

# == 實驗 2 ==

## 一階系統步階響應分析及 熟悉馬達操作

探討步階穩態響應分析與直流馬達開迴路速度控制系統之數學模式的建立。

### 學習目標

1. 一階系統轉移函數之運算放大器電路製作。
2. 輸入信號與馬達穩態響應之關係。
3. 轉速計之特性。
4. 馬達穩態響應與負載之關係。

### 一階相關理論

單位步階函數如圖 2-1 所示，其數學表示如下：

$$r(t) = u_s(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2-1)$$

故單位步階函數之拉式轉換為

$$R(s) = \frac{1}{s} \quad (2-2)$$

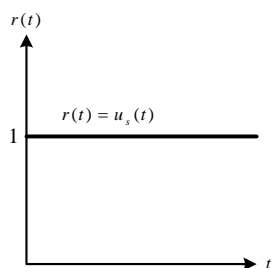


圖 2-1、單位步階函數

標準一階系統之轉移函數可表示為：

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + \tau s} \quad (2-3)$$

其中 $\tau$ 為時間常數且 $\tau > 0$ 。

當標準一階系統輸入為單位步階函數時，其方塊圖如圖 2-2 所示，其中輸出響應可表示為式 2-4。

$$Y(s) = \frac{1}{s(1+\tau s)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+(1/\tau)} \quad (2-4)$$

將式 2-4 取反拉式轉換，可得單位步階響應如式 2-5。

$$y(t) = 1 - e^{-t/\tau}, \quad t \geq 0 \quad (2-5)$$

下列為一階系統單位步階響應之重點：

(1) 一個時間常數 ( $t = \tau$ ) 之單位步階響應值為

$$y(t) = 1 - e^{-1} = 0.632, \quad t = \tau \quad (2-6)$$

(2) 單位步階響應之穩態值為

$$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-t/\tau}) = 1 \quad (2-7)$$

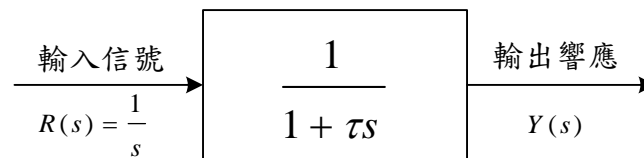


圖 2-2、標準一階系統之方塊圖

# 馬達相關理論

## 直流馬達

直流馬達系統架構如圖 2-3 所示。直流馬達之電氣方程式與機械方程式分別為式 2-8 及 2-9。

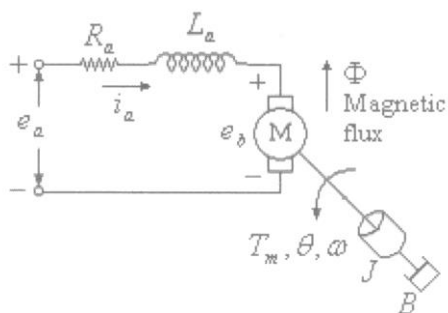


圖 2-3、直流馬達系統架構圖

$$e_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e_b(t) \quad (2-8)$$

$$T_m(t) = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + B \frac{d\theta}{dt} = k_i i_a(t) \quad (2-9)$$

其中  $e_a(t)$  為電樞電壓、 $i_a(t)$  為電樞電流、 $R_a$  為電樞電阻、 $L_a$  為電樞電感、 $e_b(t)$  為反電動勢、 $T_m$  為馬達力矩、 $J$  為轉動慣量、 $B$  為黏滯係數、 $\theta$  為馬達角度、 $k_i$  為馬達力矩與電樞電流的比值、 $k_b$  為反電動勢與馬達角速度的比值，其中  $e_b(t)$  可表示為式 2-10。

$$e_b(t) = k_b \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (2-10)$$

將式 2-8、式 2-9 及 2-10 作拉式轉換可得式 2-11、式 2-12 及式 2-13。

$$E_a(s) = (R_a + L_a s) I_a(s) + E_b(s) \quad (2-11)$$

$$T_m(s) = (Js^2 + Bs) \theta(s) = k_i I_a(s) \quad (2-12)$$

$$E_b(s) = k_b s \theta(s) \quad (2-13)$$

將式 2-12 及式 2-13 代入式 2-11，可得轉移函數為

$$\frac{\Theta(s)}{E_n(s)} = \frac{k_i}{s[(L_n s + R_n)(Js + B) + k_h k_i]} \quad (2-14)$$

式 2-14 之電樞電感值實際很小，故直流馬達角度位移與直流馬達輸入電壓之轉移函數可簡化為

$$\frac{\Theta(s)}{E_n(s)} = \frac{k_m}{s(1 + \tau s)} \quad (2-15)$$

其中

$$k_m = \frac{k_i}{R_a B + k_b k_i}, \text{ 直流馬達增益} \quad (2-16)$$

$$\tau = \frac{R_a J}{R_a B + k_b k_i}, \text{ 馬達時間常數} \quad (2-17)$$

由式 2-15 知，角速度與輸入電壓之轉移函數為

$$\frac{\Omega(s)}{E_n(s)} = \frac{k_m}{(1 + \tau s)} \quad (2-18)$$

將式 2-18 取反拉式轉換，當輸入電壓為增益  $A$  之步階函數時，其步階響應  $\omega(t)$  為

$$\omega(t) = Ak_m(1 - e^{-t/\tau}), \quad t \geq 0 \quad (2-19)$$

由終值定理，系統之穩態響應為

$$\omega_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = Ak_m \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-t/\tau}) = Ak_m \quad (2-20)$$

