Capitolo 1

Il modello circuitale

Lo studio di qualunque sistema fisico che realizzi una applicazione di interesse tecnologico è basato su un *modello matematico*. La maggior parte dei sistemi che interessano l'elettrotecnica possono essere studiati applicando ad essi il cosiddetto *modello circuitale* a *parametri concentrati*.

Il sistema reale viene descritto dal modello in maniera schematica introducendo, pertanto, un certo grado di *approssimazione*. La messa a punto di un modello richiede la preliminare individuazione delle grandezze fisiche che caratterizzano il comportamento del sistema in studio e delle loro reciproche relazioni . A seconda delle variabili e delle correlazioni considerate, la descrizione di uno stesso sistema fisico può essere fatta mediante modelli tra loro differenti caratterizzati per i diversi possibili gradi di approssimazione. Il grado di approssimazione si misura mediante l'*accuratezza* che fornisce l'errore che si commette nella previsione del comportamento del sistema fisico studiato. Di norma più alto è il numero di variabili considerate e di relazioni tra queste, maggiore risulta l'accuratezza ma anche la complessità del modello. E' possibile stabilire una scala gerarchica tra vari modelli di uno stesso sistema fisico rilevando la possibilità di derivare un modello semplificato, o a spettro di impiego più limitato, da un modello più generale e, viceversa, è possibile estendere un modello di impiego limitato ad un ambito più generale mediante succesive generalizzazioni che comportano un livello crescente di complessità.

L'accuratezza è un indicatore molto importante della qualità di un modello. Tuttavia un'eccessivo grado di accuratezza può andare a discapito, ad esempio, della rapidità di calcolo, cosa che si desidera ottenere quando si voglia simulare il sistema studiato in tempi ragionevoli se non addirittura (come si suol dire con una terminologia un po' impropria ma diffusa) in *tempo reale*.

Una qualità dei modelli, che si ritiene normalmente un pregio, è rappresentata dalla semplicità e, in genere, la scelta o la messa a punto di un modello deve essere fatta considerando quello che, di volta in volta, si possa individuare come il miglior compromesso tra semplicità ed accuratezza: due caratteristiche che spesso, anche se non necessariamente, vanno in direzioni opposte.

La grande rilevanza del modello circuitale consiste nel fatto che esso consente una trattazione semplice, e al tempo stesso accurata, di una vasta classe di sistemi fisici il cui comportamento è descritto, in termini generali, dalle equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo. Le equazioni di Maxwell, tuttavia, non presentano agevole soluzione per molte categorie di sistemi elettromagnetci e, talora, costituiscono un modello inutilmente complesso perchè ne sia opportuno l'impiego. Infatti, con maggior semplicità e con quasi altrettanta accuratezza, si può utilizzare, in moltissime applicazioni elettriche[1], il *modello circuitale a parametri concentrati*. Questo modello, che si costruisce a partire da sole variabili scalari, trova il suo impiego naturale nei *circuiti elettrici* in campo elettrotecnico ed elettronico ma non solo[2]. Val la pena qui solo accennare al fatto che il modello circuitale viene utilmente applicato anche a sistemi fisici che non sono governati dalle leggi dell'elettromagnetismo come, ad esempio, la fluidodinamica e la trasmissione del calore.

1.1 Limiti di validità del modello

Questi appunti non sono la sede opportuna per fornire una derivazione rigorosa dalle equazioni di Maxwell del modello circuitale a parametri concentrati le cui leggi fondamentali verranno, pertanto, introdotte a carattere di postulati. Tuttavia è istruttivo accennare, sia pure a livello intuitivo, quali limitazioni vengono introdotte nella descrizione dei fenomeni.

Secondo la descrizione fornita dalle equazioni di Maxwell, gli effetti prodotti dalle variazioni temporali di una grandezza elettromagnetica si propagano con velocità finita dal punto d'origine a tutti gli altri punti dello spazio e si avvertono in tempi diversi a diverse distanze dal punto d'origine. La velocità di propagazione risulta una costante universale detta *velocità della luce* il cui simbolo è c[3]. Il modello circuitale a parametri concentrati assume implicitamente l'ipotesi di poter trascurare i tempi di ritardo della propagazione e, quindi, le sue variabili non dipendono dalle coordinate spaziali. Va da sè che, in assenza di variazioni temporali delle grandezze, cioè quando il sistema è nel cosiddetto *stato stazionario permanente*, non ci può essere propagazione e la descrizione fornita dal modello circuitale a parametri concentrati coincide con quella prevista dalle equazioni di Maxwell. D'alto canto la costante c ha un valore relativamente molto elevato, cosicchè, se le dimensioni fisiche del sistema sono relativamente piccole, il massimo tempo di ritardo, τ_{max}, dovuto alla propagazione nell'ambito del sistema è molto breve, ed è pertanto lecito trascurare la propagazione senza perdere apprezzabilmente in accuratezza. In questa approssimazione, ogni variazione temporale di una grandezza del sistema si manifesta simultanuamente in tutti i suoi punti indipendentemente dal punto in cui ha effettivamente origine.

In un mezzo omogeneo ed isotropo, il massimo tempo di ritardo dovuto alla propagazione è relato alla massima dimensione del sistema, d_{max}, secondo l'espressione

$$\tau_{max} = \frac{d_{max}}{c}. \tag{1.1}$$

Le equazioni di Maxwell prevedono che la propagazione sia un fenomeno ondulatorio ed è quindi possibile esprimere il periodo T di variazione del fenomeno propagativo, opure la frequenza $f = 1/T$. Affinchè la propagazione possa essere

[1] Con tale termine si intende riferire il discorso in generale ad applicazioni sia elettrotecniche sia elettroniche.

[2] Nella seconda parte si vedrà come il modello circuitale a parametri concentrati può essere usato per lo studio delle macchine elettriche.

[3] Il suo valore numerico dipende dal mezzo in cui ha sede la propagazione. Nel vuoto c=299792458 m/s

trascurata, occorre dunque che tra il periodo della grandezza che si propaga ed il massimo tempo di ritardo τ_{max}, sussista la relazione

$$T \gg \tau_{max} \tag{1.2}$$

cioè la grandezza deve variare in modo sufficientemente lento così da potersi trascurare il tempo massimo di ritardo nella propagazione delle sue variazioni. L'espressione (1.2) può essere riscritta anche con riferimento alla lunghezza d'onda λ , ($\lambda = cT$) e tenendo conto della (1.1), come

$$\lambda \gg d_{max}. \tag{1.3}$$

Da ciò si può concludere che un sistema elettromagnetico può essere rappresentato mediante il modello circuitale a parametri concentrati con sufficiente accuratezza se, in corrispondenza alla massima frequenza di variazione temporale delle grandezze, è verificata una delle due seguenti condizioni equivalenti:

1. Il massimo tempo di ritardo di propagazione è assai più breve del periodo di variazione delle grandezze
2. La massima distanza presente tra coppie di punti interessati dalla propagazione è assai inferiore alla lunghezza d'onda corrispondente alla grandezza periodica.

