ESERCIZI PER IL CORSO DI ANALISI MATEMATICA B

a. a. 2007–2008

SERIE NUMERICHE

1. Data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n-5)^2+1}{n^3-3n}$ calcolare i termini generali a_3 e a_6 e la somma parziale s_3.

2. Calcolare la somma delle seguenti serie geometriche.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{3+n}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^{2n}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}5^{-n}$

3. Studiare il carattere delle seguenti serie.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{1}{n^2}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{n^3+16}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{n-1}}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^n}{n\mathrm{e}^n+2}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n+3}{3^n-4}$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\log^2\left(1+\frac{1}{n}\right)$

   (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{\frac{n^3}{n+1}}\sin\frac{1}{n^3}$

   (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

   (i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^3}$

   (j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$

   (k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^{n^2}}{n!}$

   (l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{3^n+2^n}{4^n+3^n}$

   (m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}$

   (n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n^2}}{\tan^2\frac{3}{n^2}}$

   (o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^4+n+1}{2n^2+n+5}\log\left(\frac{n^4+5n+1}{n^4+7n+1}\right)$

   (p) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3^n}{\pi^n(1+n)}\right)^{n/2}$

   (q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\arctan n}{n+\sqrt{n}}$

   (r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$

   (s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-\sin n}{\sqrt{n^5-n^2}}$

4. Studiare il carattere delle seguenti serie al variare del parametro $x\in\mathbf{R}$.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2\left(1-\mathrm{e}^{nx}\right)+n}{n^3+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^{2n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{2x}-n}{n^{3x}+4}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\arctan\left(\mathrm{e}^{(1-x)n}\right)}{n^x}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{n^{2x-3}+\log^2 n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (|x-3|-2)^n$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\sqrt{1+\log(n^2+1)-2\log n}-1\right]^x$

SUCCESSIONI DI FUNZIONI

1. Determinare l'insieme di convergenza puntuale e la funzione limite delle seguenti successioni di funzioni $(f_n)_{n\geq 1}$. Stabilire inoltre se la convergenza è anche uniforme negli insiemi indicati a lato.

   (a) $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x}$, $x \in [0\,,+\infty)$ $\quad A = [0\,,+\infty)$, $\quad B = [0\,,9]$.

   (b) $f_n(x) = \dfrac{3nx}{1+2n|x|}$, $x \in \mathbf{R}$ $\quad A = [0\,,+\infty)$, $\quad B = [3\,,5]$.

   (c) $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx^2}$, $x \in \mathbf{R}$ $\quad A = [1\,,+\infty)$, $\quad B = [-2\,,3]$.

   (d) $f_n(x) = -\dfrac{x}{n} + \dfrac{n+1}{n+2}$, $x \in \mathbf{R}$ $\quad A = \mathbf{R}$, $\quad B = [-5\,,1]$.

   (e) $f_n(x) = \dfrac{3n+2}{n}x^3 + \dfrac{1}{n}$, $x \in \mathbf{R}$ $\quad A = \mathbf{R}$.

   (f) $f_n(x) = \mathrm{e}^{n(x^2-4)} + \mathrm{e}^{n(x-1)}$, $x \in \mathbf{R}$ $\quad A = [-2\,,1]$, $\quad B = [-1\,,0]$.

   (g) $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+n\mathrm{e}^{2x}}$, $x \in \mathbf{R}$ $\quad A = \mathbf{R}$.

   (h) $f_n(x) = \dfrac{nx+3}{n-\log n}$, $x \in \mathbf{R}$ $\quad A = \mathbf{R}$, $\quad B = [-3\,,0]$.

   (i) $f_n(x) = \sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}$, $x \in \mathbf{R}$ $\quad A = [0\,,+\infty)$.

   (j) $f_n(x) = nx^n(1-x)$, $x \in \mathbf{R}$ $\quad A = [0\,,1]$, $\quad B = \left[0\,,\frac{1}{2}\right]$.

   (k) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x^2}$, $x \in \mathbf{R}$ $\quad A = [1\,,+\infty)$, $\quad B = [-1\,,1]$.

   (l) $f_n(x) = \dfrac{n^2x}{(1+n|x|)^2}$, $x \in \mathbf{R}$ $\quad A = [1\,,+\infty)$, $\quad B = [0\,,1]$.

2. Calcolare giustificando i passaggi.

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 \sin\left(\frac{x^2}{n}\right)\,dx$.

   (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_2^3 \sqrt[n]{1+x^n}\,dx$.

SERIE DI FUNZIONI

1. Determinare l'insieme di convergenza puntuale della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x^2+n}}$. La convergenza è anche uniforme in questo insieme?

2. Determinare l'insieme di convergenza puntuale della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{n}(x^2+n^2)}$. La serie converge totalmente in questo insieme? E nell'intervallo $[-10\,,5]$?

3. Stabilire se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x^2+n}-x}{n^2}$ converge puntualmente in $[0\,,+\infty)$. La convergenza è anche uniforme in questo insieme?

