Véletlen folyamatok, Markov folyamatok diszkrét és folytonos idővel

Véletlen folyamatok

- **Véletlen kisérlet** (experiment) kisérlet, ami eredménye nincs egyértelműen meghatározva az adott feltételek mellett.
- **Véletlen esemény –** véletlen kisérlet eredménye.
- **Elemi esemény-** véletlen esemény adott kísérlet esetén az egymást kölcsönösen kizáró lehetséges ω kimeneteleket elemi eseményeknek.
- Az összes elemi esemény (nem üres) Ω halmazát **eseménytérnek** nevezzük. Ha az Ω eseménytér véges, vagy megszámlálhatóan végtelen sok elemből áll, akkor azt mondjuk, hogy az elemi eseménytér **diszkrét**.
- Ha $\Gamma \subset \Omega$ - eseménynek nevezzük.
- Az eseménytér lehet véges, megszámolhatóan végtelen – **diszkrét** vagy megszámlálhatatlanul végtelen – **folytonos.**

Valószínűségi mező

- Adott a nem üres megszámlálható Ω, elemi események tere (eseménytér).
- $\Gamma \subset 2^{\Omega}$ – események halmaza
- $P: \Gamma \rightarrow <0;1>$ valószínőség-eloszlás
- Jelölje (Ω, Γ, P) alap valószínőségi mező

Valószínőségi változó

- A véletlen kísérletek elvégzése során a kísérlet eredményeképp általában valamilyen számérték jelenik meg.
- A bekövetkező ω elemi esemény egy a véletlentől függő $X(\omega)$ számértéket eredményez.

- **Definíció.** Egy Ω-n értelmezett $X(\omega)$ valós függvényt – vagyis egy olyan függvényt, amely minden ω elemi eseményhez egy valós számot rendel – **valószínőségi változónak** nevezünk, ha tetszőleges x valós szám esetén $\{\omega: X(\omega) < x\} \in \Gamma$, vagyis az $\{\omega: X(\omega) < x\}$ halmaz esemény. Ez utóbbi halmazt szokás az x értékhez tartozó **nívóhalmaznak** is nevezni.

Valószínűségi változó

- Definíció: Az X valószínűségi változó ***diszkrét***, ha az értékkészlete véges vagy megszámlálhatóan végtelen.
- Definíció: Ha az X diszkrét valószínűségi változó értékkészlete $x_1, x_2, \ldots$, akkor a $p_i = P(X = x_i)$, i=1, 2,… számokat X ***eloszlás***ának nevezzük.
- Megjegyzés: Véges vagy végtelen sok szám, akkor és csak akkor alkot diszkrét eloszlást, ha nem negatívak és az összegük 1.
- Definíció: Az $F(x) = P(X < x), -\infty < x < \infty$ függvényt az X vallószínúségi változó *eloszlásfüggvényének* nevezzük.
- Diszkrét esetben $F(x) = \sum_{x_i < x} p_i, -\infty < x < \infty$.
-

Valószínűségi változó

Definíció: Azt mondjuk, hogy egy X vallószínűségi változó *folytonos*, illetve *folytonos eloszlású*, ha létezik olyan nemnegatív integrálható *szűrűségfüggvény* $f(x), -\infty < x < \infty$, hogy tetszőleges $-\infty < a < b < \infty$ számok esetén érvényes $F(b) - F(a) = \int_a^a f(x)\,dx.$ $\left(P(a \le X \le b)\right)$

Ekkor $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx, -\infty < x < \infty.$

Valószínűségi változó

Definíció: Legyen az X diszkrét vallószínűségi változó amely véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok $\{x_1, x_2, ...\}$
értéket vehet fel $p_i = P(X = x_i), i = 1, 2, ...$ $vallószínűség - eloszlással$. Azt mondjuk, hogy az $X - nek$ létezik várható értéke és az $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$.

Folytonos eloszlás esetén

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Valószínűségi változó

<u>*Péda 1*</u>*:* Egy úrnában két piros, öt sárga és egy fehér golyó található. Az úrnából két golyót húzunk ki. X(ω) valószínűségi változó két értékkel:

2 – két golyó azonos színű

0 – két golyó nem azonos színű

Elemi események száma 3.2-1=5

Lehetőségek száma $\binom{8}{2} = 28$

Eloszlások $p_0 = P(X = 0) = \frac{17}{28}$

$p_1 = P(X = 2) = \frac{11}{28}, \text{ piros } \binom{2}{1} = 1, \text{ sárga } \binom{5}{2} = 10$

Valószínűségi változó

Példa 2: A félvezető gyártási folyamatában két adaglapot vizsgálunk. Minden lap osztályozva van mint megfelelő (M) vagy nem megfelelő (N).

