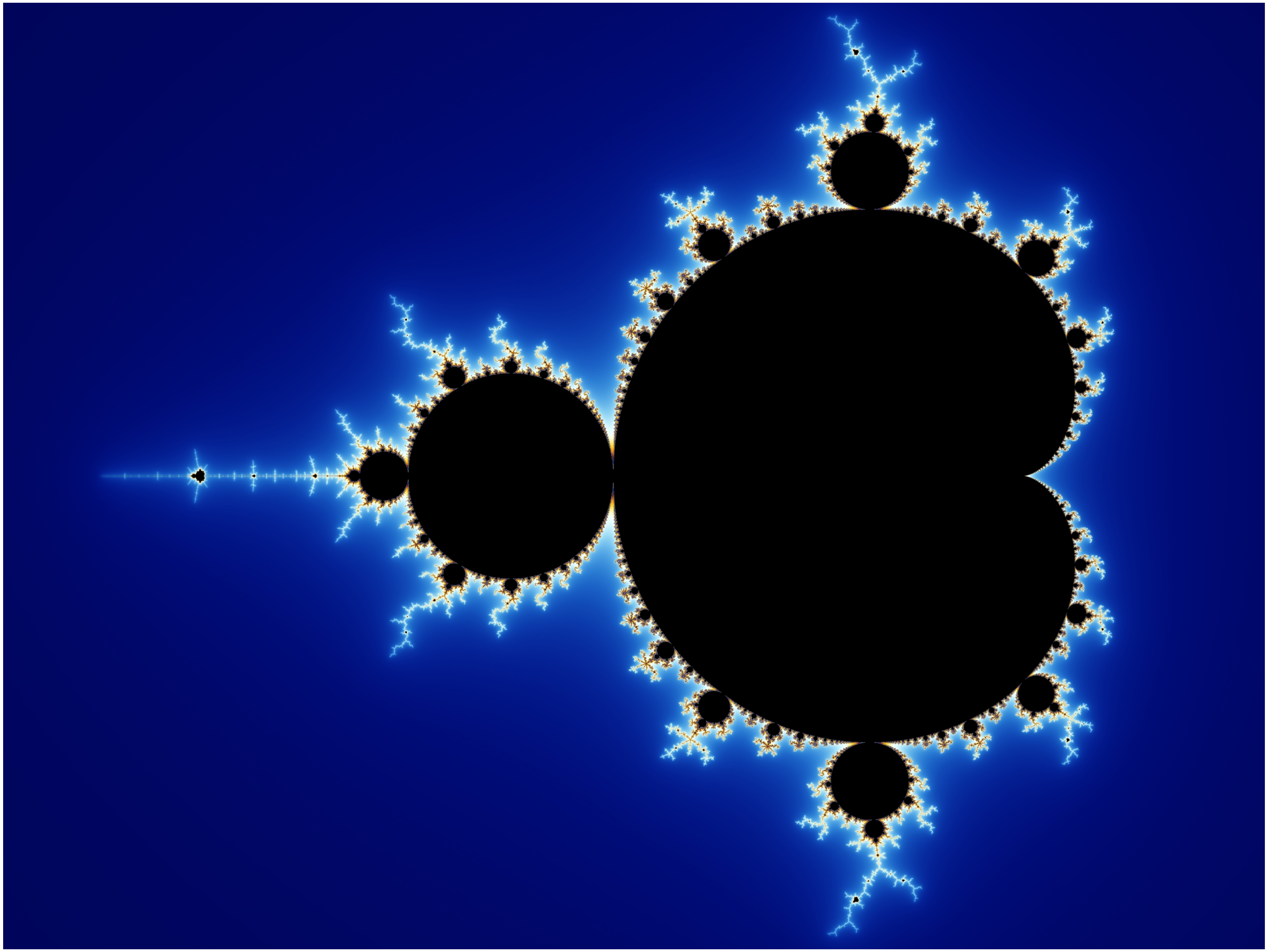
DISZKRÉT MATEMATIKA I.

2. előadás

Halmazelmélet



♣ **Halmaz, halmaz eleme**: definiálatlan alapfogalom.

Jelölés:

- x eleme az X halmaznak: $x \in X$ (vagy $X \ni x$);
- y nem eleme az Y halmaznak: $y \notin Y$ (vagy $Y \not\ni y$).

Fontos! Egy halmaz akkor adott, ha bármiről *egyértelműen eldönthető*, hogy beletartozik vagy nem.

