GRÁFELMÉLET

Gráfok ábrázolása

2. előadás

1) Csúcslista (szomszédsági lista)

A gráf minden csúcsához egy listát rendelünk, amelyben nyilvántartjuk az adott csúcs szomszédjait.

1) Csúcslista (szomszédsági lista)

A gráf minden csúcsához egy listát rendelünk, amelyben nyilvántartjuk az adott csúcs szomszédjait.

Megvalósítás: Deklaráljunk egy mutatókat tartalmazó $\mathrm{A}[1..n]$ tömböt (n a gráf csúcsainak száma). A tömbben lévő mutatók mutatnak a szomszédsági listákra.

1) Csúcslista (szomszédsági lista)

A gráf minden csúcsához egy listát rendelünk, amelyben nyilván-tartjuk az adott csúcs szomszédjait.

Megvalósítás: Deklaráljunk egy mutatókat tartalmazó $A[1..n]$ tömböt (n a gráf csúcsainak száma). A tömbben lévő mutatók mutatnak a szomszédsági listákra.

Irányítatlan gráf esetén, ha i szomszédja j-nek, akkor j is szomszédja i-nek.

1) Csúcslista (szomszédsági lista)

A gráf minden csúcsához egy listát rendelünk, amelyben nyilvántartjuk az adott csúcs szomszédjait.

Megvalósítás: Deklaráljunk egy mutatókat tartalmazó $\mathrm{A}[1..n]$ tömböt (n a gráf csúcsainak száma). A tömbben lévő mutatók mutatnak a szomszédsági listákra.

Irányítatlan gráf esetén, ha i szomszédja j-nek, akkor j is szomszédja i-nek.

Irányított gráf esetén a j akkor lesz szomszédja i-nek, ha létezik irányított él i-től j-hez.

1) Csúcslista (szomszédsági lista)

A gráf minden csúcsához egy listát rendelünk, amelyben nyilvántartjuk az adott csúcs szomszédjait.

Megvalósítás: Deklaráljunk egy mutatókat tartalmazó $\mathrm{A}[1..n]$ tömböt (n a gráf csúcsainak száma). A tömbben lévő mutatók mutatnak a szomszédsági listákra.

Irányítatlan gráf esetén, ha i szomszédja j-nek, akkor j is szomszédja i-nek.

Irányított gráf esetén a j akkor lesz szomszédja i-nek, ha létezik irányított él i-től j-hez.

Élsúlyozott gráf esetén, az él súlyát is a listaelemben fogjuk tárolni.

1) Csúcslista (szomszédsági lista)

A gráf minden csúcsához egy listát rendelünk, amelyben nyilván-tartjuk az adott csúcs szomszédjait.

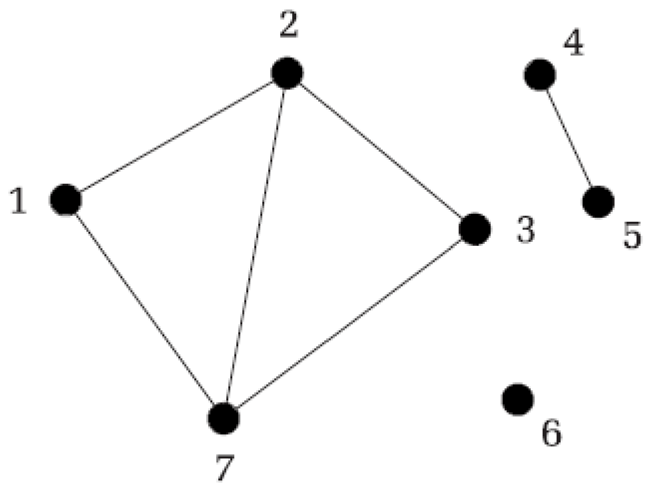
Megvalósítás: Deklaráljunk egy mutatókat tartalmazó $A[1..n]$ tömböt (n a gráf csúcsainak száma). A tömbben lévő mutatók mutatnak a szomszédsági listákra.

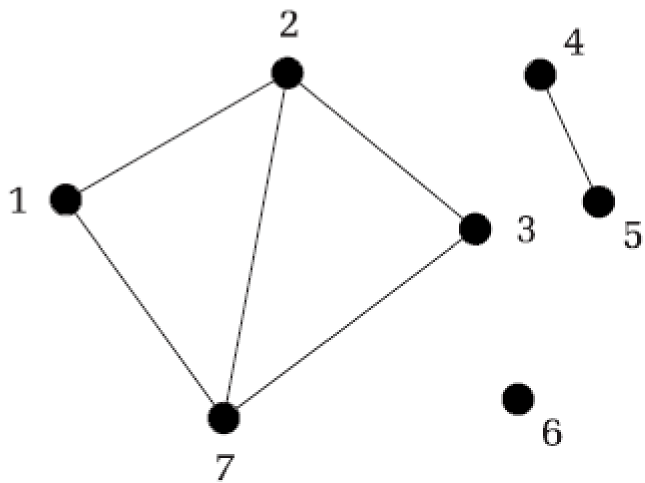
Irányítatlan gráf esetén, ha i szomszédja j-nek, akkor j is szomszédja i-nek.

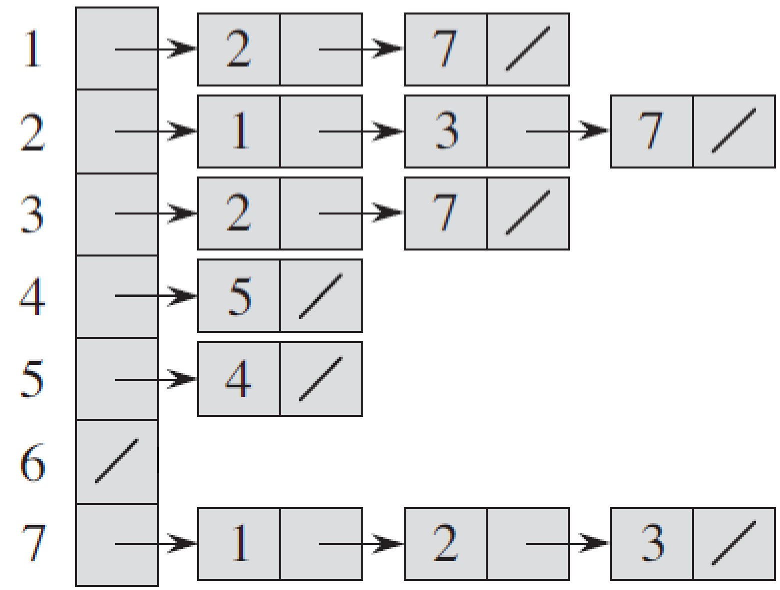
Irányított gráf esetén a j akkor lesz szomszédja i-nek, ha létezik irányított él i-től j-hez.

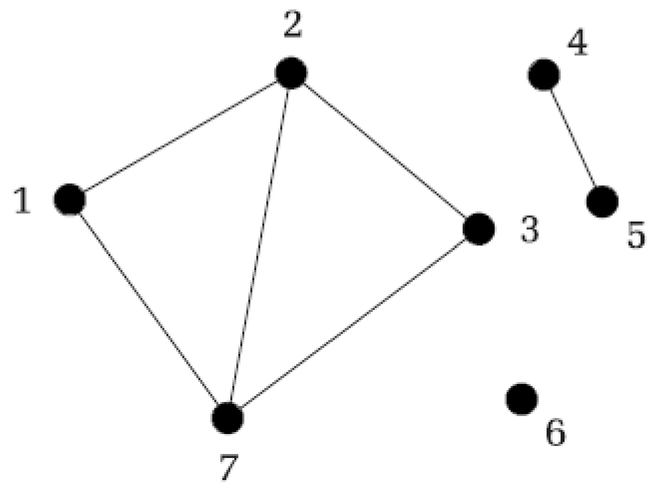
Élsúlyozott gráf esetén, az él súlyát is a listaelemben fogjuk tárolni.

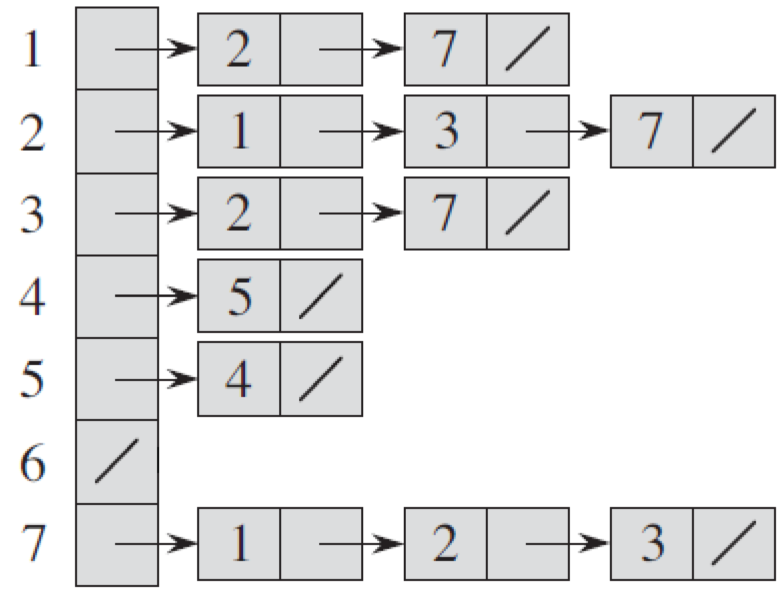
Gyakran érdemes tárolni a csúcsok fokszámait is (az $A[1..n]$ tömbben).

