DISZKRÉT MATEMATIKA I.

7. előadás

Kombinatorika: binomiális tétel, ~együtthatók, ...

EMLÉKEZTETŐ:

n-ből k-t kiválasztani egyszerre (sorrend nem számít, ismétlés nincs)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

féle képpen lehet.

Binomiális együtthatók

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$\vdots$$

TÉTEL (Binomiális tétel).

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n.$$

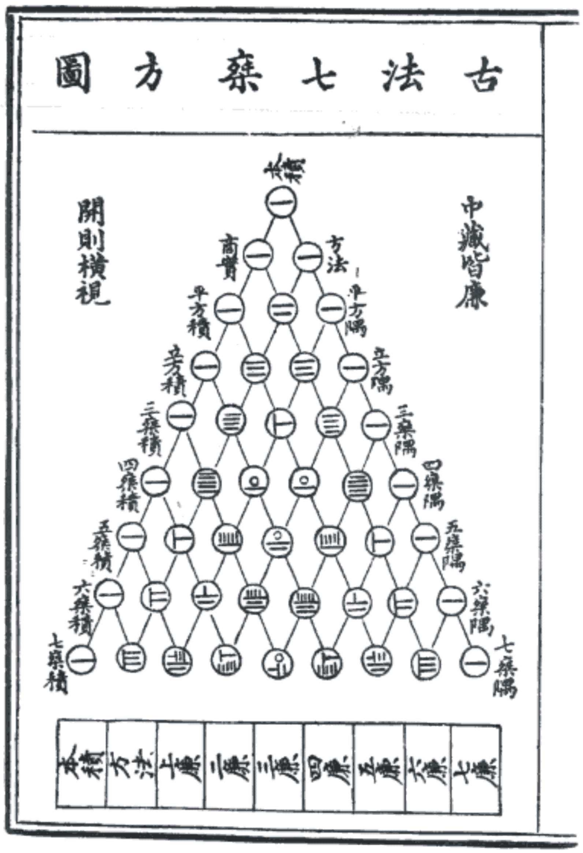
♣ Pl. $(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$

