M.R. Casali - C. Gagliardi - L. Grasselli

GEOMETRIA

EDIZIONE RIVEDUTA E CORRETTA

PROGETTO LEONARDO
BOLOGNA

▶ **Osservazione 8.18.** Se $\mathcal{B} = (\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k})$ è ortonormale positiva, si ha, come caso particolare della Proposizione 8.16:

$$\mathrm{i}\wedge\mathrm{j} = \mathrm{k}; \quad \mathrm{j}\wedge\mathrm{k} = \mathrm{i}; \quad \mathrm{k}\wedge\mathrm{i} = \mathrm{j}.$$

▶ **Osservazione 8.19.** Si noti che il prodotto vettoriale gode, per ogni $\mathrm{u},\mathrm{v},\mathrm{w} \in \mathrm{V}^3$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, delle seguenti proprietà:

1) $\mathrm{u}\wedge\mathrm{v} = -(\mathrm{v}\wedge\mathrm{u})$;
2) $\mathrm{u}\wedge(\mathrm{v}+\mathrm{w}) = (\mathrm{u}\wedge\mathrm{v}) + (\mathrm{u}\wedge\mathrm{w})$;
3) $\alpha(\mathrm{u}\wedge\mathrm{v}) = (\alpha\mathrm{u})\wedge\mathrm{v} = \mathrm{u}\wedge(\alpha\mathrm{v})$.

♦ **Definizione 8.15.** Dati tre vettori $\mathrm{u},\mathrm{v},\mathrm{w} \in \mathrm{V}^3$, si dice ***prodotto misto*** della terna $(\mathrm{u},\mathrm{v},\mathrm{w})$ di vettori di V^3 il numero reale $< \mathrm{u}, \mathrm{v}\wedge\mathrm{w} >$.

■ **Proposizione 8.17.** *Sia $\mathcal{B} = (\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k})$ una base ordinata ortonormale positiva di $(\mathrm{V}^3,\vec{\mathcal{B}})$. Posto $\mathrm{u} \equiv_{\mathcal{B}} (u^1,u^2,u^3)$, $\mathrm{v} \equiv_{\mathcal{B}} (v^1,v^2,v^3)$ e $\mathrm{w} \equiv_{\mathcal{B}} (w^1,w^2,w^3)$, si ha:*

$$< \mathrm{u}, \mathrm{v}\wedge\mathrm{w} > = \begin{vmatrix} u^1 & v^1 & w^1 \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{vmatrix}.$$

Dimostrazione. Si ottiene subito ricordando la Proposizione 8.16, la Proposizione 8.6 (b) e sviluppando il determinante secondo la prima colonna, mediante il Teorema di Laplace.

□

▶ **Osservazione 8.20.** Il prodotto misto è una applicazione di $\mathrm{V}^3 \times \mathrm{V}^3 \times \mathrm{V}^3$ in $\mathbb{R}$ che gode delle seguenti proprietà:

1) scambiando fra loro due vettori, il prodotto cambia di segno; pertanto, per ogni $\mathrm{u},\mathrm{v},\mathrm{w} \in \mathrm{V}^3$, si ha:

$$< \mathrm{u}, \mathrm{v}\wedge\mathrm{w} > = < \mathrm{w}, \mathrm{u}\wedge\mathrm{v} > = < \mathrm{v}, \mathrm{w}\wedge\mathrm{u} >;$$

2) $< \mathrm{u}, \mathrm{v}\wedge\mathrm{w} > = 0$ se e solo se u, v, w sono linearmente dipendenti.

Esempio 8.19. Ad esempio, se $\mathrm{u} \equiv_{\mathcal{B}} (0,1,0)$, $\mathrm{v} \equiv_{\mathcal{B}} (1,3,0)$, e $\mathrm{w} \equiv_{\mathcal{B}} (0,1,1)$, essendo $\mathcal{B}$ una base ordinata ortonormale positiva, si ha

$$\mathrm{v}\wedge\mathrm{w} \equiv_{\mathcal{B}} \left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right) = (3,-1,1);$$

$$< \mathrm{u}, \mathrm{v}\wedge\mathrm{w} > = < (0,1,0), (3,-1,1) > = -1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

CAPITOLO 9

Spazi euclidei

1. Definizioni ed esempi

Nel presente capitolo, il simbolo $\vec{\mathcal{E}}$ indicherà sempre uno spazio vettoriale euclideo $(\vec{\mathcal{E}}, < \cdot, \cdot >)$.

♦ **Definizione 9.1.** Diremo *spazio euclideo* una terna $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$, costituita da uno spazio vettoriale euclideo $\vec{\mathcal{E}}$, da un insieme $\mathcal{E}$ e da una applicazione $\pi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \vec{\mathcal{E}}$, che associa ad ogni coppia (P,Q) di elementi di $\mathcal{E}$ il vettore $\pi(P,Q) = \overrightarrow{PQ}$, soddisfacente i seguenti assiomi:

(SE1) $\forall A \in \mathcal{E}$, $\forall \mathrm{a} \in \vec{\mathcal{E}}$, esiste uno ed un solo $P \in \mathcal{E}$, tale che $\overrightarrow{AP} = \mathrm{a}$.
(SE2) $\forall P,Q,R \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ (relazione di Chasles [1]).

Si noti che dall'assioma (SE1) segue che l'applicazione π è suriettiva.

L'insieme $\mathcal{E}$ è detto *sostegno* dello spazio euclideo $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ ed i suoi elementi sono detti *punti*. Un elemento (P,Q) di $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ è detto *segmento orientato*, avente P quale *primo estremo* e Q quale *secondo estremo*. Gli elementi di $\vec{\mathcal{E}}$ sono detti *vettori liberi*; il vettore libero nullo sarà indicato con $\vec{0}$. Se $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ è uno spazio euclideo, diremo spesso, per brevità e con abuso di linguaggio, che $\mathcal{E}$ è uno spazio euclideo, avente $\vec{\mathcal{E}}$ quale spazio dei vettori liberi. Si osservi che, in ogni caso, come già visto per gli spazi vettoriali, lo stesso insieme $\mathcal{E}$ può essere sostegno di differenti spazi euclidei.

Quali conseguenze dirette degli assiomi (SE1) ed (SE2), si verificano poi, per ogni spazio euclideo $\mathcal{E}$ e per ogni $Q,R \in \mathcal{E}$, le seguenti proprietà:

(i) $(\overrightarrow{QR} = \vec{0}) \iff (Q = R)$
(ii) $\overrightarrow{QR} = -\overrightarrow{RQ}$.

♦ **Definizione 9.2.** Uno spazio euclideo $\mathcal{E}$ sarà detto di *dimensione finita* se lo spazio dei vettori liberi $\vec{\mathcal{E}}$ ha dimensione finita. In tal caso porremo $\dim \mathcal{E} = \dim \vec{\mathcal{E}}$.

Uno spazio euclideo di dimensione (finita) n sarà solitamente indicato con $\mathcal{E}^n$. Se $\dim \mathcal{E} = 0$, allora $\vec{\mathcal{E}} = \{\vec{0}\}$ e dunque - per la precedente proprietà (i) - $\mathcal{E}^0$ si riduce ad un singolo punto.
Se $\dim \mathcal{E} = 1,2,3$, allora $\mathcal{E}$ è detto rispettivamente *retta euclidea*, *piano euclideo*, *spazio euclideo ordinario*.

[1] *Michel Chasles:* matematico francese (Èpernon, 1793-1880)

♦ **Definizione 9.3.** Se $\mathcal{E}$ è uno spazio euclideo, diremo che due segmenti orientati (P,Q) e (R,S) sono *equipollenti*, e scriveremo $(P,Q) \equiv (R,S)$, se $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$.

La proposizione seguente ci consente di affermare che *il supporto* $\mathbf{V}$ *di ogni spazio vettoriale euclideo è anche supporto di uno spazio euclideo* (avente $\mathbf{V}$ stesso quale spazio dei vettori liberi).

■ **Proposizione 9.1.** *Se* $(\mathbf{V}, <\cdot,\cdot>)$ *è uno spazio vettoriale euclideo e se si pone* $\vec{\mathbf{V}} = \mathbf{V}$ *e*

$$\tau : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$$
$$(\mathbf{v},\mathbf{w}) \to \overrightarrow{\mathbf{vw}} = \mathbf{w} - \mathbf{v}$$

allora la terna $\mathcal{E}(\mathbf{V}) = (\mathbf{V},\mathbf{V},\tau)$ *è uno spazio euclideo.*

Lo spazio euclideo $\mathcal{E}(\mathbf{V}) = (\mathbf{V},\mathbf{V},\tau)$ si dice *associato* allo spazio vettoriale euclideo $(\mathbf{V}, <\cdot,\cdot>)$.

► **Osservazione 9.1.** In realtà, è possibile costruire una teoria analoga a quella esposta nel presente paragrafo, sostituendo lo spazio vettoriale euclideo $\vec{\mathcal{E}}$ con un generico spazio vettoriale $\vec{\mathcal{A}}$ su di un campo $\mathbb{K}$: lo spazio $(\vec{\mathcal{A}}, \mathcal{A}, \pi)$ che ne deriva in base alla Definizione 9.1 si dice *spazio affine* su $\mathbb{K}$. In pratica, quindi, uno spazio euclideo può essere considerato come uno spazio affine su $\mathbb{R}$, il cui spazio dei vettori liberi è dotato di un prodotto scalare. Si noti che le nozioni introdotte nei successivi § 2, 3, 4, 5 possono essere introdotte, con le dovute modifiche, anche nel caso di uno spazio affine su $\mathbb{K}$, mentre le nozioni relative ai § 6, 7, 8, 9, 10 necessitano della presenza di un prodotto scalare definito sullo spazio dei vettori liberi, e pertanto possono essere introdotte esclusivamente nell'ambito degli spazi euclidei.

Esempio 9.1. (Lo spazio euclideo elementare) Sia $\mathcal{F}$ lo "spazio euclideo elementare". Fissato un punto $O \in \mathcal{F}$, sia $(\mathcal{F}(O), <\cdot,\cdot>)$ lo spazio vettoriale euclideo considerato nell'Esempio 8.5, avente come sostegno l'insieme

$$\mathcal{F}(O) = \{(O,P) \mid P \in \mathcal{F}\}$$

ed il cui prodotto scalare è definito mediante

$$<(O,P),(O,Q)> = d(O,P) \cdot d(O,Q) \cdot \cos(\widehat{POQ})$$

Se $\pi : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}(O)$ è l'applicazione che ad ogni coppia (R,S) associa l'unico vettore applicato in O che ha la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso del segmento orientato (R,S), allora è immediato verificare che la terna $(\mathcal{F}(O), \mathcal{F}, \pi)$ verifica gli assiomi (SE1) ed (SE2); $\mathcal{F}$ risulta pertanto uno spazio euclideo di dimensione tre.

Esempio 9.2. (Lo spazio euclideo standard $\mathbb{R}^n$) Se, nella Proposizione 9.1, si considera $(\mathbf{V}, <\cdot,\cdot>) = (\mathbb{R}^n, <\cdot,\cdot>)$, spazio vettoriale euclideo standard n-dimensionale, allora lo spazio euclideo associato sarà detto *spazio euclideo standard di dimensione n* e sarà indicato con $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ o, più semplicemente, ancora con $\mathbb{R}^n$.

---

2. Sistemi di riferimento

Nel presente paragrafo, $\mathcal{E}^n$ indicherà sempre uno spazio euclideo di dimensione finita $n > 0$.

♦ **Definizione 9.4.** Diremo *riferimento cartesiano* su $\mathcal{E}^n$ una coppia $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$, dove O è un punto di $\mathcal{E}^n$, detto *origine del riferimento* $\mathcal{R}$ e $\vec{\mathcal{B}}$ è una base ordinata ortonormale dello spazio vettoriale euclideo $(\vec{\mathcal{E}^n}, <\cdot,\cdot>)$.

Dato un punto $P \in \mathcal{E}^n$, si dicono *coordinate cartesiane (non omogenee)* di P, rispetto ad $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$, le componenti del vettore libero $\overrightarrow{OP}$ rispetto alla base $\vec{\mathcal{B}}$.
Se $\vec{\mathcal{B}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ e $\overrightarrow{OP} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + \dots + x^n\mathbf{e}_n$, scriveremo $P \equiv_{\mathcal{R}} (x^1, x^2, \dots, x^n)$ per indicare la n-pla delle coordinate cartesiane di P, rispetto ad $\mathcal{R}$.
Si ha, evidentemente, $O \equiv_{\mathcal{R}} (0,0,\dots,0)$.
Si osservi che l'assioma (SE1) implica, per ogni $i \in \mathbb{N}_n$, l'esistenza di un unico punto $P_i \in \mathcal{E}^n$ tale che $\mathbf{e}_i = \overrightarrow{OP_i}$. Si ha inoltre $P_i \equiv_{\mathcal{R}} (0,0,\dots,0,\underset{i}{1},0,\dots,0)$.

Esempio 9.3. Sia $\mathcal{F}$ lo spazio euclideo elementare dell'Esempio 9.1. Un riferimento cartesiano su $\mathcal{F}$ è una coppia $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$, dove $O \in \mathcal{F}$ e $\vec{\mathcal{B}}$ è una base ordinata ortonormale dello spazio vettoriale euclideo $\mathcal{F}(O)$. Pertanto, $\vec{\mathcal{B}}$ risulta costituita da una terna (linearmente indipendente) di versori applicati in O (O,P_1), (O,P_2), (O,P_3) a due a due ortogonali.

Esempio 9.4. (Riferimento cartesiano naturale su $\mathbb{R}^n$) Se $\mathbb{R}^n$ è lo spazio euclideo standard di dimensione n (Esempio 9.2), allora il riferimento cartesiano $\tilde{\mathcal{R}} = (O, \tilde{\mathcal{B}})$, dove $O = (0,0,\dots,0)$ e $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e_1}, \tilde{e_2}, \dots, \tilde{e_n})$ è la base naturale (ortonormale) dello spazio vettoriale euclideo standard $\vec{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n$ (Esempio 8.1), è detto *riferimento cartesiano naturale su* $\mathbb{R}^n$. Se $P = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, allora evidentemente $\overrightarrow{OP} = P - O = x^1\tilde{e_1} + x^2\tilde{e_2} + \dots + x^n\tilde{e_n}$, per cui $P \equiv_{\tilde{\mathcal{R}}} (x^1, x^2, \dots, x^n)$.

Esempio 9.5. Se $\mathbb{R}^2$ è il piano euclideo standard, $O' = (-1,4)$, $\vec{\mathcal{B}} = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$, allora $\mathcal{R} = (O', \vec{\mathcal{B}})$ è un riferimento cartesiano su $\mathbb{R}^2$. Se $P = (1,2) \in \mathbb{R}^2$, allora

$$\overrightarrow{O'P} = (1,2) - (-1,4) = (2,-2) = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Pertanto, $P \equiv_{\mathcal{R}} (2\sqrt{2}, 0)$.

■ **Proposizione 9.2.** *Sia* $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$ *un riferimento cartesiano su* $\mathcal{E}^n$ *e siano* $P \equiv_{\mathcal{R}} (x_P^1, x_P^2, \dots, x_P^n)$, $Q \equiv_{\mathcal{R}} (x_Q^1, x_Q^2, \dots, x_Q^n)$ *punti di* $\mathcal{E}^n$.
Allora, $\overrightarrow{PQ} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (x_Q^1 - x_P^1, x_Q^2 - x_P^2, \dots, x_Q^n - x_P^n)$.

Dimostrazione. Posto $\vec{\mathcal{B}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$, si ha, per definizione:

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{n} x_P^i \mathbf{e}_i; \qquad \overrightarrow{OQ} = \sum_{i=1}^{n} x_Q^i \mathbf{e}_i.$$

Per la relazione di Chasles si ottiene:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{n} (x_Q^i - x_P^i)\, \mathbf{e}_i.$$

Ciò prova l'asserto. □

È poi immediato verificare che, se $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$ è un riferimento cartesiano su $\mathcal{E}^n$, l'applicazione $\phi_{\mathcal{R}}$ che ad ogni punto $P \equiv_{\mathcal{R}} (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathcal{E}^n$ associa $\phi_{\mathcal{R}}(P) = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ è una biiezione; tale biiezione è detta *sistema di coordinate cartesiane* relativo al riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$.

Supponiamo ora che $\mathcal{R}' = (O', \vec{\mathcal{B}}')$ ed $\mathcal{R}'' = (O'', \vec{\mathcal{B}}'')$ siano due riferimenti cartesiani su $\mathcal{E}^n$. La proposizione seguente permette di ricavare la n-pla delle coordinate cartesiane di un punto $P \in \mathcal{E}^n$ rispetto ad $\mathcal{R}''$ quando sia nota la n-pla delle sue coordinate cartesiane rispetto ad $\mathcal{R}'$.

■ **Proposizione 9.3.** *Se $P \equiv_{\mathcal{R}'} (x^1, x^2, \dots, x^n)$ e $P \equiv_{\mathcal{R}''} (y^1, y^2, \dots, y^n)$, allora si ha*

$$(*) \qquad (y) = E(x) + (b)$$

dove $E \in O_n(\mathbb{R})$ è la matrice delle componenti della base $\vec{\mathcal{B}}'$ rispetto a $\vec{\mathcal{B}}''$, e $(b) \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ è la colonna delle coordinate cartesiane del punto O' rispetto al riferimento $\mathcal{R}''$.

Dimostrazione. Per la relazione di Chasles, si ha:

$$\overrightarrow{O''P} = \overrightarrow{O''O'} + \overrightarrow{O'P}.$$

Questa uguaglianza tra vettori liberi, espressa in termini di componenti rispetto alla base $\vec{\mathcal{B}}''$, diventa:

$$(y) = (b) + (x'),$$

dove (x') denota la colonna delle componenti del vettore libero $\overrightarrow{O'P}$ rispetto alla base $\vec{\mathcal{B}}''$. Poichè la colonna (x) delle coordinate cartesiane del punto P rispetto al riferimento $\mathcal{R}'$ coincide con la colonna delle componenti del vettore libero $\overrightarrow{O'P}$ rispetto alla base $\vec{\mathcal{B}}'$, le equazioni del cambiamento di base da $\vec{\mathcal{B}}'$ a $\vec{\mathcal{B}}''$ sono esattamente

$$(x') = E(x);$$

la tesi segue quindi direttamente, sostituendo questa relazione nella uguaglianza precedente. □

Le equazioni (*) vengono dette *equazioni del cambiamento di riferimento cartesiano da $\mathcal{R}'$ ad $\mathcal{R}''$.*

► **Osservazione 9.2.** Le equazioni del cambiamento di riferimento inverso da $\mathcal{R}''$ a $\mathcal{R}'$ sono evidentemente

$$(x) = E^{-1}(y) - E^{-1}(b) = E^{-1}(y - b) = {}^tE(y - b),$$

come è facile verificare, moltiplicando a sinistra per $E^{-1} = {}^tE$ (si ricordi che E è ortogonale) le equazioni (*).

Esempio 9.6. Nel piano euclideo standard $\mathbb{R}^2$, si considerino il riferimento cartesiano $\mathcal{R}' = (O', \vec{\mathcal{B}}')$, dove $O' = (-1, 4)$ e $\vec{\mathcal{B}}' = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$ (si veda l'Esempio 9.5), ed il riferimento cartesiano $\mathcal{R}'' = (O'', \vec{\mathcal{B}}'')$, dove $O'' = (0,0)$ e $\vec{\mathcal{B}}'' = ((1,0),(0,1))$. La matrice delle componenti di $\vec{\mathcal{B}}'$ rispetto a $\vec{\mathcal{B}}''$ è

$$E = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix};$$

inoltre, $O' \equiv_{\mathcal{R}''} (-1, 4)$. Pertanto, se $P \equiv_{\mathcal{R}'} (x^1, x^2)$ e $P \equiv_{\mathcal{R}''} (y^1, y^2)$, allora le equazioni (*) del cambiamento di riferimento cartesiano da $\mathcal{R}'$ ad $\mathcal{R}''$ sono:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

cioè

$$\begin{cases} y^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x^1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 - 1 \\ y^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x^1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 + 4 \end{cases}.$$

Essendo

$$E^{-1} = {}^tE = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad \text{ed} \qquad E^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

le equazioni del cambiamento di riferimento inverso da $\mathcal{R}''$ a $\mathcal{R}'$ sono

$$\begin{cases} x^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y^1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y^2 + \frac{5}{\sqrt{2}} \\ x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y^1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y^2 - \frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Utilizzando tali equazioni, si ha che, se $P \equiv_{\mathcal{R}''} (1,2)$, allora $P \equiv_{\mathcal{R}'} (2\sqrt{2}, 0)$, come già provato direttamente nell'Esempio 9.5.

---

3. Sottospazi euclidei

Sia $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ uno spazio euclideo, $P \in \mathcal{E}$ un suo punto ed $\mathbf{X} \subseteq \vec{\mathcal{E}}$ un sottoinsieme del suo spazio dei vettori liberi; poniamo

$$(P, \mathbf{X}) = \{Q \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{PQ} \in \mathbf{X}\}$$

♦ **Definizione 9.5.** Un sottoinsieme $\mathcal{H}$ di $\mathcal{E}$ si dice *sottospazio euclideo* dello spazio euclideo $\mathcal{E}$ se esistono un punto $P \in \mathcal{E}$ ed un sottospazio vettoriale (euclideo) $\mathbf{U}$ di $\vec{\mathcal{E}}$ tale che $\mathcal{H} = (P, \mathbf{U})$.

Dalla definizione 9.5 e dagli assiomi (SE1), (SE2) discendono le seguenti proprietà:

- Se $\mathcal{H} = (P, \mathbf{U})$ è un sottospazio euclideo di $\mathcal{E}$, allora $P \in \mathcal{H}$.
- Se $\mathcal{H} = (P, \mathbf{U})$ è un sottospazio euclideo di $\mathcal{E}$, allora $\mathbf{U} = \{\overrightarrow{PQ} \in \vec{\mathcal{E}} \mid P, Q \in \mathcal{H}\}$; tale sottospazio vettoriale viene detto *giacitura* di $\mathcal{H}$, e viene usualmente indicato con $\vec{\mathcal{H}}$.
- Ogni sottospazio euclideo è univocamente determinato dalla sua giacitura e da uno qualunque dei suoi punti.
- Se $\mathcal{H} = (P, \vec{\mathcal{H}})$ è un sottospazio euclideo di $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$, allora la terna $(\vec{\mathcal{H}}, \mathcal{H}, \pi_|)$ è a sua volta uno spazio euclideo, ove $\pi_| : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \vec{\mathcal{H}}$ è la applicazione ottenuta per restrizione dalla applicazione $\pi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \vec{\mathcal{E}}$.

Si noti che ***l'intersezione di sottospazi euclidei è ancora un sottospazio euclideo.***
I sottospazi euclidei di dimensione 0 sono i punti di $\mathcal{E}$, mentre i sottospazi euclidei di dimensione 1 e 2 sono detti rispettivamente *rette* e *piani (euclidei)* di $\mathcal{E}$. La giacitura di una retta è anche detta *direzione.*
Se $\mathcal{E}^n$ è uno spazio euclideo di dimensione finita n, quale conseguenza immediata della Proposizione 4.15, si ha che *un sottospazio euclideo $\mathcal{H}$ di $\mathcal{E}$ ha dimensione finita* $h \leq n$; inoltre, $\mathcal{H} = \mathcal{E}$ se e solo se $h = n$.
I sottospazi euclidei di dimensione $n-1$ sono detti *iperpiani (euclidei)* di $\mathcal{E}^n$.

▶ **Osservazione 9.3.** Sia $(\mathbf{V}, < \cdot, \cdot >)$ uno spazio vettoriale euclideo ed $\mathcal{E}(\mathbf{V}) = (\mathbf{V}, \mathbf{V}, \tau)$ lo spazio euclideo ad esso associato. Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ ed $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, allora

$$(\mathbf{a}, \mathbf{U}) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \mid \mathbf{v} - \mathbf{a} \in \mathbf{U}\} = \mathbf{a} + \mathbf{U}.$$

Quindi, *i sottospazi euclidei di $\mathcal{E}(\mathbf{V})$ si ottengono "per traslazione" (si veda l'Osservazione 6.5) dei sottospazi vettoriali di* $\mathbf{V}$.

Introduciamo ora la nozione di *indipendenza affine di punti*, che permette di parlare di *punti che generano un sottospazio euclideo.*

♦ **Definizione 9.6.** Una $(h+1)$-pla $(P_0, P_1, \ldots, P_h)$ di punti di $\mathcal{E}$, con $h > 0$, è detta *affinemente indipendente* se la h-pla di vettori liberi $(\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_h})$ è linearmente indipendente in $\vec{\mathcal{E}}$. In caso contrario, si dice che $(P_0, P_1, \ldots, P_h)$ è *affinemente dipendente.*

E' facile verificare che, se una $(h+1)$-pla di punti è affinemente indipendente, allora risultano affinemente indipendenti anche tutte le $(h+1)$-ple da essa ottenute permutandone le componenti in tutti i modi possibili. Ciò giustifica la locuzione *"i punti $P_0, P_1, \ldots, P_h$ sono affinemente indipendenti (risp. dipendenti)"*, che verrà spesso usata come sinonimo di *"la $(h+1)$-pla $(P_0, P_1, \ldots, P_h)$ è affinemente indipendente (risp. dipendente)".*

▶ **Osservazione 9.4.** Quale immediata conseguenza del Teorema 4.11 (a) e della Definizione 9.6, *il massimo numero di punti affinemente indipendenti di uno spazio euclideo di dimensione finita n è $n+1$.*

La proposizione seguente permette di affermare che ogni sottospazio euclideo di dimensione finita h è univocamente determinato da $h+1$ suoi punti affinemente indipendenti.

■ **Proposizione 9.4.** *Dati $h+1$ punti affinemente indipendenti $P_0, P_1, \ldots, P_h$ di $\mathcal{E}$, esiste uno ed un solo sottospazio euclideo h-dimensionale $\mathcal{H}^h$ di $\mathcal{E}$ che li contiene.*

Dimostrazione. Poichè i punti $P_0, P_1, \ldots, P_h$ sono affinemente indipendenti, i vettori liberi $\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_h}$ sono linearmente indipendenti, ed individuano dunque un sottospazio vettoriale h-dimensionale $\mathbf{W}^h = \mathrm{L}(\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_h})$ di $\vec{\mathcal{E}}$. Il sottospazio euclideo $\mathcal{H}^h = (P_0, \mathbf{W}^h)$, individuato dal punto P_0 e dal sottospazio vettoriale $\mathbf{W}^h$, per definizione ha dimensione h e contiene i punti $P_0, P_1, \ldots, P_h$; inoltre, ogni altro sottospazio euclideo h-dimensionale contenente $P_0, P_1, \ldots, P_h$ ha come giacitura $\mathbf{W}^h$ e quindi coincide con $\mathcal{H}^h$ (si ricordi che ogni sottospazio euclideo è univocamente determinato dalla sua giacitura e da uno qualunque dei suoi punti).

□

Il sottospazio $\mathcal{H}^h$ si dirà *generato dagli $h+1$ punti $P_0, P_1, \ldots, P_h$* o anche *passante per* $P_0, P_1, \ldots, P_h$.

Concludiamo il paragrafo introducendo la nozione di *parallelismo* tra sottospazi euclidei di uno spazio euclideo $\mathcal{E}$.

♦ **Definizione 9.7.** Due sottospazi euclidei $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ di $\mathcal{E}$ si dicono *paralleli*, e si indica $\mathcal{H}//\mathcal{K}$, se $\vec{\mathcal{H}} \subseteq \vec{\mathcal{K}}$ o $\vec{\mathcal{K}} \subseteq \vec{\mathcal{H}}$.

Si noti che, se $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ sono entrambi sottospazi di dimensione finita h, allora $\mathcal{H}//\mathcal{K}$ se e solo se $\vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{K}}$. Inoltre è bene osservare che, in base alla Definizione 9.7, la nozione di parallelismo non esclude la possibilità che i sottospazi in questione abbiano punti in comune; anzi, è facile verificare che, se $dim(\mathcal{H}) < dim(\mathcal{K})$ (risp. $dim(\mathcal{H}) = dim(\mathcal{K})$), allora $(\mathcal{H}//\mathcal{K}$ e $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} \neq \emptyset) \Rightarrow \mathcal{H} \subset \mathcal{K}$ (risp. $\mathcal{H} = \mathcal{K}$).
In generale, detti *incidenti* (risp. *sghembi*) due sottospazi euclidei che hanno almeno un punto in comune (risp. che non sono nè paralleli nè incidenti), le possibili mutue posizioni di due sottospazi euclidei $\mathcal{H}^h$ e $\mathcal{K}^k$ di $\mathcal{E}$ (con $h \leq k$) sono:

(I) *paralleli ed incidenti* (nel qual caso $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{K}$)
(II) *paralleli e disgiunti*
(III) *incidenti e non paralleli*
(IV) *sghembi*

Si noti però che, a seconda delle situazioni, il numero delle mutue posizioni effettivamente possibili può anche essere inferiore a quattro: ad esempio (come si vedrà nei successivi § 1 dei Capitoli 10 e 11), due rette del piano euclideo non possono mai essere sghembe, così come due piani (o una retta ed un piano) dello spazio euclideo di dimensione tre.

■ **Teorema 9.5.** *Dati comunque un sottospazio euclideo h-dimensionale $\mathcal{H}^h$ di $\mathcal{E}$ ed un punto $P \in \mathcal{E}$, esiste uno ed un solo sottospazio euclideo h-dimensionale $\mathcal{K}^h$ di $\mathcal{E}$, contenente P e parallelo a $\mathcal{H}^h$.*

Dimostrazione. Basta porre $\mathcal{K}^h = (P, \vec{\mathcal{H}^h})$.

□

► **Osservazione 9.5.** Per $h = 1$, il Teorema 9.5 è una riformulazione del famoso *postulato delle parallele*, noto anche come V° postulato di Euclide, che risulta pertanto, nell'ambito della presente teoria, una conseguenza degli assiomi usati per definire gli spazi euclidei.
Il postulato delle parallele fa parte del sistema di assiomi usato da Euclide negli "Elementi", al fine di costruire una teoria deduttiva atta a descrivere le proprietà geometriche del "piano" e dello "spazio fisico" in cui viviamo, ormai noti come *piano* e *spazio euclideo*.
Tale postulato apparve immediatamente poco "autoevidente" già ai più antichi commentatori del trattato euclideo, che tentarono invano di dedurlo dagli altri postulati. Allo scopo di provare la verità del V postulato, Saccheri [2] ebbe la geniale idea di sostituire tale postulato con la sua negazione, sperando di dedurne una conseguenza manifestamente assurda. Pur senza giungere in fondo al problema, tale lavoro lasciava intravedere la possibilità di costruire sistemi geometrici coerenti, basati su principi contrari al V postulato stesso: Saccheri fu dunque, suo malgrado, un precursore delle cosiddette "geometrie non euclidee", che vennero successivamente elaborate - in modo indipendente, non senza reciproche polemiche - da Bolyai [3], Gauss [4] e Lobacevskij [5].
In particolare, sostituendo il postulato delle parallele con l'ipotesi che per un punto esterno ad una retta data non si possa tracciare alcuna retta (risp. si possa tracciare più di una retta) ad essa parallela, si ottiene la *geometria ellittica* (risp. la *geometria iperbolica*).

4. Rappresentazioni di sottospazi euclidei

Nel presente paragrafo, consideremo solo sottospazi di uno spazio euclideo $\mathcal{E}^n$ di dimensione finita n; $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$ indicherà un fissato riferimento cartesiano su $\mathcal{E}^n$.
In perfetta analogia a quanto fatto per i sottospazi di uno spazio vettoriale V^n (§ 3 del Capitolo 6), ci poniamo il problema di rappresentare tramite equazioni (sia di tipo cartesiano che di tipo parametrico) i sottospazi euclidei, ovvero di trovare delle "condizioni" sulle coordinate cartesiane dei punti rispetto al riferimento fissato, che siano verificate da tutti e soli i punti che appartengono al sottospazio considerato.

[2] Fra Girolamo Saccheri: matematico italiano (Sanremo, 1667 - Milano, 1733).
[3] Janos Bolyai: matematico ungherese (Kolzvar, 1802 - Marosvarhely, 1860)
[4] Karl Friedrich Gauss: matematico, fisico e astronomo tedesco (Brunswick, 1777 - Gottinga, 1855)
[5] Nikolay Ivanovic Lobacevskij: matematico russo (Makarev, 1793 - Kazan, 1856)

■ **Teorema 9.6.** *Fissato in $\mathcal{E}^n$ un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$, ogni sottospazio euclideo h-dimensionale $\mathcal{H}^h$ di $\mathcal{E}^n$ può essere rappresentato, relativamente ad $\mathcal{R}$, da un sistema lineare minimo di $n - h$ equazioni in n incognite S; inoltre, il sistema lineare omogeneo S_0 associato ad S rappresenta, relativamente alla base $\vec{\mathcal{B}}$, la giacitura $\vec{\mathcal{H}^h}$ di $\mathcal{H}^H$.*

Dimostrazione. Siano $P_0 \equiv_{\mathcal{R}} (x_0^1, \dots, x_0^n), \dots, P_h \equiv_{\mathcal{R}} (x_h^1, \dots, x_h^n)$ $h+1$ punti affinemente indipendenti di $\mathcal{H}^h$. Per definizione, ciò equivale a dire che i vettori liberi

$$\overrightarrow{P_0P_1} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (x_1^1 - x_0^1, \dots, x_1^n - x_0^n), \dots, \overrightarrow{P_0P_h} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (x_h^1 - x_0^1, \dots, x_h^n - x_0^n)$$

sono linearmente indipendenti, e costituiscono dunque una base per $\vec{\mathcal{H}^h}$. Un generico punto $P \equiv_{\mathcal{R}} (x^1, \dots, x^n)$ di $\mathcal{E}^n$ appartiene ad $\mathcal{H}^h$ se e solo se il vettore libero $\overrightarrow{P_0P} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (x^1 - x_0^1, \dots, x^n - x_0^n)$ appartiene ad $\vec{\mathcal{H}^h} = \mathbf{L}(\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_h})$. Ma ciò equivale a richiedere che la $(h+1)$-pla $(\overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_h})$ sia linearmente dipendente e cioè che la matrice

$$M = \begin{pmatrix} x^1 - x_0^1 & x_1^1 - x_0^1 & \dots & x_h^1 - x_0^1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x^n - x_0^n & x_1^n - x_0^n & \dots & x_h^n - x_0^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times(h+1)}(\mathbb{R})$$

abbia rango h.
Poichè le ultime h colonne sono per ipotesi linearmente indipendenti, al loro interno esiste sicuramente un minore $\bar{M}$ di ordine h con determinante non nullo; la condizione che $P \in \mathcal{H}^h$ equivale dunque - per il Teorema di Kronecker - all'annullarsi dei determinanti di tutti gli $n - h$ minori orlati $M_{h+1}, \dots, M_n$ di $\bar{M}$ in M. Si ottiene così un sistema lineare minimo (non più necessariamente omogeneo) di $n - h$ equazioni in n incognite, che rappresenta $\mathcal{H}^h$:

$$\begin{cases} \det M_{h+1} & = 0 \\ \quad\vdots & \vdots \\ \det M_n & = 0. \end{cases}$$

E' poi immediato verificare, a partire dalla precedente matrice M, che il sistema lineare omogeneo associato coincide con la rappresentazione cartesiana della giacitura $\vec{\mathcal{H}^h}$ di $\mathcal{H}^h$, ottenuta a partire dalla sua base $\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_h}$ (si veda la dimostrazione del Teorema 6.10).

□

Posto $S = (A, -b)$, si avrà quindi che

$$\mathcal{H}^h = \{P \equiv_{\mathcal{R}} (x^1, \dots, x^n) \mid A \cdot (x) + (b) = (0)\};$$

le equazioni $A \cdot (x) + (b) = (0)$ si diranno *equazioni cartesiane* del sottospazio $\mathcal{H}^h$ (relative ad $\mathcal{R}$).
In realtà, non è difficile verificare che il Teorema 9.6 può essere invertito, ovvero che *ogni sistema lineare possibile di rango $n - h$ in n incognite rappresenta, relativamente ad un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$, un sottospazio euclideo h-dimensionale $\mathcal{H}^h$ di $\mathcal{E}^n$.*

▶ **Osservazione 9.6.** Ponendo $h = n-1$ nel Teorema 9.6, si ottiene in particolare che *ogni iperpiano* $\mathcal{E}^{n-1}$ *di* $\mathcal{E}^n$ *può essere rappresentato da una equazione lineare in* n *incognite (e rango 1)*:

$$a_1x^1 + \cdots + a_nx^n + b = 0 \qquad \text{con} \qquad (a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0).$$

Esempio 9.7. Se $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}} = (\overrightarrow{OP_1}, \ldots, \overrightarrow{OP_n}))$ è un riferimento cartesiano su $\mathcal{E}^n$, si dice *i-esimo iperpiano coordinato* relativo ad $\mathcal{R}$ ($i \in \mathbb{N}_n$) l'iperpiano euclideo $\pi_i = \pi_i(\mathcal{R})$ di $\mathcal{E}^n$ generato dagli n punti affinemente indipendenti $O, P_1, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_n$.
Poichè $O \equiv_{\mathcal{R}} (0, \ldots, 0)$ e, per ogni $i \in \mathbb{N}_n$, $P_i \equiv_{\mathcal{R}} (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, O)$, l'iperpiano coordinato π_i è rappresentato, relativamente ad $\mathcal{R}$, dalla equazione $x_i = 0$.
Si osservi che l'intersezione degli n iperpiani coordinati è l'origine O di $\mathcal{R}$.

Notiamo ora che - come già osservato nel corso della dimostrazione del Teorema 9.6 - se il sottospazio euclideo $\mathcal{H}^h$ è generato dai punti affinemente indipendenti $P_0 \equiv_{\mathcal{R}} (x_0^1, \ldots, x_0^n)$, $P_1 \equiv_{\mathcal{R}} (x_1^1, \ldots, x_1^n)$, ..., $P_h \equiv_{\mathcal{R}} (x_h^1, \ldots, x_h^n)$, allora un punto generico $P \equiv_{\mathcal{R}} (x^1, \ldots, x^n)$ appartiene ad $\mathcal{H}^h$ se e soltanto se $\overrightarrow{P_0P} \in \mathbf{L}(\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_h})$; ciò equivale ovviamente alla esistenza di h scalari $t^1, \ldots, t^h \in \mathbb{R}$ tali che $\overrightarrow{P_0P} = t^1\overrightarrow{P_0P_1} + \cdots + t^h\overrightarrow{P_0P_h}$.
Pertanto, tutti e soli i punti $P \in \mathcal{H}^h$ ammettono, rispetto ad $\mathcal{R}$, coordinate $(x^1, \ldots, x^n)$ che si ottengono, al variare dei parametri $t^1, \ldots, t^h \in \mathbb{R}$, da:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \ldots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \ldots \\ x_0^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^1 - x_0^1 \\ \ldots \\ x_1^n - x_0^n \end{pmatrix} \cdot t^1 + \cdots \begin{pmatrix} x_h^1 - x_0^1 \\ \ldots \\ x_h^n - x_0^n \end{pmatrix} \cdot t^h.$$

Le corrispondenti equazioni

$$\begin{cases} x^1 &= x_0^1 + t^1(x_1^1 - x_0^1) + \cdots + t^h(x_h^1 - x_0^1) \\ \vdots & \quad \vdots \\ x^n &= x_0^n + t^1(x_1^n - x_0^n) + \cdots + t^h(x_h^n - x_0^n) \end{cases} \qquad (t^1, \ldots, t^h \in \mathbb{R})$$

vengono dette *equazioni parametriche* del sottospazio $\mathcal{H}^h$ (relativamente ad $\mathcal{R}$).

Esempio 9.8. Se $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}} = (\overrightarrow{OP_1}, \ldots, \overrightarrow{OP_n}))$ è un riferimento cartesiano su $\mathcal{E}^n$, si dice *i-esimo asse coordinato*, o *asse* x_i, relativo ad $\mathcal{R}$ ($i \in \mathbb{N}_n$) la retta generata dai due punti O, P_i.
Le equazioni parametriche dell'asse x_i, rispetto ad $\mathcal{R}$, sono:

$$\begin{cases} x^i &= t \\ x^j &= 0 \quad \forall j \neq i \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

▶ **Osservazione 9.7.** Come già visto per gli spazi vettoriali, le rappresentazioni cartesiane e parametriche dei sottospazi euclidei di $\mathcal{E}^n$ *non sono uniche.*

5. Condizioni di parallelismo

Nel presente paragrafo, il simbolo $\mathcal{E}^n$ indicherà sempre uno spazio euclideo di dimensione finita n.

