Comunicazioni Elettriche B

[18-04-2005]

PROGRAMMA DEL CORSO

Dopo un approfondimento sui segnali PAM introdurremo i segnali monocanale e multicanale che maggiormente interessano le comunicazioni, a ciascuno dei quali è associato un servizio.

Tali segnali possono essere generati dalle rispettive sorgenti di informazione oppure loro successive elaborazioni richieste del sistema di trasmissione.

Esempi:

- Una rete numerica richiede la conversione in forma digitale dei segnali quando questi sono originati in forma analogica.
- Un collegamento radio richiede l'introduzione di procedimento di modulazione che produce un segnale modulato per un efficiente uso del fenomeno di irradiazione delle onde E.M.

Si richiede pertanto di trattare di:

- metodi per la generazione di segnali multicanale;
- conversione analogica-digitale (AD) e di conversione inversa digitale-analogica.

Modulazione e demodulazione: nei sistemi di trasmissione, al segnale utile si sovrappone sempre un RUMORE generato dai circuiti che li realizzano con conseguenze negative sulla qualità.

Saranno analizzate pertanto le più importanti cause di rumore e sarà fornito un metodo per caratterizzare la rumorosità degli apparati che costituiscono il sistema di trasmissione e anche dell'intero sistema.

Tutto ciò al fine di introdurre i metodi di progetto di sistemi di trasmissione analogici e numerici di tipo passa-basso e di tipo passa-banda.

[5.10]

Richiamo di segnali PAM aleatori: i segali PAM possono essere di tipo deterministico o aleatorio a seconda della natura della serie temporale a_n (5.10.1). g(t) deve essere una funzione ad energia finita in entrambi i casi. Abbiamo visto la determinazione della densità spettrale di potenza nel caso deterministico. Nel caso aleatorio con a_n ergodica abbiamo $\{a_n\}$: serie temporale ergodica a valore medio non nullo. s(t) è tempo continuo aleatorio ma non è nemmeno stazionario. Abbiamo dimostrato che possiamo lo stesso assegnare uno spettro di potenza al processo per via del fatto che la serie temporale appartiene ad un processo aleatorio ergodico. Seguono le 4.8.15, 4.8.16 in cui le medie temporali possono essere sostituite con quelle statistiche.

[Esercizio 5.8]

[disegno 1]

x_n : cifre binarie

a_n: simboli (non necessariamente binari)

Non è detto che la rappresentazione binaria sia la migliore per la trasmissione, probabilmente è necessario un codificatore di linea che converta la serie x_n in una sequenza di simboli a_n non necessariamente binaria. La serie a_n viene poi inviata al modulatore che genera da essa il segnale modulato s(t) ottenuto secondo la formula:

(5.10.1) $$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot g(t-nT)$$

B_R è la frequenza di cifra della serie x_n, altrimenti detta bitrate. L'inverso del bitrate $\frac{1}{B_R}$ è il cosiddetto tempo di cifra, indicato con T_B. B_S è la frequenza di simbolo associata alla serie a_n e il suo inverso $\frac{1}{B_s}$ è il tempo di simbolo T. Possono essere diversi se usiamo codificatori di linea multilivello, nel qual caso $B_S < B_R$.

[qui ha parlato dei codici multilivello trattati anche in Comunicazioni Elettriche A]

Codici multilivello: con tali codici si stabilisce una corrispondenza fra blocchi formati da l cifre binarie successive ($l \geq 2$) ed i simboli di un insieme costituito da L o 2^l elementi $a^{(i)}$.

(......) DA FINIRE!!!

T è l volte il tempo di cifra T_B, dove l è il numero di bit "raggruppati" per la codifica di un simbolo.

[esercizio analogo al precedente ma con codice multilivello]

Calcolare lo spettro di potenza di un segnale PAM con codice a $L = 2^l$ livelli, ottenuto da una sorgente binaria che eroga cifre equiprobabili e indipendenti con frequenza di cifra B_R. L'impulso di modulazione g(t) è rettangolare con ampiezza unitaria e duty cycle 1 [disegno 2]. $T = \frac{1}{B_S}$.

B_S: frequenza di simbolo.

Essendo $E[a_n] = 0$ e $E[a_n \cdot a_{n+k}] = 0$ per $k \neq 0$, si ha:

$$G_s(\omega) = \frac{1}{\pi T} \cdot |G(\omega)|^2 \cdot E[{a_n}^2]$$

dove $G(w) = \mathcal{F}[g(t)]$ ed $E[a_n^2] = \frac{1}{3} \cdot (L^2 - 1)$

L'unica differenza formale rispetto al caso del codice bipolare è la presenza del fattore $E[a_n^2]$diverso da 1. Pertanto: (formula 2)

$$G_f(f) = \frac{1}{3} \cdot (L^2 - 1) \cdot (\frac{2}{B_S}) \cdot \sin^2 c(\frac{f}{B_S})$$

Si noti però che risulta: $B_S = \frac{B_R}{l}$, con l intero > 1 nel caso multilivello.

Esprimendo pertanto $G_f(f)$ sostituendo $\frac{B_R}{l}$ a B_S si ottiene:

$$G_f(f) = \frac{1}{3} \cdot (L^2 - 1) \cdot (\frac{21}{B_R}) \cdot \sin^2 c(\frac{l \cdot f}{B_R})$$

Tale formula evidenzia chiaramente la maggiore compattazione spettrale che si ottiene, a parità di B_R, utilizzando un codice multilivello in luogo di un codice bipolare. (Questo effetto è uno tra i più desiderabili nella pratica perché consente il risparmio di larghezza di banda da riservare al segnale modulato).

Per $L = 4$ ($l = 2$) si ha:

$$G_f(f) = \frac{20}{B_R} \cdot \sin^2 c \cdot (\frac{2 \cdot f}{B_R})$$

[disegno 3: grafico di G(f)]

Esercizi proposti: determinare le densità di potenza per diversi codici multilivello e confrontarle con quella corrispondente al caso bipolare con la stessa frequenza di cifra. Eseguire il calcolo considerando un impulso di modulazione rettangolare con ampiezza unitaria e duty cycle = 0.5.

Segnali di maggior interesse nel settore TELECOMUNICAZIONI (estensione del 6.1).

Segnali

- Analogici:
  - passa-basso.
  - passa-banda.
- Numerici o Digitali:
  - passa-basso
  - passa-banda

I segnali passa-banda sono caratterizzati da modulazione, quindi per ora prendiamo in considerazione soltanto segnali di tipo passa-basso di entrambe le categorie.

I segnali analogici passa-basso sono distinguibili in tre categorie: audio, video e multicanale.

Audio e video in questo contesto sono intesi monocanale.

I segnali audio possono essere a loro volta distinti in segnali telefonici, audio normali, audio musicali e audio musicali ad alta fedeltà.

I segali video si suddividono in monocromatici, a colori (entrambi relativi ad immagini fisse, per esempio il segnale fac-simile). Possono essere segnali monocromatici oppure a colori relativi ad immagini in movimento (televisivo, videolento).

I segnali multicanale derivano dalla composizione di più segnali di tipo monocanale tra quelli visti prima.

La sigla distintiva del segnale multicanale è FDM (Frequency Division Multiplex: segnali multicanale a divisione di frequenza).

I segnali numerici possono essere essenzialmente distinti in segnali DATI (caratterizzati da una sorgente NUMERICA), PCM (Pulse Code Modulation): segnali originariamente di tipo analogico convertiti in forma numerica.

I segnali multicanale di tipo digitale sono di tipo TDM (Time Division Multiplex: segnali multicanale a divisione di tempo).

In ogni caso ciascun segnale digitale di qualsiasi origine è un segnale PAM.

Quindi, riassumendo, i segnali possono essere così classificati:

- Analogici
  - Passa-Alto
  - Passa-Basso
    - Audio
      - Telefonici
      - Audionormali
      - Audio Musicali

    - Audio Musicali ad Alta Fedeltà
  - Video
    - Monocromatici (a immagini fisse)
    - A Colori (a immagini fisse)
    - Monocromatici (a immagini in movimento)
    - A Colori (a immagini in movimento)
  - Multicanale FDM (Frequency Division Multiplex)
- Numerici o Digitali
  - Passa-Alto
  - Passa-Basso
    - Dati
    - PCM (Pulse Code Modulation)
    - Multicanale TDM (Time Division Multiplex)

I segnali monocanale sono generati da una sorgente fisica, poi passano attraverso un trasduttore che li converte in forma elettrica per la trasmissione lungo il mezzo trasmissivo. Al lato opposto un trasduttore riconverte il segnale elettrico in segnale nell'appropriata forma fisica per la presentazione all'utilizzatore.

Nel caso multicanale si inseriscono fasi di multiplazione e demultiplazione rispettivamente dopo la trasduzione in trasmissione e prima della trasduzione in ricezione. Multiplazioni e demultiplazioni sono eseguite da apparecchiature il cui scopo è quello di "unire" i diversi segnali monocanale in un unico segnale multicanale che possa essere inviato su un singolo mezzo trasmissivo per poi essere nuovamente "separate" sul lato ricezione e scomposte nelle loro rispettive componenti monocanale. Tale soluzione consente di ridurre enormemente il numero di canali impiegati per la trasmissione di una pluralità di segnali monocanale (la soluzione di riservare un canale trasmissivo per ciascuna comunicazione era quella inizialmente adottata per la rete telefonica: generava, oltre ai problemi di gestione e dimensione, anche fenomeni di diafonia e interferenze eccessive).

[19-04-2005]

6.2: I segnali audio

Si considerano segnali analogici monocanale quelli erogati da una sola sorgente analogica.

I segnali audio, che possono essere classificati come visto ieri, sono così chiamati perché occupano la banda di **frequenze udibili (16 Hz – 16 kHz)**. Dato che recano informazione, sono associati a processi aleatori, in generale non stazionari, quindi nemmeno ergodici, per cui non sussistono relazioni di identità tra le densità di potenza dei segnali audio campione di uno stesso processo. Di importanza fondamentale per la progettazione di sistemi di telecomunicazione di segnali audio sono le informazioni a riguardo della banda occupata dal segnale audio, poiché il sistema di trasmissione deve essere non distorcente in tale banda.

Le diverse denominazioni dei segnali audio dipendono dal servizio che svolgono. Il segnale **audio telefonico** è quello di qualità più scarsa, tale da garantire nulla più dell'intellegibilità del segnale. La banda assegnata al segnale telefonico è di conseguenza ridotta al minimo essenziale: **300 Hz – 3400 Hz**. Segnali aventi spettro al di fuori di tale banda vengono fortemente distorti se trasmessi attraverso un canale telefonico. Per determinare la banda minima che consentisse l'intellegibilità sono state effettuate prove empiriche. Al nascere della telefonia la banda era addirittura limitata superiormente a 2 kHz.

Il segnale **audio normale** è caratterizzato da banda di frequenza **50 Hz – 4500 Hz,** che consegue una sufficiente qualità per la comprensione di una conversazione parlata. Tale banda è quella impiegata per le trasmissioni radio ad onde medie.

Il segnale **audio musicale** è caratterizzato da una banda compresa tra **30 Hz e 12 kHz**.

Una migliore rappresentazione musicale si ottiene dal segnale **audio musicale ad alta fedeltà**, per il quale la banda è compresa tra **30 Hz e 15 kHz**.

La conoscenza degli estremi della banda è di cruciale importanza per dimensionare i sistemi di comunicazione che devono trasmettere tali tipologie di segnali, infatti, per garantire una "piattezza" sufficiente all'interno della banda interessata, l'amplificatore o il filtro passa-banda che verranno impiegati dovranno avere avere frequenze di taglio inferiore e superiore decisamente più "distanti" da quelle che caratterizzano la banda del segnale.

6.3: Il segnale televisivo

Riferiamoci inizialmente al segnale **video monocromatico** per la riproduzione di immagini **in movimento**. Indichiamo con a e b le dimensioni dello schermo piano rettangolare sul quale vogliamo mostrare l'immagine. Consideriamo al suo interno un punto P = (x,y).

All'istante t l'informazione da trasmettere è:

$$I = I(P,t)$$

funzione cioè sia del tempo sia della posizione del punto sullo schermo.

Possiamo ricondurci ad una funzione della sola variabile temporale legando la variabile di posizione a quella temporale: $P = P(t)$. In tal caso, l'informazione trasmessa dipendente esclusivamente dal tempo si indica con $V = v(t)$.

L'immagine viene scansionata per righe orizzontali (per la verità leggermente inclinate) e ricostruita alla stessa maniera. L'immagine viene, per così dire, "discretizzata" in righe orizzontali talmente vicine da sembrare unite. Il numero di righe deve essere sufficiente a garantire una loro vicinanza, superiore all'acuità visiva dell'utente, in modo che appaiano unite. Nel caso del segnale video comunemente trasmesso in Europa il le righe orizzontali sono 625.

Le immagini devono inoltre essere presentate sullo schermo con una frequenza sufficientemente elevata per diverse ragioni: innanzitutto, una frequenza troppo bassa produce una riproduzione in cui i movimenti sono percepiti “a scatti”. È stato determinato che il ritmo minimo con cui le immagini devono essere presentate affinché venga mantenuta la sensazione di movimento è di 15 fotogrammi al secondo. Il secondo motivo concerne le proprietà fisiche degli elementi luminosi che costituiscono lo schermo, chiamati fosfori: essi, quando colpiti dal segnale elettrico, mantengono la loro luminosità soltanto per un intervallo di tempo limitato, per cui devono essere sollecitati ad un ritmo sufficiente per evitare il fenomeno dello “sfarfallamento” dell'immagine. Esso non è dovuto ad altro che al progressivo spegnimento degli elementi luminosi a partire da quelli che sono stati sollecitati meno di recente (ricorda un po' il comportamento delle RAM dinamiche...).

Nello standard europeo per la trasmissione del segnale televisivo vengono trasmessi 25 fotogrammi completi ogni secondo, anche se tale frequenza non sarebbe sufficiente per eliminare il problema dello sfarfallamento appena citato. Vedremo poco più avanti come è possibile ovviare a questo problema senza dover aumentare la frequenza dell'immagine, intervento che sarebbe poco auspicabile in quanto allargherebbe la banda necessaria al segnale video.

Determiniamo la frequenza minima e massima della banda di un segnale video. Se consideriamo un'immagine di colore uniforme che non cambia nel tempo, il segnale video è costituito da una semplice componente continua, caratterizzata quindi da frequenza (minima) nulla.

Per determinare l'estremo superiore della banda del segnale video assumiamo, come ipotesi semplificativa, che le N righe di scansione il cui è suddiviso lo schermo siano di spessore nullo. Consideriamo la dimensione verticale dello schermo pari alla risoluzione verticale $\frac{b}{N}$, la risoluzione orizzontale pari a $\frac{a}{N}$. Il numero n di elementi di immagine (pixel) che compongono lo schermo è quindi:

(6.3.1)
$$n=\frac{a\cdot b}{\left(\frac{b}{N}\right)^2}=\left(\frac{a}{b}\right)\cdot N^2$$

Detto f_0 il numero di pixel al secondo, f_I la frequenza di immagine, allora:

(6.3.2)
$$f_o=n\cdot f_i=\left(\frac{a}{b}\right)\cdot N^2\cdot f_i$$

La massima frequenza nella risoluzione di un immagine si avrà in corrispondenza della immagine più variabile possibile, cioè quando il colore di ogni pixel è opposto a quello dei pixel adiacenti, come in una scacchiera.

[disegno 1: onda quadra v(t)]

Questa onda quadra può essere sviluppata in serie di Fourier di soli coseni. La frequenza fondamentale di tale sviluppo si ottiene facendo riferimento al periodo $T=\frac{2}{f_0}$ di detta forma d'onda. La frequenza fondamentale è:

(6.3.3)
$$f_m=\frac{1}{T}=\frac{f_0}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\cdot N^2\cdot f_i \quad .$$

Per trasmettere il segnale video ci si accontenta di trasmettere la frequenza fondamentale e il valore medio del segnale video monocromatico. In tale situazione f_m rappresenta la frequenza superiore della banda del segnale video. Con tale limitazione, il segnale video trasmesso in condizioni di massima variabilità si riduce alla sola cosinusoide di frequenza pari ad f_m [disegno 2].

Il rapporto $\frac{a}{b}$ prende il nome di **fattore di forma**.

In base alla formula, raddoppiando il numero delle righe otterremmo una quadruplicazione della banda richiesta.

Secondo lo standard europeo il fattore di forma è 4/3, il numero delle linee è 625 e la frequenza di immagine 25 Hz. Impiegando la formula di f_m il risultato dato da questi valori è di poco superiore ai 6 MHz. La limitazione a 5 MHz della banda del segnale è dovuta al fatto che l'ipotesi di partenza di spessore nullo delle righe non è nella pratica mai verificata, e ciò consente una riduzione della banda richiesta.

Lo standard a 525 linee, impiegato in Giappone o USA, ha una frequenza di immagine di 30 Hz e lo stesso fattore di forma. La banda di tale segnale è limitata a 4 MHz.

Per risolvere il problema dello sfarfallamento senza dover aumentare la frequenza di immagine si ricorre all'espediente dell'interallacciamento, che consiste nella scomposizione di ciascuna immagine in due quadri, uno costituito dalle sue righe pari ed uno da quelle dispari.

Dovendo mostrare due quadri per comporre ogni immagine completa, una frequenza di immagine di 25 Hz comporta una frequenza di quadro (delle righe pari o dispari) pari a 50 Hz, sufficiente ad eliminare il problema di sfarfallamento. La frequenza di quadro di entrambi gli standard è stata anche scelta pari alla frequenza della rete di distribuzione elettrica degli stati corrispondenti per motivi di sincronismo. E' infatti molto importante che il dispositivo che genera il segnale e quello che lo ricostruisce siano sincronizzati.

Il punto P sullo schermo deve essere spostato lungo lo schermo in orizzontale e verticale, da sinistra verso destra e dall'alto verso il basso.

Il segnale x(t) rappresenta l'ascissa del punto P [disegno 3]. Il tempo di riga T_x è 64 μs. La frequenza di riga è 15625 Hz.

Il segnale y(t) rappresenta l'ordinata del punto P [disegno 4]. T_y è il tempo di quadro e il suo inverso è la frequenza di quadro = 50 Hz.

In realtà tali andamenti sono soltanto ideali, poiché non è possibile il ritorno all'inizio della linea o del quadro in un tempo nullo (corrispondenti alle variazioni a gradino visualizzate sui grafici).

Gli andamenti reali [disegno 5] presentano in realtà una variazione ripida ma non istantanea. Per la durata del ritorno all'inizio della linea il pennello viene spento [disegno 6]. Soltanto l'82% del tempo di riga viene impiegato per la trasmissione del segnale. Per il resto del tempo si ha lo spegnimento del pennello ed il ritorno all'inizio della linea dello stesso. Durante questo intervallo di tempo viene inoltre inviato l'impulso di sincronismo (uno durante ogni ritorno di riga), rappresentato da un livello del segnale del pennello superiore a quello corrispondente al colore del nero.

Una situazione esattamente analoga si ha nel caso dei quadri per la scansione verticale. Per ogni ritorno di quadro, durante il quale viene inviato un ulteriore segnale di sincronismo, si "perdono" infatti circa 20 righe.

[26-04-2005]

Per quanto riguarda l'introduzione del colore nei segnali video, richiede una maggiore quantità di informazione per l'introduzione della cromaticità nell'immagine. Si pone inoltre un problema di compatibilità con il caso monocromatico esistente in precedenza. Chi possedeva un televisore monocromatico doveva essere in grado di visionare (in monocromatico) anche programmi trasmessi a colori. Ciò è stato possibile **senza alterazione della banda del segnale video** grazie all'elevata ridondanza del segnale video trasmesso secondo gli standard visti in precedenza, in base alla considerazione che, generalmente, gran parte dell'immagine non cambia tra un fotogramma e l'altro, mentre in realtà basterebbe trasmettere la variazione subita dall'immagine rispetto al fotogramma precedente. Il segnale video fin qui analizzato è quindi ridondate.

Lo standard inoltre non considera l'esistenza di alcuna dipendenza statistica tra le luminosità di punti tra loro adiacenti, quando invece è molto probabile che punti vicini abbiano valori di luminosità simili.

Come già detto, lo standard a colori e quello monocromatico prevedono la stessa larghezza di banda del segnale video.

La frequenza massima della banda video monocromatica è riferita al segnale video massimamente variato, condizione che nella pratica si verifica molto di rado. In realtà, per trasmettere immagini reali sensibilmente variate la banda occupata è limitata a circa 1,5 MHz. Ciò consente l'inserimento delle informazioni cromatiche senza allargamento della banda richiesta.

La visualizzazione su grandi schermi richiede un aumento (raddoppio) del numero di righe di scansione per ottenere una sufficiente nitidezza. Operare tale intervento secondo lo standard attuale comporterebbe una quadruplicazione della larghezza di banda richiesta, intervento assolutamente proibitivo.

Per conseguire tale obiettivo bisogna quindi operare una scelta radicale, di passaggio dall'impiego di un segnale analogico ad un segnale di tipo numerico (digitale), grazie alle maggiori possibilità di codifica e compressione che si possono applicare a questa seconda categoria di segnali per ridurne la banda a parità di qualità rispetto al caso analogico. Si possono raggiungere bit rate di 1.5, 4 ed addirittura 8 Mbit/s senza decadimento percepibile della qualità dell'immagine, secondo lo standard di codifica MPEG4.

Insieme al raddoppio delle righe dello schermo, il nuovo standard prevede un cambiamento del fattore di forma dello schermo [disegno 1: figura 6.3.5].

La categoria dei segnali video non è costituita unicamente dai segnali televisivi: esistono anche i servizi facsimile e videolento.

6.4: Facsimile e videolento analogici

Il servizio fac-simile, dovendo trasmettere immagini statiche senza eccessivi vincoli di tempo, a discapito della rapidità della trasmissione consente la drastica riduzione della larghezza di banda necessaria per la trasmissione di una immagine scansionata per righe (qualche centinaio di Hz). Ciò comporta la possibilità di trasmettere le immagini scansionate per via telefonica (dopo un opportuno trattamento di modulazione per adattare le caratteristiche spettrali del segnale alla banda passante caratteristica propria dei sistemi di trasmissione telefonica (300 Hz – 3400 Hz).

Il servizio videolento costituisce un servizio intermedio tra quello televisivo e quello facsimile. Le immagini sono catturate e trasmesse ad intervalli molto più lenti rispetto al caso televisivo, con conseguente visualizzazione di immagini mostrate a scatti. Trova applicazione nella sorveglianza e nel controllo industriale.

6.5: Alcune anticipazioni sulla teoria della modulazione

La tecnica FDM si basa su una tecnica di modulazione che ora introduciamo in anticipo rispetto alla trattazione delle tecniche di modulazione: la conversione di frequenza.

Consideriamo la modulazione a prodotto di un segnale x(t) (modulante) passa-basso con una sinusoide di pulsazione ω_0 (portante). Il segnale risultante s(t) prende il nome di segnale modulato.

(6.5.1) $$s(t)=x(t)\cdot\cos(\omega_0 t)$$

Affinché s(t) risulti un segnale passa-banda deve essere ω_0 molto maggiore della pulsazione massima della banda di x(t) ($\omega_0 \gg \omega_m$).

Consideriamo l'espressione dell'integrale di Fourier del segnale modulante:

(6.5.2) $$x(t)=\int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega)\cdot\cos[\omega t-\varphi(\omega)]\,d\omega$$

L'oscillazione portante è data dall'espressione:

(6.5.3) $$v_0(t)=\cos(\omega_0 t)$$

Lo schema del modulatore a prodotto è quello di figura.

V(ω) e φ(ω)sono gli spettri di ampiezza e fase di x(t).

In figura 6.5.2 sono riportati andamenti esemplificativi per entrambi gli spettri, che impiegheremo anche in seguito.

Considerando la 6.5.1 e 6.5.2 otteniamo:

(6.5.4) $$s(t)=\cos(\omega_0 t)\cdot\int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega)\cdot\cos[\omega t-\varphi(\omega)]d\omega=\int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega)\cdot\cos(\omega_0 t)\cdot\cos[\omega t-\varphi(\omega)]d\omega$$

Il prodotto tra coseni si sviluppa nella somma di due coseni:

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$$

da cui, fatte le seguenti posizioni:

(6.5.5) $$s_s(t)=\frac{1}{2}\int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega)\cdot\cos[(\omega_0+\omega)t-\varphi(\omega)]d\omega$$

(6.5.6) $$s_i(t)=\frac{1}{2}\int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega)\cdot\cos[(\omega_0-\omega)t-\varphi(\omega)]d\omega$$

si ha:

(6.5.7) $$s(t)=s_i(t)+s_s(t)$$

I pedici “s” ed “i” stanno, rispettivamente, per “superiore” ed “inferiore” con riferimento alla collocazione delle due bande laterali che costituiscono il segnale modulato (figura 6.5.3).

Lo spettro di ampiezza si $s_s(t)$ è compreso tra $\omega_0+\omega_i$ e $\omega_0+\omega_m$ e riproduce fedelmente, in tale banda di pulsazioni, la forma di x(t). Considerazioni analoghe possono essere fatte relativamente allo spettro di fase.

Per il segnale di $s_i(t)$ valgono analoghe considerazioni con la posizione che lo spettro di ampiezza è simmetrico rispetto a quello del segnale x(t) mentre quello di fase è simmetrico ed invertito di segno (antisimmetrico).

Lo spettro di ampiezza di s(t) è quindi completamente compreso tra ω_0-ω_m e $\omega_0+\omega_m$ ed è simmetrico rispetto ad ω_0. Lo spettro di fase occupa la stessa banda ma è antisimmetrico rispetto ad ω_0. La banda laterale superiore è ottenuta per semplice traslazione in pulsazione dello spettro del segnale modulante, sia per quello di fase che per quello di ampiezza.

Condizione necessaria e sufficiente affinché un segnale sia modulato a prodotto è che esso abbia spettro di ampiezza simmetrico e spettro di fase antisimmetrico rispetto alla pulsazione della portante.

Il segnale modulato a prodotto è ridondante perché anche solo una delle due bande laterali sarebbe sufficiente per ricostruire il segnale modulante x(t) di partenza. Potremmo quindi limitarci a considerare la sola banda laterale superiore per avere una conoscenza esaustiva del segnale modulante (ovviamente se conosciamo la pulsazione ω_0 della portante).

Quello illustrato in [disegno 2: figura 6.5.5] rappresenta un convertitore di frequenza poiché, in ultima analisi, il segnale risultante $s_s(t)$ rappresenta una traslazione in pulsazione del segnale modulante x(t).

La conversione di frequenza fin qui considerata è detta “in salita” dato che comporta la traslazione dello spettro del segnale verso pulsazioni maggiori.

La conversione di frequenza può distinguersi anche in base alla banda laterale che viene filtrata, potendo così essere “su banda laterale superiore” oppure “su banda laterale inferiore”.

Il procedimento inverso, che prende il nome di conversione di frequenza in discesa, è eseguito dal circuito rappresentato in [disegno 3].

Il prodotto tra $4\cos(\omega_0 t)$ e $s_s(t)$, indicato con u(t), è così calcolato:

$$u(t) = 4 \cdot s_s(t) \cdot \cos(\omega_0 t) =$$

$$= 2 \cdot \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot \cos[(\omega_0 + \omega) t - \varphi(\omega)] d\omega =$$

$$= \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cdot \cos[\omega t - \varphi(\omega)] d\omega + \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cdot \cos[(2\omega_0 + \omega) t - \varphi(\omega)] d\omega =$$

$$= x(t) + \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cdot \cos[(2\omega_0 + \omega) t - \varphi(\omega)] d\omega$$

Esso è costituito dal segnale modulante di partenza x(t) e dalla sua traslazione in frequenza di una pulsazione pari a $2\omega_0$. A questo punto, mediante operazione di filtraggio di tipo passa-basso, si riottiene il solo segnale modulante x(t).

