Függvényhatárérték-számítás

I. Függvények véges helyen vett véges határértéke

Def. Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az I intervallumon. Az *f* függvény alulról korlátos az I intervallumon, ha van olyan *k* valós szám, melyre $f(x)\ge k$, ha $x\in \mathrm{I}$. Az *f* függvény felülről korlátos az I intervallumon, ha van olyan *K* valós szám, melyre $f(x)\le K$, ha $x\in \mathrm{I}$. Az *f* függvény korlátos az I intervallumon, ha alulról és felülről is korlátos.

Megjegyzés:

A fenti definícióhoz hasonlóan definiálható valamely ponthalmazon [alulról, illetve felülről] korlátos függvény, azzal a különbséggel, hogy ott a ponthalmaz elemeire kell megkövetelnünk a megfelelő egyenlőtlenségek teljesülését. A sorozatoknál látott korlátossághoz hasonlóan itt is igaz, hogy az *f* függvény akkor és csak akkor korlátos az I intervallumon, ha van olyan *K* valós szám, hogy minden $x\in \mathrm{I}$-re $|f(x)|\le K$.

Függvény határértéke definíció I. Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega, a+\omega)\setminus\{a\}$ halmazon [*a* tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az *f* függvénynek létezik *a*-ban határértéke és ez az *A* valós szám, ha minden $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $\delta>0$ valós szám, hogy minden esetben, amikor $0<|x-a|<\delta$ teljesül, fennáll $|f(x)-A|<\varepsilon$ is. Jelölés: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

Megjegyzések:

1. A fenti definíció azt mondja ki, hogy az *f* függvény határértéke *a*-ban *A*, ha minden olyan esetben, amikor *x* közel van *a*-hoz, *f*(*x*) közel van *A*-hoz. Azért ε-hoz kell választanunk δ-t, mert azt akarjuk elérni, hogy ha *A*-t nevezzük határértéknek, akkor a függvényértékek tetszőlegesen közel kerülhessenek hozzá; ennek általában az a feltétele, hogy *x* közel legyen *a*-hoz, de persze vannak kivételek. Ha fordítva mondanánk ki a definíciót, akkor nem tudnánk garantálni, hogy *x*-szel *a*-hoz közelítve a függvényértékek is közel legyenek *A*-hoz.

2. A definíció azt mutatja, hogy a függvény határértékének egy adott pontban való kiszámításakor érdektelen, hogy a függvény azon a konkrét helyen, ahol a határértéket számítjuk, mit csinál; még azt sem követeljük meg, hogy abban a pontban értelmezve legyen. A vizsgálat tárgya az, hogy a pont egy környezetében miként viselkedik egy függvény, illetve *x* értékével a ponthoz közelítve milyen tulajdonságai vannak.

Példa:

Legyen $f(x)=x$, és *a* tetszőleges valós szám. Megmutatjuk, hogy $\lim\limits_{x\to a} f(x)=a$.

Nyilvánvaló, hogy az *f* függvény minden intervallumon értelmezve van. Legyen $\varepsilon>0$ valós szám. Ekkor $\delta=\varepsilon$-ra teljesül, hogy $0<|x-a|<\delta$ esetén $|f(x)-a|<\varepsilon$, hiszen $|f(x)-a|=|x-a|$ és $\delta=\varepsilon$, azaz $0<|x-a|=|f(x)-a|<\delta=\varepsilon$.

Függvény határértéke (Heine-féle) definíció II. Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega, a+\omega)\setminus\{a\}$ halmazon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvénynek létezik a-ban határértéke és ez az A valós szám, ha minden (x_n) sorozatra, melynek határértéke a, de egyik tagja sem egyenlő a-val, az $f(x_n)$ sorozat határértéke A.

Megjegyzés: A két definíció ekvivalenciáját az „átviteli elv"-ként ismert tétel mondja ki. Az „átviteli-elv" elnevezés arra utal, hogy a második definíció segítségével a sorozatok határértékére megállapított tulajdonságokat alkalmazhatjuk a függvények határértékére vonatkozóan is.

A II. definíció segítségével könnyebben határozhatjuk meg a függvények határértékét, mint az I. definíció segítségével, ezért a továbbiakban a II. definíciót vesszük alapul, és ennek megfelelően készülnek a feladatok megoldásai, illetve a további definíciók is.

Példák:

1. Legyen $f(x)=x^2$, és a tetszőleges valós szám. Ekkor az f függvénynek minden a esetén van határértéke, és ez a határérték a^2, mert minden $x_n\to a$ sorozatra $f(x_n)=x_n^2\to a^2$.

2. Legyen $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, ha $x\neq 0$, és legyen $f(0)=0$. Ekkor az f függvénynek az $a=0$ helyen nincs határértéke. Ennek bizonyításához vegyük az alábbi sorozatokat:

$$x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}},\quad y_n=\frac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}}$$

Teljesül, hogy $x_n\to 0$ és $y_n\to 0$, továbbá $\sin\frac{1}{x_n}=1$ és $\sin\frac{1}{y_n}=-1$. Tehát a definíció értelmében az $f(x)$ függvénynek nem lehet a 0-ban határértéke, mert találtunk két sorozatot, melyek 0-hoz tartanak, de a hozzájuk tartozó függvényértékek sorozatának határértéke nem egyezik meg.

Kidolgozott feladatok:

1. Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e a következő függvényhatárértékek!

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+3x+2}{x^2+x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-3x+2}{x^2-x+1}$

Megoldás:

a) Az $a=0$ helyen vizsgálva a függvény határértékét $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+3x+2}{x^2+x+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n{}^2+3x_n+2}{x_n{}^2+x_n+1}$, ahol $x_n\to 0$. A sorozatok határértékére és a műveletekre vonatkozó tételek szerint a tört számlálója 2-höz, nevezője 1-hez tart, ezért a hányados sorozat határértéke 2. (A számítás tetszőleges $x_n\to 0$ sorozat esetén érvényes.)

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-3x+2}{x^2-x+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3{x_n}^2-3x_n+2}{{x_n}^2-x_n+1}$, ahol $x_n\to 2$. A sorozatok határértékére és a műveletekre vonatkozó tételek szerint a tört számlálója $3\cdot 2^2-3\cdot 2+2=8$-hoz, nevezője $2^2-2+2=4$-hez tart, ezért a hányados sorozat határértéke 2. (A számítás tetszőleges $x_n\to 2$ sorozat esetén érvényes.)

2. Vizsgáljuk meg a számláló és a nevező szorzattá alakításával, hogy léteznek-e a következő függvényhatárértékek!

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2+5x-14}$ b) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+8x+16}$ c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-x^2-7x+3}{2x^2-7x+3}$

Megoldás:

a) Vegyünk egy tetszőleges $x_n\to 2$ $(x_n\neq 2)$ sorozatot. Ekkor ${x_n}^2+x_n-6\to 0$ és ${x_n}^2+5x_n-14\to 0$, tehát a hányados határértéke nem meghatározott, így a törtben szereplő algebrai kifejezéseket át kell alakítanunk. A szorzattá alakításhoz felhasználhatjuk, hogy a számlálóban és a nevezőben szereplő kifejezések gyöke a 2.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2+5x-14}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+7)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x+7}.$$

Tekintsük a tetszőleges $x_n\to 2$ $(x_n\neq 2)$ sorozatot, ekkor $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x+7}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n+3}{x_n+7}=\dfrac{5}{9}$.

b) Az előző feladathoz hasonlóan tetszőleges $x_n\to -4$ $(x_n\neq -4)$ sorozat törtbe helyettesítésével a számlálóban és a nevezőben is 0-hoz tartó sorozatot kapunk. Alakítsuk szorzattá tehát a nevezőt és a számlálót is: $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+8x+16}=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{(x+4)(x-2)}{(x+4)(x+4)}=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x-2}{x+4}$. Alkalmazva a definíciót tetszőleges $x_n\to -4$ $(x_n\neq -4)$ sorozatra: ha létezik a keresett határérték, akkor $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x-2}{x+4}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-2}{x_n+4}$. A számláló –6-hoz, a nevező viszont 0-hoz tart. Ha az x_n sorozat felülről tart –4-hez, akkor a nevező pozitív és 0-hoz tart, tehát a tört határértéke –∞, ha az x_n sorozat alulról tart –4-hez, akkor a nevező negatív és 0-hoz tart, tehát a tört határértéke +∞. Ekkor viszont nem teljesül, hogy minden –4-hez tartó sorozatra ugyanaz legyen a helyettesítési értékek sorozatának határértéke, így a keresett határérték nem létezik.

c) Az előző feladathoz hasonlóan tetszőleges $x_n\to 3$ $(x_n\neq 3)$ sorozat törtbe helyettesítésével a számlálóban és a nevezőben is 0-hoz tartó sorozatot kapunk. Alakítsuk szorzattá tehát a nevezőt és a számlálót is! A számlálót például polinomosztással lehet szorzattá alakítani, mert tudjuk, hogy az ott szereplő polinomnak a 3 gyöke, tehát az x–3 a polinomból kiemelhető. A polinomosztásról bővebb leírás a függelékben található.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-x^2-7x+3}{2x^2-7x+3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2+2x-1)(x-3)}{(2x-1)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-1}{2x-1}.$$

Alkalmazva a definíciót tetszőleges $x_n \to 3$ sorozatra:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-1}{2x-1}=\lim_{\substack{x_n\to 3\\ n\to\infty}}\frac{x_n{}^2+2x_n-1}{2x_n-1}=\frac{14}{5}.$$

A továbbiakban az elméleti anyag bővítésére, új fogalmak bevezetésére és tételek kimondására, továbbá a függvények speciális tulajdonságainak áttekintésére kerül sor, mert a függvényhatárértékek meghatározásánál ezek néhány lépést nagymértékben leegyszerűsítenek.

