

== 實驗 6 ==

PID 直流馬達位置控制系統

探討 PID 控制器對直流馬達位置控制系統功能，分析其對系統暫態響應與穩態響應之影響，並以軟體 Matlab 模擬與驗證。

ξ 學習目標

1. 比例微分控制器對位置控制系統之影響。
2. 比例積分控制器對位置控制系統之影響。
3. 比例積分微分控制器對位置控制系統之影響。
4. 以軟體 Matlab 模擬與驗證。

ξ 相關理論

以 PID 控制器應用於控制系統，若受控體為直流馬達，以位置作為負回授信號，稱為 PID 直流馬達位置控制系統，如圖 6-1 所示。

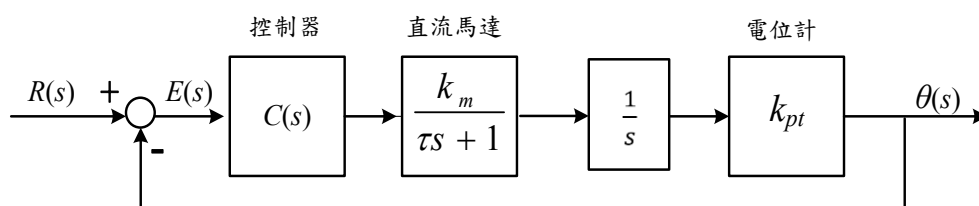


圖 6-1 直流馬達位置控制系統方塊圖

圖 6-1 中，令： $k_{\theta} = k_m k_{pt}$ ， $C(s)$ 為控制器，其轉移函數為：

$$C(s) = (k_p + k_i/s + k_d s) \quad (6-1)$$

以下將分別討論各類控制器對於直流馬達位置控制系統之影響：

1. P 控制器： $C(s) = k_p$

則系統閉迴路轉移函數：

$$\frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{k_p \frac{k_\theta}{s(1+\tau s)}}{1 + k_p \frac{k_\theta}{s(1+\tau s)}} \quad (6-2)$$

誤差轉移函數：

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + k_p \frac{k_\theta}{s(1+\tau s)}} \quad (6-3)$$

以步階訊號輸入時，穩態誤差：

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s) \frac{1}{1 + k_p \frac{k_\theta}{s(1+\tau s)}} = 0 \quad (6-4)$$

2. PI 控制器： $C(s) = k_p + \frac{k_I}{s}$

則系統閉迴路轉移函數：

$$\frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{\left(k_p + \frac{k_I}{s}\right) \frac{k_\theta}{s(1+\tau s)}}{1 + \left(k_p + \frac{k_I}{s}\right) \frac{k_\theta}{s(1+\tau s)}} \quad (6-5)$$

誤差轉移函數：

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + \left(k_p + \frac{k_I}{s}\right) \frac{k_\theta}{s(1+\tau s)}} \quad (6-6)$$

以步階訊號輸入時，穩態誤差：

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s) \frac{1}{1 + \left(k_p + \frac{k_I}{s}\right) \frac{k_\theta}{s(1+\tau s)}} = 0 \quad (6-7)$$

3. PID 控制器： $C(s) = k_p + k_D s + \frac{k_I}{s}$

則系統閉迴路轉移函數：

$$\frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{\left(k_p + \frac{k_I}{s} + k_D s\right) \frac{k_\theta}{s(1+\tau s)}}{1 + \left(k_p + \frac{k_I}{s} + k_D s\right) \frac{k_\theta}{s(1+\tau s)}} \quad (6-8)$$

誤差轉移函數：

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + \left(k_p + \frac{k_I}{s} + k_D s\right) \frac{k_\theta}{s(1+\tau s)}} \quad (6-9)$$

若以步階信號輸入，則穩態誤差為：

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s) \frac{1}{1 + \left(k_p + \frac{k_I}{s} + k_D s\right) \frac{k_\theta}{s(1+\tau s)}} = 0 \quad (6-10)$$

系統指標定義與量測

一個系統當中，有數個重要的指標，可以量化系統的響應程度，像是：穩態值： y_{ss} 、最大超越量(%)： $M_p = \frac{\Delta y}{y_{ss}}$ ，量測初次峰值超出穩態值的比例，此時發生的時間，稱為尖峰時間[t]： t_p 、上升時間[t]： t_r ，以穩態值的 10%~90%所花費的時間。

