	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
1.	**0**	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2.		**2**	∞	∞	∞	∞	2	4	∞	∞
3.			3	∞	∞	∞	**2**	3	∞	∞
4.			**3**	∞	∞	4		3	3	∞
5.				5	∞	4		**3**	3	4
6.				5	∞	4			**3**	4
7.				5	∞	**4**				4
8.				5	7					**4**
9.				**5**	7					
10.					**7**					

2.3. táblázat. A mintafeladat megoldása.

2.3. Maximális független élrendszer

Magyar módszer

Először két új fogalom kerül bevezetésre.

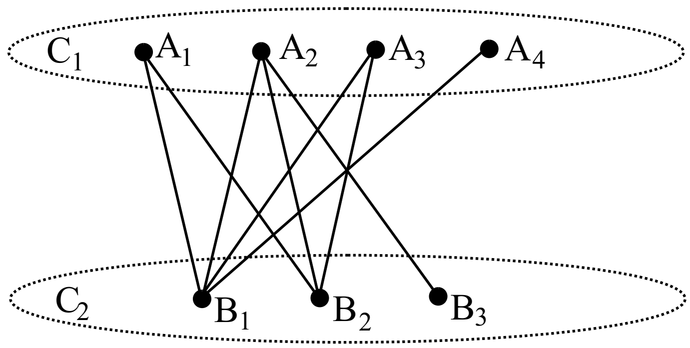
2.4. Definíció. A $\mathcal{G} = (C, E)$ gráfot páros gráfnak nevezzük, ha a csúcspontok C halmaza két diszjunkt nemüres C_1 és C_2 részhalmazokra bontható úgy, hogy élek csak C_1 és C_2 között vezetnek.

2.5. Definíció. Egy gráfban bizonyos élek rendszerét független élrendszernek nevezzük, ha a rendszerben szereplő élek páronként nem szomszédosak.

Képzeljük el, hogy egy ünnepség nyitótáncára több lány és fiú jelentkezett. A táncosok mindegyike nyilatkozott arról, hogy kit tart elfogadható partnernek a másik nem önkéntesei közül. A nyilatkozatok alapján meg lehet rajzolni egy gráfot, melynek csúcsai a nyitótáncra jelentkező személyek. Közéjük élet akkor húzunk, ha kölcsönösen elfogadják egymást táncpartnernek. Világos, hogy az ilymódon adódó gráf páros, és ha az alapján kijelölünk néhány táncoló párt, akkor ők egy független élrendszert generálnak a gráfban. Az ünnepség szervezői szeretnék, hogy a lehető legtöbb pár vegyen részt a nyitótáncon. Tehát egy maximális független élrendszert kellene kiválasztani az adott páros gráfból.

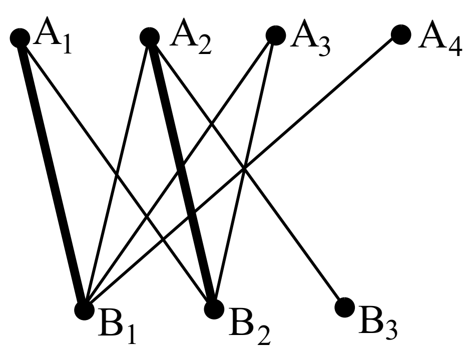
A megoldás alapötlete Kőnig Dénes magyar matematikus nevéhez fűződik és magyar módszernek vagy alternáló utak módszerének nevezik. Az eljárás feltételez egy kiindulási független élrendszert, amelyek elemszámát lépésenként eggyel növelve jut el az optimumhoz. Több megoldás is előfordulhat (pl. a kezdő független élrendszer megválasztása befolyásolhatja a végeredményt), de ezek egyenrangúak abban az értelemben, hogy a kiválasztott élek maximális száma ugyanannyi. A feladat általában egyetlen maximális független élrendszer megadása.

Kiindulási független élrendszert meghatározni nagyon egyszerű. Ennek szemléltetésére legyen ábrázolva a páros gráf úgy, hogy a $C_1 \subset C$ csúcsait egy felső, a $C_2 \subset C$ csúcsait egy alsó sorban helyezzük el, majd húzzuk be a két halmaz között a létező éleket (ld. 2.6. ábra).



