Reconnaissance et indexation de formes

Quentin Cormier Yassine Hamoudi

4 mai 2015

Table des matières

1 Introduction

Il existe de nombreuses manières de caractériser une image en vue de reconnaître l'objet qu'elle représente. Cependant, la plupart des descripteurs "élémentaires" (périmètre de l'image, nombre de composantes connexes, surface ...) sont peu efficaces individuellement et nécessitent d'être combinés astucieusement pour donner de bons résultats.

Nous avons recherché un moyen robuste et plus concis de classifier en 70 catégories le millier d'images du projet. Notre méthode consiste à étudier la propagation d'une onde à l'intérieur d'une image. En effet, cette propagation dépend directement de la forme de l'objet. De la même manière que deux tambours de forme circulaire renvoient des sons similaires, deux images de pommes devraient propager les ondes de façon identiques. Par ailleurs, cette méthode semble insensible à de nombreuses perturbations (rotation, translation, dilatation...).

Notre travail s'inspire de [**?**] et [**?**]. Nous étudierons dans un premier temps quels descripteurs peuvent être construits à partir du problème de la propagation d'une onde dans une image. Nous chercherons également la métrique la plus appropriée pour comparer deux vecteurs descripteurs associés à deux images. La robustesse de notre algorithme à différentes perturbations (rotation, bruit...) sera également vérifiée théoriquement et expérimentalement.

2 Méthode

L'objectif est de classifier un certain nombre d'images noir et blancs en une catégorie parmi 70 possibles. On dispose pour cela d'une dizaine d'images "d'entraînement" par catégories (le *training set*, noté T).

A partir de ces images d'entrainement on doit pouvoir classifier une image inconnu dans l'une de ces 70 catégories.

Au vu de la taille relativement restreinte du *training set*, on décide d'encoder l'image en un vecteur de réels (le *descripteur* associé à l'image), et d'utiliser une distance entre deux descripteurs pour classifier une image inconnue.

Ainsi, pour une image inconnue M, on calcule le descripteur associé d_M, puis on cherche l'image la plus proche dans le *training set* :

$$M' = argmin_{M' \in T} d(d_M, d_{M'}),$$

d étant la distance entre descripteurs choisie.

On prédit alors la classe de M comme étant la même que celle de M'

2.1 Descripteur associé à l'image

La partie principale du projet est donc le calcul du descripteur associé à l'image. Ce vecteur de réels, doit varier en fonction de la forme de l'image. Idéalement, deux images ayant des formes similaires doivent donner deux descripteurs similaires.

Dans la mesure du possible, il doit être également invariant par translation, par rotation et par dilatation : translater une image, la tourner, l'agrandir ou la rétrécir ne change pas la catégorie de l'image, et donc ne devrait pas changer le descripteur. On aimerait également une robustesse au bruit : un léger bruit ne doit que modifier très légèrement le descripteur.

On choisit ici d'utiliser un descripteur inspiré par la physique qui respecte, on le verra, toutes ces contraintes.

Onde associé à un domaine

En physique, il est bien connu qu'une onde stationnaire se propageant dans une cavité ne peut se propager seulement qu'en certaines fréquences discrètes qui dépendent de la forme de la cavité. On se propose de construire un descripteur basé sur ces fréquences. On comprends bien qu'il sera facile de garantir l'invariance par rotation et translation : tourner ou bouger la cavité ne change pas les fréquences qui peuvent se propager dans ladite cavité !

Une onde dans une cavité vérifie l'équation suivante :

$$\Delta E + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

avec par exemple : $E(x, y, t)$ nulle sur les bords de la cavité (condition aux limites de Dirichlet).

Si l'on recherche les solutions stationnaires, on pose $E = f(x, y)e^{iwt}$, et on obtient :

$$\Delta f - \frac{w^2}{v^2} f = 0,$$

f s'annulant sur les bords de la cavité.

Ainsi, on peut voit f comme un vecteur propre de l'opérateur Laplacian et $\frac{w^2}{v^2}$ la valeur propre associée.

Calcul du descripteur

3 Résultats

Nous exposons les résultats obtenus grâce à la méthode détaillée précédemment. Nous allons étudier dans un premier temps la sensibilité de notre algorithme aux perturbations (rotation, redimensionnement, bruit, ...), puis nous détaillerons les résultats de classification sur le dataset d'images.

