Matematika informatikusoknak 2 – Differenciálszámítás

5. előadás

Egyoldali határértékek

Definíció. *Az $f(x)$ függvénynek az x_0 helyen a jobb oldali határértéke A, ha az összes olyan (x_n) sorozatra, ahol $x_n \to x_0$, $x_n > x_0$ teljesül*

$$f(x_n) \to A$$

és ezt így jelöljük

$$\lim_{x \to x_0{}^+} f(x) = A$$

Az x_0 valós szám és az A lehet valós szám, $+\infty$ vagy $-\infty$.

Egyoldali határértékek

Definíció. *Az $f(x)$ függvénynek az x_0 helyen a bal oldali határértéke A, ha az összes olyan (x_n) sorozatra, ahol $x_n \to x_0$, $x_n < x_0$ teljesül*

$$f(x_n) \to A$$

és ezt így jelöljük

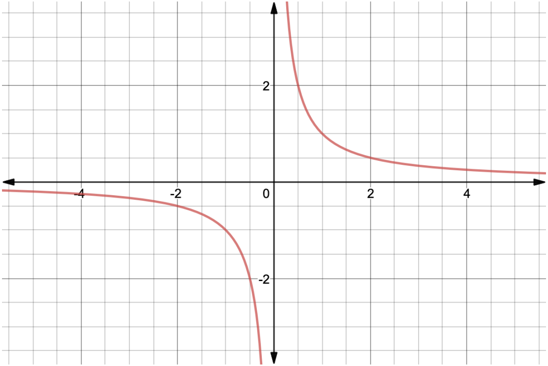
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A$$

Az x_0 valós szám és az A lehet valós szám, $+\infty$ vagy $-\infty$.

Példa

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = ?$$

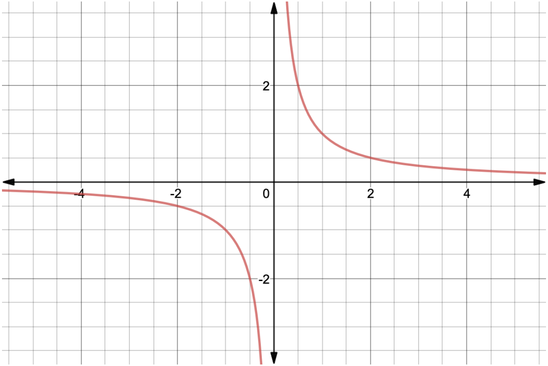
Ez a határérték nem létezik.



Példa

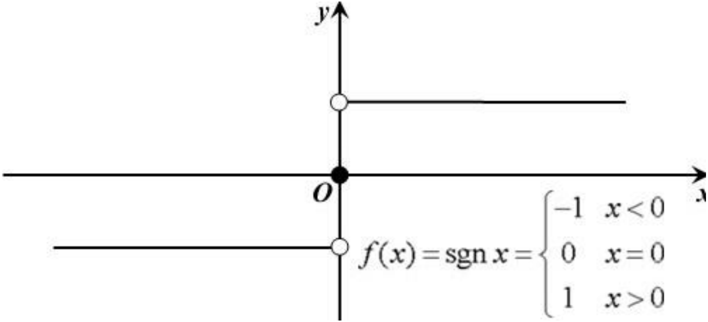
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = ?$$

Ez a határérték nem létezik.

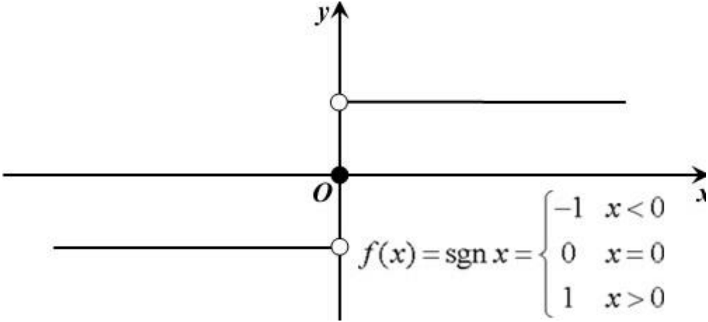


$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Példa



Példa



$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1 \qquad \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1$$

Tétel. A

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

határérték akkor és csak akkor létezik, ha léteznek a léteznek a megfelelő jobb- és bal oldali határértékek

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x), \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x),$$

és ezek megegyeznek.

