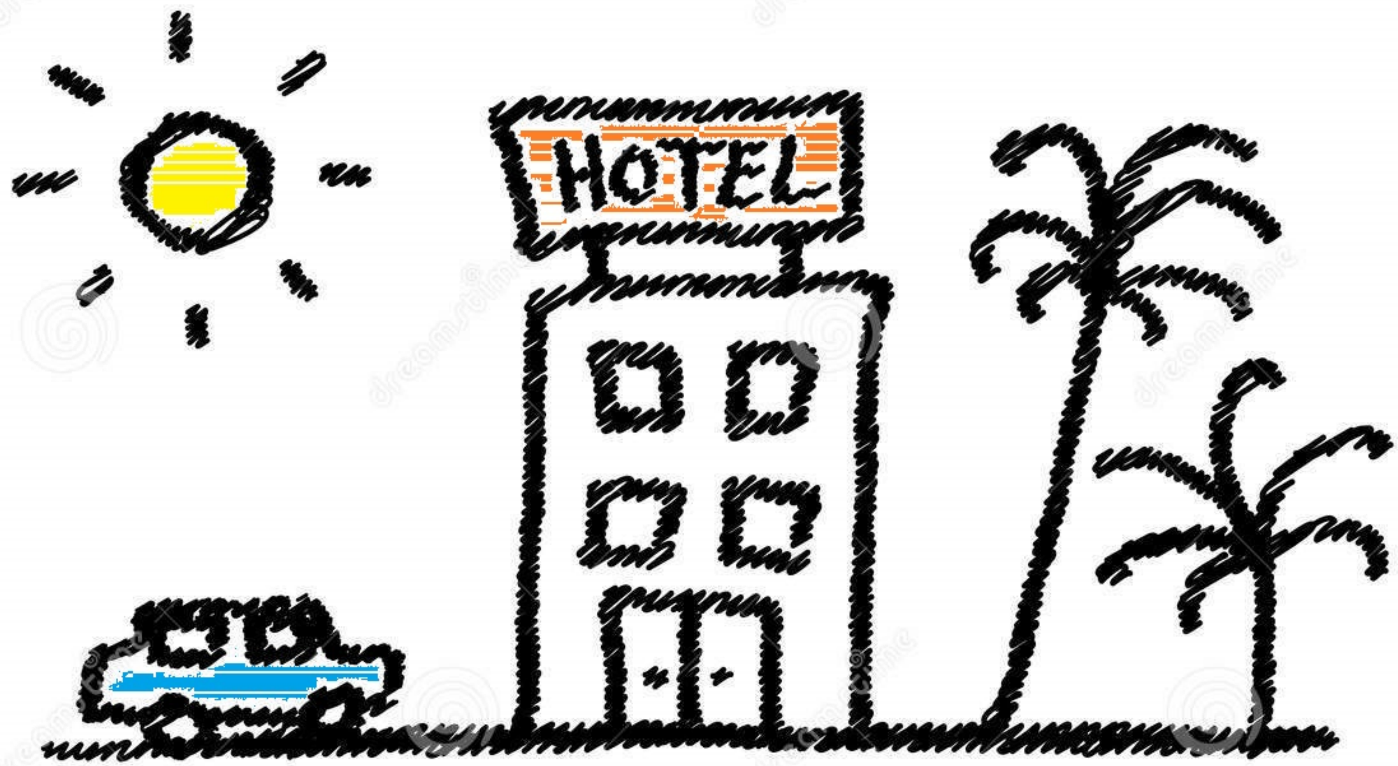
DISZKRÉT MATEMATIKA I.

