I. rész

Formális nyelvek és automaták

Környezetfüggetlen nyelvek, veremautomaták

5. előadás

Környezetfüggetlen nyelvek

5.1 definíció: (kiterjesztett 2-típusú nyelvtan)

A $G = (N, \Sigma, P, S)$ generatív nyelvtan

- **2-típusú kiterjesztett nyelvtan**, ha a P szabályhalmazban minden szabály $A \longrightarrow \alpha$ alakú, ahol $A \in N$ és $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$.

5.1 példa: Tekintsük az alábbi $G = (N, \Sigma, P, A)$ nyelvtant, ahol

$N = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ és P:

$$A \longrightarrow aBBb \mid AaA$$
$$B \longrightarrow \lambda \mid bCA$$
$$C \longrightarrow AB \mid a \mid b$$

A G nyelvtan 2-típusú.

Az $abbabb$ szó generálható a G nyelvtannal pl. az alábbi módon:

$$A \Longrightarrow aBBb \Longrightarrow abCABb \Longrightarrow abCaBBbBb \Longrightarrow abbaBBbBb \Longrightarrow abbaBbBb$$
$$\Longrightarrow abbabBb \Longrightarrow abbabb$$

5.2 definíció: (deriváció, levezetés)

Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ 2-típusú nyelvtan. Az $\alpha_0 \Longrightarrow \alpha_1 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \alpha_n$ alakú kifejezések sorozatát **deriváció**nak nevezzük.

5.3 definíció: (derivációs fa, szintaxisfa)

Legyen $X \in N \cup \Sigma$. Az X **gyökerű derivációs fák** halmaza fák legszűkebb olyan D_X halmaza, melyekre teljesülnek az alábbiak:

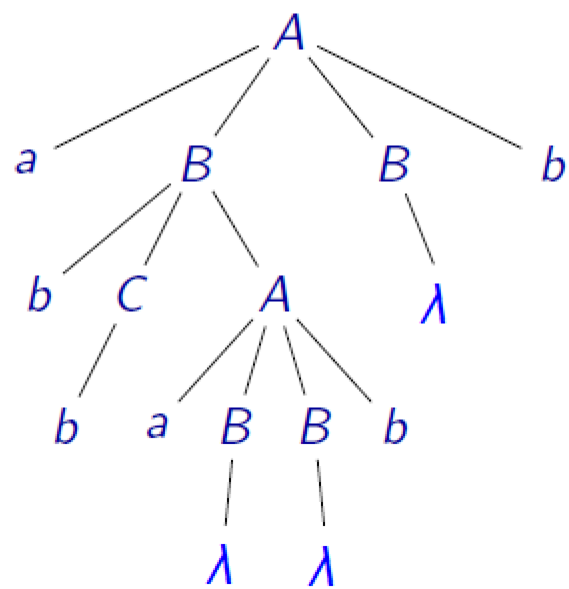
i. Az a fa, amelynek egyetlen csúcsa van és annak címkéje X, eleme a D_X halmaznak. Jelölése: X.

ii. Ha $X \longrightarrow \lambda \in P$, akkor az a fa, amelynek gyökere X-szel van megcímkézve, és a gyökérnek egyetlen leszármazottja van, amelynek címkéje λ, eleme a D_X halmaznak. Jelölése: $X[\lambda]$.

iii. Ha $X \longrightarrow X_1 X_2 \dots X_k \in P$ és $t_1 \in D_{X_1}$, $t_2 \in D_{X_2}$, …, $t_k \in D_{X_k}$, akkor az a fa, amelynek gyökere X-szel van megcímkézve, és a gyökérből k darab él indul ki rendre a $t_1, t_2, \dots, t_k$ fák gyökeréhez, eleme a D_X halmaznak. Jelölése: $X[t_1, t_2, \dots, t_k]$.

Egy levezetés szemléltetése derivációs fával:

$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$
$$B \rightarrow \lambda \mid bCA$$
$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$



$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb \Rightarrow abbaBbb \Rightarrow abbabb$$

A fenti A gyökerű derivációs fa az alábbi módon is megadható:

$$t = A\big[a, B\big[b, C[b], A[a, B[\lambda], B[\lambda], b]\big], B[\lambda], b\big] \quad \in D_A$$

5.4 definíció: (derivációs fa magassága)

Legyen t egy X gyökerű derivációs fa. A t fa $h(t)$ **magassága** a következőképpen adható meg:

i. Ha $t = X$, akkor $h(t) = 0$.

ii. Ha $t = X[\lambda]$, akkor $h(t) = 1$.

iii. Ha $t = X[t_1, t_2, \dots, t_k]$, akkor $h(t) = 1 + \max\{h(t_1), \dots, h(t_k)\}$.

5.5 definíció: (derivációs fa határa)

Legyen t egy X gyökerű derivációs fa. A t fa $f_r(t)$ **határa** a következőképpen adható meg :

i. Ha $t = X$, akkor $f_r(t) = X$.

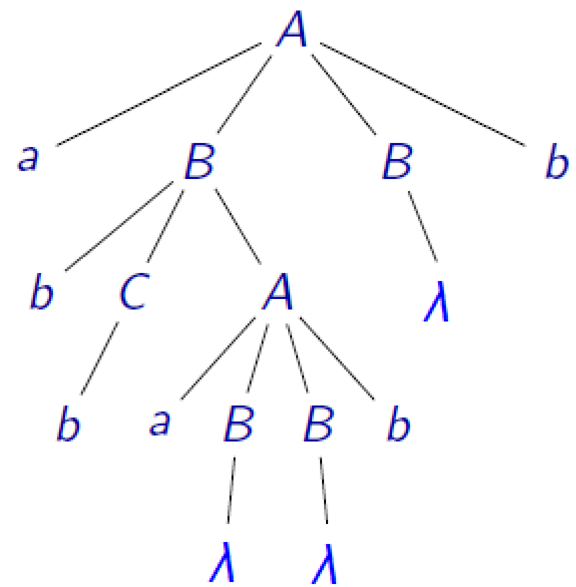
ii. Ha $t = X[\lambda]$, akkor $f_r(t) = \lambda$.

iii. Ha $t = X[t_1, t_2, \dots, t_k]$, akkor $f_r(t) = f_r(t_1) f_r(t_2) \dots f_r(t_k)$.

