Czirók Emese

Sorozatok összefoglalás

Definíció: A sorozat a (pozitív) természetes számokon értelmezett függvény. Az $a_1; a_2; a_3; \dots a_k \dots$ sorozatot a_n-nel jelöljük.

Def: Egy sorozat **korlátos**, ha létezik K, hogy a sorozat minden elemére ($n \in \mathbf{N}$), $|a_n| \leq K$.
Def: Egy sorozat **monoton nő**, ha minden $n \in \mathbf{N}$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$. Szigorú monotonitás esetén az egyenlőség sincs megengedve.
Def: Egy sorozat **monoton csökken**, ha minden $n \in \mathbf{N}$ esetén $a_n \geq a_{n+1}$. Szigorú monotonitás esetén az egyenlőség sincs megengedve.

Műveletek sorozatokkal:

$$\lambda(a_n) \coloneqq (\lambda a_n) \quad (a_n) + (b_n) := (a_n + b_n) \quad (a_n)(b_n) \coloneqq (a_n \cdot b_n) \quad \text{ha } b_n \neq 0, \frac{(a_n)}{(b_n)} \coloneqq \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

Sorozat határértéke:

Def: Azt mondjuk, hogy egy a_n sorozat **konvergens**, ha létezik egy olyan A valós szám, melyre teljesül, hogy bármely $\varepsilon > 0$ hibakorlát esetén található olyan $N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy minden $n > N(\varepsilon)$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$. Azt mondjuk, hogy A a sorozat határértéke, jelöléssel: $\lim a_n = A$.
Def: Ha a_n divergens, de bármely K valós számhoz találhatunk olyan $N(K)$ küszöbindexet, hogy bármely $n > N(K)$ esetén $a_n > K$, akkor azt mondjuk, hogy **a sorozat határértéke** ∞**.** Jelöléssel: $\lim a_n = \infty$. (ettől még divergens!!!) Hasonlóan lehet $-\infty$ határértéket definiálni.
Tétel: A határérték egyértelmű.
Tétel: Ha $\lim a_n = A$ és $\lim b_n = B$, akkor $\lim(a_n \pm b_n) = A \pm B$.
Ha $\lim a_n = A$, akkor $\lim c \cdot a_n = c\, A$.
Ha $\lim a_n = 0$ és $\lim b_n = 0$, akkor $\lim a_n b_n = 0$
Ha $\lim a_n = A$ és $\lim b_n = B$, akkor $\lim a_n b_n = AB$
Ha $\lim a_n = 0$ és $\mathrm{b_n}$ korlátos akkor $\lim a_n b_n = 0$
Ha $\lim a_n = A$, akkor $\lim |a_n| = |A|$
Ha $\lim b_n = B \neq 0$, akkor $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}$
Ha $\lim b_n = B \neq 0$ és $\lim a_n = A$, akkor $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$
Ha $a_n \geq 0$ és $\lim a_n = A \geq 0$, akkor $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$
Ha $\lim a_n = \infty$, akkor $\lim \frac{1}{a_n} = 0$
Ha $\lim a_n = 0$, akkor $\lim \frac{1}{|a_n|} = \infty$
Tétel: Ha $a_n\ b_n$ olyanok, hogy minden n esetén $a_n \leq b_n$, akkor $\lim a_n \leq \lim b_n$.
Tétel: (rendőrelv/szendvics szabály, stb…) Ha a_n, b_n és c_n olyanok, hogy minden n esetén $a_n \leq b_n \leq c_n$, továbbá tudjuk, hogy $\lim a_n = \lim c_n = A$, akkor $\lim b_n = A$ szintén.
Tétel: Ha a_n monoton és korlátos, akkor konvergens.
Tétel: (nevezetes határértékek)

$$\lim a^n = \begin{cases} 0, & ha\ |a| < 1 \\ 1, & ha\ a = 1 \\ \infty, & ha\ a > 1 \\ divergens\ egyébként \end{cases}$$

$$\lim n^k = \infty, \qquad \text{ha } k \geq 1$$

$$\lim \frac{1}{n} = 0, \quad \lim \frac{1}{n^k} = 0, \quad \text{ha } k \geq 1$$

$$\lim n^k a^n = 0, ha\ |a| < 1 és\ k \in \mathbf{N}$$

$$\lim \sqrt[n]{p} = 1, \qquad ha\, p > 0$$
$$\lim \sqrt[n]{n} = 1$$
$$\lim \frac{n^n}{n!} = \infty$$
$$\lim \frac{n!}{2^n} = \infty$$
$$\lim \frac{2^n}{n^k} = \infty \quad k \geq 1$$
$$\lim \frac{n^l}{n^{\frac{1}{k}}} = \infty \quad k, l \geq 1$$
$$\lim \frac{n^{\frac{1}{k}}}{\log n} = \infty$$
$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$
$$\lim \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha$$

Tehát a nagyságrendi sorrend:

$$n^n \gg n! \gg 2^n \gg n^k \gg n^{\frac{1}{k}} \gg \log n$$

Tétel: Ha $\lim a_n = A$ létezik, akkor a_n bármely részsorozata is A –hoz tart.
Tétel: Minden sorozatnak van monoton részsorozata.
Tétel: Korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.
Tétel: (Cauchy-féle konvergencia kritérium). Az a_n sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik egy $N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy minden $n, m > N(\varepsilon)$ esetén $|a_n - a_m| < \varepsilon$.
Def: Egy a_n számsorozat Cauchy-sorozat, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik egy $N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy minden $n, m > N(\varepsilon)$ esetén $|a_n - a_m| < \varepsilon$. (Vagyis egy sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.)

Sorozat torlódási pontjai:

Def: A $t \in \mathbf{R}$ vagy a $t = \pm\infty$ az a_n sorozat torlódási pontja, ha a t minden környezete a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza. (Tehát létezik az a_n sorozatnak egy részsorozata, amely t-hez tart.)
Tétel: Egy valós számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha egy valós szám az egyetlen torlódási pontja. ($\lim a_n = \infty$, ha $t = \infty$ az egyetlen torlódási pontja, $-\infty$ hasonlóan.)
Def: $S :=$ az a_n sorozat torlódási pontjainak halmaza.
Tétel: Ha a torlódási pontok halmaza korlátos, akkor van ezek közül legnagyobb, vagyis legnagyobb torlódási pont.

