第八节 多元函数的极值与拉格朗日乘数法

- 多元函数的极值和最值
- 条件极值 拉格朗日乘数法
- 小结

一、 多元函数的极值

极大值和极小值的定义

和一元函数一样，极值是局部概念

定义 设在点$P0$的某个空心邻域, $f(P) < f(P_0)$,

则称点$P0$为函数的极大值点. $f(P_0)$为极大值.

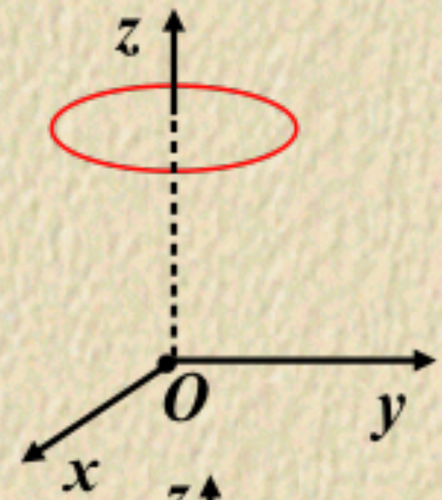
类似可定义极小值点和极小值.

函数的极大值与极小值统称为 极值.

函数的极大值点与极小值点统称为 极值点.

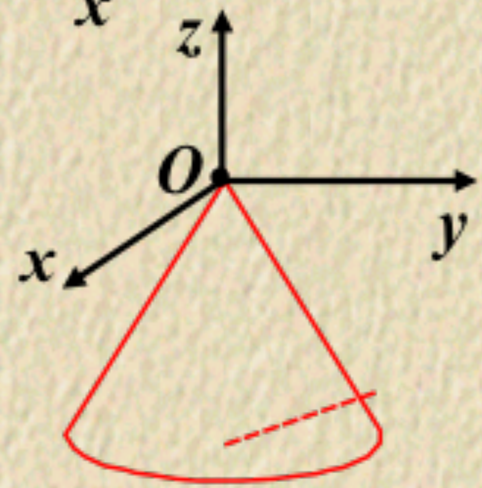
例 函数 $z = 3x^2 + 4y^2$ 椭圆抛物面

在(0,0)点取极小值.(也是最小值).



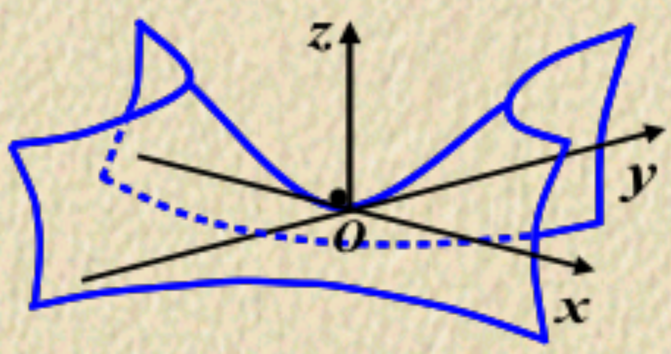
例 函数 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 下半圆锥面

在(0,0)点取极大值.(也是最大值).



例 函数 $z = xy$ 马鞍面

在(0,0)点无极值.



