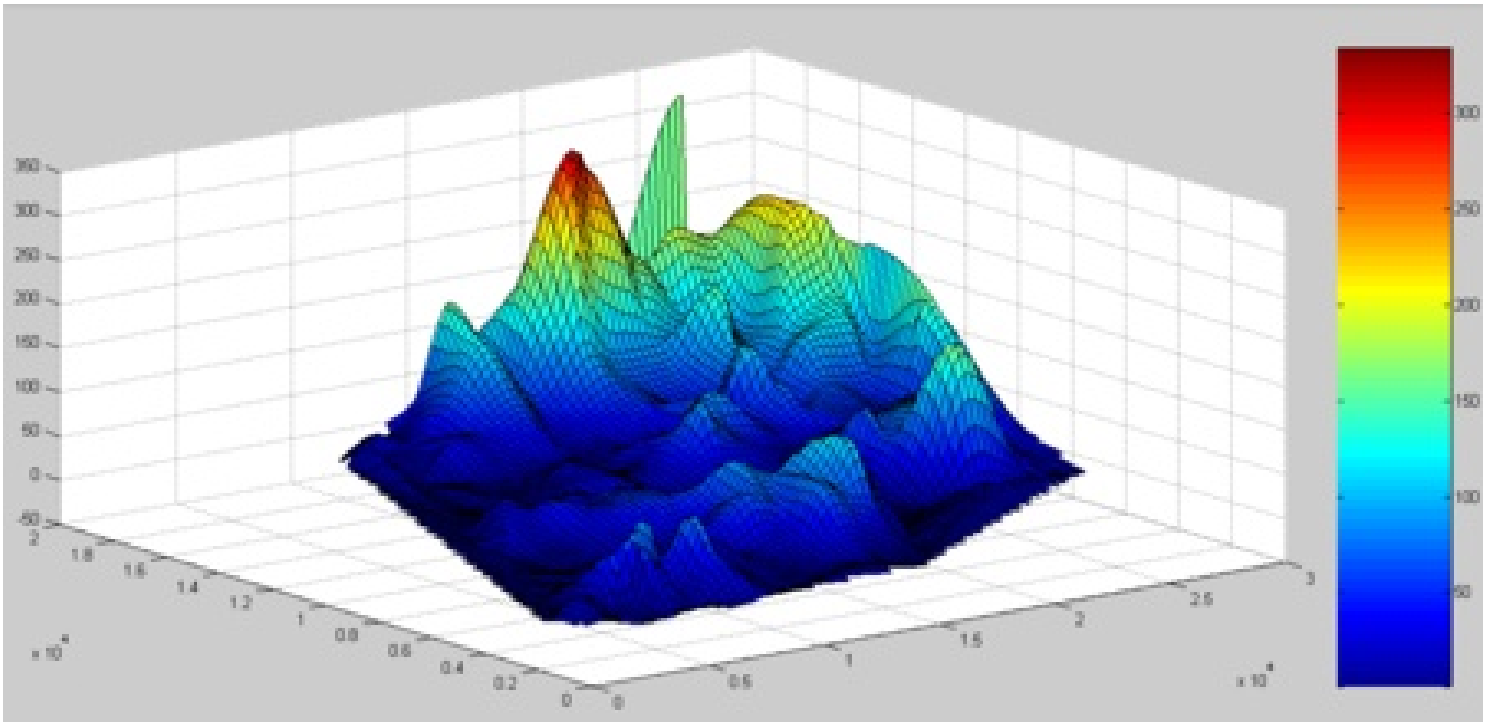


高等数学（3）——多元微积分

jiahua ni

keep learning keep moving

我最喜欢的部分，也是高等数学中最有意思的部分。为什么呢？因为当微积分的维度扩展三维，就相当于建立了与现实世界沟通的桥梁，而数学本身作为一个高抽象度的学科就具备了更多的现实价值（从认识论角度讲就是第二次飞跃啊），而事实也证明了这一点--数学是很多工科的核心与生命。

言归正传，多元微积分分为多元微分和多元积分，从本质思想而言还是同一元微积分一样--变化率和累加，所以可以从一元微积分出发理解，但是其又多了许多一元微积分不具备的性质和应用。

一.多元微分

主要为两条线，一条为偏导概念及其应用——求无条件极值；另一条为全微分和梯度及其应用——求条件极值（Lagrange）

（1）偏导及其应用

个二元函数**z=f(x,y)**是否可以做类似的推广？某种程度上而言，是可以的。此二元函数可以直观地理解为三维空间中的一曲面，但是某点处的切线就不能用二维的方法了，因为曲线上固定一点用一动点接近它只有一个方向，而在曲面上固定一点再用一动点接近则有无数个方向，这就没法定义某点切线了，也就没法定义某点导数了。怎么办呢?