Folytonos függvények

Szemléletes értelemben folytonosnak olyan függvényt tekintünk, melynek grafikonja megrajzolható anélkül, hogy az írószerszámot fel kellene emelni a papírról.

Folytonos függvények

Szemléletes értelemben folytonosnak olyan függvényt tekintünk, melynek grafikonja megrajzolható anélkül, hogy az írószerszámot fel kellene emelni a papírról.

Definíció. *Az $f(x)$ függvényt folytonosnak nevezzük az x_0 pontban, ha ott a határértéke megegyezik a függvény x_0 pontbeli értékével, azaz*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Az $f(x)$ folytonos egy intervallumon, ha az $f(x)$ az illető intervallum minden pontjában folytonos.

Tétel. *Ha az $f(x)$ és $g(x)$ folytonos függvények, akkor folytonos az*

$$f(x) + g(x), \quad f(x) - g(x), \quad f(x).g(x), \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \;\; (ha\ g(x) \neq 0)$$

függvény is.

Folytonos függvényekből képzett összetett függvény is folytonos.

Tétel. *Ha az* $f(x)$ *és* $g(x)$ *folytonos függvények, akkor folytonos az*

$$f(x) + g(x), \quad f(x) - g(x), \quad f(x).g(x), \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \;\; (\textit{ha } g(x) \neq 0)$$

függvény is.

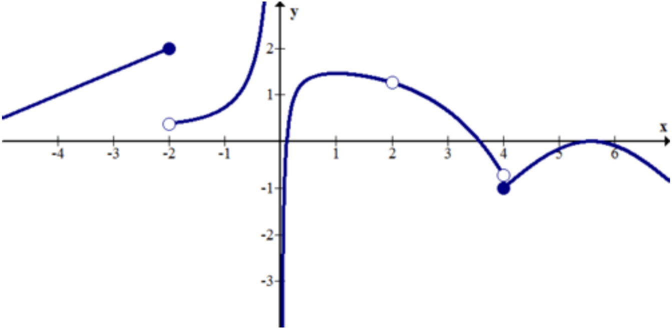
Folytonos függvényekből képzett összetett függvény is folytonos.

A konstans függvény, x, x^2, x^3, tetszőleges polinom, $\sin(x)$, $\cos(x)$, 2^x, 10^x, e^x folytonos függvények.

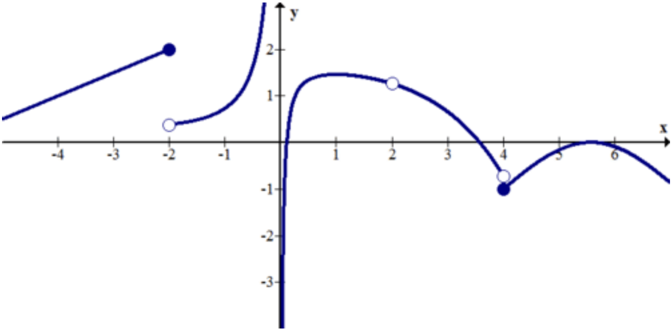
Tétel. *Ha az $f(x)$ és $g(x)$ folytonos függvények, akkor folytonos az*

$$\max\{f(x), g(x)\}, \qquad \min\{f(x), g(x)\}$$

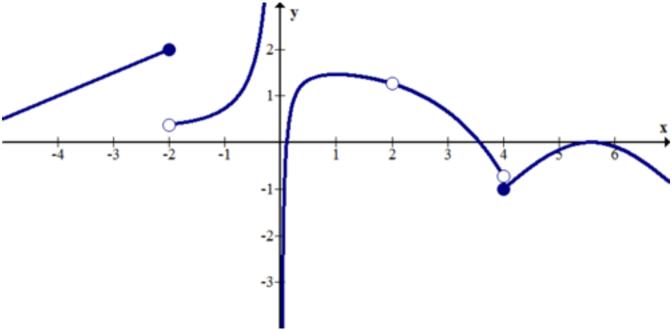
függvény is.



Az ábrán látható függvény nem folytonos az $x = -2$, az $x = 0$, az $x = 2$ (az $f(2)$ nem létezik) és az $x = 4$ helyen.