Pl. a szép kutyák nem alkotnak halmazt.

♣ **Halmaz megadása**:

- elemeinek felsorolásával vagy a felsorolás érzékeltetésével, pl. $A = \{1, 2, 5\}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$;

- megmondjuk, hogy milyen tulajdonságú dolgok az elemei, pl. B a 30 évnél fiatalabb magyar állampolgárok halmaza;

- adott halmazokból műveletekkel állítjuk elő, lásd később.

Az X *halmaz elemeinek számát* $|X|$ jelöli, pl. $|A| = 3$, $|\mathbb{N}| = \infty$.

♣ Nevezetes számhalmazok

Természetes számok: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$;

Egész számok: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$;

Racionális számok: $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$;

Valós számok: $\mathbb{R} = \{\text{racionális sorozatok határértékei}\}$;

Irracionális számok: $\mathbb{Q}^{\star} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}$;

Komplex számok: $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.

♣ **Definíció.** Két halmaz egyenlő, ha elemeik megegyeznek. Jelölés: $=$.

Pl. $\{2, 5, 7\} = C \neq D = \{$10-nél kisebb prímszámok$\}$, mert $3 \in D$ és $3 \notin C$;

Pl. $\{$2003 számjegyei$\} = E = F = \{0, 2, 3\}$, mivel a halmazok minden elemét csak egyszer tüntetjük fel.

♣ **Definíció.** Üres halmaz az a halmaz melynek nincsenek elemei. Jelölés: $\emptyset$.

Pl. $G = \{\sin x + \cos x = 5$ egyenlet valós gyökei$\}$ esetén $G = \emptyset$.

♣ **Definíció.** Az X halmaz <u>része</u> az Y halmaznak, ha $\forall\, x \in X$ esetén $x \in Y$ is teljesül.

Jelölés: $X \subset Y$ (vagy $Y \supset X$).

Pl. Bármely X halmazra $X \subset X$, $\emptyset \subset X$.

♣ **Definíció.** Az X halmaz <u>valódi része</u> az Y halmaznak, ha $X \subset Y$ és $X \neq Y$.

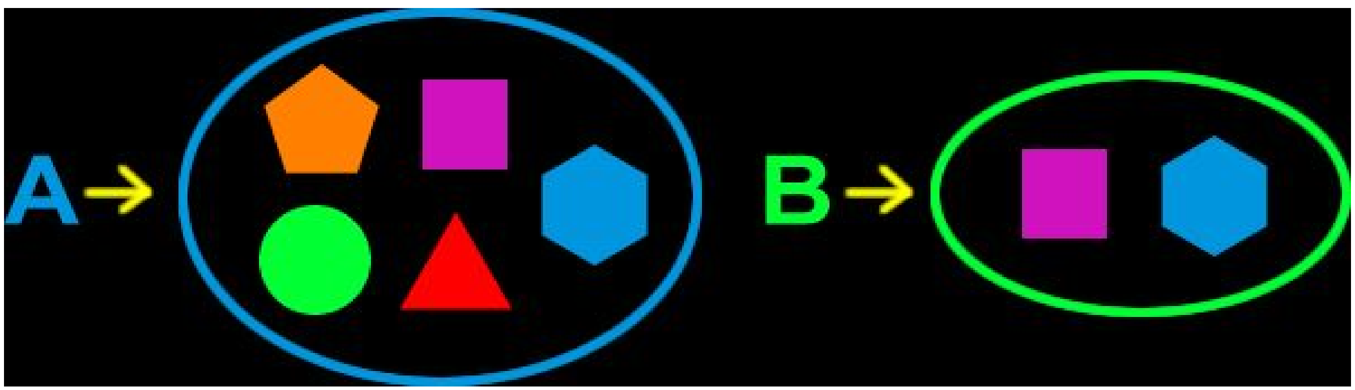
Jelölés: $X \subsetneq Y$ (vagy $Y \supsetneq X$).

Pl. $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{R}$ (persze $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ igaz).

