Függvények határértéke

Definíció. *Az $f(x)$ függvénynek az x_0 helyen a határértéke A, ha az összes olyan (x_n) sorozatra, ahol $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ teljesül*

$$f(x_n) \to A$$

és ezt így jelöljük

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

(”limesz, ha x tart x_0-hoz, $f(x)$ egyenlő A-val”)

Más szóval, ha az (x_n) sorozat határértéke x_0 akkor az ezen pontokban vett $(f(x_n))$ függvényértékek sorozatának a határértéke A.

Az x_0 és az A bármelyike lehet valós szám, $+\infty$ vagy $-\infty$.

A definíció arról szól, hogy az $f(x)$ függvény hogy viselkedik az x_0 közelében.

Példa

$$\lim_{x \to 1} 2x + 3 =?$$

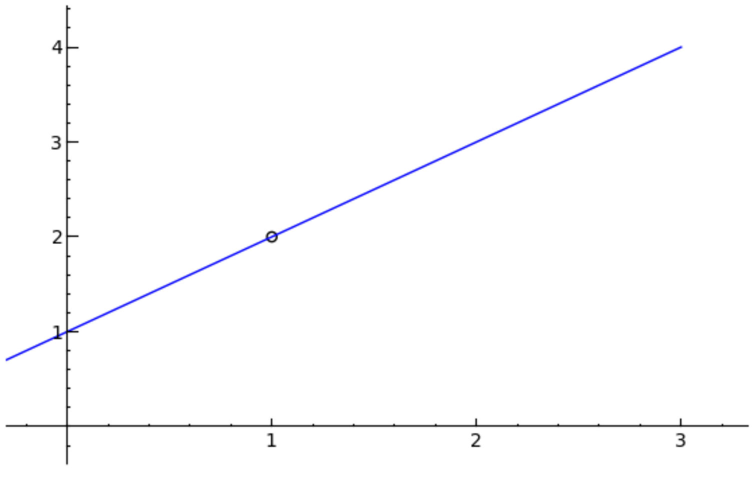
Ha x közelít az 1-hez, akkor a kétszerese a 2-höz közelít, ezt 3-mal növelve kapjuk, hogy

$$\lim_{x \to 1} 2x + 3 = 5$$

Példa

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} =?$$

Ha x közelít az 1-hez, akkor $x^2 - 1$ közelít a 0-hoz. **Vigyázat!** Ekkor ugyanis az $x - 1$ is közelít a 0-hoz. A $\frac{0}{0}$ tört nincs értelmezve.



A fenti ábra a $\frac{x^2-1}{x-1}$ függvényt ábrázolja. Ez a függvény az $x = 1$ helyen nincs értelmezve. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk, hogyha 1-hez közeli értékeket helyettesítünk be, akkor a függvényértékek a 2-höz kerülnek közel. Mivel $x^2 - 1 = (x + 1).(x - 1)$, ezért

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x + 1).(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2.$$

Az egyszerűsítést megtehettük, mert határérték esetén nem az érdekel minket, hogy mivel egyenlő a függvény értéke, hanem, hogyan viselkedik a vizsgált pont közelében.

A sorozatok konvergenciájára vonatkozó képleteket használhatjuk a függvények esetén is, az $n \to +\infty$ és az $x \to +\infty$ közti különbség, hogy a sorozatok esetén a viselkedést nagy n természetes számra, a függvény határértékénél feltételezzük, hogy az x egyre nagyobb és nagyobb valós szám lesz.

Példa

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2x-8}{4x^2-5x+6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2x-8}{4x^2-5x+6} = \frac{3}{4}.$$

Tétel. *Ha az $f(x)$, $g(x)$ függvényeknek van az x_0 pontban véges határértékük, akkor a két függvény összegének, különbségének, szorzatának és hányadosának is van ott véges határértéke (feltéve, hogy a nevező határértéke az x_0-ban nem 0), ha*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = B,$$

akkor

1. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = A + B,$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = A - B,$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x).g(x)] = A.B,$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0).$

Példa

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} =?$$

Az $x = 2$ esetén a számláló is és a nevező is kinullázódik, a határérték ún. $\frac{0}{0}$ alakú. Felhasználhatjuk a következő tételt.

Ha egy polinomba behelyettesítve az α számot 0-át kapunk, akkor az a polinom osztható $(x-\alpha)$-val.

