Compito di Geometria A del 10-12-2008 (Le risposte giuste sono in **grassetto**)

1) Per quali valori di h ϵ ℝ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & h & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile per similitudine?

   1) Per ogni h ϵ ℝ
   2) Per h ϵ { -1, 4 }
   3) Per nessun valore di h
   4) **Per ogni h ϵ ℝ - { -1, 4}**

2) L'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   1) Ha la 1° colonna uguale a (1 1 -1 0)
   2) Ha la 1° riga uguale a (-1 -2 -1 2)
   3) Non esiste
   4) **Ha la prima colonna uguale a (-1 -2 -1 2)**

3) Nello spazio vettoriale euclideo reale $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare $\langle u,v \rangle = 2x^1y^1 + x^2y^2 + 4x^3y^3$, dove $u=(x^1, x^2, x^3)$, $v=(y^1, y^2, y^3)$ quale base è ortonormale?

   1) B=(($\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, ½))
   2) **B=(($\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, ½))**
   3) B=((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))
   4) B=((½, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, $\frac{1}{\sqrt{2}}$)

4) La T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ avente matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base B = ((0, 2), (-1, 0)) di $\mathbb{R}^2$ e alla base B'=((1, -1, 0), (0, 0, 2), (0, 1, 0)) di $\mathbb{R}^3$ è:

   1) **$\boldsymbol{f\left((x,y)\right) = (y, -x - \frac{3}{2}y, 2x)}$**
   2) $f\big((x,y)\big) = (2x, -3x + y, -2y)$
   3) $f\big((x,y)\big) = (2x, -y, -x + y)$
   4) $f\big((x,y)\big) = (y, x, -x - \frac{1}{2}y)$

5) In uno spazio vettoriale euclideo reale V, quale delle seguenti proprietà è vera per qualunque u, v ϵ V?

   1) $||u+v||=||u||+||v||$
   2) $||u+v||\geq||u||+||v||$
   3) **$||u+v||\leq||u||+||v||$**
   4) $||u+v||^2=||u||^2+||v||^2$

6) La T : $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avente nucleo KerT = { (x, y, z) ϵ $\mathbb{R}^3$ / x=y } e tale che T ((-1, 1, 0)) = (2, -4) è definito da:

   1) T((x, y, z)) = (y-x+z, 2x-2y+2z)
   2) **T((x, y, z)) = (y-x, 2x – 2y)**
   3) T((x, y, z)) = (y-x, 2y – 2x)

4) $T((x, y, z)) = (2y - 2x, 4x - 4y)$

7) Una ennupla ($v_1, \dots, v_2$) di vettori dello spazio vettoriale V è linearmente indipendente se:
   1) Tutti i vettori v_i sono diversi dal vettore nullo
   2) I vettori v_i sono tutti distinti
   3) **Nessuno dei vettori è combinazione lineare dei rimanenti**
   4) Al più dei vettori v_i è combinazione lineare dei rimanenti

8) Se A, B, C ϵ $GL_n(\mathbb{R})$, quale delle seguenti proprietà è generalmente falsa?
   1) ${}^t(A+B) = {}^tB + {}^tA$
   2) $(A*B)^{-1} = B^{-1}*A^{-1}$
   3) $A(B+C)=(A*B)+(A*C)$
   4) **${}^t(A*B)=({}^tA * {}^tB)$**

9) Un sistema lineare con n-1 equazioni in n incognite:
   1) È sempre impossibile se non omogeneo
   2) **Se è possibile ha ∞ soluzioni**
   3) È sempre possibile ma ammette una ed una sola soluzione
   4) È sempre possibile ma ammette ∞ soluzioni

10) Lo spazio delle soluzioni del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2y + z = 0 \\ 3x + 2y + z + t = 0 \\ 6x - 2y - z + 2t = 0 \\ 3x + 2y + t = 0 \end{cases}$$

   è:
   1) **L((1, 0, 0, -3))**
   2) {(1, 0, 0, -3)}
   3) L((1,0,0,-3), (1,0,0,1))
   4) {(0, 0, 0, 0)}

11) Il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

   è:
   1) **4**
   2) 2
   3) 3
   4) 1

Altre domande

1) Sia B una base ordinata dello spazio vettoriale euclideo V_n con il prodotto scalare (V_n, < , >) e sia $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, sia:

   $\boldsymbol{U, V = \sum_{i=1}^{n}(v_i \cdot u_i)}$ **sse la base B è ortonormale**

2) Un sistema lineare omogeneo in n equazioni, ammette ∞^h soluzioni sse
   Contiene n-h equazioni indipendenti

3) Per quali valori di $h \in R$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & h & 0 \\ h & 1 & 0 \\ h & 1 & 1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile per similitudine

Per nessun valore di h

Per $\forall \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{R} - \{\boldsymbol{0}\}$ **← Credo che la giusta sia questa**