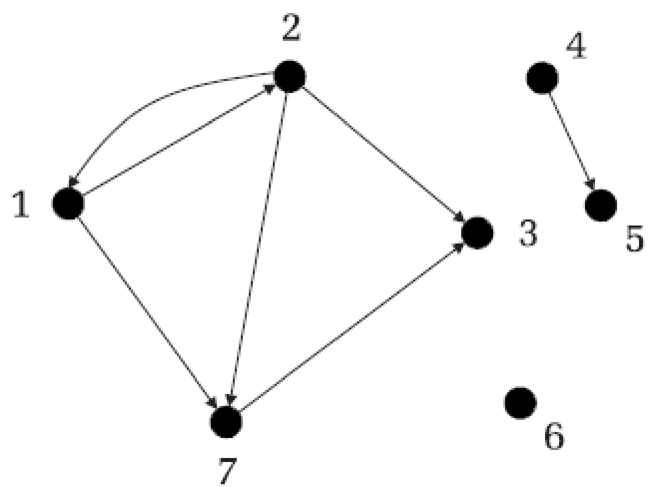

2
4
1
3
5
6
7

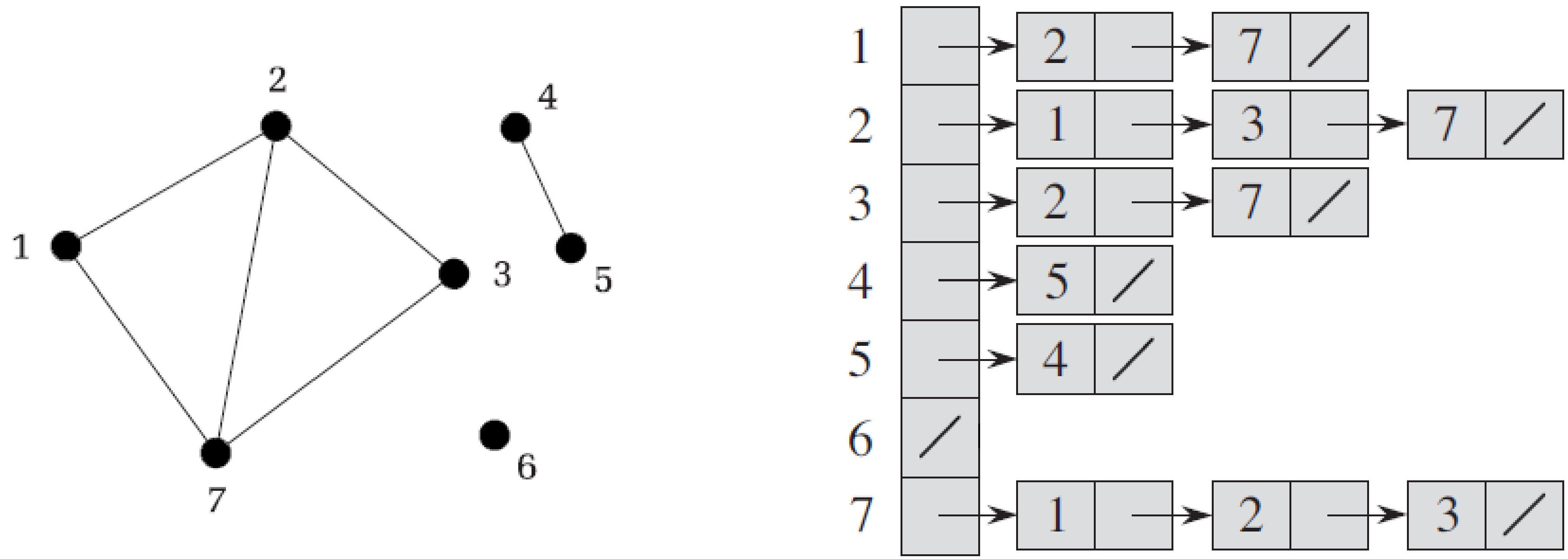

1
2
3
4
5
6
7

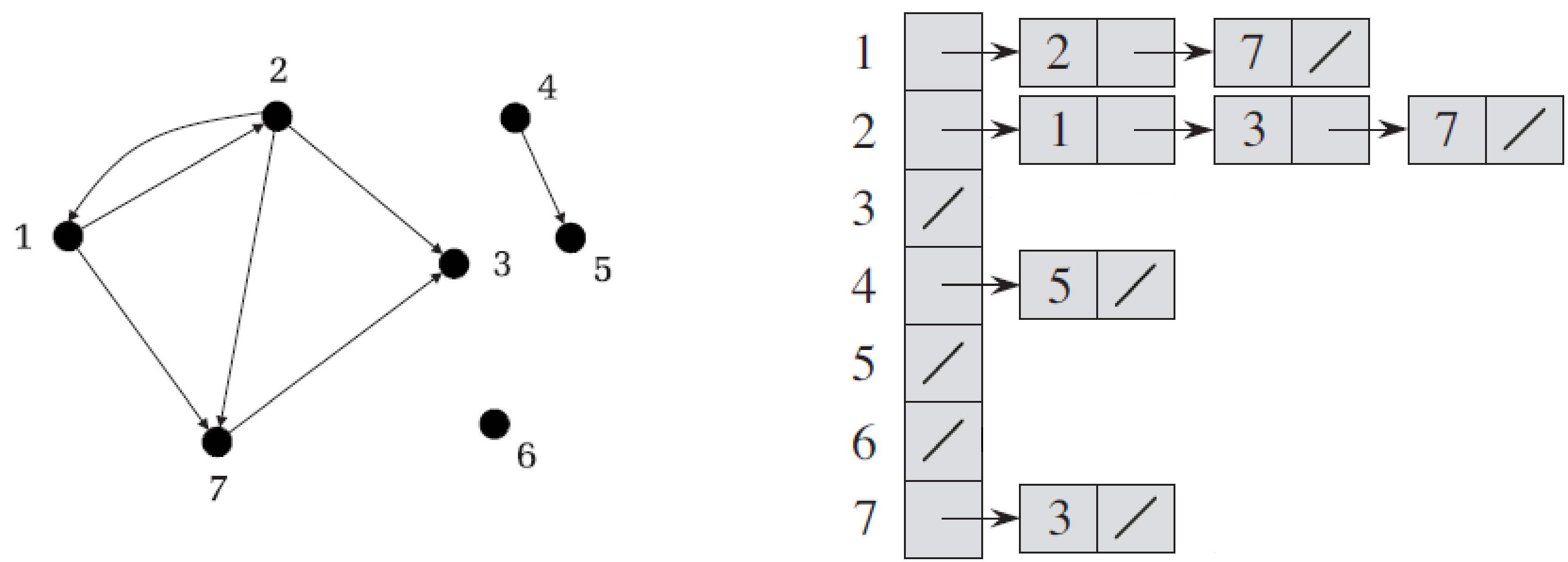

1
2
3
4
5
6
7
2
7
1
3
7
2
7
5
4
1
2
3


1
2
3
4
5
6
7


1
2
3
4
5
6
7


1
2
3
4
5
6
7


1
2
3
4
5
6
7


1
2
3
4
5
6
7

2) Éllista

A gráf minden élét tároljuk az adott él végpontjai segítségével.

2) Éllista

A gráf minden élét tároljuk az adott él végpontjai segítségével.

<u>Megvalósítás</u>: Deklaráljunk egy $\mathrm{A}[1..n,1..2]$ kétdimenziós tömböt (n a gráf éleinek száma), melynek soraiban az adott sorszámú él két végpontját fogjuk tárolni.

2) Éllista

A gráf minden élét tároljuk az adott él végpontjai segítségével.

Megvalósítás: Deklaráljunk egy $\mathrm{A}[1..n,1..2]$ kétdimenziós tömböt (n a gráf éleinek száma), melynek soraiban az adott sorszámú él két végpontját fogjuk tárolni.

Ezt az ábrázolási módot általában a ritka gráfoknál használjuk, amelyeknek sok csúcsuk, de kevés élük van.

2) Éllista

A gráf minden élét tároljuk az adott él végpontjai segítségével.

Megvalósítás: Deklaráljunk egy $\mathrm{A}[1..n,1..2]$ kétdimenziós tömböt (n a gráf éleinek száma), melynek soraiban az adott sorszámú él két végpontját fogjuk tárolni.

Ezt az ábrázolási módot általában a ritka gráfoknál használjuk, amelyeknek sok csúcsuk, de kevés élük van.

Azért, hogy egy él visszakeresése logaritmikus időben történjen (bináris kereséssel), célszerű lehet az élek előzetes rendezése. **Irányított gráf** esetén a rendezés történhet az élek kezdőpontja szerint, azonos kezdőpontúak esetén pedig a végpontjuk alapján. **Irányítatlan gráfnál** leszögezhetjük, hogy a kisebb címkéjű csúcs lesz a kezdőpont, a nagyobb címkéjű pedig a végpont.

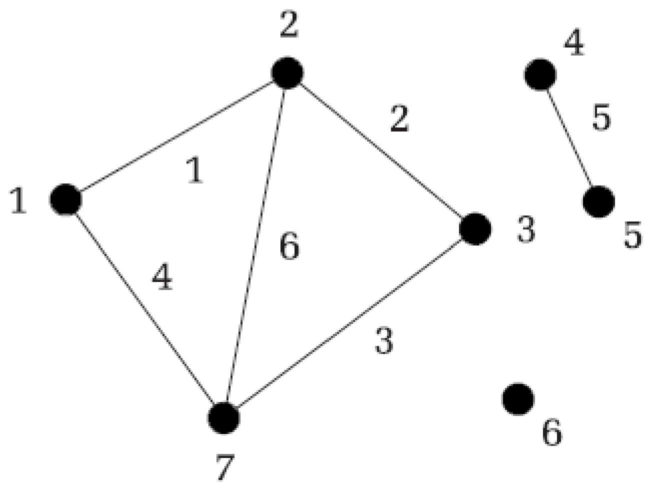
2) Éllista

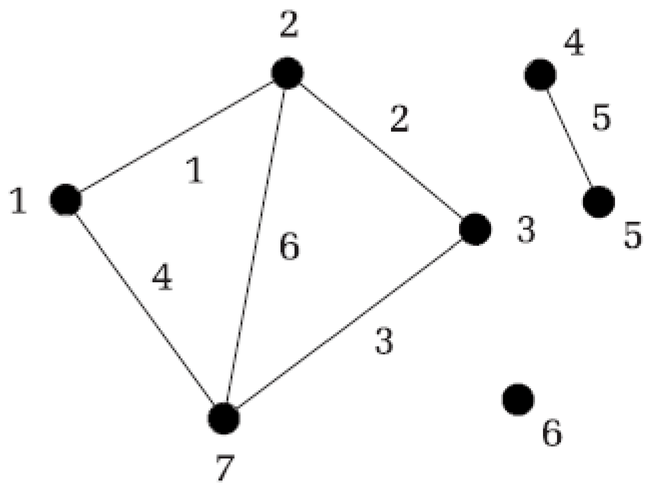
A gráf minden élét tároljuk az adott él végpontjai segítségével.

Megvalósítás: Deklaráljunk egy $\mathrm{A}[1..n,1..2]$ kétdimenziós tömböt (n a gráf éleinek száma), melynek soraiban az adott sorszámú él két végpontját fogjuk tárolni.

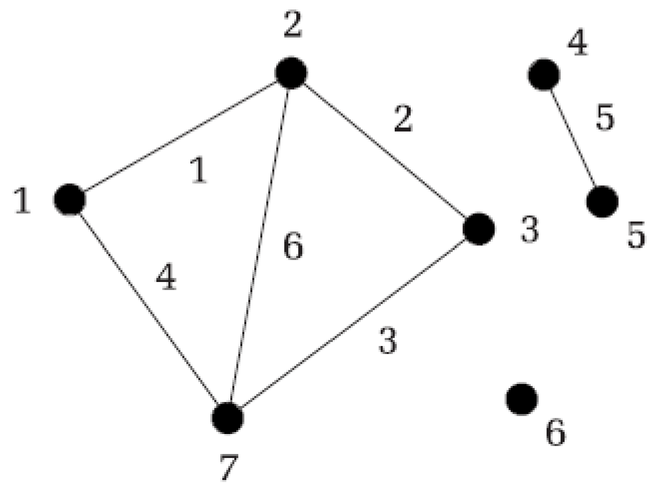
Ezt az ábrázolási módot általában a ritka gráfoknál használjuk, amelyeknek sok csúcsuk, de kevés élük van.

Azért, hogy egy él visszakeresése logaritmikus időben történjen (bináris kereséssel), célszerű lehet az élek előzetes rendezése. **Irányított gráf** esetén a rendezés történhet az élek kezdőpontja szerint, azonos kezdőpontúak esetén pedig a végpontjuk alapján. **Irányítatlan gráfnál** leszögezhetjük, hogy a kisebb címkéjű csúcs lesz a kezdőpont, a nagyobb címkéjű pedig a végpont.
Élsúlyozott gráf esetén $\mathrm{A}[1...n,1..3]$ tömböt használunk, s az élkeresés futási ideje javul, ha a tömb a súlyok szerint rendezett.