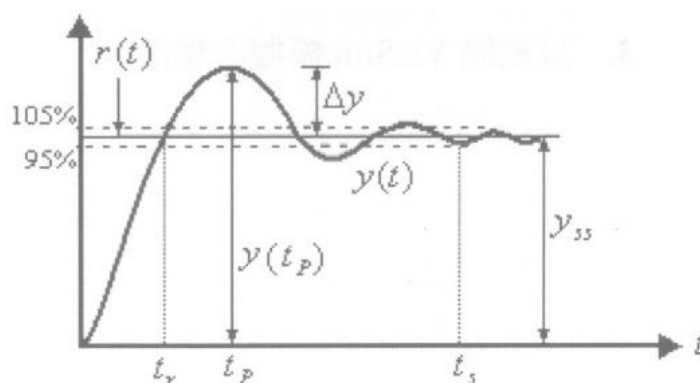


圖 6-2、指標定義與量測圖

補充：PID 參數根軌跡計算法

注意：使用此方法須先知道馬達轉移函數(馬達模型)，由於我們實驗中的組件固定無法進行此算法的驗證，下面可以使用 MATLAB 上面進行模擬驗證。

根軌跡是控制理論中的一個重要概念，用於分析和設計動態系統的性能和穩定性。它提供了一種直觀的方式來理解系統的動態響應，尤其是隨著控制器參數的變化而產生的系統極點的軌跡，而使用根軌跡法來設計 PID(比例-積分-微分)控制器的參數是一種常見的控制系統設計方法。根軌跡法的目標是根據系統的閉環傳遞函數(通常是在電氣、機械或其他工程應用中給定的系統模型)的極點位置來選擇適當的 PID 參數，以實現所需的控制性能。

根軌跡圖是一種在平面上繪製的圖形，顯示了系統的閉環傳遞函數的所有極點隨著某個參數(通常是控制器增益)的變化而移動的軌跡，圖 6-3 為 PI 控制馬達閉回路系統方塊圖，而藉由圖 6-3 可以得知系統的特徵方程式(6-11)，假設 $a=1$ ， $b=2$ 。

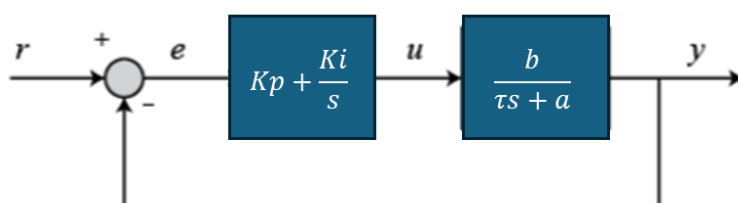


圖 6-3. 馬達閉回路系統方塊圖。

$$1 + Kp \frac{b(s + \frac{Ki}{Kp})}{s(s+a)} = 0 \quad (6-11)$$

先假設 $\frac{Ki}{Kp} = D$ ， D 必為一個定值，接者繪製 $K=b*KP$ 的根軌跡，如圖 6-4 所示。

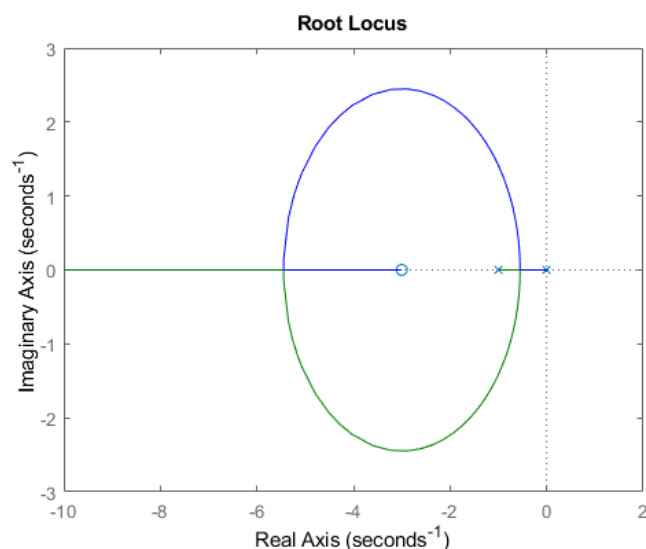


圖 6-4. 閉回路系統的根軌跡。

接下來分析根軌跡圖以了解系統的穩定性和性能。根據根軌跡的形狀和位置，可以推斷系統的穩定性以及其對不同控制器增益的響應。如圖 6-4 模擬所示，軌跡完全對稱系統才穩定，反之相反，而系統穩定時同時必須在藍色虛線左邊，而離虛線軌跡越來越遠系統頻寬越大，則響應越快，選擇 K 的參數則必須要選擇兩條軌跡接觸的點， K 值選擇的不同的比較結果請參考如圖 6-5 和圖 6-6 所示。

