DISZKRÉT MATEMATIKA I.

3. előadás

Relációk, leképezések

♣ **Definíció.** Az X és Y halmazok Descartes-féle szorzatán azt a halmazt értjük, amely tartalmazza az összes olyan *rendezett párt*, amelynek első tagja az X halmazból, a második tagja pedig az Y halmazból való.

Jelölés: $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$.

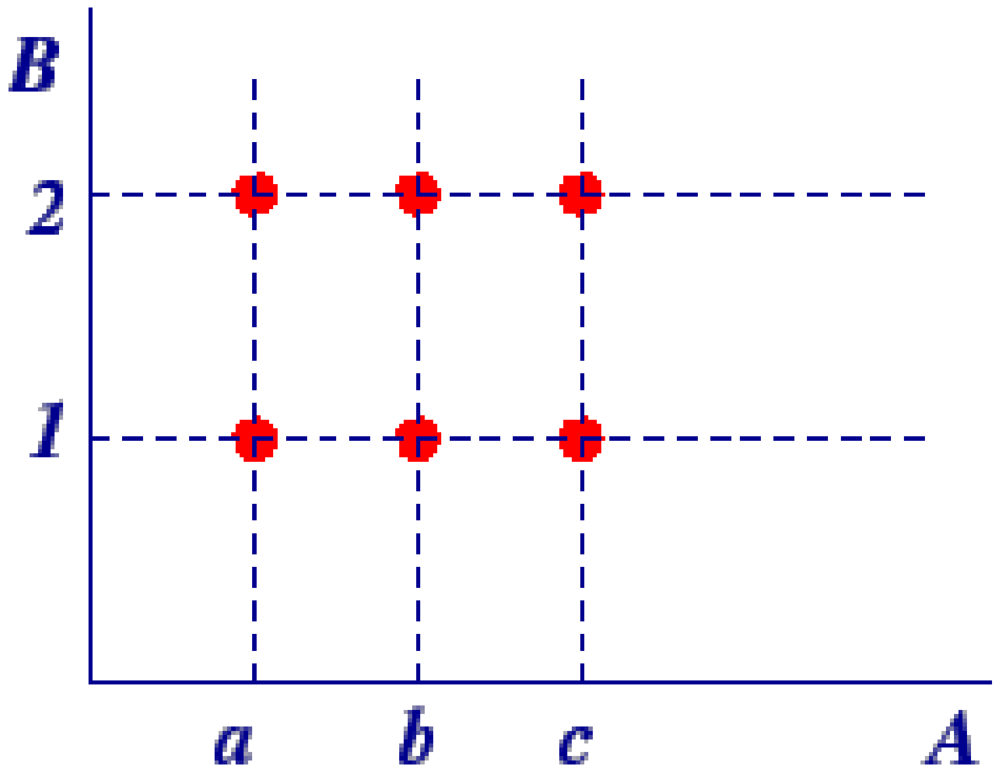
Pl. $K = \{\oplus, \sqcup\}$, $L = \{0.1, \sqrt{2}, \pi/3\}$ esetén

$$K \times L = \{(\oplus, 0.1), (\oplus, \sqrt{2}), (\oplus, \pi/3), (\sqcup, 0.1), (\sqcup, \sqrt{2}), (\sqcup, \pi/3)\},$$

$$L \times K = \{(0.1, \oplus), (0.1, \sqcup), (\sqrt{2}, \oplus), (\sqrt{2}, \sqcup), (\pi/3, \oplus), (\pi/3, \sqcup)\}.$$

Megjegyzések:
- $X \times Y \neq Y \times X$ általában.
- $|X \times Y| = |Y| \cdot |X|$ teljesül véges halmazokra.

$A = \{a, b, c\},\ B = \{1, 2\} \implies A \times B$ szemléltetése:



♣ **Definíció.** Az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ halmazok Descartes-féle szorzata

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n\}.$$

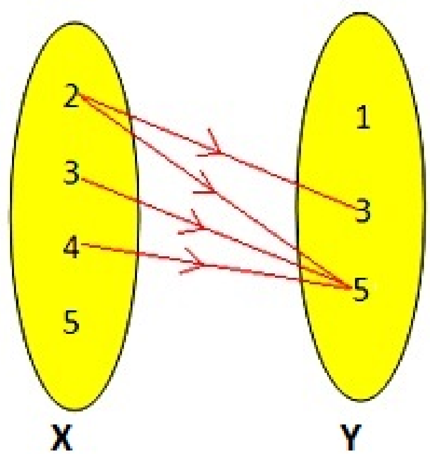
Az $\overbrace{X \times X \times \cdots \times X}^{n}$ Descartes-féle szorzat praktikus jelölése X^n, pl. $\mathbb{R}^n = \overbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}^{n}$.

