Árvores B de busca

MC202 - Estrutura de dados

Alexandre Xavier Falcão (afalcao@ic.unicamp.br)

Thiago Vallin Spina (tvspina@ic.unicamp.br)

Árvores B

- Generalização de árvores binárias de busca
- Otimizada para acesso a grandes volumes de dados em disco
- Nós contêm múltiplas chaves e múltiplos filhos

Árvores B: Motivação

- Acesso a dados em disco é lento (ordens de magnitude mais devagar que na memória – milissegundos versus nanosegundos)

- Elementos em disco são armazenados contiguamente em blocos de uma mesma faixa (''páginas'')

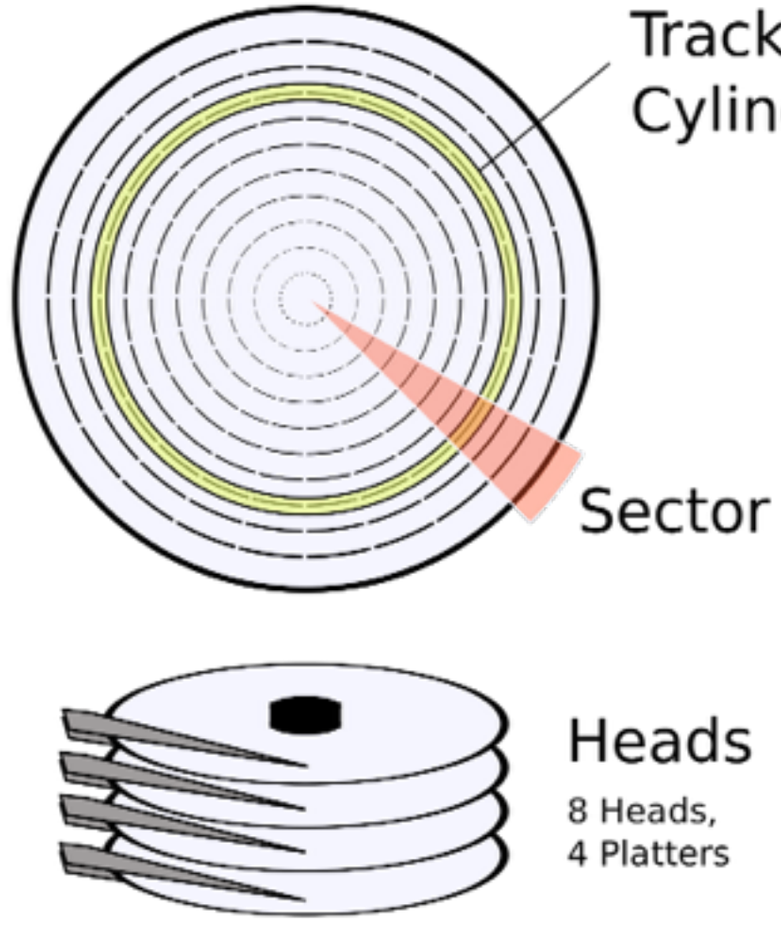
- O acesso de dados no HD é otimizado para trazer múltiplas páginas por vez

Árvores B: Motivação

- Acesso a dados em disco é lento (ordens de magnitude mais devagar que na memória – milissegundos versus nanosegundos)

- Elementos em disco são armazenados contiguamente em blocos de uma mesma faixa (''páginas'')

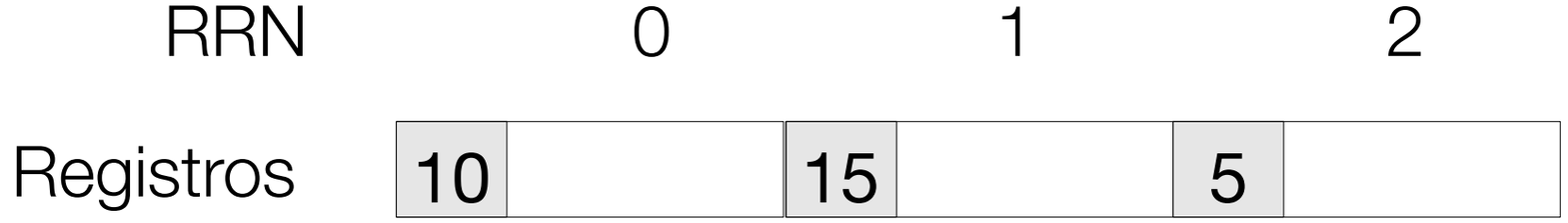
- O acesso de dados no HD é otimizado para trazer múltiplas páginas por vez



Acesso a dados

- Suponha, por exemplo, um arquivo binário amarzenado em disco com vários registros de tamanho fixo, contendo informações sobre clientes de uma empresa

- Cada registro é identificado por uma chave primária



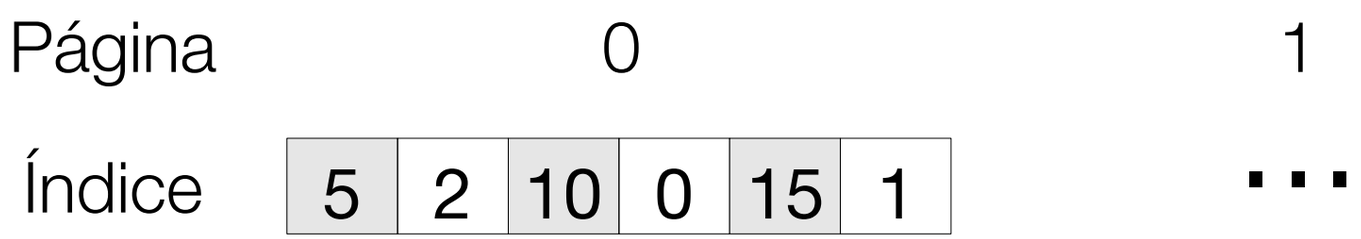
- O Sistema Operacional agrupa esses registros por página e cada operação de leitura/escrita envolve trazer para a memória cache ou levar para o disco uma página

- Leitura e gravações são custosas e o objetivo é minimizá-las quando inserimos, buscamos e removemos registros

- O arquivo de dados normalmente não cabe na memória principal

Acesso a dados: Estratégia

- Guardar a chave dos registros em um arquivo separado (índice primário)
- Menor que o arquivo de registros (cabe parcial/totalmente na memória)
- As operações de inserção, remoção e busca envolvem carregar o índice de acordo com alguma estrutura de dados

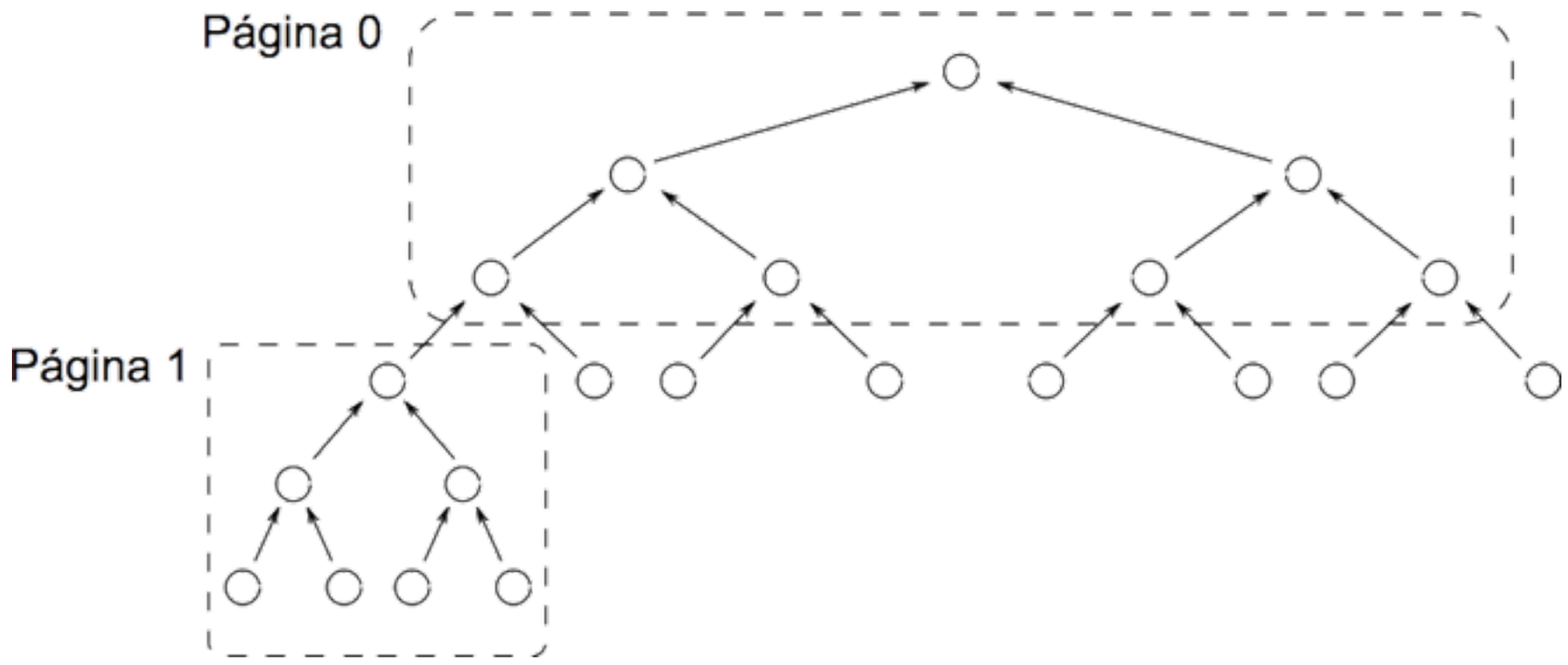


- Exemplo: durante a busca, ao encontrar o elemento de acordo com sua chave primária o acesso aos dados é feito diretamente via seu RRN (relative record number)

Acesso a dados: Exemplo com AVL

- Supondo 7 registros por página em uma árvore binária AVL, com 2 acessos a disco encontramos qualquer um de 63 registros

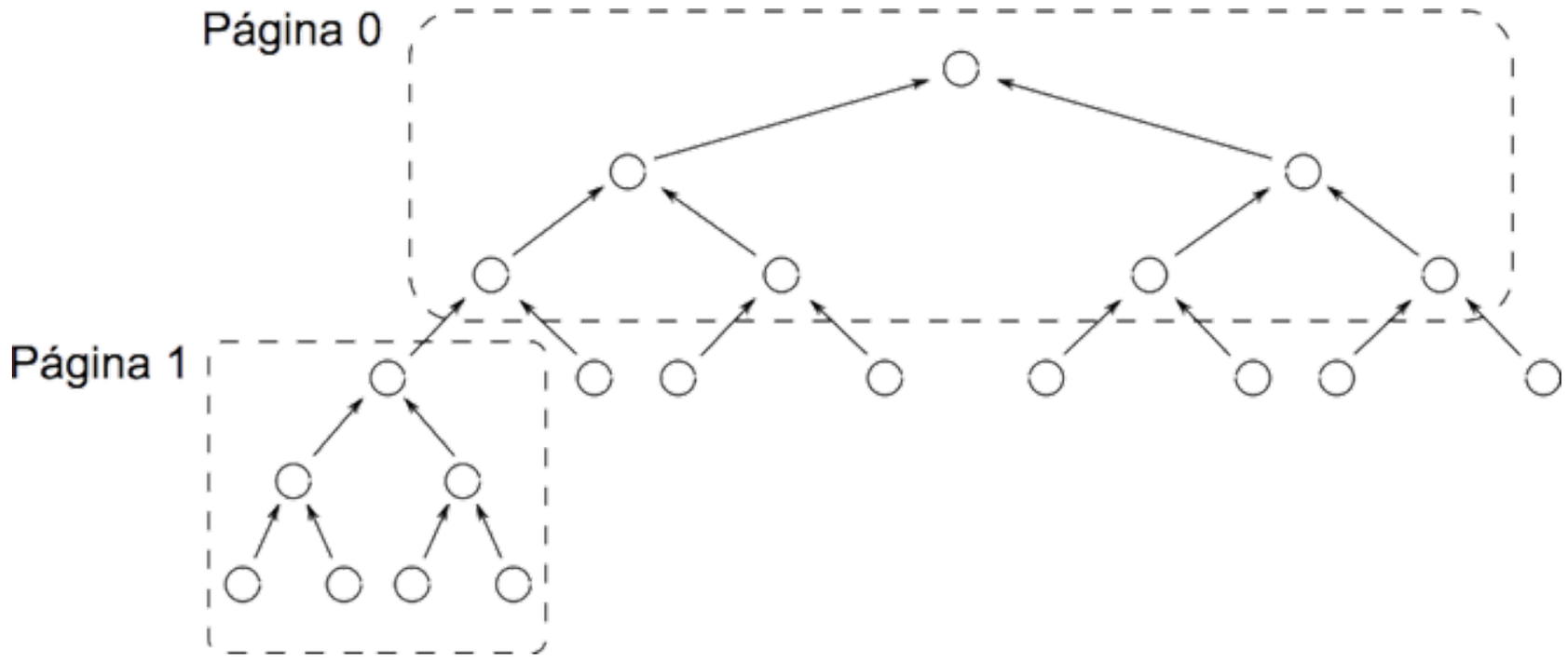
- O número de acessos é $\log_{k+1}(N+1)$, onde N é o número de registros e k o número de registros por página



Acesso a dados: Exemplo com AVL

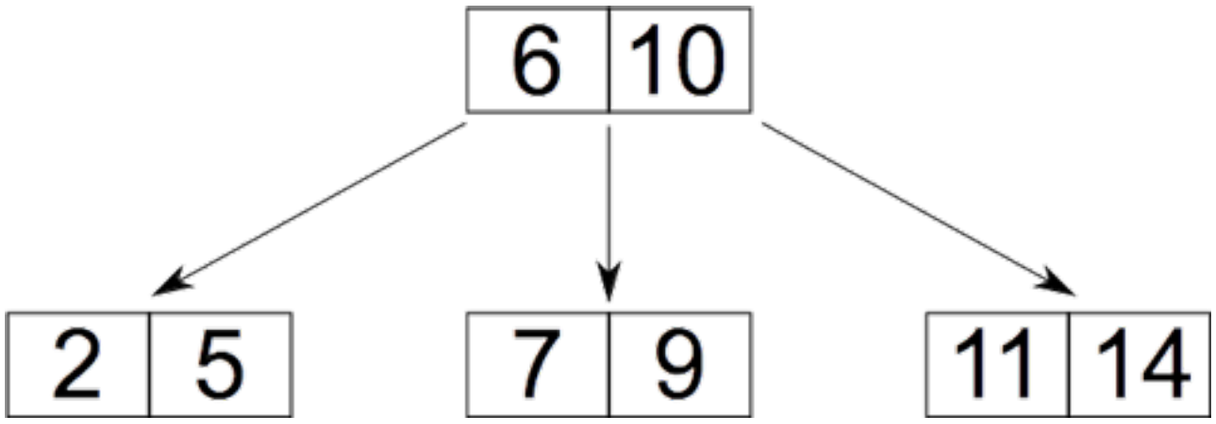
- Para N = 2^{27}-1 registros e k = 511 registros por página, apenas 3 acessos a disco seriam necessários

- Contudo, árvores AVL são construídas de cima para baixo, envolvendo o acesso à outras páginas para sua manutenção



Árvores B

- Criadas por R. Bayer e E. M. McCreight em 1972
- Armazenam até b > 1 registros com chave por nó (ordem da árvore)
- Construção de baixo para cima
- Na memória, árvores AVL requerem $\log_2(N+1)$ acessos para achar um nó, ao passo que árvores B necessitam de $\log_b(N+1)$



* Omitimos o RRN ou outros dados do registro na representação gráfica

Árvores B: Definição

- Uma árvore é considerada B de ordem b > 1 se:

    1. Todas as folhas tem o mesmo nível

    2. Cada nó interno tem um número variável r de registros e r+1 filhos, onde:

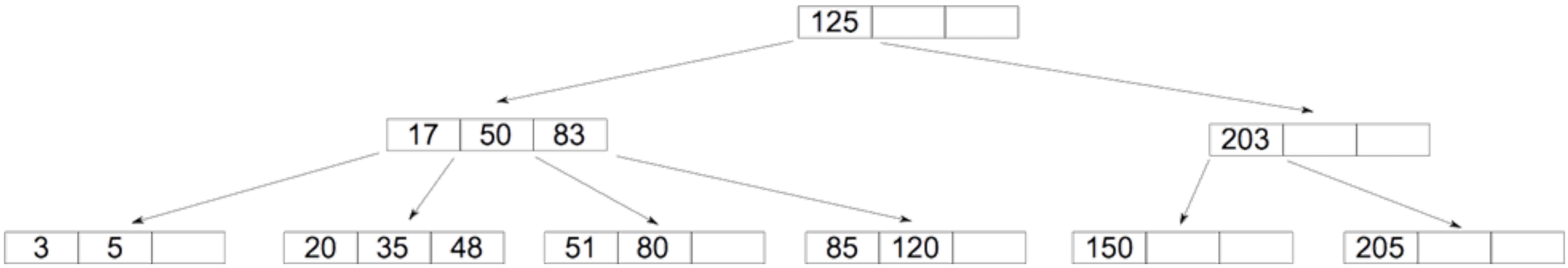
        A. $\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor \leq r \leq b$ se o nó não é raiz

        B. $1 \leq r \leq b$ se o nó é raiz

    3. Cada folha tem um número variável r de registros obedecendo à mesma restrição do item 2

Árvores B: Exemplo

- Árvore B de ordem b = 3



Árvores B

- Em uma árvore B com ordem b = 255 pode-se armazenar:

	Mínimo		Máximo	
Nível	Nós	Registros	Nós	Registros
1	1	1	1	255
2	2	2x127	256	256x255
3	2x128	2x128x127	256x256	256
4	32.768	4.161.536	16.777.216	4.278.190.080

Árvores B: Implementação

- Em cada nó, os elementos são guardados por ordem crescente de chave

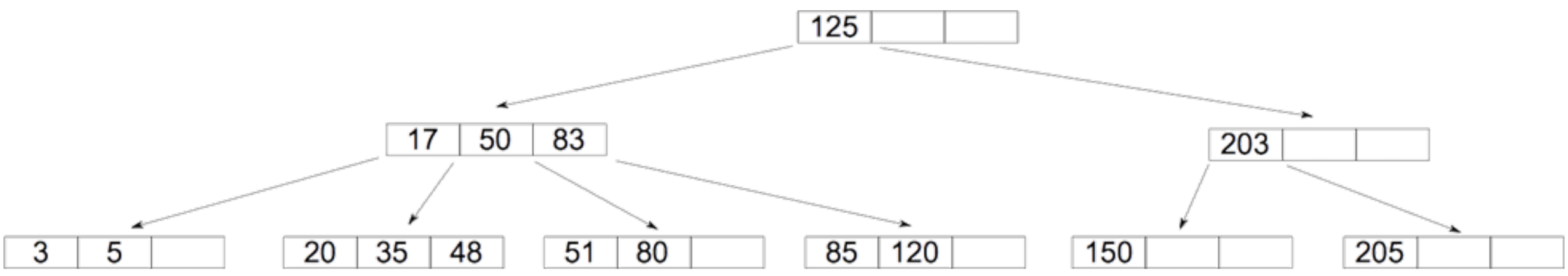
b

r

```c
#define TAMMAX 511 /*Este eh o tamanho maximo de filhos */

typedef struct arvb {  /* Registro que representa nó em árvore B */
  int ordem; /*tamanho maximo desta arvore, que pode ser variavel*/
  int elems; /*quantidade de elementos ocupados da arvore*/
  int info[TAMMAX+1]; /*Vetor contendo todas as informacoes do no*/
  struct arvb *filhos[TAMMAX+2]; /*Vetor contendo todos os filhos */
} ArvB;

ArvB *ArvBCria(int ordem);
/* Cria uma arvore B com a ordem passada pelo parametro. Devolve NULL
   Caso a ordem seja maior do que o tamanho maximo especificado, ou
   se deu algum pau de memoria
*/

int ArvBDestroi(ArvB **arvore);
/* Destroi a Arvore B. O apontador arvore deve retornar Nulo.
   int retorna 1 se tudo deu certo, ou 0 se deu algum tipo de pau.
*/
```

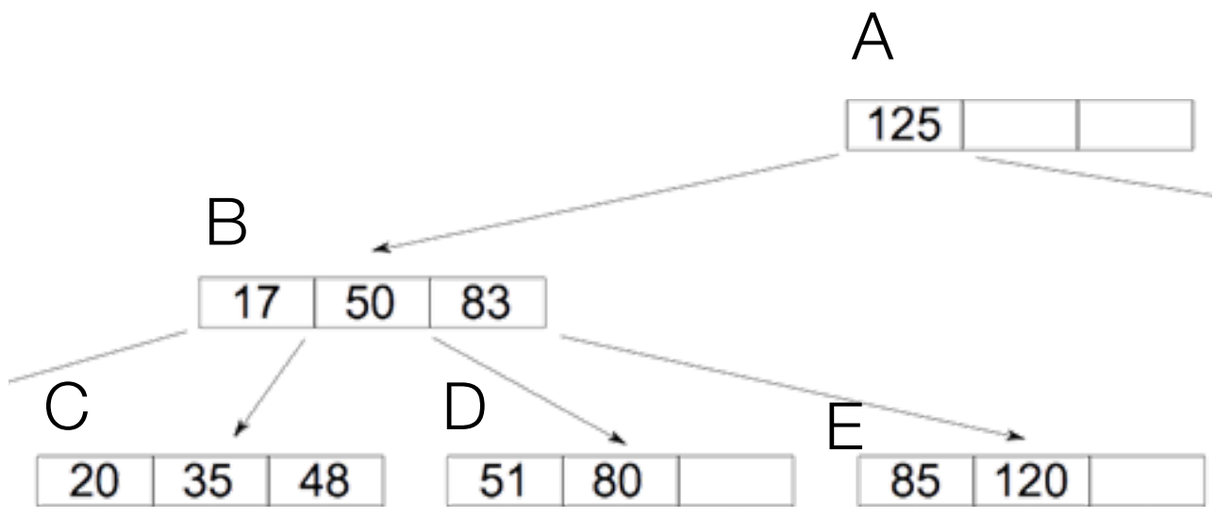
Árvores B: Busca de Elementos

- Como achar o elemento 48?



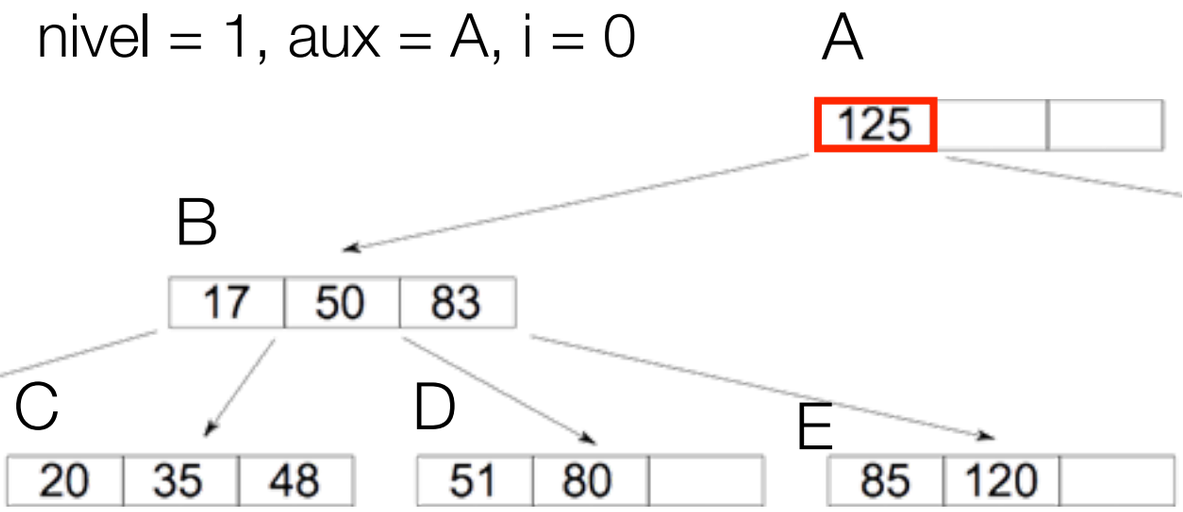
Árvores B: Implementação da Busca

```c
int ArvBBusca(ArvB *arvore, int valor)
/* Busca o valor "Valor" na arvore "arvore".
   A funcao deve retornar 0 se o valor nao existir na arvore ou se
   ocorrer algum tipo de Pau. Caso o valor esteja na arvore, a funcao
   deve retornar o nivel no qual o valor se encontra (a raiz
   possui nivel 1
*/
{
  int nivel = 1, i = 0;
  ArvB *aux;
  aux = arvore;
  if (aux == NULL)
    return 0;
  while(nivel) {
    while((aux->info[i]<valor)&&(i<aux->elems))
      i++;
    /*procura o primeiro elemento maior que o valor, ou a posicao depois
      da arvore*/
    if ((aux->info[i] == valor)&&(i<aux->elems))
      return(nivel);
    /*verifica se achou o elemento (fora da arvore nao vale*/
    else {
      if (aux->filhos[i] != NULL) {
        aux = aux->filhos[i];
        i = 0;
        nivel++;
      } else
        return 0;
      /* se nao achou o elemento neste nivel, tenta descer um nivel.
         se nao conseguir, retorna 0 que faiou.
      */
    }
  }
  return 0;
}
```



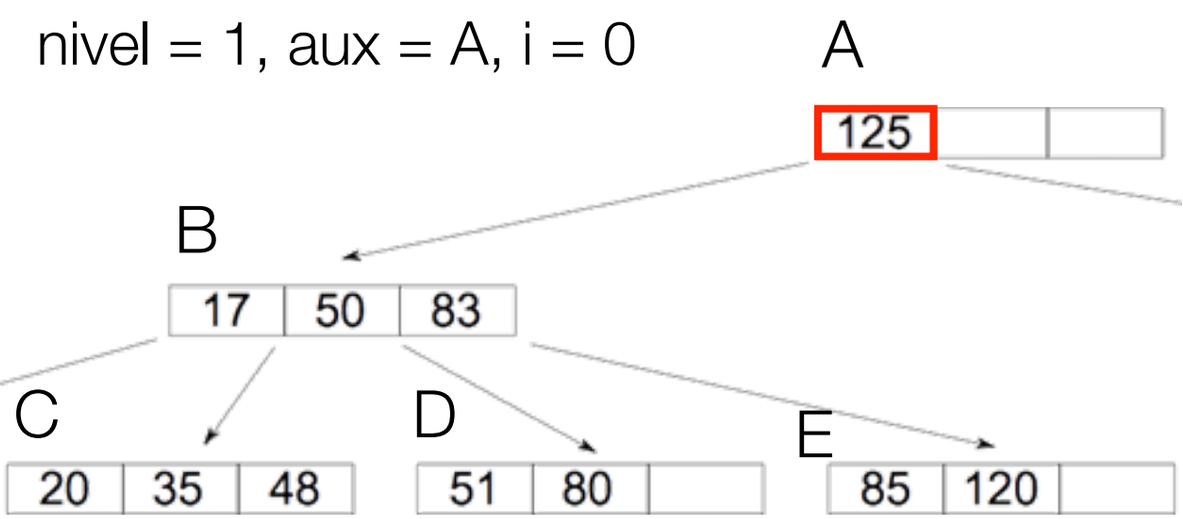
Árvores B: Implementação da Busca

```c
int ArvBBusca(ArvB *arvore, int valor)
/* Busca o valor "Valor" na arvore "arvore".
   A funcao deve retornar 0 se o valor nao existir na arvore ou se
   ocorrer algum tipo de Pau. Caso o valor esteja na arvore, a funcao
   deve retornar o nivel no qual o valor se encontra (a raiz
   possui nivel 1
*/
{
  int nivel = 1, i = 0;
  ArvB *aux;
  aux = arvore;
  if (aux == NULL)
    while(nivel) {
      while((aux->info[i]<valor)&&(i<aux->elems))
        i++;
      /*procura o primeiro elemento maior que o valor, ou a posicao depois
      if ((aux->info[i] == valor)&&(i<aux->elems))
        return(nivel);
      /*verifica se achou o elemento (fora da arvore nao vale*/
      else {
        if (aux->filhos[i] != NULL) {
          aux = aux->filhos[i];
          i = 0;
          nivel++;
        } else
          return 0;
        /* se nao achou o elemento neste nivel, tenta descer um nivel.
           se nao conseguir, retorna 0 que faiou.
        */
      }
    }
  return 0;
}
```



Árvores B: Implementação da Busca

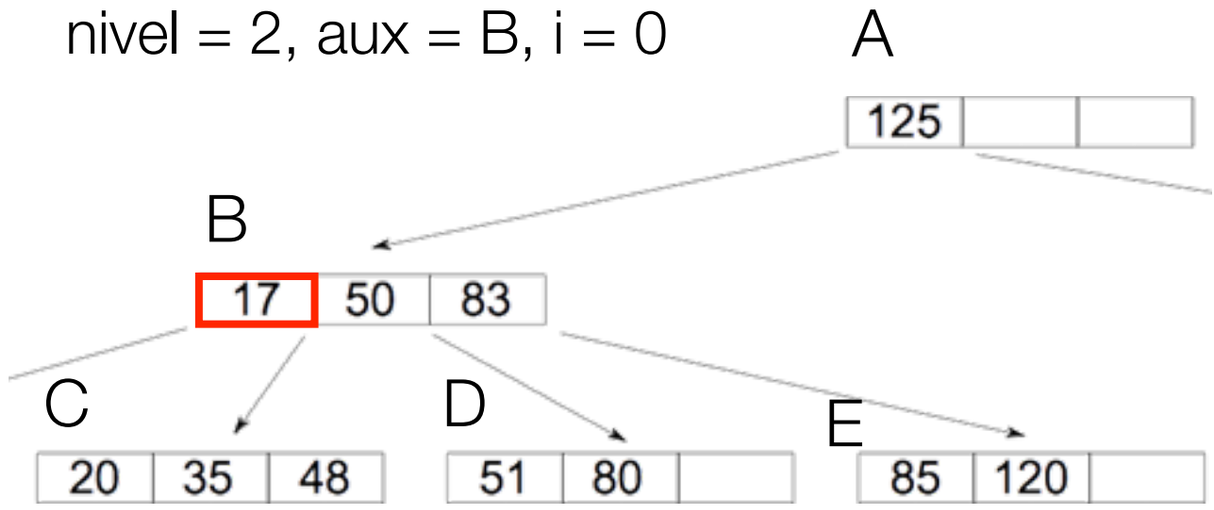
```c
int ArvBBusca(ArvB *arvore, int valor)
/* Busca o valor "Valor" na arvore "arvore".
   A funcao deve retornar 0 se o valor nao existir na arvore ou se
   ocorrer algum tipo de Pau. Caso o valor esteja na arvore, a funcao
   deve retornar o nivel no qual o valor se encontra (a raiz
   possui nivel 1
*/
{
  int nivel = 1, i = 0;
  ArvB *aux;
  aux = arvore;
  if (aux == NULL)
    return 0;
  while(nivel) {
    while((aux->info[i]<valor)&&(i<aux->elems))
      i++;
    /*procura o primeiro elemento maior que o valor, ou a posicao depois

    if ((aux->info[i] == valor)&&(i<aux->elems))
      return(nivel);
    /*verifica se achou o elemento (fora da arvore nao vale*/

      if (aux->filhos[i] != NULL) {
        aux = aux->filhos[i];
        i = 0;
        nivel++;
      } else
        return 0;
      /* se nao achou o elemento neste nivel, tenta descer um nivel.
         se nao conseguir, retorna 0 que faiou.
      */
    }
  }
  return 0;
}
```



