DISZKRÉT MATEMATIKA I.

8. előadás

Kombinatorika: skatulya elv, logikai szita formula

Skatulya elv

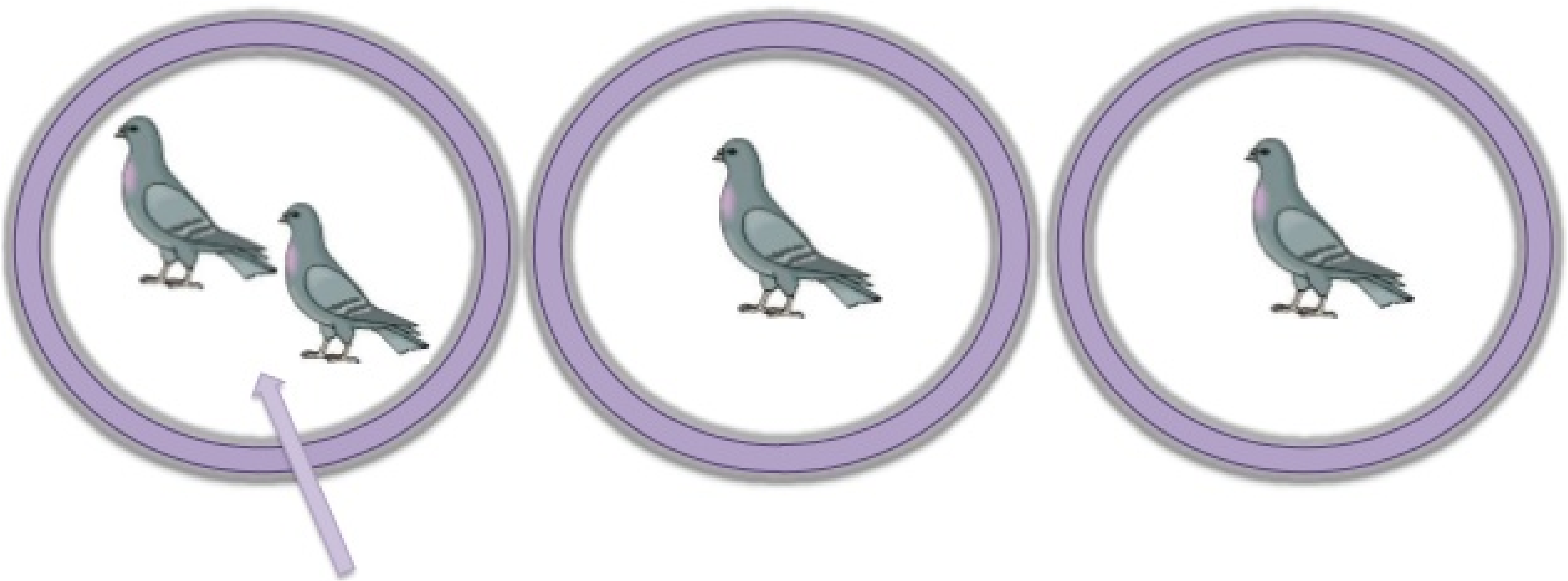
Adott

- n **doboz** (**skatulya**), és
- k **tárgy** úgy, hogy $n < \boldsymbol{k}$ teljesül.

Az összes tárgyat beletesszük a dobozokba.

Elv: **Biztosan van olyan doboz, melyben legalább 2 tárgy van.**

Example Problem



The result is that at least one hole has two pigeons because the number of pigeons is greater than the number of holes. P>H

♣ 1. Példa. *Bármely 4 természetes szám között van 2, melyek különbsége osztható 3-mal.*

Igazolás:

- 3-mal való osztási maradék lehet: $0, 1, 2$ (3 skatulya van),
- 4 természetes szám adott (4 tárgy van).
- $\Downarrow$
- **Skatulya elv**: van két természetes szám, melyek maradéka megegyezik: $a = 3a_1 + m$, $b = 3b_1 + m$ $(m \in \{0, 1, 2\})$.
- Következtetés: $a - b = (3a_1 + m) - (3b_1 + m) = 3(a_1 - b_1)$ osztható 3-mal.

