§1 二重积分概念

二重积分是定积分在平面上的推广，不同之处在于: 定积分定义在区间上, 区间的长度容易计算，而二重积分定义在平面区域上, 其面积的计算要复杂得多.

一、平面图形的面积

二、二重积分的定义及其存在性

三、二重积分的性质

一、平面图形的面积

我们首先定义平面图形的面积. 所谓一个平面图形 P 是有界的, 是指构成这个平面图形的点集是平面上的有界点集, 即存在一矩形 R, 使得 $P \subset R$.

设 P 是一平面有界图形, 用平行于二坐标轴的某一组直线网 T 分割这个图形 (图21-1), 这时直线网 T 的网眼 (小闭矩形) Δ_i 可分为三类:

(i) Δ_i 上的点都是 P 的内点;

(ii) Δ_i 上的点都是 P 的外点, 即 Δ_i ? $P = \varnothing$;

(iii) Δ_i 上含有 P 的边界点.

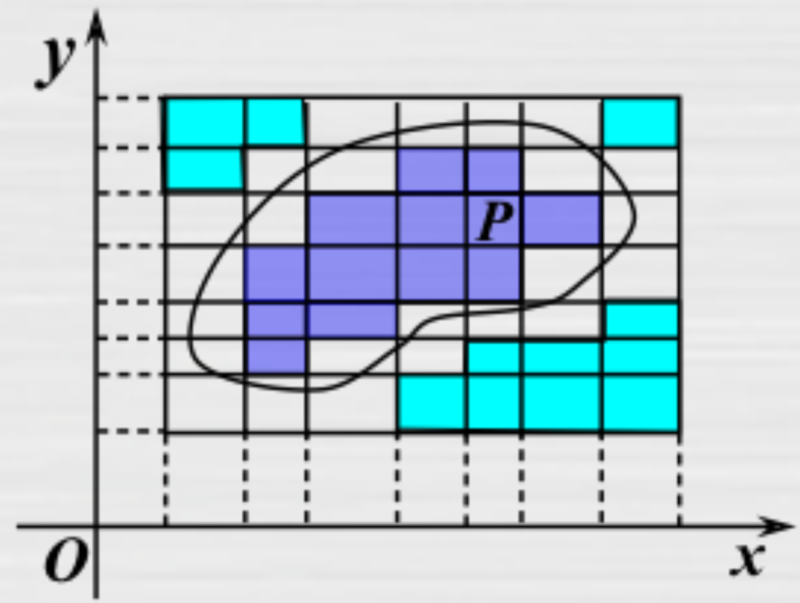

图 21－1

将所有属于第(i) 类小矩形(图 21-1 中紫色部分)的面积加起来,记这个和数为 $s_P(T)$, 则有 $s_P(T)\le\Delta_R$ (这里 Δ_R 表示包含P的那个矩形 R 的面积); 将所有第 (i) 类与第 (ii) 类小矩形的面积加起来(图 21-1中着色部分),记这个和数为 $S_P(T)$, 则有 $s_P(T)\le S_P(T)$.

由确界存在定理可以推得,对于平面上所有直线网,数集 $\{s_P(T)\}$ 有上确界, $\{S_P(T)\}$ 有下确界. 记

$$\underline{I}_P = \sup_T\{s_P(T)\}, \quad \overline{I}_P = \inf_T\{S_P(T)\},$$

显然有

$$0 \le \underline{I}_P \le \overline{I}_P . \qquad (1)$$

通常称 $\underline{I}_P$ 为 P 的内面积, $\overline{I}_P$ 为 P 的外面积.

定义1 若平面图形 P 满足 $\underline{I}_P = \overline{I}_P$, 则称 P 为可求面积的图形,并把共同值 $I_P = \underline{I}_P = \overline{I}_P$ 作为 P 的面积.