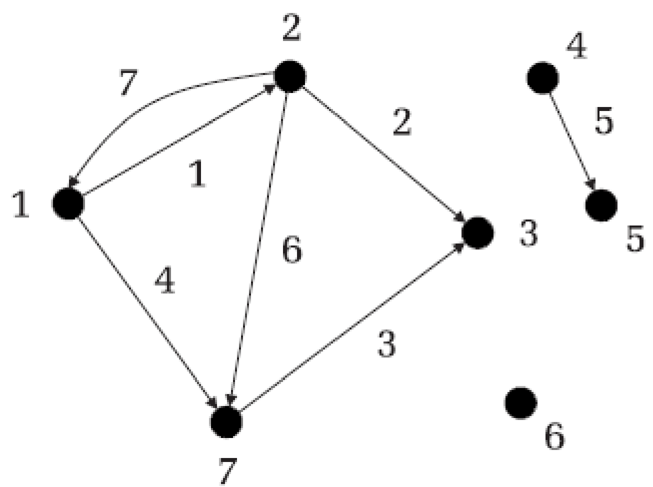

2
4
2
5
1
1
3
6
5
4
3
6
7

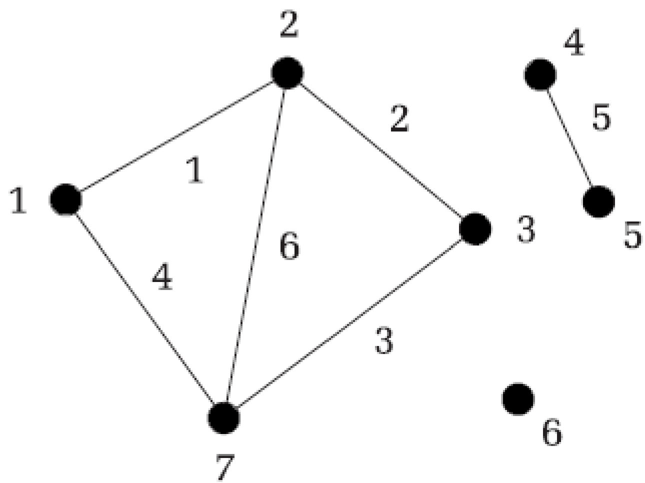


1	1	2
2	2	3
3	7	3
4	1	7
5	4	5
6	2	7

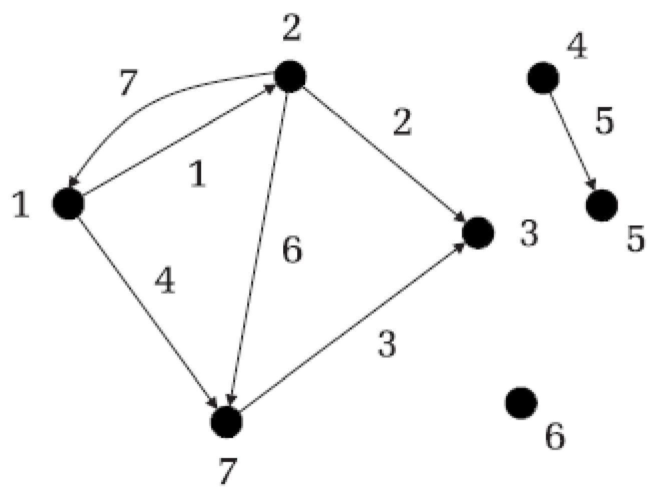


1	1	2
2	2	3
3	7	3
4	1	7
5	4	5
6	2	7





1	1	2
2	2	3
3	7	3
4	1	7
5	4	5
6	2	7



1	1	2
2	2	3
3	7	3
4	1	7
5	4	5
6	2	7
7	2	1

3) Csúcsmátrix (szomszédsági mátrix, adjacenciamátrix)

Legyen a G gráf csúcsainak száma n. Az $\mathrm{A(G)}$ $n \times n$ méretű **csúcsmátrix** elemeit az alábbi módon értelmezzük:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ ha az } i \text{ és } j \text{ csúcspontok között nincs él} \\ k, \text{ ha az } i \text{ és } j \text{ csúcspontok között } k \text{ párhuzamos él halad} \\ h, \text{ ha } i = j \text{ és az } i \text{ csúcsponthoz } h \text{ hurokél illeszkedik} \end{cases}$$

3) Csúcsmátrix (szomszédsági mátrix, adjacenciamátrix)

Legyen a G gráf csúcsainak száma n. Az $\mathrm{A(G)}$ $n \times n$ méretű **csúcsmátrix** elemeit az alábbi módon értelmezzük:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha az } i \text{ és } j \text{ csúcspontok között nincs él} \\ k, & \text{ha az } i \text{ és } j \text{ csúcspontok között } k \text{ párhuzamos él halad} \\ h, & \text{ha } i = j \text{ és az } i \text{ csúcsponthoz } h \text{ hurokél illeszkedik} \end{cases}$$

Irányítatlan gráf esetén a csúcsmátrix szimmetrikus a főátlóra nézve, azaz $a_{ij} = a_{ji}$.

3) Csúcsmátrix (szomszédsági mátrix, adjacenciamátrix)

Legyen a G gráf csúcsainak száma n. Az $A(G)$ $n \times n$ méretű **csúcsmátrix** elemeit az alábbi módon értelmezzük:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha az } i \text{ és } j \text{ csúcspontok között nincs él} \\ k, & \text{ha az } i \text{ és } j \text{ csúcspontok között } k \text{ párhuzamos él halad} \\ h, & \text{ha } i = j \text{ és az } i \text{ csúcsponthoz } h \text{ hurokél illeszkedik} \end{cases}$$

Irányítatlan gráf esetén a csúcsmátrix szimmetrikus a főátlóra nézve, azaz $a_{ij} = a_{ji}$.

Irányított gráf esetén ez nem teljesül.

3) Csúcsmátrix (szomszédsági mátrix, adjacenciamátrix)

Legyen a G gráf csúcsainak száma n. Az $\mathrm{A(G)}$ $n \times n$ méretű **csúcsmátrix** elemeit az alábbi módon értelmezzük:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha az } i \text{ és } j \text{ csúcspontok között nincs él} \\ k, & \text{ha az } i \text{ és } j \text{ csúcspontok között } k \text{ párhuzamos él halad} \\ h, & \text{ha } i = j \text{ és az } i \text{ csúcsponthoz } h \text{ hurokél illeszkedik} \end{cases}$$

Irányítatlan gráf esetén a csúcsmátrix szimmetrikus a főátlóra nézve, azaz $a_{ij} = a_{ji}$.

Irányított gráf esetén ez nem teljesül.

Egyszerű gráf esetén $h = 0$ és $k = 1$.

3) Csúcsmátrix (szomszédsági mátrix, adjacenciamátrix)

Legyen a G gráf csúcsainak száma n. Az $\mathrm{A(G)}$ $n \times n$ méretű **csúcsmátrix** elemeit az alábbi módon értelmezzük:

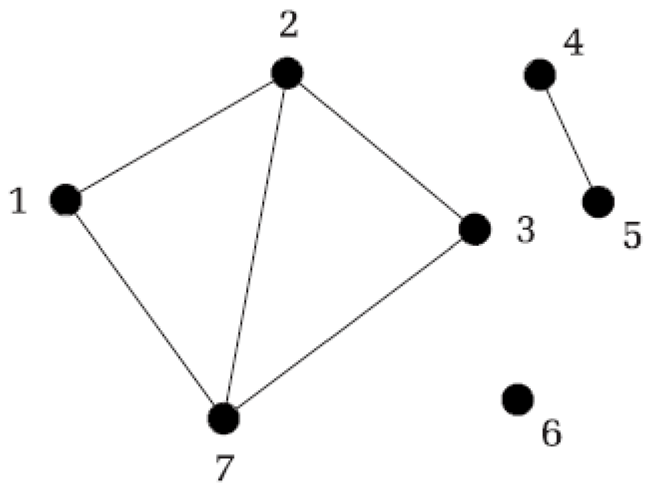
$$a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ ha az } i \text{ és } j \text{ csúcspontok között nincs él} \\ k, \text{ ha az } i \text{ és } j \text{ csúcspontok között } k \text{ párhuzamos él halad} \\ h, \text{ ha } i = j \text{ és az } i \text{ csúcsponthoz } h \text{ hurokél illeszkedik} \end{cases}$$

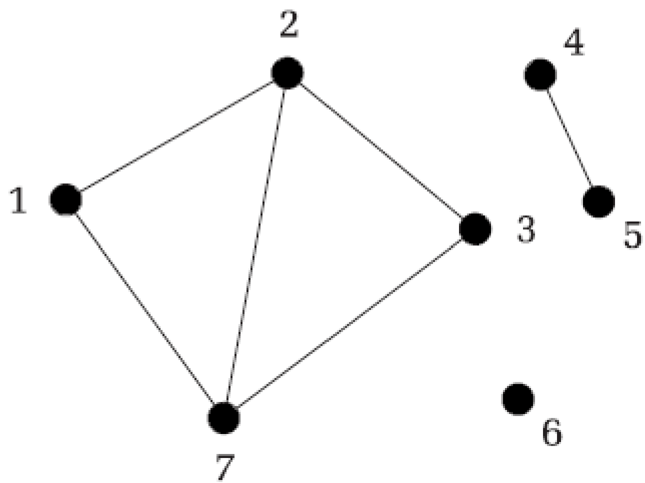
Irányítatlan gráf esetén a csúcsmátrix szimmetrikus a főátlóra nézve, azaz $a_{ij} = a_{ji}$.

Irányított gráf esetén ez nem teljesül.

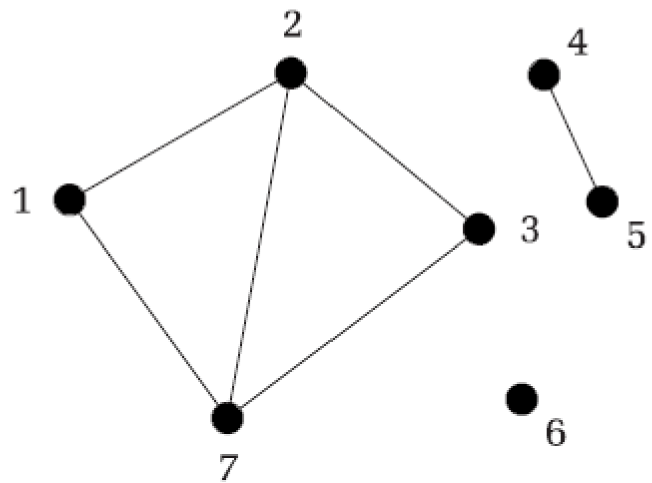
Egyszerű gráf esetén $h = 0$ és $k = 1$.

Élsúlyozott egyszerű gráf esetén a súlyokat tárolhatjuk magában a mátrixban.

