Contenuto del documento:

DOMANDA 01: manca la parte "*Enunciare e dimostrare il teorema della convoluzione nell'ipotesi che $\{a_n\}$ e $x(t)$ siano ad energia finita*".
DOMANDA 02: mancante
DOMANDA 03: completa
DOMANDA 04: mancante
DOMANDA 05: completa
DOMANDA 06: completa
DOMANDA 07: completa
DOMANDA 08: completa
DOMANDA 09: completa
DOMANDA 10: completa
DOMANDA 11: mancante
DOMANDA 12: mancante
DOMANDA 13: completa
DOMANDA 14: completa
DOMANDA 15: completa
DOMANDA 16: mancante, ma forse è a pagina 4.17
DOMANDA 17: completa
DOMANDA 18: completa

1) Fornire l'espressione della convoluzione tra una serie temporale $\{a_n\}$ e una funzione x(t) tempo-continua e continua nei valori. Fornire un esempio di segnali esprimibili mediante tale convoluzione. Enunciare e dimostrare il teorema della convoluzione nell'ipotesi che $\{a_n\}$ e x(t) siano ad energia finita. (pag 2.46)

Data la serie temporale $\{a_n\}$ e la funzione tempo continua x(t), la loro convoluzione definisce una funzione tempo continua espressa da:

$$s(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i x(t - i\,T)$$

La corrispondente relazione tra le trasformate è:

$$S(\omega) = G(\omega)A_s(\omega)$$

Infatti

$$S(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i G(\omega)e^{-j\omega iT} = G(\omega)A_s(\omega)$$

Se

$$a_n=a(nT),$$

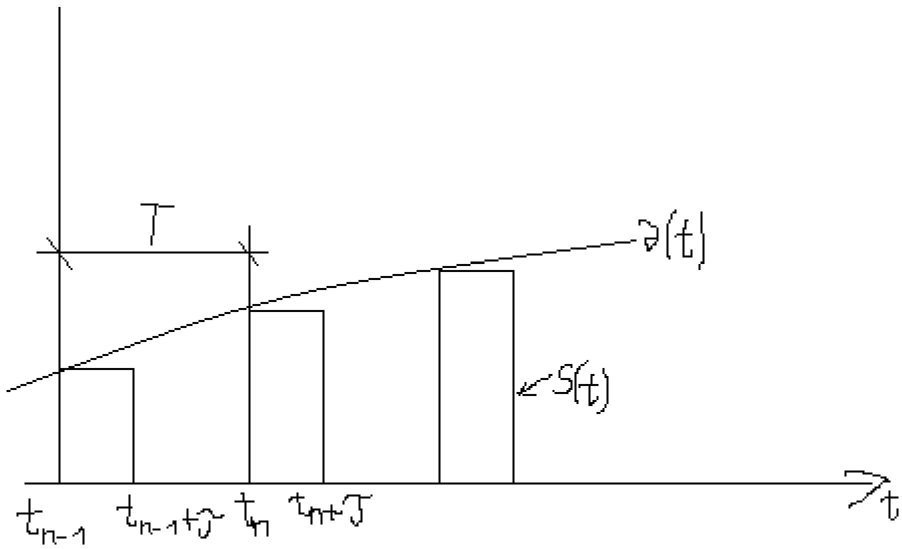
ricordando la formula $A_s(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{a=-\infty}^{\infty} A(\omega + a\omega_0)$, risulta:

$$S(\omega) = \frac{1}{T}G(\omega)\sum_{a=-\infty}^{\infty} A(\omega + a\omega_0)$$

con $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Un possibile esempio può essere il seguente:

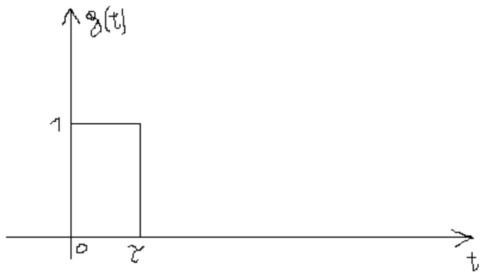
Calcolare la trasformata di Fourier della successione di impulsi rettangolari rappresentata nella figura, ottenuta campionando una funzione tempo-continua x(t) con intervallo T e tenendo i valori campionati per un intervallo pari a τ<T.



La successione di impulsi in esame, aventi intervallo di ripetizione e durata costanti, ma ampiezze variabili, costituisce una successione di impulsi modulata in ampiezza e viene denominata segnale PAM.
Osserviamo che il segnale PAM in questione può essere espresso analiticamente mediante la relazione:

$$s(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a(iT) \quad x(t - i\,T)$$

ove x(T) è l'impulso rettangolare della figura:



s(t) è dunque la convoluzione fra la serie temporale a(nT) e x(t). La sua trasformata è perciò data da:

$$S(\omega) = \frac{1}{T} G(\omega) \sum_{a=-\infty}^{\infty} A(\omega + a\frac{2\pi}{T})$$

D'altra parte per esprimere la trasformata G(ω) basta ricordare che l'impulso è centrato sull'istante τ/2:

$$G(\omega) = \tau \frac{sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}$$

In conclusione, la trasformata del segnale PAM è:

$$s(\omega) = \frac{\tau}{T} \frac{sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} \sum_{a=-\infty}^{\infty} A(\omega + a\frac{2\pi}{T})$$

TEOREMA DI PARSEVAL:
premettiamo due definizioni:
potenza istantanea di x(t):

$$p(t) = x^2(t)\ .$$

Energia di x(t):

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt\ .$$

Sussiste il teorema (di Parseval):

$$E = \int_0^\infty \frac{|x(\omega)|^2}{\pi} d\omega\,. \quad [1]$$

Infatti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t}dt\right]d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, X^*(\omega)d\omega\,. \; [2]$$

Le funzioni x(t) che stiamo considerando vengono anche denominate funzioni ad energia finita. La funzione integranda che compare nella formula [1] e cioè:

$$\xi(\omega) = \frac{|x(\omega)|^2}{\pi}$$

Viene denominata densità spettrale di energia o, più semplicemente, spettro di energia della funzione x(t). Essa è legata allo spettro dalla relazione:

$$\xi(\omega) = \pi V^2(\omega)$$

La formula [2] può essere generalizzata alla considerazione di due funzioni x(t) e y(t), aventi trasformate rispettivamente X(ω) e Y(ω), come segue:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{j\omega t}dt\right]d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)Y^*(\omega)d\omega\;.$$

La relazione ottenuta,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)Y^*(\omega)\,,$$

esprime il teorema di Parseval generalizzato.

3) Calcolare il valor medio e la funzione di autocorrelazione del processo stocastico $\{a_n\}$, discreto nei valori e tempo-discreto, ottenuto dal processo $\{x_n\}$ (serie temporali i cui elementi sono le cifre binarie 0 e 1) con la seguente legge di corrispondenza:

$x_n=0 \rightarrow a_n= -1$
$x_n=1 \rightarrow a_n= 1$

Risulta:

$E[a_n] = (-1)*1/2+1*1/2=0$,

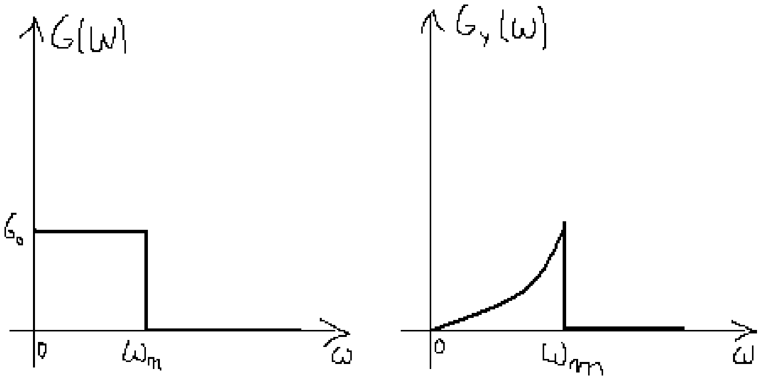
$$C_k = E[a_n a_{n+k}] = \begin{cases} E[a_n^2] = 1 * \frac{1}{2} + 1 * \frac{1}{2} = 1, k = 0 \\ E[a_n]E[a_{n+k}] = [E[a_n]]^2 = 0, k \neq 0 \end{cases}$$

4) Calcolare la densità di probabilità del primo ordine del processo stocastico y(t) all'uscita di un derivatore al cui ingresso sia presente un processo x(t) ergodico e gaussiano con spettro di potenza costante e uguale a G_0 in $(0, \omega_m)$ e nullo altrove.

Il processo y(t) è Gaussiano.

Il suo valore medio, come quello del processo d'ingresso è nullo e il suo spettro di potenza è espresso da:

$$G_y(\omega) = \begin{cases} \omega^2 G_0, per\ 0 \leq \omega \leq \omega_m \\ 0, per\ \omega > \omega_m \end{cases}$$



La sia potenza è pertanto:

$$P_y = E[y^2] = G_0 \int_0^{\omega_m} \omega^2 d\omega = \frac{G_0 \omega_m^3}{3}$$

Tale potenza rappresenta anche la varianza di y(t) e quindi:

$$p_1(y) = \sqrt{\frac{3}{2\pi G_0 \omega_m^3}} e^{-\frac{3y^2}{2G_0\omega_m^3}}$$

5- Definire stazionarietà ed ergodicità di una funzione aleatoria tempo-continua e discreta nei valori. (pag 3.35)

Per introdurre i processi ergodici, diamo dapprima il concetto di stazionarietà.

