Poisson folyamatok és sorbanállási rendszerek

Poisson folyamat

$p_i(t)$ a valószínűsége, hogy az $\langle 0, t)$ intervallumon i eset következett be.

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}$$

$$p_i(t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}, i > 0$$

Valószínűségi eloszlás $p(t) = \left(p_0(t), p_1(t), \ldots\right)$

Poisson folyamat

$$s_{i-1} \xrightarrow{p_{i-1,i}} s_i \xrightarrow{p_{i,i+1}} s_{i+1}$$

$$p_{i-1,i} = p_{i,i+1} = \lambda$$

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t)$$

$$p_1'(t) = \lambda p_0(t) - \lambda p_1(t)$$

$$\vdots$$

$$p_i'(t) = \lambda p_{i-1}(t) - \lambda p_i(t)$$

érvényes

$$p_0(0) = 1$$

$$p_i(0) = 0$$

$$p_0'(0) = -\lambda$$

$$p_1'(0) = \lambda$$

$$p_i'(0) = 0 \quad i = 2, \ldots$$

Poisson folyamat

Az események időtartamának
középértéke

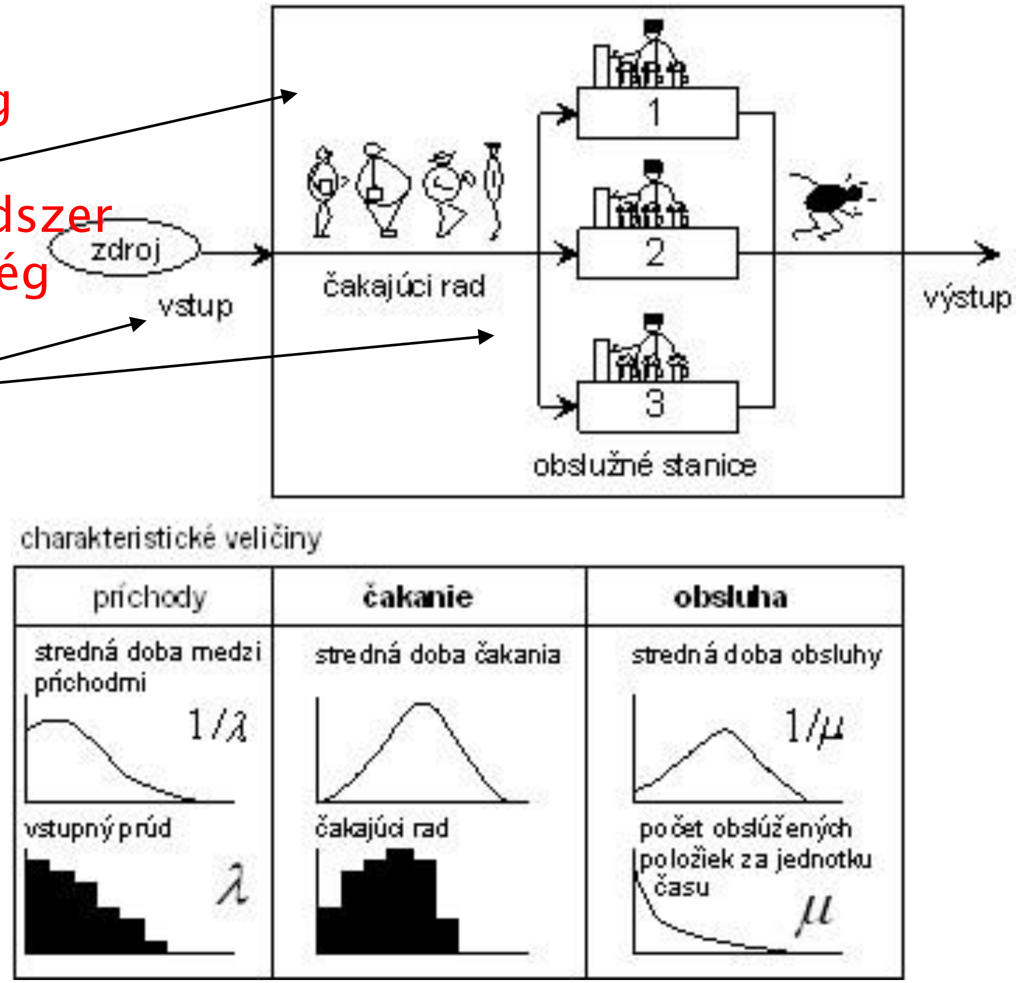
$$\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \lambda t e^{-\lambda t} \overbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}}^{e^{\lambda t}} = \lambda t$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^i}{i!} + \cdots$$

