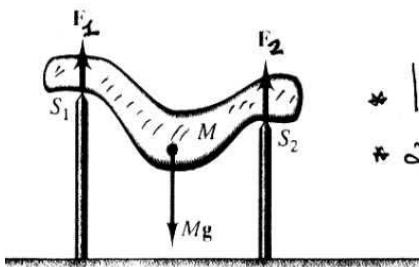


Applicazioni delle leggi:

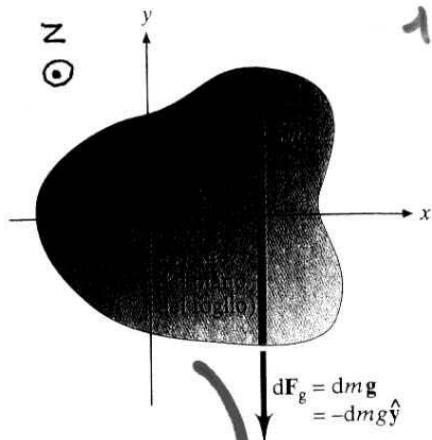
$$\vec{R}^{(E)} = M \vec{\omega}_{CM}$$

$$z^{(E)} = I \alpha$$

- Equilibrio Statico
- * Asse fisso di rotazione
- Rotolamento



* lamina
* appoggi lisci



$$\vec{R}^{(E)} = \sum_i \vec{F}_i = M \vec{a}_{cm} \\ = \vec{0}$$

$$\bar{\gamma} = \sum_i \bar{\gamma}_i = I \alpha \\ = \vec{0}$$

La forza gravitazionale è distribuita sull'intera lamina!

$d\vec{F}_g$ = forza gravitazionale agente su dm

Condizioni Statiche: $d\bar{\gamma} = -x dm g$ → attorno all'asse A

per le forze

A sinistra dell'origine :

per i momenti delle forze

$$d\bar{\gamma} = -x dm g \quad (x < 0)$$

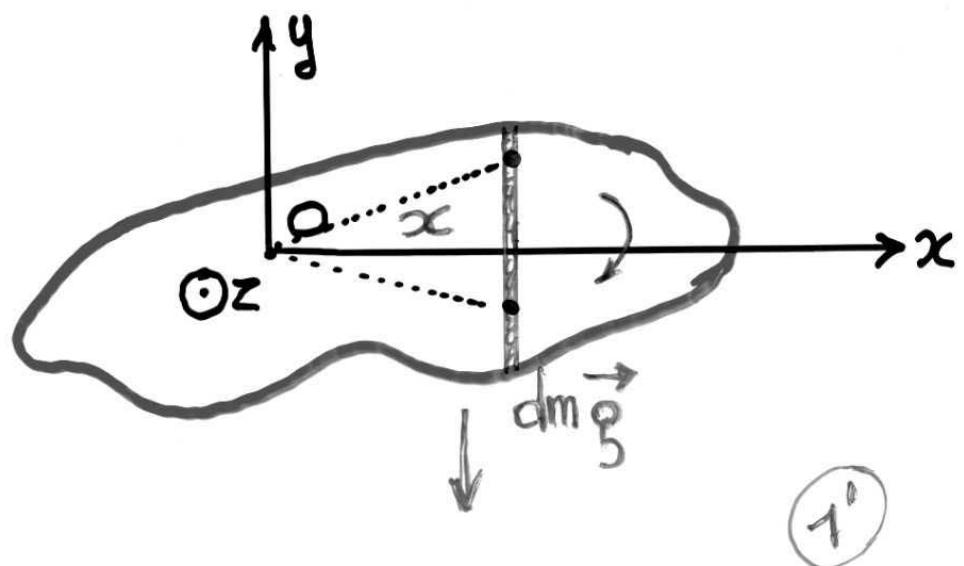
* $\bar{\gamma}_i$ riferiti allo stesso asse qualsiasi.

$$\bar{\gamma} = \int_V d\bar{\gamma} = \int_V -\varrho x dm = -\varrho \int_V x dm$$

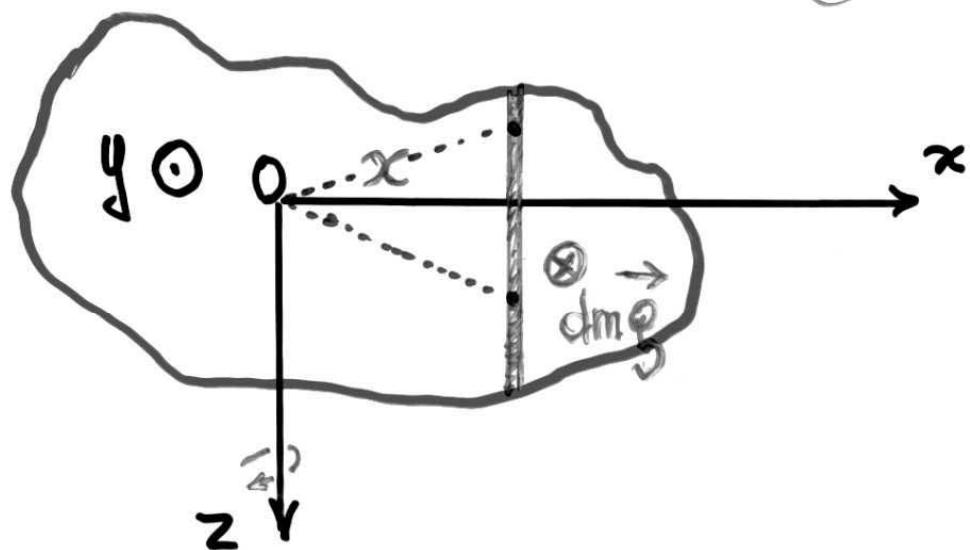
Es un punto del corpo $x_c = X_{CG}$
la forza $-Mg \vec{u}_y$ in esso applicata esercita lo stesso $\bar{\gamma}$

Per calcolarli bisogna conoscere i punti di applicazione delle forze per misurare il braccio della forza gravitazionale distribuita :

$$\boxed{\bar{\gamma} = -Mg X_{CG}}$$



1'



~~Il punto di applicazione di $\vec{dm}g$~~
è $d\vec{r} = -(dm g) \hat{x}$

$$\rightarrow \vec{r} = -g \int_V dm \hat{x} = -Mg X_{CG}$$

$$X_{CG} = \frac{\int_V dm x}{M} = X_{CM}$$

2

$$-MgX_{CG} = -g \int_V x dm$$

$$X_{CG} = \frac{1}{M} \int_V x dm$$

ma $\frac{1}{M} \int_V x dm = X_{CM}$

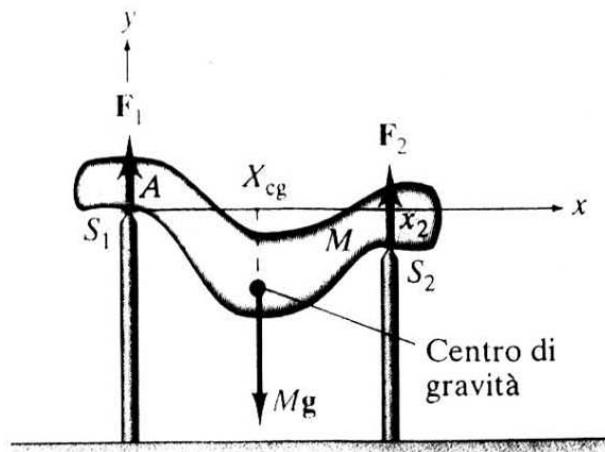
$$\Rightarrow X_{CG} = X_{CM} .$$

Si ripete il procedimento per le altre coordinate di C.G. :

$$\begin{aligned} Y_{CG} &= Y_{CM} & Z_{CG} &= Z_{CM} \\ \Rightarrow \vec{R}_{CG} &= \vec{R}_{CM} \end{aligned}$$



1. la forza gravitazionale agente su un corpo esteso di massa M agisce come se fosse applicata a un punto materiale avente la stessa massa e situato nel centro di gravità o baricentro
2. se g ha lo stesso valore sull'intero corpo, il baricentro coincide con il centro di massa.