Quando è verificata una di queste condizioni, lo stato del sistema si dice *quasi-stazionario*. Nel caso in cui la (1.3), e/o la (1.2), non siano soddisfatte, il modello circuitale a parametri concentrati può perdere di accuratezza in modo inaccettabile. Per tentare di ovviare a questo problema, si può cercare di suddividere il sistema in parti di dimensioni più piccole per le quali le relazioni (1.2) e (1.3) risultino ancora soddisfatte. Portando questo processo alle sue estreme conseguenze, le variabili del modello non possono più essere costanti su tutto il dominio, ma devono essere fatte dipendere da una o più variabili spaziali (oltre che dal tempo) e si parla, in tali casi, di *modelli circuitali a parametri distribuiti*. In questi appunti si intende descrivere unicamente il modello a parametri concentrati. Ciò non costituisce, tuttavia, una grossa limitazione in quanto lo spettro delle lunghezze d'onda e le dimensioni fisiche della gran parte delle applicazioni in campo elettrotecnico ed elettronico ricadono entro il campo di validità del modello a parametri concentrati. Si osservino, in particolare, gli esempi riportati in Tabella 1.1. Per quanto attiene agli esempi presentati, si consideri che per soddisfare la (1.3) è buona norma limitare cautelativamente l'impiego del modello a parametri concentrati a sistemi la cui massima dimensione non ecceda di molto, ad esempio[4], un centesimo della lunghezza d'onda λ, ossia per gli esempi in tabella 1.1, 60 km per la prima applicazione citata, 3 m per la seconda e 3 mm per la terza. Ovviamente, l'incompatibilità tra le dimensioni effettive dei sistemi e la lunghezza d'onda può comportare la rinuncia all'impiego del modello circuitale a parametri concentrati o al livello di accuratezza prefissato.

Una panoramica semplicemente indicativa della gamma di applicazioni alle quali il modello a parametri concentrati può essere utilmente impiegato è fornita in Tabella 1.3.

[4]Chiaramente, in quanto si va affermando sussiste un margine notevole di discrezionalità .

Tabella 1.1: Esempi di sistemi elettromagnetici in condizioni non stazionarie

Distribuzione elettrica industriale	f =50 Hz	$\lambda \approx 6000$km
Sistemi HI-FI	f_{max}= 20 kHz	$\lambda_{min} \approx 15000$ m
Microonde	f =100 MHz	$\lambda \approx 3$m
Clock di PC	f = 1 GHz	$\lambda \approx 30$cm

Tabella 1.3: Spettro applicativo del modello circuitale

	Applicazioni
-**dimensioni**:	circuiti integrati, circuiti per hi-fi, computers, strumentazione elettronica, sistemi di telecomunicazioni, sistemi per la produzione, la trasmissione e l'utilizzo dell'energia elettrica ($d_{max} = 10^{-3} \div 10^{6}$m)
-**tensioni**:	10^{-6}V (apparecchiature per lo studio del rumore) $\div$ $\div 10^{6}$V (sistemi di potenza)
-**correnti**:	10^{-15}A (elettrometri)$\div 10^{6}$A (sistemi di potenza)
-**frequenze**:	0 (correnti continue)$\div 10^{9}$Hz (circuiti per microonde, computers)
-**potenze**:	10^{-14}W (segnali radio da galassie)$\div 10^{9}$W (centrali elettriche)

1.2 Struttura di una rete elettrica

Il modello di una rete elettrica a parametri concentrati si risolve in una interconnessione di diversi componenti elementari (*parametri circuitali*) ognuno dei quali si rappresenta graficamente con uno schema del tipo mostrato in Figura 1.1 Collegando tra loro, mediante i terminali, più parametri del tipo illustrato in Figura 1.1, si ottiene la rappresentazione grafica di una rete a parametri concentrati come esemplificato in Figura 1.2.

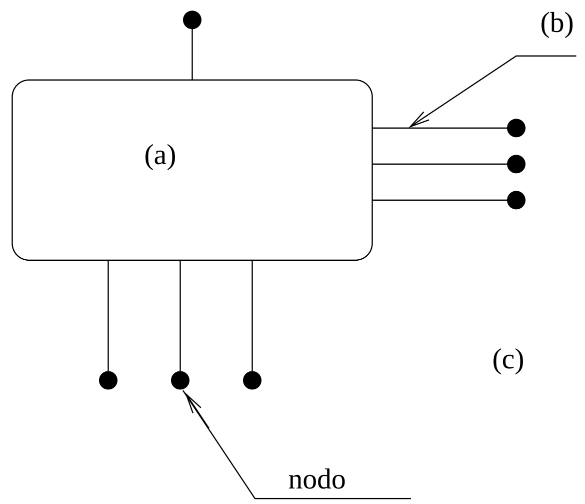

Figura 1.1: Rappresentazione grafica di un parametro di rete. Sono stati messi in evidenza: a) parametro concentrato propriamente detto; b) terminale; c) regione esterna.

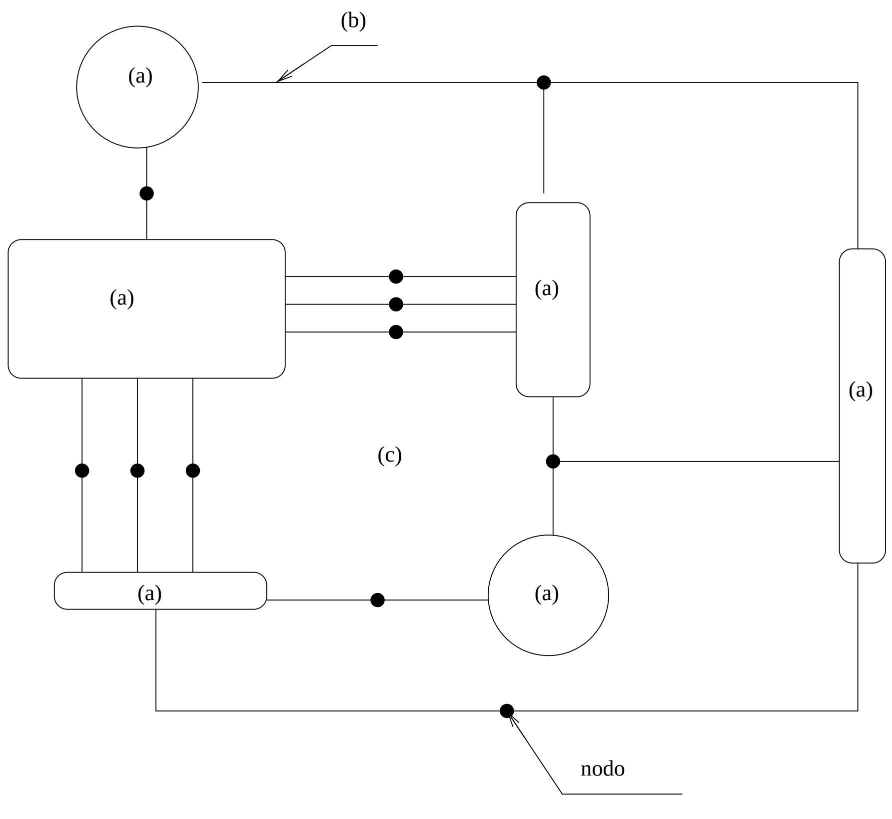

Figura 1.2: Schema di rete elettrica a parametri concentrati. Sono in evidenza le regioni: a) parametri concentrati; b) interconnessioni; c) regione esterna.

