- A Thalész-tétel és megfordítása: Egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha köré írható körének középpontja az egyik oldalának felezőpontja.

Magasságtétel, befogótétel

- Magasságtétel: Egy derékszögű háromszög magasságának hossza mértani közepe azon két szakasz hosszának, amelyekre a magasság az átfogót osztja.
- Befogótétel: Egy derékszögű háromszög befogójának hossza mértani közepe az átfogó és a befogó átfogóra eső merőleges vetülete hosszának.

A háromszög néhány további területképlete

Jelölje a, b, c a háromszög oldalainak hosszát, α, β, γ a megfelelő belső szögeket, m_a, m_b, m_c, a magasságok hosszait, s a kerület felét és R a köré írható kör sugarát!

- $t = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$.
- $t = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{2}$.
- $t = \frac{a^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2 \cdot \sin\alpha}$.
- $t = 2 \cdot R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$.
- $t = \frac{R^2}{2} \cdot (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$.
- $t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, Heron-képlet.

Négyszögek

- A négyszög belső szögeinek összege 360° .
- **Trapéz**
  - Ha egy négyszögnek van két párhuzamos oldala, akkor **trapéznak** nevezzük.
  - A trapéz párhuzamos oldalait **alapoknak**, a másik két oldalát **száraknak** nevezzük.
  - A **trapéz magassága** az alapokat merőlegesen összekötő szakasz. (az alapok távolsága)
  - A **trapéz középvonala** a szárak felezőpontjait összekötő szakasz.
  - A trapéz szárainak felezőpontjait összekötő középvonala párhuzamos az alapokkal, hossza pedig az alapok hosszainak számtani közepe.
  - A trapézban az egy száron fekvő szögek összege 180 fok. (társszögek)
  - A **trapéz derékszögű**, ha van derékszöge.
  - A **trapéz egyenlő szárú**, ha szárai egyenlő hosszúak.
  - Ha egy trapéz tengelyesen szimmetrikus, akkor **szimmetrikus trapéznak** nevezzük
  - A szimmetrikus trapéz alapon fekvő szögei egyenlők.
  - Minden szimmetrikus trapéz egyenlő szárú, de nem minden egyenlő szárú trapéz szimmetrikus.
  - A szimmetrikus trapézok köré kör írható (húrtrapéz).
  - A szimmetrikus trapéz szimmetria-tengelye felezi az alapokat és merőleges azokra.
  - A trapéz területét megkapjuk, ha az alapok hosszainak számtani közepét megszorozzuk a trapéz magasságának hosszával.
- **Paralelogramma**

- ◦ Ha egy négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, akkor **paralelogrammának** nevezzük.
  - ◦ Egy négyszög akkor és csak akkor paralelogramma, ha
    - · szemközti szögei egyenlők;
    - · az egy oldalon fekvő szögeinek összege 180°;
    - · szemközti oldalai egyenlők;
    - · ha van két szemközti oldala, amelyek egyenlők és párhuzamosak;
    - · középpontosan szimmetrikus;
    - · átlói felezik egymást.
  - ◦ A paralelogramma két szemközti oldalának felezési pontjait összekötő szakaszt a **paralelogramma** középvonalának nevezzük.
  - ◦ A paralelogramma két szemközti oldalának felezési pontjait összekötő középvonala párhuzamos a másik két oldallal és velük egyenlő hosszú.
  - ◦ A paralelogramma adott oldalához tartozó **magassága** a szemközti oldal egy pontjából az adott oldal egyenesére bocsátott merőleges szakasz.
  - ◦ A paralelogramma területét megkapjuk, ha egyik oldalának hosszát megszorozzuk a hozzá tartozó magasság hosszával.

- **Deltoid**
  - ◦ Ha egy négyszög valamelyik átlójára tengelyesen szimmetrikus, akkor **deltoidnak** nevezzük.
  - ◦ A deltoid átlói merőlegesek egymásra.
  - ◦ A deltoid szimmetriaátlója felezi a másik átlót.
  - ◦ A deltoidnak két-két szomszédos oldala egyenlő hosszú.
  - ◦ A deltoid szimmetriaátlóval szemközti szögei egyenlők.
  - ◦ Van konkáv deltoid is.
  - ◦ A deltoid területe egyenlő az átlók hosszai szorzatának felével.

- **Rombusz**
  - ◦ Ha egy négyszög oldalai egyenlő hosszúak, akkor **rombusznak** nevezzük.
  - ◦ Minden rombusz paralelogramma is (tehát rendelkezik a paralelogramma összes tulajdonságával).
  - ◦ Minden rombusz deltoid is (tehát rendelkezik a deltoid összes tulajdonságával).