$$x = \lambda t$$

Sorbanállási rendszer

kiszolgálóegység
várakozó sor
sorbanállási rendszer
befogadóképesség



véletlenszerű

beérkezési időközök

várakozási idő

kiszolgálási idő

Sorbanállási rendszer

A beérkező folyamatot általában az egymás után beérkező igények közötti időintervallumok, mint valószínűségi változók A(t) eloszlásának segítségével jellemezhetjük

A(t) – beérkezési folyamat λ parameterrel

A(t)=P(két egymás utáni beérkezési időköz $\leq$ t).

Poisson eloszlás λ parameterrel, ahol $\lambda > 0$.

k beérkező igény valószínűsége a (0, *t*) intervallumon :

$$P\left(A\left(t\right)=k\right)=\frac{\left(\lambda t\right)^{k}}{k!}e^{-\lambda t} \quad (k=0,1,2,\ldots)$$

A beérkező igények számámak középértéke a (0, *t*): $E(A(t)) = \lambda t$.

$E(A(1)) = \lambda$ – *belépések intenzitása*

Sorbanállási rendszer

B(t) – kiszolgálási folyamat μ – kiszolgálási intenzitás (parameterrel).

B(t)=P(kiszolgálási idő ≤t).

X(t) véletlen folyamat, megadja a sor hosszát a t pillanatban, a rendszer K állapotban van, ha X(t)=K.

Sorbanállási rendszer

- Példák

vásárló	pénztár	számla
paciens	orvos	kivizsgálás

Közös tulajdonság

Ügyfelek érkeznek a kiszolgáló egységbe

a) Ha a kiszolgáló egység foglalt, az ügyfél várakozik a sorban,

b) Ki van szolgálva.

Sorbanállási rendszer

Kandall klaszifikáció

Feladatok formái A/B/n/m

A – a beérkezési időközök eloszlásfüggvénye

B – a kiszolgálási idő eloszlásfüggvénye,

n – a kiszolgálók száma,

m – a rendszer befogadóképessége, a kiszolgálóegységben és a várakozási sorban tartózkodó igények maximális száma, végtelen- és véges-forrású rendszerek

M – Poisson beérkezéssel és exponenciális kiszolgálási idővel

n, m – természetes számok (∞ korlátlan, végtelen forrás, véges befogadású rendszer)

Sorbanállási rendszer

- Így pl. az M/M/1/∞ egy egykiszolgálós Poisson beérkezéssel és exponenciális kiszolgálási idővel jellemzett rendszert jelöl.
- Az M/M/n/m a kiszolgálást n egység végzi exponenciális eloszlású ideig és a rendszerben egyidejűleg maximum m igény tartózkodhat.