Nella figura sono evidenziati i tre tipi di elementi concettuali nei quali può essere suddiviso lo schema grafico di una rete a parametri concentrati:

(a) Regioni delimitate da superfici chiuse di forma convenzionale atta ad individuare ciascun parametro della rete. Per ipotesi, i fenomeni di tipo elettromagnetico, di cui sono responsabili i parametri, si ritengono confinati all'interno di tali superfici (che costituirebbero, pertanto, degli schermi elettromagnetici ideali).

(b) Tratti filiformi di interconnessione che schematizzano *conduttori perfetti* (dotati cioè di *conducibilità elettrica* infinita). Lungo tali tratti, le cui caratteristiche geometriche (curvatura e lunghezza) sono irrilevanti, è solitamente evidenziato un punto detto *nodo*. Tale punto, la cui posizione lungo il tratto è irrilevante, divide idealmente i tratti di interconnessione appartenenti a ciascun parametro il quale, congiuntamente a questi tratti, costituisce un *componente* della rete.

(c) Spazio esterno alla rete da considerare del tutto ininfluente sul comportamento elettrico della rete. In particolare, si considera come isolante perfetto (conducibilità elettrica nulla). Nei casi reali tale regione è quella occupata dall'aria.

Infine è opportuno ribadire che un sistema elettrico può essere descritto mediante diversi modelli circuitali con vari livelli di semplificazione e di approssimazione (o di accuratezza). Ad esempio, un tratto di filo conduttore reale può essere trattato nel modello come parametro (a) se possiede in misura significativa qualche proprietà elettrica tale da influire sul comportamento della rete. Altrimenti può essere considerato come tratto di interconnessione (b). Analogamente, a seconda dell'importanza che assumono i fenomeni di cui è sede, una parte del sistema può essere rappresentata come parametro (o, eventualmente, come interconnessione di più parametri), oppure inclusa nella regione esterna.

1.3 Variabili descrittive

Da quanto illustrato sino a qui, riprendendo in esame la Figura 1.1 si possono notare la superficie chiusa che identifica il parametro con i terminali disponibili per le connessioni. I circoletti alle estremità dei terminali rappresentano i cosiddetti *morsetti* mediante i quali i terminali possono prendere connessione con quelli di altri componenti. Si utilizza, in particolare, la convenzione grafica che vuole che il terminale collegato presenti il morsetto in colore scuro (generalmente nero), *nodo*, mentre il terminale libero conserva all'estremità un circoletto in chiaro (bianco).

Nel modello a parametri concentrati, i componenti possono interagire esclusivamente attraverso i terminali e non anche attraverso la regione esterna. Pertanto le grandezze elettriche di interesse sono solo quelle che possono manifestarsi ai terminali e sono quelle tipiche dei conduttori perfetti.

1.3.1 Corrente

Nel modello circuitale a parametri concentrati la corrente elettrica si definisce come il flusso delle cariche elettriche che circolano entro i conduttori di inter-

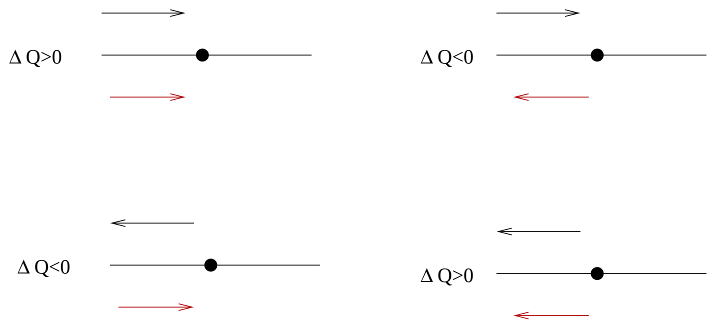

Figura 1.3: Versi di riferimento (frecce in nero) e della corrente (frecce in rosso). A lato i risultati del conteggio.

connessione filiformi e perfetti. La grandezza fisica di riferimento è l'*intensità di corrente elettrica* (detta più semplicemente: *corrente*) ossia la quantità netta di carica elettrica positiva che fluisce nell'unità di tempo attraverso ciascuna sezione di filo conduttore. Se l'interconnessione si realizza tra soli due terminali, il flusso netto di cariche positive può avvenire in una delle due possibili direzioni consentite da una linea. Per valutare la corrente, occorre dapprima fissare, ad arbitrio, un verso di riferimento rispetto al quale danno contributo positivo le cariche positive concordi e le cariche negative discordi. Va da sè che le cariche negative concordi e quelle positive discordi con il verso di riferimento danno contributo negativo. In formule, se si indica con $\triangle Q^+$ la somma delle cariche positive dirette secondo il verso preassegnato e delle cariche negative dirette nel verso opposto, e con $\triangle Q^-$ la somma delle cariche negative dirette nel verso preassegnato e delle cariche positive di verso opposto, potremo scrivere per la carica totale $\triangle Q$ che transita nel verso prefissato la relazione

$$\triangle Q = \triangle Q^+ - \triangle Q^-. \tag{1.4}$$

La corrente, essendo un flusso di cariche, rappresenta la carica netta divisa per la durata del conteggio, ossia:

$$I = \frac{\triangle Q}{\triangle t}, \tag{1.5}$$

dalla quale si evince che la corrente può assumere, rispetto al verso di riferimento, verso positivo o negativo a seconda che risulti $\triangle Q^+ > \triangle Q^-$ o viceversa. Si osservi, a tal proposito, quanto mostrato in Figura 1.3.

Se muta il verso di riferimento, muta il segno della corrente.

