网络流进阶

stkwill

January 11, 2024

Q&A

Q: 课件有啥内容？

Q&A

Q: 课件有啥内容？
A: 基础的网络流技巧和一些杂题

Q&A

Q: 课件有啥内容？
A: 基础的网络流技巧和一些杂题

Q: 这份课件有什么前置芝士？

Q&A

Q: 课件有啥内容？
A: 基础的网络流技巧和一些杂题

Q: 这份课件有什么前置芝士？
A: 我们假定你已经会写基础的网络流算法，并知道一些简单的技巧，会做网络流 24 题

Q&A

Q: 课件有啥内容？
A: 基础的网络流技巧和一些杂题

Q: 这份课件有什么前置芝士？
A: 我们假定你已经会写基础的网络流算法，并知道一些简单的技巧，会做网络流 24 题

Q: 有题没听懂咋办？

Q&A

Q: 课件有啥内容？
A: 基础的网络流技巧和一些杂题

Q: 这份课件有什么前置芝士？
A: 我们假定你已经会写基础的网络流算法，并知道一些简单的技巧，会做网络流 24 题

Q: 有题没听懂咋办？
A: 我们鼓励直接在课上发问，如果实在听不懂，大部分题都有原题可以直接网上找题解，课后课件会下发，也可以找教练要录制的视频

Dinic 复杂度

一般图 Dinic 复杂度为 $O(|V|^2|E|)$

Dinic 复杂度

一般图 Dinic 复杂度为 $O(|V|^2|E|)$

结论：

Dinic 复杂度

一般图 Dinic 复杂度为 $O(|V|^2|E|)$

结论：
1. 单位容量网络上：$O(|E|\min(|E|^{\frac{1}{2}},|V|^{\frac{2}{3}}))$

Dinic 复杂度

一般图 Dinic 复杂度为 $O(|V|^2|E|)$

结论：

1. 单位容量网络上：$O(|E|\min(|E|^{\frac{1}{2}},|V|^{\frac{2}{3}}))$
2. 单位容量网络且每个节点入度或出度都不大于 1 时：$O(|E||V|^{\frac{1}{2}})$

Dinic 复杂度

一般图 Dinic 复杂度为 $O(|V|^2|E|)$

结论：
1. 单位容量网络上：$O(|E|\min(|E|^{\frac{1}{2}},|V|^{\frac{2}{3}}))$
2. 单位容量网络且每个节点入度或出度都不大于 1 时：$O(|E||V|^{\frac{1}{2}})$

证明：`https://oi-wiki.org/graph/flow/max-flow/`

网络流其他算法复杂度

ISAP: $O(|V|^2|E|)$ （常数小些）

网络流其他算法复杂度

ISAP: $O(|V|^2|E|)$ （常数小些）
HLPP: $O(|V|^2|E|)^{\frac{1}{2}}$

网络流其他算法复杂度

ISAP: $O(|V|^2|E|)$ （常数小些）
HLPP: $O(|V|^2|E|)^{\frac{1}{2}}$

注意：这些算法在上述特殊图中不一定有特殊复杂度

1 Q&A

2 基础知识
- 算法
- 建图基本技巧

3 杂题

最小割

割是将点集分割成两个集合 (S,T)，其中源点在 S，汇点在 T，则割删除的边就是 $u\in S, v\in S$ 的边 (u,v)。割的容量就是这些边容量的和。最小割就是容量最小的割。

最小割

割是将点集分割成两个集合 (S, T)，其中源点在 S ，汇点在 T ，则割删除的边就是 $u \in S, v \in S$ 的边 (u, v)。割的容量就是这些边容量的和。最小割就是容量最小的割。

显然，一个割会使得源汇点不连通。显然最大流小于或等于最小割。

最小割

割是将点集分割成两个集合 (S, T)，其中源点在 S，汇点在 T，则割删除的边就是 $u \in S, v \in S$ 的边 (u, v)。割的容量就是这些边容量的和。最小割就是容量最小的割。

显然，一个割会使得源汇点不连通。显然最大流小于或等于最小割。

考虑最大流时，源点能流到边的集合为 S, 能流到汇点的集合为 T，对于 $(u, v), u \in S, v \in T$ 或 (v, u) 的反向边，边一定满流，否则存在增广路 $S \to u \to v \to T$，故最小割等于最大流。

上下界网络流

有源汇上下界最大/可行流

上下界网络流

有源汇上下界最大/可行流
无源汇上下界最大/可行流

LOJ6000. 「网络流 24 题」搭配飞行员

飞行大队有若干个来自各地的驾驶员，专门驾驶一种型号的飞机，这种飞机每架有两个驾驶员，需一个正驾驶员和一个副驾驶员。由于种种原因，例如相互配合的问题，有些驾驶员不能在同一架飞机上飞行，问如何搭配驾驶员才能使出航的飞机最多。

