# Za 选数数 (A)

有一部分题目存在比正解更简单的非常规解法。

所以建议大家预习 / 思考时善用程序解决一些问题（）

## Problem A: [CF 451 (Div. 2)] Devu and Flowers

有 $n$ 中颜色的球，第 $i$ 种颜色有 $f_i$ 个。

现要选出恰好 $s$ 个球，求颜色的可重集有多少种，对 $10^9+7$ 取模。

$1 \le n \le 20$，$0 \le s \le 10^{14}$，$0 \le f_i \le 10^{12}$。

Source: https://codeforces.com/problemset/problem/451/E

每种颜色有上限的情况比较困难，但每种颜色有下限的情况比较容易。

若第 $i$ 种颜色至少选 $g_i$ 个，则方案数为 $\binom{s-\sum g_i}{n-1}$。

于是容斥哪些颜色不满足条件即可。时间复杂度 $O(2^n \cdot n)$。

## Problem B: [HNOI 2011] 卡农

求在 $\{1 \ldots n\}$ 的非空子集中选择 $m$ 个不同子集的方案数，使得每个元素都被选择了偶数次，答案对 $10^8+7$ 取模。

$1 \le n, m \le 10^6$

Source: https://www.luogu.com.cn/problem/P3214

设 $f_i$ 为有序地选择 $i$ 个子集的满足条件的方案数，则答案为 $\frac{f_m}{m!}$。考虑转移。

由于元素出现次数奇偶性的限制，最后一个子集被前 $i-1$ 个子集唯一确定，故不考虑非空、不考虑互不相同时，总方案数为 $\frac{(2^n-1)!}{(2^n-i)!}$。

若最后一个子集为空，则前 $i-1$ 个子集合法，方案数为 $f_{i-1}$。

若存在二者相同，则删去两个相同子集后合法，方案数为 $(i-1)(2^n-(i-2)-1)f_{i-2}$。

故转移即 $f_i = \frac{(2^n-1)!}{(2^n-i)!} - f_{i-1} - (i-1)(2^n-i+1)f_{i-2}$。

## Problem C: [AGC060] Spanning Trees of Interval Graph

有一张 $\sum C_{i,j}$ 个点的无向图。$\forall 1 \le i \le j \le n$，有 $C_{i,j}$ 个点的标签为区间 $[i,j]$。两点间有边当且仅当两点的标签有交。求该图的生成树数目，模 998244353。

$2 \le N \le 400$，$1 \le C_{i,j} \le 10^4$。

Source: https://atcoder.jp/contests/agc060/tasks/agc060_f

考虑矩阵树定理的问题在于点数过多。注意到边的生成方式比较特殊。

考虑构造这样一个矩阵，使得从上往下消元后可得到拉普拉斯矩阵：

$$\begin{bmatrix} I_1 & M_1 \\ M_2 & I_2 \end{bmatrix}$$

其中 $I_1, I_2$ 是单位矩阵，且 $I_1$ 较小。

利用点边容斥的思想，这样的矩阵是容易构造的。

然后模拟从下往上消元，再对左上角进行高斯消元即可。

时间复杂度 $O(N^3)$。

## Problem D: [LNOI 2022] 题

给定长度为 $3n$、值域为 $[0,3]$ 的整数序列 $S = s_1 s_2 \cdots s_{3n}$。你需要首先将 $S$ 中的每个 0 替换为 $[1,3]$ 中的任意一个整数，得到序列 $T = t_1 t_2 \cdots t_{3n}$，然后给出 $n$ 个长度为 3 的整数序列 $\{a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}\}_{1 \le i \le n}$，使得

- $\forall 1 \le i \le n$，$1 \le a_{i,1} < a_{i,2} < a_{i,3} \le 3n$；
- $\forall (i_1, j_1) \ne (i_2, j_2)$，$a_{i_1,j_1} \ne a_{i_2,j_2}$；
- $\forall 1 \le i \le n$，$\{t_{a_{i,1}}, t_{a_{i,2}}, t_{a_{i,3}}\}$ 是 $\{1,2,3\}$ 的一个排列且逆序对数为奇数。