♦ **Definizione 9.8.** Sia $\mathcal{E}^1$ una retta euclidea di $\mathcal{E}^n$ e sia $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$ un fissato riferimento cartesiano su $\mathcal{E}^n$. Se $\mathrm{l} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (l^1, \ldots, l^n)$ è un vettore libero *non nullo* della giacitura $\vec{\mathcal{E}^1}$, diremo che $(l^1, \ldots, l^n) \in \mathbb{R}^n$ è una *n-pla di coefficienti* (o *numeri* o *parametri*) *direttori* della retta $\mathcal{E}^1$, relativi al riferimento $\mathcal{R}$.

In altre parole, ricordando la Proposizione 9.2, una n-pla di coefficienti direttori della retta $\mathcal{E}^1$ si ottiene considerando due punti distinti $P \equiv_{\mathcal{R}} (x_P^1, x_P^2, \ldots, x_P^n)$ e $Q \equiv_{\mathcal{R}} (x_Q^1, x_Q^2, \ldots, x_Q^n)$ di $\mathcal{E}^1$ e ponendo

$$\mathrm{l} = \overrightarrow{PQ} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (x_Q^1 - x_P^1, x_Q^2 - x_P^2, \ldots, x_Q^n - x_P^n).$$

Si noti che, per definizione, una qualunque n-pla di coefficienti direttori di $\mathcal{E}^1$ è diversa dalla n-pla nulla.

■ **Proposizione 9.7.** *Sia $\mathcal{E}^1$ una retta di $\mathcal{E}^n$ e sia $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$ un fissato riferimento cartesiano su $\mathcal{E}^n$. Si ha allora:*

(a) *Due qualunque n-ple di coefficienti direttori di $\mathcal{E}^1$ (relative ad $\mathcal{R}$) sono proporzionali.*

(b) *Se $\mathcal{E}^1$ ha (rispetto ad $\mathcal{R}$) equazioni parametriche*

$$x^i = x_0^i + l^i \cdot t, \qquad i \in \mathbb{N}_n$$

allora la n-pla $(l^1, \ldots, l^n)$ dei coefficienti del parametro t è una n-pla di coefficienti direttori di $\mathcal{E}^1$ (relativi ad $\mathcal{R}$).

(c) *Se $\mathcal{E}^1$ ha (rispetto ad $\mathcal{R}$) equazioni cartesiane*

$$A(x) + (b) = (0) \qquad \text{con } A \in M_{(n-1)\times n}(\mathbb{R}) \text{ e } \varrho(A) = n-1,$$

allora ogni soluzione non nulla del sistema omogeneo $A(x) = (0)$ è una n-pla di coefficienti direttori di $\mathcal{E}^1$ (relativi ad $\mathcal{R}$).

Dimostrazione. (a) Se $\mathrm{l} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (l^1, \ldots, l^n)$, $\mathrm{m} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (m^1, \ldots, m^n)$ sono due vettori liberi non nulli di $\vec{\mathcal{E}^1}$, allora evidentemente $\mathrm{m} \in \vec{\mathcal{E}^1} = \mathbf{L}(\mathrm{l})$. Ciò prova che esiste $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che

$$(m^1, \ldots, m^n) = \lambda \cdot (l^1, \ldots, l^n).$$

(b) Se $\mathcal{E}^1$ ha - rispetto ad $\mathcal{R}$ - equazioni parametriche $x^i = x_0^i + l^i \cdot t$, $i \in \mathbb{N}_n$, i punti $P_0 \equiv_{\mathcal{R}} (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$ e $P_1 \equiv_{\mathcal{R}} (l^1 + x_0^1, l^2 + x_0^2, \ldots, l^n + x_0^n)$ sono distinti e appartengono ad $\mathcal{E}^1$. Quindi, il vettore libero $\overrightarrow{P_0P_1} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (l^1, l^2, \ldots, l^n)$ appartiene ad $\vec{\mathcal{E}^1}$. Ciò prova che $(l^1, l^2, \ldots, l^n)$ è una n-pla di coefficienti direttori di $\mathcal{E}^1$.
(c) Basta ricordare che il vettore libero $\mathrm{l} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (l^1, l^2, \ldots, l^n)$ appartiene alla giacitura della retta $\mathcal{E}^1$ se e solo se $(l^1, l^2, \ldots, l^n)$ è soluzione del sistema lineare omogeneo $A \cdot (x) = (0)$ che rappresenta $\vec{\mathcal{E}^1}$ (Teorema 9.6).

□

▶ **Osservazione 9.8.** Se la retta $\mathcal{E}^1$ ha (rispetto ad $\mathcal{R}$) equazioni parametriche

$$x^i = x_0^i + l^i \cdot t, \qquad i \in \mathbb{N}_n$$

e se *nessuno dei coefficienti direttori è nullo*, allora, ricavando il parametro t da ciascuna delle n equazioni si ottiene:

$$\frac{x^1 - x_0^1}{l^1} = \frac{x^2 - x_0^2}{l^2} = \dots = \frac{x^n - x_0^n}{l^n}$$

che è nota come *equazione frazionaria* della retta $\mathcal{E}^1$ (rispetto ad $\mathcal{R}$).

■ **Proposizione 9.8.**

(a) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè due rette $\mathcal{E}^1$ ed $\mathcal{F}^1$ aventi coefficienti direttori $(l^1, \dots, l^n)$ ed $(m^1, \dots, m^n)$ siano parallele è che esista $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che:*

$$(l^1, \dots, l^n) = \lambda \cdot (m^1, \dots, m^n);$$

(b) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè due iperpiani $\mathcal{E}^{n-1}$ ed $\mathcal{F}^{n-1}$ aventi equazioni cartesiane*

$$a_1'x^1 + \dots + a_n'x^n + b' = 0 \quad e \quad a_1''x^1 + \dots + a_n''x^n + b'' = 0$$

siano paralleli è che esista $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che:

$$(a_1', \dots, a_n') = \lambda \cdot (a_1'', \dots, a_n'');$$

(c) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una retta $\mathcal{E}^1$ avente coefficienti direttori $(l^1, \dots, l^n)$ ed un iperpiano $\mathcal{F}^{n-1}$ avente equazione cartesiana $a_1x^1 + \dots + a_nx^n + b = 0$ siano paralleli è che si abbia:*

$$a_1l^1 + \dots + a_nl^n = 0.$$

Dimostrazione. (a) Se $\mathbf{l} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (l^1, \dots, l^n)$ e $\mathbf{m} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (m^1, \dots, m^n)$, si ha $\vec{\mathcal{E}}^1 = \mathbf{L}(\mathbf{l})$ e $\vec{\mathcal{F}}^1 = \mathbf{L}(\mathbf{m})$. Allora, $\vec{\mathcal{E}}^1 = \vec{\mathcal{F}}^1$ se e solo se $\mathbf{l} = \lambda\mathbf{m}$, con $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$: ciò prova (a).
(b) Poichè le giaciture $\vec{\mathcal{E}}^{n-1}$ ed $\vec{\mathcal{F}}^{n-1}$ sono rappresentate rispettivamente dalle equazioni lineari omogenee

$$a_1'x^1 + \dots + a_n'x^n = 0 \quad \text{e} \quad a_1''x^1 + \dots + a_n''x^n = 0,$$

il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} a_1'x^1 + \dots + a_n'x^n &= 0 \\ a_1''x^1 + \dots + a_n''x^n &= 0 \end{cases}$$

rappresenta $\vec{\mathcal{E}}^{n-1} \cap \vec{\mathcal{F}}^{n-1}$. La affermazione (b) segue allora osservando che $\mathcal{E}^{n-1}$ ed $\mathcal{F}^{n-1}$ sono paralleli se e soltanto se $\vec{\mathcal{E}}^{n-1} \cap \vec{\mathcal{F}}^{n-1}$ ha dimensione $n-1$, ovvero se e soltanto se

$$\varrho \begin{pmatrix} a_1' & \dots & a_n' \\ a_1'' & \dots & a_n'' \end{pmatrix} = 1.$$

(c) Se $\mathbf{l} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (l^1, \dots, l^n)$, si ha che $\mathcal{E}^1$ ed $\mathcal{F}^{n-1}$ sono paralleli se e solo se $\vec{\mathcal{E}}^1 = \mathbf{L}(\mathbf{l}) \subset \vec{\mathcal{F}}^{n-1}$, ovvero se e soltanto se $\mathbf{l} \in \vec{\mathcal{F}}^{n-1}$. La affermazione (c) segue allora osservando che $\vec{\mathcal{F}}^{n-1}$ è rappresentato dalla equazione omogenea $a_1x^1 + \dots + a_nx^n = 0$. □

Esempio 9.9. Nello spazio euclideo $\mathcal{E}^5$, con un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, si considerino le rette r, s e t, dove

$$r : \begin{cases} 2x^1 - x^2 + x^3 - 2x^5 = 1 \\ x^1 + 2x^2 - 3x^3 = 0 \\ x^1 - x^2 + x^4 - x^5 = 2 \\ 3x^2 + x^4 - 4x^5 = -1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x^1 &= 3 + 2\lambda \\ x^2 &= -1 + \lambda \\ x^3 &= 4\lambda \\ x^4 &= 5 + \lambda \\ x^5 &= -2 - \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

e t è generata dai punti $P \equiv_{\mathcal{R}} (0, 2, 3, -1, 5)$ e $Q \equiv_{\mathcal{R}} (2, 4, 5, 1, 7)$. Poichè r (risp. s) (risp. t) hanno coefficienti direttori $(1, 1, 1, 1, 1)$ (risp. $(2, 1, 4, 1, -1)$) (risp. $(1, 1, 1, 1, 1)$), la Proposizione 9.8(a) consente di affermare che r e t sono parallele, mentre r ed s ed s e t sono non parallele.

6. Ortogonalità tra sottospazi

Nel presente paragrafo tratteremo la nozione di ortogonalità tra sottospazi di un medesimo spazio euclideo $\mathcal{E}^n$ (di dimensione finita n, in cui supporremo fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$), restringendo l'attenzione ad alcuni casi particolari, che vengono ritenuti i più significativi (oltre che i più semplici come trattazione).[6] Si noti che, in dimensione due e tre, i casi considerati nel presente paragrafo coprono tutti i casi possibili.

♦ **Definizione 9.9.** Due rette $\mathcal{E}^1$ ed $\mathcal{F}^1$ dello spazio euclideo $\mathcal{E}^n$ si dicono *ortogonali*, e si indica $\mathcal{E}^1 \perp \mathcal{F}^1$, se ogni vettore di $\vec{\mathcal{E}}^1$ è ortogonale a tutti i vettori di $\vec{\mathcal{F}}^1$, ovvero se

$$\forall \mathbf{u} \in \vec{\mathcal{E}}^1, \forall \mathbf{v} \in \vec{\mathcal{F}}^1, \quad < \mathbf{u}, \mathbf{v} >= 0$$

■ **Proposizione 9.9.** *Condizione necessaria e sufficiente affinchè due rette $\mathcal{E}^1$ ed $\mathcal{F}^1$ aventi coefficienti direttori $(l^1, \dots, l^n)$ ed $(m^1, \dots, m^n)$ siano ortogonali è che si abbia:*

$$l^1m^1 + \dots + l^nm^n = 0$$

---

[6] Riportiamo qui, per completezza, anche la definizione più generale di ortogonalità tra sottospazi euclidei. *Due sottospazi $\mathcal{E}^h$ ed $\mathcal{F}^k$ dello spazio euclideo $\mathcal{E}^n$ si dicono ortogonali, e si indica $\mathcal{E}^h \perp \mathcal{F}^k$, se:*

- *i due sottospazi non sono paralleli;*
- *la giacitura di uno dei due sottospazi contiene il complemento ortogonale della giacitura dell'altro, nel sottospazio vettoriale $\vec{\mathcal{E}}^h + \vec{\mathcal{F}}^k \subseteq \vec{\mathcal{E}}^n$ (ovvero: nel più piccolo sottospazio vettoriale di $\vec{\mathcal{E}}^n$ contenente entrambe le giaciture).*

Si osservi che questa definizione generale coincide con quelle date nei casi particolari trattati.

Dimostrazione. Posto $\mathbf{l} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (l^1, \dots, l^n)$ e $\mathbf{m} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (m^1, \dots, m^n)$, dalla Definizione 9.8 segue che $\vec{\mathcal{E}^1} = \mathbf{L}(\mathbf{l})$ e $\vec{\mathcal{F}^1} = \mathbf{L}(\mathbf{m})$. Allora, per ogni $\mathbf{u} = \lambda \cdot \mathbf{l} \in \vec{\mathcal{E}^1}$, e per ogni $\mathbf{v} = \mu \cdot \mathbf{m} \in \vec{\mathcal{F}^1}$, si ha:

$$< \mathbf{u}, \mathbf{v} > = < \lambda \cdot \mathbf{l}, \mu \cdot \mathbf{m} > = \lambda\mu < \mathbf{l}, \mathbf{m} > .$$

Pertanto, $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >= 0$ se e solo se $< \mathbf{l}, \mathbf{m} >= 0$; la tesi segue dunque banalmente dalla Proposizione 8.6 (b).

□

♦ **Definizione 9.10.** Una retta $\mathcal{E}^1$ ed un iperpiano $\mathcal{F}^{n-1}$ dello spazio euclideo $\mathcal{E}^n$ si dicono *ortogonali*, e si indica $\mathcal{E}^1 \perp \mathcal{F}^{n-1}$, se la giacitura della retta coincide con il complemento ortogonale della giacitura dell'iperpiano.

Si noti che, per il Teorema 8.11, il complemento ortogonale della giacitura dell'iperpiano $\mathcal{F}^{n-1}$ è effettivamente un sottospazio vettoriale unidimensionale di $\vec{\mathcal{E}^n}$ (come la giacitura della retta $\mathcal{E}^1$), che a volte viene detto *"la direzione ortogonale all'iperpiano"*; il lemma seguente ci consente di ricavarne direttamente una base, a partire da una qualunque rappresentazione cartesiana di $\mathcal{F}^{n-1}$.

■ **Lemma 9.10.** *Se l' iperpiano $\mathcal{F}^{n-1}$ di $\mathcal{E}^n$ ha, rispetto ad $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$, equazione cartesiana $a_1x^1 + \dots + a_nx^n + b = 0$, allora il vettore $\mathbf{a} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (a_1, \dots, a_n)$ è una base per il complemento ortogonale della giacitura di $\mathcal{E}^{n-1}$.*

Dimostrazione. Basta ricordare che, per il Teorema 9.6, la equazione omogenea $a_1x^1 + \dots + a_nx^n = 0$ è una rappresentazione cartesiana (rispetto alla base ortonormale $\vec{\mathcal{B}}$ di $\vec{\mathcal{E}^n}$) della giacitura $\vec{\mathcal{E}^{n-1}}$ dell'iperpiano $\mathcal{E}^{n-1}$, e poi applicare la Proposizione 8.12 (nel caso particolare $h = n - 1$).

□

■ **Proposizione 9.11.** *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una retta $\mathcal{E}^1$ di coefficienti direttori $(l^1, \dots, l^n)$ ed un iperpiano $\mathcal{F}^{n-1}$ di equazione cartesiana $a_1x^1 + \dots + a_nx^n + b = 0$ siano ortogonali è che esista $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che:*

$$(l^1, \dots, l^n) = \lambda \cdot (a_1, \dots, a_n)$$

Dimostrazione. Posto $\mathbf{l} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (l^1, \dots, l^n)$ e $\mathbf{a} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (a_1, \dots, a_n)$, dalla Definizione 9.8 segue che $\vec{\mathcal{E}^1} = \mathbf{L}(\mathbf{l})$, mentre dal Lemma 9.10 segue che ${}^{\perp}\vec{\mathcal{F}^{n-1}} = \mathbf{L}(\mathbf{a})$. Allora, $\vec{\mathcal{E}^1} = {}^{\perp}\vec{\mathcal{F}^{n-1}}$ (ovvero, per definizione, $\mathcal{E}^1 \perp \mathcal{F}^{n-1}$) se e solo se $\mathbf{l} = \lambda\mathbf{a}$, con $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$: ciò prova ovviamente la tesi.

□

♦ **Definizione 9.11.** Due iperpiani $\mathcal{E}^{n-1}$ ed $\mathcal{F}^{n-1}$ dello spazio euclideo $\mathcal{E}^n$ si dicono *ortogonali*, e si indica $\mathcal{E}^{n-1} \perp \mathcal{F}^{n-1}$, se sono ortogonali due qualunque rette ad essi ortogonali.

■ **Proposizione 9.12.** *Condizione necessaria e sufficiente affinchè due iperpiani $\mathcal{E}^{n-1}$ ed $\mathcal{F}^{n-1}$ aventi equazioni cartesiane $a'_1x^1 + \dots + a'_nx^n + b' = 0$ ed $a''_1x^1 + \dots + a''_nx^n + b'' = 0$ siano ortogonali è che si abbia:*

$$a'_1a''_1 + \dots + a'_na''_n = 0$$

Dimostrazione. In base alla Proposizione 9.11, $(a'_1, \dots, a'_n)$ (risp. $(a''_1, \dots, a''_n)$) è una n-pla di coefficienti direttori per una qualunque retta r' (risp. r'') ortogonale ad $\mathcal{E}^{n-1}$ (risp. ad $\mathcal{F}^{n-1}$). La tesi segue quindi direttamente dalla Proposizione 9.9.

□

Concludiamo il paragrafo introducendo la nozione di orientazione di una retta euclidea e di angolo tra due rette orientate di $\mathcal{E}^n$.

♦ **Definizione 9.12.** Si dice *retta euclidea orientata* una coppia $(\mathcal{E}^1, \mathbf{l})$, dove $\mathcal{E}^1$ è una retta dello spazio euclideo $\mathcal{E}^n$ e $\mathbf{l} \in \vec{\mathcal{E}^1} - \{0\}$ è un vettore non nullo della giacitura della retta [7]. Se $(\mathcal{E}^1, \mathbf{l})$, è una retta orientata, si dice poi *vettore positivo* della giacitura della retta ogni vettore concorde con $\mathbf{l}$; inoltre, si dice *n-pla positiva di coefficienti direttori* ogni n-pla costituita dalle componenti - rispetto ad un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$ di $\mathcal{E}^n$ - di un vettore positivo di $\vec{\mathcal{E}^1}$.

♦ **Definizione 9.13.** Date due rette orientate $(\mathcal{E}^1, \mathbf{l})$ e $(\mathcal{F}^1, \mathbf{m})$ dello spazio euclideo $\mathcal{E}^n$, si dice *angolo tra $\mathcal{E}^1$ ed $\mathcal{F}^1$*, e si denota con $\widehat{\mathcal{E}^1\mathcal{F}^1}$, l'angolo $\phi \in [0, \pi]$ tra $\mathbf{l}$ e $\mathbf{m}$.

Si ha dunque, per definizione,

$$\cos(\widehat{\mathcal{E}^1\mathcal{F}^1}) = \cos(\mathbf{l}, \mathbf{m}).$$

Inoltre, poichè i vettori positivi della retta orientata $(\mathcal{E}^1, \mathbf{l})$ sono del tipo $\mathbf{l}' = \lambda\mathbf{l}$, con $\lambda \in \mathbb{R}^+$ (si veda la Osservazione 8.17), si verifica banalmente che

$$\cos(\widehat{\mathcal{E}^1\mathcal{F}^1}) = \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u} \approx \mathbf{l}, \ \forall \mathbf{v} \approx \mathbf{m}.$$

Si noti che, per definizione, $\mathcal{E}^1$ ed $\mathcal{F}^1$ sono parallele e concordemente orientate (risp. parallele e discordemente orientate) (risp. ortogonali) se e soltanto se $\widehat{\mathcal{E}^1\mathcal{F}^1} = 0$ (risp. $\widehat{\mathcal{E}^1\mathcal{F}^1} = \pi$) (risp. $\widehat{\mathcal{E}^1\mathcal{F}^1} = \frac{\pi}{2}$).

■ **Proposizione 9.13.** *Se due rette $\mathcal{E}^1$ ed $\mathcal{F}^1$ hanno coefficienti direttori positivi $(l^1, \dots, l^n)$ ed $(m^1, \dots, m^n)$, allora:*

$$\cos(\widehat{\mathcal{E}^1\mathcal{F}^1}) = \frac{l^1m^1 + \dots l^nm^n}{\sqrt{(l^1)^2 + \dots + (l^n)^2} \cdot \sqrt{(m^1)^2 + \dots + (m^n)^2}}$$

Dimostrazione. Basta osservare che, in base alla Definizione 9.8, $\mathbf{l} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (l^1, \dots, l^n)$ e $\mathbf{m} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (m^1, \dots, m^n)$ sono due vettori (positivi) di $\vec{\mathcal{E}^1}$ e di $\vec{\mathcal{F}^1}$ rispettivamente, e poi applicare la Proposizione 8.6 (d) per il calcolo del coseno dell'angolo tra due vettori, tramite le loro componenti rispetto ad una base ortonormale.

□

[7] Si noti che orientare una retta equivale ad orientare la sua giacitura.

▶ **Osservazione 9.9.** Supponiamo che, per ogni $i \in \mathbb{N}_n$, l'i-esimo asse coordinato x_i del riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$ sia *canonicamente orientato*, ovvero orientato in modo che l'i-esimo versore della base $\vec{\mathcal{B}}$ sia positivo. Se la retta $\mathcal{E}^1$ ha - rispetto ad $\mathcal{R}$ - coefficienti direttori positivi $(l^1, \dots, l^n)$, allora

$$\cos(\widehat{\mathcal{E}^1 \mathrm{x}_i}) = \frac{l^i}{\sqrt{(l^1)^2 + \cdots + (l^n)^2}}.$$

Si noti che la n-pla costituita dai coseni degli angoli che la retta orientata $\mathcal{E}^1$ forma con gli n assi coordinati canonicamente orientati

$$\left(\cos(\widehat{\mathcal{E}^1 \mathrm{x}_1}), \dots, \cos(\widehat{\mathcal{E}^1 \mathrm{x}_n})\right) = \left(\frac{l^1}{\sqrt{(l^1)^2 + \cdots + (l^n)^2}}, \dots, \frac{l^n}{\sqrt{(l^1)^2 + \cdots + (l^n)^2}}\right)$$

è una particolare n-pla di coefficienti direttori della retta $\mathcal{E}^1$, che individua le componenti - rispetto a $\vec{\mathcal{B}}$ - del versore positivo della giacitura della retta. Ciò giustifica il termine *n-pla di coseni direttori* della retta $\mathcal{E}^1$, usato per individuare la n-pla delle componenti di un qualunque versore di $\vec{\mathcal{E}}^1$.

7. Distanza euclidea

Nel presente paragrafo, il simbolo $\mathcal{E}$ indicherà sempre uno spazio euclideo. Il simbolo $\mathcal{E}^n$ indicherà uno spazio euclideo di dimensione finita n; in tal caso, supporremo fissato in $\mathcal{E}^n$ il riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$.

♦ **Definizione 9.14.** Se $P, Q \in \mathcal{E}$, si dice *distanza (euclidea)* di P da Q il numero reale non negativo

$$d(P,Q) = ||\overrightarrow{PQ}||$$

▶ **Osservazione 9.10.** Se i segmenti orientati $(P,Q), (R,S) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ sono equipollenti, cioè se $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ (Definizione 2.3), allora

$$d(P,Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = ||\overrightarrow{RS}|| = d(R,S).$$

Pertanto, *gli estremi di segmenti orientati equipollenti hanno la stessa distanza.* Si è soliti definire *lunghezza del segmento orientato* (P,Q) la distanza $d(P,Q)$ tra i suoi estremi. Dalle precedenti considerazioni segue allora che *segmenti orientati equipollenti hanno la stessa lunghezza, coincidente con la lunghezza del vettore libero ad essi associato.*

■ **Proposizione 9.14.** *Se $P \equiv_{\mathcal{R}} (x_P^1, x_P^2, \dots, x_P^n)$ e $Q \equiv_{\mathcal{R}} (x_Q^1, x_Q^2, \dots, x_Q^n)$ sono due punti di $\mathcal{E}^n$, si ha:*

$$d(P,Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_Q^i - x_P^i)^2}.$$

Dimostrazione. Per la Proposizione 9.2, si ha $\overrightarrow{PQ} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (x_Q^1 - x_P^1, x_Q^2 - x_P^2, \dots, x_Q^n - x_P^n)$. Poichè $\vec{\mathcal{B}}$ è ortonormale in $\vec{\mathcal{E}}^n$, dalla Proposizione 8.6 (c) segue subito:

$$d(P,Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_Q^i - x_P^i)^2}.$$

□

♦ **Definizione 9.15.** Dati due sottoinsiemi X, Y di $\mathcal{E}$, si dice *distanza* di X da Y il numero reale non negativo

$$d(X,Y) = \inf\{d(P,Q) \mid P \in X,\ Q \in Y\}$$

Si osservi che $d(X,Y) = d(Y,X)$ e che, se $X \cap Y \neq \emptyset$, allora $d(X,Y) = 0$. Nel caso in cui $X = \{P\}$, scriveremo $d(P,Y)$, anzichè $d(\{P\},Y)$. Si dimostra facilmente (tramite il Teorema di Pitagora (Proposizione 8.2)) che, se $X = \{P\}$ e $Y = \mathcal{E}^h$ (sottospazio euclideo di $\mathcal{E}^n$), allora

$$d(P, \mathcal{E}^h) = min\{d(P,Q) \mid Q \in \mathcal{E}^h\} = d(P,P')$$

dove P' indica la *proiezione ortogonale* di P su $\mathcal{E}^h$, ovvero il punto (unico!) di intersezione tra $\mathcal{E}^h$ ed il sottospazio euclideo $(P, {}^{\perp}\vec{\mathcal{E}}^h)$ di $\mathcal{E}^n$, passante per P ed avente come giacitura il complemento ortogonale di $\vec{\mathcal{E}}^h$.
In particolare, se $h = n-1$, la distanza tra un punto P ed un iperpiano $\mathcal{E}^{n-1}$ si può calcolare direttamente, a partire dalle coordinate di P e da una equazione cartesiana di $\mathcal{E}^{n-1}$, tramite la seguente:

■ **Proposizione 9.15.** *Se un iperpiano $\mathcal{E}^{n-1}$ ha, rispetto ad $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$, equazione cartesiana $a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n + b = 0$ e se $P \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$, allora*

$$d(P, \mathcal{E}^{n-1}) = \frac{|a_1 \bar{x}^1 + \cdots + a_n \bar{x}^n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}$$

Dimostrazione. Sia $P' \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{\bar{x}}^1, \dots, \bar{\bar{x}}^n)$ la proiezione ortogonale di P su $\mathcal{E}^{n-1}$. Posto $\mathrm{a} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (a_1, \dots, a_n)$, dal Lemma 9.10 segue che $\{\mathrm{a}\}$ è una base di ${}^{\perp}\vec{\mathcal{E}}^{n-1}$, e quindi $\overrightarrow{PP'} = \lambda \cdot \mathrm{a}$; pertanto, ricordata la Proposizione 9.2, per ogni $i \in \mathbb{N}_n$, si ha:

$$\bar{\bar{x}}^i - \bar{x}^i = \lambda \cdot a_i.$$

Moltiplicando per a_i e sommando per $i \in \mathbb{N}_n$, si ottiene:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\bar{\bar{x}}^i - \bar{x}^i) = \lambda \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i)^2\right).$$

Sommando e sottraendo b nel primo membro di tale uguaglianza, e ricordando che $\sum_{i=1}^{n} (a_i)^2 = ||\mathrm{a}||^2$, si ottiene:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \bar{\bar{x}}^i + b - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \bar{x}^i + b\right) = \lambda \cdot ||\mathrm{a}||^2,$$

da cui, poichè $P' \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n) \in \mathcal{E}^{n-1}$, si ricava:

$$\sum_{i=1}^n a_i \bar{x}^i + b = \lambda \cdot ||\mathbf{a}||^2, \qquad \text{ovvero } \lambda = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \bar{x}^i + b}{||\mathbf{a}||^2}$$

A questo punto, essendo $d(P, \mathcal{E}^{n-1}) = d(P, P') = ||\overrightarrow{PP'}|| = ||\lambda \cdot \mathbf{a}||$, la tesi segue direttamente:

$$d(P, \mathcal{E}^{n-1}) = |\lambda| \cdot ||\mathbf{a}|| = \frac{|\sum_{i=1}^n a_i \bar{x}^i + b|}{||\mathbf{a}||^2} \cdot ||\mathbf{a}|| = \frac{|\sum_{i=1}^n a_i \bar{x}^i + b|}{||\mathbf{a}||} = \frac{|\sum_{i=1}^n a_i \bar{x}^i + b|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i)^2}}.$$

□

8. Simplessi e volumi

♦ **Definizione 9.16.** Dati $h+1$ punti affinemente indipendenti $A_0, A_1, \dots, A_h$ di $\mathcal{E}^n$, si dice *h-simplesso di vertici* $A_0, A_1, \dots, A_h$ la chiusura convessa dell'insieme $\{A_0, A_1, \dots, A_h\}$, ovvero il più piccolo sottoinsieme convesso di $\mathcal{E}^n$, contenente $\{A_0, A_1, \dots, A_h\}$. Si può provare che l'h-simplesso di vertici $A_0, A_1, \dots, A_h$ coincide con il sottoinsieme di $\mathcal{E}^n$:

$$< A_0, A_1, \dots, A_h > = \{P \in \mathcal{E}^n \mid \overrightarrow{A_0P} = \lambda_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \dots + \lambda_h \overrightarrow{A_0A_h},$$
$$\text{con } \sum_{i=1}^h \lambda_i \leq 1 \text{ e } \lambda_i \geq 0, \forall i \in \mathbb{N}_h\}$$

Si noti che la nozione di h-simplesso coincide, per $h = 1, 2, 3$, con le usuali nozioni di *segmento, triangolo, tetraedro.*

♦ **Definizione 9.17.** Dati $h+1$ punti affinemente indipendenti $A_0, A_1, \dots, A_h$ di $\mathcal{E}^n$, si dice *volume* dell'h-simplesso $\sigma^h = < A_0, A_1, \dots, A_h >$ il numero reale positivo [8]

$$\mathcal{V}(\sigma^h) = \frac{1}{h!} \cdot \sqrt{\det G},$$

dove

$$G = (g^i_j)_{i,j \in \mathbb{N}_h}, \quad g^i_j = < \overrightarrow{A_0A_i}, \overrightarrow{A_0A_j} >$$

è la matrice di Gram della h-pla di vettori $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_h})$.

Si può verificare facilmente che, per $h = 1$, il volume dell' 1-simplesso $< A_0, A_1 >$ coincide con la lunghezza $||\overrightarrow{A_0A_1}||$ del segmento orientato (A_0, A_1) definita nella Osservazione 9.10, ovvero con la distanza $d(A_0, A_1)$. Inoltre, per $h = 2$, il volume del

[8] Si noti che la Definizione 9.17 presuppone che il determinante della matrice G sia sicuramente positivo, come assicurato dalla Proposizione 8.13 relativa alle proprietà delle matrici di Gram; in alternativa, la dimostrazione di questo fatto può essere agevolmente dedotta dalla dimostrazione della seguente Proposizione 9.16.

2-simplesso $< A_0, A_1, A_2 >$ coincide con la usuale nozione di *area del triangolo*: infatti, detta H la proiezione ortogonale di A_2 sulla retta r contenente A_0 e A_1, si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\sigma^2) &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\det \begin{pmatrix} < \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_1} > & < \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2} > \\ < \overrightarrow{A_0A_2}, \overrightarrow{A_0A_1} > & < \overrightarrow{A_0A_2}, \overrightarrow{A_0A_2} > \end{pmatrix}} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{||\overrightarrow{A_0A_1}||^2 \cdot ||\overrightarrow{A_0A_2}||^2 - < \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2} >^2} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{||\overrightarrow{A_0A_1}||^2 \cdot ||\overrightarrow{A_0A_2}||^2 - ||\overrightarrow{A_0A_1}||^2 \cdot ||\overrightarrow{A_0A_2}||^2 \cdot \cos^2(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2})} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot ||\overrightarrow{A_0A_1}|| \cdot ||\overrightarrow{A_0A_2}|| \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2})} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot ||\overrightarrow{A_0A_1}|| \cdot ||\overrightarrow{A_0A_2}|| \cdot \operatorname{sen}(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot ||\overrightarrow{A_0A_1}|| \cdot ||\overrightarrow{A_2H}|| = \\
&= \frac{1}{2} \cdot d(A_0, A_1) \cdot d(A_2, r).
\end{aligned}$$

La seguente proposizione consente - una volta fissato un riferimento cartesiano sul sottospazio euclideo h-dimensionale generato dai vertici di un h-simplesso - di effettuare agevolmente il calcolo del volume, utilizzando o le componenti dei vettori $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_h}$ o direttamente le coordinate dei vertici $A_0, A_1, \dots, A_h$.

■ **Proposizione 9.16.** *Se $\sigma^h = < A_0, A_1, \dots, A_h >$ è un h-simplesso di $\mathcal{E}^n$, sia $\mathcal{E}^h$ il sottospazio euclideo h-dimensionale passante per i vertici $A_0, A_1, \dots, A_h$ e sia $\bar{\mathcal{R}}$ un riferimento cartesiano su $\mathcal{E}^h$. Posto, per ogni $0 \leq i \leq h$, $P_i \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} (x^1_i, \dots, x^h_i)$, si ha:*

$$\mathcal{V}(\sigma^h) = \frac{1}{h!} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} x^1_1 - x^1_0 & \dots & x^1_h - x^1_0 \\ \vdots & & \vdots \\ x^h_1 - x^h_0 & \dots & x^h_h - x^h_0 \end{pmatrix} \right| =$$
$$= \frac{1}{h!} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x^1_0 & x^1_1 & \dots & x^1_h \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^h_0 & x^h_1 & \dots & x^h_h \end{pmatrix} \right|$$

Dimostrazione. Poichè la base $\bar{\mathcal{B}}$ del riferimento cartesiano fissato è ortonormale, si verifica facilmente che (come provato nella Proposizione 8.13)

$$G = {}^tA \cdot A, \qquad \text{dove} \quad A = \begin{pmatrix} x^1_1 - x^1_0 & \dots & x^1_h - x^1_0 \\ \vdots & & \vdots \\ x^h_1 - x^h_0 & \dots & x^h_h - x^h_0 \end{pmatrix}$$

Ciò prova - in virtù del Teorema di Binet (Proposizione 3.15) e della Proposizione 3.14 - la prima uguaglianza dell'enunciato. D'altra parte, si può verificare direttamente (sottraendo nella seconda matrice la prima colonna a tutte le successive, e poi applicando il Teorema di Laplace alla prima riga) che:

$$\det\begin{pmatrix} x_1^1 - x_0^1 & \dots & x_h^1 - x_0^1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^h - x_0^h & \dots & x_h^h - x_0^h \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0^1 & x_1^1 & \dots & x_h^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^h & x_1^h & \dots & x_h^h \end{pmatrix}$$

□

9. Simmetrie

Nel presente paragrafo, $\mathcal{E}^n$ indicherà uno spazio euclideo di dimensione finita $n \geq 1$, in cui è fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$.

Si verifica facilmente che, *dati due punti $A, B \in \mathcal{E}^n$, esiste ed è unico il punto $M \in \mathcal{E}^n$ tale che $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.*
Infatti, la esistenza è dimostrata prendendo (in virtù dell'assioma SE1) il punto $M \in \mathcal{E}^n$ tale che $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ e ricordando la relazione di Chasles:

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}.$$

La unicità segue invece osservando che, se $M' \in \mathcal{E}^n$ è tale che $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{M'B}$, si ha:

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BM'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{M'A} = \overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{M'M}$$

e dunque $M = M'$.

Possiamo dare pertanto la seguente

♦ **Definizione 9.18.** Dati due punti $A, B \in \mathcal{E}^n$, si dice *punto medio* del segmento $< A, B >$ l'unico punto $M \in \mathcal{E}^n$ tale che $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

■ **Proposizione 9.17.** *Siano $A, B \in \mathcal{E}^n$ due punti di $\mathcal{E}^n$, con $A \equiv_{\mathcal{R}} (a^1, a^2, \dots, a^n)$ e $B \equiv_{\mathcal{R}} (b^1, b^2, \dots, b^n)$. Allora, il punto medio del segmento $< A, B >$ è il punto $M \in < A, B >$, con*

$$M \equiv_{\mathcal{R}} \left(\frac{a^1 + b^1}{2}, \frac{a^2 + b^2}{2}, \dots, \frac{a^n + b^n}{2} \right).$$

Dimostrazione. Essendo $\overrightarrow{AB} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (b^1 - a^1, b^2 - a^2, \dots, b^n - a^n)$, da $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ segue subito:

$$\overrightarrow{AM} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} \left(\frac{b^1 - a^1}{2}, \frac{b^2 - a^2}{2}, \dots, \frac{b^n - a^n}{2} \right).$$

Dunque:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} \left(a^1 + \frac{b^1 - a^1}{2}, a^2 + \frac{b^2 - a^2}{2}, \dots, a^n + \frac{b^n - a^n}{2} \right) =$$
$$= \left(\frac{a^1 + b^1}{2}, \frac{a^2 + b^2}{2}, \dots, \frac{a^n + b^n}{2} \right).$$

□

Il concetto di punto medio di un segmento si generalizza nel concetto di *baricentro di un h-simplesso.*

♦ **Definizione 9.19.** Dato un h-simplesso $\sigma^h = < P_0, P_1, \dots, P_h >$ di $\mathcal{E}^n$, con $P_i \equiv_{\mathcal{R}} (x_i^1, \dots, x_i^n)$ $(0 \leq i \leq h)$, si dice *baricentro* di σ^h il punto $H \in \mathcal{E}^n$ tale che

$$H \equiv_{\mathcal{R}} \left(\frac{\sum_{i=0}^h x_i^1}{h+1}, \dots, \frac{\sum_{i=0}^h x_i^n}{h+1} \right).$$

♦ **Definizione 9.20.** Fissato un punto $C \in \mathcal{E}^n$, per ogni punto $P \in \mathcal{E}^n$, si dice *simmetrico di P rispetto a C* il punto $P' = s_C(P) \in \mathcal{E}^n$ univocamente individuato dalla condizione $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{CP'}$. L'applicazione

$$s_C : \mathcal{E}^n \to \mathcal{E}^n$$
$$P \to s_C(P)$$

è detta *simmetria (centrale) di centro C.*

Dalla Definizione 9.20 segue che il simmetrico di P rispetto a C è l'unico punto P' tale che C risulti il punto medio del segmento $< P, P' >$.
Si noti inoltre che *l'unico punto lasciato fisso da una simmetria centrale è il suo centro C.*

► **Osservazione 9.11.** Se, rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, si ha $C \equiv_{\mathcal{R}} (c^1, c^2, \dots, c^n)$, $P \equiv_{\mathcal{R}} (x^1, x^2, \dots, x^n)$ e $P' \equiv_{\mathcal{R}} (y^1, y^2, \dots, y^n)$, allora la Proposizione 9.17 implica che, per ogni $i \in \mathbb{N}_n$, si ha:

$$c^i = \frac{x^i + y^i}{2}.$$

Pertanto, le coordinate del punto simmetrico di un punto dato P rispetto a C possono essere direttamente ottenute dalle coordinate di P e di C, attraverso la relazione:

$$y^i = -x^i + 2c^i, \quad \forall i \in \mathbb{N}_n.$$

Esempio 9.10. Ad esempio, nel piano euclideo $\mathcal{E}^2$, se $C \equiv_{\mathcal{R}} (1, 2)$, allora il punto generico $P \equiv_{\mathcal{R}} (x, y)$ ha come simmetrico rispetto a C il punto $P' \equiv_{\mathcal{R}} (-x+2, -y+4)$.
Se si desidera determinare la retta r', simmetrica della retta $r: x + 2y - 1 = 0$ rispetto a C, allora si può procedere nel modo seguente:

- si scelgono due punti $A, B \in r$ (ad esempio, $A \equiv_{\mathcal{R}} (-1, 1)$ e $B \equiv_{\mathcal{R}} (1, 0)$);
- si determinano i due punti simmetrici A', B' di A, B rispetto a C (nel nostro caso, $A' \equiv_{\mathcal{R}} (3, 3)$ e $B' \equiv_{\mathcal{R}} (1, 4)$);
- la retta r' è la retta passante per A' e B'.

