to -1^+} \phi_n(x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \to 1^-} \phi_n(x) = +\infty.$$

И то и другое равенство доказывает невозможность равномерной сходимости. Надо отметить, что при исследовании сходимости в точке, у нас один свободный параметр – n, а при исследовании равномерной сходимости их два – n и x.

Рассмотрим пример ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + n}, \quad X = (-\infty, +\infty),$$

который сходится для всех x, так как удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. Как известно знакочередующиеся ряды известны тем, что они по модулю оцениваются своим первым членом, т.е.

$$|\phi_n(x)| < \frac{1}{x^2 + n} \leq \frac{1}{n}.$$

Откуда вытекает, что ряд сходится равномерно.

Рассмотрим снова пример

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}, \quad f = 0, \quad X = [0, 1],$$

и сделаем следующее замечание: если вместо $[0, 1]$ рассмотреть $[a, 1]$, $a > 0$, таким образом отделившись от проблемной точки, то сходимость к 0 будет уже равномерной. Действительно, для всех $x \geq a$ имеем

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2} \leq \frac{n}{1 + n^2a^2} < \frac{1}{na^2}.$$

Теорема Больцано-Коши. Для того, чтобы (31.1) 1) имела предельную функцию и 2) сходилась к этой функции равномерно относительно x в X, необходимо и достаточно, чтобы для любого ε существовал $N = N(\varepsilon)$ такой, что при $n > N$ и любом $m \in \mathbb{N}$ неравенство

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

имело место для всех $x \in X$ одновременно.

Для рядов это выглядит следующим образом:
Для того, чтобы (31.2) сходился равномерно на промежутке X, необходимо и достаточно, чтобы для любого ε существовал $N = N(\varepsilon)$ такой, что при $n > N$ и любом $m \in \mathbb{N}$ неравенство

$$|\sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x)| < \varepsilon$$

имело место для всех $x \in X$ одновременно.

Отсюда вытекает очень полезное следствие:
Если все члены ряда (31.2), равномерно сходящегося на X, умножить на одну и ту же функцию $v(x)$, $|v(x)| \leq M$, то равномерная сходимость сохранится.

Признаки равномерной сходимости рядов.

Признак Вейерштрасса. Если все члены функционального ряда (31.2) удовлетворяют на X неравенствам

$$|u_n(x)| \leq c_n, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{31.3}$$

где c_n суть члены некоторого сходящегося числового ряда, то ряд (31.2) сходится на X равномерно. Говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ мажорирует ряд (31.2).

Действительно, из условия (31.3) вытекает неравенство

$$|\sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x)| \leq |\sum_{k=n+1}^{n+m} c_k|,$$

справедливое одновременно для всех $x \in X$. Из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ вытекает справедливость критерия Коши для (31.2).

Таким образом, при условии, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ абсолютно сходится и из оценки

$$|a_n \sin nx| \leq |a_n|, \quad |a_n \cos nx| \leq |a_n|,$$

вытекает равномерная сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Заметим, что если к данному ряду применим признак Вейерштрасса, то он необходимо будет абсолютно сходящимся, что вытекает из теоремы сравнения для знакопостоянных числовых рядов. Легко видеть, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|$ будет также равномерно сходящимся.

Между тем возможны случаи, когда ряд сходится равномерно, не будучи абсолютно сходящимся. Более того, возможны случаи, когда сам ряд сходится абсолютно и равномерно, а ряд из абсолютных величин все же сходится неравномерно.

Рассмотрим ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x). \tag{31.4}$$

Признак Абеля. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$$

сходится равномерно на X, а функции $a(x)$ (при каждом x) образуют монотонную последовательность и в совокупности – при любых n и x – ограничены $|a_n(x)| \leq M$, тогда ряд (31.4) сходится.

Признак Дирихле. Пусть частичные суммы B_n ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$$

в совокупности – при любых n и x – ограничены $|B_n(x)| \leq M$, а функции $a(x)$ (при каждом x) образуют монотонную последовательность, которая сходится к нулю равномерно на X, тогда ряд (31.4) сходится.

§ 32 Лекция 32

Функциональные свойства суммы ряда.

Теорема о непрерывности суммы ряда. Пусть функции $u_n(x)$, $n = 1, 2 \ldots$, определены в промежутке $[a, b]$ и все непрерывны в точке x_0 этого промежутка. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{32.1}$$

в промежутке $[a, b]$ сходится равномерно, то сумма ряда $f(x)$ будет также непрерывна в этой точке.

Доказательство. Имеем, что при любом $x \in [a, b]$ и n

$$f(x) = f_n(x) + \phi_n(x), \quad f(x_0) = f_n(x_0) + \phi_n(x_0),$$

откуда

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f_n(x) - f_n(x_0)| + |\phi_n(x)| + |\phi_n(x_0)|.$$

Для любого $\varepsilon > 0$, ввиду равномерной сходимости ряда, можно указать такой фиксированный номер n, что неравенство

$$|\phi_n(x)| < \varepsilon$$

для всех значений $x \in [a, b]$ (включая x_0). Отметим, что при каждом фиксированном n функция $f_n(x)$ есть сумма конечного числа непрерывных функций, а значит она тоже непрерывна в точке x_0 и по заданному ε найдется такое $\delta > 0$, что при $|x - x_0| < \delta$ будет иметь место

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon.$$

Из перечисленных соображений немедленно следует, что

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 3\varepsilon,$$

что и доказывает теорему.

Если $u_n(x)$ непрерывны во всем промежутке $[a, b]$, то и сумма также будет непрерывна во всем промежутке.

Требование равномерной сходимости является достаточным требованием, т.е. оно гарантирует непрерывность суммы. Сумма ряда может оказаться непрерывной функцией даже без равномерной к ней сходимости ряда непрерывных функций. В то же время есть случаи, когда равномерная сходимость является необходимой.

Теорема Дини. Пусть функции $u_n(x)$, $n = 1, 2 \ldots$, непрерывны и положительны в промежутке $[a, b]$. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{32.2}$$

имеет сумму $f(x)$, также непрерывную во всем промежутке, то он сходится равномерно.

Вопрос о возможности переносить какие-то свойства членов ряда на сумму ряда можно поставить шире. Сформулируем в связи с этим несколько фундаментальных теорем о почленном переходе к пределу, почленном интегрировании и почленном дифференцировании.

Теорема о почленном переходе к пределу. Пусть каждая из функций $u_n(x)$, $n = 1, 2 \ldots$, определена в промежутке $[a, b]$ и

$$\lim_{x \to x_0} u_n(x) = c_n. \tag{32.3}$$

Если ряд (32.2) в промежутке $[a, b]$ сходится равномерно, то 1) сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = C,$$

и 2) сумма ряда (32.2), также имеет предел

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = C.$$

Теорема о почленном интегрировании. Если функции $u_n(x)$, $n = 1, 2 \ldots$, интегрируемы в промежутке $[a, b]$ и ряд (32.2) в промежутке $[a, b]$ сходится равномерно, то сумма $f(x)$ ряда (32.2), также будет интегрируема и

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \cdots + \int_a^b u_n(x) + \cdots$$

Теорема о почленном дифференцировании. Если функции $u_n(x)$, $n = 1, 2 \ldots$, имеют в промежутке $[a, b]$ конечные производные $u_n'(x)$, ряд (32.2) сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a, b]$, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

сходится равномерно, то тогда 1) ряд (32.2) сходится равномерно во всем промежутке и 2) $f(x)$ иммет производную, причем

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

Смысл понятия почленного перехода к пределу, почленного интегрирования и дифференцирования особо хорошо заметен в случае последовательностей. Я не буду формулировать теорем для последовательностей, скажу только, что при тех же самых условиях на члены последовательности, которые мы накладывали на члены ряда можно доказать следующие соотношения: пусть задана последовательность

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots .$$

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x),$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x)dx = [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]'.$$

Степенной ряд и его область сходимости. Рассмотрим специальный вид функциональных рядов, который называется степенным

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \cdots . \tag{32.4}$$

Как и любой другой ряд он может сходиться или расходиться в зависимости от точки x. Выясним что представляет из себя множество точек сходимости любого степенного ряда.

Лемма о сходимости. Если ряд (32.4) сходится в точке $x = x_0$, отличной от нуля, то он абсолютно сходится для любого значения x, удовлетворяющего неравенству: $|x| < |x_0|$.

Доказательство. Из сходимости ряда (32.4) в точке x_0 вытекает, что его общий член стремится в этой точке к нулю, а следовательно ограничен

$$|a_n x_0^n| \le M. \tag{32.5}$$

Возьмем теперь любое x удовлетворяющее неравенству $|x| < |x_0|$. Составим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \dots + |a_n x^n| + \cdots . \tag{32.6}$$

Так как имеет место

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n, \tag{32.7}$$

и члены ряда (32.6) оказываются меньшими соответствующих членов геометрической прогрессии

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \cdots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \cdots, \tag{32.8}$$

со знаменателем прогрессии < 1, то из теоремы сравнения для положительных рядов, немедленно следует сходимость ряда (32.6) и, как следствие, абсолютная сходимость ряда (32.4). Что и требовалось доказать.

Любой ряд (32.4) сходится при $x = 0$. Но есть ряды, которые сходятся только в нуле, например, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! x^n$, что легко следует из признака Даламбера.

Если теперь рассмотреть множество точек, в которых ряд (32.4) сходится, то оно, как и любое множество на вещественной оси имеет точную верхнюю грань, которая либо равна бесконечности, и тогда ряд сходится везде, либо это конечное число, например R, и тогда по лемме о сходимости, он будет сходиться абсолютно при $-R < x < R$ и расходиться вне этого интервала.

Число R называют радиусом сходимости ряда, промежутком абсолютной сходимости всегда является отрезок $-R < x < R$.

