3.1 设有一个信源，它产生 0、1 序列的消息。它在任意时间而且不论以前发生过什么符号，均按 $P(0)=0.4$，$P(1)=0.6$ 的概率发出符号。

信息熵 $H(X) = -\sum_{x} P(x)\log P(x)$

(1) 试问这个信源是否平稳。

(2) 试计算 $H(X^2)$、$H(X_3/X_1X_2)$和 H_∞。

(3) 试计算 $H(X^4)$、并写出 X^4 信源中可能有的所有符号。

解：（1）根据题意，此信源在任何时刻发出的符号概率都是相同的，均按 p(0)=0.4，p(1)=0.6，即信源发出符号的概率分布与时间平移无关，而且信源发出的序列之间也是彼此无信赖的。所以这信源是平稳信源。

(2) 离散平稳无记忆N次扩展

$$H(X^2)=2H(X)=-2\times(0.4\log 0.4+0.6\log 0.6)=1.942(bit/symbols)$$

$$H(X_3\,|\,X_1X_2)=H(X_3)=-\sum_i p(x_i)\log p(x_i)=-(0.4\log 0.4+0.6\log 0.6)=0.971(bit/symbol)$$

极限熵 $H_\infty=\lim_{N\to\infty}H(X_N\,|\,X_1X_2\cdots X_{N-1})=H(X_N)=0.971(bit/symbol)$

(3) 4位二进制　　$\frac{1}{N}H(X_1X_2\dots X_N)$

$$H(X^4)=4H(X)=-4\times(0.4\log 0.4+0.6\log 0.6)=3.884(bit/symbols)$$

X^4 的所有符号：

0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

3.2 在一个二进制的信道中，信源消息集 $X=\{0,1\}$ 且 $P(1)=P(0)$，信宿的消息集 $Y=\{0,1\}$，信道传输概率 $p(y=1|x=0)=1/4$，$p(y=0|x=1)=1/8$。求：

损失熵

平均互信息 $I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)$

(1) 在接收端收到 $y=0$ 后，所提供的关于传输消息 x 的平均条件互信息 $I(X;y=0)$；

(2) 该情况下所能提供的平均互信息量 $I(X;Y)$。

$I(X;y=0)=H(X)-H(X|0)$

$p(x=0)=p(x=1)=\frac{1}{2}$

解：(1)

$$p(y|x)=\begin{array}{c|c} & y \\ \hline x & \begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8}\end{bmatrix}\end{array},\quad p(xy)=\begin{array}{c|c} & y \\ \hline x & \begin{bmatrix}\frac{3}{8} & \frac{1}{8}\\ \frac{1}{16} & \frac{7}{16}\end{bmatrix}\end{array},\quad p(x|y)=\begin{array}{c|c} & y \\ \hline x & \begin{bmatrix}\frac{6}{7} & \frac{2}{9}\\ \frac{1}{7} & \frac{7}{9}\end{bmatrix}\end{array}$$

联合P

$H(X) = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = 1$ bit/symb

$$p(y=0)=\frac{3}{8}+\frac{1}{16}=\frac{7}{16},\quad p(y=1)=\frac{1}{8}+\frac{7}{16}=\frac{9}{16}$$

$$I(X:y=0)=H(X)-\underbrace{H(X\,|\,0)}_{\text{损失熵}}=1+(\frac{6}{7}\log\frac{6}{7}+\frac{1}{7}\log\frac{1}{7})=0.408(bit/symbol)$$

(2) $I(X:y=1)=H(X)-H(X\,|\,1)=1+(\frac{2}{9}\log\frac{2}{9}+\frac{7}{9}\log\frac{7}{9})=0.236(bit/symbol)$

$$I(X;Y)=\sum_Y p(y)I(X;y)=\frac{7}{16}\times 0.408+\frac{9}{16}\times 0.236\approx 0.311(bit/symbol)$$

or: $I(X;Y)=H(X)-H(X/Y)$

$$=1+(\frac{3}{8}\log\frac{6}{7}+\frac{1}{8}\log\frac{2}{9}+\frac{1}{16}\log\frac{1}{7}+\frac{7}{16}\log\frac{7}{9})\approx 1-0.6883=0.3117(bit/symbol)$$

