Matematika informatikusoknak 2 – Differenciálszámítás

2. gyakorlat

Számsorozatok határértéke

Definíció. Az $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat határértéke a b szám, ha minden ε-hoz létezik olyan (ε-tól függő) n_0 szám, melyre teljesül, hogy minden $n > n_0$ esetben

$$|a_n - b| < \varepsilon.$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = b$$

Példa

Feladatok gyakorlatra:
Határozzuk meg a határértékeket és bizonyítsuk be a definíció alapján.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n}{n^2+1} =$$

Példa

Feladatok gyakorlatra:
Határozzuk meg a határértékeket és bizonyítsuk be a definíció alapján.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n}{n^2+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n}{n^2+1} = 2$$

Legyen $\varepsilon > 0$ adott, rögzített. Milyen "nagy" n-re fog teljesülni, hogy

$$\left| \frac{2n^2+3n}{n^2+1} - 2 \right| < \varepsilon?$$

$$\left|\frac{2n^2+3n}{n^2+1}-2\right| = \left|\frac{2n^2+3n-2(n^2+1)}{n^2+1}\right| = \left|\frac{2n^2+3n-2n^2-2}{n^2+1}\right| =$$

$$= \frac{3n-2}{n^2+1}.$$

$$\left|\frac{2n^2+3n}{n^2+1}-2\right| = \left|\frac{2n^2+3n-2(n^2+1)}{n^2+1}\right| = \left|\frac{2n^2+3n-2n^2-2}{n^2+1}\right| =$$

$$= \frac{3n-2}{n^2+1}.$$

Milyen "nagy" n-re fog teljesülni, hogy

$$\frac{3n-2}{n^2+1} < \varepsilon?$$

$$\left|\frac{2n^2+3n}{n^2+1}-2\right| = \left|\frac{2n^2+3n-2(n^2+1)}{n^2+1}\right| = \left|\frac{2n^2+3n-2n^2-2}{n^2+1}\right| =$$

$$= \frac{3n-2}{n^2+1}.$$

Milyen "nagy" n-re fog teljesülni, hogy

$$\frac{3n-2}{n^2+1} < \varepsilon?$$

- az egyenlőtlenség megoldható n-re nézve (bonyolult)

$$\left|\frac{2n^2+3n}{n^2+1}-2\right| = \left|\frac{2n^2+3n-2(n^2+1)}{n^2+1}\right| = \left|\frac{2n^2+3n-2n^2-2}{n^2+1}\right| =$$

$$= \frac{3n-2}{n^2+1}.$$

Milyen "nagy" n-re fog teljesülni, hogy

$$\frac{3n-2}{n^2+1} < \varepsilon?$$

- az egyenlőtlenség megoldható n-re nézve (bonyolult)

- nincs szükség a pontos megoldásra, elégséges egy küszöbérték megadása, mely után az egyenlőtlenség már érvényes.

A $\frac{3n-2}{n^2+1}$ tört helyett "nagyobbat", de egyszerűbbet vizsgáljunk.

$$\frac{3n-2}{n^2+1} < \frac{3n}{n^2+1} < \frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n}.$$

Elegendő tehát, ha

$$\frac{3}{n} < \varepsilon \quad \text{azaz} \quad n > \frac{3}{\varepsilon}$$

Az ε-hoz tartozó n_0 legyen az a legkisebb természetes szám, mely nagyobb mint $\frac{3}{\varepsilon}$.

ε	0.1	0.02	0.01	0.0017	0.0001	$\cdots$
n_0	31	151	301	1765	30001	$\cdots$

Példa

$$\lim_{n \to \infty} 0.99^n = 0$$

Megjegyzések a logaritmusfüggvényről

Az $f(x) = \log_{10} x$ a $g(x) = 10^x$ inverze.

