致远人刊

致远人的学术期刊

Edited By

致远科学与技术协会

Zhiyuan college

ShanghaiJiaotong University

$\mathscr{PL}$

2019

致远科协

写在前面的

我一直觉得，致远人需要一个学术期刊。

本人于 2016 年进入致远学院。大一的时候我深切地感到学院为了激发我们对科学的热情，拓宽我们对学术的视野下足了功夫。除了以科研实践为导向的课程设置外，我们听讲座，听沙龙，听报告，上研讨课，与大师面对面，听小故事，甚至很早就有机会进实验室。去年开始又有致远学者项目，致远学术节等等。

然而两年以来，总是觉得听过的名词术语多，真正深入了解的东西少；参与的科研实践多，内心的成就感少；关注和交流的内容以成绩和利益为多，而以纯粹的知识和学术为少。热情被现实浇灭的多，被激发的少。

有同学调侃过：致远现在有点留美预备学校的味道。

物理方向有门课程叫科研实践，每两周要写四页的科研实践报告。结果是每个双周周末热心的班长在班群里提醒各位"科研实践警报"，我们互相交流如何凑四页纸出来。唯一支持我通宵打字的动力，大概就是那微不足道的一学分。

略显荒唐的是，实践报告只是给老师看的，同学之间如果不主动询问竟然互相不知道别人对什么感兴趣，在做什么研究。

于是内心开始有这样的想法：要是有一个像知乎一样分享和交流的平台就好了，要是大家能不那么功利就好了。如果现在努力的目标是仅仅是拿好的分数申请好的学校，做科研的时候写文章仅仅是为了评职称申经费找教职，那学术还有何乐趣？似以为，学术与科研的乐趣在于永无止境的探索，学习，与创作。伟大的科学家往往是高产的作家。

所以，重新创办人刊的初衷就是鼓励同学们进行与学术相关的创作。内容可以是简单的对课程的总结，对你自学过的教材的介绍，对某个习题的深入探索，对一个领域的调研与介绍，也可以是科研实践的收获与成果，甚至可以是你对当代科学领域的批判性思考，对科学史的思考。

只要你有一定水平且愿意分享，这里就是你的舞台。

或许，在这里进行学术写作的价值不仅仅在于获得别人的认可，更重

要的意义是锻炼自己学术思考的能力，总结知识的能力，融汇贯通的能力。

另外，希望人刊能成为一个传承思想的平台。

每一位低年级的致远学子想必都会有这些困惑：某某领域究竟在研究什么？难点到底在哪里？本科知识是如何运用在科研当中的？某篇论文，某个领域的某个突破价值究竟在哪里？科研的环境究竟是怎样的？有哪些研究领域比较有前景？为什么？

致远人早已遍及世界各地的各个科研领域。其实有的时候一篇文章就可以解决你很多困惑。如果人刊能起到一个传承的作用，学长学姐愿意分享这些正宗的学术干货，那么同学们一定有更多机会找准自己的定位与爱好。

希望致远学子在今后能踊跃投稿！

未来或许在某领域大奖的获奖感言里能加上一句：

“我人生中的第一篇学术论文发表于致远人刊！”

叶卓杨 2019 年 1 月 17 日晚 9 点 36 分于西 13 寝室

浅谈 Boltzmann 的 H 定理*

文聪[1*]

摘要

本文梳理了玻尔兹曼 H 定理的发展历史，简要介绍了相关数学证明的手段和思路。

关键词

Boltzmann　悖论　H 定理

[1] 上海交通大学致远学院　[2] 致远学院科学与技术协会　* 邮箱:wolfcarb@sjtu.edu.cn

1. 历史

图 1. 玻尔兹曼

1872 年，Ludwig Boltzmann 在维也纳科学院的会议报告上发表了著名的《Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen》(Further Studies on the Thermal Equilibrium of Gas Molecules）其中他引入了量

$$H(t) = \int_0^\infty f(E,t)[\ln \frac{f(E,t)}{\sqrt{E}} - 1]dE \qquad (1)$$

并证明了必定随时间单调递减，且在为 Boltzmann 分布时达到极小值。这个证明相当困难，Boltzmann 只完成了在离散状态下的求解。至此一生饱受攻击，终于 1906 年在意大利 Duino 海滩自杀。而主要攻击他的论点分为 Loschmidt 悖论与 Zermolo 悖论。

2. Loschmidt 悖论

Boltzmann 最初的研究对象是气体分子，而气体分子遵循的经典动力学理论是时间反演对称的，这显然与 H 定理里蕴含的时间方向的不对称是矛盾的。

这个观点首先由 William Thomson 在 1874 年提出 [1]

很有意思的是，Willams Thomson 是提出热寂说的人，而这个悖论里的人 Josef Loschmidt 恰是反对热寂说的

> He sought to destroy the terrifying nimbus of the second law, which has made it appear as a principle of destruction for all living creatures in the universe; and at the same time, to open up the comforting prospect that the human race does not depend upon coal or the sun to transform heat into work, but may have an inexhaustible supply of transformable heat.

而且 Loschmidt 首次提到时间反演对称正是在 1876 年他在论文《Über den Zustand des Warmegleichgewichtes eines Systems von Körpern mit Rucksicht auf die Schwerkraft》（The State of Thermal Equilibrium of a System of Bodies with Regard to Gravity.）中提到的。Boltzmann 要被对第二定律持不同态度的学者同时攻击，这也的确挺惨的。

但事实上他和 Loschimidt 是很好的朋友，所以 Boltzmann 紧接着在 1877 年发表《Uber die Beziehung eines allgemeine mechanischen Satzes zum zweiten Hauptsatze der Warmetheorie》（On the Relation of a General Mechanical Theorem to the Second Law of Thermodynamics ）怼了回去，他的核心观点是，以均匀分布为平衡态为例，并不是所有的初始状态都能演化到均匀分布，我们也永远没法证明这一点；但能演化为均匀分布的初始状态

数量远大于演化到非均匀的。很明显在这里 Boltzmann 已经有了系综和对第二定律的概率性理解。

3. Zermelo 悖论

其实这个思想是出自于法国人 Henri Poincaré，他 1893 年的论文《Le mécanisme et l'expérience》(Mechanism and Experience) 提到了这个点 (届时距离他提出 Poincaré 猜想还有 11 年)。

> The world does not remain that way forever, if the theorem cited above is not violated; it merely stays there for an enormously long time, a time which is longer the more numerous are the molecules.

然而他所用的著名的 Poincaré reccurence 定理是他首次在 1890 年讨论三体问题的动力学方程时证明的 [2]

更加普适的表达要到 1902 年 Lebesgue 引入测度论作为合适的数学语言，在 1919 年才被 Constantin Carathéodory 严格证明。

我们先看看 Poincaré reccurence theorem 的内容

Let $T:(X,B,m)\to(X,B,m)$ be a measure-preserving transformation, then for all $B\subset B$ such that $m(B)>0$,there exists $F\subset B$ such that $m(F)=m(B)$ and for all $x\in F$, there exists $0<n_1<n_2<\cdots$ satisfying $T^{n_i}(x)\in F,\forall i\in N$.

即任意的集合，其中在保测变换的迭代下无法做到无限次回到的集合是零测的。通俗的讲，几乎所有的状态点在保测变换的迭代下会无限次返回初始状态点附近。这是保测映射内蕴的性质，而 Liouville 定理 (Liouville 方程在 1838 年就得到了) 告诉我们在相空间上哈密顿流是保体积不变的，那么经典动力系统必然是满足 Poincaré 回复定理的。

1896 年，德国人 Ernst Zermelo 还在柏林跟 Max Planck 学物理，距离他发表最为人熟知的 Zermelo 定理 (二人完全信息博弈必存在不败解) 还有 27 年。他把 Poincaré 的三体问题推广到了多体，得到了类似的结果，于是对 Maxwell、Boltzmann 和同样支持 H 定理的 Lorentz 都批判了一番。他的观点是：在不指定初始条件的情况下，我们是不可能证明系统按照第二定律预测的方向演化的。其实我们可以看到此处 Zermelo 还是在考虑一个绝对确定体系的问题，事实上如果有系综的概念以及对第二定律的概率性的理解的话，他这个观点就非常 naive 了。所以 Boltzmann 自然不留情面，1896 同年就给了一个非常尖锐的回复：你讲的 Poincaré 定理显然是对的，但你不会用，你根本就误解了我讲的 H 定理！

> The Poincare theorem is of course inapplicable to a terrestrial body which we can observe, since such body is not completely isolated; likewise, it is inapplicable to the completely isolated gas treated by the kinetic theory, if one first lets the number of molecules become infinite, and then the quotient of the time between successive collisions and the time of observation becomes zero.
>
> Boltzmann 的嘲讽：
>
> He is just like a dice player who has calculated that the probability of a sequence of 1000 one's is not zero, and then concludes that his dice must be loaded since he has not yet observed such a sequence!

至此其实我们已经很好理解了，Boltzmann 的核心观点就一个——你们讲时间反演对称是没错，Poincaré 重现也没错，但这些情况都是少数，相比之下满足我的 H 定理的初始状态是一个 overwhelming 的大数！

4. 解决悖论

1906 年，Boltzmann 在意大利 Duino 海滩和妻女度假的时候自缢身亡。两年之后，原子被证明真实存在 (Ernest Rutherford)，物理学家们最终承认了 Boltzmann 的观点。但在数学上大部分人并不接受，按照 Boltzmann 的原始说法，可以说 H 定理只是依概率成立的。这实际上是因为 Boltzmann 没有合适的数学语言去表达。到 50 年代大家才开始试着做 H 定理的严格化。1949 年 Harold Grad 在 Communications on pure and applied mathematics 发表的文章里提到了 [3]

> First, from equilibrium considerations we must let the number density of molecules,N,increase without bound. At

the same time we would like the macroscopic properties of the gas to be unchanged. To do this we allow in to approach zero in such a way that $mN = \rho$is fixed.

