

Capitolo 2

Componenti circuitali

2.1 Generalità

Ciascun componente circuitali, in ragione della sua struttura interna e dei fenomeni fisici che avvengono entro la sua superficie limite, impone dei vincoli tra le tensioni e le correnti relative ai suoi terminali. In particolare, hanno speciale importanza le relazioni tra le grandezze descrittive. Tali relazioni possono essere espresse mediante equazioni matematiche, dette *relazioni costitutive* o *relazioni di definizione* del componente in cui compaiono tutte e sole le variabili descrittive. Un componente ad N terminali, caratterizzato da $N - 1$ tensioni ed $N - 1$ correnti descrittive, impone a queste grandezze al più $N - 1$ vincoli, ossia uno per ogni coppia di variabili descrittive. Nel caso di un bipolo, l'equazione di vincolo tra la tensione e la corrente descrittiva è unica. Esamineremo nel seguito componenti ad N -poli per i quali i vincoli sono esprimibili in forma analitica, ossia con espressioni del tipo

$$f_k(i_h, v_h, t) = 0 \quad h = 1, 2, \dots, N - 1 \quad k = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (2.1)$$

A seconda della natura delle relazioni (2.1) si possono distinguere componenti

- *lineari e non lineari*

Un componente si dice *lineare* se tutti i vincoli tra le tensioni e le correnti descrittive sono espressi da relazioni lineari, altrimenti si dice *non lineare*,

- *con o senza memoria*

Un componente si dice *senza memoria* se i vincoli tra le sue variabili descrittive sono tutti esprimibili mediante relazioni algebriche, si dice *con memoria* o anche *dinamico*

se la sua relazione di definizione comprende almeno un vincolo di tipo differenziale o integrale;

- *tempo-varianti e tempo-invarianti*

Un componente si dice *tempo-variante* se è caratterizzato da un vincolo che dipende esplicitamente dal tempo, si dice *tempo-invariante* se nessun vincolo varia nel tempo.

Per chiarire le definizioni di cui sopra, consideriamo alcuni esempi, riferiti, per comodità, a bipoli, riportati in tabella 2.1. Nelle relazioni riportate in tabelle,

si assume che i simboli R, I, V, K, C, L rappresentano costanti note e che $a(t)$ e $b(t)$ siano funzioni note del tempo.

Tabella 2.1: Esempi di relazioni di definizione per componenti bipolari.

Relazione di definizione	Caratteri del bipolo
$v = Ri$	lineare, tempo-invariante, senza memoria
$i = a(t)v + b(t)v^3$	non lineare, tempo-variante, senza memoria
$i = I(e^{\frac{v}{V}} - K)$	non lineare, tempo-invariante, senza memoria
$v = R(1 + \sin t)i$	lineare, tempo-variante, senza memoria
$v = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt$	lineare, tempo-invariante, con memoria
$v = L \frac{di}{dt}$	lineare, tempo-invariante, con memoria
$i = Kv \frac{dv}{dt}$	non lineare, tempo-invariante, con memoria

2.2 Componenti attivi e passivi

Si definisce energia assorbita da un componente al generico istante t , la quantità

$$w_a(t) = \int_{-\infty}^t p_a(t) dt. \quad (2.2)$$

Analogamente, la quantità

$$w_e(t) = -w_a(t) = -\int_{-\infty}^t p_a(t) dt = \int_{-\infty}^t -p_a(t) dt = \int_{-\infty}^t p_e(t) dt \quad (2.3)$$

rappresenta l'energia erogata dal componente all'istante t .

Se per tutti i possibili andamenti temporali delle tensioni e delle correnti descrittive che soddisfano le relazioni di definizione del componente risulta

$$w_a(t) \geq 0 \quad \forall t \quad (2.4)$$

il componente si dice *passivo*. Se invece la (2.4) è violata anche per un istante soltanto (istante nel quale risulta quindi $w_e > 0$), il componente si definisce *attivo*. Un componente attivo è in grado di erogare energia elettrica alla rete a cui è collegato.

Si possono inoltre distinguere i due seguenti comportamenti tra i componenti che soddisfano la condizione di passività (2.4):

- $p_a(t) \geq 0 \quad \forall t$
quando il componente passivo assorbe sempre potenza in ogni istante. Un componente che mostra questo tipo di comportamento si definisce *passivo dissipativo*.

- $-\infty < p_a(t) < +\infty$

quando la potenza assorbita può risultare, in certi istanti, anche negativa pur restando soddisfatta la condizione di passività (2.4). I componenti per i quali si verifica questa condizione sono detti passivi *conservativi*.

Occorre notare che, non potendo essere violata la (2.4), un componente di questo tipo non può erogare complessivamente più energia di quanta ne ha assorbita negli intervalli di tempo precedenti. Infatti supponendo che il componente eroghi energia nell'intervallo $[t_0, t_1]$, si avrà che

$$w_e(t_0, t_1) = -w_a(t_0, t_1) = -\int_{t_0}^{t_1} p_a(t)dt \geq 0. \quad (2.5)$$

Daltronde, la (2.5) si può sviluppare nel seguente modo:

$$-\int_{t_0}^{t_1} p_a(t)dt = \int_{-\infty}^{t_0} p_a(t)dt - \int_{-\infty}^{t_1} p_a(t)dt = w_a(t_0) - w_a(t_1) \geq 0, \quad (2.6)$$

da cui si evince, per l'ipotesi di passività, che deve essere $w_a(t_1) \leq w_a(t_0)$ cioè che l'energia del componente all'istante finale dell'intervallo deve essere inferiore, o al più uguale, a quella posseduta all'istante iniziale. Questa circostanza richiede che il componente conservi memoria dell'energia complessivamente assorbita sino ad un certo istante ovvero che esso sia in grado di tenere *immagazzinata* l'energia assorbita per poterla eventualmente erogare in tempi successivi. Caratteristica questa che contraddistingue i cosiddetti componenti con memoria.

2.3 Componenti senza memoria

2.3.1 Bipoli privi di memoria

Un *bipolo senza memoria* è caratterizzato da una relazione di definizione che pone in relazione i valori della tensione e della corrente descrittive assunti negli stessi istanti. La relazione di definizione di un tale bipolo risulta esprimibile nella forma generale

$$f[v(t), i(t), t] = 0 \quad (2.7)$$

dove f sta ad indicare una funzione generica e dove, per maggior chiarezza, si è esplicitamente indicata la dipendenza temporale delle variabili descrittive. Se il tempo compare esplicitamente in argomento, come nella (2.7), il componente è detto *tempo-variante*, mentre, se la relazione di definizione si può ricondurre al tipo

$$f[v(t), i(t)] = 0, \quad (2.8)$$

in cui non compare esplicitamente il tempo tra le variabili indipendenti, esso è detto invece *tempo-invariante*.

Se la relazione (2.8) ammette in ogni istante la forma esplicita

$$i(t) = g[v(t)] \quad \forall t, \quad (2.9)$$

nella quale la tensione descrittiva può assumere il ruolo di variabile indipendente, si dice che il bipolo è *definito su base* (o *controllato in*) tensione. Analogamente se la (2.8) si può scrivere in ogni istante

$$v(t) = r[i(t)] \quad \forall t, \quad (2.10)$$

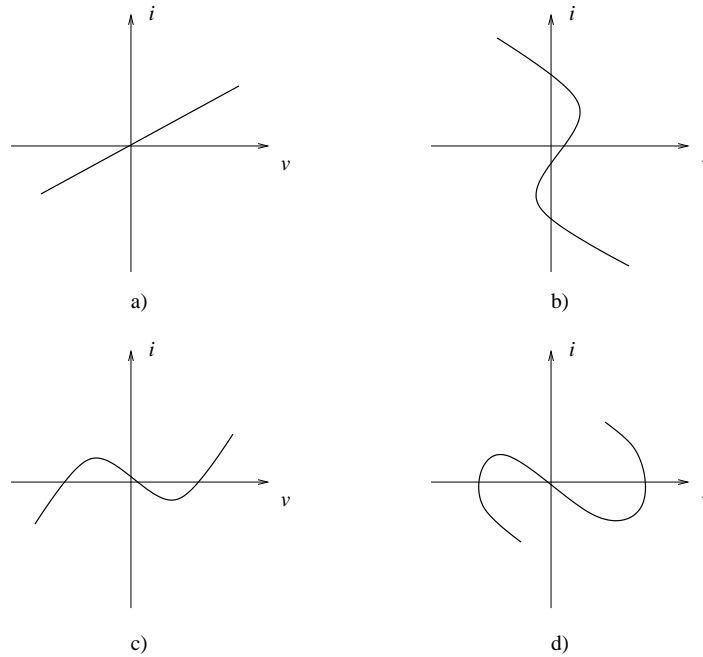


Figura 2.1: Curve caratteristiche di bipoli privi di memoria.

nella quale la variabile indipendente è la corrente descrittiva, si dice che il bipolo è *definito su base* (o *controllato in*) corrente.

La relazione di definizione di un bipolo privo di memoria si può rappresentare graficamente su un piano formato dagli assi coordinati indicanti i valori delle variabili descrittive. La curva, su tale piano, i cui punti rappresentano tutte e sole le coppie di valori di tensione e corrente compatibili con la relazione di definizione del componente, prende il nome di *curva caratteristica* del bipolo. Per un componente tempo-variante tale curva muta nel tempo. Nella Figura 2.1 sono riportati alcuni esempi di curve caratteristiche di bipoli tempo-invarianti e senza memoria.

In base a quanto detto sopra, si può affermare che

- la curva a) è caratterisitica di un bipolo definito sia su base corrente sia su base tensione come si può evincere dal fatto che scambiando le ascisse con le ordinate si ottiene ancora una curva analitica (funzione ad un sol valore);
- la b) è caratteristica di un bipolo definito solo su base corrente in quanto esistono valori della tensione cui corrispondono più valori della corrente;
- la c) è caratterisitca di un bipolo definito solo du base tensione per le ragioni esposte al punto precedente ove si scambino tensione e corrente;
- la d) è caratteristica di un bipolo che non è definito nè su base tensione nè su base corrente. In nessuno dei due casi, infatti, la relazione di definizione è ad un sol valore.

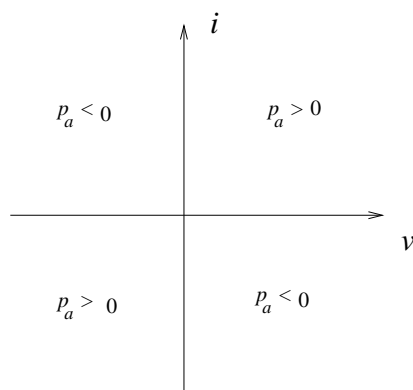


Figura 2.2: Segno della potenza assorbita da un bipolo secondo la convenzione degli utilizzatori.

I bipoli caratterizzati dalle curve b), c) e d) sono inoltre non lineari. Il bipolo si dice *inerte* se la caratteristica passa per l'origine, ossia quando tensione e corrente descrittiva sono contemporaneamente nulle. Tutte le caratteristiche riportate appartengono a bipoli inerti.

Impiegando la c.d.u., la potenza assorbita dal bipolo è positiva per tutti i punti della caratteristica che giacciono nel primo e nel terzo quadrante del piano i - v , è negativa per i punti situati nel secondo e quarto quadrante come schematizzato nella Figura 2.2.

Si fa osservare che un bipolo senza memoria è passivo se e solo se la sua caratteristica è interamente contenuta nel primo e terzo quadrante (e, quindi, dovendo passare per l'origine il bipolo passivo è anche inerte). Se, invece, la caratteristica comprende punti appartenenti anche al secondo e/o al quarto quadrante, quando il componente opera in tali punti esso assorbe una potenza negativa e, pertanto, l'energia da esso assorbita secondo la (2.2) può non soddisfare sempre la (2.4), denotando un comportamento attivo. Nei paragrafi successivi si passerà ad esaminare alcuni comuni bipoli elementari.

2.3.1.1 Resistore

In pratica, nei sistemi elettrici la corrente circola attraverso materiali che, a causa del valore limitato della loro *conducibilità elettrica*, oppongono al passaggio della corrente una certa resistenza e quindi non possono essere trattati come conduttori ideali¹. Di questo fenomeno si può complessivamente tenere conto tramite uno specifico parametro, la *resistenza*, il cui valore è legato al materiale conduttore (attraverso la già menzionata conducibilità, ovvero la grandezza inversa *resistività*) ed alla geometria del collegamento. Nel modello circuitale, il parametro resistenza si schematizza come concentrato in un componente a due terminali (bipolo) detto *resistore* che si interconnette con altri componenti per rappresentare i fenomeni resisitivi che si manifestano nel sistema reale. Nell'accezione comune, per "resistore" si intende un componente lineare,

¹Discorso a parte meritano i cosiddetti "superconduttori" che, tuttavia, trovano ancora un numero assai limitato di applicazioni.

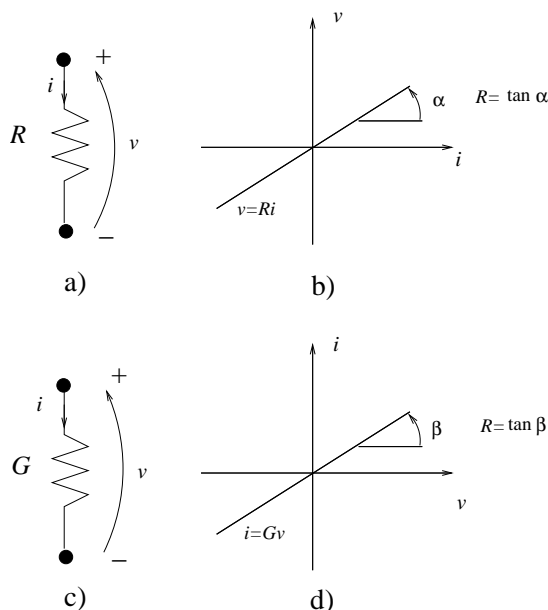


Figura 2.3: Simbolo circuitale del resistore: a) e c); b) caratteristica su base corrente, d) caratteristica su base tensione.

tempo-invariante, privo di memoria ed inerte. Perciò, in altro caso, si impiegano specificazioni esplicite come, ad esempio, “resistore non lineare”, “resistore tempo-variante” e così via.

La relazione di definizione su base corrente del resistore è data dall’espressione:

$$v = Ri \quad (2.11)$$

od anche, essendo la (2.11) invertibile, dall’espressione su base tensione

$$i = Gv. \quad (2.12)$$

Le relazioni di definizione (2.11) e (2.12) sono scritte riferendo le variabili descrittive a versi orientati mutuamente secondo la c.d.u.. La (2.11) passa sotto il nome di *Legge di Ohm*. Il parametro R che compare nella (2.11) è un coefficiente reale e positivo e rappresenta la resistenza. Nel S.I., la sua unità di misura è l’ohm (simbolo Ω). Il coefficiente G che compare nella (2.12) è anch’esso reale e positivo ed è detto *conduttanza*. La conduttanza, per il SI, si misura in siemens (simbolo S) e tra questa e la resistenza sussiste la relazione, che si deriva dalle (2.11) e (2.12),

$$G = \frac{1}{R}. \quad (2.13)$$

La relazione (2.13) di inversa proporzionalità tra resistenza e conduttanza ha determinato l’introduzione, specialmente nella pratica tecnica, dell’inverso dell’ohm (simbolo Ω^{-1} o \mathcal{U}) od anche *mho*. In Figura 2.3 è riportato il simbolo grafico del resistore e la sua caratteristica.

La potenza assorbita dal resistore è data da

$$p_a = vi = Ri^2 = Gv^2 \quad (2.14)$$

che risulta sempre positiva (o nulla) essendo R e G parametri positivi. Il resistore è pertanto un componente passivo dissipativo. Il resistore cioè assorbe continuamente potenza dai componenti ad esso collegati sottraendola definitivamente dalla rete. Tale potenza viene interamente convertita in calore. Il fenomeno, facilmente verificabile sperimentalmente, passa sotto il nome di *effetto Joule*.

L'elettromagnetismo permette di calcolare la resistenza da assegnare ad un tratto di conduttore filiforme reale tramite la seguente relazione:

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (2.15)$$

in cui compaiono la resistività, ρ , del materiale, la lunghezza, l , e la sezione normale, S , del tratto conduttore.

La resistività si misura in Ωm . In tabella 2.2 si riportano i valori di resistività per alcuni dei materiali di impiego più comune in elettrotecnica ed elettronica.

Si può osservare che facendo tendere R a zero, riconducendosi così al caso di conduttore ideale privo di resistenza, la (2.11) fornisce una tensione di valore nullo per qualsiasi valore della corrente. Ossia vale in questo caso la seguente relazione

$$v = 0 \quad \forall i. \quad (2.16)$$

Per convenienza, in corrispondenza alla relazione (2.16) si introduce il bipolo, rappresentato graficamente in figura 2.4, che prende la denominazione di *bipolo di corto-circuito*.

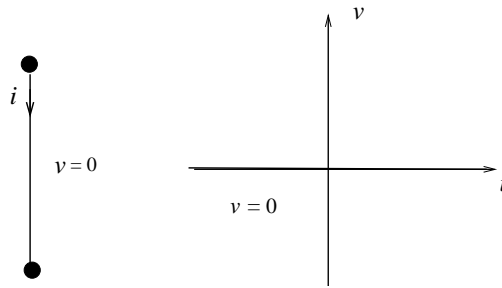


Figura 2.4: Bipolo di corto-circuito e sua caratteristica su base corrente.

