微分方程与线性代数

开放课程	:	https://ocw.mit.edu/
课程编号	:	18.03、18.06、RES.18-009
主讲教师	:	Prof. Haynes Miller、Prof. Gilbert Strang
所属学科	:	Mathematics
笔记作者	:	Hao Y.

Author : Hao Y.

目录

Author : Hao Y.

0. 介绍

0.1 大纲概述

一阶方程(一阶条件会告知曲线的斜率信息):

标准型:

$$\frac{dy}{dx} + g(t)y = f(t)$$

未知数y随时间的变化部分依赖于解本身，部分依赖于外部输入f(t)——输入项[强迫项];
f(t)可能为发散、收敛、震荡的输入;

伯努利方程:

$$y' = P(x)y + Q(x)y^n$$

齐次变量:

$$y' = F(\frac{y}{x})$$

改变单位;
将变量更改为“无量纲”量——不受单位约束的纯数字;
减少或简化方程中的常数部分;

一阶自治:

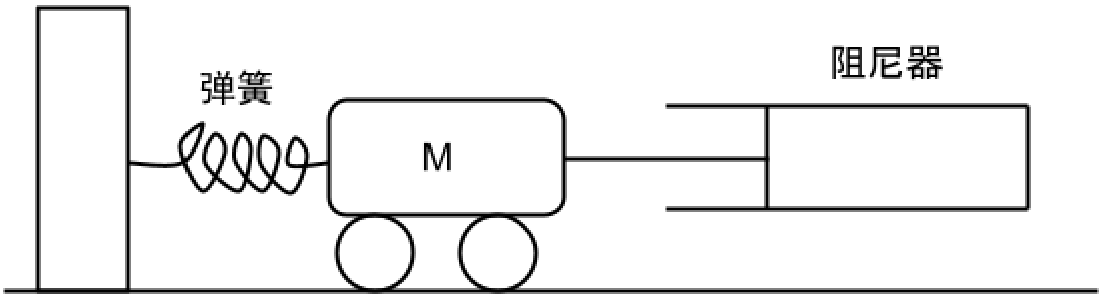
$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

系统变化不依赖时间，非线性结构，y随时间的变化依赖于自身的非线性结构。
(脉冲输入可以作为狄拉克函数进行输入)
(震荡输入可以作为复指数进行输入——取实部Re(·)/虚部Im(·))

二阶方程(二阶条件会告知曲线的弯曲程度信息):

$$\frac{d^2y}{dt^2} =- ky$$

未知数y随时间的变化速率依赖于其与原点位置的差值;



$$my'' + by' + ky = f(t)$$

稳态系统中，物体受到系统内影响的总程度等于系统的外部输入量;
总外力大小+阻尼力+弹力=系统外部输入。
(高阶系统一般不讨论非线性方程，只考虑常系数、线性方程)
(若存在高阶非线性方程存在，常规解法几乎全部失效，只能考虑数值解法[近似])

n阶方程系统:

$$\frac{dy}{dx} = Ay$$

y为n×1的矩阵，记录全部变量信息;

Author : Hao Y.
A为一个n×n矩阵；
由n个常系数方程耦合的系统；

$$\frac{d^2y}{dt^2} =- Sy$$

y为n×1的矩阵，记录全部变量信息；
S为一个n×n矩阵，一般为对称矩阵（希望为对称矩阵）；
由n个常系数方程耦合的系统；
（引入特征值和特征向量对系统进行解耦）
（应用于计算机的数值解法[起源于欧拉]可以解决更多分析问题）

偏微分方程（三大核心方程）：
热核方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Author : Hao Y.

0.2 所需微积分知识

导数:x^n、$\sin x$、$\cos x$、e^x、$\ln x$

函数f和g的求导法则:

求和法则:

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

乘积法则:

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

商法则:

$$[\frac{f(x)}{g(x)}]' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

复合法则:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$$

微积分基本定理:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x y(t)dt = y(x)$$

图像性质(一阶导——斜率、二阶导——曲率、……):

泰勒公式:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x\frac{df}{dx}(x) + \frac{1}{2}(\Delta x)^2\frac{d^2f}{dx^2}(x) + ... + \frac{1}{n!}(\Delta x)^n\frac{d^nf}{dx^n}(x)$$

Author : Hao Y.

1. 一阶方程

1.1 一阶线性微分方程

ODE(标准式):

$$\frac{dy}{dt} + g(t)y = f(t)$$

初值:

$$y = y(0)\ at\ t = 0$$

求解:

$$\frac{d}{dt}[ye^{\int_0^t g(x)dx}] = f(t)e^{\int_0^t g(x)dx}$$

$$ye^{\int_0^t g(x)dx} = \int_0^t f(s)e^{\int_0^s g(x)dx} ds + y(0)$$

$$y(t) = (e^{-\int_0^t g(x)dx})(\int_0^t f(s)e^{\int_0^s g(x)dx} ds) + y(0)e^{-\int_0^t g(x)dx}$$

$y(t) = y_p + y_n$(解=特解+通解);

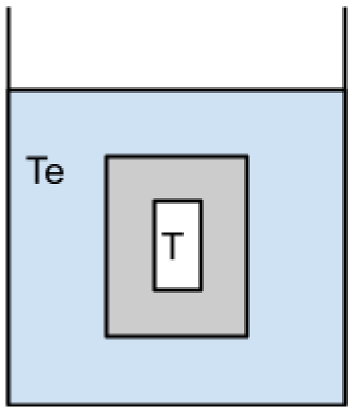
Example:

初始:

$$T(0) = T_0$$

ODE(k为材料的热传导因子、T_e为外层溶液温度、T为内层温度):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k(T_e - T)$$



Author : Hao Y.