驻点: 一阶偏导数同时为零的点

二元函数极值的必要条件

定理　设$z=f(x,y)$在　(x_0,y_0)具　[illegible]　，

在　(x_0,y_0)处 [illegible]　，则

$$f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0.$$

推广 如果三元函数 $u=f(x,y,z)$在　$P(x_0,y_0,z_0)$

具有偏导数,则它在 $P(x_0,y_0,z_0)$有极值的**必要条件:**

$$f_x(x_0,y_0,z_0)=0,\ f_y(x_0,y_0,z_0)=0,\quad f_z(x_0,y_0,z_0)=0.$$

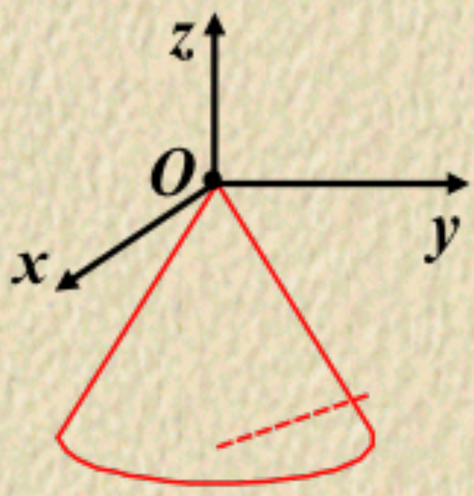
说明

1、驻点 $\xrightleftharpoons[\not\quad]{}$ 具有偏导的极值点

如,点(0,0)[illegible] $z=xy$的 驻点, 但不是极值点.

2、偏导数不存在的点, 也可能是极值点.

例 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$



在点(0,0)处的偏导数不存在,

但(0,0)是函数的极大值点.

二元函数极值的充分条件

定理 设$z=f(x,y)$在 (x_0,y_0) 有二阶连续偏导数,

又 $f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0,$

令 $f_{xx}(x_0,y_0)=A,\ f_{xy}(x_0,y_0)=B,\ f_{yy}(x_0,y_0)=C,$

则 (1) $AC-B^2>0$时, $f(x_0,y_0)$ 是极值,

当$A<0$时 为极大值, 当$A>0$时 为极小值;

(2) $AC-B^2<0$时, $f(x_0,y_0)$ 不是极值;

(3) $AC-B^2=0$时 $f(x_0,y_0)$ 可能是极值,

也可能不是极值.

求函数 $z=f(x,y)$ 极值的一般步骤:

第一步 解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$

求出实数解,得驻点.

第二步 对于每一个驻点 (x_0,y_0),

求出二阶偏导数的值 A、B、C.

第三步 定出 $AC-B^2$ 的符号,

再判定是否是极值.

例 求函数 $f(x,y)=3axy-x^3-y^3\ (a>0)$ 的极值.

解 ①解方程组 $\begin{cases} f_x = 3ay-3x^2=0 \\ f_y=3ax-3y^2=0 \end{cases}$ 得驻点 $(0,0),(a,a)$.

②求 A、B、C

$$A=f_{xx}=-6x,\quad B=f_{xy}=3a,\quad C=f_{yy}=-6y.$$

③定出 $AC-B^2$ 的符号

在点 $(0,0)$ 处, $AC-B^2=(36xy-9a^2)\big|_{(0,0)}=-9a^2<0$

$\therefore f(0,0)$ 不是极值;

在点 (a,a) 处, $AC-B^2=(36xy-9a^2)\big|_{(a,a)}=27a^2>0$

且 $A=-6a<0$ $\therefore f(a,a)=a^3$ 是极大值。

练习　求由方程$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$

[redacted] $z=f(x,y)$[redacted] .

解　法1　将方程两边分别对x, y求偏导数,

$$\begin{cases} 2x+2z\cdot z'_x-2-4z'_x=0 \\ 2y+2z\cdot z'_y+2-4z'_y=0 \end{cases}$$

由函数取极值的必要条件,令 $\begin{cases} z'_x=0 \\ z'_y=0 \end{cases}$

得驻点为　$P(1,-1)$,

将$P(1,-1)$ 代入原方程, 有 $z_1=-2, z_2=6$

将上方程组再分别对x, y求偏导数,

$$\begin{cases} 2x + 2z \cdot z'_x - 2 - 4z'_x = 0 \\ 2y + 2z \cdot z'_y + 2 - 4z'_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + 2(z'_x)^2 + 2z \cdot z''_{xx} - 4z''_{xx} = 0 \\ 2z'_x \cdot z'_y + 2z \cdot z''_{xy} - 4z''_{xy} = 0 \\ 2 + 2(z'_y)^2 + 2z \cdot z''_{yy} - 4z''_{yy} = 0 \end{cases}$$

$z_1 = -2,$

$z_2 = 6$

在驻点 $P(1,-1)$处, $z'_x = 0, z'_y = 0$ 代入方程组，得

$$A = z''_{xx}|_P = \frac{1}{2-z}, \quad B = z''_{xy}|_P = 0, \quad C = z''_{yy}|_P = \frac{1}{2-z},$$

$$(AC - B^2)\big|_P = \frac{1}{(2-z)^2}\bigg|_P > 0$$

$f(1,-1)$是极值.

$$AC - B^2 = \frac{1}{(2-z)^2} > 0$$

$f(1,-1)$是极值.