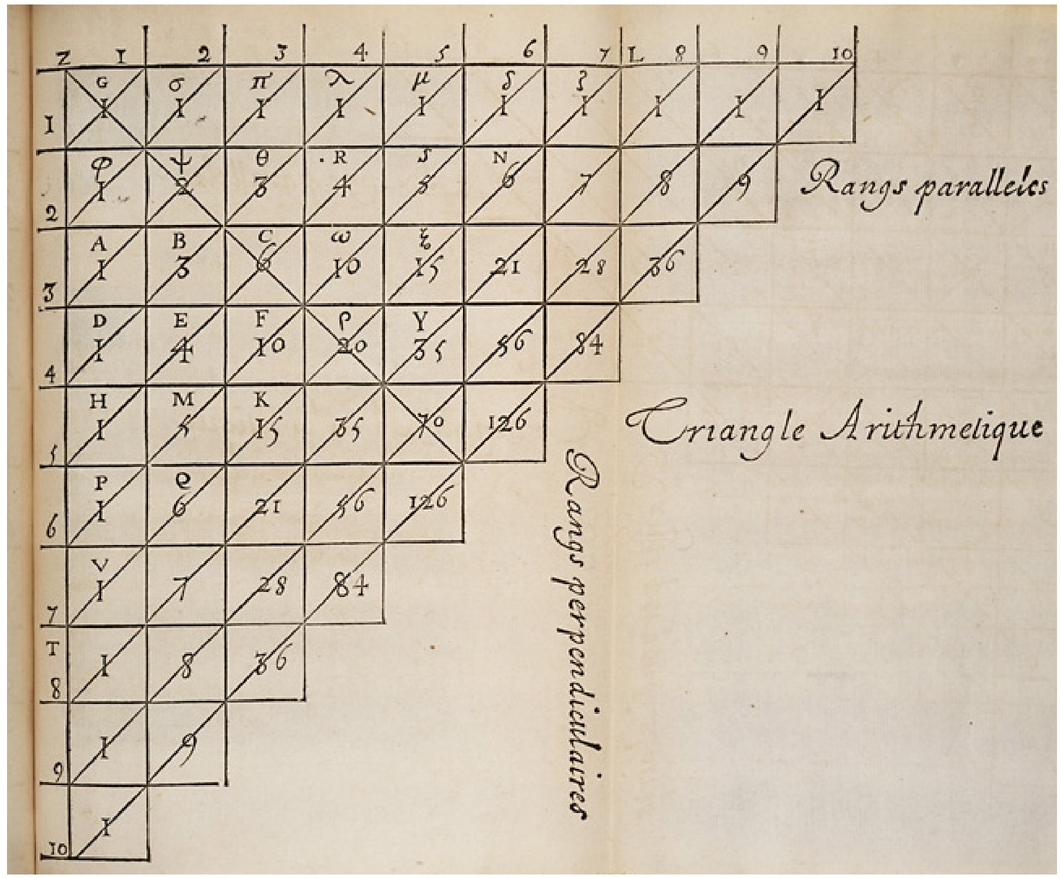
$$\begin{aligned}
(\mathbf{a}+b)\cdot(\mathbf{a}+b)\cdot(\mathbf{a}+b) &\longrightarrow a^3\\
(\mathbf{a}+b)\cdot(\mathbf{a}+b)\cdot(a+\mathbf{b}) &\longrightarrow a^2b\\
(\mathbf{a}+b)\cdot(a+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+b) &\longrightarrow a^2b\\
(a+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+b)\cdot(\mathbf{a}+b) &\longrightarrow a^2b\\
(\mathbf{a}+b)\cdot(a+\mathbf{b})\cdot(a+\mathbf{b}) &\longrightarrow ab^2\\
(a+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+b)\cdot(a+\mathbf{b}) &\longrightarrow ab^2\\
(a+\mathbf{b})\cdot(a+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+b) &\longrightarrow ab^2\\
(a+\mathbf{b})\cdot(a+\mathbf{b})\cdot(a+\mathbf{b}) &\longrightarrow b^3
\end{aligned}$$

