Nevezetes határértékek

$$\text{Ha } a > 1, \text{ akkor } \lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty; \quad \text{ha } -1 < a < 1, \text{ akkor } \lim_{n\to+\infty} a^n = 0. \tag{1}$$

$$\text{Ha } a > 1, \text{ akkor } \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1. \tag{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \tag{3}$$

$$\text{A } \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \text{ sorozat konvergens.}$$

Igaz, hogy a zárójel tartalma az 1-hez közelít $n \to +\infty$ esetben, de vegyük észre, hogy a hatványkitevő is egyre nagyobb és nagyobb. Legyen

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Igazolható, hogy az (a_n) sorozat növekvő, azaz

$$a_n \le a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

és felülről korlátos, a sorozat elemeinek a felső korlátja pl. a 3. Ismert, hogy a monoton és korlátos sorozat konvergens (van véges határértéke) ezt a határértéket e-vel jelölik. Ez az ún. Euler-féle szám, mely irracionális, az értéke

$$e = 2,718\,281\,828\dots$$

ez az alapszáma a *természetes logaritmus*nak.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{4}$$

A fenti határérték akkor is teljesül, ha az n helyett bonyolultabb kifejezés van, lényeges, hogy a hatványkitevő pontosan megegyezzen azzal, amivel a zárójelben az 1 osztva van. Azaz

$$\lim_{\square\to\infty} \left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square} = e. \tag{5}$$

Feladatok

1.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2+3+\dots+n-1}{n^2} = ?$$

Egy másik tantárgyon találkoztok majd a "buborékos rendezéssel". (Az algoritmus újra és újra végigiterál a listán, összehasonlítja a lista szomszédos elemeit, és ha azok az elvárt rendezéshez képest fordítva vannak, akkor megcseréli őket. Első menetben a lista elejéről indul és a végéig megy. Ennek az első menetnek az eredményeként a legnagyobb elem (mint egy buborék) felszáll a lista végére. Így a következő menetben már elegendő az utolsó előtti elemig elvégezni a szomszédos elemek összehasonlítását és cseréjét.) A legrosszabb esetben egy n elemszámú tömb rendezése pontosan annyi cserét igényel, mint a feladatban a számlálóban szereplő összeg. Igazoljuk, hogy ez az érték nagyságrendje n^2.

Számtani sorozat elemei könnyen összeadhatók az alábbi egyszerű eljárás segítségével.

$$\begin{array}{lllllll} 1 & +2 & +3 & +\dots & +(n-3) & +(n-2) & +(n-1) \\ +(n-1) & +(n-2) & +(n-3) & +\dots & +3 & +2 & +1 \\ & & & & & & \\ =n & +n & +n & +\dots & +n & +n & +n=(n-1)n \end{array}$$

Tehát

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2+3+\dots+n-1}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-n}{2n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2n^2}-\frac{n}{2n^2}=\frac{1}{2}.$$

2.

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2n+7}=?$$

Útmutatás: arra a tagra összpontosítsunk, melynek a "leggyorsabb"a növekedése.

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2n+7}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n(2+\frac{7}{n})}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{2+\frac{7}{n}}=1.1=1$$

A végeredményt a (3) és a (2) alkalmazásával kaptuk, hiszen $n\to\infty$ esetben $\frac{7}{n}\to 0$.

3.

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[2n]{5n^3-4n^2}=?$$

Hasonlóan járunk el, mint az előző feladat során..

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[2n]{5n^3-4n^2}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[2n]{n^3(5-\frac{4}{n})}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[2n]{n^3}\sqrt[2n]{5-\frac{4}{n}}=$$

Felhasználva a hatványozás tulajdonságait, a $2n$-edik gyök nem más mint négyzetgyök az n-edik gyökből, így

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[2n]{5n^3-4n^2}=\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{\sqrt[n]{n}}\right)^3\sqrt{\sqrt[n]{5-\frac{4}{n}}}=1.1=1.$$

A végeredményt újra a (3) és az (2) alkalmazásával kaptuk.