Si ottiene dunque: $r' : x + 2y - 9 = 0$. [9]

Esempio 9.11. Nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$, se $C \equiv_{\mathcal{R}} (3, 1, 0)$, allora il punto generico $P \equiv_{\mathcal{R}} (x, y, z)$ ha come simmetrico rispetto a C il punto $P' \equiv_{\mathcal{R}} (-x+6, -y+2, -z)$.
Operando nel modo descritto nell'esempio precedente, è possibile determinare la retta r',

[9] Si noti che la retta simmetrica in una simmetria centrale è sempre parallela alla retta data.

simmetrica della retta $r: \begin{cases} x+2y-3=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ rispetto a C: scelti $A \equiv_{\mathcal{R}} (1,1,1)$ e $B \equiv_{\mathcal{R}} (3,0,3)$, si ha $A' \equiv_{\mathcal{R}} (5,1,-1)$ e $B' \equiv_{\mathcal{R}} (3,2,-3)$, da cui

$$r': \begin{cases} x+2y-7=0 \\ x-z-6=0 \end{cases}$$

Analogamente, è possibile determinare il piano π', simmetrico del piano $\pi: 3x+2y-z-6=0$ rispetto a C: scelti $R \equiv_{\mathcal{R}} (2,0,0)$, $S \equiv_{\mathcal{R}} (0,3,0)$ e $T \equiv_{\mathcal{R}} (0,0,-6)$ $(R,S,T \in \pi)$, i loro simmetrici rispetto a C sono $R' \equiv_{\mathcal{R}} (4,2,0)$, $S' \equiv_{\mathcal{R}} (6,-1,0)$ e $T' \equiv_{\mathcal{R}} (6,2,6)$, da cui

$$\pi': \ 3x+2y-z-16=0.$$ [10]

♦ **Definizione 9.21.** Fissato un iperpiano $\mathcal{E}^{n-1}$ di $\mathcal{E}^n$, con $n \geq 2$, per ogni punto $P \in \mathcal{E}^n$, sia M il punto di intersezione di $\mathcal{E}^{n-1}$ con la retta $(P, {}^{\perp}\vec{\mathcal{E}}^{n-1})$ ortogonale ad $\mathcal{E}^{n-1}$ e passante per P. Si dice *simmetrico di P rispetto a $\mathcal{E}^{n-1}$* il punto $P' = s_{\mathcal{E}^{n-1}}(P) \in \mathcal{E}^n$ univocamente determinato dalla condizione $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MP'}$. L'applicazione

$$s_{\mathcal{E}^{n-1}} : \mathcal{E}^n \to \mathcal{E}^n$$
$$P \to s_{\mathcal{E}^{n-1}}(P)$$

è detta *simmetria (ortogonale) rispetto ad $\mathcal{E}^{n-1}$*.

Dalla Definizione 9.21 segue che il simmetrico di P rispetto ad $\mathcal{E}^{n-1}$ è l'unico punto P' tale che $M = \mathcal{E}^{n-1} \cap (P, {}^{\perp}\vec{\mathcal{E}}^{n-1})$ risulti il punto medio del segmento $< P, P' >$.
Si noti inoltre che *gli unici punti lasciati fissi da un simmetria ortogonale $s_{\mathcal{E}^{n-1}}$ sono tutti e soli i punti di $\mathcal{E}^{n-1}$*.

Esempio 9.12. Ad esempio, consideriamo nel piano euclideo $\mathcal{E}^2$ la retta r avente, rispetto ad un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, equazione $r: x-y-1=0$. Per ogni punto $P \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{x},\bar{y})$, la retta ortogonale ad r passante per P ha equazione $t: x+y-\bar{x}-\bar{y}=0$; allora, le coordinate cartesiane del punto $M = r \cap t$ verificano il sistema $\begin{cases} x-y-1=0 \\ x+y-\bar{x}-\bar{y}=0, \end{cases}$

da cui segue $M \equiv_{\mathcal{R}} \left(\frac{\bar{x}+\bar{y}+1}{2}, \frac{\bar{x}+\bar{y}-1}{2}\right)$. Ricordando la Proposizione 9.17 si ha quindi che il simmetrico di $P \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{x},\bar{y})$, rispetto ad r è il punto $P' \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{y}+1, \bar{x}-1)$.
Se si desidera determinare la retta s', simmetrica della retta $s: x=0$ rispetto alla retta r, si può procedere scegliendo, ad esempio, i punti $A \equiv_{\mathcal{R}} (0,1)$ e $B \equiv_{\mathcal{R}} (0,2)$ sulla retta s, e determinando i rispettivi punti simmetrici $A' \equiv_{\mathcal{R}} (2,-1)$ e $B' \equiv_{\mathcal{R}} (3,-1)$ rispetto ad r; pertanto, si ottiene che la retta cercata è

$$s': \ y=-1.$$ [11]

---

[10] Si noti che anche il piano simmetrico in una simmetria centrale è sempre parallelo al piano dato.

[11] Si noti che la retta simmetrica nella simmetria ortogonale rispetto ad r ha la medesima intersezione con r della retta data.

Esempio 9.13. Nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$, fissato il piano $\pi: x+2y-3z-7=0$, cerchiamo il punto simmetrico dell'origine rispetto a π. Poichè la retta ortogonale a π passante per l'origine ha equazioni parametriche

$$t: \begin{cases} x &= \lambda \\ y &= 2\lambda \\ z &= -3\lambda \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

il punto di intersezione $M = \pi \cap t$ è individuato dal valore $\lambda = \frac{1}{2}$ del parametro, ovvero $M \equiv_{\mathcal{R}} \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{2}\right)$; mediante la Proposizione 9.17 otteniamo quindi che il simmetrico dell'origine O rispetto a π è il punto $O' \equiv_{\mathcal{R}} (1,2,-3)$.

---

10. Isometrie

Nel presente capitolo, i simboli $\mathcal{E}^n, \mathcal{F}^n$ indicheranno sempre spazi euclidei della stessa dimensione finita n.
Una applicazione $\alpha : \mathcal{E}^n \to \mathcal{F}^n$ sarà detta *compatibile* se, per ogni $P,Q,R,S \in \mathcal{E}^n$, si ha:

$$(\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}) \quad \Rightarrow \quad (\overrightarrow{\alpha(P)\alpha(Q)} = \overrightarrow{\alpha(R)\alpha(S)}).$$

Se $\alpha : \mathcal{E}^n \to \mathcal{F}^n$ è compatibile, allora resta definita l'applicazione $\vec{\alpha} : \vec{\mathcal{E}}^n \to \vec{\mathcal{F}}^n$ che associa al vettore libero $\overrightarrow{PQ} \in \vec{\mathcal{E}}^n$ il vettore libero $\vec{\alpha}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{\alpha(P)\alpha(Q)} \in \vec{\mathcal{F}}^n$.
L'applicazione $\vec{\alpha}$ si dirà *indotta* da α.

♦ **Definizione 9.22.** Una applicazione compatibile $\alpha : \mathcal{E}^n \to \mathcal{F}^n$ sarà detta *isometria* di $\mathcal{E}^n$ in $\mathcal{F}^n$ se l'applicazione indotta $\vec{\alpha} : \vec{\mathcal{E}}^n \to \vec{\mathcal{F}}^n$ è una trasformazione ortogonale (biunivoca) [12] di $\vec{\mathcal{E}}^n \to \vec{\mathcal{F}}^n$.

■ **Proposizione 9.18.** *Sia $\alpha : \mathcal{E}^n \to \mathcal{F}^n$ una isometria di $\mathcal{E}^n$ in $\mathcal{F}^n$, e siano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$ ed $\mathcal{R}' = (O', \vec{\mathcal{B}}')$ due riferimenti cartesiani su $\mathcal{E}^n$ ed $\mathcal{F}^n$ rispettivamente.*
Indicate con:
$(x) \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ la colonna delle coordinate cartesiane di un generico punto $P \in \mathcal{E}^n$ rispetto ad $\mathcal{R}$,
$(y), (b) \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ le colonne delle coordinate cartesiane dei punti $\alpha(P), \alpha(O) \in \mathcal{F}^n$ rispetto ad $\mathcal{R}'$,
$A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ la matrice (ortogonale) associata alla trasformazione ortogonale indotta $\vec{\alpha} : \vec{\mathcal{E}}^n \to \vec{\mathcal{F}}^n$ rispetto alle basi (ortogonali) $\vec{\mathcal{B}}$ e $\vec{\mathcal{B}}'$,
si ha:

$$(*) \qquad (y) = A \cdot (x) + (b).$$

---

[12] Nel caso in cui l'applicazione indotta $\vec{\alpha} : \vec{\mathcal{E}}^n \to \vec{\mathcal{F}}^n$ sia semplicemente un isomorfismo di spazi vettoriali, allora la applicazione α si dice usualmente *affinità* di $\mathcal{E}^n$ in $\mathcal{F}^n$. Si noti che la nozione di affinità può essere data anche supponendo che $\mathcal{E}^n$ ed $\mathcal{F}^n$ siano due spazi affini della stessa dimensione, e non necessariamente due spazi euclidei (si veda la Osservazione 9.1).

Dimostrazione. Per la relazione di Chasles e per la definizione di trasformazione lineare indotta da una isometria, si ha:

$$\overrightarrow{O'\alpha(P)} = \overrightarrow{O'\alpha(O)} + \overrightarrow{\alpha(O)\alpha(P)} = \overrightarrow{O'\alpha(O)} + \vec{\alpha}(\overrightarrow{OP}).$$

Questa uguaglianza tra vettori liberi, espressa in termini di componenti rispetto alla base $\vec{\mathcal{B}}'$, diventa:

$$(y) = (b) + (x'),$$

dove (x') denota la colonna delle componenti del vettore libero $\vec{\alpha}(\overrightarrow{OP})$ rispetto alla base $\vec{\mathcal{B}}'$. Poichè la colonna (x) delle coordinate cartesiane del punto P rispetto al riferimento $\mathcal{R}'$ coincide con la colonna delle componenti del vettore libero $\overrightarrow{OP}$ rispetto alla base $\vec{\mathcal{B}}$, le equazioni della trasformazione ortogonale indotta $\vec{\alpha} : \vec{\mathcal{E}}^n \longrightarrow \vec{\mathcal{F}}^n$ rispetto alle basi (ortogonali) $\vec{\mathcal{B}}$ e $\vec{\mathcal{B}}'$ sono esattamente

$$(x') = A(x), \quad \text{con } A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R});$$

la tesi segue quindi direttamente, sostituendo questa relazione nella uguaglianza precedente.

□

Le equazioni (*) vengono dette *equazioni della isometria α, relativamente ai riferimenti cartesiani $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$*.

► **Osservazione 9.12.** Non è difficile verificare che ogni isometria trasforma sottospazi euclidei di dimensione h di $\mathcal{E}^n$ in sottospazi euclidei di dimensione h di $\mathcal{F}^n$: ciò può essere dedotto, ad esempio, sostituendo una rappresentazione parametrica del sottospazio $\mathcal{E}^h \subset \mathcal{E}^n$ nelle equazioni (*).

Esempio 9.14. Nello spazio euclideo $\mathcal{E}^n$, dotato di un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$, fissiamo il vettore $\mathbf{v} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (a^1, a^2, \ldots, a^n)$; l'applicazione $\alpha_\mathbf{v} : \mathcal{E}^n \longrightarrow \mathcal{E}^n$ che al generico punto $P \equiv_\mathcal{R} (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ associa il punto $\alpha_\mathbf{v}(P) \equiv_\mathcal{R} (y^1, y^2, \ldots, y^n)$ tale che

$$y^i = x^i + a^i \quad \forall i \in \mathbb{N}_n,$$

è una isometria di $\mathcal{E}^n$ in sè, la cui trasformazione lineare indotta è la trasformazione identica di $\vec{\mathcal{E}}^n$. L'isometria $\alpha_\mathbf{v}$ è usualmente detta *traslazione* [13] di ampiezza $\mathbf{v} \in \vec{\mathcal{E}}^n$, perchè il corrispondente del punto $P \in \mathcal{E}^n$ è l'unico punto P' di $\mathcal{E}^n$ tale che $\overrightarrow{PP'} = \mathbf{v}$ (si ricordi l'assioma (SE1)).

Esempio 9.15. Nel piano euclideo $\mathcal{E}^2$, dotato di un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, fissiamo $\phi \in [0, 2\pi[$; l'applicazione $\alpha_\phi : \mathcal{E}^2 \longrightarrow \mathcal{E}^2$ che al generico punto $P \equiv_\mathcal{R} (x, y)$ associa il punto

$$\alpha_\phi(P) \equiv_\mathcal{R} (x \cos\phi - y \operatorname{sen}\phi,\ x \operatorname{sen}\phi + y \cos\phi),$$

è una isometria del piano euclideo in sè, che lascia fissa l'origine del riferimento $\mathcal{R}$ e la cui trasformazione lineare indotta è la trasformazione ortogonale ρ_ϕ considerata nell'Esempio 8.14. L'isometria α_ϕ è usualmente detta *rotazione* di ampiezza ϕ attorno all'origine del riferimento cartesiano.

[13] La nozione di *traslazione* era già stata introdotta, nel caso dello spazio vettoriale standard $\mathbb{K}^n$, nella Osservazione 6.5.

Esempio 9.16. Nello spazio euclideo $\mathcal{E}^n$, dotato di un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$, fissiamo il punto $C \equiv_\mathcal{R} (c^1, c^2, \ldots, c^n)$; la simmetria (centrale) di centro C (Definizione 9.20) risulta essere una isometria, la cui trasformazione lineare indotta è l'opposto della trasformazione identica di $\vec{\mathcal{E}}^n$ (ovvero, associa ad ogni vettore $\mathbf{u}$ il suo opposto $-\mathbf{u}$). Per quanto già dimostrato nel paragrafo precedente, le equazioni della simmetria centrale di centro C sono:

$$y^i = -x^i + 2c^i, \quad \forall i \in \mathbb{N}_n.$$

E' possibile poi dimostrare che anche le simmetrie ortogonali rispetto ad un iperpiano (Definizione 9.21) sono esempi di isometrie dello spazio euclideo $\mathcal{E}^n$ in sè, che lasciano fissi tutti e soli i punti dell'iperpiano considerato.

► **Osservazione 9.13.** Si noti che, se $\mathcal{R}'$ e $\mathcal{R}''$ sono due riferimenti cartesiani di uno spazio euclideo n-dimensionale $\mathcal{E}^n$, le equazioni del cambiamento di riferimento da $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}''$ (Proposizione 9.3) rappresentano una isometria dello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^n$ in sè.

CAPITOLO 10

Il piano euclideo

1. I sottospazi del piano euclideo: punti e rette

Nel presente capitolo, il simbolo $\mathcal{E}^2$ indicherà sempre un piano euclideo.
Ovviamente, i sottospazi di $\mathcal{E}^2$ possono avere dimensione 0 (i punti di $\mathcal{E}^2$), 1 (le rette, che sono contemporaneamente iperpiani di $\mathcal{E}^2$) e 2 (il piano $\mathcal{E}^2$ stesso).
Fissato in $\mathcal{E}^2$ un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$, se $P \equiv_{\mathcal{R}} (x, y)$ è un punto di $\mathcal{E}^2$, allora le coordinate cartesiane x ed y sono dette rispettivamente *ascissa* ed *ordinata* di P (relativamente ad $\mathcal{R}$). Le rette coordinate del riferimento $\mathcal{R}$ sono l'*asse* **x** (individuato dall'origine O e dalla direzione del versore **i**) e l'*asse* **y** (individuato dall'origine O e dalla direzione del versore **j**) (Figura 10.1).

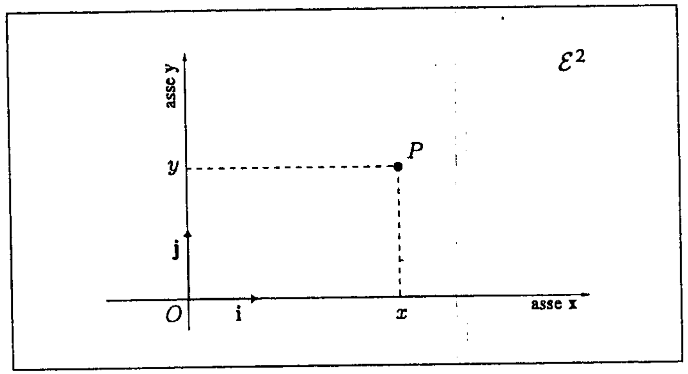

Figura 10.1

Per la Proposizione 9.4 (caso $h = 1$), ogni retta r di $\mathcal{E}^2$ è univocamente determinata da due qualunque suoi punti distinti $A, B \in r$. Posto $A \equiv_{\mathcal{R}} (x_A, y_A)$ e $B \equiv_{\mathcal{R}} (x_B, y_B)$, poichè il vettore (non nullo) $\overrightarrow{AB} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (x_B - x_A, y_B - y_A)$ genera la giacitura della retta r, un punto generico $P \equiv_{\mathcal{R}} (x, y)$ appartiene ad r se e soltanto se $\overrightarrow{AP} \in \mathrm{L}(\overrightarrow{AB})$, ovvero se $(x - x_A, y - y_A) \in \mathrm{L}((x_B - x_A, y_B - y_A))$.
Da questa affermazione si ricavano entrambi i tipi di rappresentazione già visti in generale nel § 4 del capitolo 9:

- la retta r ha *equazione cartesiana*
$$\det\begin{pmatrix} x-x_A & x_B-x_A \\ y-y_A & y_B-y_A \end{pmatrix} = 0$$
che, una volta sviluppata, risulta del tipo
$$ax+by+c=0, \quad con\ (a,b)\neq(0,0);$$
- la retta r ha *equazioni parametriche*
$$\begin{cases} x = x_A + (x_B-x_A)\cdot t \\ y = y_A + (y_B-y_A)\cdot t \end{cases}$$
in cui i coefficienti del parametro reale t sono non entrambi nulli.

Nel caso in cui si abbia contemporaneamente $x_B-x_A\neq 0$ ed $y_B-y_A\neq 0$ (ovvero, quando i punti A e B hanno diversa ascissa e diversa ordinata), è possibile ricavare il parametro t dalle equazioni parametriche, ottenendo la cosiddetta *equazione frazionaria* della retta r:
$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A}$$
Infine, nel caso in cui $x_B-x_A\neq 0$, la retta r ammette una equazione del tipo
$$y=mx+q$$
con $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\in\mathbb{R}$ e $q\in\mathbb{R}$; tale equazione è nota come *equazione esplicita* della retta r (rispetto ad y), e gli scalari m e q sono comunemente detti *coefficiente angolare* e *ordinata all'origine* di r.

Esempio 10.1. La retta r passante per i punti (distinti) $A \equiv_{\mathcal{R}} (2,1)$ e $B \equiv_{\mathcal{R}} (3,-2)$ ha equazione cartesiana
$$\det\begin{pmatrix} x-2 & 3-2 \\ y-1 & -2-1 \end{pmatrix} = 0, \qquad \text{ovvero} \quad 4x+y-9=0.$$
La retta r ha poi equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-3t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$,

equazione frazionaria
$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3}$$
ed equazione esplicita
$$y=-3x+9.$$
La retta s passante per i punti $A \equiv_{\mathcal{R}} (2,1)$ e $B \equiv_{\mathcal{R}} (5,1)$ ha invece equazione cartesiana
$$\det\begin{pmatrix} x-2 & 5-2 \\ y-1 & 1-1 \end{pmatrix} = 0, \qquad \text{ovvero} \quad y-1=0,$$
equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$, equazione esplicita $y=1$, ma non ammette equazione frazionaria.

Si noti poi che, data una qualunque delle rappresentazioni della retta r, è possibile ricavare direttamente una coppia (l,m) di coefficienti direttori di r:

- nel caso della rappresentazione cartesiana $ax+by+c=0$, si ha $(l,m)=(-b,a)$: infatti, $(-b,a)$ è soluzione della equazione omogenea associata (che rappresenta, rispetto alla base $\vec{B}$, la giacitura della retta).
- nel caso della rappresentazione parametrica, (l,m) coincide con la coppia dei coefficienti del parametro t: infatti, tali coefficienti sono costituiti dalle componenti (x_B-x_A, y_B-y_A) del vettore libero $\overrightarrow{AB}$, che genera la giacitura della retta.
- nel caso della rappresentazione frazionaria, (l,m) coincide con la coppia dei denominatori: infatti, tali denominatori sono costituiti dalle componenti (x_B-x_A, y_B-y_A) del vettore libero $\overrightarrow{AB}$, che genera la giacitura della retta.
- nel caso della rappresentazione in forma esplicita, una coppia di coefficienti direttori è data da $(1,m)$, dove m è il coefficiente angolare di r: infatti, la equazione esplicita $y=mx+q$ corrisponde alla equazione cartesiana $mx-y+q=0$, in cui $(-b,a)=(1,m)$.

Da queste osservazioni deduciamo il modo per ottenere le equazioni della retta s parallela ad una retta data e passante per un fissato punto $P\equiv_{\mathcal{R}}(\bar{x},\bar{y})$:

- se r ha rappresentazione cartesiana $ax+by+c=0$, allora s ha rappresentazione cartesiana $a(x-\bar{x})+b(y-\bar{y})=0$;
- se r ha rappresentazione parametrica $\begin{cases} x = x_0 + l\cdot t \\ y = y_0 + m\cdot t \end{cases}$, allora s ha rappresentazione parametrica $\begin{cases} x = \bar{x} + l\cdot t \\ y = \bar{y} + m\cdot t \end{cases}$;
- se r ha rappresentazione frazionaria $\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m}$, allora s ha rappresentazione frazionaria $\dfrac{x-\bar{x}}{l} = \dfrac{y-\bar{y}}{m}$.
- se r ha equazione esplicita $y=mx+q$, allora s ha equazione esplicita $y=\bar{y}+m(x-\bar{x})$.

Infatti, in tutti i casi considerati, le equazioni scritte individuano una retta s con i medesimi coefficienti direttori di r (e quindi, per la Proposizione 9.7, si ha $s//r$) e risultano verificate dalle coordinate del punto P (e quindi, $P\in s$); il risultato segue pertanto dal Teorema 9.5.

Esempio 10.2. La retta r (risp. s) considerata nell'Esempio 10.1 ha coefficienti direttori $(1,-3)$ (risp. $(1,0)$) e coefficiente angolare -3 (risp. 1).

La proposizione seguente ci permette di studiare la mutua posizione di due rette di $\mathcal{E}^2$, a partire dalle loro equazioni cartesiane.

■ **Proposizione 10.1.** *Siano r' ed r'' due rette di $\mathcal{E}^2$ e siano rispettivamente $a'x+b'y+c'=0$ ed $a''x+b''y+c''=0$ due loro equazioni cartesiane, relativamente ad un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R}$. Allora:*

(i) *r' ed r'' coincidono se e soltanto se*
$$\varrho\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 1$$
(ii) *r' ed r'' sono parallele disgiunte se e soltanto se*
$$\varrho\begin{pmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix} = 1 \quad \text{e} \quad \varrho\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 2$$
(iii) *r' ed r'' sono incidenti in un punto se e soltanto se*
$$\varrho\begin{pmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix} = 2 \qquad (\textit{ovvero:} \quad \det\begin{pmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix} \neq 0)$$
(iv) *r' ed r'' non sono mai sghembe.*

Dimostrazione. L'intersezione (eventualmente vuota) tra le due rette r' ed r'' è ovviamente rappresentata, relativamente al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, dal sistema lineare
$$\mathrm{S}: \begin{cases} a'x + b'y + c' = 0 \\ a''x + b''y + c'' = 0, \end{cases}$$
mentre l'intersezione tra le due giaciture $\vec{r'}$ e $\vec{r''}$ è rappresentata, relativamente alla base $\vec{\mathcal{B}}$, dal sistema omogeneo associato
$$\mathrm{S}_0: \begin{cases} a'x + b'y = 0 \\ a''x + b''y = 0. \end{cases}$$
La tesi segue allora facilmente, osservando che:

(i) se r' ed r'' sono coincidenti, $r' \cap r''$ deve contenere tutti i punti di r' (ovvero di r''), e quindi il sistema S deve essere possibile con ∞^1 soluzioni;
(ii) se r' ed r'' sono parallele disgiunte, deve essere $r' \cap r'' = \emptyset$, mentre $\vec{r'} \cap \vec{r''}$ deve contenere tutti i vettori di $\vec{r'}$ (ovvero di $\vec{r''}$), e quindi il sistema S deve essere impossibile, mentre il sistema S_0 deve avere ∞^1 soluzioni;
(iii) se r' ed r'' sono incidenti in un punto P, deve essere $r' \cap r'' = \{P\}$, quindi il sistema S deve essere possibile e determinato;
(iv) r' ed r'' non possono essere sghembe, perchè tutti i casi che si possono presentare nella discussione dei sistemi S ed S_0 sono già stati esaminati ai punti precedenti.

□

Esempio 10.3. Nel piano euclideo $\mathcal{E}^2$, dotato di un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, si considerino le rette
$$r: 2x - y + 3 = 0, \quad r': 4x - 2y + 6 = 0, \quad s: 6x - 3t - 2 = 0, \quad t: 3x - 2y + 5 = 0.$$
La Proposizione 10.1 consente di affermare che r ed r' coincidono, che r ed s sono parallele disgiunte, e che r e t (ovvero s e t) sono incidenti in un punto.

Le seguenti proposizioni mettono a confronto le condizioni di parallelismo e le condizioni di ortogonalità tra due rette di $\mathcal{E}^2$, l'una nel caso di rappresentazioni cartesiane, l'altra nel caso di equazioni esplicite: inoltre, ci forniscono le formule dirette per calcolare l'angolo formato da due rette date.

■ **Proposizione 10.2.** *Siano r' ed r'' due rette di $\mathcal{E}^2$ e siano rispettivamente $a'x + b'y + c' = 0$ ed $a''x + b''y + c'' = 0$ due loro equazioni cartesiane, relativamente ad un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R}$. Allora:*

(i) *r' ed r'' sono parallele se e soltanto se esiste $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che:*
$$(a', b') = \lambda \cdot (a'', b'')$$
(ii) *r' ed r'' sono ortogonali se e soltanto se:*
$$a'a'' + b'b'' = 0$$
(iii) *se r' ed r'' sono orientate in modo che i vettori di componenti $(-b', a')$ e $(-b'', a'')$ siano positivi, $\widehat{r'r''}$ è il numero reale (compreso tra 0 e π) tale che*
$$\cos(\widehat{r'r''}) = \frac{a'a'' + b'b''}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2} \cdot \sqrt{(a'')^2 + (b'')^2}}$$

Dimostrazione. Basta ricordare che $(-b', a')$ e $(-b'', a'')$ sono coppie di coefficienti direttori positivi per r' ed r'', e poi fare uso, rispettivamente, della Prop. 9.8(a) (ovvero dalla Prop. 10.1 ((i) e (ii))), della Prop. 9.9 e della Prop. 9.13.

□

■ **Proposizione 10.3.** *Siano r' ed r'' due rette di $\mathcal{E}^2$ e siano rispettivamente $y = m'x + q'$ ed $y = m''x + q''$ due loro equazioni esplicite, relativamente ad un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R}$. Allora:*

(i) *r' ed r'' sono parallele se e soltanto se*
$$m' = m''.$$
(ii) *r' ed r'' sono ortogonali se e soltanto se:*
$$m' \cdot m'' = -1$$
(iii) *se r' ed r'' sono orientate in modo che i vettori di componenti $(1, m')$ e $(1, m'')$ siano positivi, $\widehat{r'r''}$ è il numero reale (compreso tra 0 e π) tale che*
$$\cos(\widehat{r'r''}) = \frac{m'm'' + 1}{\sqrt{(m')^2 + 1} \cdot \sqrt{(m'')^2 + 1}}$$

Dimostrazione. Basta ricordare che $(1, m')$ e $(1, m'')$ sono coppie di coefficienti direttori positivi per r' ed r'', e poi fare uso, rispettivamente, della Prop. 9.8(a) (ovvero dalla Prop. 10.1 ((i) e (ii))), della Prop. 9.9 e della Prop. 9.13.

□

Esempio 10.4. Se le rette r ed s considerate nell'esempio 10.1 sono orientate in modo che le loro equazioni

$$r:\ 3x+y-9=0 \quad \text{ed} \quad s:\ y=1$$

siano positive, allora la retta t parallela ad r passante per il punto $P \equiv_{\mathcal{R}} (-1,4)$ ha equazione

$$t:\ 3(x-1)+(y+3)=0,$$

la retta t' ortogonale ad r passante per il punto $Q \equiv_{\mathcal{R}} (3,0)$ ha equazione

$$t:\ (x-3)-3(y-0)=0,$$

mentre l'angolo tra r ed s è $\phi \in [0,\pi]$ tale che

$$\cos\phi = \frac{3\cdot 0+1\cdot 1}{\sqrt{3^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

► **Osservazione 10.1.** Si noti che, se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ denotano i due assi coordinati del riferimento $\mathcal{R}$ canonicamente orientati (ovvero orientati in modo che i versori $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ siano positivi), allora la retta r di equazione esplicita $y=mx+q$, orientata in modo che il vettore di componenti $(1,m)$ (risp. $(-1,-m)$) sia positivo, ha

$$\cos(\widehat{r\mathbf{x}}) = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}, \qquad \cos(\widehat{r\mathbf{y}}) = \sin(\widehat{r\mathbf{x}}) = \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}$$

(risp.

$$\cos(\widehat{r\mathbf{x}}) = \frac{-1}{\sqrt{m^2+1}}, \qquad \cos(\widehat{r\mathbf{y}}) = \sin(\widehat{r\mathbf{x}}) = \frac{-m}{\sqrt{m^2+1}})$$

Da questo segue, qualunque sia l'orientazione assegnata ad r, che $\operatorname{tg}(\widehat{r\mathbf{x}}) = m$; pertanto, *il coefficiente angolare m della equazione esplicita coincide con la tangente dell'angolo che la retta (arbitrariamente orientata) forma con l'asse* $\mathbf{x}$, *canonicamente orientato, del riferimento* $\mathcal{R}$.

♦ **Definizione 10.1.** Dato un punto $C \in \mathcal{E}^2$, si dice *fascio (proprio) di rette di centro* C l'insieme costituito da tutte e sole le rette di $\mathcal{E}^2$ che contengono C.

♦ **Definizione 10.2.** Dato un vettore $\mathbf{v} \in \vec{\mathcal{E}}^2$, si dice *fascio (improprio) di rette di direzione* $\mathbf{v}$ l'insieme costituito da tutte e sole le rette di $\mathcal{E}^2$ che sono parallele alla direzione individuata dal vettore $\mathbf{v}$.

Il seguente risultato ci fornisce le equazioni di tutte le rette appartenenti ad un fissato fascio proprio (risp. improprio), a partire dalla rappresentazione cartesiana di due elementi (risp. un elemento) del fascio stesso.

■ **Proposizione 10.4.**

(i) *Siano r' ed r'' due rette non parallele di $\mathcal{E}^2$ e siano rispettivamente $a'x+b'y+c'=0$ ed $a''x+b''y+c''=0$ due loro equazioni cartesiane, relativamente ad un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R}$. Allora, detto C il punto di intersezione di r' ed r'', l'equazione*

$$\lambda(a'x+b'y+c')+\mu(a''x+b''y+c'')=0$$

rappresenta, al variare dei parametri reali $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$, tutte e sole le rette del fascio (proprio) di centro C.

(ii) *Sia r una retta di $\mathcal{E}^2$ e sia $ax+by+c=0$ una sua equazione cartesiana, relativamente ad un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R}$. Allora la equazione*

$$ax+by+k=0$$

rappresenta, al variare del parametro $k\in\mathbb{R}$, tutte e sole le rette del fascio (improprio) di direzione $\mathbf{v}\in\vec{r}$ (cioè tutte le rette parallele ad r).

Dimostrazione. (i) Poichè $\{C\} = r'\cap r''$, le coordinate di C verificano entrambe le equazioni $a'x+b'y+c'=0$ ed $a''x+b''y+c''=0$, e quindi verificano anche ogni equazione ottenuta da quelle tramite combinazione lineare. Ciò prova che tutte le rette di equazione

$$\lambda(a'x+b'y+c')+\mu(a''x+b''y+c'')=0,$$

al variare dei parametri reali $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$, appartengono al fascio di centro C. Viceversa, se s è una retta del fascio di centro C, allora $s\cap(r'\cap r'')=\{C\}=r'\cap r''$; pertanto, l'equazione cartesiana $ax+by+c=0$ di s, relativamente al riferimento $\mathcal{R}$, deve essere compbinazione lineare delle due equazioni cartesiane di r' ed r''. Ciò equivale ad affermare che deve esistere una coppia $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}-\{(0,0)\}$, tale che

$$ax+by+c=\lambda(a'x+b'y+c')+\mu(a''x+b''y+c'').$$

(ii) E' sufficiente osservare che ogni retta di equazione $ax+by+k=0$, con $k\in\mathbb{R}$, è parallela ad r, e che ogni retta parallela ad r ha (per la Proposizione 10.2) equazione $(\lambda a)x+(\lambda b)y+d=0$, con $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$ e $d\in\mathbb{R}$, ovvero

$$ax+by+k=0, \quad \text{con } k=\frac{d}{\lambda}\in\mathbb{R}.$$

□

Esempio 10.5. Dato nel piano euclideo $\mathcal{E}^2$ il punto $C\equiv(1,2)$, il fascio di rette di centro C può essere rappresentato dall'equazione

$$\lambda(x-1)+\mu(y-2)=0,$$

ottenuto scegliendo le rette r' di equazione $x-1=0$ ed r'' di equazione $y-2=0$. Scegliendo, invece, $\bar{r}'$ di equazione $2x-y=0$ ed $\bar{r}''$ di equazione $x+y-3=0$, si ottiene l'equazione

$$\lambda(2x-y)+\mu(x+y-3)=0.$$

Il fascio di rette parallele alla retta $\bar{r}''$ ha equazione

$$x+y+k=0.$$

2. Distanze

Nel piano euclideo $\mathcal{E}^2$, in cui si suppone di avere fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$, la nozione di distanza tra due punti ed il relativo metodo di calcolo si specializza nella forma seguente.

■ **Proposizione 10.5.** *Se $P \equiv_{\mathcal{R}} (x_P, y_P)$ e $Q \equiv_{\mathcal{R}} (x_Q, y_Q)$, allora:*

$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

Dimostrazione. Basta utilizzare la Proposizione 9.14. □

Poichè le rette sono gli iperpiani di $\mathcal{E}^2$, il calcolo della distanza tra un punto ed una retta si effettua utilizzando, nel caso $n = 2$, la Proposizione 9.15.

■ **Proposizione 10.6.** *Sia r la retta di $\mathcal{E}^2$ di equazione cartesiana, rispetto ad $\mathcal{R}$, $ax + by + c = 0$ e sia $P \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{x}, \bar{y})$. Allora:*

$$d(P,r) = \frac{|a\bar{x} + b\bar{y} + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

□

Il seguente risultato fornisce il metodo operativo per il calcolo della distanza tra due rette di $\mathcal{E}^2$, in funzione della loro reciproca posizione.

■ **Proposizione 10.7.** *Siano r' ed r'' due rette di $\mathcal{E}^2$.*

- *Se r' ed r'' sono incidenti (in particolare, coincidenti), la loro distanza è uguale a zero;*
- *Se r' ed r'' sono parallele, la loro distanza uguaglia la distanza tra r'' (risp. r') ed un punto qualsiasi di r' (risp. di r''):*

$$d(r', r'') = d(Q, r'') \quad \forall Q \in r' \qquad (\textit{risp. } d(r', r'') = d(P, r') \quad \forall P \in r'')$$

Dimostrazione. La prima parte dell'enunciato è banalmente vera.
Nel caso in cui r' ed r'' siano parallele, occorre verificare che la distanza $d(Q, r'')$ è indipendente dalla scelta del punto $Q \in r'$ (analoga dimostrazione sussiste per $d(P, r')$, con $P \in r''$). In virtù della Proposizione 10.2 è possibile supporre che le due rette abbiano - rispetto ad un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R}$ di $\mathcal{E}^2$ - equazioni $r' : ax + by + c' = 0$, $r'' : ax + by + c'' = 0$. Allora, posto $Q \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{x}, \bar{y})$ e ricordato che $Q \in r'$, la tesi segue dalla Proposizione 10.6:

$$d(Q, r'') = \frac{|a\bar{x} + b\bar{y} + c''|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-c' + c''|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

□

Esempio 10.6. Lo studio delle mutue posizioni tra le rette considerate nell'Esempio 10.3, di equazioni

$r : 2x - y + 3 = 0, \quad r' : 4x - 2y + 6 = 0, \quad s : 6x - 3t - 2 = 0, \quad t : 3x - 2y + 5 = 0,$

assicura che - per la Proposizione 10.7 - si ha:

$$d(r, r') = d(r, t) = d(s, t) = 0.$$

Per calcolare la distanza tra le due rette parallele disgiunte r ed s, consideriamo $P \equiv_{\mathcal{R}} (-1, 1) \in r$ ed applichiamo la formula fornita dalla Proposizione 10.6:

$$d(r, s) = d(P, s) = \frac{|(-1) \cdot 6 - 3 \cdot (1) - 2|}{\sqrt{6^2 + (-3)^2}} = \frac{11}{\sqrt{45}}$$

In dimensione due, la nozione di volume di un 2-simplesso (ovvero di area di un triangolo) - vista in generale nel § 8 del capitolo 9 - si specializza nel modo seguente.

♦ **Definizione 10.3.** Dati tre punti non allineati A, B, C di $\mathcal{E}^2$, si dice *area* del triangolo di vertici A, B, C il numero reale positivo [1]

$$\mathcal{V}(<A, B, C>) = \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\det \begin{pmatrix} <\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}> & <\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}> \\ <\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}> & <\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}> \end{pmatrix}}$$

■ **Proposizione 10.8.** *Se $A \equiv_{\mathcal{R}} (x_A, y_A)$, $B \equiv_{\mathcal{R}} (x_B, y_B)$, e $C \equiv_{\mathcal{R}} (x_C, y_C)$, allora:*

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{pmatrix} \right|$$

Dimostrazione. È un caso particolare (per $h = 2$) della dimostrazione della Proposizione 9.16. □

Esempio 10.7. Se $A \equiv_{\mathcal{R}} (-1, 1)$, $B \equiv_{\mathcal{R}} (3, 0)$ e $C \equiv_{\mathcal{R}} (2, -2)$, l'area del triangolo ABC è

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} 3 - (-1) & 2 - (-1) \\ 0 - 1 & -2 - 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{9}{2}.$$

[1] Si noti che la Definizione 10.3 presuppone che il determinante della matrice presente sotto il segno di radice quadrata sia sicuramente positivo, come assicurato dalla Proposizione 8.13 relativa alle proprietà delle matrici di Gram; in alternativa, la dimostrazione di questo fatto può essere agevolmente dedotta dalla dimostrazione della Proposizione 9.16, nel caso $h = 2$.

3. Le coniche come luoghi geometrici

Nel presente paragrafo daremo alcuni cenni relativi alle coniche (non degeneri) del piano euclideo $\mathcal{E}^2$, intese come particolari luoghi geometrici. Elementi più dettagliati della teoria delle coniche verranno esposti nel Capitolo 12.

♦ **Definizione 10.4.** Si dice *circonferenza* il luogo geometrico dei punti del piano $\mathcal{E}^2$ che sono equidistanti da un punto fisso C, detto *centro*. La comune distanza tra il centro ed i punti della circonferenza si dice *raggio* della circonferenza.

Fissato in $\mathcal{E}^2$ un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, se il centro è $C \equiv_{\mathcal{R}} (\alpha, \beta)$ ed il raggio è $r > 0$, allora la circonferenza $\mathcal{C} = \{P \in \mathcal{E}^2 \mid d(P, C) = r\}$ ha equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

Infatti, $P \equiv_{\mathcal{R}} (x, y) \in \mathcal{C}$ se e soltanto se $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$; sviluppando i calcoli si perviene alla equazione considerata.
In particolare, se si sceglie un riferimento cartesiano $\mathcal{R}'$ avente origine nel centro C, allora la circonferenza di centro C e raggio $r > 0$ assume equazione cartesiana:

$$(x')^2 + (y')^2 = r^2$$

♦ **Definizione 10.5.** Si dice *ellisse* il luogo geometrico dei punti del piano $\mathcal{E}^2$ che hanno costante (uguale a $2a > 0$) la somma delle distanze da due punti fissi F_1 e F_2, detti *fuochi*.

Fissato in $\mathcal{E}^2$ il riferimento cartesiano $\bar{\mathcal{R}}$ tale che $F_1 \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} (-c, 0)$ e $F_2 \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} (c, 0)$ (con $d(F_1, F_2) = 2c < 2a$), allora la ellisse $\mathcal{E} = \{P \in \mathcal{E}^2 \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$ ha equazione cartesiana [2]:

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{dove } b = \sqrt{a^2 - c^2} > 0.$$

(si veda la Figura 10.2).

