取模(mod)

吐槽: checker其实是2023.1.10的模拟赛T3，比std难写多了。

本题的第 $3, 4$ 档部分分对答案有非常强的启发意义。

记你手上的序列为 b。

可以从后向前考虑每一个 $a_i - a_{i-1}$, 可以发现我们一定可以用 $2n$ 次操作把它把这个差分构造出来并不影响后面的差分，具体做法就是 $2\ b_i, 1\ a_i - a_{i-1}$ 。直接维护就是 $O(n^2)$ 的，计算一下式子可以发现每次取模的 $b_i = a_n - a_i + i$ 故可以实现 $O(n)$。

记 $V = \max a_i + 1$, $\forall 1 \le i \le n, a_i := a_i + (i-1) \times V$ 就可以把一般序列转化为递增序列。前面的步骤完成后再 $2\ V$ 即可。

时空复杂度: $O(n)$

石子合并(rock)

原题: [洛谷 P4481 [BJWC2018] 序列合并]

首先，令 $L := \max(L, 2), R := \min(R, n)$, 若 $L > R \& n > 1$, 直接判掉无解。

考虑区间 dp 。
记 $f_{l,r}$ 为将区间 $[l..r]$ 合并成一个区间的总费用最小值。
记 $g_{l,r,t}$ 为将区间 $[l..r]$ 合并成 t 个区间的总费用最小值。
直接把 g 的第一维压掉，因为常数小所以可以直接通过。

如果你使用上述算法被卡常了，请你尽量去除无用转移以减小常数。

时间复杂度: $O(n^3 k)$
空间复杂度: $O(n^2)$

买眼镜(glass)

原题: [洛谷 P3488 [POI2009] LYZ-Ice Skates]

记 a_i 为度数为 i 的顾客数量。

首先可以把题意转化成二分图匹配的模型。那么根据霍尔定理，当且仅当对于任何一个左部点集合，与其直接相连的右部点集合大小都大于等于其集合大小时，该二分图存在完美匹配。

又根据该图的特殊性质，可以发现只需要任何一个度数区间不满足情况就可以判定无解，否则可以判定有解，因为选择一段区间一定不比选择若干个点更优。

于是有式子: $S_{l,r} = \sum_{l \le i \le r} a_i - (\max(r+d, n) - l + 1) \times k$

有解当且仅当 $\max_{1 \le l \le r \le n} S_{l,r} \le 0$

当 $r + d \le n$时有 $S_{l,r} = \sum_{1 \le l \le r \le n} a_i - k - d \times k$

否则可以证明 $r = n$ 一定更不优。

于是有 $S_{l,n} = \sum_{1 \le l \le r \le n} a_i - k$

可以发现这是一个区间最大子段和的模型，动态开点线段树即可解决。

时空复杂度: $O(q \log n)$

羽毛球馆(pool)

原题: [CodeForces 500G New Year Running]

记第一个羽毛球运动的循环节 $D1=2\times dist(u_1,v_1), D2=2*\times dist(u_2,v_2)$ 。

对于路径 u,v 上的点 p , 走到 p 的时间为 $kD+dist(u,p), kD+dist(v,p)+D/2$, 我们把除 kD 外的部分称为 T 。

首先求出 $(u_1,v_1),(u_2,v_2)$ 的交集，设其为 (u_3,v_3)

Tips

- 树上路径的交集:
  记p_1,p_2 为 $LCA(u_1,u_2), LCA(u_1,v_2), LCA(v_1,u_2), LCA(v_1,v_2)$ 中深度较大的两个, 若 $p_1=p_2\&depth_{p_1}<min(depth_{LCA(u_1,v_1)}, depth_{LCA(u_2,v_2)})$ 则 $(u_1,v_1),(u_2,v_2)$ 交集为空,否则交集为路径 (p_1,p_2) 。

接下来有 2 种情况:

- 追及，这种情况只会发生在 p_1,p_2 发生，等式就是 $exgcd$ 型式子，直接计算即可。
- 相遇在点 z。
  此时有 $ans=x\times D_1+T_1+dist(u_3,z)=y\times D_2+T_2+dist(v_3,z)$。
  故有 $ans=\dfrac{x\times D_1+y\times D_2+T_1+T_2+dist(u_3,v_3)}{2}$

因为需要保证答案为整数(在点上相遇),故 $D_2+T_1+T_2+dist(u_3,v_3)$ 为奇数时无解。

接下来需要找到满足 $max(x\times D_1+T_1, y\times D_2+T_2)\le ans\le min(x\times D_1+T_1, y\times D_2+T_2)+dist(u_3,v_3)$ 的最小解。

这个其实就是 [POJ 3530 A Modular Arithmetic Challenge] 。

于是这道题做完了，时间复杂度 $O(n+q\log n\times LCA)$，空间复杂度 $O(n+LCA)$ ，因为 q 上的常数比较大，std使用的是 dfn 序 LCA 。