Указания к решению задачи 3.8 (9).

Задача. Найти производящую функцию для последовательности $a_n = \binom{\alpha}{n}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

Итак, ищем простое выражение для производящей функции

$$A(t) = \sum_{n \geqslant 0} \binom{\alpha}{n} t^n.$$

При этом мы предположили, что решение есть $A(t) = (1+t)^\alpha$, — тогда это будет прямое обобщение бинома Ньютона (случай целого неотрицательного α). Таким образом, задача свелась к тому, чтобы доказать это равенство.

В процессе рассуждений мы заметили, что

$$A(t) = 1 + \sum_{n \geqslant 1} \frac{\alpha}{n} \binom{\alpha - 1}{n - 1} t^n.$$

Откуда сделали вывод:

$$A'(t) = \alpha \sum_{n \geqslant 1} \binom{\alpha - 1}{n - 1} t^{n-1} = \alpha \sum_{n \geqslant 0} \binom{\alpha - 1}{n} t^n = \alpha B(t).$$

После этого мы делаем вторую догадку. Если принять гипотезу $A(t) = (1+t)^\alpha$, то желательно иметь равенство $\dfrac{A'(t)}{\alpha} = B(t) = \dfrac{A(t)}{1+t}$ (а если гипотеза верна, то это необходимо должно выполняться). Если знать, *что* доказывать, то половина задачи решена! Примем это пока на веру и решим полученное уравнение

$$A'(t) = \frac{\alpha}{1+t} A(t).$$

Для этого уравнение нужно переписать в следующем виде, после чего проинтегрировать обе части равенства:

$$\frac{dA}{A} = \frac{\alpha dt}{1+t}.$$

В результате получаем:

$$\ln A = \alpha \ln(1+t) + C_0,$$

или

$$A(t) = e^{C_0}(1+t)^\alpha = C(1+t)^\alpha.$$

Подставляя сюда и в ряд значение $t = 0$, найдем константу C:

$$A(0) = C = \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Таким образом цель достигнута. При этом осталось убедиться, что для рядов $A(t) = \sum\limits_{n \geqslant 0} \binom{\alpha}{n} t^n$ и $B(t) = \sum\limits_{n \geqslant 0} \binom{\alpha - 1}{n} t^n$ справедливо соотношение $B(t) = \dfrac{A(t)}{1+t}$.

Доказывать проще справа налево: равенство $A(t) = (1+t)B(t)$ устанавливается в одну строчку.

Слева направо посложнее, но это отличное упражнение с биномиальными коэффициентами. При этом необходимо вспомнить формулу для произведения производящих функций, а также иметь под рукой пару тождеств. Первое из них — формула обращения верхнего индекса

$$\binom{\alpha}{k} = (-1)^k \binom{-\alpha+n-1}{k},$$

которая следует непосредственно из определения биномиального коэффициента (проверьте!). Второе тождество — формула суммирования

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha+k}{k} = \binom{\alpha+n+1}{n},$$

которая получается из тождества Вандермонда $\binom{\alpha}{k} = \binom{\alpha-1}{k} + \binom{\alpha-1}{k-1}$.