Esetünkben ez azt jelenti, hogy

$$\frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \frac{(x-2).valami}{(x-2).masvalami}.$$

A felbontásokat befejezhetjük, ha rájövünk, hogy mivel kell szorozni a (-2)-őt, hogy az eredmény -6 legyen és mivel, hogy a szorzás eredménye -4 legyen. Egy másik lehetőség, hogy megoldjuk az $x^2+x-6=0$ és az $x^2-4=0$ egyenleteket. Tehát

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2).(x+3)}{(x-2).(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x+2} = \frac{2+3}{2+2} = \frac{5}{4}.$$

Példa

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} =?$$

A határérték újra $\frac{0}{0}$ típusú. Ahol előfordul a $\sqrt{\quad}$, annak eltávolítására célszerű felhasználni az

$$(A+B).(A-B) = A^2 - B^2$$

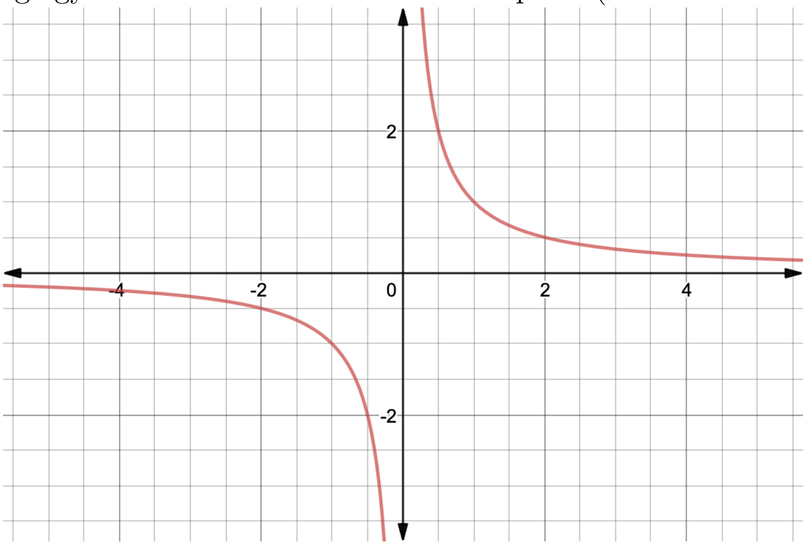
azonosságot. Esetünkben a $(\sqrt{x}-2)$-őt $(\sqrt{x}+2)$-vel szorozva kapunk $(x-4)$-et. Tehát

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\,\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4).(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}.$$

Példa

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=?$$

Ez a határérték nem létezik. Jobbról, pozitív számokon keresztül közelítve a 0-hoz egyre nagyobb és nagyobb értékeket kapunk, balról, a negatív sz ámokon keresztül közelítve a 0-hoz pedig egyre kisebb és kisebb értékeket kapunk (lásd az alábbi ábra.)



A függvények határértékére is érvényes:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

ami az alábbi séma szerint használható

$$\lim_{\boxed{}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\boxed{}}\right)^{\boxed{}}=e. \tag{1}$$

Az $x\to +\infty$ esetben $\frac{1}{x}\to 0$, ezért a fenti határértékek más alakja

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Az összes ugyanazt jelenti, az 1-hez hozzáadunk 0-hoz tartó kifejezést majd ezt az összeget a 0-hoz tartó kifejezés fordított értékére emeljük. Használata:

$$\lim_{\boxed{}\to 0}\left(1+\boxed{}\right)^{\frac{1}{\boxed{}}} \tag{2}$$

Példa

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1-\frac{8}{x}\right)^{x}=?$$

Az (1) szerint eljárva

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{8}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1\boxed{-\frac{8}{x}}\right)^{\boxed{-\frac{x}{8}}}\right]^{-\frac{8}{x}.x}=e^{-8}.$$

Példa

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{11x}{11x+8}\right)^x=?$$

Mivel

$$\frac{11x}{11x+8}=1+\left(\frac{11x}{11x+8}-1\right)=1+\frac{11x-(11x+8)}{11x+8}=1-\frac{8}{11x+8}$$

ezért

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{11x}{11x+8}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{8}{11x+8}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1\boxed{-\frac{8}{11x+8}}\right)^{\boxed{-\frac{11x+8}{8}}}\right]^{-\frac{8}{11x+8}.x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{-8x}{11x+8}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{-8x}{11x+8}}=e^{\frac{-8}{11}}.$$

