Matematika informatikusoknak 2 – Differenciálszámítás

3. előadás

rendőrszabály

Tétel. Ha minden n természetes számra $a_n \leq b_n \leq c_n$ és

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha, \quad \text{akkor} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha.$$

rendőrszabály

Tétel. Ha minden n természetes számra $a_n \leq b_n \leq c_n$ és

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha, \quad \text{akkor} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} =?$$

rendőrszabály

Tétel. Ha minden n természetes számra $a_n \leq b_n \leq c_n$ és

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha, \quad \text{akkor} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = ?$$

Mivel a $\sin(x)$ függvény csak a -1 és 1 közötti értékeket veszi fel, ezért

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n} \qquad \text{teljesül minden} \quad n\text{-re.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}, \quad \text{ezért} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Tétel. Legyen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \beta$$

Akkor

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) + (\lim_{n\to\infty} b_n) = \alpha + \beta$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n . b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n).(\lim_{n\to\infty} b_n) = \alpha.\beta$$

továbbá $\alpha \neq 0$ esetben

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{\alpha}.$$

Példa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 - 6n}{8n + 2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 - 6n}{8n + 2n^2} = \frac{5}{2}$$

Példa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2-6n}{8n+2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2-6n}{8n+2n^2} = \frac{5}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2-6n}{8n+2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5n^2-6n}{n^2}}{\frac{8n+2n^2}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5n^2}{n^2}-\frac{6n}{n^2}}{\frac{8n}{n^2}+\frac{2n^2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5-\frac{6}{n}}{\frac{8}{n}+2} = \frac{5}{2}$$

Példa

Ha az (a_n) sorozat határértéke $+\infty$, a (b_n) sorozaté pedig $-\infty$, akkor általánosságban a $\lim(a_n + b_n)$ határértékről nem tudunk semmit.

a_n	b_n	$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$
n	$-2n$	$-\infty$
$2n$	$-n$	$+\infty$
$n+3$	$-n$	3
$n+(-1)^n$	$-n$	oszcillálva divergens

Tétel.

Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ és (b_n) alulról korlátos, akkor

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$$

Tétel.

Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ és (b_n) alulról korlátos, akkor

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$$

Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ és (b_n) felülről korlátos, akkor

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$$

Ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

és (b_n) alulról korlátos pozitív konstanssal, akkor

$$\lim_{n\to\infty} (a_n . b_n) = +\infty$$

Ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

és (b_n) alulról korlátos pozitív konstanssal, akkor

$$\lim_{n\to\infty} (a_n . b_n) = +\infty$$

Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ és (b_n) korlátos, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$$

Monoton sorozatok

Definíció. Az (a_n) sorozat monoton növekedő (csökkenő), ha

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots \qquad (a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \ge \cdots).$$

Monoton sorozatok

Definíció. Az (a_n) sorozat monoton növekedő (csökkenő), ha

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \qquad (a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots).$$

Tétel. Ha az (a_n) sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.

Példa

$$a_1 = 4.9$$

$$a_2 = 4.99$$

$$a_3 = 4.999$$

$$a_4 = 4.9999$$

$$\dots$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 5$$

Tétel.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Igazolható, hogy a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, \ldots$ sorozat növekvő és felülről korlátos (pl. a 3-al).

Az **e** nevezetes konstans, irracionális szám, $e = 2.718\,281\ldots$

Tétel.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Bizonyítás. Legyen

$$\sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n$$

Akkor

$$n = (1+\delta_n)^n = 1 + n.\delta_n + \frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2 + \cdots$$

$$n > \frac{n(n-1)}{n}\delta_n^2 \ \text{ s ebből } \ 1 > \frac{n-1}{2}\delta_n^2 \ \text{ azaz } \ \delta_n^2 < \frac{2}{n-1}$$

$$0 < \delta_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}, \quad \lim_{n\to+\infty} 0 = 0 = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

Tétel.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$$

Pl.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{7} = 1$$

Az $\sqrt[n]{7}$, $n = 1, 2, \ldots$ sorozat csökkenő és alulról korlátos (pl.az 1-el). Tehát van véges határértéke. Legyen ez a határérték α szám. Akkor

$$\alpha = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{7} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[2n]{7} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\sqrt[n]{7}} = \sqrt{\alpha}$$

Az $\alpha = \sqrt{\alpha}$ egyenletnek megoldása a 0 és az 1, de mivel a sorozatunk összes eleme nagyobb mint 1, ezért

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{7} = \alpha = 1$$

Egymásba skatulyázott zárt intervallumok tétele

Ha az

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

egymásba skatulyázott zárt intervallumk sorozatára érvényes, hogy

$$\lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0,$$

akkor pontosan egy olyan c valós szám létezik, melyre $c \in [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$ teljesül.

Egymásba skatulyázott zárt intervallumok tétele

Ha az

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

egymásba skatulyázott zárt intervallumk sorozatára érvényes, hogy

$$\lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0,$$

akkor pontosan egy olyan c valós szám létezik, melyre $c \in [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$ teljesül.
Bizonyítás.

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \quad \cdots \quad \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

Az (a_n) növekedő felülről korlátos sorozat, létezik az α határértéke.
Az (b_n) csökkenő alulról korlátos sorozat, létezik a β határértéke.
$a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n$, az intervallumok hossza a 0-hoz tart, ezért $\alpha = \beta$ az egyetlen közös pontja az intervallumoknak.

