Algoritmo e Estrutura de Dados II
COM-112

B-Tree

Vanessa Souza

Universidade Federal de Itajubá – Instituto de Matemática e Computação

Árvores Binárias

- Apesar de termos visto até agora árvores sempre binárias, a definição de árvore não restringe o número de filhos que um nó pode ter.

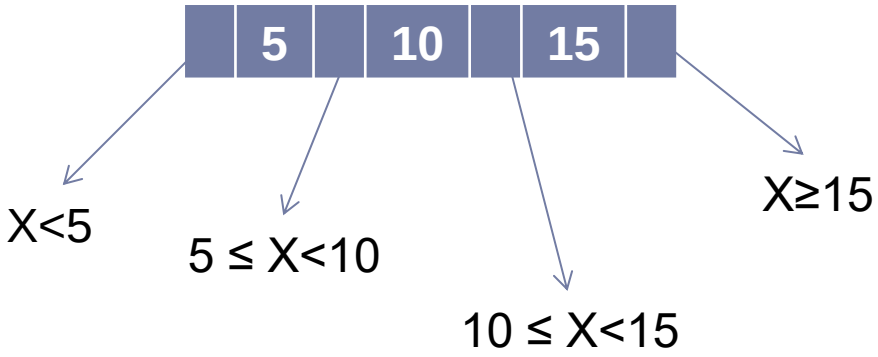
- As **árvores múltiplas** são formadas por nós que possuem mais do que dois filhos e, consequentemente, mais do que uma chave associada.

Árvores Múltiplas

- Um exemplo comum de árvores múltiplas são as árvores 2-3-4.
  - Árvores multidirecionais, ou seja, cada nó poderá ter um, dois ou três campos de dados e até quatro filhos.
  - Os números 2,3,4 se referem a quantidade de filhos que um nó poderá ter.
  - Uma característica importante da árvore 2-3-4 é que um nó deverá ter no mínimo 2 filhos, a não ser que seja uma folha.

Árvores Múltiplas

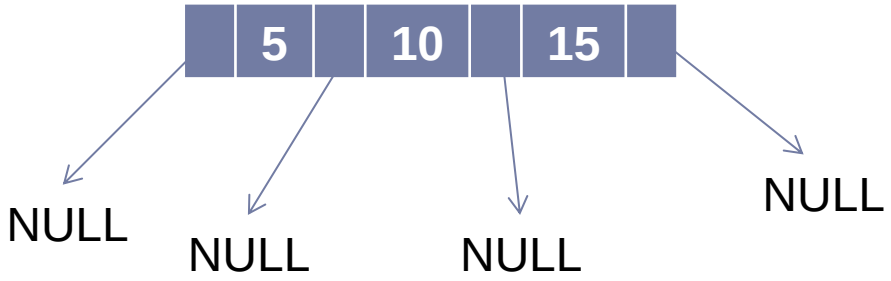
- Sendo assim, o nó da árvore múltipla guarda mais que um valor e mais que um ponteiro para os filhos:



- As chaves ficam sempre ordenadas no nó.
- As chaves associadas a cada filho implicam em relações de ordem da mesma maneira que em árvores binárias.

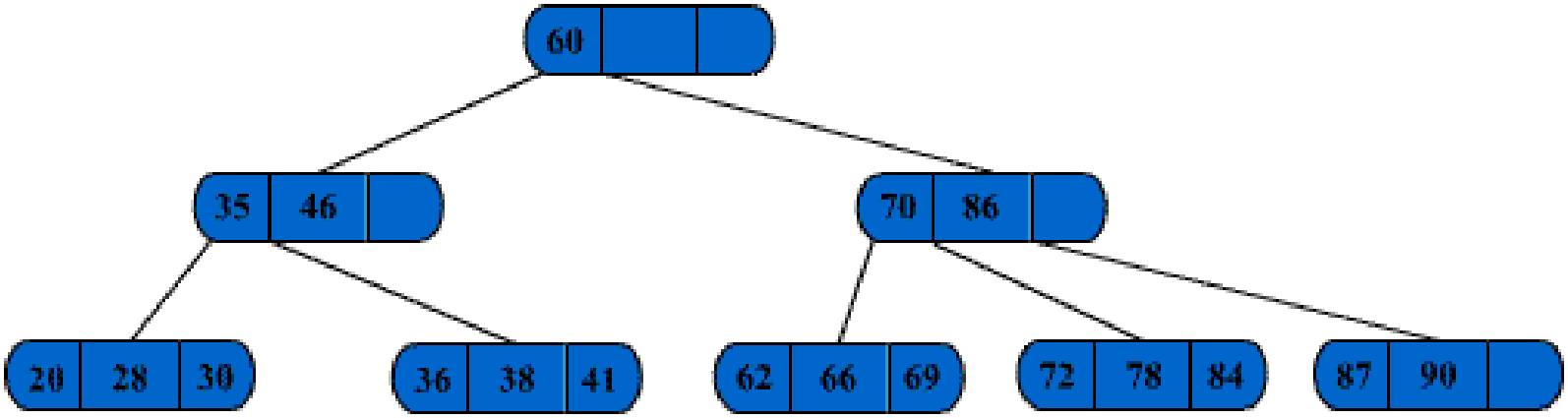
Árvores Múltiplas

- Se o nó for folha, ele não tem filhos:



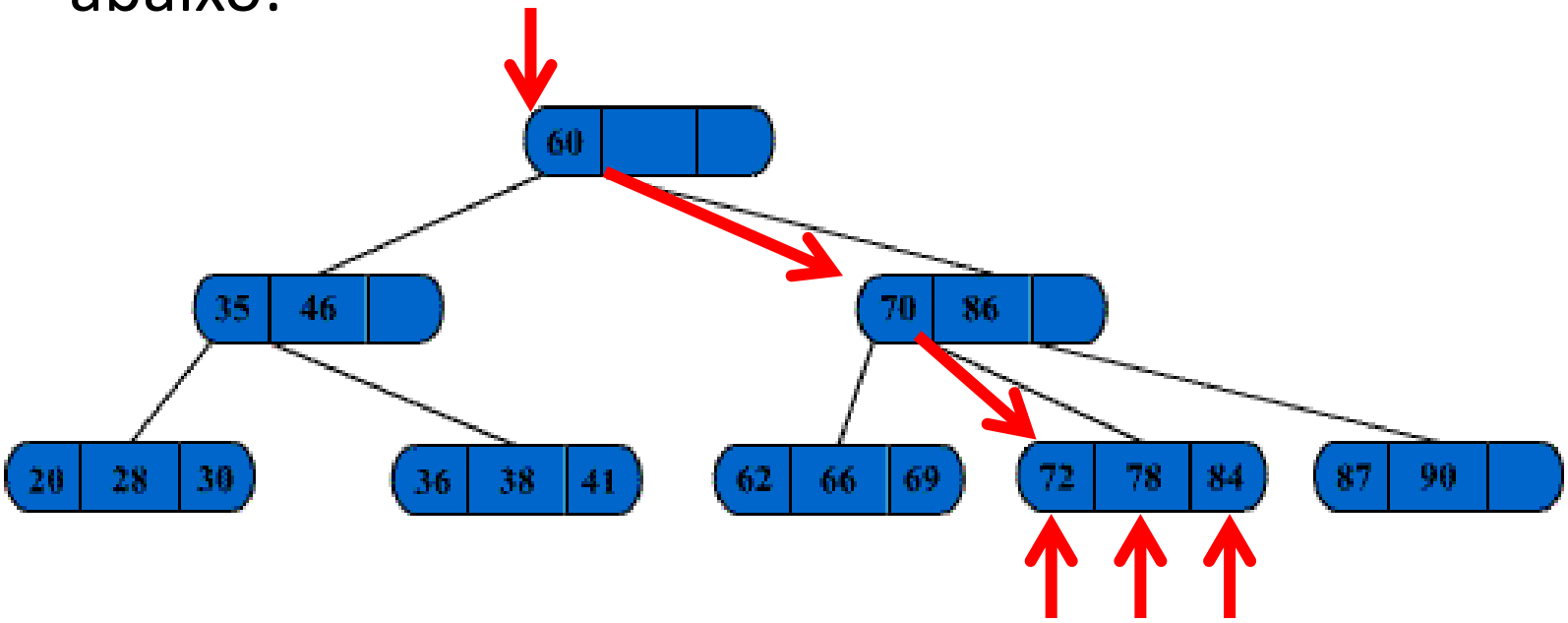
Árvores Múltiplas

- Exemplo : Encontrar o nó 84 na árvore múltipla abaixo:



Árvores Múltiplas

- Exemplo : Encontrar o nó 84 na árvore múltipla abaixo:



Árvores Múltiplas

- Um exemplo representativo de árvore múltiplas é composto pelas árvores B.
  - B
  - B^+
  - B^*

Árvore B

Árvore B

- Inventada por Rudolf Bayer e Edward Meyers McCreightem (1971) enquanto trabalhavam no Boeing *Scientific Research Labs*, a origem do nome (árvore B) não foi definida por estes.
  - Especula-se que o B venha da palavra balanceamento, do nome de um de seus inventores Bayer ou de Boeing, nome da empresa.

- São uma generalização das árvores binárias de busca, pois cada nó de uma árvore binária armazena uma única chave de busca, enquanto as **árvores B** armazenam um número maior de chaves em cada nó, ou no termo mais usual para essa árvore, em cada página.

- *B+Trees are complex disk based trees used to index large amounts of data*.

Árvore B

- As árvores B são árvores de pesquisa balanceadas projetadas para funcionar bem em discos magnéticos ou outros dispositivos de armazenamento secundário de acesso direto.
  - Em uma aplicação típica de árvore B, a quantidade de dados manipulados é tão grande que não cabem todos na memória principal de uma só vez.

- São otimizadas para minimizar operações de E/S do disco.
  - Os algoritmos copiam páginas selecionadas do disco para a memória principal conforme necessário e gravam novamente em disco as páginas que foram alteradas.

Árvore B – Motivação

- Você não verá Árvores B em aplicações normais. Essa estrutura de dados foi inventada com uma motivação para lidar com grande quantidade de dados (que não cabem na memória principal).

- Sendo assim, é mais aplicada nas indústrias de banco de dados e similares, onde os dados são armazenados no disco e precisam ser acessados, lidos, modificados e reescritos.

Árvore B

- Uma árvore B é uma forma de construção de árvores de busca em dispositivos de armazenamento secundário (discos), em que o **custo de busca** é **reduzido** pelo empacotamento de nós da árvore.

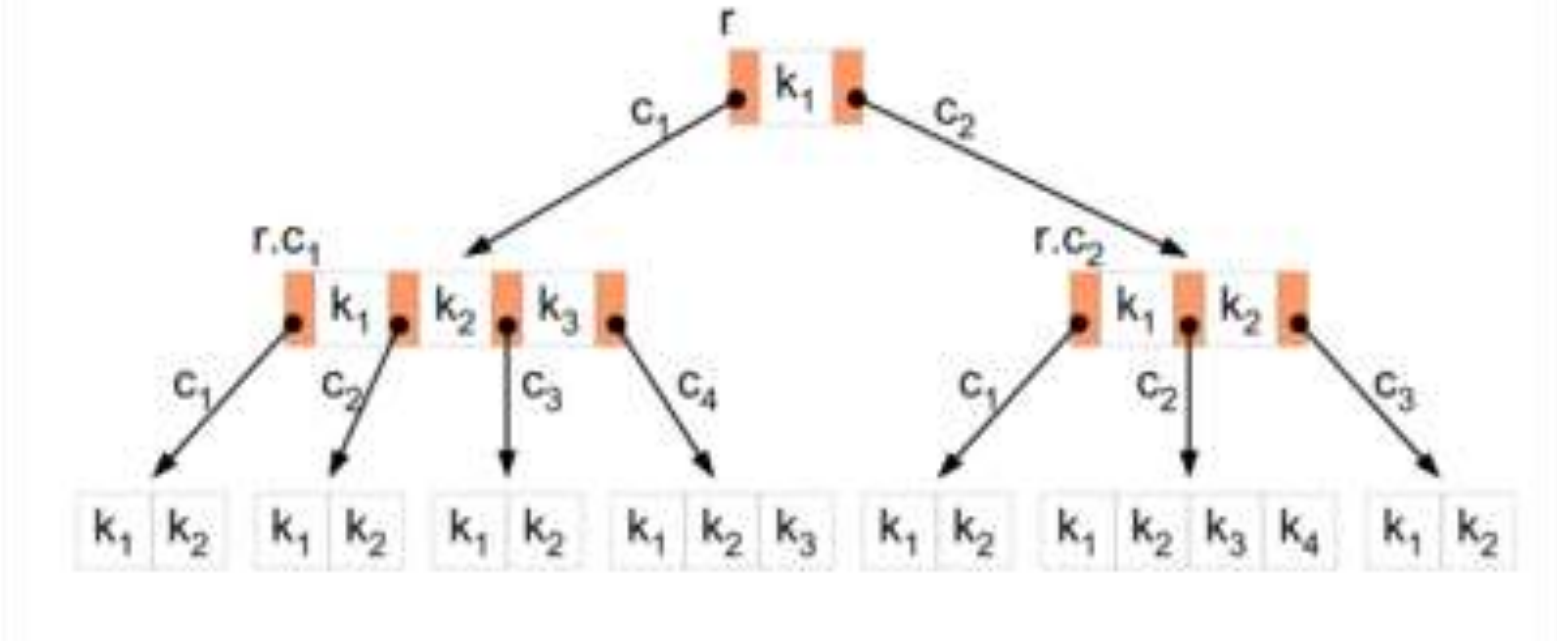
- A ideia é fazer com que cada nó da árvore contenha tanta informação quanto a que cabe num **bloco de disco**.
  - Um nó de árvore B é normalmente tão grande quanto uma página de disco inteira.
  - O número de filhos que um nó de árvore B pode ter é então limitado pelo tamanho de uma página do disco.