- **Téglalap**
  - ◦ Ha egy négyszög szögei egyenlők, akkor **téglalapnak** nevezzük.
  - ◦ A téglalap szögei 90 fokosak
  - ◦ A téglalap
    - · szemközti oldalai egyenlők és párhuzamosak egymással;
    - · átlói felezik egymást;
    - · középpontosan szimmetrikus az átlók felezéspontjára nézve;
    - · tengelyesen szimmetrikus a szemközti oldalfelező pontokon átmenő egyenesekre.
  - ◦ A téglalap területe egyenlő az egy csúcsában összefutó oldalak hosszainak szorzatával.
  - ◦ Minden téglalap húrtrapéz, derékszögű trapéz, paralelogramma is.

- **Négyzet**
  - ◦ Ha egy négyszög minden oldala egyenlő hosszú és minden szöge egyenlő, akkor **négyzetnek** nevezzük.

  - A négyzet területe egyenlő oldalhosszának négyzetével.

- Egy négyszög két középvonala felezve metszi egymást.

- **Érintőnégyszögek**

  - Azokat a négyszögeket, amelyeknek van beírt körük, **érintőnégyszögeknek** nevezzük.
  - Egy konvex négyszög akkor és csak akkor érintőnégyszög, ha a szemközti oldalak hosszainak összege egyenlő.
  - Az érintőnégyszög területét úgy is megkaphatjuk, ha beírt körének sugarát megszorozzuk a kerület felével.

- **Húrnégyszögek**

  - Azokat a négyszögeket, amelyeknek van körülírt körük, **húrnégyszögeknek** nevezzük.
  - Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha szemközti szögeinek összege 180°.
  - Ptolemaiosz-tétel: A húrnégyszög átlóinak szorzata egyenlő a szemközti oldalpárok szorzatának összegével.

Sokszögek

- Egy **sokszög konvex**, ha minden szöge konvex, egy **sokszög konkáv**, ha van konkáv szöge.
- Az n-oldalú konvex sokszög átlóinak száma: $\frac{n(n-3)}{2}$.
- Az n-oldalú sokszög belső szögeinek összege: $(n-2) \cdot 180°$
- Egy sokszög szabályos, ha minden oldala egyenlő hosszú, és minden szöge egyenlő nagyságú.

Kör és részei, körív hossza, körcikk területe

- A **kör** azon pontok halmaza a síkon, amelyek a sík egy adott O pontjától adott r távolságra vannak.
- A kör két különböző pontját összekötő szakaszt **húrnak**, a húrt tartalmazó egyenest **szelőnek** nevezzük.
- A kör középpontján átmenő húrt **átmérőnek** nevezzük.
- A kört két különböző pontja két **körívre** osztja fel.
- A körlap azon részét, amelyet a kör egy íve és az ív végpontjaiba húzott sugarak határolnak, **körcikknek** nevezzük.
- A körlap azon részét, amelyet a kör egy íve és az ív végpontjait összekötő húrja határolnak, **körszeletnek** nevezzük.
- A sík két koncentrikus köre által közrefogott részét **körgyűrűnek** nevezzük.
- A **kör érintője** a kör síkjának olyan egyenese, amelynek egyetlen közös pontja van a körrel.
- A kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra.
- Egy külső pontból a körhöz húzott két érintőszakasz egyenlő hosszú.
- (Körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele) Adott körhöz adott külső pontból húzott érintőszakaszok hossza mértani közepe azon két szakasz hosszának, amelyek az adott ponton átmenő szelőn a ponttól a körrel alkotott metszéspontokig terjednek.

- (Körhöz külső pontból húzott szelőszakaszok tétele) Adott körhöz adott külső ponton át húzott szelőn az adott ponttól a körrel alkotott metszéspontokig terjedő szelőszakaszok hosszának szorzata állandó, csak a körtől és az adott ponttól függ.
- Adott körhöz adott belső pontján át húzott szelőn az adott ponttól a körrel alkotott metszéspontokig terjedő szelőszakaszok hosszának szorzata állandó, csak a körtől és az adott ponttól függ.
- Ha egy szög csúcsa egy adott kör középpontja, akkor középponti szögnek nevezzük.
- Egy körben a középponti szögek nagysága és a hozzájuk tartozó körívek hosszai egyenesen arányosak. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{i_\alpha}{i_\beta}$.
- Ívmérték: **1 radián** az szög, amelyhez mint középponti szöghöz a kör sugarával egyenlő hosszú körív tartozik. π radián $= 180°$.
- Adott r sugarú körben az α középponti szöghöz tartozó körív hossza:

$$i_{\alpha^\circ} = \frac{r\pi}{180^\circ}\alpha, \text{ illetve } i_{\hat{\alpha}} = r\hat{\alpha}.$$

- Egy körben a középponti szögek nagysága és a hozzájuk tartozó körcikkek területei egyenesen arányosak. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{t_\alpha}{t_\beta}$.
- Adott r sugarú körben az α középponti szöghöz tartozó körcikk területe:

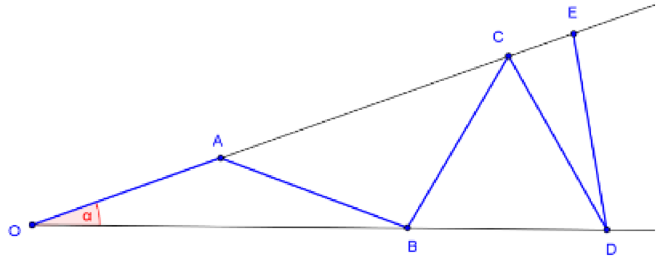
$$t_{a^\circ} = \frac{r^2\pi}{360^\circ}\alpha, \text{ illetve } t_{\hat{a}} = \frac{i_{\hat{a}}r}{2}.$$

Kerületi szögek, látókör

- Ha egy szög csúcsa egy adott körvonal pontja, szárai pedig vagy a kör két húrjára, vagy egy húrra és egy érintőre illeszkednek, akkor a kör **kerületi szögének** nevezzük. Ha a kerületi szög egyik szára egy érintőre illeszkedik, akkor **érintőszárú kerületi szögnek** nevezzük.
- (Kerületi és középponti szögek tétele) Egy körben egy adott ívhez tartozó középponti szög kétszerese az ugyanazon ívhez tartozó kerületi szögnek.
- (Kerületi szögek tétele) Egy körben egy adott ívhez tartozó kerületi szögek egyenlők.
- (Látószög-körív; látókör) A síkon azoknak a pontoknak a halmaza, amelyekből egy adott AB szakasz adott ($0° < \alpha < 180°$) szögben látszik, két szimmetrikus körív.
    - Az AB szakasz a két körív közös húrja, és az A és B pontok nem tartoznak a látószögkörívhez.
    - (Thalész-tétel) Adott kör egy tetszőleges AB átmérője a kör bármely A-tól és B-től különböző pontjából derékszögben látszik.
    - (A Thalész-tétel megfordítása) Ha egy háromszög AB oldala a szemközti C csúcsból derékszögben látszik, akkor a C csúcs az AB átmérőjű kör A-tól és B-től különböző pontja.

II. Kidolgozott feladatok

1. Az ábrán látható szakaszok közül $OA = AB = BC = CD = DE$. Mekkora α szög esetén lesz $OD = OE$



2. Bizonyítsa be, hogy ha P az ABC háromszög egy belső pontja, akkor $PB + PC < AB + AC$!

3. Az ABC háromszögben $AC \neq BC$, és a háromszög körülírható körének sugara 10 cm.

    a) Hány olyan pont van a háromszög síkjában, amely a háromszög AC és BC oldalegyeneseitől, valamint az A és B csúcsoktól egyenlő távol van?

    b) Mekkora távolságra vannak ezek a pontok egymástól?

4. Igazolja, hogy a háromszög köré írt körének középpontja a háromszög bármelyik oldalától fele olyan távol van, mint az ugyanazon oldallal szemközti csúcs a magasságponttól!

5. Egy derékszögű trapézba az oldalakat érintő kör írható. A kör középpontjának az alapokra nem merőleges szár végpontjaitól mért távolsága 6 és 8 egység. Számítsa ki a trapéz oldalait!

6. Egy paralelogramma egyik szöge $30°$,és egyik oldala 5 cm-rel hosszabb a másiknál. Mekkora a paralelogramma belső szögfelezői által meghatározott négyszög területe?

7. Az ABC háromszög C csúcsából állítson merőlegeseket az A és B súcsból induló belső és külső szögfelezőkre! Mutassa meg, hogy a négy merőleges talppontja egy egyenesre illeszkedik!

8. Tükrözze egy tetszőleges háromszög magasságpontját az egyik oldal felezőpontjára! Bizonyítsa be, hogy a tükörkép illeszkedik a háromszög köré írt körére!

9. Legyen AB egy adott kör rögzített húrja, és mozogjon a C pont a körön. A C pont milyen helyzetében lesz az $ABC\Delta$ területe, illetve kerülete maximális?

10. Egy 13 és egy 6 cm sugarú korong középpontjainak távolsága 35 cm. Milyen hosszú feszes szíjra van szükség keresztezett szíjhajtás esetén?

11. Egy 12 egységnyi hosszú AB szakasz A-hoz közelebbi harmadoló pontja a C pont. Az AB, AC és CB szakaszok, mint átmérők fölé félköröket rajzolunk az AB egyenes ugyanazon oldalán. Mekkora annak a körnek a sugara, amely érinti mindhárom félkört?

12. Igazolja, hogy ha egy húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra, akkor az átlók szeleteire mint átmérőkre rajzolt körök területeinek összege egyenlő a négyszög köré írt kör területével.