ELMÉLETI INFORMATIKA

I. rész

Formális nyelvek és automaták

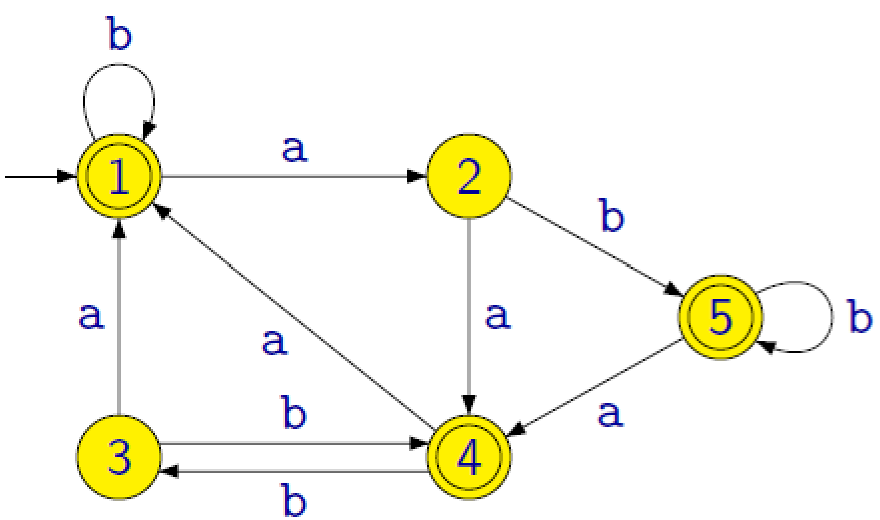
Véges automaták és 3-típusú nyelvek tulajdonságai

3. előadás

3.1 definíció: (determinisztikus véges automata, DVA)

Az $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ véges automata **determinisztikus**, ha minden $q \in Q$ állapot és $a \in \Sigma$ input szimbólum esetén teljesül, hogy a $\delta(q, a)$ halmaz legfeljebb egy elemet tartalmaz.

3.1 példa: az alábbi véges automata determinisztikus



$Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$

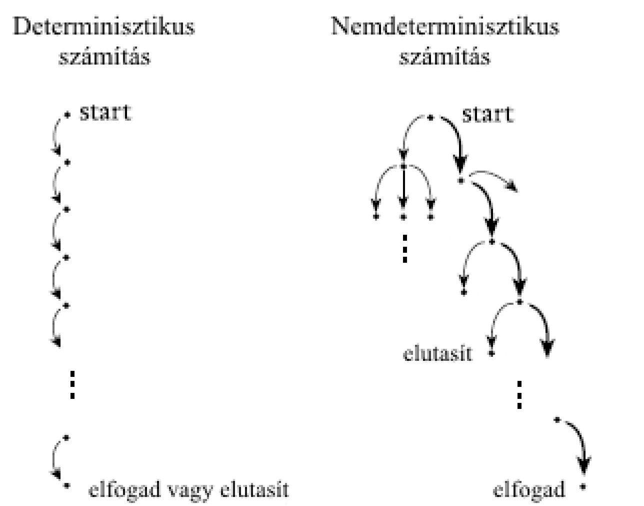
$q_0 = 1$

$F = \{1, 4, 5\}$

$$\delta: \quad \begin{array}{ll} \delta(1, \mathrm{a}) = \{2\} & \delta(1, \mathrm{b}) = \{1\} \\ \delta(2, \mathrm{a}) = \{4\} & \delta(2, \mathrm{b}) = \{5\} \\ \delta(3, \mathrm{a}) = \{1\} & \delta(3, \mathrm{b}) = \{4\} \\ \delta(4, \mathrm{a}) = \{1\} & \delta(4, \mathrm{b}) = \{3\} \\ \delta(5, \mathrm{a}) = \{4\} & \delta(5, \mathrm{b}) = \{5\} \end{array}$$

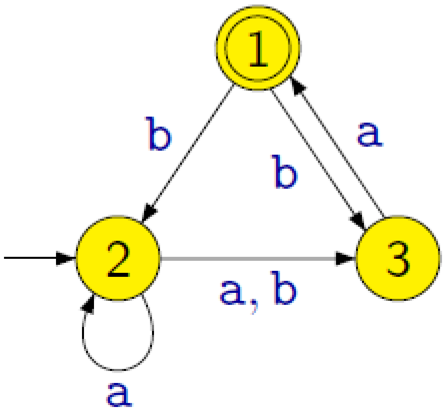
Determinisztikus automata esetén egy adott input szóra az egyes konfigurációk közötti átmenet mindig egyértelműen meghatározott, és a számítás *elfogadó* vagy *elutasító* konfigurációban ér véget.

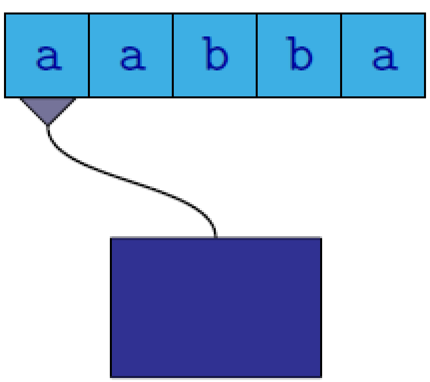
Nemdeterminisztikus automata esetén egy adott input szóhoz több számítás is tartozhat, ezek közül némelyik elfogadó, mások pedig elutasító konfigurációban érhetnek véget. Egy nemdeterminisztikus véges automata az input szót akkor fogja elfogadni, ha létezik **legalább egy** olyan számítás, amely *elfogadó* konfigurációban ér véget.



3.1 tétel: A nemdeterminisztikus véges automatákkal felismerhető nyelvek osztálya megegyezik determinisztikus véges automatákkal felismerhető nyelvek osztályával.

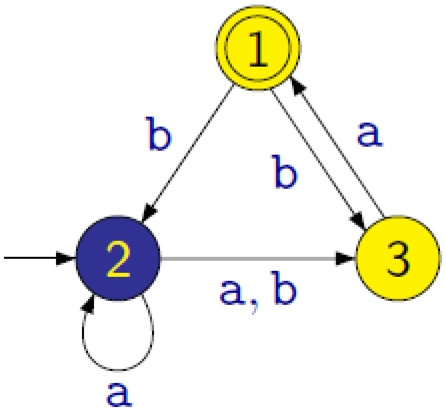
3.2 példa:

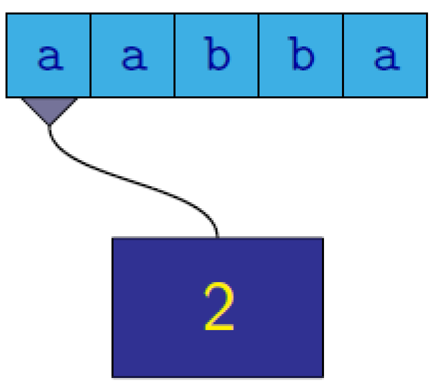




3.1 tétel: A nemdeterminisztikus véges automatákkal felismerhető nyelvek osztálya megegyezik determinisztikus véges automatákkal felismerhető nyelvek osztályával.