Infatti, $P \equiv (x, y) \in \mathcal{E}$ se e soltanto se

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a;$$

sviluppando i calcoli (isolando i radicali ed elevando al quadrato due volte), si perviene alla equazione considerata.

Si noti che la circonferenza può essere considerata come una particolare ellisse, in cui i due fuochi coincidono.

---

[2] Per analogia, il luogo geometrico rappresentato dalla equazione

$$(1') \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

(che risulta vuoto perchè la equazione scritta non può essere verificata dalle coordinate di alcun punto del piano euclideo), viene usualmente indicato come *ellisse vuota (o immaginaria)* di $\mathcal{E}^2$.

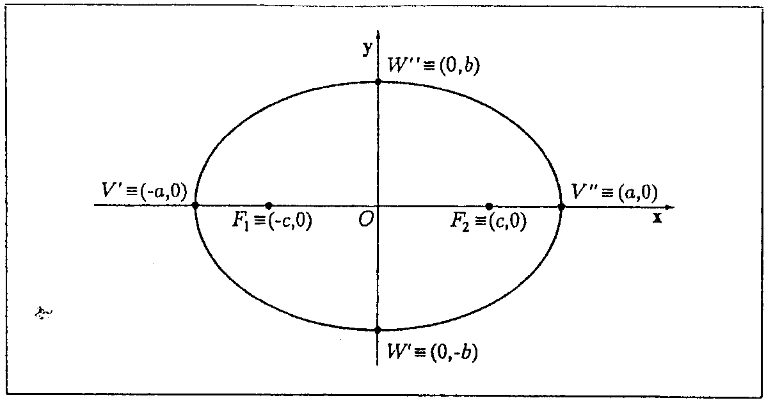

Figura 10.2

♦ **Definizione 10.6.** Si dice *iperbole* il luogo geometrico dei punti del piano $\mathcal{E}^2$ che hanno costante (uguale a $2a > 0$) la differenza - in valore assoluto - delle distanze da due punti fissi F_1 e F_2, detti *fuochi*.

Fissato in $\mathcal{E}^2$ il riferimento cartesiano $\bar{\mathcal{R}}$ tale che $F_1 \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} (-c, 0)$ e $F_2 \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} (c, 0)$ (con $d(F_1, F_2) = 2c > 2a$), allora la iperbole $\mathcal{I} = \{P \in \mathcal{E}^2 \mid |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}$ ha equazione cartesiana:

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{dove } b = \sqrt{c^2 - a^2} > 0$$

(si veda la Figura 10.3).

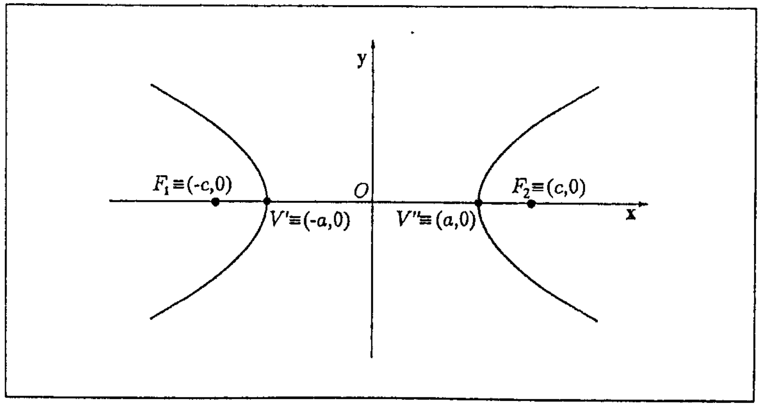

Figura 10.3

CAPITOLO 11

Lo spazio euclideo

1. I sottospazi dello spazio euclideo: punti, rette e piani

Nel presente capitolo, il simbolo $\mathcal{E}^3$ indicherà sempre uno spazio euclideo ordinario (ovvero, di dimensione tre).
Ovviamente, i sottospazi di $\mathcal{E}^3$ possono avere dimensione 0 (i punti di $\mathcal{E}^3$), 1 (le rette di $\mathcal{E}^3$), 2 (i piani, che sono gli iperpiani di $\mathcal{E}^3$) e 3 (lo spazio $\mathcal{E}^3$ stesso).
Fissato in $\mathcal{E}^3$ un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$, se $P \equiv_{\mathcal{R}} (x, y, z)$ è un punto di $\mathcal{E}^3$, allora le coordinate cartesiane x, y e z sono dette rispettivamente *ascissa*, *ordinata* e *quota* di P (relativamente ad $\mathcal{R}$). Le rette coordinate del riferimento $\mathcal{R}$ sono l'*asse* x (individuato dall'origine O e dalla direzione del versore $\mathbf{i}$), l'*asse* y (individuato dall'origine O e dalla direzione del versore $\mathbf{j}$) e l'*asse* z (individuato dall'origine O e dalla direzione del versore $\mathbf{k}$), mentre i piani coordinati del riferimento $\mathcal{R}$ sono il *piano* xy (individuato dall'origine O e dai versori $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$), il *piano* yz (individuato dall'origine O e dai versori $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$) e il *piano* xz (individuato dall'origine O e dai versori $\mathbf{i}$ e $\mathbf{k}$) (Figura 11.1).

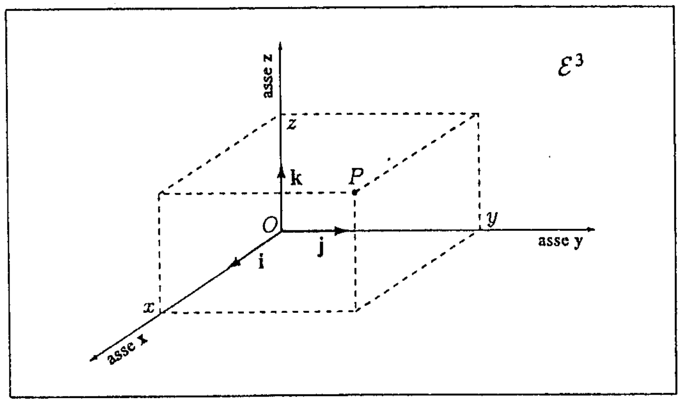

Figura 11.1

Per la Proposizione 9.4 (caso $h = 1$), ogni retta r di $\mathcal{E}^3$ è univocamente determinata da due qualunque suoi punti distinti $A, B \in r$. Posto $A \equiv_{\mathcal{S}} (x_A, y_A, z_A)$ e $B \equiv_{\mathcal{R}} (x_B, y_B, z_B)$, poichè il vettore (non nullo) $\overrightarrow{AB} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ genera la giacitura della retta r, un punto generico $P \equiv_{\mathcal{R}} (x, y, z)$ appartiene ad r se e

soltanto se $\overrightarrow{AP} \in \mathrm{L}(\overrightarrow{AB})$, ovvero se $(x - x_A, y - y_A, z - z_A) \in \mathrm{L}((x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A))$.
Da questa affermazione si ricavano entrambi i tipi di rappresentazione già visti in generale nel § 4 del capitolo 9:

- la retta r ha *rappresentazione cartesiana*

$$\varrho \begin{pmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A \\ z - z_A & z_B - z_A \end{pmatrix} = 1$$

che, una volta sviluppata, risulta del tipo

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \qquad \text{con } \varrho \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2;$$

- la retta r ha *equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A) \cdot t \\ y = y_A + (y_B - y_A) \cdot t \\ z = z_A + (z_B - z_A) \cdot t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

in cui i tre coefficienti del parametro t non sono tutti nulli.

Nel caso in cui si abbia contemporaneamente $x_B - x_A \neq 0$, $y_B - y_A \neq 0$ e $z_B - z_A \neq 0$ (ovvero, quando i punti A e B hanno diversa ascissa, diversa ordinata e diversa quota), è possibile ricavare il parametro t dalle equazioni parametriche, ottenendo la cosiddetta *equazione frazionaria* della retta r :

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}$$

Esempio 11.1. Fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$ nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$, i punti $A \equiv_{\mathcal{R}} (1, 2, 3)$ e $B \equiv_{\mathcal{R}} (2, -1, 0)$ sono affinemente indipendenti (cioè distinti), in quanto il vettore libero $\overrightarrow{AB} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (1, -3, -3)$ è linearmente indipendente (essendo diverso dal vettore nullo). Per ottenere una rappresentazione cartesiana della retta r passante per A e B basta considerare un generico punto $P \equiv_{\mathcal{R}} (x, y, z)$ di $\mathcal{E}^3$ ed imporre che $\overrightarrow{AP} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (x - 1, y - 2, z - 3)$ appartenga ad $\vec{r} = \mathrm{L}(\overrightarrow{AB})$. Ciò equivale ad imporre che

$$\varrho \begin{pmatrix} x - 1 & 1 \\ y - 2 & -3 \\ z - 3 & -3 \end{pmatrix} = 1.$$

Essendo $\det(1) \neq 0$, basterà imporre che entrambi gli orlati del minore considerato abbiano determinante nullo:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x - 1 & 1 \\ y - 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \\[2ex] \begin{vmatrix} x - 1 & 1 \\ z - 3 & -3 \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

Ciò porta al seguente sistema lineare minimo, che rappresenta la retta r:

$$r : \begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ 3x + z - 6 = 0. \end{cases}$$

La retta r ha poi equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

ed equazione frazionaria

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{-3} = \frac{z - 3}{-3}.$$

La retta s passante per i punti $A \equiv_{\mathcal{R}} (1, 2, 3)$ e $B' \equiv_{\mathcal{R}} (0, 2, 1)$ ha invece equazione cartesiana

$$r : \begin{cases} 2x - z + 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

ed equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}),$ ma non ammette equazione frazionaria (perchè i due punti A e B' hanno la stessa ordinata).

Si noti poi che, data una qualunque delle rappresentazioni della retta r, è possibile ricavare direttamente una terna (l, m, n) di coefficienti direttori di r:

- nel caso della rappresentazione cartesiana

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases},$$

si ha

$$(l, m, n) = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right).$$

Infatti, il Teorema di Laplace (Teorema 3.17) permette di verificare facilmente che tale terna è soluzione del sistema omogeneo associato (che rappresenta, rispetto alla base $\vec{\mathcal{B}}$, la giacitura della retta):

$$\begin{cases} a \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0 \\[2ex] a' \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} - b' \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} + c' \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

- nel caso della rappresentazione parametrica, (l,m,n) coincide con la terna dei coefficienti del parametro t: infatti, tali coefficienti sono costituiti dalle componenti $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ del vettore libero $\overrightarrow{AB}$, che genera la giacitura della retta.
- nel caso della rappresentazione frazionaria, (l,m,n) coincide con la terna dei denominatori: infatti, tali denominatori sono costituiti dalle componenti $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ del vettore libero $\overrightarrow{AB}$, che genera la giacitura della retta.

Esempio 11.2. Le rette r ed s considerate nell'esempio 11.1 hanno rispettivamente coefficienti direttori $(1,-3,-3)$ e $(-1,0,-2)$ (o anche $(1,0,2)$), come si ricava direttamente dalle componenti dei vettori liberi $\overrightarrow{AB} \in \vec{r}$ e $\overrightarrow{AB'} \in \vec{s}$, o dai coefficienti del parametro nelle equazioni parametriche delle due rette. Nel caso della retta r, i coefficienti direttori si ricavano direttamente anche dai denominatori della equazione frazionaria; d'altra parte, considerando la rappresentazione cartesiana di r, la matrice incompleta è

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e, pertanto, i coefficienti direttori di r risultano ancora

$$\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) = (1,-3,-3).$$

Analogamente, la matrice incompleta della rappresentazione cartesiana di s è

$$M' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e, pertanto, i coefficienti direttori di s risultano ancora

$$\left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1,0,2).$$

Si noti che la retta s non ammette rappresentazione frazionaria proprio perchè uno dei suoi coefficienti direttori è nullo.

Da queste osservazioni deduciamo il modo per ottenere le equazioni della retta s parallela ad una retta r data e passante per un fissato punto $P \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$:

- se r ha rappresentazione cartesiana

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

allora s ha rappresentazione cartesiana

$$\begin{cases} a(x-\bar{x}) + b(y-\bar{y}) + c(z-\bar{z}) = 0 \\ a'(x-\bar{x}) + b'(y-\bar{y}) + c'(z-\bar{z}) = 0 \end{cases}$$

- se r ha rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = x_0 + l \cdot t \\ y = y_0 + m \cdot t \\ z = z_0 + n \cdot t \end{cases}$$

allora s ha rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = \bar{x} + l \cdot t \\ y = \bar{y} + m \cdot t \\ z = \bar{z} + n \cdot t \end{cases}$$

- se r ha rappresentazione frazionaria

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

allora s ha rappresentazione frazionaria

$$\frac{x - \bar{x}}{l} = \frac{y - \bar{y}}{m} = \frac{z - \bar{z}}{n}.$$

Infatti, in tutti i casi considerati, le equazioni scritte individuano una retta s con i medesimi coefficienti direttori di r (e quindi, per la Proposizione 9.7, si ha $s//r$) e risultano verificate dalle coordinate del punto P (e quindi, $P \in s$); il risultato segue pertanto dal Teorema 9.5.
La proposizione seguente ci permette di studiare la mutua posizione di due rette di $\mathcal{E}^3$, a partire dalle loro equazioni cartesiane.

■ **Proposizione 11.1.** *Siano r' ed r'' due rette di $\mathcal{E}^3$ e siano rispettivamente*

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \\ a'''x + b'''y + c'''z + d''' = 0 \end{cases}$$

due loro rappresentazioni cartesiane, relativamente ad un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R}$. Allora, posto

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{pmatrix}$$

si ha che:

(i) *r' ed r'' coincidono se e soltanto se*

$$\varrho(B) = 2$$

(ii) *r' ed r'' sono parallele disgiunte se e soltanto se*

$$\varrho(A) = 2 \quad \text{e} \quad \varrho(B) = 3$$

(iii) *r' ed r'' sono incidenti in un punto se e soltanto se*

$$\varrho(A) = \varrho(B) = 3$$

(iv) *r' ed r'' sono sghembe se e soltanto se*

$$\varrho(A) = 3 \quad \text{e} \quad \varrho(B) = 4$$

Dimostrazione. L'intersezione (eventualmente vuota) tra le due rette r' ed r'' è ovviamente rappresentata, relativamente al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, dal sistema lineare

$$\mathbf{S}: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \\ a'''x + b'''y + c'''z + d''' = 0, \end{cases}$$

mentre l'intersezione tra le due giaciture $\vec{r'}$ e $\vec{r''}$ è rappresentata, relativamente alla base $\vec{\mathcal{B}}$, dal sistema omogeneo associato $\mathbf{S}_0$. La tesi segue allora facilmente, osservando che:

(i) se r' ed r'' sono coincidenti, $r' \cap r''$ deve contenere tutti i punti di r' (ovvero di r''), e quindi il sistema $\mathbf{S}$ deve essere possibile con ∞^1 soluzioni;

(ii) se r' ed r'' sono parallele disgiunte, deve essere $r' \cap r'' = \emptyset$, mentre $\vec{r'} \cap \vec{r''}$ deve contenere tutti i vettori di $\vec{r'}$ (ovvero di $\vec{r''}$), e quindi il sistema $\mathbf{S}$ deve essere impossibile, mentre il sistema $\mathbf{S}_0$ deve avere ∞^1 soluzioni;

(iii) se r' ed r'' sono incidenti in un punto P, deve essere $r' \cap r'' = \{P\}$, quindi il sistema $\mathbf{S}$ deve essere possibile e determinato;

(iv) se r' ed r'' sono sghembe, deve essere $r' \cap r'' = \emptyset$ ed $\vec{r'} \cap \vec{r''} = \{0\}$, e quindi il sistema $\mathbf{S}$ deve essere impossibile (cioè rango della matrice incompleta diverso dal rango della matrice completa), mentre il sistema $\mathbf{S}_0$ deve avere solo la soluzione ovvia.

□

Esempio 11.3. Nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$, dotato di un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, si considerino le rette

$$r: \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x - z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

$$s': \begin{cases} x - z = 3 \\ 2y - 2z = 1 \end{cases} \qquad s'': \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad s''': \begin{cases} x - y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

La Proposizione 11.1 consente di affermare che r ed s coincidono, che r ed s' sono parallele disgiunte, che r e s'' sono incidenti in un punto e che r e s''' sono sghembe.

La seguente proposizione mette a confronto la condizione di parallelismo e la condizione di ortogonalità tra due rette di $\mathcal{E}^3$, nel caso in cui siano note due loro terne di coefficienti direttori; inoltre, ci fornisce la formula diretta per calcolare l'angolo formato da due rette date.

■ **Proposizione 11.2.** *Siano r' ed r'' due rette di $\mathcal{E}^3$ e siano rispettivamente (l', m', n') ed (l'', m'', n'') due loro terne di coefficienti direttori, relativamente ad un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R}$. Allora:*

(i) *r' ed r'' sono parallele se e soltanto se esiste $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che*

$$(l', m', n') = \lambda \cdot (l'', m'', n'')$$

(ii) *r' ed r'' sono ortogonali se e soltanto se*

$$l'l'' + m'm'' + n'n'' = 0$$

(iii) *se r' ed r'' sono orientate in modo che (l', m', n') ed (l'', m'', n'') siano terne positive di coefficienti direttori, $\widehat{r'r''}$ è il numero reale (compreso tra 0 e π) tale che*

$$\cos(\widehat{r'r''}) = \frac{l'l'' + m'm'' + n'n''}{\sqrt{(l')^2 + (m')^2 + (n')^2} \cdot \sqrt{(l'')^2 + (m'')^2 + (n'')^2}}$$

Dimostrazione. Basta specializzare, per $n = 3$, gli enunciati rispettivamente della Prop. 9.8(a), della Prop. 9.9 e della Prop. 9.13.

□

Esempio 11.4. Le rette r, s', s'' ed s''' considerate nell'Esempio 11.3 hanno rispettivamente coefficienti direttori $(1,1,1)$, $(1,1,1)$, $(1,0,-1)$ e $(0,0,1)$, come si ricava facilmente risolvendo i sistemi lineari omogenei associati alle rappresentazioni cartesiane delle quattro rette. La Proposizione 11.2(i) consente di affermare che r ed s' sono parallele, mentre la Proposizione 11.2(ii) consente di affermare che r ed s'' sono ortogonali. Infine, la Proposizione 11.2(iii) consente di calcolare l'angolo tra le rette r ed s''', supponendo che esse siano orientate in modo che le terne di coefficienti direttori considerate risultino positive:

$$\cos(\widehat{rs'''}) = \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Passiamo ora ad esaminare le rappresentazioni dei piani di $\mathcal{E}^3$.
Per la Proposizione 9.4 (caso $h = 2$), ogni piano π di $\mathcal{E}^3$ è univocamente determinato da tre qualunque suoi punti, distinti e a due a due non allineati, $A, B, C \in \pi$. Posto $A \equiv_{\mathcal{R}} (x_A, y_A, z_A)$, $B \equiv_{\mathcal{R}} (x_B, y_B, z_B)$ e $C \equiv_{\mathcal{R}} (x_C, y_C, z_C)$, poichè i vettori (non nulli e linearmente indipendenti) $\overrightarrow{AB} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ e $\overrightarrow{AC} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)$ generano la giacitura del piano π, un punto generico $P \equiv_{\mathcal{R}} (x, y, z)$ appartiene a π se e soltanto se $\overrightarrow{AP} \in \mathbf{L}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, ovvero se

$$(x - x_A, y - y_A, z - z_A) \in \mathbf{L}((x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A), (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)).$$

Da questa affermazione si ricavano entrambi i tipi di rappresentazione già visti in generale nel § 4 del capitolo 9:

- il piano π ha *equazione cartesiana*

$$\det \begin{pmatrix} x - x_A & x_B - x_A & x_C - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A & y_C - y_A \\ z - z_A & z_B - z_A & z_C - z_A \end{pmatrix} = 0$$

che, una volta sviluppata, risulta del tipo

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad \text{con} \qquad (a, b, c) \neq (0, 0, 0);$$

- il piano π ha *equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)\cdot\lambda + (x_C - x_A)\cdot\mu \\ y = y_A + (y_B - y_A)\cdot\lambda + (y_C - y_A)\cdot\mu \\ z = z_A + (z_B - z_A)\cdot\lambda + (z_C - z_A)\cdot\mu \end{cases} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

in cui

$$\varrho\begin{pmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \\ z_B - z_A & z_C - z_A \end{pmatrix} = 2.$$

Esempio 11.5. Fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$ nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$, i punti $A \equiv_{\mathcal{R}} (1, 2, 3)$, $B \equiv_{\mathcal{R}} (2, -1, 0)$ e $C \equiv_{\mathcal{R}} (0, 2, 1)$ sono affinemente indipendenti, in quanto i vettori liberi $\overrightarrow{AB} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (1, -3, -3)$ e $\overrightarrow{AC} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (-1, 0, -2)$ sono linearmente indipendenti (essendo non proporzionali). Per ottenere una rappresentazione cartesiana del piano π passante per A, B e C basta considerare un generico punto $P \equiv_{\mathcal{R}} (x, y, z)$ di $\mathcal{E}^3$ ed imporre che $\overrightarrow{AP} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (x - 1, y - 2, z - 3)$ appartenga a $\vec{\pi} = \mathrm{L}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Ciò equivale ad imporre che

$$\varrho\begin{pmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y-2 & -3 & 0 \\ z-3 & -3 & -2 \end{pmatrix} = 2, \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y-2 & -3 & 0 \\ z-3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Il piano π sarà quindi rappresentato, rispetto ad $\mathcal{R}$, dalla equazione cartesiana

$$6x + 5y - 3z - 7 = 0.$$

La sua rappresentazione parametrica sarà invece

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + t - t' \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - 3t - 2t' \end{cases} \qquad (t, t' \in \mathbb{R}).$$

Si noti che, nella rappresentazione parametrica del piano π, le due terne di coefficienti dei parametri individuano le componenti, rispetto alla base $\vec{\mathcal{B}}$, di due vettori che generano la giacitura $\vec{\pi}$ del piano, così come la equazione omogenea associata alla rappresentazione cartesiana di π costituisce una rappresentazione cartesiana, rispetto a $\vec{\mathcal{B}}$, della medesima giacitura $\vec{\pi}$ (si veda il Teorema 9.6).
Da queste osservazioni deduciamo il modo per ottenere le equazioni del piano σ parallelo ad un piano π dato e passante per un fissato punto $P \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$:

- se π ha rappresentazione cartesiana

$$ax + by + cz + d = 0,$$

allora σ ha rappresentazione cartesiana

$$a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}) + c(z - \bar{z}) = 0;$$

- se π ha rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = x_0 + u_1\cdot\lambda + v_1\cdot\mu \\ y = y_0 + u_2\cdot\lambda + v_2\cdot\mu \\ z = z_0 + u_3\cdot\lambda + v_3\cdot\mu \end{cases},$$

allora σ ha rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = \bar{x} + u_1\cdot\lambda + v_1\cdot\mu \\ y = \bar{y} + u_2\cdot\lambda + v_2\cdot\mu \\ z = \bar{z} + u_3\cdot\lambda + v_3\cdot\mu \end{cases}.$$

Infatti, in entrambi i casi, le equazioni scritte individuano un piano σ con la medesima giacitura di π (e quindi, per definizione, si ha $\sigma // \pi$) e risultano verificate dalle coordinate del punto P (e quindi, $P \in \sigma$); il risultato segue pertanto dal Teorema 9.5.

La proposizione seguente ci permette di studiare la mutua posizione di due piani di $\mathcal{E}^3$, a partire dalle loro equazioni cartesiane.

■ **Proposizione 11.3.** *Siano π' e π'' due piani di $\mathcal{E}^3$ e siano rispettivamente $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ ed $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$ due loro equazioni cartesiane, relativamente ad un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R}$. Allora:*

(i) *π' e π'' coincidono se e soltanto se*

$$\varrho\begin{pmatrix} a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 1$$

(ii) *π' e π'' sono paralleli disgiunti se e soltanto se*

$$\varrho\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{e} \qquad \varrho\begin{pmatrix} a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 2$$

(iii) *π' e π'' sono incidenti in una retta se e soltanto se*

$$\varrho\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \varrho\begin{pmatrix} a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 2$$

(iv) *π' e π'' non sono mai sghembi, nè incidenti in un punto.*

Dimostrazione. L'intersezione (eventualmente vuota) tra i due piani π' e π'' è ovviamente rappresentata, relativamente al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, dal sistema lineare

$$\mathrm{S} : \begin{cases} a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0, \end{cases}$$

mentre l'intersezione tra le due giaciture $\vec{\pi}'$ e $\vec{\pi}''$ è rappresentata, relativamente alla base $\vec{\mathcal{B}}$, dal sistema omogeneo associato S_0. La tesi segue allora facilmente, osservando che:

(i) se π' e π'' sono coincidenti, $\pi' \cap \pi''$ deve contenere tutti i punti di π' (ovvero di π''), e quindi il sistema S deve essere possibile con ∞^2 soluzioni;
(ii) se π' e π'' sono paralleli disgiunti, deve essere $\pi' \cap \pi'' = \emptyset$, mentre $\vec{\pi}' \cap \vec{\pi}''$ deve contenere tutti i vettori di $\vec{\pi}'$ (ovvero di $\vec{\pi}''$), e quindi il sistema S deve essere impossibile, mentre il sistema S_0 deve avere ∞^2 soluzioni;
(iii) se π' e π'' sono incidenti in una retta r, deve essere $\pi' \cap \pi'' = r$, quindi il sistema S deve essere possibile con ∞^1 soluzioni;
(iv) π' e π'' non possono essere nè sghembi nè incidenti in un punto, perchè tutti i casi che si possono presentare nella discussione dei sistemi S ed S_0 sono già stati esaminati ai punti precedenti.

□

▶ **Osservazione 11.1.** Si noti che, nel caso in cui i due piani π' e π'' siano incidenti in una retta, il sistema costituito dalle due equazioni cartesiane di π' e π'' individua esattamente una rappresentazione cartesiana della retta intersezione $r = \pi' \cap \pi''$. In realtà, ogni rappresentazione cartesiana di una qualunque retta r di $\mathcal{E}^3$ permette di interpretare la retta stessa come intersezione di due piani *non paralleli* che la contengono.

Esempio 11.6. Nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$, dotato di un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, si considerino i piani

$$\pi_1 : 6x + 5y - 3z - 7 = 0 \qquad \pi_2 : 12x + 10y - 6z - 14 = 0$$
$$\pi_3 : 12x + 10y - 6z - 3 = 0 \qquad \pi_4 : 2x - 4y + z - 1 = 0.$$

La Proposizione 11.3 consente di affermare che π_1 e π_2 coincidono, che π_1 e π_3 sono paralleli disgiunti, e che π_1 e π_4 sono incidenti in una retta.

Le rappresentazioni cartesiane permettono di studiare anche la mutua posizione di una retta e di un piano di $\mathcal{E}^3$, come indicato nel seguente risultato.

■ **Proposizione 11.4.** *Siano r e π una retta ed un piano di $\mathcal{E}^3$ e siano rispettivamente*

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \qquad e \qquad a''x + b''y + c''z + d'' = 0$$

due loro rappresentazioni cartesiane, relativamente ad un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R}$. Allora, posto

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$$

si ha che:

(i) *r appartiene a π se e soltanto se*
$$\varrho(B) = 2;$$

(ii) *r e π sono paralleli e disgiunti se e soltanto se*
$$\varrho(A) = 2 \qquad e \qquad \varrho(B) = 3;$$
(iii) *r e π sono incidenti in un punto se e soltanto se*
$$\varrho(A) = \varrho(B) = 3;$$
(iv) *r e π non sono mai sghembi.*

Dimostrazione. L'intersezione (eventualmente vuota) tra la retta r ed il piano π è ovviamente rappresentata, relativamente al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, dal sistema lineare

$$S : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0, \end{cases}$$

mentre l'intersezione tra le due giaciture $\vec{\pi}'$ e $\vec{\pi}''$ è rappresentata, relativamente alla base $\vec{\mathcal{B}}$, dal sistema omogeneo associato S_0. La tesi segue allora facilmente, osservando che:

(i) se r è contenuta in π, $r \cap \pi$ deve contenere tutti i punti di r, e quindi il sistema S deve essere possibile con ∞^1 soluzioni (si osservi che $\varrho(A) \geq 2$);
(ii) se r e π sono paralleli disgiunti, deve essere $r \cap \pi = \emptyset$, mentre $\vec{r} \cap \vec{\pi}$ deve contenere tutti i vettori di $\vec{r}$, e quindi il sistema S deve essere impossibile, mentre il sistema S_0 deve avere ∞^1 soluzioni;
(iii) se r e π sono incidenti in un punto P, deve essere $r \cap \pi = \{P\}$, quindi il sistema S deve essere possibile e determinato (ovvero, deve essere un sistema di Cramer);
(iv) r e π non possono essere sghembi, perchè tutti i casi che si possono presentare nella discussione dei sistemi S ed S_0 sono già stati esaminati ai punti precedenti.

□

Esempio 11.7. Nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$, dotato di un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, si considerino il piano

$$\pi : x - y - 1 = 0$$

e le rette s, s', s'' considerate nell'Esempio 11.3. La Proposizione 11.4 consente di affermare che s è contenuta in π, che s' e π sono paralleli disgiunti, e che π e s'' sono incidenti in un punto.

Nello spazio euclideo, è possibile introdurre, accanto alla nozione di angolo tra due rette orientate (la cui ampiezza può essere calcolata mediante la Prop. 11.2 (iii)), anche la nozione di angolo tra due piani e la nozione di angolo tra una retta ed un piano.

♦ **Definizione 11.1.** Si dice *piano orientato* di $\mathcal{E}^3$ una coppia (π, λ), dove π è un piano di $\mathcal{E}^3$ ed $\lambda \in {}^{\perp}\vec{\pi}$ è un vettore libero ortogonale a π. Se (π, λ) è un piano orientato, si dicono *positivi* tutti i vettori liberi $\mu \in {}^{\perp}\vec{\pi}$ concordi con λ; inoltre, si dice *positiva* ogni equazione cartesiana $ax + by + cz + d = 0$ di π tale che il vettore libero $\mathbf{a} \equiv (a, b, c)$ sia positivo.

♦ **Definizione 11.2.** Dati due piani orientati (π', λ') e (π'', λ'') di $\mathcal{E}^3$, si dice *angolo tra* π' *e* π'', e si denota con $\widehat{\pi'\pi''}$, l'angolo $\phi \in [0, \pi]$ tra λ' e λ''.

Si ha dunque, per definizione,

$$\cos(\widehat{\pi'\pi''}) = \cos(\lambda', \lambda'').$$

♦ **Definizione 11.3.** Dati un piano orientato (π, λ) ed una retta orientata $(r, \mathbf{l})$ di $\mathcal{E}^3$, si dice *angolo tra* π *ed* r, e si denota con $\widehat{\pi r}$, il numero reale $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ avente per seno il coseno dell'angolo tra λ e $\mathbf{l}$:

$$\operatorname{sen}(\widehat{\pi r}) = \cos(\lambda, \mathbf{l})$$

Le seguenti proposizioni mettono a confronto le condizioni di parallelismo e di ortogonalità e forniscono la formula diretta per calcolare l'ampiezza dell'angolo compreso, l'una nel caso di due piani, l'altra nel caso di una retta e di un piano.

■ **Proposizione 11.5.** *Nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$, in cui è fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, siano π' e π'' due piani aventi rispettivamente equazioni cartesiane $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ e $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$.*
Allora:

(i) *π' e π'' sono paralleli se e soltanto se esiste $\rho \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che*
$$(a', b', c') = \rho \cdot (a'', b'', c'');$$

(ii) *π' e π'' sono ortogonali se e soltanto se*
$$a' \cdot a'' + b' \cdot b'' + c' \cdot c'' = 0$$

(iii) *se π' e π'' sono orientati in modo che $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ e $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$ siano equazioni positive, $\widehat{\pi'\pi''}$ è il numero reale $\phi \in [0, \pi]$ tale che*
$$\cos(\widehat{\pi'\pi''}) = \frac{a' \cdot a'' + b' \cdot b'' + c' \cdot c''}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2 + (c')^2} \cdot \sqrt{(a'')^2 + (b'')^2 + (c'')^2}}$$

Dimostrazione. (i) Basta ricordare, come già osservato nel corso della dimostrazione della Proposizione 11.3, che π' e π'' sono paralleli se e soltanto se $\vec{\pi}' \cap \vec{\pi}''$ ha dimensione due, ovvero se e soltanto se la matrice $\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ ha rango uno.
(ii) La seconda affermazione è un caso particolare della Proposizione 9.12.
(iii) L'ultima affermazione discende direttamente dalla Definizione 11.2, ricordando che - in virtù del Lemma 9.10 - i vettori $\mathbf{a}' \equiv (a', b', c')$ e $\mathbf{a}'' \equiv (a'', b'', c'')$ sono vettori positivi ortogonali rispettivamente a π' e π''.

□

■ **Proposizione 11.6.** *Nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$, in cui è fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, siano r una retta avente coefficienti direttori (l, m, n) e π un piano avente equazione cartesiana $ax + by + cz + d = 0$.*
Allora:

(i) *r e π sono paralleli se e soltanto se*
$$a \cdot l + b \cdot m + c \cdot n = 0;$$

(ii) *r e π sono ortogonali se e soltanto se esiste $\rho \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che*
$$(l, m, n) = \rho \cdot (a, b, c);$$

(ii) *se r è orientata in modo che (l, m, n) sia una terna positiva di coefficienti direttori e π è orientato in modo che $ax + by + cz + d = 0$ sia una equazione positiva, $\widehat{r\pi}$ è il numero reale $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tale che*
$$\operatorname{sen}(\widehat{r\pi}) = \frac{a \cdot l + b \cdot m + c \cdot n}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

Dimostrazione. (i) Per definizione, r e π sono paralleli se e soltanto se $\vec{r} \subset \vec{\pi}$; poichè $\mathbf{v} \equiv (l, m, n)$ genera $\vec{r}$, ciò equivale a richiedere $\mathbf{v} \in \vec{\pi}$, che corrisponde esattamente alla condizione $a \cdot l + b \cdot m + c \cdot n = 0$.
(ii) La seconda affermazione è un caso particolare della Proposizione 9.11.
(iii) L'ultima affermazione discende direttamente dalla Definizione 11.3, ricordando che $\mathbf{v} \equiv (l, m, n)$ è un vettore positivo di $\vec{r}$ e che - in virtù del Lemma 9.10 - il vettore $\mathbf{a} \equiv (a, b, c)$ è un vettore positivo ortogonale a π.

□

Esempio 11.8. Nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$, dotato di un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, si considerino i piani

$$\sigma : x - 2y + z - 1 = 0 \quad \sigma' : x - 2y + z + 5 = 0$$
$$\sigma'' : 3x + y - z - 4 = 0 \quad \sigma''' : x + y - 1 = 0$$

e le rette s', s'' ed s''' considerate nell'Esempio 11.3. La Proposizione 11.5 consente di affermare che σ e σ' sono paralleli, che σ e σ'' sono ortogonali, e che (supponendo che i piani siano orientati in modo che le equazioni scritte risultino positive) l'angolo tra σ e σ''' è tale che

$$\cos(\widehat{\sigma\sigma'''}) = \frac{1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{-1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Analogamente, la Proposizione 11.6 consente di affermare che σ ed s' sono paralleli, che σ ed s'' sono ortogonali, e che (supponendo anche che la retta s''' sia orientata in modo che la terna di coefficienti direttori $(0, 0, 1)$ risulti positiva) l'angolo tra σ ed s''' è tale che

$$\operatorname{sen}(\widehat{\sigma s'''}) = \frac{1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

♦ **Definizione 11.4.** Data una retta r di $\mathcal{E}^3$, si dice *fascio (proprio) di piani di asse* r l'insieme costituito da tutti e soli i piani di $\mathcal{E}^3$ che contengono r.

♦ **Definizione 11.5.** Dato un sottospazio vettoriale bidimensionale $\mathbf{U}$ di $\vec{\mathcal{E}}^3$, si dice *fascio (improprio) di piani paralleli di giacitura* $\mathbf{U}$ l'insieme costituito da tutti e soli i piani di $\mathcal{E}^3$ aventi $\mathbf{U}$ come giacitura.

Il seguente risultato ci fornisce le equazioni di tutti i piani appartenenti ad un fissato fascio proprio (risp. improprio), a partire dalla rappresentazione cartesiana di due elementi (risp. un elemento) del fascio stesso.

■ **Proposizione 11.7.**

(i) *Siano* π' *e* π'' *due piani non paralleli di* $\mathcal{E}^3$ *e siano rispettivamente* $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ *ed* $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$ *due loro equazioni cartesiane, relativamente ad un fissato riferimento cartesiano* $\mathcal{R}$. *Allora, detta* r *la retta intersezione di* π' *e* π'', *la equazione*
$$\lambda(a'x + b'y + c'z + d') + \mu(a''x + b''y + c''z + d'') = 0$$
rappresenta, al variare dei parametri reali $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$, *tutti e soli i piani del fascio (proprio) di asse* r.

(ii) *Sia* π *un piano di* $\mathcal{E}^3$ *e sia* $ax+by+cz+d = 0$ *una sua equazione cartesiana, relativamente ad un fissato riferimento cartesiano* $\mathcal{R}$. *Allora, la equazione*
$$ax + by + cz + k = 0$$
rappresenta, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, *tutti e soli i piani del fascio (improprio) di giacitura* $\vec{\pi}$ *(cioè tutti i piani paralleli a* π*).*

Dimostrazione. (i) Poichè $r = \pi' \cap \pi''$, le coordinate di un qualunque punto $P \in r$ verificano entrambe le equazioni $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ ed $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$, e quindi verificano anche ogni equazione ottenuta da quelle tramite combinazione lineare. Ciò prova che tutti i piani di equazione
$$\lambda(a'x + b'y + c'z + d') + \mu(a''x + b''y + c''z + d'') = 0,$$
al variare dei parametri reali $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$, appartengono al fascio di asse r.
Viceversa, se σ è un piano del fascio di asse r, allora $\sigma \cap (\pi' \cap \pi'') = r = \pi' \cap \pi''$; pertanto, l'equazione cartesiana $ax+by+cz+d = 0$ di σ, relativamente al riferimento $\mathcal{R}$, deve essere combinazione lineare delle due equazioni cartesiane di π' e π''. Ciò equivale ad affermare che deve esistere una coppia $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} - \{(0,0)\}$, tale che
$$ax + by + cz + d = \lambda(a'x + b'y + c'z + d') + \mu(a''x + b''y + c''z + d'').$$
(ii) E' sufficiente osservare che ogni piano di equazione $ax + by + cz + k = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, è parallelo a π, e che ogni piano parallelo a π ha (per la Proposizione 11.3) equazione $(\lambda a)x + (\lambda b)y + (\lambda c)z + e = 0$, con $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ ed $e \in \mathbb{R}$, ovvero
$$ax + by + cz + k = 0, \quad \text{con } k = \frac{e}{\lambda} \in \mathbb{R}.$$
□

Esempio 11.9. Data nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$ la retta r di equazioni
$$\begin{cases} 3x - y + z - 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases},$$
l'equazione del fascio di piani di asse la retta r è:
$$\lambda(3x - y + z - 1) + \mu(x - z) = 0.$$
Il fascio di piani paralleli al piano di equazione
$$3x - y + z - 1 = 0$$
ha invece equazione
$$3x - y + z + k = 0.$$

♦ **Definizione 11.6.** Dato un punto $C \in \mathcal{E}^3$, si dice *stella (propria) di piani di centro* C (risp. *stella (propria) di rette di centro* C) l'insieme costituito da tutti e soli i piani (risp. le rette) di $\mathcal{E}^3$ che contengono C.

♦ **Definizione 11.7.** Dato un vettore non nullo $\mathbf{v} \in \vec{\mathcal{E}}^3$, si dice *stella (impropria) di piani di direzione* $\mathbf{v}$ (risp. *stella (impropria) di rette di direzione* $\mathbf{v}$) l'insieme costituito da tutti e soli i piani (risp. le rette) di $\mathcal{E}^3$ che sono paralleli alla direzione individuata dal vettore $\mathbf{v}$.

2. Distanze

Nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$, in cui si suppone di avere fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$, la nozione di distanza tra due punti ed il relativo metodo di calcolo si specializza nella forma seguente.

