7. Feladatok

1. Formalizáljuk a következő ítéletkalkulusbeli ítéleteket:
- (a) Esik az eső, vagy valaki nyitva felejtette a zuhanyt.
- (b) Ha köd van éjszaka, akkor vagy otthon maradok, vagy hívok egy taxit.
- (c) Kati sem a zöld, sem a lila színt nem szereti.
- (d) Ha fáradt vagy éhes vagyok, nem tudok tanulni.
- (e) Ha a szakszervezet vagy a vállalatvezetés makacs, a sztrájk akkor és csak akkor állítható meg, ha a kormány beavatkozik, de nem küld katonaságot az üzembe.

2. Tekintsük a következő ítéleteket:

N : „Ma süt a nap."
E : „Ma esik az eső."
H : „Ma havazik."
B : „Tegnap borult volt az ég."

Fordítsuk le az alábbi összetett ítéleteket köznapi magyar nyelvre:
- (a) $N \to (\neg(E \wedge H))$,
- (b) $B \leftrightarrow N$,
- (c) $B \wedge (N \vee E)$,
- (d) $(B \to E) \vee N$,
- (e) $N \leftrightarrow ((E \wedge (\neg H)) \vee B)$,
- (f) $(N \leftrightarrow E) \wedge ((\neg H) \vee B)$.

3. Írjuk fel az alábbi formulák igazságtáblázatát:
- (a) $A \to (A \to B)$,
- (b) $A \to (\neg(B \wedge C))$,
- (c) $(A \to B) \leftrightarrow ((\neg A) \vee B)$,
- (d) $(A \to (B \wedge C)) \vee ((\neg A) \wedge B)$,
- (e) $(C \wedge D) \to (A \to ((\neg B) \vee D))$.

4. A megadott igazságértékek ismeretében mit mondhatunk az alábbi formulák igazságértékéről? (Ha az adott információ elegendő az igazságérték meghatározására, akkor állapítsuk meg az igazságértéket; ellenkező esetben mutassunk rá, hogy mindkét igazságérték előfordulhat.)
- (a) $A \leftrightarrow (\neg B)$, illetve $(\neg A) \leftrightarrow B$, ha $A \leftrightarrow B$ értéke **i**;
- (b) $A \leftrightarrow (\neg B)$, illetve $(\neg A) \leftrightarrow B$, ha $A \leftrightarrow B$ értéke **h**;
- (c) $(A \to B) \to C$, ha B értéke **i**;
- (d) $(A \to B) \to ((\neg B) \to (\neg A))$, ha B értéke **i**;
- (e) $(A \wedge B) \to (A \vee D)$, ha A értéke **i**, D értéke pedig **h**;
- (f) $((\neg A) \wedge B) \leftrightarrow (A \vee B)$, ha $A \to B$ értéke **i**.

5. Döntsük el, igaz-e az 1. feladat (e) részében szereplő állítás, ha igaznak fogadjuk el az alábbi feltételeket.
- (a) A szakszervezet makacs, a vállalatvezetés nem. A sztrájk megállítható, a kormány beavatkozik, s katonaságot küld az üzembe.
- (b) Ha a kormány beavatkozik, akkor katonaságot küld az üzembe. Ha a kormány katonaságot küld az üzembe, akkor a sztrájk nem állítható meg. A sztrájk megállítható. A vállalatvezetés makacs.

6. Fogadjuk el igaznak a következő ítéleteket:

Kati csak akkor megy el kirándulni, ha Pista és Laci is elmegy kirándulni.
Ha Pista nem megy el kirándulni, akkor Kati elmegy kirándulni.
Laci nem megy el kirándulni.
Ha a tanár lekési a buszt, elmarad a kirándulás.

Mit mondhatunk ekkor az alábbi ítélet igazságértékéről:

Nem marad el a kirándulás, de Pista csak akkor megy el kirándulni, ha Kati vagy Laci elmegy kirándulni.

7. Bizonyítsuk be, hogy
- (a) $A \to (B \to A) \equiv (\neg A) \to (A \to B)$,
- (b) $(A \to B) \to B \equiv A \vee B$,
- (c) $A \to (B \vee C) \equiv (A \to B) \vee (A \to C)$,
- (d) $(A \to C) \wedge (B \to C) \equiv (A \vee B) \to C$,
- (e) $A \to B \equiv A \to (A \wedge B)$.

8. Döntsük el, logikailag ekvivalens-e az alábbi két ítélet:

Ha nem teljesül az, hogy ha taxival megyek, akkor elérem a vonatot, akkor ha eltéved a taxis, akkor nem érem el a vonatot.
Ha a taxit akkor és csak akkor állítja le a rendőr, ha eltéved a taxis, akkor ha a taxis nem téved el, akkor a rendőr nem állítja le a taxit.