Source: https://loj.ac/p/3738

逆序对数为奇数的方案只有 $\{1,3,2\}, \{2,1,3\}, \{3,2,1\}$ 三种。

设 $f_{i,j,k,l,o,p,q}$ 表示前 $i$ 个位置，目前凑出的 $\{1\},\{2\},\{3\},\{1,3\},\{2,1\},\{3,2\}$ 的数目分别为 $j,k,l,o,p,q$ 的方案数即可。第一维可以滚动数组。

时间复杂度 $O(n^7)$，常数极小，可过。由于 $j+k+l+o+p+q\le n$，所以事实上 $(j,k,l,o,p,q)$ 的取值只有 $\binom{25}{6}\approx 1.77\times 10^5$ 种。

## Problem E: [CF 1924 (Div. 1)] Balanced Subsequences

求括号序列数，对 $10^9+7$ 取模，满足：

- 左右括号数分别为 $n,m$；
- 最长合法子序列长度为 $2k$。

多测，$t\le 3\times 10^3$，$n,m,k\le 2\times 10^3$。

Source: https://codeforces.com/problemset/problem/1924/D

满足条件的串必然形如一个 $2k$ 的合法串插入一个形如 `))((` 的串。

换句话说，我们要求的是卡特兰数 OGF 的 $n+m-2k$ 次幂。

这看上去很难，不过我们观察一下：

$$\begin{matrix}1 & 1 & 2 & 5 & 14 & 42\\ 1 & 2 & 5 & 14 & 42 & 132\\ 1 & 3 & 9 & 28 & 90 & 297\\ 1 & 4 & 14 & 48 & 165 & 572\end{matrix}$$

不难发现这个矩阵可以直接递推出来：$a_{i,j}=a_{i-1,j+1}-a_{i-2,j+1}$。于是就做完了。

## Problem F: [CEOI 2016 d1t2] Kangaroo

求有多少排列 $p_{1...n}$，满足 $(p_1,p_n)=(s,t)$，$\forall 1<i<n,(p_i-p_{i-1})(p_i-p_{i+1})>0$，对 $10^9+7$ 取模。

$2\le n\le 2\times 10^3$，$1\le s,t\le n$。

Source: https://qoj.ac/problem/5532

### Solution A

依次考虑 $p_1\dots p_n$ 比较困难。所以对 $v=1\dots n$ 考虑将 $v$ 填在当前的 $p$ 中。

设 $f_{i,j}$ 表示前 $i$ 个数填了 $j$ 段的方案数，则有：

- 若 $i$ 是谷，则 $f_{i,j+1} \leftarrow (j+1-[i>s]-[i>t])f_{i-1,j}$；
- 若 $i$ 是峰，则 $f_{i,j-1} \leftarrow (j-1)f_{i-1,j}$。

特判 $i \in \{s,t\}$ 即可。时间复杂度 $O(n^2)$。

**Solution B**

首先想到一个朴素 DP：$f_{i,j,k,0/1}$ 表示 $i$ 个位置、起点为 $j$、终点为 $k$，当前方向为向左 / 向右的方案数，转移可以考虑插入一个位置作为新的终点。

这样子显然复杂度过高。考虑将 $s \to t$ 拆成 $s \to 1 \to t$，进而变为 $1 \to s$ 和 $1 \to t$。那么由于起点总在最左侧，我们并不需要 $j$ 这一维。前缀和优化一下可以在 $O(n^2)$ 的时空复杂度内 DP 出 $f_{i,k}$ 表示 $i$ 个位置、起点为 1、终点为 $k$ 的方案数。

接下来考虑合并。枚举 $(1,s),(s,t),[t+1,n]$ 中分别有多少位置在 $1 \to s$ 这段中即可。这看似是 $O(n^3)$ 的，不过最坏运算次数大概是 $(\frac{n}{3})^3$，有 $\frac{1}{27}$ 的常数。加上一些有关内存访问的优化之后可以轻松通过本题，极限数据 0.8s 左右。