Affinché il processo di traslazione in salita ed in discesa venga completato con successo è necessario che la pulsazione della modulante sia esattamente la stessa. Non è sufficiente l'impiego di due oscillatori aventi la stessa frequenza nominale, è necessario che essa venga ricavata dal segnale modulato. E' possibile farlo nonostante tale pulsazione non sia presente come componente del segnale modulato partendo dalla considerazione che esso è però simmetrico rispetto ad essa.

6.6: Segnali multicanale a divisione di frequenza

Facciamo riferimento alla tecnica FDM con applicazione alla trasmissione telefonica. Prendiamo il caso di 3 canali telefonici $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$. Prima della conversione in frequenza tutti i segnali occupano la stessa banda (300 Hz – 3400 Hz). Ovviamente non possiamo semplicemente sommarli per la trasmissione dato che, occupando la stessa banda, non sarebbe più possibile separarli in fase di ricezione.

Possiamo però convertire in frequenza ciascun segnale con frequenze portanti diverse, in modo che i segnali risultato $x_{1c}(t)$, $x_{2c}(t)$ e $x_{3c}(t)$ occupino bande di frequenza distinte. A questo punto possiamo sommare detti segnali formando il segnale u(t).

A partire da u(t), per ricostruire i segnali modulanti originali, bisogna dapprima applicare un filtraggio passa-banda (filtri di canale) per riottenere i segnali $x_{1c}(t)$, $x_{2c}(t)$ e $x_{3c}(t)$ a partire dai quali, attraverso conversioni di frequenza in discesa di opportuna frequenza, si ottengono i segnali modulanti originali $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$.

Lo schema che realizza l'intero processo descritto è quello di figura nella pagina del libro.

I convertitori di frequenza in salita ed il nodo sommatore in fase di trasmissione costituiscono il dispositivo di multiplazione.

L'insieme dei filtri passa-banda e dei convertitori di frequenza in discesa posti in fase di ricezione costituiscono il dispositivo di demultiplazione.

Va da sé che tale metodo può essere applicato per un numero limitato di canali telefonici. E' impensabile applicarlo ad un sistema costituito da migliaia di canali telefonici, poiché ciascuno di essi richiederebbe convertitori e filtri progettati con frequenze portanti e bande passanti diverse.

Nella pratica, questo metodo viene applicato fino ad un numero di canali telefonici pari a **12**. Tale gruppo di 12 canali prende il nome di **gruppo primario** di canali.

[02-05-2005]

Gruppo primario [disegno 1]: 12 canali telefonici (c.t.)

Le frequenze di conversione per i diversi canali sono riferite alla banda lorda dei canali telefonici (0- 4 kHz). La banda di un gruppo primario è allora 4 kHz ·12 = 48 kHz (60 kHz – 108 kHz).

Gruppo secondario (supergruppo) [disegno 2]: costituito da 5 gruppi primari (GP), quindi contenente 12 · 5 = 60 canali telefonici. Analogamente a prima, con opportuni convertitori di frequenza, detti **convertitori di gruppo,** possiamo far occupare a ciascun gruppo primario una diversa banda di frequenza. La banda del gruppo secondario risulta di 48 kHz · 5 = 240 kHz (collocata tra 312 kHz e 552 kHz) perché nuovamente si prende in considerazione la banda lorda del segnale telefonico e non quella netta.

Le conversioni di frequenza per la costituzione dei gruppi primari e secondari è una conversione di frequenza in salita su banda laterale inferiore.

[disegni del libro pag. 6.18]

Gruppo pseudoquaternario [disegno sul libro]: costituito da 15 gruppi secondari (900 c.t.), soltanto 14 dei quali vengono convertiti in frequenza in salita su banda laterale inferiore, mentre uno viene lasciato nella sua banda di frequenza originaria. Vengono lasciati 8 kHz di separazione tra i gruppi secondari convertiti in frequenza e 12 kHz tra quello non convertito ed il primo convertito in frequenza. La banda complessiva del gruppo pseudoquaternario è 312 kHz – 4028 kHz.

Sistema a 4 MHz: differisce dal gruppo pseudoquaternario perché aggiunge un gruppo secondario nella banda 60 kHz – 300 kHz). E' quindi costituito da 16 gruppi secondari per un totale di 960 c.t.

Sistema a 12 MHz: costituito da 3 gruppi pseudoquaternari, con banda 312 kHz - 12336 kHz, per un totale di 2700 c.t.

Sistema a 60 MHz: costituito da 12 gruppi pseudoquaternari con banda 4404 kHz – 59580 kHz, per un totale di 10800 c.t.

Questi sistemi sono impiegati sia per trasmissione su portante fisico (cavo coassiale o fibra ottica) sia per trasmissione via radio.

Cavi coassiali

costituiti da un cilindro di conduttore (rame) esterno al cui interno scorre un secondo conduttore (rame). I due conduttori coassiali sono separati da un materiale dielettrico (isolante o aria).

Si indica con d il diametro del conduttore interno, con D il diametro del conduttore esterno. (figura 6.6.2)

Coppie coassiali più importanti [pag 6.21]:

0.7/2.9 mm: è quella di dimensioni più piccole (coppia microcoassiale), introdotta pensando alle trasmissioni numeriche piuttosto che a quelle analogiche.

1.2/4.4 mm: coassialino.

2.6/9.5 mm: coassiale (normale).

Poiché i cavi coassiali vengono impiegati anche per lunghi collegamenti, è opportuno tenere in considerazione l'attenuazione introdotta dai diversi tipi di coassiali per unità di distanza. In tal modo, è possibile progettare tratte di collegamento intervallate da amplificatori dimensionati all'uopo che provvedono a rigenerare il segnale. La lunghezza della tratta tra due amplificatori adiacenti prende il nome di **passo di amplificazione**.

La normativa prevede che sia possibile realizzare collegamenti di lunghezza 2500 km contenendo i disturbi ed il rumore di intermodulazione entro limiti prestabiliti. Nella pratica, questo tipo di collegamenti viene realizzato tramite cavi coassiali o linee bifilari (queste ultime più raramente).

Il passo di amplificazione cambia in relazione al mezzo trasmissivo impiegato e alla banda del segnale da trasmettere.

Capitolo 7: segnali passa-basso numerici e relativi servizi

I segnali passa-basso di tipo numerico sono dei segnali di tipo PAM. A seconda del tipo di applicazione possono essere di tipo binario oppure impiegare codificazioni particolari (anche di tipo multilivello).

Per quanto riguarda la generazione del segnale, faremo riferimento alla generazione di segnali di tipo binario, che eventualmente subiscono una codifica in un codificatore di linea prima dell'effettiva trasmissione.

In caso di codifica binaria:

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \cdot g(t-nT_b)$$

I simboli hanno il seguente significato:

- T_b: tempo di cifra;
- $B_R = 1/ T_b$: bit rate;
- g(t): impulso di modulazione (energia finita);
- $\{b_n\}$: serie temporale binaria;
- b_n: cifra binaria.

In caso di codifica di linea diversa da quella binaria:

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot g(t-nT)$$

I simboli hanno lo stesso significato del caso precedente con le seguenti differenze:

- $\{a_n\}$: serie temporale di simboli non necessariamente binaria;
- a_n: simbolo in uscita dal codificatore;
- T: tempo di simbolo;
- $B_S = 1/T$: frequenza di simbolo;

I tipi di sorgenti da cui si ricavano segnali numerici possono essere nativamente numeriche oppure analogiche che però hanno subito una conversione in forma numerica.

La conversione A/D è fondamentale nella misura in cui consente di tradurre qualsiasi segnale analogico in forma numerica, riconducendo così la possibilità di trasmettere segnali analogici al caso della trasmissione di quelli numerici.

[digressione storica, la tolgo?]

Già ai tempi dei popoli primitivi i segnali di fumo rappresentavano una forma di comunicazione numerica. Anche ai tempi della rivoluzione francese era stata realizzata una rete di trasmissione “ottica” tramite torri alla sommità delle quali la presenza di una torcia accesa o spenta rappresentava una forma rudimentale di trasmissione di informazione numerica fino a 5000 km di distanza (tipo Signore degli Anelli, per chi l'ha visto).

Arrivando a tempi più recenti, la trasmissione telegrafica rappresenta una trasmissione numerica per la comunicazione di messaggi non a flusso continuo. Ciascun carattere è delimitato da impulsi che ne delimitano l'inizio e la fine (start e stop).

7.2: Conversione A/D

(figura 7.2.1)

la prima operazione da compiere su un segnale analogico per la sua traduzione in forma numerica è il campionamento. Il campionatore è un dispositivo che legge il valore del segnale analogico negli istanti di campionamento, separati da un intervallo di tempo T denominato periodo di campionamento che deve essere scelto in accordo con il teorema di Shannon, in modo cioè che la frequenza di campionamento risulti almeno doppia rispetto a quella massima del segnale analogico da campionare.

L'uscita del campionatore è la serie temporale $x_n = x(nT)$ dei valori campionati.

Entro le ipotesi del teorema, sappiamo di aver preservato il contenuto informativo del segnale convertendolo dalla forma tempo-continua a quella tempo-discreta.

Per la conversione del segnale in forma numerica esso deve essere anche sia tempo-discreto sia discreto nei valori.

Per ottenere anche la discretizzazione nei valori dobbiamo operare la cosiddetta quantizzazione (quantizzatore in cascata al campionatore).

Il segnale in ingresso al quantizzatore è un segnale tempo discreto con valori compresi tra $-M$ e $+M$. Suddividiamo tale intervallo di valori in un numero finito di intervalli di uguale ampiezza (quantizzazione uniforme). L'operazione di quantizzazione consiste nell'attribuire, a ciascun valore che ricade in uno qualsiasi di questi intervalli, il valore medio di detto intervallo. Ciò consente di ridurre al finito il numero di valori possibili che possono essere assunti dalla serie numerica dei campioni. Indichiamo con $\{q_n\}$ la serie dei valori quantizzati con questo procedimento.

La legge di quantizzazione $q_n = F(x_n)$ può essere rappresentata come in figura [7.2.2] e non è invertibile, nel senso che non si può in alcun modo ricostruire esattamente la sequenza dei valori x_n nota la serie $\{q_n\}$. Ciò si traduce in una perdita di informazione che non è più recuperabile.

Sostituendo ai termini a_n i termini q_n nella formula precedente abbiamo già un segnale numerico, ma non ancora binario.

Nello standard europeo il numero di livelli di quantizzazione è 256, in quello nordamericano sono 128.

I livelli di quantizzazione vengono numerati in codice binario, utilizzando quindi 8 cifre binarie per la codifica di ciascuno dei 256 livelli. Detto m il numero di cifre binarie impiegate per codificare i livelli, esso deve essere $m \geq \log_2(L)$, dove L è il numero di livelli di quantizzazione.

Il codificatore è quel dispositivo che ci consente di tradurre ciascun termine q_n con una parola di m bit: $\{b_n^{(1)}, b_n^{(2)}, \dots b_n^{(m)}\}$.

La sequenza prodotta dal codificatore è una serie temporale binaria.

[disegno complessivo: disegno 3]

Normalmente la quantizzazione e la codifica sono effettuate contestualmente nello stesso circuito.

Il segnale in uscita da tutto il percorso è un segnale PAM ma può essere chiamato anche PCM (Pulse Code Modulation).

In una trasmissione di tipo monocanale l'intero intervallo di campionamento può essere impiegato per la trasmissione della parola binaria corrispondente al campione letto.

Nel caso di un segnale telefonico, facendo riferimento alla banda lorda di 4 kHz, la frequenza di campionamento di 8 kHz (periodo di campionamento: 125 µs) è sufficiente per soddisfare le ipotesi del teorema di Shannon.

Con una codifica di 8 bit per campione la ricezione di un segnale telefonico corrisponde alla ricezione di un segnale numerico alla velocità di 64 kbit/s

Occorre che il ricevitore e il trasmettitore siano perfettamente sincronizzati affinché le parole ricevute siano correttamente interpretate, quindi è necessario che oltre alle cifre binarie che costituiscono l'informazione venga trasmesso anche un segnale di sincronismo.

Noi prenderemo in considerazione le informazioni di sincronismo impiegate nelle trasmissioni multicanale.

7.3: Conversione D/A

E' l'operazione inversa rispetto a quella appena vista, per ripresentare all'utente il segnale, originariamente analogico, nella stessa forma.

Nella trattazione dell'operazione inversa diamo per scontata la corretta ricezione delle cifre binare trasmesse, con la corretta sincronizzazione.

Come già anticipato, la quantizzazione è un'operazione irreversibile che non può riportare alla ricostruzione della esatta serie temporale di partenza. Ne consegue che ciò che può essere ricostruito, nota la serie binaria trasmessa, è soltanto la sola serie temporale dei valori quantizzati, che però nel seguito di questo paragrafo indicheremo comunque con il simbolo x_n (piuttosto che con q_n, che sarebbe più appropriato) volendo significare che trattiamo questi valori come se si trattasse degli effettivi valori campionati, trascurando cioè l'errore commesso nel processo di quantizzazione.

L'operazione che, partendo dalla serie binaria ricevuta ricostruisce la serie dei simboli x_n corrispondenti ai valori campionati x(nT) prende il nome di decodificazione ed il dispositivo che la esegue è chiamato (fantasiosamente) decodificatore.

Detto questo, possiamo supporre che la decodificazione renda disponibile alla sua uscita un segnale s(t) PAM modulato con i valori della serie temporale $x_n = x(nT)$ dei valori campionati, sempre considerando trascurabile l'errore dovuto alla quantizzazione:

(7.3.1) $$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,g(t-nT)$$

dove, come al solito, g(t) è un segnale a energia finita che prende il nome di impulso di modulazione.

In virtù del teorema del campionamento, se X(ω) è la trasformata secondo Fourier di x(t), la trasformata secondo Fourier dei suoi valori campionati x(nT) sarà data dalla ripetizione periodica di X(ω), a meno di una costante moltiplicativa 1/T, cioè:

$$\mathcal{F}[x(nT)] = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega+k\,\omega_0) \quad \text{con} \quad \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

Detta G(ω) la trasformata secondo Fourier di g(t), la trasformata secondo Fourier di s(t) risulta:

(7.3.2) $$S(\omega)=\frac{1}{T}G(\omega)\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(\omega+k\frac{2\pi}{T})$$

Con l'impiego di un filtro passa-basso si può isolare la sola componente corrispondente a k = 0, come illustrato in figura 7.3.2.

Il segnale rimanente dopo il filtraggio ha trasformata di Fourier data da:

$$\frac{G(\omega)}{T}X(\omega)$$

Da ciò è immediato dedurre che, facendo elaborare detto segnale ad una rete equalizzatrice con una opportuna funzione di trasferimento, da esso si può estrarre il segnale originario x(t).

La funzione di trasferimento per la rete equalizzatrice che realizza questa condizione è $\frac{T}{G(\omega)}$, evidentemente data dall'inverso del fattore che moltiplica la trasformata X(ω) del segnale x(t) di partenza.

Nella maggioranza dei casi l'impulso di modulazione impiegato è di forma rettangolare, di durata *τ* molto minore di *T*. In tal caso la sua trasformata G(ω) può essere assunta costante di valore *τ* nell'intervallo di pulsazioni di interesse (0, ω_m: quelle lasciate passare dal filtro passa-basso). In tal caso la rete equalizzatrice può essere sostituita da un semplice amplificatore di guadagno costante $\frac{\tau}{T}$ all'interno della banda di pulsazioni suddetta.

Facendo riferimento al caso telefonico (figura 7.3.3), quando si hanno i valori quantizzati il filtro in ricezione, posto dopo il decodificatore, ha come uscita il segnale $x_r(t) \approx x(t)$.

Che differenza c'è tra x(t) e $x_r(t)$?

Poniamo:

(7.3.3) $$\varepsilon(t) = x_r(t) - x(t)$$

(7.3.4) $$x_r(t) = x(t) + \varepsilon(t)$$

ε(t) prende il nome di rumore di quantizzazione, ed è auspicabile che sia il più piccolo possibile.

A parità di numero di livelli di quantizzazione vogliamo minimizzare la potenza di ε(t) agendo sulla legge di quantizzazione.

Intuitivamente, per diminuire ε(t) dovremmo aumentare *L* e quindi *m* producendo, in ultima analisi, un aumento della banda del segnale.

Prendiamo in considerazione un segnale analogico prodotto da una sorgente aleatoria stazionaria del primo ordine.

La densità di probabilità di x(t) nell'intervallo *-M* - *+M* ha una forma a cuspide centrata sul valore medio [disegno 4]. Questo comporta che, per diminuire il rumore di quantizzazione, si potrebbe modificare la legge di quantizzazione in modo che l'errore di quantizzazione sia ridotto per i valori assunti più di frequente, in modo da "trattarli meglio", a discapito di quelli assunti meno di frequente, collocati all'estremità dell'intervallo dei valori che possono essere assunti. [disegno 5]

La figura evidenzia come, attorno al punto centrale, la quantizzazione così modificata rappresenta meglio i campioni rispetto al caso con divisione uniforme.

Le leggi di quantizzazione più efficaci per ciascun tipo di segnale analogico sono state standardizzate e, impiegandole, il rumore di quantizzazione risulta praticamente impercettibile, così da poter trascurare la perdita di informazione introdotta dalla fase di quantizzazione.

[03-05-2005]

7.4: Segnali multicanale a divisione di tempo

In campo numerico la tecnica impiegata per la trasmissione di segnali multicanale è quella a divisone di tempo (TDM: Time Division Multiplex). La multiplazione a divisione di tempo si può applicare sia a segnali già in forma numerica sia a segnali analogici, durante il loro processo di conversione A/D.

[disegno: figura 7.4.1]

Ci riferiamo al caso di multiplazione di segnali numerici aventi la medesima frequenza di cifra (caso più semplice). Significa che tutti i segnali numerici hanno la stessa temporizzazione, non soltanto che hanno la stessa frequenza nominale di cifra. Ad esempio, sono segnali numerici generati sfruttando gli impulsi dello stesso orologio (clock, oscillatore).

Vediamo la multiplazione di 4 flussi numerici I_1, I_2, I_3 e I_4.

I dati relativi ai diversi flussi numerici vengono memorizzati sequenzialmente in memorie temporanee o buffer. In questo modo si può ottenere in uscita al multiplatore un flusso I contenente l'informazione congiunta dei 4 flussi in ingresso e avente frequenza di cifra almeno quadrupla rispetto a quella dei flussi in ingresso.

I_1 = ... 1 0 0 1 1 0 1

I_2 = ... 0 1 0 1 0 1 0

I_3 = ... 1 1 1 0 0 0 1

I_4 = ... 0 0 1 1 1 0 1

I = ... 1010 0110 0011 1101 1001 0100 1011

In ciascun tempo di cifra, nel flusso I, accostiamo le 4 cifre presenti nei 4 flussi in ingresso durante il medesimo tempo di cifra. In più, nel flusso I dobbiamo aggiungere informazioni di sincronia che consentano di mantenere il cosiddetto allineamento del ricevitore con il trasmettitore.

Questa multiplazione prende il nome di “bit per bit”, ma potremmo anche multiplare i canali in ingresso in base ai byte, (accostando nel flusso I i byte provenienti dai flussi in ingresso piuttosto che i singoli bit) o trama per trama (accostando in I unità informative costituite da più byte, ciascuna proveniente da un diverso canale di ingresso). La sostanza del procedimento comunque non cambia, e rimane la necessità che i flussi in ingresso siano caratterizzati dalla medesima frequenza di cifra.

La perfetta sincronia dei segnali numerici in ingresso può risultare problematica quando i segnali numerici vengano generati in luoghi geograficamente distanti, dove non è possibile impiegare lo stesso orologio (clock) per la loro generazione, come nel caso di centrali telefoniche distanti. In tale situazione ciascuna centrale necessita di un suo proprio orologio che però, pur avendo la stessa frequenza nominale, nella realtà non può mai eguagliare in modo identico la frequenza generata da un altro orologio.

Per ovviare a questo problema viene considerato un orologio capo (master) sul quale vengono sincronizzati tutti gli altri della rete, ad esso asserviti (slave), in modo che il tempo scandito da tutti sia sempre lo stesso del master. Questo metodo di sincronizzazione di rete prevede, a tal fine, collegamenti dalle centrali con gli orologi slave verso quella che detiene l'orologio master.

Si tratta della la soluzione di più semplice realizzazione ma anche di quella meno affidabile poiché è sufficiente la perdita di collegamento da parte di uno slave verso il master per perdere completamente la sincronizzazione di quello slave.

Una diversa metodologia prevede che tutti gli orologi della rete siano collegati assieme per determinare un valore comune della frequenza di rete. E' stato risolto nonostante si tratti di un problema molto più difficile rispetto al precedente, ma non è stato mai applicato per ragioni politiche piuttosto che tecniche: essendo la rete di comunicazione di vastità mondiale, la maggiore opposizione è stata quella secondo la quale ciascuno stato non desidera che il malfunzionamento di un oscillatore in un altro paese determinasse una variazione, seppur minima, della frequenza di rete impiegata a livello mondiale e quindi anche al suo interno.

Esistono anche tecniche di multiplazione per flussi in ingresso con differenti frequenze di cifra, nelle quali vengono aggiunti bit ai flussi più “lenti” per cercare di rimetterli al passo con quelli più “veloci”. Questo è il principio del Pulse Stuffing?

7.5: Segnali TDM-PCM

Vediamo di introdurre i segnali TDM-PCM. Questa sigla ci ricorda che partiamo da segnali di tipo analogico. Vogliamo effettuare la loro conversione in forma numerica con tecnica PCM e la loro multiplazione con tecnica TDM.

Facciamo riferimento al caso di 3 segnali analogici caratterizzati dalla stessa banda. Quanto andremo a dire vale in tutti i casi analoghi, ma prendiamo il caso di 3 segnali telefonici.

I segnali analogici $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ devono essere campionati tutti con il medesimo intervallo di campionamento T.

Ricordiamo che nel caso monocanale avevamo a disposizione l'intero intervallo T per la trasmissione delle cifre relative a ciascuna parola di codifica.

Avendo 3 segnali (in generale più di uno), possiamo usare soltanto una frazione dell'intervallo T per la trasmissione della parola che rappresenta il valore campionato di ciascun canale. Ad esempio, potremmo limitarci ad impiegare soltanto il primo terzo (T_C = 1/3 T) del tempo T per la trasmissione della parola di codifica relativa al primo canale, il secondo terzo per trasmettere quella relativa al secondo canale e così via.

Il campionamento del secondo canale viene ritardato nel tempo pari a T_C, tempo necessario per trasmettere il valore campionato e quantizzato di un canale. I valori relativi al secondo canale vengono trasmessi nel secondo intervallo T_C all'interno dello stesso intervallo di campionamento T.

Il terzo segnale, analogamente, verrà campionato al termine del secondo intervallo T_C e la parola codificata corrispondente sarà trasmessa durante il terzo (ed ultimo) intervallo di tempo T_C.

[disegno 1]

La sincronizzazione serve per individuare gli istanti di inizio che separano i diversi intervalli di campionamento T. Dobbiamo destinare una parte di T alla trasmissione dei segnali di sincronismo. Detto T_S il tempo riservato a tale scopo, la parte rimanente $T - T_S$ è quella utile per trasmettere l'informazione.

Detto N il numero di canali da multiplare, il tempo massimo T_C impiegabile per la trasmissione della parola di codice relativa a ciascun canale è:

$$T_C = \frac{T - T_S}{N}$$

Vedremo poi che il tempo T_C utile per la trasmissione di informazione di fonia risulta ancora minore rispetto a quello dato dalla formula, per via della necessità di aggiungere in tale intervallo di tempo delle informazioni relative alla gestione della rete (instradamento, tariffazione, ecc.).

La figura 7.5.1 riassume l'intero procedimento.

E' uno schema a blocchi di un sistema di multiplazione TDM-PCM limitato al caso di soli 3 canali telefonici per i quali, così come per la FDM, è stato introdotto uno standard.

Il segnale $x_1(t)$ è inviato ad un campionatore e poi ad un quantizzatore-codificatore. Questo significa applicare a detto segnale una conversione A/D. Tale conversione non è autonoma ma prende in considerazione il fatto che è svolta assieme alla analoga conversione di altri 2 segnali analogici da multiplare. Tale dipendenza è rappresentata dal fatto che la temporizzazione con cui vengono eseguite le conversioni è scandita dallo stesso orologio (CLOCK), che le comanda in sequenza.

L'informazione di sincronizzazione è riportata in una parola di sincronismo di durata T_S all'inizio del tempo T. Il sincronismo per la rimanente parte di T viene mantenuto tenendo il conto delle singole cifre binarie che costituiscono la prima, la seconda e la terza parola, dopo di che una nuova parola di sincronismo viene riconosciuta ed il procedimento si ripete.

L'uscita del nodo sommatore è il segnale TDM-PCM, privo però delle informazioni di gestione precedentemente menzionate.

Nel demultiplatore l'ingresso è costituito dal segnale TDM-PCM, da trattare in modo da ricostruire i 3 segnali analogici originari (a meno del rumore di quantizzazione), che ne costituiscono quindi l'uscita.

La prima cosa da fare per una corretta demultiplazione è ripristinare il sincronismo. Il segnale in arrivo viene infatti analizzato dal RPS (riconoscitore parola di sincronismo). Secondo lo standard europeo la parola di sincronismo è posta all'inizio dell'intervallo T ed è costituita dallo stesso numero di bit della parola riservata alla fonia, cioè 8 bit.

La parola di sincronismo è una parola nota al ricevitore, altrimenti non poterebbe essere riconosciuta. Essa deve essere ricevuta periodicamente. Il sincronismo può dirsi raggiunto quando il ricevitore ha riconosciuto la parola di sincronismo e la ritrova periodicamente ogni T.

In caso di perdita di sincronismo durante la trasmissione, esso viene normalmente recuperato entro qualche centinaio di millisecondi.

Quando esiste sincronismo, l'orologio in ricezione è allineato a quello in trasmissione e fornisce quindi la temporizzazione corretta al resto del demultiplatore. I GATE sono dispositivi comandati per far passare il segnale al loro ingresso verso l'uscita soltanto quando segnalato dal CLOCK. All'uscita dei GATE avremo quindi separato i segnali PCM relativi ai singoli segnali. Li inviamo poi ai decodificatori ed ai filtri passa-basso che, come abbiamo visto, provvedono alla conversione D/A inversa rispetto alla precedente.

Normativa europea (figura 7.5.2):

Le normative si riferiscono, come per la FDM, alla trattazione di segnali telefonici. Sono pensate per consentire la compatibilità dei sistemi di comunicazione dei diversi paesi. Vengono estese, dove possibile, ad altri tipi di segnali.

L'intervallo di tempo T di campionamento del segnale telefonico è fissato in 125 μs, sufficiente per il campionamento di un segnale telefonico con riferimento alla sua banda lorda.

Il sistema di minore capacità comprende 30 canali telefonici.

T viene suddiviso in 32 parti, 30 delle quali sono destinate alla trasmissione delle parole di codice (PC) che rappresentano la fonia. Le 2 aggiuntive, di pari durata rispetto alle altre, sono quella di sincronia (PS, alla posizione 0) e quella di segnalazione (PG, alla posizione 16).

Sia PS che PG sono di 8 bit.

PS deve essere scelta in modo che abbia una bassa probabilità come parola di fonia.

La frequenza di cifra corrispondente a questo standard si ricava calcolando quante cifre vengono trasmesse nell'intervallo di 125 µs. Il numero di bit è 32 * 8 = 256 bit. Risulta quindi:

$$B_R = \frac{256\, bit}{125\, \mu s} = 2{,}048 \frac{Mbit}{s}$$

E' la frequenza di cifra massima trasmissibile su rete ISDN.