Megjegyzés:

1) Egy t derivációs fa $h(t)$ magassága a t fában lévő olyan utak hosszának maximuma, amelyek a t fa gyökerétől a fa leveleihez vezetnek.
2) Egy t derivációs fa $f_r(t)$ határa egy $(N \cup \Sigma)^*$ halmazba tartozó szó, amelyet a t fa leveleinek balról jobbra történő leolvasásával kapunk.

5.2 példa: Tekintsük az alábbi derivációs fát:



a derivációs fa magassága: $h(t) = 4$

a derivációs fa határa: $f_r(t) = abbabb$

5.1 tétel: Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ 2-típusú nyelvtan. Az $S \Longrightarrow^* \alpha$ akkor és csakis akkor teljesül, ha létezik olyan $t \in D_S$ derivációs fa, amelyre $f_r(t) = \alpha$.

Megjegyzés:

Ha $S \Longrightarrow^* \alpha$ akkor általában nemcsak egyetlen olyan $t \in D_S$ derivációs fa, amelyre $f_r(t) = \alpha$.

Például tekintsük az alábbi $G = (N, \Sigma, P, S)$ 2-típusú nyelvtant, ahol $N = \{S, B\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ és P: $S \longrightarrow aB \mid Sb \mid a$

$B \longrightarrow b$

Ekkor $S \Longrightarrow^* ab$.

Ugyanakkor a $t_1 = S\big[a, B[b]\big]$ és a $t_2 = S[S[a], b]$ derivációs fák határaira érvényes, hogy $f_r(t_1) = f_r(t_2) = ab$.

Megjegyzés:

Ha egy $t \in D_S$ derivációs fára teljesül, hogy $f_r(t) = \alpha$, akkor elmondható, hogy $S \Longrightarrow^* \alpha$, de a deriváció lépései nincsenek egyértelműen meghatározva.

Például tekintsük a $G = (N, \Sigma, P, K)$ 2-típusú nyelvtant, ahol

$N = \{K, T, F\}$, $\Sigma = \{a, +, *, (,)\}$ és P: $K \longrightarrow K + T \mid T$

$$T \longrightarrow T * F \mid F$$

$$F \longrightarrow (K) \mid a$$

Ekkor a $t = K\big[T\big[T[F], *, F[(, K,)]\big]\big]$ fa határa $f_r(t) = F * (K)$.

Az **5.1 tétel** szerint ekkor $K \Longrightarrow^* F * (K)$

Ugyanakkor ez a deriváció kétféleképpen is elvégezhető:

$$K \Longrightarrow T \Longrightarrow T * F \Longrightarrow F * F \Longrightarrow F * (K)$$

$$K \Longrightarrow T \Longrightarrow T * F \Longrightarrow T * (K) \Longrightarrow F * (K)$$

5.6 definíció: (2-típusú nyelvtan által generált nyelv)

A $G = (N, \Sigma, P, S)$ **2-típusú nyelvtan által generált** $L(G)$ **nyelv** az alábbi módon is megadható:

$$L(G) = \left\{ f_r(t) \;\middle|\; t \in D_S \wedge f_r(t) \in \Sigma^* \right\}$$

5.7 definíció: (baloldali deriváció)

Ha egy $\alpha_0 \Longrightarrow \alpha_1 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \alpha_n$ alakú levezetés során minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén az α_i mondatformát úgy kapjuk meg, hogy az α_{i-1} mondatformában mindig a bal oldalról nézve az első nemterminális szimbólumot helyettesítjük egy rá vonatkozó P halmazbeli szabály jobb oldalával, akkor **baloldali deriváció**ról beszélünk. Jelölése: $\alpha_0 \Longrightarrow_l \alpha_1 \Longrightarrow_l \dots \Longrightarrow_l \alpha_n$

5.8 definíció: (jobboldali deriváció)

Ha egy $\alpha_0 \Longrightarrow \alpha_1 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \alpha_n$ alakú levezetés során minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén az α_i mondatformát úgy kapjuk meg, hogy az α_{i-1} mondatformában mindig a jobb oldalról nézve az első nemterminális szimbólumot helyettesítjük egy rá vonatkozó P halmazbeli szabály jobb oldalával, akkor **jobboldali deriváció**ról beszélünk. Jelölése: $\alpha_0 \Longrightarrow_r \alpha_1 \Longrightarrow_r \dots \Longrightarrow_r \alpha_n$

5.3 példa: Legyen $G = (N, \Sigma, P, K)$, ahol $N = \{K, T, F\}$, $\Sigma = \{a, +, *, (,)\}$ és a P szabályhalmaz elemei:

$$P: \quad \begin{aligned} K &\longrightarrow K + T \mid T \\ T &\longrightarrow T * F \mid F \\ F &\longrightarrow (K) \mid a \end{aligned}$$

baloldali mondatforma

Megadunk egy baloldali derivációt:

$$K \Rightarrow_l K + T \Rightarrow_l K + T + T \Rightarrow_l T + T + T \Rightarrow_l F + T + T \Rightarrow_l a + T + T \Rightarrow_l$$
$$\Rightarrow_l a + T * F + T \Rightarrow_l a + F * F + T \Rightarrow_l a + a * F + T \Rightarrow_l a + a * a + T \Rightarrow_l$$
$$\Rightarrow_l a + a * a + F \Rightarrow_l a + a * a + a$$

jobboldali mondatforma

Megadunk egy jobboldali derivációt:

$$K \Rightarrow_r T \Rightarrow_r T * F \Rightarrow_r T * (K) \Rightarrow_r T * (K + T) \Rightarrow_r T * (K + F) \Rightarrow_r$$
$$\Rightarrow_r T * (K + a) \Rightarrow_r T * (T + a) \Rightarrow_r T * (F + a) \Rightarrow_r T * (a + a) \Rightarrow_r$$
$$\Rightarrow_r F * (a + a) \Rightarrow_r a * (a + a)$$

5.2 tétel: Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ 2-típusú nyelvtan. Tetszőleges $w \in \Sigma^*$ szó esetén $S \Longrightarrow^* w$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $S \Longrightarrow_l^* w$ illetve $S \Longrightarrow_r^* w$.

Megjegyzés:

Nyilvánvaló, hogy ha $S \Longrightarrow_l^* \alpha$ vagy $S \Longrightarrow_r^* \alpha$, akkor $S \Longrightarrow^* \alpha$ teljesül. Azonban fordított irányban ez nem teljesül, csak ha α terminális szó.