L'espressione (1.5) rappresenta la corrente media nell'intervallo di conteggio. Facendo tendere a zero l'intervallo di conteggio, si ottiene il valore della corrente istantanea:

$$i(t) = \frac{dq}{dt}. \tag{1.6}$$

È consuetudine indicare con lettere maiuscole le variabili costanti nel tempo (come pure i valori medi in un intervallo di tempo convenuto o altrimenti specificato), con lettere minuscole i valori istantanei delle grandezze che variano nel tempo. In quest'ultimo caso si suole omettere l'esplicita indicazione della

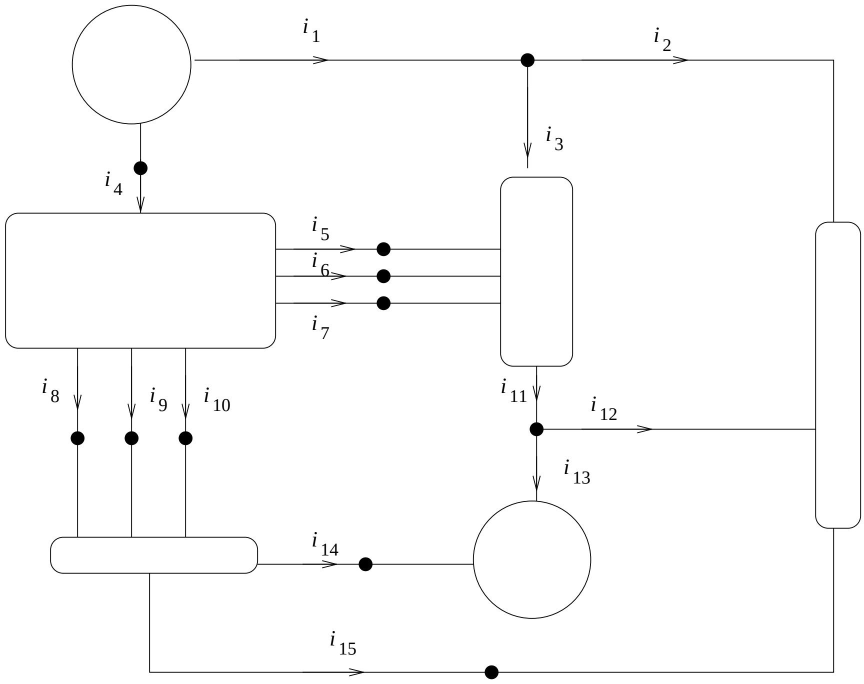

Figura 1.4: Schema di rete elettrica a parametri concentrati. Sono in evidenza i versi di riferimento per le correnti circolanti sui conduttori che interconnettono i componenti elementari.

dipendenza dal tempo, ossia si utilizza semplicemente[5] la notazione i in luogo della notazione completa *i(t)*.

L'unità di misura della corrente elettrica è l'*ampere* il cui simbolo è A. L'ampere figura tra le unità fondamentali del Sistema Internazionale (SI) di cui si forniscono gli elementi essenziali nell'Appendice I.

In ogni schema di rete, si conviene fissare opportunamente i versi di riferimento per le correnti circolanti nei terminali che interconnettono componenti come esemplificato in Figura 1.2.

1.3.2 Tensione

Ogni conduttore di interconnessione può presentare una distribuzione netta di carica. L'elettromagnetismo caratterizza questa situazione, rispetto alla neutralità, mediante un valore non nullo di una funzione ad un sol valore e continua detta *potenziale elettrico.* Si definisce *tensione elettrica*[6] la differenza di potenziale presente tra una qualsiasi coppia di terminali che non sono in diretto collegamento tra loro. La tensione ha le dimensioni di un lavoro per unità di carica, è cioè il lavoro necessario per accumulare sul conduttore la carica unitaria (in valore assoluto). Con la notazione V_A, per il potenziale del terminale A e V_B, per il potenziale del terminale B, essendo A e B non collegati tra loro,

[5]A meno di eventuali precisazioni particolari fatte caso per caso.
[6]Anche semplicemente *tensione*.

si definisce tensione tra la coppia di terminali A e B, la grandezza

$$V_{AB} = V_A - V_B. \tag{1.7}$$

La tensione nel S.I. si misura in *volt* (simbolo V). Il significato fisico della tensione prima menzionato, consente di ricavare che, nel S.I., 1 V corrisponde ad 1 J(joule)/1 C(coulomb) essendo il *joule* l'unità di misura dell'energia ed il *coulomb* quella della carica elettrica.

Si noti che, sebbene la funzione potenziale sia definita a meno di una costante arbitraria[7], il valore della tensione è univoco essendo ottenuto per differenza (ovviamente dalla medesima funzione potenziale).

Nel modello circuitale, il valore del potenziale associato a ciascun conduttore di interconnessione è sempre riferito, per comodità, al nodo. Perciò è immediato definire in maniera univoca anche i valori di tensione tra coppie di nodi. Come si evince dall'espressione (1.7), i segni di questi valori dipendono dall'ordine nel quale vengono presi i nodi. E' conveniente, perciò, assegnare anche alle tensioni un verso positivo di riferimento. Ciò si può fare assegnando il segno $+$ ad uno dei nodi della coppia, ed un segno $-$ all'altro nodo. In questo modo, la tensione effettiva può avere:

1. segno positivo se il potenziale del nodo contrassegnato dal $+$ è più elevato di quello del nodo contrassegnato con il $-$;

2. segno negativo nel caso opposto.

Il verso della tensione si può indicare anche tramite una freccia che, per convenzione, punta verso il nodo positivo. Si veda, a questo proposito, la Figura 1.5.

Anche qui vale la pena ribadire che le tensioni costanti o mediate nel tempo si indicano in lettere maiuscole, mentre in lettere minuscole vengono indicati i valori istantanei delle tensioni variabili nel tempo.

1.4 Equazioni topologiche

Collegando più componenti tra di loro, vengono a costituirsi dei vincoli tra le loro correnti e tensioni. Questi vincoli sono espressi da due leggi fondamentali: le *leggi di Kirchhoff* rispettivamente delle correnti (*legge delle correnti*, abbreviazione: LC) e delle tensioni (*legge delle tensioni*, abbreviazione: LT).

1.4.1 Legge delle correnti

La LC si può enunciare come segue:

> *la somma algebrica delle correnti che attraversano qualsiasi superficie chiusa che non intersechi la rete in corrispondenza ad alcuna superficie limite dei componenti, ma solo in corrispondenza a terminali, è nulla in ogni istante.*

Scelta che sia una superficie con le caratteristiche indicate, le correnti che prendono parte alla sommatoria assumono un segno diverso a seconda che siano

[7]Che è il valore nullo del potenziale attribuito ad un punto dello spazio scelto ad arbitrio.