Si noti che tale bipolo² è definito su base corrente ma non su base tensione. Infatti la (2.16) si deriva dal limite della (2.11) per la resistenza, R , che tende a

²Il bipolo di corto-circuito in una rete è indistinguibile dai terminali di interconnessione tra componenti.

zero; mentre la (2.12) per R che tende a zero tende ad infinito e, pertanto, resta indeterminata.

Tabella 2.2: Resistività (in Ωm) di alcuni materiali di impiego elettrico (alla temperatura di 300 K)

Materiale	Resistività elettrica	Impiego tipico
Zolfo	2×10^{15}	Isolante
SiO_2	$> 10^{14}$	
Al_2O_3	10^{12}	
Iodio	1.3×10^7	Semiconduttore
Cadmio	1.8×10^4	
Germanio	0.46	
Tellurio	0.044	
Mercurio	9.4×10^{-7}	Conduttori (metalli)
Grafite	6.5×10^{-7}	
Ferro	10^{-7}	
Tungsteno	5.4×10^{-8}	
Alluminio	2.73×10^{-8}	
Rame	1.73×10^{-8}	
Argento	1.63×10^{-8}	

Analogamente, facendo tendere nella (2.12) la conduttanza, G , a zero, si ottiene:

$$i = 0 \quad \forall v, \quad (2.17)$$

assunta pure come relazione di definizione del cosiddetto *bipolo di circuito-aperto*. Questo bipolo, il cui simbolo grafico è mostrato in figura 2.5, non esercita alcuna influenza tra i nodi ai quali è collegato (è assimilabile alla regione isolante esterna) e risulta definito solo su base tensione.

I bipoli di corto-circuito e di circuito-aperto trovano impiego, ad esempio, per rappresentare i due stati di un interruttore ideale. L'interruttore ideale è un componente che presenta resistenza nulla quando è nello stato ON (interruttore chiuso, ovvero in conduzione), e conduttanza nulla quando è nello stato OFF (interruttore aperto, ovvero in interdizione). Anche gli strumenti ideali per la misura delle correnti, amperometro ideale, e delle tensioni, voltmetro ideale, se presenti all'interno di una rete elettrica, si devono trattare alla stregua di un bipolo di corto-circuito e di un bipolo di circuito aperto rispettivamente come mostrato in figura 2.6.

Dal punto di vista energetico, i bipoli di corto-circuito e di circuito-aperto non sono interessati né da assorbimento né da erogazione di potenza elettrica.

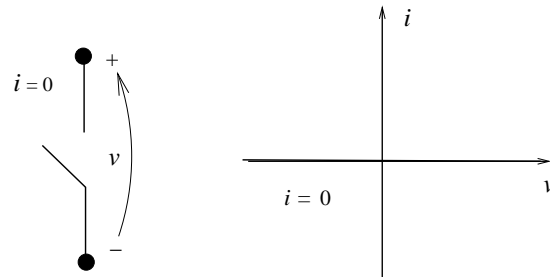


Figura 2.5: Simbolo circuitale del bipolo di circuito-aperto e sua caratteristica su base tensione.

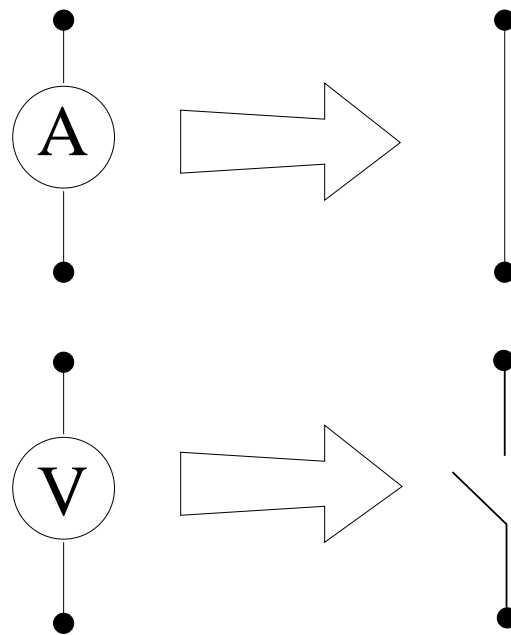


Figura 2.6: Misuratori ideali di corrente e di tensione.

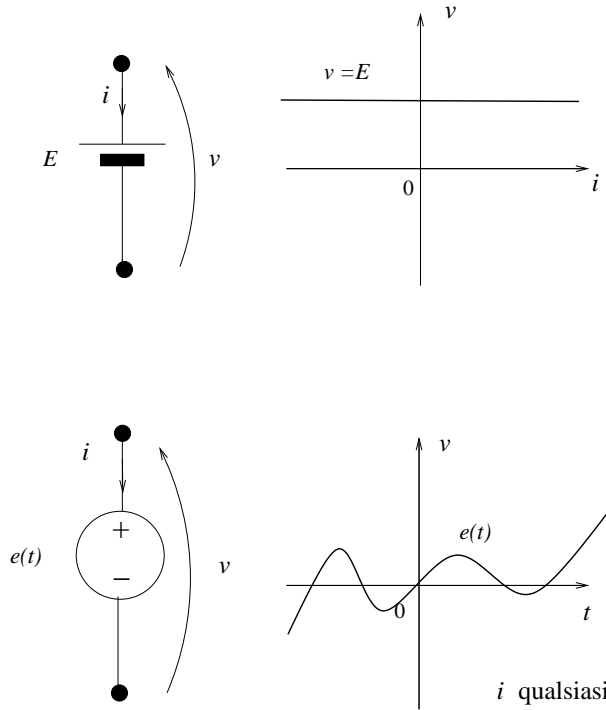


Figura 2.7: Simboli circuitali del generatore indipendente ideale di tensione costante e generico e loro caratteristiche.

2.3.1.2 Generatore indipendente ideale di tensione

Il generatore indipendente ideale di tensione è un componente bipolare definito dalla seguente relazione:

$$v = e \quad \forall i \quad (2.18)$$

dove e rappresenta una funzione nota del tempo detta *forza elettromotrice* (f.e.m.). Il generatore indipendente ideale di tensione impone dunque un determinato valore di tensione tra i suoi terminali, mentre lascia libera da ogni vincolo la propria corrente descrittiva (che dipenderà volta per volta solo dalla rete a cui il generatore è collegato). In figura 2.7, sono mostrati i simboli di uso comune e la caratteristica su base corrente del generatore indipendente ideale di tensione.

Si osservi che tale generatore è un bipolo definito solo su base corrente, non potendo esprimersi la caratteristica sul piano $i-v$ mediante una funzione ad un solo valore.

Dal punto di vista energetico, il generatore indipendente ideale di tensione può, secondo la c.d.u., in corrispondenza al segno della corrente descrittiva, assorbire potenza se il suo punto di funzionamento si trova nel I quadrante della caratteristica e la eroga se il suo punto di funzionamento è nel II quadrante. Ricordando la relazione (2.4) e le definizioni di componente attivo e passivo, l'ultima considerazione introdotta, assieme al fatto che alla corrente descrittiva è consentito assumere qualsiasi valore (dipendente solo dalla rete cui il generatore

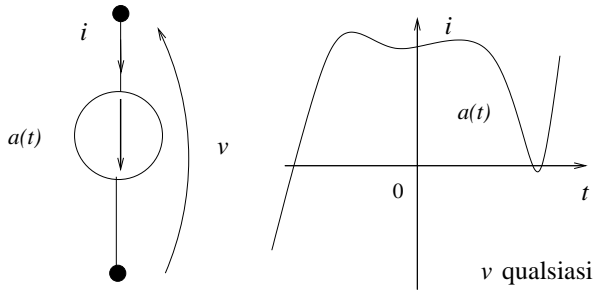


Figura 2.8: Simbolo grafico ed esempio di caratteristica del generatore indipendente ideale di corrente.

è collegato), si evince che il generatore indipendente ideale di tensione è un componente attivo.

In ultimo si può osservare che questo componente, qualora disattivato (cioè quando la sua f.e.m. viene annullata) si riduce ad un bipolo di corto-circuito dal momento che la relazione (2.18) va a coincidere con la (2.16). Si trae un'ulteriore conferma che il generatore indipendente ideale di tensione non esercita alcuna resistenza nei confronti della corrente che lo attraversa.

2.3.1.3 Generatore indipendente ideale di corrente

Il generatore indipendente ideale di corrente è un componente bipolare definito dalla relazione

$$i = a \quad \forall v \quad (2.19)$$

dove a rappresenta una funzione del tempo nota. La relazione (2.19) impone un vincolo al valore della corrente descrittiva del generatore indipendente ideale di corrente, mentre non fissa alcun vincolo alla sua tensione (la quale dipenderà di volta in volta dai componenti a cui il generatore di corrente è collegato). In figura 2.8, sono mostrati il simbolo in uso e la caratteristica su base tensione del generatore indipendente ideale di corrente.

Si osservi che il generatore indipendente ideale di corrente è definito solo su base tensione, non essendo la caratteristica sul piano $v-i$ esprimibile mediante una funzione ad un sol valore. Da quanto esposto, salta all'occhio l'analogia tra le relazioni di definizione dei generatori indipendenti ideali di tensione e di corrente. Infatti, basta scambiare le variabili descrittive per ottenere una relazione di definizione dall'altra. Nel seguito, si avrà ancora occasione di imbattersi in coppie di bipoli aventi relazioni di definizione analoghe ottenibili le une dalle altre per il solo scambio delle variabili descrittive e di un parametro caratteristico. Si dice allora che questi bipoli sono l'uno il duale dell'altro³. Con tale terminologia, si può affermare che il generatore indipendente ideale di corrente è il duale del generatore indipendente ideale di tensione e viceversa⁴.

Dal punto di vista energetico, come il proprio duale anche il generatore indipendente ideale di corrente costante può assorbire od erogare potenza a

³Nel caso del resistore, la relazione duale della (2.11) è rappresentata dalla (2.12) che è pure appartenente al resistore (si potrebbe utilizzare in quest'ultimo caso la dicitura "conduttore"). Il resistore è duale di sè medesimo.

⁴Anche i bipoli di corto-circuito e di circuito aperto sono duali l'un l'altro.

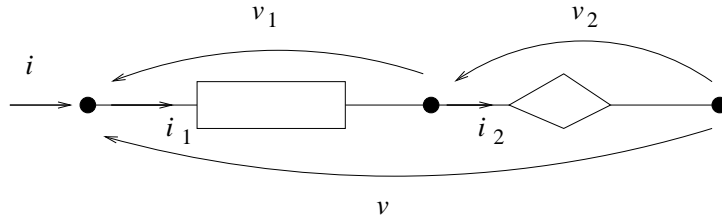


Figura 2.9: Coppia di bipoli collegati in serie.

seconda che il suo punto di funzionamento cada nel I o nel II quadrante della caratteristica. Pertanto, anche il generatore indipendente di corrente è un componente attivo.

Si noti infine che, se disattivato (per annullamento della corrente generata) il generatore indipendente ideale di corrente si riduce ad un bipolo di circuito aperto poiché la (2.19) va a coincidere con la (2.5). Va da sé che il generatore indipendente ideale di corrente ha conduttanza nulla, non permettendo la circolazione sui suoi terminali di una corrente diversa dalla propria.

2.4 Bipoli formati dal collegamento fra bipoli

Bipolo può essere anche, più in generale, un collegamento di componenti elementari che lasci libera una coppia di terminali. I terminali lasciati liberi non necessariamente devono appartenere allo stesso componente. In tale caso, si pone il problema di ricercare la relazione tra la tensione e la corrente relativa a tale coppia di terminali che costituiscono una porta. Per acquisire confidenza con queste situazioni, è opportuno esaminare i vincoli che si stabiliscono quando componenti elementari vengono collegati tra di loro in tutti i modi realizzabili nella pratica. In questa sede, ci si limita ad esaminare i collegamenti tra bipoli.

2.4.1 Collegamento in serie

Due bipoli si dicono collegati in *serie* se un terminale dell'uno è collegato in via esclusiva ad un terminale dell'altro senza cioè che altri componenti (eccetto il bipolo di circuito aperto) si connettano con un proprio terminale al nodo formato dai primi due (il nodo in questione si dice di ordine 2 essendo il numero d'ordine quello dei terminali che afferiscono al nodo prendendo connessione tra loro). Due bipoli collegati in serie sono rappresentati in figura 2.9.

Il collegamento si continua connettendo ad uno dei due terminali liberi un ulteriore bipolo e così via, formando sempre nuovi nodi di ordine 2. Applicando la LC a tali nodi, si ricava che le correnti descrittive di tutti i bipoli collegati in serie sono vincolate ad essere tutte uguali e coincidenti con la corrente entrante nel collegamento (eventualmente a meno dei segni se i versi di riferimento non sono concordi). Nel caso dei due bipoli in figura 2.9, la LC fornisce la seguente uguaglianza

$$i_1 = i_2 = i. \quad (2.20)$$

Applicando la LT si può altresì ricavare che la tensione complessiva è pari

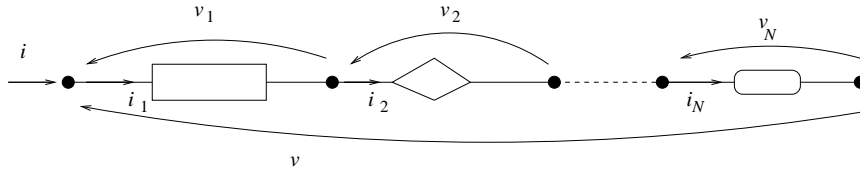
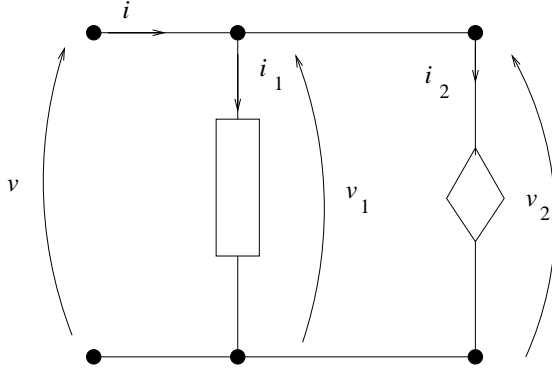
Figura 2.10: Collegamento serie di N bipoli.

Figura 2.11: Coppia di bipoli collegata in parallelo.

alla somma algebrica delle tensioni descrittive dei bipoli in serie, ossia

$$v = v_1 + v_2. \quad (2.21)$$

Più in generale, l'applicazione della LC e della LT ad un collegamento di N bipoli in serie, fornisce rispettivamente (si veda la figura 2.10)

$$\begin{aligned} i &= i_k & k &= 1, 2, \dots, N \\ v &= \sum_{k=1}^N v_k. \end{aligned} \quad (2.22)$$

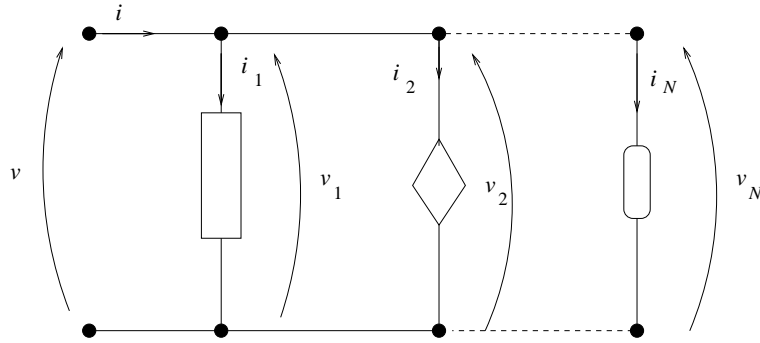
Le (2.22) sono scritte assumendo che i versi di riferimento delle variabili descrittive siano quelli indicati nella figura 2.10.

2.4.2 Collegamento in Parallelo

Due bipoli si dicono collegati in parallelo se sono collegati tra loro con entrambi i terminali come mostrato in figura 2.11. Il parallelo si continua collegando ulteriormente con entrambi i terminali un bipolo alla volta con le stesse modalità. Si veda in proposito la figura 2.12.

Si osservi che i collegamenti serie e parallelo di bipoli costituiscono un caso di dualità dato che tensioni e correnti hanno ruoli scambiati. Infatti la LT, applicata ad una linea chiusa che passi per entrambi i nodi, impone che le tensioni dei bipoli in parallelo siano uguali tra loro in valore assoluto e coincidano con la tensione del collegamento (eventualmente a meno dei segni se i versi di riferimento non sono concordi). Nel caso dei due bipoli in figura 2.10 deve valere

$$v_1 = v_2 = v. \quad (2.23)$$

Figura 2.12: N bipoli collegati in parallelo.

La LC applicata ad uno dei due nodi formati dal collegamento consente di ricavare la corrente totale del collegamento come somma algebrica delle correnti descrittive dei bipoli che fanno parte del parallelo, cioè

$$i = i_1 + i_2. \quad (2.24)$$

In termini più generali, per un collegamento costituito da N bipoli in parallelo come in figura 2.12, le leggi di Kirchhoff forniscono

$$\begin{aligned} v &= v_k & k &= 1, 2, \dots, N \\ i &= \sum_{k=1}^N i_k. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Come già le espressioni (2.22), anche le (2.25) sono scritte assumendo che i versi di riferimento delle variabili descrittive siano quelli indicati nella figura 2.12.