4. előadás

Halmazok számossága

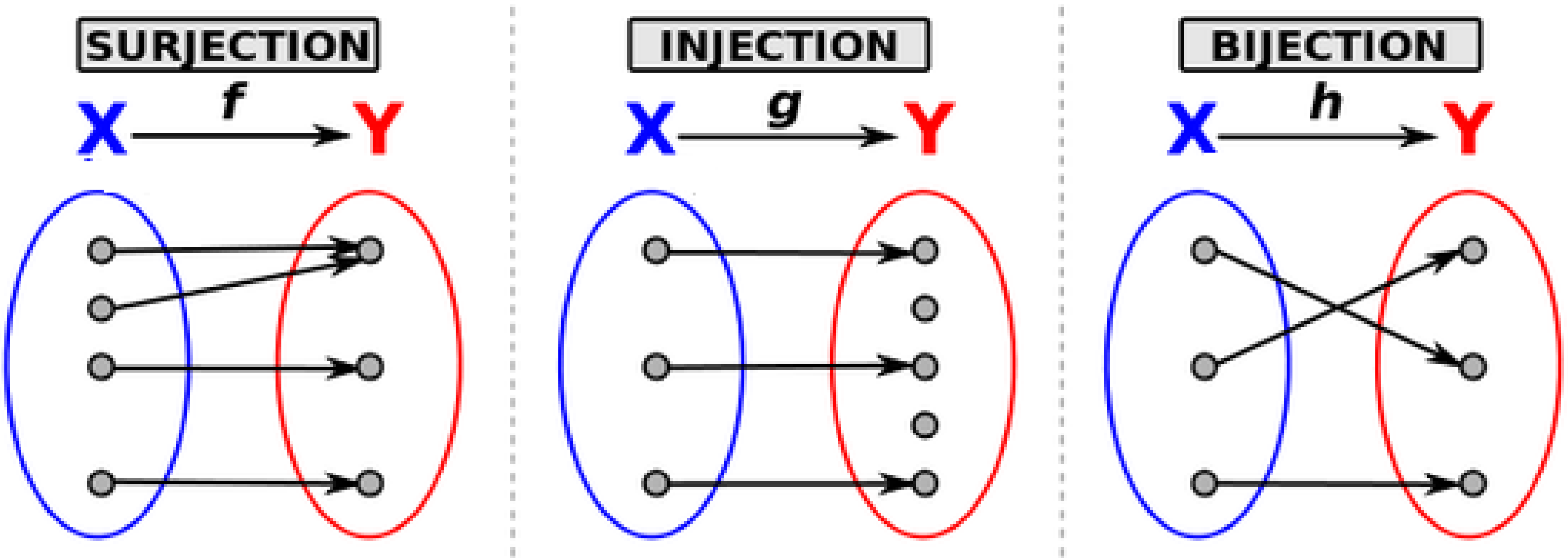

HOTEL

Hotel INFINITY*****... paradoxona:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\boxed{\mathbf{1}} & & \boxed{\mathbf{2}} & & \dots & & \boxed{\mathbf{n}} & & \dots \\
& \searrow & & \searrow & & \dots & & \searrow & \\
1 & & \boxed{\mathbf{2}} & & \boxed{\mathbf{3}} & & \boxed{\mathbf{n}} & & \boxed{\mathbf{n+1}}
\end{array}$$

