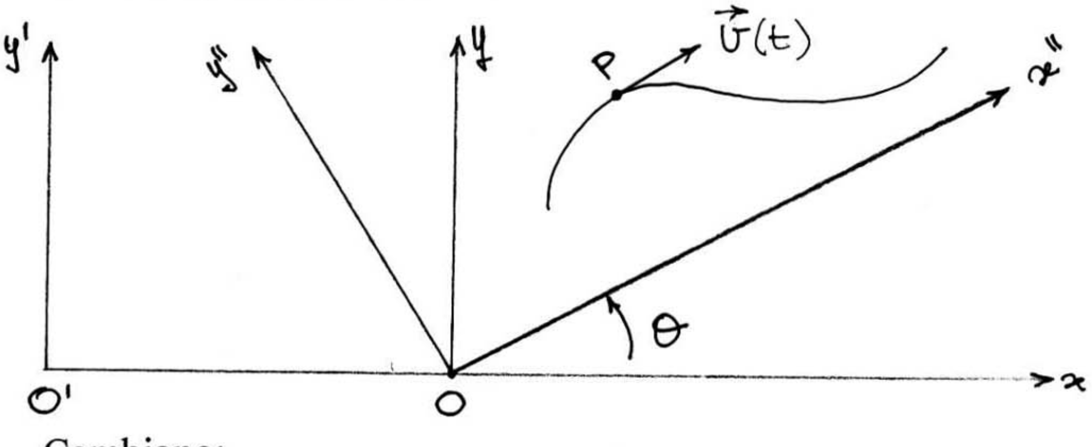
INVARIANZA

La **traiettoria del moto** e il fatto che che sia $\vec{v}(t) = v\vec{u}_T$, sono caratteristiche ***intrinseche*** del moto, **NON** dipendono dalla **scelta del sistema di riferimento.**
Si può :
1) spostare l'origine O,
2) ruotare gli assi,
la ***curva***, la ***direzione***, il ***verso***, il ***modulo di*** $\vec{v}(t)$ restano gli **stessi.**
Si parla di INVARIANZA delle ***relazioni cinematiche vettoriali*** $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}dt$, etc. rispetto alla scelta del sistema di riferimento ove studiare il moto.



Cambiano:
1) le coordinate di P,
2) le componenti di $\vec{v}(t)$ ***ed*** $\vec{a} = d\vec{v}/dt$,
3) ***l'espressione analitica della traiettoria***.

ACCELERAZIONE

L'accelerazione **definita** anche nel moto piano come :

$$\vec{a} = d\vec{v}/dt = d^2\vec{r}/dt^2$$

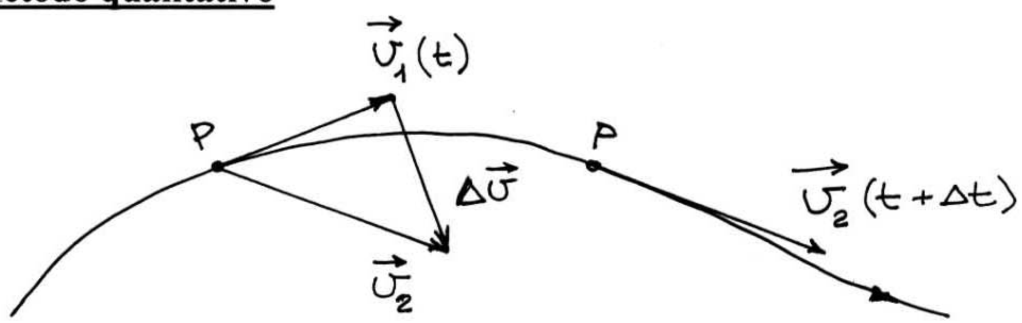
esprime la variazione della velocità sia in **modulo** che in **direzione:**

⇒ mi aspetto allora che sia espressa mediante **due componenti:**

a) una legata alla variazione del modulo di $\vec{v}$,

b) una legata al cambiamento della direzione del moto.

<u>**Metodo qualitativo**</u>



$$\vec{a}_m = \overrightarrow{\Delta v}/\Delta t$$

i) NON è parallela a $\vec{v}$,

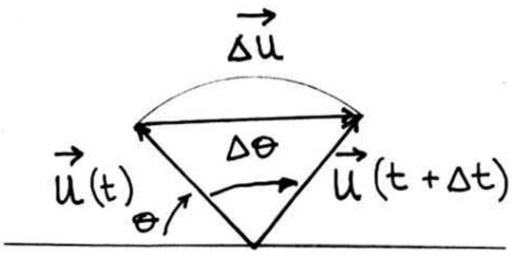
ii) È diretta verso la concavità della curva.

<u>**Metodo quantitativo**</u>

$$\vec{a} = d(v\vec{u}_T)/dt = [dv/dt]\,\vec{u}_T + v\,[d\vec{u}_T/dt]$$

<u>*DERIVATA DI UN VERSORE $\vec{u}(t)$*</u>

Essendo $|\vec{u}(t)| = 1$, ciò che può variare nel tempo è **solamente la direzione** del **versore; $\vec{u}(t)$** può **solo *<u>ruotare</u>* di un angolo** $\Delta\theta$:



$$\vec{\Delta u} = \vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t)$$

$\vec{\Delta u}$ = **corda che unisce gli estremi dell'arco di circonferenza descritto da $\vec{u}(t)$ nella rotazione di $\Delta\theta$.**

