6ª Lista de Exercícios

Ygor Tavela Alves 10687642

2.7.29)

a) Sendo $A = R^T R$, onde as entradas de R são dadas por:

$$r_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} r_{kj}}{r_{ii}}$$

Considerando a computação de $fl(r_{ij}) = \hat{r_{ij}}$ num sistema de ponto flutuante, temos:

$$\hat{r_{ij}} = \left(\frac{a_{ij}(1+\gamma_{ij}) - \sum_{k=1}^{i-1} \hat{r_{ki}} \hat{r_{kj}} (1+\alpha_k)(1+\gamma_{ik})}{\hat{r_{ii}}} \right) (1+\beta)$$

onde $\|\gamma_{ij}\| \leq (j-1)u + \mathcal{O}(u^2)$ e, as quantidades α_k e β são erros de arredondamento associados com as multiplicações e a divisão, respectivamente, e satisfazem $\|\alpha_k\| \leq u$ e $\|\beta\| \leq u$. Dividindo o numerador e o denominador por $(1+\gamma_{ij})(1+\beta)$ para remover o erro do termo a_{ij}. Ademais, definindo δ_{ik} como

$$1 + \delta_{ik} = \begin{cases} \frac{(1+\alpha_k)(1+\gamma_{ik})}{1+\gamma_{ij}}, & \text{se } k < i \\ \frac{1}{(1+\gamma_{ij})(1+\beta)}, & \text{se } k = i \end{cases} \tag{1}$$

temos:

$$\hat{r_{ij}} = \frac{a_{ij} - \frac{\sum_{k=1}^{i-1} \hat{r_{ki}} \hat{r_{kj}} (1+\alpha_k)(1+\gamma_{ik})}{(1+\gamma_{ij})}}{\frac{\hat{r_{ii}}}{(1+\gamma_{ij})(1+\beta)}} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \hat{r_{ki}} \hat{r_{kj}} (1+\delta_{ik})}{\hat{r_{ii}}(1+\delta_{ii})}$$

$$\hat{r_{ij}} \hat{r_{ii}} (1+\delta_{ii}) = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \hat{r_{ki}} \hat{r_{kj}} (1+\delta_{ik})$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} \hat{r_{ki}} \hat{r_{kj}} (1+\delta_{ik})$$

$$a_{ij} - \sum_{k=1}^{i} \hat{r_{ki}} \hat{r_{kj}} \delta_{ik} = \sum_{k=1}^{i} \hat{r_{ki}} \hat{r_{kj}}$$

Seja o erro denotado por $e_{ij} = -\sum_{k=1}^{i} \hat{r_{ki}} \hat{r_{kj}} \delta_{ik}$, além disso, sendo $1/(1+\gamma_{ij}) = 1 - \gamma_{ij} + \gamma_{ij}^2 - \gamma_{ij}^3 + \cdots$, temos que, para $k < i$, $\delta_{ik} = \alpha_k + \gamma_{ik} - \gamma_{ij} + \mathcal{O}(u^2)$e, portanto:

$$|\delta_{ik}| \leq |\alpha_k| + |\gamma_{ik}| + |\gamma_{ij}| + \mathcal{O}(u^2)$$

$$|\delta_{ik}| \leq u + (j-1)u + \mathcal{O}(u^2) + (j-1)u + \mathcal{O}(u^2) = (2j-1)u + \mathcal{O}(u^2)$$

Similarmente, $\delta_{ij} = -\gamma_{ij} - \beta + \mathcal{O}(u^2)$ e $|\gamma_{ij}| \leq |\gamma_{ij}| + |\beta| + \mathcal{O}(u^2) \leq ju + \mathcal{O}(u^2)$. Portanto,

$$|\delta_{ik}| \leq 2nu + \mathcal{O}(u^2), \text{ com } k = 1, ..., i$$

Reescrevendo em a equação em função de e_{ij}, obtemos:

$$a_{ij} + e_{ij} = \sum_{k=1}^{i} \hat{r_{ki}} \hat{r_{kj}}$$

Como a matriz do fator de Cholesky $\hat{R}$ é uma matriz triangular, o somatório $\sum_{k=1}^{i} \hat{r_{ki}} \hat{r_{kj}}$ pode ser entendido como a multiplicação da linha i da matriz $\hat{R^T}$ e da coluna j da matriz $\hat{R}$. Portanto, podemos escrever $a_{ij} + e_{ij}$ na forma matricial como:

$$A + E = \hat{R^T} \hat{R}$$

Em relação ao limitante do erro, dado que $|\delta_{ik}| \leq 2nu + \mathcal{O}(u^2)$,

$$|e_{ij}| \leq 2nu \sum_{k=1}^{i} |\hat{r_{ki}}||\hat{r_{kj}}| + \mathcal{O}(u^2)$$

Assim, podemos representar um limitante para a matriz de erros E, como:

$$|E| \leq 2nu|\hat{R^T}||\hat{R}| + \mathcal{O}(u^2)$$

Tomando como base o resultado do exercício 2.7.11(a) e, sendo $\|\hat{R}\|_F = \|\hat{R^T}\|_F$, obtemos trivialmente que, $\|E\|_F \leq 2nu\|\hat{R}\|_F^2 + +\mathcal{O}(u^2)$.

b) Sabendo que a norma de Frobenius é dada por $\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}$, tomando o valor absoluto de $tr(B)$ e utilizando a desigualdade de Schwars, temos:

$$|tr(B)| = \left|\sum_{i=1}^{n} b_{ii}\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} 1 \cdot b_{ii}\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^2\right)^{1/2}$$

$$|tr(B)| \leq (n)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2\right)^{1/2}$$

$$|tr(B)| \leq \sqrt{n} \cdot \|B\|_F$$

c) Sendo $A + E = \hat{R^T} \hat{R}$ e tomando os elementos da diagonal principal da matriz $A + E$, temos:

$$a_{ii} + e_{ii} = \sum_{j=1}^{i} \hat{r}_{ji}^2$$

Sabendo que, $\hat{R}$ e $\hat{R^T}$ são matrizes triangulares, podemos interpretar o resultado acima como:

$$a_{ii} + e_{ii} = \sum_{j=1}^{n} \hat{r}_{ji}^2$$

Assim, traço da matriz $A + E$ será dado por:

$$tr(A+E) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \hat{r}_{ji}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \hat{r}_{ij}^2 = \|\hat{R}\|_F^2$$

De forma análoga, temos que:

$$\|\hat{R}\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \hat{r}_{ij}^2 = tr(A+E)$$

Portanto, sendo a função traço uma transformação linear chegamos ao resultado de que $\|\hat{R}\|_F^2 = tr(A+E) = tr(A) + tr(E)$.

d) Sendo $\|\hat{R}\|_F^2 \leq \sqrt{n}(\|\hat{A}\|_F + \|\hat{E}\|_F)$, substituindo no resultado encontrado no item (a), temos:

$$\|\hat{E}\|_F \leq 2nu\sqrt{n}(\|\hat{A}\|_F + \|\hat{E}\|_F) + \mathcal{O}(u^2)$$
$$\|\hat{E}\|_F \leq 2n^{3/2}u(\|\hat{A}\|_F + \|\hat{E}\|_F) + \mathcal{O}(u^2)$$
$$\|\hat{E}\|_F \leq 2n^{3/2}u\|\hat{A}\|_F + 2n^{3/2}u\|\hat{E}\|_F + \mathcal{O}(u^2)$$
$$(1 - 2n^{3/2}u)\|\hat{E}\|_F \leq 2n^{3/2}u\|\hat{A}\|_F + \mathcal{O}(u^2)$$

Como $2n^{3/2}u < 1$, temos que, $1 - 2n^{3/2}u > 0$, assim podemos dividir ambos os lados da desigualdade por $1 - 2n^{3/2}u$:

$$\|\hat{E}\|_F \leq \frac{2n^{3/2}u}{1 - 2n^{3/2}u}\|\hat{A}\|_F + \frac{\mathcal{O}(u^2)}{1 - 2n^{3/2}u}$$
$$\|\hat{E}\|_F \leq \frac{2n^{3/2}u}{1 - 2n^{3/2}u}\|\hat{A}\|_F + \mathcal{O}(u^2)$$