因为驾驶工作分工严格，两个正驾驶员或两个副驾驶员都不能同机飞行。

有 n 个正驾驶员，m 个副驾驶员，$n, m \leq 100$

LOJ6000. 「网络流 24 题」搭配飞行员题解

简单二分图匹配
时间复杂度 $O((nm)^{1.5})$

LOJ6007. 「网络流 24 题」方格取数

在一个有 $m \times n$ 个方格的棋盘中，每个方格中有一个正整数。

现要从方格中取数，使任意 2 个数所在方格没有公共边，且取出的数的总和最大。试设计一个满足要求的取数算法。

$1 \leq n, m \leq 30$

LOJ6007. 「网络流 24 题」方格取数题解

最小割

LOJ6007. 「网络流 24 题」方格取数题解

最小割

黑白染色转二分图，相邻格连 ∞ 容量边，源汇点连权值边，最小割相当于相邻点至少割一个

LOJ6007. 「网络流 24 题」方格取数题解

最小割

黑白染色转二分图，相邻格连 ∞ 容量边，源汇点连权值边，最小割相当于相邻点至少割一个

总和 - 最大流即为答案

时间复杂度 $O((nm)^3)$

LOJ6001. 「网络流 24 题」太空飞行计划

W 教授正在为国家航天中心计划一系列的太空飞行。每次太空飞行可进行一系列商业性实验而获取利润。现已确定了一个可供选择的实验集合 $E = \{E_1, E_2, \cdots, E_m\}$，和进行这些实验需要使用的全部仪器的集合 $I = \{I_1, I_2, \cdots, I_n\}$ 。实验 E_j 需要用到的仪器是 I 的子集 $R_j \subseteq I$ 。

配置仪器 I_k 的费用为 c_k 美元。实验 E_j 的赞助商已同意为该实验结果支付 p_j 美元。W 教授的任务是找出一个有效算法，确定在一次太空飞行中要进行哪些实验并因此而配置哪些仪器才能使太空飞行的净收益最大。这里净收益是指进行实验所获得的全部收入与配置仪器的全部费用的差额。

对于给定的实验和仪器配置情况，编程找出净收益最大的试验计划。

$1 \leq n, m \leq 50$ 。

LOJ6001. 「网络流 24 题」太空飞行计划题解

最小割

LOJ6001. 「网络流 24 题」太空飞行计划题解

最小割

将仪器与实验分为两层，若实验需要仪器，之间连 ∞ 容量边，两层的点以权值相连，断仪器边意味着使用此仪器，代价增加 c_k ，断实验边意味着取消此实验，收益减少 p_j ，仅有所有仪器使用才允许实验进行。

LOJ6001. 「网络流 24 题」太空飞行计划题解

最小割

将仪器与实验分为两层，若实验需要仪器，之间连 ∞ 容量边，两层的点以权值相连，断仪器边意味着使用此仪器，代价增加 c_k ，断实验边意味着取消此实验，收益减少 p_j ，仅有所有仪器使用才允许实验进行。

最大流 $+\sum_j p_j$ 即为答案

时间复杂度 $O((nm)^3)$

1. Q&A
2. 基础知识
3. 杂题
   - 热身题
   - 一般题
   - 进阶题

BZOJ1001. 狼抓兔子

$n \times m$ 网格图，再加上每个网格的主对角线连边，也就是 $(u, v) \to (u+1, v), (u, v) \to (u, v+1), (u, v) \to (u+1, v+1)$ 。

每条边有正边权，此时你要删去一些边使得左上角不能到右下角，最小化边权和。

$n, m \le 1000$ 。

BZOJ1001. 狼抓兔子题解

考虑最小割，由于是平面图，平面图最小割与对偶图最短路等价，对偶图点边数均为 $O(nm)$ ，使用最短路算法求解。

时间复杂度 $O(nm\log nm)$

LuoguP3227. 【HNOI2013】切糕

经过千辛万苦小 A 得到了一块切糕，切糕的形状是长方体，小 A 打算拦腰将切糕切成两半分给小 B。出于美观考虑，小 A 希望切面能尽量光滑且和谐。于是她找到你，希望你能帮她找出最好的切割方案。

出于简便考虑，我们将切糕视作一个长 P、宽 Q、高 R 的长方体点阵。我们将位于第 z 层中第 x 行、第 y 列上的点称 (x, y, z)，它有一个非负的不和谐值 $v(x, y, z)$。一个合法的切面满足以下两个条件：