Példa

$$\lim_{x\to0}\sqrt[x]{1+2x}=?$$

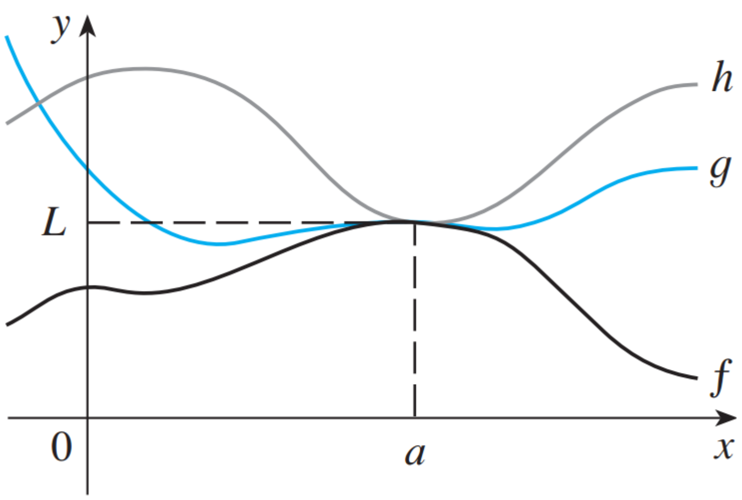
Mivel

$$\sqrt[x]{1+2x}=(1+2x)^{\frac{1}{x}}$$

ezért a (2) szerint eljárva

$$\lim_{x\to0}\sqrt[x]{1+2x}=\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left[(1+\boxed{2x})^{\frac{1}{\boxed{2x}}}\right]^{2x.\frac{1}{x}}=e^2.$$

Rendőrszabály(Sandwich Theorem)



Az a pont valamilyen környezetében az összes $x \neq a$ számra teljesüljön

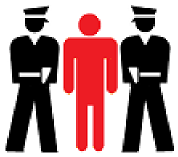
$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Ha az f és g függvények határértéke létezik az a-ban és

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L,$$

akkor a g függvénynek is létezikaz a-ban a határértéke és

$$\lim_{x\to a} g(x) = L.$$

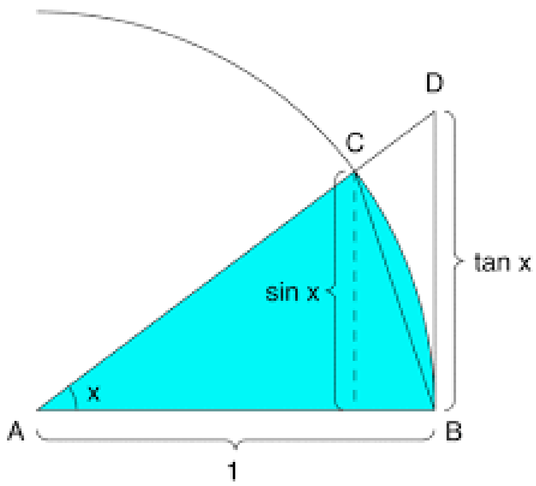


E tétel szerint igazolható a következő nevezetes határérték:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

ami az alábbi séma szerint használható

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square} = 1 \tag{3}$$



Ez a határérték azt fejezi ki, hogy 0-hoz közeli "kis"szög esetén a szaggatott vonallal jelzett szakasz hossza, a C és D pontokat összekötő körív hossz és a BD szakasz hossza megközelítőleg megegyeznek.

Példa

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x} = ?$$

Mivel $x \to 0$ esetben $5x \to 0$, ezért a fentiek alapján $\frac{\sin 5x}{5x}$ viselkedéséről tudnánk valamit mondani. Ezt felhasználva

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}\frac{5x}{5x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\boxed{5x}}{\boxed{5x}}\frac{5x}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\boxed{5x}}{\boxed{5x}}\frac{5}{3} = 1.\frac{5}{3} = \frac{5}{3}.$$

Példa

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 7x}=?$$

Ha a (3) tulajdonságot szeretnénk felhasználni, hiányoznak az x-es tagok. Semmi gond, rakjuk be azt, ami nekünk megfelel, majd hozzuk az egészet helyre:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 6x}{6x}.6x}{\frac{\sin 7x}{7x}.7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin\boxed{6x}}{\boxed{6x}}.6}{\frac{\sin\boxed{7x}}{\boxed{7x}}.7}=\frac{1.6}{1.7}=\frac{6}{7}.$$

