형식의 법칙

G. Spencer-Brown 지음

박상우, 조은하 옮김

1994년 한정판 서문

『형식의 법칙』이 영어로 처음 출판된 지 어느 덧 한 세대가 지났다. 인류의 인식도 시간에 따라 변했고, 예전에는 말할 수 없던 것을 이제는 말할 수 있다. 특히 이제는 당대의 과학적 입장에 담긴 오류, 어떻게든 외양과 실체가 다르다고 주장하는, 내가 과학적 이원론이라고 부르는 오류에 대해 언급할 수 있다..

실체를 연구함에 있어 외양 이외의 어떤 수단도 없기 때문에 정의상 양자는 동일하다. 하지만 과학자들은 그들이 서로 다르고, 한 쪽을 통해 다른 한 쪽을 '점차적으로 발견해 나간'다고 주장할 뿐만 아니라, 실체-외양에 대한 인식(awareness)(과학자들은 '의식 consciousness'과 혼동하는 실수를 하지만) 역시 이들과 다른 어떤 것이라 주장한다. 그래서 무엇이 일어나는 지에 대한 완전한 무지 속에서도 세계는 '수 백 만년 동안' '존재'할 수 있었다고 말한다. 이를 과학적 삼원론이라고 부르고자 한다. 다시 한 번 말하지만 정의상, 외양에 대한 인식이 아닌 외양은 존재하지 않고, 인식의 외양이 아닌 인식도 있을 수 없다. (예를 들어 실제 군인과 장난감 군인 사이를 구별할 수 있는 것 같은) 실제적인 것-비 실제적인 것의 척도를 외양 일반에는 적용할 수 없기 때문에, '외양으로서' 나타난 모든 것은 동등하게 실제적인 것이며 비 실제적인 것이다.

이런 잘못된 구별들을 뒤집어 보면, 우리는 삼중적 동일성이라 부를 수 있는, 실체, 외양 그리고 인식의 정의에 따른 동일성에 도달하게 된다. 존재의 모든 '벽돌들'이 어떻게 삼위일체로 나타나는 지는 놀라운 일이다. (이는 기독교의 '신성한 삼위일체'와 비견할 수 있다. 이 삼위일체는 어떻게 모든 것이 만들어지게 되었는가에 대한 우리 지각의 요약일 뿐이다) 그 모든 것이 정말로 거기에 있는 것처럼 보이게 하는 마법의 팽창 원리를 제공해주는 건 분명히 이 삼위일체다.

'거기에'라는 말이 하나의 속임수를 제공한다. 실제로는 '거기'가 존재하기

위한 ‘어딘가’는 존재하지 않는다. 어떠한 ‘때’도 존재하지 않는다. 이 모든 것은 명백한 외양에 대한 상상적 구성물이자, 매우 안정적인 형식의 발명품들이다. 여기에 삼중적 동일성의 다른 표현이 있다. 상상력(imaginability), 가능성(possibility) 그리고 실재(actuality)의 동일성.

우주는 있을 수 있을 듯한 것 그 자체다. 우주의 법칙은 가능함의 법칙이다. 석가모니는 그것을 조건적 상호생산의 연결들(the links of conditioned coproduction)이라 불렀고, 나는 지시의 산법이라 부른다. 우리는 각자 정확하게 동일한 교리, 어떤 것도 될 수 없는 것이 어떻게 무언가가 되어 나타날 수 있는가에 대해 가르친다. 여기에는 오직 하나의 방법만 존재하기 때문에, 교리는 항상 같은 것이다. 불행하게도 인간 존재는 배운 것을 모두 종교로 바꾸는 유아적 성향을 지니고 있기 때문에, 언제나 원래의 가르침은 타락하고 잊혀진다. 그래서 우리는 다시금 재발견을 시작해야만 한다.

사물은 그것이 상상되지 않는 한 가능하지 않다. 그리고 우리는 그것이 실재로 나타나지 않는 한 가능하다고 확신할 수 없다. 그래서 가능한 것은 언제나 존재한다는 것이 발견될 것이고, 그것의 실재 존재(예를 들어 헬륨이나 카본 60)는 가능성이 상상되자마자 발견될 것이다. 존재하는 것은 그것을 인식하기 위한 가설적 존재를 상상하게 됨으로써 형식적으로 구성되고, 그리고 다른 (가설적) 존재들은 다른 존재에 대한 구성을 낳는다.[1] 완전히 다른 (가설적) 존재는 완전히 다른 존재를 구성할 것이다.[2]

---

[1] 물리적 존재만이 아니라 모든 존재는 동일한 법칙에 따른다. ‘예술은 계획을 통해 만들어 지지만, 예술 작품은 계획되지 않은 존재의 외양을 가져야만 한다. 그리고 그 기반 위에서 판단돼야만 한다. 예술은 대개 의식적 법칙 없이, 계획에서는 의식적 목표 없이 상상이 그려낸 것처럼 창조된다. 단지 지적 산물로 알려지고 인식된 작품은, 그 목적에 아무리 완벽하게 적합하다 할지라도 결코 예술 작품으로 받아들여지지 않을 것이다. 의식적 반성이 전체 배열에서 작동하는 것을 보게 되면, 거기에서 빈곤함을 발견하게 된다.’ 헬름홀츠(Helmholtz), Sensations of Tone, 1877

[2] ‘행복이라는 세계는 불행이라는 세계와는 서로 다르다.’ 비트겐슈타인

"우리"는 삼중적 동일성의 요소들을 분리함으로써 하나의 존재를 만든다. 그 존재는 우리가 그것을 다시 합칠 때 멈추게 된다. 이 법칙을 분명하게 발견했던 또 한 명의 유일한 저자인 석가모니는 이런 맥락에서 다음과 같이 이야기한다. "존재는 이중성(duality)이다. 비 존재는 비 이중성(nonduality)이다"[3]

우리 모두에게 있는 어리석은 마음[4]은 이제 석가모니가 왜 '삼중성'이 아닌 '이중성'을 말했을까를 묻고 있다. 내가 해야 할 임무란 이에 대한 대답을 찾기 위해 인간다움 ('지상의 존재 earthling'라는 의미에서의 '인간')을 훈련시키는 일이고, 여기서 나에게 기대되는 것, 그리고 내가 이야기해야만 하는 것을 할 것이다. 어떤 지시도 이중성을 의미하며, 우리는 그것이 아닌 것과 함께 하지 않은 채 어떤 것도 생산할 수 없다. 그리고 모든 이중성은 삼중성을 의미한다. 어떤 것, 그것이 아닌 것, 그리고 이 들 사이에 놓인 경계. 그래서 1장에서 설명하는 것처럼 우리는 두 가지 상태를 규정하지 않고는 어떤 것도 지시할 수 없고, 세 가지 요소를 만들지 않고는 두 가지 상태를 규정할 수 없다. 이들 중 어떤 것도 개별로는 실재에, 혹은 다른 것으로부터 분리되어 존재하지 않는다. 실재에선 결코 어떤 것도 존재하지 않았고, 존재할 수 없으며 앞으로도 존재할 수 없을 것이다.

바로 이 점! 이것을 항상 알아야 한다. 어떤 다른 대답도 의미는 없다.

내가 가르치려는 모든 것은 어떤 것도 존재하지 않는다는 결과에 대한 것이다. 서구 철학자들의 영원한 오류는 어떤 정당화도 없이 무는 어떤 결과도

(Wittgenstein), Tractatus, 1922

[3] The Large Sutra, Conze, 1975

[4] 인식을 버리고 의식을 발전시킬수록 그 존재는 더욱 어리석어진다. 예를 들어 최면을 통해 돌아갈 수 있는 인식의 기억은 사실상 완전하지만, 의식적 기억은 부정확하고 깨져 있다. 서구 문명은 완전한 어리석음 속에서 의식을 발전시키고 인식을 무시해왔다. 나는 내 삶의 더 많은 시간을 이런 일면적인 교육의 파괴적인 황폐함을 없애고, 역전시키는데 사용해야만 했고, 이것이 내가 가르치고자 하는 첫 번째 원리다.

낳을 수 없다고 가정한 점이다.[5] 반대로 그것은 가능하고, 그래야만 한다. 아무 것도 존재하지 않는다는 것의 귀결 중 하나가 '이 모든' 것의 필연적 나타남이다. 문제는 없다!

이 교리의 형제, 자매가 되기를 원한다면, 연락을 바라고 같이 조직하자.

당신이 참여할 것은 타라티(TARATI)라 불리는 형제애의 단체다.

실재에서는 아무 것도 존재하지 않는다는 것을 수학적으로 증명하고 지적으로 발견하는 것은 매우 쉬운 일이다. 다만 오랫동안 잘못된 훈련을 받아왔기에, 그것을 직관적으로 느끼고 자연스럽게 수행하는 것이 더 어렵다. 타라티 수행을 통해서 얻고자 하는 것이 바로 이런 점이다.

나의 개인적인 삶은 모든 이의 그것처럼 어긋나 있다. 내 작업을 혹은 다른 이들의 작업을 의미 있게 하는 건, 나로부터 나온 것이 아니라 무에서 시작된, 마치 모짜르트의 음악처럼 자연의 그리고 무로부터 나온 결과인 자연적인, 인간의 것이 아닌 지식과 동일시했다는 점일 것이다.

Snettisham Beach, 1993, 10

---

[5] 창조가 '어떤 것'의 결과여야만 한다는 생각은 저능한 것이다. 무는 그것이 무엇이든 간에 어떤 결과을 갖는다. (보론 2. pp.127) 만일 기원에 어떤 것이 있다면, 그것은 전체적인 창조 과정을 망칠 것이다. 단지 무만이 서로 다른 외양의 끝없는 연쇄를 위한 기원을 제공할 수 있을 만큼 불안정한 것이다.

1979년판 서문

『형식의 법칙』이 1969년 4월 17일 처음 출판된 지 십여 년이 지났고, 계속적인 성공에 따라 이제 보급판에 대한 요구가 생겨났다.

이 책이 수학 교재이지 논리학이나 철학 교재가 아니라는 걸 다시 이야기하는 점을 용서하길 바란다. 비록 이 책을 응용함으로써 논리학과 철학이 많은 것을 얻을 수 있음에도 말이다. 러셀이 이 책을 지지하고 있을 때 그는 이미 논리주의적 입장을 버리고 있다. 아마도 그러지 않았다면, 그렇게 지지하지는 않았을 것이다.

여기서 논리학은 근본을 이루는 학문이 아님을 그리고 결코 그렇지 않았음이 아주 분명해졌다. 문법과 수사학과 함께 논리학은 삼학과(the trivium) 중 하나였고, 기하학, 천문학, 음악과 함께 사학과(the quadrivium)의 더 깊은 학문 영역을 구성하는 산술에 비해선 열등하다는 점은 올바르게 인식되어 왔다.

이 책에서 우리는 산술(arithmetic)을 어떤 숫자적 수단을 사용하지 않는 기하학처럼 검토할 것이고, 더욱 당황스러워 보이겠지만 산술에 대한 더 넓고 강력한 적용을 통해서, 그렇게 해서 구성된 계산으로부터 논리학의 명제들이 전적으로 파생될 수 있음이 밝혀질 것이다.

여기서 제시되는 산법(calculus)의 능력에 대한 척도이자 가장 충격적인 성공은 4색정리(the four-color map theorem)에 대한 증명에 응용한 점이다.

네 가지 색으로 칠해질 수 있는 명령은 두 개의 원시 지표를 사용해서 지시의 2차 산법의 산술로 표현할 수 있다. 일반적으로 n개의 원시 지표는 영역에 대한 2^n개의 구별되는 표식을, 그리고 경계에 대한 2^n-1 개의 지표를 가능하게 한다.

1961년 D.J. 스펜서-브라운이 원시 대수를 적절하게 수정하여 임의 평면을 네 가지 색으로 표시할 수 있는 효과적인 알고리즘을 만든 이후, 4색 추측이 참이라는 건 의심할 여지가 없게 되었다. 1976년에 스펜서-브라운의 갑작스러운 죽음 이후에, 그의 수학적 논문들 사이에서 이 알고리즘을 찾을 수 없었다.

그러나 약간 어렵기는 하지만, 그것이 기반한 산술적 조작을 재구축하는 것은 가능할 것이다. 그리고 기대하지 않게 최초의 증명임이 밝혀졌던 그 증명을 완결할 수 있을 것이다.

이 작업을 수행하게 된 주된 동기는, 아펠(Appel), 하켄(Haken)이나 코흐(Koch)가 더 오래 된 기술을 이용해 4색 추측을 증명했다고 같은 해에 주장을 하고 그 주장이 널리 출판되었기 때문이다. 잠깐 동안은 그들이 증명에 성공했을 수도 있다고 생각했지만, 출판된 자료를 꼼꼼하게 살펴본 결과 그들이 결정적 명제 하나를 증명하는데 실패했음을 깨달았다. 그들이 사용한 방법론은 100년전 켐페(Kempe)에 의한 유명한 문제 해결 시도에 기반하지만, 그 방법론은 현대적인 개선을 통해서도 적합하지 않을 것으로 보인다. 하나의 방법론이 심각한 문제를 낳는다면, 그것은 적합하지 않은 것이라 역사는 가르쳐 주고 있다.

물론 여기에는 이미 적절한 방법이 실려 있다. (xxv, 99, 100) 간단하게 말하자면, 이 책에서 상세하게 다뤄진 수학적 개념을 사용하면 4색 문제의 해법이 가능하고, 그 당시도 그렇다고 주장했었다. 세상에 그 방법을 제공했다고 해서, 내가 그 문제 자체에 그것을 적용할 것을 요구 받아야 한다고 생각하지는 않았었다.

적용에 있어 특별히 관심을 가질만한 특징은, 검토할 명령이 산술에서의 표현들에 대한 해석이 아니라는 점이다. 그것 자체가 사실상 표현이다. 상세한 설명에 대해서는 독자들은 E P. 더튼(Dutton)에서 출판된 나의 『4색 정리의 최초 증명 (The First Proof of the Map Theorem)』을 참조할 수 있을 것이다.

G. 스펜서-브라운

영국 케임브릿지

미국 샌프란시스코

1978, 8월

미국판 서문

너무 쉬워 전혀 어렵지 않게 처리할 수 있는 대학 수준의 표준적 논리학 문제를 제외한다면, 이 책에서 제시된 산법에 있어 수학적 관점에서 가장 주목할만한 부분은 논리의 대수에서 복소값(complex value)을 사용하는 부분이다. 이것은 일반적 대수에서의 복소수 $a + b\sqrt{-1}$ 와 유사하다. 무엇인지 깨닫지 못한 채 동생과 나는 몇 년 동안이나 실용적인 공학 영역에서 부울(Boole) 대수를 대신해 사용해 왔다. 물론 그것이 무엇이건 완벽하게 작동해 왔지만, 마치 수학자가 최초로 음수의 루트 값을 사용할 때 느꼈던 죄책감 같은 것을 사용하면서 느껴야 했다. 당시의 수학자들은 인정받을 만한 학문적 의미를 부여할 수 있는 적합한 방법을 찾지 못했기 때문이다. 마찬가지로 우리도 만일 생각할 수만 있다면, 복소값의 사용에 있어 근거가 될 수 있는 완벽하게 좋은 이론이 있을 것이라 확신했다.

단순하게 말하자면 다음과 같다. 일반 대수에서 복소값은 당연한 것으로 받아들여지고, 더 발전된 수학적 기법들은 복소값 없이 불가능하다. 부울 대수(그리고 예를 들어 모든 우리의 추론 과정에서)에서는 그것을 금지된다. 화이트헤드(Whitehead)와 러셀(Russel)은 금지를 위해 유형 이론(Theory of Types)이라 부르는 특별한 규칙을 도입했다. 이제서야 밝혀진 것처럼 그것은 잘못된 것이다. 그래서 이 영역에선 더 발전적 기술이 가능함에도, 아직까지도 존재하지 못한다. 현재 우리는 추론 과정에 있어 아리스토텔레스 시대에 사용했던 방법 그대로 제한되어 있다. 시인 블레이크(Blake)는 이에 대한 영감을 제시했다. 1788년 그는 '이성, 혹은 이미 알고 있는 모든 것들의 비율은, 더 많이 알게 되었을 때 그래야 할 것과 같지 않다'고 썼다.

유형 이론에 대한 연관성을 떠올려 보면, 그것이 불필요하다는 증명을 가지고 찾아갔던 1967년 당시 러셀은 그 문제 때문에 당황하고 있었다. 나의 대책에 대해 그는 기뻐했다. 그는 유형 이론이 그와 화이트헤드가 해야만 했던 가장 자의적인 것이었으며, 이론이라기보다는 임시방편이었고, 문제가 해결되는 것을 볼 수 있을 만큼 오래 살 수 있어 다행이라고 이야기했다.

가능한 간단하게 이야기하자면, 해법은 다음과 같다. 유형 이론에서 배제된 재귀적 역설이, 일반적인 방정식 이론에서 당연하게 받아들여지는 동일한 재귀적 역설들보다 더 문제가 되는 것이 아니라는 점을 보이는 것이다.

논리학에서 가장 유명한 역설은 “이 진술은 거짓이다”라는 진술이다.

어떤 진술이 세 가지 범주, 참, 거짓, 의미 없음 중 하나가 된다고, 그리고 참이 아닌 의미 있는 진술은 거짓이어야만 하고, 거짓이 아닌 진술은 참이어야만 한다고 가정해보자. 검토해야 할 진술은 의미 없는 것처럼 보이지는 않고 (어떤 철학자들은 의미 없다고 주장하기도 하지만 이를 부정하기란 쉽다), 그래서 반드시 참이거나 거짓이어야만 한다. 만일 참이라면, 그것은 말 그대로 거짓이어야만 한다. 그러나 만일 거짓이라면, 말한 것 때문에 그것은 참이 된다.

일반 방정식 이론에서 동일한 악순환적인 역설이 있다는 것은 여태껏 주목되지 않았다. 왜냐하면 우리는 주의 깊게 그것을 다루는 것을 피해왔기 때문이다. 이제 그것을 해보자.

위와 유사한 가설을 만들어 보자. 먼저 하나의 숫자는 음, 양 그리고 0이어야만 한다고 가정하자. 나아가서 양수가 아닌 0이 아닌 숫자는 음수여야만 하고, 음수가 아니면 양수여야만 한다고 가정하자. 이제 다음과 같은 방정식을 생각해보자.

$$x^2 + 1 = 0$$

전치를 하면,

$$x^2 = -1$$

이고, 이제 두 변을 x로 나누면

$$x = \frac{-1}{x}$$

이 된다.

이것이 (논리학에서의 유사한 진술처럼) 재귀적임을 볼 수 있다. 우리가 찾

아야 하는 x의 루트 값은 우리가 찾아야 하는 것으로부터 이 식으로 다시 투입되어야만 한다.

간단하게 살펴보면 x는 절대값 1이 되지 않으면 숫자에서 균형을 이룰 수 없음을 볼 수 있다. 이제 두 가지 절대 값 1의 경우, +1, -1을 가정해보고, 그것을 차례대로 검토해보도록 하자. 먼저 x = +1이라 하자. 이렇게 한다면

$$+1 = \frac{-1}{+1} = -1$$

이고 이는 분명하게 역설적이다. 이제 x = -1이라 하면, 이제

$$-1 = \frac{-1}{-1} = +1$$

이 되고 마찬가지로 역설적이다.

물론 모두가 아는 것처럼 이 경우의 역설은 네 번째 범주의 숫자인 허수(imaginary)를 도입함으로써 해결되었고, 이제 우리는 위의 등식의 루트가 $\pm i$이고, i는 -1의 루트 값의 새로운 종류의 절대값이라고 말한다.

11장에서 우리가 보이고자 하는 것은 이 개념을 부울 대수로 확장하는 것이다. 그것은 유용한 주장이 진술의 세가지 종류, 참, 거짓, 의미 없음만이 아니라 네 번째 종류인 상상 상태(imaginary)를 지닐 수 있다는 것을 의미한다. 이것은 논리학, 철학, 수학 그리고 물리학에까지 심원한 함의를 지닌다.

상상 상태라는 부울 값에서 매력적인 점은, 우리가 그것을 인정하자마자 분명히 물질과 시간에 대한 우리의 개념들을 새롭게 조명할 수 있다는 것이다. 세계가 왜 지금처럼 나타났는가에 대해 궁금해 하는 것은 우리 모두의 본성이라고 생각한다. 왜 세계는 더 균형 잡힌 모습으로 나타나지 않을까 같은 궁금증 말이다. 이제 이 책에서 논의를 발전시켜 감에 있어 친절하고 인내심 있게 나와 함께 한다면, 아무리 균형 잡힌 모습으로 시작할 지라도, 우리가 나아감에 따라 그 본성상 점점 덜 균형 잡힌 모습이 되리라는 것을 보게 될 것이다.

G. 스펜서-브라운

케임브릿지, 잉글랜드

1972년 세족 목요일

머리말

이 책에서 수행하는 탐구는 1959년 말 시작되었다. 초반 단계에서 러셀 경이 보여주었던 우정과 격려를 통해서 이어지는 작업 동안 많은 도움을 얻었다. 그는 내가 하고자 했던 것이 어떤 가치를 지니는 지 알아 볼 수 있었던 초기의 몇 되지 않던 사람 중 하나였다. 마찬가지로 작업 후반부에선 케임브릿지 대학 수학 교수이자 유니버시티 칼리지의 선임 연구원이었던 J C P 밀러(Miller) 박사의 친절한 도움에 빚을 졌다. 그는 계속해서 인쇄 교정지 뭉치를 읽어주었을 뿐만 아니라, 최고의 멘토이자 가이드 역할을 해주었고, 책과 내용에 있어 스타일과 정확성을 발전시킬 많은 제안을 주었다.

1963년 런던 대학 외부 교육 기관의 물리학 강사인 H G 프로스트(Frost)로부터 논리 수학에 대한 강의 요청을 받았다. 이후 이 강의는 확대되어, 고든 스퀘어(Gordon Square)의 컴퓨터 공학 연구소에서 매년 반복해 진행되었다. 그리고 이를 통해 이 책 주석과 보론에 해당하는 내용을 얻을 수 있었다. 강의를 들었던 학생들의 도움을 통해 책을 확장하고 더 정확하게 할 수 있었다.

더 많은 도움이 있었지만, 안타깝게도 모두 언급할 수는 없다. 이 중에서도 출판사(그 독자들이나 전문적인 기술자들을 포함해서)는 특히 협조적이었다. 교정 단계뿐만 아니라, 그 이전에 피터 브랙(Peter Bragg) 여사는 타자본을 준비하면서 매우 정확하게 일을 수행하였다. 끝으로 이 작업에 대한 추진력은 사이몬-MEL 디스트리뷰션 엔지니어링 사의 책임자였던 I V 아이델슨(Idelson)으로부터 얻었다. 여기서 기록된 기법은 맨 처음 논리 문제의 측면에서 발전된 것이 아니라, 공학에 있어 해결되지 않는 문제를 풀기 위해 발전시켰다.

리치몬드, 1968 8월

서론

이 책의 기본적 의도는 논리 대수라 알려진 것을, 논리학의 주제로부터 떼어내어 수학에 맞춰 재조정하는 것이다.

오늘날에는 대수가 지닌 특징에 대한 설명에서, 대수에서 사용되는 산술과 수학 사이에 어떤 관련도 나타나지 않는다. 그래서 일반적으로 부울(Boole) 대수라 알려진 논리 대수는 신비해 보인다. 모든 대수는 산술을 지닌다. 하지만 부울은 자신의 대수를 논리학에 맞도록 디자인했고,[6] 따라서 부울 대수는 논리에 대한 하나의 해석이지 논리에 대한 산술은 확실히 아니다. 이후의 저자들도 이런 면에선 부울을 따랐다. 결과적으로 지금 부울의 이름이 붙여진, 일상에서의 (논리) 대수가 지닌 원시, 비수리적 산술을 설명하거나 연구하려는 지속적인 어떠한 노력도 이뤄지지 않았다.

약 칠 년 전, 이에 대한 연구가 필요하다는 것을 처음으로 알게 되었을 때, 수학에 있어 전인미답의 지점에 서있음을 발견하게 되었다. 그 잃어버린 원리를 발견하기 위해선 그 내부를 탐험해야만 했다. 이제부터 보게 되겠지만 그 원리는 거대한 깊이와 아름다움을 지니고 있다.

이에 대한 설명을 적어나가면서, 가능한 모든 전문적 개념을 맥락 안에서 정의하거나 분명히 하고자 했다. 그리고 독자는 언어, 계산 그리고 어떻게 숫자를 표시하는가에 대한 지식 이상은 가지고 있지 않은 것으로 가정했다. 보다 기술적인 문제에 대해서는 서문과 책 뒤에 실린 주석, 보론 에서만 다루고자 한다. 그러나 일반적 관심 주제이기에 여기에서도 가능한 한 비전문가도 충분히 이해할 수 있도록 노력했다.

부울 대수에 대한 설명은 몇 가지 공준들(postulates)의 집합에 기반한다. 우리는 공준을 증명 없이 받아들일 수 있는 진술로 생각하곤 한다. 왜냐하면 이런 진술이, 믿기 편리한 다른 진술들을 이끌어 낼 수 있도록 해주는 진술들

---

[6] George Boole, The mathematical analysis of logic, Cambridge, 1847

의 집합에 속하기 때문이다. 이런 진술을 나타내 주는 주된 특징은, 자명하게 진리임을 알 수 있는 그런 외양을 거의 완전하게 결여하고 있다는 점이다.[7] 예를 들어 아무도 쉐퍼(Sheffer)의 등식들[8]을 수학적으로 명백하다고는 할 수 없다. 왜냐하면 등식의 명백함은 그로부터 나온 등식의 유용성을 떼어놓고 보면 분명하지 않기 때문이다. 하지만 이 책에서 발전시킨 원시 산술에서의 발단 등식들은 매우 단순한 두 개의 지시 법칙을 대표한다. 이 법칙들은 그것을 얼마나 자명한 것으로 보는 가에 상관없이, 적어도 상식적 결과에 의존한다. 그래서 보론 1에서, 처음으로 분명하게 쉐퍼의 공준들 각각에 대해, 그리고 부울 대수의 모든 공준들에 대한 증명을 굳건한 수학적 기반 위에 있는 공리 체계에 대한 정리로서 제시하고자 한다.