M/M/1/∞ rendszer

Jelöljük

λ – beérkezési intenzitás

$\frac{1}{\lambda}$ – átlagosbeérkezési idő

μ – kiszolgálási intenzitást

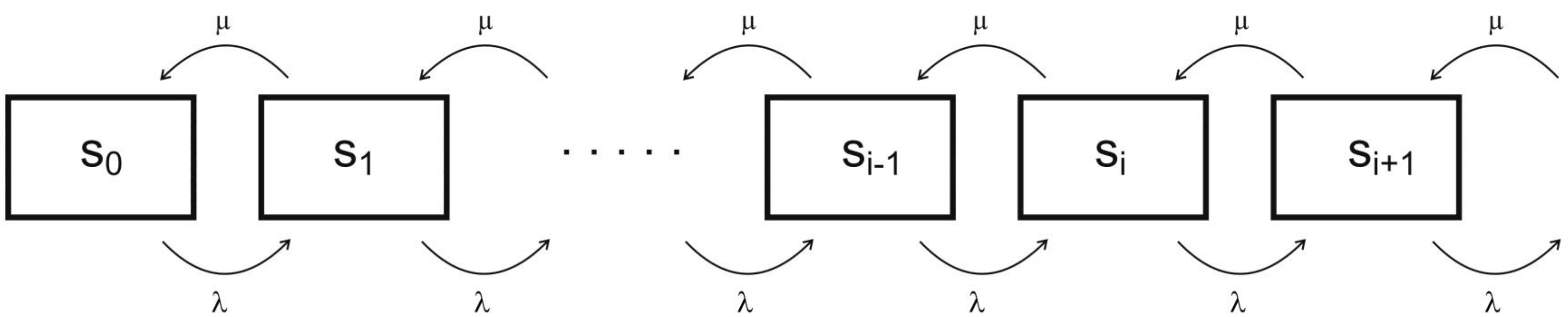
$\frac{1}{\mu}$ – átlagoskiszolgálási idő

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ – forgalmi intenzitás

ϱ = érkezési intenzitás∗átlagos kiszolgálási idő = λ/ μ.

M/M/1/∞

SHO



s_i - stav, s_i=i počet zákazníkov v systéme

M/M/1/∞ rendszer

Jelöljük X(t) a valószínűségi folyamat, vásárlók száma

$$p_i(t) = P(x(t) = i)$$

A folyamat Markov-féle folytonos folyamat

Érvényes

$$\dot{p}_0 = -\lambda p_0 + \mu p_1$$

$$\dot{p}_i = \lambda p_{i-1} - (\mu + \lambda) p_i + \mu p_{i+1} \quad i = 1, 2, \ldots$$

A tétel alapján a megoldások az egyensúlyi valószínűségi eloszláshoz konvergálnak

$$\Pi = (p_0, p_1, \ldots),$$

M/M/1/∞

Ami a következő lineári egyenletrendszer megoldása:

$$-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0$$

$$\lambda p_{i-1} - (\mu + \lambda) p_i + \mu p_{i+1} = 0$$

M/M/1/∞

$$-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \ , \ \lambda p_0 = \mu p_1$$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

$$\lambda p_0 - (\lambda + \mu) p_1 + \mu p_2 = 0$$

$$\cancel{\mu p_1} - \lambda p_1 - \cancel{\mu p_1} + \mu p_2 = 0$$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0, p_2 = \frac{\lambda}{\mu} p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0$$

$$p_{i+1} = \frac{\lambda}{\mu} p_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i+1} \cdot p_0$$

$$p_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = p_0 \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i = p_0 \frac{1}{1-\rho} = 1 \Rightarrow \boxed{p_0 = 1 - \rho}$$

$$p_i = (1-\rho).\rho^i$$

M/M/1/∞

A igények átlagszáma

$$PZS = \sum_{i=0}^{\infty} i p_i = (1-\rho)\sum_{i=0}^{\infty} i\rho^i = \frac{\rho}{1-\rho}$$

A várakozók átlagszáma

$$PZF = \sum_{i=0}^{\infty} i p_{i+1} = (1-\rho)\sum_{i=0}^{\infty} i\rho^{i+1} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

M/M/1/∞

A átlagos várakozási idő

$$\acute{A}VI = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

A rendszerben töltött átlagos idő

$$RT\acute{A}I = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

M/M/1/n rendszer

Az utolsó egyenlet alakja $$\dot{p}_n = \lambda p_{n-1} - \mu p_n$$

Egyensúlyi val. eloszlás $$p_i = \rho^i p_0 \quad pre \quad 0 \le i \le n$$

Ahol $$\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$$

Így $$p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} \rho^i} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}}$$ és $$p_i = \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} \rho^i$$

Ha $i=n$ $$p_n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} \rho^n$$ elutasítás valószínűsége

Systém M/M/n/∞

Az érkezések eloszlása Poisson folyamat a kiszolgálási idő exponenciális átlagos kiszolgálási idő $1/\mu$.

