9ª Lista de Exercícios

Ygor Tavela Alves 10687642

3.4.26)

Sendo,

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \epsilon \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \epsilon \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \epsilon \end{bmatrix}$$

onde $\epsilon \ll 1$.

a) Usando o algoritmo clássico de Gram-Schmidt para ortogonalizar tais vetores, tomando a aproximação $1 + \epsilon^2 = 1$, temos:

1ª iteração:

$r_{11} = \sqrt{1 + \epsilon^2} = 1$

$$q_1 = (1/r_{11}) \cdot v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \epsilon \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2ª iteração:

$r_{12} = \langle v_2, q_1 \rangle = 1$

$$v_2 = v_2 - q_1 \cdot r_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\epsilon \\ \epsilon \\ 0 \end{bmatrix}$$

$r_{22} = \sqrt{\epsilon^2 + \epsilon^2} = \epsilon\sqrt{2}$

$$q_2 = (1/r_{22}) \cdot v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

3ª iteração:

$r_{13} = \langle v_3, q_1 \rangle = 1$

$r_{23} = \langle v_3, q_2 \rangle = 0$

$$v_3 = v_3 - q_1 \cdot r_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\epsilon \\ 0 \\ \epsilon \end{bmatrix}$$

$$v_3 = v_3 - q_2 \cdot r_{23} = v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\epsilon \\ 0 \\ \epsilon \end{bmatrix}$$

$r_{33} = \sqrt{\epsilon^2 + \epsilon^2} = \epsilon\sqrt{2}$

$$q_3 = (1/r_{33}) \cdot v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Temos que, $\langle q_2, q_3 \rangle = 0 + \frac{1}{2} + 0 + 0 = \frac{1}{2}$, isto é, são vetores longe de serem ortogonais.

b) Usando o algoritmo modificado de Gram-Schmidt para ortogonalizar tais vetores, tomando a aproximação $1 + \epsilon^2 = 1$, temos:

1ª iteração:

$r_{11} = \sqrt{1 + \epsilon^2} = 1$

$$q_1 = (1/r_{11}) \cdot v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \epsilon \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2ª iteração:

$r_{12} = \langle v_2, q_1 \rangle = 1$

$$v_2 = v_2 - q_1 \cdot r_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\epsilon \\ \epsilon \\ 0 \end{bmatrix}$$

$r_{22} = \sqrt{\epsilon^2 + \epsilon^2} = \epsilon\sqrt{2}$

$$q_2 = (1/r_{22}) \cdot v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

3ª iteração:

$r_{13} = \langle v_3, q_1 \rangle = 1$

$$v_3 = v_3 - q_1 \cdot r_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\epsilon \\ 0 \\ \epsilon \end{bmatrix}$$

$r_{23} = \langle v_3, q_2 \rangle = \epsilon/\sqrt{2}$

$$v_3 = v_3 - q_2 \cdot r_{23} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\epsilon/2 \\ -\epsilon/2 \\ \epsilon \end{bmatrix}$$

$r_{33} = \sqrt{\epsilon^2/4 + \epsilon^2/4 + \epsilon^2} = \frac{\epsilon}{2}\sqrt{6}$

$$q_3 = (1/r_{33}) \cdot v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Temos que,

$$\langle q_2, q_3 \rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0$$

$$\langle q_1, q_2 \rangle = -\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$$

$$\langle q_1, q_3 \rangle = -\frac{\epsilon}{\sqrt{6}}$$

isto é, a versão modificada produziu vetores que são mais próximos de serem ortogonais entre si.