

北京航空航天大學

高/低轨卫星单星定位

性能对比报告

20220107

目录

目录	I
一、 RINEX 文件	1
1.1 观测文件	1
1.1.1 文件头	2
1.1.2 观测数据	6
1.2 星历文件	6
1.2.1 文件头	6
1.2.2 星历数据	7
二、 数据的处理	10
2.1 一些概念	10
2.2 星历计算卫星位置和速度	10
2.2.1 选取合适的星历数据	10
2.2.2 导航信号发射时间的计算	10
2.2.3 卫星位置的计算	11
2.2.4 卫星速度的计算	13
2.3 误差修正	13
2.3.1 地球自转带来的误差修正	13
2.3.2 卫星钟差	14
2.3.3 电离层误差修正	14
2.3.4 对流层误差修正	15

2.4 最小二乘解算	15
2.4.1 伪距定位	16
2.4.2 多普勒定位	16
2.4.3 伪距+多普勒定位	17
2.4.4 DOP	18
2.5 伪距观测量和多普勒频率观测量	22
 三、 GPS 仿真结果	23
3.1 单历元	23
3.1.1 伪距	23
3.1.2 多普勒	23
3.1.3 伪距+多普勒	24
3.1.4 双频伪距+多普勒	24
3.1.5 结论	25
3.2 多历元	25
3.2.1 伪距	26
3.2.2 多普勒	27
3.2.3 多普勒+伪距	29
 四、 BDS 仿真结果	32
4.1 单历元	33
4.1.1 伪距	33
4.1.2 多普勒	40
4.1.3 多普勒+伪距	45

4.1.4 用户钟差建模	51
4.1.5 用户钟频差建模	55
4.1.6 Allen 方差	57
4.2 多历元	58
4.2.1 伪距	60
4.2.2 多普勒	73
4.2.3 多普勒+伪距	79
4.3 钟漂对定位结果的影响	84
4.4 结论	85
五、低轨仿真结果	87
5.1 观测时长对定位结果的影响	87
5.1.1 卫星选择 sat(5,1)	87
5.1.2 卫星选择 sat(5,12)	92
5.1.3 多普勒引入对定位结果的改善	97
5.2 采样间隔对定位结果的影响	100
5.2.1 卫星选择 sat(5,1)	100
5.2.2 卫星选择 sat(5,12)	106
5.3 钟漂对定位结果的影响	110
5.4 最小残差法确定初值	113
5.5 结论	113
六、高/低轨卫星单星定位对比	115

七、高度信息辅助	116
7.1 高度信息辅助定位算法	116
7.2 高度信息辅助低轨单星定位	118
7.2.1 观测时长的影响	119
7.2.2 高度观测误差的影响	125
7.2.3 观测间隔的影响	126
7.2.4 结论	127
7.3 伪距/多普勒+高度信息定位的 HVCE 算法 ^[5]	128
八、陆基导航信息辅助	130
8.1 VOR-DME 观测量模拟	130
8.2 VOR-DME 辅助低轨卫星定位仿真	131
8.2.1 仿真结果	132
8.2.2 结论	134
九、进一步的讨论	135
9.1 回归分析中违背基本假设的情况[8]	135
9.1.1 异方差性	135
9.1.2 自相关性	135
9.2 接收机时钟对定位结果的影响	139
9.2.1 接收机时钟	139
9.2.2 Allan 方差	139
参考文献	1

本报告主要对比了高/低轨卫星单星定位的定位性能，高轨卫星单星定位使用的数据为实测数据，低轨卫星的数据则采用仿真的数据。因为利用实测数据要读取 rinex 格式的文件，因此第一章就对 rinex 格式的文件进行了说明；第二章则介绍了实测数据的处理流程；第三章和第四章分别利用 GPS 的实测数据和北斗卫星的实测数据，对多星单历元定位的性能和单星多历元定位的性能进行了分析，同时分析了单星多历元定位中，观测时长和观测间隔对定位性能的影响；第五章则以仿真方式对低轨卫星单星定位时观测时长和观测间隔对定位性能的影响进行了讨论。

1 rinex 文件

rinex 文件说明的部分以 bjf10600.21o 和 brdc0600.21n 为例。其中 bjf10600.21o 文件是合众思壮公司使用其 AIR20 接收机在 2021 年 3 月 1 号接收到的实测数据；brdc0600.21n 是从 igs 网站下载的广播星历。

1.1 观测文件

1.1.1 文件头

```
3.04          OBSERVATION DATA    M (MIXED)        RINEX VERSION / TYPE
Assistant 1.0  StaticToRinex      20210416 173202 LCL PGM / RUN BY / DATE
G = GPS         R = GLONASS       C = BDS          COMMENT
S = SBAS        J = QZSS         E = GALILEO     COMMENT
I = IRNSS

Test           MARKER NAME
1413836560   MARKER NUMBER
GEODETIC
OBSERVER      AGENCY
E226528080002 AIR20            2.12-200909 REC # / TYPE / VERS
0             HX-GG486A        ANT # / TYPE
-2327570.5381 5387307.5936  2489616.6739 APPROX POSITION XYZ
          0.0000      0.0000      0.0000 ANTENNA: DELTA H/E/N
G  16 C1C L1C D1C S1C C2P L2P D2P S2P C2C L2C D2C S2C C5Q SYS / # / OBS TYPES
L5Q D5Q S5Q
R  16 C1P L1P D1P S1P C2P L2P D2P S2P C2C L2C D2C S2C C1C SYS / # / OBS TYPES
L1C D1C S1C
C  24 C2I L2I D2I S2I C7I L7I D7I S7I C7P L7P D7P S7P C5P SYS / # / OBS TYPES
L5P D5P S5P C6I L6I D6I S6I C1P L1P D1P S1P
S  8 C1C L1C D1C S1C C5I L5I D5I S5I
J  4 C5Q L5Q D5Q S5Q
E  16 C1X L1X D1X S1X C5X L5X D5X S5X C7X L7X D7X S7X C8Q SYS / # / OBS TYPES
L8Q D8Q S8Q
DBHZ
          1.000 SIGNAL STRENGTH UNIT
          INTERVAL
2021 03 01 00 00 0.0000000 GPS TIME OF FIRST OBS
2021 03 01 23 59 59.0000000 GPS TIME OF LAST OBS
          0 RCV CLOCK OFFS APPL
          G L1C 0.00000 SYS / PHASE SHIFT
          G L2P 0.00000 SYS / PHASE SHIFT
          G L2C -0.25000 SYS / PHASE SHIFT
          G L5Q -0.25000 SYS / PHASE SHIFT
          R L1P 0.25000 SYS / PHASE SHIFT
          R L2P 0.25000 SYS / PHASE SHIFT
          R L2C 0.00000 SYS / PHASE SHIFT
          R L1C 0.00000 SYS / PHASE SHIFT
          C L2I 0.00000 SYS / PHASE SHIFT
          C L7I 0.00000 SYS / PHASE SHIFT
          C L7P 0.25000 SYS / PHASE SHIFT
          C L5P 0.25000 SYS / PHASE SHIFT
          C L6I 0.00000 SYS / PHASE SHIFT
          C L1P 0.25000 SYS / PHASE SHIFT
          S L1C 0.00000 SYS / PHASE SHIFT
          S L5I 0.00000 SYS / PHASE SHIFT
          J L5Q -0.25000 SYS / PHASE SHIFT
          E L1X 0.00000 SYS / PHASE SHIFT
          E L5X 0.00000 SYS / PHASE SHIFT
          E L7X 0.00000 SYS / PHASE SHIFT
          E L8Q -0.25000 SYS / PHASE SHIFT
          14 R04 6 R05 1 R06 -4 R07 5 R08 6 R09 -2 R10 -7 R14 -7 GLONASS SLOT / FRQ #
          R15 0 R16 -1 R20 2 R21 4 R22 -3 R23 3 GLONASS SLOT / FRQ #
          C1C      0 C1P      0 C2C      0 C2P      0 GLONASS COD/PHS/BIS
          18 LEAP SECONDS
*** Above antenna height is from mark to PHASE CENTER. COMMENT
          17 0 0.0000 ANT MEASURE TYPE/HEIGHT COMMENT
          0.0000 0.0000 0.0116 0.0142 0.0000 COMMENT
          BASE STATION COMMENT
          END OF HEADER
```

图 1.1 bjf10600.21o 文件头

关于文件头的一些说明如下：

(1) 星座系统

C 代表北斗、E 代表 GALILEO、G 代表 GPS、J 代表 QZSS、R 代表 GLONASS、S 代表 SBAS。

(2) 观测量

C 表示伪距观测量、L 表示载波相位观测量、D 表示多普勒观测量、S 表示信号强度。下面对各系统的观测量展开说明。

GPS

GPS	C1C L1C	C2P L2P	C2C L2C	C5Q L5Q
	D1C S1C	D2P S2P	D2C S2C	D5Q S5Q
频率	L1	L2	L2	L5
测距码	C/A	P	C/A	Q

北斗

BDS	C2I L2I	C7I L7I	C7P L7P	C5P L5P	C6I L6I	C1P L1P
	D2I S2I	D7I S7I	D7P S7P	D5P S5P	D6I S6I	D1P S1P
频率	B1	B2	B2b	B2a	B3	B1C
测距码	I	I	Pilot	Pilot	I	Pilot

GNSS System	Freq. Band / Frequency	Channel or Code	Observation Codes				
			Pseudo Range	Carrier Phase	Doppler	Signal Strength	
BDS	B1 / 1561.098	I	C2I	L2I	D2I	S2I	
		Q	C2Q	L2Q	D2Q	S2Q	
		I+Q	C2X	L2X	D2X	S2X	
	B1C/1575.42 (BDS-3 Signals)	Data	C1D	L1D	D1D	S1D	
		Pilot	C1P	L1P	D1P	S1P	
		Data+Pilot	C1X	L1X	D1X	S1X	
	B1A/1575.42 (BDS-3 Signals)	Data	C1S	L1S	D1S	S1S	
		Pilot	C1L	L1L	D1L	S1L	
		Data+Pilot	C1Z	L1Z	D1Z	S1Z	
	B2 / 1207.140 (BDS-2 Signals)	I	C7I	L7I	D7I	S7I	
		Q	C7Q	L7Q	D7Q	S7Q	
		I+Q	C7X	L7X	D7X	S7X	
	B2a/ 1176.450 (BDS-3 Signals)	Data	C5D	L5D	D5D	SSD	
		Pilot	C5P	L5P	D5P	DSP	
		Data+Pilot	C5X	L5X	D5X	SSX	
	B2b/1207.140 (BDS-3 Signals)	Data	C7D	L7D	D7D	S7D	
		Pilot	C7P	L7P	D7P	S7P	
		Data+Pilot	C7Z	L7Z	D7Z	S7Z	
	B2(B2a+B2b)/1191.795 (BDS-3 Signals)	Data	C8D	L8D	D8D	SSD	
		Pilot	C8P	L8P	D8P	S8P	
		Data+Pilot	C8X	L8X	D8X	SSX	
	B3 / 1268.52	I	C6I	L6I	D6I	S6I	
		Q	C6Q	L6Q	D6Q	S6Q	
		I+Q	C6X	L6X	D6X	S6X	
	B3A/1268.52 (BDS-3 Signals)	Data	C6D	L6D	D6D	S6D	
		Pilot	C6P	L6P	D6P	S6P	
		Data+Pilot	C6Z	L6Z	D6Z	S6Z	

图 1.2 北斗导航信号说明

GLONASS

GLONASS	C1P L1P	C2P L2P	C2C L2C	C1C L1C
	D1P S1P	D2P S2P	D2C S2C	D1C S1C
频率	G1	G2	G2	G1
测距码	P	P	C/A	C/A

(3) PRN

GPS : 2020-7 , PRN 为 1-32 ,在轨卫星包括 BLOCK IIA(淘汰)、 IIR(11 颗)、 IIR-M (7 颗, 5/7/12/15/17/29/31). IIF (12 颗)、 II(1 颗 , 4) ;

GPS SBAS :标识为 33-64 (PRN 为 120-158 ,标识=PRN-87) ;

GLONASS :可以使用 65-96 ,在轨 24 颗(编号 65-88)。 Uragan-M (23 颗) ,Uragan-K1 (1 颗) ;

日本 QZSS 卫星为 193-199 ;

北斗:卫星号 201-261 (PRN+ 200) ;

伽利略:卫星号 301-336 (PRN+300) ;

IRNSS :卫星号 901-918 (PRN+900)。

(4) 时间系统

BDT(=北斗时间系统)

GAL(=Galileo 时间系统)

GPS(=GPS 时间系统)

QZS(=QZSS 时间系统)

(5) 其他

PGM / RUN BY / DATE : 生成当前文件的程序名称、生成当前文件的机构名称、文件生成的时间（如果本地时间的系统编码未知则采用 LCL）。

MARKER NAME : 测量标记点（测站点）名称。

MARKER NUMBER : 测量标记点（测站点）编号。

MARKER TYPE : 测站点的类型。

OBSERVER / AGENCY : 观测者姓名/机构。

REC # / TYPE / VERS : 接收机编号、型号和版本。

ANT # / TYPE : 天线编号和类型 APPROX POSITION XYZ。测量标记点（测站点）的近似位置坐。

ANTENNA: DELTA H/E/N : 载体坐标系中的天线参考点（ARP）的位置。

SIGNAL STRENGTH : UNIT 信号强度的单位(DBHZ : C/N0 单位 : dBHz)

INTERVAL : 观测间隔 (s)。

TIME OF FIRST OBS : 第一条观测记录的时间。

RCV CLOCK OFFS APPL : 是否进行了实时的接收机钟差修正。1 : 是 ; 0 : 否 ; 缺省 : 无需修正。

SYS / PHASE SHIFT : 相位校正值 : RINEX 文件产生前的校正原始观测相位的校正值。卫星系统标识 (C/E/G/R/S) 载波相位观测值代码伪距校正值 (单位 : 周)。

ION ALPHA、ION BETA：电离层误差修正参数。

DELTA-UTC: A0, A1,T,W : 用于计算 UTC 时间的历书参数（多项式系数、
UTC 数据的参考时间、UTC 参考周编号）。

1.2.2 星历数据

```
2 21 3 1 0 0 0.0-0.581607688218D-03-0.386535248253D-11 0.000000000000D+00
 0.660000000000D+02 0.905000000000D+02 0.465233664564D-08 0.133127783771D+01
 0.427849590778D-05 0.203780272277D-01 0.793859362602D-05 0.515362277222D+04
 0.844000000000D+05-0.193715095520D-06-0.201554910735D+01-0.51967799635D-06
 0.961971137936D+00 0.228750000000D+03-0.153929180957D+01-0.833499004293D-08
 0.397516558160D-09 0.100000000000D+01 0.214700000000D+04 0.000000000000D+00
 0.200000000000D+01 0.000000000000D+00-0.176951289177D-07 0.660000000000D+02
 0.839520000000D+05 0.400000000000D+01 0.000000000000D+00 0.000000000000D+00
3 21 3 1 0 0 0.0-0.955783762038D-04-0.103455022327D-10 0.000000000000D+00
 0.820000000000D+02-0.628750000000D+02 0.484984487265D-08-0.426335055938D-01
 -0.329874455929D-05 0.329613150097D-02 0.314228236675D-05 0.515364065170D+04
 0.844000000000D+05 0.745058059692D-08-0.894622904132D+00 0.894069671631D-07
 0.968335975583D+00 0.320781250000D+03 0.840029572181D+00-0.858500045687D-08
 -0.397873715894D-09 0.100000000000D+01 0.214700000000D+04 0.000000000000D+00
 0.200000000000D+01 0.000000000000D+00 0.186264514923D-08 0.820000000000D+02
 0.792180000000D+05 0.400000000000D+01 0.000000000000D+00 0.000000000000D+00
4 21 3 1 0 0 0.0-0.183353666216D-03-0.250111042988D-11 0.000000000000D+00
 0.124000000000D+03-0.590625000000D+02 0.415195866003D-08 0.277608494141D+01
 -0.302679836750D-05 0.114116363693D-02 0.140238553286D-04 0.515359661102D+04
 0.864000000000D+05 0.223517417908D-07 0.185323353199D+00-0.335276126862D-07
 0.960873762123D+00 0.108375000000D+03-0.298299784067D+01-0.786854204207D-08
 -0.137862885400D-09 0.100000000000D+01 0.214700000000D+04 0.000000000000D+00
 0.200000000000D+01 0.000000000000D+00-0.419095158577D-08 0.892000000000D+03
 0.825780000000D+05 0.400000000000D+01 0.000000000000D+00 0.000000000000D+00
```

图 1.5 brdc0600.21n 文件的星历数据

TABLE A4		
GPS NAVIGATION MESSAGE FILE - DATA RECORD DESCRIPTION		
OBS. RECORD	DESCRIPTION	FORMAT
PRN / EPOCH / SV CLK - Satellite PRN number		I2,
- Epoch: Toc - Time of Clock		
year (2 digits, padded with 0		
if necessary)	1X,I2.2,	
month	1X,I2,	
day	1X,I2,	
hour	1X,I2,	
minute	1X,I2,	
second	F5.1,	
- SV clock bias (seconds)	3D19.12	
- SV clock drift (sec/sec)		
- SV clock drift rate (sec/sec2)	*)	
BROADCAST ORBIT - 1 - IODE Issue of Data, Ephemeris		3X,4D19.12
- Crs (meters)		
- Delta n (radians/sec)		
- MO (radians)		
BROADCAST ORBIT - 2 - Cuc (radians)		3X,4D19.12
- e Eccentricity		
- Cus (radians)		
- sqrt(A) (sqrt(m))		
BROADCAST ORBIT - 3 - Toe Time of Ephemeris		3X,4D19.12
(sec of GPS week)		
- Cic (radians)		
- OMEGA (radians)		
- CIS (radians)		
BROADCAST ORBIT - 4 - i0 (radians)		3X,4D19.12
- Crc (meters)		
- omega (radians)		
- OMEGA DOT (radians/sec)		
BROADCAST ORBIT - 5 - IDOT (radians/sec)		3X,4D19.12
- Codes on L2 channel		
- GPS Week # (to go with TOE)		
Continuous number, not mod(1024)!		
- L2 P data flag		
BROADCAST ORBIT - 6 - SV accuracy (meters)		3X,4D19.12
- SV health (bits 17-22 w 3 sf 1)		
- TGD (seconds)		
- IODC Issue of Data, Clock		
BROADCAST ORBIT - 7 - Transmission time of message **)		3X,4D19.12
(sec of GPS week, derived e.g.		
from Z-count in Hand Over Word (HOW)		
- Fit interval (hours)		
(see ICD-GPS-200, 20.3.4.4)		
Zero if not known		
- spare		
- spare		

图 1.6 星历数据的说明

关于 rinex 文件的具体说明 , 参见 rinex211 和 rinex304。

2 数据的处理

2.1 一些概念

GPS 时间的起点 :GPS 时间的零时刻与协调时的 1980 年 1 月 6 日(星期日)
零时刻相一致；
GPS 周数；
GPS 秒数：从周日开始记，一周有 604800 秒；
TAI：国际原子时；
UT：世界时；
UTC：协调世界时；
儒略日 (JD)：儒略周期内以连续的日数计算时间的计时法，起点公元前
4713 年 1 月 1 日中午 12 点；
年积日：某一天是该年的第几天。

2.2 星历计算卫星位置和速度

2.2.1 选取合适的星历数据

PRN 号一致、星历时间距离观测时间最短。

2.2.2 导航信号发射时间的计算

计算导航信号的反射时间的过程如下：

(1) 根据当前仿真时刻，估计一个粗略的传播延时（根据卫星的轨道高度来估
计，该延时不包括各种误差源的影响），得到信号发射时刻；

(2) 利用信号发射时刻和星历参数计算卫星位置；

-
- (3) 根据卫星位置和用户(接收机)位置计算信号传输延时；
- (4) 利用计算得到的传输时延和接收时刻(即仿真时刻)重新计算信号发射时刻；
- (5) 重复步骤(2)到步骤(4)。一般来说，迭代计算4次就可以得到一个较为精确的传播时延了；

```
public double getSignalTransTime3(ECEFPosition userEcefPosition, double tr, Ephemeris ephemeris)
{
    while ((iterTime--) > 0) {
        Ts = tr - tao;
        ECEFPosition satPos = ephemeris2Pos.ephemeris2Pos2(ephemeris, Ts, tao).getEcefPosition();
        satX = satPos.getX();
        satY = satPos.getY();
        satZ = satPos.getZ();
        r0 = Math.sqrt(Math.pow(userX - satX, 2) + Math.pow(userY - satY, 2) + Math.pow(userZ - satZ, 2));
        tao = r0 / c;
    }
    return Ts;
}
```

2.2.3 卫星位置的计算

因为由广播星历计算卫星位置的过程相对套路，故本小节以java程序的形式给出此过程。

(1) 计算规划时间

```
/**计算相对时间*/
double t_k = tt - t_oe;
if (t_k > 302400) {
    t_k -= 604800;
}
if (t_k < -302400) {
    t_k += 604800;
}
```

(2) 计算校正后的卫星平均角速度

```
*****计算校正后的卫星平均角速度*****
double n_0 = Math.sqrt(mu / Math.pow(A, 3)); // 卫星平均角速度
double n = n_0 + Delta_n; // 计算校正后的卫星平均角速度
```

(3) 计算真近点角

```

//*****计算近点角*****
// 平近点角
double M_k = M_0 + n * t_k;
if (M_k < 0) {
    M_k += 2 * Math.PI;
}
if (M_k > 2 * Math.PI) {
    M_k -= 2 * Math.PI;
}
// 偏近点角
double E_old = M_k;
double E_new = M_k + e * Math.sin(E_old);
int iE = 1;
while (Math.abs(E_new - E_old) > Math.pow(10, -8)) {
    E_old = E_new;
    E_new = M_k + e * Math.sin(E_old);
    iE++;
    if (iE > 10) {
        break;
    }
}
double E_k = E_new;

// 真近点角
double cosNu_k = (Math.cos(E_k) - e) / (1 - e * Math.cos(E_k));
double sinNu_k = (Math.sqrt(1 - Math.pow(e, 2)) * Math.sin(E_k)) / (1 - e * Math.cos(E_k));
double Nu_k;
if (cosNu_k == 0) {
    if (sinNu_k > 0) {
        Nu_k = Math.PI / 2;
    } else {
        Nu_k = -Math.PI / 2;
    }
} else {
    Nu_k = Math.atan(sinNu_k / cosNu_k);
}

if (cosNu_k < 0) {
    if (sinNu_k >= 0) {
        Nu_k += Math.PI;
    } else {
        Nu_k -= Math.PI;
    }
}

```

(4) 计算升交点角距

```

//*****计算升交点角距*****
double Phi_k = Nu_k + omega;

```

(5) 计算摄动校正后的升交点角距、卫星矢径长度、轨道倾角

```

//*****计算摄动校正后的升交点角距、卫星矢径长度和轨道倾角*****
double delta_u_k = Cus * Math.sin(2 * Phi_k) + Cuc * Math.cos(2 * Phi_k);
double delta_r_k = Crs * Math.sin(2 * Phi_k) + Crc * Math.cos(2 * Phi_k);
double delta_i_k = Cis * Math.sin(2 * Phi_k) + Cic * Math.cos(2 * Phi_k);

double u_k = Phi_k + delta_u_k;
double r_k = A * (1 - e * Math.cos(E_k)) + delta_r_k;
double i_k = i_0 + i_dot * t_k + delta_i_k;

```

(6) 坐标转换

```

/******坐标转换*****/
double x_p_k = r_k * Math.cos(u_k);
double y_p_k = r_k * Math.sin(u_k);

/******升交点赤经的计算*****/
// GPS(非GPS CNAV和GPS CNAV-2)
double Omega_k = Omega_0 + (Omega_Dot - Omega_e_Dot) * t_k - Omega_e_Dot * t_oe;

// 北斗GEO
// double Omega_k = Omega_0 + Omega_Dot * t_k - Omega_e_Dot * t_oe;

double x_k = x_p_k * Math.cos(Omega_k) - y_p_k * Math.cos(i_k) * Math.sin(Omega_k);
double y_k = x_p_k * Math.sin(Omega_k) + y_p_k * Math.cos(i_k) * Math.cos(Omega_k);
double z_k = y_p_k * Math.sin(i_k);

```

2.2.4 卫星速度的计算

因为由广播星历计算卫星速度的过程相对套路，故本小节以 java 程序的形式给出此过程。

```

/**
 * part2 求卫星速度
 */
double M_k_deriv = n;
double E_k_deriv = M_k_deriv / (1 - e * Math.cos(E_k));
double Nu_k_deriv = Math.sqrt(1 - Math.pow(e, 2)) * E_k_deriv / (1 - e * Math.cos(E_k));
double Phi_k_deriv = Nu_k_deriv;

double delta_u_k_deriv = 2 * Phi_k_deriv * (Cus * Math.cos(2 * Phi_k) - Cuc * Math.sin(2 * Phi_k));
double delta_r_k_deriv = 2 * Phi_k_deriv * (Crs * Math.cos(2 * Phi_k) - Crc * Math.sin(2 * Phi_k));
double delta_i_k_deriv = 2 * Phi_k_deriv * (Cis * Math.cos(2 * Phi_k) + Cic * Math.sin(2 * Phi_k));

double v_k_deriv = Phi_k_deriv + delta_u_k_deriv;
double r_k_deriv = A * e * E_k_deriv * Math.sin(E_k) + delta_r_k_deriv;
double i_k_deriv = i_Dot + delta_i_k_deriv;

double Omega_k_deriv = Omega_Dot - Omega_e_Dot;

double x_p_k = r_k * Math.cos(u_k);
double y_p_k = r_k * Math.sin(u_k);
double x_p_k_deriv = r_k_deriv * Math.cos(u_k) - r_k * v_k_deriv * Math.sin(u_k);
double y_p_k_deriv = r_k_deriv * Math.sin(u_k) + r_k * v_k_deriv * Math.cos(u_k);

double x_k = x_p_k * Math.cos(Omega_k) - y_p_k * Math.cos(i_k) * Math.sin(Omega_k);
double y_k = x_p_k * Math.sin(Omega_k) + y_p_k * Math.cos(i_k) * Math.cos(Omega_k);
double z_k = y_p_k * Math.sin(i_k);

double x_k_deriv = -y_k * Omega_k_deriv - (y_p_k_deriv * Math.cos(i_k) - z_k * i_k_deriv) * Math.sin(Omega_k) + x_p_k_deriv * Math.cos(Omega_k);
double y_k_deriv = x_k * Omega_k_deriv + (y_p_k_deriv * Math.cos(i_k) - z_k * i_k_deriv) * Math.cos(Omega_k) + x_p_k_deriv * Math.sin(Omega_k);
double z_k_deriv = y_p_k_deriv * Math.sin(i_k) + y_p_k * i_k_deriv * Math.cos(i_k);

```

2.3 误差修正

2.3.1 地球自转带来的误差修正

地球自转效应的修正，本质是将导航信号发射时刻的 ECEF 坐标系和用户接收到导航信号时刻的 ECEF 坐标系相统一。

转换前卫星位置

$$X = [x_s, y_s, z_s]^T \#(2.1)$$

转换矩阵为

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\Omega_E t) & \sin(\Omega_E t) & 0 \\ -\sin(\Omega_E t) & \cos(\Omega_E t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \#(2.2)$$

转换后卫星位置

$$X_t = RX \#(2.3)$$

其中， Ω_E 为地球自转角速度， t 为导航信号从卫星传到用户接收机的时间。

2.3.2 卫星钟差

卫星钟差表示为

$$\Delta t_s = A_0 + A_1(t_s - t_{oe}) + A_2(t_s - t_{oe})^2 \#(2.4)$$

其中， A_0 为卫星初始钟差， A_1 为卫星钟漂， A_2 为卫星钟漂率， t_s 为导航信号发射时间， t_{oe} 为星历参考时间。

2.3.3 电离层误差修正

电离层

电离层误差主要借助 Klobuchar 模型来进行修正。

该模型需要的参数有：用户的位置、卫星的位置、电离层修正参数 ION ALPHA、ION BETA、时间。此模型是根据电离层延迟随地方时的变化规律，将夜晚电离层延迟看作是一个常数，而将白天电离层偏差是随时间变化的余弦函数，如下式所示。

$$I_z = D_c + A \cos \frac{2\pi}{B}(t - T_p) \#(2.5)$$

式中， $D_c = 5ns$ ， $T_p = 50400s$ 。

$$A = \sum_{n=0}^3 \alpha_n \Phi_m^n \#(2.6)$$

$$B = \sum_{n=0}^3 \beta_n \Phi_m^n \#(2.7)$$

式中， α_n 和 β_n 由卫星导航电文给出， Φ_m 为传播路径与中心电离层交点的地磁纬度。

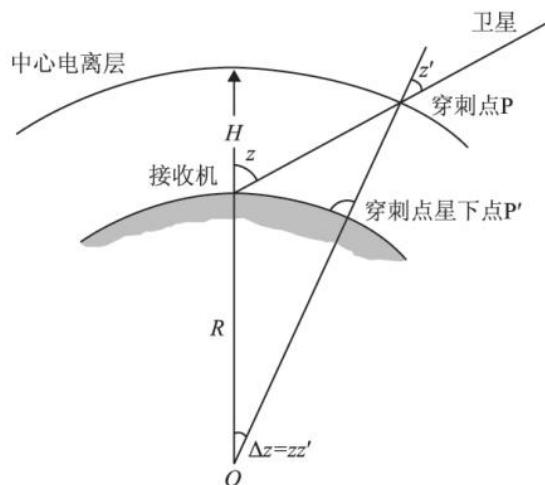


图 2.1 电离层误差修正中穿刺点的定义

2.3.4 对流层误差修正

对流层误差的修正主要利用 UNB3 模型，该模型需要的参数包括：年积日、用户位置、卫星相对于用户的仰角。

2.4 最小二乘解算

2.4.1 伪距定位

伪距观测方程

$$h_{PR}^j = \rho^j(\vec{r}, \delta_R, t_R) = \left\| \vec{r} - A(\omega_E \delta t_p^j) \vec{r}^j (t_R - \delta_R - \delta t_p^j) \right\|_2 + (\delta_R - \delta^j) + \delta t_{trop}^j + \delta t_{ion}^j$$

观测量

$$\rho = \rho_C + \delta t_{sat} - \delta t_{iono} - \delta t_{trop} \#(2.9)$$

$$Z = [\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N]^T \#(2.10)$$

状态量

$$X = [x_u, y_u, z_u, \delta_R]^T \#(2.11)$$

量测矩阵

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial x_u} & \frac{\partial \rho_1}{\partial y_u} & \frac{\partial \rho_1}{\partial z_u} & \frac{\partial \rho_1}{\partial \delta_R} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \rho_N}{\partial x_u} & \frac{\partial \rho_N}{\partial y_u} & \frac{\partial \rho_N}{\partial z_u} & \frac{\partial \rho_N}{\partial \delta_R} \end{bmatrix} \#(2.12)$$

2.4.2 多普勒定位

载波多普勒频移

$$D^j = \frac{1}{\lambda} \frac{d \Delta \rho_{ADR}^j}{dt_R}$$

$\Delta \rho_{ADR}^j$ 是 ADR (Accumulated Delta Range)

$$\Delta \rho_{ADR}^j(\vec{r}, \delta_R, t_R) = \lambda \phi^j$$

$$\begin{aligned} &= \left\| \vec{r} - A(\omega_E \delta t_p^j) \vec{r}^j (t_R - \delta_R - \delta t_p^j) \right\|_2 + (\delta_R - \delta^j) \\ &\quad + \delta t_{trop}^j - \delta t_{iono}^j + \lambda \beta^j \end{aligned}$$

简化后的载波多普勒模型表示为

$$-\lambda D^j = (\hat{\rho}^j)^T (\vec{v} - \vec{v}^j) + \frac{d \delta_R}{dT_R} - \frac{d \delta^j}{dT^j}$$

δ^j 是接收机到卫星的单位方向向量。

观测量

$$Z = [d_1, d_2, \dots, d_N]^T \#(2.13)$$

状态量

$$X = [x_u, y_u, z_u, \delta'_R]^T \#(2.14)$$

量测矩阵

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial x_u} & \frac{\partial d_1}{\partial y_u} & \frac{\partial d_1}{\partial z_u} & \frac{\partial d_1}{\partial \delta'_R} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial d_N}{\partial x_u} & \frac{\partial d_N}{\partial y_u} & \frac{\partial d_N}{\partial z_u} & \frac{\partial d_N}{\partial \delta'_R} \end{bmatrix} \#(2.15)$$

2.4.3 伪距+多普勒定位

观测量

$$Z = [\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N, d_1, d_2, \dots, d_N]^T \#(2.16)$$

状态量

$$X = [x_u, y_u, z_u, \delta_R, \delta'_R]^T \#(2.17)$$

量测矩阵

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial x_u} & \frac{\partial \rho_1}{\partial y_u} & \frac{\partial \rho_1}{\partial z_u} & \frac{\partial \rho_1}{\partial \delta_R} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \rho_N}{\partial x_u} & \frac{\partial \rho_N}{\partial y_u} & \frac{\partial \rho_N}{\partial z_u} & \frac{\partial \rho_N}{\partial \delta_R} & 0 \\ \frac{\partial d_1}{\partial x_u} & \frac{\partial d_1}{\partial y_u} & \frac{\partial d_1}{\partial z_u} & 0 & \frac{\partial d_1}{\partial \delta'_R} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \frac{\partial d_N}{\partial x_u} & \frac{\partial d_N}{\partial y_u} & \frac{\partial d_N}{\partial z_u} & 0 & \frac{\partial d_N}{\partial \delta'_R} \end{bmatrix} \#(2.18)$$

2.4.4DOP

(1) 观测量为伪距

最小二乘估计时，观测方程线性化后得到矩阵定位方程式为

$$G \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta \delta t_u \end{bmatrix} = b \#(2.19)$$

其中， G 为雅可比矩阵，残差阵

$$b = \begin{bmatrix} \rho_c^{(1)} - r^{(1)}(X_{k-1}) - \delta t_{u,k-1} \\ \rho_c^{(2)} - r^{(2)}(X_{k-1}) - \delta t_{u,k-1} \\ \vdots \\ \rho_c^{(N)} - r^{(N)}(X_{k-1}) - \delta t_{u,k-1} \end{bmatrix} \#(2.20)$$

则最小二乘法解为

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta \delta t_u \end{bmatrix} = (G^T G)^{-1} G^T b \#(2.21)$$

如果伪距观测量存在误差

$$\varepsilon_\rho = [-\varepsilon_\rho^{(1)} \quad -\varepsilon_\rho^{(2)} \quad \dots \quad -\varepsilon_\rho^{(N)}]^T \#(2.22)$$

则矩阵定位方程为

$$G \begin{bmatrix} \Delta x + \varepsilon_x \\ \Delta y + \varepsilon_y \\ \Delta z + \varepsilon_z \\ \Delta \delta t_u + \varepsilon_{\delta t_u} \end{bmatrix} = b + \varepsilon_\rho \#(2.23)$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ 和 $\varepsilon_{\delta t_u}$ 代表由误差 ε_ρ 所引起的定位、定时误差。最小二乘法解为

$$\begin{bmatrix} \Delta x + \varepsilon_x \\ \Delta y + \varepsilon_y \\ \Delta z + \varepsilon_z \\ \Delta \delta t_u + \varepsilon_{\delta t_u} \end{bmatrix} = (G^T G)^{-1} G^T b + (G^T G)^{-1} G^T \varepsilon_\rho \#(2.24)$$

得到

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{\delta t_u} \end{bmatrix} = (G^T G)^{-1} G^T \varepsilon_\rho \#(2.25)$$

设各个卫星的测量误差 $\varepsilon_\rho^{(n)}$ 均呈相同的正态分布，方差为 σ_{URE}^2 ，同时假设不同卫星间的测量互不相关，则测量误差 ε_ρ 的协方差阵 K_{ε_ρ} 为

$$\begin{aligned} K_{\varepsilon_\rho} &= E \left((\varepsilon_\rho - E(\varepsilon_\rho)) (\varepsilon_\rho - E(\varepsilon_\rho))^T \right) \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{URE}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{URE}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{URE}^2 \end{bmatrix} \\ &= \sigma_{URE}^2 I \#(2.26) \end{aligned}$$

则定位误差的协方差阵为

$$\begin{aligned} Cov \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{\delta t_u} \end{bmatrix} \right) &= E \left((G^T G)^{-1} G^T (\varepsilon_\rho - E(\varepsilon_\rho)) ((G^T G)^{-1} G^T (\varepsilon_\rho - E(\varepsilon_\rho))^T \right) \\ &= (G^T G)^{-1} G^T E \left((\varepsilon_\rho - E(\varepsilon_\rho)) (\varepsilon_\rho - E(\varepsilon_\rho))^T \right) G (G^T G)^{-1} = (G^T G)^{-1} \sigma_{URE}^2 \\ &= H \sigma_{URE}^2 \#(2.27) \end{aligned}$$

那么式(2.27)等号左右两边的对角元素存在如下关系

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \sigma_y^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \sigma_z^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \sigma_{\delta t_u}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & h_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & h_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & h_{44} \end{bmatrix} \sigma_{URE}^2 \#(2.28)$$

把误差坐标转换到东北天方向

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_e \\ \varepsilon_n \\ \varepsilon_u \\ \varepsilon_{\delta t_u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{\delta t_u} \end{bmatrix} \#(2.29)$$

则有

$$Cov \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_e \\ \varepsilon_n \\ \varepsilon_u \\ \varepsilon_{\delta t_u} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} S^T & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \sigma_{URE}^2 = \widetilde{H} \sigma_{URE}^2 \#(2.30)$$

进而定义

$$HDOP = \sqrt{\tilde{h}_{11} + \tilde{h}_{22}} \#(2.31A)$$

$$VDOP = \sqrt{\tilde{h}_{33}} \#(2.31B)$$

$$PDOP = \sqrt{\tilde{h}_{11} + \tilde{h}_{22} + \tilde{h}_{33}} \#(2.31C)$$

$$TDOP = \sqrt{\tilde{h}_{44}} \#(2.31D)$$

$$GDOP = \sqrt{\tilde{h}_{11} + \tilde{h}_{22} + \tilde{h}_{33} + \tilde{h}_{44}} \#(2.31E)$$

从而，各个方向上的定位误差标准差可表示为

$$\sigma_H = HDOP \sigma_{URE} \#(2.32A)$$

$$\sigma_V = VDOP \sigma_{URE} \#(2.32B)$$

$$\sigma_P = PDOP \sigma_{URE} \#(2.32C)$$

$$\sigma_{\delta t_u} = TDOP \sigma_{URE} \#(2.32D)$$

$$\sigma_G = GDOP \sigma_{URE} \#(2.32E)$$

(2) 观测量为多普勒

$$\begin{aligned} f &= \left[\frac{v_{sx}(x_u - x_s) + v_{sy}(y_u - y_s) + v_{sz}(z_u - z_s)}{c \sqrt{(x_u - x_s)^2 + (y_u - y_s)^2 + (z_u - z_s)^2}} \right] f_0 + \beta_1 \left(\frac{f_0}{c} \right) + e_f \\ \left\{ \begin{array}{l} d_1 = \left[\frac{v_{sx1}(x_u - x_{s1}) + v_{sy1}(y_u - y_{s1}) + v_{sz1}(z_u - z_{s1})}{\sqrt{(x_u - x_{s1})^2 + (y_u - y_{s1})^2 + (z_u - z_{s1})^2}} \right] + \beta_1 + 2\beta_2 t_1 \left(\frac{f_0}{c} \right) + e_{f1} \\ d_2 = \left[\frac{v_{sx2}(x_u - x_{s2}) + v_{sy2}(y_u - y_{s2}) + v_{sz2}(z_u - z_{s2})}{\sqrt{(x_u - x_{s2})^2 + (y_u - y_{s2})^2 + (z_u - z_{s2})^2}} \right] + \beta_1 + 2\beta_2 t_2 \left(\frac{f_0}{c} \right) + e_{f2} \\ \dots \\ d_n = \left[\frac{v_{sxn}(x_u - x_{sn}) + v_{syn}(y_u - y_{sn}) + v_{szn}(z_u - z_{sn})}{\sqrt{(x_u - x_{sn})^2 + (y_u - y_{sn})^2 + (z_u - z_{sn})^2}} \right] + \beta_1 + 2\beta_2 t_n \left(\frac{f_0}{c} \right) + e_{fn} \end{array} \right. \end{aligned}$$

残差阵为

$$b = \begin{bmatrix} d_f^{(1)} - d^{(1)}(X_{k-1}) - \delta f_{u,k-1} \\ d_f^{(2)} - d^{(2)}(X_{k-1}) - \delta f_{u,k-1} \\ \vdots \\ d_f^{(N)} - d^{(N)}(X_{k-1}) - \delta f_{u,k-1} \end{bmatrix} \#(2.33)$$