M-0,8; N-0,2

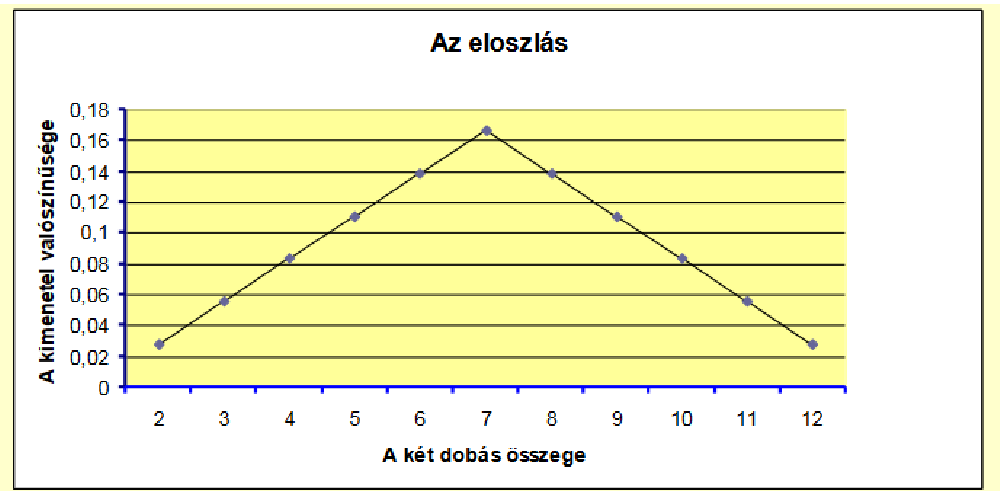
X(ω) – megfelelő lemezek száma

Ω	MM	NM	MN	NN
p	0,8.0,8=0.64	0,16	0,16	0,04
X	2	1	1	0

Valószínűségi változó

- *Példa 3:* Dobáljunk fel két kockát! Adjuk össze a dobott számokat!

A+B	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12



Diszkrét egyenletes eloszlás

- Legyen az *X* valószínőségi változó diszkrét, melynek lehetséges értékei **X** = $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$, *n* valamilyen pozitív szám (lehet végtelen).
- *X* eloszlása egyenletes, ha

$$p_k = P(X = x_k) = \frac{1}{n}, 1 \leq k \leq n$$

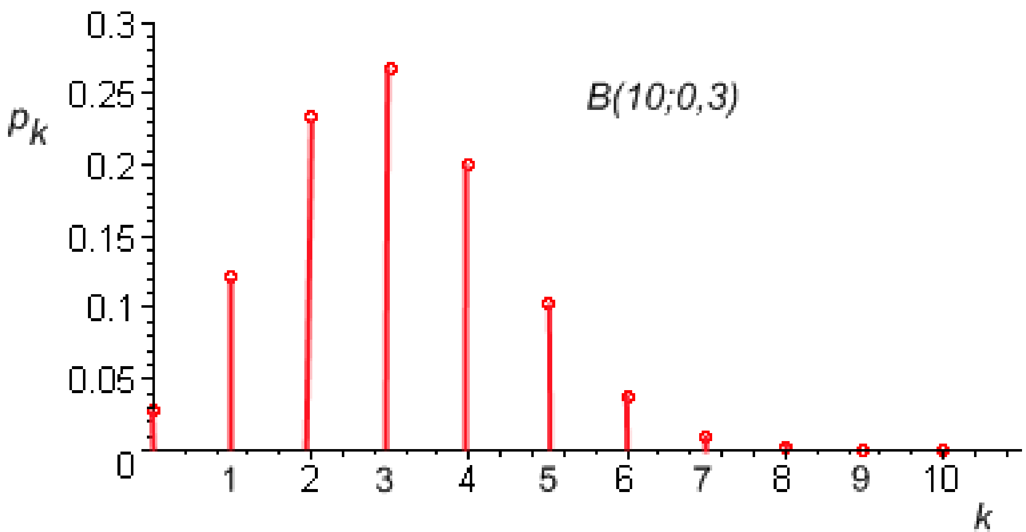
BINOMIÁLIS ELOSZLÁS

- Tekintsünk egy n megfigyelésből álló kísérletet, melynek során azt nézzük, hogy egy bizonyos $\boldsymbol{A}$ esemény hányszor következik be.
- Jelölje ennek számát az X valószínűségi változó.