Per Δt che tende a 0, $\vec{\Delta u}$ **tende al vettore infinitesimo $\vec{du}$ normale a $\vec{u}(t)$, il cui modulo si confonde con l'arco.**
Per definizione di angolo piano possiamo scrivere:

$$|\vec{du}| = |\vec{u}(t)|\ d\theta = d\theta,$$

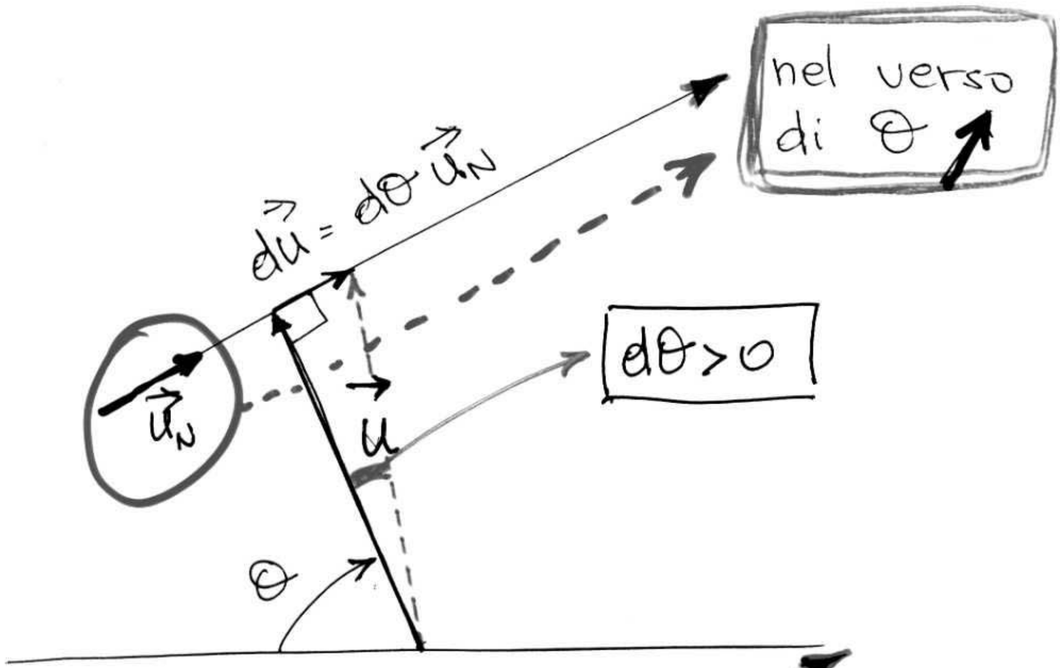
$$\vec{du} = d\theta\ \vec{u}_N$$

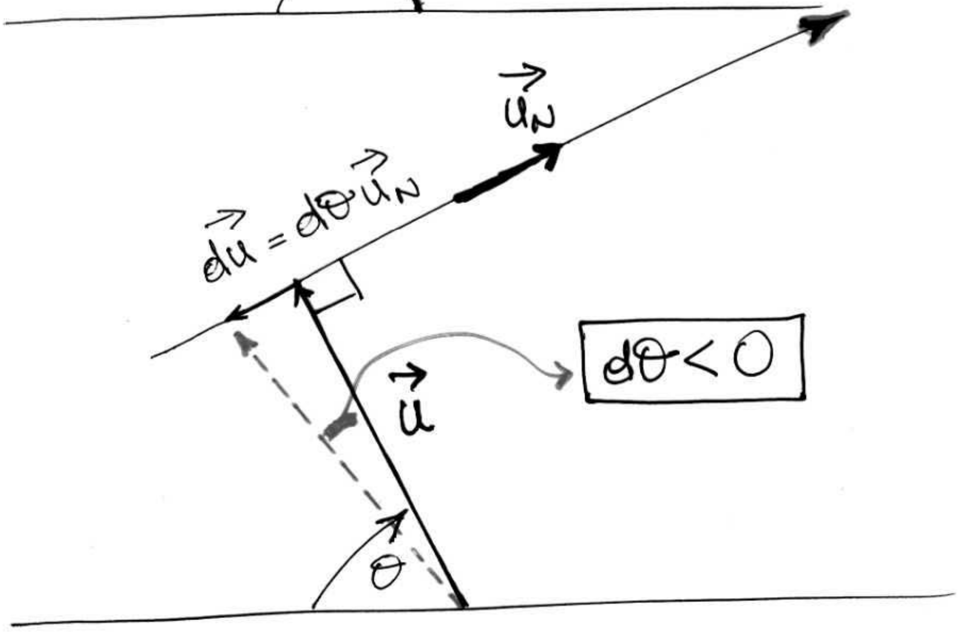
con $\vec{u}_N$ = versore **normale** a $\vec{u}(t)$.

Definiamo la derivata di un versore $\vec{u}(t)$ come:

$$\vec{du}/dt = d\theta/dt\ \vec{u}_N$$

Nota: ***la derivata di un versore è un vettore normale al versore di modulo $d\theta/dt \neq 1$.***





$$d\vec{u} = d\theta\,\vec{u}_N$$

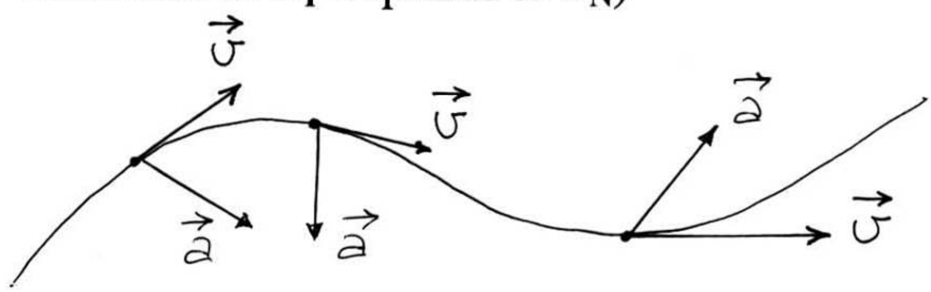
Quindi scriviamo:

$$\vec{a} = (dv/dt)\,\vec{u}_T + v\,(d\theta/dt)\,\vec{u}_N = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

$\vec{a}_T = dv/dt\ \vec{u}_T$, esprime **la variazione di** $|\vec{v}(t)|$;

