Függvények határértéke

Definíció. *Az $f(x)$ függvénynek az x_0 helyen a határértéke A, ha az összes olyan (x_n) sorozatra, ahol $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ teljesül*

$$f(x_n) \to A$$

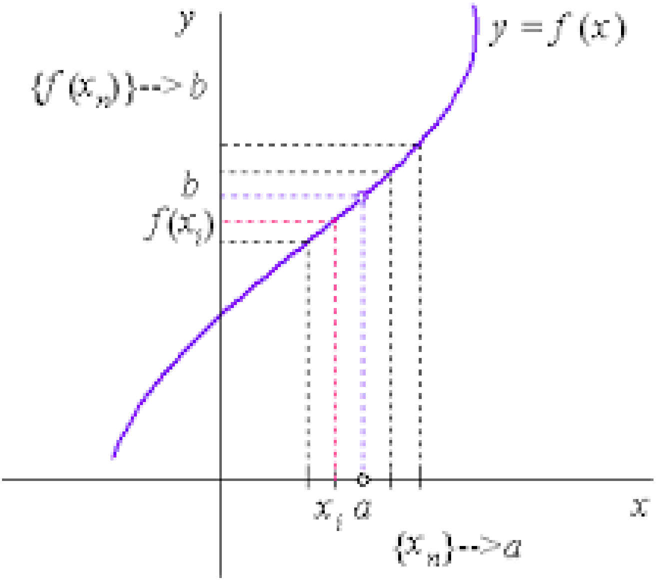
és ezt így jelöljük

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

("limesz, ha x tart x_0-hoz, $f(x)$ egyenlő A-val")
Más szóval, ha az (x_n) sorozat határértéke x_0 akkor az ezen pontokban vett $(f(x_n))$ függvényértékek sorozatának a határértéke A.
Az x_0 és az A bármelyike lehet valós szám, $+\infty$ vagy $-\infty$.
A definíció arról szól, hogy az $f(x)$ függvény hogy viselkedik az x_0 közelében.

Példa

$$\lim_{x \to 1} 2x + 3 = ?$$

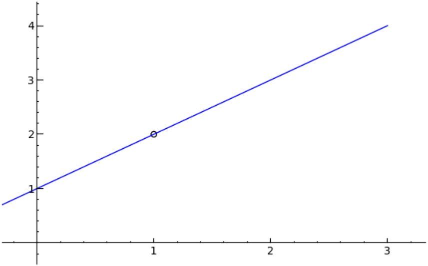


y
$y = f(x)$
$\{f(x_n)\}$--> b
b
$f(x_1)$
x_1 a
x
$\{x_n\}$--> a

Példa

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = ?$$

Ha x közelít az 1-hez, akkor $x^2 - 1$ közelít a 0-hoz. **Vigyázat!** Ekkor ugyanis az $x - 1$ is közelít a 0-hoz. A $\frac{0}{0}$ tört nincs értelmezve.



$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1).(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2.$$

Példa

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2x-8}{4x^2-5x+6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2x-8}{4x^2-5x+6} = \frac{3}{4}.$$

Tétel. *Ha az $f(x)$, $g(x)$ függvényeknek van az x_0 pontban véges határértékük, akkor a két függvény összegének, különbségének, szorzatának és hányadosának is van ott véges határértéke (feltéve, hogy a nevező határértéke az x_0-ban nem 0), ha*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = B,$$

akkor

1. $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = A + B,$
2. $\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = A - B,$
3. $\lim_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = A.B,$
4. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$

Példa

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} =?$$

Az $x=2$ esetén a számláló is és a nevező is kinullázódik, a határérték ún. $\frac{0}{0}$ alakú. Felhasználhatjuk a következő tételt.

Ha egy polinomba behelyettesítve az α számot 0-át kapunk, akkor az a polinom osztható $(x-\alpha)$-val.

