Diszkrét modellek

Fibonacci számok

$$x(t+2) = x(t) + x(t+1)$$

$$t = 2 \quad x(2) = \overset{1}{x(0)} + \overset{1}{x(1)} \qquad = 2$$

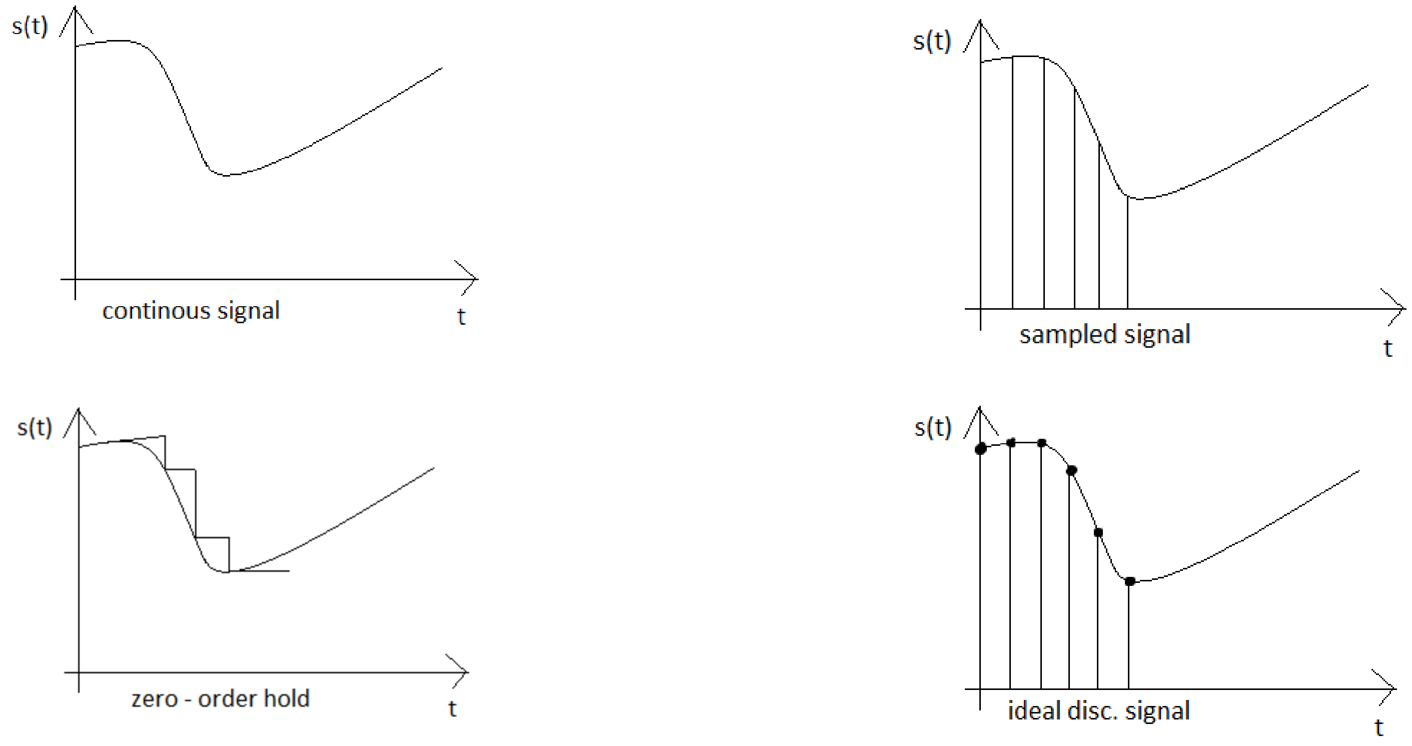
$$t = 3 \quad x(3) = \overset{1}{x(1)} + \overset{2}{s(2)} \qquad = 3$$

$$t = 4 \quad x(4) = \overset{2}{x(2)} + \overset{3}{x(3)} \qquad = 5$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots.$$

Diferencia egyenletek

- A diszkrét rendszerek diferenciaegyenletek segítségével vannak leírva. A rendszer csak bizonyos időpontokban változtatja állapotát.



$$x(t+1) = f(x(t), t)$$

$$x((t+1)\Delta) = f(x(\Delta t), \Delta t)$$

$$t \in N, \ \Delta \text{ lépéshossz}$$

$$x(t+1) = F(x(t-(n-1)), x(t-(n-2)), \ldots, x(t))$$

$$x_1(t) = x(t-(n-1))$$

$$x_2(t) = x(t-(n-2))$$

.

.

