

# == 實驗 7 ==

## 一階系統頻率響應

利用放大器設計出一個簡單的一階系統，利用正弦波信號為輸入測試信號，量測一階系統之頻率響應與繪製波德圖，並以軟體 Matlab/Simulink 模擬與驗證。

### ξ 學習目標

1. 瞭解一階系統如何測得頻率響應。
2. 量測一階系統之頻率響應與繪製波德圖。
3. 以軟體 Matlab/Simulink 模擬與驗證。

### ξ 相關理論

#### 一階系統之頻率響應分析

控制系統頻率響應的分析是以正弦波為輸入測試信號，量測系統的穩態輸出響應信號，研究輸出之振幅及相位對頻率之關係，其測試之輸入與輸出之方塊圖，如圖 8-1 所示。當響應為穩態時，輸出信號亦為正弦波且具有與輸入正弦波信號相同之頻率，但輸出之振幅及相位卻會有所不同。

這裡我們假設一階系統  $G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$ ，來討論增益與相位。

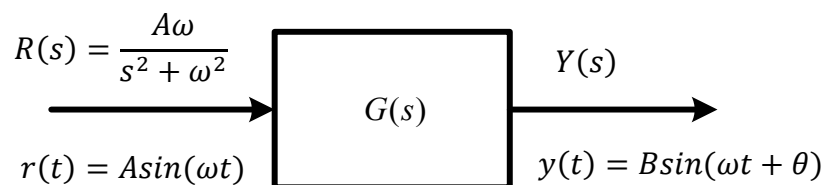


圖 8-1、頻率響應測試方塊圖

圖 8-1 之轉移函數表示為增益與相位可得(s 用  $j\omega$  代入)

$$\frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} = G(j\omega) = |G(j\omega)| \angle G(j\omega) \quad (7-1)$$

經化簡後，上式可表示為：

$$\frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} = G(j\omega) = \frac{K}{j\tau\omega + 1} = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} \angle -\tan^{-1} \omega \tau \quad (7-2)$$

以下我們設  $K=1$ ，

由式(8-2)，以頻率對增益與相位之關係，可畫出理論之系統波德圖，如圖 8-2。在此圖中，其重點在兩條漸近線與兩者交點頻率，其交點頻率稱為轉角頻率  $\omega = 1/\tau$ 。

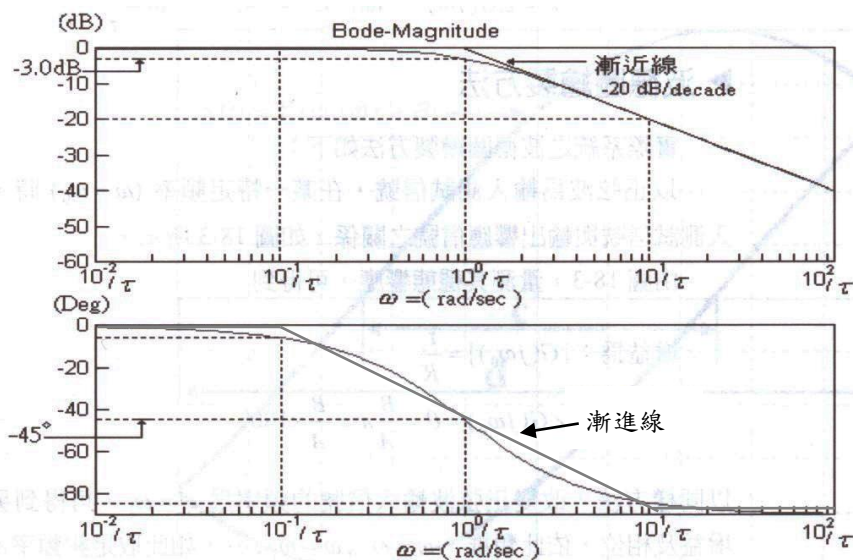


圖 8-2、一階系統之波德圖

在低頻與高頻皆採漸近線之近似值，故一階系統之頻率分析，可得以下結果：

$$|G(j\omega)|_{dB} = \begin{cases} 0 \text{ dB} & , \omega \leq 1/\tau \\ -20 \log \omega \tau \text{ dB} & , \omega > 1/\tau \end{cases} \quad (7-3)$$

$$\theta = \begin{cases} 0^\circ & , \omega \leq 0.1/\tau \\ -45^\circ(1 + \log \omega \tau) & , 0.1/\tau < \omega < 10/\tau \\ -90^\circ & , \omega \geq 10/\tau \end{cases} \quad (7-4)$$