当$z_1 = -2$时，$A = \frac{1}{4} > 0,$

$z = f(1,-1) = -2$ 为极小值;

当$z_2 = 6$时，$A = -\frac{1}{4} < 0,$

$z = f(1,-1) = 6$ 为极大值.

$$A = z''_{xx}|_P = \frac{1}{2-z}$$

$$B = z''_{xy}|_P = 0$$

$$C = z''_{yy}|_P = \frac{1}{2-z}$$

$z_1 = -2,$

$z_2 = 6$

求由方程 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$

[illegible] $z=f(x,y)$[illegible] .

法2 初等配方法 方程可变形为

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=16$$

$$\therefore z=2\pm\sqrt{16-(x-1)^2-(y+1)^2}$$

当 $x=1, y=-1$ 时, 根号中的极大值为4,

$\therefore z=2\pm4$ 为极值.

$z=6$ 为极大值, $z=-2$ 为极小值.

二、 多元函数的最值及其应用

求二元连续函数在有界闭域D内的最值的一般步骤:

①求函数在D内的所有嫌疑点

②求函数在D的边界上的嫌疑点

③将所有嫌疑点的函数值相互比较,

最大者即为最大值, 最小者即为最小值.

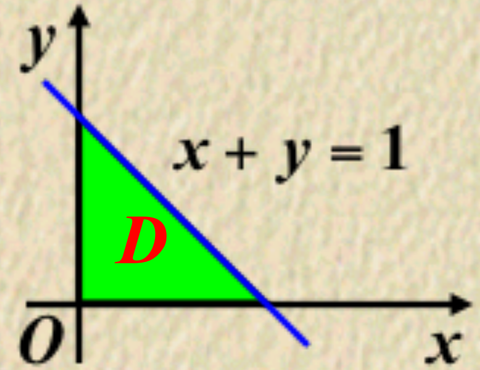
例 [illegible] $z = 1 - x + x^2 + 2y$ 在 $x = 0, y = 0$ 与

[illegible] $x + y = 1$ 围成的三角形闭域 D 上的

最大(小)值.

解 (1)求函数在 D 内的驻点（嫌疑点）

由于 $\begin{cases} z_x = -1 + 2x \\ z_y = 2 \neq 0 \end{cases}$



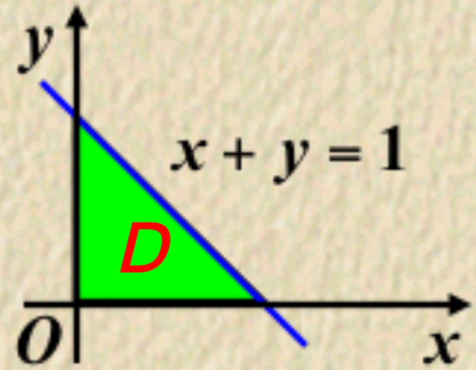
所以函数在 D 内无极值点.

(2) 求函数在 D 边界上的嫌疑点

(最值只能在边界上)

$$z = 1 - x + x^2 + 2y$$

①在边界线 $x = 0,\ 0 \le y \le 1$上,



$$z = 1 + 2y$$

$\boxed{?}\dfrac{dz}{dy} = 2 > 0,\ z = 1 + 2y$ 单调上升.

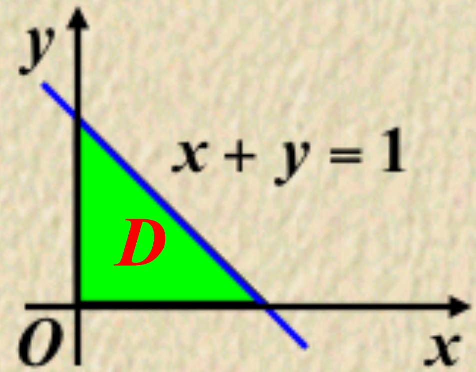
$\therefore\ z(0,0) = 1$ 最小, $z(0,1) = 3$ 最大.