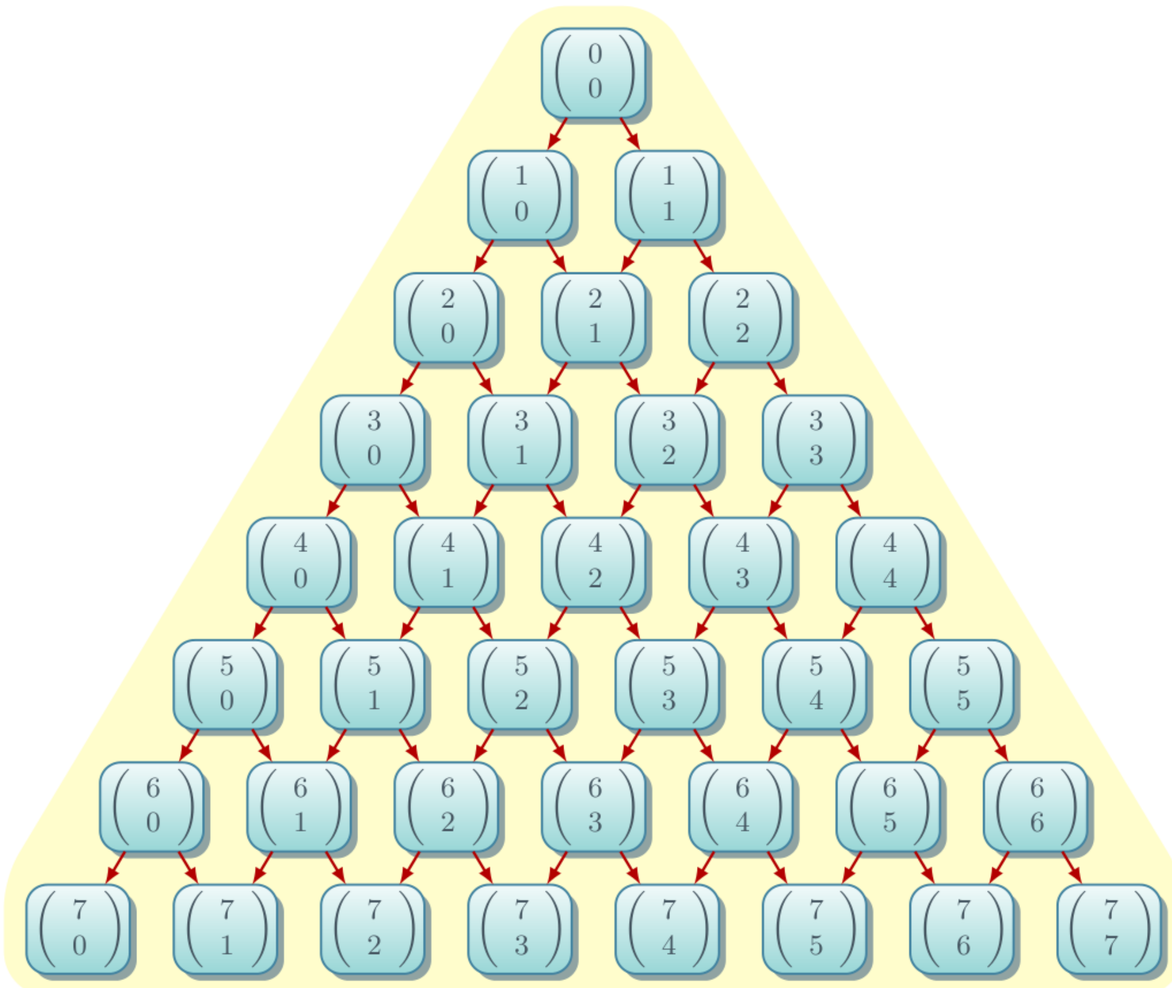
Pontosan annyiszor kapunk pl. ab^2-t, ahányszor a 3 zárójelből ki tudunk választani 2-t (a b-k számára), azaz $\binom{3}{2}$-ször. $\binom{3}{2} = 3$.