2.6. ábra. *Példa páros gráfra.*

Kezdetben nevezzük az összes csúcsot telítetlennek, az összes élet vékonynak. Úgy juthatunk egy kezdő független élrendszerhez, ha sorbavesszük pl. a felső sor csúcsait, és ha az éppen vizsgált telítetlen csúcsnak van telítetlen szomszédja (nyilvánvalóan az alsó sorból), akkor az őket összekötő élet megvastagítjuk, a szóban forgó két csúcsot pedig telítetté nyilvánítjuk. Állapodjunk meg abban, hogy a felső és alsó sor esetén is balról jobbra haladunk a szögpontok vizsgálatában. Ha túljutottunk a felső sor utolsó elemén is, akkor a független élrendszer a most ismertetett szisztéma szerint már nem bővíthető, a kapott vastag élek egy kiindulási független élrendszert alkotnak. A 2.6. ábra gráfja az alábbi eredményt adja. Az A_1 csúcs összeköttetésben áll az alsó sor B_1 csúcsával, tehát az első vastag él $A_1 - B_1$ lesz, továbbá A_1 és B_1 telítettekké válnak. A_2-vel folytatva az $A_2 - B_1$ él nem lesz vastag, mert B_1 már telített csúcs, de $A_2 - B_2$ beválasztható a kiindulási független élrendszerbe (ezzel A_2 és B_2 is telített csúcsok lesznek). A B_1 és B_2 csúcsok telítettsége miatt $A_3 - B_1$, $A_3 - B_2$ ill. $A_4 - B_1$ éleket nem lehet megvastagítani. Ezzel kijelöltünk egy kezdő független élrendszert, melyet a 2.7. ábra mutat.



2.7. ábra. *Kezdő független élrendszer.*

Könnyen észrevehető, hogy a most kapott független élrendszer nem maximális. (Pl. az $A_1 - B_2$, $A_2 - B_3$, $A_4 - B_1$ rendszer 3 független élet tartalmaz.)

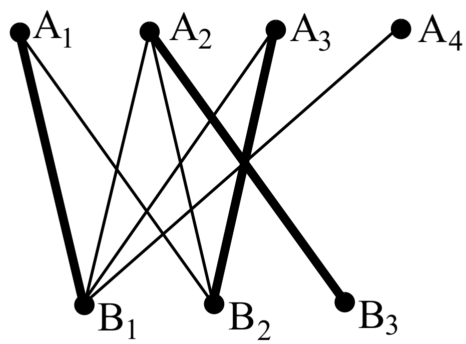
Most térjünk rá Kőnig Dénes ötletére. Nevezzük alternáló útnak az "előkészített" gráfban azt az utat, amely

– a felső sor egy telítetlen csúcsából indul,

– alsó sor egy telítetlen csúcsában végződik,
– benne felváltva követik egymást vékony és vastag élek.

Ezek szerint egy alternáló út páratlan sok élből (legalább 3) áll, eggyel több vékony élet foglal magába mint vastagot. Ha felcseréljük az útban a vékony és vastag élek szerepét, akkor eggyel növeljük a vastag élek számát, másrészt ismét független élrendszerhez jutottunk, mert a gráf többi részén nem változtattunk, az alternáló útban pedig felváltva helyezkednek el a különböző vastagságú élek.

Tekintsük ismét a 2.7 ábrát! Az $A_3 - B_2 - A_2 - B_3$ út alternáló út. Elvégezve a fent leírt változtatásokat a 2.8. ábrához jutunk amely 3 élből álló független élrendszert ábrázol. Ez egyben maximális is, hiszen az alsó sor mindhárom csúcsa telített.



2.8. ábra. *Maximális független élrendszer.*

Ha a 2.7 ábrán az $A_4 - B_1 - A_1 - B_2 - A_2 - B_3$ utat választanánk, akkor egy másik független élrendszerhez jutnánk. Most megfogalmazzuk az előbb ismertetett eljárást általánosan.