♣ **Részhalmazok megadása**: valamely U (Univerzum) alaphalmazból bizonyos tulajdonságú elemek kiemelése. Ha τ a tulajdonság, H a kapott részhalmaz:

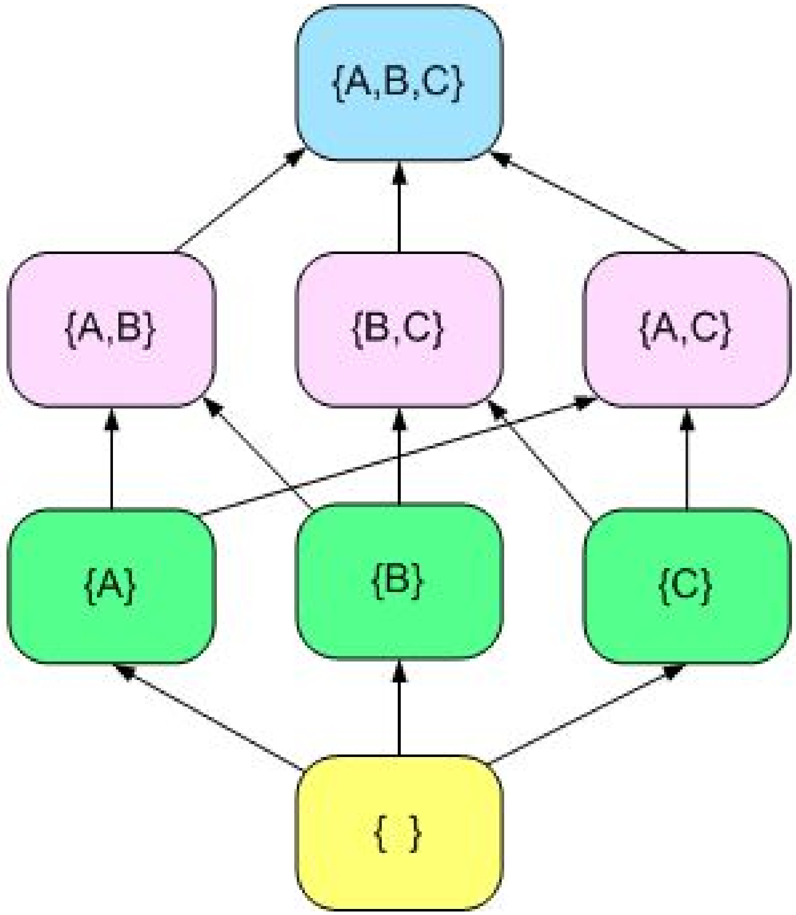
$$H = \{x \in U \mid x \text{ elem } \tau \text{ tulajdonságú}\}$$

pl. $H = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$;