多普勒观测量的误差为

$$\varepsilon_d = [-\varepsilon_d^{(1)} \quad -\varepsilon_d^{(2)} \quad \dots \quad -\varepsilon_d^{(N)}]^T \#(2.34)$$

解算的误差为

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{\delta f_u} \end{bmatrix} = (G^T G)^{-1} G^T \varepsilon_d \#(2.35)$$

设各个卫星的多普勒测量误差 $\varepsilon_d^{(n)}$ 均呈相同的正态分布，方差为 σ_{UDE}^2 ，同时假设不同卫星间的测量互不相关，则测量误差 ε_d 的协方差阵 K_{ε_d} 为

$$\begin{aligned} K_{\varepsilon_d} &= E \left((\varepsilon_d - E(\varepsilon_d)) (\varepsilon_d - E(\varepsilon_d))^T \right) \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{UDE}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{UDE}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{UDE}^2 \end{bmatrix} \\ &= \sigma_{UDE}^2 I \#(2.36) \end{aligned}$$

则定位误差的协方差阵为

$$\begin{aligned} Cov \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{\delta f_u} \end{bmatrix} \right) &= E \left((G^T G)^{-1} G^T (\varepsilon_d - E(\varepsilon_d)) ((G^T G)^{-1} G^T (\varepsilon_d - E(\varepsilon_d))^T) \right) \\ &= (G^T G)^{-1} G^T E \left((\varepsilon_d - E(\varepsilon_d)) (\varepsilon_d - E(\varepsilon_d))^T \right) G (G^T G)^{-1} = (G^T G)^{-1} \sigma_{UDE}^2 \\ &= H \sigma_{UDE}^2 \#(2.37) \end{aligned}$$

那么式 3 等号左右两边的对角元素存在如下关系

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \sigma_y^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \sigma_z^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \sigma_{\delta f_u}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & h_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & h_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & h_{44} \end{bmatrix} \sigma_{UDE}^2 \#(2.38)$$

把误差坐标转换到东北天方向

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_e \\ \varepsilon_n \\ \varepsilon_u \\ \varepsilon_{\delta f_u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{\delta f_u} \end{bmatrix} \#(2.39)$$

则有

$$Cov \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_e \\ \varepsilon_n \\ \varepsilon_u \\ \varepsilon_{\delta f_u} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} S^T & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \sigma_{UDE}^2 = \widetilde{H} \sigma_{UDE}^2 \#(2.40)$$

进而定义

$$DPDOP = \sqrt{\tilde{h}_{11} + \tilde{h}_{22} + \tilde{h}_{33}} \#(2.41A)$$

$$DHDOPO = \sqrt{\tilde{h}_{11} + \tilde{h}_{22}} \#(2.41B)$$

$$DVDOPO = \sqrt{\tilde{h}_{33}} \#(2.41C)$$

$$DFDOPO = \sqrt{\tilde{h}_{44}} \#(2.41D)$$

$$DGDOPO = \sqrt{\tilde{h}_{11} + \tilde{h}_{22} + \tilde{h}_{33} + \tilde{h}_{44}} \#(2.41E)$$

从而，各个方向上的定位误差标准差可表示为

$$\sigma_H = HDOP \sigma_{URE} \#(2.42A)$$

$$\sigma_V = VDOP \sigma_{URE} \#(2.42B)$$

$$\sigma_P = PDOP \sigma_{URE} \#(2.42C)$$

$$\sigma_{\delta f_u} = FDOP \sigma_{URE} \#(2.42D)$$

$$\sigma_G = GDOP \sigma_{URE} \#(2.42E)$$

2.5 伪距观测量和多普勒频率观测量

多普勒频率观测量也被称为伪距变化率观测量，单位时间内的伪距观测量之间的差就是多普勒频率观测量，但如果把实际采集的伪距数据和多普勒频率数据进行对比，就会发现单位时间内的伪距观测量中的噪声要比多普勒频率观测量中的噪声大得多，这是因为伪距观测量中时间相关性强的噪声项都不会在多普勒频率中出现，这些噪声项包括电离层延迟、对流层延迟、星历误差项的一部分好环境变动不剧烈条件下的多径效应，所以多普勒观测量要“干净”的多。

3 GPS 仿真结果

bjf1 接收机的位置是 ECEF 坐标系下的 (-2195015.633774167 , 4389738.432204695 , 4059886.720907325) 点。观测量的传播频率为 L1(1575.42MHz) , 伪距观测量选取 C1C , 多普勒观测量选取 D1C。

3.1 单历元

3.1.1 伪距

最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点。

选取 3 个时刻 , 得到的定位结果如下表 :

时刻点 (周积秒和小时)	86400(00 00:00)	104400(05 00:00)	122400(10 00:00)
--------------	-----------------	------------------	------------------

卫星数	10	8	11
定位误差 (米)	9.568	6.947	9.428
东向误差 (米)	-4.225	0.465	-3.815
北向误差 (米)	-1.107	-0.853	-4.114
天向误差 (米)	8.513	-6.879	-7.577
PDOP	1.610	1.833	1.819
GDOP	1.790	2.104	2.081

3.1.2 多普勒

最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点。

选取 3 个时刻 , 得到的定位结果如下表 :

时刻点 (周积秒和小)	86400	104400	122400
-------------	-------	--------	--------

时)

卫星数	10	8	11
定位误差 (米)	968.862	217.926	486.554
东向误差 (米)	-834.001	194.529	-478.975
北向误差 (米)	-387.114	-98.076	44.394
天向误差 (米)	305.423	-5.589	73.122
PDOP	1674.836	2336.830	2565.261

3.1.3 伪距+多普勒

最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点。

选取 3 个时刻，得到的定位结果如下表：

时刻点 (周积秒和小 86400 104400 122400

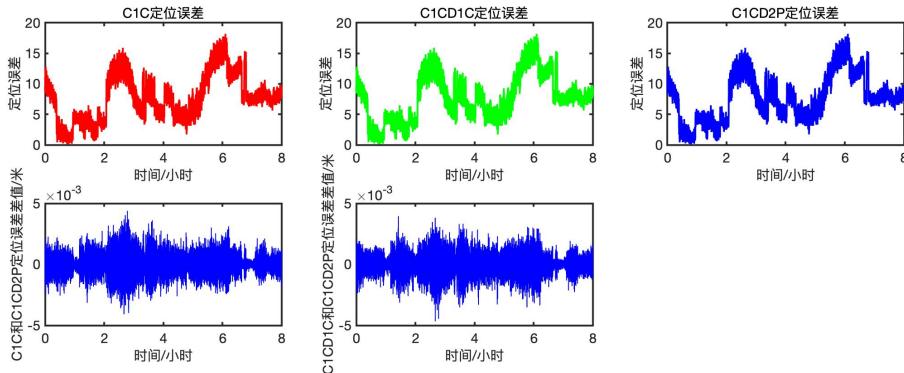
时)

卫星数	10	8	11
定位误差 (米)	9.568	6.947	9.428
东向误差 (米)	-4.225	0.465	-3.815
北向误差 (米)	-1.107	-0.853	-4.113
天向误差 (米)	8.513	-6.879	-7.576
PDOP	1.610	1.833	1.819

3.1.4 双频伪距+多普勒

(1) 单历元

GPS 多星单历元定位，观测量为 C1C、D1C 和 D2P。



可以看出，C1C 和 D1C 组合定位的结果与 C1C 和 D2P 组合定位的结果基本相同。

(2) 单星多历元

GPS 单星多历元定位，观测量为 C1C、D1C 和 D2P。

选取对 G10 的观测量，观测时长 7452 秒，间隔为 1 秒。C1C 和 D1C 组合定位误差为 37.289 米，C1C 和 D2P 组合定位误差为 37.249 米。

选取对 G25 的观测量，观测时长 12107 秒，间隔为 1 秒。C1C 和 D1C 组合定位误差为 20.979 米，C1C 和 D2P 组合定位误差为 20.982 米。

可以看出，无论是单历元多星还是多历元单星，伪距和多普勒定位的结果，与所选择的多普勒的观测值的载波频率是无关的。

3.1.5 结论

GPS 单历元伪距定位结果误差在几米到十几米，单历元多普勒定位结果误差在几百米；等权前提下单历元伪距+多普勒定位结果基本和单历元伪距定位结果一致。

3.2 多历元

单星多历元定位选取的是 prn=31 的卫星。

3.2.1 伪距

最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点，采样间隔为 1 秒，时间段 86400-100800 (04 00 00) 共 14401 个历元，定位结果如下：

历元数	14401
定位误差 (米)	8.620
东向误差 (米)	-0.398
北向误差 (米)	-7.549
天向误差 (米)	4.141
PDOP	0.879
GDOP	1.039

(1) 误差与观测时长的关系

最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点，采样间隔为 1 秒，定位结果如下：

时间段(周积 秒和小时)	86400-9 7200 (3h)	86400-9 99000 (3.5h)	86400-9 100800 (4h)	86400-9 102600 (4.5h)	86400-1 04400 (5h)	86400-1 108000 (6h)
历元数	10801	99000	14401	16201	18001	21601
定位误差 (米)	20.732	4.451	8.620	8.957	5.269	12.825
东向误差 (米)	-4.978	-1.174	-0.398	-0.358	-0.584	-1.584

北向误差 (米)	9.130	-4.283	-7.549	-7.756	-5.203	1.886
天向误差 (米)	-17.935	-0.306	4.141	4.467	-0.595	-12.586
PDOP	1.459	1.054	0.879	0.837	0.802	0.308
GDOP	1.685	1.235	1.039	0.993	0.950	0.359

(2) 误差与观测间隔的关系

最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点，时间段 86400-100800 (04 00 00)，定位结果如下：

采样间隔(秒)	1	2	5	10	100	1800	3600	4800
历元数	14401	7201	2881	1441	145	9	5	4
定位误差(米)	8.620	8.679	8.713	8.433	8.951	9.678	9.117	32.126
东向误差(米)	-0.398	-0.391	-0.383	-0.397	-0.269	0.592	0.571	2.2016
北向误差(米)	-7.549	-7.590	-7.614	-7.461	-7.803	-8.560	-8.233	-21.719
天向误差(米)	4.141	4.191	4.219	3.911	4.376	4.474	3.873	23.569
PDOP	0.879	1.253	1.982	2.799	8.635	27.283	33.635	39.684
GDOP	1.039	1.481	2.343	3.307	10.202	32.126	39.521	46.601

3.2.2 多普勒

最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点，采样间隔为 1 秒，时间段 86400-100800 (04 00 00) 共 14401 个历元，定位结果如下：

历元数	14401
定位误差(米)	125.275

东向误差 (米)	-40.907
北向误差 (米)	51.511
天向误差 (米)	-106.616
PDOP	429.463

(1) 误差与观测时长的关系

最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点，采样间隔为 1 秒，定位结果如下：

时间段(周积 秒和小时)	86400-972 00	86400- 99000	86400- 100800	86400- 102600	86400-1 04400	86400- 108000
历元数	(3h)	(3.5h)	(4h)	(4.5h)	(5h)	(6h)
定位误差 (米)	10801	99000	14401	16201	18001	21601
东向误差 (米)	1026.448	517.287	125.27 5	78.829	13.345	16.808
北向误差 (米)	-422.753	-200.695	-40.907	35.067	12.885	12.150
天向误差 (米)	375.932	201.057	51.511	-33.820	-0.372	-5.931
PDOP	-856.476	-432.299	-106.61 6	61.971	3.455	9.984
GDOP	1436.955	731.270	429.46 3	276.363	192.022	111.484

(2) 误差与观测间隔的关系

采样间隔(秒)	1	2	5	10	100	1800	3600
历元数	14401	7201	2881	1441	145	9	5
定位误差(米)	125.27	266.71	685.295	772.286	2492.065	1853.062	6018.218
	5	5					
东向误差(米)	-40.907	-88.792	-194.828	-248.819	903.739	588.399	1909.262
北向误差(米)	51.511	123.68	316.880	368.395	-1059.90	-693.197	-2962.19
		8			7		5
天向误差(米)	-106.61	-218.98	-575.549	-631.506	2066.456	1614.652	4878.429
	6	4					
PDOP	429.46	609.18	960.284	1357.393	4206.081	13256.63	15768.06
	3	0				0	1
GDOP	429.46	609.18	960.284	1357.393	4206.081	13256.63	15768.06
	3	0				0	1

3.2.3 多普勒+伪距

最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点，采样间隔为 1 秒，时间段 86400-100800 (04 00 00) 共 14401 个历元，定位结果如下：

历元数	14401
定位误差(米)	8.547
东向误差(米)	-0.414
北向误差(米)	-7.521
天向误差(米)	4.039

PDOP	0.881
------	-------

(1) 误差与观测时长的关系

最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点，采样间隔为 1 秒，定位结果如下：

时间段(周积秒和小时)	86400-9 7200	86400- 99000	86400- 100800	86400- 102600	86400-1 04400	86400- 108000
历元数	10801	99000	14401	16201	18001	21601
定位误差	21.148	4.295	8.547	8.800	5.305	12.581

(米)

东向误差	-5.040	-1.234	-0.414	-0.387	-0.594	-1.577
北向误差	9.345	-4.058	-7.521	-7.672	-5.241	1.730
天向误差	-18.289	-0.678	4.039	4.293	-0.566	-12.362
PDOP	1.453	1.055	0.881	0.837	0.803	0.308
GDOP	1.678	1.236	1.042	0.992	0.950	0.359

(2) 误差与观测间隔的关系

最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点，时间段 86400-100800(04 00 00)，定位结果如下：

采样间隔	1	2	5	10	100	1800	3600	4800
(秒)								

历元数	14401	7201	2881	1441	145	9	5	4
定位误差	8.547	8.306	8.497	8.181	6.985	6.915	19.531	69.623
(米)								
东向误差	-0.414	-0.439	-0.375	-0.387	-0.411	0.443	1.657	4.395
(米)								
北向误差	-7.521	-7.371	-7.515	-7.357	-6.686	-6.706	-14.862	-42.070
(米)								
天向误差	4.039	3.801	3.946	3.556	1.979	1.626	12.563	55.300
(米)								
PDOP	0.881	1.253	1.979	2.793	8.613	27.305	33.641	39.686
GDOP	1.042	1.481	2.339	3.301	10.176	32.151	39.529	46.603

4 BDS 仿真结果

北斗卫星 prn 及发射日期^[1,2]

GEO (约 35800km)	C01 20100117、C02 20121025、C03 20160612、 C04 20101101、 C05 20120225、C59 20181101、C60 20200309、 C61 20200623
IGSO (约 35800km)	C06 20100801、C07 20101218、C08 20110410、 C09 20110727、 C10 20111202、C13 20160330、C16 20170710、 C18 20150930、 C31 20150330、C38 20190420、C39 20190625、 C40 20191105
MEO (约 21500km)	C11 20120430、C12 20120430、C14 20120919、 C19 20171105、 C20 20171105、C21 20180212、C22 20180212、 C23 20180729、 C24 20180729、C25 20180825、C26 20180825、 C27 20180102、 C28 20180102、C29 20180330、C30 20180330、 C32 20120919、 C33 20120919、C34 20181015、C35 20181015、 C36 20181119、

C37 20181119、C41 20191216、C42 20191216、

C43 20191123、

C44 20191123、C45 20190923、C46 20190923、

C57 20150725、C58 20150725

北斗卫星导航系统（简称北斗系统）是一个卫星导航系统，能为全球用户提供全天候、全天时、高精度的定位、导航和授时服务。北斗系统发展共有三代，自第二代开始的北斗系统被正式称为“北斗卫星导航系统”。

北斗二号系统（第二代北斗系统）是一个包含 16 颗卫星的全球卫星导航系统，分别为 6 颗静止轨道卫星、6 颗倾斜地球同步轨道卫星、4 颗中地球轨道卫星。2012 年 11 月，第二代北斗系统开始在亚太地区为用户提供区域定位服务。

北斗三号系统（第三代北斗系统）由三种不同轨道的卫星组成，包括 24 颗地球中圆轨道卫星（覆盖全球），3 颗倾斜地球同步轨道卫星（覆盖亚太大部分地区）和 3 颗地球静止轨道卫星（覆盖中国）。北斗三号于 2018 年提前开放了北斗系统的全球定位功能。北斗三号系统于 2020 年 7 月 31 日完整开通。

仿真利用了合众思壮在 2021 年 3 月 1 号使用 AIR20 接收机得到的结果。

选取的伪距和多普勒观测量分别为 C2I 和 D2I，即频率为 B1(1561.0980MHz)，测距码为 I。

4.1 单历元

4.1.1 伪距

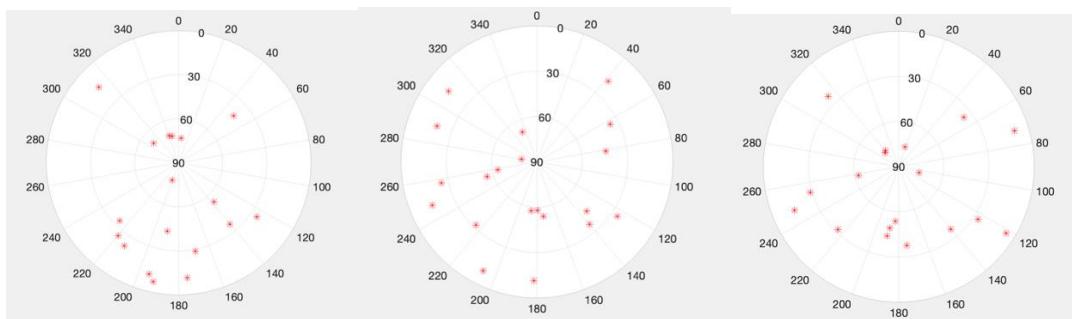
最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点。

(1) 选取 3 个时刻

时刻点 (周积秒和小时)
时)

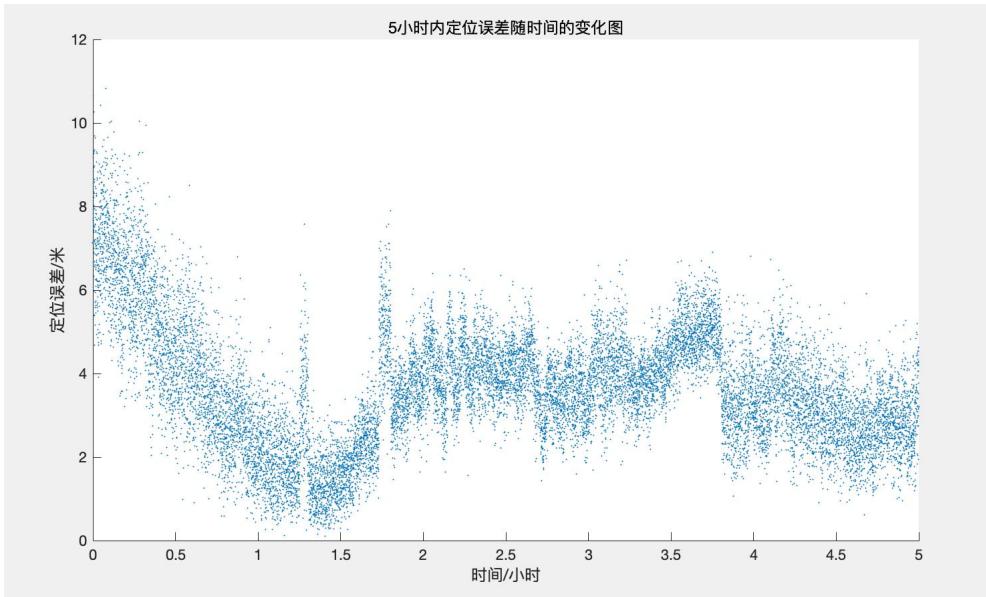
卫星数	18	20	18
定位误差 (米)	7.124	3.213	5.101
东向误差 (米)	-2.521	-1.841	-0.314
北向误差 (米)	1.394	-1.230	4.269
天向误差 (米)	6.515	2.328	-2.774
PDOP	1.3288	1.0747	1.131
GDOP	1.5433	1.2203	1.292
HDOP	0.8065	0.6209	0.6960
VDOP	1.0560	0.8772	0.8918
TDOP	0.7849	0.5779	0.6254
迭代次数	5	5	5

三个时刻北斗卫星观测的星空图如下：



(2) 5 小时定位结果

选取 2021 年 3 月 1 号 0 点-5 点五个小时的观测，利用伪距观测量进行定位
得到定位结果如下图：

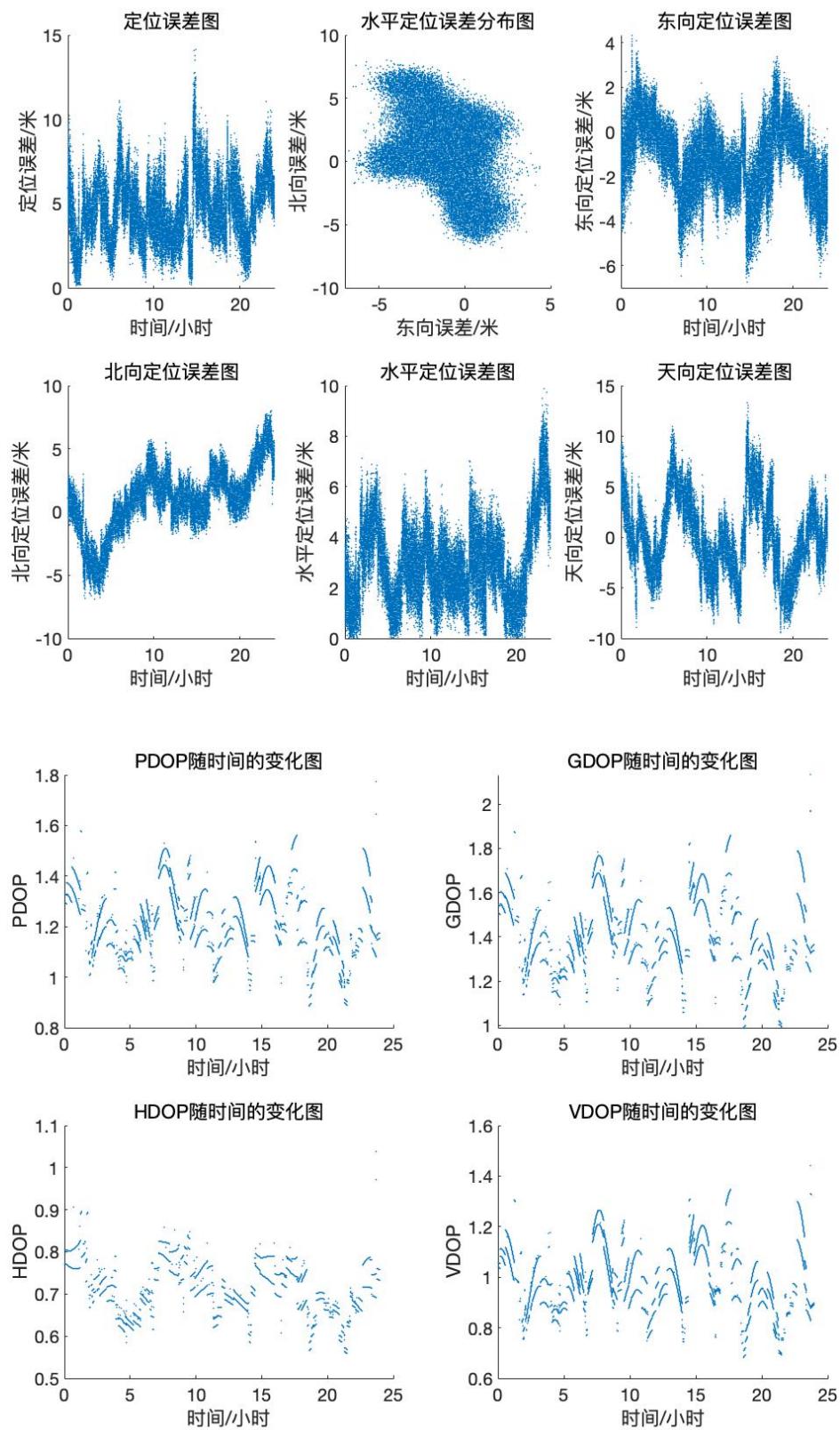


五小时内定位结果的均值为 3.6370 米，方差为 2.0874。

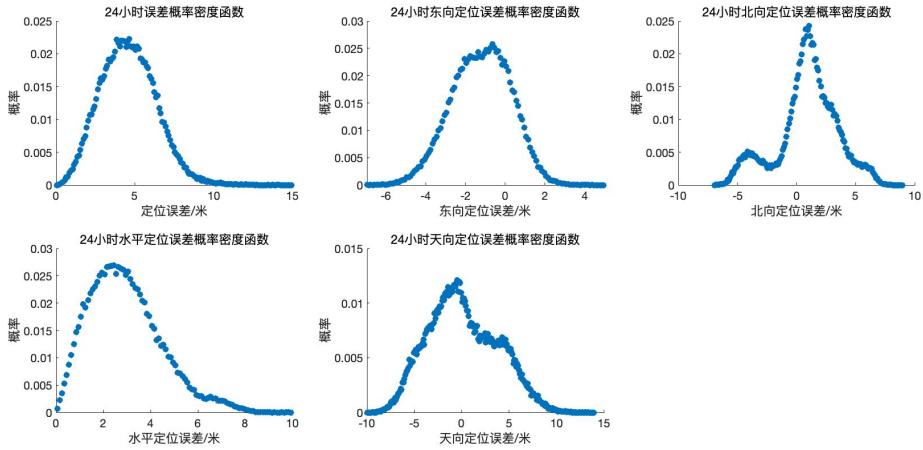
(3) 24 小时定位结果

选取 2021 年 3 月 1 号一整天的观测，利用伪距观测量进行定位得到定位结果如下。

(3.1) 定位结果图



(3.2) 定位结果统计



定位误差统计：

误差 95% 为 $7.519m$

均值为 $4.5951m$

方差为 $3.0396m^2$

东向误差统计：

均值为 $-1.2135m$

方差 $\sigma_E^2 = 2.1857m^2$

北向误差统计：

均值为 $0.93308m$

方差 $\sigma_N^2 = 6.4108m^2$

天向误差统计：

均值为 $0.12899m$

方差 $\sigma_U^2 = 13.1981$

PDOP 统计：

均值为 1.2028

方差为 0.016748

GDOP 统计:

均值为 1.3872

方差为 0.027749

HDOP 统计:

均值为 0.70746

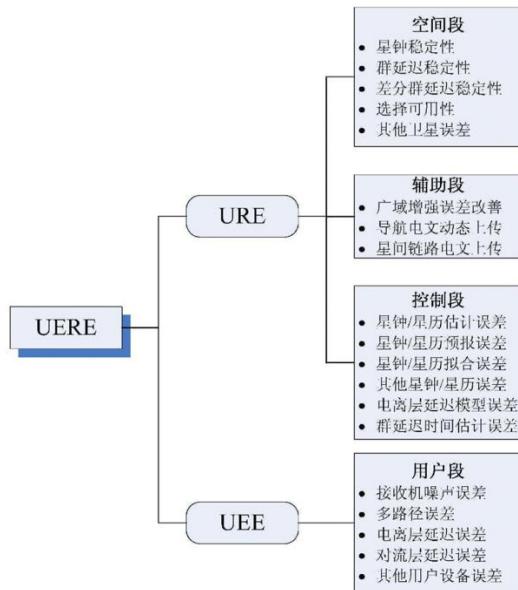
方差为 0.0034668

VDOP 统计:

均值为 0.97174

方差为 0.015317

(3.3) 计算用户等效测距误差^[1,2]



用户测距误差的方差表示为[1]

$$\sigma_{URE}^2 = \sigma_{CS}^2 + \sigma_P^2 + \sigma_{RNM}^2$$

其中 σ_{CS}^2 代表由卫星地面监控部分产生的卫星星历和卫星钟差模型的误差方差，

σ_P^2 代表信号在传播途径上的大气延时校正误差方差， σ_{RNM}^2 代表与接收机和多

路径有关的测量误差方差。在实际中，接收机必须根据卫星信号的强弱、卫星仰角高低和接收机跟踪环路的运行状态以及 URA 值等指标，对不同时刻、不同卫星测量值的 σ_{URE}^2 进行估算。

距离均方根 (drms) 定义为

$$drms = \sqrt{\sigma_E^2 + \sigma_N^2} \#(4.1)$$

有

$$drms = HDOP \times \sigma_{URE} \#(4.2)$$

取 $HDOP$ 的均值 0.70746，计算得到 $\sigma_{URE} = 4.1444m$

此外也可以利用

$$\sqrt{\sigma_E^2 + \sigma_N^2 + \sigma_U^2} = PDOP \times \sigma_{URE} \#(4.3)$$

取 $PDOP$ 的均值 1.3872，计算得到 $\sigma_{URE} = 3.8813$ 。

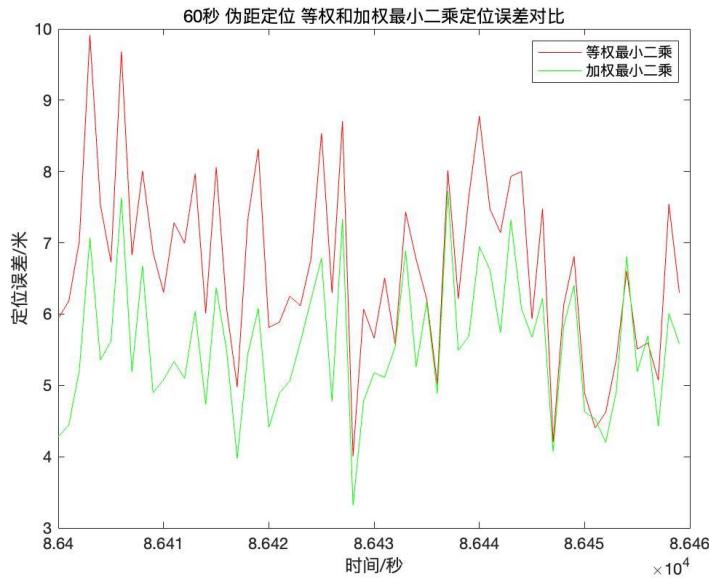
(4) 伪距加权定位 (X)

权重为

$$w_i = \frac{1}{\sqrt{URA_i^2 + \frac{1}{(\sin \theta_i)^2}}}$$

其中， URA_i 为用户测距精度， θ_i 为卫星的仰角。

对比等权的方式，对一分钟内的结果进行绘制得到下图



可以看出，该加权的方式能明显改善定位的精度。对八小时内的定位结果分析，定位的误差平均可以提高。

(5) 双频误差修正

$$\rho_{mn} = a_{mn}\rho_m + b_{mn}\rho_n$$

$$a_{mn} = \frac{f_m^2}{f_m^2 - f_n^2}$$

$$b_{mn} = 1 - a_{mn} = \frac{f_n^2}{f_n^2 - f_m^2}$$

4.1.2 多普勒

最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点。

(1) 选取 3 个时刻

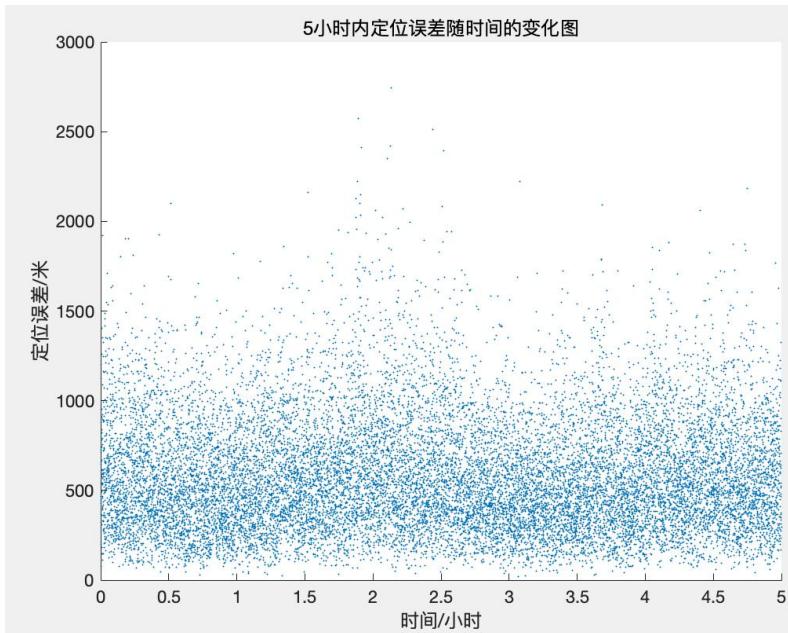
时刻点 (周积秒和小时) 86400(00 00:00) 104400(05 00:00) 122400(10 00:00)
时)

卫星数	18	20	18
定位误差 (米)	645.868	296.234	81.888

东向误差 (米)	370.380	20.271	-64.469
北向误差 (米)	102.826	150.847	-13.617
天向误差 (米)	-519.029	254.143	48.620
PDOP (m/Hz)	2280.7260	1655.2434	2070.8102
GDOP (m/Hz)	2280.7260	1655.2434	2070.8102
HDOP (m/Hz)	2104.8487	1330.2418	1696.1608
VDOP (m/Hz)	878.2500	985.0318	1187.9789
FDOP(频率)	0.0507	0.0437	0.0493
迭代次数	5	5	5

(2) 5 小时定位结果

选取 2021 年 3 月 1 号 0 点-5 点五个小时的观测，利用多普勒观测量进行定位得到定位结果如下图：

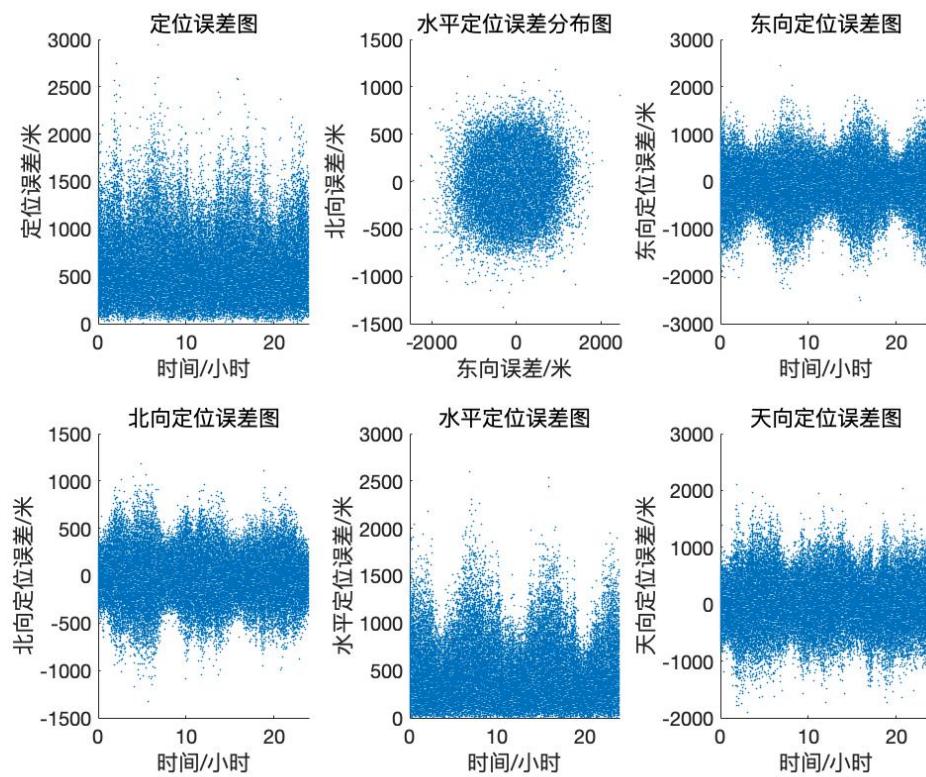


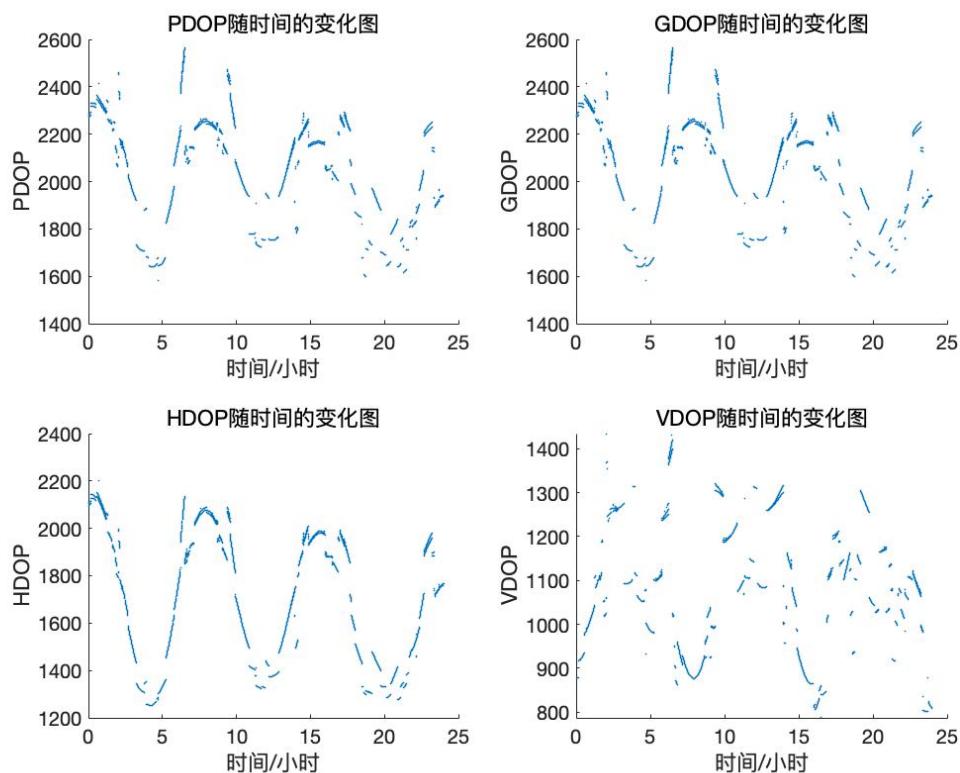
五小时内定位结果的均值为 573.4786 米，方差为 9.6614×10^4 。

(3) 24 小时定位结果

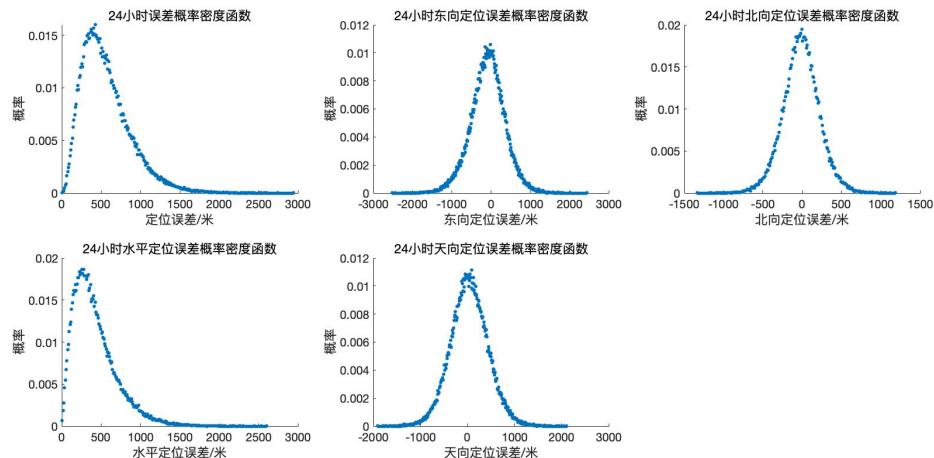
选取 2021 年 3 月 1 号一整天的观测，利用多普勒观测量进行定位得到定位结果如下。

(3.1) 定位结果图





(3.2) 定位结果统计



定位误差统计：

误差 95% 为 $1148.0414m$

均值为 $562.8692m$

方差为 $95160.1308m^2$

东向误差统计：

均值为-82.0349m

方差 $\sigma_E^2 = 191782.6167m^2$

北向误差统计:

均值为-13.7871m

方差为 $\sigma_N^2 = 52927.8971m^2$

天向误差统计:

均值为 38.3039m

方差为 $\sigma_U^2 = 158887.9104$

PDOP 统计:

均值为 2006.3515

方差为 49578.965

GDOP 统计:

均值为 2006.3515

方差为 49578.965

HDOP 统计:

均值为 1679.0262

方差为 77174.8176

VDOP 统计:

均值为 1076.2325

方差为 20445.5324

(3.3) 计算用户等效测频误差

采取和计算用户等效测距误差一样的方法，得到

$$\sigma_{UFE} = \frac{drms}{HDOP} = 0.2946 Hz \#(4.4)$$

$$\sigma_{UFE} = \frac{\sqrt{\sigma_E^2 + \sigma_N^2 + \sigma_U^2}}{PDOP} = 0.3166 Hz \#(4.5)$$