Például tekintsük a $G = (N, \Sigma, P, K)$ 2-típusú nyelvtant, ahol

$N = \{K, T, F\}$, $\Sigma = \{a, +, *, (,)\}$ és P:

$$\begin{aligned} K &\longrightarrow K + T \mid T \\ T &\longrightarrow T * F \mid F \\ F &\longrightarrow (K) \mid a \end{aligned}$$

Ekkor $K \Longrightarrow^* K + F + T$.

Ugyanakkor könnyen igazolható, hogy sem $K \Longrightarrow_l^* K + F + T$, sem pedig $K \Longrightarrow_r^* K + F + T$ nem teljesül.

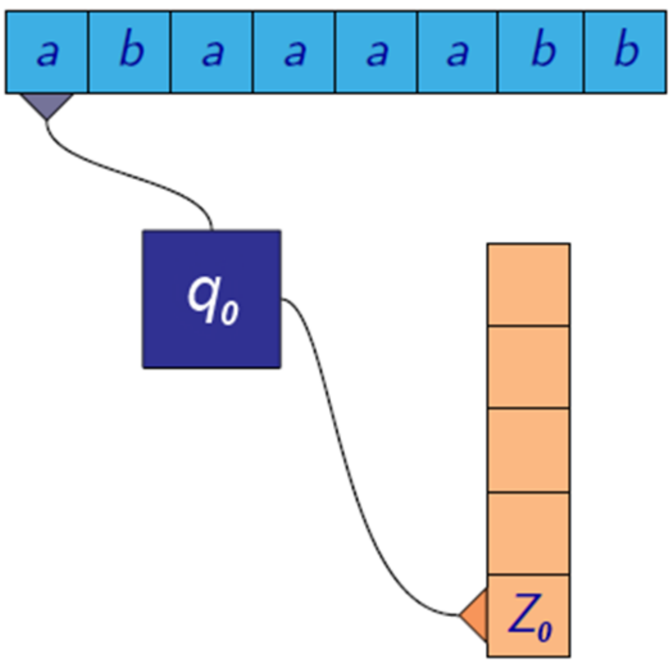
5.9 definíció: (2-típusú nyelvtan által generált nyelv)

A $G = (N, \Sigma, P, S)$ **2-típusú nyelvtan által generált** $L(G)$ **nyelv** az alábbi módon is megadható:

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Longrightarrow^* w\} = \{w \in \Sigma^* \mid S \Longrightarrow_l^* w\} = \{w \in \Sigma^* \mid S \Longrightarrow_r^* w\}$$

Veremautomata

A **veremautomata** egy egyszerű modellel szemléltetve egy olyan absztrakt gép, amely áll egy 1) vezérlőegységből, 2) egy input szalagból, 3) az input szalaghoz tartozó olvasófejből, 4) egy veremmemóriából és 5) a veremhez tartozó író-olvasófejből.



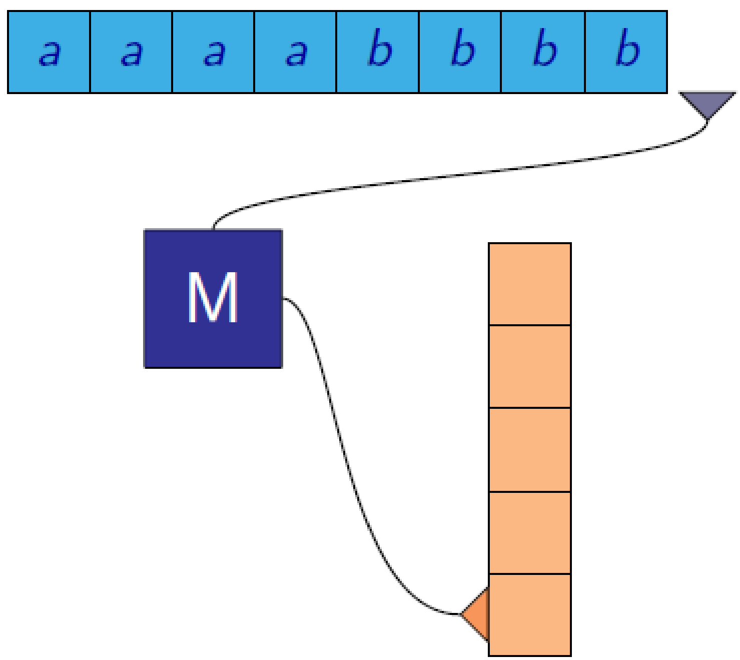
Kiindulási helyzetben a verem-automata kezdőállapotban van, az olvasófej az input szalagra felírt szó első szimbólumára mutat, a verem író-olvasó feje pedig a verem kezdőszimbólumára mutat.

Veremautomata

Feladat: Tekintsük az alábbi nyelvet: $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

Szerkesszünk egy olyan automatát, amely végigolvassa az input szót, s eldönti, hogy beletartozik-e az L nyelvbe vagy sem.

Az automata úgy működne, hogy a szó olvasásakor megjegyzi az a szimbólumok számát, hogy tudja, mennyi b-nek kell következnie.



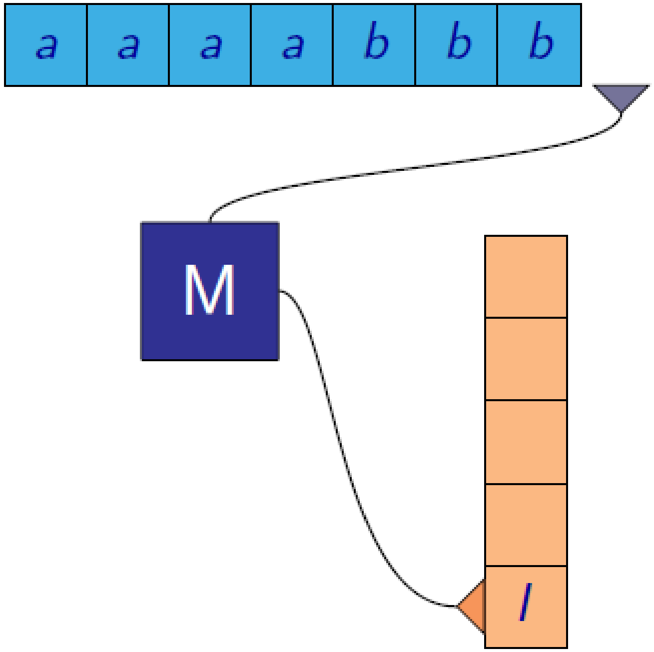
IGEN, beletartozik

Veremautomata

Feladat: Tekintsük az alábbi nyelvet: $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

Szerkesszünk egy olyan automatát, amely végigolvassa az input szót, s eldönti, hogy beletartozik-e az L nyelvbe vagy sem.