Fissiamo n istanti di osservazione:

$$t_1, t_2, \ldots, t_n ,$$

La corrispondente n-pla di variabili aleatorie discrete è descritta dalla probabilità di ordine n

$$p_n = p_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \ldots; x_n, t_n)$$

Avente il seguente significato:

$$p_n = p_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \ldots; x_n, t_n) = \text{Prob } \{x(t_1)=x_1, x(t_2)=x_2, \ldots, x(t_n)=x_n\}.$$

poniamo:

$$t_1=t$$
$$t_2=t+\tau_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$t_n=t+\tau_{n-1}$$

e scriviamo quindi:

$$p_n = p_n(x(t_1), t; x(t_2), t+\tau_1; \ldots; x(t_n), t+\tau_{n-1})$$

Definizione: un processo stocastico è detto stazionario quando p_n dipende solo da $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}$ e non da t, qualunque sia n; in altre parole, quando p_n, per ogni n, è invariante rispetto ad una traslazione rigida degli istanti di osservazione.

Indichiamo con

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(q)}$$

I valori che può assumere la funzione x(t).

Una definizione equivalente di stazionarietà è la seguente: un processo x(t) è detto stazionario quando i processi

$$x(t) \text{ e } x(t+t_0)$$

hanno la medesima descrizione statistica, e quindi sono il medesimo processo, qualunque sia t_0.
In particolare, quando un processo è stazionario, la densità di probabilità del primo ordine non dipende dall'istante di osservazione t:

$$p_1[x^{(i)}]=\text{Prob}\{x(t) = x^{(i)}\}.$$

Quindi il valore medio statistico

$$E[x] = \sum_{i=1}^{q} x^{(i)} p_1[x^{(i)}],$$

il valore quadratico medio

$$E[x^2] = \sum_{i=1}^{q} [x^{(i)}]^2\, p_1[x^{(i)}],$$

sono indipendenti da t.

Inoltre la densità di probabilità del secondo ordine non dipende separatamente dai due istanti di osservazione t_1 e t_2, ma dall'intervallo $\tau=t_2-t_1$ esistente fra essi:

$$p_2(x^{(i)}, x^{(r)}; \tau)= \text{Prob}\{x(t) = x^{(i)}, x(t+\tau) = x^{(r)}\}$$

e quindi possiamo scrivere le medie statistiche nella forma:

$$E[x(t)x(t+\tau)] = \sum_{i=1}^{q}\sum_{r=1}^{q} x^{(i)}x^{(r)}P_2[x^{(i)}, x^{(r)}; r] = R(\tau),$$

$$R_0(\tau) = R(\tau) - E^2[x]$$

Un processo si dice stazionario di ordine n quando la precedente proprietà di invarianza è valida fino alla densità di probabilità di ordine n, ma non per quelle di ordine superiore.

Un processo si dice stazionario in senso lato se il valore medio E[x(t)] è indipendente da t e $R(t,\tau)$ è una funzione solo di τ, che indicheremo ancora con $R(\tau)$.

Definizione: un processo stazionario si dice a memoria finita quando esiste un valore finito τ_m tale che, pur avendo osservato il processo fino all'istante t, non è possibile alcuna previsione statistica che tenga conto di tale conoscenza a partire dall'istante $t+\tau_m$.
Il tempo τ_m è detto durata della memoria.

I processi ergodici costituiscono un sottoinsieme di quello dei processi stazionari.

Definizione: un processo è detto ergodico quando ogni funzione campione è caratteristica, con probabilità 1, del processo stesso.

Ciò significa che il risultato di un qualunque rilievo statistico effettuato su una generica funzione dell'insieme coincide, con probabilità 1, con quello dell'analogo rilievo effettuato sull'insieme e quindi non dipende dalla particolare funzione considerata.

Dalla definizione discende che condizione necessaria perché un processo sia ergodico è che esso risulti stazionario.

Si può dimostrare che condizione sufficiente perché un processo stazionario sia ergodico è che esso sia a memoria finita.

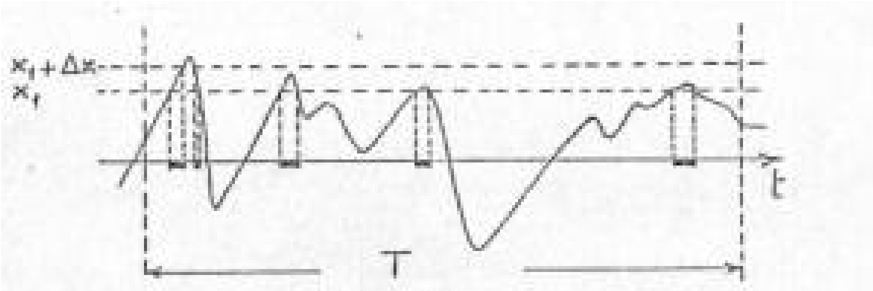
Dalla definizione discende, in particolare, che in un processo ergodico una qualsiasi media statistica è uguale, con probabilità 1, alla corrispondente media temporale.

I rilievi in questione non sono necessariamente limitati alla valutazione di valori medi. Ad esempio la densità di probabilità del primo ordine può essere determinata sia con un rilievo sull'insieme e dalla relazione:

$$p_1(x_1, t_1) \cong \frac{\Delta N}{N\Delta x}$$

Avendo indicato con ΔN il numero di funzioni che all'istante t_1, assumono un valore compreso fra x_1 e $x_1+\Delta x$.

La densità di probabilità del primo ordine può essere determinata anche con un rilievo su un singolo campione del processo, come mostrato nella figura seguente.



Se T è la durata dell'osservazione e T la somma degli intervalli di tempo in cui è soddisfatta la relazione:

$$x_1 \leq x(t) \leq x_1 + \Delta x$$

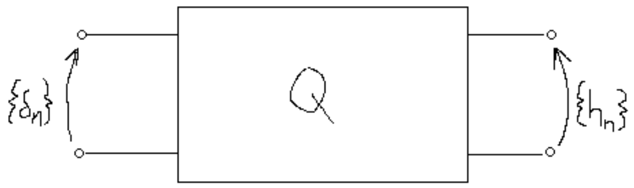
Possiamo infatti scrivere, per T sufficientemente grande e Δx sufficientemente piccolo:

$$\mathrm{Prob}\{x(t) = x(i)\} \backsimeq \frac{\Delta T}{T \Delta x} \ .$$

6)Definire la risposta impulsiva discreta e la funzione di trasferimento di un sistema discreto lineare e tempo-invariante

La risposta impulsiva discreta $\{h_n\}$ di un sistema discreto lineare tempo-invariante è la risposta alla serie temporale $\{\delta_n\}$ definita da:

$$\delta_n = \begin{cases} 1, n = 0, \\ 0, n \neq 0. \end{cases}$$



Si noti che $\{\delta_n\}$ coincide con la serie i cui termini sono espressi da: $x_n = x(nT) = \begin{cases} x_0 \neq 0, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$ con $x_0=1$.

La sua trasformata di Fourier, in virtù della formula $x_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\omega nT} = x_0$, è pertanto eguale ad 1.

La conoscenza di $\{h_n\}$ consente di esprimere la risposta ad una qualsiasi serie temporale d'ingresso. Infatti osservando che:

$$x_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i \delta_{n-i} = \{x_n\} * \{\delta_n\},$$

dalle condizioni di linearità e tempo-invarianza discende la relazione:

$$y_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i h_{n-i} = \{x_n\} * \{\delta_n\},$$

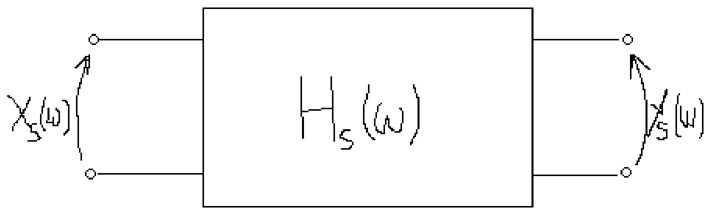
che esprime la convoluzione fra la serie d'ingresso e la risposta impulsiva discreta.

La funzione di trasferimento di un sistema discreto lineare tempo-invariante è la trasformata secondo Fourier della risposta impulsiva discreta:

$$H_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-jn\omega T}$$

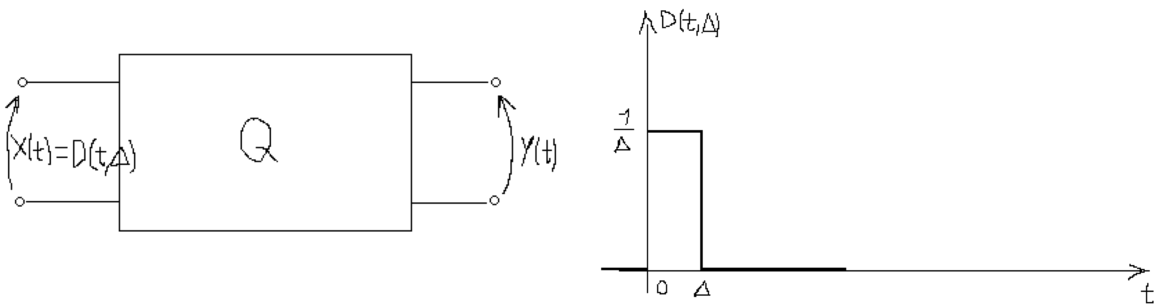
Se le serie temporali di ingresso e di uscita sono dotate di trasformata secondo Fourier, rispettivamente $X_s(\omega)$ e $Y_s(\omega)$, per il teorema della convoluzione vale la relazione:

$$Y_S(\omega) = X_S(\omega)H_S(\omega).$$



7)definire la risposta impulsiva di un quadripolo tempo continuo lineare e tempo invariante. (pag 3.29) La funzione di trasferimento caratterizza il comportamento di una rete lineare nel domino delle frequenze. Introduciamo ora un'altra caratterizzazione, questa volta nel dominio dei tempi.