Def (limesz szuperior): $\limsup a_n = \overline{\lim}\, a_n := \begin{cases} legnagyobb\ torlódási\ pont, & ha\ S\ felülről\ korlátos \\ -\infty, & ha\ S = \emptyset\ vagy\ S = \{-\infty\} \\ \infty, & különben \end{cases}$

Def (limesz inferior): $\liminf a_n = \underline{\lim}\, a_n := \begin{cases} legkisebb\ torlódási\ pont, & ha\ S\ alulról\ korlátos \\ \infty, & ha\ S = \emptyset\ vagy\ S = \{\infty\} \\ -\infty, & különben \end{cases}$

Tétel: Ha a sorozatnak létezik határértéke, akkor $\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n = \lim a_n$.

Mintapéldák:

1. Számoljuk (definíció szerint) a határértéket!

   a. $a_n = \frac{n^3+3n}{n^2+2}$

   Megoldás:

   $\lim \frac{n^3+3n}{n^2+2} = \infty$, mivel

   $$\frac{n^3 + 3n}{n^2 + 2} \geq \frac{n^3}{n^2 + 2} \geq \frac{n^3}{n^2 + 2n^2} = \frac{n^3}{3n^2} = \frac{n}{3} > K \qquad \rightarrow \qquad n > 3K \qquad N(K) \geq [3K]$$

   Vagyis bármely K értékhez találtunk egy küszöbindexet $(3K)$ –t, hogy az annál nagyobb indexű tagok, már biztos nagyobbak, mint K. Eszerint $\lim a_n = \infty$.

b. $-n^2+3\sqrt{n}-9$

Megoldás:

$\lim -n^2+3\sqrt{n}-9=-\infty$, mivel

$$-n^2+3\sqrt{n}-9 \le -n^2+3\sqrt{n} \le^* -n^2+\frac{n^2}{2}=-\frac{n^2}{2}\le K \quad \to -n^2\le 2K \quad \to n\ge\sqrt{-2K}$$

A * egyenlőtlenség akkor igaz, ha $3\sqrt{n}<\frac{n}{2}$. Ezt könnyű belátni, hogy a 37. tagtól teljesül: $3\sqrt{n}<\frac{n}{2}\leftrightarrow 6<\frac{n}{\sqrt{n}}\leftrightarrow 6<\sqrt{n}\leftrightarrow 36<n$.

Tehát a fenti becslés működik, ha $n\ge 37$. Nézzük, tehát hogy K-hoz milyen $N(K)$ küszöbindex kell.

$$N(K)\ge\max\{37,[\sqrt{-2K}]\}$$

2. Adj meg egy megfelelő küszöbindexet!

a. $a_n=\frac{3n^2+4n+7}{n^2+n+1}\to 3,\quad N(\varepsilon)=?$

Megoldás:

Valaki megmondta, hogy a határérték 3. Tehát a határérték definíciója szerint minden ε-hoz van egy küszöbindex melyre:

$|a_n-A|\le\ \varepsilon$

$$\left|\frac{3n^2+4n+7}{n^2+n+1}-3\right|=\left|\frac{3n^2+4n+7}{n^2+n+1}-\frac{3n^2+3n+3}{n^2+n+1}\right|=\left|\frac{3n^2+4n+7-(3n^2+3n+3)}{n^2+n+1}\right|$$

$$=\left|\frac{n+4}{n^2+n+1}\right|=^*\frac{n+4}{n^2+n+1}\le\frac{n+4n}{n^2+n+1}\le\frac{5n}{n^2}\le\frac{5n}{n^2}\le\frac{5}{n}\le\ \varepsilon \qquad\to\qquad \frac{5}{\varepsilon}\le n$$

A * egyenlőség teljesül, hiszen minden $n\in\mathbf{N}$ esetén mind a számláló, mind a nevező pozitív.

Tehát az $\left[\frac{5}{\varepsilon}\right]$ épp jó küszöbindex lesz. Tehát $N(\varepsilon)\ge\left[\frac{5}{\varepsilon}\right]$.

b. $a_n=\frac{10^9-n^3}{4n^5+3n^3-6n}\to 0,\qquad N(\varepsilon)=?$

Megoldás:

Megint valaki „megsúgta", hogy mi a határérték. Tehát a definíció alapján:

$|a_n-A|\le\varepsilon$

$$\left|\frac{10^9-n^3}{4n^5+3n^3-6n}-0\right|=\left|\frac{10^9-n^3}{4n^5+3n^3-6n}\right|=^*\frac{n^3-10^9}{4n^5+3n^3-6n}\le\frac{n^3}{4n^5+3n^3-6n}\le\frac{n^3}{4n^5}\le\frac{1}{4n^2}\le\ \varepsilon$$

$$\to\ \frac{1}{4\varepsilon}\le n^2\quad\to\quad\sqrt{\frac{1}{4\varepsilon}}\le n$$

A * teljesül abban az esetben, ha $10^9<n^3$ azaz ha $10^3<n$, hiszen ebben az esetben a számláló negatív, a nevező pozitív. Vigyázzunk arra, hogy a küszöbindex legalább ekkora legyen.

Tehát a küszöbindexnek épp megfelel a $\sqrt{\frac{1}{4\varepsilon}}$ és a 10^3 közül a nagyobbik.

Tehát: $N(\varepsilon)\ge\max\left\{\sqrt[5]{\frac{10^9}{4\varepsilon}},10^3\right\}$.

3. Adjuk meg a határértéket!

a. $\lim\frac{2n^4+3n+6}{3n^4-8n^2+5n}=?$

Megoldás:

$\frac{polinom}{polinom}$ típusú sorozat határértékének vizsgálatakor mindig egyszerűsítsünk a legnagyobb kitevőjű n hatvánnyal!

Ez ebben az esetben n^4

$$\lim\frac{2n^4+3n+6}{3n^4-8n^2+5n}=\lim\frac{2\frac{n^4}{n^4}+3\frac{n}{n^4}+6\frac{1}{n^4}}{3\frac{n^4}{n^4}-8\frac{n^2}{n^4}+5\frac{n}{n^4}}=\lim\frac{2+3\frac{1}{n^3}+6\frac{1}{n^4}}{3+8\frac{1}{n^2}+5\frac{1}{n^3}}=\frac{2+3\cdot 0+6\cdot 0}{3+8\cdot 0+5\cdot 0}=\frac{2}{3}$$

Az utolsó előtti lépésben kihasználtuk, hogy $\frac{1}{n^k}\to 0$, ha $k\geq 1$. Szintén kihasználjuk, hogy a határértékek ha léteznek, akkor összeadódnak.

b. $\lim\frac{n^2+8n-3}{5n^5+3n^3+1}=?$

Megoldás:

Ismét egyszerűsítsünk a legnagyobb kitevőjű n hatvánnyal, ez most n^5.