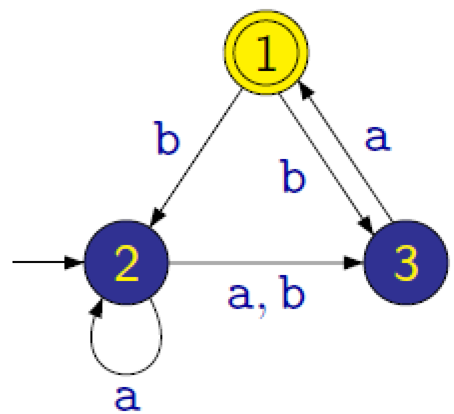
3.2 példa:

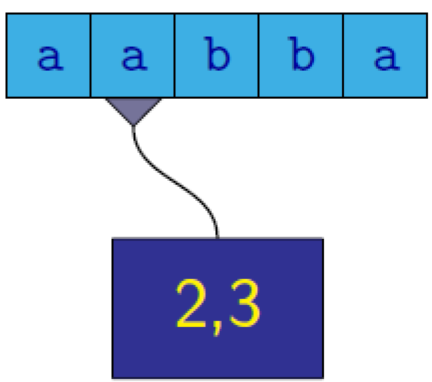




3.1 tétel: A nemdeterminisztikus véges automatákkal felismerhető nyelvek osztálya megegyezik determinisztikus véges automatákkal felismerhető nyelvek osztályával.

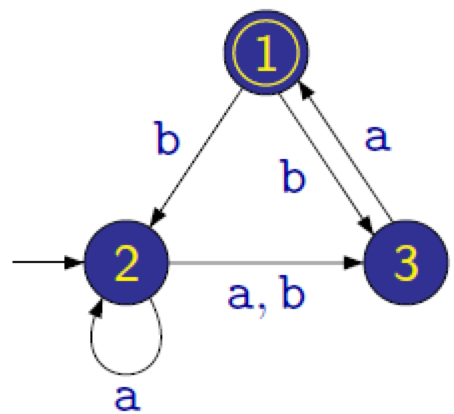
3.2 példa:

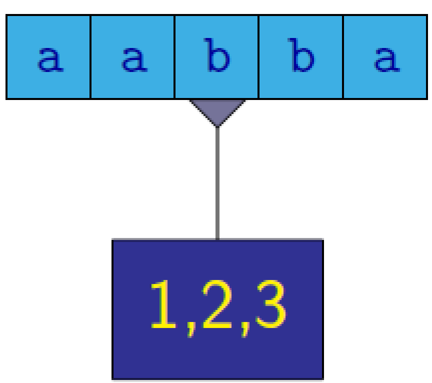




3.1 tétel: A nemdeterminisztikus véges automatákkal felismerhető nyelvek osztálya megegyezik determinisztikus véges automatákkal felismerhető nyelvek osztályával.

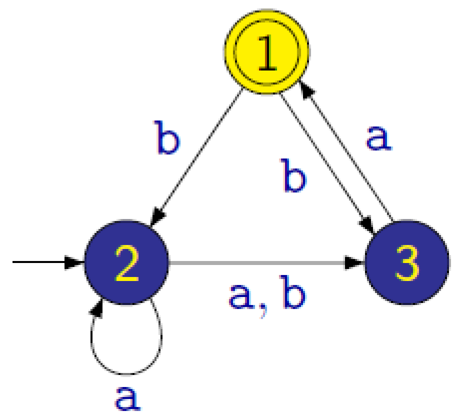
3.2 példa:

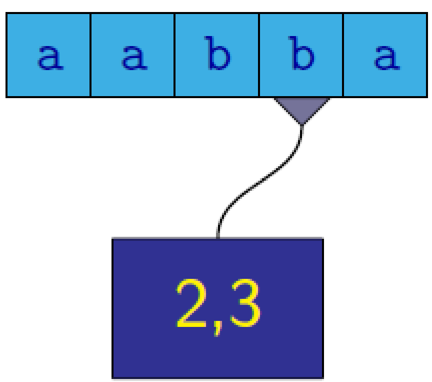




3.1 tétel: A nemdeterminisztikus véges automatákkal felismerhető nyelvek osztálya megegyezik determinisztikus véges automatákkal felismerhető nyelvek osztályával.

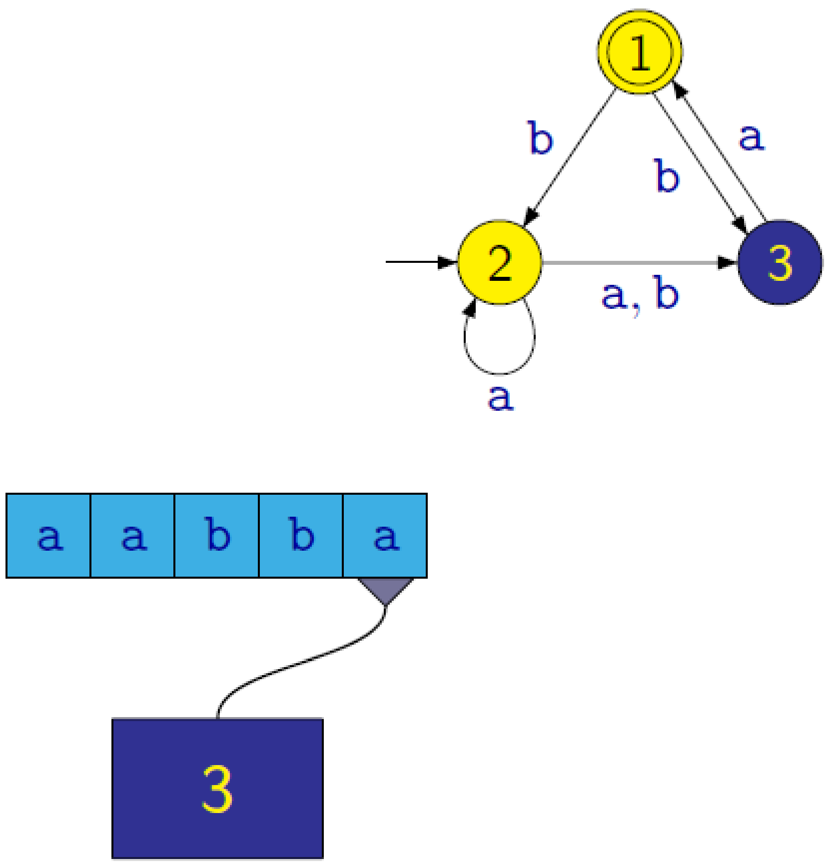
3.2 példa:





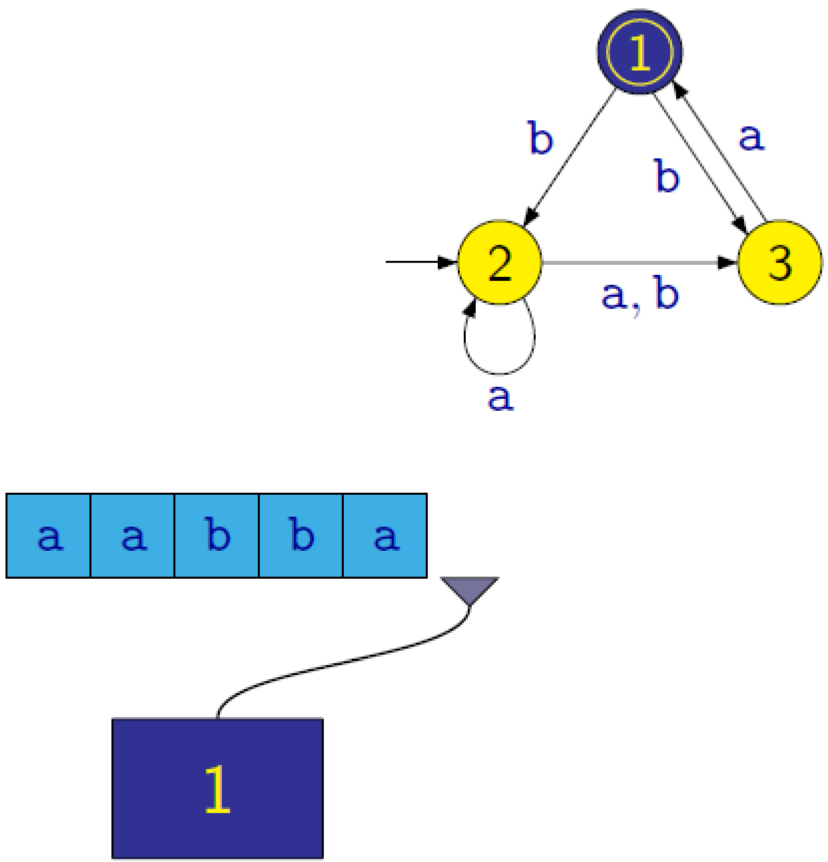
3.1 tétel: A nemdeterminisztikus véges automatákkal felismerhető nyelvek osztálya megegyezik determinisztikus véges automatákkal felismerhető nyelvek osztályával.