- (1) Si costruisce il **diagramma delle forze del corpo libero**, o del sistema di corpi (forze esterne)
- (2) Si introduce un appropriato sistema di riferimento cartesiano, \Rightarrow minimo N° di forze da scomporre
- (3) Si introduce l'immaginario asse di rotazione coincidente (o non) con un asse del sistema e tale da semplificare il lavoro dedicato ai calcoli.

$O \equiv S_1$; in S_1 l'immaginario asse di rotazione \perp al piano del foglio
I contatti in S_1 e S_2 sono lisci: \vec{F}_1 e \vec{F}_2 sono verticali.

$$\sum_j F_{yj} = F_1 + F_2 - Mg = 0$$

$$\Sigma_x + \Sigma_y + \Sigma_{cg} = 0 \cdot F_1 + x_2 F_2 - X_{CG} Mg = 0$$

NOTE:

4

- (1) L'asse x è orizzontale e tutte le forze sono verticali, cioè normali ad $x \Rightarrow$ la distanza della retta d'azione, misurata lungo x , è il braccio della forza.
In ciascun caso è $F = F_{\perp}$.
- (2) Scegliendo l'asse di rotazione in A, si ottiene automaticamente il valore zero per τ_1 ,
- (3) I segni dei due momenti di forza non nulli sono scelti in conformità con i loro versi.

Sistema di due equazioni nelle incognite F_1 e F_2 :

$$F_2 = Mg - F_1$$

$$x_2 Mg - x_2 F_1 - x_{CG} Mg = 0$$

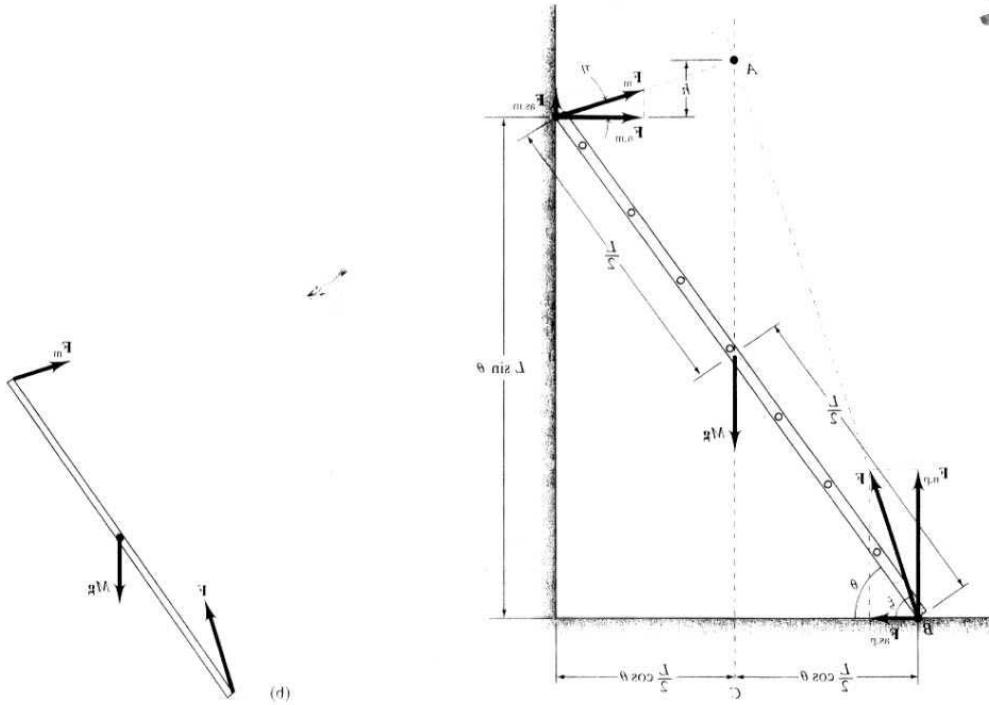
$$F_1 = \frac{Mg(x_2 - x_{CG})}{x_2}$$

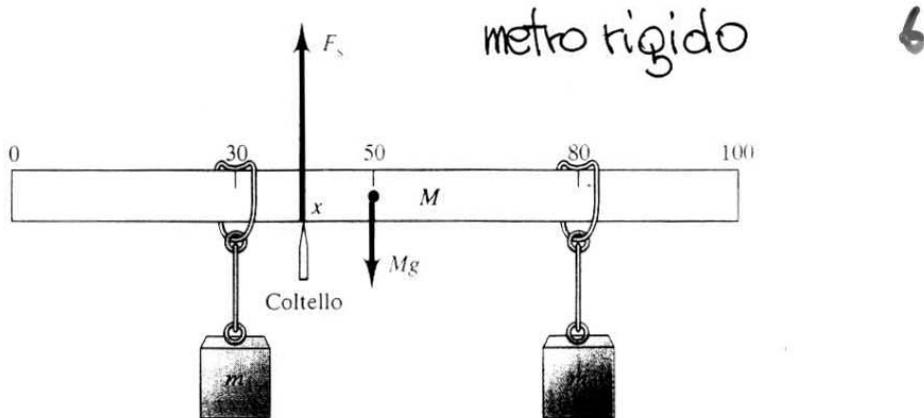
$$= Mg \left(1 - \frac{x_{CG}}{x_2} \right)$$

$$F_2 = Mg - Mg + Mg \frac{x_{CG}}{x_2}$$

$$= Mg \frac{x_{CG}}{x_2}$$

5





$M = 125 \text{ g}$, $m_1 = 225 \text{ g}$, $m_2 = 263 \text{ g} \rightarrow$ posizione del coltello?

All' equilibrio : TUTTE le forze sono
verticoli $\Rightarrow \sum F_{\perp} = F_r$.

$$F_s \text{ (incognita)} = m_1 g + m_2 g + M g \leftarrow R^{(E)} = 0$$

Asse immaginario di rotazione nel coltello

Sappiamo $x_1 = 30,0 \text{ cm}$; $x_2 = 80,0 \text{ cm}$; $X_{CG} = 50,0 \text{ cm}$

$$\sum_i \gamma_i = (\alpha - x_1) m_1 g - (x_{CG} - \alpha) M g - (x_2 - \alpha) m_2 g$$

$\stackrel{?}{=}$ 0 positivo positivo positivo

$x = ? \Rightarrow$ Lo assegniamo (H_p) arbitrariamente, come in figura, e quindi il segno appropriato per i momenti delle forze.

Se H_p è sbagliata ($x > X_{CG}$) \checkmark
 i segni dei termini in parentesi
 ne terranno automaticamente conto
 in modo che sia sempre rispettata
 la convenzione $\zeta > 0$ orario
 $\zeta < 0$ antiorario

$$x = \frac{x_1 m_1 + X_{CG} M + x_2 m_2}{m_1 + M + m_2}$$

$$= 54,3 \text{ cm} > X_{CG}$$

in contraddizione con la figura.

