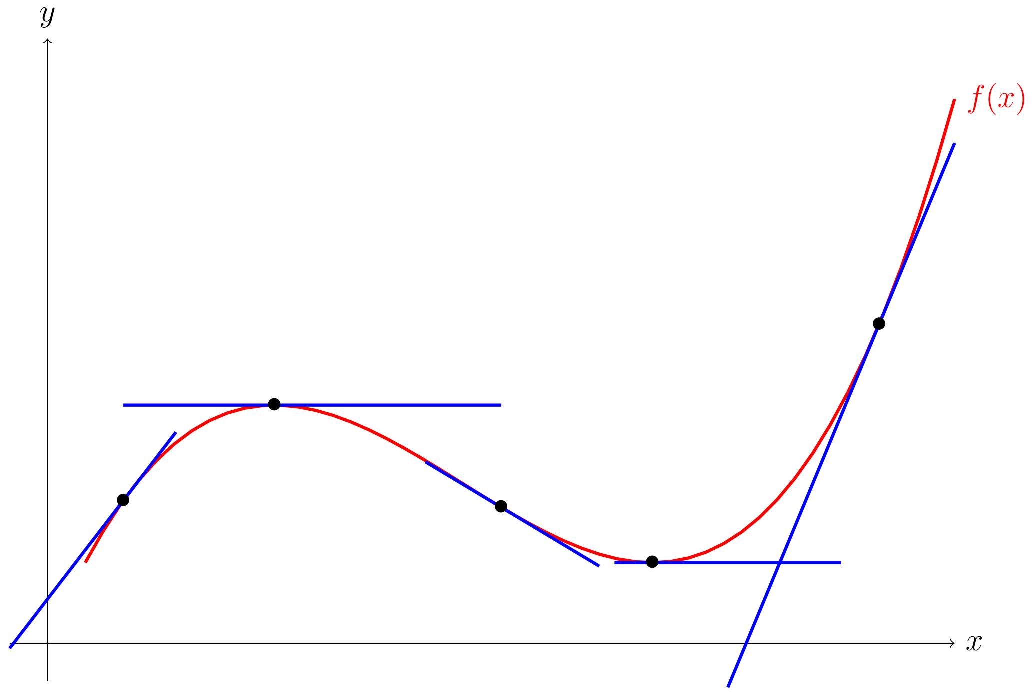
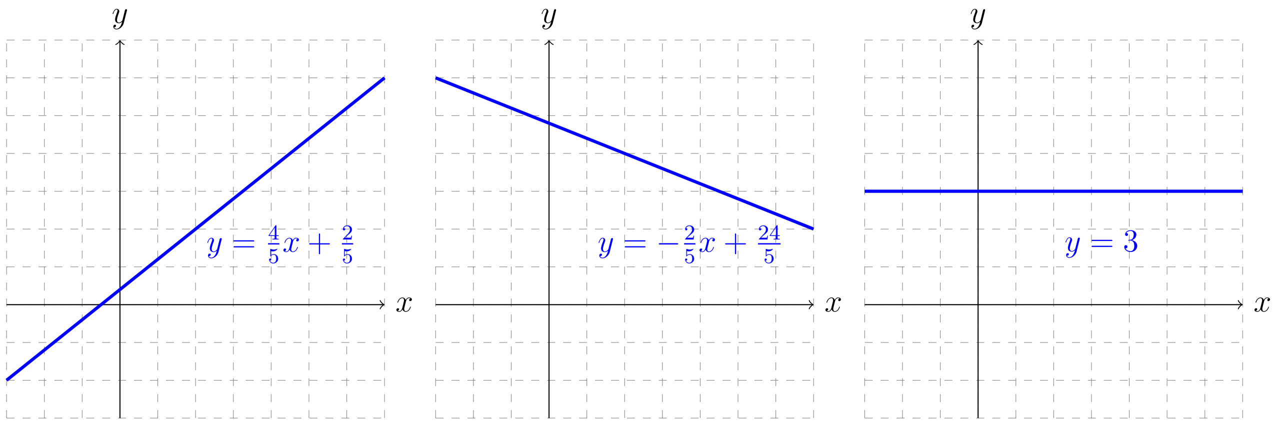
DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS



Az $y = ax + b$ egyenletű egyenes akkor és csak akkor

- növekvő, ha $a > 0$,
- csökkenő, ha $a < 0$,
- konstans, ha $a = 0$.



