

DISZKRÉT MATEMATIKA I.

9. előadás

Logika: Kijelentéslogika, Boole függvények

Kijelentések, logikai értékek

♣ Alapfogalmak:

- **kijelentés** (állítás, ítélet): olyan mondat, amelyről **egyértelműen eldönthető**, hogy **igaz** vagy **hamis**.
- **logikai értékek**: igaz (i), hamis (h).

♣ Pl.

- A 17 prímszám: igaz
- A tompaszögű háromszög súlypontja a háromszög oldalára is eshet: hamis
- Az El Clásico (vasárnap) jó meccs lesz: nem kijelentés
- Holnap vagy esni fog az eső Komáromban, vagy nem fog esni: igaz

Logikai műveletek

- tagadás (negáció)
- és (konjunkció)
- vagy (diszjunkció)
- ha ..., akkor ... (implikáció)
- ... akkor és csak akkor, ha ... (ekvivalencia)
- :

NEGÁCIÓ (tagadás)

♣ Pl. A : 23 fő van a teremben.

$\neg A$: Nem 23 fő van a teremben. (A teremben levő emberek száma nem 23.)

♣ **Műveleti táblázata:**

A	$\neg A$
i	h
h	i

KONJUNKCIÓ (és)

♣ Pl. A : 1024 osztható 2-vel. B : 1024 osztható 7-tel.

$A \wedge B$: 1024 osztható 2-vel és 7-tel. (h)

♣ **Műveleti táblázata:**

A	B	$A \wedge B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

DISZJUNKCIÓ (vagy)

♣ Pl. A : 1024 osztható 2-vel. B : 1024 osztható 7-tel.

$A \vee B$: 1024 osztható 2-vel vagy 7-tel. (i)

♣ **Műveleti táblázata:**

A	B	$A \vee B$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

IMPLIKÁCIÓ (ha ..., akkor ...)

♣ Pl. Ha holnap nyerek a lottón, akkor adok 100 Eurot.

A : holnap nyerek a lottón B : adok 100 Eurot.

$A \longrightarrow B$: Ha holnap nyerek a lottón, akkor adok 100 Eurot.

♣ **Műveleti táblázata:**

A	B	$A \longrightarrow B$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

Megjegyzés: $A \longrightarrow B = (\neg A) \vee B$

EKVIVALENCIA (... akkor és csak akkor, ha ...)

♣ Pl. Akkor és csak akkor adok 100 Eurot, ha nyerek a lottón.

A : holnap nyerek a lottón B : adok 100 Eurot.

$A \longleftrightarrow B$: Akkor és csak akkor adok 100 Eurot, ha nyerek a lottón.

♣ **Műveleti táblázata:**

A	B	$A \longleftrightarrow B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

Megjegyzés: $A \longleftrightarrow B = (A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow A)$

n-változós Boole függvények

logikai változók: x_1, x_2, \dots, x_n

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Megjegyzés: n változó esetén 2^{2^n} függvény van (pl. $n = 2$ -re $2^{2^2} = 2^4 = 16$, $n = 3$ -re $2^{2^3} = 2^8 = 256$, $n = 4$ -re $2^{2^4} = 2^{16} = 65536$).

KÉTVÁLTOZÓS BOOLE FÜGGVÉNYEK (16 DB)

A	B	\mathcal{I}	\vee			\rightarrow		\leftrightarrow	\wedge		$\vee\vee$						\mathcal{H}
i	i	i	i	i	i	i	i	i	i	h	h	h	h	h	h	h	h
i	h	i	i	i	i	h	h	h	h	i	i	i	i	h	h	h	h
h	i	i	i	h	h	i	i	h	h	i	i	h	h	i	i	h	h
h	h	i	h	i	h	i	h	i	h	i	h	i	h	i	h	i	h

$\vee\vee$: kizáró vagy; \mathcal{I} : azonosan igaz; \mathcal{H} : azonosan hamis

LOGIKAI FORMULÁK KIÉRTÉKELÉSE (BEHELYETTESÍTÉS)

Legyen A hamis, B igaz, C hamis. Ekkor mit mondhatunk az alábbi formuláról?

$$((\neg A) \vee (\neg B)) \longrightarrow ((A) \longleftrightarrow C) \wedge B$$

Megoldás:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{(\neg A)}_i \vee \underbrace{(\neg B)}_h}_i}_{i} \longrightarrow \underbrace{\underbrace{\underbrace{A}_h \longleftrightarrow \underbrace{C}_h}_i \wedge \underbrace{B}_i}_i$$

AZONOSSÁGOK (LOGIKAI EKVIVALENCIA) IGAZOLÁSA MŰVELETI TÁBLÁVAL

♣ De Morgan azonosságok

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B) \quad , \quad \neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
i	i	i	h	h	h	h
i	h	h	i	h	i	i
h	i	h	i	i	h	i
h	h	h	i	i	i	i

♣ Házi feladat: $A \longrightarrow B = (\neg A) \vee B$; $A \longleftrightarrow B = (A \longrightarrow B) \vee (B \longrightarrow A)$

AZONOSSÁGOK (LOGIKAI EKVIVALENCIA) IGAZOLÁSA KIÉRTÉKELÉSEL

♣ De Morgan azonosságok

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B) \quad , \quad \neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

$\neg(A \vee B)$ igaz akkor és csak akkor, ha $A \vee B$ hamis, azaz akkor és csak akkor, ha A hamis és B hamis.

$(\neg A) \wedge (\neg B)$ igaz akkor és csak akkor, ha $(\neg A)$ igaz és $(\neg B)$ igaz, azaz akkor és csak akkor, ha A hamis és B hamis.

Pl. Az udvarban tyúk és birka van. Tagadása: Nem igaz, hogy az udvarban tyúk és birka van, azaz az udvarban nincs tyúk vagy nincs birka.

TOVÁBBI ÉSZREVÉTELEK (AZONOSSÁGOK)

♣ Kettős tagadás elve

$$\neg(\neg A) = A$$

♣ Harmadik kizárásának elve

$$\neg A \vee A = i$$

♣ Ellentmondásmentesség elve

$$\neg A \wedge A = h$$

♣ Kontrapozíció

$$A \longrightarrow B = (\neg B) \longrightarrow (\neg A)$$

A	B	$A \longrightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$(\neg B) \longrightarrow (\neg A)$
i	i	i	h	h	i
i	h	h	i	h	h
h	i	i	h	i	i
h	h	i	i	i	i

Pl. Ha x élőlény madár, akkor x állat.

Ha x élőlény nem állat, akkor x nem madár.

VERSENY !!!

Milyen logikai értéke van A -nak illetve B -nek, ha

$$A \longrightarrow (B \longrightarrow A)$$

hamis?