Pl. $\{1,2\}^3 = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(1,2,2),$
$(2,1,1),(2,1,2),(2,2,1),(2,2,2)\}.$

Megjegyzés: $|X^n| = |X|^n$ teljesül véges X halmazra.

♣ **Definíció.** A $\varrho \subset X \times Y$ rendezett párokból álló halmazt (binér) <u>relációnak</u> nevezzük.

Pl.



$$X \times Y = \{(2,1), (2,3), (2,5), (3,1), (3,3), (3,5), (4,1), (4,3), (4,5), (5,1), (5,3), (5,5)\},$$

$$\varrho = \{(2,3), (2,5), (3,5), (4,5)\} \quad \overset{jel.}{\Longleftrightarrow} \quad 2\varrho 3, 2\varrho 5, 3\varrho 5, 4\varrho 5.$$

♣ **Speciális eset**: $X = Y$, ekkor $\varrho \subset X^2$.

Pl. Legyen F a valaha élt vagy élő férfiak halmaza, $x \in F$ és $y \in F$ álljon relációban egymással, ha x apja y-nak.

Pl. $\mathbb{N}^2 \supset \varrho = \{(0,1),(0,2),(1,2),(5,5),(2017,23)\}$.

Pl. $H = \{\text{síkbeli háromszögek}\}$, és egy $h_1\triangle$ relációban áll a $h_2\triangle$-gel ha $h_1\triangle$ hasonló $h_2\triangle$-höz.

♣ Pl. $H = \{\text{síkbeli háromszögek}\}$, és egy $h_1\triangle$ relációban áll a $h_2\triangle$-gel ha $h_1\triangle$ hasonló $h_2\triangle$-höz. Geometriai jelöléssel élve: $h_1\triangle \sim h_2\triangle$.

Igazak-e az alábbi tulajdonságok?

- $\forall h_1\triangle \in H$ esetén $h_1\triangle \sim h_1\triangle$;
- ha $h_1\triangle \sim h_2\triangle$ és $h_2\triangle \sim h_3\triangle$, akkor $h_1\triangle \sim h_3\triangle$;
- ha $h_1\triangle \sim h_2\triangle$, akkor $h_2\triangle \sim h_1\triangle$;
- ha $h_1\triangle \sim h_2\triangle$ és $h_2\triangle \sim h_1\triangle$, akkor $h_1\triangle = h_2\triangle$?

♣ Pl. $H = \{\text{síkbeli háromszögek}\}$, és egy $h_1\triangle$ relációban áll a $h_2\triangle$-gel ha $h_1\triangle$ hasonló $h_2\triangle$-höz. Geometriai jelöléssel élve: $h_1\triangle \sim h_2\triangle$.

Igazak-e az alábbi tulajdonságok?

- $\forall h_1\triangle \in H$ esetén $h_1\triangle \sim h_1\triangle$; **I**
- ha $h_1\triangle \sim h_2\triangle$ és $h_2\triangle \sim h_3\triangle$, akkor $h_1\triangle \sim h_3\triangle$; **I**
- ha $h_1\triangle \sim h_2\triangle$, akkor $h_2\triangle \sim h_1\triangle$; **I**
- ha $h_1\triangle \sim h_2\triangle$ és $h_2\triangle \sim h_1\triangle$, akkor $h_1\triangle = h_2\triangle$? **N**

♣ Pl. Alaphalmaz $\mathbb{R}$, és $x \in \mathbb{R}$ relációban áll $y \in \mathbb{R}$ ha $x \leq y$.

Igazak-e az alábbi tulajdonságok?

- $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $x \leq x$;
- ha $x \leq y$ és $y \leq z$, akkor $x \leq z$;
- ha $x \leq y$, akkor $y \leq x$;
- ha $x \leq y$ és $y \leq x$, akkor $x = y$?

