GRÁFELMÉLET

Bevezetés a gráfelméletbe

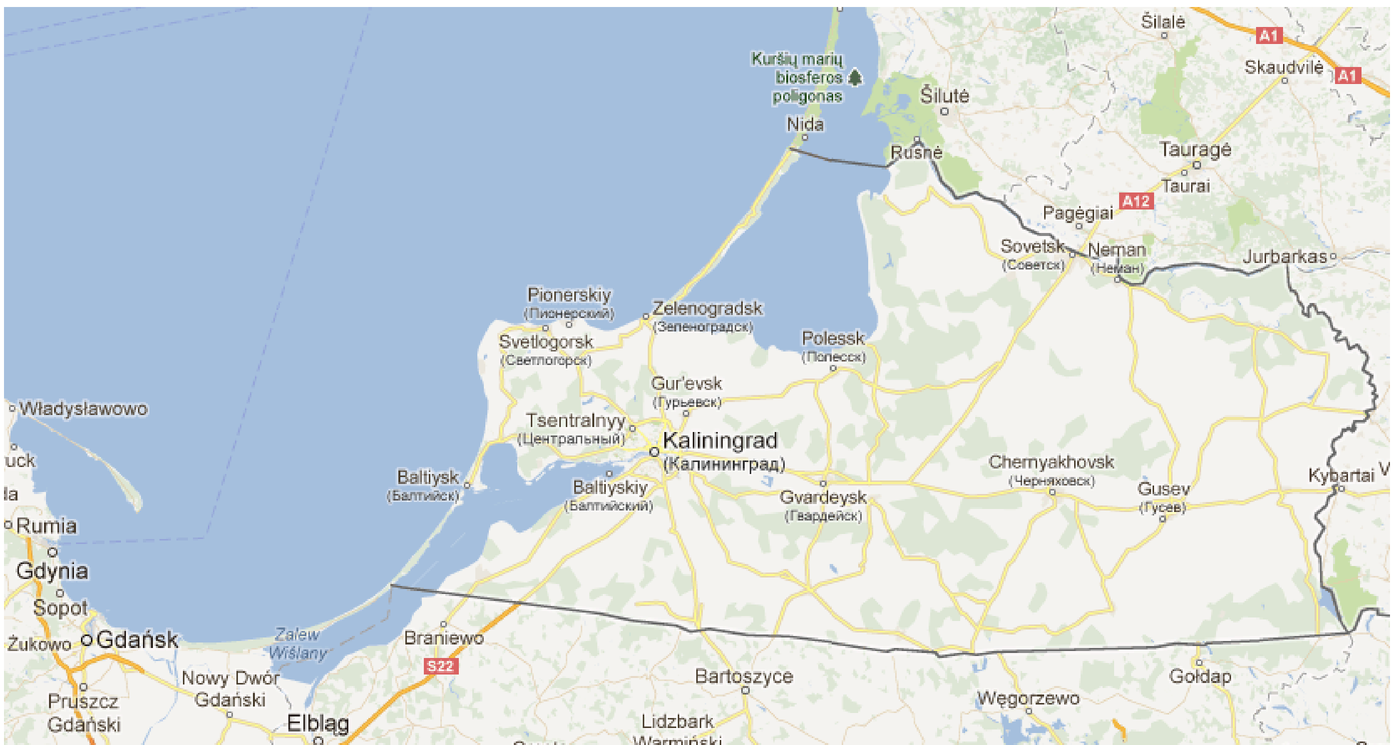
1. előadás

Bevezetés a gráfelméletbe

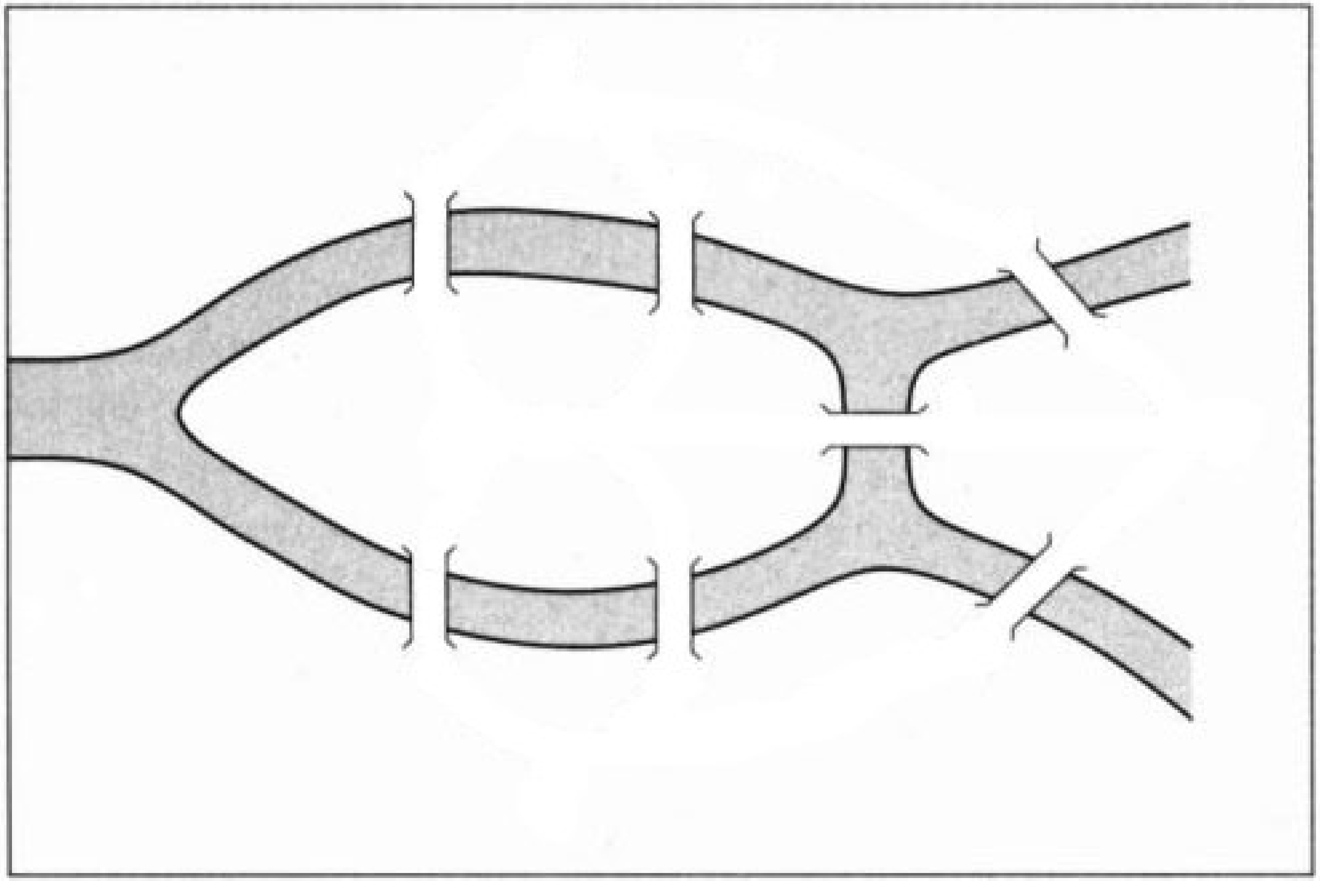
Matematika-történeti források szerint az első gráfelméleti munka a Szentpétervári Tudományos Akadémia közleményében jelent meg 1736-ban, amelyben LEONHARD EULER (1707-1783) svájci matematikus megoldotta a **königsbergi-hidak** problémáját.

Bevezetés a gráfelméletbe

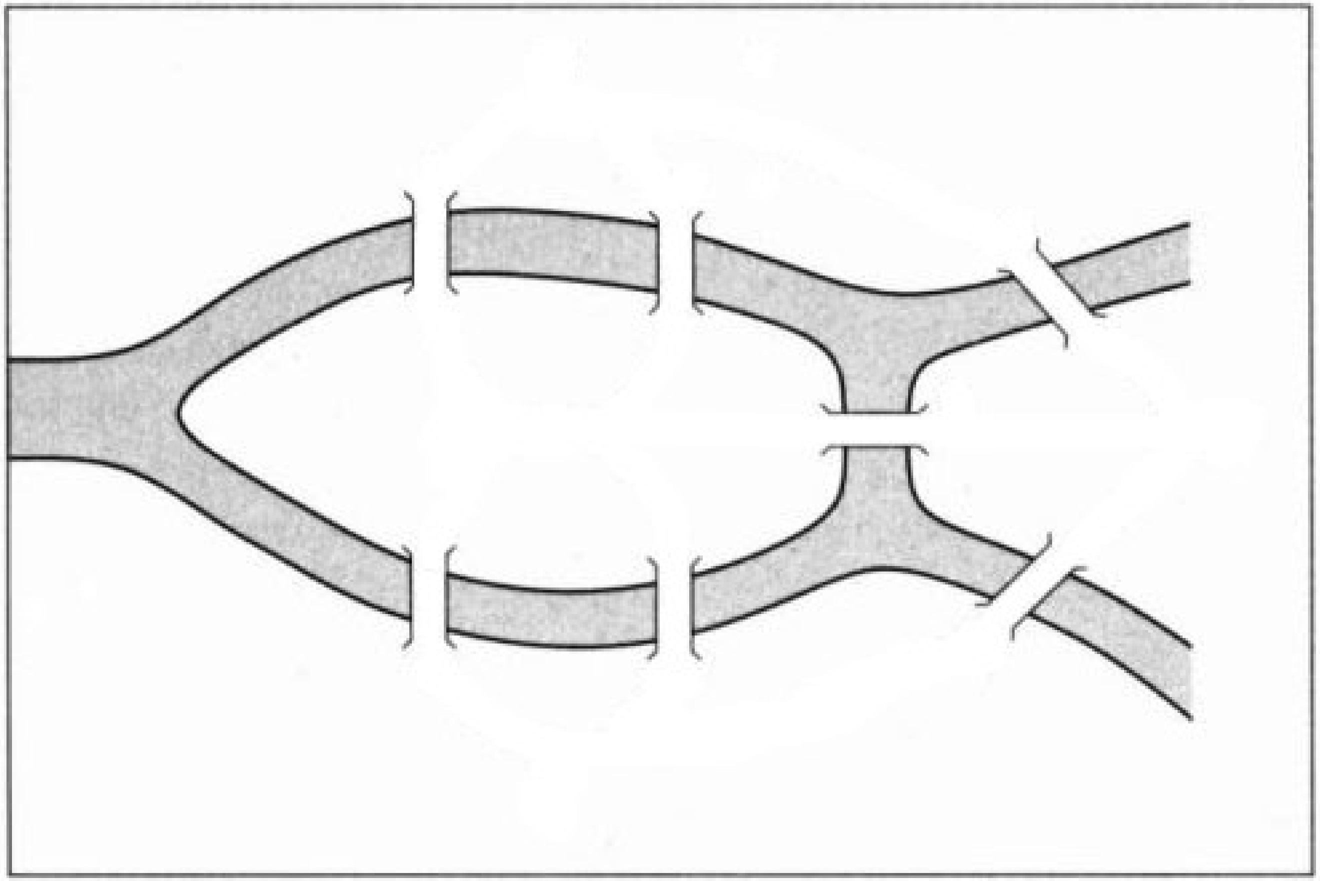
Matematika-történeti források szerint az első gráfelméleti munka a Szentpétervári Tudományos Akadémia közleményében jelent meg 1736-ban, amelyben LEONHARD EULER (1707-1783) svájci matematikus megoldotta a **königsbergi-hidak** problémáját.



A város átszelő Pregel (Pregolja) folyót hét híd ívelte át az alábbi ábra szerint:

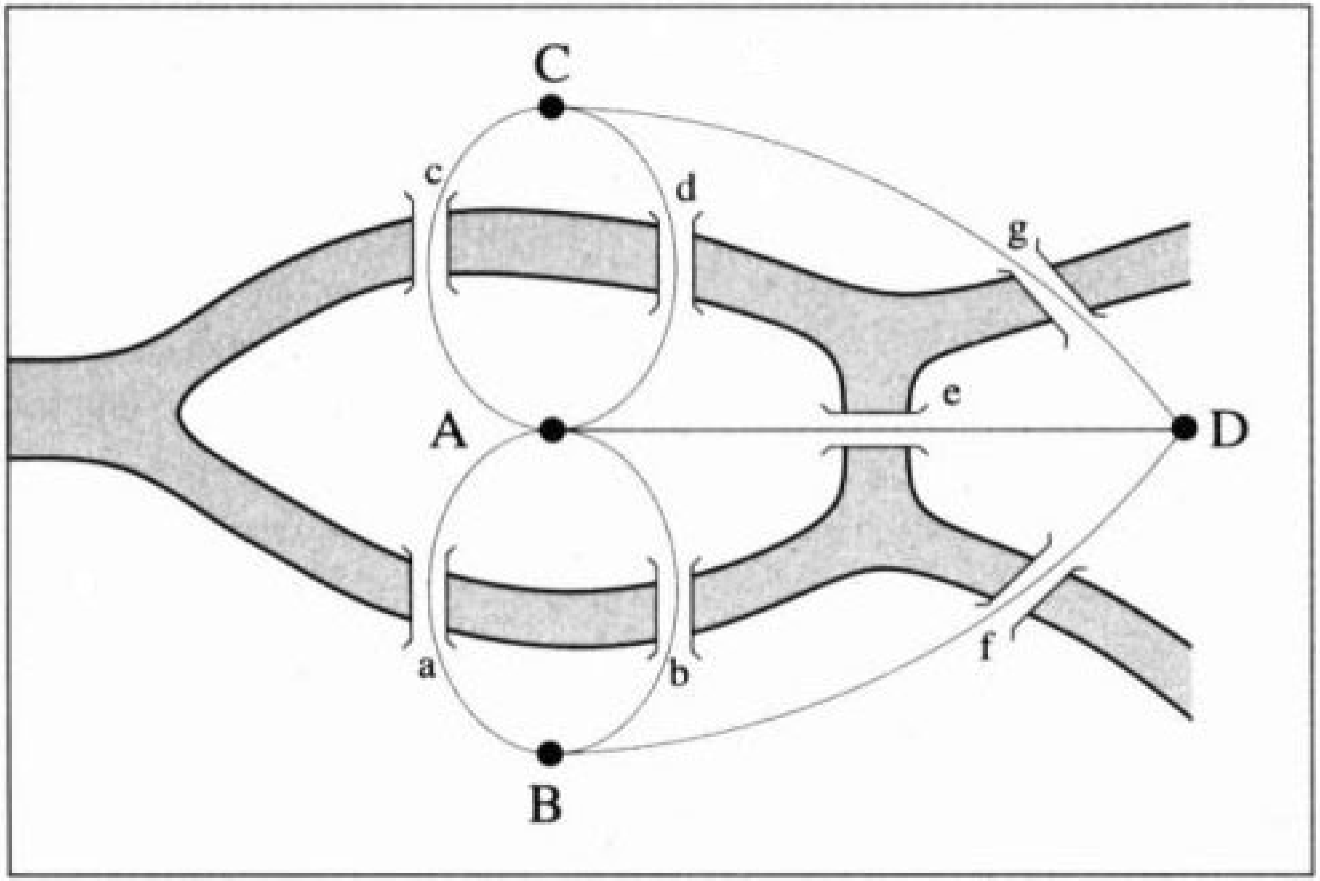


A város átszelő Pregel (Pregolja) folyót hét híd ívelte át az alábbi ábra szerint:



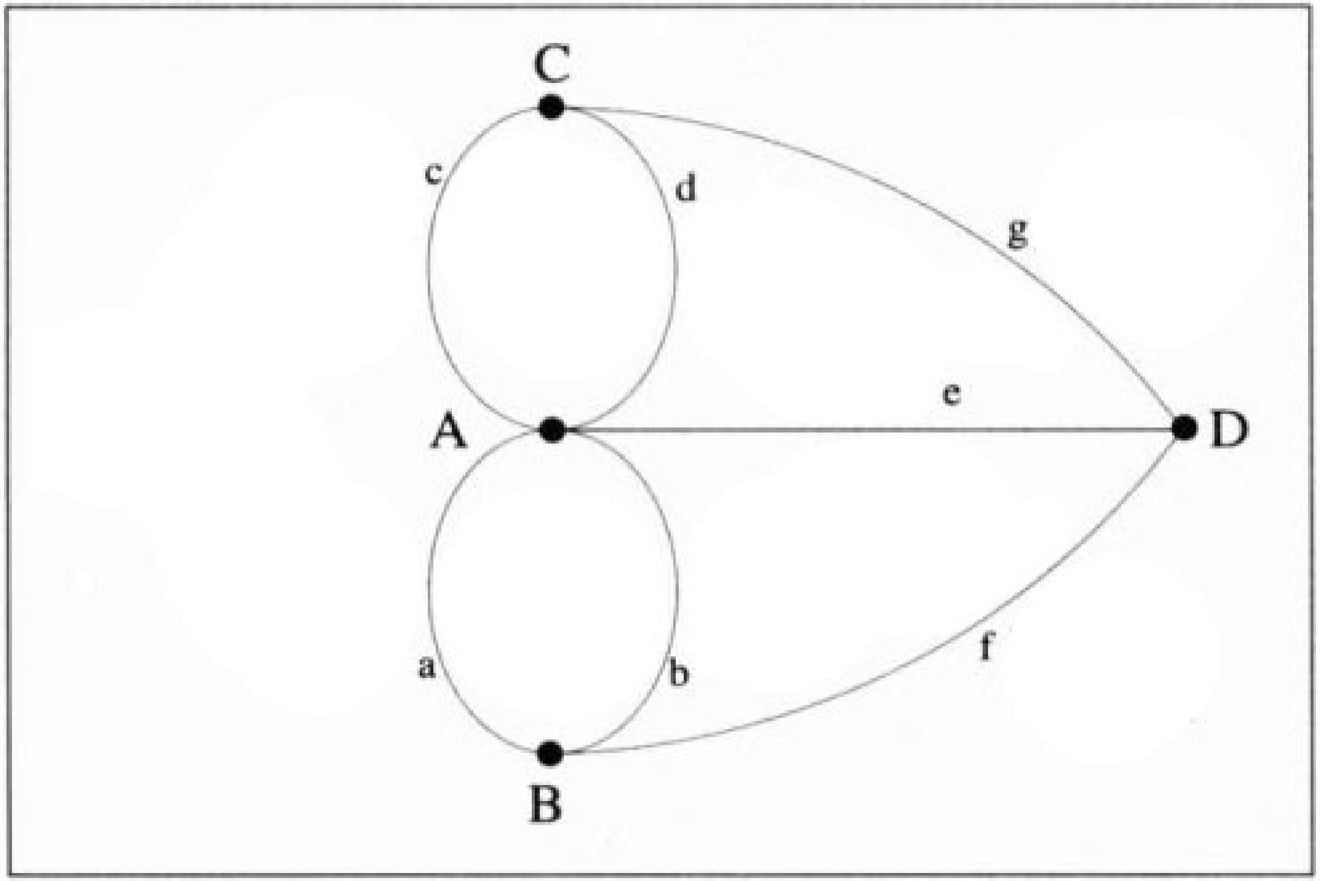
A város polgárai felvetették a kérdést: *lehet-e olyan sétát tenni, hogy közben mind a hét hídon pontosan egyszer haladjanak át*?