■ **Proposizione 11.8.** *Se* $P \equiv_{\mathcal{R}} (x_P, y_P, z_P)$ *e* $Q \equiv_{\mathcal{R}} (x_Q, y_Q, z_Q)$, *allora:*
$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}$$

Dimostrazione. Basta utilizzare la Proposizione 9.14.
□

Poichè i piani sono gli iperpiani di $\mathcal{E}^3$, il calcolo della distanza tra un punto ed un piano si effettua utilizzando, nel caso $n = 3$, la Proposizione 9.15.

■ **Proposizione 11.9.** *Sia* π *il piano di* $\mathcal{E}^3$ *di equazione cartesiana, rispetto ad* $\mathcal{R}$, $ax + by + cz + d = 0$ *e sia* $P \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. *Allora:*
$$d(P, \pi) = \frac{|a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z} + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
□

Esempio 11.10. Nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$, dotato di un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, la distanza del punto $P \equiv_{\mathcal{R}} (1,2,3)$ dal piano $\pi : 3x + 2y - z + 3 = 0$, si calcola direttamente tramite la formula fornita dalla Proposizione 11.9:

$$d(P,\pi) = \frac{|3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Il calcolo della distanza tra un punto ed una retta si effettua invece utilizzando la proiezione ortogonale del punto sulla retta, come indicato nel § 7 del Capitolo 9 (caso $n = 3$ ed $h = 1$).

■ **Proposizione 11.10.** *Sia r una retta di $\mathcal{E}^3$ avente coefficienti direttori (l,m,n) e sia $P \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{x},\bar{y},\bar{z})$. Allora:*

$$d(P,r) = d(P,P')$$

dove il punto P' (proiezione ortogonale di P su r) si ottiene intersecando r con il piano ortogonale ad r passante per P, che ha equazione cartesiana

$$l(x-\bar{x}) + m(y-\bar{y}) + n(z-\bar{z}) = 0.$$

Dimostrazione. Occorre verificare che $d(P,P') = min\{d(P,X) \mid X \in r\}$. Poichè, per ogni $X \in r$, si ha $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'X}$, con $\overrightarrow{PP'} \perp \overrightarrow{P'X}$, il Teorema di Pitagora (Propositione 8.2) implica $||\overrightarrow{PX}||^2 = ||\overrightarrow{PP'}||^2 + ||\overrightarrow{P'X}||^2 \geq ||\overrightarrow{PP'}||^2$; ciò assicura appunto che $d(P,P') \leq d(P,X)$, per ogni $X \in r$.

□

Esempio 11.11. Per calcolare la distanza del punto $A \equiv (1,1,-4)$ dalla retta

$$r : \begin{cases} x + 2y - 2z - 20 = 0 \\ z + 6 = 0 \end{cases}$$

occorre determinare il piano π ortogonale ad r e contenente A; poichè $(2,-1,0)$ è una terna di coefficienti direttori di r, π ha equazione:

$$\pi : 2(x-1) - 1(y-1) + 0(z+4) = 0, \qquad \text{ovvero} \quad 2x - y - 1 = 0.$$

La proiezione ortogonale A' di A su r ha coordinate che verificano il sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 2z - 20 = 0 \\ z + 6 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui} \quad A' \equiv (2,3,-6)$$

Per la Proposizione 11.10 si ha quindi che:

$$d(A,r) = d(A,A') = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2 + (-6+4)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

I seguenti risultati forniscono i metodi operativi per il calcolo della distanza tra due piani, tra una retta ed un piano e tra due rette di $\mathcal{E}^3$, in funzione della loro reciproca posizione.

■ **Proposizione 11.11.** *Siano π' e π'' due piani di $\mathcal{E}^3$.*

- *Se π' e π'' sono incidenti (in particolare, coincidenti), la loro distanza è uguale a zero;*
- *Se π' e π'' sono paralleli, la loro distanza uguaglia la distanza tra π'' ed un punto qualsiasi di π' :* [1]

$$d(\pi',\pi'') = d(Q,\pi''), \qquad \forall Q \in \pi'$$

Dimostrazione. La prima parte dell'enunciato è banalmente vera, poichè, se esiste un punto $\bar{P} \in \pi' \cap \pi''$, si ha $d(\pi',\pi'') = d(\bar{P},\bar{P}) = 0$.
Nel caso in cui π' e π'' siano paralleli, occorre verificare che la distanza $d(Q,\pi'')$ è indipendente dalla scelta del punto $Q \in \pi'$. In virtù della Proposizione 11.5 è possibile supporre che i due piani abbiano - rispetto ad un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R}$ di $\mathcal{E}^3$ - equazioni $\pi' : ax + by + cz + d' = 0$, $\pi'' : ax + by + cz + d'' = 0$. Allora, posto $Q \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, e ricordato che $Q \in \pi'$, per la Proposizione 11.9 si ottiene:

$$d(Q,\pi'') = \frac{|a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z} + d''|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|-d' + d''|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

che prova la tesi.

□

■ **Proposizione 11.12.** *Siano r e π una retta ed un piano di $\mathcal{E}^3$.*

- *Se r è contenuta in π, o se r e π sono incidenti in un punto, la loro distanza è uguale a zero;*
- *Se r e π sono paralleli, la loro distanza uguaglia la distanza tra π ed un punto qualsiasi di r :* [2]

$$d(r,\pi) = d(P,\pi) \quad \forall P \in r$$

Dimostrazione. La prima parte dell'enunciato è banalmente vera, poichè - sia nel caso in cui r è contenuta in π che nel caso in cui r e π sono incidenti - esiste un punto $\bar{P} \in r \cap \pi$, e quindi $d(r,\pi) = d(\bar{P},\bar{P}) = 0$.
Nel caso in cui r e π siano paralleli, occorre verificare che la distanza $d(P,\pi)$ è indipendente dalla scelta del punto $P \in r$. Se il piano π ha - rispetto ad un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R}$ di $\mathcal{E}^3$ - equazione $\pi : ax+by+cz+d = 0$, allora la retta r ha coefficienti direttori (l,m,n) tali che $al + bm + cn = 0$ (si ricordi la Proposizione 11.6); inoltre, posto $P \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, per ogni altro punto $X \in r$ si ha $X \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{x}+\rho l, \bar{y}+\rho m, \bar{z}+\rho n)$),

[1] E' evidente che i ruoli di π' e π'' possono essere scambiati
[2] Si osservi che, in questo caso - a differenza delle Proposizioni 11.11 e 11.13 - i ruoli di r e π non possono essere scambiati.

con $\rho \in \mathbb{R}$. Per la Proposizione 11.9 si ottiene allora che:

$$d(X,\pi) = \frac{|a(\bar{x}+\rho l)+b(\bar{y}+\rho m)+c(\bar{z}+\rho n)+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$= \frac{|a\bar{x}+b\bar{y}+c\bar{z}+d+\rho\cdot(al+bm+cn)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|a\bar{x}+b\bar{y}+c\bar{z}+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = d(P,\pi),$$

che prova la tesi.

□

■ **Proposizione 11.13.** *Siano r' ed r'' due rette di $\mathcal{E}^3$.*

- *Se r' ed r'' sono incidenti (in particolare, coincidenti), la loro distanza è uguale a zero;*
- *Se r' ed r'' sono parallele, la loro distanza uguaglia la distanza tra r'' ed un punto qualsiasi di r':* [3]
$$d(r',r'') = d(Q,r'') \quad \forall Q \in r'$$
- *Se r' ed r'' sono sghembe, la loro distanza uguaglia la distanza tra r' ed il piano π'' parallelo ad r' e contenente r'':* [4]
$$d(r',r'') = d(r',\pi'') = d(Q,\pi'') \quad \forall Q \in r'$$

Dimostrazione. La prima parte dell'enunciato è banalmente vera.
La seconda parte dell'enunciato è una conseguenza diretta della Proposizione 10.7, perchè due rette parallele sono sempre complanari.
Dimostriamo infine che, nel caso in cui r' ed r'' sono sghembe, allora $d(r',r'') = d(Q,\pi'')$, $\forall Q \in r'$ (si veda la Figura 11.2).

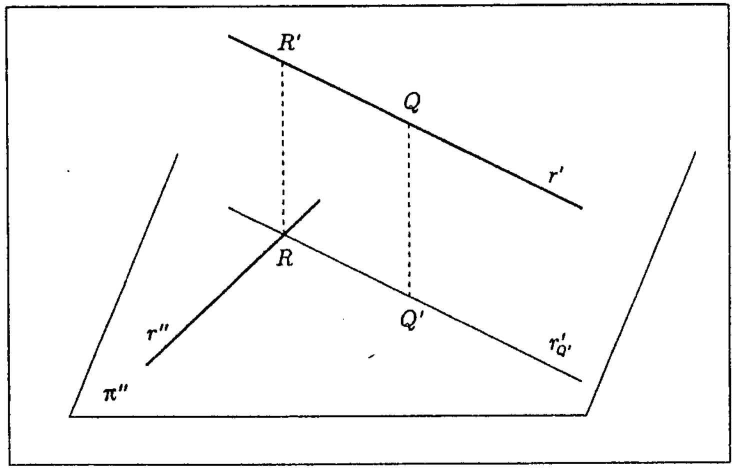

Figura 11.2

[3]E' evidente che i ruoli di r' e r'' possono essere scambiati
[4]E' evidente che anche in questo caso i ruoli di r' e r'' possono essere scambiati

Poichè $r'' \subset \pi''$, si ha ovviamente $d(r',r'') \geq d(r',\pi'')$; d'altra parte, essendo π'' parallelo ad r', la Proposizione 11.12 implica $d(r',\pi'') = d(Q,Q')$, $\forall Q \in r'$ (dove Q' denota la proiezione ortogonale di Q su π''). Ora, fissato $Q \in r'$, sia $r'_{Q'}$ la retta parallela ad r' e passante per Q' (proiezione ortogonale di Q su π''). Poichè $r'_{Q'}$ ed r'' sono ovviamente non parallele (essendo sghembe r' ed r'') e sono entrambe contenute in π'', esiste $R \in r'_{Q'} \cap r''$. Essendo $r'_{Q'}$ ed r' due rette parallele, la seconda parte dell'enunciato assicura che $d(Q,Q') = d(R,R')$ $(= d(r'_{Q'},r'))$, dove R' è la proiezione ortogonale di R su r'. A questo punto, avendo trovato $R \in r''$ ed $R' \in r'$ tali che $d(R,R') = d(Q,Q') = d(r',\pi'')$, resta dimostrato che $d(r',r'') = d(r',\pi'')$, da cui segue la tesi.

□

Nel caso di due rette sghembe r' ed r'' di $\mathcal{E}^3$, il seguente risultato permette di ricavare, oltre alla distanza $d(r',r'')$, anche i punti $H \in r'$ e $K \in r''$ che realizzano tale distanza.

■ **Proposizione 11.14.** *Siano r' ed r'' due rette sghembe di $\mathcal{E}^3$. Allora, esiste una ed una sola retta t ortogonale ed incidente sia ad r' che a r''; inoltre, posto $H = r' \cap t$ e $K = r'' \cap t$, si ha che*
$$d(r',r'') = d(H,K)$$

Dimostrazione. (cenno) Se $\mathbf{l}' \in \vec{r}'$ ed $\mathbf{l}'' \in \vec{r}''$ sono due vettori (non nulli) che generano le giaciture delle rette, la ipotesi che r' ed r'' siano sghembe implica $\dim(\mathbf{L}(\mathbf{l}',\mathbf{l}'')) = 2$, e quindi $\dim({}^{\perp}\mathbf{L}(\mathbf{l}',\mathbf{l}'')) = 1$ (per il Teorema 8.11). Scelto un vettore non nullo $\mathbf{m} \in {}^{\perp}\mathbf{L}(\mathbf{l}',\mathbf{l}'')$, la retta t si ottiene come intersezione tra il piano π', appartenente al fascio di piani di asse r' e parallelo ad $\mathbf{m}$, ed il piano π'', appartenente al fascio di piani di asse r'' e parallelo ad $\mathbf{m}$.

□

Esempio 11.12. Nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$, le rette
$$r: \begin{cases} x-y-3=0 \\ y-2z=0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} y-z+1=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$
sono sghembe (come si può facilmente verificare, utilizzando la Proposizione 11.1).
Per calcolare la distanza tra r ed s tramite la Proposizione 11.13, determiniamo il piano π parallelo ad r e contenente s. Poichè esso appartiene al fascio di piani di asse s, avrà equazione del tipo
$$\lambda(y-z+1)+\mu(x-z)=0;$$
inoltre, essendo parallelo ad r (che ha coefficienti direttori $(2,2,1)$, dovrà essere verificata la condizione
$$\lambda(2-1)+\mu(2-1)=0, \quad \text{ovvero} \quad \lambda+\mu=0.$$
Il piano π ha quindi equazione cartesiana $x-y-1=0$. Scelto il punto $P \equiv_{\mathcal{R}} (5,2,1) \in r$, la distanza tra r ed s risulta:
$$d(r,s) = d(r,\pi) = d(P,\pi) = \frac{|5-2-1|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}.$$

Per calcolare invece la distanza tra r ed s tramite la Proposizione 11.14, determiniamo le componenti di un vettore non nullo $\mathbf{v} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (l, m, n)$ ortogonale sia ad r che ad s; poichè r ed s hanno rispettivamente coefficienti direttori $(2,2,1)$ e $(1,1,1)$, deve essere

$$\begin{cases} 2l + 2m + n = 0 \\ l + m + n = 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \quad (l,m,n) = \rho \cdot (1,-1,0).$$

L'equazione del piano α contenente r e parallelo al vettore $\mathbf{v}$ è

$$x + y - 4z - 3 = 0,$$

mentre l'equazione del piano β contenente s e parallelo al vettore $\mathbf{v}$ è

$$x + y - 2z + 1 = 0.$$

La retta $t = \alpha \cap \beta$ (ortogonale ed incidente sia ad r che ad s), interseca r nel punto $P \equiv_{\mathcal{R}} (-1,4,-2)$ ed s nel punto $Q \equiv_{\mathcal{S}} (-2,-3,-2)$; pertanto, si ha che:

$$d(r,s) = d(P,Q) = \sqrt{(-1+2)^2 + (-4+3)^2 + (-2+2)^2} = \sqrt{2}.$$

In dimensione tre, la nozione di volume di un h-simplesso - vista in generale nel § 8 del Capitolo 9 - si specializza nelle seguenti nozioni di area di un triangolo e di volume di un tetraedro. [5]

♦ **Definizione 11.8.** Dati tre punti non allineati A, B, C di $\mathcal{E}^3$, si dice *area del triangolo* di vertici A, B, C il numero reale positivo

$$\mathcal{V}(< A,B,C >) = \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\det \begin{pmatrix} <\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}> & <\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}> \\ <\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}> & <\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC}> \end{pmatrix}}.$$

♦ **Definizione 11.9.** Dati quattro punti non complanari e a tre a tre non allineati A, B, C e D di $\mathcal{E}^3$, si dice *volume del tetraedro* di vertici A, B, C e D il numero reale positivo

$$\mathcal{V}(< A,B,C,D >) = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{\det \begin{pmatrix} <\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}> & <\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}> & <\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}> \\ <\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}> & <\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC}> & <\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}> \\ <\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}> & \overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}> & <\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AD}> \end{pmatrix}}$$

[5]Si noti che le Definizioni 11.8 e 11.9 presuppongono che i determinanti delle matrici presenti sotto il segno di radice quadrata siano sicuramente positivi, come assicurato dalla Proposizione 8.13 relativa alle proprietà delle matrici di Gram; in alternativa, la dimostrazione di questo fatto può essere agevolmente dedotta dalla dimostrazione della Proposizione 9.16, nei casi $h = 2$ ed $h = 3$ rispettivamente.

Proposizione 11.15. *Se* $A \equiv_{\mathcal{R}} (x_A, y_A, z_A)$, $B \equiv_{\mathcal{R}} (x_B, y_B, z_B)$, $C \equiv_{\mathcal{R}} (x_C, y_C, z_C)$, $D \equiv_{\mathcal{R}} (x_D, y_D, z_D)$, *allora:*

$$\mathcal{V}(< A,B,C,D >) = \frac{1}{6} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C & x_D \\ y_A & y_B & y_C & y_D \\ z_A & z_B & z_C & z_D \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A & x_D - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A & y_D - y_A \\ z_B - z_A & z_C - z_A & z_D - z_A \end{pmatrix} \right|$$

Dimostrazione. È un caso particolare (per $h = 3$) della Proposizione 9.16. □

Esempio 11.13. Siano $A \equiv_{\mathcal{R}} (1,1,-4)$, $B \equiv_{\mathcal{R}} (0,4,-6)$, $C \equiv_{\mathcal{R}} (4,2,-6)$, $D \equiv_{\mathcal{R}} (1,3,-4)$ quattro punti di $\mathcal{E}^3$ (dove $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$ è un fissato riferimento cartesiano). Poichè $\overrightarrow{AB} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (-1,3,2)$, $\overrightarrow{AC} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (3,1,-2)$, $\overrightarrow{AD} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (0,2,0)$ e

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

i quattro punti sono affinemente indipendenti.
Il volume del tetraedro $\sigma^3 = < A,B,C,D >$ è, per definizione:

$$\mathcal{V}(\sigma^3) = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{\det \begin{pmatrix} 14 & 4 & 6 \\ 4 & 14 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}} = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{64} = \frac{8}{3}.$$

Per la Proposizione 11.15, si ha anche:

$$\mathcal{V}(\sigma^3) = \frac{1}{6} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ -4 & -6 & -6 & -4 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot |-16| = \frac{8}{3}.$$

L'area del triangolo $\sigma^2 = < A,B,C >$ è per definizione:

$$\mathcal{V}(\sigma^2) = \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{180} = 3\sqrt{5}.$$

Si noti che, in alternativa, l'area del triangolo σ^2 può anche essere calcolata tramite la classica formula

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot d(A,r) \cdot d(B,C),$$

dove r denota la retta contenente B e C; poichè r ha equazione cartesiana

$$r : \begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ z + 6 = 0 \end{cases} ,$$

si ha $d(A, r) = 3$ (si veda l'Esempio 11.12), e quindi risulta:

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot d(B, C) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}.$$

CAPITOLO 12

Elementi di teoria delle coniche e delle quadriche

1. Ampliamento proiettivo di uno spazio euclideo

Nel presente paragrafo, $\mathcal{E}^n$ indicherà uno spazio euclideo di dimensione finita $n > 0$, su cui è fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$.

♦ **Definizione 12.1.** Si dice *ampliamento proiettivo* (o *completamento proiettivo*) dello spazio euclideo $\mathcal{E}^n$ l'insieme

$$\mathcal{P}^n = \mathcal{E}^n \cup \mathcal{E}^{n-1}_\infty ,$$

dove $\mathcal{E}^{n-1}_\infty$, detto *iperpiano improprio* di $\mathcal{E}^n$, è l'insieme delle direzioni delle rette di $\mathcal{E}^n$ (ovvero, i sottospazi vettoriali di dimensione uno della giacitura $\vec{\mathcal{E}^n}$).
Gli elementi di $\mathcal{E}^n$ (ovvero, i punti dello spazio euclideo originario) si dicono *punti propri* dell'ampliamento proiettivo, mentre gli elementi di $\mathcal{E}^{n-1}_\infty$ si dicono *punti impropri* dell'ampliamento proiettivo.

Per abuso di linguaggio, quando risulterà chiaro che lo spazio euclideo $\mathcal{E}^n$ è stato completato con l'aggiunta del suo iperpiano improprio, si parlerà più semplicemente di *punti propri e punti impropri di* $\mathcal{E}^n$.

► **Osservazione 12.1.** Si noti che, per definizione di iperpiano improprio, ad ogni retta di $\mathcal{E}^n$ risulta associato un punto improprio di $\mathcal{E}^n$, e che rette parallele individuano lo stesso punto improprio. Inoltre, poichè ogni vettore libero non nullo genera un sottospazio vettoriale di dimensione uno di $\vec{\mathcal{E}^n}$, si può dire che *ogni vettore libero non nullo* $\mathbf{v}$ *individua un punto improprio di* $\mathcal{E}^n$, che corrisponde alla giacitura di tutte le rette parallele a $\mathbf{v}$ (ovvero, tutte le rette r di $\mathcal{E}^2$ tali che $\mathbf{v} \in \vec{r}$).

♦ **Definizione 12.2.** Dato un punto proprio $P \equiv_{\mathcal{R}} (y^1, y^2, \dots, y^n)$, si dice $(n+1)$-pla di *coordinate omogenee* di P rispetto ad $\mathcal{R}$ ogni $(n+1)$-pla $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ tale che:

$$\frac{x_1}{x_0} = y^1, \ \frac{x_2}{x_0} = y^2, \dots, \frac{x_n}{x_0} = y^n.$$

Dato un punto improprio P_∞ individuato dalla direzione del vettore $\mathbf{v} \in \vec{\mathcal{E}^n} - \{\vec{0}\}$, con $\mathbf{v} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (l^1, l^2, \dots, l^n)$, si dice $(n+1)$-pla di *coordinate omogenee* di P_∞ rispetto ad $\mathcal{R}$ ogni $(n+1)$-pla $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ tale che:

$$x_0 = 0 \quad \text{ed esiste} \quad \rho \in \mathbb{R} - \{0\}, \ \text{per cui} \quad (x_1, \dots, x_n) = \rho \cdot (l^1, \dots, l^n).$$

Sia per i punti propri che per i punti impropri di $\mathcal{E}^n$, scriveremo

$$P \equiv_{\mathcal{R}} [x_0, x_1, \dots, x_n]$$

per indicare che la $(n+1)$-pla $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ è una $(n+1)$-pla di coordinate omogenee del punto P.

► **Osservazione 12.2.** Si noti che, per la Definizione 12.2, la $(n+1)$-pla di coordinate omogenee di un punto (proprio o improprio) di $\mathcal{E}^n$ è individuata a meno di un coefficiente di proporzionalità non nullo, e che nessun punto di $\mathcal{P}^n = \mathcal{E}^n \cup \mathcal{E}^{n-1}_\infty$ ammette la $(n+1)$-pla nulla quale $(n+1)$-pla di coordinate omogenee.

► **Osservazione 12.3.** Date due $(n+1)$-ple non nulle $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, $(x'_0, x'_1, \dots, x'_n)$ di numeri reali, poniamo

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \sim (x'_0, x'_1, \dots, x'_n) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\},\ (x'_0, \dots, x'_n) = \lambda \cdot (x_0, \dots, x_n).$$

La relazione $\sim$ è una relazione di equivalenza sull'insieme $\mathbb{R}^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\}$, come è facile verificare (si veda il § 4 del Capitolo 1). L'insieme quoziente $(\mathbb{R}^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\})/\sim$, usualmente indicato con $\mathbb{RP}^n$, è detto *spazio proiettivo reale standard n-dimensionale.* Un punto di $\mathbb{RP}^n$ è dunque una classe $[x_0, x_1, \dots, x_n]$[1] di proporzionalità di $(n+1)$-ple non nulle di numeri reali.
Ogni fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R}$ di $\mathcal{E}^n$ induce quindi una biiezione $\phi_\mathcal{R} : \mathcal{P}^n = \mathcal{E}^n \cup \mathcal{E}^{n-1}_\infty \to \mathbb{RP}^n$, che ad ogni punto P di $\mathcal{P}^n$ associa la classe $[x_0, x_1, \dots, x_n]$ delle $(n+1)$-ple (tra loro proporzionali) delle coordinate omogenee di P rispetto ad $\mathcal{R}$.
Infatti, presa una qualunque $(n+1)$-pla non nulla $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ di numeri reali, a meno di proporzionalità, essa individua uno ed un solo punto P di $\mathcal{P}^n = \mathcal{E}^n \cup \mathcal{E}^{n-1}_\infty$ che ammette $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ come sua (n+1)-pla di coordinate omogenee rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$:

- se $x_0 \neq 0$, allora P è il punto proprio di coordinate cartesiane $\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$;
- se $x_0 = 0$, allora P è il punto improprio individuato dalla direzione del vettore di componenti $(x_1, \dots, x_n)$.

► **Osservazione 12.4.** Si noti che i sottospazi euclidei paralleli di $\mathcal{E}^n$ risultano incidenti nel completamento proiettivo dello spazio euclideo $\mathcal{E}^n$, : infatti, se $\mathcal{E}^h$ ed $\mathcal{E}^k$ sono sottospazi paralleli, con $h \leq k$, allora - per definizione - l'insieme $\mathcal{E}^{h-1}_\infty$ dei punti impropri di $\mathcal{E}^h$ è contenuto nell'insieme $\mathcal{E}^{k-1}_\infty$ dei punti impropri di $\mathcal{E}^k$.

Fissiamo ora l'attenzione sui casi $n = 2$ ed $n = 3$.
Caso n = 2. Sia $\mathcal{E}^2$ un piano euclideo, su cui è fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$, e sia $\mathcal{P}^2 = \mathcal{E}^2 \cup r_\infty$ il suo completamento proiettivo, dove r_∞ - la *retta impropria* di $\mathcal{E}^2$ - indica l'insieme delle direzioni delle rette di $\mathcal{E}^2$ (ovvero, i sottospazi vettoriali di dimensione uno di $\vec{\mathcal{E}^2}$).
Denotata usualmente con (x, y) la coppia delle coordinate cartesiane dei punti (propri) di $\mathcal{E}^2$ rispetto ad $\mathcal{R}$, indichiamo con $[x_0, x_1, x_2]$ la terna (a meno di proporzionalità) delle coordinate omogenee dei punti (propri ed impropri) di $\mathcal{E}^2$ rispetto ad $\mathcal{R}$. Ricordando il fatto che un punto $P \equiv_\mathcal{R} [x_0, x_1, x_2]$ è improprio se e soltanto se $x_0 = 0$, è immediato verificare la validità della seguente proposizione, relativa

[1]Scriviamo $[x_0, x_1, \dots, x_n]$, anzichè $[(x_0, x_1, \dots, x_n)]$, per indicare la classe rappresentata dalla $(n+1)$-pla $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, rispetto alla relazione $\sim$.

alla rappresentazione cartesiana delle rette nel completamento proiettivo del piano euclideo.

■ **Proposizione 12.1.** *Data una retta (propria) r di $\mathcal{E}^2$ avente, rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$, equazione cartesiana $ax + by + c = 0$, con $(a, b) \neq (0, 0)$, si ha che:*

- *nel completamento proiettivo di $\mathcal{E}^2$, la retta r è rappresentata - in coordinate omogenee rispetto ad $\mathcal{R}$ - dalla equazione omogenea*

$$ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0;$$

- *l'unico punto improprio di r è $P_\infty \equiv_\mathcal{R} [0, b, -a]$.*

Viceversa, data una equazione lineare omogenea

$$ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0, \quad con \quad (a, b) \neq (0, 0),$$

l'insieme delle soluzioni diverse dalla ovvia fornisce le coordinate omogenee, rispetto ad $\mathcal{R}$, dei punti (propri e impropri) di una retta (propria) r di $\mathcal{E}^2$.
Inoltre, l'equazione $x_0 = 0$ rappresenta - in coordinate omogenee rispetto ad $\mathcal{R}$ - la retta impropria di $\mathcal{E}^2$.

□

► **Osservazione 12.5.** Si noti che le nozioni esposte in questo paragrafo chiariscono il significato del termine *fascio improprio di rette* di $\mathcal{E}^2$, usato per indicare l'insieme delle rette parallele alla direzione individuata da un fissato vettore **v**: esso è costituito da tutte e sole le rette di $\mathcal{E}^2$ che contengono il punto improprio individuato dal vettore **v**, così come il fascio proprio di rette di centro $C \in \mathcal{E}^2$ denota l'insieme di tutte e sole le rette di $\mathcal{E}^2$ contenenti il punto (proprio) C.

Caso n = 3.
Sia $\mathcal{E}^3$ uno spazio euclideo di dimensione tre, su cui è fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$, e sia $\mathcal{P}^3 = \mathcal{E}^3 \cup \pi_\infty$ il suo completamento proiettivo, dove π_∞ - il *piano improprio* di $\mathcal{E}^3$ - indica l'insieme delle direzioni delle rette di $\mathcal{E}^3$ (ovvero, i sottospazi vettoriali di dimensione uno di $\vec{\mathcal{E}^3}$).
Denotata usualmente con (x, y, z) la terna delle coordinate cartesiane dei punti (propri) di $\mathcal{E}^3$ rispetto ad $\mathcal{R}$, indichiamo con $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ la quaterna (a meno di proporzionalità) delle coordinate omogenee dei punti (propri ed impropri) di $\mathcal{E}^3$ rispetto ad $\mathcal{R}$. Ricordando il fatto che un punto $P \equiv_\mathcal{R} [x_0, x_1, x_2, x_3]$ è improprio se e soltanto se $x_0 = 0$, è immediato verificare la validità delle due proposizioni seguenti, relative alla rappresentazione cartesiana dei piani e delle rette nel completamento proiettivo dello spazio euclideo.

■ **Proposizione 12.2.** *Sia π un piano (proprio) di $\mathcal{E}^3$ avente, rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$, equazione cartesiana (*) $ax + by + cz + d = 0$, con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Nel completamento proiettivo di $\mathcal{E}^3$ il piano π è rappresentato - in coordinate omogenee rispetto ad $\mathcal{R}$ - dalla equazione omogenea*

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_0 = 0.$$

Viceversa, data una equazione lineare omogenea

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_0 = 0, \quad con \quad (a,b,c) \neq (0,0,0),$$

l'insieme delle soluzioni diverse dalla ovvia fornisce le coordinate omogenee, rispetto ad $\mathcal{R}$, *dei punti (propri e impropri) del piano (proprio)* π *di* $\mathcal{E}^3$, *di equazione cartesiana* (*).
Inoltre, $x_0 = 0$ *rappresenta - in coordinate omogenee rispetto ad* $\mathcal{R}$ *- il piano improprio di* $\mathcal{E}^3$.

□

■ **Proposizione 12.3.** *Data una retta (propria)* r *di* $\mathcal{E}^3$ *avente, rispetto al riferimento cartesiano* $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$, *rappresentazione cartesiana*

$$(**) \quad \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \qquad con \ \varrho\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2,$$

si ha che:

- *nel completamento proiettivo di* $\mathcal{E}^3$, *la retta* r *è rappresentata - in coordinate omogenee rispetto ad* $\mathcal{R}$ *- dal sistema lineare omogeneo*

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_0 = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d'x_0 = 0 \end{cases}$$

- *l'unico punto improprio di* r *è* $P_\infty \equiv_{\mathcal{R}} [0, l, m, n]$, *con* (l, m, n) *terna di coefficienti direttori della retta* r.

Viceversa, data un sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_0 = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d'x_0 = 0 \end{cases} \qquad con \ \varrho\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2,$$

allora l'insieme delle soluzioni diverse dalla ovvia fornisce le coordinate omogenee, rispetto ad $\mathcal{R}$, *dei punti (propri e impropri) della retta (propria)* r *di* $\mathcal{E}^3$ *di equazione* (**).
Inoltre, il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \qquad con \ (a,b,c) \neq (0,0,0),$$

rappresenta - in coordinate omogenee rispetto ad $\mathcal{R}$ *- la retta impropria del piano* π *di* $\mathcal{E}^3$ *di equazione* $ax + by + cz + d = 0$ *(o di ogni piano ad esso parallelo).*

□

► **Osservazione 12.6.** Si noti che le nozioni esposte in questo paragrafo chiariscono il significato del termine *fascio improprio di piani* di $\mathcal{E}^3$, usato per indicare l'insieme dei piani aventi per giacitura un fissato sottospazio vettoriale bidimensionale $\mathbf{U}$ di $\vec{\mathcal{E}}^3$: esso è costituito da tutti e soli i piani di $\mathcal{E}^3$ che contengono la (comune) retta impropria di tutti i piani paralleli a $\mathbf{U}$, così come il fascio proprio di piani di asse una data retta (propria) r di $\mathcal{E}^3$ denota l'insieme di tutti e soli i piani di $\mathcal{E}^3$ contenenti r.

Analogamente, la *stella impropria di piani* (risp. *stella impropria di rette*) di direzione un fissato vettore non nullo $\mathbf{v}$ di $\vec{\mathcal{E}}^3$, essendo l'insieme dei piani (risp. delle rette) di $\mathcal{E}^3$ che sono paralleli alla direzione individuata dal vettore $\mathbf{v}$, è costituito da tutti e soli i piani (risp. tutte e sole le rette) che contengono il punto improprio individuato dal vettore $\mathbf{v}$, così come la stella propria di piani (risp. di rette) di centro $C \in \mathcal{E}^3$ denota l'insieme di tutti e soli i piani (risp. tutte e sole le rette) di $\mathcal{E}^3$ contenenti il punto (proprio) C.

2. Le coniche del piano euclideo

Sia $\mathcal{E}^2$ un piano euclideo, in cui è fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$.

♦ **Definizione 12.3.** Considerata una generica equazione algebrica di secondo grado nelle coordinate x e y:

$$(*) \qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0,$$

diremo che tale equazione rappresenta, rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, una *conica* del piano euclideo $\mathcal{E}^2$. Inoltre, diremo che due equazioni $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$ e $a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + 2a'_{12}xy + 2a'_{01}x + 2a'_{02}y + a'_{00} = 0$ rappresentano, rispetto ad $\mathcal{R}$, la *stessa conica* di $\mathcal{E}^2$ se e soltanto se esiste $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che $a'_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} \ \ \forall i, j \in \{0, 1, 2\}$.

Si noti che, in base alla Definizione 12.3, ogni conica $\mathcal{C}$ di $\mathcal{E}^2$ è rappresentata - rispetto ad $\mathcal{R}$ - da infinite equazioni algebriche di secondo grado, tutte proporzionali tra di loro; usualmente, si dice che *l'equazione di* $\mathcal{C}$ *rispetto ad* $\mathcal{R}$ *è definita a meno di un coefficiente di proporzionalità.*

♦ **Definizione 12.4.** Data una conica $\mathcal{C}$ di $\mathcal{E}^2$ di equazione (*), si dice *supporto proprio* (o *immagine propria*) di $\mathcal{C}$ l'insieme $\mathcal{I}_P(\mathcal{C})$ dei punti del piano le cui coordinate - rispetto ad $\mathcal{R}$ - verificano una (e quindi tutte) le equazioni di $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{I}_P(\mathcal{C}) = \{P \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{x}, \bar{y}) \mid a_{11}\bar{x}^2 + a_{22}\bar{y}^2 + 2a_{12}\bar{x}\bar{y} + 2a_{01}\bar{x} + 2a_{02}\bar{y} + a_{00} = 0\}.$$

E' importante osservare che - a differenza di quanto si potrebbe intuitivamente supporre - l'immagine propria $\mathcal{I}_P(\mathcal{C})$ *non è in generale sufficiente ad individuare la conica* $\mathcal{C}$: ad esempio,

$$\mathcal{C}_1 : \ x^2 + y^2 = -1 \qquad \mathcal{C}_2 : \ x^2 + y^2 = -2 \qquad \mathcal{C}_3 : \ 3x^2 + 5y^2 = -1$$

rappresentano, rispetto ad $\mathcal{R}$, tre coniche diverse, ma ciascuna di esse ha immagine propria vuota:

$$\mathcal{I}_P(\mathcal{C}_1) = \mathcal{I}_P(\mathcal{C}_2) = \mathcal{I}_P(\mathcal{C}_3) = \emptyset.$$

Se si suppone di ampliare proiettivamente il piano euclideo $\mathcal{E}^2$, denotando con $[x_0, x_1, x_2]$ una terna di coordinate cartesiane omogenee dei suoi punti (propri ed impropri) rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, allora l'equazione (*) origina, in coordinate omogenee, la seguente *equazione omogenea della conica* $\mathcal{C}$:

$$(**) \qquad a_{11}(x_1)^2 + a_{22}(x_2)^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{00}(x_0)^2 = 0,$$

che si può scrivere sinteticamente nella forma
$$\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x_i x_j = 0.$$

♦ **Definizione 12.5.** Data una conica $\mathcal{C}$ di $\mathcal{E}^2$ di equazione omogenea (**), si dice *supporto improprio* (o *immagine impropria*) di $\mathcal{C}$ l'insieme $\mathcal{I}_\infty(\mathcal{C})$ dei punti impropri dell'ampliamento proiettivo di $\mathcal{E}^2$ le cui coordinate cartesiane omogenee - rispetto ad $\mathcal{R}$ - verificano una (e quindi tutte) le equazioni omogenee di $\mathcal{C}$:
$$\mathcal{I}_\infty(\mathcal{C}) = \{P_\infty \equiv_{\mathcal{R}} [0, \bar{x}_1, \bar{x}_2] \mid a_{11}(\bar{x}_1)^2 + a_{22}(\bar{x}_2)^2 + 2a_{12}\bar{x}_1\bar{x}_2 = 0\}.$$
Si dice poi *supporto* (o *immagine*) di $\mathcal{C}$ l'insieme
$$\mathcal{I}(\mathcal{C}) = \mathcal{I}_P(\mathcal{C}) \cup \mathcal{I}_\infty(\mathcal{C}).$$

♦ **Definizione 12.6.** Data una conica $\mathcal{C}$ di $\mathcal{E}^2$ di equazione (*) (o di equazione omogenea (**)), si dice *matrice associata* a $\mathcal{C}$ (o *discriminante* di $\mathcal{C}$) rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$ la matrice simmetrica [2]
$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$$

Tramite la matrice associata a $\mathcal{C}$, è possibile scrivere in forma matriciale le equazioni (*) e (**) di $\mathcal{C}$:
$$(*) \qquad (1 \quad x \quad y) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{(o, più sinteticamente,} \quad {}^t(u) \cdot A \cdot (u) = 0);$$
$$(**) \qquad (x_0 \quad x_1 \quad x_2) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{(o, più sinteticamente,} \quad {}^t(x) \cdot A \cdot (x) = 0).$$
Vediamo ora come cambia la matrice associata ad una conica (e quindi, anche la sua equazione e la sua equazione omogenea) al variare del sistema di riferimento fissato.

■ **Proposizione 12.4.** *Sia $\mathcal{C}$ una conica di $\mathcal{E}^2$ avente, rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, matrice associata $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. Se $\mathcal{R}'$ è un altro riferimento cartesiano su $\mathcal{E}^2$, ed*
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^1 & e_2^1 \\ e_1^2 & e_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}, \qquad con \quad E = \begin{pmatrix} e_1^1 & e_2^1 \\ e_1^2 & e_2^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}),$$
sono le equazioni del cambiamento di riferimento da $\mathcal{R}$ ad $\mathcal{R}'$, allora la conica $\mathcal{C}$ ha, rispetto ad $\mathcal{R}'$, matrice associata A' tale che
$$A = {}^t\bar{E} \cdot A' \cdot \bar{E}, \qquad con \quad \bar{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b^1 & e_1^1 & e_2^1 \\ b^2 & e_1^2 & e_2^2 \end{pmatrix}$$

[2] Si noti che anche la matrice associata a $\mathcal{C}$, come la equazione e la equazione omogenea, risulta definita a meno di un coefficiente di proporzionalità non nullo.

Dimostrazione. Sostituendo le equazioni del cambiamento di riferimento cartesiano da $\mathcal{R}$ ad $\mathcal{R}'$, scritte come
$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \bar{E} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \text{ovvero} \qquad (u') = \bar{E} \cdot (u),$$
nella forma matriciale della equazione (*) di $\mathcal{C}$ rispetto ad $\mathcal{R}'$,
$${}^t(u') \cdot A' \cdot (u') = 0,$$
si ottiene l'equazione
$${}^t(u) \cdot {}^t\bar{E} \cdot A' \cdot \bar{E} \cdot (u) = 0$$
che, confrontata con la forma matriciale dell'equazione (*) di $\mathcal{C}$ rispetto ad $\mathcal{R}$, ${}^t(u) \cdot A \cdot (u) = 0$, prova la tesi.

□

▸ **Osservazione 12.7.** Se interpretiamo il discriminante A di una conica $\mathcal{C}$, rispetto ad un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, come la matrice (simmetrica) associata ad una forma quadratica q su $\mathbb{R}^3$ (si veda l'Appendice B), l'equazione omogenea di $\mathcal{C}$ ha come primo membro $q(\mathbf{x}) = {}^t(x) \cdot A \cdot (x)$, il valore che q assume su di un generico vettore $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2)$ di $\mathbb{R}^3$.
Un diverso discriminante di $\mathcal{C}$, relativo ad $\mathcal{R}$, dà evidentemente luogo ad una forma quadratica proporzionale a q. Se, invece, si considera un diverso riferimento $\mathcal{R}'$, come si è visto, il relativo discriminante di $\mathcal{C}$ è, a meno di proporzionalità, una matrice A' congruente ad A (si veda il § 3 della Appendice B).
Tali considerazioni inducono a ritenere che l'ambiente più opportuno per definire le coniche sia l'ampliamento proiettivo del piano euclideo e che, in tale contesto, una conica sia individuata da una classe di proporzionalità di forme quadratiche.

