

水题选讲

彭博

北京大学

2024.2

有一个 $n \times m$ 的网格，你每次会在 $n + m - 2$ 条线里随机选一条切开，只保留左边/下面那块。切到面积小于 K 时结束。

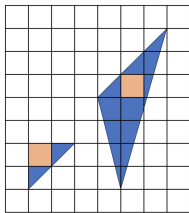
求期望会切几次。

$$n, m \leq 10^6$$

给定一个长度为 n 的正整数序列 a ，你需要把它划分成 K 个非空段，最大化子段和大于等于 S 的段的数量。

$$n \leq 2.5 \times 10^5, a_i \leq 10^9$$

给定正整数 S ，你需要构造一个三个点坐标都是整数的三角形，使得其面积为 $S/2$ ，且内部（包括顶点和边）包含恰好 1 个完整的正方形格子。



$$1 \leq S \leq 10^8$$

给定一棵 n 个点的树，第 i 个点的权值是 a_i 。

有两种操作，每次给一条链上的每个点权值加 w ，或者给一个子树的每个点权值加 w 。

每次操作之后求出此时的带权重心。如果有多个选择深度最小的。

$n, Q \leq 10^5$

有一个 $n \times m$ 的网格，上面有 k 个宝石， b 个炸弹。

一个炸弹可以横着爆或者竖着爆，并炸掉一行/一列的宝石，并引爆一行/一列的其他炸弹。

你可以选择每个炸弹的爆炸方向，然后引爆一个炸弹。问链式反应结束时至多能炸掉几个宝石。

$n, m \leq 3000$

定义一个序列的权值是最少的交换相邻元素的次数，使得序列单峰，即 $a_1 < \cdots < a_k > \cdots > a_n$ 或 $a_1 > \cdots > a_k < \cdots < a_n$ 。

给定一个长度为 n 的排列 a ，你需要求出每个前缀的权值。

$$n \leq 2 \times 10^5$$

给定两棵 n 个点的树 T_1, T_2 。

你每次可以选一个点集 S ，满足 S 在 T_1 的导出子图的连通性与在 T_2 的导出子图的连通性相同，然后交换两个子图的边。两个图的连通性相同当且仅当任意两个点 x, y 要么同时连通，要么同时不连通。不难发现交换之后 T'_1, T'_2 仍然是两棵树。

求出你可以造出多少种本质不同的 T_1 。

$$\sum n \leq 2 \times 10^5$$

给定 n 个两两不同的球，第 i 个球上写了数字 a_i 。你要把它们放进 k 个两两不同的盒子里，使得每个盒子非空。最大化每个盒子的 AND 之和，并计算有多少种最大化的方案。

$$n, k \leq 10^5, a_i \leq 10^9$$

给定正整数 n, a, b , 你需要求出 $1 \leq x < n$ 使得 $x^2 = a \pmod{n}$ 且 $\lfloor \sqrt[3]{x^2} \rfloor = b$ 。

保证 $\gcd(a, n) = 1$, n 是奇数, 解唯一。

$n \leq 10^{100} - 1, a, b \leq n - 1$

给定一个 n 个点 m 条边的简单无向图，每个点上写了一个数字 p_i ，其中 p 是一个排列。

给定 A 和 B ，你希望把点上的数字进行重排，使得对于每个点 x 都存在一条从 A 到 B 的经过 x 的路径，且路径上的点权递增。

但你只能对 p 进行如下操作：选择一条从 A 出发的简单路径

$A = x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ ，同时令 $p_{x_i} \leftarrow p_{x_{i+1} \bmod k}$ 。

你可以操作至多 10000 次。构造方案或判断无解。

Hint: 你可以认为题目额外给出了一个定向，使得 A 可以到达任意点，任意点可以到达 B 。

$n \leq 1000, m \leq 2000$