DISZKRÉT MATEMATIKA I.

5. előadás

Kombinatorika: Leszámolási alapelvek, permutációk

Kombinatorika

♣ A matematika **KOMBINATORIKA** fejezete alapvetően a <u>véges halmazok</u> tulajdonságaival foglalkozik.

♣ Tipikus kérdésfeltevés pl., hogy hányféleképpen lehet

- egy halmaz elemeit sorbarendezni,
- kiválasztani belőlük néhányat bizonyos feltételek szerint,
- megadni valamely részhalmaz elemszámát,
- stb.

Összeadási elv

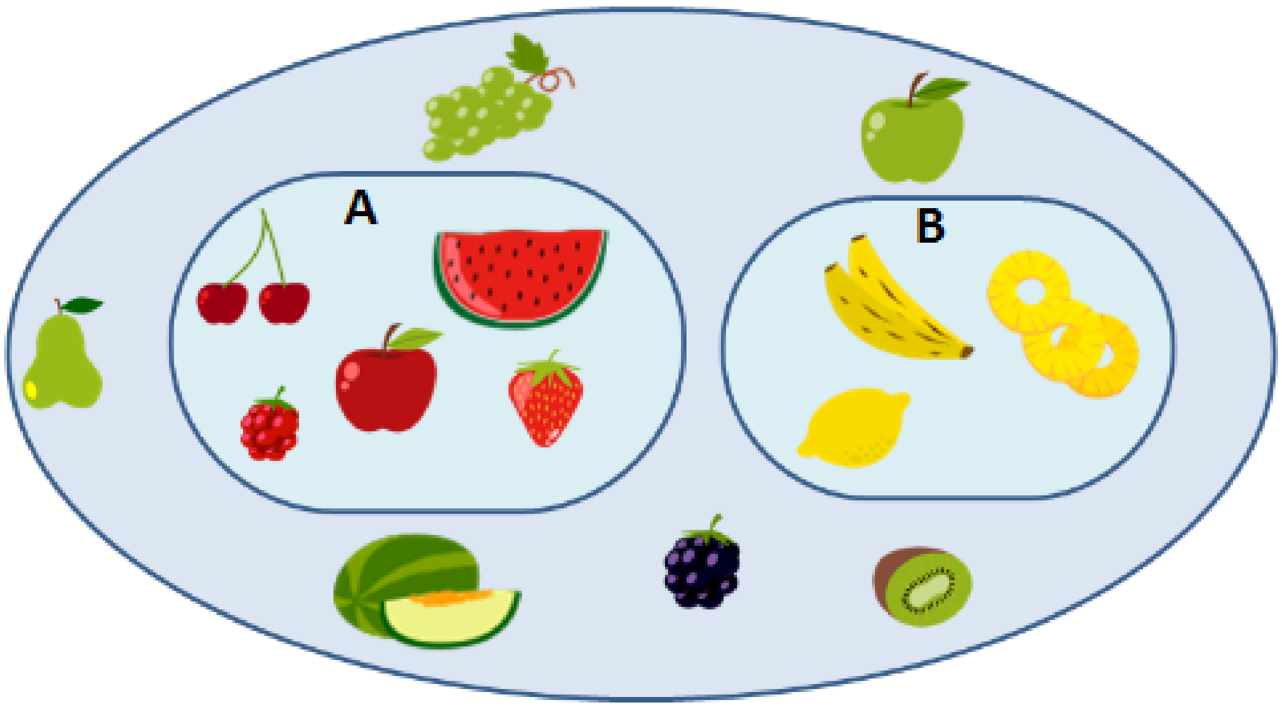
♣ Legyen

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n,$$

ahol feltesszük, hogy az A_i részhalmazok páronként diszjunktak. Ekkor az A halmaz elemeinek leszámlálásához elegendő az A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ részhalmazokat leszámolni, majd ezekből

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|.$$

♣ Pl. Hány piros vagy sárga gyümölcs van felsorolva összesen?



$A \cap B = \emptyset$, $|A| = 5$, $|B| = 3 \Longrightarrow |A \cup B| = |A| + |B| = 5 + 3 = 8$.

