ESERCIZI DI GEOMETRIA B

1. Dati in $\mathcal{E}^3(\mathbb{R})$ i punti $A \equiv (1,0,1)$, $B \equiv (2,0,0)$, $C \equiv (3,0,1)$ ed il piano $\pi : 2x+y-z=3$, verificare che A, B, C sono affinemente indipendenti e trovare un'equazione cartesiana del piano π' passante per A, B, C.

Scrivere poi una rappresentazione cartesiana della retta r per $P \equiv (1,1,1)$, parallela sia a π che a π'.

2. Studiare la reciproca posizione del piano $\alpha : x+y+z+2=0$ e della retta $r : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = -1-t \end{cases}$. Scrivere, se possibile, l'equazione di un piano contenente r e parallelo ad α.

3. Studiare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la reciproca posizione delle rette

$$r_k : \begin{cases} x+ky-z=1 \\ x+y+kz=0 \end{cases} \qquad s_k : \begin{cases} x+y=0 \\ kx-y=0 \end{cases}$$

Per i valori di k per i quali le due rette sono complanari, determinare l'equazione del piano che le contiene.

4. Determinare la reciproca posizione dei piani $\alpha : x+2y-z=1$ e $\beta : \begin{cases} x = 1+t \\ y = s \\ z = 1+t \end{cases}$

5. Dati in $\mathcal{E}^2(\mathbb{R})$ i punti $A \equiv (0,0)$, $B \equiv (1,0)$, $C \equiv (1,2)$, determinare D in modo tale che $\{A,B,C,D\}$ sia l'insieme dei vertici di un parallelogramma.

6. Determinare una rappresentazione cartesiana della retta parallela alla retta $r : x+y-1=0$ e passante per il punto comune a $s_1 : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \end{cases}$

e $s_2 : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$.

7. Dati la retta $r : \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ ed il piano $\pi : \alpha x + 3y - 2z = 2\alpha$, discutere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la reciproca posizione di r e π, determinandone, ove possibile, l'intersezione.

8. Dati il punto $P \equiv (1, 2, 0)$ e le rette $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$, verificare che r ed s sono incidenti.

Scrivere un'equazione del piano π passante per l'origine, per P e per il punto di intersezione tra r e s. Scrivere inoltre una rappresentazione cartesiana della retta t passante per $P' = (1, 0, 1)$, parallela a π e incidente r.

9. Date le rette di $\mathcal{E}^3(\mathbb{R})$

$$r : \frac{2x - 1}{3} = y - 2 = \frac{z}{2} \qquad s : \begin{cases} x - 2y + 3z - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

verificare che sono sghembe.

Determinare le equazioni della retta t passante per $P \equiv (2, 2, 3)$ ed incidente sia r che s.

Determinare un'equazione del piano π parallelo sia a r che a s e passante per P.

10. Dati in $\mathcal{E}^2$ i punti $A \equiv (1, 2)$, $B \equiv (3, -2)$ e $C \equiv (4, 1)$, determinare, se esistono, i punti D tali che $ABCD$ è un trapezio rettangolo.

11. Determinare, in $\mathcal{E}^3$, le equazioni della retta ortogonale al piano $\pi : \begin{cases} x = t - 2s \\ y = t \\ z = -2 - 2t + 2s \end{cases}$ per il punto $P \equiv (2, 0, -1)$.

12. Determinare le equazioni della retta r di $\mathcal{E}^3$, passante per il punto $P \equiv (3,2,1)$, ortogonale alla retta $s \ : \begin{cases} 2x+3y-4=0 \\ x-3z+1=0 \end{cases}$ e complanare alla retta $t \ : \begin{cases} x-3y-z=0 \\ x+7y+z-6=0 \end{cases}$.

13. Determinare le equazioni della retta s di $\mathcal{E}^3$ parallela al piano $\pi \ : \ 2x+y-3z+3=0$, passante per $C \equiv (-5,0,1)$ e incidente $r : \begin{cases} x-y-1=0 \\ z+3=0 \end{cases}$.

Calcolare la distanza tra la retta s e la retta $t : \begin{cases} 4x-y-2=0 \\ y-2z=0 \end{cases}$.

14. Dati in $\mathcal{E}^3$ il piano $\pi \ : \ x-2y+z+3=0$ e la retta $r : \begin{cases} 2y-z+5=0 \\ x-6y+3z-13=0 \end{cases}$,

(a) determinare la mutua posizione di r e π e calcolarne la distanza;

(b) determinare le equazioni della retta t parallela a π , ortogonale a r e passante per il punto $A \equiv (0,1,0)$;

(c) dato il punto $B \equiv (3,1,-1)$, determinare, se esistono, i punti $P \in t$ tali che l'area del triangolo PAB sia 8.

