GRÁFELMÉLET

Párosítások gráfokban

9. előadás

Probléma: Be kell osztani n darab szakképesített munkást n darab különböző szerszámgépre. A munkásokat felkészültségük és gyakorlatuk alapján különböző termelékenységi mutatóval oszthatjuk be az egyes szerszámgépekhez. Határozzuk meg az n munkás leggazdaságosabb beosztását az egyes gépekhez.

Ha a munkásokat és a gépeket csúcspontok, a beosztási lehetőségeket pedig a megfelelő élek ábrázolják, akkor a feladat a gráfelmélet nyelvén a következő: határozzuk meg a gráf maximális súlyú n elemű párosítását!

Párosítás páros gráfokban

Egy G irányítatlan gráfot **páros gráf**nak nevezünk, ha a $\mathrm{V(G)}$ halmaz A és B halmazra osztható úgy, hogy a G gráf minden élének egyik végpontja az A halmazban, másik végpontja pedig a B halmazban van.

Jelölés: $\mathrm{G(A, B)}$

A **teljes páros gráf** olyan $\mathrm{G(A, B)}$ páros gráf, ahol $|\mathrm{A}|= a$, $|\mathrm{B}|= b$ és amelyben minden A halmazbeli csúcspont össze van kötve minden B halmazbeli csúcsponttal.

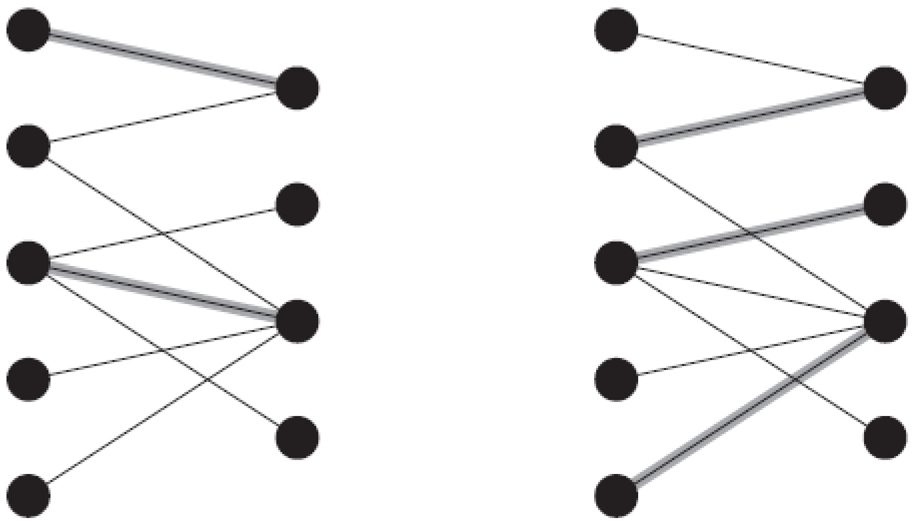
Jelölés: $\mathrm{K}_{a,b}$

9.1 tétel:

Egy G gráf akkor és csakis akkor páros gráf, ha minden körének hossza páros szám.

Egy M élhalmazt **párosítás**nak nevezünk, ha semelyik két élnek nincs közös csúcspontja (független élek). Azt mondjuk, hogy a párosítás **lefedi** éleinek végpontjait.

Egy párosítást **teljes párosítás**nak nevezünk, ha a gráf minden csúcspontját lefedi, különben **részleges párosítás**ról van szó. Beszélhetünk továbbá **maximális élszámú párosítás**ról is.



9.2 tétel: (Hall)

Egy $G = (A, B)$ páros gráfban akkor és csakis akkor van az A halmazt lefedő párosítás, ha minden $X \subseteq A$ részhalmazra

$$|N(X)| \geq |X|,$$

ahol $N(X)$ az X halmaz csúcspontjai szomszédainak halmazát jelöli (ha $X \subseteq A$, akkor $N(X) \subseteq B$).

Bizonyítás:

I. Amennyiben a gráfban van az A halmazt lefedő párosítás, akkor nyilvánvaló, hogy teljesül a Hall-feltétel, mert ekkor a párosítás minden A halmazbeli csúcsponthoz hozzárendel egy B halmazbeli csúcspontot, vagyis az A halmaz minden X részhalmaza esetén az $|N(X)|$ érték legalább $|X|$.