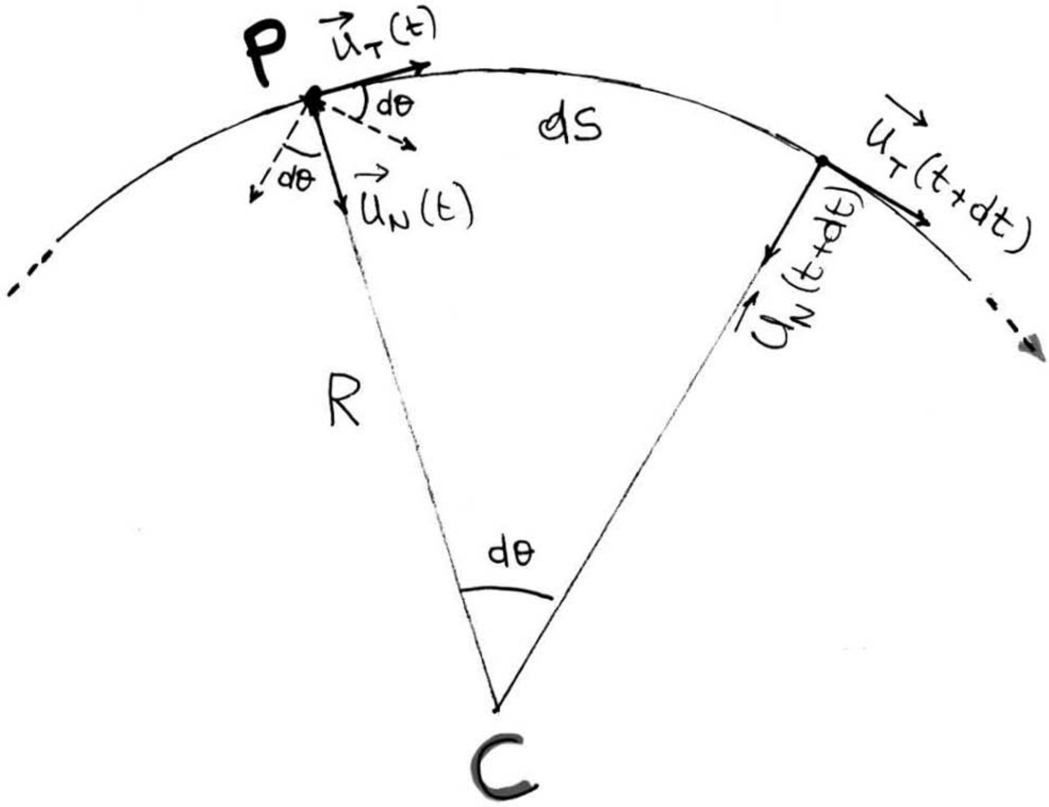
$\vec{a}_N = v\ d\theta/dt\ \vec{u}_N$ esprime **la variazione della direzione di** $\vec{v}$ ed è un **vettore diretto verso la concavità della traiettoria, normale alla tangente alla traiettoria nel punto considerato.**

(**$d\theta/dt$** dice quanto rapidamente cambia la direzione di $\vec{u}_T$ e quindi di $\vec{u}_N$)



$\vec{a}_N$ può essere espresso in termini di $|\vec{v}(t)|$:

moto di P in un intervallo dt



$$ds = R\,d\theta$$

$$\frac{ds}{dt} = R\,\frac{d\theta}{dt} \qquad v = R\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\,v}$$

Per intervalli di tempo infinitesimi dt, le normali alla traittoria **si incontrano nel punto C del piano** che **coincide** con il centro della ***<u>circonferenza osculatrice , la circonferenza tangente alla traiettoria nel punto P.</u>***

C = centro di curvatura della traiettoria in P,

R =CP = raggio di curvatura.

Mentre P si muove sulla traiettoria, in generale variano sia **R (valore)** che **C (posizione); C** può passare **da una parte all'altra della curva e andare all'∞ nei tratti rettilinei.**

Possiamo scrivere:

$$\vec{a} = dv/dt\ \vec{u}_T + v^2/R\ \vec{u}_N, \text{ con}$$

$$|\vec{a}| = [a^2_T + a^2_N]^{1/2} = [(dv/dt)^2 + v^4/R^2]^{1/2}$$

$\vec{a}_T$ **= accelerazione tangenziale**

$\vec{a}_N$ **= accelerazione normale o centripeta** (perché diretta <u>*SEMPRE*</u> verso il centro di curvatura C)

Moto vario: $\vec{a_T} \neq 0$ **e** $\vec{a_N} \neq 0$

Moto curvil. uniforme: $\vec{a_T} = 0$ **e** $\vec{a_N} \neq 0$

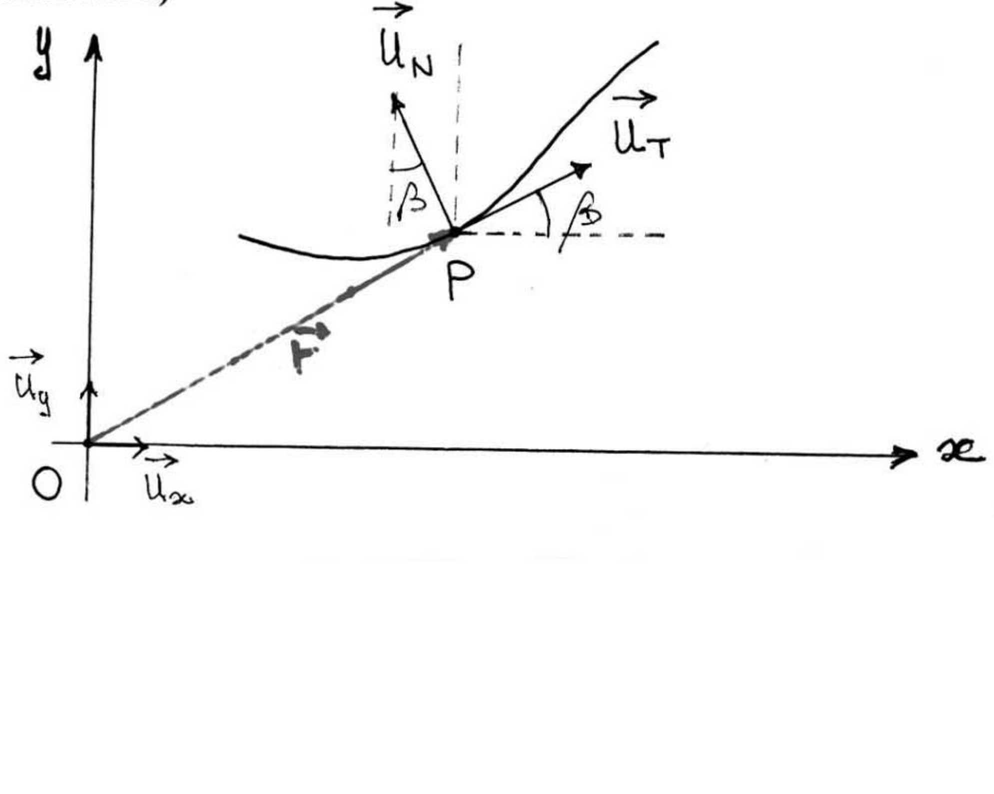
Moto rettil. vario : $\vec{a_T} \neq 0$ **e** $\vec{a_N} = 0$