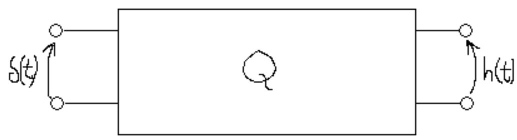
Sollecitiamo a tal fine la rete con un impulso, come mostrato in figura



Con riferimento alla risposta y(t) all'impulso D(t,Δ), poniamo:

$$h(t) = \lim_{\Delta \to 0} y(t)$$

Il limite definisce la risposta impulsiva della rete. In figura rappresentiamo in forma simbolica la definizione ora data.



Per un sistema causale, condizione necessaria per la fisica realizzabilità è:

$$h(t) = 0,\ t < 0.$$

La risposta impulsiva consente di esprimere l'uscita della rete, quando al suo ingresso è presente un generico segnale x(t).
Ricordiamo a tal fine la formula $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-z)d\tau = x(t)\delta(t)$ e l'interpretazione formale che ne abbiamo dato come "somma" di funzioni impulsive, la generica delle quali

$$x(\tau)d\tau\delta(t-z)$$

È applicata all'istante τ ed ha intensità infinitesima x(τ)dτ.

La risposta a $x(\tau)d\tau\delta(t-z)$ è:

$$x(\tau)d\tau h(t-\tau)$$

e quindi a x(t) la rete risponde con

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t)h(t) \text{ [1]}$$

o anche, ricordando che h(t) = 0, t < 0

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Nota quindi la risposta impulsiva di una rete, possiamo determinare la sua uscita qualunque sia il segnale di ingresso, sempre operando nel dominio dei tempi.
Possiamo quindi affermare che la risposta impulsiva caratterizza un quadripolo nel dominio dei tempi.

Vediamo ora come tale rappresentazione è legata a quella nel dominio delle frequenze , espressa dalla funzione di trasferimento.

A tal fine, con riferimento alla prima figura, scriviamo:

$$F(y(t))=H(\omega)F\,[D(t,\Delta)]$$

Passando al limite per $\Delta \rightarrow 0$, ricordando che

$$\lim_{\Delta\to 0} F[D(t,\Delta)] = 1$$

risulta:

$$H(\omega) = F[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

ed anche:

$$h(t) = F^{-1}[H(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

In altri termini, risposta impulsiva e funzione di trasferimento di una rete lineare sono legate fra loro dalla trasformazione di Fourier.
Di conseguenza, la formula [1] discende anche dal teorema della convoluzione applicato alla relazione

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

Questa formula richiede però che i segnali d'ingresso x(t) e di uscita y(t), siano dotate di trasformate secondo Fourier X(ω) e Y(ω), rispettivamente, mentre la formula [1] vale in condizioni più generali.

DEFINIZIONE DI RISPOSTA IMPULSIVA DISCRETA $\{h_n\}$ di un sistema discreto lineare tempo-invariante: è la risposta alla serie temporale $\{\delta_n\}$ definita da:

$$\delta_n = \begin{cases} 1, & n = 0\,, \\ 0, & n \neq 0\,. \end{cases}$$

Si noti che $\{\delta_n\}$ coincide con la serie i cui termini sono espressi dalla formula:

$$X_n = x(nT) = \begin{cases} x_0 \neq 0, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

con x_0=1. La sua trasformata di Fourier, in virtù dell'espressione:

$$X_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-jn\omega T} = x_0$$

È pertanto eguale ad 1.
La conoscenza di $\{h_n\}$ consente di esprimere la risposta ad una qualsiasi serie temporale d'ingresso.
Infatti osservando che

$$x_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i \delta_{n-i} = \{x_n\} * \{\delta_n\},$$

dalle condizioni di linearità e tempo-invarianza discende la relazione:

$$y_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i h_{n-i} = \{x_n\} * \{h_n\},$$

che esprime la convoluzione fra la serie d'ingresso e la risposta impulsiva discreta.

8)Definire i segnali a potenza finita e con riferimento ad essi la funzione di autocorrelazione e la densità di spettrale di potenza (pag 4.4, pag 4.13, pag 4.19)

Una funzione x(t) si dice a potenza finita quando esiste, non nullo, il valore medio temporale della potenza istantanea:

$$P = < x^2(t) > = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt$$

Esso viene chiamato potenza media o, più semplicemente, potenza di x(t).
La radice quadrata della potenza P definisce il valore efficace x_{eff} di x(t):

$$x_{eff} = \sqrt{P}$$

Da questa definizione discende immediatamente che $P=x^2_{eff}$
Le funzioni a potenza finita, l'integrale $E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt$ non converge. In generale, esse non ammettono trasformata di Fourier.

Sia x(t) una funzione a potenza finita. La sua funzione di autocorrelazione c(τ) è definita dalla media temporale del prodotto x(t)x(t+τ):

$$c(\tau) = < x(t)x(t+\tau) > = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau)dt$$

Citiamo alcune proprietà della funzione di autocorrelazione di una funzione a potenza finita, che sono le stesse di una funzione ad energia finita.

1) C(0) rappresenta la potenza di x(t):

$$C(0)=<x^2(t)>$$

2) C(τ) è funzione pari di τ:

$$C(-\tau)=C(\tau).$$

Infatti:

$$c(-\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t-\tau)dt$$

e ponendo $t - \tau = \xi$:

$$c(-\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}-\tau} x(\xi+\tau)x(\xi)d\xi = C(\tau).$$

3) C(0) è uguale al massimo valore assunto da |C(τ)|:

$$|C(\tau)|\leq C(0).$$

Calcoliamo infatti la quantità non negativa:

$$< [x(t) \pm x(t+\tau)]^2 > = < x^2(t+\tau) > \pm 2 < x(t)x(t+\tau) > =$$
$$=2\,[C(0) \pm C(\tau)] \geq 0,$$

da cui segue |C(τ)|≤C(0).

Quando x(t) ha valor medio temporale <x(t)> diverso da 0, si definisce funzione di auto covarianza V(τ) la funzione di autocorrelazione della differenza

$$x(t) - < x(t) >$$

il cui valor medio è evidentemente 0.

Risulta:

$$V(\tau) =< [x(t) - < x(t) >][x(t+\tau) - < x(t) >] >= C(\tau) - [< x(t) >]^2$$

Salvo avviso contrario considereremo funzioni a valor medio nullo, senza ledere con ciò la generalità potendoci sempre ricondurre a questo caso effettuando la differenza x(t) - < x(t) >.

La funzione di autocorrelazione si identifica perciò con la funzione di auto covarianza e verrà usata anche in sua vece, già a partire dalla prossima formula.

Una funzione x(t) è parzialmente coerente quando esiste, finita, la quantità:

$$\tau_z^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 C^2(\tau) d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} C^2(\tau) d\tau} \quad [1]$$

la cui radice quadrata di τ_z viene chiamata tempo di coerenza.

Il tempo di coerenza è suscettibile della seguente interpretazione geometrica: nel piano cartesiano (τ,y) esso rappresenta il raggio d'inerzia, rispetto all'asse y, dell'area sottesa dalla curva di equazione $y=C^2(\tau)$.

La formula [1] implica che siano finiti numeratore e denominatore.
In particolare scriviamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} C^2(\tau) d\tau < \infty\,, \qquad [2]$$

da cui

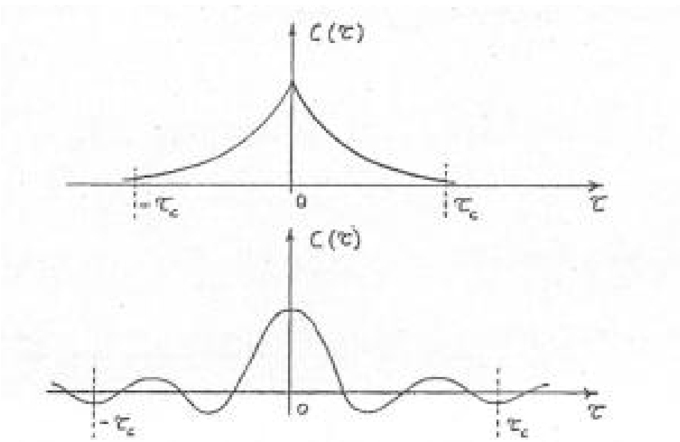
$$\lim_{\tau \to \mp\infty} C(\tau) = 0$$

Quest'ultima mette in evidenza che esiste un valore t_0 di $|\tau|$ a partire dal quale $C(\tau)$ è trascurabile in un assegnato ambito di approssimazione:

$$C(\tau) \approx 0 \text{ per } |\tau| > \tau_0 \quad [3]$$

Spesso si fa riferimento a τ_0, e non a τ_z, con il termine tempo di coerenza. Tale tempo, con il significato espresso dalla formula [3], viene anche chiamato tempo di correlazione.

A titolo esemplificativo, riportiamo in figura possibili andamenti della funzione di autocorrelazione $C(\tau)$ che mettono in evidenza qualitativamente le proprietà enunciate.