4.1.3 多普勒+伪距

最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点。

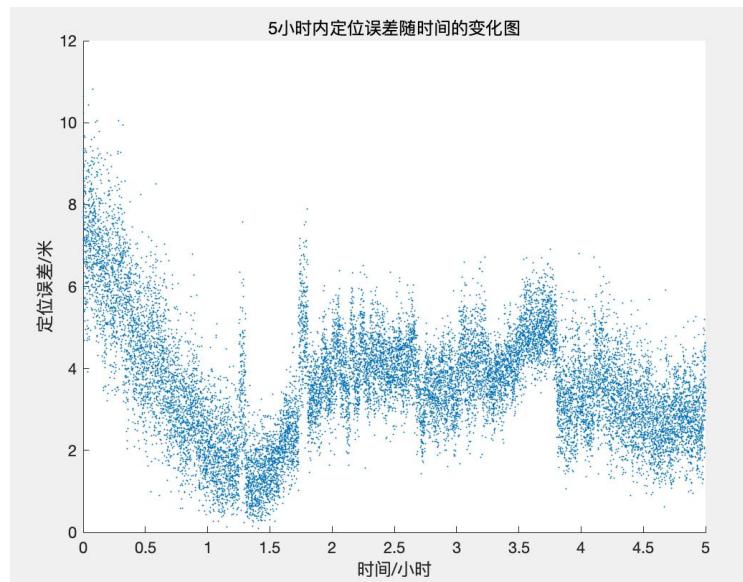
(1) 选取 3 个时刻

时刻点	86400(00 00:00)	104400(05 00:00)	122400(10 00:00)
卫星数	18	20	18
定位误差 (米)	7.123	3.213	5.101
东向误差 (米)	-2.521	-1.841	-0.314
北向误差 (米)	1.394	-1.230	4.269
天向误差 (米)	6.515	2.328	-2.774
PDOP	1.328	1.074	1.131
GDOP	1.543	1.220	1.292
HDOP	0.8065	0.6209	0.6959
VDOP	1.0560	0.8772	0.8917
TDOP	0.7850	0.5779	0.6254
FDOP	0.0453	0.0429	0.0452
迭代次数	5	5	5

(2) 5 小时定位结果

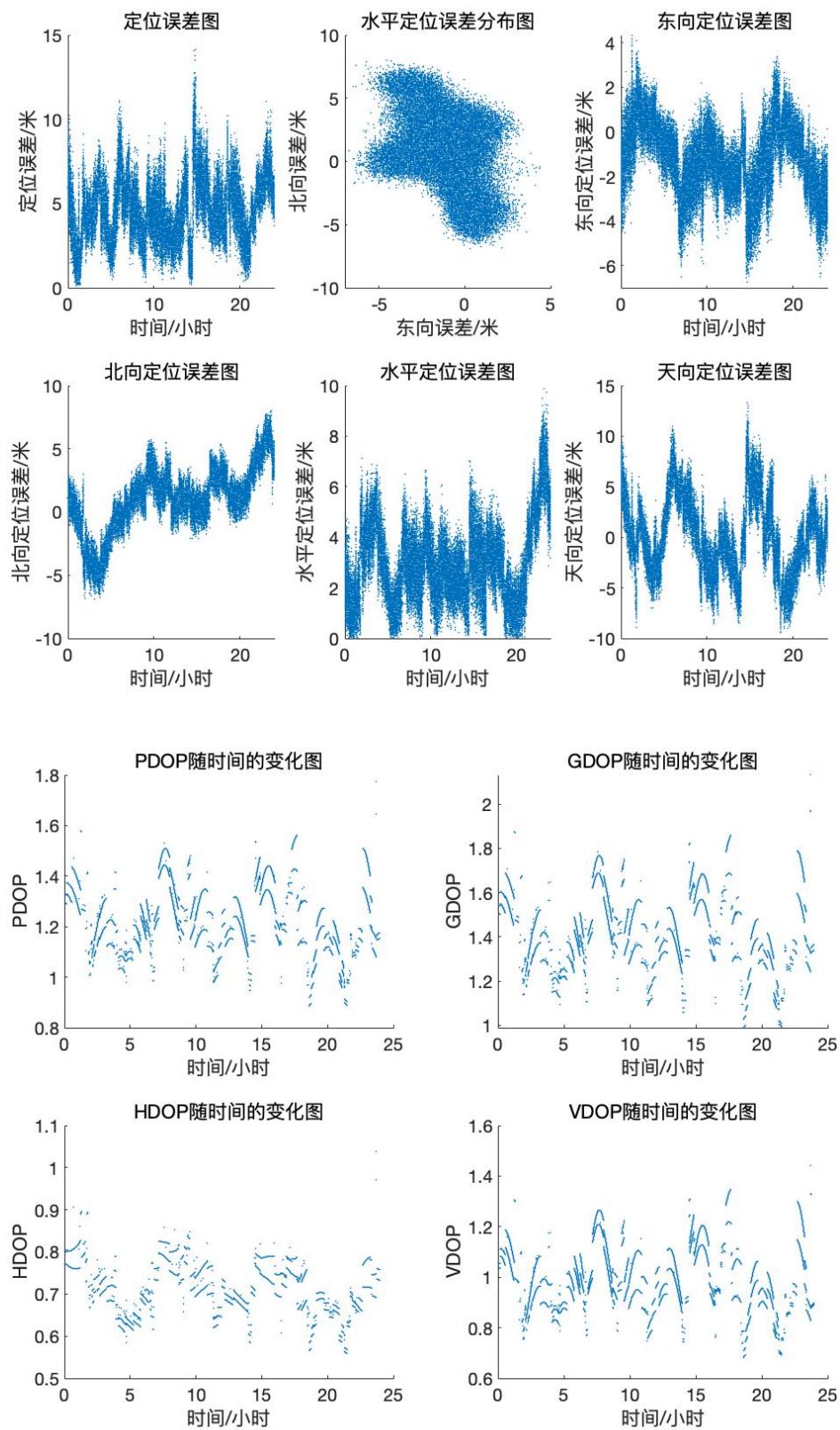
选取 2021 年 3 月 1 号 0 点-5 点五个小时的观测，利用伪距+多普勒观测量

进行定位得到定位结果如下图：



五小时内定位结果的均值为 3.6370 米，方差 : 2.0874。

(3) 24 小时定位结果



(3.1) 加权

利用 4.1.1 和 4.1.2 求出的用户等效测距误差 (4 米) 和等效测频误差 (0.3 赫兹)，以伪距和多普勒为观测量，采用加权最小二乘的方法，选取 2021 年 3 月 1 号整天的观测定位，得到的定位结果的统计结果如下。

总误差统计：

误差 95% 为 $7.5218m$

均值为 $4.5951m$

方差为 $3.0431m^2$

东向误差统计：

均值为 $-1.2146m$

方差为 $2.1855m^2$

北向误差统计：

均值为 $0.93251m$

方差为 $6.4071m^2$

天向误差统计：

均值为 $0.13466m$

方差为 $13.2027m^2$

PDOP 统计：

均值为 1.2028

方差为 0.016748

GDOP 统计：

均值为 1.3872

方差为 0.027749

HDOP 统计:

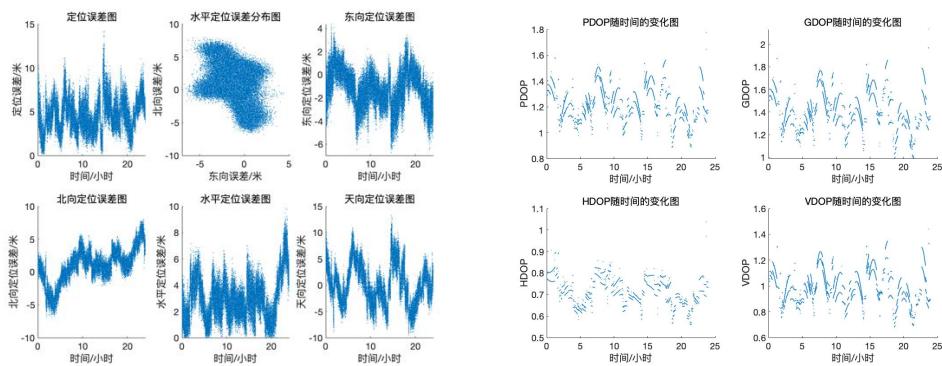
均值为 0.70746

差为 0.0034668

VDOP 统计:

均值为 0.97174

方差为 0.015317



(3.2) 等权

以伪距和多普勒为观测量，采用等权最小二乘的方法，选取 2021 年 3 月 1 号整天的的观测定位，得到的定位结果的统计结果如下。

总误差统计:

误差 95% 为 $7.5188m$

均值为 $4.5951m$

方差为 $3.0396m^2$

东向误差统计:

均值为 $-1.2135m$

方差为 $2.1857m^2$

北向误差统计:

均值为 $0.93308m$

方差为 $6.4108m^2$

天向误差统计:

均值为 $0.12902m$

方差为 $13.1981m^2$

PDOP 统计:

均值为 1.2028

方差为 0.016748

GDOP 统计:

均值为 1.3872

方差为 0.027749

HDOP 统计:

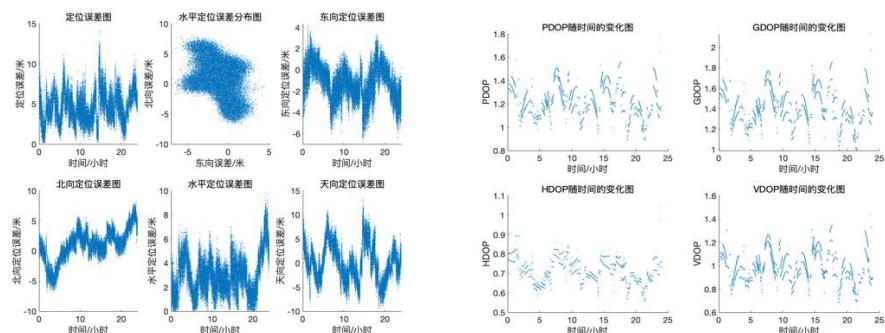
均值为 0.70746

方差为 0.0034668

VDOP 统计:

均值为 0.97174

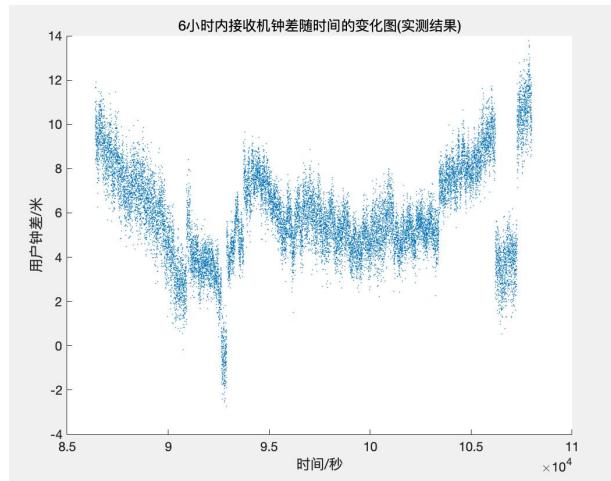
方差为 0.015317



4.1.4 用户钟差建模

(1) 6 小时

取 2021 03 01 00 00 00.0000000-2021 03 01 06 00 00.0000000 解算得到的接收机钟差值，得到下图结果



用二次曲线对接收机钟差进行拟合

$$\Delta t_u = B_0 + B_1(t - t_0) + B_2(t - t_0)^2 \#(4.6)$$

其中 t_0 为参考时刻； t 为观测时刻； B_0 为参考时刻的接收机钟差； B_1 为接收机钟漂； B_2 为接收机频漂。得

$$b(t) = b_0 + b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)^2$$
$$rms\ position\ error = \sigma_{URE} \times DOP$$

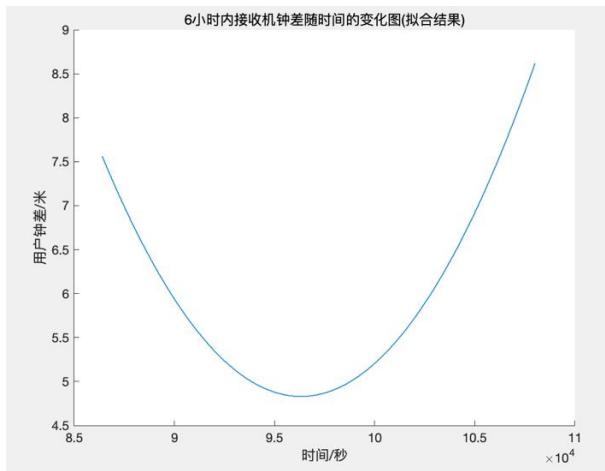
$$\sigma_{URE}^2$$

$$B_0 = 7.5611459958017m \#(4.7)$$

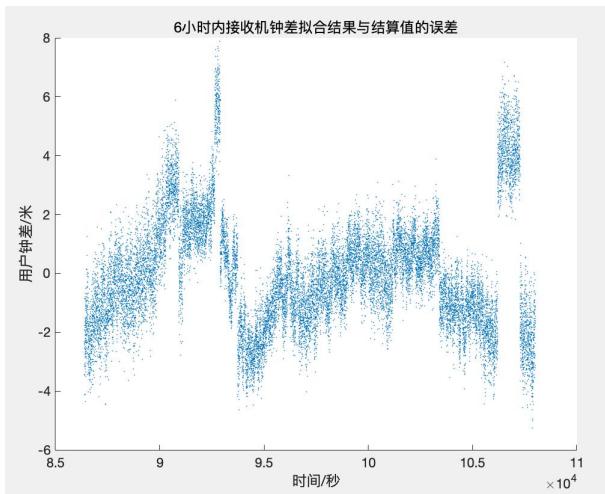
$$B_1 = -0.0005504194548997m/s \#(4.8)$$

$$B_2 = 2.77383461631902 \times 10^{-8}m/s^2 \#(4.9)$$

再用解算出的接收机钟差参数对钟差进行拟合，得到下图

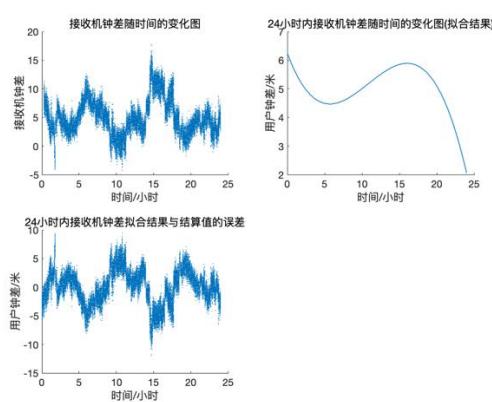


接收机钟差拟合结果与解算结果的误差图为



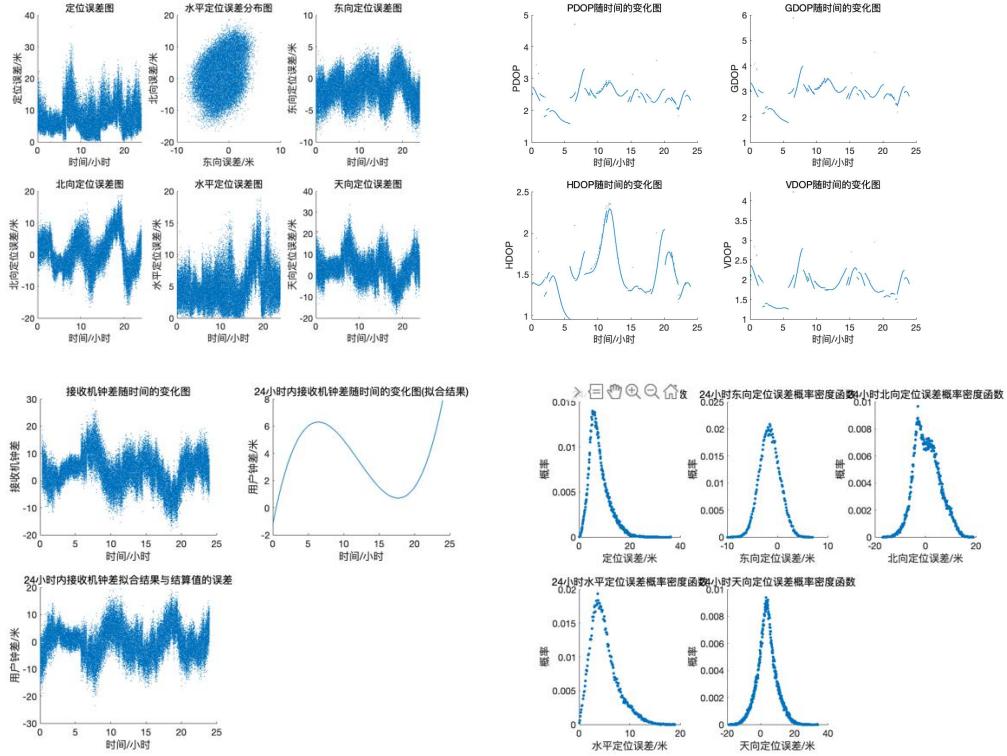
(2) C2I , 24 小时

取 2021 年 3 月 1 日整天的观测量，伪距观测量为 C2I ，解算得到的接收机钟差值，得到下图结果



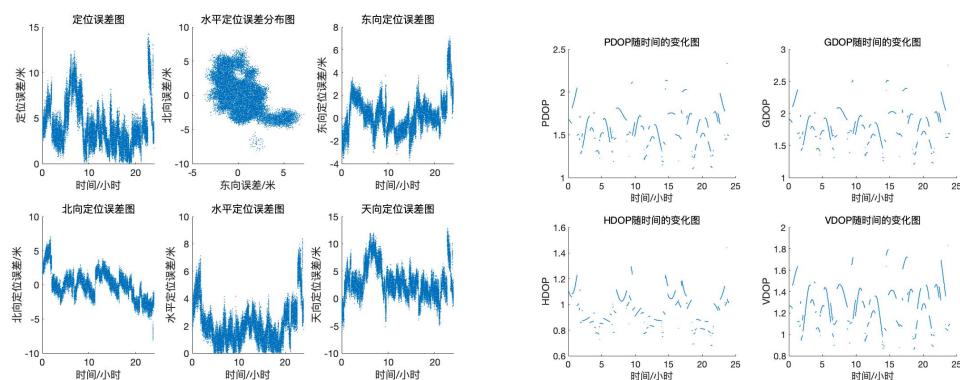
(3) C7I , 24 小时

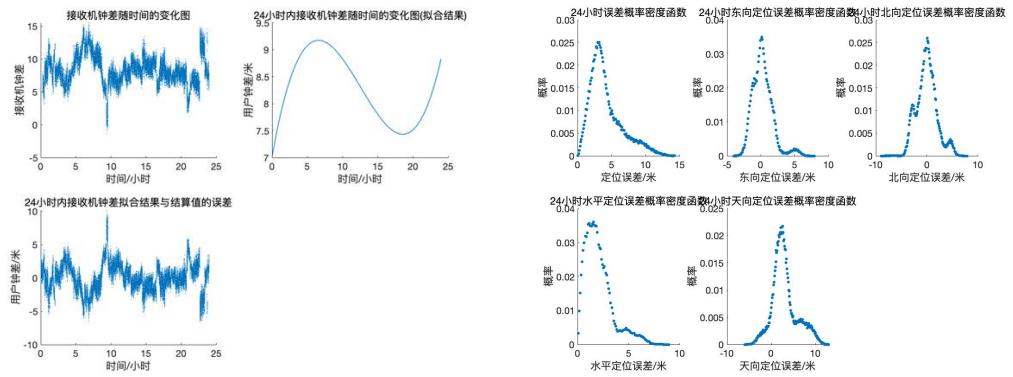
取 2021 年 3 月 1 日整天的观测量，伪距观测量为 C7I (单历元观测量的个数大约为 11 个，而 C2I 单历元观测量的个数大约为 19 个)，解算得到的接收机钟差值，得到下图结果



(4) C5P , 24 小时

取 2021 年 3 月 1 日整天的观测量，伪距观测量为 C5P (单历元观测量的个数大约为 10 个)，解算得到的接收机钟差值，得到下图结果





(5) the role of the clock in a GPS receiver[7]

更好的接收机钟差可以得到更好的垂向定位精度;

如果时钟满足其相对于 GPS 时间的偏差平滑变化的简单要求，则可以显著实现从完美接收器时钟中获得的好处, the benefits of a predictable clock in integrity monitoring and in carrier-phase processing
24-satellite GPS constellation with a 5-degree elevation angle mask
HDOP VDOP HDOP3 VDOP3

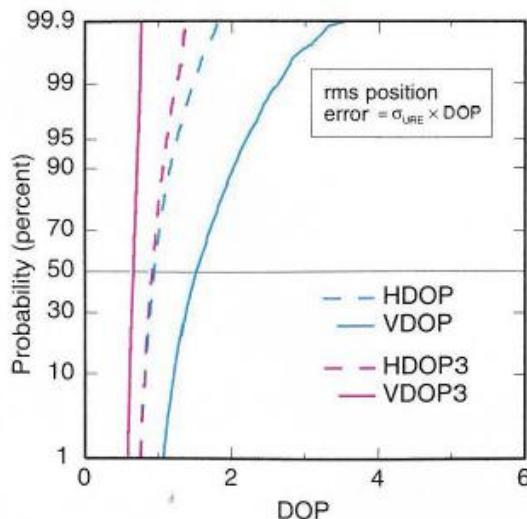


Figure1 The cumulative probability distribution functions of DOP parameters with and without a perfect receiver clock

The VDOPs tend to be larger than HDOPs;
VDOP3 shows little variability, and its values are significantly smaller than those of VDOP and somewhat smaller than those of HDOP;
And the distributions of HDOP3 and HDOP are substantially similar.

In the other words, a GPS user equipped with a perfect receiver clock would obtain much improved vertical position estimates through 3-D estimation. By contrast, there would be little gain in horizontal accuracy.

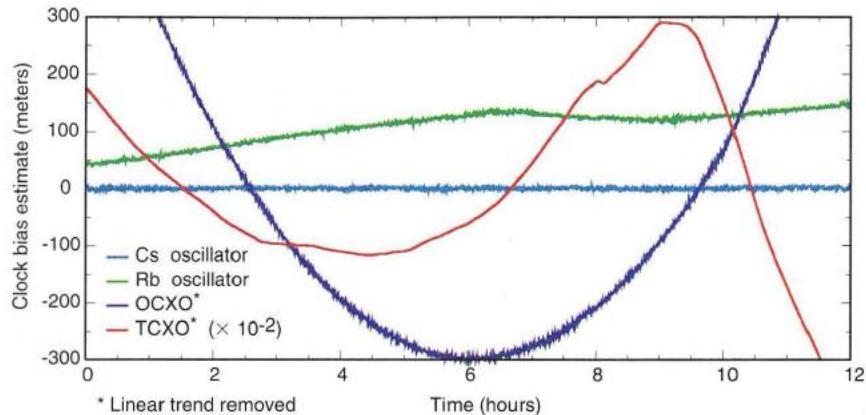


Figure1 The stability of different kinds of clocks varies widely.

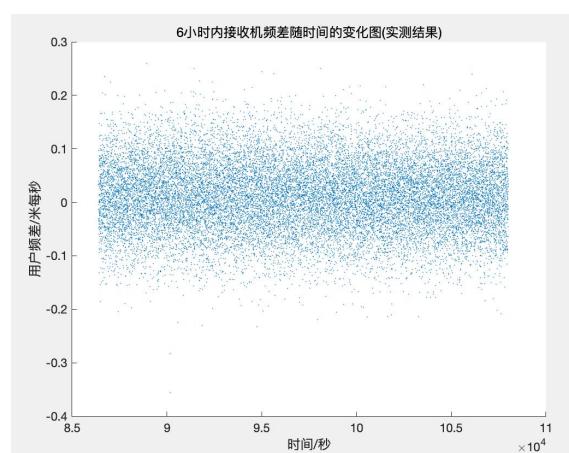
If we had available GPS measurements over a time interval (t_0, t_1) during which the frequency drift rate of the receiver clock is stable, we could model the bias at time t simply as a quadratic function.

$$b(t) = b_0 + b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)^2$$

4.1.5 用户钟频差建模

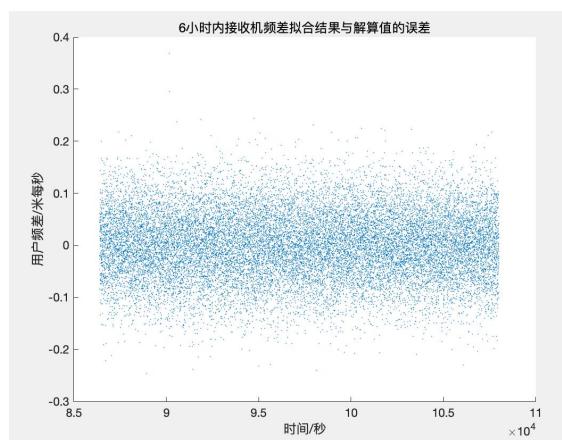
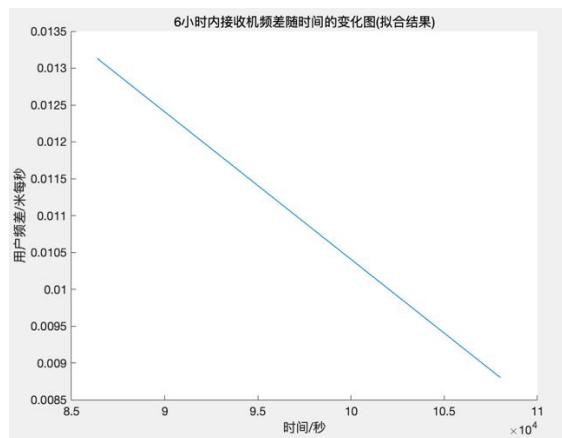
(1) 6 小时

取 2021 03 01 00 00 00.0000000-2021 03 01 06 00 00.0000000 解算得到的接收机钟漂值，得到下图结果



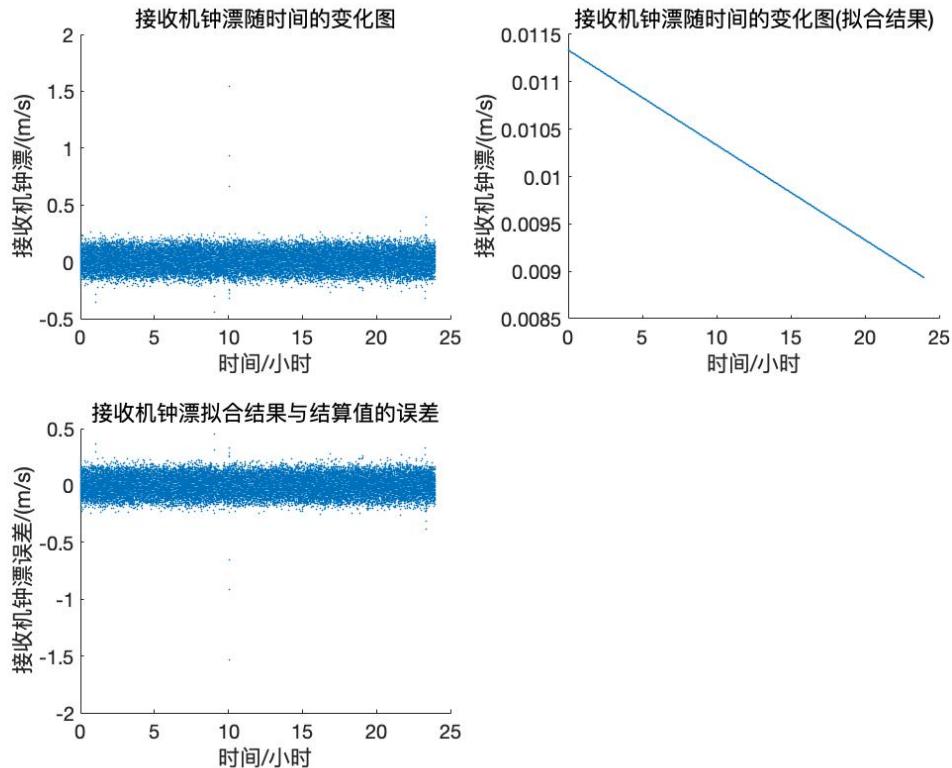
用直线对接收机频差进行拟合

$$\Delta f_u = B_1 + 2B_2(t - t_0) \#(4.10)$$



(2) D2I, 24 小时

取 2021 年 3 月 1 日整天的观测量，多普勒观测量为 D2I，解算得到的接收机钟漂值，并用一次曲线进行拟合，最后差值得到拟合误差，结果如下所示。



得到 $B_1 = -0.0113343966101212 \text{ m/s}$, $B_2 = -1.39078058917141e \times 10^{-8} \text{ m/s}^2$ 。

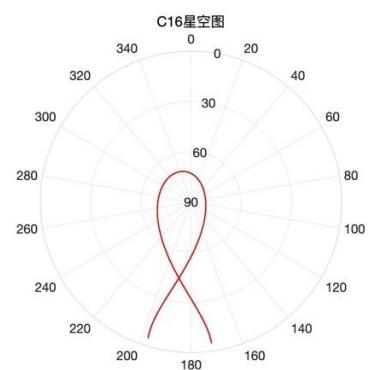
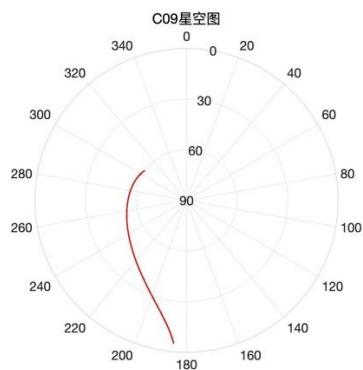
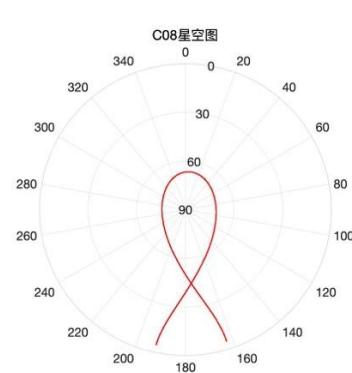
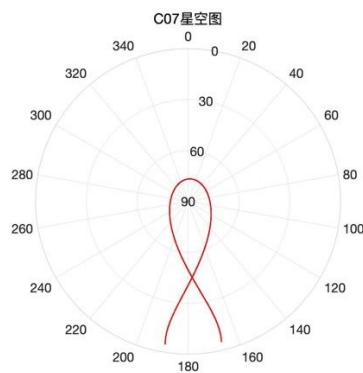
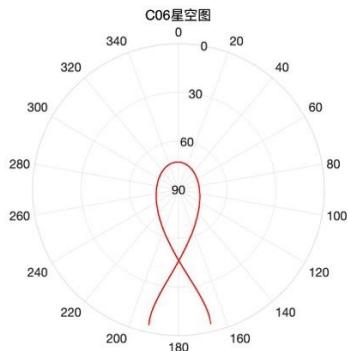
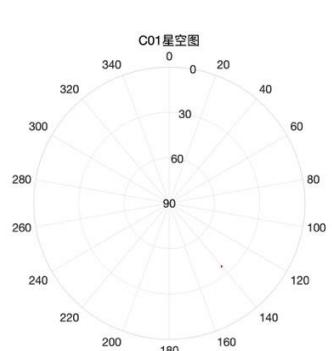
4.1.6 Allan 方差

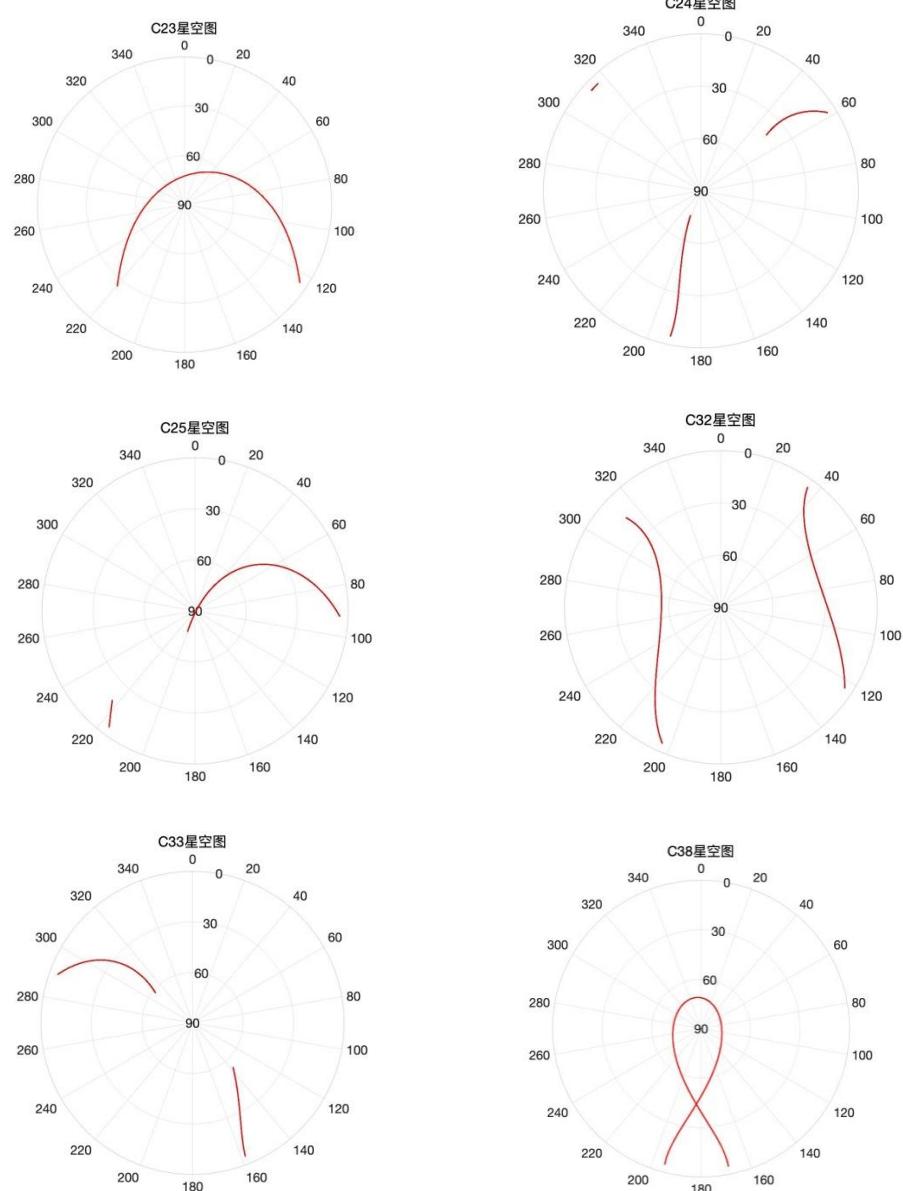
在研究晶体振荡器和原子钟的稳定性时，人们发现这些系统的相位噪声中不仅有白噪声，而且有闪烁噪声。使用传统的统计工具（例如标准差）分析这类噪声时统计结果是无法收敛的。为了解决这个问题，David Allan 于 1966 年提出了 Allan 方差分析，该方法不仅可以准确识别噪声类型，还能精确确定噪声的特性参数，其最大优点在于对各类噪声的幂律谱项都是收敛的。该方法最初被用于分析晶振或原子钟的相位和频率不稳定性，比如，晶振的中心频率均采用 Allan 方差来表征时域内的稳定度。由于高端陀螺，气体传感等各类物理量测一起本身也具有晶振的特征，因此该方法随后被广泛应用于各种物理传感器的随机误差辨识中。

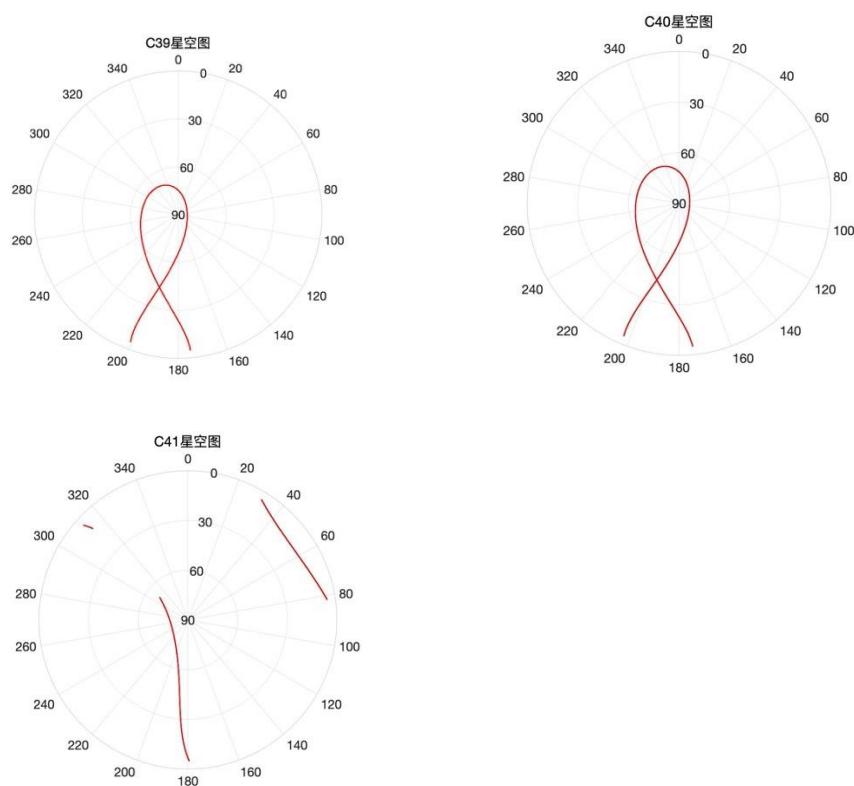
Allan 方差反映了相邻两个采样段内平均频率差的起伏。它的最大优点在于对各类噪声的幂律谱项都是收敛的。

4.2 多历元

各卫星的星空图如下



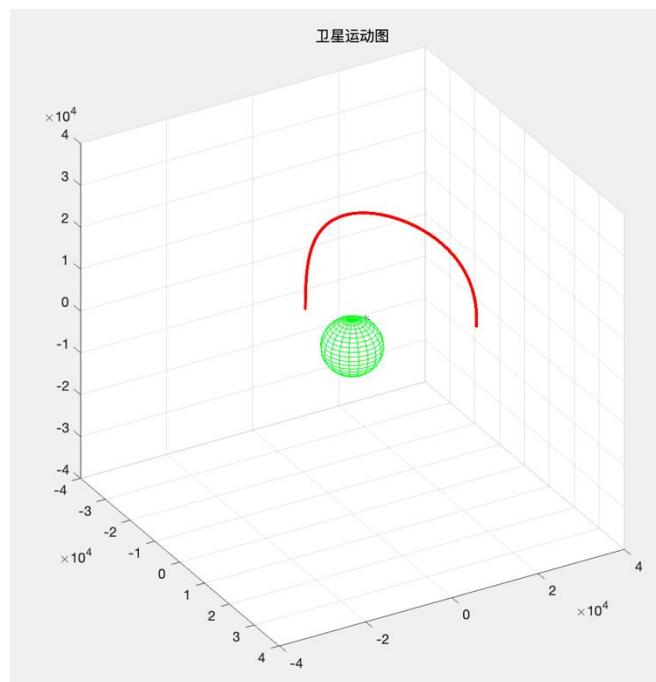
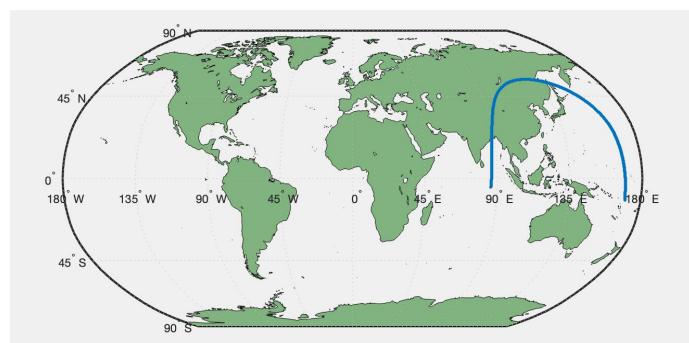
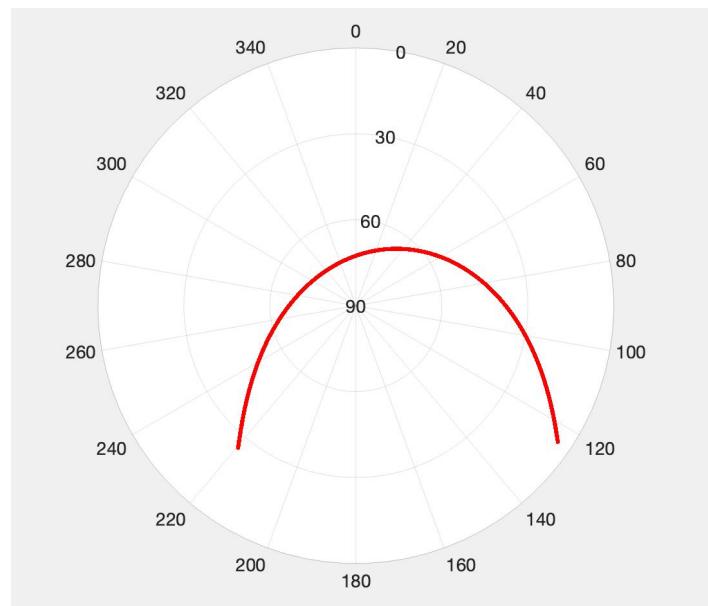