II. Tegyük fel, hogy teljesül a Hall-feltétel és mutassuk meg, hogy ekkor a G gráfban létezik az A halmazt lefedő párosítás.

Fésüljük végig a G gráf éleit egy tetszőleges sorrendben, és válasszunk ki közülük annyi független élt, amennyit csak tudunk. Ha az így kapott M párosítás az A halmaz minden csúcspontját lefedi, akkor bebizonyítottuk a tételt.

Ha az A halmaznak maradt lefedetlen csúcspontja, akkor legyen ezek egyike u. A Hall-tételből következik, hogy u-nak van legalább egy B halmazbeli szomszédja. Ha ezek egyike (pl. v) lefedetlen csúcspont, akkor az (u, v) éllel bővíthető az M párosítás.

Mi van akkor, ha az M párosítás az u csúcspont minden szomszédját lefedi? Bebizonyítjuk, hogy a Hall-feltételből adódóan az M párosítás ez esetben is növelhető lesz.

Keressünk egy olyan alternáló javítóutat, amelyik u-ból indul és valamelyik le nem fedett B halmazbeli csúcsponttal fejeződik be (legyen ez a csúcspont v). Az út alternáló abban az értelemben, hogy a páratlan sorszámú élei nem elemei az M párosításnak, a páros sorszámú élek viszont igen. Egy ilyen út páratlan számú élből áll, legalább három éle van, és a kezdő- és végpontját kivéve minden csúcspontja lefedett.

Az út javító, mert ha páros sorszámú éleit kivesszük M-ből, és helyükbe betesszük a páratlan sorszámúakat, akkor az M párosítás elemszáma 1-gyel nő (páratlan hosszú úton 1-gyel több páratlan sorszámú él van, mint páros sorszámú). Ezt minden további nélkül megtehetjük, mert bármely út páratlan sorszámú élei független élek, és ugyanazokat a csúcspontokat fedik le, mint a páros sorszámúak, plusz az eddig lefedetlen kezdő- és végpontot.

A következőkben belátjuk, hogy ameddig az A halmaznak van lefedetlen u pontja, addig mindig található u-ból induló alternáló javítóút, amely révén növelhető az M párosítás. Ez viszont nem jelent mást, mint hogy létezik az A halmazt lefedő párosítás.

Induljunk el u-ból egyidejűleg minden szomszédja felé. Jelölje $\mathrm{N}(u)$ az u csúcspont szomszédainak halmazát. Úgy is mondhatnánk, hogy az N függvénnyel átutazunk A halmazból a B halmazba. Természetesen $\mathrm{N}(u) \subseteq \mathrm{B}$, és minden eleme le van fedve az M párosítás által (azt az esetet, amikor létezik u-nak lefedetlen szomszédja, már letárgyaltuk).