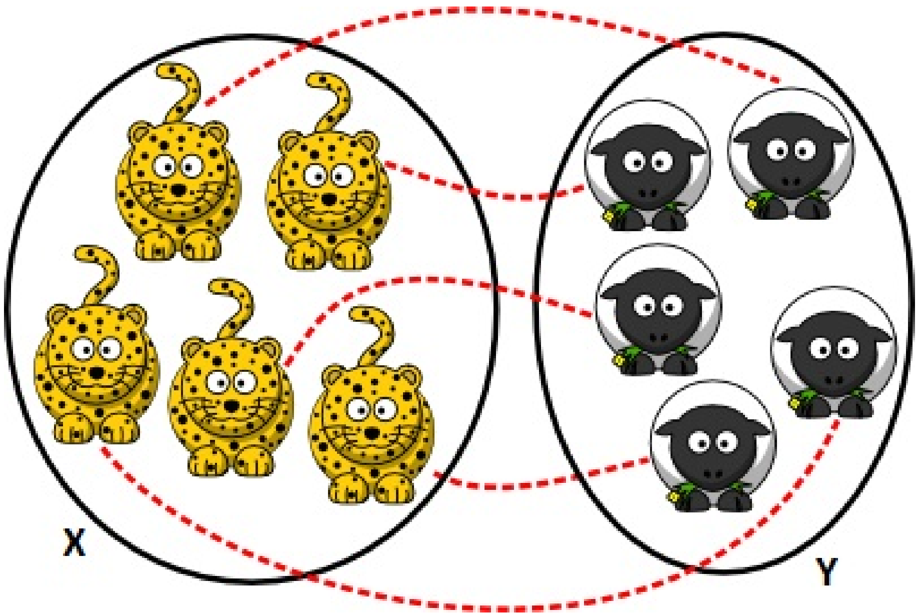
ISMÉTLÉS

♣ **Definíció.** A $\varrho : X \longrightarrow Y$ leképezés bijektív, ha injektív és szürjektív is.

