4ª Lista de Exercícios

Ygor Tavela Alves 10687642

1.7.34)

a) Seja $\hat{A}$ uma matriz obtida à partir de uma matriz A adicionando m vezes a j-ésima linha à i-ésima linha. Sendo M uma matriz obtida à partir da matriz identidade trocando o zero da posição (i, j) por m.

Desta forma, o resultado do produto da matriz elementar de tipo 1 pela matriz A terá como resultado uma matriz, em que, apenas os elementos da i-ésima linha $\hat{a}_{ik}$, com $k = 1, ..., n$, serão diferentes dos elementos da matriz A devido a presença do elemento de valor m na posição (i, j) da matriz identidade em M.

$$\hat{a}_{ik} = ma_{jk} + a_{ik}$$

Isto é, os elementos da i-ésima linha de $\hat{A}$ serão iguais ao de A somando m vezes a j-ésima linha de A. Logo, temos que $\hat{A} = MA$.

b) Sendo M uma matriz triangular superior quando $j > i$ e triangular inferior quando $j < i$. Seja M obtido a partir da matriz identidade substituindo o 0 da posição (i, j) por m, ou seja, sua diagonal principal é unitária. Temos que, pela propriedade de determinantes de uma matriz triangular, $det(M)$ será dado por:

$$det(M) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot ... \cdot a_{nn}$$

Desta forma, sendo $det(\hat{A}) = det(MA) = det(M) \cdot det(A)$, temos que, $det(\hat{A}) = det(A)$.

c) Podemos utilizar o método de eliminação de Gauss-Jordan para obter a matriz inversa M^{-1}. Como M é uma matriz igual à matriz identidade por exceção ao elemento da posição (i, j) que é igual à m, é necessário realizar apenas uma operação elementar por linhas para finalizar o método e obter a matriz inversa. Como queremos anular o valor m, basta escolher a linha da matriz em que o elemento da coluna j é não nulo, ou seja, escolhemos a j-ésima linha, e multiplicamos ela por m, para então subtrair da i-ésima linha. Logo, realizamos a operação por linhas $L_i = L_i - mL_j$. Desta forma, finalizamos o algoritmo para obter a matriz inversa e verifica-se que apenas o elemento m_{ij}^{-1} foi modificado sendo igual à $-m$.

1.7.44)

a) Seja L uma matriz não singular, triangular inferior e quadrada de tamanho n. Podemos tomar como hipótese de indução que para qualquer tamanho n, tal matriz possui inversa L^{-1} que também é triangular inferior.

Caso base: Seja $n = 1$ e $L = [l_{11}]$, trivialmente obtemos sua inversa $L^{-1} = [1/l_{11}]$, que é claramente triangular inferior.

Passo da indução: Seja L_{n-1} uma matriz não singular, triangular inferior e quadrada de tamanho $n-1$, pela hipótese de indução temos que tal matriz possui inversa e ela é triangular inferior. Seja L_n uma matriz quadrada de tamanho n, construída a partir de L_{n-1}, acrescentando uma linha e uma coluna, de tal forma que ela é triangular inferior igual à L_{n-1}, isto é:

$$L_n = \begin{bmatrix} L_{n-1} & 0 \\ l_{n,k} & l_{nn} \end{bmatrix}$$

com $k = 1, ..., n-1$.

Seja $M = L_n^{-1}$, particionando M da mesma forma que L_n, temos:

$$M = \begin{bmatrix} M_{n-1} & m_{k,n} \\ m_{n,k} & m_{nn} \end{bmatrix}$$

Ademais, como $L_n M = I$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} L_{n-1}M_{n-1} & L_{n-1}m_{k,n} \\ l_{n,k}M_{n-1} + l_{nn}m_{n,k} & l_{n,k}m_{k,n} + l_{nn}m_{nn} \end{bmatrix} = I$$

Resolvendo o sistema linear:

$$m_{k,n} = 0$$

$$M_{n-1} = L_{n-1}^{-1}$$

$$m_{nn} = l_{nn}^{-1}$$

Portanto, como $m_{k,n}$ é nulo, L_{n-1}^{-1} e l_{nn}^{-1} é triangular inferior, temos que a matriz M também será triangular inferior.

Logo, sendo L uma matriz quadrada não singular e triangular inferior, a sua inversa L^{-1} será triangular inferior para qualquer tamanho n.

b) De forma análoga ao item anterior, podemos verificar indutivamente que as entradas da diagonal principal de L^{-1} são $l_{11}^{-1}, l_{22}^{-1}, ..., l_{nn}^{-1}$. Basta verificar que na base da indução e no passo da indução encontramos, respectivamente, $m_{11} = l_{11}^{-1}$ e $m_{nn} = l_{nn}^{-1}$. Desta forma, L^{-1} será triangular inferior unitária se L também for.

1.7.45)

a) Seja L e M matrizes triangulares inferiores, temos que, LM será dado por:

$$LM = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & m_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

$$LM = \begin{bmatrix} l_{11} \cdot m_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} \cdot m_{11} + l_{22} \cdot m_{21} & l_{22} \cdot m_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=n,\dots,1} l_{nk} \cdot m_{k1} & \sum_{k=n,\dots,2} l_{nk} \cdot m_{k2} & \dots & \sum_{k=n,\dots,n} l_{nk} \cdot m_{kn} \end{bmatrix}$$

Logo, caso $i \geq j$, temos que, a entrada a_{ij} da matriz resultado do produto entre as matrizes L e M, será dado por:

$$a_{ij} = \sum_{k=i,\dots,j} l_{ik} \cdot m_{kj}$$

Caso contrário, isto é $i < j$, temos que $a_{ij} = 0$. Portanto, a matriz LM será triangular inferior.

b) Utilizando o item anterior e tomando os valores de entrada de a_{ij} como sendo os da diagonal principal, ou seja, $i = j$, temos que:

$$a_{ij} = a_{ii} = l_{ii} \cdot m_{ii}$$

Desta forma, todos os elementos da diagonal principal de LM são da forma $l_{11} \cdot m_{11}, ..., l_{nn} \cdot m_{nn}$. Assim, o produto de duas matrizes triangulares inferiores unitárias terá como resultado uma matriz triangular inferior unitária.