$$\lim\frac{n^2+8n-3}{5n^5+3n^3+1}=\lim\frac{\frac{n^2}{n^5}+8\frac{n}{n^5}-3\frac{1}{n^5}}{5\frac{n^5}{n^5}+3\frac{n^3}{n^5}+1\frac{1}{n^5}}=\lim\frac{\frac{1}{n^3}+8\frac{1}{n^4}-3\frac{1}{n^5}}{5+3\frac{1}{n^2}+1\frac{1}{n^5}}=\frac{0+8\cdot 0-3\cdot 0}{5+3\cdot 0+0}=0$$

Felhasználtuk, hogy $\frac{1}{n^k}\to 0$, ha $k\geq 1$, hogy a határértékek ha léteznek, akkor összeadódnak.

c. $\lim\frac{n^4+8n^2-1}{n^2+2n+3}=?$

Megoldás:

Ismét egyszerűsíthetünk a legnagyobb kitevővel, ami jelen esetben n^4.

$$\lim\frac{n^4+8n^2-1}{n^2+2n+3}=\lim\frac{\frac{n^4}{n^4}+8\frac{n^2}{n^4}-1\frac{1}{n^4}}{\frac{n^2}{n^4}+2\frac{n}{n^4}+3\frac{1}{n^4}}=\lim\frac{1+8\frac{1}{n^2}-1\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^2}+2\frac{1}{n^3}+3\frac{1}{n^4}}=\frac{1+8\cdot 0-1\cdot 0}{0+2\cdot 0+3\cdot 0}=\frac{1}{0}=\infty$$

Felhasználtuk, hogy $\frac{1}{n^k}\to 0$, ha $k\geq 1$, hogy a határértékek ha léteznek, akkor összeadódnak.

Figyelni kell, hogy az $\frac{1}{0}$ határérték nem automatikusan ∞!!! Onnan tudjuk, hogy $+\infty$ (és nem $-\infty$), hogy minden $n\in\mathbf{N}$ esetén mind a számláló, mind a nevező pozitív, így a tört értéke is pozitív!

d. $\lim\frac{-n^5+6n^2+1}{n^3-2n+5}=?$

Megoldás:

Ismét egyszerűsíthetünk a legnagyobb kitevővel, ami jelen esetben n^5.

$$\lim\frac{-n^5+6n^2+1}{n^3-2n+5}=\lim\frac{\frac{-n^5}{n^5}+6\frac{n^2}{n^5}+1\frac{1}{n^5}}{\frac{n^3}{n^5}-2\frac{n}{n^5}+5\frac{1}{n^5}}=\lim\frac{-1+6\frac{1}{n^3}+1\frac{1}{n^5}}{\frac{1}{n^2}-2\frac{1}{n^4}+5\frac{1}{n^5}}=\frac{-1+6\cdot 0+1\cdot 0}{0-2\cdot 0+5\cdot 0}=\frac{-1}{0}=-\infty$$

Felhasználtuk, hogy $\frac{1}{n^k}\to 0$, ha $k\geq 1$, hogy a határértékek ha léteznek, akkor összeadódnak.

Figyelni kell, hogy az $\frac{1}{0}$ határérték nem automatikusan ∞!!! Onnan tudjuk, hogy itt $-\infty$ hogy „elég nagy” $n\in\mathbf{N}$ esetén (az elég nagy jelen esetben akkora, hogy $n^5>6n^2+1$, vagyis ha $n>2$) a számláló negatív, míg a nevező pozitív, így a tört értéke is a második tagtól kezdve mindig negatív!

e. $\lim\frac{n^{\frac{2}{3}}-3\sqrt{2n}+1}{n^2+n^{\sqrt{3}}}=?$

Megoldás:

Ha jobban megnézzük, akkor ebben a kifejezésben is csak n hatványok, szerepelnek, mind a nevezőben, mind a számlálóban. Itt is a legnagyobb kitevőjű n hatvánnyal érdemes egyszerűsíteni. Ahhoz, hogy könnyen látsszon, hogy melyik is ez érdemes mindent valóban n hatványként felírni!

$$\lim \frac{n^{\frac{2}{3}} - 3\sqrt{2n} + 1}{n^5 + n^{\sqrt{3}}} = \lim \frac{n^{\frac{2}{3}} - 3\sqrt{2}n^{\frac{1}{2}} + 1}{n^2 + n^{\sqrt{3}}} = \lim \frac{\frac{n^{\frac{2}{3}}}{n^2} - 3\sqrt{2}\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2} + 1\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{n^{\sqrt{3}}}{n^2}} = \lim \frac{\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}} - 3\sqrt{2}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + 1\frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^{2-\sqrt{3}}}}$$

$$= \frac{0 - 3\sqrt{2}\cdot 0 + 0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$$

Felhasználtuk, hogy $\frac{1}{n^k} \to 0$, ha $k \geq 1$, hogy a határértékek ha léteznek, akkor összeadódnak.

f. $\lim \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}} = ?$

Megoldás:

A $\frac{faktoriális}{faktoriális}$ típusú határértékektől nem szabad megijedni, a faktoriálisak egyszerűsítése után gyakran egyszerű $\frac{polinom}{polinom}$ típusú kifejezések maradnak. Ugyanez vonatkozik az $\binom{n}{k}$ –t tartalmazó kifejezésekre.

$$\lim \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}} = \lim \frac{\frac{n!}{(n-2)!\,2!}}{\frac{n!}{(n-3)!\,3!}} = \lim \left(\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!} : \frac{n!}{(n-3)!\cdot 3!}\right) = \lim \left(\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!} \cdot \frac{(n-3)!\cdot 3!}{n!}\right)$$

$$= \lim \frac{(n-3)!\cdot 3!}{(n-2)!\cdot 2!} = \lim \frac{3!\cdot (n-3)\cdot(n-4)\cdot\dots\cdot 1}{2!\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot\dots\cdot 1} = \lim \frac{3!}{2!\,(n-2)} =$$

$$\lim \frac{6}{2(n-2)} = \lim \frac{6}{2n-2} = \lim \frac{6\frac{1}{n}}{2\frac{n}{n} - 2\frac{1}{n}} = \frac{0}{2-2\cdot 0} = \frac{0}{2} = 0$$

Felhasználtuk, hogy $\frac{1}{n^k} \to 0$, ha $k \geq 1$, hogy a határértékek ha léteznek, akkor összeadódnak.