Szorzási elv

♣ Ha az

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

halmazokból egy-egy elemet kell kiválasztani úgy, hogy az egyes halmazokból történő kiválasztások nem befolyásolják egymást, akkor a lehetséges kiválasztott elem n-esek száma

$$|A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|.$$

♣ Pl. *Határozzuk meg, hogy hány* KÉTJEGYŰ PÁROS *szám állítható elő az* 1, 2, 3, 4, 5 *számjegyekből úgy, hogy egy számot legfeljebb egyszer használhatunk fel egy előállításban!*

A: feltételeknek megfelelő kétjegyű számok halmaza

A_1: feltételeknek megfelelő olyan kétjegyű számok halmaza, melyben az első számjegy páratlan

A_2: $-||-$, melyben az első számjegy páros

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset, \qquad A_1 \cup A_2 = A \qquad \Longrightarrow \qquad |A| = |A_1| + |A_2|$$

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

$$|A_1| = \overbrace{3}^{1,3,5} \cdot \overbrace{2}^{2,4} = 6,$$

$$|A_2| = \overbrace{2}^{2,4} \cdot \overbrace{1}^{marad.} = 2,$$

$$|A| = |A_1| + |A_2| = 6 + 2 = 8,$$

vagyis összesen 8 kétjegyű szám állítható elő a feltételeknek megfelelően.

Kivonási elv

♣ Legyen

$$A = A_1 \cup A_2,$$

és tegyük fel, hogy az A_1 és A_2 részhalmazoknak nincs közös elemük (diszjunktak). Ekkor A_1 elemeinek számát a direkt megközelítés esetleges nehézsége miatt célszerű úgy kiszámítani, hogy meghatározzuk A és A_2 elemszámát, majd

$$|A_1| = |A| - |A_2|.$$

♣ Pl. *Egy piros, egy kék és egy zöld dobókockát egyszerre feldobunk. Hányféleképpen fordulhat elő, hogy lesz hatos a dobások között?*

- Szorzási szabály $\longrightarrow$ összesen: $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$ eset,

- Ebből egyik kockán sincs hatos (szorzási szabály $\longrightarrow$):

  $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$

- Kivonási szabály (valamelyik kockán van hatos):

$$216 - 125 = 91.$$

Osztási elv

♣ Ha egy adott A halmaz elemszámának meghatározása a cél, és A minden elemét n-szer számoltuk össze és a leszámlálás eredménye N, akkor

$$|A| = \frac{N}{n}.$$

♣ Pl. *Egy évfolyam sakkbajnokságára* 8 *nevezés ékezett. A versenybizottság úgy döntött, hogy mindenki mindenkivel mérkőzzön meg a versenyen. Hány mékőzést játszanak összesen?*

Mindegyik versenyző 7 másikkal fog sakkozni: $N = 8 \cdot 7 = 56$ mérkőzés lenne,

de ekkor minden meccset kétszer számoltunk ($n = 2$), mert mindkét játékos oldaláról beszámítottuk.

Összesen

$$\frac{N}{n} = \frac{56}{2} = 28$$

meccs lesz a tornán.

Permutációk

♣ Adott n különböző elem. Az n elem valamely sorrendjét az n elem egy **permutációjának** nevezzük.

TÉTEL. Adott n különböző elem összes permutációinak száma $n!$.

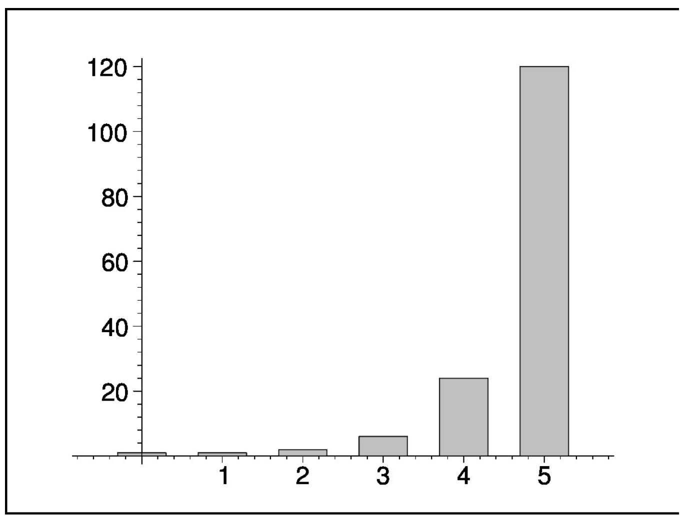
Megjegyzés: $0! = 1, \quad 1! = 1, \quad n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1.$

Nagy n értékek esetén $n!$ közelítésére az ún. Stirling-formulát használjuk:

