

# == 實驗 5 ==

## 直流馬達位置控制系統

探討直流馬達位置控制系統數學模式的建立與步階響應分析，並以軟體 Matlab/Simulink 模擬與驗證。

### ξ 學習目標

1. 建立直流馬達位置控制系統數學模式。
2. 分析直流馬達位置控制系統之步階響應。
3. 以軟體 Matlab/Simulink 模擬與驗證。

### ξ 相關理論

根據實驗三，已知直流馬達速度控制系統之開迴路轉移函數為：

$$\frac{\Omega(s)}{E_a(s)} = \frac{k_m}{(1+\tau s)} \quad (5-1)$$

馬達速度與位置之關係為  $\Omega(s) = s \cdot \theta(s)$ ； $k_m$  為直流馬達增益； $k_{pt}$  為電位計增益； $\tau$  為直流馬達時間常數。

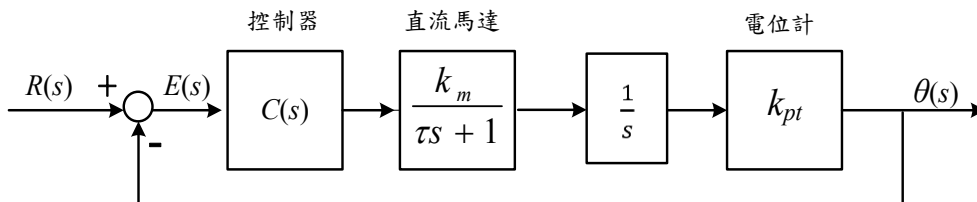


圖 5-1、直流馬達位置控制系統方塊圖

圖 5-1 中，令： $k_\theta = k_m k_{pt}$ ， $C(s)$  為控制器，其轉移函數為：

$$\frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{C(s) \times \frac{k_\theta}{s(1+\tau s)}}{1 + C(s) \times \frac{k_\theta}{s(1+\tau s)}} \quad (5-2)$$

1.  $C(s) = 1$  時，直流馬達位置控制系統之閉迴路轉移函數為：

$$\frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{\frac{k_\theta}{s(1+\tau s)}}{1 + \frac{k_\theta}{s(1+\tau s)}} = \frac{\frac{k_\theta}{\tau}}{s^2 + \frac{1}{\tau}s + \frac{k_\theta}{\tau}} \quad (5-3)$$

2. 標準二階系統閉迴路轉移函數：
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5-4)$$

$\omega_n$  為自然頻率、 $\xi$  為阻尼比。若  $\xi < 1$ ，則步階響應波形會有以下特性，如下圖 5-2 所示。(尖峰超越值  $\Delta y$  [V]、響應穩態值  $y_{ss}$  [V])

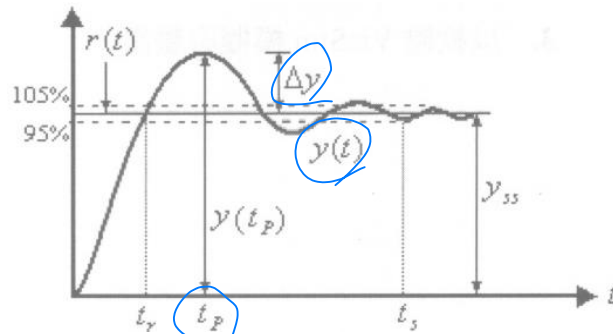


圖 5-2、二階系統步階響應曲線

最大超越量(%)：
$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = \frac{\Delta y}{y_{ss}} \quad (5-5)$$
 (可參考課本 P.299)

尖峰時間[t]：
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (5-6)$$
 (可參考課本 P.299)

3. 藉由示波器量測步階輸入時之暫態響應波形，可測得尖峰超越值  $\Delta y$  [V]、響應穩態值  $y_{ss}$  [V]，將其代入式(5-5)化簡可得：

$$-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \ln \frac{\Delta y}{y_{ss}}$$