이 기본적인 바탕으로부터 작업을 진행함으로써, 오늘날 우리가 알고 있는 수학적 커뮤니케이션의 일반적 형식은 진행 과정에서 대단히 자연스럽게 발전될 것이다. 우리는 유한의 체계를 가지고, 그 부분들에 이름을 붙이며, 많은 경우 각각의 이름을 나타내는 하나의 상징을 사용할 것이다. 이 과정에서 표현의 형식들이 필요에 따라 필수불가결하게 요청될 것이다. 정리에 대한 증명들은, 처음에는 가능성의 전체 영역에 대해 상대적으로 비형식적 방향에서 접근하는 것에 불과해 보이지만, 우리가 우리들의 독창적인 개념에서 나아감에 따라 점차 현저하게 간접적이고 형식적인 것이 된다. 대수의 중간 지점에서, 그것의 표현적 완전성 속에서 산술에서는 인식될 수 없는 것들이 발견된다. 그리고 바로 그 순간에 그 자체에 대한 기술의 의도를 설정하지 않고서도, 이미 충분하게 형식성과 가능성을 알고 있는 그 지점에서 작업을 시작하게 된다.

이런 표시의 형식이 지닌 장점 중 하나는 상식으로부터 분명하게 단절되지 않고도 수학적 개념과 절차의 공통 형식들을 점차적으로 구축할 수 있다는 것이다. 수학은 다른 어떤 것과 비교해서도 세계의 구조에 대한 우리의 내적 지식을 드러내는 가장 강력한 방법이며, 단지 그를 통해서만이 추론과 계산이라

---

[7] Alfred North Whitehead and Bertrand Russell, Principia mathematica, Vol.1, 2nd edition, Cambridge, 1927, p v

[8] Henry Maurice Sheffer, Trans. Amer. Math. Soc., 14(1913) 481-8.

는 우리의 일반적 능력과 연결된다.

그렇지만, 수학적 관례와 정식화의 단계적인 발전은 언제나 역의 측면에서 문제를 가지고 있다. 수학적 훈련을 받은 사람은, 그 뿌리에 대해서 묻지 않고 자동적으로 모든 기술적 범위들을 사용할 수 있는데, 시연의 앞 부분에선 어려울 것이다. 거기에선 이미 알고 있는 수학적 도구들을 사용하여 하나의 생각을 발전시킬 필요가 있다. 이런 경우에선 이미 발전된 절차와 기술이 적용될 수 있는 개념을 추출할 필요가 있다. 그 지점에서 매우 우아한 논의는 아마도 개념적으로는 따라잡기 어려울 수 있을 것이다.

2장에 그런 경우가 있는데, 지시의 산법의 두 개의 원시 등식 중 두 번째 식의 유도다. 이 지점에서 논의를 따르는 건 일반적으로 어려운 일로 보인다. 이 부분에 대해서는 책의 끝에 있는 2장에 대한 주석에서 덜 우아한 형태로 다시 살펴본다. 이 부분만 지나면, 논의는 너무 단순해서 수학적으로는 거의 아무 문제도 없다. 하지만 책의 엄격한 절차에 따라서 이미 적용한 다른 원리를 통해 요청되거나 정당화되지 않는 한, 어떤 원리도 사용할 수 없다는 점은 기억해야만 한다. 이 특별한 상황들에 대해서, 우리는 정상적 대치를 통해 논의를 쉽게 하였다. 하지만 책에서 두 번째 원시 등식을 정식화할 필요가 있는 곳에서 아직 대치의 원리가 요청되지 않았고, 따라서 책의 뒷부분에서 나올 대치의 사용이나 정당화는 우리가 만들어야 할 그 등식 자체의 존재에 의존하게 된다.

보론 2에선 논리학의 대수로서 원시 대수를 사용하여 만들어 지는 단순화에 대해 간략하게 설명한다. 예를 들어 원시 명제는 없다. 우리는 다른 논리학의 대수를 받아들이지 않고, 언제라도 필요하면 산술에 접근할 수 있는 기본적 자유를 지니고 있기 때문이다. 그래서 화이트헤드와 러셀의 다섯 가지 원시 함의[2, pp 96-7] 각각은 하나의 상수와 수학적으로 등치될 수 있다. 그것이 하나의 명제라면, 그 상수는 유일한 원시 함의여야만 한다. 그러나 사실 산술적으로는 그것은 하나의 명제를 나타낼 수 없다.

이 연관에 있어 흥미로운 점은 연산적 상수의 개념에서 나온 변수 개념의 발전이다. 이는 대수가, 외견과 혹은 달리 말하자면 어떤 특정한 위치에서의 상수와 관계 없이도 산술적 등식의 형식을 고려할 수 있는 우리의 능력을 대

변한 데서 비롯된다. 그리고 원시 산술에서 분명히 5, 6 등과 +, x처럼 두 종류의 상수를 제시하지 않고, 분명하게 하나의 단일한 속성을 가진 동일한 상수들로 구성된 표현들을 사용했기 때문에 변수의 개념은 이 속성과 관계 없는 존재 혹은 부재로부터 발생한다. 이는 비트겐슈타인이 제시한 것처럼[9] 명제의 계산에서 변수는 사실상 하나의 표현에서 명제를 대표하는 것이 아니라, 단지 이 명제의 진리함수일 뿐이라는 견해를 지지한다. 왜냐하면 명제들 자체는 결코 어떤 주어진 특성의 단순한 존재 혹은 부재와 등치되는 것이 아니라, 그것의 참 혹은 거짓일 가능성과 등치되기 때문이다.

또 다른 흥미로운 점은 원시 대수와 산술 사이의 분명한 구별이다. 이는 정리의 증명과 귀결의 시연 사이에 설정될 수 있다. 정리와 귀결의 개념은, 그리고 증명과 시연의 개념은 대부분의 문헌에서 널리 혼동되고 있다. 그런 문헌에서는 두 개념이 서로 바꿔 쓰이기도 한다. 의심할 바 없이 이것은 비논리적인 난점들을 만든다. 원시 대수(정리 17)의 완전성에 대한 진술에서 보게 되겠지만, 구별이 적절하게 유지될 때에야 무엇이 증명되어야 하는가가 매우 분명해진다. (동일한 혼란은 기호논리학에서 공리와 공준 개념에서도 분명하게 발견된다.)

원시 대수는 확장되어 제한된 범위의 (혹은 완전히) 숫자의 대수로서도 사용될 수 있다. 여기에는 몇 가지 방법이 있다. 생각하기에 가장 편한 방법은 산술에 있어 압축을 제한하고, 따라서 대응하는 숫자 혹은 그것의 상(image)를 표현하기 위해 임의의 공간에서 일정한 숫자의 월경을 사용하는 것이다. 이렇게 되면, 괴델(Güdel) 과 처치(Church)의 결정 정리에 대한 증명을 쉽게 볼 수 있을 것이다. 그러나 11장에서 살펴볼 역설적 등식의 재진입에 있어서는 이런 정리들의 의미와 적용은 검토해볼 필요가 있다. 역설적 등식들은 이전에 가정되었던 것보다는 확실히 덜 파괴적으로 보일 것이다.

이 교재를 통해 각 단계에서 등장하는 모든 형식을 충분히 이해할 수 있을 때까지 발전시키고자 한다. 비록 11장에서는 복잡한 형식들로 확장하겠지만,

---

[9] Ludwig Wittgenstein, Tractatus logico-philosophicus, London, 1922, 명제 5 참조.

설명을 완벽하게 전달하는 한에서 전개를 제한하려고 시도하였다.

대부분의 정리들은 최소한 정리로서는 독창적이고, 그래서 증명 역시 새롭다. 그러나 각 단계에서 익숙한 기반 위에 제시되는 뒷부분의 어떤 대수적인, 혼합된 정리들은 이미 알려졌고, 다른 형식을 통해 이미 증명된 것이다. 이 모든 경우에 더 분명하고, 단순하고, 직접적인 증명을 찾을 수 있었고, 대부분의 경우 내가 증명한 정리들이 더욱 일반적이었다. 예를 들어 나의 정리 16에 가장 가까운 접근은 콰인(Quine)에 의한 증명이다. 분명히 콰인에 의해 최초로 명제 계산의 완전성 증명에 대한 보조정리(lemma)로써 증명되었던 증명이다.[10] 하지만 나의 증명보다는 더 약하고 덜 중심적 정리로 보인다. 부울이나 그 밖의 대수 등 모든 가능한 대수에 대해서 정리가 참이 될 수 있도록 해주는 아름다운 열쇠를 발견한 것은, 2년에 걸쳐 이 정리를 보완한 이후였다.

증명을 하면서, 종종 수학과 정신분석 이론 사이의 명백한 연관성에 매우 놀라곤 한다. 각각의 학문을 통해 우리는 사색, 상징적 표현, 통합, 전달 등을 뒤섞어서, 우리가 이미 아는 것을 발견하고자 한다. 다른 형식의 자기 분석인 수학에서는, 보고 있는 것이 무엇인지 알기 위해 물리적 세계를 탐구할 필요는 없다. 예를 들어 곱셈과 나눗셈만 할 수 있다면 10살짜리라도 소수의 연쇄에는 끝이 없다는 것을 이미 알 수 있다. 그러나 만일 유클리드의 증명을 보지 못한다면, 그는 죽기 전까지 그가 아는 것을 결코 발견할 수 없을 것이다.

이런 유비는 원형적 구조로서의 수학적 형식에 대해 우리가 직접적 인식을 가지고 있음으로 보여준다. 마지막 장에서는 이런 인식의 본질에 대해 그리고자 한다. 어떤 경우에는 순수한 가능성의 문제만이, 수학을 통해서 어느 정도의 직접적 인식이 드러날 수 있다는 것을 우리에게 깨닫게 할 것이다.

증명할 수 있건 아니건 진술의 수는 무한하다는 것을, 충분히 큰 유한한 샘플을 취하면 어느 정도의 유용한 의의를 지닌 거짓 진술이 참 진술보다 훨씬 많다는 것이 자명함을 받아들일 수 있다. 그래서 올바름에 대한 선천적 감각이 없다면, 원리상 수학자가 증명하려 시도하는 것은 참 진술보다는 거짓

[10] W. V. Quine, J. Symbolic Logic, 3(1938) 37-40.

진술이 더 많을 것이다. 그러나 실제로는 미리 진리를 확신하지 않는다면, 어떤 진술도 증명하려 시도하지는 않을 것이다. 그리고 그가 아직 그것을 증명하지 않았기 때문에, 그의 확신은 우선적으로는 증명이 아닌 다른 통찰에서 생겨날 것이다.

그래서 증명 절차 혹은 어떤 다른 직접적인 과정에 대한 성문화(codification)는 비록 처음에는 유용하지만, 나중에는 더 나은 발전에 위협이 될 수도 있다. 예를 들어 우리는 대부분 무의식적으로, 하지만 지금은 성문화된 형태로 부울리안 방정식의 해법에 대한 증명 구조의 (계산과는 구별된 것으로서) 추론 부분을 1차로만 제약하고 있다. 11장과 그에 대한 주석에서 보겠지만, 고차 방정식의 해법이 가능할 뿐만 아니라, 거의 반 세기 이상 임기응변적인(ad hoc) 방식으로 스위치 기술자(switching engineer)들에 의해 수행되어 왔다. 이런 방정식들은 현재까지 화이트헤드-러셀의 계형 이론에 의해 정상 논리의 주제에서는 배제되었다. [2, pp. 37 참조, 또는 p.77]

이 책에서는 홀수 혹은 짝수의 심도에서 자신의 공간으로 재-진입(re-enter)하는, 자기자신에 대한 내포 함수를 구축할 수 있다. 전자의 경우에는 위의 저자들이 다뤘던 자기 부정(self-denying) 등식의 가능성을 발견한다. 그런 경우 그렇게 설정된 등식의 루트 값은 상상적(imaginary)이다. 그러나 후자의 경우에는 어떤 주어진 변수의 조건에 대해, 두 가지 실 루트 값을 가진 자기확증적(self-confirming) 등식을 발견한다.

이런 검토에 의해 계형 이론에 의해 지금까지 폐기되었던 형식적 구조를 복귀[11]시킬 수 있다. 지금 본 것처럼, 그 구조는 더 일반적인 방정식 이론에서도 정의될 수 있고, 그 밑에는 이미 중요한 수학적 경험들이 존재한다.

더 많은 관심을 기울여야겠지만, 이런 복귀에 대한 전망은, 비록 부울리안

---

[11] 논리적이라기 보다는 수학적 기반 위에서 폐기되어진 어떤 것들의 복귀에 대해 다룬 초기 에세이들의 역사에 대해서는, Abraham A Fraenkel, Yehoshua Bar-Hillel, Foundations of set theory, Amsterdam, 1958, pp.136-95.

1차 방정식이 평면 위에선 충분히 시연될 수 있지만, 2차 방정식은 그렇지 못하다는 점에서 비롯된다. 일반적으로 k차수의 방정식은, 그 시연에 있어 k-1류의 평면을 필요로 한다. D. J. 스펜서-브라운과 나는 1962~5년에 걸친, 출판되지 않은 작업을 통해 4색 정리와 골드바흐(Goldbach)의 정리 모두가, 부울리안 1차 방정식에 제한된 증명 구조에서는 결정되지 않지만, 더 높은 차수의 방정식이 가능하다면 결정될 수 있음을 보여주는 증명을 찾았다.

현재 작업을 발전시키게 된 동기 중 하나는 수학을 통해 표현된 우주에 대한 우리 지식의 내적 구조와 물리학으로 표현되는 외적 구조에 대한 탐구를 함께 묶을 수 있다는 희망이었다. 아인슈타인(Einstein)이나 슈뢰딩어(Schrödinger) 그리고 다른 사람들의 작업은 인식을 위한 매체의 형식 안에서 물리적 지식의 궁극적 경계를 실현하려는 것으로 보인다. 만일 인식의 공통적 경험 혹은 우리가 내적 세계라 부를 수 있는 것에 대한 사실들이 반대로 우리가 외부 세계라 부르는 것에 대한 확장된 연구에 의해서 드러날 수 있다면, 마찬가지로 이 내부 세계의 확장된 연구는 다시 우리가 외부 세계에서 처음으로 만나게 된 것들을 드러낼 수 있을 것이다. 왜냐하면 우리가 한쪽 편 혹은 다른 쪽 편에서 접근하는 것은 이 양자 사이에 놓인 공통의 경계이기 때문이다.

내가 이것을 아주 많이 밝혔다거나 혹은 다른 이들이 그것을 더 많이 수행할 수는 없다고 말하려는 건 아니다. 나는 다른 이들이 더 많이 밝혀나가길 바란다. 이 책을 쓸 때 나의 의식적인 의도는 지시의 산법에 대한 해명이고, 이 의도의 실현이 충분히 진행되었을 때 비로서 드러난 그 잠재적 힘은 나를 놀라게 했다.

물리 세계에 대한 기본적 사고들과의 연관이 더욱 강하게 시야에 들어온 순간, 다시 말해 1차보다 높은 차수의 방정식을 통해 3차원적 표현으로 들어가는 순간에 설명을 중단했다. 글을 쓰기 전부터, 여기에서 멈추려 했었다. 왜냐하면 바로 이 원시적 형식으로부터의 네 번째 출발점(혹은 우리가 공the void을 따진다면 다섯 번째 출발)에서 나오는 잠재적 형식들은 너무 많고 다양해서, 흥미롭더라도 한 권의 책에 모두 담기를 바랄 수는 없었다.

메다와(Medawar)는 정상적인 과학 논문에서 요구되는 설명의 표준적 형식

은 연구자가 하는 일과 정확하게 거꾸로라는 것을 관찰했다.[12] 현실에서 가설이 먼저 설정되고, 그리고 그것을 매개로 해서, 그렇지 않았다면 가려졌을 사실들이 처음으로 분명하게 보이게 되며, 후에 사실들은 그 가설을 지지하기 위해 수집된다. 하지만 논문에서 설명할 때는 사실들이 가설을 제시한다는 인상을 주기를 바란다. 정말로 설명적인가 아닌가는 관계없이.

수학에서 우리는 이것과는 반대되는 과정을 보게 된다. 수학자들은 일반적으로 인정하는 것보다 더 자주, 실험, 가설의 발명과 제시된 것에 대한 추론과 계산을 통해 적합한 지를 살펴 보기 위해 가설을 검토한다. 가설이 적합하다는 것을 알게 되면, 가설로부터 사실을 연역한 것처럼 작업에 대해 순서가 거꾸로 된 설명을 출판하고자 한다.

어떤 영역에선 그러지 말아야 한다고 말하려는 건 아니다. 모든 설명에 있어, 이야기를 거꾸로 진행하는 것은 편리할 뿐만 아니라 시간을 절약해준다. 그러나 그 스토리가 실제로 거꾸로 진행된 척하는 것은 매우 이상한 일이다.

이 분명한 역전에 대해, 랭(Laing)은 실증과학에서 '*데이터*'라고 불리는 것이 실제 의미에서는 이미 형성된 가설의 성격에 따라 *자의적*으로 선택된 것이기 때문에, '캅타(capta)'라고 불리는 것이 더 정직할 것이라 주장했다. 역의 유비를 사용해 보자면, 수학적 사실은 처음에는 자의적으로 선택된 것처럼 보이고, 그래서 *캅타*지만, 결코 자의적인 것은 아니라 우리 존재의 본성과 일관성에 의해 절대적으로 결정되는 것이다. 이런 점에서 수학적 사실은 경험의 진정한 *데이터*라고 생각할 수 있을 것이다. 왜냐하면 단지 이것만이 최종적 분석에서 불가피한 것으로 나타나기 때문이다.

최선을 다해서, 이 책 자체에서 그렇게 불가피한 것, 그래서 영원한 것을 지키고, 일시적인 것은 폐기하려고 했지만, 결코 각각의 설명에 있어서 완전하게 성공했을 것이라는 환상을 가지고 있지는 않다. 누구도 이런 작업을 완벽하게 수행할 수는 없기에, 결코 어떤 형식에서도 *개별 존재(particular existence)*

---

[12] P. B. Medawar, Is the Scientific Paper a Fraud, The Listener, 12th September 1963, pp.377-8.

의 상태는 불완전성을 보이게 될 수 밖에 없는 것으로 보인다. (보론 2를 참조) 아무리 저자가 자신의 에고를 자신의 과거와 자신의 작업이 위치하게 될 미래 사이의 균형보다는 현재의 유행에 맞춰 의상을 입히더라도 그가 사람인 이상 어느 정도는 특유의 색을 갖게 된다. 이런 점에서 유행을 따르는 것은 필연적으로 중용이나 의미를 훼손시킨다. 그렇게 되면 고려해야만 할 주변적인 것과 당연하게 받아들이는 중심적인 것과의 연관을 잃어버린다.

수학적 언어의 주된 측면은 형식성의 정도가 높다는 것이다. 비록 수학에서는 실제로 이야기되는 것을 짧게 나타낼 수 있도록 해주는 것이 사실이지만, 이것은 이야기의 반에 불과하다. 거기에 더해 경험의 일상적 언어가 근거할 수 있는 보다 일반적인 형식을 제공하고자 한다. 다른 주제와 공통적인 것을 고려하는 것으로 확장하지 않고, 하나의 주제에만 제한하는 한, 진정한 수학적 표현 양식은 얻을 수 없다.

수학을 관통하는 건 주어진 상태에서의 시야를 그것을 넘어선, 이전까지는 불분명했던 새로운 시야로 초월하는 것이다. 현재의 존재가 의미를 멈출 때, 그 형식의 실현을 통해 다시 의미가 생겨날 수 있다.

그래서 기호적으로 처리되는 논리학의 주요한 문제는, 논리학의 기반에만 제한하는 한 수학적 연구가 될 수 없다. 그것은 끝 없는 과정 속에서 더 일반적인 형식의 한 부분으로 그 기반을 인식할 때야만 가능하다. 수학적 처리란 일상적 삶의 경험에 대해 우리가 이야기하는 방식들이 담길 수 있는 바로 그 형식에 대한 처리다. 여기서 기록하고자 하는 것은 논리학의 법칙이라고 보다는 바로 이 형식의 법칙이다.

그 과정에서 법칙을 전달하기에 충분한 방법을 결정하기 보다는, 법칙 자체에 접근하는 편이 훨씬 쉽다는 것을 알게 되었다. 일반적으로 법칙이 보편적이면 보편적일수록, 어떤 특별한 양식으로 표현하는 것은 더욱 어려워 보인다.

글을 쓸 때와 마찬가지로, 책의 앞 부분을 읽는 데 분명히 어려움이 있을 것이다. 5장에서 거꾸로 살펴보면 언어가 커뮤니케이션을 위한 도구로서 정상적으로 기능하기를 멈추는 단순성의 지점을 통해서, 그리고 그것을 넘어서 분석을 확장하고 있기 때문이다. 사실 이 정상적 언어 사용으로부터 단절이 발

생하는 지점은 통상 대수가 시작되는 지점이다. 이 지점을 넘어서 그것을 더 뒤까지 확장하기 위해서는 현재의 기술(descriptive) 구조를 의식적으로 잊어버려야 할 필요가 있다. 잊어버리지 않는 한 그 구조는 현실에 대한 오해를 낳을 것이다.

한 권의 책에서 단어와 기호들이 지금껏 감춰왔던 것을, 바로 그 단어와 기호를 통해 표현해야만 한다는 사실은 저자나 독자 모두에게 매우 특별한 자질을 요구한다. 그리고 나는 작가로서 그 점에서 얼마나 불완전한 지에 대해 인식하고 있다. 그러나 적어도 이 임무를 수행하는 과정에서, 내가 말하려 하는 것이 나나 다른 어떤 사람에 있어서도 개인적 차원의 것은 아님을 알게 되었다. (부울 자신도 알게 되었던 것처럼) 말하자면 그것은 스스로를 기록하는 것이며, 그 기록에 어떤 결점이 있더라도, 그렇게 기록되었다는 사실은 개인적인 의견의 문제는 아니다. 이 작업에서 내가 받을 수 있다 느끼는 유일한 명예라면, 신이 허락한 만큼 이 임시적 형태 속에서 이해하기 쉽도록 기록들을 모으고, 일관되게 정리하는 도구로써 일할 수 있었다는 점이다.

런던, 1967년 8월

수학적 접근에 대한 주석

이 책의 주제는 하나의 공간이 잘리거나 나뉠 때 우주가 생겨난다는 것이다. 살아있는 유기체의 피부는 내부로부터 외부를 분리한다. 평면 위에 있는 원의 원주도 마찬가지다. 그 절단을 나타내는 방법을 따름으로써, 거의 기괴해 보일 정도의 정확함과 포괄성을 가지고 언어학, 수학, 물리학, 생물학에 깔린 기초적 형식들을 재구성할 수 있게 된다. 그리고 경험을 통해 익숙한 법칙들이 절단이라는 원초적 행위를 얼마나 예외 없이 따르고 있는 가를 보게 된다. 절단 행위 자체는 비록 무의식적이지만, 세계 안에서 서로 다른 사물들을 구별하려는 우리의 최초의 시도를 통해 이미 기억되어 있다. 그 세계는 우리가 마음대로 어디든 경계를 그을 수 있었던 바로 첫 번째 장소다. 이 단계에서 우주는 우리가 거기에 어떤 행동을 하는 지와 구별되지 않고, 세계는 우리 발밑에서 흔들리는 모래처럼 보인다.

모든 형식, 그래서 모든 우주가 가능하고, 임의의 개별 형식은 변화 가능하지만, 그런 형식들에 관계된 법칙들은 어떤 우주에서도 동일하다는 것은 분명하다. 수학적 연구에 매료되는 것은 바로 이 동일성, 우주가 실제로 어떻게 보이는 지와 상관 없이 하나의 현실을 발견할 수 있다는 생각이다. 다른 예술 형식과 마찬가지로 수학이 일상적 존재를 너머 모든 창조물이 함께 하는 구조의 어떤 것을 보여준다는 점은 새로운 생각은 아니다. 그러나 수학 교재들은 일반적으로 중간 어느 지점에서 이야기를 시작하고, 독자가 알아서 그 흐름을 따라오도록 한다. 여기서는 출발 지점으로부터 이야기를 따라갈 것이다.

전문적 지식이 지닌 더욱 피상적인 형식과는 달리, 수학은 보다 많은 것에 대해 보다 적게 말하기 위한 방식이다. 수학 교재는 그래서 그 자체가 목적이 아니라, 일상적 기술의 범위를 넘어 세계를 향해 가기 위한 열쇠가 되는 것이다.

세계에 대한 최초의 탐구는 일반적으로 경험 있는 가이드와 함께 진행된다. 혼자서도 진행할 수 있겠지만, 아마도 음악 세계에 뛰어들어 개인 지도도 없이 거장의 악보를 읽으려 하거나 아니면 매뉴얼을 본 것 말고는 어떤 준비도

없이 비행기를 혼자서 조종하려 하는 것만큼이나 어려울 것이다.

책의 마지막 부분에 있는 주석이 그런 개인 지도를 대신할 수는 없겠지만, 어느 정도까지는 보완해줄 수 있을 것이다. 책과 연관해서 읽도록 기획되었지만, 주석들을 먼저 읽는 것도 실제로 도움이 될 수도 있을 것이다.

전통적 형식이건 아니면 기호 형식이건 논리학에 이미 익숙한 독자라면, 필요하면 '형식들의 색인'과 책을 대조해보면서 보론 2에서 시작하는 것도 좋을 것이다.

無名天地之始

1. 원형식 (原形式, The Form)

구별(distinction)과 지시(indication)를, 그리고 구별을 짓지(drawing a distinction) 않고는 지시 할 수 없다는 것이 주어졌다고 하자. 그를 통해 원형식에 대한 구별의 형식을 취한다.

정의

구별은 자기완결적(perfect continence)이다.

즉 구별이란 경계를 놓아 분리된 면을 만드는 것으로 이뤄지며, 한 면 위의 한 점으로부터 그 경계를 넘어서지 않고는 다른 면에 도달할 수 없다. 예를 들어 평면 위에 그려진 하나의 원은 하나의 구별을 만든다.

한 번 구별이 만들어지면, 구별된 경계의 양 측에 있는 공간, 상태 그리고 내용(content) 들은 지시될 수 있다.

동기(motive) 없이는 구별이 있을 수 없고, 내용이 값(value)에서의 차이를 보이지 않는 한 동기는 있을 수 없다.

만일 하나의 내용이 값을 가진다면, 하나의 이름을 이 값을 지시하기 위해서 취할 수 있다.

그래서 그 이름을 부르는 것(calling)은 그 내용의 그 값과 동일할 수 있다.

공리 1. 호명의 법칙 (The law of Calling)

다시 이뤄진 한 호명의 값은 원래 호명의 값과 같다.