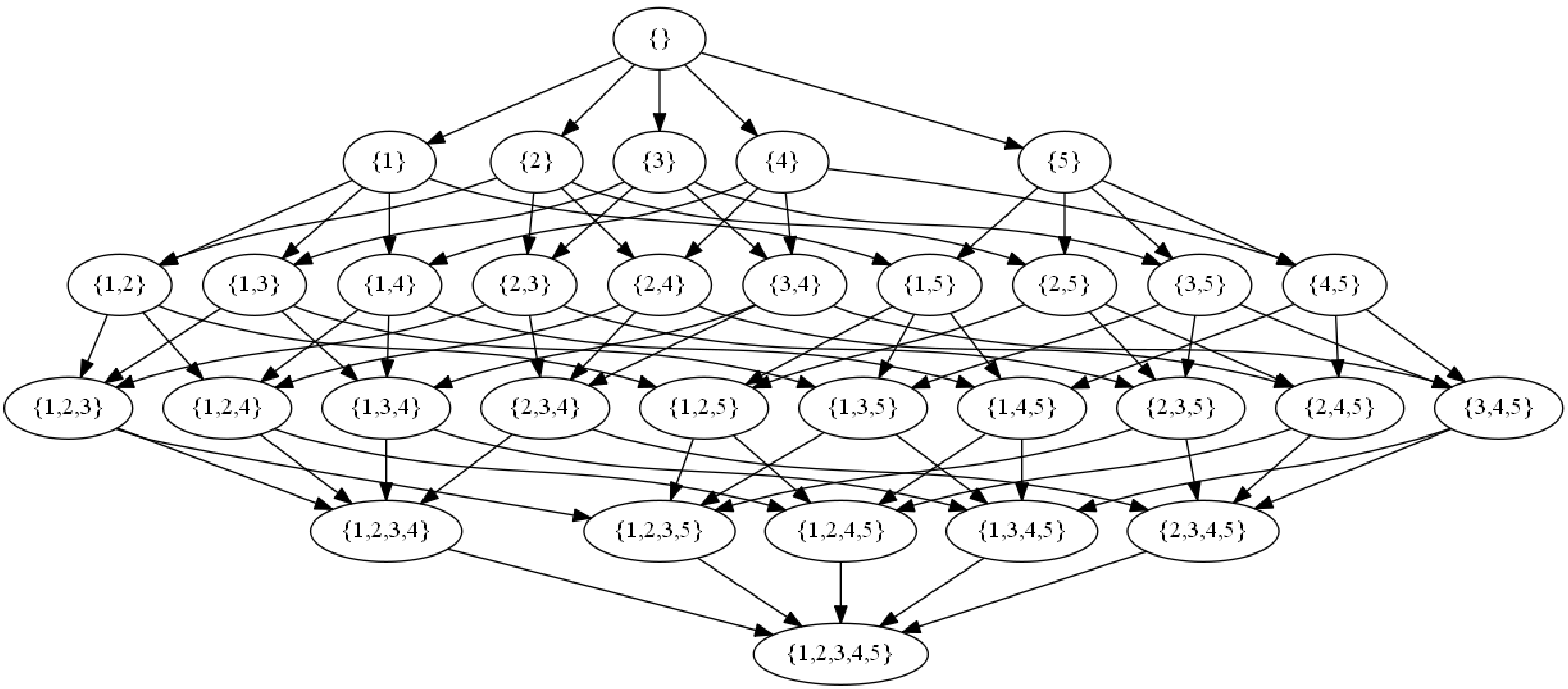


♣ Halmazok szemléltetése: Venn-diagrammal.

Véges halmaz részhalmazainak száma?



Véges halmaz részhalmazainak száma?



Véges halmaz részhalmazainak száma?

♣ **Definíció.** A H halmaz részhalmazait tartalmazó halmazt a H halmaz hatványhalmazának nevezzük.

Jelölés: $\mathcal{P}(H) = \{X \subset H\}$.

Pl. Ha $H = \{1, 2, 3\}$, akkor

$$\mathcal{P}(H) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

♣ **Tétel.** Ha $|H| = n$, akkor $|\mathcal{P}(H)| = 2^n$.

♣ **Definíció.** Az X és Y halmazok <u>metszetén (közös részén)</u> azt a halmazt értjük, melynek elemei X-nek és Y-nak is elemei.

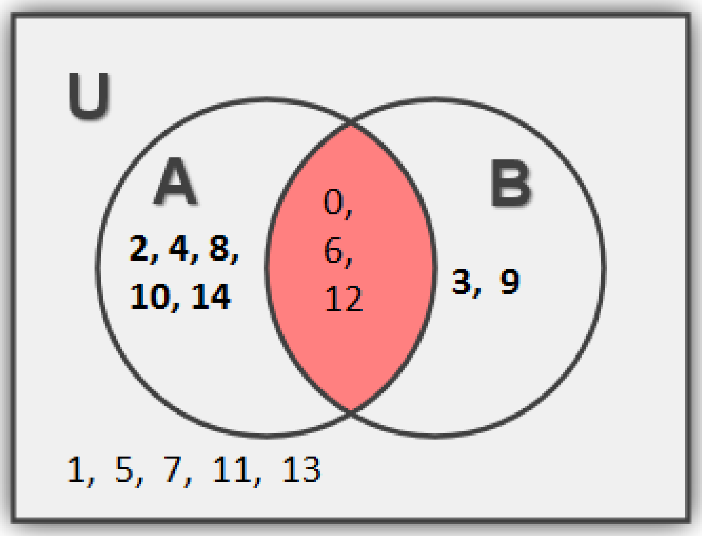
Jelölés: $X \cap Y = \{x \in U \mid x \in X \text{ és } x \in Y\}$.

Pl.

$U = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 14\}$

$A = \{n \in U \mid n \text{ páros}\}$

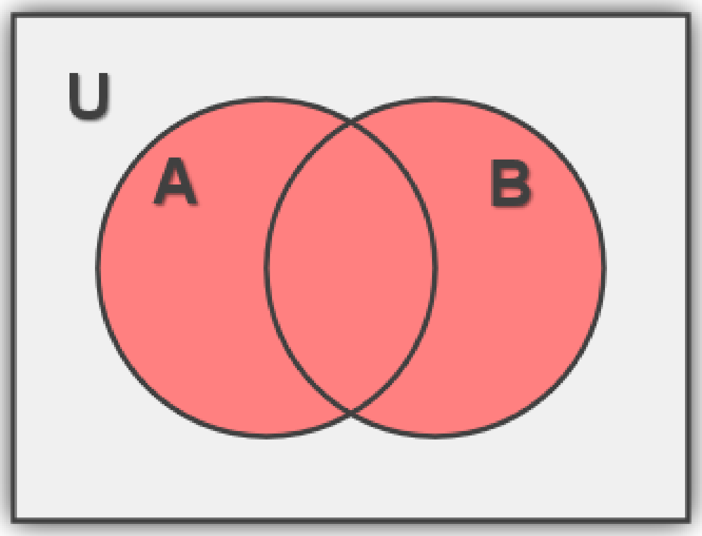
$B = \{n \in U \mid n \text{ osztható 3-mal}\}$