- Tegyük fel, hogy $p = P(A)$, $0 < p < 1$.
- Ekkor annak valószínűsége, hogy a kísérlett során az A esemény pontosan k-szor következzen be, éppen

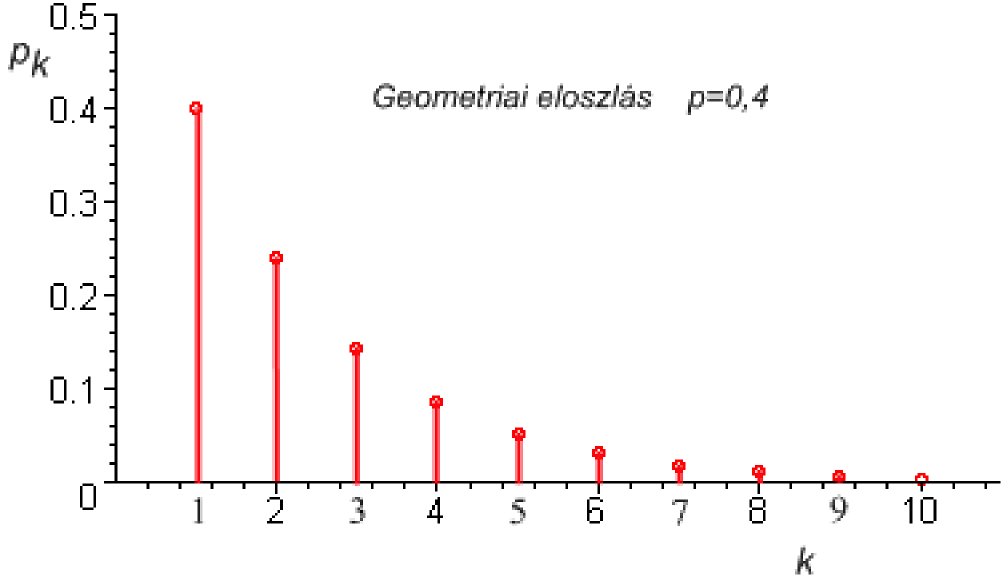
BINOMIÁLIS ELOSZLÁS

$$p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, \ldots n$$



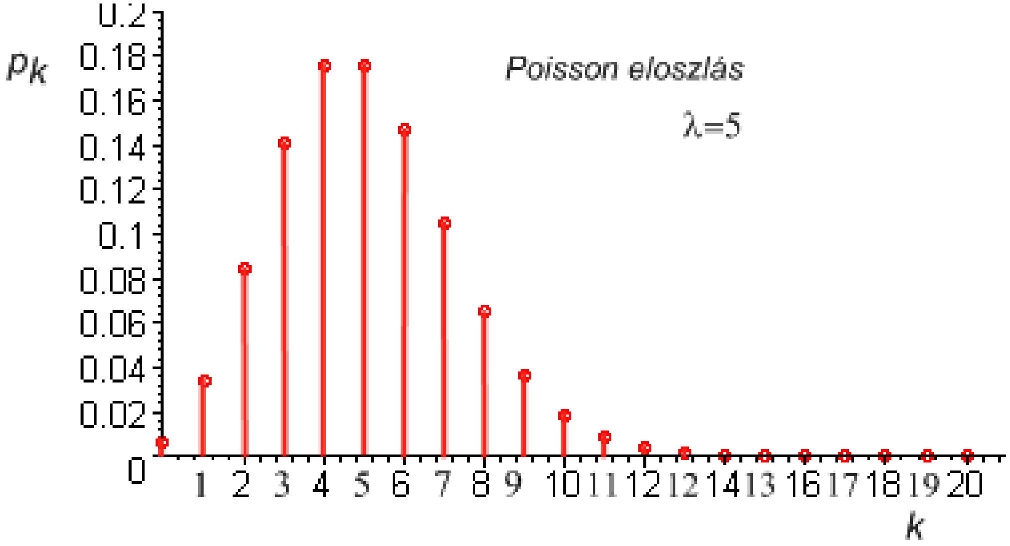
GEOMETRIAI ELOSZLÁS

$$p_k = P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, k = 1, \ldots n$$