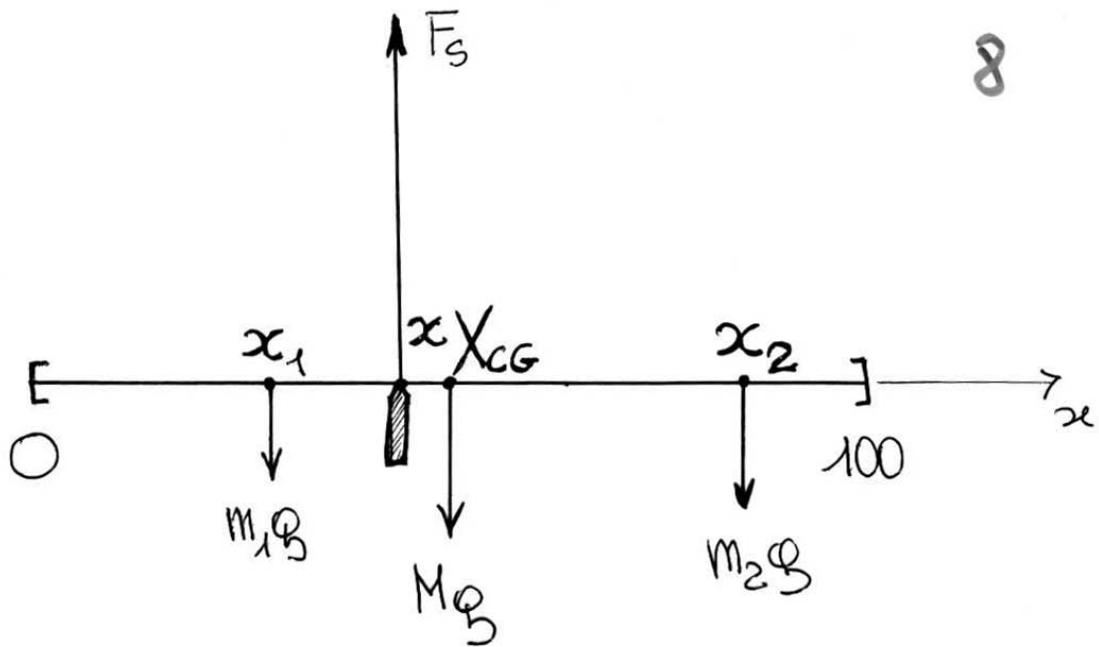
Oppure

Asse immaginario di rotazione in O

origine del metro (\equiv asse x)

Diagramma delle forze del
corpo libero

8



$$-m_1 g \ddot{x}_1 + F_s \ddot{x} - M g \ddot{X}_{CG} - m_2 g \ddot{x}_2 = 0$$

$$F_s = m_1 g + M g + m_2 g$$

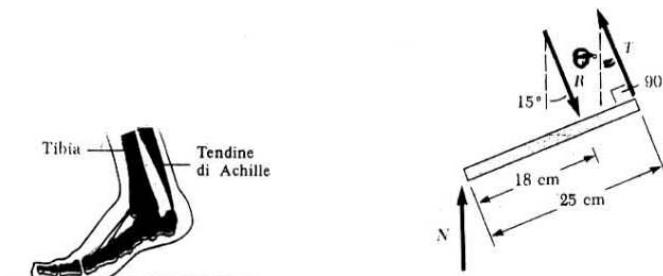
$$-m_1 g \ddot{x}_1 + (m_1 g + M g + m_2 g) \ddot{x} - M g \ddot{X}_{CG} - m_2 g \ddot{x}_2 = C$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{m_1 \ddot{x}_1 + M \ddot{X}_{CG} + m_2 \ddot{x}_2}{m_1 + M + m_2}$$

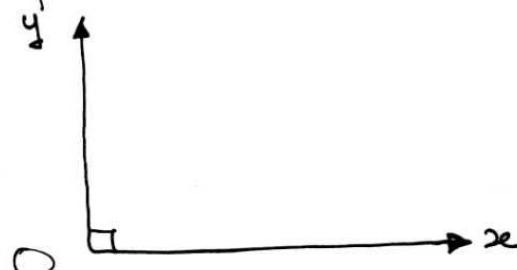
|| In questo caso, si DEVE utilizzare F_s .

Quando una persona sta in piedi, il piede assume la posizione mostrata in figura. Il peso totale \vec{P} è bilanciato dalla reazione \vec{N} del pavimento sulla punta del piede. Sul piede agiscono anche la tensione del tendine di Achille \vec{T} e la reazione della tibia \vec{R} . In figura è riportato anche il modello meccanico con le dimensioni del piede.
Calcolare T ed R per una persona che pesa $P=700N$.

g



Per facilitare il calcolo introduciamo un sistema di riferimento cartesiano Oxy



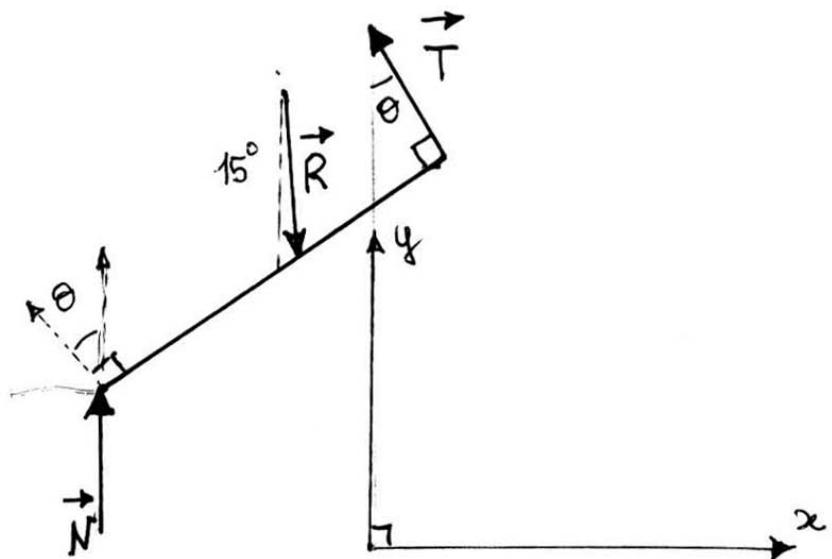
e proiettiamo sugli assi la condizione di equilibrio traslazionale:

$$\text{asse } x \quad R \sin 15^\circ - T \sin \theta = 0$$

$$\text{asse } y \quad N - R \cos 15^\circ + T \cos \theta = 0$$

Per l'equilibrio rotazionale, prendiamo l'asse immaginario di rotazione passante per il punto di applicazione di R e scriviamo

$$-0.18 \cos\theta N + 0.07 T = 0 \quad 10$$



$$T = (0.18 N / 0.07) \cos\theta = \frac{0.18 \times 700}{0.07} \cos\theta \\ = 1800 \cos\theta \text{ (newton)}$$

$$\boxed{R \sin 15^\circ - 1800 \cos\theta \operatorname{sen}\theta = 0}$$

$$\boxed{700 - R \cos 15^\circ + 1800 \cos^2\theta = 0}$$

$\rightarrow R = 1800 \cos\theta \operatorname{sen}\theta / \operatorname{sen} 15^\circ$; sustituyendo

$$\Rightarrow 700 - 1800 \cos\theta \operatorname{sen}\theta / \tan 15^\circ + 1800 \cos^2\theta = 0$$

$$700 - 1800 \cos\theta \sqrt{1 - \cos^2\theta} / \tan 15^\circ + 1800 \cos^2\theta = 0$$

quadrando

$$\left(700 + 1800 \cos^2 \theta \right)^2 = \left(\frac{1800 \cos \theta \sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\operatorname{tg} 15^\circ} \right)^2$$

$$4.9 \times 10^5 + 3.24 \times 10^6 \cos^4 \theta + 2.52 \times 10^6 \cos^2 \theta = \\ = 4.5 \times 10^7 \cos^2 \theta - 4.5 \times 10^7 \cos^4 \theta$$

$$98.45 \cos^4 \theta - 86.7 \cos^2 \theta + 1 = 0$$

ponendo $u = \cos^2 \theta$

$$98.45 u^2 - 86.7 u + 1 = 0$$

$$u = \frac{86.7 \pm \sqrt{7517 - 393.8}}{197} = \begin{cases} 0.87 \\ 0.012 \end{cases}$$

