Nevezetes határértékek

$$\text{Ha } a > 1, \text{ akkor } \lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty; \text{ ha } -1 < a < 1, \text{ akkor } \lim_{n\to+\infty} a^n = 0. \tag{1}$$

Nevezetes határértékek

$$\text{Ha } a > 1, \text{ akkor } \lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty; \text{ ha } -1 < a < 1, \text{ akkor } \lim_{n\to+\infty} a^n = 0. \tag{1}$$

$$\text{Ha } a > 1, \text{ akkor } \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1. \tag{2}$$

Nevezetes határértékek

$$\text{Ha } a > 1, \text{ akkor } \lim_{n \to +\infty} a^n = +\infty; \text{ ha } -1 < a < 1, \text{ akkor } \lim_{n \to +\infty} a^n = 0. \tag{1}$$

$$\text{Ha } a > 1, \text{ akkor } \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = 1. \tag{2}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \tag{3}$$

$$\text{A } \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \text{ sorozat konvergens.}$$

Legyen

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Igazolható, hogy az (a_n) sorozat növekvő, azaz

$$a_n \leq a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

és felülről korlátos, a sorozat elemeinek a felső korlátja pl. a 3. Ismert, hogy a monoton és korlátos sorozat konvergens (van véges határértéke) ezt a határértéket e-vel jelölik. Ez az ún. Euler-féle szám, mely irracionális, az értéke

$$e = 2,718\,281\,828\dots$$

ez az alapszáma a *természetes logaritmus*nak.

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{4}$$

A fenti határérték akkor is teljesül, ha az n helyett bonyolultabb kifejezés van, lényeges, hogy a hatványkitevő pontosan megegyezzen azzal, amivel a zárójelben az 1 osztva van. Azaz

$$\lim_{\boxed{} \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\boxed{}}\right)^{\boxed{}} = e. \tag{5}$$

1.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n-1}{n^2} = ?$$

$$\begin{array}{llllll}
1 & +2 & +3 & +\dots & +(n-2) & +(n-1) \\
+(n-1) & +(n-2) & +(n-3) & +\dots & +2 & +1 \\
 & & & & & \\
=n & +n & +n & +\dots & +n & +n = (n-1)n
\end{array}$$

Tehát

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n-1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-n}{2n^2} = \lim_{n\to+\infty}$$

2.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2n+7} = ?$$

Útmutatás: arra a tagra összpontosítsunk, melynek a "leggyorsabb" a növekedése.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2n+7} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n(2+\frac{7}{n})} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{2+\frac{7}{n}} = 1.1 = 1$$

4.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n+3}=?$$

A zárójel tartalma az 1-hez tart, a hatványkitevő pedig a végtelenbe, az ilyen esetekben javasolt az (5) használata.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n+3}=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)^{\frac{2n+3}{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\boxed{n+1}}\right)^{\boxed{n+1}}\right)^{\frac{2n+3}{n+1}}$$

és a az (5) szerint

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n+3}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{2n+3}{n+1}}=e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+3}{n+1}}=e^2.$$

5.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+4}{2n+1}\right)^n = ?$$

Mivel a zárójel tartalma az 1-hez közelít a hatványkitevő pedig a végtelenbe, az előző feladat megoldási módszere követhető. A (5)-ben a zárójel tartalma $1 + \textit{valami}$ alakú. Ezt az alakot könnyen létre tudjuk hozni, mert

$$\frac{2n+4}{2n+1} = 1 + \left(\frac{2n+4}{2n+1} - 1\right) = 1 + \frac{2n+4-(2n+1)}{2n+1} = 1 + \frac{3}{2n+1}$$

Ezt felhasználva

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+4}{2n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{\frac{2n+1}{3}}\right)^n$$

Függvények határértéke

Definíció. *Az $f(x)$ függvénynek az x_0 helyen a határértéke A, ha az összes olyan (x_n) sorozatra, ahol $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ teljesül*

$$f(x_n) \to A$$

és ezt így jelöljük

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

("limesz, ha x tart x_0-hoz, $f(x)$ egyenlő A-val")
Más szóval, ha az (x_n) sorozat határértéke x_0 akkor az ezen pontokban vett $(f(x_n))$ függvényértékek sorozatának a határértéke A.
Az x_0 és az A bármelyike lehet valós szám, $+\infty$ vagy $-\infty$.
A definíció arról szól, hogy az $f(x)$ függvény hogy viselkedik az x_0 közelében.

$$\lim_{x \to 1} x^2 + 3x + 4 =$$

$$\lim_{x \to 1} x^2 + 3x + 4 =$$

$$\lim_{x \to 2} 5x + 6 =$$

$$\lim_{x \to 1} x^2 + 3x + 4 =$$

$$\lim_{x \to 2} 5x + 6 =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x + 3}{x^2 + 5x + 4} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 3x}{2x^3 + x^2 + x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 3x}{2x^3 + x^2 + x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x.(\quad)}{x.(\quad)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+3x}{2x^3+x^2+x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x.(\qquad)}{x.(\qquad)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x.(x+3)}{x.(2x^2+x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+3)}{(2x^2+x+1)} = \frac{0+3}{0+1} = 3$$

Példa

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2+5x-14}$$

Az $x=2$ esetén a számláló is és a nevező is kinullázódik, a határérték ún. $\frac{0}{0}$ alakú. Felhasználhatjuk a következő tételt.

Ha egy polinomba behelyettesítve az α számot 0-át kapunk, akkor az a polinom osztható $(x-\alpha)$-val.

Esetünkben ez azt jelenti, hogy

$$\frac{x^2+x-6}{x^2+5x-14} = \frac{(x-2).valami}{(x-2).masvalami}.$$

Tehát

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2+5x-14} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2).(x+3)}{(x-2).(x+7)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x+7} = \frac{2+3}{2+7} = \frac{5}{9}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} \frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+8}+3}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} \frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+8}+3}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x+8-9}{(x-1).\sqrt{x+8}+3} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x+8}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 + 3x - 1}{x^2 + 5x + 8}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+3x-1}{x^2+5x+8}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+3x-1}{x^2+5x+8} = 4$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{5x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{5x}$$

$$\lim_{\boxed{} \to 0} \frac{\sin \boxed{}}{\boxed{}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{5x}$$

$$\lim_{\boxed{}\to 0} \frac{\sin \boxed{}}{\boxed{}} = 1$$

Mivel $x \to 0$ esetben $4x \to 0$, ezért a fentiek alapján $\frac{\sin 4x}{4x}$ viselkedéséről tudnánk valamit mondani. Ezt felhasználva

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{5x} \frac{4x}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin \boxed{4x}}{\boxed{4x}} \frac{4x}{5x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \boxed{4x}}{\boxed{4x}} \frac{4}{5} = 1.\frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 7x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 7x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin 7x}{7x}} \frac{3x}{7x} = \frac{3}{7}$$