阻尼比：
$$\xi = \sqrt{\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}}, \quad \text{其中 } \lambda = -\frac{\ln \frac{\Delta y}{y_{ss}}}{\pi} = 0.4289$$

$$-\frac{\ln \frac{1.3}{4.7}}{\pi} = 0.409 \quad (5-7)$$

4. 藉由示波器量測步階輸入時之暫態響應波形，可測得尖峰時間  $t_p$  [s]，將其代入式(5-6)：

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}, \quad \text{其中 } \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

自然頻率[rad/s]：
$$\omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{0.87 \sqrt{1-0.167}} = 3.997 = \frac{\pi}{0.85 \sqrt{1-0.167}} \quad (5-8)$$

5. 我們可將標準二階系統閉迴路轉移函數式(5-4)與直流馬達位置控制系統之閉迴路轉移函數式( $C(s) = 1$ )式(5-3)進行比對，便可得：

$$k_\theta = \frac{\omega_n}{2\xi} \quad (5-9)$$

$$\tau = \frac{1}{2\xi\omega_n} \quad (5-10)$$

(注：此時計算出的  $\tau$  值，理論上與實驗 3 馬達模型的  $\tau$  值相同，由於實驗誤差兩者會有所差異。本次實驗需要多次量測，相較於實驗 3 更容易出現誤差，所以往後模擬使用的參數還是使用實驗 3 的  $\tau$  值)

最後將所求得之 $\xi$ 與 $\omega_n$ 代入式(5-9)與(5-10)，得到直流馬達時間常數 $\tau$ 與位置控制系統開迴路增益 $k_\theta$ 。

6.  $C(s) = k_p$ 時，則系統閉迴路轉移函數：

$$\frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{k_p \frac{k_\theta}{s(1+\tau s)}}{1 + k_p \frac{k_\theta}{s(1+\tau s)}} = \frac{\frac{k_p k_\theta}{\tau}}{s^2 + \frac{s}{\tau} + \frac{k_p k_\theta}{\tau}} \quad (5-11)$$

7. 我們可將標準二階系統閉迴路轉移函數式(5-4)與直流馬達位置控制系統之閉迴路轉移函數式( $C(s) = k_p$ )式(5-11)進行比對，便可得：

$$\omega_n^2 = \frac{k_p k_\theta}{\tau} \quad (5-12)$$

$$2\xi\omega_n = \frac{1}{\tau} \quad (5-13)$$

由式(5-12)(5-13)中可得知，提高 $k_p$ 值，能夠提高自然頻率 $\omega_n$ ，同時降低阻尼比 $\xi$ ，可得到更快的暫態響應，但會增加最大超越量。

## § 實驗 5-1 【閉迴路直流馬達位置控制】

### 1. 步驟

- (1) 調整零位調整器（zero）使馬達停止不動。
- (2) 依圖 5-3 接線，來實現圖 5-1 直流馬達位置控制系統方塊圖，此時  $C(s)=1$ 。
- (3) 輸入信號為步階，步階可用 P3 衰減器來調整。
- (4) 依照 5-2 頁的式(5-5)~式(5-8)，計算 $\xi$ 、 $\omega_n$ ，再利用式(5-9)得到 $k_\theta$ ，且因為 $k_\theta = k_m k_{pt}$ ， $k_m$ 實驗 3 時已測得，故能推得電位計 $k_{pt}$ 。
- (5) 以軟體 Matlab/Simulink 模擬與驗證。

### 2. 請完成

- (1) 請依圖 5-3 繪出系統方塊圖。
- (2) 請完成輸入信號為步階 5V，觀察示波器顯示之響應波形，將結果填於表 5-1，並將 Matlab/Simulink 模擬結果填於表 5-1。
- (3) 請完成輸入信號為步階 7V，觀察示波器顯示之響應波形，將結果填於表 5-2，並將 Matlab/Simulink 模擬結果填於表 5-2。

