网络流之建图技巧

Appleblue17

2024.7.21

Table of Contents

Definition (网络)

网络是一个特殊的有向图 $G=(V,E)$，每条边 $(u,v)\in E$ 具有容量 $c(u,v)\geq 0$（若 $(u,v)\notin E$ 认为 $c(u,v)=0$）。图中唯一没有入度的点称为源点 s，唯一没有出度的点称为汇点 t。

Definition (流函数)

流函数 $f\colon V\times V\to\mathbb{R}$，满足：

- 容量限制：$\forall(u,v)\in E, 0\leq f(u,v)\leq c(u,v)$.
- 斜对称：$\forall u,v\in V, f(v,u)=-f(u,v)$
- 流守恒：$\forall u\in V\setminus\{s,t\}$, $\sum\limits_{(u,v)\in E} f(u,v)=\sum\limits_{(v,u)\in E} f(v,u)$.

Definition (流量)

网络的流量为 $|f|=\sum\limits_{(s,u)\in E} f(s,u)=\sum\limits_{(u,t)\in E} f(u,t)$。

最大流问题

Problem (最大流问题)

给定网络 $G = (V, E)$，求流函数 f 使得流量最大。

最大流问题

Problem (最大流问题)

给定网络 $G=(V,E)$，求流函数 f 使得流量最大。

Ford–Fulkerson 增广

对于边 $(u,v)\in E$，新增一条反向边 (v,u)，容量为 $c(v,u)=-c(u,v)$。
剩余容量：对于所有边 (u,v)，**剩余容量为** $c_f(u,v)=|c(u,v)-f(u,v)|$。
残量网络：V 与所有剩余容量不为 0 的边构成的子图称为**残量网络**，即 $G_f=(V,E_f)$，其中 $E_f=\{(u,v)\mid c(u,v)\neq 0\}$。
增广路：残量网络中一条从 s 到 t 的简单路径。

Ford–Fulkerson 增广方法：每次寻找一条增广路并让增广路上的每条边的流量增加，则整个网络的流量也会增加同样的量。不断重复直到残量网络中源汇不再联通。
由于每次总流量一定会增大，故在重复有限次后一定能够结束。
正确性将通过下面的最大流最小割定理证明。

割

Definition (割)

对于点集 V 的一组划分 $\{S, T\}$，若满足 $s \in S, t \in T$，则称 $\{S, T\}$ 为一组割。

Definition (割边)

对于点集 V 的一组割 $\{S, T\}$，所有满足 $u \in S, v \in T$ 的边 $(u, v) \in E$ 称为割边。

Definition (割的容量)

对于点集 V 的一组割 $\{S, T\}$，其容量为所有割边的容量之和，即：

$$c(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v)$$

最大流最小割定理

Problem (最小割问题)

给定网络 $G=(V,E)$，**求一组割** (S,T) **使得其容量** $c(S,T)$ **最小**。

Theorem (最大流最小割定理)

对于同一个网络，最大流问题与最小割问题的答案相同，**即最大流等于最小割**。

Proof.

先证明最大流小于等于最小割。对于任意的流 f 与一组割 $\{S, T\}$，有：

$$
\begin{aligned}
|f| &= \sum_{u \in S} \Big(\sum_{(u,v) \in E} f(u, v) - \sum_{(v,u) \in E} f(v, u) \Big) \\
&= \sum_{u \in S} \Big[\sum_{v \in S, (u,v) \in E} f(u, v) + \sum_{v \in T, (u,v) \in E} f(u, v) \\
&\quad - \sum_{v \in S, (v,u) \in E} f(v, u) - \sum_{v \in T, (v,u) \in E} f(v, u) \Big] \\
&= \sum_{u \in S} \sum_{v \in T, (u,v) \in E} f(u, v) - \sum_{v \in T, (v,u) \in E} f(v, u) \\
&\le \sum_{u \in S} \sum_{v \in T, (u,v) \in E} f(u, v) \\
&\le c(S, T)
\end{aligned}
$$

取等当且仅当所有割边均满流，所有割边的反向边（若存在）均空流。

最大流最小割定理

Proof.