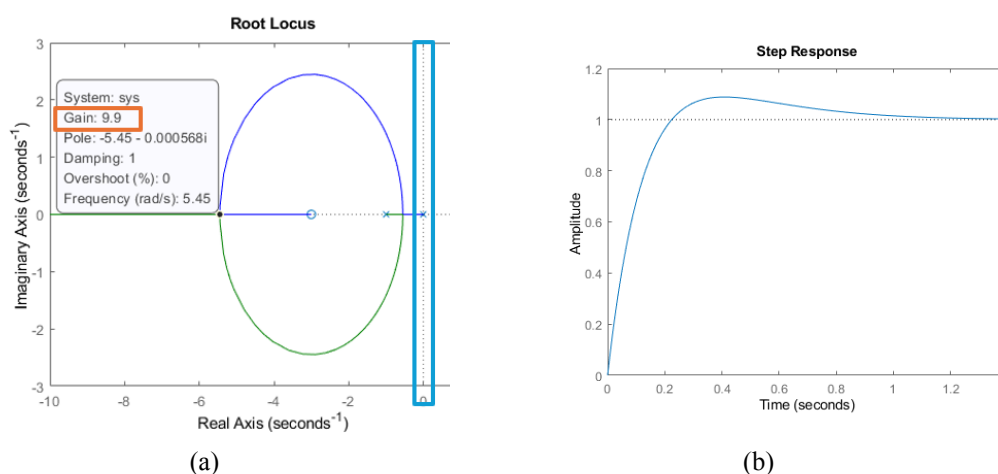


圖 6-5. (a) K 最佳的選擇， $K=9.9$ ；(b)為參考(a) K 值的步態響應。

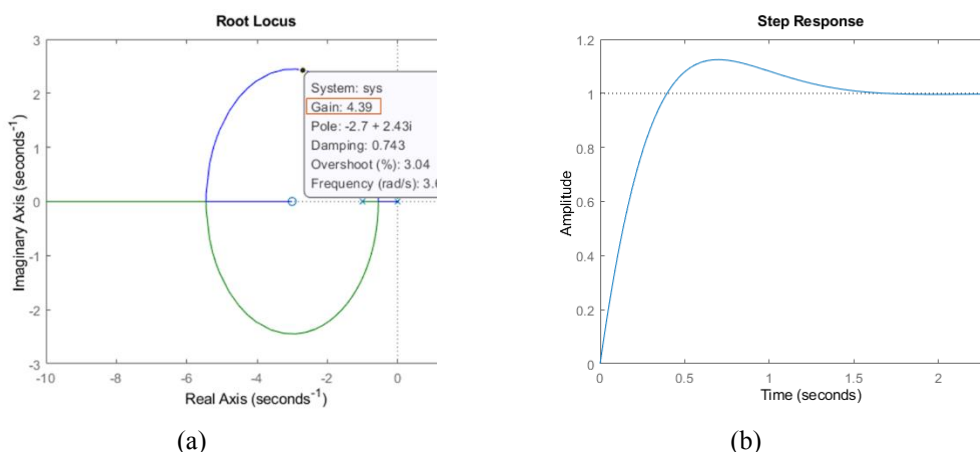


圖 6-6. (a)K 最佳的選擇，K=9.9；(b)為參考(a)K 值的步態響應。

藉由上面軌跡圖可以得知適合 K 值為 9.9，那這時根據式 (6-12) 和 (6-13)，可以得 $K_i=14.85$ ， $K_p=4.95$

$$K_p = \frac{K}{b} \quad (6-12)$$

$$K_i = K_p * D \quad (6-13)$$

PI 控制器根軌跡範例程式 (圖 6-6(a)和圖 6-7(a)程式)：

```
s=tf('s');
```

```
a=1; %為馬達的轉移函數  $K_p \frac{b(s+\frac{K_i}{K_p})}{s(s+a)}$ 。
```

```
b=2; %為馬達的轉移函數  $K_p \frac{b(s+\frac{K_i}{K_p})}{s(s+a)}$ 。
```

```
D=3; %假設  $k_i/k_p=D$  得值，這個為假定一個定值，注意沒有一定的決定，可看後面根軌跡的圖可以再調整。
```

```
sys = (s+D)/(s*(s+a)); %根軌跡系統  $\frac{(s+D)}{s(s+a)}$ 
```

```
figure(1);
```

```
rlocus(sys) %繪製根軌跡。
```