A város átszelő Pregel (Pregolja) folyót hét híd ívelte át az alábbi ábra szerint:



A város polgárai felvetették a kérdést: *lehet-e olyan sétát tenni, hogy közben mind a hét hídon pontosan egyszer haladjanak át*?

A város átszelő Pregel (Pregolja) folyót hét híd ívelte át az alábbi ábra szerint:



A város polgárai felvetették a kérdést: *lehet-e olyan sétát tenni, hogy közben mind a hét hídon pontosan egyszer haladjanak át*?

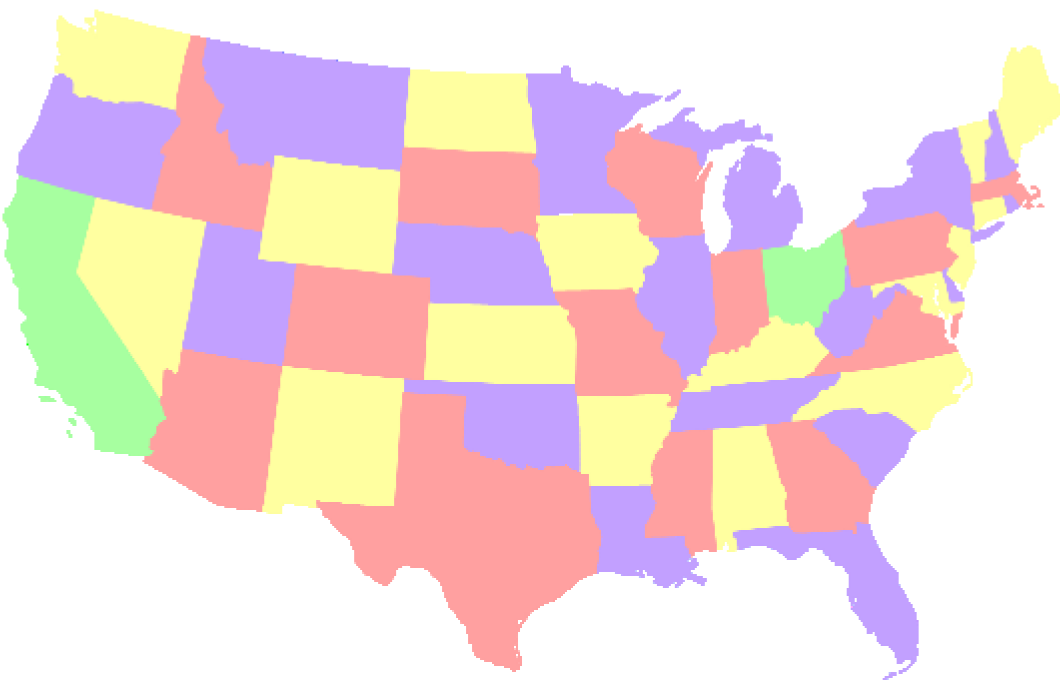
Térképeken az országok rendszerét színezéssel szokták áttekinthetővé tenni úgy, hogy a közös határszakasszal rendelkező országok különböző színt kapnak. A térképek elkészítéséhez célszerű minél kevesebb színt használni.

Térképeken az országok rendszerét színezéssel szokták áttekint-hetővé tenni úgy, hogy a közös határszakasszal rendelkező országok különböző színt kapnak. A térképek elkészítéséhez célszerű minél kevesebb színt használni.

<u>Kérdés</u>: *Mennyi az a minimális színszám, ahány színnel már bármelyik gömbre vagy síkra rajzolt olyan térkép színezhető, amelyen minden ország összefüggő*?

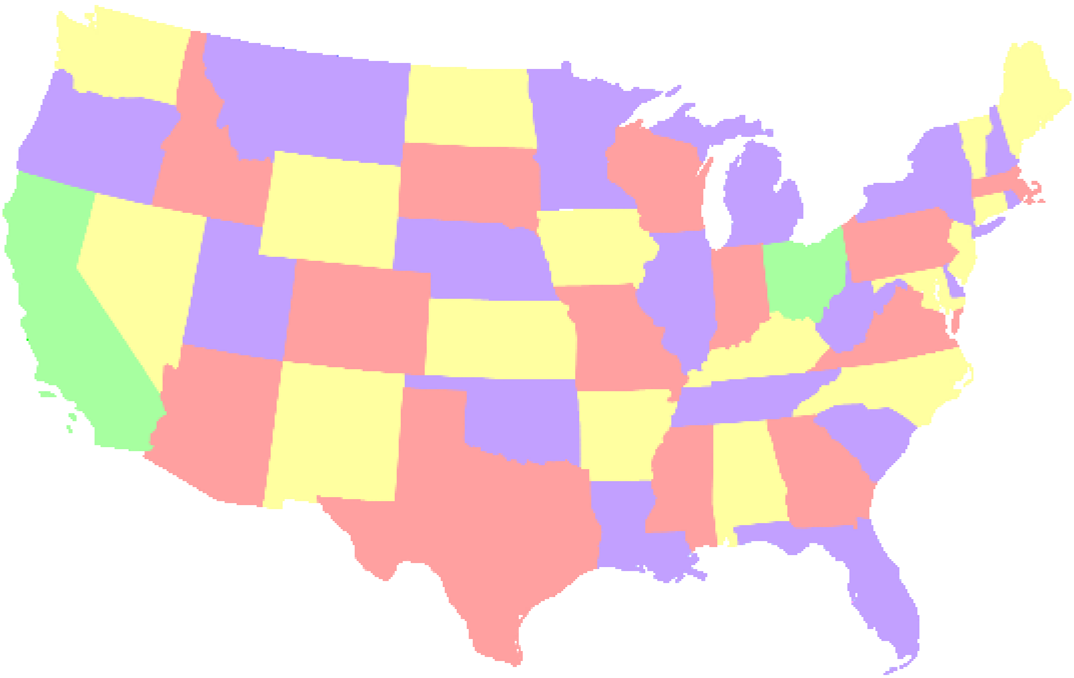
Térképeken az országok rendszerét színezéssel szokták áttekinthetővé tenni úgy, hogy a közös határszakasszal rendelkező országok különböző színt kapnak. A térképek elkészítéséhez célszerű minél kevesebb színt használni.

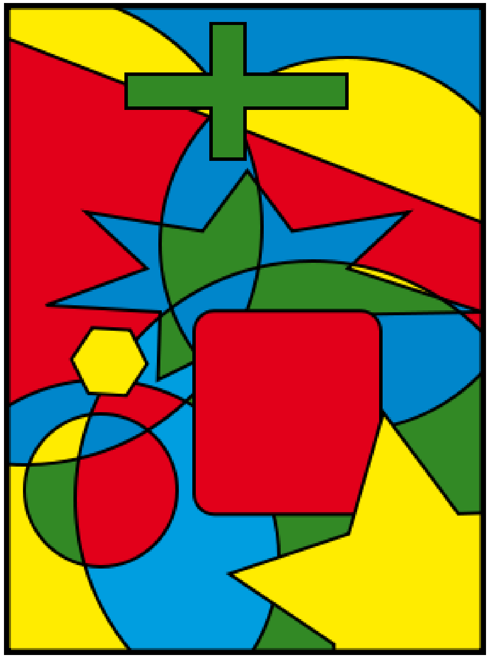
Kérdés: *Mennyi az a minimális színszám, ahány színnel már bármelyik gömbre vagy síkra rajzolt olyan térkép színezhető, amelyen minden ország összefüggő?*



Térképeken az országok rendszerét színezéssel szokták áttekint-hetővé tenni úgy, hogy a közös határszakasszal rendelkező országok különböző színt kapnak. A térképek elkészítéséhez célszerű minél kevesebb színt használni.

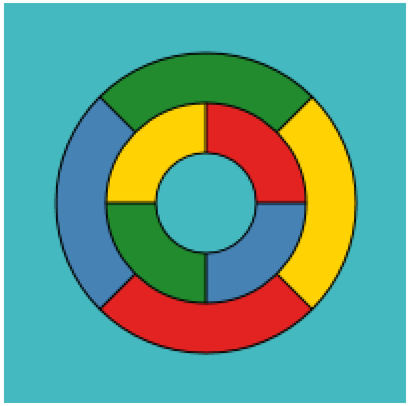
<u>Kérdés</u>: *Mennyi az a minimális színszám, ahány színnel már bármelyik gömbre vagy síkra rajzolt olyan térkép színezhető, amelyen minden ország összefüggő?*



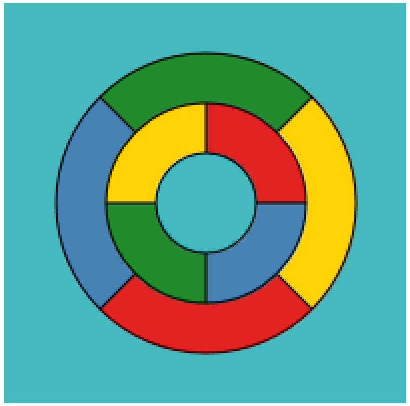


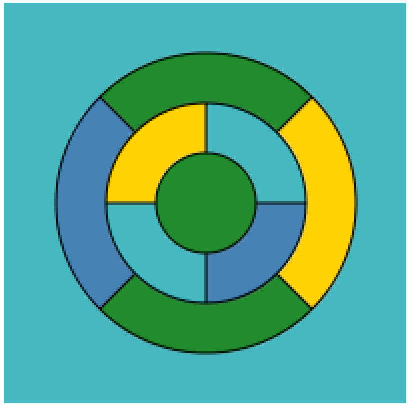
Nyilvánvaló, hogy három szín kevés a színezéshez. Ez már egy olyan térképnél is megmutatkozik, ahol egy régiót három másik régió vesz körül (bár ha páros számú régió veszi körül, három szín is elég). Nem túl nehéz igazolni, hogy öt szín mindig elégséges egy térkép kiszínezéséhez.

Nyilvánvaló, hogy három szín kevés a színezéshez. Ez már egy olyan térképnél is megmutatkozik, ahol egy régiót három másik régió vesz körül (bár ha páros számú régió veszi körül, három szín is elég). Nem túl nehéz igazolni, hogy öt szín mindig elégséges egy térkép kiszínezéséhez.

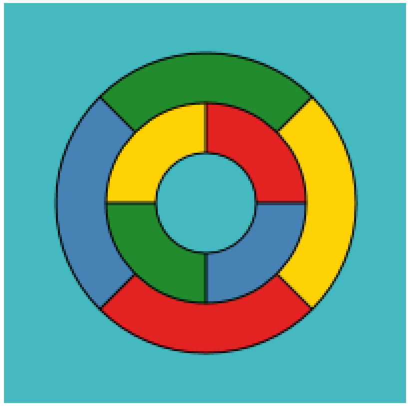


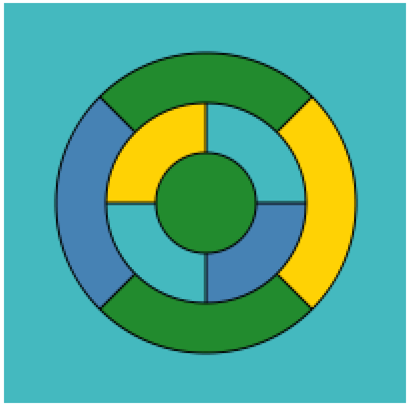
Nyilvánvaló, hogy három szín kevés a színezéshez. Ez már egy olyan térképnél is megmutatkozik, ahol egy régiót három másik régió vesz körül (bár ha páros számú régió veszi körül, három szín is elég). Nem túl nehéz igazolni, hogy öt szín mindig elégséges egy térkép kiszínezéséhez.





Nyilvánvaló, hogy három szín kevés a színezéshez. Ez már egy olyan térképnél is megmutatkozik, ahol egy régiót három másik régió vesz körül (bár ha páros számú régió veszi körül, három szín is elég). Nem túl nehéz igazolni, hogy öt szín mindig elégséges egy térkép kiszínezéséhez.

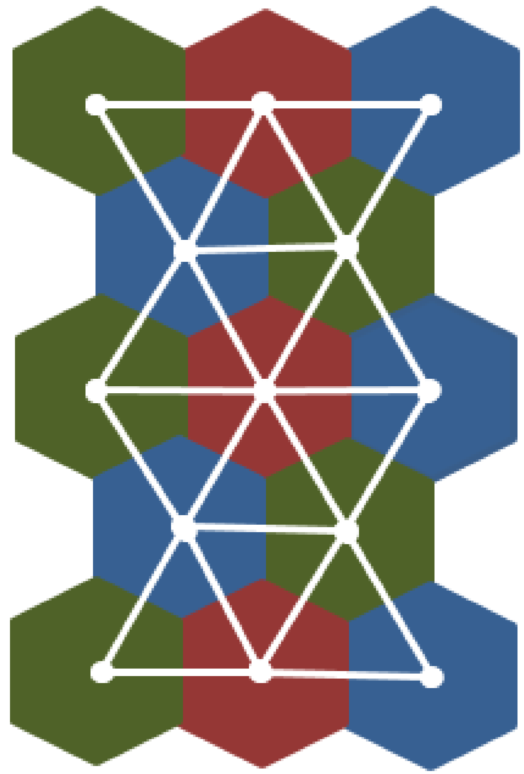




A négyszín-sejtés volt az első nevezetes matematikai sejtés, amelyet számítógép használatával sikerült bebizonyítani.

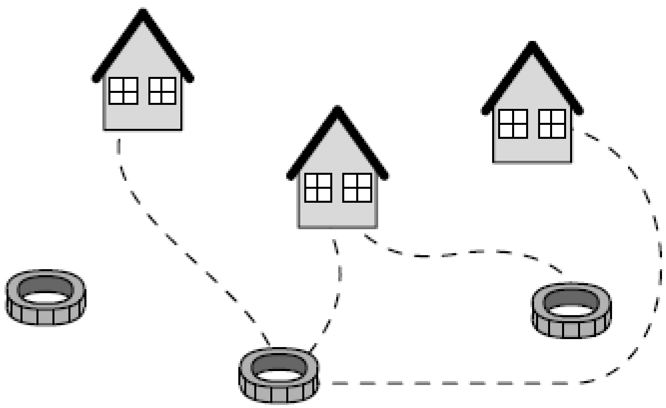
A négyszín probléma gyakorlatiasabb alkalmazása: *Hány frekvenciára van szükség, hogy az adott területen elhelyezett mobiltelefon antennák ne zavarják egymást*?

A négyszín probléma gyakorlatiasabb alkalmazása: *Hány frekvenciára van szükség, hogy az adott területen elhelyezett mobiltelefon antennák ne zavarják egymást*?

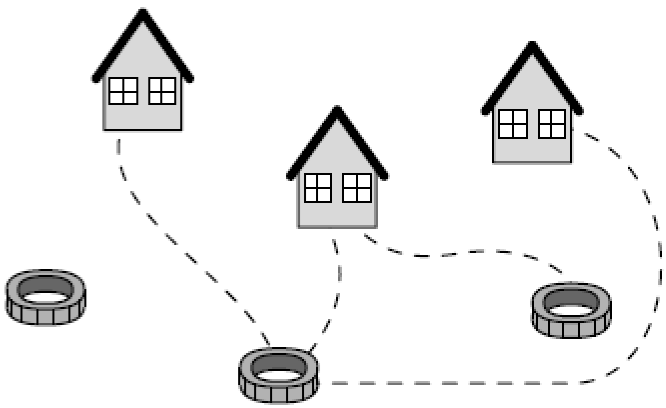


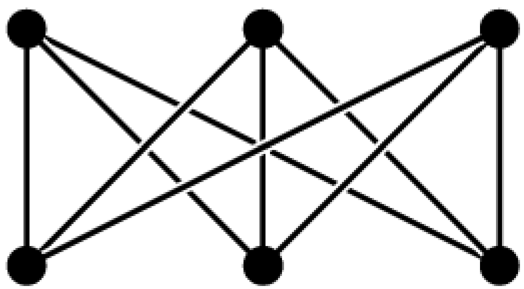
A nyomtatott áramkörök tervezésében szerepet játszhat a következő probléma: *Adott három ház és három kút. Kössük össze a három ház mindegyikét a három kút mindegyikével úgy, hogy az utak ne keresztezzék egymást*!