再证明能够取等。考虑上面提到的 Ford–Fulkerson 增广方法，在增广结束后残量网络中 s 与 t 一定不连通。
设与 s 连通的点集为 S，记 $T = V \setminus S$，有：

- $\forall u \in S, v \in T, f(u, v) = c(u, v)$，否则 $c_f(u, v) > 0$，$v \in T$，矛盾。
- $\forall u \in T, v \in S, f(u, v) = 0$，否则其新构建的反向边有残余流量，$v \in$，矛盾。

故 FF 增广方法构建出的流 f 满足 $|f| = c(S, T)$。而由上一页的证明，$|f| \leq |f_{max}| \leq c_{min}(S, T) \leq c(S, T)$，这意味着不等号全部取等，即 $|f|$ 为最大流，$c(S, T)$ 为最小割。
至此，既完成了最大流最小割定理的证明，又证明了 FF 增广方法的正确性。 □

本质上，最大流与最小割互为对偶问题。

常用网络流算法

求解最大流：

- Edmonds–Karp 算法：单路增广，理论复杂度 $O(nm^2)$。
- Dinic 算法：多路增广，理论复杂度 $O(n^2m)$。

常用网络流算法

求解最大流：

- Edmonds–Karp 算法：单路增广，理论复杂度 $O(nm^2)$。
- Dinic 算法：多路增广，理论复杂度 $O(n^2m)$。

众所周知网络流的实际复杂度是 O(玄学) 或者 O(能过)，并且绝大多数题目都不会特意卡实现方法，掌握以上算法基本足够。

常用网络流算法

求解费用流：SPFA+EK，**也可以用** Dijkstra **代替** SPFA（**需要用** Johnson **算法的势能**），**用** Dinic **代替** EK（**需要判环**）。

常用网络流算法

求解费用流：SPFA+EK，也可以用 Dijkstra 代替 SPFA（需要用 Johnson 算法的势能），用 Dinic 代替 EK（需要判环）。

带上下界限制的网络流：
无源汇上下界可行流：建立超级源汇 ss 和 tt，对每条边 (u, v, l, r) 连边 $(u, v, r-l), (ss, v, l), (u, tt, l)$。
有源汇上下界最大流：先连边 $(t, s, +\infty)$，再跑无源汇可行流，最后从 s 到 t 跑最大流。
有源汇上下界最小流：先连边 $(t, s, +\infty)$，再跑无源汇可行流，最后从 t 到 s 跑最大流。
有源汇上下界最小费用流：把 BFS 换成最短路同样做，但是最后不用跑最大流。

Table of Contents

如何识别网络流题？

- 诡异的数据范围：数据范围很小，不过也有数据范围很大的题目。

如何识别网络流题？

- 诡异的数据范围：数据范围很小，不过也有数据范围很大的题目。
- 非常规而复杂的模型：看上去不太可做。

如何识别网络流题？

- 诡异的数据范围：数据范围很小，不过也有数据范围很大的题目。
- 非常规而复杂的模型：看上去不太可做。
- 线性规划问题：网络流问题本质上是一类线性规划问题。

如何识别网络流题？

- 诡异的数据范围：数据范围很小，不过也有数据范围很大的题目。
- 非常规而复杂的模型：看上去不太可做。
- 线性规划问题：网络流问题本质上是一类线性规划问题。
- 二分图匹配问题：转化为二分图匹配再用网络流求解。

如何识别网络流题？

- 诡异的数据范围：数据范围很小，不过也有数据范围很大的题目。
- 非常规而复杂的模型：看上去不太可做。
- 线性规划问题：网络流问题本质上是一类线性规划问题。
- 二分图匹配问题：转化为二分图匹配再用网络流求解。
- 熟悉的模型：这个套路我见过！