4. Számoljuk ki a következő határértékeket!

a. $\lim \sqrt{9n^2+7} - \sqrt{9n^2+2n+5} = ?$

Megoldás:

A „$\infty - \infty$” típusú határértékekre nem tanultunk tételeket, ennek értéke bármi lehet. Így „ügyeskednünk” kell.

$a - b$ („$\infty - \infty$”) típusú kifejezéseket megszorozhatjuk $\frac{a+b}{a+b}$ –vel, így a határértékük általában könnyebben kiszámítható.

$$\lim \sqrt{9n^2+7} - \sqrt{9n^2+2n+5} = \lim \left(\sqrt{9n^2+7} - \sqrt{9n^2+2n+5}\right) \cdot \frac{\sqrt{9n^2+7} + \sqrt{9n^2+2n+5}}{\sqrt{9n^2+7} + \sqrt{9n^2+2n+5}}$$

$$= \lim \frac{(9n^2+7) - (9n^2+2n+5)}{\sqrt{9n^2+7} + \sqrt{9n^2+2n+5}} = \lim \frac{-2n+2}{\sqrt{9n^2+7} + \sqrt{9n^2+2n+5}}$$

Megint egyszerűsítenünk kellene a legnagyobb n hatvánnyal. Vegyük észre, hogy a számlálóban ez n^1, míg a nevezőben ez $\sim \sqrt{n^2} = n$ szintén. Tehát egyszerűsítsünk n-nel.

$$\lim \frac{-2n+2}{\sqrt{9n^2+7} + \sqrt{9n^2+2n+5}} = \lim \frac{-2\frac{n}{n} + 2\frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{9n^2+7}}{n} + \frac{\sqrt{9n^2+2n+5}}{n}}$$

$$= \lim \frac{-2 + 2\frac{1}{n}}{\sqrt{9\frac{n^2}{n^2} + 7\frac{1}{n^2}} + \sqrt{9\frac{n^2}{n^2} + 2\frac{n}{n^2} + 5\frac{1}{n^2}}} = \lim \frac{-2 + 2\frac{1}{n}}{\sqrt{9 + 7\frac{1}{n^2}} + \sqrt{9 + 2\frac{1}{n} + 5\frac{1}{n^2}}} =$$

$$= \frac{-2 + 2\cdot 0}{\sqrt{9+7\cdot 0} + \sqrt{9 + 2\cdot 0 + 5\cdot 0}} = \frac{-2}{3+3} = -\frac{1}{3}$$

Felhasználtuk, hogy $\frac{1}{n^k} \to 0$, ha $k \geq 1$, hogy a határértékek ha léteznek, akkor összeadódnak, illetve, hogy ha létezik a határérték, akkor $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim a_n}$.

b. $\lim \sqrt{4n^4 + n - 2} - 2n^2 = ?$

Megoldás:

Bármilyen más $a - b$ típusú határértékkel is eljárhatunk ugyanúgy: szorozzuk meg $\frac{a+b}{a+b}$-vel

$$\lim \sqrt{4n^4 + n - 2} - 2n^2 = \lim \left(\sqrt{4n^4 + n - 2} - 2n^2\right) \cdot \frac{\sqrt{4n^4 + n - 2} + 2n^2}{\sqrt{4n^4 + n - 2} + 2n^2}$$
$$= \lim \frac{(4n^4 + n - 2) - (4n^4)}{\sqrt{4n^4 + n - 2} + 2n^2} = \lim \frac{n - 2}{\sqrt{4n^4 + n - 2} + 2n^2}$$

A számlálóban a legnagyobb kitevő egyértelműen az n, míg a nevezőben $\sim \sqrt{n^4} = n^2$
Tehát ezzel egyszerűsítsük a törtünket.

$$\lim \frac{n - 2}{\sqrt{4n^4 + n - 2} + 2n^2} = \lim \frac{\frac{n}{n^2} - 2\frac{1}{n^2}}{\frac{\sqrt{4n^4 + n - 2}}{n^2} + \frac{2n^2}{n^2}} = \lim \frac{\frac{1}{n} - 2\frac{1}{n^2}}{\sqrt{4\frac{n^4}{n^4} + \frac{n}{n^4} - 2\frac{1}{n^4}} + 2}$$
$$= \frac{0 - 2 \cdot 0}{\sqrt{4 + 0 - 2 \cdot 0} + 2} = \frac{0}{4} = 0$$

Közben felhasználtuk, hogy $\frac{1}{n^k} \to 0$, ha $k \geq 1$, hogy a határértékek ha léteznek, akkor összeadódnak, illetve, hogy ha létezik a határérték, akkor $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim a_n}$.

c. $\lim \frac{1}{n - \sqrt{n^2 + n + 5}} = ?$

Megoldás:

A probléma ugyanaz, mint eddig, a $\infty - \infty$ határértékkel nem tudunk mit kezdeni a nevezőben sem. Ekkor szintén bővíthetünk a két tag összegével.

$$\lim \frac{1}{n - \sqrt{n^2 + n + 5}} = \lim \frac{1}{n - \sqrt{n^2 + n + 5}} \cdot \frac{n + \sqrt{n^2 + n + 5}}{n + \sqrt{n^2 + n + 5}} = \lim \frac{n + \sqrt{n^2 + n + 5}}{n^2 - (n^2 + n + 5)}$$
$$= \lim \frac{n + \sqrt{n^2 + n + 5}}{-n - 5} = \lim \frac{\frac{n}{n} + \frac{\sqrt{n^2 + n + 5}}{n}}{\frac{-n}{n} - 5\frac{1}{n}} = \lim \frac{1 + \sqrt{\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2} + 5\frac{1}{n^2}}}{-1 - 5\frac{1}{n}}$$
$$= \lim \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n} + 5\frac{1}{n^2}}}{-1 - 5\frac{1}{n}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 0 + 5 \cdot 0}}{-1 - 5 \cdot 0} = \frac{2}{-1} = -2$$

5. Számoljuk ki a következő határértékeket!

a. $\lim \frac{5^{n+2} + (-1)^n}{5^n} = ?$

Megoldás:

A csak exponenciális tagokat tartalmazó törtkifejezések miden tagját alakítsuk $k \cdot a^n$ alakra (de legalábbis ugyanolyan kitevőkre), majd egyszerűsítsük a(z abszolút értékben) legnagyobb alapú taggal. Ez után tudjuk használni az a^n határértékére vonatkozó tételt.