.

$$x_n(t) = x(t)$$

Álltalános alak

$$x(t+1) = F(x(t-(n-1)), x(t-(n-2)), \dots, x(t))$$

$$x_1(t) = x(t-(n-1))$$

$$x_2(t) = x(t-(n-2))$$

.

.

.

$$x_n(t) = x(t)$$

$$x_1(t+1) = x_2(t)$$

$$x_2(t+1) = x_3(t)$$

.

.

$$x_{n-1}(t+1) = x_n(t)$$

$$x_n(t+1) = F(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

Unit dealy block

$$x(t) \rightarrow \boxed{\frac{1}{z}} \rightarrow x(t-1)$$

Példa (Kmet_disk_str_8_ruk)

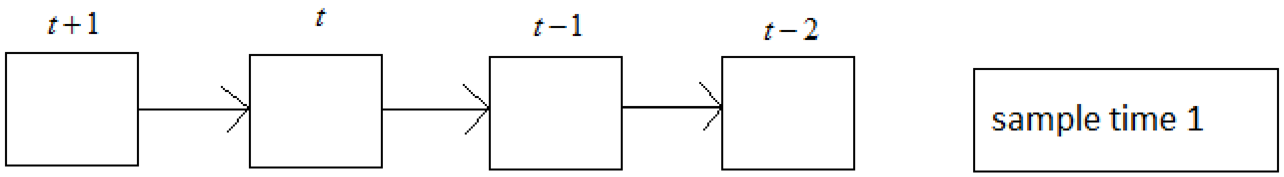
$$x(t+1) = x(t) + x(t-1) + x(t-2)$$

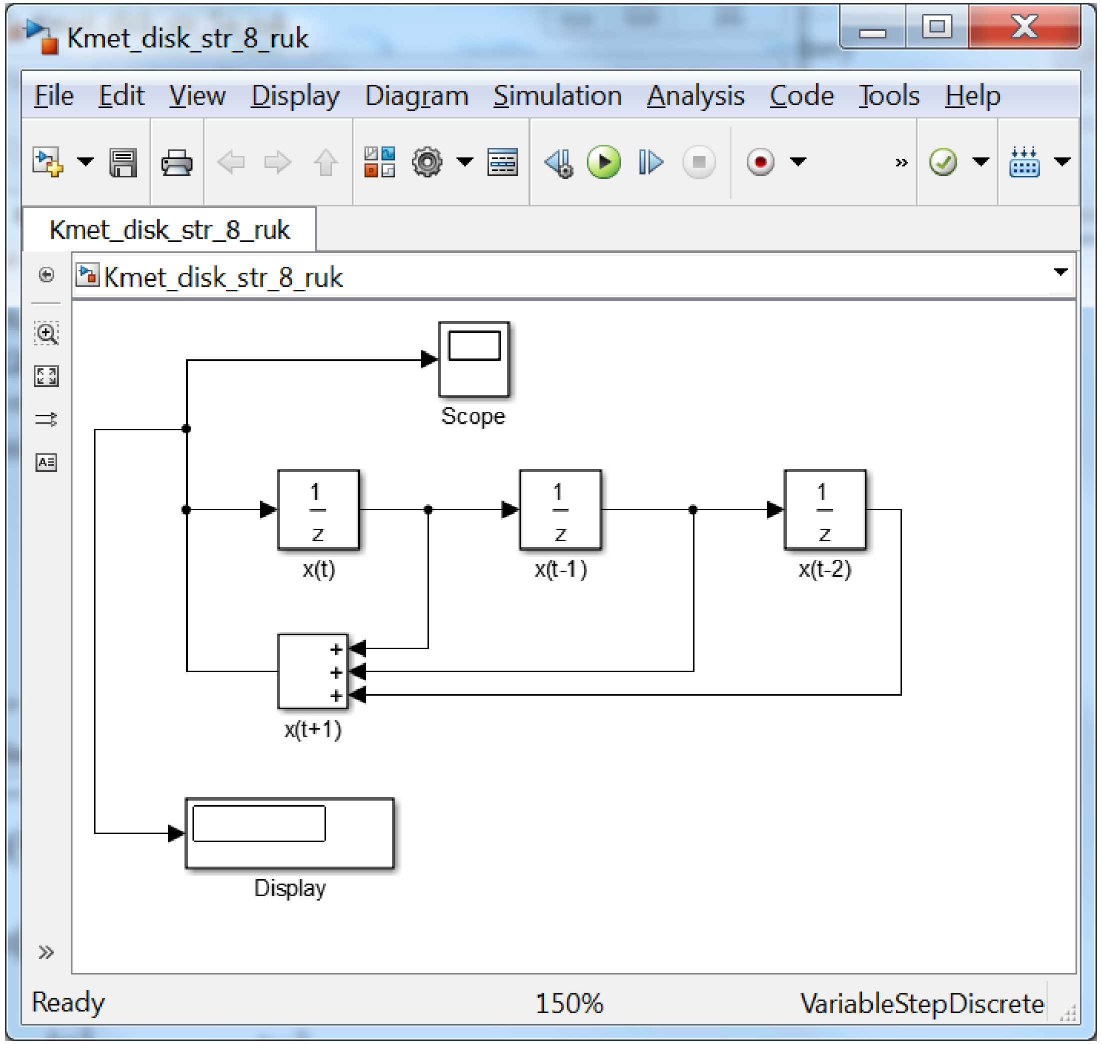
$$t=0 \quad x(1) = \overset{1}{x(0)} + \overset{1}{x(-1)} + \overset{1}{x(-2)} \qquad = 3$$