Függvények bal-és jobboldali határértéke

A függvény-határérték definíciójában x_n „mindkét oldalról" közelítette az *a* számot, azaz nem kötöttük ki, hogy az x_n sorozat tagjai *a*-nál kisebbek vagy nagyobbak legyen. Megkülönböztethetünk azonban jobb- illetve baloldali határértéket, attól függően, hogy milyen x_n értékeket engedünk meg.

Bevezetünk egy szóhasználatot (mely már korábban szerepelt is): ha $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ és $a_n < a$, akkor azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat alulról tart *a*-hoz; ha pedig $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ és $a_n > a$, akkor azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat felülről tart *a*-hoz.

Megjegyzés: Nyilvánvalóan az $a_n = a$ megengedése a határértéket nem befolyásolja, azonban a függvényhatárértéknél az $a_n \neq a$ feltételnek teljesülnie kell, így nekünk kényelmesebb a definícióban most az egyenlőséget nem megengedni. Ezt a kérdést a továbbiakban kezeljük rugalmasan: ha az egyéb körülmények nem tiltják, akkor vehetjük az $a_n \le a$, illetve $a_n \ge a$ feltételeket.

Def: Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a, a+\omega)$ intervallumon [*a* tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az *f* függvénynek létezik *a*-ban jobboldali határértéke és ez az *A* valós szám, ha minden (x_n) sorozatra, mely felülről tart *a*-hoz, de egyik tagja sem egyenlő *a*-val, az $f(x_n)$ sorozat határértéke *A*. Jelölés: $\lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty$.

Def: Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega, a)$ intervallumon [*a* tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az *f* függvénynek létezik *a*-ban baloldali határértéke és ez az *A* valós szám, ha minden (x_n) sorozatra, mely alulról tart *a*-hoz, de egyik tagja sem egyenlő *a*-val, az $f(x_n)$ sorozat határértéke *A*. Jelölés: $\lim_{x\to a-0} f(x) = A$.

Tétel: Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega,a+\omega)\setminus\{a\}$ halmazon [*a* tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az *f* függvénynek létezik *a*-ban határértéke és ez az *A* valós szám akkor és csak akkor, ha *f*-nek létezik *a*-ban a baloldali és jobboldali határértéke, és mindkettő *A*.

Megjegyzés: A jelölésekben a „+0” illetve „–0” azt mutatja, hogy az *a* számnak melyik oldalán vagyunk. Szokás az *a*+0 illetve *a*–0 helyett egyszerűen csak az *a*+ illetve *a*– jelölést használni.

Ezzel a határérték-fogalmunk kibővült, mert vannak olyan függvények, melyek egy-egy *a* szám esetén csak valamely $(a,a+\omega)$ illetve $[a,a+\omega)$, vagy $(a-\omega,a)$ illetve $(a-\omega,a]$ intervallumon vannak értelmezve. Ilyen például az $f(x)=\sqrt{x}$ függvény, mely csak az $x\geq 0$ esetben van értelmezve, így a 0-ban vett határértékéről nem beszélhetünk, de jobboldali határértékéről igen. [Belátható, hogy ez 0.]

A határértékek kiszámításában gyakorlati haszna is van a fenti tételeknek, mert olyan függvények határértéke is kiszámítható, melyek több függvény kombinációjából állnak elő, azaz egyes intervallumokon más-más képlet adja meg a függvényt.

Kidolgozott feladat:

3. Mennyi az $f(x)=\begin{cases} x, \text{ ha } x\geq 0 \\ -x^2, \text{ ha } x<0 \end{cases}$ függvény határértéke az $a=0$ helyen?

Megoldás:

Ha a függvény jobboldali határértékét tekintjük a 0-ban, akkor ez megegyezik a $g(x)=x$ függvény ugyanitt vett jobboldali határértékével, ami 0. A függvény baloldali határértéke a 0-ban megegyezik a $h(x)=-x^2$ függvény 0-ban vett baloldali határértékével, ami 0. Mivel a bal- és jobboldali határértékek léteznek és mindkettő 0, ezért az *f* függvény határértéke a 0-ban létezik és értéke 0.

A függvényhatárérték és a műveletek kapcsolata

Mivel a függvény határérték definíciója a sorozatok határértékén alapul, ezért a sorozatokkal végzett műveletek és a határértékek kapcsolatáról szóló tételek alapján a függvényekkel végzett műveletek és a határértékek kapcsolatáról is hasonló tételeket tudunk kimondani.

Tétel: Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ és $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega,a+\omega)\setminus\{a\}$ halmazon [*a* tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Ha az *f* függvénynek létezik *a*-ban határértéke és ez *A*, továbbá a *g* függvénynek létezik határértéke *a*-ban és ez *B*, akkor *f*+*g*-nek, *f*–*g*-nek, $f\cdot g$-nek is létezik *a*-ban határértéke, és ez rendre *A*+*B*, *A*–*B*, $A\cdot B$.

Azaz ha létezik $\lim_{x\to a} f(x)=A$ és létezik $\lim_{x\to a} g(x)=B$, akkor létezik $\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=A+B$, $\lim_{x\to a}\big(f(x)-g(x)\big)=A-B$ és $\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=A\cdot B$.

Tétel: Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ és $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega,a+\omega)\setminus\{a\}$ halmazon úgy, hogy ezen a halmazon $g(x)\neq 0$ [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Ha az f függvénynek létezik a-ban határértéke és ez A, továbbá a g függvénynek létezik határértéke a-ban és ez $B\neq 0$, akkor $\dfrac{f}{g}$-nek is létezik a-ban határértéke, és ez $\dfrac{A}{B}$.

Megjegyzés: A fenti tételek speciális esete, amikor az egyik függvény konstans, ezért a konstanssal való szorzásra és osztásra, továbbá a konstans hozzáadására és kivonására vonatkozó tételek kimondása külön nem szükséges.

A függvénykompozícióra (összetett függvényekre) vonatkozó határértékkel kapcsolatos tételt a következő fejezetben tárgyaljuk.

Kidolgozott feladatok:

4. Határozzuk meg az alábbi határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$ c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x}{x^3+x^2+x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{x^3+x^2+x}$ e) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$

Megoldás:

a) Vegyünk egy tetszőleges $x_n\to 1$ $(x_n\neq 1)$ sorozatot. Ekkor

$$\lim_{x\to 1}(x^2-2x-3)=\lim_{x_n\to 1}(x_n{}^2-2x_n-3)=-4,\ \lim_{x\to 1}(x^2-5x+6)=\lim_{x_n\to 1}(x_n{}^2-5x_n+6)=2.$$

A két függvény hányadosának határértéke tehát $\dfrac{-4}{2}=-2$.

b) Vegyünk egy tetszőleges $x_n\to 3$ $(x_n\neq 3)$ sorozatot. Ekkor a számlálóba és a nevezőbe helyettesítve is azt kapjuk, hogy azok határértéke 0, tehát a hányados határértéke nem meghatározott, így a törtben szereplő algebrai kifejezéseket át kell alakítanunk. A szorzattá alakításhoz felhasználhatjuk, hogy a számlálóban és a nevezőben szereplő kifejezések gyöke a 3.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x-2}.$$

A számláló határértéke 4, a nevezőé pedig 1, tehát a hányados határértéke 4.

c) Vegyünk egy tetszőleges $x_n\to -2$ $(x_n\neq -2)$ sorozatot. Ekkor

$$\lim_{x\to -2}(x^2-x)=\lim_{x_n\to -2}(x_n{}^2-x_n)=6,\ \lim_{x\to -2}(x^3+x^2+1)=\lim_{x_n\to -2}(x_n{}^3+x_n{}^2+1)=-3$$

A két függvény hányadosának határértéke tehát $\dfrac{6}{-3}=-2$.

d) Vegyünk egy tetszőleges $x_n \to 0 \;\; (x_n \neq 0)$ sorozatot. Ekkor a számlálóba és a nevezőbe helyettesítve is azt kapjuk, hogy azok határértéke 0, tehát a hányados határértéke nem meghatározott, így a törtben szereplő algebrai kifejezéseket át kell alakítanunk. A számlálóban és a nevezőben is az *x* kiemelhető:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x^3+x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{x(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x^2+x+1}$$