A nyomtatott áramkörök tervezésében szerepet játszhat a következő probléma: *Adott három ház és három kút. Kössük össze a három ház mindegyikét a három kút mindegyikével úgy, hogy az utak ne keresztezzék egymást*!

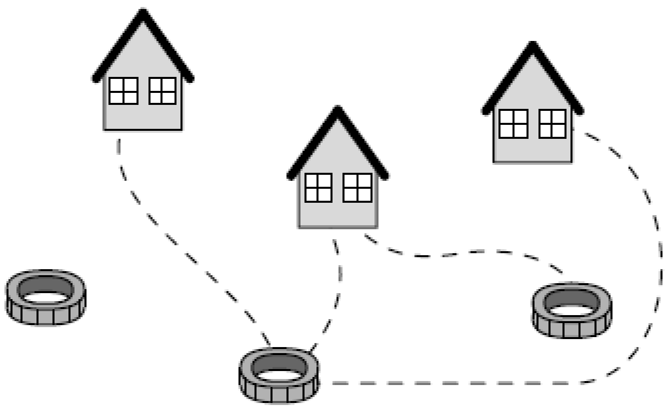


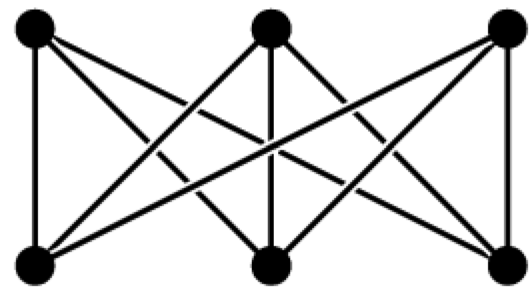
A nyomtatott áramkörök tervezésében szerepet játszhat a következő probléma: *Adott három ház és három kút. Kössük össze a három ház mindegyikét a három kút mindegyikével úgy, hogy az utak ne keresztezzék egymást*!





A nyomtatott áramkörök tervezésében szerepet játszhat a következő probléma: *Adott három ház és három kút. Kössük össze a három ház mindegyikét a három kút mindegyikével úgy, hogy az utak ne keresztezzék egymást*!





A probléma nem oldható meg, ennek bizonyítását 1930-ban adta meg KAZIMIERZ KURATOWSKI lengyel matematikus, aki szükséges és elégséges feltételt adott meg arra, hogy egy adott gráf (vezetékekből álló hálózat) áthidalás nélkül síkba teríthető legyen.

Az Egyesült Államokban a gráfelmélet fejlődésének nagy lendületet adtak a II. világháború hadászati problémái. Az eredményes hadviselés megkívánja a hadsereg egységeinek gyors átcsoportosítását. A gyorsaság több tényező függvénye: függ a rendelkezésre álló szállítóeszközök kapacitásától és sebességétől, a rendelkezésre álló utak áteresztőképességétől, valamint az útcsomópontok (városok, vasútállomások, repülőterek) kapacitásától.

Az Egyesült Államokban a gráfelmélet fejlődésének nagy lendületet adtak a II. világháború hadászati problémái. Az eredményes hadviselés megkívánja a hadsereg egységeinek gyors átcsoportosítását. A gyorsaság több tényező függvénye: függ a rendelkezésre álló szállítóeszközök kapacitásától és sebességétől, a rendelkezésre álló utak áteresztőképességétől, valamint az útcsomópontok (városok, vasútállomások, repülőterek) kapacitásától.

Feladat: *Át kell csoportosítani egy adott helyen állomásozó harci egységet egy másik helyre. Olyan szállítási tervet kell készíteni, amely az egyes útszakaszok pontos igénybevételét tartalmazza, és az optimális szállítást biztosítja*.

Az Egyesült Államokban a gráfelmélet fejlődésének nagy lendületet adtak a II. világháború hadászati problémái. Az eredményes hadviselés megkívánja a hadsereg egységeinek gyors átcsoportosítását. A gyorsaság több tényező függvénye: függ a rendelkezésre álló szállítóeszközök kapacitásától és sebességétől, a rendelkezésre álló utak áteresztőképességétől, valamint az útcsomópontok (városok, vasútállomások, repülőterek) kapacitásától.

Feladat: *Át kell csoportosítani egy adott helyen állomásozó harci egységet egy másik helyre. Olyan szállítási tervet kell készíteni, amely az egyes útszakaszok pontos igénybevételét tartalmazza, és az optimális szállítást biztosítja*.

A feladat megoldását adó tételek LESTER R. FORD és DELBERT R. FULKERSON amerikai matematikusok nevéhez fűződik.

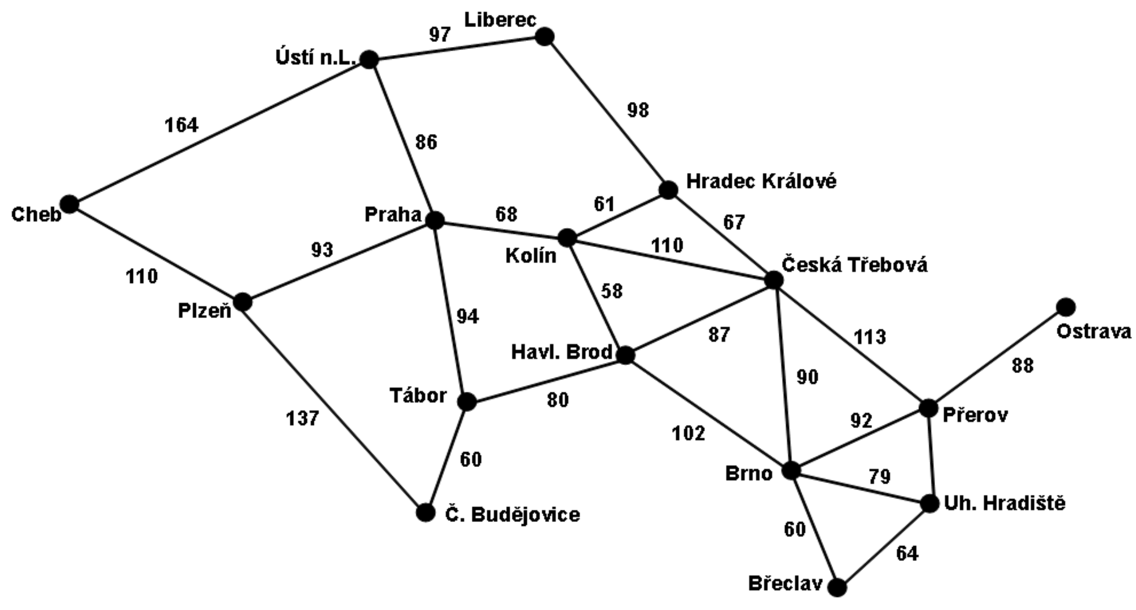
Feladat: *Legyen adott n darab város, amelyek között korszerűsíteni szeretnénk az úthálózatot. Ha ismert a korszerűsítés költsége az úthálózat minden egyes szakaszára, határozzuk meg, hogy az 1. városból az n-edikbe vezető melyik útvonal korszerűsítése a leggazdaságosabb*!

Feladat: *Legyen adott n darab város, amelyek között korszerűsíteni szeretnénk az úthálózatot. Ha ismert a korszerűsítés költsége az úthálózat minden egyes szakaszára, határozzuk meg, hogy az 1. városból az n-edikbe vezető melyik útvonal korszerűsítése a leggazdaságosabb*!

Megoldás: Ha a költségeket az útszakaszoknak megfelelő élek hosszúságaként fogjuk fel, akkor a kérdés a következő általános alakot ölti: Melyik az 1-ből n-be vezető legrövidebb út?

Feladat: *Legyen adott n darab város, amelyek között korszerűsíteni szeretnénk az úthálózatot. Ha ismert a korszerűsítés költsége az úthálózat minden egyes szakaszára, határozzuk meg, hogy az 1. városból az n-edikbe vezető melyik útvonal korszerűsítése a leggazdaságosabb*!

Megoldás: Ha a költségeket az útszakaszoknak megfelelő élek hosszúságaként fogjuk fel, akkor a kérdés a következő általános alakot ölti: Melyik az 1-ből n-be vezető legrövidebb út?



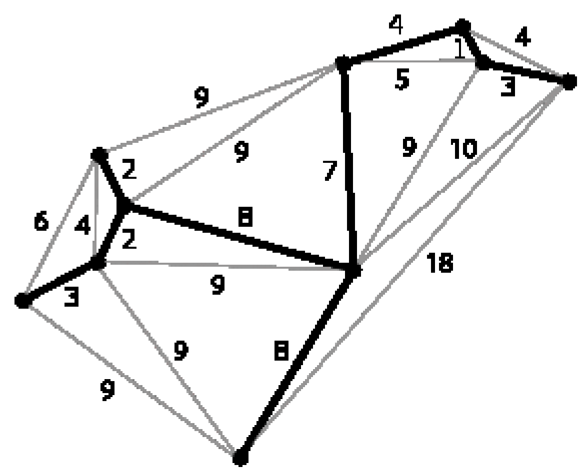
Feladat: *Hogyan fektesse le a kábel TV-társaság a kábeleket az adott területen, hogy a megadott háztartásokat bekösse a rendszerbe és minél több pénz spóroljon a költségeken*!

Feladat: *Hogyan fektesse le a kábel TV-társaság a kábeleket az adott területen, hogy a megadott háztartásokat bekösse a rendszerbe és minél több pénz spóroljon a költségeken*!

Megoldás: A háztartások lesznek a gráf csúcspontjai, a lehetséges összekötések pedig a gráf élei súlyokkal (költségek) ellátva. Az így kapott gráfban minimális költségű feszítőfát fogunk keresni.

Feladat: *Hogyan fektesse le a kábel TV-társaság a kábeleket az adott területen, hogy a megadott háztartásokat bekösse a rendszerbe és minél több pénz spóroljon a költségeken*!

Megoldás: A háztartások lesznek a gráf csúcspontjai, a lehetséges összekötések pedig a gráf élei súlyokkal (költségek) ellátva. Az így kapott gráfban minimális költségű feszítőfát fogunk keresni.



Feladat: *Egy építkezési vállalat, miután egy munkálatot munkaszakaszokra bontott, a tapasztalat alapján megállapítja az egyes munkaszakaszok elvégzéséhez szükséges időt. Mekkora a legrövidebb idő, amely alatt az egész munkálat befejezhető?*

Feladat: *Egy építkezési vállalat, miután egy munkálatot munkaszakaszokra bontott, a tapasztalat alapján megállapítja az egyes munkaszakaszok elvégzéséhez szükséges időt. Mekkora a legrövidebb idő, amely alatt az egész munkálat befejezhető*?

Megoldás: Ha az egyes munkaszakaszok kezdetét és végét pontok, míg a munkálat elvégzéséhez szükséges időtartamot a megfelelő hosszúságú élek jelentik, akkor az egész munkálatra felépíthető egy gráf. Ebben a gráfban a kérdés a következő általános alakot kapja: Melyik, a munkálat kezdetét jelentő és a munkálat végét jelentő két csomópont között a leghosszabb út?

Feladat: *Adott n szakképesített munkást n darab különböző szerszámgépre kell beosztani. Mindegyik munkást felkészültsége, ügyessége és gyakorlata alapján a normához viszonyított százalékban kifejezett, különböző termelékenységi mutatóval oszthatjuk be. Határozzuk meg az n munkás leggazdaságosabb beosztását az egyes gépekhez*!

Feladat: *Adott n szakképesített munkást n darab különböző szerszámgépre kell beosztani. Mindegyik munkást felkészültsége, ügyessége és gyakorlata alapján a normához viszonyított százalékban kifejezett, különböző termelékenységi mutatóval oszthatjuk be. Határozzuk meg az n munkás leggazdaságosabb beosztását az egyes gépekhez*!

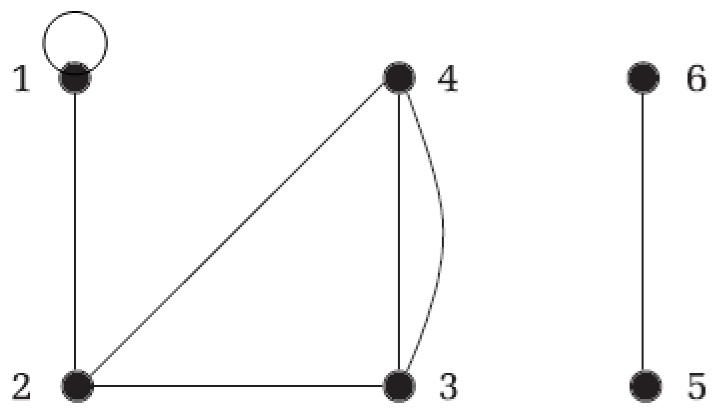
Megoldás: Jelöljék a munkásokat és a gépeket pontok, a beosztási lehetőségeket a munkásokat képviselő csúcspontoktól a gépeket képviselő csúcspontokhoz vezető élek, amelyeknek hosszát a termelékenységi mutató adja. A probléma a következőképpen általánosítható: Melyik az így kapott gráfnak az az n éle, amelyek mindegyike különböző pontból indul ki és különböző pontba érkezik, összhosszúságuk pedig a legnagyobb? A gráfelmélet nyelvén: határozzuk meg a maximális párosítást!

Alapfogalmak

Egy G **irányítatlan gráf** egy rendezett pár, $G = (V, E)$, ahol V egy nem üres halmaz. A V elemeit csomópontoknak vagy csúcsoknak, az E elemeit pedig éleknek nevezzük.

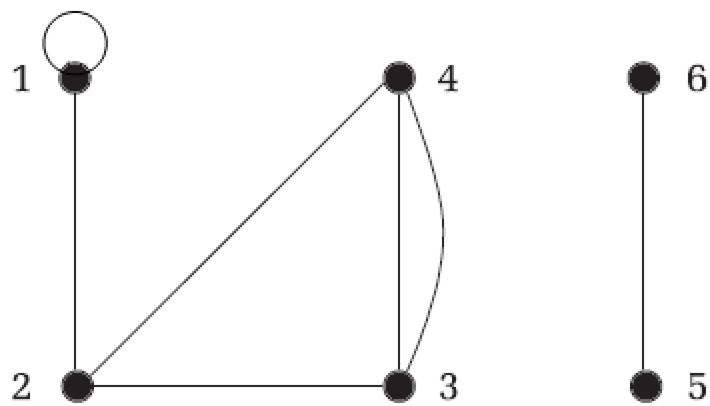
Alapfogalmak

Egy G **irányítatlan gráf** egy rendezett pár, $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$, ahol V egy nem üres halmaz. A V elemeit csomópontoknak vagy csúcsoknak, az E elemeit pedig éleknek nevezzük.



Alapfogalmak

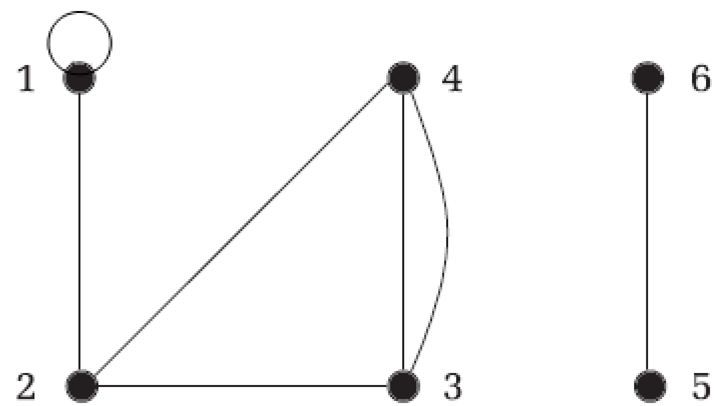
Egy G **irányítatlan gráf** egy rendezett pár, $G = (V, E)$, ahol V egy nem üres halmaz. A V elemeit csomópontoknak vagy csúcsoknak, az E elemeit pedig éleknek nevezzük.



Ha egy él végpontjai azonosak, akkor **hurokél**ről beszélünk.

Alapfogalmak

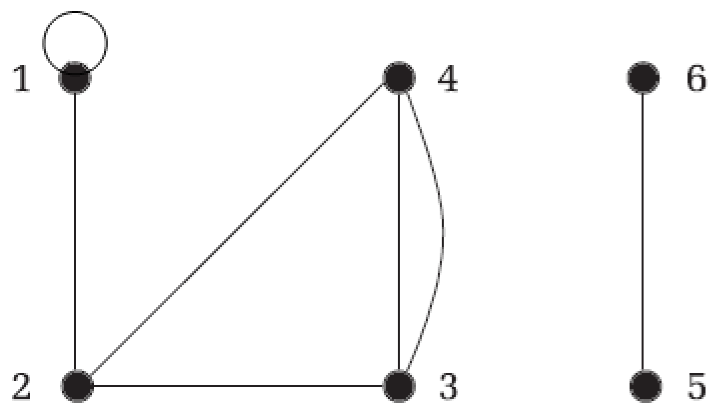
Egy G **irányítatlan gráf** egy rendezett pár, $G = (V, E)$, ahol V egy nem üres halmaz. A V elemeit csomópontoknak vagy csúcsoknak, az E elemeit pedig éleknek nevezzük.



Ha egy él végpontjai azonosak, akkor **hurokél**ről beszélünk: $(1,1)$

Alapfogalmak

Egy G **irányítatlan gráf** egy rendezett pár, $G = (V, E)$, ahol V egy nem üres halmaz. A V elemeit csomópontoknak vagy csúcsoknak, az E elemeit pedig éleknek nevezzük.