$$t=1 \quad x(2) = \overset{3}{x(1)} + \overset{1}{x(0)} + \overset{1}{x(-1)} \qquad = 5$$

$$t=2 \quad x(3) = \overset{5}{x(2)} + \overset{3}{x(1)} + \overset{1}{x(0)} \qquad = 9$$

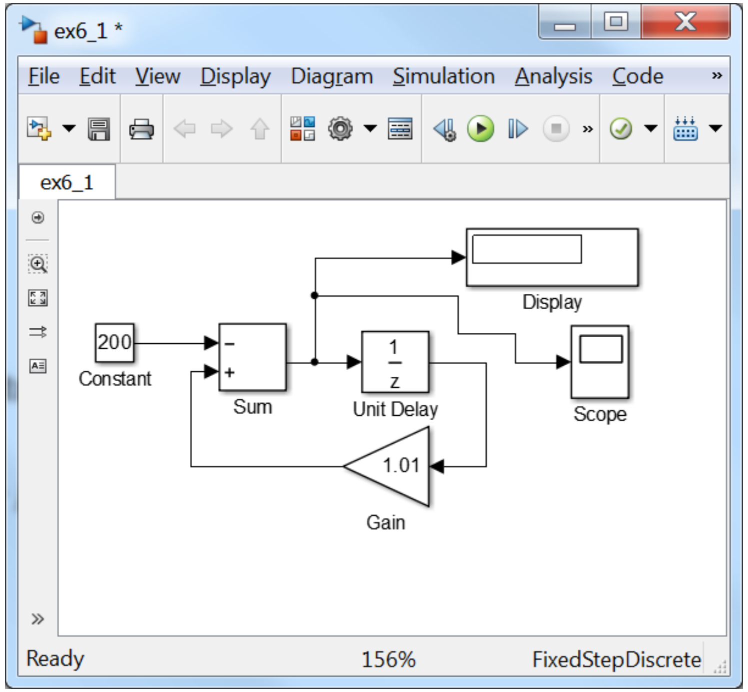
$$t=3 \quad x(4) = \overset{9}{x(3)} + \overset{5}{x(2)} + \overset{3}{x(1)} \qquad = 17$$




Kmet_disk_str_8_ruk
File Edit View Display Diagram Simulation Analysis Code Tools Help
Kmet_disk_str_8_ruk
Kmet_disk_str_8_ruk
Scope
1/z
x(t)
1/z
x(t-1)
1/z
x(t-2)
+
+
+
x(t+1)
Display
Ready
150%
VariableStepDiscrete