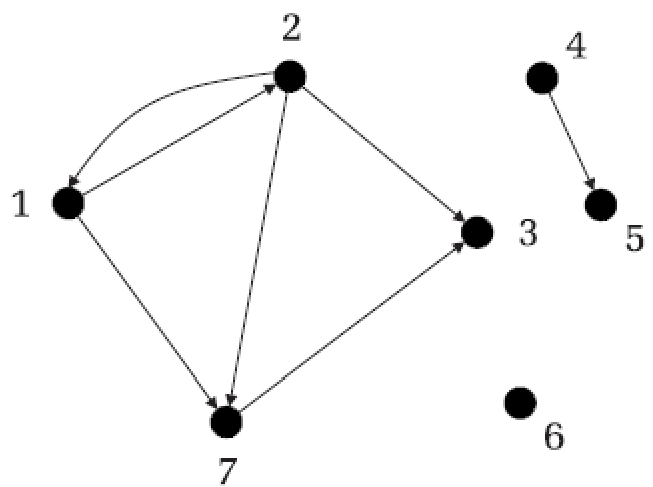

2
4
1
3
5
6
7

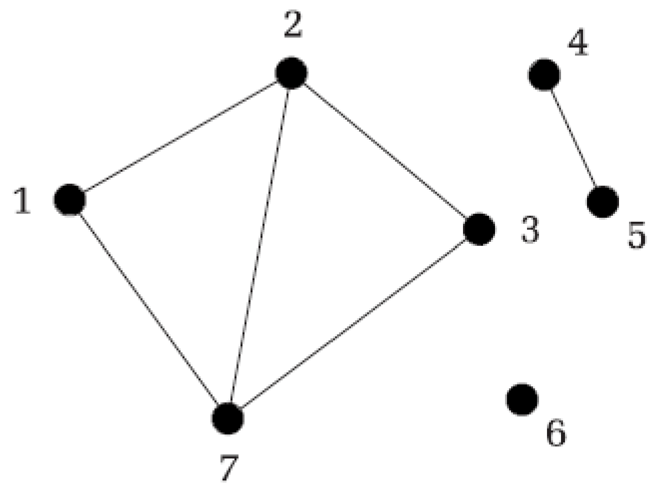


$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

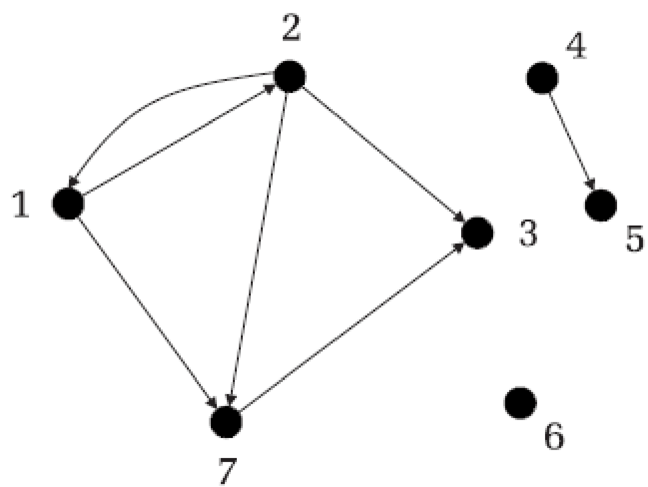


$$A(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

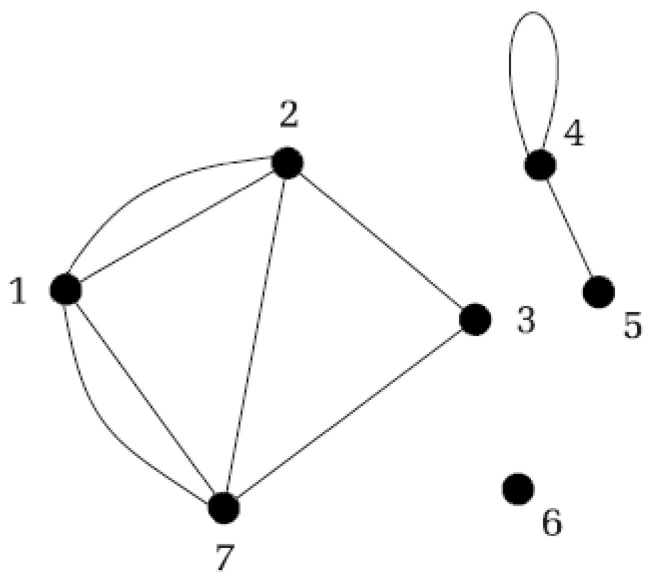


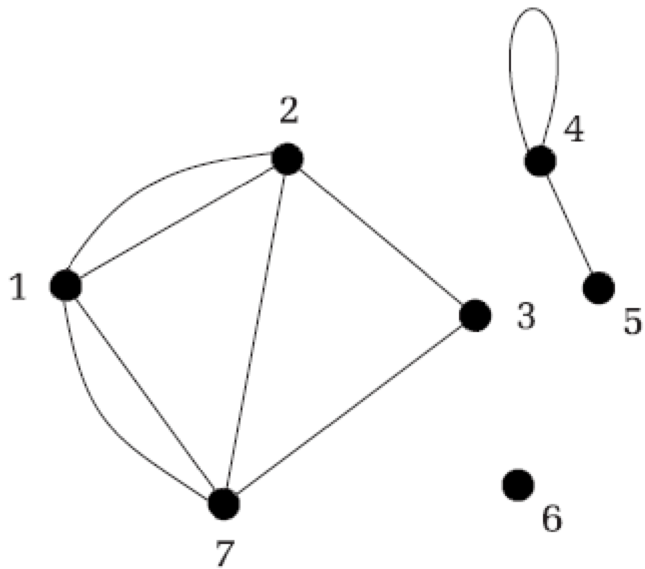


$$A(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$A(\vec{G})=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$


1
2
3
4
5
6
7



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1 tétel:

A csúcsmátrix t-edik hatványának elemei megadják minden (i, j) csúcspár között a t hosszúságú élsorozatok számát (*ezen élsorozatok között nemcsak az utakat, hanem az azonos csúcsponton többször is áthaladó sorozatokat is számoljuk*)

2.1 tétel:

A csúcsmátrix t-edik hatványának elemei megadják minden (i, j) csúcspár között a t hosszúságú élsorozatok számát (*ezen élsorozatok között nemcsak az utakat, hanem az azonos csúcsponton többször is áthaladó sorozatokat is számoljuk*)

Bizonyítás: (matematikai indukcióval)

I. $t = 2$ esetben az A^2 mátrix $a_{ij}^{(2)}$ elemének értékére érvényes, hogy

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$$

2.1 tétel:

A csúcsmátrix t-edik hatványának elemei megadják minden (i, j) csúcspár között a t hosszúságú élsorozatok számát (*ezen élsorozatok között nemcsak az utakat, hanem az azonos csúcsponton többször is áthaladó sorozatokat is számoljuk*)

Bizonyítás: (matematikai indukcióval)

I. $t = 2$ esetben az A^2 mátrix $a_{ij}^{(2)}$ elemének értékére érvényes, hogy

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$$

Ezen összeg azon tagjai lesznek 1-gyel egyenlők, amelyekre mind az a_{ik} mind az a_{kj} érték egyenlő 1-gyel, azaz létezik az (i,k) és a (k,j) él. Amikor $k = i$, illetve $k = j$, akkor számításba vesszük az i, illetve j csúcspontok hurokéleit. Tehát $a_{ij}^{(2)}$ érték az i és j csúcspontok közötti 2 hosszúságú élsorozatok számát adja meg.

II. Tételezzük fel, hogy az állítás igaz $(t-1)$ esetre, vagyis az A^{t-1} mátrix $a_{ij}^{(t-1)}$ eleme az i és j csúcspontok közötti $(t-1)$ hosszúságú élsorozatok számát adja meg.

II. Tételezzük fel, hogy az állítás igaz $(t-1)$ esetre, vagyis az A^{t-1} mátrix $a_{ij}^{(t-1)}$ eleme az i és j csúcspontok közötti $(t-1)$ hosszúságú élsorozatok számát adja meg.

III. Kiindulunk abból, hogy $\mathrm{A}^{t}=\mathrm{A}^{t-1}\mathrm{A}$, ekkor

$$a_{ij}^{(t)}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^{(t-1)}a_{kj}$$

II. Tételezzük fel, hogy az állítás igaz $(t-1)$ esetre, vagyis az A^{t-1} mátrix $a_{ij}^{(t-1)}$ eleme az i és j csúcspontok közötti $(t-1)$ hosszúságú élsorozatok számát adja meg.

III. Kiindulunk abból, hogy $\mathrm{A}^{t}=\mathrm{A}^{t-1}\mathrm{A}$, ekkor

$$a_{ij}^{(t)}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^{(t-1)}a_{kj}$$

Ezen összeg azon tagjai lesznek nullától különbözők, amelyekre az $a_{ik}^{(t-1)}$ érték nagyobb mint 0, az a_{kj} érték pedig egyenlő 1-gyel.

II. Tételezzük fel, hogy az állítás igaz $(t-1)$ esetre, vagyis az A^{t-1} mátrix $a_{ij}^{(t-1)}$ eleme az i és j csúcspontok közötti $(t-1)$ hosszúságú élsorozatok számát adja meg.

III. Kiindulunk abból, hogy $A^t = A^{t-1}A$, ekkor

$$a_{ij}^{(t)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(t-1)} a_{kj}$$

Ezen összeg azon tagjai lesznek nullától különbözők, amelyekre az $a_{ik}^{(t-1)}$ érték nagyobb mint 0, az a_{kj} érték pedig egyenlő 1-gyel. Mindez azt jelenti, hogy az i és k csúcspontok között $a_{ik}^{(t-1)}$ darab $(t-1)$ hosszúságú élsorozat létezik, és k-ból j-be is van él. Ebből adódik, hogy az i és j csúcspontok között $a_{ik}^{(t-1)} a_{kj}$ darab t hosszúságú élsorozat létezik, amelyben utolsó előtti állomás a k csúcspont.

II. Tételezzük fel, hogy az állítás igaz $(t-1)$ esetre, vagyis az A^{t-1} mátrix $a_{ij}^{(t-1)}$ eleme az i és j csúcspontok közötti $(t-1)$ hosszúságú élsorozatok számát adja meg.

III. Kiindulunk abból, hogy $\mathrm{A}^{t} = \mathrm{A}^{t-1}\mathrm{A}$, ekkor

$$a_{ij}^{(t)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(t-1)} a_{kj}$$

Ezen összeg azon tagjai lesznek nullától különbözők, amelyekre az $a_{ik}^{(t-1)}$ érték nagyobb mint 0, az a_{kj} érték pedig egyenlő 1-gyel. Mindez azt jelenti, hogy az i és k csúcspontok között $a_{ik}^{(t-1)}$ darab $(t-1)$ hosszúságú élsorozat létezik, és k-ból j-be is van él. Ebből adódik, hogy az i és j csúcspontok között $a_{ik}^{(t-1)} a_{kj}$ darab t hosszúságú élsorozat létezik, amelyben utolsó előtti állomás a k csúcspont.

