水题选讲

彭博

北京大学

2023.10

给定一棵 n 个点的树，你需要给每个点一个 1 到 m 的颜色，使得任意两个距离不超过 2 的点的颜色不同。求方案数模 10^9+7 。

你需要造一个形式很好的式子，因为原题需要搜索所有 $n \leq 120$ 的树。

$m < 10^9+7$

给定一个长度为 n 的排列 p 。对于两个点 i,j ，如果 $\forall \min(i,j) < k < \max(i,j), p_j > p_k$ ，那么 i 就向 j 连一条有向边。

对每个 i 求出它到其他所有点的最短路长度之和。

$n \leq 3 \times 10^5$

考虑如下一种选举方式：

1. 每个投票者对 n 个候选人有一个排序。
2. 进行 $n-1$ 轮，每轮每个投票者会投给自己最喜欢的未被淘汰的候选人，然后把得票数最少的候选人淘汰。如果平局就淘汰编号靠后的。
3. 剩下的一个候选人即为胜者。

现在有三个候选人 A,B,C ，你是 A 。

你希望加入一个候选人 Z ，你可以任意操控每个投票者对 Z 的喜欢程度，使得最终胜者是你。

判断是否可能。

$n \leq 1000$

给定一个长度为 n 的环，每个点是红色或蓝色，每条边是黄色或粉色。

你需要连若干根弦，弦不能相交（端点也不能相同），且只能连接颜色相同的点。

如果存在一种连弦的方式使得连完若干根弦之后，每个部分的边的颜色都相同，就称这组染色方案是好的。

现在有一些点和边的颜色不确定。求出有多少种好的染色方案。

$n \le 5 \times 10^4$

给定一棵 n 个点的树，初始每个点上有恰好一枚硬币。硬币之间是等价的。

你每次可以选择相邻的硬币数相同的两个点，把一个点的硬币全部移动到另一个点上。

求出最终有多少种不同的情况。

$n \le 3 \times 10^5$

给定数字 n 。Alice 和 Bob 轮流操作，每次给 n 减掉一个不超过 $d(n)$ 的正整数，不能操作者输。其中 $d(n)$ 表示 n 十进制表示的数位和。

t 组询问。

$t \le 10^4, n \le 10^{18}$

假设有一个长度为 5 的小写字母串 s 。

给定 n 个长度为 5 的小写字母串 $t_1, \cdots, t_n$ ，以及它们与 s 的按位大小关系 $w_1, \cdots, w_n$ 。比如 $s = \textsf{aaazz}, t_1 = \textsf{azaza}$ ，那么 $w_1 =$ `=>==<` 。

实际上这个 s 并不存在。对于每个 k ，你需要在 $\binom{n}{k} \cdot k!$ 种选出并排列 k 个 (t_i, w_i) 的方案中，求出有多少种方案使得，前 $k-1$ 对 (t_i, w_i) 不能推出矛盾，但加上第 k 对就可以。

$n \leq 10^5$ ，时限 $25s$ 。

给定三个长度为 $n+1$ 的序列 $a_0, \cdots, a_n, b_0, \cdots, b_n, c_0, \cdots, c_n$ 。
设一次函数 $F_i(t)$ 为 $it + \max_{x+y+z=i}(a_x + b_y + c_z)$ ，其中 $0 \le i \le 3n$ 。
求出有多少个 $F_i(t)$ 的任何一部分都不在上凸壳上。
$n \le 3 \times 10^5$