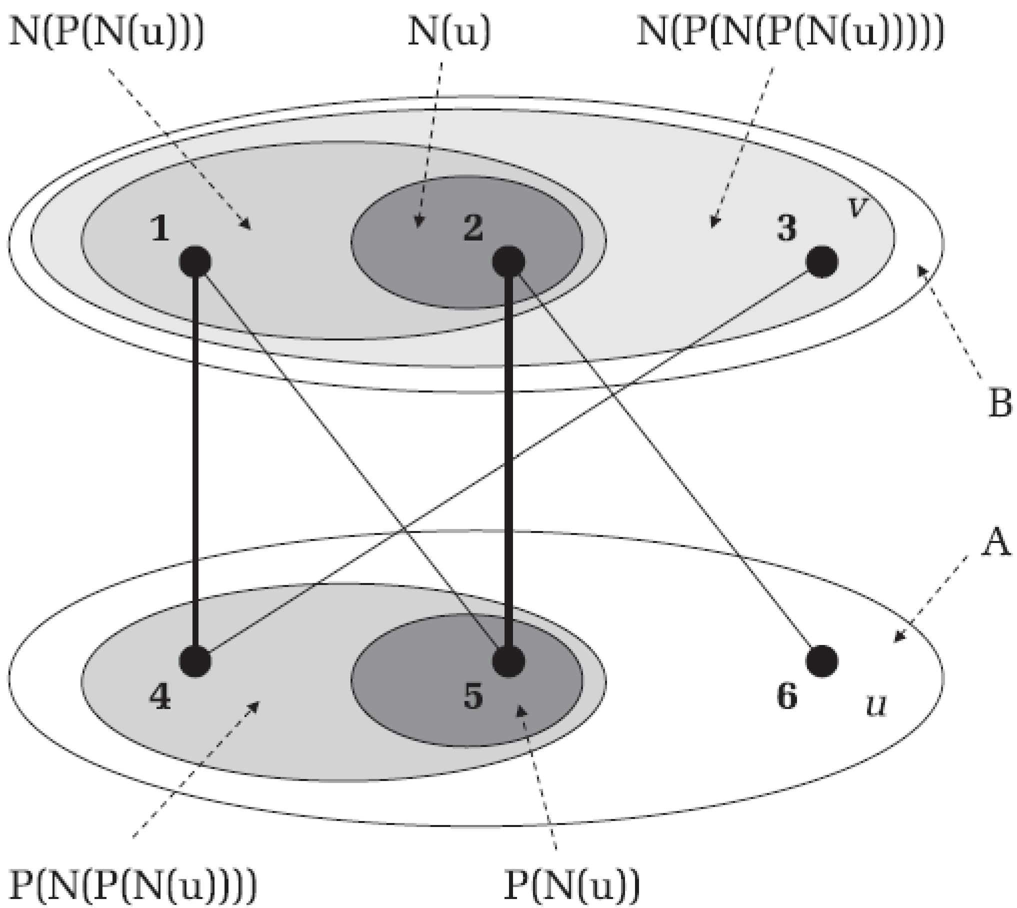
Jelölje továbbá $\mathrm{P}(\mathrm{N}(u))$ az $\mathrm{N}(u)$ halmaz elemeihez tartozó párosításbeli párok halmazát. Nyilvánvalóan $\mathrm{P}(\mathrm{N}(u)) \subseteq \mathrm{A}$, $|\mathrm{P}(\mathrm{N}(u))| = |\mathrm{N}(u)|$ és $u \notin \mathrm{P}(\mathrm{N}(u))$. Olyan ez, mintha a P függvénnyel visszajönnénk B halmazból az A halmazba.

Legyen $\mathrm{Y} = \mathrm{P}(\mathrm{N}(u)) \cup \{u\}$. Ekkor $|\mathrm{Y}| = |\mathrm{P}(\mathrm{N}(u))| + |\{u\}| = |\mathrm{N}(u)| + 1$.

Mivel a Hall-tétel értelmében $|(\mathrm{N}(\mathrm{Y}))| \geq |\mathrm{Y}|$, következik, hogy $\mathrm{N}(u)$ halmaz az $\mathrm{N}(\mathrm{Y})$ halmaznak valódi részhalmaza. Ez azt jelenti, hogy az $\mathrm{N}(\mathrm{Y}) \subseteq \mathrm{B}$ halmazban vannak olyan csúcspontok, amelyek az $\mathrm{N}(u)$ halmazban nincsenek benne.

Mivel ezek a plusz csúcspontok nem szomszédai az u-nak (hiszen nincsenek benne az $\mathrm{N}(u)$ halmazban), ezért a $\mathrm{P}(\mathrm{N}(u))$ halmaz elemeinek a szomszédai kell hogy legyenek. Ez viszont azt jelenti, hogy amikor újra átkelünk az N függvény révén az A halmazból a B halmazba, akkor $|\mathrm{N}(\mathrm{P}(\mathrm{N}(u)))\ | > |\mathrm{P}(\mathrm{N}(u))|$. Ha a szóban forgó plusz csúcspontok valamelyike lefedetlen, akkor legyen ez a v csúcspont, és megvan a keresett alternáló javítóút.

Ha az $\mathrm{N}(\mathrm{P}(\mathrm{N}(u)))$ halmaz minden csúcspontja lefedett, akkor folytatjuk az eljárást: újra visszajövünk a P függvénnyel a B halmazból az A halmazba, majd ismét visszamegyünk az N függvénnyel az A halmazból a B halmazba, és így tovább.