这其实是热力学极限最早的体现形式之一，在当时称作 Boltzmann-Grad 极限。杨振宁李振道著名的考虑热力学极限下的相变严格解的工作也是在 1952 年了。而我们回顾 Boltzmann 的解释，他将其归因于在宏观极小的体积内，也必定有几乎无限多的分子，在这样的情况下，H 定理是成立的；在当时大部分人不理解 Boltzmann 为什么可以在持有这种观点的同时承认无论基本粒子有多小，总归是有限多的。其实这并不矛盾，因为他知道在非热力学极限的情况下肯定是存在涨落的。事实上这就是同一个意思，可惜 Boltzmann 的数学素养没有好到表述得令人信服，以至于一生里花掉大量的时间去为与人争斗。到 60 年代，用计算机做 MD 模拟流行起来，也很好地证实了 H 定理。再到 70 年代有了形式化的表达：

If $f(p_1, q_1; \cdots, p_N, q_N) = \prod_{i=1}^{N} f(p_i, q_i)$,then f will be a solution of Boltzmann equation asymptotically with $N \to \infty$ and ρ remains finite. In particular,H will be a monotonically decreasing function of time in the same limit.

但要给出严格的分析的证明其实是非常非常困难。然而 1975 年 Oscar Lanford 给出了一个弱化的证明 [4]

在极小的时间区间内（约 1/5 平均碰撞时间量级）考虑 H 定理是严格成立的。至此 H 定理介绍告一段落，关于 Boltzmann 方程和非平衡态的细节以后慢慢补。

5. 关于量子力学

事实上 Gibbs 对 H 定理的理解也很独到，由 Liouville 定理我们知道哈密顿流在相空间中的演化是保体积的，但 Gibbs 从量子力学的角度出发来考虑，他认为在相流的演化过程中会出现 dendritic 形状，其中树突之间的距离足够近以至于到了 h 的尺度之后就无法从宏观上做出区分了，宏观上来看，相流的密度减少而体积增大了，这是对 H 定理另一种层面的理解。

6. 注记

H 定理和 Boltzmann 方程与非平衡态统计物理有非常密切的联系，事实上至今还是比较 Open 的问题，2017 在 arXiv 的这篇论文即是探讨 Boltzmann 熵，Gibbs 的粗粒化熵细粒化熵的关系，作者声称给出了非平衡哈密顿系统的统计力学熵的定义。[5]

关于 H 定理更详细的历史和发展，Stephen Brush 的书有很丰富的内容 [6]。

意大利数学家 Carlo Cercignani 的书非常不错，他同时也对多原子体系 H 定理的证明做了极大贡献 [7]。

参考文献

[1] WILLIAM THOMSON. Kinetic theory of the dissipation of energy. *Nature*, 9:441 EP –, 04 1874.

[2] Avant-propos. *Acta Math.*, 13(1-2):VII–XII, 1890.

[3] Harold Grad. *On the kinetic theory of rarefied gases.*

[4] *Lanford O.E. (1975) Time evolution of large classical systems*, volume 38. Springer, Berlin, Heidelberg.

[5] Xiangjun Xing. Definitions and evolutions of statistical entropy for hamiltonian systems.

[6] Stephen Brush. *Kinetic Theory:Irreversible Processes.*

[7] Carlo Cercignani. *Ludwig Boltzmann: The Man who Trusted Atoms.*

课题介绍

焦小佩[1]*

摘要

本文简要介绍了有关癌症的定量描述与数学建模的课题。

关键词

细胞　癌症

[1] 清华大学高等研究院　[2] 致远学院科学与技术协会　* 邮箱地址:

1. 正文

各位同学大家好，我是致远物理 13 级焦小沛，我目前在清华大学高等研究院读直博二年级。下面就目前我的研究方向为大家做个简要的介绍。目前我的研究方向是计算系统生物学，属于应用数学的范畴。该研究方向主要关注生物体内的各种系统过程，并利用数学进行定量的建模，进行合理的解释以及预测。通过对该具体生物问题的研究，进一步的进行定量刻画，甚至反过来启发我们从中发现有趣的数学现象，推动新的数学方法的发展。

下面具体到我个人的课题，我主要研究癌症的发展过程中的数学建模，癌症的发生和发展属于复杂系统，具有多尺度，多层次以及巨大的自由度等特点。该复杂系统主要分为基因表达层面，单细胞层面和多细胞层面。在基因表达层面，我们将考虑一个复杂的基因调控网络，该网络中每个结点代表一个基因，基因与基因之间具有直接的，间接的，上调的或者下调的关系，我们可以从该层面获取基因网络动力学的拓扑结构以及其动力学性质。在单细胞层面，我们需要考虑的是基因网络对于一个细胞的具体行为会有何种程度的定量的影响。在多细胞层面，由于细胞之间的细胞因子通讯，我们需要考虑细胞与细胞之间的相互作用，而这又将是一个多体问题，而目前并没有一个显著有效的数学框架来进行描述。对于癌症这样的复杂过程的定量描述依然还是空白，有各种不同尺度的数学模型（时滞的微分方程或偏微分方程组）被提出来进行一些简单的刻画。但是如果我们在每个层面都能进行有效的分析与粗粒化，并且对多层次，多尺度进行有效的分析与描述，或许在不久的未来，我们可以为癌症的发生发展提出足够精确的定量描述与预测。

对于如此复杂的生物多体系统，想要进行有效的描述并不是一件容易的事，我们十分的关注一个复杂系统长时间的行为。在数学上，理论工具主要为非线性动力学，这是一个定量及定性刻画的有效工具。如果我们将复杂系统看作一个 n 维的高维体系，那么它的轨迹将处在一个 n 维的流形上，可以称之为生物体系的伪轨迹。我们需要考虑的是整个伪轨迹的演化，以及当时间趋于无穷时，伪轨迹的极限集的构成情况。在数学上，非线性动力系统有时具有极大的结构不稳定性，当某些个别参数发生变化，可能导致体系的极限集发生明显的拓扑学改变，称之为动力系统的分岔现象。目前对于高余维的分岔的了解我们还知之甚少，甚至是对于二维及以上情况也是如此。分岔会使得流形上的伪轨迹出现不规则的运行，产生极其复杂的变化。然而，在复杂体系的描述过程中，分岔理论是必不可少的。这其中有基于分岔理论的复杂疾病临界理论 [1]，或是基于中心流形定理而发现的稳定的生物网络的核心结构 [2]。目前正在有许多基于动力系统的理论而发展出的定量生物学模型。

如果想要从复杂系统中看出其具体的演化规律，我们需要将非线性动力系统理论与微分几何相结合，通过将 n 维的伪轨迹进行降维到一个低维度的中心流形上。并且我们可以进一步的分析在低维流形上该轨迹的几何特征，例如生物演化过程对应的伪轨迹与该流形上的测地线的比较，是否其具有相一致性。在该中心流形上，我们能否找到最优的生物学演化路径，这对于生物学与数学都是极其重要的。定量生物学还有很多未知的问题，不论是理论上，实验上或是计算上，该领域目前只展露出冰山一角，有巨大的前景与有趣的理论等待我们去探索。

参考文献

[1] Liu R. Liu Z.-P. Li M. Aihara K. Chen, L. Detecting early-warning signals for sudden deterioration of complex diseases by dynamical network biomarkers. *Nature Publishing Group*, 2012.

[2] Lu Y-et al. Li F, Long T. The yeast cell-cycle network is robustly designed[j]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2004.

数学完备吗?

叶卓杨[1]*

摘要

本文为数理逻辑课 [1] 的综述性总结。其中包含：数理逻辑的历史、一阶逻辑与一阶逻辑的完备性，局限性、ZFC 公理体系，Register-machine 模型、停机问题、哥德尔不完备性定理。本文尝试用尽可能通俗的语言介绍定理，定理的意义，以及定理的证明思路，略去繁琐的细节。希望能对读者有所启迪。

关键词

逻辑　证明　完备性

[1] 上海交通大学致远学院　[2] 致远学院科学与技术协会　* 邮箱：yezhuoyang@sjtu.edu.cn

1. 历史 [2]

17 世纪的德国数学家莱布尼兹一直有一个梦想：用一个统一的符号系统，以及一套操纵这些符号的方法来记录人的知识与思想。他所发明的微积分符号就一直被人们沿用至今。在一封给友人的信中他提到：

代数部分的秘密就在于文字，也就是说在于恰当地使用符号表达式地技艺。

莱布尼兹认为宇宙的演化是被上帝决定的，所有规律都可以被符号演算所反映。一个多世纪后，英国数学家布尔第一次用数学符号表示逻辑运算，创立布尔代数。

德国数学家弗雷格对数学秉持逻辑主义的观点，他认为算数，微积分，乃至一切数学都可与看作是逻辑的分支。他用毕生精力如果将逻辑方法引入算数基础，为此撰写了两卷关于算数基础的巨著。然而即将发表这部作品之前，他收到罗素的来信，毕生经历毁于一旦：他的逻辑体系的前提会导致矛盾。这个矛盾就是著名的罗素悖论。

20 世纪有一群被称为直觉主义的数学家，包括克罗内克，布劳威尔在内。他们否认数学的非构造性证明。比如：一个无限的集合中排中律是否正确？

为了捍卫数学证明的合理性，反驳直觉主义的观点，希尔伯特提出了元数学纲领：一致性有待证明的公理将被包含在一个形式逻辑系统之内，而证明仅仅是有限数目的符号的一种排列而已。只要证明形式逻辑是一致的，由于形式逻辑依赖的正是包含排中律的经典逻辑，数学证明一定是合理的。他在数学家大会上将其列为 20 世纪的重要数学难题之一。

然而令人震惊的是，一位年轻的数学家哥德尔迅速把这条纲领送入坟墓：哥德尔证明了形式化数学公理的一致性不可被证明，希尔伯特的纲领是不可能完成的。哥德尔不完备性定理彻底颠覆了人们对数理逻辑的认识。

后文将在以下几个方面进行介绍性论述：数学公理是如何一步一步形式化的？哥德尔定理的具体内容，以及形式化后的数学公理最后是怎样自掘坟墓。

2. 一阶逻辑与完备性定理 [3]