②在边界线 $y = 0,\ \ 0 \le x \le 1$上, $z = 1 - x + x^2$

$\boxed{?}\dfrac{dz}{dx} = -1 + 2x,$ 有驻点 $x = \dfrac{1}{2}$ 函数值 $z(\dfrac{1}{2},0) = \dfrac{3}{4}$

又在端点(1,0)处, 有 $z(1,0) = 1.$

$$z = 1 - x + x^2 + 2y$$



③在边界线 $x + y = 1,\ 0 \le x \le 1$上,

$$z = 1 - x + x^2 + 2(1 - x) = 3 - 3x + x^2$$

$\boxed{?}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -3 + 2x < 0 \quad (0 \le x \le 1)$, 函数单调下降,

所以, 最值在端点处.

$z(0,0) = 1$

$z(0,1) = 3$

$z(1,0) = 1$

$z(\frac{1}{2},0) = \frac{3}{4}$

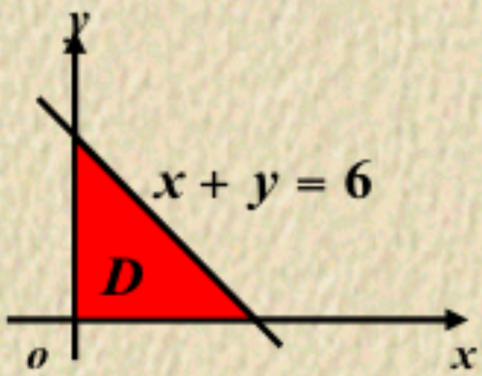
(3)比较 $z(0,0),\ z(1,0),\ z(0,1)$ 及$z(\frac{1}{2},0)$

$z(\frac{1}{2},0) = \frac{3}{4}$ 为最小值;

$z(0,1) = 3$ 为最大值.

练习

例5 求二元函数$z = f(x, y) = x^2 y(4 - x - y)$在直线$x + y = 6$，$x$轴和$y$轴所围成的闭区域$D$上的最大值与最小值.



解 先求函数在D内的驻点，

解方程组

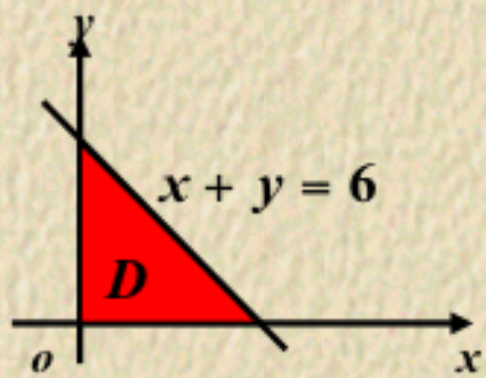
$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 2xy(4 - x - y) - x^2 y = 0 \\ f'_y(x, y) = x^2(4 - x - y) - x^2 y = 0 \end{cases}$$

得区域D内唯一驻点$(2,1)$，且$f(2,1) = 4$，

$z = f(x, y) = x^2 y(4 - x - y)$ 且 $f(2,1) = 4$,

再求 $f(x, y)$ 在 D 边界上的最值,

在边界 $x = 0$ 和 $y = 0$ 上 $f(x, y) = 0$,



在边界 $x + y = 6$ 上，即 $y = 6 - x$

于是 $f(x, y) = x^2(6 - x)(-2)$,

由 $f'_x = 4x(x - 6) + 2x^2 = 0$,

得 $x_1 = 0, x_2 = 4 \Rightarrow y = 6 - x|_{x=4} = 2$, $f(4,2) = -64$,

比较后可知 $f(2,1) = 4$ 为最大值,

$f(4,2) = -64$ 为最小值·

三、 多元函数的条件极值

条件极值

对自变量有约束条件的极值.