A legnagyobb alapú tag jelen estben 5^n.

$$\lim \frac{5^{n+2}+(-1)^2}{5^n}=\lim \frac{5^n\cdot 5^2+(-1)^n}{5^n}=\lim \frac{25\cdot\frac{5^n}{5^n}+\frac{(-1)^n}{5^n}}{\frac{5^n}{5^n}}=\lim \frac{25\cdot\left(\frac{5}{5}\right)^n+\left(\frac{-1}{5}\right)^n}{\left(\frac{5}{5}\right)^n}$$

$$=\frac{25\cdot 1+0}{1}=25$$

Felhasználtuk, hogy ha létezik, akkor a határértékek összeadódnak, illetve hogy $a^n\to 0$, ha $|a|<1$.

b. $\lim \frac{8^{n-1}+3^{n+3}}{2^{n+3}\cdot 3^n}=?$

Megoldás:

$$\lim \frac{8^{n-1}+3^{n+3}}{2^{n+3}\cdot 3^n}=\lim \frac{8^n\cdot 8^{-1}+3^n\cdot 3^3}{2^3\cdot 2^n\cdot 3^n}=\lim \frac{\frac{1}{8}\cdot 8^n+27\cdot 3^n}{8\cdot(2\cdot 3)^n}=\lim \frac{\frac{1}{8}\cdot 8^n+27\cdot 3^n}{8\cdot 6^n}$$

Ebből az alakból már könnyen látszik, hogy a legnagyobb alapú tag a 8^n.

$$\lim \frac{\frac{1}{8}\cdot 8^n+27\cdot 3^n}{8\cdot 6^n}=\lim \frac{\frac{1}{8}\cdot\frac{8^n}{8^n}+27\cdot\frac{3^n}{8^n}}{8\cdot\frac{6^n}{8^n}}=\lim \frac{\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{8}{8}\right)^n+27\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^n}{8\cdot\left(\frac{6}{8}\right)^n}=\frac{\frac{1}{8}\cdot 1+27\cdot 0}{8\cdot 0}=\frac{\frac{1}{8}}{0}=\infty$$

A határérték azért lett ∞ (és nem $-\infty$), mert bármilyen $n\in\mathbf{N}$ esetén mind a nevező, mind a számláló pozitív, így a tört értéke is minden esetben pozitív.

Felhasználtuk továbbá, hogy ha létezik, akkor a határértékek összeadódnak, illetve hogy $a^n\to 0$, ha $|a|<1$.

c. $\lim \frac{3^{2n+1}+2^{n+2}}{2^{n+2}\cdot 5^{n+1}}=?$

Megoldás:

$$\lim \frac{3^{2n+1}+2^{n+2}}{2^{n+2}\cdot 5^{n+1}}=\lim \frac{3\cdot 3^{2n}+2^2\cdot 2^n}{2^2\cdot 2^n\cdot 5\cdot 5^n}=\lim \frac{3\cdot(3^2)^n+4\cdot 2^n}{4\cdot 2^n\cdot 5\cdot 5^n}=\lim \frac{3\cdot 9^n+4\cdot 2^n}{20\cdot 2^n\cdot 5^n}$$

$$=\lim \frac{3\cdot 9^n+4\cdot 2^n}{20\cdot(2\cdot 5)^n}=\lim \frac{3\cdot 9^n+4\cdot 2^n}{20\cdot(10)^n}$$

Innen már látszik, hogy a legnagyobb alapú tag a 10^n.

Tehát:

$$\lim \frac{3\cdot 9^n+4\cdot 2^n}{20\cdot(10)^n}=\lim \frac{3\cdot\frac{9^n}{10^n}+4\cdot\frac{2^n}{10^n}}{20\cdot\frac{10^n}{10^n}}=\lim \frac{3\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^n+4\cdot\left(\frac{2}{10}\right)^n}{20\cdot\left(\frac{10}{10}\right)^n}=\frac{3\cdot 0+4\cdot 0}{20\cdot 1}=\frac{0}{20}=0$$

6. Számoljuk ki az alábbi sorozatok határértékét!

a. $\lim \frac{n^3 2^n+3^n}{2^{2n}-3n^3}$

Megoldás:

A csak exponenciális és n hatvány tagokat tartalmazó törtkifejezések határértékének kiszámításakor alakítsuk az exponenciális tagokat azonos kitevőjűvé, majd egyszerűsítsünk a legnagyobb alapú exponenciális taggal. Ez után már használhatjuk, hogy $\frac{1}{n^k}\to 0$, ha $k>0$, hogy $n^k a^n\to 0$, ha $|a|<1$, illetve, hogy $a^n\to 0$ szintén ha $|a|<1$.

$$\lim \frac{n^3 2^n+3^n}{2^{2n}-3n^3}=\lim \frac{n^3 2^n+3^n}{2^{2^n}-3n^3}=\lim \frac{n^3 2^n+3^n}{4^n-3n^3}=\lim \frac{n^3\frac{2^n}{4^n}+\frac{3^n}{4^n}}{\frac{4^n}{4^n}-3n^3\frac{1}{4^n}}=\lim \frac{n^3\left(\frac{2}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1^n-3n^3\left(\frac{1}{4}\right)^n}=\frac{0+0}{1-0}=\frac{0}{1}=0$$

7. Adjuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

a. $\lim \sqrt[n]{2n^3+3}$

Megoldás:

Az $\sqrt[n]{n\ hatványok}$ típusú kifejezések határértékét általában rendőrelv felhasználásával tudjuk kiszámolni. Becsüljük a gyökjel alatti tagok mindegyikét a legkisebbel, illetve a legnagyobbal. Így egy alsó és felső becsléshez jutunk, melyek határértékét ki tudjuk számolni.

$$\sqrt[n]{3} \le \sqrt[n]{2n^3+3} \le \sqrt[n]{2n^3+3n^3} \le \sqrt[n]{5n^3} = \sqrt[n]{5}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^3$$

Használjuk, hogy $\lim \sqrt[n]{p} = 1$, ha $p > 0$, illetve $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Tehát

$$\lim \sqrt[n]{3} = 1 \le \lim \sqrt[n]{2n^3+3} \le \lim \sqrt[n]{5}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 = 1\cdot 1^3 = 1$$

Tehát a rendőrelv miatt $\lim \sqrt[n]{2n^3+3} = 1$.

b. $\lim \sqrt[n]{\frac{27n^2+7n-3}{8n^2-5n+9}}$

Ez a feladat tulajdonképpen hasonló az előzőhöz, hiszen két polinom hányadosa szintén egy polinom. Itt is a rendőr elvet alkalmazhatjuk. Ne felejtsük el, hogy ha a nevezőt csökkentjük, akkor a tört értéke nő, míg ha a nevezőt növeljük, a tört értéke csökken.