4.2.1 伪距

(1) MEO C23

C23 卫星的轨道倾角为 55 度，可观测时间段为 2021 03 01 00 00 00.0000000-2021 03 01 07 10 49.0000000。该卫星的星空图、星下点轨迹图和在 ECEF 坐标系下的轨迹图如下。

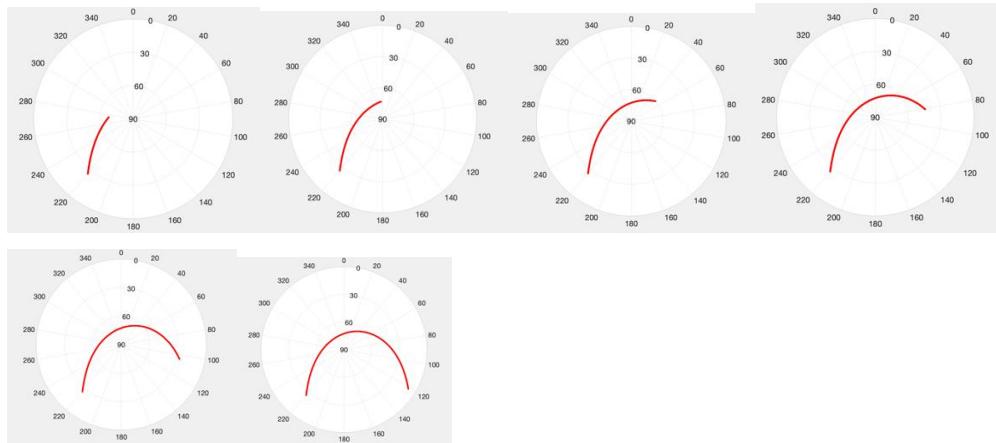


(1.1) 观测时长与误差

最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点，观测间隔为 1 秒。

时间段(周积	86400- 93600	86400- 97200	86400- 100800	86400- 104400	86400-1 08000	86400- 111600
秒和小时数)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
历元数	7200	10800	14400	18000	21600	25200
定位误差	48.349	10.654	10.696	11.583	13.780	7.968
(米)						
东向误差	-33.949	1.021	0.413	0.733	1.497	0.458
(米)						
北向误差	26.856	-3.533	-3.420	-3.981	-5.358	-2.722
(米)						
水平误差	43.287	3.678	3.445	4.048	5.563	2.761
(米)						
天向误差	-21.537	9.999	10.126	10.853	12.607	7.474
(米)						
PDOP	4.6697	1.3074	0.5837	0.3772	0.337	0.267
GDOP	4.8545	1.4392	0.6747	0.448	0.405	0.318
HDOP	3.8337	0.9562	0.3755	0.2172	0.1851	0.1525
VDOP	2.6661	0.8915	0.4468	0.3084	0.2826	0.2187
迭代次数	18	7	6	6	6	7

2/3/4/5/6/7 小时的星空图如下



(1.2) 误差与观测间隔

观测时间段选取 2021 03 01 00 00 00.0000000-2021 03 01 07 00 00.0000000 ,

最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点。

采样间隔	1	5	10	100	500	1800	3600	5040
------	---	---	----	-----	-----	------	------	------

(秒)

历元数	25200	5041	2521	253	51	15	8	6
-----	-------	------	------	-----	----	----	---	---

定位误差	7.968	8.052	8.252	8.609	8.977	9.775	7.402	3.877
------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

(米)

东向误差	0.458	0.480	0.521	0.613	0.740	0.943	-0.008	-1.124
------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	--------	--------

(米)

北向误差	-2.722	-2.765	-2.866	-3.055	-3.464	-3.300	-1.743	0.204
------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	-------

(米)

水平误差	2.761	2.806	2.913	3.116	3.542	3.432	1.743	1.1433
------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	--------

(米)

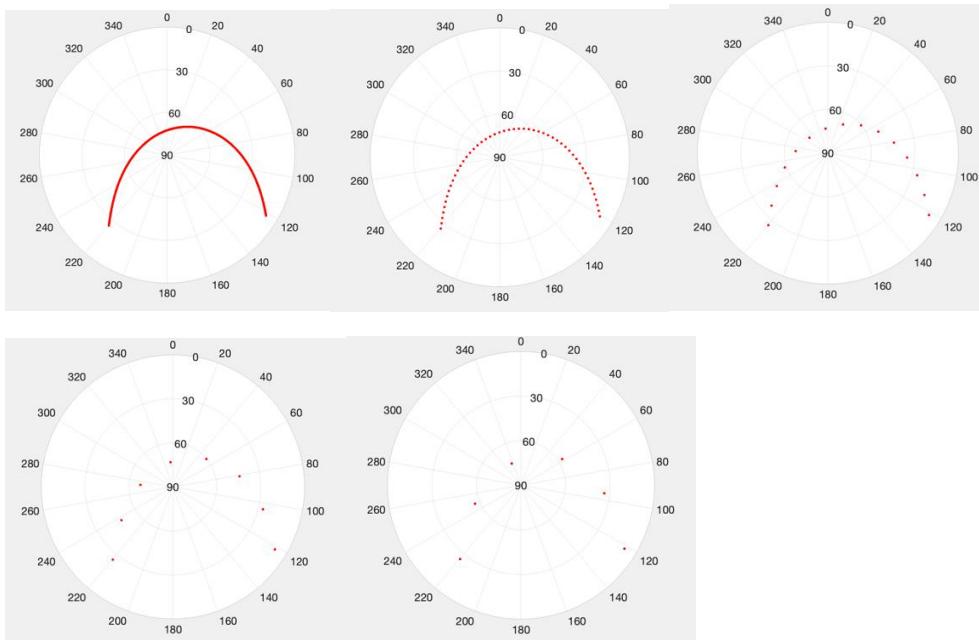
天向误差	7.474	7.546	7.720	8.026	8.248	9.152	7.194	3.705
------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

(米)

PDOP	0.267	0.595	0.842	2.625	5.734	9.042	11.287	13.025
------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	--------	--------

GDOP	0.318	0.710	1.0043	3.129	6.832	10.723	13.325	15.329
HDOP	0.1525	0.3406	0.4818	1.5045	3.2960	5.3382	6.8291	7.9996
VDOP	0.2187	0.4884	0.6907	2.1510	4.6926	7.2982	8.9875	10.2794
迭代次数	7	6	6	6	6	5	5	6

100/500/1800/3600/5040 采样间隔下的星空图如下

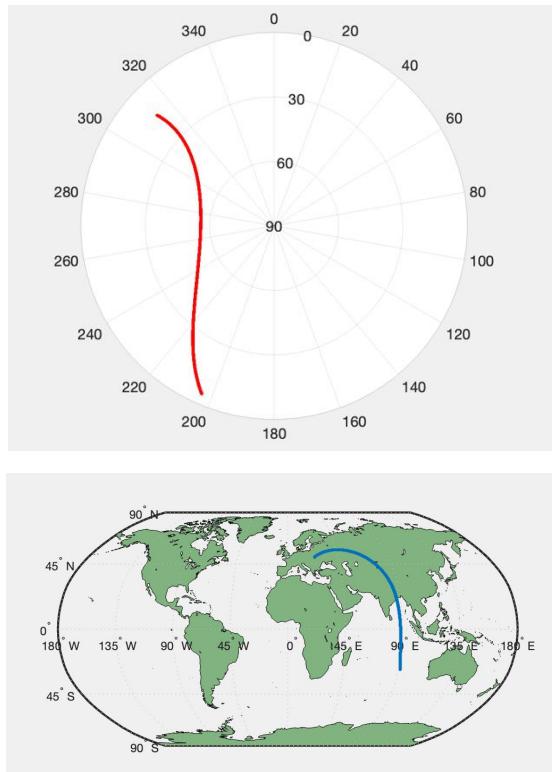


(1.3) 不同观测弧段对定位结果的影响

(2) MEO C32

C32 卫星的可观测时间段为 2021 03 01 00 00 00.0000000-2021 03 01 05 14

24.0000000 , 星空图和星下点轨迹图如下



(2.1) 观测时长与误差

最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点，观测间隔为 1 秒。

时间段 (周积)	86400- 97200	86400- 99000	86400- 100800	86400- 102600	86400- 104400	86400- 103064
秒和小时数)	(3)	(3.5)	(4)	(4.5)	(5)	(05 14 24)
历元数	10800	12600	14400	16200	18000	18864
定位误差(米)	24.893	11.6969	13.449	3.934	4.923	7.391
东向误差(米)	24.552	11.6964	13.443	3.581	-4.017	-6.681
北向误差(米)	-0.694	0.0237	0.116	-0.114	-0.491	-0.674
天向误差(米)	-4.046	-0.1067	-0.406	1.624	2.802	3.088
PDOP	2.5181	1.2381	0.6743	0.4155	0.2738	0.2287
GDOP	3.1608	1.5293	0.8174	0.4933	0.3179	0.2626
HDOP	2.4234	1.2039	0.6619	0.4105	0.2708	0.2258
VDOP	0.6837	0.2889	0.1286	0.0642	0.0402	0.0362

迭代次数	13	8	9	7	6	6	
(2.2) 误差与观测间隔							
观测时间段选取 2021 03 01 00 00 00.0000000-2021 03 01 05 00 00.0000000 ,							
最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点。							
采样间隔	1	5	10	100	900	1800	3600
(秒)							
历元数	1800	3601	1801	181	21	11	6
	0						
定位误差	4.923	4.970	4.953	4.649	4.129	3.452	4.751
(米)							
东向误差	-4.01	-4.062	-4.033	-3.631	-2.769	-0.273	-1.476
(米)	7						
北向误差	-0.49	-0.501	-0.508	-0.504	-0.631	-0.788	-0.879
(米)	1						
水平误差	4.048	4.092	4.065	3.666	2.840	0.834	1.718
(米)							
天向误差	2.802	2.820	2.830	2.859	2.996	3.349	4.429
(米)							
PDOP	0.273	0.6129	0.8657	2.6943	7.1258	8.9713	10.7333
(8						
GDOP	0.317	0.7116	1.0051	3.1280	8.2663	10.3991	12.4265
(9						
HDOP	0.270	0.6062	0.8563	2.6648	7.0412	8.8576	10.5894
(9						

VDOP	0.040	0.0898	0.1270	0.3974	1.0948	1.4238	1.7517
	2						
迭代次数	6	6	6	6	5	5	5

(2.3) 不同观测弧段对定位结果的影响

00:00-03:00
error = 12.19475266557582
errorE = 12.113426208496094
errorN = -1.3928091526031494
errorH = 12.193236315443704
errorU = -0.19233977794647217
Delta_t = -5.08709454536438
B0 = -5.0871288087219
B1 = 0.0
iterTime = 14
PDOP = 2.6549913902645996
GDOP = 3.3326901928027475
HDOP = 2.555282383522376
VDOP = 0.7207708146063233

00:20-03:20
error = 16.821742830177097
errorE = 16.790599822998047
errorN = -0.9993045926094055
errorH = 16.82031070119908
errorU = -0.219549298286438
Delta_t = -7.690589746460319
B0 = -7.690218608826399
B1 = 0.0
iterTime = 10
PDOP = 1.9271413708444471
GDOP = 2.3745014269678517
HDOP = 1.879589123264202
VDOP = 0.42546258603217946

00:40-03:40
error = 28.444827180972965
errorE = 28.39373207092285
errorN = -0.8208944797515869
errorH = 28.40559608003746

```
errorU = -1.493438482284546
Delta_t = -15.262025471776724
B0 = -15.26124001853168
B1 = 0.0
iterTime = 10
PDOP = 1.5843503178887905
GDOP = 1.904882096574317
HDOP = 1.5651062401003017
VDOP = 0.2461876160368848
```

```
01:00-04:00
error = 14.131641780044026
errorE = 13.960409164428711
errorN = -0.8662049770355225
errorH = 13.987256167687294
errorU = -2.0149357318878174
Delta_t = -7.480067081749439
B0 = -7.479541674256325
B1 = 0.0
iterTime = 9
PDOP = 1.4436416453205274
GDOP = 1.6849708677993935
HDOP = 1.4372646304952021
VDOP = 0.13554205652296772
```

```
01:20-04:20
error = 4.764017151266479
errorE = 4.48842716217041
errorN = -1.094571590423584
errorH = 4.619963783047605
errorU = -1.1626667976379395
Delta_t = -1.4558945316821337
B0 = -1.4554259413853288
B1 = 0.0
iterTime = 8
PDOP = 1.3467851117579255
GDOP = 1.5194866105218083
HDOP = 1.339342162441307
VDOP = 0.1413954714887598
```

```
01:40-04:40
```

```
error = 6.672617666991852
errorE = -6.382019996643066
errorN = -0.9724037647247314
errorH = 6.455675667132201
errorU = -1.6876264810562134
Delta_t = 4.235852588899434
B0 = 4.2360356617718935
B1 = 0.0
iterTime = 8
PDOP = 1.2831582071696264
GDOP = 1.3960286283754701
HDOP = 1.2598706578670857
VDOP = 0.24335369697425108
```

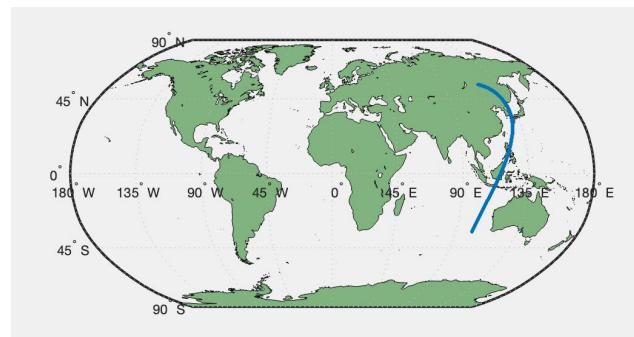
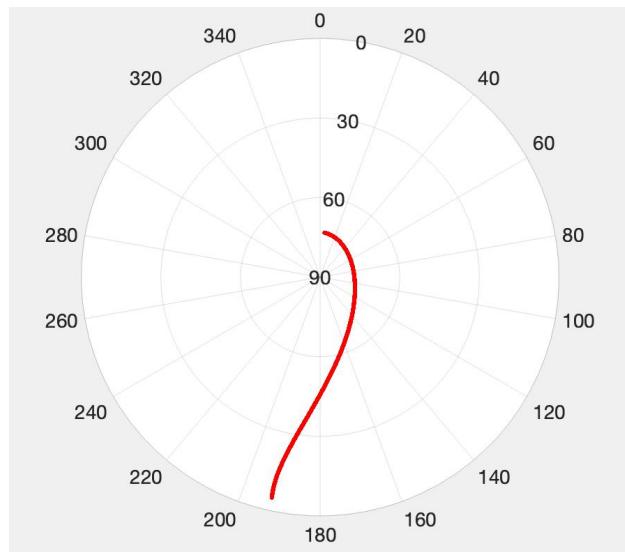
02:00-05:00

```
error = 11.99060140639829
errorE = -11.641963958740234
errorN = -0.6854581832885742
errorH = 11.662125781247768
errorU = -2.787353515625
Delta_t = 6.309187759645283
B0 = 6.3090932089835405
B1 = 0.0
iterTime = 8
PDOP = 1.2401621880136224
GDOP = 1.3025176226838693
HDOP = 1.1866738306500786
VDOP = 0.36028787520497324
```

(3) IGSO C06

C06 卫星的轨道倾角为 54.6 度，可观测时间段为 2021 03 01 00 00

00.0000000-2021 03 01 08 48 14.0000000，该卫星的星空图和星下点轨迹图如下。



最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点，观测间隔为 1 秒。

时间段 (周积秒和小时)
86400-
104400

数) (5)

历元数 18000

定位误差 (米) 37.678

东向误差 (米) 30.690

北向误差 (米) 2.184

天向误差 (米) -21.749

PDOP 0.9192

GDOP 1.1766

迭代次数 12

(3.1) 观测时长与误差

最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点，观测间隔为 1 秒。

观测时长 (小 5 6 7 8
时)

历元数	18000	21600	25200	28800
定位误差(米)	40.950	32.163	20.409	19.729
东向误差(米)	32.810	28.765	20.148	19.372
北向误差(米)	1.026	-0.388	-3.016	-3.161
水平误差(米)	32.8262	28.7679	20.373	19.628
天向误差(米)	-24.483	-14.383	1.216	1.993
PDOP	0.9208	0.4785	0.2838	0.1887
GDOP	1.1787	0.5845	0.3296	0.2092
HDOP	0.3942	0.2716	0.1961	0.1491
VDOP	0.8321	0.3939	0.2051	0.1155
迭代次数	12	8	8	7

(3.2) 误差与观测间隔

观测时间段选取 2021 03 01 00 00 00.0000000-2021 03 01 08 00 00.0000000 ,

最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点。

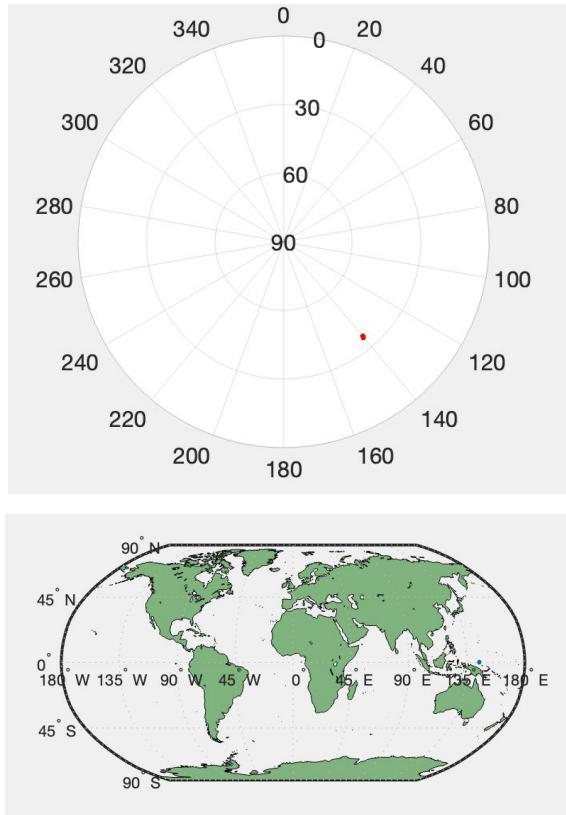
采样间隔 1 5 10 100 500 1800 3600 7200
(秒)

历元数	28800	5761	2881	289	58	17	9	5
定位误差	19.72	19.73	19.728	19.898	19.016	22.385	23.546	25.899

(米)	9	2						
东向误差	19.37	19.37	19.367	19.547	18.710	21.948	23.047	25.361
(米)	2	5						
北向误差	-3.161	-3.16	-3.174	-3.186	-2.805	-4.157	-4.281	-4.758
(米)	0							
水平误差	19.62	19.63	19.625	19.805	18.919	22.339	23.442	25.804
(米)	8	1						
天向误差	1.993	1.989	2.009	1.914	1.919	1.433	2.212	2.224
(米)								
PDOP	0.188	0.423	0.5978	1.873	4.1496	6.7962	8.4505	10.1025
	7	3						
GDOP	0.209	0.469	0.6629	2.077	4.6182	7.5396	9.3784	11.2184
	2	4						
HDOP	0.149	0.334	0.4725	1.481	3.2550	5.4019	6.7478	8.1208
	1	6						
VDOP	0.115	0.259	0.3661	1.147	2.5736	4.1241	5.0871	6.0093
	5	3						
迭代次数	7	6	5	6	6	5	5	5

(4) GEO C01

选取 2021 03 01 00 00 00.0000000-2021 03 01 12 00 00.0000000 , 星空图和星下点轨迹图如下。



在单 GEO 卫星多历元定位时，利用最小二乘迭代解算用户位置，迭代并不能收敛，原因是 GEO 卫星在 ECEF 坐标系下的位置变化很小，用户能够观测到卫星的几何构型很差，所以不能解算出用户位置。

4.2.2 多普勒

(1) MEO C23

可观测时间段选取 2021 03 01 00 00 00.0000000-2021 03 01 07 10 49.0000000。

(1.1) 观测时长与误差

最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点，观测间隔为 1 秒。

时间段(周积秒	86400- 97200	86400-1 00800	86400-104 400	86400-108 000	86400- 111600
和小时数)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
历元数	10800	14400	18000	21600	25200

定位误差 (米)	733.723	60.698	56.884	13.638	9.388
东向误差 (米)	-465.542	-40.234	33.429	6.164	-1.442
北向误差 (米)	104.207	10.997	-6.457	3.920	9.266
水平误差 (米)	477.063	41.710	34.047	7.305	9.378
天向误差 (米)	-557.458	-44.097	45.569	11.516	0.442
PDOP (m/Hz)	4275.9483	765.120	286.928	141.738	86.929
GDOP (m/Hz)	4275.9483	765.120	286.928	141.738	86.929
HDOP (m/Hz)	2728.3874	494.8504	185.7114	91.9428	57.4529
VDOP (m/Hz)	3292.3602	583.5510	218.7221	107.8717	65.2378
迭代次数	326	9	7	6	6

(1.2) 误差与观测间隔

可观测时间段选取 2021 03 01 00 00 00.0000000-2021 03 01 07 00 00.0000000 ,

最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点。

采样间隔 (秒)	1	5	10	100	500	1800	3600	5040
历元数	25200	5041	2521	253	51	15	8	6
定位误差 (米)	9.388	65.571	70.237	195.09	785.236	714.838	1032.742	1690.504
东向误差 (米)	-1.442	24.238	-16.861	-40.834	-127.753	-269.552	-334.819	-343.933
北向误差 (米)	9.266	33.476	-38.477	116.65	253.017	318.493	56.482	686.614
水平误差 (米)	9.378	41.329	42.009	123.59	283.441	417.248	339.550	767.938

(米)				3				
天向误差	0.442	-50.906	56.289	-150.95	-732.295	-580.428	-975.327	-1506.012
(米)				8				6
PDOP	86.929	194.2945	274.62	860.03	1885.240	3104.122	3828.531	4134.082
(m/Hz)			1	0				
GDOP	86.929	194.2945	274.62	860.03	1885.240	3104.122	3828.531	4134.082
(m/Hz)			1	0				
HDOP	57.452	128.4266	181.54	569.75	1258.477	2133.153	2720.184	3008.833
(m/Hz)	9		1	2				
VDOP	65.237	145.7976	206.05	644.23	1403.697	2255.046	2694.114	2835.058
(m/Hz)	8		7	2				
迭代次数	6	5	5	5	5	5	5	5

(2) MEO C32

观测时间段选取 2021 03 01 00 00 00.0000000-2021 03 01 05 14 24.0000000。

(2.1) 观测时长与误差

最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点。

时间段(秒)	86400- 97200 3	86400- 99000 3.5	86400- 100800 4	86400- 102600 4.5	86400- 104400 5	86400- 103064 05 14 24
历元数	10800	12600	14400	16200	18000	18864
定位误差	468.904	481.268	63.0876	140.079	303.404	232.003
(米)						
东向误差	454.466	467.851	61.604	-134.487	-290.967	-223.207
(米)						

北向误差 (米)	-114.310	-108.443	-13.568	38.635	85.6405	62.602
水平误差 (米)	468.621	480.255	63.080	139.926	303.309	231.820
天向误差 (米)	-16.285	-31.2062	-0.941	6.547	7.618	9.215
频差(米每秒) (m/Hz)	-1.3789E-2	-1.2573E-2	-6.8672E-4	5.9669E-3	1.1961E-2	9.0518E-3
PDOP	1907.0780	1210.7997	818.6628	579.7799	427.0023	374.0559
GDOP (m/Hz)	1907.0780	1210.7997	818.6628	579.7799	427.0023	374.0559
HDOP (m/Hz)	1898.3182	1208.6270	817.9473	579.1638	426.1857	373.1353
VDOP (m/Hz)	182.5775	72.5026	34.2200	26.7211	26.3953	26.2262
迭代次数	10	7	9	9	9	9

(2.2) 误差与观测间隔

观测时间段选取 2021 03 01 00 00 00.0000000-2021 03 01 05 00 00.0000000 ,

最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点。

采样间隔(秒)	1	5	10	100	900	1800
历元数	18000	3601	1801	181	21	11
定位误差(米)	303.404	168.786	427.796	538.832	8466.881	6762.018

东向误差(米)	-290.967	114.753	398.849	-526.909	7917.5678	6390.229
北向误差(米)	85.6405	-120.248	-148.557	99.545	-2972.312	-2190.474
水平误差(米)	303.309	166.216	425.617	536.230	8457.0991	6755.236
天向误差(米)	7.618	29.338	43.128	52.886	406.8823	302.781
频差(米每秒)	1.1961E-2	1.3476E-2	-1.8685E-2	1.0890E-2	-3.65569E-1	-2.8835E-1
PDOP(m/Hz)	427.0023	960.8889	1360.4784	4235.961	11092.809	13815.954
GDOP(m/Hz)	427.0023	960.8889	1360.4784	4235.961	11092.809	13815.954
HDOP(m/Hz)	426.1857	959.0596	1357.8872	4227.692	11064.444	13772.0
VDOP(m/Hz)	26.3953	59.2635	83.9276	264.5667	792.7682	1101.1845
迭代次数	9	8	7	6	6	7

(3) IGSO C06

(3.1) 观测时长与误差

最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点。

观测时长(小 5 6 7 8

时)

历元数	18000	21600	25200	28800
定位误差(米)	321.841	174.607	212.544	232.746
东向误差(米)	-166.692	-86.923	146.111	159.540
北向误差(米)	53.432	15.782	-121.827	-129.510
水平误差(米)	175.046	88.344	190.237	205.490

天向误差(米)	270.075	150.608	-94.788	-109.292
PDOP(m/Hz)	1745.4104	1090.8898	773.0161	608.8991
GDOP(m/Hz)	1745.4104	1090.8898	773.0161	608.8991
HDOP(m/Hz)	1259.5041	840.4411	621.1241	501.3418
VDOP(m/Hz)	1208.3487	695.4851	460.1725	345.5640
迭代次数	11	11	10	10

(3.2) 误差与观测间隔

最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点。

采样间隔	1	5	10	100
(秒)				
历元数	28800	5761	2881	289
定位误差	232.746	691.393	639.721	2690.122
(米)				
东向误差	159.540	449.392	-378.710	-1766.914
(米)				
北向误差	-129.510	-333.514	383.670	1258.399
(米)				
水平误差	205.490	559.630	539.096	2169.229
(米)				
天向误差	-109.2921	-406.003	344.410	1590.974
(米)				
PDOP	608.8991	1402.7983	1972.9044	6194.9611

(m/Hz)					
GDOP	608.8991	1402.7983	1972.9044	6194.9611	
(m/Hz)					
HDOP	501.3418	1155.0762	1624.3104	5100.6015	
(m/Hz)					
VDOP	345.5640	796.0164	1119.8069	3515.8802	
(m/Hz)					
迭代次数	10	6	7	6	

4.2.3 多普勒+伪距

(1) MEO C23

可观测时间段为 2021 03 01 00 00 00.0000000-2021 03 01 07 10 49.0000000。

(1.1) 观测时长与误差

最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点。

时间段(周积	86400- 93600	86400- 97200	86400- 100800	86400- 104400	86400-1 08000	86400- 111600
秒和小时数)	(2h)	(3h)	(4h)	(5h)	(6h)	(7h)
历元数	7200	10800	14400	18000	21600	25200
定位误差	49.560	11.378	11.037	11.859	14.034	8.211
(米)						
东向误差	-34.946	1.319	0.497	0.786	1.543	0.508
(米)						
北向误差	27.420	-3.976	-3.610	-4.127	-5.488	-2.856
(米)						

水平误差 (米)	44.420	4.189	3.644	4.201	5.701	2.901
天向误差 (米)	-21.978	10.579	10.418	11.090	12.824	7.681
PDOP	5.1622	1.3025	0.5833	0.377	0.337	0.2666
GDOP	5.3666	1.4338	0.6742	0.448	0.405	0.3180
HDOP	4.2380	0.9527	0.3753	0.2172	0.1851	0.1525
VDOP	2.9475	0.8881	0.4465	0.3085	0.2826	0.2187
迭代次数	20	6	6	6	6	6

(1.2) 误差与观测间隔

观测时间段选取 2021 03 01 00 00 00.0000000-2021 03 01 07 00 00.0000000 ,

最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点。

采样间隔 (秒)	1	5	10	100	500	1800	3600	5040
历元数	25200	5041	2521	253	51	15	8	6
定位误差 (米)	8.211	7.913	8.458	8.981	6.514	10.684	4.990	3.844
东向误差 (米)	0.508	0.426	0.549	0.684	0.292	1.307	-0.861	-1.238
北向误差 (米)	-2.856	-2.669	-2.966	-3.171	-2.260	-3.892	-0.193	0.510
水平误差 (米)	2.901	2.703	3.017	3.244	2.278	4.105	0.883	1.339

天向误差	7.681	7.437	7.902	8.375	6.103	9.864	4.911	3.603
(米)								
PDOP	0.266	0.595	0.842	2.625	5.734	9.0425	11.287	13.025
	6	5	0	2	3		2	4
GDOP	0.318	0.710	1.004	3.129	6.832	10.724	13.324	15.329
	0	2	2	9	5	0	6	6
HDOP	0.152	0.340	0.481	1.504	3.296	5.3384	6.8288	7.9996
	5	6	7	6	0			
VDOP	0.218	0.488	0.690	2.151	4.692	7.2985	8.9871	10.279
	7	4	6	3	4			4
迭代次数	6	6	6	6	6	5	5	6

(2) MEO C32

可观测时间段为 2021 03 01 00 00 00.0000000-2021 03 01 05 14 24.0000000。

(2.1) 观测时长与误差

最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点。

时间段(周积	86400- 97200	86400- 99000	86400- 100800	86400- 102600	86400- 104400
秒和小时数)	(3)	(3.5)	(4)	(4.5)	(5)
历元数	10800	12600	14400	16200	18000
定位误差	25.717 6	11.679	13.546	3.933	4.928
(米)					
东向误差	25.347	11.679	13.539	3.575	-4.015
(米)					
北向误差	-0.749	0.0117	0.105	-0.124	-0.500
(米)					

水平误差	25.358	11.679	13.539	3.578	4.0463	
(米)						
天向误差	-4.283	-0.096	-0.422	1.6345	2.813	
(米)						
PDOP	2.5909	1.2317	0.6739	0.4153	0.2737	
GDOP	3.2522	1.5214	0.8169	0.4931	0.3178	
HDOP	2.4936	1.1977	0.6615	0.4103	0.2708	
VDOP	0.7034	0.2874	0.1285	0.0642	0.0401	
迭代次数	13	8	8	7	6	

(2.2) 误差与观测间隔

观测时间段选取 2021 03 01 00 00 00.0000000-2021 03 01 05 00 00.0000000。

采样间隔	1	5	10	100	900	1800	3600	
(秒)								
历元数	18000	3601	1801	181	21	11	6	
定位误差	4.928	4.928	4.896	3.203	4.452	4.802	3.908	
(米)								
东向误差	-4.015	-3.99	-3.955	-1.737	-3.546	-4.070	-2.421	
(米)	9							
北向误差	-0.500	-0.49	-0.528	-0.392	-0.904	-1.379	-1.016	
(米)	0							
水平误差	4.046	4.029	3.990	1.781	3.659	4.298	2.626	
(米)	3							
天向误差	2.813	2.838	2.837	2.662	2.535	2.141	2.895	

(米)

PDOP	0.273	0.612	0.8658	2.6944	7.1266	8.970	10.7335
	7	7					
GDOP	0.317	0.711	1.0052	3.1280	8.2671	10.398	12.4267
	8	4					
HDOP	0.270	0.606	0.8564	2.6649	7.0419	8.856	10.5896
	8	1					
VDOP	0.040	0.089	0.1270	0.3974	1.0949	1.423	1.7518
	1	8					
迭代次数	6	6	6	6	5	5	5

(3) IGSO C06

(3.1) 观测时长与误差

最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点。

观测时长(小) 5 6 7 8

时)

历元数	18000	21600	25200	28800
定位误差(米)	40.969	31.628	20.327	19.721
东向误差(米)	32.753	28.434	20.049	19.354
北向误差(米)	1.021	-0.488	-3.049	-3.177
水平误差(米)	32.769	28.439	20.280	19.613
天向误差(米)	-24.590	-13.840	1.383	2.063
PDOP	0.9150	0.4791	0.2838	0.1886
GDOP	1.1713	0.5853	0.3297	0.2091
HDOP	0.3918	0.2719	0.1961	0.1491
VDOP	0.8269	0.3945	0.2051	0.1155

迭代次数	10	7	7	7				
(3.2) 误差与观测间隔								
最小二乘初始值设置在 ECEF 坐标系下的(0,0,0)点。								
采样间隔	1	5	10	100	500	1800	3600	5040
(秒)								
历元数	28800	5761	2881	289	58	17	9	5
定位误差	19.721	19.823	20.153	18.462	17.638	23.121	25.896	33.797
(米)								
东向误差	19.354	19.500	19.838	18.082	17.243	22.838	25.564	33.017
(米)								
北向误差	-3.177	-3.076	-3.161	-2.974	-2.691	-3.603	-4.017	-1.920
(米)								
水平误差	19.613	19.741	20.088	18.325	17.452	23.120	25.878	33.073
(米)								
天向误差	2.063	1.794	1.623	2.248	2.550	-0.140	-0.963	-6.959
(米)								
PDOP	0.1886	0.4232	0.5979	1.8737	4.1513	6.7981	8.4505	10.1022
GDOP	0.2091	0.4692	0.6630	2.0777	4.6202	7.5417	9.3783	11.2181
HDOP	0.1491	0.3345	0.4726	1.4815	3.2564	5.4033	6.7478	8.1206
VDOP	0.1155	0.2592	0.3662	1.1471	2.5747	4.1253	5.0870	6.0091
迭代次数	7	6	6	5	6	6	5	5

4.3 钟漂对定位结果的影响

4.4 结论

(1) 多星单历元定位

在用上一个历元所有的北斗卫星的观测数据时，伪距定位的精度在十米以内，多普勒定位的精度在几百米至一千米，伪距加多普勒定位的精度基本上和纯伪距定位的精度基本一致；

用户钟差可以用一个二次多项式建模。

(2) 单星多历元定位

(2.1) 在纯伪距定位中：

观测时常达到三四个小时后，定位得到较好的结果，定位误差在十米左右，且再增加观测时长，定位结果不会有较大的改善；

观测时长一定，改变观测的间隔，定位的精度基本上不会随间隔的变长而变差；

DOP 能够很好的反映接收机观测卫星的几何分布，但是由于仿真中，把用户钟差考虑为常数，DOP 的大小不能很好的反映定位精度的好坏。

(2.2) 在纯多普勒定位中：

观测的时长对定位结果有很大的影响，观测时长约长定位结果越好，以 MEO C23 卫星为例，观测时长短时（3 小时），定位误差可达上千米，观测时长长时（7 小时），定位误差在十米左右；

观测时长一定，改变观测的间隔，观测间隔的大小对定位的结果有很大的影响，观测间隔越大，定位的误差约大；

DOP 能够很好的反映接收机观测卫星的几何分布 , 同时 DOP 的大小也能较好的反映定位精度的好坏 , 仿真中把接收机的频差看作常数 , 但是由于接收机频飘很小 , 因此这样的近似对定位结果的影响是不大的。

(2.3) 在伪距 + 多普勒定位中 :

多普勒观测量的引入并没有对定位的结果产生大的影响 , 定位的精度基本上同纯伪距定位的精度。

(3) 单星多历元定位中卫星的选择

MEO 定位的精度是最好的 , IGSO 次之 , 单颗 GEO 卫星不能独立实现定位。

(4) 迭代次数的影响因素

多星单历元定位 , 观测量足够的情况下 , 迭代次数基本上为五次。

单星多历元定位 , 观测量足够的情况下 , 观测间隔一定 , 观测时长越长 , 迭代次数越少 ; 观测时长一定 , 观测间隔越大 , 迭代次数越少。

5 低轨仿真结果

本章主要讨论低轨卫星单星定位时影响定位精度的因素，包括观测时长和观测间隔。对于最小二乘初始值的设置后续会讨论，这里将初始值统一设置为真实值加一个固定的偏差，确保最小二乘迭代能够收敛。用户的位置统一设置在天津的位置，取经纬高分别为东经 117 度、北纬 39 度和高度 0。

卫星的选择参照之前关于低轨卫星星座的设计：

$$\begin{cases} \Omega = (l - 1) \times \frac{\pi}{16} \\ \omega = (m - 1) \times \frac{\pi}{6} + (l - 1) \times \frac{\pi}{16} \end{cases} \quad l = 1, 2, \dots, 6; m = 1, 2, \dots, 12 \quad \#(5.1)$$

Ω 为初始升交点赤经， ω 为卫星初始真近点角。

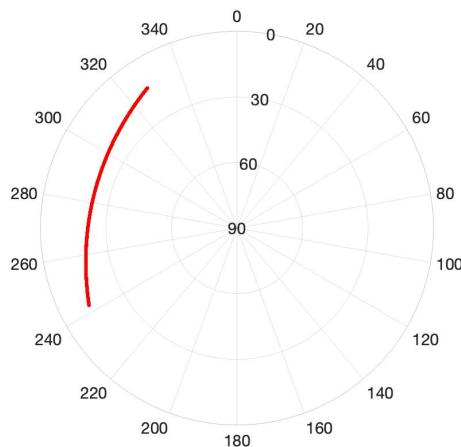
5.1 观测时长对定位结果的影响

本节观测间隔统一设置为 1.56 秒。

5.1.1 卫星选择 sat(5,1)

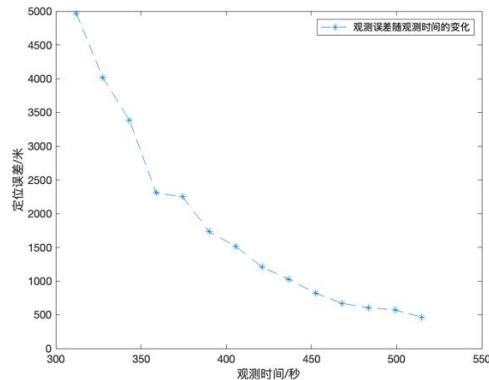
(1) 观测时间段为 [6207.24, 6722.04]