9. Jelölje $\circ$ a „sem-sem" logikai műveletet, azaz tetszőleges A, B ítéletekre $A \circ B$ jelentése: „sem A, sem B". A logikai alapműveletekkel kifejezve: $A \circ B \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$. Fejezzük ki a $\neg$, $\vee$, $\wedge$ műveleteket a $\circ$ művelet segítségével (formulák logikai ekvivalenciája erejéig).

10. Határozzuk meg az alábbi formulák teljes diszjunktív normálformáját:
(a) $A \to B$,
(b) $(A \to B) \vee ((\neg A) \wedge C)$,
(c) $((A \to (\neg B)) \wedge C) \vee ((\neg A) \leftrightarrow C)$,
(d) $A \vee ((\neg A) \to (B \vee ((\neg B) \to C)))$,
(e) $A \to (A \wedge (B \to A))$.

11. A tautológiagyűjteményben szereplő tautológiák felhasználásával igazoljuk, hogy az alábbi formulák tautológiák:
(a) $(\neg(A \to B)) \to A$,
(b) $(A \wedge B) \to (A \to B)$,
(c) $((A \to B) \to B) \to (A \vee B)$.

***12.** Igazoljuk, hogy egy olyan formula, amely csak az $\leftrightarrow$ logikai műveletet tartalmazza, akkor és csak akkor tautológia, ha minden változó páros sokszor fordul elő benne.

13. Állapítsuk meg, logikailag helyesek-e az alábbi következtetések.
(a) Ha ma János sokáig marad fenn, holnap rosszkedvű lesz. Ha viszont nem marad sokáig fenn, akkor úgy fogja érezni, nem érdemes élni. Tehát János vagy rosszkedvű lesz holnap, vagy úgy fogja érezni, nem érdemes élni.
(b) Ha a 2 prímszám, akkor a 2 a legkisebb prímszám. Ha a 2 a legkisebb prímszám, akkor az 1 nem prímszám. Az 1 nem prímszám. Tehát a 2 prímszám.
(c) Sári és Béla azonos korú, vagy Sári idősebb Bélánál. Ha Sári és Béla azonos korú, akkor Nelli és Béla nem azonos korú. Ha Sári idősebb Bélánál, akkor Béla idősebb Tibornál. Tehát Nelli és Béla nem azonos korú, vagy Béla idősebb Tibornál.

(d) Ha a 6 összetett szám, akkor a 12 összetett szám. Ha a 12 összetett szám, akkor létezik 12-nél nagyobb prímszám. Ha létezik 12-nél nagyobb prímszám, akkor létezik 12-nél nagyobb összetett szám. Ha 2 osztója 6-nak, akkor a 6 összetett szám. A 12 összetett szám. Tehát a 6 összetett szám.
(e) Ha busszal megyek, akkor ha a busz késik, lekésem a megbeszélést. Ha lekésem a megbeszélést, és rossz kedvem lesz, akkor nem megyek haza. Ha nem kapom meg az állást, akkor rossz kedvem lesz, és hazamegyek. Tehát, ha busszal megyek, akkor ha a busz késik, megkapom az állást.
(f) Ha hideg van, akkor bekapcsolom a fűtést, és nem megyek ki a szobából. Nem kapcsolom be a fűtést, vagy nem fázom. Ha nem vacsorázom, vagy nem alszik ki a villany, akkor fázom. Ha bekapcsolom a fűtést, akkor hideg van, és vacsorázom. Tehát, ha bekapcsolom a fűtést, akkor kialszik a villany.

14. Igazoljuk, hogy logikailag helyesek az alábbi következtetések.
(a) $(\neg A) \vee B,\ C \to (\neg B) \models A \to (\neg C)$,
(b) $A \to (B \to C),\quad (C \wedge D) \to E,\quad (\neg F) \to (D \wedge (\neg E))$
$\models A \to (B \to F)$,
(c) $(A \vee B) \to (C \wedge D),\quad (D \vee E) \to F \models A \to F$,
(d) $A \to (B \wedge C),\quad (\neg B) \vee D,\quad (E \to (\neg F)) \to (\neg D)$,
$B \to (A \wedge (\neg E)) \models B \to F$,
(e) $(A \to B) \wedge (C \to D),\quad (B \to E) \wedge (D \to F),\quad \neg(E \wedge F)$,
$A \to C \models \neg A$.

15. Vizsgáljuk meg, kielégíthetők-e a következő formula-, illetve ítélethalmazok.
(a) $A \to (\neg(B \wedge C)),\quad (D \vee E) \to G,\quad G \to (\neg(H \vee I))$,
$(\neg C) \wedge E \wedge H$,
(b) $(A \vee B) \to (C \wedge D), (D \vee E) \to G, A \vee (\neg G)$,
(c) A szerződést akkor és csak akkor teljesítik, ha a házat februárban befejezik. Ha a házat februárban befejezik, akkor március 1-én beköltözhetünk. Ha március 1-én nem költözhetünk be, akkor márciusra lakbért kell fizetnünk. Ha a szerződést nem teljesítik, akkor márciusra lakbért kell fizetnünk. Nem kell márciusra lakbért fizetnünk.