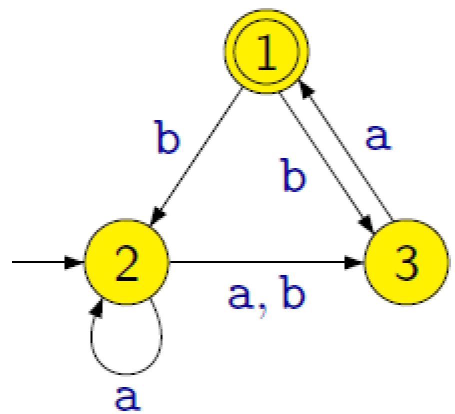
3.2 példa:

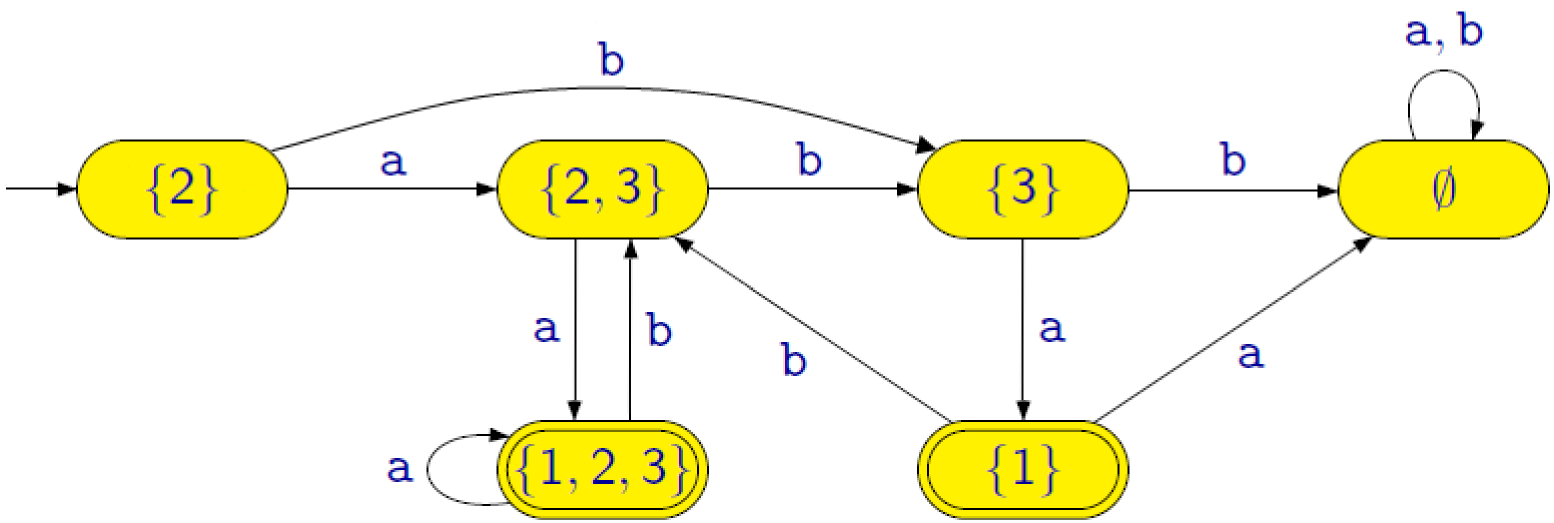


3.1 tétel: A nemdeterminisztikus véges automatákkal felismerhető nyelvek osztálya megegyezik determinisztikus véges automatákkal felismerhető nyelvek osztályával.

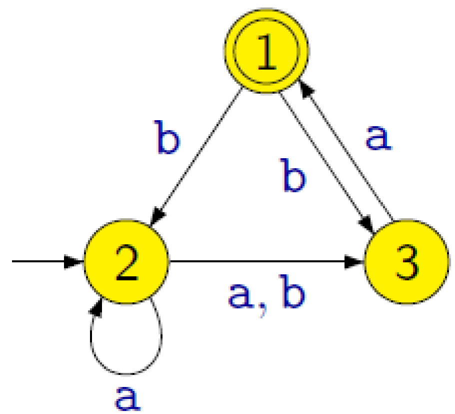
3.2 példa:




1
2
3
b
b
a
a, b
a


{2}
{2, 3}
{3}
∅
{1, 2, 3}
{1}
a
b
b
b
a, b
a
b
b
a
a
a

$Q = \{1, 2, 3\}$
$\Sigma = \{a, b\}$
$q_0 = 2$
$F = \{1\}$



δ	a	b
$\leftarrow 1$	$\emptyset$	$2, 3$
$\rightarrow 2$	$2, 3$	3
3	1	$\emptyset$

$Q' = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
$\Sigma = \{a, b\}$
$q_0' = \{2\}$
$F' = \{\{1\}, \{1, 2, 3\}\}$

δ'	a	b
$\rightarrow \{2\}$	$\{2, 3\}$	$\{3\}$
$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{3\}$
$\{3\}$	$\{1\}$	$\emptyset$
$\leftarrow \{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\leftarrow \{1\}$	$\emptyset$	$\{2, 3\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

3.2 definíció: (teljesen definiált véges automata)

Az $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ véges automata **teljesen definiált**, ha minden $q \in Q$ állapot és $a \in \Sigma$ input szimbólum esetén teljesül, hogy a $\delta(q, a)$ halmaz legalább egy elemet tartalmaz.

Megjegyzés:

A teljesen definiált automata minden input szót végig tud olvasni, mert minden nem befejező konfigurációhoz létezik legalább egy rákövetkező konfiguráció.

3.3 példa: az alábbi $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ véges automata teljesen definiált

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$F = \{q_3\}$

δ:

$\delta(q_0, a) = \{q_0, q_1\}$ $\quad$ $\delta(q_0, b) = \{q_0\}$

$\delta(q_1, a) = \{q_1\}$ $\quad$ $\delta(q_1, b) = \{q_2\}$

$\delta(q_2, a) = \{q_3\}$ $\quad$ $\delta(q_2, b) = \{q_2, q_3\}$

$\delta(q_3, a) = \{q_3\}$ $\quad$ $\delta(q_3, b) = \{q_3\}$

3.2 tétel: Tetszőleges $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ véges automatához szerkeszthető olyan $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0, F)$ teljesen definiált véges automata, amelyre $L(M') = L(M)$.

Bizonyítás:

Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ véges automata. Szerkesztünk egy olyan $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0, F)$ teljesen definiált véges automatát, amelyre $L(M') = L(M)$.

Legyen $Q' = Q \cup \{q_c\}$, ahol $q_c \notin Q$ (vagyis q_c egy új állapot).