♣ Pl. Alaphalmaz $\mathbb{R}$, és $x \in \mathbb{R}$ relációban áll $y \in \mathbb{R}$ ha $x \leq y$.

Igazak-e az alábbi tulajdonságok?

- $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $x \leq x$; **I**
- ha $x \leq y$ és $y \leq z$, akkor $x \leq z$; **I**
- ha $x \leq y$, akkor $y \leq x$; **N**
- ha $x \leq y$ és $y \leq x$, akkor $x = y$? **I**

♣ **Definíció.** A $\varrho \subset X^2$ reláció

- reflexív, ha bármely $x \in X$ esetén $x \varrho x$;
- tranzitív, ha $x \varrho y$ és $y \varrho z$ teljesülése esetén $x \varrho z$ következik;
- szimmetrikus, ha $x \varrho y$ teljesülése esetén $y \varrho x$ következik;
- antiszimmetrikus, ha $x \varrho y$ és $y \varrho x$ teljesülése esetén $x = y$ következik.

♣ **Definíció.** A ϱ reláció

- ekvivalenciareláció, ha reflexív, tranzitív és szimmetrikus;
- rendezési reláció, ha reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus.

Pl. $H = \{\text{síkbeli háromszögek}\}$, és egy $h_1\triangle$ relációban áll a $h_2\triangle$-gel ha $h_1\triangle \sim h_2\triangle$. EKVIVALENCIARELÁCIÓ!

Pl. Alaphalmaz $\mathbb{R}$, és $x \in \mathbb{R}$ relációban áll $y \in \mathbb{R}$ ha $x \leq y$. RENDEZÉSI RELÁCIÓ!

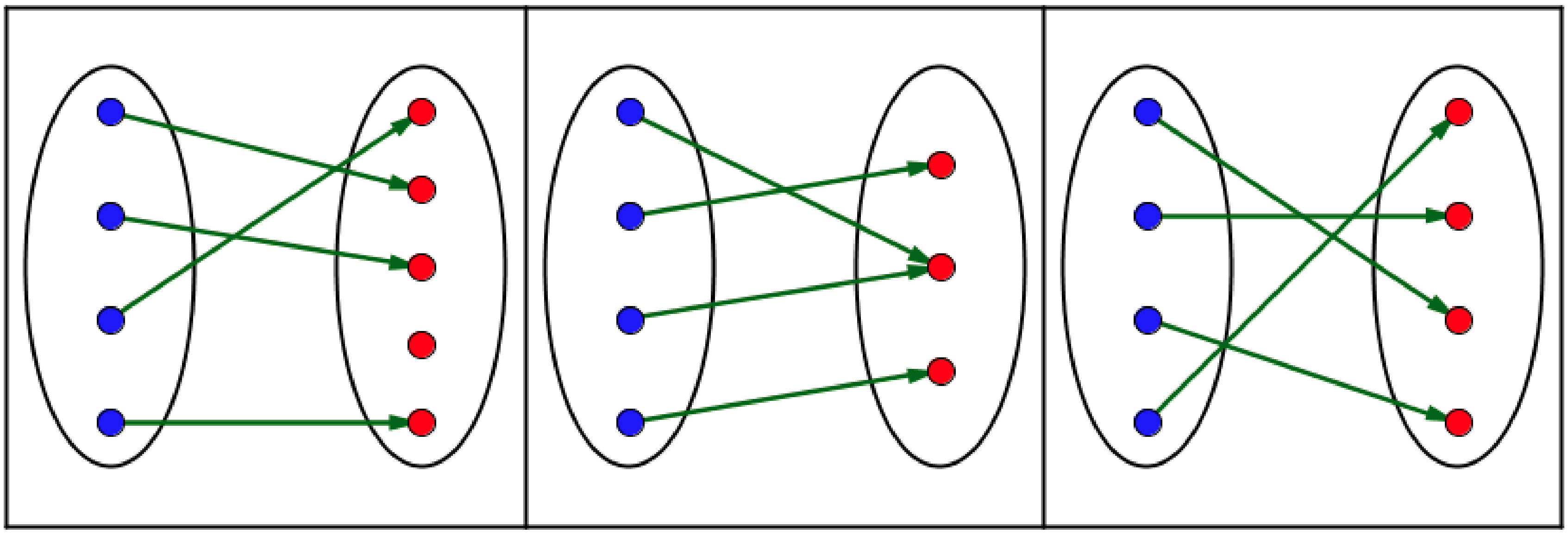
Pl. Legyen F a valaha élt vagy élő férfiak halmaza, $x \in F$ és $y \in F$ álljon relációban egymással, ha x apja y-nak. Jelölés: $x \, \alpha \, y$.