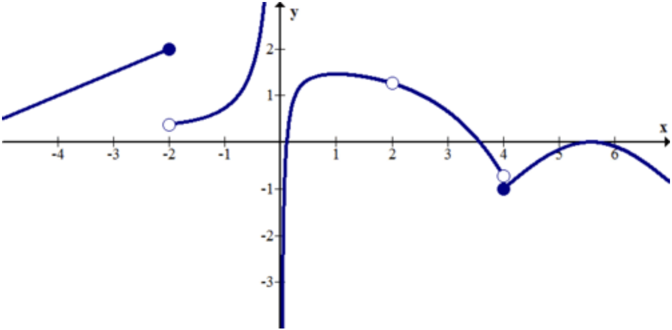


Ha az $f(x)$ függvénynek van jobb- és baloldali véges határértéke az x_0 pontban, de a függvény ott nem folytonos, akkor az x_0 ún. *elsőfajú szakadási pont*. Az összes többi szakadási pontot *másodfajú szakadási pont*nak nevezzük.



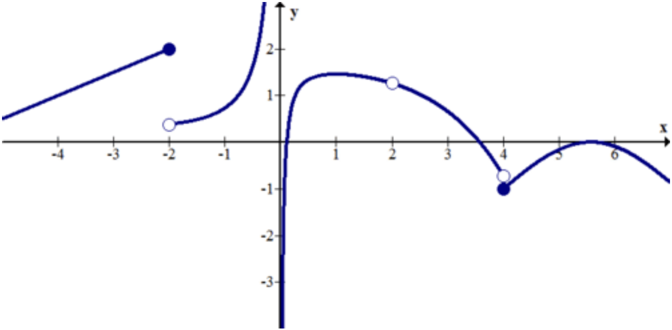
Ha az $f(x)$ függvénynek van jobb- és baloldali véges határértéke az x_0 pontban, de a függvény ott nem folytonos, akkor az x_0 ún. *elsőfajú szakadási pont*. Az összes többi szakadási pontot *másodfajú szakadási pont*nak nevezzük.

$x = -2$, $x = 2$, $x = 4$ – elsőfajú szakadási pont



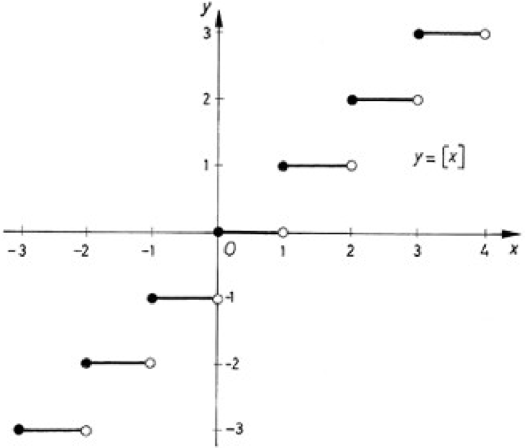
$x = -2$, $x = 2$, $x = 4$ – elsőfajú szakadási pont

$x = 0$ – másodfajú szakadási pont

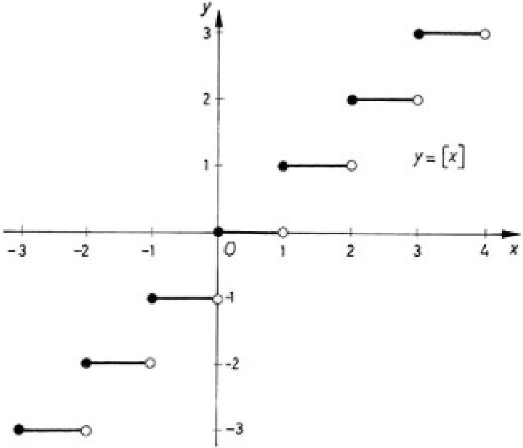


$x = -2$, $x = 2$, $x = 4$ – elsőfajú szakadási pont
$x = 0$ – másodfajú szakadási pont

Az $f(x)$ függvénynek *megszüntethető szakadása* van az x_0 elsőfajú szakadási helyen, ha f módosítható vagy kiterjeszthető abban a pontban folytonos függvénnyé.
$x = 2$ – megszüntethető szakadási pont



Az x valós szám egészrésze (jelölése: $[x]$) az a legnagyobb egész szám, amely kisebb az x-nél vagy egyenlő vele.



