博弈

4182_543_731

2024/07

Contents

博弈问题

什么是一个博弈问题？通常情况下，

1. 有有限个**状态**（例如，图中棋子的位置，一堆石子的个数，...）
2. **两个**人**轮流**操作。第一个人先手，第二个人后手。
3. 每一个**状态**和当前操作的**人**会共同**决定**当前可用的**操作**，每个操作会使状态转移到另一个状态。

博弈问题

博弈问题还有多种可能的设定。我们给出最常见的设定可能：

1. **不能操作者输** (Normal)/不能操作者赢 (Misère)
2. **状态转移不存在环** (Normal)/状态转移存在环 (Loopy)
3. **可用操作与人无关** (平等)/**可用操作与人有关** (不平等)

平等博弈与不平等博弈是最常见的情况。

当然，在单个游戏，即不考虑多个独立游戏的情况下，平等与不平等没有区别：可以向状态中加入操作方；Normal 和 Misère 也没有区别：在最后加一步。但当我们考虑多个独立游戏的时候，情况则大有不同。

一般无环博弈

我们考虑最基础的情况：不能操作者输，转移不存在环，平等博弈。

经典问题

有一张**有向无环图**，图上有一枚棋子。双方轮流操作，每次操作可以将棋子沿着当前点的一条出边移动。不能操作者输，求获胜方。

$n, m \le 10^6$

由于转移不存在环，游戏一定会结束。又由于游戏平等，双方最优操作下，每个状态的结果一定是如下二者之一：从该状态出发时，**先手必胜**或**后手必胜**。

记一个状态（棋子所在点）为 s，我们用 $f(s) = 1$ 表示当前局面下先手必胜，$f(s) = 0$ 表示当前局面下后手必胜。

一般无环博弈

经典问题

有一张**有向无环图**，图上有一枚棋子。双方轮流操作，每次操作可以将棋子沿着当前点的一条出边移动。不能操作者输，求获胜方。

$n, m \le 10^6$

按拓扑序**从后往前**考虑。在考虑一个点 s 时，它的所有后继点 $t_1, \cdots$ 的状态都被确定了。

- 如果存在后继点 t_i 使得 $f(t_i) = 0$，那么当前操作的人走过去就赢了。
- 否则，无论当前操作的人怎么走，状态都变成先手必胜。所以当前操作的人输。

如果 s 存在后继点 t_i 使得 $f(t_i) = 0$，则 $f(s) = 1$；否则 $f(s) = 0$。

有点像一个 DP，复杂度 $O(m)$

一般无环博弈

经典问题

有一张**有向无环图**，图上有一枚棋子。双方轮流操作，每次操作可以将棋子沿着当前点的一条出边移动。不能操作者输，求获胜方。

$n \le 10^6$

对于更一般的情况，我们可以把状态看成点，转移看成边。那么任何一个无环博弈都可以表示为上述形式。（如果是不平等博弈，那这里我们可以直接把当前操作的人也放进状态中），从而这是一个直接解决无环博弈的方式。

一般无环博弈

经典问题

有一张**有向无环图**，图上有一枚棋子。双方轮流操作，每次操作可以将棋子沿着当前点的一条出边移动。不能操作者输，求获胜方。

$n \leq 10^6$

对于更一般的情况，我们可以把状态看成点，转移看成边。那么任何一个无环博弈都可以表示为上述形式。(如果是不平等博弈，那这里我们可以直接把当前操作的人也放进状态中)，从而这是一个直接解决无环博弈的方式。

但一般情况下，问题的状态数都必然是非常大的，我们需要更多的观察以解决问题。

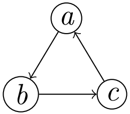
一般有环博弈

经典问题 2

有一张**有向图**，图上有一枚棋子。双方轮流操作，每次操作可以将棋子沿着当前点的一条出边移动。不能操作者输，求游戏结果。

$n \leq 10^6$

现在每个状态的结果是什么？因为有环，游戏甚至可能永不停止。



那怎么定义胜负？我们认为无限循环等于平局，每个人都是胜 $>$ 平 $>$ 负。我们仍然用 $f(s) = 1/0$ 表示先手胜/先手负，然后用 $f(s) = ?$ 表示平局。

一般有环博弈

经典问题 2

有一张**有向图**，图上有一枚棋子。双方轮流操作，每次操作可以将棋子沿着当前点的一条出边移动。不能操作者输，求游戏结果。

$n \le 10^6$

之前的分析仍然成立：如果有让自己获胜的操作就可以直接走过去，如果所有操作都让自己必败则真的必败，即：

- 如果 s 存在后继点 t_i 满足 $f(t_i) = 0$，则 $f(s) = 1$。
- 如果 s 的每个后继点 t_i 都满足 $f(t_i) = 1$，则 $f(s) = 0$。

