4.1　设无记忆信源$\begin{bmatrix} X \\ p(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1, & 0, & 1 \\ 1/3, & 1/3, & 1/3 \end{bmatrix}$，接收符号集$A_Y = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$，失真矩阵$[d] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，试求：$D_{max}$和$D_{min}$及达到$D_{max}$，$D_{min}$时的转移概率矩阵。

率失真函数 $R(D)$ 的下界 D_{min} 和上界 D_{max}

解：$D_{max} = \min_{v} \sum_{U} P(u)d(u,v) = \min_{v}\left\{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right),\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\right\} = \frac{4}{3}$

而最小平均失真　$D_{max} = \min \sum_{y} p(y) \sum_{x} p(x) d(x,y)$

$$D_{min} = \sum_{i=1}^{3} P(u_i) \min d(u_i, v_j) = \frac{1}{3}[1+1+1] = 1$$

达到D_{max}的信道为 令对应最小失真度 d 的 $p(b_j|a_i)=1$，其他为0.

$$[P(v_j|u_i)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 或 \cancel{\begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \alpha & 1-\alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix}, 0 \le \alpha \le 1} \qquad \begin{bmatrix} a & 1-a \\ a & 1-a \\ a & 1-a \end{bmatrix} \quad a=0或1$$

达到D_{min}的信道为

$$[P(v_j|u_i)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 或 \cancel{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1-a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad a=0或1$$

4.2　已知二元信源$\begin{bmatrix} X \\ p(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ p, & 1-p \end{bmatrix}$以及失真矩阵$[d_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，试求：

(1) D_{min}；(2) D_{max}；~~(3) $R(D)$。~~

解：（1）$D_{min} = p*0 + 0*(1-p) = 0$

~~达到D_{min}的信道为一个一一对应的无噪信道，所以，R(0)=I(U;V)=H(U)=H(p)~~

(2)最大允许失真度为

$$D_{max} = \min_{v} \sum_{U} P(u)d(u,v) = \min(p,(1-p))$$

如果p<1/2，D_{max}=p　　$p \geq \frac{1}{2}$　$D_{max} = 1-p$

4.5　某二元信源$\begin{bmatrix} X \\ p(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$，其失真矩阵定义为$[d] = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$。求该信源的$D_{max}$、$D_{min}$和$R(D)$函数。

解：最大允许失真度为：

$$D_{\max}=\min_{v}\sum_{U}P(u)d(u,v)=\min\left(\frac{1}{2}*0+\frac{1}{2}*a,\frac{1}{2}*1+\frac{1}{2}*a\right)=\frac{a}{2}$$

最小允许失真度

$$D_{\min}=0$$

4.8 利用 $R(D)$ 的性质，画出一般 $R(D)$ 的曲线并说明其物理意义。试问为什么 $R(D)$ 是非负且非增的？

物理意义：D 是允许的失真度。R(D)是对应于 D 的一个确定信息传输率。对于不同的允许失真D,R(D)就不同。

R(D)的非负性：根据 R(D)的定义知，R(D)是在一定的约束条件下，平均互信息 I(U;V)的极小值。已知 I(U;V)是非负的，其下限值为零。由此可得，R(D)也是非负的，它的下限值也为零。

R(D)的非增性也是容易理解的。因为允许的失真度越大，所要求的信息率可以越小。根据 R(D)的定义，它是在平均失真度小于或等于允许失真度 D 的所有信道集合 BD 中，去 I(U;V)的最小值。当允许失真度 D 扩大，那么 BD 的集合也扩大，当然仍包含原来满足条件的所有信道。这时再扩大的 BD 集合中找 I(U;V)的最小值，显然是或者最小值不变，或者变小，所以 R(D)是非增的。

R(D) 的非增性也容易理解。允许的失真越大 → 信息率越小。

- 根据率失真函数的定义，它是在平均失真度小于或等于允许的平均失真度 D 的所有信道集合 B_D 中，取平均互信 息的最小值。
- 当允许失真度扩大，B_D 集合也扩大，这时在扩大的 B_D 集合中找最小值，显然这最小值或者不变，或者变小，所以R(D) 是非增的。

根据上述性质，可以画出率失真函数的一般形式，如下图示。

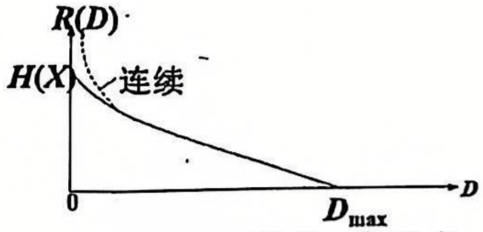
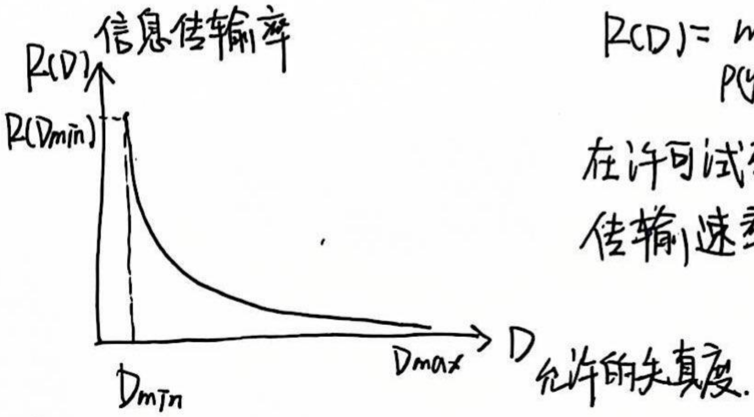


图 $R(D)$函数的一般形式



$$R(D)=\min_{P(y|x)\in P_D} I(X;Y)$$

在许可试验信道集合 P_D 中，信道信息传输速率 $R=I(X;Y)$ 的最小值.