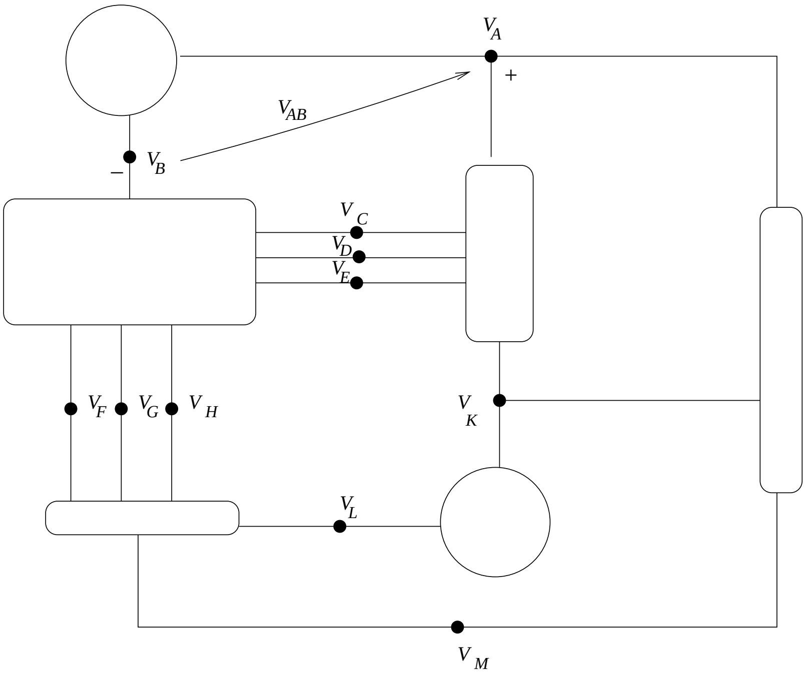

Figura 1.5: Potenziali ai nodi ed esempio di riferimento per la tensione V_{AB}.

entranti o uscenti rispetto alla superficie. E' assolutamente arbitraria la scelta di assumere come positivo il contributo delle correnti uscenti o entranti. Nel seguito si attribuirà segno positivo alle correnti entranti.

Come caso particolare, la LC si può applicare ad una superficie che circondi uno ed un sol nodo, onde si può affermare che

> *è nulla in ogni istante la somma algebrica delle correnti afferenti a qualsivoglia nodo.*

Questa affermazione è nota anche come *Primo Principio di Kirchhoff* o *Legge di Kirchhoff ai nodi.*

A titolo di esempio, esaminiamo l'applicazione della LC alle superfici mostrate in Figura 1.6.

Convenendo di attribuire segno positivo alle correnti entranti, si può scrivere per la superficie S_1:

$$+i_3 + i_5 + i_6 + i_7 + i_8 + i_9 + i_{10} - i_{12} - i_{15} = 0.$$

Analogamente per la superficie S_2:

$$+i_1 - i_2 - i_3 = 0.$$

1.4.2 Legge delle tensioni

La LT si può così enunciare:

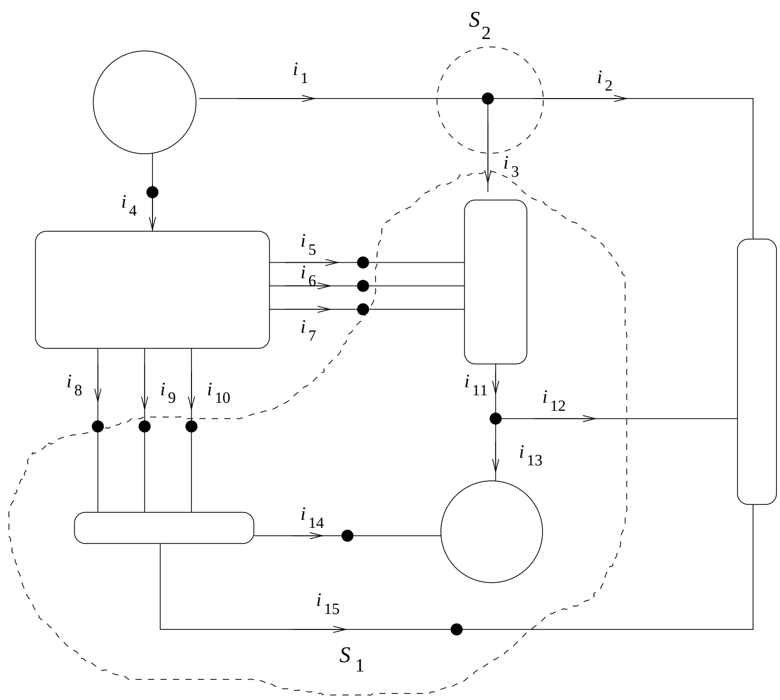

Figura 1.6: Esempi di superfici chiuse S_1ed S_2 per l'applicazione della legge delle correnti.

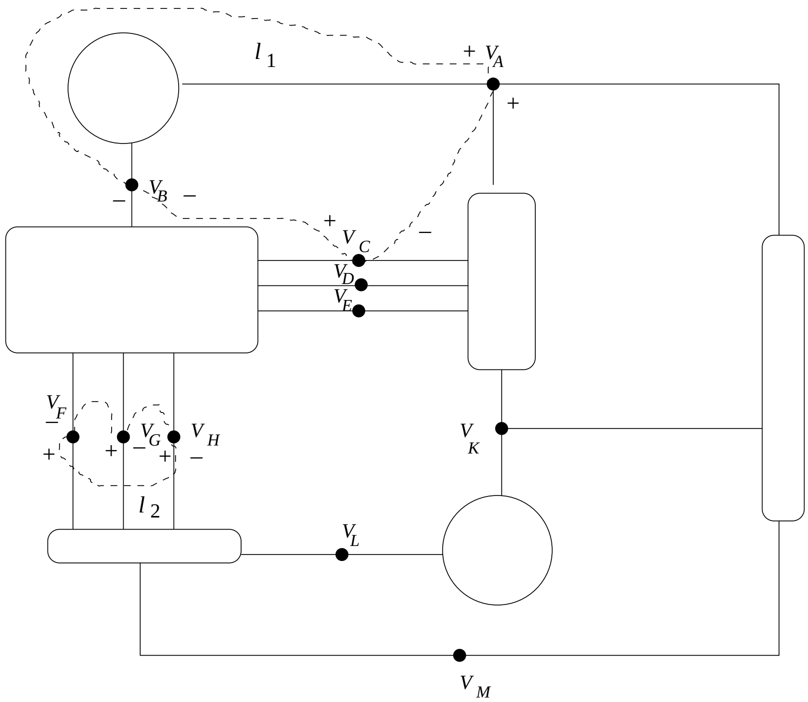

Figura 1.7: Esempi di linee per l'applicazione della LT.

è nulla in ogni istante la somma algebrica delle tensioni lungo ogni qualsiasi linea chiusa passante per la rete solo in corrispondenza a nodi e che non interseca le superfici limite dei componenti.

Per sommare algebricamente le tensioni occorre preventivamente orientare la linea chiusa in uno dei due sensi (orario o antiorario) e considerare le tensioni lungo la linea con un segno diverso a seconda che il loro verso[8] sia concorde o discorde rispetto a quello della linea. Si noti che la forma geometrica della linea è irrilevante: ciò che conta è semplicemente la sequenza dei noti interessati.

Come caso particolare, la LT si può applicare ad una linea che passa per una sequenza di nodi tale che ciascuno dei nodi della sequenza risulta essere collegato al precedente ed al successivo mediante uno ed un sol componente della rete diverso di volta in volta (la linea chiusa prende in tal caso il nome di *maglia*). Possiamo aggiungere anche che

è nulla in ogni istante la somma algebrica delle tensioni lungo una qualsiasi maglia di una rete.