Normativa nordamericana:

Stesso intervallo di campionamento $T = 125$ µs per le stesse ragioni del caso europeo.

Il multiplex telefonico a più bassa capacità è costituito da 24 canali telefonici.

Le parole di fonia dello standard nordamericano sono costituite da 7 bit (128 livelli di quantizzazione).

Ciascuna parola di fonia è seguita da un bit di segnalazione (BG). I bit di segnalazione sono quindi 24 per ciascun intervallo di campionamento.

Al termine della trasmissione di tutti e 24 i canali è aggiunto un bit di sincronismo (BS), che inverte il suo valore per ciascun intervallo di campionamento.

Il sincronismo secondo questo standard è più difficile da raggiungere quindi richiede un tempo maggiore per essere conseguito e risulta inoltre meno affidabile.

Nel tempo *T* vengono trasmessi 193 bit, per una frequenza di cifra B_R = 1,544 Mbit/s

Lo schema a blocchi di principio visto prima può essere esteso nelle sue linee di principio sia al caso della normativa europea sia a quella nordamericana.

[09-05-2005]

Gerarchia europea:

Il primo livello di generazione di segnali TDM-PCM è ottenuto a partire da 30 canali telefonici, multiplati secondo lo schema visto prima. L'uscita del multiplatore TDM-PCM ha frequenza di cifra di 2,048 Mbit/s.

Dovendo multiplare un numero più elevato di canali telefonici si passa al secondo livello della gerarchia, che comprende 120 canali telefonici, eseguendo una multiplazione di ordine 4 sui 30 canali già in forma numerica del primo livello. La frequenza di cifra risultante è 8,448 Mbit/s, maggiore rispetto alla pura moltiplicazione per 4 della frequenza di cifra del primo livello, a causa dell'inserimento delle informazioni aggiuntive di allineamento o sincronismo.

Volendo aumentare ulteriormente il numero di canali trasmessi si procede ad una seconda multiplazione di ordine 4, mettendo assieme 480 canali telefonici. La frequenza di cifra è 34,368 Mbit/s, ottenuta in modo analogo al precedente (moltiplicazione per 4 con l'aggiunta di informazioni di sincronismo).

In generale, ogni livello superiore è ottenuto con una multiplazione di ordine 4 dei livelli inferiori, così il livello successivo multipla 1920 canali per 139,264 Mbit/s.

Il livello più alto è il quinto, che multipla assieme 7680 canali telefonici con una frequenza di cifra di 564,992 Mbit/s. (figura 7.5.4).

Nel passaggio dalla formulazione teorica di questa normativa alla sua applicazione pratica sono nate difficoltà già a partire dall'implementazione del terzo livello. Per questo sono state introdotte delle multiplazioni intermedie tra il secondo ed il terzo livello dette "di linea", di ordine 2 anziché di ordine 4, per mantenere basso il valore del bitrate e quindi la banda. Stesso procedimento si è applicato per il passaggio dal terzo al quarto livello, dove inoltre il numero di canali trasmessi dalla multiplazione di linea intermedia di ordine 2 è 960, cioè pari ad un livello della normativa FDM e consente quindi la trasmissione digitalizzata di tale numero di canali telefonici.

(da scrivere meglio?)

Analogamente, la prima multiplazione di linea (che multipla assieme due secondi livelli) ottiene un bitrate di circa 17 Mbit/s, frequenza di cifra impiegata per il primo ponte radio con trasmissione in forma numerica (mediante modulazione PSK).

Attualmente i ponti radio per trasmissioni in forma numerica lavorano anche con 256 livelli di multiplazione.

Gerarchia nordamericana:

Si parte dal primo livello della normativa americana: 24 canali con bitrate 1,544 Mbit/s.

Il secondo livello si ottiene con una multiplazione di ordine 4 a partire dal primo livello, ottenendo 96 canali telefonici per un bitrate di 6,312 Mbit/s.

Il terzo livello si ottiene per multiplazione di ordine 28 di trame del primo livello, portando il numero di canali multiplati al numero di 672 (44,736 Mbit/s).

Il terzo livello può essere anche raggiunto con una multiplazione di ordine 7 a partire dal secondo livello.

Il quarto livello si ottiene con una multiplazione di ordine 6 a partire dal terzo livello. Si ottiene la multiplazione di 4032 canali telefonici per un bitrate complessivo di 274,176 Mbit/s.

(figura 7.5.5)

In entrambe le gerarchie non si inseriscono soltanto segnali telefonici, altri tipi di segnale, dipendentemente dalla larghezza di banda e quindi dalla frequenza di cifra che richiedono, possono essere inseriti a vari livelli della gerarchia. Ci domandiamo in quale livello si andrebbe ad inserire il segnale video una volta convertito in forma numerica (se operassimo con algoritmi che non prevedono la riduzione della ridondanza del segnale).

Con riferimento alla normativa europea, se digitalizzassimo il segnale FDM a 960 canali entreremmo al livello di linea intermedio tra il terzo e il quarto livello (480 * 2 = 960).

Tale segnale ha una frequenza massima di circa 2 MHz, quindi tale ampiezza di banda non è sufficiente per contenere un canale video, che andrebbe quindi inserito nel quarto livello, caratterizzato da bitrate pari a circa 140 Mbit/s. Con opportuni studi sulla possibilità di comprimere il segnale televisivo (MPEG, attualmente siamo alla versione 4), si è potuto ricondurre il segnale televisivo all'inserimento nel secondo livello oppure, addirittura, ad un livello di linea intermedio tra il primo ed il secondo livello. Tali innovazioni hanno consentito l'introduzione della televisione ad alta definizione con trasmissione numerica (digitale terrestre?).

Se multipliamo assieme dei canali audio musicali, una multiplazione di ordine 6 è sufficiente per raggiungere il primo livello della normativa europea (anziché i 30 canali telefonici, quindi un canale audio musicale equivale a 5 canali telefonici).

Segnali dati: pag 7.19.

Ci sono inoltre segnali di tipo telematico che vengono digitalizzati ed inseriti nei livelli gerarchici più bassi perché, nella maggior parte dei casi, sono sufficienti per trasmettere la quantità di informazione che portano.

La trasmissione nella banda naturale (cioè senza modulazione) dei segnali numerici visti finora avviene esclusivamente su linee metalliche.

Per quanto riguarda la trasmissione di segnali numerici, analogamente al caso analogico si prende come riferimento una tratta di 2500 km. Poiché la trasmissione richiede una periodica rigenerazione del segnale numerico, ad intervalli regolari lungo la linea di trasmissione vengono inseriti dei rigeneratori (nel caso analogico erano amplificatori). La distanza tra i rigeneratori prende il nome di passo di rigenerazione.

Questa è una importante differenza rispetto al caso analogico: negli amplificatori analogici il rumore viene inevitabilmente amplificato assieme al segnale utile (supposto anche non distorto), comportando che il livello di rumore sia sempre più esaltato al crescere del numero degli stadi di amplificazione attraversati (mentre il livello del segnale utile viene mantenuto costante) [disegni 1, 2 e 3].

In campo numerico l'amplificatore è sostituito da un rigeneratore. Tale dispositivo analizza il segnale d'ingresso (eventualmente distorto e sovrapposto a rumore) e cerca di ricostruire la successione di simboli che costituiscono l'informazione che esso trasporta. La sequenza così ottenuta viene nuovamente "modulata" per la trasmissione in linea, ottenendo in uscita nuovamente un segnale pulito e privo di rumore. Possono però essere presenti errori nella successione trasmessa in uscita, dovuti a scorrette interpretazioni del segnale di ingresso. Piuttosto che il livello di rumore, in questo campo è rilevante il tasso di errore che esso determina, cioè il numero di bit sbagliati rapportato al numero totale di bit trasmessi.

Considerando nuovamente la normativa europea, le linee trovano il seguente impiego:

Linea bifilare per la trasmissione del primo livello.

Il microcoassiale viene utilizzato al secondo e al terzo livello.

Il coassialino viene utilizzato al terzo e al quarto livello.

Il coassiale (normale) viene impiegato al quindo livello.

In tutti i casi il passo di rigenerazione è di qualche km.

Nel caso di trasmissione in fibra ottica il passo di rigenerazione è nell'ordine delle centinaia di km, ma è necessaria una fase aggiuntiva di modulazione per la trasmissione del segnale numerico nelle frequenze ottiche.

Capitolo 9: Introduzione alla teoria della modulazione

9.1: Definizioni relative alla modulazione di portante sinusoidale

Prendiamo innanzitutto in considerazione il segnale portante sinusoidale, indicato con s_0:

(9.1.1) $$s_0(t)=V_0\cos(\omega_0 t-\varphi_0)$$

x(t) è il segnale modulante, che reca l'informazione da trasmettere. Può essere sia analogico sia numerico (quindi, in quest'ultimo caso, rappresenta un segnale PAM). Quello che diremo vale in entrambi i casi.

Con il segnale modulante agiamo sui parametri che contraddistinguono il segnale portante (ampiezza e angolo). Queste alterazioni devono avvenire in modo "lento" rispetto alla variabilità del segnale portante. In termini formali, detta ω_m la massima pulsazione del segnale modulante, deve essere $\omega_0 >> \omega_m$, dove ω_0 è la pulsazione della portante.

Il segnale modulato si indica con s(t). L'espressione riportata rappresenta la generica dipendenza dell'ampiezza e dell'angolo di s(t) dal tempo, in accordo con il valore del segnale modulante.

(9.1.2) $$s(t)=V(t)\cos\varphi(t) \quad , \text{ con } \quad V(t)\geqslant 0$$

- V(t) rappresenta la cosiddetta ampiezza istantanea del segnale modulato s(t).
- φ(t) rappresenta la cosiddetta fase istantanea di s(t).
- $V(t) - V_0$: deviazione di ampiezza che il segnale modulante determina rispetto all'ampiezza della sola portante.
- m(t): deviazione relativa di ampiezza, così definita:

  (9.1.4) $$m(t)=\frac{V(t)-V_0}{V_0}$$
- ω(t): pulsazione istantanea di s(t), definita come:

  (9.1.3) $$\omega(t)=\frac{d\varphi(t)}{dt}$$
- α(t): deviazione istantanea di fase:

  (9.1.5) $$\alpha(t)=\varphi(t)-(\omega_0 t-\varphi_0)$$
- Δω(t): deviazione istantanea di pulsazione:

  (9.1.6) $$\Delta\omega(t)=\omega(t)-\omega_0$$

Esiste un legame tra α(t) e Δω(t), espresso dalle due formule che seguono:

(9.1.7) $$\begin{aligned}\Delta\omega(t) &= \frac{d\varphi(t)}{dt}-\frac{d(\omega_0 t-\varphi_0)}{dt} = \\ &= \frac{d}{dt}[\varphi(t)-(\omega_0 t-\varphi_0)]=\dot{\alpha}(t)\end{aligned}$$

(9.1.8) $$\alpha(t)=\int \Delta\omega(t)\,dt$$

In quest'ultima formula assumiamo la convenzione di prendere la primitiva che rispetta la condizione di avere valore medio nullo.

Vediamo come possiamo riscrivere il segnale modulato in funzione delle grandezze appena introdotte:

(9.1.9) $$s(t)=V_0[1+m(t)]\cos[\omega_0 t+\alpha(t)-\varphi_0]$$

dove $$V_0[1+m(t)]\geqslant 0$$

E' l'espressione più generale possibile di un segnale sinusoidale modulato, alla quale noi faremo riferimento nel seguito.

Modulazione di ampiezza (AM):

(9.1.10) $$m(t)=k\cdot x(t)$$ $$\alpha(t)\equiv 0$$

Essendo *k* un valore costante.

La deviazione relativa di ampiezza è proporzionale al valore del segnale modulante.

L'espressione di s(t) risultante è

(9.1.11) $$s(t)=V_0[1+k\cdot x(t)]\cos(\omega_0 t-\varphi_0)$$

E' importante che sia verificata la condizione di non negatività di m(t), cioè:

$$m(t)\leqslant 1\Rightarrow k\cdot x(t)\leqslant 1$$

Modulazione angolare:

prevede che risulti:

$$m(t)\equiv 0$$ $$\alpha(t)=T[x(t)]$$

Cioè che la deviazione istantanea di fase sia è una trasformazione lineare *T* del segnale modulante.

Risulta la seguente formula del segnale modulato s(t):

$$s(t)=V_0\cos(\omega_0 t+T[x(t)]-\varphi_0)$$

La modulazione angolare prende normalmente due forme, quella della modulazione di fase e quella della modulazione di frequenza, a seconda della trasformazione lineare applicata al segnale x(t).

Modulazione di fase (PM):

La modulazione di fase è regolata dalle seguenti relazioni:

(9.1.12) $$m(t)\equiv 0$$ $$\alpha(t)=k\cdot x(t)$$

Il parametro *k*, come prima, assume un valore costante.

Il segnale modulato prende allora la seguente forma specifica:

(9.1.13) $$s(t)=V_0\cos[\omega_0 t+k\cdot x(t)-\varphi_0]$$

l'ampiezza è sempre uguale a quella della portante.

La deviazione istantanea di fase è proporzionale al segnale modulante.

Modulazione di frequenza (FM):

Le relazioni che specificano la modulazione di frequenza sono:

(9.1.14) $$m(t)\equiv 0$$ $$\Delta\omega(t)=k\cdot x(t)$$

Analogamente ai due casi precedenti, il parametro k è considerato costante.

Questa volta il segnale modulato assume la forma più specifica sotto riportata:

(9.1.15) $$s(t)=V_0\cos[\omega_0 t+k\int x(t)dt-\varphi_0]$$

Infatti la deviazione istantanea angolare α(t) assume la seguente forma:

(9.1.17) $$\alpha(t)=k\int x(t)dt$$

in quanto è la sua derivata, cioè la deviazione istantanea di pulsazione Δω(t), ad essere proporzionale al segnale modulante, mentre anche in questo caso l'ampiezza è costante e pari a quella della portante.

Nella tecnica attuale i segnali modulati in angolo sono il risultato di compromessi tra la modulazione di frequenza e quella di fase.

Andamenti tipici dei segnali modulati secondo le diverse tecniche sono presentate in figura 9.1.1

La modulazione di ampiezza si presenta con i picchi della portante che seguono l'inviluppo dato dal segnale modulante.

Nella PM e nella FM si evidenzia l'azione del segnale modulante sull'angolo del segnale piuttosto che sulla sua ampiezza, che infatti rimane costante.

La pulsazione nella modulazione PM assume il suo valore massimo nei punti in cui è massima la derivata del segnale modulante x(t), in virtù della seguente relazione:

(9.1.16) $$\dot{\alpha}(t)=\Delta\omega(t)=k\dot{x}(t)$$

Nella modulazione di frequenza FM la pulsazione è direttamente proporzionale al segnale modulante x(t).

Come già anticipato nella trattazione della modulazione di ampiezza fatta prima, la condizione che l'ampiezza V(t) del segnale modulante sia sempre positiva si traduce nella seguente (posto che V_0 sia anch'esso positivo):

(9.1.19) $$1+m(t)=1+k\cdot x(t)\geqslant 0$$

Se consideriamo il segnale modulante come avente valore medio nullo e dinamica compresa nell'intervallo (-*M*, *M*), cioè simmetrica rispetto allo 0 con ampiezza *M* (posto *M* > 0), la condizione espressa dalla formula precedente risulta verificata quando:

(9.1.20) $$|k|M\leqslant 1$$

L'indice di modulazione di ampiezza è dato da

(9.1.21) $$m_a=max|m(t)|$$

e deve essere sicuramente minore o uguale ad 1 per evitare di avere “inversione” dell'ampiezza del segnale, infatti nel caso della modulazione d'ampiezza:

(9.1.23) $$m_a=|k|\cdot M$$

e dalla (9.1.20) discende immediatamente che:

(9.1.24) $$m_a\leqslant 1$$

L'indice di modulazione angolare è definito dalla

(9.1.22) $$m=max|\alpha(t)|$$

e questa quantità non ha alcuna limitazione teorica come invece avviene per l'indice di modulazione d'ampiezza.

Esiste invece una limitazione pratica, dovuta al fatto che aumentando l'indice di modulazione angolare si allarga la banda del segnale modulato. Bisogna quindi contenerne il valore in modo che la banda occupata non ecceda quella assegnata dallo standard di trasmissione che si vuole impiegare.

[disegno 4]

Consideriamo il caso in cui m_a (indice di modulazione d'ampiezza) sia strettamente minore di 1.

All'ampiezza costante V_0 della portante dobbiamo aggiungere la quantità $k \cdot V_0 \cdot x(t)$, dipendente dal segnale modulante.

Quando il punto di minimo diventa tangente all'asse delle ascisse si ha il caso limite in cui $m_a = 1$.

[disegno 5]

Nel caso in cui $|m(t)|_{max} > 1$ avremmo il caso di figura [disegno 6].

Non lo chiamiamo m_a perché il concetto stesso di indice di modulazione include già la sua limitatezza all'intervallo (0,1) [questa è una questione di rigore formale che sarà bene ricordarsi all'esame se c'è una domanda in proposito, per evitare di scrivere cose formalmente scorrette].

Il segnale così ottenuto non è più un segnale modulato unicamente in ampiezza. Lo si potrebbe considerare modulato sia in ampiezza che in angolo, potendolo esprimere secondo la legge:

$$s(t) = V_0 |1 + kx(t)| \cdot \cos[\omega_0 t + \alpha(t) - \varphi_0]$$

ove

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & se\ [1 + kx(t)] \geq 0 \\ \pi, & se\ [1 + kx(t)] < 0 \end{cases}$$

che esprime la dipendenza dal segnale modulante sia dell'angolo sia dell'ampiezza del segnale modulato.

Il terzo caso non è demodulabile con un dispositivo che si limita a seguire i picchi del segnale modulato (demodulatore di cresta) poiché riprodurrebbe in uscita un segnale distorto rispetto all'originale. Si può invece impiegare tale dispositivo per demodulare i segnali modulati nei primi due casi (modulazione di ampiezza propriamente detta, con $m_a < 1$ oppure $m_a = 1$).

Introduciamo ora il concetto di inviluppo complesso di un segnale modulato.

9.2:

[qui ha fatto il paragrafo 9.2 pari pari come nel libro, più le 4 cose in merito che ho scritto sotto]

In formula 9.2.1 vediamo l'espressione più generale di un segnale modulato.

L'inviluppo complesso è fondamentale nel poter estendere la trattazione dei filtri passa-basso al caso passa-banda. [che è quello di cui si parla nel capitolo 10]

[10-05-2005]

9.3: Modulatori e demodulatori come blocchi funzionali

Il modulatore AM è normalmente indicato come in figura 9.3.1, in un ingresso entra il segnale modulante x(t), nell'altro il segnale portante $s_0(t)$ ed in uscita otteniamo il segnale modulato s(t).

Si tratta di un esapolo poiché a ciascuno degli ingressi o uscite (tre in tutto) sono in realtà associati due fili.

Il modulatore di fase è anch'esso rappresentato da un esapolo come in figura 9.3.2, con lo stesso significato e disposizione dei segnali.

Il modulatore di frequenza è, nella stragrande maggioranza dei casi pratici, un quadripolo piuttosto che un esapolo. La struttura quadripolare è determinata dalla mancanza del segnale portante come ingresso. Nella realtà, infatti, il modulatore di frequenza è normalmente implementato come un oscillatore controllato in tensione.

Per quanto riguarda i demodulatori (dispositivi che determinano il passaggio dal segnale modulato a quello modulante originale), essi possono essere suddivisi in due categorie: demodulatori coerenti e demodulatori non coerenti.

Un demodulatore si dice coerente quando, per il suo funzionamento, necessità della conoscenza della portante per poter riottenere il segnale modulante originale. Un demodulatore non coerente non ha questa necessità. I demodulatori coerenti possono essere impiegati in tutti i casi di modulazione, quelli non coerenti non sono utilizzabili in alcuni casi.

Normalmente i demodulatori coerenti danno dei risultati migliori rispetto a quelli non coerenti, a discapito della necessità di fornirgli l'informazione aggiuntiva relativa alla portante. Sono però più frequentemente impiegati i demodulatori non coerenti per la loro semplicità realizzativa e la buona qualità comunque ottenibile. La difficoltà d'impiego dei demodulatori coerenti risiede nella difficoltà di recuperare in modo molto preciso la portante dal segnale modulato in ingresso.

I demodulatori non coerenti sono dei quadripoli con il segnale modulato come ingresso ed il segnale modulante in uscita (figura 9.3.4).

I demodulatori coerenti sono esapoli analoghi ai demodulatori non coerenti, ottenuti con l'aggiunta della portante come ingresso (figura 9.3.5). Essa non può essere generata localmente da un oscillatore indipendente ma deve essere (per ragioni di precisione) necessariamente recuperata dal segnale modulato che arriva al demodulatore.

Lo schema di principio completo di come si impiega un demodulatore coerente è riportato in [disegno 1], dove il segnale modulato viene inviato anche ad un circuito che si preoccupa di recuperare la portante da esso e di renderla quindi disponibile al demodulatore.

Il demodulatore non coerente di fase è schematizzato in figura 9.3.7. Alla sua uscita otteniamo la deviazione istantanea di fase. Un demodulatore non coerente di frequenza (figura 9.3.8) fornisce invece la derivata della deviazione istantanea di fase (ossia la deviazione istantanea di pulsazione?).

E' quindi possibile generare una modulazione di frequenza attraverso un modulatore di fase e, parimenti, si può ottenere indirettamente un modulatore di fase attraverso un modulatore di frequenza.

Consideriamo la figura 9.3.9. Noi disponiamo di un modulatore di fase (PM) e vogliamo realizzare una modulazione di frequenza.

Dobbiamo operare una operazione di integrazione del segnale modulante prima di inviarlo all'ingresso del modulatore di fase. Otterremo quindi una deviazione istantanea di fase proporzionale all'integrale del segnale modulante, corrispondente alla legge che regola la modulazione di frequenza.

Analogamente possiamo ottenere la modulazione di fase tramite un modulatore di frequenza. In figura 9.3.10 disponiamo di un modulatore di frequenza. Per ottenere un segnale modulato in fase inseriamo un circuito derivatore prima del modulatore, in modo che all'ingresso del modulatore di frequenza sia inviata la derivata del segnale modulante. La derivata della deviazione di fase sarà quindi proporzionale alla derivata del segnale modulante, ottenendo una deviazione di fase proporzionale al segnale modulante, il che rappresenta una modulazione di fase.

Si può operare in modo analogo in fase di demodulazione: in figura 9.3.11 otteniamo un demodulatore di frequenza in maniera indiretta mediante un demodulatore di fase aggiungendo a valle del demodulatore di fase un derivatore.

Analogamente, come mostrato in figura 9.3.12, la demodulazione di fase mediante impiego di un demodulatore di frequenza si ottiene aggiungendo a valle del demodulatore di frequenza un integratore.

In generale, è possibile ottenere un collegamento in modulazione di fase impiegando modulatori e demodulatori di frequenza e, viceversa, si può realizzare un collegamento con segnale modulato in frequenza impiegando modulatore e demodulatore di fase.

Il circuito lineare che precede il modulatore prende il nome di rete di preenfasi (nei casi visti è un integratore o derivatore), mentre quella posta in cascata al demodulatore prende il nome di rete di deenfasi (derivatore o integratore rispettivamente, inversa rispetto alla corrispondente di preenfasi).

Si impiegano questi nomi generici dato che integrazione e derivazione non sono le uniche operazioni che possono essere richieste in tale contesto. La figura 9.3.14 mostra il caso generale in cui esse vengono impiegate (nel caso di un collegamento in modulazione di frequenza).

Il segnale ottenuto è modulato angolarmente ma non lo è né soltanto in fase né soltanto in frequenza, perché le reti aggiuntive lo modificano.

Queste operazioni vengono fatte per trattare in modo differente il segnale utile rispetto al rumore, perché il segnale utile viene elaborato sia dai dispositivi posti a lato trasmissione sia da quelli a lato ricezione, mentre il rumore che si inserisce lungo la trasmissione viene elaborato soltanto dai dispositivi del lato ricezione per cui, operando una buona scelta delle reti di pre- e de- enfasi, la componente di rumore può essere molto ridotta rispetto al segnale utile.

Una possibile domanda d'esame è la richiesta di scrivere la formula generica del segnale in uscita da un modulatore di frequenza preceduto da una rete di preenfasi opportunamente specificata tramite la sua funzione di trasferimento H(ω).

Possibile domanda d'esame, con riferimento al disegno 2

Detta h(t) = $\mathcal{F}^{-1}\left[H(\omega)\right]$ l'antitrasformata secondo Fourier della funzione di trasferimento della rete di preenfasi, corrispondente alla sua risposta impulsiva, allora la funzione y(t) all'uscita della stessa è data dalla convoluzione tra il segnale modulante x(t) e h(t), cioè:

$$y(t)=x(t)*h(t)$$

Dato che è questa la funzione di ingresso fornita al modulatore in luogo del segnale modulante, l'espressione del segnale modulato sarà:

$$s(t) = V_0 \cdot \cos[\omega_0 t + k\int y(t)dt - \varphi_0] =$$

$$= V_0 \cdot \cos[\omega_0 t + k\int x(t)*h(t)dt - \varphi_0]$$

Il secondo addendo all'interno del coseno è quella trasformazione lineare genericamente indicata con T[x(t)] in precedenza. Più dettagliatamente:

$$T[x(t)]=k\int x(t)*h(t)dt$$

Nelle trasmissioni radio molto spesso la rete di preenfasi ha la funzione di trasferimento in gran parte coincidente con quella di un derivatore. E' questo il motivo per cui si dice che, normalmente nella pratica, il segnale trasmesso in caso di modulazione angolare non è modulato unicamente in fase o in frequenza.

9.4: Caratteristiche spettrali di un oscillatore AM. Oscillazioni DSB, SSB, VSB, DSB-SC, SSB-SC

Uno degli effetti della modulazione è quello di ottenere il trasferimento dell'informazione associata ad un segnale passa-basso ad un segnale passa-banda, in modo che essa possa essere trasmessa su canali passa-banda.

Per un segnale passa-banda il rapporto tra la frequenza f_0 della portante e la larghezza di banda di frequenza B occupata dal segnale stesso deve essere molto maggiore di 1

$$\frac{f_0}{B} \gg 1$$

Disegno 3

Come ipotesi semplificativa, consideriamo $\varphi_0 = 0$, da cui deriva la seguente espressione per il segnale modulato in ampiezza:

(9.4.1) $$s(t) = V_0 \cdot [1 + k \cdot x(t)] \cdot \cos \omega_0 t$$

Sviluppando il prodotto abbiamo:

(9.4.2) $$s(t) = V_0 \cdot \cos \omega_0 t + k V_0 x(t) \cdot \cos \omega_0 t$$

Il primo termine rappresenta una riga sullo spettro in corrispondenza della frequenza della portante, il secondo termine è, a meno di un fattore costante che moltiplica, il prodotto tra il segnale modulante ed una componente sinusoidale, di cui conosciamo lo spettro perché l'abbiamo visto nel caso della conversione di frequenza. Ad esso dobbiamo aggiungere appunto la riga in corrispondenza della frequenza della portante.

I passaggi sono gli stessi visti nel caso della conversione di frequenza: esprimendo x(t) con il suo integrale di Fourier:

(9.4.3) $$x(t) = \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[\omega t - \varphi(\omega)] \, d\omega$$

possiamo ricavare:

(9.4.4) $$\begin{aligned} s(t) = {} & V_0 \cos \omega_0 t + \frac{kV_0}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[(\omega_0 + \omega) t - \varphi(\omega)] \, d\omega \\ & + \frac{kV_0}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[(\omega_0 - \omega) t + \varphi(\omega)] \, d\omega \end{aligned}$$

In essa sono espliciti i tre termini che rappresentano le due bande laterali (quelli con gli integrali) e la componente di frequenza pari a quella della portante.