模型一 就是网络流

就是网络流，题目怎么说就怎么建。

「网络流 24 题」餐巾计划问题

在连续的 N 天内，餐厅在第 i 天需要 r_i 块干净的餐巾 r_i。干净的餐巾有三种获得方式：

- 购买新餐巾，每块费用为 p。
- 快洗旧餐巾，需 m 天，每块费用 f。
- 慢洗旧餐巾，需 n 天，每块费用 s。

求 N 天内的最小总花费。

数据范围：$1 \leq N \leq 2 \times 10^3$，$1 \leq m < n \leq N$，$1 \leq r_i \leq 10^7$，$1 \leq p, f, s \leq 10^4$，$s < f$。

模型二 二分图匹配

不带权与带权的二分图匹配都可以用网络流求解。
不带权的二分图匹配复杂度为 $O(m\min\{m^{1/2},n^{2/3}\})$。
先将问题转化为二分图匹配，再用网络流求解。

「网络流 24 题」最小路径覆盖问题

给定有向无环图 G，求最小不交路径覆盖，即用最少的路径覆盖图中的所有点，每个点恰好被一条路径覆盖。需要给出方案。

数据范围：$1 \le n \le 150$，$1 \le m \le 6000$。

模型三 最小割

将题目建模为最小割模型，再转化为最大流求解。
希望代价最小 $\Rightarrow$ 求最小割 $\Rightarrow$ 求最大流
“禁止”条件：转化为 $+\infty$ 的代价。

模型三 最小割

将题目建模为最小割模型，再转化为最大流求解。
希望代价最小 $\Rightarrow$ 求最小割 $\Rightarrow$ 求最大流
“禁止”条件：转化为 $+\infty$ 的代价。
由此引申出多种模型：集合划分，最大权闭合子图，切糕模型。

模型三 最小割 - 集合划分

Problem

有 n 个物品构成集合 S，要求将 S 划分为 S, T 两个集合，并有如下规则：

1. 若第 i 个物品不在 S 中，则产生 $a_i(a_i > 0)$ 的代价。
2. 若第 i 个物品不在 T 中，则产生 $b_i(b_i > 0)$ 的代价。
3. 给出若干三元组 $(u_t, v_t, w_t)(w_t > 0)$，若物品 $u_t \in S, v_t \in T$（或 $u_t \in T, v_t \in S$）则产生 w_t 的代价。
4. 给出若干二元组 (S_t, w_t)，其中 S_t 为 S 的非空子集，若 S_t 中的物品不全在 S（或 T）内则产生 w_t 的代价。
5. 给出若干三元组 (u_t, S_t, w_t)，其中 S_t 为 $S \setminus \{u_t\}$ 的非空子集，若 $u_t \in S$ 而 S_t 中的物品不全在 S（或 T）内则产生 w_t 的代价。

模型三 最小割 - 集合划分

Solution

对第 i 个物品建点 i，与 s 和 t 各连一条边。
若割掉与 t 相连的边表示在 S 中，割掉与 s 相连的边表示在 T 中。

1. 建边 (s, i, a_i)。
2. 建边 (i, t, b_i)。
3. 建边 (u_t, v_t, w_t)（或 (v_t, u_t, w_t)）。
4. 建立虚点 x，连边 (s, x, w_t)，对所有 $x \in S_t$ 连边 $(x, u, +\infty)$。
5. 建立虚点 x，连边 (u_t, x, w_t)，对所有 $x \in S_t$ 连边 $(x, u, +\infty)$。实际上包含了规则 4。

容易证明最小割方案中每个物品恰属于一个集合：假设某个物品 u 两边都被割掉，若 $u \in S$，则从割边中删去 (s, u) 会得到更小的割，矛盾；$u \in T$ 同理。
对于**二选一**的情况，代价与贡献可以互相转化：贡献 w 可以转化为预先加上 W，代价为 $W - w$。