15. Date le rette di $\mathcal{E}^3$,

$$r : \begin{cases} x-y+z-3=0 \\ 2x+y-z-3=0 \end{cases} \qquad s : \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{5} = z$$

verificare che sono sghembe, calcolarne la distanza e determinare le equazioni della perpendicolare comune.

16. Date in $\mathcal{E}^3$ le rette $r : x=y=z$ e $s : \begin{cases} x+y=4 \\ z=2 \end{cases}$,

(a) determinare un'equazione del piano α che le contiene;

(b) scrivere le equazioni delle rette contenute in α, che passano per l'origine e formano un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con la retta s;

(c) dette A e B le intersezioni di tali rette con s e dato il punto $C \equiv (0, 0, 1)$, calcolare il volume del tetraedro $OABC$.

17. Nel piano euclideo si consideri la retta r di equazione $6x+8y-3 = 0$ ed il punto $P \equiv (2, 2)$. Si determinino:

(a) le coordinate della proiezione ortogonale P' di P su r;

(b) le coordinate del simmetrico P'' di P rispetto a r;

(c) l'equazione della retta r' simmetrica di r rispetto alla retta s di equazione $4x - 3y - 12 = 0$;

(d) le equazioni delle bisettrici degli angoli formati dalle rette r e s.

18. Nel piano euclideo sono date le trasformazioni

$$\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = -x + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = y + 1 \end{cases} .$$

Verificare che sono isometrie, stabilire se sono dirette e determinarne i punti fissi.

19. Nel piano euclideo scrivere le equazioni della simmetria ortogonale rispetto alla retta di equazione $x - 2y + 5 = 0$.

20. Studiare le seguenti coniche di $\mathcal{E}^2$, determinandone, se possibile, centro, asintoti, assi, vertici, fuochi ed una equazione canonica. Nel caso dell'iperbole equilatera determinare anche l'equazione riferita agli asintoti.

(a) $3x^2 + y^2 - 12x + 2\sqrt{3}y + 12 = 0$;

(b) $3x^2 - y^2 - 6x - 2\sqrt{3}y + 3 = 0$;

(c) $x^2 + 4y^2 - 4xy - 6x - 12y + 9 = 0$;

(d) $2xy - 2x + 6y = 0$;

(e) $x^2 - 3y^2 + 2xy + 6x + 14y = 0$;

(f) $3x^2 + 4xy - 2x - 1 = 0$;

(g) $x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 10y + 1 = 0$.

21. Scrivere l'equazione della polare del punto $P \equiv (1, 0)$, rispetto ad ognuna delle coniche dell'esercizio 4; nei casi (b),(c),(d) stabilire quindi la posizione del punto P rispetto alla conica.

SOLUZIONI

Es. 1 $\pi' \ : \ y = 0 \ , \ r \ : \ \begin{cases} 2x + y - z - 2 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$

Es. 2 $r // \alpha$, $x + y + z - 2 = 0$

Es. 3 sono sghembe per $k \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$, incidenti per $k = 0$; per $k = -1$ s_k non é una retta.

Per $k = 0$ il piano ha equazione $x + y = 0$

Es. 4 α e β sono incidenti.

Es. 5 $D_1 \equiv (0, 2)$, $D_2 \equiv (0, -2)$, $D_3 = (2, 2)$.

Es. 6 $x + y + 5 = 0$.

Es. 7 Per $\alpha \neq 2$ sono incidenti in $P \equiv (2, \frac{2}{5}, \frac{3}{5})$; per $\alpha = 2$, $r \subset \pi$.

Es. 8 $\pi \ : \ 2x - y - 3z = 0, \ \ t \ : \ \frac{x-1}{4} = \frac{y}{-7} = \frac{z-1}{5}$.

Es. 9 $t \ : \ \begin{cases} 2x - y - z + 1 = 0 \\ 5x + 8y - 9z + 1 = 0 \end{cases} \ ; \ \pi \ : \ 5x + 11y - 13z + 7 = 0$.

Es. 10 $D \equiv (3, 3)$.

Es. 11 $x - 2 = y = z + 1$.

Es. 12 $\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{5} = z - 1$.

Es. 13 $s \ : \ x + 5 = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$; $d(s, t) = \frac{2}{3}\sqrt{69}$ (rette parallele).