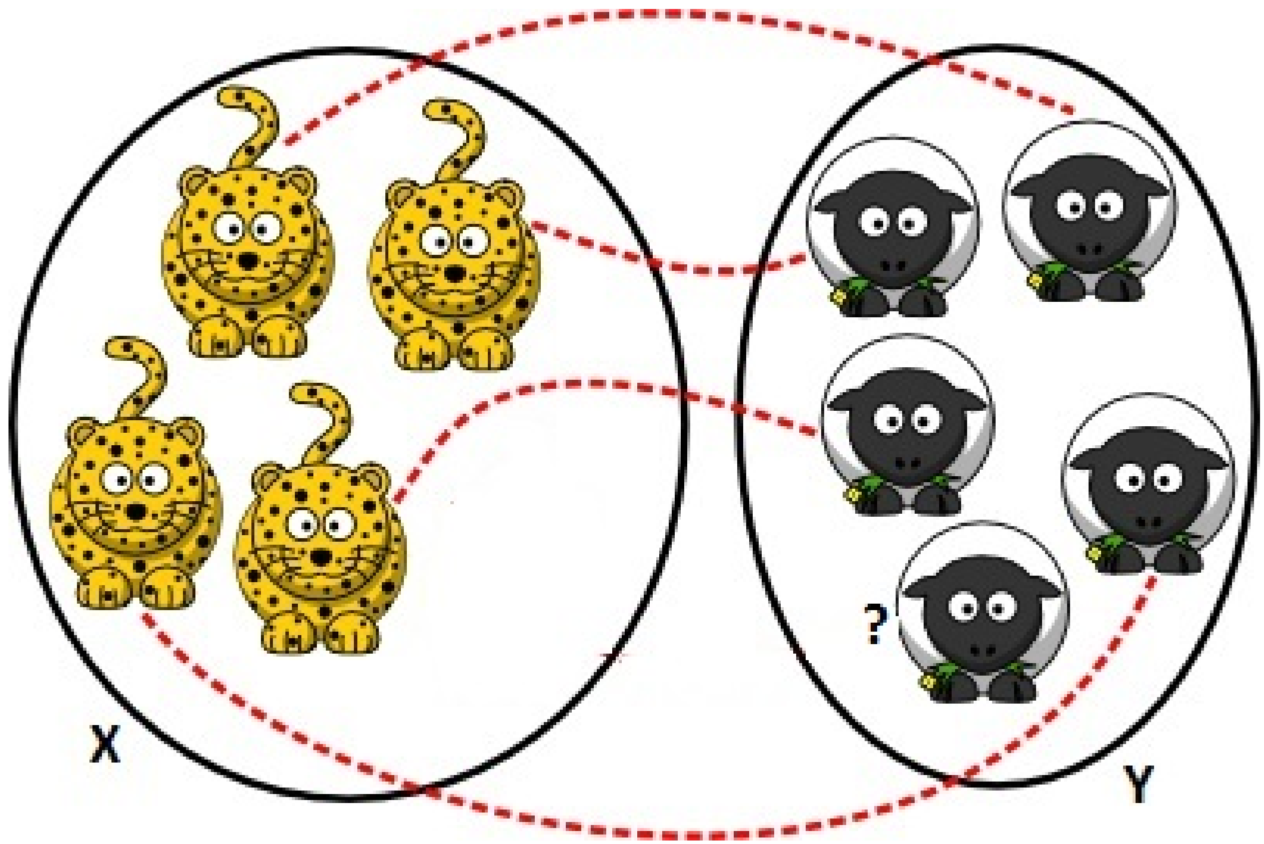


♣ **Definíció.** Az X és Y halmazok azonos számosságúak (ekvivalensek) ha létezik közöttük $\varrho : X \longrightarrow Y$ bijekció (kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés). (George CANTOR (1845-1918))

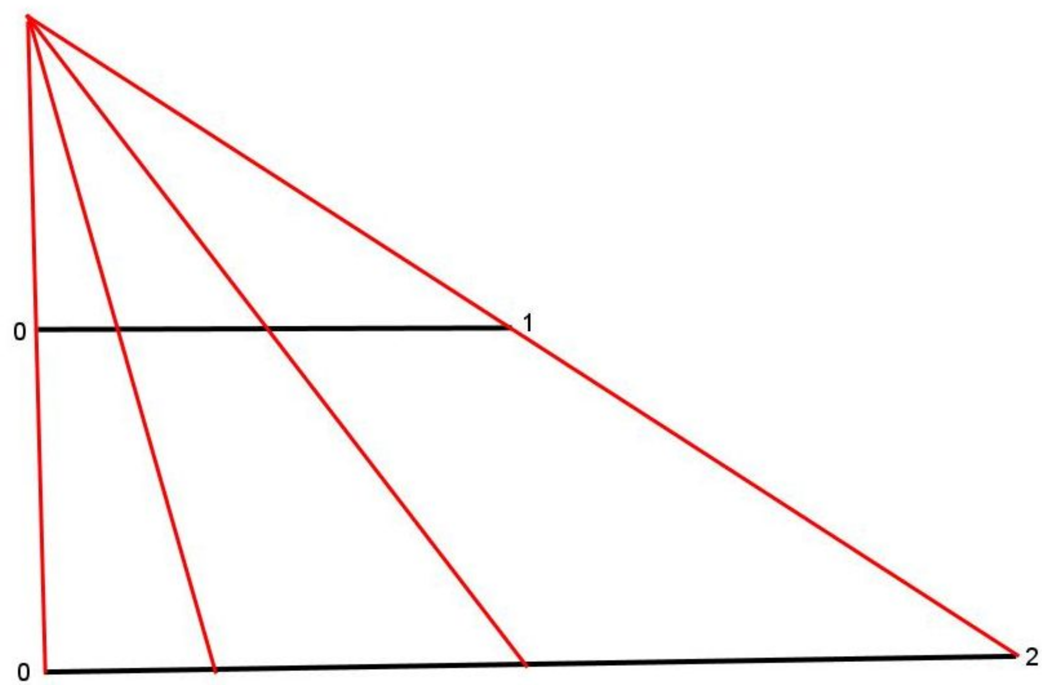
Jelölés: $X \sim Y$.



Pl. $X \not\sim Y$

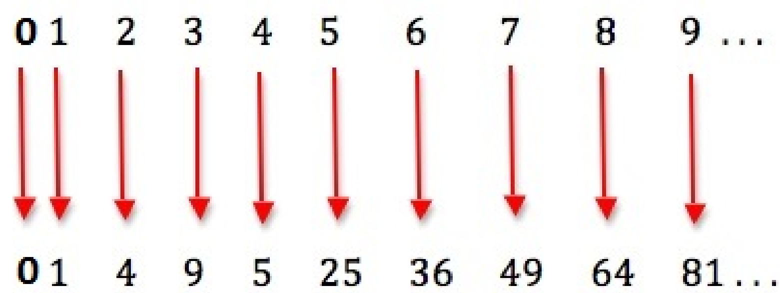


kulcsszó: BIJEKCIÓÓÓÓÚ...