这可以用一个类似搜索与拓扑排序的方式实现：$f(t) = 0$ 则类似 bfs 的方式直接更新所有入边，$f(t) = 1$ 则类似拓扑排序的方式减少某个 s 的入度，减到 0 就更新。

一般有环博弈

- 如果 s 存在后继点 t_i 满足 $f(t_i) = 0$，则 $f(s) = 1$。
- 如果 s 的每个后继点 t_i 都满足 $f(t_i) = 1$，则 $f(s) = 0$。

这样显然不能确定所有的状态。剩下的状态怎么办？我们声称所有这样的状态都是平局。

证明.

注意到每个这样的状态都满足：不能转移到 $f = 0$ 的状态，且可以转移到 $f = ?$ 的状态。考虑一方采用如下策略：每步走到下一个 $f = ?$ 的状态。那么另一方想跳出去只能走到 $f = 1$，也就是输掉。所以另一方没法赢。这说明没有人能赢。 □

这里的思想非常有意义：如果一方用一个简单的操作就能达到某种结果，那他的最终结果不会更差。

「联合省选 2023」过河卒 (Easy)

有一个 $n \times m$ 的棋盘。棋盘上有一些障碍。

第一个人有两枚棋子，第二个人有一枚棋子。

第一个人先手。每次操作可以选择一枚棋子，移动到一个四相邻的格子，不能移动到障碍。

- 第二个人不能向下移动
- 第一个人不能让他的两枚棋子在同一位置

不能操作者输。除此之外：

- 如果第二个人将棋子移动到第一行，则第二个人获胜。
- 如果一个人将棋子移动到另一方某枚棋子所在位置，则其获胜。

求游戏结果。$T, n, m \leq 10$

同上，但是胜方会在此基础上最小化操作次数，负方则会最大化操作次数，在游戏不平局时额外求出几步后结束。

[NEERC2016] Game on Graph

有一张**有向无环图**，图上有一枚棋子。双方轮流操作，每次操作可以将棋子沿着当前点的一条出边移动。不能操作者输。

但是现在第一个人认为平局（循环）$>$ 赢 $>$ 输，第二个人认为赢 $>$ 输 $>$ 平。求每个状态（起始位置和先手方）的结果。

$n, m \leq 2 \times 10^5$

观察法

在一些问题结构比较好（数，网格，...）的问题上，博弈的结果可能高度复杂，甚至极其反直觉。此时可能难以直接推导出结果。

因此一种有时非常有效的方式：打表，观察。

观察法

在一些问题结构比较好（数，网格，...）的问题上，博弈的结果可能高度复杂，甚至极其反直觉。此时可能难以直接推导出结果。

因此一种有时非常有效的方式：打表，观察。

请大家拿出自己喜欢的 IDE 开始尝试。

[AGC002E] Candy Piles

有 n 堆石子。双方轮流操作，每次操作可以：

- 在每堆非空石子中拿走一个，或者
- 拿走最大的一堆石子。

拿走最后一枚石子的人输，求谁获胜。

$n \le 10^5$

一道题

有一堆 n 个石子，双方轮流操作，每次操作可以拿掉若干个棋子：第一次操作只能拿一个；设上一次拿了 c 个，则下一次可以拿不超过 $c+k$ 个。拿掉最后一枚石子的人获胜。

给定 k，求 $n \in [l, r]$ 中有多少位置后手必胜。

$k, l, r \leq 10^{14}$

「SNOI2020」取石子

有一堆 n 个石子，双方轮流操作，每次操作可以拿掉若干个棋子：第一次操作只能拿不超过 k 个；设上一次拿了 c 个，则下一次可以拿不超过 $2c$ 个。拿掉最后一枚石子的人**失败**。

