

12^a Lista de Exercícios

Ygor Tavela Alves 10687642

Neste relatório é apresentado uma breve análise do uso da decomposição SVD em imagens com o objetivo de diminuir o espaço utilizado para armazenamento ou facilitar a transmissão de imagens. Para isto, foram escolhidas dois tipos de imagens no formato PNG, uma simples bandeira do Brasil e outra – com maior riqueza de detalhes – imagem da cidade de Tóquio.

Como imagens PNG podem ter os seus pixels representados de diferentes maneiras, foi escolhido padronizar a representação das imagens na memória em escala de cinza, possibilitando o uso de apenas uma matriz com o tamanho da imagem para a sua respectiva representação. Assim, o uso da decomposição SVD se tornou mais direto e intuitivo sobre as imagens.

A decomposição SVD é um método utilizado para decompor uma dada matriz A de dimensões $m \times n$ em $A = U\Sigma V^T$. Em que, V é uma matriz ortogonal $n \times n$ cujas colunas v_i representam um conjunto de vetores ortonormais, Σ é uma matriz diagonal $m \times n$ cujas entradas da submatriz $r \times r$ são os valores singulares da matriz A em ordem crescente de tamanho, além disto, a matriz U com suas r primeiras colunas formam uma base ortonormal para Ax e o restante das $m - r$ colunas são escolhidos de forma que U forme uma base normalizada para o espaço vetorial \mathbb{R}^m .

Utilizando a decomposição SVD na imagem da bandeira do Brasil na figura 1, com resolução 720×504 , obtemos um total de 312 valores singulares, que representa a mesma quantidade de colunas linearmente independentes – o posto – da imagem. Desta forma, para representar a imagem como soma de matrizes de posto 1 com a melhor qualidade possível, em vez de utilizar espaço para armazenar $720 \times 504 = 362880$ valores, poderíamos simplesmente armazenar os primeiros 312 valores singulares de Σ e vetores v_i e u_i . Ou seja, seria necessário armazenar um total de $312 + 312 \times (720 + 504) = 382200$ valores, o que na verdade representa um aumento de 5,32% na quantidade de espaço utilizado. Se analisarmos a figura 3, no entanto, é possível notar que poderíamos obter imagens da bandeira do Brasil com qualidade ótima incorporando uma quantidade muito menor de matrizes de posto 1 obtidas pela decomposição SVD. Tomando uma análise rasa – apenas pelo fato de conseguir ler com clareza a escrita no centro da bandeira, a imagem reconstruída com os 50 primeiros valores singulares da decomposição já parece uma ótima heurística para escolhermos uma quantidade apropriada de matrizes de posto 1 para reconstruir a bandeira do Brasil com uma qualidade boa. Desta forma, bastaria armazenarmos um total de $50 + 50 \times (720 + 504) = 122500$ valores, o que representa uma redução de 83,12% do espaço utilizado em relação ao espaço utilizado para armazenar a imagem original.



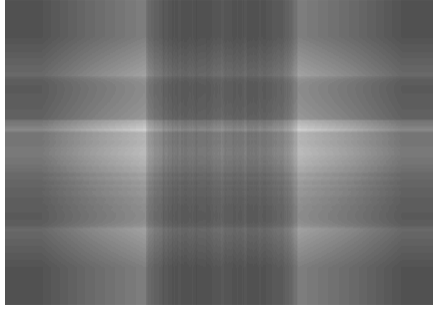
Figure 1: Bandeira do Brasil em escala cinza - 720x504

Realizando um processo análogo em uma imagem mais complexa e detalhada, no caso um local em Tóquio representado pela figura 2, com resolução 720×405 , obtemos um total de 405 valores singulares. A primeiro momento já notamos a clara distinção entre a quantidade de valores singulares em relação a imagem mais simples, devido ao maior detalhamento da imagem, poucas linhas possuem um "padrão" semelhante, tal fato pode ser confirmado calculando o posto da matriz que é igual a 405, isto é, a matriz possui posto completo. Desta forma, assim como observado anteriormente, para reconstruir tal imagem incorporando todas matrizes de posto 1 com o intuito de manter a melhor qualidade possível, na verdade implicará num gasto de espaço maior. Enquanto que, para apenas armazenar a imagem seria necessário armazenar $720 \times 405 = 291600$ valores, com a decomposição SVD utilizando todos os seus valores singulares, precisaríamos armazenar um total de $405 + 405 \times (720 + 405) = 456030$ valores, isto é, um aumento de 56,39% do espaço utilizado. Mas, assim como observado anteriormente, na figura 4, podemos obter uma imagem com uma qualidade mediana incorporando apenas as matrizes de posto 1 iniciais. Aparentemente, com os 100 primeiros valores singulares, reconstruímos uma imagem bastante nítida, tendo a necessidade de armazenar apenas $100 + 100 \times (720 + 405) = 112600$ valores, o que representa uma redução de 61,38% no espaço utilizado para representar tal imagem.

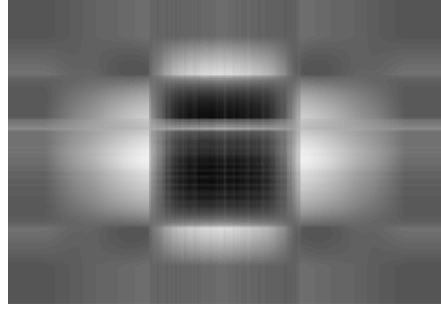


Figure 2: Local cidade de Tóquio em escala cinza - 720x405

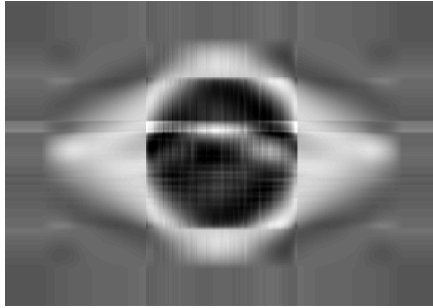
De modo geral, observa-se que a decomposição SVD realizada em imagens, pode ser bastante efetiva para reduzir a quantidade de espaço necessária para representar as mesmas, pelo fato de conseguir capturar os detalhes mais relevantes das imagens nas matrizes de posto de 1 iniciais. Assim, além de facilitar o armazenamento pode-se ter ganhos também com a transmissão de imagens pela necessidade de transportar uma quantidade menor de dados pela rede.