В случае, если мы рассматриваем ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

то промежуток сходимости определяется из неравенства $x_0 - R < x < x_0 + R$.

Для нахождения радиуса сходимости используется формула Коши-Адамара, а также формула Даламбера, если ее можно применить, т.е. если с ее помощью возможно этот радиус посчитать.

Формула Коши-Адамара.

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Формула Даламбера.

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Непрерывность суммы степенного ряда. Пусть ряд (32.4) имеет радиус сходимости $R > 0$, тогда:

1. Для любого $r < R$ ряд (32.4) сходится равномерно относительно x в промежутке $[-r, r]$.
2. Сумма $f(x)$ ряда (32.4) является непрерывной функцией (следствие теоремы о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда).
3. Если два степенных ряда вида (32.4) имеют одну и ту же сумму, то эти ряды тождественны.
4. Если степенной ряд (32.4) на конце $x = R$ его промежутка сходимости расходится, то сходимость ряда в промежутке $[0, R)$ не может быть равномерной.
5. Если степенной ряд (32.4) сходится на конце $x = R$ его промежутка сходимости (хотя бы и не абсолютно), то сходимость ряда в промежутке $[0, R)$ необходимо будет равномерной.
6. **Теорема Абеля.** Если степенной ряд (32.4) сходится при $x = R$, то его сумма $f(x)$ сохраняет непрерывность слева и при этом значении аргумента, т.е.

$$\lim_{x \to R^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n.$$

§ 33 Лекция 33

Интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots . \tag{33.1}$$

Теорема о почленном интегрировании. Степенной ряд в промежутке $[0, x]$, где $|x| < R$, всегда можно интегрировать почленно, так что

$$\int\limits_0^x f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots + a_n x^{n+1} + \cdots . \tag{33.2}$$

Здесь x может совпадать с одним из концов промежутка сходимости, если на этом конце ряд (33.1) сходится.

Теорема о почленном дифференцировании. Степенной ряд (33.1) внутри его промежутка сходимости можно дифференцировать почленно, так что

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1} + \cdots . \tag{33.3}$$

Утверждение сохраняет силу и для конца промежутка сходимости, если только написанный ряд на этом конце сходится.

Легко проверить с помощью формулы Коши-Адамара, что радиусы сходимости вновь полученных рядов совпадают с радиусом сходимости исходного ряда.

Таким образом, мы получаем, применяя теорему о почленном дифференцировании, что функция представляемая степенным рядом в его промежутке сходимости, имеет внутри этого промежутка производные всех порядков. Самый ряд, по отношению к этой функции, является ее рядом Тейлора.

Понятие о метрическом пространстве. Рассмотрим для начала неравенство Коши-Буняковского.

Для любых наборов вещественных чисел $a_1, \ldots, a_n$; $b_1, \ldots, b_n$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \tag{33.4}$$

Доказательство. Рассмотрим выражение $\phi(t) = \sum\limits_{i=1}^{n}(a_i t + b_i)^2$. Очевидно, что при любом значении переменной t значение этого выражения будет неотрицательно. С другой стороны это выражение представляет собой квадратный трехчлен относительно переменной t:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) t^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) t + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right), \tag{33.5}$$

с положительным коэффициентом при t^2. Следовательно, дискриминант этого квадратного трехчлена должен быть неположительным, то есть

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0 \tag{33.6}$$

Из (33.6) немедленно следует (33.4).

Замечание. Так как

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|,$$

то будет выполняться и неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

Неравенство Минковского. Для любых наборов вещественных чисел $a_1, \ldots, a_n$; $b_1, \ldots, b_n$ выполняется неравенство

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

Доказательство. Используя замечание к неравенству Коши-Буняковского, получим

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} =$$

$$\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2.$$

Извлекая квадратный корень, получаем желаемый результат.

Определение метрического пространства. Множество X будем называть метрическим пространством, если для любых двух его элементов x и y определено неотрицательное число $\rho(x, y)$, обладающее свойствами:

1. $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$; (аксиома тождества)

2. для любых элементов $x, y \in X$ выполнено равенство $\rho(x,y) = \rho(y,x)$; (аксиома симметрии)
3. для любых элементов $x, y, z \in X$ выполнено неравенство $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$ (аксиома треугольника).

Если на некотором множестве X задано отображение $\rho : (x,y) \longrightarrow \rho(x,y) \in R$, удовлетворяющее аксиомам 1 – 3, то говорят, что на множестве X введена метрика и число $\rho(x,y)$ называют расстоянием между элементами x и y.

Пример 1. $X = (-\infty, +\infty)$. Введем расстояние по формуле $\rho(x,y) = |x-y|$.

Пример 2. $X = \{a = (a_1, a_2, \dots, a_m); a_i \in R,\ i = 1, 2, ..., m\}$, т.е. элементом a множества X является упорядоченный набор вещественных чисел. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ – элементы множества X. Определим $\rho(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$. Чтобы доказать неравенство треугольника, нужно в неравенстве Минковского положить $a_i = x_i - z_i$, $b_i = z_i - y_i$, где $z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$. Метрика, введенная таким образом, называется евклидовой метрикой, пространство с такой метрикой называется m-мерным евклидовым пространством и является обобщением хорошо известных из геометрии 2-х или 3-х мерного пространств. Такое пространство будем обозначать R^m. Очевидно, что пространство $R^1 = R$ является частным случаем пространства R^m.

Точки и множества в метрическом пространстве. Пусть X – метрическое пространство. Введем ряд определений, часто используемых в математическом анализе.

Определение. Открытым шаром в метрическом пространстве X будем называть множество точек $x \in X$, удовлетворяющих условию $\rho(x,a) < r$, где a – фиксированная точка данного пространства, называемая центром шара, и r – положительное число, называемое радиусом шара. Шар радиуса r с центром в точке a будем обозначать $B_r(a)$ или, если радиус не важен, $B(a)$, или B.

Определение. Замкнутым шаром будем называть множество точек x метрического пространства X, удовлетворяющих неравенству $\rho(x,a) \le r$, где a и r имеют тот же смысл, что и в предыдущем определении. Обозначать замкнутый шар будем $\overline{B}_r(a)$.

Определение. Окрестностью точки a в метрическом пространстве будем называть любой открытый шар с центром в точке a. Радиус этого шара будем называть радиусом окрестности. Окрестность будем обозначать $U_r(a)$, или $U(a)$, или U.

Определение. Множество $U_r(a) \setminus \{a\}$ будем называть проколотой окрестностью точки a.

Определение. Пусть a – точка метрического пространства X и E – некоторое множество точек пространства X. Точку a будем называть предельной точкой множества E, если для любой проколотой окрестности точки a можно найти элемент $x \in E$ такой, что он принадлежит этой проколотой окрестности.

Определение. Точка $a \in E$ называется изолированной точкой множества E, если существует проколотая окрестность этой точки, не содержащая ни одной точки из E.

Определение. Точка $a \in E$ называется внутренней точкой множества E, если существует окрестность этой точки, целиком входящая в множество E.

Определение. Множество E называется открытым, если все его точки внутренние.

Определение. Множество E называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

Определение. Множество всех внутренних точек множества E называется внутренностью множества E и обозначается E_0.

Определение. Объединение множества E и множества всех его предельных точек называется замыканием множества E. Замыкание множества E будем обозначать $\overline{E}$. Очевидно, что замыкание каждого множества является замкнутым множеством.

Определение. Точка a, в каждой окрестности которой имеются точки, принадлежащие E, и точки, не принадлежащие E, называется граничной точкой множества E. Множество граничных точек будем называть границей множества E и обозначать ∂E. Граничная точка может принадлежать множеству и может ему не принадлежать.

Определение. Множество E называется ограниченным, если существует шар $B_r(a)$, который содержит множество E.

Замечание. Пустое множество и множество X всех элементов пространства являются одновременно и открытыми и замкнутыми.

Теорема. Объединение произвольного числа открытых множеств открыто. Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.

Следствие. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто. Пересечение произвольного числа замкнутых множеств замкнуто.

Замечание. Нетрудно показать, что пересечение бесконечного числа открытых множеств может быть замкнутым, а объединение бесконечного числа замкнутых множеств -– открытым. Например,

$$\bigcap \left(1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right) = [1, 2], \quad \bigcup \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] = (0, 1).$$

Теорема. Точка a является предельной точкой множества E тогда и только тогда, когда в любой ее окрестности, содержится бесконечное множество точек множества E.

Следствие. Конечное множество точек не содержит ни одной предельной точки.

Рассмотрим теперь пространство R^m. Пусть в нем задана некоторая последовательность точек $\{x_n\}$. Заметим, что в этом случае последовательность точек – это фактически последовательность векторов, или по сути m различных последовательностей, ведь для каждого x_n мы имеем $x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^m)$. Как мы будем понимать в этом случае понятие сходящейся последовательности?

Определение. Пусть дана последовательность точек $\{x_n\}$ в метрическом пространстве R^m. Точку $A \in R^m$ будем называть пределом данной последовательности, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое натуральное число N, что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ будет выполняться неравенство $\rho(x_n, A) < \varepsilon$. Так как неравенство $\rho(x_n, A) < \varepsilon$ определяет окрестность точки A радиуса ε, то данное определение можно переложить на геометрический язык:

Определение. Точку A метрического пространства будем называть пределом последовательности точек $\{x_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое натуральное число N, что все члены последовательности с номерами $n > N$ будут лежать в $U_\varepsilon(A)$ – ε-окрестности точки A.