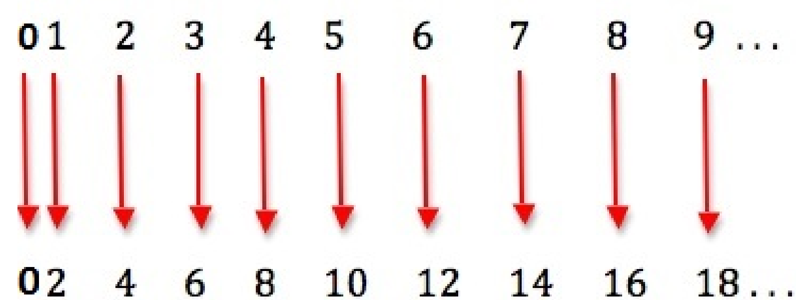


$$[0;1] \sim [0;2]$$

Galileo **GALILEI** (1564-1642) észrevette, hogy a négyzetszámok ugyanannyian vannak, mint maguk a természetes számok.



nem negatív páros számok?



CANTOR

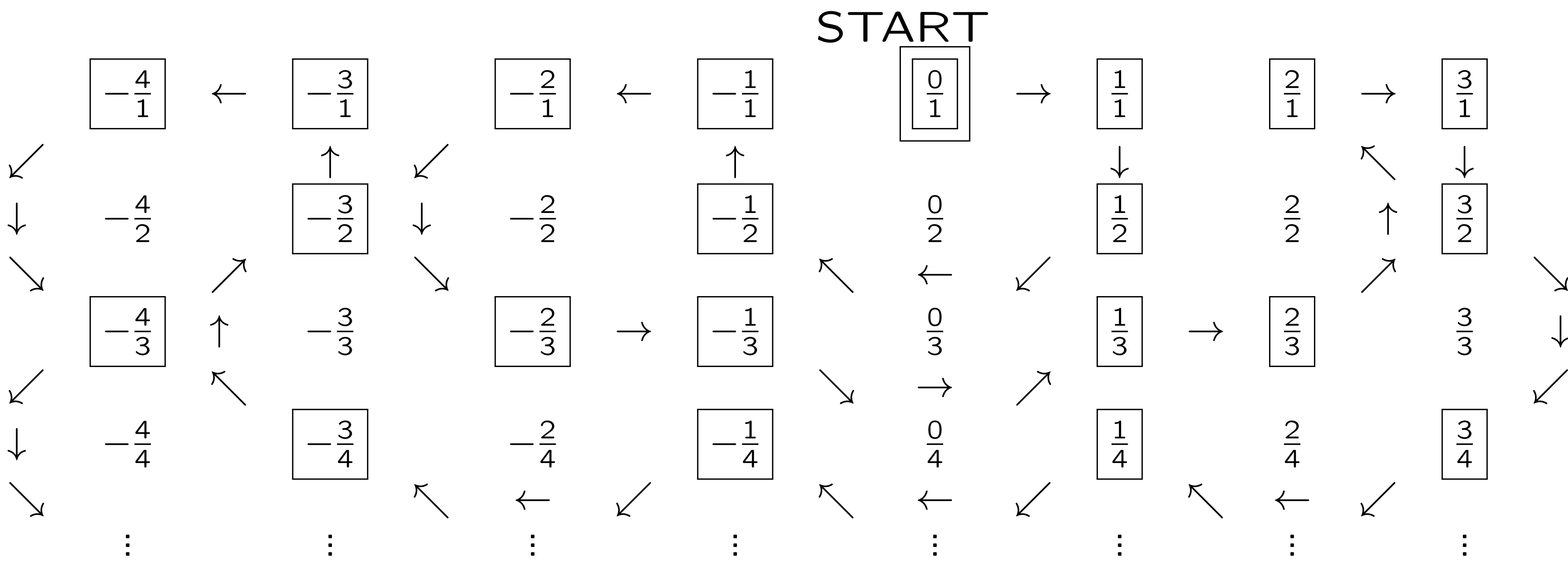
természetes számok $\sim$ **egész** számok !!