$$(a+b)^3 = 1\cdot a^3 + 3\cdot a^2b + 3\cdot ab^2 + 1\cdot b^3$$

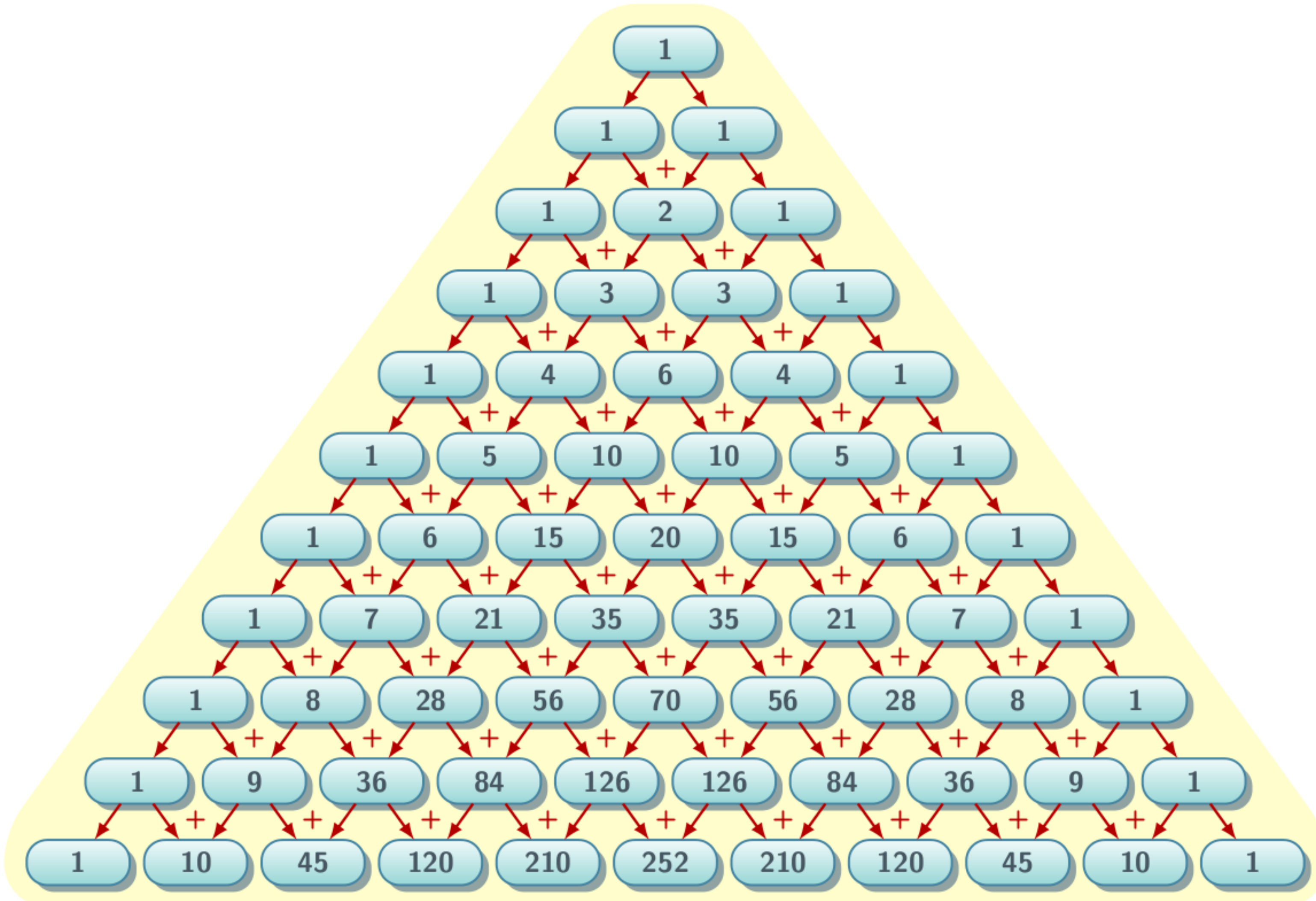
(Yang Hui $\sim$) Pascal háromszög







$\binom{0}{0}$
$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$
$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$
$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$
$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$
$\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$
$\binom{6}{0}$ $\binom{6}{1}$ $\binom{6}{2}$ $\binom{6}{3}$ $\binom{6}{4}$ $\binom{6}{5}$ $\binom{6}{6}$
$\binom{7}{0}$ $\binom{7}{1}$ $\binom{7}{2}$ $\binom{7}{3}$ $\binom{7}{4}$ $\binom{7}{5}$ $\binom{7}{6}$ $\binom{7}{7}$


1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

(1)

Pascal háromszög tulajdonságai

$\boxed{1}$ (szélek) (**??**)

$$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{0}} = \mathbf{1} = \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{n}}$$

n-ből 0-t vagy n-et kiválasztani egyféleképpen lehet:

nem csinálunk semmit, vagy mindet elvesszük.