不妨以群为例：为了刻画群这个数学结构，我们首先必须定义群的乘法运算 $\circ$，群的单位元 e。某个群中的所有元素必须满足 1. 结合律。2. 具有可逆元。两个性质。这两条性质又可以叫做群公理。群的所有性质都可以由这两条公理出发，以严格的数学推理得到。

引入大家早已熟知的关系符号：全称量词，析取合取量词群的几条公理用符号可以写作

$\forall v_0 \exists v_1 v_0 \circ v_1 \equiv e$ $\forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 (v_0 \circ v_1) \circ v_2 \equiv v_0 \circ (v_1 \circ v_2)$ 现在的问题是

1. 上述一组符号语句是否完整地刻画了群的结构？
2. 上述一组符号语句是否能包含比群结构更多的内涵？

为了回答这两个问题，一阶逻辑被划分为语义，语法两个层面。语义上讲：如果我把 $\circ$ 这个符号解释成群的乘法，把符号解释成构成群的集合中的元素，e 解释成群中的单位元，那么上述符号语句就是我们熟知的自然语言的另一种表述，它自然能刻画群的结构。从语法上讲，为了分析这个语句的内涵，势必要建立一套符合逻辑的语法规则，如果在该语

法规则下所有由公理出发的结论都与群的性质相符，那么第二个问题的回答就是肯定的。

语义上，一阶逻辑对一个数学结构的刻画分为以下几个部分

1. 一套语法规则，什么样的项 (s-term) 或表达式 (s-formula) 符合要求。
2. 一套推理规则
3. 一组公理语句
4. 一个 S-结构 (s-structure), 规定了变量所在的数域，如何解释所有的函数符号，关系符号，常数符号。
5. 对没有全全称量词限定的变量（自由变量）在域上赋值。
6. 一个对 S-结构的解释。

一套公式可能存在多种解释，我们称正确的解释为 model。

2.1 一阶谓词的推理系统

一阶逻辑的一个重要意义是将传统自然语言的数学证明转化为能用机器完成的对字符串的操作。比如利用矛盾进行反证的规则可以表述为：如果一个公理系统在某个条件不成立的时候既能推出另一个命题的肯定，也能推出另一个命题的否定，那么该条件一定不成立。推理系统里，这条规则写为：

$$\Gamma \quad \neg\phi \quad \psi \tag{1}$$

$$\Gamma \quad \neg\phi \quad \neg\psi \tag{2}$$

$$\overline{\Gamma \quad\quad\quad \phi} \tag{3}$$

类似的规则还有很多条。当我们说一条推理规则是正确的时候，意思是对它进行任意的可能的解释，在该解释下只要前提成立，那么推理所得的结论成立。所以推理规则（语法）独立于解释（语义），反映的是推理过程的结构。我们把语义上的推理符号记为 $\models$, 一阶逻辑的推理符号记为 $\vdash$, 一组公理命题集合 Φ 能通过数学推理得到的公式集合记为 $\Phi^{\models}$，能用机器进行一阶逻辑运算推理得到的公式集合记为 $\Phi^{\vdash}$。我们把机器对公式进行推理的过程称 sequent calculus。

2.2 语义证明 = 语法证明吗？ $\Phi^{\vdash} = \Phi^{\models}$?

所有推理系统的推理规则必定保证过程的正确性 (correctness)，但是反之是否所有正确的推理都能由推理规则导得呢？答案是肯定的，但是并不显然，需要由一阶逻辑的完备性保证。引入以下两个定义

1. 一套公式集合是自洽的 (consistent) 当且仅当存在它无法通过推理系统证明的命题。
2. 一套公式是可被满足的 (sastisfiable) 当且仅当存在某个解释，该解释下公式集合的所有命题是正确的。

很容易证明，只要所有自洽的公式集合一定可被满足，那么所有一阶逻辑中能被数学证明的命题一定可以用机器的 sequent calculus 一步一步证明。所以我们只需要对任意一组公自洽的公式集合找到一个正确的解释即可。教材中给出了一个最自然的“项模型”解释，该解释把变量集合组成的所有项划分为若干等价类，同一等价类对应同一个解释。两个项属于同一等价类当且仅当机器能够推出它们相等。

有一件事情值得注意：$\neg\Phi \vdash \psi$ 并不一定意味着 $\Phi \vdash \neg\psi$。只有性质很强的，自洽的 Φ 才能满足任给一个语句，要么 Sequent calculus 能推出它的肯定，不然就一定能推出它的否定，我们称这样 Φ negation complete。

可以证明，当公式集合 negation complete, 且只要存在 $\exists x\phi$ 这样的语句，就一定能找到某个项对应这个 x（contain witness), 那么在项模型下这组公式成立，也即这组公式可被满足。通过适当扩张公式集合，引入额外的常数符号，可以让任意公式集合满足以上两个要求，最终证明一阶逻辑的完备性[1]。

一阶逻辑的完备性告诉我们 $\Phi^{\vdash} = \Phi^{\models}$，所以对一阶逻辑下数学证明的研究等效于在一阶逻辑下 sequent-calculus 的研究，数学证明的局限性即 sequent-calculus 的局限性。

2.3 一阶逻辑的局限性

并不是所有数学结构都能用有限的一阶逻辑公式描述。比如现在要用逻辑公式刻画一个群，满足所有群元素的阶 (order) 必须是有限整数。由于这个限制条件太宽泛了，只能把公式写成 $\forall x(x \equiv e \vee x \circ x \equiv e \vee (x \circ x) \circ x \equiv e \vee ...)$。二阶逻辑可以描述这样的

[1]扩张的过程需要用到集合论中的 Zorn's Lemma

涉及无穷多种性质的数学结构。比如著名的皮亚诺算数公理为

$$\begin{aligned}&\forall x \neg \sigma x \equiv 0\\&\forall x \forall y(\sigma x \equiv \sigma y \to x \equiv y)\\&\forall X((X0 \wedge \forall x(Xx \to X\sigma x)) \to \forall y Xy)\end{aligned} \tag{4}$$

公理中 σ 符号是“后继”的意思，每个自然数都有唯一的后继。公理中的第三条本质上就是数学归纳，$\forall X$ 表示任意的一元关系。尽管归纳法符合我们对自然数结构的认知，但是” 任意一元关系” 这个量词无法用一阶逻辑表示，因为一阶逻辑中关系是有限可数的，且不可以加量词。

有几种方式可以将一阶逻辑扩充为二阶逻辑，比如在一个语句当中允许无穷多析取量词出现，或者定义一个新的量词 Q 表示“存在无穷多了”。或者把关系纳入域的范围，可以对关系符号加量词。

尽管二阶逻辑表达能力强于一阶逻辑，且形式更接近自然语言，但是二阶逻辑不存在一个完备的推理系统。

3. ZFC 公理系统-数学大厦的基础

虽然上文提到一阶逻辑在表述某些数学结构的时候会遇到困难，对结构的刻画能力有限，但事实上所有数学都可以建立一阶公理的基础上，只不过语法更加复杂，且刻画能力不如高阶逻辑。由于一阶段逻辑只有一个固定的域，一个精妙的想法是把所有数学对象看作一个”数学对象域”(universe)，在这个域中包含比较简单的数学对象：一个数，空间中的一个点。也包含较为复杂的数学对象：数的集合，函数，结构，甚至是整个拓扑空间。

任何复杂的数学对象实际上都可以用集合来刻画，比如我们可以用归纳的方式定义自然数：0 是空集合，每一个后继元（successor）都是由前一个元素与一个额外的空集合组成的新集合。由于数本身就是集合，所有描述数与数的关系，数集与数集的关系都变为集合与集合的关系。又如任何的 n 元关系都可以表述为由 n 个元素组成的集合的集合。

基于以上论述，只要能完整地描述集合，那么所有数学结构，不管多么复杂，都可以从集合结构派生而来，确定了集合的基础就等于确定了数学的基础。

集合的公理系统就是著名的 ZFC 公理系统，最早由 Zermelo,Fraenkel,Skolem 提出。ZFC 公理的成员以及表述为：

1. EXT(the axiom of extensionality)：任意两个集合，只要所有元素（集合）要么同时出现在这两个集合中，要么同时不出现在两个集合中，那么这两个集合相等

2. SEP(separation axioms): 任意给一个集合 x 与一个性质 P，存在某个集合由 x 中所有满足性质 P 的元素组成。

3. PAIR(the pair set axiom)：任给一对元素 x,y，存在一个集合 (pair)x, y 由两个元素组成

4. SUM(the sum set axiom): 任给一个集合，存在一个集合由该集合的所有子集的并集组成。

5. POW(the prower set axiom)：任给一个集合, 该集合的幂集（所有子集组成的集合）存在。

6. INF(the axiom of infinity)：存在一个无穷集合。

7. AC(the axiom of choice)：任给一个非空的，由不相交元素对组成的集合，存在一个集合恰好由所有元素对的其中之一个元素组成。

8. REP(replacement axioms)：如果对于一组确定的集合参数 $x_1, \cdots, x_n$ 一个公式 $\phi(x, y, x_1, \cdots, x_n)$ 确定一个由 $x \to y$ 的映射，那么任何一个集合在该映射下的像集也是一个集合。

集合与集合之间的关系可以归结为 $\in$ 关系，以上公理全部可以用一阶逻辑语言（记为 $L^{\in}$）描述。

更重要的一点：包含 ZFC 公理系统 ($L^{\in}$) 在内的所有一阶逻辑符号，语句，公式，以及一阶逻辑的推理关系也都可以用集合的语言描述，也就是说一阶逻辑可以刻画一阶逻辑自身！后文讲指出，正是一阶逻辑的这个特点导致了它的不完备性。

4. 停机问题的不可判定性

考虑这样一个命题：是否存在一个程序 P，P 能判断任意的程序是否在无输入的情况下最终停机? 这个问题是计算理论中著名的停机问题 (halting probrom)。停机问题是不可判定的，简要证明如下：如果停机问题可由 P 判定，任意给一个程序 W，我们可以简单修改 P，使得如果 W 不停机，P 陷入死循环，反之 P 停机输出某个结果。那么当 P 输入 P 自身时，如果 P 停机，那么 P 应该陷入死循环，如果 P 不停机，那么 P 将输出某个字符串，这是一个