A számláló –1-hez, a nevező +1-hez tart, tehát a hányados határértéke –1.

e) Vegyünk egy tetszőleges $x_n \to 3 \;\; (x_n \neq 3)$ sorozatot. Ekkor

$$\lim_{x\to 3}(x^4-3x+2)=\lim_{x_n\to 3}(x_n{}^4-3x_n+2)=74,\;\; \lim_{x\to 3}(x^5-4x+3)=\lim_{x_n\to 3}(x_n{}^5-4x_n+3)=234$$

A két függvény hányadosának határértéke tehát $\frac{74}{234}=\frac{37}{117}$.

f) Vegyünk egy tetszőleges $x_n \to 1 \;\; (x_n \neq 1)$ sorozatot. Ekkor a számlálóba és a nevezőbe helyettesítve is azt kapjuk, hogy azok határértéke 0, tehát a hányados határértéke nem meghatározott, így a törtben szereplő algebrai kifejezéseket át kell alakítanunk. A szorzattá alakításhoz felhasználhatjuk, hogy a számlálóban és a nevezőben szereplő kifejezések gyöke az 1. Polinomosztással (az *x*–1 kiemelésével) kapjuk a következőket (a módszert részletesen lásd a Függelékben):

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3+x^2+x-2)}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+x-2}{x^4+x^3+x^2+x-3}$$

A számláló és a nevező határértéke egyaránt 1, tehát a hányados határértéke is 1.

Megjegyzés: A megoldásokban az egyszerűség kedvéért a továbbiakban nem részletezzük azt a gondolatmenetet, hogy „Vegyünk egy tetszőleges $x_n \to a \;\; (x_n \neq a)$ sorozatot. Helyettesítsük ezt a függvény hozzárendelési szabályába, és vizsgáljuk a kapott sorozat határértékét! stb.”

Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{1+x^2-2x^3}$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x^4-10x+4}$

A gyakorló feladatok megoldása a dokumentum végén található.

II. Függvények folytonossága

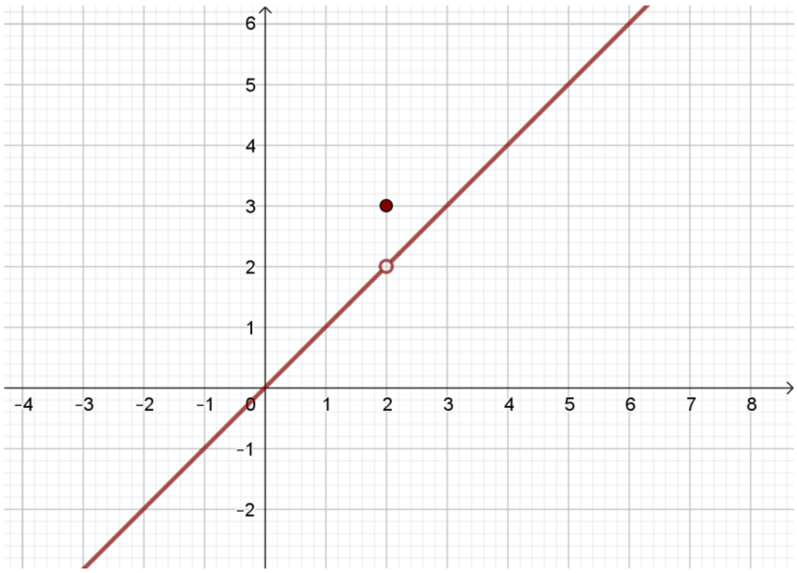
Az eddigiekben nem foglalkoztunk azzal, hogy egy függvény hogyan viselkedik abban a pontban, ahol a határértékét számítjuk. Ha ezt is figyelembe vesszük, a függvények egy újabb érdekes tulajdonságát vizsgálhatjuk.

Def. Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega, a+\omega)$ intervallumon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvény folytonos a-ban, ha a függvénynek létezik a-beli határértéke, és ez megegyezik a függvénynek a-ban felvett értékével, azaz $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

A fenti definíció másképp megfogalmazva:

Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega, a+\omega)$ intervallumon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvény folytonos a-ban akkor és csak akkor, ha minden a-hoz tartó (x_n) sorozatra az $f(x_n)$ függvényértékek sorozatának határértéke $f(a)$.

Korábban már láthattunk példát folytonos függvényre. Az $f(x)=x$ függvénynek minden a-ban létezik határértéke és a-val egyenlő, ami pont azt jelenti, hogy az f függvény minden a-ban folytonos. Könnyen tudunk azonban olyan függvényt is készíteni, amely nem folytonos valamely pontban. Legyen például $g(x)=x$, ha $x\neq 2$, és legyen $g(2)=3$. Ekkor nyilvánvaló, hogy a g függvény határértéke a 2-ben 2, de a függvényérték 3, így a g függvény a 2-ben nem folytonos.



A bal- és jobboldali határérték definíciójának segítségével definiálhatjuk a függvények balról, illetve jobbról folytonosságát is.

Def. Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $[a,a+\omega)$ intervallumon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvény jobbról folytonos a-ban, ha a függvénynek $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$.

Def. Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega,a]$ intervallumon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvény balról folytonos a-ban, ha a függvénynek létezik a-beli baloldali határértéke, és ez megegyezik a függvénynek a-ban felvett értékével, azaz $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=f(a)$.

Def. Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az (a,b) intervallumon. Az f folytonos (a,b)-n, ha (a,b) minden pontjában folytonos.

Def. Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $[a,b]$ intervallumon. Az f folytonos $[a,b]$-n, ha folytonos (a,b)-n, és a-ban jobbról, b-ben balról folytonos.

A továbbiakban a folytonos [balról, illetve jobbról folytonos] függvények említésekor nem fogjuk feltüntetni az értelmezési tartományt, a folytonosság fogalmába beleértjük, hogy a függvények a megfelelő intervallumokon értelmezve vannak.

Vannak tehát nem folytonos és folytonos függvényeink. Azon pontokat, ahol valamely f függvény nem folytonos, megkülönböztető elnevezéssel láthatjuk el.

Def. Ha az f függvény az a pontban nem folytonos, akkor azt mondjuk, hogy f-nek a-ban szakadási helye van. A szakadási helyeket három csoportra oszthatjuk:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ létezik, de a nincs benne f értelmezési tartományában vagy $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq f(a)$. Ekkor azt mondjuk, hogy f-nek a-ban megszüntethető szakadási helye van. [Azért megszüntethető, mert az f függvény folytonossá tehető a-ban. Az első esetben a-t belevesszük az értelmezési tartományba, és ott úgy adjuk meg a függvény értékét, hogy az a határértékkel legyen egyenlő. A második esetben a függvényértéket megváltoztatjuk a-ban úgy, hogy a határértékkel legyen egyenlő.]

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ nem létezik, de létezik a $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ és $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ véges határérték [és ezek szükségszerűen különbözőek]. Ekkor azt mondjuk, hogy f-nek ugráshelye van a-ban, vagy f ugrik a-ban.

3. Minden más eset.

Az 1. és 2. típusú szakadási helyeket elsőfajú, a 3. típusúakat másodfajú szakadási helynek nevezzük.

A folytonosság és a műveletek kapcsolata

Tétel: Ha f és g folytonos függvények a-ban, akkor $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ is folytonos a-ban, és $g(a)\neq 0$ esetén $\frac{f}{g}$ is folytonos a-ban.

Következmény: Mivel $f(x)=x$ folytonos a-ban tetszőleges a esetén, ezért a $g(x)$ polinomfüggvény [azaz $g(x)=a_n x^n+...+a_0$] folytonos a-ban tetszőleges a esetén. Ha $h(x)$ racionális törtfüggvény [azaz két polinomfüggvény hányadosaként áll elő], akkor $h(x)$ a nevező nullhelyeit kivéve mindenütt folytonos.

A függvények esetében előkerül egy újabb művelet, ami még korábban nem szerepelt, nevezetesen a függvények összetétele vagy kompozíciója.

Legyenek $f:\mathrm{D}(f)\subset\mathbf{R}\to\mathrm{D}(g)\subset\mathbf{R}$, $g:\mathrm{D}(g)\to\mathbf{R}$ függvények, és legyen $\lim\limits_{x\to a} f(x)=u$, illetve $\lim\limits_{x\to u} g(x)=v$. Ekkor általában nem igaz, hogy a $g(f(x))$ függvénynek van határértéke a-ban és ez v. [Ezt abból gondolhatnánk, hogy ha x tart a-hoz, akkor $f(x)$ tart u-hoz, és $g(f(x))$ tart v-hez.] Vegyük a következő függvényeket:

$f(x)=4$ minden x-re és $g(x)=\begin{cases}5, \text{ ha } x\neq 4\\ 3, \text{ ha } x=4\end{cases}$. Ekkor nyilvánvaló, hogy a $g(f(x))$ függvény értelmezve van $\mathbf{R}$-en. Azonban $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=4$, $\lim\limits_{x\to 4} g(x)=5$, de $\lim\limits_{x\to 3} g(f(x))\neq 5$, mert $\lim\limits_{x\to 3} g(f(x))=\lim\limits_{x\to 3} g(4)=3$.