Kölcsöntörlesztés ex6_1.mdl

- b(t) – kölcsön, p(t) – havi törlesztés, i – havi kamat



$$b(t) = rb(t-1) - p(t)$$

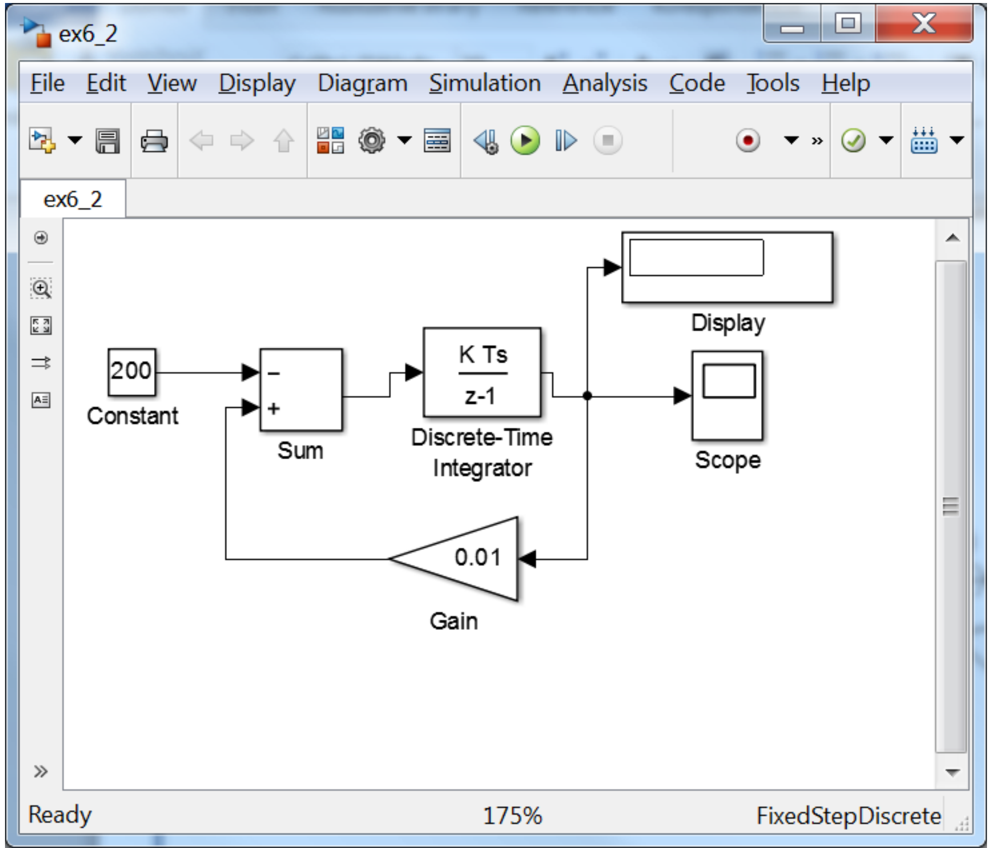
$$r = i + 1$$

2.Discrete – time integrator block

ex6_2.mdl

$$x(t) = x(t-1) + \int_{\Delta(t-1)}^{\Delta t} y(r)dr$$

$$b(t) = b(t-1) + \int_{\Delta(t-1)}^{\Delta t} (ib(u-1) - p(u))du$$



Exponenciális növekedés modellje

$$Jelöljük\ x_t = x(t),\ akkor$$

$$x_1 = x_0 + rx_0,\ x_2 = x_1 + rx_1,\ x_{t+1} = x_t + rx_t$$

$$x_1 = x_0(1+r),\ x_2 = x_0(1+r)^2,\ x_{t+1} = x_0(1+r)^{t+1}$$

Geometriai sorozat, konvergál ha $|1+r| < 1$, tehát

$$r \in (-2, 0)$$

Diszkrét modellek tulajdonságai

Definíció: Az $\mathrm{s}^* \in \mathrm{R}^n$ pontot az F függvény

$\mathrm{F}: R^n \to R^n$, fixpontjának nevezzük,

ha érvényes $\mathrm{s}^* = F(\mathrm{s}^*)$.

Linearizálás $\dfrac{\partial F\left(s^*\right)}{\partial x}$ saját értékei $|\lambda_i| < 1$, akkor a fixpont

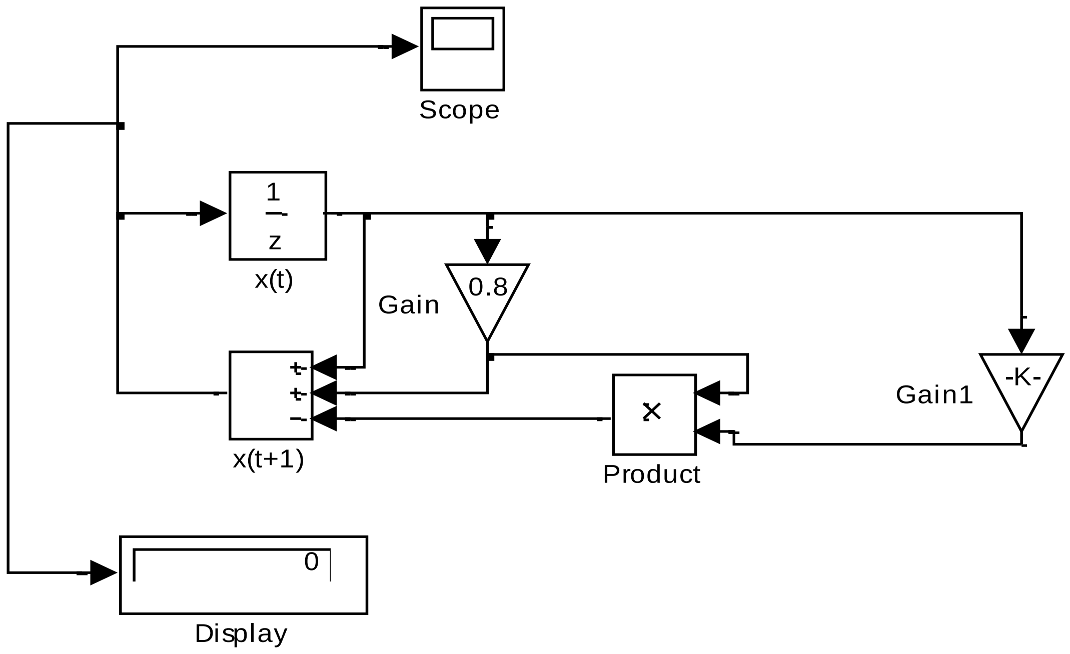
aszimptotikusan stabil. Ha $|\lambda_i| > 1$, instabil.