즉, 하나의 이름이 호명되고, 그리고 나서 다시 호명된다면, 두 번의 호명에 의해서 지시된 값은 그들 중 한 번에 의해 지시된 값과 같다.

즉, 어떤 이름에 대해 재호명(recall)은 호명과 같다.

마찬가지로 그 내용이 값을 가진다면, 그 내용을 향해 경계를 넘으려는 동기, 혹은 지향(intention), 혹은 명령(instruction)은 이 값을 지시하는 것으로 취할 수 있다.

그래서 또한 경계를 넘는 것(crossing)은 그 내용의 값과 동일할 수 있다.

공리 2. 경계 넘기의 법칙 (The law of crossing)

다시 이뤄진 경계 넘기의 값은 원래의 경계 넘기의 값과 다르다.

즉, 만일 하나의 경계를 넘고자 하고, 그리고 나서 그것을 다시 넘고자 한다면, 이 때 두 번의 지향이 이뤄진 후의 지시된 값은 그 둘 중 어떤 것에 의해서 지시된 값과도 다르다.

즉 어떤 경계에 대해서, 다시 이뤄진 경계 넘기(recross)는 경계 넘기와 다르다.

2. 원형식에서 얻어진 형식들 (Forms taken out of the Form)

구성 (construction)

구별을 지어라. (Draw a distinction)

내용

그것을 최초의 구별이라고 부르자.

이 구별에 의해 잘리는 혹은 분리되는 공간을 원공간(原空間, the space)이라 부르자.

나뉨에 의해서 형성된 원공간의 부분들을 구별의 면들(the sides of the distinction) 또는 대안적으로 구별에 의해 식별되는(distinguished by the distinction) 공간들, 상태들 혹은 내용들이라 부르자.

지향

그 구별과 관련하여 어떤 형태로든 어떤 표시(mark), 흔적(token) 혹은 기호(sign)을 하나의 신호(signal)로서 취한다고 하자.

임의의 신호를 사용하는 것을 그것의 지향(intent)이라고 부르자.

제 1규율 – 지향의 관례 (Convention of intention)

하나의 신호의 지향은 허용되는 방식에만 제한되도록 하자.

이를 지향의 관례라고 부르자. 일반적으로 *허용되지 않은 것은 금지된다.*

지식 (Knowledge)

구별에 의해 식별된 하나의 상태를 구별에 대한 하나의 표시

⏋

를 사용해서 표시하도록 하자.

그 상태를 표시에 의해 인식되도록 하자.

이 상태를 ‘표시된 상태(the marked state)’라 하자.

형식 (Form)

어떤 구별에 의해 나뉘어진 공간을, 그 공간의 전체적 내용과 함께 구별의 형식 (the form of the distinction)이라 부르자.

최초의 구별에 의한 형식을 원형식(the form)이라 부르자.

이름 (Name)

원형식으로부터 구별되는 하나의 형식이 있다고 하자.

원형식에서 복사해 온 구별의 표시(the mark of distinction)를 그 다른 형식에 끌어오자.

그 표시의 어떤 복사물을 그 표시의 흔적이라 부르자.

그 표시의 어떤 흔적을 표시된 상태의 이름으로 부르도록 한다.

그 이름이 그 상태를 지시하도록 한다.

배열 (Arrangement)

서로 관계된 것으로 생각되는 (즉 같은 형식 안에서 고려되는) 여러 흔적

들로 이뤄진 형식을 배열이라 부르자.

표현 (Expression)

지시를 위해 의도된 어떤 배열을 표현이라 부르자.

값 (Value)

표현에 의해 지시된 하나의 상태를 그 표현의 값이라 부르자.

등가 (Equivalence)

같은 값의 표현들을 등가라 부르자.

등가의 표현들 사이에는 등가의 기호

$$=$$

를 쓰도록 하자.

이제 공리 1에 따라,

$$\rceil\,\rceil = \rceil$$

이를 압축의 형식(the form of condensation)이라 부르자.

명령 (Instruction)

표시에 의해 표시되지 않은 상태를 '표시되지 않은 상태 (the unmarked state)'라 부르자.

공간을 나누었던 표시의 흔적을 그것이 복사된 공간 속으로 넣자. 즉 어떤 흔적을 그 자신의 형식 안에서의 구별로 하자.

이 때 한 흔적의 오목한 면을 그것의 내부라 부르자.

최초의 구별의 경계를 넘기 위한 명령으로서 하나의 흔적을 사용하도록 하자.

그 흔적의 내부 위의 지시된 상태로부터 경계 넘기가 있다고 하자.

그 경계 넘기는 그 흔적에 의해 지시된 상태라 하자.

흔적이 없는 공간은 ‘표시되지 않은 상태’를 지시한다고 하자.

이제 공리 2에 따라,

$$\overline{\overline{}|\,}| = \quad .$$

이를 무화의 형식(the form of cancellation)이라 부르자.

등식 (Equation)

등가의 표현들에 대한 지시를 등식이라 부르자.

원시 등식 (Primitive equation)

압축의 형식을 원시 등식이라 부르자.

무화의 형식을 원시 등식이라 부르자.

그 외의 원시 등식은 존재하지 않는다.

단순 표현 (Simple expression)

원시 등식으로부터 얻은 배열의 세가지 형식들 , , 과 형식의 부재, ,가 관례에 의한 모든 표현들이다.

텅 빈 흔적을 구성하는 표현을 단순하다고 하자.

텅 빈 공간을 구성하는 표현을 단순하다고 하자.

그 외에는 어떤 단순 표현도 존재하지 않는다.

조작 (Operation)

이제 어떤 상태가 하나의 흔적을 이름으로 사용해 지시될 수 있다면, 관례에 따라 흔적을 명령으로 사용해 지시할 수 있음을 보았다. 임의의 흔적이 어떤 지향의 조작을 위한 명령으로서 취해지고, 그 지향이 무엇인가를 지시하기 위해 스스로에게 하나의 이름을 붙일 수 있다.

크로스 (cross)

관계 (Relation)

'크로스'라 불리는 모든 흔적의 형식들이 자기 완결적이라 한다면, 크로스 사이에는 단 한 가지의 관계만이 가능하다. 자기 완결적 (continence).

이 관계의 지향은 제한되어 하나의 크로스는 그 내부에 무엇을 담고 있고 그 내부에 아무 것도 아닌 것은 담지 않는다.

깊이 (Depth)

임의의 공간 s안의 배열 a에 대해, s로부터 임의의 공간 s_n에 도달하기 위해 넘어야 할 크로스의 수 n을 공간 s에 대해 s_n의 깊이라 부르자.

공간 s로부터 내부의 가장 많은 횟수로 경계 넘기를 해서 도달하는 공간을 배열 a에서의 가장 깊은 공간이라 부르자.

공간 s로부터 한 번의 경계 넘기도 없이 도달한 공간을 배열 a에서의 가장 얕은 공간이라 부르자.

그래서

$$s_0 = s.$$

임의의 크로스 c 안의 어떤 공간에 있는 어떤 크로스를 c에 담겨 있다고 하자.

크로스 c 안에 가장 얕은 공간에 있는 어떤 크로스를 c 아래 혹은 c 에 덮여 있다고 하자.

쓰여지지 않은 크로스 (Unwritten cross)

어떤 공간 s_0이 쓰여지지 않은 크로스에 의해 둘러 쌓여 있다고 가정하자.

쓰여있건 쓰여지지 않았건 어떤 크로스 c 아래 있는 크로스들은, c 안의 가장 얕은 공간으로 채워진(pervaded) 크로스라 부르자.

채우는 공간 (Pervasive space)

임의의 주어진 공간 s_n이, s_n이 가장 얕은 공간인 배열을 채우고 있다고 하자.

배열 a를 채우는 공간 s를, a 가 s에 의해 채워지는 유일한 배열이건 아니건 간에, a의 채우는 공간이라 부르자.

3. 계산이라는 개념 (The conception of calculation)

제 2규율 - 언급의 축약 (Contraction of reference)

1. 하나의 크로스를 구성한다.

2. 그것을 c로 표시한다.

3. c를 그것의 이름이라 한다.

4. 그 이름이 그 크로스를 지시하도록 한다.

이상의 네 개의 명령 (그 중 둘은 구성적 의도, 둘은 관례적 의도)은 밑에 있는 (혼합적 의도의) 하나의 명령으로 축약하도록 하자.

1. 어떤 크로스 c를 취한다.

일반적으로 *여전히 따라갈 수 있는 한 명령들은 어느 정도 축약되도록 한다*.

제 3규율 – 대체의 관례 (Convention of substitution)

어떤 표현에서, 어떤 배열을 하나의 등가적 배열로 바꾸도록 한다.

스텝 (Step)

그런 대체를 ‘스텝’이라 부르자.

‘~에 대해 ~으로 바꾼다’는 표현을 하나의 기호 $\longrightarrow$ 로 대신한다.

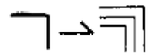
기호에서의 화살표는 변화의 방향을 지시한다.

방향 (Direction)

스텝은 종류에 따른 고려뿐만 아니라, 즉 다음과 같은,

$$\urcorner \to \urcorner\urcorner$$

또는



뿐만 아니라,

방향에 따라, 즉 다음과 같이

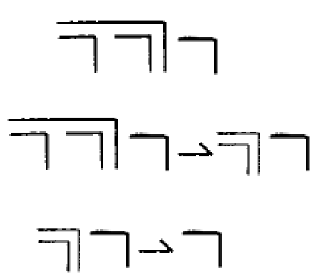
혹은

에 대해서도 고려해야 한다.

제 4규율 – 단순화 가설 (Hypothesis of simplification)

어떤 배열의 값을, 스텝을 통해 바뀔 수 있는 단순한 표현의 값과 같다고 가정해보자.

예) 다음 배열의 값을 찾기 위해 단순 표현으로 그것을 바꾸기 위한 단순화의 스텝을 취한다.



압축

무화

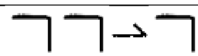
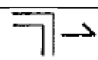
이제 단순화 가설에 의해 그것의 값은 '표시된 상태'가 된다.

그래서 배열이 단순화된다면 임의의 배열은 하나의 값을 갖는다고 가정될 수 있다. 그러나 어떤 배열들이 한 가지 이상의 방법으로 단순화 될 수 있는

것이 일반적이고, 또 어떤 것은 결코 단순화될 수 없을 수도 있다는 것은 이해될 수 있다. 그래서 단순화 가설이 값의 유용한 결정이 된다는 것을 보이기 위해서는 어떤 단계에서 어떤 주어진 배열이 단순화되고, 단순화의 모든 가능한 절차들이 동일한 단순 표현에 도달한다는 것을 보일 필요가 있다.

제 5규율 – 언급의 확장 (Expansion of reference)

원시 등식에 대해 사용된 이름들은 '단순화 방향에서의 스텝 (steps in the direction of simplicity)'을 지칭하고, 그래서 다른 방향에서 이뤄질 수 있는 스텝에 대해서는 결코 적합하지 않다. 그래서 언급의 형식을 확장한다.

압축 (condensation)		횟수 (number)
확인 (confirmation)		
무화 (cancellation)		순서 (order)
보상 (compensation)		

일반적으로 언급의 축약은 인식의 확장을 수반하고, 언급의 확장은 인식의 축약을 수반한다. 만일 인식을 통해 이뤄진 것이 규칙에 의해 이뤄진 것이라면, 언급의 형식들은 규칙에 적응해서 성장(즉 분할)되어야만 한다.

언급의 축약처럼, 그것의 이미지(像, image)인 언급의 확장도 독립적이며 자동적으로 발생한다. 그래서 그것을 허용하는 규칙을 요청하는 것은 처음에는 이상한 절차처럼 보일 수 있다. 그러나 생각해 보면, 지향의 관례를 유지하기 위해서는 스스로 일어나는 임의의 과정에 대해서도 규칙이 필요해야만 한다.

그래서 일반적으로 *언급의 임의의 형식은 제한 없이 분할 가능하다고 하자.*

계산 (Calculation)

스텝의 결과로써, 하나의 형식을 다른 것으로 바꾸는 절차를 계산이라 부르자. 그리고 계산을 가능하게 하는 구성과 관례의 체계를 산법(算法, calculus)이라 하자.

발단 (Initial)

산법에서 허용되는 스텝의 형식들은 주어진 등식의 집합에서 볼 수 있는 모든 형식들로 정의된다. 이 형식을 규정하기 위해 사용되는 등식들을 산법의 발단 등식 (initial equations) 혹은 발단 (initials) 이라 부르자.

지시의 산법 (The calculus of indications)

두 개의 원시 등식

횟수

위계

을 발단으로 취함으로써 규정되는 산법을 지시의 산법이라 부르자.

이 발단들의 직접적 결과로부터 발생하는 형식들로 제한된 산법을 원시 산술 (the primary arithmetic)이라 부르자.

4. 원시 산술 (The primary arithmetic)

발단 1. 횟수

$$\urcorner\,\urcorner = \urcorner$$

압축하다
$\rightleftharpoons$
확인하다

발단 2. 위계

 =

무화하다
$\rightleftharpoons$
보상하다

이제 이 발단의 형식적 검토를 통해서 알 수 있는 정리(theorem)라 불리는 일반적 패턴을 구별해 보자.

정리 1. 형식 (Form)

임의의 유한한 기수의 크로스들로 이뤄진 형식은 표현의 형태로 취할 수 있다.

즉 임의의 정수개의 크로스로 이뤄진 임의의 인식 가능한 배열은 산법의 발단적 스텝들을 통해 단순 표현으로부터 구성할 수 있다.

이 정리는 단순화에 대한 절차를 살펴봄으로써 증명할 수 있다. 왜냐하면 단순 표현으로 감축될 수 있는 것은 스텝을 역으로 해나가면 그것으로부터 구성할 수 있기 때문이다.

증명

공간 s에 있어 임의의 배열 a를 취한다.

수순: a에서 가장 깊은 공간을 찾는다. 주어진 임의의 a에서, 크로스의 수와 공간의 수는 유한하기 때문에 유한한 탐색을 통해 가장 깊은 공간을 찾을 수 있다.

그 공간을 s_d라 한다.

이제 s_d는 어떤 하나의 크로스 안에 담겨있거나, 혹은 담겨 있지 않다.

만일 s_d가 하나의 크로스 안에 담겨 있지 않다면, 그러면 s_d는 s이고 그래서 s에는 크로스가 없고, 그러면 a는 이미 단순하다.

만일 s_d가 크로스 c_d에 담겨 있다면, c_d는 비어있다. 왜냐하면 만일 c_d가 비어있지 않다면, s_d는 가장 깊지 않기 때문이다.

이제 c_d는 s 안에 혼자 있거나 아니면 혼자 있지 않다.

만일 c_d가 s 안에 혼자 있다면, a는 이미 단순하다.

만일 c_d가 s 안에 혼자 있지 않다면, 그러면 c_d는 (경우 1) 다른 비어 있는 크로스와 함께 하나의 공간에 있거나 (만일 다른 크로스가 비어 있지 않다면, s_d는 가장 깊지 않다), (경우 2) 다른 크로스 밑 공간 안에 있다.

경우 1: 이 경우 c_d는 다른 비어 있는 크로스와 압축된다. 그래서 하나의 크로스가 a로부터 제거된다.

경우 2: 이 경우 c_d는 다른 크로스와 무화 된다. 그래서 두 개의 크로스가 a로부터 제거된다.

이제 경우 1과 경우 2에서 사용된 절차를 반복하면 (즉 단순하지 않은 배열에 대한 절차) 하나 혹은 두 개의 크로스가 줄어든 새로운 배열이 발생한다. 유한하게 반복을 한다면 a는 하나의 크로스로 감축(reduce)되거나 혹은 완전히 크로스가 제거된다.

그래서 어떤 경우건 a는 단순화된다.

그래서 어떤 유한한 기수개의 크로스를 가진 형식은 표현의 형식으로 취할 수 있다.

정리 2. 내용 (Content)

임의의 공간이 하나의 비어 있는 크로스를 채운다면, 그 공간에서 지시된

값은 표시된 상태다.

증명

비어 있는 공간 c_e를 지닌 임의의 공간에서 임의의 부분 p를 구성하는 하나의 배열을 생각해보자. 모든 경우에 다음이 증명되어야 한다.

$$pc_e = c_e$$

수순: p를 단순화하자.

만일 그 절차에 따라 p가 하나의 비어 있는 크로스로 감축되면, 비어 있는 크로스는 c_e와 압축되어 단지 c_e만 남는다.

만일 절차가 p를 제거한다면, 단지 c_e만 남는다.

그래서 pc_e의 모든 형식의 단순화는 c_e다.

그러나 c_e는 표시된 상태를 지시한다.

그래서 만일 어떤 공간이 하나의 비어 있는 크로스를 채운다면, 그 공간에서 지시된 값은 표시된 상태다.

정리 3. 일치 (Agreement)

표현의 단순화는 하나의 값을 가진다.

즉 표현 e가 하나의 단순 표현 e_s로 단순화된다면 e는 e_s이외의 다른 단순 표현으로 단순화될 수 없다.

표현의 단순화에선 스텝의 선택이 있다. 그래서 형식이 이 선택으로부터 독립적이라는 것을 발견할 수 없다면 단순화의 절차가 하나의 단일한 값의 결정일 수 없다.

이제 어떤 표현에 대해서 단순화의 가설이 유일한 결정 값을 제공한다면, 모든 표현에 대해서 하나의 결정 값을 제공한다는 것을 보이기 위해 이 사실을 이용할 것이다.

표시된 상태를 지시하는 0보다 큰 임의의 개수의 어떤 표현들을 m이라 하자.

표시되지 않은 상태를 지시하는 어떤 개수의 어떤 표현들을 n이라 하자.

공리 1에 따라

$$mm = m$$

그리고

$$nn = n$$

그리고 단순화 혹은 정리 2를 사용하여

$$mn = m$$

이다.

m의 값을 지배적 값 (dominant value)이라 하고, n의 값을 열등한 값 (recessive value)이라 부르자.

이 정의와 고려는 이제 다음의 규칙을 통해 정리될 수 있다.

제 6규율 – 지배의 규칙 (rule of dominance)

만일 임의의 공간 s의 임의의 표현 e가 s에서 지배적 값을 보여준다면, e의 값은 표시된 상태다. 그렇지 않다면 e의 값은 표시되지 않은 상태다.

또한 정의에 의해

(i) $$m = \urcorner$$

그리고

(ii)　　　　　　　　　$n =$

그래서

$$\overline{m}| = n \qquad (\ i\ ),\ 무화,\ (\ ii\ )$$

그리고

$$\overline{n}| = m \qquad (\ i\ ),\ (\ ii\ )$$

정리 3의 증명

공간 s_0에 표현 e가 있다고 하자.

수순: s_0로부터 e의 가장 깊은 공간까지 몇 개의 크로스가 있는가 세어 보자. 그 숫자가 d라 한다면, s_d를 가장 깊은 공간이라 하자.

정의에 따라 s_d를 덮고 있는 크로스들은 비어 있다. 그리고 그 크로스들은 s_{d-1}의 유일한 내용이다.

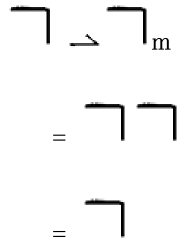
s_{d-1}의 각 크로스는 단지 표시된 상태임을 지시한다. 그래서 단순화의 가설이 유일하게 그것의 값을 결정한다.

1. s_{d-1}의 각 크로스 외부에 표시 m을 붙인다.

(i)에 따라

$$m = \overline{}|$$

그래서 s_{d-1}의 값은 변하지 않는다. 왜냐하면



수순

(i)

압축

그래서 e의 값은 변하지 않는다.

2. 다음으로 s_{d-2}에 있는 크로스들을 살펴보자.

s_{d-2}에 있는 크로스는 비어 있거나 혹은 하나 혹은 그 이상의 이미 m을 붙인 크로스들을 덮고 있다.

만일 비어 있다면, m을 붙이고 그러면 1에서의 검토가 적용된다.

만일 그것이 m을 덮고 있다면, n을 붙이자.

(ii)에 따라서

n =

그래서 s_{d-2}의 값은 변하지 않는다.

그래서 e의 값은 변하지 않는다.

3. s_{d-3}의 크로스들을 살펴보자.

s_{d-3}의 임의의 크로스는 비어 있거나 이미 m 혹은 n이 붙여진 한 개 이상의 크로스들을 덮고 있다.

만일 m을 덮고 있지 않다면, m을 붙이자.

m을 덮고 있다면 n을 붙이자.

어떤 경우에서건 1과 2의 검토에 의해서 s_{d-3}의 값은 변하지 않고 그래서 e

의 값은 변하지 않는다.

s_0까지 이어지는 공간들에 대한 수순에 대해서는 추가적인 검토가 필요하지 않다.

그래서 수순에 따라 e의 각 크로스는 반드시 m 혹은 n 중 하나로 표시된다.

그래서 지배의 규칙에 따라 s_0의 e의 고유한 값이 결정된다.

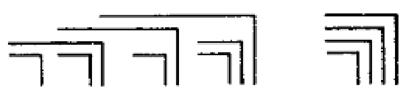
그러나 수순이 e의 값을 바꾸지 않기 때문에, 수순의 규칙은 단순화의 규칙으로부터 가져올 수 있다.

그래서 수순에 의해 결정된 e의 값은 단순화에 의해 결정된 e의 값과 같다.

그러나 e는 임의의 표현이다.

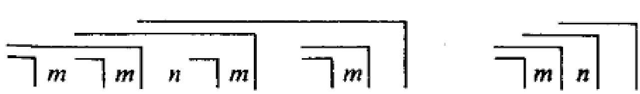
그래서 표현의 단순화는 고유한 값을 갖는다.

예시: e를 다음과 같다 하자.

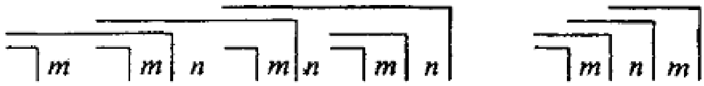


e의 가장 깊은 공간은 s_4이다. 그래서 s_3에 있는 크로스들에 먼저 표시를 한다.

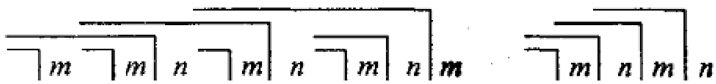
다음에 s_2



다음에 s_1



그리고 마지막으로 s_0

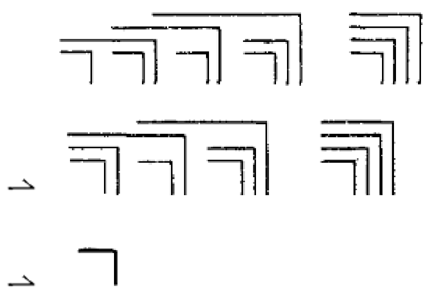


s_0에는 지배적 값이 있다.

따라서

e = m = 

단순화를 통해 검토해보자.



압축

무화 (5회)

산법에서 두 개의 값에 대한 지시자가 단순화를 위해 스텝을 취할 때에도 구별된 채로 유지되고, 그래서 단순화의 가설이 정당화됨을 보였다. 완전성을 위해서는 그들이 단순화로부터 스텝을 거슬러 진행할 때에도 여전히 마찬가지로 구별된 채로 유지된다는 것을 부여야만 한다.

정리 4. 구별 (distinction)

어떤 주어진 단순 표현으로부터 스텝을 거쳐 구성된 표현의 값은 그와 다른 단순 표현으로부터 스텝을 거쳐 구성된 표현의 값과 구별된다.

증명

단순 표현 e_s로부터 스텝의 귀결로 구성된 어떤 복잡한 표현 e_c를 생각해 보자.

e_c의 구성에서의 각 스텝을 되짚어 본다면, e_s로 이끄는 e_c의 단순화가 존재한다.

그러나 정리 3에 따라 e_c의 모든 단순화는 일치한다. 여기서 모든 e_c의 단순화는 e_s에 이른다.

그래서 정리 3의 증명에서 정당화된 단순화의 가설에 의해 e_c의 유일하게 가능한 값은 e_s의 값이다.

그러나 e_s는 단순 표현 ┐ 혹은 중의 하나이어야만 하고, 그것은 정의상 구별되는 값이다.

그래서 주어진 단순 표현으로부터 스텝을 통해 구성된 어떤 표현의 값은 그것과 다른 단순 표현으로부터 스텝을 통해 구성된 표현의 값과 구별된다.

일관성 (consistency)

산법의 형식이 지시하고자 지향하는 두 개의 값은 산법에 의해 허용된 어떤 스텝에 의해서도 혼란되지 않고 그래서 산법은 사실상 스스로의 지향을 수행한다는 것을 보일 수 있었다.

만일 몇 개의 지시를 의도하는 임의의 산법에서, 어떤 혼란이 있다면, 그것은 어디서건 혼란될 것이며, 만일 그들이 혼란된다면 그들은 구별될 수 없다.

그리고 만일 그들이 구별될 수 없다면, 그것은 지시될 수 없고, 그래서 산법은 어떠한 지시도 할 수 없다.

하나의 산법이 그것이 지향하는 구별에 있어 혼란되지 않는다면, 일관된다고 말할 수 있다.

표현의 분류 (a classification of expression)

표시된 상태의 표현들을 지배적이라 부를 수 있다. 문자 m은 그것 이외에 사용되지 않는 한, 지배적 표현을 지시하기 위해 사용될 수 있다.

표시되지 않은 상태의 표현들을 열등적이라 부를 수 있다. 문자 n은 그것 이외에 사용되지 않는 한, 열등적 표현을 지시하기 위해 사용될 수 있다.

정리 5. 동일성 (identity)

동일한 표현들은 같은 값을 나타낸다.

임의의 경우에

$$x = x$$

증명

정리 3과 4에 따라 어떤 표현 x로부터의 어떤 스텝도 x에 의해 표현되는 값을 바꿀 수 없다는 것을 보았다.

그래서 x로부터 스텝을 통해 도달할 수 있는 어떤 표현도 x와 같은 값을 가져야만 한다.

그런데 x와 동일한 표현은 x로부터 스텝을 통해 도달될 수 있고, 그래서 스텝들을 되짚어 볼 수 있다.

그래서 x와 동일한 임의의 표현은 x와 같은 값을 나타내야만 한다.

그래서 임의의 경우에서

$$x = x$$

정리 6. 값 (value)

같은 값을 지닌 표현은 동일해야만 한다.