PI 控制器根軌跡帶入參數後模擬馬達系統響應範例程式 (圖 6-6(b)和圖 6-7(b)程式)：

```
figure(2);
```

```
K = 9.9; %為根軌跡找到參數，請參考圖 5-9(a)。
```

```
sys_cl = feedback(K*sys,1) %帶入參數進入特徵方程式。
```

```
step(sys_cl) %帶入步階輸入。
```

實驗 6-1【閉迴路直流馬達位置控制:PI 控制器】

1. 步驟

- (1) 調整零位調整器 (zero) 使馬達停止不動。
- (2) 依圖 6-7 接線，來實現圖 6-1 直流馬達位置控制系統方塊圖，此時 $C(s)$ 為 PI 控制器。
- (3) 輸入信號為步階+5V，調整 P5 至 10%跟 50%。
- (4) 以軟體 Matlab 模擬與驗證。

2. 請完成

- (1) 請繪出圖 6-7 之實際系統方塊圖。
- (2) 完成表 6-1。
- (3) 觀察示波器顯示之響應波形，並以軟體模擬。

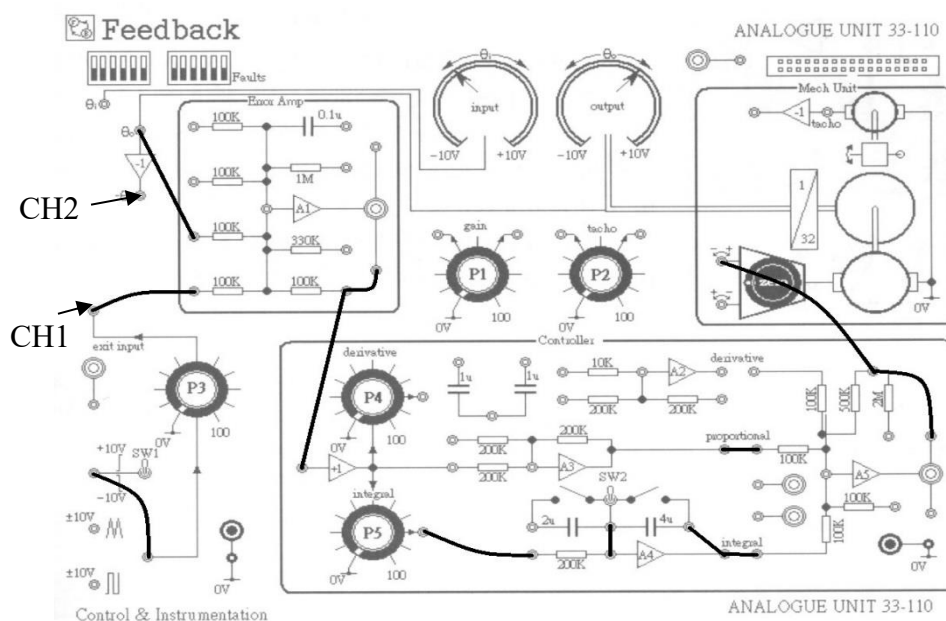


圖 6-7、PI 控制之直流馬達位置控制系統接線圖表

6-1 PI 控制對位置控制系統之影響

項目	衰減器 P5	響應穩態值 y_{ss} [V]	尖峰超越值 Δy [V]	最大超越量 M_p [%]	尖峰時間 t_p [s]	上升時間 t_r [s]	穩態誤差 e_{ss} [V]
實驗	10%	5.04	8.47	1.68	0.86	0.56	0
	50%	4.97	8.73	1.76	0.82	0.52	0
模擬	10%						0
	50%						0

實驗 6-2【閉迴路直流馬達位置控制:PID 控制器】

1. 步驟

- (1) 調整零位調整器 (zero) 使馬達停止不動。
- (2) 依圖 6-8 接線，來實現圖 6-1 直流馬達位置控制系統方塊圖，此時 $C(s)$ 為 PID 控制器。
- (3) 輸入信號為步階+5V，調整 P4 至 70% 跟 P5 至 50%。
- (4) 輸入信號為三角波+5V，調整 P4 至 70% 跟 P5 至 50%。
- (5) 觀察示波器顯示之響應波形，並以軟體模擬。