$$\begin{array}{cccccccccc} \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ \mathbb{Z}: & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \dots & z_n & \dots \end{array}$$

$$z_n = \begin{cases} -n/2 & \text{ha } 2 \mid n \\ (n+1)/2 & \text{ha } 2 \nmid n \end{cases}.$$

$\aleph_0$: természetes számok számossága ($\aleph$: alef)

természetes számok $\sim$ **racionális** számok !!!!



"Látom, de nem akarok hinni a szememnek!"

természetes számok $<$ **valós** számok ($\aleph_1$) !!!!!!

(Cantor-féle átlós eljárás)

"A végtelennél nagyobb halmaz létezésével kapcsolatban, melyet Isten segedelmével fedeztem fel, immár semilyen kétségem sincsen." $\Longrightarrow$ *A végtelennek is lehet nagysága!*

♣ **Definíció.** Az X halmaz végtelen számosságú ha létezik önmagával ekvivalens valódi részhalmaza.

$$\begin{array}{lcccccccc} \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ \mathbb{N}^+: & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n+1 & \ldots \end{array}$$

Jelölés: $|X| = \infty$.

Definíció. Az X halmaz véges számosságú ha nem végtelen számosságú.

♣ *A végtelennek is lehet nagysága!*

Megszámlalható számosság: $\aleph_0 = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| \neq |\mathbb{R}|$.

Kontinuuum számosság: $\aleph_1 = |\mathbb{R}| = |[0;1]|$.

KONTINUUM HIPOTÉZIS: Nincs olyan halmaz, melynek számossága $\aleph_0$ és $\aleph_1$ közé esne.

♣ **Tétel.** $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$. ($\mathbb{N} \not\sim [0;1]$, Cantor-féle átlós eljárás)

Tegyük fel indirekt, hogy $[0;1] \sim \mathbb{N}$, azaz $\mathbb{R}$ elemei sorbarendezhetők. Vegyünk egy tetszőleges sorrendet amely $[0;1]$ elemeit végtelen tizedestört alakban tartalmazza: a k-adik szám n-edik tizedesjegyét a_{kn}-nel jelöli.

$$\begin{array}{rcl}
\alpha_0 & = & 0,a_{01}a_{02}a_{03}\ldots a_{0n}\ldots \\
\alpha_1 & = & 0,a_{11}a_{12}a_{13}\ldots a_{1n}\ldots \\
 & \vdots & \\
\alpha_k & = & 0,a_{k1}a_{k2}a_{k3}\ldots a_{kn}\ldots \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Legyen $\beta = 0,b_1b_2b_3\ldots b_n\ldots$ végtelen tizedestört, amelynek jegyeire

$$
\begin{array}{rcl}
\alpha_0 & = & 0, \mathbf{a_{01}} a_{02} a_{03} \dots a_{0n} \dots \\
\alpha_1 & = & 0, a_{11} \mathbf{a_{12}} a_{13} \dots a_{1n} \dots \\
 & \vdots & \\
\alpha_k & = & 0, a_{k1} a_{k2} a_{k3} \dots a_{kn} \dots \\
 & \vdots &
\end{array}
$$

Legyen $\beta = 0, b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots$ végtelen tizedestört, amelynek jegyeire

$b_i = 1$ ha $a_{i-1,i} \neq 1$ és

$b_i = 2$ ha $a_{i-1,i} = 1$

Ez garantálja, hogy bármely i esetén $\beta \neq \alpha_{i-1}$, ugyanis mindketten végtelen tizedestörtek, egymástól az i-edik tizedesjegyben különböznek. Azaz β nincs benne a felsorolásban: mégsem lehet felsorolni $[0; 1]$ összes elemét.