1^a soluzione $\theta_1 = \arccos(0.87)^{1/2} = 21.13^\circ$

2^a " $\theta_2 = \arccos(0.012)^{1/2} = 83.71^\circ$

Dal modello meccanico, θ risulta più prossimo a 0° che a 90°

$$\Rightarrow \boxed{\theta = 21.13^\circ}$$

12

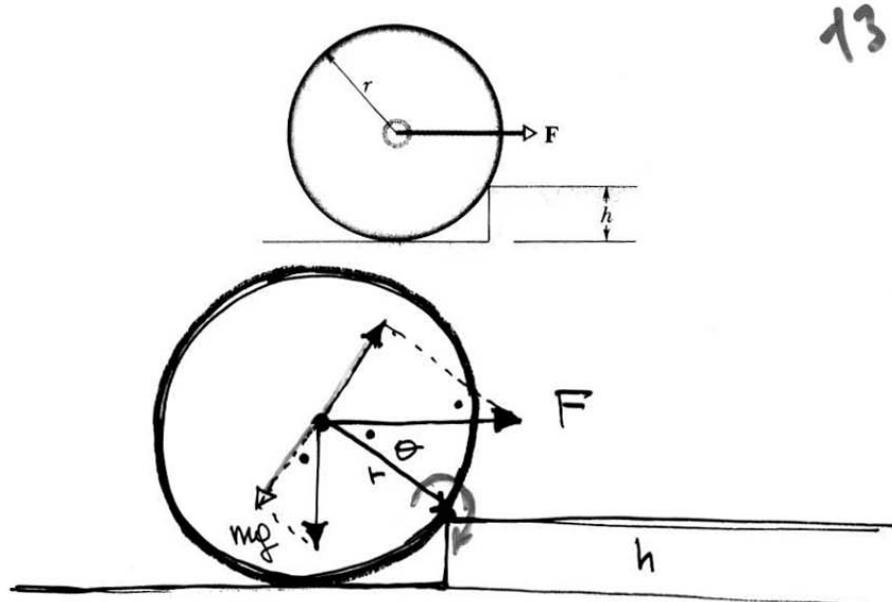
$$T = 1800 \cos \theta = 1800 \cos 21.13^\circ$$

$$= 1.68 \times 10^3 \text{ N}$$

$$R = \frac{T \sin \theta}{\sin 15^\circ} = \frac{1.68 \times 10^3 \sin 21.13^\circ}{\sin 15^\circ}$$

$$= 2.34 \times 10^3 \text{ N}$$

Qual è la forza minima F , applicata orizzontalmente all'asse della ruota di figura 27, che consente alla ruota di salire su un gradino di altezza h ? Sia r il raggio della ruota e W il suo peso.



$$\sum_i \vec{c}_i = 0$$

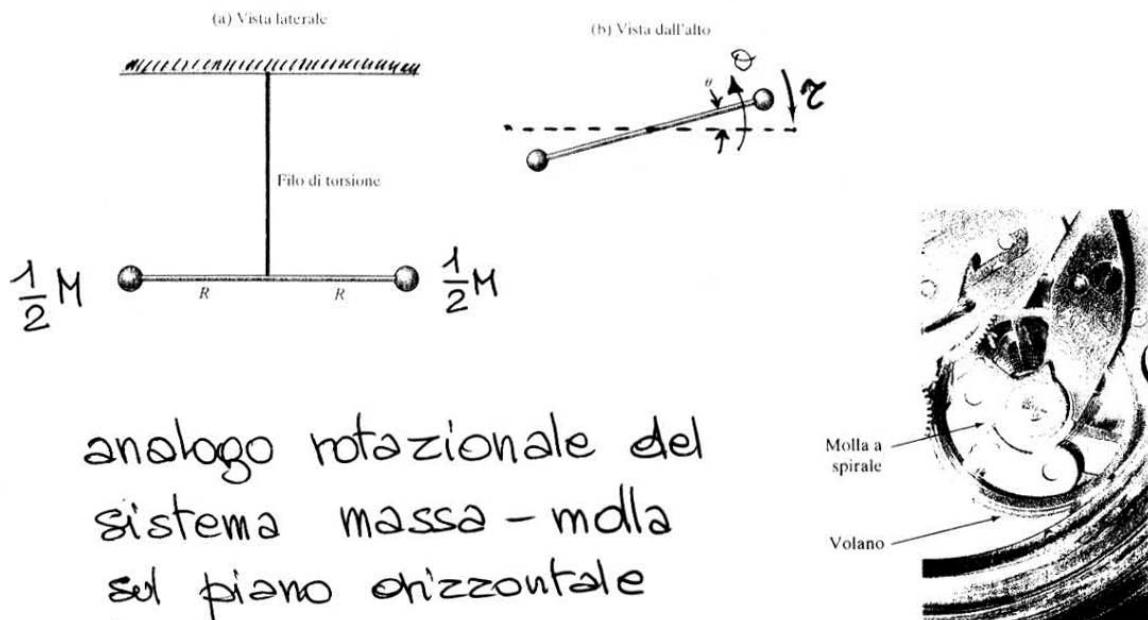
$$r \cdot mg \cos \theta = r \cdot F \sin \theta$$

$$F = mg \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = mg \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{\sin \theta}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{r-h}{\sqrt{r^2 - (r-h)^2}} \\ F &= mg \frac{\frac{r-h}{\sqrt{r^2 - (r-h)^2}}}{\frac{r-h}{r}} \\ &= mg \frac{\sqrt{r^2 - r^2 + h^2 + 2hr}}{r-h} = mg \frac{\sqrt{h(2r-h)}}{r-h} \end{aligned}$$

Pendolo di torsione

14

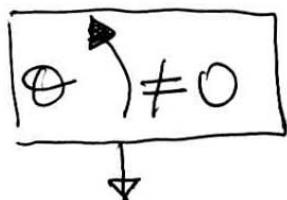


analogo rotazionale del
sistema massa - molla
sul piano orizzontale
l'iscio.

Asta rigida $\begin{cases} \text{Massa } \approx 0 \\ \text{lunghezza } 2R \end{cases}$

$\begin{cases} \text{asta rigida} \\ \text{filo di torsione} \end{cases} \ll \begin{cases} \text{asta rigida} \\ \text{filo di torsione} \end{cases}$

Equilibrio del sistema : filo di torsione
non teso



$$\theta = 0$$

il filo di torsione esercita un
momento di forza di richiamo
sull' asta

$$\mathcal{E} = -k\theta$$

15

(-) perché il verso in cui questo momento di forza tenderà a fare ruotare il sistema sarà Sempre opposto a quello dello spostamento angolare θ poiché il filo tende a opporsi alla propria torsione,

Analogo rotazionale dell'eq. ne traslazionale

$$F = -kx$$

k = costante di torsione $\left(\frac{Nm}{rad} \right)$.

Considerazioni sul moto dopo la torsione
nella analogia massa - molla (qualitativa)

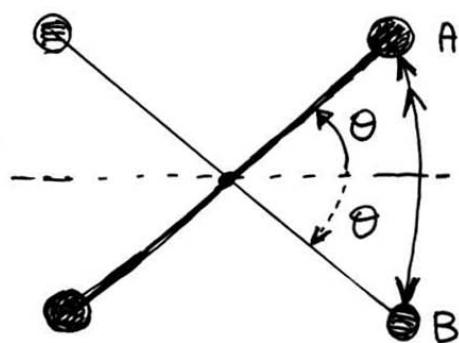
Inerzia della massa \Rightarrow la massa supera la posizione di equilibrio in cui la molla è a riposo

16

inerzia del pendolo di torsione



l'asta rigida supera la posizione di equilibrio in cui il filo di torsione è a riposo; il filo di torsione si ritorce ed esercita un momento di forza sull'asta, accelerandola fino alla condizione di quiete e facendola ruotare di nuovo a ritorno verso la posizione di equilibrio.