「网络流 24 题」方格取数问题

给定 n 行 m 列的方格图，每个格子有权值 $a_{i,j}$。选择一些方格使得任意两个被选择的方格没有公共边，求选中的格子权值之和的最大值。

数据范围：$1 \le n, m \le 100$，$1 \le a_{i,j} \le 10^5$。

模型三 最小割 - 最大权闭合子图

Problem

给定点带权有向图 $G=(V,E)$，点 u 的权值为 w_u，求点权和最大的闭合子图。
注意 w_u 可以为负值。

闭合子图：G 的子图 $G'=(V',E')$，满足 $\forall u \in V', (u,v) \in G, v \in V'$。

模型三 最小割 - 最大权闭合子图

Solution

记集合 S 表示选，T 表示不选。

- 对于 $w_u \geq 0$，先预先加上 w_u（假定选）。若不选（不在 S 中），则产生 w_u 的代价。
- 对于 $w_u < 0$，若选（不在 T 中），则产生 $-w_u$ 的代价。
- 对于 $(u, v) \in E$，若 u 选而 v 不选，则产生 $+\infty$ 的代价。

对应建图即：

- 对于 $w_u \geq 0$，先预先加上 w_u，建边 (s, u, w_u)。
- 对于 $w_u < 0$，建边 (u, t, w_u)。
- 对于 $(u, v) \in E$，建边 $(u, v, +\infty)$。

用预先加上的权值和减去最大流即为答案。

模型三 最小割 - 切糕模型

Problem

有 n 个变量 $x_i \in [1, m] \bigcap \mathbb{N}$，当 $x_i = j$ 时会产生代价 $w_{i,j}$。
有若干限制 (u, v, k)，表示要求 $x_v \geq x_u + k$。
求代价最小值。
注意 k 可以为负值。

模型三 最小割 - 切糕模型

Solution

对每个 x_i 建出 $m+1$ 个点，记为点 $(i,j)(j=1,2,\cdots,m+1)$，依次连成一条链。
建边 $(s,(i,1),+\infty),((i,j),(i,j+1),w_{i,j}),((i,m+1),t,+\infty)$，割掉 $((i,j),(i,j+1))$ 就表示选择 $w_i=j$。
对于限制 (u,v,k)，对于每个 j 建边 $((u,j),(v,j+k),+\infty)$。

模型三 最小割 - 切糕模型

Solution

对每个 x_i 建出 $m+1$ 个点，记为点 $(i,j)(j=1,2,\cdots,m+1)$，依次连成一条链。
建边 $(s,(i,1),+\infty),((i,j),(i,j+1),w_{i,j}),((i,m+1),t,+\infty)$，割掉 $((i,j),(i,j+1))$ 就表示选择 $w_i=j$。
对于限制 (u,v,k)，对于每个 j 建边 $((u,j),(v,j+k),+\infty)$。
还有一个问题：怎么防止在同一条链上割掉多条边？
解决方法有很多，这里给出一种：对于 $i=2,3,\cdots,m+1$，建边 $((u,i),(u,i-1),+\infty)$。
这意味着若 $(u,i)\in S$，有 $(u,i-1)\in S$，故必然有且仅有一条割边。
$m=2$ 时的切糕模型就是上面集合划分模型（的一部分）。

模型四 拆点

将一个点拆成两个点并连边，以流量表示选择该点，从而限制选择次数。

LG2045 方格取数加强版

给定 $n \times n$ 网格图，每个格子有权值 $w_{i,j}$。现在行走 k 次，每次从 $(1,1)$ 出发，每次可以向右或向下走，最终到达 (n,n)。求所有被经过的格子的权值之和最大值。

数据范围：$1 \leq n \leq 50$，$0 \leq k \leq 10$，$0 \leq w_{i,j} \leq 1000$。

模型五 区间型一面对多面

先建边 $(s,1),(1,2),\cdots,(n-1,n),(n,t)$。
对于 $[l,r)$ 的区间全部加或减的选择，建边 (l,r,w)，以跳过来反向表示区间加或减。