Azonban bizonyos feltételek mellett igaz az állítás, nevezetesen:

Tétel: Ha f folytonos a-ban és g folytonos $f(a)$-ban, akkor $g(f(x))$ folytonos a-ban.

Megjegyzés: Az állítás teljesüléséhez nem szükséges a folytonosság, kevesebb megkötés is elég. Azonban a mindennapos gyakorlatban leginkább folytonos függvényekkel dolgozunk, ezért itt most az összetett függvényekkel kapcsolatban csak a folytonos függvények összetételének esetét tárgyaljuk.

Kidolgozott feladatok:

1. Válasszuk meg A értékét úgy, hogy az alábbi függvény folytonos legyen a teljes értelmezési tartományán!

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, \text{ha } x\neq 2\\ A, \text{ ha } x=2\end{cases}$$

Megoldás:

Ha $x\neq 2$, akkor a tört egyszerűsíthető, így a függvény

$$f(x)=\begin{cases}x+2, \text{ ha } x\neq 2\\ A, \text{ ha } x=2\end{cases}.$$

Ha $a \neq 2$, akkor a függvény folytonos a-ban az x+2 folytonossága miatt.

Ha $x \to 2$, akkor $x+2 \to 4$. Tehát ha $A=4$, akkor a függvény a 2-ben folytonos, ha $A \neq 4$, akkor a függvény a 2-ben nem folytonos.

2. Vizsgáljuk meg az alábbi függvény folytonosságát az értelmezési tartományán!

$$f(x) = \operatorname{sgn} x, \text{ azaz } f(x) = \begin{cases} 1, \text{ ha } x > 0 \\ 0, \text{ ha } x = 0 \\ -1, \text{ ha } x < 0 \end{cases}$$

Megoldás:

Ha $a > 0$, akkor ott folytonos $f(x)$, mert itt a $g(x) = 1$ függvénnyel egyezik meg. Ugyanígy folytonos $a < 0$ esetén is. A 0-ban viszont nem folytonos, mert a baloldali határértéke –1, a jobboldali határértéke pedig 1, azaz a függvénynek a 0-ban nincs határértéke, tehát nem folytonos.

3. Vizsgáljuk meg az alábbi függvény folytonosságát az értelmezési tartományán!

$$f(x) = x \cdot [x]$$

(A képletben [x] az x egészrészét, azaz a nála nem nagyobb egész számok legnagyobbikát jelöli)

Megoldás:

Ha a nem egész szám, akkor a-ban folytonos, mert itt x és $[x]$ is folytonos. Ha a egész, akkor az $[a-1, a)$ intervallumban $f(x) = x \cdot (a-1)$, az $[a, a+1)$ intervallumban $f(x) = x \cdot a$.

Ha $x \to a+0$, akkor $f(x) \to a^2$, ha $x \to a-0$, akkor $f(x) \to a^2 - a$. Ha a függvénynek létezik a határértéke a-ban, akkor $a^2 - a = a^2$ kell teljesüljön. Ez csak $a = 0$ esetén áll fenn, tehát más egész a esetén f nem lehet folytonos. A 0-ban viszont az, mert itt a függvény értéke is, meg a határértéke is 0.

4. Vizsgáljuk meg az alábbi függvény folytonosságát az értelmezési tartományán!

$$f(x) = \frac{1+x}{1+x^3}$$

Megoldás:

A függvény $x = -1$ kivételével mindenütt értelmezhető. Az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos, mert itt a nevező és a számláló is folytonos, és folytonos függvények hányadosa szintén folytonos függvény.

5. Vizsgáljuk meg, hogy létezik-e a következő függvényhatárérték!

$$\lim_{x \to 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 25}$$

Megoldás:

A folytonosságot felhasználva behelyettesítéssel kapjuk, hogy a számláló és a nevező határértéke is 0 az x = 5-nél. Alakítsuk át a kifejezést! A számlálót gyöktelenítéssel, a nevezőt szorzattá alakítással tudjuk továbbformálni:

$$\frac{2-\sqrt{x-1}}{x^2-25}=\frac{\left(2-\sqrt{x-1}\right)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}{(x-5)(x+5)}\cdot\frac{1}{\left(2+\sqrt{x-1}\right)}=\frac{(5-x)}{(x-5)(x+5)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}=\frac{-1}{(x+5)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}$$

Az új nevezőben folytonos függvény áll, ezért a keresett határérték $-\frac{1}{40}$.

Gyakorló feladatok:

1. Meg tudjuk-e választani A és B értékét úgy, hogy az alábbi függvény folytonos legyen a teljes értelmezési tartományán?

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-6}{x^2+5x-14},\ ha\ x\neq 2\ és\ x\neq -7\\[2ex] A,\ ha\ x=2\\ B,\ ha\ x=-7\end{cases}$$

2. Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e a következő függvényhatárértékek!

a) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-3x+2}}$

b) $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-3x+2}}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$

III. A végtelen mint függvényhatárérték

Az átviteli elv alapján adott definíciónk kapcsolatot teremt a függvények és a sorozatok határértéke között. Célszerű tehát a sorozatok lehetséges határértékeit függvények esetén is értelmezni. Ezt véges határértékek esetén már megtettük, de a végtelen mint határérték bevezetése is lehetséges.

Def: Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega, a+\omega)\setminus\{a\}$ halmazon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az *f* függvénynek létezik *a*-ban határértéke és ez plusz végtelen, ha minden (x_n) sorozatra, melynek határértéke *a*, de egyik tagja sem egyenlő *a*-val, az $f(x_n)$ sorozat határértéke +∞. Jelölés: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.

Def: Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega, a+\omega)\setminus\{a\}$ halmazon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az *f* függvénynek létezik *a*-ban határértéke és ez mínusz végtelen, ha minden (x_n) sorozatra, melynek határértéke *a*, de egyik tagja sem egyenlő *a*-val, az $f(x_n)$ sorozat határértéke –∞. Jelölés: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

Véges helyen vett jobb- és baloldali végtelen határértékeket is definiálhatunk a korábbiakkal analóg módon:

Def: Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a, a+\omega)$ intervallumon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az *f* függvénynek létezik *a*-ban jobboldali határértéke és ez +∞, ha minden (x_n) sorozatra, mely felülről tart *a*-hoz, de egyik tagja sem egyenlő *a*-val, az $f(x_n)$ sorozat határértéke +∞. Jelölés: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$.

Def: Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a, a+\omega)$ intervallumon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az *f* függvénynek létezik *a*-ban jobboldali határértéke és ez –∞, ha minden (x_n) sorozatra, mely felülről tart *a*-hoz, de egyik tagja sem egyenlő *a*-val, az $f(x_n)$ sorozat határértéke –∞. Jelölés: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=-\infty$.

Def: Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega, a)$ intervallumon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az *f* függvénynek létezik *a*-ban baloldali határértéke és ez +∞, ha minden (x_n) sorozatra, mely alulról tart *a*-hoz, de egyik tagja sem egyenlő *a*-val, az $f(x_n)$ sorozat határértéke +∞. Jelölés: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$.

Def: Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega,a)$ intervallumon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvénynek létezik a-ban baloldali határértéke és ez $-\infty$, ha minden (x_n) sorozatra, mely alulról tart a-hoz, de egyik tagja sem egyenlő a-val, az $f(x_n)$ sorozat határértéke $-\infty$. Jelölés: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=-\infty$.

Kidolgozott feladatok:

1. Állapítsuk meg, hogy léteznek-e az alábbi függvényhatárértékek! Ha igen, akkor határozzuk meg az értéküket!