3.1 Sensibilité aux perturbations

Les valeurs propres du Laplacien de Dirichlet vérifient un certain nombre de propriétés mathématiques qui garantissent que notre descripteur est insensible au redimensionnement, à la rotation et à la translation. Nous vérifions expérimentalement ces propriétés ci-dessous.

Redimensionnement Etant donné un domaine Ω et un facteur $a > 0$, on a $\lambda_k(a\Omega) = \frac{\lambda_k(\Omega)}{a^2}$ (voir

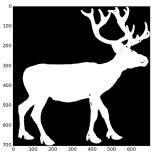
[?]). Or, notre descripteur utilise des rapports de valeurs propres, il est donc inchangé par redimensionnement : $\frac{\lambda_k(a\Omega)}{\lambda_m(a\Omega)} = \frac{\lambda_k(\Omega)}{\lambda_m(\Omega)}$. Nous avons calculé différents rapports pour l'image `camel-1.pgm`, les résultats figurent table 1. Les variations d'une image à l'autre peuvent s'expliquer par les dégrations des contours suite au redimensionnement. Les rapports restent tout de même très proches. En pratique, nous utilisons une longueur de 50 pixels afin d'obtenir des temps de calcul raisonnables (environ 20s pour calculer les valeurs propres associées à une image de taille 50x50).

	λ_1/λ_2	λ_1/λ_3	λ_1/λ_4	λ_2/λ_3	λ_3/λ_4	λ_4/λ_5
75 pixels	0.63	0.42	0.36	0.67	0.84	0.89
50 pixels	0.61	0.42	0.32	0.68	0.83	0.89
25 pixels	0.53	0.39	0.31	0.73	0.80	0.81

TABLE 1 – Rapports de valeurs propres en fonctions de la longueur de l'image `camel-1.pgm` redimensionnée (l'image initiale est de taille 346x346)

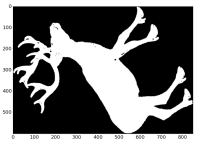
Translation Nous recadrons systématiquement l'image afin de conserver le plus petit rectangle contenant la figure. Ceci nous permet d'être insensible aux translations.

Rotation Il a été démontré mathématiquement que les valeurs propres sont inchangées lorsque le domaine subit une rotation (voir [?]). Ce résultat se vérifie facilement à partir de quatre rotations appliquées sur `deer-20.pgm`. Les valeurs propres associées à chaque figure sont regroupées dans la table 2.

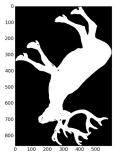


0 degré

30 degrés



120 degrés



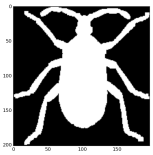
220 degrés

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8
0 degré	118.57	177.16	252.35	285.53	361.22	404.89	420.69	489.36
30 degrés	120.28	182.75	257.54	297.97	370.39	413.53	426.99	472.08
120 degrés	120.29	182.88	266.09	308.13	372.66	414.83	428.60	472.21
220 degrés	120.42	182.95	250.94	299.81	366.01	406.55	424.32	478.39

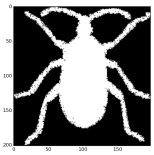
TABLE 2 – Valeurs propres associées à `deer-20.pgm` en fonctions de l'angle de rotation

Bruit Le bruit peut déformer le domaine de l'image et modifier par conséquent les valeurs propres. Cependant, les premières valeurs propres $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots)$ correspondent à la fondamentale et aux premières harmoniques, et donc aux composantes de la solution au Laplacien de Dirichlet de longueur d'onde élevé. Par conséquent, on peut s'attendre à ce qu'une déformation relativement faible du contour impacte peu ces valeurs (contrairement aux valeurs associées à des longueurs d'onde faibles). Vrai ? Par ailleurs, le redimensionnement systématique de l'image que l'on applique permet de gommer partiellement le bruit.