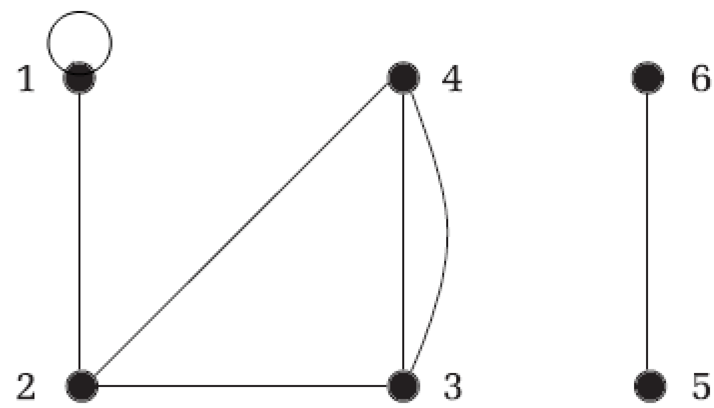


Ha egy él végpontjai azonosak, akkor **hurokél**ről beszélünk: $(1,1)$

Ha két különböző nem hurokél végpontjai azonosak, akkor ezeket **párhuzamos** vagy **többszörös élek**nek nevezzük.

Alapfogalmak

Egy G **irányítatlan gráf** egy rendezett pár, $G = (V, E)$, ahol V egy nem üres halmaz. A V elemeit csomópontoknak vagy csúcsoknak, az E elemeit pedig éleknek nevezzük.

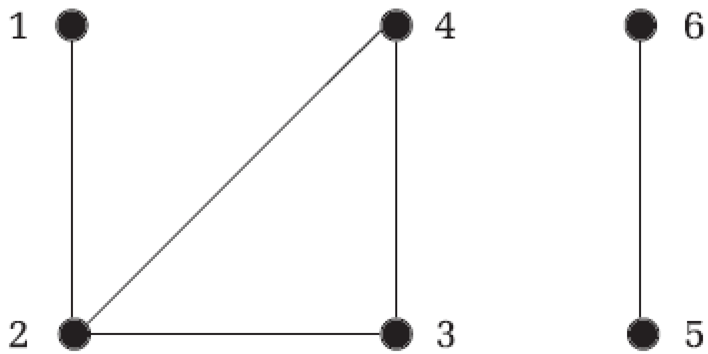


Ha egy él végpontjai azonosak, akkor **hurokél**ről beszélünk: $(1,1)$

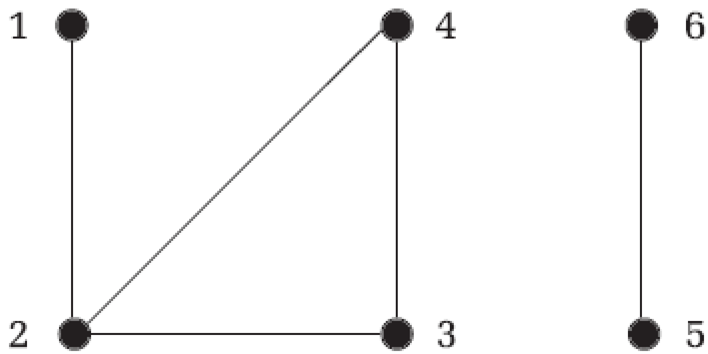
Ha két különböző nem hurokél végpontjai azonosak, akkor ezeket **párhuzamos** vagy **többszörös élek**nek nevezzük: $(3,4)$

Egy G irányítatlan gráfot **egyszerű irányítatlan gráf**nak nevezzük, ha nem tartalmaz sem hurokélt, sem többszörös élt. Az egyszerű gráfok élei azonosíthatók a csúcspontok által.

Egy G irányítatlan gráfot **egyszerű irányítatlan gráf**nak nevezzük, ha nem tartalmaz sem hurokélt, sem többszörös élt. Az egyszerű gráfok élei azonosíthatók a csúcspontok által.



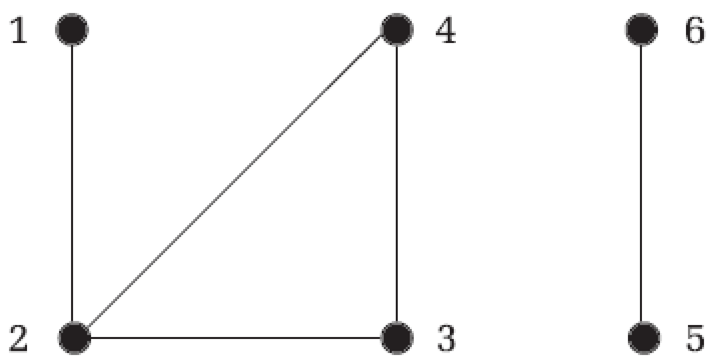
Egy G irányítatlan gráfot **egyszerű irányítatlan gráf**nak nevezzük, ha nem tartalmaz sem hurokélt, sem többszörös élt. Az egyszerű gráfok élei azonosíthatók a csúcspontok által.



$$V = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

$$E = \{ (1,2), (2,3), (2,4), (3,4), (5,6) \}$$

Egy G irányítatlan gráfot **egyszerű irányítatlan gráf**nak nevezzük, ha nem tartalmaz sem hurokélt, sem többszörös élt. Az egyszerű gráfok élei azonosíthatók a csúcspontok által.

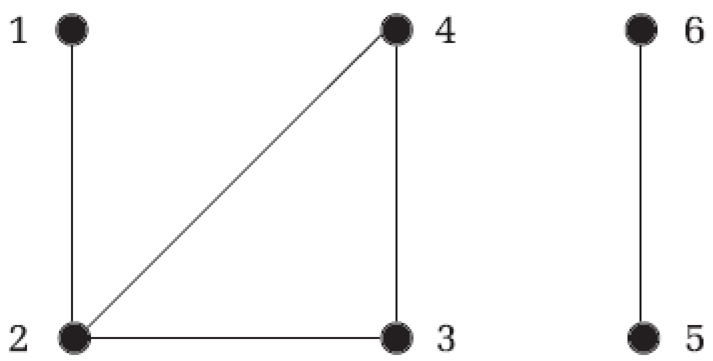


$V = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

$E = \{ (1,2), (2,3), (2,4), (3,4), (5,6) \}$

Két **csúcspont** akkor **szomszédos**, ha van él közöttük.

Egy G irányítatlan gráfot **egyszerű irányítatlan gráf**nak nevezzük, ha nem tartalmaz sem hurokélt, sem többszörös élt. Az egyszerű gráfok élei azonosíthatók a csúcspontok által.



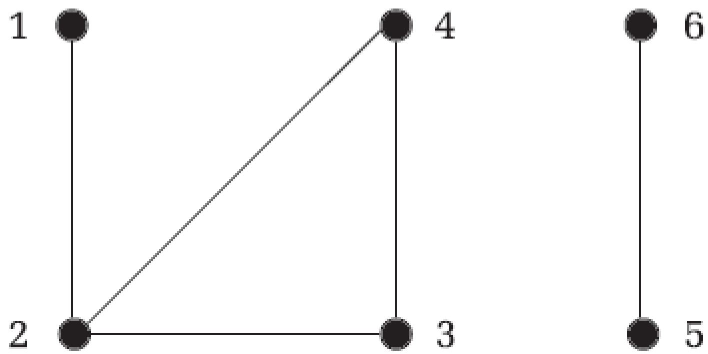
$$V = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

$$E = \{ (1,2), (2,3), (2,4), (3,4), (5,6) \}$$

Két **csúcspont** akkor **szomszédos**, ha van él közöttük.

Két **él** akkor **szomszédos**, ha valamelyik végpontjuk közös.

Egy G irányítatlan gráfot **egyszerű irányítatlan gráf**nak nevezzük, ha nem tartalmaz sem hurokélt, sem többszörös élt. Az egyszerű gráfok élei azonosíthatók a csúcspontok által.



$$V = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

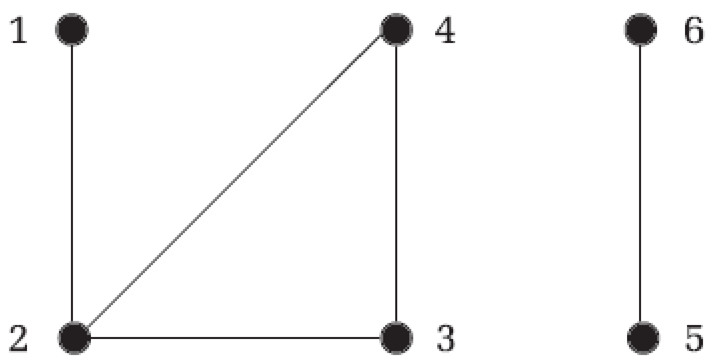
$$E = \{ (1,2), (2,3), (2,4), (3,4), (5,6) \}$$

Két **csúcspont** akkor **szomszédos**, ha van él közöttük.

Két **él** akkor **szomszédos**, ha valamelyik végpontjuk közös.

Ha egy csúcspont végpontja egy adott élnek, akkor azt mondjuk, hogy **illeszkedik** rá.

Egy G irányítatlan gráfot **egyszerű irányítatlan gráf**nak nevezzük, ha nem tartalmaz sem hurokélt, sem többszörös élt. Az egyszerű gráfok élei azonosíthatók a csúcspontok által.



$$V = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

$$E = \{ (1,2), (2,3), (2,4), (3,4), (5,6) \}$$

Két **csúcspont** akkor **szomszédos**, ha van él közöttük.

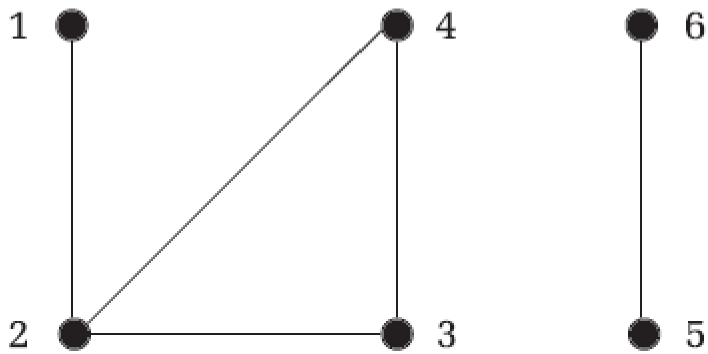
Két **él** akkor **szomszédos**, ha valamelyik végpontjuk közös.

Ha egy csúcspont végpontja egy adott élnek, akkor azt mondjuk, hogy **illeszkedik** rá.

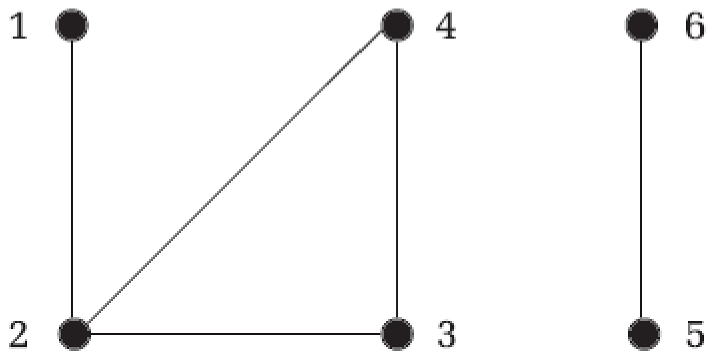
Az **izolált pont** olyan csúcspont, amelyik nem illeszkedik egyetlen élre sem.

Egy v csúcspontra illeszkedő élek száma az adott pont **fokszám**át adja meg, amelyet $d(v)$-vel jelölünk. Egy gráf **maximális fokszám**át Δ-val, **minimális fokszám**át pedig δ-val fogjuk jelölni.

Egy v csúcspontra illeszkedő élek száma az adott pont **fokszámát** adja meg, amelyet $d(v)$-vel jelölünk. Egy gráf **maximális fokszámát** Δ-val, **minimális fokszámát** pedig δ-val fogjuk jelölni.



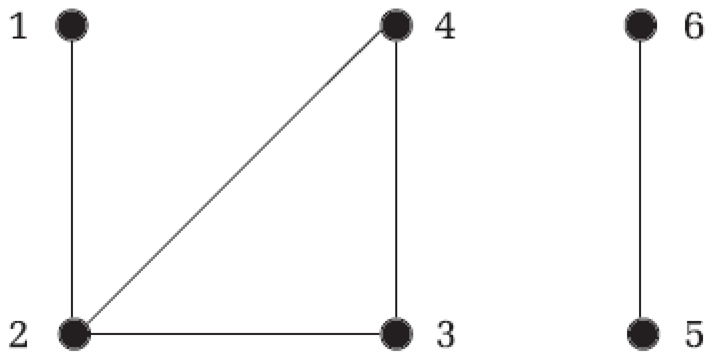
Egy v csúcspontra illeszkedő élek száma az adott pont **fokszám**át adja meg, amelyet $d(v)$-vel jelölünk. Egy gráf **maximális fokszám**át Δ-val, **minimális fokszám**át pedig δ-val fogjuk jelölni.



$\Delta(G) = 3$, mert $d(2) = 3$

$\delta(G) = 1$, mert $d(1) = d(5) = d(6) = 1$

Egy v csúcspontra illeszkedő élek száma az adott pont **fokszám**át adja meg, amelyet $d(v)$-vel jelölünk. Egy gráf **maximális fokszám**át Δ-val, **minimális fokszám**át pedig δ-val fogjuk jelölni.

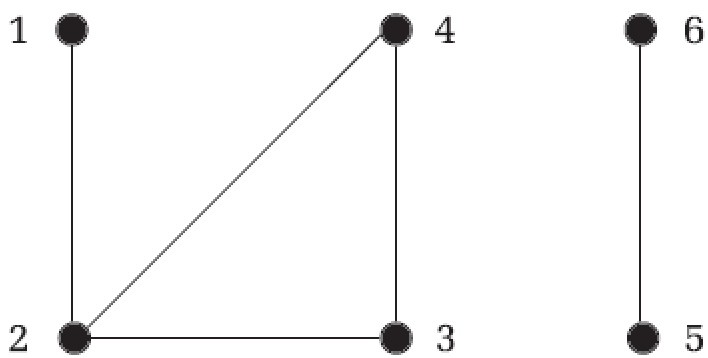


$\Delta(G) = 3$, mert $d(2) = 3$

$\delta(G) = 1$, mert $d(1) = d(5) = d(6) = 1$

Egy gráf k-**reguláris**, ha minden csúcspontjának foka k.

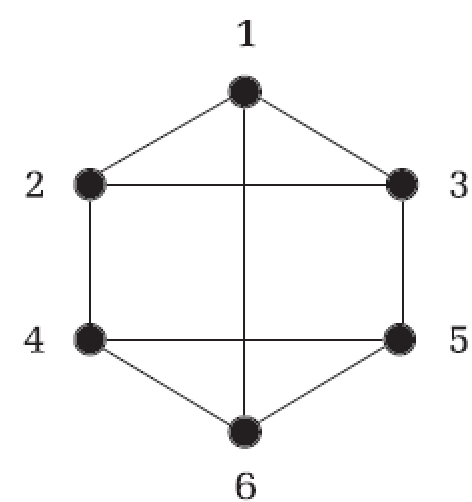
Egy v csúcspontra illeszkedő élek száma az adott pont **fokszám**át adja meg, amelyet $d(v)$-vel jelölünk. Egy gráf **maximális fokszám**át Δ-val, **minimális fokszám**át pedig δ-val fogjuk jelölni.



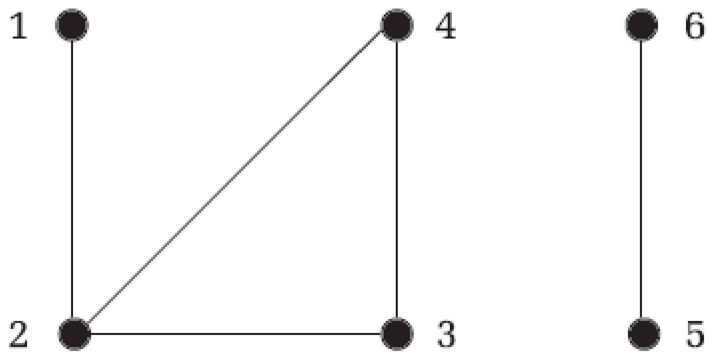
$\Delta(G) = 3$, mert $d(2) = 3$

$\delta(G) = 1$, mert $d(1) = d(5) = d(6) = 1$

Egy gráf k-**reguláris**, ha minden csúcspontjának foka k.



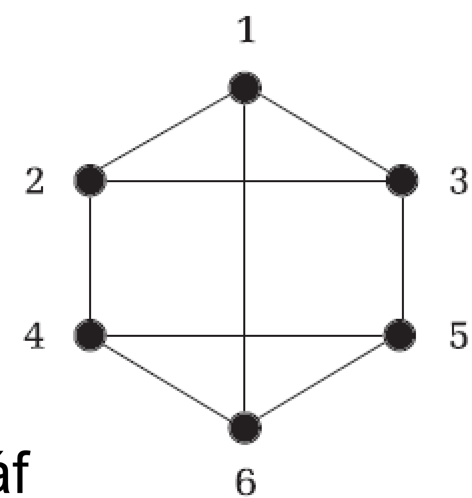
Egy v csúcspontra illeszkedő élek száma az adott pont **fokszám**át adja meg, amelyet $d(v)$-vel jelölünk. Egy gráf **maximális fokszám**át Δ-val, **minimális fokszám**át pedig δ-val fogjuk jelölni.