Árvores B: Implementação da Busca

```c
int ArvBBusca(ArvB *arvore, int valor)
/* Busca o valor "Valor" na arvore "arvore".
   A funcao deve retornar 0 se o valor nao existir na arvore ou se
   ocorrer algum tipo de Pau. Caso o valor esteja na arvore, a funcao
   deve retornar o nivel no qual o valor se encontra (a raiz
   possui nivel 1
*/
{
  int nivel = 1, i = 0;
  ArvB *aux;
  aux = arvore;
  if (aux == NULL)
    return 0;
  while(nivel) {
    while((aux->info[i]<valor)&&(i<aux->elems))
      i++;
    /*procura o primeiro elemento maior que o valor, ou a posicao depois
      da arvore*/
    if ((aux->info[i] == valor)&&(i<aux->elems))
      return(nivel);
    /*verifica se achou o elemento (fora da arvore nao vale*/
      if (aux->filhos[i] != NULL) {
        aux = aux->filhos[i];
        i = 0;
        nivel++;
      } else
        return 0;
      /* se nao achou o elemento neste nivel, tenta descer um nivel.
         se nao conseguir, retorna 0 que faiou.
      */
    }
  return 0;
}
```

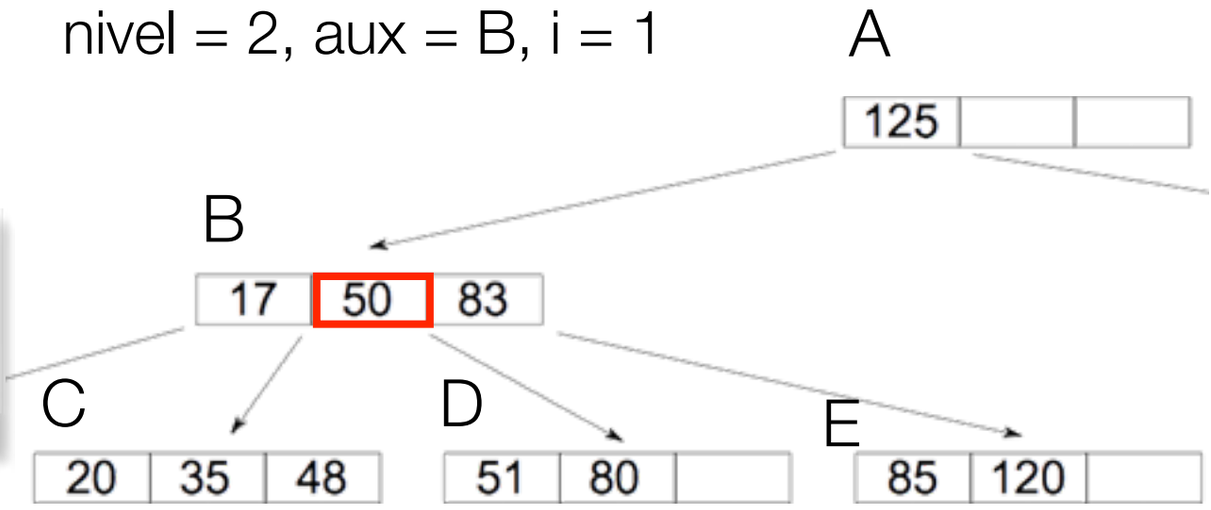
nivel = 2, aux = B, i = 0



Árvores B: Implementação da Busca

```c
int ArvBBusca(ArvB *arvore, int valor)
/* Busca o valor "Valor" na arvore "arvore".
   A funcao deve retornar 0 se o valor nao existir na arvore ou se
   ocorrer algum tipo de Pau. Caso o valor esteja na arvore, a funcao
   deve retornar o nivel no qual o valor se encontra (a raiz
   possui nivel 1
*/
{
  int nivel = 1, i = 0;
  ArvB *aux;
  aux = arvore;
  if (aux == NULL)
    while(nivel) {
      while((aux->info[i]<valor)&&(i<aux->elems))
        i++;
      /*procura o primeiro elemento maior que o valor, ou a posicao depois
      if ((aux->info[i] == valor)&&(i<aux->elems))
        return(nivel);
      /*verifica se achou o elemento (fora da arvore nao vale*/
      else {
        if (aux->filhos[i] != NULL) {
          aux = aux->filhos[i];
          i = 0;
          nivel++;
        } else
          return 0;
        /* se nao achou o elemento neste nivel, tenta descer um nivel.
           se nao conseguir, retorna 0 que faiou.
        */
      }
    }
  return 0;
}
```

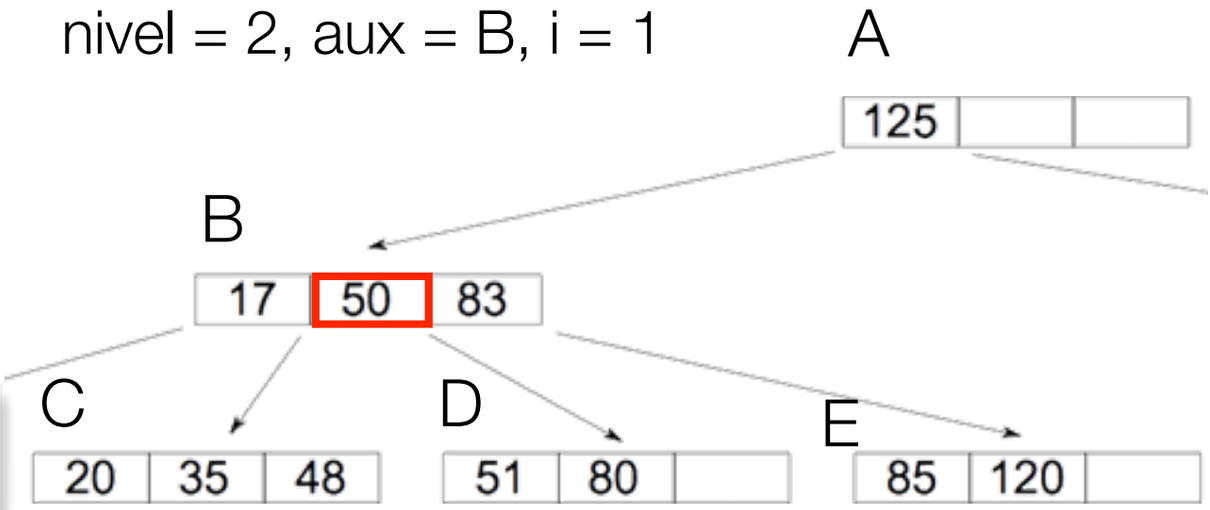
nivel = 2, aux = B, i = 1



Árvores B: Implementação da Busca

```c
int ArvBBusca(ArvB *arvore, int valor)
/* Busca o valor "Valor" na arvore "arvore".
   A funcao deve retornar 0 se o valor nao existir na arvore ou se
   ocorrer algum tipo de Pau. Caso o valor esteja na arvore, a funcao
   deve retornar o nivel no qual o valor se encontra (a raiz
   possui nivel 1
*/
{
  int nivel = 1, i = 0;
  ArvB *aux;
  aux = arvore;
  if (aux == NULL)
    return 0;
  while(nivel) {
    while((aux->info[i]<valor)&&(i<aux->elems))
      i++;
    /*procura o primeiro elemento maior que o valor, ou a posicao depois

    if ((aux->info[i] == valor)&&(i<aux->elems))
      return(nivel);
    /*verifica se achou o elemento (fora da arvore nao vale*/

      if (aux->filhos[i] != NULL) {
        aux = aux->filhos[i];
        i = 0;
        nivel++;
      } else
        return 0;
      /* se nao achou o elemento neste nivel, tenta descer um nivel.
         se nao conseguir, retorna 0 que faiou.
      */
    }
  }
  return 0;
}
```

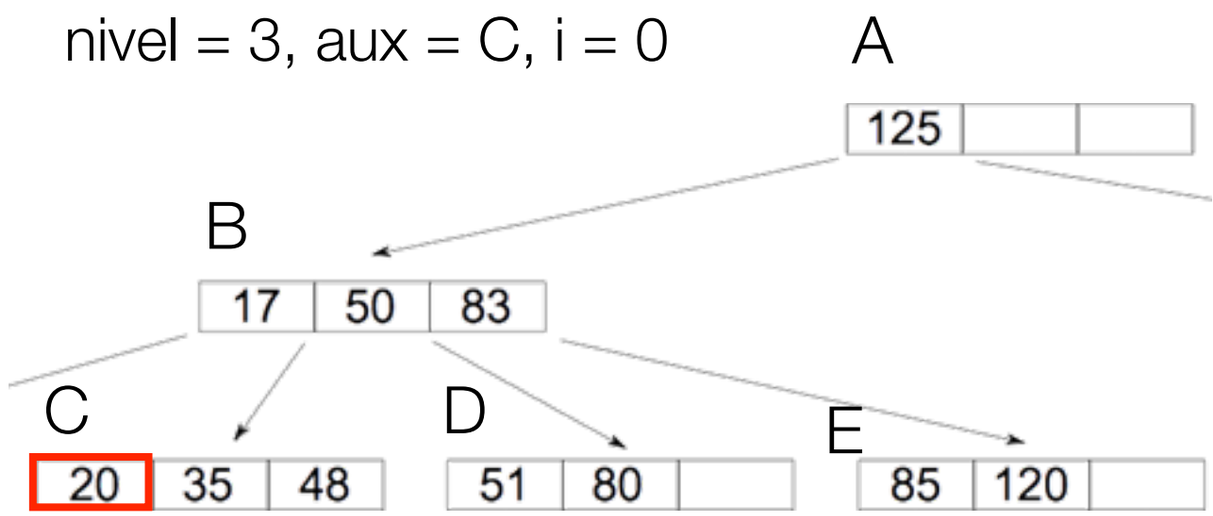
nivel = 2, aux = B, i = 1



Árvores B: Implementação da Busca

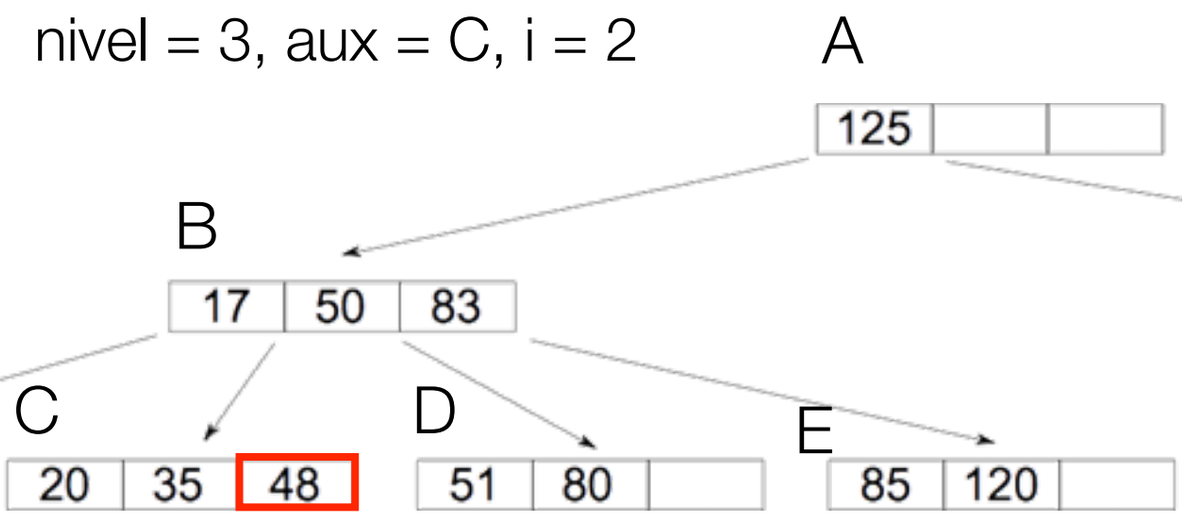
```c
int ArvBBusca(ArvB *arvore, int valor)
/* Busca o valor "Valor" na arvore "arvore".
   A funcao deve retornar 0 se o valor nao existir na arvore ou se
   ocorrer algum tipo de Pau. Caso o valor esteja na arvore, a funcao
   deve retornar o nivel no qual o valor se encontra (a raiz
   possui nivel 1
*/
{
  int nivel = 1, i = 0;
  ArvB *aux;
  aux = arvore;
  if (aux == NULL)
    return 0;
  while(nivel) {
    while((aux->info[i]<valor)&&(i<aux->elems))
      i++;
    /*procura o primeiro elemento maior que o valor, ou a posicao depois
      da arvore*/
    if ((aux->info[i] == valor)&&(i<aux->elems))
      return(nivel);
    /*verifica se achou o elemento (fora da arvore nao vale*/
      if (aux->filhos[i] != NULL) {
        aux = aux->filhos[i];
        i = 0;
        nivel++;
      } else
        return 0;
      /* se nao achou o elemento neste nivel, tenta descer um nivel.
         se nao conseguir, retorna 0 que faiou.
      */
    }
  return 0;
}
```

nivel = 3, aux = C, i = 0



Árvores B: Implementação da Busca

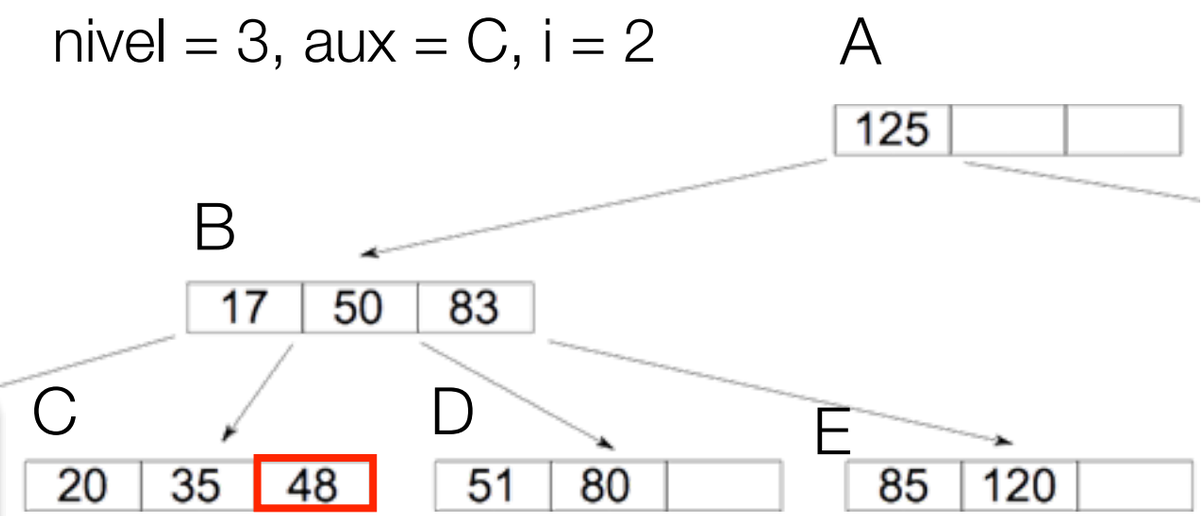
```c
int ArvBBusca(ArvB *arvore, int valor)
/* Busca o valor "Valor" na arvore "arvore".
   A funcao deve retornar 0 se o valor nao existir na arvore ou se
   ocorrer algum tipo de Pau. Caso o valor esteja na arvore, a funcao
   deve retornar o nivel no qual o valor se encontra (a raiz
   possui nivel 1
*/
{
  int nivel = 1, i = 0;
  ArvB *aux;
  aux = arvore;
  if (aux == NULL)
    while(nivel) {
      while((aux->info[i]<valor)&&(i<aux->elems))
        i++;
      /*procura o primeiro elemento maior que o valor, ou a posicao depois
      if ((aux->info[i] == valor)&&(i<aux->elems))
        return(nivel);
      /*verifica se achou o elemento (fora da arvore nao vale*/
      else {
        if (aux->filhos[i] != NULL) {
          aux = aux->filhos[i];
          i = 0;
          nivel++;
        } else
          return 0;
        /* se nao achou o elemento neste nivel, tenta descer um nivel.
           se nao conseguir, retorna 0 que faiou.
        */
      }
    }
  return 0;
}
```



Árvores B: Implementação da Busca

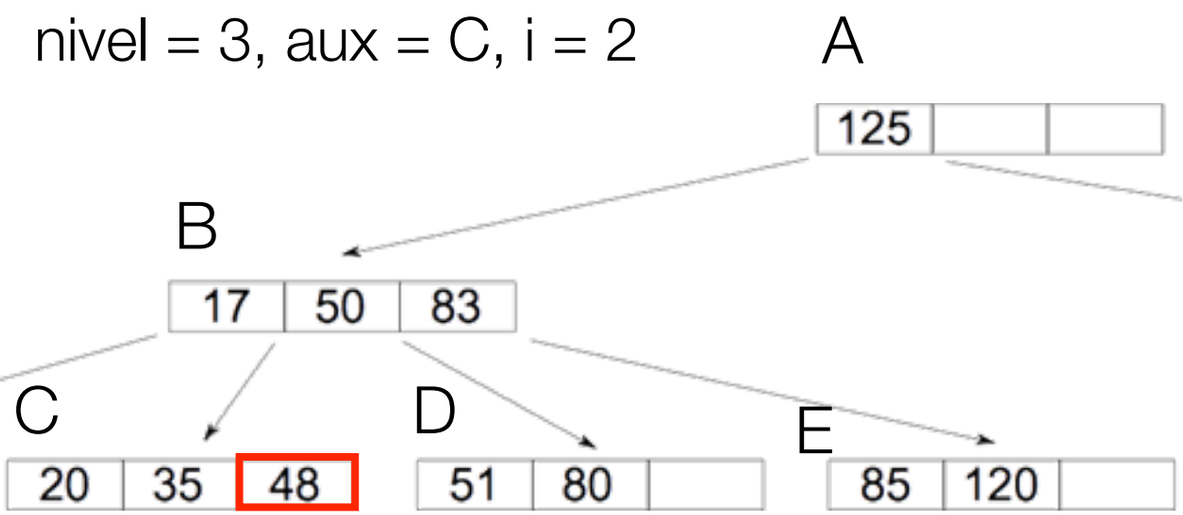
```c
int ArvBBusca(ArvB *arvore, int valor)
/* Busca o valor "Valor" na arvore "arvore".
   A funcao deve retornar 0 se o valor nao existir na arvore ou se
   ocorrer algum tipo de Pau. Caso o valor esteja na arvore, a funcao
   deve retornar o nivel no qual o valor se encontra (a raiz
   possui nivel 1
*/
{
  int nivel = 1, i = 0;
  ArvB *aux;
  aux = arvore;
  if (aux == NULL)
    return 0;
  while(nivel) {
    while((aux->info[i]<valor)&&(i<aux->elems))
      i++;
    /*procura o primeiro elemento maior que o valor, ou a posicao depois

    if ((aux->info[i] == valor)&&(i<aux->elems))
      return(nivel);
    /*verifica se achou o elemento (fora da arvore nao vale*/

      if (aux->filhos[i] != NULL) {
        aux = aux->filhos[i];
        i = 0;
        nivel++;
      } else
        return 0;
      /* se nao achou o elemento neste nivel, tenta descer um nivel.
         se nao conseguir, retorna 0 que faiou.
      */
    }
  }
  return 0;
}
```

nivel = 3, aux = C, i = 2



Árvores B: Implementação da Busca

```c
int ArvBBusca(ArvB *arvore, int valor)
/* Busca o valor "Valor" na arvore "arvore".
   A funcao deve retornar 0 se o valor nao existir na arvore ou se
   ocorrer algum tipo de Pau. Caso o valor esteja na arvore, a funcao
   deve retornar o nivel no qual o valor se encontra (a raiz
   possui nivel 1
*/
{
  int nivel = 1, i = 0;
  ArvB *aux;
  aux = arvore;
  if (aux == NULL)
    return 0;
  while(nivel) {
    while((aux->info[i]<valor)&&(i<aux->elems))
      i++;
    /*procura o primeiro elemento maior que o valor, ou a posicao depois

    if ((aux->info[i] == valor)&&(i<aux->elems))
      return(nivel);
    /*verifica se achou o elemento (fora da arvore nao vale*/

      if (aux->filhos[i] != NULL) {
        aux = aux->filhos[i];
        i = 0;
        nivel++;
      } else
        return 0;
      /* se nao achou o elemento neste nivel, tenta descer um nivel.
         se nao conseguir, retorna 0 que faiou.
      */
    }
  }
  return 0;
}
```



- Exercício: a busca no vetor leva tempo linear na ordem b para verificar cada nó, muito embora os registros estão ordenados por chave no vetor. Otimize a busca!

Árvores B: Inserção de Elementos

- Três casos:

1. Ávore vazia: cria nó, insere registro e retorna *verdadeiro* para indicar que a altura da árvore aumentou.

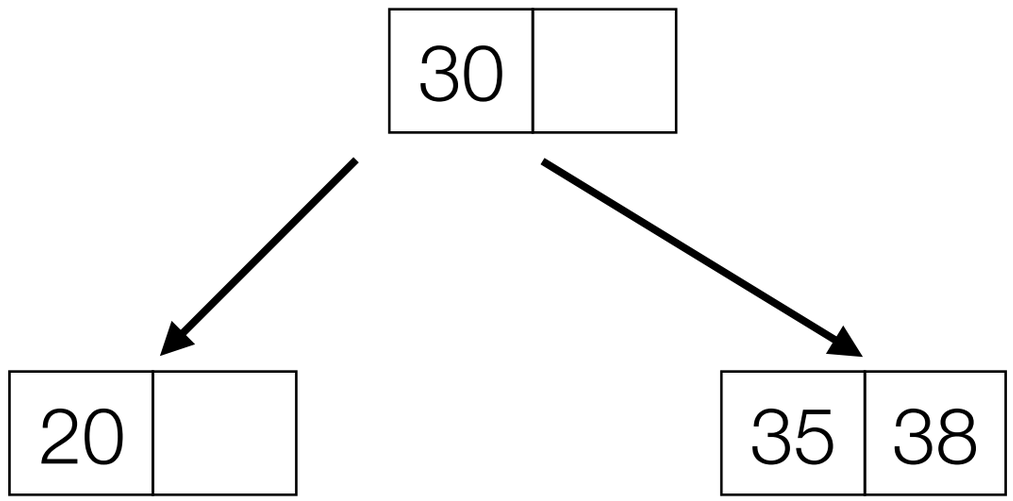
2. Encontre o nó folha onde será feita a inserção e a posição da inserção por busca no nó. Se o nó acomoda o registro (r < b), então insira-o e retorne *falso.*

3. Caso contrário, o nó folha não acomoda o novo registro e divide-se em dois após colocá-lo no local candidato. Em seguida, o registro com chave mediana info[*m*], onde *m = (b+1)/2,* deve ser inserido no nó pai e a função retorna *verdadeiro*.

- Este caso pode se repetir recursivamente até que o caso 2 ocorra (a árvore aumenta de altura no pior dos casos -> caso especial de raiz cheia).

Árvores B: Exemplos de Inserção

- Árvore inicial

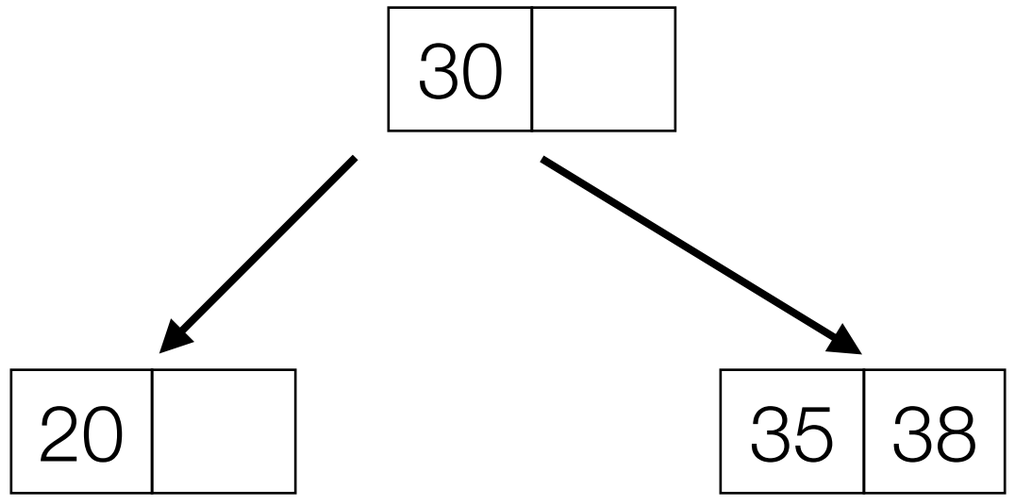


- Insira 25
- Insira 28
- Insira 32

Árvores B: Exemplos de Inserção

- Insira 25:

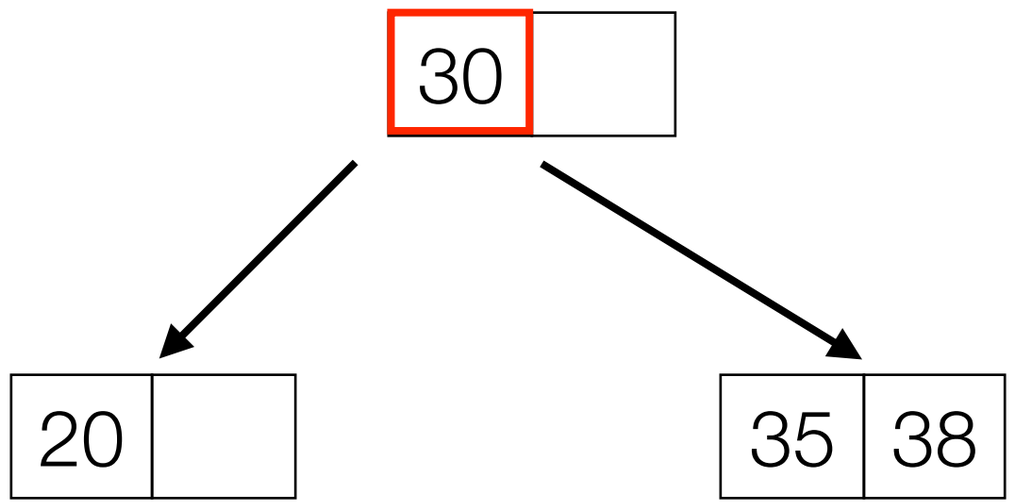
  - Caso 2: Encontre recursivamente o nó folha onde será feita a inserção e a posição da inserção por busca no nó. Se o nó acomoda o registro (r < b), então insira o registro e retorne *falso.*



Árvores B: Exemplos de Inserção

- Insira 25:

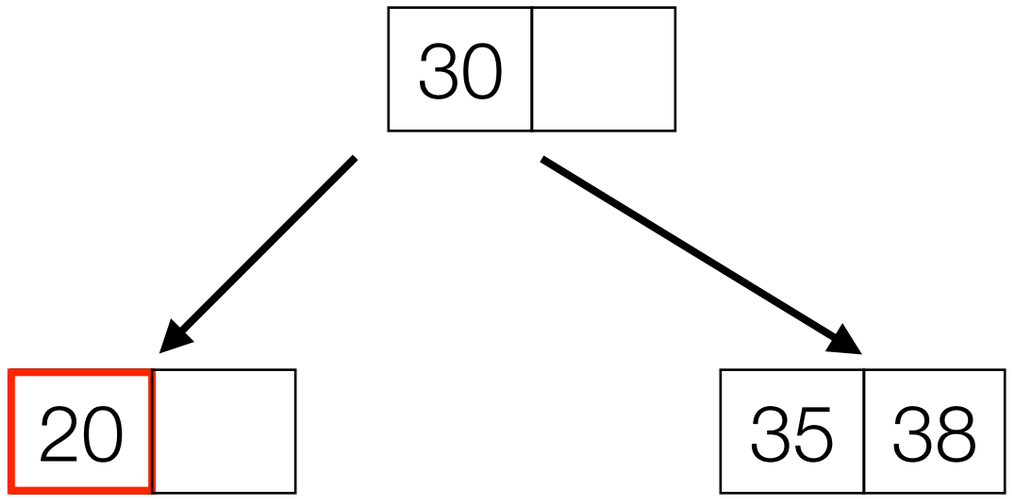
  - Caso 2: Encontre recursivamente o nó folha onde será feita a inserção e a posição da inserção por busca no nó. Se o nó acomoda o registro (r < b), então insira o registro e retorne *falso.*



Árvores B: Exemplos de Inserção

- Insira 25:

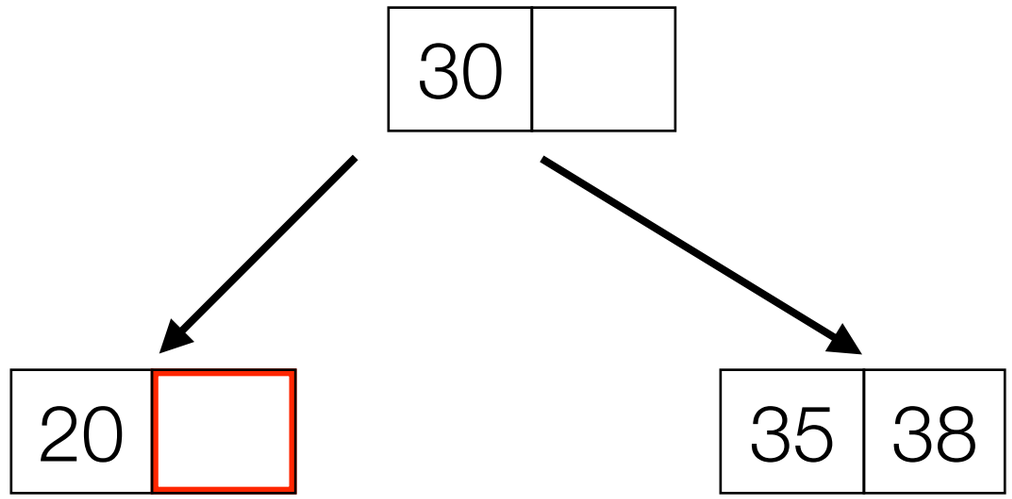
  - Caso 2: Encontre recursivamente o nó folha onde será feita a inserção e a posição da inserção por busca no nó. Se o nó acomoda o registro (r < b), então insira o registro e retorne *falso.*



Árvores B: Exemplos de Inserção

- Insira 25:

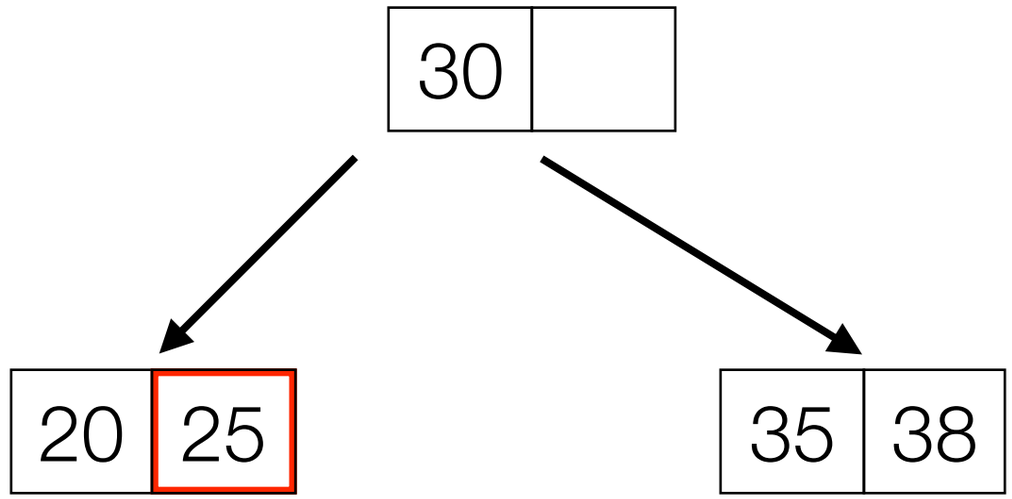
  - Caso 2: Encontre recursivamente o nó folha onde será feita a inserção e a posição da inserção por busca no nó. Se o nó acomoda o registro (r < b), então insira o registro e retorne *falso.*



Árvores B: Exemplos de Inserção

- Insira 25:

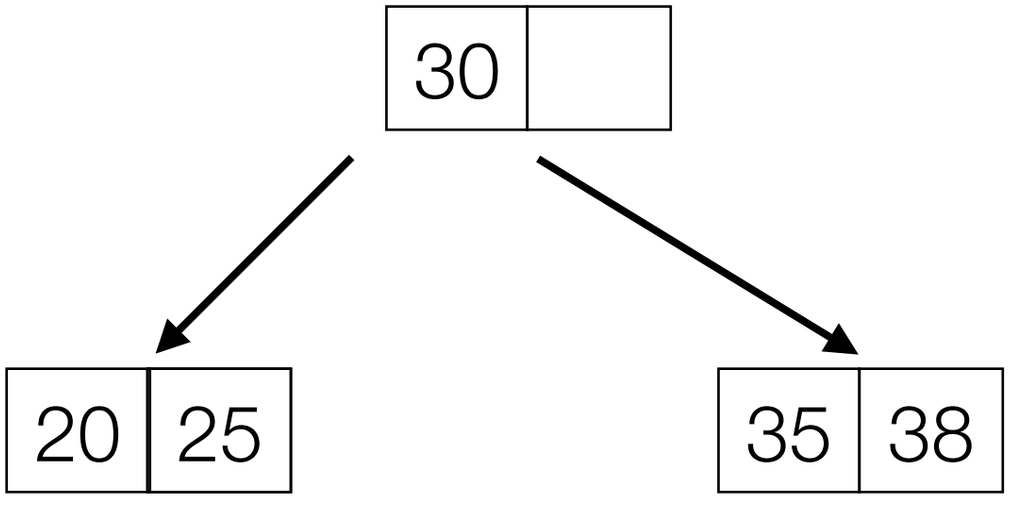
  - Caso 2: Encontre recursivamente o nó folha onde será feita a inserção e a posição da inserção por busca no nó. Se o nó acomoda o registro (r < b), então insira o registro e retorne *falso.*



Árvores B: Exemplos de Inserção

- Insira 28:

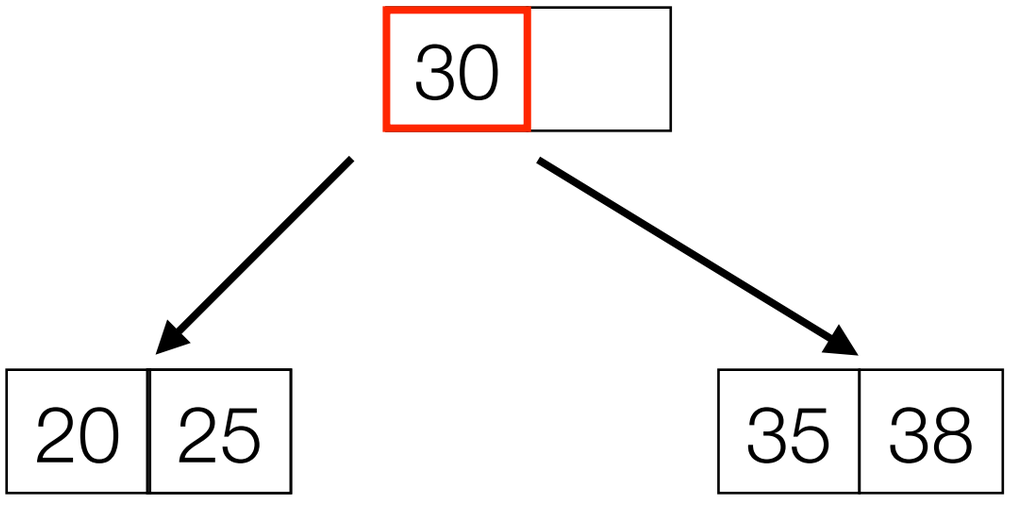
  - Caso 3: o o nó folha não acomoda o novo registro e divide-se em dois após colocá-lo no local candidato. Em seguida, o registro com chave mediana info[*m*], onde *m = (b+1)/2,* deve ser inserido no nó pai e a função retorna *verdadeiro*.



Árvores B: Exemplos de Inserção

- Insira 28:

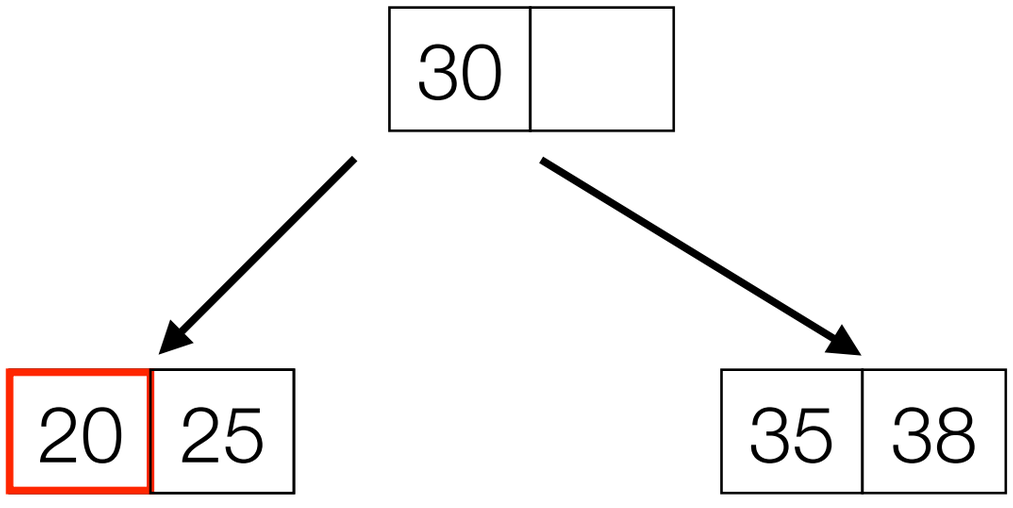
  - Caso 3: o o nó folha não acomoda o novo registro e divide-se em dois após colocá-lo no local candidato. Em seguida, o registro com chave mediana info[*m*], onde *m = (b+1)/2,* deve ser inserido no nó pai e a função retorna *verdadeiro*.



Árvores B: Exemplos de Inserção

- Insira 28:

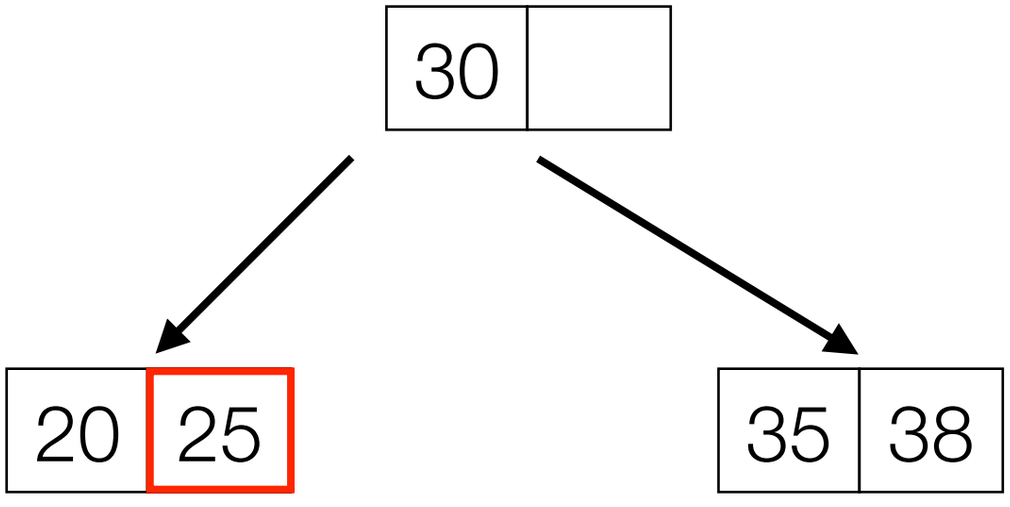
  - Caso 3: o o nó folha não acomoda o novo registro e divide-se em dois após colocá-lo no local candidato. Em seguida, o registro com chave mediana info[*m*], onde *m = (b+1)/2,* deve ser inserido no nó pai e a função retorna *verdadeiro*.



Árvores B: Exemplos de Inserção

- Insira 28:

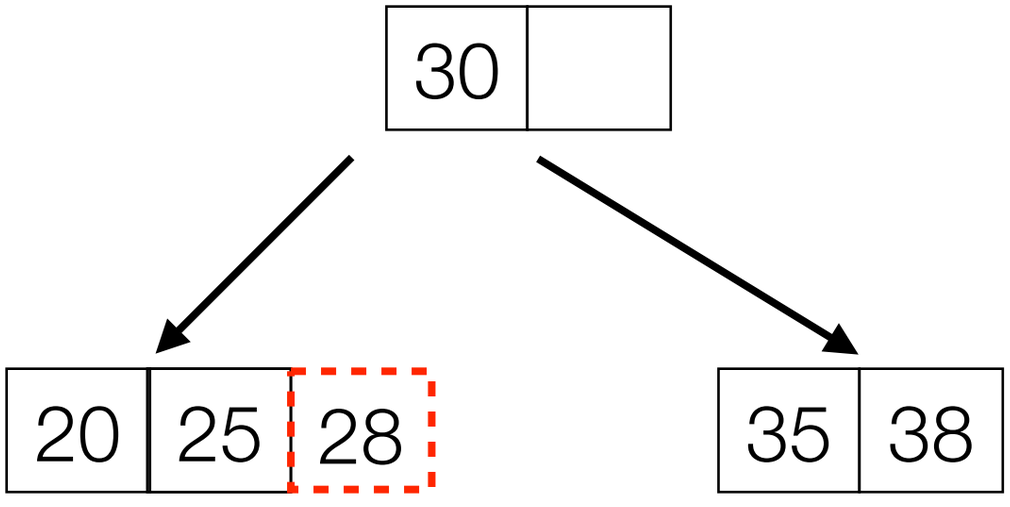
  - Caso 3: o o nó folha não acomoda o novo registro e divide-se em dois após colocá-lo no local candidato. Em seguida, o registro com chave mediana info[*m*], onde *m = (b+1)/2,* deve ser inserido no nó pai e a função retorna *verdadeiro*.



Árvores B: Exemplos de Inserção

- Insira 28:

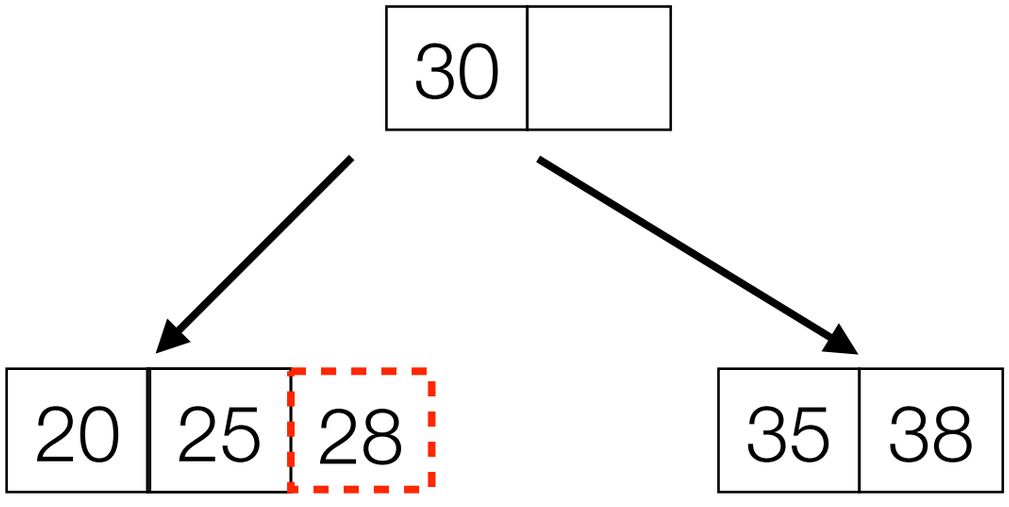
  - Caso 3: o o nó folha não acomoda o novo registro e divide-se em dois após colocá-lo no local candidato. Em seguida, o registro com chave mediana info[*m*], onde *m = (b+1)/2,* deve ser inserido no nó pai e a função retorna *verdadeiro*.

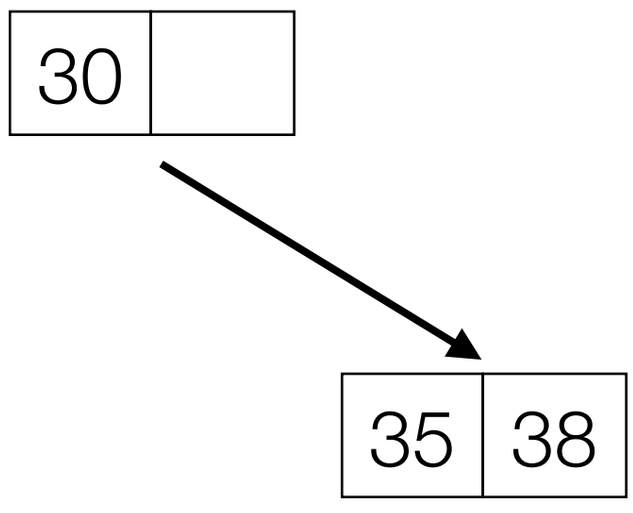


Árvores B: Exemplos de Inserção

- Insira 28:

  - Caso 3: o o nó folha não acomoda o novo registro e divide-se em dois após colocá-lo no local candidato. Em seguida, o registro com chave mediana info[*m*], onde *m = (b+1)/2,* deve ser inserido no nó pai e a função retorna *verdadeiro*.

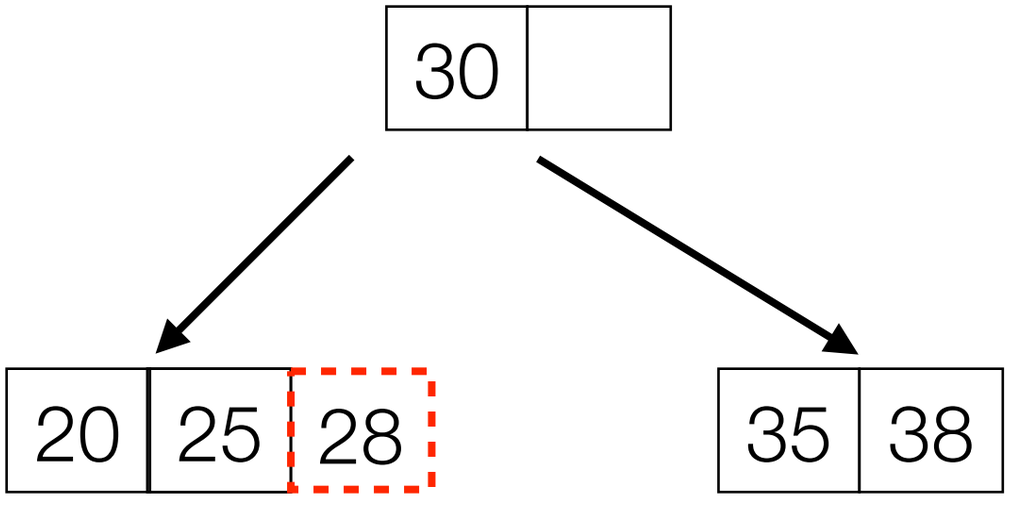


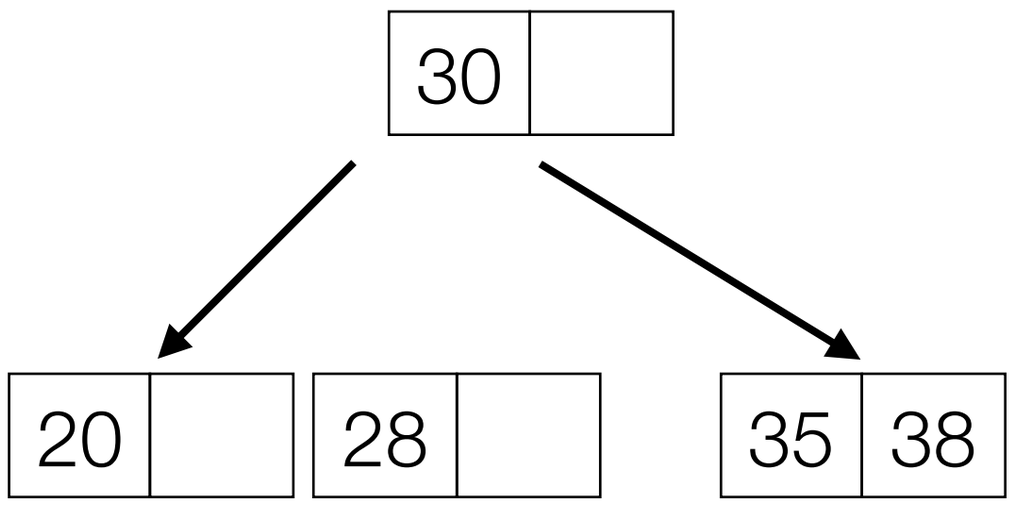


Árvores B: Exemplos de Inserção

- Insira 28:

  - Caso 3: o o nó folha não acomoda o novo registro e divide-se em dois após colocá-lo no local candidato. Em seguida, o registro com chave mediana info[*m*], onde *m = (b+1)/2,* deve ser inserido no nó pai e a função retorna *verdadeiro*.

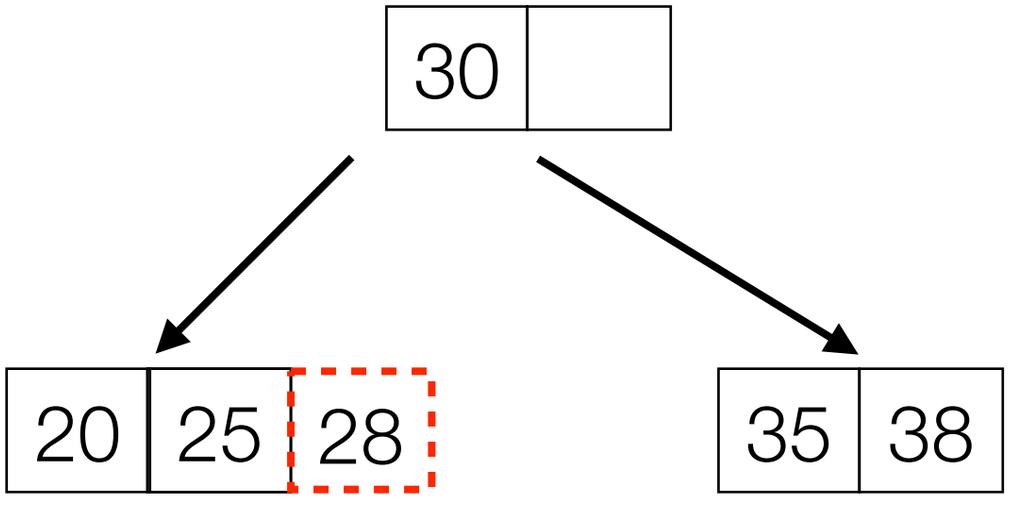


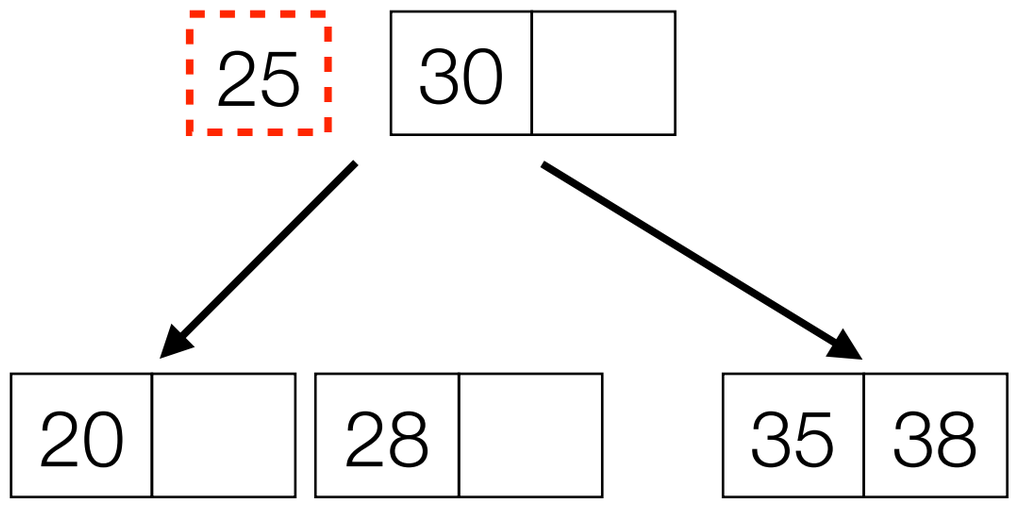


Árvores B: Exemplos de Inserção

- Insira 28:

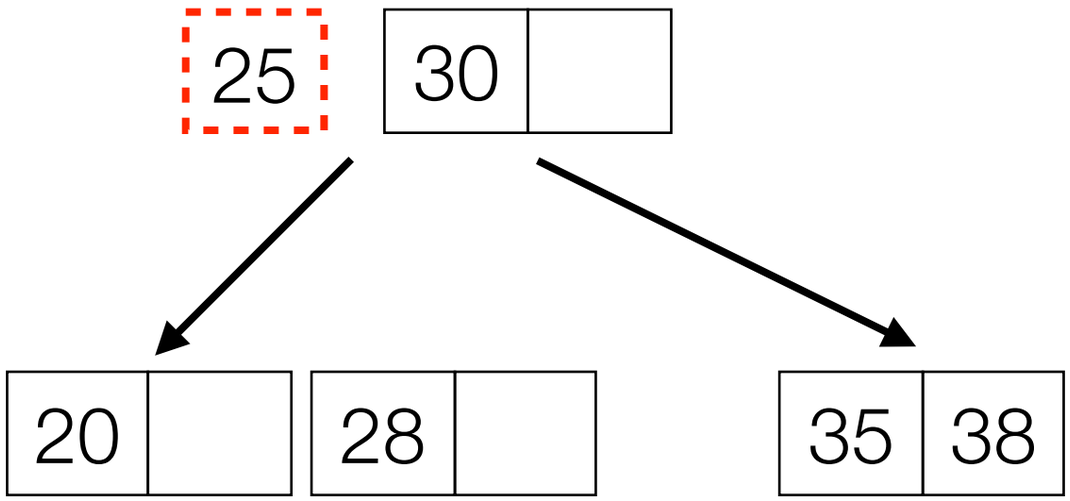
  - Caso 3: o o nó folha não acomoda o novo registro e divide-se em dois após colocá-lo no local candidato. Em seguida, o registro com chave mediana info[*m*], onde *m = (b+1)/2,* deve ser inserido no nó pai e a função retorna *verdadeiro*.





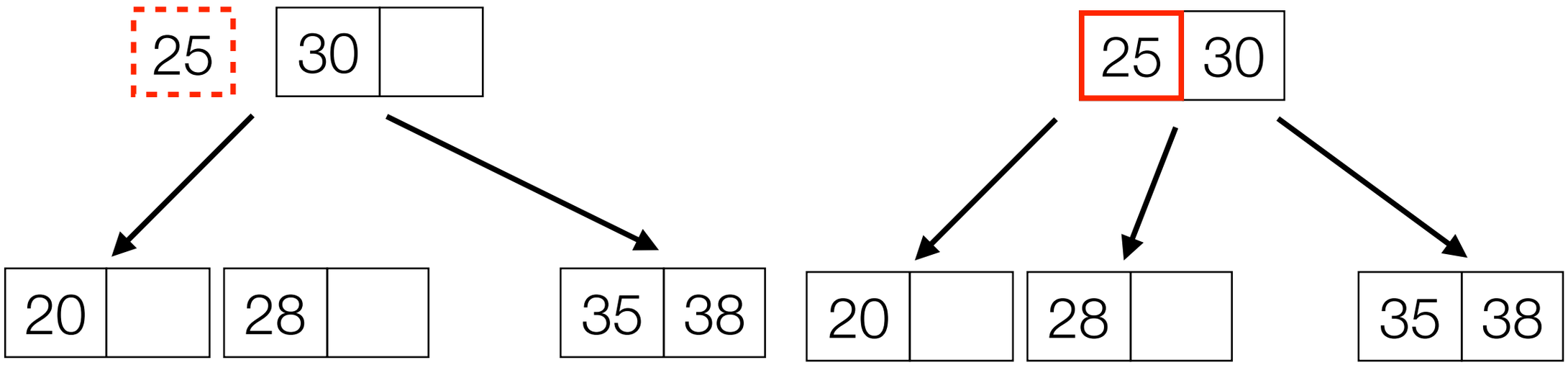
Árvores B: Exemplos de Inserção

- Insira 25 no nó pai:
  - Volta recursiva da inserção.



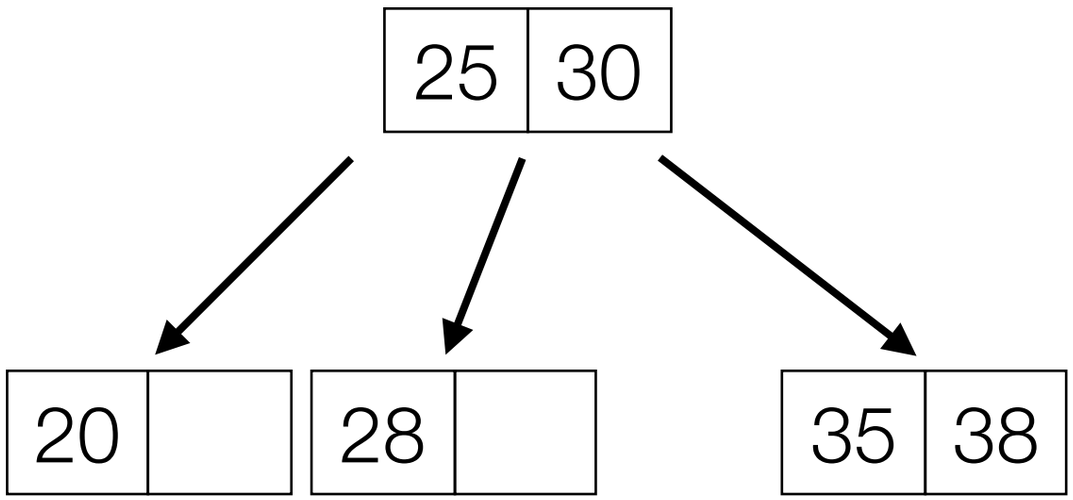
Árvores B: Exemplos de Inserção

- Insira 25 no nó pai:
  - Volta recursiva da inserção.