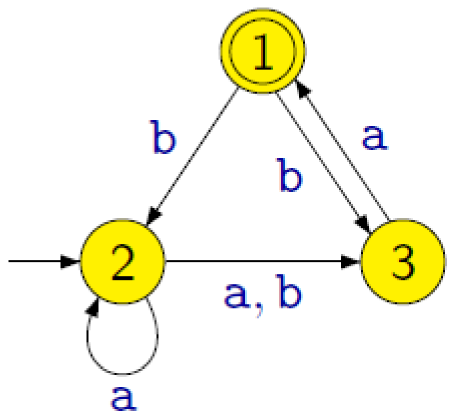
Legyen minden $q \in Q$ és $a \in \Sigma$ esetén

$$\delta'(q, a) = \begin{cases} \delta(q, a) & \text{ha } \delta(q, a) \neq \emptyset \\ \{q_c\} & \text{ha } \delta(q, a) = \emptyset \end{cases}$$

Végül legyen minden $a \in \Sigma$ esetén $\delta'(q_c, a) = \{q_c\}$. ∎

3.4 példa:

$$Q = \{1, 2, 3\}$$
$$\Sigma = \{a, b\}$$
$$q_0 = 2$$
$$F = \{1\}$$

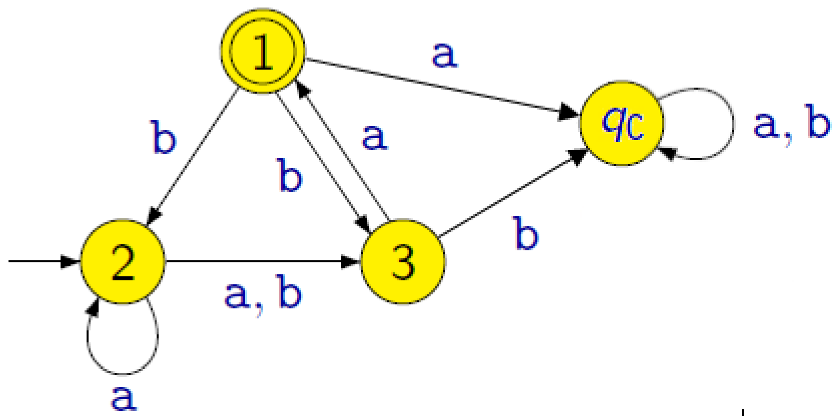


$$\delta(1, a) = \emptyset \qquad \delta(1, b) = \{2, 3\}$$
$$\delta(2, a) = \{2, 3\} \qquad \delta(2, b) = \{3\}$$
$$\delta(3, a) = \{1\} \qquad \delta(3, b) = \emptyset$$

δ	a	b
$\leftarrow 1$	$\emptyset$	2, 3
$\rightarrow 2$	2, 3	3
3	1	$\emptyset$

3.4 példa:

$$Q' = \{1, 2, 3, q_C\}$$
$$\Sigma = \{a, b\}$$
$$q_0 = 2$$
$$F = \{1\}$$



δ	a	b
$\leftarrow 1$	q_C	2, 3
$\rightarrow 2$	2, 3	3
3	1	q_C
q_C	q_C	q_C

$$\delta(1, a) = \{q_C\} \quad \delta(1, b) = \{2, 3\}$$
$$\delta(2, a) = \{2, 3\} \quad \delta(2, b) = \{3\}$$
$$\delta(3, a) = \{1\} \quad \delta(3, b) = \{q_C\}$$
$$\delta(q_C, a) = \{q_C\} \quad \delta(q_C, b) = \{q_C\}$$

Megjegyzés:

Az M véges automata akkor és csakis akkor **determinisztikus** és **teljesen definiált**, ha minden $q \in Q$ állapot és $a \in \Sigma$ input szimbólum esetén a $\delta(q, a)$ halmaz pontosan egy elemet tartalmaz.

3.3 definíció: (véges automatával felismerhető nyelv)

Az $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv **véges automatával felismerhető nyelv**, ha létezik olyan $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ véges automata, amelyre $L(M) = L$.

3.4 definíció: (reguláris nyelv)

Az $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv **reguláris nyelv**, ha véges automatával felismerhető.

3.5 definíció: (ekvivalens véges automaták)

Az $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ és $M' = (Q', \Sigma', \delta', q_0', F')$ véges automaták akkor és csakis akkor **ekvivalens véges automaták**, ha teljesül, hogy $L(M) = L(M')$.

Megjegyzés:

1) Minden M véges automatához létezik vele ekvivalens **teljesen definiált** és **determinisztikus** véges automata.
2) Véges automaták ekvivalenciájának vizsgálatakor elég csak a teljesen definiált és determinisztikus automatákkal foglalkozni. Amennyiben az automaták valamelyike nem lenne determinisztikus és/vagy teljesen definiált, akkor a **3.1 tétel** ill. a **3.2 tétel** alapján determinisztikussá ill. teljesen definiálttá tehető.

Alapötlet: Sétáljunk végig az automatákban az élek mentén párhuzamosan, s ha mindig egyszerre érünk végállapotba, akkor az automaták *ekvivalensek*, ellenkező esetben *nem ekvivalensek*.

3.1 algoritmus:

2_TD&DVA_EKVIVALENCIAJA (q_0, q_0')

kiindulási állapotpár (q_0, q_0')

$i \leftarrow 0$

repeat

  $i \leftarrow i + 1$

  Legyen (q, q') a táblázat $i.$ sorának $1.$ oszlopában lévő állapotpár

  for minden $a \in \Sigma$ **do**

    a táblázat $i.$ sorának a oszlopába a $(\delta(q,a), \delta(q',a))$ állapotpár kerül

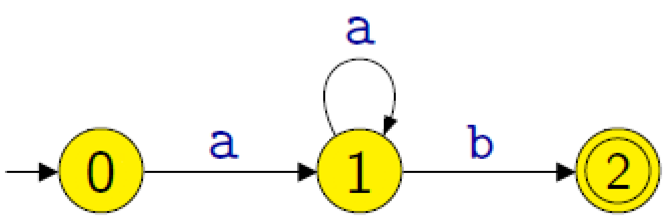
    if $\delta(q,a)$ és $\delta(q',a)$ egyike végállapot, a másik nem **then return** NEM

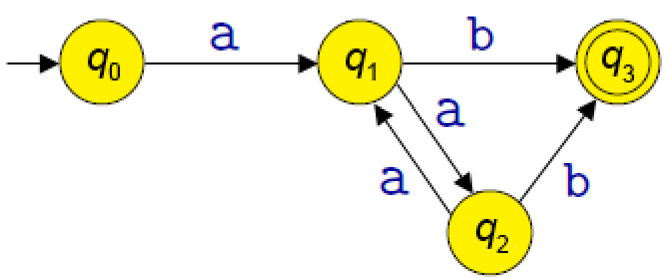
      else írjuk be a $(\delta(q,a), \delta(q',a))$ állapotpárt a táblázat következő üres sorának $1.$ oszlopába, de csak akkor, ha még nem szerepel ebben az oszlopban.

until nincs új állapotpár

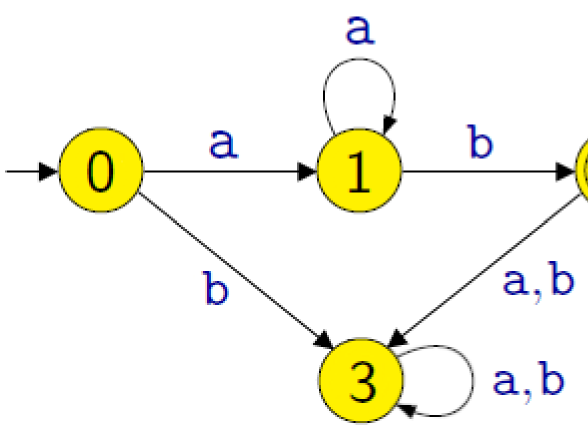
return IGEN

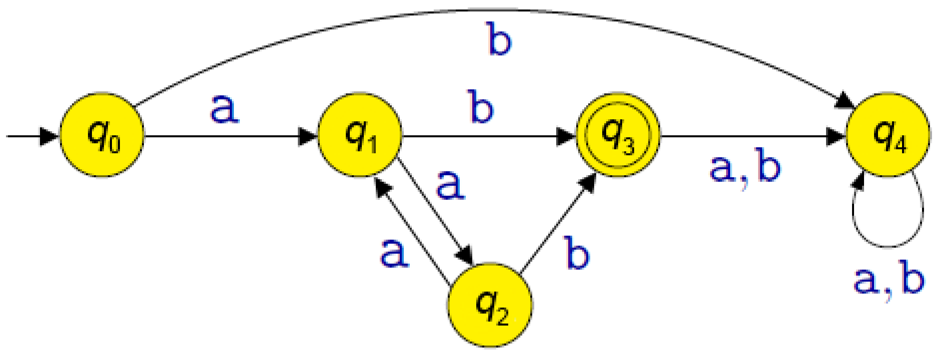
3.5 példa: Döntsük el, hogy az alábbi véges automaták ekvivalensek-e!