求条件极值的方法

① 代入法

② 拉格朗日乘数法

例 已知长方体长宽高的和为18, 问长、宽、高各取什么值时长方体的体积最大?

解 设长方体的长、宽、高分别为 x、y、z,

长方体的体积为 $V = xyz$ (1) (目标函数)

由题意 $x + y + z = 18$ (约束条件)

$\Rightarrow z = 18 - x - y$ 代入(1)式

$\therefore V = xyz = xy(18 - x - y)$

$= 18xy - x^2y - xy^2 \ (x > 0, y > 0, x + y < 18)$

已知长方体长宽高的和为18, 问长、宽、高各取什么值时长方体的体积最大?

$$V = xyz = 18xy - x^2y - xy^2 \quad (x > 0, y > 0, x + y < 18)$$

$$\begin{cases} V_x = 18y - 2xy - y^2 = 0 \\ V_y = 18x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases} \qquad z = 18 - x - y$$

$\Rightarrow$ 驻点 $(6,6)$

由于V在D内只有一个驻点,且长方体体积一定有最大值, 故当的长、宽、高都为6时,长方体体积最大.

说明

上例的条件极值问题,是通过将约束条件代入目标函数中求解;

但并不是所有情况下都能这样做，更多时候用到的是下面要介绍的，解决条件极值问题的一般方法——　拉格朗日乘数法

Lagrange(拉格朗日)乘数法

求函数 $z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$

下的可能极值点, 先构造拉格朗日函数

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

令 $$\begin{cases} L'_x = f_x(x, y) + \lambda\varphi_x(x, y) = 0, \\ L'_y = f_y(x, y) + \lambda\varphi_y(x, y) = 0, \\ L'_\lambda = \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

解出 x, y, λ, 其中x, y就是可能的极值点的坐标.

实际问题中, 可根据问题本身来判定所求点是否为极值点.

推广: 自变量多于两个,

约束条件多于一个的情况.

例 目标函数 $u = f(x, y, z, t)$

约束条件 $\varphi(x, y, z, t) = 0$

$\psi(x, y, z, t) = 0$

拉格朗日函数

$$L(x, y, z, t, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z, t) + \lambda_1 \varphi(x, y, z, t) + \lambda_2 \psi(x, y, z, t)$$

$$L(x,y,z,t,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y,z,t)+\lambda_1\varphi(x,y,z,t)+\lambda_2\psi(x,y,z,t)$$

令

$$\begin{cases} F_x=f_x+\lambda_1\varphi_x+\lambda_2\psi_x=0 \\ F_y=f_y+\lambda_1\varphi_y+\lambda_2\psi_y=0 \\ F_z=f_z+\lambda_1\varphi_z+\lambda_2\psi_z=0 \\ F_t=f_t+\lambda_1\varphi_t+\lambda_2\psi_t=0 \\ F_{\lambda_1}=\varphi(x,y,z,t)=0 \\ F_{\lambda_2}=\psi(x,y,z,t)=0 \end{cases}$$

满足方程的 x,y,z,t 是可能的极值点的坐标.

例　将正数12分成三个正数x, y, z之和 使得$u = x^3y^2z$为最大.

解　令 $F(x, y, z) = x^3y^2z + \lambda(x + y + z - 12)$,

则 $$\begin{cases} F'_x = 3x^2y^2z + \lambda = 0 \\ F'_y = 2x^3yz + \lambda = 0 \\ F'_z = x^3y^2 + \lambda = 0 \\ x + y + z = 12 \end{cases}$$

解得唯一驻点$(6,4,2)$,

故最大值为 $u_{\max} = 6^3 \cdot 4^2 \cdot 2 = 6912.$

例 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面, 使切平面与三个坐标面所围成的四面体体积最小, 求切点坐标.