定理21.1 平面有界图形 P 可求面积的充要条件是:

对任给的 $\varepsilon>0$, 总存在直线网 T, 使得

$$S_P(T)-s_P(T)<\varepsilon. \tag{2}$$

证 必要性 设有界图形 P 的面积为 I_P. 由定义1, 有 $I_P=\underline{I}_P=\overline{I}_P$. $\forall\varepsilon>0$, 由 $\underline{I}_P$ 及 $\overline{I}_P$ 的定义知道, 分别存在直线网 T_1 与 T_2, 使得

$$s_P(T_1)>I_P-\frac{\varepsilon}{2},\ S_P(T_2)<I_P+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

记 T 为由 T_1 与 T_2 这两个直线网合并所成的直线网, 可证得

$$s_P(T_1) \le s_P(T), \quad S_P(T_2) \ge S_P(T).$$

于是由(3)可得

$$s_P(T) > I_P - \frac{\varepsilon}{2}, \quad S_P(T) < I_P + \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而对直线网 T 有 $S_P(T) - s_P(T) < \varepsilon$.

充分性 设对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在某直线网 T, 使得

$$S_P(T) - s_P(T) < \varepsilon .$$

但 $s_P(T) \le \underline{I}_P \le \overline{I}_P \le S_P(T)$, 所以

$$\overline{I}_P - \underline{I}_P \le S_P(T) - s_P(T) < \varepsilon .$$

由 ε 的任意性, 得$\underline{I}_P = \overline{I}_P$, 因而平面图形 P 可求面积.

推论 平面有界图形 P 的面积为零的充要条件是它的外面积 $\overline{I}_P = 0$, 即对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在直线网 T, 使得

$$S_P(T) < \varepsilon ,$$

或对任给的$\varepsilon > 0$,平面图形 P 能被有限个面积总和小于 ε 的小矩形所覆盖.

定理 21.2 平面有界图形 P 可求面积的充要条件是: P 的边界 K 的面积为零.

证 由定理21.1,P 可求面积的充要条件是: 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在直线网T, 使得$S_P(T) - s_P(T) < \varepsilon$. 由于

$$S_K(T) = S_P(T) - s_P(T),$$

所以也有$S_K(T) < \varepsilon$. 由上述推论, P 的边界K 的面积为零.

定理21.3 若曲线 K 为定义在 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 的图象, 则曲线 K 的面积为零.

证 由于 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，所以它在 $[a,b]$ 上一致连续. 因而，$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$，当

$$a = x_0 < x_1 < \boxed{?} < x_n = b \quad ,$$

$$\max\{\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \mid i = 1,2,\boxed{?},n\} < \delta$$

时，可使 $f(x)$ 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅都成立 $\omega_i < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. 即若把曲线 K 按 $x = x_0, x_1, \boxed{?}, x_n$ 分成 n 个小段，则每一小段都能被以 Δx_i 为宽，ω_i 为高的小矩形所覆盖. 由于这 n 个小矩形面积的总和

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon,$$

因此由定理21.1 的推论即得曲线 K 的面积为零.

推论1 参量方程 $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)\ (\alpha \le t \le \beta)$ 所表示的光滑曲线或按段光滑曲线,其面积一定为零.

证 由光滑曲线的定义, φ', ψ' 均存在且不同时为零. 由隐函数存在性定理, $\forall t_0 \in [\alpha, \beta]$, $x'(t_0) \neq 0$ (或 $y'(t_0) \neq 0$),因此 $\exists U(t_0;\delta)$, $x = x(t)$ (或 $y = y(t)$) 在 $U(t_0;\delta)$ 上有反函数. 再由有限覆盖定理, 可把区间

$[\alpha,\beta]$ 分成 n 段:

$$\alpha = t_0 < t_1 < \boxed{?} < t_n = \beta,$$

使得在每一段 $[t_{i-1},t_i]$ 上, $x=\varphi(t)$ (或 $y=\psi(t)$) 存在反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ (或 $t=\psi^{-1}(x)$),于是在 $[t_{i-1},t_i]$ 上有连续的 $y=\psi(\varphi^{-1}(x))$(或 $x=\varphi(\psi^{-1}(y))$).所以在 $[t_{i-1},t_i]$上的曲线面积为零, 从而整个曲线面积为零.