$$I(X;Y)=\sum_{X,Y}p(x_iy_j)\log\frac{P(x_i/y_j)}{P(x_i)}$$

$$I(X;Y)=\sum_x P(x)\,I(Y;x)=\sum_{x,y}P(x)P(y/x)\log\frac{P(y/x)}{P(y)}$$

3.3 一个信源发出二重符号序列消息(X_1, X_2)，其中第一个符号 X_1 可以是 A、B、C 中的任一个，第二个符号 X_2 可以是 D、E、F、G 中的任一个。已知各个 $p(x_{1i})$ 为：$p(A)=1/2$，$p(B)=1/3$，$p(C)=1/6$；各个 $p(x_{2j}\mid x_{1i})$ 值如下表所示。求这个信源的熵(联合熵 $H(X_1, X_2)$)。

x_{1i} \ x_{2j}	A	B	C
D	1/4	3/10	1/6
E	1/4	1/5	1/2
F	1/4	1/5	1/6
G	1/4	3/10	1/6

解：

$$P(x_2\mid x_1)=\begin{array}{c|cccc} x_1 \backslash x_2 & D & E & F & G \\ \hline A & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ B & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ C & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array} \qquad P(x_1)=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} \qquad P(x_1x_2)=\begin{array}{c|cccc} & D & E & F & G \\ \hline A & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ B & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{10} \\ C & \frac{1}{36} & \frac{1}{12} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \end{array}$$

$$H(X_1X_2)= 4\cdot\frac{1}{8}\cdot\mathrm{Log}(8)+2\cdot\frac{1}{10}\cdot\mathrm{Log}(10)+2\cdot\frac{1}{15}\cdot\mathrm{Log}(15)+3\cdot\frac{1}{36}\cdot\mathrm{Log}(36)+\frac{1}{12}\cdot\mathrm{Log}(12)=3.415$$

3.4 有两个二元随机变量 X 和 Y，它们的联合概率如下所示。

X \ Y	0	1
0	1/8	3/8
1	3/8	1/8

$$P(XY)=\begin{array}{c|cc} X\backslash Y & & \\ \hline & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{array}$$

并定义另一随机变量 $Z=XY$(一般乘积)，试计算：

(1) $H(X)$, $H(Y)$, $H(Z)$, ~~$H(X,Z)$, $H(Y,Z)$, $H(X,Y,Z)$~~。

(2) $H(X/Y)$, ~~$H(Y/X)$, $H(X/Z)$, $H(Z/X)$, $H(Y/Z)$, $H(Z/Y)$~~。

(3) $I(X;Y)$, ~~$I(X;Z)$, $I(Y;Z)$~~。

$$H(XY)=-\sum_{XY}p(x_iy_j)\log p(x_iy_j)$$

$$=2\times\frac{1}{8}\log 8+2\times\frac{3}{8}\log\frac{8}{3}$$

$$=1.811\ bit/symbol$$

$$p(x=0)=p(x=0,y=0)+p(x=0,y=1)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$$

$$p(x=1)=p(x=1,y=0)+p(x=1,y=1)=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

$$H(X)=-\sum_i p(x_i)\log p(x_i)=1(bit/symbol)$$

$$p(y=0)=p(x=0,y=0)+p(x=1,y=0)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$$

$$p(y=1)=p(x=0,y=1)+p(x=1,y=1)=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

$$H(Y)=-\sum_i p(y_i)\log p(y_i)=1(bit/symbol)$$

$$Z=\begin{cases}0 & \underset{x=0,y=1}{\frac{3}{8}}+\underset{x=1,y=0}{\frac{3}{8}}+\underset{x=0,y=0}{\frac{1}{8}}=\frac{7}{8}\\ 1\end{cases}$$