La formula [2] che assumeremo verificata, è condizione sufficiente per l'esistenza della trasformata secondo Fourier $F[C(\tau)]$ di $C(\tau)$, che, ricordando l'uguaglianza $C(-\tau)=C(\tau)$, può essere scritta nella forma:

$$F[C(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau = 2\int_{0}^{\infty} C(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau$$

Questa formula mette in evidenza che la trasformata di $C(\tau)$ è funzione reale e pari di ω.

FUNZIONI A POTENZA FINITA: SPETTRO DI POTENZA

Consideriamo una funzione x(t) a potenza finita ed esprimiamo la funzione di autocorrelazione C(τ) come antitrasformata della sua trasformata:

$$C(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F[C(\tau)]e^{j\omega\tau}d\tau$$

In particolare, per τ = 0, ricordando che la trasformata di C(τ) è funzione reale pari, risulta:

$$C(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F[C(\tau)]d\omega = \int_{0}^{\infty}\frac{F[C(\tau)]}{\pi}d\omega.$$

Ponendo

$$G(\omega) = \frac{F[C(\tau)]}{\pi} \quad [4]$$

La potenza P di x(t), che è data da C(0), può essere scritta nella forma:

$$P = \int_{0}^{\infty} G(\omega)d\omega \quad [5].$$

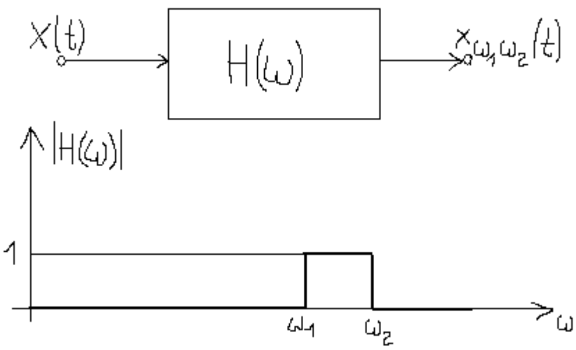
L'integrale della funzione G(ω), esteso a tutto il semiasse non negativo delle pulsazioni, esprime dunque la potenza di x(t).

Dimostriamo ora la seguente proprietà, che è caratteristica della formula [4].
Se con un filtro passa-banda ideale isoliamo le componenti spettrali di x(t) interne ad una generica banda (ω_1,ω_2) (vedi la figura successiva), la loro potenza è espressa dall'integrale di G(ω) esteso all'intervallo (ω_1,ω_2):

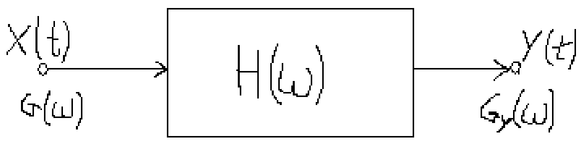
$$< x^2_{\omega_1\omega_2}(t) >= \int_{\omega_2}^{\omega_1} G(\omega)d\omega \quad [6]$$

Qualunque siano ω_1e ω_2 (in paricolare per $\omega_1 = 0$ e $\omega_2 = \infty$ ritroviamo la formula [5]).

La proprietà caratteristica ora enunciata giustifica il nome di densità spettrale di potenza o spettro di potenza dato dalla funzione G(ω).



Prima di procedere alla dimostrazione, vediamo come si modifica lo spettro di potenza quando una funzione x(t) subisce una trasformazione lineare rappresentata da dalla funzione di trasferimento H(ω) (vedi figura seguente).



Dalle formule

$$F\left[C_y(\tau)\right] = |H(\omega)|^2 F[C(\tau)] \;\; e \;\; [4]$$

discende immediatamente:

$$G_y(\omega) = |H(\omega)|^2 G(\omega).$$

In virtù della proprietà espressa dalla [5] la potenza dell'uscita vale:

$$P_y = \int_{0}^{\infty} G(\omega)d\omega = \int_{0}^{\infty} |H(\omega)|^2 G(\omega)d\omega.$$

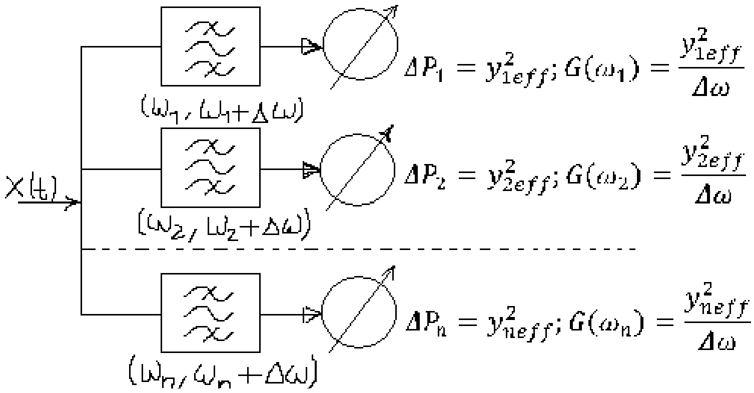
Da questa formula discende:

che appunto è la [6].

In particolare, ponendo nella [6] $\omega_1=\omega$ e $\omega_2=\omega+\Delta\omega$ ed indicando con ΔP la potenza dell'uscita, possiamo scrivere:

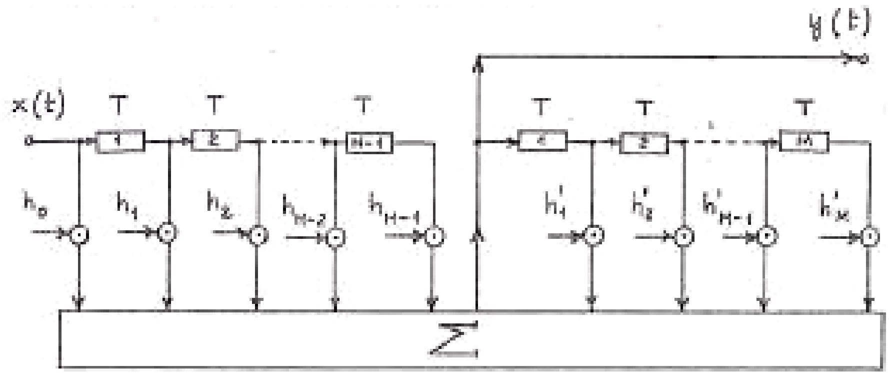
e quando $\Delta\omega$ è sufficientemente piccolo:

Questa formula suggerisce il metodo di misura dello spettro di potenza riportato nella seguente figura.



9)Disegnare lo schema a blocchi di un filtro trasversale e determinarne la funzione di trasferimento. Nel caso particolare di un filtro trasversale simmetrico, con N coefficiente dispari, indicarne una possibile metodologia sub-ottima di progetto. (pag 3.20)

Consideriamo il quadripolo di figura, costituito da linee di ritardo pari a T, da prese che prelevano versioni diversamente ritardate dei segnali d'ingresso x(t) e di uscita y(t), da circuiti moltiplicatori e, infine, da un sommatore. I coefficienti moltiplicativi h_k e h'_k sono opportune costanti.



Per ricavare la funzione di trasferimento, scriviamo:

La funzione di trasferimento, oltre che dal ritardo T, dipende dai valori di N ed M e da quelli dei coefficienti h_k e h'_k.

Quando i coefficienti h'_k sono nulli, la funzione di trasferimento è:

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-jk\omega T}$$

Quando i coefficienti h_k sono nulli per $k \neq 0$ e $h_0=1$, la relativa funzione di trasferimento è:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{M} h'_k e^{-jk\omega T}}$$

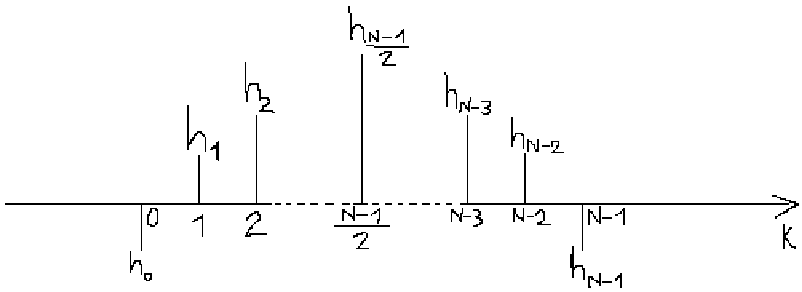
Osserviamo che in ogni caso la funzione di trasferimento è periodica con periodo:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Imponiamo la simmetria dei coefficienti, cioè:

$h_k = h_{N-1-k}$, con k=0, 1, …, N-1 [1]

Consideriamo il caso di N dispari.
In questo caso la formula [1] è schematizzata nella figura:



Posto n=(N-1)/2 la condizione di simmetria [1] si scrive:
$h_{n-r} = h_{n+r}$, r=1, 2, …, n.
La funzione di trasferimento diviene:

$$H(\omega) = e^{-jn\omega t} \sum_{k=0}^{2n} h_k e^{-j(k-n)\omega T}$$

Poniamo

k=n+r

e scriviamo:

$$H(\omega) = e^{-jn\omega t} \sum_{r=-n}^{n} h_{n+r} e^{-jr\omega T} = e^{-jn\omega T}\left[h_n + 2\sum_{r=1}^{n} h_{n-r} cos r\omega T\right].$$

In conclusione, posto:

$$G(\omega) = h_n + 2\sum_{r=1}^{n} h_{n-r}\cos(r\omega T),\ \ [2]$$

risulta

$$H(\omega) = G(\omega) e^{-jn\omega T}.\ [3]$$

Il progetto di un filtro trasversale richiede il calcolo dei valori di N e dei coefficienti h_k nella formula [2] che rendono soddisfatte, nelle bande di competenza e secondo specifiche assegnate, le approssimazioni: $G(\omega) \approx 1$, $G(\omega) \approx 0$.
Queste approssimazioni debbono essere realizzate mediante somma di sinusoidi, il cui numero e le cui ampiezze sono appunto le incognite del problema.

