DISZKRÉT MATEMATIKA I.

10. előadás

Logika: Normálformák, teljes függvényrendszerek

BEVEZETŐ PÉLDÁK

$$A \longrightarrow B = (\neg A) \vee B$$

$$A \longleftrightarrow B = (A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow A) = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$$

A	B	$A \to B$	$\neg A \vee B$	$A \leftrightarrow B$	$A \to B$	$B \to A$	$\wedge$
i	i	i	i	i	i	i	i
i	h	h	h	h	h	i	h
h	i	i	i	h	i	h	h
h	h	i	i	i	i	i	i

Kérdés: bármely művelet (függvény) kifejezhető-e ilyen módon? $(\neg, \vee, \wedge)$

♣ $i = 1,\ h = 0$

x_1	0	0	0	1	0	1	1	1
x_2	0	0	1	0	1	0	1	1
x_3	0	1	0	0	1	1	0	1
$f(x_1, x_2, x_3)$	0	0	1	1	0	0	1	0

$f(x_1, x_2, x_3) =?$

♣ $i = 1,\ h = 0$

x_1	0	0	**0**	**1**	0	1	**1**	1
x_2	0	0	**1**	**0**	1	0	**1**	1
x_3	0	1	**0**	**0**	1	1	**0**	1
$f(x_1, x_2, x_3)$	0	0	**1**	**1**	0	0	**1**	0

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3).$$

“ konjunkciók diszjunkciója :) ”

♣ $i = 1$, $h = 0$

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} 1, & \text{ha pontosan 2 változó értéke igaz} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, x_3, x_4) \;&=\; (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \vee \\ &\quad (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \vee \\ &\quad (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4). \end{aligned}$$

DISZJUNKTÍV NORMÁL FORMA

DNF alapja: konjunkciók diszjunkciója pontosan akkor igaz, ha valamelyik tagja igaz. Az egyes tagok pontosan akkor igazak, ha a benne szereplő mindegyik kifejezés igaz.

$$\bigvee \left(\bigwedge_i \begin{matrix} x_i \\ \neg x_i \end{matrix} \right)$$

1. TESZT !!!

Melyik DNF és melyik nem DNF?

- $\neg(A \wedge B) \vee C$
- $(\neg A \wedge B) \vee C$
- $(A \vee B) \wedge \neg C$
- $(A \wedge B) \longrightarrow C$

1. TESZT !!!

Melyik DNF és melyik nem DNF?

- $\neg(A \wedge B) \vee C$, NEM
- $(\neg A \wedge B) \vee C$, IGEN
- $(A \vee B) \wedge \neg C$, NEM
- $(A \wedge B) \longrightarrow C$, NEM

♣ $i = 1,\ h = 0$

x_1	0	0	0	1	0	1	1	1
x_2	0	0	1	0	1	0	1	1
x_3	0	1	0	0	1	1	0	1
$f(x_1, x_2, x_3)$	0	0	1	1	0	0	1	0

$f(x_1, x_2, x_3) = ?$

♣ $i = 1,\ h = 0$

x_1	0	0	0	1	0	1	1	1
x_2	0	0	1	0	1	0	1	1
x_3	0	1	0	0	1	1	0	1
$f(x_1, x_2, x_3)$	0	0	1	1	0	0	1	0

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) \; &= \; (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge \\ & \quad (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge \\ & \quad (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge \end{aligned}$$

“ diszjunkciók konjunkciója :) ”

KONJUNKTÍV NORMÁL FORMA

KNF alapja: diszjunkciók konjunkciója pontosan akkor hamis, ha valamelyik tagja hamis. Az egyes tagok pontosan akkor hamisak, ha a benne szereplő mindegyik kifejezés hamis.

$$\bigwedge \left(\bigvee_i \begin{matrix} x_i \\ \neg x_i \end{matrix} \right)$$

TELJES FÜGGVÉNYRENDSZER

Adottak: logikai függvények. Ha velük minden függvény kifejezhető, akkor **teljes függvényrendszert** alkotnak.

Például: $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

Megjegyzés: $A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B)$, ezért $\neg$, $\wedge$ is teljes függvényrendszer.

KÉTVÁLTOZÓS BOOLE FÜGGVÉNYEK (16 DB)

A	B	$\mathcal{I}$	$\vee$			$\rightarrow$		$\leftrightarrow$	$\wedge$	$\mid$	W						$\mathcal{H}$
i	i	i	i	i	i	i	i	i	i	**h**	h	h	h	h	h	h	h
i	h	i	i	i	i	h	h	h	h	**i**	i	i	i	h	h	h	h
h	i	i	i	h	h	i	i	h	h	**i**	i	h	h	i	i	h	h
h	h	i	h	i	h	i	h	i	h	**i**	h	i	h	i	h	i	h

SHEFFER-MŰVELET

A	B	$A \mid B$
i	i	h
i	h	i
h	i	i
h	h	i

spec. $\Longrightarrow$

A	$A \mid A$
i	h
h	i

SHEFFER MŰVELET MINT TELJES FV.RENDSZER

x_1	x_2	$x_1 \mid x_2$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Teljes függvényrendszert alkot, mert

- $\neg x_1 = (x_1 \mid x_1)$,
- $x_1 \wedge x_2 = \neg(x_1 \mid x_2) = (x_1 \mid x_2) \mid (x_1 \mid x_2)$.