Dalla Proposizione 12.4 e dalla Osservazione 12.7 si deduce la

■ **Proposizione 12.5.** *Tutti i discriminanti di una stessa conica $\mathcal{C}$ hanno lo stesso rango.*

Dimostrazione. Due discriminanti di $\mathcal{C}$ sono o proporzionali (nel qual caso hanno banalmente lo stesso rango) o congruenti (nel qual caso l'affermazione segue osservando che, se $F \in GL_n(\mathbb{R})$, allora $\varrho(A \cdot F) = \varrho(F \cdot A) = \varrho(A)$, per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: si veda anche la Proposizione B.4).

□

Per *rango* $\varrho(\mathcal{C})$ di $\mathcal{C}$ si intenderà il rango di un suo qualsiasi discriminante.

♦ **Definizione 12.7.** Una conica $\mathcal{C}$ di $\mathcal{E}^2$ si dice *non specializzata* o *non degenere* se $\varrho(\mathcal{C}) = 3$. In caso contrario, si dice che $\mathcal{C}$ è una *conica specializzata* o *degenere* di $\mathcal{E}^2$.
Quindi, se A è un discriminante di $\mathcal{C}$, si ha che $\mathcal{C}$ è degenere se e solo se $\det A = 0$.

Le coniche non degeneri si suddividono innanzitutto in *reali*, se $\mathcal{I}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$, o *vuote* (o *immaginarie*), se $\mathcal{I}(\mathcal{C}) = \emptyset$.

Detto A un discriminante di $\mathcal{C}$, si noti che $\mathcal{C}$ è reale se e solo se la matrice A è *non definita* (Definizione B.4); quindi, per distinguere le coniche reali da quelle immaginarie si può utilizzare il Criterio di Sylvester (Proposizione B.9). In alternativa, si può attendere la Proposizione 12.14.

Una diversa classificazione delle coniche non degeneri si effettua nel modo seguente, a seconda del loro comportamento rispetto alla retta impropria r_∞ di $\mathcal{E}^2$.

♦ **Definizione 12.8.** Una conica non degenere $\mathcal{C}$ di $\mathcal{E}^2$ si dice:

(a) *parabola* se r_∞ è tangente a $\mathcal{C}$, ovvero se il supporto improprio di $\mathcal{C}$ si riduce ad un solo punto (improprio);
(b) *iperbole* se r_∞ è secante a $\mathcal{C}$, ovvero se il supporto improprio di $\mathcal{C}$ è costituito da due punti (impropri) distinti;
(c) *ellisse* se r_∞ è esterna a $\mathcal{C}$, ovvero se il supporto improprio di $\mathcal{C}$ è vuoto. [3]

La seguente proposizione fornisce le semplici condizioni algebriche su A_{00} (il complemento algebrico dell'elemento a_{00} nella matrice A) per distinguere parabole, iperboli ed ellissi, e contemporaneamente dimostra che ogni conica non degenere di $\mathcal{E}^2$ appartiene ad una (ed una sola) di tali famiglie.

■ **Proposizione 12.6.** *Sia $\mathcal{C}$ una conica non degenere di $\mathcal{E}^2$ e sia A (con $\det A \neq 0$) un suo discriminante rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$. Allora, si ha che:*

(a) *$\mathcal{C}$ è una parabola se e soltanto se* $A_{00} = 0$;
(b) *$\mathcal{C}$ è una iperbole se e soltanto se* $A_{00} < 0$;
(c) *$\mathcal{C}$ è una ellisse se e soltanto se* $A_{00} > 0$.

Dimostrazione. I punti del supporto improprio della conica hanno coordinate cartesiane omogenee $[0, x_1, x_2]$ che verificano la equazione di secondo grado:

$$a_{11}(x_1)^2 + a_{22}(x_2)^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0.$$

Supponendo di ricavare una incognita in funzione dell'altra, è evidente che tale equazione ammette una, due o zero soluzioni reali, a seconda che $\frac{\Delta}{4} = (a_{12})^2 - a_{11} \cdot a_{22}$ sia rispettivamente nullo, positivo o negativo. La tesi segue quindi immediatamente, osservando che

$$-\frac{\Delta}{4} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = A_{00}.$$

□

Esempio 12.1. Consideriamo, nel piano euclideo $\mathcal{E}^2$, dotato di un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, le coniche aventi le seguenti equazioni:

$$\mathcal{C}_1 : \ 3x^2 + 8xy - 3y^2 + 2 = 0 \qquad \mathcal{C}_2 : \ x^2 - 2xy + 3y^2 + 10x + 7 = 0$$

$$\mathcal{C}_3 : \ x^2 + 4xy + 4y^2 - 2y + 2 = 0 \qquad \mathcal{C}_4 : \ x^2 + xy - 2y^2 - x + y = 0$$

[3] Si noti che le parabole e le iperboli sono sempre coniche reali, mentre le ellissi possono essere reali (se $\mathcal{I}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$) o immaginarie (se $\mathcal{I}(\mathcal{C}) = \emptyset$).

Un discriminante di $\mathcal{C}_1$, rispetto ad $\mathcal{R}$, è

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix};$$

poichè $\det A_1 = -50 \neq 0$, la conica $\mathcal{C}_1$ è non degenere. In particolare, essendo $A_{00} = -25 < 0$, la conica $\mathcal{C}_1$ risulta essere una iperbole.
Un discriminante di $\mathcal{C}_2$, rispetto ad $\mathcal{R}$, è

$$A_2 = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

poichè $\det A_2 = -61 \neq 0$, la conica $\mathcal{C}_2$ è non degenere. In particolare, essendo $A_{00} = 2 > 0$, la conica $\mathcal{C}_2$ risulta essere una ellisse.
Un discriminante di $\mathcal{C}_3$, rispetto ad $\mathcal{R}$, è

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

poichè $\det A_3 = -1 \neq 0$, la conica $\mathcal{C}_3$ è non degenere. In particolare, essendo $A_{00} = 0$, la conica $\mathcal{C}_3$ risulta essere una parabola.
Un discriminante di $\mathcal{C}_4$, rispetto ad $\mathcal{R}$, è

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

poichè $\det A_4 = 0$, la conica $\mathcal{C}_4$ è una conica degenere (o specializzata).

♦ **Definizione 12.9.** Sia $\mathcal{C}$ una conica non degenere di $\mathcal{E}^2$, avente A come matrice associata rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$. Se $P \equiv_{\mathcal{R}} [y_0, y_1, y_2]$ è un punto (proprio od improprio) di $\mathcal{E}^2$, si dice *retta polare* π_P di P rispetto alla conica la retta di equazione omogenea

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Non è difficile verificare che l'applicazione π che a P associa π_P è una biiezione tra i punti del completamento proiettivo $\mathcal{P}^2$ del piano euclideo e le sue rette. Pertanto, *per ogni retta r (propria od impropria) di $\mathcal{E}^2$, esiste uno ed un solo punto P (proprio od improprio), la cui retta polare sia r.* Tale punto è detto *polo* di r.

■ **Proposizione 12.7.** *Sia $\mathcal{C}$ una conica non specializzata del piano euclideo, e siano P, Q due punti di $\mathcal{E}^2$. Si ha che:*

- *$Q \in \pi_P$ se e solo se $P \in \pi_Q$.* **(Legge di reciprocità)**
- *Se P è un punto del supporto $\mathcal{I}(\mathcal{C})$, allora la retta polare π_P di P rispetto a $\mathcal{C}$ coincide con la retta tangente alla conica in P.*

Dimostrazione. Se $P \equiv_{\mathcal{R}} [y_0, y_1, y_2]$ e $Q \equiv_{\mathcal{R}} [z_0, z_1, z_2]$, allora si ha che:

$$(Q \in \pi_P \Leftrightarrow {}^t(z) \cdot A \cdot (y) = 0) \quad \text{e} \quad (P \in \pi_Q \Leftrightarrow {}^t(y) \cdot A \cdot (z) = 0).$$

La Legge di reciprocità segue quindi dalla simmetria della matrice A.
Supponiamo ora che $P \in \mathcal{I}(\mathcal{C})$; la retta r per P e per un secondo punto $Q \neq P$ risulta tangente alla conica in P se e solo se P è l'unico punto di intersezione tra r e $\mathcal{I}(\mathcal{C})$. Se $P \equiv_{\mathcal{R}} [y_0, y_1, y_2]$ e $Q \equiv_{\mathcal{R}} [z_0, z_1, z_2]$, allora tutti e soli i punti della retta r hanno, rispetto ad $\mathcal{R}$, coordinate cartesiane omogenee $[\lambda y_0 + \mu z_0, \lambda y_1 + \mu z_1, \lambda y_2 + \mu z_2]$, al variare dei parametri reali λ, μ; i punti di intersezione tra r e $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ corrispondono dunque alle soluzioni della equazione di secondo grado

$${}^t(\lambda y + \mu z) \cdot A \cdot (\lambda y + \mu z) = 0,$$

che equivale a

$$\lambda^2\, {}^t(y) \cdot A \cdot (y) + 2\lambda\mu\, {}^t(z) \cdot A \cdot (y) + \mu^2\, {}^t(z) \cdot A \cdot (z) = 0.$$

La ipotesi $P \in \mathcal{I}(\mathcal{C})$ assicura che il coefficiente di λ^2 è sempre nullo; quindi, la equazione ammette una sola soluzione (corrispondente alla coppia $(\lambda, \mu) = (1, 0)$, ovvero al punto di tangenza P) se e soltanto se anche il coefficiente di $\lambda\mu$ si annulla. Ciò implica che r è tangente alla conica se e soltanto se

$${}^t(z) \cdot A \cdot (y) = 0,$$

cioè se e soltanto se il punto Q appartiene alla polare π_P di P.

□

► **Osservazione 12.8.** Si noti che, se P non appartiene al supporto $\mathcal{I}(\mathcal{C})$, allora la retta polare π_P di P rispetto a $\mathcal{C}$ può essere o secante o esterna a $\mathcal{C}$ (se π_P fosse tangente a $\mathcal{C}$ in un punto $\bar{P}$, per la Proposizione 12.7 sarebbe anche la retta polare di $\bar{P}$, che è assurdo essendo π una biiezione).
Nel primo caso, π_P interseca $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ esattamente nei punti di contatto tra la conica e le due rette tangenti alla conica passanti per P (si veda la Figura 12.1).

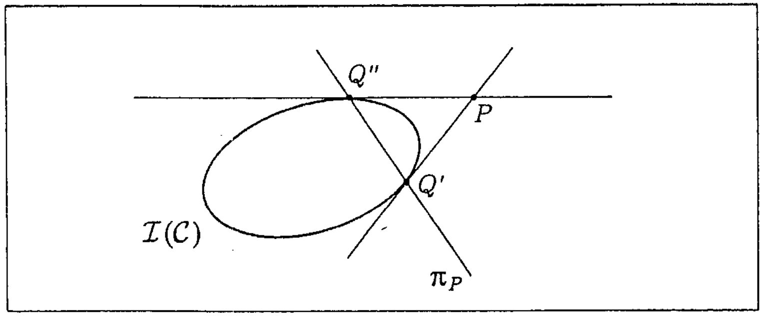

Figura 12.1

Infatti, se $Q \in \pi_P \cap \mathcal{I}(\mathcal{C})$, per la Legge di reciprocità si ha che $P \in \pi_Q$, che - per la Proposizione 12.7 - è la retta tangente in Q alla conica; ciò prova che la retta passante per P e Q è tangente alla conica. D'altra parte, se r è una retta passante

per P e tangente alla conica in un punto $Q \in \mathcal{I}(\mathcal{C})$, allora la retta polare di Q (che coincide appunto con la tangente alla conica in Q) contiene il punto P; per la Legge di reciprocità segue quindi che Q appartiene alla retta π_P polare di P.

Esempio 12.2. Rispetto alla conica $\mathcal{C}_1$ considerata nell'Esempio 12.1, la retta polare del punto $P \equiv_{\mathcal{R}} [1, 0, 1]$ ha, relativamente ad $\mathcal{R}$, equazione omogenea

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{cioè} \quad 2x_0 + 4x_1 - 3x_2 = 0.$$

La retta polare π_Q del punto $Q \equiv_{\mathcal{R}} [2, -1, 1]$, rispetto a $\mathcal{C}_1$, ha, relativamente ad $\mathcal{R}$, equazione omogenea

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{cioè} \quad 4x_0 + x_1 - 7x_2 = 0.$$

Si noti che si ha $P \notin \pi_P$, mentre $Q \in \pi_Q$; infatti, $P \notin \mathcal{I}(\mathcal{C}_1)$, mentre $Q \in \mathcal{I}(\mathcal{C}_1)$ (in accordo con la Proposizione 12.7).
Si verifichi che la retta polare di un punto arbitrario di π_P (risp. di π_Q) passa per P (risp. per Q).

♦ **Definizione 12.10.** Sia $\mathcal{C}$ una conica non specializzata di $\mathcal{E}^2$. Si dice *diametro* di $\mathcal{C}$ ogni retta propria che sia retta polare di un punto improprio di $\mathcal{E}^2$.
Si dice *centro* di $\mathcal{C}$ il polo C della retta impropria r_∞.

Come ovvia conseguenza della Proposizione 12.7 (Legge di reciprocità), si ha che *tutti i diametri contengono il centro di $\mathcal{C}$ e costituiscono un fascio (proprio o improprio) di rette.*

■ **Proposizione 12.8.** *Sia $\mathcal{C}$ una conica non specializzata di $\mathcal{E}^2$ avente, rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$, discriminante $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. Allora:*

$$C \equiv_{\mathcal{R}} [A_{00}, A_{01}, A_{02}] = \left[\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_{01} & a_{12} \\ a_{02} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{01} & a_{11} \\ a_{02} & a_{12} \end{vmatrix} \right].$$

Dimostrazione. Basta verificare che la retta polare del punto $C \equiv_{\mathcal{R}} [A_{00}, A_{01}, A_{02}]$ coincide con la retta impropria. Per definizione di retta polare, la equazione omogenea di π_C si ottiene da:

$$\pi_C : \quad \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} A_{00} \\ A_{01} \\ A_{02} \end{pmatrix} = 0;$$

sviluppando il prodotto tra la matrice A e la matrice colonna delle coordinate di C, ed utilizzando il Teorema di Laplace generalizzato (Teorema 3.17 e Lemma 3.18), tale equazione diventa:

$$\pi_C : \quad (\det A) \cdot x_0 = 0.$$

Poichè $\mathcal{C}$ è supposta non specializzata, sicuramente si ha $\det A \neq 0$; pertanto, $\pi_{\mathcal{C}}$ coincide effettivamente con la retta impropria di $\mathcal{E}^2$.

□

Si osservi che, come conseguenza delle Proposizioni 12.6 e 12.7, si ha che:

- se $\mathcal{C}$ è una parabola, il suo centro è il punto improprio individuato dalla direzione del vettore
$$\mathbf{v} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (A_{01}, A_{02}),$$
ed i suoi diametri sono tutti paralleli a $\mathbf{v}$;
- se $\mathcal{C}$ è una iperbole o una ellisse, il suo centro è il punto proprio di coordinate cartesiane
$$C \equiv_{\mathcal{R}} \left(\frac{A_{01}}{A_{00}}, \frac{A_{02}}{A_{00}}\right).$$

Le coniche aventi centro proprio (cioè le iperboli e le ellissi) sono usualmente dette *coniche a centro*.

Esempio 12.3. Nel caso dell'iperbole $\mathcal{C}_1$ considerata nell'Esempio 12.1, il centro risulta avere coordinate omogenee $C_1 \equiv_{\mathcal{R}} [-25, 0, 0]$, cioè è il punto proprio di coordinate cartesiane
$$C_1 \equiv_{\mathcal{R}} (0,0) \quad \text{(origine del riferimento } \mathcal{R}\text{)}$$
Nel caso dell'ellisse $\mathcal{C}_2$ considerata nell'Esempio 12.1, il centro risulta avere coordinate omogenee $C_2 \equiv_{\mathcal{R}} [2, -15, -5]$, cioè è il punto proprio di coordinate cartesiane
$$C_2 \equiv_{\mathcal{R}} \left(-\frac{15}{2}, -\frac{5}{2}\right).$$

Nel caso della parabola $\mathcal{C}_3$ considerata nell'Esempio 12.1, il centro risulta avere coordinate omogenee $C_3 \equiv_{\mathcal{R}} [0, 2, -1]$, cioè è il punto improprio individuato dalla direzione del vettore
$$\mathbf{v} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (2, -1).$$

♦ **Definizione 12.11.** Sia $\mathcal{C}$ una conica non specializzata di $\mathcal{E}^2$. Si dice *asintoto* di $\mathcal{C}$ ogni retta propria tangente a $\mathcal{C}$ in un suo punto improprio.

Si noti che, per la Definizione 12.8, *le uniche coniche di $\mathcal{E}^2$ che ammettono asintoti sono le iperboli*: infatti, il supporto improprio delle ellissi è vuoto, mentre l'unico punto improprio delle parabole (che coincide con il centro) ammette come retta tangente la retta impropria.
Ogni iperbole ammette *due asintoti*, che si ottengono facilmente come rette polari dei due punti impropri dell'iperbole. D'altra parte, gli asintoti di una iperbole sono particolari diametri (perchè rette polari di punti impropri), e perciò contengono il centro della iperbole; pertanto, noto il centro C ed i punti impropri P_∞ e Q_∞ dell'iperbole, gli asintoti coincidono con le rette CP_∞ e CQ_∞.

♦ **Definizione 12.12.** Si dice *iperbole equilatera* una iperbole del piano euclideo $\mathcal{E}^2$ avente per asintoti due rette ortogonali.

Non è difficile verificare, ricavando direttamente dalla equazione omogenea le coordinate dei punti impropri ed imponendo la condizione di ortogonalità tra le direzioni da essi individuate, che le iperboli equilatere sono caratterizzate da una semplice condizione algebrica su qualunque matrice ad esse associata:

■ **Proposizione 12.9.** *Sia $\mathcal{C}$ una iperbole di $\mathcal{E}^2$ avente, rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$, matrice associata $A \in S_3(\mathbb{R})$. L'iperbole $\mathcal{C}$ è equilatera se e soltanto se*
$$a_{11} + a_{22} = 0.$$
□

Esempio 12.4. Nel caso della iperbole $\mathcal{C}_1$ considerata nell'Esempio 12.1, il supporto improprio ha equazione
$$\begin{cases} 3x_1^2 - 3x_2^2 + 8x_1x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$
per cui i punti impropri di $\mathcal{C}_1$ sono $P_\infty \equiv_{\mathcal{R}} [0, -3, 1]$ e $Q_\infty \equiv_{\mathcal{R}} [0, 1, 3]$. Poichè il centro C di $\mathcal{C}_1$ coincide con l'origine del riferimento $\mathcal{R}$, gli asintoti sono le due rette CP_∞, di equazione $x + 3y = 0$, e CQ_∞, di equazione $3x - y = 0$. Si verifichi che esse coincidono con le polari π_{P_∞} e π_{Q_∞} rispettivamente.
Si noti inoltre che i due asintoti di $\mathcal{C}_1$ risultano tra loro ortogonali: la equazione della iperbole $\mathcal{C}_1$ verifica infatti la condizione della Proposizione 12.9, che caratterizza le iperboli equilatere.

♦ **Definizione 12.13.** Sia $\mathcal{C}$ una conica non specializzata di $\mathcal{E}^2$. Si dice *asse* di $\mathcal{C}$ ogni diametro π_{P_∞} di $\mathcal{C}$ che sia ortogonale alla direzione individuata dal suo polo P_∞.
Si dice *vertice* di $\mathcal{C}$ ogni punto di intersezione del supporto proprio $\mathcal{I}_P(\mathcal{C})$ con un asse di $\mathcal{C}$.

Si noti che gli assi di $\mathcal{C}$, essendo particolari diametri, contengono sempre il centro di $\mathcal{C}$.

La seguente proposizione fornisce il metodo operativo per trovare gli assi (e quindi i vertici) di una conica.

■ **Proposizione 12.10.** *Sia $\mathcal{C}$ una conica non specializzata di $\mathcal{E}^2$ avente, rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, matrice associata $A \in S_3(\mathbb{R})$; sia M_{00} il minore complementare dell'elemento a_{00} in A. Gli assi di $\mathcal{C}$ sono le rette polari dei punti impropri di $\mathcal{E}^2$ individuati dalle direzioni degli autovettori di M_{00}, relativi ad autovalori non nulli.*

In altre parole, la Proposizione 12.10 afferma che *un punto $P_\infty \equiv_{\mathcal{R}} [0, l, m]$ è polo di un asse di C se e soltanto se esiste $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che*

$$(+) \qquad M_{00} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. In base alla Definizione 12.9, la retta polare di un generico punto improprio $P_\infty \equiv_{\mathcal{R}} [0, l, m]$ del piano euclideo $\mathcal{E}^2$ ha, relativamente ad $\mathcal{R}$, equazione

$$(a_{01}l + a_{02}m) \cdot x_0 + (a_{11}l + a_{12}m) \cdot x_1 + (a_{21}l + a_{22}m) \cdot x_2 = 0.$$

Ricordando la condizione di ortogonalità tra due rette del piano euclideo, si ha quindi che la direzione individuata da P_∞ è ortogonale a π_{P_∞} se e soltanto se esiste $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che

$$(a_{11}l + a_{12}m, a_{21}l + a_{22}m) = \lambda \cdot (l, m),$$

ovvero se e solo se vale la condizione (+). □

Si noti che la Proposizione 12.10, unita alla Legge di reciprocità, permette facilmente di verificare che *la retta tangente ad una conica C in un suo vertice V è ortogonale all'asse contenente V*: infatti, detto π_{P_∞} l'asse contenente V, la Legge di reciprocità assicura che $P_\infty \in \pi_V$, e quindi che la polare di V (ovvero la tangente in V a C) ha la direzione ortogonale all'asse (che è individuata, per definizione di asse, dal suo polo P_∞).

Come conseguenza delle Proposizioni 12.6 e 12.10, si ottiene poi il seguente risultato, relativo alla esistenza di assi per i vari tipi di coniche non specializzate.

■ **Proposizione 12.11.** *Sia C una conica non specializzata di $\mathcal{E}^2$.*

- *Se C è una conica a centro, esistono sempre (almeno [4]) due assi di C, tra loro ortogonali, che si intersecano nel centro di C;*
- *se C è una parabola, essa ammette un solo asse ed un solo vertice.*

Dimostrazione. Occorre innanzitutto ricordare che, in base al Teorema 7.14 (e al Teorema B.1), ogni matrice simmetrica reale ammette una base spettrale ortonormale. Inoltre, per la Proposizione 12.10, ogni autovettore della matrice $M_{00} \in \mathbb{S}_2(\mathbb{R})$, relativo ad un autovalore non nullo, individua un asse della conica C.

Ora, nel caso che C sia una conica a centro, la matrice M_{00} non può ammettere l'autovalore nullo (essendo $\det M_{00} \neq 0$); pertanto, se $\vec{\mathcal{B}}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ è una base spettrale ortonormale per M_{00}, i punti impropri $P_{1\infty}$ e $P_{2\infty}$, individuati rispettivamente dalla direzione dei vettori $\mathbf{e}'_1$ ed $\mathbf{e}'_2$, hanno come rette polari due assi $\pi_{P_{1\infty}}$ e $\pi_{P_{2\infty}}$ di C che, essendo ortogonali rispettivamente ad $\mathbf{e}'_1$ ed $\mathbf{e}'_2$, risultano necessariamente ortogonali tra di loro. Tali assi si intersecano poi ovviamente nel centro della conica, perchè il centro appartiene ad ogni diametro (e quindi, ad ogni asse) di C.

Se invece C è una parabola, la matrice M_{00} (avendo $\det M_{00} = 0$) ammette sicuramente un autovalore nullo, con molteplicità uno (perchè, se tale molteplicità fosse due, la matrice A non potrebbe essere regolare); allora, se $\vec{\mathcal{B}}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ è una base spettrale ortonormale per M_{00}, con $\mathbf{e}'_1$ autovettore relativo all'(unico) autovalore $\bar{\lambda}$

[4] L'unica conica non vuota che ammette più di due assi è la circonferenza, per la quale tutti i diametri risultano essere assi: si veda anche la successiva Proposizione 12.15.

non nullo, il punto improprio P_∞, individuato dalla direzione del vettore $\mathbf{e}'_1$, ha come retta polare l'unico asse π_{P_∞} di C. Infatti, ogni altro autovettore di M_{00} relativo a $\bar{\lambda}$ è necessariamente multiplo di $\mathbf{e}'_1$, e pertanto individua il medesimo punto improprio P_∞. Infine, poichè l'asse π_{P_∞} è una retta propria contenente il centro (improprio) della parabola C, esso non può essere tangente a C; pertanto, l'asse interseca il supporto $\mathcal{I}(C)$ in un ulteriore punto proprio V, che risulta essere l'unico vertice della parabola. □

Esempio 12.5. Nel caso della iperbole C_1 considerata nell'Esempio 12.1, gli autovalori della matrice M_{00} sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -5$, che si ottengono risolvendo la equazione caratteristica

$$\det \begin{pmatrix} t-3 & -4 \\ -4 & t+3 \end{pmatrix} = t^2 - 25 = 0.$$

Gli autovettori relativi all'autovalore λ_1 sono i vettori (l, m) tali che

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{ovvero} \qquad l - 2m = 0;$$

gli autovettori relativi all'autovalore λ_2 sono invece i vettori (l, m) tali che

$$\begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{ovvero} \qquad 2l + m = 0.$$

I poli degli assi di C_1 sono dunque i punti impropri $P_{1\infty} \equiv_{\mathcal{R}} [0, 2, 1]$ e $P_{2\infty} \equiv_{\mathcal{R}} [0, 1, -2]$; gli assi di C_1 sono allora le rette $\pi_{P_{1\infty}}$ e $\pi_{P_{2\infty}}$ di equazione:

$$\pi_{P_{1\infty}}: \; 2x + y = 0 \qquad \pi_{P_{2\infty}}: \; x - 2y = 0.$$

Esempio 12.6. Nel caso della ellisse C_2 considerata nell'Esempio 12.1, gli autovalori della matrice M_{00} sono $\lambda_1 = 2 + \sqrt{2}$ e $\lambda_2 = 2 - \sqrt{2}$, che si ottengono risolvendo la equazione caratteristica

$$\det \begin{pmatrix} t-1 & 1 \\ 1 & t-3 \end{pmatrix} = t^2 - 4t + 2 = 0.$$

Gli autovettori relativi all'autovalore λ_1 sono i vettori (l, m) tali che

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{ovvero} \qquad (\sqrt{2}+1)l + m = 0;$$

gli autovettori relativi all'autovalore λ_2 sono invece i vettori (l, m) tali che

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2}+1 & 1 \\ 1 & -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{ovvero} \qquad (-\sqrt{2}+1)l + m = 0.$$

I poli degli assi di C_2 sono dunque i punti impropri $P_{1\infty} \equiv_{\mathcal{R}} [0, 1-\sqrt{2}, 1]$ e $P_{2\infty} \equiv_{\mathcal{R}} [0, 1+\sqrt{2}, 1]$; gli assi di C_2 sono allora le rette $\pi_{P_{1\infty}}$ e $\pi_{P_{2\infty}}$ di equazione:

$$\pi_{P_{1\infty}}: \; -\sqrt{2}x + (2+\sqrt{2})y + 5 - 5\sqrt{2} = 0 \qquad \pi_{P_{2\infty}}: \; \sqrt{2}x + (2-\sqrt{2})y + 5 + 5\sqrt{2} = 0.$$

Esempio 12.7. Nel caso della parabola $\mathcal{C}_3$ considerata nell'Esempio 12.1, l'unico autovalore non nullo della matrice M_{00} è $\bar{\lambda} = 5$, essendo

$$\det\begin{pmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t-4 \end{pmatrix} = t^2 - 5t.$$

Gli autovettori relativi a tale autovalore $\bar{\lambda}$ sono i vettori (l, m) tali che

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{ovvero} \qquad 2l - m = 0.$$

Il polo dell'(unico) asse di $\mathcal{C}_3$ è dunque il punto improprio $P_\infty \equiv_{\mathcal{R}} [0, 1, 2]$; l'asse di $\mathcal{C}_3$ è allora la retta π_{P_∞} di equazione:

$$\pi_{P_\infty} : \quad 5x + 10y - 2 = 0.$$

Si noti che, in alternativa, la direzione del punto improprio P_∞ può essere determinata come la direzione ortogonale al centro (improprio) $C_3 \equiv_{\mathcal{R}} [0, 2, -1]$ della parabola $\mathcal{C}_3$: infatti, l'asse di $\mathcal{C}_3$, essendo un particolare diametro, risulta necessariamente parallelo alla direzione individuata dal centro.

3. Riduzione a forma canonica delle coniche

Nel presente paragrafo, $\mathcal{C}$ denoterà sempre una conica del piano euclideo $\mathcal{E}^2$, dotato di un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$.
Le proprietà del centro, degli assi e dei vertici, ottenute nel paragrafo precedente, permettono, nei vari tipi di coniche non specializzate, di potere scegliere sempre un riferimento cartesiano rispetto al quale l'equazione della conica risulta particolarmente semplice. Infatti, la proposizione seguente afferma che, fissato opportunamente il riferimento, la matrice associata è o di tipo diagonale (ovvero, i suoi unici elementi non nulli appartengono alla diagonale principale) o di tipo "anti-diagonale" (ovvero, i suoi unici elementi non nulli appartengono alla diagonale secondaria).

■ **Proposizione 12.12.** *Sia $\mathcal{C}$ una conica non specializzata di $\mathcal{E}^2$.*

(i) *Se $\mathcal{C}$ è una conica a centro, sia $\bar{\mathcal{R}}$ il riferimento cartesiano avente origine $\bar{O}$ coincidente con il centro di $\mathcal{C}$, ed assi coordinati* $\mathbf{X}$ *e* $\mathbf{Y}$ *coincidenti con una coppia di assi, tra loro ortogonali, di $\mathcal{C}$. Allora, la matrice associata a $\mathcal{C}$ rispetto ad $\bar{\mathcal{R}}$ risulta di tipo diagonale.*

(ii) *Se $\mathcal{C}$ è una parabola, sia $\bar{\mathcal{R}}$ il riferimento cartesiano avente origine $\bar{O}$ coincidente con il vertice V di $\mathcal{C}$, asse* $\mathbf{Y}$ *coincidente con l'asse di $\mathcal{C}$ ed asse* $\mathbf{X}$ *coincidente con la tangente in V a $\mathcal{C}$. Allora, la matrice associata a $\mathcal{C}$ rispetto ad $\bar{\mathcal{R}}$ risulta di tipo "anti-diagonale".*

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che in entrambi i casi - in virtù della Proposizione 12.10, con relativa osservazione -, la base $\vec{\bar{\mathcal{B}}}$ associata al riferimento cartesiano scelto $\bar{\mathcal{R}}$ risulta ortonormale e spettrale per la matrice M_{00} (minore complementare dell'elemento a_{00}, per una fissata matrice A associata ad $\mathcal{C}$). Pertanto, la matrice

$\bar{A}$ associata alla conica rispetto a $\bar{\mathcal{R}}$ ha il minore complementare dell'elemento $\bar{a}_{00}$ di tipo diagonale, con gli elementi della diagonale coincidenti con gli autovalori della matrice M_{00}.
Ora, se $\mathcal{C}$ è una conica a centro, poichè l'origine $\bar{O}$ del riferimento $\bar{\mathcal{R}}$ coincide con il centro di $\mathcal{C}$, la retta polare dell'origine deve avere, rispetto ad $\bar{\mathcal{R}}$, equazione $x_0 = 0$. D'altra parte, l'equazione di $\pi_{\bar{O}}$ si ottiene da

$$(x_0 \quad x_1 \quad x_2) \cdot \bar{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \qquad \text{con } \bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{00} & \bar{a}_{01} & \bar{a}_{02} \\ \bar{a}_{01} & \lambda_1 & 0 \\ \bar{a}_{02} & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix};$$

allora, tale equazione coincide (a meno di proporzionalità) con la equazione $x_0 = 0$ se e soltanto se $\bar{a}_{01} = \bar{a}_{02} = 0$ e $\bar{a}_{00} \neq 0$, ovvero se e soltanto se la matrice $\bar{A}$ è di tipo diagonale.
Se invece $\mathcal{C}$ è una parabola, poichè l'origine $\bar{O}$ del riferimento $\bar{\mathcal{R}}$ coincide con il vertice di $\mathcal{C}$ e l'asse $\mathbf{X}$ coincide con la retta tangente nel vertice, la retta polare dell'origine deve avere, rispetto ad $\bar{\mathcal{R}}$, equazione $x_2 = 0$. D'altra parte, l'equazione di $\pi_{\bar{O}}$ si ottiene da

$$(x_0 \quad x_1 \quad x_2) \cdot \bar{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \qquad \text{con } \bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{00} & \bar{a}_{01} & \bar{a}_{02} \\ \bar{a}_{01} & \lambda & 0 \\ \bar{a}_{02} & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

allora, tale equazione coincide (a meno di proporzionalità) con la equazione $x_2 = 0$ se e soltanto se $\bar{a}_{00} = \bar{a}_{01} = 0$ e $\bar{a}_{02} \neq 0$, ovvero se e soltanto se la matrice $\bar{A}$ è di tipo anti-diagonale.

□

La proposizione seguente fornisce il metodo operativo per ottenere, a partire da una qualunque matrice associata alla conica non specializzata $\mathcal{C}$, una matrice di tipo diagonale o anti-diagonale associata a $\mathcal{C}$.

■ **Proposizione 12.13.** *Sia $\mathcal{C}$ una conica non specializzata di $\mathcal{E}^2$ e sia A una sua matrice associata, rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$.*

(i) *Se $\mathcal{C}$ è una conica a centro, allora una matrice di tipo diagonale associata a $\mathcal{C}$ è*

$$D = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

dove $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sono i due autovalori (eventualmente coincidenti) del minore M_{00} di A e $d \in \mathbb{R} - \{0\}$ si ricava imponendo $\det D = \det A$.

(ii) *Se $\mathcal{C}$ è una parabola, allora una matrice di tipo "anti-diagonale" associata a $\mathcal{C}$ è*

$$D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d' \\ 0 & \lambda & 0 \\ d' & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$ è l'unico autovalore non nullo del minore M_{00} di A e $d' \in \mathbb{R} - \{0\}$ si ricava imponendo $\det D' = \det A$.

Dimostrazione. In virtù della Proposizione 12.4, una matrice associata a $\mathcal{C}$ rispetto al riferimento $\bar{\mathcal{R}}$ individuato nella Proposizione 12.12 è $\bar{A}$ (di tipo diagonale nel caso (i), di tipo anti-diagonale nel caso (ii)) tale che

$$A = {}^t\bar{E} \cdot \bar{A} \cdot \bar{E}, \qquad \text{con} \quad \bar{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b^1 & e_1^1 & e_2^1 \\ b^2 & e_1^2 & e_2^2 \end{pmatrix} \qquad \text{ed } E = \begin{pmatrix} e_1^1 & e_2^1 \\ e_1^2 & e_2^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}).$$

Poichè $E \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ implica $\det E \in \{\pm 1\}$ (Proposizione 3.20), si ha:

$$\det A = \det {}^t\bar{E} \cdot \det \bar{A} \cdot \det \bar{E} = \det \bar{A} \cdot (\det \bar{E})^2 = \det \bar{A} \cdot (\det E)^2 = \det \bar{A}.$$

D'altra parte, se M_{00} (risp. $\bar{M}_{00}$) denota il minore complementare dell'elemento a_{00} (risp. $\bar{a}_{00}$) in A (risp. in $\bar{A}$), si ha:

$$M_{00} = {}^tE \cdot \bar{M}_{00} \cdot E, \qquad \text{con} \qquad E \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}).$$

Essendo ${}^tE = E^{-1}$, ne consegue che M_{00} e $\bar{M}_{00}$ sono simili, ovvero che $\bar{M}_{00}$ contiene, sulla sua diagonale principale, esattamente gli autovalori di M_{00}.

□

Nel caso della parabola, moltiplicando per $(-2d')^{-1}$ e cambiando eventualmente orientazione all'asse $\mathbf{Y}$ del riferimento $\bar{\mathcal{R}}$, la equazione di $\mathcal{C}$ rispetto ad $\bar{\mathcal{R}}$ assume la forma della equazione (3) del § 3 del Capitolo 10 (equazione canonica della parabola, intesa come particolare luogo geometrico del piano):

$$Y = \frac{1}{2p}X^2, \qquad \text{dove} \quad p = \left| -\frac{d'}{\lambda} \right|.$$

D'altra parte, anche nel caso delle coniche a centro la equazione di $\mathcal{C}$ rispetto ad $\bar{\mathcal{R}}$ assume la forma di una delle equazioni canoniche delle coniche, viste nel § 3 del Capitolo 10. Infatti, moltiplicando per $(-d)^{-1}$, la equazione indotta dalla matrice diagonale D risulta

$$\frac{\lambda_1}{-d} \cdot X^2 + \frac{\lambda_2}{-d} \cdot Y^2 = 1.$$

Allora:

- se λ_1 e λ_2 hanno segno opposto, scambiando eventualmente tra loro l'asse $\mathbf{X}$ e l'asse $\mathbf{Y}$, la equazione assume la forma della equazione (2) del § 3 del Capitolo 10 (equazione canonica della iperbole, intesa come particolare luogo geometrico del piano);
- se λ_1 e λ_2 sono entrambi di segno concorde (risp. discorde) con $-d$, allora la equazione assume la forma della equazione (1) (risp. (1')) del § 3 del Capitolo 10 (equazione canonica della ellisse (risp. della ellisse vuota), intesa come particolare luogo geometrico del piano).

Si noti che, nel caso della ellisse, il segno di d coincide con il segno di $\det A$ (infatti, per la Proposizione 12.13(i), si ha $\det A = d \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 = d \cdot \det M_{00}$); quindi, *una conica $\mathcal{C}$ è una ellisse (risp. una ellisse vuota) se e soltanto se, in qualunque matrice A associata a $\mathcal{C}$, il minore M_{00} ammette due autovalori, entrambi di segno discorde (risp. concorde) con* $\det A$.

In realtà, esiste un criterio alternativo per riconoscere le coniche a supporto vuoto, anche senza determinare gli autovalori del minore M_{00} : [5]

■ **Proposizione 12.14.** *Una conica $\mathcal{C}$ di $\mathcal{E}^2$ ha supporto vuoto se e solo se, in qualunque matrice A associata a $\mathcal{C}$, si ha $\det M_{00} > 0$ e l'elemento a_{22} ha segno concorde a* $\det A$.

Dimostrazione. E' sufficiente provare che le condizioni scritte sono equivalenti a richiedere che λ_1, λ_2 (autovalori del minore M_{00}) siano entrambi di segno concorde con $\det A$. In effetti, essendo $\det M_{00} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = a_{11} \cdot a_{22} - (a_{12})^2$ e $a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$, l'ipotesi che λ_1 e λ_2 siano concordi implica direttamente sia $\det M_{00} > 0$, sia che a_{11} e a_{22} sono concordi (e concordi con λ_1 e λ_2): allora, se λ_1 e λ_2 sono concordi con $\det A$, anche a_{22} lo è.
Viceversa, se si suppone $\det M_{00} > 0$, sicuramente a_{11} e a_{22} sono concordi, e concordi con λ_1 e λ_2; se poi a_{22} ha segno concorde a $\det A$, allora anche λ_1 e λ_2 sono entrambi di segno concorde con $\det A$.

□

Si noti poi che la equazione canonica di una conica $\mathcal{C}$ ha i coefficienti di X^2 e di Y^2 coincidenti se e solo se, in qualunque matrice A associata a $\mathcal{C}$, il minore M_{00} ammette due autovalori coincidenti; ciò permette di ottenere la seguente caratterizzazione delle circonferenze all'interno delle coniche del piano euclideo:

■ **Proposizione 12.15.** *Una conica $\mathcal{C}$ di $\mathcal{E}^2$ è una circonferenza se e soltanto se, in una qualunque matrice associata A, si ha*

$$M_{00} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \textit{con} \quad \lambda \cdot \det A < 0.$$

□

Esempio 12.8. In base alla Proposizione 12.13 (caso (i)), una matrice di tipo diagonale associata alla iperbole $\mathcal{C}_1$ considerata nell'Esempio 12.1 è

$$D = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

con $\det D = -25d = \det A = -50$, da cui segue $d = 2$.
Allora, una equazione canonica di $\mathcal{C}_1$ è

$$-5X^2 + 5Y^2 + 2 = 0, \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{X^2}{\frac{2}{5}} - \frac{Y^2}{\frac{2}{5}} = 1.$$

Esempio 12.9. In base alla Proposizione 12.13 (caso (ii)), una matrice di tipo anti-diagonale associata alla parabola $\mathcal{C}_3$ considerata nell'Esempio 12.1 è

$$D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d' \\ 0 & 5 & 0 \\ d' & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

[5] Si noti che, in alternativa alla dimostrazione diretta qui presentata, la Proposizione 12.14 può essere dedotta immediatamente dal Criterio di Sylvester (Teorema B.9, con relativa nota), nel caso particolare $n = 3$.

con $\det D' = -5d'^2 = \det A = -1$, da cui segue $d' = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Allora, una equazione canonica di C_3 è

$$5X^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}Y = 0, \qquad \text{ovvero} \quad Y = \frac{5\sqrt{5}}{2}X^2.$$

Le equazioni canoniche delle coniche non degeneri permettono di ricavare facilmente alcune proprietà del supporto proprio che, essendo indipendenti dal riferimento scelto, possono essere formulate in termini generali.

