图论选讲

4182_543_731

2024/07

温馨提示

题目首先按照大概的知识点分为若干部分。
为响应相关要求，每一部分内部大概按照难度排序。
所有数默认**非负**，边权默认 10^9 级别，时限默认合理范围（$1s \sim 2s$）。

Contents

[CF528C/527E] Data Center Drama

给一张**连通**无向图，点数为 n 边数为 m。

你需要加尽量少的边（允许重边自环），然后给每条边定向，使得任意点入度出度为偶数，构造方案。

$n, m \leq 10^5$

提示：合法的条件是什么？

[ural2132] Graph Decomposition. Version 2 / 2019 高联组合

给一张 n 个点 m 条边的**简单连通**图，将边两两配对，使得每一对边有公共点。构造方案或输出无解。

$n, m \le 10^5$

[CF888G] Xor-MST

给 n 个点，点有非负点权 v_i。
任意两点 i,j 间存在边权为 $v_i \oplus v_j$ 的边，求最小生成树的边权和。
$n \le 2 \times 10^5, v < 2^{30}$

一道题

有 n 个点 m 条边的无向图，每条边的边权是 $c_i + x$ 或 $c_i - x$。
q 次询问，每次给一个 x，求最小生成树边权和。
$n, q \leq 10^5, m \leq 4 \times 10^5$

[JOISC 2022] Reconstruction Project

有 n 个点 m 条边的无向图，每条边有一个权值（不是边权）c_i。
q 次询问，每次给一个 x，然后每条边的边权为 $|c_i - x|$，求最小生成树边权和。
$n \le \cancel{500}\ 10^5, m \le 10^5, q \le 10^6$

Contents

[CF786B/787D] Legacy

有 n 个点和 m 条边，但每条边为如下形式之一：

- 可以用 c_i 的代价，从 u_i 走到 v_i，即正常的边。
- 可以用 c_i 的代价，从 u_i 走到 $[l_i, r_i]$ 中的任意一个点。
- 可以用 c_i 的代价，从 $[l_i, r_i]$ 中的任意一个点走到 v_i。

求 s 出发的单源最短路。

$n, m \le 10^5$

[NOI 2019] 弹跳

二维平面上有 n 个点，给定 m 条如下形式的边：

- 从点 u_i 出发，花费 c_i 的代价，到达矩形 $[lx_i, rx_i] \times [ly_i, ry_i]$ 中的任意一个点。

求 s 出发的单源最短路。

$n \leq 7 \times 10^4, m \leq 1.5 \times 10^5$

空间限制 **128MB**

差分约束

差分约束问题

给许多形如 $x_j - x_i \le v$ 的限制，问是否有解，并构造一组解。

在最短路中，我们有三角形不等式的限制：记 d_i 表示某个点到 i 的最短路，则对于边 (i, j, v) 有 $d_j \le d_i + v$，这就是我们想要的。

将每个限制变为有向边 (i, j, v)。如果存在负环，则将限制加起来可以得到 $0 < -c$ 的矛盾，从而无解。否则，最短路 d_i 可以给出一组解。

一般来说造出来的图会强连通，所以直接做就行。但有些时候需要仔细加点边避免神必情况。

显然一个正常的差分约束会有负权边，因此不能用 Dijkstra。

「联合省选 2021 A」矩阵游戏

给一个 $(n-1)\times(n-1)$ 的整数矩阵 b，你需要找到一个 $n\times n$ 的整数矩阵 a 满足：

- $a_{i,j}\in[0,10^6]$
- $b_{i,j}=a_{i,j}+a_{i,j+1}+a_{i+1,j}+a_{i+1,j+1}$

构造方案或输出无解。

$n,m\le 300$

Contents

2-SAT

2-SAT

有 n 个变量，每个变量可以取 True 或 False。有 m 个限制，每个限制形如

- 如果变量 x_i 取某个值，那变量 x_j 必须取某个值。

构造方案或输出无解。

做法：每个变量间两个点 $x_i, \neg x_i$ 表示这个变量为真或假。对于一个限制 $x_i \implies x_j$，连边 $x_i \to x_j$，**同时加入逆否命题** $\neg x_j \to \neg x_i$。

对该有向图求强连通分量。如果有 i 使得 $x_i, \neg x_i$ 在同一强连通分量内，则任一取值均可推出矛盾，无解。否则，任取一拓扑序，对每一变量取其出现较晚的点对应的值。可以证明这是一组合法解。(证明用到了加入逆否命题的步骤)