Az automata úgy működne, hogy a szó olvasásakor megjegyzi az a szimbólumok számát, hogy tudja, mennyi b-nek kell következnie.



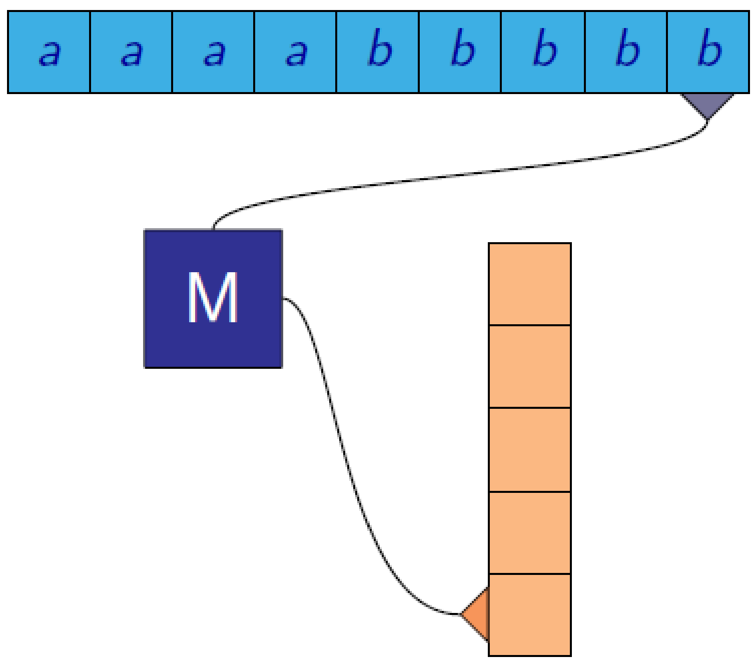
NEM tartozik bele

Veremautomata

Feladat: Tekintsük az alábbi nyelvet: $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

Szerkesszünk egy olyan automatát, amely végigolvassa az input szót, s eldönti, hogy beletartozik-e az L nyelvbe vagy sem.

Az automata úgy működne, hogy a szó olvasásakor megjegyzi az a szimbólumok számát, hogy tudja, mennyi b-nek kell következnie.



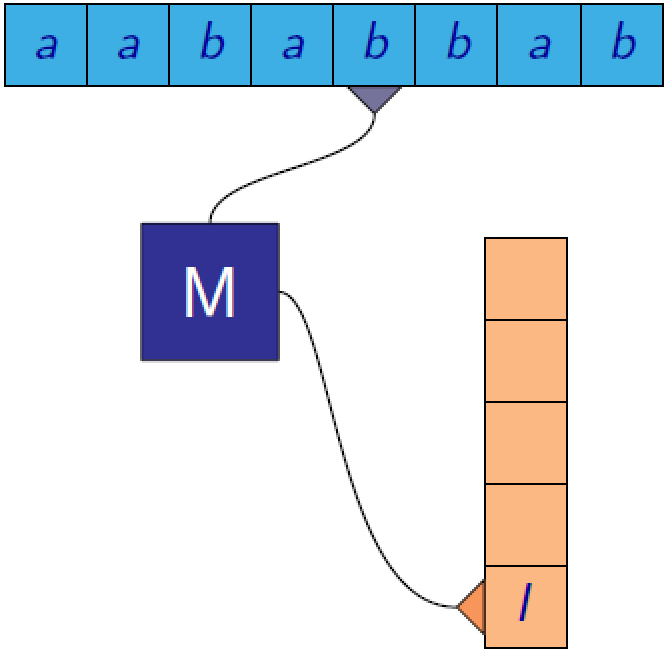
NEM tartozik bele

Veremautomata

Feladat: Tekintsük az alábbi nyelvet: $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

Szerkesszünk egy olyan automatát, amely végigolvassa az input szót, s eldönti, hogy beletartozik-e az L nyelvbe vagy sem.

Az automata úgy működne, hogy a szó olvasásakor megjegyzi az a szimbólumok számát, hogy tudja, mennyi b-nek kell következnie.



NEM tartozik bele

5.10 definíció: (nemdeterminisztikus veremautomata)

A $V = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, I, Z_0, F)$ **nemdeterminisztikus veremautomata** egy rendezett elemhetes, ahol

Q – az automata **állapotainak halmaza**; nem üres véges halmaz

Σ – az **input ábécé**

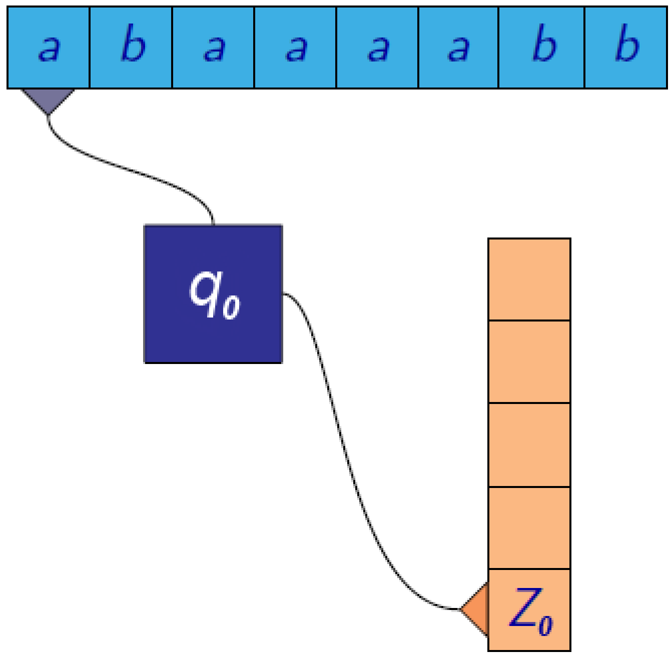
Γ – a **veremábécé**

δ – az **átmenetfüggvény**; $\delta : Q \times (\Sigma \cup \lambda) \times \Gamma \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma^*)$