推论2 由平面光滑曲线或按段光滑曲线所围的平面图形都是可求面积的.

注 平面中并非所有的点集都是可求面积的. 例如

$$D=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{Q}\cap[0,1]\}.$$

易知 $0=\underline{I}_D<\overline{I}_D=1$, 因此 D 是不可求面积的.

二、二重积分的定义及其存在性

二重积分的几何背景是求曲顶柱体的体积.设 $f(x, y)$ 为定义在可求面积的有界闭域 D 上的非负连续函数.求以曲面 $z=f(x, y)$ 为顶, D 为底的柱体 (图21-2) 的体积 V.

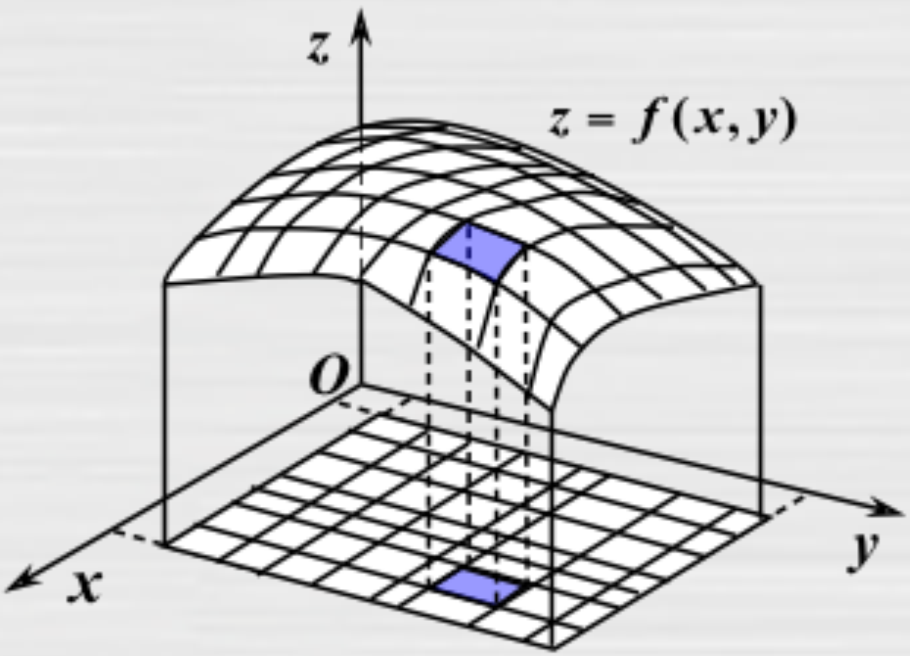

图 21-2

采用类似于求曲边梯形面积的方法.

(1) 分割:先用一组平行于坐标轴的直线网 T 把区域 D 分成 n 个小区域 $\sigma_i (i = 1, 2, \boxed{?}, n)$ (称 T 为区域 D 的一个分割). 以 $\Delta\sigma_i$ 表示小区域 σ_i 的面积. 这个直线网也相应地把曲顶柱体分割成 n 个以 σ_i 为底的小曲顶柱体 $V_i (i = 1, 2, \boxed{?}, n)$.

(2) 近似求和: 由于 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 故当每个 $\boxed{s_i}$ 的直径都很小时, $f(x, y)$ 在 σ_i 上各点的函数值相差无几, 因而可在 σ_i 上任取一点 (ξ_i, η_i), 用以

$f(\xi_i,\eta_i)$为高, σ_i为底的小平顶柱体的体积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 作为 V_i 的体积 ΔV_i 的近似值(如图21-3), 即