Ebből már nyilvánvaló, hogy az $a_{ij}^{(t)}$ érték az i és j csúcspontok között létező összes t hosszúságú élsorozat számát adja meg. $\square$

4) Illeszkedési mátrix (incidenciamátrix)

Legyen a G gráf csúcsainak száma n, éleinek száma m. A $B(G)$ $n \times m$ méretű **illeszkedési mátrix** elemeit az alábbi módon értelmezzük:

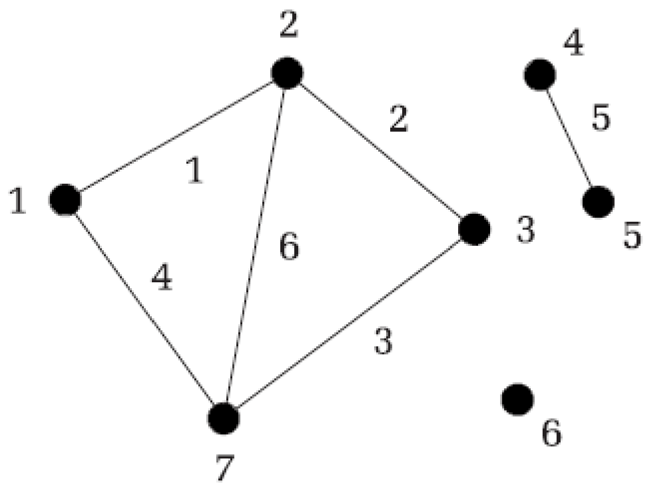
$$b_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ ha a } j \text{ él nem illeszkedik az } i \text{ csúcsponthoz} \\ 1, \text{ ha a } j \text{ él kezdőpontja az } i \text{ csúcspont} \\ -1, \text{ ha a } j \text{ él végpontja az } i \text{ csúcspont} \end{cases}$$

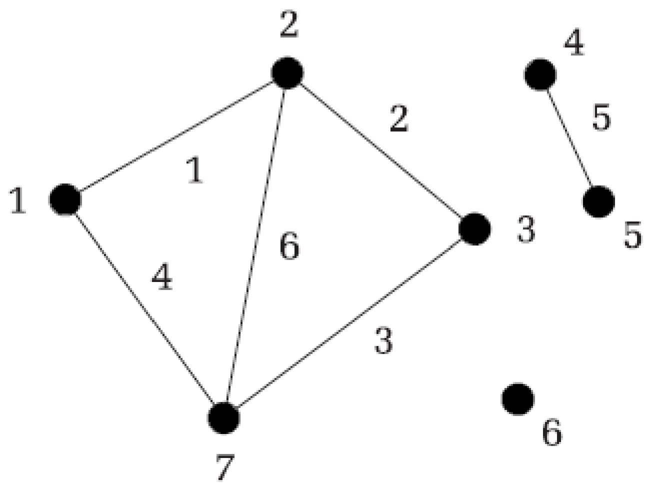
4) Illeszkedési mátrix (incidenciamátrix)

Legyen a G gráf csúcsainak száma n, éleinek száma m. A $\mathrm{B(G)}$ $n \times m$ méretű **illeszkedési mátrix** elemeit az alábbi módon értelmezzük:

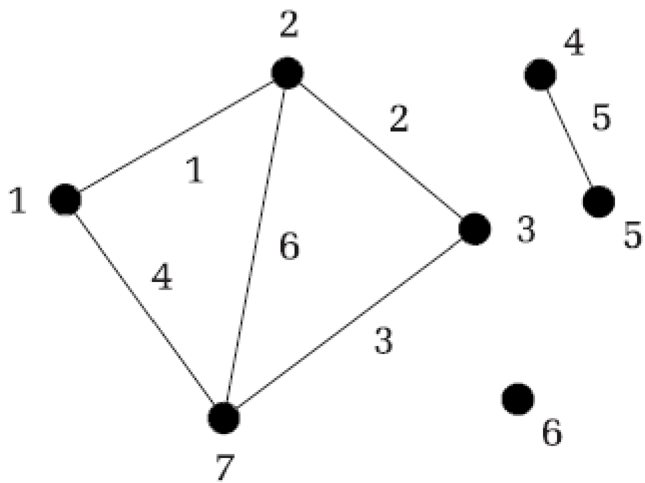
$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha a } j \text{ él nem illeszkedik az } i \text{ csúcsponthoz} \\ 1, & \text{ha a } j \text{ él kezdőpontja az } i \text{ csúcspont} \\ -1, & \text{ha a } j \text{ él végpontja az } i \text{ csúcspont} \end{cases}$$

Ha a j él az i csúcsponthoz illeszkedő hurokél, akkor is $b_{ij} = 1$ (megállapodás szerint). **Irányítatlan gráf** esetén a j él mindkét végpontjának megfelelő mátrixelem értéke 1.

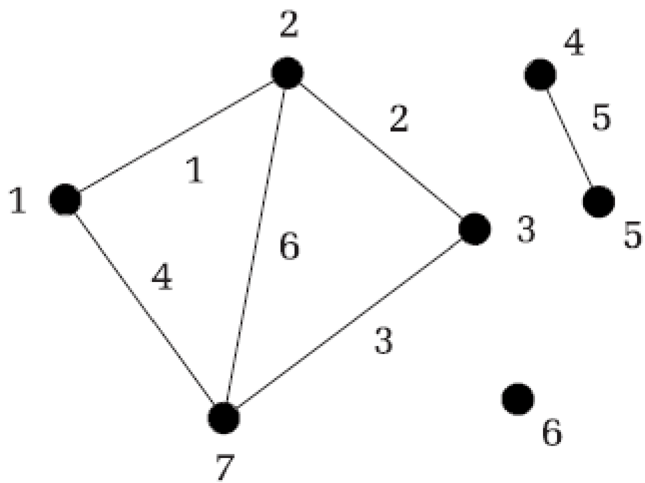

2
4
2
5
1
1
6
3
5
4
3
6
7



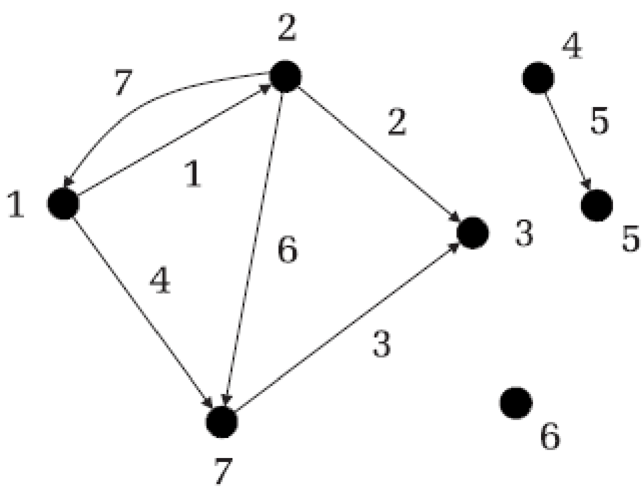
$$B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

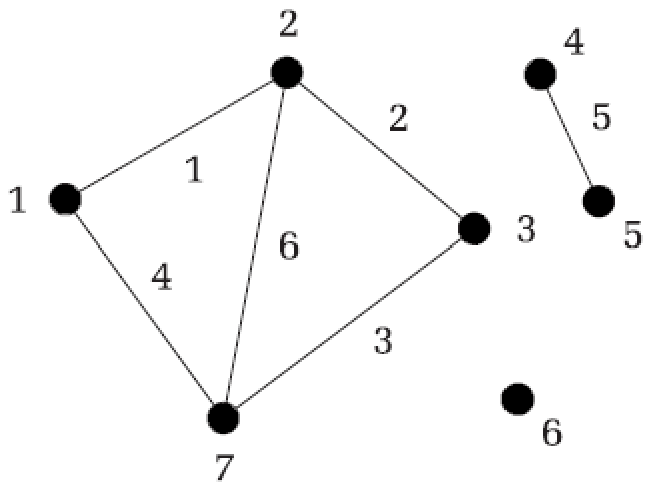


$$B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

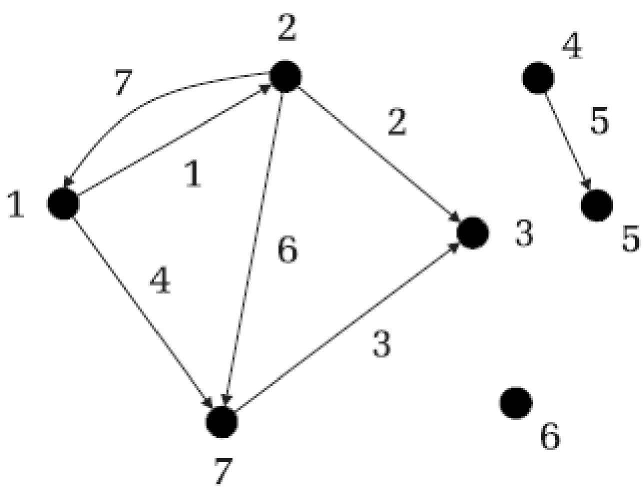


$$B(G)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

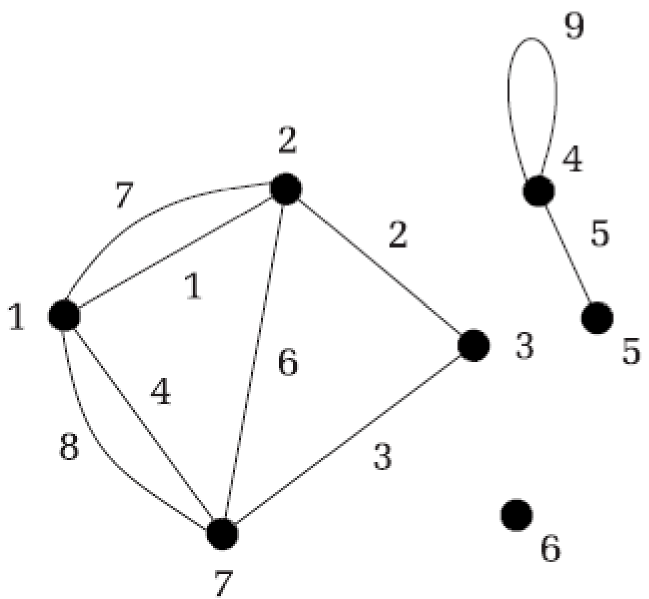


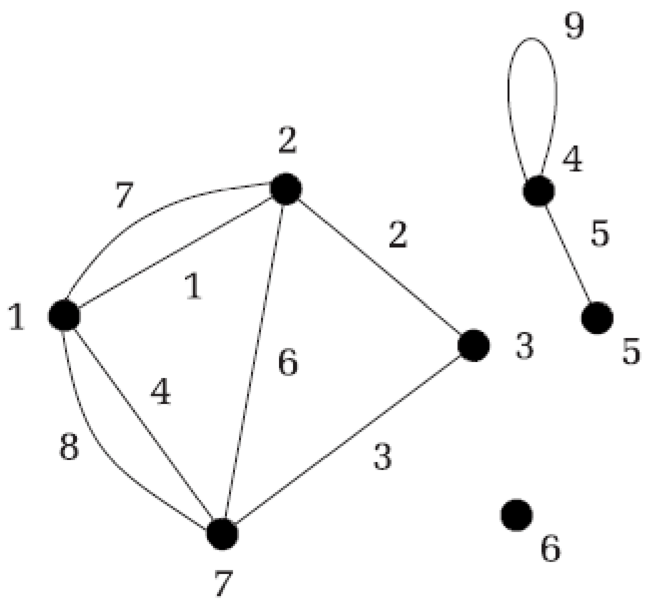


$$B(G)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

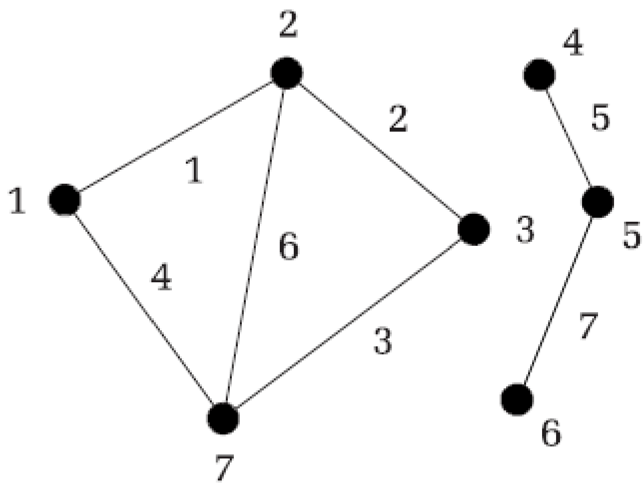


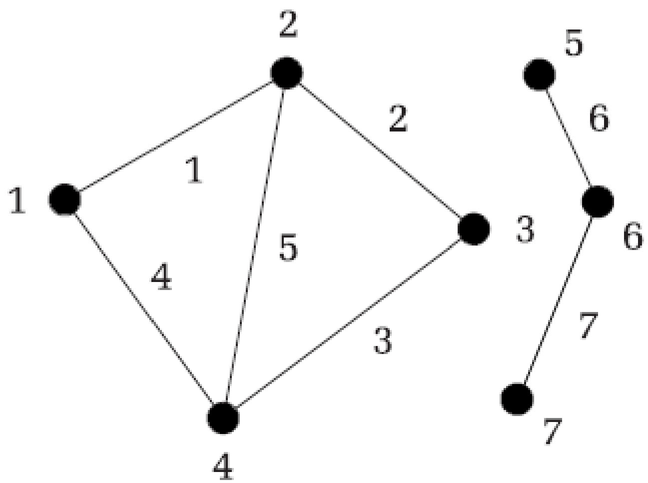
$$B(\overrightarrow{G})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

