Matematika informatikusoknak 2 – Differenciálszámítás

2. előadás

Korlátos halmazok

Definíció. Az A halmaz felülről (alulról) korlátos, ha létezik olyan m (ill. l) szám, hogy az A minden a elemére

$$a \leq m \qquad (\text{ ill. } \ a \geq l.)$$

Az A számhalmazt korlátosnak nevezzük, ha alulról is és felülről is korlátos.

Korlátos halmazok

Definíció. Az A halmaz felülről (alulról) korlátos, ha létezik olyan m (ill. l) szám, hogy az A minden a elemére

$$a \leq m \qquad (\text{ ill. } \; a \geq l.)$$

Az A számhalmazt korlátosnak nevezzük, ha alulról is és felülről is korlátos.

Pl.

$$\mathbb{N}, \quad [0,1), \{1,2,5,7,10,12\} \quad \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$

Ha létezik egy felső (alsó) korlát, akkor végtelen sok létezik.

Végtelen számsorozatok

Definíció. Legyen minden n természetes számhoz hozzárendelve egy $a_n = f(n)$ valós szám, azaz legyen adott egy $\mathbb{N}$-en értelmezett valós értékű függvény.
Ezt így jelöljük:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \qquad \text{vagy} \qquad (a_n)_{n=1}^{+\infty} \qquad \text{vagy} \qquad (a_n)$$

és végtelen számsorozatnak,
a_n -t a sorozat n-edik elemének,
n-t az a_n indexének nevezzük.

$$a_n = \frac{1}{n},\ \ n \in \mathbb{N} \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$$

$$a_n = \frac{1}{n}, \;\; n \in \mathbb{N} \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$$

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \;\; n \in \mathbb{N} \qquad 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4} \ldots$$

$$a_n = \frac{1}{n},\ \ n \in \mathbb{N} \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$$

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n},\ \ n \in \mathbb{N} \qquad 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4} \dots$$

$$a_n = (-1)^n,\ \ n \in \mathbb{N} \qquad -1, 1, -1, 1, \dots$$

$$a_n = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$$

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \qquad 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4} \ldots$$

$$a_n = (-1)^n,\ n \in \mathbb{N} \qquad -1, 1, -1, 1, \ldots$$

$$a_1 = \sqrt{2},\ a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}},\ a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$$

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

Számsorozatok határértéke

Definíció. Az $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat határértéke a b szám, ha minden pozitív ε-hoz létezik olyan (ε-tól függő) n_0 szám, melyre teljesül, hogy minden $n > n_0$ esetben

$$|a_n - b| < \varepsilon.$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = b$$

Számsorozatok határértéke

Definíció. Az $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat határértéke a b szám, ha minden pozitív ε-hoz létezik olyan (ε-tól függő) n_0 szám, melyre teljesül, hogy minden $n > n_0$ esetben

$$|a_n - b| < \varepsilon.$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = b$$

Ha egy sorozatnak van véges határértéke, akkor *konvergens*nek nevezzük, különben *divergens*nek.

Példa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Példa

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Legyen $\varepsilon > 0$ adott, rögzített. Milyen "nagy" n-re fog teljesülni, hogy

$$|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon?$$

Példa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Legyen $\varepsilon > 0$ adott, rögzített. Milyen "nagy" n-re fog teljesülni, hogy

$$|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon?$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Az ε-hoz tartozó n_0 legyen az a legkisebb természetes szám, mely nagyobb mint $\frac{1}{\varepsilon}$.