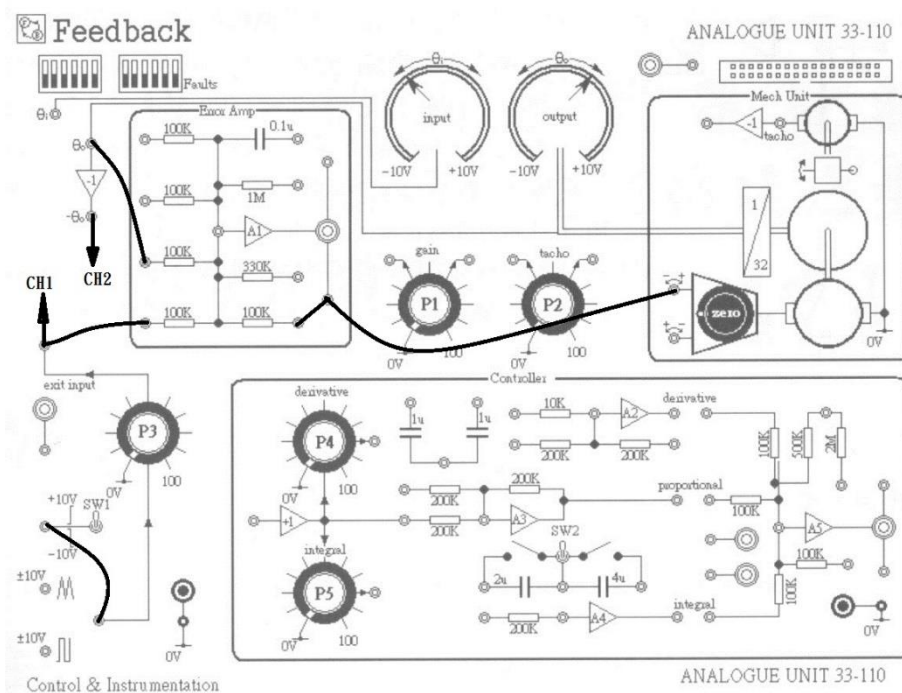


圖 5-3、直流馬達速度控制系統接線圖

表 5-1、輸入步階 5V 計算阻尼比與自然頻率

項目	輸入信號 $R$ [V]	響應穩態值 $y_{ss}$ [V]	尖峰超越值 $\Delta y$ [V]	尖峰時間 $t_p$ [s]	阻尼比 $\xi$	自然頻率 $\omega_n$ [rad/s]	開迴路增益 $k_\theta = \omega_n / 2\xi$	電位計 $k_{pt}$
實驗	5.0	4.7	1.3	0.47	0.39	3.99	4.66	4.66
模擬							同上	同上

表 5-2、輸入步階 7V 計算阻尼比與自然頻率

項目	輸入信號 $R$ [V]	響應穩態值 $y_{ss}$ [V]	尖峰超越值 $\Delta y$ [V]	尖峰時間 $t_p$ [s]	阻尼比 $\xi$	自然頻率 $\omega_n$ [rad/s]	開迴路增益 $k_\theta = \omega_n / 2\xi$	電位計 $k_{pt}$
實驗	7.0	7.0	1.75	0.85	0.398	4.05	5.357	
模擬							同上	同上

## § 實驗 5-2 【閉迴路直流馬達位置控制:P 控制器】

### 1. 步驟

- (1) 調整零位調整器 (zero) 使馬達停止不動。
- (2) 依圖 5-4 接線，來實現圖 5-1 直流馬達位置控制系統方塊圖，此時  $C(s)$  為 P 控制器。
- (3) 輸入信號為步階+5V，調整 P1 至 50%跟 100%。
- (4) 依照 5-2 頁的式(5-5)~式(5-8)，計算 $\xi$ 、 $\omega_n$ ，再利用式(5-9)得到 $k_\theta$ ，且因為 $k_\theta = k_m k_{pt}$ ， $k_m$ 實驗 3 時已測得，故能推得電位計 $k_{pt}$ 。
- (5) 以軟體 Matlab/Simulink 模擬與驗證。