2.5 Equivalenza tra bipoli senza memoria

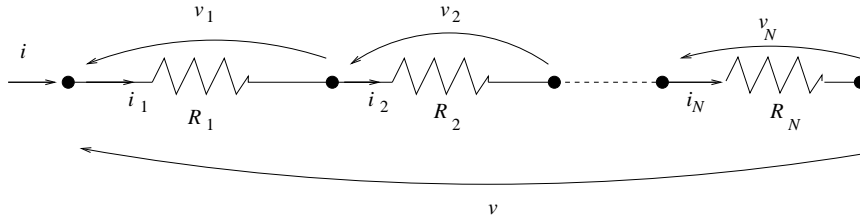
Si dicono *equivalenti* due generici componenti bipolari quando, indipendentemente dal numero, tipo e collegamento di bipoli elementari di cui possono essere internamente costituiti, presentano *la stessa relazione di definizione* tra la corrente e la tensione descrittiva. Sulla base di questa definizione, si ricaveranno alcune equivalenze notevoli tra bipoli che potranno essere utilizzate al fine di introdurre opportune semplificazioni che possano rendere più agevole la soluzione di una rete data.

2.5.1 Resistori equivalenti serie e parallelo

In questa sezione, si cercherà di mostrare come sia possibile sostituire collegamenti in serie e in parallelo di resistori con opportuni resistori equivalenti.

2.5.1.1 Resistore equivalente serie

Si farà vedere che un collegamento serie di N resistori può essere sostituito da un unico resistore equivalente. Si considerino dunque N resistori collegati in serie come rappresentato in figura 2.13.

Figura 2.13: Collegamento serie di N resistori.

Si voglia determinare la relazione di definizione tra la corrente descrittiva i e la tensione descrittiva v del bipolo risultante dal collegamento.

Come già visto al § 2.4.1, le correnti e le tensioni descrittive dei bipoli in serie sono vincolate dalle (2.22). Aggiungendo a tali equazioni le relazioni di definizione dei resistori

$$v_k = R_k i_k \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.26)$$

e ricordando che le correnti descrittive sono vincolate ad essere tutte coincidenti con la corrente totale i , le (2.26) si possono anche scrivere

$$v_k = R_k i \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.27)$$

Sostituendo le (2.27) nella seconda delle (2.22) si ottiene

$$v = \left(\sum_{k=1}^N R_k \right) i \quad (2.28)$$

in cui la corrente del collegamento i è raccolta a fattor comune. Introducendo il parametro

$$R_{eqS}^N = \sum_{k=1}^N R_k, \quad (2.29)$$

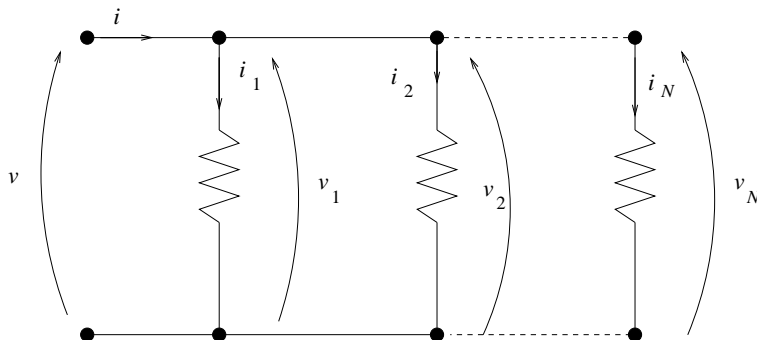
che si definisce *resistenza equivalente serie*, si ottiene la relazione di definizione del collegamento nella forma

$$v = R_{eqS}^N i. \quad (2.30)$$

Quest'ultima relazione, raffrontata alla (2.28) precedentemente ottenuta, mostra che N resistori collegati in serie tra loro equivalgono, rispetto ai terminali iniziale e finale del collegamento serie, ad un unico resistore avente resistenza pari a R_{eqS}^N , ossia pari alla somma aritmetica delle resistenze di tutti i resistori che ne fanno parte.

Partitore di tensione Si considerino N resistori in serie come in figura 2.13 e si assuma nota la tensione complessiva v oltre ai valori di tutte le resistenze. La tensione descrittiva di ciascun resistore si può calcolare determinando *in primis* la corrente descrittiva comune data da

$$i = \frac{v}{R_{eqS}^N} = \frac{v}{\sum_{k=1}^N R_k}. \quad (2.31)$$

Figura 2.14: Collegamento di N resistori in parallelo.

La conoscenza della corrente descrittiva è necessaria e sufficiente per ricavare, tramite la legge di Ohm, il valore della tensione descrittiva di ciascun resistore della serie. Per il generico resistore m -esimo si può scrivere infatti

$$v_m = R_m i = \frac{R_m}{\sum_{k=1}^N R_k} v. \quad (2.32)$$

Pertanto, la tensione descrittiva di ogni resistore della serie si può ottenere moltiplicando la tensione tra i terminali estremi del collegamento per un coefficiente (minore di uno), detto *fattore di partizione*, costituito da una frazione il cui numeratore è dato dalla resistenza del resistore considerato, essendo il denominatore dato dalla resistenza equivalente degli N resistori in serie. La (2.32) mostra altresì che la tensione complessiva della serie si divide su ciascun resistore in misura direttamente proporzionale alla rispettiva resistenza.

2.5.1.2 Resistore equivalente parallelo

Si considerino N resistori collegati in parallelo come rappresentato in figura 2.14.

Si voglia determinare la relazione di definizione tra la corrente descrittiva, i , e la tensione descrittiva, v , del bipolo risultante dal collegamento. Anche qui ci troviamo in presenza di un caso che è il duale del collegamento serie precedentemente trattato, dal momento che i ruoli delle variabili descrittive risultano scambiati. Infatti, con procedimento analogo a quello utilizzato per il collegamento serie, aggiungendo le relazioni di definizione su base tensione dei resistori

$$i_k = G_k v_k \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (2.33)$$

dove $G_k = 1/R_k$, alle equazioni derivanti dall'applicazione della LC e della LT, ove si tenga presente il vincolo che tutte le tensioni descrittive sono coincidenti e pari alla tensione v del collegamento, si ottiene

$$i_k = G_k v \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.34)$$

Sostituendo infine le (2.34) nella seconda equazione delle (2.25) si giunge ad ottenere

$$i = \left(\sum_{k=1}^N G_k \right) v. \quad (2.35)$$

Pertanto, introducendo la quantità

$$G_{eqP}^N = \sum_{k=1}^N G_k, \quad (2.36)$$

detta *conduttanza equivalente parallelo*, la relazione di definizione del collegamento si può ora scrivere

$$i = G_{eqP}^N v. \quad (2.37)$$

La relazione (2.37) confrontata con la (2.35) rivela che N resistori collegati in parallelo sono equivalenti ad un unico resistore di conduttanza G_{eqP}^N pari alla somma delle conduttanze dei resistori collegati in parallelo. E' possibile ricavare la *resistenza equivalente parallelo*, R_{eqP}^N , facendo ricorso alle (2.13) e (2.36):

$$R_{eqP}^N = \frac{1}{G_{eqP}^N} = \frac{1}{\sum_{k=1}^N G_k} = \frac{1}{\sum_{k=1}^N \frac{1}{R_k}}. \quad (2.38)$$

Partitore di corrente Si considerino ancora gli N resistori collegati in parallelo e si assuma di conoscere la corrente complessiva i ed i valori di tutte le resistenze. Si vogliano determinare le correnti descrittive di ciascun resistore. Questo problema si può affrontare calcolando dapprima la tensione descrittiva comune a tutti i resistori data da

$$v = \frac{i}{G_{eqP}^N} = \frac{i}{\sum_{k=1}^N G_k}. \quad (2.39)$$

Nota la tensione v , si possono ricavare i valori delle correnti descrittive di ogni resistore in parallelo. Infatti, per il generico m -esimo resistore in parallelo vale

$$i_m = G_m v = \frac{G_m}{\sum_{k=1}^N G_k} i. \quad (2.40)$$

Si evince che la corrente di ogni singolo resistore si può ottenere agevolmente moltiplicando la corrente complessiva per un *fattore di partizione* costituito da una frazione, minore di uno, avente per numeratore la conduttanza del resistore considerato, essendo il denominatore la conduttanza equivalente degli N resistori in parallelo. La (2.40) mostra anche che la corrente complessiva si divide su ciascun resistore in misura direttamente proporzionale alla rispettiva conduttanza.

Nel caso particolare in cui $N = 2$, la (2.40) espressa in funzione delle resistenze fornisce le seguenti espressioni per le correnti descrittive

$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} i = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i \quad (2.41)$$

e

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i. \quad (2.42)$$

Le precedenti espressioni consentono di affermare che la corrente di uno qualsiasi dei due resistori in parallelo si ottiene moltiplicando la corrente complessiva per una frazione in cui al denominatore compare la resistenza dell'altro resistore e al denominatore la somma delle due resistenze.

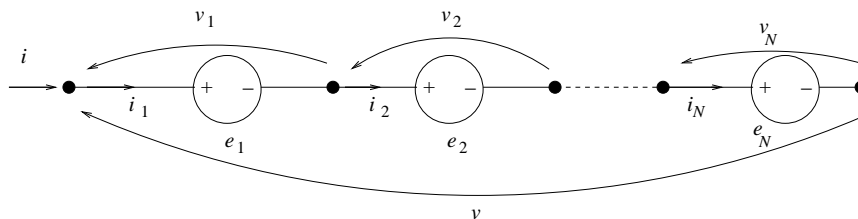


Figura 2.15: Collegamento in serie di N generatori ideali di tensione.

2.5.2 Generatori equivalenti serie e parallelo

In questa sezione vengono illustrate le possibilità di sostituire più generatori ideali di tensione o di corrente collegati in serie e/o in parallelo tra loro con un unico generatore ideale di tensione o di corrente equivalenti.

2.5.2.1 Generatore equivalente ad una serie di generatori di tensione

Si considerino N generatori ideali di tensione collegati in serie come in figura 2.15.

Applicando al collegamento la LT e le appropriate relazioni di definizione si ottiene

$$v = \sum_{k=1}^N e_k \quad \forall i. \quad (2.43)$$

La somma a secondo membro della (2.43) è da intendersi quale somma algebrica. Infatti, qualora alcune delle f.e.m. abbiano verso opposto a quello di riferimento assegnato mediante la c.d.u., le stesse devono comparire nella sommatoria con il segno negativo. Si osservi che la (2.43) può essere riguardata come relazione di definizione di un bipolo di cui risulta assegnata la tensione descrittiva mentre la corrente descrittiva è libera di assumere qualsiasi valore. Tale bipolo è dunque l'equivalente di un generatore ideale di tensione dotato di una f.e.m. di valore pari alla somma algebrica delle f.e.m. proprie dei singoli generatori ideali di tensione collegati in serie.

2.5.2.2 Generatore equivalente ad un parallelo di generatori di tensione

Il collegamento di generatori ideali di tensione in parallelo non è ammesso dal modello in quanto porta a circuiti privi di soluzione (impossibili oppure indeterminati) e quindi di nessuna rilevanza tecnica. Infatti, se le f.e.m. dei due generatori indipendenti ideali di tensione disegnati in figura 2.16 sono diverse, il vincolo imposto dalla LT per bipoli in parallelo e le relazioni di definizione dei generatori sono in conflitto tra loro.

Qualora, invece, le f.e.m. siano uguali in valore assoluto e segno, restano indeterminate le correnti descrittive dei singoli generatori di tensione dal momento che la LC applicata ad uno dei due nodi stabilisce che

$$i = i_1 + i_2 \quad (2.44)$$

che non è sufficiente a determinare le correnti descrittive, potendo essere soddisfatta da infinite coppie di valori delle correnti.

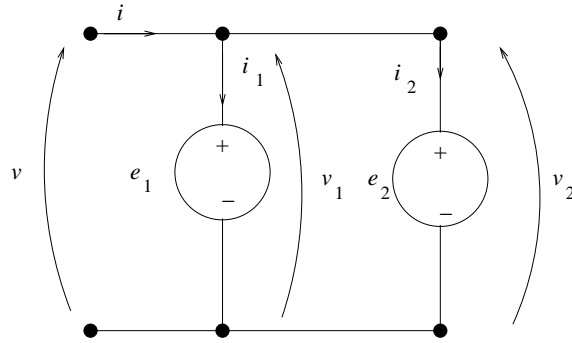
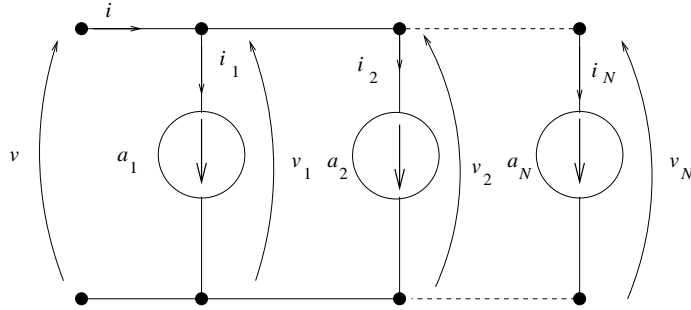


Figura 2.16: Coppia di generatori ideali di tensione in parallelo.

Figura 2.17: Collegamento in parallelo di N generatori ideali di corrente.

2.5.2.3 Generatore equivalente di un parallelo di generatori di corrente

Si considerino N generatori ideali di corrente collegati in parallelo come in figura 2.17.

Applicando al collegamento la LC e le relazioni di definizione si ottiene

$$i = \sum_{k=1}^N a_k \quad \forall v. \quad (2.45)$$

La somma che compare a secondo membro è da intendersi quale somma algebrica, se infatti alcune correnti prodotte hanno il verso opposto a quello di riferimento assegnato, devono comparire con il segno negativo nella sommatoria. Vale la pena notare che la (2.45) può apparire quale relazione di definizione di un bipolo del quale risulta nota la corrente descrittiva mentre la tensione descrittiva può assumere qualsiasi valore. Si conclude, pertanto, che il collegamento esaminato è equivalente ad un unico generatore ideale di corrente pari alla somma algebrica delle correnti dei singoli generatori in parallelo.

2.5.2.4 Generatore equivalente di una serie di generatori di corrente

Il collegamento in serie di generatori di corrente ideali non è ammesso perchè porta a circuiti privi di soluzione (impossibili oppure indeterminati) e quindi

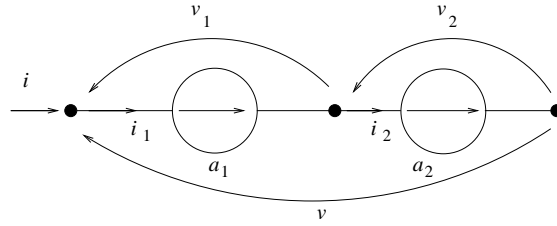


Figura 2.18: Collegamento di due generatori indipendenti ideali di corrente in serie.

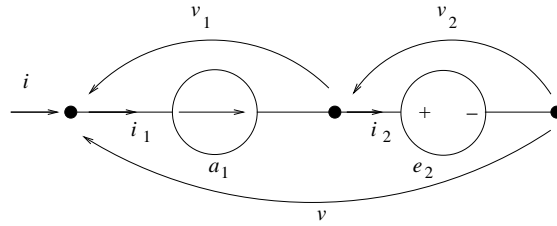


Tabella 2.4: Collegamento in serie di generatori indipendenti ideali di corrente e di tensione.

inaccettabili. Infatti, se le correnti dei due generatori indipendenti di corrente ideali in figura 2.18 sono diverse, il vincolo imposto dalla LC al nodo comune e le relazioni di definizione dei generatori sono incompatibili.

Qualora, invece, le correnti siano uguali ed equiverse, restano comunque indeterminate le tensioni descrittive dei singoli generatori di corrente dal momento che la LT stabilisce che

$$v = v_1 + v_2 \quad (2.46)$$

relazione che può essere sempre soddisfatta da infinite coppie di valori delle tensioni descrittive.

2.5.3 Casi misti di collegamento tra generatori

In questa sezione si prendono brevemente in esame i casi in cui generatori di tensione e di corrente risultano collegati tra loro in serie e in parallelo al fine di determinare l'eventuale generatore equivalente di tali collegamenti. Tenendo conto della disamina sviluppata nei precedenti paragrafi, gli unici casi che ha senso considerare sono quelli di due soli generatori ideali (di tensione e di corrente) collegati in serie ed in parallelo tra loro.

2.5.3.1 Collegamento in serie di generatori indipendenti ideali di tensione e di corrente

E' facile rendersi conto che il collegamento in serie di un generatore ideale di tensione e di uno ideale di corrente (vedi figura 2.4) equivale, rispetto ai terminali estremi liberi, al solo generatore di corrente.

Infatti, la corrente descrittiva è vincolata ad assumere il valore di quella propria del generatore di corrente, mentre la tensione descrittiva del collegamento, sempre grazie al generatore di corrente e nonostante la presenza del generatore di tensione, può assumere qualsiasi valore.

2.5.3.2 Collegamento in parallelo di generatori indipendenti ideali di tensione e di corrente

Con ragionamento analogo al precedente, il collegamento in parallelo di un generatore di tensione e di uno di corrente, come in figura 2.19, equivale al solo generatore di tensione in quanto la tensione comune è fissata appunto dal generatore indipendente di tensione, mentre la corrente descrittiva è libera di assumere valori qualsiasi.

2.5.4 Collegamenti tra generatori indipendenti e resistori

La varietà di possibilità che offre il collegamento di generatori ideali di corrente e di tensione con resistori nelle due possibili configurazioni serie e parallelo, fornisce motivo per soffermarsi ad esaminare i casi possibili di interesse pratico.