## 轉速計

轉速計又稱轉速發電機，其磁極是由永磁式磁鐵所構成的。當轉速計的轉軸旋轉時，會產生一個電動勢正比於轉速。其功能可作為直流馬達速度的感測器。其數學關係式為

$$\omega_{tss}(v) = k_{tachos} \omega(t) \quad (2-21)$$

式中  $k_{tachos}$  為轉速計之增益常數。轉速計之電壓與直流馬達速度成正比。

### 負載之影響

因為負載是由永磁式磁鐵所構成，位置越遠代表負載越輕。其數學關係式為

$$(2-22)$$

式中  $L_{load}$  為制動器負載， $k_{pos}$  為與制動器的位置有關之增益常數。因此藉由調整轉盤面接觸的距離來探討負載對直流馬達的影響。

## 實驗 2-1 【一階系統之步階響應分析】

### 1. 步驟

(1) 接線前需先整理轉移函數，以方便使用運算放大器電路完成一階系統。

單位一階系統轉移函數為：

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1/\tau}{s+1/\tau} \quad (2-23)$$

以直接展開法整理式 2-24 得式 2-25：

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(s^{-1} \times 1/\tau)X(s)}{(1+s^{-1} \times 1/\tau)X(s)} \quad (2-24)$$

其中

$$R(s) = (1 + s^{-1} \times 1/\tau)X(s) \quad (2-25)$$

整理 2-26 式可得：

$$X(s) = R(s) - \frac{1}{\tau} s^{-1} X(s) \quad (2-26)$$

將式 2-26 及式 2-24 以狀態圖表示，如圖 2-4，再將狀態圖繪成一階系統方塊圖，如圖 2-5。

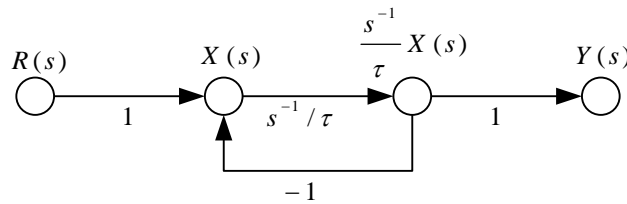


圖 2-4、單位一階系統狀態圖

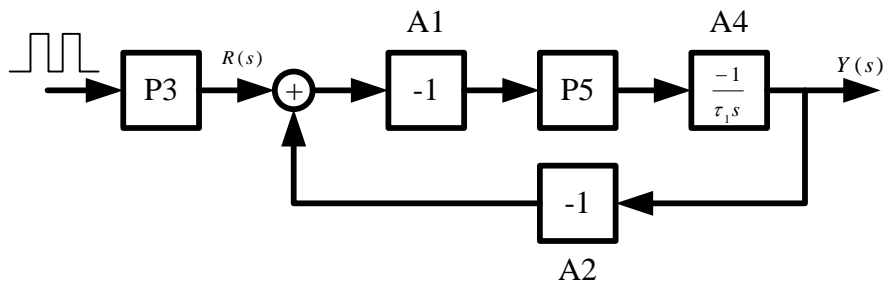


圖 2-5、單位一階系統方塊圖

$$\tau = \frac{\tau_1}{P5} \quad \tau_1 = RC = 2\mu \times 200K = 0.4sec$$

其中 P5 為衰減器 (0~100%)。依圖 2-6 接線。







表 2-2、輸入信號與直流馬達穩態響應之關係表

[illegible]

## 實驗 2-3 【負載與穩態響應之關係】

### 1. 步驟

- (1) 調整零位調整器 (zero) 使馬達停止不動，並將步階訊號經由 P3 接至零位調整器之輸入端，如圖 2-7。
- (2) 量測電壓，觀察七段顯示器上的轉速值。
- (3) 將機構單元上的負載控制拉桿改變位置，觀察七段顯示器上的轉速值。

### 2. 請完成

- (1) 請完成輸入信號為步階 (1V、3V、5V、7V、9V)，調整制動器控制拉桿位置，完成表 2-3。
- (2) 依表 2-3，利用 matlab 繪出 1.負載-穩態電壓；2. 負載-馬達轉速關係圖。

表 2-3、負載與直流馬達穩態轉速之關係表

電壓 \ 負載刻度		0	1	2	3	4	5	6
1V	穩態電壓 $\omega_{t,ss}(v)$							
	轉速 $\omega(rpm)$							
3V	穩態電壓 $\omega_{t,ss}(v)$							
	轉速 $\omega(rpm)$							
5V	穩態電壓 $\omega_{t,ss}(v)$							
	轉速 $\omega(rpm)$							
7V	穩態電壓 $\omega_{t,ss}(v)$							
	轉速 $\omega(rpm)$							
9V	穩態電壓 $\omega_{t,ss}(v)$							
	轉速 $\omega(rpm)$							

## 問題討論

1. 繳交實驗結果(含:測量波形、模擬驗證並繪製各量值間關係圖)
2. 請問機構單元直流馬達轉動軸與輸出轉軸之減速比為多少？為何需要減速？對直流馬達系統轉移函數有何影響？
3. 試述負載增加時，為何直流馬達之轉速會降低？