La teoria dell'approssimazione ci fornisce algoritmi ottimali, che realizzano $G(\omega) \approx 1$, $G(\omega) \approx 0$ con andamenti di tipo oscillatorio attorno ai valori desiderati 1 e 0.

Vale però la pena di parlare di procedimento sub-ottimo, che viene suggerito immediatamente dall'espressione [2]. Osserviamo infatti che se fosse n=∞ questa relazione altro non sarebbe che lo sviluppo in serie di Fourier di una funzione periodica e pari. Lo sviluppo in questione ci darebbe quindi i h_k cercati e consentirebbe di realizzare qualche caratteristica di ampiezza, anche ideale, con discontinuità in corrispondenza alle pulsazioni di taglio. Ciò richiederebbe però un filtro di lunghezza infinita, non fisicamente realizzabile, che peraltro introdurrebbe un ritardo infinito, come mostrato dalla caratteristica di fase presente nella formula [3].
In realtà, la somma che compare nella formula [2] comprende un numero n finito di termini: un procedimento sub-ottimo per realizzare, nell'ambito di una prefissata approssimazione, una qualunque caratteristica di ampiezza (ovviamente periodicizzata) potrebbe allora essere il seguente:
- si sviluppa dapprima in serie di Fourier la caratteristica assegnata
- si provvede poi a troncare tale sviluppo in modo da mantenere un numero di termini sufficiente ad approssimare tale caratteristica secondo le specifiche stabilite.

Il semplice procedimento ora presentato non è ottimo nel senso che il numero di termini da considerare, e quindi la lunghezza del filtro, risulta superiore a quello a cui condurrebbero procedimenti ottimali (e che produrrebbero, ovviamente, diversi coefficienti h_k).

10) Dare la definizione di ergodicità di una funzione aleatoria tempo-continua e continua nei valori e indicare come è possibile determinarne la densità di probabilità del primo ordine, disponendo di una sola funzione campione dell'insieme di funzioni che definisce la funzione aleatoria.

Per introdurre i processi ergodici, diamo dapprima il concetto di stazionarietà.
Consideriamo allo scopo la densità di probabilità di ordine n

$$p_n = p_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \ldots; x_n, t_n)$$

poniamo:

$$\begin{gathered} t_1=t \\ t_2=t+\tau_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_n=t+\tau_{n-1} \end{gathered}$$

e scriviamo quindi:

$$p_n = p_n(x_1, t; x_2, t+\tau_1; \ldots; x_n, t+\tau_{n-1})$$

Definizione: un processo stocastico è detto stazionario quando p_n dipende solo da $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}$ e non da t, qualunque sia n; in altre parole, quando p_n, per ogni n, è invariante rispetto ad una traslazione rigida degli istanti di osservazione.

Una definizione equivalente di stazionarietà è la seguente: un processo x(t) è detto stazionario quando i processi

$$x(t) \text{ e } x(t+t_0)$$

hanno la medesima descrizione statistica, e quindi sono il medesimo processo, qualunque sia t_0.
In particolare, quando un processo è stazionario, la densità di probabilità del primo ordine non dipende dall'istante di osservazione t:

$$p_1=p_1(x).$$

Quindi il valore medio statistico

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x)dx,$$

il valore quadratico medio

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_1(x)dx,$$

e la varianza

$$\sigma^2=E[x^2]-E^2[x]$$

sono indipendenti da t.

Inoltre la densità di probabilità del secondo ordine non dipende separatamente dai due istanti di osservazione t_1 e t_2, ma dall'intervallo $\tau=t_2-t_1$ esistente fra essi:

$$p_2 = p_2(x_1, x_2; \tau)$$

e quindi possiamo scrivere le medie statistiche nella forma:

$$E[x(t)x(t+\tau)] = \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} x_1 x_2 p_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 = R(\tau),$$

$$R_0(\tau) = R(\tau) - E^2[x]$$

Un processo si dice stazionario di ordine n quando la precedente proprietà di invarianza è valida fino alla densità di probabilità di ordine n, ma non per quelle di ordine superiore.

Un processo si dice stazionario in senso lato se il valore medio $E[x(t)]$ è indipendente da t e $R(t,\tau)$ è una funzione solo di τ, che indicheremo ancora con $R(\tau)$.

Definizione: un processo stazionario si dice a memoria finita quando esiste un valore finito τ_m tale che, pur avendo osservato il processo fino all'istante t, non è possibile alcuna previsione statistica che tenga conto di tale conoscenza a partire dall'istante $t+\tau_m$.
Il tempo τ_m è detto durata della memoria.

I processi ergodici costituiscono un sottoinsieme di quello dei processi stazionari.

Definizione: un processo è detto ergodico quando ogni funzione campione è caratteristica, con probabilità 1, del processo stesso.

Ciò significa che il risultato di un qualunque rilievo statistico effettuato su una generica funzione dell'insieme coincide, con probabilità 1, con quello dell'analogo rilievo effettuato sull'insieme e quindi non dipende dalla particolare funzione considerata.

Dalla definizione discende che condizione necessaria perché un processo sia ergodico è che esso risulti stazionario.

Si può dimostrare che condizione sufficiente perché un processo stazionario sia ergodico è che esso sia a memoria finita.

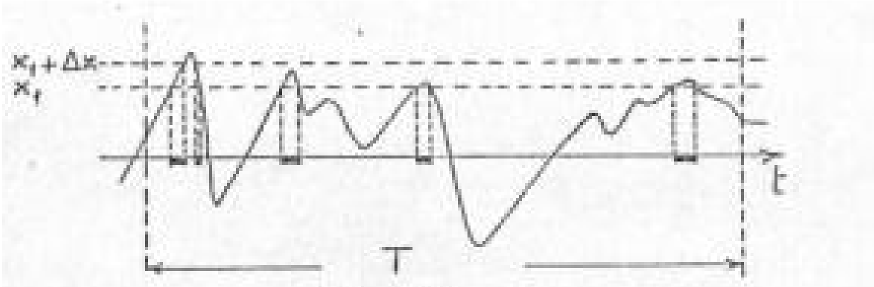
Dalla definizione discende, in particolare, che in un processo ergodico una qualsiasi media statistica è uguale, con probabilità 1, alla corrispondente media temporale.

I rilievi in questione non sono necessariamente limitati alla valutazione di valori medi. Ad esempio la densità di probabilità del primo ordine può essere determinata sia con un rilievo sull'insieme e dalla relazione:

$$p_1(x_1, t_1) \cong \frac{\Delta N}{N \Delta x}$$

Avendo indicato con ΔN il numero di funzioni che all'istante t_1, assumono un valore compreso fra x_1 e $x_1+\Delta x$.

La densità di probabilità del primo ordine può essere determinata anche con un rilievo su un singolo campione del processo, come mostrato nella figura seguente.



Se T è la durata dell'osservazione e T la somma degli intervalli di tempo in cui è soddisfatta la relazione:

$$x_1 \leq x(t) \leq x_1 + \Delta x$$

Possiamo infatti scrivere, per T sufficientemente grande e Δx sufficientemente piccolo:

$$p_1(x_1) \backsimeq \frac{\Delta T}{T\Delta x} .$$

13) dare la definizione di quadripolo lineare tempo invariante, definirne la funzione di trasferimento e determinare la risposta y(t) al tono sinusoidale x(t)=Mcos(ωt-φ) applicato all'ingresso. Fornire almeno una delle due possibili forme equivalenti della risposta y(t) del quadripolo quando all'ingresso è presente un segnale x(t) trasformabile secondo Fourier. (pag 3.2)

Consideriamo un quadripoli in cui x(t) indica un segnale d'ingresso tempo-continuo e y(t)=Q[x(t)] la corrispondente risposta, essa pure tempo-continua.
E' importante sottolineare che questa formula è rappresenta una trasformazione di x(t) in y(t), con y(t) dipendente in generale dall'intero andamento di x(t): ciò prevede la conoscenza dell'intera forma d'onda x(t) e la sua successiva elaborazione per produrre y(t).

Quando il quadripolo è un circuito ai cui morsetti di ingresso è applicata x(t) e, durante l'evoluzione di quest'ultima, si manifesta la risposta y(t), il valore assunto da y in ogni istante t dipende solo dai valori passati e presente di x(t) [sistema causale].

Nel caso in cui il quadripolo Q non contiene elementi di memoria (come componenti reattivi che immagazzinano energia e quindi introducono memoria del passato) si ha una corrispondenza istantanea fra la grandezza di uscita y e quella di ingresso x e nella formula y(t)=Q[x(t)], Q è segno di funzione: y è dunque funzione di funzione del tempo e in ogni istante t il suo valore dipende solo da quello contemporaneo dell'ingresso.

Ciò premesso, il quadripolo sia:
- lineare, cioè $Q[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)] = c_1Q[x_1(t)] + c_2Q[x_2(t)]$ [1]
  Qualunque siano c_1, c_2, $x_1(t)$ e $x_2(t)$
- tempo-invariante, cioè
  $Q[x(t-\tau)] = y(t-\tau)$

Qualunque sia l'entità della traslazione τ.