2.5.4.1 Resistore e generatore indipendente ideale di tensione collegati in serie

Si consideri il bipolo costituito da un generatore indipendente ideale di tensione ed un resistore collegati in serie. Nell'ambito della c.d.u. per la scelta dei versi di riferimento delle variabili descrittive e a seconda dell'orientamento relativo tra la tensione descrittiva v del bipolo risultante e la f.e.m. e del generatore indipendente di tensione, si possono distinguere i due casi illustrati in figura 2.20.

Per questi casi il bipolo risultante assume una delle due relazioni

$$v = e + v_R = e + Ri, \quad (2.47)$$

$$v = -e + v_R = -e + Ri. \quad (2.48)$$

Queste relazioni sul piano $v-i$ sono rappresentate da rette non passanti per l'origine degli assi del tipo indicato in figura 2.21.

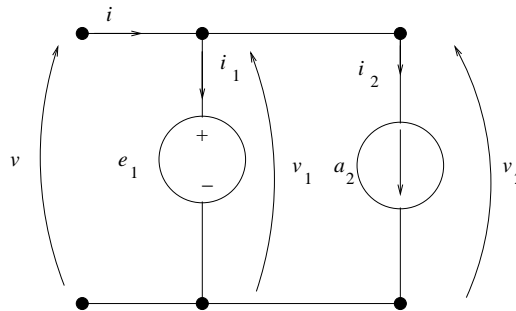


Figura 2.19: Generatori indipendenti ideali di tensione e di corrente collegati in parallelo

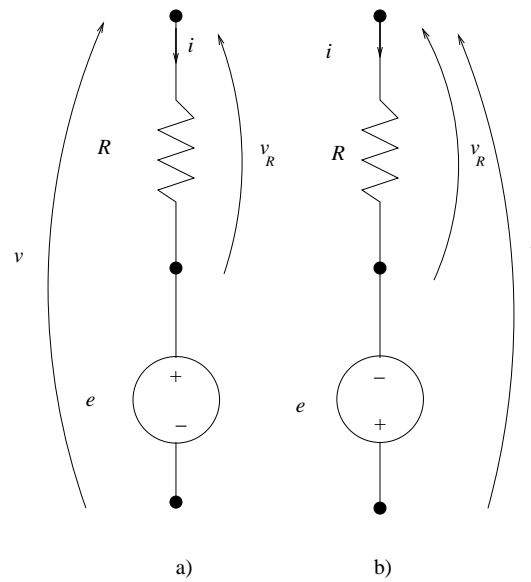


Figura 2.20: Collegamento serie tra generatore indipendente ideale di tensione e resistore.

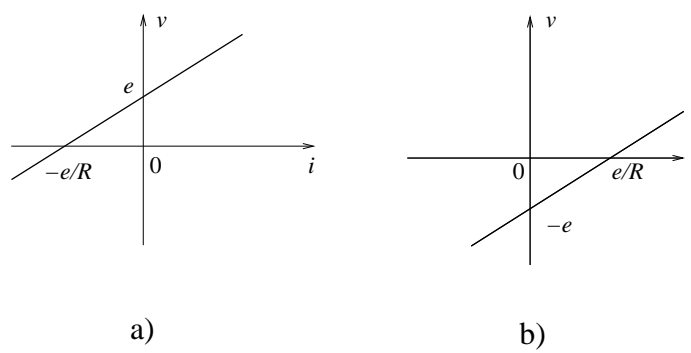


Figura 2.21: Caratteristiche dei bipoli mostrati in figura 2.20.

Il passaggio delle caratteristiche attraverso il II o il IV quadrante determina la condizione di attività del bipolo risultante dal collegamento. L'intersezione con l'asse delle ascisse rappresenta la corrente corrispondente ad una tensione complessiva nulla (cioè quando i due terminali estremi sono allo stesso potenziale, ossia come se collegati ad un bipolo di corto circuito) ed è detta, pertanto, *corrente di corto circuito* del bipolo. Essa vale $-e/R$ nel caso a) e e/R nel caso b). L'intersezione della caratteristica con l'asse delle ordinate rappresenta il valore della tensione corrispondente ad una corrente nulla (cioè quando ad essere collegato ai terminali estremi è un bipolo di circuito aperto). Questo valore, detto *tensione a vuoto*, coincide, a meno del segno, con la f.e.m. del generatore di tensione. Il coefficiente angolare della caratteristica è poi pari, per la c.d.u., alla resistenza R .

Si noti, infine, che le relazioni (2.47) e (2.48) sono invertibili e, pertanto, il bipolo complessivo costituito dal collegamento serie di un generatore di tensione con un resistore è definito sia su base corrente sia su base tensione.

Generatore indipendente reale di tensione Si è già detto che il generatore indipendente di tensione ideale è un bipolo per il quale il valore di f.e.m., e quindi la tensione descrittiva corrispondente, non dipende dalla corrente descrittiva. Per i dispositivi fisici modellabili come generatori indipendenti di tensione ciò è vero solo in prima approssimazione. Per un generatore di tensione reale la tensione tende a diminuire all'aumentare della corrente erogata dal momento che i dispositivi reali non dispongono di una potenza illimitata. Solo per "piccoli" valori della corrente, quindi, si può impiegare il modello del generatore di tensione ideale. Un'approssimazione più conforme al comportamento di un generatore reale di tensione è il modello costituito dal collegamento in serie di un generatore ideale di tensione con un resistore. La caratteristica di questo bipolo (in figura 2.21 è rappresentata quella su base corrente) è tanto più vicina a quella di un generatore ideale quanto più piccola è la resistenza in serie, R . Al diminuire di tale resistenza (detta resistenza interna del generatore di tensione reale) la pendenza della caratteristica diminuisce e, corrispondentemente, aumenta l'intervallo di valori di corrente per i quali si possono trascurare le variazioni della tensione sotto carico rispetto alla tensione a vuoto⁵.

Per far vedere che la potenza erogata dal bipolo che modella il generatore reale di tensione non può assumere, a differenza del caso ideale, un valore arbitrariamente grande, si può scrivere per il caso a) di figura 2.21

$$p_e = -p_a = -vi = -ei - Ri^2. \quad (2.49)$$

Si può agevolmente riconoscere che tale potenza ammette un valor massimo in funzione della corrente descrittiva. Per determinare tale valor massimo occorre imporre l'annullamento della derivata prima della potenza erogata rispetto alla corrente

$$\frac{dp_e}{di} = 0. \quad (2.50)$$

Sostituendo la (2.49) nella (2.50) si ottiene

$$-e - 2Ri = 0 \quad (2.51)$$

⁵Per tensione sotto carico si intende quella misurabile ai terminali del generatore indipendente di tensione quando questi sono percorsi da una corrente diretta ad uno o più componenti passivi cui è destinata la potenza elettrica erogata dal generatore stesso.

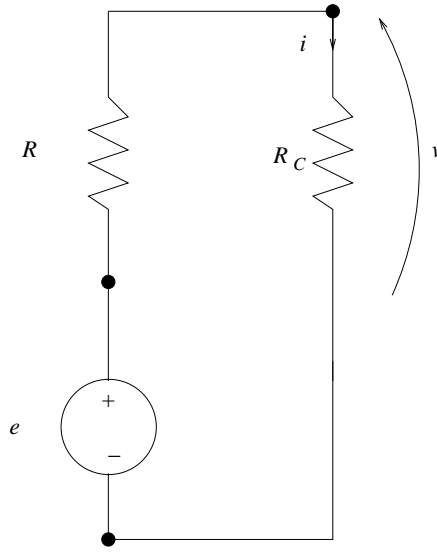


Figura 2.22: Carico resistivo collegato ad un generatore reale di tensione

che fornisce il valore di corrente

$$i_{MAX} = -\frac{e}{2R}. \quad (2.52)$$

Tale valore corrisponde ad un punto di massimo poichè una successiva derivazione della (2.51) conduce ad un risultato costante di segno negativo. Il segno negativo nella (2.52) sta invece ad indicare che la corrente che rende massima la potenza erogata ha verso opposto a quello di riferimento stabilito con la c.d.u. segnato nella figura 2.21. Si può inoltre osservare che la (2.52) vale la metà della corrente di corto circuito del bipolo in esame.

Dalla relazione di definizione del collegamento (2.47) esplicitata per la corrente relativa alla massima potenza erogata si ottiene per la tensione corrispondente

$$v_{MAX} = e - R\frac{e}{2R} = \frac{e}{2}, \quad (2.53)$$

mentre il valor massimo della potenza (*potenza disponibile*) risulta

$$p_{eMAX} = -v_{MAX}i_{MAX} = -\frac{e}{2}\left(-\frac{e}{2R}\right) = \frac{e^2}{4R}. \quad (2.54)$$

Collegando una resistenza di carico R_C al bipolo generatore reale di tensione, come mostrato in figura 2.22,

la potenza assorbita dal carico espressa secondo i riferimenti fissati in figura, vale

$$p_a = vi = e\frac{R_C}{R + R_C}\frac{e}{R + R_C} = e^2\frac{R_C}{(R + R_C)^2}. \quad (2.55)$$

Al variare della resistenza di carico, R_C , la potenza assorbita dal carico (e, quindi, erogata dal bipolo generatore reale di tensione) segue un andamento del tipo rappresentato qualitativamente in figura 2.23.

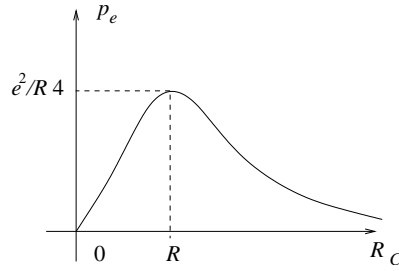


Figura 2.23: Potenza erogata dal generatore reale di tensione in funzione della resistenza di carico.

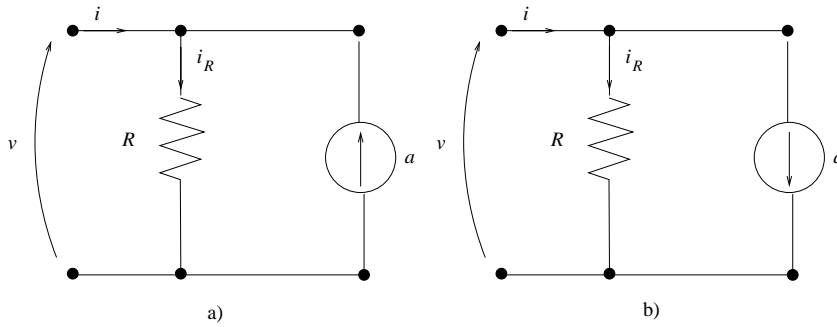


Figura 2.24: Resistore e generatore indipendente ideale di corrente collegati in parallelo.

Dal confronto tra le (2.54) e (2.55) è infine facile verificare che la potenza ceduta al carico è massima quando la resistenza di carico soddisfa la condizione

$$R_C = R \quad (2.56)$$

ossia la massima potenza viene erogata al carico la cui resistenza coincide con la resistenza interna del generatore reale di tensione.

2.5.4.2 Resistore e generatore indipendente ideale di corrente in parallelo

Ci troviamo di fronte ad un caso che rappresenta quello duale del precedente. A seconda dell'orientamento relativo tra la corrente descrittiva i del bipolo risultante e la corrente a propria del generatore indipendente di corrente, nell'ambito della c.d.u. per la scelta dei versi di riferimento delle variabili descrittive, si possono distinguere i due casi illustrati in figura 2.24.

Il bipolo risultante è descritto, a seconda del caso, da una delle due relazioni

$$i = i_R - a = \frac{v}{R} - a, \quad (2.57)$$

$$i = i_R + a = \frac{v}{R} + a. \quad (2.58)$$

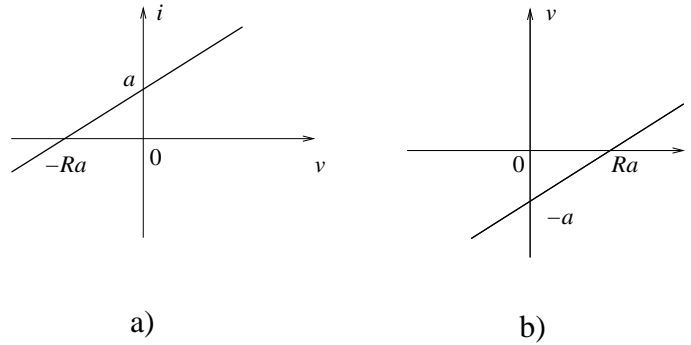


Figura 2.25: Caratteristiche dei bipoli rappresentati in figura 2.24.

Sul piano $i-v$, le caratteristiche sono rappresentate da rette del tipo tracciato in figura 2.25

Il passaggio di queste rette attraverso il II o IV quadrante caratterizza l'attività del comportamento che si può attribuire al bipolo complessivo. Le intersezioni con gli assi coordinati si interpretano come già visto nel caso esaminato al § 2.5.4.1. Analogamente, la pendenza della caratteristica è pari alla conduttanza $G=1/R$ del resistore.

Si noti ancora che le relazioni (2.57) e (2.58) sono invertibili e che, quindi, il bipolo costituito dato dal collegamento parallelo di un generatore indipendente ideale di corrente con un resistore è definito sia su base corrente sia su base tensione.

Generatore reale di corrente Anche nel caso dei dispositivi fisici modellabili come generatori di corrente, solo in prima approssimazione si verifica che la corrente descrittiva non dipende dalla tensione applicata. Per un generatore di corrente realizzabile fisicamente, la corrente tende a diminuire all'aumentare della tensione applicata poichè la potenza disponibile è sempre limitata.

Un modello più aderente al comportamento di un generatore di corrente reale è quello costituito dal collegamento di un generatore indipendente ideale di corrente in parallelo con un resistore. La caratteristica di questo bipolo (in figura 2.26 è rappresentata quella su base tensione per un generatore indipendente ideale di valore costante)

è tanto più vicina a quella di un generatore ideale quanto maggiore è la resistenza R . Al crescere della resistenza, diminuisce la pendenza della caratteristica e, corrispondentemente, si può aumentare l'intervallo di valori di tensione per i quali si possono trascurare le variazioni della corrente descrittiva rispetto al suo valore di corto circuito.

La potenza erogata dal bipolo, prendendo in considerazione il caso illustrato nello schema a) della figura 2.24 (il che non lede la generalità), vale

$$p_e = -p_a = -vi = -\frac{v^2}{R} + va. \quad (2.59)$$

La potenza non può assumere un valore grande a piacere, come nel caso del generatore indipendente ideale, ma ammette un massimo al variare della

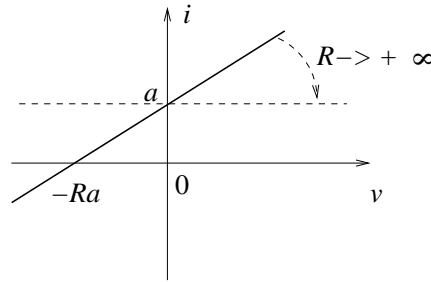


Figura 2.26: Dipendenza da R della caratteristica del bipolo mostrato in figura 2.24 b).

tensione descrittiva. Il massimo si può determinare ricercando il valore di v che verifichi la condizione

$$\frac{dp_e}{dv} = 0. \quad (2.60)$$

Sostituendo la (2.59) nella (2.60), si ottiene

$$a - 2\frac{v}{R} = 0 \quad (2.61)$$

e il massimo corrisponde al valore di tensione

$$v_{MAX} = \frac{Ra}{2}. \quad (2.62)$$

Il valore trovato coincide con la metà della *tensione a vuoto* del bipolo. Che si tratti di un massimo si evince dal fatto che derivando ulteriormente la (2.61) rispetto alla tensione, si ottiene un valore negativo che non dipende dalla tensione. Impiegando la relazione (2.57) scritta per la tensione corrispondente alla massima potenza erogata, fornisce la corrente relativa alla massima potenza

$$i_{MAX} = R\frac{a}{2R} - a = -\frac{a}{2} \quad (2.63)$$

che risulta

$$p_{eMAX} = -v_{MAX}i_{MAX} = -\frac{a}{2} \left(-\frac{Ra}{2} \right) = \frac{Ra^2}{4} = \frac{a^2}{4G}. \quad (2.64)$$

Collegando al bipolo generatore reale un carico resistivo R_C come mostrato in figura 2.27,

la potenza assorbita dal carico vale

$$p_a = vi = a \frac{R \times R_C}{R + R_C} \frac{a}{R + R_C} = Ra^2 \frac{R_C}{(R + R_C)^2}. \quad (2.65)$$

Nell'ultima espressione si è utilizzata la resistenza equivalente al parallelo dei resistori per il calcolo di v e la formula del partitore di corrente per il calcolo di i . L'andamento qualitativo della potenza erogata è, anche in questo caso, del tipo mostrato in figura 2.23. Pertanto la potenza ceduta al carico è massima quando la resistenza di carico soddisfa ancora la condizione (2.56).

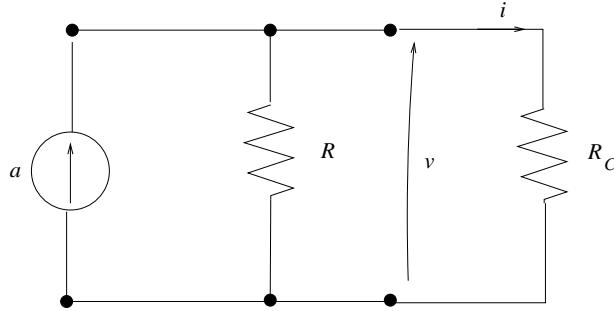


Figura 2.27: Carico resistivo collegato ai terminali di un generatore reale di corrente.