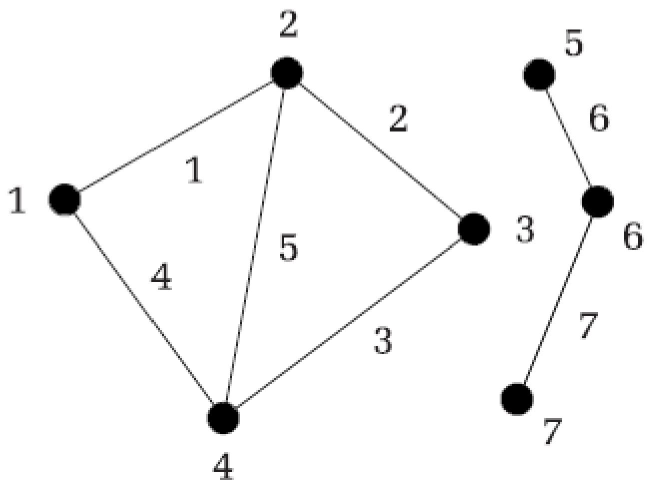

9
2
4
7
2
5
1
1
3
5
6
4
8
3
6
7



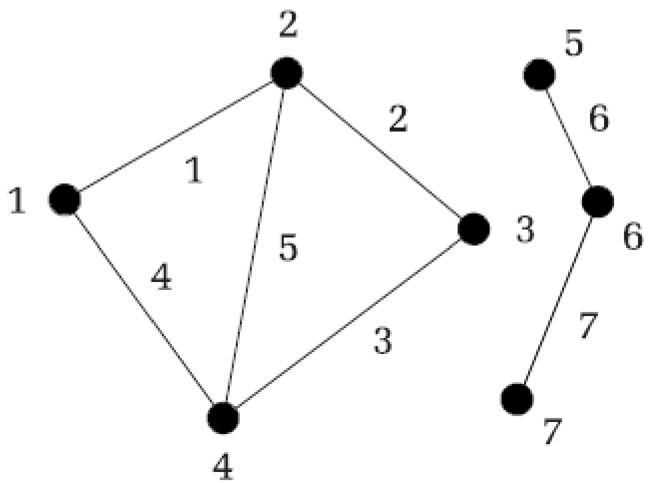
$$B(G)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$


2
4
5
2
1
1
3
6
5
4
7
3
6
7


2
5
2
6
1
1
3
5
6
4
7
3
7
4



$$B(G)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



$$B(G)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2.2 tétel:

Egy n csúcspontú, c darab összefüggő komponensből álló hurokélmentes gráf illeszkedési mátrixának rangja $n-c$.

2.2 tétel:

Egy n csúcspontú, c darab összefüggő komponensből álló hurokélmentes gráf illeszkedési mátrixának rangja $n-c$.

Bizonyítás:

Ha a G gráf komponenseinek száma nagyobb, mint 1, akkor a gráf pontjait és éleit komponensekként sorszámozva, a $\mathrm{B(G)}$ illeszkedési mátrix blokkdiagonális lesz. Egy n_i darab csúcspontot tartalmazó komponensre (n_i az i-edik komponens csúcspontjainak száma, ahol $i = 1, 2, \ldots, c$) tehát elég belátni, hogy a neki megfelelő blokk rangja $(n_i - 1)$ lesz.

2.2 tétel:

Egy n csúcspontú, c darab összefüggő komponensből álló hurokélmentes gráf illeszkedési mátrixának rangja $n-c$.

Bizonyítás:

Ha a G gráf komponenseinek száma nagyobb, mint 1, akkor a gráf pontjait és éleit komponensekként sorszámozva, a $\mathrm{B(G)}$ illeszkedési mátrix blokkdiagonális lesz. Egy n_i darab csúcspontot tartalmazó komponensre (n_i az i-edik komponens csúcspontjainak száma, ahol $i=1, 2, \ldots, c$) tehát elég belátni, hogy a neki megfelelő blokk rangja (n_i-1) lesz. Mivel a szóban forgó blokk n_i darab sort tartalmaz és sorainak összege a nulla vektor (hiszen minden élenek megfelelő oszlopban pontosan egy darab 1-es és egy darab (-1)-es van, a többi elem pedig nulla), világos, hogy a rang legfeljebb (n_i-1) lehet. Megmutatjuk, hogy pontosan (n_i-1) lesz.

Legyen F az i-edik komponensnek egy n_i csúcspontot és $(n_i - 1)$ élt tartalmazó feszítőfája. Legyen v_1 az F fa egyik levele és e_1 a hozzákapcsolódó él. Hasonlóképpen legyen v_2 egy levele az $\mathrm{F}/\{v_1\}$ fának és e_2 az az él, amelyik a fához kapcsolja ezt a levelet, és így tovább.

Legyen F az i-edik komponensnek egy n_i csúcspontot és $(n_i - 1)$ élt tartalmazó feszítőfája. Legyen v_1 az F fa egyik levele és e_1 a hozzákapcsolódó él. Hasonlóképpen legyen v_2 egy levele az $\mathrm{F}/\{v_1\}$ fának és e_2 az az él, amelyik a fához kapcsolja ezt a levelet, és így tovább. Ha a blokk sorait v_1, v_2, … sorrendben soroljuk fel, az oszlopait pedig az e_1, e_2, … élsorrendnek megfelelően helyezzük el, akkor egy olyan $n_i \times (n_i - 1)$ méretű részmátrixot kapunk, amelynek ha elhagyjuk az utolsó sorát, akkor az így nyert négyzetes mátrix főátlóra eső elemei ± 1 értékűek, főátló feletti elemei pedig mind nullák lesznek.

Legyen F az i-edik komponensnek egy n_i csúcspontot és $(n_i - 1)$ élt tartalmazó feszítőfája. Legyen v_1 az F fa egyik levele és e_1 a hozzákapcsolódó él. Hasonlóképpen legyen v_2 egy levele az $\mathrm{F}/\{v_1\}$ fának és e_2 az az él, amelyik a fához kapcsolja ezt a levelet, és így tovább. Ha a blokk sorait v_1, v_2, ... sorrendben soroljuk fel, az oszlopait pedig az e_1, e_2, ... élsorrendnek megfelelően helyezzük el, akkor egy olyan $n_i \times (n_i - 1)$ méretű részmátrixot kapunk, amelynek ha elhagyjuk az utolsó sorát, akkor az így nyert négyzetes mátrix főátlóra eső elemei ± 1 értékűek, főátló feletti elemei pedig mind nullák lesznek. Mivel találtunk $(n_i - 1)$ darab lineárisan független oszlopot, ezért a szóban forgó blokk rangja $(n_i - 1)$.

Legyen F az i-edik komponensnek egy n_i csúcspontot és $(n_i - 1)$ élt tartalmazó feszítőfája. Legyen v_1 az F fa egyik levele és e_1 a hozzákapcsolódó él. Hasonlóképpen legyen v_2 egy levele az $\mathrm{F}/\{v_1\}$ fának és e_2 az az él, amelyik a fához kapcsolja ezt a levelet, és így tovább. Ha a blokk sorait v_1, v_2, … sorrendben soroljuk fel, az oszlopait pedig az e_1, e_2, … élsorrendnek megfelelően helyezzük el, akkor egy olyan $n_i \times (n_i - 1)$ méretű részmátrixot kapunk, amelynek ha elhagyjuk az utolsó sorát, akkor az így nyert négyzetes mátrix főátlóra eső elemei ± 1 értékűek, főátló feletti elemei pedig mind nullák lesznek. Mivel találtunk $(n_i - 1)$ darab lineárisan független oszlopot, ezért a szóban forgó blokk rangja $(n_i - 1)$.

Összeadva komponensenként az így kapott értékeket, a

$$\sum_{i=1}^{c} (n_i - 1) = n_1 + n_2 + \ldots + n_c - c \;\; = n - c$$

eredményhez jutunk. □

2.3 tétel:

Egy n csúcspontú, összefüggő, hurokélmentes gráf illeszkedési mátrixában válasszunk ki $n-1$ darab oszlopot. Ezek akkor és csakis akkor lesznek lineárisan függetlenek, ha a megfelelő $n-1$ darab él a gráf egy fáját alkotja.

2.3 tétel:

Egy n csúcspontú, összefüggő, hurokélmentes gráf illeszkedési mátrixában válasszunk ki $n-1$ darab oszlopot. Ezek akkor és csakis akkor lesznek lineárisan függetlenek, ha a megfelelő $n-1$ darab él a gráf egy fáját alkotja.

Bizonyítás:

Az előző tétel bizonyításakor beláttuk, hogy a fát alkotó éleknek megfelelő oszlopok lineárisan függetlenek. Most e mellé még megmutatjuk, hogy bármely kör esetén az ezt alkotó éleknek megfelelő oszlopok lineárisan összefüggők. Nem nehéz átlátni, hogy ha egy kör pontjainak sorait és éleinek oszlopait egymás után soroljuk fel az illeszkedési mátrixban, és ha ezeket ráadásul a körön való megjelenésük szerinti sorrendben sorszámozzuk, akkor a körnek megfelelő diagonális blokk az alábbi alakú lesz (p a kör hossza):

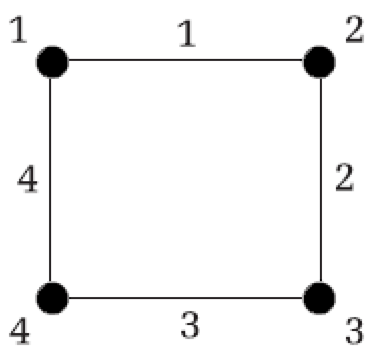
$$\begin{array}{cccc}
x_1 & 0 & \dots & -x_p \\
-x_1 & x_2 & \dots & 0 \\
0 & -x_2 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & x_p
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
x_1 & 0 & \dots & -x_p \\
-x_1 & x_2 & \dots & 0 \\
0 & -x_2 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & x_p
\end{array}$$

ahol az x_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ értékek mindegyike vagy 1, vagy (-1). Az ilyen alakú mátrix oszlopai lineárisan összefüggők, mert bármelyik oszlopot fel lehet írni a többi oszlop lineáris kombinációjaként. □

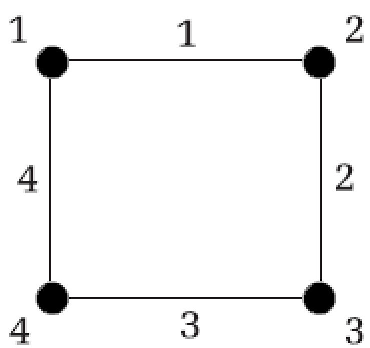
$$\begin{matrix} x_1 & 0 & \dots & -x_p \\ -x_1 & x_2 & \dots & 0 \\ 0 & -x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_p \end{matrix}$$

ahol az x_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ értékek mindegyike vagy 1, vagy (-1). Az ilyen alakú mátrix oszlopai lineárisan összefüggők, mert bármelyik oszlopot fel lehet írni a többi oszlop lineáris kombinációjaként. $\square$



$$\begin{matrix} x_1 & 0 & \dots & -x_p \\ -x_1 & x_2 & \dots & 0 \\ 0 & -x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_p \end{matrix}$$

