CN81-1166/TP 计算机工程与科学 2000 年第 22 卷第 2 期
ISSN 1007-130X COMPUTER ENGINEERING & SCIENCE Vol. 22, No. 2, 2000

文章编号：1007-130X(2000)02-0008-04

求马步图 Hamilton 圈的最优算法*

An Optimal Algorithm for Searching a Hamilton Cycle of the Knight-Tour Problem

柏 森[1] 杨晓帆[2]
Bai Sen[1] *and* Yang Xiaofan[2]
([1] 重庆通信学院二系)([2] 重庆大学计算机研究所)
([1]Department 2, Chongqing Communications College)
([2]Institute of Computer, Chongqing University)

摘 要：本文对骑士巡游问题进行了研究，提出了求棋盘马步图的 Hamilton 圈的“分治-回溯-合并”算法，其时间复杂度是 $O(n^2)$。分析表明该算法是求棋盘马步图一条 Hamilton 圈的最优算法，对 VLSI 的布线问题具有一定的应用价值。

Abstract: This paper discusses the knight-tour problem. A divide & conquer-backtracking-merge algorithm is presented for searching the Hamilton cycles of the problem. Its time complexity is $O(n^2)$. Analysis shows it is optimal. The algorithm is valuable to VLSI wiring.

关键词：图论；哈密顿圈；哈密顿路径；最优算法；时间复杂度/骑士巡游问题；分治

Key words: graph theory; Hamilton cycle; Hamilton path; optimal algorithm; time complexity/knight-tour problem; divide-and-conquer

中图分类号：O157.6；TP302 **文献标识码**：A

1 引言

将 $n \times n$ 棋盘上 n^2 个格子的每一个用图的一个顶点代替，两个顶点连边当且仅当骑士（马）一步可以跳到，这样的图称为棋盘上的马步图[1]，那么骑士巡游问题就可转化成马步图中是否有 Hamilton 圈或路径的判定问题。一般图中 Hamilton 圈或路径的存在性问题是 NP-完全的[2]，因此很可能不存在多项式时间算法。然而，骑士巡游问题是一类特殊图上的 Hamilton 圈或路径的判定问题，很有进一步研究的价值。

求马步图中 Hamilton 圈的算法并不多，经典的是“回溯算法”[3]，经分析得出其平均时间复杂度(ATC)和最坏时间复杂度(WTC)都为指数级。“改进回溯算法”[4]和“再改进回溯算法”[5]的 ATC 和 WTC 仍为指数级。此外，还有“分块-合并算法”[1]，其 WTC$\geqslant O(n^4)$，ATC$>O(n^2)$。

2 预备知识

为叙述方便，引入下列定义，凡未给出的概念与文献[6]相同。

定义 1 一个棋盘称为 $n \times m$ 棋盘，如果棋盘纵向有 n 个格子，横向有 m 个格子。自然，国际象棋棋盘是 8×8 棋盘。

* 收稿日期：1998-10-06；修订日期：1999-01-12
基金项目：国家自然科学基金资助项目(69573040)
作者简介：柏森(1963—)，男，硕士，讲师，研究方向为图论及其算法，目前研究兴趣是图象处理；杨晓帆，男，博士，副教授，研究方向为容错、诊断、人工神经网络、图论。
通讯地址：400035 重庆市重庆通信学院二系新技术教研室。
Address: Department 2, Chongqing Communications College, Chongqing 400035, P. R. China

定义 2 在 $n\times m$ 棋盘上的马步图中，以四角之一为原点建立直角坐标系，以 $O(0,0)$ 为初始点，若有以 $(m-2,1)$ 为终点的 H-路径，则称为关键 H-路径，简记为

在简记的关键 H-路径 OA 中，角点 O 可称为关键 H-路径的起点，A 点称为终点。根据对称性，对 $n\times n$ 棋盘上的马步图，若有关键 H-路径，则显然有从点 $O(0,0)$ 为起点，以点 $(1,n-2)$ 为终点的关键 H-路径等等，不防将其统称为关键 H-路径。对 $n\times m$ 棋盘也同样还有以别的角点为初始点的关键 H-路径。为方便计，在研究中用图的顶点代替棋盘的格子，用图的边代替马跳步子。注意，如用棋盘格子将棋盘分割成一些小棋盘，则关键 H-路径的特点是：一个小棋盘关键 H-路径的终点与相邻的下一个小棋盘关键 H-路径的起点