Olyan tételt nem tanultunk (mert nincs), hogy kiszámolhatjuk a gyök alatti rész határértékét, majd mivel az egy pozitív szám, ennek n-dik gyöke tart az 1-hez!!!

$$\sqrt[n]{\frac{27}{17}} \le \sqrt[n]{\frac{27n^2}{17n^2}} = \sqrt[n]{\frac{27n^2}{8n^2+9n^2}} \le \sqrt[n]{\frac{27n^2}{8n^2+9}} \le \sqrt[n]{\frac{27n^2}{8n^2-5n+9}} \le \sqrt[n]{\frac{27n^2+7n-3}{8n^2-5n+9}}$$

$$\le \sqrt[n]{\frac{27n^2+7n}{8n^2-5n+9}} \le \sqrt[n]{\frac{27n^2+7n^2}{8n^2-5n}} \le \sqrt[n]{\frac{27n^2+7n^2}{8n^2-5n^2}} = \sqrt[n]{\frac{34n^2}{3n^2}} = \sqrt[n]{\frac{34}{3}}$$

Használjuk, hogy $\lim \sqrt[n]{p} = 1$, ha $p > 0$, így a becslés mindkét „vége” 1-hez tart, így a kezdeti határérték is 1.

$$1 = \lim \sqrt[n]{\frac{27}{17}} \le \lim \sqrt[n]{\frac{27n^2}{8n^2-5n+9}} \le \lim \sqrt[n]{\frac{34}{3}} = 1 \quad \to \quad \lim \sqrt[n]{\frac{27n^2}{8n^2-5n+9}} = 1$$

8. Számoljuk ki az alábbi sorozat határértékét!

a. $\lim \frac{25n!+n^{25}}{25n^n}$

Megoldás:

Ha több nagyságrendű tag is szerepel a törtkifejezésben, akkor a nagyságrendi sorrendben legerősebbel egyszerűsítsünk, majd használjuk ki a nagyságrendeket összehasonlító tételeket. Ez jelen esetben a n^n.

$$\lim \frac{25n!+n^{25}}{25n^n} = \lim \frac{25\frac{n!}{n^n}+\frac{n^{25}}{n^n}}{25\frac{n^n}{n^n}} = \frac{25\cdot 0+0}{25} = \frac{0}{25} = 0$$

Kihasználtuk, hogy $\lim \frac{n!}{n^n} = \infty \to \lim \frac{n^n}{n!} = 0$ illetve, hogy $\lim \frac{n^{25}}{n^n} = \infty \to \lim \frac{n^n}{n^{25}} = 0$.

9. Adjuk meg a következő sorozatok határértékét!

a. $\lim\left(1-\frac{3}{n}\right)^n=?$

Megoldás:

$$\lim\left(1-\frac{3}{n}\right)^n=\lim\left(1+\frac{-3}{n}\right)^n=e^{-3}=\frac{1}{e^3}$$

Használjuk, hogy $\lim\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n=e^{\alpha}$.

b. $\lim\left(\frac{n+5}{n-2}\right)^n=?$

Megoldás:

Ha $\left(\frac{polinom}{polinom}\right)^{polinom}$ esetben, ha a három polinom ugyanolyan fokú, illetve a főegyütthatójuk egyenlő, akkor próbáljuk olyan alakba átalakítani, hogy az $\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$ egy részsorozatának a határértékét kelljen kiszámolnunk.

$$\lim\left(\frac{n+5}{n-2}\right)^n=\lim\left(\frac{n-2+7}{n-2}\right)^n=\lim\left(\frac{n-2}{n-2}+\frac{7}{n-2}\right)^n=\lim\left(1+\frac{7}{n-2}\right)^n$$

$$=\lim\left(1+\frac{7}{n-2}\right)^{n-2}\cdot\left(1+\frac{7}{n-2}\right)^2=\lim\left(1+\frac{7}{n-2}\right)^{n-2}\cdot\left(1+\frac{\frac{7}{n}}{\frac{n}{n}-\frac{2}{n}}\right)^2$$

Vegyük észre, hogy a $\lim\left(1+\frac{7}{n-2}\right)^{n-2}$ sorozat az $\left(1+\frac{7}{n}\right)^n$ sorozat részsorozata (hiszen csak kettővel elvannak tolva az elemei: az előbbi sorozat minden eleme egyenlő a második sorozat kettővel későbbi elemével), így nyilván a határértékük is megegyezik. A szorzat másik tényezőjének határértékét már korábban részletesen tárgyaltuk.

$$\lim\left(1+\frac{7}{n-2}\right)^{n-2}\cdot\left(1+\frac{\frac{7}{n}}{\frac{n}{n}-\frac{2}{n}}\right)^2=e^7\cdot\left(1+\frac{0}{1-0}\right)^2=e^7\cdot 1^2=e^7$$

c. $\lim\left(\frac{3n+5}{3n-4}\right)^{3n}=?$

Megoldás:

$$\lim\left(\frac{3n+5}{3n-4}\right)^{3n}=\lim\left(\frac{3n-4+9}{3n-4}\right)^{3n}=\lim\left(\frac{3n-4}{3n-4}+\frac{9}{3n-4}\right)^{3n}=\lim\left(1+\frac{9}{3n-4}\right)^{3n}$$

$$=\lim\left(1+\frac{9}{3n-4}\right)^{3n-4}\cdot\left(1+\frac{9}{3n-4}\right)^4$$

$$=\lim\left(1+\frac{9}{3n-4}\right)^{3n-4}\cdot\left(1+\frac{9\cdot\frac{1}{n}}{3\frac{n}{n}-4\cdot\frac{1}{n}}\right)^4$$

A $\lim\left(1+\frac{9}{3n-4}\right)^{3n-4}$ sorozat az $\left(1+\frac{9}{n}\right)^n$ sorozat részsorozata, így a határértékük is megegyezik.

$$\lim\left(1+\frac{9}{3n-4}\right)^{3n-4}\cdot\left(1+\frac{9\cdot\frac{1}{n}}{3\frac{n}{n}-4\cdot\frac{1}{n}}\right)^4=e^9\cdot\left(1+\frac{9\cdot 0}{3-4\cdot 0}\right)^4=e^9\cdot 1^4=e^9$$

Másik megoldás:

Egyszerűsítsük a törtet $3n$-nel!

$$\lim\left(\frac{3n+5}{3n-4}\right)^{3n}=\lim\left(\frac{\frac{3n}{3n}+\frac{5}{3n}}{\frac{3n}{3n}-\frac{4}{3n}}\right)^{3n}=\lim\frac{\left(1+\frac{5}{3n}\right)^{3n}}{\left(1-\frac{4}{3n}\right)^{3n}}=\lim\frac{\left(1+\frac{5}{3n}\right)^{3n}}{\left(1+\frac{-4}{3n}\right)^{3n}}$$