§ 34 Лекция 34

В m-мерном пространстве можно рассматривать непрерывные кривые. Известно, что на плоскости можно с помощью параметрической записи представить график непрерывной кривой в виде

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t),$$

где $t \in [t_0, t_1]$, а функции ϕ и ψ являются непрерывными функциями аргумента t. Так, например, уравнение единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$ может быть записано в виде

$$x = \cos t, \quad y = \sin t.$$

Точно также в простанстве R^3 мы можем представить пространственную кривую с помощью 3 непрерывных функций

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

где $t \in [t_0, t_1]$. Например, уравнение винтовой линии в трехмерном пространстве имеет вид

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t.$$

Подражая этому способу, мы можем в m-мерном пространстве определить непрерывную кривую (т.е. одномерный геометрический объект) с помощью m непрерывных функций

$$x_1 = \phi_1(t), \quad x_2 = \phi_2(t), \quad \ldots \quad x_n = \phi_m(t).$$

Например, пусть заданы 2 точки m-мерного пространства

$$M_1 = (x_1^1, \ldots, x_m^1), \quad M_2 = (x_1^2, \ldots, x_m^2).$$

Тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки имеет вид

$$y_1 = x_1^1 + t(x_1^2 - x_1^1), \quad y_m = x_m^1 + t(x_m^2 - x_m^1), \quad t \in R. \qquad (34.1)$$

Примеры областей в m-мерном пространстве.
Параллелепипед: $a_i \le x_i \le b_i$, $i = 1, \ldots, n$.
Эллиптический параболоид: $ax^2 + by^2 \le z \le 1$, $a, b > 0$.
Симплекс $x_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, n$, $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i \le 1$ (частный его случай треугольник и тетраэдр).
Шар: $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 \le 1$.

Непрерывные отображения метрических пространств. Пусть X и Y два метрических пространства и f отображение пространства X в Y. Таким образом, каждому элементу из X ставится в соответствие некоторый элемент $y = f(x) \in Y$. Это отображение называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in X$ удовлетворяющих

$$\rho(x, x_0) < \delta,$$

вытекает

$$\rho_1(f(x), f(x_0)) < \varepsilon,$$

где ρ и ρ_1 соответственно расстояния в этих пространствах. Если отображение непрерывно во всех точках X, то говорят, что f непрерывна на X.

Если отображение $f : X \longrightarrow Y$ взаимно однозначно, то существует обратное отображение $x = f^{-1}y$ пространства Y на пространство X. Если отображение взаимно однозначно и взаимно непрерывно, то оно называется гомеоморфизмом или гомеоморфным отображением, а пространства называются гомеоморфными.

Функции n переменных. Пусть имеем n переменных x_1, x_2, $\ldots$, x_n, совместные значения которых могут выбираться произвольно из некоторого множества E точек n-мерного пространства. Если точку обозначить через M, то функцию $u = f(M) = f(x_1, \ldots, x_n)$ от этих переменных часто также называют функцией точки M.

Предположим теперь, что в некотором множестве G точек m-мерного пространства заданы n функций от m переменных t_1, t_2, $\ldots$, t_m:

$$x_1 = \phi_1(t_1, \ldots, t_m), \quad x_2 = \phi_2(t_1, \ldots, t_m), \quad \ldots \quad x_n = \phi_n(t_1, \ldots, t_m).$$

Пусть $P = (t_1, \ldots, t_m)$ обозначает точку m-мерного пространства. Допустим сверх того, что когда точка P изменяется в пределах множества G, соответствующая ей n-мерная точка $M(x_1, \ldots, x_n)$, не выходит за пределы множества E, где определена функция f. Тогда переменную u можно рассматривать как сложную функцию от независимых переменных t_1, t_2, $\ldots$, t_m:

$$u = f(\phi_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, \phi_n(t_1, \ldots, t_m)),$$

где u также является функцией переменных ϕ_1, ϕ_2, $\ldots$, ϕ_n.

Рассмотрим как будут выглядеть некоторые классы функций, введенные нами для функций одной переменной. Полином примет вид

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n} C_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_n^{\nu_n}.$$

Рациональная функция примет вид

$$R(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\sum_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_n} C_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_n} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_n^{\nu_n}}{\sum_{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n} \tilde{C}_{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \cdots x_n^{\mu_n}}.$$

Предел функций многих переменных. Предположим, что f определена на некотором множестве E, имеющем предельную точку $M_0(a_1, \dots, a_n)$.

Определение предела. Говорят, что f имеет пределом число A при стремлении переменных x_1, x_2, ..., x_n, соответственно, к a_1, a_2, ..., a_n, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\rho(f(x), A) = |f(x_1, \dots, x_n) - A| < \varepsilon$$

как только

$$0 < \rho(x, a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} < \delta.$$

Иногда последнее неравенство заменяют на принадлежность точки x n-мерному кубу (параллелепипеду)

$$a_1 - \delta < x_1 < a_1 + \delta, \dots, a_n - \delta < x_n < a_n + \delta.$$

Аналогично случаю одной переменной из определения, приведенного выше, можно легко вывести понятие бесконечного предела и предела при x стремящемся к бесконечности, записав все эти понятия в n-мерном случае с использованием как шара так и параллелепипедов.

Сведение к случаю последовательности. Рассмотрим в n-мерном пространстве последовательность $\{M_k(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)\}$, $k = 1, 2, \dots$. Как известно сходимость этой последовательности к некоторой точке $M_0(a_1, \dots, a_n)$ означает, что $\rho(M_k, M_0) \to 0$ при $k \to \infty$. Заметим также, что из условия стремления к нулю расстояния между двумя точками сразу вытекает, что имеет место покоординатная сходимость: таким образом, мы в действительности имеем равносильность сходимости в n-мерном пространстве сходимости n числовых последовательностей, образуемых координатами стремящейся точки.

Пусть теперь $M_0(a_1, \dots, a_n)$ предельная точка некоторого множества E в n-мерном пространстве. Тогда из множества E можно всегда извлечь бесчисленным числом способов такую последовательность $\{M_k(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)\}$ отличных от M_0 точек, которая бы сходилась к M_0.

Определение предела по Гейне. Говорят, что f имеет пределом число A при стремлении переменных x_1, x_2, ..., x_n, соответственно, к a_1, a_2, ..., a_n, если для любой последовательности $\{M_k\}$ точек отличных от M_0, сходящейся к M_0, числовая последовательность $\{f(M_k)\}$ сходится к A.

Примеры. Вычислим следующий предел

$$\lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Обозначим через $z = (x, y)$. Очевидно $\rho(0, z) = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$ при $x \to 0$, $y \to 0$. Из известного неравенства о положительности квадратичного трехчлена получаем

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0, y \to 0, \tag{34.2}$$

откуда сразу следует

$$\lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Вычислим теперь следующий предел

$$\lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Действуя аналогично предыдущему случаю, легко видеть, что правой части (34.2) вместо $\sqrt{x^2+y^2}$ будем получать 1. Заметим, что стремление переменных x и y к нулю происходит независимым образом. Т.е. как бы мы не приближались к предельной точке (к нулю в данном случае) предел (если он существует) должен быть одним и тем же. Выберем движение точки z вдоль оси OX. Тогда $y = 0$ и $x \to 0$. Но очевидно в этом случае функция тождественно равна нулю и предел по этому направлению равен, таким образом, нулю. Пусть теперь движение к предельной точке осуществляется по биссектрисе первого квадранта. Тогда $x = y$ при этом движении и функция

$$\left.\frac{xy}{x^2+y^2}\right|_{x=y} = \frac{1}{2} \ne 0$$

и, как следствие, предел равен $1/2$. Следовательно, предела не существует.

§ 35 Лекция 35

Одним из важнейших вопросов математического анализа является вопрос о перестановке предельных переходов, который нам уже встречался при исследовании функциональных рядов. Рассмотрим следующие повторные пределы. Положим

$$f(x,y) = \frac{x - y + x^2 + y^2}{x+y}$$

и исследуем следующие повторные пределы

$$\phi(y) = \lim_{x\to 0} f(x,y) = y - 1, \quad \lim_{y\to 0} \phi(y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = -1,$$

в то время как

$$\psi(x) = \lim_{y\to 0} f(x,y) = x + 1, \quad \lim_{x\to 0} \psi(x) = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 1.$$

Может случиться также, что один повторный предел существует, другой – нет. Так, например, будет в случае

$$f(x,y) = \frac{x\sin\frac{1}{x} + y}{x+y}, \quad f(x,y) = x\sin\frac{1}{y};$$

В обоих случаях здесь существует повторный предел $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$, но нет повторного предела $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$.

Теорема о перестановке предельных переходов. Если 1) существует (конечный или нет) двойной предел

$$A = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

и 2) при любом $y \in Y$ существует (конечный) простой предел по x

$$\phi(y) = \lim_{x\to a} f(x,y),$$

то существует повторный предел

$$\lim_{y\to b} \phi(y) = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y) = A$$

и равен двойному.

Доказательство. Докажем теорему для конечных A, a, b. Согласно определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon, \tag{35.1}$$

как только $|x-a|<\delta$, $|y-b|<\delta$. Фиксируем теперь y так, чтобы выполнялось неравенство $|y-b|<\delta$, и перейдем в (35.1) к пределу, устремив x к a. Так как ввиду 2), $f(x,y)$ при этом стремится к пределу $\phi(y)$, то получим

$$|\phi(y)-A|<\varepsilon.$$

Вспоминая, что y здесь есть любое число из Y, подчиненное лишь условию $|y-b|<\delta$, приходим к заключению, что

$$A=\lim_{y\to b}\phi(y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x,y),$$

что и требовалось доказать.

Если наряду с 1) и 2), при любом $x\in X$ существует (конечный) простой предел по y

$$\psi(x)=\lim_{y\to b}f(x,y),$$

то, как следует из уже доказанного, если x и y поменять ролями, - существует также и повторный предел

$$\lim_{x\to a}\psi(x)=\lim_{x\to a}\lim_{y\to b}f(x,y)$$

и равен тому же A: в этом случае повторные пределы совпадают.