Példa

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\tan 10x}=?$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\tan 10x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\frac{\sin 10x}{\cos 10x}}=\lim_{x\to 0}\cos 10x\frac{\sin 5x}{\sin 10x}=\lim_{x\to 0}\cos 10x\frac{\frac{\sin 5x}{5x}.5x}{\frac{\sin 10x}{10x}.10x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\cos 10x\frac{\frac{\sin\boxed{5x}}{\boxed{5x}}.5}{\frac{\sin\boxed{10x}}{\boxed{10x}}.10}=1.\frac{1.5}{1.10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$$

Folytonos függvények

Szemléletes értelemben folytonosnak olyan függvényt tekintünk, melynek grafikonja megrajzolható anélkül, hogy az írószerszámot fel kellene emelni a papírról.

Definíció. *Az $f(x)$ függvényt folytonosnak nevezzük az x_0 pontban, ha ott a határértéke megegyezik a függvény x_0 pontbeli értékével, azaz*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Az $f(x)$ folytonos egy intervallumon, ha az $f(x)$ az illető intervallum minden pontjában folytonos.

Tétel. *Ha az $f(x)$ és $g(x)$ foltonos függvények, akkor folytonoa az*

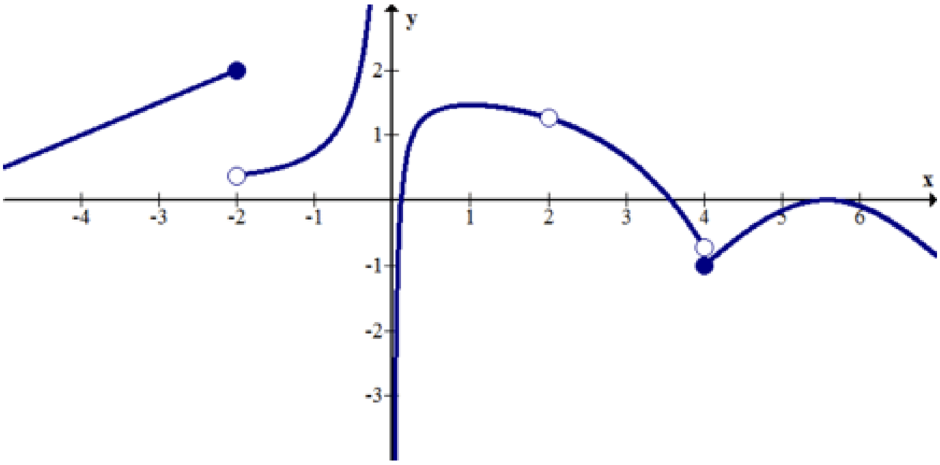
$$f(x)+g(x),\quad f(x)-g(x),\quad f(x).g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}\ \ (ha\ g(x)\neq 0)$$

függvény is.

Folytonos függvényekből képzett függvény is folytonos.

Példa. A konstans függvény, az x, x^2, x^3, ... folytonos függvények.

A hőmérséklet egy adott pontban, a Duna vízszintje egy adott helyen, a magasságunk folytonos függvények az idő szerint. Az Euro-forint árfolyam nem folytonos függvénye az időnek.