解 设 $P(x_0, y_0, z_0)$ 为所求切点坐标,

令 $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$

则 $F'_x|_P=\frac{2x_0}{a^2}$, $\quad F'_y|_P=\frac{2y_0}{b^2}$, $\quad F'_z|_P=\frac{2z_0}{a^2}$

过 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面方程为

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0$$

化简为 $\dfrac{x\cdot x_0}{a^2}+\dfrac{y\cdot y_0}{b^2}+\dfrac{z\cdot z_0}{c^2}=1$

该切平面在三个轴上的截距各为

$$x=\frac{a^2}{x_0},\quad y=\frac{b^2}{y_0},\quad z=\frac{c^2}{z_0}$$

四面体的体积 $V=\dfrac{1}{6}xyz=\dfrac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}$ 目标函数

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$$ 约束条件

目标函数 $V=\dfrac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}$，约束条件 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}=1$

为简化计算,令 $u=\ln x_0+\ln y_0+\ln z_0$

$$L(x_0,y_0,z_0,\lambda)=\ln x_0+\ln y_0+\ln z_0+\lambda\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)$$

令 $\begin{cases} L_{x_0}=\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{2\lambda x_0}{a^2}=0 \\ L_{y_0}=\dfrac{1}{y_0}+\dfrac{2\lambda y_0}{b^2}=0 \\ L_{z_0}=\dfrac{1}{z_0}+\dfrac{2\lambda z_0}{c^2}=0 \\ L_{\lambda}=\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x_0=\dfrac{a}{\sqrt{3}} \\ y_0=\dfrac{b}{\sqrt{3}} \\ z_0=\dfrac{c}{\sqrt{3}} \end{cases}$

$$L(x_0,y_0,z_0,\lambda) = \ln x_0 + \ln y_0 + \ln z_0 + \lambda\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)$$

目标函数

$$V = \frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0},$$

可得 $\begin{cases} x_0 = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \\ y_0 = \dfrac{b}{\sqrt{3}} \\ z_0 = \dfrac{c}{\sqrt{3}} \end{cases}$ 唯一解

因为最小的四面体体积存在,

所以当切点坐标为 $(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}})$

四面体的体积最小 $V_{\min} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}abc$

练习 求函数$z = x^2 + y^2$在圆$(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2$ £9上的最大值与最小值.

解 (1) [illegible] $z = x^2 + y^2$在圆内的可能的极值点;

$$\begin{cases} z_x = 2x = 0 \\ z_y = 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$ [illegible] $(0,0)$

(2) [illegible] $z = x^2 + y^2$在圆上的最大、最小值.

为此作拉格朗日乘函数:

$$L(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda[(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 - 9]$$

$$\boxed{L(x,y)=x^2+y^2+\lambda[(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2-9]}$$

$$\begin{cases} L_x = 2x + 2\lambda(x-\sqrt{2}) = 0 & (a) \\ L_y = 2y + 2\lambda(y-\sqrt{2}) = 0 & (b) \\ (x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 = 9 & (c) \end{cases}$$

由$(a),(b)$知 $x=y$,代 (c)得

$$x=y=\frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ 和 } x=y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(3)比较 $z(0,0)$、$z\left(\frac{5\sqrt{2}}{2},\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$、$z\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

函数$z=x^2+y^2$在圆$(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2 \le 9$上,

最大值为$z=25$,最小值为 $z=0$.

练习 求 $(1,1,\frac{1}{2})$[illegible] $z=x^2+y^2$[illegible] .

解 设(x,y,z)是曲面上的点,它与已知点的距离为

$$d=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-\frac{1}{2})^2}$$ 目标函数

$$z=x^2+y^2$$ 约束条件

为简化计算,令

$$f(x,y,z)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-\frac{1}{2})^2$$

设 $$L(x,y,z,\lambda)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-\frac{1}{2})^2+\lambda(z-x^2-y^2)$$

$$L(x,y,z,\lambda)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-\frac{1}{2})^2+\lambda(z-x^2-y^2)$$

$$\begin{cases} L_x=2(x-1)-2\lambda x=0 & (1)\\ L_y=2(y-1)-2\lambda y=0 & (2)\\ L_z=2\left(z-\dfrac{1}{2}\right)+\lambda=0 & (3)\\ L_\lambda=z-x^2-y^2=0 & (4)\end{cases}$$