In particolare dalla [1], assumendo $c_2 = 0$, discende:
$Q[c_1x_1(t)] = c_1Q[x_1(t)]$
Da cui, per $c_1 = 0$, abbiamo:
Q[0]=0.

In altri termini, quando l'ingresso è identicamente nullo, anche l'uscita è identicamente nulla.

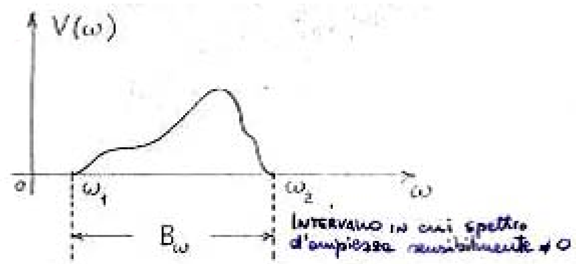
Facciamo ora riferimento a quadripoli lineari tempo-invarianti.

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO
Consideriamo un segnale d'ingresso sinusoidale:

$$x(t) = V_{xM}\cos(\omega t - \varphi_x) = \mathrm{Re}\{V'_x e^{j\omega t}\},$$
ove il numero complesso rappresentativo V'_x è espresso da:
$$\dot{V}_x = V_{xM}e^{-j\varphi_x}$$
Per le ipotesi fatte, l'uscita è anch'essa sinusoidale con la stessa pulsazione ω dell'ingresso:
$$y(t) = V_{yM}\cos(\omega t - \varphi_y) = Re\{\dot{V}_x e^{j\omega t}\},$$
ove
$$\dot{V}_y = V_{yM}e^{-j\varphi_y}$$
La funzione di trasferimento è definita dal rapporto fra i numeri complessi rappresentativi dell'uscita e dell'ingresso:
$$H = H(\omega) = \frac{\dot{V}_y}{\dot{V}_x} = \frac{V_{yM}}{V_{xM}}e^{-j(\varphi_y-\varphi_x)}\ .$$
Posto:
$$H(\omega)=T(\varphi)e^{-j\beta(\omega)},$$
risulta:
$$T(\omega) = V_{yM} / V_{xM}\ ,\quad \beta(\omega) = \varphi_y - \varphi_x$$

T = T(ω) = Caratteristica di ampiezza
β = β(ω) = caratteristica di fase
dalle definizioni date discende:
$$y(t) = T(\omega)V_{xM}\cos[\omega t - \varphi_x - \beta(\omega)].\quad [2]$$
Questa formula esprime la risposta di una rete, di cui si nota la funzione di trasferimento $H(\omega)$, ad un segnale sinusoidale.

Mostriamo ora come la conoscenza di H(ω) consenta di esprimere la risposta ad un qualunque segnale di ingresso x(t) dotato di trasformata secondo Fourier.
$$x(t) = \int_0^\infty V(\omega)\cos[\omega t - \varphi(\omega)]d\omega.$$
Ogni "sinusoide" di ampiezza infinita costituente il segnale di ingresso
$$V(\omega)d\omega\cos[\omega t - \varphi(\omega)]$$
Produce in virtù della [2], la seguente risposta:
$$V(\omega)T(\omega)d\omega cos[\omega t - \varphi_x - \beta(\omega)].$$
Per la linearità della rete, sommando le risposte alle singole sollecitazioni sinusoidali, risulta infine:
$$y(t) = \int_0^\infty V(\omega)T(\omega)\cos[\omega t - \varphi(\omega) - \beta(\omega)]d\omega\quad [3]$$
Questa esprime l'uscita del quadripolo tramite il suo integrale di Fourier.
$$x(\omega) = \pi V(\omega)e^{-j\varphi(\omega)}\quad \omega \geq 0$$
$$y(\omega) = \pi V(\omega)e^{-j[\varphi(\omega)+\beta]}\quad \omega \geq 0$$
Essendo X(ω)=F[x(t)] e Y(ω))=F(y(t)).
Sul semiasse non negativo delle pulsazioni sussiste quindi la relazione:
$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}\ .\quad [4]$$
Peraltro, essendo le trasformate definite sull'intero asse ω, la formula permette di definire la funzione di trasferimento H(ω) per ogni valore di ω.
Risulta:
$$H(-\omega) = H^*(\omega),\ T(-\omega) = T(\omega),\ \beta(-\omega) = -\beta(\omega).$$
Dalla [4] discende Y(ω)=X(ω)H(ω), che consente di calcolare y(t) come anti trasformata del prodotto X(ω)H(ω) secondo la procedura sotto schematizzata:
$$x(t) \xrightarrow{F} X(\omega) \rightarrow Y(\omega)H(\omega) \xrightarrow{F^{-1}} y(t)\ .$$
In pratica qualunque segnale ha banda E_ω finita.
Ad esempio, si consideri la figura seguente corrispondente al segnale:
$$x(t) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} V(\omega)\cos[\omega t - \varphi(\omega)]d\omega$$



Per esprimere la risposta della rete mediante la [3], basta conoscere l'andamento delle caratteristiche di ampiezza $T(\omega)$ e di fase $\beta(\omega)$ sulla bandaB_ω, essendo ininfluente il loro comportamento al di fuori di essa. Con riferimento all'esempio precedente, risulta:

14) Enunciare e dimostrare il teorema del campionamento dei tempi (pag 2.40)

Riprendiamo in considerazione l'operazione di campionamento rappresentata in figura.

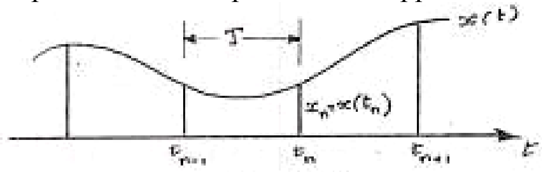


Fig. 2.9.1

I valori x_n=$x(t_n)$ sono detti valori campionati, gli istanti di lettura t_n istanti di campionamento, l'intervallo costante t che li separa è detto intervallo di campionamento e il suo inverso, $1/T = f_0$, frequenza di campionamento.

Senza ledere la generalità possiamo porre $t_n = nT$, (a tal fine basta assumere l'origine dei tempi in uno degli istanti di campionamento); la successione dei valori campionati costituisce quindi la serie temporale:

$$x_n = x(nT),\ n = \dots, -1, 0, 1, \dots .$$

Poniamoci il problema se e quando la conoscenza dei soli valori campionati consente di ricostruire l'intera forma d'onda.

Se non formuliamo alcuna condizione, la risposta è evidentemente negativa in quanto esistono infinite funzioni che negli istanti nT assumano i valori x_n.

Osserviamo tuttavia che, in virtù della formula

la conoscenza dei valori campionati equivale a quella della ripetizione periodica della trasformata $X(\omega)$ di $x(t)$, con periodo

che rappresenta la pulsazione corrispondente alla frequenza f_0 di campionamento.

La trasformata $X(\omega)$ ed altri termini della serie a secondo membro della [5], sono rappresentati, in modulo nella figura seguente.

Abbiamo fatto riferimento ad una funzione passa-basso ed abbiamo indicato con ω_m la massima pulsazione a cui è apprezzabile lo spettro di $x(t)$ (la corrispondente frequenza è $f_m = \omega_m/2\pi$).

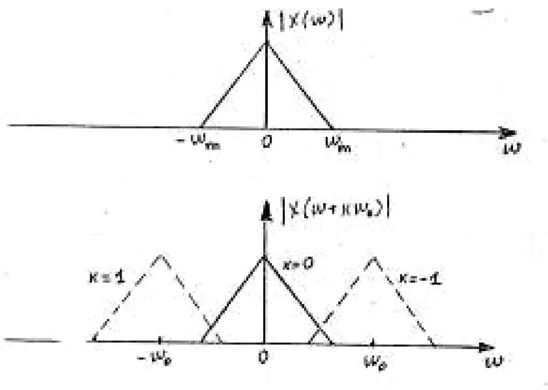


fig. 2.9.2

Come tale figura pone in chiara evidenza, la conoscenza della ripetizione periodica di X(ω) non consente in generale di risalire a X(ω), e quindi a x(t).
E' sufficiente però che si presenti la circostanza della prossima figura, nella quale i diversi termini occupano bande distinte, per poter risalire da $X_s(\omega)$ a X(ω).

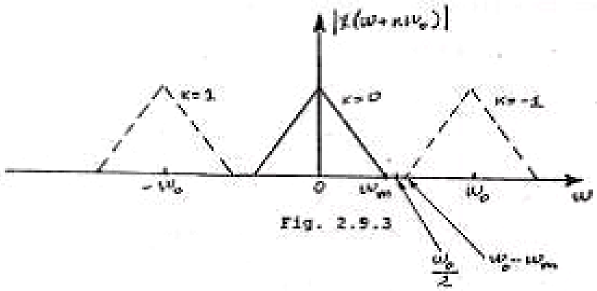


Fig. 2.9.3

La separazione dei termini mostrata nella precedente figura avviene quando: $\omega_m \leq \omega_0 - \omega_m$, $\omega_0 \geq 2\omega_m$
o, con riferimento alle frequenze:

$$f_0 \geq 2\ f_m, \quad [6]$$

che equivale alla: $T \leq 1/2f_m$.
In conclusione, quando è verificata la condizione [6], cioè la frequenza di campionamento è maggiore del doppio della massima frequenza di x(t), la conoscenza dei valori campionati invidua in maniera univoca la funzione originaria x(t).