3.5 példa: Döntsük el, hogy az alábbi véges automaták ekvivalensek-e!





	a	b
$(0,q_0)$	$(1,q_1)$	$(3,q_4)$
$(1,q_1)$	$(1,q_2)$	$(2,q_3)$
$(3,q_4)$	$(3,q_4)$	$(3,q_4)$
$(1,q_2)$	$(1,q_1)$	$(2,q_3)$
$(2,q_3)$	$(3,q_4)$	$(3,q_4)$

A két véges automata ekvivalens

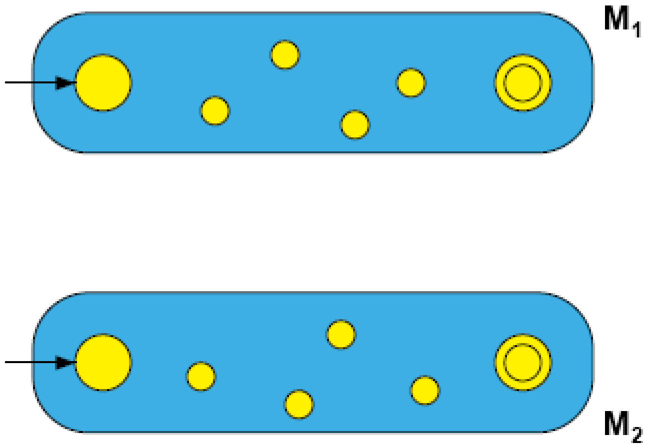
3.3 tétel: A reguláris nyelvek osztálya zárt az egyesítés műveletére nézve.

Bizonyítás:

Legyenek $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ reguláris nyelvek. A tétel igazolásához elegendő megmutatni, hogy az $L_1 \cup L_2$ nyelv is reguláris.

Mivel az L_1 nyelv reguláris, ezért létezik $M_1 = \{Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_{01}, F_1\}$ véges automata, amelyre $L(M_1) = L_1$.

Mivel az L_2 nyelv reguláris, ezért létezik $M_2 = \{Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_{02}, F_2\}$ véges automata, amelyre $L(M_2) = L_2$.



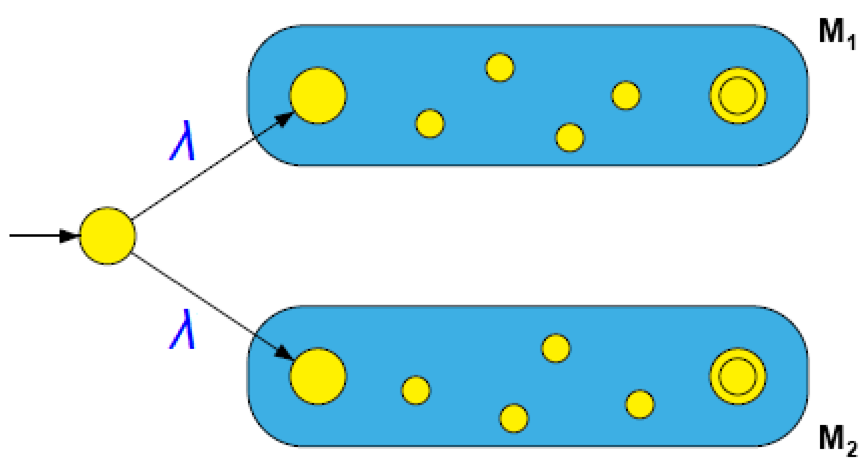
3.3 tétel: A reguláris nyelvek osztálya zárt az egyesítés műveletére nézve.

Bizonyítás:

Legyenek $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ reguláris nyelvek. A tétel igazolásához elegendő megmutatni, hogy az $L_1 \cup L_2$ nyelv is reguláris.

Mivel az L_1 nyelv reguláris, ezért létezik $M_1 = \{Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_{01}, F_1\}$ véges automata, amelyre $L(M_1) = L_1$.

Mivel az L_2 nyelv reguláris, ezért létezik $M_2 = \{Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_{02}, F_2\}$ véges automata, amelyre $L(M_2) = L_2$.



Tekintsük az $M = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$ véges automatát, ahol

$Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}$

$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

$F = F_1 \cup F_2$

A δ átmenetfüggvény átmenetei a következők:

$$\delta(q_0, \lambda) = \{q_{01}, q_{02}\}$$

$$\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a) & \text{minden } q \in Q_1 \text{ és } a \in \Sigma_1 \text{ esetén} \\ \delta_2(q, a) & \text{minden } q \in Q_2 \text{ és } a \in \Sigma_2 \text{ esetén} \end{cases}$$

Érvényes, hogy $L(M) = L_1 \cup L_2$, ami azt jelenti, hogy az $L_1 \cup L_2$ nyelv reguláris. Elmondható tehát, hogy a reguláris nyelvek osztálya zárt az egyesítés műveletére nézve. ∎

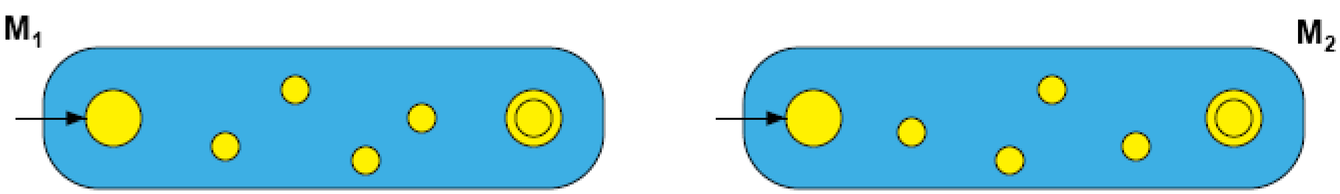
3.4 tétel: A reguláris nyelvek osztálya zárt a konkatenáció műveletére nézve.

Bizonyítás:

Legyenek $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ reguláris nyelvek. A tétel igazolásához elegendő megmutatni, hogy az $L_1 L_2$ nyelv is reguláris.

Mivel az L_1 nyelv reguláris, ezért létezik $M_1 = \{Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_{01}, F_1\}$ véges automata, amelyre $L(M_1) = L_1$.

Mivel az L_2 nyelv reguláris, ezért létezik $M_2 = \{Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_{02}, F_2\}$ véges automata, amelyre $L(M_2) = L_2$.



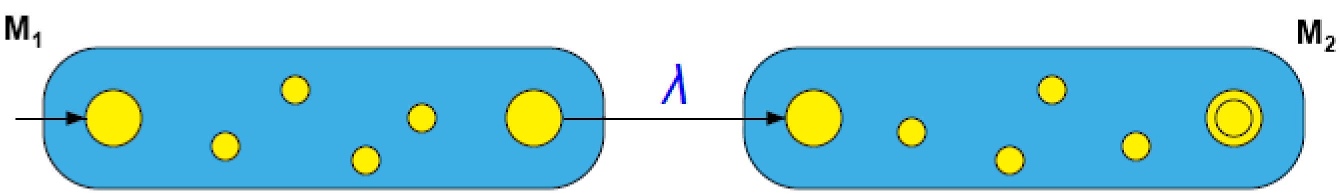
3.4 tétel: A reguláris nyelvek osztálya zárt a konkatenáció műveletére nézve.