观测时间段 [6207.24, 6722.04]，共 514.8 秒，卫星过境的星空图如下图。

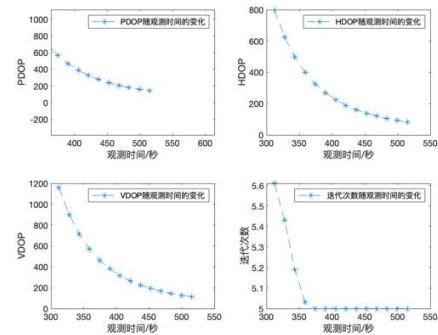


(1.1) 伪距

定位误差随观测时间的变化如下图。

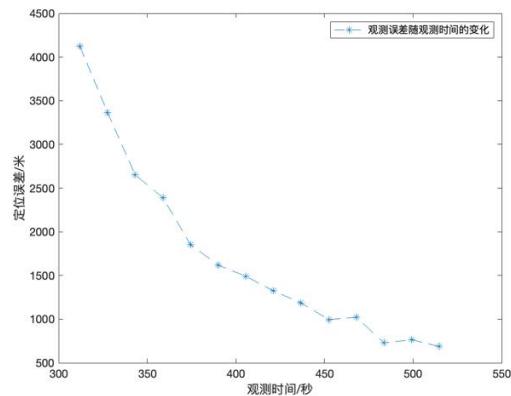


DOP 和迭代次数随观测时间的变化如下图。

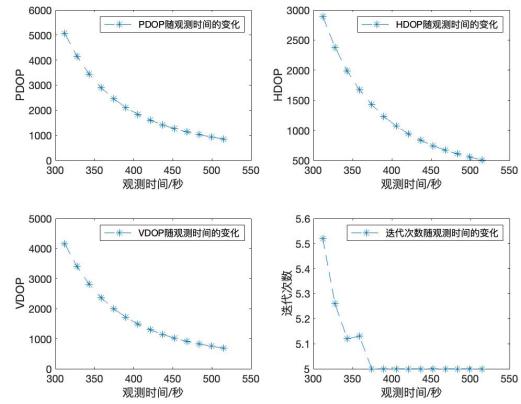


(1.2) 多普勒

定位误差随观测时间的变化如下图。

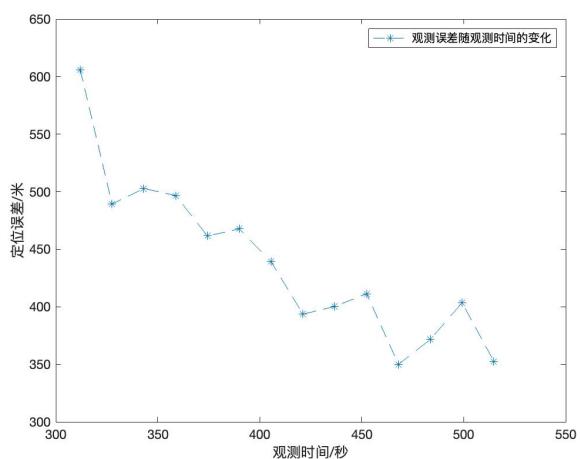


DOP 和迭代次数随观测时间的变化如下图。

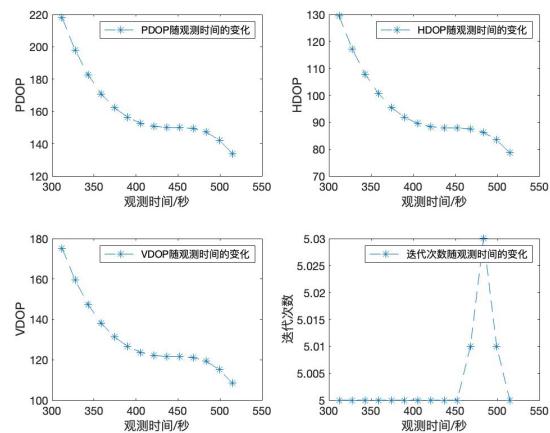


(1.3) 伪距+多普勒

定位误差随观测时间的变化如下图。

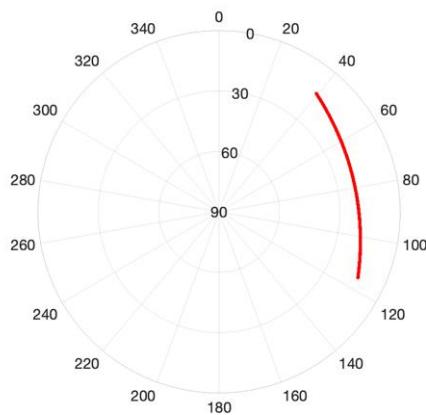


DOP 和迭代次数随观测时间的变化如下图。



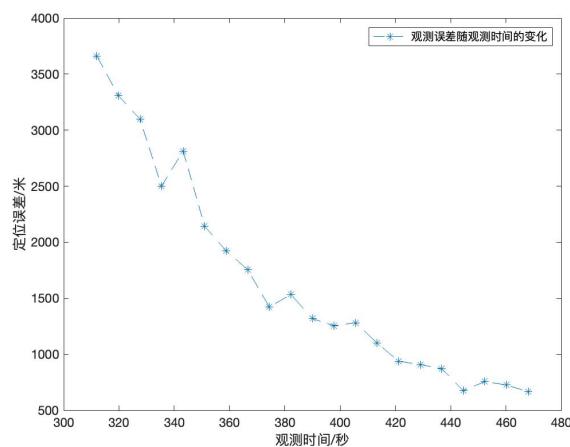
(2) 观测时间段为[254459.40,254927.40]

观测时间段[254459.40,254927.40]，共468秒，卫星过境的星空图如下图。

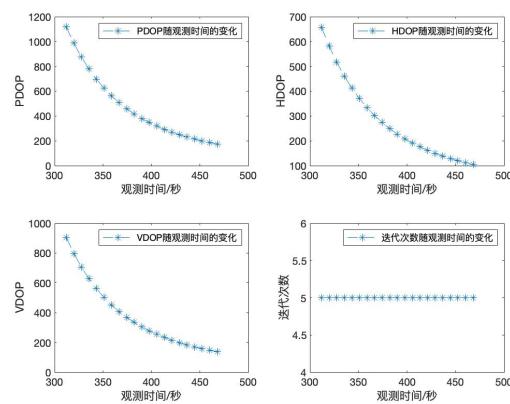


(2.1) 伪距

定位误差随观测时间的变化如下图。

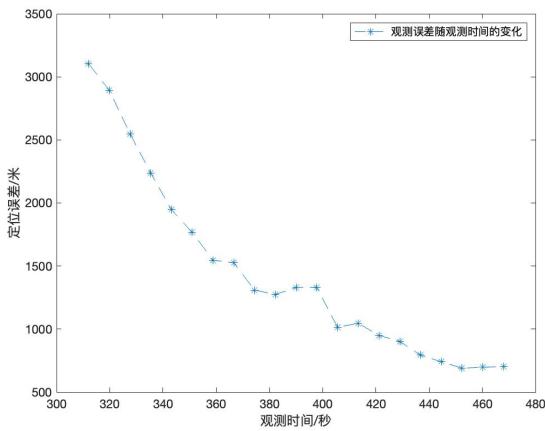


DOP 和迭代次数随观测时间的变化如下图。

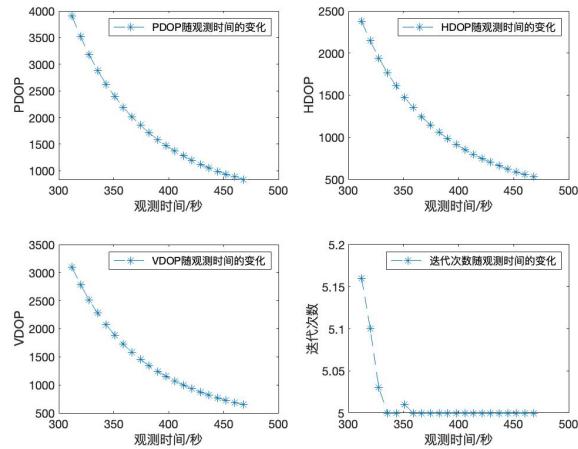


(2.2) 多普勒

定位误差随观测时间的变化如下图。

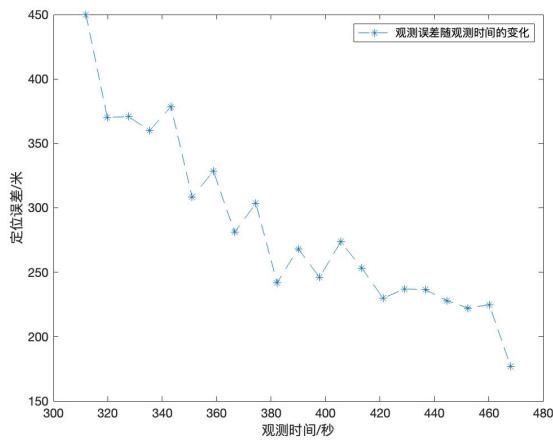


DOP 和迭代次数随观测时间的变化如下图。

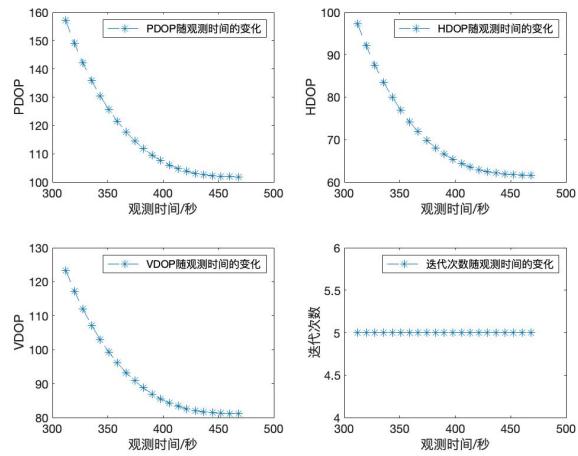


(2.3) 伪距+多普勒

定位误差随观测时间的变化如下图。



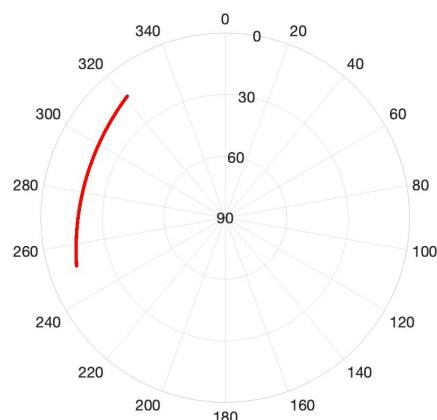
DOP 和迭代次数随观测时间的变化如下图。



5.1.2 卫星选择 sat(5,12)

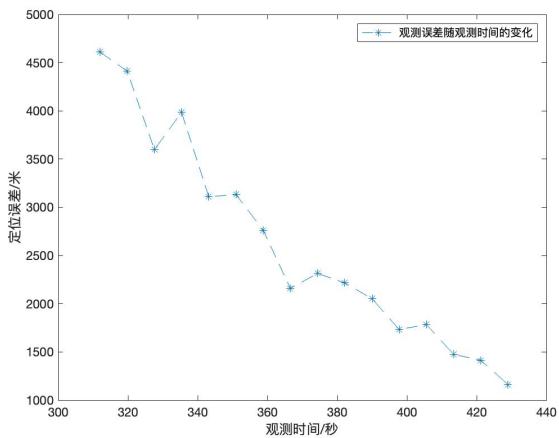
(1) 观测时间段为[6803.16, 7233.72]

观测时间段为[6803.16 , 7233.72] , 共 430.56 秒 , 卫星过境的星空图如下。

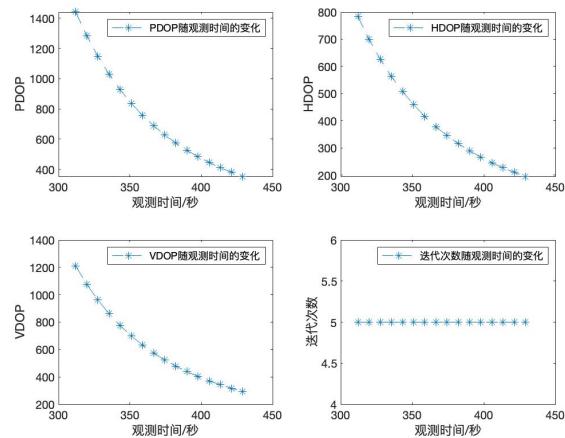


(1.1) 伪距

定位误差随观测时间的变化如下图。

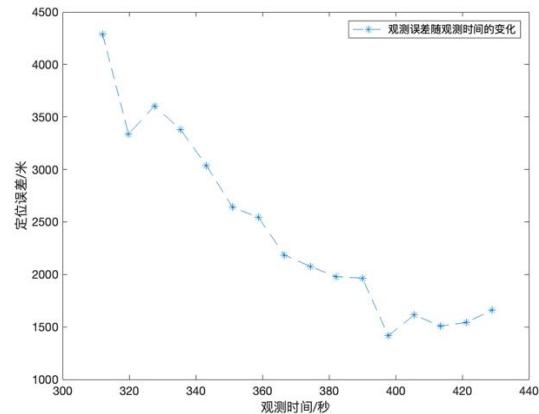


DOP 和迭代次数随观测时间的变化如下图。

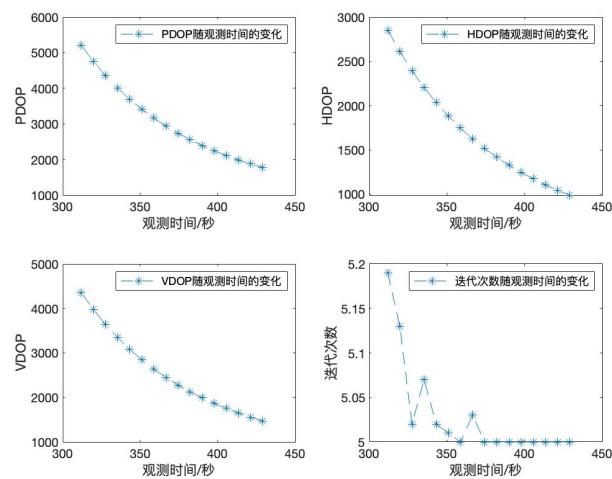


(1.2) 多普勒

定位误差随观测时间的变化如下图。

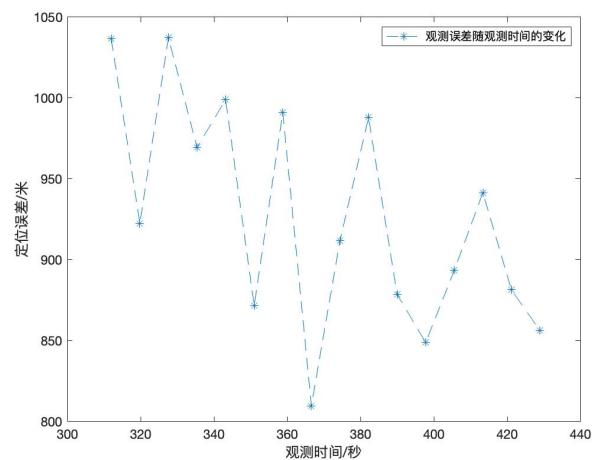


DOP 和迭代次数随观测时间的变化如下图。

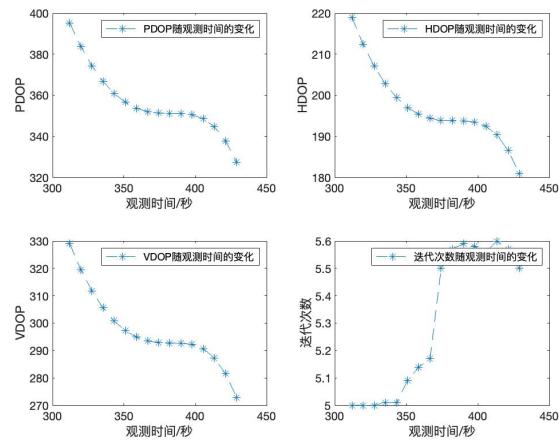


(1.3) 伪距+多普勒

定位误差随观测时间的变化如下图。

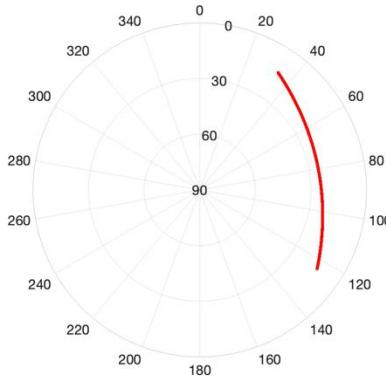


DOP 和迭代次数随观测时间的变化如下图。



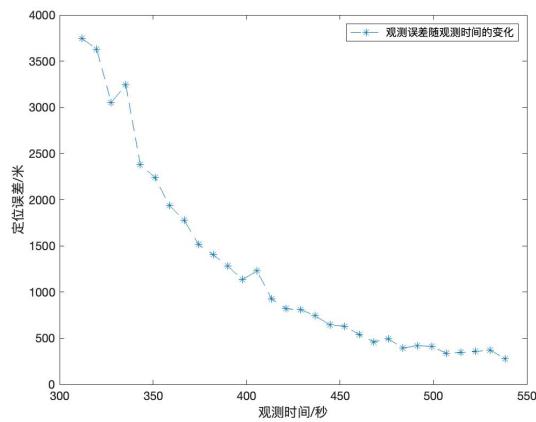
(2) 观测时间段为[254961.72,255501.48]

观测时长为 539.76，卫星过境的星空图如下图。

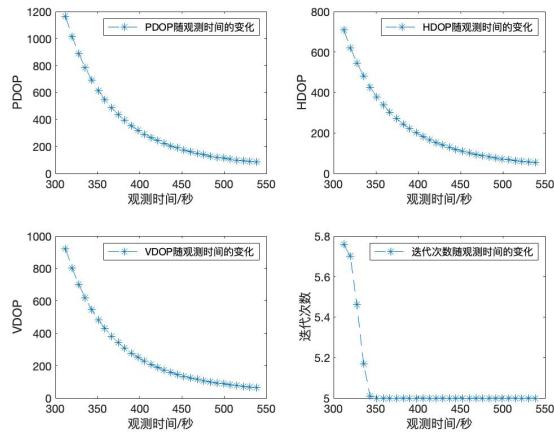


(1.1) 伪距

定位误差随观测时间的变化如下图。

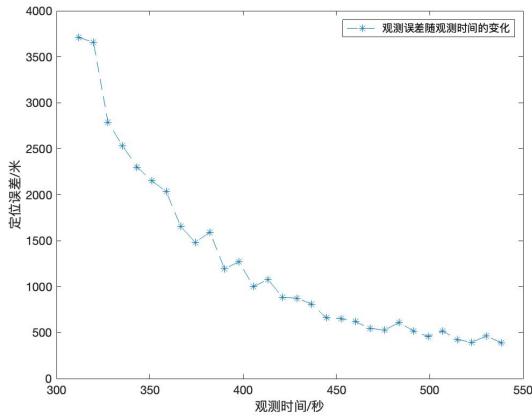


DOP 和迭代次数随观测时间的变化如下图。

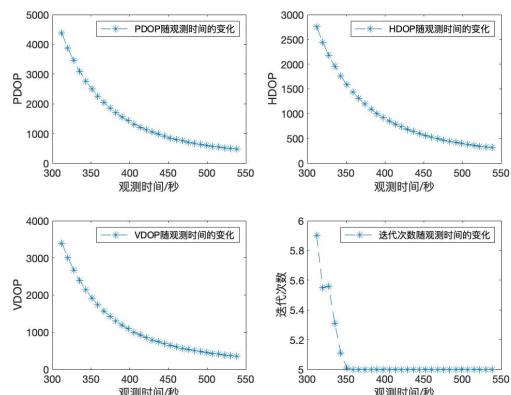


(1.2) 多普勒

定位误差随观测时间的变化如下图。

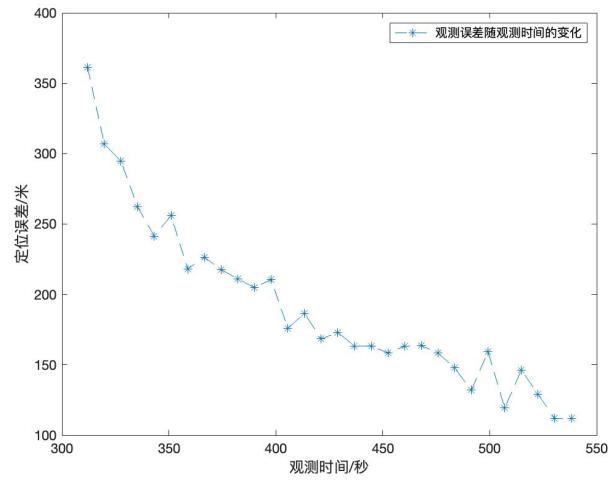


DOP 和迭代次数随观测时间的变化如下图。

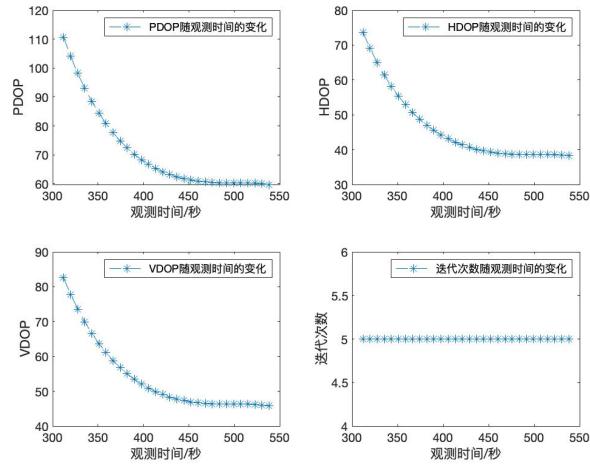


(1.3) 伪距+多普勒

定位误差随观测时间的变化如下图。

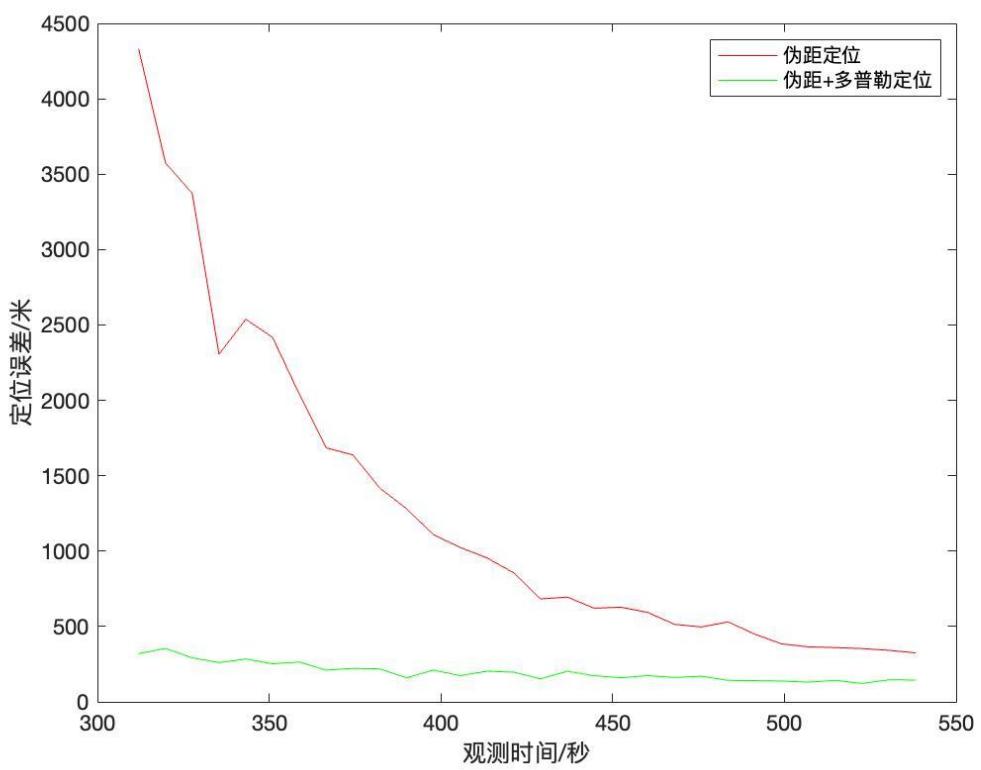


DOP 和迭代次数随观测时间的变化如下图。

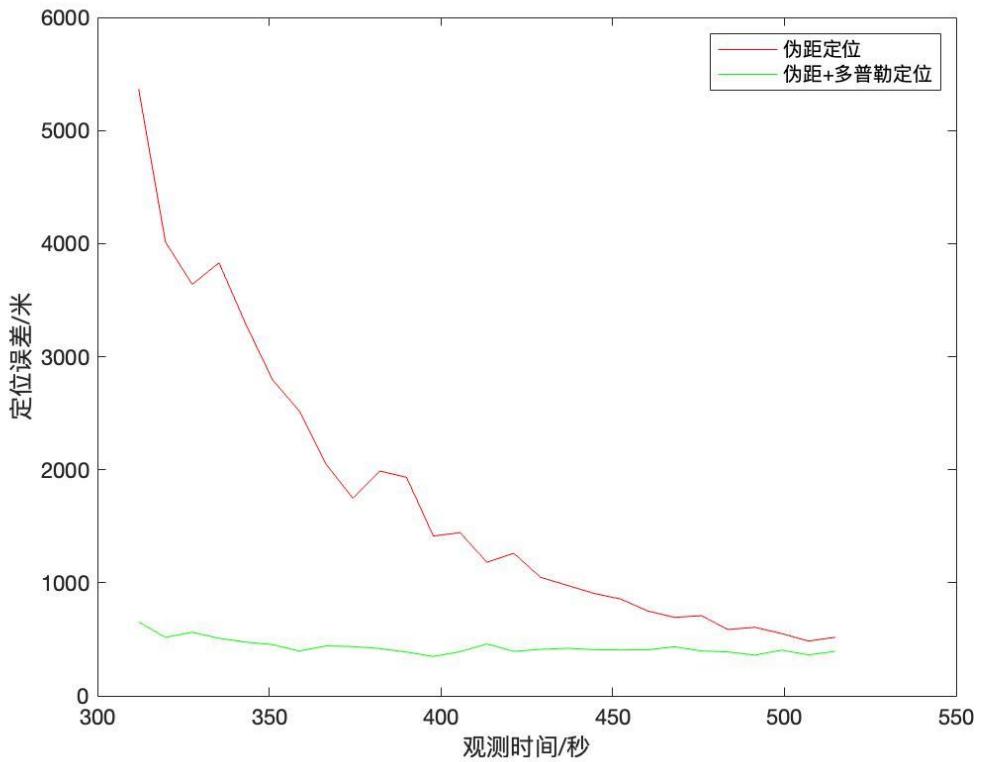


5.1.3 多普勒引入对定位结果的改善

sat(5,12) 254961.72,255501.48



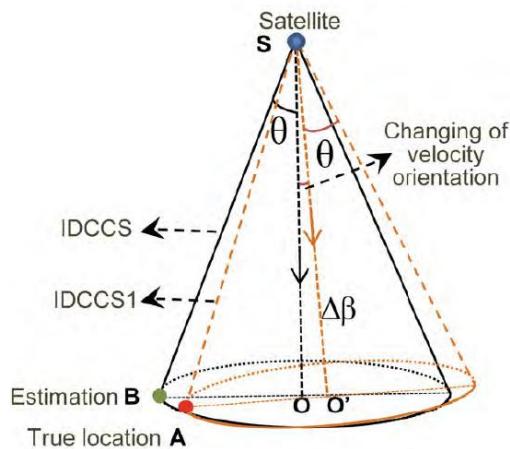
sat(5,1) 6207.24, 6722.04



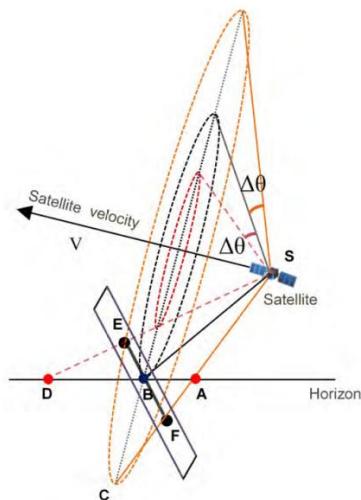
可见，在低轨单星多历元定位中，多普勒观测量的引入会提升定位的精度，但是随着观测时间的增加，伪距观测量累计，由多普勒的引入带来的定位精度的改善越来越小。这与前面对于北斗单星多历元定位分析的结果是不一样的，高轨卫星定位时，多普勒的引入不能对定位的结果带来较大的改善（定位的误差仅仅只会减小一两米）。

一颗卫星，伪距能确定一个球形位置面，多普勒能够确定一个圆锥形位置面，两者相交得到一个圆形位置线，这个位置线是存在在两个维度上的，即使再增加用户的高度这个观测量，从几何上也并不能完全确定出用户的位置来。即同一颗卫星的伪距和多普勒观测量并不能得到用户的两个维度的状态，从这个角度来说，同一颗卫星的伪距和多普勒观测量是相关的（类似于笛卡尔坐标系下的不正交），（两个不同卫星的距离观测量，也是得到一个圆形位置线）（伪距是卫星位置的因变量，而多普勒也是卫星位置的因变量，从这个角度是否能说明两者的相关性）

关于影响多普勒定位精度的因素，可以参见文献[3]。文章定义了两个概念



$$DACGPLY = \tan\left(\left|\frac{\Delta v}{\|v_{sat}\|(-\sin(\theta))}\right|\right) \cdot \|r_{sat} - r_{user}\|$$



卫星的高度能影响 DACG (IDCCS 误差范围) 和 DACGPLY 的值 , 从这个角度可以解释低轨卫星多普勒观测量的引入对定位精度带来的提升更高以及相同观测时长内低轨卫星多普勒定位效果更好。

5.2 采样间隔对定位结果的影响

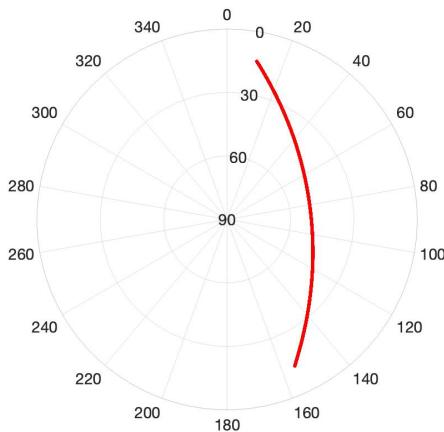
用户位置选择在天津 (经纬高分别为 [117, 39, 0]) 。

5.2.1 卫星选择 sat(5,1)

用户位置选择在天津 (经纬高为 [117, 39, 0]) 。

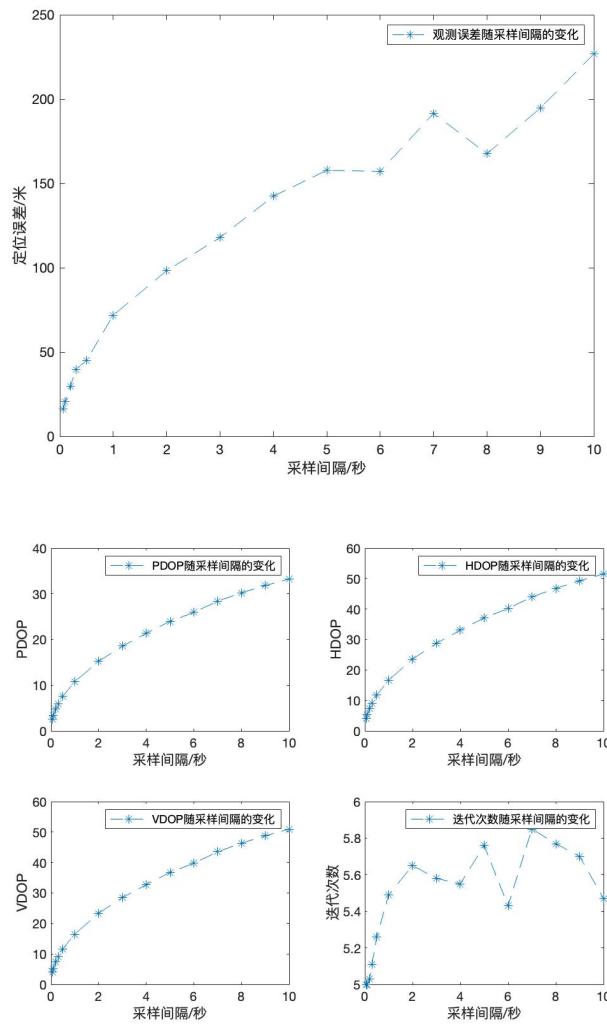
(1) 观测时间段 [40563,41297]

观测时间段为 [40563,41297] , 共 735 秒 , 仿真 100 次取平均 , 星空图如下。

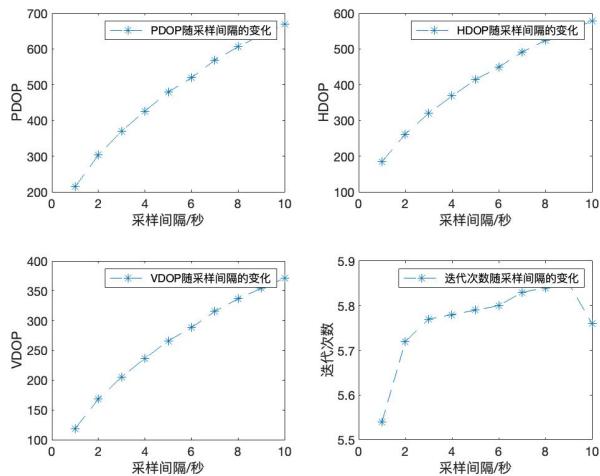
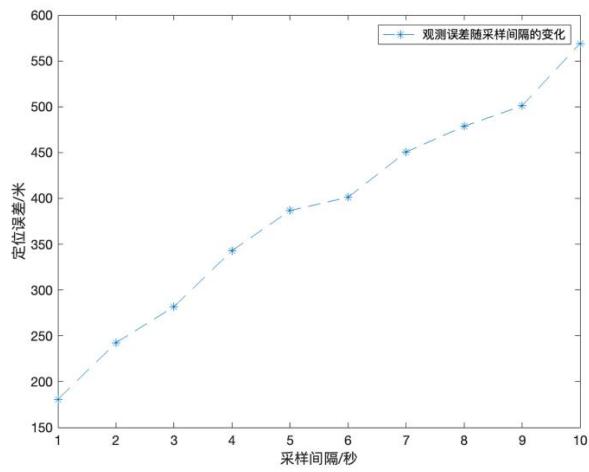


(1.1) 伪距

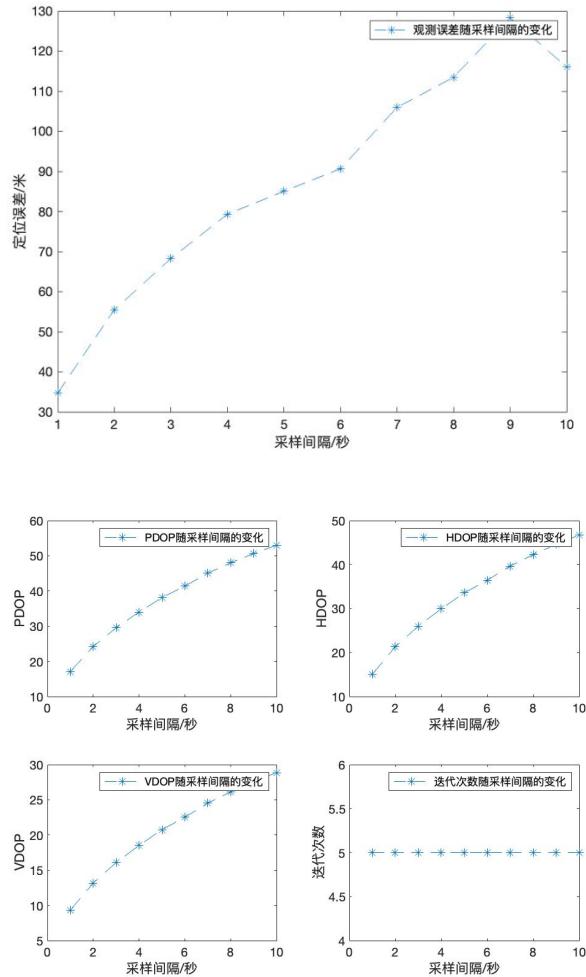
取卫星的整个过境弧段，采样间隔分别为 $[0.06, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]$ ，得到如下的定位结果和PDOP的结果



(1.2) 多普勒

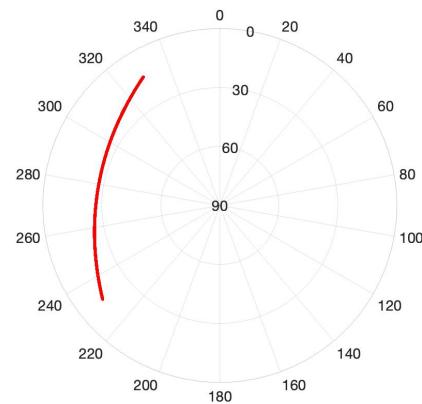


(1.3) 伪距+多普勒

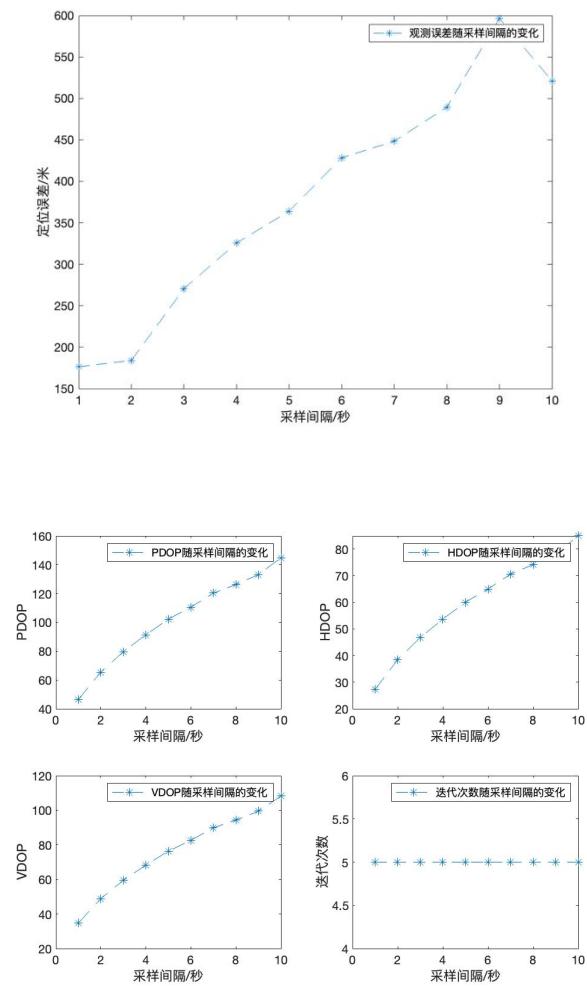


(2) 观测时间段[47164,47741]

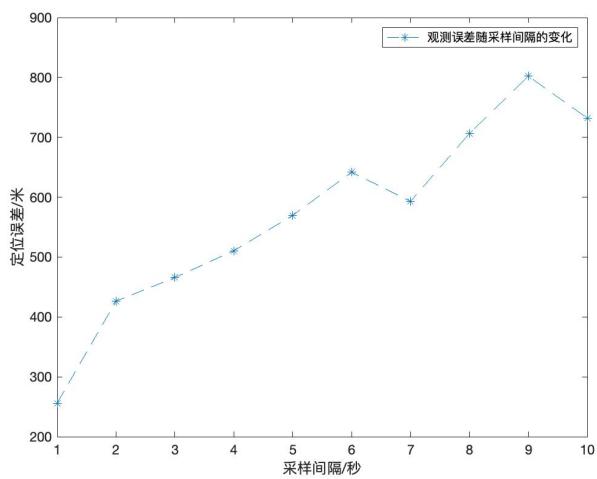
仿真时间段为[47164,47741]，共 578 秒，仿真 100 次取平均，星空图如下

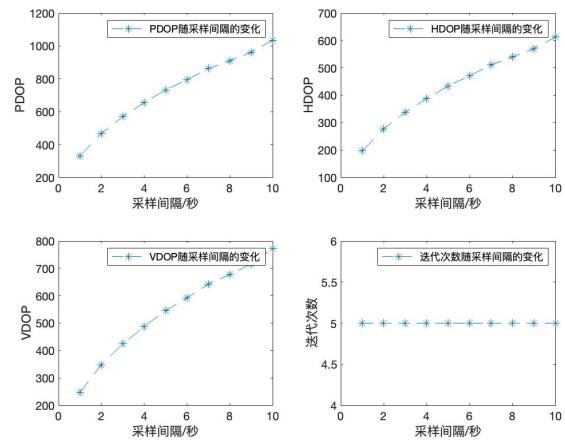


(2.1) 伪距

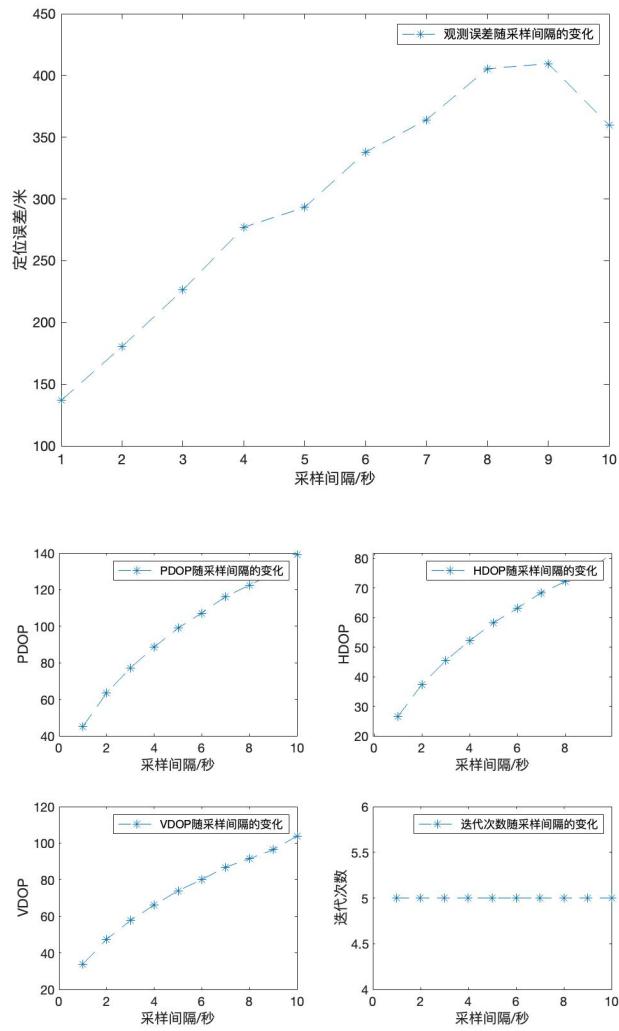


(2.2) 多普勒





(2.3) 伪距+多普勒

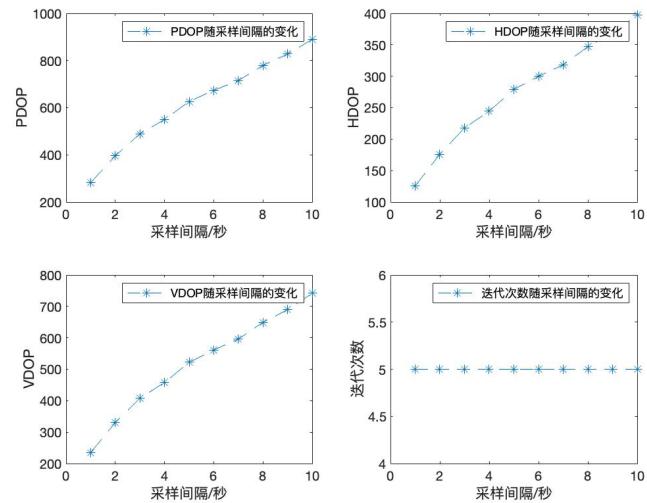
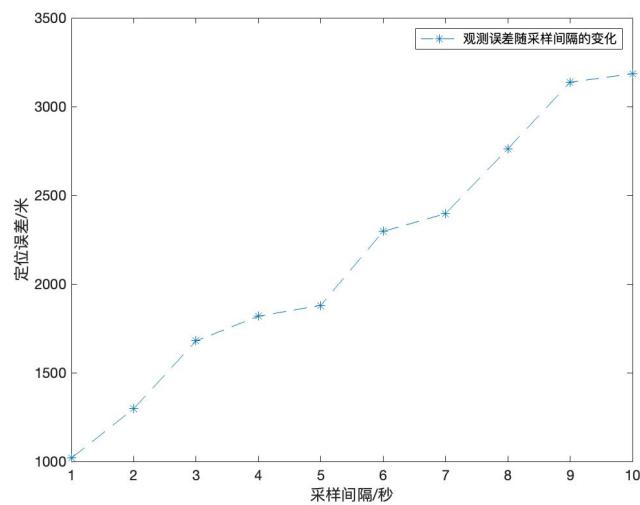