1.2 一阶代换方程

伯努利ODE(建模非线性约束):

$$y' = P(x)y + Q(x)y^n$$
$$n \neq 0, 1$$

求解:

$$\frac{y'}{y^n} = P(x)\frac{1}{y^{n-1}} + Q(x)$$

令

$$v(x) = y^{1-n}(x)$$

则:

$$\frac{v'}{1-n} = P(x)v + Q(x)$$
$$v' + (n-1)P(x)v = -(n-1)Q(x)$$

化为标准一阶线性方程;

一阶齐次ODE(建模角度变化):

$$y' = F(\frac{y}{x})$$

求解:
令:

$$z = \frac{y}{x}$$

则:

$$z' = \frac{y'x-y}{x^2}$$

即有:

$$xz' + z = F(z)$$
$$\frac{dz}{F(z)-z} = \frac{dx}{x}$$

化为变量分离形式;

Example: O点灯光照射, 船沿光线α夹角跑, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, 问:船航线如何?

对船:

$$y' = tan(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{tan\theta + tan\frac{\pi}{4}}{1-(tan\theta)(tan\frac{\pi}{4})} = \frac{1+tan\theta}{1-tan\theta} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$$

令:

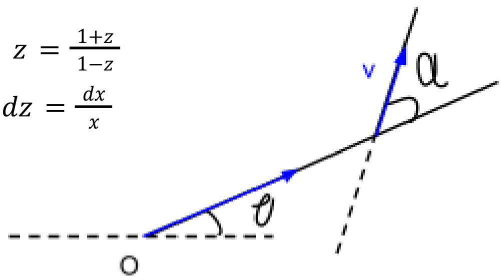
$$z = \frac{y}{x}$$

则:

$$z' = \frac{y'x-y}{x^2}$$

即:

$$xz' + z = \frac{1+z}{1-z}$$
$$\frac{1-z}{1+z^2}dz = \frac{dx}{x}$$



1.3 一阶自治方程

自治ODE（建模变化自相关）：

$$\frac{dy}{dt} = f(x)$$

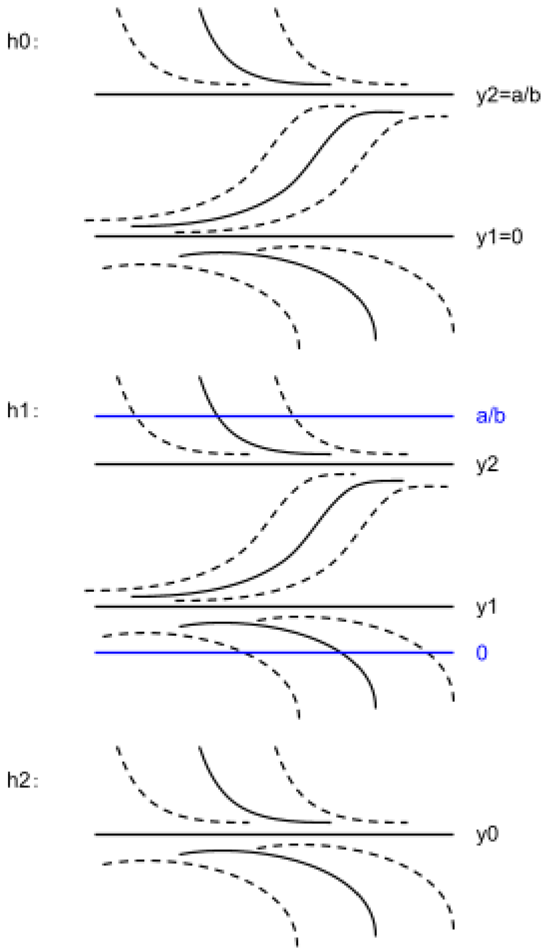
系统变化不依赖时间；
获取方程关键信息，整合求解（通常求不出解析解），指导决策；
求解：