Заметим, что в случае функции $f(x,y)=x\sin\frac{1}{y}$ двойной предел существует, что легко вытекает из оценки $|x\sin\frac{1}{y}|\le|x|$, а повторного $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x,y)$ тем не менее нет, так как при любом фиксированном x не существует предела $\lim_{y\to 0}x\sin\frac{1}{y}$.

В тоже время не следует думать, что существование двойного предела необходимо для равенства повторных: в случае функции $\frac{xy}{x^2+y^2}$ оба повторных предела при $x,y\to 0$ существуют и равны друг другу (а именно 0), а двойного нет (мы это показали на прошлой лекции).

Непрерывные функции. Пусть функция f определена на некотором множестве E точек n-мерного пространства и a предельная точка этого множества, принадлежащая самому множеству.

Определение. Говорят, что f непрерывна в точке a, если имеет место равенство

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a). \tag{35.2}$$

В противном случае – функция терпит разрыв в точке a. На языке $\varepsilon-\delta$ можно дать определение через принадлежность точки x кубу с δ ребром и центром в точке a, и через расстояние до точки a тоже. Требование не совпадения точки x с точкой a в этом случае можно опустить. Также как и в случае функции одной переменной, можно сказать, что функция непрерывна, если бесконечно малым приращениям независимых переменных отвечает бесконечно малое же приращение функции.

Определенная выше непрерывность f есть, так сказать, непрерывность по совокупности переменных. Из нее, в частности, вытекает, что имеют место пределы вида

$$\lim_{x_1\to a_1} f(x_1,a_2,\ldots,a_n)=f(a),\quad \lim_{x_2\to a_2} f(a_1,x_2,a_3,\ldots,a_n)=f(a),$$

$$\lim_{x_1\to a_1,x_2\to a_2} f(x_1,x_2,a_3,\ldots,a_n)=f(a) \tag{35.3}$$

и т.п. Иными словами, функция f непрерывная по совокупности переменных является непрерывной по каждой переменной в отдельности и по всем возможным комбинациям этих переменных также.

Примеры непрерывных функций мы с вами уже приводили и они легко конструируются из непрерывных функций одной переменной с помощью операций сложения, умножения и т.д. Если рассмотреть функцию

$$f=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

и доопределить ее в нуле, например нулем, то мы получим пример разрывной функции. Отметим здесь один интересный момент: доопределенная таким образом функция будет тем не менее непрерывной по каждой из переменных x и y в отдельности. Т.е. функция непрерывная по каждой из переменных, от которых она зависит, может тем не менее быть разрывной по совокупности переменных. Это становится очевидным, если заметить, что одно и тоже значение мы должны получать при приближении к предельной точке по любому из бесчисленного количества законов приближения, а не только по 2, ситуацию, которую мы имеем при исследовании непрерывности по x и y.

Точки разрыва могут быть и не только изолированными. Так у функций

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2},\quad \frac{1}{x^2+y^2-1}$$

разрывы расположены вдоль прямых $y=\pm x$ и на окружности $x^2+y^2=1$ соответственно. А у функций

$$\frac{x+y+z}{xy-z},\quad \frac{1}{x^2+y^2-z^2}$$

разрывы заполняют гиперболический параболоид и конус соответственно.

Операции над непрерывными функциями. Легко показать, что сумма, разность, произведение и частное, при условии отличия от нуля знаменателя, являются непрерывными функциями. Мы докажем теорему о непрерывности суперпозиции.

Теорема. Если функции $\phi_i(P)$, $i = 1, \dots, n$ непрерывны в точке $P^0(t_1^0, t_2^0, \dots, t_m^0)$ из множества G, а $f(M)$ непрерывна в соответствующей точке $M^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ с координатами

$$x_1^0 = \phi_1(t_1^0, t_2^0, \dots, t_m^0), \quad x_2^0 = \phi_2(t_1^0, t_2^0, \dots, t_m^0), \quad x_n^0 = \phi_n(t_1^0, t_2^0, \dots, t_m^0),$$

то и сложная функция

$$u = f(\phi_1(t_1, t_2, \dots, t_m), \phi_2(t_1, t_2, \dots, t_m), \phi_n(t_1, t_2, \dots, t_m))$$

будет непрерывна в точке P^0.

Доказательство. По заданному ε мы найдем такую окрестность точки M^0, что

$$|f(M) - f(M^0)| < \varepsilon \quad \text{как только} \quad \rho(M, M^0) < \delta.$$

Затем по числу δ в силу непрерывности функций $\phi_i(P)$, $i = 1, \dots, n$, найдется число η такое, что неравенство $\rho(t, t^0) < \eta$ влечет $\rho(x, x^0) = \rho(\phi(t), \phi(t^0)) < \delta$, где $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$. Но тогда из $\rho(t, t^0) < \eta$ будет также следовать

$$|f(M) - f(M^0)| = |f(\phi(t)) - f(\phi(t^0))| < \varepsilon.$$

Функции непрерывные в области. Теоремы Больцано-Коши. Мы будем говорить, что f непрерывна на некотором множестве $E \in R^n$, если она непрерывна в любой точке этого множества, которая является для него точкой сгущения. Мы будем изучать множества, которые являются открытыми или замкнутыми областями.

Определение. Пусть задана область E, т.е. множество, состоящее из внутренних точек. Множество E называется связным, если любые две точки этого множества можно соединить ломаной, целиком лежащей в этой области.

Теоремы Больцано-Коши. Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой связной области D. Если в двух точках $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$ функция принимает значения разных знаков

$$f(M_0) < 0, \quad f(M_1) > 0,$$

то в этой области найдется и точка $M_2(x_2, y_2)$, в которой $f(M_2) = 0$.

Если теперь $f(M_0) = A$, а $f(M_1) = B$, то для любой $A < C < B$ существует M_2 такая, что $f(M_2) = C$.

Теоремы Больцано-Вейерштрасса (двухмерный случай). Из любой ограниченной последовательности точек

$$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n), \ldots$$

всегда можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$M_{n_1}(x_{n_1}, y_{n_1}), M_{n_2}(x_{n_2}, y_{n_2}), \ldots, M_{n_k}(x_{n_k}, y_{n_k}), \ldots.$$

Доказательство. Точки нашей последовательности содержатся в конечном прямоугольнике $[a, b; c, d]$, следовательно,

$$a \leq x_n \leq b, \quad c \leq y_n \leq d.$$

Применим лемму БВ для одномерного случае к последовательности x_n и выделим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходящуюся к некоторому x_0. Таким образом, для подпоследовательности точек $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}$ первые координаты уже имеют предел. Вторично применяем одномерную лемму теперь уже для вторых координат, выделяя подпоследовательность $\{y_{n_{k_m}}\}$ сходящуюся к y_0, и получаем частичную подпоследовательность $\{x_{n_{k_m}}, y_{n_{k_m}}\}$ очевидно сходящуюся к (x_0, y_0).

Эту теорему можно доказать и бех ссылки на одномерную теорему, рассмотрев прямоугольник $[a, b; c, d]$, который последовательно делим на маленькие прямоугольники по методу деления пополам каждой стороны, как это делалось в одномерном случае, а затем пользуемся по отдельности теоремой о вложенных отрезках.

§ 36 Лекция 36

Теорема Вейерштрасса 1. Если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области Ω, то функция ограничена, т.е. имеет место оценка

$$m \leq f(x, y) \leq M.$$

Доказательство. Доказательство проведем от противного, как и в случае функции одной переменной. Пусть $f(x, y)$ при изменении $(x, y) \in \Omega$ оказывается неограниченной. Тогда для любого n найдется точка $M(x_n, y_n) \in \Omega$ такая, что

$$|f(x_n, y_n)| > n. \tag{36.1}$$

По теореме БВ, из ограниченной последовательности $\{M_n\}$ можно выделить, сходящуюся к некоторой предельной точке $M^*(x^*, y^*)$, подпоследовательность $\{M_{n_k}\}$. Точка $M^*(x^*, y^*) \in \Omega$, поскольку Ω – замкнутая область. В силу непрерывности $f(x, y)$ в точке $M^*(x^*, y^*)$, с одной стороны мы имеем

$$\lim_{k \to \infty} f(M_{n_k}) = f(M^*),$$

с другой стороны это противоречит (36.1).

Теорема Вейерштрасса 2. Если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области Ω, то она достигает в Ω своего максимума и минимума, т.е. существуют точки x_{min}, $x_{\max} \in \Omega$ такие, что

$$f(x_{min}) = \min_{(x,y) \in \Omega} f(x, y), \quad f(x_{max}) = \max_{(x,y) \in \Omega} f(x, y).$$

Напомним определение равномерной непрерывности функции. Пусть $f(x, y)$ непрерывна на множестве Ω. Тогда говорим, что $f(x, y)$ равномерно непрерывна на множестве Ω, если по заданному $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что как только $\rho(M', M'') < \delta$ для любых точек $M', M'' \in \Omega$, следует, что

$$|f(M') - f(M'')| < \varepsilon.$$

Теорема Кантора. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области Ω, то она равномерно непрерывна.

Производные и дифференциалы функций многих переменных. Для простоты и некоторой общности мы будем рассматривать функцию 3 переменных $f(x, y, z)$. Пусть в некоторой области Ω задана функция $f(x, y, z)$ и некоторая точка $M(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$. Зафиксируем значения y_0 и z_0 и придадим приращение аргументу f только по одной координате x, т.е. $x_0 + \Delta x$. В этом случае функция f получит приращение

$$\Delta_x f(x_0, y_0, z_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0),$$

которое мы будем называть частным приращением по x, так как оно вызвано приращением лишь по одной переменной.