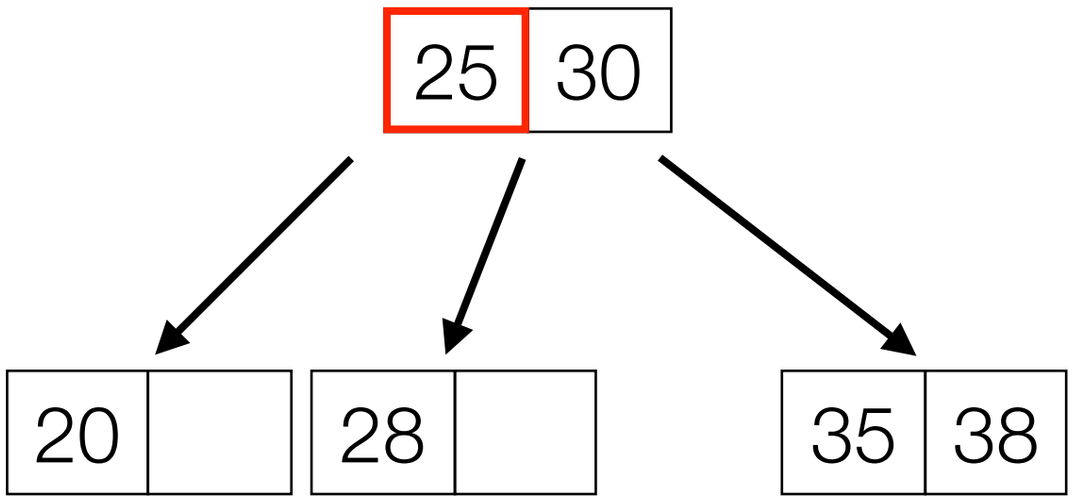
Árvores B: Exemplos de Inserção

- Insira 32:
  - Caso contrário, o nó folha não acomoda o novo registro e divide-se em dois após colocá-lo no local candidato. Em seguida, o registro com chave mediana info[*m*], onde *m = (b+1)/2,* deve ser inserido no nó pai e a função retorna *verdadeiro*.



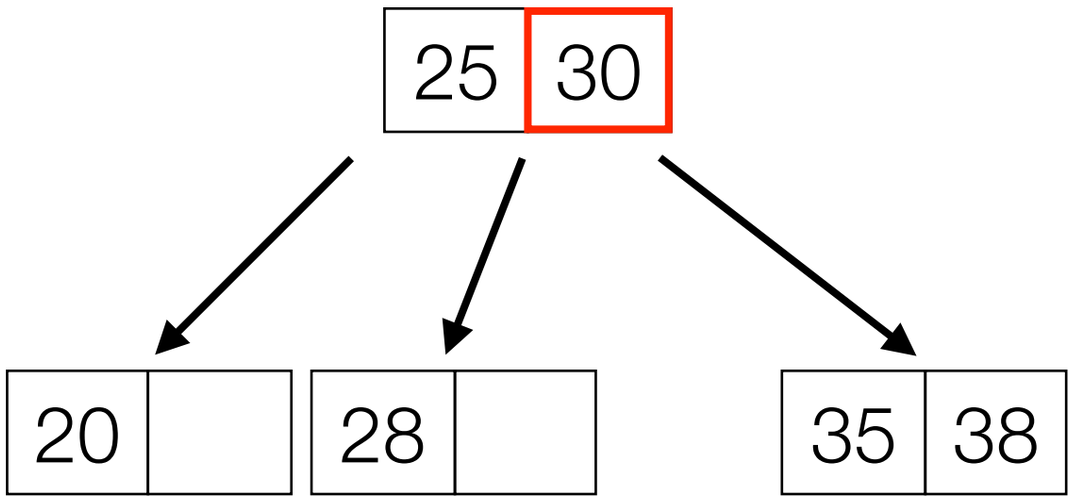
Árvores B: Exemplos de Inserção

- Insira 32:
  - Caso contrário, o nó folha não acomoda o novo registro e divide-se em dois após colocá-lo no local candidato. Em seguida, o registro com chave mediana info[*m*], onde *m = (b+1)/2,* deve ser inserido no nó pai e a função retorna *verdadeiro*.



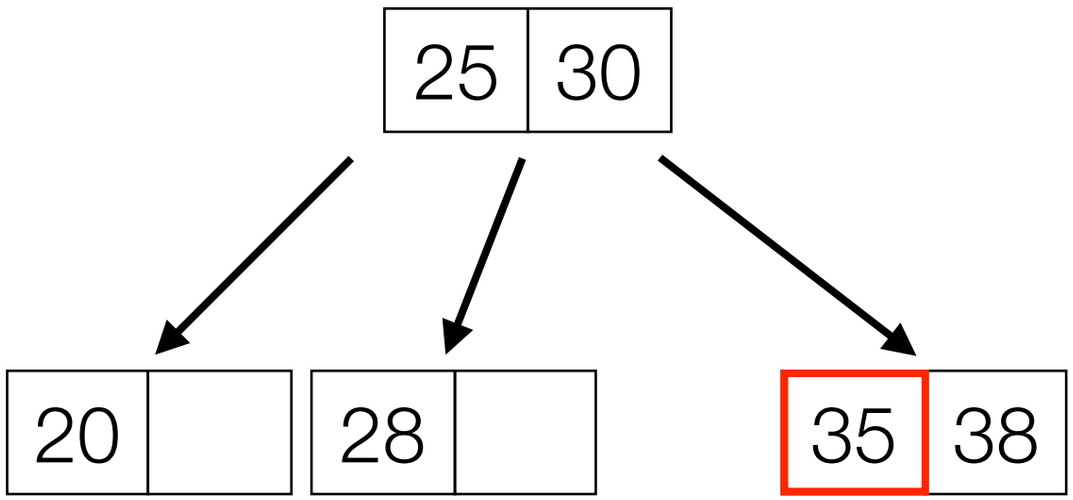
Árvores B: Exemplos de Inserção

- Insira 32:
  - Caso contrário, o nó folha não acomoda o novo registro e divide-se em dois após colocá-lo no local candidato. Em seguida, o registro com chave mediana info[*m*], onde *m = (b+1)/2,* deve ser inserido no nó pai e a função retorna *verdadeiro*.



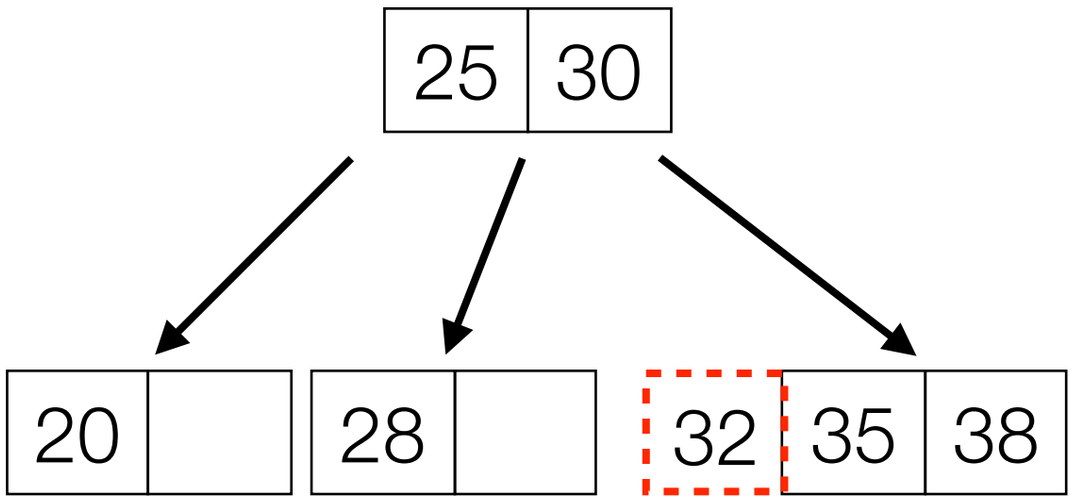
Árvores B: Exemplos de Inserção

- Insira 32:
  - Caso contrário, o nó folha não acomoda o novo registro e divide-se em dois após colocá-lo no local candidato. Em seguida, o registro com chave mediana info[*m*], onde *m = (b+1)/2,* deve ser inserido no nó pai e a função retorna *verdadeiro*.



Árvores B: Exemplos de Inserção

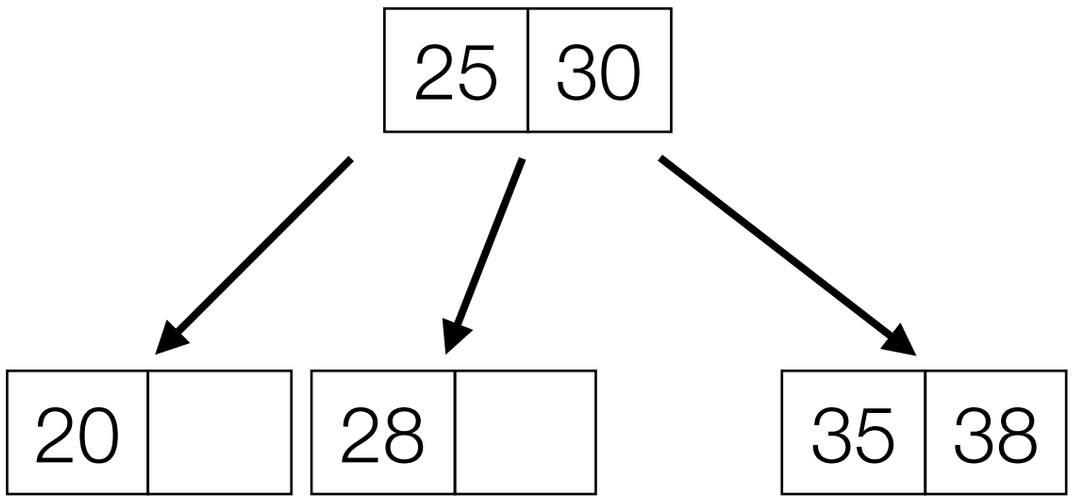
- Insira 32:
  - Caso contrário, o nó folha não acomoda o novo registro e divide-se em dois após colocá-lo no local candidato. Em seguida, o registro com chave mediana info[*m*], onde *m = (b+1)/2,* deve ser inserido no nó pai e a função retorna *verdadeiro*.

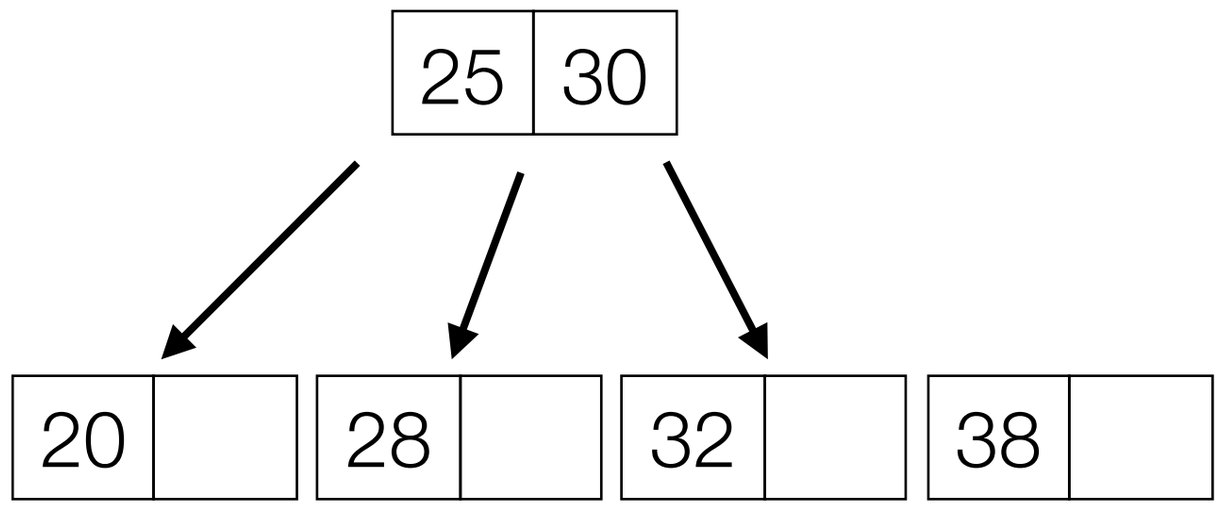


Árvores B: Exemplos de Inserção

- Insira 32:

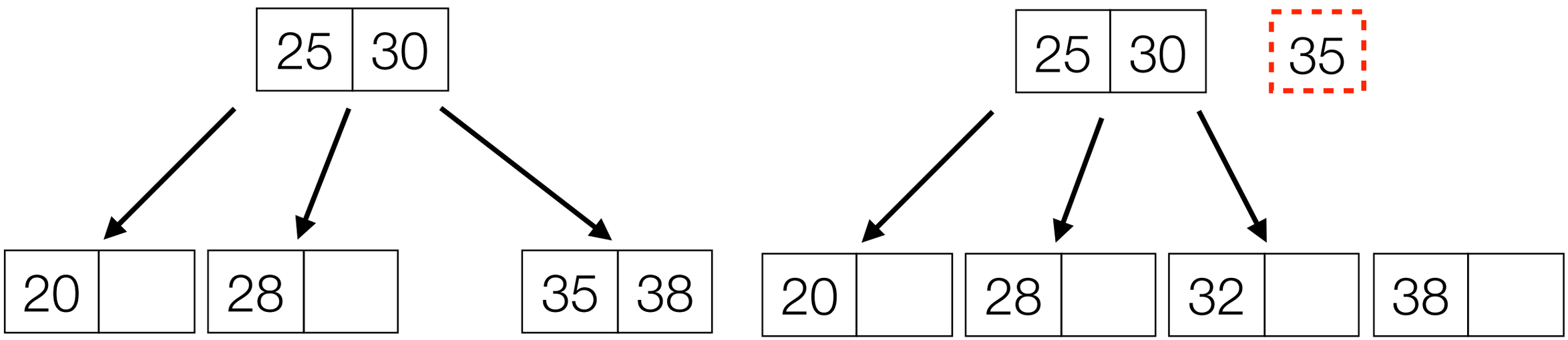
  - Caso contrário, o nó folha não acomoda o novo registro e divide-se em dois após colocá-lo no local candidato. Em seguida, o registro com chave mediana info[*m*], onde *m = (b+1)/2,* deve ser inserido no nó pai e a função retorna *verdadeiro*.





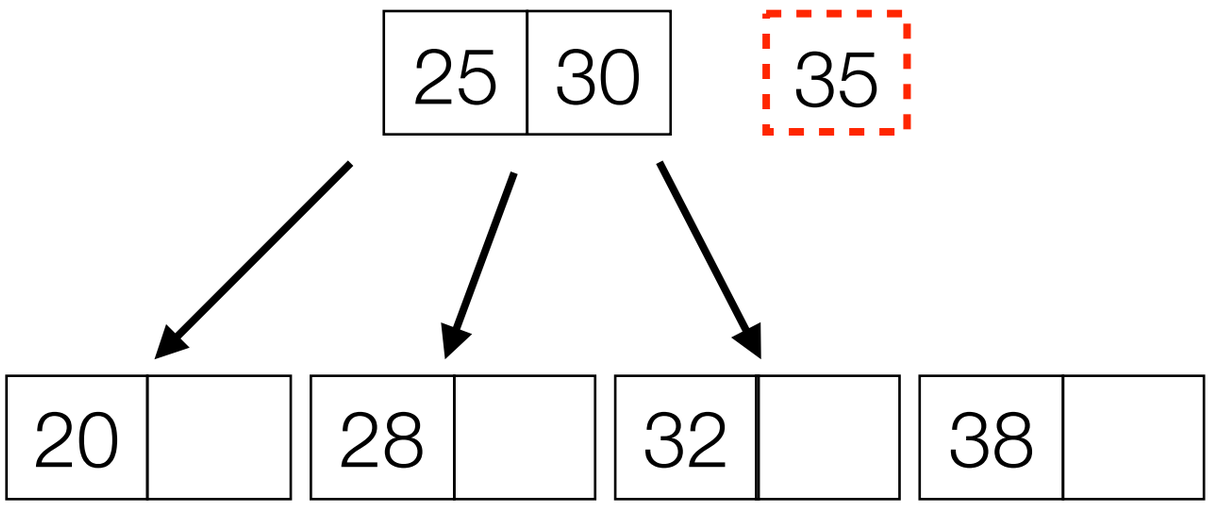
Árvores B: Exemplos de Inserção

- Insira 32:
  - Caso contrário, o nó folha não acomoda o novo registro e divide-se em dois após colocá-lo no local candidato. Em seguida, o registro com chave mediana info[*m*], onde *m = (b+1)/2,* deve ser inserido no nó pai e a função retorna *verdadeiro*.
- Insere 35 recursivamente no nó pai



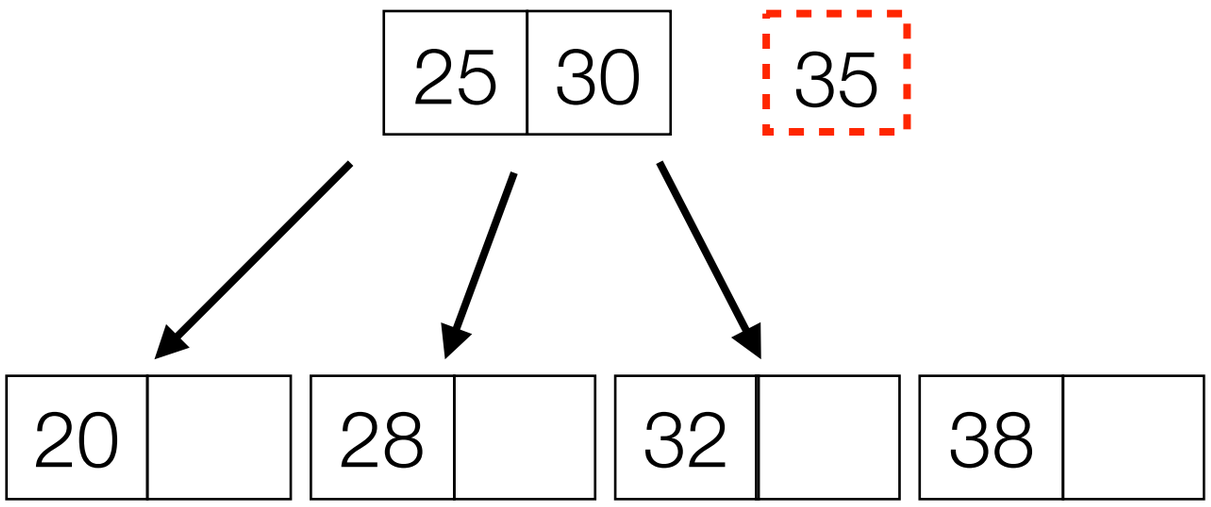
Árvores B: Exemplos de Inserção

- Insere 35 recursivamente no nó pai



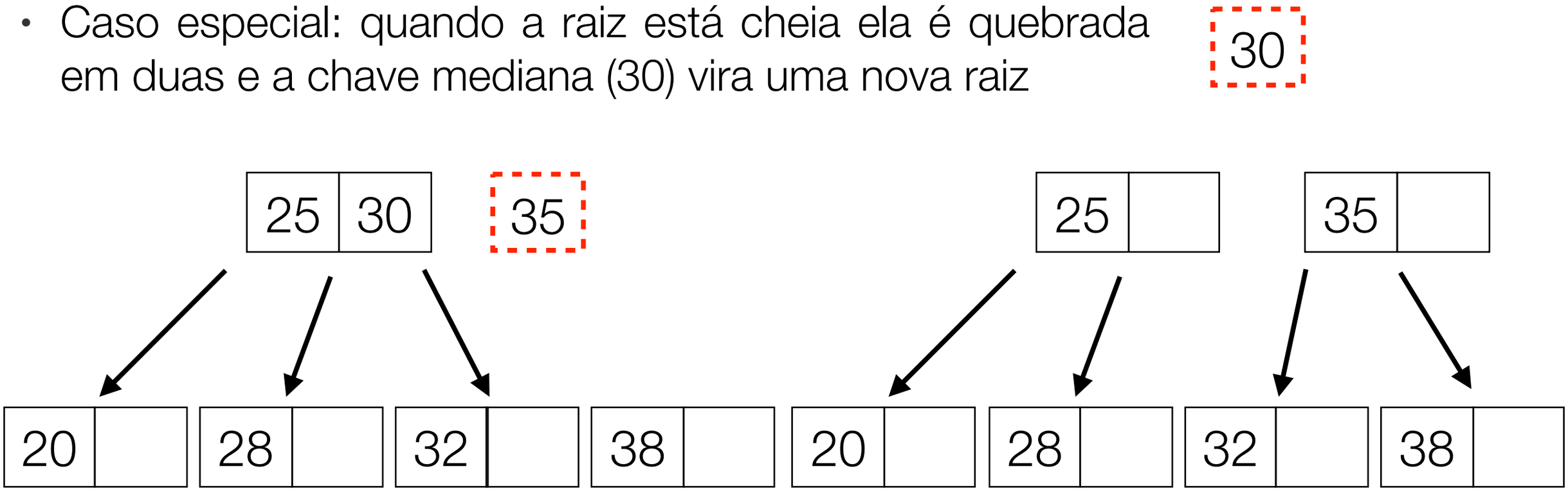
Árvores B: Exemplos de Inserção

- Insere 35 recursivamente no nó pai
- Caso 3: nó pai (raiz) cheio



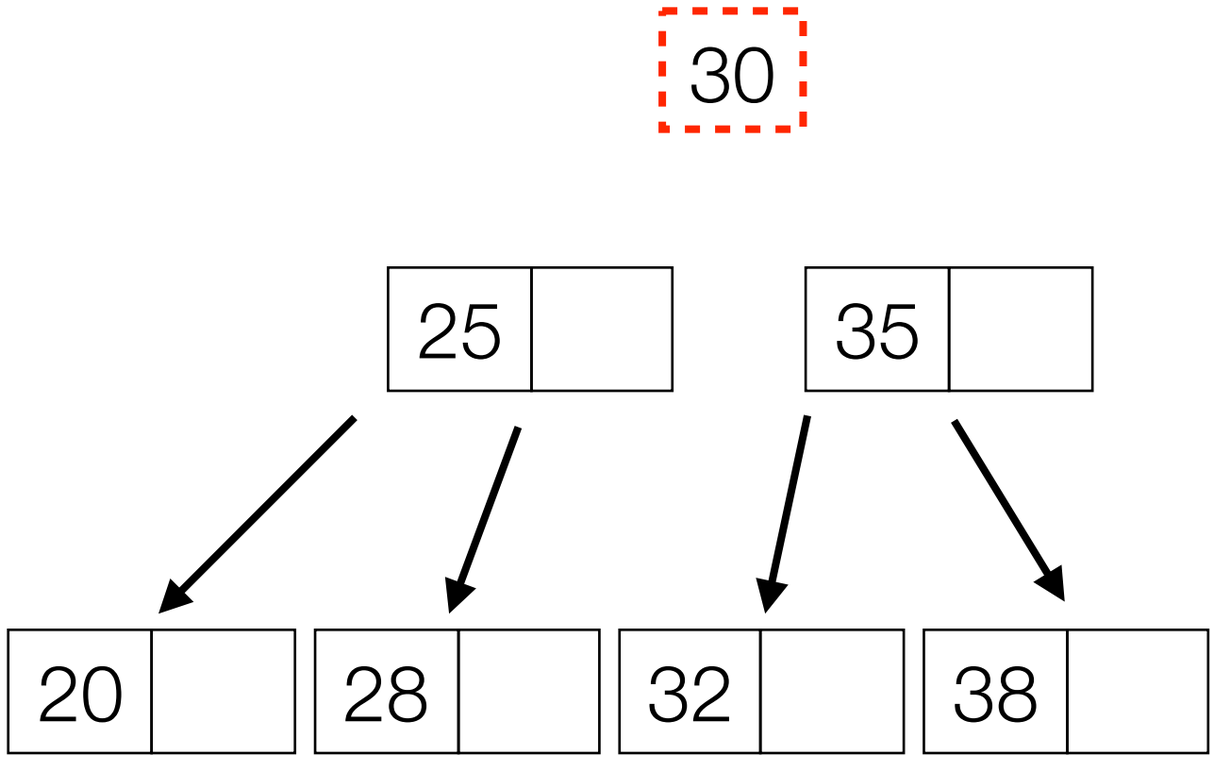
Árvores B: Exemplos de Inserção

- Insere 35 recursivamente no nó pai
- Caso 3: nó pai (raiz) cheio
- Caso especial: quando a raiz está cheia ela é quebrada em duas e a chave mediana (30) vira uma nova raiz



Árvores B: Exemplos de Inserção

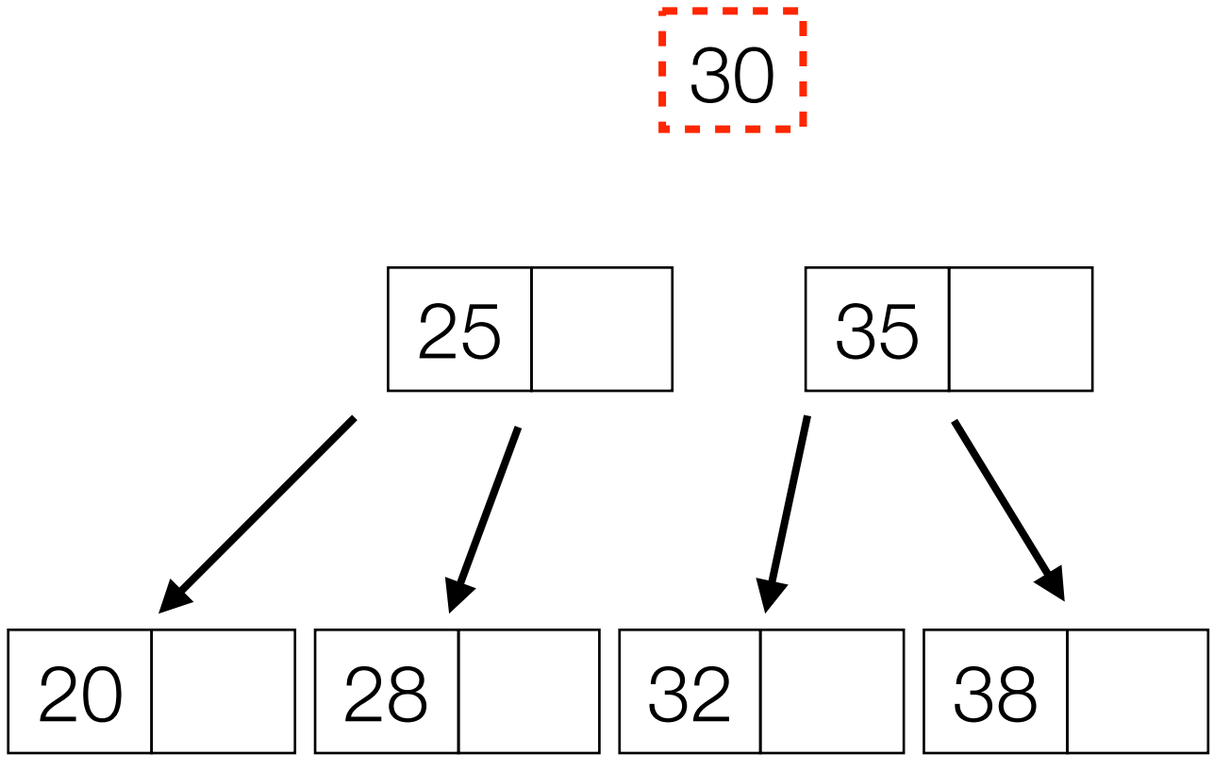
- Caso especial: quando a raiz está cheia ela é quebrada em duas e a chave mediana (30) vira uma nova raiz

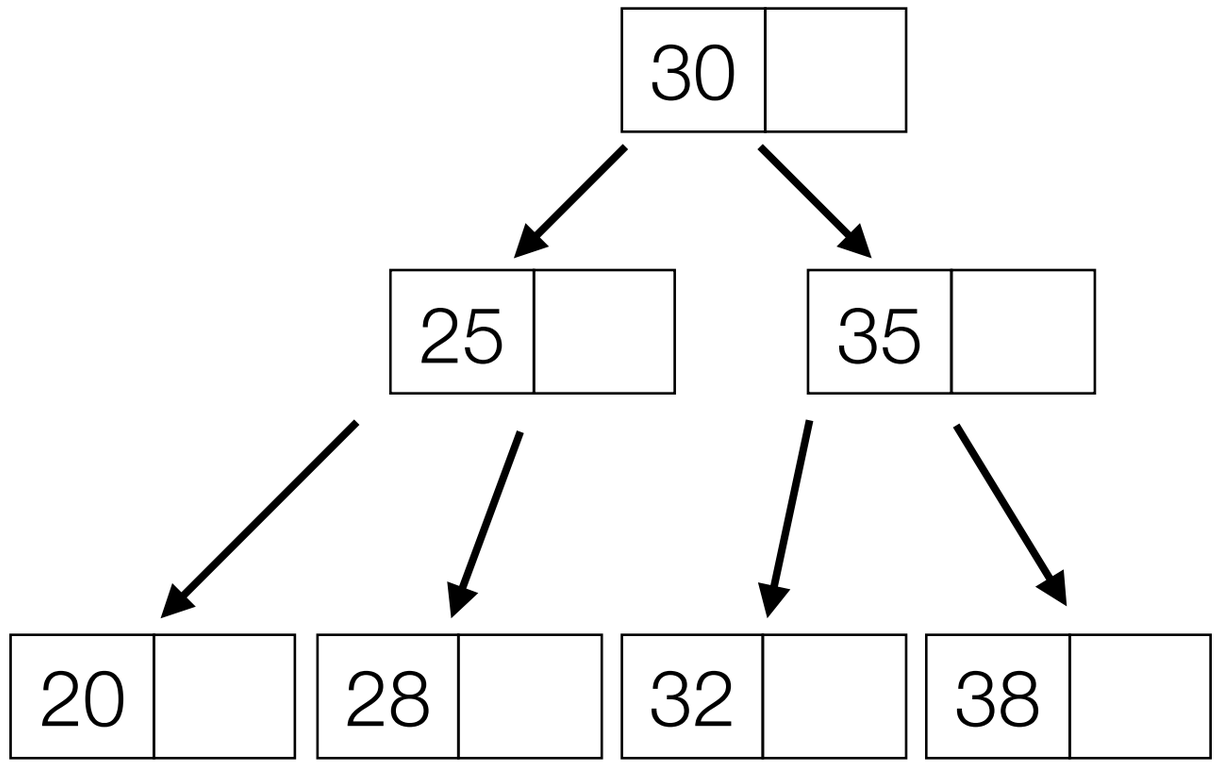


Árvores B: Exemplos de Inserção

- Caso especial: quando a raiz está cheia ela é quebrada em duas e a chave mediana (30) vira uma nova raiz