Az egyes halmazok elemszámára érvényes lesz, hogy:

$$1 = |\{u\}| \leq |N(u)| = |P(N(u))| < |N(P(N(u)))| = |P(N(P(N(u))))| < \ldots$$

Mivel a G gráf véges, s így benne az M párosítás is véges, ezért előbb-utóbb abba a helyzetbe kell jutnunk, hogy valamelyik, N függvény általi, az A halmazból a B halmazba való átkeléskor megjelenő plusz csúcspontok valamelyike lefedetlen lesz. Ez a csúcspont fog a keresett alternáló javítóút végpontjául szolgálni.

$\square$

A felvázolt bizonyítási algoritmus összefoglalva:

- kiindulunk az u csúcspontból,
- minden páratlan lépésben az N függvény átvisz A-ból B-be. Az első lépésben az átvitelt a $\leq$ reláció, a harmadik lépéstől viszont a $<$ reláció jellemzi,
- minden páros lépésben a P függvény visszahoz B-ből A-ba. Az átvitelt az $=$ reláció jellemzi,
- megállunk, ha lefedetlen B halmazbeli csúcsponthoz jutunk.

9.3 tétel: (Frobenius)

Egy $G = (A, B)$ páros gráfban akkor és csakis akkor van teljes párosítás, ha $|A| = |B|$ és minden $X \subseteq A$ részhalmazra

$$|N(X)| \geq |X|,$$

ahol $N(X)$ az X halmaz csúcspontjai szomszédainak halmazát jelöli (ha $X \subseteq A$, akkor $N(X) \subseteq B$).

A Hall-tétel bizonyítása alapján, alternáló javítóutak keresésével hatékony algoritmust kapunk a maximális élszámú párosítás megtalálására. Ez az algoritmus **magyar módszer** néven vált ismertté (az elnevezés HAROLD W. KUHN-tól származik, aki KŐNIG DÉNES és EGERVÁRI JENŐ magyar matematikusok eredményeire támaszkodva először adott polinomiális algoritmust maximális súlyú teljes párosítás meghatározására páros gráfokban).

Maximális élszámú párosítás (magyar módszer)

A G gráfot háromféleképpen is eltároljuk: éllista (`élek[1..m]`), szomszédsági mátrix (`SZ_M[1..n,1..n]`) és szomszédsági lista (`SZ_L[1..n]`) segítségével.

Az `élek[1..m]` tömbben minden élről eltároljuk a kezdőpontját (u mező) és végpontját (v mező), valamint azt, hogy része-e a maximális párosításnak (p mező).

Ha létezik az (u, v) él, akkor az `SZ_M[1..n,1..n]` szomszédsági mátrixban az `SZ_M[u,v]` és `SZ_M[v,u]` elemek az adott él `élek[1..m]` tömbbeli pozíciójának indexét tartalmazzák.

Az `SZ_L[1..n]` szomszédsági lista elemei bejegyzés típusúak. Az `SZ_L[u].fokszám` mező az u csúcspont szomszédainak számát tartalmazza, az `SZ_L[u].szomszédok[]` tömbmező pedig az u csúcspont szomszédait tárolja.

Maximális élszámú párosítás (magyar módszer)

További adatszerkezetek a szélességi bejáráshoz szükséges `szín[1..n]` tömb, illetve a szélességi fát tároló `apa[1..n]` tömb. Az algoritmus használja a `fest[1..n]` tömböt is a gráf csúcspontjainak két színnel való kiszínezésének kódolásához.

Maximális élszámú párosítás (magyar módszer)

Algoritmus: Színezzük ki a gráfot két színnel (1 és 2 színekkel). A SZÍNEZ_2_SZÍNNEL függvény a szélességi bejárás alkalmazása: ha a Q sor első eleme (u csúcspont) 1 színű, akkor u-nak a sor végére bekerülő fehér szomszédai (v csúcspontok) a 2 színt kapják meg (és fordítva). Ezen színezési eljárás tekinthető az A és B halmazok meghatározásának.