Es. 14 (a) sono paralleli, $d(r,\pi)=\sqrt{6}$; (b) $t\ :\ \begin{cases} x-2y+z+2=0 \\ y+2z-1=0 \end{cases}$; (c) $P_1\equiv(-\frac{40}{\sqrt{11}},1-\frac{16}{\sqrt{11}},\frac{8}{\sqrt{11}})$, $P_2\equiv(\frac{40}{\sqrt{11}},1+\frac{16}{\sqrt{11}},-\frac{8}{\sqrt{11}})$.

Es. 15 $d(r,s)=\sqrt{3}$; perpendicolare comune $x-1=1-y=z$.

Es. 16 (a) $\alpha\ :\ x+y-2z=0$; (b) $\frac{x}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{y}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=z$; $\frac{x}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{y}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=z$; (c) $V=\frac{4}{3}\sqrt{2}$.

Es. 17 (a) $P'\equiv(\frac{1}{2},0)$; (b) $P''\equiv(-1,-2)$; (c) $r'=r$; (d) $14x+2y-27=0$; $2x-14y-21=0$.

Es. 18 La prima è una isometria diretta con un punto fisso $P\equiv(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$; la seconda è una isometria inversa senza punti fissi.

Es. 19 $\begin{cases} x'=\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-2 \\ y'=\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+4 \end{cases}$.

20. (a) ellisse di centro $C\equiv(2,-\sqrt{3})$, assi $y+\sqrt{3}=0$ e $x-2=0$, vertici $V_1\equiv(2,0),V_2\equiv(2,-2\sqrt{3}),V_1\equiv(1,-\sqrt{3}),V_1\equiv(3,-\sqrt{3})$, equazione canonica $\frac{X^2}{3}+Y^2=1$ e fuochi $F_1\equiv(2,\sqrt{2}-\sqrt{3})$, $F_2\equiv(2,-\sqrt{3}-\sqrt{2})$;

(b) iperbole di centro $C\equiv(1,-\sqrt{3})$, asintoti $\sqrt{3}x+y=0$, $\sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}=0$, assi $y+\sqrt{3}=0$ e $x-1=0$ (trasverso), vertici $V_1\equiv(1,-2\sqrt{3}),V_2\equiv(1,0)$, equazione canonica $\frac{X^2}{3}-Y^2=1$ e fuochi $F_1\equiv(1,-2-\sqrt{3}),F_2\equiv(1,2-\sqrt{3})$;

(c) parabola di asse $5x-10y+9=0$, vertice $V\equiv(\frac{3}{25},\frac{24}{25})$, equazione canonica $Y=\frac{5\sqrt{5}}{24}X^2$ e fuoco $F\equiv(\frac{3}{5},\frac{6}{5})$;

(d) iperbole equilatera di centro $C\equiv(-3,1)$, asintoti $y-1=0$, $x+3=0$, assi $x-y+4=0$ e $x+y+2=0$ (trasverso), vertici $V_1\equiv(-3-\sqrt{3},1+\sqrt{3}),V_2\equiv(-3+\sqrt{3},1-\sqrt{3})$, equazione canonica $\frac{X^2}{6}-\frac{Y^2}{6}=1$, equazione riferita agli asintoti $\tilde{X}\tilde{Y}=3$ e fuochi $F_1\equiv(-3-\sqrt{6},1+\sqrt{6}),F_2\equiv(-3+\sqrt{6},1-\sqrt{6})$;

(e) iperbole di centro $C\equiv(-4,1)$, asintoti $x-y+5=0$, $x-5y+9=0$, assi $(3-\sqrt{5})x-(1+\sqrt{5})y+13-3\sqrt{5}=0$ e $(\sqrt{5}-1)x+(7-3\sqrt{5})y+7\sqrt{5}-11=0$, equazione canonica $\frac{X^2}{\frac{5}{\sqrt{5}-1}}-\frac{Y^2}{\frac{5}{\sqrt{5}+1}}=1$.

(f) iperbole di centro $C\equiv(0,\frac{1}{2})$, asintoti $x=0$, $3x+4y-2=0$, assi $4x+2y-1=0$ e $x-2y+1=0$ (trasverso), vertici $V_1\equiv(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{5}}),V_2\equiv(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{5}})$, equazione canonica $\frac{X^2}{\frac{1}{4}}-Y^2=1$ e fuochi $F_1\equiv(-1,0),F_2\equiv(1,1)$;

(g) parabola di asse $x+y-3=0$, vertice $V\equiv(\frac{5}{2},\frac{1}{2})$, equazione canonica

$Y = \frac{X^2}{2\sqrt{2}}$ e fuoco $F \equiv (2, 1)$;

21. (b) P appartiene al supporto della conica e la retta è tangente; (c) punto esterno; (d) punto interno.