Z= XY 的概率分布如下：

$$\begin{bmatrix} Z \\ P(Z) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z=0 & z=1 \\ \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$H(Z)=-\sum_i p(z_i)\log p(z_i)=-(\frac{7}{8}\log\frac{7}{8}+\frac{1}{8}\log\frac{1}{8})=0.544(bit/symbol)$$

$$H(X|Y)=H(XY)-H(Y)=1.811-1=0.811(bit/symbol)$$

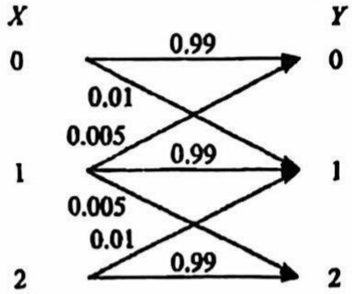
$$I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)=1-0.811=0.189(bit/symbol)$$

$$I(X;Y)=H(X)+H(Y)-H(XY)$$

3.5 写出下图信道的转移概率矩阵，并指出其是否为对称信道。

$$I(X;Y)=\sum_{X,Y}p(x_iy_j)\log\frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)}$$

$$=\sum_{X,Y}p(x_i,y_j)\log\frac{p(x_i,y_j)}{p(x_i)p(y_j)}$$



解：信道的转移概率矩阵 $P(Y|X)=\begin{bmatrix} 0.99 & 0.01 & 0 \\ 0.005 & 0.99 & 0.005 \\ 0 & 0.01 & 0.99 \end{bmatrix}$

矩阵P中每一行都是第一行的重新排列，而且P中的每一列都是第一列的重新排列。

该信道不是对称信道。

3.6 设二进制对称信道的概率转移矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

损失熵 噪声熵 平均互信息

(1) 若 $p(x_0)=3/4, p(x_1)=1/4$，求 $H(X)$, $H(X/Y)$, $H(Y/X)$ 和 $I(X;Y)$。

(2) 求该信道的信道容量及其达到信道容量时的输入概率分布。

解：(1)

$$p(x_0)=\frac{3}{4}, p(x_1)=\frac{1}{4}, H(X)=\frac{3}{4}\log\frac{4}{3}+\frac{1}{4}\log 4=0.811(bit/symbol)$$

$$P(Y|X)=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, P(XY)=\begin{array}{cc} & y \\ x & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$p(y_0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}, p(y_1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$$

$$H(XY)=\frac{1}{2}\log(2)+\frac{1}{4}\log(4)+\frac{1}{12}\log(12)+\frac{1}{6}\log(6)=1.73(bit/symbols)$$

$$H(Y)=\frac{7}{12}\log(\frac{12}{7})+\frac{5}{12}\log(\frac{12}{5})=0.98(bit/symbol)$$

$$H(X|Y)=H(XY)-H(Y)=1.73-0.98=0.75(bit/symbol)$$

$$H(Y|X)=H(XY)-H(X)=1.73-0.811=0.919(bit/symbol)$$

$$I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)=0.811-0.75=0.061(bit/symbol)$$

熵函数

(2)此信道为对称信道，则 对称离散信道 $C=\max_{p(x)}[H(Y)-H(p)]=\log s-H(p)$

$$C=\log s-H(p_1',p_2',\cdots p_s')=\log(2)-H(\frac{2}{3},\frac{1}{3})=\log 2+\frac{2}{3}\log\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\log\frac{1}{3}$$

$$=0.082(bit/symbol)$$

达到信道容量时的输入概率分布为：$p(x_0)=p(x_1)=\frac{1}{2}$

3.7 某信源发送端有两个符号：$x_i, i=1,2$，$p(x_1)=a$，每秒发出一个符号。接收端有3种符号：$y_j, j=1,2,3$，转移概率矩阵

$$P=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 1/2 & 1/4 & 1/4\end{bmatrix}$$

(1) 计算接收端的平均不确定性。 H(Y)

(2) 计算由于噪声产生的不确定性 $H(Y/X)$。

(3) 计算信道容量。

解：（1）

$$p(x_1)=a, p(x_2)=1-a, P(Y|X)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$$P(XY)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a & 0\\ \frac{1}{2}(1-a) & \frac{1}{4}(1-a) & \frac{1}{4}(1-a)\end{bmatrix}$$

$$p(y_1)=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}(1-a)=\frac{1}{2}, p(y_2)=\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}(1-a)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}a, p(y_3)=\frac{1}{4}(1-a)$$

接收端的平均不确定性为：

$$H(Y)=\frac{1}{2}\log(2)-(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}a)\log(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}a)-(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}a)\log(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}a)$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1+a}{4}\log(1+a)-\frac{1-a}{4}\log(1-a)\ \text{(bit/symbol)}$$