时间复杂度 $O(n^3)$（常数大概 $\frac{1}{27}$），空间复杂度 $O(n^2)$。

## Problem G: [ioihw22] 六元不定方程

给定整数 $N,r$，求有多少六元有序数组 $(a,b,c,a',b',c')$ 满足同余方程
$ab+a'b' \equiv bc+b'c' \equiv ca+c'a' \equiv r \pmod N$，对 998244353 取模。其中
$a,b,c,a',b',c' \in \{0,1,\ldots,N-1\}$。

$0 \le r < N \le 10^{18}$，$N \ge 2$，$\mu(N) \ne 0$。

Source: https://qoj.ac/problem/5021

设 $N=\prod p_i \ (p_i \text{ is prime})$。

打表不难发现，答案很像积性函数。更具体地，设答案为 $f(N,r)$，则
$f(N,r)=\prod f(p_i,[r \nmid p_i])$。拿 PR 分解一下，问题就变成了 $N$ is prime 的情况。

此时，再打出小范围 $f(\text{prime},0/1)$，发现答案增长速率不高，大概像个关于 $N$ 的多项式。我们首先观察在 $n$ 较小时 $f(n,0)\ldots f(n,n-1)$ 的列表：

| $n$ | $f(n,0)\dots f(n,n-1)$ |
| --- | --- |
| 2 | $[20,8]$ |
| 3 | $[73,28,28]$ |
| 5 | $[489,124,124,124,124]$ |
| 7 | $[1009,344,\dots,344]$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| 31 | $[89281,29792,\dots,29792]$ |
| 37 | $[245161,50652,\dots,50652]$ |
| 41 | $[334641,68920,\dots,68920]$ |
| 43 | $[238393,79508,\dots,79508]$ |
| 47 | $[311329,103824,\dots,103824]$ |

可以看出，$\forall 1\le x<y<n$，$f(n,x)=f(n,y)$。假设这一结论是正确的，我们就只关心 $f(n,0)$ 与 $f(n,1)$ 了。不难发现 $f(n,1)$ 的取值很接近立方数。更具体地，
$f(n,1)=n^3+[n \bmod 4=3]-[n \bmod 4=1]$。

此外，$f(n,0)$ 的增长速率也并不高，不妨猜想 $f(n,0)$ 也是 $\Theta\left(n^3\right)$ 的。且 $f(n,1)$ 的表达式讨论了 $n \bmod 4$ 的余数，这启发我们将 $n$ 根据 $n \bmod 4$ 进行分类。对 $n$ 进行分类后，我们通过差分或插值或将一个比较大的 $f(n,0)$ 视为平衡 $n$ 进制数的方式，不难猜到
$$f(n,0)=\begin{cases}5n^3-6n^2+3n-1 & n\equiv 1 \pmod 4\\ 20 & n=2\\ 3n^3-3n+1 & n\equiv 3 \pmod 4\end{cases}。$$

## Problem H: [ioihw23] 序列

给定 $P,q$。$q$ 次给定 $n,m$，求满足 $a_i\in[0,m]$ 且 $\nexists 1\le i<j<k\le n$，$a_k<a_i<a_j$ 的序列 $a_{1\dots n}$ 的数目。答案对 $P$ 取模。$n\le 100$，$m\le 8\times 10^4$。

Source: https://qoj.ac/contest/1401/problem/7649

不难通过插值将问题转化为：求 $f_{0\dots N,0\dots N}$，其中 $N=\max n$，$f_{i,j}$ 表示长为 $i$、元素是 $[0,j]$ 中整数的满足条件的序列数目。该数组可以 $O(N^4)$ 求得，这里给出一种 $O(n^5)$ 解法。

设 $g_{i,j,k}$ 表示长为 $j$，元素是 $0\dots i$ 中整数（且要求 $0\dots i$ 均出现过），且恰有 $k$ 个位置可以插入 $i+1$ 的满足条件的序列数目。这个转移非常容易做到 $O(N^5)$ 的时间复杂度内求出 $g_{0\dots N,0\dots N,0\dots N}$，从而求出 $f_{0\dots N,0\dots N}$。

然后发现这东西因为限制很紧所以好像跑得很快。实验一下发现在 $n\le 100$ 时只需进行不超过 $2.6\times 10^8$ 次运算。就过了。