I grafici significativi per quel che riguarda gli spettri relativi alla modulazione di ampiezza sono quelli riportati in figura 9.4.1.

Nel caso della modulazione di ampiezza la larghezza di banda in pulsazione B_ω del segnale modulato è doppia rispetto alla larghezza di banda ω_m del segnale modulante. La condizione per avere un segnale passa-banda è verificata se:

$$\frac{\omega_0}{B_\omega} \gg 1 \Rightarrow \frac{\omega_0}{2\omega_m} \gg 1 \Rightarrow \omega_0 \gg \omega_m$$

Confrontando gli spettri del segnale modulante con quelli del segnale modulato è evidente che l'informazione nel segnale modulato è riportata due volte, una volta per ciascuna banda laterale. Ciò significa che è possibile ottenere dei segnali modulati in ampiezza che portano la stessa informazione semplicemente sopprimendo una delle due bande laterali. Questo si realizza mediante un filtraggio passa-banda posto a valle del modulatore ed ha l'effetto di dimezzare la larghezza di banda del segnale modulato.

[disegno 4]

Il segnale ottenuto in uscita dal filtro in questo caso viene indicato con la sigla SSB (Single Side Band: banda laterale unica). E' un segnale modulato costituito da un'unica banda laterale, quindi la sua larghezza di banda è uguale a quella del segnale modulante ($B_\omega = \omega_m$) e quindi dimezzata rispetto al segnale modulato in ampiezza visto poc'anzi.

Il segnale SSB non è modulato unicamente in ampiezza ma anche in angolo. Si tratta del primo caso che vediamo di modulazione ibrida di un singolo segnale modulante. [non si dice che il segnale SSB è un segnale modulato in ampiezza. Si può solo dire che è ottenuto partendo da una modulazione di ampiezza]

La modulazione d'ampiezza è un caso particolare di modulazione a prodotto. Il teorema che avevamo visto a riguardo della simmetria degli spettri di ampiezza e fase di un segnale era condizione necessaria e sufficiente perché un segnale fosse un segnale modulato a prodotto. Lo si può anche applicare per stabilire se un segnale può essere un segnale modulato in ampiezza oppure no. Siccome il segnale SSB non ha uno spettro simmetrico, non può trattarsi di un segnale modulato a prodotto e quindi nemmeno di un segnale modulato in ampiezza.

Sopprimendo una delle due bande laterali abbiamo economizzato sulla banda del segnale modulato. Possiamo anche economizzare sulla potenza riducendo la potenza associata alla componente spettrale della potenza, poiché essa può essere riconosciuta in uscita anche se il suo valore è più ridotto rispetto a quello di partenza. Si parla in questo caso di segnale SSB a portante parzialmente attenuata [disegno 5]

Non è sempre possibile eseguire una modulazione SSB, in particolare non la si può applicare quando la banda del segnale modulante parte da frequenze molto vicine allo 0, infatti una volta modulato in ampiezza, il segnale presenterebbe uno spettro d'ampiezza in cui le due bande laterali sarebbero difficilmente separabili per intero mediante filtri reali. [disegno 6]

Possiamo operare un filtraggio passa-banda in modo da lasciar passare tutta una banda laterale per intero sopprimendo soltanto una parte dell'altra, che non può essere eliminata completamente data l'impossibilità di realizzare un filtro passa-banda ideale.

Il segnale così ottenuto, con riferimento al disegno 7 (figura 9.4.3), prende il nome di VSB (Vestigial Side Band), in cui una delle due bande laterali è parzialmente soppressa.

Questa è la categoria di segnali impiegata per la radiodiffusione di programmi televisivi, nei quali soltanto 1,25 MHz della banda laterale inferiore vengono lasciati passare, per una larghezza di banda complessiva del segnale modulato pari a 6,25 MHz (essendo la larghezza di banda del segnale televisivo di 5 MHz).

Nel segnale VSB è impossibile attenuare la portante per economizzare sulla potenza come avevamo visto nel caso della SSB.

Anche il segnale VSB è il risultato di una modulazione ibrida, sia di ampiezza sia di angolo.

Se utilizziamo una modulazione a prodotto il segnale ottenuto presenta entrambe le bande laterali ma nessuna componente spettrale di pulsazione uguale a quella della portante. [disegno 8]

Possiamo anche in questo caso sopprimere una delle due bande laterali mediante un filtraggio passa-banda [+ disegno 9] ottenendo un segnale convertito in frequenza. Abbiamo quindi ricavato che la conversione di frequenza è il risultato di una modulazione ibrida di ampiezza ed angolo.

La modulazione di ampiezza può trovarsi anche indicata con la sigla DSB (Double Side Band: doppia banda laterale). La modulazione a prodotto si indica anche con la sigla DSB-SC (SC: Suppressed Carrier, portante soppressa).

[16-05-2005]

Quella che segue è una esercitazione in cui applichiamo i concetti fin qui visti.

Esprimiamo il segnale modulante tramite il suo integrale di Fourier (come la 9.4.3...) :

(9.4.7) $$x(t)=\int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega)\cos[\omega t-\varphi(\omega)]\,d\omega$$

che ne evidenzia gli spettri di fase ed ampiezza.

Assumiamo la seguente formula rappresentativa della portante:

(9.4.8) $$s_0(t)=V_0\cos\omega_0 t$$

Essa è una versione semplificata della 9.1.1, nella quale consideriamo nulla la fase iniziale φ_0, senza ledere la generalità della trattazione.

L'espressione del segnale modulato in ampiezza è

(9.4.9) $$s(t)=V_0[1+k\,x(t)]\cos\omega_0 t$$

Il suo inviluppo complesso ha formula

(9.4.10) $$i(t)=V_0[1+k\,x(t)]$$

poiché vale la definizione

$$s(t)=\Re\{i(t)\cdot e^{j\omega_0 t}\}$$

In questo caso l'inviluppo complesso è puramente reale e, nel piano complesso, è rappresentato da un vettore giacente sull'asse reale ed equiverso con esso. Se ne deduce quindi che si tratta di una quantità sempre non negativa.

Al variare del tempo l'estremo freccia del vettore i(t) varia di posizione ma non esce mai dal semiasse reale positivo, indicando come non vi sia modulazione d'angolo (figura 9.4.6).

Il segnale SSB con banda laterale inferiore soppressa è indicato di seguito:

(9.4.11) $$s(t)=V_0\cos\omega_0 t+\frac{k\,V_0}{2}\int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega)\cos[(\omega_0+\omega)t-\varphi(\omega)]\,d\omega$$

Il suo inviluppo complesso è

(9.4.12) $$i(t)=V_0+\frac{k\,V_0}{2}\int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega)e^{j[\omega t-\varphi(\omega)]}\,d\omega$$

Rappresentando il vettore i(t) sul piano complesso al variare del tempo otteniamo, ad esempio, il vettore rappresentato in figura 9.4.7. Esso è costituito da una componente puramente reale positiva V_0 sommata ad una grandezza complessa, risultato dell'integrale che compare come secondo termine nella 9.4.12, che possiamo indicare in generale come avente modulo A(t) ed argomento γ(t) propri. L'inviluppo complesso i(t) sarà allora la risultante dei due vettori, cioè dato dalla somma vettoriale:

$$i(t)=V_0+A(t)\cdot e^{j\gamma(t)}$$

Dato che la simmetria dello spettro di ampiezza, tipica della modulazione AM, non è più verificata, possiamo dire di avere ottenuto una modulazione d'angolo, deduzione alla quale potevamo pervenire osservando che l'inviluppo complesso non giace più unicamente sul semiasse reale positivo.

Trattiamo ora il segnale modulato VSB, quel tipo di modulazione impiegato, ad esempio, per la trasmissione di canali televisivi. Normalmente la banda laterale parzialmente soppressa è quella inferiore [disegno 1].

Il segnale VSB è rappresentato dalla formula

$$\begin{aligned} s(t)=&V_0\cos\omega_0 t+\frac{kV_0}{2}\int_{\omega_i}^{\omega_m}V(\omega)\cos[(\omega_0+\omega)t-\varphi(\omega)]\,d\omega \\ &+\frac{kV_0}{2}\int_{\omega_i}^{\omega_s}V(\omega)\cos[(\omega_0-\omega)t+\varphi(\omega)]\,d\omega \end{aligned} \quad , \quad (\omega_s<\omega_m) \qquad (9.4.13)$$

dove il terzo termine è integrato da ω_i a ω_s e non sull'intero intervallo da ω_i a ω_m proprio perché la parte di spettro tra da ω_s e ω_m viene soppressa.

L'espressione dell'inviluppo complesso è simile a quella del segnale SSB con l'aggiunta della componente che rappresenta la parte di banda laterale inferiore che rimane:

$$i(t)=V_0+\frac{kV_0}{2}\int_{\omega_i}^{\omega_m}V(\omega)e^{j[\omega t-\varphi(\omega)]}d\omega+\frac{kV_0}{2}\int_{\omega_i}^{\omega_s}V(\omega)e^{-j[\omega t-\varphi(\omega)]}d\omega \quad , \quad (\omega_s<\omega_m) \qquad (9.4.14)$$

Una possibile disposizione dei vettori rappresentativi dei singoli termini è rappresentata in figura 9.4.8.

Variando la posizione dell'estremo freccia di due dei tre vettori che compongono l'inviluppo complesso, anche la stessa risultante della loro somma vettoriale sarà caratterizzata da una variazione della posizione dell'estremo freccia nel tempo.

Volendo applicare un ragionamento analogo a quello fin qui visto al caso della modulazione AM, otteniamo come formula del segnale modulato la seguente, identica a quella del segnale VSB dove però non vi è parziale soppressione della banda laterale inferiore e quindi l'integrale che compare come terzo termine è calcolato su tutto l'intervallo da ω_i a ω_m:

$$\begin{aligned} s(t)=&V_0\cos\omega_0 t+\frac{kV_0}{2}\int_{\omega_i}^{\omega_m}V(\omega)\cos[(\omega_0+\omega)t-\varphi(\omega)]\,d\omega \\ &+\frac{kV_0}{2}\int_{\omega_i}^{\omega_m}V(\omega)\cos[(\omega_0-\omega)t+\varphi(\omega)]\,d\omega \end{aligned}$$

Analogamente, l'espressione dell'inviluppo complesso è allora data dalla formula seguente:

$$i(t)=V_0+\frac{kV_0}{2}\int_{\omega_i}^{\omega_m}V(\omega)e^{j[\omega t-\varphi(\omega)]}d\omega+\frac{kV_0}{2}\int_{\omega_i}^{\omega_m}V(\omega)e^{-j[\omega t-\varphi(\omega)]}d\omega$$

I tre vettori che rappresentano i tre termini sono: uno puramente reale di valore V_0, il secondo è come quello del caso SSB e il terzo, essendo complesso coniugato del secondo, è il suo simmetrico rispetto all'asse reale. In tal modo la risultante degli ultimi due (e quindi anche di tutti e tre, cioè l'inviluppo complesso) è sempre puramente reale [disegno 2], come infatti deve essere in base alle considerazioni già fatte sull'inviluppo complesso del segnale AM (espresso in formula 9.4.10).

Consideriamo ora il caso di segnale SSB a portante parzialmente soppressa. L'espressione del segnale è data dalla seguente, perfettamente analoga alla 9.4.11 a meno del coefficiente *a* di attenuazione della portante, minore di 1.

(9.4.15) $$s(t)=aV_0\cos\omega_0 t+\frac{kV_0}{2}\int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega)\cos[(\omega_0+\omega)t-\varphi(\omega)]\,d\omega$$

con $a < 1$

l'inviluppo complesso è, in base alle stesse considerazioni:

(9.4.16) $$i(t)=aV_0+\frac{kV_0}{2}\int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega)e^{j[\omega t-\varphi(\omega)]}\,d\omega$$

La rappresentazione grafica è quella di figura 9.4.9, come quella della SSB ma con la componente reale associata al primo termine (V_0) più corta (attenuata di un fattore *a*).

Il caso DSB-SC è simile al caso AM con l'assenza del termine reale V_0. La formula del segnale modulato è

(9.4.17) $$s(t)=x(t)\cos\omega_0 t$$

L'inviluppo complesso risulta anche in questo caso puramente reale ed addirittura coincidente con il segnale modulante x(t)

(9.4.18) $$i(t)=x(t)$$

In tal caso, quindi, non è detto che l'estremo freccia rappresentativo di x(t) risieda sempre nel semiasse reale positivo. Può cadere anche nella parte negativa, cosa che non poteva accadere nel caso AM proprio per la presenza della componente V_0. Possiamo quindi ricondurre il segnale modulato DSB-SC ad un segnale modulato sia in ampiezza sia in angolo secondo la seguente legge:

$$s(t)=|x(t)|\cos[\omega_0 t+\alpha(t)]$$

ove

$$\alpha(t) = \begin{matrix} 0, & x(t)\geqslant 0 \\ \pi, & x(t)<0 \end{matrix}$$

Si deduce che anche la modulazione DSB-SC è una modulazione d'angolo poiché, quando i(t) si trova sul semiasse negativo, è come se avesse modulo positivo e argomento π.

Concludiamo con la trattazione del segnale SSB-SC o convertito in frequenza:

la formula del segnale modulato è

(9.4.19) $$s(t)=\int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega)\cos[(\omega_0+\omega)t-\varphi(\omega)]\,d\omega$$

(come quella del segnale SSB senza il primo termine, quello associato alla portante).

Di conseguenza l'inviluppo complesso è espresso dalla

(9.4.20) $$i(t)=\int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega)e^{j[\omega t-\varphi(\omega)]}\,d\omega$$

In figura 9.4.11 è rappresentata una possibile posizione del vettore i(t) nel piano complesso, si tratta semplicemente del vettore risultante dall'integrazione espressa nella 9.4.20, senza la somma vettoriale con il vettore V_0 che era invece presente nel caso SSB di figura 9.4.7.

Esercizio 3:

Determinazione delle caratteristiche spettrali di un segnale modulato in ampiezza quando il segnale modulante è un tono sinusoidale. Gli studenti lo sbagliano spesso quindi bisogna saperlo bene. Il tono sinusoidale non è trasformabile secondo Fourier.

Con la solita ipotesi semplificativa di fase iniziale della portante nulla ($\varphi_0 = 0$), esprimiamo il segnale modulato in ampiezza:

(9.5.10) $$s(t) = V_0[1+k\,x(t)]\cos\omega_0 t$$

Abbiamo detto che assumiamo come segnale modulante un tono sinusoidale, quindi, in simboli:

(9.5.11) $$x(t) = M\cos(\omega_m t - \varphi_m)$$

Scriviamo di seguito l'espressione esplicita del segnale modulato in ampiezza dopo aver fatto la posizione seguente:

(9.5.12) $$m_a = k M$$

Risulta:

(9.5.13)
$$\begin{aligned} s(t) &= V_0[1+k M\cos(\omega_m t-\varphi_m)]\cos\omega_0 t = \\ &= V_0[1+m_a\cos(\omega_m t-\varphi_m)]\cos\omega_0 t = \\ &= V_0\cos\omega_0 t + m_a V_0\cos(\omega_m t-\varphi_m)\cos\omega_0 t = \\ &= V_0\cos\omega_0 t + \frac{m_a V_0}{2}\cos[(\omega_0+\omega_m)t-\varphi_m] + \frac{m_a V_0}{2}\cos[(\omega_0-\omega_m)t+\varphi_m] = \end{aligned}$$

In questa ultima formula sono presenti tre termini puramente sinusoidali: uno è di pulsazione pari alla portante, gli altri due costituiscono le due "bande laterali" del segnale modulato, ciascuna rappresentate, in questo caso, da una sola riga.

Una possibile rappresentazione degli spettri di ampiezza dei segnali modulante e modulato sono in figura 9.5.1.

Potendo scrivere il segnale modulato nella forma seguente:

(9.5.14) $$s(t) = \Re\left\{\left[V_0 + \frac{m_a V_0}{2}e^{j(\omega_m t-\varphi_m)} + \frac{m_a V_0}{2}e^{-j(\omega_m t-\varphi_m)}\right]e^{j\omega_0 t}\right\}$$

è immediato ricavare la formula dell'inviluppo complesso:

(9.5.15) $$i(t) = V_0 + \frac{m_a V_0}{2}e^{j(\omega_m t-\varphi_m)} + \frac{m_a V_0}{2}e^{-j(\omega_m t-\varphi_m)}$$

Graficamente si tratta di un vettore V_0 puramente reale e da due vettori complessi coniugati rotanti con pulsazione ω_m e $-\omega_m$ (figura 9.5.2). Come già avevamo visto, la risultante di tre vettori di questo tipo è un vettore che giace sempre sul semiasse reale positivo.

9.6: Modulatori e demodulatori a prodotto

La modulazione a prodotto è importante perché è la modulazione di base impiegata per la modulazione di segnali di tipo numerico. Il modulatore a prodotto è un esapolo, mostrato in figura 9.6.1, avente come ingressi il segnale portante e quello modulante ed in uscita il segnale modulato, di espressione:

(9.6.1) $$s(t)=x(t)\cos\omega_0 t$$

Il demodulatore a prodotto, che serve per riottenere il segnale modulante (da quello modulato), appartiene obbligatoriamente alla categoria dei demodulatori coerenti, poiché per questo tipo di modulazione non si può fare uso di un demodulatore non coerente. E' anch'esso un esapolo che prende in ingresso il segnale modulato s(t) e la portante. Essa deve essere in frequenza e fase identica a quella impiegata per la modulazione (l'ampiezza può essere diversa a meno di un coefficiente moltiplicativo), quindi non può essere generata localmente al demodulatore ma deve essere ricostruita (estratta) a partire dal segnale modulato. Lo schema di principio di un demodulatore a prodotto è riportata in figura 9.6.2.

Lo schema a blocchi completo di come viene impiegato un demodulatore a prodotto è riportato nel disegno 3, dove è inserito un circuito di recupero della portante per estrarla dal segnale modulato in ingresso per poi inviarla al demodulatore a prodotto.

Si potrebbe obiettare che, trattandosi di un segnale modulato a prodotto, esso non presenti una componente spettrale in corrispondenza della portante, quindi che non sia possibile ricostruirla.

Tale operazione è invece possibile e si basa sulla considerazione teorica che gli spettri (di ampiezza e fase) del segnale modulato hanno proprietà di simmetria attorno alla pulsazione della portante, e che quindi è comunque possibile individuarla.

Per esempio, avendo il segnale modulato dato dalla 9.6.1, possiamo elaborarlo con un circuito non lineare che ne esegua il quadrato, ottenendo:

$$\begin{aligned} s^2(t) = {} & x^2(t)\cos^2\omega_0 t = \\ = {} & \frac{x^2(t)}{2}[1+\cos(2\omega_0 t)] = \\ = {} & \frac{x^2(t)}{2}+\frac{x^2(t)}{2}\cos(2\omega_0 t) \end{aligned}$$

All'uscita del circuito che esegue il quadrato abbiamo quindi una componente data dal quadrato del segnale modulante ed una costituita dallo stesso segnale, modulato a prodotto con una portante di pulsazione doppia rispetto a quella originale.

Trattandosi di quadrati, sia l'intera espressione sia il primo termine di essa saranno sempre non negativi. In particolare, possiamo scrivere:

$$\frac{x^2(t)}{2}=A_0+y(t)$$

scrivendo il primo termine come la somma del suo valore medio A_0 sovrapposto ad una funzione del tempo y(t). Il secondo termine potrà allora essere scritto come:

$$\begin{aligned} & \frac{x^2(t)}{2}\cos(2\omega_0 t) = \\ = {} & [A_0+y(t)]\cos(2\omega_0 t) = \\ = {} & A_0\cos(2\omega_0 t)+y(t)\cos(2\omega_0 t) \end{aligned}$$

In questo ultimo termine abbiamo allora una riga in corrispondenza della pulsazione doppia della portante. Possiamo allora filtrare tale segnale con un filtro passa-banda a banda strettissima per eliminare la parte (modulata a prodotto) di y(t).

Nel disegno 6 vediamo come si inserisce tale filtro passa-banda, seguito da un divisore di frequenza per due, e nel disegno 5 abbiamo il generico spettro di un segnale modulato a prodotto.

Il segnale ottenuto infine è di pulsazione pari a quella del segnale portante originale, ed abbiamo visto così un possibile modo per ricostruire tale segnale a partire da quello modulato [disegno 7].

La formula del segnale u(t) in uscita dal modulatore a prodotto presente nel demodulatore è dato in formula:

(9.6.2)
$$\begin{aligned} u(t) &= x(t)\cos\omega_0 t\cdot 2\cos\omega_0 t = \\ &= \frac{2}{2}\left[x(t)\cos(\omega_0 t-\omega_0 t)+x(t)\cos(\omega_0 t+\omega_0 t)\right] \\ &= x(t)+x(t)\cos 2\omega_0 t \end{aligned}$$

E' costituito dalla somma tra il segnale modulante ed un segnale modulato a prodotto con portante di pulsazione doppia rispetto a quella nominale.

Il termine x(t) può essere quindi isolato attraverso un'operazione di filtraggio passa-basso che elimini il secondo termine.

Tutto ciò è valido nel caso in cui la portante sia esattamente quella che ha modulato il segnale in partenza. Ipotizziamo allora che essa sia ricostruita in modo non esatto, con un errore di fase di entità Δ. Quello che si ottiene è una portante di espressione:

$$2\cos(\omega_0 t-\Delta)$$

L'uscita del demodulatore sarà allora:

$$x(t)\cos\Delta$$

A tale espressione corrisponde un affievolimento (attenuazione) del segnale, poiché un qualsiasi valore di Δ diverso da 0 produce un fattore coseno minore di 1. Se Δ è molto piccolo l'attenuazione risultante è trascurabile. Se Δ si avvicina a valori di quasi annullamento del coseno, otteniamo un livello del segnale utile comparabile con quello del rumore. Se, inoltre, il valore di Δ non è costante nel tempo esso determina un disturbo aggiuntivo sovrapposto al segnale demodulato.

Modulazione QAM (Quadrature Amplitude Modulation)

E' importante sia in ambito analogico sia in ambito numerico, dove è fondamentale.

Si prendono in considerazione due portanti in quadratura (stessa pulsazione ma sfasate di 90 gradi), di cui riportiamo le espressioni:

$$\cos\omega_0 t \quad \text{e} \quad -\sin\omega_0 t$$

Prendiamo inoltre due segnali modulanti $x_1(t)$ e $x_2(t)$ generati da due sorgenti indipendenti.

Generiamo da questi i due segnali modulati a prodotto corrispondenti:

(9.6.3)
$$s_p(t)=x_1(t)\cos\omega_0 t$$

(9.6.4)
$$s_q(t)=-x_2(t)\sin\omega_0 t$$

Il segnale s(t) è ottenuto dalla loro somma:

(9.6.5)
$$\begin{aligned} s(t) &= s_p(t)+s_q(t) = \\ &= x_1(t)\cos\omega_0 t-x_2(t)\sin\omega_0 t \end{aligned}$$

Questo segnale prende il nome di segnale QAM ed è la sovrapposizione di due segnali modulati a prodotto con portanti tra loro in quadratura. Sotto queste condizioni è possibile separare i due segnali modulanti in fase di demodulazione.

Ho ottenuto un segnale che riporta due informazioni distinte, anche se esse occupano la medesima banda. La trasmissione di entrambe avviene sulla stessa banda e contemporaneamente.

Non rispetta la tecnica TDM perché i segnali sono trasmessi contemporaneamente, e non è FDM perché occupano la stessa banda. Da questa caratteristica deriva la sua importanza.

E' comunque possibile recuperare le due informazioni attraverso una opportuna procedura di demodulazione.

Il segnale s(t) viene inviato a due modulatori a prodotto, a cui vengono inviate le opportune portanti, cioè ad uno viene inviata la portante nominale $2\cos\omega_0 t$ e all'altro quella sfasata di π/2: $-2\sin\omega_0 t$

Le uscite dei due modulatori a prodotto vengono poi filtrate passa-basso. Andremo a dimostrare che i segnali in uscita sono proprio i due segnali modulanti di partenza. (figura 9.6.5)

L'uscita $u_p(t)$ del primo modulatore a prodotto è data da (ottenuta in modo simile alla 9.6.2)

(9.6.6) $$u_p(t)=x_1(t)+x_1(t)\cos 2\omega_0 t-x_2(t)\sin 2\omega_0 t$$

Vediamo che è un'espressione costituita da 3 termini, due dei quali modulati a prodotto (con pulsazione della portante pari a $2\omega_0$) ed uno (il primo), a bassa frequenza, costituito dal primo segnale modulante $x_1(t)$. Il filtro passa-basso lascia passare soltanto quest'ultimo termine a bassa frequenza proponendolo in uscita.

L'uscita $u_q(t)$ del secondo modulatore è data da (ottenuta in modo simile alla 9.6.2)

(9.6.7) $$u_q(t)=-x_1(t)\sin\omega_0 t+x_2(t)-x_2(t)\cos 2\omega_0 t$$

Analogamente a prima, presenta due termini modulati a prodotto (con portante di pulsazione $2\omega_0$) ed uno a bassa frequenza (il secondo) coincidente con il secondo segnale modulante $x_2(t)$. Di nuovo, con un filtro passa-basso collocato sulla via inferiore, eliminiamo le due componenti ad alta frequenza ottenendo in uscita il solo segnale modulante originale.

La ragione per cui è possibile separare i due segnali in fase di demodulazione è data dall'ortogonalità delle due portanti.

Il modulatore è costituito in modo molto semplice, come rappresentato in figura 9.6.6. Prevede l'ingresso dei due segnali modulanti a due modulatori a prodotto M_P ai quali vengono inviate le due portanti ortogonali $\cos\omega_0 t$ e $-\sin\omega_0 t$.

Le due uscite vengono semplicemente sommate per ottenere il segnale modulato completo.

Notiamo che la modulazione QAM è ibrida di angolo ed ampiezza, caratterizzata dalla scelta di due segnali modulanti indipendenti.

Vediamo l'espressione di una oscillazione genericamente modulata, sia in angolo sia in ampiezza:

$$\begin{aligned} s(t) &= V(t)\cdot\cos[\omega_0 t-\alpha(t)] = \\ &= V(t)\cdot\cos\alpha(t)\cdot\cos(\omega_0 t)-V(t)\cdot\sin\alpha(t)\cdot\sin(\omega_0 t) = \\ &= x_1(t)\cdot\cos(\omega_0 t)-x_2\cdot\sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

ove

$$x_1(t)=V(t)\cdot\cos\alpha(t) \quad \text{e} \quad x_2(t)=V(t)\cdot\sin\alpha(t)$$

Riconosco in tal modo che ciascun segnale genericamente modulato può essere scritto come sovrapposizione di due modulazioni a prodotto con portante in quadratura (dove $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono i segnali modulanti).

Non possiamo però dire che qualsiasi tipo di modulazione sia indistinta da una modulazione QAM perché la QAM è il caso particolare in cui $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono statisticamente indipendenti, condizione generalmente non verificata nel caso delle altre modulazioni ibride.

Il demodulatore QAM visto prima è un demodulatore coerente e non può essere altrimenti.

Valutiamo cosa accade se la portante, in fase di demodulazione non è nota in modo esatto, ma affetta da un errore di fase. Facciamo riferimento allo schema di figura 9.6.7, in cui la cascata del modulatore a prodotto e del filtro passa-basso è rappresentata con un singolo blocco chiamato demodulatore a prodotto D_P. Ipotizziamo che la portante principale sia

$$2\cos(\omega_0 t-\Delta)$$

dove Δ è l'errore di fase. Lo stesso errore è presente sulla portante in quadratura:

$$-2\sin(\omega_0 t-\Delta)$$

Ciò che accade all'uscita della via superiore, dove dovrebbe essere presente soltanto il primo segnale modulante $x_1(t)$, è la presenza di un segnale nella forma:

$$x_1(t)\cos\Delta-x_2(t)\sin\Delta$$

In pratica non solo l'errore di fase attenua il primo segnale modulante (come visto nel caso del demodulatore a prodotto), ma produce anche la sovrapposizione di una componente del secondo segnale modulante $x_2(t)$.