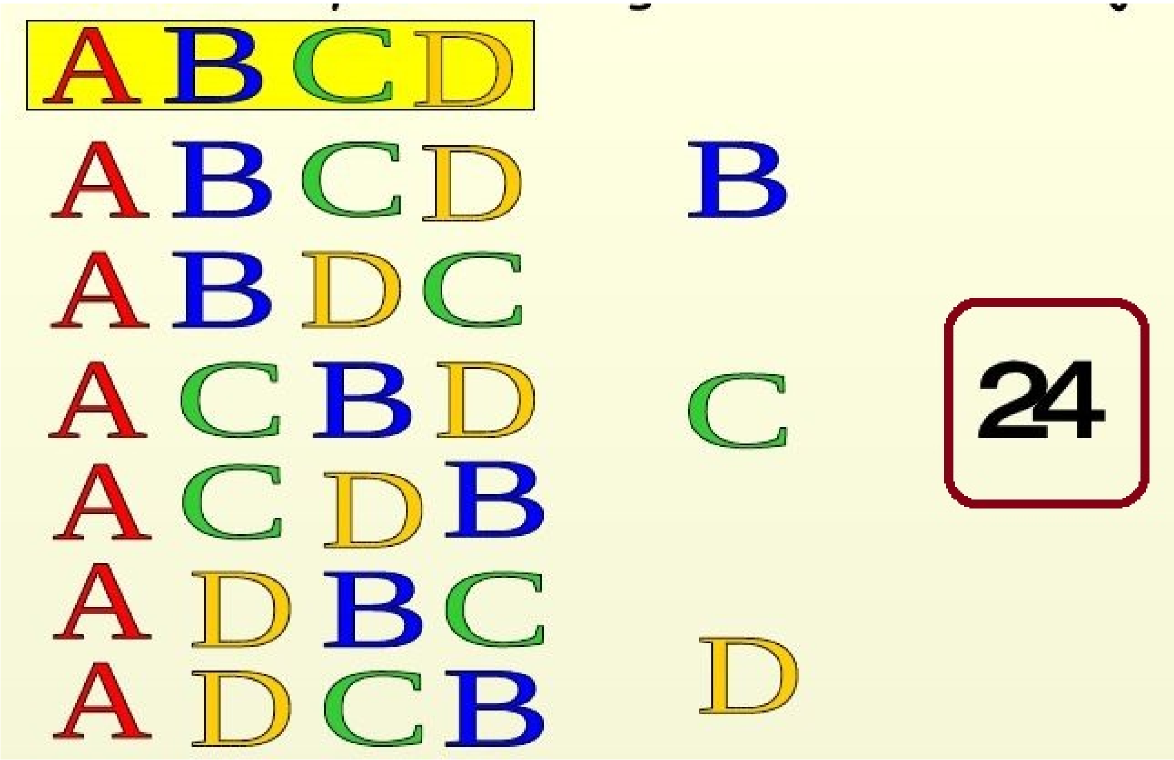
$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	362880

n	...	20	...	100
$n!$	...	$2.4 \cdot 10^{18}$	...	$9.3 \cdot 10^{157}$



♣ Pl. *Négy fő között négyféle ajándékot osztanak ki (mindenki kap). Hányféleképpen lehet ezt megtenni?* $(4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.)$



Ismétléses permutációk

♣ Adott n elem, amelyek között rendre n_1 számú, n_2 számú, ..., n_k számú egyforma van ($k \in \mathbb{N}^+$; $2 \leq n_i \in \mathbb{N}^+$, $i = 1, 2, \ldots, k$; $n_1 + n_2 + \cdots + n_k \leq n$). Az n elem valamely sorrendjét az n elem egy **ismétléses permutációjának** nevezzük.

TÉTEL. Adott n elem összes ismétléses permutációinak száma

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} .$$

♣ Pl. *Egy csokoládé automatában négyféle csoki van, minden típusból nyolc-nyolc darab, melyek külön rekeszben vannak elhelyezve. Hányféleképpen lehet kiüríteni az automatát, ha egyszerre csak egy csokit tudunk kivenni?*

Az automata kiürítése során 32 csokoládét rakunk sorba, melyek közül 8-8-8-8 egyforma. Ezért annyi kiürítés létezik, ahány módon lehet permutálni 32 elemet úgy, hogy bizonyos elemek ismétlődnek. A lehetséges kiürítések száma: $\frac{32!}{8! \cdot 8! \cdot 8! \cdot 8!} = \frac{32!}{(8!)^4} = 9.96 \cdot 10^{16}$.