明显的悖论，所以不存在这样的程序 P。后文将指出，哥德尔通过证明一阶逻辑中数学公理是否完备取决于停机问题是否可判定，得出一阶逻辑的不完备定理。

4.1 Register-machine

由丘奇-图灵定理，所有的程序都可以由对一种叫做 Register-mashine 的机器操作，以及相应的程序语言模拟，这个程序语言的语法结构有点像 Basic 语言。Register-mashine 由一组寄存器 $R_1, R_2 \cdots, R_n$ 组成，每个寄存器当中存储着一些从有限字母表 A 中选取的一些字符。如果第 L 条语句想要给某个寄存器中加入一个字符 a, 程序语句写为

$$\text{L Let } R_i = R_i + a_j$$

类似的语句还有停机语句 Halt, 打印某个寄存器中的字符语句 PRINT, 转移语句 GOTO, 条件语句 IF 等等。

在这里 Register-mashine 主要用来解决两个问题

1. 对于满足什么性质的可数字符串集 Φ,我们能写一个程序 P 将 Φ 中的元素按某个顺序一一枚举出来? (具有这样性质的 Φ 称为 R-enumerable)。由所以有限字符组成的集合一定满足这个性质，因为我们将所有字符串按其字典序排列然后以此输出。
2. 是否存在一个程序 P，P 能在有限时间内判定任意一个字符串 ψ 是否属于 Φ（具有这样性质的 Φ 称为 R-decidable）

5. 哥德尔不完备性定理

为了研究停机问题，哥德尔将所有程序进行编码。

把 Register machine 中存储的字符所在的字母表 A 扩充为

$$B := A \cup \{A, B, C, \cdots, X, Y, Z\} \cup$$
$$\{0, 1, \cdots, 8, 9\} \cup \{=, +, -, \square, \S\}$$

其中 □ 代表空串，ξ 用来断句。比如程序

$$0 \text{ LET } R_1 = R_1 - a_0$$
$$1 \text{ PRINT}$$
$$2 \text{ HALT}$$

可以在 B 的字符串集合 (记为 B^*) 中编码为

$$\text{0LETR1=R1-}a_0\text{§PRINT§2HALT}$$

如果上述编码在 B 的字典序中排第 n 个，又可将其一一映射为一个新的，更简便的字符串 $\xi_P = a_0 \cdots a_0 (a_0$ 出现 n 次)。这样的 ξ_P 就是程序 P 的哥德尔编码数。定义集合 $\Pi := \{\xi_P | P$是一个 A 上的程序$\}$。任意一个有限长度字符串是一个语法正确的程序 (即是否对应一个哥德尔编码) 可以通过暴力枚举判定。但是由于停机问题的不可判定性，可以构造一个不可判定的字符串集合 $\Pi'_{\text{halt}} = \{\xi_P | P$是 A 上的程序且 P 输入空串会停机

$P : \square \to \text{Halt}\}$

接下来我们回到一阶逻辑。有了 Π'_{halt} 一定不可判定的结论，哥德尔证明了在一阶逻辑下的永真, 不含自由变元的命题也不可判定 ($\{\phi \in L_0^{S_\infty} | \models \phi\}$)。证明的简要思路是对任意的程序 P，一定可以构造一组一阶逻辑公式完整的刻画程序运行的所有步骤，在这个基础上一定可以构造一个命题，这个命题的含义就是 P 会停机，假如这个命题可以被判定，那么 P 能不能停机也随之被判定，导致矛盾。

5.1 自然数理论不可由机器判定

目前超级计算机的运算能力已经达到大约每秒 10^{16} 次浮点数运算了，有了以上的铺垫，你会问这样的问题：随着计算能力的迅猛发展，既然所有数学的公理可以完全用一阶逻辑刻画，一阶逻辑又有完备性定理，有没有可能依靠计算机解决所有人类目前无法证明的数学猜想呢?

所有数学问题最终可以归结为自然数的问题。对于自然数上的算数，上文已给出了皮亚诺公理，那么我们问另一个问题：能否用机器判定任意一个命题是否能用皮亚诺公理证明?。

我们知道哥德巴赫猜想表述为：任意大于 2 的偶数都可以表示成两个素数之和。很容易将这个命题写为一阶逻辑的语句。如果以上问题的回答是肯定的，那么我们可以写一个程序，这个程序可以告诉我们哥德巴赫猜想到底能不能被证明出来。

为了更清晰的表述这个问题，先给出以下定义：

1. 一个属于 S-结构字符串集合 $T \subset L_0^S$ 被称为一个理论，当且仅当它可以被满足，且所有能被 T 证明的公式已经在 T 中。自然数结构的理论被称为算数 (arithmetic)，记为 Th($\mathfrak{R}$)。
2. 如果一个理论能简化为一系列能够被机器判定的语句的集合 Φ，称其可被 R-公理化 (R-axiomatizable)（Th($\mathfrak{R}$)=$\Phi^{\models}$）。

3. 如果对任意的命题，一个理论总能证明其肯定或否定，称其为完全理论 (complete)。这个定义类似于证明一阶逻辑完备性时的所要求的 Negation-complete。

可以证明如果一个理论完全且可被 R-公理化，或者一个理论可枚举且完全，那么所有该理论中的命题就可以被判定。

自然数理论是否可被判定的问题归结为：Th($\mathfrak{R}$) 是否可判定（R-decidable）?

然而答案是否定的。一定存在某些一阶逻辑下的自然数命题，机器即不能判定它是否可以被证明，也不能判定它是否不可以被证明，有点接近直觉主义的观点。

证明思路也是把问题转化为停机问题：对任意一个程序 P，构造一个自然数结构下的一阶逻辑语句，自然数结构下这个语句成立当且仅当这个程序停机。根据反证法，如果自然数理论可判定，那么所有程序是否停机也可以判定。证明中最大的难点是如何用自然数结构下的语句描述程序寄存器的某一个状态。哥德尔通过 β 函数解决了这个困难，这里略过。

所以我们得出结论：自然数理论的命题在一阶逻辑下不可判定。从另一个角度说，对于自然数，我们不可能找出一组有限的公理，使得我们可以设计出某个程序，在这个公理下把所有自然数结构中正确的命题一条一条罗列出来。皮亚诺公理一定不能完整地描述自然数，即 $\Phi_{\mathrm{PA}}^{\models} \subsetneq \mathrm{Th}(\mathfrak{R})$。

哥德巴赫猜想能不能证明我们并不知道。

5.2 数学完备吗?

Wir müssen wissen, wir werden wissen. 我们终将知道，我们必将知道 —— **David Hilbert**

之前的所有不完备性，不可判定性的问题的证明都是基于停机问题不可判定。哥德尔最早的证明虽然思路有所不同，但是本质上殊途同归，都是基于“自引用命题”(Self-Referential Statements) 所导致的悖论。停机问题矛盾的根源在于它无法判定自己是否停机，撒谎者悖论“我现在不在说谎”这句话的矛盾也在于它描述的对象就是自己，后文也将指出：一阶逻辑不完备的根源在于“一阶逻辑是完备的”这个命题可以被一阶逻辑描述。

对任意一组命题 Φ 引入定义”可被表示”(representable)

给定一组自然数 $n_0, \cdots, n_r$，一个自然数上的关系 $R(n_0, \cdots, n_r)$ 可被表示，当且仅当存在存在一个命题 $\phi_R(n_0, \cdots, n_r)$，如果 R 成立，则 $\Phi \vdash \phi_R$，反之 $\Phi \vdash \neg\phi_R$

任给一个自然数上的 r 元函数 F，F 可被表示，当且仅当存在一个一阶逻辑公式 $\phi_F(v_0, \cdots, v_r)$，使得任给自然数集 $n_0, \cdots, n_r$ 只要 $F(n_0, \cdots, n_{r-1}) = n_r$ 那么 $\Phi \vdash \phi_F(n_0, \cdots, n_{r-1}, n_r)$，反之 $\Phi \vdash \neg\phi_F(n_0, \cdots, n_{r-1}, n_r)$。

如果自然数结构上所有可被判定的关系和可被计算的函数都可被表示，称该公式集合 Φ 允许表示 (allows representations)

“允许表示”是一个非常强的性质。由一阶逻辑的完备性定理[2]可以证明 Th($\mathfrak{R}$) 允许表示。由于前文提到的 Register-mashine 的操作过程完全可以用皮亚诺算数公理下的一阶逻辑语句描述，“允许表示”范畴下只讨论 Register-machine 能够判断的关系和计算的函数，这个判断和计算的过程本质上就是在做逻辑推理，所以皮亚诺算数公理 $\Phi_{\mathrm{PA}}^{\vdash}$ 也具有“允许表示”的性质。

前文曾提到过哥德尔编码把任意一个程序映射为字典序，也就是到自然数的满射。用同样的方式也可以把任意自然数结构中一阶逻辑的命题 ϕ 映射为自然数 n^ϕ，所以能用自然数结构研究一阶逻辑命题本身。

哥德尔证明在所有“允许表示”的自然数一阶逻辑体系中的不动点定理：任给一个含有自由变元的语句 $\psi \in L_1^{\mathrm{Sar}}$，存在一个语句 ϕ，使得 $\Phi \vdash \phi \leftrightarrow \psi(n^\phi)$。

这个 ψ 可以理解成语句是否具有某种性质，所以不动点定理告诉我们对于任何一阶逻辑语句的某个性质，都可以由 sequent-calculus 得到某个语句，这个语句将该性质等效于另一个语句。如果这个性质的内涵就是：我不可以被机器证明。那么就形成了悖论。

我们现在考虑这样一件事：对于任意一个语句 ϕ，ϕ 是否能用机器证明（$\phi \in \Phi^{\vdash}$?）这个一元关系在 Φ 中可表示吗？我们利用反证法，如果该性质可被某个语句 $\chi(v_0)$ 表示，根据” 可表示” 的定义，对任意的语句 α：

$\Phi \vdash \neg\chi(n^\alpha)$ 当且仅当 $\Phi \vdash \alpha$ 不成立。但是由于不动点定理，$\neg\psi$ 就是“不可被机器证明”，一定有一个语句 ϕ 使得