Определение. Если существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x},$$

тогда будем говорить, что у функции f существует частная производная по x в точке (x_0, y_0, z_0), которую будем обозначать $f_x(x_0, y_0, z_0)$.

Аналогично вычисляются частные производные по y и по z. Так как все переменные, кроме той по которой идет дифференцирование, фиксированы, то фактически речь идет о дифференцировании функции одной переменной, остальные переменные играют роль параметров.

Произведение частной производной f_x на произвольное приращение Δx называтся частным дифференциалом по x функции f; его обозначают символом

$$d_x f = f_x dx.$$

Аналогично оставшиеся частные дифференциалы записываются в виде

$$d_y f = f_y dy, \quad d_z f = f_z dz.$$

Полное приращение функции. Если в точке (x_0, y_0, z_0) придать приращение всем трем координатам, скажем Δx, Δy, Δz, то функция получит приращение

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0),$$

которое называется полным приращением функции. Докажем следующую теорему:

Теорема. Если частные производные f_x, f_y, f_z существуют не только в точке (x_0, y_0, z_0), но и в некоторой ее окрестности, и кроме того непрерывны по совокупности переменных в этой точке, то имеет место формула

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0) =$$

$$f_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y + f_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z + \alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z, \quad (36.2)$$

где α, β, γ зависят от соответствующих приращений и вместе с ними стремятся к нулю.

Доказательство. Представим полное приращение в виде

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0) = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)] +$$

$$[f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z)] + [f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)].$$

Каждая из этих разностей представляет из себя частное приращение функции лишь по одной переменной, но правда в разных точках. Отсюда в формулировке теоремы мы требуем, чтобы производные существовали и в некоторой окрестности заданной точки. Используя этот факт, мы применим, при достаточно малых приращениях, к каждой скобке формулу Лагранжа конечных приращений и, таким образом, получим

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0) =$$

$$f_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)\Delta x + f_y(x_0, y_0 + \theta_1\Delta y, z_0 + \Delta z)\Delta y + f_z(x_0, y_0, z_0 + \theta_2\Delta z)\Delta z.$$

Положив теперь

$$f_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) = f_x(x_0, y_0, z_0) + \alpha,$$

$$f_y(x_0, y_0 + \theta_1\Delta y, z_0 + \Delta z) = f_y(x_0, y_0, z_0) + \beta,$$

$$f_z(x_0, y_0, z_0 + \theta_2\Delta z) = f_z(x_0, y_0, z_0) + \gamma,$$

мы придем к выражению вида (36.2). Осталось показать, что α, β, γ стремятся к нулю вместе с соответствующими приращениями. Но это есть немедленное следствие непрерывности частных производных по совокупности переменных.

Эта формула дает возможность установить, что из существования и непрерывности частных производных в данной точке, вытекает и непрерывность функции в данной точке.

Введя расстояние между точками

$$(x_0, y_0, z_0) \quad \text{и} \quad (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z),$$

которое равно

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2},$$

мы можем записать формулу (36.2) в более компактном виде

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0) =$$

$$f_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y + f_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z + \varepsilon\rho, \qquad (36.3)$$

где $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$.

Заметим, что условия, которые мы наложили для получения формулы для приращения функции нескольких переменных, более сильные, чем в случае одной переменной. Можно показать, что при несоблюдении этих условий формула (36.2) может и не иметь место. В качестве примера возьмем функцию

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}, \quad f(0,0) = 0.$$

Можно показать, что эта функция непрерывна на всей плоскости, используя неравенство $2xy \le x^2+y^2$. Существование производных везде, кроме точки $x=0$, $y=0$, вытекает из формулы, а в нуле из определения частных производных, причем $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. В то же время можно показать, полагая, например, $y = x = \frac{1}{n}$ в формулах для производных, что производные не являются непрерывными функциями. Допустим теперь, что формула (36.3) имеет место, тогда должно быть выполнено

$$\Delta f(0,0) = \frac{\Delta x^2 \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \varepsilon\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \tag{36.4}$$

где $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$. Но если взять $\Delta x = \Delta y > 0$, то будем иметь

$$\frac{1}{2}\Delta x = \varepsilon\sqrt{2}\Delta x, \quad \varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

и стремления к нулю ε нет.

Полный дифференциал. Рассмотрим в некоторой открытой области Ω функцию $f(x,y,z)$. Предположим, что в некоторой точке (x_0, y_0, z_0) полное приращение функции f может быть записано в виде

$$\Delta f(x_0,y_0,z_0) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + \varepsilon\rho, \tag{36.5}$$

где A, B, C – постоянные, а $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$. Легко показать, что в этом случае

$$f_x(x_0,y_0,z_0) = A, \quad f_y(x_0,y_0,z_0) = B, \quad f_z(x_0,y_0,z_0) = C.$$

Действительно, полагая, например, $\Delta y = \Delta z = 0$ и $\Delta x \ne 0$, получим

$$\frac{f(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x} = A + \frac{\varepsilon|\Delta x|}{\Delta x},$$

откуда легко следует

$$f_x(x_0,y_0,z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x} = A.$$

Таким образом, соотношение (36.5) всегда осуществляется только в виде (36.3). Однако в случае одной переменной, такая формула имеет место при условии, что производная просто существует. В случае многих переменных, как мы видели из предыдущего примера, такое не всегда возможно. Теорема, которую мы доказали, дает нам такие условия, но они являются достаточными.

При наличии формулы (36.5) функция f называется дифференцируемой в точке (x_0, y_0, z_0), а выражение

$$df(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)dx + f_y(x_0, y_0, z_0)dy + f_z(x_0, y_0, z_0)dz,$$

т.е. линейная часть приращения функции, называется ее полным дифференциалом.

В случае многих переменных существование частных производных не гарантирует даже непрерывности функции. Например, функция $f = \frac{xy}{x^2+y^2}$, доопределенная в точке $(0,0)$ значением 0, разрывна в этой точке. Тем не менее легко проверить, что $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

Геометрическая интерпретация понятия дифференцируемости аналогична гометрической интерпретации этого понятия в случае одной переменной: функция будет дифференцируемой в точке тогда и только тогда, когда в этой точке существует касательная плоскость.

§ 37 Лекция 37

Производные сложной функции. Пусть задана функция $f(x, y, z)$, определенная в некоторой открытой области Ω, причем каждая из независимых переменных в свою очередь зависит от переменной t в некотором промежутке:

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t).$$

Пусть при изменении t точка (x, y, z) не выходит за пределы Ω. Подставив значения x, y, z в f, мы получим сложную функцию

$$u = f(\phi(t), \psi(t), \chi(t)).$$

Предположим, что функция $u = f(x, y, z)$ является дифференцируемой как функция переменных x, y, z, а у переменных x, y, z существуют производные по t. Докажем при этих условиях существование производной сложной функции по t.

Поскольку функция u является дифференцируемой, то ее приращение может быть представлено в виде

$$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + u_z \Delta z + \alpha \Delta x + \beta \Delta y + \gamma \Delta z.$$

где α, β, γ стремятся к нулю при стремлении к нулю соответствующих приращений. Разделив обе части этого неравенства на Δt, будем иметь

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = u_x \frac{\Delta x}{\Delta t} + u_y \frac{\Delta y}{\Delta t} + u_z \frac{\Delta z}{\Delta t} + \alpha \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \frac{\Delta y}{\Delta t} + \gamma \frac{\Delta z}{\Delta t}. \tag{37.1}$$

Устремив теперь приращение Δt к нулю, мы также получим стремление к нулю приращений по премеменным x, y, z, так как функции x, y, z от t непрерывны, а поэтому и α, β, γ стремятся к нулю. В итоге в пределе мы получаем из (37.1)

$$u_t = u_x x_t + u_y y_t + u_z z_t. \tag{37.2}$$

Аналогично можно показать, что при условии, что переменные x, y, z зависят от переменных t и v и имеют частные производные по ним, верна следующая формула

$$u_t = u_x x_t + u_y y_t + u_z z_t, \quad u_v = u_x x_v + u_y y_v + u_z z_v. \tag{37.3}$$

Эти формулы доказываются абсолютно аналогично, замечая, что по сути в предыдущем доказательстве ничего не будет меняться, так как частное дифференцирование по одной из переменных t или v происходит при фиксации другой. Интересно отметить, что в случае $x(t, v)$, $y(t, v)$, $z(t, v)$ мы продолжаем требовать только лишь существование частных производных по t и v, а не дифференцируемость переменных x, y, z как функций от t и v. Это связано с тем, что при фиксации, например, v, чтобы из (37.1) получить (37.2) нам нужна непрерывность только лишь по t, что есть следствие просто существования частных производных от x, y, z по t.

Пример. Рассмотрим случай, когда у функции $f(x, y, z)$ переменная x продолжает оставаться независимой, а $y = y(x)$, $z = z(x)$. В этом случае часто говорят о так называемой полной производной, поскольку по сути $u = f(x, y(x), z(x))$ будет функцией всего лишь одной переменной x, и пишут

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Пример. Рассмотрим случай, когда x и y остаются независимыми, а $z = z(x, y)$. Тогда для $u = f(x, y, z(x, y))$ имеют место следующие соотношения

$$\frac{\partial u}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Заметим, что формулы для дифференцирования сложной функции одной переменной имели место только лишь при существовании производной. В то же время требования простого существования частных производных у функции $u = f(x, y, z)$ недостаточно.