증명

만일 x가 y와 같은 값을 나타낸다면, 그러면 x와 y는 모두 같은 단순 표현으로 단순화할 수 있다면, 그것을 e_s라 하자.

이제 $v = e_s$라 하자. 그래서 v 또한 e_s로 단순화 된다. 그렇다면 v는 e_s로의 스텝을 통해 그리고 v의 단순화를 되짚어봄으로써 x와 y로부터 도달할 수 있다.

그래서

$$x = v$$

그리고

$$y = v$$

그래서 대치의 관례에 따라 x와 y 모두 각각의 경우 동일한 표현 v로 바꿀 수 있다.

그러나 x와 y는 어떤 등가의 표현들이어야만 한다.

그래서 같은 값을 가진 표현들은 동일하다.

정리 7. 귀결 (Consequence)

어떤 동일 표현과 등가인 표현들은 서로 등가이다.

임의의 경우에 만일

$$x = v$$

그리고

$$y = v$$

그러면

$$x = y$$

증명

e_s를 단순하다고 하고 $v = e_s$라 하자.

이제 $x = v$ 이고 $y = v$ 이기 때문에, e_s는 x로부터의 스텝 그리고 y로부터의 스텝으로 도달할 수 있다.

수순: x로부터 e_s로의 스텝을 취하자. 그리고 e_s로부터 출발하여 y에서 e_s 로 이르는 스텝을 되짚어 보자.

그러면 y는 x로부터의 스텝에 의해 도달할 수 있다.

그래서 만일

$$x = v$$

이고

$$y = v$$

이면 임의의 경우에

$$x = y$$

정리 8. 불변 (Invariance)

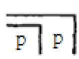
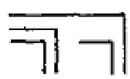
연속하는 공간 s_n, s_{n+1}, s_{n+2}가 두 개의 크로스에 의해 구별된다면, 그리고 s_{n+1}이 s_{n+2}에서의 전체 표현과 동일한 하나의 표현을 채운다면, s_n 에서의 귀결된 표현의 값은 표시되지 않은 상태다.

임의의 경우에,

 =

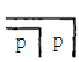
증명

p 를  라 하자. 이 경우

 =  대입

= . 위계 (2회)

이제 p = 라 하자. 이 경우

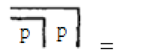
 =  대입

= 위계

p에 대해 그 이외의 경우는 존재하지 않는다. 정리 1

p에 대해 대입할 수 있는 어떤 다른 경우는 존재하지 않는다.   정리 5, 6

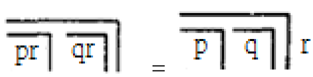
따라서 임의의 경우에 대해



정리 9. 변화 (variance)

만일 연속적인 공간 s_n, s_{n+1}, s_{n+2}*이 존재하고,* s_n, s_{n+1}*이 하나의 크로스에 의해 구별되고* s_{n+1}, s_{n+2}*가 두 개의 크로스에 의해 구별된다면 (그래서* s_{n+2}*가 두 분리된 영역으로 존재한다면), 그러면* s_n*의 표현 전체* e*는* s_{n+2}*의 각 영역에서 동일한 표현을 추출하여* s_n*에 투입하고 다른 부분에서는* e*와 동일한 하나의 표현과 등가다.*

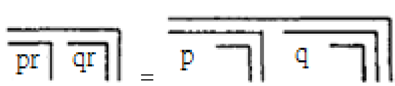
임의의 경우에,

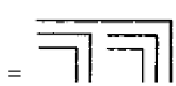


증명

r을  라 하자.

그래서

 대입

 정리 2 (2회)

$$= \left.\overline{}\right| \qquad\qquad \text{위계 (2회)}$$

그리고

$$\left.\overline{\left.\overline{p\,}\right|\;\left.\overline{q\,}\right|}\right|\,r = \left.\overline{\left.\overline{p\,}\right|\;\left.\overline{q\,}\right|}\right|\;\left.\overline{}\right| \qquad\qquad \text{대입}$$

$$= \left.\overline{}\right| \qquad\qquad \text{정리 2}$$

그래서 이 경우에

$$\left.\overline{\left.\overline{pr\,}\right|\;\left.\overline{qr\,}\right|}\right| = \left.\overline{\left.\overline{p\,}\right|\;\left.\overline{q\,}\right|}\right|\,r \qquad\qquad \text{정리 7}$$

이제 r을   라 하자.

그래서

$$\left.\overline{\left.\overline{pr\,}\right|\;\left.\overline{qr\,}\right|}\right| = \left.\overline{\left.\overline{p\,}\right|\;\left.\overline{q\,}\right|}\right| \qquad\qquad \text{대입}$$

그리고

$$\left.\overline{\left.\overline{p\,}\right|\;\left.\overline{q\,}\right|}\right|\,r = \left.\overline{\left.\overline{p\,}\right|\;\left.\overline{q\,}\right|}\right| \qquad\qquad \text{대입}$$

그래서 이 경우에

$$\left.\overline{\left.\overline{pr\,}\right|\;\left.\overline{qr\,}\right|}\right| = \left.\overline{\left.\overline{p\,}\right|\;\left.\overline{q\,}\right|}\right|\,r \qquad\qquad \text{정리 7}$$

r에 대한 다른 경우는 존재하지 않는다. 정리 1

r에 대해 대입할 수 있는 다른 경우는 존재하지 않는다. 정리 5, 6

그래서 임의의 경우에 대해

$$\overline{\overline{pr\,|}\;\overline{qr\,|}\,\Big|} = \overline{\overline{p\,|}\;\overline{q\,|}\,\Big|}\; r$$

정리의 분류 (A classification of theorems)

앞의 네 가지 정리는 표시(representation)의 완전성과 일관성에 대한 진술을 담고 있다. 이에 대한 증명들은 최초의 구별(the first distinction)에 의해서 구별된 상태들에 대한 지시 시스템으로써, 원시산술 사용의 정당성을 구성한다. 이를 표시의 정리들(theorems of representation)이라 부른다.

뒤의 세 가지 정리는 수순적 축약의 사용을 정당화하는데, 이것 없이는 이어지는 증명이 참을 수 없이 복잡해질 것이다. 이를 수순의 정리(theorems of procedure)라 한다.

마지막 두 가지 정리는 새로운 산법으로 이어지는 입구 역할을 할 것이다. 이를 접속의 정리(theorems of connexion)라 부른다.

새로운 산법은 그 자체 더 많은 정리들을 만들어 낸다. 이전 산법에 대한 직접적 언급 없이 새로운 산법의 측면들을 기술하는 이 정리들은 순수한 대수적 정리(pure algebraic theorems)나 혹은 2차적 정리(theorems of the second order)라고 불려질 수 있다.

추가적으로 두 가지 산법을 함께 고려할 경우 몇 가지 가정을 발견할 것이다. 가교 정리 (the bridge theorem)와 완전성의 정리 (the theorem of completeness)가 그것들이다. 이를 혼합 정리 (mixed theorems)라 부른다.

$$a, b, \cdots$$

5. 산법으로부터 도출된 산법

변수 형식의 흔적

$$a, b, \cdots$$

으로 원시산술에서의 표현을 지시하도록 하자.

그 값에 대해서는 알지 못하는 것으로 하지만, 정리 5에 따라서

$$a = a,\ b = b,\ \cdots$$

상수의 형식인 흔적

$$\overline{}\rvert$$

로, 관례에서 이미 요청한 바에 따라 최초의 구별에서 주어진 경계를 넘는다는 명령을 지시한다고 하자.

변수의 흔적들을 그 형식에 맞춰 부른다.

상수의 흔적을

크로스 (cross)

라 부른다.

정리 8의 기술에서 사용되었던 지시를 맥락으로부터 떼어낸다.

$$\overline{\overline{p}\rvert\; p}\rvert = \quad .$$

이것을 위치의 형식(the form of position)이라 부르자.

정리 9의 기술에서 사용되었던 지시를 맥락으로부터 떼어낸다.

$$\overline{\overline{pr}\rvert\;\overline{qr}\rvert}\rvert = \overline{\overline{p}\rvert\;\overline{q}\rvert}\rvert\, r$$

이를 전치(轉置)의 형식(the form of transposition)이라 부르자.

위치의 형식과 전치의 형식을 하나의 산법에 대한 발단(initials)으로 삼자.

이 산법을 원시 대수에 대한 하나의 산법으로 구성한다.

이를 원시대수(primary algebra)라 부르자.

대수적 계산 (Algebraic calculation)

대수들에 있어, 기호 =의 사용에서는 두 가지 규칙이 일반적으로 묵시적 형태로 받아들여진다.

규칙 1. 대입 (substitution)

만일 e = f 라면 그리고 g 안에 e가 나타날 때, f를 e 에 대입할 때 구성되는 표현이 h라 하면, g = h 이다.

정당화(justification): 이 규칙은 표시의 정리로부터의 추론을 통해 대입의 산술적 관례(the arithmetical convention of substitution)를 재언급한 것이다.

규칙 2. 치환 (replacement)

만일 e = f 이고, e = f 에서 주어진 독립 변수 표현 v의 모든 흔적이 표현 w에 의해 치환된다면, 반드시 v, w가 등가이거나 w가 독립 혹은 변수일 필요가 있는 것은 아니다. 그리고 이 수순의 결과로서 e가 j가 되고, f가 k가 된다면 j = k이다.

정당화 (justification): 이 것은 산술적으로 등가지만 동일한 것은 아닌 표현들을 찾았을 때 산술적으로는 완전히 밝힐 수는 없었던 접속의 정리에서 파생된 규칙이다. 이런 표현의 등식에서 각각의 독립 변수 지시자는 정리 5에 의해 지시자가 나타나는 곳에서 그 값이 같다는 사실을 제외하고는 알려지지 않고, 값이 마음대로 바뀔 수도 있는 표현을 나타낸다. 여기서는 그 지시자 역시도 모든 곳에서 변화되는 한 마음대로 바뀔 수 있다

지표화 (indexing)

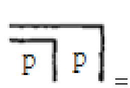
발견한 것을 몇 가지 종류로 나누고, 그 집합을 표시하기 위해 대문자를 사용할 것이다. 그리고 집합의 원소에 대해서는 숫자로 나타낸다. 이 종류들은 다음과 같이 나타낼 것이다.

귀결 (consequence)	C
원시산술의 발단	I
원시대수의 발단	J
규칙	R
정리	T

어떤 등식을 E라고 나타내겠지만, 이것은 각 장에 제한된 집합에서만 사용된다. 그래서 예를 들자면 9장에서 사용되는 E1 8장에서 사용된 E1이라는 등식과 의도적으로 같게 하지는 않을 것이다.

6. 원시대수

발단 1. 위치

J1 

추출 (take out)
⇌
매립 (put in)

발단 2. 전치

J2 $$\overline{\overline{pr}|\;\overline{qr}|}| = \overline{\overline{p}|\;\overline{q}|}|\,r$$ 수집 (collect) ⇌ 분배 (distribute)

위의 발단으로부터 몇 가지 조작을 통해 발견되는 특별한 패턴들을 ‘귀결 (consequence)’이라 구별해서 부르도록 한다.

귀결 1. 반사 (Reflexion)

C1 $$\overline{\overline{a}|}| = a$$ 반사 (reflect) ⇌ 반사 (reflect)

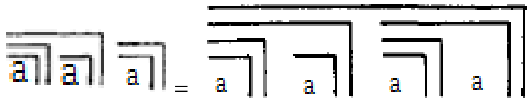
입증 (demonstration)

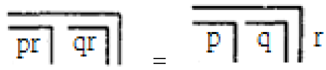
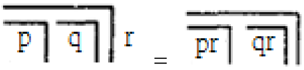
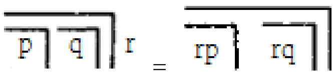
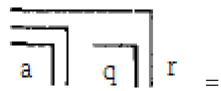
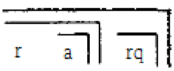
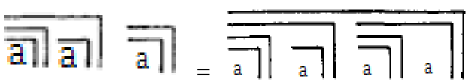
우선 J1에 따라,

$$\overline{\overline{a}|}| = \overline{\overline{\overline{a}|}|\;\overline{a}|}|\;\overline{\overline{a}|}|$$

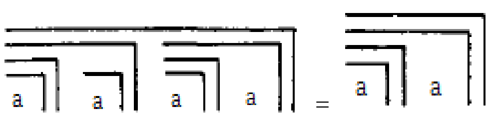
R2를 사용해 p 가 나타나는 모든 경우에 대해 $\overline{a}|$ 로 교체함으로써, $\overline{\overline{p}|\;p}|$ = 를 $\overline{\overline{\overline{a}|}|\;\overline{a}|}|$ = 로 바꾼다. 그리고 나서 R1을 사용해 원래의 표현 $\overline{\overline{a}|}|$의 공간의 대신에 $\overline{\overline{\overline{a}|}|\;\overline{a}|}|$로 교체한다. 이에 따라 $\overline{\overline{a}|}|$ = $\overline{\overline{\overline{a}|}|\;\overline{a}|}|\;\overline{\overline{a}|}|$가 된다.

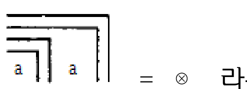
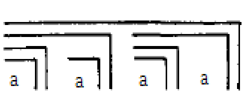
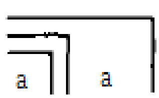
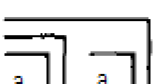
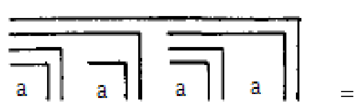
다음으로는 J2에 따라서



= 에 대한 정의에서의 허용을 통해  을  로 바꾼다. 그리고 다시 관계에 대한 정의에서의 허용을 통해  로 바꾼다. R2를 사용해 이 등식에서 p가 나오는 모든 경우에  로 바꾼다면   가 된다. 다시 R2를 사용하여 이 등식에서 q가 나오는 모든 경우에 대해 a로 바꾸고, 다시 r이 나오는 모든 경우에 로 바꾼다면, 결과적으로  가 된다.

그리고 나서 J1을 통해



최초의 등식으로부터  = ⊗ 라는 것을 알기 때문에, 이제  에서  와 함께 있는 공간에서의  에 대해 ⊗ 로 바꾸면,  =

$\overline{\overline{\overline{\overline{a|}|}\ a|}|}$라는 것을 발견할 수 있다.

이제 J1을 통해서

$$\overline{\overline{\overline{\overline{a|}|}\ a|}|} = \overline{\overline{a|}\ a|}\ \overline{\overline{a|}\ a|}$$

R2를 사용하여 p를 a로 바꿔, $\overline{p|\,p|}$ = ⊗ 를 $\overline{a|\,a|}$ = ⊗ 로 바꾸고, R1을 사용하여 $\overline{\overline{a|}\ a|}$와 함께 있는 공간에서 ⊗ 를 $\overline{a|\,a|}$로 바꾼다면, $\overline{\overline{\overline{a|}\ a|}|}$ = $\overline{\overline{\overline{a|}\ a|}\ \overline{\overline{a|}\ a|}|}$ 임을 알 수 있다.

그리고 모든 p에 대해서 $\overline{\overline{a|}|}$, 모든 q에 대해서 $\overline{a|}$, 모든 r에 대해 a로 바꾼다면, J2를 통해

$$\overline{\overline{\overline{a|}\ a|}\ \overline{\overline{a|}\ a|}|} = \overline{\overline{\overline{a|}|}\ \overline{\overline{a|}|}|}\ a$$

그리고 최종적으로 J1을 통해서

$$\overline{\overline{\overline{a|}|}\ \overline{\overline{a|}|}|}\ a = a$$

R2를 이용해서 모든 p에 대해 $\overline{\overline{a|}|}$로 바꾸고, R1을 이용하여 a와 함께 있는 공간에서 $\overline{\overline{\overline{a|}|}\ \overline{\overline{a|}|}|}$를 ⊗ 로 바꾼다면, $\overline{\overline{\overline{a|}|}\ \overline{\overline{a|}|}|}$ a = a가 됨을 알 수 있다.

이상으로 여섯 번에 걸친 스텝에 대해 각기 상세하게 살펴보았다.

이제 T7을 다섯 번 사용하면

$$\overline{\overline{a|}|} = a$$

임을 알 수 있다. 이것으로 입증이 완료된다.

이제 수순에 대한 핵심적 지표들만을 통해 지금까지의 입증을 다시 살펴보

자.

$$\overline{\overline{a}|}|$$

$$= \overline{\overline{a}|\,\overline{a}|}|\,\overline{\overline{a}|}| \qquad \text{J1}$$

$$= \overline{\overline{\overline{\overline{a}|}|\,\overline{a}|}|\,\overline{\overline{\overline{a}|}|\,a}|}| \qquad \text{J2}$$

$$= \overline{\overline{\overline{\overline{a}|}|\,a}|}| \qquad \text{J1}$$

$$= \overline{\overline{\overline{\overline{a}|}|\,\overline{a}|}|\,\overline{\overline{a}|\,a}|}| \qquad \text{J1}$$

$$= \overline{\overline{\overline{\overline{a}|}|}|\,\overline{\overline{a}|}|}|\,a \qquad \text{J2}$$

$$= a \qquad \text{J1}$$

귀결 2. 발생 (Generation)

C2 $\qquad \overline{ab}|\,b = \overline{a}|\,b \qquad$ 퇴행 (degenerate) $\rightleftharpoons$ 재생 (regenerate)

입증

$$\overline{ab}|\,b$$

$$= \overline{\overline{\overline{a}|}|\,b}|\,b \qquad \text{C1}$$

$$= \overline{\overline{\overline{a}|}|\,\overline{\overline{b}|}|}|\,b \qquad \text{C1}$$

$$= \overline{\overline{\overline{a}|\,b}|\,\overline{\overline{b}|\,b}|}| \qquad \text{J2}$$

$= \overline{\overline{\overline{a}\rceil\, b}\rceil}\rceil$ J1

$= \overline{a}\rceil\, b$ C1

귀결 3. 통합 (Integration)

C3 $\rceil a = \rceil$

감소 (reduce)
⇌
증가 (augment)

입증

$\rceil\ a$

$= \overline{a}\rceil\, a$ C2

$= \overline{\overline{\overline{a}\rceil\, a}\rceil}\rceil$ C1

$= \rceil$ J1

귀결 4. 엄폐 (Occultation)

C4 $\overline{\overline{a}\rceil\, b}\rceil\, a = a$

은폐 (conceal)
⇌
폭로 (reveal)

입증

$\overline{\overline{a}\rceil\, b}\rceil\ a$

$= \overline{\overline{a}\rceil\, ba}\rceil\ a$ C2

$$= \overline{\overline{ab}|\; ba}|\; a \qquad \text{C2}$$

$$= a \qquad \text{J1}$$

귀결 5. 반복 (Iteration)

C5 $\qquad aa = a \qquad$ 반복 (iterate) $\rightleftharpoons$ 재반복 (reiterate)

입증

$$aa$$

$$= \overline{\overline{a}|}|\; a \qquad \text{C1}$$

$$= a \qquad \text{C4}$$

귀결 6. 확장 (Extension)

C6 $\qquad \overline{\overline{a}|\;\overline{b}|}|\;\overline{\overline{a}|\;b}| = a \qquad$ 단축 (contract) $\rightleftharpoons$ 확대 (expand)

입증

$$\overline{\overline{a}|\;\overline{b}|}|\;\overline{\overline{a}|\;b}|$$

$$= \overline{\overline{\overline{\overline{a}|\;\overline{b}|}|\;\overline{\overline{a}|\;b}|}|}| \qquad \text{C1}$$

$$= \overline{\overline{\overline{\overline{b}\rceil}\rceil\ \overline{b}\rceil}\rceil\ \overline{a}\rceil}\rceil \qquad \text{J2}$$

$$= \overline{\overline{a}\rceil}\rceil \qquad \text{J1}$$

$$= a \qquad \text{C1}$$

귀결 7. 사다리꼴 (Echelon)

C7 $\overline{\overline{\overline{a}\rceil\ b}\rceil\ c}\rceil = \overline{ac}\rceil\ \overline{\overline{b}\rceil\ c}\rceil$ 부수기 (break) ⇌ 만들기 (make)

입증

$$\overline{\overline{\overline{a}\rceil\ b}\rceil\ c}\rceil$$

$$= \overline{\overline{\overline{a}\rceil\ \overline{\overline{b}\rceil}\rceil}\rceil\ c}\rceil \qquad \text{C1}$$

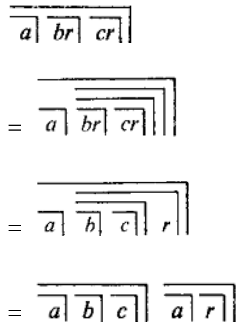
$$= \overline{\overline{\overline{ac}\rceil\ \overline{\overline{b}\rceil\ c}\rceil}\rceil}\rceil \qquad \text{J2}$$

$$= \overline{ac}\rceil\ \overline{\overline{b}\rceil\ c}\rceil \qquad \text{C1}$$

귀결 8. 변형 전치 (Modified transposition)

C8 $\overline{\overline{a}\rceil\ \overline{br}\rceil\ \overline{cr}\rceil}\rceil = \overline{\overline{a}\rceil\ \overline{b}\rceil\ \overline{c}\rceil}\rceil\ \overline{\overline{a}\rceil\ \overline{r}\rceil}\rceil$ 수집 (collect) ⇌ 분배 (distribute)

입증



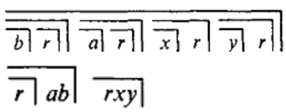
C1

J2

C7

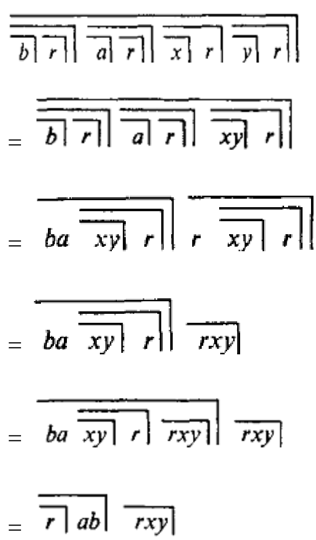
귀결 9. 횡단 전치 (Crosstransposition)

C9



= 횡단 전치
(crosstransposition, 수집)
⇌
횡단 전치
(crosstransposition, 분배)

입증



C1, J2, C1

C8, C1 (3회)

C2, C1

C2

C6

귀결의 분류

이러한 귀결을 분류할 때, 반드시 위의 형식에만 엄격하게 제한할 필요는 없다. 귀결의 이름은 다음과 같이 귀결의 어떤 한 부분을 지시할 수도 있다.

$$\overline{a}\rceil\ a = \overline{\quad}\rceil \qquad\qquad \text{통합 (integration)}$$

다른 경우에 다음처럼 반사를 포함할 수도 있다.

$$\overline{\overline{a}\rceil\ r}\rceil\ \overline{\overline{b}\rceil\ r}\rceil = \overline{\overline{ab}\rceil\ r}\rceil \qquad \text{전치 혹은 사다리꼴}$$

$$\overline{\overline{b}\rceil\ a}\rceil\ \overline{ba}\rceil = \overline{a}\rceil \qquad\qquad \text{확장}$$

다른 경우, 다음처럼 횡단 전치를 지시할 수도 있다.

$$\overline{\overline{a\ b}\rceil\ \overline{\overline{a\ \overline{b}\rceil}\rceil}\rceil}\rceil = a \qquad\qquad \text{확장}$$

이미 살펴보았지만 귀결을 분류하는 것이 분명하게 구별되는 건 아니다. 다만 여기서 하려는 것은 하나의 방향으로 여러 단계의 스텝들을 거쳐나간다는 점을 보이는 것이다. 이것이 언급의 축약, 그리고 내용의 확장의 이중적 형태다. 많은 스텝을 하나의 스텝으로 대치하여 계산에서의 수고를 덜 수 있다.

그래서 만일 우리가 스텝의 등가에 대해서 생각할 때 다음과 같은 점을 발견할 수 있다.

$$\rightharpoondown\ \rightharpoondown = \rightharpoondown$$

또한 한 번의 스텝을 거꾸로 되짚어 보는 것을, 처음부터 하지 않은 것처럼 고려하면 다음과 같이 된다.

$$\rightharpoondown\leftharpoonup\ =$$

하지만 스텝의 지시에 따라 스텝을 따라가 본다면, 그로부터 나오는 산법은 일관되지 않는 것을 알 수 있다.

그래서 우리가 어떤 스텝을 먼저 취하는 가에 따라

$$\rightharpoondown \; \rightharpoondown\leftharpoondown \; = \; \rightharpoondown\leftharpoondown \; = \qquad ,$$

이거나

$$\rightharpoondown \; \rightharpoondown\leftharpoondown \; = \; \rightharpoondown$$

이다.

그래서

$$\otimes \; = \; \rightharpoondown$$

가 되는데, 이것은 임의의 계산에서 0을 포함한 임의의 개수의 스텝을 하나의 스텝으로 고려한다는 것을 의미한다.

이것은 이미 결정했던 것처럼 경계를 넘는 것을 의도하지 않아야 한다는 스텝의 성격에 대한 우리의 생각과 일치한다.

표현의 확장된 분류 (a further classification of expressions)

지시의 산법에서 대수적 고찰을 통해 표현들을 더욱 확장된 형태로 구분할 수 있다.

표시된 상태의 표현들은 통합적(integral)이라 부를 수 있다. 문자 m은 다르게 사용되지 않는 한 통합적 표현을 지시하기 위해 사용될 수 있다.

표시되지 않은 상태의 표현들은 비통합적(disintegral)이라 부를 수 있다. 문자 n은 다르게 사용되지 않는 한 비통합적 표현을 지시하기 위해서 사용될 수 있다.

아직 알려지지 않은 지시자의 상태에 따른 귀결적 상태의 표현은 귀결적(consequential)이라 부를 수 있다. 문자 v는 다르게 사용되지 않는 한 귀결적 표현을 지시하기 위해서 사용될 수 있다.

7. 2계 정리 (theorems of the second order)

정리 10

J2의 범위는 공간 s_{n+2}에 있어 임의의 수의 분할로 확장될 수 있다.

