Matematika informatikusoknak 2 – Differenciálszámítás

6. gyakorlat

1.

Legyen $f(x) = x^2$. Akkor mivel egyenlő $f'(1) =?$

1.

Legyen $f(x) = x^2$. Akkor mivel egyenlő $f'(1) =?$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

1.

Legyen $f(x) = x^2$. Akkor mivel egyenlő $f'(1) =?$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$$

1.

Legyen $f(x) = x^2$. Akkor mivel egyenlő $f'(1) = ?$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{(1 + h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 \quad - 1}{h}$$

1.

Legyen $f(x) = x^2$. Akkor mivel egyenlő $f'(1) =?$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{(1 + h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1 + 2h + h^2 \quad - 1}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2 + h = 2$$

2.

Legyen $f(x) = x^2$. Akkor mivel egyenlő $f'(x) =$?

2.

Legyen $f(x) = x^2$. Akkor mivel egyenlő $f'(x) =?$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

2.

Legyen $f(x) = x^2$. Akkor mivel egyenlő $f'(x) =?$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0.h + h^2 \ \ - x_0^2}{h}$$

2.

Legyen $f(x) = x^2$. Akkor mivel egyenlő $f'(x) =?$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0.h + h^2 \quad - x_0^2}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{2x_0.h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2.x_0 + h = 2x_0$$

Mivel x_0 tetszőleges, $f(x_0) = x_0^2$ esetben $f'(x_0) = 2x_0$, ezért az $f(x) = x^2$ fügvény esetén használható az $f'(x) = 2x$ képlet.

3.

Legyen $f(x) = x^3$. Akkor mivel egyenlő $f'(2) = ?$

3.

Legyen $f(x) = x^3$. Akkor mivel egyenlő $f'(2) =?$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

3.

Legyen $f(x) = x^3$. Akkor mivel egyenlő $f'(2) = ?$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2^3 + 3.2^2.h + 3.2.h^2 + h^3 \quad - 2^3}{h}$$

3.

Legyen $f(x) = x^3$. Akkor mivel egyenlő $f'(2) = ?$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2^3 + 3.2^2.h + 3.2.h^2 + h^3 \quad - 2^3}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{3.2^2.h + 3.2.h^2 + h^3}{h} = \lim_{h \to 0} 3.2^2 + 3.2.h + h^2 = 3.2^2$$

3.

Legyen $f(x) = x^3$. Akkor mivel egyenlő $f'(2) =?$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2^3 + 3.2^2.h + 3.2.h^2 + h^3 \quad - 2^3}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{3.2^2.h + 3.2.h^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0} 3.2^2 + 3.2.h + h^2 = 3.2^2$$

Analóg megfontolással igazolható az $f(x) = x^3$ fügvény esetén érvényes $f'(x) = 3x^2$ képlet.

4.

Legyen $f(x) = \frac{1}{x}$. Akkor mivel egyenlő $f'(x) =$?

4.

Legyen $f(x) = \frac{1}{x}$. Akkor mivel egyenlő $f'(x) =?$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

4.

Legyen $f(x) = \frac{1}{x}$. Akkor mivel egyenlő $f'(x) = ?$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x_0-(x_0+h)}{x_0.(x_0+h)}}{h}$$

4.

Legyen $f(x) = \frac{1}{x}$. Akkor mivel egyenlő $f'(x) =?$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x_0-(x_0+h)}{x_0.(x_0+h)}}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-h}{x_0.(x_0+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x_0.(x_0 + h)} = \frac{-1}{x_0^2}$$

Mivel x_0 tetszőleges ($\neq 0$), az $f(x_0) = \frac{1}{x_0}$ esetben $f'(x_0) = \frac{-1}{x_0^2}$, ezért az $f(x) = \frac{1}{x}$ fügvény esetén használható az $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ képlet.

5.

Legyen $f(x) = \sqrt{x}$. Akkor mivel egyenlő $f'(13) = ?$

5.

Legyen $f(x) = \sqrt{x}$. Akkor mivel egyenlő $f'(13) = ?$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

5.

Legyen $f(x) = \sqrt{x}$. Akkor mivel egyenlő $f'(13) =?$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(13) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{13+h} - \sqrt{13}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{13+h} - \sqrt{13}}{h} \frac{\sqrt{13+h} + \sqrt{13}}{\sqrt{13+h} + \sqrt{13}}$$

5.

Legyen $f(x) = \sqrt{x}$. Akkor mivel egyenlő $f'(13) = ?$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(13) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{13+h} - \sqrt{13}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{13+h} - \sqrt{13}}{h} \frac{\sqrt{13+h} + \sqrt{13}}{\sqrt{13+h} + \sqrt{13}}$$

$$f'(13) = \lim_{h \to 0} \frac{13 + h \ - 13}{h.(\sqrt{13+h} + \sqrt{13})} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{13+h} + \sqrt{13}} = \frac{1}{2\sqrt{13}}$$

5.

Legyen $f(x)=\sqrt{x}$. Akkor mivel egyenlő $f'(13)=?$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$f'(13)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{13+h}-\sqrt{13}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{13+h}-\sqrt{13}}{h}\frac{\sqrt{13+h}+\sqrt{13}}{\sqrt{13+h}+\sqrt{13}}$$

$$f'(13)=\lim_{h\to 0}\frac{13+h\ \ -13}{h.(\sqrt{13+h}+\sqrt{13})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{13+h}+\sqrt{13}}=\frac{1}{2\sqrt{13}}$$

Analóg megfontolással igazolható az $f(x)=\sqrt{x}$ fügvény esetén érvényes $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ képlet.

6.

Ha $f(x) = x^2 - 1$, akkor az (1,0) pontban húzott érintő meredeksége

$$f'(1) =$$

7.

Ha $f(x) = x^3 - 2x$, akkor az $(0,0)$ pontban húzott érintő meredeksége

$$f'(0) =$$

8.

Ha $f(x) = 2x^4$, akkor az (1,2) pontban húzott érintő meredeksége

$$f'(1) =$$

9.

Az

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 13$$

függvény esetén határozzuk meg azon x értékeket, amelyekre $f'(x) = 0$.

10.

Az

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

függvény esetén határozzuk meg azon x értékeket, amelyekre $f'(x) = 0$.

11.

Az
$$f(x) = x^4 - 6x^2$$
függvény esetén határozzuk meg azon x értékeket, amelyekre $f'(x) = 0$.