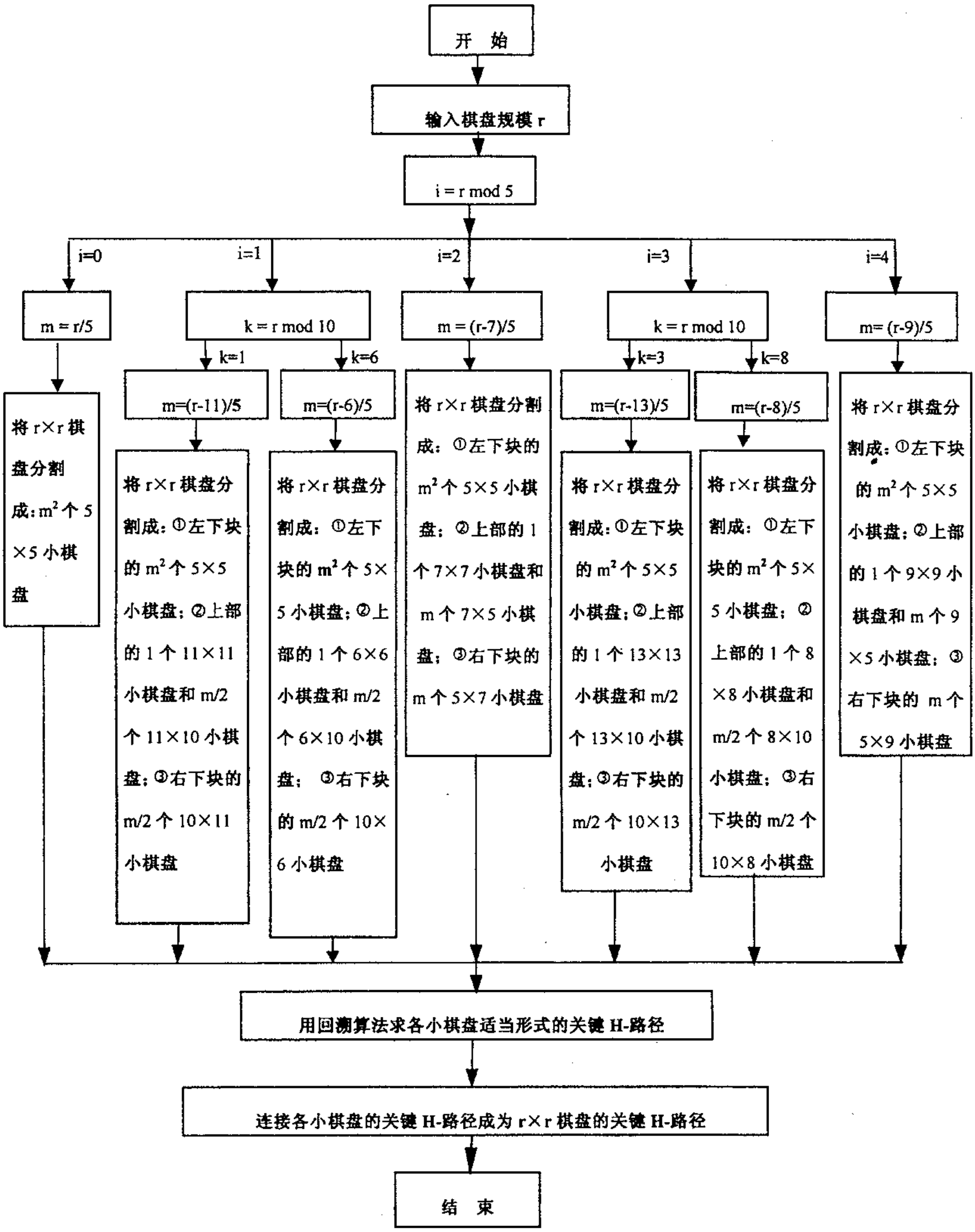

图 1 “分治-回溯-合并算法”的算法框图

恰好能被马一步跳到。

3 求 $r\times r$ 棋盘关键 H-路径的基本思想

文献[7]中已证明，n 为奇数时，$n\times n$ 棋盘马步图中不存在 H-圈。$n=6$，$n=8$ 时的 H-圈易得，因此，算法中考虑 $n\geqslant 10$ 且为偶数的情况。下面用分治的思想和方法来构造算法，求 $n\times n$ 棋盘的 H-圈时，要先求出 $r\times r$ 棋盘的关键 H-路径($r=n/2$)，然后根据关键 H-路径的特点，将其合并为 $n\times n$ 棋盘的 H-圈。