Действительно, рассмотрим функцию $f = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$. Как мы уже знаем, эта функция не является дифференцируемой, но в то же время имеет производные всюду, включая точку (0,0): $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$. В этой точке производные терпят разрыв. Если ввести новую переменную, положив $x = t$, $y = t$, то получим сложную функцию от t. По формуле (37.2) в точке $t = 0$ (т.е. $x = y = 0$) имеем

$$u'(t) = u_x x_t + u_y y_t = u_x + u_y = f_x + f_y = 0.$$

С другой стороны, если подставить значения $x = t$, $y = t$ в исходную функцию, то получим

$$u = \frac{1}{2}t, \quad u' = \frac{1}{2}, \quad u'(0) = \frac{1}{2}.$$

То есть в этом случае формула дифференцирования сложной функции не применима.

Формула конечных приращений. Пусть функция $f(x, y, z)$ определена и непрерывна в некоторой замкнутой области Ω и имеет непрерывные частные производные по всем переменным внутри этой области. Рассмотрим точки

$$M_0 = (x_0, y_0, z_0), \quad M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z),$$

которые можно соединить прямолинейным отрезком $M_0 M_1$, целиком лежащим в области Ω. Тогда имеет место формула

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y, z_0 + \theta\Delta z)\Delta x +$$

$$f_y(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y, z_0 + \theta\Delta z)\Delta y + f_z(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y, z_0 + \theta\Delta z)\Delta z, \quad (37.4)$$

где $0 < \theta < 1$.

Доказательство. Положим в f

$$x = x_0 + t\Delta x, \quad y = y_0 + t\Delta y, \quad z = z_0 + t\Delta z$$

при $t \in [0, 1]$. Сложная функция от t

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z)$$

непрерывна во $[0, 1]$, а внутри него имеет производную, которая, по формуле (37.2), равна

$$F'(t) = f_x(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z)\Delta x +$$

$$f_y(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z)\Delta y + f_z(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z)\Delta z,$$

так как из определения функций x, y, z как функций от t вытекает, что

$$\Delta x = \frac{dx}{dt}, \quad \Delta y = \frac{dy}{dt}, \quad \Delta z = \frac{dz}{dt}.$$

Применим к функции $F(t)$ на промежутке $[0, 1]$ формулу конечных приращений

$$F(1) - F(0) = F'(\theta), \quad 0 < \theta < 1.$$

Если заметить, что по определению F

$$F(1) - F(0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0),$$

и подставить полученное значение $F'(\theta) = F'(t)\Big|_{t=\theta}$, то придем к формуле (37.4).

Следствие. Если функция $f(x, y, z)$, непрерывная в замкнутой и связной области Ω, внутри этой области имеет частные производные равные 0:

$$f_x = f_y = f_z = 0,$$

то эта функция во всей области Ω является постоянной.

Доказательство. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M(x, y, z)$ – любые две точки области Ω. Ввиду предположения связности, мы можем соединить эти точки ломаной, не выходящей за пределы области. Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$ есть следующая за M_0 вершина ломаной, то положив

$$x_1 = x_0 + \Delta x, \quad y_1 = y_0 + \Delta y, \quad z_1 = z_0 + \Delta z,$$

получим

$$f(x_0, y_0, z_0) = f(x_1, y_1, z_1).$$

Переходя последовательно от вершины к вершине, окончательно получим

$$f(x_0, y_0, z_0) = f(x, y, z).$$

Производная по заданному направлению. Заметим, что частные производные функции по своим переменным выражают скорость изменения функции по направлению координатных осей. Можно также ставить вопрос об изменении функции и по другим направлениям, не совпадающими с координатными осями. Пусть f определена в некоторой открытой области. Рассмотрим произвольную точку этой области $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и некоторую направленную прямую l, проходящую через M_0. Пусть $M(x, y, z)$ какая-либо другая точка этой области, лежащая на прямой l. Длина отрезка M_0M будет браться с положительным знаком, если M_0M совпадает с заданным направлением, со знаком минус – в противном случае. Тогда предел

$$\lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M},$$

называется производной от f по направлению l и обозначается

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l}.$$

Эта производная характеризует скорость изменения функции f в направлении l.

Предположим теперь, что f имеет в рассматриваемой области непрерывные частные производные по переменным x, y, z (можно предположить только дифференцируемость). Пусть l образует с осями координат углы α, β, γ. Заметим, что если положить $M_0M = t$, то

$$x - x_0 = t\cos\alpha, \quad y - y_0 = t\cos\beta, \quad z - z_0 = t\cos\gamma.$$

Таким образом, вдоль направления l координаты можно рассматривать как функции от t, а функци. f как сложную функцию $\phi(t)$ переменной t. Следовательно,

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l} = \lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M} = \lim_{t \to 0} \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t} = \phi'(0),$$

которая существует при сделанных предположениях и по формуле (37.4) дается формулой

$$\phi'(t) = f_x x_t + f_y y_t + f_z z_t = f_x \cos\alpha + f_y \cos\beta + f_z \cos\gamma,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0}{\partial y}) \cos\beta + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \cos\gamma.$$

Или записывая, через скалярное произведение

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l} = \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \overrightarrow{l},$$

где $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$ и называется градиентом функции. Используя это соотношение и вспоминая как определяется скалярное произведение через длины векторов и угол между ними, можно показать, что функция имеет наибольший рост в направлении градиента функции. Также можно показать, что градиент имеет направление нормали к поверхности, определяемой уравнением $u = f(x, y, z)$ в точке (x_0, y_0, z_0).

§ 38 Лекция 38

Инвариантность формы первого дифференциала. Пусть функция $f(x, y, z)$, определенная в некоторой открытой области Ω, имеет непрерывные частные производные первого порядка по переменным x, y, z, которые, в свою очередь, являются функциями от новых переменных t и v:

$$x = \phi(t, v), \quad y = \psi(t, v), \quad z = \chi(t, v),$$

также имеющими непрерывные частные производные по переменным t, v. Тогда из представления (3) лекции 37 вытекает, что существуют непрерывные частные производные u_t, u_v функции

$$u = f(\phi(t, v), \psi(t, v), \chi(t, v))$$

по переменным t и v. В случае независимых переменных x, y, z дифференциал функции u имеет вид

$$du = u_x dx + u_y dy + u_z dz. \tag{38.1}$$

В случае зависимости x, y, z от t и v, функцию u можно считать функцией от t и v, и тогда дифференциад примет вид

$$du = u_t dt + u_v dv. \tag{38.2}$$

Но из формул дифференцирования сложной функции мы имеем

$$u_t = u_x x_t + u_y y_t + u_z z_t, \quad u_v = u_x x_v + u_y y_v + u_z z_v.$$

Подставив эти значения в дифференциал du в (38.2), получим

$$du = (u_x x_t + u_y y_t + u_z z_t)dt + (u_x x_v + u_y y_v + u_z z_v)dv.$$

Перегруппируем члены этого равенства следующим образом:

$$du = u_x(x_t dt + x_v dv) + u_y(y_t dt + y_v dv) + u_z(z_t dt + z_v dv) = u_x dx + u_y dy + u_z dz.$$

Мы пришли к той же самой форме дифференциала, что и в случае, когда x, y, z были независимыми переменными (правда смысл этих дифференциалов уже другой). Тем не менее, мы приходим, таким образом, к выводу, что для функций нескольких переменных имет место инвариантность формы первого дифференциала при замене переменных. В дальнейшем мы покажем, что это свойство не сохраняется для дифференциалов более высокого порядка.

Производные высших порядков. Если функция $f(x, y, z)$ имеет частную производную в некоторой открытой области Ω по одной из переменных, то эта производная, сама являясь функцией от x, y, z, может в свою очередь тоже иметь частную производную по той же или любой другой переменной. Для исходной функции эти последние производные будут производными второго порядка.

Пример. Пусть задана функция $f(x, y)$. Тогда вторые частные производные будут иметь следующий вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}.$$

Дадим определение второй производной (смешаной) через предел.

Определение. Пусть функция $f(x, y)$ имеет частную производную по переменной x в точке (x_0, y_0) и в некоторой ее окрестности. Будем говорить, что функция $f(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) вторую частную производную по переменным x, y (в указанном порядке), если существует предел

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f_x(x_0, y) - f_x(x_0, y_0)}{y - y_0} = f_{xy}(x_0, y_0).$$

Пример.

$$u = x^2 y,\ u_{xy} = 2x,\ u_{yx} = 2x; \quad u = x^3 y + y^3,\ u_{xy} = 3x^2,\ u_{yx} = 3x^2.$$

Теорема о смешанных производных. В примерах, разобранных выше, бросается в глаза тот факт, что смешанные производные одного порядка взятые по одним и тем же переменным, но в разном порядке, совпадают. Надо сразу отметить, что это не вытекает с необходимостью из определения смешанных производных. Рассмотрим функцию

$$f = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0.$$

Для нее несложными вычислениями можно показать, что

$$f_{xy}(0, 0) = -1, \quad f_{yx}(0, 0) = 1$$

Проблема заключается в том, что совпадение или несовпадение смешанных производных взятых в разном порядке, зависит от поведения самих смешанных производных. Если вторые частные производные достаточно хорошие функции, то равенство будет иметь место. Сформулируем соответствующую теорему в случае функции двух переменных:

Теорема. Предположим, что 1) $f(x,y)$, определена в открытой области Ω, 2) в этой области f имеет частные производные f_x, f_y, а также вторые смешанные производные f_{xy}, f_{yx}, 3) эти последние производные непрерывны в некоторой точке $(x_0,y_0)\in\Omega$. Тогда в этой точке

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0).$$

Производные высших порядков от сложной функции. Пусть функция $f(x,y,z)$, определенная в некоторой открытой области Ω, имеет непрерывные частные производные до порядка k вкючительно по переменным x, y, z, которые, в свою очередь, являются функциями от новых переменных t и v:

$$x=\phi(t,v),\quad y=\psi(t,v),\quad z=\chi(t,v),$$

также имеющих непрерывные частные производные по переменным t, v до порядка k включительно. Тогда существуют нпрерывные частные производные функции

$$u=f(\phi(t,v),\psi(t,v),\chi(t,v))$$

по переменным t и v до порядка k включительно.