Olyan $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ függvényekkel foglalkozunk, melyek egy $\mathcal{I}$ intervallumon vannak értelmezve.

Definíció *Az $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ függvény az $\mathcal{I}$ intervallum x_0 belső pontjában differenciálható, ha létezik*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \tag{1}$$

véges határérték.

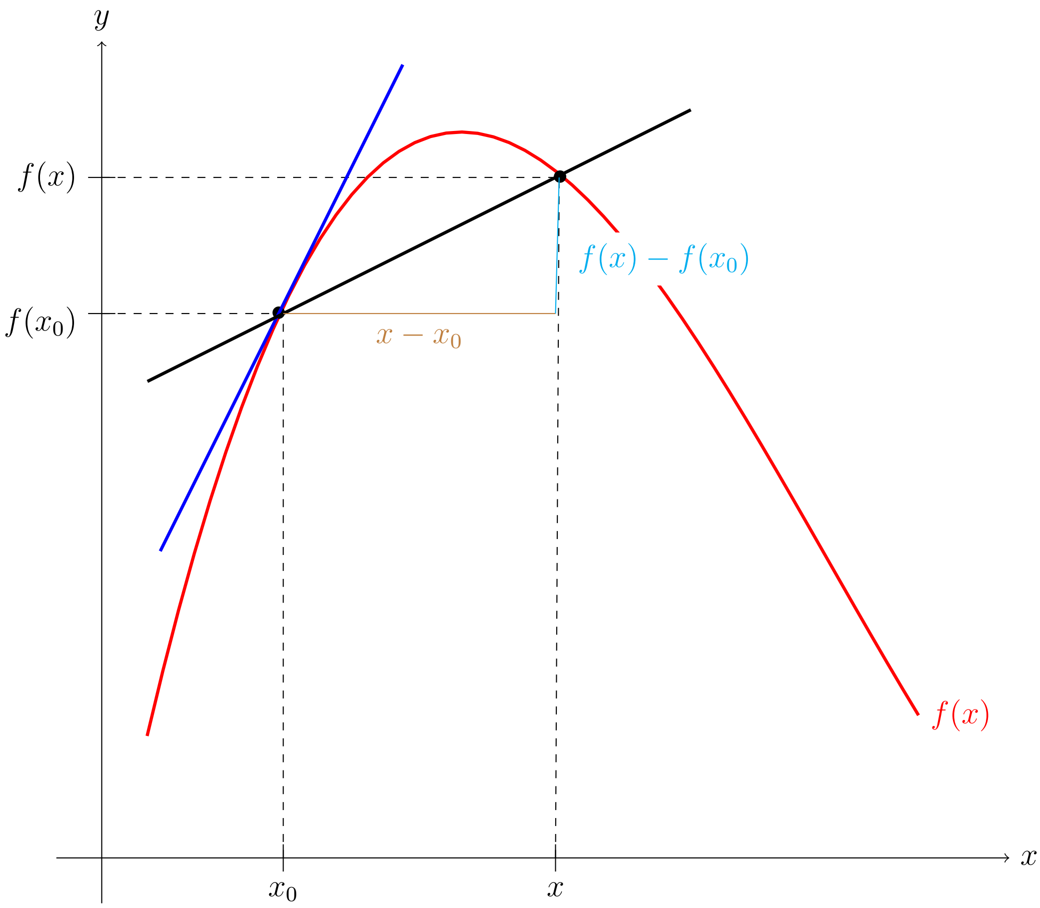
$f'(x_0)$ érték az f függvény x_0 pontbeli differerenciálhányadosa.

Ha az (1) határérték létezik, de nem véges ($+\infty$ vagy $-\infty$), akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az x_0 pontban deriválható.

Az f függvény differenciálható az $\mathcal{I}$ intervallumon, ha az f függvény az $\mathcal{I}$ minden pontjában differerenciálható.

Az f függvény deriváltjának vagy differenciálhányados függvényének nevezzük és f'-el jelöljük azt a függvényt, mely értelmezve van mindazon x helyeken, ahol f differenciálható és értéke itt $f'(x)$.

