

图论

FSYo

July 20, 2022

SCU 4444 Travel

n 个点 m 条边, 给的 m 条边边权为 a , 其余的 $n(n-1)/2 - m$ 条边边权为 b , 问 $1, n$ 最短路, $n, m \leq 10^6$ 。

SCU 4444 Travel

讨论 $a > b$ 的时候, 若 $(1, n)$ 是 b , over
否则 $(1, n)$ 是 a , 跑 $1, n$ 走 b 的最短路, 用 01 *bfs*, 用链表维护没有到过的点。

WOJ 4701 Walk

给 n, m, a_i , 若 $a_i \& a_j = a_j$ 则加一条 (i, j) 的边, 问 1 号点到其他点的最短路。

WOJ 4701 Walk

优化建图，每个 a_i 向二进制上少一个 1 的点连边
复杂度 $O(n \log n)$ 。

BZOJ 2259

一个序列 a_1, a_2, \dots, a_n , 每次从 i 跳到 $i + a_i + 1$, 要求刚好跳到 $n + 1$, 可以对 a_i 修改, 代价为修改的绝对值, 问最小代价。 $n \leq 10^6$ 。

BZOJ 2259

发现 i 跳到 $i + a_i + 1$ 是免费的，等价于 $i \rightarrow i + a_i + 1$ ，建边权为 0 的边。
 调整考虑一个一个调整， $i + a_i + 1 \rightarrow i + a_i$ 建边权为 1 的边。
 如果 $i + a_i + 1 > n$ ，那么向 $n + 1$ 连边权为 $i + a_i - n$ 的边。
 求出 1 到 $n + 1$ 的最短路即可。

墨墨的等式

墨墨突然对等式很感兴趣，他正在研究 $\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$ 存在非负整数解的条件，他要求你编写一个程序，给定 $n, a_1 \dots a_n, l, r$ ，求出有多少 $b \in [l, r]$ 可以使等式存在非负整数解。

$n \leq 12, 0 \leq a_i \leq 5 \times 10^5, 1 \leq l \leq r \leq 10^{12}$ 。

墨墨的等式

我们选出最小的 $a_i = Min$, i 向 $(i + a[j])$
每个点 i 的最短路表示到达 $\equiv i \bmod Min$ 这个状态的最小 x 是多少, 然后统计答案, 那么 $\equiv i \bmod Min$ 的答案就是 $1 + (R - x) / Min$

HNOI2019 校园旅行

学校可以看成一张图，建筑是图中的顶点，而某些顶点之间存在无向边。对于每个顶点我们有一个标记（0 或者 1）。每次你会选择图中两个顶点，你想知道这两个顶点之间是否存在一条路径使得路上经过的点的标记形成一个回文串。

一个回文串是一个字符串使得它逆序之后形成的字符串和它自己相同，比如“010”，“1001”都是回文串，而“01”，“110”不是。注意长度为 1 的串总是回文串，因此如果询问的两个顶点相同，这样的路径总是存在。此外注意，经过的路径不一定为简单路径，也就是说每条边每个顶点都可以经过任意多次。

1 n 5000, 1 m 500000, 1 q 100000。

HNOI2019 校园旅行

首先有 m^2 的做法, $f[u][v]$ 表示能不能形成回文串, 那么枚举出边向两边扩展就可以预处理。

考虑减小边的规模。

将边进行分类, 连接 0,1 的, 连接 0,0 以及连接 1,1 的。

对于连接 0,1 的, 我们保留一棵树就可以实现每个点的颜色切换。

后面的会形成 0 联通块和 1 连通块。

如果联通块是一个二分图, 那么保留一棵树就可以了。

否则需要保留一棵基环树, 考虑两点间路径可以是奇数还是偶数就会发现这样是等价的。

这样边的规模可以将到 $N * 2$ 。

IMO 2020 D1T3

热身题。

Problem 3. There are $4n$ pebbles of weights $1, 2, 3, \dots, 4n$. Each pebble is coloured in one of n colours and there are four pebbles of each colour. Show that we can arrange the pebbles into two piles so that the following two conditions are both satisfied:

- The total weights of both piles are the same.
- Each pile contains two pebbles of each colour.

https://blog.csdn.net/ssiz_fsy

IMO 2020 D1T3

对称位置建边，每个颜色作为点，建出图如下： $2n$ 条边， n 个点，每个点度数为 4，则一定存在欧拉回路，隔一个选一条边就可以了

CoinsGame

有一个 $n \times m$ 棋盘，某些格子存在障碍物，其余格子可以放或不放硬币。有若干次操作：指定上下左右一个方向，使所有的硬币尝试取移动一格。如果目标格子是障碍物就不移动，硬币被移出棋盘后会消失。此外，在操作过程中一个格子上可以有多枚硬币。求有多少种放硬币的方案，存在一系列操作，使至少一枚硬币被移出棋盘、至少一枚硬币留在棋盘上。 $1 \leq n, m \leq 40$

CoinsGame

不合法当且仅当可以通过若干次操作缩成一个点。只需要 bfs (a, b) 表示一个在 a 一个在 b 是否合法。将不合法的点对缩成若干个等价类。复杂度 $O(n^2 m^2)$ 。

CF1305G Kuroki and Antihype

若 $a_i \& a_j = 0$ 且其连边，则有 a_i 的贡献，问最小生成树。
 $n, a_i \leq 10^5$ 。

CF1305G Kuroki and Antihype

考虑将边权变成 $a_i + a_j$, 最后减去 $\sum a_i$ 即可。

Boruvka 算法, 每个连通块每次找一条出边, 排序后合并, 容易发现个数减半。

我们需要找到 $a_i \& a_j = 0$ 且 i, j 不在一个连通块的最大的 a_j 。

我们维护全局最大及次大的 a_j , 用子集卷积做到 $\mathcal{O}(n2^n \log)$

King's Road

边权为 $a_i + a_j$ 或 $a_i + a_j - m$, 求最小生成树。 $n \leq 10^6$ 。

King's Road

仍然使用 Boruvka 算法，用双指针维护最小值和次小值，复杂度 $O(n \log n)$ 。

Reachability

$q \leq 800$ 次修改，每次修改是给一个点加边或删边，求 $n \leq 400$ 个点的传递闭包。

Reachability

连通性转方案数，可以 $\mathcal{O}(n^2)$ 修改方案数。

CF843D Dynamic Shortest Path

1. 查询从 1 到 v 的最短路。2. 给 c 条边边权 $+1$ 。
 $n, m \leq 10^5, \sum c \leq 10^6, q \leq 2000$ 。

CF843D Dynamic Shortest Path

$w \leftarrow w + d_u - d_v$ 然后跑最短路，实际最短路为 $d_u + dis_u$ 这样就可以用桶来跑迪杰斯特拉了。复杂度 $O(q(n + m) + \sum c)$ 。

CityRebuild

你有 n 个点 (x_i, y_i) , 你可以在每个点上建一个建筑, 这个建筑是以该点为斜边中心的等腰直角三角形, 并且斜边必须平行于 x 轴或 y 轴。所有建筑的边长必须一样, 问最大边长。

$$1 \leq n \leq 50$$

CityRebuild

二分，两个不相交可以看做一个顶点在另一个三角形里面。
每个 $1/4$ 三角形是独立的，对角不同选，做变量 2-SAT。

Determinant of a Graph

给定一张 n 个点, m 条边的联通图 G , 求 G 的邻接矩阵的行列式, $m - n \leq 50, n \leq 10^5$ 。

Determinant of a Graph

相邻 2 个二度点可以删去，一度点可以删去，最后会剩下 $O(m - n)$ 条边。