「网络流 24 题」最长 k 可重区间集问题

给定 n 个开区间 (l_i, r_i)，选择若干开区间。
设选出的开区间集合为 S，则要求 $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{(l_i,r_i)\in S}[l_i < x < r_i] \leq k$。
求选出区间的长度之和的最大值。

数据范围：$1 \leq n \leq 500$，$1 \leq k \leq 3$，$1 \leq l_i < r_i \leq 10^5$。

Table of Contents

T1

给定长为 n 的字符串 s，将其任意重排得到 t，满足 $\forall i \in [1, n], t_i \neq t_{n+1-i}$。
给定序列 $\{b_i\}$，求 $\sum_{i=1}^{n}[s_i = t_i]b_i$ 的最大值。

数据范围：$2 \leq n \leq 100$，n 为偶数，s 只含小写字母，$1 \leq b_i \leq 100$。

T2

给出一个 n 个点和 m 条边的简单无向图，每个点有两个权值 a_i 和 b_i。
可以以 a_i 的代价删除第 i 个节点以及与这个点相连的边。
一个极大连通块的权值定义为 b_i 的权值和的绝对值。求所有极大连通块权值之和减去代价和的最大值。

数据范围：$1 \le n, m \le 300$，$1 \le a_i \le 10^6$，$-10^6 \le b_i \le 10^6$。

T3

给定两个长为 n 的排列 P, Q，构造两个排列 A 和 B，满足 $\forall i, A_i = i \vee A_i = P_i, B_i = i \vee B_i = Q_i$。求 $\sum_{i=1}^{n}[A_i = B_i]$ 的最大值。

数据范围：$1 \leq n \leq 10^5$。

T4

给定 $n \times n$ 的矩阵 A，可以将矩阵中任意数量的 0 改为 $1, 2, 3, 4, 5$ 中的任意数。求所有四相邻元素差值的平方和的最小值。要求构造方案。

数据范围：$1 \leq n \leq 20$，$0 \leq A_{i,j} \leq 5$。

T5

有 n 种寿司排成一列，第 i 种寿司的代号为 a_i。
给定 $d_{i,j}(1 \le i \le j \le n)$。每次操作可以将一段区间的寿司全部取下（取下后会立即进行补货，不影响下一次操作）。可以进行任意次操作，设操作的区间依次为 $[l_1, r_1], [l_2, r_2], \cdots$，则获得总美味度为：

$$\sum_{1 \le i \le j \le n} [\exists t, l_t \le i \le j \le r_t] d_{i,j}$$

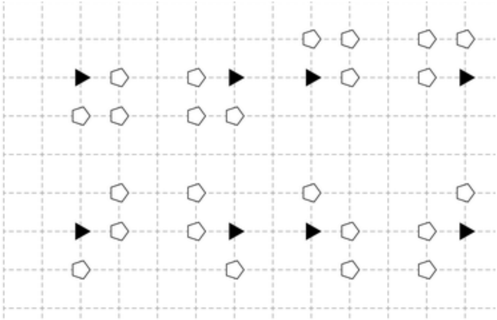
此外，给定 m, c，对于每个 x，如果吃过 $c > 0$ **种**代号为 x 的寿司，则收费 $mx^2 + cx$；如果没吃过则不收费。
求总美味度减去费用的最大值。

数据范围：$1 \le n \le 100$，$-500 \le d_{i,j} \le 500$，$1 \le a_i \le 1000$，$0 \le m \le 1$。

T6

在平面直角坐标系内有 n 个帐篷，帐篷均位于整点且不重叠。第 i 个帐篷的坐标为 (x_i, y_i)，权值为 w_i。
移除一些帐篷，使得不存在一个坐标均为偶数的帐篷，其与八相邻的某三个帐篷组成一条边平行于 x 轴的平行四边形或矩形。
求未被移除的帐篷的权值之和最大值。