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+x-2}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2+x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{11}}$

Megoldás:

a) A kifejezés számlálója és nevezője is folytonos a 3-nál, a számláló határértéke 19, a nevezőé pedig 0. Ha x felülről tart a 3-hoz, akkor a nevező pozitív és 0-hoz tart, a számláló pozitív véges értékhez tart, így a tört jobboldali határértéke $+\infty$. Ha x alulról tart a 3-hoz, akkor a nevező negatív és 0-hoz tart, a számláló pozitív véges értékhez tart, így a tört baloldali határértéke $-\infty$. Tehát a keresett határérték nem létezik.

b) A kifejezés számlálója és nevezője is folytonos a 2-nél, a számláló határértéke 4^{20}, a nevezőé pedig 0. Mivel a nevező 10-edik hatvány, ezért értéke mindig pozitív $x\neq 2$ esetén, ezért a nevező úgy tart 0–hoz, hogy közben csak pozitív értékeket vesz fel. Emiatt a tört határértéke $+\infty$.

c) A kifejezés számlálója és nevezője is folytonos a 2-nél, a számláló és nevező határértéke egyaránt 0. A kifejezés emiatt átalakítható: felhasználjuk, hogy a számlálóban és a nevezőben szereplő polinomnak a 2 egyaránt gyöke, így mindkét polinomból az $x-2$ kiemelhető. $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$ (polinomosztással vagy a másodfokú kifejezés gyökök segítségével történő szorzattá alakításával), és $x^3-12x+16=(x-2)^2(x+4)$ (polinomosztással és a kapott másodfokú kifejezés pl. gyökök segítségével történő szorzattá alakításával). Az átalakítás után azt kapjuk, hogy

$$\frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{11}}=\frac{(x-2)^{20}\cdot(x+1)^{20}}{(x-2)^{22}\cdot(x+4)^{11}}=\frac{(x+1)^{20}}{(x-2)^2\cdot(x+4)^{11}}$$

A számláló határértéke 3^{20}, a nevezőé pedig 0. Mivel a nevezőben a 0-hoz tartó kifejezés négyzetes, a másik kifejezés pedig pozitív, ezért értéke mindig pozitív $x\neq 2$ esetén, emiatt a nevező úgy tart 0–hoz, hogy közben csak pozitív értékeket vesz fel. Tehát a tört határértéke $+\infty$.

Függvény végtelenben vett határértéke

Ha a függvény határértékének definíciójában szereplő, a-hoz tartó sorozatok helyett végtelenbe tartó sorozatokat választunk, akkor a függvények „végtelenben vett” határértékét kaphatjuk meg. (Ez szemléletesen leírja a függvény viselkedését, miközben a változó értéke egyre nagyobb, illetve egyre kisebb lesz.)

Def: Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve a $[W,+\infty)$ intervallumon, ahol $W\in\mathbf{R}$. Az f határértéke a plusz végtelenben az A szám, ha minden (x_n) sorozatra, melynek határértéke $+\infty$, az $f(x_n)$ sorozat határértéke A. Jelölés: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

Def: Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve a $(-\infty,W]$ intervallumon, ahol $W\in\mathbf{R}$. Az f határértéke a mínusz végtelenben az A szám, ha minden (x_n) sorozatra, melynek határértéke $-\infty$, az $f(x_n)$ sorozat határértéke A. Jelölés: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

Hasonló definíció mondható ki a $+\infty$-ben és $-\infty$-ben vett $+\infty$ illetve $-\infty$ határértékre:

Def: Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve a $[W,+\infty)$ intervallumon, ahol $W\in\mathbf{R}$. Az f határértéke a plusz végtelenben plusz végtelen, ha minden (x_n) sorozatra, melynek határértéke $+\infty$, az $f(x_n)$ sorozat határértéke $+\infty$. Jelölés: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Def: Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve a $[W,+\infty)$ intervallumon, ahol $W\in\mathbf{R}$. Az f határértéke a plusz végtelenben mínusz végtelen, ha minden (x_n) sorozatra, melynek határértéke $+\infty$, az $f(x_n)$ sorozat határértéke $-\infty$. Jelölés: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

Def: Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve a $(-\infty,W]$ intervallumon, ahol $W\in\mathbf{R}$. Az f határértéke a mínusz végtelenben plusz végtelen, ha minden (x_n) sorozatra, melynek határértéke $-\infty$, az $f(x_n)$ sorozat határértéke $+\infty$. Jelölés: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

Def: Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve a $(-\infty,W]$ intervallumon, ahol $W\in\mathbf{R}$. Az f határértéke a mínusz végtelenben mínusz végtelen, ha minden (x_n) sorozatra, melynek határértéke $-\infty$, az $f(x_n)$ sorozat határértéke $-\infty$. Jelölés: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Példa:

Határozzuk meg az $f(x)=x^2$ függvény esetén a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ határértékeket!

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{\substack{n\to+\infty\\ a_n\to+\infty}} a_n^2=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{\substack{n\to+\infty\\ a_n\to 0}} a_n^2=\left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right)=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{\substack{n\to+\infty\\ a_n\to-\infty}} a_n^2=+\infty$$

Kidolgozott feladatok:

2. Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e a következő függvényhatárértékek!

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2+3x-1}{2x^2-x+1}$

Megoldás:

a) A $+\infty$-ben vett határérték megállapításához alakítsuk át a függvényt!

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2+x+1}=\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

Ha x tart a $+\infty$-be, akkor a számláló 1-hez, a nevező szintén 1-hez tart. Azaz a függvény határértéke a $+\infty$-ben és a $-\infty$-ben is 1.

b) Használjuk az a) feladat megoldásában kapott alakot!

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2+x+1}=\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

Ha x tart a $-\infty$-be, akkor a számláló 1-hez, a nevező szintén 1-hez tart. Azaz a függvény határértéke a $-\infty$-ben is 1.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2+3x-1}{2x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=2$, a sorozatokra korábban látott összefüggések alapján.

3. Állapítsuk meg az alábbi határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

Megoldás:

a) Mivel mindkét szereplő függvény a végtelenben végtelenbe tart, ezért a különbség határértéke átalakítás nélkül nem adható meg. Gyöktelenítsük a kifejezést, majd osszunk a nevező domináns tagjával, ahogy ezt korábban a sorozatoknál is láttuk!

$$\sqrt{x^2+5x}-x=\frac{\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+5x}+x\right)}{\sqrt{x^2+5x}+x}=\frac{5x}{\sqrt{x^2+5x}+x}=\frac{5}{\sqrt{1+\dfrac{5}{x}}+1}$$

A számláló 5, a nevező határértéke 2, így a keresett határérték $\dfrac{5}{2}$.

b) Ha a törtben a számlálót és a nevezőt is leosztjuk $\sqrt{x}$-szel (a nevező domináns tagjával), akkor az alábbi kifejezést kapjuk:

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}\to 1$$

mert a számláló és a nevező is 1-hez tart, ha x tart a végtelenbe.

Gyakorló feladatok:

1. Határozzuk meg a következő határértéket!

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+1}{1+x^2-2x^3}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-2x+1}{1+x^2-2x^3}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^3+x}-x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

IV. Szakadási helyek vizsgálata

Kidolgozott feladatok:

1. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvények szakadási helyének jellegét! Vizsgáljuk meg, létezik-e a függvényeknek határértéke a plusz és mínusz végtelenben!

a) $f(x)=\dfrac{3}{x-1}$ b) $g(x)=\dfrac{x-1}{x^2-x}$ c) $h(x)=\dfrac{(x-2)^2}{x^2-5x+6}$

d) $j(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2(x-3)^3}$ e) $k(x)=3^{\frac{1}{x+1}}$ f) $m(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

Megoldás:

a) $f(x)=\dfrac{3}{x-1}$. Mivel a számláló és a nevező mindenhol folytonos, ezért a függvény mindenhol folytonos, ahol a nevező nem 0. Tekintsük az $x=1$-nél vett jobb-, illetve baloldali határértéket!

$\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{3}{x-1}=+\infty$, mert a nevező 0-hoz tart, és pozitív. $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{3}{x-1}=-\infty$, mert a nevező 0-hoz tart, és negatív. Tehát a függvénynek nincs határértéke az 1-nél, így itt másodfajú szakadási helye van.

A plusz és mínusz végtelenben vett határértékek: $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3}{x-1}=0$ és $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3}{x-1}=0$ teljesül, mert a nevező abszolút értéke mindkét esetben végtelenbe tart, a számláló pedig véges érték.

b) A számláló és a nevező mindenütt folytonos, ezért a hányados a nevező nullhelyei kivételével mindenütt folytonos. A függvénynek két szakadási helye van (a nevező két nullhelye), az $x=0$ és az $x=1$. Alakítsuk át a hozzárendelési szabályt! $g(x)=\dfrac{x-1}{x^2-x}=\dfrac{x-1}{x(x-1)}=\dfrac{1}{x}$. Ebből látható, hogy $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x}=1$, tehát az $x=1$-nél megszüntethető szakadási helye van, a $g(1)=1$ érték megadásával. Tekintsük az $x=0$-nál vett jobb-, illetve baloldali határértéket! $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1}{x}=+\infty$, mert a nevező 0-hoz tart, és pozitív. $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{1}{x}=-\infty$, mert a nevező 0-hoz tart, és negatív. Tehát a függvénynek nincs határértéke a 0-nál, így ott másodfajú szakadási helye van.

A plusz és mínusz végtelenben vett határértékek: $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}=0$ és $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x}=0$ teljesül, mert a nevező abszolút értéke mindkét esetben végtelenbe tart, a számláló pedig véges érték.

c) A számláló és a nevező mindenütt folytonos, ezért a hányados a nevező nullhelyei kivételével mindenütt folytonos. A függvénynek két szakadási helye van (a nevező két nullhelye), az $x=2$ és az $x=3$. Alakítsuk át a hozzárendelési szabályt!