复杂度 $O(n+m)$

2-SAT

$\Longrightarrow$ 可以表示任意一个四种情况中三种合法的二元限制。

如果给的是一般的二元限制，那也能做：可能的情况有：

- 固定某些变量的取值。
- 要求两变量值相同。
- 要求两变量值相反。

随便处理后两者即可。

2-SAT

$\Longrightarrow$ 可以表示任意一个四种情况中三种合法的二元限制。

如果给的是一般的二元限制，那也能做：可能的情况有：

- 固定某些变量的取值。
- 要求两变量值相同。
- 要求两变量值相反。

随便处理后两者即可。

需要注意的是，如果给的是三元限制（3SAT），那问题是 NP-Complete 的，或者说目前一定不可能比指数更快。因此如果出现了这种情况，应当反思哪一步推导忽略了特殊性质。

[NOI 2017] 游戏

有 n 个变量，每个变量有三种取值 a, b, c。除去 d 个变量外，每个变量被禁止了一种取值。

有 m 个限制：如果第 u_i 个变量取 p_i，那么第 v_i 个变量取 q_i。

构造方案或输出无解。

$n \le 5 \times 10^4, m \le 10^5, d \le 8$

「2021 集训队互测」序列

构造一个长度为 n 的正整数序列 v，满足如下 m 个限制：

- $v_{a_i}, v_{b_i}, v_{c_i}$ 的中位数为 w_i。

$n, m \leq 10^5$

[gym 102059B] Dev, Please Add This!

有一个 $n \times m$ 的网格，其中一些位置是障碍。

有一个球初始在某个位置，每次操作可以选择上下左右的一个方向。球向这个方向移动，遇到障碍或边界停止。

给定一些特殊位置，求是否可以让球经过所有特殊位置。

$n, m \le 50$

Contents

点双/边双

点双定义：删掉一个点之后，剩余点连通。
边双定义：删掉一条边之后，所有点连通。
有什么性质?

点双/边双

点双定义：删掉一个点之后，剩余点连通。

边双定义：删掉一条边之后，所有点连通。

有什么性质?

点双/边双的经典求法：Tarjan。

边双的另类求法：先取一棵生成树，然后对于每条非树边，把它在树上的路径全部合并（树上并查集）。

点双的另类求法（不确定正确性）：把合并点改成合并边（可以用 DFS 树消掉横叉边的情况）

点双/边双

考虑连通图。

如果把每个边双缩成一个点，则剩余部分必定是一棵树：树上每条边对应原图的割边。

两个点双可能有一个公共点。对此我们可以使用圆方树的方式：对应每个点双新建一个方点，其向点双内所有点连边。如果只考虑这些边，则得到的图为原点和方点间的树，称为圆方树。不同点双之间的点为割点。

~~圆方树还可以拿来做仙人掌题目~~

[NOIP 2022] 建造军营

给一张 n 个点 m 条边的无向图，选择一些点和一些边，使得删掉任意一条没有选择的边不会使得两个选择的点不连通。求方案数。

$n \le 5 \times 10^5, m \le 10^6$

[CF555E] Case of Computer Networks

给一张 n 个点 m 条边的无向连通图，和 q 对 (s_i, t_i)。问是否可以给每条边定向，使得定向后对于每对 (s_i, t_i)， s_i 可以到达 t_i。

$n, m, q \leq 2 \times 10^5$

「USACO 2017.12 Platinum」Push a Box

$n \times m$ 的网格上有一些障碍，一个箱子和一个人。现在玩推箱子游戏（如果人和箱子相邻且这一方向上箱子后面是空位，则人可以把箱子推过去）

求箱子可以推到哪些位置。

$n, m \leq 1500$

「2020-2021 集训队作业」Tom & Jerry

给一张 n 个点 m 条边的无向连通简单图，Alice 和 Bob 在图上进行如下博弈：

两人轮流行动，Alice 先手。Alice 每次可以经过任意条边（可以不走）但不能经过 Bob 当前位置。Bob 每次最多走一条边，Bob 抓到 Alice 则 Bob 获胜。如果经过 n^2 轮游戏还未结束则 Alice 获胜。

q 次询问，每次给定双方初始位置，求谁获胜。

$n, m, q \le 10^5$

Thanks!