Questa affermazione è nota anche come *Secondo Principio di Kirchhoff* o *Legge di Kirchhoff alle maglie*.

Ancora a titolo di esempio, applichiamo la LT alle linee mostrate in Figura 1.7.

Convenendo di attribuire segno positivo alle tensioni concordi con il verso orario si può scrivere per la linea l_1 (che esemplifica una maglia):

$$V_{AB} - V_{AC} - V_{CB} = 0.$$

[8]Il verso della tensione è per convenzione quello che va dal polo negativo a quello positivo.

Mentre per la linea l_2, che non è una maglia, si può scrivere

$$V_{GF} + V_{HG} + V_{FH} = 0.$$

A conclusione di questo argomento si possono fare le seguenti osservazioni:

1. le leggi di Kirchhoff impongono vincoli tra correnti e tra tensioni di una rete rappresentati da equazioni algebriche lineari ed omogenee;

2. le equazioni sono riconducibili alla forma generale

$$\begin{aligned} \sum a_k i_k &= 0 \\ \sum b_k v_k &= 0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

   in cui le sommatorie coinvolgono tutte le le correnti e tutte le tensioni della rete con coefficienti che possono assumere solo i valori $+1$, -1 e 0.

3. Le equazioni di vincolo (1.8) non dipendono dalla natura dei parametri presenti nella rete, ma soltanto dal loro reciproco collegamento.

1.4.3 Versi di riferimento

Ciascuna variabile di rete, sia essa tensione o corrente, per poter essere espressa in modo univoco necessita di un verso di riferimento. Non esistono limitazioni di principio a che si fissi arbitrariamente il verso di riferimento per ciascuna variabile, tuttavia è conveniente adottare un' unica convenzione per fissare i versi di riferimento delle variabili, secondo il principio, suggerito dall'esperienza, che l'introduzione di semplici automatismi in un procedimento di analisi, peraltro solitamente piuttosto complesso, aiuta a minimizzare i possibili errori di calcolo e/o di interpretazione dei risultati ottenuti.

Quando si consideri un componente ad N terminali, detto *N-polo*, si possono mettere in evidenza N correnti (ossia una per ciascun terminale). Tuttavia l'applicazione della LC ad una superficie chiusa che circondi il componente tagliandone tutti i terminali, rivela che le N correnti non sono tute linearmente indipendenti (l.i.). Infatti, dovendo risultare nulla la loro somma algebrica, si evince che, note $N-1$ correnti, la N-esima resta determinata dalla LC. Si osservi l'esempio mostrato in Figura 1.8.

Si definiscono come *correnti descrittive* di un N-polo tutte e sole le correnti dei terminali (poli) tra loro l.i., cioè le correnti di $N-1$ terminali scelti ad arbitrio. Si conviene di stabilire un verso di riferimento solo per le correnti descrittive, lasciando il terminale rimenente, detto *terminale comune*, senza indicazione del verso di riferimento per la corrente.

Analogamente, si possono associare ad un N-polo tante tensioni quante sono le possibili coppie di terminali prese ciscuna una sola volta, ovvero $N \times (N-1)/2$ differenti tensioni. Avviene che non tutte queste tensioni risultano l.i. tra loro. Per rendersene conto si pensi che la LT, applicata ad un qualunque percorso chiuso che passi per tutti i nodi facenti capo ai terminali del componente, fornisce delle relazioni tra tensioni che consentono di esprimerne alcune di esse in funzione delle altre. Per tensioni descrittive si intende un insieme di tensioni scelte in modo che

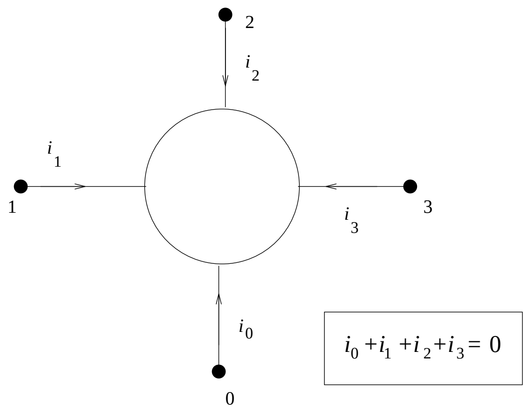

Figura 1.8: Applicazione della LC ad un componente con 4 terminali (quadripolo)

1. non formino percorsi chiusi tra loro (e quindi non siano reciprocamente vincolate dalla LT);
2. consentano di determinare (sempre grazie alla LT) ogni altra tensione tra coppie qualsiasi di terminali.

Un modo semplice (anche se non l'unico) di scegliere un insieme di tensioni con queste caratteristiche è quello di fissare il potenziale di uno dei terminali (di solito si assume il terminale comune già visto a proposito delle correnti) come potenziale di riferimento (zero del potenziale per il componente) e considerare le sole $N-1$ tensioni ottenute per differenza dai potenziali di ciascuno degli altri terminali con il terminale comune di riferimento. Si può dimostrare che, grazie alla LT, qualsiasi altra tensione tra coppie di terminali risulta esprimibile mediante queste sole $N-1$ le quali, pertanto, assumono il ruolo di *tensioni descrittive*. Si consideri l'esempio del quadripolo mostrato in Figura 1.9.

Possiamo affermare che un N-polo possiede almeno $N-1$ tensioni descrittive. Infatti, un numero superiore[9] di tensioni, comporta necessariamente la formazione di linee chiuse, mentre un numero inferiore[10] non rende conto di tutti i nodi.

Il componente con il numero minimo di terminali che ha senso considerare è quello avente $N=2$ (ossia due soli terminali) detto *bipolo*. Infatti, un componente dotato di un solo terminale, avendo necessariamente corrente nulla e potenziale arbitrario (non essendo definibile la tensione), non riveste alcun interesse.

Il bipolo possiede un'unica corrente descrittiva ed un'unica tensione descrittiva. Per un bipolo, la scelta dei versi di riferimento delle variabili descrittive può essere fatta in uno dei quattro modi possibili illustrati nella Figura 1.10.

E' facile rendersi conto i modi indicati in figura con le lettere a) e d) rappresentano, al di là della particolare rappresentazione, la stessa situazione in quanto il verso di riferimento della corrente va in entrambi i casi dal potenziale positivo

[9] Anche di una sola unità.
[10] Vedi nota precedente.

