5ª Lista de Exercícios

Ygor Tavela Alves 10687642

2.2.23)

a) Pelo método da matriz adjunta, obtemos de forma direta A^{-1}.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 375 & -187 \\ -376 & 375/2 \end{bmatrix}$$

$$\kappa_\infty(A) = ||A||_\infty \cdot ||A^{-1}||_\infty = 1502 \cdot 563,5 = 846377$$

b) Dado que a quantidade pela qual um vetor é ampliado depende apenas da sua direção e não do seu comprimento. Logo, podemos escolher b de tal forma que ele tenha direção de mínima ampliação por A^{-1} e δb na direção de máxima ampliação por A^{-1}, para obter um caso nas condições pedidas. Sendo,

$$\begin{bmatrix} 375 & 374 \\ 752 & 750 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 749 \\ 1502 \end{bmatrix}$$

temos que o fato de ampliação $||Ax||_\infty / ||x||_\infty$ será igual à 1502 que é igual à $||A||_\infty$. Desta forma, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um vetor que é ampliado maximalmente por A e, como a quantidade pela qual um vetor e ampliado depende apenas da sua direção, podemos dizer que o vetor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ está na direção de máxima ampliação por A. Equivalentemente, $\begin{bmatrix} 749 \\ 1502 \end{bmatrix}$ está na direção de mínima ampliação por A^{-1}. Olhando agora para,

$$\begin{bmatrix} 375 & -187 \\ -376 & 375/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 562 \\ -563,5 \end{bmatrix}$$

temos que o fato de ampliação $||A^{-1}x||_\infty / ||x||_\infty$ será igual à $563,5$ que é igual à $||A^{-1}||_\infty$. Assim, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ é um vetor que está na direção de máxima ampliação por A^{-1}. Observando que,

$$\begin{bmatrix} 375 & 374 \\ 752 & 750 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 562 \\ -563,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

temos que $\begin{bmatrix} 562 \\ -563,5 \end{bmatrix}$ está na direção de mínima ampliação por A.

c) Analogamente ao item anterior, podemos escolher x de tal forma que esteja na direção de mínima ampliação por A, enquanto que, δx na direção de máxima ampliação por A. Assim, obteremos um caso nas condições pedidas.

2.3.13)

Seja $\hat{x} = x + \delta x$ e $Ax = b$, temos que,

$$(A + \delta A) \cdot (x + \delta x) = b + \delta b \Rightarrow \delta x = A^{-1}(\delta b - \delta A \hat{x})$$

Portanto,

$$||\delta x|| \leq ||A^{-1}|| \cdot (||\delta b - \delta A \hat{x}||) \leq ||A^{-1}|| \cdot (||\delta b|| + ||\delta A|| \cdot ||\hat{x}||)$$

Pela desigualdade triangular temos:

$$||\delta x|| \leq ||A^{-1}|| \cdot (||\delta b|| + ||\delta A|| \cdot (||x|| + ||\delta x||)) \leq ||A^{-1}|| \cdot (||\delta b|| + ||\delta A|| \cdot ||x|| + ||\delta A|| \cdot ||\delta x||)$$

$$||\delta x|| - ||A^{-1}|| \cdot ||\delta A|| \cdot ||\delta x|| \leq ||A^{-1}|| \cdot (||\delta b|| + ||\delta A|| \cdot ||x||)$$

$$||\delta x||(1 - ||A^{-1}|| \cdot ||\delta A||) \leq ||A^{-1}|| \cdot (||\delta b|| + ||\delta A|| \cdot ||x||)$$

$$||\delta x||(1 - \kappa(A) \cdot \frac{||\delta A||}{||A||}) \leq \kappa(A) \cdot (\frac{||\delta b||}{||A||} + \frac{||\delta A|| \cdot ||x||}{||A||})$$

Pela hipótese $||\delta A||/||A|| < 1/\kappa(A) \Rightarrow (1 - \kappa(A) \cdot \frac{||\delta A||}{||A||}) > 0$. Assim,

$$||\delta x|| \leq \frac{\kappa(A) \cdot (\frac{||\delta b||}{||A||} + \frac{||\delta A|| \cdot ||x||}{||A||})}{1 - \kappa(A) \cdot \frac{||\delta A||}{||A||}}$$

Dividindo ambos os lados por $||x||$, temos:

$$\frac{||\delta x||}{||x||} \leq \frac{\kappa(A) \cdot (\frac{||\delta b||}{||A|| \cdot ||x||} + \frac{||\delta A||}{||A||})}{1 - \kappa(A) \cdot \frac{||\delta A||}{||A||}}$$

Pelo **Teorema 2.1.24** e seja $Ax = b$, temos

$$||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x|| \Rightarrow \frac{1}{||A|| \cdot ||x||} \leq \frac{1}{||Ax||} = \frac{1}{||b||}$$

Portanto, temos que

$$\frac{||\delta x||}{||x||} \leq \frac{\kappa(A) \cdot (\frac{||\delta A||}{||A||} + \frac{||\delta b||}{||b||})}{1 - \kappa(A) \cdot \frac{||\delta A||}{||A||}}$$