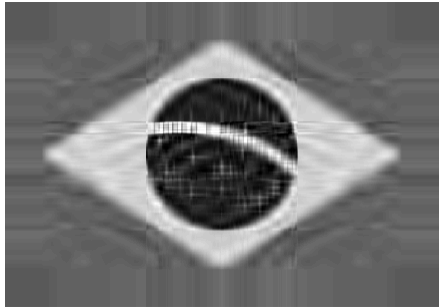
(i) $k = 1$



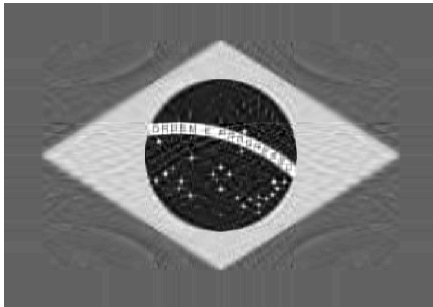
(ii) $k = 2$



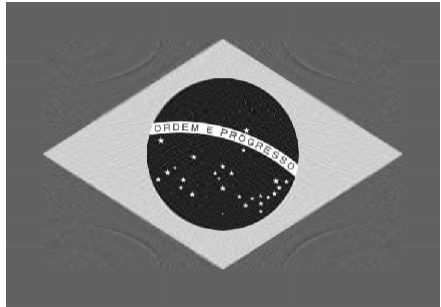
(iii) $k = 4$



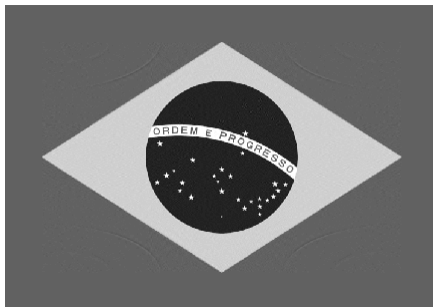
(iv) $k = 10$



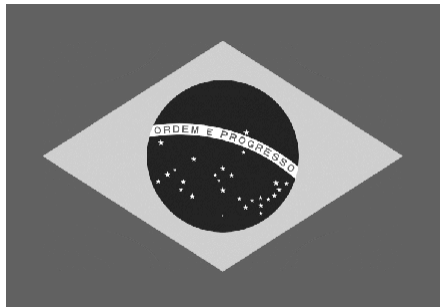
(v) $k = 20$



(vi) $k = 50$

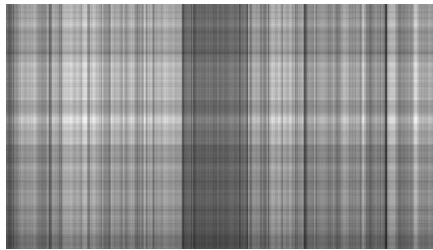


(vii) $k = 100$



(viii) $k = 200$

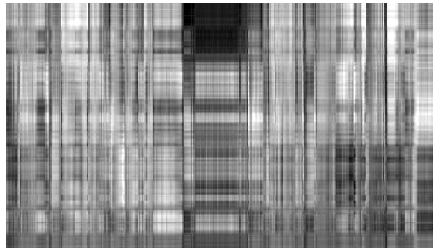
Figure 3: Imagem da bandeira do Brasil reconstruída utilizando as k primeiras matrizes de posto 1 da decomposição SVD



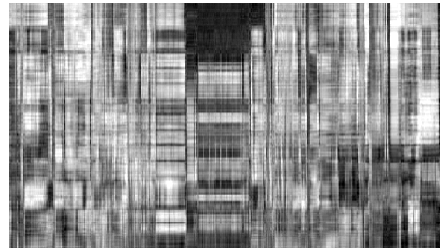
(i) $k = 1$



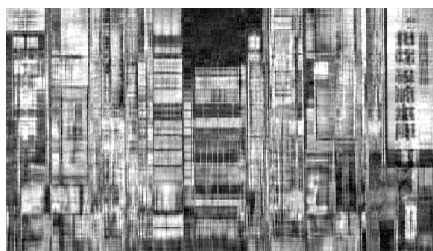
(ii) $k = 2$



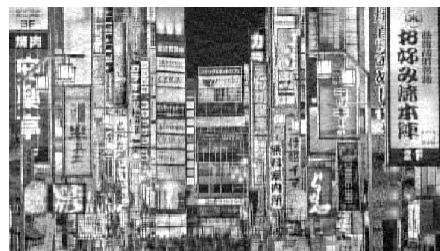
(iii) $k = 4$



(iv) $k = 10$



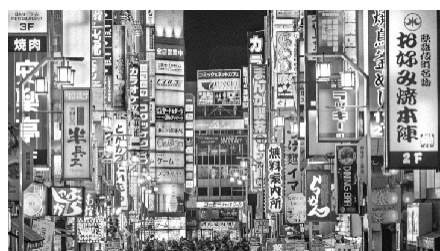
(v) $k = 20$



(vi) $k = 50$



(vii) $k = 100$



(viii) $k = 200$

Figure 4: Imagem da cidade de Tóquio reconstruída utilizando as k primeiras matrizes de posto 1 da decomposição SVD