由(1),(2)得 $x=y$ 伏 (4)得 $z=2x^2$

由(1)得 $\lambda=\dfrac{x-1}{x}$ 伏 (3)得 $z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{x-1}{2x}=\dfrac{1}{2x}$

$$\therefore 2x^2=\frac{1}{2x}$$

$$x = y,\quad z = \frac{1}{2x},\quad 2x^2 = \frac{1}{2x},\qquad d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-\frac{1}{2})^2}$$

得唯一驻点 $x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}, y = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}, z = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

由于最短距离存在, [illegible] $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}, \sqrt[3]{\frac{1}{4}}, \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$处

d[illegible] $\sqrt{2\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt[3]{4} - 1}{2}\right)^2}$

例 [illegible] $z = x^2 + y^2$ [illegible] $x + y - 2z = 2$

[illegible]

解 法1 拉格朗日乘数法.

设 $P(x, y, z)$ [illegible] $z = x^2 + y^2$ [illegible] ,

则P [illegible] $x + y - 2z - 2 = 0$ [illegible] d,

$$d = \frac{1}{\sqrt{6}}|x + y - 2z - 2|.$$ [illegible] $x^2 + y^2 - z = 0$

当 $d = \frac{1}{\sqrt{6}}|x + y - 2z - 2|$ [illegible] ,

$$\Leftrightarrow d^2 = \frac{1}{6}(x + y - 2z - 2)^2$$ [illegible]

[redacted] $z = x^2 + y^2$ [redacted] $x + y - 2z = 2$

[redacted]

(即 $d^2 = \frac{1}{6}(x + y - 2z - 2)^2$) 最

令 $L(x, y, z, \lambda) = \frac{1}{6}(x + y - 2z - 2)^2 + \lambda(z - x^2 - y^2)$,得

$$\begin{cases} L'_x = \frac{1}{3}(x + y - 2z - 2) - 2\lambda x = 0, & (1) \\ L'_y = \frac{1}{3}(x + y - 2z - 2) - 2\lambda y = 0, & (2) \\ L'_z = \frac{1}{3}(x + y - 2z - 2)(-2) + \lambda = 0, & (3) \\ z = x^2 + y^2, & (4) \end{cases}$$

[redacted] $x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{4}, z = \frac{1}{8}.$

[redacted] $z = x^2 + y^2$ [redacted] $x + y - 2z = 2$

[redacted]

$$d = \frac{1}{\sqrt{6}}\left|x + y - 2z - 2\right|$$

即得**唯一驻点** $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8})$,

根据题意距离的最小值一定存在, 且有

唯一驻点, 故必在 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8})$ 取得最小值.

$$d_{\min} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left|\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 2\right| = \frac{7}{4\sqrt{6}}.$$

[redacted] $z = x^2 + y^2$ [redacted] $x + y - 2z = 2$
[redacted]

法2 设(x, y, z)为旋转抛物面上任一点, (x_1, y_1, z_1)为平面上任一点. 由两点间距离公式有

$$d^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$$

令 $F(x, y, z) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$

$$+ \lambda(z - x^2 - y^2) + \mu(x_1 + y_1 - 2z_1 - 2).$$

$$\begin{cases} F'_x = 0, F'_y = 0, F'_z = 0, F'_{x_1} = 0, F'_{y_1} = 0, F'_{z_1} = 0, \\ z = x^2 + y^2, \\ x + y - 2z = 2. \end{cases}$$

[redacted] $z = x^2 + y^2$ [redacted] $x + y - 2z = 2$

[redacted] 法向量 $(1,1,-2)$

法3设$P(x, y, z)$为旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$上的任一点.

$$F(x,y,z) = z - x^2 - y^2$$

$$F_x = -2x,\ F_y = -2y, F_z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (-2x,-2y,1)$$

$$\frac{-2x}{1} = \frac{-2y}{1} = \frac{1}{-2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{4}, z = \frac{1}{8}$$

$$d_{\min} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left|x + y - 2z - 2\right| = \frac{1}{\sqrt{6}}\left|\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 2\times\frac{1}{8} - 2\right|$$

$$= \frac{7}{4\sqrt{6}}.$$

四、小结

多元函数的极值

（取得极值的必要条件、充分条件）

多元函数的最值

拉格朗日乘数法

作业

习题8-8(365页)

1.　3.　4.　15.　22.

