

## Sistemi Lineari

Sistemi di equazioni lineari - richiami teoria

Condizione per l'esistenza della soluzione (Teorema di Rouché-Capelli)

Condizionamento di un sistema lineare

Perturbazione sul termine noto

Perturbazione matrice dei coefficienti e termine noto

Matrice di scaling

Risoluzione sistemi lineari con matrici "semplici"

A diagonale

A ortogonale

A triangolare (superiore/inferiore)

A tridiagonale

A matrice a blocchi

A diagonale a blocchi

A triangolare a blocchi

## Fattorizzazione LR

Trasformazione elementare di Gauss

Metodo di eliminazione di Gauss

Costo computazionale

Applicazione della fattorizzazione LR ai sistemi lineari

Algoritmo

Metodo di Gauss con pivoting

Pivoting parziale

Pivoting totale

Fill-in

Pivoting con matrice di scaling

Matrici sparse

Pseudo-codifica dell'algoritmo di Gauss con pivoting

Fattorizzazione LR per matrici tridiagonali

Metodo LR di pavimentazione

Fattorizzazione  $LL^T$  di Choleski

## Fattorizzazione QR

Trasformazione elementare di Householder

Lemma di Householder

Calcolo di  $U_k$  con  $a$  vettore assegnato

Teorema (esistenza e unicità della fattorizzazione QR)

Triangolarizzazione di A con trasformazioni di Householder

Applicazione alla risoluzione di sistemi lineari

Complessità computazionale

Pseudo-codifica dell'algoritmo QR

## Analisi all'indietro dell'errore

Definizione

Analisi all'indietro dell'errore per il metodo di sostituzione per sistemi triangolari

Analisi all'indietro dell'errore per la fattorizzazione LR

Analisi all'indietro dell'errore per il metodo di Gauss

Analisi dell'errore algoritmico per la fattorizzazione QR

## Decomposizione $HRK^T$

Caso determinato  $m = n$

A non singolare ( $k = n$ )

A singolare ( $k < n$ )

Caso sovradeterminato  $m > n$

A di rango massimo ( $k = n$ )

A non di rango massimo ( $k < n$ )

Caso sottodeterminato ( $m < n$ )

A di rango massimo ( $k = m$ )

A non di rango massimo ( $k < m$ )

## Decomposizione ai valori singolari

Implementazione della decomposizione ai valori singolari

## Problema dei minimi quadrati

Metodo  $HRK^T$

Metodo  $U\Sigma V^T$

## Approssimazione polinomiale

### Interpolazione

- Interpolazione polinomiale
  - Base di monomi
  - Base di Lagrange
  - Algoritmo
- Interpolazione polinomiale con dati sulle derivate
  - Base di Hermite
- Interpolante di Hermite-Birkhoff
- Errore di interpolazione
  - Dimostrazione
- Convergenza del polinomio di interpolazione
  - Norma di funzione (nel discreto/nel continuo)
  - Teorema (Weierstrass)
  - Fenomeno di Runge
  - Teorema (Bernstein)
  - Teorema (Hermite-Fejer)
  - Considerazione
- Polinomi di Chebychev
  - Formula esplicita
  - Formula ricorrente
  - Cambiamento di intervallo

### Approssimazione di dati

- Funzioni elementari di maggior uso
- (Descrizione del problema)
- (Soluzione mediante forma quadratica)
- Polinomi ortogonali nel discreto
- Caso  $n = 1$

## Funzioni Spline

- Definizione
- Spline periodica di grado  $n$
- Spline naturale di grado  $n$
- Spline di interpolazione lineare
- Spline di interpolazione cubica
  - Spline cubica vincolata
  - Spline cubica periodica
  - Spline cubica naturale
  - Relazione integrale della spline cubica
  - Convergenza della funzione spline
- B-spline
  - (Definizione)
  - Formula ricorsiva per le B-spline
  - Codice BSFN
    - Contenuto delle variabili
    - Analisi codice BSFN
  - Rappresentazione di funzioni spline mediante B-spline
    - Approssimazione polinomiale a tratti
    - Teorema di Schoenberg-Whitney

## Procedimenti iterativi

- Convergenza di successioni di vettori e matrici
- Metodi iterativi per sistemi lineari
  - Teorema (con dimostrazione)
  - Condizione sufficiente per la convergenza (conseguenza del Teorema di Hirsch)
  - Osservazione
  - Metodi di Jacobi e Gauss-Seidel
    - Metodo di Jacobi
    - Metodo di Gauss-Seidel
    - Considerazioni geometriche
    - Lemma di Householder-John
- Richiami sui grafi
- Criterio di arresto

## Equazioni non lineari

- Formulazione del problema
- Condizionamento del problema
- Metodo di bisezione
- Calcolo del punto fisso
  - Condizioni di esistenza di almeno un punto fisso
  - Condizioni di unicità del punto fisso
  - Metodo delle approssimazioni successive
    - Teorema di convergenza globale
    - Teorema di convergenza locale
    - Dimostrazione di entrambi
    - Analisi dell'errore
- Velocità di convergenza di una successione
  - Ordine di convergenza
  - Risultato per la convergenza lineare (caso globale e locale)
  - Risultato per la convergenza quadratica (caso globale e locale)
- Metodo di Newton
- Convergenza globale del metodo di Newton
- Metodo tipo-Newton
- Metodi quando le derivate non sono calcolabili
  - Metodo di Newton alle differenze finite
  - Metodo delle secanti
- Criterio di arresto

## Calcolo degli autovalori di una matrice

- Condizionamento (teorema di Bauer-Fike)
  - Corollario
- Metodo delle potenze (Von Mises) (con dimostrazione)
  - Algoritmo delle potenze
  - Osservazione
- Metodo delle potenze inverse (Wielandt)
- Calcolo di un autovalore nota una stima
- Metodo QR iterativo (Rutishauser, Francis)
  - Teorema
  - Convergenza sotto ipotesi più deboli
  - Implementazione del metodo QR iterativo
    - Preprocesso
    - Criterio di arresto