4.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n+3}=?$$

A zárójel tartalma az 1-hez tart, a hatványkitevő pedig a végtelenbe, az ilyen esetekben javasolt az (5) használata. A zárójel tartalmába nem avatkozhatunk be. A

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

alak használható, de nem pontosan ez a hatványkitevő. Ez azonban nem jelent problémát, ha a fenti kifejezést még $\frac{2n+3}{n+1}$ hatványra emeljük, hisz a hatvány hatványozása során a hatványkitevőket összeszorozzuk. Tehát

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n+3}=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)^{\frac{2n+3}{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\boxed{n+1}}\right)^{\boxed{n+1}}\right)^{\frac{2n+3}{n+1}}$$

és a az (5) szerint

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n+3}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{2n+3}{n+1}}$$

Ez még nem a végeredmény. Egy határérték eredménye lehet egy szám, a $+\infty$ vagy a $-\infty$ valamelyike, vagy az, hogy a kérdéses határérték nem létezik. Az könnyen belátható, hogy

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+3}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+3}{n+1}=2,$$

ezért

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n+3}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{2n+3}{n+1}}=e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+3}{n+1}}=e^2.$$

5.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+4}{2n+1}\right)^n=?$$

Mivel a zárójel tartalma az 1-hez közelít a hatványkitevő pedig a végtelenbe, az előző feladat megoldási módszere követhető. A (5)-ben a zárójel tartalma $1+$ *valami* alakú. Ezt az alakot könnyen létre tudjuk hozni, mert

$$\frac{2n+4}{2n+1}=1+\left(\frac{2n+4}{2n+1}-1\right)=1+\frac{2n+4-(2n+1)}{2n+1}=1+\frac{3}{2n+1}=1+\frac{1}{\frac{2n+1}{3}}$$

Ezt felhasználva

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+4}{2n+1}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{3}}\right)^n$$

Hozzuk létre a hatványkitevőben a $\frac{2n+1}{3}$ alakot és hozzuk helyre, amit ezzel "elrontottunk".

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+4}{2n+1}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{3}}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{3}}\right)^{\frac{2n+1}{3}}\right)^{\frac{3n}{2n+1}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\boxed{\frac{2n+1}{3}}}\right)^{\boxed{\frac{2n+1}{3}}}\right)^{\frac{3n}{2n+1}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{3n}{2n+1}}.$$

Mivel

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n}{2n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3n}{2n+1}=\frac{3}{2},$$

ezért

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+4}{2n+1}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{3n}{2n+1}}=\frac{3}{2}.$$

Egymásba skatulyázott zárt intervallumok tétele. *Ha az*

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset[a_3,b_3]\supset\cdots$$

egymásba skatulyázott zárt intervallumok végtelen sorozatára érvényes, hogy

$$\lim_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0$$

akkor egyetlen olyan α szám létezik, mely az összes $[a_n, b_n]$ intervallumnak az eleme.

Bizonyításvázlat. A tétel feltéte szerint

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \quad \cdots \quad \leq b_n \leq \cdots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1.$$

Tehát az (a_n) sorozat növekvő és felülről korlátos, a (b_n) sorozat pedig csökkenő és alulról korlátos. Ezért az (a_n) és a (b_n) sorozat is konvergens, mivel a $b_n - a_n$ a 0-hoz tart, ez csak úgy lehetséges, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozat ugyanahoz az α számhoz tart. □

Bolzano-Weierstrass tétele. *Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.*

Bizonyításvázlat. Legyen az (x_n) egy tetszőleges korlátos sorozat. Az elemeinek az alsó korátja legyen a_1 a felső korlát b_1. Az alapötlet az, hogy akkor az $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ és a $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ intervallumok egyike (legalább) az (x_n) sorozat végtelen sok elemét tartalmazza. Kiválasztva ezt az intervallumot, végrehajtva az intervallum megfelezését egy még kisebb intervallumot kapunk, mely az (x_n) sorozat végtelen sok elemét tartalmazza. Folytatva ezt az eljárást egymásba skatulyázott zárt intervallumok

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \cdots$$

sorozatát kapjuk, melyeknek van egy α közös eleme (az előző tétel szerint). Kiválasztva az $[a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \dots)$ intervallumból egyre nagyobb indexű elemeét az (x_n) sorozatnak, egy konvergens részsorozatot kapunk, melynek a határértéke az említett α szám. □