$\Phi \vdash \neg\chi(n^\phi)$ 当且仅当 $\Phi \vdash \phi$ 成立，构成矛盾。

[2]这个完备性定理值得是语义证明等价于语法证明，与后文的哥德尔不完备性定理不是一回事

由于 $\Phi^{\vdash}$ 这个性质不可被表示，可以得到哥德尔第一不完备性定理: 如果公式集 Φ 自洽，可判定，且允许表示，那么一定存在一个自然数结构上的语句 ϕ,$\Phi \vdash \phi$，$\Phi \vdash \neg\phi$ 都不成立。

接下来可以开始讨论数学本身是否完备这个终极目标了。上文曾指出：数学的根基是集合论，集合论的根基是 ZFC 公理系统，ZFC 公理系统可以用一阶逻辑表示，所以数学是否完备取决于一阶逻辑是否完备。到目前为止，一阶逻辑已经遇到了不可克服的困难：机器不可判定一阶逻辑下的永真命题与自然数理论，甚至对任意性质良好的公式集合，都一定存在某些不可证明也不可证伪的命题。接下来的哥德尔不完备性定理更可谓是对一阶逻辑的致命一击：我们甚至无法证明我们知不知道数学本身是自洽的体系。

一阶逻辑下一个基于皮亚诺算数的公理体系 Φ 是否自洽 (consistent) 取决于是否有它无法证明的命题。不妨取这个命题 ψ 为 $\neg 0 \equiv 0$，这个命题显然是伪命题，我们只要能证明 $\Phi \vdash \psi$ 不成立，那么就证明了 Φ 自洽。假设 Φ 是一个性质良好的公理系统，即能被机器判定又允许表示 (事实上 Th($\mathfrak{R}$),ZFC 都满足)。一定存在一个语句 $\mathrm{Der}(x)$，其含义是 x 对应的语句能够在 Φ 中由 sequent calculus 推得。

语句 $\mathrm{Consis}_{\Phi} := \neg \mathrm{Der}_{\Phi}(n^{\neg 0 \equiv 0})$ 就是"Φ 是否自洽" 的表述。

由不动点定理，一定存在语句 ϕ 使得 $\Phi \vdash \phi \leftrightarrow \neg \mathrm{Der}(n^{\phi})$ 于是 Φ 自洽的另一个必要条件是 $\Phi \vdash \phi$ 不成立。可以证明 $\Phi \vdash \mathrm{Consis}_{\Phi} \rightarrow \neg \mathrm{Der}(n^{\phi})$

哥德尔第二不完备性定理：如果 Φ 自洽且可被判定，$\Phi_{\mathrm{PA}} \subset \Phi$，那么 $\Phi \vdash \mathrm{Consis}_{\Phi}$ 不成立

哥德尔第二不完备性定理的含义是：我们不能在一个数学理论的语境下证明一个数学理论是不是完备的。

上述证明基于皮亚诺公理，由于自然数可以用集合定义，可以把皮亚诺公理中的后继 σ 符号改写为 $\in$，ZFC 公理系统中亦可以完成两条不完备性定理的证明。

如果 ZFC 公理系统自洽，那么 $\mathrm{ZFC} \vdash \mathrm{Consis}_{\mathrm{ZFC}}$ 不成立。数学的基石竟然是不完备的！我们无法用数学方法证明数学的自洽性。

6. 结论

哥德尔不完备性定理说明从公理出发的数学是不完备的，我们无法用数学证明的方法证明数学证明不会导致矛盾。另一方面，哥德尔不完备性定理也说明机器无法取代人的智慧，很多未解数学难题依然需要靠人类艰苦卓绝的努力才有希望解决。

参考文献

[1] Teaching of yijia chen.

[2] 马丁戴维斯. 逻辑的引擎.

[3] W.Thomas. H.-D.Ebbinghaus, J.Flum. Mathematical logic,second edition.

核磁共振陀螺仪（Nuclear Magnetic Resonance Gyroscope）

曹铭耘[1]*

摘要

时至今日，惯性导航技术受到了越来越多的重视。陀螺仪作为惯性导航系统的核心元件，相关的开发工作始终没有停止。核磁共振陀螺仪作为一种新型的陀螺仪，具有其它种类陀螺仪无法比拟的优势。其较小的体积使得将惯性导航装备于小型装置成为可能。长久以来，核磁共振陀螺仪受制于稳恒弱静磁场的技术瓶颈，实用价值较低。直到科学家提出使用两种元素来消除对静磁场的依赖，才使得核磁共振陀螺仪的实用化成为可能。

关键词

惯性导航　陀螺仪　核磁共振　两种元素

[1] 上海交通大学致远学院　[2] 上海交通大学自然科学研究院　* 邮箱地址：caomingyun@sjtu.edu.cn

1. 惯性导航基本原理 [1]

1.1 何为导航 [2]

定义：确定一个物体相对于某一参考坐标系或坐标网格位置和速度的过程。

1.2 何为惯性导航

定义：惯性导航属于自主式导航系统，即仅依靠装置自身搭载的仪器进行导航，而不借助任何外部传递的信息。它是一种通过测量飞行器的加速度，并实时地对数据进行积分处理，得到飞行器的速度以及位置的技术。惯性导航系统一般由以下几部分组成：

1.3 惯性导航系统的组成

1. 加速度计。用于测量航行体的运动加速度。通常应有 2 3 个，并安装在三个坐标轴方向上。

2. 陀螺稳定平台。为加速度计提供一个准确的坐标基准，以保持加速度计始终沿三个轴向测量加速度，同时也使惯性测量元件与航行体的运动相隔离。

3. 导航计算机。用来完成诸如积分等导航计算工作，并提供陀螺施矩的指令信号。

4. 控制显示器。用于输出显示导航参数，还可进行必要的控制操作，如输入初始数据等。

5. 电源及必要附件。

1.4 惯性导航系统的基本工作原理

在使用惯性导航的过程中，主要是利用一种称作加速度计的仪表测量载体的加速度，利用陀螺稳定平台模仿当地水平面、建立一个空间直角坐标系，三个坐标轴分别指向东向 e，北向 n 及天顶方向 u，通常称为东北天坐标系。在载体运动过程中，利用陀螺仪跟踪当地水平面，三个轴向始终指向东北天方向。在这三个轴上分别安装三个加速度计，将这三个方向的加速度进行积分，便可以得到这三个方向的速度。

$$
\begin{aligned}
v_e(t_k) &= v_e(t_0) + \int_{t_0}^{t_k} a_e dt \\
v_n(t_k) &= v_n(t_0) + \int_{t_0}^{t_k} a_n dt \\
v_u(t_k) &= v_u(t_0) + \int_{t_0}^{t_k} a_u dt
\end{aligned} \tag{1}
$$

通常，载体在地球上的位置用经度、纬度和高程来表示，通过对速度积分就可得到。

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \lambda_0 + \int_{t_0}^{t_k} \dot{\lambda} dt \\
L &= \phi_0 + \int_{t_0}^{t_k} \dot{L} dt \\
h &= h_0 + \int_{t_0}^{t_k} \dot{h} dt
\end{aligned} \tag{2}
$$

其中，λ_0, L_0, h_0 为载体的初始位置；$\dot{\lambda}, \dot{L}, \dot{h}$ 分别表示经度、纬度和高程的时间变化率，可由运动

速度计算得到，即

$$
\begin{aligned}
\dot{\lambda} &= \frac{v_e}{(N+h)\cos L} \\
\dot{L} &= \frac{v_n}{M+h} \\
\dot{h} &= v_u
\end{aligned} \tag{3}
$$

其中，M，N 分别代表地球椭球的子午圈，卯酉圈曲率半径。若将地球近似为一个半径为 R 的球体，那么 M=N=R。

1.5 惯性导航主要仪器介绍 [3]

1.5.1 陀螺仪

利用陀螺仪的进动性以及定轴性，可以起到导航的作用。陀螺仪的自由度定义为自转轴可绕其自由旋转的正交轴的个数。通常使用的陀螺仪自由度为 1 或 2。

衡量陀螺仪精度高低的参量是陀螺仪漂移率，即陀螺仪干扰力矩的作用下，产生的漂移进动角速度。陀螺仪可按照精度如下表分类：

表 1. 陀螺仪的分类

按精度分类	
分类	精度要求
超高精度陀螺仪	$10^{-6} - 5 \times 10^{-4} (^\circ/h)$
中高精度陀螺仪	$5 \times 10^{-4} - 10^{-1} (^\circ/h)$
低精度陀螺仪	$> 10^{-1} (^\circ/h)$

1.5.2 加速度计

加速度计的种类有很多，主要使用的加速度计是液浮摆式加速度计和挠性加速度计。由于这不是本文所关注的重点，因此不再详细介绍。

2. 核磁共振陀螺仪 [4]

2.1 基本原理

自旋的原子核会产生磁矩 $\vec{\mu}$，磁矩的取向与自旋轴方向一样，是任意的（从量子力学的角度分析，是量子化的）。而外加一个稳恒磁场之后，每一个自旋原子核就会绕着与磁场方向相同的转轴进行进动。一般称该进动为 RLarmor 进动。

拉莫尔进动的角速度 $\omega_L = -\gamma B_0$。其中，γ 为旋磁比，只与原子核自己的性质有关。根据核磁共振的基本原理，如果给体系施加一个与 B_0 方向正交的交变磁场，当其频率恰好为 ω_L 时，会发生核磁共振现象。当装置转动的角速度为 ω 时，核磁共振陀螺仪的光电检测器检测到的转动角速度为 ω_j，那么 $\omega = \omega_j - \omega_L = \omega_j + \gamma B_0$。

由于实验室中使用的磁场（1-10T）中，larmor 进动的频率在 10-100MHz 的量级上，而地球的旋转频率大概是 $7.27 \times 10^-5 rad \cdot s^{-1}$。这个数值要比实验室中普通的 Larmor 频率小 12-13 个数量级。因此，我们要求获得很小的静磁场才能达到实验室的要求。为了解决这个不匹配的问题，一般采用如下几种解决方式：（1）利用低温超导体提供均匀稳定的低磁场（当前技术较难实现）（2）选用两种不同的核子作为工作物质抵消漂移的影响。我主要介绍第二种。