1. 与每个纵轴（一共有 $P \times Q$ 个纵轴）有且仅有一个交点。即切面是一个函数 $f(x, y)$，对于所有 $(x, y)(x \in [1, P], y \in [1, Q])$，我们需指定一个切割点 $f(x, y)$，且 $1 \le f(x, y) \le R$。
2. 切面需要满足一定的光滑性要求，即相邻纵轴上的切割点不能相距太远。对于所有的 $1 \le x, x' \le P$ 和 $1 \le y, y' \le Q$，若 $|x - x'| + |y - y'| = 1$，则 $|f(x, y) - f(x', y')| \le D$，其中 D 是给定的一个非负整数。

可能有许多切面 f 满足上面的条件，小 A 希望找出总的切割点上的不和谐值最小的那个。

$1 \le P, Q, R \le 40, 0 \le D \le R$，且给出的所有的不和谐值不超过 1000。

LuoguP3227. 【HNOI2013】切糕题解

最小割

LuoguP3227. 【HNOI2013】切糕题解

最小割

每纵轴选一个点分开，一边与源点联通，一边与汇点联通，中间边容量为代价

LuoguP3227. 【HNOI2013】切糕题解

最小割

每纵轴选一个点分开，一边与源点联通，一边与汇点联通，中间边容量为代价

相邻纵轴隔 $D+1$ 长度连 ∞ 容量边

LuoguP3227. 【HNOI2013】切糕题解

最小割

每纵轴选一个点分开，一边与源点联通，一边与汇点联通，中间边容量为代价

相邻纵轴隔 $D+1$ 长度连 ∞ 容量边

其最小割即为答案

LuoguP3227. 【HNOI2013】切糕题解

最小割

每纵轴选一个点分开，一边与源点联通，一边与汇点联通，中间边容量为代价

相邻纵轴隔 $D+1$ 长度连 ∞ 容量边

其最小割即为答案

时间复杂度 $O((PQR)^3)$ ，能过

LuoguP3980. 【NOI2008】志愿者招募

项目需要 n 天才能完成，其中第 i 天至少需要 a_i 个人。一共有 m 类志愿者可以招募。其中第 i 类可以从第 s_i 天工作到第 t_i 天，招募费用是每人 c_i 元。

求最小费用

$1 \le n \le 1000, 1 \le m \le 10000$

LuoguP3980. 【NOI2008】志愿者招募题解

先确定一个总人数的上界 R

LuoguP3980. 【NOI2008】志愿者招募题解

先确定一个总人数的上界 R
按天数顺序建一条链，每条边的容量为 $R - a_i$ ，费用 0

LuoguP3980. 【NOI2008】志愿者招募题解

先确定一个总人数的上界 R
按天数顺序建一条链，每条边的容量为 $R - a_i$ ，费用 0
最大流可以保证一共有 R 的流量经过，那么从 s_i 到 t_i ，容量 ∞ ，费用 c_i 的边可以让每个人都减少区间内 1 的容量需求

LuoguP3980. 【NOI2008】志愿者招募题解

先确定一个总人数的上界 R

按天数顺序建一条链，每条边的容量为 $R-a_i$ ，费用 0

最大流可以保证一共有 R 的流量经过，那么从 s_i 到 t_i ，容量 ∞ ，费用 c_i 的边可以让每个人都减少区间内 1 的容量需求

此时最大流下的最小费用即为答案

LuoguP3980. 【NOI2008】志愿者招募题解

先确定一个总人数的上界 R

按天数顺序建一条链，每条边的容量为 $R - a_i$ ，费用 0

最大流可以保证一共有 R 的流量经过，那么从 s_i 到 t_i ，容量 ∞ ，费用 c_i 的边可以让每个人都减少区间内 1 的容量需求

此时最大流下的最小费用即为答案

时间复杂度 $O(nm^2 \log R)$ （只会证这个复杂度，能过）

UOJ77. A+B Problem

从前有个 n 个方格排成一行，从左至右依此编号为 $1, 2, \cdots, n$。

第 i 个方格上有 6 个属性：$a_i, b_i, w_i, l_i, r_i, p_i$ 。

如果方格 i 染成黑/白色就会获得 b_i/w_i 的好看度。

但是太多了黑色就不好看了。如果方格 i 是黑色，并且存在一个 j 使得 $1 \le j < i$ 且 $l_i \le a_j \le r_i$ 且方格 j 为白色，那么方格 i 就被称为奇怪的方格。

如果方格 i 是奇怪的方格，就会使总好看度减少 p_i。

也就是说对于一个染色方案，好看度为：

$$\sum_{i \ is \ black} b_i + \sum_{i \ is \ white} w_i - \sum_{i \ is \ strange} p_i$$