ε	0.1	0.02	0.01	0.0012	0.0001	$\cdots$
n_0	11	51	101	834	10001	$\cdots$

Példa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+1} = 1$$

Példa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+1} = 1$$

Legyen $\varepsilon > 0$ adott, rögzített. Milyen "nagy" n-re fog teljesülni, hogy

$$\left| \frac{n+3}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon?$$

Példa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+1} = 1$$

Legyen $\varepsilon > 0$ adott, rögzített. Milyen "nagy" n-re fog teljesülni, hogy

$$\left| \frac{n+3}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon?$$

$$\left| \frac{n+3-(n+1)}{n+1} \right| < \varepsilon \quad \text{azaz} \quad \left| \frac{2}{n+1} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{2}{n+1} < \varepsilon, \qquad \frac{2}{\varepsilon} < n+1, \qquad \frac{2}{\varepsilon} - 1 < n$$

Az ε-hoz tartozó n_0 legyen az a legkisebb természetes szám, mely nagyobb mint $\frac{2}{\varepsilon}$. (Elegendő megmutatni, hogy ilyen mindig létezik.)

ε	0.1	0.02	0.01	0.0012	0.0001	$\cdots$
n_0	21	1011	201	1667	20001	$\cdots$

Példa

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$$

Példa

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$$

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Legyen $\varepsilon > 0$ adott, rögzített. Milyen "nagy" n-re fog teljesülni, hogy

$$\left|(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 0\right| < \varepsilon?$$

azaz

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \varepsilon?$$

Példa

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$$

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Legyen $\varepsilon > 0$ adott, rögzített. Milyen "nagy" n-re fog teljesülni, hogy

$$\left|(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 0\right| < \varepsilon?$$

azaz

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \varepsilon?$$

Mivel $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$ ezért a fenti egyenlőtlenség teljesül, ha

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$$

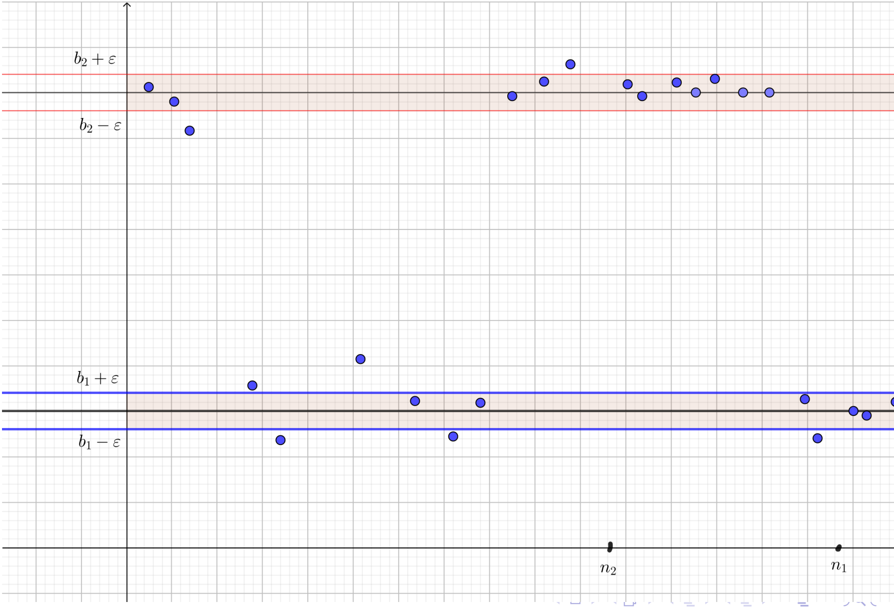
$$\frac{1}{4n} < \varepsilon^2$$

$$n > \frac{1}{4\varepsilon^2}$$

Az ε-hoz tartozó n_0 legyen az a legkisebb természetes szám, mely nagyobb mint $\frac{1}{4\varepsilon^2}$.

ε	0.1	0.02	0.01	0.005	0.0001	$\cdots$
n_0	26	1011	2501	10001	250001	$\cdots$

Tétel. Egy konvergens sorozatnak csak egy határértéke van.



Bizonyítás ellentmondással.

Feltételezzük, hogy van olyan (a_n) sorozat, melynek legalább 2 határértéke van. Legyen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b_1 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = b_2 \quad \text{ahol} \quad b_1 < b_2.$$

Legyen $\varepsilon < \frac{b_2 - b_1}{2}$.