A SZÍNEZ_2_SZÍNNEL függvény kiszámolja az A és B halmazok számosságát (f1 és f2 változók), és visszatéríti a kevesebb elemszámú halmaz színét (illetve a `fest` cím szerint átadott tömbben a festés kódját). Ezt az értéket a központi MAXIMÁLIS_PÁROSÍTÁS eljárás a min_festék változóban tárolja el. A max_festék változó a másik színt tartalmazza. Legyen A a min_festék színű halmaz és B a max_festék színű halmaz.

Maximális élszámú párosítás (magyar módszer)

A színezést követően a MAXIMÁLIS_PÁROSÍTÁS eljárás végigpásztázza az éllistát és kiválaszt annyi független élt, amennyit csak tud. Az így kapott M párosítás még nem feltétlenül maximális. Minden kiválasztott él esetén az `élek` tömb megfelelő elemének `p` mezőjét 1-re állítja, illetve az él végpontjainak színét a `fest` tömbben negatívra változtatja (így jelzi, hogy az illető él részévé vált az M párosításnak, és hogy a végpontjai az M által lefedett csúcsponthalmazhoz tartoznak).

Ezután a központi eljárás a min_festék színű halmazban (A) még le nem fedett csúcspontokat keres, és minden ilyen i csúcspontra meghívja a KERES_JAVÍTÓ_ÚT függvényt. Ha ez talál i-ből induló javítóutat, akkor visszatéríti annak végpontját (ezt a j változó tárolja). Ez a j csúcspont biztosan max_festék színű lesz, azaz egy B halmazbeli le nem fedett csúcspont.

Maximális élszámú párosítás (magyar módszer)

A FORDÍT_ALTERNÁLÁS rekurzív eljárás végigmegy a javítóúton (j csúcsponttól i felé, apáról apára haladva), és minden élnek megváltoztatja a státusát: ha eleme volt a párosításnak, akkor kiveszi belőle, ha pedig nem volt eleme, akkor beleteszi. Ez a művelet eggyel növeli az M elemeinek számát. Az i és j csúcspontok lefedését a központi eljárás a színeik invertálásával oldja meg.

A MAXIMÁLIS_PÁROSÍTÁS eljárás végül kiírja a maximális párosítás éleit.

Maximális élszámú párosítás (magyar módszer)

A KERES_JAVÍTÓ_ÚT függvény is a szélességi bejárás alkalmazásának tekinthető. Kiindul az A halmazbeli i csúcspontból, meglátogatja annak összes B halmazbeli szomszédját, majd ezeknek kizárólag a párosításbeli párjait (melyek mind elemei az A halmaznak), és így tovább.