Esetünkben ez azt jelenti, hogy

$$\frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \frac{(x-2).valami}{(x-2).masvalami}.$$

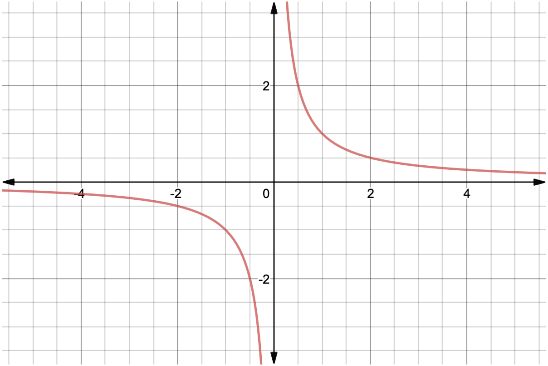
Tehát

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2).(x+3)}{(x-2).(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x+2} = \frac{2+3}{2+2} = \frac{5}{4}.$$

Példa

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = ?$$

Ez a határérték nem létezik. Jobbról, pozitív számokon keresztül közelítve a 0-hoz egyre nagyobb és nagyobb értékeket kapunk, balról, a negatív sz ámokon keresztül közelítve a 0-hoz pedig egyre kisebb és kisebb értékeket kapunk (lásd az alábbi ábra.)



A függvények határértékére is érvényes:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

ami az alábbi séma szerint használható

$$\lim_{\boxed{}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\boxed{}}\right)^{\boxed{}}=e. \tag{1}$$

Az $x\to+\infty$ esetben $\frac{1}{x}\to 0$, ezért a fenti határértékek más alakja

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Az összes ugyanazt jelenti, az 1-hez hozzáadunk 0-hoz tartó kifejezést majd ezt az összeget a 0-hoz tartó kifejezés fordított értékére emeljük. Használata:

$$\lim_{\boxed{}\to 0}\left(1+\boxed{}\right)^{\frac{1}{\boxed{}}} \tag{2}$$

Példa

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{8}{x}\right)^x=?$$

Az (1) szerint eljárva

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{8}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1\boxed{-\frac{8}{x}}\right)^{\boxed{-\frac{x}{8}}}\right]^{-\frac{8}{x}.x}=e^{-8}.$$

Példa

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1+2x} = ?$$

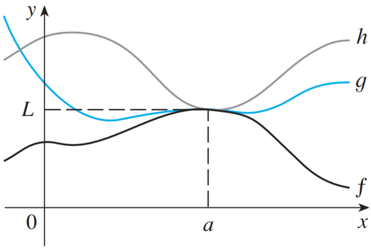
Mivel

$$\sqrt[x]{1+2x} = (1+2x)^{\frac{1}{x}}$$

ezért a (2) szerint eljárva

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1+2x} = \lim_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \left[\left(1+\boxed{2x}\right)^{\frac{1}{\boxed{2x}}} \right]^{2x.\frac{1}{x}} = e^2.$$

Rendőrszabály(Sandwich Theorem)



Az a pont valamilyen környezetében az összes $x \neq a$ számra teljesüljön

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Ha az f és g függvények határértéke létezik az a-ban és

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L,$$

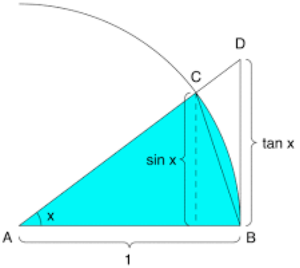
$$\textit{akkor} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = L.$$

E tétel szerint igazolható a következő nevezetes határérték:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ami az alábbi séma szerint használható

$$\lim_{\boxed{} \to 0} \frac{\sin \boxed{}}{\boxed{}} = 1 \tag{3}$$



Ez a határérték azt fejezi ki, hogy 0-hoz közeli "kis" szög esetén a szaggatott vonallal jelzett szakasz hossza, a C és D pontokat összekötő körív hossz és a BD szakasz hossza megközelítőleg megegyeznek.

Példa

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{3x} = ?$$

Mivel $x \to 0$ esetben $5x \to 0$, ezért a fentiek alapján $\frac{\sin 5x}{5x}$ viselkedéséről tudnánk valamit mondani. Ezt felhasználva

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{3x} \frac{5x}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin \boxed{5x}}{\boxed{5x}} \frac{5x}{3x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin \boxed{5x}}{\boxed{5x}} \frac{5}{3} = 1.\frac{5}{3} = \frac{5}{3}.$$