♣ **Definíció.** X és Y halmazok <u>diszjunktak</u> ha $X \cap Y = \emptyset$.

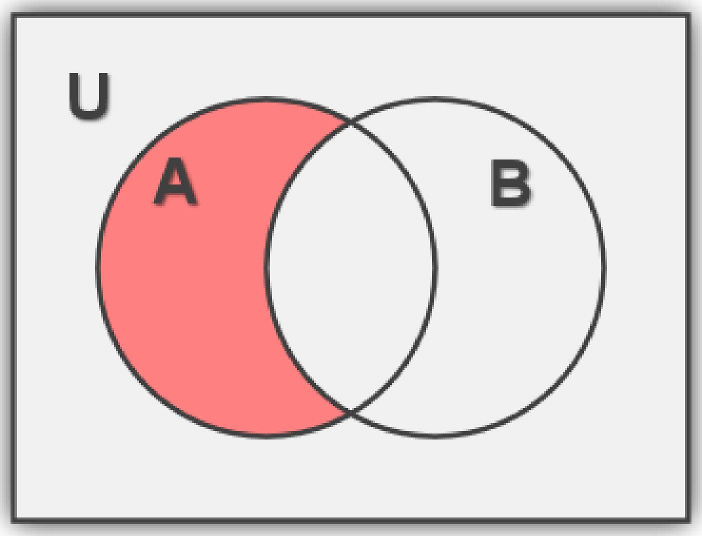
♣ **Definíció.** Az X és Y halmazok <u>unióján (egyesítésén)</u> azt a halmazt értjük, melynek elemei X és Y közül legalább az egyiknek elemei.

Jelölés: $X \cup Y = \{x \in U \mid x \in X \text{ vagy } x \in Y\}$.



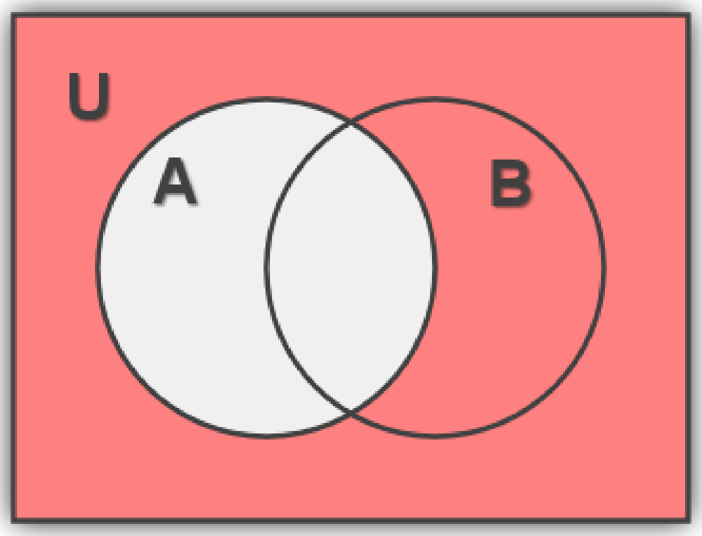
♣ **Definíció.** Az X és Y halmazok (ilyen sorrendben vett) különbségén azt a halmazt értjük, melynek elemei elemei X-nek de nem elemei Y-nak.

Jelölés: $X \setminus Y = \{x \in U \mid x \in X \text{ és } x \notin Y\}$.



♣ **Definíció.** Az X halmaz komplementerén (kiegészítésén) azt a halmazt értjük, melynek elemei nem elemei X-nek.

Jelölés: $\overline{X} = \{x \in U \mid x \notin X\}$.



Példa

$$I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\},$$

$$J = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$$

$$\Downarrow$$

$$I \cap J = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}, \qquad I \cup J = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 5\},$$

$$I \setminus J = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\} \neq J \setminus I = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 5\}.$$

Kérdés

Létezik-e az **összes halmazt** tartalmazó halmaz?