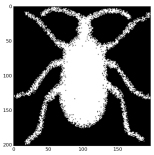
Afin de tester la robustesse au bruit, nous avons implémenté un modèle de bruit de Kanungo (pour un facteur de bruit $0 \leq a \leq 1$, tout point x du domaine à distance d du bord est colorié en noir avec probabilité a^d). La table 3 démontre le faible impact du bruit sur les valeurs propres.



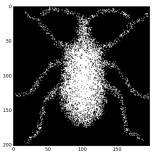
Bruit 0



Bruit 0.3



Bruit 0.6



Bruit 0.9

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8
Bruit 0	83.93	153.41	258.76	263.10	353.64	378.19	495.73	500.11
Bruit 0.3	84.20	154.12	259.27	264.12	354.84	379.19	498.19	504.15
Bruit 0.6	84.42	155.22	262.05	264.96	355.90	388.19	503.35	514.37
Bruit 0.9	87.02	157.19	264.77	276.22	363.54	388.21	506.28	522.61

TABLE 3 – Valeurs propres associées à `beetle-13.pgm` en fonctions du facteur de bruit

3.2 Performances

Nous avons testé notre algorithme avec 4 distances différentes :

— Distance euclidienne : $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$.

— Distance de Minkowski (facteur 10) : $d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^{10}\right)^{1/10}$.

— Distance euclidienne carrée (sqeuclidean) : $d(x,y) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2$.

— Distance cosine : $d(x,y) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}{\|x\|_2 \|y\|_2}$.

Nous avons utilisé soit des descripteurs de type 1 $(\lambda_1/\lambda_2, \lambda_1/\lambda_3, \lambda_1/\lambda_4, \dots)$, soit de type 2 $(\lambda_1/\lambda_2, \lambda_2/\lambda_3, \lambda_3/\lambda_4, \dots)$.

Etant donné un descripteur (de taille fixée) et une distance, nous avons séparé les 1050 images en deux catégories : un train set (composé d'environ 80% des images) et un test set (constitué des images restantes). Pour chaque image du test set nous avons recherché l'image du train set qui minimise la distance utilisée. L'algorithme de classification réussit si les deux images appartiennent à la même catégorie.

Nous avons répété 20 fois l'expérience précédente (parallélisée sur 4 coeurs) afin d'obtenir des écarts types inférieurs à 0.03. Les pourcentages de réussites sont regroupés figure 1 pour le descripteur 1 et figure 2 pour le descripteur 2.