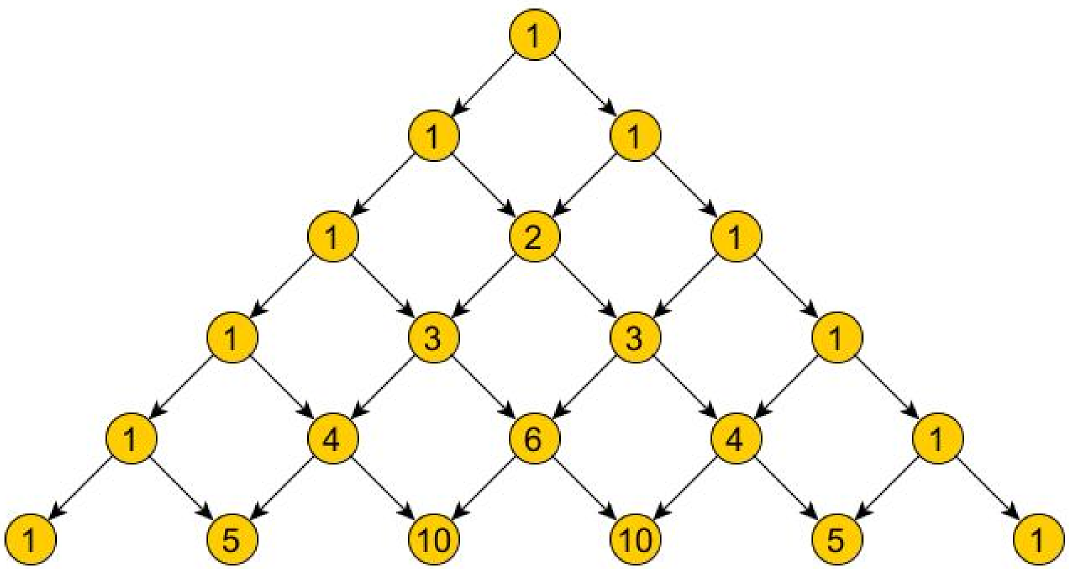
$\boxed{2}$ (szimmetria) (**??**)

$$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} = \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{n}-\mathbf{k}}$$

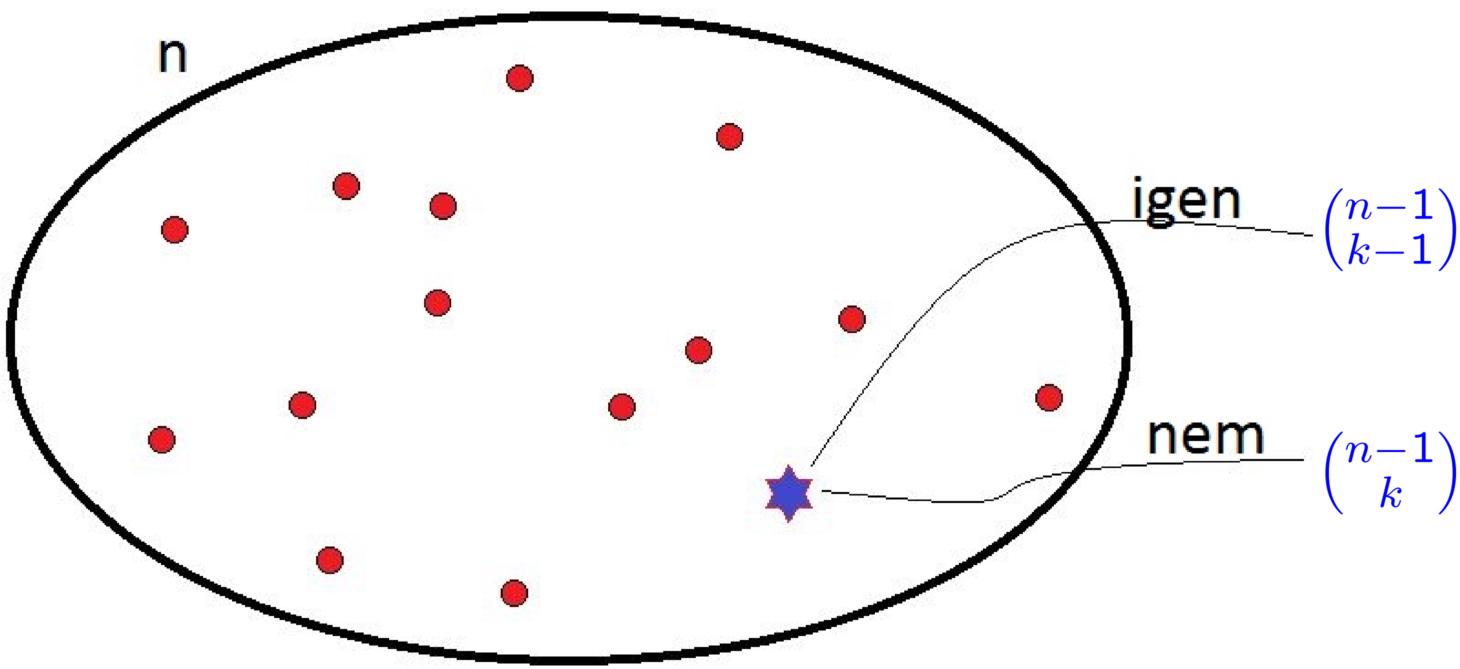
n-ből k-t kiválasztani ugyanannyi féle képpen lehet, *mint pontosan* $(n-k)$*-t otthagyni.*