在轉角頻率  $\omega = 1/\tau$  時，增益與相位之正確值為  
增益：

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{1}{j\omega\tau + 1} \right| = 0.707$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log 0.707 = -3 \text{ dB}$$

相位：

$$\theta = \angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \omega \tau = -45^\circ$$

### 波德圖繪製方法

以正弦波為輸入信號，在某一特定頻率時，其輸入信號與輸出響應信號之關係如圖 8-3，A 為輸入信號振幅、B 為輸出信號振幅、 $T_1$  為輸入信號半周期的時間、 $T_2$  為輸出信號與輸入信號的延遲時間，可得：

增益為： $|G(j\omega_0)| = B/A$

相位為： $\angle G(j\omega_0) = \theta = -180^\circ T_2/T_1$  (此時單位是角度制[deg])

以同樣方法，改變正弦波輸入信號的頻率，可得另一組增益與相位，以此類推，如此取足夠頻率可畫出實際系統波德圖。

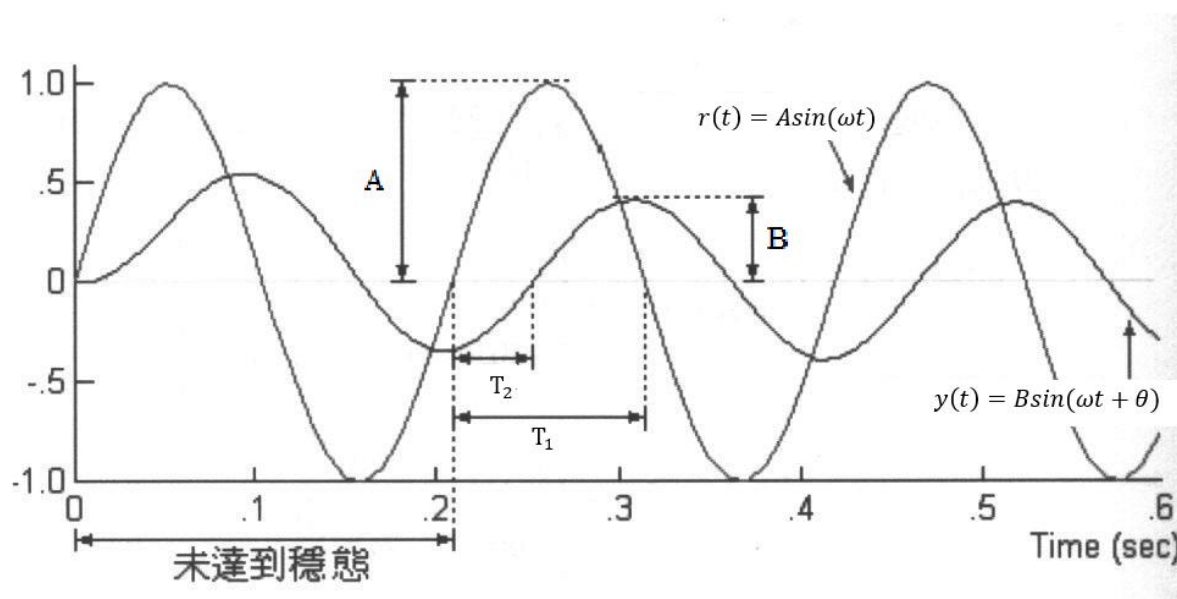


圖 8-3、正弦波輸入信號與輸出響應信號之關係圖

### Matlab 繪製系統波德圖(範例)

以上方式 8-5 為例:

$G = \text{tf}([k_\omega], [\tau, 1])$

`bode(G)`

## § 實驗 7-1 【一階系統頻率響應分析】

### 1. 步驟

(1) 依圖 7-5 完成一階系統頻率響應接線，此系統閉回路轉移函數為：

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k_{A1} \times P5 \times \frac{1.25}{s}}{1 + k_{A1} \times P5 \times \frac{1.25}{s}} = \frac{1}{\frac{0.8}{k_{A1} \times P5} s + 1}$$

式中時間常數為  $\tau = 0.8 / (k_{A1} \times P5)$

- (2) 輸入信號為正弦波，正弦波之振幅可用 P3 衰減器來調整，其頻率可由機構單元面板右下角的旋鈕及切換開關來控制。
- (3) 每次實驗先將開關 SW2 往下切(OFF)，將電容短路放電，達到初始值為零，然後將開關 SW2 往上切(ON)，使電容有積分作用。
- (4) 以軟體 Matlab/Simulink 模擬與驗證。