Moto rettil. uniforme: $\vec{a_T} = 0$ **e** $\vec{a_N} = 0$

Queste proprietà sono INVARIANTI (non hanno bisogno del supporto di un sistema di riferimento.
Il riferimento *NECESSARIO* per la risoluzione del problema del moto

$$\vec{v}(t) = \vec{v_0} + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt \quad ; \quad \vec{r}(t) = \vec{r_0} + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt$$

viene allora *SCELTO* in modo da semplificare la suddetta risoluzione)



Le componenti cartesiane della accelerazione, $\vec{a}_x$ e $\vec{a}_y$, sono le accelerazioni dei due moti rettilinei proiezioni sugli assi del moto di P lungo la traiettoria curva:

$$\vec{a} = d\vec{v}/dt = dv_x/dt\, \vec{u}_x + dv_y/dt\, \vec{u}_y = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y$$

β = angolo che $\vec{u}_T$ forma con $\vec{u}_x$.

Dalla figura:

$$a_x = a_T \cos\beta - a_N \operatorname{sen}\beta = dv/dt \cos\beta - v^2/R \operatorname{sen}\beta$$
$$a_y = a_T \operatorname{sen}\beta + a_N \cos\beta = dv/dt \operatorname{sen}\beta + v^2/R \cos\beta$$

Dalle componenti ***tangenziale*** e ***centripeta*** si ricavono quelle ***cartesiane*** e viceversa: sulla base del problema che si sta affrontando si potrà scegliere una delle due rappresentazioni (a_T, a_N) o (a_x, a_y).