→ Oscillazione rotazionale

Oscillazione completa : A → B → A

Analisi quantitativa

$$\mathcal{E} = I\alpha = I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -K\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{K}{I}\theta$$

17

Eq. ne del moto armonico semplice

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \delta)$$

A = ampiezza massima (angolare)

ω = pulsazione $= \sqrt{\frac{K}{I}}$

ν = frequenza $= \omega / 2\pi = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{I}}$

T = periodo $= \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K}}$

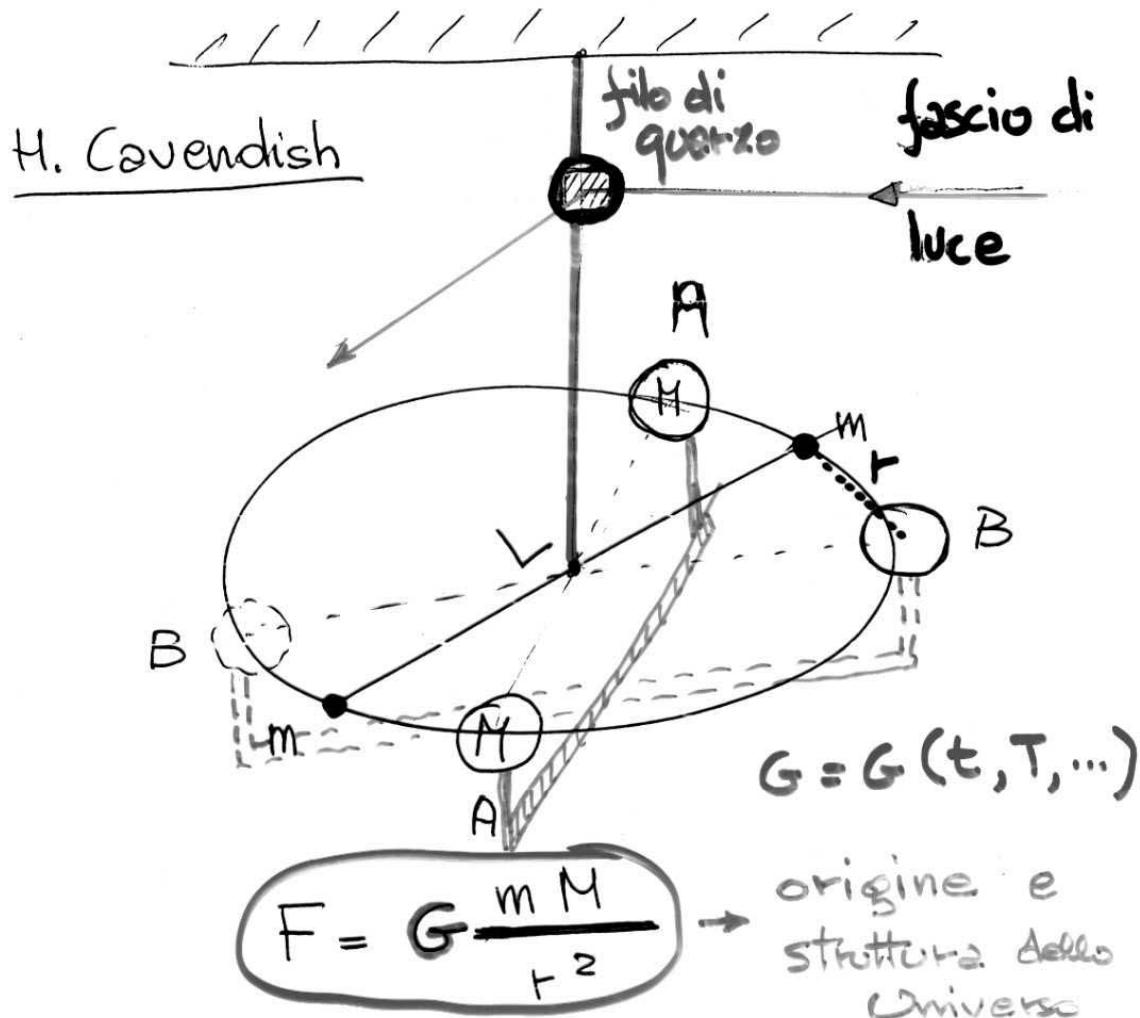
δ = fase iniziale

l'equivalente traslazion's

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m} x$$

→ Coulomb

→ bilanciere per la regolazione
della marcia di un
orologio.



$$M = 12,7 \text{ kg} \quad m = 9,85 \text{ g}$$

$$L = 52,4 \text{ cm} \quad I = 1,25 \times 10^{-3} \text{ kg}^{-3}$$

$$T = 769 \text{ s}$$

$$\text{angolo di torsione } 2\theta = 0,516^\circ$$

(AA)
↓
(BB)

$r = 10,8 \text{ cm}$ - distanza tra i centri delle sfere

→ 17 →

$$da \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K}}$$

$$K = \frac{4\pi^2 I}{T^2} = 8,34 \times 10^{-8} \text{ Nm}$$

$$\Sigma = K\theta = 3,75 \times 10^{-10} \text{ N.m}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{0,516^\circ}{2} \quad \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} \\ &\downarrow \\ &= 0.0045 \text{ rad} \end{aligned}$$

$$\Sigma = 2F \frac{L}{2} = FL = G \frac{mM}{r^2} L$$

$\theta \rightarrow \Sigma \rightarrow F$

$$\rightarrow G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \cancel{\text{kg}}^2$$

$$F = G \frac{mM_T}{R_T^2} = mg$$

$$\rightarrow M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

con $R_T =$ raggio terrestre

$\rightarrow S = 5,5 \text{ g/cm}^3 \gg$ densità media delle rocce superfic.

Alla quota h

$$F_g = G \frac{M_T m}{r^2} = G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2}$$

La forza gravitazionale che agisce sul corpo in questa quota vale

$$mg'$$

dove g' è il valore della accelerazione di gravità alla quota h .

$$mg' = G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2}$$

$$g' = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2}$$

g' decresce al crescere della quota

$$\rightarrow P' = mg' \xrightarrow[h \rightarrow \infty]{} 0$$

- 17 ^{III} -

18

Il bilanciere di un orologio è montato su supporti (detti *gioielli*) con bassissimo attrito. Il momento di forza di richiamo è fornito da una sottile molla a spirale. Il bilanciere ha una tipica massa di 22 mg e un raggio di $4,2\text{ cm}$ e compie 5 "tic" al secondo. Poiché un orologio compie 2 "tic" per ogni oscillazione del bilanciere, la frequenza di oscillazione è molto vicina a $2,5\text{ Hz}$. Supponendo che tutta la massa del bilanciere sia concentrata nel suo volano, calcolare la costante di torsione k della molla.

1 oscillazione completa \rightarrow 2 "tic"

$5\text{ "tic"}/\text{s}$

$$\rightarrow \nu \left(\frac{\text{oscillaz}}{\text{s}} \right) = \frac{5 \text{ tic/s}}{2 \text{ tic/osc.}} = 2,5 \frac{\text{osc.}}{\text{s}} \\ = 2,5 \text{ Hz}$$

da $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{I}} \Rightarrow k = 4\pi^2 \nu^2 I$

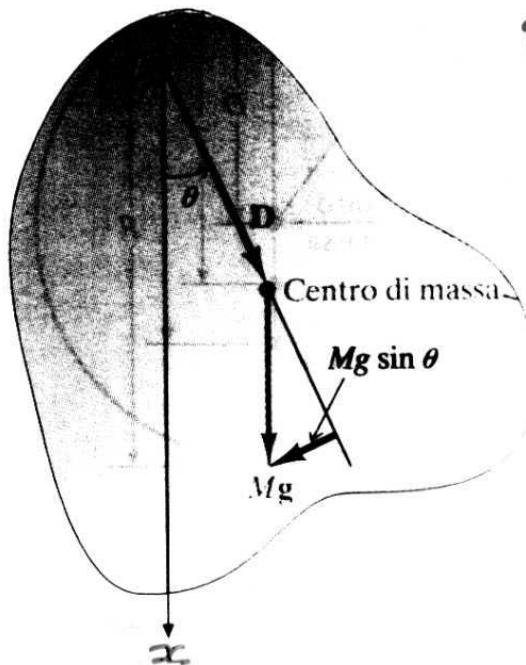
con $I = MR^2$ (anello circolare)

entro la precisione dell'ipotesi
riguardante la distribuzione delle
masse

$$k = 4\pi^2 \nu^2 MR^2 = 4\pi^2 \times (2,5)^2 \times 22 \times 10^{-6} \times 4,2 \times 10^{-2} \\ = 9,6 \times 10^{-8} \text{ Nm/rad}$$