2.2 双原子核的 larmor 进动 [5]

如果两种核子的旋磁比分别为：γ_1，γ_2，那么在相同的磁场下，我们可以得到两个公式：

$$
\begin{aligned}
\omega_{obs1} &= \gamma_1 H_0 - \omega_r \\
\omega_{obs2} &= \gamma_2 H_0 - \omega_r
\end{aligned} \tag{4}
$$

联立两个方程，得到：

$$
\omega_r = \frac{\omega_{obs2} \times \frac{\gamma_1}{\gamma_2} - \gamma_{obs1}}{1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}} \tag{5}
$$

这样，不需要知道 H_0 即可知道 ω_r。（注：ω_r 为装置旋转的角频率）

2.3 信号探测的基本原理

利用核磁共振产生的自由感应衰减信号（Free Induction Decay），可以测量两种原子各自的进动角速度（ω_1，ω_2）。原子磁矩在静磁场中进行拉莫尔进动时，如果我们给它们一个合适频率、合适长度的脉冲信号，就会发生核磁共振现象。脉冲信号经过后，由于原子之间的相互碰撞与热运动，系统的总磁矩会随着时间的演化而逐渐回复到原来的值。我们可以利用一个次级线圈来探测磁场的变化。通过电磁感应，把磁信号转化为电信号。在这么一个驰豫时间之内，我们就可以探测到一个振荡衰减的信号，如下图所示：

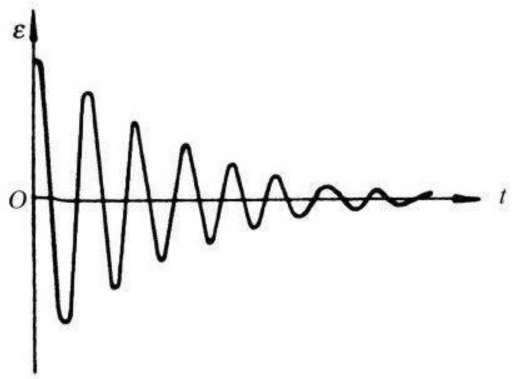

图 1. Free Induction Decay

通过 FFT（Fast Fourier Transform）技术，我们就可以得到原子进动的角频率，进而计算出装置转动的角速度。

参考文献

[1] 李旷振 杨宝利苏中, 李擎. 惯性技术.

[2] 王新龙. 惯性导航基础.

[3] 吉春生姜璐, 于远治. 陀螺仪在导航中的应用及其比较.

[4] E. A. Donley. *Nuclear Magnetic Resonance Gyroscopes*.

[5] 于运治姜璐. 常见几种陀螺仪的比较及应用分析.

移动平面法简介

张驰麟[1]*

摘要

本文整理了 Alexandrov 对微分几何中平均常曲率问题的证明

关键词

微分几何　曲面

[1] 上海交通大学致远学院　* 邮箱地址: 15zysxzcl@sjtu.edu.cn

1. 引入

在微分几何 [1] 中，人们常常给曲面的曲率加上一些条件，来探究曲面的特性。其中有一个十分经典的问题是常平均曲率曲面的问题。一般来说，给定欧氏空间中曲面的某些曲率条件以后，曲面形状不能被唯一确定。

不过，对于某些十分特殊的曲率条件，曲面的形状就可以被唯一确定。例如，Hopf 曾证明如果 $\mathbb{R}^3$ 中二维正则单连通闭曲面的平均曲率为常数，则曲面为球面。大家可以参考任何一本微分几何的书来了解正则曲面、平均曲率的定义。

Hopf 对于这一结论的证明严重依赖于曲面的拓扑，必须要求闭曲面是单连通的，即同胚于球面，但实际上球面的这一条件可以去除，Alexandrov 证明了如果 $\mathbb{R}^3$ 中二维正则连通闭曲面的平均曲率为常数，则曲面为球面。后来 Reilly 用了完全不同的方法重新证明了 Alexandrov 的结果，并且还将结论推广到了 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的超曲面，即

Theorem 1. *如果 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 n 维正则连通闭曲面 M 的平均曲率为常数，则 M 为球面，即到定点距离为定长的点集。*

在本文中，我整理了 Alexandrov 的证明方法。必须承认对于这个问题，Alexandrov 的证明方法实际上比 Reilly 的证明方法繁琐，之所以在这里选择展示前者的证明方法，主要是两点考虑：第一是 Rielly 的证明需要一些对于微分几何更深入的了解，不适合作为科普，而 Alexandrov 的证明方法本科生不需要太多微分几何的知识也可读懂；第二是 Alexandrov 的证明方法逐渐演变成了偏微分方程理论中非常著名的"移动平面法"，为偏微分方程理论做出了重大贡献。

学习过《偏微分方程》这门课程的同学会觉得本文很多部分似曾相识，确实本文很多内容都和大家熟悉的调和函数的理论十分相似，可以从本文中回顾一些偏微分方程的基本方法。

2. 准备工作

本文中平均曲率取为 Weingarten 映射 L 的迹，也就是主曲率之和（而非平均），即

$$H = tr(L) = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i.$$

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ 是定义在 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ 上的一个函数，则映射

$$X : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1} \quad X(x^1, x^2, \cdots, x^n) = (x^1, x^2, \cdots, x^n, f(x^1, x^2, \cdots, x^n))$$

称为函数 f 的图像。

可以证明任何一个曲面的一个局部充分小的曲面片总可以通过适当旋转，成为某个函数的图像。

Theorem 2. 曲面 M 是函数 u 的图像，设曲面关于向上的单位法方向为 n，则曲面的平均曲率为

$$H = div\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}.$$

Proof. 曲面每一点的切平面由 $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} = (0,\cdots,1,\cdots,0,u_i) = (e_i,u_i)$ 张成，其中 e_i 代表 $\mathbb{R}^n$ 中第 i 个单位向量，u_i 为函数 u 关于 x^i 方向导数。则曲面的向上法方向为

$$n = \frac{(-\nabla u,1)}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}.$$

于是，Weingarten 映射满足

$$\begin{aligned}
L(X_i) &= -n_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{(\nabla u,-1)}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \\
&= \frac{(\nabla u_i,0)}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} - \frac{(\nabla u,-1)\cdot(1+|\nabla u|^2)_i}{2\sqrt{1+|\nabla u|^2}^3} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}(\nabla u_i,0) - \frac{\langle\nabla u,\nabla u_i\rangle}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}^3}(\nabla u,-1)
\end{aligned}$$

是曲面的切平面上的一个向量，从而

$$\begin{aligned}
H = trL &= \sum_{i=1}^n \frac{u_{ii}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} - \sum_{i=1}^n \frac{\langle\nabla u,\nabla u_i\rangle}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}^3}u_i \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{u_{ii}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} - \sum_{i,j=1}^n \frac{u_j u_{ji}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}^3}u_i \\
&= div\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}.
\end{aligned}$$

□

3. 球面的一个判定方法

我们需要证明的 Alexandrov 定理的结论为曲面 M 是球面，众所周知，球面关于任何方向都是一个轴对称图形，那么我们自然会问能否使用轴对称这一特点来判定一个曲面是不是球面。在这一部分我们将对此给出一个肯定的回答，进而一旦我们可以证明如果连通闭曲面 M 关于任何方向都是轴对称图形，就自然证明了 Alexandrov 定理。

Lemma 3. Ω 是平面上的一个非空紧致集，则对任意角度 $\theta \in S^1$，Ω 至多有一条垂直于 θ 的对称轴。

Proof. 假设 Ω 有不同的垂直于 θ 的对称轴 l_1,l_2，则我们注意到对任意 $p\in\Omega$，p 关于 l_1,l_2 的对称点也在 Ω 中，所以我们将 p 先关于 l_1 做镜面反射，再关于 l_2 做镜面反射。这样的映射作用相当于一个平移变换，并将 $p\in\Omega$ 映射到 Ω 中，所以说 Ω 经过上述的平移变换后依然落在 Ω 中。
由于 Ω 非空且紧致，我们知道它是有界的，然而我们却可以重复上述的平移变换足够多次，将 Ω 平移到充分远处却保持平移后的像还在 Ω 中，这与 Ω 的有界性矛盾。 □

Theorem 4. Ω 是平面上的一个非空紧致集，假设对任意角度 $\theta\in S^1$，Ω 均存在（唯一）一条垂直于 θ 的对称轴 l_θ，则平面上存在一定点，使这些对称轴 l_θ 都经过这一定点。

Proof. 我们用反证法，假如上述结论非真，则存在三个互不平行的角度，使得三条相应的对称轴围成一个三角形，我们可以不妨假设三角形的三个顶点 A,O,B 满足 $\angle AOB \le \frac{\pi}{3}$。进一步，我们还可以通过适当平移、伸缩、反射、旋转，将点 A,O,B 移动到如下位置:

(1)O 为坐标原点 $(0,0)$，
(2)$A=(1,a), B=(1,b)$ 且 $a<b$。
这样的话，直线 AB，直线 OA，直线 OB 都是集合 Ω 的对称轴。假设 $p\in\Omega$，且 p 在直线 AB 右侧，由于直线 AB 是 Ω 的对称轴，这样的 p 存在。
令 $p_i=p$，我们归纳地构造一个全部落在直线 AB 右侧的 Ω 中的点列 $\{p_i : i=0,1,2,\cdots\}$。
假如 p_i 已经定义，我们将 p_i 先关于直线 OA 做反射，再关于直线 OB 做反射。这样的“两次反射”实际效果是关于原点逆时针旋转 $2\angle AOB\le\frac{2\pi}{3}$。由于 $\frac{2\pi}{3}<\pi$，经过有限次上述的“两次反射”可以将 p_i 旋转到左半平面的点 $\widetilde{p}_i$。这时候我们关于直线 AB 做一次反射，并定义 p_i 经过这一系列变换后的点为 p_{i+1}。显然 p_{i+1} 在直线 AB 右侧。
由于 p_{i+1} 是 p_i 通过有限次关于对称轴的反射所形成的，所以只要 $p_i\in\Omega$，就有 $p_{i+1}\in\Omega$。于是点列 p_i 定义完毕。
我们注意到 $|p_i|^2=|\widetilde{p}_i|^2$，如果我们假设 $\widetilde{p}_i=(-x,y), x>0$，则根据 p_{i+1} 的定义有 $p_{i+1}=(2+x,y)$。由此知

$$\begin{aligned}
|p_{i+1}|^2-|p_i|^2 &= |p_{i+1}|^2-|\widetilde{p}_i|^2 \\
&= (2+x)^2+y^2-(-x)^2-y^2 \\
&\geq 4.
\end{aligned}$$