$$v_x(t) = v_{x0} + \int_{t_0}^{t} a_x(t)\,dt \rightarrow x(t)$$

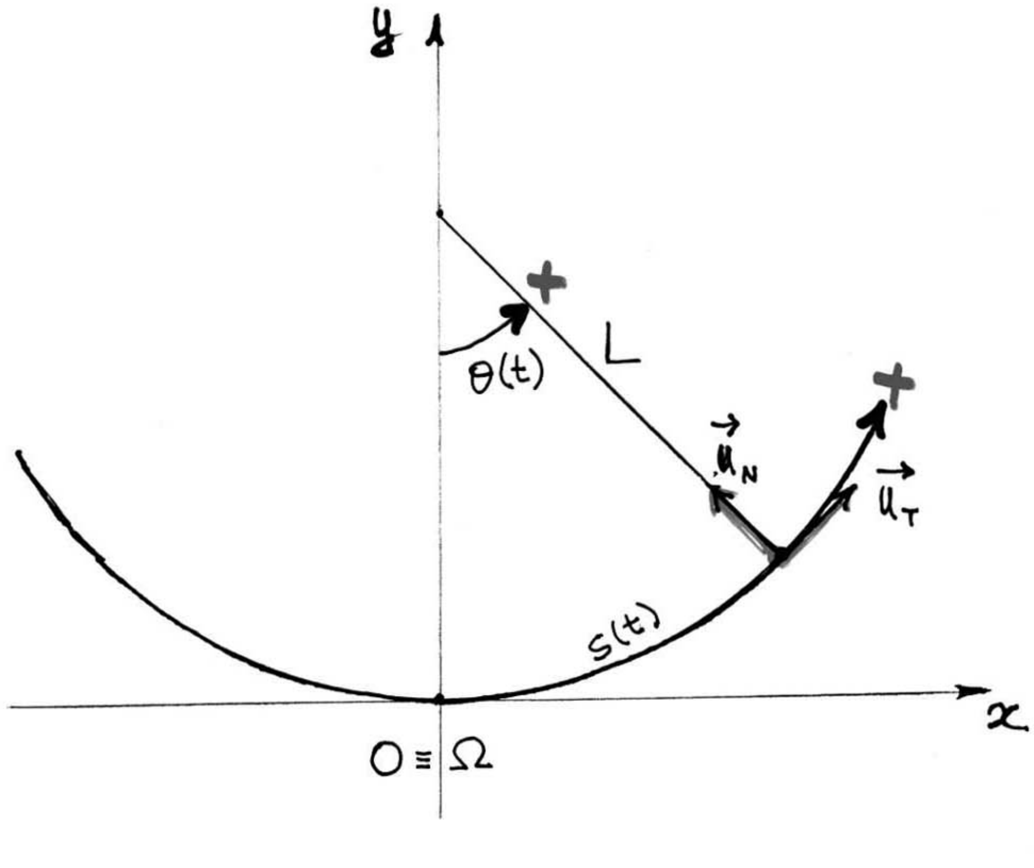
+

$$v_y(t) = v_{y0} + \int_{t_0}^{t} a_y(t)\,dt \rightarrow y(t)$$

$\downarrow$

$y(x)$

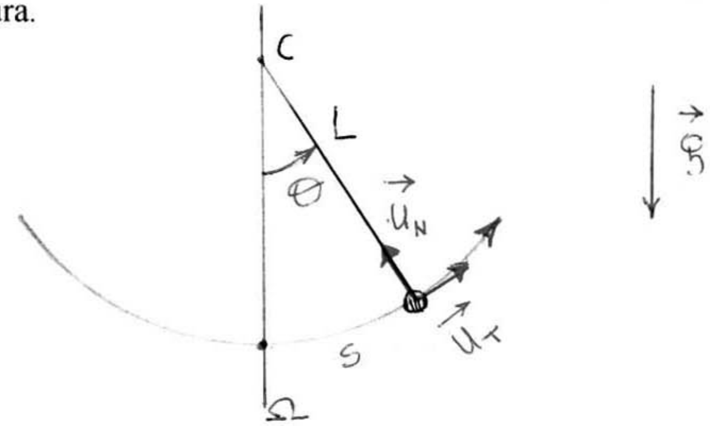
Ad esempio, nello studio del moto del **pendolo semplice,** che è quello di un punto materiale che si muove lungo un arco di circonferenza di raggio, L, pari alla lunghezza del filo in un piano verticale, conviene utilizzare ***le direzioni orientate*** delle componenti, $\mathbf{a_T}$ ed $\mathbf{a_N}$, della accelerazione, introducendo un ***<u>orientamento positivo arbitrario</u>*** alla coordinata <u>*s*</u> sulla traiettoria (nota) o all'angolo <u>θ</u> sotteso all'arco.



A

E' la situazione fisica a suggerire la scelta del sistema di riferimento più adatto; se non ci sono motivi di preferenza si sceglie un sistema cartesiano "destro".

Ad esempio consideriamo il moto del pendolo semplice, cioè quello di una sfera legata all'estremità di una fune lunga 0,50m che oscilla lungo un arco di circonferenza in un piano verticale sotto l'influenza della gravità, come illustrato in figura.



Quando la fune forma un angolo di *20°* con la verticale, la sfera ha una velocità di *1,5m/s*. Determinare:

a) la componente normale e tangenziale dell'accelerazione in quell'istante,

b) il modulo e la direzione di $\vec{a}$ in quell'istante.

Da $\mathbf{a_N = v^2/R}$,abbiamo: $a_N = (1{,}5)^2/0{,}5 = 4{,}5 m/s^2$

Quando la sfera si trova ad un angolo $\theta \neq 0$, essa ha una accelerazione tangenziale che ha modulo :

$\mathbf{a_T = g\ sen\theta}$ (cioè la componente di **g** tangente all'arco di circonferenza).

NON posso scrivere in analogia: $a_N = g \cos \theta$, perché lungo la fune agisce una forza e quindi una accelerazione incognite.

$\Rightarrow a_T = 9{,}8 \text{ sen } 20° = 3{,}4 \text{ m/s}^2$.

$$\mathbf{a} = \sqrt{\mathbf{a_T}^2 + \mathbf{a_N}^2} = \sqrt{(4{,}5)^2 + (3{,}4)^2} = 5{,}6 \text{ m/s}^2$$

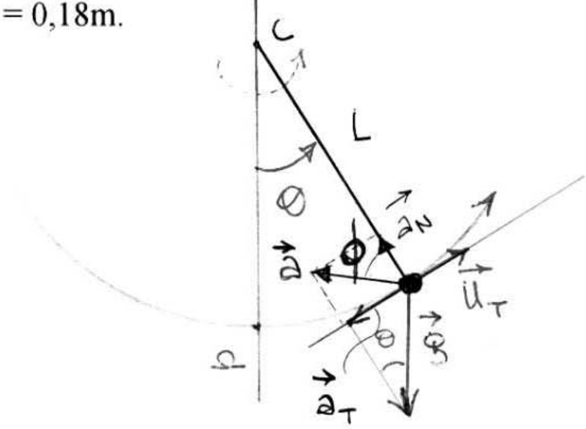
B

Se indichiamo con ϕ l'angolo tra **a** e la fune :

$$\mathbf{tg}\ \phi = \mathbf{a_T/a_N} \Rightarrow \phi = \text{arc tg } a_T/a_N = \text{arc tg } (3{,}4/4{,}5) = 37°$$

$\mathbf{s = L\theta}$ con θ espresso in radianti ; $\theta = 0{,}35$ rad

$\Rightarrow s = 0{,}5 \times 0{,}35 = 0{,}18$m.



In questo sistema di riferimento ortogonale (u_T, u_N) **non fisso** posso scrivere l'equazione oraria del moto nella ipotesi di piccoli θ , tenendo presente che l'eq.ne vettoriale

$\mathbf{\vec{a}_T = dv/dt\ \vec{u}_T}$ è una **invariante**. Per cui posso scrivere per <u>qualunque θ</u> :

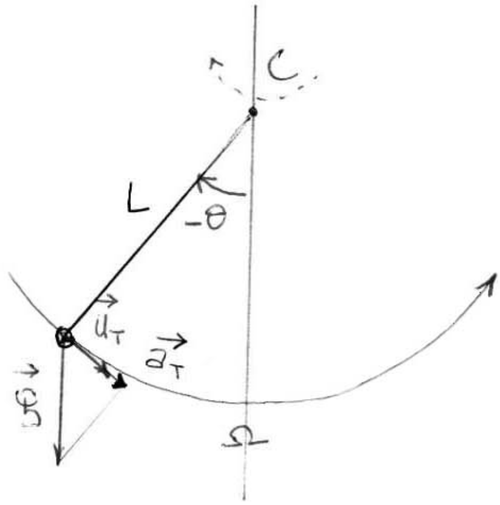
$$\mathbf{\vec{a}_T = dv/dt\ \vec{u}_T = d^2s/dt^2\ \vec{u}_T = L\ (d^2\theta\ /dt^2\ )\ \vec{u}_T.}$$