$\Delta(G) = 3$, mert $d(2) = 3$

$\delta(G) = 1$, mert $d(1) = d(5) = d(6) = 1$

Egy gráf k-**reguláris**, ha minden csúcspontjának foka k.



3-reguláris gráf

1.1 tétel:

Tetszőleges gráfra teljesül, hogy a fokszámok összege az élek számának kétszerese.

1.1 tétel:

Tetszőleges gráfra teljesül, hogy a fokszámok összege az élek számának kétszerese.

Bizonyítás:

Távolítsuk el a gráf összes élét. Az így létrejött gráf csupán izolált pontokból áll, ezért a fokszámok összege 0.

Most tegyük vissza az éleket egyenként. Minden visszatett él eggyel növeli a végpontjainak fokszámait, azaz kettővel növeli az összfokszámot. □

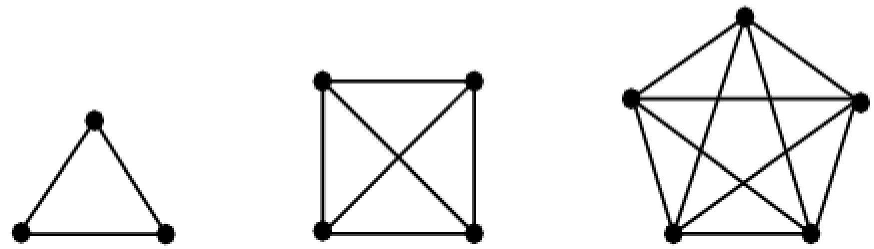
Ha egy n pontú egyszerű gráf bármely két csúcspontja szomszédos, akkor n **pontú teljes gráfról** beszélünk, és K_n-nel jelöljük.

Ha egy n pontú egyszerű gráf bármely két csúcspontja szomszédos, akkor n **pontú teljes gráfról** beszélünk, és K_n-nel jelöljük.

Az n pontú teljes gráf éleinek száma: $\dfrac{n(n-1)}{2}$

Ha egy n pontú egyszerű gráf bármely két csúcspontja szomszédos, akkor n **pontú teljes gráfról** beszélünk, és K_n-nel jelöljük.

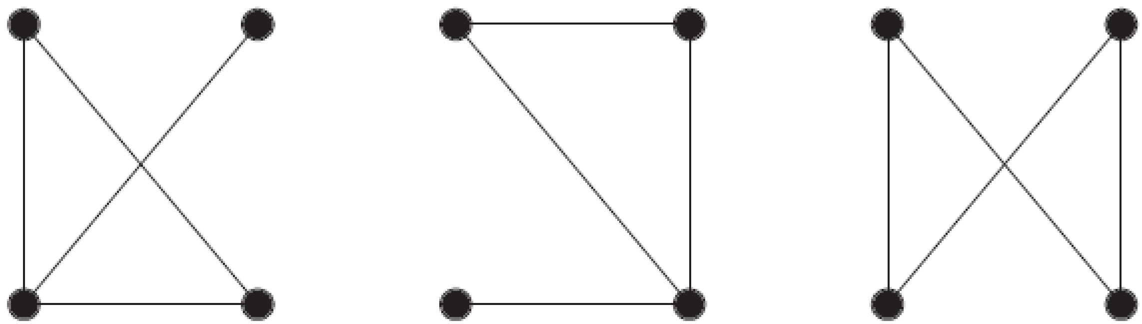
Az n pontú teljes gráf éleinek száma: $\dfrac{n(n-1)}{2}$



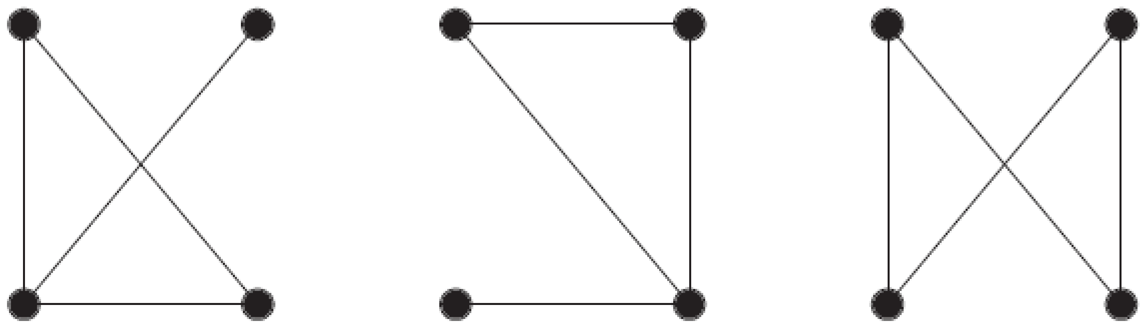
K_3 K_4 K_5

A G(V, E) és G'(V', E') gráfok **izomorf**ak, ha létezik olyan bijektív leképezés V és V' halmazok között, hogy a G gráfban pontosan akkor szomszédos két csúcspont, ha a G' gráfban a nekik megfelelő csúcspontok szomszédosak, és szomszédos pontpárok esetén ugyanannyi él fut közöttük.

A $G(V, E)$ és $G'(V', E')$ gráfok **izomorf**ak, ha létezik olyan bijektív leképezés V és V' halmazok között, hogy a G gráfban pontosan akkor szomszédos két csúcspont, ha a G' gráfban a nekik megfelelő csúcspontok szomszédosak, és szomszédos pontpárok esetén ugyanannyi él fut közöttük.



A $G(V, E)$ és $G'(V', E')$ gráfok **izomorf**ak, ha létezik olyan bijektív leképezés V és V' halmazok között, hogy a G gráfban pontosan akkor szomszédos két csúcspont, ha a G' gráfban a nekik megfelelő csúcspontok szomszédosak, és szomszédos pontpárok esetén ugyanannyi él fut közöttük.



Az első két gráf izomorf egymással, a harmadik viszont nem izomorf velük.

Egy $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ sorozatot **sétá**nak nevezünk, ha e_i a v_{i-1} és v_i csúcspontokat összekötő él. Ha $v_0 = v_k$, akkor a **zárt sétá**ról beszélünk. Amennyiben a csúcsok mind különbözők, akkor **út**ról beszélünk. A zárt utat **kör**nek is nevezzük. Amennyiben az élek mind különbözők, akkor **vonal**ról beszélünk.

Egy $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ sorozatot **sétá**nak nevezünk, ha e_i a v_{i-1} és v_i csúcspontokat összekötő él. Ha $v_0 = v_k$, akkor a **zárt sétá**ról beszélünk. Amennyiben a csúcsok mind különbözők, akkor **út**ról beszélünk. A zárt utat **kör**nek is nevezzük. Amennyiben az élek mind különbözők, akkor **vonal**ról beszélünk.

Egyszerű gráfban az utat $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k)$ sorozattal írjuk le.

Egy $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ sorozatot **sétá**nak nevezünk, ha e_i a v_{i-1} és v_i csúcspontokat összekötő él. Ha $v_0 = v_k$, akkor a **zárt sétá**ról beszélünk. Amennyiben a csúcsok mind különbözők, akkor **út**ról beszélünk. A zárt utat **kör**nek is nevezzük. Amennyiben az élek mind különbözők, akkor **vonal**ról beszélünk.

Egyszerű gráfban az utat $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k)$ sorozattal írjuk le.

A **Hamilton-út** olyan út, amely a gráf minden pontját pontosan egyszer tartalmazza.

Egy $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ sorozatot **sétá**nak nevezünk, ha e_i a v_{i-1} és v_i csúcspontokat összekötő él. Ha $v_0 = v_k$, akkor a **zárt sétá**ról beszélünk. Amennyiben a csúcsok mind különbözők, akkor **út**ról beszélünk. A zárt utat **kör**nek is nevezzük. Amennyiben az élek mind különbözők, akkor **vonal**ról beszélünk.

Egyszerű gráfban az utat $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k)$ sorozattal írjuk le.

A **Hamilton-út** olyan út, amely a gráf minden pontját pontosan egyszer tartalmazza.

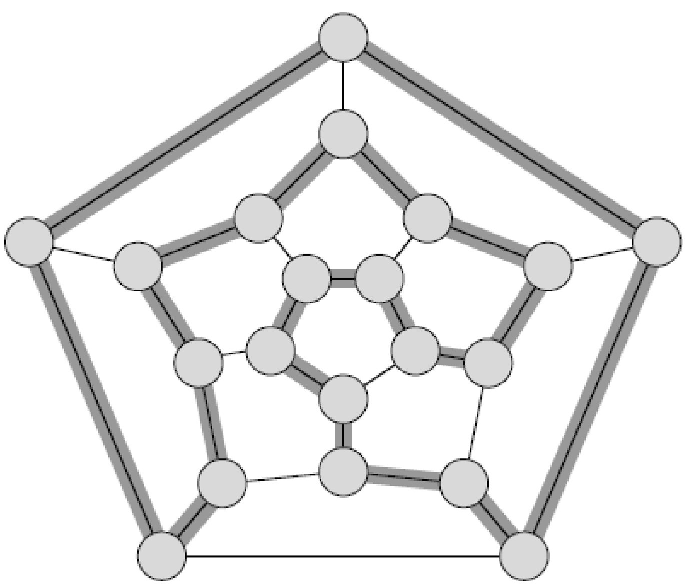
A **Hamilton-kör** olyan kör, amely a gráf minden pontját pontosan egyszer tartalmazza. Ha egy gráf tartalmaz Hamilton-kört, akkor **Hamilton-gráf**nak nevezzük.

Egy $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ sorozatot **sétá**nak nevezünk, ha e_i a v_{i-1} és v_i csúcspontokat összekötő él. Ha $v_0 = v_k$, akkor a **zárt sétá**ról beszélünk. Amennyiben a csúcsok mind különbözők, akkor **út**ról beszélünk. A zárt utat **kör**nek is nevezzük. Amennyiben az élek mind különbözők, akkor **vonal**ról beszélünk.

Egyszerű gráfban az utat $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k)$ sorozattal írjuk le.

A **Hamilton-út** olyan út, amely a gráf minden pontját pontosan egyszer tartalmazza.

A **Hamilton-kör** olyan kör, amely a gráf minden pontját pontosan egyszer tartalmazza. Ha egy gráf tartalmaz Hamilton-kört, akkor **Hamilton-gráf**nak nevezzük.

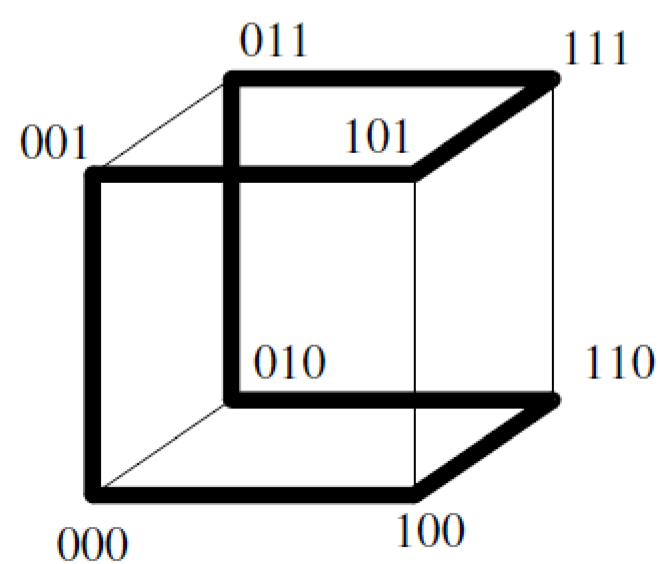


Egy $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ sorozatot **sétá**nak nevezünk, ha e_i a v_{i-1} és v_i csúcspontokat összekötő él. Ha $v_0 = v_k$, akkor a **zárt sétá**ról beszélünk. Amennyiben a csúcsok mind különbözők, akkor **út**ról beszélünk. A zárt utat **kör**nek is nevezzük. Amennyiben az élek mind különbözők, akkor **vonal**ról beszélünk.

Egyszerű gráfban az utat $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k)$ sorozattal írjuk le.

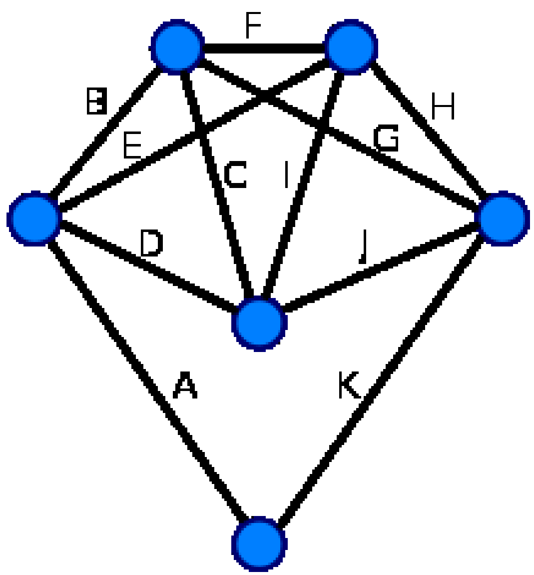
A **Hamilton-út** olyan út, amely a gráf minden pontját pontosan egyszer tartalmazza.

A **Hamilton-kör** olyan kör, amely a gráf minden pontját pontosan egyszer tartalmazza. Ha egy gráf tartalmaz Hamilton-kört, akkor **Hamilton-gráf**nak nevezzük.

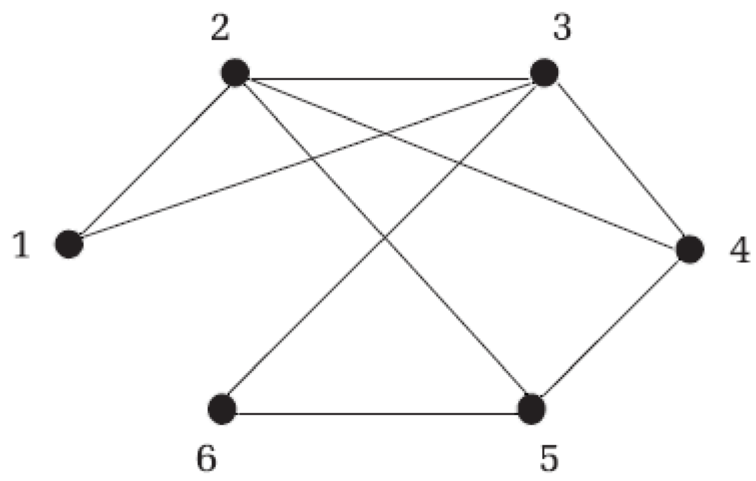


A **nyílt Euler-vonal** a gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza. A **zárt Euler-vonal** kezdőpontja megegyezik a végpontjával, és a gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza. Ha egy gráf tartalmaz zárt Euler-vonalat, akkor **Euler-gráf**nak nevezzük.

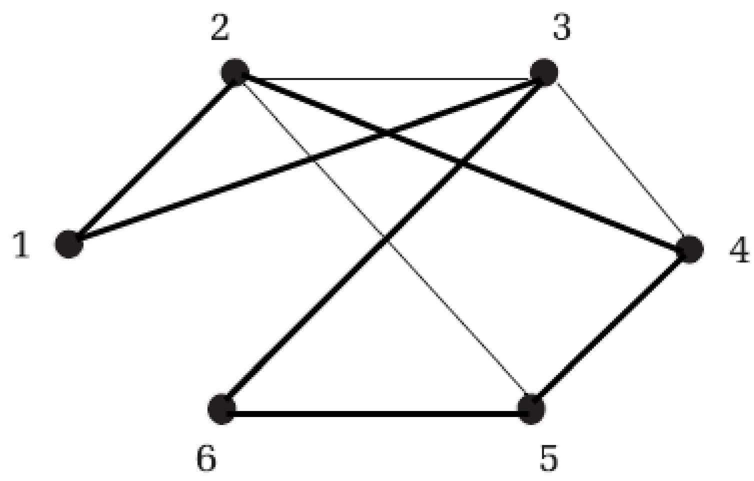
A **nyílt Euler-vonal** a gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza. A **zárt Euler-vonal** kezdőpontja megegyezik a végpontjával, és a gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza. Ha egy gráf tartalmaz zárt Euler-vonalat, akkor **Euler-gráf**nak nevezzük.