5.2.2 卫星选择 sat(5,12)

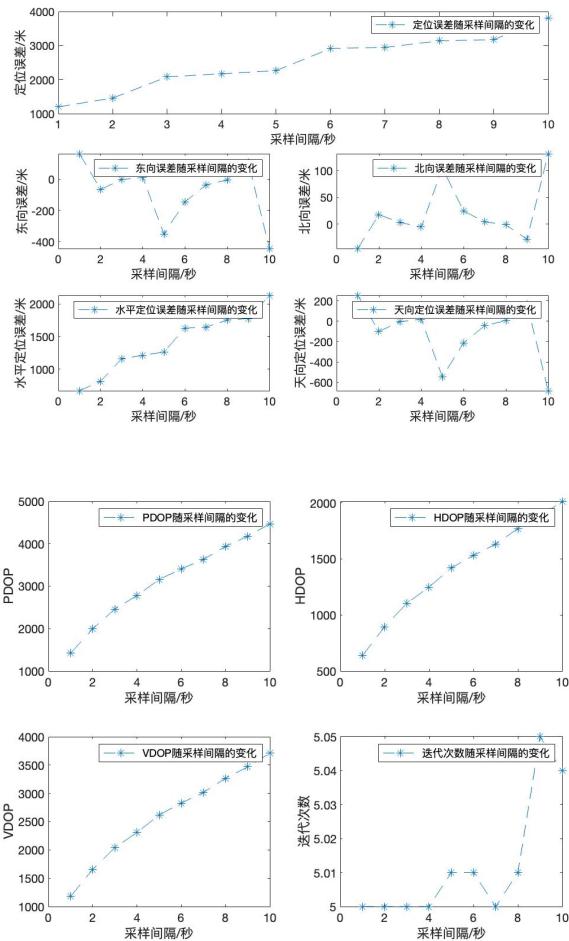
(1) 观测时间段为[6804,7233]

下面给出固定观测时长，分别以伪距定位、多普勒定位和伪距加多普勒定位时，定位误差和 DOP 值随采样间隔变化的曲线。

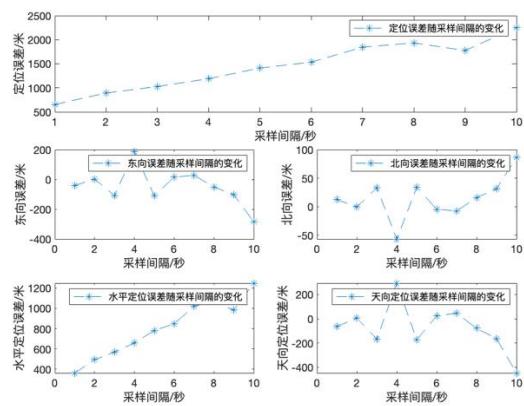
(1.1) 伪距

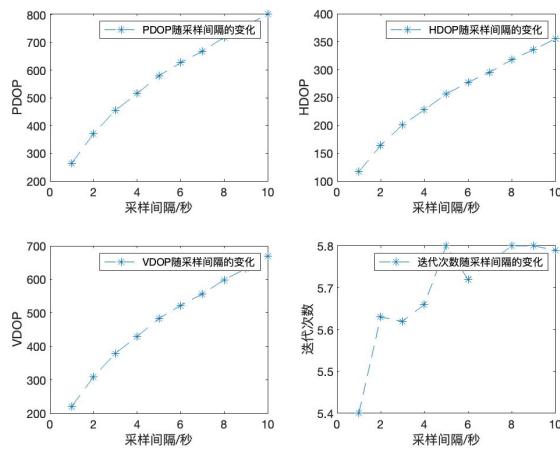


(1.2) 多普勒



(1.3) 伪距+多普勒

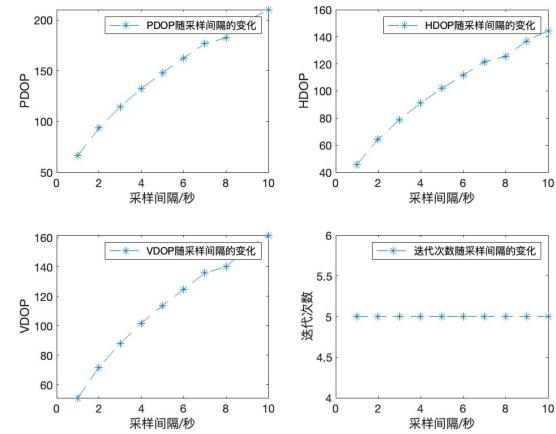
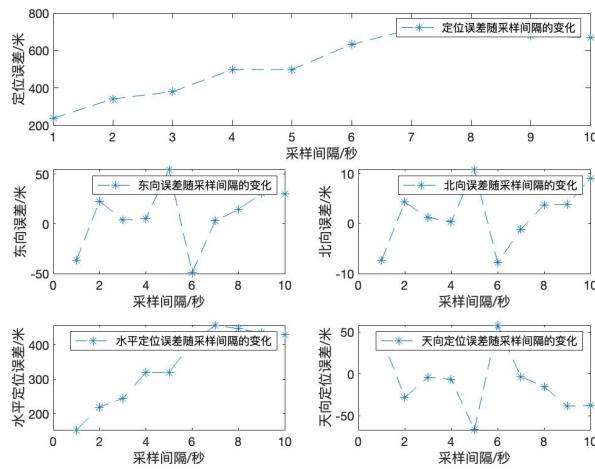




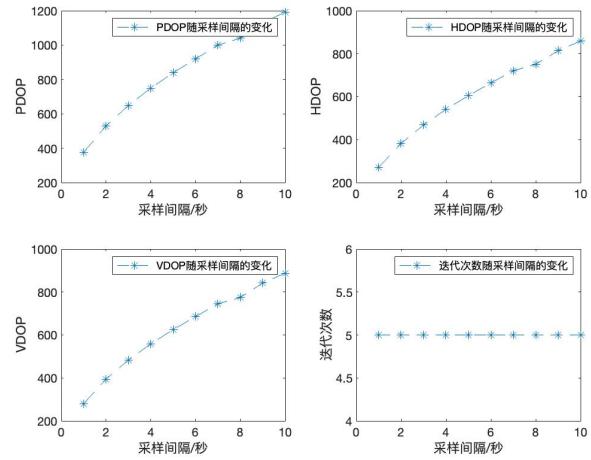
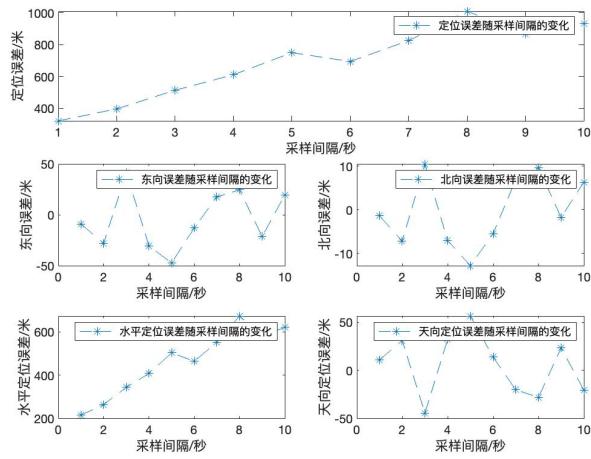
(2) 观测时间段为[254962,255501]

下面给出固定观测时长，分别以伪距定位、多普勒定位和伪距加多普勒定位时，定位误差和 DOP 值随采样间隔变化的曲线。

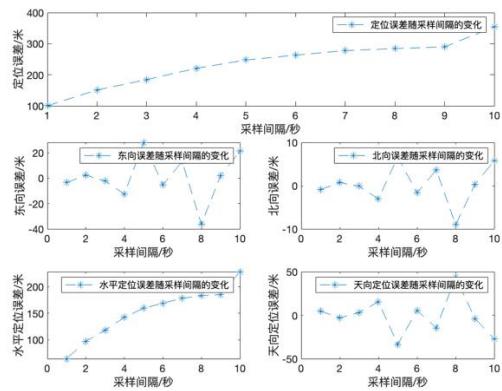
(2.1) 伪距

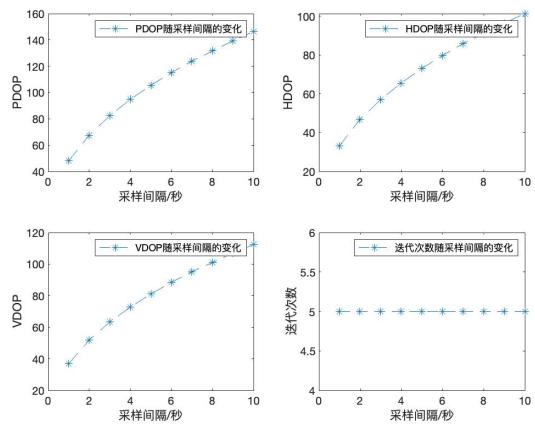


(2.2) 多普勒



(2.3) 伪距+多普勒

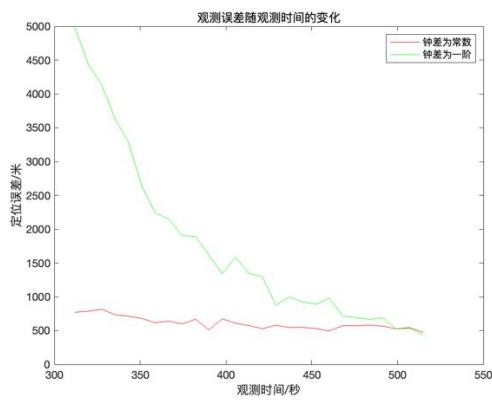




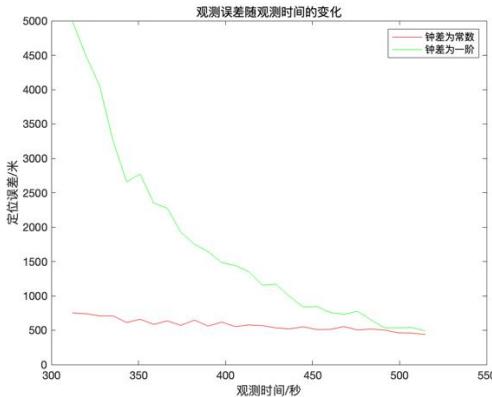
5.3 钟漂对定位结果的影响

(1) 钟漂对定位结果的影响

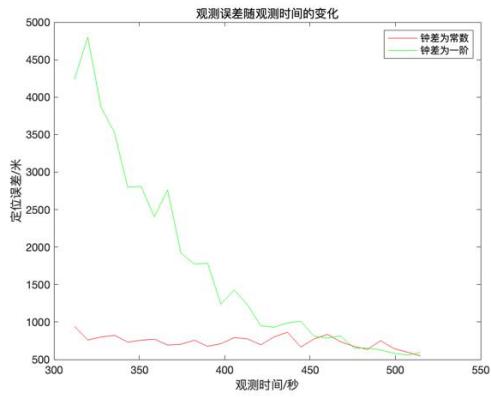
a. $\beta\alpha_1 = -0.0005504 \text{ m/s}$



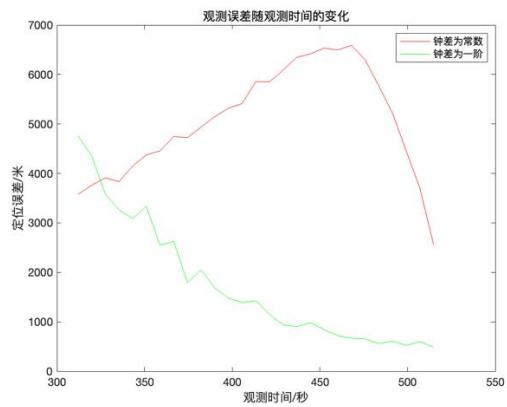
$\beta\alpha_1 = -0.005504 \text{ m/s}$



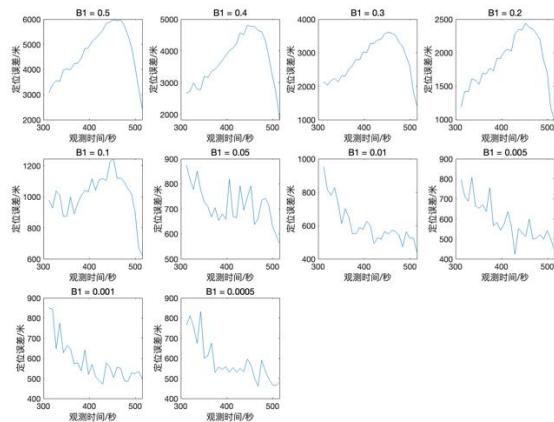
b. $\beta\alpha_1 = -0.05504 \text{ m/s} \quad 0.3 \text{ Hz/s}$

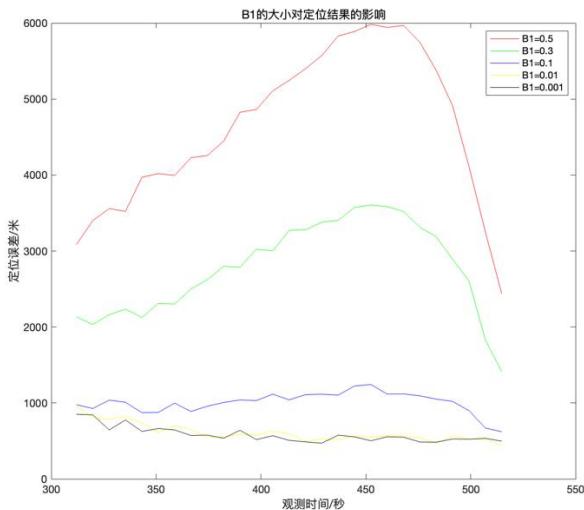


$$c.\beta\alpha = -0.5504 \text{ m/s}$$



(2) 钟漂常数求解





(3) 结论

实际应用中，应根据接收机钟的稳定性选择定位的算法。由于低轨卫星的过境时间较短（十几分钟左右），因此钟的漂移带来的钟差的变化较小。

普通的最小二乘定位算法把钟差看作一个未知数，和接收机的位置一并解算。而如果接收机钟漂过大，即便低轨卫星过境时间短，钟差的变化也会很大，这种情况下，定位解算时把钟差看作常数，就会得到较差的结果，此时应该把钟差的初值和钟漂两项看作未知量。

小节(1)给出的是不同的钟漂时，采用上述两种方法，定位误差随观测时长的变化。情况a和情况b，把钟差看作常数定位精度更好，而随着观测时长的增加，两种方法的得到的定位结果趋于一致。情况c钟漂偏大，此时把钟差看作常数则会带来较大的误差。

小节(2)则是对不同钟漂下，把钟差看作常数，定位误差随观测时长的变化。

分析以上结果，可以给出以下建议，当接收机钟差绝对值大于 $0.1m/s$ 时，应把钟差看作一次函数进行定位解算，而当接收机钟差绝对值小于 $0.05m/s$ 时，可以把钟差看作常数进行定位解算。

5.4 最小残差法确定初值

观测到 N 个伪距值

$$Z = [\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N]^T$$

第 i 个卫星的位置为

$$[x_{si}, y_{si}, z_{si}]^T$$

按照经纬度把地球表面划分为网格点，第 n 个网格点的坐标为

$$[x_n, y_n, z_n]^T$$

取满足

$$\min_n \sum_{i=1}^N \sqrt{(x_{si} - x_n)^2 + (y_{si} - y_n)^2 + (z_{si} - z_n)^2}$$

的网格点的坐标为最小二乘的初始值。

5.5 结论

(1) 观测时长对定位结果的影响

5.1 讨论了观测时长对定位结果的影响，选取了同一颗轨道上的两颗卫星，每颗卫星选取了两个可观测时间段，得到了以下的结论：

观测时长越长，PDOP 越小，定位的误差越小；

最小二乘迭代次数基本上不随观测时长变化而变化，一般观测时长短时最小二乘解算需要的迭代次数要比观测时长长时要多，但一般迭代次数都是五次左右，这个对内存的开销的影响并不大；

不同观测时间段，随着观测时长的增加，定位误差减小的速度也不同，这主要取决于用户相对于卫星过境弧线偏开的距离，关于这部分的讨论在低轨卫星单星定位区域误差的仿真中有所体现，可以用 PDOP 来衡量；

定位误差随观测时长增大而减小，可以预想到，如果卫星的观测时长更大（可以通过增加接收机可观测的俯仰角或者增大卫星导航信号波束的波束角来实现），在保证导航观测量的观测精度的情况下，定位误差还会进一步的减小。也即，如果要想取得更好的定位精度，对于该低轨星座的卫星的观测时长越长越好，应尽可能观测到卫星的整个过境弧段。但是增加观测时长，得到的观测量会更多，定位解算时的复杂度就会增加。

（2）采样间隔对定位结果的影响

采样时长一定，采样间隔越大，PDOP 越大，定位误差越大；采样的间隔越小，定位误差也越小，在 5.2.1 小节，（1.1）的仿真实验中，把观测的间隔最小取到了 0.06 秒，而定位误差依然随着观测间隔的减小而减小，可以预见，如果观测间隔继续变小，定位误差还会变小（由于内存开销，没有继续将观测间隔减小）。但同时应该注意，观测间隔从 1 秒减小到 0.1 秒，观测量增加十倍，解算的复杂度则变为一百倍，但由此带来的定位精度的提升却是有限的。因此要综合考虑定位精度的要求、计算的复杂度和硬件设备的性能，合理的选取观测间隔。

采样间隔与迭代次数的关系不明显。

（3）关于如何权衡各影响因素和定位误差的关系给出以下意见

在低轨卫星单星定位中，用户观测到的低轨卫星的几何构型是用户不太容易确定的，一般只能通过 DOP 来进行衡量；

而且低轨单星定位只使用于极端情况下，对定位的实时性没有要求的用户，低轨卫星的过境时间一般在八九分钟；

在观测误差一定的情况下，用户可以从改变观测时间的长短和观测间隔的大小来影响定位的精度。在没有实时性要求时，相比减小观测的间隔，更建议增加观测的时长；而如果想要较小的观测时长，则更建议减小观测的间隔。

(4) 实际应用中，应根据接收机钟的稳定性来选择合适的定位算法。

6 高/低轨卫星单星定位对比

(1) 观测时间：GPS 和北斗 MEO/IGSO 卫星的过境时间一般都在五个小时以上，而低轨卫星的过境弧段在九分钟左右。

(2) 定位精度：

在观测到卫星的整个过境弧段时，高轨卫星会有更好的几何构型，定位的结果也会更好，无论是纯伪距、纯多普勒还是伪距加多普勒的观测量；

但是如果想要在几分钟内单星定位实现几百米的定位精度，那么就只能选择低轨卫星。相比之下，实现百米级别的定位精度，高轨需要的时间在一小时以上。

(3) 影响定位精度的因素：

观测时长：低轨单星定位的精度随着观测时长的增加而提高，但是高轨单星定位时，观测时长达到了五个小时左右，定位精度的提升就不再明显；

观测间隔：由于低轨卫星观测时间短，观测量少，低轨单星定位的精度和观测间隔是强相关的，观测间隔越大定位的精度越差。而高轨单星定位则不然，其过境时间长，用户可以获得足够的观测量，采样间隔的增大对定位精度的影响并不大，甚至于从几个小时的观测量中选取几个观测点，也能够实现误差为十几米

的定位，因对高轨单星进行长时间的观测后，用户观测到的几何构型也会变得很好。

(4) 观测量：低轨单星定位，多普勒+伪距的定位结果要优于纯多普勒定位的结果，而高轨单星定位中，多普勒观测量的引入并不能对定位结果产生大的改善。这里体现出低轨卫星多普勒观测量用作的导航的优势，因为低轨卫星轨道高度低，运动速度快，产生的多普勒频移更大，因此其用作定位更具优势。

7 高度信息辅助

7.1 高度信息辅助定位算法

(1) 高度信息辅助低轨定位（方法 1，相似椭球法）

位置与高度的关系可表示为

$$\frac{x^2 + y^2}{(R_e + H)^2} + \frac{z^2}{(R_p + H)^2} = 1$$

$$\Delta\rho_H = \frac{1}{2} [1 - \frac{\hat{x}^2 + \hat{y}^2}{(R_e + H)^2} - \frac{\hat{z}^2}{(R_p + H)^2}]$$

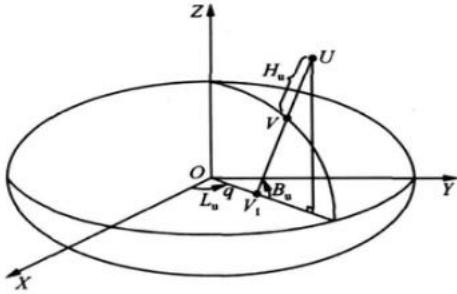
泰勒展开表示为

$$\Delta\rho_H = \frac{\hat{x}}{(R_e + H)^2} \Delta x + \frac{\hat{y}}{(R_e + H)^2} \Delta y + \frac{\hat{z}}{(R_p + H)^2} \Delta z$$

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial\rho_1}{\partial x_u} & \frac{\partial\rho_1}{\partial y_u} & \frac{\partial\rho_1}{\partial z_u} & \frac{\partial\rho_1}{\partial \delta_R} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial\rho_N}{\partial x_u} & \frac{\partial\rho_N}{\partial y_u} & \frac{\partial\rho_N}{\partial z_u} & \frac{\partial\rho_N}{\partial \delta_R} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial \dot{x}_u} & \frac{\partial \rho_1}{\partial \dot{y}_u} & \frac{\partial \rho_1}{\partial \dot{z}_u} & \frac{\partial \rho_1}{\partial \dot{\delta}_R} \\ \frac{\partial \rho_N}{\partial \dot{x}_u} & \frac{\partial \rho_N}{\partial \dot{y}_u} & \frac{\partial \rho_N}{\partial \dot{z}_u} & \frac{\partial \rho_N}{\partial \dot{\delta}_R} \\ \widehat{x} & \widehat{y} & \widehat{z} & 0 \\ \frac{(R_e + H)^2}{(R_e + H)^2} & \frac{(R_e + H)^2}{(R_e + H)^2} & \frac{(R_p + H)^2}{(R_p + H)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 高度信息辅助低轨定位 (方法 2, 伪卫星法) [4]



如果用户的大地坐标系估值为 $(\widehat{B}_u, \widehat{L}_u, \widehat{H}_u)$ (分别为纬度、经度和高度)，那么虚拟卫星 V_1 的估计坐标为

$$\begin{cases} x_v = q \cos(\widehat{L}_u) \\ y_v = q \sin(\widehat{L}_u) \\ z_v = 0 \end{cases}$$

其中，

$$q = \sqrt{\widehat{x}_u^2 + \widehat{y}_u^2} - \widehat{z}_u \cot(\widehat{B}_u)$$

进而求出虚拟卫星估计点 V_1 到用户估计点 U 的距离估计为

$$\hat{r}_v = \sqrt{(\widehat{x}_u - x_v)^2 + (\widehat{y}_u - y_v)^2 + (\widehat{z}_u - z_v)^2}$$

于是参考关于卫星的线性测距方程，建立关于气压计的线形测高方程，

$$\Delta \rho_{baro} = \frac{\widehat{x}_u - x_v}{\hat{r}_v} \Delta x_u + \frac{\widehat{y}_u - y_v}{\hat{r}_v} \Delta y_u + \frac{\widehat{z}_u - z_v}{\hat{r}_v} \Delta z_u$$

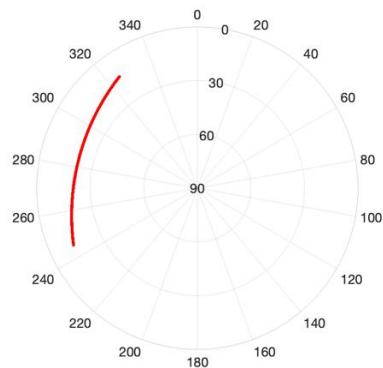
其中

$$\Delta \rho_{baro} = H_{baro} - \widehat{H}_u$$

采用迭代的方式得到位置和钟差。

7.2 高度信息辅助低轨单星定位

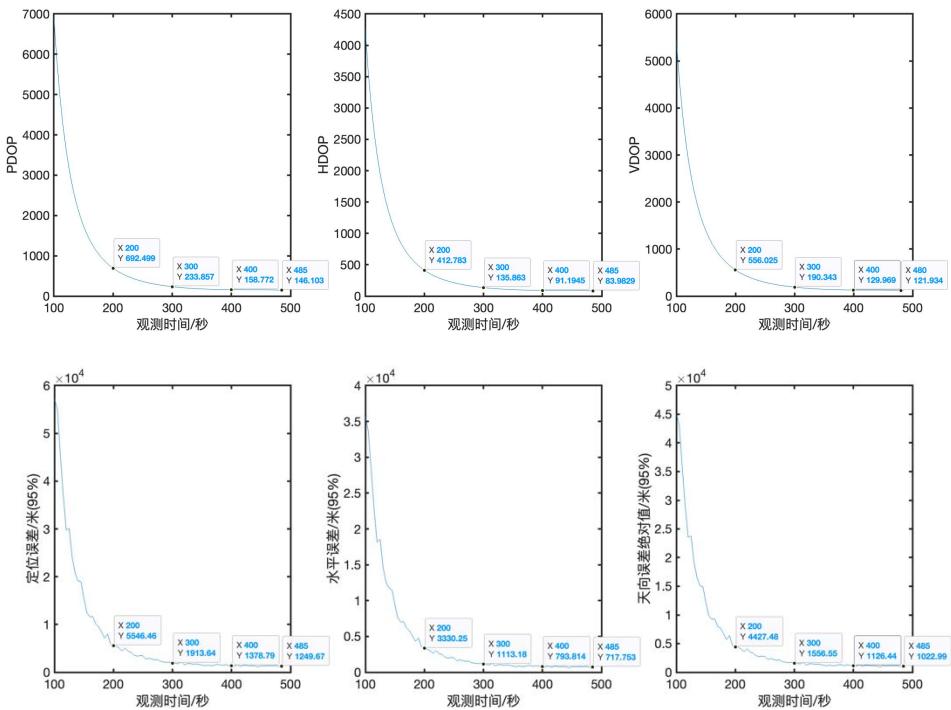
选取一颗过境时长为 489 秒的低轨卫星，星空图如下。分别以多历元观测的伪距加高度、多历元观测的多普勒加高度以及多历元观测的伪距和多普勒加高度为观测量，分析定位误差和 DOP 值随着观测时间的变化，以及定位误差随着高度测量误差的变化。