数据范围：$1 \leq n \leq 1,000$，$-10^9 \leq x_i, y_i \leq 10^9$，$w_i$：$1 \leq w_i \leq 10^9$。



T7

准备进行 n 堂讲课与 m 次研讨会，第 i 堂讲课时间为 $[a_i, b_i)$，第 i 次研讨会时间为 $[p_i, q_i)$。
学校共有 x 台高清投影仪和 y 台普通投影仪。每次讲课或研讨会都需要一台投影仪，讲课必须使用高清投影仪，而研讨会可以使用普通或高清投影仪。
一台投影仪每个时刻只能用在一个地方，且在使用完毕后才会归还。
构造分配方案或报告无解。

数据范围：多组测试，$T \leq 300$，
$n, m, x, y \leq 300, 1 \leq a_i < b_i \leq 10^6, 1 \leq p_i < q_i \leq 10^6$，3s。

T8

给定 n 个点 m 条边的简单有向图以及起点 S 和终点 E。可以标记一些点，标记点 u 的代价为 C_u。最小化使得 S 到 E 的任意一条路径上都至少有 k 个标记点的代价，要求给出方案。

数据范围：$2 \le n \le 200$，$1 \le m \le 500$，$1 \le k \le 5$，$1 \le C_i \le 10^7$。

T9

给定一张没有容量的简单网络图（给定源汇），每条边 (u_i, v_i) 有权值 $g_i \in \{0, 1\}$。
请给每条边分配一个正容量 c_i，并构造一组最大流 f，要求：

- 所有 $g_i = 0$ 的边流量为 0；
- 所有 $g_i = 1$ 的边流量不为 0；
- 最小化满流边（即满足 $f_i = c_i$ 的边）的数量。

保证有解，要求构造的方案满足 $1 \le c_i \le 10^9$，$0 \le f_i \le c_i$。

数据范围：$2 \le n \le 100$，$1 \le m \le 1000$，$g_i \in \{0, 1\}$。

T10

有一张 $n \times m$ 的网格图，每个格子有黑白两色，初始全为白色。
每次可以进行如下操作之一：

- 将一个格子涂黑或涂白，费用为 c；
- 将同一行或同一列的若干连续的格子全部涂黑或涂白。设操作的格子数量为 l，则费用为 $al + b$。

有如下限制：

- 每个格子至多只能被涂两次。
- 不能将之前被涂白的格子涂黑。

给出目标状态，求让网格图变为目标状态的最小花费。

数据范围：$1 \leq n, m \leq 40$，$0 \leq a, b, c \leq 40$，$c \leq a + b$。

T11

有两个 $n \times m$ 的矩阵 A, B，A 中元素为正整数，表示权值；B 中元素为字符 L,R,D,U，表示方向，且 B 中元素代表的方向不会指向矩阵外。
由 A, B 生成矩阵 C，$C_{i,j}$ 表示按照 B 中方向不断行走，所能到达的所有格子的权值之和。
给定 C，构造 A, B 或报告无解。

数据范围：多测，$1 \le T \le 100$，$\sum(n \cdot m) \le 10^5$，$C_{i,j} \in [2, 10^9]$。

Table of Contents

最大流问题的线性规划形式

为了方便把容量和流量都记成变量形式，即 $c_{u,v}$ 和 $f_{u,v}$。
在原有网络图的基础上新增一条 (t,s) 边以平衡流量，那么原图的流量就是 $f_{t,s}$。
所有变量为：$f_{u,v}((u,v)\in E), f_{t,s}$。

$$
\begin{aligned}
\max \quad & f_{t,s} \\
s.t. \quad & f_{u,v} \le c_{u,v}, && (u,v)\in E \\
& \sum_{(v,u)\in E} f_{v,u} - \sum_{(u,v)\in E} f_{u,v} = 0, && u\in V \\
& f_{u,v} \ge 0, && (u,v)\in E \\
& f_{t,s} \ge 0
\end{aligned}
$$