$h(x)=\dfrac{(x-2)^2}{x^2-5x+6}=\dfrac{(x-2)^2}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{x-2}{x-3}$. Ebből látható, hogy $\lim\limits_{x\to 2} h(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x-3}=0$, tehát az $x=2$-nél megszüntethető szakadási helye van, a $g(2)=0$ érték megadásával. Tekintsük az $x=3$-nál vett jobb-, illetve baloldali határértéket! $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{x-2}{x-3}=+\infty$, mert a számláló pozitív és 1-hez tart, a nevező pedig 0-hoz tart és pozitív. $\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{x-2}{x-3}=-\infty$, mert a számláló pozitív és 1-hez tart, a nevező pedig 0-hoz tart és negatív. Tehát a függvénynek nincs határértéke a 3-nál, így ott másodfajú szakadási helye van.

A plusz és mínusz végtelenben vett határértékek: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}}=1$. Hasonló módon kapjuk: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-2}{x-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}}=1$.

d) A számláló és a nevező mindenütt folytonos, ezért a hányados a nevező nullhelyei kivételével mindenütt folytonos. A függvénynek két szakadási helye van (a nevező két nullhelye), az $x=0$ és az $x=3$. Alakítsuk át a hozzárendelési szabályt!

$$j(x)=\frac{x^2-9}{x^2(x-3)^3}=\frac{(x-3)(x+3)}{x^2(x-3)^3}=\frac{x+3}{x^2(x-3)^2}$$

A kapott kifejezés nevezője továbbra is 0 az $x=0$ és az $x=3$ helyen. A két helyen a függvény határértékét megvizsgálva azt kapjuk, hogy mindkét helyen a határérték plusz végtelen, mert a nevező nullához tart és pozitív, a számláló pedig egy pozitív értékhez tart. Tehát másodfajú szakadási helye van a 0-nál és a 3-nál is.

A plusz és mínusz végtelenben vett határértékek: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{x^2(x-3)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{3}{x}}{x(x-3)^2}=0$ és $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+3}{x^2(x-3)^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\frac{3}{x}}{x(x-3)^2}=0$, mert mindkét esetben a számláló 1-hez, a nevező abszolút értéke pedig végtelenhez tart.

e) Az összetett függvény folytonossága miatt a kitevőben levő tört nevezőjének zérushelyét (az $x=-1$-et) kivéve az összetett függvényünk mindenütt folytonos. Vizsgáljuk meg a jobb- és baloldali határértéket a szakadási helynél! Kezdjük a kitevővel: $\lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{1}{x+1}=+\infty$, mert a nevező 0-hoz tart és pozitív. Így $\lim\limits_{x\to-1+0}3^{\frac{1}{x+1}}=+\infty$, mert a kitevő plusz végtelenbe tart. $\lim\limits_{x\to-1-0}\dfrac{1}{x+1}=-\infty$, mert a nevező 0-hoz tart és negatív. Így $\lim\limits_{x\to-1-0}3^{\frac{1}{x+1}}=0$, mert a kitevő mínusz végtelenbe tart. Tehát a függvénynek a –1-nél nincs határértéke, ezért ez másodfajú szakadási hely.

A plusz és mínusz végtelenben vett határértékek: $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^{\frac{1}{x+1}} = 1$, mert a kitevő 0-hoz tart. Ugyanígy $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{\frac{1}{x+1}} = 1$.

f) Az összetett függvény folytonossága miatt a kitevőben levő tört nevezőjének zérushelyét (az $x = 0$ -t) kivéve a nevezőben szereplő összetett függvény mindenütt folytonos, és mivel sehol sem 0, ezért a hányados is mindenütt folytonos a 0 kivételével. Vizsgáljuk meg a jobb- és baloldali határértéket a szakadási helynél! Kezdjük a kitevővel: $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$, mert a nevező 0-hoz tart és pozitív. Így $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(1+2^{\frac{1}{x}}\right) = +\infty$, azaz $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 0$. Nézzük a baloldali határértéket! $\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$, mert a nevező 0-hoz tart és negatív. Így $\lim\limits_{x\to 0-0}\left(1+2^{\frac{1}{x}}\right) = 1$, mert a 2-hatvány kitevője mínusz végtelenbe tart, vagyis a 2-hatvány értéke 0-hoz tart. Tehát $\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 1$. Ez viszont azt jelenti, hogy a függvénynek van bal- és jobboldali véges határértéke, ám ezek nem egyeznek meg, így a függvénynek a 0-nál elsőfajú szakadási helye van (ugrás).

A plusz és mínusz végtelenben vett határértékek: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}$, mert a 2-hatvány kitevője 0-hoz, így a 2-hatvány 1-hez tart. Hasonlóan kapjuk, hogy $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}$.

V. Trigonometrikus függvények határértéke

Kidolgozott feladatok:

1. Felhasználva, hogy $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e a következő függvényhatárértékek!

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$

Megoldás:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3\right) = 3\cdot\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x\cdot\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\cdot\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{2}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{2x}{\sin 2x}\cdot\dfrac{3x}{2x}\right)=\dfrac{3}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin 2x}=\dfrac{3}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{x}=2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos 2x}=2$, és itt felhasználjuk, hogy cos2x folytonos és $\cos 0\neq 0$.

2. Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e a következő függvényhatárértékek!

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sin 3x\cdot\cos x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}(2x\cdot\operatorname{ctg}3x)$

Megoldás:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin x}=3\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=3$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sin 3x\cdot\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{\sin 3x\cdot\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos 2x\cdot\cos x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 3x}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos 2x\cdot\cos x}=1\cdot 1\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{1\cdot 1}=\dfrac{2}{3}$.

(Itt ismét felhasználtuk a cos x függvény folytonosságát és azt, hogy és $\cos 0\neq 0$.)

c) A kifejezés átalakításával visszavezethető a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ határértékre:

$$\lim_{x\to 0}(2x\cdot\operatorname{ctg}3x)=\lim_{x\to 0}\left(2x\cdot\frac{\cos 3x}{\sin 3x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 3x=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 3x=1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}.$$

3. Állapítsuk meg az alábbi függvényhatárértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+2x}}{\sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$

Megoldás:

a) A számlálóban és a nevezőben álló függvény is folytonos a 0-ban, de mindkettő helyettesítési értéke 0, így át kell alakítanunk a képletet. Alakítsuk át a számlálót gyöktelenítéssel!

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+2x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)\left(1+\sqrt{1+2x}\right)}{\sin x\left(1+\sqrt{1+2x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+2x)}{\sin x\left(1+\sqrt{1+2x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x\left(1+\sqrt{1+2x}\right)}$$

Végezzünk további átalakítást úgy, hogy a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ határérték felhasználható legyen!

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x\left(1+\sqrt{1+2x}\right)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{2}{1+\sqrt{1+2x}}\right)=1\cdot\frac{2}{2}=1.$$

b) A számlálóban és a nevezőben álló függvény is folytonos a 0-ban, de mindkettő helyettesítési értéke 0, így át kell alakítanunk a képletet. Célunk, hogy az átalakítás után a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ határérték felhasználható legyen. Ehhez a számlálót és a nevezőt is szorozzuk meg $1+\cos x$ -szel!

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot(1+\cos x)\right)=1\cdot 2=2$$

Gyakorló feladatok

1. Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e a következő függvényhatárértékek!

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{5x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 7x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}4x}{3x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}8x}{\sin 3x}$

2. Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e a következő függvényhatárértékek!

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin^2\frac{x}{4}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{\cos 4x-\cos 6x}$

A gyakorló feladatok megoldása

I. fejezetben kitűzött gyakorló feladatok megoldása

1. Határozzuk meg az alábbi határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{1+x^2-2x^3}$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x^4-10x+4}$

Megoldás:

a) Alakítsuk át a kifejezést, mert a két törtnek külön-külön nincs határértéke!

$$\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3}=\frac{2}{(1-x)(1+x)}-\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}=\frac{2(1+x+x^2)-3(1+x)}{(1+x)(1-x)(1+x+x^2)}=$$

$$=\frac{2x^2-x-1}{(1+x)(1-x)(1+x+x^2)}=\frac{(2x+1)(x-1)}{(1+x)(1-x)(1+x+x^2)}=\frac{-(2x+1)}{(1+x)(1+x+x^2)}$$

Tehát $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-(2x+1)}{(1+x)(1+x+x^2)}=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}$

b) Behelyettesítéssel a számláló és a nevező határértéke is 0-nak adódik, ezért alakítsuk át a törtet a zárójelek kibontásával és kiemeléssel, majd egyszerűsítéssel!

$$\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}=\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}=\frac{6x^3+11x^2+6x}{x}=6x^2+11x+6$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}(6x^2+11x+6)=6$$

c) A számlálóba és a nevezőbe 1-et helyettesítve mindkét esetben 0-t kapunk, így át kell alakítanunk a törtet: $\frac{x^3-2x+1}{1+x^2-2x^3}=\frac{(x-1)(x^2+x-1)}{(1-x)(2x^2+x+1)}=\frac{-(x^2+x-1)}{2x^2+x+1}$

Tehát $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{1+x^2-2x^3}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-(x^2+x-1)}{2x^2+x+1}=-\frac{1}{4}$

d) Alakítsuk át itt is a számlálót és a nevezőt!

$$\frac{x^3-3x-2}{x^4-10x+4}=\frac{(x-2)(x^2+2x+1)}{(x-2)(x^3+2x^2+4x-2)}=\frac{x^2+2x+1}{x^3+2x^2+4x-2}$$

Tehát $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x^4-10x+4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x+1}{x^3+2x^2+4x-2}=\frac{9}{22}$.