Notiamo la perfetta analogia fra il teorema del campionamento nel dominio dei tempi, ora discusso, e quello del campionamento nel dominio dei tempi, ora discusso, e quello del campionamento nel dominio delle frequenze: sono semplicemente scambiati i ruoli delle variabili tempo e frequenza.

Sotto la condizione sufficiente [6] vogliamo ora esprimere x(t) in funzione dei suoi valori campionati x(nT).
A tal fine, ricordando la formula ed osservando la figura precedente (2.9.3), possiamo affermare che X(ω) coincide con $TX_S(\omega)$ in ogni intervallo $(-\Omega, \Omega)$ con $\omega_m \leq \Omega \leq \omega_0 - \omega_m$.
Per ragioni che preciseremo fra poco, scegliamo $\Omega = \omega_0 / 2$, punto centrale di (ω_m, $\omega_0 - \omega_m$).

Scriviamo dunque:

Ricordando la formula
abbiamo:

In conclusione, posto

INTERPRETAZIONE GRAFICA:

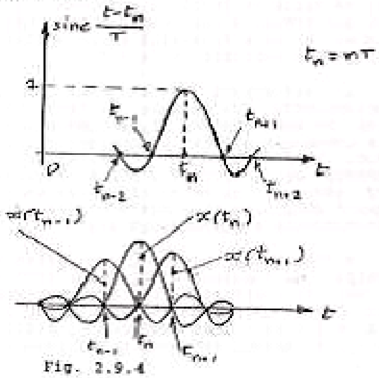


Fig. 2.9.4

Possiamo scrivere:

ossia le funzioni sinc[(t-nT)/T] hanno banda (0, π/2).
La [8] è suscettibile di una interessante interpretazione derivante dal fatto che le funzioni ora citate sono fra loro ortogonali. Infatti, in virtù del teorema di Parseval generalizzato:

Dunque la [8] rappresenta uno sviluppo di x(t) in serie di funzioni ortogonali i cui coefficienti sono gli stessi valori campionati x(nT). Tale interpretazione è resa possibile dalla scelta $\Omega = \omega_0 / 2$ effettuata nello scrivere la [7].

E' importante sottolineare che il teorema del campionamento nel dominio dei tempi consente di sostituire ad una funzione tempo-continua una serie temporale conservando tutto il contenuto informativo originario. L'operazione di campionamento, eseguita nel rispetto delle ipotesi di tale teorema, costituisce, come vedremo, il primo passo per la conversione di un segnale analogico in forma numerica (conversione analogico/digitale i conversione A/D).

Sottolineiamo in oltre che, mentre con l'analisi di Fourier una funzione è rappresentata mediante i suoi spettri di ampiezza e fase definiti nel dominio delle pulsazioni, la stessa funzione viene ora rappresentata tramite i suoi valori campionati, presi nel dominio dei tempi, e quindi operano esclusivamente in tale dominio.

15- definire il valore medio statistico, il valore quadratico medio e la media statistica del prodotto x(t)x(t+τ) di una generica funzione aleatoria x(t) tempo continua e continua nei valori. Definire poi le corrispondenti medie temporali e discuterne il confronto fra i due tipi di medie corrispondenti. (pag 5.13)

Consideriamo una funzione aleatoria x(t) continua nei valori e tempo-continua. Con riferimento ad essa possiamo definire due tipi di medie:
- le medie statistiche o di insieme
- le medie temporali

Tali medie sono concettualmente diverse: le prime infatti posso essere calcolate a priori una volta note le necessarie densità di probabilità; le seconde invece sono valutabili soltanto a posteriori su una determinata funzione campione dell'insieme.

Ad esempio, il valore medio statistico del processo x(t) è il valore medio della variabile aleatoria x(t) definita all'istante di osservazione t ed è espresso da:

$$E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x,t)\, dx \,.$$

Esso è quindi determinabile a priori nota la funzione p_1 ed è, come p_1, in generale come funzione deterministica di t.

La media temporale corrispondente al valore medio statistico appena considerato è definita, mediante la relazione:

$$< x(t) >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt \,,$$

ove la funzione integranda x(t) è uno dei possibili campioni del processo x(t).

La valutazione di <x(t)> può essere fatta solo a posteriori, noto l'andamento della funzione campione x(t) su un intervallo di osservazione sufficientemente ampio.

Al variare di tale funzione fra quelle dell'insieme, cambia in generale il valore medio <x(t)>, che risulta pertanto una variabile aleatoria.

Appare dunque chiaramente la profonda differenza fra i due tipi di medie.

Altre medie statistiche di particolare interesse riguardano funzioni f[x(t)] del processo x(t) o anche funzioni f[x(t), x(t+τ)] dello stesso processo in due istanti diversi t e t+τ:

$$E\{f[x(t)]\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_1(x,t) dx;$$

$$E\{f[x(t), x(t+\tau)]\} = \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} f(x_1,x_2) p_2(x_1,t;x_2,t+\tau) dx_1 dx_2$$

In particolare:

$$E[x^2(t)] \int_{-\infty}^{\infty} x^2(x,t) dx, \quad [1]$$

$$E[x(t), x(t+\tau)] = \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} x_1, x_2 p_2(x_1,t;x_2,t+\tau) dx_1 dx_2 = R(t,\tau). \quad [2]$$

La [1] definisce il valore quadratico medio del processo x(t) all'istante t. Esso è in generale funzione deterministica del tempo ed è valutabile a priori nota la funzione $p_1(x, t)$.

La [2] definisce il valor medio statistico del prodotto x(t)x(t+τ), che in generale, come abbiamo indicato, è funzione deterministica di t e di τ.

Tale funzione, R(t, τ), può essere valutata a priori nota la densità di probabilità del secondo ordine.

$$p_2 = p_2\,(x_1, t; x_2, t + \tau).$$

Osserviamo che dalla conoscenza del valore quadratico medio e del valore medio statistico do x(t) si deduce la varianza σ^2 (in generale funzione di t) definita da:

$$\sigma^2 = E\left\{\left[x(t) - E[x(t)]\right]^2\right\} = E[x^2(t)] - E^2[x(t)].$$

Definiamo anche la seguente funzione:

$$R_C(t, \tau) = E\{[x(t)-E[x(t)]]\,[x(t+\tau) - E[x(t+\tau)]]\} = R(t, \tau) - E[x(t)]E[x(t+\tau)]. \quad [3]$$

Le medie temporali corrispondenti alle [1], [2] e [3] sono rispettivamente:

$$< x^2(t) >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt = P, \quad [4]$$

$$< x(t)x(t+\tau) >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau)dt = C(\tau), \quad [5]$$

$$< [x(t) - < x(t) >][x(t+\tau) - < x(t) >] >= C(\tau) - [< x(t) >]^2 = V(\tau). \quad [6]$$

La [4] esprime la potenza P del campione considerato, la [5] la sua funzione di autocorrelazione $C(\tau)$ e, infine, la [6] quella di auto covarianza $V(\tau)$.
Tali grandezze possono essere valutate solo a posteriori, nota una relazione del processo: in generale $P=C(0)$ è una variabile aleatoria, mentre $C(\tau)$ e $V(\tau)$ sono funzioni aleatorie.

Risulta pertanto ulteriormente confermata la profonda differenza esistente in generale fra medie statistiche e medie temporali.
Esiste tuttavia un'ampia categoria di processi (processi ergodici) in cui si ha coincidenza fra i valori corrispondenti delle due medie in questione e, più in generale, fra una qualunque valutazione fatta a priori sulla base della descrizione statistica del processo e la corrispondente valutazione fatta a posteriori sulla realizzazione del processo stesso osservata all'atto di un esperimento.

17- Data una funzione aleatoria tempo-continua e discreta nei valori, definirne stazionarietà ed ergodicità; nel caso ergodico esprimerne il valore medio statistico, il valore quadratico medio e la funzione di autocorrelazione, sia come media statistica che come media temporale. (pag 5.35)

Per introdurre i processi ergodici, diamo dapprima il concetto di stazionarietà.

Fissiamo n istanti di osservazione:

$$t_1, t_2, \ldots, t_n ,$$

La corrispondente n-pla di variabili aleatorie discrete è descritta dalla probabilità di ordine n

$$p_n = p_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \ldots; x_n, t_n)$$

Avente il seguente significato:

$$p_n = p_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \ldots; x_n, t_n) = \text{Prob } \{x(t_1)=x_1, x(t_2)=x_2, \ldots, x(t_n)=x_n\}.$$

poniamo:

$$t_1=t$$
$$t_2=t+\tau_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$t_n=t+\tau_{n-1}$$

e scriviamo quindi:

$$p_n = p_n(x(t_1), t; x(t_2), t+\tau_1; \ldots; x(t_n), t+\tau_{n-1})$$

Definizione: un processo stocastico è detto stazionario quando p_n dipende solo da $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}$ e non da t, qualunque sia n; in altre parole, quando p_n, per ogni n, è invariante rispetto ad una traslazione rigida degli istanti di osservazione.

Indichiamo con

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(q)}$$

I valori che può assumere la funzione x(t).