Hamilton-gráf, amely nem Euler-gráf:

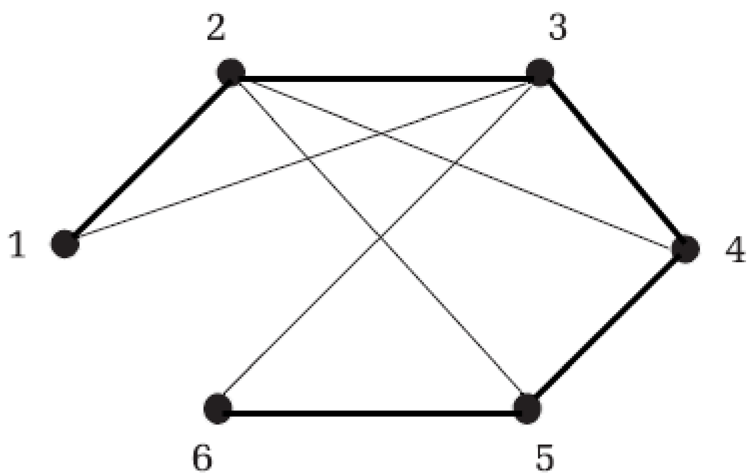


Hamilton-gráf, amely nem Euler-gráf:



Hamilton-kör: (1, 2, 4, 5, 6, 3, 1)

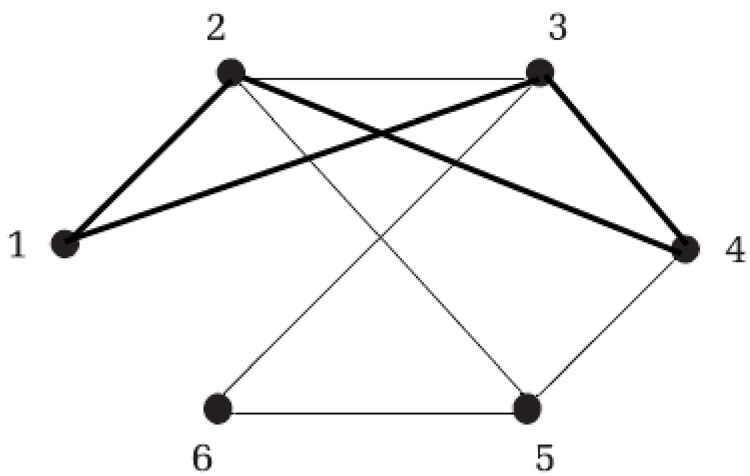
Hamilton-gráf, amely nem Euler-gráf:



Hamilton-kör: $(1, 2, 4, 5, 6, 3, 1)$

Hamilton-út: $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$

Hamilton-gráf, amely nem Euler-gráf:

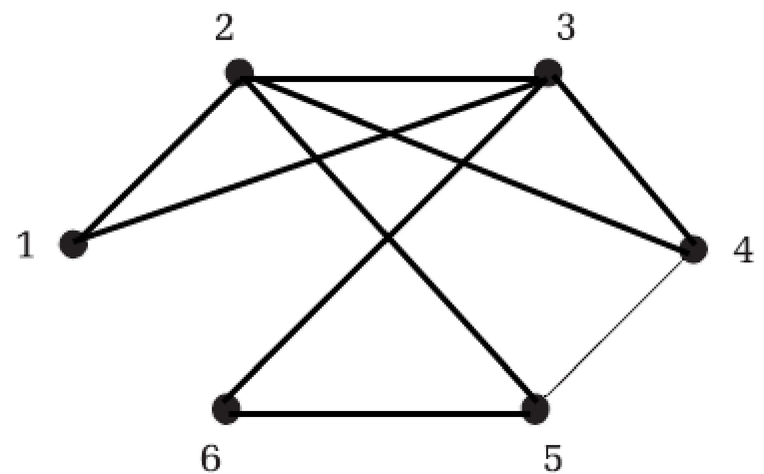


Hamilton-kör: $(1, 2, 4, 5, 6, 3, 1)$

Hamilton-út: $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$

kör (vonal is): $(1, 2, 4, 3, 1)$

Hamilton-gráf, amely nem Euler-gráf:



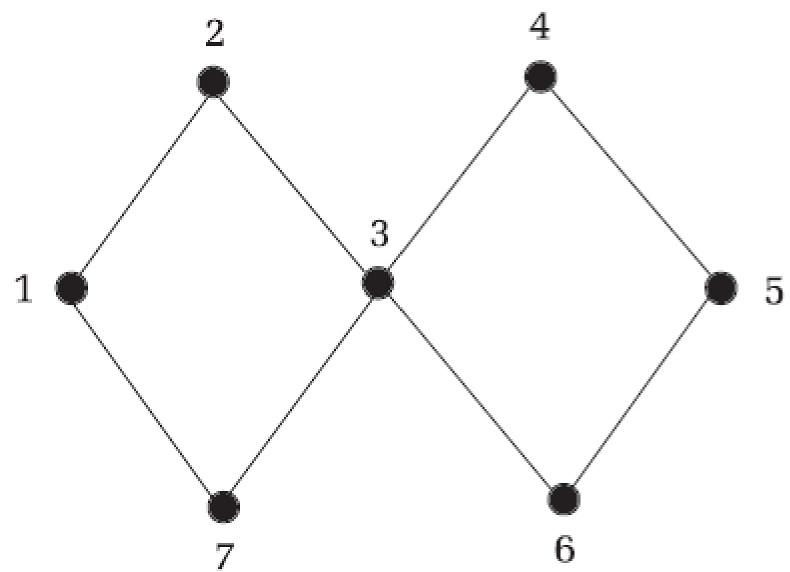
Hamilton-kör: $(1, 2, 4, 5, 6, 3, 1)$

Hamilton-út: $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$

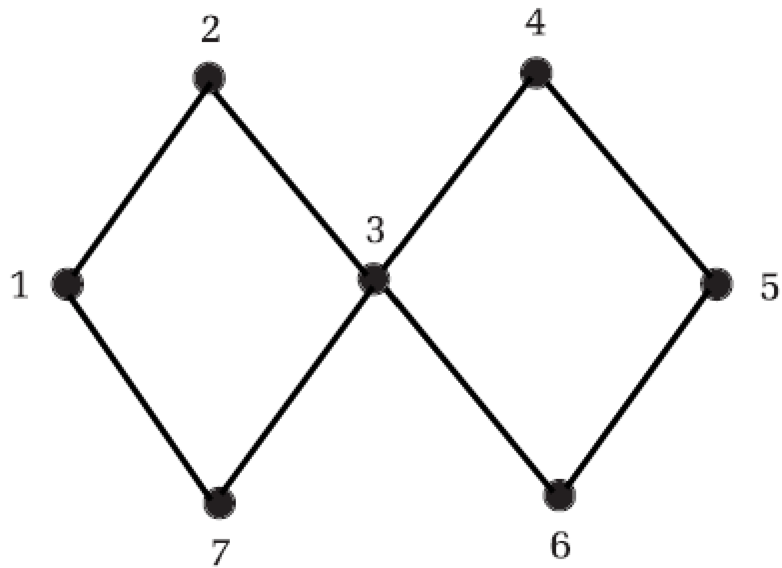
kör (vonal is): $(1, 2, 4, 3, 1)$

zárt vonal (nem kör): $(1, 2, 5, 6, 3, 2, 4, 3, 1)$

Euler-gráf, amely nem Hamilton-gráf:

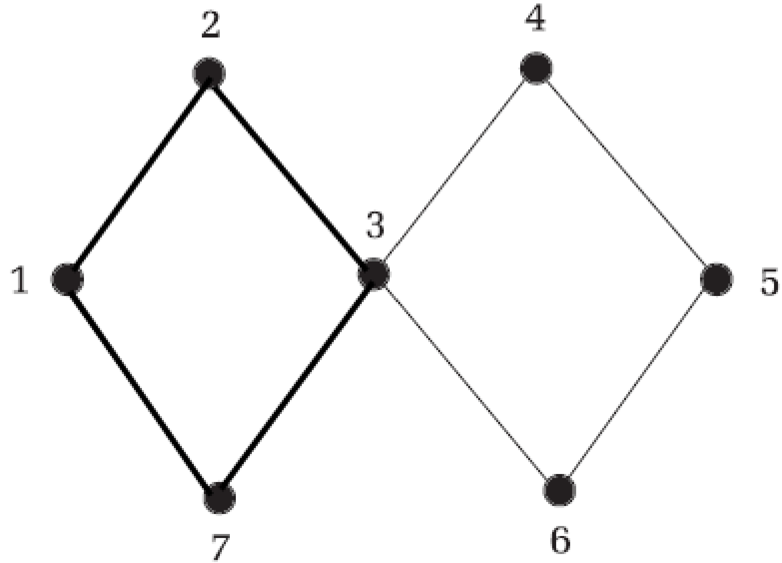


Euler-gráf, amely nem Hamilton-gráf:



zárt Euler-vonal (nem kör): $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 3, 7, 1)$

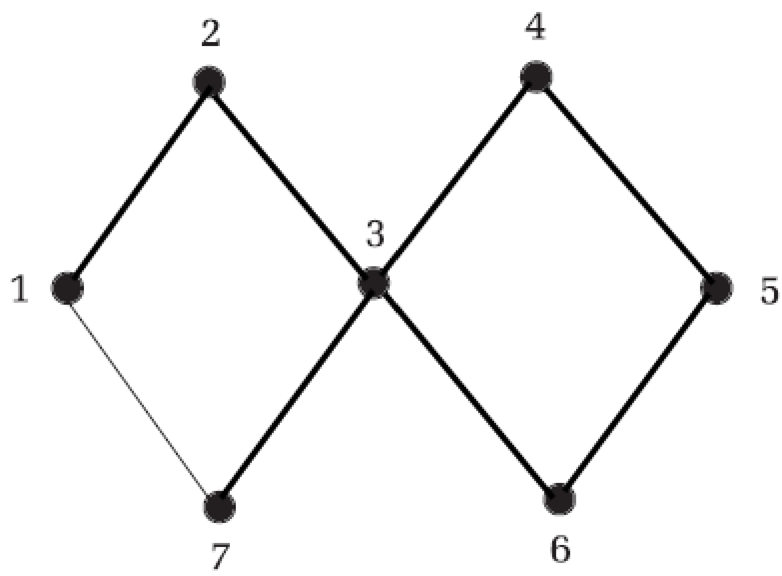
Euler-gráf, amely nem Hamilton-gráf:



zárt Euler-vonal (nem kör): $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 3, 7, 1)$

zárt vonal (kör is): $(1, 2, 3, 7, 1)$

Euler-gráf, amely nem Hamilton-gráf:

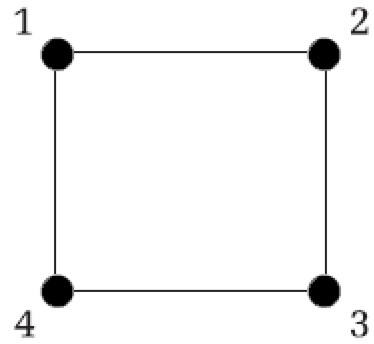


zárt Euler-vonal (nem kör): $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 3, 7, 1)$

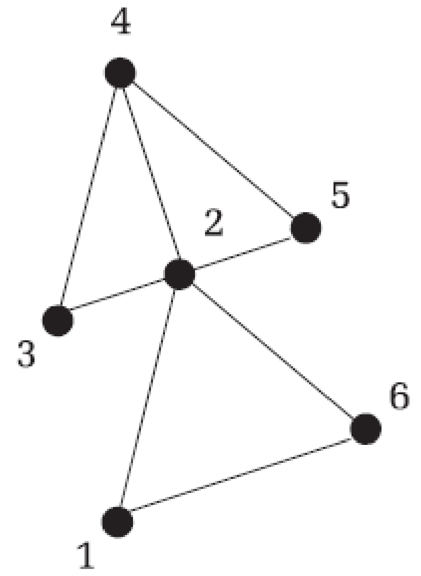
zárt vonal (kör is): $(1, 2, 3, 7, 1)$

vonal (nem út): $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 3, 7)$

Hamilton-gráf, amely Euler-gráf is:

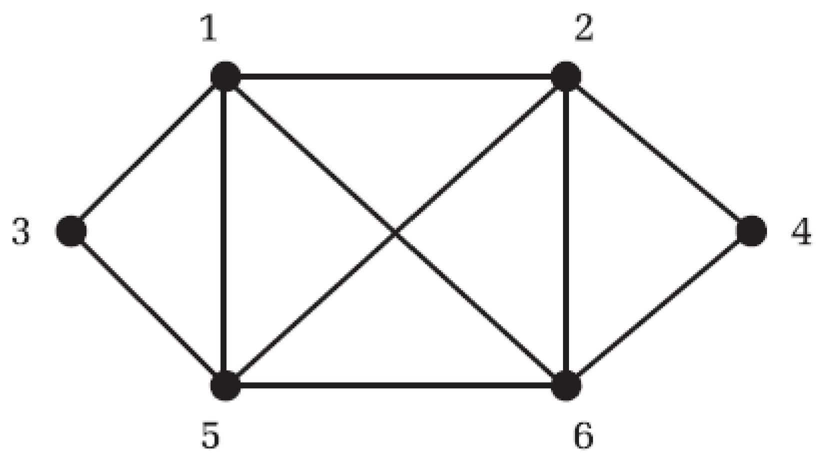


Gráf, amely se nem Hamilton-gráf, se nem Euler-gráf:

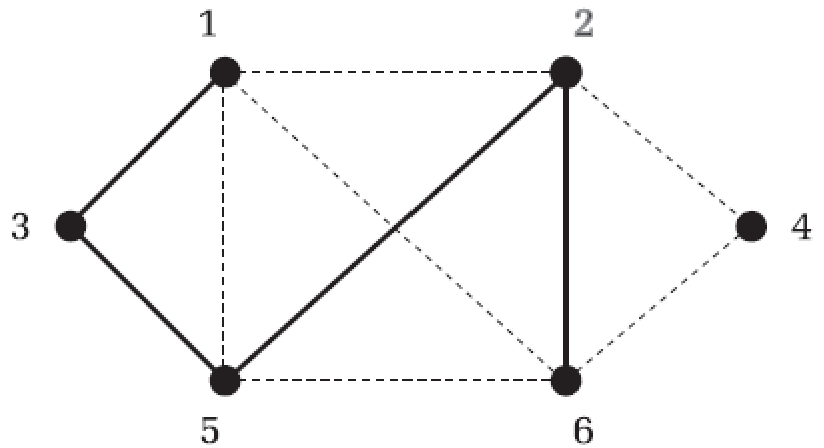


Egy gráfból úgy kapjuk valamely **részgráf**ját, hogy törlünk belőle éleket vagy pontokat a hozzájuk tartozó élekkel együtt. Ha csak éleket törlünk, akkor **feszítő részgráf**ról, ha csak pontokat, akkor **feszített részgráf**ról beszélünk.

Egy gráfból úgy kapjuk valamely **részgráf**ját, hogy törlünk belőle éleket vagy pontokat a hozzájuk tartozó élekkel együtt. Ha csak éleket törlünk, akkor **feszítő részgráf**ról, ha csak pontokat, akkor **feszített részgráf**ról beszélünk.

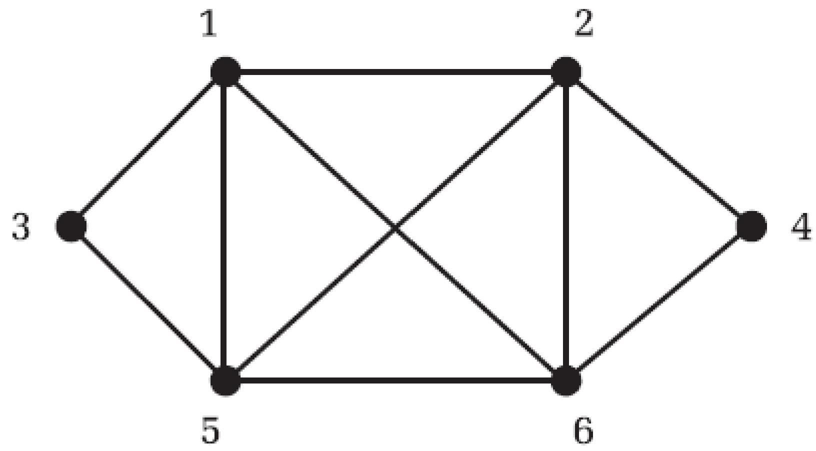


Egy gráfból úgy kapjuk valamely **részgráf**ját, hogy törlünk belőle éleket vagy pontokat a hozzájuk tartozó élekkel együtt. Ha csak éleket törlünk, akkor **feszítő részgráf**ról, ha csak pontokat, akkor **feszített részgráf**ról beszélünk.

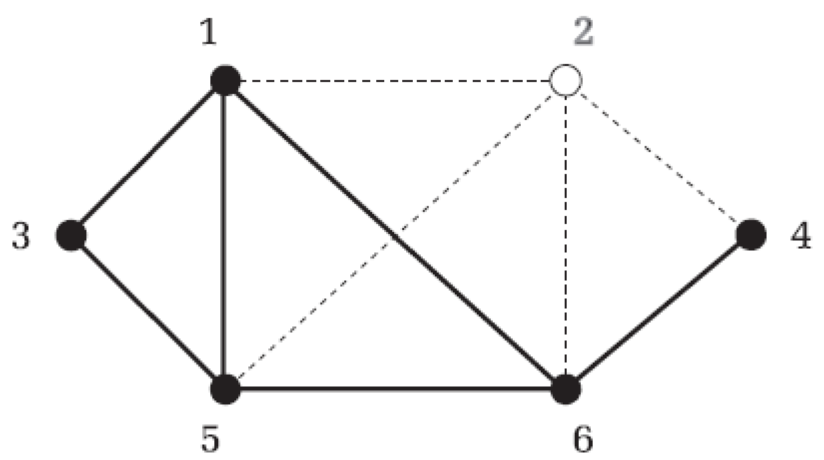


Feszítő részgráf (élek törlésével nyerjük)

Egy gráfból úgy kapjuk valamely **részgráf**ját, hogy törlünk belőle éleket vagy pontokat a hozzájuk tartozó élekkel együtt. Ha csak éleket törlünk, akkor **feszítő részgráf**ról, ha csak pontokat, akkor **feszített részgráf**ról beszélünk.