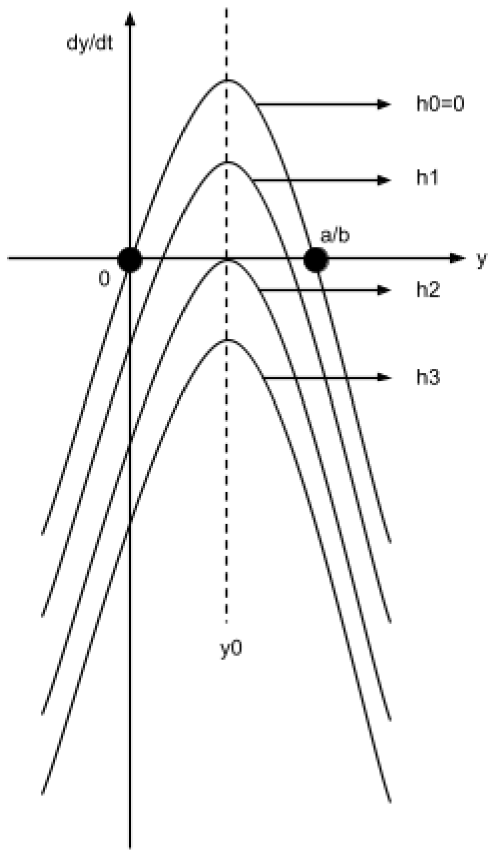
$$令 f(y_0) = 0，则 y = y_0 是方程的解$$

Example：

$$y = 养殖鱼主总数，k = 增长率，k = k(y) = a - by，h = 捕捞量(常数)$$

$$\frac{dy}{dx} = ay - by^2 - h$$





Author : Hao Y.

1.4 阶跃函数和狄拉克[δ]函数

（脉冲输入）

标准阶跃函数：

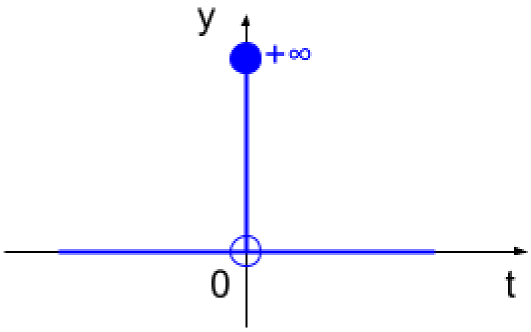
$$H(t) = 0(if\ t < 0), 1(if\ t \geq 0)$$

阶跃函数位移：

$$H(t - T) = 0(if\ t < T), 1(if\ t \geq T)$$

阶跃函数导数（狄拉克δ函数）：

$$\delta(t) =+ \infty(if\ t = 0), 0(otherwise)$$



δ函数积分：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = H(t)|_{-\infty}^{+\infty} = 1$$

δ函数加权积分：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)f(t)dt = f(0)$$

δ函数位移加权积分：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - T)f(t)dt = f(T)$$

δ函数的脉冲响应：

$$\frac{dy}{dx} + g(t)y = \delta(t - T)$$

$$y(0) = 0$$

求解：

$$y(t) = 0(if\ t < T), e^{-\int_T^t g(x)dx} (if\ t \geq T)$$

Author : Hao Y.

1.5 复数和复指数

（震荡输入）
复数及其运算：

$$z_1 = a + bi、z_2 = c + di$$

定义：

$$i^2 =- 1$$

共轭：

$$\overline{z_1} = a - bi$$

加法：

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

乘法：

$$z_1 z_2 = ac - bd + (ad + bc)i$$

除法：

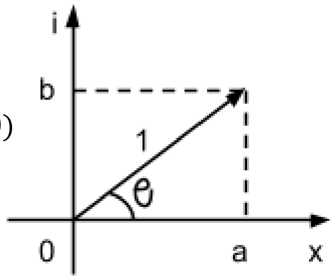
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}$$

极坐标转换：
欧拉公式：

$$e^{i\theta} = cos\,\theta + i\,sin\,\theta$$

复数的几何法表示：

$$\begin{aligned} a + bi &= \sqrt{a^2 + b^2}(cos\,\theta + i\,sin\theta) \\ &= r(cos\,\theta + i\,sin\theta) \\ &= re^{i\theta} \end{aligned}$$



指数定律：

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} &= (cos\,\theta_1 + i\,sin\,\theta_1)(cos\,\theta_2 + i\,sin\,\theta_2) \\ &= cos\,\theta_1 cos\,\theta_2 - sin\,\theta_1 sin\,\theta_2 + i(sin\,\theta_1 cos\,\theta_2 + cos\,\theta_1 sin\,\theta_2) \\ &= cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,sin(\theta_1 + \theta_2) \\ &= e^{i(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned}$$

满足指数函数微分：

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}e^{i\theta} &= \frac{d}{d\theta}(cos\,\theta + i\,sin\,\theta) \\ &=- sin\,\theta + i\,cos\,\theta \\ &= i(cos\,\theta + i\,sin\,\theta) \\ &= ie^{i\theta} \end{aligned}$$

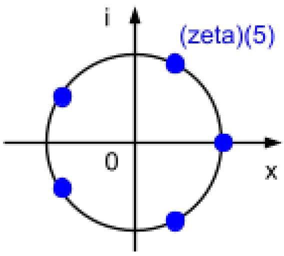
满足泰勒展开；

Example：

$$(zeta)\zeta(n) = \sqrt[n]{1} = e^{i\frac{2\pi}{n}}$$

if n=5，几何位置：

$$\zeta(5)$$



Author : Hao Y.

2. 二阶方程

2.1 二阶线性常系数齐次方程

3. 图解法和数值法

4. 向量空间和子空间

5. 特征值和特征向量

6. 应用数学和ATA

7. 傅里叶变换和拉普拉斯变换