Logisztikai növekedés modellje

$$x(t+1) = x(t) + rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$$

$$x(0) = x_0$$

Logisztikai növekedés Simulink modellje



Fixpont meghatározása

$$x = F(x(t),t) = x + rx\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right),$$ ahol $r > 0$ és K>0

tehát $rx\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) = 0, x^* = 0,\ \mathrm{x}^* = K$

Linearizálás $\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + r\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{rx}{K}$

$$\frac{\partial F(0)}{\partial x} = 1 + r(1 - \frac{0}{K}) - \frac{r0}{K} = 1 + r > 1,$$ instabil

$$\frac{\partial F(K)}{\partial x} = 1 + r(1 - \frac{K}{K}) - \frac{rK}{K} = 1 - r,$$ feltétel stab. $|1 - r| < 1,$ *tehát* $0<r < 2$

Feigenbaum diagramm

Jelöljük $x_t = x(t)$.

Próbáljuk meghatározni az

$$x_{t+2} = x_{t+1} + rx_{t+1}(1 - \frac{x_{t+1}}{K}),$$

értékét az x_t segítségével, ahol

$$x_{t+1} = x_t + rx_t(1 - \frac{x_t}{K}).$$

Behelyettesítés után a következő kifejezést kapjuk:

$$x_{t+2} = x_t + rx_t(1 - \frac{x_t}{K}) + rx_t + rx_t(1 - \frac{x_t}{K})\left(1 - \frac{x_t + rx_t(1 - \frac{x_t}{K})}{K}\right).$$

Feigenbaum diagramm

Keressük a következő egyenlet megoldását, ami az $f^2(x)$ függvény fixpontja

$$x = x + rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) + rx + rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)\left(1 - \frac{x + rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)}{K}\right)$$

Egyszerűsítés után

$$x(K - x)\left(r^3x^2 - r^2K\left(r+2\right)x + rK^2\left(r+2\right)\right) = 0$$