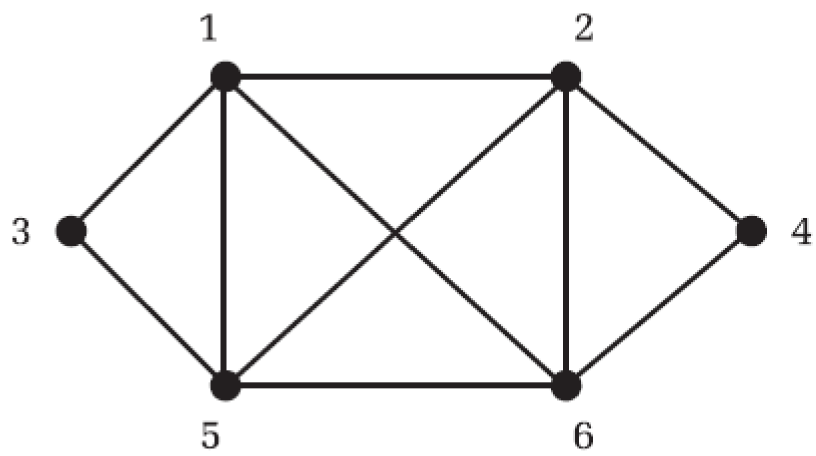


Egy gráfból úgy kapjuk valamely **részgráf**ját, hogy törlünk belőle éleket vagy pontokat a hozzájuk tartozó élekkel együtt. Ha csak éleket törlünk, akkor **feszítő részgráf**ról, ha csak pontokat, akkor **feszített részgráf**ról beszélünk.

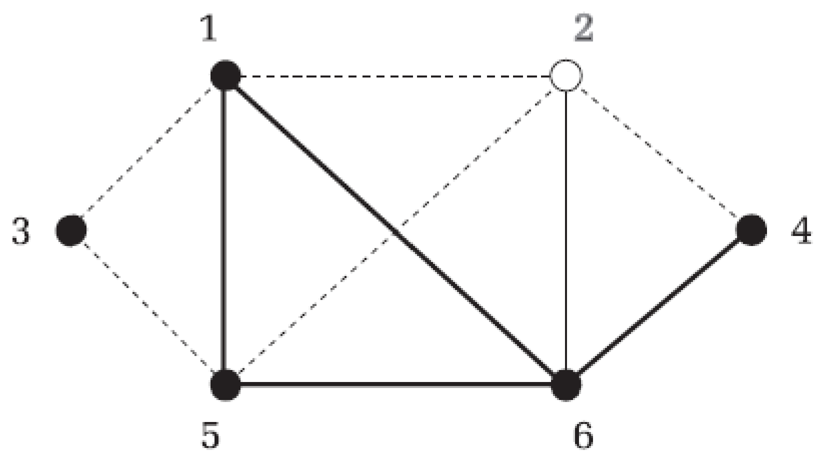


Feszített részgráf (pontok törlésével nyerjük)

Egy gráfból úgy kapjuk valamely **részgráf**ját, hogy törlünk belőle éleket vagy pontokat a hozzájuk tartozó élekkel együtt. Ha csak éleket törlünk, akkor **feszítő részgráf**ról, ha csak pontokat, akkor **feszített részgráf**ról beszélünk.



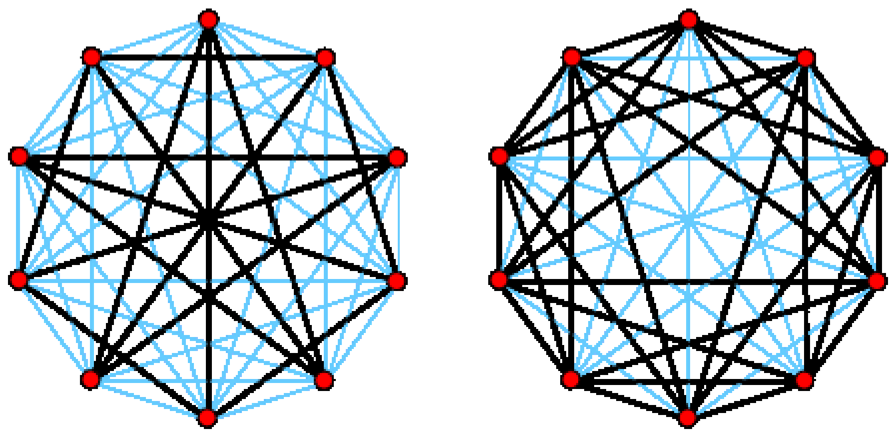
Egy gráfból úgy kapjuk valamely **részgráf**ját, hogy törlünk belőle éleket vagy pontokat a hozzájuk tartozó élekkel együtt. Ha csak éleket törlünk, akkor **feszítő részgráf**ról, ha csak pontokat, akkor **feszített részgráf**ról beszélünk.



Általános részgráf (pontok és élek törlésével nyerjük)

A G gráf **komplementer gráf**jában azok a pontpárok vannak összekötve, amelyek a G gráfban nincsenek összekötve.

A G gráf **komplementer gráf**jában azok a pontpárok vannak összekötve, amelyek a G gráfban nincsenek összekötve.



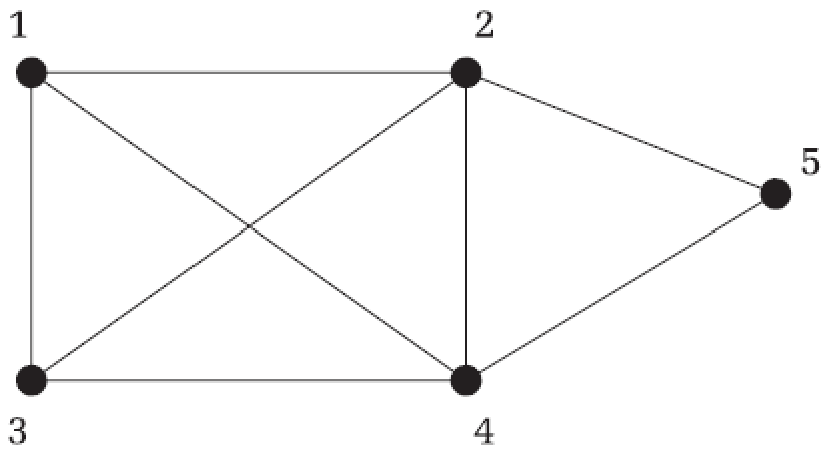
Egy gráf **összefüggő**, ha bármely két pontja között létezik út.

Egy gráf **összefüggő**, ha bármely két pontja között létezik út.

Ha a gráf nem összefüggő, akkor beszélhetünk összefüggő komponenseiről. Egy gráf összefüggő komponensei a gráf azon összefüggő feszített részgráfjai, amelyek maximálisak e tulajdonságra nézve.

Egy gráf **összefüggő**, ha bármely két pontja között létezik út.

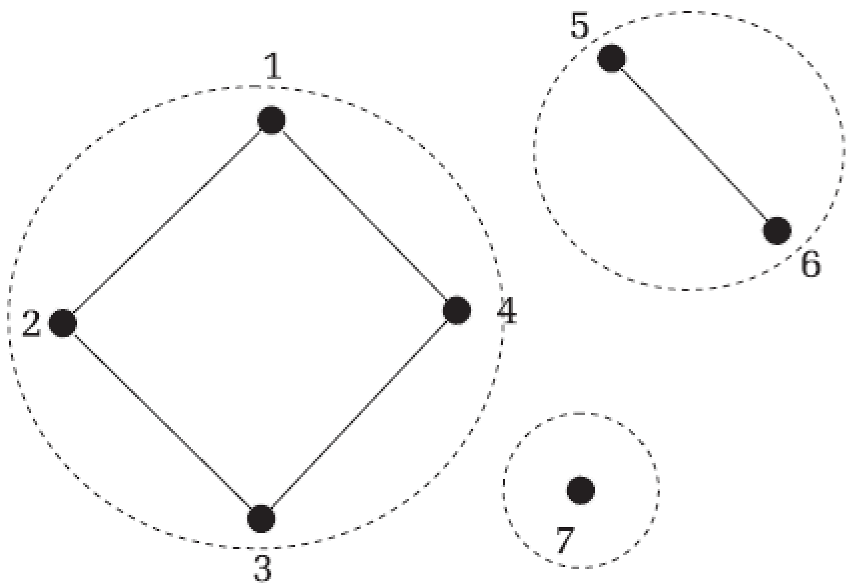
Ha a gráf nem összefüggő, akkor beszélhetünk összefüggő komponenseiről. Egy gráf összefüggő komponensei a gráf azon összefüggő feszített részgráfjai, amelyek maximálisak e tulajdonságra nézve.



Összefüggő gráf

Egy gráf **összefüggő**, ha bármely két pontja között létezik út.

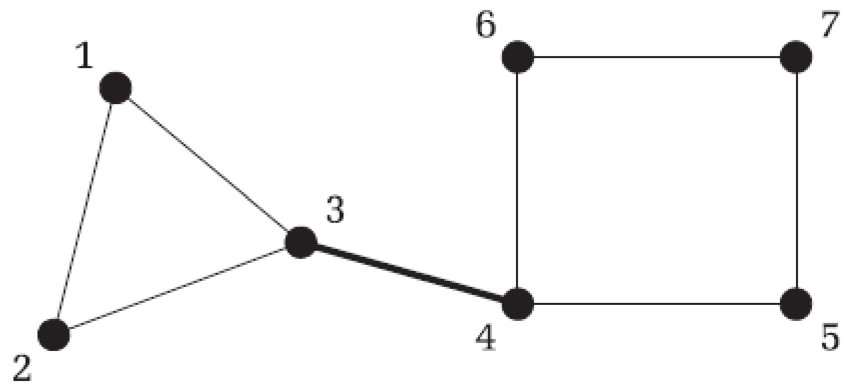
Ha a gráf nem összefüggő, akkor beszélhetünk összefüggő komponenseiről. Egy gráf összefüggő komponensei a gráf azon összefüggő feszített részgráfjai, amelyek maximálisak e tulajdonságra nézve.



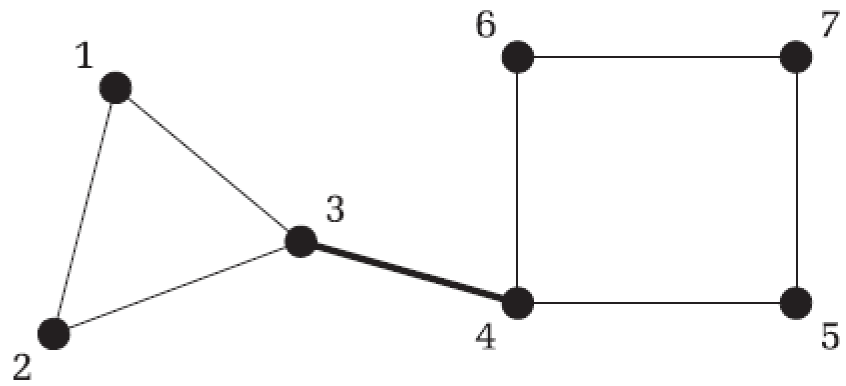
Nem összefüggő gráf

A gráf egy élét **elvágó él**nek nevezzük, ha elhagyásával nő a gráf összefüggő komponenseinek száma.

A gráf egy élét **elvágó él**nek nevezzük, ha elhagyásával nő a gráf összefüggő komponenseinek száma.

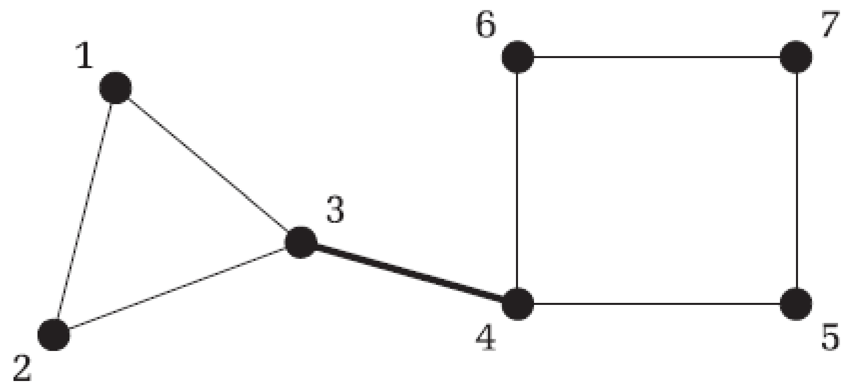


A gráf egy élét **elvágó él**nek nevezzük, ha elhagyásával nő a gráf összefüggő komponenseinek száma.

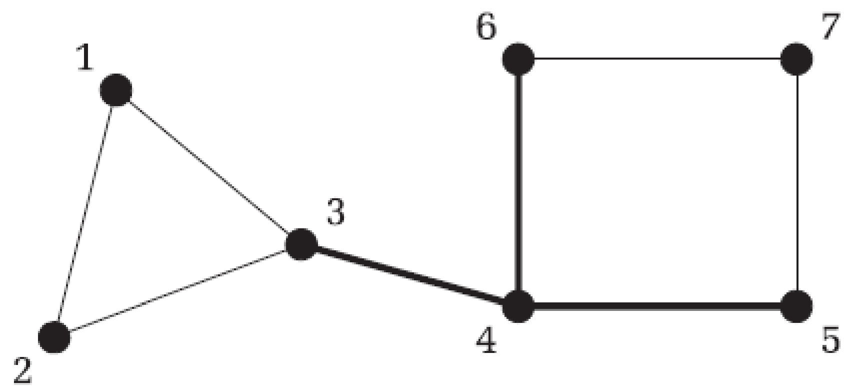


Egy pontot **elvágó pont**nak nevezzük, ha elhagyásával (a hozzá tartozó élekkel együtt) nő a gráf összefüggő komponenseinek száma.

A gráf egy élét **elvágó él**nek nevezzük, ha elhagyásával nő a gráf összefüggő komponenseinek száma.

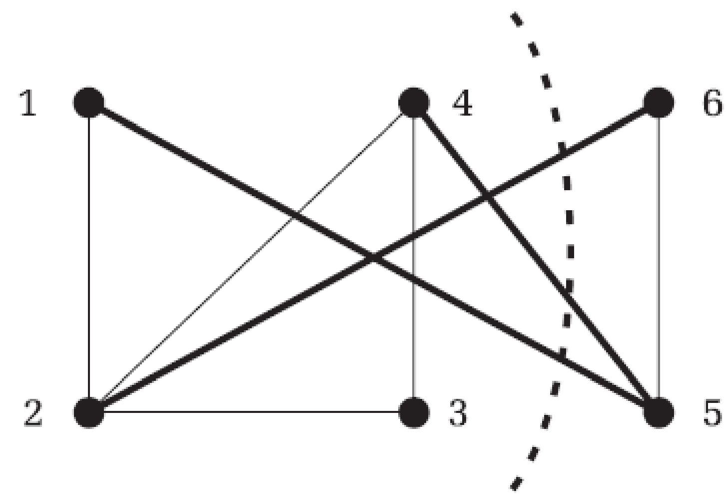


Egy pontot **elvágó pont**nak nevezzük, ha elhagyásával (a hozzá tartozó élekkel együtt) nő a gráf összefüggő komponenseinek száma.



A gráf egy élhalmazát **elvágó élhalmaz**nak nevezzük, ha a benne lévő élek elhagyásával nő a gráf összefüggő komponenseinek száma. Ha egy élhalmaz elvágó, de egyetlen valódi részhalmaza sem az, akkor vágásról beszélünk.

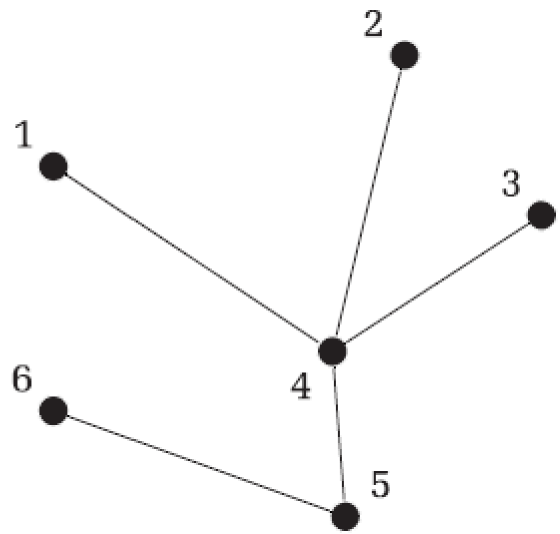
A gráf egy élhalmazát **elvágó élhalmaz**nak nevezzük, ha a benne lévő élek elhagyásával nő a gráf összefüggő komponenseinek száma. Ha egy élhalmaz elvágó, de egyetlen valódi részhalmaza sem az, akkor vágásról beszélünk.



Az $\{ (1,5), (2,6), (4,5) \}$ elvágó élhalmaz vágást alkot.

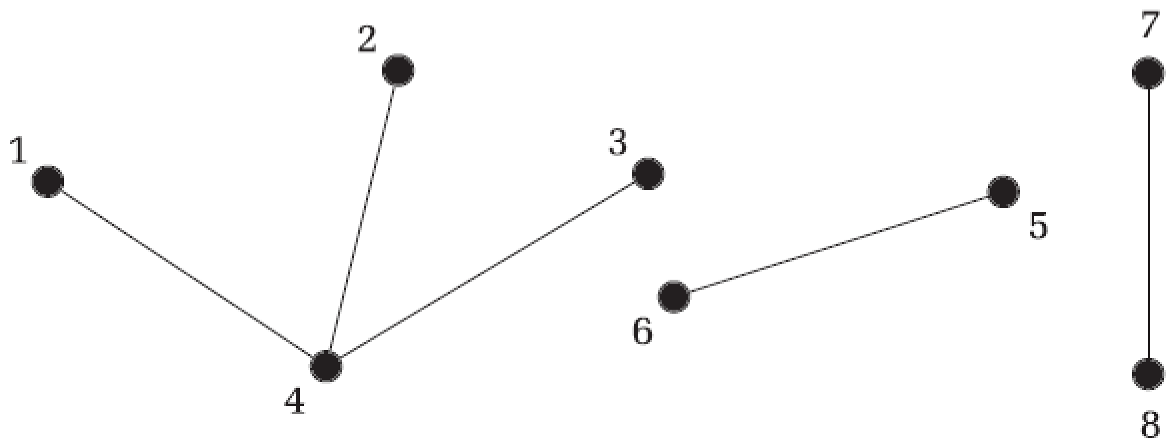
Az összefüggő, körmentes gráfot **fagráf**nak vagy **fá**nak nevezzük. A fák 1-fokszámú pontjait **levelek**nek nevezzük.