Az x valós szám egészrésze (jelölése: $[x]$) az a legnagyobb egész szám, amely kisebb az x-nél vagy egyenlő vele.
Az $[x]$ függvény szakadási pontjai az egész számok.

Az

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 4x + 3}$$

függvénynek megszüntethető szakadása van az $x = 1$ helyen.

Az

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 4x + 3}$$

függvénynek megszüntethető szakadása van az $x = 1$ helyen.

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 4x + 3} = ?$$

Az

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 4x + 3}$$

függvénynek megszüntethető szakadása van az $x = 1$ helyen.

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 4x + 3} = ?$$

$$\frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x-1).(\qquad\qquad)}{(x-1).(\qquad\qquad)}$$

Az

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 4x + 3}$$

függvénynek megszüntethető szakadása van az $x = 1$ helyen.

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 4x + 3} = ?$$

$$\frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x-1).(\qquad\quad)}{(x-1).(\qquad\quad)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1).(2x+5)}{(x-1).(x-3)} = \frac{2x+5}{x-3} = \frac{2.1+5}{1-3} = -\frac{7}{2}$$

Legyen $f(1) = -\frac{7}{2}$.

Tétel. Zárt intervallumon folytonos függvény tulajdonságai

Ha az $f(x)$ függvény folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon, akkor

1. *az $f(x)$ korlátos az $[a, b]$-n, azaz vannak olyan k, K számok, hogy az $[a, b]$ tetszőleges x elemére teljesül*

$$k \leq f(x) \leq K,$$

Tétel. Zárt intervallumon folytonos függvény tulajdonságai
Ha az $f(x)$ függvény folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon, akkor

1. *az $f(x)$ korlátos az $[a, b]$-n, azaz vannak olyan k, K számok, hogy az $[a, b]$ tetszőleges x elemére teljesül*

$$k \leq f(x) \leq K,$$

2. *az $f(x)$ felveszi az $[a, b]$-n a legkisebb és legnagyobb értékét, vagyis vannak olyan x_1, x_2 számok az $[a, b]$-ből, hogy az $[a, b]$ tetszőleges x elemére teljesül*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2),$$

Tétel. Zárt intervallumon folytonos függvény tulajdonságai

Ha az $f(x)$ függvény folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon, akkor

1. *az $f(x)$ korlátos az $[a, b]$-n, azaz vannak olyan k, K számok, hogy az $[a, b]$ tetszőleges x elemére teljesül*

$$k \leq f(x) \leq K,$$

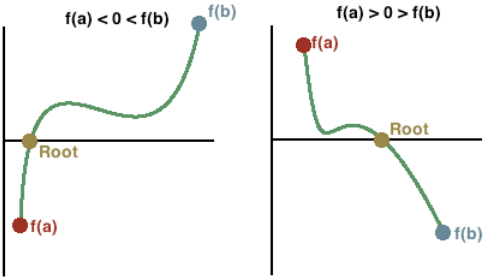
2. *az $f(x)$ felveszi az $[a, b]$-n a legkisebb és legnagyobb értékét, vagyis vannak olyan x_1, x_2 számok az $[a, b]$-ből, hogy az $[a, b]$ tetszőleges x elemére teljesül*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2),$$

3. *amennyiben $f(a).f(b) < 0$ (ami azt jelenti, hogy az $f(a)$, $f(b)$ közül az egyik pozitív a másik negatív), akkor van olyan c eleme az $[a, b]$ intervallumnak, hogy*

$$f(c) = 0.$$

The Location of Roots Theorem



If f is a continuous function that maps the closed and bounded interval I = [a,b] into the set of real numbers, and if f(a) < 0 < f(b) or f(a) > 0 > f(b), then there exists at least one root on the interval I as the function f must pass over the x-axis.

Feltételezzük, hogy $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$. Legyen $a_0 = a$ és $b_0 = b$. Intervallum felezéssel olyan egymásba skatulyázott

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$$

zárt intervallumok sorozatát szerkesztjük, melyek mindegyikére

$$f(a_n) \le 0 \quad \text{és} \quad f(b_n) > 0 \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

teljesül.

$$\text{Ha } f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) \leq 0 \text{ akkor legyen } a_1 = \frac{a_0+b_0}{2} \text{ és } b_1 = b_0 \ ,$$

$$\text{Ha } f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) > 0 \text{ akkor legyen } a_1 = a_0 \text{ és } b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}.$$

Példa. Mutassuk meg, hogy a

$$\sqrt{3x^5 + x + 5} = x^3 + 4x^2$$

egyenletnek van megoldása a $[0, 1]$-en.