Pendolo Composto

19



$\theta = 0 \Rightarrow$ C.M. sulla verticale

\Rightarrow equilibrio

$\theta \neq 0 \Rightarrow \tau = -D M g \sin \theta$

$$\stackrel{!}{=} -D M g \theta \quad (\theta < 7^\circ)$$

$$(\tau = -K\theta \quad K = DMg)$$

$$-DMg\theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \delta), \quad \omega = \sqrt{\frac{DMg}{I}}$$

oscillazioni armniche
semplici

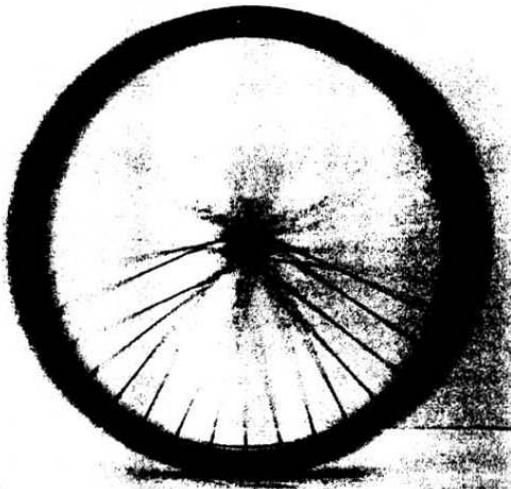
$$\text{Da } \omega = 2\pi \gamma = \frac{2\pi}{T} \quad 20$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{DMg}}$$

$$\gamma = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{DMg}{I}}$$

- Si misura M
- Si determina la posizione del CM
- Si misura D
- Si misura γ

$$I = \frac{DMg}{4\pi^2 \gamma^2}$$



1

Figura 22 Foto di una ruota di bicicletta che rotola senza strisciare. Si noti che vicino alla sommità della ruota i raggi appaiono più annebbati che nella parte inferiore. Questo perché i punti della ruota vicino alla sommità hanno una velocità lineare maggiore di quelli vicino al punto di contatto (che è istantaneamente fermo).

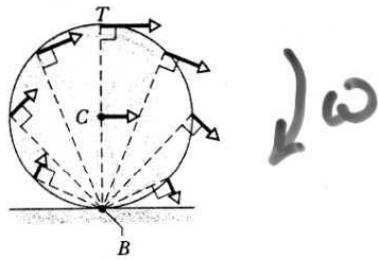


Figura 24 Il moto di un corpo che rotola senza strisciare può essere considerato in ogni istante come una pura rotazione attorno a un asse istantaneo passante per il punto di contatto B (perpendicolare al piano della figura). I vettori mostrano le velocità lineari istantanee di alcuni punti del corpo.

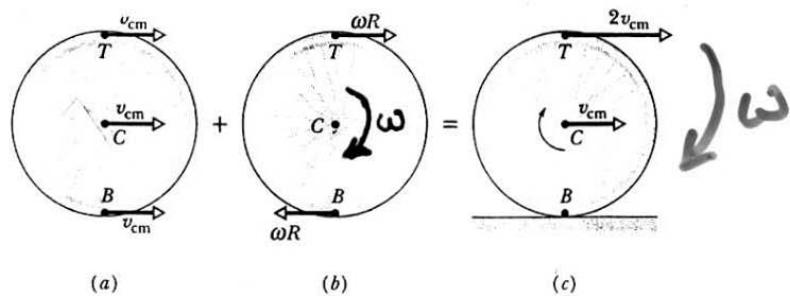
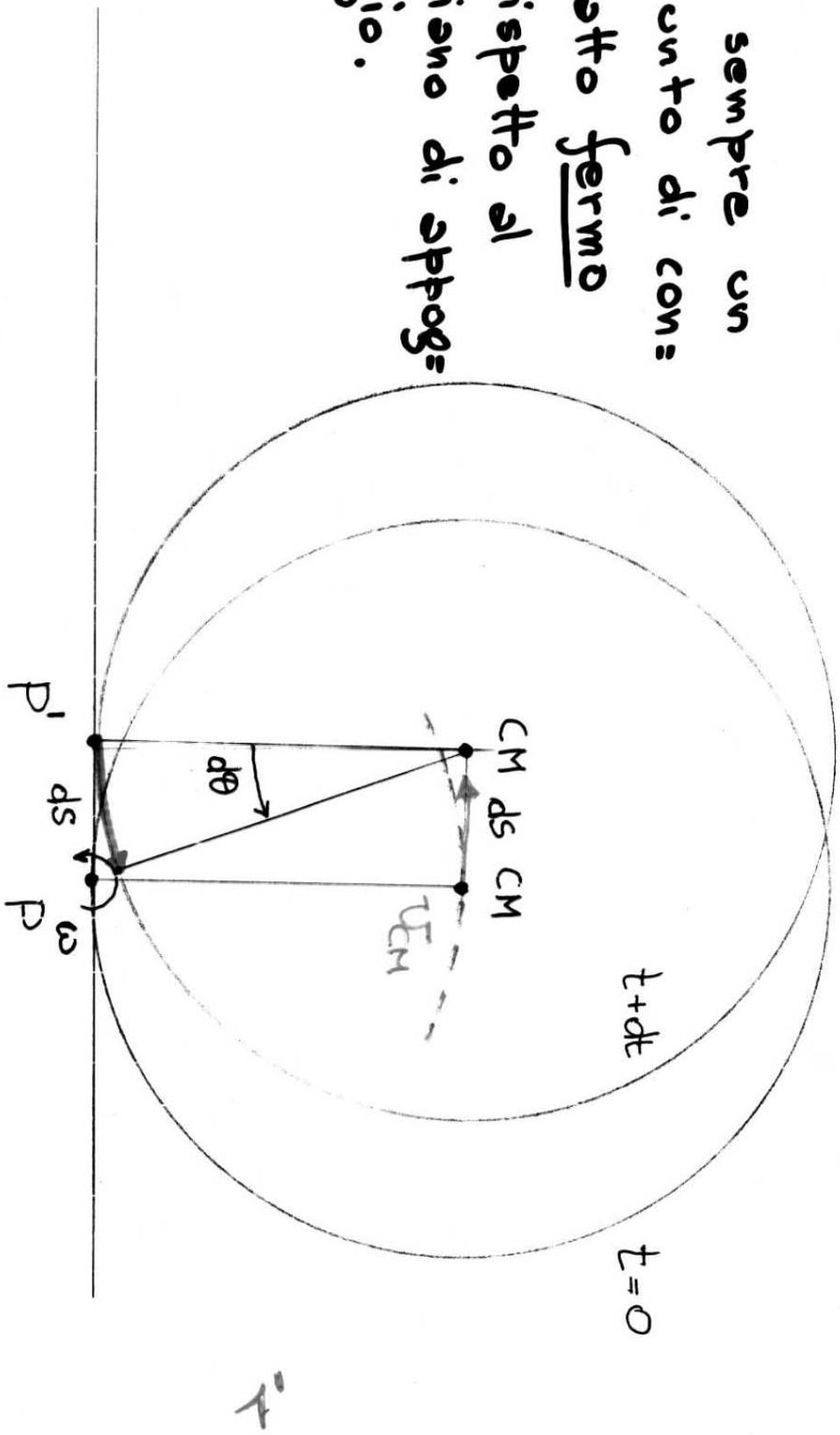


Figura 23 Il rotolamento senza strisciamento può essere visto come la sovrapposizione di una traslazione e di una rotazione attorno al centro di massa. (a) Moto traslatorio nel quale tutti i punti si muovono con la stessa velocità lineare. (b) Moto rotatorio nel quale tutti i punti si muovono con la stessa velocità angolare attorno all'asse passante per il centro. (c) Moto risultante dalla sovrapposizione dei moti (a) e (b). Le velocità lineari dei punti T , C e B sono state ottenute dalla somma vettoriale delle velocità lineari degli stessi punti in (a) e (b) con la condizione $v_{cm} = \omega R$.

