Matematika informatikusoknak 2 – Differenciálszámítás

halmazok: A, B, ..., X, Y

$\mathbb{R}$ - valós számok halmaza
$\mathbb{Q}$ - racionális számok $\{\frac{a}{b} : \ a, b$ egészek és $b \neq 0\}$
$\mathbb{Z}$ - egész
$\mathbb{N}$ - természetes számok

halmazok: A, B, ..., X, Y

$\mathbb{R}$ - valós számok halmaza
$\mathbb{Q}$ - racionális számok $\{\frac{a}{b} : \ a, b \ \text{ egészek és } b \neq 0\}$
$\mathbb{Z}$ - egész
$\mathbb{N}$ - természetes számok

$x \in A$ – x eleme az A halmaznak

$t \notin B$ – t nem eleme a B halmaznak

Definíció. Legyenek az A, B tetszőleges halmazok.
Ha minden $x \in A$ elemhez valamilyen módon hozzá van rendelve pontosan egy $y \in B$ elem, ezt a hozzárendelést A-n értelmezett függvénynek nevezzük.

$f : A \to B$

$y = f(x)$

Definíció. Legyenek az $A,\ B$ tetszőleges halmazok.
Ha minden $x \in A$ elemhez valamilyen módon hozzá van rendelve pontosan egy $y \in B$ elem, ezt a hozzárendelést A-n értelmezett függvénynek nevezzük.

$f : A \to B$

$y = f(x)$
A értelmezési tartomány

$f(A) = \{y \in B : f(x) = y,\ x \in A\}$ értékkészlet

Definíció. Az $f : A \to B$ függvény *injektív*, ha az A tetszőleges $a, \; c$ elemeire $a \neq c$ esetben

$$f(a) \neq f(c).$$

Definíció. Az $f : A \to B$ függvény *injektív*, ha az A tetszőleges $a, \ c$ elemeire $a \neq c$ esetben

$$f(a) \neq f(c).$$

Definíció. Az $f : A \to B$ függvény *szürjektív*, ha minden $b \in B$ elemhez létezik olyan $a \in A$, hogy $f(a) = b$.

Definíció. Az $f : A \to B$ függvény *injektív*, ha az A tetszőleges $a, \ c$ elemeire $a \neq c$ esetben

$$f(a) \neq f(c).$$

Definíció. Az $f : A \to B$ függvény *szürjektív*, ha minden $b \in B$ elemhez létezik olyan $a \in A$, hogy $f(a) = b$.

Definíció. Az $f : A \to B$ függvény *bijektív*, ha injektív is és szürjektív is.

Definíció. Legyen $f : A \to B$ és $g : B \to C$.
Az $F : A \to C$ az f és g összetett függvénye, ha

$$F(a) = g(f(a))$$

az A halmaz minden a elemére.

Definíció. Legyen $f : A \to B$ bijektív függvény.
Az $f^{-1} : B \to A$ az f *inverz függvénye*, ha a B minden b elemére

$$f^{-1}(b) = a \quad \text{ahol} \quad f(a) = b.$$

Definíció. Legyen $f : A \to B$ bijektív függvény.
Az $f^{-1} : B \to A$ az f *inverz függvénye*, ha a B minden b elemére

$$f^{-1}(b) = a \quad \text{ahol} \quad f(a) = b.$$

Ebben az esetben

$$f(f^{-1}(b)) = b \quad \text{a} \quad B \quad \text{összes} \quad b \quad \text{elemére}$$

$$f^{-1}(f(a)) = a \quad \text{az} \quad A \quad \text{összes} \quad a \quad \text{elemére.}$$

Valós számok axiómái, I. Testaxiómák

Az első axiómacsoport ismertetéséhez további alapfogalmakra van szükség. A valós számok halmazát $\mathbb{R}$-rel fogjuk jelölni. Feltesszük, hogy a valós számok körében értelmezve van két művelet, melyeket összeadásnak, illetve szorzásnak nevezünk. Ezen azt értjük, hogy bármely két (nem feltétlenül különböző) $a, b \in \mathbb{R}$ valós számhoz hozzá van rendelve egy $a + b$-vel jelölt valós szám (a és b összege), valamint egy $a.b$-vel jelölt valós szám (a és b szorzata). Feltesszük továbbá, hogy ki van jelölve két valós szám, 0 és 1, amelyek különbözőek. Ezekre a fogalmakra vonatkozik az első axiómacsoport.

Valós számok axiómái, I. Testaxiómák

1. Az összeadás kommutativitása: $a + b = b + a$ minden $a, b \in \mathbb{R}$-re.
2. Az összeadás asszociativitása: $(a + b) + c = a + (b + c)$ minden $a, b, c \in \mathbb{R}$-re.
3. $a + 0 = a$ minden $a \in \mathbb{R}$-re.
4. Minden $a \in \mathbb{R}$-hez létezik olyan $b \in \mathbb{R}$, amelyre $a + b = 0$.
5. A szorzás kommutativitása: $a.b = b.a$ minden $a, b \in \mathbb{R}$-re.
6. A szorzás asszociativitása: $(a.b).c = a.(b.c)$ minden minden $a, b, c \in \mathbb{R}$-re.
7. $a.1 = a$ minden $a \in \mathbb{R}$-re.
8. Minden $a \neq 0$ valós számhoz létezik olyan $b \in \mathbb{R}$, amelyre $a.b = 1$.
9. Disztributivitás: $a.(b + c) = a.b + a.c$ minden $a, b, c \in \mathbb{R}$-re.