$\boxed{3}$ (belső képzési szabály) (**??**)

$$\binom{\mathbf{n-1}}{\mathbf{k-1}} + \binom{\mathbf{n-1}}{\mathbf{k}} = \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$$

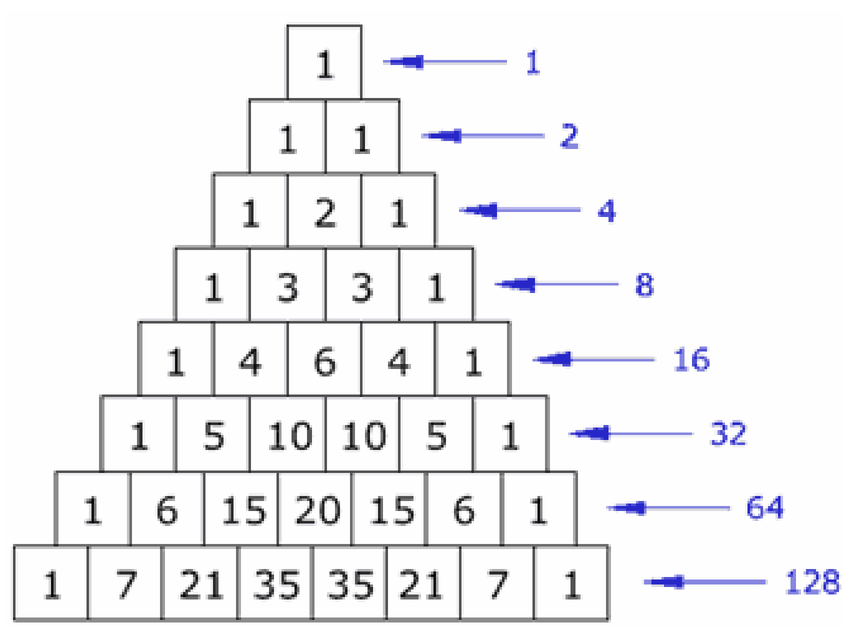


$$\binom{\mathbf{n-1}}{\mathbf{k-1}} + \binom{\mathbf{n-1}}{\mathbf{k}} = \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$$



$\boxed{4}$ (sorösszegek) (??)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^{n}$$



Polinomiális tétel

TÉTEL (Binomiális tétel).

