Sorozatok határértéke

6. előadás

Farkas István

DE ATC Gazdaságelemzési és Statisztikai Tanszék

Polinomsorozat határértéke

Eljárás: ki kell emelni a legnagyobb fokszámú taggal.

Példa.

$$\lim_{n\to\infty} 3n^3 - 2n^2 + 7n - 8 = \lim_{n\to\infty} n^3 \cdot \left(3 - \frac{2}{n} + \frac{7}{n^2} - \frac{8}{n^3}\right) = $$
$$= \lim_{n\to\infty} 3n^3 = \infty.$$

Példa.

$$\lim_{n\to\infty} 1 - 5n - 4n^2 = \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{5}{n} - 4\right) = $$
$$= \lim_{n\to\infty} (-4)n^2 = -\infty.$$

Polinomsorozatok hányadosának határártéke 1

Eljárás: kiemelünk a számlálóból és a nevezőből is a legnagyobb fokszámú taggal.

Példa.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-n^3+2n-5}{2n^2+6n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\cdot\left(-1+\frac{2}{n^2}-\frac{5}{n^3}\right)}{n^2\cdot\left(2+\frac{6}{n}-\frac{2}{n^2}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{2}\cdot\frac{n^3}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{2}\cdot n = -\infty.$$

Példa.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+5n+9}{8n-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot\left(4+\frac{5}{n}+\frac{9}{n^2}\right)}{n\cdot\left(8-\frac{3}{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{8}\cdot\frac{n^2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot n = \infty.$$

Polinomsorozatok hányadosának határártéke 2

Példa.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-6n^3+n^2-6}{2n^3+6n^2-5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\cdot\left(-6+\frac{1}{n}-\frac{6}{n^3}\right)}{n^3\cdot\left(2+\frac{6}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-6}{2}\cdot\frac{n^3}{n^3}=\lim_{n\to\infty}-3=-3.$$

Példa.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^6+5n^4+9}{8n^9-3n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^6\cdot\left(4+\frac{5}{n^2}+\frac{9}{n^6}\right)}{n^9\cdot\left(8-\frac{3}{n^5}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{8}\cdot\frac{n^6}{n^9}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^3}=0.$$

Gyökös sorozatok hányadosának határértéke 1

Eljárás: kiemelünk a számlálóból és a nevezőből is a legnagyobb fokszámú taggal.

Példa.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{3n^2-6n+3}}{\sqrt{5n+10}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2\cdot\left(3-\frac{6}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}}{\sqrt{n\cdot\left(5+\frac{10}{n}\right)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{3}\cdot n^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{5}\cdot n^{\frac{1}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{5}}\cdot n^{\frac{1}{6}}=\infty.$$

Gyökös sorozatok hányadosának határértéke 2

Példa.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{3n^2-6n}+\sqrt{7n-2}}{\sqrt{3n^2+2n+6}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{3-\frac{6}{n}}+\sqrt{7n^{-\frac{1}{3}}-2n^{-\frac{4}{3}}}\right)}{n\cdot\sqrt{3+\frac{2}{n}+\frac{6}{n^2}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{3}\cdot n^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{3}\cdot n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3}} \cdot n^{-\frac{1}{3}} = 0.$$

Egyéb gyökös sorozatok

Eljárás: a sorozatot megszorozzuk „eggyel”.

Példa.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}^{(a-b)}\cdot\overbrace{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}^{(a+b)}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{(n+1)-n}^{a^2-b^2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}=0.$$

Exponenciális tagot tartalmazó sorozatok 1

Eljárás:

1. A hatványozás azonosságai alapján elvégezzük a lehetséges műveleteket.
2. Kiemelünk (a számlálóból és a nevezőből is) a legnagyobb hatványalapú taggal.

Példa.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 2^{n+2}+7\cdot 2^{n-1}}{5\cdot 2^{n-3}-10\cdot 2^{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 2^{n}\cdot 2^{2}+7\cdot 2^{n}\cdot 2^{-1}}{5\cdot 2^{n}\cdot 2^{-3}-10\cdot 2^{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{12\cdot 2^{n}+\frac{7}{2}\cdot 2^{n}}{\frac{5}{8}\cdot 2^{n}-10\cdot 2^{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{24}{2}+\frac{7}{2}\right)\cdot 2^{n}}{\left(\frac{5}{8}-\frac{80}{8}\right)\cdot 2^{n}} = \frac{\frac{31}{2}}{-\frac{75}{8}} = \frac{-124}{75}.$$

Exponenciális tagot tartalmazó sorozatok 2

Példa.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot 5^{n+2} + 2\cdot 2^{2n+1} + 7}{9\cdot 3^{n-3} - 4\cdot 7^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot 5^n \cdot 5^2 + 2\cdot (2^2)^n \cdot 2^1 + 7}{9\cdot 3^n \cdot 3^{-3} - 4\cdot 7^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{100\cdot 5^n + 4\cdot 4^n + 7}{\frac{1}{3}\cdot 3^n - 4\cdot 7^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(100 + 4\cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n + 7\cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)\cdot 5^n}{\left(\frac{1}{3}\cdot \left(\frac{3}{7}\right)^n - 4\right)\cdot 7^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{100\cdot 5^n}{-4\cdot 7^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} -25\cdot \left(\frac{5}{7}\right)^n = 0.$$

e-ados határértékek 1

Eljárás: a sorozatot addig alakítjuk, amíg a nevezetes határérték alakjához nem jutunk.

Példa.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{3n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-\frac{4}{3}}{n}\right)^n=e^{-\frac{4}{3}}.$$

Példa.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{2n-1}\right)^{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{7}{2n-1}\right)^{2n-1}\right]^{\frac{3n+2}{2n-1}}=(e^7)^{\frac{3}{2}}.$$

A kitevő határértéke:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\left(3+\frac{2}{n}\right)}{n\cdot\left(2-\frac{1}{n}\right)}=\frac{3}{2}.$$

e-ados határértékek 2

Példa.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{3-5n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(3n-1)+3}{3n-1}\right)^{3-5n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{3n-1}\right)^{3-5n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{3n-1}\right)^{3n-1}\right]^{\frac{-5n+3}{3n-1}} =$$

$$= (e^3)^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{e^5}.$$