Mivel mind a számláló részsorozata az $\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n}$ sorozatnak, míg a nevező részsorozata az $\left(1+\frac{-4}{n}\right)^{n}$ sorozatnak.

$$\lim\frac{\left(1+\frac{5}{3n}\right)^{3n}}{\left(1+\frac{-4}{3n}\right)^{3n}}=\frac{e^5}{e^{-4}}=e^9$$

d. $\lim\left(\frac{n^2+3}{n^2+5}\right)^{n^2}=?$

Megoldás:

$$\lim\left(\frac{n^2+3}{n^2+5}\right)^{n^2}=\lim\left(\frac{n^2+5-2}{n^2+5}\right)^{n^2}=\lim\left(\frac{n^2+5}{n^2+5}-\frac{2}{n^2+5}\right)^{n^2}=\lim\left(1-\frac{2}{n^2+5}\right)^{n^2}$$

$$=\lim\left(1+\frac{-2}{n^2+5}\right)^{n^2}=\lim\left(1+\frac{-2}{n^2+5}\right)^{n^2+5}\cdot\left(1+\frac{-2}{n^2+5}\right)^{-5}$$

$$=\lim\left(1+\frac{-2}{n^2+5}\right)^{n^2+5}\cdot\left(1+\frac{-2\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+5\cdot\frac{1}{n^2}}\right)^{-5}=e^{-2}\cdot\left(1+\frac{-2\cdot 0}{1+5\cdot 0}\right)=e^{-2}\cdot 1$$

$$=e^{-2}$$

Másik megoldás:

$$\lim\left(\frac{n^2+3}{n^2+5}\right)^{n^2}=\lim\left(\frac{\frac{n^2}{n^2}+3\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+5\frac{1}{n^2}}\right)^{n^2}=\lim\left(\frac{1+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{5}{n^2}}\right)^{n^2}=\lim\frac{\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{5}{n^2}\right)^{n^2}}=\frac{e^3}{e^5}=e^{-2}$$

e. $\lim\left(\frac{2n+7}{2n+3}\right)^{2n+5}=?$

Megoldás

$$\lim\left(\frac{2n+7}{2n+3}\right)^{2n+5}=\lim\left(\frac{\frac{2n}{2n}+7\frac{1}{2n}}{\frac{2n}{2n}+3\frac{1}{2n}}\right)^{2n}\cdot\left(\frac{\frac{2n}{2n}+7\frac{1}{2n}}{\frac{2n}{2n}+3\frac{1}{2n}}\right)^{5}=\lim\frac{\left(1+\frac{7}{2n}\right)^{2n}}{\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{2n}}\cdot\left(\frac{1+7\frac{1}{2n}}{1+3\frac{1}{2n}}\right)^{5}$$

$$=\frac{e^7}{e^3}\cdot\left(\frac{1+7\cdot 0}{1+3\cdot 0}\right)^{5}=e^4$$

Máshogy:

$$\lim\left(\frac{2n+7}{2n+3}\right)^{2n+5}=\lim\left(\frac{2n+3+4}{2n+3}\right)^{2n+5}=\lim\left(\frac{2n+3}{2n+3}+\frac{4}{2n+3}\right)^{2n+5}$$

$$=\lim\left(1+\frac{4}{2n+3}\right)^{2n+3}\cdot\left(1+\frac{4}{2n+3}\right)^{2}$$

$$=\lim\left(1+\frac{4}{2n+3}\right)^{2n+3}\cdot\left(1+\frac{4\cdot\frac{1}{n}}{2\frac{n}{n}+3\cdot\frac{1}{n}}\right)^{2}=e^4\cdot\left(1+\frac{4\cdot 0}{2+3\cdot 0}\right)^{2}=e^4\cdot 1=e^4$$

f. $\lim\left(\frac{6n+1}{4n+5}\right)^n = ?$

Megoldás:

Mivel a nevező és számláló legnagyobb kitevőjű tagjának nem egyforma az együtthatója, így nem fogjuk tudni „könnyen” $1+\frac{1}{n}$ alakra hozni. Becsüljük tehát a kifejezést!

A jó becsléshez érdemes megsejteni, hogy mi lehet a határérték. Mivel $6n+1 > 4n+5$, így a tört értéke mindig egynél nagyobb, sőt egyre nagyobb, így az n- dik hatvány is egyre nagyobb lesz. Így sejtésünk legyen az, hogy a határérték végtelen. Így becsüljük a kifejezést alulról valamivel, aminek a határértékéről tudjuk, hogy végtelen. VISZONT a sejtés nem bizonyítás! A fenti fejtegetés sem bizonyítás, ezt precízen be kell látni!

$$\lim\left(\frac{6n+1}{4n+5}\right)^n \geq \lim\left(\frac{6n}{4n+5}\right)^n \geq^* \lim\left(\frac{6n}{4n+n}\right)^n \geq \lim\left(\frac{6n}{5n}\right)^n \geq \lim\left(\frac{6}{5}\right)^n = \infty$$

A * egyenlőtlenség azért teljesül, mert ha $n > 5$, akkor a nevező minden esetben nőtt, így a tört értéke csökkent. Vagyis a határérték legfeljebb akkora lehet, mint az előző.

Tehát: $\lim\left(\frac{6n+1}{4n+5}\right)^n \geq \infty \quad \to \quad \lim\left(\frac{6n+1}{4n+5}\right)^n = \infty$

g. $\lim\left(\frac{2n+2}{7n+3}\right)^n = ?$

Megoldás:

Az előbbi esettel ellentétben itt a nevező mindig nagyobb, mint a számláló, így a tört értéke mindig 1-nél kisebb. Így várhatóan nem lesz végtelen a határérték.