Fixpontok $\quad \bar{x} = 0, \quad \bar{x} = K,$

Feigenbaum diagramm

További fixpontok és kritikus értékek

$$r_1 = 2,$$

$$x_+ = K\frac{r+2+\sqrt{r^2-4}}{2r}$$

$$x_- = K\frac{r+2-\sqrt{r^2-4}}{2r}$$

Feigenbaum diagramm

$$f\left(x\right)=x+rx\left(1-\frac{x}{K}\right)$$

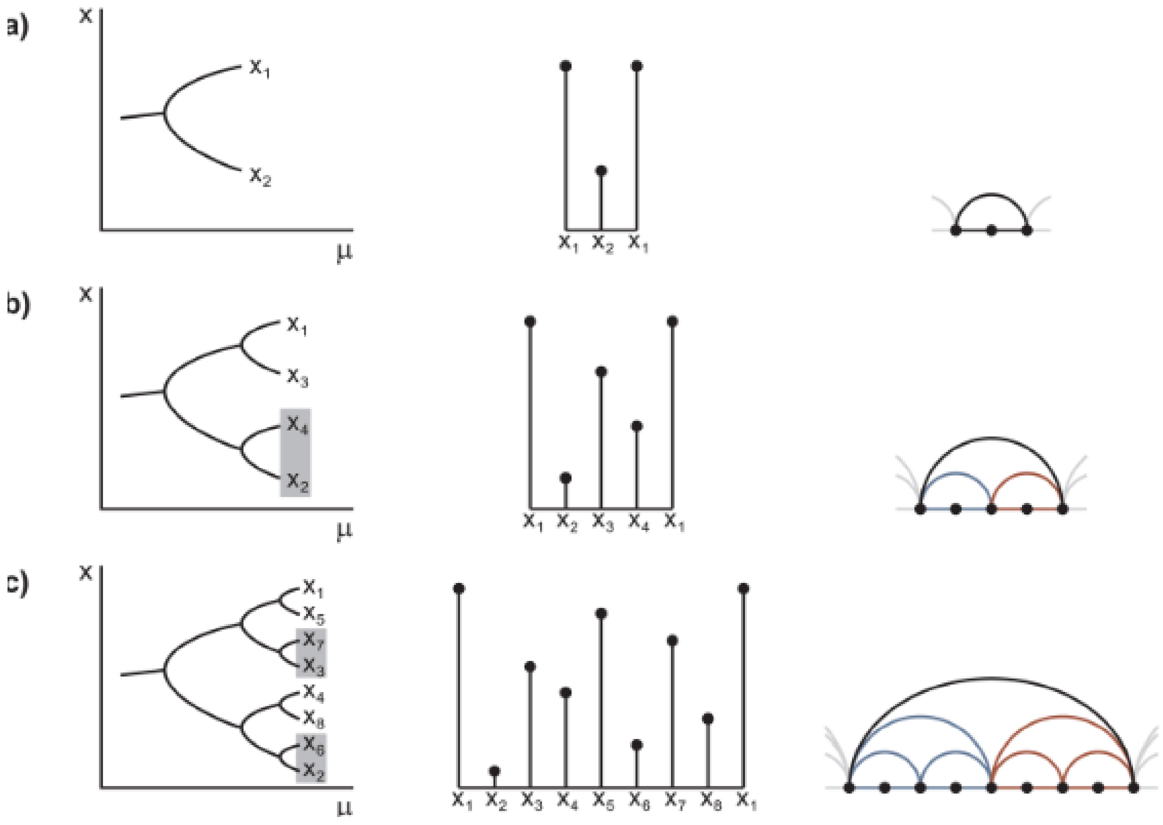
$$f\left(x_+\right)=K\frac{r+2+\sqrt{r^2-4}}{2r}+rK\frac{r+2+\sqrt{r^2-4}}{2r}$$

$$\left(1-\frac{K\frac{r+2+\sqrt{r^2-4}}{2r}}{K}\right)=K\frac{r+2-\sqrt{r^2-4}}{2r}$$

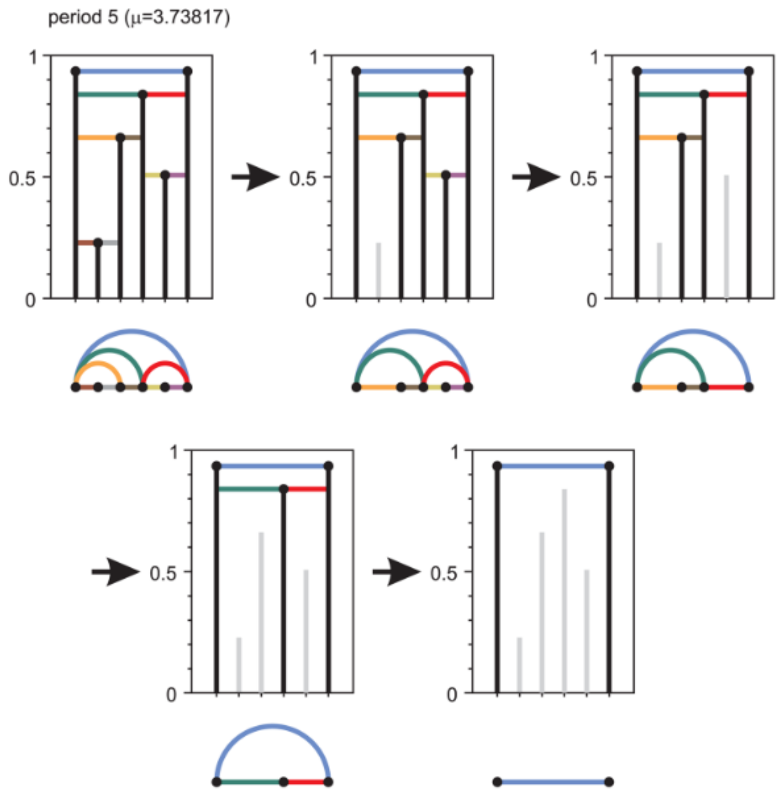
Érvényes $f(x_+)=x_-,\ f(x_-)=x_+,$ tehát