2.5.4.3 Condizioni di equivalenza tra generatori reali

Si considerino i due bipoli mostrati in figura 2.28.

Il primo è formato da un generatore indipendente ideale di corrente, a , con un resistore, R_a , in parallelo, il secondo da un generatore indipendente ideale di tensione, e , in serie con un resistore R_e . Si è visto che entrambi i bipoli hanno caratteristiche costituite da rette non passanti per l'origine degli assi coordinati. Ha senso, pertanto, domandarsi sotto quali condizioni le loro relazioni di definizione possano coincidere rendendo tali bipoli equivalenti tra loro. Adottando i versi di riferimento indicati in figura 2.28 per le variabili descrittive, le equazioni per i due bipoli sono date da:

$$v = e + R_e i \quad (2.66)$$

per il bipolo di tipo generatore reale di tensione e

$$i = -a + \frac{v}{R_a}. \quad (2.67)$$

Per poter confrontare l'ultima relazione scritta con la (2.66) la si può riscrivere su base corrente

$$v = R_a a + R_a i. \quad (2.68)$$

Questa relazione coincide con la (2.66), e quindi i due bipoli risultano equivalenti, se e solo se sono soddisfatte le seguenti condizioni

$$R_a = R_e = R \quad (2.69)$$

$$e = Ra, \quad (2.70)$$

in altri termini quando

- i due resistori hanno lo stesso valore di resistenza;
- la f.e.m. del generatore di tensione è pari al prodotto della resistenza di cui al punto precedente per la corrente impressa dal generatore di corrente;
- la corrente impressa dal generatore di corrente è pari al quoziente tra la f.e.m. del generatore di tensione e la resistenza di cui al primo punto.

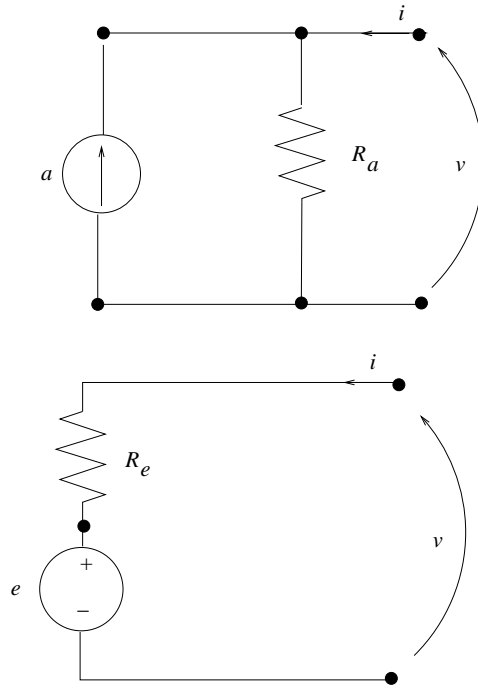


Figura 2.28: Generatori reali di corrente e di tensione

Si ponga attenzione al fatto che i risultati ottenuti valgono solo se i versi della f.e.m. e della corrente impressa dei generatori e quelli di riferimento sono mutuamente orientati come in figura 2.28. In caso di situazioni differenti, si dovranno introdurre le opportune modifiche ai segni delle grandezze coinvolte.

2.5.4.4 Resistore in parallelo con generatore indipendente ideale di tensione

Nel caso illustrato in figura 2.29, il valore della tensione comune v coincide con la f.e.m. del generatore di tensione, e , mentre la corrente totale, i , può assumere qualsiasi valore.

Infatti, il generatore ideale di tensione è attraversato da un valore qualsiasi di corrente i_g che, sommato alla corrente i_R che circola sul resistore è sempre in grado di soddisfare il vincolo imposto dalla LC

$$i = i_g + i_R. \quad (2.71)$$

Si dimostra così che il collegamento parallelo di un generatore indipendente ideale di tensione con un resistore, equivale, rispetto ai terminali esterni, al solo generatore di tensione. In pratica, quindi, il resistore collegato in parallelo al generatore di tensione può essere eliminato senza che ciò comporti alcuna variazione nelle variabili descrittive degli altri componenti della rete in cui esso si trovi inserito, fatta eccezione per la corrente descrittiva del generatore di tensione.

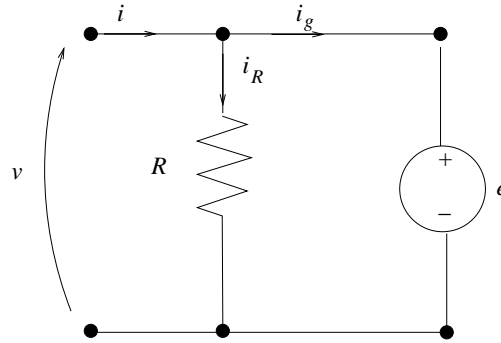


Figura 2.29: Resistore collegato in parallelo ad un generatore indipendente ideale di tensione.

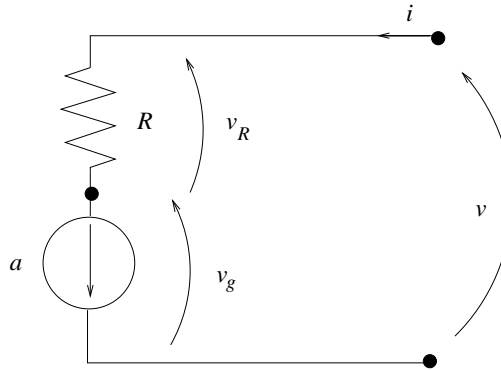


Figura 2.30: Resistore in serie con un generatore indipendente ideale di corrente.

2.5.4.5 Resistore in serie con generatore indipendente ideale di corrente

Questo caso, duale del precedente, è mostrato in figura 2.30.

Il valore comune della corrente, i , coincide con quella impressa dal generatore di corrente, a , mentre la tensione descrittiva complessiva, v , può assumere qualsiasi valore. Infatti, qualunque sia il valore della tensione v , il generatore ideale di corrente può assumere un valore di tensione v_g tale da soddisfare, sommandosi alla tensione ai capi del resistore, v_R , il vincolo imposto dalla LT

$$v = v_R + v_g. \quad (2.72)$$

E' immediato rilevare che il collegamento in serie di un generatore indipendente ideale di corrente con un resistore, equivale, rispetto ai terminali esterni, al solo generatore di corrente. In pratica, quindi, il resistore collegato in serie al generatore di corrente può essere eliminato senza che ciò comporti alcuna variazione nelle variabili descrittive degli altri componenti della rete in cui esso si trovi inserito, fatta eccezione per la tensione descrittiva del generatore di corrente.

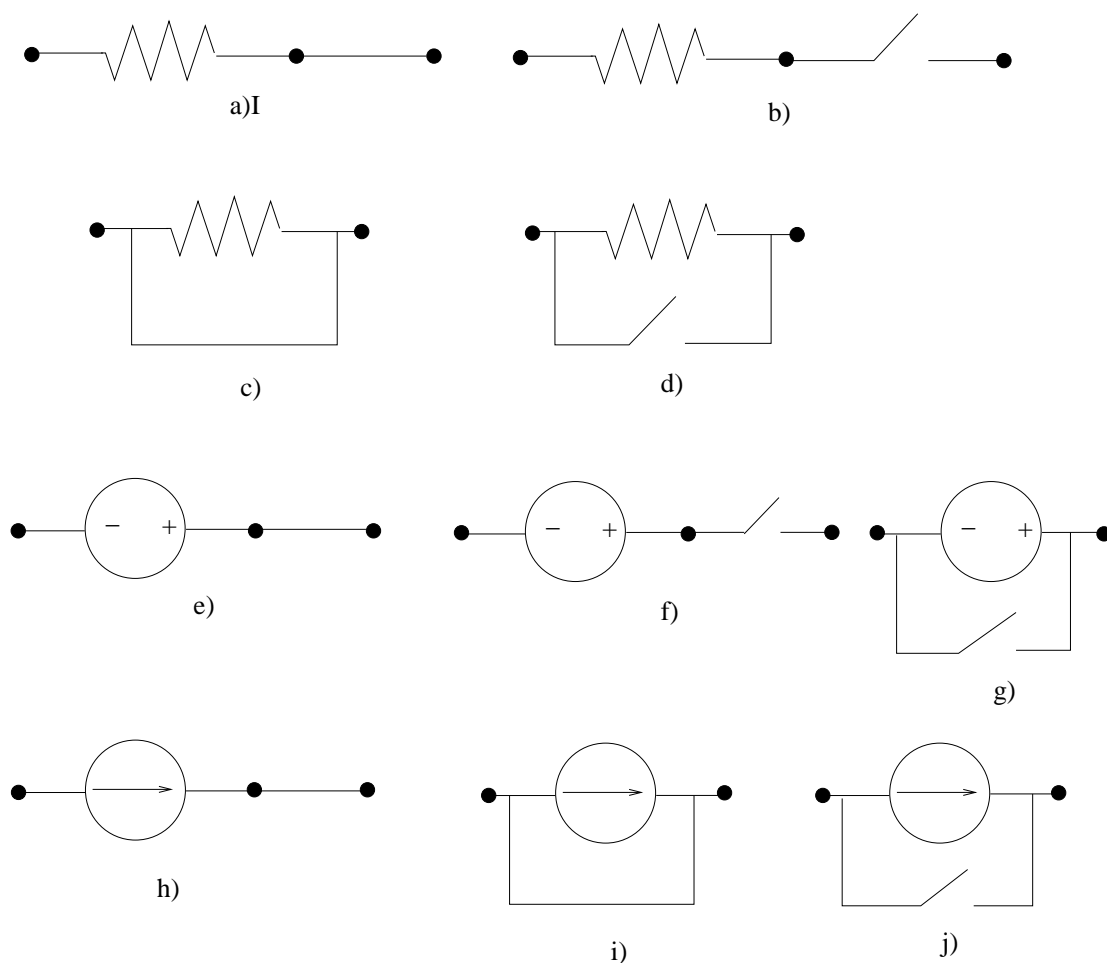


Figura 2.31: Collegamenti permessi con corti circuiti e con circuiti aperti.

2.5.5 Collegamenti con bipoli di corto circuito e di circuito aperto

Quando un bipolo di corto circuito ed/od un bipolo di circuito aperto si trovano collegati in serie o in parallelo con altri bipoli si può agevolmente ottenere il bipolo equivalente tenendo presente il fatto che un bipolo di corto circuito può essere visto come un resistore di resistenza nulla o come un generatore di tensione ideale disattivato, e che un bipolo di circuito aperto può essere visto come un resistore a conduttanza nulla o come un generatore di corrente disattivato. Ci si può ricondurre così a casi già esaminati. Una disamina di tutti i possibili casi di collegamento di bipoli di corto circuito e di circuito aperto con resistori e generatori è riportata in figura 2.31. In figura 2.32 sono invece mostrati i casi di collegamento non ammissibili.

Si noti che i bipoli di circuito aperto collegati in parallelo e bipoli di corto circuito collegati in serie non hanno alcuna influenza sulle variabili descrittive

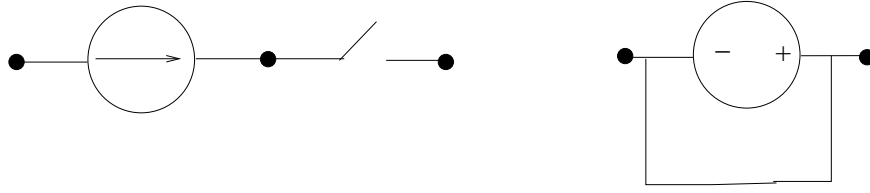


Figura 2.32: Collegamenti inammissibili con corti circuiti e con circuiti aperti.

del componente collegato, mentre giocano un ruolo dominante sui bipoli ad essi collegati se inseriti in serie ed in parallelo rispettivamente. A tal proposito, si possono introdurre i modelli di amperometri e voltmetri ideali, quali strumenti di misura della corrente e della tensione, come equivalenti, ai fini del loro impatto sulla rete, come dei bipoli di corto circuito i primi e di circuito aperto i secondi. Affinchè l'inserzione dello strumento di misura non alteri le variabili descrittive del componente a cui vengono collegati (e, quindi, in ultima analisi anche la grandezza da misurare) occorre che l'amperometro sia collegato in serie al terminale di cui si voglia misurare la corrente descrittiva, ed il voltmetro sia collegato in parallelo ai terminali tra cui si voglia misurare la tensione.

2.6 Teoremi di Millman

In questa sezione si estendono ai bipoli formati da generatori indipendenti ideali di tensione e di corrente collegati in vario modo con resistori ⁶ i concetti esposti precedentemente. Ossia si procederà alla ricerca di bipoli equivalenti ai collegamenti serie e parallelo di bipoli sul tipo del generatore reale di tensione e di corrente.

2.6.1 Primo teorema di Millman

Lo scopo è quello di determinare un bipolo equivalente a quello costituito dal collegamento in parallelo di bipoli sul modello del generatore reale di tensione (ossia, in termini più generali, generatore indipendente ideale di tensione con resistenza in serie). Si consideri dunque il collegamento mostrato in figura 2.33 a.

La relazione di definizione del bipolo risultante da questo collegamento si può ricavare agevolmente facendo uso delle relazioni (2.69) e (2.70) tra generatori reali di tensione e di corrente equivalenti. Quindi si possono sostituire i generatori di tensione e_k con generatori equivalenti di corrente e_k/R_K collegati in parallelo ai resistori R_K come mostrato in figura 2.34 b.

Pertanto, gli N resistori in parallelo si possono sostituire con il loro equivalente

$$R_{eq} = \frac{1}{\sum_{k=1}^N G_k}, \quad (2.73)$$

⁶In pratica i casi di interesse sono costituiti da quei collegamenti che in senso generalizzato, e quindi un po' improprio, potremmo denominare bipolo "generatore reale di tensione" e "generatore reale di corrente".

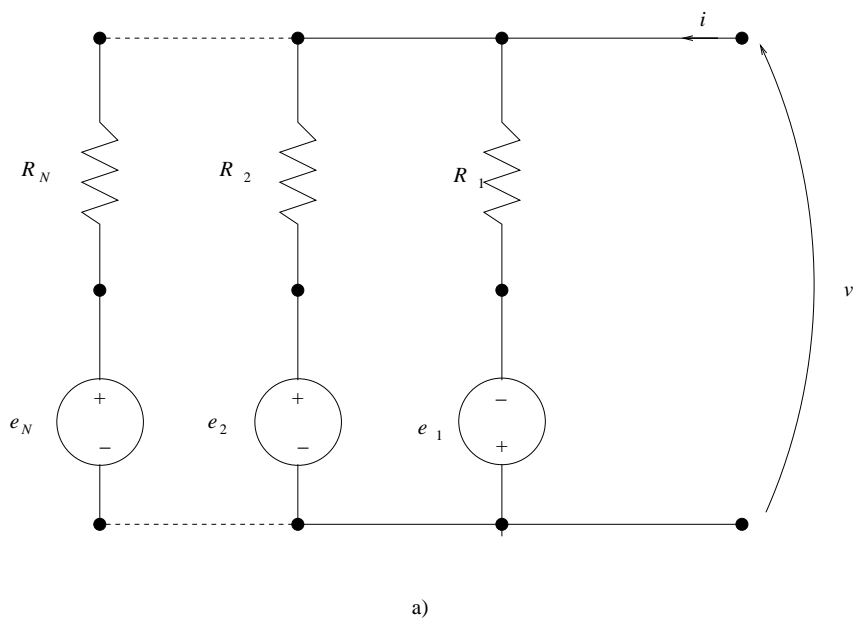


Figura 2.33: Collegamento in parallelo di bipoli sul modello del generatore reale di tensione (situazione di partenza).

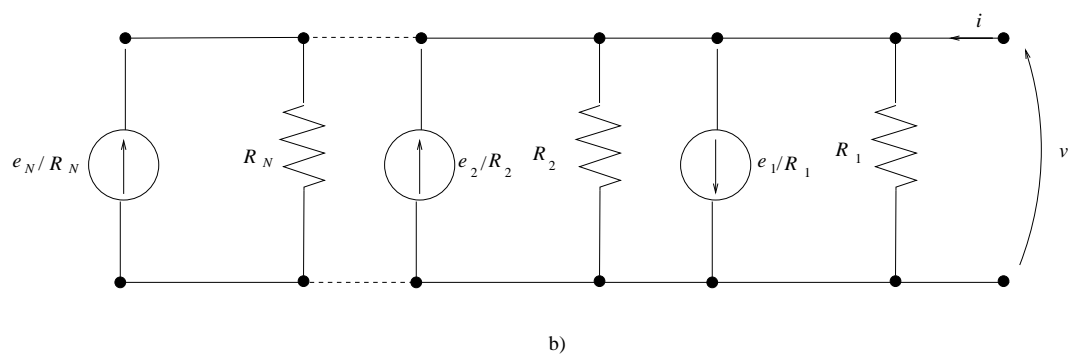


Figura 2.34: Collegamento equivalente a quello della figura 2.33 dopo la trasformazione dei generatori reali di tensione in altrettanti generatori reali di corrente.