7.2.1 观测时长的影响

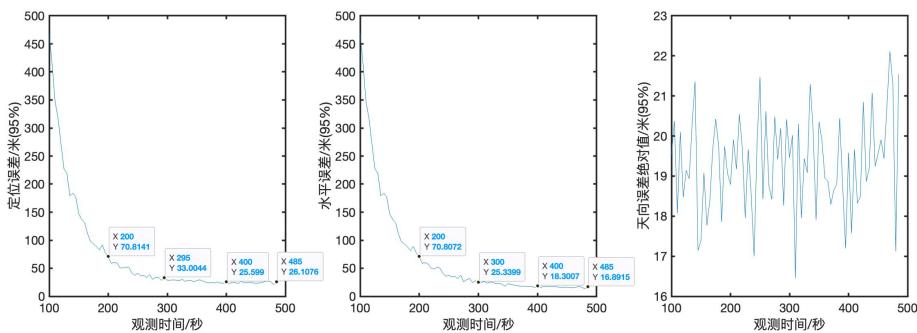
(1) 伪距

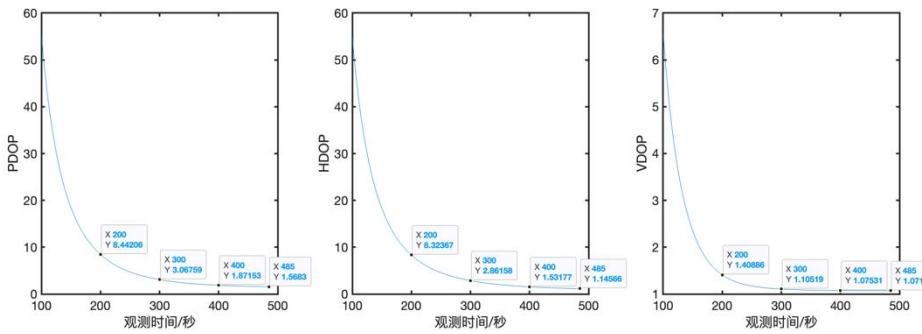
(1.1) 伪距 , 误差随观测时长的变化



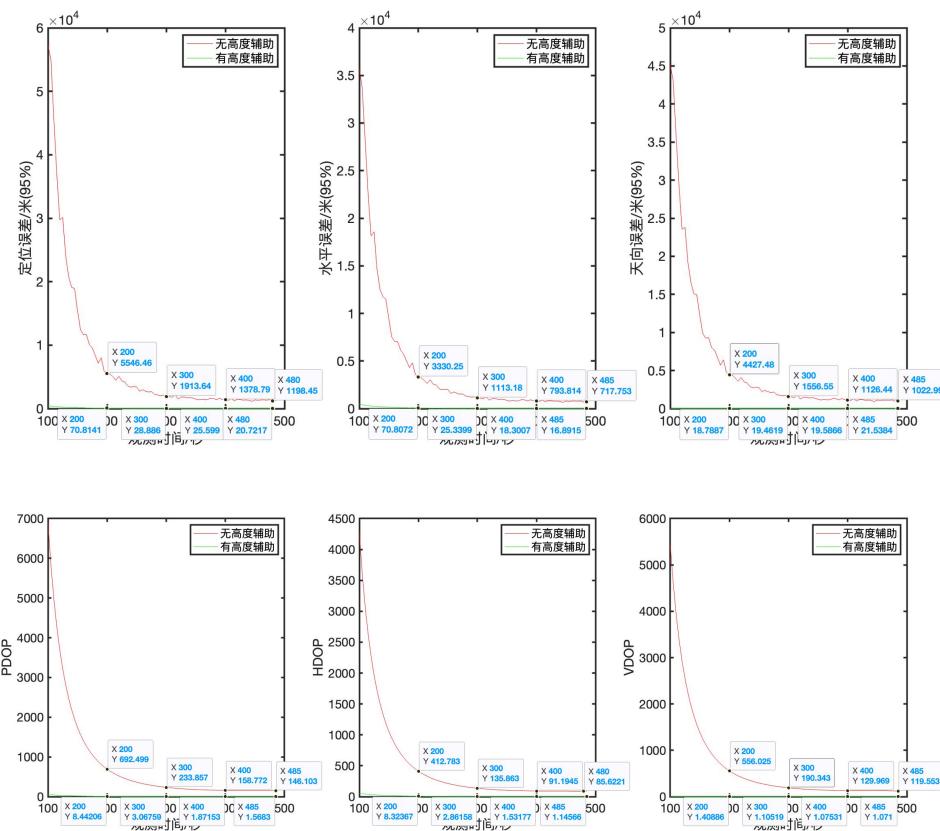
(1.2) 伪距+高度信息 , 误差随观测时长变化

高度的误差为零均值高斯白噪声 , 均方差为 10 米



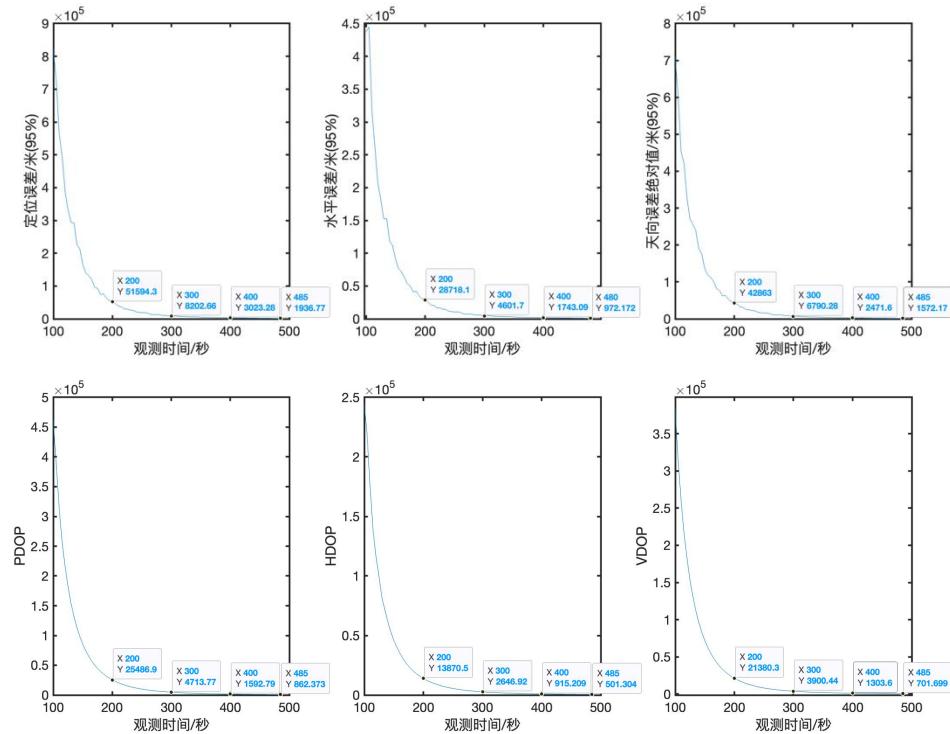


对比有无高度信息辅助



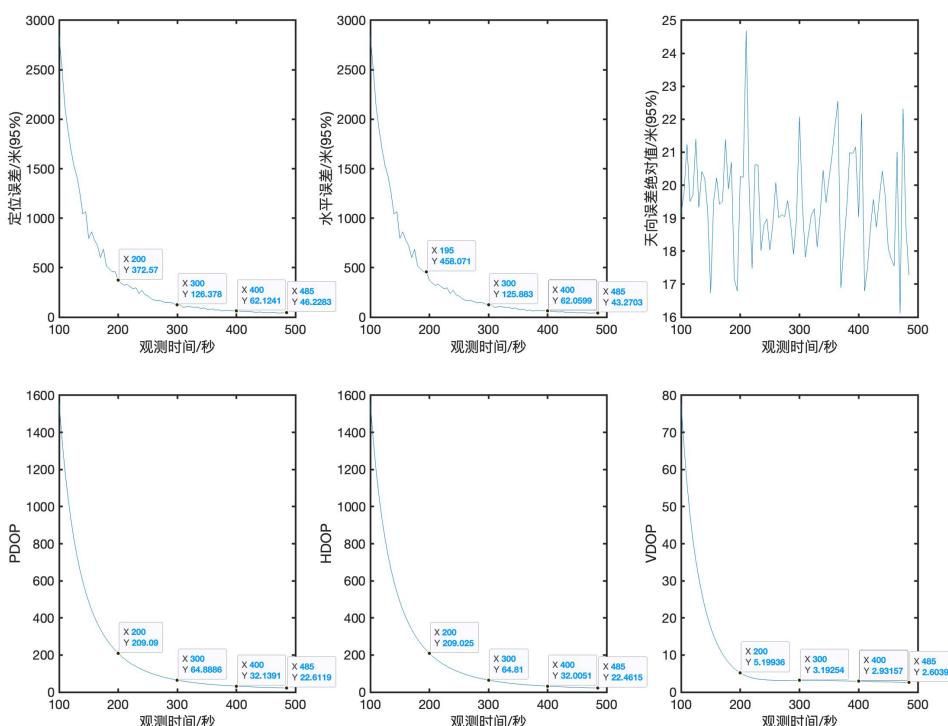
(2) 多普勒

(2.1) 多普勒，误差随观测时长的变化

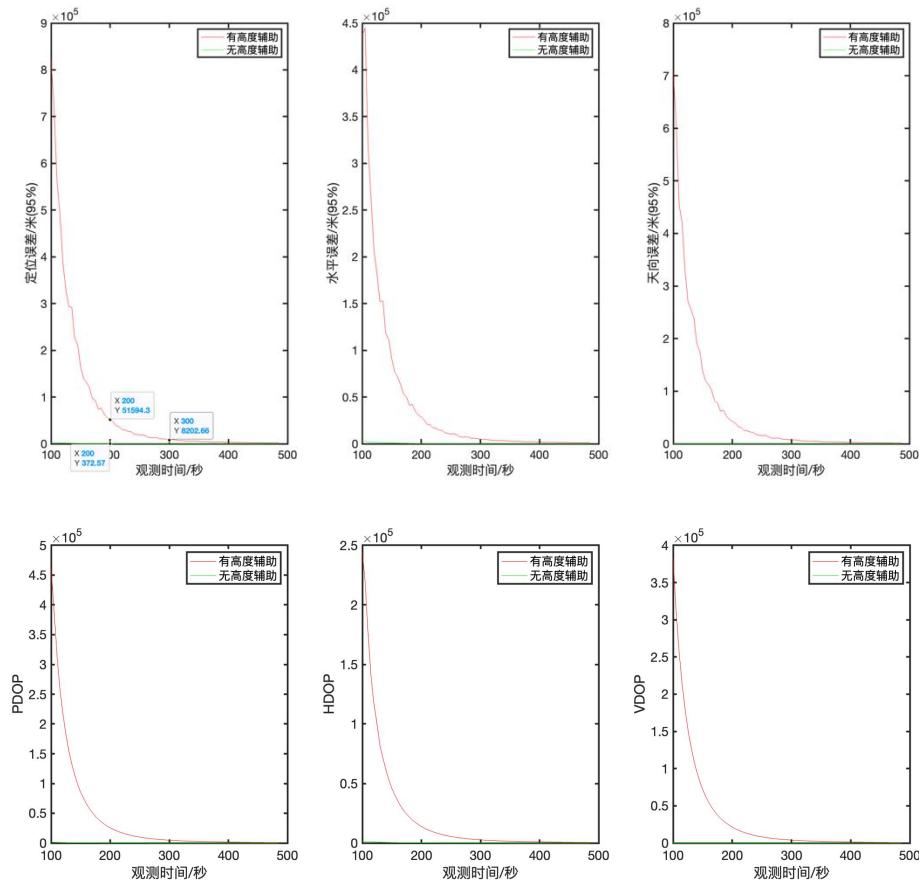


(2.2) 多普勒+高度信息，误差随观测时长的变化

高度的误差为零均值高斯白噪声，均方差为 10 米

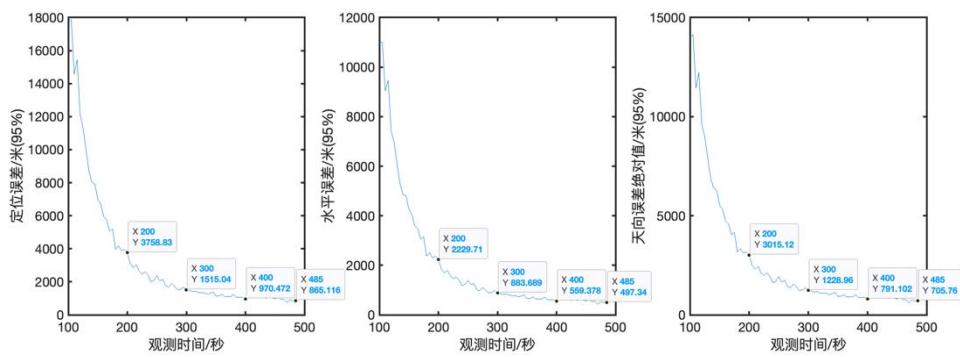


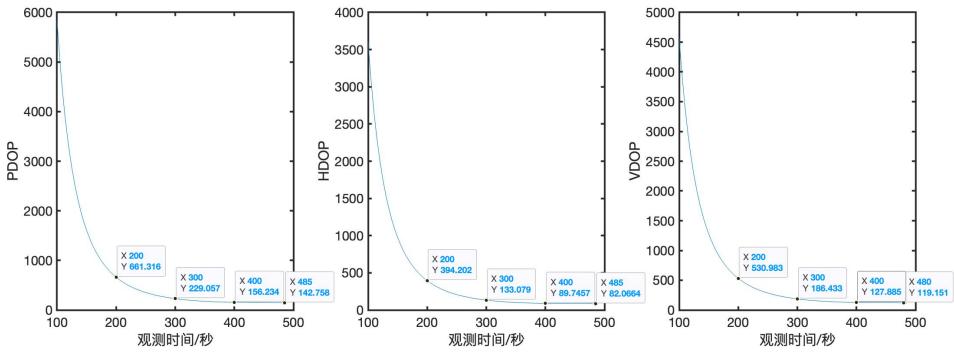
对比有无高度信息辅助



(3) 伪距+多普勒

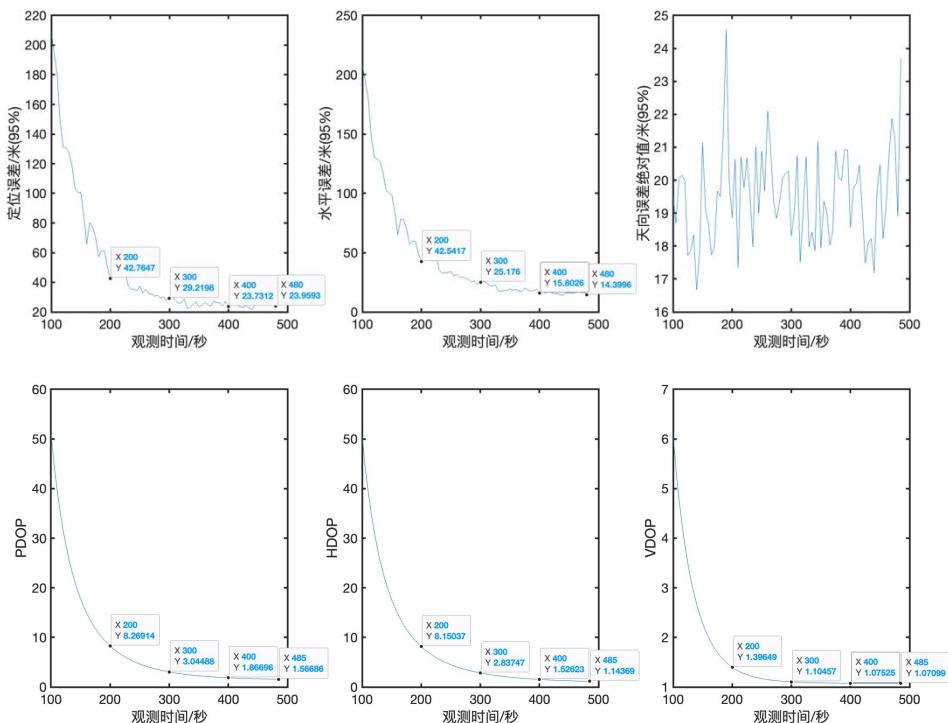
(2.1) 伪距+多普勒，误差随观测时长的变化



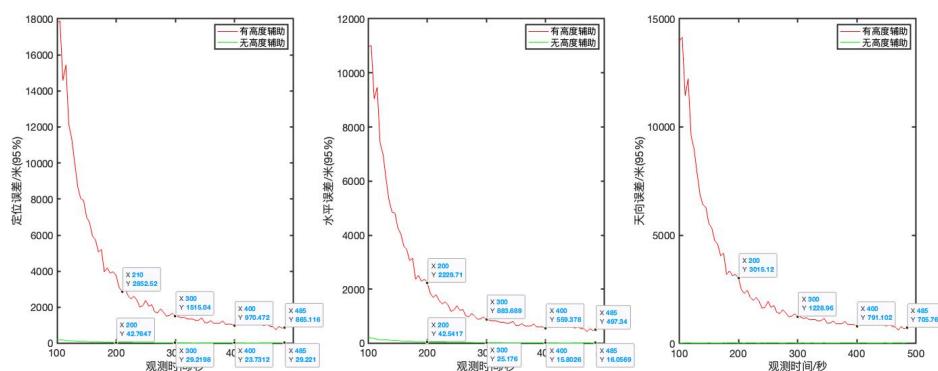


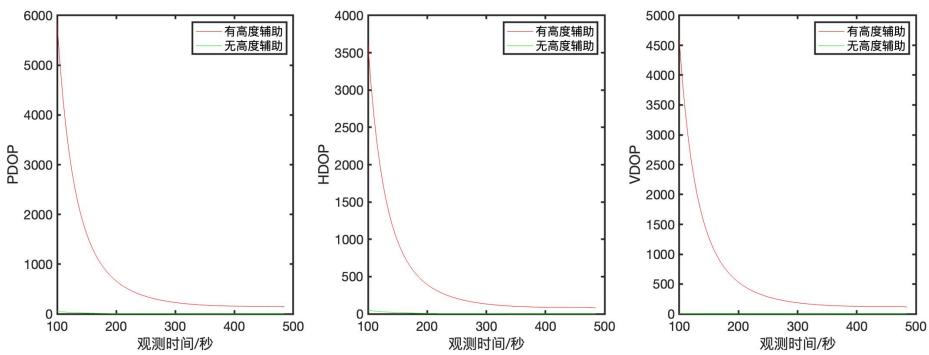
(2.2) 伪距+多普勒+高度信息 , 误差随观测时长的变化

高度的误差为零均值高斯白噪声 , 均方差为 10 米



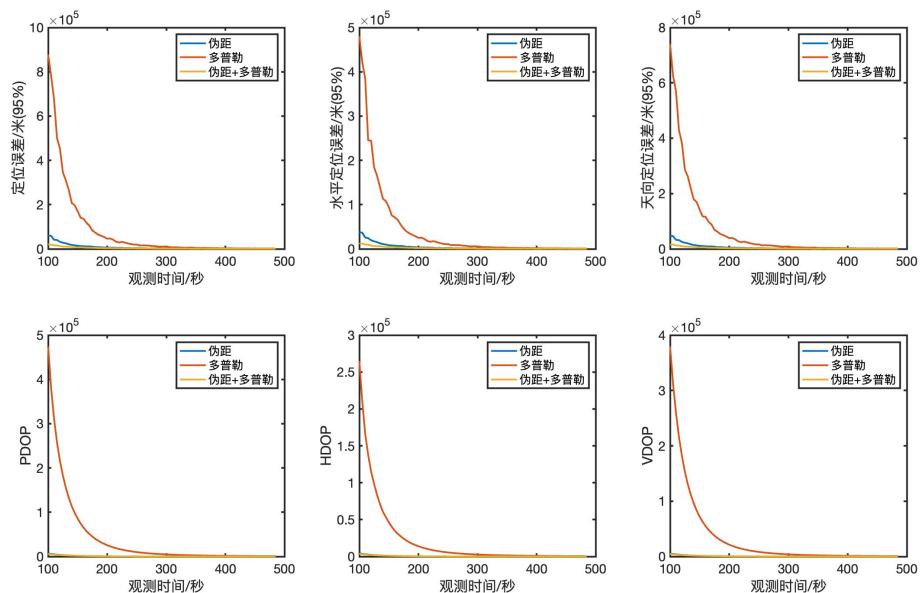
对比有无高度信息辅助



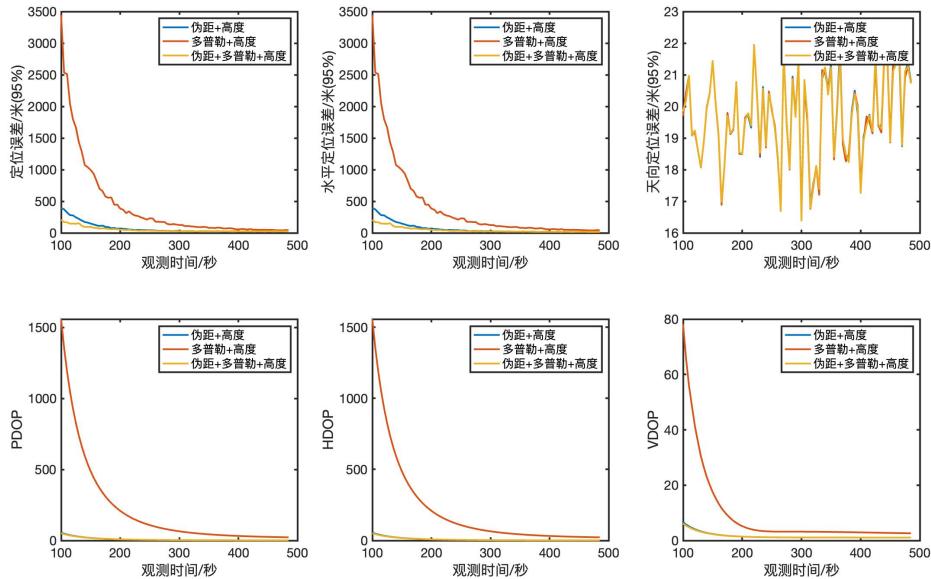


(4) 对比三种组合方式

(4.1) 无高度信息辅助



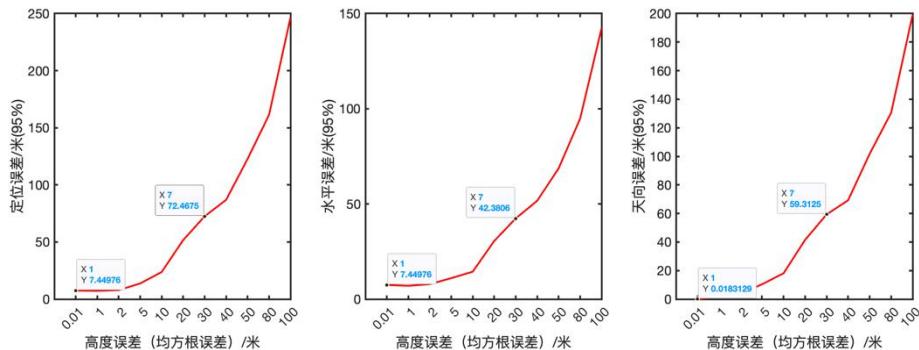
(4.2) 有高度信息辅助



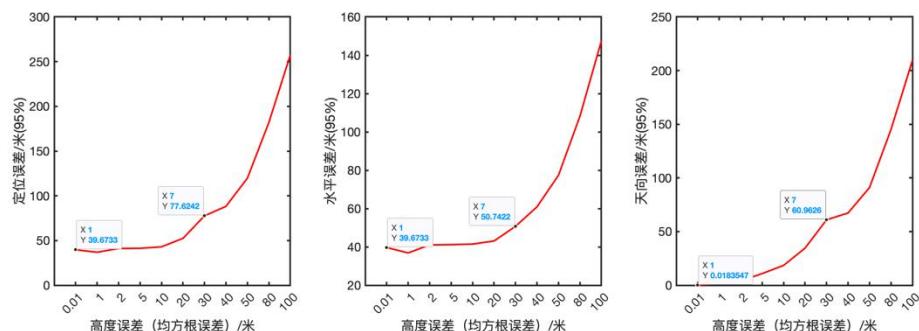
7.2.2 高度观测误差的影响

观测时长 489 秒

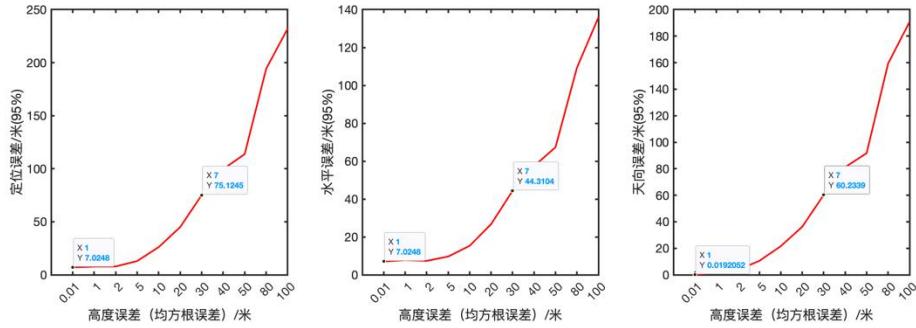
(1) 伪距+高度信息



(2) 多普勒+高度信息

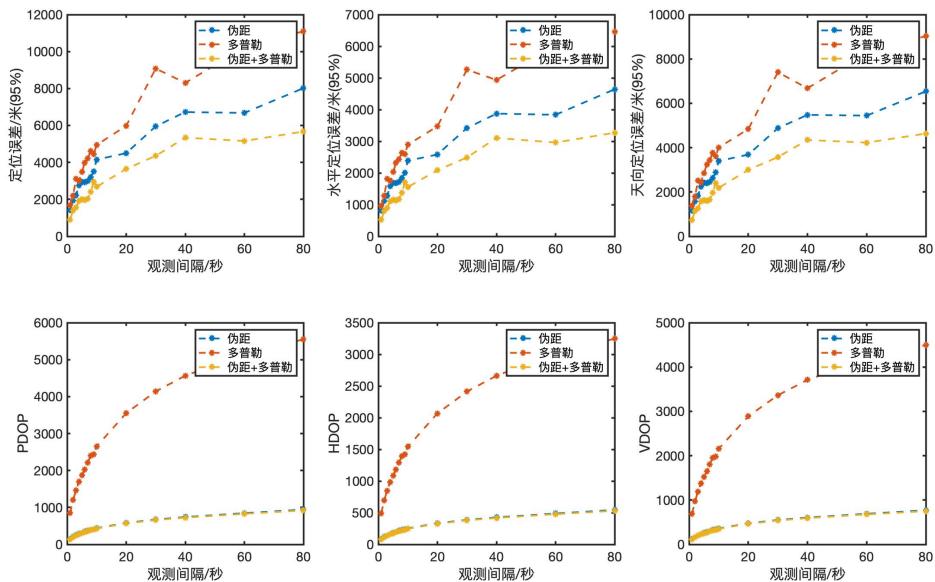


(3) 伪距+多普勒+高度信息



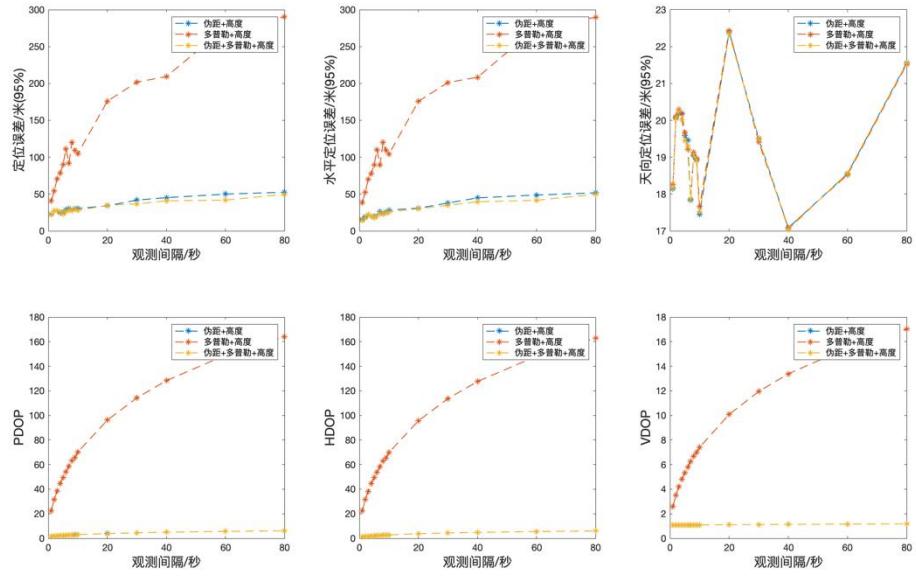
7.2.3 观测间隔的影响

(1) 无高度信息辅助



(2) 有高度信息辅助

高度的误差为零均值高斯白噪声，均方差为 10 米。



7.2.4 结论

(1) 高度信息的引入能够极大的提升低轨单星定位的定位精度。伪距加高度定位，200 秒的观测时长可以使定位误差达到 70 米，480 秒观测时长定位误差达到 26 米；多普勒加高度定位，200 的观测时长可以使定位误差达到 370 米，480 秒观测时长定位误差达到 46 米；伪距、多普勒加高度定位，200 的观测时长可以使定位误差达到 42 米，480 秒观测时长定位误差达到 23 米。

以 100 米的定位误差为目标，纯伪距、纯多普勒和伪距加多普勒，低轨单星定位均不能达到这一精度。而伪距加高度（高度误差的均方根为 10 米），180 秒的观测时间可以实现；多普勒加高度，325 秒的观测时间可以实现；伪距、多普勒加高度，140 秒的观测时间可以实现。

(2) 定位的误差随着高度误差的增大而增大，当高度误差趋于 0 时，天向定位误差也趋于 0。

(3) 引入高度观测量，相同的观测时间内，伪距加多普勒的定位精度最好，其次是伪距定位，再次是多普勒定位，伪距加多普勒的定位误差曲线靠近纯伪距定位的误差曲线。这与无高度信息时仿真得到的结论是一致的。

(4) 高度观测量的引入放宽对观测间隔的要求，当观测间隔为 80 秒时，定位误差为 50 米，仍满足 100 米的定位精度的要求。

7.3 伪距/多普勒+高度信息定位的 HVCE 算法^[5]

Helmert Variance Component Estimation

$$\begin{cases} L_\rho = B_\rho X + \Delta_\rho \\ L_h = B_h X + \Delta_h \end{cases}$$

$$\begin{cases} E(\Delta_\rho) = 0 \\ E(\Delta_h) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(\Delta_\rho) = (\sigma_\rho)^2 \\ D(\Delta_h) = (\sigma_h)^2 \\ D(\Delta_\rho \Delta_h) = 0 \end{cases}$$

误差方程为

$$\begin{cases} V_\rho = B_\rho \widehat{X} - L_\rho \\ V_h = B_h \widehat{X} - L_h \end{cases}$$

法方程及解

$$N \widehat{X} = W$$

其中

$$N = B^T P B$$

$$W = B^T P L$$

伪距+高度信息

$$N = N_\rho + N_h$$

其中

$$N_\rho = B_\rho^T P_\rho B_\rho$$

$$N_h = B_h^T P_h B_h$$

而

$$W = W_\rho + W_h$$

其中

$$W_\rho = B_\rho^T P_\rho L_\rho$$

$$W_h = B_h^T P_h L_h$$

设

$$\begin{cases} D(L_\rho) = \sigma_{0,\rho}^2 P_\rho \\ D(L_h) = \sigma_{0,h}^2 P_h \end{cases}$$

有

$$S\widehat{\theta} = W_\theta$$

其中

S

$$= \begin{bmatrix} n_\rho - 2\text{tr}(N^{-1}N_\rho) + \text{tr}(N^{-1}N_\rho)^2 & \text{tr}(N^{-1}N_\rho N^{-1}N_h) \\ \text{tr}(N^{-1}N_h N^{-1}N_\rho) & n_\rho - 2\text{tr}(N^{-1}N_\rho) + \text{tr}(N^{-1}N_\rho)^2 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\theta} = \begin{bmatrix} \widehat{\sigma}_{0,\rho}^2 \\ \widehat{\sigma}_{0,h}^2 \end{bmatrix}$$

$$W_\theta = \begin{bmatrix} V_\rho^T P_\rho V_\rho \\ V_h^T P_h V_h \end{bmatrix}$$

(1) 给定 P_ρ 和 P_h ；

(2) 一次平差，得到 $V_\rho^T P_\rho V_\rho$ 、 $V_h^T P_h V_h$ 、 N_ρ 、 N_ρ 和 N ；

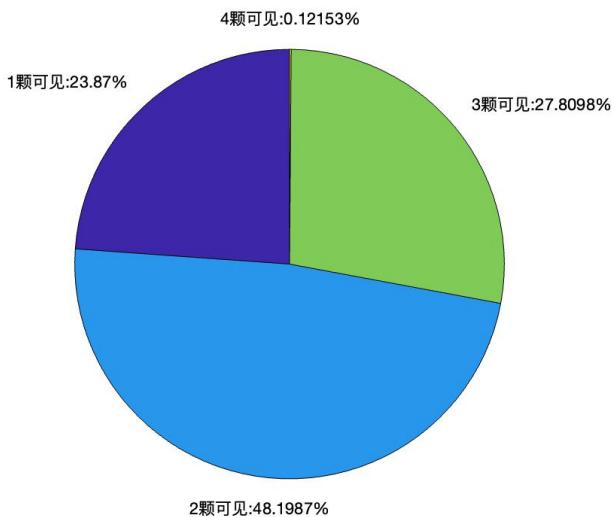
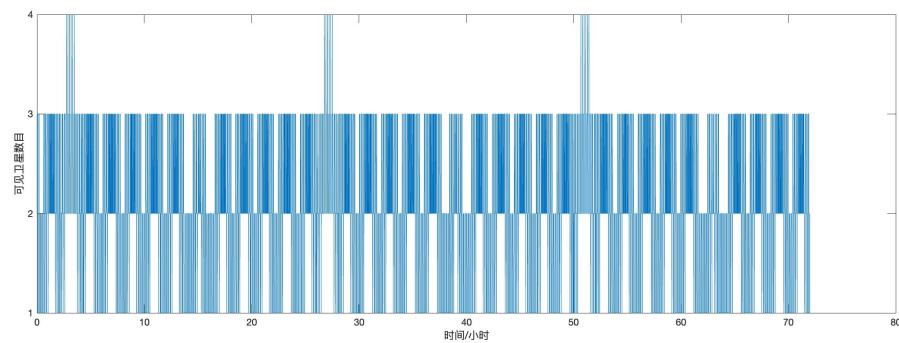
(3) 重新计算 P_ρ 和 P_h ；

(4) 重复(2)和(3)；

(5) 停止

8 陆基导航信息辅助

72 颗低轨卫星的卫星可见数目随时间的变化图



8.1 VOR-DME 观测量模拟

设用户和 VOR-DME 台站的 ECEF 坐标分别为 (x_u, y_u, z_u) 和 (x_{vd}, y_{vd}, z_{vd}) , 可以计算得到台站和用户之间的斜距和磁方位角, 其中斜距为

$$R = \sqrt{(x_{vd} - x_u)^2 + (y_{vd} - y_u)^2 + (z_{vd} - z_u)^2}$$

磁方位角为

$$\alpha = \arctan\left(\frac{x_{vd} - x_u}{y_{vd} - y_u}\right)$$

观测量表示为

$$D_{mea} = R + b_d + e_d$$

$$\alpha_{mea} = \alpha + b_v + e_v$$

其中， b_d 和 b_v 分别为 DME 和 VOR 测量的随机误差； e_d 和 e_v 分别为 DME 和 VOR 测量的系统误差。

仿真中取 VOR 的观测误差为 $1^\circ(1\sigma)$ ，DME 的观测误差 $185m(1\sigma)$ (0.1 海里) 的零均值高斯白噪声。

此外，由于地球的曲率，VOR-DME 的作用距离取决于用户的海拔高度，视距范围大约为 $4.11\sqrt{h}$ 海里， h 为用户的海拔高度，单位为米。

DME 覆盖范围[6] (p4)

$1\text{ft} = 30.48\text{cm}$

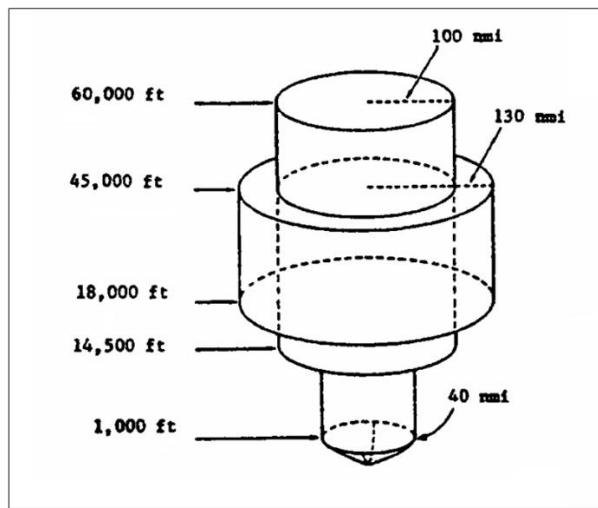


Figure 1. Omni-directional 1000 Watt Coverage Area

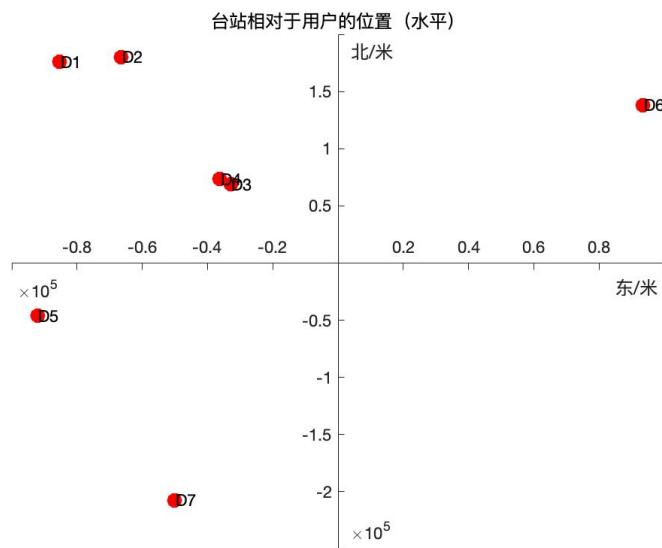
8.2 VOR-DME 辅助低轨卫星定位仿真

8.2.1 仿真结果

(1) 单历元仿真结果

静止用户位置的经纬高取(117.6, 38.5, 1000) (ECEF) , 按照视距范围大约为 $4.11\sqrt{h}$ 海里的准则 , 可见VOR/DME台站的个数为7个。用户初始值在(0, 0, 0) (ECEF) 。

所有可见的 DME 台站相对用用户点的位置如图 , 选取 2、5 号台站 , 两台站相对于用户的夹角为 96.3 度。



观测量为 : DME 距离观测量、低轨卫星的伪距/多普勒观测量和高度观测量 (误差是零均值、方差为 30 米的高斯分布的误差) 。

表格中的值分别代表总误差、水平误差和天向误差 (米 , 95%) 。

时刻/秒	可见卫星数	LEO	LEO+高度	LEO+DME	LEO+DME+高度
305	1	---	---	9137.112/ 391.712/ 9134.404	285.378/ 285.375/ 11.203
48928	1	---	---	9473.468/	293.151/

				391.655/ 9460.403	293.151/ 10.844
20	2	---	---	252.999/ 170.043/ 218.665	166.949/ 166.787/ 10.534
19187	2	---	---	551.783/ 243.726/ 490.529	141.513/ 141.512/ 11.117
100	3	147.054/ 24.904/ 144.611	13.409/ 10.567 9.985	142.833/ 25.871/ 140.307	13.176/ 10.069/ 10.911
32406	3	178.928 / 38.160/ 174.878	13.372/ 10.470/ 10.878	154.858/ 40.672/ 147.555	12.958/ 10.417/ 10.193
9856	4	98.833/ 23.840/ 97.144	13.240/ 10.175/ 10.713	92.818/ 24.322/ 89.438	13.184/ 10.009/ 11.188
12535	4	102.252/ 22.804/ 100.216	12.803/ 9.558/ 10.650	98.233/ 22.122/ 95.129	12.740/ 9.575/ 10.349

(2) 多历元仿真结果

静止用户位置的经纬高取(117.6, 38.5, 1000) (ECEF) , 按照视距范围
大约为 $4.11\sqrt{h}$ 海里的准则。

观测量为 :DME 距离观测量、低轨卫星的伪距+多普勒观测量和高度观测量。

表格中的误差值分别为总误差、水平误差和天向误差 (米, 95%)。

卫星观测时	DME +	DME +	DME +	DME +	高度
-------	-------	-------	-------	-------	----

段(秒)	高度	高度 + LEO (伪 距 + 多普 勒)	高度 + LEO (伪 距)	高度 + LEO (多 普勒)	+LEO (伪距)
6215-6701	434.319/	13.355/	14.599/	40.496/	15.810/
		10.036/ 9.944	10.725/ 9.309	39.115/ 10.951	14.695/ 10.426
47182-47739	434.298/ 10.157	14.907/	16.845/	48.734/	16.907/
		11.136/ 10.738	14.218/ 9.400	47.004/ 10.867	15.921/ 10.428

8.2.2 结论

在低轨卫星的伪距+多普勒观测量和 DME 的距离观测量组合中 , 可见星为 1 颗时 , 定位误差在 9000 米 , 可见星为 2 颗时 , 定位误差在 300-500 米 , 可见星为 3 颗时 , 定位误差在 140-150 米 , 可见星为 4 颗时 , 定位误差在 92-98 米。

在低轨卫星的伪距+多普勒观测量、 DME 的距离观测量和高度信息组合中 , 可见星为 1 颗时 , 定位误差在 280-290 米 , 可见星为 2 颗时 , 定位误差在 140-170 米 , 可见星为 3 、 4 颗时 , 定位误差在 12-14 米。

当可见星数目为 1 、 2 颗时 , 低轨卫星的伪距+多普勒观测以及其与高度信息组合 , 不能定位 , 而当引入 DME 的距离观测量后 , 则可以实现单点定位 ; 当可见星数目为 1 、 2 颗时 , 均能实现定位 , 且 DME 的距离观测量的引入并不能给定位的精度带来较大的提升。也就是说 , 在观测量足够的情况下 , 引入测量误差

较大的 DME 的距离观测量，不能给定位结果带来大的提升，因此当可见卫星数目为 1、2 颗时，它的引入更有意义。

第(2)部分，给出了低轨多历元单星辅助定位的结果，DME + 高度定位的误差在 434 米，天向误差随高度计的误差变化。DME + 高度 + LEO 的定位的、误差在 10-20 米，LEO 观测量的引入极大的改善了水平方向的定位精度。

9 进一步的讨论

9.1 回归分析中违背基本假设的情况[8]

$$\begin{cases} E(\varepsilon_i) = 0 \quad i = 1, 2 \dots N \\ cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} \sigma^2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \end{cases}$$

异方差性

$$var(\varepsilon_i) \neq var(\varepsilon_j) \quad i \neq j$$

自相关性

$$cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq 0 \quad i \neq j$$

9.1.1 异方差性

当存在异方差时，普通 LSM 存在以下问题

- (1) 参数估计虽然是无偏的，但不是最小方差线性无偏估计；
- (2) 参数的显著性检验失效；
- (3) 回归方程的应用效果极不理想。

9.1.2 自相关性

- (1) 自相关性产生的背景和原因 (gps)

遗漏关键变量时会产生序列的自相关性。

因对数据加工整理而导致误差项之间产生自相关性。(如果采用不恰当的差分变换，这样会带来序列的自相关性)

自相关问题在时序资料的建模中会经常碰到，但在截面样本数据中有时会存在。随机误差项一般表现为正自相关情形。

(2) 自相关性带来的问题

- A 参数的估计值不再具有最小方差线性无偏性；
- B 均方误差 MSE 可能严重低估误差项的方差；
- C 容易导致 t 值评价过高，常用的 F 检验和 t 检验失效。如果忽视这一点，可能导致得出回归参数统计检验为显著，但实际上并不显著的严重错误结论；
- D 当存在序列相关时， $\hat{\beta}$ 仍然是 β 的无偏估计量，但在任一特定的样本中， $\hat{\beta}$ 可能严重歪曲 β 的真实情况，即最小二乘估计量对抽样波动变得非常敏感；
- E 如果不加处理地运用普通最小二乘法估计模型参数，用此模型进行预测和进行结构分析将会带来较大的方差甚至错误的解释。

(3) 自相关性的诊断

(3.1) 图示检验法

回归模型估计参数，求出残差项 e_t 作为随机项 ε_t 的真实值的估计值，再描绘 e_t 的散点图，根据 e_t 的相关性来判断随机项 ε_t 的序列相关性。残差 e_t 的散点图通常有两种绘制方式。

- A 绘制 e_t, e_{t-1} 的散点图。用 (e_t, e_{t-1}) 作为散布点绘图。如果大部分点落在了第一、三象限，表明随机扰动项 ε_t 存在着正序列相关；如果大部分点落在了第二、四象限，表明随机扰动项 ε_t 存在着负序列相关。

B 按照时间顺序绘制回归残差项 e_t 的图形。如果 e_t ，随着 t 的变化逐次有规律地变化，呈现锯齿形或循环形状的变化，就可断言 e_t 存在相关，表明 e_t 存在着序列相关。如果 e_t 随着 t 的变化逐次变化并不断地改变符号，那么随机扰动项 e_t 存在负的序列相关，这种现象称为蛛网现象；如果 e_t 随着 t 的变化逐次变化并不频繁地改变符号，而是几个正的 e_t 后面跟着几个负的，则表明随机扰动项 ε_i 存在正的序列相关。

(3.2) 自相关系数法

误差序列 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_N$ 的自相关系数定义为

$$\rho = \frac{\sum_{t=2}^N \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}}{\sqrt{\sum_{t=2}^N \varepsilon_t^2} \sqrt{\sum_{t=2}^N \varepsilon_{t-1}^2}}$$

(3.3) DW 检验

Durbin 和 Watson 于 1951 年提出的一种适用于小样本的一种检验方法。DW 检验只能用于检验随机扰动项具有一阶自回归形式的序列相关问题。

随机扰动项的一阶自回归形式为

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t$$

为了检验序列的相关性，构造的假设是

$$H_0: \rho = 0$$

为了检验上述假设，构造 DW 统计量首先要求出回归估计式的残差 e_t ，定义 DW 统计量为

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^N (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^N e_t^2}$$

其中， $e_t = y_t - y_{t-1}$ ， $t=1, 2, \dots, N$ 。

下面推导 DW 值的取值范围。

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^N e_t^2 + \sum_{t=2}^N e_{t-1}^2 - 2 \sum_{t=2}^N e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^N e_t^2}$$

如果认为 $\sum_{t=2}^N e_t^2$ 与 $\sum_{t=2}^N e_{t-1}^2$ 近似相等，则

$$DW \approx 2[1 - \frac{\sum_{t=2}^N e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^N e_t^2}]$$

同样，在认为 $\sum_{t=2}^N e_t^2$ 与 $\sum_{t=2}^N e_{t-1}^2$ 近似相等时，则

$$\hat{\rho} \approx \frac{\sum_{t=2}^N e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^N e_t^2}$$

因此

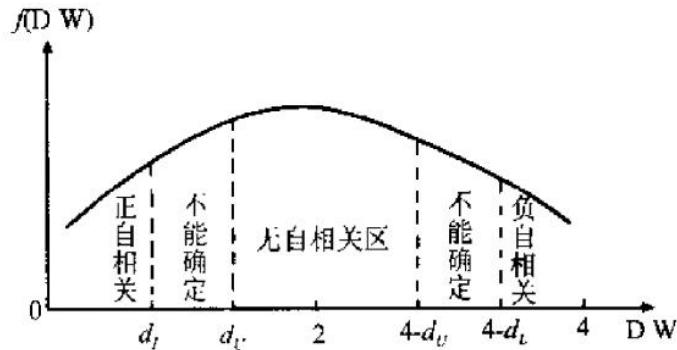
$$DW \approx 2(1 - \hat{\rho})$$

因而 DW 值与 $\hat{\rho}$ 的对应关系为

$\hat{\rho}$	DW	误差项的自相关性
-1	4	完全负自相关
(-1, 0)	(2, 4)	负自相关
0	2	无自相关
(0, 1)	(0, 2)	正自相关
1	0	完全正自相关

由上述讨论可知 DW 的取值范围为

$$0 \leq DW \leq 4$$



9.2 接收机时钟对定位结果的影响

9.2.1 接收机时钟

(1) 恒温晶体振荡器 (TCXO , Temperature Compensated Cristal Oscilator) 时钟

短期稳定性 : $2 \times 10^{-9} s/s$

伪距测量误差漂移 : $0.6 m/s$

(2) CSAC (Chip Scale Atomic Clock) [9]

起始稳定性 : $1 \times 10^{-10} s/s$ [10]

起始伪距测量误差漂移 : $0.03 m/s$

1000 秒后稳定性 : $1 \times 10^{-12} s/s$ [11]

1000 秒伪距测量误差漂移 : $0.0003 m/s$

9.2.2 Allan 方差

Allan 方差曲线对中长时期时间尺度上的误差特性有很强的表现力

$$\sigma_{\tau}^2(\tau) = \frac{1}{2(M-1)} \sum_{l=1}^{M-1} [\bar{y}(l+1) - \bar{y}(l)]^2$$

其中 $\tau = m\tau_0$ 为平滑时间 , τ_0 为采样间隔 , $\bar{y}(l) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_{(l-1)m+i}$

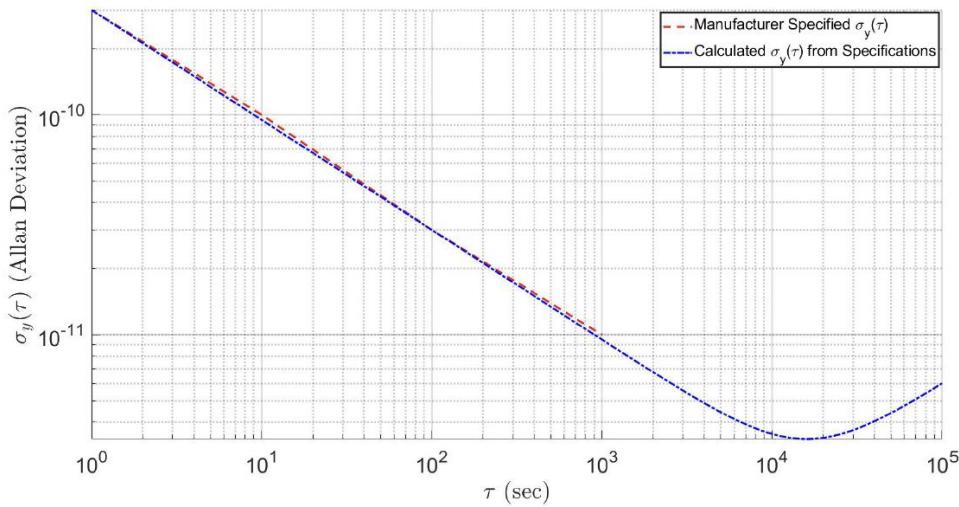


Fig. 4. Allan Deviation of Chip Scale Atomic Clock

9.3 observability^[11]

离散时间线性时变动态系统 (discrete-time linear time-varying dynamic system, DT LTV) Σ 表示为

$$\Sigma: \begin{cases} x(k+1) = F(k)x(k) + G(k)u(k) \\ y(k) = H(k)x(k) \end{cases}$$

j 时刻到 i 时刻的状态转移矩阵表示为

$$\Phi(i, j) = \begin{cases} F(i-1)F(i-2)\cdots F(j), & \text{if } i > j \\ I_{n \times n}, & \text{if } i = j \end{cases}$$

TheoremI: 当且仅当 DT LTV 系统的 l 步可观测矩阵

$$\mathcal{O}(k, k+l-1) \triangleq \begin{bmatrix} H(k)\Phi(k, k) \\ H(k+1)\Phi(k+1, k) \\ \vdots \\ H(k+l-1)\Phi(k+l-1, k) \end{bmatrix}$$

是满秩的，系统是可观测的。

接收机动态

$$x_r(k+1) = F_r x_r(k) + \omega_r(k)$$

其中 $x_r \triangleq [r_r^T, c\delta t_r, c\delta \dot{t}_r]^T$, $Q_r = diag(0_{3 \times 3}, Q_{cr})$ 。状态转移阵表示为

$$F_r = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 2} \\ 0_{2 \times 3} & F_{clk} \end{bmatrix}, F_{clk} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 T 是采样间隔。

5 步可观测性矩阵表示为

$$\mathcal{O}_5 = \mathcal{O}(k, k+4) = \begin{bmatrix} l_k & l_{k+1} & l_{k+2} & l_{k+3} & l_{k+4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & T & 2T & 3T & 4T \end{bmatrix}$$