Emeljük ki a legnagyobb n hatványt a nevezőből, és a számlálóból is!

$$\lim\left(\frac{2n+2}{7n+3}\right)^n = \lim\frac{(2n+2)^n}{(7n+3)^n} = \lim\frac{(2n)^n\left(\frac{2n}{2n}+2\cdot\frac{1}{2n}\right)^n}{(7n)^n\left(\frac{7n}{7n}+3\cdot\frac{1}{7n}\right)^n} = \lim\frac{(2n)^n}{(7n)^n}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{3}{7n}\right)^n}$$

$$= \lim\left(\frac{2}{7}\right)^n\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{\frac{3}{7}}{n}\right)^n} = 0\cdot\frac{e}{e^{\frac{3}{7}}} = 0$$

h. $\lim\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n^2} = ?$

Megoldás:

Mivel a számlálóban levő n^2 és a zárójelben levő n nem azonos n hatványok, így nem fogjuk tudni az $\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$ sorozat egy részsorozataként felfogni. Megint becsülnünk kell!

$$\lim\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n^2} = \lim\left(\left(1+\frac{3}{n}\right)^n\right)^n \geq^* \lim(2^3)^n = \lim 2^n \geq \lim 2^n = \infty$$

A * egyenlőtlenséget úgy kaptuk, hogy $\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$ határértéke e^3, tehát a határérték definíciója miatt az $\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$ egy megfelelően nagy N küszöbindextől kezdve közelebb van az e^3-hoz, mint e^3-2^3.

Vagyis ettől a bizonyos N küszöbindextől kezdve az összes elem nagyobb, mint 2^3. (Ez egy elég erős becslés, hiszen e „jóval” nagyobb, mint 2, és $e^3 \sim 20{,}1$ és $2^3 = 8$ szintén nincsenek közel egymáshoz. De a becslés működik, tehát nekünk épp megfelel.)

10. Határozzuk meg a számsorozat torlódási pontjait! $\overline{\lim}\, a_n = ?, \underline{\lim}\, a_n = ?$

a. $a_n = 2^{(-1)^n \cdot n}$

Megoldás:

Ha páros, akkor $(-1)^n = 1$, ha páratlan, akkor pedig $(-1)^n = -1$.

Tehát, ha n páros (vagyis $n = 2k$), akkor $\lim a_n = 2^n = \infty$. Továbbá, ha n páratlan (vagyis , $n = 2k + 1$) akkor $\lim a_n = 2^{-n} = -\infty$.

Tehát: $S = \{-\infty, \infty\}$; $\overline{\lim}\, a_n = \infty$; $\underline{\lim}\, a_n = -\infty$.

b. $a_n = \frac{n^2 + n^2 \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{2n^2 + n + 7}$

Megoldás:

- Ha n páros, akkor $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Tehát:

$$\lim \frac{n^2 + n^2 \sin\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)}{2n^2 + n + 7} = \lim \frac{n^2}{2n^2 + n + 7} = \lim \frac{\frac{n^2}{n^2}}{2\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2} + 7 \cdot \frac{1}{n^2}} = \lim \frac{1}{2 \cdot 1 + \frac{1}{n} + 7 \cdot \frac{1}{n^2}}$$
$$= \frac{1}{2 + 0 + 7 \cdot 0} = \frac{1}{2}$$

- Ha n 4-gyel osztva 1 maradékot ad, akkor $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Tehát:

$$\lim \frac{n^2 + n^2 \sin\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)}{2n^2 + n + 7} = \lim \frac{n^2 + n^2}{2n^2 + n + 7} = \lim \frac{\frac{2n^2}{n^2}}{2\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2} + 7 \cdot \frac{1}{n^2}} = \lim \frac{2}{2 \cdot 1 + \frac{1}{n} + 7 \cdot \frac{1}{n^2}}$$
$$= \frac{2}{2 + 0 + 7 \cdot 0} = 1$$

- Ha pedig n 4-gyel osztva 3 maradékot ad, akkor $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = -1$. Tehát:

$$\lim \frac{n^2 + n^2 \sin\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)}{2n^2 + n + 7} = \lim \frac{n^2 - n^2}{2n^2 + n + 7} = \lim \frac{0}{2\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2} + 7 \cdot \frac{1}{n^2}} = \lim \frac{0}{2 \cdot 1 + \frac{1}{n} + 7 \cdot \frac{1}{n^2}}$$
$$= \frac{0}{2 + 0 + 7 \cdot 0} = 0$$

Tehát $S = \left\{\frac{1}{2}, 1, 0\right\}, \overline{\lim}\, a_n = 1, \underline{\lim}\, a_n = 0.$

c. $a_n = \frac{3^{2n+1} + (-4)^n}{5 + 9^{n+1}}$

Megoldás:

$$\lim \frac{3^{2n+1} + (-4)^n}{5 + 9^{n+1}} = \lim \frac{3 \cdot 3^{2n} + (-4)^n}{5 + 9 \cdot 9^n} = \lim \frac{3 \cdot (3^2)^n + (-4)^n}{5 + 9 \cdot 9^n} = \lim \frac{3 \cdot 9^n + (-4)^n}{5 + 9 \cdot 9^n}$$
$$= \lim \frac{3 \cdot \frac{9^n}{9^n} + \frac{(-4)^n}{9^n}}{5 \cdot \frac{1}{9^n} + 9 \cdot \frac{9^n}{9^n}} = \lim \frac{3 \cdot 1^n + \left(\frac{-4}{9}\right)^n}{5 \cdot \frac{1}{9^n} + 9 \cdot 1^n} = \frac{3 + 0}{5 \cdot 0 + 9} = \frac{1}{3}$$

Vegyük észre, hogy a negatív alapú exponenciális tag csak akkor okoz problémát, ha épp az a legnagyobb abszolút értékű, hiszen ellenkező esetben az egyszerűsítés után egy 1-nél kisebb abszolút értékű (negatív) számot kapunk, melynek n-dik hatványa 0-hoz tart.

Tehát: $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}, \underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n = \lim a_n = \frac{1}{3}$

d. $a_n = \frac{(-4)^n + 3 \cdot 3^n}{1 + 4^n}$

Megoldás:

$$\lim \frac{(-4)^n + 3 \cdot 3^n}{1 + 4^n} = \lim \frac{\frac{(-4)^n}{4^n} + 3 \cdot \frac{3^n}{4^n}}{1 \cdot \frac{1}{4^n} + \frac{4^n}{4^n}} = \lim \frac{(-1)^n + 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 \cdot \frac{1}{4^n} + 1^n}$$

Itt épp az előző feladat végén említett probléma merül fel. Az $(-1)^n$ divergens. Ha n páros, akkor értéke 1, ha n páratlan értéke -1.

Tehát:

- ha n páros

$$\lim \frac{1 + 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 \cdot \frac{1}{4^n} + 1^n} = \frac{1 + 3 \cdot 0}{1 \cdot 0 + 1} = 1$$

- ha n páratlan

$$\lim \frac{-1 + 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 \cdot \frac{1}{4^n} + 1^n} = \frac{-1 + 3 \cdot 0}{1 \cdot 0 + 1} = -1$$

Tehát: $S = \{-1;\ 1\}, \underline{\lim}\, a_n = -1 \quad \overline{\lim}\, a_n = 1$