D'altra parte a_T è la proiezione di g sulla tangente all'arco di circonferenza e vale:

$$\mathbf{\vec{a}_T = g\ sen\ \theta\ (-\vec{u}_T) \cong -g\ \theta\ \vec{u}_T\ per\ \theta > 0}\ \text{(vedi figura)}$$

e

$$\mathbf{\vec{a}_T = g\ sen\ (-\theta)\ \vec{u}_T = -g\ sen\theta\ \vec{u}_T \cong -g\ \theta\ \vec{u}_T\ per\ \theta < 0}$$



L'equazione del moto risulta pertanto essere:

$\mathbf{L\,(d^2\theta\,/dt^2) = -\,g\;\;\theta \;\;\Rightarrow\;\; d^2\theta/dt^2 + g/L\;\theta \;\;= 0}$ che è l'eq.ne differenziale del moto armonico semplice e che ha come soluzione:

$$\boldsymbol{\theta(t) = \theta_M \cos\,(\omega\; t + \phi)}$$

con $\boldsymbol{\omega = \sqrt{g/L}}$.

Nell'ipotesi che per $t_0 = 0$ sia $\theta(0) = \theta_M$, $v(0) = 0$ e $\phi = 0$ ***vedi appendice**

$\Rightarrow$ $\theta(t) = \theta_M \cos\omega\, t$, si hanno le seguenti espressioni per la velocità e l'accelerazione tangenziale:

$$\mathbf{v(t) = ds/dt = \theta_M L\omega\,(-\,sen\omega\; t) = -\theta_M L\omega\;\; sen\omega t}$$
$$\mathbf{a_T = dv/dt = -\theta_M L\omega^2\; cos\omega t = -\;\omega^2\; L\;\theta.}$$

Con $\omega = \sqrt{g/L}$ $a_T = -g\,\theta$ come deve essere.

<u>Esercizio</u>

- verificare la corretta dimensione di ω
- ricavare $v(t)$ da $v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$

*Appendice

θ_M e ϕ individuano le condizioni iniziali del moto $\theta(0)$ e $v(0)$:

[necessarie in generale per ricavare la legge oraria del moto per doppia integrazione]

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_M \cos\phi \\ v(0) = \left(\dfrac{ds}{dt}\right)_{t=0} = \left(\dfrac{d\,L\theta}{dt}\right)_{t=0} = L\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)_{t=0} = -\omega\theta_M L \,\mathrm{sen}\,\phi \end{cases}$$

Se è $\theta(0) = \theta_M$

allora deve essere $\phi = 0$ e $v(0) = 0$

$\rightarrow \quad \theta(t) = \theta_M \cos\omega t$, ...

Con la soluzione

$$\theta(t) = \theta_M \,\mathrm{sen}\,(\omega t + \phi)$$

con la condizione

$$\theta(0) = \theta_M$$

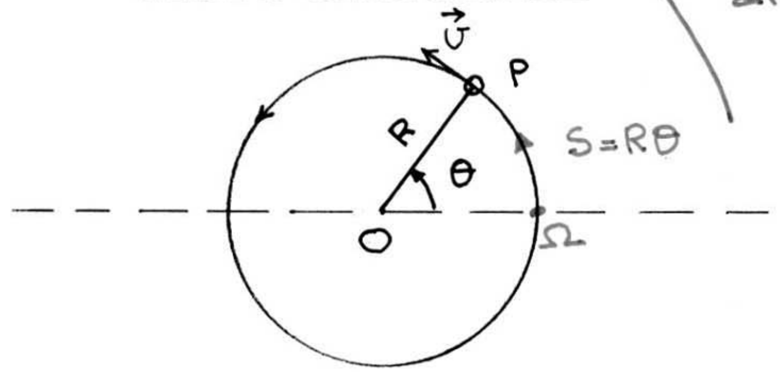
deve essere $\phi = \frac{\pi}{2}$, cioè

$$\theta(t) = \theta_M \,\mathrm{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \theta_M \cos\omega t$$

...

MOTO CIRCOLARE

rotazione antioraria $\theta > 0$



Caratteristiche:

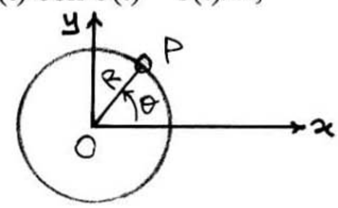
(1) **traiettoria:** ***circonferenza piana di raggio R=/$\vec{r}$/= costante e centro O;***

(2) ***$\vec{v}$ varia <u>sempre</u> continuamente in direzione $\Rightarrow \vec{a}_N$ è sempre $\neq 0$***
(agisce sempre una forza centripeta).
In particolare:

(i) **moto circolare uniforme**
v = costante $\Rightarrow a_T = 0$ e $a_N = v^2/R \neq 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_N$

(ii) **moto circolare vario**
$\vec{v}(t) \neq 0 \Rightarrow \vec{a}_T \neq 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$ non passa per O.
(agisce una $\vec{F}_T \neq 0$)

Per descrivere il moto, cioè ricavare la legge oraria, di P, possiamo:
a) utilizzare lo spazio percorso **s(t)** sulla circonferenza (ascissa curvilinea),
b) utilizzare l'angolo **θ(t)** sotteso all'arco s(t) con θ(t) = s(t)/R,
c) utilizzare le coordinate cartesiane di P:



$$\begin{cases} x(t) = R\cos\theta \\ y(t) = R\,\text{sen}\theta \end{cases}$$

$\vec{r}(\theta) = R\cos\theta\,\vec{u}_x + R\,\text{sen}\theta\,\vec{u}_y$

Solitamente si usa θ(t); in tal modo il problema si riduce ad uno ***unodimensionale***.

componenti del raggio vettore $\vec{r}(\theta)$

Volendo esprimere la legge oraria in termini di $\theta(t)$, dobbiamo definire:
(1) una nuova velocità, quella ***angolare:***

$$\omega = d\theta/dt = 1/R(ds/dt) = v/R \qquad \Rightarrow \qquad v = \omega R$$

2 ω si misura in **rad/s**. Se è $v = v(t)$ anche $\omega = \omega(t)$.
(3) una nuova accelerazione, quella ***angolare***:

$$\alpha = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2 = 1/R\,(dv/dt) = a_T/R \Rightarrow a_T = \alpha R$$

α si misura in **rad/s²**.