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i .$$

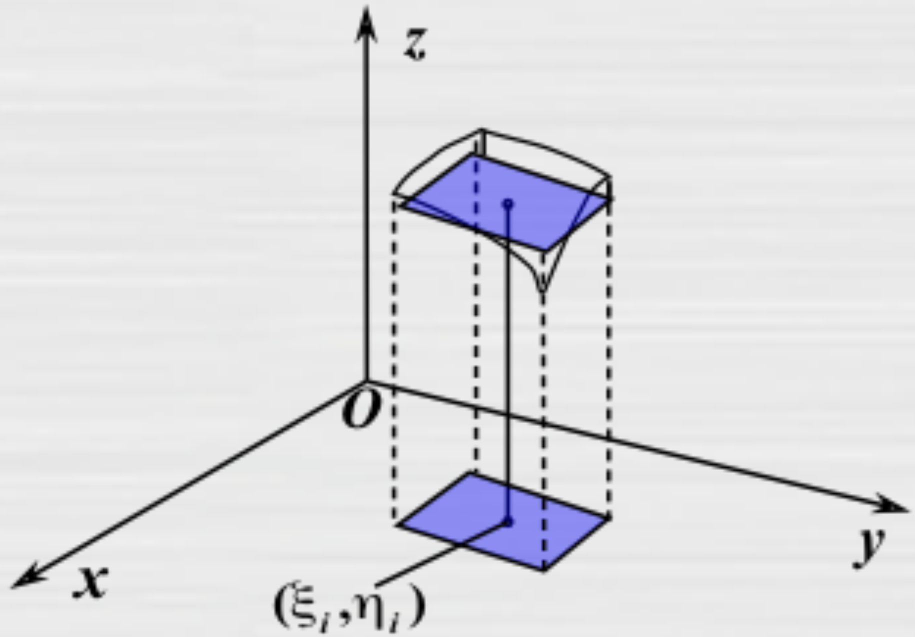

图 21 – 3

把这些小平顶柱体的体积加起来, 就得到曲顶柱体体积 V 的近似值

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\,.$$

(3) 取极限: 当直线网 T 的网眼越来越细密, 即分割 T 的细度 $\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n}d_i$ (d_i 为 σ_i 的直径)趋于零时, 就有

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\to V\,.$$

这类问题在物理学与工程技术中也常遇到, 如求非均匀平面的质量、重心、转动惯量等等. 这些都是所要讨论的二重积分的实际物理背景.

上面叙述的问题都可归为以下数学问题.

设 D 为 xy 平面上可求面积的有界闭域, $f(x, y)$ 为定义在 D上的函数. 用任意的曲线网把 D 分成 n 个可求面积的小区域

$$\sigma_1, \sigma_2, \boxed{?}, \sigma_n .$$

以 $\Delta\sigma_i$ 表示小区域 σ_i 的面积, 这些小区域构成 D 的一个分割 T, 以 d_i表示小区域 σ_i 的直径, 称

$$\| T \| = \max_{1 \le i \le n} d_i$$

为分割 T 的细度. 在每个 σ_i 上任取一点 (ξ_i, η_i), 作

和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

称它为函数 f 在 D 上属于分割 T 的一个积分和.

定义2 设 $f(x, y)$是定义在可求面积的有界闭域 D 上的函数. J 是一个确定的实数, 若对任给的正数 ε, 总存在某个正数 δ, 使对于 D 的任何分割 T, 当它的细度 $\|T\| < \delta$ 时, 属于 T 的所有积分和都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i - J\right| < \varepsilon, \tag{4}$$

则称$f(x, y)$在 D 上可积, 数 J 称为函数 $f(x, y)$ 在 D 上二重积分, 记作

$$J = \iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma, \tag{5}$$

其中$f(x, y)$称为二重积分的被积函数, x, y 称为积分变量, D 称为积分区域.

当 $f(x, y) \geq 0$ 时, 二重积分$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$ 在几何上

就表示以 $z=f(x,y)$为曲顶, D 为底的曲顶柱体的体积. 当 $f(x,y)=1$时, 二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的值就等于积分区域 D 的面积.

注1 由二重积分定义知道, 若 $f(x,y)$ 在区域 D 上可积, 则与定积分情形一样, 对任何分割 T, 只要当 $\|T\|<\delta$ 时, (4) 式都成立. 因此为方便计算起见, 常选取一些特殊的分割方法, 如选用平行于坐标轴的直线网来分割 D, 则每一小网眼区域的 σ 的面积

$\Delta\sigma=\Delta x\Delta y$. 此时通常把 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 记作

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{6}$$

注2 如定积分那样类似地可证明: 函数 $f(x,y)$ 在可求面积的 D上可积的必要条件是它在 D上有界.