Дифференциалы высших порядков. Пусть функция $u=f(x,y,z)$, определенная в некоторой открытой области Ω, имеет непрерывные частные производные первого порядка переменным x, y, z. Тогда полным дифференциалом мы называем следующее выражение:

$$du=u_xdx+u_ydy+u_zdz,$$

где dx, dy, dz – произвольные приращения независимых переменных x, y, z. Видим, что du также является некоторой функцией от x, y, z. Если предположить существование непрерывных вторых частных производных функции u, то du, как функция от x, y, z, будет иметь непрерывные производные первого порядка, и можно будет говорить о дифференциале от дифференциала du, $d(du)$, который называется дифференциалом второго порядка от u. Обозначается второй дифференциал – d^2u.

Важно подчеркнуть, что приращения dx, dy, dz при этом рассматриваются как постоянные и остаются неизменными при вычислении второго и последующих дифференциалов, т.е. процедура вычисления всех дифференциалов запускается приращениями dx, dy, dz, остающихся неизменными на протяжении вычисления всех возможных дифференциалов. Вычислим второй дифференциал:

$$d^2u=d(du)=d\left(u_xdx+u_ydy+u_zdz\right)=d(u_x)dx+d(u_y)dy+d(u_z)dz=$$

$$(u_{xx}dx+u_{xy}dy+u_{xz}dz)dx+(u_{yx}dx+u_{yy}dy+u_{yz}dz)dy+(u_{zx}dx+u_{zy}dy+u_{zz}dz)dz =$$
$$u_{xx}dx^2+u_{yy}dy^2+u_{zz}dz^2+2u_{xy}dxdy+2u_{xz}dxdz+2u_{yz}dydx,$$

используя равенство смешанных производных, которое здесь имеет место. Аналогично определяется дифференциал третьего порядка и так далее, причем всегда имеет место рекуррентная формула при наличии непрерывной дифференцируемости по всем переменным до фиксированного порядка: $d^k u = d(d^{k-1}u)$. Легко заметить, что развернутые выражения для дифференциалов высокого порядка очень быстро становятся чрезмерно сложными, особенно при большом количестве переменных. Запишем сиволическим образом формулу для нахождения дифференциала k порядка. В выражении для первого дифференциала вынесем условно за скобки букву u и получим

$$du = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)u.$$

Мы как бы применяем отображение, стоящее в скобках к элементу u. Заметим, что если вынести точно также за скобку u в выражении для второго дифференциала, то получится, что выражение, стоящее в скобках формально совпадает с квадратом выражения, стоящего в скобках в определении первого дифференциала:

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^2 u.$$

Возведение в квадрат происходит следующим образом

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(dx)^2, \quad (dx)^2 = dx^2,$$

а удвоенное произведение понимается следующим образом

$$2\left(\frac{\partial}{\partial y}dy\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial z}dz\right) = \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}dydz.$$

Таким образом, мы имеем в общем случае

$$d^ku = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^k u.$$

Дифференциалы сложных функций. Пусть мы имеем сложную функцию $f(x,y,z)$, определенную в некоторой открытой области Ω, имеет непрерывные частные производные до порядка k по переменным x, y, z, которые, в свою очередь, являются функциями от новых переменных t и v:

$$x = \phi(t,v), \quad y = \psi(t,v), \quad z = \chi(t,v),$$

также имеющими непрерывные частные производные проядка k по переменным t, v. В случае первого диффернциала мы доказали его инвариантность относительно замены переменных. Когда мы считали второй дифференциал для функции с независимыми переменными x, y, z, то дифференциалы dx, dy, dz являлись постоянными. Но в случае сложной функции они сами являются функциями от t и v, а значит могут меняться. Вычислим второй дифференциал сложной функции, имея в виду последнее замечание.

$$d^2u = d(du) = d\left(u_x dx + u_y dy + u_z dz\right) =$$

$$d(u_x)dx + d(u_y)dy + d(u_z)dz + u_x d(dx) + u_y d(dy) + u_z d(dz) =$$

$$u_{xx}dx^2 + u_{yy}dy^2 + u_{zz}dz^2 + 2u_{xy}dxdy + 2u_{xz}dxdz + 2u_{yz}dydx +$$

$$u_x d^2x + u_y d^2y + u_z d^2z,$$

откуда сразу замечаем, что инвариантность формы второго дифференциала при замене переменных не сохраняется: появляются дополнительные члены. В то же время надо отметить, что в частных случаях возможно сохранение формы второго дифференциала: так, например, если предположить, что замена переменных линейна, т.е.

$$x = a_1 t + a_2, \quad y = b_1 t + b_2, \quad z = c_1 t + c_2,$$

то

$$dx = a_1, \quad dy = b_1, \quad dz = c_1,$$

т.е. дифференциалы dx, dy, dz являются постоянными в этом случае, откуда немедленно вытекает, что

$$d^2x = d^2y = d^2z = 0.$$

§ 39 Лекция 39

Формула Тейлора. Рассмотрим функцию $F(t)$ одной переменной. Мы знаем, что при существовании $n+1$ производной ее можно разложить по формуле Тейлора следующим образом

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}F''(t_0)(t-t_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(t_0+\theta(t-t_0))(t-t_0)^{n+1}. \tag{39.1}$$

Положив

$$t - t_0 = \Delta t = dt, \quad F(t) - F(t_0) = \Delta F(t_0),$$

можно переписать в виде

$$\Delta F(t_0) = dF(t_0) + \frac{1}{2!}d^2F(t_0) + \dots + \frac{1}{n!}d^nF(t_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(t_0+\theta\Delta t). \tag{39.2}$$

Важно подчеркнуть, что величина dt, входящая в различных степенях в выражение справа, в точности равна тому приращению Δt, которое определяет приращение функции слева. Именно в последней форме мы распространим формулу Тейлора для функции многих переменных.

Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) и имеет в ней непрерывные частные производные по переменным x, y до порядка $n+1$ включительно. Придадим x_0 и y_0 некоторые приращения Δx и Δy так, чтобы прямолинейный отрезок, соединяющий точки (x_0,y_0) и $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$, не вышел за пределы нашей окрестности. Введем в рассмотрение новую независимую переменную t, положив

$$x = x_0 + t\Delta x, \quad y = y_0 + t\Delta y, \quad t \in [0,1]. \tag{39.3}$$

Подставив эти значения x и y, мы получим сложную функцию

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y).$$

Геометрически формулы (39.3) определяют прямолинейный отрезок, соединяющий точки (x_0,y_0) и $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$. Вместо приращения $\Delta f(x_0,y_0)$, мы можем рассмотреть приращение вспомогательной функции

$$\Delta F = F(1) - F(0),$$

так как оба приращения равны. Но $F(t)$ является функцией одной переменной, для которой мы можем написать формулу Тейлора

$$\Delta F(0) = F(1) - F(0) = dF(0) + \frac{1}{2!}d^2F(0) + \dots + \frac{1}{n!}d^nF(0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(\theta), \tag{39.4}$$

при этом $\Delta t = dt = 1 - 0 = 1$. Замечая, что замена переменных (39.3) является линейной, а значит сохраняется инвариантность формы дифференциалов для высших дифференциалов, получаем

$$dF(0) = df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy,$$

$$d^2F(0) = d^2f(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)dx^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)dxdy + f_{yy}(x_0, y_0)dy^2,$$

и так далее, где для последнего дифференциала будем иметь

$$d^{n+1}F(\theta) = d^{n+1}f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$$

Важно отметить, что и здесь дифференциалы dx, dy ничем не отличаются от ранее взятых приращений Δx, Δy. Действительно,

$$dx = \Delta x dt = \Delta x, \quad dy = \Delta y dt = \Delta y.$$

Подставив все это в разложение (39.4), мы в итоге получим итоговую формулу Тейлора для функции двух переменных

$$\Delta f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0, y_0) + \frac{1}{n!}d^nf(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y). \tag{39.5}$$

Понятно, что в развернутом виде формула Тейлора, даже в случае всего 2 переменных, представляет из себя очень громоздкую структуру, если заменить дифференциалы f ее производными, умноженными на приращения.

Экстремумы функций многих переменных.

Необходимые условия. Пусть функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в некоторой открытой области Ω и $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ является внутренней точкой области. Говорят, что f в точке $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ имеет максимум (минимум), если ее можно окружить такой окрестностью

$$(x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta, \ldots, x_n^0 - \delta, x_n^0 + \delta),$$

чтобы для всех точек этой окрестности выполнялось неравенство

$$f(x) \le (\ge) f(x^0).$$

Если окрестность точки x^0 может быть взята настолько мала, чтобы исключить знак равенства, то говорят, что функция имеет собственный максимум (минимум). Для обозначения максимума или минимума употребляется общий термин – экстремум.

Предположим, что в некоторой точке x^0 функция f имеет экстремум. Преположим также, что в этой точке функция имеет частные производные первого порядка.

Положим $x_2 = x_2^0$, $\ldots$, $x_n = x_n^0$; тогда мы получим функцию одной переменной x_1. Предположим, что достигается максимум, тогда в некоторой окрестности точки $x_1 = x_1^0$ необходимо выполняется неравенство

$$f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0) \le f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0),$$

так что упомянутая функция уже одной переменной будет иметь максимум в точке $x_1 = x_1^0$, а, следовательно, по теореме Ферма

$$f_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = 0.$$

Раасматривая сложившуюся ситуацию аналогичным образом относительно всех остальных переменных, приходим к следующему необходимому условию экстремума

$$\nabla f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = 0,$$

или можно записать и по другому через дифференциал

$$df(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = 0,$$

так как если все частные производные первого порядка обратились в 0, то каковы бы ни были dx_1, $\ldots$, dx_n, всегда

$$df(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{x_1}dx_1 + \cdots + f_{x_n}dx_n = 0.$$

Обратно, если выполняется $df = 0$, то в силу произвольности dx_1, $\ldots$, dx_n, с необходимостью будем иметь равенство нулю всех частных производных первого порядка.