Stesso comportamento si ha nella seconda uscita, data dalla formula:

$$x_2(t)\cos\Delta+x_1(t)\sin\Delta$$

In essa si sovrappone una componente del primo segnale modulante $x_1(t)$, in aggiunta alla già indesiderabile attenuazione di $x_2(t)$. La separazione tra i due segnali è quindi perfetta soltanto se l'errore di fase è nullo ($\Delta = 0$). In caso contrario abbiamo un'interferenza tra i due segnali. Nel caso (catastrofico) in cui Δ valga $\pi/2$ avremmo uno scambio delle uscite.

Volendo scrivere l'inviluppo complesso di un segnale modulato QAM scriviamo il segnale modulato nella forma:

(9.6.8) $$s(t)=\Re\{[x_1(t)+j\,x_2(t)]\,e^{j\omega_0 t}\}$$

Otteniamo immediatamente l'inviluppo complesso:

(9.6.9) $$i(t)=x_1(t)+j\,x_2(t)$$

La rappresentazione grafica è data in figura 9.6.8 ed è evidente come l'inviluppo sia la risultante di una componente puramente reale ($x_1(t)$) sommata ad una puramente immaginaria (di modulo $x_2(t)$), determinata dalla quadratura delle due portanti.

9.7: Caratteristiche spettrali di oscillazioni modulate in angolo.

Ci proponiamo di individuare alcune caratteristiche spettrali di un segnale modulato in angolo. In realtà si tratta di un argomento molto complicato che può essere studiato in questo corso soltanto in alcuni suoi aspetti. Noi studieremo gli spettri di ampiezza e di fase ottenuti dalla modulazione di un tono sinusoidale. In tal caso individueremo la banda impegnata dal segnale modulato. Questo risultato, molto particolare, può essere esteso ad una più ampia generalità potendo individuare l'ampiezza di banda occupata dalla modulazione di qualsiasi segnale di tipo analogico.

Consideriamo il segnale modulato in angolo dato in formula:

(9.7.1) $$s(t)=V_0\cos[\omega_0 t+\alpha(t)]$$

in cui è stato scelto un segnale con fase iniziale nulla senza per questo rendere meno generale la trattazione.

Il segnale modulante è un tono sinusoidale:

(9.7.2) $$x(t)=M\cos(\omega_m t-\varphi_m)$$

Se applichiamo una modulazione di fase otteniamo il segnale modulato indicato di seguito:

(9.7.3) $$s(t)=V_0\cos[\omega_0 t+k\,M\cos(\omega_m t-\varphi_m)]$$

Se invece applichiamo una modulazione di frequenza, abbiamo:

(9.7.4) $$s(t)=V_0\cos\left[\omega_0 t+\frac{k\,M}{\omega_m}\sin(\omega_m t-\varphi_m)\right]$$

Per unificare le due formule possiamo scrivere l'espressione seguente, che può rappresentare una modulazione sia di fase sia di frequenza:

(9.7.5) $$s(t)=V_0\cos[\omega_0 t+m\sin(\omega_m t-\psi)]$$

dove

(9.7.6) $$\psi=\begin{matrix}\varphi_m-\frac{\pi}{2} & \text{in PM}\\ \varphi_m & \text{in FM}\end{matrix}$$

avendo indicato con *m* l'indice di modulazione angolare in entrambi i casi (in quanto rappresenta la massima variazione della deviazione di fase).

Possiamo allora studiare in modo unificato i due casi facendo riferimento a queste ultime considerazioni.

Osservando la 9.7.5, la deviazione di fase α(t) è data da

(9.7.7) $$\alpha(t)=m\sin(\omega_m t-\psi)$$

e la deviazione istantanea di pulsazione, derivata della precedente, è:

(9.7.8) $$\dot{\alpha}(t)=\Delta\omega(t)=m\,\omega_m\cos(\omega_m t-\psi)$$

Ne consegue che il valore massimo della deviazione di pulsazione è (data la limitatezza del coseno):

(9.7.9) $$\Delta\omega_{max}=m\,\omega_m$$

da cui:

(9.7.10) $$m=\frac{\Delta\omega_{max}}{\omega_m}$$

Quest'ultima espressione alternativa per l'indice di modulazione vale **soltanto** quando il segnale modulante è un tono sinusoidale.

Per studiare le proprietà spettrali faremo riferimento alla 9.7.5.

[17-05-2005]

Possiamo scrivere la 9.7.5 in questo modo:

(9.7.11) $$s(t)=\Re\{V_0 e^{j m \sin(\omega_m t-\psi)} e^{j\omega_0 t}\}$$

dove

(9.7.12) $$i(t)=V_0 e^{j m \sin(\omega_m t-\psi)}$$

ne rappresenta l'inviluppo complesso.

Ponendo:

$$\Phi=\omega_m t-\psi$$

Possiamo considerare la funzione:

$$e^{j m \sin(\omega_m t-\psi)}=e^{j m \sin\Phi}$$

Trattandosi di una funzione periodica di periodo 2π nella variabile Φ, possiamo svilupparla in serie di Fourier, come illustrato di seguito (in forma esponenziale):

(9.7.13) $$e^{j m \sin\Phi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j n\Phi}$$

I coefficienti c_n generici della serie sono dati da:

(9.7.14) $$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j m \sin\Phi} e^{-j n\Phi}\, d\Phi$$

E' un'espressione particolare che definisce una funzione speciale, denominata funzione di Bessel di prima specie e di ordine *n*, simbolicamente rappresentata da: (un grafico si trova in figura 9.7.1)

(9.7.15) $$c_n=J_n(m)$$

L'indice *n* della funzione di Bessel assume tutti i valori interi possibili (positivi, negativi e nullo), e il valore della funzione dipende dall'indice di modulazione angolare *m*. Le funzioni di Bessel godono della proprietà, espressa di seguito:

(9.7.16) $$J_{-n}(m)=(-1)^n J_n(m)$$

Quindi per valori di *n* pari J_n e J_{-n} sono funzioni coincidenti, altrimenti sono opposte.

Detto questo, possiamo limitare la rappresentazione ai soli valori di n ≥ 0, potendo ricavare gli andamenti per quelli negativi. In figura 9.7.1 vediamo l'andamento di alcune funzioni di Bessel in dipendenza di *n* ed *m*. J_0 ha un massimo in m = 0 poi assume l'andamento di una oscillazione smorzata che tende asintoticamente a 0.

Tutte le altre, di ordine maggiore di 0, escono dall'origine (quindi si annullano in corrispondenza di m = 0), con la differenza che J_1 esce dall'origine con pendenza non nulla (pari a 1/2), mentre tutte quelle di ordine superiore escono con derivata nulla (quindi tangenzialmente all'asse delle ascisse) e sono sempre più “adagiate” sull'asse delle ascisse man mano che l'ordine aumenta. Hanno tutte un andamento oscillatorio smorzato attorno all'asse delle ascisse, con tendenza asintotica al valore 0.

Possiamo allora esprimere il segnale modulato mediante una espressione alternativa che fa uso delle funzioni di Bessel:

(9.7.17) $$s(t)=V_0\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m)\cos[(\omega_0+n\omega_m)t-n\psi]$$

Siamo risusciti a descrivere il segnale modulato in angolo di partenza attraverso la somma di infiniti termini sinusoidali, potendone quindi ricavare facilmente lo spettro, dato che ad ogni componente sinusoidale abbiamo una riga sullo spettro di ampiezza e una su quello di fase.

Di queste righe possiamo ricavare la pulsazione, l'ampiezza e la fase iniziale, in tal modo ci è possibile disegnare esattamente entrambi gli spettri.

Individuiamo dapprima le pulsazioni: la pulsazione generica di ognuna di queste righe, a prima vista, appare $\omega_0+n\omega_m$.

Tale interpretazione è sbagliata poiché, potendo essere n anche negativo, potrebbe produrre una pulsazione negativa il che, fisicamente, non è accettabile. La pulsazione generica deve essere allora considerata in valore assoluto: $|\omega_0+n\omega_m|$

Parimenti, l'ampiezza del generico termine è, a prima vista: $V_0 J_n(m)$, ma per le stesse ragioni di prima, essendo $J_n(m)$ una funzione che può assumere anche valori negativi, per avere l'ampiezza delle righe che compongono lo spettro dobbiamo prendere l'espressione precedente in modulo: $|V_0 J_n(m)|=V_0|J_n(m)|$

Per quanto riguarda la fase, dobbiamo prestare molta attenzione, poiché dobbiamo compensare con una variazione di π la compensazione dell'eventuale segno negativo dell'argomento del modulo.

Esercizio 4 pagina 9.45: Caso m = 0

L'indice di modulazione nullo implica che il segnale modulato coincida con il segnale portante.

La funzione di Bessel ha valore 1 per l'ordine 0 e valore nullo per tutti gli altri ordini:

(9.8.1)
$$J_n(0) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$$

Sostituendo nella 9.7.17, otteniamo effettivamente:

(9.8.2)
$$s(t)=V_0\cos\omega_0 t$$

che coincide con l'espressione della portante.

Esercizio 5 pagina 9.45: Caso m << 1

Per m << 1 abbiamo, con riferimento alla derivata delle funzioni di Bessel:

(9.8.3)
$$\left[\frac{dJ_n(m)}{dm}\right]_{m=0} = \begin{cases} 0, & n\neq\pm 1 \\ \frac{1}{2}, & n=1 \\ -\frac{1}{2}, & n=-1 \end{cases}$$

Teniamo presente questa considerazione assumiamo i seguenti valori delle funzioni di Bessel per m << 1:

(9.8.4)
$$\begin{aligned} &J_0(m)=1 \\ &J_1(m)=\frac{m}{2} \\ &J_{-1}(m)=-\frac{m}{2} \\ &J_n(m)=0, \quad n\neq(0,\pm 1) \end{aligned}$$

consideriamo cioè che $J_0(m)$ vale circa 1, per |n| = 1 abbiamo dipendenza praticamente lineare mentre per |n| > 1 il valore di $J_n(m)$ è praticamente trascurabile in quanto approssimativamente nullo. Abbiamo allora ridotto a tre il numero di termini significativi da considerare nell'esplicitazione della 9.7.17.

Sviluppando la sommatoria e sostituendo, otteniamo:

(9.8.5) $$s(t)=V_0\cos\omega_0 t+\frac{mV_0}{2}\cos[(\omega_0+\omega_m)t-\psi]-\frac{mV_0}{2}\cos[(\omega_0-\omega_m)t+\psi]$$

caratterizzata da una componente di pulsazione pari a quella della portante e due componenti “laterali” di pulsazione $\omega_0 + \omega_m$ e $\omega_0 - \omega_m$ e ampiezza $mV_0/2$.

Gli spettri, in accordo con la 9.8.5, sono rappresentati in figura 9.8.1.

Considerando la forma dello spettro di ampiezza, può sorgere il dubbio che si stia invece mostrando lo spettro di un segnale modulato in ampiezza piuttosto che in angolo. Il dubbio sparisce considerando lo spettro di fase, che ha la forma di figura anziché essere antisimmetrico come nel caso AM. Vediamo che, in corrispondenza di $\omega_0 - \omega_m$, ammettendo che ψ sia positivo, anche la fase risulterebbe positiva di valore $\pi - \psi$ (invece del valore $-\psi$ che avremmo dovuto avere in caso AM). La fase associata a $\omega_0 + \omega_m$ ha valore ψ mentre, in corrispondenza della pulsazione ω_0 della portante, come mostrato dalla formula, la fase è nulla.

L'inviluppo complesso in questo caso particolare assume la seguente forma:

(9.8.6) $$i(t)=V_0+\frac{mV_0}{2}e^{j(\omega_m t-\psi)}+\frac{mV_0}{2}e^{-j(\omega_m t-\psi+\pi)}$$

il cui diagramma vettoriale rappresentativo è quello di figura 9.8.2. E' costituito da una componente puramente reale costituita da V_0, mentre la risultante dei due termini rimanenti è puramente immaginaria in quanto risultante di due vettori rotanti con pulsazioni opposte. Si può avere l'impressione che, in tal caso, il segnale non sia modulato unicamente in angolo ma anche in ampiezza poiché il modulo del vettore risultante varia assieme all'angolo che esso forma con l'asse delle ascisse. Tale effetto è dovuto alle approssimazioni che abbiamo condotto, in realtà l'estremo freccia dell'inviluppo complesso, al variare di t, si muove lungo una circonferenza di raggio V_0 piuttosto che sulla verticale condotta per tale valore.

Considerazione finalizzata agli esercizi: gli stessi risultati che abbiamo ottenuto potevamo ricavarli dalla 9.7.5 conducendo alcune approssimazioni: Quando m << 1 possiamo dire che

(9.8.8) $$\cos[m\sin(\omega_m t-\psi)]\simeq 1$$

e

(9.8.9) $$\sin[m\sin(\omega_m t-\psi)]\simeq m\sin(\omega_m t-\psi)$$

Dalla 9.7.5 si può scrivere la seguente:

(9.8.7) $$s(t)=V_0\cos(\omega_0 t)\cos[m\sin(\omega_m t-\psi)]-V_0\sin(\omega_0 t)\sin[m\sin(\omega_m t-\psi)]$$

Dalla quale, sostituendo le precedenti approssimazioni, ricaviamo appunto la 9.8.5.

All'aumentare del valore di m diventano significativi gli apporti dovuti alle funzioni di Bessel di ordine via via sempre maggiore, allargando lo spettro di ampiezza del segnale modulato in angolo come ad esempio in figura 9.7.2. Il numero di righe significative che nascono aumenta al crescere di m. Le righe già presenti nello spettro possono, invece, variare la loro ampiezza al variare di m. In pratica si ha una distribuzione sempre diversa della potenza sulle varie righe dello spettro con l'unica condizione che la potenza complessiva del segnale rimanga costante.

E' stata studiata la relazione che fornisce la larghezza di banda tale per cui in essa è compreso almeno il 99% della potenza associata al segnale modulato. Tale relazione è chiamata formula di

Carson:

(9.7.18) $$B_\omega = 2(\Delta\omega_{max} + \omega_m)$$

il valore di banda che si calcola con essa prende il nome di banda di Carson.

Essendo tale larghezza di banda finita, sarà finito anche il numero di righe dello spettro che in essa ricadono (figura 9.7.2), quindi (nel caso ci sia sufficiente rappresentare il segnale con almeno il 99% delle sue componenti in potenza) possiamo ridurre la sommatoria di infiniti termini ad una somma finita.

Possiamo scrivere la formula di Carson come:

$$\begin{aligned} B_\omega = & \ 2(\Delta\omega_{max} + \omega_m) \ = \\ = & \ 2\omega_m\left(\frac{\Delta\omega_{max}}{\omega_m} + 1\right) \ = \\ = & \ 2\omega_m(m+1) \end{aligned}$$

In essa appare evidente, come avevamo mostrato prima, che la larghezza di banda, per $m \ll 1$, è assimilabile al valore $2\omega_m$.

Dovendo impiegare le modulazioni d'angolo per fornire servizi a cui è associata una banda limitata, ciò impone un limite pratico al valore massimo di m che è possibile impiegare.

La modulazione d'angolo, a parità di potenza trasmessa, consente una migliore qualità rispetto alla modulazione di ampiezza, a discapito, come abbiamo visto, dell'allargamento della banda.

Con riferimento alla modulazione di un segnale analogico qualsiasi, non di un semplice tono sinusoidale, si ha un segnale modulato con una larghezza di banda data da una relazione identica a quella di Carson, in cui però il termine ω_m rappresenta il valore massimo della pulsazione del segnale modulante (nel caso del tono sinusoidale invece ω_m era la pulsazione del tono sinusoidale).

Anche nel caso del segnale modulato in angolo, così come nella modulazione di ampiezza, possiamo dire che il segnale modulato sia di tipo passa-banda centrato sulla pulsazione ω_0 della portante (nel caso in cui $\omega_0 \gg \omega_m$).

Cosa accade se non è vero che $\omega_0 \gg \omega_m$?

[disegno 1]

Non abbiamo uno spettro di ampiezza simmetrico poiché le righe che avrebbero pulsazione negativa verrebbero riportate in corrispondenza del modulo dei tale pulsazione. In tal modo otterremmo un segnale distorto di tipo passa-basso che non rappresenta più un corretto segnale modulato in angolo.

Abbiamo riconosciuto che i segnali modulati sono segnali passa-banda. Ci poniamo ora la questione inversa: qual è la natura dei segnali passa-banda? Vale il viceversa? [ed io ho dormito fino ad oggi nell'ignoranza di ciò? Inconcepibile!]

9.9: Natura di un segnale passa-banda

Partiamo dall'ipotesi di avere un segnale s(t): funzione reale del tempo, rappresentativa di un segnale passa-banda. L'essere un segnale passa-banda significa semplicemente che, se consideriamo sull'asse delle pulsazioni una pulsazione ω_0 centrata nella banda del segnale, di larghezza B_ω, abbiamo $B_\omega \ll \omega_0$.

Possiamo esprimere s(t) attraverso l'antitrasformata della propria trasformata di Fourier S(ω).

(9.9.7) $$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t}d\omega =$$

$$= \Re\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} 2S(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right\} =$$

$$= \Re\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_0-\frac{B_\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{B_\omega}{2}} 2S(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right\}$$

il secondo passaggio è determinato dal fatto che, integrando da 0 a infinito, otteniamo il complesso coniugato di quello che otterremmo integrando da -infinito a 0. Quindi sommando questi due termini otteniamo la parte reale dell'integrale del doppio dell'espressione che integriamo nel primo passaggio.

Il terzo passaggio si ottiene limitando l'intervallo di integrazione alla sola banda del segnale, poiché al di fuori di essa, essendo il segnale di tipo passa-banda, possiamo considerare nulla la sua trasformata di Fourier.

Da qui possiamo porlo nella forma seguente, ottenuta operando la sostituzione $\omega=\omega_0+\xi$:

$$s(t) = \Re\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{-B_\omega}{2}}^{\frac{B_\omega}{2}} 2S(\omega_0+\xi)e^{j(\omega_0+\xi)t}d\xi\right\} =$$

(9.9.8) $$= \Re\left\{\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{-B_\omega}{2}}^{\frac{B_\omega}{2}} 2S(\omega_0+\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]\cdot e^{j\omega_0 t}\right\} =$$

$$= \Re\left\{i(t)\cdot e^{j\omega_0 t}\right\}$$

Possiamo da qui esplicitare l'inviluppo complesso:

(9.9.9) $$i(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{-B_\omega}{2}}^{\frac{B_\omega}{2}} 2S(\omega_0+\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Ne consegue che la trasformata di Fourier I(ω) dell'inviluppo complesso ha la forma:

(9.9.10) $$I(\omega) = \begin{cases} 2S(\omega+\omega_0), & per\ |\omega|\leqslant\frac{B_\omega}{2} \\ 0, & altrove \end{cases}$$

essendo l'antitrasformata di i(t) data da:

$$i(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} I(\omega)e^{j\omega t}$$

L'inviluppo espresso nella 9.9.9 può, genericamente, esprimersi anche nella forma polare:

(9.9.11) $$i(t)=V(t)e^{j\alpha(t)}, \quad con\ \ V(t)\geqslant 0$$

Quest'ultima, sostituita nell'ultimo membro della 9.9.8, riduce la suddetta espressione del segnale passa-banda originario alla seguente espressione, la quale esprime un generico segnale modulato in ampiezza ed angolo:

(9.9.12) $$s(t)=V(t)\cos[\omega_0 t+\alpha(t)]$$

Abbiamo quindi verificato come valga anche il viceversa, cioè che i segnali passa-banda siano assimilabili a segnali modulati (sia in ampiezza sia in angolo).

[Qui io mi fermerei un attimo in contemplazione e meditazione per interiorizzare il fatto che i segnali modulati (di qualsiasi tipo) sono di tipo passa-banda e che i segnali passa-banda, qualsiasi sia la loro natura, sono tutti riconducibili a segnali modulati.
In simboli: segnale modulato ↔ segnale passa-banda. Non si sa mai che lo chieda...]

[23-05-2005]

[Nel libro qui c'è un pezzo a riguardo del fatto che un segnale passa-banda è equivalente alla somma di due segnali modulati a prodotto con portanti in quadratura... non so se sia da sapere]

Consideriamo un caso particolare di segnale passa-banda, in cui lo spettro di ampiezza $V_s(\omega)$ sia simmetrico rispetto alla pulsazione centrale ω_0.

Analogamente, consideriamo lo spettro di fase $\varphi_s(\omega)$ antisimmetrico rispetto alla stessa pulsazione.

Le relazioni che esprimono queste proprietà sono:

(9.9.17) $$V_s(\omega_0+\xi)=V_s(\omega_0-\xi)$$

e

(9.9.18) $$\varphi_s(\omega_0+\xi)-\varphi_0=-[\varphi_s(\omega_0-\xi)-\varphi_0]$$

avendo posto

(9.9.19) $$\varphi_0=\varphi_s(\omega_0)$$

In tale situazione la formula dell'inviluppo complesso diventa:

(9.9.20) $$i(t) = e^{-j\varphi_0}\int_{-\frac{B_\omega}{2}}^{\frac{B_\omega}{2}} V_s(\omega+\omega_0)e^{-j[\varphi_s(\omega+\omega_0)-\varphi_0]}e^{j\omega t}d\omega = $$
$$= e^{-j\varphi_0}\cdot a(t)$$

in cui il risultato dell'integrale è una funzione reale del tempo a(t) [ah si? Mmm... magari me lo dimostro...]

A questo punto il segnale s(t) può scriversi così:

(9.9.21) $$s(t) = \Re\left\{a(t)\cdot e^{-j\varphi_0}\cdot e^{j\omega_0 t}\right\} =$$
$$= a(t)\cos(\omega_0 t-\varphi_0)$$

dove può riconoscersi una modulazione a prodotto del segnale a(t).

A fronte di questo risultato abbiamo dimostrato come CNS affinché un segnale sia modulato a prodotto è che il suo spettro di ampiezza sia simmetrico e il suo spettro di fase sia antisimmetrico rispetto alla pulsazione del segnale portante ω_0.

Abbiamo sempre fatto l'ipotesi di segnali trasformabili secondo Fourier, per poter parlare di spettri di fase ed ampiezza.

In tal caso assumiamo implicitamente di avere un segnale ad energia finita. Esso deve, per così dire, avere un inizio ed una fine, essere cioè una funzione del tempo che tende ad annullarsi per t che tende a +∞ e -∞.

Un processo aleatorio stazionario non può dare luogo ad un segnale ad energia finita, esso deve necessariamente essere a potenza finita (e di conseguenza anche i processi ergodici danno luogo a segnali a potenza finita). Questo perché, volendo dare una spiegazione intuitiva, data la stazionarietà, la descrizione statistica del segnale è indipendente dall'istante di tempo in cui è compiuta l'osservazione. Di conseguenza, se esso ha un'energia finita nell'intorno di un istante di tempo qualsiasi, ciò deve essere per ogni istante di tempo, il che concorda con la natura di un segnale a potenza finita.

Passando quindi al caso di segnali a potenza finita, non potremo più parlare di spettri di ampiezza e di fase ma soltanto di spettri di potenza.

Nella nostra trattazione dei segnali a potenza finita studieremo soltanto il caso della loro modulazione in ampiezza e a prodotto, essendo troppo complessa la trattazione delle modulazioni d'angolo in questo ambito.

9.10: Oscillazioni modulate con segnali modulanti a potenza finita

Consideriamo un segnale modulato a prodotto, dato, al solito, dalla seguente formula (mi sono quasi stufato di scriverlo...):

(9.10.1) $$s(t)=x(t)\cos\omega_0 t$$

dove x(t) appartiene ad un processo ergodico a valor medio nullo (quindi x(t) è a potenza finita).

Se x(t), s(t) è ergodico? No, anzi, non è nemmeno stazionario, infatti a moltiplicare il processo ergodico c'è una funzione deterministica del coseno, la quale altera sicuramente la densità di probabilità del primo ordine, facendo sicuramente perdere le caratteristiche anche solo di stazionarietà.

Al solito indichiamo con C(τ) la funzione di autocorrelazione di x(t) e indichiamo con

(9.10.2) $$G(\omega)=\frac{F[C(\tau)]}{\pi}$$

il suo spettro di potenza.

Indichiamo con $C_s(\tau)$ la funzione di autocorrelazione di s(t):

(9.10.3)
$$\begin{aligned}
C_s(\tau) &= \langle s(t)\cdot s(t+\tau)\rangle = \\
&= \langle x(t)\cdot x(t+\tau)\cdot\cos\omega_0 t\cdot\cos[\omega_0(t+\tau)]\rangle = \\
&= \frac{1}{2}\langle x(t)\cdot x(t+\tau)\rangle\cdot\cos\omega_0\tau+\frac{1}{2}\langle x(t)\cdot x(t+\tau)\cdot\cos[\omega_0(2\mathrm{t}+\tau)]\rangle = \\
&= \frac{1}{2}C(\tau)\cos\omega_0\tau = \\
&= \frac{1}{4}C(\tau)e^{j\omega_0\tau}+\frac{1}{4}C(\tau)e^{-j\omega_0\tau}
\end{aligned}$$

[in questa il secondo addendo ad un certo punto sparisce, probabilmente perché diventa zero, pero` non mi riesce immediato dimostrarlo... mi fido]

Da ciò risulta lo spettro di potenza di s(t) espresso di seguito (per la proprietà della trasformata sul ritardo):

(9.10.4) $$G_s(\omega)=\frac{F[C_s(\omega)]}{\pi}=\frac{1}{4}G(\omega-\omega_0)+\frac{1}{4}G(\omega+\omega_0)$$

Essendo G(ω) la densità di potenza del segnale modulante (sul semiasse non negativo delle pulsazioni), dalla formula che abbiamo ottenuto possiamo disegnare lo spettro di figura 9.10.2 (ottenuto dalla traslazione della G(ω) originale)

9.11: Sistemi di modulazione per segnali numerici

Consideriamo un segnale PAM la cui espressione è, genericamente:

(9.11.0) $$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t-nT)$$

g(t) prende il nome di impulso di modulazione e, per i metodi che tratteremo, sarà l'impulso rettangolare rappresentato in disegno 1, di duty cycle pari ad 1.

a_n è una serie temporale (noi ne considereremo una aleatoria ergodica).

Tratteremo i casi in cui la serie a_n sia binaria unipolare, binaria bipolare oppure multilivello.

Il primo tipo di modulazione che consideriamo sarà quella a prodotto, espresso da:

(9.11.1) $$s(t)=x(t)\cos\omega_0 t$$

ne risulta che lo stesso segnale modulante può essere espresso anche come:

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t-nT)\cos\omega_{0t}$$

Nel caso di codifica unipolare (in cui i valori assunti da a_n possono esser solo 0 e 1) i diversi intervalli di simbolo risultano riempiti da un segnale identicamente nullo (nel caso di cifra 0) oppure dall'andamento periodico di $\cos(\omega_0 t)$ (nel caso di cifra 1) [disegno 2].

Una particolarità di questo segnale è quella di poter essere impiegato per la trasmissione su fibra ottica, ovviamente avendo scelto come frequenza portante una frequenza ottica. Questo tipo di modulazione si indica con la sigla OOK (on-off keying), poiché la discriminazione tra i due simboli avviene per la presenza o assenza di segnale.