### 2. 請完成

- (1) 請完成輸入信號為正弦波 ( $\pm 5V$ )，P5 為 50%，觀察示波器顯示之響應波形，將相關數據記錄於表 8-1，所得之數據畫出波德圖，並以軟體模擬與驗證。
- (2) 利用 MATLAB 畫出波德圖，再點出實驗增益和相位。

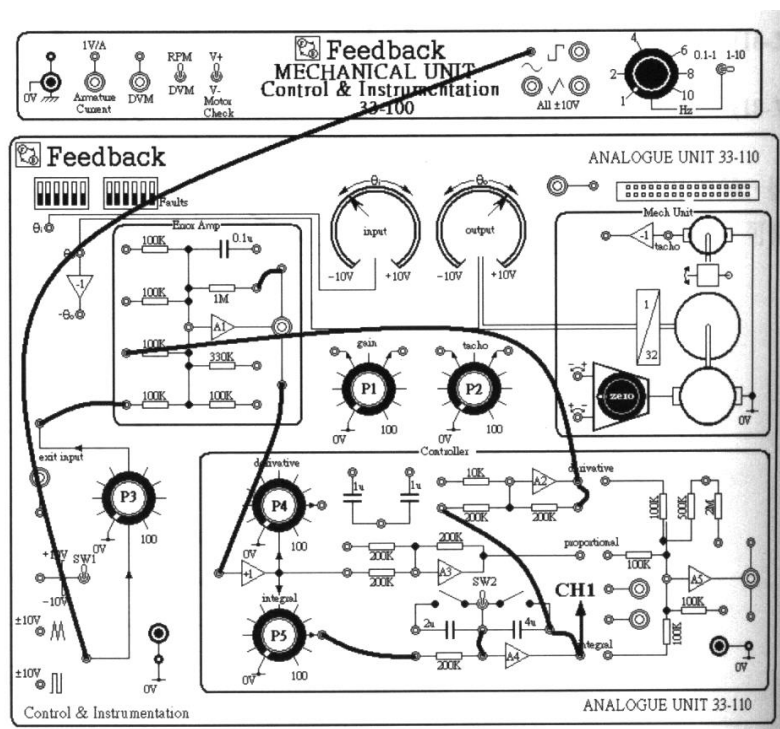


圖 7-5、一階系統頻率響應測試接線圖

表 7-1、一階系統之增益與相位 (參考 7-2 頁)

頻率(f)	0.1Hz	0.2Hz	0.4Hz	0.6Hz	0.8Hz	1Hz	2Hz	4Hz	6Hz	8Hz	10Hz
$\omega = 2\pi f$ [rad/s]	0.63	1.26	2.51	3.77	5.03	6.28	12.57	25.1	37.7	50.3	62.8
A [V]	5.15	5.15	5	5.3	5.3	5.15	5.15	5.15	5.25	5.03	5
B [V]	4.95	5.1	4.2	3.05	2.4	1.85	1.05	0.65	0.4	0.6	0.6
$T_1$ [sec]	4.9	2.9	1.2	0.61	0.63	0.462	0.24	0.122	0.083	0.063	0.047
$T_2$ [sec]	0.38	0.32	0.22	0.25	0.235	0.278	0.12	0.061	0.039	0.033	0.024
增益 $ G(j\omega)  = \frac{B}{A}$	0.96	0.99	0.84	0.58	0.45	0.36	0.21	0.126	0.076	0.119	0.12
增益(dB 值) $ G(j\omega) _{dB}$	-0.35	-0.09	-1.5	-4.7	-6.9	-8.9	-13.5	-17.9	-22.4	-18.5	-18.4
相位[deg] $-180^\circ T_2/T_1$											

轉角頻率  $\omega = \frac{1}{\tau}$

## ξ 問題討論

1. 繳交實驗結果(含：測量波形、填寫表格數值、模擬驗證)。
2. 試以漸近線方法以及 MATLAB 畫出下列轉移函數之波德圖。

$$G(s) = \frac{10}{0.1s + 1}$$

3. 實驗 8-1 中，調整 P5 對響應帶來甚麼樣的影響，請根據模擬波德圖回答。
4. 本實驗中，要得到正確輸出信號對輸入信號之幅量比，不能一開始就量測輸出信號，須等數個週期後，為什麼？
5. 請將測得數據描繪成波德圖，並與模擬比對得知實驗與模擬之差別。