Árvore B

- A consequência disso é que, em geral, a árvore B possui grande largura e pouca profundidade – diminui o número de E/S do disco!!!!

- Para uma grande árvore B armazenada em um disco, fatores de ramificação entre 50 e 2000 são usados com frequência, dependendo do tamanho de uma chave em relação ao tamanho de uma página.
  - Um grande fator de ramificação reduz drasticamente tanto a altura da árvore quanto o número de acessos ao disco necessário para encontrar qualquer chave.

Árvore B



- Se o nó raiz puder ser mantido permanentemente na memória principal, no máximo, apenas dois acessos ao disco são exigidos para encontrar qualquer chave nessa árvore.

Árvore B – Propriedades

- Uma árvore B de **ordem m** é uma árvore múltipla de procura com as seguintes propriedades:
  - raiz (a menos que seja folha) tem, pelo menos, 2 filhos;
  - cada nó interno (não é raiz nem folha) tem k filhos, com $[m/2] \leq k \leq m$;
  - cada nó contém k-1 chaves, com $[m/2] \leq k \leq m$;
  - todas as folhas da árvore estão no mesmo nível;
  - as folhas não possuem ponteiros para os filhos

Árvore B

- Uma árvore B de ordem m é uma árvore múltipla de procura com as seguintes propriedades:
  - raiz (a menos que seja folha) tem, pelo menos, 2 filhos;
  - **cada nó interno (não é raiz nem folha) tem k filhos, com $[m/2] \leq k \leq m$;**
  - **cada nó contém k-1 chaves, com $[m/2] \leq k \leq m$;**
  - todas as folhas da árvore estão no mesmo nível;
  - as folhas não possuem ponteiros para os filhos

Árvore B

- Ordem x Grau Mínimo
  - Na literatura é comum referir-se a uma árvore B pela sua ordem ou pelo seu grau mínimo
    - A ordem (*m*) é a **quantidade máxima de <u>filhos</u>** que um nó intermediário pode ter.
    - O grau mínimo (*t*) é um inteiro que define os limites inferiores e superiores sobre o **número de <u>chaves</u>** que um nó pode conter.
      - Número máximo de chaves = 2t – 1
      - Número mínimo de chaves = t-1
    - *Uma árvore com grau mínimo t pode ter, no máximo, 2t filhos em seus nós intermediários.*
      - ***m = 2t***

Árvore B

- Ordem x Grau Mínimo
  - Na literatura é comum referir-se a uma árvore B pela sua ordem ou pelo seu grau mínimo
    - A ordem (*m*) é a **quantidade máxima de filhos** que um nó intermediário pode ter.
    - O grau mínimo (*t*) é um inteiro que define os limites inferiores e superiores sobre o **número de chaves** que um nó pode conter.
  - Porém a palavra "ordem" é usada de formas diferentes pelos autores, podendo indicar o número máximo de chaves em cada nó, ou até mesmo a ocupação mínima em cada nó.