曲面可以看成是由无数条曲线构成的，如果把某一变量设为定值，我们可以得到什么?
z=f(x,y。)，这是一个一元函数了，直观地理解就是平面**y=y。**与曲面相交而成的曲线，对于该曲线而言，切线和导数就可以定义了，该曲线上的导数就叫做**y=y。**时，z关于x的偏导。 同理可得，x=x。时，z关于y的偏导。所以说偏导的求法与一元函数导数是一样的——把其余变量看做常量，不过有一点值得注意，一元函数的导数存在，函数必然连续，而二元函数的关于x，y的偏导存在是不能得出函数连续的结论的，原因就是上面讲的偏导只能证明一个方向上连续而二元函数的连续是有无穷多个方向的。而可微才是二元函数连续的充分条件。

一元函数的极值点导数为零，这是一个很重要的结论，由此可推导出费马，罗尔和拉格朗日中值定理。二元函数的极值点也有类似结论，上文说了曲面可有无数条曲线构成，而偏导正是其中某曲线的导函数，所以二元函数的极值点必然是曲线的极值点，即满足 $f_x=0$ $f_y=0$。这就可以作为确定可能极值点的方法，但是曲面的特性又决定了这种方法求得的点并不一定是极值点，这就需要第二步判断（二阶判别法）：1. $AC-B^2>0$, A>0为极小值点，A<0为极大值点；2. $AC-B^2<0$,为鞍点；3.等于零则无法判断。其中 $A=f_{xx}$ $B=f_{xy}$ $C=f_{yy}$.

此二阶判别法其实是来自一种一般情况 $f=ax^2+bxy+cy^2$,该情况的极值点讨论所得到的判别式就是上面所提到的，而任意二元函数通过二阶泰勒级数展开都可以写成此一般式，所以上式的判别法就有了普适性。

（2）全微分、梯度及其应用

微分是研究变化的工具，在一元微分中，根据自变量和因变量的增量关系
$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$,得到微分形式：**dy=Adx**(A=y')，直观上讲是切线与曲线的近似，这个很容易理解，而拓展到二元,因变量与自变量的增量之间也是存在类似关系的即
$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$， $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，微分形式：
dz=Adx+Bdy(A=fx',B=fy')，直观上讲是切平面与曲面的近似，这个不太好理解，嘿嘿。

对于一个三元的函数 $\omega=f(x,y,z)$,这个没法直观感受了，因为涉及到四维了，但是这里同样有增量之间的关系式： $\Delta\omega\approx f_x\Delta x+f_y\Delta y+f_z\Delta z$.两边同除某一变量就可以得到链式法

除dt，得 $\bar{\nabla}\omega\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}=0$，其中 $\frac{d\bar{r}}{dt}=\bar{v}$,速度与路径相切，所以 $\bar{\nabla}\omega\perp\bar{v}$ ，就得到了**梯度垂直等值面。**梯度就相当于切面的法向量。

理解了梯度的几何意义后再来看条件极值的求法就比较容易接受了。

求 $\omega=f(x,y,z)$ 在 $g(x,y,z)=0$ 的条件下的极值

Lagrange的核心思想是：最值点处 ω 的等值线与g相切，即 $\bar{\nabla}g//\bar{\nabla}\omega$

数学表达式：构造 $F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$,F关于 x,y,z,λ 的偏导为零。此时求得的点即为最值点，但无法判断最小值还是最大值。

以上是两条比较主要的知识线，从考研的角度看，其他比较重要的还有二元函数连续问题、复合函数和隐函数的偏导求法、隐函数存在定理及方向导数等。

二.多元积分

可分为三部分：二重和三重积分的概念和计算方法及应用，曲线积分，曲面积分

（1）二重和三重积分的概念和计算方法及应用

对于概念其实和一元积分类似，多元只是把累加的概念推广到了三维中：二重 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$,三重类似。

计算的话，根据不同的积分函数选择相应的坐标系可以带来很大的方便，二重有两种：直角坐标系、极坐标系；三重有三种：直角坐标系、柱坐标系、球坐标系，计算过程中可结合对称化简或积分次序变化。

应用方面：可以用来求面积、体积、质心、转动惯量等常见的物理量，关键是用对公式和计算仔细。

接下来曲线积分和曲面积分才是多元积分中的重中之重，看名字都有积分二字，其实这两者和二重三重积分完全不是一个概念，线面积分主要应用在场中，为了计算功（Work）和通量（Flux）。