练 习 题

一、填空题:

1、函数$f(x,y)=(6x-x^2)(4y-y^2)$在________点取得极__________值为____________.

2、函数$z=xy$在附加条件$x+y=1$下的极______值为______________.

3、方程$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$所确定的函数$z=f(x,y)$的极大值是____________,极小值是______________.

1、(3,2),大,36； 2、大,1/4 ； 3、7,-1.

练习 设有一小山,取它的底面所在的平面为xOy坐标面,其底部所占的区域为$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\le 75\}$,小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy.$

(1) 设$M(x0\ ,y0)$为区域D上一点,问$h(x,y)$在该点沿平面上什么方向的方向导数最大?若记此方向导数的最大值为$g(x0\ ,y0)$,试写出$g(x0\ ,y0)$的表达

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动,为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点. 也就是说,要在D的边界线 $x^2+y^2-xy=75$上找出使(1)中的$g(x,y)$达到最大值的点.试确定攀岩起点的位置.

解 (1) 由梯度的几何意义知, $h(x, y)$在点$M(x0 , y0)$处沿梯度 $\operatorname{grad} h(x,y)\big|_{(x_0,y_0)} = (y_0 - 2x_0, x_0 - 2y_0)$ 方向的方向导数最大, 方向导数的最大值为该梯度的模, 所以

$$g(x_0, y_0) = \sqrt{(y_0 - 2x_0)^2 + (x_0 - 2y_0)^2}$$

$$= \boxed{\sqrt{5x_0^2 + 5y_0^2 - 8x_0y_0}.}$$

(2) 令 $f(x,y) = g^2(x,y) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy$,

由题意,只需求 $f(x,y)$ 在约束条件 $x^2 + y^2 - xy = 75$ 下的最大值点.

令 $L(x,y) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy + \lambda(75 - x^2 - y^2 + xy)$,

$$L(x,y)=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(75-x^2-y^2+xy),$$

则 $$\begin{cases} L_x=10x-8y+\lambda(y-2x)=0, & (1) \\ L_y=10y-8x+\lambda(x-2y)=0, & (2) \\ 75-x^2-y^2+xy=0 & (3) \end{cases}$$

(1) + (2): $(x+y)(2-\lambda)=0,$

从而得 $y=-x$ 或 $\lambda=2.$

若 $\lambda=2$，由(1)得 $y=x$，再由(3)得 $x=\pm 5\sqrt{3}, y=\pm 5\sqrt{3}.$

若 $y=-x$，由(3)得 $x=\pm 5, y=\mp 5.$

于是得到4个可能的极大值点

可作为攀登的起点.

$M_1(5,-5), M_2(-5,5), M_3(5\sqrt{3},5\sqrt{3}), M_4(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3}).$

$f(M_1)=f(M_2)=450, f(M_3)=f(M_4)=150.$

思考题

若x_0为$f(x, y_0)$[illegible] ,点(x_0, y_0)[illegible]

$z = f(x, y)$[illegible] ?

答 不一定.

二元函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处有极值(不妨设为极小值), 是指存在 $U(P_0, \delta)$, 当点 $P(x, y) \in U(P_0, \delta)$, 且 $P(x, y)$沿任何曲线趋向于 P_0时, $f(x, y) > f(x_0, y_0)$.

一元函数 $f(x, y_0)$ 在点 x0处取得有极小值, 表示动点 $P(x, y) \in U(P_0, \delta)$, 且 $P(x, y)$沿直线

$y=y_0$上，并沿该直线(即沿平行于Ox轴的正负方向)趋向于$P_0(x_0,y_0)$时，$f(x,y)>f(x_0,y_0)$.

它们的关系是:

$f(x,y)$在点(x_0,y_0)取得极大(小)值

$\not\Longleftrightarrow$ $f(x_0,y)$和$f(x,y_0)$分别在 y_0和 x_0点

取得极大(小)值.