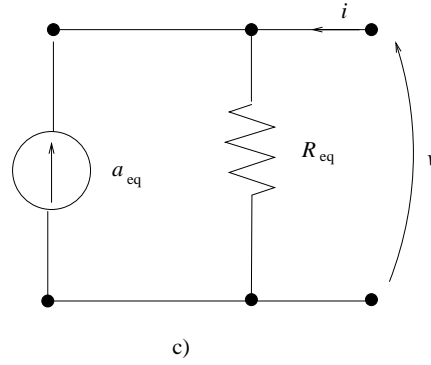


Figura 2.35: Collegamento equivalente a quello della figura 2.34 dopo la introduzione di un generatore e di un resistore equivalenti.

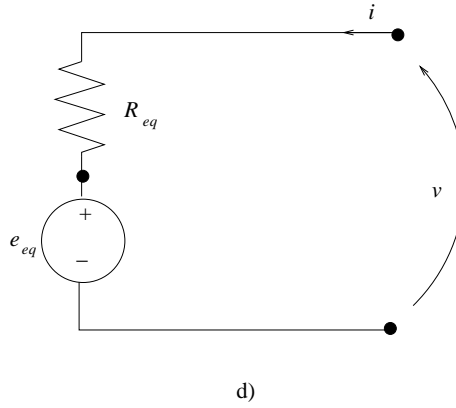


Figura 2.36: Collegamento equivalente a quello della figura 2.35 dopo la trasformazione del generatore reale di corrente in un genertore reale di tensione equivalente.

mentre gli N generatori indipendenti ideali di corrente, pure in parallelo, possono essere anch'essi sostituiti da un unico generatore equivalente indipendente ideale di corrente (figura 2.35 c)

$$a_{eq} = \sum_{k=1}^N G_k e_k. \quad (2.74)$$

Infine si può ritrasformare il generatore di corrente a_{eq} nel suo equivalente di tensione (figura 2.36 d)

$$e_{eq} = \frac{\sum_{k=1}^N G_k e_k}{\sum_{k=1}^N G_k} \quad (2.75)$$

in serie con la R_{eq} data dalla (2.73). Si perviene così al *primo teorema di Mil-*

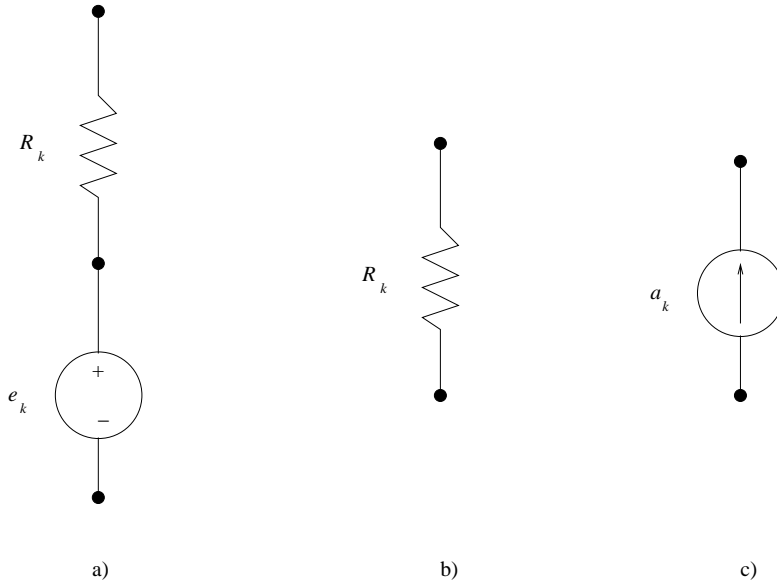


Figura 2.37: Bipoli che possono essere collegati in parallelo ammettendo un equivalente secondo il primo teorema di Millman

mann secondo cui il bipolo dal quale si è partiti (figura a della sequenza) è equivalente ad un bipolo (figura d) ottenuto collegando in serie

- un generatore indipendente ideale di tensione avente f.e.m. pari alla media delle f.e.m. dei singoli generatori indipendenti ideali di tensione pesata sulle conduttanze dei corrispondenti resistori in serie (equazione (2.75));
- un resistore in serie con resistenza pari alla resistenza equivalente a quella degli N resistori in parallelo (vedi l'equazione (2.73)).

Questo risultato si può facilmente estendere anche al caso in cui il collegamento in parallelo sia realizzato con bipoli dei tipi indicati in figura 2.37.

Infatti, a seguito della trasformazione dei generatori reali di tensione in generatori reali di corrente equivalenti, il collegamento parallelo assume l'aspetto di figura 2.35 anche se, in questo caso, il numero dei generatori di corrente sarà differente in generale, da quello dei resistori. Si indichino con A , B e C gli insiemi dei valori dell'indice per i quali il k -esimo bipolo risulta essere del tipo indicato con a), b) e c), rispettivamente, in figura 2.37, si possono ricavare le seguenti espressioni per la f.e.m. e la resistenza serie del bipolo equivalente:

$$e_{eq} = \frac{\sum_{k \in A} G_k e_k + \sum_{k \in B} a_k}{\sum_{k \in (A \cup B)} G_k} \quad (2.76)$$

e

$$R_{eq} = \frac{1}{\sum_{k \in (A \cup B)} G_k}. \quad (2.77)$$

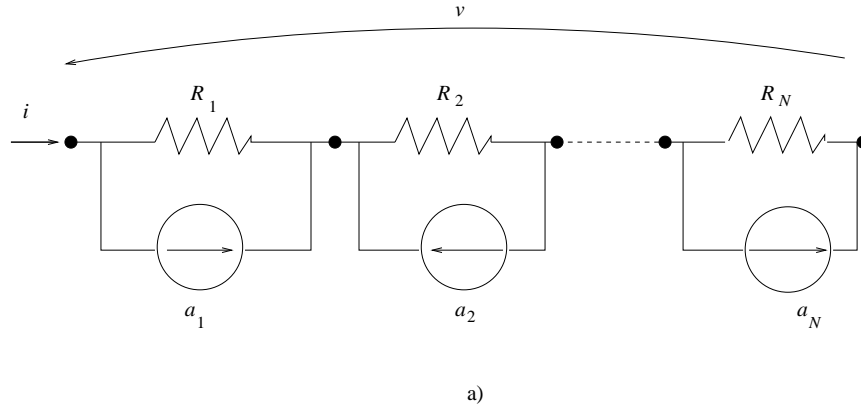


Figura 2.38: Collegamento serie di bipoli sul modello del generatore reale di corrente (situazione di partenza)

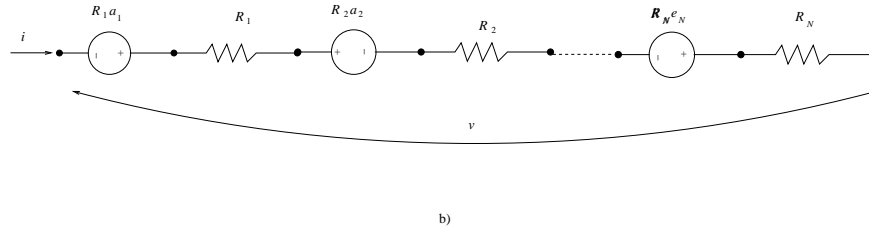


Figura 2.39: Trasformazione dei bipoli del tipo generatore reale di corrente in bipoli del tipo generatore reale di tensione

2.6.2 Secondo teorema di Milmann

Applicando il principio di dualità che già si è avuto occasione di incontrare più volte, si considera il collegamento di un generico numero N di bipoli mostrato in figura 2.38.

Procedendo con la stessa logica che ha guidato il ragionamento nel caso precedente, si può pervenire dapprima al collegamento mostrato in figura 2.39. Gli N resistori possono poi essere sostituiti con il loro equivalente serie

$$R_{eq} = \sum_{k=1}^N R_k, \quad (2.78)$$

e gli N generatori indipendenti ideali di tensione si sommano algebricamente per dare un solo generatore indipendente ideale di tensione equivalente (vedi figura 2.40)

$$e_{eq} = \sum_{k=1}^N R_k a_k. \quad (2.79)$$

Infine (figura 2.41), si può trasformare il generatore reale di tensione nel suo

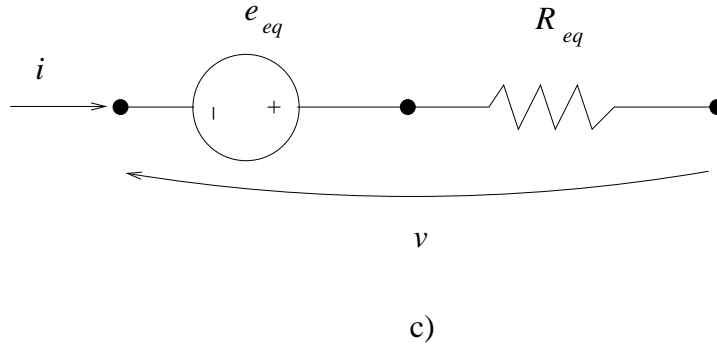


Figura 2.40: Bipolo equivalente ottenuto dal collegamento rappresentato in figura 2.39

equivalente di corrente

$$a_{eq} = \frac{\sum_{k=1}^N R_k a_k}{\sum_{k=1}^N R_k}. \quad (2.80)$$

Questo risultato passa sotto il nome di *secondo teorema di Millman* grazie al quale il bipolo mostrato in figura 2.38 equivale ad un bipolo ottenuto collegando in parallelo

- Un generatore indipendente ideale di corrente di valore pari alla media pesata dei valori delle correnti dei generatori di corrente, essendo i pesi dati dalle resistenze dei rispettivi resistori in parallelo (formula (2.80));
- un resistore collegato in parallelo e di resistenza pari a quella equivalente serie degli N resistori (vedi (2.78)).

Queste formule si possono generalizzare al caso in cui siano collegati in serie bipoli del tipo indicato in figura 2.42.

Con le stesse convenzioni per i simboli adottate in precedenza, la corrente del generatore e la resistenza equivalenti valgono

$$a_{eq} = \frac{\sum_{k \in A} R_k a_k + \sum_{k \in B} e_k}{\sum_{k \in (A \cup B)} R_k} \quad (2.81)$$

e

$$R_{eq} = \sum_{k \in (A \cup B)} R_k. \quad (2.82)$$

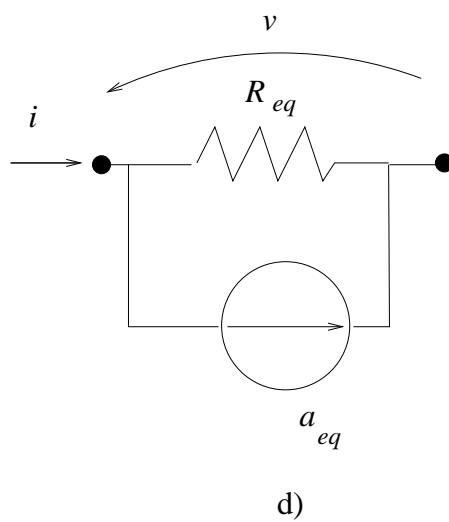


Figura 2.41: Bipolo equivalente alla serie mostrata in figura 2.38.

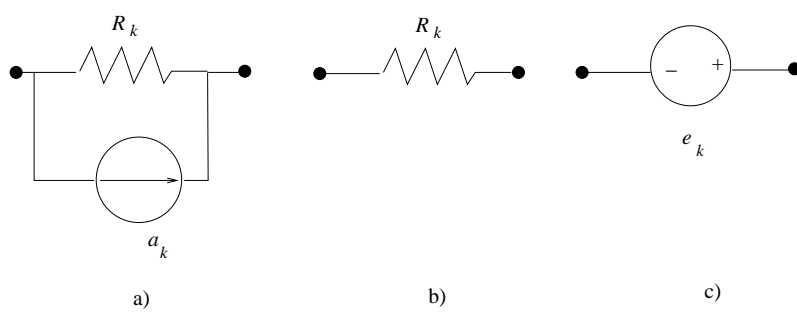


Figura 2.42: Bipoli che collegati in serie ammettono un bipolo equivalente per il secondo teorema di Millman

2.7 Multipoli senza memoria

Per un $(N+1)$ -polo, ovvero per un N -porto, privo di memoria le N tensioni ed N correnti descrittive sono legate tra loro da relazioni del tipo

$$\begin{aligned} f_1(\vec{v}, \vec{i}, t) &= 0 \\ f_2(\vec{v}, \vec{i}, t) &= 0 \\ &\vdots \\ f_N(\vec{v}, \vec{i}, t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.83)$$

in cui f_1, f_2, \dots, f_N rappresentano funzioni generiche, mentre \vec{v} e \vec{i} sono vettori N -dimensionali delle tensioni e correnti di porta descrittive e precisamente

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

e

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix}. \quad (2.85)$$

Le equazioni (2.83) sono un'evidente generalizzazione della (2.7).

2.7.1 Multipoli lineari tempo-invarianti passivi

Un multipolo passivo lineare tempo-invariante è definito da N relazioni lineari omogenee tra le sue N tensioni ed N correnti descrittive. Tali relazioni potranno essere scritte nella forma generale

$$\begin{aligned} p_{11}v_1 + \dots + p_{1N}v_N + q_{11}i_1 + \dots + q_{1N}i_N &= 0 \\ &\vdots \\ p_{N1}v_1 + \dots + p_{NN}v_N + q_{N1}i_1 + \dots + q_{NN}i_N &= 0 \end{aligned} \quad (2.86)$$

che, in notazione matriciale si possono riscrivere nella forma più compatta

$$\mathbf{P}\vec{v} + \mathbf{Q}\vec{i} = \mathbf{0}, \quad (2.87)$$

dove si sono introdotte le matrici

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & \dots & p_{NN} \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

e

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{N1} & \cdots & q_{NN} \end{bmatrix}, \quad (2.89)$$

mentre \vec{v} e \vec{i} sono i vettori definiti dalle (2.84) e (2.85) rispettivamente e $\mathbf{0}$ è il vettore nullo N -dimensionale.

2.7.1.1 Matrice di resistenza a vuoto

Le espressioni (2.86) e/o (2.87) possono essere esplicitate in funzione delle correnti o delle tensioni descrittive. In particolare, se la matrice \mathbf{P} è non singolare (e, pertanto, invertibile), pre-moltiplicando⁷ la (2.87) per \mathbf{P}^{-1} , si ottiene

$$\vec{v} = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\vec{i} = \mathbf{R}\vec{i} \quad (2.90)$$

dove la matrice

$$\mathbf{R} = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{N1} & \cdots & r_{NN} \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

prende il nome di *matrice di resistenza a vuoto*. Il significato di questa denominazione è presto spiegato. Se si esprime la (2.90) in forma estesa

$$\begin{aligned} v_1 &= r_{11}i_1 + \cdots + r_{1N}i_N \\ &\vdots \\ v_N &= r_{N1}i_1 + \cdots + r_{NN}i_N = 0 \end{aligned} \quad (2.92)$$

i coefficienti delle combinazioni lineari della (2.92) hanno dimensioni di resistenze e sono detti *coefficienti di resistenza* del multipolo o del multiporto. Il generico coefficiente r_{jk} rappresenta il rapporto tra la tensione descrittiva j -esima, v_j , e la corrente descrittiva k -esima, i_k , quando tutte le altre correnti descrittive sono pari a zero. In simboli

$$r_{jk} = \left. \frac{v_j}{i_k} \right|_{i_l=0} \quad \forall l \neq k. \quad (2.93)$$

La definizione (2.93) ci consente di stabilire che r_{jk} può essere calcolato o misurato come illustrato in figura 2.43:

1. si collega un generatore di corrente di valore arbitrario alla porta k -esima (o tra il k -esimo terminale ed il terminale comune) per imprimere una corrente i_k ;
2. si lasciano a vuoto (non collegati) tutti gli altri terminali o porte così da annullare tutte le altre correnti descrittive;

⁷O, come anche si dice, *moltiplicando a sinistra*.

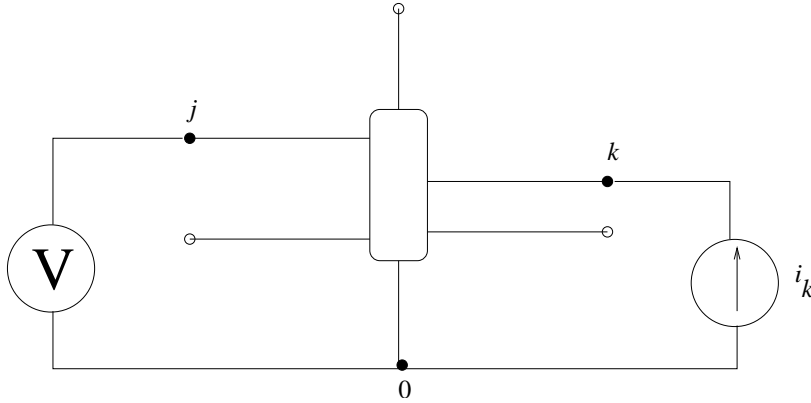


Figura 2.43: Esempio di misura dei coefficienti di resistenza a vuoto.

3. si misura con un voltmetro (che idealmente si comporta come un bipolo di circuito aperto per cui non permette la circolazione di corrente tra i terminali ai quali viene collegato), o si calcola, la tensione v_j del j -esimo terminale o porta;
4. si fa il rapporto tra la tensione calcolata (o misurata) e la corrente impressa.

I coefficienti sulla diagonale principale, r_{kk} , esprimendo il rapporto tra la tensione e la corrente descrittive di uno stesso terminale o porta, sono detti *resistenze proprie*, mentre tutti gli altri coefficienti, del tipo r_{jk} , con $j \neq k$, che mettono in relazione tensioni e correnti descrittive relative a terminali o porte diversi, prendono il nome di *resistenze mutue*⁸.