- Árvore cresce de altura





Árvores B: Implementação da Inserção

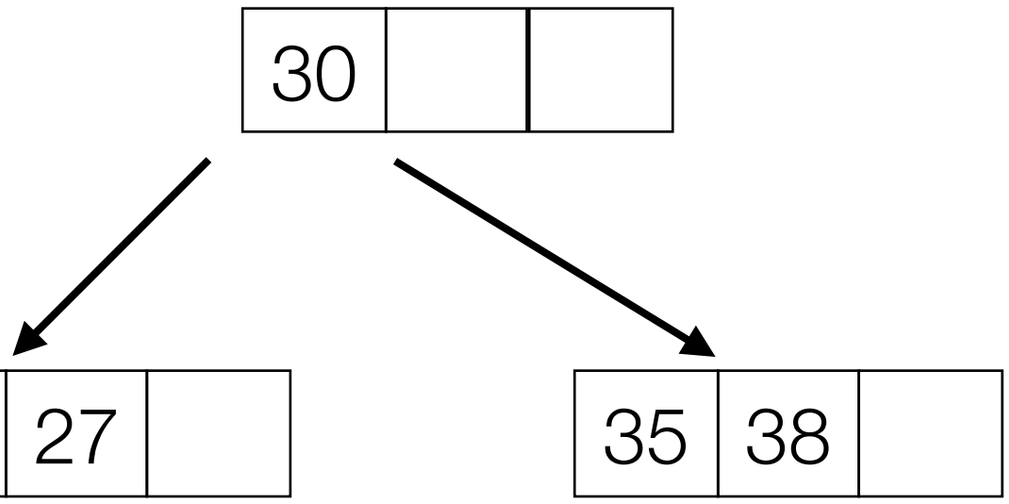
```
int ArvBInsereRec(ArvB **arvore, ArvB **aux, int *valor, int *quebrou)
{
  int i=0, j=0;
  if (*arvore==NULL) {
      (*quebrou) = 1;
      (*aux) = NULL;
      return 1;
  } else {
    if(BuscaChaveNo(*arvore, *valor, &i)) {
      /* Elemento encontrado na arvore, ignora inserção */
      (*quebrou) = 0;
      return 0;
    } else {
      if (ArvBInsereRec(&((*arvore)->filhos[i]),aux,valor,quebrou)) {
        /* Insere recursivamente o elemento no nó apropriado */
        if (*quebrou) {
        /* O nó filho foi quebrado, então precisamos inserir a chave
           do filho no lugar de i (retornada em *valor) e verificar
           se o nó atual (pai) deve ser quebrado também */

        InsereNovoValorEFilhoNo(*arvore, *aux, *valor, i);

        if (!VerificaOverflow(*arvore)) {
          (*quebrou) = 0;
          /* Verifica se houve estouro de folha */
        } else {
          /* Arvore arrebentada.*/

          (*valor) = TrataOverflow(arvore, aux);

          (*quebrou) = 1;
        }
      }
      return 1;
    }
    return 0;
  }
 }
}
```

Árvore B: Função da Inserção

```
int ArvBInsereRec(ArvB **arvore, ArvB **aux, int *valor, int *quebrou)
{
  int i=0, j=0;
  if (*arvore==NULL) {
      (*quebrou) = 1;
      (*aux) = NULL;
      return 1;
  } else {
    if(BuscaChaveNo(*arvore, *valor, &i)) {
      /* Elemento encontrado na arvore, ignora inserção */
      (*quebrou) = 0;
      return 0;
    } else {
      if (ArvBInsereRec(&((*arvore)->filhos[i]),aux,valor,quebrou)) {
        /* Insere recursivamente o elemento no nó apropriado */
        if (*quebrou) {
          /* O nó filho foi quebrado, então precisamos inserir a chave
             do filho no lugar de i (retornada em *valor) e verificar
             se o nó atual (pai) deve ser quebrado também */
          InsereNovoValorEFilhoNo(*arvore, *aux, *valor, i);

          if (!VerificaOverflow(*arvore)) {
            (*quebrou) = 0;
            /* Verifica se houve estouro de folha */
          } else {
            /* Arvore arrebentada.*/

            (*valor) = TrataOverflow(arvore, aux);

            (*quebrou) = 1;
          }
        }
        return 1;
      }
      return 0;
    }
  }
}
```

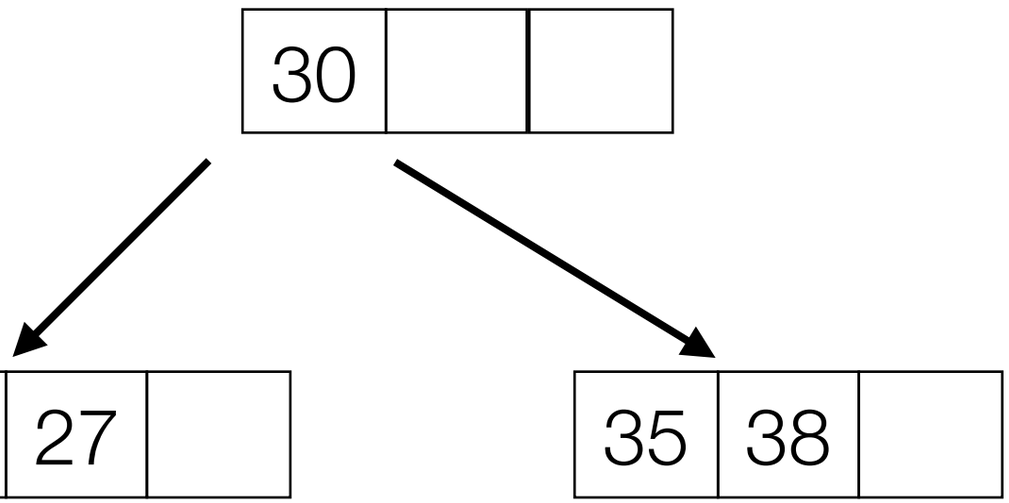
```c
int ArvBInsereRec(ArvB **arvore, ArvB **aux, int *valor, int *quebrou)
{
  int i=0, j=0;
  if (*arvore==NULL) {
      (*quebrou) = 1;
      (*aux) = NULL;
      return 1;
  } else {
    if(BuscaChaveNo(*arvore, *valor, &i)) {
      /* Elemento encontrado na arvore, ignora inserção */
      (*quebrou) = 0;
      return 0;
    } else {
      if (ArvBInsereRec(&((*arvore)->filhos[i]),aux,valor,quebrou)) {
        /* Insere recursivamente o elemento no nó apropriado */
        if (*quebrou) {
          /* O nó filho foi quebrado, então precisamos inserir a chave
             do filho no lugar de i (retornada em *valor) e verificar
             se o nó atual (pai) deve ser quebrado também */

          InsereNovoValorEFilhoNo(*arvore, *aux, *valor, i);

          if (!VerificaOverflow(*arvore)) {
            (*quebrou) = 0;
            /* Verifica se houve estouro de folha */
          } else {
            /* Arvore arrebentada.*/

            (*valor) = TrataOverflow(arvore, aux);

            (*quebrou) = 1;
          }
        }
        return 1;
      }
      return 0;
    }
  }
}
```

- Insira *valor = 25



- Insira *valor = 25

```
int ArvBInsereRec(ArvB **arvore, ArvB **aux, int *valor, int *quebrou)
{
  if (*arvore==NULL) {
      (*quebrou) = 1;
      (*aux) = NULL;
      return 1;
  } else {
      /* Elemento encontrado na arvore, ignora inserção */
      (*quebrou) = 0;
      return 0;
    } else {
      if (ArvBInsereRec(&((*arvore)->filhos[i]),aux,valor,quebrou)) {
        /* Insere recursivamente o elemento no nó apropriado */
        if (*quebrou) {
          /* O nó filho foi quebrado, então precisamos inserir a chave
             do filho no lugar de i (retornada em *valor) e verificar
             se o nó atual (pai) deve ser quebrado também */

          InsereNovoValorEFilhoNo(*arvore, *aux, *valor, i);

          if (!VerificaOverflow(*arvore)) {
            (*quebrou) = 0;
            /* Verifica se houve estouro de folha */
          } else {
            /* Arvore arrebentada.*/

            (*valor) = TrataOverflow(arvore, aux);

            (*quebrou) = 1;
          }
        }
        return 1;
      }
      return 0;
    }
  }
}
```

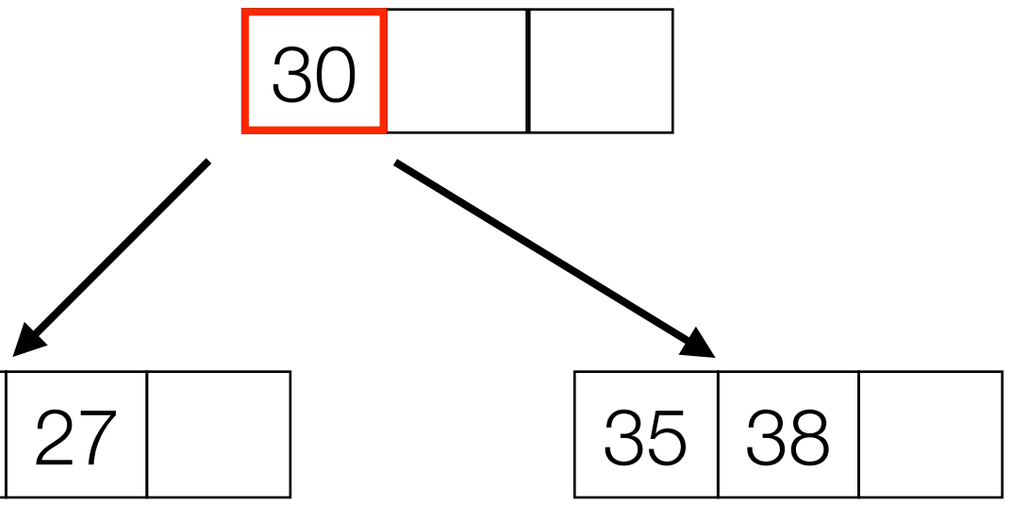


- Insira *valor = 25

```
int ArvBInsereRec(ArvB **arvore, ArvB **aux, int *valor, int *quebrou)
{
  int i=0, j=0;
  if (*arvore==NULL) {
      (*quebrou) = 1;
      (*aux) = NULL;
      return 1;
```

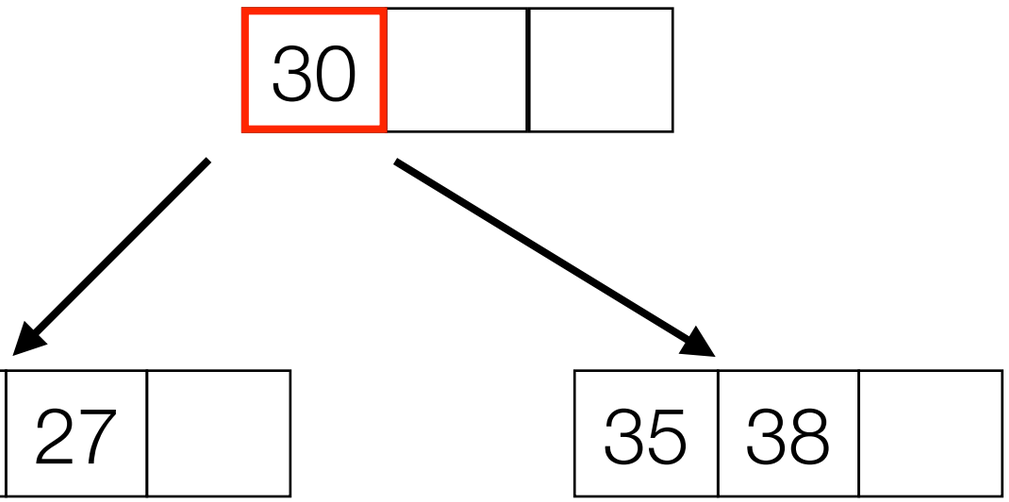
```
    if(BuscaChaveNo(*arvore, *valor, &i)) {
```

```
      (*quebrou) = 0;
      return 0;
    } else {
      if (ArvBInsereRec(&((*arvore)->filhos[i]),aux,valor,quebrou)) {
        /* Insere recursivamente o elemento no nó apropriado */
        if (*quebrou) {
          /* O nó filho foi quebrado, então precisamos inserir a chave
             do filho no lugar de i (retornada em *valor) e verificar
             se o nó atual (pai) deve ser quebrado também */

          InsereNovoValorEFilhoNo(*arvore, *aux, *valor, i);

          if (!VerificaOverflow(*arvore)) {
            (*quebrou) = 0;
            /* Verifica se houve estouro de folha */
          } else {
            /* Arvore arrebentada.*/

            (*valor) = TrataOverflow(arvore, aux);

            (*quebrou) = 1;
          }
        }
        return 1;
      }
      return 0;
    }
  }
}
```



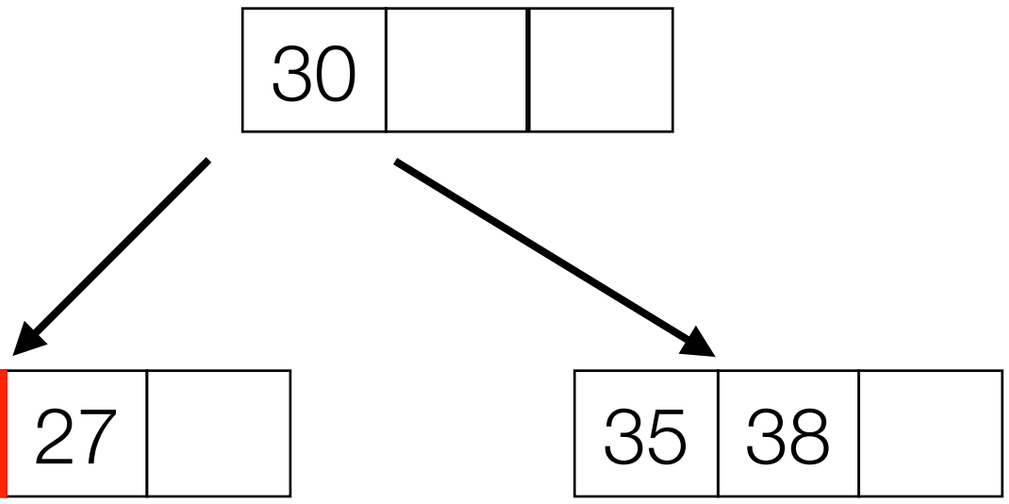
```c
int ArvBInsereRec(ArvB **arvore, ArvB **aux, int *valor, int *quebrou)
{
  int i=0, j=0;
  if (*arvore==NULL) {
      (*quebrou) = 1;
      (*aux) = NULL;
      return 1;
  } else {
    if(BuscaChaveNo(*arvore, *valor, &i)) {
      /* Elemento encontrado na arvore, ignora inserção */
      (*quebrou) = 0;
      return 0;
    if (ArvBInsereRec(&((*arvore)->filhos[i]),aux,valor,quebrou)) {
      /* Insere recursivamente o elemento no nó apropriado */
        /* O nó filho foi quebrado, então precisamos inserir a chave
           do filho no lugar de i (retornada em *valor) e verificar
           se o nó atual (pai) deve ser quebrado também */

        InsereNovoValorEFilhoNo(*arvore, *aux, *valor, i);

        if (!VerificaOverflow(*arvore)) {
          (*quebrou) = 0;
          /* Verifica se houve estouro de folha */
        } else {
          /* Arvore arrebentada.*/

          (*valor) = TrataOverflow(arvore, aux);

          (*quebrou) = 1;
        }
      }
      return 1;
    }
    return 0;
  }
}
```

- Insira *valor = 25



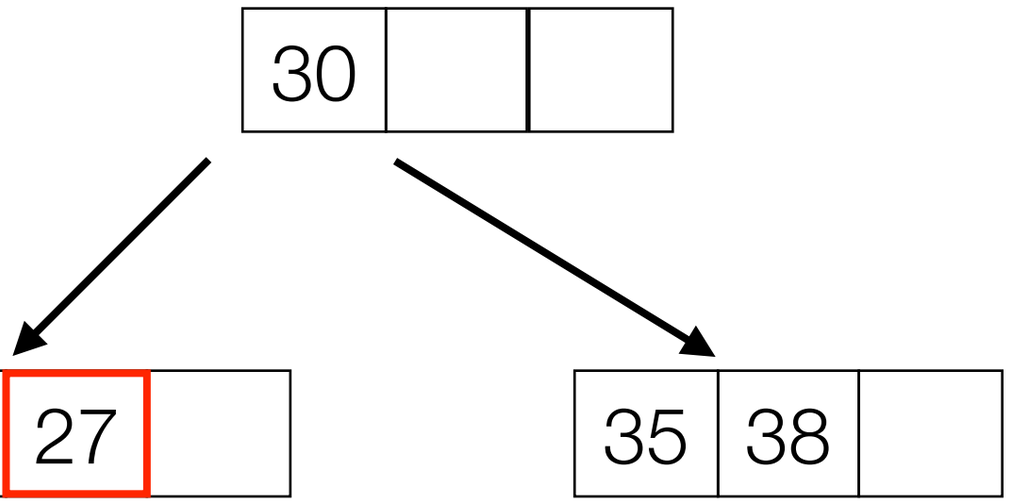
- Insira *valor = 25

```
int ArvBInsereRec(ArvB **arvore, ArvB **aux, int *valor, int *quebrou)
{
  int i=0, j=0;
  if (*arvore==NULL) {
      (*quebrou) = 1;
      (*aux) = NULL;
      return 1;
  if(BuscaChaveNo(*arvore, *valor, &i)) {
      (*quebrou) = 0;
      return 0;
    } else {
      if (ArvBInsereRec(&((*arvore)->filhos[i]),aux,valor,quebrou)) {
        /* Insere recursivamente o elemento no nó apropriado */
        if (*quebrou) {
          /* O nó filho foi quebrado, então precisamos inserir a chave
             do filho no lugar de i (retornada em *valor) e verificar
             se o nó atual (pai) deve ser quebrado também */

          InsereNovoValorEFilhoNo(*arvore, *aux, *valor, i);

          if (!VerificaOverflow(*arvore)) {
            (*quebrou) = 0;
            /* Verifica se houve estouro de folha */
          } else {
            /* Arvore arrebentada.*/

            (*valor) = TrataOverflow(arvore, aux);

            (*quebrou) = 1;
          }
        }
        return 1;
      }
      return 0;
    }
  }
}
```



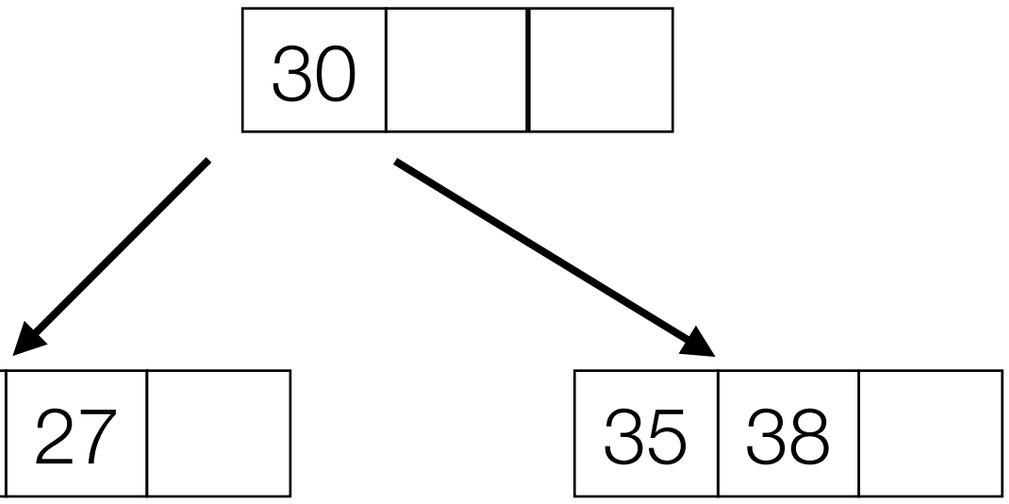
- Insira *valor = 25

```
int ArvBInsereRec(ArvB **arvore, ArvB **aux, int *valor, int *quebrou)
{
  int i=0, j=0;
  if (*arvore==NULL) {
      (*quebrou) = 1;
      (*aux) = NULL;
      return 1;
  if(BuscaChaveNo(*arvore, *valor, &i)) {
      (*quebrou) = 0;
      return 0;
    } else {
      if (ArvBInsereRec(&((*arvore)->filhos[i]),aux,valor,quebrou)) {
        /* Insere recursivamente o elemento no nó apropriado */
        if (*quebrou) {
          /* O nó filho foi quebrado, então precisamos inserir a chave
             do filho no lugar de i (retornada em *valor) e verificar
             se o nó atual (pai) deve ser quebrado também */

          InsereNovoValorEFilhoNo(*arvore, *aux, *valor, i);

          if (!VerificaOverflow(*arvore)) {
            (*quebrou) = 0;
            /* Verifica se houve estouro de folha */
          } else {
            /* Arvore arrebentada.*/

            (*valor) = TrataOverflow(arvore, aux);

            (*quebrou) = 1;
          }
        }
        return 1;
      }
      return 0;
    }
  }
}
```



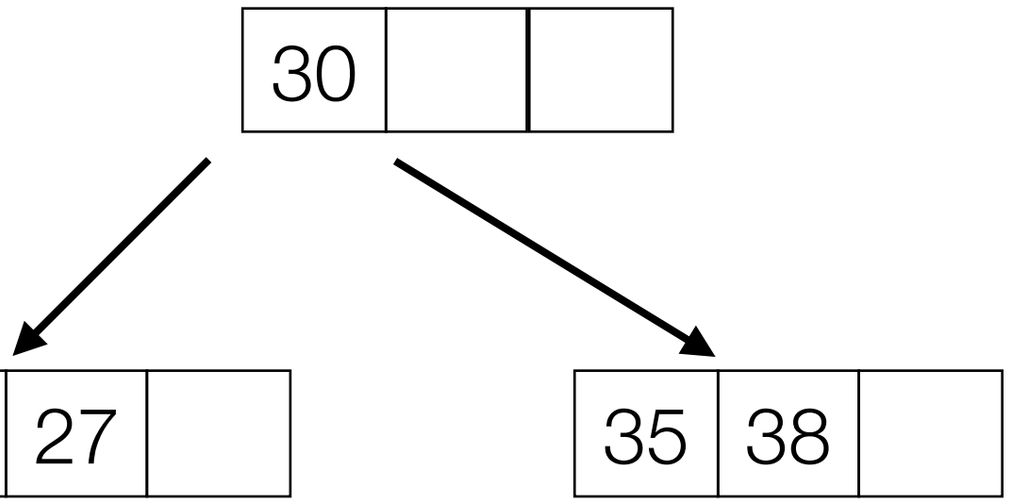
```c
int ArvBInsereRec(ArvB **arvore, ArvB **aux, int *valor, int *quebrou)
{
  int i=0, j=0;
  if (*arvore==NULL) {
      (*quebrou) = 1;
      (*aux) = NULL;
      return 1;
  } else {
    if(BuscaChaveNo(*arvore, *valor, &i)) {
      /* Elemento encontrado na arvore, ignora inserção */
      (*quebrou) = 0;
      return 0;
    if (ArvBInsereRec(&((*arvore)->filhos[i]),aux,valor,quebrou)) {
      /* Insere recursivamente o elemento no nó apropriado */
        /* O nó filho foi quebrado, então precisamos inserir a chave
           do filho no lugar de i (retornada em *valor) e verificar
           se o nó atual (pai) deve ser quebrado também */

        InsereNovoValorEFilhoNo(*arvore, *aux, *valor, i);

        if (!VerificaOverflow(*arvore)) {
          (*quebrou) = 0;
          /* Verifica se houve estouro de folha */
        } else {
          /* Arvore arrebentada.*/

          (*valor) = TrataOverflow(arvore, aux);

          (*quebrou) = 1;
        }
      }
      return 1;
    }
    return 0;
  }
}
```

- Insira *valor = 25



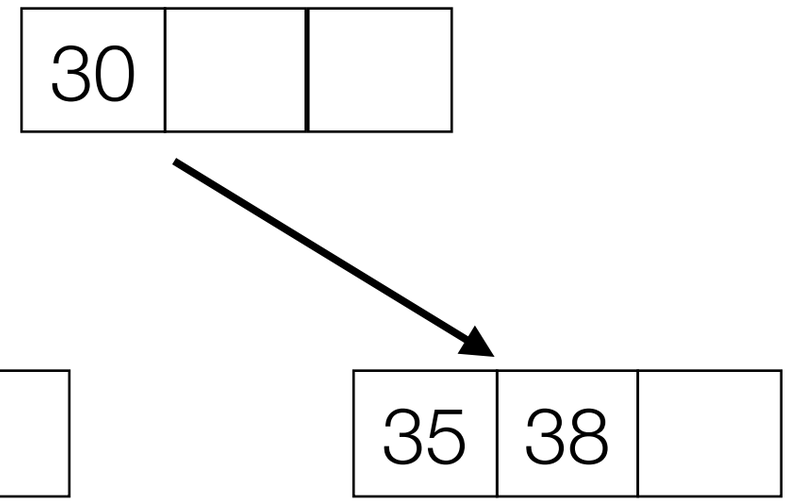
- Insira *valor = 25

```
int ArvBInsereRec(ArvB **arvore, ArvB **aux, int *valor, int *quebrou)
{
  if (*arvore==NULL) {
      (*quebrou) = 1;
      (*aux) = NULL;
      return 1;
  } else {
      /* Elemento encontrado na arvore, ignora inserção */
      (*quebrou) = 0;
      return 0;
    } else {
      if (ArvBInsereRec(&((*arvore)->filhos[i]),aux,valor,quebrou)) {
        /* Insere recursivamente o elemento no nó apropriado */
        if (*quebrou) {
          /* O nó filho foi quebrado, então precisamos inserir a chave
             do filho no lugar de i (retornada em *valor) e verificar
             se o nó atual (pai) deve ser quebrado também */

          InsereNovoValorEFilhoNo(*arvore, *aux, *valor, i);

          if (!VerificaOverflow(*arvore)) {
            (*quebrou) = 0;
            /* Verifica se houve estouro de folha */
          } else {
            /* Arvore arrebentada.*/

            (*valor) = TrataOverflow(arvore, aux);

            (*quebrou) = 1;
          }
        }
        return 1;
      }
      return 0;
    }
  }
}
```



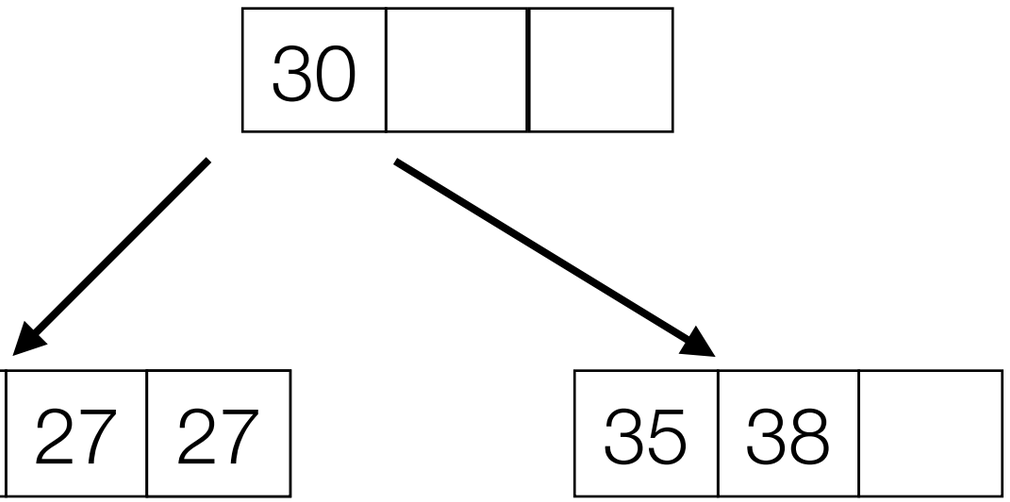
- Insira *valor = 25

```c
int ArvBInsereRec(ArvB **arvore, ArvB **aux, int *valor, int *quebrou)
{
  int i=0, j=0;
  if (*arvore==NULL) {
      (*quebrou) = 1;
      (*aux) = NULL;
      return 1;
  } else {
    if(BuscaChaveNo(*arvore, *valor, &i)) {
      /* Elemento encontrado na arvore, ignora inserção */
      (*quebrou) = 0;
      return 0;
    } else {
      if (ArvBInsereRec(&((*arvore)->filhos[i]),aux,valor,quebrou)) {
        /* Insere recursivamente o elemento no nó apropriado */
        if (*quebrou) {
          /* O nó filho foi quebrado, então precisamos inserir a chave
             do filho no lugar de i (retornada em *valor) e verificar
             se o nó atual (pai) deve ser quebrado também */

          InsereNovoValorEFilhoNo(*arvore, *aux, *valor, i);

          (*quebrou) = 0;
          /* Verifica se houve estouro de folha */
        } else {
          /* Arvore arrebentada.*/

          (*valor) = TrataOverflow(arvore, aux);

          (*quebrou) = 1;
        }
      }
      return 1;
    }
    return 0;
  }
}
```



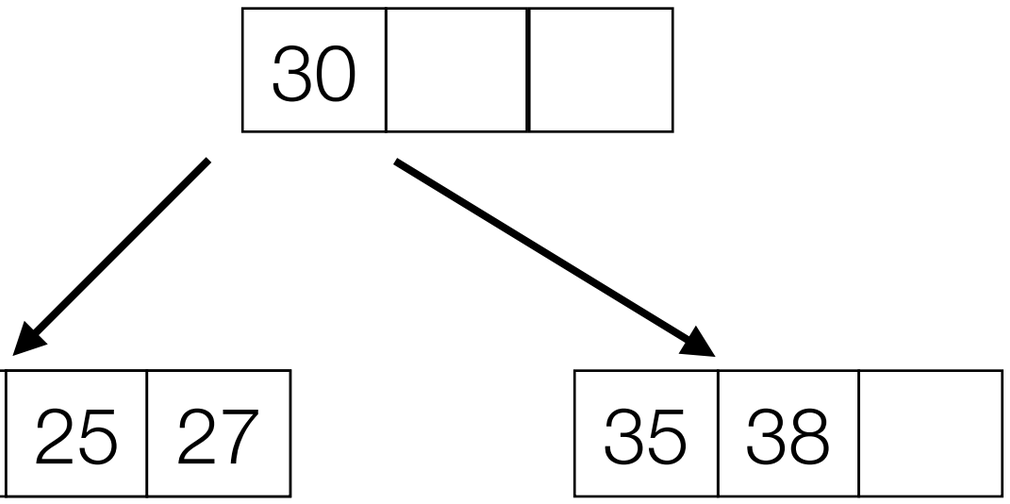
- Insira *valor = 25

```
int ArvBInsereRec(ArvB **arvore, ArvB **aux, int *valor, int *quebrou)
{
  int i=0, j=0;
  if (*arvore==NULL) {
      (*quebrou) = 1;
      (*aux) = NULL;
      return 1;
  } else {
    if(BuscaChaveNo(*arvore, *valor, &i)) {
      /* Elemento encontrado na arvore, ignora inserção */
      (*quebrou) = 0;
      return 0;
    } else {
      if (ArvBInsereRec(&((*arvore)->filhos[i]),aux,valor,quebrou)) {
        /* Insere recursivamente o elemento no nó apropriado */
        if (*quebrou) {
          /* O nó filho foi quebrado, então precisamos inserir a chave
             do filho no lugar de i (retornada em *valor) e verificar
             se o nó atual (pai) deve ser quebrado também */

          InsereNovoValorEFilhoNo(*arvore, *aux, *valor, i);

          (*quebrou) = 0;
          /* Verifica se houve estouro de folha */
        } else {
          /* Arvore arrebentada.*/

          (*valor) = TrataOverflow(arvore, aux);

          (*quebrou) = 1;
        }
      }
      return 1;
    }
    return 0;
  }
}
```