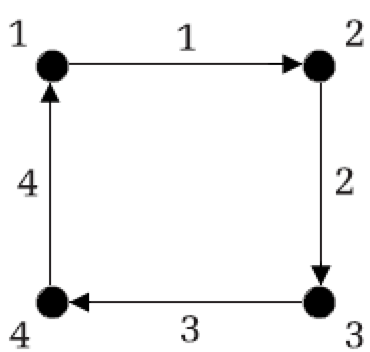
ahol az x_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ értékek mindegyike vagy 1, vagy (-1). Az ilyen alakú mátrix oszlopai lineárisan összefüggők, mert bármelyik oszlopot fel lehet írni a többi oszlop lineáris kombinációjaként. □



$$B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

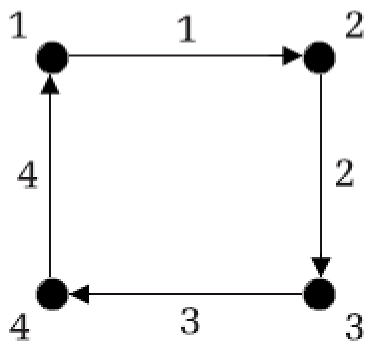
$$\begin{array}{cccc}
x_1 & 0 & \ldots & -x_p \\
-x_1 & x_2 & \ldots & 0 \\
0 & -x_2 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & x_p
\end{array}$$

ahol az x_i $(i = 1, 2,\ldots, p)$ értékek mindegyike vagy 1, vagy (-1). Az ilyen alakú mátrix oszlopai lineárisan összefüggők, mert bármelyik oszlopot fel lehet írni a többi oszlop lineáris kombinációjaként. □



$$
\begin{matrix}
x_1 & 0 & \dots & -x_p \\
-x_1 & x_2 & \dots & 0 \\
0 & -x_2 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & x_p
\end{matrix}
$$

ahol az x_i $(i = 1, 2, \dots, p)$ értékek mindegyike vagy 1, vagy (-1). Az ilyen alakú mátrix oszlopai lineárisan összefüggők, mert bármelyik oszlopot fel lehet írni a többi oszlop lineáris kombinációjaként. □

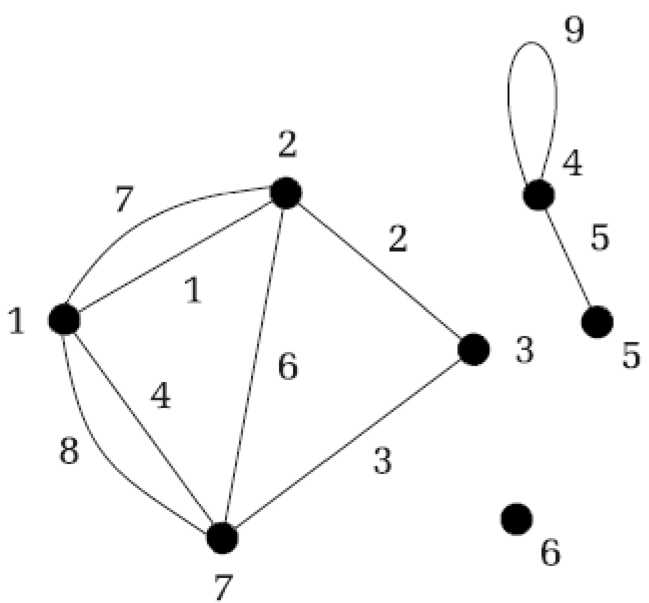


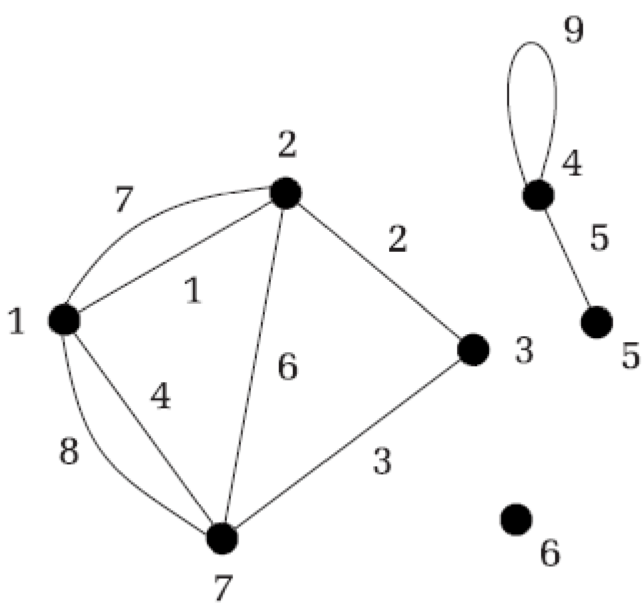
$$
B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

5) Körmátrix

Legyen a G gráf csúcsainak száma n, éleinek száma m. Válasszunk a gráf n_c darab körének egy körbejárási irányt (pl. óramutató járásával ellentétes). A $\mathrm{C(G)}$ $n_c \times m$ méretű **körmátrix** elemeit az alábbi módon értelmezzük:

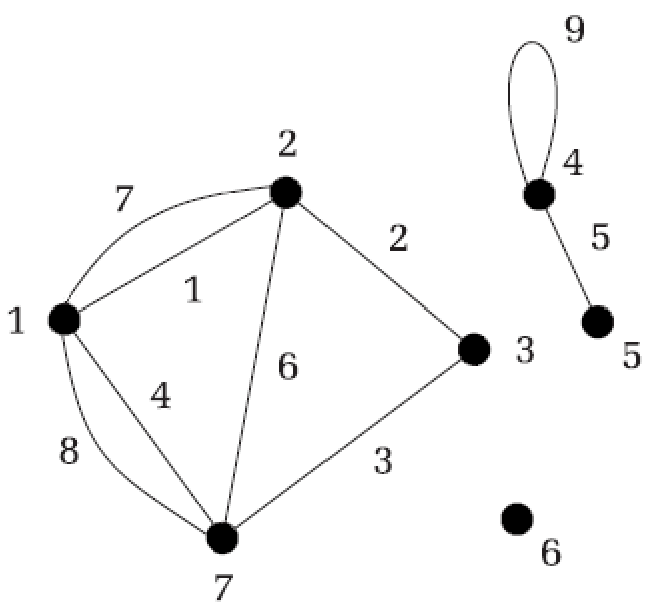
$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha a } j \text{ él nem eleme az } i \text{ körnek} \\ 1, & \text{ha a } j \text{ él eleme az } i \text{ körnek, és irányítása megegyezik a körbejárási iránnyal} \\ -1, & \text{ha a } j \text{ él eleme az } i \text{ körnek, és irányítása ellentétes a körbejárási iránnyal} \end{cases}$$


9
2
4
7
2
5
1
1
3
5
6
4
8
3
6
7



1: (1, 7)	7: (8, 3, 2, 1)
2: (8, 4)	8: (4, 6, 7)
3: (4, 6, 1)	9: (4, 3, 2, 7)
4: (6, 3, 2)	10: (8, 6, 7)
5: (4, 3, 2, 1)	11: (8, 3, 2, 7)
6: (8, 6, 1)	12: (9)

A gráf körei mint éllisták
(a körbejárási irány az óramutató járásával ellentétes)



$$C(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1: (1, 7)
2: (8, 4)
3: (4, 6, 1)
4: (6, 3, 2)
5: (4, 3, 2, 1)
6: (8, 6, 1)
7: (8, 3, 2, 1)
8: (4, 6, 7)
9: (4, 3, 2, 7)
10: (8, 6, 7)
11: (8, 3, 2, 7)
12: (9)

A gráf körei mint éllisták

(a körbejárási irány az óramutató járásával ellentétes)

2.4 tétel:

Egy n csúcspontú és m élű összefüggő gráf körmátrixának rangja $(m - n + 1)$.

2.4 tétel:

Egy n csúcspontú és m élű összefüggő gráf körmátrixának rangja $(m - n + 1)$.

2.5 tétel:

Egy n csúcspontú és m élű összefüggő gráf körmátrixának $(m - n + 1)$ darab különböző oszlopa akkor és csakis akkor lineárisan független, ha a nekik megfelelő élek a gráf egy feszítőfájának komplementerét alkotják.

2.4 tétel:

Egy n csúcspontú és m élű összefüggő gráf körmátrixának rangja $(m - n + 1)$.

2.5 tétel:

Egy n csúcspontú és m élű összefüggő gráf körmátrixának $(m - n + 1)$ darab különböző oszlopa akkor és csakis akkor lineárisan független, ha a nekik megfelelő élek a gráf egy feszítőfájának komplementerét alkotják.

Megjegyzés: A feszítőfa $(n - 1)$ élű, a komplementere pedig éppen $(m - n + 1)$ élt tartalmaz.

6) Vágásmátrix

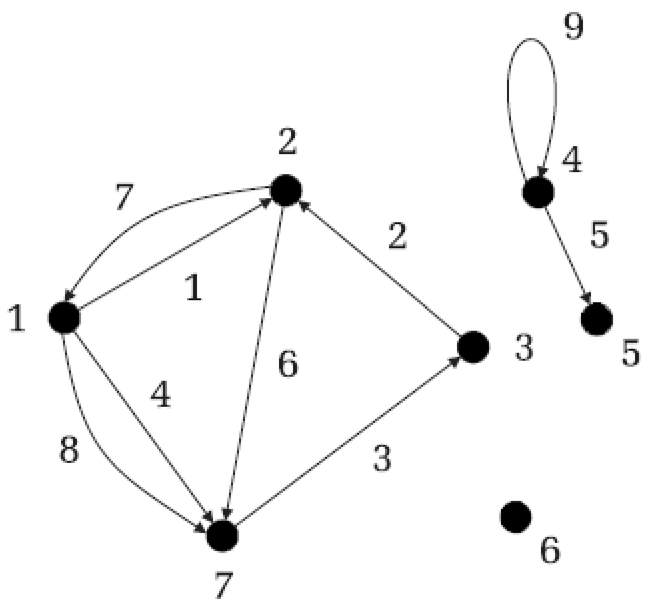
A körmátrixhoz hasonlóan definiálható a $Q(G)$ vágásmátrix. Egy vágást alkotó élek mind a gráf ugyanazon komponensében vannak, szétválasztva a komponens pontjait két nem üres V_1 és V_2 diszjunkt részhalmazra. Ha egy adott él kezdőpontja V_1-ben, a végpontja pedig V_2-ben van, akkor azt mondjuk, hogy a szóban forgó él irányítása megegyezik a vágás irányításával.