■ **Proposizione 12.16.** *Sia C una conica non specializzata di $\mathcal{E}^2$. Allora, ogni asse di C è asse di simmetria per il supporto proprio $\mathcal{I}_P(C)$.*
Inoltre:

- *se C è una conica a centro, il centro C è centro di simmetria per il supporto proprio $\mathcal{I}_P(C)$;*
- *se C è una ellisse reale, ogni asse di C contiene due vertici, e i fuochi di C appartengono all'asse in cui la distanza tra i vertici è maggiore (detto asse maggiore o asse focale);*
- *se C è una iperbole, un asse di C (detto asse trasverso o asse focale) contiene due vertici, mentre l'altro asse (detto asse non trasverso) non interseca $\mathcal{I}(C)$; i fuochi di C appartengono all'asse trasverso.*

□

E' evidente poi che, per quanto già visto nel § 3 del Capitolo 10, le equazioni canoniche delle coniche non degeneri permettono di ricavare facilmente le coordinate dei fuochi e, nel caso della parabola, la equazione della direttrice δ.

■ **Proposizione 12.17.** *Sia C una conica non specializzata di $\mathcal{E}^2$ e sia $\tilde{\mathcal{R}}$ il riferimento cartesiano in cui C assume equazione canonica. Allora:*

- *se C è una parabola di equazione canonica $Y = \frac{1}{2p}X^2$, con $p > 0$, si ha:*
$$F \equiv_{\tilde{\mathcal{R}}} (0, \tfrac{p}{2}), \qquad \delta : Y = -\tfrac{p}{2};$$
- *se C è una ellisse (reale) di equazione canonica $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$, con $a > b$, si ha:*
$$F_1 \equiv_{\tilde{\mathcal{R}}} \left(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right) \qquad F_2 \equiv_{\tilde{\mathcal{R}}} \left(+\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right);$$
- *se C è una iperbole di equazione canonica $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$, si ha:*
$$F_1 \equiv_{\tilde{\mathcal{R}}} \left(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0\right) \qquad F_2 \equiv_{\tilde{\mathcal{R}}} \left(+\sqrt{a^2 + b^2}, 0\right).$$

□

Poichè le distanze tra i punti notevoli del supporto di una conica (non vuota) non dipendono dal riferimento cartesiano scelto, è possibile risalire, attraverso la Proposizione 12.17, alle coordinate dei fuochi (e, nel caso della parabola, alla equazione della direttrice) rispetto a qualunque sistema di riferimento.

Il procedimento si svolge nei seguenti passi, a partire dalla equazione della conica non specializzata C rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$:

1) Se C è una conica a centro (risp. una parabola), si determinino, rispetto ad $\mathcal{R}$, le coordinate del centro C (risp. del vertice V) e l'equazione dell'asse focale (risp. dell' asse) $\bar{r}$ di C;
2) si determini l'equazione canonica di C e si calcoli la distanza $c = d(C, F_2)$ (risp. $\frac{p}{2} = d(V, F)$);
3) si scriva, rispetto ad $\mathcal{R}$, l'equazione della circonferenza di centro C (risp. V) e raggio c (risp. $\frac{p}{2}$), e si determinino le sue intersezioni H_1 ed H_2 con l'asse $\bar{r}$.

A questo punto:

- Se C è una conica a centro, H_1 ed H_2 sono esattamente i due fuochi di C.
- Se C è una parabola, i due punti H_1 ed H_2 sono uno il fuoco F di C, e l'altro l'intersezione H tra l'asse $\bar{r}$ e la direttrice δ di C: per distinguerli, basta osservare che la retta ortogonale a $\bar{r}$ passante per F (risp. per H) ha due intersezioni distinte con $\mathcal{I}(C)$ (risp. non interseca $\mathcal{I}(C)$).

Si noti infine che, nel caso delle iperboli equilatere, esiste una ulteriore scelta del sistema di riferimento, che porta ad una equazione di forma particolarmente semplice:

■ **Proposizione 12.18.** *Sia C una iperbole equilatera di $\mathcal{E}^2$. Se $\tilde{\mathcal{R}} = (\tilde{O}, \tilde{\tilde{\mathcal{B}}})$ è il riferimento cartesiano avente origine nel centro di C ed avente assi coordinati coincidenti con gli asintoti (tra loro ortogonali) di C, allora la equazione di C rispetto ad $\tilde{\mathcal{R}}$ risulta del tipo*

$$\tilde{X}\tilde{Y} = k, \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

□

La equazione descritta nella Proposizione 12.18 viene usualmente detta *equazione canonica riferita agli asintoti* della iperbole equilatera C, e può essere facilmente ottenuta a partire da una qualunque equazione associata a C, osservando che, *se r_1 ed r_2 sono gli asintoti della iperbole equilatera C, allora $d(P, r_1) \cdot d(P, r_2) = |k|$, per ogni punto $P \in \mathcal{I}(C)$.*

4. Fasci di coniche

Nel paragrafo precedente l'attenzione è stata rivolta esclusivamente alle coniche non degeneri; nel presente paragrafo abbiamo invece la necessità di accennare anche ad alcuni tipi di coniche degeneri (o specializzate) del piano euclideo.
Non è difficile verificare che noti sottoinsiemi del piano euclideo (in particolare: rette ed unioni di due rette [6]) risultano essere il supporto di opportune coniche degeneri:

---

[6] In realtà, è possibile dimostrare che tali sottoinsiemi, uniti ai singoli punti di $\mathcal{E}^2$, esauriscono tutti i possibili supporti di una conica degenere del piano euclideo: *Se C è una conica degenere di $\mathcal{E}^2$, allora è verificata una (ed una sola) delle seguenti affermazioni:*

- *esiste una retta (propria o impropria) r di $\mathcal{E}^2$ tale che $\mathcal{I}(C) = r$;*
- *esistono due rette distinte r ed s di $\mathcal{E}^2$ (di cui una eventualmente coincidente con la retta impropria), tali che $\mathcal{I}(C) = r \cup s$;*
- *esiste un punto (proprio o improprio) $\bar{P} \in \mathcal{E}^2$ tale che $\mathcal{I}(C) = \{\bar{P}\}$.*

Nel primo caso si ha $\varrho(C) = 1$, mentre nel secondo e nel terzo caso si ha $\varrho(C) = 2$.

- se r è una retta di $\mathcal{E}^2$ avente equazione cartesiana $ax + by + c = 0$ rispetto ad un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, allora
$$(ax + by + c)^2 = 0$$
è la equazione di una conica degenere $\mathcal{C}$ di $\mathcal{E}^2$, il cui supporto $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ è costituito da tutti e soli i punti della retta r (che si dice *"contata due volte"*);
- se r ed s sono due rette distinte di $\mathcal{E}^2$ aventi rispettivamente equazioni cartesiane $a'x + b'y + c' = 0$ e $a''x + b''y + c'' = 0$ rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, allora
$$(a'x + b'y + c') \cdot (a''x + b''y + c'') = 0$$
è la equazione di una conica degenere $\mathcal{C}$ di $\mathcal{E}^2$, il cui supporto $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ è costituito da tutti e soli i punti delle rette r ed s.

♦ **Definizione 12.14.** Date due coniche distinte (degeneri o non degeneri) $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ del piano euclideo $\mathcal{E}^2$, aventi rispettivamente equazioni omogenee
$$\mathcal{C}_1 : \sum_{i,j=0}^{2} a'_{ij}x_ix_j = 0 \qquad \mathcal{C}_2 : \sum_{i,j=0}^{2} a''_{ij}x_ix_j = 0$$
rispetto ad un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, si dice *fascio di coniche* individuato da $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ l'insieme $\mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ di coniche aventi, rispetto ad $\mathcal{R}$, equazioni omogenee
$$\lambda\left(\sum_{i,j=0}^{2} a'_{ij}x_ix_j\right) + \mu\left(\sum_{i,j=0}^{2} a''_{ij}x_ix_j\right) = 0, \quad \text{con } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} - \{0,0\}.$$

Si noti che il fascio $\mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ contiene infinite coniche (al variare degli scalari λ e μ), ma che coppie (λ, μ) proporzionali individuano la stessa conica. Ad esempio, ogni coppia $(0, \mu)$ (con $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$) individua la conica $\mathcal{C}_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$. Inoltre, se $\mathcal{C}_3$ e $\mathcal{C}_4$ sono due coniche distinte del fascio $\mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$, si ha che $\mathcal{F}(\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4) = \mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$.

■ **Proposizione 12.19.** *Sia $\mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ un fascio di coniche del piano euclideo $\mathcal{E}^2$. Per ogni punto $P \notin \mathcal{I}(\mathcal{C}_1) \cap \mathcal{I}(\mathcal{C}_2)$, esiste una ed una sola conica $\mathcal{C} \in \mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$, tale che $P \in \mathcal{I}(\mathcal{C})$.*

Dimostrazione. E' sufficiente osservare che, sostituendo le coordinate cartesiane omogenee di P nella equazione omogenea del fascio, i coefficienti dei parametri λ e μ non possono essere contemporaneamente nulli (perchè $P \notin \mathcal{I}(\mathcal{C}_1) \cap \mathcal{I}(\mathcal{C}_2)$); quindi, i parametri λ e μ devono verificare una equazione lineare omogenea di rango uno, le cui soluzioni (che sono ∞^1, tutte multiple di una qualunque fissata) individuano tutte la medesima conica.

□

Le seguenti osservazioni consentono di scrivere con facilità l'equazione di un fascio di coniche individuato da particolari condizioni. Per semplicità, indicheremo con XY la retta (eventualmente impropria) del piano euclideo $\mathcal{E}^2$ passante per i punti distinti (propri o impropri) $X, Y \in \mathcal{E}^2$.

Fasci del I° tipo. *L'insieme delle coniche passanti per quattro punti distinti $A, B, C, D \in \mathcal{E}^2$, a tre a tre non allineati, è un fascio di coniche $\mathcal{F}_1$ di $\mathcal{E}^2$.*

Inoltre, se $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ sono due delle tre coniche degeneri, il cui supporto è rispettivamente costituito da
$$AB \cup CD, \qquad AC \cup BD, \qquad AD \cup BC,$$
allora $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ (Figura 12.2).

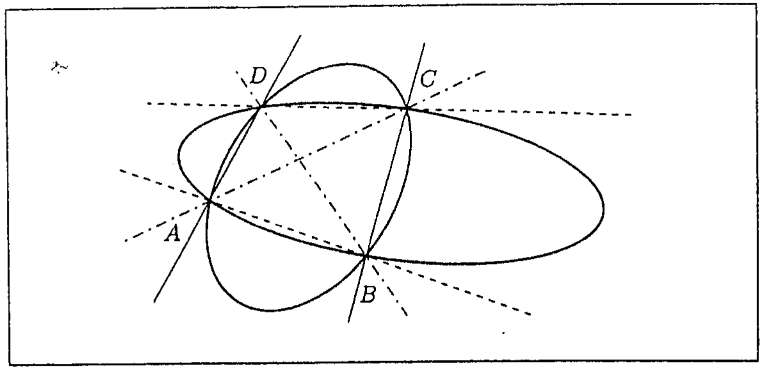

Figura 12.2

Esempio 12.10. Nel completamento proiettivo del piano euclideo $\mathcal{E}^2$ - in cui è fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$ - siano dati, ad esempio, i punti
$$A \equiv_{\mathcal{R}} [1,1,0], \quad B \equiv_{\mathcal{R}} [1,0,1], \quad C \equiv_{\mathcal{R}} [1,-1,0], \quad D \equiv_{\mathcal{R}} [1,0,-1].$$
Una volta verificato che tali punti sono a tre a tre non allineati, si considerino la conica (degenere) $\mathcal{C}_1$ di equazione omogenea
$$(x_0 + x_1 + x_2)(-x_0 + x_1 + x_2) = 0,$$
il cui supporto è costituito da $CD \cup AB$, e la conica (degenere) $\mathcal{C}_2$ di equazione omogenea
$$x_1x_2 = 0,$$
il cui supporto è costituito da $BD \cup AC$.
Il fascio $\mathcal{F}_1$ costituito dalle coniche passanti per A, B, C, D ha quindi equazione omogenea:
$$\mathcal{F}_1 : \quad \lambda(x_0 + x_1 + x_2)(-x_0 + x_1 + x_2) + \mu x_1x_2 = 0.$$

Fasci del II° tipo. *L'insieme delle coniche passanti per tre punti distinti A, B, C, non allineati, di $\mathcal{E}^2$ ed aventi quale tangente in A una fissata retta r, è un fascio di coniche $\mathcal{F}_2$ di $\mathcal{E}^2$.*

Inoltre , se $\mathcal{C}_1$ (risp. $\mathcal{C}_2$) è la conica degenere il cui supporto è costituito da $AB \cup AC$ (risp. $r \cup BC$), allora $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ (Figura 12.3).

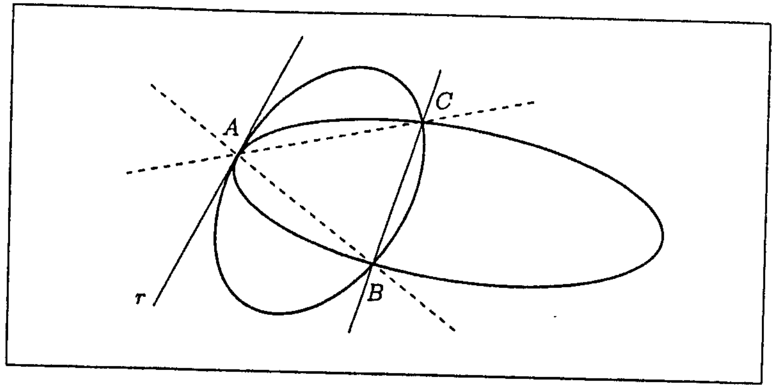

Figura 12.3

Esempio 12.11. Nel completamento proiettivo del piano euclideo $\mathcal{E}^2$ - in cui è fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$ - siano dati, ad esempio, i punti

$$A \equiv_{\mathcal{R}} [1,1,0], \quad B \equiv_{\mathcal{R}} [1,0,1], \quad C \equiv_{\mathcal{R}} [1,-1,0]$$

e la retta $r:\ x_0 - x_1 = 0$.
Una volta verificato che A, B, C non sono allineati e che $A \in r$, si considerino la conica (degenere) $\mathcal{C}_1$ di equazione omogenea

$$x_2(-x_0 + x_1 + x_2) = 0,$$

il cui supporto è costituito da $AC \cup AB$, e la conica (degenere) $\mathcal{C}_2$ di equazione omogenea

$$(x_0 - x_1)(x_0 + x_1 + x_2) = 0,$$

il cui supporto è costituito da $r \cup BC$.
Il fascio $\mathcal{F}_2$ costituito dalle coniche passanti per A, B, C e tangenti in A ad r ha quindi equazione omogenea:

$$\mathcal{F}_2 : \quad \lambda x_2(-x_0 + x_1 + x_2) + \mu(x_0 - x_1)(x_0 + x_1 + x_2) = 0.$$

Fasci del III° tipo. *L'insieme delle coniche passanti per due punti distinti $A, B \in \mathcal{E}^2$, ed aventi quale tangente in A una fissata retta r e quale tangente in B una fissata retta s (con $r \neq s$), è un fascio di coniche $\mathcal{F}_3$ di $\mathcal{E}^2$.*

Inoltre , se $\mathcal{C}_1$ (risp. $\mathcal{C}_2$) è la conica degenere il cui supporto è costituito dalla retta AB, "contata due volte" (risp. da $r \cup s$), allora $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ (Figura 12.4).

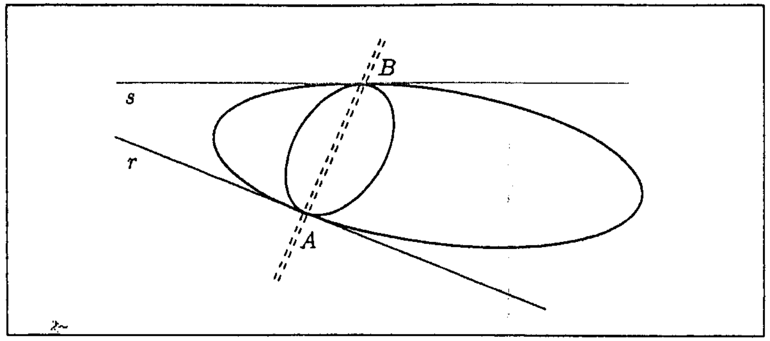

Figura 12.4

Esempio 12.12. Nel completamento proiettivo del piano euclideo $\mathcal{E}^2$ - in cui è fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$ - siano dati, ad esempio, i punti

$$A \equiv_{\mathcal{R}} [1,1,0], \quad B \equiv_{\mathcal{R}} [1,0,1]$$

e le rette

$$r:\ x_0 - x_1 = 0, \qquad s:\ x_0 - x_2 = 0.$$

Una volta verificato che $A \in r$ e $B \in s$, si considerino la conica (degenere) $\mathcal{C}_1$ di equazione omogenea

$$(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) = 0,$$

il cui supporto è costituito da $r \cup s$, e la conica (degenere) $\mathcal{C}_2$ di equazione omogenea

$$(-x_0 + x_1 + x_2)^2 = 0,$$

il cui supporto coincide con la retta AB (contata due volte).
Il fascio $\mathcal{F}_3$ costituito dalle coniche passanti per A, B e tangenti in A ad r e in B ad s ha quindi equazione omogenea:

$$\mathcal{F}_3 : \quad \lambda(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) + \mu(-x_0 + x_1 + x_2)^2 = 0.$$

5. Le quadriche dello spazio euclideo

Nel presente paragrafo, estenderemo alla dimensione tre i concetti e i risultati esposti nel § 2 per la dimensione due. Supponiamo dunque che $\mathcal{E}^3$ sia uno spazio euclideo di dimensione tre, in cui è fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$.

♦ **Definizione 12.15.** Considerata una generica equazione algebrica di secondo grado nelle coordinate x, y e z:

$$(*) \qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{01}x + 2a_{02}y + 2a_{03}z + a_{00} = 0,$$

diremo che tale equazione rappresenta, rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, una *quadrica* dello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$.

Inoltre, diremo che due equazioni $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+$ $+2a_{01}x+2a_{02}y+2a_{03}z+a_{00}=0$ e $a'_{11}x^2+a'_{22}y^2+a'_{33}z^2+2a'_{12}xy+2a'_{13}xz+2a'_{23}yz+$ $+2a'_{01}x+2a'_{02}y+2a'_{03}z+a'_{00}=0$ rappresentano, rispetto ad $\mathcal{R}$, la *stessa quadrica* di $\mathcal{E}^3$ se e soltanto se esiste $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$ tale che $a'_{ij}=\lambda \cdot a_{ij}$ $\forall i,j \in \{0,1,2,3\}$.

Si noti che, in base alla Definizione 12.15, ogni quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathcal{E}^3$ è rappresentata - rispetto ad $\mathcal{R}$ - da infinite equazioni algebriche di secondo grado, tutte proporzionali tra di loro; usualmente, si dice che *l'equazione di $\mathcal{Q}$ rispetto ad $\mathcal{R}$ è definita a meno di un coefficiente di proporzionalità.*
Le quadriche sono dunque il corrispondente tridimensionale delle coniche del piano euclideo $\mathcal{E}^2$. Pertanto, possono essere estese alle quadriche molte delle definizioni date per le coniche nel § 2.

♦ **Definizione 12.16.** Data una quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathcal{E}^3$ di equazione (*), si dice *supporto proprio* (o *immagine propria*) di $\mathcal{Q}$ l'insieme $\mathcal{I}_P(\mathcal{Q})$ dei punti dello spazio $\mathcal{E}^3$ le cui coordinate - rispetto ad $\mathcal{R}$ - verificano una (e quindi tutte) le equazioni di $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{I}_P(\mathcal{Q}) \;=\; \{P \equiv_{\mathcal{R}} (x,y,z) \;\mid\; a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+ \\ +2a_{01}x+2a_{02}y+2a_{03}z+a_{00}=0\}.$$

Si noti che, come per le coniche, l'immagine $\mathcal{I}_P(\mathcal{Q})$ *non è in generale sufficiente ad individuare la quadrica $\mathcal{Q}$.*
Se si suppone di ampliare proiettivamente lo spazio euclideo $\mathcal{E}^3$, denotando con $[x_0,x_1,x_2,x_3]$ la quaterna delle coordinate cartesiane omogenee dei suoi punti (propri ed impropri) rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, allora la equazione (*) origina, in coordinate omogenee, la *equazione omogenea della quadrica $\mathcal{Q}$*, che si può scrivere sinteticamente come:

$$(**) \qquad \sum_{i,j=0}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0.$$

♦ **Definizione 12.17.** Data una quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathcal{E}^3$ di equazione omogenea (**), si dice *supporto improprio* (o *immagine impropria*) di $\mathcal{Q}$ l'insieme $\mathcal{I}_\infty(\mathcal{Q})$ dei punti impropri dell'ampliamento proiettivo di $\mathcal{E}^3$ le cui coordinate cartesiane omogenee - rispetto ad $\mathcal{R}$ - verificano una (e quindi tutte) le equazioni omogenee di $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{I}_\infty(\mathcal{Q}) \;=\; \{P_\infty \equiv_{\mathcal{R}} [0,x_1,x_2,x_3] \;\mid\; a_{11}(x_1)^2+a_{22}(x_2)^2+a_{33}(x_3)^2+ \\ +2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3=0\}.$$

Si dice poi *supporto* (o *immagine*) di $\mathcal{Q}$ l'insieme

$$\mathcal{I}(\mathcal{Q}) = \mathcal{I}_P(\mathcal{Q}) \cup \mathcal{I}_\infty(\mathcal{Q}).$$

► **Osservazione 12.9.** Data una quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathcal{E}^3$, l'intersezione di $\mathcal{Q}$ con un qualsiasi piano π (proprio o improprio) di $\mathcal{E}^3$ è una conica di π, che sarà indicata con $\mathcal{Q}\cap\pi$. In particolare, la conica $\mathcal{Q}_\infty = \mathcal{Q}\cap\pi_\infty$, intersezione di $\mathcal{Q}$ con il piano improprio π_∞ di $\mathcal{E}^3$, sarà detta *conica impropria* o *conica all'infinito* di $\mathcal{Q}$.

♦ **Definizione 12.18.** Data una quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathcal{E}^3$ di equazione (*) (o di equazione omogenea (**)), si dice *matrice associata* a $\mathcal{Q}$ (o *discriminante* di $\mathcal{Q}$) rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$ la matrice simmetrica [7]

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_4(\mathbb{R})$$

Si osservi che, con tali notazioni, $\mathcal{I}_\infty(\mathcal{Q})$ coincide con il supporto di $\mathcal{Q}_\infty$ ed il discriminante di $\mathcal{Q}_\infty$ è M_{00} (il minore complementare dell'elemento a_{00} nella matrice A).
Tramite la matrice associata a $\mathcal{Q}$, è possibile scrivere in forma matriciale le equazioni (*) e (**) di $\mathcal{Q}$:

$$(*) \quad \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{(o, più sinteticamente,} \quad {}^t(u)\cdot A\cdot(u) = 0);$$

$$(**) \quad \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{(o, più sinteticamente,} \quad {}^t(x)\cdot A\cdot(x) = 0).$$

La proposizione seguente ci permette di sapere, in perfetta analogia a quanto visto per le coniche, come cambia la matrice associata ad una quadrica (e quindi, anche la sua equazione e la sua equazione omogenea) al variare del sistema di riferimento fissato.

■ **Proposizione 12.20.** *Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica di $\mathcal{E}^3$ avente, rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, matrice associata $A \in \mathcal{S}_4(\mathbb{R})$. Se $\mathcal{R}'$ è un altro riferimento cartesiano su $\mathcal{E}^3$, ed*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^1 & e_2^1 & e_3^1 \\ e_1^2 & e_2^2 & e_3^2 \\ e_1^3 & e_2^3 & e_3^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}, \qquad con \quad E = \begin{pmatrix} e_1^1 & e_2^1 & e_3^1 \\ e_1^2 & e_2^2 & e_3^2 \\ e_1^3 & e_2^3 & e_3^3 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}),$$

sono le equazioni del cambiamento di riferimento da $\mathcal{R}$ ad $\mathcal{R}'$, allora la quadrica $\mathcal{Q}$ ha, rispetto ad $\mathcal{R}'$, matrice associata A' tale che

$$A = {}^t\bar{E}\cdot A'\cdot \bar{E}, \qquad con \quad \bar{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b^1 & e_1^1 & e_2^1 & e_3^1 \\ b^2 & e_1^2 & e_2^2 & e_3^2 \\ b^3 & e_1^3 & e_2^3 & e_3^3 \end{pmatrix}$$

[7] Si noti che anche la matrice associata a $\mathcal{Q}$, come l'equazione e l'equazione omogenea, risulta definita a meno di un coefficiente di proporzionalità non nullo.

Dimostrazione. Si procede in modo perfettamente analogo a quanto fatto per dimostrare la Proposizione 12.4

□

▶ **Osservazione 12.10.** Anche per le quadriche, come per le coniche, possono essere fatte le considerazioni riportate nella Osservazione 12.7, semplicemente sostituendo $\mathbb{R}^3$ con $\mathbb{R}^4$. Pertanto, l'ambiente più opportuno per definire le quadriche appare essere l'ampliamento proiettivo dello spazio euclideo e, in tale contesto, una quadrica risulta individuata da una classe di proporzionalità di forme quadratiche.

Dalla Proposizione 12.20 e dalla Osservazione 12.10 si deduce la seguente proposizione, la cui dimostrazione è perfettamente analoga a quella della Proposizione 12.5.

■ **Proposizione 12.21.** *Tutti i discriminanti di una stessa quadrica C hanno lo stesso rango.*

□

Per *rango* $\varrho(\mathcal{Q})$ di $\mathcal{Q}$ si intenderà il rango di un suo qualsiasi discriminante.

♦ **Definizione 12.19.** Una quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathcal{E}^3$ si dice *non specializzata* o *non degenere* se $\varrho(\mathcal{Q}) = 4$. In caso contrario, si dice che $\mathcal{Q}$ è una *quadrica specializzata* o *degenere* di $\mathcal{E}^2$.
Quindi, se A è un discriminante di $\mathcal{Q}$, si ha che $\mathcal{Q}$ è degenere se e solo se $\det A = 0$.

♦ **Definizione 12.20.** Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica non specializzata di $\mathcal{E}^3$, avente A come matrice associata rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$. Se $P \equiv_{\mathcal{R}} [y_0, y_1, y_2, y_3]$ è un punto (proprio od improprio) di $\mathcal{E}^3$, si dice *piano polare* π_P di P rispetto alla quadrica il piano di equazione omogenea

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Non è difficile verificare che, nella ipotesi in cui $\mathcal{Q}$ sia una quadrica non degenere, l'applicazione che a P associa π_P è una biiezione tra i punti del completamento proiettivo dello spazio euclideo e i suoi piani. Pertanto, *per ogni piano* π *(proprio od improprio) di* $\mathcal{E}^3$, *esiste uno ed un solo punto* P *(proprio od improprio), il cui piano polare sia* π. Tale punto è detto *polo* di π.

■ **Proposizione 12.22.** *Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica non specializzata dello spazio euclideo, e siano P, Q due punti di $\mathcal{E}^3$. Si ha che:*

- $Q \in \pi_P$ *se e solo se* $P \in \pi_Q$. **(Legge di reciprocità)**
- *Se P è un punto del supporto $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$, allora il piano polare π_P di P rispetto a $\mathcal{Q}$ coincide con il piano tangente alla quadrica in P (ovvero, con il piano contenente tutte le rette tangenti a $\mathcal{Q}$ in P [8]). Inoltre, la conica $\mathcal{Q} \cap \pi_P$ intersezione di $\mathcal{Q}$ con il piano π_P è una conica degenere di rango due.*

[8] Una retta r è tangente a $\mathcal{Q}$ in P se $r \in \mathcal{I}(\mathcal{Q})$ ovvero se $r \cap \mathcal{I}(\mathcal{Q}) = \{P\}$.

Dimostrazione. Per verificare la Legge di reciprocità e la prima parte del secondo punto, si procede in modo perfettamente analogo a quanto fatto per dimostrare la Proposizione 12.7. L'ultima affermazione può invece essere verificata direttamente, con un semplice calcolo.

□

▶ **Osservazione 12.11.** Si noti che, se P non appartiene al supporto $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$, allora il piano polare π_P di P rispetto a $\mathcal{Q}$ interseca $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ nei punti di contatto tra la quadrica e le (eventuali) rette tangenti alla quadrica passanti per P.

Esempio 12.13. Rispetto alla quadrica $\mathcal{Q}_1$ considerata nell'Esempio 12.14, il piano polare del punto $P \equiv_{\mathcal{R}} [1,1,0,1]$ ha, relativamente ad $\mathcal{R}$, equazione omogenea

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{cioè} \quad x_0 + x_1 + 4x_2 - x_3 = 0.$$

Il piano polare π_Q del punto $Q \equiv_{\mathcal{R}} [1,0,0,0]$, rispetto a $\mathcal{Q}_1$, ha, relativamente ad $\mathcal{R}$, equazione omogenea

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,, \quad \text{cioè} \quad x_3 = 0.$$

Si noti che si ha $P \notin \pi_P$, mentre $Q \in \pi_Q$; infatti, $P \notin \mathcal{I}(\mathcal{Q}_1)$, mentre $Q \in \mathcal{I}(\mathcal{Q}_1)$ (in accordo con la Proposizione 12.22).
Si verifichi che il piano polare di un punto arbitrario di π_P (risp. di π_Q) passa per P (risp. per Q).

Le quadriche non degeneri di $\mathcal{E}^3$ si suddividono innanzitutto in *reali*, se $\mathcal{I}(\mathcal{Q}) \neq \emptyset$, o *vuote* (o *immaginarie*), se $\mathcal{I}(\mathcal{Q}) = \emptyset$.
Come per le coniche di $\mathcal{E}^2$, per distinguere le une dalle altre si può osservare che $\mathcal{Q}$ è reale se e solo se un suo qualunque discriminante A è *non definito* (Definizione B.4) ed applicare quindi il Criterio di Sylvester (Proposizione B.9). In alternativa, si può attendere la Proposizione 12.30.

Le quadriche reali possono essere ulteriormente suddivise in base alla seguente

♦ **Definizione 12.21.** Un punto $P \in \mathcal{I}(\mathcal{Q})$ è detto:

- *iperbolico* se il supporto della conica $\mathcal{Q} \cap \pi_P$ è formato da due rette distinte la cui intersezione è P;
- *ellittico* se il supporto della conica $\mathcal{Q} \cap \pi_P$ è costituito dal solo punto P.

■ **Lemma 12.23.** *Se una quadrica non specializzata $\mathcal{Q}$ di $\mathcal{E}^3$ ha almeno un punto ellittico (risp. iperbolico), allora tutti i punti di $\mathcal{Q}$ sono di tipo ellittico (risp. iperbolico).*

Dimostrazione. Supponiamo che $\mathcal{Q}$ ammetta un punto P di tipo ellittico ed un punto Q di tipo iperbolico. Da ciò si ricava che $\mathcal{I}(\mathcal{Q}) \cap \pi_P = \{P\}$, mentre $\mathcal{I}(\mathcal{Q}) \cap \pi_Q = r \cup s$, essendo r ed s due rette distinte, aventi Q quale intersezione.
Poichè $Q \notin \pi_P$, ne consegue che $(r \cup s) \cap \pi_P$ è costituito da almeno due punti. Pertanto $\mathcal{I}(\mathcal{Q}) \cap \pi_P$ non può ridursi al solo punto P, contro l'ipotesi che P sia di tipo ellittico. □

Come conseguenza del Lemma 12.23, le quadriche reali risultano suddivise in *iperboliche* o *doppiamente rigate* (in cui ogni punto è iperbolico) ed in *ellittiche* o *non rigate* (in cui ogni punto è ellittico).
Proveremo in seguito (Proposizione 12.31) che il segno del determinante di qualunque matrice associata alla quadrica $\mathcal{Q}$ permette di distinguere direttamente a quale di queste due classi appartenga $\mathcal{Q}$.

Una diversa classificazione delle quadriche non degeneri di $\mathcal{E}^3$ si effettua - come per le coniche - in base al loro comportamento rispetto al piano improprio π_∞ di $\mathcal{E}^3$.

♦ **Definizione 12.22.** Una quadrica non degenere $\mathcal{Q}$ di $\mathcal{E}^3$ si dice:
(a) *paraboloide* se π_∞ è tangente a $\mathcal{Q}$, ovvero se la conica impropria $\mathcal{Q}_\infty$ è una conica degenere (del piano improprio);
(b) *ellissoide* se π_∞ è esterno a $\mathcal{Q}$, ovvero se la conica impropria $\mathcal{Q}_\infty$ è una conica non degenere ma vuota (del piano improprio);
(c) *iperboloide* se π_∞ è secante a $\mathcal{Q}$, ovvero se la conica impropria $\mathcal{Q}_\infty$ è una conica non degenere e non vuota (del piano improprio). [9]

La seguente proposizione fornisce le condizioni algebriche su A_{00} (il complemento algebrico dell'elemento a_{00} nella matrice A) per distinguere paraboloidi, ellissoidi ed iperboloidi, e contemporaneamente dimostra che ogni quadrica non degenere di $\mathcal{E}^3$ appartiene ad una (ed una sola) di tali famiglie.

■ **Proposizione 12.24.** *Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica non degenere di $\mathcal{E}^3$ avente, rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, matrice associata $A \in S_4(\mathbb{R})$ (con $\det A \neq 0$). Si ha che:*
(a) *$\mathcal{Q}$ è un paraboloide se e soltanto se $A_{00} = 0$;*
(b) *$\mathcal{Q}$ è un ellissoide se e soltanto se A_{00} è diverso da zero e concorde con a_{33}, ed il suo minore $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ ha determinante positivo;*
(c) *$\mathcal{Q}$ è un iperboloide se e soltanto se $A_{00} \neq 0$, ma non verifica contemporaneamente le ulteriori due condizioni richieste al punto (b).*

Dimostrazione. Basta osservare che M_{00} è il discriminante della conica impropria $\mathcal{Q} \cap \pi_\infty$, e ricordare le condizioni che caratterizzano le matrici delle coniche degeneri

[9] Si noti che i paraboloidi e gli iperboloidi sono sempre quadriche reali, e si suddividono nelle due sottoclassi "ellittici" ed "iperbolici", mentre gli ellissoidi possono essere reali (se $\mathcal{I}(\mathcal{Q}) \neq \emptyset$) o immaginari (se $\mathcal{I}(\mathcal{Q}) = \emptyset$).

(cioè il fatto di avere determinante nullo, in base alla Definizione 12.7) e quelle delle coniche vuote (si veda la Proposizione 12.14). □

Esempio 12.14. Consideriamo, nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$, dotato di un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, le quadriche aventi le seguenti equazioni:

$$\mathcal{Q}_1 : x^2 - 8y^2 + 8yz - 2z^2 + 2z = 0$$
$$\mathcal{Q}_2 : x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2 - 6y - 6z + 1 = 0$$
$$\mathcal{Q}_3 : x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 6z + 1 = 0$$
$$\mathcal{Q}_4 : x^2 + 16y^2 + 4z^2 + 8xy + 4z + 2 = 0$$

Un discriminante di $\mathcal{Q}_1$, rispetto ad $\mathcal{R}$, è

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix};$$

poichè $\det A_1 = 8 \neq 0$, la quadrica $\mathcal{Q}_1$ è non degenere. In particolare, essendo $\det M_{00} = 0$, la quadrica $\mathcal{Q}_1$ risulta essere un paraboloide.
Un discriminante di $\mathcal{Q}_2$, rispetto ad $\mathcal{R}$, è

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

poichè $\det A_2 = -15 \neq 0$, la quadrica $\mathcal{Q}_2$ è non degenere. In particolare, essendo $\det M_{00} = 3 > 0$, $a_{33} = 2 > 0$ e $\det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} > 0$, la quadrica $\mathcal{Q}_2$ risulta essere un ellissoide.
Un discriminante di $\mathcal{Q}_3$, rispetto ad $\mathcal{R}$, è

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

poichè $\det A_3 = 24 \neq 0$, la quadrica $\mathcal{Q}_3$ è non degenere. In particolare, essendo $\det M_{00} = -3 < 0$ e $a_{33} = 1 > 0$, la quadrica $\mathcal{Q}_3$ risulta essere un iperboloide.
Un discriminante di $\mathcal{Q}_4$, rispetto ad $\mathcal{R}$, è

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 16 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix};$$

poichè $\det A_4 = 0$, la quadrica $\mathcal{Q}_4$ è una quadrica degenere (o specializzata).

♦ **Definizione 12.23.** Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica non specializzata di $\mathcal{E}^3$.
Si dice *piano diametrale* di $\mathcal{Q}$ ogni piano proprio che sia piano polare di un punto improprio di $\mathcal{E}^3$.
Si dice *centro* di $\mathcal{Q}$ il polo del piano improprio π_∞.

Come ovvia conseguenza della Proposizione 12.22 (Legge di reciprocità), si ha che *tutti i piani diametrali contengono il centro di* $\mathcal{Q}$.

■ **Proposizione 12.25.** *Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica di $\mathcal{E}^3$ avente, rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, matrice associata $A \in S_4(\mathbb{R})$. Il centro di $\mathcal{Q}$ è il punto C avente come quaterna di coordinate omogenee la quaterna dei complementi algebrici della prima riga di A:*

$$C \equiv_{\mathcal{R}} [A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{03}].$$

Dimostrazione. Si procede in modo perfettamente analogo a quanto fatto per dimostrare la Proposizione 12.8.

□

Si osservi che, come conseguenza delle Proposizioni 12.24 e 12.22, si ha che:
- se $\mathcal{Q}$ è un paraboloide, il suo centro è il punto improprio individuato dalla direzione del vettore
$$\mathbf{v} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (A_{01}, A_{02}, A_{03}),$$
ed i suoi piani diametrali sono tutti paralleli a $\mathbf{v}$;
- se $\mathcal{Q}$ è un iperboloide o un ellissoide, il suo centro è il punto proprio di coordinate cartesiane
$$C \equiv_{\mathcal{R}} \left(\frac{A_{01}}{A_{00}}, \frac{A_{02}}{A_{00}}, \frac{A_{03}}{A_{00}}\right).$$

Le quadriche aventi centro proprio (cioè iperboloidi ed ellissoidi) sono usualmente dette *quadriche a centro.*

Esempio 12.15. Nel caso del paraboloide $\mathcal{Q}_1$ considerato nell'Esempio 12.14, il centro risulta avere coordinate omogenee $C_1 \equiv_{\mathcal{R}} [0, 0, 4, 8]$, cioè è il punto improprio individuato dalla direzione del vettore

$$\mathbf{v} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (0, 1, 2).$$

Nel caso dell'ellissoide $\mathcal{Q}_2$ considerato nell'Esempio 12.14, il centro risulta avere coordinate omogenee $C_2 \equiv_{\mathcal{R}} [3, 0, 3, 3]$, cioè è il punto proprio di coordinate cartesiane

$$C_2 \equiv_{\mathcal{R}} (0, 1, 1).$$

Nel caso dell'iperboloide $\mathcal{Q}_3$ considerato nell'Esempio 12.14, il centro risulta avere coordinate omogenee $C_3 \equiv_{\mathcal{R}} [-3, 0, 0, 9]$, cioè è il punto proprio di coordinate cartesiane

$$C_3 \equiv_{\mathcal{R}} (0, 0, -3).$$

♦ **Definizione 12.24.** Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica non specializzata di $\mathcal{E}^3$. Si dice *piano principale* di $\mathcal{Q}$ ogni piano diametrale π_{P_∞} di $\mathcal{Q}$ che sia ortogonale alla direzione individuata dal suo polo P_∞.
Si dice *asse* di $\mathcal{Q}$ ogni retta di $\mathcal{E}^3$ che sia intersezione di due piani principali di $\mathcal{Q}$.
Si dice *vertice* di $\mathcal{Q}$ ogni punto di intersezione del supporto proprio $\mathcal{I}_P(\mathcal{Q})$ con un asse di $\mathcal{Q}$.

