

DISZKRÉT MATEMATIKA

2. feladatsor

1. Bizonyítsa be, hogy minden $n \geq 2$ természetes számra teljesül:

a) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ **1** **2**

b) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n^2} > 1$ **1** **2**

2. Bizonyítsa be, hogy minden $n \geq 5$ természetes számra teljesül:

a) $(n+1)! > 2^{n+3}$ **1** **2**

b) $\frac{(2n)!}{(n!)^2} < 4^{n-1}$ **1** **2**

3. Bizonyítsa be, hogy minden $n \geq 9$ természetes számra teljesül:

$$n^3 < 2^{n+1}$$

4. Bizonyítsa be, hogy minden $n \geq 0$ természetes számra teljesül:

Ha $x > -1$, akkor $(x+1)^n \geq 1 + nx$ (Bernoulli-féle egyenlőtlenség)

5. Bizonyítsa be, hogy minden $n \geq 1$ természetes számra teljesül:

a) $6 \mid n^3 + 5n$ **1** **2**

b) $6 \mid n^3 - n$ **2**

c) $8 \mid 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$

d) $3 \mid n^3 + 5n + 6$ **1**

e) $5 \mid 2^{4n+1} + 3$ **2**

f) $4 \mid 7^n + 10n - 5$

g) $9 \mid 10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ **1**

6. Bizonyítsa be, hogy minden $n \geq 0$ természetes számra teljesül:

$$\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} \text{ egész szám}$$