Bizonyítás:

Legyenek $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ reguláris nyelvek. A tétel igazolásához elegendő megmutatni, hogy az L_1L_2 nyelv is reguláris.

Mivel az L_1 nyelv reguláris, ezért létezik $M_1 = \{Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_{01}, F_1\}$ véges automata, amelyre $L(M_1) = L_1$.

Mivel az L_2 nyelv reguláris, ezért létezik $M_2 = \{Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_{02}, F_2\}$ véges automata, amelyre $L(M_2) = L_2$.



Tekintsük az $M = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$ véges automatát, ahol

$Q = Q_1 \cup Q_2$

$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

$q_0 = q_{01}$

$F = F_2$

A δ átmenetfüggvény átmenetei a következők:

$\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$ minden $q \in Q_1 \setminus F_1$ és $a \in \Sigma_1$ esetén

$\delta(q, \lambda) = \{q_{02}\}$ minden $q \in F_1$ esetén

$\delta(q, a) = \delta_2(q, a)$ minden $q \in Q_2$ és $a \in \Sigma_2$ esetén

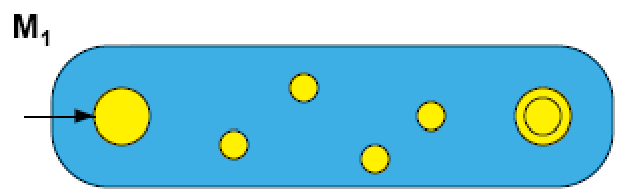
Érvényes, hogy $L(M) = L_1 L_2$, ami azt jelenti, hogy az $L_1 L_2$ nyelv reguláris. Elmondható tehát, hogy a reguláris nyelvek osztálya zárt a konkatenáció műveletére nézve. ■

3.5 tétel: A reguláris nyelvek osztálya zárt az iteráció műveletére nézve.

Bizonyítás:

Legyenek $L \subseteq \Sigma^*$ reguláris nyelv. A tétel igazolásához elegendő megmutatni, hogy az L^* nyelv is reguláris.

Mivel az L nyelv reguláris, ezért létezik $M_1 = \{Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{01}, F_1\}$ véges automata, amelyre $L(M_1) = L$.

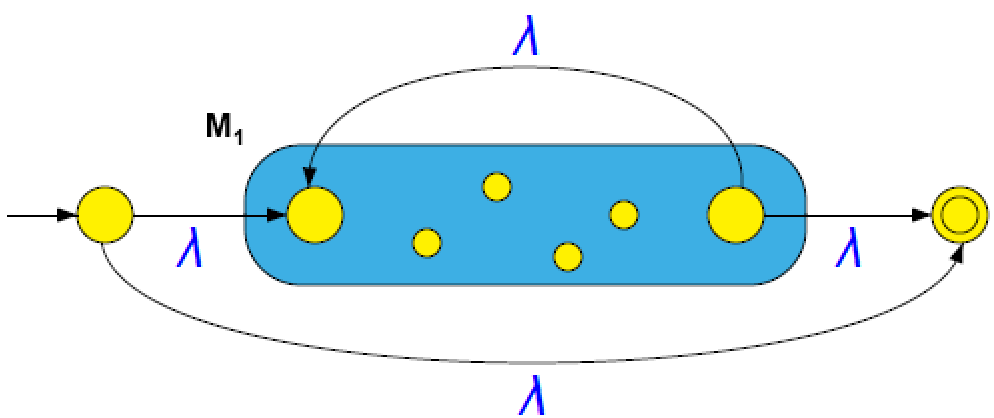


3.5 tétel: A reguláris nyelvek osztálya zárt az iteráció műveletére nézve.

Bizonyítás:

Legyenek $L \subseteq \Sigma^*$ reguláris nyelv. A tétel igazolásához elegendő megmutatni, hogy az L^* nyelv is reguláris.

Mivel az L nyelv reguláris, ezért létezik $M_1 = \{Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{01}, F_1\}$ véges automata, amelyre $L(M_1) = L$.



Tekintsük az $M = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$ véges automatát, ahol

$Q = Q_1 \cup \{q_0, q_F\}$

$F = \{q_F\}$

A δ átmenetfüggvény átmenetei a következők:

$\delta(q_0, \lambda) = \{q_{01}, q_F\}$ minden $q \in Q_1 \setminus F_1$ és $a \in \Sigma_1$ esetén

$\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$ minden $q \in Q_1 \setminus F_1$ és $a \in \Sigma$ esetén

$\delta(q, \lambda) = \{q_{01}, q_F\}$ minden $q \in F_1$ esetén

Érvényes, hogy $L(M) = L^*$, ami azt jelenti, hogy az L^* nyelv reguláris. Elmondható tehát, hogy a reguláris nyelvek osztálya zárt az iteráció műveletére nézve. ■

3.6 tétel: Tetszőleges Σ ábécé feletti L 3-típusú nyelv reguláris.

Bizonyítás:

Legyen L egy Σ ábécé feletti 3-típusú nyelv. Ekkor létezik olyan $G = (N, \Sigma, P, S)$ 3-típusú nyelvtan, melyre $L(G) = L$. A tétel igazolásához elegendő megadni egy olyan $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ nemdeterminisztikus véges automatát, melyre $L(M) = L(G)$.

Az M NVA-t a következőképpen szerkesztjük meg:

Legyen $Q = N \cup \{Z\}$, ahol $Z \notin N \cup \Sigma$, vagyis Z egy új szimbólum.

Minden $A \to aB$ alakú szabályra: $\delta(A, a) = \{B \in N \mid A \to aB \in P\}$.

Minden $A \to a$ alakú szabályra: $\delta(A, a) = \{Z \mid A \to a \in P\}$.

Legyen $q_0 = S$.

Legyen $F = \begin{cases} \{Z\}, & \text{ha } S \to \lambda \notin P \\ \{S, Z\}, & \text{ha } S \to \lambda \in P \end{cases}$

Megmutatjuk, hogy $L(M) = L(G)$.

I.) Először bebizonyítjuk, hogy $L(G) \subseteq L(M)$.

Legyen $w = a_1 a_2 \dots a_k \in L(G)$, $w \neq \lambda$. Ekkor létezik a w szónak a G nyelvtan szabályai alkalmazásával történő levezetése:

$$S \Longrightarrow a_1 A_1 \Longrightarrow a_1 a_2 A_2 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow a_1 a_2 \dots a_{k-1} A_{n-1} \Longrightarrow a_1 a_2 \dots a_k$$

Ez a levezetés a következő szabályok felhasználásával történt:

$$S \longrightarrow a_1 A_1,\ A_1 \longrightarrow a_2 A_2,\ \ldots,\ A_{k-2} \longrightarrow a_{k-1} A_{k-1},\ A_{k-1} \longrightarrow a_k.$$

Ekkor az M automata átmeneteinek értelmezése alapján létezik a következő számítás:

$$(S, a_1 a_2 \dots a_k) \vdash_M (A_1, a_2 \dots a_k) \vdash_M \dots \vdash_M (A_{k-1}, a_k) \vdash_M (Z, \lambda),\ Z \in F$$

Mindez azt jelenti, hogy $w \in L(M)$. Ha $\lambda \in L(G)$, akkor van $S \longrightarrow \lambda$ szabály, de ekkor a kezdőállapot végállapot is, tehát $\lambda \in L(M)$.