2. 請完成

- (1) 請繪出圖 6-8 之實際系統方塊圖。
- (2) 完成表 6-2。
- (3) 觀察示波器顯示之響應波形，並以軟體模擬與驗證。

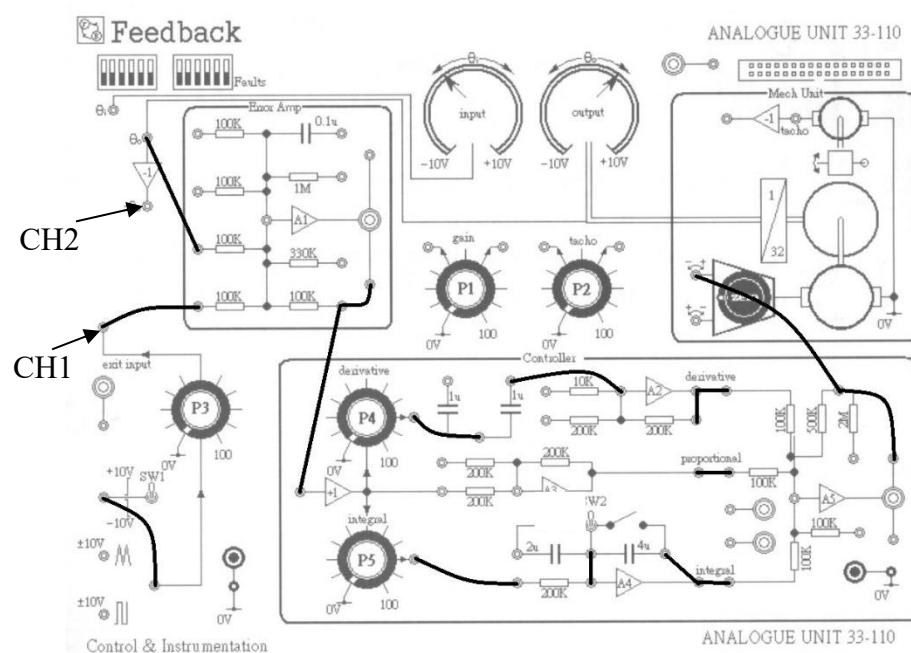


圖 6-8、PID 控制之直流馬達位置控制系統接線圖

表 6-2 PID 控制對位置控制系統之影響

項目	衰減器 P4	衰減器 P5	響應穩態 值 y_{ss} [V]	尖峰超越 值 Δy [V]	最大超越 量 M_p [%]	尖峰時間 t_p [s]	上升時間 t_r [s]	穩態誤差 e_{ss} [V]
實驗	70%	50%	5.45	5	0.917	0.67	0.52	0
模擬								0

§ 實驗 6-3 【閉迴路馬達控制:PI 控制根軌跡】

1. 步驟

- (1) 確定系統的開環傳遞函數：首先，需要知道控制系統的開環傳遞函數。這可以是從過去實驗的得知馬達轉移函數，請參考下圖 6-9 PI 控制器馬達閉迴路方塊圖。

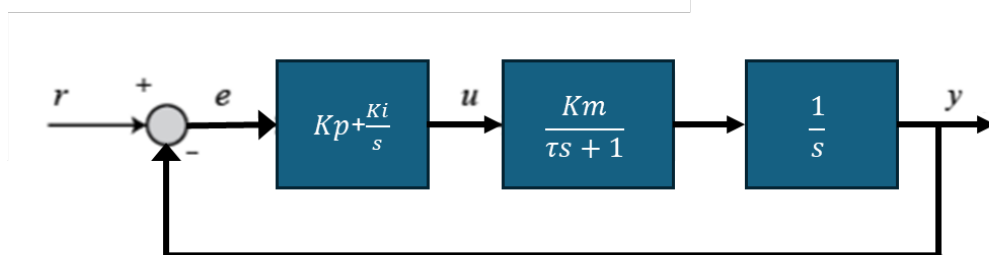


圖 6-9、PI 直流馬達速度控制系統接線圖

- (2) 繪製根軌跡圖：使用開環傳遞函數，繪製根軌跡圖。根軌跡圖顯示了系統的極點隨控制器增益的變化而移動的軌跡，請參考頁數 P 6-5 根軌跡程式。
- (3) 根據上一步驟的根軌跡圖抓到 K 值，在依(6-11)~式(6-13)，計算得出 K_p 和 K_i 。
- (4) 將上述參數帶入馬達模擬程式中驗證。

2. 請完成

- (1) 請寫出圖 6-9 之系統特徵方程式。
- (2) 完成圖 6-9 根軌跡圖，並附上程式碼。
- (3) 完成圖 6-9 根軌跡參數模擬圖，並附上程式碼，並比較和實驗 6-1 的 PI 控制器的軌跡。

§ 問題討論：

1. 繳交實驗結果(含:系統方塊圖、測量波形、填寫表格數值、模擬驗證)
2. 根據實驗的設計，請討論參數改變對 PI 與 PID 控制器，在輸入相同步階訊號的情況下，與輸出訊號的差異。