Заметим также, что подозрительными будут и те точки, в которых частные производные либо обращаются в бесконечность либо вообще не существуют.

Достаточные условия экстремума. Как и в случае функции одной переменной, в стационарной точке может вовсе и не быть экстремума. Например, если взять функцию $z = xy$, то в точке $(0, 0)$, в которой $z = 0$, обе частные производные обращаются в ноль, но тем не менее в этой точке экстремума нет; что легко видно из представления функции и того, что $z(0, 0) = 0$.

Из определения понятия экстремума естественно обратиться к исследованию разности $\Delta f = f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Разложим эту разность по формуле Тейлора, ограничиваясь первыми 2 членами. Так как точка предполагается стационарной, то первый член $df(x_1^0, \ldots, x_n^0) = 0$. Таким образом, получаем

$$\Delta f = \frac{1}{2} d^2 f(x_1^0 + \theta\Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \theta\Delta x_n).$$

Если записать формулу Тейлора через производные, то получится

$$\Delta f = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}\Delta x_i \Delta x_j,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_i^0$; и все производные вычислены в некоторой точке $(x_1^0+\theta\Delta x_1, \dots, x_n^0+\theta\Delta x_n)$, $0 < \theta < 1$. Будем предполагать, что функция f обладает непрерывными частными производными второго порядка. Положим

$$f_{x_i x_j}(x_1^0, \dots, x_n^0) = a_{ij}, \quad i,j = 1, \dots, n, \tag{39.6}$$

так что

$$f_{x_i x_j}(x_1^0 + \theta\Delta x_1, \dots, x_n^0 + \theta\Delta x_n) = a_{ij} + \alpha_{ij},$$

где

$$\alpha_{ij} \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x_1, \dots, \Delta x_n \to 0. \tag{39.7}$$

Заметим, что (39.7) имеет место в силу требования непрерывности частных производных второго порядка функции f. Таким образом мы получаем

$$\Delta f = \frac{1}{2}\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\Delta x_i \Delta x_j + \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\Delta x_i \Delta x_j\right]. \tag{39.8}$$

Иначе можно записать

$$\Delta f = \frac{1}{2}\left[d^2 f(x_1^0, \dots, x_n^0) + \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\Delta x_i \Delta x_j\right]. \tag{39.9}$$

Покажем, что, как и вслучае функции одной переменной, знакоопределенность второго дифференциала гарантирует нам существование экстремума в исследуемой точке.

Нетрудно видеть, что второй дифференциал функции f представляет из себя квадратичную форму переменных Δx_1, ..., Δx_n. От свойств этой квадратичной формы будет зависеть наличие или отсутствие экстремума в точке.

Рассмотрим квадратичную форму переменных y_1, ..., y_n вида

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j, \quad a_{ij} = a_{ji}. \tag{39.10}$$

Квадратичная форма (39.10) называется положительно (отрицательно) определенной, если она при всех значениях аргументов y_1, ..., y_n, не равных одновременно нулю, принимает положительные (отрицательные) значения. Так, например, форма

$$6y_1^2 + 5y_2^2 + 14y_3^2 + 4y_1y_2 - 8y_1y_3 - 2y_2y_3$$

будет положительно определенной, что можно заметить представив эту форму в виде

$$(2y_1 - 3y_3)^2 + 2(y_1 + y_2 + y_3)^2 + 3(y_2 - y_3)^2.$$

Эта форма обращается в ноль тогда когда все 3 скобки обращаются в ноль. Откуда легко видно, что это приводит к тому, что должно быть $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, а значит форма положительно определена.

Сильвестр дал необходимое и достаточное условие положительной (отрицательной) определенности квадратичной формы в терминах миноров матрицы коэффициентов квадратичной формы.

§ 40 Лекция 40

Критерий Сильвестра. Для того, чтобы квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j, \quad a_{ij} = a_{ji}. \tag{40.1}$$

была положительно определенной необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы коэффициентов квадратичной формы были строго больше нуля. Для того, чтобы форма (40.1) была отрицательно определенной необходимо и достаточно, чтобы $a_{11} < 0$, а все остальные главные миноры матрицы коэффициентов квадратичной формы чередовали знак, причем второй главный минор уже должен быть положительным.

Пользуясь этими понятиями сформулируем достаточные признаки существования экстремума в точке:
Если второй дифференциал, т.е. квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \Delta x_i \Delta x_j$$

со значениями

$$f_{x_i x_j}(x_1^0, \ldots, x_n^0) = a_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

оказывается положительно (отрицательно) определенной формой, то в исследуемой точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *будет собственный минимум (максимум).*

Для доказательства, введем расстояние

$$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_n^2}$$

между точками $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ и $(x_1, \ldots, x_n)$. Вынесем в

$$\Delta = \frac{1}{2} \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \Delta x_i \Delta x_j + \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \Delta x_i \Delta x_j \right] \tag{40.2}$$

за скобку ρ^2 и полагая

$$\frac{\Delta x_i}{\rho} = \xi_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

перепишем выражение (40.2) в виде

$$\Delta = \frac{\rho^2}{2} \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j + \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_i \xi_j \right] \tag{40.3}$$

Можно вычислить, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i^2 = 1. \tag{40.4}$$

Из (40.4) сразу вытекает, что ξ_i не могут обратиться в ноль одновременно, поэтому первая сумма в (40.3) всегда имеет положительный знак. Более того, учитывая (40.4), можно утверждать, что найдется постоянное положительной число k такое, что при всех возможных ξ_i будет иметь место неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq k.$$

Действительно, сумма представляет из себя непрерывную функцию от аргументов ξ_i во всем пространстве, а также и на множестве тех точек $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, которые удовлетворяют соотношению (40.4). Соотношение (40.4) определяет множество точек равноудаленных от центра, т.е. это множество точек определяет сферу и является замкнутым множеством. Отсюда из теоремы Вейерштрасса сразу следует, что эта сумма на сфере, как на закнутом множестве, будет иметь минимум отличный от нуля, так как ноль достигается лишь в точке $(0, \ldots, 0)$, что невозможно при условии (40.4).

С другой стороны вторая сумма в (40.2) может быть сделана сколь угодно малой при достаточно малом ρ, так как

$$\alpha_{ij} \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n \to 0. \tag{40.5}$$

Отсюда вытекает, что она может быть сделана по абсолютной величине меньше чем k, а следовательно и вся скобка окажется положительной.

Аналогично проводится доказательство при условии отрицательной определенности квадратичной формы.

Условия отсутствия экстремума. Квадратичная форма (40.2) называется неопределенной, если она может принимать значения противоположных знаков. Что имеет место, например, в случае квадратичной формы

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 4y_1y_2 + 2y_1y_3,$$

где в точке $(1, 1, 0)$ она меньше 0, а в точке $(3, 1, 1)$ она больше 0. Можно показать: что если квадратичная форма (40.2) будет неопределенной, тогда в исследуемой точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ заведомо нет экстремума.

И, наконец, может случиться, что форма (40.2) будет полуопределенной, то есть будет сохранять знак, но обращаться в ноль будет не только при нулевых значениях аргументов. Например, квадратичная форма

$$y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 = (y_1 - y_2)^2 \geq 0.$$

но обращается в ноль не только при нулевых значениях y_1 и y_2, но и при $y_1 = y_2$. Случай, когда форма (40.2) является полуопределенной оказывается сомнительным случаем. Т.е. здесь мы уже не можем ответить на вопрос об экстремуме без привлечения дифференциалов более высокого порядка. В частности высшие производные должны быть привлечены и в случае когда все производные второго порядка в исследуемой точке обращаются в ноль.

Рассмотрим пример функции $f = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$. Эта функция является бесконечно дифференцируемой и обладает только стационарными точками. Легко видеть, что $\nabla f = 0$ приводит к системе

$$f_x = 3x^2 - 8x + 2y = 0, \quad f_y = 2x - 2y = 0,$$

которая дает 2 решения $(0,0)$ и $(2,2)$. Теперь надо вычислить второй дифференциал в этих точках. Для этого посчитаем все вторые производные в указанных точкахю

$$f_{xx} = 6x - 8, \quad f_{xx}(0,0) = -8, \quad f_{xx}(2,2) = 4, \quad f_{xy} = 2, \quad f_{xy} = -2.$$

Таким образом, мы получаем следующие 2 квадритичных формы для исследования на положительную или отрицательную определенность:

$$d^2f(0,0) = -8dx^2 + 4dxdy - 2dy^2, \quad d^2f(2,2) = 4dx^2 + 4dxdy - 2dy^2.$$

Матрицы для исследования с помощью критерия Сильвестра выглядят следующим образом

$$\begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Применяя критерий Сильвестра к первой матрице, мы получаем, что в $(0,0)$ достигается максимум. Заметим, что во второй матрице первый угловой минор положителен, но второй отрицателен, следовательно, ни положительной, ни отрицательной определенности нет. Приведем критерий полуопределенности квадратичной формы:

Критерий полуопределенности квадратичной формы. Для того чтобы квадратичная форма была неотрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы были неотрицательны.

Для неположительной определенности квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы удовлетворяли следующим условиям:

главные миноры четного порядка должны быть неотрицательны, а нечетного порядка — неположительны.

Откудасразу вытекает, что вторая квадратичная форма является неопределенной и, следовательно, экстремума в точке $(2,2)$ – нет.