Ezzel megmutattuk, hogy $L(G) \subseteq L(M)$.

II.) Másodszor bebizonyítjuk, hogy $L(M) \subseteq L(G)$.

Legyen $w = a_1 a_2 \dots a_k \in L(M)$. Ekkor létezik az alábbi számítás:

$$(S, a_1 a_2 \dots a_k) \vdash_M (A_1, a_2 \dots a_k) \vdash_M \dots \vdash_M (A_{k-1}, a_k) \vdash_M (Z, \lambda),\ Z \in F$$

Ha $w = \lambda$, akkor Z helyett S szerepel, amely ekkor szintén végállapot. Más esetben csak a Z végállapot. Tehát a G nyelvtan szabályhalmazában szerepelnek a következő szabályok:

$$S \longrightarrow a_1 A_1,\ \ A_1 \longrightarrow a_2 A_2,\ \ \dots,\ \ A_{k-2} \longrightarrow a_{k-1} A_{k-1},\ \ A_{k-1} \longrightarrow a_k.$$

Így létezik a következő levezetés:

$$S \Longrightarrow a_1 A_1 \Longrightarrow a_1 a_2 A_2 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow a_1 a_2 \dots a_{k-1} A_{n-1} \Longrightarrow a_1 a_2 \dots a_k.$$

Mindez azt jelenti, hogy $w \in L(G)$.

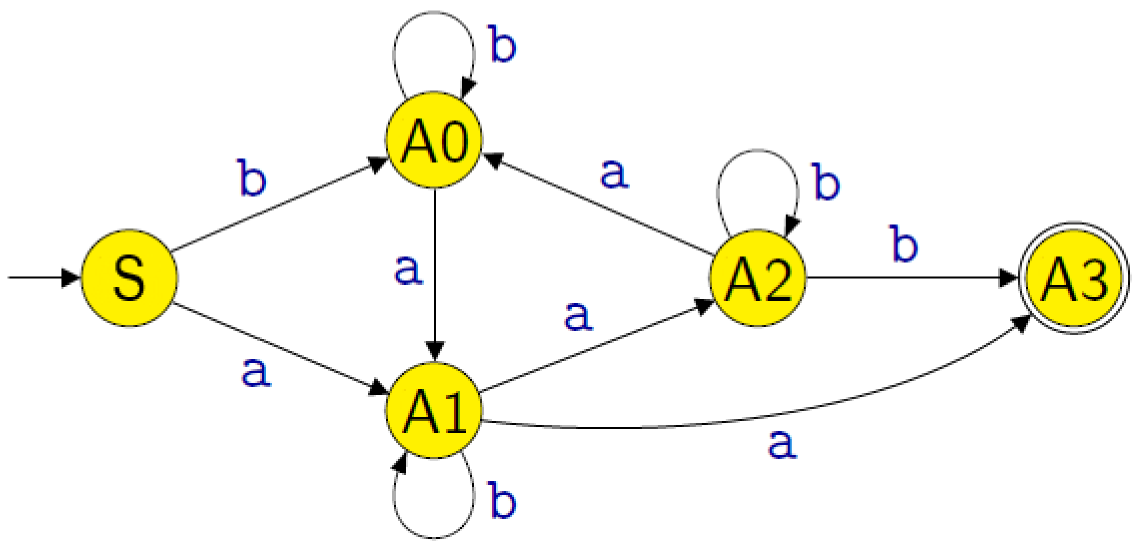
Ezzel megmutattuk, hogy $L(M) \subseteq L(G)$. ■

3.6 példa: Adott az alábbi $G = (N, \Sigma, P, S)$ 3-típusú nyelvtan. Megadunk olyan M véges automatát, amelyre $L(M) = L(G)$.

$N = \{S, A0, A1, A2\}$

$\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$

$$P: \begin{aligned} S &\longrightarrow \mathrm{a}\,A1 \mid \mathrm{b}\,A0 \\ A0 &\longrightarrow \mathrm{a}\,A1 \mid \mathrm{b}\,A0 \\ A1 &\longrightarrow \mathrm{a}\,A2 \mid \mathrm{b}\,A1 \mid \mathrm{a} \\ A2 &\longrightarrow \mathrm{a}\,A0 \mid \mathrm{b}\,A2 \mid \mathrm{b} \end{aligned}$$



Az alábbi algoritmus a $G = (N, \Sigma, P, S)$ 3-típusú nyelvtanhoz olyan M véges automatát rendel, melyre $L(M) = L(G)$.

3.2 algoritmus:

3-TÍPUSÚ-NYELVTANBÓL_AUTOMATA (G)

$E \leftarrow \emptyset$
$Q \leftarrow N \cup \{Z\}$
for minden $A \longrightarrow w \in P$ **do**
    if $w = a$ **then**
        $E \leftarrow E \cup \{(A, a, Z)\}$
    if $w = aB$ **then**
        $E \leftarrow E \cup \{(A, a, B)\}$
if $S \longrightarrow \lambda \notin P$ **then**
    $F \leftarrow \{Z\}$
else $F \leftarrow \{S, Z\}$
return M

3.7 tétel: Tetszőleges Σ ábécé feletti L reguláris nyelv 3-típusú.

Bizonyítás:

Legyen L egy Σ ábécé feletti reguláris nyelv. Ekkor létezik $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ véges automata, melyre $L(M) = L$. A tétel igazolásához elegendő megadni olyan $G = (N, \Sigma, P, S)$ 3-típusú nyelvtant, melyre $L(G) = L(M)$.

Nyugodtan feltételezhetjük, hogy az M automata determinisztikus, mert amennyiben nemdeterminisztikus lenne, akkor a **3.1 tétel** alapján determinisztikussá tehető.

A G 3-típusú nyelvtant a következőképpen szerkesztjük meg:

Legyen $N = Q$.

Minden $\delta(q, a) = \{p\}$ alakú átmenet esetén vegyük fel a P halmazba a $q \rightarrow ap$ szabályt. Amennyiben $p \in F$, akkor vegyük fel a P halmazba a $q \rightarrow a$ szabályt is.

Legyen $S = q_0$.

Megmutatjuk, hogy $L(G) = L(M) \setminus \{\lambda\}$.

I.) Először bebizonyítjuk, hogy $L(M) \subseteq L(G)$.

Legyen $w = a_1 a_2 \dots a_k \in L(M)$, $w \neq \lambda$. Ekkor létezik a következő számítás:

$$(q_0, a_1 a_2 \dots a_k) \vdash_M (q_1, a_2 \dots a_k) \vdash_M \dots \vdash_M (q_{k-1}, a_k) \vdash_M (q_k, \lambda),\ q_k \in F$$

Ekkor a G nyelvtan szabályhalmazában szerepelnek a következő szabályok:

$$q_0 \longrightarrow a_1 q_1,\ \ q_1 \longrightarrow a_2 q_2,\ \ \dots,\ \ q_{k-2} \longrightarrow a_{k-1} q_{k-1},\ \ q_{k-1} \longrightarrow a_k,$$

az utolsó szabály jobb oldalán nem szerepel q_k, mivel $q_k \in F$.

Így létezik a következő levezetés:

$$q_0 \Longrightarrow a_1 q_1 \Longrightarrow a_1 a_2 q_2 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow a_1 a_2 \dots a_{k-1} q_{n-1} \Longrightarrow a_1 a_2 \dots a_k.$$

Mindez azt jelenti, hogy $w \in L(G)$.

Ezzel megmutattuk, hogy $L(M) \subseteq L(G)$.

II.) Másodszor bebizonyítjuk, hogy $L(G) \subseteq L(M)$.

