Feladatok gyakorlatra:

1. Határozzuk meg az $f(x) = 5x - 3$ függvény inverzét.

Legyen $y = 5x - 3$.
Az x, y formális cseréje után:

$$x = 5y - 3$$

Ennek a megoldása y -ra nézve:

$$y = \frac{x+3}{5}$$

Tehát az eredeti inverze

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{5}$$

2. Legyen $f(x) = 2x - 4, g(x) = 5x + 3.$
Akkor

$f(g(x)) = 2(5x+3) - 4 = 10x - 2$

$g(f(x)) = 5(2x-4) + 3 = 10x - 17$

$f(f(x)) = 2(2x-4) - 4 = 4x - 12$

$g(g(x)) = 5(5x+3) + 3 = 25x + 18$

Bizonyítási módszerek.

3. Legyenek az a, b pozitív valós számok. Igazoljuk az alábbi, ún. számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$$

Bizonyítás.

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

Akkor

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Az indirekt bizonyítás. Az okoskodásnak ebben a formájában feltesszük a bizonyítandó állítás tagadását, majd ebből a feltevésből **ellentmondást** vezetünk le, azaz megmutatjuk, hogy (egy másik) állítás a tagadásával egyszerre kell, hogy igaz legyen. Mivel ez nyilvánvalóan lehetetlen, ezért arra következtetünk, hogy a feltevésünk hamis volt, tehát a bizonyítandó állítás igaz.

Lássunk egy egyszerű példát! Nyilvánvaló, hogy a sakktáblán nem helyezhető el 9 bástya úgy, hogy ne üssék egymást. Valóban, akárhogy is helyezünk el 9 bástyát a sakktáblán, lesz közöttük kettő, melyek azonos oszlopba kerülnek, és akkor ütik egymást. Ezt az okoskodást az indirekt bizonyítás legegyszerűbb formájának tekinthetjük: feltesszük, hogy az állítás hamis (mégis el tudunk helyezni 9 egymást nem ütő bástyát), és ebből az eredeti állítással jutunk ellentmondásba.

4. Ha egy országban csak véges sok város van, és minden városból legalább két út indul ki, akkor bizonyos városok között lehet körutazást tenni.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy nem lehet körutazást tenni. Tekintsük a leghosszabb utat. Legyen a leghosszabb út $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$.

Ha A_n -ből már nem vezet út – ellentmondás.

Az A_n -ből út csak olyan városba vezethet, mely rajta van a leghosszabb úton. Így kört kapunk. Ellentmondás. Tehát a városok közt lehet körutazást tenni.

5. A $\sqrt{2}$ szám irracionális.

Ellentmondással. Feltételezzük, hogy a $\sqrt{2}$ racionális szám. Akkor felírható tört alakban

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, az a, b egészek ($b \neq 0$) és a legnagyobb közös osztójuk 1.

Akkor

$$\sqrt{2}b = a$$

és ebből

$$2b^2 = a^2.$$

Ez csak akkor lehetséges, ha az a páros. Legyen $a = 2x$ (ahol az x egész).

$$2b^2 = (2x)^2$$

$$2b^2 = 4x^2$$

$$b^2 = 2x^2$$

Ebből az következik, hogy a b is páros.
Ellentmondáshoz jutottunk, ha az a, b legnagyobb közös osztója 1, akkor nem lehet mindkettő páros.
Tehát a $\sqrt{2}$ irracionális szám.

A prímszám az olyan 1-nél nagyobb természetes szám, mely csak 1-el és önmagával osztható.

6. Igaz az, hogy az alábbi

$$n^2 + n + 41$$

képlet tetszőleges n természetes számra prímszámot eredményez?

$$1^2 + 1 + 41 = 43$$

$$2^2 + 2 + 41 = 47$$

$$3^2 + 3 + 41 = 53$$

$$4^2 + 4 + 41 = 61$$

$$\ldots$$

$39^2 + 39 + 41$ is primszám

Ellenpélda.

$41^2 + 41 + 41$ biztosan nem primszám (osztható 41-el)

Fontos bizonyítási módszer a **teljes indukció** . Ez olyan okoskodás, amelynek a segítségével egyszerre végtelen sok állítást bizonyítunk. A legegyszerűbb esetben az $A_1, A_2, A_3, \ldots$ állításokat bizonyítjuk két lépésben: először belátjuk A_1-et, majd megmutatjuk, hogy az A_n állításból következik A_{n+1} minden n -re. (A második lépést, tehát az $A_n \Rightarrow A_{n+1}$ implikáció bizonyítását **indukciós lépésnek**, e bizonyításban az A_n állítást **indukciós feltételnek** hívjuk.)

Gondoljuk végig, hogy e két lépés segítségével valóban az összes A_n állítást beláttuk. Az A_1 állítást közvetlenül ellenőriztük. Mivel azt is beláttuk, hogy az A_n állításból következik A_{n+1} minden n-re, így speciálisan A_1-ből is következik A_2. Mivel A_1 igaz, ez azt jelenti, hogy A_2 is igaz. De A_2-ből következik A_3, és így A_3 is igaz. Ebből az $A_3 \Rightarrow A_4$ implikáció szerint megkapjuk A_4-et és így tovább.

7. Minden pozitív n egész számra

$$2^n > n.$$

Bizonyítás. Indukcióval. A $2^1 > 1$ állítás igaz. Tegyük fel, hogy

$2^n > n$, ahol $n \geq 1$.

Ekkor

$$2^{n+1} = 2.2^n = 2^n + 2^n \geq 2^n + 1 > n + 1$$

Ezzel a tételt beláttuk.

8. Az első n darab természetes szám összege?

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & +2 & +3 & +4 & +\cdots & +(n-3) & +(n-2) & +(n-1) & +n \\ n & +(n-1) & +(n-2) & +(n-3) & +\cdots & +4 & +3 & +2 & +1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} (n+1) & +(n+1) & +(n+1) & +(n+1) & +\cdots & +(n+1) & +(n+1) & +(n+1) & +(n+1) \end{array}$$

Tehát

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{n.(n+1)}{2}.$$

Indukcióval. n=1 -re igaz.

Az indukciós feltetel az, hogy

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{n.(n+1)}{2}$$

$1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1)=?$

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1)=\frac{n.(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1).((n+1)+1)}{2}$$

9. Tetszőleges $x_1, x_2, x_3, ., x_n$ szám megegyezik egymással.
Bizonyítás indukcióval.
Az egyetlen x_1 szám megegyezik önmagával.
Az indukciós feltétel: tetszőleges n darab szám megegyezik.
Legyen $x_1, x_2, x_3, ., x_n, x_{n+1}$ számunk.
Az indukciós feltétel szerint

$$x_1 = x_2 = ... = x_n$$

és

$$x_2 = x_3 = ... = x_n = x_{n+1}.$$

Tehát

$$x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n = x_{n+1}.$$???????