POISSON-ELOSZLÁS

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, \ldots n, \lambda > 0$$



EGYENLETES ELOSZLÁS

- Legyen $a < b$ két tetszőleges valós szám. Azt mondjuk, hogy az X valószínőségi változó eloszlása egyenletes az (a,b) intervallumon, ha az $f(x)$ sűrűségfüggvénye létezik és fennáll

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, x \in (a,b) \\ 0, x \notin (a,b) \end{cases}$$

EXPONENCIÁLIS ELOSZLÁS

- az X valószínőségi változó sűrűségfüggvénye

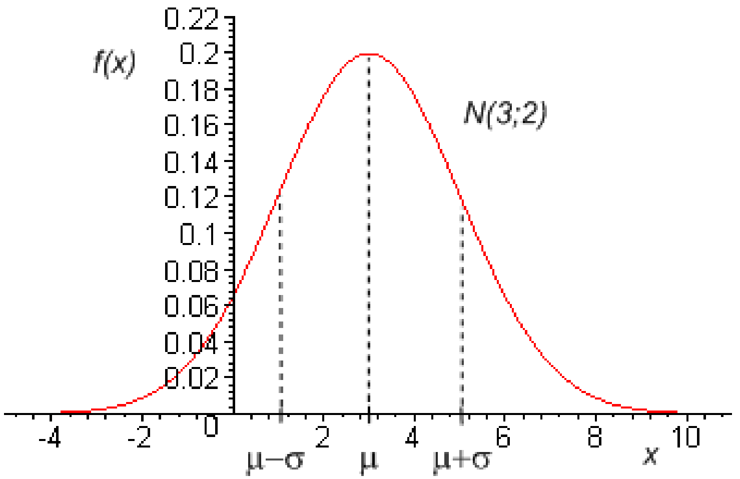
$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0 \\ 0, x<0\end{cases}$$

NORMÁLIS ELOSZLÁS

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}}$$

$\mu - középérték$

$\sigma - szórás$



Véletlen folyamatok

T⊂R, (Ω, Γ , P) alap valószínőségi mező

$$\left\{X(t,\omega): t \in T, \omega \in \Omega\right\}$$

valószínűségi változók halmazát **véletlen folyamatnak** nevezzük. A "t" változó az idő.

T megszámlálható X(t) (X(t,ω)) véletlen folyamat diszkrét idő.

T megszámlálhatatlan X(t) véletlen folyamat folytonos idő.

Véletlen folyamatok

Jelöljük $p_0(t)$ annak valószínűségét, hogy az esemény nem következik be a t időintervallumában.

Érvényes 1. $p_0(0) = 1$

2. $p_0(s+t) = p_0(s).p_0(t)$

– az esemény nem fordul elő a t + s intervallumban csak akkor, ha nem fordul elő t időintervallumban, és nem fordul elő s időintervallumban sem.

a) az események függetlenek
b) az események homogének

Véletlen folyamatok

Tétel: Feltételezzük, hogy a $p_0 : \langle 0, \infty) \to R^+$ függvény nemnegatív csökkenő a következő tulajdon–ságokkal: 1. $p_0(0) = 1$

2. $p_0(s+t) = p_0(s).p_0(t), \forall t, s \geq 0$

Akkor érvényes: $p_0(t) = e^{-\lambda t}$

<u>Bizonyítás</u>: Jelöljük $\lambda = -\ln p_0(1)$

$$p_0(k) = p_0(1+k-1) = p_0(1)p_0(k-1) = \underbrace{p_0(1)\ldots p_0(1)}_{k-szer}$$

$$p_0(1) = p_0\left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\right) = p_0\left(\frac{1}{n}\right)p_0\left(\frac{n-1}{n}\right) = \underbrace{p_0\left(\frac{1}{n}\right)\ldots p_0\left(\frac{1}{n}\right)}_{n-szer}$$

Véletlen folyamatok

$$p_0\left(\frac{1}{n}\right) = \left(p_0(1)\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$p_0\left(\frac{k}{n}\right) = p_0\left(\frac{1}{n} + \frac{k-1}{n}\right) = p_0(1)^{\frac{1}{n}} p_0\left(\frac{k-1}{n}\right) = p_0(1)^{\frac{k}{n}} = e^{-\lambda\frac{k}{n}}$$