Az összefüggő, körmentes gráfot **fagráf**nak vagy **fá**nak nevezzük. A fák 1-fokszámú pontjait **levelek**nek nevezzük.



A körmentes gráfot **erdő**nek nevezzük.

A körmentes gráfot **erdő**nek nevezzük.



1.2 tétel:

Minden, legalább kétpontú fában van legalább két elsőfokú csúcspont.

1.2 tétel:

Minden, legalább kétpontú fában van legalább két elsőfokú csúcspont.

Bizonyítás:

Gondolatban távolítsuk el a fa összes élét, majd építsük fel a fát újra úgy, hogy egyenként visszatesszük az éleket. Mivel bármely fa összefüggő, ezért létezik az éleknek egy olyan visszarakási sorrendje, hogy az „építmény“ minden köztes állapotában fa legyen.

1.2 tétel:

Minden, legalább kétpontú fában van legalább két elsőfokú csúcspont.

Bizonyítás:

Gondolatban távolítsuk el a fa összes élét, majd építsük fel a fát újra úgy, hogy egyenként visszatesszük az éleket. Mivel bármely fa összefüggő, ezért létezik az éleknek egy olyan visszarakási sorrendje, hogy az „építmény“ minden köztes állapotában fa legyen.

Amikor a fa még csak egy élből áll, nyilvánvalóan van két elsőfokú pontja. Ezután minden hozzácsatolt él egy újabb elsőfokú pontot hoz a fába (különben kör alakulna ki), és legfeljebb egy elsőfokú pontot számol fel. Tehát a „növekvő“ fának folyamatosan van legalább két elsőfokú pontja. □

1.3 tétel:

Egy n pontú fa éleinek száma $n-1$.

1.3 tétel:

Egy n pontú fa éleinek száma $n-1$.

Bizonyítás:

Gondolatban távolítsuk el a fa összes élét, kivéve egyet. Az így kapott gráfnak lesz egy kétpontú (egyélű) fa-részgráfja és $n-2$ darab izolált pontja. Építsük vissza a fát, olyan sorrendben téve vissza az éleit, ahogy az előbbi tétel esetében is eljártunk.

1.3 tétel:

Egy n pontú fa éleinek száma $n-1$.

Bizonyítás:

Gondolatban távolítsuk el a fa összes élét, kivéve egyet. Az így kapott gráfnak lesz egy kétpontú (egyélű) fa-részgráfja és $n-2$ darab izolált pontja. Építsük vissza a fát, olyan sorrendben téve vissza az éleit, ahogy az előbbi tétel esetében is eljártunk.

Minden visszatett él egy újabb izolált pontot csatol a „növekvő“ fához. Ahhoz, hogy mind az $n-2$ izolált pont visszacsatolható legyen, legalább $n-2$ eltávolított élnek kellett lennie. Az élek száma ennél több nem lehet, hiszen minden további él kört eredményezne. A visszatett $n-2$ darab él a meghagyott eggyel összesen $n-1$ darab élt jelent. $\square$

1.4 tétel:

Egy n-pontú k-komponensű erdő éleinek száma $n-k$.

1.4 tétel:

Egy n-pontú k-komponensű erdő éleinek száma $n-k$.

Bizonyítás:

Tegyük fel a kérdést: *Hány plusz élre lenne szükség ahhoz, hogy a k-komponensű erdő egyetlen fává „nőjön össze“*?

1.4 tétel:

Egy n-pontú k-komponensű erdő éleinek száma $n-k$.

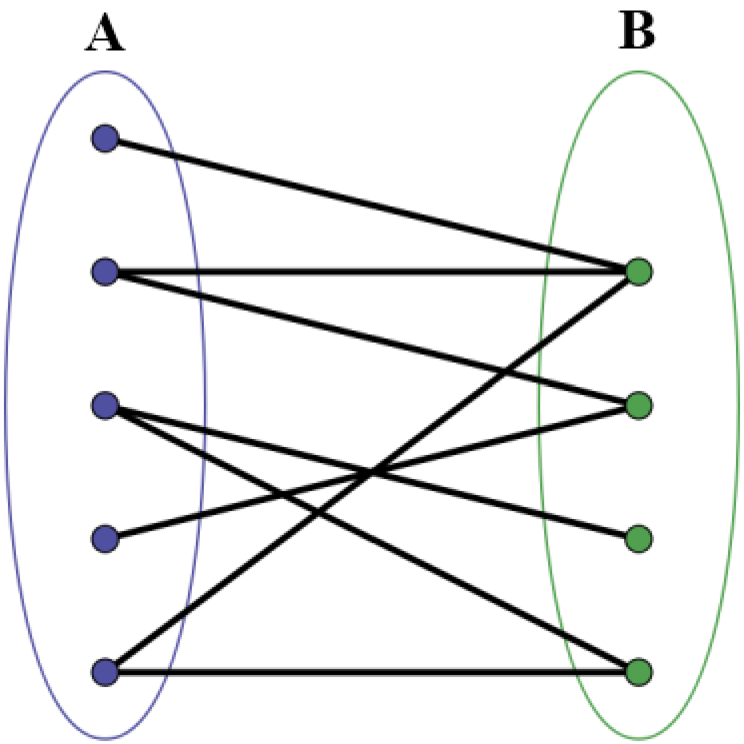
Bizonyítás:

Tegyük fel a kérdést: *Hány plusz élre lenne szükség ahhoz, hogy a k-komponensű erdő egyetlen fává „nőjön össze“*?

Nyilván $k-1$ darab hídra (elvágó élre) lenne szükség. Mivel az így kapott fának az előbbi tétel értelmében $n-1$ darab éle lenne, világos, hogy az erdőnek $(n-1)-(k-1)=n-k$ darab éle volt. □

A $G = (V, E)$ gráfot **páros gráf**nak nevezzük, ha a V halmazt fel tudjuk írni A és B diszjunkt halmazok uniójaként úgy, hogy az össze E halmazbeli élre teljesül, hogy egyik végpontja az A, másik végpontja pedig a B halmazban van.

A $G = (V, E)$ gráfot **páros gráf**nak nevezzük, ha a V halmazt fel tudjuk írni A és B diszjunkt halmazok úniójaként úgy, hogy az össze E halmazbeli élre teljesül, hogy egyik végpontja az A, másik végpontja pedig a B halmazban van.



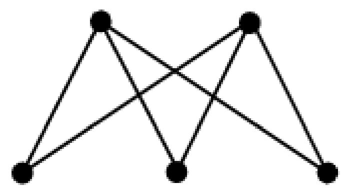
Teljes páros gráfnak nevezzük azt a páros gráfot, amelyben minden A halmazbeli csúcspont össze van kötve minden B halmazbeli csúcsponttal.

Teljes páros gráfnak nevezzük azt a páros gráfot, amelyben minden A halmazbeli csúcspont össze van kötve minden B halmazbeli csúcsponttal.

Jelölés: $K_{a,b}$ ahol $a = |\mathrm{A}|$, $b = |\mathrm{B}|$

Teljes páros gráfnak nevezzük azt a páros gráfot, amelyben minden A halmazbeli csúcspont össze van kötve minden B halmazbeli csúcsponttal.

Jelölés: $K_{a,b}$ ahol $a = |\mathrm{A}|$, $b = |\mathrm{B}|$



$K_{2,3}$

1.5 tétel:

Egy gráf akkor és csakis akkor páros, ha benne minden kör páros hosszúságú.

1.5 tétel:

Egy gráf akkor és csakis akkor páros, ha benne minden kör páros hosszúságú.

Bizonyítás:

1. Legyen G páros gráf. Megmutatjuk, hogy G-ben minden kör hossza páros.

1.5 tétel:

Egy gráf akkor és csakis akkor páros, ha benne minden kör páros hosszúságú.

Bizonyítás:

1. Legyen G páros gráf. Megmutatjuk, hogy G-ben minden kör hossza páros.

   Mivel G páros, a V csúcshalmazt fel tudjuk írni A és B diszjunkt halmazok úniójaként. Tekintsük a G gráf egy tetszőleges körét. A kör pontjai felváltva tartoznak az A és B halmazba. Ahhoz, hogy egy A halmazbeli csúcspontból kiindulva ismét A halmazbeli csúcsponthoz jussunk, páros számú lépést kell megtennünk, ezért a kör hosszának párosnak kell lennie.

1.5 tétel:

Egy gráf akkor és csakis akkor páros, ha benne minden kör páros hosszúságú.

Bizonyítás:

2. Legyen G olyan gráf, melyben minden kör hossza páros. Megmutatjuk, hogy G páros gráf.

1.5 tétel:

Egy gráf akkor és csakis akkor páros, ha benne minden kör páros hosszúságú.

Bizonyítás:

2. Legyen G olyan gráf, melyben minden kör hossza páros. Megmutatjuk, hogy G páros gráf.

   Vegyük a G gráf tetszőleges x csúcspontját, s helyezzük be az A halmazba. Ezután az x csúcspont minden szomszédját helyezzük be a B halmazba, majd az összes B-beli csúcspont szomszédját, amelyeket még nem helyeztünk el, helyezzük az A halmazba. Az eljárást folytassuk mindaddig, míg a G gráf minden csúcspontját el nem helyezzük.

1.5 tétel:

Egy gráf akkor és csakis akkor páros, ha benne minden kör páros hosszúságú.

Bizonyítás:

2. Legyen G olyan gráf, melyben minden kör hossza páros. Megmutatjuk, hogy G páros gráf.

   Vegyük a G gráf tetszőleges x csúcspontját, s helyezzük be az A halmazba. Ezután az x csúcspont minden szomszédját helyezzük be a B halmazba, majd az összes B-beli csúcspont szomszédját, amelyeket még nem helyeztünk el, helyezzük az A halmazba. Az eljárást folytassuk mindaddig, míg a G gráf minden csúcspontját el nem helyezzük.

   Mivel az így kapott A és B halmazok diszjunktak, és nem tartalmaznak szomszédos csúcspontokat (mert akkor G-ben lenne páratlan hosszúságú kör), ezért G páros gráf. □

Ha egy gráf éleit úgy definiáljuk mint rendezett pontpárokat, akkor **irányított gráf**ról beszélünk. Az irányított éleknek van kezdő- és végpontjuk.

Ha egy gráf éleit úgy definiáljuk mint rendezett pontpárokat, akkor **irányított gráf**ról beszélünk. Az irányított éleknek van kezdő- és végpontjuk.

Egy irányított gráf esetén beszélhetünk a pontok **be-fokszám**áról ($d_-(v)$) és **ki-fokszám**áról ($d_+(v)$).

$$d(v) = d_-(v) - d_+(v)$$

Ha egy gráf éleit úgy definiáljuk mint rendezett pontpárokat, akkor **irányított gráf**ról beszélünk. Az irányított éleknek van kezdő- és végpontjuk.

Egy irányított gráf esetén beszélhetünk a pontok **be-fokszám**áról ($d_-(v)$) és **ki-fokszám**áról ($d_+(v)$).

$$d(v) = d_-(v) - d_+(v)$$

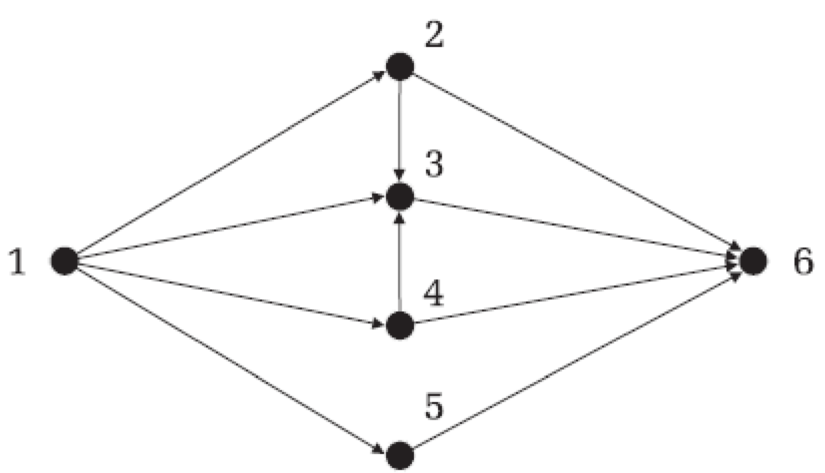
Egy **forrás**nak csak ki-szomszédai, egy **nyelő**nek csak be-szomszédai vannak. Ha egy forrásból minden más ponthoz indul ki-él, akkor **szuperforrás**ról van szó. Ha egy nyelőhöz minden más pontból érkezik be-él, akkor **szupernyelő**ről beszélünk.

Ha egy gráf éleit úgy definiáljuk mint rendezett pontpárokat, akkor **irányított gráf**ról beszélünk. Az irányított éleknek van kezdő- és végpontjuk.

Egy irányított gráf esetén beszélhetünk a pontok **be-fokszám**áról ($d_-(v)$) és **ki-fokszám**áról ($d_+(v)$).

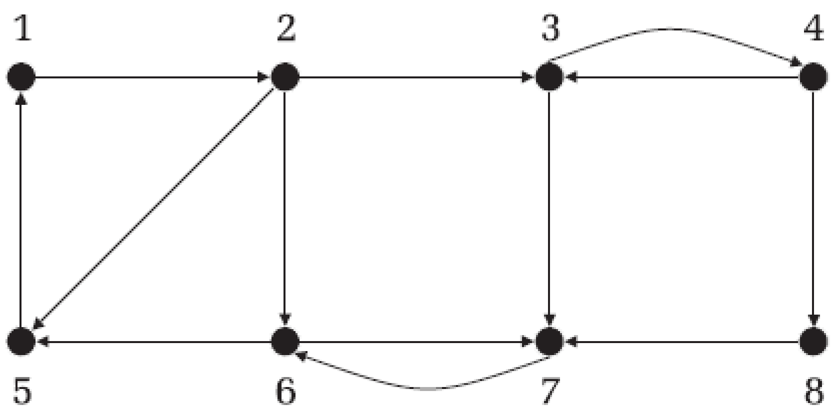
$$d(v) = d_-(v) - d_+(v)$$

Egy **forrás**nak csak ki-szomszédai, egy **nyelő**nek csak be-szomszédai vannak. Ha egy forrásból minden más ponthoz indul ki-él, akkor **szuperforrás**ról van szó. Ha egy nyelőhöz minden más pontból érkezik be-él, akkor **szupernyelő**ről beszélünk.



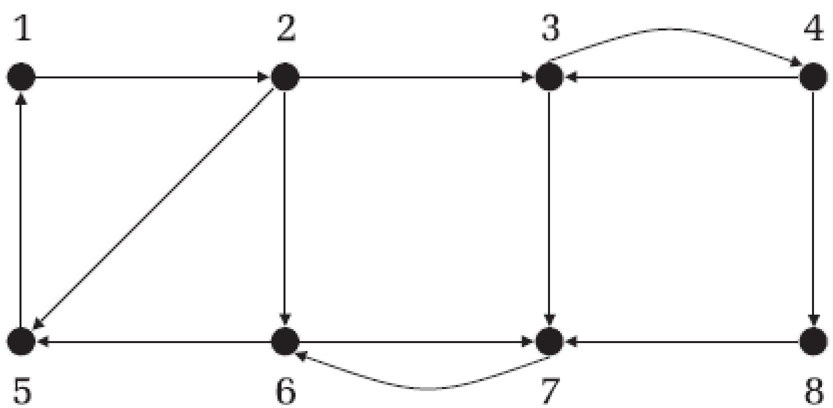
Egy irányított gráf **erősen összefüggő**, ha bármely két csúcspontja között létezik oda-vissza irányított út.

Egy irányított gráf **erősen összefüggő**, ha bármely két csúcspontja között létezik oda-vissza irányított út.

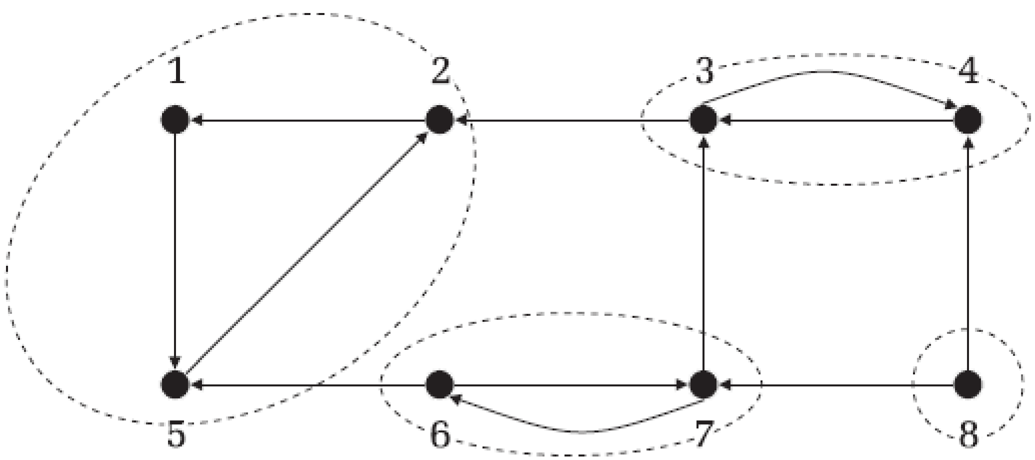


Erősen összefüggő gráf

Egy irányított gráf **erősen összefüggő**, ha bármely két csúcspontja között létezik oda-vissza irányított út.



Erősen összefüggő gráf



Négy erősen összefüggő komponensből álló gráf