4. Determinare l'insieme di convergenza puntuale della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3+\log n}{x^2+n^2}$. La serie converge totalmente in questo insieme? E nell'intervallo $[0\,,1]$?

5. Dire se le seguenti serie convergono totalmente sugli insiemi indicati.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^x \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad I=\left[-3\,,\frac{1}{2}\right].$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^x+1}{n^{2x}+n} \quad I=[0\,,1].$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{(2x)^n}{n}\right) \quad I=\left[0\,,\frac{1}{4}\right].$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\log\left(\frac{n}{n+|x|}\right) \quad I=\mathbf{R}.$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin^n x \quad I=\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right].$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{n!} \quad I=\mathbf{R}.$

   (g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+|x|n^2} \quad I=[0\,,1].$

   (h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^{-\frac{x^2+2}{x^2+1}} \quad I=[0\,,+\infty).$

6. Calcolare il raggio R di convergenza e valutare il comportamento agli estrermi nel caso $0<R<+\infty$ delle seguenti serie di potenze.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} x^n.$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{n!} x^n.$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 3^n x^n.$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3n+1)^n}{(n+1)!} x^{5n}.$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)^2} x^n.$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+n^2}{n!} x^n.$

   (g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{x}{4}\right)^n \mathrm{e}^{n^2}.$

   (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1}{n} x^n.$

7. Sviluppare in serie di Mac Laurin le seguenti funzioni e scrivere il raggio R di convergenza.

   (a) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^3}.$

   (b) $f(x)=\log\dfrac{1+x}{1-x}.$

   (c) $f(x)=x\sin x.$

CALCOLO DIFFERENZIALE IN $\mathbf{R}^2$ E IN $\mathbf{R}^3$

1. Calcolare le seguenti derivate delle seguenti funzioni di 2 o 3 variabili

   (a) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3\,,-1)$, con $f(x\,,y)=\log(x^2y-y^3+2)$.

   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\pi\,,1)$, con $f(x\,,y)=\sqrt{x+y}\cos(xy)$

   (c) $\dfrac{\partial f}{\partial z}(2\,,1\,,-1)$, con $f(x\,,y\,,z)=2x^3y-3x^2yz+5y^2z^3$.

2. Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni.

(a) $f(x\,,y)=\mathrm{e}^{2x^2y}$.

(b) $f(x\,,y)=\dfrac{1}{x^3y+xy^2}$.

(c) $f(x\,,y)=x^2\sin(x+y^3)$.

(d) $f(x\,,y\,,z)=x^3\sqrt{yz}$.

3. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico delle seguenti funzioni nel punto P_0 indicato.

   (a) $f(x\,,y)=\sqrt{x^3+xy^2}$, $\quad P_0=(2\,,-2)$.

   (b) $f(x\,,y)=\arcsin(xy^2)$, $\quad P_0=\left(\frac{1}{2}\,,1\right)$.

   (c) $f(x\,,y)=\dfrac{x}{y}$, $\quad P_0=(4\,,2)$.

4. Calcolare la derivata direzionale $D_vf(x_0\,,y_0)$ delle seguenti funzioni.

   (a) $f(x\,,y)=x^3y^2-x^2y^3$, $\qquad v=\left(\frac{4}{5}\,,\frac{3}{5}\right)$, $\quad (x_0\,,y_0)=(1\,,1)$.

   (b) $f(x\,,y)=\dfrac{y}{\sin(xy)}$, $\qquad v=\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\,,\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$, $\quad (x_0\,,y_0)=\left(\frac{1}{2}\,,\pi\right)$.

5. Determinare i punti di massimo e di minimo relativo e i punti di sella delle seguenti funzioni

   (a) $f(x\,,y)=x^2+4xy+3y^2$.

   (b) $f(x\,,y)=-xy$.

   (c) $f(x\,,y)=-2x^2+2xy-3y^2$.

   (d) $f(x\,,y)=(\sin y)(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$.

   (e) $f(x\,,y)=x^3-3xy^2+y^3$.

   (f) $f(x\,,y)=\log(x+2y)-\frac{1}{4}xy$.

   (g) $f(x\,,y)=x^4-2\sqrt{3}x^2y+x^2+2y^2$.

   (h) $f(x\,,y)=xy+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}y^3$.

SOLUZIONI

Serie numeriche

1. $a_3 = \frac{5}{18}$, $a_6 = -\frac{1}{99}$, $s_3 = -\frac{119}{9}$.