Quando la serie dei simboli è bipolare (a_n assume valori -1 e 1), un possibile andamento è quello di disegno 3. Esso prende il nome di ASK (amplitude shift keying) poiché l'ampiezza della modulante viene moltiplicata per il valore assunto da a_n.

Per rappresentare questo tipo di segnali modulati si può fare ricorso al piano complesso, riportando su esso, come vettori, i possibili valori del fattore che moltiplica $\cos(\omega_0 t)$ (che rappresenta cioè l'inviluppo complesso del segnale).

[disegno 4 nel caso OOK].

Nel caso ASK (a 2 livelli) il diagramma diventa: [disegno 5].

Nel caso di codifica binaria bipolare la modulazione ASK si indica come 2-ASK. In generale, detto L il numero di livelli della codifica, la corrispondente modulazione ASK viene indicata con la sigla L-ASK (ad esempio 4-ASK, 8-ASK, ecc.)

Nel caso, ad esempio, di L=4, i valori che possono essere assunti da a_n sono: -1, +1, -3, +3, per cui la rappresentazione vettoriale diventa: [disegno 6].

Consideriamo ora invece la modulazione di fase, la cui espressione del segnale modulato è:

(9.11.2) $$s(t)=V_0\cdot\cos[\omega_0 t+k\,x(t)]$$

Quando il segnale x(t) è un segnale PAM otteniamo:

$$s(t)=V_0\cos[\omega_0 t+k\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n g(t-nT)]$$

In questo caso la modulazione di fase prende il nome particolare di PSK (Phase Shift Keying).

Anche in questo caso si può parlare di rappresentazione vettoriale del segnale, ricorrendo nuovamente alla definizione di inviluppo complesso:

$$s(t)=\Re\left\{i(t)\cdot e^{j\omega_0 t}\right\}=$$

$$=\Re\left\{V_0 e^{jk\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n g(t-nT)}\cdot e^{j\omega_0 t}\right\}$$

da cui:

$$i(t)=V_0 e^{jk\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n g(t-nT)}$$

Le posizioni dei vettori sul piano complesso dipendono allora dai valori del prodotto:

$$k\cdot a_n=\alpha_n$$

sostituendo il quale si ottiene la seguente formula per l'inviluppo complesso:

$$i(t)=V_0 e^{j\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n g(t-nT)}$$

Nel caso 4-PSK con a_n = (-1, +1, -3, +3) e k = π/4 il diagramma vettoriale risulta quello del disegno 7. E' bene scegliere k in modo da dividere equamente l'angolo giro in tale diagramma.

Nel caso 8-PSK il valore di k sarebbe π/8.

Naturalmente il numero che precede la sigla PSK è il numero di livelli della codifica.

Citiamo infine l'ultimo metodo di modulazione che abbiamo visto, quello di frequenza.

(9.11.3) $$s(t)=V_0\cdot\cos[\omega_0 t+k\int x(t)dt]$$

Nel caso di un segnale modulante PAM, il segnale modulato risulta:

$$s(t)=V_0\cos[\omega_0 t+k\int\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n g(t-nT)dt]$$

In tale caso particolare la modulazione di frequenza prende il nome di FSK (Frequency Shift Keying). Su questa sigla si può anche aggiungere una precisazione. La FSK potrebbe essere concepita in modo molto semplice (nel caso, ad esempio, di una codifica binaria): predisponiamo 2 oscillatori di diversa frequenza e poi preleviamo l'uscita di uno o dell'altro a seconda del valore di a_n. Così facendo, essendo i due generatori di frequenza indipendenti, non avremmo alcuna correlazione di fase o di continuità tra i segnali che preleviamo (possibile presenza di discontinuità e gradini nella forma d'onda). Questo sistema è stato abbandonato al momento della necessità del suo impiego in campo multilivello, per la scarsa convenienza ad impiegare tanti oscillatori quanti i livelli di codifica previsti.

Si è piuttosto preferito impiegare un normale modulatore di frequenza il quale, in uscita, produce un segnale modulato continuo senza “salti” di fase, riducendo la banda necessaria rispetto al caso illustrato precedentemente (infatti la presenza di discontinuità molto ripide genera disturbi molto estesi in frequenza). Quest'ultimo metodo illustrato prende il nome di CP-FSK (dove il prefisso CP significa Continuous Phase) ed è quella che ha trovato applicazione in sostituzione alla FSK precedente.

Per la trasmissione dello standard GSM la modulazione utilizzata è un caso particolare della CPFSK. La sua particolarità sta nell'impulso di modulazione impiegato, indicato con $g_c(t)$, ottenuto per filtraggio gaussiano dell'impulso di modulazione a gradino g(t) rappresentato precedentemente.

Tale caso particolare prende il nome di GMSK, in cui i segnali modulante e modulato sono espressi, rispettivamente, da:

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_c(t-nT)$$

e

$$s(t)=V_0\cos[\omega_0 t+k\int\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_c(t-nT)dt]$$

[disegno 8]

Il filtraggio rappresentato in figura comporta una maggiore "durata" dell'impulso $g_c(t)$ rispetto a g(t) poiché i fronti saranno meno ripidi, ma la banda occupata risulta di conseguenza minore.

La rappresentazione vettoriale di questa modulazione è data da un vettore il cui estremo freccia si muove sulla circonferenza di raggio V_0 in funzione del tempo. Disegno 9.

Oscillazione QAM

La modulazione QAM è il corrispettivo della modulazione in quadratura quando i segnale modulanti $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono entrambi di tipo PAM:

(9.11.5) $$x_1(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{pn}\cdot g(t-nT)$$

e

(9.11.6) $$x_2(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{qn}\cdot g(t-nT)$$

In cui i simboli a_{pn} e a_{qn} possono assumere i valori +1, -1, +3, -3, +5, -5, ... +(L-1), -(L-1), dove L è il numero di livelli impiegati per la codifica delle serie numeriche.

Il segnale modulato assume la forma:

(9.11.4) $$s(t)=x_1(t)\cos\omega_0 t-x_2(t)\sin\omega_0 t$$

Qual è il numero complessivo M di stati che possono essere assunti da una oscillazione QAM? Sono dati dal quadrato del numero di livelli delle due oscillazioni modulate a prodotto, quindi $M = L^2$.

Le modulazioni QAM si indicano con il prefisso M-QAM, quindi per oscillazioni con 2 livelli, la QAM corrispondente diventa 4-QAM.

Anche per la M-QAM si può parlare di rappresentazione vettoriale. Essa prende il nome di costellazione degli stati intendendo, con questo, quanto di seguito trattato (nel caso di 16-QAM, per cui L = 4)

La formula del segnale modulante può essere scritta come:

(9.11.7) $$s(t)=\Re\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n\cdot g(t-nT)\cdot e^{j\omega_0 t}\right\}$$

dove:

(9.11.8) $$\alpha_n = a_{pn} + j\, a_{qn}$$

Il suo diagramma vettoriale è quello rappresentato nel disegno 10 (sempre nel caso di 16-QAM), in cui sono rappresentati, per non appesantire la figura, soltanto i punti in cui si può trovare l'estremo freccia del vettore al variare del tempo. Tale forma di rappresentazione prende il nome di costellazione degli stati. Come si vede, la QAM è una oscillazione modulata genericamente sia in angolo sia in ampiezza. L'unico caso particolare è costituito dal caso 4-QAM poiché la rappresentazione vettoriale coincide, a meno della scala, con quella della 4-PSK [disegno 11].

Ritorniamo al caso PSK e consideriamo in particolare quello a 2 PSK, k = π/2 quindi il diagramma vettoriale è quello di disegno 12. Come si nota, esso è identico a quello della 2-ASK a meno di una rotazione di π/2 attorno all'origine.

[Esercizio pagina 9.59 preso pari pari dal libro]

[24-05-2005]

Se prendiamo in considerazione il sistema di comunicazione nei suoi tratti essenziali, rappresentato in disegno 1, il segnale di uscita y(t) è costituito da una componente $x_r(t)$ dipendente dall'ingresso sommata ad una componente di rumore n(t).

Ci domandiamo da cosa dipende il rumore n(t) presente all'uscita.

Se cortocircuitiamo l'ingresso del ricevitore [disegno 2], ci aspettiamo di avere una uscita identicamente nulla. Questo però non accade ed in effetti, se misuriamo l'uscita dello stesso, avremo una tensione diversa da zero di andamento completamente aleatorio e non prevedibile.

Il rumore dipende, quindi sicuramente dalla struttura del ricevitore stesso, dai circuiti che lo compongono internamente (anche in assenza di segnale in ingresso).

In realtà un disturbo sovrapposto al segnale utile è presente anche in ingresso al ricevitore, quindi in uscita allo stesso il rumore complessivo sarà dovuto ad entrambe le componenti, quella già presente in ingresso e quella generata internamente.

Un'altra possibile fonte di rumore è l'interferenza intercanale [disegno 3] dovuta alla parziale sovrapposizione delle bande di segnali facenti riferimento a due canali distinti.

Possiamo trattare in maniera del tutto generale la componente di rumore generata internamente dai circuiti costitutivi del sistema.

Altre trattazioni particolari sulle sorgenti del rumore dipendono fortemente dal tipo di sistema di trasmissione impiegato, per cui non ci soffermeremo su di esse.

I circuiti che realizzano un sistema sono i più svariati, il più comune dei quali è un bipolo [disegno 4]. Supponiamo di polarizzarlo applicando ad esso una tensione V_0 costante. Quello che ci possiamo aspettare è che il bipolo venga attraversato da una corrente I_0 costante. Il comportamento del bipolo in generale potrà essere rappresentato dalla caratteristica statica dello stesso, quella che rappresenta il legame tra la tensione e la corrente del bipolo [disegno 5].

Questo in realtà non si verifica perché la corrente non ha andamento costante nel tempo. Esso infatti, indicato con I(t), differisce dal valore I_0 e varia nel tempo [disegno 6: figura 8.1.1].

Dovremo quindi dire che il bipolo è attraversato da una corrente di valore

(8.1.2) $$I(t) = I_0 + i(t)$$

dove i(t) rappresenta la fluttuazione di corrente attorno al valore I_0.

Possiamo rappresentare il fenomeno con un circuito equivalente [disegno 7: figura 8.1.2], dove in parallelo al bipolo, considerato ideale, si trova un generatore di corrente i(t) che produce la fluttuazione di corrente menzionata prima.

Esistono sostanzialmente due casi limite che possiamo prendere in considerazione con riferimento a questa struttura bipolare: in un caso i(t) è dipendente dal regime elettrico esterno (in questo caso la tensione applicata), nell'altro essa è totalmente indipendente.

Consideriamo il caso del **diodo**.

Il flusso di corrente è determinato dal movimento di tante cariche microscopiche che si muovono all'interno della struttura del componente. Ciascuna carica che si muove (attraversando la giunzione) produce un "guizzo" (impulso) di corrente il quale, sommato a tutti gli analoghi contributi dovuti alla moltitudine di cariche in movimento, produce la corrente macroscopica che noi misuriamo.

Il "guizzo" di corrente determinato dal passaggio di una singola carica è genericamente rappresentato da una funzione aleatoria di qualche tipo, legata alla probabilità che la carica stessa attraversi la giunzione oppure no.

Essendo molto grande il numero di questi processi aleatori presi in considerazione, vale il teorema del limite centrale e quindi l'andamento complessivo della densità di probabilità del valore della fluttuazione di corrente i(t) è di tipo gaussiano ergodico a valore medio nullo.

Per descrivere in modo completo il processo gaussiano i(t) basta conoscere la sua funzione di autocorrelazione o (che è lo stesso) la sua densità spettrale di potenza (unilatera o bilatera che sia).

La densità spettrale di potenza unilatera riferita alle frequenze del processo i(t) è data da:

(8.1.5) $$G_f(f)=2qI_0 \quad , \qquad \left(f \ll \frac{1}{\tau_t}\right)$$

E' impensabile che essa sia vera per qualsiasi frequenza *f*, altrimenti avremmo una potenza infinita associata alla fluttuazione i(t), come risultato del seguente integrale

$$\langle i^2(t)\rangle=\int_0^{\infty} G_f(f)\,df$$

Concludiamo quindi che il valore dato dalla formula deve tendere ad annullarsi al crescere della frequenza. In particolare il valore della densità spettrale di potenza è costante per frequenze minori dell'inverso del tempo τ_t di transito delle singole cariche attraverso la giunzione [disegno 8].

Questo è il caso di dipendenza del valore del rumore al variare del regime elettrico esterno applicato al bipolo (in questo caso dovuto alla dipendenza da I_0).

Il circuito equivalente del diodo che ne deriva è quello rappresentato nel [disegno 9: figura 8.1.3].

Consideriamo ora il caso di un **resistore** di valore R [disegno 10].

Supponiamo che il componente sia alla temperatura assoluta *T* (quindi espressa in kelvin) non nulla.

Applicando una tensione costante al resistore, ci aspettiamo che la corrente I_0 che lo percorre soddisfi la legge di Ohm, e quindi sia anch'essa costante.

Ciò non accade poiché la temperatura assoluta non nulla agita termicamente (fenomeno di agitazione termica) le cariche all'interno del resistore producendo una fluttuazione di corrente i(t) all'interno del resistore come risultato complessivo dei singoli contributi microscopici dovuti al movimento delle singole cariche.

La fluttuazione di corrente i(t), per le stesse ragioni del caso del diodo, appartiene anch'essa ad un processo aleatorio ergodico gaussiano a valore medio nullo.

Anche in questo caso possiamo caratterizzare in modo statistico completo il processo i(t) dando la sua densità spettrale di potenza unilatera o la sua funzione di autocorrelazione.

La prima è data da:

(8.1.7) $$G_f(f)=\frac{4kT}{R}$$

dove k è la costante di Boltzmann di valore $1{,}38\cdot10^{-23}$ J/K e T è la temperatura assoluta.

Un possibile andamento è quello illustrato nel disegno 11.

La frequenza in cui i(t) smettere di essere costante è indipendente dal resto?

In questo caso l'andamento di i(t) non dipende dal regime elettrico applicato. (In realtà una resistenza percorsa da corrente si riscalda per effetto Joule e quindi la sua temperatura tende ad aumentare. L'indipendenza dal regime elettrico vale quindi soltanto se la temperatura della resistenza viene mantenuta costante o comunque indipendente da esso).

Il circuito equivalente è quello rappresentato in disegno 12.

Se ipotizziamo il resistore ideale di resistenza R, il rumore ad esso associato può essere rappresentato da un generatore di tensione e(t) che produce la fluttuazione di corrente i(t) secondo la relazione ($G_e(f)$ è la densità spettrale di potenza di tale segnale)

$$e(t)=-R\,i(t)$$

e

(8.1.8) $$G_e(f)=4kTR$$

Per un generico bipolo [disegno 13] di impedenza Z(f) (con R(f) e X(f) funzioni reali):

(8.1.9) $$Z(f)=R(f)+j\,X(f)$$

a temperatura assoluta T è stato dimostrato da Nyquist che la rumorosità prodotta può essere equivalentemente rappresentata da una forza elettromotrice di rumore e(t) avente la seguente densità spettrale di potenza:

(8.1.10) $$G_e(f)=4kT\,R(f)$$

Il caso della resistenza è allora un caso particolare di quello generale appena illustrato.

Con riferimento ai transistor, i modelli sono più complessi e presentano generatori equivalenti che modellano le varie fonti di generazione di rumore. Noi non ne vedremo nemmeno uno perché ci concentriamo sulla trattazione del rumore in modo generale, non nelle sue cause particolari dovute al dispositivo.

Consideriamo ora un singolo blocco del sistema di trasmissione. Vogliamo determinare per ciascuno di essi la rumorosità che si sovrappone al segnale di uscita [disegno 14].

Introdurremo quindi dei parametri globali che ci consentiranno di calcolare e/o misurare le caratteristiche statistiche di generazione del rumore nel blocco.

Rumore termico: dipende dalla temperatura. Un'altra denominazione è quella di rumore per effetto Johnson. Un'altra fonte di rumore è dovuta alla “granularità” della carica (effetto Schottky).

[Esercizio n.1 pagina 8.10]

8.2: Potenza disponibile di una sorgente di segnale. Guadagno disponibile di un quadripolo lineare

Introduciamo alcune definizioni relative al rumore.

Definiamo la potenza disponibile: si tratta della potenza massima che la sorgente può erogare.

La si ha quando il carico, che prende il nome di carico adattato, ha impedenza coniugata con quella interna della sorgente. Tale condizione prende il nome di adattamento. Nel caso di impedenze puramente reali (resistenze), l'adattamento si ha quando la resistenza R della sorgente e quella di carico R_c hanno lo stesso valore.

In tal caso la tensione ai capi del carico sarà la metà rispetto alla forza elettromotrice del circuito.

La potenza disponibile della sorgente è quella massima erogabile da essa, data in formula:

(8.2.1) $$P_{Smax}=\frac{\langle e_s^2(t)\rangle}{4\mathrm{R}}=\frac{E_s^2}{4\mathrm{R}}$$

Definiamo quindi il guadagno disponibile. Mettiamo come ingresso ad un quadripolo la sorgente che abbiamo ora considerato. Non facciamo alcuna ipotesi sul quadripolo a parte la sua linearità. In particolare, nessuna ipotesi in merito all'adattamento di impedenza del quadripolo.

Quello così costituito è un nuovo bipolo del quale possiamo considerare il circuito equivalente (figura 8.2.3).

La potenza disponibile in uscita da esso risulta:

(8.2.2) $$P_{SUmax}=\frac{\langle e_{su}^2(t)\rangle}{4\mathrm{R}_u}=\frac{E_{su}^2}{4\mathrm{R}_u}$$

Il guadagno disponibile risulta allora dal rapporto di quest'ultima per la potenza disponibile in ingresso:

(8.2.3) $$G_d=\frac{P_{SUmax}}{P_{Smax}}$$

In questo caso è costante perché trattiamo di resistenze, la cui impedenza è indipendente dalla frequenza.

In generale invece il guadagno disponibile dipenderà anche dalla frequenza del segnale:

(8.2.4) $$G_d=G_d(f)$$

Il guadagno disponibile non è in generale coincidente con il guadagno di potenza del quadripolo.

In una situazione della massima generalità come quella rappresentata in figura 8.2.4 possiamo definire il guadagno di potenza come il rapporto tra la potenza P_u erogata al carico e la potenza P_s erogata dalla sorgente.

La nostra definizione di guadagno disponibile è di natura diversa quindi, in generale, il suo valore non coinciderà con il guadagno di potenza definito.

L'unico caso in cui coincidono è quando si ha adattamento di impedenza, cioè quando la resistenza di ingresso del quadripolo è pari alla resistenza interna della sorgente e la resistenza di uscita è uguale a quella di carico (cioè quando entrambe le potenze, erogata e fornita al carico, sono massime) (figura 8.2.5).

Se il valore della resistenza R della sorgente coincide con quello R_c del carico, esso prende il nome di livello di impedenza del circuito. Molto spesso, nei sistemi di trasmissione, il valore del livello di impedenza è 75 Ω.

Il guadagno disponibile di una catena di quadripoli è il prodotto dei guadagni disponibili dei singoli quadripoli (figura 8.2.6).

(8.2.8) $$G_d = G_{d1} \cdot G_{d2} \cdot \ldots \cdot G_{dn}$$

La catena si dice adattata se la resistenza di uscita di ogni quadripolo coincide con quella di ingresso del quadripolo successivo, cioè se tutti i quadripoli che la costituiscono sono adattati.

[30-05-2005]

Con riferimento alla cascata di figura, ogni quadripolo ha come resistenza di riferimento (all'ingresso) la resistenza di uscita di tutto il sistema "a monte", che funge da sorgente per ogni quadripolo della catena preso in analisi.

[Esercizio 2 pagina 8.16]

La frequenza per cui è valida la 8.2.10 è nell'ordine di 10^{11}, per frequenze più alte vale quella con la costante di Planck (8.2.11).

8.3: Cifra di rumore e temperatura equivalente di rumore

Consideriamo un apparato lineare tempo invariante al cui ingresso pensiamo di applicare un segnale x(t). Il quadripolo risponde con un segnale $y(t) = x_r(t) + n(t)$. La rumorosità introdotta dal circuito produce la componente n(t) sovrapposta al segnale utile in uscita. Noi vogliamo caratterizzare la rumorosità all'uscita del quadripolo prescindendo dalla ragione e dalla localizzazione in cui effettivamente si generano i disturbi.

Chiudiamo i morsetti d'ingresso del quadripolo LTI su una resistenza di valore *R* alla temperatura assoluta *T*. In tal modo poniamo all'ingresso del quadripolo una sorgente di rumore, la cui densità spettrale di potenza (di rumore) è nota.

Misuriamo poi la potenza disponibile dN_u di rumore in uscita in una banda infinitesima (f, f+df) di frequenza. Tale potenza disponibile è comprensiva sia del rumore generato dalla sorgente sia di quello introdotto dal quadripolo.

Indichiamo con dN_u' l'analoga potenza disponibile di rumore che si avrebbe ai morsetti di uscita se il quadripolo fosse ideale, cioè non rumoroso.

Il rapporto

(8.3.1) $$F = \frac{dN_u}{dN_u'}$$

prende il nome di cifra di rumore o figura di rumore *F*.

E' importante definire con precisione le grandezze di riferimento quando si da questa definizione (la temperatura *T* di riferimento è 290 K, mentre il criterio di scelta della resistenza di riferimento *R* è che essa coincida quella di uscita della sorgente applicata ai morsetti d'ingresso del quadripolo).

Nel caso particolare in cui si tratti di una cascata di quadripoli adattati, la resistenza *R* di riferimento coincide con quella di adattamento.

In generale la cifra di rumore dipende dalla frequenza:

(8.3.2) $$F = F(f)$$

e sicuramente è sempre maggiore o uguale ad 1.

(8.3.3) $$F \geqslant 1$$

La cifra di rumore si usa anche espressa in unità logaritmiche, ad esempio in decibel secondo la relazione seguente:

(8.3.4) $$F(dB) = 10 \log_{10} F$$

considerando tale unità di misura, la cifra di rumore in dB risulta sempre non negativa:

(8.3.5) $$F(dB) \geqslant 0$$

Quando non vengono fornite informazioni aggiuntive relative ai riferimenti scelti, si presume un sistema adattato a temperatura 290 K.

La potenza disponibile di rumore dN_u' presente in uscita dovuta al solo contributo della resistenza posta all'ingresso del quadripolo ha formula:

(8.3.6) $$dN_u' = k\,T\,G_d\,df$$

Conoscendo la cifra di rumore potremmo calcolare dapprima la potenza disponibile dN_u e poi la sua densità spettrale di potenza $dNu\,/\,df$.

Possiamo dire che dN_u è la somma di due contributi: quello in uscita derivante dalla resistenza in ingresso dN_u' e quello generato internamente dal quadripolo stesso dN_a.

Indicato con $n_1(t)$ ed $n_2(t)$ i rispettivi processi aleatori (delle due tipologie di rumore), la potenza disponibile di rumore risulta:

$$\begin{aligned} & E\left\{[n_1(t) + n_2(t)]^2\right\} = \\ = \; & E\left\{[n_1^2(t)]\right\} + E\left\{[n_2^2(t)]\right\} + 2E\left\{[n_1(t) \cdot n_2(t)]\right\} \\ = \; & E\left\{[n_1^2(t)]\right\} + E\left\{[n_2^2(t)]\right\} \end{aligned}$$

Come dicevamo, possiamo separare il rumore disponibile all'uscita in due componenti:

(8.3.7) $$dN_u = k\,T\,df\,G_d + dN_a$$

Volendo esprimere il contributo dN_a dovuto all'apparato in forma analoga a quello di dN_u' avremo:

(8.3.8) $$dN_a = k\,T_r\,df\,G_d$$

Questa è la definizione della temperatura equivalente di rumore di apparato T_r, che in generale dipende (come anche la cifra di rumore) dalla frequenza:

(8.3.9) $$T_r = T_r(f)$$

Sostituendo la 8.3.8 nella 8.3.7 otteniamo:

(8.3.10) $$dN_u = k(T + T_r)\,df\,G_d$$

Quest'ultima relazione chiarifica il significato della temperatura equivalente di rumore di apparato, cioè che il contributo in termini di rumore di un quadripolo rumoroso può essere tenuto in conto considerando il quadripolo come ideale e sommando alla temperatura della resistenza di riferimento esterna posta in ingresso la temperatura equivalente di rumore di apparato (figura 8.3.2).

La temperatura di rumore non dipende dal valore di temperatura di riferimento *T*, dipende solo dal valore della resistenza di riferimento *R*. Di conseguenza la rappresentazione equivalente data vale per qualunque temperatura di riferimento *T*.

Per questo la temperatura di rumore T_r è quella più largamente impiegata nel campo dello studio delle sorgenti di rumore.

La temperatura equivalente di rumore e la figura di rumore sono grandezze che possono essere sia misurate sia calcolate.

La figura di rumore può essere data in funzione della temperatura equivalente di rumore e di quella di riferimento:

(8.3.11) $$F=\frac{T+T_r}{T}$$

Come conseguenza possiamo calcolare la temperatura di rumore come:

(8.3.12) $$T_r=(F-1)T$$

Misura della temperatura equivalente di rumore (di apparato) (pagina 8.21):

Consideriamo un quadripolo rumoroso, il cui ingresso sia chiuso sulla resistenza di riferimento *R,* posta ad una temperatura assoluta *T*. Ipotizzando di poter misurare la potenza disponibile di rumore in una banda di frequenza infinitesima di ampiezza *df* (nella pratica la si può misurare in una banda molto stretta con l'ausilio di un opportuno filtro passa-banda), il suo valore può essere così espresso:

$$dN_u=k(T+T_r)df\,G_d$$

Se ora poniamo ad una diversa temperatura *T** la resistenza *R*, l'espressione della potenza disponibile di rumore all'uscita è:

$$dN_u{}^*=k(T^*+T_r)df\,G_d$$

Dato il rapporto tra le due:

$$\eta=\frac{dN_u{}^*}{dN_u}=\frac{T^*+T_r}{T+T_r}$$

Possiamo ricavare l'espressione di T_r in funzione di T^*, T e η:

$$T_r=\frac{T^*-\eta T}{\eta-1}$$

Un problema nell'uso di questo metodo potrebbe essere quello di avere una differenza molto piccola tra $dN_u{}^*$ e dN_u per le temperature sopportabili dalla resistenza. In questi casi dobbiamo ricorrere ad un generatore di rumore più efficace, quale ad esempio un diodo, in cui la rumorosità varia in funzione del regime elettrico ad esso applicato. Su questo principio vengono costruiti dei dispositivi in grado di misurare la temperatura equivalente di rumore.

Esercizio di applicazione di quanto visto finora (pagina 8.22):

Sappiamo che un canale di trasmissione di un sistema di telecomunicazioni è normalmente realizzato tramite stadi lineari in cascata. Ognuno di questi stadi è stato autonomamente valutato ed è caratterizzato da un guadagno disponibile, da una figura di rumore e temperatura di rumore.

Per ora consideriamo il caso di due stadi in cascata (figura 8.3.3)

I morsetti d'ingresso del primo quadripolo siano chiusi sulla resistenza di riferimento *R*, alla temperatura di 290 K.

Allo stesso modo, la resistenza della sorgente vista dal secondo quadripolo coincide con quella di uscita del primo quadripolo.

Vogliamo trovare gli stessi parametri per l'intera cascata dei due quadripoli.

La resistenza di riferimento per la cascata sarà la stessa del primo quadripolo.