Si noti che i piani principali di $\mathcal{Q}$, essendo particolari piani diametrali, contengono sempre il centro di $\mathcal{Q}$; di conseguenza, anche gli assi di $\mathcal{Q}$ contengono il centro di $\mathcal{Q}$.

La seguente proposizione fornisce il metodo operativo per trovare i piani principali (e quindi gli assi e i vertici) di una quadrica.

■ **Proposizione 12.26.** *Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica non specializzata di $\mathcal{E}^3$ avente, rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$, matrice associata $A \in S_4(\mathbb{R})$; sia M_{00} il minore complementare dell'elemento a_{00} in A. I piani principali di $\mathcal{Q}$ sono i piani polari dei punti impropri di $\mathcal{E}^3$ individuati dalle direzioni degli autovettori di M_{00}, relativi ad autovalori non nulli.*

Dimostrazione. Si procede in modo perfettamente analogo a quanto fatto per dimostrare la Proposizione 12.10.

□

Si noti che la Proposizione 12.26, unita alla Legge di reciprocità, permette facilmente di verificare che *il piano tangente ad una quadrica $\mathcal{Q}$ in un suo vertice V è ortogonale all'asse contenente V*: infatti, detto $r = \pi_{P_{1\infty}} \cap \pi_{P_{2\infty}}$ l'asse contenente V (con $\pi_{P_{1\infty}}$ e $\pi_{P_{2\infty}}$ piani principali per $\mathcal{Q}$), la Legge di reciprocità assicura che $P_{1\infty}, P_{2\infty} \in \pi_V$, e quindi che il piano polare di V (ovvero il piano tangente in V a $\mathcal{Q}$) contiene nella sua giacitura le direzioni dei punti impropri $P_{1\infty}$ e $P_{2\infty}$ (che, per definizione di piano principale, sono ortogonali alla direzione dell' asse).

Come conseguenza delle Proposizioni 12.24 e 12.26, si ottiene poi il seguente risultato, relativo alla esistenza di piani principali e di assi per i vari tipi di quadriche non specializzate.

■ **Proposizione 12.27.** *Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica non specializzata di $\mathcal{E}^3$.*
- *Se $\mathcal{Q}$ è una quadrica a centro, esistono sempre almeno tre assi (risp. tre piani principali) di $\mathcal{Q}$, a due a due ortogonali, che si intersecano nel centro di $\mathcal{Q}$;*
- *se $\mathcal{Q}$ è un paraboloide, esso ammette almeno due piani principali tra loro ortogonali, un solo asse ed un solo vertice.*

Dimostrazione. Anche in questo caso - come per l'analoga dimostrazione della Proposizione 12.11 - occorre innanzitutto ricordare che ogni matrice simmetrica reale ammette una base spettrale ortonormale. Inoltre, in base alla Proposizione 12.26, ogni autovettore della matrice $M_{00} \in \mathbb{S}_3(\mathbb{R})$, relativo ad un autovalore non nullo, individua un piano principale della quadrica $\mathcal{Q}$.

Ora, nel caso che $\mathcal{Q}$ sia una quadrica a centro, la matrice M_{00} non può ammettere l'autovalore nullo (essendo $\det M_{00} \neq 0$); pertanto, se $\vec{\mathcal{B}}' = (e_1', e_2', e_3')$ è una base ortonormale e spettrale M_{00}, i punti impropri $P_{1\infty}$, $P_{2\infty}$ e $P_{3\infty}$, individuati rispettivamente dalla direzione dei vettori e_1', e_2' ed e_3', hanno come piani polari tre piani principali $\pi_{P_{1\infty}}$, $\pi_{P_{2\infty}}$ e $\pi_{P_{3\infty}}$ di $\mathcal{Q}$ che, essendo ortogonali rispettivamente ad e_1', e_2' ed e_3', risultano necessariamente ortogonali tra di loro. Intersecando a due a due tali piani principali, si ottengono tre assi r_1, r_2 ed r_3 (tra loro ortogonali) di $\mathcal{Q}$. I piani principali $\pi_{P_{1\infty}}$, $\pi_{P_{2\infty}}$ e $\pi_{P_{3\infty}}$ (e gli assi r_1, r_2 ed r_3) si intersecano poi ovviamente nel centro della quadrica, perchè il centro appartiene ad ogni piano diametrale (e quindi, ad ogni piano principale) di $\mathcal{Q}$.

Se invece $\mathcal{Q}$ è un paraboloide, la matrice M_{00} (avendo $\det M_{00} = 0$) ammette sicuramente un autovalore nullo, con molteplicità uno (perchè, se tale molteplicità fosse maggiore di uno, la matrice A non potrebbe essere regolare); allora, se $\vec{\mathcal{B}}' = (e_1', e_2', e_3')$ è una base ortonormale e spettrale per M_{00}, con e_1' ed e_2' autovettori relativi ai due (eventualmente coincidenti) autovalori $\bar\lambda_1$ e $\bar\lambda_2$ non nulli, i punti impropri $P_{1\infty}$ e $P_{2\infty}$, individuati dalle direzioni dei vettori e_1' ed e_2', hanno come piani polari due piani principali $\pi_{P_{1\infty}}$ e $\pi_{P_{2\infty}}$ di $\mathcal{Q}$ che, essendo ortogonali rispettivamente ad e_1' ed e_2', risultano necessariamente ortogonali tra di loro. Intersecando tali piani principali, si ottiene l'unico asse $\bar r$ di $\mathcal{Q}$. Infatti, se gli autovalori $\bar\lambda_1$ e $\bar\lambda_2$ sono distinti (ciascuno con molteplicità uno), allora ogni altro autovettore di M_{00} relativo a $\bar\lambda_1$ (risp. a $\bar\lambda_2$) è necessariamente multiplo di e_1' (risp. di e_2'), e pertanto individua il medesimo punto improprio $P_{1\infty}$ (risp. $P_{2\infty}$), e quindi il medesimo piano principale $\pi_{P_{1\infty}}$ (risp. $\pi_{P_{2\infty}}$). Invece, se $\bar\lambda_1 = \bar\lambda_2 = \bar\lambda$ (unico autovalore non nullo di M_{00}, con molteplicità due), allora ogni altra coppia linearmente indipendente di autovettori di M_{00} relativi a $\bar\lambda$ è costituita da vettori che sono combinazione lineare di e_1' e di e_2', e pertanto individuano due piani principali che appartengono al fascio di piani generato da $\pi_{P_{1\infty}}$ e $\pi_{P_{2\infty}}$; ciò prova che la loro intersezione coincide con $\bar r$.

Infine, poichè l'asse $\bar r$ è una retta propria contenente il centro (improprio) del paraboloide $\mathcal{Q}$, esso non può essere tangente a $\mathcal{Q}$; pertanto, l'asse interseca il supporto $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ in un ulteriore punto proprio V, che risulta essere l'unico vertice del paraboloide.

□

► **Osservazione 12.12.** Dalla dimostrazione della Proposizione 12.27 segue che una quadrica a centro (risp. un paraboloide) $\mathcal{Q}$ ammette più di tre (risp. più di due) piani principali se e soltanto se, in ogni matrice A associata a $\mathcal{Q}$, il minore M_{00} ha autovalori coincidenti. In questo caso, la quadrica $\mathcal{Q}$ si dice *quadrica di rotazione*: infatti, è possibile dimostrare che la presenza di un autovalore di M_{00} di molteplicità due (risp. tre) implica l'esistenza di una retta r, detta *asse di rotazione* per $\mathcal{Q}$ (risp. di un punto C, coincidente con il centro della quadrica [10]), con la proprietà che tutti i piani contenenti r (risp. C) sono piani principali per $\mathcal{Q}$.

[10] In questo caso particolare, se il supporto di $\mathcal{Q}$ non è vuoto, la quadrica $\mathcal{Q}$ risulta essere una sfera: si veda anche la successiva Proposizione 12.34.

Esempio 12.16. Nel caso del paraboloide $\mathcal{Q}_1$ considerato nell'Esempio 12.14, gli autovalori non nulli della matrice M_{00} sono $\bar\lambda_1 = -10$ e $\bar\lambda_2 = 1$, essendo

$$\det\begin{pmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 0 & t+8 & -4 \\ 0 & -4 & t+2 \end{pmatrix} = t(t-1)(t+10).$$

Gli autovettori relativi a $\bar\lambda_1 = -10$ sono i vettori (l, m, n) tali che

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} l = 0 \\ m + 2n = 0; \end{cases}$$

gli autovettori relativi a $\bar\lambda_2 = 1$ sono invece i vettori (l, m, n) tali che

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -4 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} m = 0 \\ n = 0. \end{cases}$$

I poli dei piani principali di $\mathcal{Q}_1$ sono dunque i punti impropri $P_{1\infty} \equiv_{\mathcal{R}} [0, 0, -2, 1]$ e $P_{2\infty} \equiv_{\mathcal{R}} [0, 1, 0, 0]$; i piani principali di $\mathcal{Q}_1$ sono allora i piani $\pi_{P_{1\infty}}$ e $\pi_{P_{2\infty}}$ di equazione:

$$\pi_{P_{1\infty}} : \; 20y - 10z + 1 = 0 \qquad \pi_{P_{2\infty}} : \; x = 0.$$

L'(unico) asse del paraboloide $\mathcal{Q}_1$ è dunque la retta $r = \pi_{P_{1\infty}} \cap \pi_{P_{2\infty}}$ di equazione

$$\begin{cases} 20y - 10z + 1 = 0 \\ x = 0, \end{cases}$$

ed il vertice (unico) di $\mathcal{Q}_1$ è il punto $V = r \cap \mathcal{I}_P(\mathcal{Q}_1)$, di coordinate cartesiane

$$V \equiv_{\mathcal{R}} \left(0, -\frac{9}{200}, \frac{1}{100}\right).$$

Esempio 12.17. Nel caso dell'ellissoide $\mathcal{Q}_2$ considerato nell'Esempio 12.14, gli autovalori della matrice M_{00} sono $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, che si ottengono risolvendo la equazione caratteristica

$$\det\begin{pmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 0 & t-2 & -1 \\ 0 & -1 & t-2 \end{pmatrix} = (t-3)(t-1)^2 = 0.$$

Gli autovettori relativi all'autovalore λ_1 sono i vettori (l, m, n) tali che

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} l = 0 \\ m - n = 0; \end{cases}$$

gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_2 = \lambda_3$ sono invece i vettori (l, m, n) tali che

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad m + n = 0.$$

Sono dunque poli di piani principali di $\mathcal{Q}_2$ il punto improprio $P_{1\infty} \equiv_{\mathcal{R}} [0,0,1,1]$ e tutti i punti impropri del tipo $P_\infty \equiv_{\mathcal{R}} [0,l,m,-m]$, al variare di $l,m \in \mathbb{R}$, con $(l,m) \neq (0,0)$; sono quindi piani principali di $\mathcal{Q}_2$ il piano $\pi_{P_{1\infty}}$ di equazione:

$$\pi_{P_{1\infty}}: \quad y+z-2=0$$

e tutti i piani π_{P_∞} di equazione:

$$\pi_{P_\infty}: \quad lx+m(y-z)=0, \qquad l,m \in \mathbb{R}, \ (l,m) \neq (0,0)$$

ovvero tutti i piani del fascio di piani di asse

$$r: \begin{cases} x=0 \\ y-z=0 \end{cases} \qquad \text{(asse di rotazione per } \mathcal{Q}_2\text{)}.$$

Esempio 12.18. Nel caso dell'iperboloide $\mathcal{Q}_3$ considerato nell'Esempio 12.14, gli autovalori della matrice M_{00} sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = -1$, che si ottengono risolvendo la equazione caratteristica

$$\det \begin{pmatrix} t-1 & 2 & 0 \\ 2 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix} = (t-1)(t+1)(t-3) = 0.$$

Gli autovettori relativi all'autovalore λ_1 sono i vettori (l,m,n) tali che

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} l=0 \\ m=0; \end{cases}$$

gli autovettori relativi all'autovalore λ_2 sono i vettori (l,m,n) tali che

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} l+m=0 \\ n=0; \end{cases}$$

gli autovettori relativi all'autovalore λ_3 sono infine i vettori (l,m,n) tali che

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} l-m=0 \\ n=0. \end{cases}$$

I poli dei piani principali di $\mathcal{Q}_3$ sono dunque i punti impropri $P_{1\infty} \equiv_{\mathcal{R}} [0,0,0,1]$, $P_{2\infty} \equiv_{\mathcal{R}} [0,1,-1,0]$ e $P_{3\infty} \equiv_{\mathcal{R}} [0,1,1,0]$; i piani principali di $\mathcal{Q}_3$ sono allora i piani $\pi_{P_{1\infty}}$, $\pi_{P_{2\infty}}$ e $\pi_{P_{3\infty}}$ di equazione:

$$\pi_{P_{1\infty}}: \ z+3=0 \qquad \pi_{P_{2\infty}}: \ x-y=0 \qquad \pi_{P_{3\infty}}: \ x+y=0.$$

Gli assi di $\mathcal{Q}_3$ sono, evidentemente, le tre rette $r = \pi_{P_{1\infty}} \cap \pi_{P_{2\infty}}$, $s = \pi_{P_{1\infty}} \cap \pi_{P_{3\infty}}$ e $t = \pi_{P_{2\infty}} \cap \pi_{P_{3\infty}}$ di equazioni:

$$r: \begin{cases} z+3=0 \\ x-y=0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} z+3=0 \\ x+y=0 \end{cases} \qquad t: \begin{cases} x=0 \\ y=0. \end{cases}$$

6. Riduzione a forma canonica delle quadriche

Nel presente paragrafo, $\mathcal{Q}$ denoterà sempre una quadrica non degenere dello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$, dotato di un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$.

Le proprietà del centro, degli assi e dei vertici, ottenute nel paragrafo precedente, permettono, nei vari tipi di quadriche non specializzate, di potere scegliere sempre un riferimento cartesiano rispetto al quale l'equazione della quadrica risulta particolarmente semplice. Infatti, la proposizione seguente afferma che, fissato opportunamente il riferimento, la matrice associata è o di tipo diagonale o di tipo "semi-diagonale" (ovvero, una matrice $D' = (d'_{i,j}) \in \mathcal{S}_4$ in cui gli unici elementi non nulli sono d'_{11}, d'_{22} e $d'_{03} = d'_{30}$).

■ **Proposizione 12.28.** *Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica non specializzata di $\mathcal{E}^3$.*

(i) *Se $\mathcal{Q}$ è una quadrica a centro, sia $\bar{\mathcal{R}}$ il riferimento cartesiano avente origine $\bar{O}$ coincidente con il centro di $\mathcal{Q}$, ed assi coordinati* **X**, **Y** *e* **Z** *coincidenti con una terna di assi, tra loro ortogonali, di $\mathcal{Q}$. Allora, la matrice associata a $\mathcal{Q}$ rispetto ad $\bar{\mathcal{R}}$ risulta di tipo diagonale.*

(ii) *Se $\mathcal{Q}$ è un paraboloide, sia $\bar{\mathcal{R}}$ il riferimento cartesiano avente origine $\bar{O}$ coincidente con il vertice V di $\mathcal{Q}$, piano coordinato* **XY** *coincidente con il piano tangente nel vertice a $\mathcal{Q}$, e piani coordinati* **XZ** *e* **YZ** *coincidenti con due piani principali, tra loro ortogonali, di $\mathcal{Q}$. Allora, la matrice associata a $\mathcal{Q}$ rispetto ad $\bar{\mathcal{R}}$ risulta di tipo "semi-diagonale".*

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che in entrambi i casi - in virtù della Proposizione 12.26, con relativa osservazione -, la base $\vec{\bar{\mathcal{B}}}$ associata al riferimento cartesiano scelto $\bar{\mathcal{R}}$ risulta ortonormale e spettrale per la matrice M_{00} (minore complementare dell'elemento a_{00}, per una fissata matrice A associata a $\mathcal{Q}$). Pertanto, la matrice $\bar{A}$ associata alla quadrica rispetto ad $\bar{\mathcal{R}}$ ha il minore complementare dell'elemento $\bar{a}_{00}$ di tipo diagonale, con gli elementi della diagonale coincidenti con gli autovalori della matrice M_{00}.
Ora, se $\mathcal{Q}$ è una quadrica a centro, poichè l'origine $\bar{O}$ del riferimento $\bar{\mathcal{R}}$ coincide con il centro di $\mathcal{Q}$, il piano polare dell'origine deve avere, rispetto ad $\bar{\mathcal{R}}$, equazione $x_0 = 0$. D'altra parte, l'equazione di $\pi_{\bar{O}}$ si ottiene da

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \bar{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \qquad \text{con } \bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{00} & \bar{a}_{01} & \bar{a}_{02} & \bar{a}_{03} \\ \bar{a}_{01} & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \bar{a}_{02} & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \bar{a}_{03} & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix};$$

allora, tale equazione coincide (a meno di proporzionalità) con la equazione $x_0 = 0$ se e soltanto se $\bar{a}_{01} = \bar{a}_{02} = \bar{a}_{03} = 0$ e $\bar{a}_{00} \neq 0$, ovvero se e soltanto se la matrice $\bar{A}$ è di tipo diagonale.
Se invece $\mathcal{Q}$ è un paraboloide, poichè l'origine $\bar{O}$ del riferimento $\bar{\mathcal{R}}$ coincide con il vertice di $\mathcal{Q}$ e il piano coordinato **XY** coincide con il piano tangente nel vertice, il piano polare dell'origine deve avere, rispetto ad $\bar{\mathcal{R}}$, equazione $x_3 = 0$. D'altra parte,

l'equazione di $\pi_{\mathcal{O}}$ si ottiene da

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \bar{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \qquad \text{con } \bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{00} & \bar{a}_{01} & \bar{a}_{02} & \bar{a}_{03} \\ \bar{a}_{01} & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \bar{a}_{02} & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \bar{a}_{03} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

allora, tale equazione coincide (a meno di proporzionalità) con la equazione $x_3 = 0$ se e soltanto se $\bar{a}_{00} = \bar{a}_{01} = \bar{a}_{02} = 0$ e $\bar{a}_{03} \neq 0$, ovvero se e soltanto se la matrice $\bar{A}$ è di tipo semi-diagonale.

□

La proposizione seguente fornisce il metodo operativo per ottenere, a partire da una qualunque matrice associata alla quadrica non specializzata $\mathcal{Q}$, una matrice di tipo diagonale o semi-diagonale associata a $\mathcal{Q}$.

■ **Proposizione 12.29.** *Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica non specializzata di $\mathcal{E}^3$ e sia A una sua matrice associata, rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$.*

(i) *Se $\mathcal{Q}$ è una quadrica a centro, allora una matrice di tipo diagonale associata a $\mathcal{Q}$ è*

$$D = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ sono i tre autovalori (eventualmente coincidenti) del minore M_{00} di A e $d \in \mathbb{R} - \{0\}$ si ricava imponendo $\det D = \det A$.

(ii) *Se $\mathcal{Q}$ è un paraboloide, allora una matrice di tipo "semi-diagonale" associata a $\mathcal{Q}$ è*

$$D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d' \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ d' & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sono i due autovalori non nulli (eventualmente coincidenti) del minore M_{00} di A e $d' \in \mathbb{R} - \{0\}$ si ricava imponendo $\det D' = \det A$.

Dimostrazione. Si procede, in modo perfettamente analogo a quanto fatto per dimostrare la analoga Proposizione 12.13, utilizzando le Proposizioni 12.20 e 12.28 (in sostituzione delle Proposizioni 12.4 e 12.12).

□

Come conseguenza delle Proposizioni 12.28 e 12.29, si ottengono le cosiddette *equazioni canoniche* delle quadriche non specializzate di $\mathcal{E}^3$:

■ **Proposizione 12.30.** *Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica non specializzata di $\mathcal{E}^3$ e sia A una sua matrice associata, rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$.*

(a_1) *Se $\mathcal{Q}$ è un paraboloide e* $\det A < 0$, *allora esiste un riferimento cartesiano su $\mathcal{E}^3$ rispetto al quale $\mathcal{Q}$ assume equazione*

$$Z = \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} \qquad con\ a, b \in \mathbb{R}^+,\ a \geq b;$$

(a_2) *Se $\mathcal{Q}$ è un paraboloide e* $\det A > 0$, *allora esiste un riferimento cartesiano su $\mathcal{E}^3$ rispetto al quale $\mathcal{Q}$ assume equazione*

$$Z = \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} \qquad con\ a, b \in \mathbb{R}^+;$$

(b_1) *Se $\mathcal{Q}$ è un iperboloide e* $\det A < 0$, *allora esiste un riferimento cartesiano su $\mathcal{E}^3$ rispetto al quale $\mathcal{Q}$ assume equazione*

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = -1 \qquad con\ a, b, c \in \mathbb{R}^+, \quad a \geq b;$$

(b_2) *Se $\mathcal{Q}$ è un iperboloide e* $\det A > 0$, *allora esiste un riferimento cartesiano su $\mathcal{E}^3$ rispetto al quale $\mathcal{Q}$ assume equazione*

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1 \qquad con\ a, b, c \in \mathbb{R}^+, \quad a \geq b;$$

(c_1) *Se $\mathcal{Q}$ è un ellissoide e* $\det A < 0$, *allora esiste un riferimento cartesiano su $\mathcal{E}^3$ rispetto al quale $\mathcal{Q}$ assume equazione*

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1 \qquad con\ a, b, c \in \mathbb{R}^+, \quad a \geq b \geq c;$$

(c_2) *Se $\mathcal{Q}$ è un ellissoide e* $\det A > 0$, *allora esiste un riferimento cartesiano su $\mathcal{E}^3$ rispetto al quale $\mathcal{Q}$ assume equazione*

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = -1 \qquad con\ a, b, c \in \mathbb{R}^+, \quad a \geq b \geq c.$$

Dimostrazione. Nel caso del paraboloide, innanzitutto si osservi (tramite la matrice semi-diagonale D' associata) che λ_1, λ_2 sono concordi (risp. discordi) se e solo se $\det A < 0$ (risp. $\det A > 0$).
Si noti inoltre che, moltiplicando per $(-2d')^{-1}$, la equazione di $\mathcal{Q}$ indotta dalla matrice semi-diagonale D' (rispetto ad $\bar{\mathcal{R}}$) assume la forma:

$$Z = \frac{\lambda_1}{-2d'} \cdot X^2 + \frac{\lambda_1}{-2d'} \cdot Y^2.$$

Ciò prova che, scambiando eventualmente tra loro l'asse **X** e l'asse **Y** e cambiando eventualmente orientazione all'asse **Z** del riferimento $\bar{\mathcal{R}}$, la equazione di $\mathcal{Q}$ rispetto ad $\bar{\mathcal{R}}$ assume esattamente la forma del caso (a_1) se λ_1, λ_2 sono concordi (ovvero se $\det A < 0$), e la forma del caso (a_2) se λ_1, λ_2 sono discordi (ovvero se $\det A > 0$).
Nel caso delle quadriche a centro, innanzitutto si osservi (applicando alla matrice diagonale D associata il criterio contenuto nella Proposizione 12.24) che gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ di M_{00} sono tutti dello stesso segno (risp. sono non tutti dello stesso segno) se e solo se $\mathcal{Q}$ è un ellissoide (risp. un iperboloide).

Si noti inoltre che, moltiplicando per $(d)^{-1} = \dfrac{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3}{\det A}$, la equazione di $\mathcal{Q}$ indotta dalla matrice diagonale D (rispetto ad $\bar{\mathcal{R}}$) assume la forma:

$$\frac{(\lambda_1)^2 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3}{\det A} \cdot X^2 + \frac{(\lambda_2)^2 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_3}{\det A} \cdot Y^2 + \frac{(\lambda_3)^2 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2}{\det A} \cdot Z^2 = -1.$$

Ciò prova che, scambiando eventualmente tra loro gli assi del riferimento $\bar{\mathcal{R}}$:

- se $\mathcal{Q}$ è un iperboloide (ovvero se λ_1, λ_2 e λ_3 non hanno tutti lo stesso segno) e $\det A < 0$, la equazione di $\mathcal{Q}$ rispetto ad $\bar{\mathcal{R}}$ assume esattamente la forma del caso (b_1);
- se $\mathcal{Q}$ è un iperboloide (ovvero se λ_1, λ_2 e λ_3 non hanno tutti lo stesso segno) e $\det A > 0$, la equazione di $\mathcal{Q}$ rispetto ad $\bar{\mathcal{R}}$ assume esattamente la forma del caso (b_2);
- se $\mathcal{Q}$ è un ellissoide (ovvero se λ_1, λ_2 e λ_3 hanno tutti lo stesso segno) e $\det A < 0$, la equazione di $\mathcal{Q}$ rispetto ad $\bar{\mathcal{R}}$ assume esattamente la forma del caso (c_1);
- se $\mathcal{Q}$ è un ellissoide (ovvero se λ_1, λ_2 e λ_3 hanno tutti lo stesso segno) e $\det A > 0$, la equazione di $\mathcal{Q}$ rispetto ad $\bar{\mathcal{S}}$ assume esattamente la forma del caso (c_2), che corrisponde chiaramente ad una quadrica a supporto vuoto.

$\square$

Le proprietà delle equazioni canoniche permettono di provare la seguente

■ **Proposizione 12.31.** *Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica non specializzata di $\mathcal{E}^3$ e sia A un suo discriminante, relativo al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$.*

- *Se* $\det A < 0$, *allora $\mathcal{Q}$ è una quadrica reale di tipo ellittico;*
- *se* $\det A > 0$, *allora $\mathcal{Q}$ è o una quadrica immaginaria o una quadrica reale di tipo iperbolico.*

Dimostrazione. Se $\det A < 0$, allora $\mathcal{Q}$ ha equazione canonica di tipo (a_1), (b_1) o (c_1) (si veda la Proposizione 12.30). Nel caso (a_1), l'intersezione di $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ con il piano $Z = -1$ è vuota. Nel caso (b_1), l'intersezione di $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ con il piano $Z = 0$ è vuota. Nel caso (c_1), l'intersezione di $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ con il piano $Z = 2c$ è vuota. Pertanto, in tutti e tre i casi, $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ non contiene rette e, di conseguenza, tutti i suoi punti sono ellittici.
Se invece $\det A > 0$, allora $\mathcal{Q}$ ha equazione canonica di tipo (a_2), (b_2) o (c_2) (si veda la Proposizione 12.30). Nel caso (c_2), come già rilevato, $\mathcal{I}(\mathcal{Q}) = \emptyset$. Nel caso (a_2), il punto $P \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} [1,0,0,0]$ è iperbolico, come è facile verificare considerando $\mathcal{I}(\mathcal{Q}) \cap \pi_P$. Analogamente, nel caso (b_2), il punto $Q \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} [0,a,0,c]$ è iperbolico. Il Lemma 12.23 assicura quindi che, in entrambi i casi, tutti i punti i punti di $\mathcal{Q}$ sono iperbolici.

$\square$

Quale corollario delle Proposizioni 12.30 e 12.31, si ha il seguente:

■ **Teorema 12.32. (Classificazione delle quadriche non specializzate di $\mathcal{E}^3$)** *Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica non specializzata di $\mathcal{E}^3$. Allora $\mathcal{Q}$ appartiene ad una ed una sola delle seguenti classi:*

(a_1) *paraboloidi ellittici (o non rigati);*

(a_2) *paraboloidi iperbolici (o doppiamente rigati o a sella);*
(b_1) *iperboloidi ellittici (o non rigati o a due falde);*
(b_2) *iperboloidi iperbolici (o doppiamente rigati o ad una falda);*
(c_1) *ellissoidi reali;*
(c_2) *ellissoidi immaginari (o vuoti).*

$\square$

Lo schema riportato in Figura 12.5 riassume il metodo di classificazione, a partire da una qualunque matrice A associata alla quadrica $\mathcal{Q}$, mentre le Figure 12.6, 12.7, 12.8, 12.9 e 12.10 forniscono una rappresentazione del supporto (non vuoto) di tali quadriche, rispetto al riferimento in cui esse assumono equazione canonica.

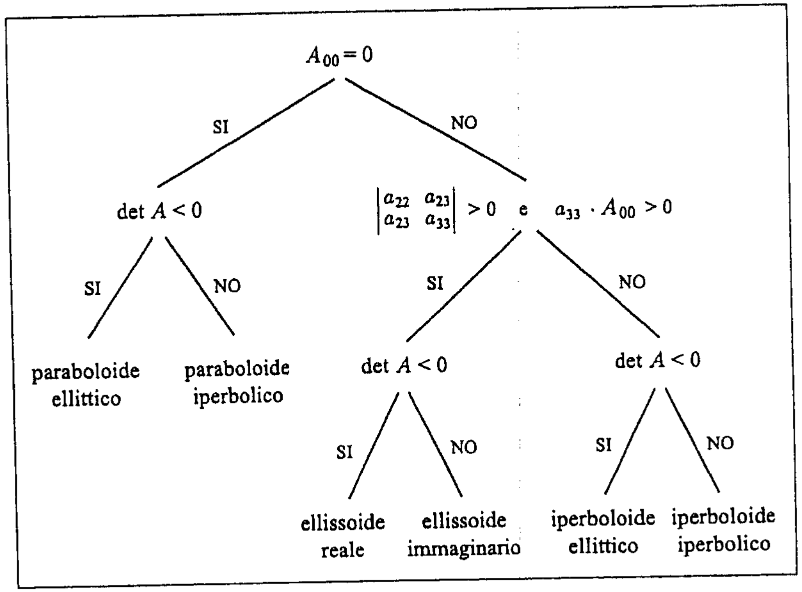

Figura 12.5
(Algoritmo di classificazione per le quadriche non degeneri di $\mathcal{E}^3$)

Esempio 12.19. In base alla Proposizione 12.30 - o all'algoritmo di classificazione riassunto in Figura 12.5 -, il paraboloide $\mathcal{Q}_1$ considerato nell'Esempio 12.14 è a punti iperbolici (essendo $\det A = 8 > 0$). Per la Proposizione 12.29 (caso (ii)), una matrice di tipo semi-diagonale associata a $\mathcal{Q}_1$ è

$$D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d' \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ d' & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

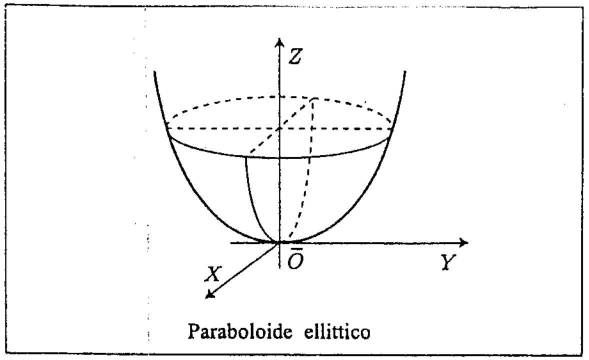

Figura 12.6

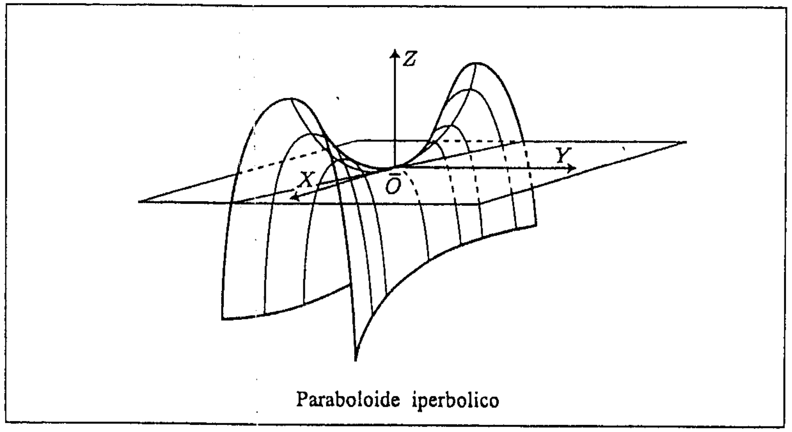

Figura 12.7

con det $D' = 10{d'}^2 = \det A = 8$, da cui segue $d' = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Allora, una equazione canonica di $\mathcal{Q}_1$ è

$$-10X^2 + Y^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}Z = 0, \qquad \text{ovvero} \quad Z = \frac{X^2}{\frac{2\sqrt{5}}{25}} - \frac{Y^2}{\frac{4\sqrt{5}}{5}}.$$

Esempio 12.20. In base alla Proposizione 12.30 - o all'algoritmo di classificazione riassunto in Figura 12.6 -, l'ellissoide $\mathcal{Q}_2$ considerato nell'Esempio 12.14 è non vuoto (essendo det $A = -15 < 0$).
Per la Proposizione 12.29 (caso (i)), una matrice di tipo diagonale associata a $\mathcal{Q}_2$ è

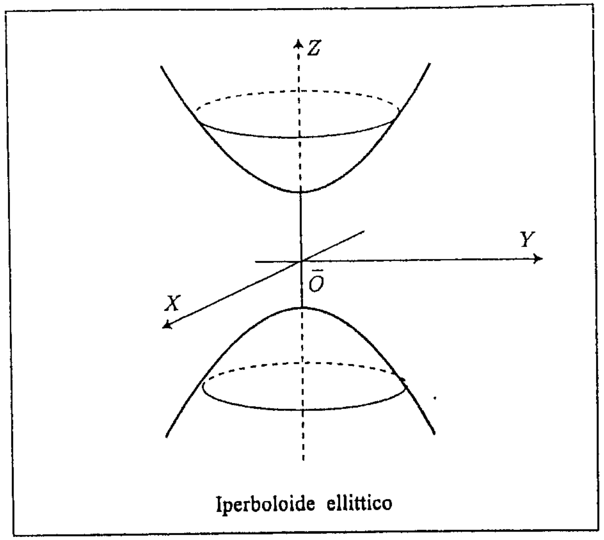

Figura 12.8

$$D = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

con det $D = 3d = \det A = -15$, da cui segue $d = -5$. Allora, una equazione canonica di $\mathcal{Q}_2$ è

$$X^2 + Y^2 + 3Z^2 - 5 = 0, \qquad \text{ovvero} \quad \frac{X^2}{5} + \frac{Y^2}{5} + \frac{Z^2}{\frac{5}{3}} = 1.$$

Esempio 12.21. In base alla Proposizione 12.30 - o all'algoritmo di classificazione riassunto in Figura 12.6 -, l'iperboloide $\mathcal{Q}_3$ considerato nell'Esempio 12.14 è a punti iperbolici (essendo det $A = 24 > 0$).
Per la Proposizione 12.29 (caso (i)), una matrice di tipo diagonale associata a $\mathcal{Q}_3$ è

$$D = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

con det $D = -3d = \det A = 24$, da cui segue $d = -8$.
Allora, una equazione canonica di $\mathcal{Q}_3$ è

$$X^2 + 3Y^2 - 3Z^2 - 8 = 0, \qquad \text{ovvero} \quad \frac{X^2}{8} + \frac{Y^2}{\frac{8}{3}} - \frac{Z^2}{8} = 1.$$

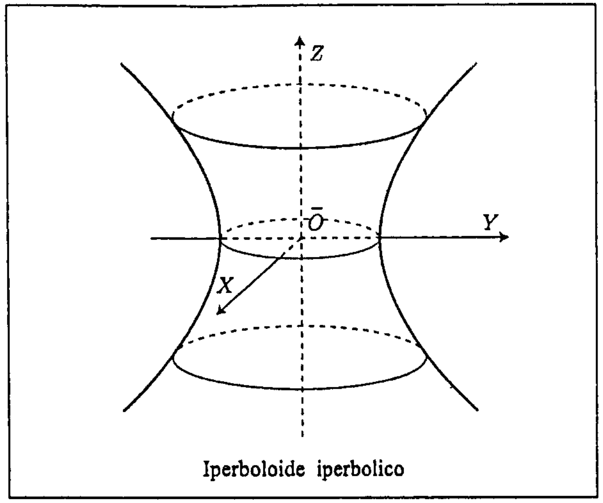

Figura 12.9

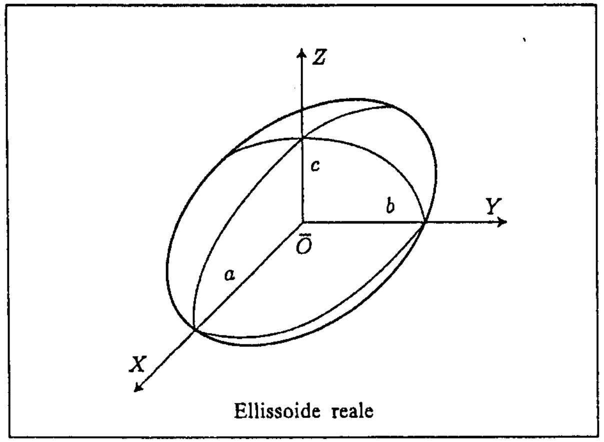

Figura 12.10

Le equazioni canoniche delle quadriche non degeneri e non vuote permettono di ricavare facilmente alcune proprietà del supporto che, essendo indipendenti dal riferimento scelto, possono essere formulate in termini generali.

■ **Proposizione 12.33.** *Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica non specializzata di $\mathcal{E}^3$. Allora, ogni piano principale di $\mathcal{Q}$ è piano di simmetria per il supporto proprio $\mathcal{I}_P(\mathcal{Q})$.*
Inoltre:

- *se $\mathcal{Q}$ è una quadrica a centro, il centro C è centro di simmetria per il supporto proprio $\mathcal{I}_P(\mathcal{Q})$;*
- *se $\mathcal{Q}$ è un iperboloide ellittico, un asse di $\mathcal{Q}$ contiene due vertici, mentre gli altri due assi non intersecano $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$;*
- *se $\mathcal{Q}$ è un iperboloide iperbolico, due assi di $\mathcal{Q}$ contengono due vertici ciascuno, mentre l'altro asse non interseca $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$;*
- *se $\mathcal{Q}$ è un ellissoide reale, ogni asse di $\mathcal{Q}$ contiene due vertici.*

□

Inoltre, dalle equazioni canoniche delle quadriche non degeneri è possibile visualizzare facilmente la eventuale presenza di assi di rotazione (ovvero, di autovalori di molteplicità due per il minore M_{00} di qualunque matrice associata):

- un paraboloide ellittico risulta di rotazione attorno al suo (unico) asse se e soltanto se, nella sua equazione canonica, si ha $a = b$;
- un paraboloide iperbolico non può mai essere di rotazione;
- un iperboloide ellittico risulta di rotazione attorno al suo asse contenente i vertici se e soltanto se, nella sua equazione canonica, si ha $a = b$;
- un iperboloide iperbolico risulta di rotazione attorno al suo asse non contenente vertici se e soltanto se, nella sua equazione canonica, si ha $a = b$;
- un ellissoide (reale o immaginario) risulta di rotazione attorno ad un suo asse se e soltanto se, nella sua equazione canonica, si ha o $a = b$, o $b = c$.

Si noti infine che la equazione canonica di un ellissoide reale $\mathcal{Q}$ di $\mathcal{E}^3$ ha i coefficienti di X^2, di Y^2 e di Z^2 coincidenti (e quindi, il suo supporto è costituito da tutti e soli i punti equidistanti dal centro di $\mathcal{Q}$) se e solo se, in qualunque matrice A associata a $\mathcal{Q}$, il minore M_{00} ammette tre autovalori coincidenti; ciò permette di ottenere la seguente caratterizzazione delle sfere [11] all'interno delle quadriche dello spazio euclideo.

■ **Proposizione 12.34.** *Una quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathcal{E}^3$ è una sfera se e soltanto se, in una qualunque matrice associata A, si ha*

$$\det A < 0 \quad e \quad M_{00} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad con \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

□

La sfera risulta quindi l'unica quadrica non vuota di rotazione attorno al suo centro.

[11] Come noto, si definisce *sfera* di centro C e raggio $r > 0$ l'insieme
$$\mathbb{S}^2 = \{P \in \mathcal{E}^3 \mid d(P, C) = r\}.$$
Se si sceglie in $\mathcal{E}^3$ un riferimento cartesiano avente origine coincidente con C, allora l'equazione di $\mathbb{S}^2$ diventa, ovviamente:
$$\mathbb{S}^2 : X^2 + Y^2 + Z^2 = r^2.$$