X(t) – a rendszerben található igények száma a t *időben*,

$$p_i(t) = P\left(X(t) = i\right)$$

$$\dot{p}_0 = -\lambda p_0 + \mu p_1$$

$$\dot{p}_i = \lambda p_{i-1} - (\lambda + i\mu) p_i + \mu(i+1) p_{i+1} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$\dot{p}_i = \lambda p_{i-1} - (\lambda + n\mu) p_i + n\mu p_{i+1} \quad i = n, \ldots$$

Systém M/M/n/∞

Egyensúlyi valószínűségi eloszlás

$$p_i = \frac{\lambda}{i\mu} p_{i-1} = p_0 \frac{\rho^i}{i!} \qquad 0 \le i \le n$$

$$p_i = \left(\frac{\rho}{n}\right)^{i-n} p_n \qquad i > n$$

ahol

$$p_0 = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \frac{1}{1-\beta}\right)^{-1}$$

$$\beta = \rho / n < 1$$

az azonnali kiszolgálás valószínűsége

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k = p_0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!}$$

Systém M/M/n/∞

az *azonnali kiszolgálás valószínűsége*

$$\sum_{i=0}^{n-1} p_i = p_0 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\rho^i}{i!}$$

A várakozás valószínűsége

$$\sum_{i=n}^{\infty} p_i = p_n \frac{1}{1-\beta}$$

Baktériumok tapadása a szubsztrát felületére– sztochasztikus modell

- $N(t)$ – szubsztrátra tapadt baktériumok száma a t időben,
- p_n (t) – valószinűség, hogy a $N(t)=n$, $n=0,1,\ldots,N_0$, ahol N_0 a rendszerben található baktériumok száma. Feltételek:

$$P\left[N(t+h)=n+1 \vdots N(t)=n\right]=\lambda_n h+o(h),$$

$$P\left[N(t+h)=n-1 \vdots N(t)=n\right]=\mu_n h+o(h),$$

$$P\left[N(t+h)=n \vdots N(t)=n\right]=1-(\lambda_n+\mu_n)h+o(h),$$

$$\lambda_n=k_1(N_0-n)\left(N_0^0-n\right),$$

$$\mu_n=k_2 n,\ \text{ahol } N_0^0 \text{ a szubsztrát feületén található aktív helyek száma.}$$

Baktériumok tapadása a szubsztrát felületére– sztochasztikus modell

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t)$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) + \mu_{n+1} p_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) p_n(t)$$

$$\frac{dp_{N0}(t)}{dt} = \lambda_{N0-1} p_{N0-1}(t) - \mu_{N0} p_{N0}(t)$$

$$n = 1, \ldots, N_0 - 1$$

Baktériumok tapadása a szubsztrát felületére– sztochasztikus modell

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -k_1 N_0 N_0^0 p_0(t) + k_2 p_1(t)$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = k_1 (N_0 - n + 1)\left(N_0^0 - n + 1\right) p_{n-1}(t) + k_2 (n+1) p_{n+1}(t)$$

$$-\left(k_1 (N_0 - n + 1)\left(N_0^0 - n + 1\right) + k_2 (n+1)\right) p_n(t)$$

$$\frac{dp_{N0}(t)}{dt} = k_1 \left(N_0^0 - N_0 + 1\right) p_{N0-1}(t) - k_2 N_0 p_{N0}(t)$$

$$n = 1, \ldots, N_0 - 1$$

Baktériumok tapadása a szubsztrát felületére– sztochasztikus modell

$$-\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 = 0\ ,\ \lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$$