2. (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{9}{8}$ (c) $\frac{1}{20}$

3. (a) converge
   (b) diverge
   (c) converge
   (d) diverge
   (e) converge
   (f) converge
   (g) converge
   (h) è indeterminata
   (i) converge
   (j) converge
   (k) diverge
   (l) converge assolutamente
   (m) converge semplicemente, ma non assolutamente
   (n) diverge
   (o) diverge
   (p) converge
   (q) diverge
   (r) converge
   (s) converge

4. (a) converge per $x = 0$, diverge a $+\infty$ per $x < 0$ e diverge a $-\infty$ per $x > 0$
   (b) converge per $x \in \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ e diverge altrove
   (c) converge per $x > 1$ e per $x = \frac{1}{2}$, diverge a $+\infty$ per $\frac{1}{2} < x \leq 1$, diverge a $-\infty$ per $x < \frac{1}{2}$
   (d) converge per $x > 1$ e diverge per $x \leq 1$
   (e) converge per $x > \frac{3}{2}$ e diverge per $x \leq \frac{3}{2}$
   (f) diverge per $x \in (-\infty, 0] \cup [6, +\infty)$, è indeterminata per $x \in [2, 4]$, converge altrove
   (g) converge per $x > \frac{1}{2}$ e diverge per $x \leq \frac{1}{2}$

Successioni di funzioni

1. (a) A no; B sì.
   (b) A no; B sì.
   (c) A sì; B no.
   (d) A no; B sì.
   (e) A no.
   (f) A no; B sì.
   (g) A sì.
   (h) A no; B sì.
   (i) A sì.
   (j) A no; B sì.
   (k) A sì; B no.
   (l) A sì; B no.

2. (a) $\frac{1}{3}$. (b) $\frac{5}{2}$.

Serie di funzioni

1. L'insieme di convergenza puntuale è tutto $\mathbf{R}$. La convergenza è anche uniforme.
2. L'insieme di convergenza puntuale è tutto $\mathbf{R}$. La serie converge totalmente in $[-10, 5]$, ma non in $\mathbf{R}$.
3. La serie converge totalmente, quindi uniformemente in $[0, +\infty)$.
4. L'insieme di convergenza puntuale è tutto $\mathbf{R}$. La serie converge totalmente in $[0, 1]$, ma non in $\mathbf{R}$.
5.

(a) Sì.
(b) No.
(c) Sì.
(d) Sì.
(e) Sì.
(f) Sì.
(g) No.
(h) No.

6. (a) $R = 1$, converge in $x = 1$, ma non in $x = -1$.
   (b) $R = 0$.
   (c) $R = \frac{1}{3}$, non converge nè in $x = \frac{1}{3}$, nè in $x = -\frac{1}{3}$.
   (d) $R = \sqrt[5]{\frac{1}{3\mathrm{e}}}$, converge sia in $x = \sqrt[5]{\frac{1}{3\mathrm{e}}}$, che in $x = -\sqrt[5]{\frac{1}{3\mathrm{e}}}$.
   (e) $R = 1$, converge sia in $x = 1$ che in $x = -1$.
   (f) $R = +\infty$.
   (g) $R = 0$.
   (h) $R = 1$, converge sia in $x = 1$ che in $x = -1$.

7. (a) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n+1}$, $R = 1$.
   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1+(-1)^n}{n}x^n$, $R = 1$.
   (c) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!}$, $R = +\infty$.

Calcolo differenziale in $\mathbf{R}^2$ e in $\mathbf{R}^3$

1. (a) $\frac{3}{5}$.
   (b) $\frac{1}{2\sqrt{1+\pi}}$
   (c) 3

2. (a) $\nabla f(x\,,y) = \left(4xy\mathrm{e}^{2x^2y}\,, 2x^2\mathrm{e}^{2x^2y}\right)$.
   (b) $\nabla f(x\,,y) = \left(-\frac{3x^2y+y^2}{(x^3y+xy^2)^2}\,, -\frac{x^3+2xy}{(x^3y+xy^2)^2}\right)$.
   (c) $\nabla f(x\,,y) = \left(2x\sin(x+y^3) + x^2\cos(x+y^3)\,, 3x^2y^2\cos(x+y^3)\right)$.
   (d) $\nabla f(x\,,y\,,z) = \left(3x^2\sqrt{yz}\,, \frac{x^3z}{2\sqrt{yz}}\,, \frac{x^3y}{2\sqrt{yz}}\right)$.

3. (a) $z = 2x - y - 2$.
   (b) $2x + 2y - \sqrt{3}z = 3 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
   (c) $x - 2y - 2z + 4 = 0$.

4. (a) $\frac{1}{5}$.
   (b) $\frac{4}{\sqrt{17}}$.

5. (a) $(0\,,0)$ è un punto di sella.
   (b) $(0\,,0)$ è un punto di sella.
   (c) $(0\,,0)$ è un punto di massimo.
   (d) I punti $\left(0\,,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, sono tutti punti di sella.
   (e) $(0\,,0)$ è un punto di sella.
   (f) $(2\,,1)$ è un punto di sella.
   (g) $(0\,,0)$ è un punto di minimo, $\left(1\,,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\left(-1\,,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ sono punti di sella.
   (h) $(0\,,0)$ è un punto di sella, $(1\,,-1)$ è un punto di minimo.