Legyen $w = a_1 a_2 \dots a_k \in L(G)$, $w \neq \lambda$. Ekkor létezik a w szónak a G nyelvtan szabályai alkalmazásával történő levezetése:

$$q_0 \Longrightarrow a_1 q_1 \Longrightarrow a_1 a_2 q_2 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow a_1 a_2 \dots a_{k-1} q_{n-1} \Longrightarrow a_1 a_2 \dots a_k.$$

Ez a levezetés a következő szabályok felhasználásával történt:

$$q_0 \longrightarrow a_1 q_1, \;\; q_1 \longrightarrow a_2 q_2, \;\; \dots, \;\; q_{k-2} \longrightarrow a_{k-1} q_{k-1}, \;\; q_{k-1} \longrightarrow a_k.$$

Ekkor az M automata átmeneteinek értelmezése alapján létezik

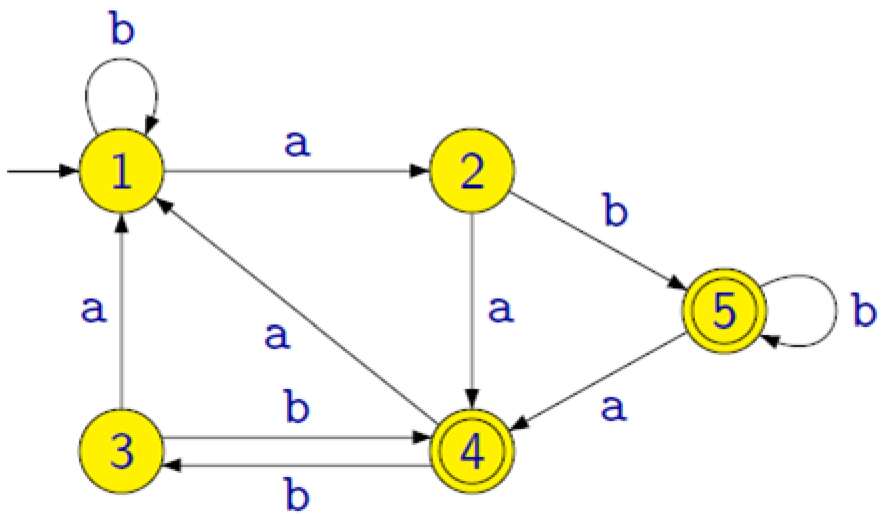
$$(q_0, a_1 a_2 \dots a_k) \vdash_M (q_1, a_2 \dots a_k) \vdash_M \dots \vdash_M (q_{k-1}, a_k) \vdash_M (q_k, \lambda)$$

számítás, s mivel $q_k \in F$, ebből következik, hogy $w \in L(M) \backslash \{\lambda\}$.

Ha az M DVA a λ szimbólumot is felismeri, akkor a G nyelvtan annyiban módosul, hogy bevezetünk egy új q_0' kezdő nemterminális szimbólumot a q_0 helyett, s felvesszük a P-be a $q_0' \longrightarrow \lambda$ szabályt, majd minden $q_0 \longrightarrow \alpha$ szabály esetén felvesszük a szabályhalmazba a $q_0' \longrightarrow \alpha$ szabályt is.

Ezzel megmutattuk, hogy $L(G) \subseteq L(M)$. ■

3.7 példa: Adott az alábbi M determinisztikus véges automata. Megadunk olyan G 3-típusú nyelvtant, amelyre $L(G) = L(M)$.



$$Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$\Sigma = \{a, b\}$$
$$q_0 = 1$$
$$F = \{4, 5\}$$

$\delta(1, a) = 2$	$\delta(1, b) = 1$
$\delta(2, a) = 4$	$\delta(2, b) = 5$
$\delta(3, a) = 1$	$\delta(3, b) = 4$
$\delta(4, a) = 1$	$\delta(4, b) = 3$
$\delta(5, a) = 4$	$\delta(5, b) = 5$

Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$

$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

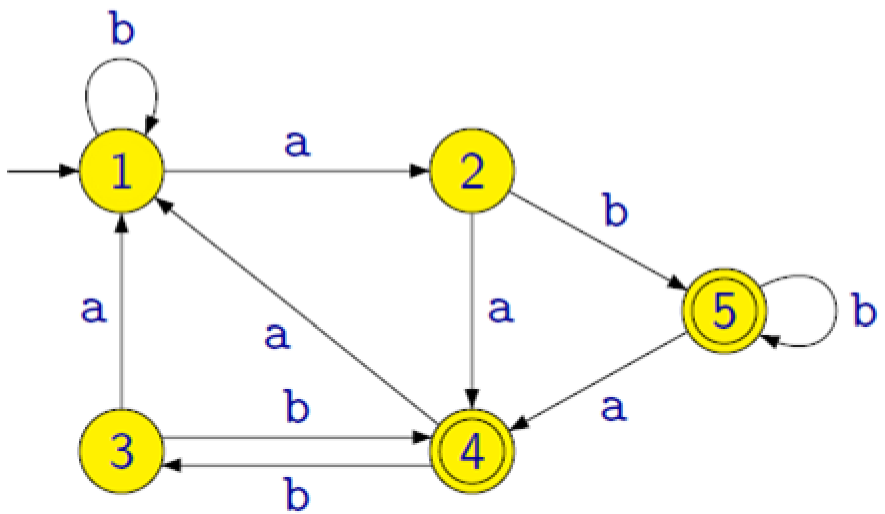
$\Sigma = \{a, b\}$

$S = 1$

P:

$1 \longrightarrow a2$	$1 \longrightarrow b1$		
$2 \longrightarrow a4$	$2 \longrightarrow b5$	$2 \longrightarrow a$	$2 \longrightarrow b$
$3 \longrightarrow a1$	$3 \longrightarrow b4$	$3 \longrightarrow b$	
$4 \longrightarrow a1$	$4 \longrightarrow b3$		
$5 \longrightarrow a4$	$5 \longrightarrow b5$	$5 \longrightarrow a$	$5 \longrightarrow b$

3.7 példa: Adott az alábbi M determinisztikus véges automata. Megadunk olyan G 3-típusú nyelvtant, amelyre $L(G) = L(M)$.



$Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$\Sigma = \{a, b\}$
$q_0 = 1$
$F = \{4, 5\}$

$\delta(1, a) = 2 \qquad \delta(1, b) = 1$
$\delta(2, a) = 4 \qquad \delta(2, b) = 5$
$\delta(3, a) = 1 \qquad \delta(3, b) = 4$
$\delta(4, a) = 1 \qquad \delta(4, b) = 3$
$\delta(5, a) = 4 \qquad \delta(5, b) = 5$

Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$
$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$\Sigma = \{a, b\}$
$S = 1$

$$
\begin{aligned}
P:\ & 1 \longrightarrow a2 \mid b1 \\
& 2 \longrightarrow a4 \mid b5 \mid a \mid b \\
& 3 \longrightarrow a1 \mid b4 \mid b \\
& 4 \longrightarrow a1 \mid b3 \\
& 5 \longrightarrow a4 \mid b5 \mid a \mid b
\end{aligned}
$$

Az alábbi algoritmus az M véges automatához olyan $G = (N, \Sigma, P, S)$ 3-típusú nyelvtant rendel, melyre $L(G) = L(M)$.

3.3 algoritmus:

AUTOMATÁBÓL_3-TÍPUSÚ_NYELVTAN (M)

$P \leftarrow \emptyset$
for minden $(p, a, q) \in E$ **do**
  $P \leftarrow P \cup \{p \longrightarrow aq\}$
  if $q \in F$ **then**
    $P \leftarrow P \cup \{p \longrightarrow a\}$
  if $q_0 \in F$ **then**
    $P \leftarrow P \cup \{q_0' \longrightarrow \lambda\}$
for minden $q_0 \longrightarrow \alpha \in P$ **do** $P \leftarrow P \cup \{q_0' \longrightarrow \alpha\}$
return G