임의의 경우에 대해,

$$\overline{\overline{a}| \ \overline{b}| \ \ldots}| \ r = \overline{\overline{ar}| \ \overline{br}| \ \ldots}|.$$

증명

s_{n+2}가 0, 1, 2로 나뉘어지고, 나아가 2 이상으로 분할되는 경우를 생각해 보자. 0의 경우에서는

$$\overline{\ \ }|\ r = \overline{\ \ }| \qquad \text{C3}$$

1의 경우에는

$$\overline{\overline{a}|}|\ r = ar \qquad \text{C1}$$

$$= \overline{\overline{ar}|}| \qquad \text{C1}$$

2의 경우에는

$$\overline{\overline{b}|\ \overline{a}|}|\ r = \overline{\overline{br}|\ \overline{ar}|}| \qquad \text{J2}$$

2보다 큰 경우에는

$$\overline{\dots\ \overline{c}|\ \overline{b}|\ \overline{a}|}|\ r = \overline{\overline{\dots\ \overline{c}|}|\ \overline{\overline{b}|}|\ \overline{\overline{a}|}|}|\ r \qquad \text{C1(필요한 만큼 반복)}$$

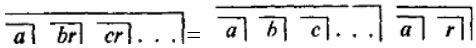
$$= \overline{\overline{\dots\ \overline{cr}|}|\ \overline{\overline{br}|}|\ \overline{\overline{ar}|}|}| \qquad \text{J2 (필요한 만큼 반복)}$$

$$= \overline{\dots\ \overline{cr}|\ \overline{br}|\ \overline{ar}|}| \qquad \text{C1 (전처럼 반복)}$$

이상으로 증명을 완성한다.

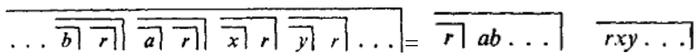
정리 11

C8의 범위는 T10처럼 확장될 수 있다.



정리 12

C9의 범위는 T10처럼 확장될 수 있다.



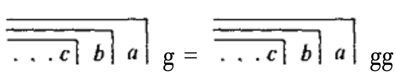
T11과 T12의 증명은 J2 대신에 T10을 사용하며 C8과 C9에서의 입증과 같은 방식을 따른다.

정리 13

C2에서의 발생적 과정은 발생된 변수가 처음 나온 공간보다 얕지 않은 어떤 공간으로도 확장될 수 있다.

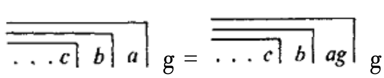
증명

하나의 변수가 최초로 등장한 공간보다 0, 1, 그리고 1보다 더 깊은 공간에서 발생되는 경우를 고려해보자. 0의 경우에서는



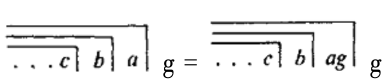
C5

1의 경우에는



C2

1보다 큰 경우에는



C2

$$= \overline{\overline{\overline{\ldots c\,|}\; bg\,|}\; ag\,|}\; g \qquad C2$$

$$= \overline{\overline{\overline{\ldots c\,|}\; bg\,|}\; a\,|}\; g \qquad C2$$

기타 등등. g의 발생에 대한 더 이상의 검토가 필요치 않고, 그리고 g가 있는 공간보다 얕지 않은 공간에 도달할 수 있는 것은 분명하다.

J2, C2, C8 그리고 C9도 각기 관계된 정리에 의해 확장되는 것으로 고려하면 편리하고, 발단 혹은 귀결의 이름들은 또한 그것을 확장한 정리를 지시할 수 있다고 하자.

정리 14. 상수와 관계된 규율 (canon with respect to the constant)

임의의 주어진 표현으로부터 두 번보다 더 깊지 않은 등가 표현을 끌어낼 수 있다.

증명

주어진 임의의 표현 e가, d >2인 깊이 d인 i개의 가장 깊은 공간들을 가지고 있다고 가정하자.

C7을 통해 깊이를 줄이는 수순을 수행한다. 가능성에 대한 검토를 통해 e = e_1이고 e_1이 깊이 d-1인 j개의 가장 깊은 공간을 가지고 있음을 확인하는데 2^i-1 스텝 이상이 필요하지 않음을 보일 수 있다. (e에서 s_{d-2}의 부분이 s_d를 담고 있는 유일한 부분이고, s_d의 각 분할이 s_{d-1}의 나눠진 분할의 한 부분에 담겨 있을 때, 스텝의 최대수가 필요하다) 만일 (d–1) > 2일 경우, e_1 = e_2이고, e_2가 단지 d-2 크로스만큼 깊을 때까지 2^j-1의 추가적 스텝으로 수순을 계속 진행한다. e = e_{d-2}이고 e_{d-2}가 단지 d-(d-2) = 2 크로스만큼 깊을 때까지 이 수순은 계속 진행될 수 있다. 그리고 이를 통해 증명이 완료된다.

정리 15. 변수에 관한 규율 (canon with respect to a variable)

임의의 주어진 표현으로부터 어떤 주어진 변수가 두 번보다 더 많이 나타나지 않는 등가의 표현을 도출할 수 있다.

증명

이 증명은 만일 원래의 표현 e에 변수가 있지 않다면 불필요하다. 그래서 검토는 하나의 변수 v가 e에 담겨 있는 경우에 한정할 수 있다. 이제 C1과 T14에 따라서,

$$e = \cdots\ \overline{\overline{vb}|\ q}|\ \overline{\overline{va}|\ p}|\ f\ \overline{vx}|\ \overline{vy}|\ \cdots,$$

이고 여기서 a, b, …, p, q, …, x, y, …,와 f는 표현 e에 적합한 배열들을 나타낸다면,

$$= \cdots\ \overline{\overline{v}|\ q}|\overline{\overline{b}|\ q}|\overline{\overline{v}|\ p}|\overline{\overline{a}|\ p}|\ f\ \overline{vx}|\ \overline{vy}|\ \cdots$$

C1, J2, C1 (각기 필요한 만큼 반복)

$$= \cdots\ \overline{\overline{v}|\ q}|\overline{\overline{v}|\ p}|\ g\ \overline{vx}|\ \overline{vy}|\ \cdots$$

$g = f\ \overline{\overline{a}|\ p}|\ \overline{\overline{b}|\ q}|\ \cdots$ 라 한다

$$= \overline{\overline{\overline{p}|\overline{q}|\ \ldots|}\ \overline{v}|}|\ \overline{\overline{\overline{x}|\overline{y}|\ \ldots|}\ v|}|\ g$$

C1, J2 (각기 두 번)

이상으로 증명은 완료된다.

8. 1계, 2계의 재-통합(re-uniting the two orders)

내용, 이미지 그리고 반사

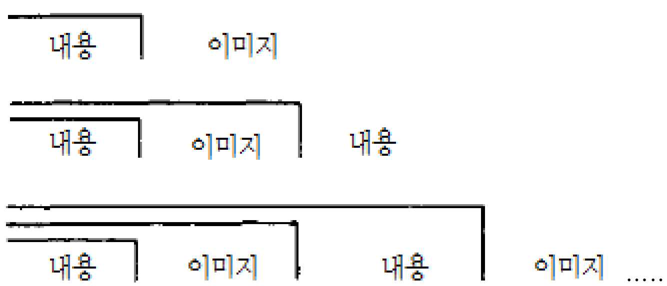
임의의 표현 e에 대해 e를 내용, $\overline{e}\rceil$ 를 이미지, $\overline{\overline{e}\rceil}\rceil$ 를 반사라 부르자.

$\overline{\overline{e\,|}\,|}$ = e이기 때문에 반사의 행위는 이미지로부터 그것의 내용으로 혹은 내용으로부터 그것의 이미지로 회귀하는 것이다.

e를 하나의 크로스로 가정하자. e의 내용은 그것이 위치한 공간의 내용이지, 그 공간을 표시하는 크로스의 내용은 아니다.

일반적으로 내용은 우리가 그것을 표시하는 공간이고, 표시는 그 형식을 나타내는 경계 안에 있는 것은 아니라 그것을 둘러싼 그리고 다른 형식을 구성하는 경계 안에 있다. 그래서 하나의 형식을 기술하는데 있어 다음과 같은 연쇄를 발견한다.

내용



지시 공간 (Indicative space)

s_0이 e의 채우는 공간(pervasive space)이라면, e의 값은 공간 s_0에 대한 값이다. 만일 e가 s_0에서 전체 표현이라면, s_0는 e의 값을 취하고, 이 때 s_0를 e에 대한 지시 공간이라 부를 수 있다.

e의 값을 평가할 때, e를 지닌 s_0을, 그리고 이는 s_{-1}에 대한 경계로 쓰여지지 않은 크로스(the unwritten cross)에 의해 둘러 쌓여 있다 가정한다.

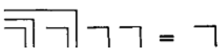
제 7 규율 - 유의성의 원리 (Principle of relevance)

만일 하나의 특성이 모든 지시에 대해 공통적이라면 그것은 지시될 필요가 없다.

쓰여지지 않은 크로스는 지시의 산법에서 모든 표현에 대해 공통적이고, 따라서 쓰여질 필요는 없다. 마찬가지로 하나의 열등한 값은 지시의 산법에서 모든 표현에 공통적이고 또한 이 원리에 따라 어떤 지시자를 필요로 하지 않는다.

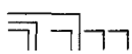
임의의 산법 형식 안에서, 내용에서의 귀결과, 이미지에서의 정리를 발견할 수 있다.

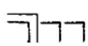
그래서

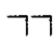


는 원시 산술에서의 하나의 귀결이면서, 동시에 내용의 안에 존재한다.

입증



=  I2

=  I2

=  I1

우리가 규칙을 결정할 수 있기 때문에 귀결들을 받아들여질 수 있다. 우리가 보여야 할 것은 규칙을 따르고 있다는 것뿐이다.

하지만 원시 산술의 내용에 있어 가장 단순한 임의의 귀결을 입증하는 일도 반복적이고, 지루하다. 그래서 우리는 정리들을 사용해서 수순을 축약할 수 있다. 이 정리들은 원시 산술에 대한 혹은 그 이미지에서의 정리들이다. 예를 들어 위의 귀결을 입증하는 대신 T2를 사용할 수 있다.

T2는 열거 없이 기술하고, 하나의 예로 인식될 수 있는 종류의 모든 표현들은 마크된 상태를 지시한다는 진술이다. 그에 대한 증명은 동시에 그것이 기술하는 종류에 해당하는 모든 표현들의 단순화에 대한 입증으로 간주될 수 있다.

그러나 정리 자체는 귀결이 아니다. 그것에 대한 증명은 산술의 규칙에 따라 진행되는 것이 아니라, 대신에 현재의 단계에서는 정당화 작업을 수행하지 않는 추론과 계산의 개념과 규칙을 따른다.

그래서 누군가가 증명을 받아들이지 않는다면, 다른 증명을 시도하는 것 밖에 방법이 없다. 하나의 정리는 그것이 언급하는 것이 자명하기 때문에 받아들여진다. 하지만 그 자명함이 어떤 면에서 분명해질 필요를 갖추지 않는다면, 우리는 그것을 기록할 만한 가치가 있는 하나의 규칙으로 생각하지 않는다. 이 규칙은 공리의 경우에는 예외다. 공리는 추가의 설명 없이 자명할 수 있다. 공리들과 정리들 모두 우리가 따르기로 선택한 근거에 대한 어느 정도 단순화 한 진술들이다.

대수에서의 발단 단계는 산술에 대한 정리들을 나타내기 위해서 택하기 때문에, 변수를 지닌 등식이 대수에서의 귀결인지 아니면 산술에 대한 정리인지 판단하는 건 우리 관점에 따른다. 어떤 입증 가능한 귀결은 달리 하나의 정리로서 증명될 수 있다. 그리고 이 사실은 연쇄적 스텝을 발견하기 어려울 때 유용할 수 있다. 그래서 대수에서의 입증 대신에 산술을 통해서 증명할 수 있다.

$$\overline{\overline{\overline{a}|\;\overline{b}|}|\;\overline{a\;\overline{c}|}|}| = \overline{\overline{a}|\;b}|\;\overline{ac}|$$

이제

E1의 경우 $\overline{\overline{\overline{a}|\;\overline{b}|}|\;\overline{a\;\overline{c}|}|}| = x$,

E2의 경우 $\overline{\overline{a}|\;b}|\;\overline{ac}| = y$

라 부른다 하자.

$a = \overline{\;\;}|$ 일 경우에는

$x = \overline{\overline{\overline{\overline{\;\;}\vert}\vert\overline{b\,}\vert}\vert\overline{\overline{\;\;}\vert\overline{c\,}\vert}\vert}\vert$	E1에 대입
$= \overline{\overline{\overline{b\,}\vert}\vert\overline{\overline{\;\;}\vert\overline{c\,}\vert}\vert}\vert$	I2
$= \overline{\overline{\overline{b\,}\vert}\vert\overline{\;\;}\vert\overline{\overline{b\,}\vert\overline{c\,}\vert}\vert}\vert$	T2, T7
$= \overline{\overline{\;\;}\vert\overline{\overline{\;\;}\vert\overline{c\,}\vert}\vert}\vert\overline{b\,}\vert$	T9
$= \overline{\overline{\;\;}\vert\overline{\overline{\;\;}\vert}\vert}\vert\overline{b\,}\vert$	T2
$= \overline{b\,}\vert$	I2 (2회)

그리고

$y = \overline{\overline{\overline{\;\;}\vert}\vert\,b\,}\vert\overline{\overline{\;\;}\vert\,c\,}\vert$	E2에 대입
$= \overline{\overline{\overline{\;\;}\vert}\vert\,b\,}\vert\overline{\overline{\;\;}\vert}\vert$	T2
$= \overline{b\,}\vert$	I2 (2회)

이 경우에 x = y 다.　　T7

이제 a = ⊗ 라 하면,

$x = \overline{\overline{\overline{\;\;}\vert\overline{b\,}\vert}\vert\overline{\overline{c\,}\vert}\vert}\vert$	E1에 대입
$= \overline{\overline{\overline{\;\;}\vert\overline{b\,}\vert\overline{c\,}\vert}\vert\overline{\overline{c\,}\vert}\vert}\vert$	T2, T7

$= \overline{\overline{\overline{\;\,}|\,\overline{b}|}|\;\overline{\;\,}|}|\;\overline{c}|$ T9

$= \overline{\overline{\overline{\;\,}|}|\;\overline{\;\,}|}|\;\overline{c}|$ T2

$= \overline{c}|$ I2 (2회)

그리고

$y = \overline{\overline{\;\,}|\,b}|\;\overline{c}|$ E2에 대입

$= \overline{\overline{\;\,}|}|\;\overline{c}|$ T2

$= \overline{c}|$ I2

그래서 이 경우에 x = y 다. T7

그 외에 다른 경우는 없고, T1

그래서 x = y 다.

그것의 출발에 따라, 대수에서의 귀결은 산술적으로 유용하다. 그래서 증명을 줄이기 위해 귀결을 사용할 수 있다.

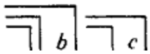
단축된 증명

$a = \overline{\;\,}|$ 라 하면,

$x = \overline{\overline{\overline{\;\,}|\,\overline{b}|}|\;\overline{\overline{\;\,}|\,\overline{c}|}|}|$ E1에 대입

$= \overline{b}|$ C3, C1 (3회)

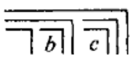
그리고

y =  E2에 대입

=  C3, C1 (2회)

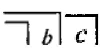
그래서 이 경우 x = y, T7

이제 a를 ⊗ 라 하면,

x =  E1에 대입

=  C3, C1 (2회)

그리고

y =  E2에 대입

=  C3, C1

그래서 이 경우 x = y, T7

어떤 다른 경우도 없다. T1

그래서 x = y

이 증명에서, 산술적으로 고정된 변수 이외에 어떤 변수도 유의미하지 않다고 분명하게 가정한다. 처음에는 다른 변수들의 가능한 값을 무시할 수 있음이 명백해 보이지 않을 수도 있다. 하지만 이 가정은 다음의 증명이 보여주는 것처럼 사실 모든 심급에서 (그리고 사실 모든 대수에서) 정당화된다.

정리 16. 가교 (the bridge)

표현들이 하나의 변수의 모든 경우에 대해서 등가라면, 그들은 등가다.

어떤 공간 s_q에서의 변수 v가 값 m과 n의 한계 사이에서 진동한다(oscillate)고 하자.

s_q에서 모든 다른 지시자의 값이 n이라 하면, v의 진동은 s_q을 통해 전달될 수 있고, s_{q-1}에 대한 s_q의 경계의 값에 대한 하나의 변수로 볼 수 있다.

이런 조건의 s_q를 투명하다(transparent)고 하자.

s_q에서 임의의 어떤 다른 지시자의 값이 m이라 하면, s_q을 통해서 어떤 값도 전달될 수 없다.

이런 조건의 s_q를 불투명하다(opaque)고 하자.

v로부터의 전달(transmission)은 투명성과 불투명성에 따라 s_q에서 달라지고, 이 변화가 포착될 수 있는 더 먼 공간에서도 달라진다. 이 과정에서 통과하는 임의의 공간 안에서 어떤 지점에서 다른 변수의 전달 속으로 흡수될 수도 있다. 이 흡수가 전면적인 조건에서, 그것이 발생하는 공간의 띠(the band of space)를 불투명하다고 하자. 그 외의 다른 조건에 대해서는 투명하다고 하자.

이 정의와 검토를 통해 다음의 원리를 알 수 있다.

제 8 규율 – 전달의 원리 (Principle of transmission)

한 변수 값에서의 진동에 관해, 그 변수 밖의 공간은 투명하거나 불투명하다.

정리 16의 증명

s, t를 각기 e, f의 지시 공간이라 하자.

e, f는 하나의 변수 v를 지니고, v는 값 m, n을 한계로 하며 진동한다.

e와 f가 v로부터의 전달에 대해 불투명한 조건을 고려해보자. 만일 e와 f가 v의 값에서 변화가 발생한 후에 등가라면, 그들은 변화 전에도 등가다.

그래서 이 조건에서는 e = f 다.

e 혹은 f가 투명하다고 가정해 보자.

v의 진동이 하나의 지시 공간으로 전달되고, 다른 지시 공간에서는 전달되지 않다고 가정해보자. v의 적절한 값을 선택함으로써, e가 f와 등가가 되지 않게 할 수 있다. 그리고 이것은 가설에 반한다. 그래서 만일 e 혹은 f 중 어느 하나가 투명하면, 양자는 모두 투명하다.

그래서 v의 값의 어떤 변화도 s, t로 전달된다.

따라서 e와 f는 v에서의 변화 후에 등가라면, 그들은 이 전에도 등가다.

그래서 이 조건에서 e = f 다.

하지만 전달의 원리에 의해 어떤 다른 조건도 존재하지 않는다.

따라서 임의의 조건에 있어, 임의의 경우에 대해 e = f다.

이상으로 증명은 완결된다.

9. 완전성 (Completeness)

대수에서 임의의 입증 가능한 귀결은 산술에서 증명 가능한 정리를 지시하고 있음을 확인했다. 이런 점에서 대수에서의 귀결들은 산술의 특징들을 나타낸다고 말할 수 있다. 특히 귀결들은 등식의 형식으로 표현될 수 있는 산술의 특징들을 나타낸다.

대수가 이 특징들에 대해 완전한 설명인지 아니면 부분적인 설명인지 의문을 가질 수 있다. 즉 산술에 대한 정리로서 증명될 수 있던 모든 등식의 형식이 대수에서 귀결로 입증될 수 있는지를 묻고자 하는 것이다.

정리 17. 완전성 (Completeness)

원시 대수는 완전하다.

다시 말해 만일 $\alpha = \beta$ 가 원시 산술에 대한 정리로 증명될 수 있다면, 원시 대수에서 모든 α, β 에 대해 귀결로서 입증될 수 있다.

귀납적 방법을 통해 이 정리를 증명해 보자. 먼저 모든 $\alpha = \beta$ 의 경우를, 임의의 양의 숫자 n개보다 적지 않은 구별되는 변수들을 가지고 대수적으로 입증한다면, n개의 구별되는 변수를 가진 임의의 $\alpha = \beta$ 의 경우에도 입증될 수 있음을 보인다. 그리고 n개의 변수보다 적은 경우에 완전한 입증 가능성의 조건은 n이 양수인 한 유지될 수 있음을 보인다.

증명

n보다 작은 개수의 구별되는 변수를 지닌 등가 α, β에 대해 $\alpha = \beta$ 의 입증 가능성이 성립된다고 가정하자.

주어진 등가 α, β 가 n개의 구별되는 변수를 포함하고 있다고 하자.

절차: 주어진 α, β를 변수 v에 관한 규준 형식(canonical form) α', β'로 감축한다.

T14, T15의 증명에서 이 감축이 대수적이며, 그래서 $\alpha = \alpha', \beta = \beta'$가 모두 입증 가능하다는 것, 그 과정에서 어떤 구별되는 변수도 더해지지 않는다는 점을 보았다.

T15의 증명에 의해 α 의 규준 형식은 $\overline{\overline{v}|\ A_1}|\ \overline{v\ A_2}|\ A_3$, β 의 규준 형식은 $\overline{\overline{v}|\ B_1}|\ \overline{v\ B_2}|\ B_3$ 이라고 가정할 수 있다. 여기서

E1 $\quad \alpha = \overline{\overline{v}|\ A_1}|\ \overline{v\ A_2}|\ A_3$

E2 $\quad \beta = \overline{\overline{v}|\ B_1}|\ \overline{v\ B_2}|\ B_3$

는 모두 입증 가능하다. 그래서

$$\overline{v\rceil\ A_1}\rceil\,\overline{v\ A_2}\rceil\, A_3 = \overline{v\rceil\ B_1}\rceil\,\overline{v\ B_2}\rceil\, B_3$$

는 비록 입증 가능한 지 아직 알 수는 없지만, 참이다. 이제 v에 대해 상수값을 대입한다면,

E3 $\quad \overline{A_1}\rceil\ A_3 = \overline{B_1}\rceil\ B_3$

E4 $\quad \overline{A_2}\rceil\ A_3 = \overline{B_2}\rceil\ B_3$

각기 n-1개의 구별되는 변수를 가지고 있는 E3와 E4는 가정에 의해 입증 가능하다. 여기서 E1~E4는 모두 입증 가능하고, 입증할 수 있다.

$\alpha = \overline{v\rceil\ A_1}\rceil\,\overline{v\ A_2}\rceil\, A_3$ E1

$= \overline{\overline{v\rceil\ \overline{A_1}\rceil}\rceil\ \overline{v\ \overline{A_2}\rceil}\rceil}\rceil\ A_3$ C9

$= \overline{\overline{v\rceil\ \overline{A_1}\rceil\ A_3}\rceil\ \overline{v\ \overline{A_2}\rceil\ A_3}\rceil}\rceil$ J2

$= \overline{\overline{v\rceil\ \overline{B_1}\rceil\ B_3}\rceil\ \overline{v\ \overline{B_2}\rceil\ B_3}\rceil}\rceil$ E3, E4

$= \beta$ J2, C9, E2

그래서 n 개보다 작은 변수에서 입증 가능하다는 조건에서 n개의 변수를 가진 $\alpha = \beta$ 는 입증 가능하다.

n 개의 변수보다 작은 변수를 가진 $\alpha = \beta$가 모든 등가 α, β에 대해서 입증 가능하기 위한 n의 양의 값이 존재함을 보일 필요가 있다.

이는 n = 1인 조건에 대해서 증명하면 충분하다. 그래서 만일 $\alpha = \beta$가 변수를 갖지 않는다면, 그것은 대수에서 입증 가능하다는 것을 보일 필요가 있다.

만일 α, β가 변수를 갖지 않는다면, 원시 산술에서의 표현들로 생각할 수

있다.

T1~4에 대한 증명을 통해 모든 산술적 등식은 산술에서 입증 가능하다는 것을 보았다. 이제 그들이 대수에서 입증 가능하다는 것을 보일 필요가 있다.

C3에서 a = ⌉ 라 하면,

⌉⌉ = ⌉

이고 이는 I1이다.

C1에서 a = ⊗ 라 하면,

$\overline{\overline{\ }|}|$ = ⊗

이고 이는 I2다.

그래서 산술에서의 발단은 대수에서 입증 가능하다. 그리고 만일 α = β가 변수를 갖지 않는다면, 대수에서 입증 가능하다.

이상으로 증명을 완결한다.

10. 독립성 (Independence)

어떠한 등식도 다른 등식으로부터 입증될 수 없다면, 우리는 집합에서의 등식들을 독립적이라 부른다.

정리 18. 독립성 (Independence)

원시 대수에서의 발단들은 독립적이다.

즉 J1이 유일한 발단으로 주어져 있다면, 하나의 귀결로서 J2를 발견할 수

없으며, 만일 J2가 유일한 발단으로 주어져 있다면, J1을 귀결로서 발견할 수 없다.

증명

J1이 대수에서 허용된 유일한 변형을 규정한다고 가정하자. 지향의 관례로부터 형식 $\overline{p\rceil \; p\rceil}$ 이외의 어떤 표현도 어떤 공간 안으로 매립하거나(put into) 추출할(take out) 수 없다.

그러나 J2에서 r은 하나의 공간에서 추출하여, 매립되지만, r은 반드시 형식 $\overline{p\rceil \; p\rceil}$일 필요는 없다.

그래서 J2는 J1의 귀결로서 입증 가능하지 않다.

다음으로 J2가 대수에서 허용된 유일한 변형을 규정한다고 가정하자. J2의 음미는 어떤 구별되는 변수도 제거할 수 없음을 보여준다.

그러나 J1은 한 개의 구별되는 변수를 제거한다.

그래서 J1은 J2의 귀결로서 입증될 수 없고, 이상으로 증명은 완결된다.

11. 2계 등식 (equations of the second degree)

지금까지는 산술적이건 혹은 대수적이건 주어진 임의의 표현은 유한한 것을 필요로 하는 규칙(정리 1)을 따라왔다. 그렇지 않다면, 지금까지 이야기한 규율들에 의해서 그 값을 찾을 방법이 없다.

주어진 임의의 표현이 유한한 수의 스텝을 통해 어떤 임의의 주어진 등가 표현으로부터 도달할 수 있음은 이 때문이다. 입증 과정을 특징짓기 위한 규칙으로서 이 원리를 찾아내는 것이 편리하다는 것을 알 수 있다.

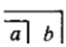
제 9 규율. 입증의 규칙 (Rule of demonstration)

하나의 입증은 유한한 스텝으로 이뤄진다.

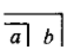
이 규칙을 따라야 함을 보는 방법은 스텝을 세어 보는 것이다. 이는 임의의 주어진 고려의 수준으로 제한될 필요는 없다. 대수적 표현에서 각각의 변수는 알려지지 않은 (혹은 실질화되지 않은) 숫자의 월경들을 대신한다. 그리고 이 경우 산술적 스텝을 세어보는 것은 가능하지 않다. 하지만 여전히 대수적 스텝을 세어 보는 것은 가능하다.