♣ 2. Példa. *Legalább hányan járnak abba az osztályba, ahol van két tanuló, akinek ugyanannyi foga van?*

Válasz:

- Tanulók száma: k (k “tárgy” van),
- fogak lehetséges száma: $0, 1, \ldots, 32$ (33 skatulya van).
- $\Downarrow$
- **Skatulya elv**: ahhoz, hogy több tárgy legyen mint skatulya, teljesülnie kell a $k > 33$ feltételnek.
- Következtetés: legalább $k = 34$ tanuló van az osztályban.

♣ 3. Példa. *Legalább hányan laknak abban az országban, ahol van két lakos, akinek ugyanolyan a fogazata?*

Válasz:

- Lakosok száma: k (k “tárgy” van),
- fogazatok lehetséges száma: 2^{32} (2^{32} skatulya van).
- $\Downarrow$
- **Skatulya elv**: ahhoz, hogy több tárgy legyen mint skatulya, teljesülnie kell a $k > 2^{32}$ feltételnek.
- Következtetés: legalább $k = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$ az “ország” népessége.

♣ Kérdés. *Igaz-e, hogy egy 38 fős társaságban van legalább 4 ember, akik ugyanabban a hónapban születtek?*

Skatulya elv módosítsa

Adott

- n doboz (skatulya), és
- k tárgy úgy, hogy $n \cdot t < k$ teljesül.

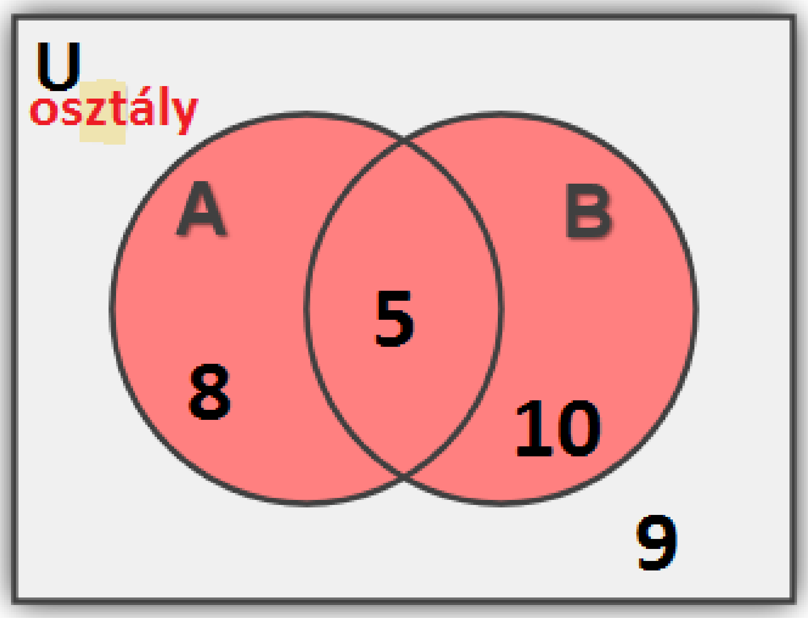
Az összes tárgyat beletesszük a dobozokba.

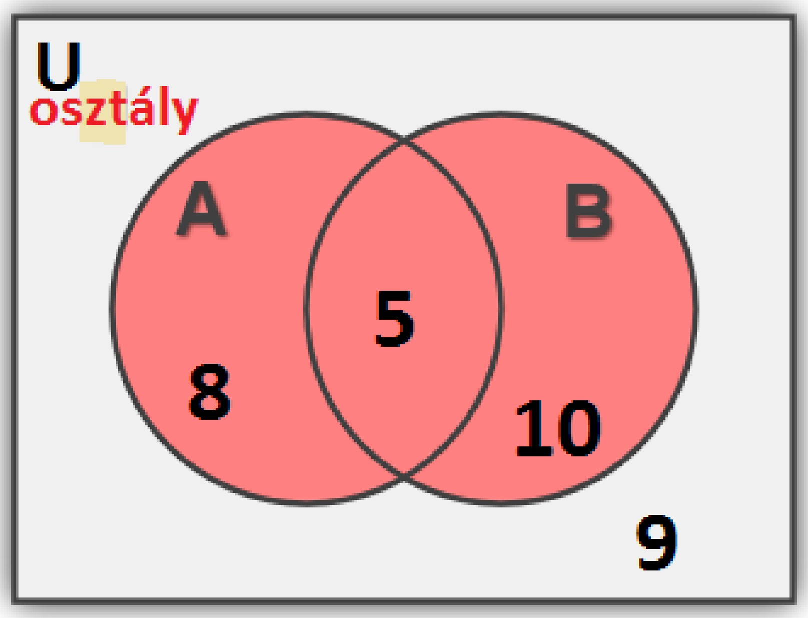
Elv: Biztosan van olyan doboz, melyben legalább $\mathbf{t+1}$ tárgy van.