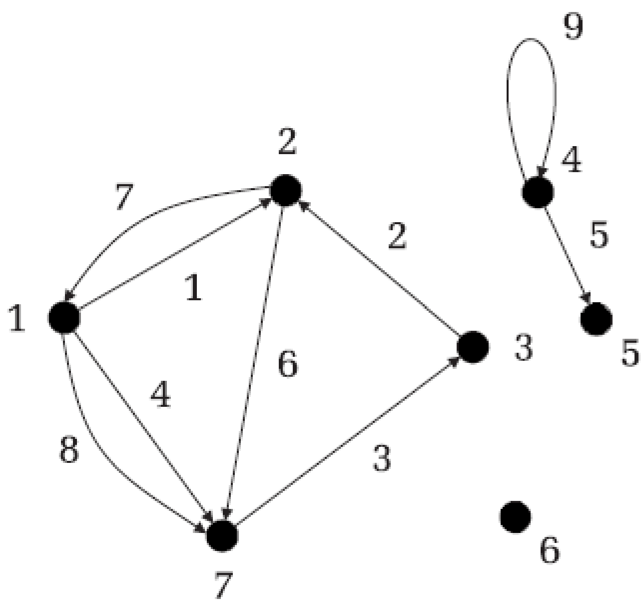
6) Vágásmátrix

A körmátrixhoz hasonlóan definiálható a $Q(G)$ vágásmátrix. Egy vágást alkotó élek mind a gráf ugyanazon komponensében vannak, szétválasztva a komponens pontjait két nem üres V_1 és V_2 diszjunkt részhalmazra. Ha egy adott él kezdőpontja V_1-ben, a végpontja pedig V_2-ben van, akkor azt mondjuk, hogy a szóban forgó él irányítása megegyezik a vágás irányításával.

Legyen a G gráf csúcsainak száma n, éleinek száma m. Válasszunk a gráf n_q darab vágásának egy irányítást (pl. V_1-ből V_2-be). A $Q(G)$ $n_q \times m$ méretű **vágásmátrix** elemeit az alábbi módon értelmezzük:

$$q_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha a } j \text{ él nem eleme az } i \text{ vágásnak} \\ 1, & \text{ha a } j \text{ él eleme az } i \text{ vágásnak, és irányítása megegyezik a vágás irányításával} \\ -1, & \text{ha a } j \text{ él eleme az } i \text{ vágásnak, és irányítása ellentétes a vágás irányításával} \end{cases}$$


9
2
4
7
2
5
1
1
3
5
6
4
3
8
6
7



$1: \{1\} \cup \{2, 3, 7\}; \{1, 4, 7, 8\}$

$2: \{1, 3, 7\} \cup \{2\}; \{1, 2, 6, 7\}$

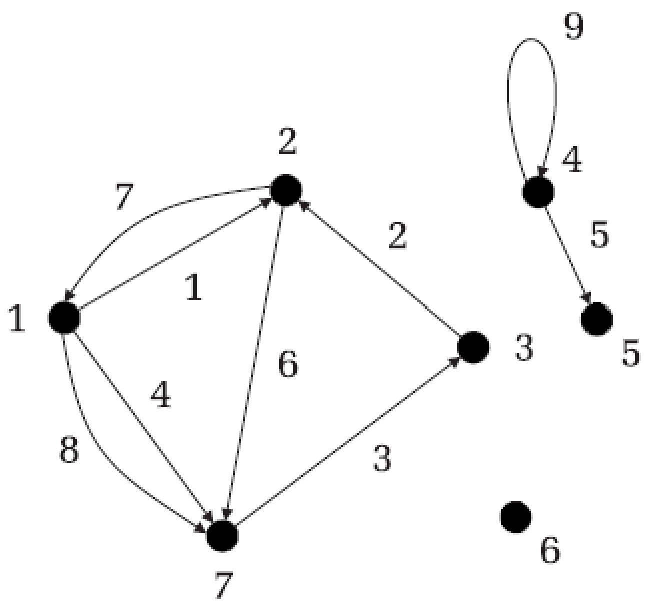
$3: \{1, 2, 7\} \cup \{3\}; \{2, 3\}$

$4: \{1, 2, 3\} \cup \{7\}; \{3, 4, 6, 8\}$

$5: \{4\} \cup \{5\}; \{5\}$

A gráf vágásai mint ponthalmazpár és mint élhalmaz

(a vágások irányítása az első halmazból a második felé van)



$$Q(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1: $\{1\} \cup \{2, 3, 7\}$; $\{1, 4, 7, 8\}$
2: $\{1, 3, 7\} \cup \{2\}$; $\{1, 2, 6, 7\}$
3: $\{1, 2, 7\} \cup \{3\}$; $\{2, 3\}$
4: $\{1, 2, 3\} \cup \{7\}$; $\{3, 4, 6, 8\}$
5: $\{4\} \cup \{5\}$; $\{5\}$

A gráf vágásai mint ponthalmazpár és mint élhalmaz

(a vágások irányítása az első halmazból a második felé van)

2.6 tétel:

Egy n csúcspontú, c darab összefüggő komponensből álló gráf vágásmátrixának rangja $(n-c)$.

2.6 tétel:

Egy n csúcspontú, c darab összefüggő komponensből álló gráf vágásmátrixának rangja $(n-c)$.

2.7 tétel:

Egy n csúcspontú összefüggő gráf vágásmátrixában válasszunk ki $(n-1)$ darab oszlopot. Ezek akkor és csakis akkor lesznek lineárisan függetlenek, ha a nekik megfelelő élek a gráf egy fáját alkotják.

Megjegyzések:

Gráfalgoritmusok implementálásánál nem tanácsos az illeszkedési, kör- és vágásmátrixokat használni mint gráfreprezentációkat. Az utóbbi kettő nem is alkalmas a gráfok ábrázolására, hiszen nem izomorf gráfoknak lehet azonos kör-, illetve vágásmátrixa.

Megjegyzések:

Gráfalgoritmusok implementálásánál nem tanácsos az illeszkedési, kör- és vágásmátrixokat használni mint gráfreprezentációkat. Az utóbbi kettő nem is alkalmas a gráfok ábrázolására, hiszen nem izomorf gráfoknak lehet azonos kör-, illetve vágásmátrixa.

Fontos gyakorlati alkalmazásra lelnek az illeszkedési és körmátrixok az elektromos hálózatok tanulmányozásában. Ha egy elektromos hálózat minden alkatrésze kétpólusú, akkor a hálózat kapcsolási rajza természetes módon megadható egy G irányított gráffal, ahol az élek irányítása a mérőiránynak felel meg.

Megjegyzések:

Gráfalgoritmusok implementálásánál nem tanácsos az illeszkedési, kör- és vágásmátrixokat használni mint gráfreprezentációkat. Az utóbbi kettő nem is alkalmas a gráfok ábrázolására, hiszen nem izomorf gráfoknak lehet azonos kör-, illetve vágásmátrixa.

Fontos gyakorlati alkalmazásra lelnek az illeszkedési és körmátrixok az elektromos hálózatok tanulmányozásában. Ha egy elektromos hálózat minden alkatrésze kétpólusú, akkor a hálózat kapcsolási rajza természetes módon megadható egy G irányított gráffal, ahol az élek irányítása a mérőiránynak felel meg.

Ez esetben a KIRCHHOFF-féle áramegyenletek tömören $\mathrm{B}i = 0$ alakba írhatók, ahol az i vektor elemei az alkatrészeken átfolyó áramértékek.

Megjegyzések:

Gráfalgoritmusok implementálásánál nem tanácsos az illeszkedési, kör- és vágásmátrixokat használni mint gráfreprezentációkat. Az utóbbi kettő nem is alkalmas a gráfok ábrázolására, hiszen nem izomorf gráfoknak lehet azonos kör-, illetve vágásmátrixa.

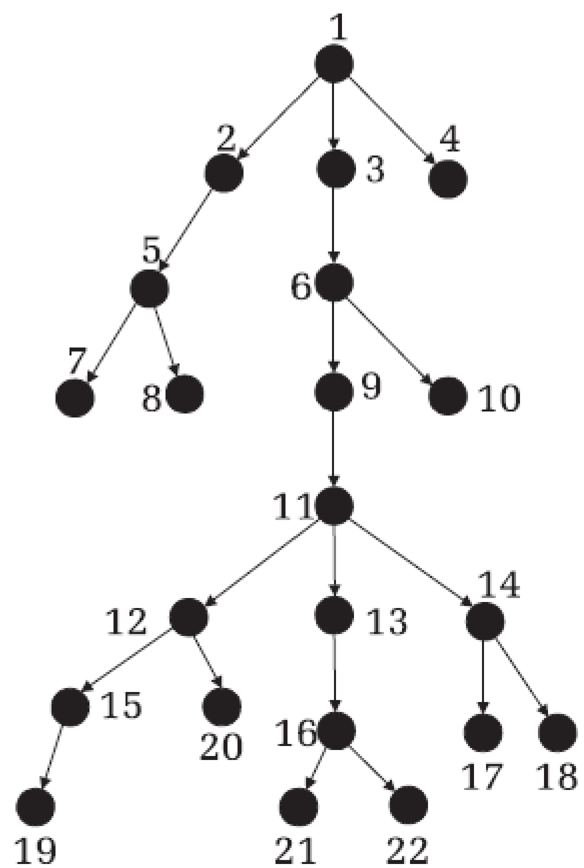
Fontos gyakorlati alkalmazásra lelnek az illeszkedési és körmátrixok az elektromos hálózatok tanulmányozásában. Ha egy elektromos hálózat minden alkatrésze kétpólusú, akkor a hálózat kapcsolási rajza természetes módon megadható egy G irányított gráffal, ahol az élek irányítása a mérőiránynak felel meg.

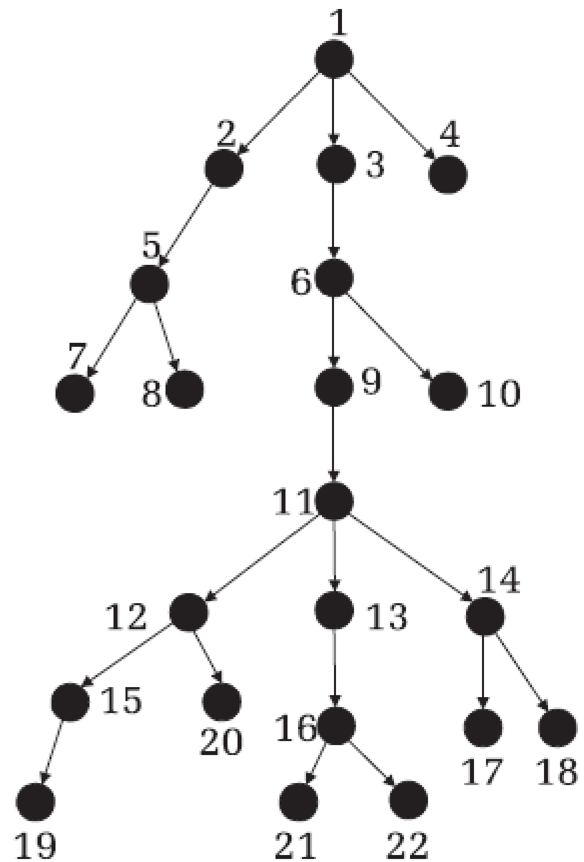
Ez esetben a KIRCHHOFF-féle áramegyenletek tömören $\mathrm{B}i = 0$ alakba írhatók, ahol az i vektor elemei az alkatrészeken átfolyó áramértékek.

Hasonlóképpen a $\mathrm{C}u = 0$ egyenlet a KIRCHHOFF-féle feszültségegyenleteknek felel meg, ahol az u vektor elemei az alkatrészeken átfolyó feszültségértékeknek felelnek meg.

7) Gyökeres fák ábrázolása

Egy n csúcspontú gyökeres fa ábrázolható egy `apa[1..n]` tömb segítségével. Minden csúcspontnak tároljuk az apa-csúcspontját. Mivel a gyökérnek nincs apja, ezért az `apa[gyökér]` tömb értéket nullára állíthatjuk.


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22



0	1	1	1	2	3	5	5	6	6	9	11	11	11	12	13	14	14	15	12	16	16
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22