一个方向和大小固定的力F作用下使物体沿某直线移动x所做的功，这个很好计算 $W = F \cdot x \cdot cos\theta$,向量形式：$W = \bar{F} \cdot \bar{x}$，可是如果力的大小为 $F(x, y)$,路径为一曲线呢？此处就需要用到积分的累加思想了，把曲线切割成无数个直线段，在每一段上都可看成是简单的沿直线运动所做的功 $W_i = \bar{F}(x_i, y_i) \cdot \Delta\bar{r}$，全部功的累加就得到了曲线积分的定义：

$$\int_c \bar{F} d\bar{r} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \bar{F}(\xi_i, \eta_i)\Delta\bar{r}_i.$$

因为 $\bar{F} =< M, N >$, $d\bar{r} =< dx, dy >= \bar{T}ds$,所以按计算思想的不同，可分为第一类和第二类曲线积分，即 $\int_c \bar{F} \cdot \bar{T}ds$ 和 $\int_c Mdx + Ndy$。到这一步才可以用一元积分的方法来计算：参数化。

以上是一般情况下的计算，还有两种特殊情况：其一，$\bar{F} = \bar{\nabla} f$,此时的 $\bar{F}$ 称作梯度场。梯度场有三个重要推论：路径独立；保守场；闭合曲线上积分为零，三者互为充分必要条件，像我们所处的重力场和电场都属于梯度场。自此，在梯度场中的曲线积分就有了很简便的计算方法：

$\int_c \bar{F} d\bar{r} = f(P_1) - f(P_0)$。其二，路径为光滑闭合曲线，此处有Green-Theorem：

$\oint_c Mdx + Ndy = \int\int_D curl(\bar{F})dA$,(可看做Stokes的特殊情况)。

以上就是第一个问题的答案——计算功（Work），还有一个问题——计算通量（Flux）。通量的物理概念在面积分中比较好理解，在线积分中可看做是 $\bar{T}$ 顺时针转动90度后的 $\bar{n}$ 与力相乘：

$\int_c \bar{F} \cdot \bar{n}ds$，因为 $\bar{T}ds =< dx, dy >$,所以 $\bar{n}ds =< dy, -dx >$,若 $\bar{F} =< M, N >$,

则 $\int_c \bar{F} \cdot \bar{n}ds = \oint_c -Ndx + Mdy$,再由Green-Theorem得，

$\oint_c -Ndx + Mdy = \int\int_D div\bar{F}dA$,此即散度定理。

上面讨论的是二维下的线积分，还有三维下的，定义类似，不过三维下只计算功，同样有两种特殊情况值得注意：一种是梯度场条件下，可以用势函数计算；另一种是闭合曲线，可用Stokes-Theroem。

（3）曲面积分

义为：$\int\int_S \bar{F}\cdot\bar{n}ds$,相当于曲面场的分元数个平面后的累加。计算方法，根据曲面类型的不同，可以用不同坐标轴参数化，有一种特殊情况就是在闭合曲面上的面积分，可用Gauss-Green Theorem（散度定理）化到三重积分：$\oint\oint_S \bar{F}\cdot\bar{n}ds = \int\int\int_\Omega div\bar{F}dV$

此文仅用作思路整理，文中有许多不严谨之处，希望不会给您带来困扰，欲深入学习者，强烈建议观看网易公开课中的MIT多元微积分课程。

编辑于 2016-11-01

高等数学 微积分 考研数学

知乎

1

干净爆米花 2017-07-27

太感谢了 明天final 现在感觉思路清晰了很多 因为老师讲的太快了 有点不知道不理解 只会套公式 现在感觉好很多了

3

我是闰土你不是猹 2017-07-29

👍

赞

Mark.Tang 2017-10-01

是的，MIT的多元微积分公开课

1

夏天 2017-10-08

该评论已删除

jiahua ni (作者) 回复 夏天 2017-10-08

👍

赞

華夏男兒當自強 2018-01-16

不错👍

赞

知乎用户 2018-03-06

怎么利用积分

赞

William Hong 回复 知乎用户 2019-06-14

里面的多重积分可以算物体的体积，然后还有用Green' Theorem 和Stoke Theorem可以简化自己的积分。同时，利用梯度Gradient可以算向量场，可以用积分来算物理的通

▲ 赞同 170 ▼ 11 条评论 分享 喜欢 收藏 ···

∇Δ

赞

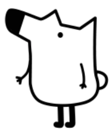
张工场 06-06

\nabla

赞

秋半十六 08-27

醍醐灌顶，写得真棒！



赞