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k,\, n-k} a^k b^{n-k}.$$

$$\Downarrow$$

TÉTEL (Polinomiális tétel).

$$(a_1+a_2+\cdots+a_t)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_t=n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_t} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_t^{k_t}.$$

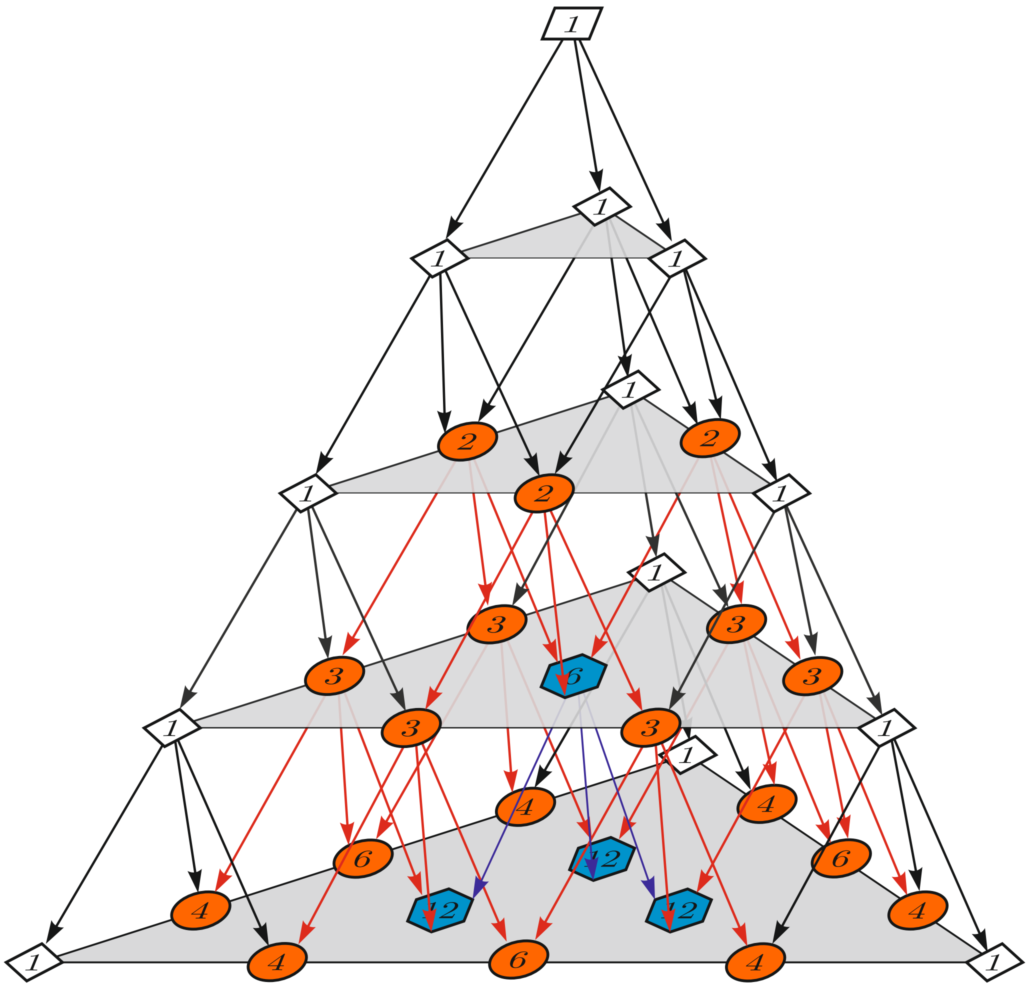
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$\Downarrow$$

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_t} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_t!}$$

Példa: $\binom{3}{2,0,1} = \frac{3!}{2! \cdot 0! \cdot 1!} = \frac{6}{2 \cdot 1 \cdot 1} = 3$, $\binom{3}{1,1,1} = \frac{3!}{1! \cdot 1! \cdot 1!} = 6$

$$\begin{aligned} (a+b+c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 \\ &\quad +3(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2) \\ &\quad +6abc \end{aligned}$$



Pascal piramis ($t = 3$)

VERSENY

$$\binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = ?$$