设函数 $f(x,y)$在 D 上有界, T 为 D 的一个分割, 它把 D 分成 n 个可求面积的小区域 $\sigma_1,\sigma_2,\boxed{?},\sigma_n$. 令

$$M_i = \sup_{(x,y)\in\sigma_i} f(x,y)$$
$$m_i = \inf_{(x,y)\in\sigma_i} f(x,y) \qquad (i = 1,2,\boxed{?},n).$$

作和式 $S(T)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta\sigma_i$，$s(T)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta\sigma_i$，它们分别称为 $f(x,y)$ 关于分割 T 的上和与下和. 二元函数的上和与下和具有与一元函数的上和与下和同样的性质, 这里就不再重复. 下面列出有关二元函数的可积性定理, 这里只证明其中的定理21.7.

定理21.4 $f(x, y)$在 D 上可积的充要条件是:

$$\lim_{\|T\|\to 0} S(T) = \lim_{\|T\|\to 0} s(T).$$

定理21.5 $f(x, y)$在 D 上可积的充要条件是: 对于任给的正数 ε ,存在 D 的某个分割 T, 使得

$$S(T) - s(T) < \varepsilon .$$

定理21.6 有界闭域 D上的连续函数必可积.

定理21.7 设 $f(x, y)$是定义在有界闭域 D 上的有界函数. 若 $f(x, y)$ 的不连续点都落在有限条光滑曲线上, 则 $f(x, y)$ 在 D 上可积.

证 不失一般性, 可设 $f(x, y)$ 的不连续点全部落在某一条光滑曲线 L 上,并记 L 的长度为 l. 于是对任给的 $\varepsilon > 0$, 把 L 等分成 $n = \left[l/\varepsilon \right] + 1$ 段:

$$L_1, L_2, \boxed{?}, L_n .$$

在每段 L_i 上取一点 P_i, 使 P_i 与其一端点的弧长为 $\frac{l}{2n}$. 以 P_i 为中心作边长为 ε 的正方形 Δ_i, 则 $L_i \subset \Delta_i$.

从 $L \subset \boxed{?}_{i=1}^{n} L_i \subset \Delta$,其 $\Delta = \boxed{?}_{i=1}^{n} \Delta_i$. Δ W,

$$W \le n\varepsilon^2 = \left(\left[l/\varepsilon\right]+1\right)\varepsilon^2 \le \left(l/\varepsilon+1\right)\varepsilon^2 = (l+\varepsilon)\varepsilon .$$

现在把区域 D 分成两部分: 第一部分 $D_1 = D \boxed{?} \Delta$,

第二部分 $D_2 = D - D_1$. 由于 $f(x, y)$ 在 D_2 上连续,

根据定理21.6 与定理21.5, 存在 D_2 的分割 T_2 , 使得

$S(T_2) - s(T_2) < \varepsilon$. 又记

$$M_\Delta = \sup_{(x,y)\in\Delta} f(x, y), \quad m_\Delta = \inf_{(x,y)\in\Delta} f(x, y),$$

以 T 表示由 T_2 与多边形 Δ 的边界所组成的区域 D 的

分割, 则有

$$S(T)-s(T)=\left(S(T_2)-s(T_2)\right)+\left(M_\Delta W-m_\Delta W\right)<\varepsilon+\omega W$$

$$\le \varepsilon+(l+\varepsilon)\varepsilon\omega=(1+l\omega+\varepsilon\omega)\varepsilon,$$

其中ω是 $f(x, y)$ 在 D 上的振幅. 由于 $f(x, y)$ 在 D 上有界, 故 ω 是有限值. 再由定理21.5, 这就证得了 $f(x, y)$ 在 D 上可积.