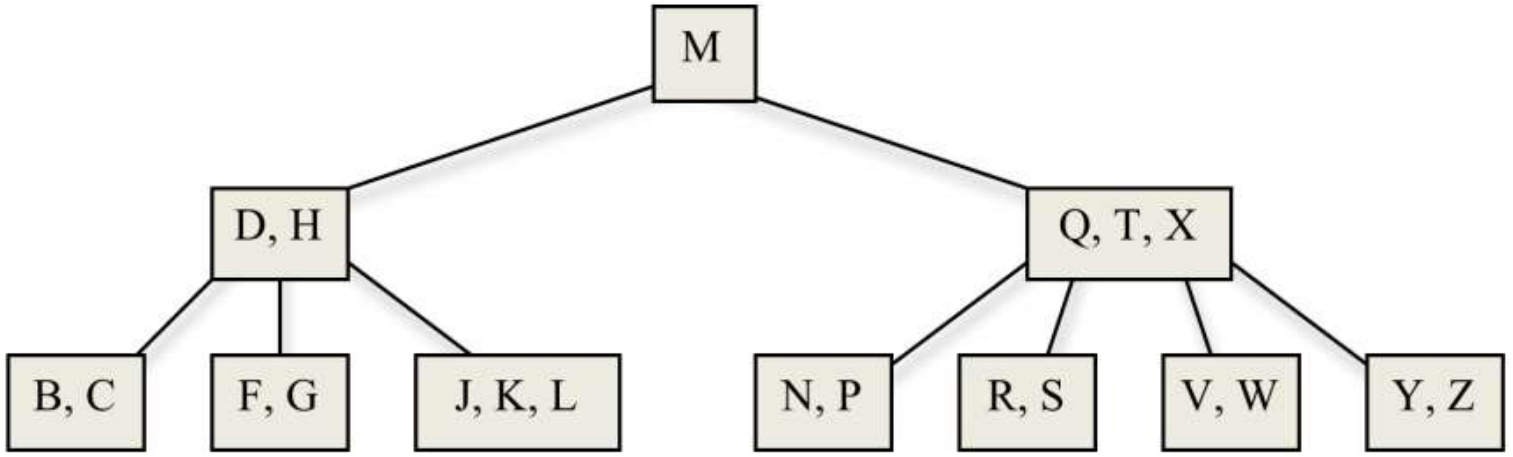
Árvore B

- Ordem x Grau Mínimo
  - Na literatura é comum referir-se a uma árvore B pela sua ordem ou pelo seu grau mínimo
    - A ordem (*m*) é a **quantidade máxima de filhos** que um nó intermediário pode ter.
    - O grau mínimo (*t*) é um inteiro que define os limites inferiores e superiores sobre o **número de chaves** que um nó pode conter.

Nesse curso, usaremos a definição acima para a ordem da árvore!

Árvore B

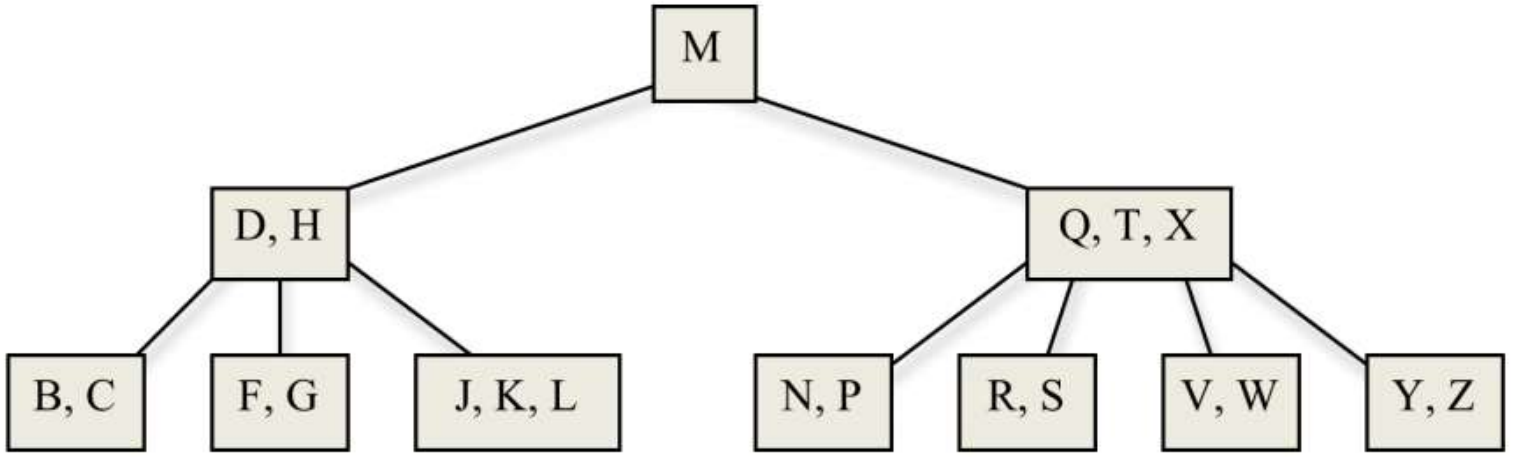
- Ordem x Grau Mínimo
  - Exemplo
    - A árvore abaixo tem ordem 4
      - Número máximo de chaves nos nós intermediários =m-1 = 3
      - Número mínimo de chaves nos nós intermediários = $\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil - 1 = 1$



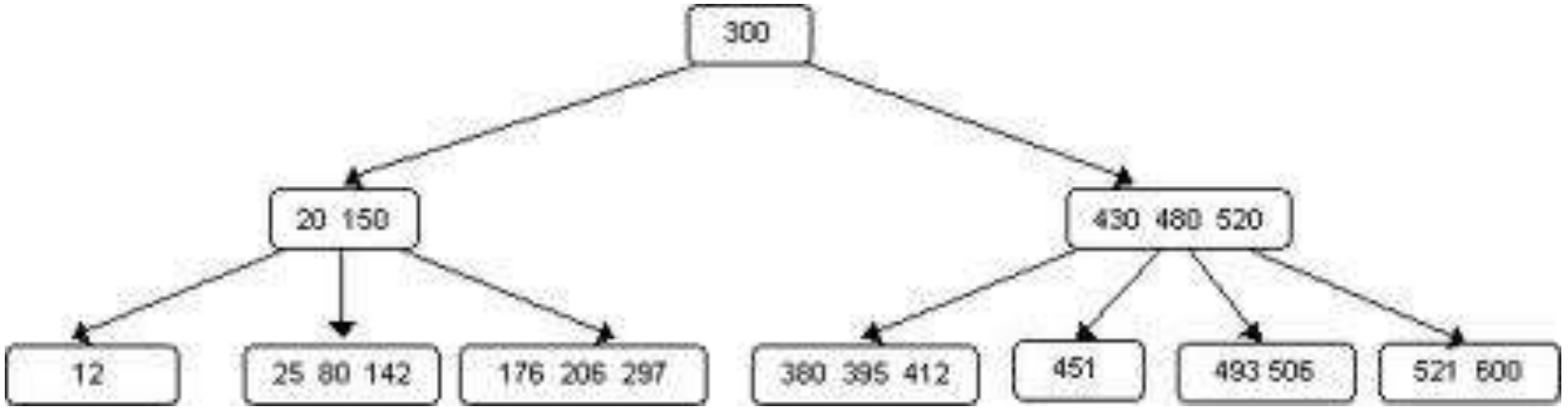
Árvore B

- Ordem x Grau Mínimo
  - Exemplo
    - A árvore abaixo tem ordem 4
    - O grau mínimo é 3
      - Número máximo de chaves nos nós intermediários = 2t-1
      - Número mínimo de chaves nos nós intermediários = t-1