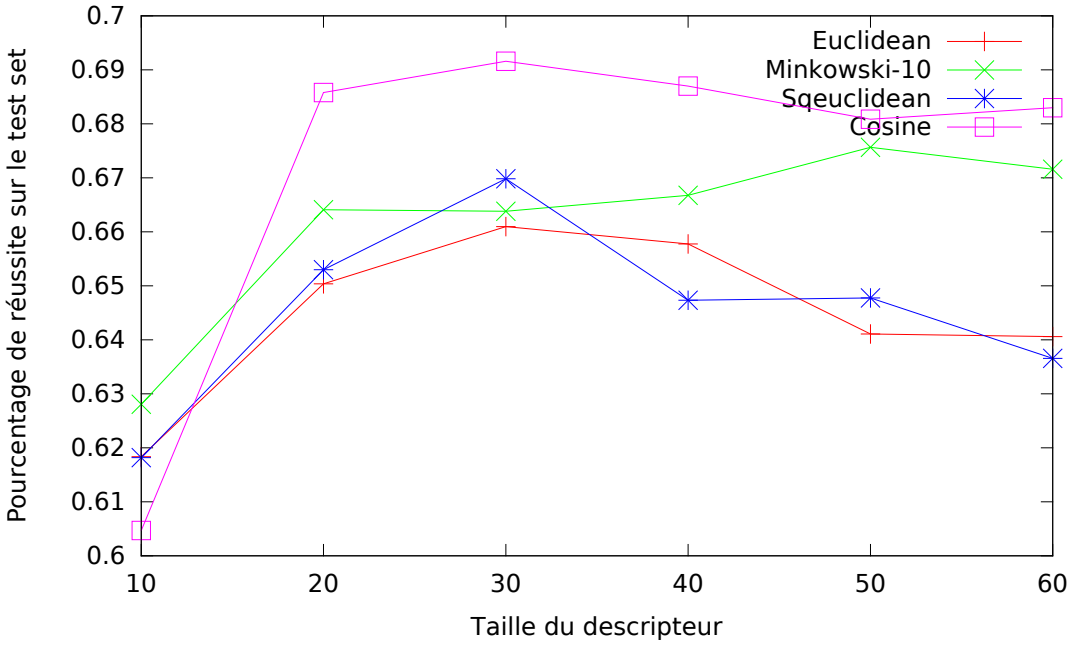


FIGURE 1 – Performances du descripteur 1 selon la distance utilisée

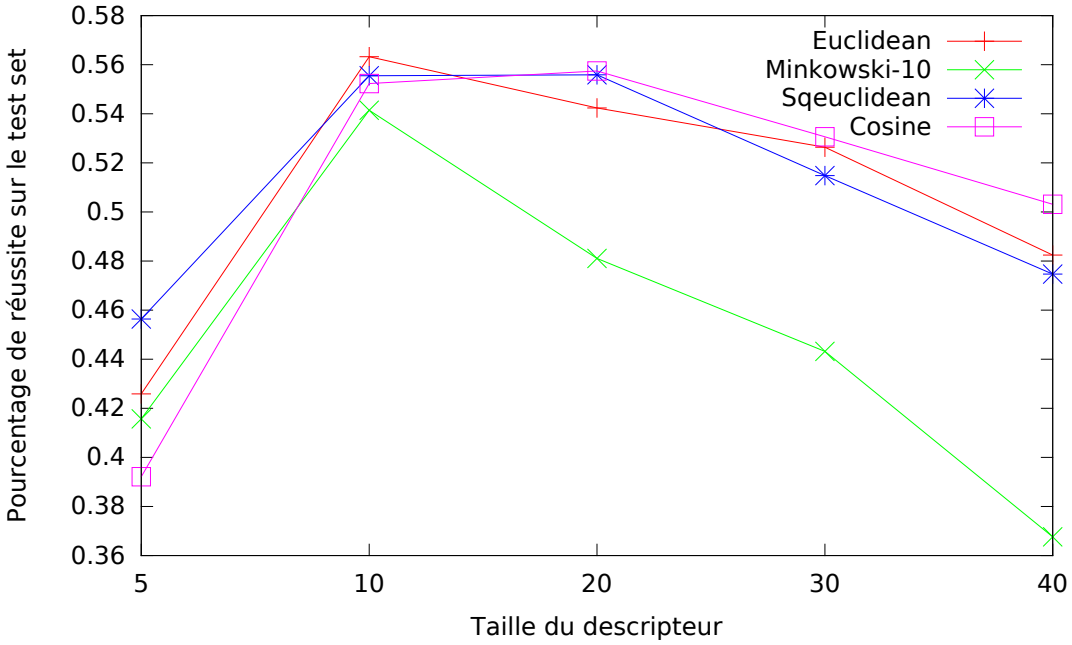


FIGURE 2 – Performances du descripteur 2 selon la distance utilisée

4 Discussion

5 Conclusion

Bonus

Nous avons essayé de reconstruire un son à partir des valeurs propres du Laplacien de Dirichlet. Pour cela, à partir du spectre des valeurs propres $\{\lambda_1, \lambda_2, ...\}$ de l'image, on en déduit les fréquences pouvant se propager dans la cavité définie par l'image, de la forme $\{\alpha\sqrt{\lambda_1}, \alpha\sqrt{\lambda_2}, ...\}$, α étant une constante choisie de façon à ce que le spectre obtenu soit compris entre 100Hz et 2kHz.

En pratique, $\alpha = 40$, on ne retient que 3 valeurs propres. Enfin on associe la même puissance à chacune des 3 fréquences calculées.

On peut s'amuser à changer ces différents paramètres pour entendre des sons différents.

Afin d'entendre le son associé à l'image `beetle-11.pgm` par exemple, entrer :

```
python3 sound.py database/beetle-11.pgm
```

Nous avons également développé un petit jeu, accessible par :

```
python3 sound_game.py
```

Il s'agit de retrouver parmi les sons de plusieurs objets celui appartenant à la même catégorie qu'un motif de départ.