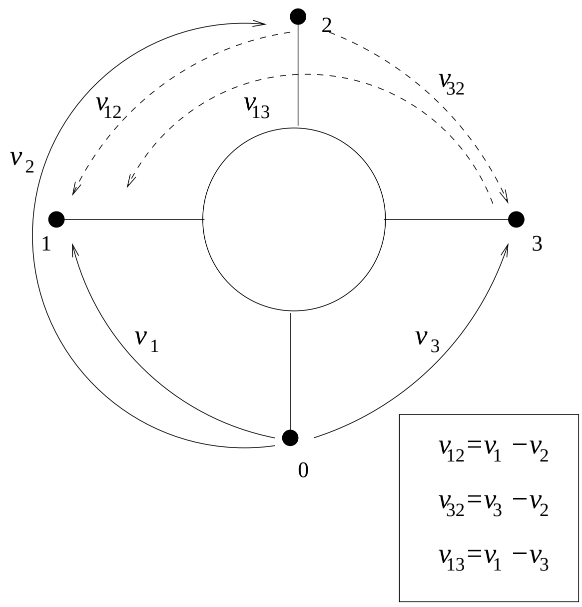

Figura 1.9: Applicazione della LT ad un quadripolo

a quello negativo della tensione. Questa combinazione rappresenta quella che viene chiamata *convenzione degli utilizzatori* o *convenzione normale*. Alternativamente, le combinazioni b) e c), anch'esse equivalenti tra loro, riflettono la cosiddetta *convenzione dei generatori*. La convenzione degli utilizzatori (c.d.u.) è di gran lunga più impiegata e pertanto viene adottata in queste note da qui in avanti in via esclusiva e sistematica. Della convenzione opposta non si farà invece mai uso.

Grazie all'adozione di una convenzione per i versi di riferimento delle variabili descrittive, si può evitare (come avverrà nel seguito) di indicare per ogni bipolo i versi di riferimento di entrambe le variabili descrittive, essendo sufficiente, grazie alla convenzione, indicarne esplicitamente soltanto uno a piacere.

1.5 Potenza

Una variabile di notevole importanza per il dimensionamento di qualsiasi apparecchiatura è la potenza. Nei sistemi elettrici è importante conoscere l'entità delle potenze in gioco non meno di quella di correnti e tensioni. In particolare, è importante poter risalire agli scambi energetici tra componenti di una rete elettrica a partire dalla conoscenza delle variabili descrittive.

1.5.1 Potenza di un bipolo

Se con V e I si indicano la tensione e la corente descrittive di un bipolo, è facile far vedere che il loro prodotto VI rappresenta la potenza che il bipolo scambia con il resto della rete di cui fa parte. Infatti, considerando che la tensione rappresenta il lavoro eseguito sull'unità di carica trasferita da un terminale

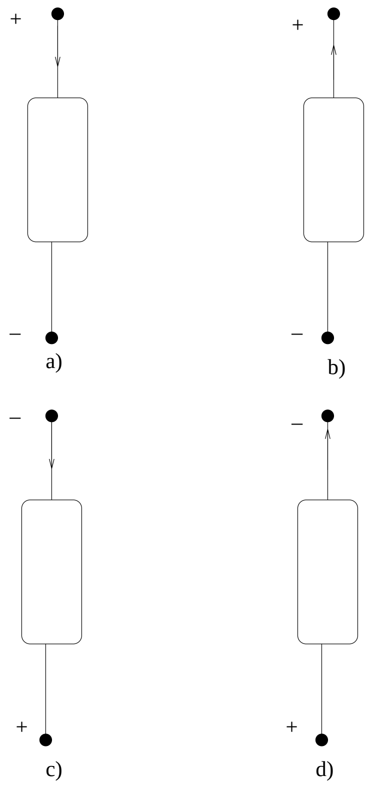

Figura 1.10: Possibili scelte per i versi di riferimento delle variabili descrittive di un bipolo

all'altro e la corrente la quantità di carica che attraversa il bipolo nell'unità di tempo, il prodotto VI rappresenta il lavoro eseguito sulla quantità di carica transitata attraverso il bipolo nell'unità di tempo, ossia una potenza agente sulle cariche. In formule:

$$VI = \frac{\triangle W}{\triangle Q}\frac{\triangle Q}{\triangle t} = \frac{\triangle W}{\triangle t} = P \qquad \text{W.} \tag{1.9}$$

Ai valori istantanei la (1.9) si può scrivere

$$vi = \frac{dw}{dq}\frac{dq}{dt} = \frac{dw}{dt} = p(t) \qquad \text{W.} \tag{1.10}$$

In particolare, se i versi di riferimento sono definiti secondo la c.d.u., le (1.9) e (1.10) risultano positive se il bipolo assorbe potenza, negativa se il bipolo eroga potenza. Pertanto, nel quadro della c.d.u. possiamo scrivere per la potenza istantanea assorbita dal bipolo:

$$p_a = vi. \tag{1.11}$$

La potenza assorbita dal bipolo è positiva quando entrambe le variabili descrittive sono positive o negative. Risulta negativa, e si interpreta come potenza erogata, quando le due variabili descrittive sono di segno opposto. In tali casi risulta positiva la quantità

$$p_e = -p_a \tag{1.12}$$

che rappresenta, secondo la c.d.u., la potenza erogata.

1.5.2 Potenza di un N-polo

Per un N-polo, la c.d.u. stabilisce che, fissato un terminale comune,

1. i versi positivi di riferimento delle $N-1$ correnti descrittive si assumano tutti entranti nel componente;
2. le tensioni descrittive siano quelle tra le $N-1$ coppie di terminali formate tutte ordinatamente dal terminale comune assunto come polo negativo e da ciascuno degli altri $N-1$ terminali assunto come polo positivo.

La convenzione appena introdotta è mostrata in Figura (1.12) per un quadripolo.

Secondo tale convenzione, la quantità

$$p_a(t) = \sum_{k=1}^{N-1} v_k i_k \tag{1.13}$$

rappresenta la potenza assorbita dal N-polo. La somma va estesa a tutti i terminali escluso il terminale comune, i_k è la corrente del k-esimo terminale e v_k la sua tensione rispetto al terminale comune. Si può dimostrare che il valore fornito dalla (1.13) non dipende dal terminale scelto come comune. Ossia che la (1.13) fornisce sempre lo stesso valore per ogni scelta possibile del cosiddetto terminale comune.

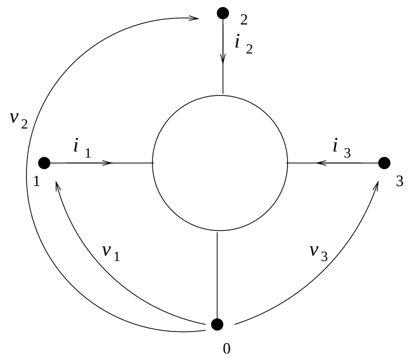

Figura 1.11: Riferimenti delle variabili descrittive di un quadripolo secondo la convenzione degli utilizzatori.

1.6 Componenti a N porte (N-porti)

Si definisce *porta elettrica* (per brevità: *porta*) una coppia di terminali per i quali la corrente è la stessa in valore assoluto ma opposta in verso. La corrente della porta, unitamente al valore della tensione tra i suoi terminali, configura una situazione del tutto analoga a quella di un bipolo. Pertanto un $2N$-porto può essere visto come un insieme di N bipoli tra loro interagenti e può essere in tale caso indicato con il termine di N-plo bipolo. L'uguaglianza delle correnti di porta può essere dovuta

1. alla struttura interna del componente;

2. al collegamento esterno con bipoli.