EXCETO A RAIZ



Exemplos de árvore B

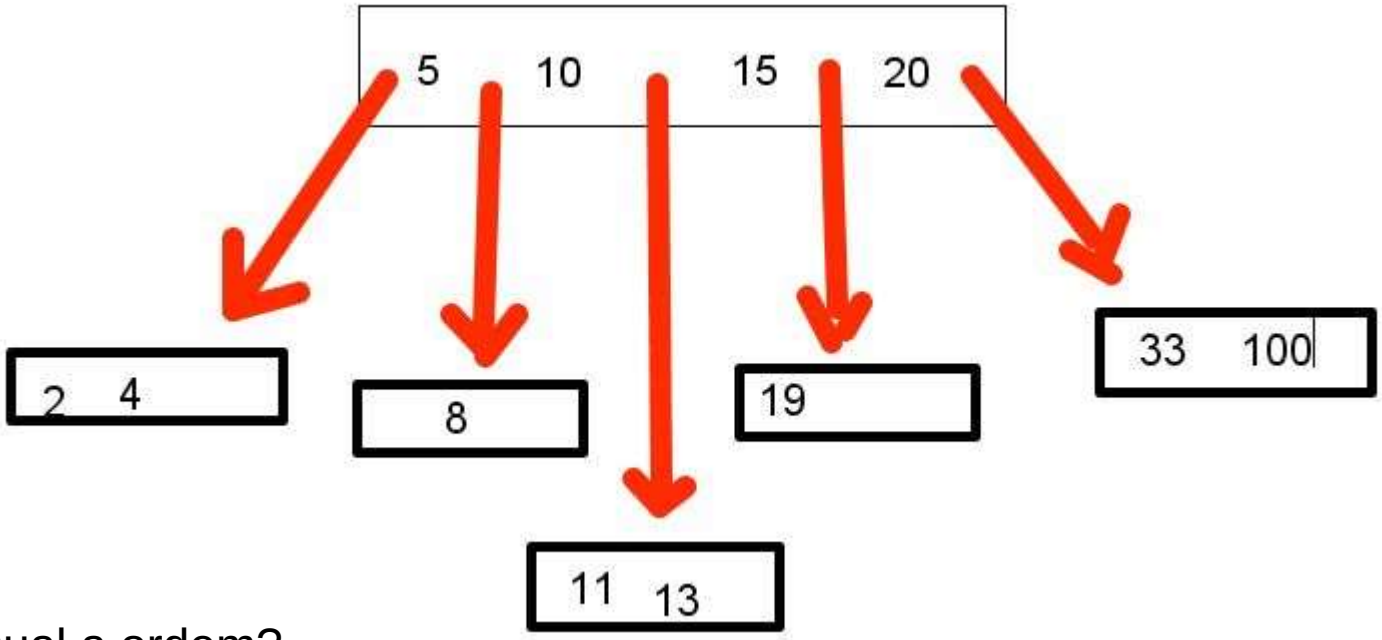


Qual a ordem?

Qual o número máximo de chaves nos nós?

Qual o número mínimo de chaves nos nós?

Exemplos de árvore B



Qual a ordem?

Qual o número máximo de chaves nos nós?

Qual o número mínimo de chaves nos nós?

Árvore B – Estrutura da Árvore

- O número de acessos ao disco exigidos para a maioria das operações em uma árvore B é proporcional à altura da árvore.

- É provado que a altura de uma árvore B, **no pior caso** é:

$$h \leq \log_t \left(\frac{n+1}{2} \right)$$

Onde:

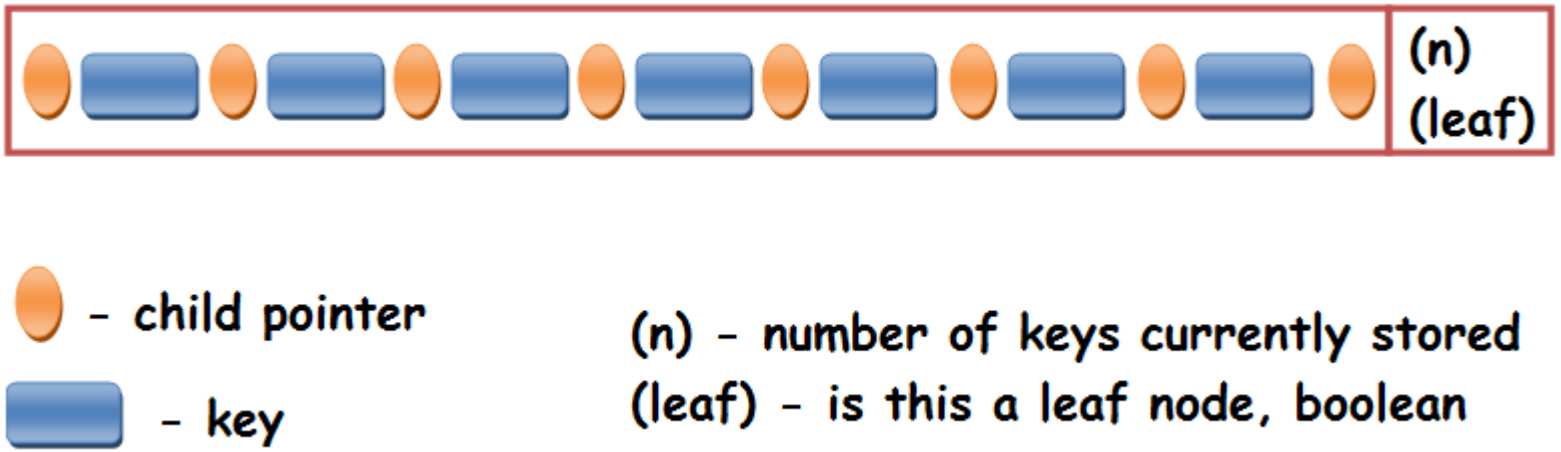
t = grau mínimo

n = número de nós

Raiz contém uma chave e todos os outros nós contém *t-1* chaves.

Árvore B – Estrutura do Nó

- O nó de uma árvore B deve conter as seguintes informações:
  - Número de chaves armazenadas no nó
  - Chaves
  - Ponteiros para os filhos
  - E pode conter uma indicação se ele é folha ou não



Árvore B – Estrutura do Nó

- Outra alternativa é implementar nós folhas com estrutura diferente, já que ele não necessita dos ponteiros para os filhos

- Se o nó for folha, ele terá:
  - Número de chaves no nó
  - Chaves

- Essa é a forma mais correta de implementar, porém também é mais complexa porque será necessário lidar com duas estruturas de nós diferentes.