接收机和卫星之间的相对几何形状表示为

$$\det(\mathcal{O}_5) = T \begin{vmatrix} l_k^T - 4l_{k+3}^T + 3l_{k+4}^T \\ l_{k+1}^T - 3l_{k+3}^T + 2l_{k+4}^T \\ l_{k+2}^T - 2l_{k+3}^T + l_{k+4}^T \end{vmatrix}$$

9.4 估计理论^[12]

N 点数据集 $\{x[1], x[2], \dots, x[N]\}$ 与未知参数 θ 有关。

在确定好估计量时，第一步就是建立数据的数学模型。由于数据固有的随机性，我们用它的概率密度函数（probability density function，PDF）来描述它，即 $p(x[1], x[2], \dots, x[N]; \theta)$ 。PDF 以未知量 θ 为参数，即我们有一族 PDF，其中的每一个 PDF 由于 θ 的不同而不同。我们使用分号来表示这种关系。

在实际问题中，并没有给出 PDF，而是要选择一个不仅与问题的约束和先验知识一致的，而且在数学上也容易处理的 PDF。

9.4.1 最小方差无偏估计

最小方差准则

均方误差（MSE）准则

$$\begin{aligned} mse(\hat{\theta}) &= E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = E\left\{\left[\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right) + (E(\hat{\theta}) - \theta)\right]^2\right\} \\ &= var(\hat{\theta}) + [E(\hat{\theta}) - \theta]^2 \end{aligned}$$

上式表明，MSE 是由估计量的方差以及偏差引起的误差组成的。

最小方差无偏 (minimum variance unbiased, MVU) 估计, 是约束偏差为零 ,
从而求出使方差最小的估计量。从上式可以看出 , 无偏估计量的 MSE 是方差。

9.4.2 Cramer-Rao 下限

(1) 估计量精度考虑

所有可能的信息都是通过观测的数据以及那些数据的 PDF 而具体表现出来 ,
因此 , 估计精度与 PDF 有关。一般而言 , PDF 受未知参数的影响越大 , 所得到
的估计越好。

(2) Cramer-Rao 下限扩展到矢量参数

定理 (Cramer-Rao 下限-矢量参数) 假定 PDF $p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ 满足“正则”条件 , 即

$$E\left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right] = 0, \text{ 对于所有的 } \boldsymbol{\theta}$$

其中数学期望是对 $p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ 求出的。那么 , 任何无偏估计量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 的协方差矩阵满足

$$C_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} - I^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \geq 0$$

其中 ≥ 0 解释为矩阵是半正定的。Fisher 信息矩阵 $I(\boldsymbol{\theta})$ 由下式给出 , 即

$$[I(\boldsymbol{\theta})]_{ij} = -E\left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right]$$

其中导数是在 $\boldsymbol{\theta}$ 的真值上计算 , 数学期望是对 $p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ 求出的。而且 , 对于某个 p 维函数 g 和某个 $p \times p$ 的矩阵 I , 当且仅当

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = I(\boldsymbol{\theta})(g(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\theta})$$

可以求得达到下限 $C_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = I^{-1}(\boldsymbol{\theta})$ 的无偏估计量。这个估计量是 $\hat{\boldsymbol{\theta}} = g(\mathbf{x})$, 它是 MVU 估计量 , 其协方差矩阵是 $I^{-1}(\boldsymbol{\theta})$ 。

计算 CRLB 还可以采用另外一种方法 , 我们使用恒等式

$$E \left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \right] = -E \left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]$$

9.4.3 线形模型

(1) 定义和性质

线性模型

$$\mathbf{x} = H\boldsymbol{\theta} + \mathbf{w}$$

其中 $\mathbf{w} \sim N(0, \sigma^2 I)$ ，即噪声矢量是高斯的。

如果 CRLB 定理的等号成立条件满足，那么确定 MVU 估计量有时是可能的。

根据定理 3.2，如果对于某个函数 g ，

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = I(\boldsymbol{\theta})(g(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\theta})$$

那么， $\hat{\boldsymbol{\theta}} = g(\mathbf{x})$ 将是 MVU 估计量。而且， $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 的协方差将是 $I^{-1}(\boldsymbol{\theta})$ 。对于 $\mathbf{x} =$

$H\boldsymbol{\theta} + \mathbf{w}$ 的线性模型，为了确定这个条件是否满足，我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left[-\ln (2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}} - \frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{x} - H\boldsymbol{\theta})^T (\mathbf{x} - H\boldsymbol{\theta}) \right] \\ &= -\frac{1}{2\sigma^2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} [\mathbf{x}^T \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T H\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}^T H^T H\boldsymbol{\theta}] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} [H^T \mathbf{x} - H^T H\boldsymbol{\theta}] \end{aligned}$$

假定 $H^T H$ 是可逆的，

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{H^T H}{\sigma^2} [(H^T H)^{-1} H^T \mathbf{x} - \boldsymbol{\theta}]$$

如果令

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (H^T H)^{-1} H^T \mathbf{x}$$

$$I(\boldsymbol{\theta}) = \frac{H^T H}{\sigma^2}$$

那么

$$C_{\hat{\theta}} = \sigma^2 (H^T H)^{-1}$$

定理 4.1 (线性模型的最小方差无偏估计量) 如果观测数据可以表示为

$$x = H\theta + w$$

那么 MVU 估计量是

$$\hat{\theta} = (H^T H)^{-1} H^T x$$

$\hat{\theta}$ 的协方差矩阵为

$$C_{\hat{\theta}} = \sigma^2 (H^T H)^{-1}$$

对于线性模型，MVU 估计量是有效的，它达到了 CRLB。

且 $\hat{\theta}$ 是无偏估计，由于 $\hat{\theta}$ 是高斯随机矢量 x 的线性变换，因此 $\hat{\theta}$ 的性能就可完全确定，因而

$$\hat{\theta} \sim N(\theta, \sigma^2 (H^T H)^{-1})$$

9.4.4 一般最小方差无偏估计

(1) 充分统计量

对于给定的统计推断问题，包含了原样本中关于该问题的全部有用信息的统计量。对于未知参数的估计问题，保留了原样本中关于未知参数 θ 的全部信息的统计量，就是充分统计量。如样本均值 X 是总体数学期望的充分统计量。

数学上，设 (X_0, \dots, X_{N-1}) 是来自总体 X 的一个随机样本， $T = T(X_0, \dots, X_{N-1})$ 是一统计量。若在 $T = t$ 的条件下，样本的条件分布与未知参数 θ 无关，则称统计量 T 是 θ 的充分统计量。

(2) 求充分统计量

定理 5.1 (Neyman-Fisher 因子分解) 如果我们能够把 PDF $p(x; \theta)$ 分解为

$$p(x; \theta) = g(T(x), \theta)h(x)$$

其中 $g(T(x), \theta)$ 为只是通过 $T(x)$ 才与 x 有关的函数， $h(x)$ 只是 x 的函数，那么 $T(x)$ 是 θ 的充分统计量。反过来，如果 $T(x)$ 是 θ 的充分统计量，那么 PDF 可以分解为上式。

(3) 利用充分统计量求 MVU 估计量

定理 5.2 (Rao-Blackwell-Lehmann-Scheffe) 如果 $\check{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量， $T(x)$ 是 θ 的充分统计量，那么 $\hat{\theta} = E(\check{\theta}|T(x))$ 是

(1) θ 的一个适用的估计量 (与 θ 无关)；

(2) 无偏的；

(3) 对所有的 θ ，它的方差要小于或等于 $\check{\theta}$ 的方差。

另外，如果充分估计量是完备的，那么 $\hat{\theta}$ 是 MVU 估计量。

9.5 概率误差分布

9.5.1 卫星定位误差椭球的几何特征研究^[13]

(1) 伪距定位

状态量为

$$\boldsymbol{\theta} = [\mathbf{r}^T, \delta_t]^T$$

观测量为

$$\mathbf{X}_\rho = [X_{\rho 1}, X_{\rho 2}, \dots, X_{\rho N}]^T$$

解算误差为 ε_θ ，有

$$\varepsilon_\theta = (H^T H)^{-1} H^T \varepsilon_\rho$$

其中

$$H = \begin{bmatrix} e_{x1} & e_{y1} & e_{z1} & 1 \\ e_{x2} & e_{y2} & e_{z2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{xN} & e_{yN} & e_{zN} & 1 \end{bmatrix}$$

ε_θ 的协方差满足

$$\text{cov}(\varepsilon_\theta) = (H^T H)^{-1} H^T \text{cov}(\varepsilon_\rho) H (H^T H)^{-1}$$

假设 ε_ρ 的各分量相互独立且服从相同的正态分布，其均值为 0，协方差矩阵是单

位矩阵与用户等效测距误差 (σ_{UERE}) 平方的标量相乘，即 $\text{cov}(\varepsilon_\rho) =$

$I_{n \times n} \sigma_{UERE}^2$ 。带入上式得到

$$\text{cov}(\varepsilon_\theta) = (H^T H)^{-1} \sigma_{UERE}^2$$

其中

$$(H^T H)^{-1} = \begin{bmatrix} \sum e_{xj}^2 & \sum e_{xj} e_{yj} & \sum e_{xj} e_{zj} & \sum e_{xj} \\ \sum e_{yj} e_{xj} & \sum e_{yj}^2 & \sum e_{yj} e_{zj} & \sum e_{yj} \\ \sum e_{zj} e_{xj} & \sum e_{zj} e_{yj} & \sum e_{zj}^2 & \sum e_{zj} \\ \sum e_{xj} & \sum e_{yj} & \sum e_{zj} & N \end{bmatrix}^{-1}$$

可见，定位误差和钟差误差的协方差是矩阵 $(H^T H)^{-1}$ 与测量误差方差的标量乘积，称 $(H^T H)^{-1}$ 为 DOP 矩阵，它把伪距测量误差映射到位置空间中，使原本呈球形的伪距测量误差被映射成了椭球形的定位误差。DOP 矩阵的特征值是测量误差在特征向量方向上被缩放的比例。矩阵 $H^T H$ 是对称正定矩阵，则矩阵 $(H^T H)^{-1}$ 也是对称正定的，进一步可以分解成

$$(H^T H)^{-1} = U \Sigma U^T$$

式中， U 代表 DOP 矩阵的特征矩阵， Σ 是对角矩阵，其对角线上的元素对应 DOP 矩阵的特征值。 U 和 Σ 分别可以表示为：

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$$

由矩阵的性质，DOP 矩阵的四个特征值与矩阵 $H^T H$ 的四个特征值互为倒数，因此 DOP 矩阵的特征值问题可以转换为其逆矩阵特征值问题，设 $H^T H$ 的四个特征值为 $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$ 和 λ'_4 。

矩阵 $H^T H$ 的四个特征值的总和为 $2N$ ，

$$\lambda'_1 + \lambda'_2 + \lambda'_3 + \lambda'_4 = \text{trace}(H^T H)$$

由矩阵论的盖尔斯高林圆盘定理，矩阵 $H^T H$ 的四个特征值的值域与矩阵的元素有关，

$$\begin{aligned} |\lambda'_1 - \sum e_{xj}^2| &< |\sum e_{xj}e_{yj} + \sum e_{xj}e_{zj} + \sum e_{xj}| \\ |\lambda'_2 - \sum e_{yj}^2| &< |\sum e_{yj}e_{xj} + \sum e_{yj}e_{zj} + \sum e_{yj}| \\ |\lambda'_3 - \sum e_{zj}^2| &< |\sum e_{zj}e_{xj} + \sum e_{zj}e_{yj} + \sum e_{zj}| \\ |\lambda'_4 - N| &< |\sum e_{xj} + \sum e_{yj} + \sum e_{zj}| \end{aligned}$$

矩阵 $H^T H$ 的前三个特征值的值域相同，而第四个特征值则具有不同于前三个特征值的值域。可以证明矩阵 $H^T H$ 的最大的特征值大于等于 N ，则其他三个特征值均大于 0，且它们的和小于 N 。最大的特征值对应于矩阵 $H^T H$ 的钟差系数。DOP 矩阵的特征值是 $H^T H$ 矩阵的倒数，因此得出 DOP 矩阵 $(H^T H)^{-1}$ 的最小特征值 (λ_4) 与钟差系数有关。

在讨论定位误差的三维空间分布时，不考虑矩阵 U 和矩阵 Σ 中与钟差有关的部分，得到三维空间分布矩阵 U_g 和 Σ_g ：

$$U_g = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_g = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

采用 Gram-Schmidt 法对矩阵 U_g 中各向量进行正交化和单位化，以 λ_1 对应的特征向量为基准向量。正交化的结果为：

$$U_g = QR = [q_1 \ q_2 \ q_3] \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ 0 & R_{22} & R_{23} \\ 0 & 0 & R_{33} \end{bmatrix}$$

Q 为正交矩阵，由向量 q_1 、 q_2 和 q_3 组成，分别给出了误差椭球三个主轴方向； R 为上三角矩阵，正交化后的特征向量对应的特征值的修正公式为：

$$\begin{aligned} DOP_1 &= \sqrt{\lambda_1} \times R_{11} \\ DOP_2 &= \sqrt{\lambda_2} \times R_{22} \times \sqrt{1 - R_{12}^2} \\ DOP_3 &= \sqrt{\lambda_3} \times R_{33} \times \sqrt{1 - R_{13}^2} \times \sqrt{1 - R_{23}^2} \end{aligned}$$

DOP_1 、 DOP_2 和 DOP_3 分别为 DOP 矩阵在三个轴 q_1 、 q_2 和 q_3 方向上对伪距测量误差的放大倍数。

(2) 多普勒定位

状态量为

$$\boldsymbol{\theta} = [\mathbf{r}^T, \delta_f]^T$$

观测量为

$$\mathbf{X}_d = [X_{d1}, X_{d2}, \dots, X_{dN}]^T$$

解算误差为 ε_θ ，有

$$\varepsilon_\theta = (H^T H)^{-1} H^T \varepsilon_d$$

其中

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} e_{x1} & e_{y1} & e_{z1} & 1 \\ e_{x2} & e_{y2} & e_{z2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{xN} & e_{yN} & e_{zN} & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{n} &= [e_{x1} \ e_{y1} \ e_{z1}]^T = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|} \times \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|} \times \frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|} \right) \end{aligned}$$

ε_θ 的协方差满足

$$cov(\varepsilon_\theta) = (H^T H)^{-1} H^T cov(\varepsilon_\rho) H (H^T H)^{-1}$$

假设 ε_ρ 的各分量相互独立且服从相同的正态分布，其均值为 0，协方差矩阵是单

位矩阵与用户等效测频误差 (σ_{UEFE}) 平方的标量相乘，即 $cov(\varepsilon_f) =$

$I_{n \times n} \sigma_{UEFE}^2$ 。带入上式得到

$$cov(\varepsilon_\theta) = (H^T H)^{-1} \sigma_{UEFE}^2$$

其中

$$(H^T H)^{-1} = \begin{bmatrix} \sum e_{xj}^2 & \sum e_{xj}e_{yj} & \sum e_{xj}e_{zj} & \sum e_{xj} \\ \sum e_{yj}e_{xj} & \sum e_{yj}^2 & \sum e_{yj}e_{zj} & \sum e_{yj} \\ \sum e_{zj}e_{xj} & \sum e_{zj}e_{yj} & \sum e_{zj}^2 & \sum e_{zj} \\ \sum e_{xj} & \sum e_{yj} & \sum e_{zj} & N \end{bmatrix}^{-1}$$

可见，定位误差和频率误差的协方差是矩阵 $(H^T H)^{-1}$ 与测量误差方差的标量乘积，称 $(H^T H)^{-1}$ 为 DOP 矩阵，它把频率测量误差映射到位置空间中。DOP 矩阵的特征值是测量误差在特征向量方向上被缩放的比例。矩阵 $H^T H$ 是对称正定矩阵，则矩阵 $(H^T H)^{-1}$ 也是对称正定的，进一步可以分解成

$$(H^T H)^{-1} = U \Sigma U^T$$

式中， U 代表 DOP 矩阵的特征矩阵， Σ 是对角矩阵，其对角线上的元素对应 DOP 矩阵的特征值。 U 和 Σ 分别可以表示为：

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$$

由矩阵的性质，DOP 矩阵的四个特征值与矩阵 $H^T H$ 的四个特征值互为倒数，因此 DOP 矩阵的特征值问题可以转换为其逆矩阵特征值问题，设 $H^T H$ 的四个特征值为 $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$ 和 λ'_4 。

矩阵 $H^T H$ 的四个特征值的总和小于 $2N$ ，下面对此说明。

由文献[14]

$$\|[e_{xi} \ e_{yi} \ e_{zi}]^T\| = \left\| \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|} \times \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|} \times \frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|} \right) \right\| \leq \frac{\|\mathbf{v}_i\|}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|}$$

对于低轨卫星来说， $\|\mathbf{v}_i\| < 7.9 \times 10^3 (m/s)$ ， $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\| > 1000 \times 10^3 (m)$ ，即卫星和用户之间的距离大于轨道高度，所以

$$\|[e_{x1} \ e_{y1} \ e_{z1}]^T\| < 1$$

从而

$$\lambda_1' + \lambda_2' + \lambda_3' + \lambda_4' = \text{trace}(H^T H) = \sum_{i=1}^N \|[e_{xi} \ e_{yi} \ e_{zi}]^T\| + N < 2N$$

由矩阵论的盖尔斯高林圆盘定理，矩阵 $H^T H$ 的四个特征值的值域与矩阵的元素有关，

$$\begin{aligned} |\lambda_1' - \sum e_{xj}^2| &< |\sum e_{xj}e_{yj} + \sum e_{xj}e_{zj} + \sum e_{xj}| \\ |\lambda_2' - \sum e_{yj}^2| &< |\sum e_{yj}e_{xj} + \sum e_{yj}e_{zj} + \sum e_{yj}| \\ |\lambda_3' - \sum e_{zj}^2| &< |\sum e_{zj}e_{xj} + \sum e_{zj}e_{yj} + \sum e_{zj}| \\ |\lambda_4' - N| &< |\sum e_{xj} + \sum e_{yj} + \sum e_{zj}| \end{aligned}$$

矩阵 $H^T H$ 的前三个特征值的值域相同，而第四个特征值则具有不同于前三个特征值的值域。可以证明矩阵 $H^T H$ 的最大的特征值大于等于 N ，则其他三个特征值均大于0，且它们的和小于 N 。最大的特征值对应于矩阵 $H^T H$ 的频差系数。DOP矩阵的特征值是 $H^T H$ 矩阵的倒数，因此得出DOP矩阵 $(H^T H)^{-1}$ 的最小特征值(λ_4)与频差系数有关。

在讨论定位误差的三维空间分布时，不考虑矩阵 U 和矩阵 Σ 中与频差有关的部分，得到三维空间分布矩阵 U_g 和 Σ_g ：

$$U_g = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_g = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

采用 Gram-Schmidt 法对矩阵 U_g 中各向量进行正交化和单位化，以 λ_1 对应的特征向量为基准向量。正交化的结果为：

$$U_g = QR = [q_1 \ q_2 \ q_3] \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ 0 & R_{22} & R_{23} \\ 0 & 0 & R_{33} \end{bmatrix}$$

Q 为正交矩阵，由向量 q_1 、 q_2 和 q_3 组成，分别给出了误差椭球三个主轴方向； R 为上三角矩阵，正交化后的特征向量对应的特征值的修正公式为：

$$\begin{aligned} DOP_1 &= \sqrt{\lambda_1} \times R_{11} \\ DOP_2 &= \sqrt{\lambda_2} \times R_{22} \times \sqrt{1 - R_{12}^2} \\ DOP_3 &= \sqrt{\lambda_3} \times R_{33} \times \sqrt{1 - R_{13}^2} \times \sqrt{1 - R_{23}^2} \end{aligned}$$

DOP_1 、 DOP_2 和 DOP_3 分别为 DOP 矩阵在三个轴 q_1 、 q_2 和 q_3 方向上对多普勒测量误差的放大倍数。

(3) 伪距+多普勒定位

状态量为

$$\boldsymbol{\theta} = [\mathbf{r}^T, \delta_t, \delta_f]^T$$

观测量为

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_\rho^T, \mathbf{X}_d^T]^T$$

其中

$$\mathbf{X}_\rho = [X_{\rho 1}, X_{\rho 2}, \dots, X_{\rho N}]^T$$

$$\mathbf{X}_d = [X_{d1}, X_{d2}, \dots, X_{dN}]^T$$

估计误差满足

$$cov(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) \geq (H^T \Sigma^{-1} H)^{-1}$$

其中

$$(H^T \Sigma^{-1} H)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_\rho^2} \sum_{i=1}^N m_{xi}^2 + \frac{1}{\sigma_d^2} \sum_{i=1}^N n_{xi}^2 & \frac{1}{\sigma_\rho^2} \sum_{i=1}^N m_{xi} m_{yi} + \frac{1}{\sigma_d^2} \sum_{i=1}^N n_{xi} n_{yi} & \frac{1}{\sigma_\rho^2} \sum_{i=1}^N m_{xi} m_{zi} + \frac{1}{\sigma_d^2} \sum_{i=1}^N n_{xi} n_{zi} & \frac{1}{\sigma_\rho^2} \sum_{i=1}^N m_{xi} & \frac{1}{\sigma_d^2} \sum_{i=1}^N n_{xi} \\ \frac{1}{\sigma_\rho^2} \sum_{i=1}^N m_{xi} m_{yi} + \frac{1}{\sigma_d^2} \sum_{i=1}^N n_{xi} n_{yi} & \frac{1}{\sigma_\rho^2} \sum_{i=1}^N m_{yi}^2 + \frac{1}{\sigma_d^2} \sum_{i=1}^N n_{yi}^2 & \frac{1}{\sigma_\rho^2} \sum_{i=1}^N m_{yi} m_{zi} + \frac{1}{\sigma_d^2} \sum_{i=1}^N n_{yi} n_{zi} & \frac{1}{\sigma_\rho^2} \sum_{i=1}^N m_{yi} & \frac{1}{\sigma_d^2} \sum_{i=1}^N n_{yi} \\ \frac{1}{\sigma_\rho^2} \sum_{i=1}^N m_{xi} m_{zi} + \frac{1}{\sigma_d^2} \sum_{i=1}^N n_{xi} n_{zi} & \frac{1}{\sigma_\rho^2} \sum_{i=1}^N m_{yi} m_{zi} + \frac{1}{\sigma_d^2} \sum_{i=1}^N n_{yi} n_{zi} & \frac{1}{\sigma_\rho^2} \sum_{i=1}^N m_{zi}^2 + \frac{1}{\sigma_d^2} \sum_{i=1}^N n_{zi}^2 & \frac{1}{\sigma_\rho^2} \sum_{i=1}^N m_{zi} & \frac{1}{\sigma_d^2} \sum_{i=1}^N n_{zi} \\ \frac{1}{\sigma_\rho^2} \sum_{i=1}^N m_{xi} & \frac{1}{\sigma_\rho^2} \sum_{i=1}^N m_{yi} & \frac{1}{\sigma_\rho^2} \sum_{i=1}^N m_{zi} & \frac{N}{\sigma_\rho^2} & 0 \\ \frac{1}{\sigma_d^2} \sum_{i=1}^N n_{xi} & \frac{1}{\sigma_d^2} \sum_{i=1}^N n_{yi} & \frac{1}{\sigma_d^2} \sum_{i=1}^N n_{zi} & 0 & \frac{N}{\sigma_d^2} \end{bmatrix}^{-1}$$

误差矩阵可分解为

$$(H^T \Sigma^{-1} H)^{-1} = U \Sigma U^T$$

式中， U 代表误差矩阵的特征矩阵， Σ 是对角矩阵，其对角线上的元素对应误差

矩阵的特征值。 U 和 Σ 分别可以表示为：

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & u_{35} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & u_{45} \\ u_{51} & u_{52} & u_{53} & u_{54} & u_{55} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$$

取（这里并未证明最小的两个特征值对应钟差和频偏两项）

$$U_g = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_g = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

对矩阵 U_g 中各向量进行正交化和单位化

$$U_g = QR = [q_1 \quad q_2 \quad q_3] \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ 0 & R_{22} & R_{23} \\ 0 & 0 & R_{33} \end{bmatrix}$$

误差椭球的轴长

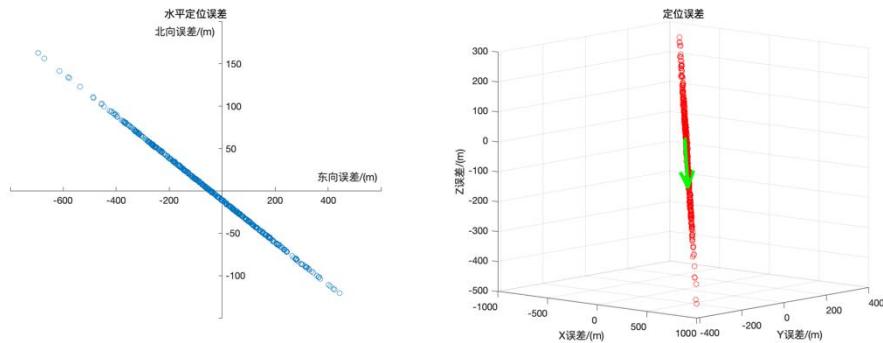
$$L_1 = \sqrt{\lambda_1} \times R_{11}$$

$$L_2 = \sqrt{\lambda_2} \times R_{22} \times \sqrt{1 - R_{12}^2}$$

$$L_3 = \sqrt{\lambda_3} \times R_{33} \times \sqrt{1 - R_{13}^2} \times \sqrt{1 - R_{23}^2}$$

9.5.2 误差分布

(1) 伪距



误差椭球的方向和三个方向上对伪距测量误差的放大倍数分别为：

$$q_1 = [0.853, -0.359, -0.379]^T$$

$$q_2 = [0.517, 0.675, 0.526]^T$$

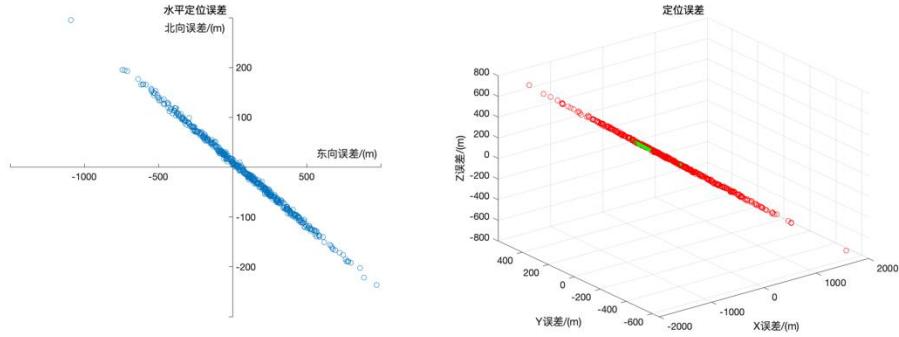
$$q_3 = [-0.067, 0.645, -0.761]^T$$

$$DOP_1 = 76.444$$

$$DOP_2 = 0.454$$

$$DOP_3 = 0.095$$

(2) 多普勒



误差椭球的方向和三个方向上对多普勒测量误差的放大倍数分别为：

$$q_1 = [-0.858, 0.351, 0.376]^T$$

$$q_2 = [0.067, -0.648, 0.759]^T$$

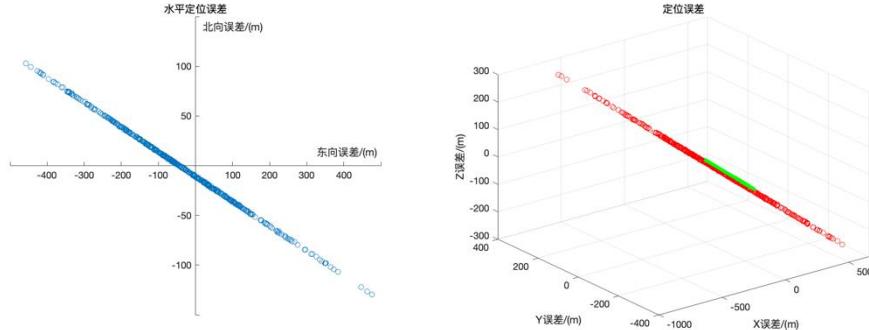
$$q_3 = [0.510, 0.676, 0.533]^T$$

$$DOP_1 = 542.152(m/Hz)$$

$$DOP_2 = 14.345(m/Hz)$$

$$DOP_3 = 7.145(m/Hz)$$

(3) 伪距+多普勒



误差椭球的方向和三个方向上的轴长分别为：

$$q_1 = [0.853, -0.358, -0.379]^T$$

$$q_2 = [-0.517, -0.675, -0.675]^T$$

$$q_3 = [0.067, -0.645, 0.761]^T$$

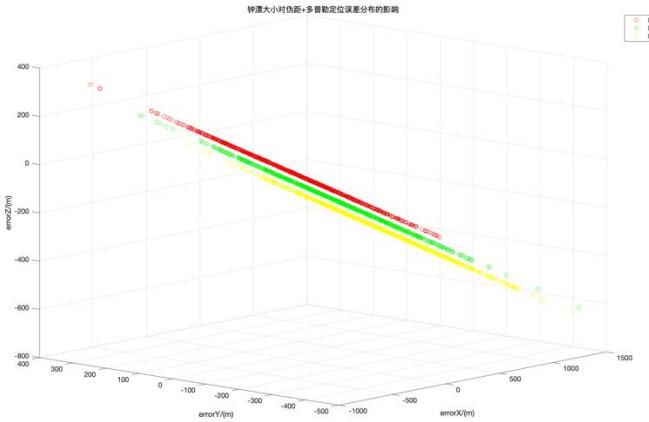
$$L_1 = 272.297(m)$$

$$L_2 = 1.962(m)$$

$$L_3 = 0.427(m)$$

钟漂的大小对伪距+多普勒定位误差分布的影响

三维误差



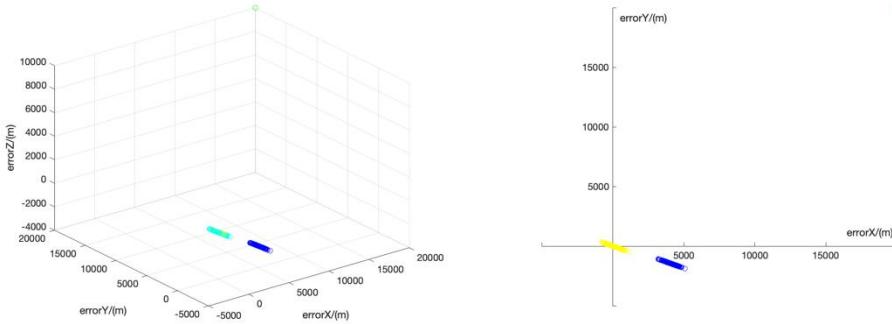
水平误差

(4) 结论

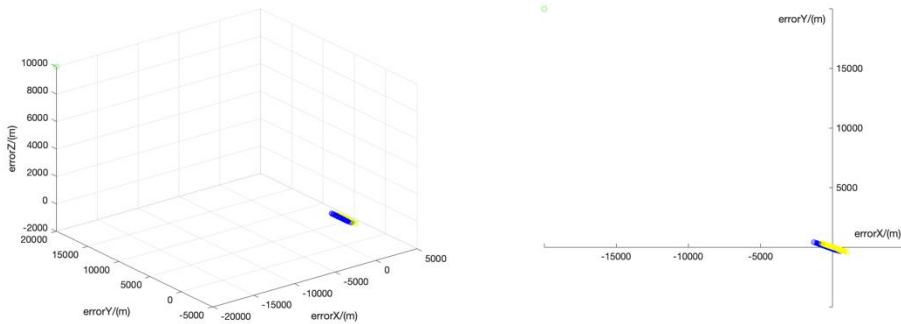
9.5.3 回归误差

(1) 伪距

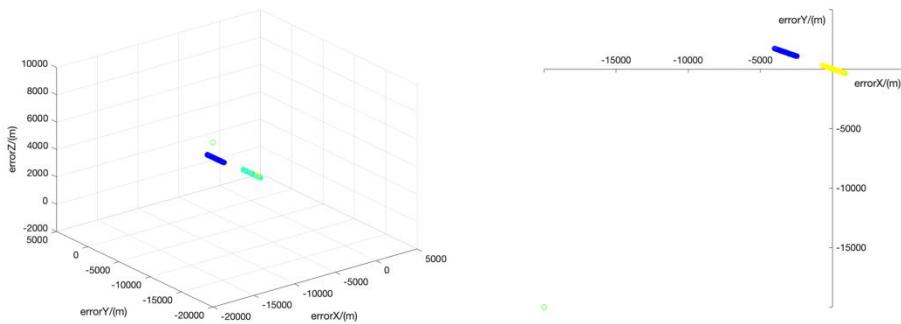
(1.1) (20000, 20000, 10000)



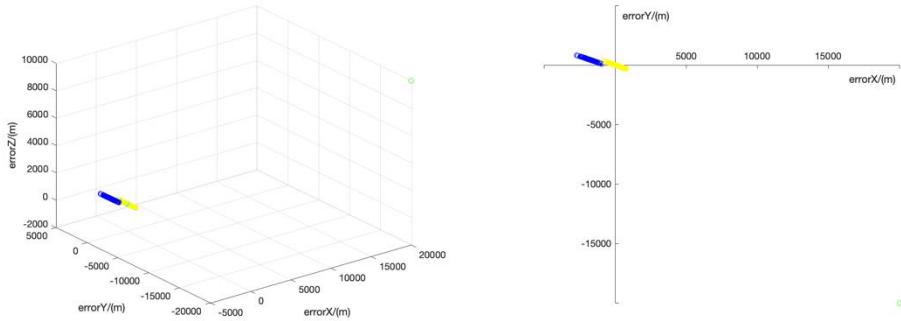
(1.2) (-20000, 20000, 10000)



(1.3) (-20000 , -20000 , 10000)



(1.4) (20000 , -20000 , 10000)



10 CRLB 分析低轨单星定位

10.1 伪距加多普勒定位的 CRLB

第 i 颗卫星的伪距观测量

$$X_{\rho i} = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\| + \delta_t + \varepsilon_{\rho i}$$

其中， \mathbf{r} 为用户位置， \mathbf{r}_i 为第*i*颗卫星的位置， δ_t 为接收机的钟差， $\varepsilon_{\rho i}$ 为伪距测量误差，服从均值为零，方差为 $\sigma_{\rho i}^2$ 的高斯分布。第*i*颗卫星的多普勒观测量

$$X_{di} = -\mathbf{v}_i \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|} \frac{f_0}{c} + \delta_f + \varepsilon_{di}$$

其中， \mathbf{v}_i 为第*i*颗卫星的速度， f_0 为信号的载波频率， c 为真空中的光速， δ_f 为接收机的频偏， ε_{di} 为多普勒测量误差，服从均值为零，方差为 σ_{di}^2 的高斯分布。

最优估计的状态量为

$$\boldsymbol{\theta} = [\mathbf{r}^T, \delta_t, \delta_f]^T$$

观测量为

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_{\rho}^T, \mathbf{X}_d^T]^T$$

其中

$$\mathbf{X}_{\rho} = [X_{\rho 1}, X_{\rho 2}, \dots, X_{\rho N}]^T$$

$$\mathbf{X}_d = [X_{d1}, X_{d2}, \dots, X_{dN}]^T$$

分别为N个时刻得到伪距观测量和多普勒观测量，假设 $X_{\rho i}$ 和 $X_{\rho j}$ （ $i \neq j, 1 \leq i, j \leq N$ ）独立，且 $X_{\rho i}$ 和 $X_{\rho j}$ （ $1 \leq i, j \leq N$ ）独立。

似然函数表示为

$$p(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^N \prod_{i=1}^N \sigma_{\rho i} \sigma_{di}} \times \exp \left\{ -\sum_{i=1}^N \frac{1}{2\sigma_{\rho i}^2} [X_{\rho i} - \rho_i(\boldsymbol{\theta})]^2 - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2\sigma_{di}^2} [X_{di} - d_i(\boldsymbol{\theta})]^2 \right\}$$

其中， $\rho_i(\boldsymbol{\theta})$ 表示伪距， $d_i(\boldsymbol{\theta})$ 表示多普勒，二者均依赖于 $\boldsymbol{\theta}$ 。对 $p(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})$ 取对数得到

$$\begin{aligned}\ln p(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta}) = & -\ln \left[(2\pi)^N \prod_{i=1}^N \sigma_{\rho i} \sigma_{d i} \right] - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2\sigma_{\rho i}^2} [X_{\rho i} - \rho_i(\boldsymbol{\theta})]^2 \\ & - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2\sigma_{d i}^2} [X_{d i} - d_i(\boldsymbol{\theta})]^2\end{aligned}$$

对 $\rho_i(\boldsymbol{\theta})$ 求导得到

$$\frac{\partial \rho_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = [\mathbf{m}^T, 1, 0]^T$$

其中

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|}$$

对 $d_i(\boldsymbol{\theta})$ 求导得到

$$\frac{\partial d_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = [\mathbf{n}^T, 0, 1]^T$$

其中

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|} \times \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|} \times \frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|} \right)$$

从而

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = H^T \Sigma^{-1} b$$

其中

$$H = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 & 1 & 0 \\ \mathbf{m}_2 & 1 & 0 \\ \vdots & & \\ \mathbf{m}_N & 1 & 0 \\ \mathbf{n}_1 & 0 & 1 \\ \mathbf{n}_2 & 0 & 1 \\ \vdots & & \\ \mathbf{n}_N & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma^{-1} = diag\left(\frac{1}{\sigma_{\rho 1}^2}, \frac{1}{\sigma_{\rho 2}^2}, \dots, \frac{1}{\sigma_{\rho N}^2} \frac{1}{\sigma_{d 1}^2}, \frac{1}{\sigma_{d 2}^2}, \dots, \frac{1}{\sigma_{d N}^2}\right)$$

$$b = \begin{bmatrix} X_{\rho 1} - \rho_1(\boldsymbol{\theta}) \\ X_{\rho 2} - \rho_2(\boldsymbol{\theta}) \\ \vdots \\ X_{\rho N} - \rho_N(\boldsymbol{\theta}) \\ X_{d1} - d_1(\boldsymbol{\theta}) \\ X_{d2} - d_2(\boldsymbol{\theta}) \\ \vdots \\ X_{dN} - d_N(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}$$

从而，Fisher 信息矩阵为

$$I(\boldsymbol{\theta}) = -E \left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right] = E \left\{ \frac{\partial \ln p(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]^T \right\}$$

得到

$$I(\boldsymbol{\theta}) = H^T \Sigma^{-1} E[b b^T] \Sigma^{-1} H = H^T \Sigma^{-1} H$$

由克拉美罗下限 (Cramer-Rao Lower Bound) 定理，得到 $\boldsymbol{\theta}$ 估计值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 满足。

$$\text{cov}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \geq (H^T \Sigma^{-1} H)^{-1}$$

10.2 仿真结果

参考文献

- [1] 谢钢.GPS 原理与接收机设计.
- [2] GPS/GNSS 原理与应用.
- [3] Tan Z, Qin H, Cong L, et al. New method for positioning using IRIDIUM satellite signals of opportunity[J]. IEEE Access, 2019, PP(99):1-1.
- [4] 刘家兴,陆明泉,崔晓伟,冯振明.北斗无源定位的虚拟卫星算法[J].清华大学学报(自然科学版)网络.预览,2009(01):49-52.
- [5] 崔希璋, 於宗俦, 陶本藻, 等. 广义测量平差(新版)[M]. 武汉测绘科技大学出版社, 2001.
- [6] DOT-FAA, "Performance Specification, Distance Measuring Equipment (DME)", FAA E-2996, April 1, 2008.
- [7] Misra P. "The Role of the Clock in a GPS Receiver". GPS World, April 1996.
- [8] 何晓群, 刘文卿. 应用回归分析[M]. 中国人民大学出版社, 2001.
- [9] D. Calero and E. Fernandez, "Characterization of Chip-Scale Atomic Clock for GNSS navigation solutions," 2015 International Association of Institutes of Navigation World Congress (IAIN), 2015, pp. 1-8, doi: 10.1109/IAIN.2015.7352264.
- [10] Ucar, A., Adane, Y., Bardak, B., Paparo, C., Berry, R., & Kale, I. (2013). A Chip Scale Atomic Clock Driven Receiver for Multi-Constellation GNSS. *Journal of Navigation*, 66(3), 449-464. doi:10.1017/S037346331300009X.
- [11] Sabbagh R, Kassas Z M. Observability Analysis of Receiver Localization via Pseudorange Measurements from a Single LEO Satellite[J]. IEEE Control Systems Letters, 2022.
- [12] StevenM. Kay. 统计信号处理基础:估计与检测理论[M]. 电子工业出版社, 2011.

[13]王萌 , 马冠一 , 马利华,施浒立.卫星定位误差椭球的几何特征研究[J].宇航学报 , 2012 , 33(11):1593-1600.

[14] Jiang M, Qin H, Zhao C, et al. LEO Doppler-aided GNSS position estimation[J]. GPS Solutions, 2022, 26(1): 1-18.