

DISZKRÉT MATEMATIKA

5. feladatsor

1. Legyenek adottak az alábbi halmazok:

$$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{O, \Delta\} \quad C = \{\text{Ádám}, \text{Éva}\} \quad D = \{a\} \quad E = \{\sin 60^\circ, \cos 90^\circ\} \\ F = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\} \quad G = \{\pi, \sqrt{5}\} \quad H = \{x, y, z\}$$

Az elemek felsorolásával adják meg a következő halmazok Descartes-féle szorzatát: $A \times B$, $C \times A$, $C \times E$, $H \times F$, $G \times B$, $A \times G$, $E \times B$, $D \times H$, $G \times D$, $A \times A$, $A \times B \times A$, $H \times F \times G$, $C \times D \times E$, $A \times C \times H$, $H \times F \times H$, $G \times A \times D$, $C \times E \times C$, $F \times E \times G$, $H \times C \times A$, $D \times E \times B$!

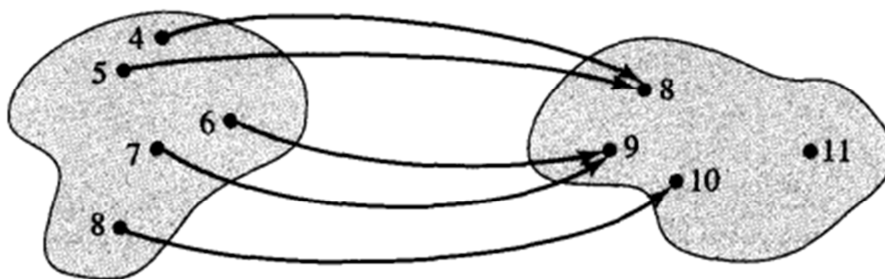
2. Szemléltessék a $H = \{2, 3, \dots, 10\}$ halmazon értelmezett ρ relációt!

$a \rho b :=$ „ a -nak van 1-től különböző közös osztója b -vel”

3. Döntsék el, hogy a felsorolt elempárok közül melyek tartoznak az adott relációba!

- | | |
|--|--|
| a) $\rho_1 \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $x \rho_1 y \Leftrightarrow x + y < 7$ | (1,3), (0,5), (3,3), (4,4), (2,5), (5,2) |
| b) $\rho_2 \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $x \rho_2 y \Leftrightarrow x = y + 2$ | (0,2), (4,2), (6,3), (5,3), (3,5), (5,2) |
| c) $\rho_3 \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $x \rho_3 y \Leftrightarrow 2x + 3y = 10$ | (5,0), (2,2), (3,1), (1,3), (4,2), (1,2) |
| d) $\rho_4 \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $x \rho_4 y \Leftrightarrow x$ osztója y -nak | (1,5), (2,4), (2,5), (2,6), (6,2), (4,4) |
| e) $\rho_5 \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $x \rho_5 y \Leftrightarrow x$ páros | (2,3), (2,4), (4,5), (5,6), (4,2), (4,4) |
| f) $\rho_6 \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $x \rho_6 y \Leftrightarrow y$ négyzetszám | (1,1), (4,2), (3,9), (5,25), (16,2), (7,16) |
| g) $\rho_7 \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $x \rho_7 y \Leftrightarrow x$ prímszám | (19,7), (21,4), (8,13), (5,18), (41,2), (6,12) |
| h) $\rho_8 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $x \rho_8 y \Leftrightarrow x = -y$ | (1, -1), (2,2), (-3,3), (4, -4), (1,2), (6,6) |

4. Az alábbi ábrán egy leképezés látható:



- Adják meg a leképezés értelmezési tartományát (őselemek halmaza) és értékkészletét (képelemek halmaza)!
- Mi az 5 elem képe ebben a leképezésben? Mi a 8 elem képe ebben a leképezésben?
- Mi a 9 elem őse ebben a leképezésben?
- Döntsék el, hogy a leképezés injektív, szürjektív ill. bijektív-e, s a választ indokolják meg!

5. Legyen $S = \{0, 2, 4, 6\}$ és $T = \{1, 3, 5, 7\}$. Döntsék el, hogy az alábbi, rendezett elempárokat tartalmazó halmazok közül melyik leképezés S értelmezési tartománnyal és T értékkészlettel! Amennyiben leképezés, döntsék el, hogy az injektív, szürjektív ill. bijektív-e, és a választ indokolják meg! Bijektív leképezés esetén adják meg az inverz leképezést! Amennyiben nem leképezés, döntsék el, hogy a megfeleltetés az $S \times T$ részeként parciális leképezés-e? Határozzák meg ebben az esetben is az értelmezési tartományt és értékkészletet.

- a) $A_1 = \{(0,2), (2,4), (4,6), (6,0)\}$
- b) $A_2 = \{(6,3), (2,1), (0,3), (4,5)\}$
- c) $A_3 = \{(2,3), (4,7), (0,1), (6,5)\}$
- d) $A_4 = \{(2,1), (4,5), (6,3)\}$
- e) $A_5 = \{(6,1), (0,3), (4,1), (0,7), (2,5)\}$

6. Döntse el, hogy az alábbiak közül melyik leképezés! Amennyiben leképezés, döntsék el, hogy az injektív, szürjektív ill. bijektív-e, és a választ indokolják meg! Bijektív leképezés esetén adják meg az inverz leképezést!

- a) $\varphi_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \varphi_1(n) = 3n$
- b) $\varphi_2 : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, \varphi_2(x) = 3x$
- c) $\varphi_3 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \varphi_3(n) = n^2$
- d) $\varphi_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi_4(x) = x^2$
- e) $\varphi_5 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \varphi_5(x) = x^2$
- f) $\varphi_6 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, \varphi_6(x) = x^2$
- g) $\varphi_7 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \varphi_7(x) = x^2$
- h) $\varphi_8 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \varphi_8(x) = x^2 + 1$
- i) $\varphi_9 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, \varphi_9(x) = \frac{1}{x}$
- j) $\varphi_{10} : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, \varphi_{10}(z, n) = \frac{z}{n+1}$
- k) $\varphi_{11} : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{p, q, r\}, \varphi_{11} = \{(1, q), (2, r), (3, p)\}$
- l) $\varphi_{12} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \varphi_{12}(x) = 2^x$
- m) $\varphi_{13} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi_{13}(x, y) = (y+1, x+1)$
- n) $\varphi_{14} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi_{14}(x) = \frac{1+x}{1-x}$