Tehát egy olyan módosított szélességi bejárásról van szó, amely az A halmaztól a B felé bármilyen élen haladhat (+/– max_festék), de a B halmaztól az A felé csak párosításbeli éleken (min_festék). Ha a függvénynek sikerül elérni egy még le nem fedett B halmazbeli csúcspontot (max_festék színűt), akkor ez azt jelenti, hogy talált egy alternáló javítóutat, és az illető csúcspontot téríti vissza, különben nullát térít vissza.

```
függvény SZÍNEZ_2_színnel(Sz_L[1..n],s,fest[1..n])
   minden i ← 1, n végezd szín[i] ← FEHÉR
   vége minden
   szín[s] ← SZÜRKE
   fest[s] ← 1
   f1 ← 1
   f2 ← 0
   Q ← {s}
   amíg Q ≠ ∅ végezd
      u ← MÁSOL_SORELSŐ(Q)
      minden i ← 1, Sz_L[u].fokszám végezd
         v ← Sz_L[u].[i]
         ha szín[v] = FEHÉR akkor
            szín[v] ← SZÜRKE
            ha fest[u] = 1 akkor
               fest[v] ← 2
               f2 ← f2 +1
               különben
                  fest[v] ← 1
                  f1 ← f1 +1
               vége ha
               BETESZ_SORVÉGÉRE(Q,v)
            vége ha
         vége minden
         TÖRÖL_SORELEJÉRŐL(Q)
         szín[u] ← FEKETE
   vége amíg
   ha f1 < f2 akkor vissza 1
   különben vissza 2
   vége ha
vége SZÍNEZ_2_színnel
```

```
függvény KERES_JAVÍTÓ_ÚT (Sz_L[1..n],s,fest[1..n],max_festék,apa[1..n])
   minden i ← 1, n végezd
      szín[i] ← FEHÉR
      apa[i] ← 0
   vége minden
   szín[s] ← SZÜRKE
   apa[s] ← 0
   Q ← {s}
   amíg Q ≠ ∅ végezd
      u ← MÁSOL_SORELSŐ(Q)
      minden i ← 1, Sz_L[u].fokszám végezd
         v ← Sz_L[u].[i]
         ha szín[v] = FEHÉR ÉS fest[v]∈{max_festék,-max_festék,-min_festék} akkor
            szín[v] ← SZÜRKE
            apa[v] ← u
            BETESZ_SORVÉGÉRE(Q,v)
            ha fest[v] = max_festék akkor vissza v
            vége ha
         vége ha
      vége minden
      TÖRÖL_SORELEJÉRŐL(Q)
      szín[u] ← FEKETE
   vége amíg
   vissza 0
vége KERES_JAVÍTÓ_ÚT
```

```
eljárás FORDÍT_ALTERNÁLÁS (i,j,élek[1..m],Sz_M[1..n,1..n],apa[1..n])
    akt_él ← Sz_M[j,apa[j]]
    ha élek[akt_él].p = 1 akkor
        élek[akt_él].p ← 0
    különben
        élek[akt_él].p ← 1
    vége ha
    ha apa[j]≠ i akkor
        FORDÍT_ALTERNÁLÁS(i,apa[j],élek,Sz_M,apa)
    vége ha
vége FORDÍT_ALTERNÁLÁS
```

```
eljárás MAXIMÁLIS_PÁROSÍTÁS (Sz_L[1..n],Sz_M[1..n,1..n],élek[1..m])
   min_festék ← SZÍNEZ_2_színnel(Sz_L,1,fest)
   ha min_festék = 1 akkor max_festék ← 2
   különben max_festék ← 1
   vége ha
   minden i ← 1, m végezd
      ha (fest[élek[i].u] > 0) ÉS (fest[élek[i].v] > 0)  akkor
         fest[élek[i].u] ← -fest[élek[i].u]
         fest[élek[i].v] ← -fest[élek[i].v]
         élek[i].p ← 1
      vége ha
   vége minden
   minden i ← 1, n végezd
      ha fest[i] = min_festék akkor
         j ← SZÉLESSÉGI_keresés(Sz_L,i,fest,max_festék,apa)
         ha j = 0 akkor
            ugorj
         különben
            FORDÍT_ALTERNÁLÁS(i,j,élek,Sz_M,apa)
            fest[i] ← -fest[i]
            fest[j] ← -fest[j]
         vége ha
      vége ha
   vége minden
   minden i ← 1, m végezd
      ha élek[i].p = 1 akkor
         kiír: élek[i].u, élek[i].v
      vége ha
   vége minden
vége MAXIMÁLIS_PÁROSÍTÁS
```

Az algoritmus bonyolultsága $O(n\,(n + m))$.

Maximális párosítás (Ford-Fulkerson algoritmussal)

A maximális párosítás megtalálásának problémája felfogható a maximális folyam feladat egy nyilvánvaló alkalmazásaként is. Adjunk irányítást a $G = (A, B)$ páros gráfnak. Legyenek az élek kezdőpontjai az A halmazbeli csúcspontok, a végpontokat pedig vegyük a B halmazból. Vegyünk fel egy virtuális szuperforrást, amelyből induljon irányított él minden A halmazbeli csúcsponthoz. Hasonlóképpen, legyen egy virtuális szupernyelő is, amelyhez minden B halmazbeli csúcsponttól érkezik egy-egy irányított él. Továbbá a gráf minden élén tekintsük a kapacitás értékét 1-nek.

Ha meghatározzuk ebben a hálózatban a maximális folyam értékét, akkor ez egyenlő lesz a G gráf maximális párosításának élszámával. Másfelől a maximális folyamhoz tartozó él-idegen utak A és B halmazok közötti élei éppen egy maximális párosítást adnak meg.