Il guadagno disponibile è il prodotto dei due guadagni disponibili:

(8.3.13) $$G_d = G_{d1} \cdot G_{d2}$$

La potenza disponibile di rumore dN_u complessiva è

(8.3.14) $$\begin{aligned} dN_u = & \; k(T+T_r)df\, G_{d1} G_{d2} = \\ = & \; [k(T+T_{r1})df\, G_{d1} + k\, T_{r2}\, df] G_{d2} \end{aligned}$$

In essa compaiono i due contributi dati dai due quadripoli in cascata in merito al rumore generato. Si ricava la temperatura equivalente di rumore di apparato:

(8.3.15) $$T_r = T_{r1} + \frac{T_{r2}}{G_{d1}}$$

La temperatura di rumore del secondo stadio viene divisa per il guadagno disponibile del primo.

Se avessimo tre stadi avremmo un terzo termine dato dalla temperatura di rumore del terzo stadio divisa per il guadagno disponibile dei primi 2

In generale, per una cascata di n stadi, la formula è:

(8.3.16) $$T_r = T_{r1} + \frac{T_{r2}}{G_{d1}} + \frac{T_{r3}}{G_{d1} G_{d2}} + \ldots + \frac{T_{rn}}{G_{d1} G_{d2} \cdots G_{d(n-1)}}$$

(figura 8.3.4)

Allo stesso modo, la formula per la figura di rumore diventa:

(8.3.18) $$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_{d1}} + \ldots + \frac{F_n - 1}{G_{d1} G_{d2} \cdots G_{d(n-1)}}$$

discendente dalla:

(8.3.17) $$(F-1)T = (F_1 - 1)T + \frac{(F_2 - 1)T}{G_{d1}} + \ldots + \frac{(F_n - 1)T}{G_{d1} G_{d2} \cdots G_{d(n-1)}}$$

Il primo stadio influenza l'intera cascata con tutta la sua rumorosità, mentre quella degli altri stadi viene divisa per i guadagni disponibili dei precedenti. Guadagni disponibili maggiori di 1 determinano una riduzione della rumorosità degli stadi successivi. Viceversa, guadagni disponibili minori di 1 influenzano negativamente l'intera cascata, con una particolare esaltazione della rumorosità dello stadio successivo.

Quand'è che si verifica questo caso peggiore? Quando il primo stadio è un attenuatore. Per questo in un sistema di comunicazioni ben progettato il primo stadio non è mai un attenuatore.

[Esercizio 2 pagina 8.24 ed esercizio 3 pagina 8.26]

8.5: Temperatura equivalente di rumore di una sorgente di segnale

Definiamo ora la temperatura equivalente di rumore di una sorgente di segnale.

Una sorgente di segnale è un bipolo. Di questo bipolo ci interessa il circuito equivalente (di Thevenin), costituito cioè da un generatore di forza elettromotrice (generatore di tensione per i comuni mortali), corrispondente al segnale che deve essere generato, e da una resistenza di uscita, corrispondente alla parte reale dell'impedenza di uscita del bipolo.

La potenza disponibile della sorgente, in una banda infinitesima, è indicata con $dP_s + dN$, data cioè dalla somma delle due componenti dovute, rispettivamente, al segnale utile e al rumore che vi si sovrappone.

Ci poniamo nell'ipotesi in cui il rumore generato dalla sorgente appartenga ad un processo gaussiano ergodico a valor medio nullo.

In questo caso si definisce la temperatura equivalente di rumore di sorgente mediante la relazione

(8.5.1) $$dN = k T_s df$$

La temperatura di rumore equivalente definita precedentemente viene distinta da quest'ultima chiamandola temperatura equivalente di rumore di apparato.

Questa, come pure le altre grandezze caratterizzanti il rumore viste fino qui, è dipendente dalla frequenza:

(8.5.2) $$T_s = T_s(f)$$

8.6: Calcolo dei collegamenti in presenza di rumore

Prendiamo in considerazione un generico sistema di telecomunicazioni dato come in disegno 2.

Nel corso valuteremo, in termini di rumorosità, il collegamento così come si presenta all'ingresso del demodulatore.

L'insieme del trasmettitore e del mezzo di propagazione viene rappresentato come sorgente di segnale, mentre il primo stadio del ricevitore è l'apparato lineare.

Noi ci proponiamo di caratterizzare il rumore n(t) presente all'uscita dei quadripoli del primo stadio lineare del ricevitore.

[31-05-2005]

La situazione illustrata (dove il ricevitore comprende anche la parte di demodulazione) è quella più generale poiché, se non ci fosse modulazione, non ci sarebbe nemmeno il demodulatore.

Sappiamo già che il rumore all'uscita del quadripolo lineare tempo invariante è gaussiano ergodico a valor medio nullo. Vogliamo caratterizzarlo mediante la sua densità spettrale di potenza.

Sostituiamo tutto ciò che precede il quadripolo con una sorgente di segnale *S* [disegno 1], ottenendo una prima schematizzazione equivalente del sistema di partenza.

Il generatore di segnale viene sostituito con il suo equivalente di Thevenin finalizzato alla valutazione del rumore, avente cioè come impedenza di Thevenin soltanto la parte reale *R* dell'impedenza di uscita del generatore di segnale. Il circuito equivalente è quello di figura 8.6.1, dove la temperatura T_s è quella equivalente di rumore di sorgente. Il significato fisico di tale grandezza è quello della temperatura assoluta che, per effetto termico, farebbe produrre alla resistenza *R* una quantità di rumore uguale a quella prodotta dal generatore di segnale.

Una ulteriore schematizzazione equivalente si ottiene mettendo in conto la rumorosità del quadripolo mediante la sua temperatura equivalente di rumore, cioè sommandola alla temperatura equivalente di rumore di sorgente. In tal modo abbiamo ottenuto uno schema equivalente in cui tutto il rumore generato è concentrato sulla resistenza *R*, mentre tutti gli altri componenti sono considerati non rumorosi (figura 8.6.2).

A sua volta la resistenza che genera il rumore può essere sostituita dalla serie di una resistenza ideale e di un generatore di forza elettromotrice $e_n(t)$ (in questo caso l'indicazione della temperatura è superflua ma la lasciamo lo stesso) (figura 8.6.3).

La densità spettrale di potenza relativa ad $e_n(t)$ vale, per la formula di Nyquist:

(8.6.1) $$G_f(f)=4kR(T_s+T_r)$$

La somma delle due temperature prende il nome di temperatura equivalente di sistema:

(8.6.2) $$T_{sist}=T_s+T_r$$

Per cui si può scrivere una unica formula data dalla sostituzione

(8.6.3) $$G_f(f)=4kT_{sist}R$$

La schematizzazione equivalente rappresentata mediante uno schema unifilare è data in figura 8.6.3.

Se supponiamo di trovarci in condizioni di adattamento, ν(t) risulta essere la metà di $e_n(t)$. Vuol dire che se consideriamo la densità spettrale di potenza di ν, essa risulta data dall'espressione di quella di $e_n(t)$ divisa per 4, in formule:

(8.6.4) $$\nu(t)=\frac{1}{2}e_n(t)$$

(8.6.5) $$G_\nu(f)=kT_{sist}R$$

Supponiamo ora che la funzione di trasferimento del quadripolo in frequenza sia H(f). Risulta allora che la densità spettrale di potenza di n(t), cioè del rumore all'uscita, è data da:

$$G_n(f)=G_\nu(f)\cdot|H(f)|^2$$

Poiché il segnale utile prima del demodulatore subisce notevoli amplificazioni, che coinvolgono anche il rumore ad esso sovrapposto, ne risulta che spesso la rumorosità introdotta dal demodulatore vero e proprio risulta di entità trascurabile rispetto a quella già sovrapposta al segnale utile che viene presentato al suo ingresso, con il risultato che, in tali casi, in uscita al demodulatore la sua rumorosità non viene affatto considerata.

[Esercizio 4 pagina 8.33]

Si badi che i guadagni al denominatore, che devono essere guadagni di potenza disponibile, sono uguali ai guadagni di potenza effettivi perché, come sempre accade nei sistemi di comunicazione, sono verificate le condizioni di adattamento.

Nelle formule che abbiamo visto, la cifra di rumore appare sempre come numero puro, non in unità logaritmiche, altrimenti sarebbe (ovviamente) necessaria l'opportuna conversione (e in questo caso ricordarsi che in questi casi i dB sono dati con il prodotto per 10, non per 20).

8.7: Le linee di trasmissione: impedenza caratteristica e costante di attenuazione

Come progettare un sistema di trasmissione? Può essere relativo a segnali analogici o numerici passa-basso (quando vengono trasmessi nella loro banda naturale questi segnali vengono sempre trasmessi su linee metalliche). Quando invece impieghiamo canali passa-banda dovremo affrontare il problema in termini di segnali modulati.

Consideriamo il caso di mezzo di propagazione metallico, cioè rappresentato da cavi coassiali o linee bifilari.

Facciamo riferimento allo schema 8.7.1. Un generatore di segnale è posto in ingresso ad una linea di trasmissione. Per studiare il comportamento del quadripolo rappresentato dalla linea di trasmissione stessa ci poniamo in regime sinusoidale, in cui possiamo dare una rappresentazione mediante numeri complessi delle grandezze elettriche coinvolte.

Si osserva sperimentalmente che, in una generica sezione della linea di trasmissione, alimentata con un generatore sinusoidale e chiusa su un carico generico, si ha una sovrapposizione di due onde sinusoidali, una diretta ed una riflessa (a parte condizioni particolari, che vedremo tra poco, in cui ciò non accade).

Se consideriamo invece il caso ideale di una linea di lunghezza infinita, non avremo il fenomeno dell'onda riflessa, in quanto l'onda diretta non raggiungerà mai un carico dove possa "rimbalzare" e tornare verso la sorgente. E' molto importante conseguire l'assenza dell'onda riflessa perché la sua sovrapposizione all'onda diretta con un certo ritardo produce una distorsione notevole ed inaccettabile per un buon sistema di comunicazione.

Una linea di trasmissione infinita non è però in pratica né realizzabile né utilizzabile.

Per aggirare questo problema ci poniamo ai morsetti d'ingresso della linea infinita e ne calcoliamo l'impedenza. Tale valore prende il nome di impedenza caratteristica della linea. Esso è uguale per qualsiasi generica sezione della linea infinita che possiamo considerare, dato che la parte di linea "a valle" della sezione da noi considerata è ancora una linea di lunghezza infinita come quella di cui abbiamo calcolato l'impedenza d'ingresso.

Stanti così le cose, possiamo simulare in qualsiasi sezione della linea la presenza di una linea infinita a valle di essa semplicemente chiudendola su un'impedenza di valore uguale a quello dell'impedenza caratteristica. Tali condizioni, per quanto detto prima, sono le uniche che determinano assenza di onda riflessa, e prendono il nome di adattamento della linea.

I cavi coassiali che abbiamo visto a lezione hanno tutti impedenza caratteristica di 75 Ohm.

(8.7.1)
$$Z_0 = R = 75\,\Omega$$

La situazione di una linea adattata sia ai morsetti d'ingresso sia ai morsetti di uscita è presentata in figura 8.7.4.

Come si può ben immaginare, le linee reali sono caratterizzate da componenti parassite che determinano caratteristiche indesiderate di attenuazioni o alterazioni del segnale. Un possibile circuito equivalente per la linea di trasmissione che tenga conto di queste caratteristiche prevede parametri serie (resistenza ed induttanza) e parametri parallelo (conduttanza di dispersione e capacità tra i conduttori) tutti dati per unità di lunghezza della linea.

Quando esistono elementi dissipativi (resistenze e conduttanza) lungo la linea, si hanno sicuramente fenomeni di attenuazione del segnale.

[disegno 6]

Per quando riguarda l'attenuazione possiamo, con riferimento alla figura 8.7.5, dire che ai morsetti d'ingresso della linea avremo la grandezza sinusoidale V_0 complessa, a cui è associata la potenza P_0.

Nella generica sezione a distanza *x* dalla sorgente di segnale la potenza associata al segnale si sarà ridotta al valore P(x). L'attenuazione alla distanza *x* è data dal rapporto tra le due potenze.

(8.7.2)
$$A[dB] = 10 \log_{10} \frac{P_0}{P(x)} = \alpha_l x$$

α_l prende il nome di costante di attenuazione della linea.

Detta costante non è propriamente tale perché dipende dalle caratteristiche fisiche dei conduttori che si utilizzano e della frequenza del segnale trasmesso.

La dipendenza dalla frequenza è del tipo di quella indicata nelle tre formule che seguono, con riferimento rispettivamente a ciascuno dei tre tipi di coassiale che abbiamo visto:

Microcoassiale 0.7 / 2.9:

(8.7.3) $$\alpha_l[dB/km]=9.5\sqrt{f[MHz]}$$

Minicoassiale 1.2 / 4.4:

(8.7.4) $$\alpha_l[dB/km]=5.3\sqrt{f[MHz]}$$

Coassiale normale 2.6/ 9.5

(8.7.5) $$\alpha_l[dB/km]=2.35\sqrt{f[MHz]}$$

Ciascuna di esse serve per calcolare la costante di attenuazione di linea in dB per chilometro, e in tutte la frequenza deve essere specificata in MHz.

In disegno 7 vediamo i grafici che indicano l'attenuazione associata alla frequenza massima trasmissibile su ciascuno dei cavi coassiali che abbiamo visto.

Parlando in modo grossolano, possiamo dire che l'attenuazione associata alle massime frequenze a cui ciascun cavo viene impiegato è di circa 20 dB/km.

Questa è la ragione per cui si è iniziato ad impiegare le fibre ottiche, che anche senza particolari accorgimenti hanno attenuazione di 0,2 dB/km.

Il rapporto $P_0/P(x)$, che rappresentava l'attenuazione, ci consente di calcolare anche il valore della tensione alla sezione x, poiché sia nel punto 0 sia nella sezione x viene vista la stessa impedenza caratteristica. Risulta allora

(8.7.6) $$\frac{P_0}{P(x)}=\left|\frac{\dot{V}_0}{\dot{V}(x)}\right|^2$$

da cui:

(8.7.7) $$|L|=\left|\frac{\dot{V}(x)}{\dot{V}_0}\right|=10^{-\frac{\alpha_l x}{20}}$$

Che rappresenta il modulo della funzione di trasferimento del tratto di linea di lunghezza x considerato. In tal modo possiamo ottenere direttamente il valore di V(x) dato V_0.

Tale formula vale anche per l'intera lunghezza della linea, sostituendo ad x la sua intera lunghezza d. Ciò ci consente di calcolare il modulo della funzione di trasferimento della linea.

In generale, data la dipendenza della costante di attenuazione dalla frequenza, anche il modulo della funzione di trasferimento della linea dipende esso stesso dalla frequenza.

La caratteristica di fase in funzione della frequenza ha un andamento al variare di f come rappresentato in disegno 8. Da una certa frequenza in poi esso tende asintoticamente ad una retta passante per l'origine, prima invece è molto lontano dal soddisfacimento delle condizioni di non distorsione.

[06-06-2005]

Completiamo le considerazioni sulle linee di trasmissione, poi svolgeremo qualche esercizio di applicazione di quel che abbiamo visto.

La funzione di trasferimento della linea in dipendenza della frequenza può essere scritta come:

$$L(f)=|L(f)|\cdot e^{-j\beta_L(f)}$$

L'andamento dello spettro di fase, come detto prima, non rispetta le condizioni di non distorsione ed il suo andamento al variare della frequenza è rappresentato in disegno 1.

Facendo riferimento ad un collegamento su grande distanza su portante metallico (ad esempio uno dei cavi coassiali che abbiamo visto), sappiamo con certezza che vi è attenuazione lungo la linea. Per compensare questo effetto l'intera distanza viene suddivisa in tratte intervallate da stadi amplificatori che riportano il segnale su livelli accettabili (figura 8.7.6). La linea è in generale distorcente, mentre per la trasmissione di un segnale analogico è necessario che siano soddisfatte le condizioni di non distorsione. Per fare ciò gli stadi amplificatori fungono anche da equalizzatori che trattano il segnale in modo che la cascata della linea di trasmissione con l'amplificatore risulti non distorcente. Questo si realizza se il prodotto delle due funzioni di trasferimento riportato di seguito rispetta le condizioni di non distorsione.

$$H(f)=L(f)\cdot E(f)=|L(f)|\cdot|E(f)|\cdot e^{-j\beta_L(f)}\cdot e^{-j\beta_E(f)}$$

L(f) è la funzione di trasferimento della linea, E(f) quella dello stadio amplificatore-equalizzatore.

In generale, per la trasmissione di segnali analogici, si richiede infatti che (condizioni di non distorsione entro la banda B):

$$\begin{array}{l} |L(f)|\cdot|E(f)|=1 \\ \beta_L(f)+\beta_E(f)=k_f\cdot f \end{array} \quad \text{quando} \quad f\in B$$

L'amplificatore-equalizzatore serve per rendere verificate le condizioni di non distorsione per ciascuna delle sezioni della linea e, di conseguenza, per l'intera lunghezza della linea.

Per quanto riguarda il modulo, la richiesta data nella formula precedente è soddisfatta se è soddisfatta la seguente condizione:

(8.7.9)
$$|E(f)|=10^{\frac{\alpha_l x}{20}}$$

cioè se E(f) è l'inverso di L(f).

La condizione sulla caratteristica di fase è necessariamente da rispettare per le trasmissioni di segnale video, unitamente a quella di ampiezza.

Esiste un caso in cui le condizioni di distorsione non sono necessariamente da soddisfare entrambe. E' il caso dei segnali telefonici o in generale di quelli audio, dove non è necessario rispettare la condizione sulla caratteristica di fase. Ciò perché l'orecchio umano risulta praticamente insensibile alle distorsioni di fase. Nelle normative che regolano la trasmissione dei segali telefonici le richieste in termini di caratteristica di fase sono quindi normalmente soltanto suggerite e, ad ogni modo, molto meno costrittive rispetto a quelle sulla caratteristica di ampiezza.

[esempio del confronto tra trasmissione di un segnale video e trasmissione di un segnale FDM di uguale banda]

[Esercizio 5 pagina 8.39 ed esercizio 6 pagina 8.41]

La considerazione fatta tempo fa sul fatto che non fosse opportuno mettere un amplificatore in cascata ad un attenuatore vale soltanto in sede di ricezione. Nel caso dell trasmissione questa è una soluzione possibile.

[Esercizio 7 pagina 8.43]

Nel seguito tratteremo la trasmissione di segnali numerici su canale passa-basso.

8.9: Alcuni calcoli di massima su un collegamento numerico su linea

(Figura 8.9.1)

La sorgente SORG eroga cifre binarie b_n. A seguire c'è il codificatore di linea che produce, data la serie di cifre b_n in ingresso, una serie di simboli a_n. Un modulatore PAM provvede a convertire questa serie numerica in un segnale s(t) che viene poi inviato sul canale di trasmissione (costituito dalla linea di trasmissione e dagli eventuali circuiti amplificatori ed equalizzatori). L'uscita della linea di trasmissione v(t) comprende le componenti di rumore che si sovrappongono ad s(t) durante la sua trasmissione lungo la linea: $v(t) = s_r(t) + n(t)$.

L'uscita dell'amplificatore di linea costituisce l'ingresso del cosiddetto circuito rigeneratore. Noi faremo riferimento al cosiddetto rigeneratore simbolo per simbolo. Esso è costituito dalla cascata di due elementi: un campionatore (indicato nello schema con un interruttore che si apre e si chiude con cadenza stabilita dal tempo di simbolo T) ed un comparatore di livello. Detto t_k il generico istante di campionamento, esso vale:

(8.9.5) $$t_k = \tau_0 + kT$$

con k intero e T uguale al tempo di simbolo. Le letture effettuate dal campionatore vengono inviate ad un comparatore di livello che, in base al valore letto all'istante di lettura, decide a quale simbolo corrisponde tale lettura. Indichiamo con a_n' l'uscita del rigeneratore per considerare la possibilità che si verifichino errori nella ricostruzione della serie numerica a_n.

Per passare dai simboli così ottenuti alle cifre binarie corrispondenti avremo bisogno di un decodificatore di linea. Per le stesse ragioni di prima, cioè nel caso di siano verificati errori di lettura, la serie temporale binaria di uscita può in generale differire da quella di partenza per cui la indichiamo con b_n'.

Poiché il segnale è di tipo numerico, se avessimo considerato il caso in cui il canale trasmissivo è costituito da più tratte, esse sarebbero intervallate non soltanto da circuiti di amplificazione ed equalizzazione come nel caso analogico, ma da veri e propri blocchi di rigenerazione del segnale, perfettamente analoghi alla sezione di rigenerazione individuata nello stadio finale dello schema di figura.

La qualità di un segnale numerico viene individuata dal tasso di errore, in particolare dal tasso di errore per bit, così definito:

(8.9.1) $$T_{eb} = \lim_{N \to \infty} \frac{N_e}{N}$$

N_e è il numero di bit errati in una sequenza di N bit.

Il tasso di errore è una grandezza valutabile soltanto a posteriori.

Per effettuare il progetto di un sistema di trasmissione numerico dobbiamo avere grandezze valutabili a priori.

Per fare ciò dobbiamo riferirci innanzitutto ad un processo ergodico. Ipotizziamo quindi che tale sia la serie binaria erogata dalla sorgente di segnale numerico.

I codificatori di linea che abbiamo studiato mantengono tutti la proprietà di ergodicità, quindi anche la serie numerica a_n è ergodica se lo è la serie b_n.

Il rumore che si sovrappone al segnale durante la trasmissione è anch'esso ergodico, quindi lo è anche il segnale di uscita dal canale di trasmissione. Nell'ipotesi di ergodicità fin qui fatta, la probabilità di errore per simbolo, valutabile a priori, e il tasso di errore per simbolo, valutabile soltanto a posteriori, coincidono.

Il codificatore di linea serve ad adattare la serie temporale in ingresso delle cifre binarie al mezzo di propagazione impiegato, quindi al canale di trasmissione. L'operazione di adattamento più semplice consiste nell'annullare il valore medio, poiché tale requisito è fondamentale per la trasmissione su linea. Nel panorama di codifiche che realizzano questa richiesta, particolare attenzione richiede il codice AMI, che presenta una densità spettrale di potenza nulla in corrispondenza della componente continua del segnale. Il codice bipolare alternato (altro nome per l'AMI) è a rivelazione di errore poiché è facile individuare se si è perso un 1 durante la trasmissione.

[digressione sui segnali a correzione di errore che tanto non abbiamo studiato e cmq ne ha solo parlato, non ha scritto né mostrato niente, quindi mi annoia stare a scrivere qualcosa inutilmente]

Il modulatore è di tipo PAM, il che significa generare un segnale s(t) tempo-continuo a partire da un segnale tempo discreto secondo la formula:

(8.9.2) $$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot g(t-nT)$$

dove g(t) è l'impulso di modulazione e T il tempo di simbolo, uguale al reciproco della frequenza di simbolo B_s.

L'impulso di modulazione è una funzione ad energia finita. Normalmente si impiegano impulsi rettangolari con duty cycle minore di 1, cioè durata del livello alto minore rispetto alla durata del simbolo T.

Il circuito di amplificazione – equalizzazione continua a chiamarsi come nel caso analogico ma la sua funzione è completamente diversa.

Il canale di trasmissione è caratterizzato da una funzione di trasferimento L(ω)·E(ω), data dal prodotto della funzione di trasferimento della linea per quello del circuito di amplificazione ed equalizzazione (figura 8.9.2).

Conoscendo la risposa impulsiva del canale di trasmissione possiamo costruire la sua risposta temporale r(t) all'impulso di modulazione g(t). Quasi sicuramente tale risposta risulta distorta rispetto al segnale d'ingresso.

Indichiamo con $s_r(t)$ la risposta del canale di trasmissione al segnale d'ingresso s(t):

(8.9.4) $$s_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot r(t-nT)$$

Ad esso si sovrappone il rumore, che indichiamo con n(t), e che contribuirà al verificarsi di errori nella ricostruzione della serie numerica di partenza.

(8.9.3) $$v(t)=s_r(t)+n(t)$$

L'uscita del canale viene letta in una successione t_k di istanti intervallati dal tempo di simbolo T.

(8.9.5) $$t_k=\tau_0+kT$$

Si ha allora una successione numerica i cui valori sono:

(8.9.6) $$\begin{aligned} v(t_k) &= n(t_k)+\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot r(t_k-nT) = \\ &= n(t_k)+\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot r(\tau_0+kT-nT) = \\ &= n(t_k)+\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot r[\tau_0+(k-n)T] \end{aligned}$$

$n(t_k)$ sarà gaussiano con un certo valor medio ed una determinata varianza.

Il secondo termine invece è una somma di infiniti termini. Ci piacerebbe avere invece un numero finito di termini, meglio ancora se soltanto uno.

Per fare ciò consideriamo la condizione seguente (rappresentata in figura 8.9.3):

(8.9.7) $$r(\tau_0+hT) = \begin{matrix} r(\tau_0) & , & per\, h=0 \\ 0 & , & per\, h \;\; intero \;\; \neq 0 \end{matrix}$$

In tal caso la 8.9.6 si riduce alla seguente

$$v(t_k)=a_k r(\tau_0)+n(t_k)$$

anche scrivibile come:

(8.9.8) $$v(t_k)=a_k r_0+n_k$$

fatte valide le seguenti posizioni:

(8.9.9) $$r_0=r(\tau_0)$$

(8.9.10) $$n_k=n(t_k)$$

Ipotizziamo che il comparatore venga impiegato per decodificare un codice bipolare alternato. Dobbiamo avere delle regole di decisione come quella in tabella 8.9.4 per stabilire il simbolo rappresentato.

Tali regole servono per assegnare a ciascun valore misurato del segnale di uscita v(t_k) il corrispondente simbolo a_k.

Idealmente, vorremmo che il valore del segnale v(t_k) dipendesse soltanto dal valore del simbolo a_k la cui trasmissione è in corso nell'istante t_k, come espresso dalla 8.9.8 (a meno del rumore che inevitabilmente si sovrappone al segnale), e che risulti invece indipendente da tutti gli altri simboli a_n trasmessi, con n ≠ k. Ciò accade quando è verificata la 8.9.7.

Quando, invece, quest'ultima condizione di indipendenza non è verificata, si dice che si ha interferenza intersimbolo. Definiamo meglio quanto detto riscrivendo la 8.9.6 nella forma che segue [non sono riuscito a mettere -∞ e ∞ come estremi della sommatoria, pero` ci andrebbero]:

(8.9.11) $$v(t_k)=n_k+a_k r(\tau_0)+\sum_{n\neq k} a_n r[\tau_0+(k-n)T]$$

L'ultimo addendo, indicato genericamente con il simbolo ξ, prende il nome di interferenza intersimbolo e rappresenta il contributo (al valore del segnale v(t) all'istante t_k) di tutti i simboli che precedono e seguono il simbolo a_k di interesse:

(8.9.12) $$v(t_k)=n_k+a_k r(\tau_0)+\xi$$

dove

(8.9.13) $$\xi=\sum_{n\neq k} a_n r[\tau_0+(k-n)T]$$

ξ si annulla quando è verificata la condizione 8.9.7, dato che in tale situazione sono nulli tutti i valori

$$r[\tau_0+(n-k)T] \text{ , per } \quad n\neq k$$

annullando così tutti i termini della sommatoria e riducendo la 8.9.11 alla 8.9.8

Annullando gli effetti dell'interferenza intersimbolo è molto semplice realizzare un sistema di telecomunicazione molto vicino a quello ottimo (subottimo).

Cercheremo di mostrare come la condizione che dobbiamo imporre per annullare l'interferenza intersimbolo sia praticamente applicabile e realizzabile, e quali siano i requisiti in termini di funzioni di trasferimento. Il “trucco” sta non nel richiedere la non distorsione, ma piuttosto nel controllarla per evitare l'interferenza intersimbolo.

Ci proponiamo ora di spiegare in cosa consiste la verifica della condizione 8.9.7.