求 $r\times r$ 棋盘关键 H-路径的基本思想是：首先用分而治之的思想，根据 $r \bmod 5$ 的 5 种取值(0、1、2、3、4)，将整体的大棋盘分割成各种形式小棋盘；其次，对各种小棋盘用“回溯算法”可求得其关键 H-路径；最后，根据关键 H-路径的特点，将各小棋盘关键 H-路径连接起来，合并成整体的 $r\times r$ 棋盘的关键 H-路径。因此，将其称为“分治-回溯-合并算法”，其基本思想和具体分割方法可用图 1 所给的算法框图表示。算法的正确性是容易证明的，下面分析其时间复杂性。

4 复杂性分析

下面按算法框图中体现的步骤来分析其时间复杂性。

第一步：求 $i=r \bmod 5$，其时间复杂度 $T_1=O(1)$。

第二步：根据 i 的不同取值，按图 1 中的五种情况之一，分割 $r\times r$ 棋盘为各种形式的小棋盘，其时间复杂度 $T_2\leqslant O(r^2)$。

第三步：求各种形式小棋盘的关键 H-路径。

形式 1　从算法框图中可以看出，用分割合并的方法仅需要对 13 种小棋盘的关键 H-路径进行连接，它们是：5×5、6×6、7×7、8×8、9×9、11×11、13×13、6×10、7×5、8×10、9×5、11×10、13×10 小棋盘。这 13 种小棋盘的关键 H-路径用“改进回溯算法”[4]或“再改进回溯算法”[5]容易求出，其时间复杂度 $T_{31}=O(1)$。

形式 2　求 $5m\times 5m$ 棋盘($m\leqslant r/5$)的关键 H-路径，这又分两小步进行：

(1) 将 $5m\times 5m$ 棋盘分割成 m^2 个 5×5 小棋盘，其时间复杂度 $T_{321}\leqslant O(m^2)$。

(2) 求出各 5×5 棋盘的关键 H-路径，并将其连接成 $5m\times 5m$ 棋盘的关键 H-路径，设其时间复杂度为 $T_{322}(m)$，选取“连接”作为基本操作，设“连接”一次所需时间为 c，按下述方法连接，即

当 $m=1$ 时，5×5 棋盘具有关键 H-路径(图 2 中左上角 5×5 小棋盘的细实线所示)。

当 $m=2$ 时，用“+”字阴影棋盘格将棋盘分成 4 个 5×5 小棋盘，然后将各小棋盘的关键 H-路径按图 2 的方式连接，可以构成大棋盘的关键 H-路径。

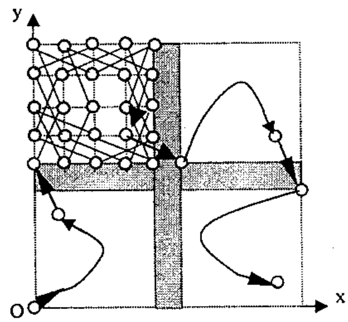

图 2　4 个 5×5 小棋盘的关键 H-路径连接成大棋盘关键 H-路径的方法

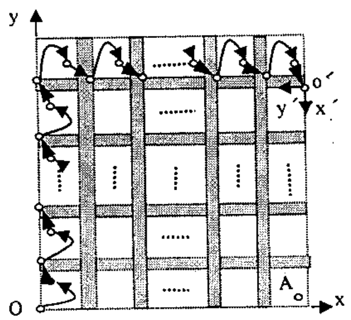

图 3　各个 5×5 小棋盘的关键 H-路径连接成大棋盘关键 H-路径的方法

假设 $m=p$ 时有关键 H-路径，现在考虑 $m=p+1$ 时的情况。此时用阴影棋盘格可将棋盘分成图 3 所示的 $(p+1)^2$ 个 5×5 小棋盘。在最左列和最上一行小棋盘内，按图 3 的方式连接可以得到一条以原点 $O(0,0)$ 开始到点 O' 结束的路径。然后，以 O' 为原点建立新坐标系 $X'O'Y'$，则根据归纳假设，对剩下的 p^2 个小棋盘，存在以点 O' 为初始点，以点 $A(r-2,1)$ 为终点的关键 H-路径。于是存在 $O\to O'\to A$ 的关键 H-路径，即 $m=p+1$ 时有关键 H-路径。根据归纳原理，$r=5m$ 时存在关键 H-路径。