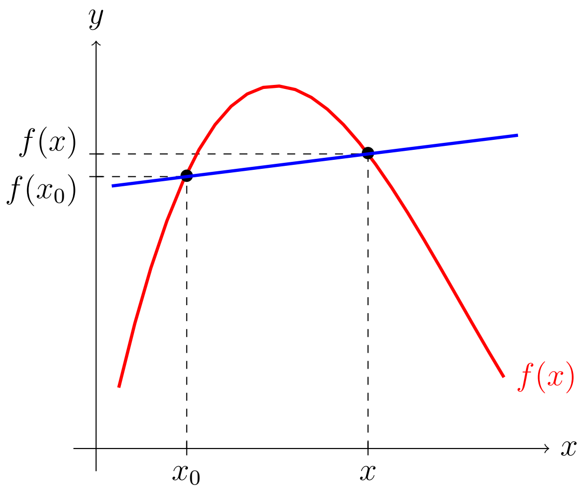
Használatos a $h = x - x_0$ jelölés, ekkor $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

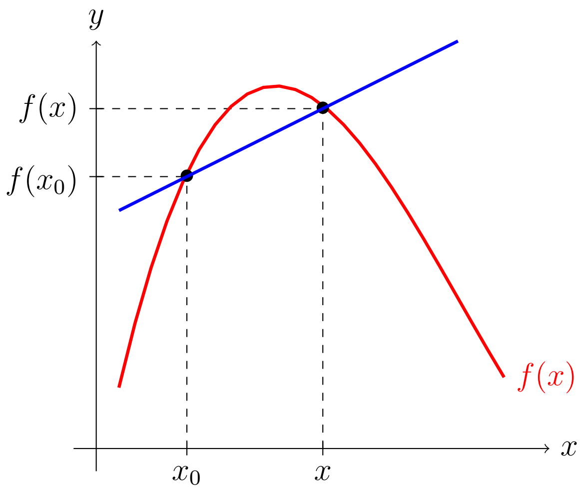


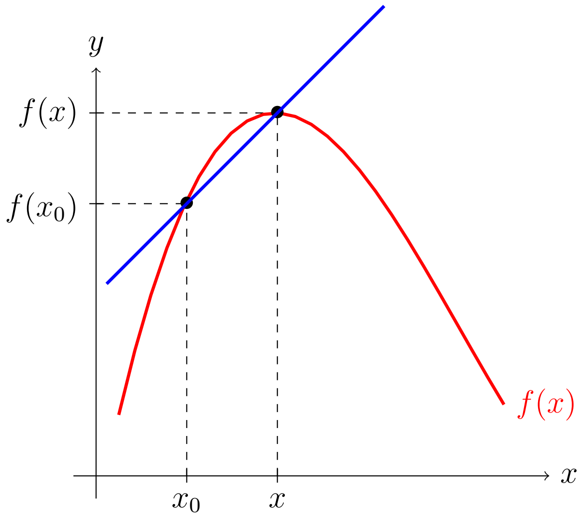
Tétel. (A differenciálhányados geometriai értelme) *Ha az f függvény differenciálható az x_0 pontban, akkor a függvény görbéjéhez a $P_0(x_0, f(x_0))$ pontban*

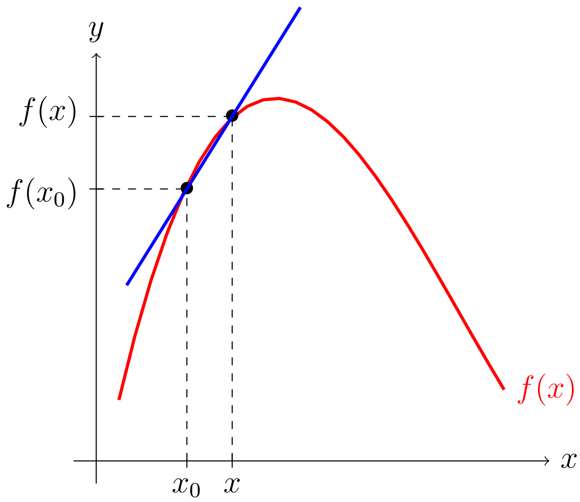
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

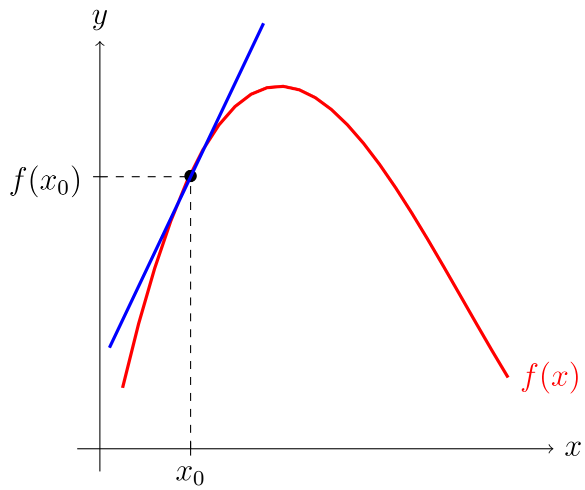
egyenletű érintő egyenes húzható. $f'(x_0)$ az érintő egyenes iránytangense (meredeksége).