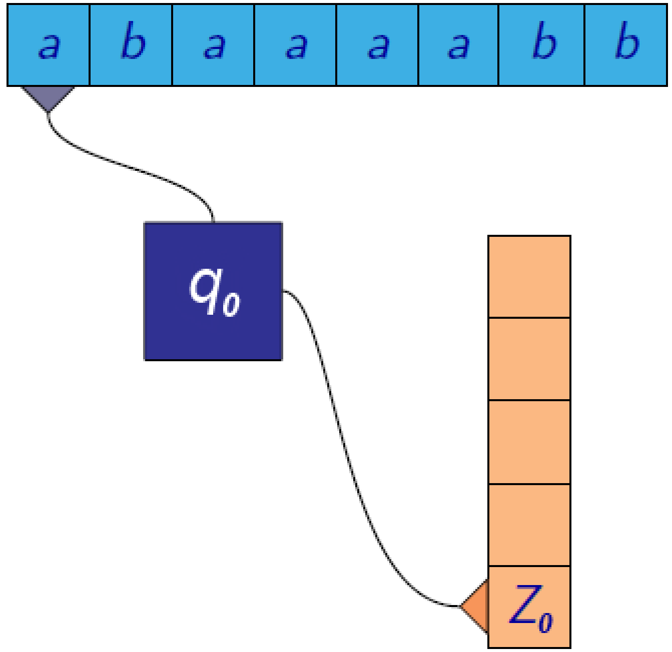
I – a **kezdőállapotok halmaza**, $I \subseteq Q$

Z_0 – a **verem kezdőszimbóluma**, $Z_0 \in \Gamma$

F – a **végállapotok halmaza**, $F \subseteq Q$



A veremautomata működése során az aktuális állapot, a következő input szimbólum (amely lehet λ is) és a verem tetején lévő szimbólum ismeretében átmegy egy másik állapotba és a verem tetején lévő szimbólum helyébe egy szót ír (amely lehet λ is).

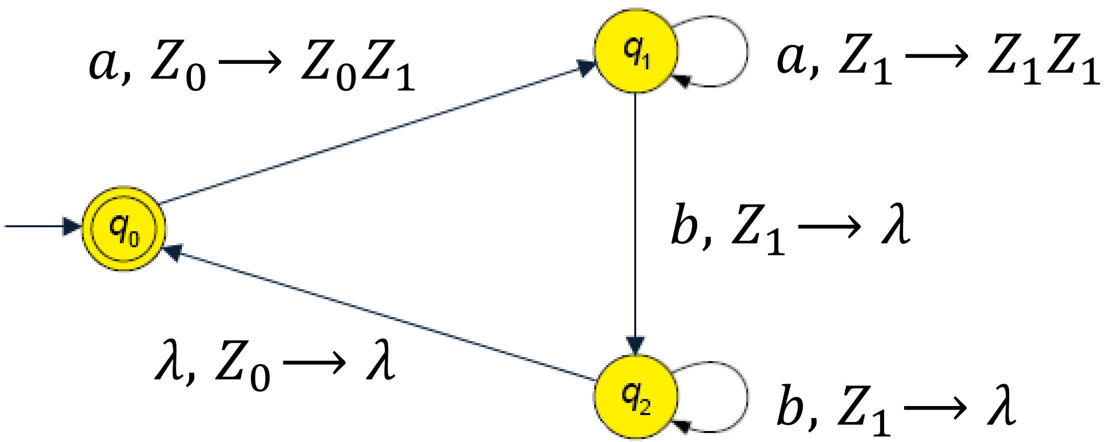


Szimbolikusan leírva, egy tetszőleges $q \in Q$ állapot, $a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$ input szimbólum és a verem tetején lévő $Z \in \Gamma$ szimbólum esetén

$$\delta(q, a, Z) = \{(q_1, \alpha_1,), (q_2, \alpha_2,), \dots, (q_n, \alpha_n,)\}$$

ahol $n \geq 0$ egész szám, $q_1, q_2, \dots, q_n \in Q$ és $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \Gamma^*$ ($n = 0$ esetén $\delta(q, a, Z) = \emptyset$).

5.4 példa:



$$V = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, I, Z_0, F)$$

$$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$$

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$\Gamma = \{Z_0, Z_1\}$$

$$I = \{q_0\}$$

$$F = \{q_0\}$$

δ:

$$\delta(q_0, a, Z_0) = \{q_1, Z_0Z_1\}$$

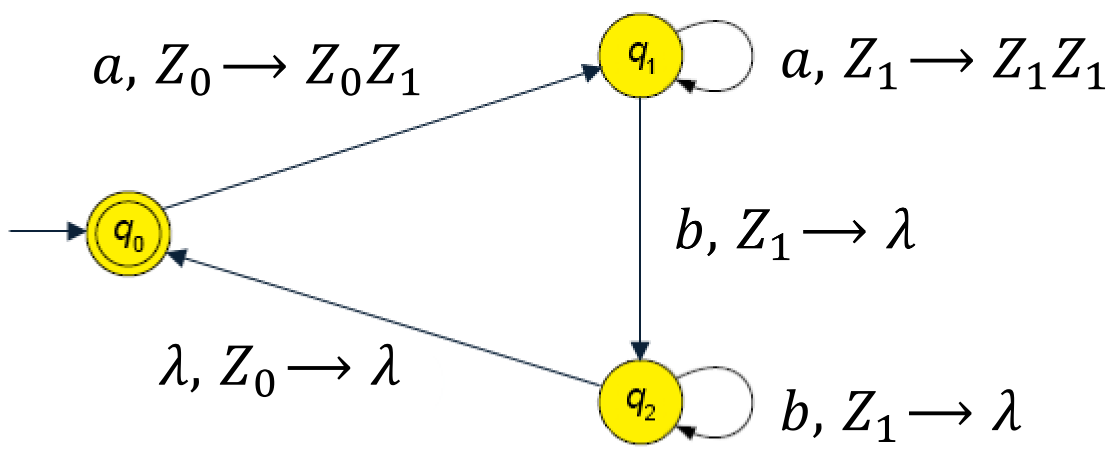
$$\delta(q_1, a, Z_1) = \{q_1, Z_1Z_1\}$$

$$\delta(q_1, b, Z_1) = \{q_2, \lambda\}$$

$$\delta(q_2, b, Z_1) = \{q_2, \lambda\}$$

$$\delta(q_2, \lambda, Z_0) = \{q_0, \lambda\}$$

5.4 példa:



$\Sigma \cup \lambda$	a		b	λ
Γ	Z_0	Z_1	Z_1	Z_0
$\leftrightarrow q_0$	(q_1, Z_0Z_1)			
q_1		(q_1, Z_1Z_1)	(q_2, λ)	
q_2			(q_2, λ)	(q_0, λ)

Selye János Egyetem
GIK, Informatika Tanszék

5.11 definíció: (determinisztikus veremautomata)

A $V=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$ veremautomata **determinisztikus**, ha minden $q\in Q$ állapotra és $Z\in\Gamma$ veremszimbólumra teljesül:

1) minden $a\in\Sigma\cup\{\lambda\}$ szimbólumra a $\delta(q,a,Z)$ halmaz legfeljebb egy elemet tartalmaz,
2) amennyiben $\delta(q,\lambda,Z)\neq\emptyset$, akkor minden $a\in\Sigma$ szimbólumra teljesül, hogy $\delta(q,a,Z)=\emptyset$.