2.6. Algoritmus. (Maximális független élrendszer előállítása páros gráfban.)

1. Kezdő független élrendszer létrehozása.

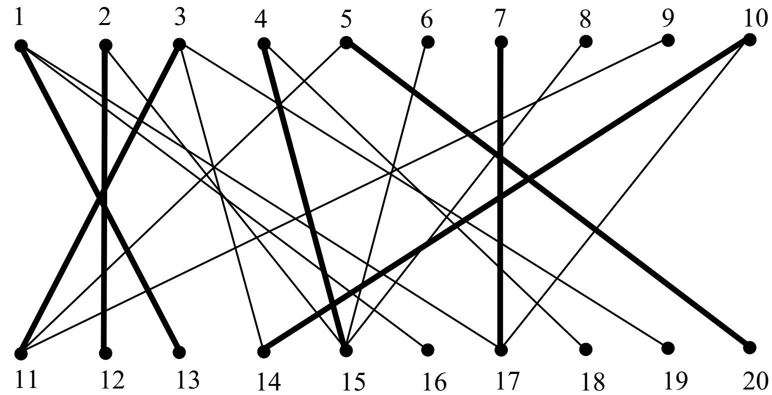
2. Ha a felső sorban található még telítetlen csúcs, akkor tekintsük az első ilyet, jelöljük ezt A-val, egyébként vége az algoritmusnak.

3. Ha A-ból indulva nem találunk alternáló utat legyen A is telített, majd menjünk a 2. lépésre.

4. A megtalált alternáló út vékony éleit vastagítsuk meg, az eredetileg vastagokat vékonyítsuk el. Az ilymódon kapott új független élrendszer csúcsait tekintsük csak telítettnek. Menjünk vissza a 2. lépésre.

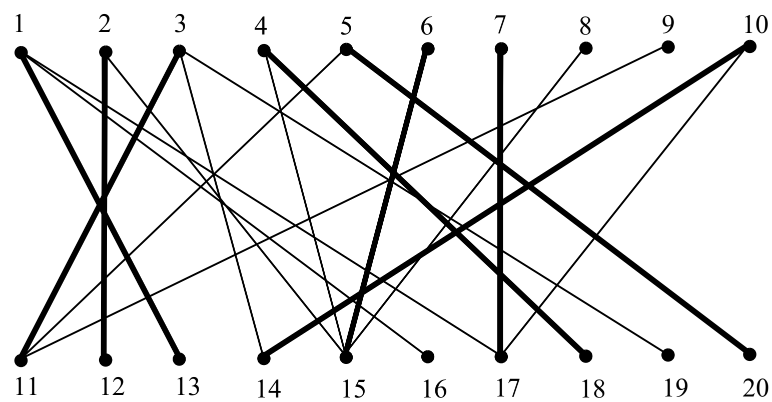
Lényegében egy nyitott kérdés maradt: hogyan tudunk alternáló utat keresni egy adott pontból kiindulva. Ez akkor okozhat problémát, ha annak keresése során egy felső halmazbeli csúcsból több vékony élen is le tudunk jutni alsó halmazbeli telített csúcsokba. Ebben az esetben meg kell jegyezni az elágazás helyét, majd elsőként válasszuk ki a legbaloldalibb elemet. Ha ezen tovább haladva nem kapunk alternáló utat, akkor folytassuk az elágazásnál a balról soron következővel, stb. Természetesen az is előfordulhat, hogy a keresés során több elágazás is lesz.

Végül tekintsünk egy szemléltető példát az algoritmus működésére. A 2.9. ábra egy páros gráfot mutat, a cél egy maximális független élrendszer létrehozása.



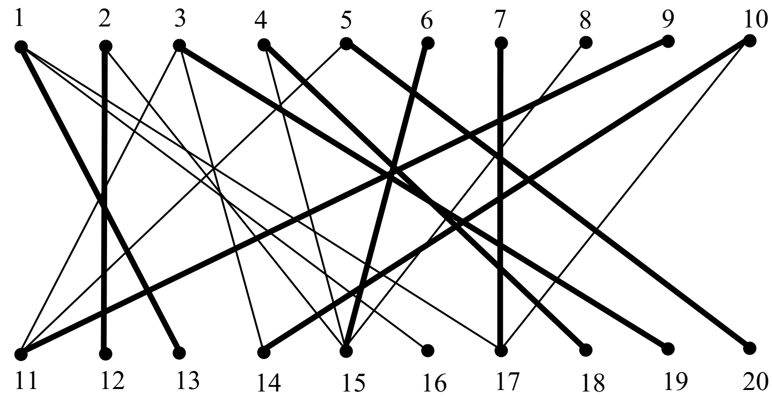
2.9. ábra. *A kezdő független élrendszer.*