È sempre un
punto di con-
tatto fermo
rispetto al
piano di appog-
gio.

Si dimostra che:

P vede il CM ruotare con v. ang. ω e che il CM
vede P ruotare attorno ad un asse per CM con ω .



- In un sistema di riferimento solidale con P

$$v_{CM} = \omega R \quad \begin{array}{l} \text{tangente alla circonferenza} \\ \text{di raggio } R \text{ nel verso di} \\ \text{traslazione del CM} \end{array}$$

- * Nel sistema di riferimento del C.M.

→ P ruota di $d\theta$ descrivendo un arco ds della circonferenza di raggio R
con $\omega' = \frac{d\theta}{dt}$

→ P si sposta sul piano in P' percorrendo un tratto lineare ds
con $ds = d\theta R \rightarrow v = \omega' R$

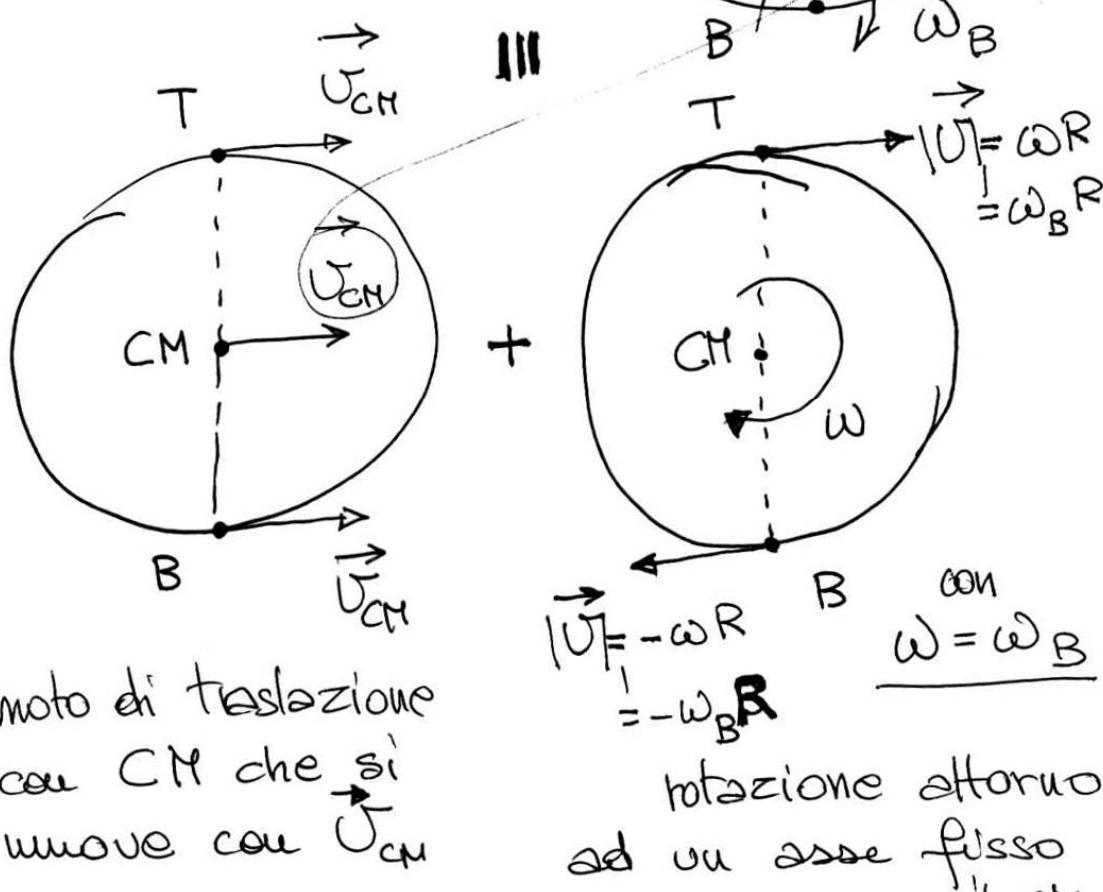
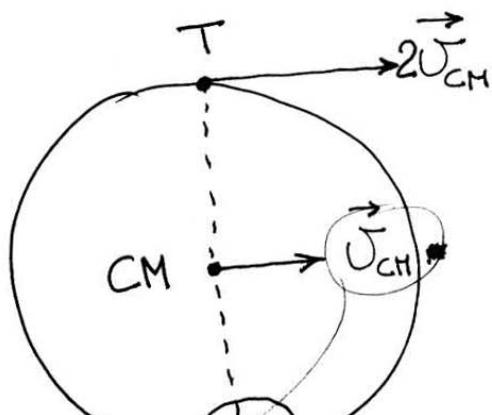
Non essendoci strisciamento.

CM avanza linearmente dello stesso

$$ds \rightarrow v_{CM} = v \Rightarrow \boxed{\omega' = \omega}$$

1"

∇t
 moto di
 puro
 rotolamento
 con $|U_{CM}| = \omega_B R$



1'''

2

Nel moto di **puro rotolamento senza strisciamento**, i moti traslatorio e rotatorio devono essere legati dalle relazioni:

$$\mathbf{v}_{CM} = \omega \mathbf{R}$$

$$\mathbf{a}_{CM} = \alpha \mathbf{R}$$

la velocità angolare del centro di massa rispetto a B deve essere uguale alla velocità angolare di B rispetto al centro di massa.

Nel caso di rotolamento senza strisciamento, l'energia cinetica del moto risultante (**rototraslatorio**) si può allora scrivere come somma di due termini : uno legato alla **velocità lineare di traslazione ed uno a quella angolare di rotazione.**

$$E_k = \frac{1}{2} I_B \omega_B^2$$

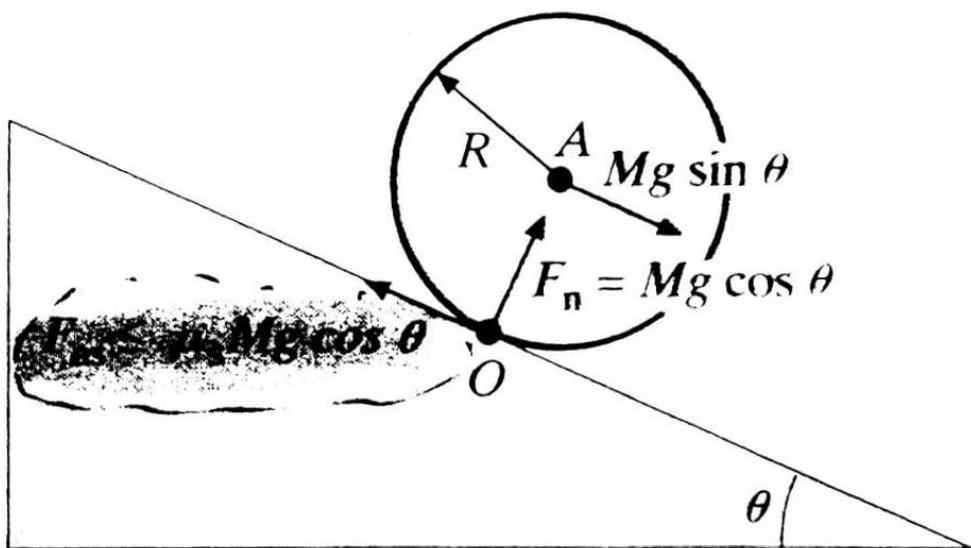
Con I_B momento di inerzia e ω_B velocità angolare, **entrambi rispetto all'asse di rotazione istantaneo passante per B.**