5.5 példa: Legyen $V=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$, ahol $Q=\{q_0,q_1,q_2\}$, $\Sigma=\{a,b\}$, $\Gamma=\{Z_0,Z_1\}$, $F=\{q_0\}$ és δ:

$$\delta(q_0,a,Z_0)=\{q_1,Z_0Z_1\}$$
$$\delta(q_1,a,Z_1)=\{q_1,Z_1Z_1\}$$
$$\delta(q_1,b,Z_1)=\{q_2,\lambda\}$$
$$\delta(q_2,b,Z_1)=\{q_2,\lambda\}$$
$$\delta(q_2,\lambda,Z_0)=\{q_0,\lambda\}$$

A V veremautomata determinisztikus.

5.12 definíció: (konfiguráció)

A $C = Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ halmaz egy elemét a V veremautomata **konfiguráció**jának nevezzük. Egy $(q, a_1 a_2 \ldots a_n, \gamma) \in C$ konfiguráció jelentése az, hogy a V veremautomata q állapotban van, a bemeneten az input szó még el nem olvasott $a_1 a_2 \ldots a_n$ része szerepel, a veremmemória aktuális tartalma pedig γ.

5.6 példa: A $(q_1,\ aabbb,\ Z_0 Z_1)$ elemhármas az **5.4 példá**ban szereplő veremautomata egy konfigurációja.

Megjegyzés:

A (q, w, γ) konfiguráció **kezdő konfiguráció**, ha $q = q_0$.

A (q, w, γ) konfiguráció **befejező konfiguráció**, ha $w = \lambda$.

5.13 definíció: (átmeneti reláció)

A konfigurációk halmazán értelmezett $\vdash_V \subseteq C \times C$ **átmeneti reláció**t a következőképpen definiáljuk: tetszőleges $(q, w, \gamma Z)$ és $(q', w', \gamma\alpha)$ konfigurációk esetén a $(q, w, \gamma Z) \vdash_V (q', w', \gamma\alpha)$ reláció akkor és csakis akkor áll fenn, ha $w = aw'$, és $(q', \alpha) \in \delta(q, a, Z)$ valamilyen $a \in \Sigma$ input szimbólumra.

5.7 példa: A $(q_1,\ aabbb,\ Z_0Z_1) \vdash (q_1,\ abbb,\ Z_0Z_1Z_1)$ átmenet a **5.4 példá**ban szereplő véges automata egy lehetséges átmenete.

5.14 definíció: (számítás)

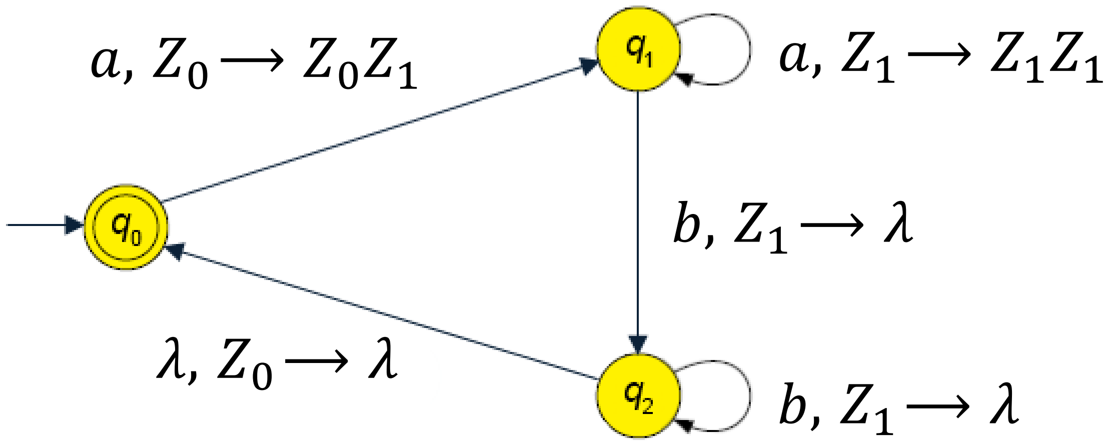
A V veremautomata **számítás**a alatt a $C_0, C_1, \ldots, C_k$ konfigurációk olyan sorozatát értjük, ahol C_0 kezdő konfiguráció, C_k befejező konfiguráció, és minden $i = 1, 2, \ldots, k$ számra érvényes, hogy $C_{i-1} \vdash_V C_i$.

Megjegyzés:

A számítás **produktív**, ha elfogadó konfigurációban ér véget.

5.8 példa: Legyen $V = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, ahol $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{Z_0, Z_1\}$, $F = \{q_0\}$ és δ:

$$\delta(q_0, a, Z_0) = \{q_1, Z_0Z_1\}$$
$$\delta(q_1, a, Z_1) = \{q_1, Z_1Z_1\}$$
$$\delta(q_1, b, Z_1) = \{q_2, \lambda\}$$
$$\delta(q_2, b, Z_1) = \{q_2, \lambda\}$$
$$\delta(q_2, \lambda, Z_0) = \{q_0, \lambda\}$$