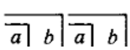
6장에서 스텝의 성격에 대한 관찰에 따라, 적어도 한 번의 세어 본 결과가 유한하다면, 몇 번 세어본 값이 서로 달라도 문제가 되지는 않는다는 점을 지적할 수 있다.

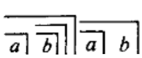
다음의 표현을 검토해보자.

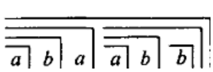


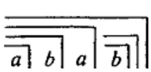
이제 다음과 같은 형태로 스텝 열 (step-sequence)을 발생하도록 하자.

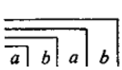


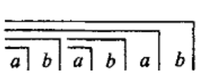
=  C5

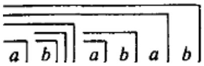
=  C1

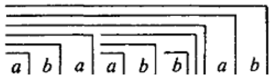
=  J2

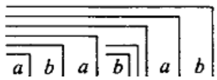
=  C4

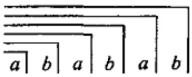
=  C1

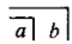
=  C5

=  C1

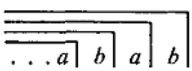
=  J2

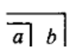
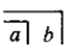
=  C4

=  C1

열은 무한하게 계속할 가능성이 있고, 그래서 와 등가인 a와 b가 반복되는 사다리꼴의 크기는 한계가 없다.

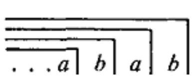
이제 가능하다면 스텝 열을 시작했던 명령이 수정되지 않아서, 그 과정이 무한하게 계속되는 것을 상상해보자. 공간 안에서 이는 형식의 무한한 사다리꼴을 만들어 낼 것이다.



끝이 없는 이 형식은 에서 유한한 수의 스텝으로 도달할 수 없기 때문에, 와 같은 값을 반드시 표현할 것이라고 기대할 수 없다. 하지만 가능성에 대한 철저한 검토를 통해서, a와 b의 다양한 경우에서 생겨날 수 있는 값을 확인하고, 그것을 유한한 표현의 값과 비교해볼 수 있다.

재진입 (Re-entry)

열쇠는 모든 짝수의 깊이에서의 둘러싸인 표현의 부분은 총 표현(the whole expression)과 동일하고, 그 총 표현은 어떤 짝수의 깊이에서의 내부 공간으로 재진입 하는 것으로 간주할 수 있다는 것을 확인하는 것이다. 그래서

f = 

$= \overline{\overline{fa}\rvert \; b}\rvert$ E1

지배의 규칙에 따라 f가 a, b의 각 가능 경우에 취할 수 있는 값을 알 수 있다.

$\overline{\overline{fa}\rvert \; b}\rvert = f$ E1

$\overline{\overline{fm}\rvert \; m}\rvert = n$

$\overline{\overline{fm}\rvert \; n}\rvert = m$

$\overline{\overline{fn}\rvert \; m}\rvert = n$

$\overline{\overline{fn}\rvert \; n}\rvert = m$ 혹은 n

마지막 경우에 f = m 이라면

$\overline{\overline{mn}\rvert \; n}\rvert = m$

따라서 E1은 만족된다. 이제 f = n이라 가정하면,

$\overline{\overline{nn}\rvert \; n}\rvert = n$

으로 E1은 다시 만족된다. 그래서 이 경우 방정식은 두 개의 값을 가지게 된다.

그래서 임의의 주어진 표현 e로부터 무한한 수의 스텝을 거쳐, e와 등가가 아닌 표현 e’에 도달할 수 있음이 분명해졌다.

그런 경우에 e’의 산술적 값이 a, b의 모든 가능한 경우에서 오직 하나로 결정될 수 없기 때문에, 표시의 정리들이 더 이상 유지되지 않음을 발견한다.

비결정성 (Indeterminacy)

그래서 각각의 독립 변수들의 값을 고정해도, (독립 변수를 사용함으로써 발생한 비결정성의 경우와 마찬가지로) 반드시 값이 결정되는 것은 아닌 비결정성의 차수 (a degree of indeterminacy)를 e'에 도입한다. 하지만 이것이, 각각의 표현에서 보여지는 비결정성의 차수가 동일하다면, 하나의 표현을 다른 표현과 등가로 하는 것을 방해하는 것은 아니다.

차수 (Degree)

각각의 표현들이 등가가 되는 방정식을 분류하기 위해서 이 비결정성의 분명한 차수를 취한다. 재진입이 없고, 그래서 풀 수 없는 비결정성이 없는 표현들의 방정식을 일차 방정식(equations of the first degree)이라 부른다. 그리고 한 번의 재진입이 있는 표현들의 방정식을 이차 방정식(equations of the second degree)이라 부른다. 기타 등등.

J1과 J2는 차수가 어떻게 되던 모든 방정식에서 성립함은 분명하다. 그래서 1보다 큰 차수의 방정식을 검정하기 위해 (6장에서 개괄했던) 입증의 일반적 절차를 사용하는 것이 가능하다. 하지만 어떤 등식의 입증을 확인하기 위해 산술을 사용하는 (8장에서 개괄했던) 절차는 부정된다. 왜냐하면 그것을 생산하는 무한한 절차들이 형식에 대한 우리의 완전한 앎에 대한 지금까지의 접근을 가로막기 때문이다. 여기서 출발에 앞서 입증의 규칙을 살펴볼 필요가 있다. 왜냐하면 지배의 규칙과 함께 이제 입증의 규칙이 여전히 길을 찾아나가기 위한 명령적 원리가 되기 때문이다.

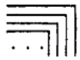
상상적 상태 (Imaginary state)

산술과의 결합을 잃어버리게 되었다는 것은 다음의 예를 통해 확인할 수 있다.

E2 $\qquad f_2 = \overline{\overline{f_2}|}|$

E3 $\qquad f_3 = \overline{f_3}|$

라 하자. 분명하게 E2와 E3는 각기 f를 동일한 무한한 표현과 등치함으로서 산술적으로 표현할 수 있다. 그래서

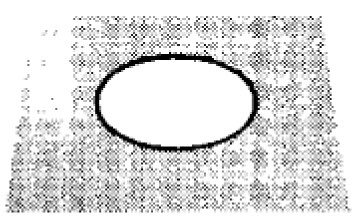
f_2, f_3 = 

하지만 마찬가지로 분명하게 E2는 ⌉ 혹은 라는 산술적 해법에 대해 모순 없이 충족될 수 있는데 반하여, E3는 이런 해법을 충족하지 못하고, 게다가 E2처럼 동일한 값을 표현할 수 없다. 그래서 지금까지 살펴본 것처럼 ⌉ 와 가 형식의 유일한 상태들을 나타내기 대문에, 만일 E3가 해법을 갖는 것처럼 하기 위해서는 지금까지 살펴보지 않았던 형식의 상상적 상태를 표시하는 해법을 허용해야 한다.

시간 (Time)

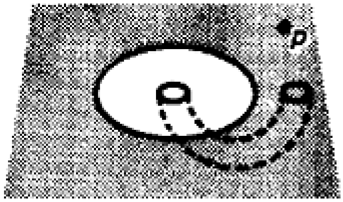
만일 피할 수 있다면, 원형식으로부터 떠나지 않길 바라기 때문에, 우리가 예견하는 상태는 공간 안에서가 아니라, 시간 안에 있다. (이미 정주한 공간의 상태를 떠나지 않고서도 시간의 상태로 들어가는 것은 가능하다)

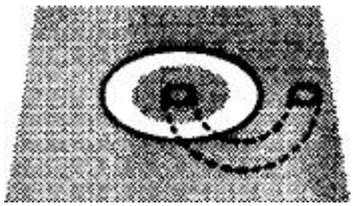
이것을 상상할 수 있는 한 가지 방법은 공간을 통한 표시된 값에서의 변화가 전달되는 데 거리에 따라 시간이 걸린다고 가정하는 것이다. 평면 위에 하나의 월경을 생각해보자.



표시된 상태의 지시는 빗금이 쳐진 부분이다.

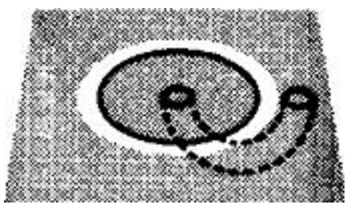
이제 월경에 의해 그려진 차이가 그것이 나타난 표면 밑에 터널을 뚫음으로써 파괴된다고 가정해보자. 그림 1에서 시간 t_1, t_2, … 에 있어 그런 파괴의 결과를 볼 수 있다.

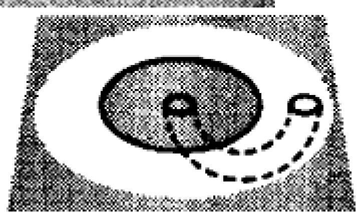




$t_1,\ t_7,\ t_{13},\ \cdots$

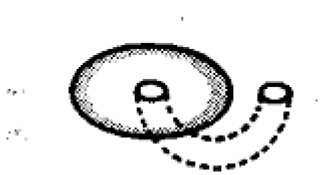
$t_2,\ t_8,\ t_{14},\ \cdots$

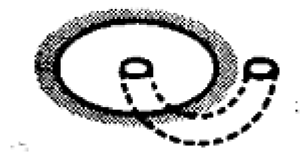




$t_3,\ t_9,\ t_{15},\ \cdots$

$t_4,\ t_{10},\ t_{16},\ \cdots$





t_5, t_{11}, t_{17}, … t_6, t_{12}, t_{18}, …

그림 1

진동수 (Frequency)

만일 표현의 공간을 통해 값의 표시가 전달되는 속력(speed)이 항상 같다고 한다면, 그 진동의 진동수(frequency of its oscillation)는 터널의 길이에 의해 결정된다. 반면 길이가 항상 같다고 한다면, 진동의 진동수는 공간을 통한 전달의 속력에 의해 결정된다.

속도 (Velocity)

값의 지시에서의 전달에 대해 속력을 부여한다면, 또한 방향을 정하지 않으면 안 된다. 그래서 속도가 된다. 만일 그렇게 하지 않는다면, (예를 들어) t4에 대해 표시된 전파가, t5에서 보여진 것 대신에 t3에서 보여지는 표시를 향해서 계속 움직이게 되는 것을 멈출 수 없다.

함수 (Function)

변수 v를 포함한 표현을 다시 말해 v의 함수라고 부를 수 있다. 우리가 그것을 바라보는 관점에 따라서 값의 표현 또는 변수의 함수로 볼 수 있다.

진동자 함수 (Oscillator function)

그림 1의 점 p에서 값의 지시를 생각한다면, 시간에 따라 하나의 주어진 진동수를 지닌 연속적 구형파 (矩形波, square wave)를 갖게 된다.

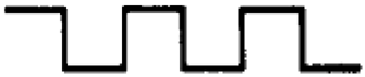


그림 1의 점 p에서의 모든 유의미한 특성들을 표현에서 두 개의 연속적 공간에 나타나도록 배열한다고 가정해보자. 그러면 다음과 같다.

$\overline{p\,}|\; p$

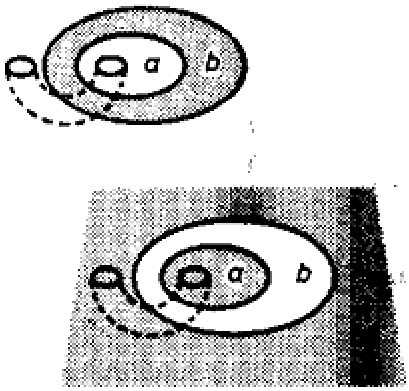
전달의 속력이 항상 같다고 가정한다면, 각각의 공간에서 동일하게 약화된 차이를 배열함으로써 이런 결과에 이르게 된다. 이 경우 외부 공간에서의 두 개의, 그 중 하나는 월경에 의해 도치된 구형파의 중첩(superimposition)은 표시된 상태의 연속적 표시에 더해진다.

현실 값과 상상 값 (Real and imaginary value)

공간에서는 결정되지 않는 지점 (혹은 변수) p 에서(혹은 에 의해) 표시된 값은 형식과의 관계에 있어 상상적(imaginary)이라 부를 수 있다. 그럼에도 불구하고, 위에서 살펴본 것처럼 그것은 시간과의 관계에 있어서는 현실적(real)이고, 그 자신과의 관계에 있어서는 공간에서 결정적인 것이 되며 그래서 형식에서 실질적이 된다.

그래서 E3에 대한 도해적 표시를 생각해보자. 그리고 이제 동일한 선상에서 E1과 제한된 경우인 E2에 대해서도 검토해볼 것이다.

a로부터의 단일 진동 (pulse) →



b로부터의 단일 진동 ←

그림 2

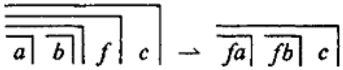
기억 함수 (Memory function)

E1에서 함수 f의 현재 값은 그것의 과거 값, 그래서 a와 b의 과거 값에 의존한다. 사실 a, b 모두 표시되지 않은 상태를 지시할 때, 함수는 그 둘 중 어느 쪽이 마지막으로 표시된 상태를 지시했는가를 기억한다. 만일 a라면 f = m, b라면 f = n이다.

전복 (Subversion)

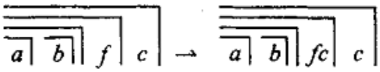
E1에서의 f와 정확하게 같도록 그림 2에서 그려진 설정을 만들기 위해서는 터널을 통한 실질적 전달이 단지 외부로부터 내부로만 이루어지도록 배열하는 것이다. 상수들의 차이적 특성들에 대한 이런 부분적 파괴를 전복이라 부를 것이다.

만일 f의 기억 특성을 사용하고, f가 항상 전복 함수라면, 이런 특성이 없는 표현의 경우에 가능한 어떤 변형은 피해야만 함을 지적할 수 있다. 예를 들어 다음은 허용되지만,



J2, C1

다음은 피해야만 한다.



C2

왜냐하면 뒤의 변형은 c에 의한 표시된 상태의 지시가 신뢰할 수 있게 기억되는 표현으로부터, 기억이 명백히 상실되는 표현으로의 변형이기 때문이다.

유한한 표현에서의 시간 (Time in finite expressions)

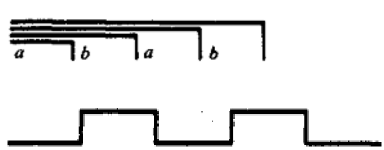
지금까지의 고찰에 시간을 도입하는 것은 자의적 선택이 아니라, 더 깊은 탐구를 위한 필수적인 수단이다.

사용되는 수단의 필요성 정도는 그것의 응용의 폭에 달려 있다. 여기서 도입하려는 시간이라는 수단은 어떤 비 일관성도 없이 지금까지 검토했던 모든 표시 형식을 포함할 수 있다.

이는 E1을 다시 검토함으로써 나타낼 수 있다. 여기서 그림 2에서 본 것 같은 단축된 형태에서와 마찬가지로, f의 확장된 형태에서도 동일한 답을 도출할 수 있는가 (즉, a, b의 지배적 상태에 대한 동일한 기억을 이끌 수 있는가)를 살펴봄으로써 시간 개념을 사용할 수 있는가 검토할 수 있다. 예시를 위해 먼저 하나의 유한한 표현을 검토해보자.

그런 유한한 표현은 확장 정도와 비례하는 지속(duration)에서 하나의 조건에서는 안정되는 반면, 다른 조건에서는 그것의 유한한 기억을 갖는다는 것을 그림 3을 통해서 볼 수 있다.

a b



f

n n n

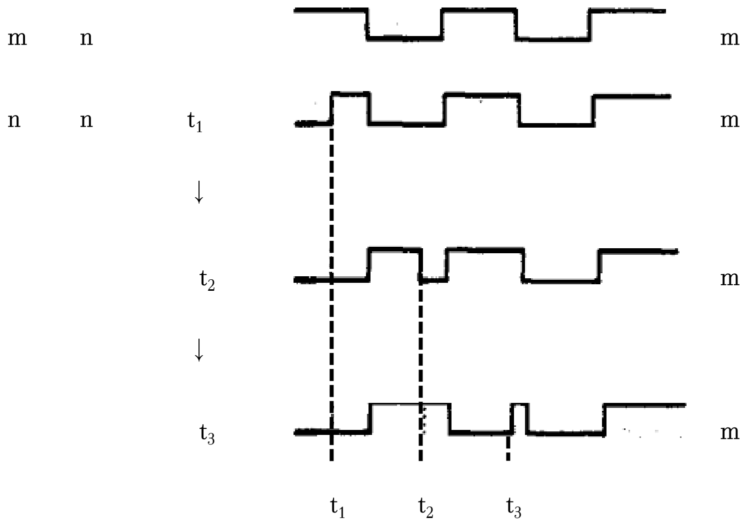
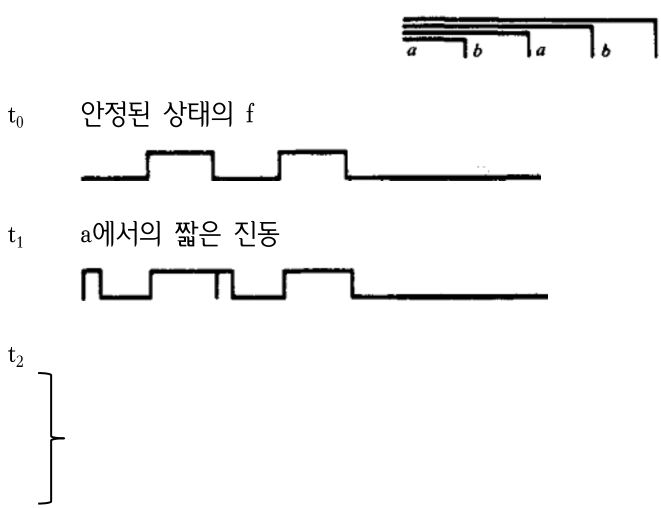


그림 3

사다리꼴의 끝없는 확장은 각각의 조건에 대한 끝없는 기억을 허용하고, 그래서 시간 개념은 E1에서의 f의 단축된 그리고 확장된 형식이 서로간에 적용될 수 있기 위한 열쇠가 된다.

특히 흥미 있는 조건은 a로부터의 지배적 진동이 충분히 짧게 지속될 경우에 발생한다. 이 조건에서 표현은 그림 4에서처럼 유한한 길이와 지속의 파열(a wave train)을 방사(emit)한다.

파열의 지속과 개별 파의 진동수 등은 그것이 방사된 표현의 성격과 넓이에 의존한다.



불안정한 상태에서의 f

t_3

t_4 f는 전달을 시작

t_5 f는 전달을 지속

t6 다시 안정된 상태의 f

하지만 특정량의 지시 파동은 f 외부 공간에서의 파열

f의 표시 공간을 통해 외부로 진행

그림 4

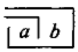
무한하게 확장되는 표현으로부터는 잠재적으로 무한한 방사가 발생하고, 다시 시간과 관계하여 E1을 표현하는 두 가지 (단축된 혹은 확장된) 방법은 동일한 답을 제공한다. 시간의 열쇠 없이는 단지 단축된 표현만이 의미를 가진다.

월경과 마커 (Crosses and Markers)

E1에서의 표현이 더 큰 표현의 일부를 표시하는 경우를 생각해보자. 이제 반드시 재-삽입(re-insertion)이 발생할 위치를 지시하는 것뿐만 아니라, 또한 재-삽입된 표현의 부분을 지시하게 된다. 전체가 더 이상 재-삽입된 부분이

아니기 때문에, 반드시 각각의 경우에 재-삽입된 부분에 대해 이름을 붙이거나, 혹은 직접적 결합에 의해 그것을 지시해야만 한다.

후자의 편이 덜 번거롭다. 그래서 이제 E1에서의 표현을 다시 쓸 수 있다.



이를 통해 불명료함 없이 더 큰 표현 안에 위치 지울 수 있다.

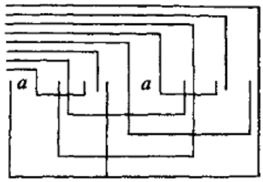
이런 종류의 단순한 전복 표현에서는, 엄밀하게 말하자면 문자 이외(non-literal)의 어떤 부분도 월경이 아니다. 왜냐하면 그것들은 모두 동일한 경계를 표시하기 때문이다. 그럼에도 불구하고 그들을 분리해서 언급하는 것이 편리하고, 이런 목적에서 어떤 표현의 각각의 분리된 비-문자적 부분을 마커(marker)라고 부를 수 있다. 그래서 월경은 마커지만, 마커는 월경일 필요는 없다.

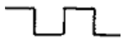
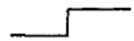
변조기 함수 (Modulator function)

이차 함수가 진동하거나 혹은 기억될 수 있음을 보았다. 이제 2차 이상의 방정식을 쓰기 위해서는 기억할 뿐만 아니라 셀 수 있는 함수를 찾아야만 한다.

셈(counting)을 나타내는 방법은 그것을 기억하기에 대한 대립물로 고려하는 것이다. 기억 함수는 동일한 신호에 대해 동일한 반응을 기억한다. 하지만 셈 함수(a counting function)는 매 번 그것을 다르게 센다.

셈을 나타내는 다른 방법은 파동 구조의 변조기로 생각하는 것이다. 이것이 여기서 그리려는 것이다. 가장 단순한 변조는 원래의 파동의 진동수를 반으로 하는 파동 구조다. 현실 값만을 사용하는 함수로 이것을 다루기 위해서는 여덟 개의 마커가 필요하다. 그래서 다음과 같다.

E4 f = 

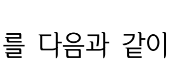
a의 파동 구조가  라면, a가 진동하기 전에 원래 표현이 어떻게 설정되었는가에 따라 f의 파동 구조는  또는  다.

3차원에서 분명하게 표시될 수 있는 것을 2차원에서 그리는 것은 어렵다. 3차원에서 표현하길 바란다. 적어도 3차원적 표시를 2차원에서 그릴 수 있는 더 나은 시스템을 고안할 수 있다.

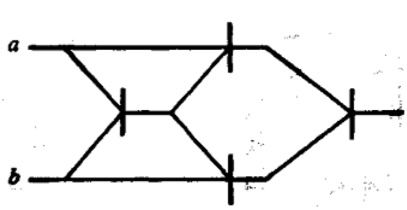
수직선에 의해 마커를 표시하도록 하자.

도선(導線, lead)이라 부를 접속선(lines of connexion)에 의해서 마커 밑에 놓여 있는 것을 표시하도록 하자. 그래서 다음과 같다.

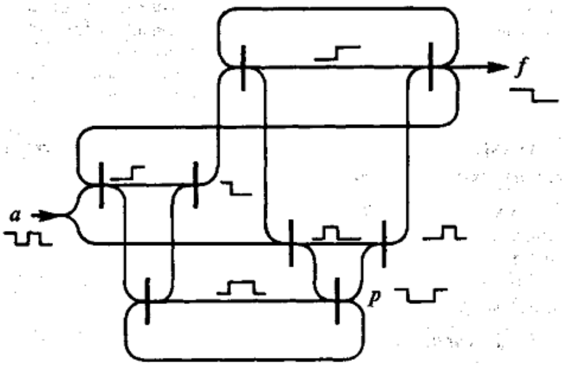
마커에 의해 지시된 값은 도선에 의해 마커로부터 이끌리게 된다. 그 표현에서 다른 마커 밑으로 나뉘어 들어갈 수도 있다. 예를 들어 이제 표현



를 다음과 같이 표시할 수 있다.

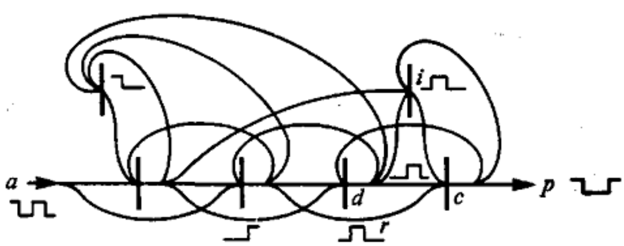


이렇게 바꿔 표현한다면 E4는 다음의 형식으로 나타난다.



여기서 a의 파동 구조가 f의 파동구조를 낳기 위해 어떻게 분리되고 다시 결합되는가를 살펴보는 것은 쉽다.

p에서의 파동 구조는 옮겨진 단계 (the phase displaced)에서 동일한 변조를 구성한다는 것을 알 수 있다. 몇 가지 파동 구조들의 상상적 구성요소(the imaginary component)들을 사용해서 p의 파동 구조를 단지 여섯 개의 마커로 파악하는 것이 가능하다. 이것은 다음의 방정식으로 표현된다.



여기서 비록 i에서의 현실 파동 구조가 r에서의 값과 같다고 할 지라도, i에서의 상상적 구성요소는 마커 c와 d에서의 기억이 적절하게 설정되어 있음을 보장한다. 동일한 고찰은 표현에서의 다른 기억들에도 적용된다.

종결 (Coda)

이 지점에서, 지금까지 우리가 고찰해온 것을 잊을 만큼 멀리 가기 전에 다시 돌아올 수 있다.

지금까지 쭉 (3페이지에서 명령된) 하나의 구성물의 형식을, 즉 최초의 구별을 고찰해 왔다. 우리의 고찰에 대한 모든 설명은, 우리가 스스로에게 부여하는 다양한 마음의 상태 속에서 그것이 어떻게 나타날 수 있는가에 대한 설명이다.

확장된 언급의 규율 (10페이지)에 의해 설명은 끝없이 계속될 수 있음을 보았다.

이 책이 끝이 없을 수는 없다. 그래서 어느 지점에선가 끊어야 한다. 그래서 다음과 같은 말로 여기서 끊고자 한다.

기타 등등 (and so on)

떠나기 전에, 설명이 시작되었던 그 동의 지점으로 마지막 관찰을 위해 돌아간다.

12. 원형식으로의 재진입 (Re-entry into the form)

원형식이라는 개념은 구별에 대한 욕망으로부터 나온다.

이 욕망을 인정하면, 비록 우리가 좋은 방식으로 볼 수 있긴 하지만, 원형식을 피할 수는 없다.

지시의 산법은 원형식을 다루는 하나의 방법이다.

원형식을 통해서 산법을 볼 수 있고, 법칙, 발단, 정리, 귀결 등의 도움 없이 또는 방해 없이 산법 속에서 원형식을 볼 수 있다.

다음의 실험은 이를 위한 무한한 가능한 방법들 중 하나를 나타내는 것이다.

이 실험에서 기호

=

은

'~와 동일하게 여겨지다' (is confused with)

를 나타낸다.