2.7.1.2 Matrice di conduttanza di corto circuito

In modo analogo, se la (2.87) può essere esplicitata rispetto alle tensioni descrittive, si può dare la rappresentazione

$$\begin{aligned} i_1 &= g_{11}v_1 + \cdots + g_{1N}v_N \\ &\vdots \\ i_N &= g_{N1}v_1 + \cdots + g_{NN}v_N = 0 \end{aligned} \quad (2.94)$$

che in forma matriciale può scriversi

$$\vec{i} = \mathbf{G}\vec{v} \quad (2.95)$$

in cui

$$\mathbf{G} = -\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & \cdots & g_{NN} \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

⁸Pertanto r_{jk} rappresenta la resistenza mutua tra la j -esima e la k -esima porta.

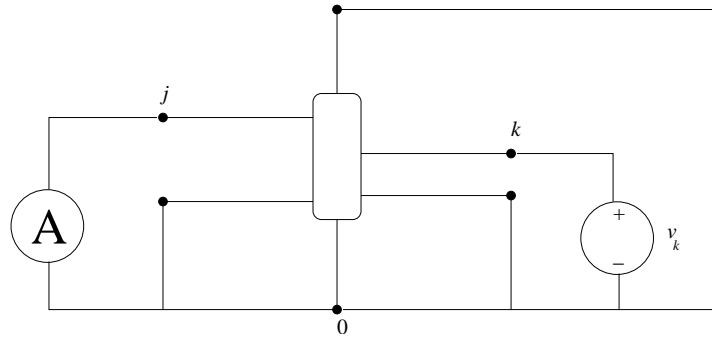


Figura 2.44: Esempio di misura dei coefficienti di conduttanza di corto circuito

è la *matrice di conduttanza di corto circuito*. Dalle (2.91) e (2.96) si evince che

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}^{-1} \quad (2.97)$$

e che tale rappresentazione richiede che \mathbf{Q} sia invertibile. Dalla (2.97) si ricava che dimensionalmente i coefficienti g_{jk} sono conduttanze e, pertanto, prendono il nome di *coefficienti di conduttanza*. Si distinguono le *conduttanze proprie* per $j = k$ dalle *conduttanze mutue* per $j \neq k$. Il coefficiente generico g_{jk} rappresenta, in particolare, il rapporto tra la corrente j -esima, i_j , descrittiva del j -esimo terminale del $(N+1)$ -polo o della j -esima porta del N -porto, e la tensione v_k descrittiva del k -esimo terminale del $(N+1)$ -polo o della k -esima porta del N -porto, quando tutte le altre tensioni sono pari a zero. In simboli

$$g_{jk} = \left. \frac{i_j}{v_k} \right|_{v_l=0} \quad \forall l \neq k. \quad (2.98)$$

Si fa osservare che g_{jk} può essere calcolato o misurato nel modo illustrato in figura 2.44, ossia:

1. si collega alla porta k -esima (o tra il k -esimo terminale ed il terminale comune) un generatore di tensione di valore arbitrario v_k ;
2. si fissano a zero i valori di tutte le altre tensioni corto-circuitando tutti gli altri terminali o porte;
3. si misura con un amperometro (che si comporta idealmente come un bipolo di corto-circuito), o si calcola, la corrente i_j del j -esimo terminale o porta;
4. si esegue il rapporto tra la corrente misurata (o calcolata) e la tensione imposta.

2.7.1.3 Rappresentazioni ibride

Le (2.86) possono, in linea di principio, essere espresse rispetto ad un qualunque insieme di N variabili descrittive costituito da una combinazione qualsiasi di tensioni e correnti descrittive. In ciò consistono le cosiddette *rappresentazioni ibride* dei multipoli. Per un N -porto il numero delle possibili rappresentazioni

ibride è $2^N - 2$ dovendosi escludere le due combinazioni già trattate in cui le variabili indipendenti sono tutte le N correnti o tutte le N tensioni di porta. Ad esempio, per un tripolo (o un biporto) si danno solo 2 rappresentazioni ibride. La prima è costituita dalle due equazioni

$$\begin{aligned} v_1 &= h_{11}i_1 + h_{12}v_2 \\ i_2 &= h_{21}i_1 + h_{22}v_2 \end{aligned} \quad (2.99)$$

da cui si può notare che i coefficienti della rappresentazione ibrida non sono dimensionalmente omogenei. Infatti la loro definizione

$$\begin{aligned} h_{11} &= \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{v_2=0} & h_{12} &= \left. \frac{v_1}{v_2} \right|_{i_1=0} \\ h_{21} &= \left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_2=0} & h_{22} &= \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{i_1=0} \end{aligned} \quad (2.100)$$

e quindi mentre h_{11} ha le dimensioni di una resistenza e h_{22} quelle di una conduttanza, h_{12} e h_{21} sono adimensionali. Dalle (2.100) discende la modalità di calcolo o di misura di tali parametri nel caso di un *biporto* (detto anche *doppio bipolo*). In forma matriciale la (2.99) si scrive

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{H}] \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}. \quad (2.101)$$

L'altra possibilità di rappresentazione ibrida per un doppio bipolo

$$\begin{aligned} i_1 &= h'_{11}v_1 + h'_{12}i_2 \\ v_2 &= h'_{21}v_1 + h'_{22}i_2 \end{aligned} \quad (2.102)$$

dove i coefficienti risultano definiti dalle seguenti espressioni

$$\begin{aligned} h'_{11} &= \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{v_2=0} & h'_{12} &= \left. \frac{i_1}{i_2} \right|_{v_1=0} \\ h'_{21} &= \left. \frac{v_2}{v_1} \right|_{i_2=0} & h'_{22} &= \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{v_1=0}. \end{aligned} \quad (2.103)$$

In forma matriciale si potrà scrivere

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{H}'] \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

con ormai ovvio significato dei simboli.

2.7.1.4 Matrici di trasmissione

Esauriscono tutte le modalità possibili di rappresentazione per i doppi bipoli quelle che fanno uso delle matrici di trasmissione. In queste rappresentazioni, si assumono per variabili dipendenti le grandezze descrittive di una delle due porte che si esprimono in funzione di quelle dell'altra porta. Usualmente si conviene

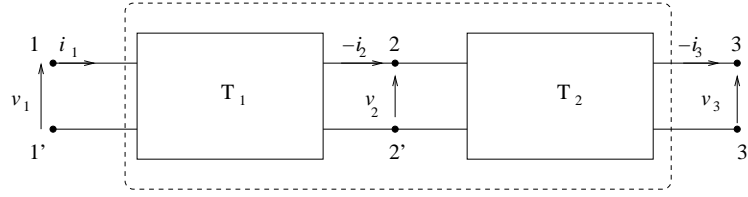


Figura 2.45: Coppia di doppi bipoli collegati in cascata.

assegnare alla porta di ingresso l'indirizzo 1, mentre il 2 alla porta d'uscita. Si danno le seguenti due rappresentazioni:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{T}] \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

in cui le variabili indipendenti sono quelle della porta d'uscita (alla porta d'uscita si conviene indicare il verso della corrente come opposto a quello convenzionale cioè "in uscita" dal doppio bipolo) e la rappresentazione è detta di *trasmissione inversa*, oppure la rappresentazione

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ -i_1 \end{bmatrix} = [\mathbf{t}] \begin{bmatrix} v_1 \\ -i_1 \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

denominata di *trasmissione diretta* secondo la quale il ruolo delle porte è scambiato rispetto alla consuetudine ed è per questo raramente utilizzata. Il pregio delle matrici di trasmissione diretta, $[\mathbf{t}]$, ed inversa, $[\mathbf{T}]$, risiede nel fatto che consentono di determinare agevolmente le relazioni ingresso-uscita di doppi bipoli formati dal collegamento tra più doppi bipoli tramite la porta d'uscita dell'uno e quella di ingresso dell'altro. Questa modalità di collegamento tra doppi bipoli è detta *collegamento in cascata*. Esso, per soli due doppi bipoli, è rappresentato in figura 2.45.

Per i due doppi bipoli collegati in cascata si possono scrivere le relazioni della rappresentazione di trasmissione inversa

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \\ v_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \\ v_3 \\ -i_3 \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

e, notando come la corrente d'uscita del primo doppio bipolo, $-i_2$, coincide con quella d'ingresso, i_2 , del secondo, si può sostituire la seconda delle (2.107) nella prima ottenendo

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = [\mathbf{T}_1] [\mathbf{T}_2] \begin{bmatrix} v_3 \\ -i_3 \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

che pone in relazione le grandezze alla porta 3 con quelle alla porta 1. La (2.108) risulta pertanto la rappresentazione di trasmissione inversa del doppio

bipolo risultante (segnato in tratteggio nella figura 2.45) ottenuta semplicemente moltiplicando righe per colonne nell'ordine le matrici di trasmissione inversa dei doppi bipoli in cascata. Questo risultato si estende evidentemente ad un qualsiasi numero di doppi-bipoli collegati in cascata.

Gli elementi delle matrici di trasmissione sono coefficienti o parametri di trasmissione inversi ricavabili a partire dalle relazioni (2.105) e (2.106):

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{v_1}{v_2} \right|_{i_2=0} & B &= - \left. \frac{v_1}{i_2} \right|_{v_2=0} \\ C &= \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{i_2=0} & D &= - \left. \frac{i_1}{i_2} \right|_{v_2=0} . \end{aligned} \quad (2.109)$$

Tali parametri assumono anche una denominazione particolare:

A=rapporto tra le tensioni a vuoto (adimensionale)

B=resistenza di trasferimento negativa di corto circuito

C=conduttanza di trasferimento a vuoto

D=rapporto negativo tra correnti di corto circuito (adimensionale)

Inoltre:

$$\begin{aligned} a &= \left. \frac{v_2}{v_1} \right|_{i_1=0} & b &= - \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{v_1=0} \\ c &= \left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{i_1=0} & d &= - \left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_1=0} . \end{aligned} \quad (2.110)$$

con le specifiche denominazioni di

a=guadagno di tensione a vuoto (adimensionale)

b=resistenza di trasferimento negativa di corto circuito

c=conduttanza di trasferimento a vuoto

d=guadagno negativo di corrente di corto circuito (adimensionale)

2.7.1.5 Note conclusive

Le rappresentazioni ammissibili dei doppi bipoli possono essere poste in relazione tra di loro. In particolare, se sono ammesse le rappresentazioni con le matrici $[\mathbf{R}]$ e $[\mathbf{G}]$ allora risulta che $[\mathbf{G}] = [\mathbf{R}]^{-1}$. Analogamente, per le matrici ibride sussiste la relazione $[\mathbf{H}'] = [\mathbf{H}]^{-1}$ se entrambe le rappresentazioni sono ammissibili. Anche tra le matrici di trasmissione sussiste la relazione $[\mathbf{t}] = [\mathbf{T}]^{-1}$. Più complesso risulta, di norma, il passaggio tra rappresentazioni di tipo diverso. Le formule di conversione tra le diverse rappresentazioni dei doppi bipoli sono comunque reperibili in tutti i testi di teoria dei circuiti.

2.7.2 Generatori pilotati

Tra i componenti a due porte di notevole interesse circuitale sono da annoverare le quattro tipologie di generatori pilotati le cui relazioni di definizione sono di seguito riportate

- generatore di *tensione* pilotato in *tensione*

$$\begin{aligned} i_1 &= 0, & \forall v_1 \\ v_2 &= \alpha v_1 & \forall i_2 \end{aligned} \quad (2.111)$$

- generatore di *tensione* pilotato in *corrente*

$$\begin{aligned} v_1 &= 0, & \forall i_1 \\ v_2 &= r i_1 & \forall i_2 \end{aligned} \quad (2.112)$$

- generatore di *corrente* pilotato in *tensione*

$$\begin{aligned} i_1 &= 0, & \forall v_1 \\ i_2 &= g v_1 & \forall v_2 \end{aligned} \quad (2.113)$$

- generatore di *corrente* pilotato in *corrente*

$$\begin{aligned} v_1 &= 0, & \forall i_1 \\ i_2 &= \beta i_1 & \forall v_2 \end{aligned} \quad (2.114)$$

I simboli grafici dei generatori pilotati sono riportati in figura 2.46.

I parametri α , r , g , e β sono detti di *trasferimento*, α e β sono adimensionali, r ha le dimensioni di una resistenza e g quelle di una conduttanza. Si fa osservare che quando inseriti in una rete, la porta 1 di questi componenti non viene raffigurata ma resta semplicemente sottintesa, la variabile pilota essendo tuttavia sempre evidenziata, completa del verso. Dal punto di vista del tipo di rappresentazione dei generatori pilotati quali doppi-bipoli, si fa osservare inoltre che le (2.112) costituiscono un esempio di rappresentazione mediante la matrice di resistenza a vuoto, le (2.113) un esempio di rappresentazione mediante la matrice di conduttanza di corto circuito, mentre le (2.111) e (2.114) sono esempi di rappresentazioni ibride.

Per i generatori pilotati, una delle due variabili descrittive associate alla porta 1 (rappresentativa della grandezza pilotante) può assumere valori qualsiasi essendo l'altra identicamente nulla. Pertanto, la porta 1 è schematizzabile, a seconda dei casi, con un voltmetro (o con circuito aperto) o con un ampermetro (o con corto circuito). Alla porta 2, una delle due variabili descrittive non è vincolata mentre l'altra dipende dal valore della variabile non nulla relativa alla porta 1.

Per i generatori pilotati la potenza è assorbita unicamente alla porta 2 dal momento che all'altra porta o la tensione o la corrente sono identicamente nulli. Per questa ragione la porta 1 non viene mai esplicitamente raffigurata non

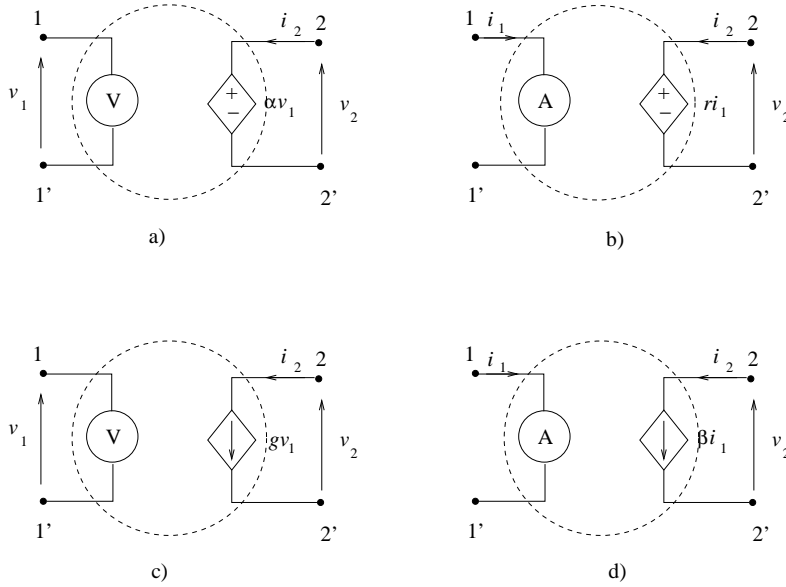


Figura 2.46: Simboli grafici del a) generatore di tensione pilotato in tensione, b) generatore di tensione pilotato in corrente, c) generatore di corrente pilotato in tensione e d) generatore di corrente pilotato in corrente.

essendo sede di trasferimenti energetici per il componente. Con i versi indicati in figura 2.46 (orientati nel rispetto della c.d.u.) si può scrivere per la potenza assorbita

$$p_a = v_2 i_2. \quad (2.115)$$

Potendo assumere, nei diversi casi, o v_2 (per i generatori pilotati in tensione) o i_2 (per i generatori pilotati in corrente) valori qualsiasi, la potenza assorbita può assumere qualunque valore positivo negativo o nullo. Pertanto, secondo la definizione data nel capitolo precedente, i generatori pilotati sono componenti attivi. A differenza dei generatori indipendenti, per i quali il valore della grandezza generata è una funzione nota del tempo, per i generatori pilotati l'andamento della grandezza generata dipende linearmente (da cui il termine pilotato) da quello della grandezza pilota. Per completezza si può ribadire che, in base alle (2.111)-(2.114), i generatori pilotati sono componenti lineari, tempo-invarianti e privi di memoria.

2.7.3 Il trasformatore ideale

Il trasformatore ideale, il cui simbolo grafico è rappresentato in figura 2.47,

è un componente a 2 porte (doppio bipolo) senza memoria, lineare, tempo-invariante definito dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} v_1 &= n v_2 \\ i_1 &= -\frac{1}{n} i_2 \end{aligned} \quad (2.116)$$

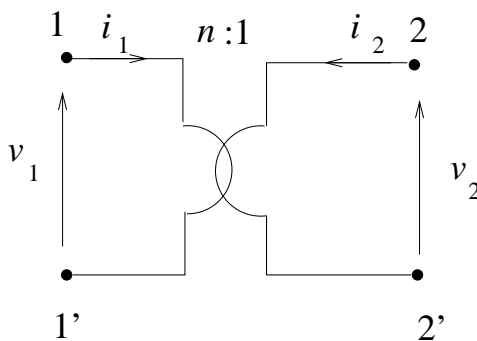


Figura 2.47: Simbolo grafico del trasformatore ideale.

che rappresentano un esempio di rappresentazione mediante la matrice di trasmissione inversa. Il parametro adimensionale n è detto *rapporto di trasformazione*.