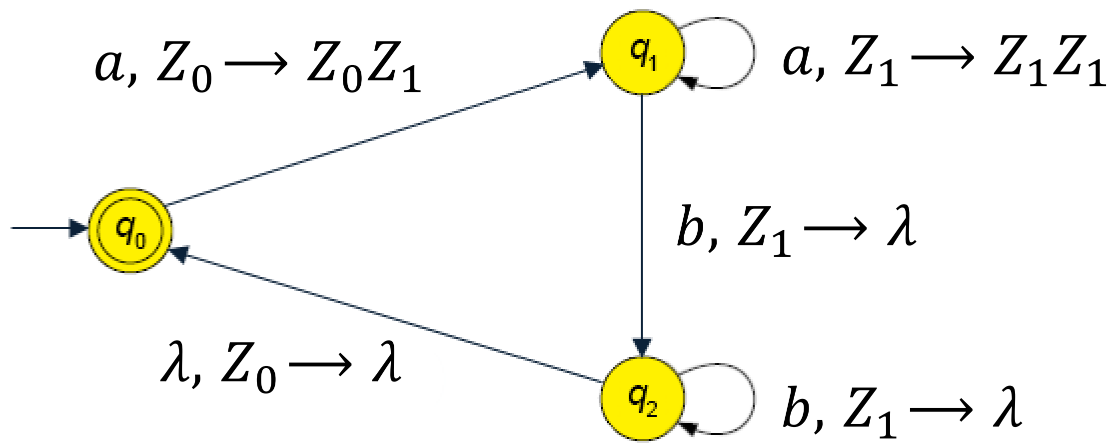
A V veremautomata számítása az $aaabbb$ input szó esetén a következő:

$$(q_0, aaabbb, Z_0) \vdash_V (q_1, aabbb, Z_0Z_1) \vdash_V (q_1, abbb, Z_0Z_1Z_1) \vdash_V$$
$$\vdash_V (q_1, bbb, Z_0Z_1Z_1Z_1) \vdash_V (q_2, bb, Z_0Z_1Z_1) \vdash_V$$
$$\vdash_V (q_2, b, Z_0Z_1) \vdash_V (q_2, \lambda, Z_0) \vdash_V (q_0, \lambda, \lambda)$$

5.15 definíció: (veremautomata által elfogadott szó)

A V veremautomata **elfogadja** az input szót, ha létezik legalább egy olyan kezdő konfigurációból induló számítás, amely elfogadó konfigurációban ér véget.

5.9 példa: Tekintsük az alábbi átmenetdiagrammal adott V veremautomatát.



A V veremautomata az $aaabbb$ input szót elfogadja (lásd **5.8 példa**).

A V veremautomata az $abab$ input szót nem fogadja el, mert nem tudja végigolvasni: $(q_0, abab, Z_0) \vdash_V (q_1, bab, Z_0Z_1) \vdash_V (q_2, ab, Z_0) \vdash_V (q_0, ab, \lambda)$

A veremautomata kétféle módon ismer fel szavakat:

1) **végállapottal való felismerés**ről akkor beszélünk, ha az input szó elolvasása után a veremautomata végállapotba kerül,

2) **üres veremmel való felismerés**ről akkor beszélünk, ha az input szó elolvasása után a veremmemória üres lesz.

5.16 definíció: (végállapottal felismert nyelv)

A V veremautomata által **végállapottal felismert nyelv**:

$$L_f(V) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \vdash_V^* (q, \lambda, \gamma) \text{ ahol } q \in F \wedge \gamma \in \Gamma^* \}$$

5.17 definíció: (üres veremmel felismert nyelv)

A V veremautomata által **üres veremmel felismert nyelv**:

$$L_\emptyset(V) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \vdash_V^* (q, \lambda, \lambda) \text{ ahol } q \in Q \}$$

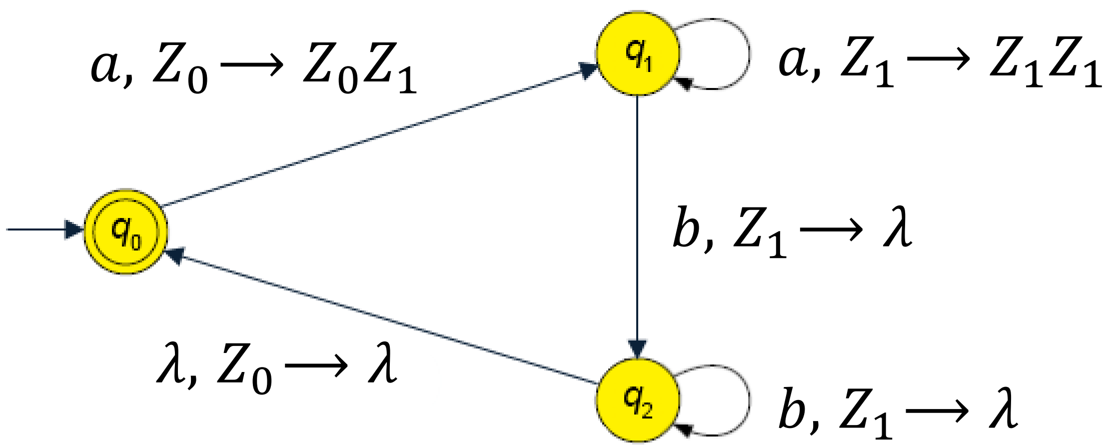
5.10 példa: Legyen $V = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, ahol $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{Z_0, Z_1\}$, $F = \{q_0\}$ és δ: $\delta(q_0, a, Z_0) = \{q_1, Z_0Z_1\}$

$\delta(q_1, a, Z_1) = \{q_1, Z_1Z_1\}$

$\delta(q_1, b, Z_1) = \{q_2, \lambda\}$

$\delta(q_2, b, Z_1) = \{q_2, \lambda\}$

$\delta(q_2, \lambda, Z_0) = \{q_0, \lambda\}$



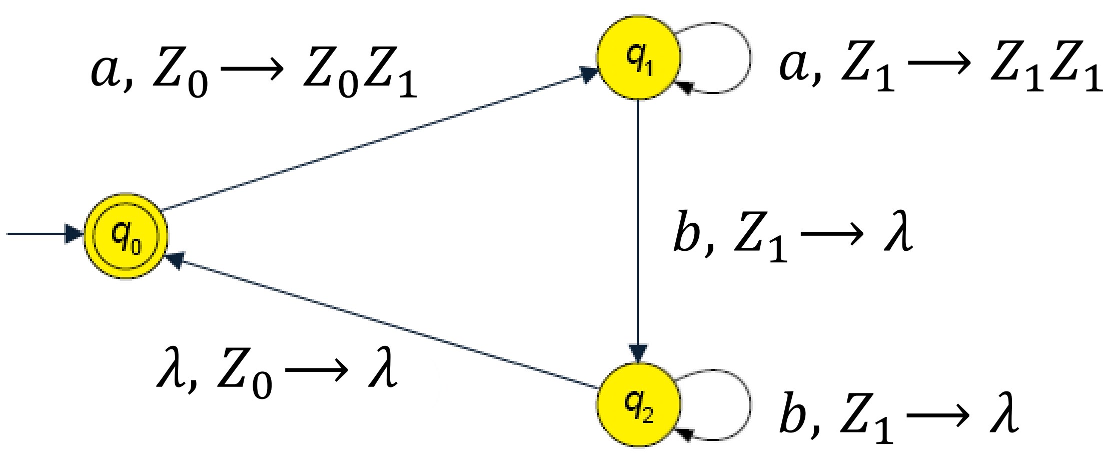
A V veremautomata számítása az $aaabbb$ input szó esetén:

$$(q_0, aaabbb, Z_0) \vdash_V (q_1, aabbb, Z_0Z_1) \vdash_V (q_1, abbb, Z_0Z_1Z_1) \vdash_V$$
$$\vdash_V (q_1, bbb, Z_0Z_1Z_1Z_1) \vdash_V (q_2, bb, Z_0Z_1Z_1) \vdash_V$$
$$\vdash_V (q_2, b, Z_0Z_1) \vdash_V (q_2, \lambda, Z_0) \vdash_V (q_0, \lambda, \lambda)$$

Látható, hogy $aaabbb \in L_f(V)$ és ugyanakkor $aaabbb \in L_\emptyset(V)$.

5.10 példa: Legyen $V = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, ahol $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{Z_0, Z_1\}$, $F = \{q_0\}$ és δ:

$$\delta(q_0, a, Z_0) = \{q_1, Z_0Z_1\}$$
$$\delta(q_1, a, Z_1) = \{q_1, Z_1Z_1\}$$
$$\delta(q_1, b, Z_1) = \{q_2, \lambda\}$$
$$\delta(q_2, b, Z_1) = \{q_2, \lambda\}$$
$$\delta(q_2, \lambda, Z_0) = \{q_0, \lambda\}$$



Könnyen igazolható, hogy

$$L_f(V) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$
$$L_\emptyset(V) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$$

Megjegyzés:

Egy konkrét V veremautomatára általában nem teljesül, hogy $L_f(V) = L_\emptyset(V)$.

5.3 tétel: Egy L nyelv akkor és csakis akkor ismerhető fel valamely V_1 nemdeterminisztikus veremautomatával üres veremmel, ha felismerhető valamely V_2 nemdeterminisztikus veremautomatával végállapottal.

5.4 tétel: Tetszőleges G 2-típusú nyelvtanhoz megadható olyan V nemdeterminisztikus veremautomata, melyre $L_\emptyset(V) = L(G)$.

5.5 tétel: Tetszőleges V nemdeterminisztikus veremautomatához megadható olyan G 2-típusú nyelvtan, melyre $L(G) = L_\emptyset(V)$.

Pumpáló lemma környezetfüggetlen nyelvekre

5.6 tétel: (pumpáló lemma kf. nyelvekre, nagy Bar-Hillel lemma)

Legyen L tetszőleges környezetfüggetlen nyelv. Ekkor megadható olyan, csak az L nyelvtől függő $k \geq 1$ természetes szám, hogy az L nyelv bármely legalább k hosszúságú w szava felírható $w = uvxyz$ alakban úgy, hogy teljesül az alábbi három feltétel:

1) $|vxy| \leq k$,
2) $vy \neq \lambda$,
3) $uv^ixy^iz \in L$, minden $i = 0, 1, 2, \dots$ egész szám esetén.

A pumpáló lemma segítségével egy nyelvről bebizonyítható, hogy nem környezetfüggetlen.

5.11 példa: Az $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ nyelv nem környezetfüggetlen.

Bizonyítás: (ellentmondással)

Tételezzük fel, hogy az L nyelv környezetfüggetlen. Akkor a pumpáló lemma szerint létezik olyan $k \geq 1$ természetes szám, hogy minden $w \in L$ szóra, melynek hossza legalább k, teljesülnek a lemmában szereplő 1) – 3) feltételek.

Tekintsük a $w = a^k b^k c^k \in L$ szót, melynek hossza nyilván nagyobb, mint k. Ekkor a pumpáló lemma alapján a w szó részszavakra bontható, azaz $a^k b^k c^k = uvxyz$.

A v és y részszavak mindegyike legfeljebb egyféle terminális szimbólumot tartalmaz, hiszen, ha ez nem így lenne, akkor az $uvvxyyz$ szóban a terminális szimbólumok nem ábécé sorrendben követnék egymást, s ekkor $uvvxyyz \notin L$ teljesülne, ami ellentmondana a 3) feltételnek.

Ha viszont a v és y részszavak mindegyike legfeljebb egyféle terminális szimbólumot tartalmaz, akkor az $uv^0xy^0z = uxz$ szóban valamelyik terminális szimbólum többször fordul elő, mint a másik kettő, s emiatt $uxz \notin L$.

Ellentmondást kaptunk tehát a pumpáló lemma 3) feltételével, ezért a kezdeti feltételezésünk, mely szerint az L nyelv környezetfüggetlen, nem helyes. ∎

4.1 következmény: Érvényes, hogy $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1$.

Bizonyítás: (ellentmondással)

Az **5.11 példá**ban az $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ nyelvről a pumpáló lemma segítségével bebizonyítottuk, hogy nem környezetfüggetlen, azaz nincs benne az $\mathcal{L}_2$ nyelvosztályban.

Az $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1$ valódi tartalmazás igazolásához elegendő megadni egy olyan környezetfüggő nyelvtant, amely az L nyelvet generálja.

Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$, ahol $N = \{S, A, B, B_1, B_2, C, C_1, C_2\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ és a P szabályhalmaz elemei:

$$
\begin{array}{llll}
P: & S \longrightarrow SC_1 \mid AC_1 & B_1B \longrightarrow B_1B_2 & C_2C \longrightarrow C_1C \\
 & A \longrightarrow aB_1 \mid aAB_1 & B_1B_2 \longrightarrow BB_2 & B \longrightarrow b \\
 & B_1C_1 \longrightarrow B_1C_3 & BB_2 \longrightarrow BB_1 & C \longrightarrow c. \\
 & B_1C_3 \longrightarrow BC_3 & CC_1 \longrightarrow C_2C_1 & \\
 & BC_3 \longrightarrow BC & C_2C_1 \longrightarrow C_2C &
\end{array}
$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a $G = (N, \Sigma, P, S)$ nyelvtan környezetfüggő és éppen az L nyelvet generálja. ■