II. fejezetben kitűzött gyakorló feladatok megoldása

1. Meg tudjuk-e választani A és B értékét úgy, hogy az alábbi függvény folytonos legyen a teljes értelmezési tartományán?

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-6}{x^2+5x-14},\ ha\ x\neq 2\ és\ x\neq -7\\ \\ A,\ ha\ x=2\\ B,\ ha\ x=-7\end{cases}$$

Megoldás:

Alakítsuk át a függvény hozzárendelési szabályát! $\dfrac{x^2+x-6}{x^2+5x-14}=\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x+7)(x-2)}=\dfrac{x+3}{x+7}$. Ennek a határértéke a 2-nél létezik, és értéke $\dfrac{5}{9}$. Tehát $A=\dfrac{5}{9}$ választással a 2-nél folytonos lesz a függvény. A függvény határértéke –7-nél azonban nem létezik, mert ha x felülről tart –7-hez, akkor a nevező pozitív és 0-hoz tart, a számláló pedig –4-hez tart, így a függvény jobboldali határértéke $-\infty$. Ez már önmagában nem teszi lehetővé a folytonosságot. (A függvény baloldali határértéke egyébként $+\infty$.)

2. Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e a következő függvényhatárértékek!

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-3x+2}}$

b) $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-3x+2}}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$

Megoldás:

a) A számlálóban és a nevezőben is folytonos függvényeket látunk. A számláló határértéke 3-nál $\sqrt{5}$, a nevező határértéke $1+\sqrt{2}$, tehát a vizsgált határérték létezik, és értéke $\dfrac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$.

b) A számlálóban és a nevezőben is folytonos függvényeket látunk. Ha a számláló és a nevező határértékét behelyettesítéssel meghatározzuk, akkor mindkét esetben 0-t kapunk, így át kell alakítanunk a kifejezést. Vegyük észre, hogy a számlálóban és a nevezőben a gyök alatt álló kifejezések szorzattá alakíthatók, így kiemelésre adódik lehetőség:

$$\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-3x+2}}=\frac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{(x-1)(x-2)}}=\frac{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}\cdot\left(1+\sqrt{x-1}\right)}=\frac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt{x-1}}$$

Így már a határérték kiszámítható, felhasználva, hogy a számlálóban és a nevezőben is folytonos függvényeket látunk: a számláló 2-höz, a nevező pedig szintén 2-höz tart, így a keresett jobboldali határérték 1.

c) A folytonosságot felhasználva behelyettesítéssel kapjuk, hogy a számláló és a nevező határértéke is 0 az $x = 1$-nél. Alakítsuk át a törtet! A számlálót szorzattá alakítással, a nevezőt gyöktelenítéssel tudjuk továbbvihető alakra hozni:

$$\frac{1-x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}} = \frac{(1-x)(1+x)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right) = \frac{(1-x)(1+x)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)}{2x-2} =$$
$$= -\frac{(1+x)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)}{2}$$

A számlálóban álló függvény folytonos, így határértéke az 1-nél 4, tehát a keresett határérték -2.

d) A folytonosságot felhasználva behelyettesítéssel kapjuk, hogy a számláló és a nevező határértéke is 0 az $x = 1$-nél. Alakítsuk át a törtet! A számlálót gyöktelenítsük:

$$\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} = \frac{\left(\sqrt{x+8}-3\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{x-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+8}+3} = \frac{x-1}{x-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+8}+3} = \frac{1}{\sqrt{x+8}+3}$$

A kapott kifejezés folytonos az 1-nél, így határértéke $\frac{1}{6}$.

III. fejezetben kitűzött gyakorló feladatok megoldása

1. Határozzuk meg a következő határértéket!

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+1}{1+x^2-2x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^4-2x+1}{1+x^2-2x^3}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{x^3+x}-x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

Megoldás:

a) Osszuk le a számlálót és a nevezőt is a nevező domináns tagjával, azaz x^3-nal!

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+1}{1+x^2-2x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}-2} = -\frac{1}{2}$$

mert a számláló 1-hez, a nevező pedig –2-höz tart.

b) Osszuk le a számlálót és a nevezőt is a nevező domináns tagjával, azaz x^3-nal!

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-2x+1}{1+x^2-2x^3} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}-2} = +\infty$$

mert a számláló –∞-hez, a nevező pedig –2-höz tart.

c) A számlálóban és a nevezőben is a legnagyobb fokú tag x^{50}, osszuk tehát ezzel a számlálót és a nevezőt is (tényezőnként elvégezhető az osztás):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2-\frac{3}{x}\right)^{20}\left(3+\frac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2+\frac{1}{x}\right)^{50}}$$

A számlálóban levő kifejezések határértéke 2^{20}, illetve 3^{30}, a nevezőben levő kifejezés határértéke pedig 2^{50}. Tehát a keresett határérték $\frac{2^{20}\cdot 3^{30}}{2^{50}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$.

d) A nevezőben a domináns tag x-es nagyságrendű, így osszuk el a számlálót és a nevezőt is x-szel:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{x^3+x}-x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}=-1$$

mert a számlálóban levő függvény határértéke –1, a nevezőé pedig 1.

e) Gyöktelenítés után az alábbi kifejezést kapjuk:

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}.$$

Itt a számlálót és a nevezőt $\sqrt{x}$ -szel leosztva a kifejezés határértéke meghatározható:

$$\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1}\to\frac{1}{2}$$

mert a számláló 1-hez, a nevező 2-höz tart.

IV. fejezetben kitűzött feladatok megoldása:

1. Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e a következő függvényhatárértékek!

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{5x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 7x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg} 4x}{3x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg} 8x}{\sin 3x}$

Megoldás:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2\right)=1\cdot 2=2$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{5x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 4x}{4x}\cdot\dfrac{4}{5}\right)=1\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{4}{5}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 7x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{7x}{\sin 7x}\cdot\dfrac{3}{7}\right)=1\cdot 1\cdot\dfrac{3}{7}=\dfrac{3}{7}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}4x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\cos 4x\cdot 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 4x}{4x}\cdot\dfrac{4}{3\cdot\cos 4x}\right)=1\cdot\dfrac{4}{3\cdot 1}=\dfrac{4}{3}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}8x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\cos 8x\cdot\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 8x}{8x}\cdot\dfrac{3x}{\sin 3x}\cdot\dfrac{8}{3\cdot\cos 8x}\right)=1\cdot 1\cdot\dfrac{8}{3\cdot 1}=\dfrac{8}{3}$

2. Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e a következő függvényhatárértékek!

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin^2\frac{x}{4}}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{2}x$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{\cos 4x-\cos 6x}$

Megoldás:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin^2\frac{x}{4}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin^2\frac{x}{4}}{\frac{x}{4}\cdot 4}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{4}}{\frac{x}{4}}\cdot\dfrac{3\sin\frac{x}{4}}{4}\right)=1\cdot\dfrac{3\cdot 0}{4}=0$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=1\cdot\dfrac{0}{2}=0$

c) Alkalmazzunk olyan átalakítást, hogy a $\sin x$ és az x jellegű kifejezések szorzata helyett a hányadosuk szerepeljen! Ehhez a tangens függvényt alakítsuk át kotangenssé!

$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{2}x=\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}x\right)=\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}(1-x)\right)$

Ha most bevezetjük az $y=1-x$ jelölést, akkor

$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}(1-x)\right)=\lim\limits_{y\to 0}\left(y\cdot\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}y\right)\right)=\lim\limits_{y\to 0}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}y\right)\cdot\dfrac{\frac{\pi}{2}y}{\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)}\cdot\dfrac{2}{\pi}\right)=1\cdot 1\cdot\dfrac{2}{\pi}=\dfrac{2}{\pi}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-(1-2\sin^2 x)}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2\sin^2 x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}\cdot|\sin x|}{x}$. Itt külön kell vizsgálnunk a jobb-és baloldali határértéket.

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\sqrt{2}\cdot|\sin x|}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sqrt{2}\cdot\sin x}{x}=\sqrt{2}\,;\qquad \lim_{x\to 0-0}\frac{\sqrt{2}\cdot|\sin x|}{x}=\lim_{x\to 0-0}\frac{\sqrt{2}\cdot(-\sin x)}{x}=-\sqrt{2}$$

Ebből látszik, hogy a kétoldali határértékek nem egyeznek meg, így a vizsgált határérték nem létezik.

e) Alkalmazzuk a nevezőben szereplő különbségre az addíciós tételt!

