

DP 杂题选讲

HenryHuang

关于题目难度

- 应该都不算太难，希望大家补题的时候都不会自闭。
- 当然如果你觉得是部分题是大水题没有写的必要不写也没关系（

水题 A

- 给定一个字符串 s ，求其长度为 5 的回文子序列数量。
- $|s| \leq 10^6$, 字符集大小 ≤ 100 。

另一道水题 B

- 给定 x, k , 求最小的 y 使得 $x + y$ 进行竖式运算恰好进位 k 次。
- 共 T 组数据, 多测。
- $1 \leq T \leq 10^5, 1 \leq x < 10^{18}, 0 \leq k \leq 18$ 。

板题 C

- 给定一张 n 个点 m 条边的有边权无向图，同时你可以花费 $(u - v)^2$ 的代价从 u 点移动到 v 点进行“瞬移”，但最多只能进行 k 次。
- 求点 1 到其他点的最短路。
- $2 \leq n \leq 10^5, 1 \leq m \leq 10^5, 1 \leq k \leq 20$ 。

D

- 给定 $n \times n$ 的网格单元，有 m 个单元中有鲶鱼，位置为 (x_i, y_i) ，重量为 w_i 。
- 对于每一列，你可以从底部建立长堤。对于第 i 条鲶鱼，其被抓住，当且仅当 $(x_i - 1, y_i)$ 或 $(x_i + 1, y_i)$ 被长堤覆盖，且 (x_i, y_i) 未被长堤覆盖。
- 求能抓住鲶鱼的最大重量。
- $2 \leq n \leq 10^5, 1 \leq m \leq 3 \times 10^5$ 。

E

- 给一棵 n 个节点的有根树。
- 操作 $i (0 \leq i \leq n - 1)$ 可以以 a_i 的代价，任意指定一个 u ，将 u 子树里，所有的节点距离 u 距离恰为 i 的点染成黑色。
- 一开始所有 n 个节点都是白色的，求将所有节点染成黑色的最小代价。
- $2 \leq n \leq 10^5$ 。

F

- 给定一张 n 个点 m 条边的简单联通无向图，在保证其仍是简单图的前提下，可以加入任意多条（包括零条）边，使其边双联通。
- 求方案数，答案对 998244353 取模。
- $2 \leq n \leq 5 \times 10^3, n - 1 \leq m \leq \min(\frac{n(n-1)}{2}, 10^4)$ 。

G

- 给定一棵 n 个节点的树，每个节点有高度 h_i ，其构成 $1 \sim n$ 的一个排列。起始时有一只猫呆在高度为 n 的节点上。接下来对这只猫进行锻炼，每次选择一个未放置路障的节点并在其上放置路障。
 - 如果猫不待在选定的节点中，则什么也不会发生。
 - 如果猫待在选定的节点中，并且与选定节点相邻的每个节点上都有路障，则锻炼结束。
 - 否则，猫将沿最短路径前往，仅通过移动到相邻的节点且不经过放置过路障的节点，能到达的所有节点中，高度最高的那个。
- 求以最优策略放置路障，猫走过的路径长度的最大值。
- $n \leq 2 \times 10^5$ 。

H

- 给定一张无向图，对于每个点对 (u, v) ，求出是否存在从 u 开始，到 v 结束的哈密顿路。
- $2 \leq n \leq 24$ 。

- 对于给定的数 n ，你需要将其划分为 k 个数。一个数的权值为各个数位的权值和，具体如图。
- 求将 n 划分后的最大权值和。
- 多测， k 固定，共 q 组数据。
- $1 \leq q \leq 10^5, 1 \leq n < 10^6$ 。
- $1 \leq k < 10^6, 1 \leq F_i \leq 10^9$ 。

| | Position | | | | | |
|-------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Digit | 1 | 10 | 100 | 1000 | 10000 | 100000 |
| 3 | F_0 | F_1 | F_2 | F_3 | F_4 | F_5 |
| 6 | $2F_0$ | $2F_1$ | $2F_2$ | $2F_3$ | $2F_4$ | $2F_5$ |
| 9 | $3F_0$ | $3F_1$ | $3F_2$ | $3F_3$ | $3F_4$ | $3F_5$ |
| Other | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

J

- 给定 n 个向量，满足任意两个向量不共线，现按照如下方式绘制图案：
 - 初始点为 $(0,0)$
 - 设当前点为 (x,y) ，选择一个向量 \vec{a} ，使得当前点变为 $(x + \vec{a}_x, y + \vec{a}_y)$ 。
 - 重复第二个操作，直到回到初始点。
- 将刚才的所有点顺次连接，可以得到一个多边形。
- 求有多少种画法使得此多边形是凸的，且最终可以被放入 $m \times m$ 且与坐标轴平行的矩形里，答案对 998244353 取模。
- $1 \leq n \leq 5, 1 \leq m \leq 10^9, |x_i|, |y_i| \leq 4$ 。

K

- 给定一棵 $n + 1$ 个结点的树，以及一个长度为 n 的序列 a 。
- 初始任意选择一个结点涂黑，其余结点均为白色。然后进行如下的 n 次操作：
- 第 i 次任意选择一个与黑色结点直接相连的白色结点，将该结点涂黑，并将此边的边权设为 a_i 。
- 求使用最优策略后，该树直径的最大值。
- 多测。
- $T \leq 10, n \leq 150$ 。

L

- 有这样一副麻将，每张牌的面值是 $1 \sim n (n \leq 100)$ 中的一个整数，每种面值的牌有且仅有四张，并标有序号。
- 定义：
 - 对子：两张面值一样的牌。
 - 刻子：三张面值一样的牌。
 - 顺子，三张面值成公差为 1 的等差数列的牌。
- 一副牌能胡当且仅当：有 14 张且由 1 个对子和 4 个面子（刻子或顺子）或 7 个对子。
- 现在你手里有 13 张牌，每次你随机从牌堆里摸一张牌，求你手中的牌能产生一个能胡的子集的期望摸牌次数。