给定 k，求 $n \in [1, m]$ 中有多少位置后手必胜。

$k, m \leq 10^{18}, T \leq 10^5$

性质分析

另一方面，在问题结构比较复杂（例如图上博弈）的问题上，问题结构可能提供结果，复杂的结构使得打表观察变得很难。

此时，通常直接分析性质可以得到不错的结果。一种有效的方式是，从简单的情形开始。

一道题 2

有一棵 n 个点的树，双方进行如下游戏：有一枚棋子初始在 1，每次操作将棋子移动到另一个点，要求每次移动的距离递增，不能操作者输。

~~然后求有多少个包含1 的连通块使得先手必胜。~~

$n \leq 10^6$

部分分：图是一条链。

「雅礼集训 2017 Day2」棋盘游戏 / 「LibreOJ Round #6」花札 / [CERC2022] Combination Locks

有一个 $n \times m$ 的网格，上面有一些位置是障碍。

先放一枚棋子，然后双方轮流移动棋子（四相邻），棋子不能经过重复位置。不能移动者输。

求哪些位置使得先手必胜。

$n, m \leq 100$

[NOI2011] 兔兔与蛋蛋游戏

有一个 $n \times m$ 的网格图，上面除了一个空位，每个格子上都有一枚黑棋或者白棋。

双方轮流操作，先手黑色后手白色，每次可以将一枚自己颜色，且与空格相邻的棋子移到空格。求谁获胜。

$n, m \leq 40$

「2021 集训队互测」Speike & Tom

有一棵 n 个点的树和 m 条额外边。Alice 和 Bob 在图上进行如下博弈：

两人轮流行动，每次走一条边或者不走，Alice 先手。Alice 可以走树边和额外边，Bob 只能走树边。若两人相遇则 Bob 胜。如果始终不能相遇则 Alice 胜。

求多少种初始状态使得 Alice 必胜。

$n, m \leq 10^5$

部分分：$m = 1$

Contents

权值博弈

从这里开始，我们默认考虑无环情况。

一种常见的博弈变体是，双方不只是比一个胜负，而是博弈地最大/最小化一个权值：每个终止状态会给出一个分数 v，通常先手希望最大化 v，后手希望最小化 v。问题问双方最优操作下的结果。

这完全可以看成胜负情况的一个扩展：我们用 $+1$ 表示第一个人获胜，-1 表示第二个人获胜。唯一的区别在于之前是记录先手胜/后手胜，但在单个游戏的情况下，我们可以在状态中标记先后手，然后给后手态乘 -1。

权值博弈

从这里开始，我们默认考虑无环情况。

一种常见的博弈变体是，双方不只是比一个胜负，而是博弈地最大/最小化一个权值：每个终止状态会给出一个分数 v，通常先手希望最大化 v，后手希望最小化 v。问题问双方最优操作下的结果。

这完全可以看成胜负情况的一个扩展：我们用 $+1$ 表示第一个人获胜，-1 表示第二个人获胜。唯一的区别在于之前是记录先手胜/后手胜，但在单个游戏的情况下，我们可以在状态中标记先后手，然后给后手态乘 -1。

容易得到直接的转移方式：记 $f(s)$ 表示状态 s 的值，记 t_i 为 s 的所有后继状态，则

- 先手操作的状态：$f(s) = \max f(t_i)$
- 后手操作的状态：$f(s) = \min f(t_i)$

比之前的情况更像一个 DP。

权值博弈

简单 DP 的情况就不讲了。

我们之前提过一个思想：

> 如果一方用一个简单的操作就能达到某种结果，那他的最终结果不会更差。

在权值的情况下它更有用：如果先手能保证不小于某个值，后手能保证不大于某个值，那么答案就是这个。

Fox and Card Game(Easy)

有 n 个非负序列。每个序列长度 l_i 都是**偶数。**

双方轮流操作，第一个人可以从序列开头拿走一个数，第二个人可以从序列结尾拿走一个数。双方最大化自己得分（显然等价于第二个人最小化第一个人得分），求最优操作下双方得分。

$n, l_i \le 100$

有 n 个非负序列。每个序列长度 l_i 任意。

双方轮流操作，第一个人可以从序列开头拿走一个数，第二个人可以从序列结尾拿走一个数。双方最大化自己得分（显然等价于第二个人最小化第一个人得分），求最优操作下双方得分。

$n, l_i \leq 100$

[CF794E] Choosing Carrot

有一个长度为 n 的序列，双方轮流操作，每次从开头或结尾拿走一个数。

剩一个数时停止，这个数即为得分。第一个人先手，希望最大化得分；第二个人希望最小化得分。

进一步，对于每个 k，求出如果第一个人可以先操作 k 次时，游戏的结果。

$n \le 10^5$

Contents

多个独立博弈

在很多时候，博弈问题可以被分为若干个独立的子问题，满足如下性质：

- 每个人每次选择**一个**子博弈，在上面进行一步操作。如果都不能操作则输。

这时，之前不同设定的区别就显现出来了：将之前对不同设定的处理方式套用到每个子游戏上显然不对。事实上不同设定的表现通常**完全不一样**。

对于最一般的情况（Normal（不能操作输）/Normal（无环）/Impartial（平等）），我们有 SG 定理：每个状态可以被表示为一个非负整数，或者 Nimber。