Operações Básicas sobre a árvore B

Operações Básicas

- Busca
- Inserção
- Remoção

Operações Básicas

- Busca
  - Pesquisar em uma árvore B é muito semelhante a pesquisar em uma árvore de pesquisa binária, exceto pelo fato de que, em vez de tomar uma decisão de ramificação binária, toma-se a decisão de ramificação de (n[x] + 1) vias.
  - A busca é feita primeiro nas chaves do nó, depois passa-se para os nós intermediários até encontrar a chave procurada.

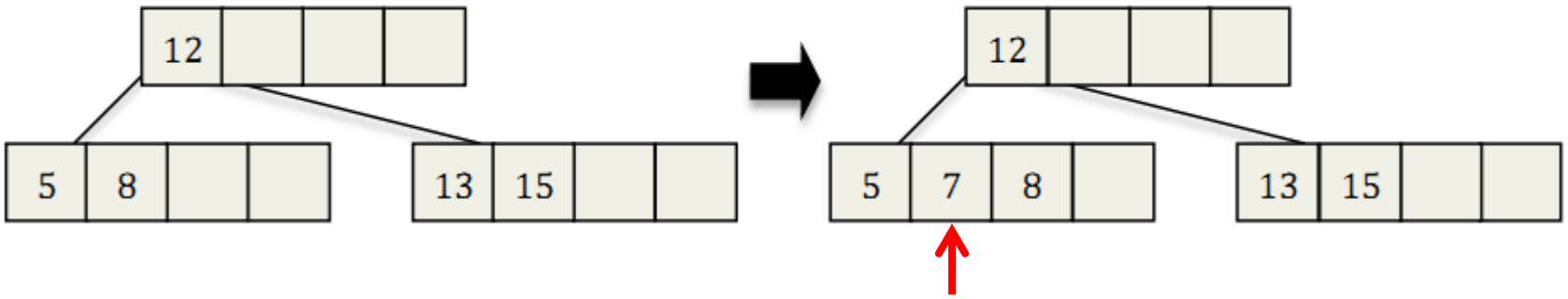
Operações Básicas – INSERÇÃO

- A inserção é bem mais complexa em árvores B do que em árvores binárias.
- Assim como nas árvores binárias, procuramos pela posição **de folha** em que devemos inserir a nova chave.
- Ao localizar a folha correta, a chave deve ser inserida de forma **ordenada** no nó.
- O problema ocorre quando a folha está cheia...

Inserção em Árvore B

Inserção

- Três situações podem ocorrer ao inserir uma nova chave:
  1. A nova chave é colocada em uma folha que ainda tem espaço. Exemplo: incluir a chave 7.

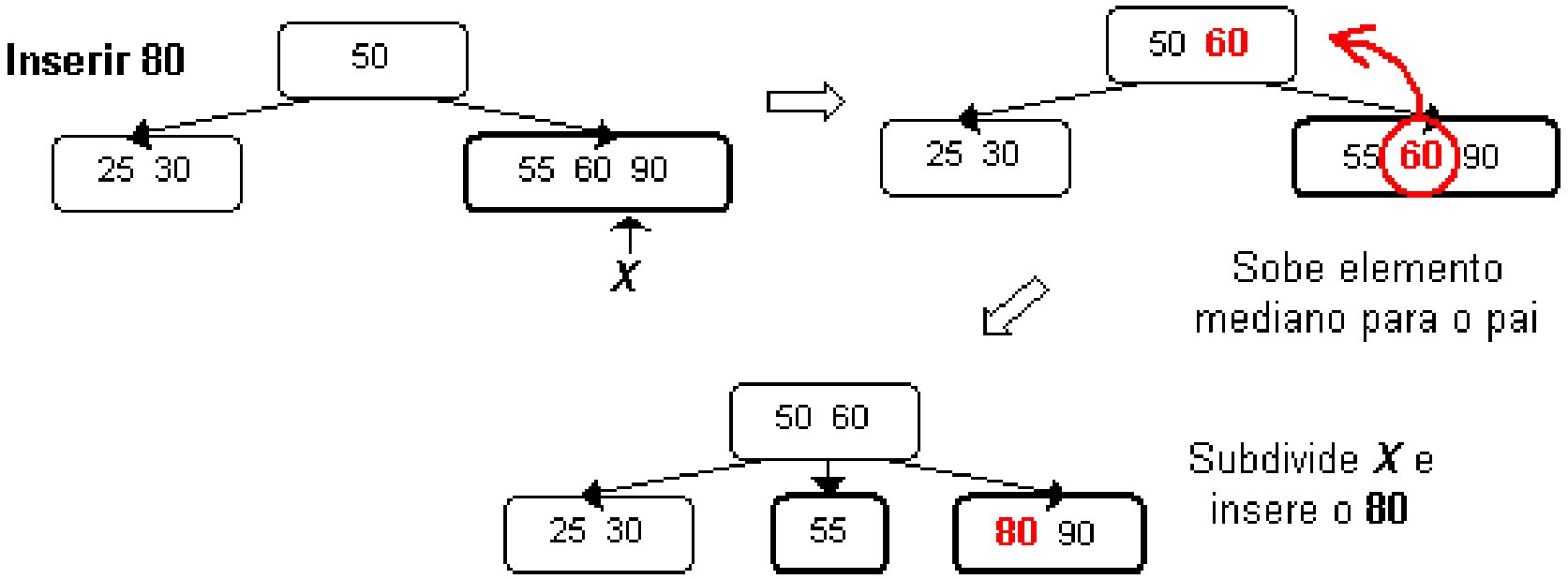


Busca-se a posição correta da chave dentro do nó folha e insere.