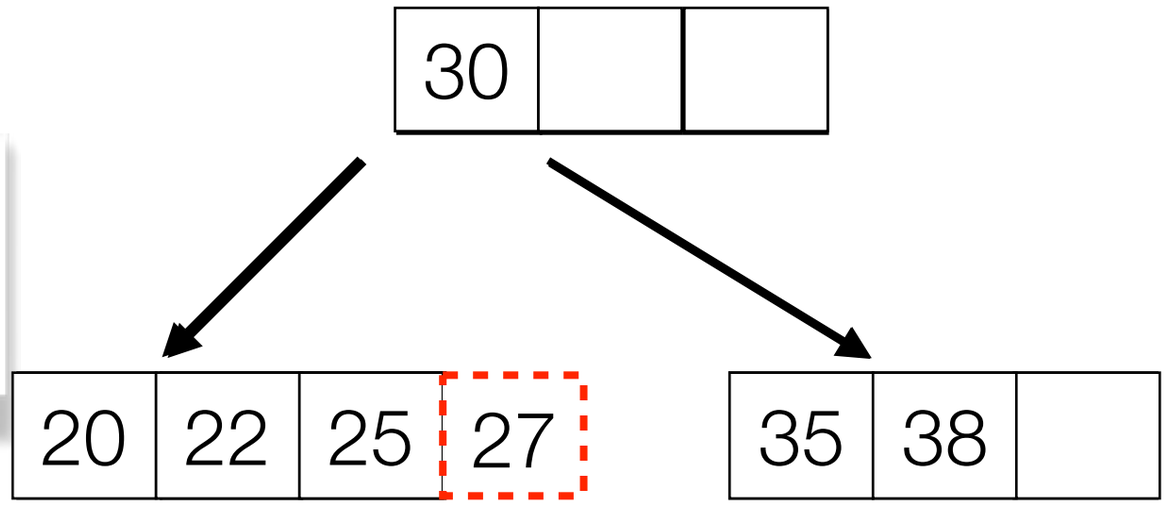
- Insira *valor = 25

```c
int ArvBInsereRec(ArvB **arvore, ArvB **aux, int *valor, int *quebrou)
{
  int i=0, j=0;
  if (*arvore==NULL) {
      (*quebrou) = 1;
      (*aux) = NULL;
      return 1;
  } else {
    if(BuscaChaveNo(*arvore, *valor, &i)) {
      /* Elemento encontrado na arvore, ignora inserção */
      (*quebrou) = 0;
      return 0;
    } else {
      if (ArvBInsereRec(&((*arvore)->filhos[i]),aux,valor,quebrou)) {
        /* Insere recursivamente o elemento no nó apropriado */
        if (*quebrou) {
          /* O nó filho foi quebrado, então precisamos inserir a chave
             do filho no lugar de i (retornada em *valor) e verificar
             se o nó atual (pai) deve ser quebrado também */

          InsereNovoValorEFilhoNo(*arvore, *aux, *valor, i);

          (*quebrou) = 0;
          /* Verifica se houve estouro de folha */
        } else {
          /* Arvore arrebentada.*/

          (*valor) = TrataOverflow(arvore, aux);

          (*quebrou) = 1;
        }
      }
      return 1;
    }
    return 0;
  }
}
```



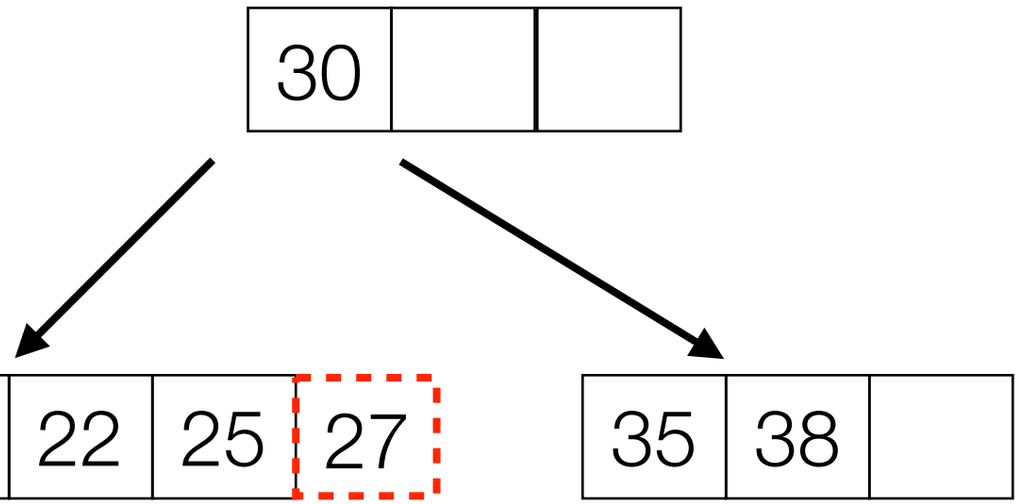
- Insira *valor = 25

```
int ArvBInsereRec(ArvB **arvore, ArvB **aux, int *valor, int *quebrou)
{
  int i=0, j=0;
  if (*arvore==NULL) {
      (*quebrou) = 1;
      (*aux) = NULL;
      return 1;
  } else {
    if(BuscaChaveNo(*arvore, *valor, &i)) {
      /* Elemento encontrado na arvore, ignora inserção */
      (*quebrou) = 0;
      return 0;
    } else {
      if (ArvBInsereRec(&((*arvore)->filhos[i]),aux,valor,quebrou)) {
        /* Insere recursivamente o elemento no nó apropriado */
        if (*quebrou) {
          /* O nó filho foi quebrado, então precisamos inserir a chave
             do filho no lugar de i (retornada em *valor) e verificar
             se o nó atual (pai) deve ser quebrado também */

          InsereNovoValorEFilhoNo(*arvore, *aux, *valor, i);

          (*quebrou) = 0;
          /* Verifica se houve estouro de folha */
        } else {
          /* Arvore arrebentada.*/

          (*valor) = TrataOverflow(arvore, aux);

          (*quebrou) = 1;
        }
      }
      return 1;
    }
    return 0;
  }
}
```



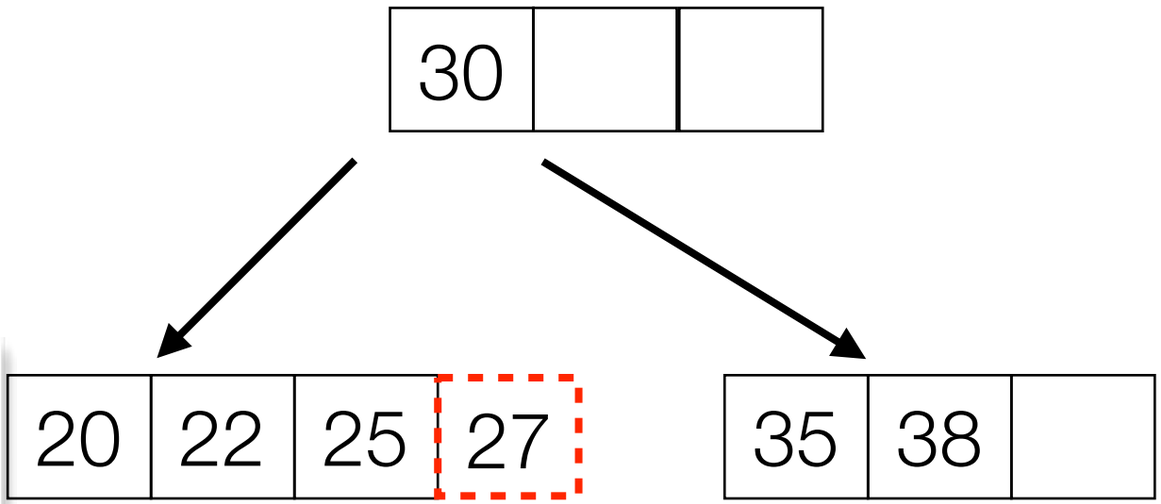
```c
int ArvBInsereRec(ArvB **arvore, ArvB **aux, int *valor, int *quebrou)
{
  int i=0, j=0;
  if (*arvore==NULL) {
      (*quebrou) = 1;
      (*aux) = NULL;
      return 1;
  } else {
    if(BuscaChaveNo(*arvore, *valor, &i)) {
      /* Elemento encontrado na arvore, ignora inserção */
      (*quebrou) = 0;
      return 0;
    } else {
      if (ArvBInsereRec(&((*arvore)->filhos[i]),aux,valor,quebrou)) {
        /* Insere recursivamente o elemento no nó apropriado */
        if (*quebrou) {
          /* O nó filho foi quebrado, então precisamos inserir a chave
             do filho no lugar de i (retornada em *valor) e verificar
             se o nó atual (pai) deve ser quebrado também */

          InsereNovoValorEFilhoNo(*arvore, *aux, *valor, i);

          if (!VerificaOverflow(*arvore)) {
            (*quebrou) = 0;
            /* Verifica se houve estouro de folha */
          } else {
            /* Arvore arrebentada.*/

            (*valor) = TrataOverflow(arvore, aux);

            (*quebrou) = 1;
          }
        }
        return 1;
      }
      return 0;
    }
  }
}
```

- Insira *valor = 22



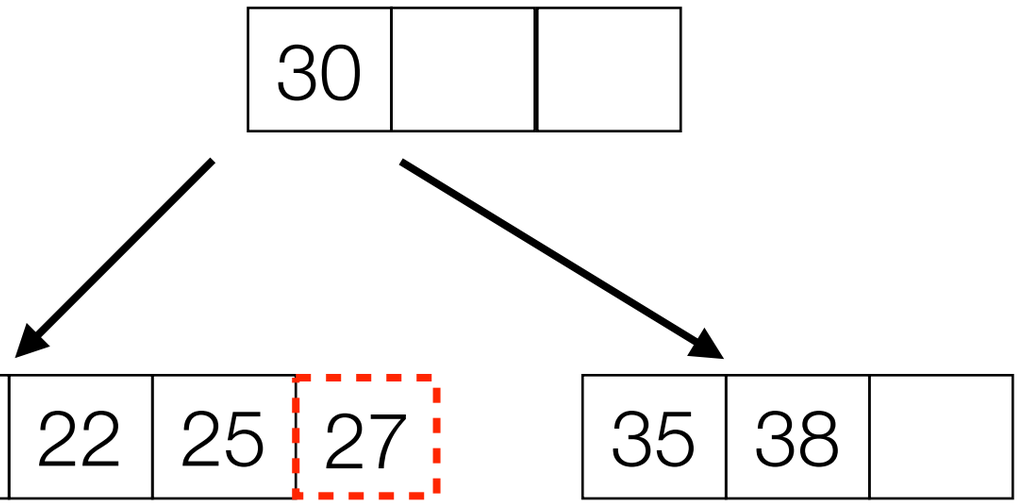
- Insira *valor = 22

```c
int ArvBInsereRec(ArvB **arvore, ArvB **aux, int *valor, int *quebrou)
{
  int i=0, j=0;
  if (*arvore==NULL) {
      (*quebrou) = 1;
      (*aux) = NULL;
      return 1;
  } else {
    if(BuscaChaveNo(*arvore, *valor, &i)) {
      /* Elemento encontrado na arvore, ignora inserção */
      (*quebrou) = 0;
      return 0;
    } else {
      if (ArvBInsereRec(&((*arvore)->filhos[i]),aux,valor,quebrou)) {
        /* Insere recursivamente o elemento no nó apropriado */
        if (*quebrou) {
          /* O nó filho foi quebrado, então precisamos inserir a chave
             do filho no lugar de i (retornada em *valor) e verificar
             se o nó atual (pai) deve ser quebrado também */

          InsereNovoValorEFilhoNo(*arvore, *aux, *valor, i);
          if (!VerificaOverflow(*arvore)) {
            (*quebrou) = 0;
            /* Verifica se houve estouro de folha */
          }
          /* Arvore arrebentada.*/

          (*valor) = TrataOverflow(arvore, aux);

          (*quebrou) = 1;
        }
      }
      return 1;
    }
    return 0;
  }
}
```



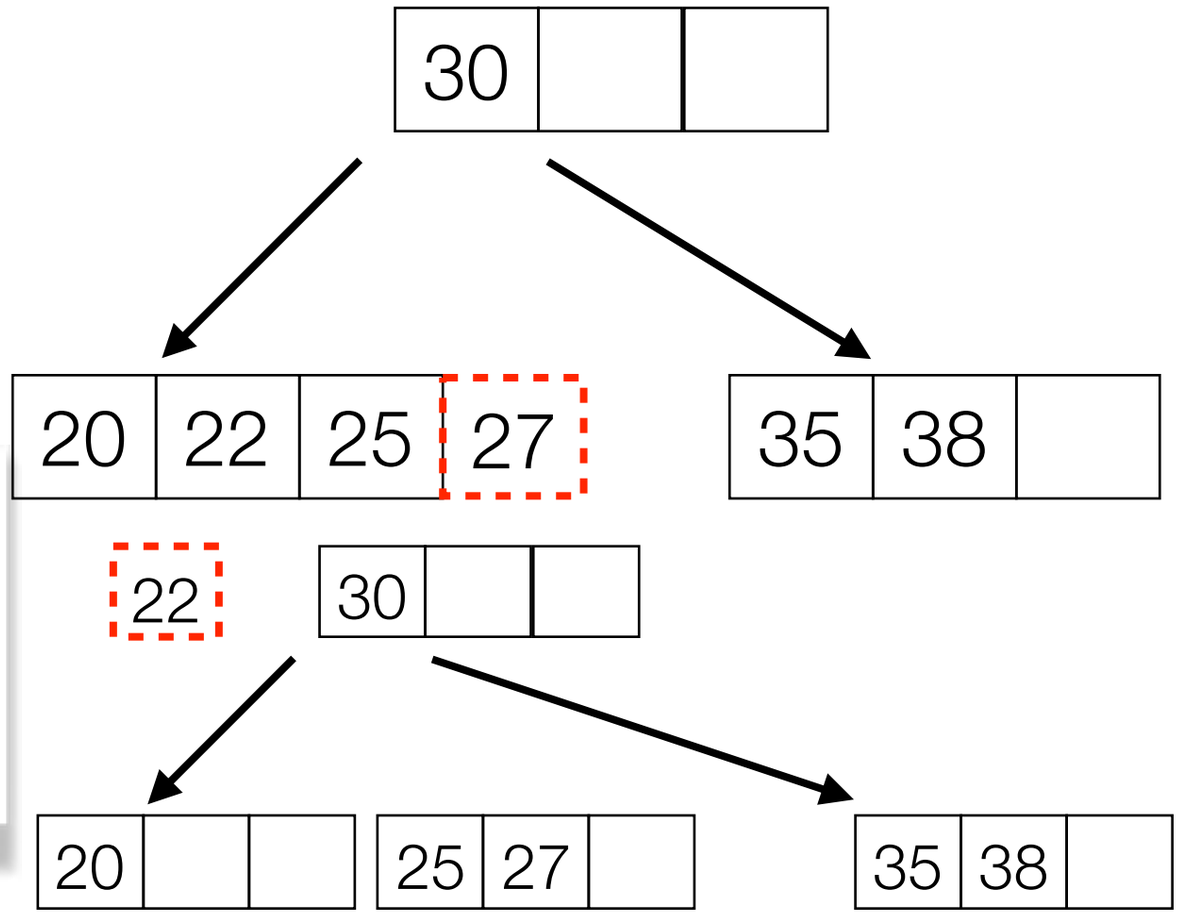
```c
int ArvBInsereRec(ArvB **arvore, ArvB **aux, int *valor, int *quebrou)
{
  int i=0, j=0;
  if (*arvore==NULL) {
      (*quebrou) = 1;
      (*aux) = NULL;
      return 1;
  } else {
    if(BuscaChaveNo(*arvore, *valor, &i)) {
      /* Elemento encontrado na arvore, ignora inserção */
      (*quebrou) = 0;
      return 0;
    } else {
      if (ArvBInsereRec(&((*arvore)->filhos[i]),aux,valor,quebrou)) {
        /* Insere recursivamente o elemento no nó apropriado */
        if (*quebrou) {
          /* O nó filho foi quebrado, então precisamos inserir a chave
             do filho no lugar de i (retornada em *valor) e verificar
             se o nó atual (pai) deve ser quebrado também */

          InsereNovoValorEFilhoNo(*arvore, *aux, *valor, i);

          if (!VerificaOverflow(*arvore)) {
            (*quebrou) = 0;

          } else {
            /* Arvore arrebentada.*/

            (*valor) = TrataOverflow(arvore, aux);

            (*quebrou) = 1;
          }
        }
        return 1;

      return 0;
    }
  }
}
```

- Insira *valor = 22
- Recursão insere 22 no nó pai



```c
int ArvBInsereRec(ArvB **arvore, ArvB **aux, int *valor, int *quebrou)
{
  int i=0, j=0;
  if (*arvore==NULL) {
      (*quebrou) = 1;
      (*aux) = NULL;
      return 1;
  } else {
    if(BuscaChaveNo(*arvore, *valor, &i)) {
      /* Elemento encontrado na arvore, ignora inserção */
      (*quebrou) = 0;
      return 0;
    } else {
      if (ArvBInsereRec(&((*arvore)->filhos[i]),aux,valor,quebrou)) {
        /* Insere recursivamente o elemento no nó apropriado */
        if (*quebrou) {
          /* O nó filho foi quebrado, então precisamos inserir a chave
             do filho no lugar de i (retornada em *valor) e verificar
             se o nó atual (pai) deve ser quebrado também */

          InsereNovoValorEFilhoNo(*arvore, *aux, *valor, i);

          if (!VerificaOverflow(*arvore)) {
            (*quebrou) = 0;

          } else {
            /* Arvore arrebentada.*/

            (*valor) = TrataOverflow(arvore, aux);

            (*quebrou) = 1;
          }
        }
        return 1;

      return 0;
    }
  }
}
```

- Insira *valor = 22
- Recursão insere 22 no nó pai



Árvores B: Remoção de Elementos

- Reduzida a remover elementos da folha
- Para remover registro em nó interno, ele é trocado por seu menor sucessor (na própria folha ou maior predecessor de outro nó)

Árvores B: Remoção de Elementos

- Três casos:

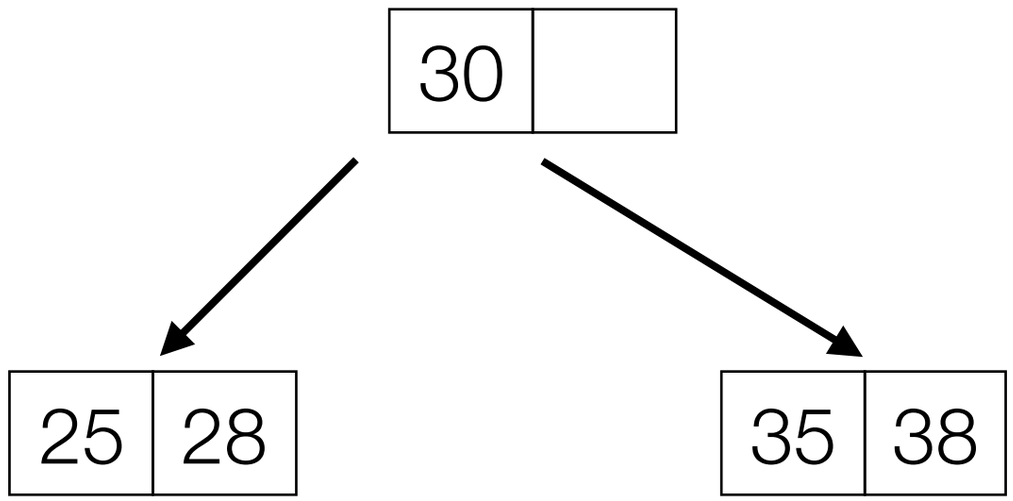
1. Nó folha tem $r > \lfloor b/2 \rfloor$ registros. Neste caso, remova o registro e retorne *falso* (altura da árvore não diminuiu).

2. Nó folha tem $r \leq \lfloor b/2 \rfloor$ registros, mas um dos irmãos do nó (mais velho, à direita, ou mais novo, à esquerda) tem um registro para emprestar. O pai desce e o irmão sobe, retornando *falso*.

3. Nó folha tem $r \leq \lfloor b/2 \rfloor$ registros e não há a possibilidade de empréstimo. Deve ser feita a união do nó folha com seu irmão, inserindo o registro pai no meio deles. A altura pode diminuir neste caso, então retorne *verdadeiro*.

Árvores B: Exemplos de Remoção

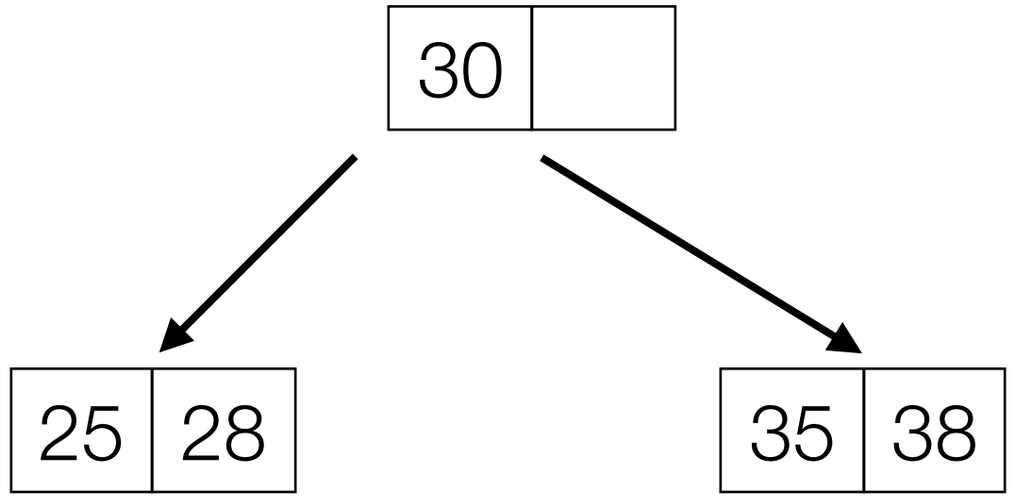
- Árvore inicial



- Remova 28
- Remova 25
- Remova 30

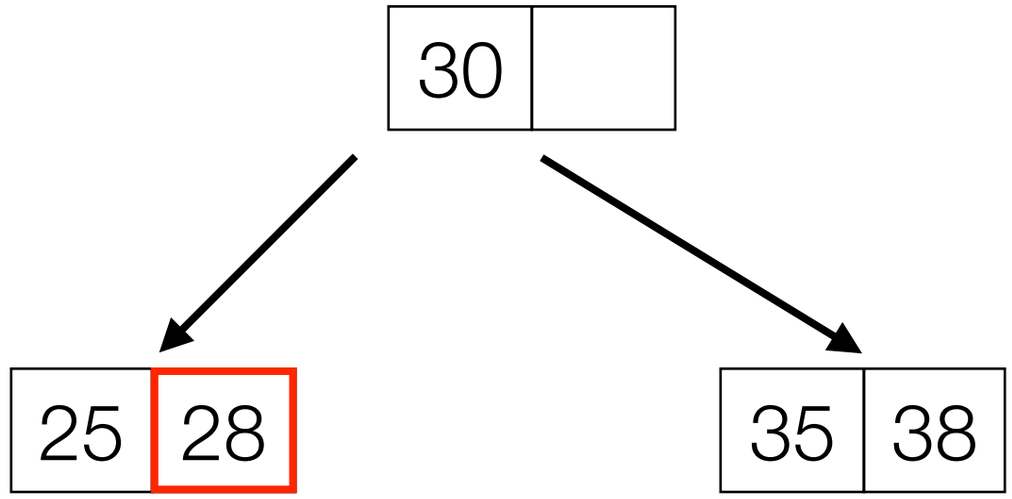
Árvores B: Exemplos de Remoção

- Remova 28:
  - Caso 1: Nó folha tem $r > \lfloor b/2 \rfloor$ registros. Neste caso, remova o registro e retorne *falso* (altura da árvore não diminuiu).



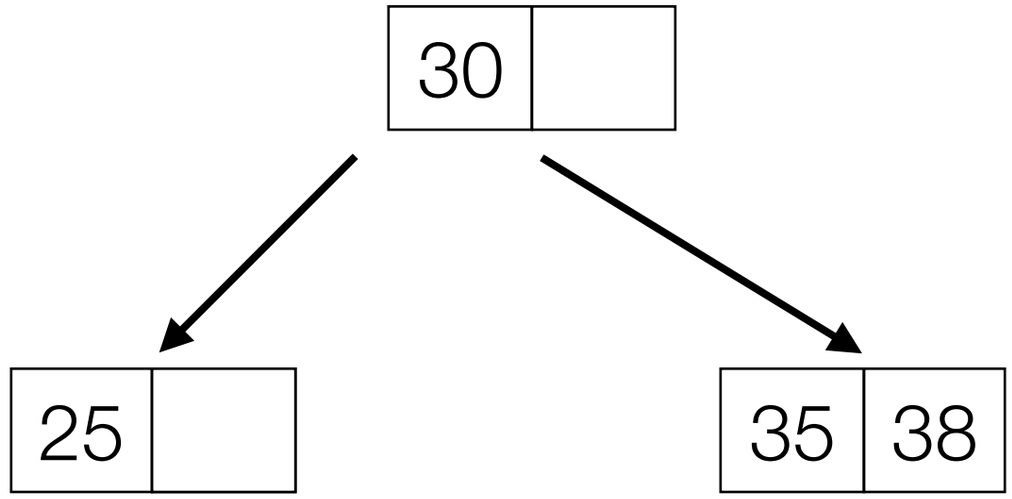
Árvores B: Exemplos de Remoção

- Remova 28:
  - Caso 1: Nó folha tem $r > \lfloor b/2 \rfloor$ registros. Neste caso, remova o registro e retorne *falso* (altura da árvore não diminuiu).



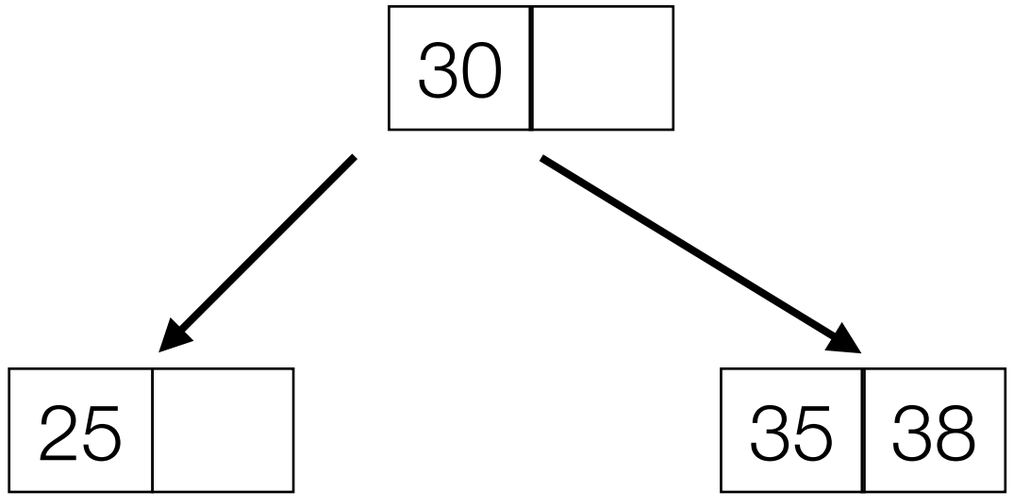
Árvores B: Exemplos de Remoção

- Remova 28:
  - Caso 1: Nó folha tem $r > \lfloor b/2 \rfloor$ registros. Neste caso, remova o registro e retorne *falso* (altura da árvore não diminuiu).



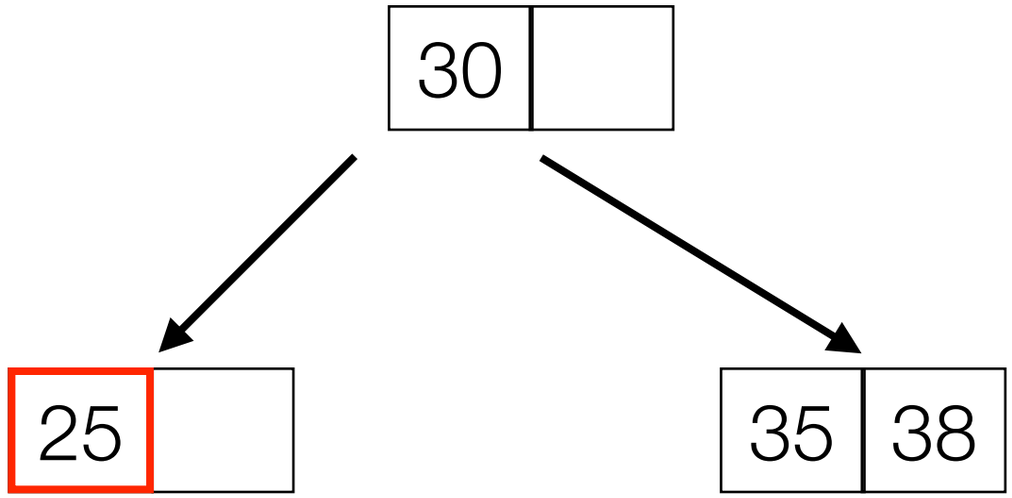
Árvores B: Exemplos de Remoção

- Remova 25:
  - Caso 2: Nó folha tem $r \leq \lfloor b/2 \rfloor$ registros, mas um dos irmãos do nó (mais velho, à direita, ou mais novo, à esquerda) tem um registro para emprestar. O pai desce e o irmão sobe, retornando *falso*.