~~对于不平等博弈，有超现实数等理论，但这极其高深。~~

~~对于（平等）Loopy Game，有 Loopy value 和 Smith's Rule，甚至有人这样出题 (DoubleXorGame)~~

~~对于 Misère Game，……~~

如果有兴趣，可以读读 Winning Ways for Your Mathematical Plays，保证内容超纲。

平等博弈与 Sprague-Garundy 定理

在有限的平等博弈下，SG 定理可以用如下方式描述：

- 每个状态可以用一个非负整数的 SG 值表示。状态 S 为先手必胜当且仅当 $SG(s) \neq 0$。
- 一个状态的 SG 值可以使用如下方式计算：记其所有后继状态为 t_i，则 $SG(s) = \mathrm{mex}(SG(t_1), SG(t_2), \cdots)$，即所有后继 SG 值中第一个没有出现的非负整数。
- SG 定理：如果状态 s 由两个独立的子博弈 s_1, s_2 组成，则 $SG(s) = SG(s_1) \oplus SG(s_2)$。

平等博弈与 Sprague-Garundy 定理

众所周知的例子：

Nim

有多堆石子。每次操作选择一堆石子，从其中拿走任意个（至少一个）。

每堆石子是独立的（注意这里没有其它限制，例如之前的那几个题多堆情况都不是独立的）。用 i 表示一堆 i 个石子的状态。

i 可以转移到 $0, 1, 2, \cdots, i-1$。直接归纳可得 $SG(i) = i$。

那么多堆情况的 SG 值就是每一堆大小的异或和。

SG 的直接求法

经典问题

有一张**有向无环图**，图上有很多枚棋子。双方轮流操作，每次操作可以将棋子沿着当前点的一条出边移动。不能操作者输，求获胜方。

$n \le 10^6$

每枚棋子是一个独立问题。我们只需要求出每个点出发的 SG 函数，然后异或起来。

那么直接拓扑序后用 $SG(s) = \text{mex}(SG(t_1), SG(t_2), \cdots)$ 求即可。

小结论：$SG(s) = O(\sqrt{m})$：在有了 $0, 1, \cdots, v-1$ 的情况下，我们还需要 v 条边以构造 $SG = v$。

观察法 2

和之前一样，除了直接求外，SG 函数也有两种常见处理方法：观察和推性质。

有一个 $n \times n$ 的矩阵 a。给定第一行第一列，然后剩下的满足 $a_{i,j} = \text{mex}(a_{i-1,j}, a_{i,j-1})$。求矩阵中 $0, 1, 2$ 的个数。

$n \leq 2 \times 10^5$

Nim，但是每次只能拿不超过 k 个。

简单 SG 练习

Nim，但是每次只能拿 $[l, r]$ 个。

简单 SG 练习

Nim，但是每次不能拿正好 l 个。

简单 SG 练习

有一个矩形，每次选择一个的矩形的一边，选择边长 l 的一个因子 d，将矩形这一边切成 d 份。

翻石子模型

有一些石子，每次操作可以拿掉一个位置 x 上的石子，然后根据 x，翻转 x 之后某些格子上石子的状态：有就删掉，没有就加入。

注意到 $x \oplus x = 0$，那么有的情况下再放一枚和这个等价。这样就是独立问题了。

「HAOI2015」数组游戏

有一个长度为 n 的 01 序列。每次操作可以：选择一个 1，记这个位置为 x，则再选择一个正整数 k，翻转 $x, 2x, 3x, \cdots, kx$。不能操作者输。

求谁获胜。

$n \leq 10^9$，只有 100 个 1。

Contents

[AGC043C] Giant Graph

给定三张 n 个点的图 G_1, G_2, G_3。使用如下方式定义一张 n^3 个点的大图：

- 点标号为 (u_1, u_2, u_3)，点权为 $(10^{18})^{u_1+u_2+u_3}$。
- 两点 $(u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3)$ 间有边当且仅当存在 i 使得 u_i, v_i 在 G_i 间有边，且对于其它下标 $u_j = v_j$。

求该图最大权独立集点权和，模 998244353。

$n \leq 10^5$

[AGC016F] Games on DAG

给一个 n 个点的有向无环图。$1, 2$ 上分别有两枚棋子，做传统的移边博弈。
现在可以任意删一些边，求有多少种方式使得先手必胜。
$n \leq 15$

[CF1033G] Chip Game

我们只考虑博弈，外层计数留作练习。

有 n 堆石子，Alice 每次必须从一堆拿正好 a 个，Bob 每次拿正好 b 个，求谁获胜。

这是不平等博弈，游戏有四种情况：Alice 胜，Bob 胜，先手胜，后手胜，求是哪种情况。

Thanks!