最大流问题的线性规划形式

设对偶变量分别为 $d_{u,v}, p_u$，进行对偶：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(u,v)\in E} c_{u,v} d_{u,v} \\
s.t. \quad & d_{u,v} + p_v - p_u \ge 0, \quad && (u,v) \in E \\
& p_s - p_t \ge 1 \\
& d_{u,v} \ge 0, && (u,v) \in E \\
& d_{t,s} \ge 0
\end{aligned}
$$

最大流问题的线性规划形式

仔细观察，第一个条件可以改写为 $d_{u,v} \geq p_u - p_v$。
如果设 $p_u = [u \in S], d_{u,v} = [u \in S, v \in T]$，可以发现最小割问题的线性规划模型与最大流几乎完全一样：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(u,v)\in E} c_{u,v} d_{u,v} \\
s.t. \quad & d_{u,v} + p_v - p_u \geq 0, \quad && (u,v) \in E \\
& p_s - p_t \geq 1 \\
& d_{u,v} \in \{0,1\}, && (u,v) \in E \\
& d_{t,s} = 0 \\
& p_u \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

易知最大流小于等于最小割。
下面证明最大流等于最小割，即最大流对偶的线性规划中存在一组最优解，使得每个变量都为 0 或 1。

最大流问题的线性规划形式

Proof.

注意到令所有 $p_u \to p_u + C$ 不会影响目标函数的取值，不妨设 $p_t = 0$，$p_s \geq 1$。

对于一组最优解 $(d^*_{u,v}, p^*_u)$，设 $d_{u,v} = d^*_{u,v}, p_u = \min\{p^*_u, 1\}$，下面证明 $(d_{u,v}, p_u)$ 也是一组最优解。

显然第四、五条限制仍然成立，只需考虑第一条限制：

- 若 $p^*_u \leq p^*_v$，则 $p_u \leq p_v$，$d_{u,v} \geq 0 \geq p_u - p_v$。
- 若 $p^*_u > p^*_v > 1$，则 $p_u = p_v = 1$，$d_{u,v} \geq 0 = p_u - p_v$。
- 若 $p^*_u \geq 1 \geq p^*_v$，则 $p_u = 1, p_v = p^*_v$，$d_{u,v} \geq p^*_u - p^*_v \geq p^*_u - p^*_v$。

于是这是一组可行解，又由于 $d_{u,v} = d^*_{u,v}$ 故目标函数不变，于是这是一组最优解。

最大流问题的线性规划形式

记最大流对偶线性规划的目标函数最小值为 z。
接下来再证明：存在一组割 $\{S,T\}$，使得 $c(S,T) \le z$。
令随机变量 $X \sim U(0,1)$，$S = \{u \mid p_u \ge x\}$，随机变量 $Y = c(S,T)$。
接下来考虑 Y 的期望：

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= E\Big(\sum_{(u,v)\in E}[u\in S, v\in T]c_{u,v}\Big) \\
&= \sum_{(u,v)\in E} c_{u,v}E([u\in S, v\in T]) \\
&= \sum_{(u,v)\in E} c_{u,v}P(p_v < X \le p_u) \\
&= \sum_{(u,v)\in E} c_{u,v}\max\{0, p_u - p_v\} \\
&\le \sum_{(u,v)\in E} c_{u,v}(p_u - p_v) \\
&\le \sum_{(u,v)\in E} c_{u,v}d_{u,v} \\
&= z
\end{aligned}
$$

故一定存在 $x\in(0,1)$，使得 $X=x$ 时对应的 $c(S,T)\le z$。
又由于 $z\le c(S,T)$，故 $z=c(S,T)$，即最大流等于最小割。

