Задача. По заданной производящей функции $A(t)$ найти формулу общего члена последовательности a_n.

а) $A(t) = (1+t^2)e^{-3t^2}$.

Нам известно, что экспонента представляет собой производящую функцию для последовательности обратных факториалов:

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}.$$

В обеих частях этого равенства можно делать замену переменной, например t на $-3t^2$. Более того, если известно, что $B(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k t^k$, то справедливо

$$e^{B(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \right)^n \right].$$

Иначе говоря, можно подставлять ряд в ряд.

Вернемся к примеру. Сделаем замену переменной t на $-3t^2$ в выражении для экспоненты:

$$e^{-3t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3t^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n t^{2n}}{n!}.$$

Обратите внимание, что в последней сумме нельзя заменить индексы, написав вместо $2n$ просто k. Другими словами,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n t^{2n}}{n!} \neq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^{k/2} t^k}{(k/2)!},$$

поскольку в правой части появляются нечетные степени переменной t, которых нет в левой части этого равенства. Вместо этого либо следует писать

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n t^{2n}}{n!} = \sum_{\substack{k=0 \\ 2|k}}^{\infty} \frac{(-3)^{k/2} t^k}{(k/2)!},$$

либо отказаться от замены вовсе. Тогда

$$\begin{aligned} A(t) = (1+t^2)e^{-3t^2} &= (1+t^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n t^{2n}}{n!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n t^{2n}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n t^{2n+2}}{n!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n t^{2n}}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1} t^{2n}}{(n-1)!} = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-3)^n}{n!} + \frac{(-3)^{n-1}}{(n-1)!} \right] t^{2n}. \end{aligned}$$

Выражение в последней строке представляет собой ряд на основе четных степеней t — это ничто иное, как производящая функция последовательности, в которой все члены с нечетными номерами равны 0. Осталось записать формулу общего члена этой последовательности:

$$a_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0; \\ \frac{(-3)^n}{n!} + \frac{(-3)^{n-1}}{(n-1)!}, & \text{если } k = 2n, n \geqslant 1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$