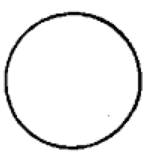
실험적으로 그려진 각각의 차이에서의 양면은 두 종류의 언급을 갖게 된다는 점을 또한 지적ㅎ 둔다.

일차적, 혹은 명시적 언급은, 그것이 어떻게 표시되었는가에 따른 한 면의 값에 대한 것이다.

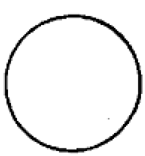
이차적, 혹은 암묵적 언급은 외부 관찰자에 대한 것이다. 즉, 외부는 차이가 보여지는 것으로 가정되는 면이다.

일차적 실험 (First experiment)

평면상에 하나의 원을 그린다.

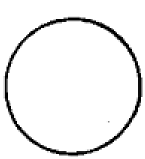


표시 m은 원주의 외부를 지시한다.



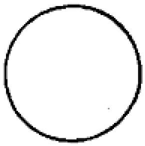
m

없는 표시는 원주의 내부를 지시한다.

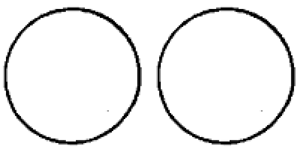


m

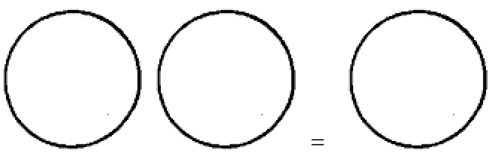
표시 m을 하나의 원이라 하자.

m = 

원의 형식에 표시를 재삽입하자.

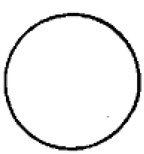


이제 원과 표시는 (유의미한 속성이라는 점에서) 구별되지 않는다. 그래서

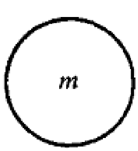


이차적 실험 (Second experiment)

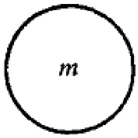
평면상에 하나의 원을 그린다.



표시 m이 원주의 내부를 지시한다고 하자.



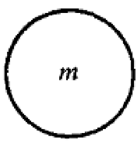
없는 표시는 원주의 외부를 지시한다고 하자.



이제 표시의 값이 그것이 놓여 있는 공간의 값이라 하자. 즉, 표시의 값은 표시 밖의 공간에 대한 것이다.

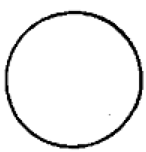
이제 원주 밖의 공간은 표시되지 않는다.

그래서 값을 평가하면,

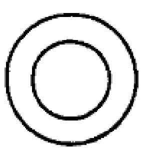


=

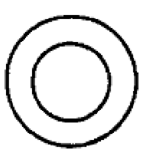
표시 m을 하나의 원이라 하자.

m = 

원의 형식에 표시를 재삽입하자.

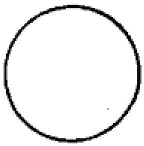


이제 값을 평가하면,

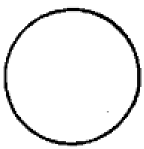

=

삼차적 실험 (Third experiment)

평면상에 하나의 원을 그린다.

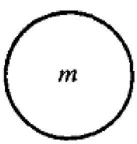


표시 m이 원주의 외부를 지시한다고 하자.



m

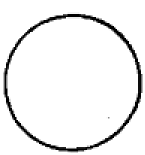
동일한 표시 m이 원주의 내부를 지시한다고 하자.



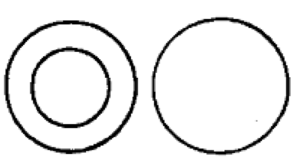
m

이제 표시 m이 원주의 양면을 모두 지시하기 때문에, 값에서 보면 양면은 구별되지 않는다.

다시 표시 m을 하나의 원이라 하자.

m = 

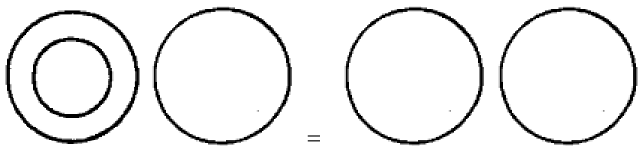
원의 형식에 표시를 재삽입하자.



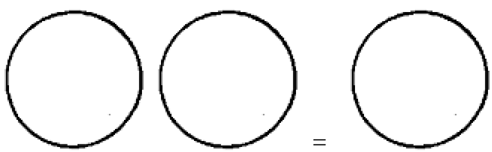
이제 동일한 표시에 따라 최초의 원은 다른 값과 구별되지 않는다.

그래서 이런 면에서 차이는 존재하지 않는다.

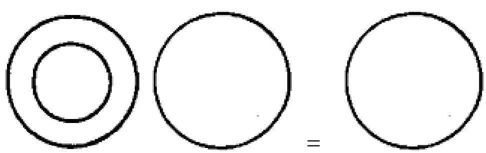
그래서 그것이 나타내는 공간에 대한 손실, 혹은 추가 없이 삭제할 수 있다.



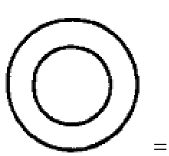
하지만 일차적 실험을 통해



라는 것을 알기 때문에



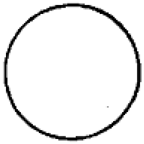
이고, 이차적 실험에서의 발견



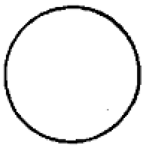
과 비 일관되지 않는다. 왜냐하면 이차적 실험에서는 하나의 스텝을 통해서 이뤄진 것이 여기서는 두 번의 스텝으로 이뤄졌기 때문이다.

사차적 실험 (Fourth experiment)

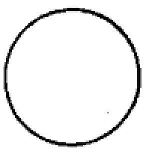
평면상에 하나의 원을 그린다.



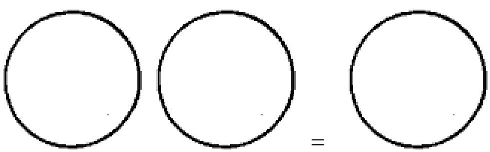
원주의 외부를 표시하지 않는다.



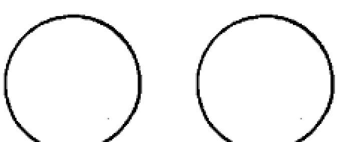
원주의 내부를 표시하지 않는다.



일차적 실험에서



을 보았기 때문에, 거기서의 순수화 절차(the purifying procedure)를 되짚어 보면



외부 공간에 대한 원주의 값은 그래서 표시의 값이다. 왜냐하면 표시는 이제 이 공간을 구별하기 때문이다.

자신이 점하고 있는 공간을 구별하기 때문에 관찰자(an observer) 역시 하나의 표시다.

위의 실험에서 원들이 형식들이고, 원주가 이 형식의 공간들을 형태 짓는 차이라고 상상해보자.

이 개념에서 임의의 공간에 대해 그려진 하나의 차이는 공간을 구별하는 하나의 표시다. 마찬가지로, 그리고 역으로 하나의 공간에 있는 임의의 표시는 차이를 만든다.

이제 최초의 차이, 표시 그리고 관찰자는 서로 교환 가능할 뿐만 아니라, 형식에서는 동일함을 확인할 수 있다.

주석

1장

과도한 이야기일 수도 있겠지만, 독자가 1장에서 알아야 하는 것은 폐쇄된(closure) 형식으로서의 차이의 개념 그리고 이 정의에 따른 두 가지 공리가 전부다.

2장

이 단계에서 수학적 커뮤니케이션의 원시적 형식은 기술(description)이 아니라 명령이라는 점을 이해하는 것이 도움이 된다. 이런 면에서 요리와 같은 실용 기술의 형식과 비교될 수 있다. 요리에서는 문자로는 기술되지 않음에도, 케이크의 맛은 레시피라고 불리는 명령들의 집합 형식을 통해 독자에게 전달될 수 있다. 음악도 동일한 예술 형식이다. 작곡가는 그에게 떠오른 음의 집합을 또는 그로부터 생겨날 감정들의 집합에 대해 기술하려고 시도조차 하지 않는다. 그는 명령의 집합들을 쓰고, 만일 독자가 그것에 따른다면, 독자에게 작곡가의 고유한 경험이 재생산의 형태로 발생한다.

비트겐슈타인이 [4. 명제 7]에서

말할 수 없는 곳에서

침묵되어야만 한다.

고 했을 때, 그는 기술적 언어만을 고려했던 것으로 보인다. 다른 곳에서는 기술적인 면을 말하자면 수학자는 아무 말도 하지 않는다고 지적했다. 작곡가도 마찬가지다. 만일 그가 작곡을 통해서 (즉 무한하게) 나타날 감동의 집합을 기술 (즉 제한)하려 한다면 절망적이고 필연적으로 실패하게 될 것이다. 그러나 이런 이유로 작곡가나 수학자가 침묵해야 하는 건 아니다.

『트락타투스(Tractatus)』의 서문을 통해, 러셀(B. Russell)은 비트겐슈타인의 마지막 명제의 올바름에 대한 정당한 의문이라 생각되는 것을 표명한다. [p.22]

주저하게 되는 건 다음과 같은 점이다. 비트겐슈타인씨는 말해질 수 없는 것에 대해 많이 이야기하려 하는데, 그래서 회의적 독자들에게 언어의 위계를 관통하는 어떤 통로가 있거나, 혹은 어떤 다른 탈출구가 있을 수 있다고 시사한다.

여기서 볼 수 있는 것처럼 그 탈출구는 언어의 명령적 능력에 있음은 분명하다.

심지어 자연 과학의 경우 우리가 인정하려 하는 것보다다 훨씬 더 명령에 의존하는 것처럼 보인다. 과학자들의 전문적인 출발은 적합한 교과서를 읽는 것보다는 '현미경을 보라'와 같은 명령에 따르는데 있다. 그러나 그것은 과학자들이 현미경을 봄으로써, 그들이 본 것을 서로간에 기술하고, 서로 토론하고, 그래서 그것을 기술한 논문이나 교과서를 쓰기 위한 것이다. 마찬가지로 명령의 주어진 집합을 따르는 수학자들 역시 그를 통해 그들이 본 것을 서로 기술하고, 논의하고, 그것을 기술하는 논문이나 교과서를 쓰기 위함이다. 이 각각의 경우 기술은 일차적으로 따라야만 하는 명령들의 집합에 의존하며, 이차적이다.

다른 사람이 작곡한 음악을 이해하려고 시도할 때, 우리는 어떤 종류의 악기를 가지고 작곡가의 명령을 따름으로써 우리 스스로에게 *실증*(illustrating) 함으로써 그렇게 한다. 마찬가지로 우리가 수학 작업을 이해하려 한다면, 수학자의 명령을 따름으로서 우리 스스로에게 실증하는 방법을 찾아야만 한다. 이를 위한 정상적 방법은 어떤 필기도구와 필기 가능한 평면, 예를 들어 파도에

쓸려 평평해진 모래밭과 손가락 혹은 연필과 종이 같은 것을 사용하는 것이다. 실증을 위한 이런 도움을 통해서 2장에 있는 명령을 수행하기 시작할 수 있을 것이다.

먼저 우리는 원 혹은 원에 가까운 하나의 형식을 그릴 수 있다. 한 장의 종이는 그 자체 평면의 예시가 되지만, 여기서의 목적에서 수학적 도구로서 유용하다. 왜냐하면 그런 공간에 있는 원이 사실 차이를 만든다는 것을 알기 때문이다. (만일 예를 들어 우리가 원환체(圓環體 ,torus)의 표면에 그림을 그린다면, 원은 차이를 만들어 내지 못할 수 있다.)

다음과 같이 명령할 때,

원형식으로부터 차이나는 형식이 있다고 하자

새로운 종이 한 장(혹은 다른 모래밭)을 취함으로써 그것을 예시할 수 있다. 이제 이 별개의 형식에서 우리는 다음의 명령을 실증할 수 있다.

차이의 표시가 원형식으로부터 다른 형식으로 복사되었다고 하자

독자가 문장에 잇는 명령에 대한 자신의 예시를 제한할 필요는 없다. 문장에서의 명령과 일관되건 일관되지 않건 자신의 예시를 만들어서 마음대로 검토해볼 수 있다. 단지 그 자신의 탐구를 통해 수학자들이 말하는 세계의 경계 혹은 법칙의 특징적인 모습을 보게 될 것이다. 마찬가지로 독자가 어떤 지점에서의 논의를 따르지 않는다면, 어떻게 진행되는지 알 때까지 그 지점에 막혀 있을 필요도 없다. 우리는 끝에 도달할 때까지 어떤 것의 출발을 충분하게 이해할 수는 없다. 수학자가 하고자 하는 것은 하나의 완전한 그림, 그가 제시한 *무언가의(of which)* 본질적인 질서, *그 속에서는(in which)* 어느 정도는 자의적일 수 있는 질서를 제공하는 것이다. 독자는 좋을 대로 그 자의적 질서를 완전히 정당하게 수정할 수 있다.

본질적 질서 안에서 명령(command)과 명명(name)을 구분할 수 있다. 명령은, 어떤 것이 있다고 하고, 어떤 순서를 상기시키고, 질서를 요청하며, 일반적으로 다음과 같은 허용형(permissive form)으로 수행되거나,

이것 저것이 있다고 하자 (let there be so-and-so)

때로는 더 특수한 능동형(active form),

수직선을 내려라 (drop a perpendicular)

을 취한다. 명명은 참조점(reference point)이나 참조부(reference token)로서 주어진다. 명령의 수행에 있어서 그것은 어떤 세계이건 이미 항상 질서에 대해 명령 받거나 명명되는 한에서만 실효성이 있도록 의도된다. 명명의 제도 내지 의식은 대개 다음과 같이 수행된다.

이것 저것을 이것 저것이라 부르자 (call so-and-so such-and-such)

그리고 호출은 마치 기호 = 처럼 양 방향으로 전달될 수 있다. 그래서 이것 저것을 이것 저것으로 부름으로써 우리는 그 역으로 부를 수도 있다. 명명은 그래서 방향이 없거나 혹은 다시 말해 등방적(pan-directional)이라 생각할 수 있다. 이에 비해, 명령은 방향이 있다, 거기서 하나의 이름을 가진 하나의 상태 혹은 조건으로부터 다른 이름을 가진 다른 상태 혹은 조건으로 월경을 요구할 수 있다. 그래서 전자의 이름은 후자의 이름으로 불릴 수 없다.

명령의 가장 중요한 구조들은 때로는 규율(canon)이라고 불린다. 명령의 역할을 하는 명령들이 하나의 집합을 스스로 구성하고, 그래서 서로간에 결코 독립되어 있지 않다. 하나의 규율은 구성 중인 체계의 밖에 (즉 기술되고) 있다고 하는 차이를 낳는다. 그러나 아무리 핵심적 중요성을 가진다 해도 구성에 대한 명령 (즉 ‘차이를 만들어라’)은 규율이 아니다. 규율은 허용 또는 허가되는 명령, 혹은 명령들의 집합이지 구성 혹은 창조를 위한 명령이 아니다.

창조와 그것의 허용에 있어 실효성 있는 명령은, 산법 내에서 상수 혹은 *연산자(operators)*에 의해 지시되는 산법의 실제 텍스트 안에서의 그것, 이들은 어떤 것에 특정한 이름을 부여하기 위한 명령이고, 그래서 다시 기술할 필요 없이 다시 언급할 수 있게 하는 명령과는 구별되어야만 한다

뒤에서 (4장) 어떤 언급의 증명 혹은 정당화라고 부를 것에 대해 다시 검토할 것이다. 여기서 보이고자 하는 것은 그런 언급이 지금까지 소집되고, 호출된 규율 혹은 성립된 질서 속에 암묵적으로 담겨있거나, 이들을 따르거나, 혹은 허용된다는 점이다. 그래서 증명의 구조 속에서 다음과 같은 형식의 명령

(injunction)을 발견할 수 있다.

이러저러한 것을 고찰하라

이러저러한 것을 가정하라

이는 명령(command)은 아니지만 분명하고 완전하게 따를 수 있는 함축이 담긴 *길(way)*로의 *유혹(invitation) 혹은 방향 제시(direction)*다.

지시의 산법을 이해함으로써 기술, 지시, 명명, 명령과 같은 관념들이 결국 동일한 것에 대한 설명임을 알게 되는 *감축*의 지점(a point of such *degeneracy*)으로부터 출발하게 된다. 독자가 스스로 이점을 깨닫게 되는 것이 중요하다. 그렇지 않다면 두 번째 원시 등식으로 가는 논의(p.5)를 (따를 수는 있지만) 이해하기 어렵다는 것을 발견할 것이다.

월경은 흔적에 의해 지시되는 상태라 하자. (let the crossing be to the state indicated by the token)

라는 명령에서, 흔적은 이중적인 의미를 갖는데, 우선 경계 넘기의 명령(an instruction to cross)이며, 다음으로는 월경이 가져온 상태에 대한 지시자 (그리고 그래서 하나의 이름)로서 이다. 이 명령에 따르기 전에 흔적이 하나의 지시를 수행할 수 있는지는 해결되지 않은 문제다. 하지만 이 명령은 애매모호함 없이 월경이 만들어 내는 상태와 그래서 애매모호함 없이 흔적이 이제부터 수행하게 될 지시를 결정한다.

이런 명령이 딸린 이름(name-with-instruction)과 이름이 딸린 명령(instruction-with-name)의 이중적 수행은 대개 사유와 의미가 *감축되는(degenerate)* 하나의 구조로서 (수학의 언어에서) 언급된다. 또한 그것을 사유가 하나의 상징으로 *압축되는(condense)* 장으로서 (심리학의 언어에서) 언급된다. 상징에 *힘*을 부여하는 건 이런 압축이다. 수학에서는 다른 학문처럼 체계의 힘은 그것의 우아함 (문자 그대로 추출하고 선택하는 능력)에 있다. 그것은 필요한 만큼 많은 것을 필요한 만큼 적게 압축함으로써, 편하게 그리고 오류 없이 쓰거나 읽을 필요가 허용하는 한 무의미한 것으로부터 (혹은 노력으로부터) 자유롭게 줄여나갈 수 있음에서 얻어진다.

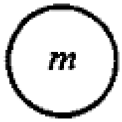
이제 사용하기 편하도록 만드는 산법에서의 우아함과, 따르기 어렵도록 하는 기술적 맥락에서의 우아함을 유용하게 구별할 수 있다. 일상적 삶에서는 무엇을 해야 할 지에 대한 지시는 몇 가지 다른 방법으로 수행될 수 있는 것에 익숙하다. 아무리 분명하고 애매모호하지 않더라도, 그것을 최소한까지 벗겨내면, 한 번에 단지 한 가지 방식에 따라 무엇을 해야 할 지를 지시하는 명령이 제시되면, 우리는 그것을 거부할 수도 있다. (일상적 삶에서는 명령의 문자 그대로보다는 그 정신을 관찰해야만 하는 것으로 생각해 왔고, 그래서 우리가 해야만 하는 어떤 다른 지시로부터 그것을 걸러냄으로써 어떤 명령을 해석할 수 있는 관례적 능력을 발전시켜야만 한다. 수학에서는 문자 그대로 한 번에 그 명령을 받아들이는데 있어 그런 관례를 배우지 않는다. 이것이 수학 저자가 상호적으로 허용되는 명령들을 만들어 내는데 그토록 많은 고통을 감수해야만 하는 이유다. 작가에게 정당하게 부가되는 이런 고통이 없이는, 작가에 대한 관계라는 면에서 고통을 받아들일 위치가 아닌 독자들에게 끔찍한 고통을 부가하게 된다.)

원시 산술에서의 두 개의 원시 등식 중 두 번째는 덜 우아하게 파생될 수 있다. 하지만 그것이 대입을 미리 허용하기 때문에 따라가기에는 더 쉽다.

흔적 m에 의해 표시된 상태를 지시한다고 가정하고 앞에서처럼 흔적의 부재가 표시되지 않은 상태를 지시한다고 가정하자.

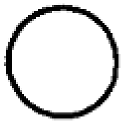
어떤 지시자의 주위에 놓인 괄호가, 괄호 바깥에 있는 공간에서 괄호 안쪽을 지시하는 상태가 아닌 상태를 지시한다고 하자.

그래서



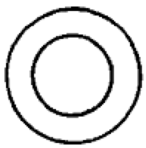
=

그리고



= m

대입을 하면



=

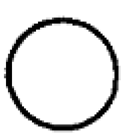
이것은 두 번째 원시 등식이다.

이 소거에 있어서, 원시 상태 중의 하나가 이름이 없을 수 있는 조건이 필수적이다.

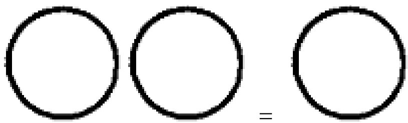
첫 번째 원시 등식 역시 다른 방법으로 얻을 수 있다.

밖으로부터 안을 구별할 수 있는 것만이 가능한 눈이 먼 동물을 상상해보자. 우리에게 여러 안과 밖으로 나타나는 다음과 같은 공간

이 그 동물에게는 탐색을 통해 다음과 구별할 수 없는 것으로 나타날 것이다.



이 점에서 책에서 설명된 사고는 이 동물이 스스로 발견할 수 있는 것을 넘어서지 않는다. 그래서 이 세계에서는 다음과 같다.



이 동물이 경계를 몇 번 넘었는가 셀 수 있다 할지라도, 비록 그 동물이 그것이 무엇인지에 대한 앎에 더 이상 의존하지 않고 밖으로부터 안을 구별해내는 새로운 방법을 지니게 될 지라도, 여전히 이 동물은 하나로부터 두 개의 분할을 구별할 수 없을 것이다.

첫 번째 명령을 다시 생각해보자.

구별을 지어라

이것은 마찬가지로 다양한 방법으로 표현될 수 있다.

하나의 구별이 있다고 하자

구별을 발견하라

구별을 보라

구별을 기술하라

구별을 정의하라

구별이 그려진다고 하자.

왜냐하면 우리가 너무나 원시적인 장소에 도달 했기 때문에 능동과 수동, 혹은 더 많은 부수적인 대립이 모두 함께 충분히 압축되고, 그래서 어떠한 언어의 형식도 거기에 실제 존재하는 것보다 더 많은 범주를 시사할 것이기 때문이다.

3장

단순화의 가설은 정당화되지 않은 채 사용되는 최초의 *명시적(overt)* 관례

다. 이는 앞 장에서 '하나의 표현에 의해 지시된 상태는 그 표현의 값이라 하자'는 명령 안에 선구적 형태를 갖는다. 이 명령은 표현에 의해 지시된 하나의 상태가 바로 그 경우에서만 표현에 대해 값을 허용한다는 것이다. 명령과 관례 모두를 사용하는 것은 표시의 정리(the theorems of representation)를 통해 정당화된다. 지금 정당화되지 않는 경우들은 뒤에서 특히 정리 16과 같은 예에서 발견될 것이다.

왜 어떤 관례가 주어진 바로 그 때 정당화를 하지 않는지 물을 수 있다. 대부분의 경우에 대답은 정당화는 (비록 유용하더라도) 우리가 정당화를 필요로 하는 원리의 *사용(the use)*에 먼저 익숙해지기까지는 의미가 없기 때문이다. 다른 말로 하자면 우리가 깊이 놓여 있는 원리를 추론적으로 정당화하기 전에 먼저 그것이 어떻게 작동하는지에 익숙해질 필요가 있다는 것이다.

이 늦춰진 정당화에 대한 작업은 다른 곳에서 수행할 것이라고 생각한다. 수학에서 *유용한* 정리들 중 증명되지 않은 것은 거의 없다는 것은 주목할만하다. '유용한'이라는 의미가 수학의 밖에서 실용적 적용이 된다는 의미는 아니다. 하나의 정리는 예를 들어 다른 정리를 정당화하는데 수학적으로 유용할 수 있다.

수학에서 가장 '유용하지 않은' 정리 중의 하나가 골드바흐의 추측(Goldbach's conjecture)이다. "만일 2보다 큰 짝수가 두 개의 소수(prime number)의 합으로 나타낼 수 있다는 것을 안다면, 우리는 다음을 보일 수 있다"라고 말하는 것을 자주 볼 수는 없다. 사적인 대화를 통해서 D.J. 스펜서-브라운은 이 추측의 분명한 비유용성은 그 정리들이 증명될 수 없기 때문이 아니라, 유용한 증명이 오늘날 주어져도 아무도 그것을 그 자체로 인식할 수 없다는, 즉 아무도 그런 증명이 기반한 근거에 익숙하지 않기 때문이라고 가정되기 때문이라고 말한 바 있다. 8장과 11장에 대한 주석에서 이에 대해서 더 이야기하도록 하겠다.

4장

모든 수학에서는, 어떤 단계에서는 사실에 대한 의식적인 인식 없이 규칙을

잠시 동안 따라야만 한다는 것은 분명하다. 이는 *은밀한(covert)* 관례의 사용으로서 이야기될 수 있다. 수학의 발전에서 주목할만한 면은 우리가 무엇을 하는가에 대한 인식의 발전에 있다. 그를 통해 은밀함은 명시적이 된다. 수학은 이런 면에서 환각적(psychedelic)이다.

무언가를 얻기 위해 설정한 그 출발점에 가까이 있으면 있을 수록, 우리는 그 곳에서 주석을 달지 않고도 사용될 수 있는 절차들을 더 잘 발견하게 된다. 그 절차들의 사용은 동의 부재 하에서의 처리 방식이라는 존재로서 고려될 수 있다. 예를 들어 정리 1에 대한 언급과 증명에서, 평면 위에 우리가 쓴다는 것은 (동의가 없음에도 불구하고) 처리될 수 있다. 만일 우리가 원환체의 표면에 쓴다고 한다면, 정리는 참이 아닐 것이다. (혹은 참이 되기 위해서는 더 명백해야 할 것이다)

인간이 수세기 동안 글쓰기를 위해 평면을 사용해왔다는 사실은, 책의 이 지점에서 저자와 독자가 이미 의문 없이 평평한 글쓰기 표면에 대한 가정에 동의한다는 것을 의미한다. 하지만 어떤 다른 가정처럼, 이것이 질문될 수 없는 것은 아니며, 여기서 그것을 문제 삼을 수 있다는 것은 다른 곳에서 문제 삼을 수도 있다는 것을 의미한다. 사실 수학에서 쓰여진 것, 특히 하나의 평면 등에 깔려 있는 공통된 하지만 지금까지 이야기되지 않은 가정들을 발견할 수 있다. (더 일반적으로 0류의 표면 a surface of genus 0, 비록 우리가 뒤에서-pp102- 이 추가적인 일반화가 또 다른 여기서 이야기되지 않는 가정을 인정해야만 하는 것임을 보겠지만) 더욱이 만일 다른 면이 사용된다면, 그것에 쓰여진 것은 동일한 표시라 할 지라도 의미 상으로 동일할 수 없다는 것은 이제 자명하다.