Bolzano-Weierstrass tétele

Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Legyen az (x_n) alsó korlátja a_1 a felső b_1.
Az $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$, $[\frac{a_1+b_1}{2}], b_1$ az (x_n) sorozat végtelen részsorozatának az elemeit tartalmazza. Legyeen ez az $[a_2, b_2]$.
Az $[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$, $[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$ az (x_n) sorozat végtelen részsorozatának az elemeit tartalmazza. Legyen ez az $[a_3, b_3]$.

$$\cdots$$

Ily módon

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

zárt intervallumok sorozatát kapjuk, melyre

$$(b_n - a_n) = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \cdots = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$$

ezért létezik olyan c szám, mely az összes intervallum eleme.

k_1: x_{k_1} az (x_n) tetszőleges eleme
k_2: legyen $k_2 > k_1$ és $x_{k_2} \in [a_2, b_2]$
k_3: legyen $k_3 > k_2$ és $x_{k_3} \in [a_3, b_3]$

$$\dots$$

k_n: legyen $k_n > k_{n-1}$ és $x_{k_n} \in [a_n, b_n]$

$$\dots$$

Az (x_{k_n}) az (x_n) részsorozata, mivel $a_n \leq x_{k_n} \leq b_n$ és $\lim_{n\to+\infty} a_n = c = \lim_{n\to+\infty} b_n$ ezért (rendőrszabály)

$$\lim_{n\to+\infty} x_{k_n} = c$$

Tétel. Ha egy sorozat felülről nem korlátos, akkor van $+\infty$-be tartó részsorozata, ha alulról nem korlátos, van $-\infty$-be tartó részsorozata.

Cauchy-féle konvergencia kritérium

Az (a_n) sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha minden pozitív ε-hoz létezik olyan n_0, hogy minden $m, n \geq n_0$ esetben

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

Kis ordó és nagy ordó

Milyen kapcsolatban áll a futási idő az input méretével, amikor ez a méret a végtelenbe tart? Tudjuk-e a futási idő függvényét valamilyen egyszerűbb függvénnyel becsülni, felülről korlátozni?

Az $O(f(n))$ jelölést (*nagy ordó*) rendszerint pozitív egész n-eken értelmezett f függvény esetén használjuk. Nem valami határozott mennyiséget jelöl. Az $O(f(n))$ jelölés az n-től függő mennyiségek becslésére szolgál.

Egy X mennyiség helyére akkor írhatunk $O(f(n))$-t, ha létezik olyan konstans, mondjuk M, hogy minden elég nagy n-re, $|X| \leq M|f(n)|$, azaz aszimptotikusan felső becslést adunk egy konstansszorzótól eltekintve a lépésszámra.

Pl.

$$5n^2 - 8n + 17 = O(n^2), \quad \text{mert biztosan} \quad 5n^2 - 8n + 17 \leq 3 * 17n^2$$

$$25n + 1800\sqrt{n} + 384 + \frac{10000}{n} = O(n), \quad \text{mert}$$

$$25n + 1800\sqrt{n} + 384 + \frac{10000}{n} \leq 4 * 10000 * n$$

Pl.

$$5n^2 - 8n + 17 = O(n^2), \quad \text{mert biztosan} \quad 5n^2 - 8n + 17 \le 3 * 17n^2$$

$$25n + 1800\sqrt{n} + 384 + \frac{10000}{n} = O(n), \quad \text{mert}$$
$$25n + 1800\sqrt{n} + 384 + \frac{10000}{n} \le 4 * 10000 * n$$

Pl. a $3n^2 - 8n = O(n)$ nem teljesül. Ha igaz lenne, létezne olyan M, hogy $|3n^2 - 8n| \le Mn$ minden elég nagy n-re. Ebből $|3n - 8| \le M$ következne, de ez nem teljesúlhet tetszőlegesen nagy n-re.

A gyakorlatban előforduló feladatok bonyolultsága rendszerint az alábbi osztályok valamelyikébe esik. A bonyolultsági osztályok hagyományos jelölését a szokásos elnevezés követi, majd a listát pár adott bonyolultságú feladat zárja.

$O(1)$: konstans idő: egyszerű értékadás, írás/olvasás veremből

$O(ln(n))$: logaritmikus: bináris keresés rendezett tömbben, elem beszúrása, törlése bináris fából, kupacból (heap)

$O(n)$: lineáris: lista/tömb végigolvasása, lista/tömb minimális/maximális elemének, elemek átlagának meghatározása, n!, fib(n) kiszámítása

$O(nln(n))$: quicksort, összefésüléses rendezés.

$O(n^2)$: négyzetes: egyszerű rendezési algoritmusok (pl. buborékrendezés), nem rendezett listában az ismétlődések megtalálása

$O(c^n)$: exponenciális: hanoi torony, rekurzív Fibonacci számok, n elem permutációinak előállítása

Az $o(g(n))$ (*kis ordó*) azon $f(n)$ függvények halmazát jelöli $(f(n) = o(g(n)))$, melyre

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

Az $o(g(n))$ (*kis ordó*) azon $f(n)$ függvények halmazát jelöli ($f(n) = o(g(n))$), melyre

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

$$5n^2 + 45n = o(n^3)$$

$$\sqrt{n} = o(n)$$

$$\frac{1}{n} = o(1)$$