Ha egy halmazon értelmezve van két művelet, amelyek kielégítik a fenti kilenc axiómát, akkor azt mondjuk, hogy a halmaz az adott műveletekkel testet alkot. (A feltételekbe azt is beleértjük, hogy a halmaznak ki van jelölve két különböző, 0-val és 1-gyel jelölt eleme.)

Valós számok axiómái, II. Rendezési axiómák

A második axiómacsoport ismertetéséhez szükségünk van még egy alapfogalomra. Feltesszük, hogy a valós számok halmazán adott egy $<$ (kisebb) jellel jelölt, ún. rendezési reláció. Ezen azt értjük, hogy bármely két a és b valós számra az $a < b$ állítás vagy igaz, vagy hamis. (Ezt úgy is megfogalmazhatnánk, hogy adott egy leképezés, amely minden, valós számokból álló rendezett párhoz hozzárendeli az „igaz" és „hamis" logikai értékek valamelyikét. Ha az (a,b) párhoz az „igaz" értéket rendeljük hozzá, akkor ezt úgy jelöljük, hogy $a < b$.).

10. Trichotómia: Bármely $a, b \in \mathbb{R}$-re az $a < b$, $a = b$, $b < a$ állítások közül pontosan egy igaz.
11. Tranzitivitás: Bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$-re, ha $a < b$ és $b < c$, akkor $a < c$.
12. Bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$-re, ha $a < b$, akkor $a + c < b + c$.
13. Bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$-re, ha $a < b$ és $0 < c$, akkor $a.c < b.c$.

Valós számok axiómái, III. Az arkhimédészi axióma

14. Tetszőleges b pozitív számhoz található b-nél nagyobb n természetes szám.

Az utolsó axióma kimondásához szükség van néhány elnevezésre, illetve jelölésre. Legyen $a < b$. Azon x számok összességét, amelyekre $a \leq x \leq b$ teljesül, $[a, b]$-vel jelöljük és zárt intervallumnak nevezzük. Azon x számok összességét, amelyekre $a < x < b$ teljesül, (a, b)-vel jelöljük és nyílt intervallumnak nevezzük.

Legyen minden n természetes számhoz hozzárendelve egy $I_n = [a_n, b_n]$ zárt intervallum. Az $I_1,\ I_2, \dots$ intervallumsorozatot egymásba skatulyázott zárt intervallumsorozatnak nevezzük, ha

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots; \quad \text{azaz, ha} \quad a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$$

teljesül minden n-re.

Valós számok axiómái, Cantor-axióma

15. Minden egymásba skatulyázott $I_1, \ I_2, \ldots$ zárt intervallumsorozatnak van közös eleme, azaz van olyan x valós szám, hogy $x \in I_n$ minden n-re.

Intervallumok

Definíció. Az $M \subset \mathbb{R}$ halmazról akkor mondjuk. hogy intervallum, ha teljesül

1. van legalább 2 különböző eleme,
2. ha $x, y \in M$ és $x < y$, akkor minden olyan t-re, melyre $x < t < y$, érvényes lesz hogy $t \in M$.

Intervallumok

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

Intervallumok

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

$$(-\infty, c) = \{x \in \mathbb{R} : x < c\}$$
$$(-\infty, c] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq c\}$$
$$(d, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > d\}$$
$$[d, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq d\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

Intervallumok

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

$$(-\infty, c) = \{x \in \mathbb{R} : x < c\}$$
$$(-\infty, c] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq c\}$$
$$(d, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > d\}$$
$$[d, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq d\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

$$[a, a] = a, \qquad (a, a) = (a, a] = [a, a) = \emptyset$$

Tétel.
a) minden I intervallum tartalmaz racionális számot
b) minden I intervallum tartalmaz irracionális számot.

Bizonyítás. Feltételezzük, hogy $I = (a, b)$, ahol $0 < a < b$.
Mivel
$$n > \frac{1}{b-a}$$
ezért
$$\frac{1}{n} < b - a.$$
Tehát létezik olyan m egész szám az $a.n$ és $b.n$ között, hogy
$$a.n < m < b.n$$
és ebből
$$a < \frac{m}{n} < b$$
következik.

b) Az a) szerint az

$$(a - \sqrt{2}, b - \sqrt{2})$$

tartalmaz racionális számot, melyet megjelölünk s-el. Akkor

$$a - \sqrt{2} < s < b - \sqrt{2}$$

s ebből

$$a < s + \sqrt{2} < b$$

következik (az $s + \sqrt{2}$ az irracionális szám).

A tétel azt állítja, hogy a racionális számok is és az irracionális számok is az $\mathbb{R}$-en "sűrűn" helyezkednek el.