일반적으로 정리들 사이에는 우선 순위가 있어서, 다른 정리의 도움을 통해 더 쉽게 증명되는 정리들은 그래서 앞서의 정리들 뒤에서 증명된다. 이 순서가 엄격한 것은 아니다. 예를 들어 정리 3을 증명하면서 정리 4를 증명하기 위한 증명에서 발견한 것을 사용할 수도 있다. 그러면 정리 3과 4는 대칭적이고, 그 순서는 단순성에서 복잡성으로 갈지 아니면 복잡성에서 단순성으로 갈지에 대한 우리의 선호에 달려 있다. 독자는 원한다면 정리 4를 정리 3의 도움 없이 먼저 증명할 수도 있고, 그 후에 책에서 정리 4를 증명한 방법과 유사하게 정리 3을 증명할 수도 있을 것이다.

정리 4의 기호적 표시는 정리 자체보다는 덜 강하다는 것이 관찰될 것이다. 정리는 다음과 일관된다.

$$\overline{\overline{p\,}\!\rceil\; pq\,}\!\rceil \;=$$

반면에 더 약한 형태를 증명할 수 있다.

$$\overline{\overline{p\,}\!\rceil\; p\,}\!\rceil \;=$$

더 강한 형태도 분명하게 참이지만, 그것을 대수의 귀결로써 입증할 수 있음을 알게 될 것이다. 그래서 일차 산술적 발단을 사용해서 더 약한 형태를 증명한다.

정리 9에서 동시 *나누다(divide)*의 사용과 *쪼개다(cleave)*의 사용 사이에 차이를 발견할 수 있다. 공간에 대한 임의의 나눔은, 하나의 그리고 동일한 수준에서 언제나 나뉘지 않으면 구별될 수 없는 상태의 나눔을 발생시킨다. 반면에 잘림 혹은 쪼개짐은 구별될 상태들을 형성하고, 그것은 다른 수준에 놓인다.

잘라냄(severance)과 나눔에 대한 상대적 강조에 대한 생각은 회수의 규칙(the rule of number)이 하나의 나뉘어진 공간을 통합하는데 충분하지만 하나의 쪼개진 공간을 무효화할 수 없다는 사실에서 나온다.

5장

대수적 조작을 유도하는 규칙들에 있어, 책은 명시적으로 그 시스템이 기술하는 것과 다른 산술 시스템의 존재를 언급한다. 이 언급은 의도적이지만 본질적인 것은 아니다. 이들 체계들은 보통 잘못된, 혹은 단축된 혹은 상정된 기원을 갖춘 수준으로 나타난다.

우리가 구축하고 있는 산법의 체계에서 다른 체계들의 기본적 방법에서 떨어져 있지 않다는 것을 독자에게 알리는 것은 의도적이다. 그래서 결과적으로 우리가 도착하는 것은, 그것의 진짜 기원을 갖추는 것뿐만 아니라 그것을 해

명하는데 기여할 것이다. 하지만 동시에 다른 체계에 대한 언급이 책에서의 논의의 발전에 대해 본질적이지 않다는 것을 독자가 아는 것이 중요하다. 왜냐하면 여기서의 논의는 그 자신의 유효함에 기반하는 것이지, 다른 체계들과의 일치 또는 불일치에 대한 유용성에 의존하는 것이 아니기 때문이다. 그래서 규칙 1과 2는 정당화로부터 볼 수 있는 것처럼, 책에서 이미 이야기된 것 이외에는 어떤 것도 이야기하지 않는다. 그것은 지금까지 수행했던 새로운 종류의 산법에 있어 유용한 명령과 명령들을 단지 요약할 뿐이다.

규칙 2에서 언급된 치환은 보통 단순 (즉 문자) 형식의 독립 변수 표현에 한정된다. 그리고 사실 책에서도 그렇게 한정되었다. 하지만 규칙에 의해 인정되는 보다 넓은 승인이, 필요하다면 중요한 응용을 없애는 건 아니다.

6장

기원을 드러내고, 통합함으로써 원시 대수는 연산자(operator)와 연산항(operand) 사이의 관계에 대한 본질에 직접적으로 접근할 수 있게 해준다. 대수에서 하나의 연산항은 추측된 연산자의 현전 혹은 부재일 뿐이다.

연산자와 연상항의 이 부분적 동일성은 부울 대수(Boolean algebras)에 한정된 것이 아니라, 비록 그렇게 명백해 보이지는 않는 기술들 속에서일 지라도 더 익숙한 기술로 확장해 볼 수 있다. 예를 들어 부울 연산자 ∨ (보통 논리적으로 ‘또는’으로 해석되지만 여기서는 순수하게 수학적으로 사용한다)와 . (보통 논리적으로 ‘그리고’라 해석되지만 여기서는 순수하게 수학적으로 사용한다)를 취해서, 그것의 범위를 (유용성의 원리에 따라 가능한 한) 넓히고, 범위 안에서의 변수들의 순서를 임의로 하고 (동일한 원리에 따라 할 수 있는 한), 수학적으로 변수가 없는 경우까지 추론해보자.

… (a b c) ∨ . (a b) ∨ . (a) ∨ . () ∨ .

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 을 배열한다.

1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 을 배열한다.

1 0 0   1 0   0 0 0 0 을 배열한다.

0 0 0   0 0   을 배열한다.

이것은 대단히 분명하게 산술적 형식인 0, 1 (z, u 혹은 F, T 등)을 필요로 하지 않음을 보여준다. 왜냐하면 그들을 ()∨와 (). 과 각기 등치 할 수 있기 때문이다. 이제 이런 두 가지 근본적 항들 중 하나가 존재하지만 어떤 것인지 확실하지 않(혹은 상관 없)다고 추정하는 장소에서는 a, b 형식의 부울 변수를 쓸 수 있다. 그래서 두 변수의 ∨, .의 함수표는 다음과 같이 배열되는 것으로 가정될 수 있다.

(a	b)	∨	.
(()∨	()∨)	()∨	()∨
(()∨	().)	().	()∨
(().	().)	().	().

J1, J2는 원시 대수를 결정하기 위해 취할 수 있는 유일한 두 개의 발단은 아니다. 헌팅턴의 제 4 공준 집합 (Huntington's fourth postulate-set)으로부터[13] C5, C6도 사용할 수 있음을 알 수 있다.

C5, C6으로부터 J1, J2를 입증하는 것은 까다롭기도 하지만 지루한 작업이다. 두 개의 기본적인 대수적 원리를 발견했기 때문이다. 그 중 하나는 하나의 변수가 표현 안에서 옮겨지는 진다는 원리고 다른 하나는 하나의 변수가 표현 안에서 제거될 수 있다는 원리다. 이 두 가지 원리를 떼어 놓는다면, 이어지는 입증은 어렵지 않다. 만일 헌팅턴의 두 가지 등식에서처럼 두 가지 원리가 섞여 있다면, 그러면 이어지는 풀이는 어려울 것이다.

C5, C6의 형식에서 헌팅턴의 등식들에 대한 우리들의 표현은 그가 원래 표현하고자 했던 형식에서의 그것은 아니다. 그는 순서의 유의성과 이항 대립의

13

범위에 대한 손상된 가정들에 의해서 어려움을 겪었는데, 그에 대해 우리는 어떤 단계에서도 원시 대수를 약화시키지 않는다. 이 때문에 그는 집합을 완성시키기 위해서 두 개의 추가적 등식을 만들 필요를 발견했다. 발단으로 고려되는 C5, C6은, J1과 J2가 세 개의 상이한 변수들을 사용하는 반면 단지 두 가지 상이한 변수를 사용한다는 점 때문에 흥미 있다.

처음에는 J1과 J2로부터 C1을 입증하는 것이 불가능하다고 가정했었다. 1965년 제자인 존 도우(John Dawes)가 그렇지 않다는 것을 꽤 긴 증명을 통해서 제출했고, 그래서 이듬해 수업을 듣는 학생들에게 시험 문제로 내주었다. 그리고 어팅(D.A.Utting)에 의해 가장 우아한 입증이 이뤄졌다. 나는 책에서 약간 수정된 형태로 어팅의 입증을 사용한다.

비록 표면적으로는 덜 효율적인 것처럼 보일지라도, 귀결들이 정리에서처럼 일반적 형식에서 순서가 정해진 집합이 아니기 때문에 더 중요한 귀결들을 정의하기 위해서 숫자 보다는 이름을 사용하는 것이 자연스럽고 편리하다.

그런 귀결들에 대한 명명에서, 대수에서 발견할 수 있는 것처럼, 그것의 산술적 기원을 손상시키지 않는, 이름 붙여진 과정에 대한 기술로서 적합한 것을 찾기 위해 노력했다. 어떤 경우에는 형식과 이름이 부울 대수를 규정했던 다른 작가들의 그것과 분명히 유사하다. 지금까지 대부분의 경우, 공통적으로 사용되는 이름은 스텝이 수행되는 방향들 중 하나만을 기술하는 것이다. 부울 확대(Boolean expansion)라 불리는 것이 하나의 예다. 그런 경우, 이름은 한 방향으로 수행된 스텝에만 적합하기 때문에, 다른 방향에 대해서 반의어를 사용하고, 양자를 포함하는 포괄적 이름을 만들었다. 다른 분명한 경우들에서는, 더 적합한 이름이라 생각되는 것을 발견할 수 있었다. 화이트헤드(Whitehead)가 말하는 흡수(absorption) 대신에 엄폐(occultation)를 사용한 것이 그런 예이다. 표현에서 엄폐된 부분은 나머지에 의해 가리워진 것이지 그 속으로 흡수된 것은 아니다. 이는 산술적으로 혹은 다른 방식 벤 다이어그램을 사용해 그 표현을 그림으로 나타내면 대단히 분명해진다. 내가 아는 한, 퍼스(Peirce)만이 내가 위치라고 부른 것을 인식한 유일한 선행 저자다. 그는 그것을 삭제

(erasure)라 불렀고[14], 그래서 적용의 단지 한 방향에만 관심을 쏟았다.

모든 이름들이 언제나 고정되어 있다고 가정하는 것은 아니다. 익숙함에 따라 학문적으로 적절하거나 혹은 분명해 보이는 것보다 그 장소에 더 적합한 종류의 속어를 낳게 된다. 예를 들어 귀결 2의 공학적 적용에서는 ‘재생하다(regenerate)’ 대신에 더 익숙한 ‘낳다(breed)’를, ‘감축하다(degenerate)’ 대신에 ‘돌아가다(revert)’를 쓸 수도 있다. 그리고 이 귀결의 변형이 프로클루스(Proclus)가 말한 πρόοδος와 ἐπιστροφή, 도드(Dodds)의 번역에 따르면 행렬(procession)과 회귀(reversion)[15]에 대한 상을 떠올리게 한다는 점을 지적하는 것도 흥미롭다.

‘전치(transposition)’나 ‘통합(integration)’ 같은 기술적 이름들이 수학의 다른 곳 (그리고 사실 이 책의 다른 곳)에서 다르게 사용될 수 있다는 사실이, 이 장에 한정된 의미로 그 이름들을 사용하는 것을 피할 이유가 되지는 않는 것처럼 보인다. 탐구의 수준이 깊어지면 질수록, 거기서 발견한 것을 포괄할 만큼 충분히 강력한 단어를 발견하는 것은 힘들어지고, 모든 경우 원시 과정을 기술하기 위해 언어를 사용하는 것은 더 표면적이고 전문화된 사용에 필요한 것보다 더 강한 의미의 힘을 가지게 된다.

수학 연구에서의 가장 아름다운 사실 중 하나는 수학적 과정과 일상 언어 사이에 놓인 바로 이 잠재적인 관계다. 어떤 중요함과 심원함을 가진 수학적 사고도 일상적인 언어의 사용 속에서 거의 기괴할 정도의 정확성을 가지며 반영될 수 있다. 그리고 이것은 우리가 언어의 근원적인, 때로는 오랫동안 잊혀졌던 의미를 생각해볼 때 특히 사실로 보인다.

하나의 단어가 각기 다른, 그러나 관계된 수준에서 고려할 때 다양한, 그러나 관계된 의미들을 가질 수 있다는 사실은 대개 의사 소통을 불가능하게 하는 것은 아니다. 반대로 임의의 그러나 가장 사소한 생각의 의사 소통조차도 그것 없이는 불가능하다는 것은 분명하다.

14

15

이런 점에서 책에서는 수학적 의사 소통의 근본적인 형식이 이제 실질적으로 완료되었기 때문에, 그것을 언급의 축약 규율의 적용을 통해 발전된 짧은 형식의 긴 형식으로의 재번역에 대한 시도를 할 수 있다. 이런 목적으로 귀결 9(p. 35)의 진술과 입증을 택해 보자. 언어와 숫자를 사용해 다음과 같이 진행된다.

아홉 번째 귀결은, 전치, 혹은 줄여서 C9이라 불리며, 다음과 같이 진술할 수 있다.

b 월경 r 월경 모두 월경

a 월경 r 월경 두 개 월경

x 월경 r 두 개 월경

y 월경 r 두 개 월경

모두 월경

이것은 다음과 같은 값을 나타낸다.

r 월경 ab 모두 월경 rxy 세 개 월경

이 등식에서 허용된 스텝이 앞의 표현에서 뒤의 표현으로 이뤄질 때, 그것은 횡단전치(crosstranspose) 또는 수집(collect)이라 불리고, 반대로 이뤄질 때는 횡단전치(crosstranspose) 혹은 분배(distribute)라 불린다.

이 등식은 다음과 같이 입증될 수 있다.

b 월경 r 월경 모두 월경

a 월경 r 월경 두 개 월경

x 월경 r 두 개 월경

y 월경 r 두 개 월경

모두 월경

은 C1, J2 그리고 다시 C1을 사용해서 다음과 같이 바뀔 수 있다.

b 월경 r 월경 모두 월경

a 월경 r 월경 두 개 월경

xy 두 개 월경 r 두 개 월경

모두 월경

이는 다시 C8과 그리고 나서 C1을 세 번 적용함으로써 다음과 같이 바뀔 수 있다.

baxy 두 개 월경 r 두 개 월경 모두 월경

rxy 두 개 월경 r 두 개 월경 두 개 월경

등등.

표현에서 수학적 언어는 전적으로 시각적이 되며, 적절한 구어적 형태가 아니기에, 그것을 발화하는 것은 그것을 일상적 언어에 적합한 형식으로 해독해야만 한다는 것을 관찰할 수 있다. 그래서 표현의 수학적 형식이 명료함에도 불구하고, 발화되는 형식은 불명료한 것이다.

문어적 형식에서 발화적 형식으로 고치는 주된 어려움은 수학적 글쓰기에서는 2차원 평면 위에 자유롭게 표시를 하는 반면 말에서는 단지 시간에 대해 1차원적인 표시만이 가능하기 때문이다.

오늘날 수학에서 불필요하고 불명료한 대부분은 이 구어적 단어들의 한계의 흔적처럼 보인다. 예를 들어 일상적 대화에서 차원의 복수성에 대한 직접적인 언급을 피하기 위해 우리는 ‘그리고’와 ‘또는’처럼 상수의 범위를 고정시켜야만 한다. 그리고 이는 최초의 복수 수준에서 가장 편하게 사용할 수 있다. 하지만 문어적 형태로 고정시킨다면, 추가적 차원에 의해 제공되는 자유를 깨닫지 못하게 된다. 이는 다시 우리로 하여금, 1차원에서 그것을 표시하는 편리함 때문에 전제된 연산자의 이항 관계적 범위가, 발화의 수준에서는 단순 연산자 조차도 그렇지 못한, 연산의 실제적 형식에 있어서의 어떤 유용함을 지닌

다고 가정하게 한다.

7장

정리 14에 대한 기술에서 ‘상수’는 연산 상수를 말한다. 산법에는 두 가지 상수가 있는데, 표시 혹은 연산자 그리고 빈칸 혹은 무화다. 특정하지 않은 ‘상수’의 언급은 보통 무화 보다는 연산자를 지시하기 위해서 선택한다.

8장

이미 본문에서 입증(demonstration)과 증명(proof)을 구분했다. 대단히 자연스러운 이러한 구별의 설정 중에, 증명은 입증과 같은 방법으로 정당화될 수 없음을 보았다. 입증에서 이미 기록된 명령을 적절하게 따를 수 있음을 볼 수 있었지만, 증명의 경우에는 이러한 절차를 피할 수 없다.

증명에서 산법의 밖에 놓여 있는 개념을 다루게 되며, 그래서 그 명령에 순응할 수 없다. 명령에 따라 증명을 하려는 시도는 원래의 산법을 포함하고, 입증이 아니라 증명에 따르는 형식을 다시 발견할 수 있는 그런 또 다른 산법을 만들 지 않는 한 성공할 수 없다.

그래서 증명의 타당성은 명령의 집합에 의한 공통의 동기 부여에 기반하는 것이 아니라, 사건의 상태들에 대한 공통의 경험에 기반한다. 이 경험은 일반적으로 논리학에서 형식화될 수 있는 추론의 능력을 포함하지만, 그것을 한정짓지는 않는다. 거의 모든 증명은 수를 포함한 체계이건 아니건 간에 계산하는, 즉 어떤 방향으로 셀 수 있는(count[16]) 공통의 능력, 이 능력에 대한 우리의 경험으로부터 나오는 사고를 사용한다.

정리의 증명을 귀결에 대한 입증과 같은 정도의 확실성으로 생각하는가는

16

여전히 질문될 수 있다. 처음 볼 때는 쉽게 답변할 수 있는 문제는 아니다. 만일 대답이 가능하다면, 그것은 경험의 개념 안에 놓여있는 것으로 보인다. 우리는 특히 논의에서 그리고 단위에 따라 전후로 수를 세는 과정에서 무언가를 표시하는 살아 있는 경험을 얻고, 이 경험을 통해서 증명을 실질화하기 위해서 그것을 사용하는 것의 타당성에 대해서 마음 속으로 확신하게 된다. 그러나 증명의 절차가 아직 하나의 산법에서 기록되지 않는다면 (비록 주기적으로는 가능하다 할 지라도), 이 단계에서의 확실성은 직관적이라 여겨질 수 밖에 없다. 비록 따라야 할 명령을 설정한 체계에 낯설더라도, 명령을 따르는 것만으로 입증에 도달할 수는 있다. 하지만 정리를 증명하면서, 만일 우리가 아직 하나의 산법의 형식 *안에서(in)* 증명의 구조를 이미 기록하지 않았다면, 증명의 *기반*으로서 취할 수 있는 것이 무엇이건 간에 최소한 그것에 익숙하거나 혹은 경험해야만 한다. 그렇지 않으면 그것을 *증명이라 생각할 수 없다.*

입증과 증명의 관계를 사고하는 다른 방법은 증명의 확실성 정도가 입증의 확실성 정도와 동일하다는 명제를 추가함으로써, 증명의 상태와 입증의 상태를 나누는 경계를 검토하는 것이다. 기억해야 할 건 하나의 입증은 산법의 안에서 발생하고, 증명은 밖에 있다는 것이다. 그들 사이의 경계는 그래서 공유되는 경계이고, 귀결을 입증할 지 혹은 정리를 증명할 지에 따라서 각각의 방향에서 접근될 수 있는 것이다. 그래서 귀결과 정리는 서로 들어맞는 관계(a fitting relationship)가 됨을 알 수 있다.

그러나 그 관계를 표시하는 경계는 비록 공유될 지라도 (마치 존재적 경계처럼 pp. 124) 한쪽 면으로부터만 볼 수 있다. 왜냐하면 입증이 놓여 있는 기반 (즉 우리가 사용한 발단 등식에 대한 실용적 추론으로부터 구별되는 형식적 추론으로부터 이해되고, 그래서 상정될 필요가 없는) 을 안다면, 입증은 비록 증명이 입증으로서 보이지 않더라도, 함의상 증명으로 보일 수 있다. 사실 입증과 증명의 관계는 발단 등식과 공리의 것과 같다. 그러나 또한 이 관계는 산술에 대한 경우에만임은 명백하고, 대수로 넘어가면 이 관계는 사라진다. 이것이 대수가 단어의 적절한 의미에 따라, 대부분 공리 없이 제시되는 이유이다.

증명이란 이미 잠재적으로 명백한 것을 현재적으로 명백하게 하는 방법이라는 사실은 수학적으로 흥미 있는 일이다. 어떤 주어진 정리에 대해 몇 가지의 다른 증명이 있을 수 있지만, 그것 모두를 찾는 것은 어렵다. 다시 말해,

올바른 방법에 도달하기 전에 우리는 수 없이 많은 잘못된 방법으로 정리를 증명하려 시도할 수 있다는 것이다.

이런 점에서 무언가를 발견하는 것과 비유하는 것은 그리 올바르지 않다. 왜냐하면 우리가 찾는 것은 이미 우리가 아는 것이고, 그래서 의식적으로 항상 인식해왔던 것이기 때문이다. 이런 의미에서 우리는 숨겨진 어떤 것을 찾는 것이 아니다. 수색을 한다는 생각은 도움이 되지 않고 때로는 실질적으로 장애가 되기도 한다. 왜냐하면 탐색은 일반적으로 미리 숨겨진 것, 그래서 보이지 않게 된 어떤 것을 찾기 위해 이뤄지기 때문이다.

증명을 발견하는 것은 탐색 이상의 정교한 어떤 작업이다. 우리가 정당화하려는 진술이 무엇이든 간에, 완전한 관점에서, 그리고 이미 굳게 확신할 수 있는 *유의미함(relevance)*을 발견해야만 한다. 우리가 *볼 수 없는* 어떤 것에 대한 탐색이 어떻게 수행되어야 할 지 알 수 있는 반면에, 이미 우리가 *볼 수 있는* 어떤 것을 '발견하려'는 노력의 기술적 정교함은 쉽게 우리의 노력을 벗어날 수 있다.

이 때가 바로 논의의 과정을 따르는 것과 그것을 이해하는 것 사이에 차이를 두는 것이 유용한 순간이다. 넓은 의미에서 이해란 이해된 것에 대한 경험이다. 이런 의미에서 우리가 더 일반적인 정리 속에서 어떤 정리를 포함하지 않는 한 그 정리를 완전하게 이해할 수는 없다. 그럼에도 불구하고 그 명백함을 보려 한다는 의미에서, 그것이 설정된 더 넓은 의미에서의 이해 없이도 증명을 따를 수 있다.

따르는 것(following)과 이해하는 것(understanding)은 입증과 증명처럼 때로는 동의어로 잘못 사용된다. 확실한 모든 것을 자신이 따르지 않았을 때, 논의, 과정, 교의를 이해하지 못하는 것으로 간주하는 사람은 매우 드물다. 하지만 따르지 못했다는 건, 어떻게 의사소통 해야 할 지를 아직 알지 못함에도 불구하고, 그에게 제시된 것을 그가 이해했지만, 더 짧고 혹은 그렇지 않으면 더 받아들이기 쉬운 경로를 보았기 때문에 그것을 따르지 않았다는 사실로부터 발생할 수도 있다.

따르는 것은 그래서 어떤 특정한 교의와 연결될 수 있고, 이 교의가 어떤

특정한 방식으로 말하고 행할 것에 대한 완고함을 요구할 수도 있다. 이해하는 것은 말해지고 행해진 것이 무엇이든 언제나 다른 방법으로 행해지고, 말해질 수 있으며 그럼에도 모든 방법은 동일하다는 사실과 관계된 것이다.

9장

완전성이라는 관념은 전체로서의 산법에 적용할 수 없고, 단지 하나의 정의에 의해 다른 정의를 표시할 때 사용될 수 있다. 사실 문제가 되는 건 표현의 대안적 형식의 완전성이다.

비록 형식의 산술적 표시 안에서 더 중요한 경우를 발견할 수 있음에도, 그런 대안적인 표시의 범례로 들 수 있는 건 산술적 표시의 대수적 표시다. 산술적 표시에서의 경우들에서는 표시의 정리들에서 볼 수 있었던 것처럼, 완전성의 관념은 일관성의 관념과 합쳐질 수 있다. 그 보다 덜 중심적인 경우에는 두 가지 관념은 떼어진다. 그래서 완전성에 대한 가장 순수한 형태에서의 대부분의 원시적 사례는 대수적 표시 안에서 발견된다.

괴델(Gödel)이 관심을 표했던 건, 덧셈과 곱셈의 표시를 포함한 임의의 대수는 이 조작들을 기초적인 것으로 취하고 있는 자연수의 산술에 대해 충분하게 설명할 수 없다는 사실이었다. 그래서 수론(number theory)에서는 비록 어떤 관계들은 증명될 수 있다 해도, 대수는 그런 모든 관계를 입증할 수 있도록 구성될 수 없다.

괴델의 정리가 등장함으로써, 어떤 연구자들이 가지게 되었을 절망을 떠올릴 이유는 없는 것으로 나에게는 생각된다. 오히려 축하할만한 일인데, 왜냐하면 그를 통해 수학자는 경험으로부터 기반한다는 것, 특히 일상의 산술은 일상의 대수보다 더 풍부한 탐구의 기반이 된다는 것이 확인되었기 때문이다.

10장

발단 등식의 독립성에 대해서 간접적[17]으로 증명하는 것이 일반적이다. 비록 우리의 고찰에서는 자명하지만, 두 가지 발단의 집합을 통해 그들의 독립성에 대한 직접적 증명이 늘 가능하다는 것이 관찰되지는 않는다. 본문에서 하나의 증명을 제시한다.

독립성 증명은 놓쳐버린 발단을 가진 산법의 불완전성의 증명으로 적절하게 검토될 수도 있다.

번역어

distinction – 구별

indication – 지시

the form – 원형식

form – 형식

content 내용

17

intention	지향
instruction	명령
mark	표시
token	흔적
sign	기호
signal	신호
canon	규율
the marked state	표시된 상태
arrangement	배열
expression	표시
equivalent	등가
the unmarked state	표시되지 않은 상태
equation	등식
cross	크로스
depth	깊이
pervaded	채워지는
pervasive	채우는
initial	발단

calculation	계산
calculus	산법
procedure	수순
condense	압축하다
compensate	보상하다
confirm	확인하다
cancel	무화하다
reduce	감축하다