Logikai szita formula

♣ Bevezető példa. *Egy 32 fős osztályban 13-an angolt, 15-en beloruszt tanulnak úgy, hogy 5 tanuló mindkét nyelvet tanulja. Hányan vannak, akik egyik nyelvet sem tanulják?*

Megoldás:





$$|\overline{A \cup B}| = |U| - (|A| + |B|) + |A \cap B| = 32 - (13 + 15) + 5 = 9$$

Két halmazra:

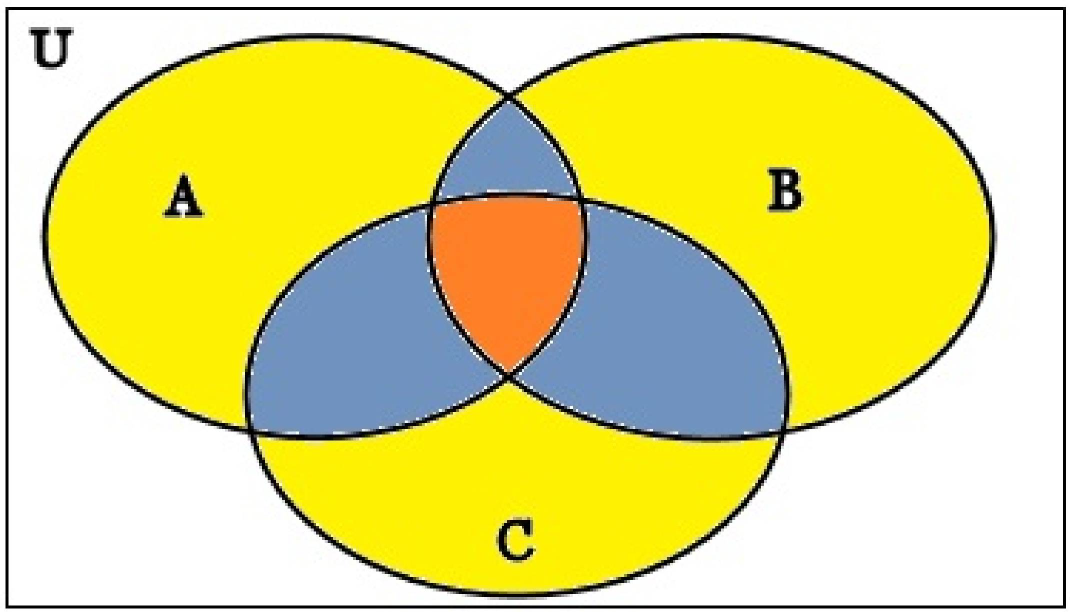
$$
\begin{aligned}
|\overline{A \cup B}| &= |U| \\
&\quad - (|A| + |B|) \\
&\quad + |A \cap B|
\end{aligned}
$$

Három halmazra:

$$
\begin{aligned}
|\overline{A \cup B \cup C}| &= |U| \\
&\quad - (|A| + |B| + |C|) \\
&\quad + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) \\
&\quad - |A \cap B \cap C|
\end{aligned}
$$

Három halmazra:

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |U| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - |A \cap B \cap C|$$



Tetszőleges számú halmazra:

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}| =$$

$$\begin{aligned}
&|U| \\
&-(|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|) \\
&+(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n|) \\
&-(|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \cdots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|) \\
&+\cdots \\
&+(-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.
\end{aligned}$$

Logikai szita formula, “újratöltve”

Adott egy U halmaz, melynek elemei közül bizonyosak rendelkeznek a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ tulajdonságok közül valamelyekkel úgy, hogy egy elemnek több tulajdonsága is lehet.

Jelöljük az $S(t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_r})$ formulával azon elemek számát, melyek a t_{i_1}, t_{i_2}, $\ldots$, t_{i_r} tulajdonságok mindegyikével (és esetleg másokkal) rendelkeznek.

$\overline{t_i}$ azt jelöli, hogy egy elem nem t_i tulajdonságú.

