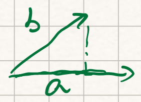
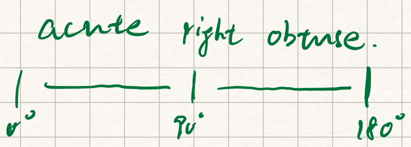
$\mathrm{Proj}_a(b) = \frac{a \cdot b}{a \cdot a} \cdot |a|$.





Line:

Poin A. (a, b) direction vector (c, d).

Vector form: $x = (a, b) + t(c, d)$.

paramatric form: $x = a + tc$

$y = b + td$.

general form: $ax + by + c = 0$.

Plane: normal form: $ax + by + cz = 0$ ($a/b/c = 0$

求解Ax=0：主变量、自由变量、特殊解

上一篇简单介绍了列空间（column space）和零空间（null space），这一次主要介绍如何求出零空间内的向量，即主要讨论Ax=0。假设有矩阵A=$\begin{bmatrix}1&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{bmatrix}$，略微观察一下其行和列可看出，列2是列1的倍数，行3等于行1加行2，他们都是相关的，这些相关性会在消元中体现出来。当我们对A进行消元，在消元的过程中，解是不会变的，因此零空间不会变化，但列空间会随着消元发生改变，对A的消元过程如下，最终得到矩阵U。

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&2&2\\0&0&2&4\\0&0&2&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&2&2\\0&0&2&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}=U$$

从上面的消元我们可以看出，最后一行全为0，消元可以告诉我们如果有行变成了全0，那么那一行必定是其他行的线性组合，消元会将这些没有用的行消除。A有两个主元（pivots）：第1行的1以及第2行的2，主元的个数可以称为矩阵的秩（rank of matrix），两个主元所在的列称为主元列（pivot columns），在本例中是列1和列3，其他两列即列2和列4称为自由列（free columns），与主元列对应的x称为主变量（pivot variable），如x1和x3，与自由列对应的变量称为自由变量（free variable），如x2和x4，自由的意思就是x2和x4可以任取。更为一般的结论，假设矩阵A大小为m*n，在消元过程中发现其有r个主变量，即秩是r，那么这个矩阵就有n-r个自由变量。对于上面举的例子，

现在取x2=1，x4=0，就可得到零空间中的一个向量$\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}$，容易理解更一般的形式$c\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}$都是Ax=0的解，由于x2和x4是自由变量，因此我也可以取x2=0，x4=1，这样得到的另一个解向量$\begin{bmatrix}2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$，容易理解更一般的形式$c\begin{bmatrix}2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$也都是Ax=0的解，这两组解也称为方程的特殊解（special solution），特殊体现在我们给自由变量取了特定值，即每次让一个自由变量为1，其他自由变量为0，最终零空间就是这两个向量所有的线性组合，注意当自由变量选取其他值时，得到的最终解全是这两个向量的线性组合。

那么上面的这两解$\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$跟矩阵A到底是什么关系呢？可不可以当满足一定条件时，我们就能直接写出这两个基解x，而不用去进行回代（backsubstitution）呢？

首先尽管我们已经对A进行了化简，得到了看起来像阶梯状的矩阵U，但为了更容易求特殊解，其实我们可将U进一步化简，得到U的简化行阶梯（reduced row echelon form of U），记为R，过程为对U向上消元，即让主元的上方也变成0，简化过程如下。

$$U=\begin{bmatrix}1&2&2&2\\0&0&2&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&-2\\0&0&2&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&-2\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}=R$$

上面第2步到第3步是为了让主元为1，所以将第2行除以了2，MATLAB中有专门的函数rref（reduced row echelon form of matrix）函数可以完成上面A到R的整个过程，R以最简单的形式包含了所有信息，首先它指出了主元行，即第1行和第2行，指出了主元列，即列1和列3，另外它还包含了一个单位阵，位于主元行与主元列的交汇处，现在我们将R中的主元列与自由列分开，即交换一下列，使得主元列在一起，自由列在一起，R就变成$\begin{bmatrix}1&0&2&-2\\0&1&0&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，假设矩阵R中的$\begin{bmatrix}2&-2\\0&2\end{bmatrix}$部分记为F，$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$