

博弈论杂题选讲

苏泓燃、李嘉佑

大连市第二十四中学

2023 年 7 月 5 日

A

给定 $a_1 \dots a_n$ ($1 \leq n \leq 100, 1 \leq a_i \leq 10^9$)。

一次操作为：选定 p^k (p is prime, $k \in \mathbb{N}_+, \exists i, p^k \mid a_i$)，令
 $a_i \leftarrow \frac{a_i}{p^k}$ ($p^k \mid a_i$)。

Alice, Bob 轮流操作，无法操作者输。（容易看出，无法操作即序列变为全 1。）

二人均以最优策略进行游戏，求获胜者。

B

在二维坐标系上，考虑所有满足 $x \text{ bitand } y = 0$ 的点 (x, y) 。若有两个这样的点相邻，就将它们连一条边。可以证明，这些一定会形成一棵树，不妨令其根为点 $(0, 0)$ 。

树上的每个点可以被染成黑色或白色。给定 m 条链（可能相交），初始时这些链上的点均为黑色，其余为白色。

两名玩家在树上做游戏。每名玩家可以选择一个黑点以及它的祖先的子集，并将这些点反色，当无法选择时该玩家输。

后手打算作弊，他会在游戏开始前做若干次操作，使得他可以获胜。操作形如选择一个点，将其到根的路径上的所有点反色，最小化操作的次数。

$1 \leq m \leq 10^5, 0 \leq x, y \leq 10^9$ 。

C

有一个长度为 n 的石子堆序列，每堆石子个数记为 a_i ，两玩家轮流操作，每次操作形如将一堆非空的有相邻空石子堆的石子全部取走，玩家目的是最大化游戏结束后自己取得的石子数量总和。

问在最优策略下，游戏结束时双方各取得了多少石子。

$2 \leq n \leq 10^6$, $0 \leq a_i \leq 10^8$ 。

D

Alice 和 Bob 在玩游戏。有 n 个格子排成一行，每个格子被涂成了红色或蓝色。Alice 每次操作选择两个相邻的格子，要求其中至少有一个是红色，然后把这两个格子涂成白色。Bob 每次操作选择两个相邻的格子，要求其中至少有一个是蓝色，然后把这两个格子涂成白色。他们轮流进行操作（Alice 先手），不能操作的人就输了。现在给定初始局面，请问在他们都足够聪明的前提下，谁会获得胜利？

$$1 \leq t \leq 10^4, 2 \leq n, \sum n \leq 5 \cdot 10^5.$$

E

给定三个简单无向图 X, Y, Z ，点数均为 N ，边数分别为 M_1, M_2, M_3 。

现根据 X, Y, Z 构造一个点数为 N^3 的新无向图 W ，其中点分别标号为 (x, y, z) ($1 \leq x, y, z \leq N$)。

按如下方式在 W 中连边：

若 X 中存在一条边 (u, v) ，则对于任意 $1 \leq a, b \leq N$ ，在 W 中添加边 $((u, a, b), (v, a, b))$ ；

若 Y 中存在一条边 (u, v) ，则对于任意 $1 \leq a, b \leq N$ ，在 W 中添加边 $((a, u, b), (a, v, b))$ ；

若 Z 中存在一条边 (u, v) ，则对于任意 $1 \leq a, b \leq N$ ，在 W 中添加边 $((a, b, u), (a, b, v))$ 。

对于 W 中的任意一个点 (x, y, z) ，定义其点权为 $10^{18(x+y+z)}$ 。

试求 W 的最大权独立集的大小模 998244353 的值。

$2 \leq N \leq 10^5, 1 \leq M_1, M_2, M_3 \leq 10^5$ 。

F

有 N 堆石子，第 i 堆有 a_i 颗。Firstleft 与 Secondright 玩游戏，Firstleft 先手。

每一轮，Firstleft 可在最左侧的非空石子堆中拿走若干颗石子（不可不拿），Secondright 可在最右侧的非空石子堆中拿走若干颗石子（不可不拿）。不能操作者输。

二人均以最优策略进行游戏，求获胜者。

$1 \leq T \leq 100$, $1 \leq N \leq 100$, $1 \leq a_i \leq 10^9$ 。

G

有一个 $n \times n$ 的棋盘，初始全黑，有 m 个矩形被染白。两玩家轮流操作，每次可以选出一个右下角是白色的边长不超过 k 的棋盘并将其反色。不能操作人输，问谁赢。

$1 \leq k \leq n \leq 10^9, 1 \leq m \leq 5 \times 10^4$ 。

H

Alice 和 Bob 玩游戏。给定 n, f ，表示有 n 行的棋盘，每行有三个棋子。Alice 每次可以选择一行将该行左边的一个或两个棋子往右移动 d 步，Bob 每次可以选择一行将该行右边的一个或两个棋子往左移动 d 步。

要求移动时一个棋子不能跨越另一个棋子，且 d 是质数或两个质数的乘积，且 $d \neq f$ 。求出 Alice 和 Bob 分别作为先手时，谁能赢。

$1 \leq n \leq 10^5$ ，坐标绝对值不超过 10^5 。