Nel primo caso la porta si dice *intrinseca*, *estrinseca* nel secondo.

In un N-porto la c.d.u. si applica a ciascuna porta indicando il verso di riferimento della corrente descrittiva e quello della relativa tensione orientate reciprocamente come già visto nel caso dei bipoli (ossia con la corrente diretta dal terminale $+$ al $-$). Un esempio è quello relativo al 2-porto (biporto) mostrato in Figura 1.12.

Si osservi, in questo caso, che mentre le correnti di porta sono sufficienti ad esprimere tutte le altre correnti del componente, le tensioni di porta non permettono di ricavare le tensioni tra tutte le possibili coppie di terminali. Tuttavia per tali componenti, la conoscenza di tutte le possibili tensioni non è generalmente di interesse. In particolare, la potenza assorbita da un N-porto dipende dalle sole variabili di porta (che vengono assunte come descrittive) ossia

$$p_a(t) = \sum_{k=1}^{N} v_k i_k \tag{1.14}$$

dove v_ke i_k sono rispettivamente la tensione e la corrente della k-esima porta. Si può dimostrare che esiste sempre un $N{+}1$-polo equivalente ad un N-porto e viceversa. Per rendersene conto si consideri quanto mostrato, a titolo di esempio, in Figura 1.13.

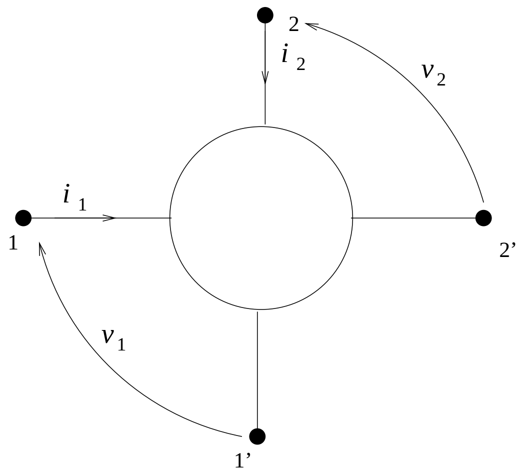

Figura 1.12: Riferimenti delle variabili di porta di un biporto (doppio bipolo) secondo la convenzione degli utilizzatori.

1.7 Teorema di Tellegen

A conclusione dell'argomento si introduce un importante teorema che coinvolge le potenze relative ai componenti di una rete elettrica. Tale teorema si può così enunciare:

> *considerata una rete caratterizzata da N correnti ed N tensioni descrittive tali da soddisfare i vincoli imposti dalle leggi di Kirchhoff e con i versi che rispettino la convenzione degli utilizzatori, deve valere per tale rete che la somma algebrica dei prodotti delle tensioni descrittive per le corrispondenti correnti descrittive è sempre nulla.*

In formula, l'enunciato si può scrivere

$$\sum_{k=1}^{N} v_k i_k = 0. \tag{1.15}$$

Senza entrare nella dimostrazione del teorema, preme solo fare qualche utile osservazione:

1. il teorema di Tellegen si basa unicamente sulle leggi delle correnti e delle tensioni e non pone alcun vincolo sulla natura dei componenti che formano la rete;

2. si richiede che le le variabili descrittive siano compatibili con le leggi di Kirchhoff e non che rappresentino le effettive variabili descrittive della rete. Da questo si evince che per due reti costituite da componenti diversi ma con le medesime interconnessioni, la (1.15) continua a valere anche se le tensioni sono prese dalla soluzione di una delle due reti e le correnti dalla soluzione dell'altra.

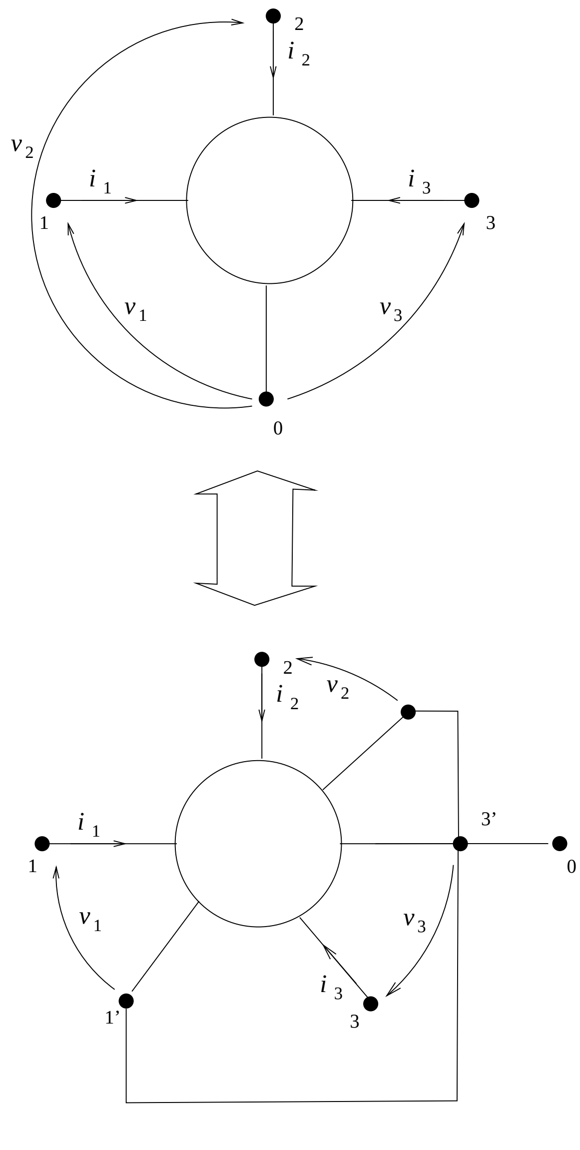

Figura 1.13: $N+1$-polo ed N-porto equivalenti (N=3)

3. Se, in particolare, le tensioni e le correnti che compaiono nella (1.15) sono le variabili descrittive effettive di una rete data, i prodotti $v_k i_k$ rappresentano le potenze assorbite dai componenti e il teorema asserisce pertanto che le potenze complessivamente assorbite da tutti i componenti della rete è nulla (in ossequio al principio di conservazione dell'energia). Nella fattispecie, se indichiamo con K_{gen} l'insieme dei valori del pedice k per i quali il corrispondente componente eroga potenza, la (1.15) si può scrivere

$$-\sum_{k \in K_{gen}} v_k i_k = \sum_{k \notin K_{gen}} v_k i_k \qquad (1.16)$$

la quale ribadisce che la potenza erogata complessivamente dai generatori è tutta e sola quella complessivamente assorbita dai restanti componenti della rete.