（2）

$$H(Y|X)=\sum_{X,Y}p(xy)\log\frac{1}{p(y|x)}$$

$$=\frac{1}{2}a\log(2)+\frac{1}{2}a\log(2)+0+\frac{1}{2}(1-a)\log(2)+\frac{1}{4}(1-a)\log(4)+\frac{1}{4}(1-a)\log(4)$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}a(\text{bit/symbol})$$

(3)

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y|X)=[\frac{3}{2}-\frac{1+a}{4}\log(1+a)-\frac{1-a}{4}\log(1-a)]-(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}a)$$

$$=\frac{1}{2}a-\frac{1+a}{4}\log(1+a)-\frac{1-a}{4}\log(1-a)$$

$$C=\max_{p(x_i)}\{I(X;Y)\}$$

$$C(a)=[\frac{3}{2}-\frac{1+a}{4}\frac{\log(1+a)}{\log(2)}-\frac{1-a}{4}\frac{\log(1-a)}{\log(2)}]-(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}a)$$

$$\frac{d}{dx}\log_a(x)=\frac{1}{x\ln a}$$

$$\frac{d}{da}C(a)=0$$

$$\frac{d}{da}C(a)=\frac{1}{2}-(\frac{1}{4}\log_2(1+a)+\frac{1+a}{4}\frac{1}{(1+a)\ln 2})-(-\frac{1}{4}\log_2(1-a)-\frac{1-a}{4}\frac{1}{(1-a)\ln 2})=0$$

得到 $\frac{1}{4}\cdot\frac{-\ln(1+a)+\ln(1-a)+2\ln(2)}{\ln(2)}=0$

$$\frac{1}{4}[-\log_2(1+a)+\log_2(1-a)+2]=0$$

解得 $a=\frac{3}{5}$

$$\frac{1-a}{1+a}=\frac{1}{4}\Rightarrow a=\frac{3}{5}$$

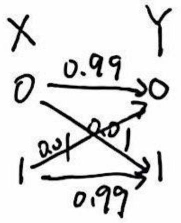
所以 $C=\max\{I(X;Y)\}=C(\frac{3}{5})=0.161(\text{bit/symbol})$

3.8 在干扰离散信道上传输符号 1 和 0，在传输过程中每 100 个符号发生一个错传的符号。已知 $p(0)=p(1)=1/2$，信道每秒内允许传输 1000 个符号。求此信道的容量。

$$C_{max}=\frac{3}{10}-\frac{3}{5}\log\frac{8}{5}-\frac{1}{10}\log\frac{2}{5}=0.161$$

解： 该信道为对称离散信道，故信道容量为：

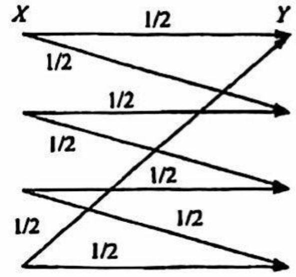
$$C=\log s-H(p_1',p_2',\cdots p_s')$$
$$=\log 2-H(0.01,0.99)$$
$$=1+0.01\log(0.01)+0.99\log(0.99)$$
$$=0.919(\text{bit/symbol})$$



$$P(X|Y)=\begin{array}{c} \\ x \end{array}\begin{bmatrix}0.99 & 0.01\\ 0.01 & 0.99\end{bmatrix}$$

即信道容量C_t为：C_t=0919×1000=919（bit/秒）

3.10 设有扰离散信道的传输情况分别如下图所示，求该信道的信道容量。



解：$P(Y \mid X)=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$C=\log s-H(p_1',p_2',\cdots p_s')=\log(4)-H(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\log(4)+\frac{1}{2}\log(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\log(\frac{1}{2})=1(bit/symbol)$$

3.12 发送端有 3 种等概率符号(x_1,x_2,x_3)，$p(x_i)=1/3$，接收端收到 3 种符号(y_1,y_2,y_3)，信道转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) 接收端收到一个符号后得到的信息量 $H(Y)$。