A kezdő független élrendszerbe 7 él került be: 1-13; 2-12; 3-11; 4-15; 5-20; 7-17; 10-14. Mindkét sorban 3-3 telítetlen szögpont van: 6, 8, 9 ill. 16,18,19. Kezdjük a 6-os csúccsal, ebből kiindulva a 6-15-4-18 élsorozat alternáló út, melyet könnyű volt felfedezni, hiszen mindenhol egyetlen választási lehetőség volt a továbbhaladásra, lefelé mindig vékony, felfelé mindig vastag élen közlekedhetünk. Az alternáló útban az élek vastagságát felcserélve a következő – 8 élet tartalmazó – független élrendszerhez jutunk (2.10. ábra).



2.10. ábra. *Bővített független élrendszer.*

A felső sorban most már csak 2 telítetlen csúcs (8 ill. 9) maradt. A 8-15-6 út nem alternáló, mert a felső sorban ért véget. Mivel a 8-as szögpontból indulva más lehetőség nincs, folytassuk a vizsgálatot a 9-es csúccsal. A 9-11-3-14-10-17-7 út ismét nem alternáló, de a 3-as csúcs után másképp is lehet folytatni. Ekkor a 9-11-3-19 alternáló úthoz jutunk. A szükséges változtatásokat végrehajtva a független élrendszer 9 élet foglal magába.



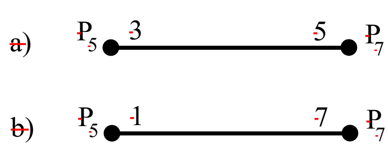
2.11. ábra. *Maximális független élrendszer.*

Könnyű ellenőrizni, hogy az egyetlen telítetlen csúcsból (8) nem lehet alternáló utat felépíteni, tehát az algoritmus véget ért. A maximális független élrendszer 9 élet tartalmaz, az egyik lehetséges párosítás az 1-13; 2-12; 3-19; 4-18; 5-20; 6-15; 7-17; 9-11; 10-14. A fennmaradó telítetlen csúcsok: 8 ill. 16.

2.4. A maximális folyam problémája

Tekintsünk egy hálózatot, melynek egyik adott pontjából kell bizonyos termékeket egy másik adott pontba átszállítanunk. A maximális folyam problémája azzal foglalkozik, hogy hogyan lehet a legtöbb terméket átszállítani, ha korlátozó feltételként adott, hogy az egyes éleken az egyes irányokban maximálisan hány termék szállítható. Az alapfeladat megfogalmazása tehát a következő: adott egy N-pontú $(P_1, \ldots, P_N)$ hálózat, melynek a P_1 pontjából (forrás) szeretnénk termékeket szállítani a P_N pontba (nyelő). (A pontokat tehát úgy sorszámozzuk, hogy P_1 legyen a forrás és P_N a nyelő. Ez minden megszorítás nélkül megtehető.) Az élekhez ún. kapacitásértékek vannak megadva, melyek megmutatják, hogy az élen az egyes irányokban maximálisan hány termék szállítható. A P_i pontból a P_j pontba szállítható termékek számát $\nu(P_i, P_j)$ fogja jelölni. Általában $\nu(P_i, P_j) \neq \nu(P_j, P_i)$.

Hogy könnyebben megértsük a megoldási algoritmus lényegét tekintsük a 2.12 ábra a) részét, amely egy hálózat egy élét ábrázolja. Az ábra szerint P_5-ből P_7 irányába 3



2.12. ábra. *Hálózatrészlet a maximális folyam problémához.*

termék szállítható ($\nu(P_5, P_7) = 3$), míg P_7-ből P_5-be 5 ($\nu(P_7, P_5) = 5$). Tegyük fel, hogy P_5-ből P_7-be elszállítunk 2 terméket. Lehetséges, hogy később ezt az élet újra használni