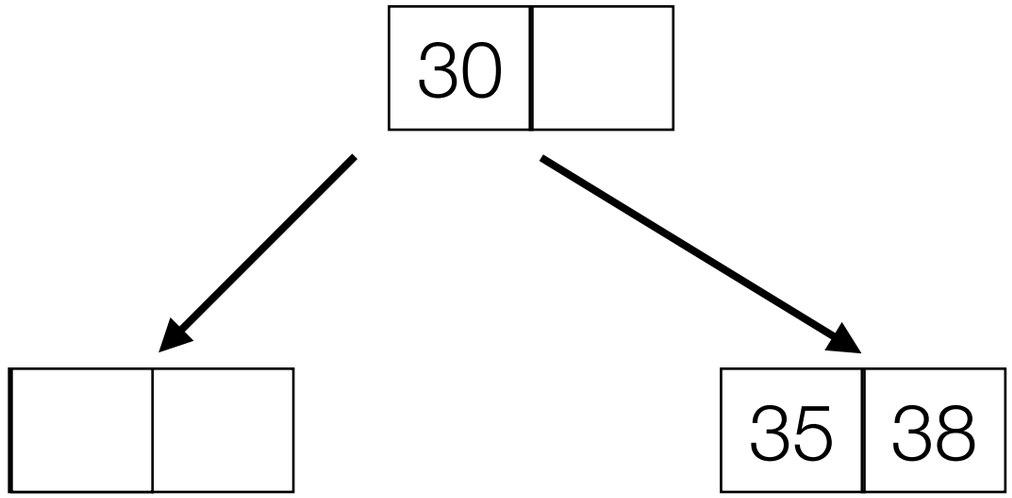
Árvores B: Exemplos de Remoção

- Remova 25:
  - Caso 2: Nó folha tem $r \leq \lfloor b/2 \rfloor$ registros, mas um dos irmãos do nó (mais velho, à direita, ou mais novo, à esquerda) tem um registro para emprestar. O pai desce e o irmão sobe, retornando *falso*.



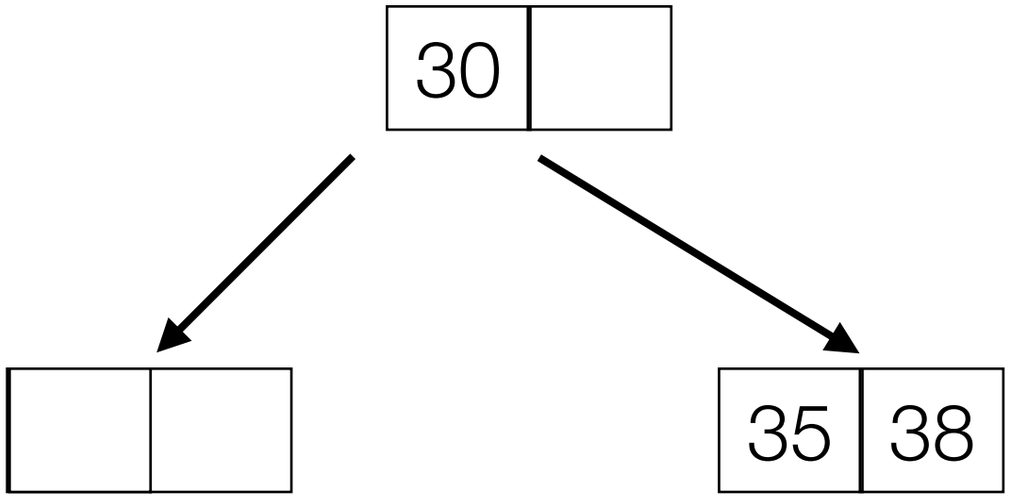
Árvores B: Exemplos de Remoção

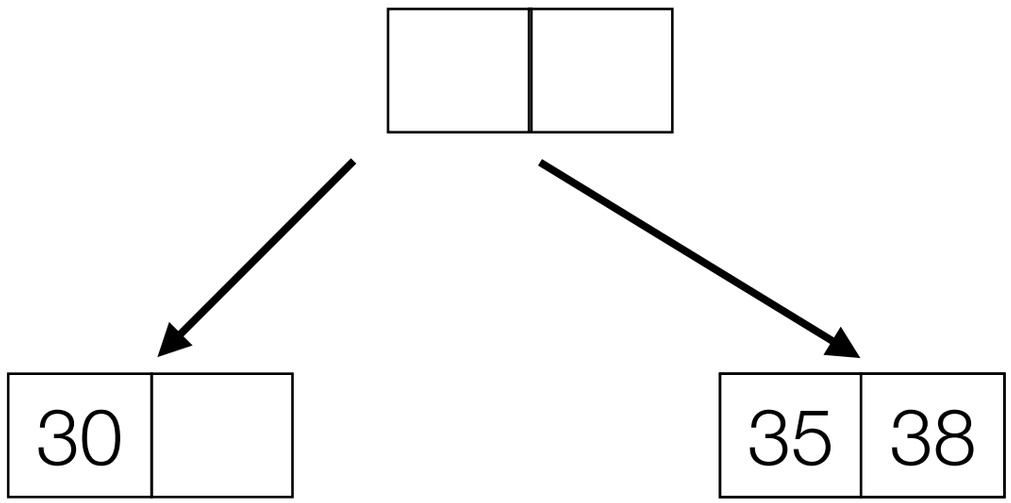
- Remova 25:
  - Caso 2: Nó folha tem $r \leq \lfloor b/2 \rfloor$ registros, mas um dos irmãos do nó (mais velho, à direita, ou mais novo, à esquerda) tem um registro para emprestar. O pai desce e o irmão sobe, retornando *falso*.



Árvores B: Exemplos de Remoção

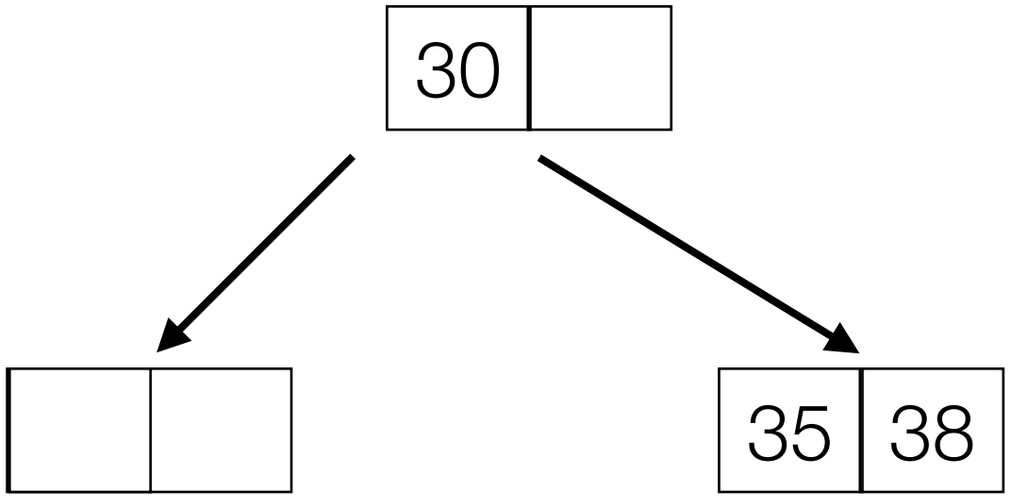
- Remova 25:
  - Caso 2: Nó folha tem $r \leq \lfloor b/2 \rfloor$ registros, mas um dos irmãos do nó (mais velho, à direita, ou mais novo, à esquerda) tem um registro para emprestar. O pai desce e o irmão sobe, retornando *falso*.

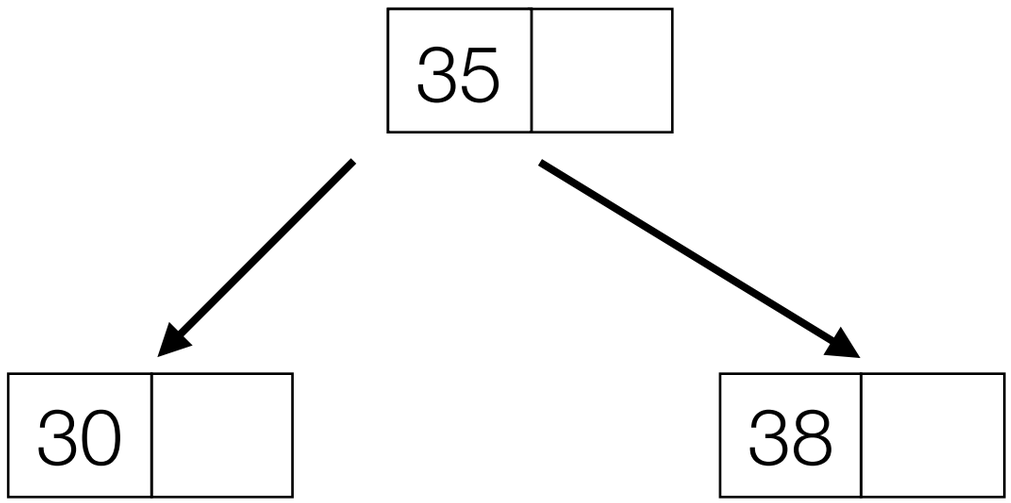




Árvores B: Exemplos de Remoção

- Remova 25:
  - Caso 2: Nó folha tem $r \leq \lfloor b/2 \rfloor$ registros, mas um dos irmãos do nó (mais velho, à direita, ou mais novo, à esquerda) tem um registro para emprestar. O pai desce e o irmão sobe, retornando *falso*.





Árvores B: Exemplos de Remoção

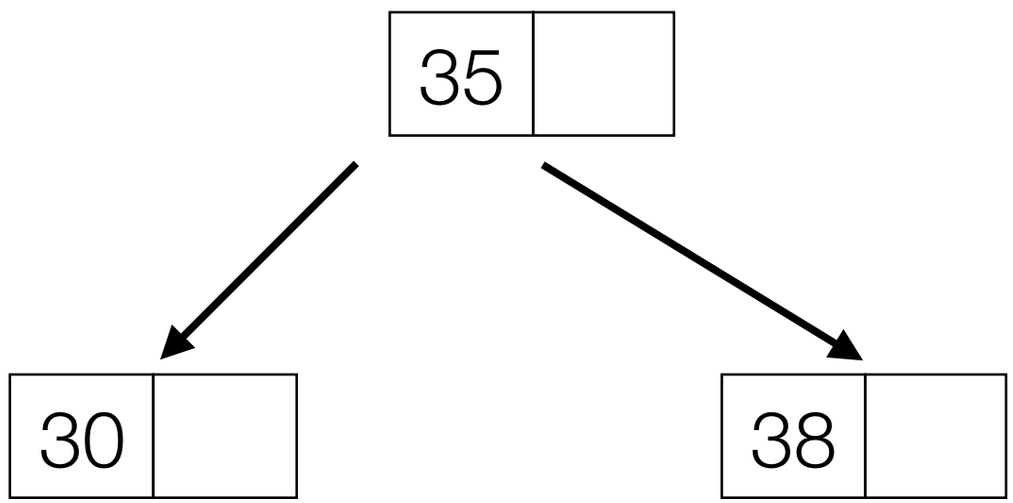
- Remova 30:

  - Caso 3: Nó folha tem $r \leq \lfloor b/2 \rfloor$ registros e não há a possibilidade de empréstimo. Deve ser feita a união do nó folha com seu irmão, inserindo o registro pai no meio deles. A altura pode diminuir neste caso, então retorne *verdadeiro*.

Árvores B: Exemplos de Remoção

- Remova 30:

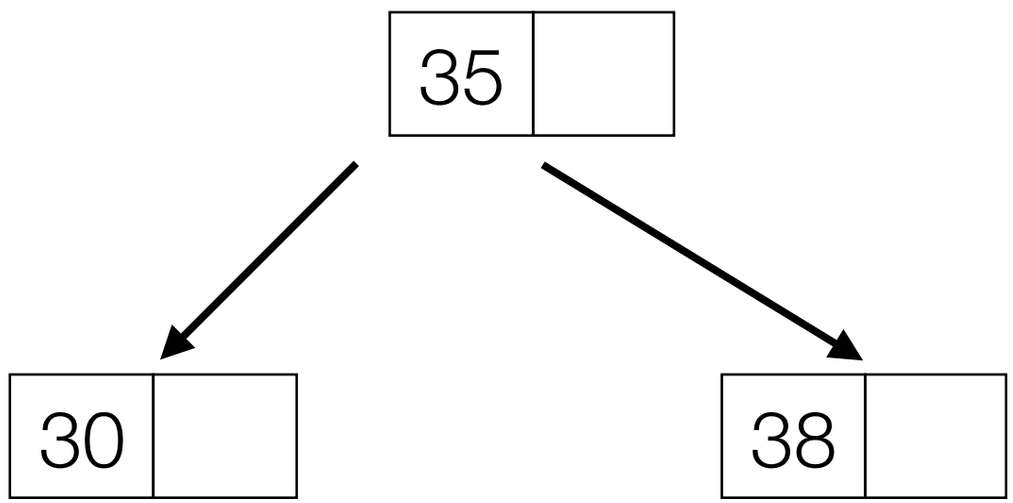
  - Caso 3: Nó folha tem $r \leq \lfloor b/2 \rfloor$ registros e não há a possibilidade de empréstimo. Deve ser feita a união do nó folha com seu irmão, inserindo o registro pai no meio deles. A altura pode diminuir neste caso, então retorne *verdadeiro*.

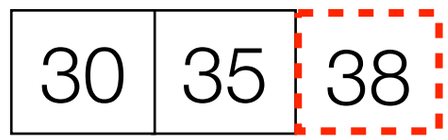


Árvores B: Exemplos de Remoção

- Remova 30:

  - Caso 3: Nó folha tem $r \leq \lfloor b/2 \rfloor$ registros e não há a possibilidade de empréstimo. Deve ser feita a união do nó folha com seu irmão, inserindo o registro pai no meio deles. A altura pode diminuir neste caso, então retorne *verdadeiro*.

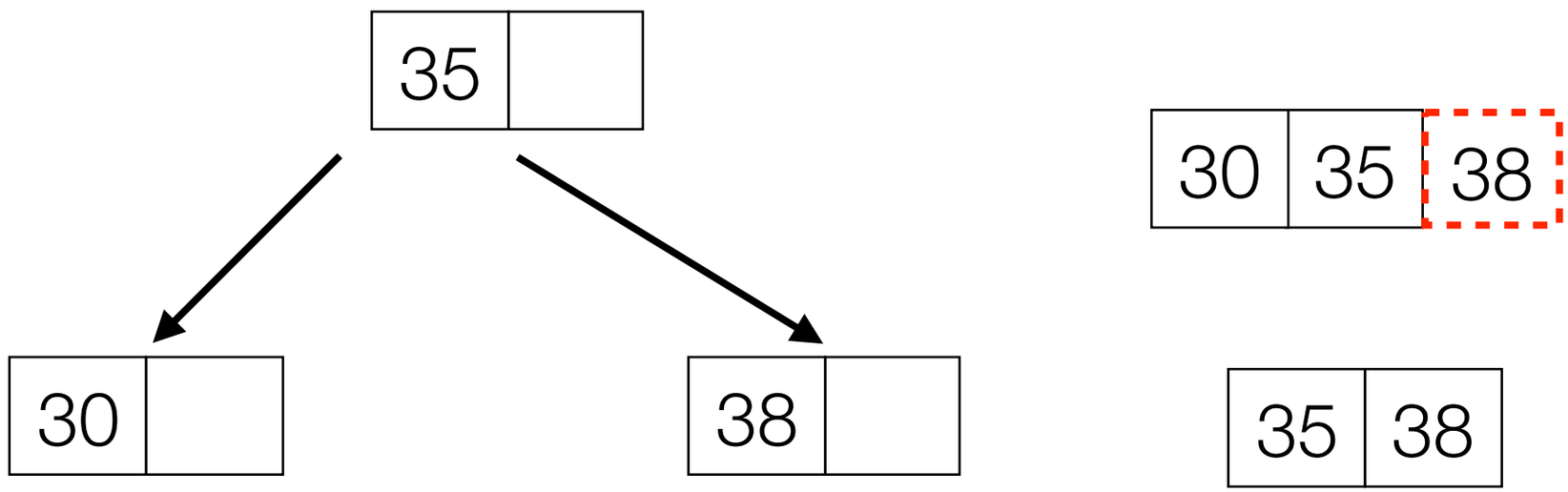




Árvores B: Exemplos de Remoção

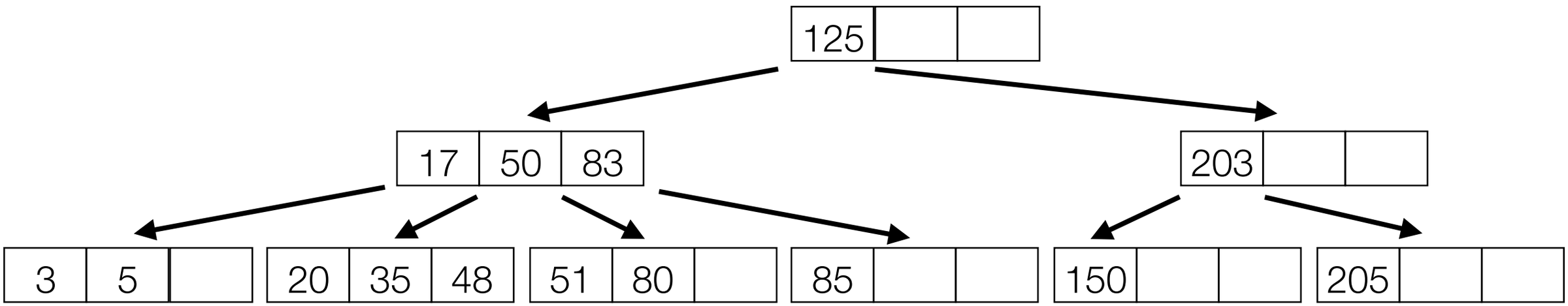
- Remova 30:

  - Caso 3: Nó folha tem $r \leq \lfloor b/2 \rfloor$ registros e não há a possibilidade de empréstimo. Deve ser feita a união do nó folha com seu irmão, inserindo o registro pai no meio deles. A altura pode diminuir neste caso, então retorne *verdadeiro*.



Árvores B: Exemplos de Remoção 2

- Árvore inicial

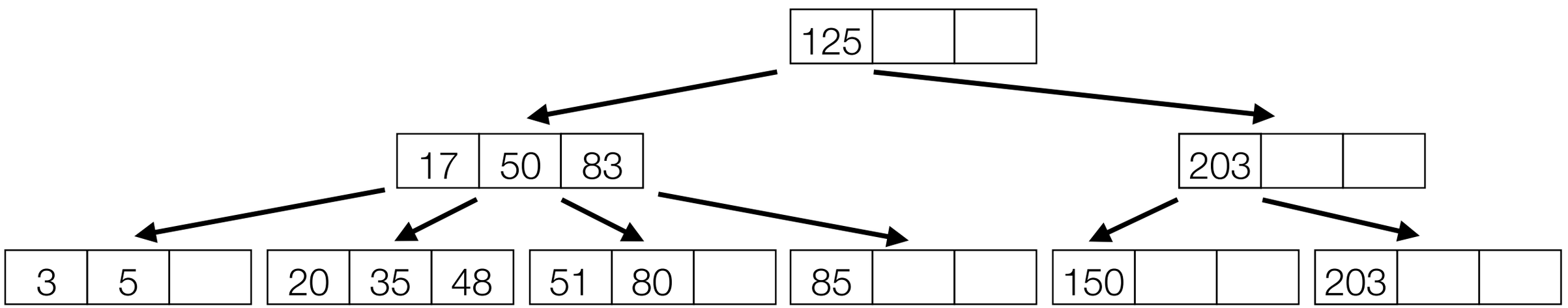


- Remova 50

- Remova 150

Árvores B: Exemplos de Remoção 2

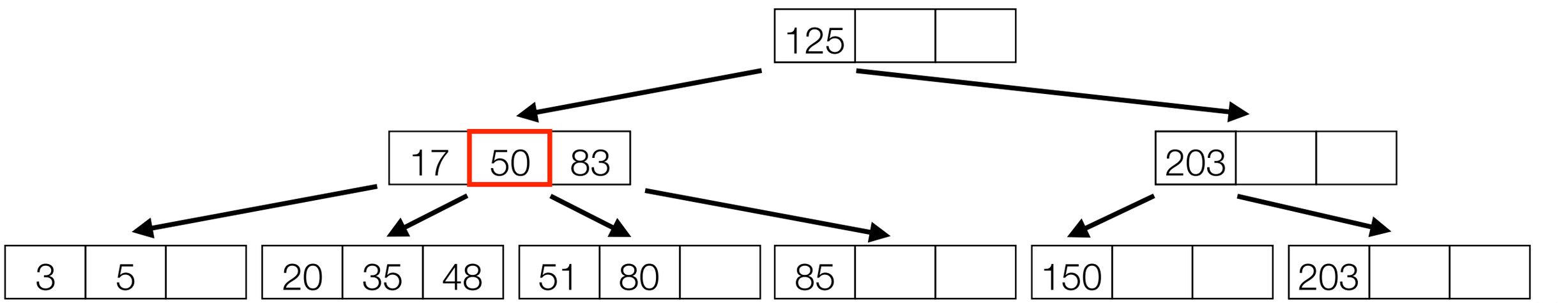
- Remova 50



Árvores B: Exemplos de Remoção 2

- Remova 50

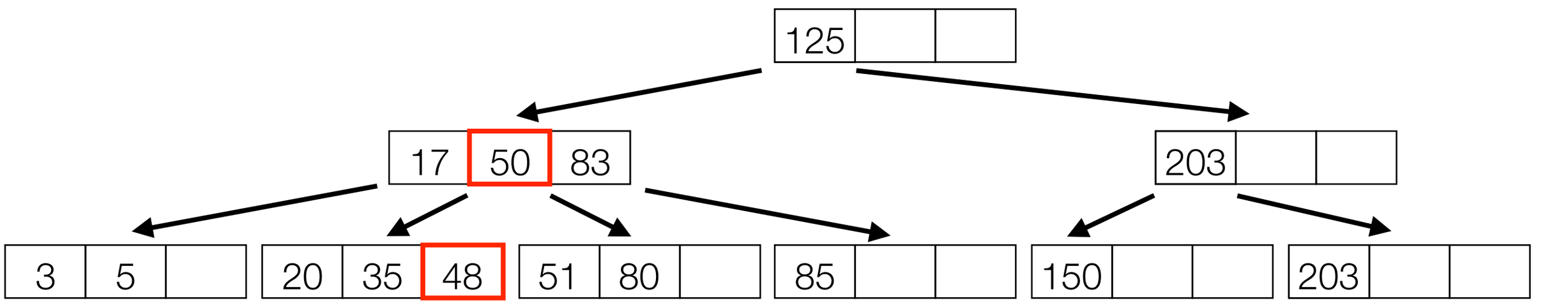
    1. Como a chave 50 está em um nó interno, devemos buscar seu maior antecessor em um nó folha e trocar ambos de lugar



Árvores B: Exemplos de Remoção 2

- Remova 50

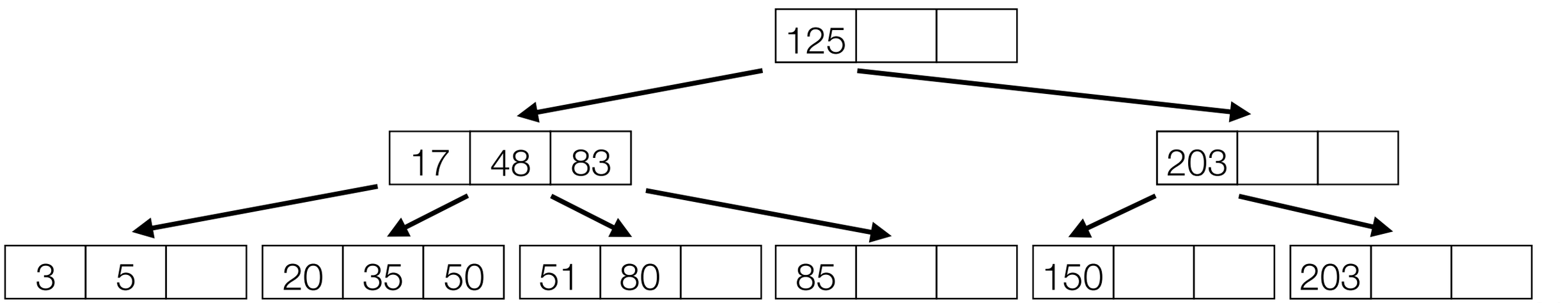
    1. Como a chave 50 está em um nó interno, devemos buscar seu maior antecessor em um nó folha e trocar ambos de lugar



Árvores B: Exemplos de Remoção 2

- Remova 50

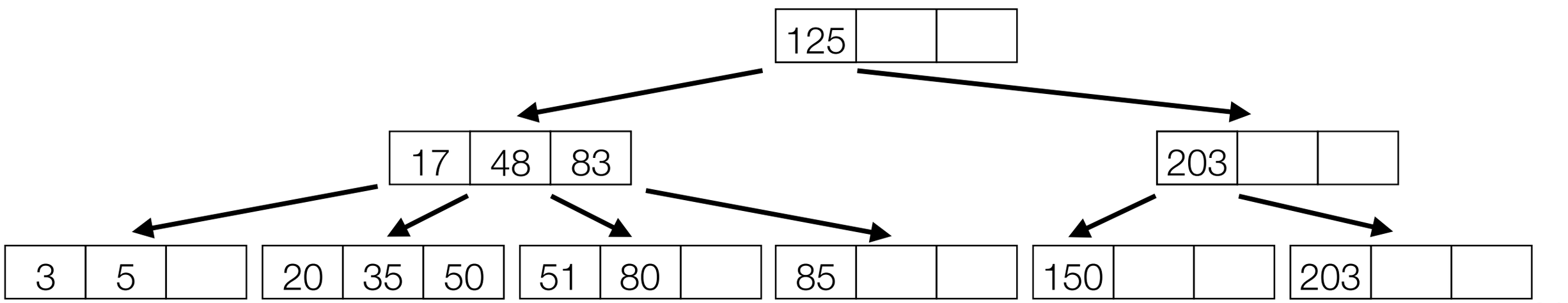
    1. Como a chave 50 está em um nó interno, devemos buscar seu maior antecessor em um nó folha e trocar ambos de lugar



Árvores B: Exemplos de Remoção 2

- Remova 50

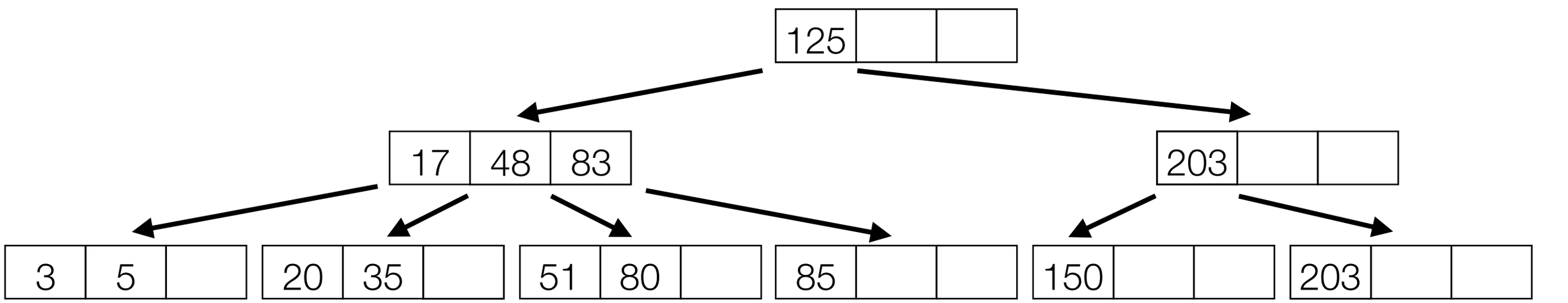
    1. Como a chave 50 está em um nó interno, devemos buscar seu maior antecessor em um nó folha e trocar ambos de lugar
    2. Em seguida chamamos a função recursivamente para remover 50 no nó folha correspondente, como anteriormente



Árvores B: Exemplos de Remoção 2

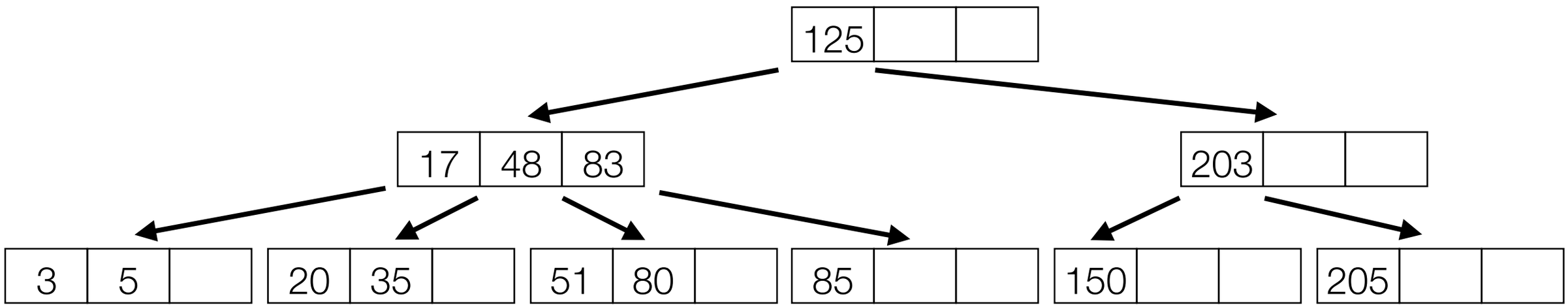
- Remova 50

    1. Como a chave 50 está em um nó interno, devemos buscar seu maior antecessor em um nó folha e trocar ambos de lugar
    2. Em seguida chamamos a função recursivamente para remover 50 no nó folha correspondente, como anteriormente
    3. Caso 1 de remoção