In modo che se è :
i) nota $\alpha(t) \Rightarrow \omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t)dt$
ii) noto $\theta(t) : \Rightarrow \omega = d\theta/dt \Rightarrow v = \omega R \Rightarrow \alpha = d^2\theta/dt^2 \Rightarrow a_T = \alpha R.$

Moto Circolare Uniforme.

$$v = \text{costante} \quad e \quad \omega = \text{costante.}$$

Leggi orarie:

$\theta(t) = \theta_0 + \omega\, t$ con $\theta_0 = \theta(0)$ per $t_0 = 0$
$s(t) = s_0 + v\, t$ con $s_0 = s(0)$ per $t_0 = 0$.

e $\quad a_T = dv/dt = 0 \quad$ e $\quad a_N = v^2/R = (\omega^2 R) \quad (m/s^2)$.

Moto periodico (quando a intervalli di tempo uguali, il punto ripassa nella stessa posizione con la stessa velocità $\vec{v}$), con **periodo**:

$$T = 2\pi R/v = 2\pi/\omega \qquad (s)$$

Corrispondente al tempo necessario per compiere un giro completo.

I moti ottenuti per **proiezione** di quello **vero** sugli assi cartesiani sono descritti dalle leggi:

$$\mathbf{x(t) = R\cos\theta(t) = R\cos(\omega\, t + \theta_0)}$$
$$\mathbf{y(t) = R\,sen\,\theta(t) = R\,sen(\omega\, t + \theta_0)}$$

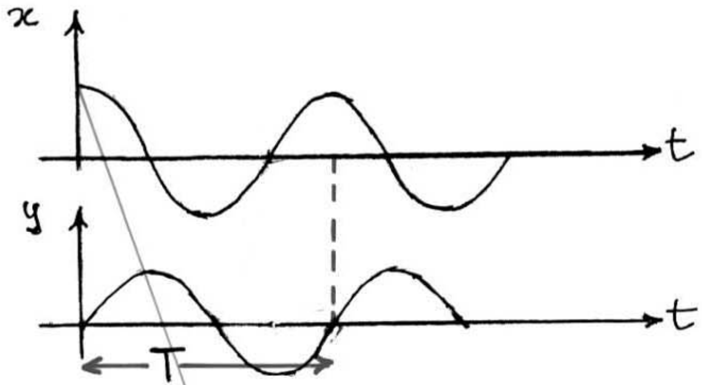
$x(t)$ anticipa $y(t)$ di $\frac{1}{4}$ di ciclo $\left(\frac{1}{4} \times 2\pi\right) = \frac{\pi}{2}$

cioè

moti armonici semplici di uguale ampiezza R e fase iniziale θ_0, sfasati fra loro di $\pi/2$, con lo stesso periodo T del moto circolare uniforme.

$$[\cos(\omega t + \theta_0) = sen(\omega t + \theta_0 + \pi/2)]$$

Per $\theta_0 = 0$



Moto Circolare Vario

$$\mathbf{v = v(t),\ \omega = \omega(t),\ \alpha = \alpha(t),\ a_T = a_T(t) = \alpha(t)\, R,\ a_N = v^2/R = \omega^2 R}$$

Moto Circolare Uniformemente Accelerato

$$\mathbf{\alpha = costante \quad \Rightarrow \quad a_T = costante}$$

Con $\mathbf{t_0 = 0}$

$$\mathbf{\omega(t) = \omega_0 + \alpha t \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t)dt = \theta_0 + \omega_0 t + 1/2\, \alpha t^2}$$

con $\mathbf{a_N = \omega^2 R = (\omega_0 + \alpha\, t)^2 R \neq 0}$ $\neq$ cost.

Osservazione:

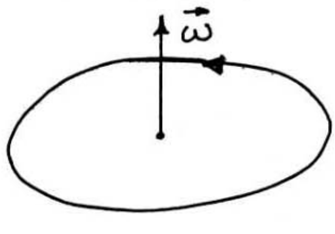
Completa analogia matematica
per la trattazione **del moto rettilineo uniformemente accelerato e del moto circolare uniformemente accelerato :**

$$x(t) = x_0 + v_0 t + 1/2\ at^2$$
$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + 1/2\ \alpha t^2.$$

Differenze:

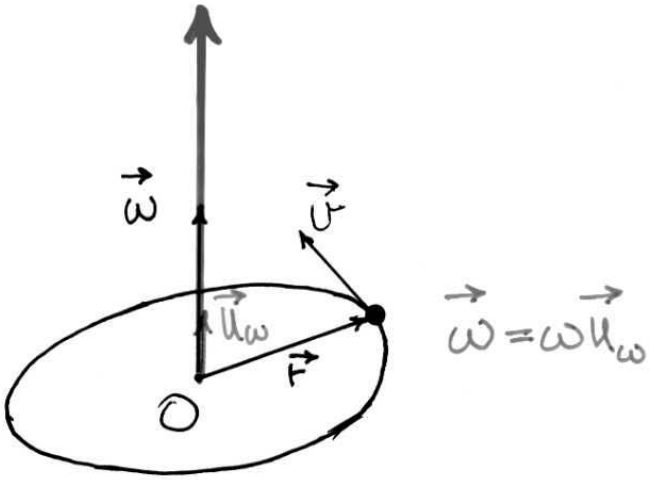
- ♣ **nel moto rettilineo la descrizione unidimensionale è *completa*,**
- ♦ **nel moto circolare *no*: con $\omega(t) = v/R$ e $\alpha(t) = 1/R\ (dv/dt)$ descriviamo l'evoluzione temporale del moto legato solo al modulo v; non rendiamo conto delle variazioni della *direzione* di $\vec{v}$ che portano a $\vec{a}_N = v^2/R\ \vec{u}_N = \omega^2 R\ \vec{u}_N$**
  La comodità dell'uso di $\theta(t)$ è però **innegabile : si risolvono i problemi del moto circolare con formule analoghe a quelle del moto rettilineo. Basta poi ricordare che istante per istante bisogna sommare vettorialmente $\vec{a}_N$ ad $\vec{a}_T$ per avere $\vec{a}$ e quindi il corretto legame con $\vec{F}_{totale} = F\vec{u}_T + F\vec{u}_N$.**