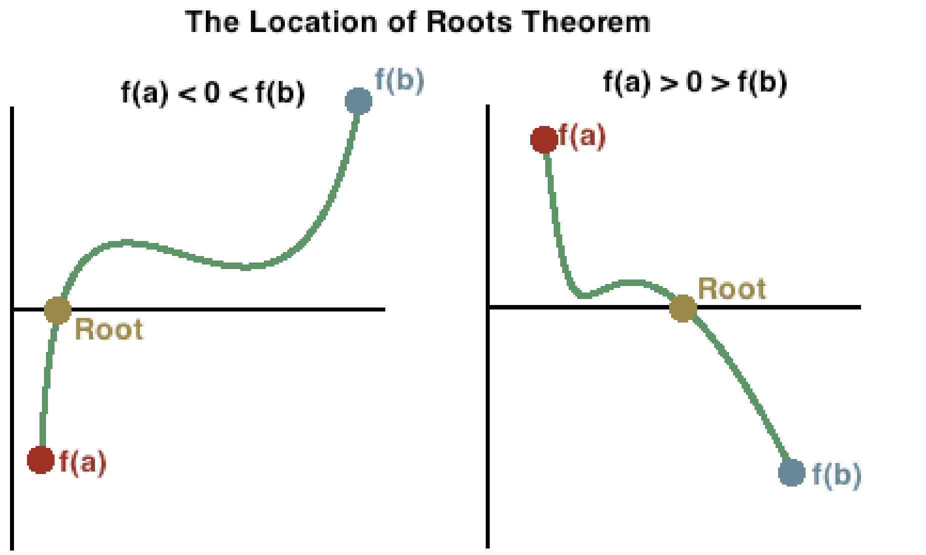


Az ábrán látható függvény nem folytonos az $x = -2$, az $x = 0$, az $x = 2$ (az $f(2)$ nem létezik) és az $x = 4$ helyen.

Tétel. Zárt intervallumon folytonos függvény tulajdonságai *Ha az $f(x)$ függvény folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon, akkor*

1. *az $f(x)$ korlátos az $[a, b]$-n, azaz vannak olyan k, K számok, hogy az $[a, b]$ tetszőleges x elemére teljesül*
$$k \leq f(x) \leq K,$$
2. *az $f(x)$ felveszi az $[a, b]$-n a legkisebb és legnagyobb értékét, vagyis vannak olyan x_1, x_2 számok az $[a, b]$-ből, hogy az $[a, b]$ tetszőleges x elemére teljesül*
$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2),$$
3. *amennyiben $f(a).f(b) < 0$ (ami azt jelenti, hogy az $f(a)$, $f(b)$ közül az egyik pozitív a másik negatív), akkor van olyan c eleme az $[a, b]$ intervallumnak, hogy*
$$f(c) = 0.$$

A 3. bizonyításának a vázlata.



If f is a continuous function that maps the closed and bounded interval I = [a,b] into the set of real numbers, and if f(a) < 0 < f(b) or f(a) > 0 > f(b), then there exists at least one root on the interval I as the function f must pass over the x-axis.

Feltételezzük, hogy $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$. Legyen $a_0 = a$ és $b_0 = b$. Intervallum felezéssel olyan egymásba skatulyázott

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$$

zárt intervallumok sorozatát szerkesztjük, melyek mindegyikére

$$f(a_n) \leq 0 \quad \text{és} \quad f(b_n) > 0 \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

teljesül.

$$\text{Ha } f(\frac{a_0 + b_0}{2}) \leq 0 \text{ akkor legyen } a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} \text{ és } b_1 = b_0 \ ,$$

$$\text{Ha } f(\frac{a_0 + b_0}{2}) > 0 \text{ akkor legyen } a_1 = a_0 \text{ és } b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Ezt a felezési eljárást folytatva, kapjuk az egymásba skatulyázott zárt intervallumok sorozatát. Ismert, hogy esetünkben egyetlen olyan c szám van, mely az összes intervallum eleme, erre a c számra fog teljesülni $f(c) = 0$.

Példa. Mutassuk meg, hogy a

$$\sqrt{3x^5 + x + 5} = x^3 + 4x^2$$

egyenletnek van megoldása a $[0, 1]$-en.

Legyen $f(x) = \sqrt{3x^5 + x + 5} - 2x^3 - 4x^2$. Akkor

- az $f(x)$ folytonos a $[0, 1]$-en,
- $f(0) = \sqrt{5} > 0$,
- $f(1) = \sqrt{3 + 1 + 5} - 2 - 4 = 3 - 6 < 0$.

Tehát van olyan c szám a $[0, 1]$-ből, melyre $f(c) = 0$. Ez a c szám lesz az eredeti egyenlet megoldása.

Példa. Tetszőleges harmadfokú polinomnak van legalább egy valós gyöke.

Legyen pl. $f(x) = 4x3 - 7x^2 - 8x + 13$. Ezen a konkrét példán mutatjuk be a gondolatmenetet. Mivel

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 4x3 - 7x^2 - 8x + 13 = +\infty, \quad \text{ezért van olyan } b \text{, melyre } f(b) > 0,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 4x3 - 7x^2 - 8x + 13 = -\infty, \quad \text{ezért van olyan } a \text{, melyre } f(a) < 0,$$

- az $f(x)$ folytonos az a és b között,
- $f(a) < 0$,
- $f(0) > 0$

Tehát van olyan c szám az a, b között, melyre $f(c) = 0$. Ez a c szám lesz a harmadfokú polinom gyöke.