$$f^2(x_+)=x_+,\ f^2(x_-)=x_-$$

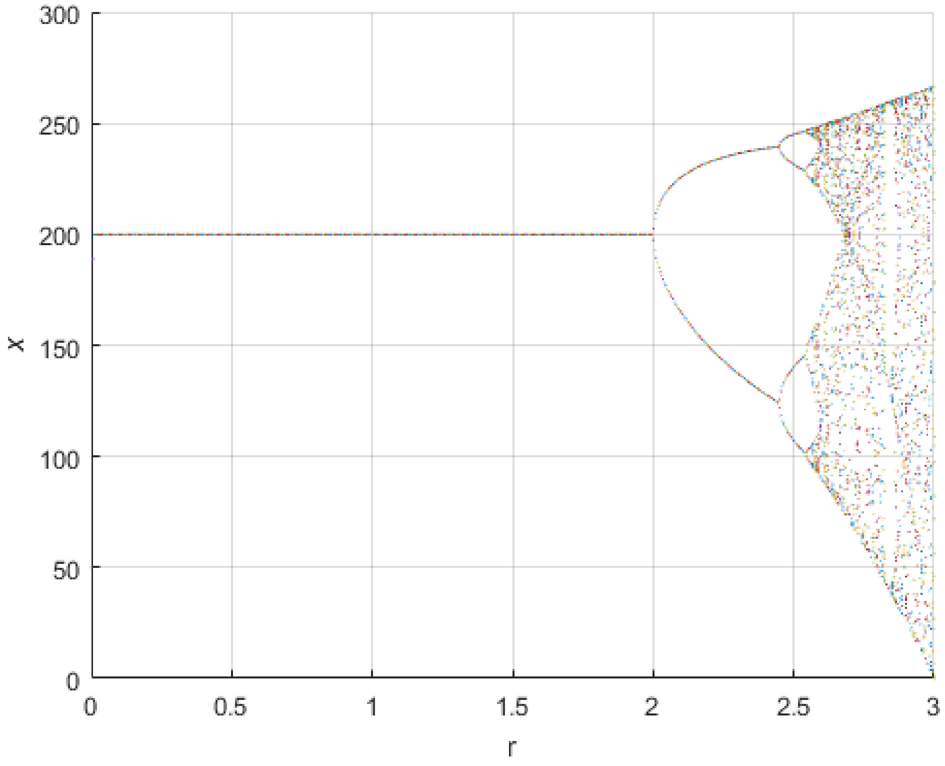
$$r_2=2,2449, r_3=2,544, r_4=2,828$$



a)
x
x1
x2
μ
x1 x2 x1
b)
x
x1
x3
x4
x2
μ
x1 x2 x3 x4 x1
c)
x
x1
x5
x7
x3
x4
x8
x6
x2
μ
x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 x1



https://www.youtube.com/watch?v=PtfPDfoF-iY


300
250
200
150
100
50
0
x
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
r

Példa : Logisztikai növekedés modellje (Kmet_disk_str_7_ruk)

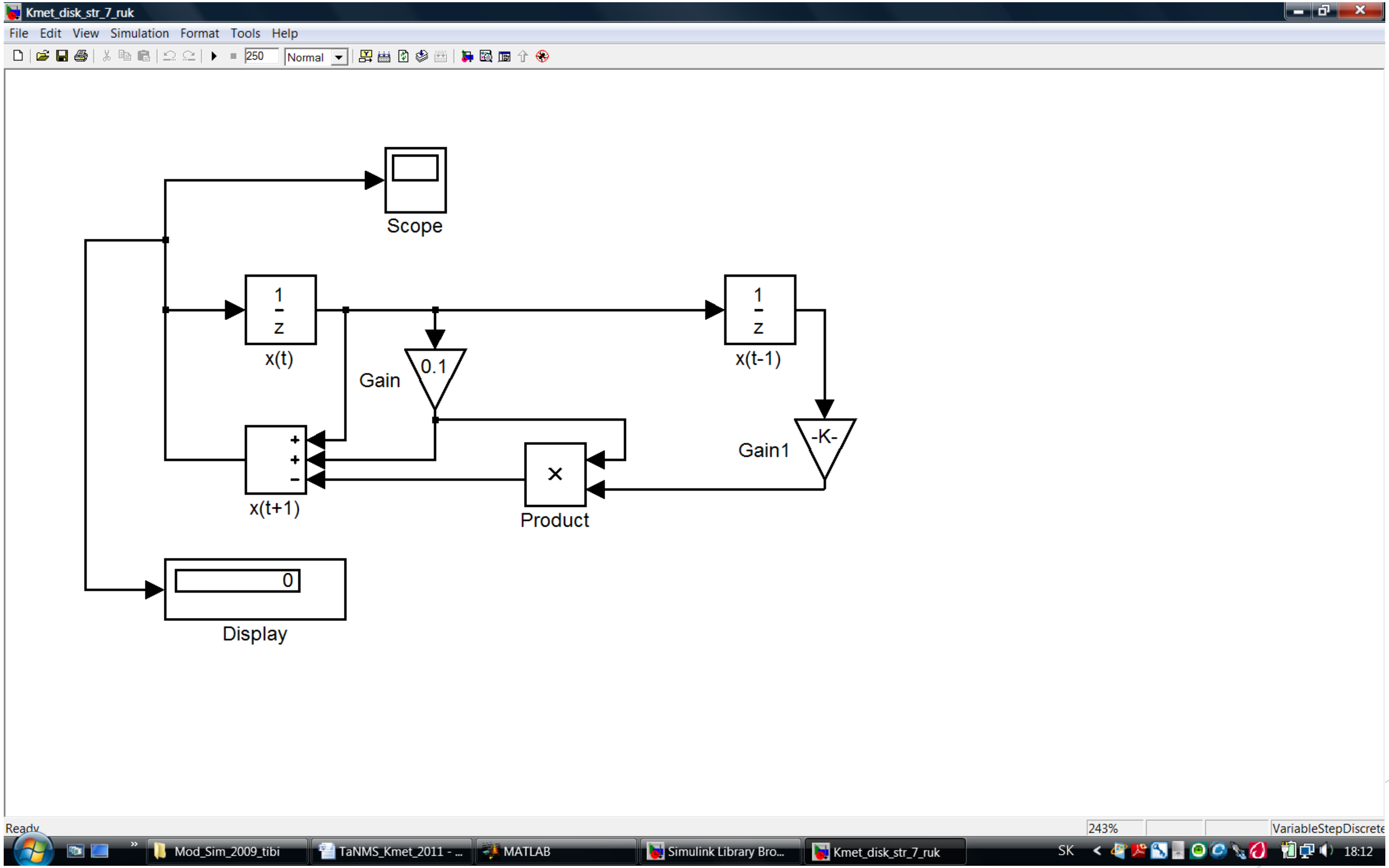
$$x(t+1) = x(t) + rx(t)(1 - \frac{x(t-1)}{K})$$

