

DISZKRÉT MATEMATIKA I.

6. előadás

Kombinatorika: variációk, kombinációk

Kiválasztások

♣ Adott egy H halmaz, melyre $|H| = n$. Ebből kell kiválasztani k elemet.

A kiválasztás tulajdonságai:

- A sorrend számít vagy a sorrend nem számít;
- Egy elemet **többször is kiválaszthatunk** (visszatevéssel) vagy egy elemet **legfeljebb egyszer választhatunk ki** (visszatevés nélkül).

♣ Pl. $H = \{a, b, c\}$, $k = 2$

- Sorrend: **NEM**, visszatevés: **NEM**.

ab, ac, bc . (3 féle kiválasztás)

- Sorrend: **NEM**, visszatevés: **IGEN**.

aa, ab, ac, bb, bc, cc . (6 féle kiválasztás)

- Sorrend: **IGEN**, visszatevés: **NEM**.

ab, ac, ba, bc, ca, cb . (6 féle kiválasztás)

- Sorrend: **IGEN**, visszatevés: **IGEN**.

$aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$. (9 féle kiválasztás)

♣ Adott egy H halmaz, melyre $|H| = n$. Ebből kell kiválasztani k elemet.

A kiválasztás tulajdonságai:

- A sorrend számít: **VARIÁCIÓ** vagy
a sorrend nem számít **KOMBINÁCIÓ**;
- Egy elemet többször is kiválaszthatunk (visszatevéssel) **ISMÉTLÉSES** vagy
egy elemet legfeljebb egyszer választhatunk ki (visszatevés nélkül) **ISMÉTLÉS NÉLKÜLI**.

♣ Pl. $H = \{a, b, c\}$, $k = 2$

- Sorrend **nem**, visszatevés **nem**: KOMBINÁCIÓ.

$ab, ac, bc.$

- Sorrend **nem**, visszatevés **igen**: ISMÉTLÉSES KOMBINÁCIÓ.

$aa, ab, ac, bb, bc, cc.$

- Sorrend **igen**, visszatevés **nem**: VARIÁCIÓ.

$ab, ac, ba, bc, ca, cb.$

- Sorrend **igen**, visszatevés **igen**: ISMÉTLÉSES VARIÁCIÓ.

$aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc.$

Kombinációk

TÉTEL. n különböző elem összes kombinációinak száma

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}.$$

♣ Pl. *Hányféleképpen lehet kitölteni egy lottószelvényt?*



Megoldás. 90 számból kell kiválasztani 5-t.

KOMBINÁCIÓ, mert

- a sorrend nem számít,
- ismétlés nincs.

A kombinációk száma:

$$\binom{90}{5} = \frac{90!}{5! \cdot 85!} = 43\,949\,268.$$

Ismétléses kombinációk

TÉTEL. n különböző elem összes ismétléses kombinációinak száma

$$\binom{n + k - 1}{k}.$$

♣ Pl. *Hányféleképpen
fagyit venni, ha 10 féle*



*lehet háromgombócos
fagyiból választhatunk?*

Megoldás. A 10 féle fagyiból kell kiválasztani 3-at.

ISMÉTLÉSES KOMBINÁCIÓ, mert

- a sorrend nem számít,
- ismétlés lehet.

Az ismétléses kombinációk száma:

$$\binom{10 + 3 - 1}{3} = \binom{12}{3} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = 220.$$

Variációk

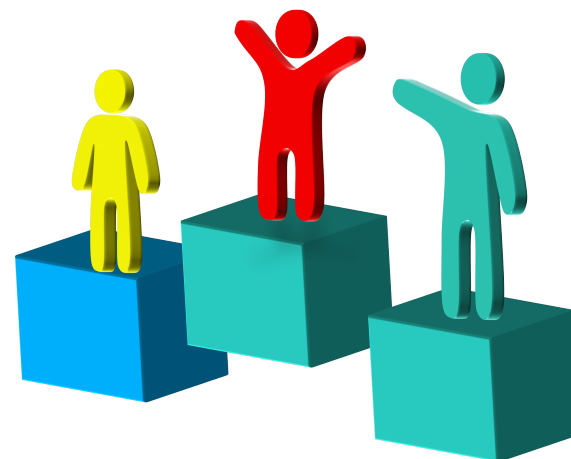
TÉTEL. n különböző elem összes variációinak száma

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1) \cdots (n-k+1).$$

♣ Pl. A második Tokiói Olimpián (2020)

a 100 m-es férfi síkfutás döntőjébe

8 versenyző jut majd be.



Hányféleképpen kerülhet ki az arany-, az ezüst, és a bronzérmes?

Megoldás. A 8 versenyzőből kell kiválasztani 3-at.

VARIÁCIÓ, mert

- a sorrend számít,
- ismétlés nem lehet.

A variációk száma:

$$\frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

Ismétléses variációk

TÉTEL. n különböző elem összes ismétléses variációinak száma

$$n^k.$$

♣ Pl. Hányféleképpen lehet kitölteni egy totószelvényt?

IGAZOLÓ SZELVÉNY
(A fogadónál marad)

..... hét
B 95 329 780

Sor-szám	1	X	2	1. csapat	2. csapat
1.					
2.					
3.					
4.					
5.					
6.					
7.					
8.					
9.					
10.					
11.					
12.					
13.					

Pótmérkőzések

14.				
15.				
16.				

Indexszám db
típoszlop árának Ft f.,
azaz Ft f.
fíllérnek az átvételét igazolom.

ELLENŐRZŐ SZELVÉNY
(Egybefüggően küldendő be)

..... hét
B 95 329 780

Sor-szám	1	X	2
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
7.			
8.			
9.			
10.			
11.			
12.			
13.			

Pótmérkőzések

14.			
15.			
16.			

Indexszám db
típoszlop árának Ft f.
nek a befizetését igazolom.

FOGADÁSI SZELVÉNY

..... hét
B 95 329 780

Sor-szám	1	X	2
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
7.			
8.			
9.			
10.			
11.			
12.			
13.			

Pótmérkőzések

14.			
15.			
16.			

Indexszám db
típoszlop árának Ft f.
nek a befizetését igazolom.

A típoszlopokénti részvételi díj a kéthasábos típoszlop részvételi díjának 50%-a

itt kell leválasztani!

Megoldás. Az $\{1, 2, x\}$ halmazból kell kiválasztani 14-et.

ISMÉTLÉSES VARIÁCIÓ, mert

- a sorrend számít,
- ismétlés lehet (sőt most kell is).

Az ismétléses variációk száma:

$$3^{14} = 4\,782\,969.$$

♣ Pl. Egy 32 fős osztályban 5 jutalmat osztanak ki. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha

a) a jutalmak különbözőek és egy ember legfeljebb egy jutalmat kaphat,

b) a jutalmak különbözőek és egy ember több jutalmat is kaphat,

c) a jutalmak egyformák és egy ember legfeljebb egy jutalmat kaphat,

d) a jutalmak egyformák és egy ember több jutalmat is kaphat?

- a jutalmak különbözőek és egy ember legfeljebb egy jutalmat kaphat:

$$\frac{32!}{(32 - 5)!} = \frac{32!}{27!} = 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24\,165\,120,$$

- a jutalmak különbözőek és egy ember több jutalmat is kaphat:

$$32^5 = 33\,554\,432,$$

- a jutalmak egyformák és egy ember legfeljebb egy jutalmat kaphat:

$$\binom{32}{5} = 201\,376,$$

- a jutalmak egyformák és egy ember több jutalmat is kaphat:

$$\binom{32 + 5 - 1}{5} = \binom{36}{5} = 376\,992.$$

VERSENY