Una definizione equivalente di stazionarietà è la seguente: un processo x(t) è detto stazionario quando i processi

$$x(t) \text{ e } x(t+t_0)$$

hanno la medesima descrizione statistica, e quindi sono il medesimo processo, qualunque sia t_0.
In particolare, quando un processo è stazionario, la densità di probabilità del primo ordine non dipende dall'istante di osservazione t:

$$p_1[x^{(i)}]=\text{Prob}\{x(t) = x^{(i)}\}.$$

Quindi il valore medio statistico

$$E[x] = \sum_{i=1}^{q} x^{(i)} p_1[x^{(i)}],$$

il valore quadratico medio

$$E[x^2] = \sum_{i=1}^{q} [x^{(i)}]^2\, p_1[x^{(i)}],$$

sono indipendenti da t.

Inoltre la densità di probabilità del secondo ordine non dipende separatamente dai due istanti di osservazione t_1 e t_2, ma dall'intervallo $\tau=t_2-t_1$ esistente fra essi:

$$p_2(x^{(i)}, x^{(r)}; \tau)= \text{Prob}\{x(t) = x^{(i)}, x(t+\tau) = x^{(r)}\}$$

e quindi possiamo scrivere le medie statistiche nella forma:

$$E[x(t)x(t+\tau)] = \sum_{i=1}^{q} \sum_{r=1}^{q} x^{(i)} x^{(r)} P_2[x^{(i)}, x^{(r)}; r] = R(\tau),$$

$$R_0(\tau) = R(\tau) - E^2[x]$$

Un processo si dice stazionario di ordine n quando la precedente proprietà di invarianza è valida fino alla densità di probabilità di ordine n, ma non per quelle di ordine superiore.

Un processo si dice stazionario in senso lato se il valore medio E[x(t)] è indipendente da t e R(t,τ) è una funzione solo di τ, che indicheremo ancora con R(τ).

Definizione: un processo stazionario si dice a memoria finita quando esiste un valore finito τ_m tale che, pur avendo osservato il processo fino all'istante t, non è possibile alcuna previsione statistica che tenga conto di tale conoscenza a partire dall'istante $t+\tau_m$.
Il tempo τ_m è detto durata della memoria.

I processi ergodici costituiscono un sottoinsieme di quello dei processi stazionari.

Definizione: un processo è detto ergodico quando ogni funzione campione è caratteristica, con probabilità 1, del processo stesso.

Ciò significa che il risultato di un qualunque rilievo statistico effettuato su una generica funzione dell'insieme coincide, con probabilità 1, con quello dell'analogo rilievo effettuato sull'insieme e quindi non dipende dalla particolare funzione considerata.

Dalla definizione discende che condizione necessaria perché un processo sia ergodico è che esso risulti stazionario.

Si può dimostrare che condizione sufficiente perché un processo stazionario sia ergodico è che esso sia a memoria finita.

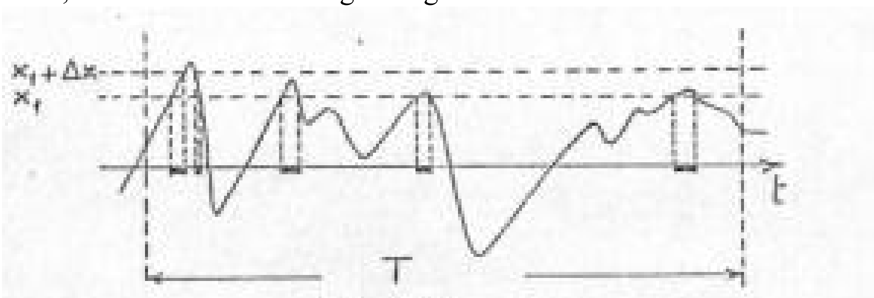
Dalla definizione discende, in particolare, che in un processo ergodico una qualsiasi media statistica è uguale, con probabilità 1, alla corrispondente media temporale.

I rilievi in questione non sono necessariamente limitati alla valutazione di valori medi. Ad esempio la densità di probabilità del primo ordine può essere determinata sia con un rilievo sull'insieme e dalla relazione:

$$p_1(x_1, t_1) \cong \frac{\Delta N}{N \Delta x}$$

Avendo indicato con ΔN il numero di funzioni che all'istante t_1, assumono un valore compreso fra x_1 e $x_1+\Delta x$.

La densità di probabilità del primo ordine può essere determinata anche con un rilievo su un singolo campione del processo, come mostrato nella figura seguente.



Se T è la durata dell'osservazione e T la somma degli intervalli di tempo in cui è soddisfatta la relazione:

$$x_1 \le x(t) \le x_1 + \Delta x$$

Possiamo infatti scrivere, per T sufficientemente grande e Δx sufficientemente piccolo:

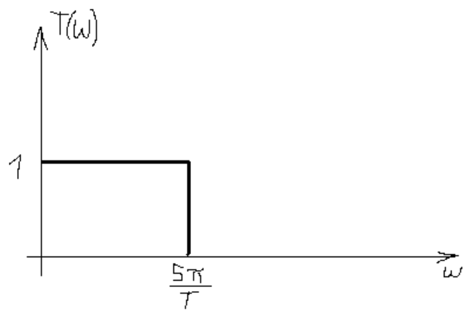
$$\text{Prob}\{x(t) = x(i)\} \simeq \frac{\Delta T}{T\Delta x} \ .$$

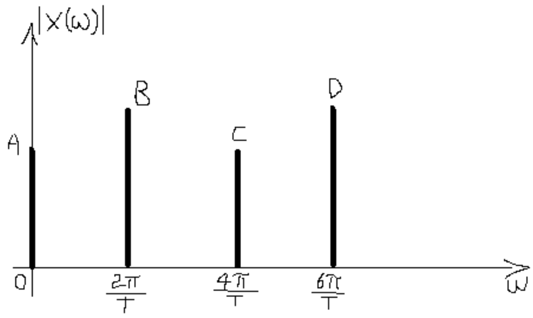
18- $x(t)=A-B\cos[(2\pi/T)t-\varphi]+C\cos[(4\pi/T)t-\psi]+D\cos[(6\pi/T)t-\gamma]$, con A, B, C, D costanti positive e $\varphi=0{,}1\pi$, $\psi=0{,}7\pi$, $\gamma=0{,}5\pi$, rappresenta il segnale d'ingresso a un filtro passa basso ideale avente funzione di trasferimento

$$\boldsymbol{H(\omega)} = \begin{cases} \boldsymbol{e^{\wedge} - j\omega t_0}, & |\omega| \le \frac{5\pi}{T} \\ \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{altrove} \end{cases} \qquad \boldsymbol{con\ \omega_0 = \frac{t_0}{10}}$$

calcolare la risposta y(t) di tale filtro a x(t). Disegnare poi gli spettri di ampiezza, di fase e di potenza dei segnali x(t) e y(t).

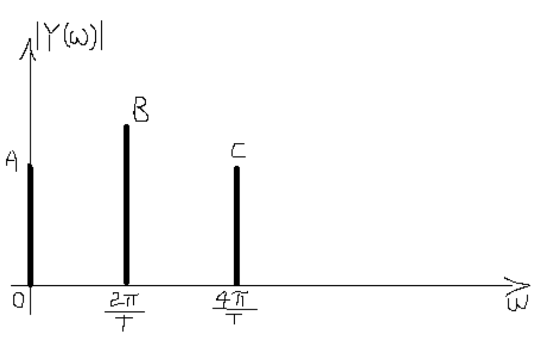
$$H(\omega) = T(\omega)e^{-j\beta(\omega)} \qquad ==> \qquad \begin{cases} T(\omega) = 1 \\ \beta(\omega) = \omega t_0 \end{cases}$$

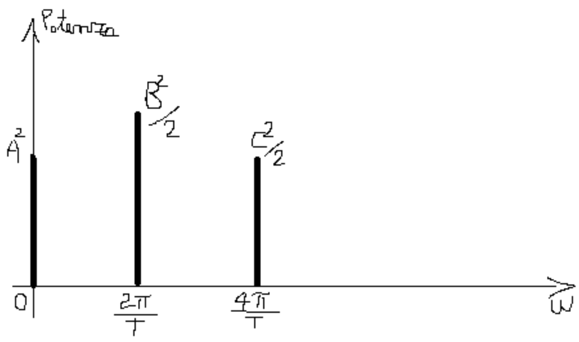


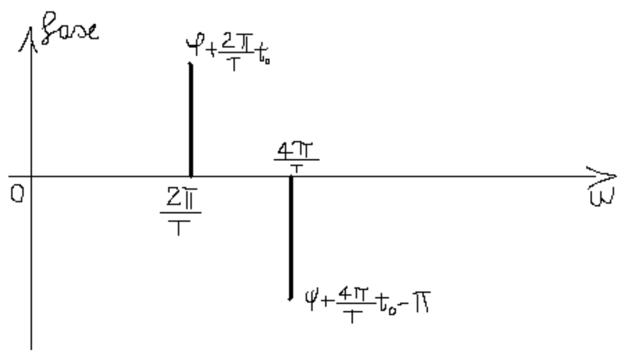


Il filtro elimina l'ultima riga dello spettro di $|X(\omega)|$ ed introduce uno sfasamento pari a $\omega t_0 = \frac{2\pi}{T}t_0$. Dunque

$$y(t) = A + B\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \left(\varphi + \frac{2\pi}{T}t_0\right)\right) + C\cos\left(\frac{4\pi}{T}t - \left(\psi + \frac{4\pi}{T}t_0 - \pi\right)\right)$$







fase
$\varphi + \frac{2\pi}{T} t_0$
$\frac{4\pi}{T}$
0
$\frac{2\pi}{T}$
ω
$\varphi + \frac{4\pi}{T} t_0 - \pi$