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 = \rho_1 p_0$$

$$\lambda_0 p_0 - (\lambda_1 + \mu_1) p_1 + \mu_2 p_2 = 0$$

$$\lambda_0 p_0 - (\lambda_1 + \mu_1)\rho_1 p_0 + \mu_2 p_2 = 0 \qquad \rho_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}, \quad \rho_0 = 1$$

$$p_2 = \frac{(\lambda_1 + \mu_1)\rho_1 - \lambda_0}{\mu_2} p_0 = \rho_2 p_0 \qquad \rho_2 = \frac{(\lambda_1 + \mu_1)\rho_1 - \lambda_0 \rho_0}{\mu_2}$$

$$\rho_{n+1} = \frac{(\lambda_n + \mu_n)\rho_n - \lambda_{n-1}\rho_{n-1}}{\mu_{n+1}}, \quad n = 1, \ldots, N_0 - 2$$

$$p_{n+1} = \frac{(\lambda_n + \mu_n)\rho_n - \lambda_{n-1}\rho_{n-1}}{\mu_{n+1}} p_0 = \rho_{n+1} p_0$$

Baktériumok tapadása a szubsztrát felületére– sztochasztikus modell

$$p_{N_0} = \frac{\lambda_{N_0-1}\rho_{N_0-1}}{\mu_{N_0}} p_0 = \rho_{N_0} p_0$$

$$\rho_0 = 1$$

$$p_0 \sum_{n=0}^{N_0} \rho_n = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{\sum_{n=1}^{N_0} \rho_n}$$

$$p_n = \rho_n p_0, \quad n = 1, \ldots, N_0$$

Baktériumok tapadása a szubsztrát felületére– Monte Carlo szimuláció

- Jelöljük T_n véletlen időintervallumot, amikor a rendszer n állapotban van. Ez az idő amikor a baktériumok száma nem változik a szubsztrát felületén.

Baktériumok tapadása a szubsztrát felületére– Monte Carlo szimuláció

Érvényes

$$P\left(T_n > t^*\right) = e^{\left(-(\lambda_n+\mu_n)t^*\right)}$$

Mivel

$$P\left(T_n > t^*\right) = 1 - P\left(T_n \le t^*\right) = 1 - F_{T_n}\left(t^*\right),\ \text{ahol}$$

$F_{T_n}\left(t^*\right)$ az T_n valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, amely egyenletes elosztású véletlen szám az $\langle 0,1 \rangle$ intervallumon, így

$$1 - F_{T_n}\left(t^*\right) = e^{\left(-(\lambda_n+\mu_n)t^*\right)},\ 1 - U = e^{\left(-(\lambda_n+\mu_n)t^*\right)}$$

$$t^* = \frac{-1}{\lambda_n + \mu_n} \ln\left(1 - U\right)$$

Baktériumok tapadása a szubsztrát felületére– Monte Carlo szimuláció

- A felületen található baktérium transzportjának a valószínűsége

$$R_n = \frac{\mu_n}{\lambda_n + \mu_n}$$

Baktériumok tapadása a szubsztrát felületére– Monte Carlo szimuláció

$Alg\,oritmus$

Feltétel $t = 0, n = 0, T_{end}$

While $t < T_{end}$

1, $\lambda_n = k_1 \left(N_0 - n\right)\left(N_0^0 - n\right), \mu_n = k_2 n, R_n = \dfrac{\mu_n}{\lambda_n + \mu_n}$

$\mathrm{U}_1 \in \left\langle 0,1 \right\rangle$ véletlen szám generálása és

$$t^* = \frac{-1}{\lambda_n + \mu_n} \ln\left(1 - U_1\right)$$

2, $\mathrm{U}_2 \in \left\langle 0,1 \right\rangle$ véletlen szám generálása és ha

$\mathrm{U}_2 \le R_n, N\left(t + t^*\right) = n - 1$

$\mathrm{U}_2 > R_n, N\left(t + t^*\right) = n + 1$

$t = t + t^*$