16. Adjunk feltételes, indirekt vagy kontrapozícióval való bizonyítást a 14. feladatban szereplő következtetésekre.

17. Igazoljuk, hogy ha az $\{F, \neg G\}$ formulahalmaz nem kielégíthető, akkor $F \models G$.

18. Formalizáljuk a predikátumkalkulusban az alábbi ítéleteket:

(a) Minden bíró jogász. [$B(x)$: „x bíró", $J(x)$: „x jogász"]
(b) Vannak ügyeskedő jogászok. [$U(x)$: x „ügyeskedő"]
(c) Nincs ügyeskedő bíró.
(d) Bizonyos bírók idősek, de életerősek. [$I(x)$: „x idős", $E(x)$: „x életerős"]
(e) Dr. D. bíró sem nem idős, sem nem életerős. [d: Dr. D. bíró]
(f) A bírók kivételével minden jogász ügyeskedő.
(g) Néhány olyan jogász, aki politikus, képviselő is. [$P(x)$: „x politikus", $K(x)$: „x képviselő"]
(h) Egyetlen képviselő felesége sem idős. [$F(x, y)$: „x felesége y-nak"]
(i) Minden idős képviselő jogász.
(j) Van olyan nő, aki jogász és képviselő. [$N(x)$: „x nő"]
(k) Nincs olyan nő, aki politikus és háztartásbeli. [$H(x)$: „x háztartásbeli"]
(l) Vannak olyan jogász nők, akik háztartásbeliek.
(m) Minden olyan nő, aki jogász, tisztel néhány bírót. [$T(x, y)$: „x tiszteli y-t"]
(n) Bizonyos jogászok csak bírókat tisztelnek.
(o) Van olyan bíró, aki tisztel néhány nőt.
(p) Bizonyos ügyeskedők egyetlen jogászt sem tisztelnek.
(q) Dr. D. bíró egyetlen ügyeskedőt sem tisztel.
(r) Vannak jogászok és ügyeskedők is, akik tisztelik Dr. D. bírót.
(s) Csak bírók tisztelnek bírókat.
(t) Minden bíró csak bírókat tisztel.
(u) Minden nős képviselő életerős.
(v) Azok a jogászok, akiknek életerős feleségük van, mind képviselők.
(x) Nem létezik anyját tisztelő ügyeskedő. [$a(x)$: „x anyja"]
(y) Dr. D. bíró anyja háztartásbeli.
(z) Minden anya életerős nő.

19. Jelölje $P(x)$ az „x prím", $E(x)$ az „x páros", $O(x)$ az „x páratlan", $D(x, y)$ pedig az „y osztható x-szel" predikátumokat. Fordítsuk le köznapi magyar nyelvre az alábbi formulákkal leírt ítéleteket:

(a) $P(7)$,
(b) $E(2) \wedge P(2)$,
(c) $(\forall x)(D(2, x) \to E(x))$,
(d) $(\exists x)(E(x) \wedge D(x, 6))$,
(e) $(\forall x)((\neg E(x)) \to (\neg D(2, x)))$,
(f) $(\forall x)(E(x) \to (\forall y)(D(x, y) \to E(y)))$,
(g) $(\forall x)(P(x) \to (\exists y)(E(y) \wedge D(x, y)))$,
(h) $(\forall x)(O(x) \to (\forall y)(P(y) \to (\neg D(x, y))))$,
(i) $(\exists x)(E(x) \wedge P(x)) \wedge (\neg(\exists x)(E(x) \wedge P(x) \wedge (\exists y)((x \neq y) \wedge E(y) \wedge P(y))))$.

20. Tagadjuk a 18. feladatban szereplő ítéleteket

(a) formuláik felhasználása nélkül,
(b) formuláik felhasználásával, s a kapott eredmény köznyelvre fordításával,

úgy, hogy a „nem minden", „nincs(enek)" szavak, illetve ezek szinonímái ne szerepeljenek, s ellenőrizzük, ugyanazt kaptuk-e.

21. A megfelelően megválasztott elsőrendű nyelven formalizáljuk az alábbi ítéleteket:

(a) Nem mind arany, ami fénylik.
(b) Ki korán kel, aranyat lel.
(c) „Nincs madár, mely akkor énekeljen, midőn éhezik vagy fázik . . ." [Platón]
(d) Nem minden szarka farka tarka, csak a tarka farkú szarka farka tarka.