(2) 计算噪声熵 $H(Y/X)$。

(3) 计算接收端收到一个符号 y_2 的错误概率。

(4) 计算从接收端看的平均错误概率。

(5) 计算从发送端看的平均错误概率。

(6) 从转移矩阵中能看出该信道的好坏吗？

(7) 计算发送端的 $H(X)$ 和 $H(X/Y)$。

$P(X)=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

解：(1)

$P(\cancel{XY}\,Y/X)=\begin{array}{c} \\ X \end{array}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{9}{10} & 0 \end{bmatrix}$

转移概率 $P=\begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ x_2 & 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ x_3 & 0.1 & 0.9 & 0 \end{array}$，联合概率 $P(XY)=\begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} \\ x_2 & \frac{2}{15} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ x_3 & \frac{1}{30} & \frac{3}{10} & 0 \end{array}$

$$p(y_1)=\frac{1}{6}+\frac{2}{15}+\frac{1}{30}=\frac{1}{3},p(y_2)=\frac{1}{2},p(y_3)=\frac{1}{6}$$

后验概率 $P(X \mid Y)=\begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline y_1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{1}{10} \\ y_2 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ y_3 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{array}$ $=\begin{array}{c|ccc} & & Y & \\ \hline X & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ & \frac{1}{10} & \frac{3}{5} & 0 \end{array}$

$$H(Y)=\frac{1}{3}\log(3)+\frac{1}{2}\log(2)+\frac{1}{6}\log(6)=1.459$$

（2）

$$H(Y|X)=\frac{1}{6}\log(2)+\frac{1}{10}\log(\frac{10}{3})+\frac{1}{15}\log(5)+\frac{2}{15}\log(\frac{5}{2})$$
$$+\frac{1}{10}\log(\frac{10}{3})+\frac{1}{10}\log(\frac{10}{3})+\frac{1}{30}\log(10)+\frac{3}{10}\log(\frac{10}{9})=1.175$$

（3）

当接收为 y2，发为 x2 时正确，如果发的是 x1 和 x3 为错误，各自的概率为：

P(x1/y2)=$\frac{1}{5}$，P(x2/y2)=$\frac{1}{5}$，P(x3/y2)=$\frac{3}{5}$

其中错误概率为：

Pe=P(x1/y2)+P(x3/y2)=$\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=0.8$

（4）平均错误概率为

$$\frac{2}{15}+\frac{1}{30}+\frac{1}{10}+\frac{3}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{10}=0.733$$

$$P_e=\sum_{i=1}^{r}P(x_i)\sum_{j\neq i}^{s}P(y_j|x_i)$$
$$=\sum_{i=1,j=1,j\neq i}^{r,s}P(y_j|x_i)P(x_i)$$
$$=\sum_{\substack{i\neq j\\ X,Y}}P(y_j x_i)$$

（5）仍为 0.733

（6）此信道不好。 原因是信源等概率分布，从转移信道来看

正确发送的概率 x1-y1 的概率 0.5，有一半失真

x2-y2 的概率 0.3，有失真严重

x3-y3 的概率 0，完全失真

（7）

$$H(X)=\log(3)=1.585$$

$$H(X|Y)=\frac{1}{6}\log(2)+\frac{1}{10}\log(5)+\frac{1}{15}\log(\frac{5}{2})+\frac{2}{15}\log(\frac{5}{2})$$
$$+\frac{1}{10}\log(5)+\frac{1}{10}\log(\frac{5}{3})+\frac{1}{30}\log(10)+\frac{3}{10}\log(\frac{5}{3})=1.301$$

$$H(X|Y)=-\sum_{X,Y}P(x_i y_j)\log P(x_i/y_i)$$

3.14 电视图像编码中，若每帧为 500 行，每行划分为 600 个像素，每个像素采用 8 电平量化，且每秒传送 30 帧图像。试求所需的信息速率(bit/s)。

无损信道 $H(X|Y)=0$ 信道无干扰

解： 每个像素携带的信息量 $H(X)=\log 8=3$ （bit/像素）

信息速率 $30\times500\times600\times3=2.7\times10^{7}$ （bit/s）

信息率：$R=I(X;Y)=H(X)-\underbrace{H(X|Y)}_{=0}=H(X)$

$R_t=\frac{R}{t}$