于是有：

$$T_{322}(m)=2c(m-1)+(2m-1)O(1)+T_{322}(m-1)\Rightarrow$$

$$T_{322}=O(m^2)$$

其中 $2c(m-1)$表示从 O 到 O' 做 $2(m-1)$次连接的时间,$(2m-1)O(1)$表示求最左列和最上一行 $(2m-1)$个 5×5 小棋盘关键 H-路径所需时间。

第四步:将各种形式的小棋盘的关键 H-路径连接成 $r\times r$ 棋盘的关键 H-路径,选取“连接”作为基本操作,则其时间复杂度 $T_4\leqslant O(r)$。

于是,设“分治-回溯-合并算法”的时间复杂度为 T,则有

$$T=T_1+T_2+T_{321}+T_{322}+T_4\leqslant O(m^2)\leqslant O(r^2)$$

又因为 $r\times r$ 棋盘中共有 r^2 个格点需要骑士访问,所以其时间复杂度 $T\geqslant O(r^2)$,所以“分治-回溯-合并算法”的时间复杂度 $T=O(r^2)$,它是求 $r\times r$ 大棋盘一条关键 H-路径的最优算法。

5 求 $n\times n$ 棋盘马步图一条 H-圈的一个最优算法

当 $n\geqslant 10$ 且为偶数时,用上面提出的“分治-回溯-合并算法”容易求得 $n\times n$ 棋盘马步图的一条 H-圈,其算法步骤是:

第一步:设 $r=n/2$,将 $n\times n$ 棋盘等分成 4 个 $r\times r$ 棋盘;

第二步:对 $r\times r$ 棋盘,用分治-回溯-合并算法分别求关键 H-路径;

第三步:按下面图 4 的方法连接成 H-圈。

容易得出,其时间复杂度是 $O(n^2)$。因此,对于输入规模而言,它是求 $n\times n$ 棋盘上马步图 H-圈的最优算法。

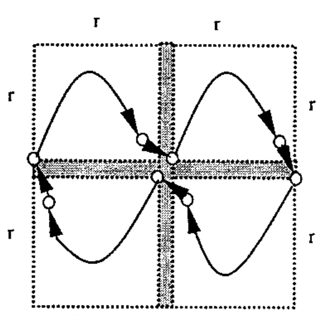

图 4 各关键 H-路径连接成 H-圈的方法

该算法优点是时间复杂度低,是求一条 H-圈的最优算法。缺点是只能求出一条 H-圈。但在用“改进回溯算法”[4]或“再改进回溯算法”[5]求各 13 种小棋盘的关键 H-路径时,通过修改试探方向顺序可得到很多关键 H-路径,因此也可得到较多的 H-圈。

作为算法的一个示例,对 34×34 棋盘,用“分治-回溯-合并算法”求出的 H-圈,如图 5 所示。

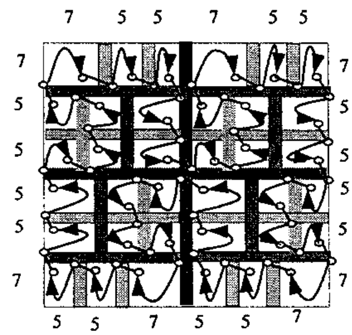

图 5 34×34 棋盘的 H-圈

参考文献:

[1] 曹新谱,肖宝麟.国际象棋棋盘上马的周游路线问题[J].重庆大学学报(自然科学版),1988,11(4):63~68

[2] Baase S.计算机算法:设计和分析引论[M].朱洪,游之墨,胡美琛译.上海:复旦大学出版社,1985.307~308

[3] Wirth N. Algorithms and Data Structures[M]. New Jersey:Prentice-Hall Inc,Englewood Cliffs,1986

[4] Rader R J. Advanced Software Design Techniques[M]. New York:Petrocelli Books Inc,1978

[5] 肖金声.骑士巡游问题的解[J].中山大学学报(自然科学版),1994,33(3):15~18

[6] Bondy J A,Murty U S R.图论及应用[M].吴望名,李念祖,吴兰芳等译.北京:科学出版社,1984.1~284

[7] 柏森,杨晓帆,瞿晓鸿等.关于骑士旅游问题的几个定理[J].重庆大学学报(自然科学版),1998,21(3):32~38