也就是说点列 p_i 到坐标原点的距离趋于无穷，这与 Ω 的紧致性矛盾。 □

Theorem 5. *Ω 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的一个非空紧致集，假设对任意角度 $\theta\in S^n$，Ω 均存在（唯一）一条垂直于 θ 的超平面 l_θ 作为对称轴，则平面上存在唯一的定点，使这些平面 l_θ 都经过这一定点。*

Proof. 定点的唯一性是显然的，主要的难点在于存在性。对于 $n=1$ 的情况，上一个定理已经给出了证明，下面我们用数学归纳法，即假设如果 $\mathbb{R}^n$ 上的一个非空紧致集在任何方向上都是轴对称图形，则相应的超平面经过定点。
任取两个垂直的方向 $\alpha,\beta\in S^n$，则 l_β 将 l_α 反射到自身，故 $l_\alpha\bigcap\Omega$ 关于 $l_\beta\bigcap l_\alpha$ 轴对称。
由归纳假设知，在 α 给定的情况下，对任何与 α 垂直的方向 β，l_β 都经过 $l_\alpha\bigcap\Omega$ 上的某一定点，设这样的定点为 O_α。
我们注意到，只要 $\alpha\perp\beta$，根据定义就有 $O_\alpha, O_\beta\in l_\beta\bigcap l_\alpha$，所以 $O_\alpha-O_\beta\perp\alpha,\beta$ 。
我们断言 $O_\alpha=O_\beta$，这是因为任意的同时垂直于 α 和 β 的另一方向 γ，我们有 $O_\alpha-O_\beta\in l_\gamma$，故 $O_\alpha-O_\beta\perp\gamma$，我们看到 $O_\alpha-O_\beta$ 这个向量垂直于 α,β 以及任何与 α,β 垂直的向量 γ，唯一的解释就是 $O_\alpha-O_\beta=0$。
至于任意两个向量 $\alpha,\beta\in S^n$，总存在一个与 α,β 垂直的向量 γ，于是就有 $O_\alpha=O_\gamma=O_\beta$。故定理得证。 □

Theorem 6. *如果连通的正则 n 维闭曲面 $M\in\mathbb{R}^{n+1}$ 关于任何方向轴对称，则曲面 M 为球面，即到定点距离为定长的点集。*

Proof. 根据之前定理所述，存在定点 $O\in\mathbb{R}^{n+1}$，使得任何对称轴都经过定点 O，我们将曲面适当平移，使得定点 O 平移到坐标原点。假设 $A\in M$ 且到定点 O 的距离为 $|A|=r$，则对任何其他到定点 O 的距离为 r 的点 B，我们注意到由于 $l_{\frac{A-B}{|A-B|}}$ 经过定点 O，所以 $l_{\frac{A-B}{|A-B|}}$ 将 A 反射成 B，故 $B\in M$。
所以说，M 是若干同心球面的并集。另外由于 M 是正则连通闭曲面，故它只能是球面。 □

4. 移动平面
根据上一部分的结果，我们只要证明常平均曲率曲面 M 满足任何方向的轴对称性，即可证明 M 为球

面。我们不妨只去证明 M 关于 x^{n+1} 轴方向轴对称，即证明存在垂直于 x^{n+1} 轴的平面，使得 M 关于这个平面轴对称。

由曲面 M 的紧致性，曲面 M 上各点的 x^{n+1} 坐标存在最值 H_{max}, H_{min}。我们将曲面上 x^{n+1} 坐标不小于 $H_{max}-h$ 的点集记为 U_h，将 x^{n+1} 坐标不大于 $H_{max}-h$ 的点集记为 L_h，并令 $Z_h = U_h \bigcap L_h$。另外假设 U_h 关于平面 $x^{n+1}=h$ 反射后的点集记为 U_h^*。

首先无论如何都有 $Z_h \subseteq U_h^* \bigcap L_h$。一个自然的问题就是对于什么样的 h 有 $Z_h = U_h^* \bigcap L_h$? 对此我们有下面的定理:

Theorem 7. *(1) 存在 $\delta>0$ 使得当 $0 \le h \le \delta$ 时有 $Z_h = U_h^* \bigcap L_h$，*
(2) 存在 $h \in [0, H_{max}-H_{min}]$ 使得 $Z_h \neq U_h^* \bigcap L_h$。

Proof. (1) 如果 δ 不存在，则我们可以找到点列 $p_k \in U_{\frac{1}{k}} \setminus Z_{\frac{1}{k}}$ 使得 p_k 关于平面 $x^{n+1} = H_{max} - \frac{1}{k}$ 的对称点 q_k 也在曲面 M 上。根据曲面的紧致性知，存在 p_k 的子列 p_{k_i} 收敛到曲面上的某点 p_∞。

当然，由于 p_k 的 x^{n+1} 方向坐标不小于 $H_{max}-\frac{1}{k}$，我们知道 p_∞ 的 x^{n+1} 方向坐标就是 H_{max}，所以说 p_∞ 处的切平面 $T_{p_\infty}M$ 与 x^{n+1} 轴垂直。

根据正则曲面的定义知，存在 $\varepsilon>0$ 使得对曲面上任何到 p_∞ 距离小于 ε 的点 p，以及任何 $t \in (0,\varepsilon)$ 总有 $p - t \cdot e_{n+1} \notin M$。而点列 p_{k_i} 及其对应的反射点 q_{k_i} 的距离则不超过 $\frac{2}{k_i}$，这与正则曲面的定义矛盾。

(2) 假设 $p \in M$ 的 x^{n+1} 方向坐标为 H_{max}，则如前所述有 p 处的切平面 T_pM 与 x^{n+1} 轴垂直，所以可以过 p 做一条平行于 x^{n+1} 轴的直线，这条直线一定与曲面 M 交于另一点 q（这里 q 的存在性需要比较深入的拓扑知识，但因为较为直观，故此处作为默认的事实不做证明），则 $|p-q| \le H_{max}-H_{min}$，故我们知道对于 $h = \frac{|p-q|}{2} \in [0, H_{max}-H_{min}]$ 有 $Z_h \bigcup \{q\} \subseteq U_h^* \bigcap L_h$。 □

Definition 8. 我们定义

$$h_0 = \sup\{h>0 : Z_t = U_t^* \bigcap L_t, \forall 0<t<h\},$$

则定义平面 $x^{n+1} = H_{max} - h_0$ 为曲面 M 的 x^{n+1} 轴方向的反射平面。

当然，方便起见，我们可以适当平移曲面 M 使得曲面 M 的 x^{n+1} 轴方向的反射平面恰好为平面 $x^{n+1}=0$，此时有 $h_0 = H_{max}$。相应地可以简记 M 上 x^{n+1} 方向坐标非负的点为 U,x^{n+1} 方向坐标非正的点为 L，而 $Z = U \bigcap L$，U 关于平面 $x^{n+1}=0$ 的反射像为 U^*。

Lemma 9. *假设 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ 是 U 在平面 $x^{n+1}=0$ 上的投影，则存在定义在 Ω 上的函数 f 使得 U 是函数 f 的图像。进一步地，U^* 可以看作 $-f$ 的图像。*

Proof. 我们只需要排除 U 中两点 p_1, p_2 在 Ω 上投影相同的可能即可。假如 p_1, p_2 存在，且其 x^{n+1} 方向坐标为 $p_1^{n+1} > p_2^{n+1}$，则我们注意到平面 $x^{n+1} = \frac{p_1^{n+1}+p_2^{n+1}}{2}$ 将 p_1 反射到 p_2，于是对于

$$t = H_{max} - \frac{p_1^{n+1}+p_2^{n+1}}{2} \in (0, H_{max}) = (0, h_0)$$

有 $Z_t \bigcup \{p_2\} \subseteq U_t^* \bigcap L_t$。这与 h_0 的定义矛盾。 □

Theorem 10. *如果 $q \in L$ 在平面 $x^{n+1}=0$ 的投影 x_q 落在 Ω 内，则 q 的 x^{n+1} 方向坐标至多为 $-f(x_q)$。*

Proof. 否则假设 q 的坐标为 (x_q, z_q)，其中 $z_q > -f(x_q)$。则我们知道平面 $x^{n+1} = \frac{f(x_q)+z_q}{2} > 0$ 将点 $(x_q, f(x_q))$ 反射到 q，同样地，这与 h_0 的最小性矛盾。 □

Theorem 11. *设 $\omega = \{x \in \Omega : (x, -f(x)) \in L\}$，再假设 $\Omega = \bigcup \Omega_\lambda$，其中 Ω_λ 是 Ω 的各连通分支。则有：*
(1)$\omega \bigcap \Omega_\lambda \neq \emptyset$，
(2)$\omega \bigcap \Omega_\lambda$ 是平面 $x^{n+1} = 0$ 上的闭集。

Proof. (1) 各连通分支的边界上的点 $x \in \partial\Omega_\lambda$ 均满足 $f(x) = 0$，故 $(x, -f(x)) = (x, 0) \in L$，即 $x \in \omega$。
(2) 只要分别证明 ω 和 Ω_λ 是闭集即可。对于前者，ω 的定义属于闭条件，故 ω 为闭集。对于后者，U 的定义为闭条件，故 U 是闭集，由于 U 是 Ω 上定义的连续函数 f 的图像，故 Ω 也是平面 $x^{n+1} = 0$ 上的闭集，于是它的连通分支也都是平面上闭集。 □