Inserção

- Três situações podem ocorrer ao inserir uma nova chave:
  2. A folha (**X**) onde a chave precisa ser incluída está cheia, mas ainda é possível criar um novo filho para o pai desta folha.
     - Será necessário realizar uma **subdivisão** de nós.
       1. Passar o elemento mediano de ***X*** para seu pai
       2. Subdividir ***X*** em dois novos nós com ***t - 1*** elementos
       3. Inserir a nova chave
     - Operação de SPLIT

Inserção



Passos para a inserção da chave 80 em uma árvore B com $t = 2$

- O grau mínimo (*t*) é um inteiro que define os limites inferiores e superiores sobre o **número de chaves** que um nó pode conter.
  - Número máximo de chaves = 2t – 1
  - Número mínimo de chaves = t-1

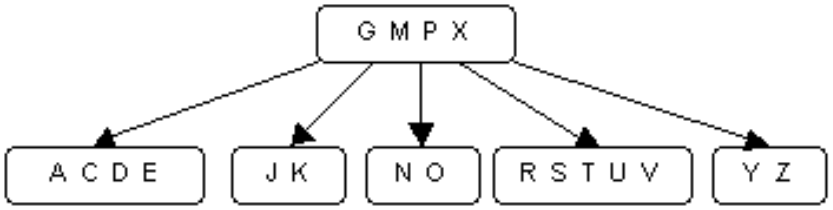
Inserção

- Três situações podem ocorrer ao inserir uma nova chave:
  3. Não há possibilidade de criar um novo filho para o pai da folha cheia ou o nó ascendente também está cheio.
     - Se o pai de ***X*** também estiver cheio, repete-se recursivamente a subdivisão para o pai de ***X***.
     - No pior caso terá que aumentar a altura da árvore B para poder inserir o novo elemento.

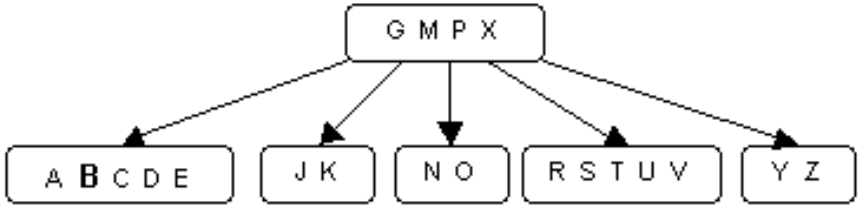
Inserção

m=6

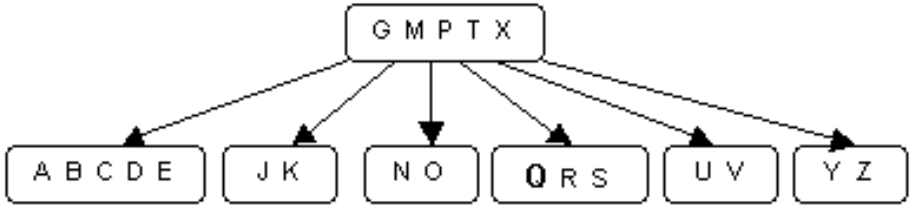
Inicial



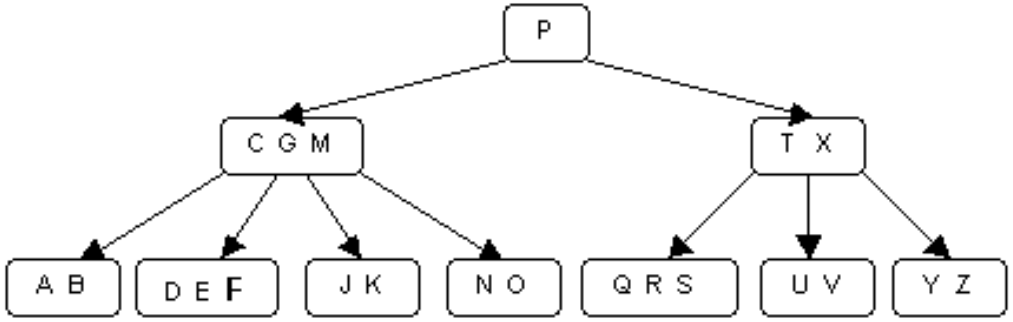
Insere B



Insere Q



Insere F

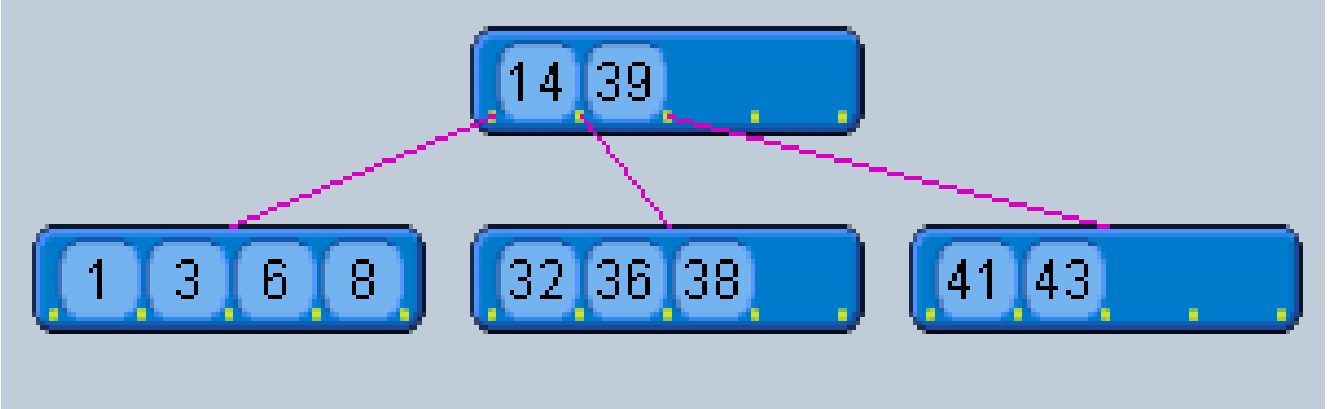


Exemplo 1

- Mostre os resultados de inserir as chaves a seguir em uma árvore B de **ordem 5** inicialmente vazia:
- 14, 39, 1, 6, 41, 32, 8, 38, 43, 3, 36.

Exemplo 1

- Mostre os resultados de inserir as chaves a seguir em uma árvore B de **ordem** 5 inicialmente vazia:
- 14, 39, 1, 6, 41, 32, 8, 38, 43, 3, 36.



