DISZKRÉT MATEMATIKA I.

Szalay László
Selye János Egyetem
Soproni Egyetem

e-mail: szalayl@ujs.sk, szalay.laszlo@uni-sopron.hu

A Diszkrét matematika tárgya (by Wikipédia)

“A diszkrét matematika a matematika azon része, amelyben diszkrét, jól meghatározott értékekkel végzünk műveleteket, nem pedig folytonos értékekkel.”

“A diszkrét matematika által vizsgált objektumok lehetnek végesek és végtelenek. A véges matematika kifejezést a diszkrét matematika azon részére értjűk, amely véges objektumokkal foglalkozik.”

A Diszkrét matematika megjelenik

- *Gráfelmélet* (DM2)
- **Halmazelmélet** (DM1)
- **Kombinatorika** (DM1)
- **Logika** (DM1)
- Algoritmusok
- Játékelmélet
- $\vdots$

Rejtvény: milyen objektumot ír le?

1. A Szellem manó.
2. Minden manónak van pontosan egy metája, ami szintén manó.
3. A Szellem egyik manónak sem metája.
4. Különböző manóknak különböző a metája.
5. Ha a Szellem rendelkezik X-szel, s minden manó továbbadja X-et a metájának, akkor minden manó megkapja X-et.

Megoldás

Szellem = 0, manó = természetes szám, meta = rákövetkező

1. A Szellem manó.
2. Minden manónak van pontosan egy metája, ami szintén manó.
3. A Szellem egyik manónak sem metája.
4. Különböző manóknak különböző a metája.
5. Ha a Szellem rendelkezik X-szel, s minden manó továbbadja X-et a metájának, akkor minden manó megkapja X-et.

1. $0 \in \mathbb{N}$.

   A Szellem manó.

2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists!\ r(n)$, hogy $r(n) \in \mathbb{N}$.

   Minden manónak van pontosan egy metája, ami szintén manó.

3. $\nexists n \in \mathbb{N}$, hogy $r(n) = 0$.

   A Szellem egyik manónak sem metája.

4. Ha $k \neq n$, akkor $r(k) \neq r(n)$.

   Különböző manóknak különböző a metája.

5. Ha $X \subseteq \mathbb{N}$, $0 \in X$, s $\forall n \in X$ esetén $r(n) \in X$, akkor $X = \mathbb{N}$.

   Ha a Szellem rendelkezik X-szel, és minden manó továbbadja X-et a metájának, akkor minden manó megkapja X-et.

PEANO axiómák
Természetes számok ($\mathbb{N}$) axiómái

1. $0 \in \mathbb{N}$.

2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists!\ r(n)$, hogy $r(n) \in \mathbb{N}$.

3. $\nexists n \in \mathbb{N}$, hogy $r(n) = 0$.

4. Ha $k \neq n$, akkor $r(k) \neq r(n)$.

5. Ha $X \subseteq \mathbb{N}$, $0 \in X$, és $\forall n \in X$ esetén $r(n) \in X$, akkor $X = \mathbb{N}$.

Teljes indukció axiómája

- Ha $X \subseteq \mathbb{N}$, $0 \in X$, és $\forall n \in X$ esetén $r(n) \in X$, akkor $X = \mathbb{N}$

Szokásos megfogalmazás:

Legyen adott egy állítás, amely minden természetes számra (esetleg egy "idő után") értelmezve van.

Továbbá teljesül, hogy

- 0-ra igaz az állítás (módosítás: $n_0 \in \mathbb{N}$ esetén igaz)
- ha n-re igaz, akkor $n+1$ esetén is igaz (indukciós hipotézis)

Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén ($\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$ esetén) igaz az állítás.

Példa

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}; \qquad (n\geq 1)$$

kezdet: Ha $n=1$, akkor $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1}$, OK.

hipotézis: Tegyük fel, hogy az állítás teljesül n-re, azaz

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

befejezés: Igazoljuk a rákövetkezőre, azaz $(n+1)$-re:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}
&\overbrace{=}^{in.hip.} \frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}.
\end{aligned}
$$

Mi a hiba?

$$1+2+\cdots+n=\frac{n^2+n+2}{2} \qquad (n \geq 1).$$

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+n+(n+1) &= \frac{n^2+n+2}{2}+(n+1)\\ &= \frac{(n^2+n+2)+(2n+2)}{2}\\ &= \frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2},\end{aligned}$$

de $1+2=3 \neq \frac{2^2+2+2}{2}=4$?

Újabb példa

$$n^2 < 2^n; \qquad (n \geq 5)$$

kezdet: Ha $n = 5$, akkor $5^2 = 25 \ < \ 32 = 2^5$, OK.

hipotézis: Tegyük fel, hogy az állítás teljesül n-re, azaz

$$n^2 < 2^n$$

befejezés: Igazoljuk a rákövetkezőre, azaz $(n+1)$-re:

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \underset{\uparrow}{<} 2n^2 \ \underset{\Uparrow}{<} \ 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

$$
\begin{array}{rcl}
 & \Uparrow & \\
n^2 + 2n + 1 & < & 2n^2 \\
 & \Updownarrow & \\
2n + 1 & < & n^2 \\
 & \Updownarrow & \\
2 & < & n^2 - 2n + 1 \\
 & \Updownarrow & \\
2 & < & (n-1)^2
\end{array}
$$

teljesül, ha $n \geq 5$ (már $n \geq 2$ esetén is).