现在，大家应该不难想到，只要能够证明 ω 在 Ω 中是开集，即可证明 $\omega = \Omega$，此时我们有 $U^* \subseteq L$。再根据 M 是正则连通闭曲面知 $U^* = L$，所以在 x^{n+1} 轴方向，M 关于平面 $x^{n+1} = 0$ 轴对称，这样的话就完成了证明。
所以最后我们将证明 ω 在 Ω 中是开集。

5. 偏微分方程的介入
我们假设 ω 在 Ω 中不是开集，那么存在 $x \in \omega$ 以及 $x_i \in \Omega \setminus \omega$，满足 $x_i \to x$。定理 10 保证了 U^* 在 L 上方，故在 $(x, -f(x))$ 处，U^* 和 L 切平面必须重合。
于是，我们可以对 M 做平移与旋转，使得在新的坐标系 $(y^1, \cdots, y^n, y^{n+1})$ 下，$(x, -f(x))$ 位于坐标原点，该点曲面的切平面为平面 $y^{n+1} = 0$，且在原点附近，U^* 在 L 上方。
于是我们可以在远点附近将 U^* 与 L 写成函数的图像，即存在 $\mathbb{R}^n$ 中原点的开领域 D 以及函数 u, v 使得对于 $y \in D$，图像 $(y, u(y)), (y, v(y))$ 即为 U^* 与 L，根据假设，我们有
(1)$u \geq v$ 并且存在 $y_i \in D, y_i \to O$ 满足 $u(y_i) > v(y_i)$，
(2) 在原点 O 处有 $\nabla u = \nabla v = 0$。
此时我们需要注意一件事情：由于 M 的平均曲率为常数，故 U^* 与 L 有相等的常平均曲率 $\overline{H}$（事实上，我们还需要排除两者平均曲率为相反数的情况，但是由于 h_0 的最小性知 U^* 与 L 的平均曲率的"弯曲"方向相同，故两者平均曲率相等），而且也不难证明上法向的平均曲率 $\overline{H} > 0$，而平均曲率方程
$$H = div\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}.$$
是一个非线性的椭圆方程，故很有可能可以通过椭圆方程的各类比较定理得出 $u = v$，进而推出矛盾。
当然，由于平均曲率方程是一个非线性椭圆方程，故我们不可能照搬大家熟悉的拉普拉斯方程的方法，将 u, v 相减做最大值原理，而是需要适当修改一下证明方法。

6. 常平均曲率方程的比较定理与 Hopf 型定理
我们先来证明一个平均曲率方程的比较定理：

Theorem 12. *$D_0 \in \mathbb{R}^n$ 为一有界开区域，$\varphi, \psi \in C^\infty(D_0) \bigcap C(\overline{D_0})$ 为两个函数。设它们的平均曲率分别为 H_φ, H_ψ，如果*
(1) 在 ∂D_0 上有 $\varphi \geq \psi$，
(2)$H_\varphi < H_\psi$，
则 $\forall y \in D_0, \varphi(y) \geq \psi(y)$。

Proof. 假设结论为假，则令 $b = \max\{\psi(y) - \varphi(y) : y \in \overline{D_0}\}$，首先由于 $\overline{D_0}$ 是紧致集，b 是存在的，其次根据反证法的假设知 $b > 0$。
于是我们有 $\varphi(y) + b \geq \psi(y)$，且等号可以在 D_0 内某点 y_0 取到。另外根据平均曲率公式知 $\varphi + b$ 的平均曲率
$$H_{\varphi+b} = H_\varphi < H_\psi.$$

然而我们注意到在 y_0 处，由于 $\varphi(y)+b\geq\psi(y)$ 且 $\varphi(y_0)+b=\psi(y_0)$，故
(1)$\nabla\varphi(y_0)=\nabla\psi(y_0)$，
(2)$\nabla^2(\varphi(y_0)-\psi(y_0))\geq 0$。
然而

$$\begin{aligned} H &= div\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \\ &= \frac{(1+|\nabla u|^2)\Delta u-\nabla^2u(\nabla u,\nabla u)}{(1+|\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

从中可以看出 $H_\varphi\geq H_\psi$，与假设矛盾。 □

Lemma 13. *函数 $g_0\in C^\infty(\overline{B_1(O)}\setminus\{O\})$ 定义为 $g_0(x)=|x|^{-n}$，则 g_0 满足：*
(1)$\forall v\in\mathbb{R}^n,|v|^2\Delta g_0-\nabla^2g_0(v,v)\geq-\frac{n-1}{2}|v|^2\Delta g_0$，
(2)$|\nabla g_0|=\frac{1}{2}\Delta g_0\geq n$。

Proof. (2) 为显然，故只证明 (1)。由对称性，我们不妨计算在 $(r,0,\cdots,0)$ 处 g_0 的 Hessian 矩阵，不难验证 $(r,0,\cdots,0)$ 处 g_0 的 Hessian 矩阵为

$$diag\{n(n+1)\cdot r^{-n-2},-n\cdot r^{-n-2},\cdots,-n\cdot r^{-n-2}\},$$

故 $\Delta g_0=2n\cdot r^{-n-2}$，且 $\nabla^2g_0(v,v)\leq n(n+1)\cdot r^{-n-2}|v|^2$。 □

Lemma 14. *g 为某一函数，u,v 为上一部分所定义的两个函数，设函数族 $v+tg$ 的平均曲率为 H_{v+tg}，则*
$\frac{d}{dt}|_{t=0}H_{v+tg}$

$$=\frac{(1+|\nabla v|^2)\Delta g+2\Delta v\langle\nabla v,\nabla g\rangle-\nabla^2g(\nabla v,\nabla v)-2\nabla^2v(\nabla v,\nabla g)}{(1+|\nabla v|^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3\overline{H}}{1+|\nabla v|^2}\langle\nabla v,\nabla g\rangle.$$

Proof. 直接计算即可。 □

由于 $y_i\to O$，我们可以不妨假设 y_i 到 O 的距离不超过 1，我们设 $D_i=B_{|y_i|}(y_i)$，以及定义 $g_i:\overline{D_i}\setminus\{y_i\}\in\mathbb{R}$ 为 $g_i(y)=g_0(y-y_i)-g_0(|y_i|)$，则我们有

Theorem 15.

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}H_{v+tg_i}\geq\frac{1-2n\{|\nabla v|+|\Delta v|+|\nabla^2v|+\overline{H}\sqrt{1+|\nabla v|^2}\}|\nabla v|}{(1+|\nabla v|^2)^{\frac{3}{2}}}\Delta g_i.$$

Proof. 首先由 Cauchy 不等式知 $\frac{d}{dt}|_{t=0}H_{v+tg_i}$

$$\geq\frac{(1+|\nabla v|^2)\Delta g_i-\nabla^2g_i(\nabla v,\nabla v)-\{2|\Delta v||\nabla v|+2|\nabla^2v||\nabla v|+3\overline{H}|\nabla v|\sqrt{1+|\nabla v|^2}\}|\nabla g_i|}{(1+|\nabla v|^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

由于 $|v|^2\Delta g_0-\nabla^2g_0(v,v)\geq-\frac{n-1}{2}|v|^2\Delta g_0$ 以及 $|\nabla g_0|\leq\frac{n}{2}\Delta g_0$，我们随即得到：

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}H_{v+tg_i}\geq\frac{(1-\frac{n-1}{2}|\nabla v|^2)\Delta g_i-\frac{n}{2}\{2|\Delta v|+2|\nabla^2v|+3\overline{H}\sqrt{1+|\nabla v|^2}\}|\nabla v|\Delta g_i}{(1+|\nabla v|^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

稍加整理并且进一步放缩即可得到所需不等式。 □

注意到在 O 的附近，$\{|\nabla v|+|\Delta v|+|\nabla^2 v|+\overline{H}\sqrt{1+|\nabla v|^2}\}$ 有一个一致上界 C，我们可以找到 j 使得对任何 $y\in D$，只要有 $|y|\leq 2|y_j|$，就有 $|\nabla v|\leq \frac{1}{4n\cdot C}$。此时在 $\overline{D_j}$ 中有

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}H_{v+tg_j}\geq \frac{1}{2}\Delta g_j\geq n.$$

从而存在 $T>0$ 使得在 $\overline{D_j}$ 中有 $H_{v+tg_j}>H_v,\forall t\in(0,T)$。
现在，我们离证明 Alexandrov 定理只差最后一步：

Theorem 16. 如果 ω 在 Ω 中不是开集，则 $\nabla u(O)=\nabla v(O)=0$ 这一条件不成立，即当我们假设 $\nabla v(O)=0$ 时必须有 $\nabla u(O)\neq 0$，进而我们可以说明 ω 在 Ω 中必须是开集。

Proof. 我们注意到，由于之前选定的 y_j 满足 $u(y_j)>v(y_j)$，故可以找到 $\varepsilon\in(0,|y_j|)$ 使得

$$\min_{y\in\partial B_\varepsilon(y_j)}(u(y)-v(y))\geq\frac{u(y_j)-v(y_j)}{2}.$$

于是我们可以找到 $t\in(0,T)$，使得在 $\partial B_{|y_j|(y_j)}\bigcup\partial B_\varepsilon(y_j)$ 上有 $v+tg_j\leq u$。
我们应用平均曲率方程的比较定理，其中 $D_0=B_{|y_j|}(y_j)\setminus\overline{B_\varepsilon(y_j)}$，$\varphi=u,\psi=v+tg_j$。由于 $H_u=H_v<H_{v+tg_j}$，故比较定理的所有条件均满足，我们得到在 $\overline{D_0}=\overline{B_{|y_j|}(y_j)}\setminus B_\varepsilon(y_j)$ 上都有 $v+tg_j\leq u$。
然而在 $O\in\overline{D_0}$ 处，同时有 $\nabla v(O)=0,u(O)=v(O)\ u\geq v+tg_j$，而由于 $\partial_\nu g_j(O)>0$（其中 ν 为 $\partial B_{|y_j|}(y_j)$ 在 O 处的内法向），知 $\partial_\nu u(O)>0$，从而结论得证。 □

参考文献

[1] Rafael Lopez. *Constant Mean Curvature Surfaces with Boundary.*