Ekkor az egyik tulajdonsággal sem rendelkező elemek száma

$$S(\overline{t_1}, \overline{t_2}, \ldots, \overline{t_n}) =$$

$$\begin{aligned}
&|U| \\
&-(S(t_1), S(t_2), \ldots, S(t_n)) \\
&+(S(t_1, t_2) + S(t_1, t_3) + \cdots + S(t_{n-1}, t_n)) \\
&-(S(t_1, t_2, t_3) + S(t_1, t_2, t_4) + \cdots + S(t_{n-2}, t_{n-1}, t_n)) \\
&+\cdots \\
&+(-1)^n S(t_1, t_2, \ldots, t_n).
\end{aligned}$$

♣ 1. Példa. *Hány olyan 21000-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amely nem osztható a* $2, 3, 5$*, és 7 számok egyikével sem? (*$21000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7 = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) \cdot 100$*)*

U : az összes 21000-nél nem nagyobb pozitív egész számok halmaza, $|U| = 21000$.

$i = 2, 3, 5, 7$ esetén t_i : egy szám osztható i-vel.

$$S(t_2) = \frac{21000}{2}, \quad S(t_3) = \frac{21000}{3}, \quad S(t_5) = \frac{21000}{5}, \quad S(t_7) = \frac{21000}{7}$$

$$S(t_i, t_j) = \frac{21000}{i \cdot j}, \qquad i \neq j, \;\; i \in \{2, 3, 5, 7\} \ni j$$

$$S(t_2, t_3, t_5) = \frac{21000}{2 \cdot 3 \cdot 5}, \quad \ldots, \quad S(t_3, t_5, t_7) = \frac{21000}{3 \cdot 5 \cdot 7}$$

$$S(t_2, t_3, t_5, t_7) = \frac{21000}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$$

$$
\begin{aligned}
&S(\overline{t_2}, \overline{t_3}, \overline{t_5}, \overline{t_7}) = \\
&\qquad 21000 - \Big(\frac{21000}{2} + \frac{21000}{3} + \frac{21000}{5} + \frac{21000}{7}\Big) \\
&\quad + \Big(\frac{21000}{2\cdot 3} + \frac{21000}{2\cdot 5} + \frac{21000}{2\cdot 7} + \frac{21000}{3\cdot 5} + \frac{21000}{3\cdot 7} + \frac{21000}{5\cdot 7}\Big) \\
&\qquad - \Big(\frac{21000}{2\cdot 3\cdot 5} + \frac{21000}{2\cdot 3\cdot 7} + \frac{21000}{2\cdot 5\cdot 7} + \frac{21000}{3\cdot 5\cdot 7}\Big) + \frac{21000}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 21000 - (10500 + 7000 + 4200 + 3000) \\
&\qquad + (3500 + 2100 + 1500 + 1400 + 1000 + 600) \\
&\qquad\qquad - (700 + 500 + 300 + 200) + 100 = \mathbf{4800}.
\end{aligned}
$$

♣ 2. Példa. *Egy úszóverseny döntőjében 8 versenyző vesz részt. Hány olyan beúszási sorrend lehetséges, amikor senki sem végez a pályája sorszámával megegyező helyen?*

U : az összes beúszási sorrend halmaza, $|U| = 8! = 40320$.

$i = 1, 2, \ldots, 8$ esetén t_i : az i-edik pályán úszó versenyző i-edik helyen végez.

$$
\begin{aligned}
S(t_i) &= 7! & \qquad |\{i\}| &= \binom{8}{1} \\
S(t_i, t_j) &= 6! & |\{i, j\}| &= \binom{8}{2} \\
S(t_i, t_j, t_k) &= 5! & |\{i, j, k\}| &= \binom{8}{3} \\
&\vdots & &\vdots \\
S(t_1, t_2, \ldots, t_8) &= 0! & |\{1, 2, \ldots, 8\}| &= \binom{8}{8}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S(\overline{t_1}, \overline{t_2}, \ldots, \overline{t_8}) = 8! &- \binom{8}{1}7! + \binom{8}{2}6! - \binom{8}{3}5! + \binom{8}{4}4! \\
&- \binom{8}{5}3! + \binom{8}{6}2! - \binom{8}{7}1! + \binom{8}{8}0! = \mathbf{14833}.
\end{aligned}
$$

KOMBINATORIKA (bye-bye!) alkalmazásai:

- valószínűségszámítás,
- statisztika,
- hálózatok
- ...