- Senki sem apja önmagának. $\Longrightarrow \alpha$ nem reflexív.
- Ha x apja y-nak, és y apja z-nek, akkor x nem apja z-nek. $\Longrightarrow \alpha$ nem tranzitív.
- Ha x apja y-nak, akkor y nem apja x-nek. $\Longrightarrow \alpha$ nem szimmetrikus.
- Ha x apja y-nak és y apja x-nek, akkor x és y ugyanaz a személy. $\Longrightarrow \alpha$ antiszimmetrikus!

Megjegyzés: α nem ekvivalencia- és nem rendezési reláció.

♣ **Definíció.** A $\varrho \subset X \times Y$ reláció <u>leképezés</u>, ha bármely $x \in X$ esetén létezik pontosan egy olyan $y \in Y$, melyre $x \varrho y$.

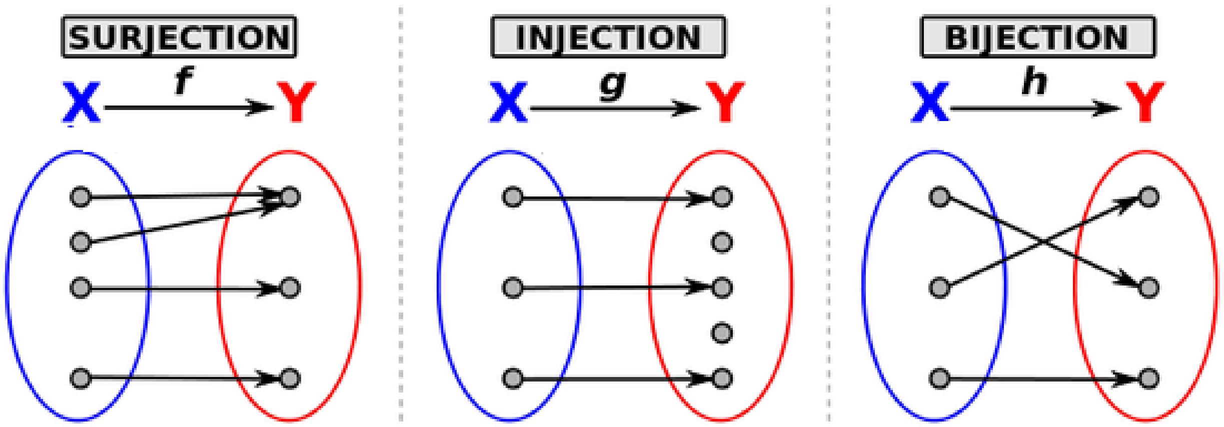
Jelölés: $\varrho : X \longrightarrow Y$, illetve $\varrho(x) = y$.



♣ **Definíció.** A $\varrho : X \longrightarrow Y$ leképezés <u>injektív</u>, ha bármely $x_1, x_2 \in X$ esetén teljesül, hogy ha $\varrho(x_1) = y$ és $\varrho(x_2) = y$, akkor $x_1 = x_2$. (Különböző elemek képe különböző.)

♣ **Definíció.** A $\varrho : X \longrightarrow Y$ leképezés <u>szürjektív</u>, ha bármely $y \in Y$ esetén létezik olyan $x \in X$, hogy $\varrho(x) = y$ (Minden Y-beli elemnek van őse X-ben.)

♣ **Definíció.** A $\varrho : X \longrightarrow Y$ leképezés <u>bijektív</u>, ha injektív és szürjektív is.



Pl. $\varrho : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $\varrho(n) = n^2$.

Pl. $\varrho : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $\varrho(z) = z^2$.

Pl. $\varrho : \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{N}$, $\varrho(n) = n - 1$.