Példa. Mutassuk meg, hogy a

$$\sqrt{3x^5 + x + 5} = x^3 + 4x^2$$

egyenletnek van megoldása a $[0, 1]$-en.

Legyen $f(x) = \sqrt{3x^5 + x + 5} - 2x^3 - 4x^2$. Akkor

- az $f(x)$ folytonos a $[0, 1]$-en,
- $f(0) = \sqrt{5} > 0$,
- $f(1) = \sqrt{3 + 1 + 5} - 2 - 4 = 3 - 6 < 0$.

Tehát van olyan c szám a $[0, 1]$-ből, melyre $f(c) = 0$. Ez a c szám lesz az eredeti egyenlet megoldása.

Példa. Tetszőleges harmadfokú polinomnak van legalább egy valós gyöke.

Legyen pl. $f(x) = 4x^3 - 7x^2 - 8x + 13$. Ezen a konkrét példán mutatjuk be a gondolatmenetet. Mivel

$$\lim_{x\to+\infty} 4x^3 - 7x^2 - 8x + 13 = +\infty, \quad \text{ezért } f(b) > 0 \text{ valamilyen } b\text{-re}$$

$$\lim_{x\to-\infty} 4x^3 - 7x^2 - 8x + 13 = -\infty, \quad \text{ezért } f(a) < 0 \text{ valamilyen } a\text{-ra.}$$

Példa. Tetszőleges harmadfokú polinomnak van legalább egy valós gyöke.

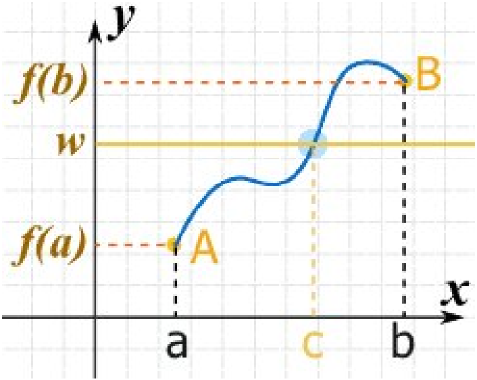
Legyen pl. $f(x) = 4x^3 - 7x^2 - 8x + 13$. Ezen a konkrét példán mutatjuk be a gondolatmenetet. Mivel

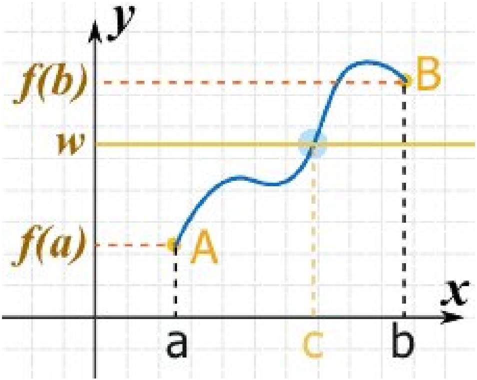
$$\lim_{x \to +\infty} 4x^3 - 7x^2 - 8x + 13 = +\infty, \quad \text{ezért } f(b) > 0 \text{ valamilyen } b\text{-re}$$

$$\lim_{x \to -\infty} 4x^3 - 7x^2 - 8x + 13 = -\infty, \quad \text{ezért } f(a) < 0 \text{ valamilyen } a\text{-ra.}$$

- az $f(x)$ folytonos az a és b között,
- $f(a) < 0$,
- $f(b) > 0$

Tehát van olyan c szám az a, b között, melyre $f(c) = 0$. Ez a c szám lesz a harmadfokú polinom gyöke.


y
f(b)
B
w
f(a)
A
x
a
c
b



Tétel. Ha az $f(x)$ folytonos az $[a, b]$-n, akkor tetszőleges olyan w-hez, mely az $f(a)$ és $f(b)$ között van, létezik olyan $c \in (a, b)$, melyre

$$f(c) = w$$

(ún. Darboux-tulajdonság)