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Véletlen folyamatok

Az a valószínűség, hogy legalább egy esemény van a t intervallumban

$$1 - p_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Más szóval, ez a valószínűsége, hogy a két esemény τ közötti időtartam hossza $\tau \le t$

Az átlagértéket megadjuk

$$E(\tau) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\left(E(\tau) = \int_0^\infty \tau \frac{d}{d\tau}\left(1 - e^{-\lambda\tau}\right) d\tau \right)$$

Markov-lánc

Legyen az X(t) rendszer a valószínűségi változók rendszere ami a t paraméter függ $t \in T$, ahol

$$T = R, R^{+}, Z, Z^{+}$$

vagy részhalmaz.

Jelöljük S az X(t) értékeit. Az S lehet véges, végtelenül számolható.

Markov lánc

Definiáljuk a X(t) (t=0,1,2,...)(tϵT) valószínűségi változókat úgy, hogy X(t)=i (s_i), ha az t-edik kísérletnél az s_i esemény fordul elő. Független kísérletek esetén érvényes, hogy

$\forall s_j \in S$ és $\forall t_j \in T$ ahol $t_0 < t_1 < \ldots < t_m$

$$P\left(X(t_m) = s_m \middle| X(t_{m-1}) = s_{m-1} \middle| X(t_{m-2}) = s_{m-2} \ldots. \middle| X(t_0) = s_0 \right) = P\left(X(t_m) = s_m \right)$$

Markov lánc

Definíció: Véletlen folyamatot $\{X(t)\}_{t\in T}$ az S értékkészlettel Markov láncnak nevezzük, ha

$\forall s_j \in S$ és $\forall t_j \in T$ ahol $t_0 < t_1 < \ldots < t_m$

$$P\big(X(t_m) = s_m \mid X(t_{m-1}) = s_{m-1} \mid \ldots \mid X(t_0) = s_0\big) =$$

$$= P\big[X(t_m) = s_m \mid X(t_{m-1}) = s_{m-1}\big]$$

Markov lánc homogén, ha $\forall s_i, s_j \in S$ és $\forall t, \tau \in T$ érvényes:

$$P\big(X(t) = s_i \mid X(\tau) = s_j\big) =$$

$$= P\big(X(t+h) = s_i \mid X(\tau + h) = s_j\big)$$

Markov lánc diszkrét idővel és az állapotok véges halmazával

S véges $S=\{s_0,s_1,\ldots,s_n\}$ $S=\{0,1,2,\ldots,n\}$, $T=Z,Z^+$

Jelöljük az átmenetvalószínűségeket

$$p_{ij}(t)=P\left(X(t+\tau)=j\mid X(\tau)=i\right)\quad t,\tau\in T;0\le i,j\le n$$

A lánc homogén, így $p_{ij}(t+h)=p_{ij}(t)$ tetszőleges h értékre, tehát p_{ij} állandók.
Érvényes:

$$0\le p_{ij}\le 1\qquad \sum_{j=0}^{n}p_{ij}=1,\ i=0,\ldots,n$$

Jelöljük

$$p_i(t_0)=P\left(X(t_0)=i\right)\quad i=0,1,\ldots,n$$

Markov lánc diszkrét idővel és az álapotok véges halmazával

Jelöljük $p(t_0) = \left(p_0(t_0), p_1(t_0), \ldots, p_n(t_0)\right)$

$$p(t_0+1) = \left(p_0(t_0+1), p_1(t_0+1), \ldots, p_n(t_0+1)\right)$$

valószínűségeloszlás

Érvényes: $p_j(t_0+1) = \sum_{i=0}^{n} p_i(t_0).p_{ij}$

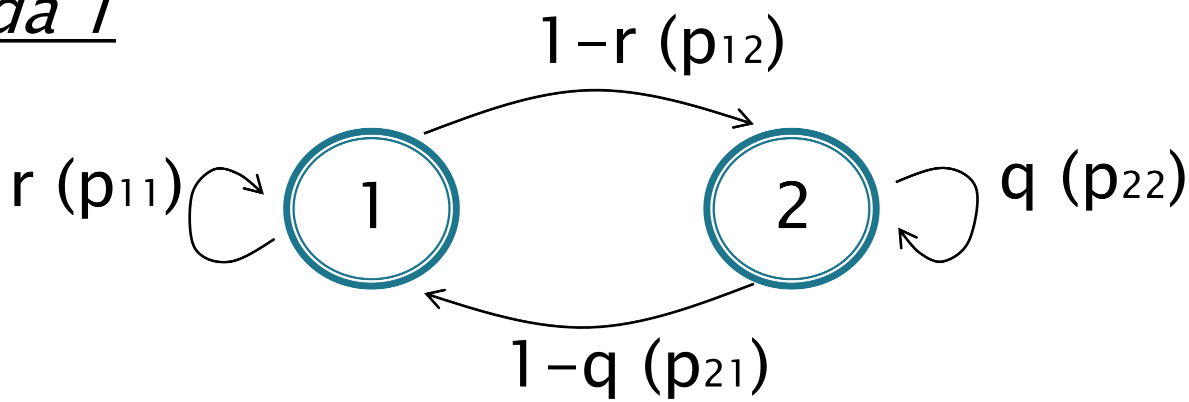
$$p_j(t_0+1) = p(t_0).PP, \text{ ahol}$$

$$PP = \left(p_{ij}\right)_{i,j=0}^{n}; \text{ átmenetvalószínűség matrix és}$$

$$p(t_0+2) = p(t_0)PP^2, p(t) = p(t_0)PP^{t-t_0}$$

Markov lánc diszkrét idővel és az álapotok véges halmazával

Példa 1



	B	N
B	0,6	0,4
N	0,3	0,7

$$p_B(t+1) = p_B(t).\overset{0,6}{p_{11}} + p_N(t).\overset{0,3}{p_{21}}$$

$$p_N(t+1) = p_B(t).\underset{0,4}{p_{12}} + p_N(t).\underset{0,7}{p_{22}}$$

Markov lánc diszkrét idővel és az álapotok véges halmazával

Példa 2 : Választási preferenciák

	R	D	I
R	0,75	0,05	0,2
D	0,2	0,6	0,2
I	0,4	0,2	0,4

Markov lánc diszkrét idővel és az állapotok véges halmazával

<u>Definíció:</u> A Markov lánc tranzitív, ha tetszőleges állapotból eljuthatunk tetszőleges álapotba, i.e.

$$\forall i, j \in S \quad p_{i,j} > 0$$

<u>Tétel:</u> Ha a $\{X(\mathrm{t})\}_{t\in T}$ tranzitív Markov–lánc. Akkor létezik olyan valószínűségeloszlás π,

$$\pi = (\pi_0, ..., \pi_n), \text{ kde } \pi_i > 0, \; i = 0, ...n,$$

amire érvényes

$$\pi = \pi P \qquad \lim_{t\to\infty} p_0 P^t = \pi$$

minden p_0 kezdeti valószínűségelosztásra.

Perron–Frobenius theorem

eigenvector of the positive matrix A.

The Perron–Frobenius theorem tells us when this problem has a solution, as follows.

THEOREM. *If the (nontrivial) matrix A has nonnegative entries, then there exists an eigenvector* $\mathbf{r}$ *with nonnegative entries, corresponding to a positive eigenvalue* λ. *Furthermore, if the matrix A is irreducible, the eigenvector* $\mathbf{r}$ *has strictly positive entries, is unique and simple, and the corresponding eigenvalue is the largest eigenvalue of A in absolute value (i.e., is equal to the spectral radius of A).*

Markov lánc diszkrét idővel és az álapotok véges halmazával

p=p.P

$1=p_0+p_1+\ldots+p_n$

O=(0, ...,0)

O=p(P−I)

$$(0,0,\ \ldots,0)_{(n+1)} = (p_0,\ldots,p_n)\begin{pmatrix} p_{00}-1 & & \cdots & p_{0n} \\ p_{10} & p_{11}-1 & \cdots & p_{1n} \\ & \vdots & & \\ p_{n0} & p_{n1} & \cdots & p_{nn}-1 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

$$(1,0,\ldots,0,0)_{(n+1)} = (p_0,\ldots,p_n)\begin{pmatrix} 1 & p_{01} & \cdots & p_{0n} \\ 1 & p_{11}-1 & \cdots & p_{1n} \\ & \vdots & & \\ 1 & p_{n-1,1} & \cdots & p_{n-1,n} \\ 1 & p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