Árvores B: Exemplos de Remoção 2

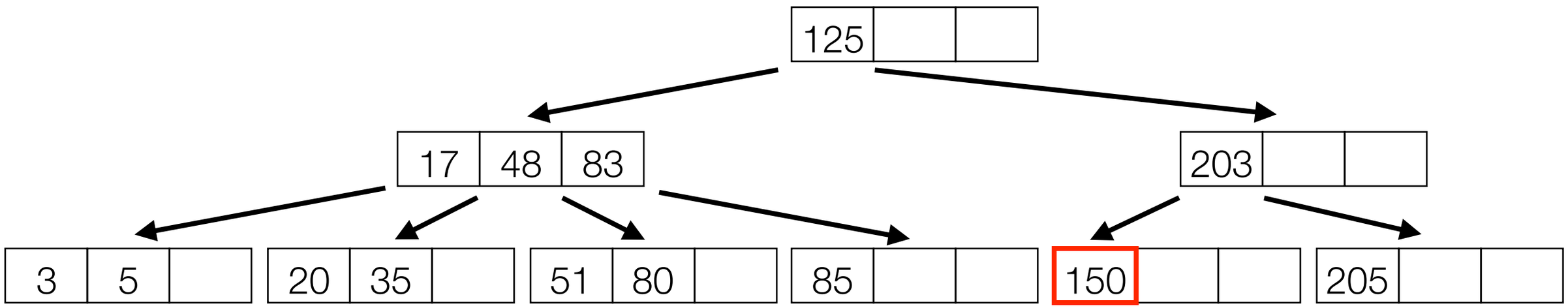
- Remova 150



Árvores B: Exemplos de Remoção 2

- Remova 150

    1. Ache recursivamente a chave correspondente

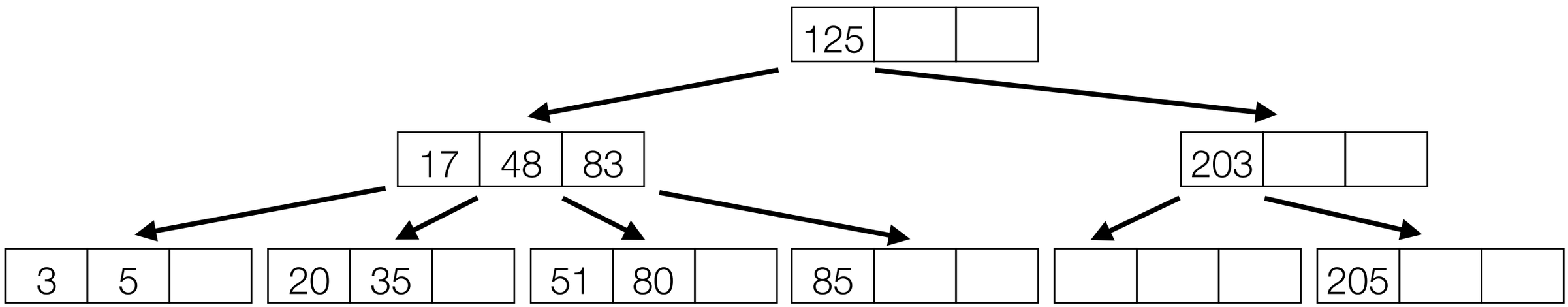


Árvores B: Exemplos de Remoção 2

- Remova 150

    1. Ache recursivamente a chave correspondente

    2. Elimine o elemento



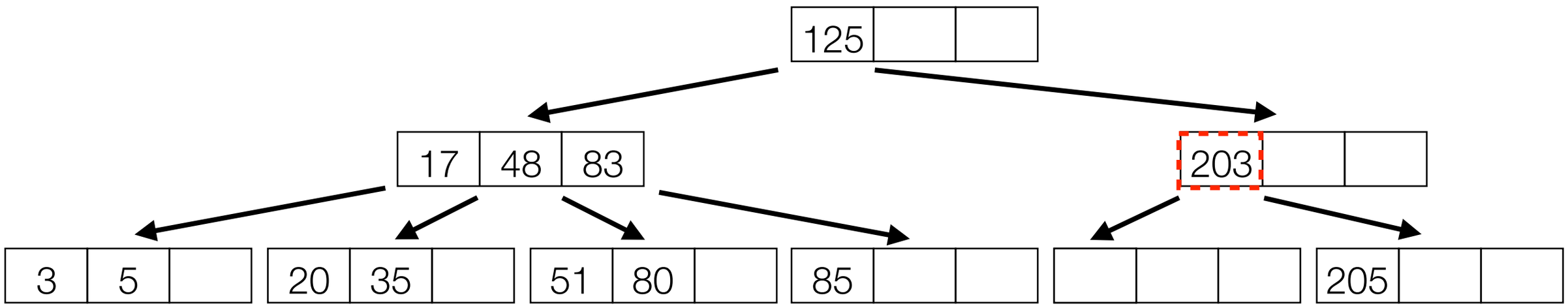
Árvores B: Exemplos de Remoção 2

- Remova 150

    1. Ache recursivamente a chave correspondente

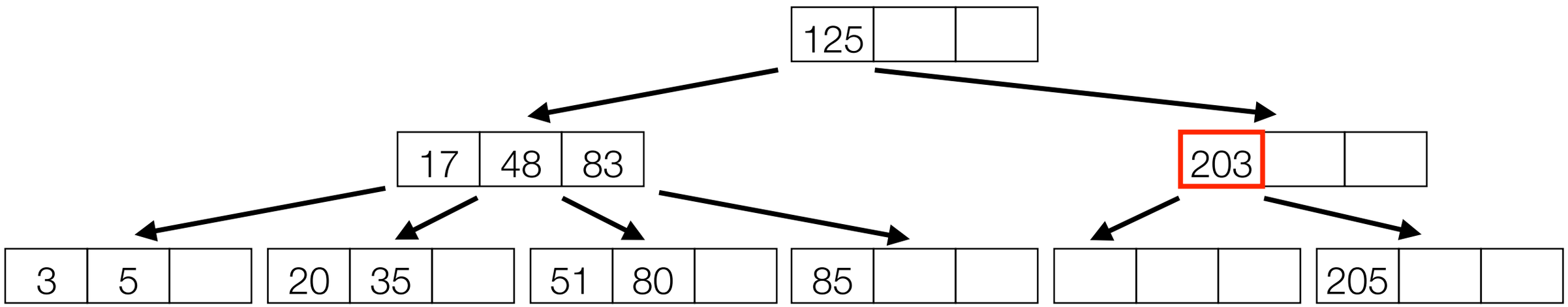
    2. Elimine o elemento

3. Trate o *underflow* do filho no retorno da recursão



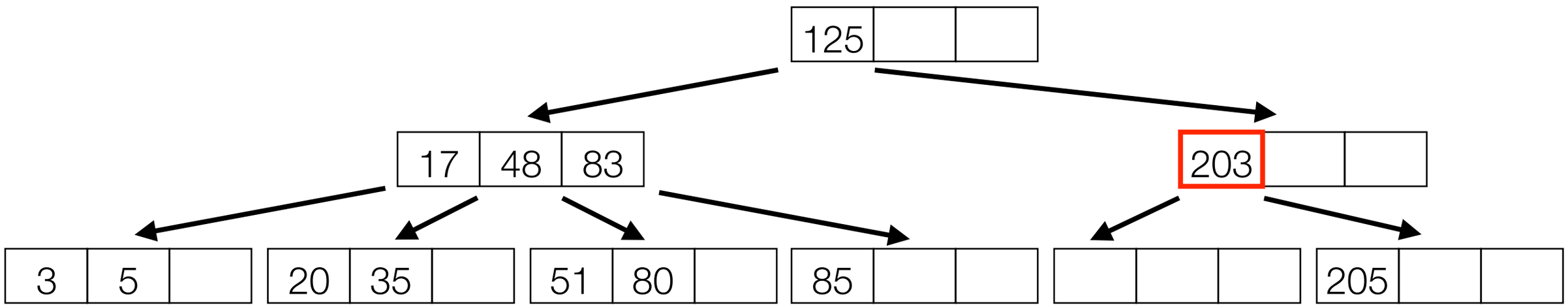
Árvores B: Exemplos de Remoção 2

- Tratamento de underflow #1 (volta da recursão #1)



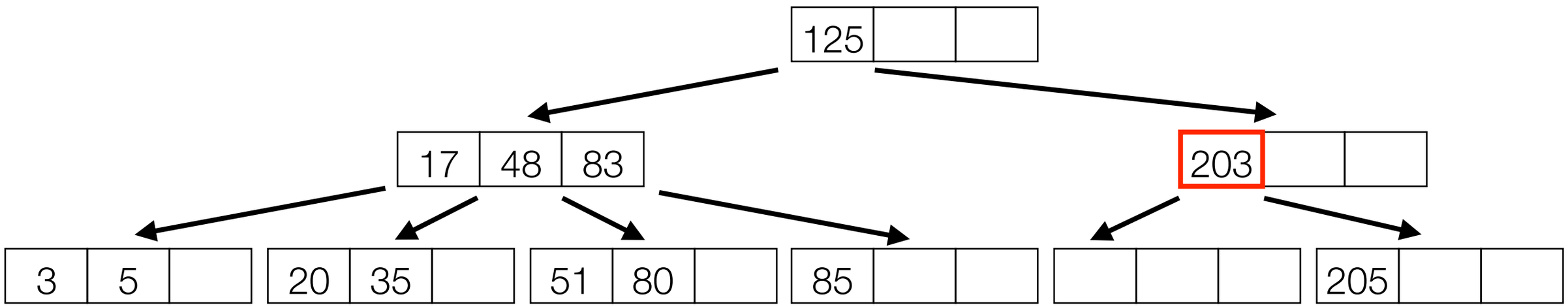
Árvores B: Exemplos de Remoção 2

- Tratamento de underflow #1 (volta da recursão #1)
- Verifica casos 1, 2, 3



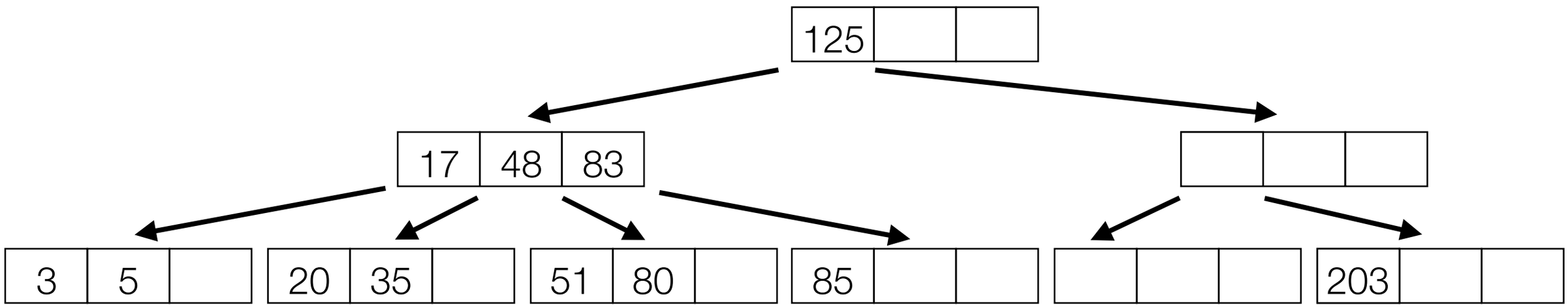
Árvores B: Exemplos de Remoção 2

- Tratamento de underflow #1 (volta da recursão #1)
- Verifica casos 1, 2, 3
  - Caso 3:



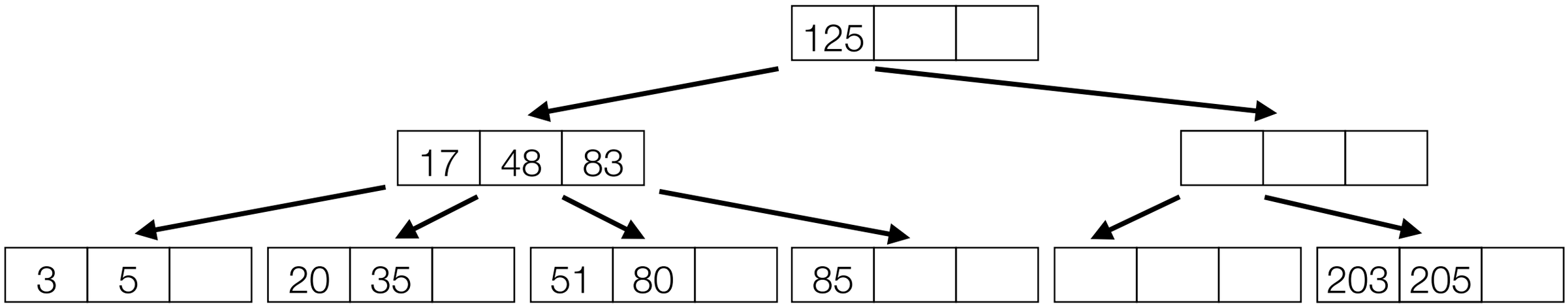
Árvores B: Exemplos de Remoção 2

- Tratamento de underflow #1 (volta da recursão #1)
- Verifica casos 1, 2, 3
  - Caso 3:
    1. Empurra chave para baixo



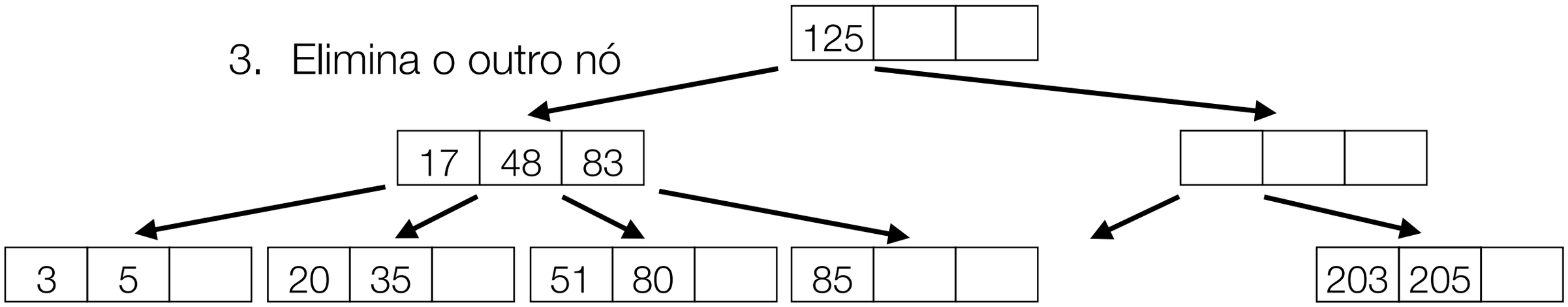
Árvores B: Exemplos de Remoção 2

- Tratamento de underflow #1 (volta da recursão #1)
- Verifica casos 1, 2, 3
  - Caso 3:
    1. Empurra chave para baixo
    2. Faz união com o nó irmão (neste caso, [vazio] + [203, 205, _])



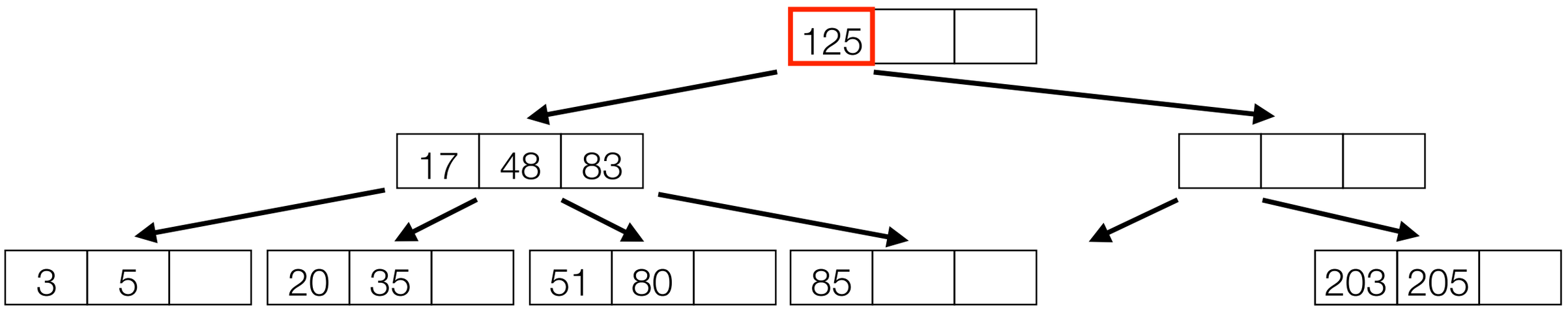
Árvores B: Exemplos de Remoção 2

- Tratamento de underflow #1 (volta da recursão #1)
- Verifica casos 1, 2, 3
  - Caso 3:
    1. Empurra chave para baixo
    2. Faz união com o nó irmão (neste caso, [vazio] + [203, 205, _])
    3. Elimina o outro nó



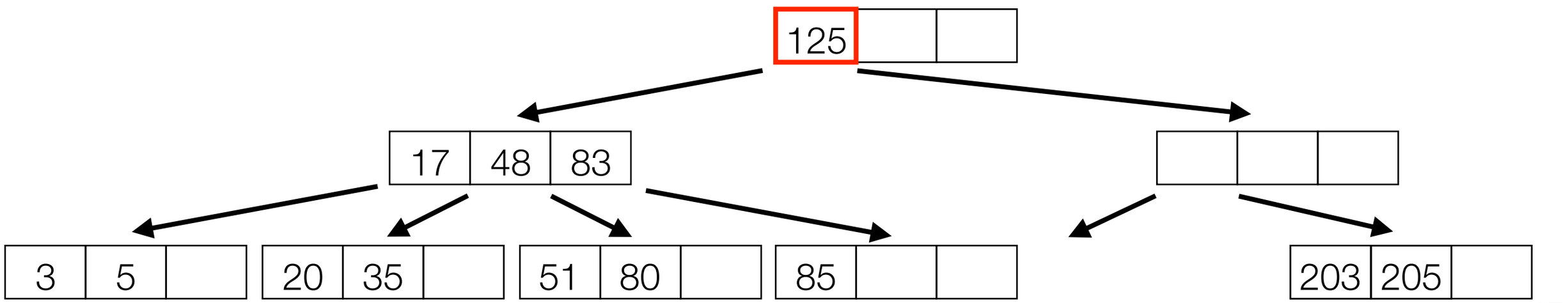
Árvores B: Exemplos de Remoção 2

- Tratamento de underflow #2 (volta da recursão #2)



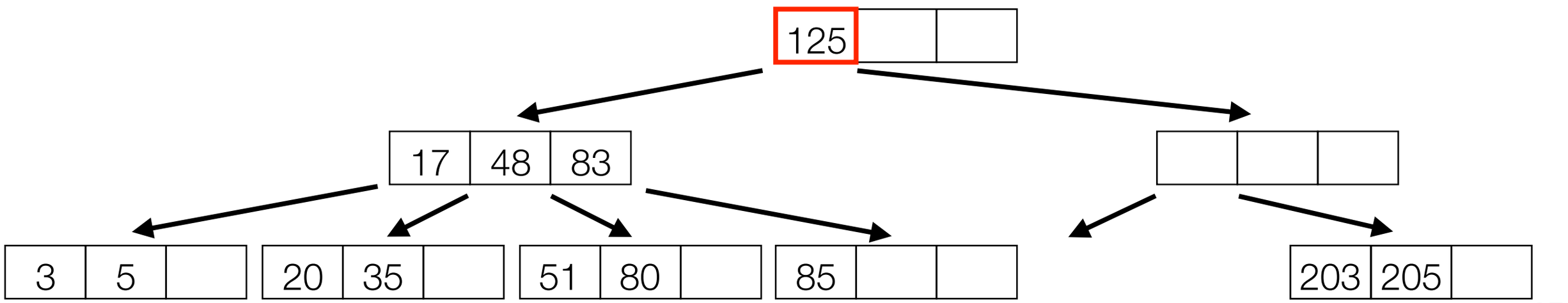
Árvores B: Exemplos de Remoção 2

- Tratamento de underflow #2 (volta da recursão #2)
- Verifica casos 1, 2, 3



Árvores B: Exemplos de Remoção 2

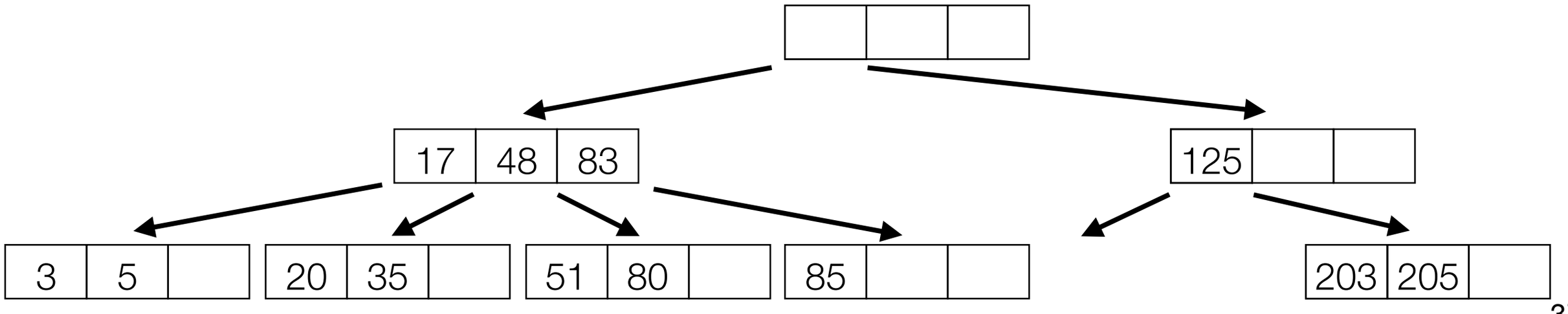
- Tratamento de underflow #2 (volta da recursão #2)
- Verifica casos 1, 2, 3
  - Caso 2:



Árvores B: Exemplos de Remoção 2

- Tratamento de underflow #2 (volta da recursão #2)
- Verifica casos 1, 2, 3
  - Caso 2:

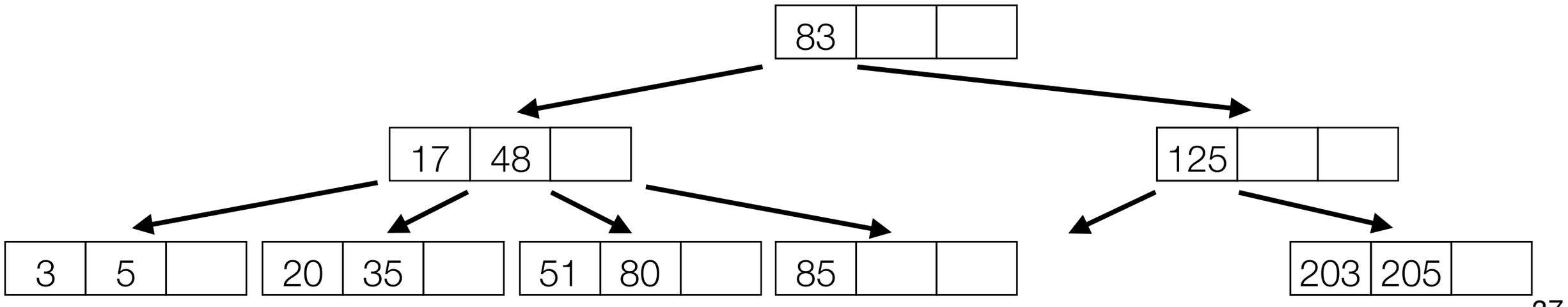
1. Empurra a chave pai 125 para baixo



Árvores B: Exemplos de Remoção 2

- Tratamento de underflow #2 (volta da recursão #2)
- Verifica casos 1, 2, 3
  - Caso 2:

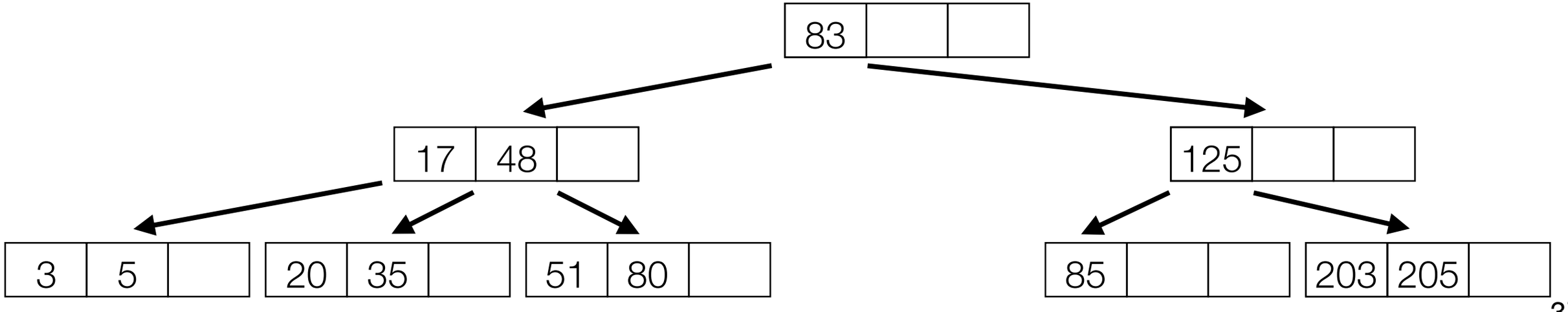
1. Empurra a chave pai 125 para baixo
2. Empresta a maior chave do irmão à esquerda (83) -> caso o irmão não possa emprestar, verificar o irmão à direita (caso simétrico)



Árvores B: Exemplos de Remoção 2

- Tratamento de underflow #2 (volta da recursão #2)
- Verifica casos 1, 2, 3
  - Caso 2:

1. Empurra a chave pai 125 para baixo
2. Empresta a maior chave do irmão à esquerda (83) -> caso o irmão não possa emprestar, verificar o irmão à direita (caso simétrico)
3. O nó entre 83 e 125 acompanha a chave pai



Árvores B: Implementação da Remoção

```
int ArvBRemoveRec(ArvB **arv, int chave, int *underflow) {
  int pos;
  /* Primeiro, procura onde esta a chave */
  if (BuscaChaveNo(*arv, chave, &pos)) {
    /* a chave esta neste nivel */
    if ((*arv)->filhos[pos]!=NULL) {   /* Nao estamos na raiz */
      TrocaChaveAnterior(*arv, pos);   /* manda a chave para baixo */
      ArvBRemoveRec(&((*arv)->filhos[pos]), chave, underflow);
      if (*underflow) TrataUnderflow(arv, pos);
    } else {
      RemoveChaveNo(*arv, pos);
    }
    (*underflow) = VerificaUnderflow(*arv);
    return 1;
  } else { /* a chave nao esta neste nivel */
    if ((*arv)->filhos[pos]!=NULL) {
      if (ArvBRemoveRec(&((*arv)->filhos[pos]), chave, underflow)) {
        /* existe o no abaixo */
        if (*underflow) TrataUnderflow(arv, pos);
        (*underflow) = VerificaUnderflow(*arv);
        return 1;
      } else
        return 0;/* nao existe o no abaixo */
    } else {  /* estamos na raiz e a arvore nao esta neste nivel,
                 logo, ela nao existe */
      (*underflow) = 0;
      return 0;
    }
  }
}
```

```
int ArvBRemoveRec(ArvB **arv, int chave, int *underflow) {
  int pos;
  /* Primeiro, procura onde esta a chave */
  if (BuscaChaveNo(*arv, chave, &pos)) {
    /* a chave esta neste nivel */
    if ((*arv)->filhos[pos]!=NULL) {   /* Nao estamos na raiz */
      TrocaChaveAnterior(*arv, pos);   /* manda a chave para baixo */
      ArvBRemoveRec(&((*arv)->filhos[pos]), chave, underflow);
      if (*underflow) TrataUnderflow(arv, pos);
    } else {
      RemoveChaveNo(*arv, pos);
    }
    (*underflow) = VerificaUnderflow(*arv);
    return 1;
  } else { /* a chave nao esta neste nivel */
    if ((*arv)->filhos[pos]!=NULL) {
      if (ArvBRemoveRec(&((*arv)->filhos[pos]), chave, underflow)) {
        /* existe o no abaixo */
        if (*underflow) TrataUnderflow(arv, pos);
        (*underflow) = VerificaUnderflow(*arv);
        return 1;
      } else
        return 0;/* nao existe o no abaixo */
    } else {  /* estamos na raiz e a arvore nao esta neste nivel,
                 logo, ela nao existe */
      (*underflow) = 0;
      return 0;
    }
  }
}
```

```
int ArvBRemoveRec(ArvB **arv, int chave, int *underflow) {
  int pos;
  /* Primeiro, procura onde esta a chave */
  if (BuscaChaveNo(*arv, chave, &pos)) {
    /* a chave esta neste nivel */
    if ((*arv)->filhos[pos]!=NULL) {   /* Nao estamos na raiz */
      TrocaChaveAnterior(*arv, pos);   /* manda a chave para baixo */
      ArvBRemoveRec(&((*arv)->filhos[pos]), chave, underflow);
      if (*underflow) TrataUnderflow(arv, pos);
    } else {
      RemoveChaveNo(*arv, pos);
    }
    (*underflow) = VerificaUnderflow(*arv);
    return 1;
  } else { /* a chave nao esta neste nivel */
    if ((*arv)->filhos[pos]!=NULL) {
      if (ArvBRemoveRec(&((*arv)->filhos[pos]), chave, underflow)) {
        /* existe o no abaixo */
        if (*underflow) TrataUnderflow(arv, pos);
        (*underflow) = VerificaUnderflow(*arv);
        return 1;
      } else
        return 0;/* nao existe o no abaixo */
    } else {  /* estamos na raiz e a arvore nao esta neste nivel,
                 logo, ela nao existe */
      (*underflow) = 0;
      return 0;
    }
  }
}
```

Árvores B: Implementação da Remoção

- IMPORTANTE: a redução da altura da árvore ocorre no caso 3, quando a recursão chegou na raiz e utilizou a única chave restante para unir dois filhos em underflow

- No algoritmo anterior, isso deve ser tratado fora da função ArvBRemoveRec, avaliando se o retorno da mesma foi 1 e se ocorreu underflow (*underflow == 1)

- No caso, *underflow será 1 porque ao utilizar a única chave para tratar o underflow de seus filhos, a raiz ficará vazia e VerificaUnderflow atualizará a variável apropriadamente