$$x_1(t) = x(t-1)$$

$$x_2(t) = x(t)$$

$$x_1(t+1) = x_2(t)$$

$$x_2(t+1) = x_2(t) + rx_2(t)(1 - \frac{x_1(t)}{K})$$


Kmet_disk_str_7_ruk
File Edit View Simulation Format Tools Help
250
Normal
Scope
1
z
x(t)
1
z
x(t-1)
Gain
0.1
Gain1
-K-
x(t+1)
Product
0
Display
Ready
243%
VariableStepDiscrete
Mod_Sim_2009_tibi
TaNMS_Kmet_2011 - ...
MATLAB
Simulink Library Bro...
Kmet_disk_str_7_ruk
SK
18:12

LV modell

$x - zsákmány$

$y - ragadozó$

$x_{t+1} = x_t + x_t\left(a - by_t\right),\ y_{t+1} = y_t + y_t\left(cx_t - d\right)$

Linearizálás alakja

$$\frac{\partial F\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)}{\partial x\left(y\right)} = \begin{pmatrix} 1 & -b\frac{d}{c} \\ c\frac{a}{b} & 1 \end{pmatrix}$$

Saját értékek $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -b\frac{d}{c} \\ c\frac{a}{b} & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda + ad + 1 = 0$$

Megoldás

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{da}, \text{ tehát } \left|\lambda_1 = 1 + i\sqrt{da}\right| > 1$$

Harvesting modell

$$x(t+1) = x(t) + rx(t)(1 - \frac{x(t)}{K}) - b$$

$$x(0) = x_0$$

Fixpont

$$x = F(x(t),t) = x + rx(1-\frac{x}{K}) - b$$

tehát $rx(1-\frac{x}{K}) - b = 0, x_1^* = \dfrac{r + \sqrt{r(r-\frac{4b}{K})}}{2\frac{r}{K}}$,

$$x_2^* = \frac{r - \sqrt{r(r-\frac{4b}{K})}}{2\frac{r}{K}}, r > \frac{4b}{K}$$

Linearizálás $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 + r(1 - \dfrac{x}{K}) - \dfrac{rx}{K}$

$$\frac{\partial F(x_2)}{\partial x} = 1 + \sqrt{r(r - \frac{4b}{K})}$$

$$\frac{\partial F(x_1)}{\partial x} = 1 - \sqrt{r(r - \frac{4b}{K})}$$

feltétel stab. $\left|1 - \sqrt{r(r - \dfrac{4b}{K})}\right| < 1,$

$$\sqrt{r(r - \frac{4b}{K})} < 2, \frac{4b}{K} < r < \frac{2b}{K} + \sqrt{\left(\frac{2b}{K}\right)^2 + 1}$$

Lineáris modell
Kmet_disk_str_5a_ruk