Lineáris egyenletrendszert oldunk, eredmény $\pi=(\pi_0,\ldots,\pi_n)>0$

Markov lánc – Page Rank

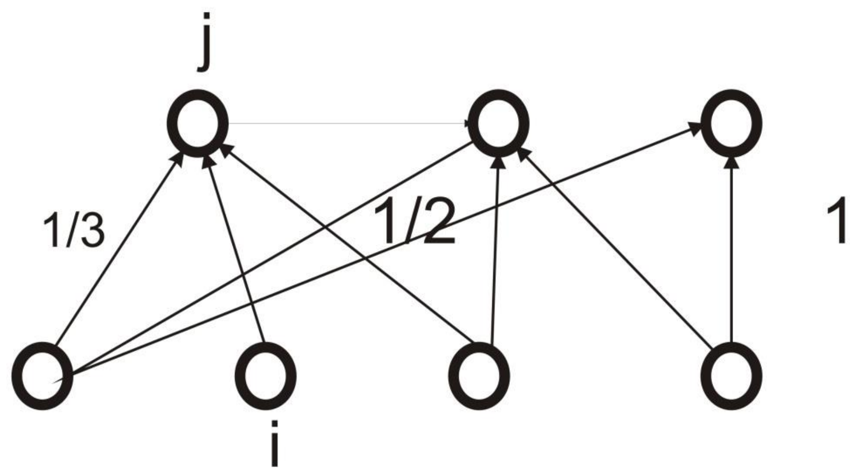
N - weboldal

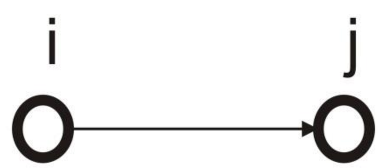
A_{NxN} – mátrix

Az 'i' weboldalon n link van

$$A(i, j) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{ak j} \leftarrow \text{ i} \\ & 0 \end{cases}$$

Érvényes $\sum_{j=1}^{N} A(i, j) = 1, A(i, j) \geq 0$





A(i,j)=1/n, j<--i

A(i,j)=0

Markov lánc – Page Rank

Jelöljük $\pi = \lim_{m \to \infty} pA^m$, ahol $p = (\frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N})$.

Ha $\pi = \pi A$.

Az $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_N)$ vektort fontossági vektornak nevezzük (rank-vector). Az 'i' weboldal értéke π_i.

Markov lánc – Page Rank

$$B_{NxN} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1/N & 1/N & \dots & 1/N \\ 1/N & 1/N & \dots & 1/N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/N & 1/N & \dots & 1/N \\ 1/N & 1/N & \dots & 1/N \end{pmatrix}_{NxN} + (1-\varepsilon)A_{NxN}$$

Tranzitív Markov lánc (Tétel 17. oldal)

Markov–típusú folyamatok (folytonos idő)

- Tekintsük a **t** paraméter a **T** véges vagy végtelen intervallumba eső értékeire értelmezett valós **X(t)** valószínűségi változók összeségét

$$\{X(t)\}_{t \in T}$$

- az **S** megszámlálható sok állapottal.

Markov–típusú folyamatok (folytonos idő)

<u>Definíció</u>: Véletlen folyamatot $\{X(t)\}_{t\in T}$ az S megszámlálható állapottér Markov folyamatnak nevezzük, ha

$\forall s_j \in S$ és $\forall t_j \in T$ ahol $t_0 < t_1 < \ldots < t_m$

$$P\big(X(t_m) = s_m \mid X(t_{m-1}) = s_{m-1} \mid \ldots \mid X(t_0) = s_0\big) =$$

$$= P\big[X(t_m) = s_m \mid X(t_{m-1}) = s_{m-1}\big]$$

Markov lánc homogén, ha $\forall s_i, s_j \in S$ és $\forall t, \tau \in T$ érvényes:

$$P\big(X(t) = s_i \mid X(\tau) = s_j\big) =$$

$$= P\big(X(t+h) = s_i \mid X(\tau+h) = s_j\big)$$

Markov–típusú folyamatok átmenetvalószínűségek

$$p_{ij}\left(t\right) = P\left(X(\tau + t) = j \mid X(\tau) = i\right)$$

Átmenetvalószínűségeket, amelyek nem föggenek τ időtől és érvényes

$$0 \le p_{ij}(t) \le 1; \quad \sum_{j=0}^{n} p_{ij}(t) = 1,$$

PP(t) – átmenetvalószínűségek mátrixa

Minden $t, s \ge 0$ érvényes a *Chapman–Kolmogorov*–egyenlet

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{n} p_{ik}(t)\, p_{kj}(s)$$

Markov–típusú folyamatok

Érvényes $p_j(t)=\sum_{i=0}^{n} p_i(0)\,p_{ij}(t)$ és $\frac{d}{dt}\sum_{j=0}^{n} p_{ij}(t)=0$