Differenciálási szabályok

Tétel *Ha az f és g függvények differenciálhatók az x_0 pontban akkor a cf, $f+g$ függvények is differenciálhatók az x_0-ban és*

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$

- $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

A konstans függvény deriváltja 0.

$$\text{Ha} \quad f(x) = x^a, \quad \text{akkor} \quad f'(x) = ax^{a-1} \quad (a \neq 0).$$

Példák

$$(x^2)' = 2x$$

$$(x^3)' = 3x^2$$

$$(x^5)' = 5.x^4$$

$$(x)' = 1$$

$$(1/x)' = (x^{-1})' = (-1)x^{-2}$$

$$(1/x^2)' = (x^{-2})' = (-2)x^{-2-1} = -2x^{-3}$$

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x}^2}$$

$$(x^2+5)' = 2x$$

$$(x^4-8)' = 4x^3$$

$$(x^6+13)' = 6x^5$$

$$(5x^2)' = 5.2x = 10x$$

$$(-2x^3)' = (-2).3x^2 = -6x^2$$

$$(10.x^5)' = 10.5x^4$$

$$(4x)' = 4$$

$$(-9x)' = -9$$

$$(1-x)' = -1$$

$$(x^5 + x^3 + x^2)' = 5x^4 + 3x^2 + 2x$$

$$(x^2 + 5x - 8)' = 2x + 5$$

$$(x^4 - 8x^3 + 4x^2)' = 4x^3 - 8.3x^2 + 4.2x$$

$$(2x^6 + 13x^3 + 7x - 9)' = 2.6x^5 + 13.3x^2 + 7$$

$$(5x^2 + 2\sqrt{x})' = 5.2x + \frac{2}{2\sqrt{x}} = 10x + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Tétel *Ha az f függvény differenciálható az x_0 pontban, akkor e pontban folytonos is.*

Bizonyítás. Elegendő belátni, hogy ha a $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ határérték létezik és véges, akkor $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ha $x \neq x_0$ az $f(x)$ függvény felírható

$$f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.(x - x_0) + f(x_0)$$

alakban. Felhasználva azt, hogy $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$, (mely véges) $\lim\limits_{x \to x_0} x - x_0 = 0$, kapjuk, hogy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

A folytonosság a differenciálhatóság szükséges, de nem elégséges feltétele. Van olyan f függvény, amely minden pontjában folytonos, de egy x_0 pontban nem differenciálható. Egyszerű példa erre az $f(x) = |x|$ függvény az $x = 0$ pontban.

Tétel. Ha az f és g függvények differenciálhatók az x_0 pontban akkor az $f.g$ valamint $g(a) \neq 0$ esetén $\frac{f}{g}$ függvények is differenciálhatók az x_0-ban és

- $(f.g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Bizonyítás. A bizonyítások közös ötlete, hogy a differenciálhányadosokat úgy alakítjuk át, hogy $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ és $\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$-val legyenek kifejezve.

Az $F = f.g$ függvényre a differenciálhányados:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.g(x) + f(a).\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Mivel a $g(x)$ differenciálható az x_0-ban, ezért folytonos is, így

$$\lim_{x\to a} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \lim_{x\to x_0} g(x) + f(x_0). \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(v)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0).g'(x_0).$$

$$(f.g)' = f'.g + f.g'$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$$

Példák

$$[(5x^2 - 3).(x^3 - 2x^2 - 5x)]' = (5x^2 - 3)'.(x^3 - 2x^2 - 5x) + (5x^2 - 3).(x^3 - 2x^2 - 5x)'$$
$$= 10x.(x^3 - 2x^2 - 5x) + (5x^2 - 3).(3x^2 - 4x - 5)$$

$$\left(\frac{2x + 3}{5x - 1}\right)' = \frac{(2x + 3)'(5x - 1) - (2x + 3)(5x - 1)'}{(5x - 1)^2}$$
$$= \frac{2(5x - 1) - (2x + 3)5}{(5x - 1)^2} = \frac{2.5x - 2.1 - (2x.5 + 3.5)}{(5x - 1)^2} = \frac{-17}{(5x - 1)^2}$$