Dal teorema di Steiner : $I_B = I_{CM} + MR^2$

$$E_k = \frac{1}{2}(I_{CM} + MR^2)(V_{CM}/R)^2$$

$$= \frac{1}{2} I_{CM} \omega_B^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

3



$$\text{Da } K = K_t + K_r$$

Forze \rightarrow accelerazione lineare

Momenti di forze \rightarrow acceleraz. angolari

Traslazione

$$\vec{R}^{(E)} = M \vec{a}_{CM}$$

$$Mg \sin \theta - F_{as} = M \ddot{a}_{CM}$$

Rotazione

$$\sum = I \alpha$$

$$-F_{as}R = -I_{CM} \alpha \rightarrow F_{as}R = I_{CM} \alpha$$

$$\text{Da: } [\ddot{a}_{CM} = \alpha R]$$

$$F_{as} = \frac{I_{CM} \alpha}{R^2}$$

$$Mg \sin \theta - \frac{I_{CM} \alpha_{CM}}{R^2} = M \alpha_{CM} \quad 4$$

$$\alpha_{CM} = \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}}$$

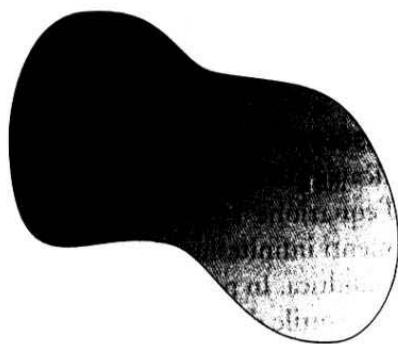
Con $I_{CM} = C MR^2$

$0 < C \leq 2$

$$\alpha_{CM} = \frac{g \sin \theta}{1 + C}$$

INDIPENDENTE DALLE DIMENSIONI
 DEL CORPO, DIPENDENTE DALLA
 SUA FORMA.

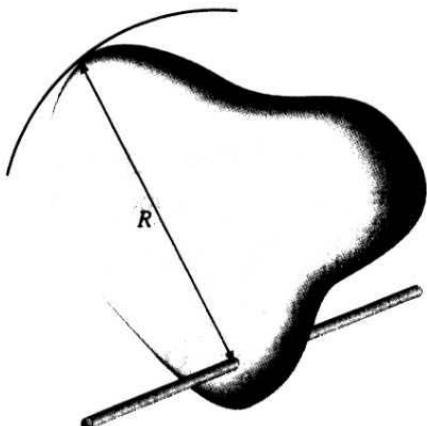
5



$$I = \int dm r^2 < MR^2$$

momento di
inerzia di

un anello della stessa massa
e del raggio massimo R del
corpo



E' sempre: $I = c MR^2$

con $0 < c \leq 1$
fattore di forma.

Sfera piena

6

$$C = \frac{2}{5}$$

$$\ddot{\alpha}_{CM} = \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{5}{7} g \sin \theta$$

$$= 0,714 g \sin \theta$$

$$F_{as} = I_{CM} \frac{\ddot{\alpha}_{CM}}{R^2} = CM \frac{g \sin \theta}{(1 + C)}$$

$$F_{as} = \frac{2}{5} M \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{2}{7} M g \sin \theta$$

$$= 0,286 Mg \sin \theta$$

Cilindro pieno

$$C = \frac{1}{2}$$

$$\ddot{\alpha}_{CM} = \frac{2}{3} g \sin \theta = 0,667 g \sin \theta$$

$$F_{as} = \frac{1}{3} Mg \sin \theta = 0,333 Mg \sin \theta$$

Anello

7

$$c=1$$

$$a_{CM} = \frac{g \sin \theta}{2} = 0,500 g \sin \theta$$

$$F_{as} = \frac{1}{2} Mg \sin \theta = 0,500 g \sin \theta$$

NOTE

- ① la sfera ha la Δt_{CM} maggiore e per prima raggiunge il fondo;
- ② alla fine del piano inclinato tutti e 3 i corpi avranno la stessa energia cinetica ($= Mgh$), diversamente distribuita nelle 2 forme
- ③ l'accelerazione finale non dipende ne da M ne dal raggio.
 \Rightarrow essi possono avere diverse

8

dimensioni ma la sfera raggiungerà **SEMPRE** il fondo per prima.

⇒ tutte le sfere avranno la STESSA ω_{CM} indipendentemente da M ed R: una biglia e una palla da bowling raggiungono il fondo del piano inclinato nello stesso tempo con la stessa velocità v_{CM} .

$$\text{da } v_f^2 = v_i^2 + 2ax$$

$$v_{CM}^2 = 2\omega_{CM} L = \frac{10}{7} g \sin \theta L$$
$$= \frac{10}{7} gh$$

$$v_{CM} = \sqrt{1,43gh} < \sqrt{2gh} =$$

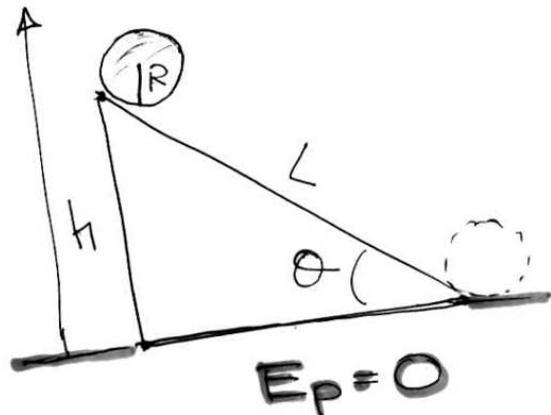
= velocità di una sfera che striscia su un piano inclinato liscio alla fine del percorso



stesso risultato applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica con F_{as} che NON compie lavoro.

$$\Delta E_K = -\Delta E_P$$

$$\begin{aligned}\Delta E_P &= E_{Pf} - E_{Pi} \\ &= -mgh\end{aligned}$$



$$\frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \frac{V_{CM}^2}{R^2} = Mgh$$

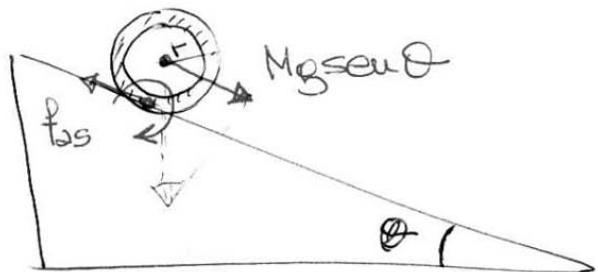
$$\frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5} M R^2 \frac{V_{CM}^2}{R^2} = Mgh$$

$$V_{CM}^2 \left(\frac{1}{2} M + \frac{1}{5} M \right) = Mgh$$

$$V_{CM} = \sqrt{\frac{10}{7} gh} = \sqrt{1,43 gh}$$

Il moto di puro rotolamento può essere anche risolto come tale.

Esempio con l'anello:



$$Mg \sin \theta \tau = I \alpha \quad \alpha = \frac{\omega_{cm}}{r}$$

$$I = Mr^2 + M r^2 = 2Mr^2$$

$$Mg \sin \theta \tau = 2Mr^2 \frac{\omega_{cm}}{r}$$

$$\boxed{\frac{g \sin \theta}{2} = \omega_{cm}}$$