Definíció: Az $\{X(t)\}_{t\in T}$ Markov folyamat folytonos idővel és véges S halmazzal. Akkor minden esetén definiáljuk az átmenet intenzitását az **i** állapotból a j állapotba

$$\lambda_{ij}=\lim_{t\to 0+}\frac{p_{ij}(t)-p_{ij}(0)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{p_{ij}(t)-\delta_{ij}}{t},\ i,j=0,\dots,n,\ i\neq j \text{ ahol}$$

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

Markov-típusú folyamatok

kimenet intenzitás az i állapotból

$$\lambda_{ii} = \lim_{t\to 0+} \frac{p_{ii}(t)-1}{t},\ i = 0,\ldots,n.$$

Mivel $\sum_{j=0}^{n} p_{ij}(t) = 1$ érvényes

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\sum_{j=0}^{n} p_{ij}(t) - 1}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{p_{i0}(t)}{t} + \ldots + \lim_{t\to 0+} \frac{p_{ii-1}(t)}{t} + \lim_{t\to 0+} \frac{p_{ii}(t)-1}{t} +$$

$$\lim_{t\to 0+} \frac{p_{ii+1}(t)}{t} + \ldots + \lim_{t\to 0+} \frac{p_{in}(t)}{t} = \sum_{j=0}^{n} \lambda_{ij} = 0$$

Markov–típusú folyamatok

$Chapman-Kolmogorov-egyenlet$ alapján kapjuk

$$\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h}=\frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{n}p_{ik}(t)p_{kj}(h)\right)-\frac{1}{h}p_{ij}(t)=$$

$$\left(\sum_{k=0,k\neq i}^{n}p_{ik}(t)\frac{p_{kj}(h)}{h}\right)-p_{ij}(t)\frac{1-p_{ii}(h)}{h}$$

$\frac{d}{dt}p_{ij}(t)|_{t=0^{+}}=\sum_{k=0}^{n}p_{ik}(t)\lambda_{kj}$. Mivel $p_k(t)=\sum_{i=0}^{n}p_i(0)p_{ik}(t)$

tehát $\frac{d}{dt}p_j(t)=\sum_{i=0}^{n}p_i(0)\frac{d}{dt}p_{ij}(t)=\sum_{i=0}^{n}p_i(0)\sum_{k=0}^{n}p_{ik}(t)\lambda_{kj}=$

$$\sum_{k=0}^{n}\lambda_{kj}\sum_{i=0}^{n}p_i(0)p_{ik}(t)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_{kj}p_k(t).$$

Markov–típusú folyamatok

Veta: Adott az $\{X(t)\}_{t\in T}$ Markov folyamat folytonos idővel és véges S állapotok halmazával.
Akkor minden $j \in S$ esetében a $p_j(t)$ valószínűségeloszlások a következő lineáris diferenciálegyenletek (Kolmogorov) megoldásai:

$$\frac{d}{dt} p_j(t) = \sum_{i=0}^{n} p_i(t)\lambda_{ij}$$ kezdő feltétel $$\sum_{j=0}^{n} p_j(0) = 1$$

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_{ij} = 0 \text{ és } \lambda_{jj} = -\sum_{i=0, i\neq j}^{n} \lambda_{ij}$$

Markov–típusú folyamatok

Markov tétel: Adott az $\left\{X(t)\right\}_{t\in T}$ tranzitív Markov–típusú folyamat véges S állapotokkal.

Akkor

$$\lim_{t\to\infty} p_j(t) = \pi_j,\ j = 0\ldots,n,\ \text{ahol} \sum_{j=0}^{n} p_j\left(0\right) = 1.$$

$$\pi = \left(\pi_0,\ldots,\pi_n\right)\ \text{eloszlás}$$

a következő lineáris egyenletrendszer megoldásai

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_{ij} p_i = 0,\ \mathrm{j} = 0,\ldots,n \text{ és } \sum_{i=0}^{n} p_i = 1.$$