Akkor van olyan n_1, hogy minden $n > n_1$ esetben $|a_n - b_1| < \varepsilon$, azaz

$$b_1 - \varepsilon < a_n < b_1 + \varepsilon.$$

Akkor van olyan n_2, hogy minden $n > n_2$ esetben $|a_n - b_2| < \varepsilon$, azaz

$$b_2 - \varepsilon < a_n < b_2 + \varepsilon.$$

Legyen $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Akkor minden $n > n_0$ esetben

$$a_n < b_1 + \varepsilon < b_2 - \varepsilon < a_n \quad \text{ami lehetetlen. Ellentmondás.}$$

Definíció. Az (a_n) sorozat határértéke $+\infty$ $(-\infty)$, ha tetszőleges $K > 0$-hoz ($L < 0$-hoz) létezik olyan K-tól (L-től) függő n_0 szám, melyre igaz, hogy minden $n > n_0$ esetben

$$a_n > K \qquad (a_n < L).$$

Jelölése

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\right)$$

Definíció. Az (a_n) sorozat határértéke $+\infty$ ($-\infty$), ha tetszőleges $K > 0$-hoz ($L < 0$-hoz) létezik olyan K-tól (L-től) függő n_0 szám, melyre igaz, hogy minden $n > n_0$ esetben

$$a_n > K \qquad (a_n < L).$$

Jelölése

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad (\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty)$$

$$\lim_{n\to\infty} 2n = +\infty$$

Definíció. Az (a_n) sorozat határértéke $+\infty$ ($-\infty$), ha tetszőleges $K > 0$-hoz ($L < 0$-hoz) létezik olyan K-tól (L-től) függő n_0 szám, melyre igaz, hogy minden $n > n_0$ esetben

$$a_n > K \qquad (a_n < L).$$

Jelölése

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} 2n = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} -\sqrt{n} = -\infty$$

Tétel. Bármilyen (a_n) sorozatra

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b \in \mathbb{R}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

tulajdonságok közül legfeljebb egy teljesülhet.

Definíció. Az $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \ldots$ sorozatból bizonyos elemek (esetleg végtelen sok) elhagyásával keletkező

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots, a_{n_k} \ldots$$

$(n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots)$ végtelen sorozatot az eredeti részsorozatának nevezzük.

Tétel. Ha létezik a sorozat határértéke, akkor tetszőleges végtelen sok elemet tartalmazó részsorozatának is ugyanaz a határértéke.

Tétel. Ha létezik a sorozat határértéke, akkor tetszőleges végtelen sok elemet tartalmazó részsorozatának is ugyanaz a határértéke.

Fordítva ez nem igaz.
Az $a_n = (-1)^n$ sorozat $(-1, 1 - 1, 1, -1, 1, \dots)$ határértéke nem létezik, de az (a_{2n+1}) részsorozatának már igen $(-1, -1, -1, -1, \dots)$.

rendőrszabály

Tétel. Ha minden n természetes számra $a_n \le b_n \le c_n$ és

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha, \quad \text{akkor} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített.
Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$,
ezért létezik olyan n_1, hogy minden $n > n_1$ esetben
$\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$.
Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha$,
ezért létezik olyan n_2, hogy minden $n > n_2$ esetben
$\alpha - \varepsilon < c_n < \alpha + \varepsilon$.
Legyen $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Akkor $a_n \le b_n \le c_n$ és

$$\alpha - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < \alpha + \varepsilon \quad \text{s ezért} \quad |b_n - \alpha| < \varepsilon$$

ami azt jelenti, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$.

Tétel. Legyen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$$

Akkor

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) + (\lim_{n\to\infty} b_n) = \alpha + \beta$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n . b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n).(\lim_{n\to\infty} b_n) = \alpha . \beta$$

továbbá $\alpha \neq 0$ esetben

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{\alpha}.$$