Velocità angolare vettoriale $\vec{\omega}$



(i) *modulo*: $|\vec{\omega}| = d\theta/dt$
(ii) *direzione*: **la normale al piano su cui giace la circonferenza,**
(iii) *verso* : **quello di avanzamento di una vite destrogira che ruota concordemente al moto. (dal suo estremo il moto appare antiorario)**

Dalla figura:



$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}}.$$

Dato $\vec{\omega}$:

(i) ***è individuato il piano su cui giace la circonferenza,***

(ii) ***è individuato il verso di percorrenza della circonferenza,***

(iii) ***se è nota la legge $\omega = \omega(t)$ si può ricavare la legge oraria del moto $\theta(t)$ note le condizioni iniziali,***

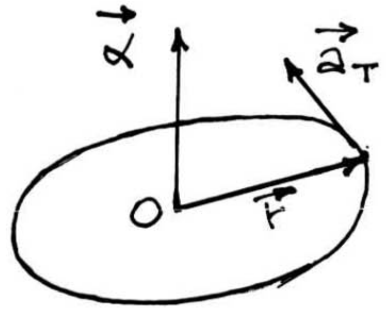
(iv) ***si ottiene $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt = d\omega/dt\ \vec{u}_\omega$, essendo $\vec{u}_\omega$ costante.***

- // ad $\vec{\omega}$, avendo $\vec{\omega}$ direzione COSTANTE
- verso determinato dalla variazione del Modulo di ω
- modulo $|\vec{\alpha}| = \alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$

⊙ $\vec{a} = d\vec{v}/dt = d(\vec{\omega} \times \vec{r})/dt = (d\vec{\omega}/dt) \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (d\vec{r}/dt) = \vec{\alpha} \times r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times r) =$

$= \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}$ **con** $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$ **(rad/s) e** $d\vec{r}/dt = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

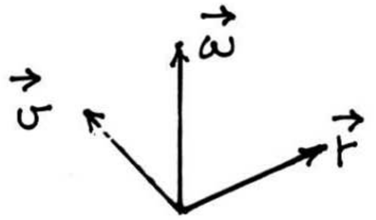
$$\Rightarrow \vec{a_T} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

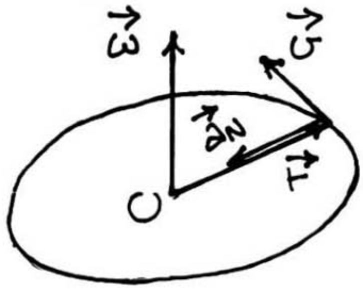


$$\Rightarrow \vec{a_N} = -\,\omega^2 \vec{r}$$

i vettori $\vec{r}$, $\vec{v}$ ed $\vec{\omega}$ formano nell'ordine una terna ortogonale destra → il modulo del prodotto triplo è il prodotto dei moduli $\omega^2 r$,

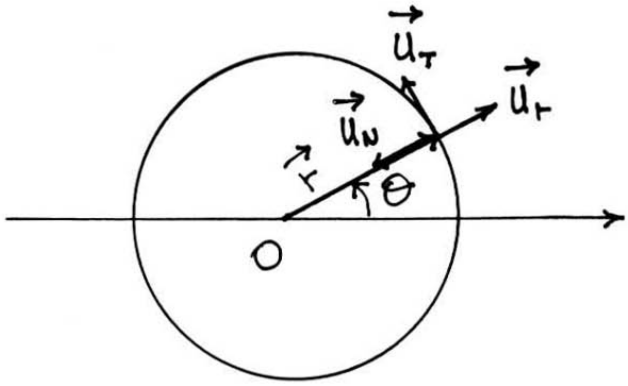
→ tenendo conto dei versi, la direzione è quella di $\vec{r}$, il verso l'opposto.





$\vec{u}_\omega \times \vec{u}_r = \vec{u}_T$

$\vec{u}_\omega \times \vec{u}_T = \vec{u}_N = -\vec{u}_r$

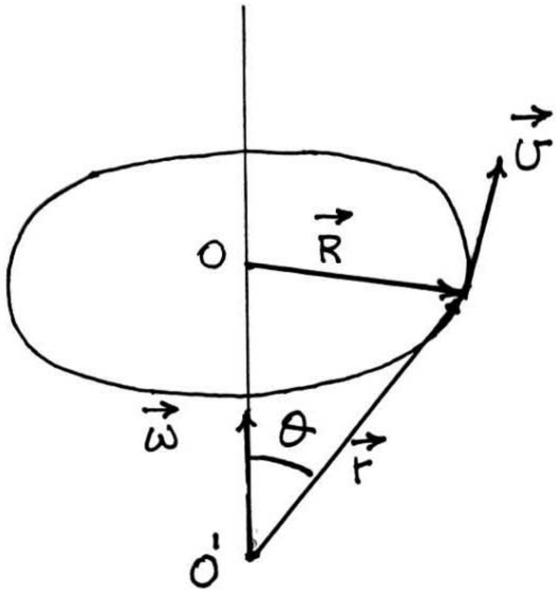


Le equazioni vettoriali:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}$$

sono valide anche per O scelto non sul piano della circonferenza (centro) ma su qualunque punto *__dell'asse di simmetria__* *__della circonferenza.__*



$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega r \text{ sen } \theta\, \vec{u}_T = \omega R\, \vec{u}_T = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

e quindi anche:

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{R} - \omega^2 \vec{R}$$