[la spiegazione continua con riferimento all'esercizio 8 di pagina 2.35, consiglio di guardarlo mentre di seguito continuo la trattazione riportando i passi necessari per arrivare alla fine]

Partiamo dalla considerazione che la funzione r(t) ivi indicata può essere considerata come ottenuta da una traslazione temporale di entità τ_0 da una funzione x(t) per la quale sia soddisfatta la condizione seguente, in tutto simile alla 8.9.7:

(2.8.10) $$x(nT) = \begin{matrix} x_0 & , & per\, n=0 \\ 0 & , & per\, n \;\; intero \;\; \neq 0 \end{matrix}$$

Avendo posto $x_0 = r_0 = r(\tau_0)$.

La traslazione temporale per ottenere r(t) da x(t) è:

$$r(\tau_0+t)=x(t) \;\; \Rightarrow \;\; r(t)=x(t-\tau_0)$$

Se indichiamo con X(ω) e R(ω) le trasformate di Fourier delle funzioni x(t) e r(t) rispettivamente, allora R(ω) può scriversi, per le proprietà della trasformata, nella forma:

(8.9.14) $$R(\omega)=X(\omega)\cdot e^{-j\omega\tau_0}$$

La condizione 2.8.10 definisce una serie temporale $\{x_n\}$ la cui trasformata di Fourier può essere calcolata immediatamente dato che x_n è nullo per qualsiasi $n \neq 0$:

(2.8.11) $$X_s(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-jn\omega T}=x_0$$

D'altronde, in base al teorema del campionamento nel dominio dei tempi, sappiamo che la trasformata $X_s(\omega)$ dei valori campionati è legata alla trasformata X(ω) dalla seguente relazione:

(2.8.12) $$X_s(\omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega+k\frac{2\pi}{T}\right)$$

Cioè ne è la ripetizione periodica a meno di una costante moltiplicativa 1 / T.

Uguagliando le 2.8.11 e 2.8.12 otteniamo che:

(2.8.13) $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega+k\frac{2\pi}{T}\right)=x_0 T$$

Questa condizione rappresenta la condizione necessaria e sufficiente cercata. I diversi modi in cui essa può essere verificata si possono trovare spiegati bene nelle pagine 2.36 e seguenti.

Le funzioni che rientrano nel terzo caso presentato ($B_\omega > \pi/T$) si dicono soddisfacenti il criterio di Nyquist. Sono quelle che si possono costruire a partire da quelle di banda minima ($B_\omega = \pi/T$) costruendo un raccordo tra la parte a livello x_0 T e l'asse delle ascisse, che sia antisimmetrico rispetto alla verticale.

(figura 2.8.6)

Se i raccordi scelti sono fisicamente realizzabili, lo sono anche le relative funzioni ottenute.

Il raccordo migliore è quello di tipo sinusoidale, costituito cioè da un arco di sinusoide. In tal caso la funzione si chiama “a coseno rialzato” ed è espressa nell'espressione seguente:

$$
(2.8.16) \qquad X(\omega) = \begin{cases} x_0 T, & per \;\; 0 \leqslant \omega \leqslant (1-\alpha)\frac{\pi}{T} \\ \frac{x_0 T}{2}\left\{1-\sin\left[\frac{T}{2\alpha}\left(\omega-\frac{\pi}{T}\right)\right]\right\}, & per \;\; (1-\alpha)\frac{\pi}{T} \leqslant \omega \leqslant (1+\alpha)\frac{\pi}{T} \\ 0, & per \;\; \omega \geqslant \omega \leqslant (1+\alpha)\frac{\pi}{T} \end{cases}
$$

Il parametro α prende il nome di **fattore di roll-off** ed è sempre $0 \leq \alpha \leq 1$

Il caso di $\alpha = 1$ è quello che comporta la maggiore occupazione di banda.

[qui torniamo al paragrafo 8.9]

Alternativamente, si possono riassumere i risultati fin qui ottenuti fornendo una espressione complessiva di $R(\omega)$ alla luce di quanto osservato in merito a $X(\omega)$. Possiamo infatti scrivere che

$$
(8.9.15) \qquad R(\omega)=|R(\omega)|e^{-j\omega\tau_0}=r_0 T\, f_r(\omega)\, e^{-j\omega\tau_0}
$$

Essendo $f_r(\omega)$ la funzione a coseno rialzato così definita, nella quale il fattore di roll-off α mantiene il significato visto nella 2.8.16:

$$
(8.9.16) \qquad f_r(\omega) = \begin{cases} 1, & per \;\; 0 \leqslant \omega \leqslant (1-\alpha)\frac{\pi}{T} \\ \frac{1}{2}\left\{1-\sin\left[\frac{T}{2\alpha}\left(\omega-\frac{\pi}{T}\right)\right]\right\}, & per \;\; (1-\alpha)\frac{\pi}{T} \leqslant \omega \leqslant (1+\alpha)\frac{\pi}{T} \\ 0, & per \;\; \omega \geqslant (1+\alpha)\frac{\pi}{T} \end{cases}
$$

[Ricordiamo che le funzioni a coseno rialzato soddisfano il criterio di Nyquist per l'annullamento dell'interferenza intersimbolo ma NON SONO LE UNICHE! Attenzione alle eventuali domande a trabocchetto in merito]

Ora che siamo giunti a mostrare quale condizione deve essere soddisfatta in modo che venga annullata l'interferenza intersimbolo, individuiamo in che modo è possibile realizzare tale situazione.

Con riferimento alla figura 8.9.2, che a sua volta evidenziano i blocchi che costituiscono il canale trasmissivo presente in figura 8.9.1, indichiamo con $L(\omega)$ la funzione di trasferimento propria della linea di trasmissione impiegata e con $E(\omega)$ la funzione di trasferimento dell'amplificatore-equalizzatore posto in cascata ad essa. La funzione di trasferimento complessiva del canale trasmissivo sarà data dal prodotto delle due.

Essendo $r(t)$ la risposta del canale trasmissivo all'impulso $g(t)$, sussiste la seguente relazione tra le trasformate di Fourier $R(\omega)$ e $G(\omega)$ di queste due funzioni:

$$
R(\omega)=G(\omega)L(\omega)E(\omega)
$$

Volendo realizzare una $R(\omega)$ che annulli l'interferenza intersimbolo nel modo descritto prima, l'unico parametro sul quale possiamo agire è la funzione di trasferimento $E(\omega)$ dell'amplificatore-equalizzatore, dato che $L(\omega)$ è una proprietà immutabile della linea di trasmissione impiegata e $G(\omega)$ è predeterminato dall'impulso di modulazione $g(t)$ scelto. Invertendo la relazione precedente calcoliamo allora la $E(\omega)$ richiesta:

$$
E(\omega)=\frac{R(\omega)}{G(\omega)L(\omega)}
$$

Della quale anche la caratteristica di ampiezza è esplicitata sul libro:

(8.9.17) $$|E(\omega)|=\frac{|R(\omega)|}{|G(\omega)||L(\omega)|}$$

[13-06-2005]

Probabilità di errore per simbolo nei sistemi PAM in assenza di interferenza intersimbolo.

Il livello di segnale campionato nel generico istante t_k ha valore v_k dato dalla seguente:

$$v_k=a_k r_0+n_k$$

n_k è il rumore, variabile aleatoria gaussiana ergodica a valor medio nullo.

a_k è il simbolo originale e r_0 una costante moltiplicativa.

Tutte queste grandezze sono date con riferimento all'istante di campionamento t_k:

$$t_k=\tau_0+kT$$

Svilupperemo la trattazione con riferimento a tutti i codici che abbiamo visto

Per il codice AMI [disegno 1], per il codice multilivello [disegno 2] mentre il codice bipolare è un caso particolare del multilivello. Il criterio di decisione è quello che abbiamo detto la lezione scorsa.

Consideriamo il valore di probabilità che possiamo dare a ciascun simbolo.

I simboli di ciascuna codifica sono uno massimo, uno minimo e tutti quelli intermedi.

Indichiamo con p_M la probabilità del simbolo massimo, con p_m la probabilità del simbolo minimo e con p_I la probabilità dell'insieme dei simboli intermedi. Indichiamo con $P_{e|M}$ la probabilità di errore per simbolo relativa alla trasmissione del simbolo massimo, con $P_{e|m}$ la probabilità di errore per simbolo relativa alla trasmissione del simbolo minimo e con $P_{e|I}$ la probabilità di errore per simbolo relativa alla trasmissione di un generico simbolo intermedio.

Sulla base dei simboli appena introdotti, la probabilità di errore media è data dalla:

$$P_e=p_M\cdot P_{e|M}+p_m\cdot P_{e|m}+p_I\cdot P_{e|I}$$

La probabilità di errore relativa al caso di simbolo massimo è

$$P_{e|M}=Prob\left\{n_k<-\frac{d}{2}\right\}$$

Se il rumore è positivo si rimane nella zona di decisione corretta, se è negativo usciamo dalla zona di decisione corretta soltanto se $n_k < -d/2$, detta d l'ampiezza degli intervalli di decisione.

Con ragionamento analogo, la probabilità di errore relativa al caso di simbolo minimo è

$$P_{e|m}=Prob\left\{n_k>\frac{d}{2}\right\}$$

Nel caso di un generico simbolo intermedio si può avere errore sia quando il rumore è positivo sia quando è negativo. La condizione si ha allora con riferimento al valore assoluto del rumore, ed è data da:

$$P_{e|I}=Prob\left\{|n_k|>\frac{d}{2}\right\}$$

Calcoliamo ora quest'ultima probabilità (essendo la più generale) nel caso del codice multilivello.

In [disegno 3] è rappresentata la densità di probabilità $p(n_k)$ del primo ordine di n_k (gaussiana), con evidenziata la parte interessata. La probabilità da calcolarsi vale:

$$P_{e|I} = \ Prob\left\{|n_k| > \frac{d}{2}\right\} = 1 - \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} p(n_k)\, dn_k \ =$$

$$= \ 1 - \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{n_k^2}{2\sigma^2}} dn_k \ = \qquad \text{(ponendo} \quad \xi = \frac{n_k}{\sqrt{2}\sigma} \ )$$

$$= \ 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{d}{2\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{d}{2\sqrt{2}\sigma}} e^{-\xi^2} d\xi \ = \ 1 - erf\left(\frac{d}{2\sqrt{2}\sigma}\right) \ = \ erfc\left(\frac{d}{2\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Semplificata negli ultimi due passaggi impiegando la funzione errore e la funzione errore complementare definite, rispettivamente di seguito:

$$erf(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-\xi^2} d\xi$$

$$erfc(x) = 1 - erf(x)$$

Con considerazioni sulla forma della gaussiana del [disegno 3] possiamo già dire che $P_{e|M}$ e $P_{e|m}$ sono la metà rispetto a $P_{e|I}$, quindi ne ricaviamo direttamente l'espressione senza ripetere tutti i calcoli:

$$P_{e|M} = Prob\left\{n_k < -\frac{d}{2}\right\} = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{d}{2\sqrt{2}\sigma}\right)$$

$$P_{e|m} = Prob\left\{n_k > \frac{d}{2}\right\} = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{d}{2\sqrt{2}\sigma}\right)$$

La densità di probabilità $p(n_k)$ vale:

$$p(n_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{\frac{-n_k^2}{2\sigma^2}}$$

Se $\sigma^2 = ½$ allora essa si riduce a:

$$p(n_k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-n_k^2}$$

La quale coincide con la densità di probabilità di una variabile aleatoria gaussiana normalizzata nella variabile ξ:

[di questa ultima frase non sono del tutto certo, è da prendere col beneficio del dubbio]

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\xi^2}$$

Con riferimento ad una variabile aleatoria gaussiana normalizzata, la funzione errore ci fornisce la probabilità che il valore della variabile sia compreso nell'intervallo (-x, x), la funzione errore complementare ci fornisce la probabilità che essa sia minore di -x o maggiore di x, cioè all'esterno dell'intervallo (-x, x).

Ne consegue che l'andamento di erf(x) parte da 0 per x = 0 e tende a 1 per x tendente ad infinito. Viceversa, erfc(x) parte da 1 per x = 0 e tende ad annullarsi al tendere di x ad infinito.

In base alle loro definizioni, tutte queste probabilità diminuiscono di valore all'aumentare del loro argomento, cosa auspicabile visto che si tratta di probabilità di errore (quindi di un evento che non vogliamo si verifichi).

La formula generale della probabilità media di errore è

$$P_e = \left[\frac{p_m + p_M}{2} + p_I \right] erfc\left(\frac{d}{2\sqrt{2}\sigma} \right)$$

Con riferimento al codice multilivello a simboli equiprobabili avremo:

$$p_M = p_m = \frac{1}{L}$$

$$p_I = \frac{L-2}{L}$$

La precedente diventa allora:

$$P_e = \left[\frac{1}{L} + \frac{L-2}{L} \right] erfc\left(\frac{d}{2\sqrt{2}\sigma} \right) = \left[\frac{L-1}{L} \right] erfc\left(\frac{d}{2\sqrt{2}\sigma} \right)$$

Consideriamo il codice bipolare.

Si tratta di un caso particolare del codice multilivello, con L = 2.

$$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{d}{2\sqrt{2}\sigma} \right)$$

Essa è anche giustificata dal fatto che la somma delle probabilità del simbolo massimo e minimo è 1, mentre non c'è probabilità dei simboli intermedi. Quest'ultima considerazione vale per qualsiasi codice bipolare, anche dove non ci sia equiprobabilità di simboli.

Nel caso AMI abbiamo

$$p_M = p_m = \frac{1}{4}$$

$$p_I = \frac{1}{2}$$

Da cui

$$P_e = \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right] erfc\left(\frac{d}{2\sqrt{2}\sigma} \right) = \frac{3}{4} erfc\left(\frac{d}{2\sqrt{2}\sigma} \right)$$

Ora esplicitiamo le formule ottenute in funzione di r_0, poiché nel caso AMI è $r_0 = d$, mentre nel multilivello $d = 2\, r_0$.

Multilivello: $$P_e = \left[\frac{L-1}{L} \right] erfc\left(\frac{d}{2\sqrt{2}\sigma} \right) = \left[\frac{L-1}{L} \right] erfc\left(\frac{r_0}{\sqrt{2}\sigma} \right)$$

Bipolare: $$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{d}{2\sqrt{2}\sigma} \right) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{r_0}{\sqrt{2}\sigma} \right)$$

AMI: $$P_e = \frac{3}{4} erfc\left(\frac{d}{2\sqrt{2}\sigma}\right) = \frac{3}{4} erfc\left(\frac{r_0}{2\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Qualche commento sulle formule appena ricavate. Di solito la probabilità di errore per simbolo viene riportata in grafici con scala logaritmica in funzione del rapporto r_0 / σ espresso in dB

[disegno 4]

La variazione di P_e è molto ampia al variare del rapporto sulle ascisse. Per questo bisogna tenere sotto controllo la qualità del segnale durante la costruzione del canale trasmissivo.

Un valore di riferimento tipico per la valutazione dei collegamenti è la probabilità di errore P_e pari a 10^{-6}.

Il rapporto sulle ascisse è un rapporto tra livelli (da cui il 20 nella definizione dei dB).

L'andamento delle funzioni erf ed erfc è riportato in figura 5.7.2

La comodità di aver introdotto queste funzioni sta anche nel fatto che i loro valori sono tabulati per un gran numero di valori dell'argomento, evitando di dover ricorrere all'integrazione ogni volta.

Finora abbiamo valutato la probabilità di errore per simbolo. Valutiamo ora come essa influenza la probabilità di errore per bit. Nel caso bipolare si ha coincidenza tra le 2.

Nel caso multilivello a ciascun livello corrisponde un certo numero di bit, in base al numero di livelli della codifica.

Normalmente la legge di codifica per i codici multilivello è una codifica di Gray, nella quale cambia soltanto il valore di un bit nel passaggio da un simbolo a quello adiacente.

Partendo dalla considerazione che, con grande probabilità, quando si sbaglia un simbolo nella codifica multilivello, lo si sbaglia con uno di quelli adiacenti ad esso, noi consideriamo che ciò avvenga in tutti i casi in cui viene sbagliato il simbolo, cioè avremo l'errore di un bit ogniqualvolta sbaglieremo un simbolo. Da ciò consegue che nel caso multilivello la probabilità di errore per bit è:

$$P_{eb} \simeq \frac{P_e}{l}$$

Dove l è il numero di bit impiegati nella codifica. Il "circa" è proprio dovuto all'assunzione approssimativa che all'errata interpretazione di un simbolo corrisponda l'errore di un solo bit (cioè che si sia interpretato uno dei simboli adiacenti a quello corretto).

Nel caso del codice AMI essa è invece:

$$P_{eb} \simeq P_e$$

Il fatto che sia una quasi uguaglianza è dovuto al fatto che, se volevamo trasmettere 1 o -1, abbiamo maggiore probabilità di trasmettere comunque la cifra corretta anche in presenza di rumore dato che, se esso è di ampiezza sufficiente, può comportare un errore di interpretazione da 1 a -1 o viceversa, in pratica abbassando la probabilità di errore.

Il valore σ^2 coincide con la potenza di rumore nel collegamento che stiamo considerando (trattandosi di un processo gaussiano ergodico a valor medio nullo).

Consideriamo il sistema di trasmissione così come mostrato in figura 8.9.8 (adattato in potenza).

La densità spettrale di potenza del rumore $\nu(t)$ è (dove è data con base sulle pulsazioni):

(8.9.25) $$G_i(\omega) = \frac{k\, T_{sist} R}{2\pi}$$

poi fino alla fine di pagina 8.60 (dove otteniamo il valore di σ^2, cioè la potenza di rumore)

Dobbiamo tenere a mente che abbiamo progettato il canale avendo come obiettivo l'annullamento dell'interferenza intersimbolo. La funzione di trasferimento dell'amplificatore equalizzatore vale quindi:

$$E(\omega)=\frac{R(\omega)}{L(\omega)G(\omega)}$$

Dove R(ω) deve essere una funzione a coseno rialzato per soddisfare l'annullamento di funzione intersimbolo. G(ω) è la trasformata dell'impulso di modulazione g(t) e L(ω) è la funzione di trasferimento della linea.

L'unico parametro che possiamo cambiare è il fattore α di roll-off della funzione a coseno rialzato.

Noi, ovviamente, cercheremo di sceglierlo in modo che la potenza di rumore sia minima, ed è stato calcolato che tale valore risiede nell'intorno dei valori 0.2 e 0.3.

Il valore 0.2 sarebbe quasi quello ottimale ma è di più difficile realizzazione rispetto a fattori di roll-off più vicini a 0.3, che però risultano in prestazioni lievemente peggiori in merito alla potenza di rumore ma più vantaggiosi in termini di semplicità realizzativa e quindi di costo.

Il primo passo per progettazione un sistema di comunicazione numerica in banda base consiste nell'imporre l'annullamento dell'interferenza intersimbolo, producendo normalmente una funzione di trasferimento a coseno rialzato per l'intero sistema di comunicazione.

[Esercizio 8 pagina 8.62]

In caso si arrivi alla necessità di calcolare per via numerica un integrale nel compito, indichiamo il risultato con I e proseguiamo i calcoli lasciando tale simbolo.

Nel compito ci sarà un esercizio e un paio di domande di teoria o due esercizi ed una domanda di teoria. NON ci saranno domande chiuse, orale solo per chi ha passato la prova scritta a discrezione dello studente. Chi non passa la prova scritta la deve rifare, non può fare un orale per alzare il voto sopra al 18.

[la parte che segue non so se sia da sapere, lui ne ha parlato durante il corso dopo aver fatto una introduzione su altri corsi che tratteranno in dettaglio quanto di seguito riportato... ho sistemato fin dove sono riuscito, la parte non riordinata può comunque essere studiata sul libro usando le formule indicate come guida. Io comincio ad averne abbastanza, dopo 70 e passa pagine sfido chiunque ad avere ancora voglia di andare avanti a riordinare]

[14-06-2005]

10.2: Risposta di quadripoli lineari a oscillazioni modulate. Equivalente passa-basso

Abbiamo un canale di trasmissione lineare al quale applichiamo un segnale s(t) modulato (quindi passa-banda)

(10.2.1) $$s(t)=\Re\left\{i(t)e^{j\omega_0 t}\right\}$$

Essendo i(t) l'inviluppo complesso.

H(ω) è la funzione di trasferimento, di modulo T(ω) e caratteristica di fase β(ω)

(figura 10.2.1)

Se il segnale d'ingresso è passa-banda non identicamente nullo, anche l'uscita è passa-banda non risulta identicamente nulla.

Sotto tali condizioni, si può scrivere il segnale di uscita come

(10.2.2) $$s_r(t) = \Re\left\{i_r(t)e^{j\omega_0 t}\right\}$$

In cui $i_r(t)$ ne rappresenta l'inviluppo complesso.

Essendo $s_r(t)$ un segnale passa-banda, la trasformata di Fourier del suo inviluppo complesso è:

(10.2.3) $$I_r(\omega) = \begin{cases} 2S_r(\omega+\omega_0) & , \quad per|\omega| \leqslant \frac{B_\omega}{2} \\ 0 & , \quad altrove \end{cases}$$

Dove $S_r(\omega)$ è la trasformata, secondo Fourier, di $s_r(t)$.

Indicata con $S(\omega)$ la trasformata secondo Fourier di $s(t)$, possiamo scrivere:

(10.2.4) $$S_r(\omega) = H(\omega)S(\omega)$$

Si può allora sostituire, nella precedente ottenendo:

(10.2.5) $$I_r(\omega) = \begin{cases} 2H(\omega+\omega_0)S(\omega+\omega_0) & , \quad per|\omega| \leqslant \frac{B_\omega}{2} \\ 0 & , \quad altrove \end{cases}$$

Dato che $I(\omega)$ ha espressione analoga alla 10.2.3 ma con S al posto di S_r, possiamo anche scrivere la trasformata dell'inviluppo complesso come:

(10.2.6) $$I_r(\omega) = H(\omega+\omega_0)I(\omega)$$

$H(\omega)$ ha una caratteristica di ampiezza di solito "passa-banda", per cui introduciamo la funzione $H_0(\omega)$ che ne rappresenta la traslazione verso sinistra di un valore ω_0, in modo da riportarla in "banda base". Detta traslazione presenta un lobo centrato sulla pulsazione nulla ed uno centrato sulla pulsazione $-2\omega_0$.

(10.2.7) $$H_0(\omega) = \begin{cases} H(\omega+\omega_0) & , \quad per|\omega| \leqslant \frac{B_\omega}{2} \\ 0 & , \quad altrove \end{cases}$$

(figura 10.2.3)

Fatta questa sostituzione, possiamo scrivere:

(10.2.8) $$I_r(\omega) = H_0(\omega)I(\omega)$$

Dato che $I(\omega)$ ha spettro di ampiezza e fase centrati su valori nulli di pulsazione ed identicamente nulli altrove, il prodotto di esso con $H_0(\omega)$... (consideriamo solo il lobo centrato nell'origine e non quello a -2w0)

Si può interpretare H_0 come la funzione di trasferimento dell'equivalente passa-basso del quadripolo considerato (figura 10.2.2).

H_0 in generale non è fisicamente realizzabile, in quanto possiamo considerare che, in generale

(10.2.10) $$H_0(-\omega) \neq H_0^*(\omega)$$

La quale costituisce una condizione necessaria per la fisica realizzabilità della rete con tale funzione di trasferimento.

In figura 10.2.3 vediamo una funzione H(ω) fisicamente realizzabile che però comporta una $H_0(\omega)$ non fisicamente realizzabile.

Esiste una situazione in cui anche la funzione di trasferimento dell'equivalente passa-basso è fisicamente realizzabile.

Ciò accade quando il modulo della funzione di trasferimento del filtro passa-banda è funzione pari rispetto ad ω_0 nel suo intorno e l'argomento è funzione dispari nello stesso intervallo (figura 10.2.4)

Quando ciò accade si dice che il quadripolo passa-banda è simmetrico.

[INIZIO PARTE ANCORA DA SISTEMARE]

Esempio:

supponiamo di dover calcolare la risposta di un quadripolo ad un segnale modulato a prodotto

(formula 1) s(t) = x(t) cos (w0t)

i(t) = x(t)

dato il sistema in figura 10.4.2, l'inviluppo complesso dell'uscita è, in generale, xp(t) + j xq(t) (cioè una generica funzione complessa del tempo per quanto mostrato in (formula 2).

Da ciò consegue l'espressione di sr(t) data in

(10.4.9)

Nella quale abbiamo quindi la sovrapposizione di due oscillazioni modulate a prodotto (una delle quali agisce quindi disturbo per l'altra).

Supponiamo invece ora che il quadripolo passa-banda sia simmetrico, quindi sia fisicamente realizzabile l'equivalente passa-basso.

Sotto tali condizioni formula 3, per cui l'inviluppo complesso dell'uscita sarà puramente reale (costituito dalla sola parte reale xp):

(10.4.11)

e il segnale di uscita sarà conseguentemente costituito da una sola componente modulata a prodotto:

(10.4.12)

Se facciamo riferimento ad un sistema di comunicazione come quello di figura 10.4.4, in cui il mezzo trasmissivo sia equivalentemente rappresentabile mediante un quadripolo simmetrico, l'intero sistema è rappresentabile mediante il suo equivalente in banda base, rappresentato in figura 10.4.5

10.3: Condizioni di non distorsione di gruppo di una rete lineare passa-banda

Noi finora abbiamo parlato solamente di condizioni di non distorsione, ricordate in

(10.3.1)

e rappresentate in (figura 10.3.1)

Nel dominio dei tempi esse si esplicano nella relazione (formula 4)

Queste condizioni sono ancora necessarie e sufficienti per mantenere la linearità delle leggi di modulazione che abbiamo visto finora? E' necessario verificare queste condizioni per il segnale modulato per ottenere un segnale modulante indistorto?

Queste sono questioni importanti da valutare poiché è estremamente difficile se non impossibile realizzare tali condizioni (soprattutto quella di fase) per segnali modulati (quindi passa-banda).

La risposta, fortunatamente, è che non è assolutamente necessario rispettare tali condizioni. E' invece necessario soddisfare le condizioni di distorsione di gruppo (con riferimento all'insieme delle leggi di modulazione viste finora), estremamente più semplici rispetto a quelle di non distorsione.

La caratteristica di fase può essere sviluppata nell'intorno del valore w come

(10.3.2) Taylor?

Se consideriamo un intorno sufficientemente piccolo di w0 possiamo limitarci a considerare l'approssimazione alla sola derivata del primo ordine. Tale operazione prende il nome di linearizzazione dell'andamento della caratteristica di fase nell'intorno di w0.

Genericamente la tangente alla curva nel punto di pulsazione w0 non passa per l'origine.

Imponiamo invece che tale retta tangente passi per l'origine, mantenendo la costanza della caratteristica di ampiezza nella banda considerata. Le condizioni così ricavate sono espresse in

10.3.5

Il segnale modulato in uscita risulterà distorto, ma non lo sarà il segnale demodulato rispetto al segnale modulante.

Scriviamo s(t) come segnale genericamente modulato

10.3.6

L'espressione dell'inviluppo complesso sia, genericamente:

10.3.7

Nell'ambito delle 10.3.5 l'equivalente passa-basso di H(w) è dato da

10.3.8

Dato che (formula 5)

L'inviluppo complesso dell'uscita risulta quindi

10.3.9

Si ricava, per sostituzione, una nuova espressione per il segnale di uscita

10.3.10 (fare i passaggi)

Se fossero state verificate le condizioni di non distorsione classiche avremmo avuto:

formula 6

Queste condizioni sarebbero identiche se beta(w0) fosse uguale a w0 t0.

[aiuto cosa accidenti sta dicendo???? bisogna che legga e capisca pag. 10.17]

Alla fine di tutto, si può affermare che, CNS affinché le leggi di modulazione risultino indistorte è che siano soddisfatte le condizioni di non distorsione di gruppo.

[FINE PARTE ANCORA DA SISTEMARE]