Il trasformatore ideale assorbe una potenza che vale

$$p_a = v_1 i_1 + v_2 i_2 = n v_2 \left(-\frac{i_2}{n} \right) + v_2 i_2 = 0, \quad \forall (i_2, v_2). \quad (2.117)$$

L'espressione precedente, identicamente nulla per tutti i possibili valori di tensioni e correnti alle porte, ci consente di qualificare trasformatore ideale come componente passivo. La (2.117) indica anche che la potenza è effettivamente assorbita ad una delle due porte, mentre è interamente erogata in pari quantità dall'altra porta. A distinzione di questo fatto, una delle due porte, solitamente quella che assorbe potenza è detta *porta primaria* (o più semplicemente "*primario*"), l'altra *secondaria* (o "*secondario*"). Per convenzione, si definisce il rapporto di trasformazione, n , come il rapporto tra la tensione del primario e quella del secondario. Esso si considera di regola positivo (può tuttavia cambiare di segno se si inverte il riferimento di una delle variabili descrittive di una porta lasciando fissi i versi delle variabili all'altra porta). Quando $n > 1$ il trasformatore, con riferimento alle tensioni primaria e secondaria è detto *abbassatore*, dal momento che $v_1 > v_2$; *elevatore* nel caso contrario in cui $n < 1$.

2.7.3.1 Collegamento di bipoli alle porte del trasformatore ideale

Diversamente dal caso dei generatori pilotati, per i quali il collegamento di un bipolo ad una delle porte non influenza le grandezze dell'altra, nel caso del trasformatore ideale, il collegamento di un bipolo ad una delle due porte si ripercuote anche sulle variabili descrittive dell'altra porta. Può essere interessante esaminare questo punto ricavando, in particolare, le cosiddette proprietà di riporto di bipoli tra le due porte del trasformatore ideale. Risulta evidente dalla considerazione delle relazioni (2.116) che generatori indipendenti di tensione e di corrente possono essere trasferiti da una porta all'altra moltiplicando o dividendo opportunamente per il fattore di trasformazione le f.e.m. e le correnti impresse. Più interessante appare il caso che coinvolge i resistori. Collegando al secondario del trasformatore ideale un resistore come in figura

2.48 si ottiene un bipolo di cui intendiamo ricercare la relazione fra le variabili descrittive. Rispettando i versi di riferimento fissati in figura 2.48, per il resistore

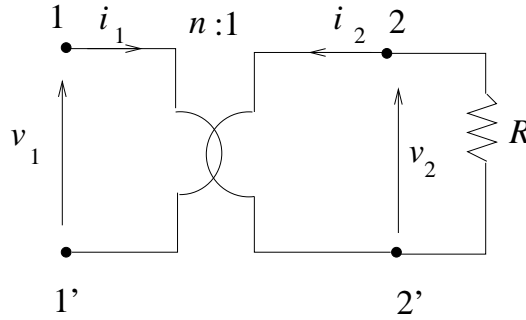


Figura 2.48: Resistore collegato al secondario di un trasformatore ideale.

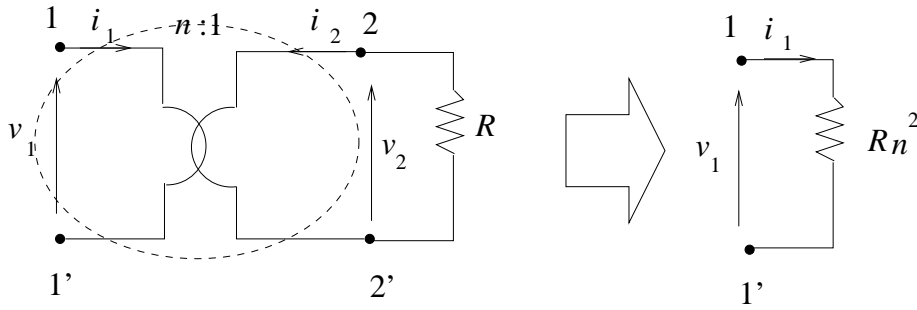


Figura 2.49: Resistore collegato al secondario e riportato al primario del trasformatore ideale.

al secondario deve valere

$$v_2 = -Ri_2. \quad (2.118)$$

Impiegando le (2.116), si può riferire il secondario al primario, ottenendo

$$v_1 \frac{1}{n} = -R(-ni_1) \Rightarrow v_1 = n^2 Ri_1. \quad (2.119)$$

La (2.119) mostra che un trasformatore ideale, con il secondario collegato ad una resistenza R , forma un bipolo che equivale ad un resistore di valore pari ad R moltiplicato per il quadrato del rapporto di trasformazione. Naturalmente, collegando la resistenza al primario si ottiene pure un bipolo equivalente ad un resistore di valore però pari ad R diviso per il quadrato del rapporto di trasformazione. In particolare, un bipolo di corto circuito ($R = 0$) ed un bipolo di circuito aperto ($G = 0$) si possono spostare indifferentemente ai due lati del trasformatore ideale. Si osservi, in proposito la figura 2.49.

2.7.4 Giratore ideale

Il giratore ideale è un doppio bipolo lineare tempo-invariante privo di memoria caratterizzato dalle relazioni di definizione:

$$\begin{aligned} v_1 &= r_g i_2 \\ v_2 &= -r_g i_1 \end{aligned} \quad (2.120)$$

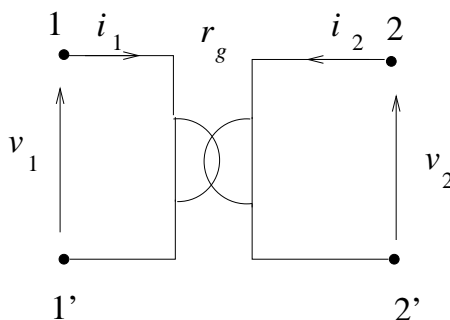


Figura 2.50: Simbolo grafico del giratore ideale.

dove r_g è detto *rapporto di girazione* ed ha le dimensioni di una resistanza. La (2.120) è un esempio di rappresentazione con la matrice di resistenza a vuoto. Anche la porta 1 del giratore può essere denominata primario e l'altra secondario. Il simbolo grafico del giratore ideale è riportato in figura 2.50.

Come per il trasformatore ideale, anche per il giratore si verifica identicamente l'annullamento della potenza complessivamente assorbita

$$p_a = v_1 i_1 + v_2 i_2 = r_g i_2 i_1 + (-r_g i_1) i_2 = 0, \quad \forall (i_1, i_2). \quad (2.121)$$

Si tratta quindi di un componente passivo che trasferisce potenza da una porta all'altra.

È possibile introdurre le proprietà di riporto di bipoli tra i due lati. In particolare, collegando un resistore R al secondario del giratore, dalle (2.118) e (2.120) si ricava

$$i_1 = \frac{v_2}{r_g} = -\frac{R}{r_g} i_2 = \frac{R}{r_g^2} v_1 \quad (2.122)$$

che mostra un'interessante proprietà del giratore ideale: la resistenza R collegata al secondario appare al primario come conduttanza pari a R/r_g^2 (ossia di valore pari alla resistenza divisa per il quadrato del rapporto di girazione). Il legame diretto tra correnti di una porta e tensioni dell'altra, evidenziato dalle (2.120), comporta il notevole risultato di trasformare ogni bipolo nel proprio duale nel riportarlo da una porta all'altra. Ciò significa che bipoli in serie al secondario del giratore si devono riportare in parallelo al primario (e viceversa), scambiandosi con il proprio duale (cioè resistenze con conduttanze, generatori di tensione con generatori di corrente, ecc.). In particolare, un corto circuito in serie diviene un circuito aperto in parallelo ed un circuito aperto in serie diviene un corto circuito in parallelo. In figura 2.51

viene illustrata graficamente questa proprietà con riferimento ad un resistore.

2.7.5 Stelle e poligoni di resistori

Un insieme di N resistori collegati tra di loro ad un nodo comune e aventi l'altro terminale libero costituiscono un N -polo detto *stella* di resistori ad N vertici. Costituisce un N -polo anche il collegamento di resistori tra tutte le possibili coppie di N vertici. Tale collegamento, detto a *poligono*, richiede, per essere effettivamente realizzato, $N(N-1)/2$ resistori. In particolare, quando $N=3$,

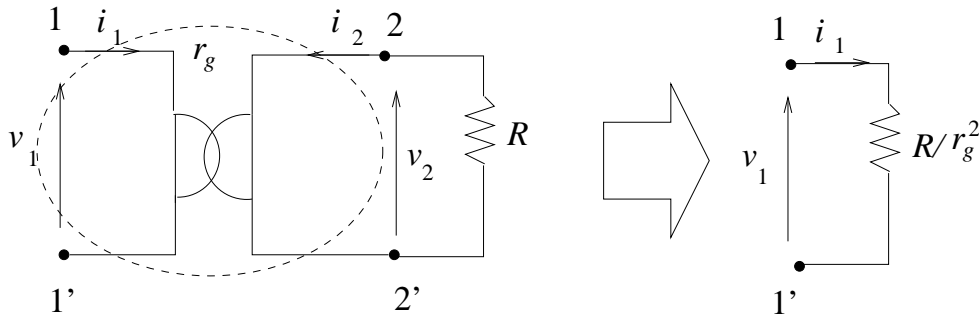


Figura 2.51: Resistore collegato al secondario e riportato al primario del giratore ideale.

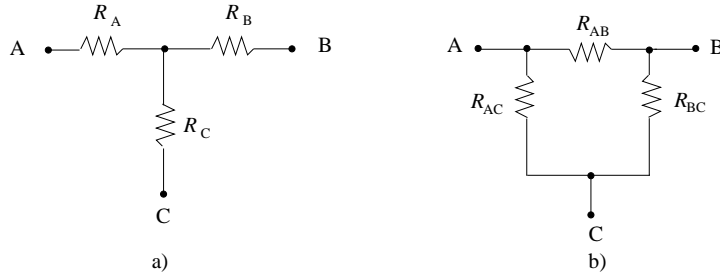


Figura 2.52: Terna di resistori collegati a stella a), e a triangolo b).

si realizzano tripoli, formati in entrambi i casi da 3 resistori, con collegamenti detti a stella (Y) o a triangolo (Δ) di resistori (si veda la figura 2.52).

2.7.5.1 Trasformazioni triangolo-stella e stella-triangolo

Può risultare conveniente talora passare alla stella di resistori equivalente ad un triangolo di resistori. È utile, pertanto, disporre di relazioni che consentano, noti i valori delle resistenze collegate a triangolo, di ottenere i valori delle resistenze che formano la stella equivalente. Si considerino i tre resistori collegati a triangolo di figura 2.53.

Il tripolo costituito dal triangolo di resistori è stato arbitrariamente ricondotto ad un doppio bipolo assumendo il terminale C come terminale comune. Tale doppio bipolo è suscettibile di essere rappresentato mediante la matrice di resistenza a vuoto secondo le equazioni

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11}^{\Delta} & r_{12}^{\Delta} \\ r_{21}^{\Delta} & r_{22}^{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, \quad (2.123)$$

che si ricavano facilmente dalle (2.90). Gli elementi della matrice di resistenza a vuoto si ricavano secondo la definizione generale (2.93). In particolare, per il calcolo di r_{11}^{Δ} , lasciando a vuoto la porta 2 non circola la corrente corrispondente, i_2 , e, pertanto risultano collegate in serie tra loro le resistenze R_{AB} e R_{BC} .

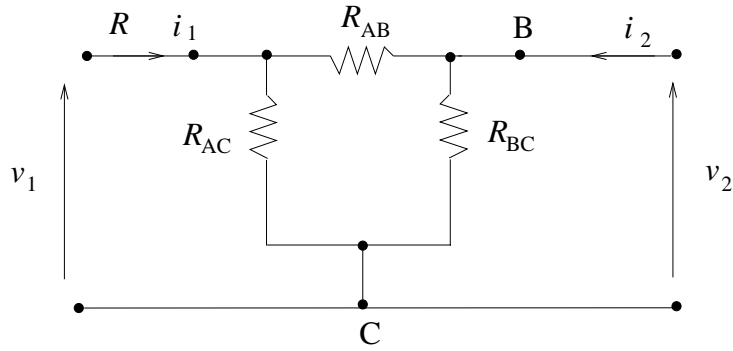


Figura 2.53: Doppio bipolo ottenuto dal triangolo di resistori assumendo C come terminale comune.

Il rapporto tra la tensione v_1 e la corrente i_1 che definisce il coefficiente che stiamo calcolando vale dunque la resistenza equivalente al parallelo della serie summenzionata con la terza resistenza R_{AC} , ossia

$$r_{11}^{\Delta} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2=0} = \frac{R_{AC}(R_{AB} + R_{BC})}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}. \quad (2.124)$$

Analogamente, per simmetria si può ricavare

$$r_{22}^{\Delta} = \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{i_1=0} = \frac{R_{BC}(R_{AB} + R_{AC})}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}. \quad (2.125)$$

Per calcolare gli elementi fuori dalla diagonale, ad esempio

$$r_{12}^{\Delta} = \left. \frac{v_1}{i_2} \right|_{i_1=0} \quad (2.126)$$

si osservi che, quando $i_1 = 0$, R_{AB} e R_{AC} risultano in serie e percorse dalla corrente ottenuta applicando la regola del partitore di corrente

$$i = i_2 \frac{R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}. \quad (2.127)$$

La tensione descrittiva di R_{AC} si ottiene applicando la legge di Ohm

$$v_1 = i_2 \frac{R_{AC}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} \quad (2.128)$$

ottenendo così

$$r_{12}^{\Delta} = \frac{R_{AC}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}. \quad (2.129)$$

Con analogo procedimento, si può ricavare infine

$$r_{21}^{\Delta} = \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2=0} = \frac{R_{AC}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}. \quad (2.130)$$

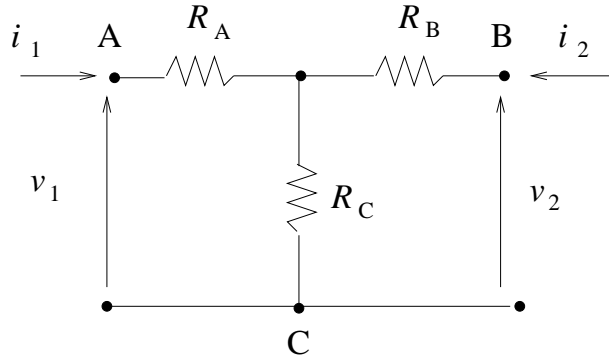


Figura 2.54: Doppio bipolo ottenuto dalla stella di resistori assumendo C come terminale comune.

Le (2.123) si possono ora scrivere anche nel seguente modo

$$\begin{aligned} v_1 &= \left(\frac{R_{AB}R_{AC} + R_{AC}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} \right) i_1 + \frac{R_{AC}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} i_2 \\ v_2 &= \frac{R_{AC}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} i_1 + \left(\frac{R_{AB}R_{BC} + R_{AC}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} \right) i_2 \end{aligned} \quad (2.131)$$

Prendendo in considerazione ora la stella di figura 2.54,

nella quale le porte sono state scelte in conformità alla scelta già fatta per il triangolo, le relazioni di definizione, espresse ugualmente tramite la matrice di resistenza a vuoto, si scrivono

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11}^Y & r_{12}^Y \\ r_{21}^Y & r_{22}^Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}. \quad (2.132)$$

Ripercorrendo lo stesso procedimento svolto per il triangolo, si può pervenire alla determinazione dei coefficienti resistivi ed, infine, alle seguenti relazioni

$$\begin{aligned} v_1 &= (R_A + R_C) i_1 + R_C i_2 \\ v_2 &= R_C i_1 + (R_B + R_C) i_2 \end{aligned} \quad (2.133)$$

Confrontando le relazioni (2.133) con le (2.131), si può affermare che la stella è equivalente al triangolo se i resistori che compongono la stella rispettano le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{R_{AB}R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}, \\ R_B &= \frac{R_{AB}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}, \\ R_C &= \frac{R_{AC}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}, \end{aligned} \quad (2.134)$$

dette *formule di trasformazione triangolo-stella*. Dalle (2.134) si evince come caso particolare che, se un triangolo è costituito di tre resistori uguali di resistenza pari ad R , i resistori della stella equivalente sono pure tutti uguali con resistenza di valore pari a $R/3$.

È possibile altresì determinare il triangolo equivalente di tre resistori collegati a stella mediante inversione delle (2.134) ovvero per confronto delle relazioni di definizione, espresse mediante la matrice di conduttanza, di due opportuni doppi bipoli tra loro corrispondenti. Si possono ottenere, in tal modo, le *formule di trasformazione stella triangolo*

$$\begin{aligned} G_{AB} &= \frac{G_A G_B}{G_A + G_B + G_C}, \\ G_{AC} &= \frac{G_A G_C}{G_A + G_B + G_C}, \\ G_{BC} &= \frac{G_C G_B}{G_A + G_B + G_C}, \end{aligned} \quad (2.135)$$

che si possono riscrivere in funzione delle resistenze:

$$\begin{aligned} R_{AB} &= \frac{R_A R_B}{R_C} + R_A + R_B, \\ R_{AC} &= \frac{R_A R_C}{R_B} + R_A + R_C, \\ R_{BC} &= \frac{R_B R_C}{R_A} + R_B + R_C. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Le (2.136) danno conferma che una stella di tre resistenze tra loro uguali è equivalente ad un triangolo di resistenze pure uguali tra loro e di valore pari a tre volte il valore delle resistenze della stella.