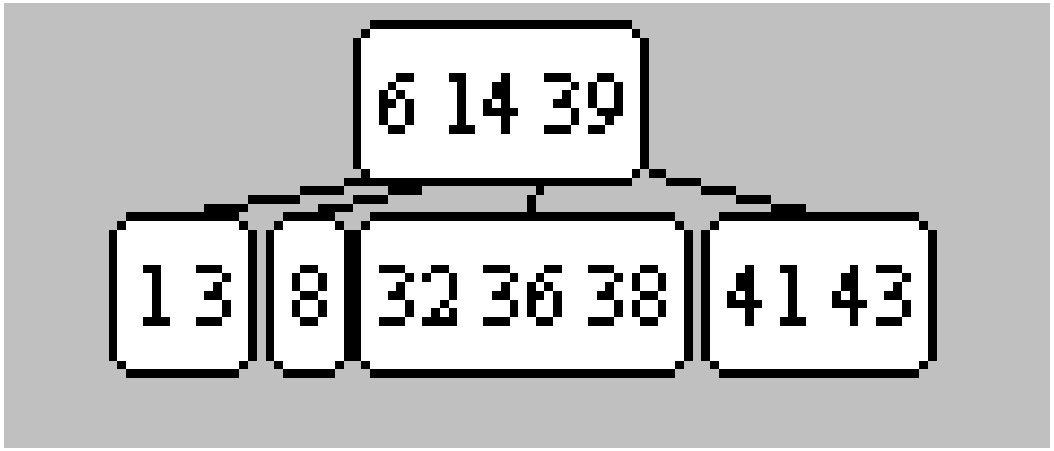
http://slady.net/java/bt/view.php

Exemplo 2

- Mostre os resultados de inserir as chaves a seguir em uma árvore B de **ordem 4** inicialmente vazia:
- 14, 39, 1, 6, 41, 32, 8, 38, 43, 3, 36.

Exemplo 2

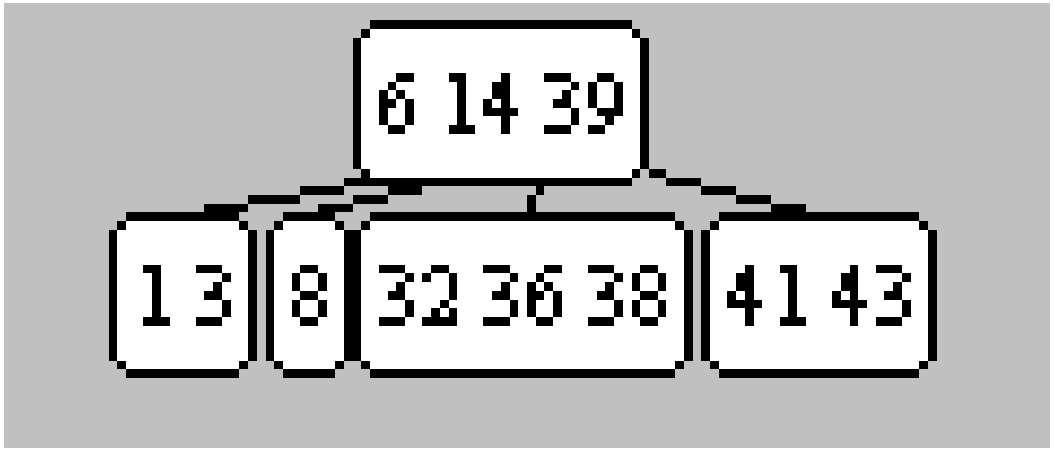
- Mostre os resultados de inserir as chaves a seguir em uma árvore B de ordem 4 inicialmente vazia:
- 14, 39, 1, 6, 41, 32, 8, 38, 43, 3, 36.



http://www.cs.unm.edu/~rlpm/499/ttft.html

Exemplo 3

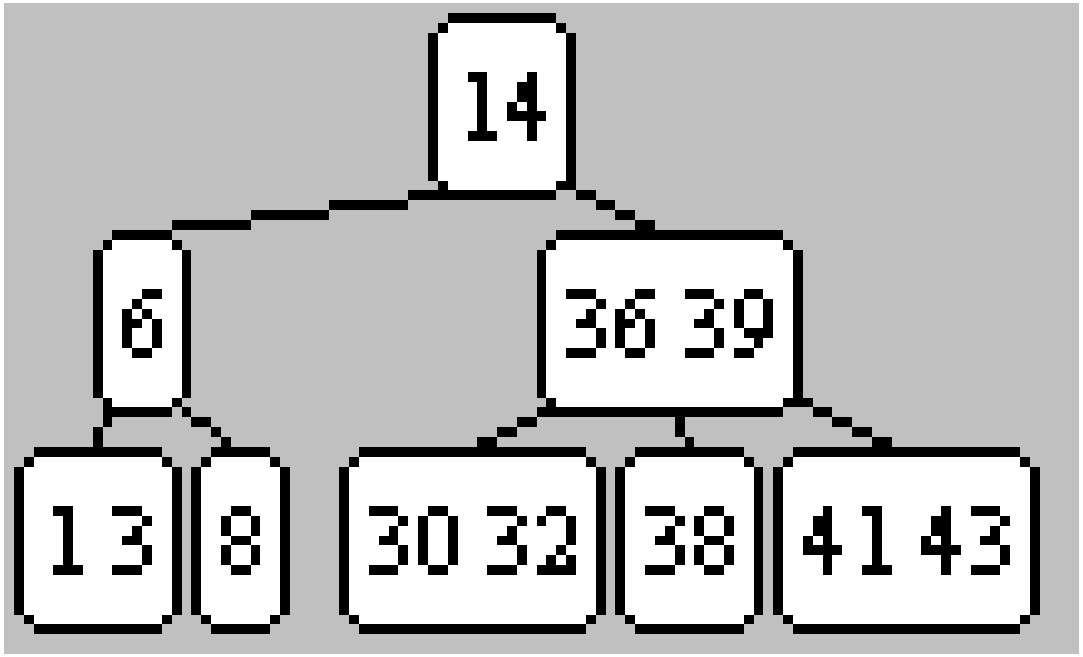
- Inserir a chave 30 na árvore abaixo



http://www.cs.unm.edu/~rlpm/499/ttft.html

Exemplo 3

- Inserir a chave 30 na árvore abaixo



http://www.cs.unm.edu/~rlpm/499/ttft.html

Exercício

- Mostre os resultados de inserir as chaves a seguir em uma árvore B de ordem 5 inicialmente vazia:
- F, S, Q, K, C, L, H, T, V, W, M, R, N, P, A, B, X, Y, D, Z, E