### 2. 請完成

- (1) 請繪出圖 5-4 之實際系統方塊圖。
- (2) 完成表 5-3。
- (3) 觀察示波器顯示之響應波形，並以軟體模擬與驗證。

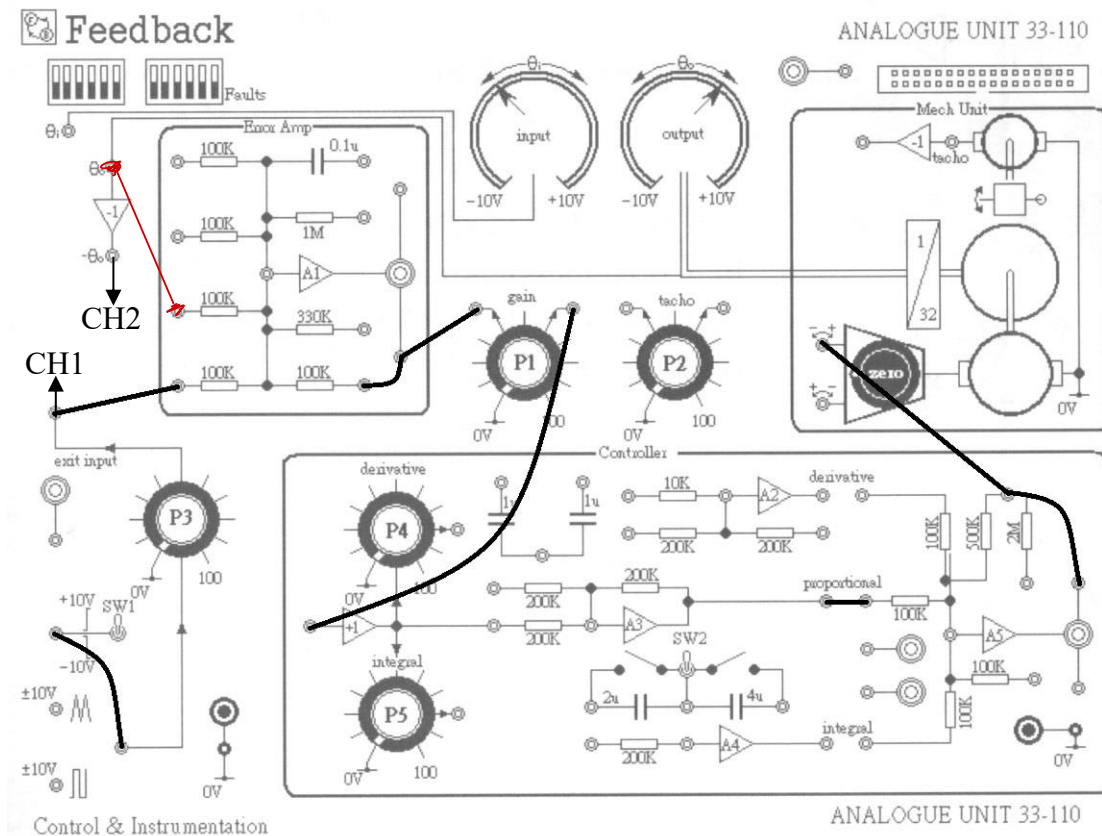


圖 5-4、直流馬達速度控制系統接線圖

表 5-3、計算阻尼比與自然頻率

項目	P1	輸入信號 $R$ [V]	響應穩態值 $y_{ss}$ [V]	尖峰超越值 $\Delta y$ [V]	尖峰時間 $t_p$ [s]	阻尼比 $\xi$	自然頻率 $\omega_n$ [rad/s]	開迴路增益 $k_\theta = \omega_n/2\xi$	電位計 $k_{pt}$
實驗	50%	5.0	4.9	2.8	1.31	0.195	2.436	6.96	
	100%	5.14	5.04	3.2	1.31	0.143	2.424	8.47	
模擬	50%							同上	同上
	100%							同上	同上

## ξ 問題討論

- 繳交實驗結果(含:系統方塊圖、測量波形、填寫表格數值、模擬驗證)
- 實驗 5-1 P3 值的大小是否會影響步階輸入時之暫態響應?為何?
- 實驗 5-2 P1 值的大小是否會影響步階輸入時之暫態響應?為何?