三、二重积分的性质

二重积分与定积分具有类似的性质, 现列举如下:

1. 若 $f(x, y)$ 在 D 上可积, k 为常数, 则 $kf(x, y)$ 在 D 上也可积, 且

$$\iint_D kf(x, y)\mathrm{d}\sigma = k\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma .$$

2. 若 $f(x, y), g(x, y)$ 在 D 上都可积, 则

$$f(x, y) \pm g(x, y)$$

在 D 上也可积, 且

$$\iint\limits_D [f(x,y) \pm g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \pm \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma .$$

3. 若 $f(x, y)$ 在 D_1 和 D_2上都可积, 且 D_1与 D_2无公共内点, 则 $f(x, y)$在 $D_1 \cup D_2$上也可积, 且

$$\iint\limits_{D_1 \cup D_2} f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\mathrm{d}\sigma .$$

4. 若 $f(x, y)$ 与 $g(x, y)$在 D 上可积, 且

$$f(x, y) \le g(x, y), \ (x, y) \in D,$$

则有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma .$$

5. 若 $f(x,y)$在 D 上可积, 则函数 $|f(x,y)|$在 D 上也可积, 且

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}\sigma .$$

6. 若 $f(x,y)$在 D 上可积, 且

$$m \le f(x,y) \le M,\quad (x,y)\in D,$$

则有

$$mS_D \le \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le MS_D,$$

这里 S_D 是积分区域 D 的面积.

7. (积分中值定理) 若 $f(x, y)$ 在有界闭域 D 上连续, 则存在 $(\xi, \eta) \in D$, 使得

$$\iint\limits_D f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi, \eta) S_D,$$

积分中值定理的几何意义: 在 D 上, 以 $z = f(x, y)$ $(f(x, y) \ge 0)$ 为顶的曲顶柱体体积,等于一个同底

的平顶柱体的体积, 这个平顶柱体的高等于 $f(x,y)$ 在 D 中某点 (ξ,η) 处的函数值 $f(\xi,\eta)$.

*例1 设 $D=\{(x,y)|a\le x\le b, 0\le y\le \varphi(x)\}$,

$$L=\{(x,\varphi(x))\mid x\in[a,b]\};$$

G 是 R^2 中有界闭域, $D\subset \operatorname{int} G\subset G$; $f(x,y)$ 是 G 上可积函数. 则 $\forall\varepsilon>0$, 存在顶点在 L 上的折线 l ,使得

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_\Delta f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|<\varepsilon .$$

其中Δ是由$x=a, x=b, y=0$与 折 线 所围成的多边形.

证 设 $\forall (x,y)\in G, |f(x,y)|<M. \forall \varepsilon>0$, 令

$$\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{2M(b-a)}.$$

由于φ在$[a,b]$上一致连续, 因此存在$\delta>0$, 使

$\forall x', x''\in[a,b], |x'-x''|<\delta$ 时,就有

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\varepsilon'.$$

取分割 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 使得

$$\max\left\{\left|x_i - x_{i-1}\right| : i = 1, \boxed{?}, n\right\} < \delta,$$

直线 $x = x_i(i = 1, 2, \boxed{?}, n)$ 将 D 分割为 $D_i, i = 1, \boxed{?}, n,$

又将 Δ 分割为 $\Delta_i, i = 1, \boxed{?}, n.$ 则

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_\Delta f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\left|\iint_{D_i} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{\Delta_i} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\left[\iint_{D_i\setminus\Delta_i} \left|f(x,y)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Delta_i\setminus D_i} \left|f(x,y)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} 2M\omega_i \left|x_i - x_{i-1}\right| = 2M(b-a)\varepsilon' = \varepsilon .$$

复习思考题

1.设函数 $f(x, y)$ 在有界可求面积区域 D 上可积，求证 $f(x, y)$ 在 D 上有界.

2.设函数 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 定义在可求面积区域 D 上，L 是 D 内一条光滑曲线. 若 $\forall (x, y) \in D - L$，满 $f(x, y) = g(x, y)$，试证 $f(x, y)$ 在 D 上可积的充要条件是 $g(x, y)$ 在 D 上可积.