Megjegyzések a logaritmusfüggvényről

Az $f(x) = \log_{10} x$ a $g(x) = 10^x$ inverze.

a logaritmusfüggvény "lehozza" a hatványkitevőt

Megjegyzések a logaritmusfüggvényről

Az $f(x) = \log_{10} x$ a $g(x) = 10^x$ inverze.

a logaritmusfüggvény "lehozza" a hatványkitevőt

$$\log_{10} 100 = \log_{10} 10^{2} = 2$$

$$\log_{10} 1000 = \log_{10} 10^{3} = 3$$

$$\log_{10} 1 = \log_{10} 10^{0} = 0$$

$$\log_{10} 0.1 = \log_{10} 10^{-1} = -1$$

$$\log_{10} 10^x = x \qquad \text{és} \qquad 10^{\log_{10} x} = x \ \ (x > 0)$$

$$\log_{10} 10^x = x \qquad \text{és} \qquad 10^{\log_{10} x} = x \ \ (x > 0)$$

Tetszőleges a, b pozitív számokra és t valós számra érvényes:

$$\log_{10} a.b = \log_{10} a + \log_{10} b$$

$$\log_{10} \frac{a}{b} = \log_{10} a - \log_{10} b$$

$$\log_{10} a^t = t. \log_{10} a$$

Példa

$$\lim_{n\to\infty} 0.99^n = 0$$

Legyen $\varepsilon > 0$ adott, rögzített. Milyen "nagy" n-re fog teljesülni, hogy

$$|0.99^n - 0| < \varepsilon?$$

Az abszolút érték elhagyható

$$0.99^n < \varepsilon$$

Mivel a $\log_{10} x$ szigorúan növekvő, ezért mindkét oldalnak vehetjük a logaritmusát.

$$0.99^n < \varepsilon \qquad / \log_{10}(\ )$$

Akkor

$$\log_{10} 0.99^n < \log_{10} \varepsilon$$

$$n. \log_{10} 0.99 < \log_{10} \varepsilon$$

$$n.\log_{10} 0.99 < \log_{10} \varepsilon$$

Mivel

$$\log_{10} 0.99 < 0 \quad \textbf{!!!}$$

s ezért a

$$n.\log_{10} 0.99 < \log_{10} \varepsilon$$

következménye, hogy

$$n > \frac{\log_{10} \varepsilon}{\log_{10} 0.99}$$

(a két negatív szám hányadosa pozitív)
Az ε-hoz tartozó n_0 legyen az a legkisebb természetes szám, mely nagyobb mint

$$\frac{\log_{10} \varepsilon}{\log_{10} 0.99}$$

ε	0.1	0.02	0.01	0.005	0.0001	$\cdots$
n_0	230	390	459	528	917	$\cdots$

Példa

$$\lim_{n\to\infty} \log_{10}(\log_{10}(n+1) = +\infty$$

Példa

$$\lim_{n\to\infty} \log_{10}(\log_{10}(n+1) = +\infty$$

Definíció. Az (a_n) sorozat határértéke $+\infty$, ha tetszőleges $K > 0$-hoz létezik olyan K-tól függő n_0 szám, melyre igaz, hogy minden $n > n_0$ esetben

$$a_n > K.$$

Példa

$$\lim_{n\to\infty} \log_{10}(\log_{10}(n+1)) = +\infty$$

Legyen $K > 0$ adott, rögzített. Milyen "nagy" n-re fog teljesülni, hogy

$$\log_{10}(\log_{10}(n+1)) > K?$$

Példa

$$\lim_{n\to\infty} \log_{10}(\log_{10}(n+1)) = +\infty$$

Legyen $K > 0$ adott, rögzített. Milyen "nagy" n-re fog teljesülni, hogy

$$\log_{10}(\log_{10}(n+1)) > K?$$

$$\log_{10}(\log_{10}(n+1) > K$$

Mivel a 10^x szigorúan növekvő, ezért mindkét oldalra végrehajtjuk ezt a függvényt.

$$\log_{10}(\log_{10}(n+1)) > K \qquad / \ 10^{(\ )}$$

Akkor

$$10^{\log_{10}(\log_{10}(n+1))} > 10^K$$

$$10^{\log_{10}(\log_{10}(n+1))} > 10^K$$

nem más, mint

$$\log_{10}(n+1) > 10^K$$

Még egyszer hatványozzuk a 10-et az egyes "oldalakra", hogy becslést kapjunk az n-re.

$$\log_{10}(n+1) > 10^K / \ 10^{(\ )}$$

Így

$$10^{\log_{10}(n+1)} > 10^{10^K}$$

s ez nem más, mint

$$n+1 > 10^{10^K}$$

$$n + 1 > 10^{10^K}$$

Tehát a K-hoz tartozó n_0 küszöbindex legyen a

$$10^{10^K}$$

felkerekített értéke a legközelebbi egész számra.

K	1	2	$\cdots$
n_0	10^{10}	$10^{10^2} = 10^{100}$	$\cdots$