最小费用最大流问题的线性规划形式

记一组最大流中 $b_u = \sum_{(u,v)\in E} f_{u,v} - \sum_{(v,u)\in E} f_{v,u}$，显然所有最大流的 $\{b_u\}$ 都是一样的。

$$
\begin{array}{rll}
\min & \displaystyle\sum_{(u,v)\in E} w_{u,v} f_{u,v} & \\
s.t. & f_{u,v} \le c_{u,v}, & (u,v) \in E \\
 & \displaystyle\sum_{(v,u)\in E} f_{v,u} - \sum_{(u,v)\in E} f_{u,v} = -b_u, & u \in V \\
 & f_{u,v} \ge 0, & (u,v) \in E
\end{array}
$$

最小费用最大流问题的线性规划形式

对偶：

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{(u,v)\in E} c_{u,v} d_{u,v} - \sum_{u\in V} b_u p_u \\ s.t. \quad & d_{u,v} + p_v - p_u \le w_{u,v}, && (u,v)\in E \\ & d_{u,v} \le 0, && (u,v)\in E \end{aligned}$$

令 $z_{u,v} = -d_{u,v}$，改写得：

$$\begin{aligned} \max \quad & -\Big(\sum_{(u,v)\in E} c_{u,v} z_{u,v} + \sum_{u\in V} b_u p_u\Big) \\ s.t. \quad & z_{u,v} \ge p_v - p_u - w_{u,v}, && (u,v)\in E \\ & z_{u,v} \ge 0, && (u,v)\in E \end{aligned}$$

$$S = -\min\{\sum_{u\in V} b_u p_u + \sum_{(u,v)\in E} c_{u,v} \max\{0, p_v - p_u - w_{u,v}\}\}$$

这为费用流模型构建提供了一个新的模型。

还有几点需要补充：

1. 一定有整数最优解吗？
由于系数矩阵是全幺模矩阵[1]，故这个线性规划模型具有最优整数解特性，即最优解一定为整数向量。

[1]想了解更多可参考 线性规划 - 整数规划与全幺模矩阵 - Daltao

还有几点需要补充：

1. 一定有整数最优解吗？
由于系数矩阵是全幺模矩阵[1]，故这个线性规划模型具有最优整数解特性，即最优解一定为整数向量。

2. 这次代价函数里有 p_u，但对 p_u 还是没有限制，合理吗？
虽然对 p_u 没有限制，但是 $\sum_u b_u = 0$，故令 $p_u \to p_u + C$ 仍然不会影响目标函数。
由此可见，一定存在一组自然数最优解。

[1] 想了解更多可参考 线性规划 - 整数规划与全幺模矩阵 - Daltao

Ex1

有 n 个位置，在第 i 个位置建塔需要费用 C_i，同一个位置可以建任意多座塔。给定 m 个限制 (L_i, R_i, D_i)，表示区间 $[L_i, R_i]$ 内需至少建 D_i 座塔。求最小总费用。

数据范围：$n \leq 1000, m \leq 10000, 1 \leq L_i \leq R_i \leq n, C_i, D_i \leq 10000$。

Ex2

有 n 间珠宝店，第 i 间商店销售 K_i 种珠宝，每种珠宝有三个属性：重量 $S_{i,j}$，价格 $P_{i,j}$，数量 $C_{i,j}$。
一个珠宝盒包含 n 个珠宝，且满足：

- 不存在两个珠宝来自同一间珠宝店，即珠宝盒恰包含每间店的一件珠宝。
- 给出 m 个形如 (u, v, w) 的限制，表示来自店 v 的珠宝的重量不超过来自店 u 的珠宝的重量加上 w。

有 q 次询问，每次询问给出 A，求从珠宝店购买珠宝并组装成 A 个珠宝盒的最小费用，或报告无解。

数据范围：$n, K_i \leq 30, m \leq 50, q \leq 10^5, S_{i,j}, w \leq 10^9, P_{i,j} \leq 30, C_{i,j} \leq 10^{12}, A \leq 3 \times 10^{13}$。