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{\cos 4x-\cos 6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\sin\frac{4x-6x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{-2\sin 5x\sin(-2x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{5}{4}\right)=1\cdot 1\cdot\frac{5}{4}=\frac{5}{4}$$

Függelék

Polinomosztás

A számok osztásához hasonlóan algebrai kifejezéseket is oszthatunk egymással maradékosan. A módszert az egyik konkrét kitűzött feladat számításának elvégzésével szeretnénk bemutatni.

A polinomosztás felhasználásához előzményeként még egy tételt meg kell említenünk:

Tétel: Ha a $p(x)$ valós együtthatós polinom gyöke az a valós szám, akkor a polinom felírható $p(x) = (x+a) \cdot q(x)$ alakban, ahol $q(x)$ egy megfelelő valós együtthatós polinom.

Lássuk tehát a polinomosztást!

Tudjuk, hogy az $x^3 - x^2 - 7x + 3$ polinomnak az $x = 3$ gyöke, tehát osztható $(x-3)$-mal.

Kezdjük el az osztást úgy, mint a számoknál!

$$(x^3 - x^2 - 7x + 3) : (x-3) =$$

Most egy olyan *x*-hatványt kell találnunk, amellyel $(x-3)$-at megszorozva x^3 is keletkezik, ez az x^2 lesz. Végezzük el a visszaszorzást, és vonjuk ki a kapott polinomot az eredetiből:

$$\begin{array}{l} (x^3 - x^2 - 7x + 3) : (x-3) = x^2 \\ \underline{-(x^3 - 3x^2)\qquad\qquad} \\ \qquad\quad 2x^2 - 7x + 3 \end{array}$$

Most folytassuk tovább a megfelelő *x*-hatvány keresését, olyat kell találnunk, mellyel $(x-3)$-at megszorozva $2x^2$ is keletkezik:

$$\begin{array}{l} (x^3 - x^2 - 7x + 3) : (x-3) = x^2 + 2x \\ \underline{-(x^3 - 3x^2)\qquad\qquad} \\ \qquad\quad 2x^2 - 7x + 3 \\ \qquad \underline{-(2x^2 - 6x)\quad} \\ \qquad\qquad\quad -x + 3 \end{array}$$

Befejező lépésként már nyilvánvalóan –1-et kell írnunk a hányadosba:

$$
\begin{array}{l}
(x^3-x^2-7x+3):(x-3)=x^2+2x-1 \\
\underline{-(x^3-3x^2)} \\
\quad 2x^2-7x+3 \\
\quad \underline{-(2x^2-6x)} \\
\qquad -x+3 \\
\qquad \underline{-(-x+3)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Előfordulhat, hogy a polinomosztás során maradék lép fel. Az osztást csak addig tudjuk végezni, amíg a visszaszorzás után kapott polinom fokszáma kisebb nem lesz, mint az osztóé. Ha nem fogy el egyszerre minden tag, akkor maradék keletkezik (pont úgy, mint a számok maradékos osztásánál). Ilyenkor a $p(x)$ polinom $q(x)$ polinommal történő osztása után a $p(x)=h(x)\cdot q(x)+r(x)$ alakot kapjuk, ahol $r(x)$ polinom fokszáma kisebb, mint $q(x)$ fokszáma.

VI. Definíciók az I. függvényhatárérték definíciónak megfelelő megfogalmazásban és környezetben

Jobb- és baloldali határérték

Def. Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a,a+\omega)$ intervallumon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvénynek létezik a-ban jobboldali határértéke és ez A valós szám, ha minden $\varepsilon>0$ valós számhoz létezik olyan $\delta>0$ valós szám, hogy minden esetben, amikor $0<x-a<\delta$ teljesül, fennáll $|f(x)-A|<\varepsilon$ is. Jelölés: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$.

Def. Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega,a)$ intervallumon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvénynek létezik a-ban baloldali határértéke és ez A valós szám, ha minden $\varepsilon>0$ valós számhoz létezik olyan $\delta>0$ valós szám, hogy minden esetben, amikor $0<a-x<\delta$ teljesül, fennáll $|f(x)-A|<\varepsilon$ is. Jelölés: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A$.

A végtelen mint határérték

Def. Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega,a+\omega)\setminus\{a\}$ halmazon [a tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az f függvénynek létezik a-ban határértéke és ez plusz végtelen, ha minden K valós számhoz létezik olyan $\delta>0$ valós szám, hogy ha $0<|x-a|<\delta$ teljesül, fennáll $K<f(x)$ is. Jelölés: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.

Def. Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega,a+\omega)\setminus\{a\}$ halmazon [*a* tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az *f* függvénynek létezik *a*-ban határértéke és ez mínusz végtelen, ha minden *K* valós számhoz létezik olyan $\delta>0$ valós szám, hogy ha $0<|x-a|<\delta$ teljesül, fennáll $K>f(x)$ is. Jelölés: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

Def. Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a,a+\omega)$ intervallumon [*a* tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az *f* függvénynek létezik *a*-ban jobboldali határértéke és ez +∞, ha minden *K* valós számhoz létezik olyan $\delta>0$ valós szám, hogy minden esetben, amikor $0<x-a<\delta$ teljesül, fennáll $f(x)>K$ is. Jelölés: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$.

Def. Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a,a+\omega)$ intervallumon [*a* tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az *f* függvénynek létezik *a*-ban jobboldali határértéke és ez –∞, ha minden *K* valós számhoz létezik olyan $\delta>0$ valós szám, hogy minden esetben, amikor $0<x-a<\delta$ teljesül, fennáll $f(x)<K$ is. Jelölés: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=-\infty$.

Def. Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega,a)$ intervallumon [*a* tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az *f* függvénynek létezik *a*-ban baloldali határértéke és ez +∞, ha minden *K* valós számhoz létezik olyan $\delta>0$ valós szám, hogy minden esetben, amikor $0<a-x<\delta$ teljesül, fennáll $f(x)>K$ is. Jelölés: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$.

Def. Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega,a)$ intervallumon [*a* tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az *f* függvénynek létezik *a*-ban baloldali határértéke és ez –∞, ha minden *K* valós számhoz létezik olyan $\delta>0$ valós szám, hogy minden esetben, amikor $0<a-x<\delta$ teljesül, fennáll $f(x)<K$ is. Jelölés: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=-\infty$.

Végtelenben vett határérték

Def. Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve a $[W,+\infty)$ intervallumon, ahol $W\in\mathbf{R}$. Ekkor azt mondjuk, hogy *f* határértéke a plusz végtelenben az *A* valós szám, ha minden $\varepsilon>0$ valós számhoz létezik olyan *K* valós szám, hogy minden esetben, amikor $K<x$ teljesül, fennáll $|f(x)-A|<\varepsilon$ is. Jelölés: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

Def. Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve a $(-\infty,W]$ intervallumon, ahol $W\in\mathbf{R}$. Ekkor azt mondjuk, hogy *f* határértéke a mínusz végtelenben az *A* valós szám, ha minden $\varepsilon>0$ valós számhoz létezik olyan *K* valós szám, hogy minden esetben, amikor $K>x$ teljesül, fennáll $|f(x)-A|<\varepsilon$ is. Jelölés: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

Def. Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve a $[W,+\infty)$ intervallumon, ahol $W\in\mathbf{R}$. Ekkor azt mondjuk, hogy *f* határértéke a plusz végtelenben plusz végtelen, ha minden *N* valós számhoz létezik olyan *K* valós szám, hogy minden esetben, amikor $K<x$ teljesül, fennáll $f(x)>N$ is. Jelölés: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Def. Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve a $[W,+\infty)$ intervallumon, ahol $W\in\mathbf{R}$. Ekkor azt mondjuk, hogy *f* határértéke a plusz végtelenben mínusz végtelen, ha minden *N* valós számhoz létezik olyan *K* valós szám, hogy minden esetben, amikor $K<x$ teljesül, fennáll $f(x)<N$ is. Jelölés: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

Def. Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve a $(-\infty,W]$ intervallumon, ahol $W\in\mathbf{R}$. Ekkor azt mondjuk, hogy *f* határértéke a mínusz végtelenben plusz végtelen, ha minden *N* valós számhoz létezik olyan *K* valós szám, hogy minden esetben, amikor $K>x$ teljesül, fennáll $f(x)>N$ is. Jelölés: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

Def. Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve a $(-\infty,W]$ intervallumon, ahol $W\in\mathbf{R}$. Ekkor azt mondjuk, hogy *f* határértéke a mínusz végtelenben mínusz végtelen, ha minden *N* valós számhoz létezik olyan *K* valós szám, hogy minden esetben, amikor $K>x$ teljesül, fennáll $f(x)<N$ is. Jelölés: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.