现在给你 $n \le 5000, a, b, w, l, r, p$ ，问所有染色方案中最大的好看度是多少。

UOJ77. A+B Problem 题解

最小割

UOJ77. A+B Problem 题解

最小割

每个方格建黑点白点，之间连 ∞ 边，源点连容量 b_i 至黑点，白点连容量 w_i 至汇点

UOJ77. A+B Problem 题解

最小割

每个方格建黑点白点，之间连 ∞ 边，源点连容量 b_i 至黑点，白点连容量 w_i 至汇点

对于每个方格的黑点，连容量 p_i 至虚点，虚点连 ∞ 边至满足条件的白点

UOJ77. A+B Problem 题解

最小割

每个方格建黑点白点，之间连 ∞ 边，源点连容量 b_i 至黑点，白点连容量 w_i 至汇点

对于每个方格的黑点，连容量 p_i 至虚点，虚点连 ∞ 边至满足条件的白点

线段树优化建图节省边数

UOJ77. A+B Problem 题解

最小割

每个方格建黑点白点，之间连 ∞ 边，源点连容量 b_i 至黑点，白点连容量 w_i 至汇点

对于每个方格的黑点，连容量 p_i 至虚点，虚点连 ∞ 边至满足条件的白点

线段树优化建图节省边数

最小割即为答案

UOJ77. A+B Problem 题解

最小割

每个方格建黑点白点，之间连 ∞ 边，源点连容量 b_i 至黑点，白点连容量 w_i 至汇点

对于每个方格的黑点，连容量 p_i 至虚点，虚点连 ∞ 边至满足条件的白点

线段树优化建图节省边数

最小割即为答案

点数 $O(n)$

UOJ77. A+B Problem 题解

最小割

每个方格建黑点白点，之间连 ∞ 边，源点连容量 b_i 至黑点，白点连容量 w_i 至汇点

对于每个方格的黑点，连容量 p_i 至虚点，虚点连 ∞ 边至满足条件的白点

线段树优化建图节省边数

最小割即为答案

点数 $O(n)$ ，边数 $O(n\log n)$

UOJ77. A+B Problem 题解

最小割

每个方格建黑点白点，之间连 ∞ 边，源点连容量 b_i 至黑点，白点连容量 w_i 至汇点

对于每个方格的黑点，连容量 p_i 至虚点，虚点连 ∞ 边至满足条件的白点

线段树优化建图节省边数

最小割即为答案

点数 $O(n)$ ，边数 $O(n \log n)$ 时间复杂度 $O(n^3 \log n)$ （能过）

混合图欧拉回路

给定一个有向边无向边混合的图，给无向边定向，并得到一个欧拉回路。

判断是否有解以及输出解。

混合图欧拉回路题解

考虑有向图欧拉回路充要条件：弱连通，入度出度相等

混合图欧拉回路题解

考虑有向图欧拉回路充要条件：弱连通，入度出度相等
首先先给每条无向边随便定向。此时只需要修正度数

混合图欧拉回路题解

考虑有向图欧拉回路充要条件：弱连通，入度出度相等

首先先给每条无向边随便定向。此时只需要修正度数

计算每个点的入度减出度，会得到正的点和负的点。每条无向边反向会让一个点给另一个点送 2 的度数

混合图欧拉回路题解

考虑有向图欧拉回路充要条件：弱连通，入度出度相等

首先先给每条无向边随便定向。此时只需要修正度数

计算每个点的入度减出度，会得到正的点和负的点。每条无向边反向会让一个点给另一个点送 2 的度数

于是看度数奇偶判无解，就可以把所有值先除以 2

混合图欧拉回路题解

考虑有向图欧拉回路充要条件：弱连通，入度出度相等

首先先给每条无向边随便定向。此时只需要修正度数

计算每个点的入度减出度，会得到正的点和负的点。每条无向边反向会让一个点给另一个点送 2 的度数

于是看度数奇偶判无解，就可以把所有值先除以 2

因为所有负点需要增加的值之和等于所有正点需要减少的值之和，把它建成二分图，每个点向源点或汇点连它需要的变化量

混合图欧拉回路题解

考虑有向图欧拉回路充要条件：弱连通，入度出度相等

首先先给每条无向边随便定向。此时只需要修正度数

计算每个点的入度减出度，会得到正的点和负的点。每条无向边反向会让一个点给另一个点送 2 的度数

于是看度数奇偶判无解，就可以把所有值先除以 2

因为所有负点需要增加的值之和等于所有正点需要减少的值之和，把它建成二分图，每个点向源点或汇点连它需要的变化量

然后用我们根据定好向的无向边在图上连，表示这条边反向会让 u 的值 -1 v 的值 $+1$

$' 8 .!W ù D NÈ@

63<• 9 A .!W ù D u?± ‘ & Ö aF FJ È • Ö * Ö-(1y OÆ x x5 !ÿ ‘ AEéL¿ ï Ê A Ä!” & M0?± !“ Ö

AÑ1Ç!ÿ Z&é,´ • Ö ÿ * Ö È J Ç `!“,´&é ¼CO,´&é Ä!ÿ ‘ AEé ý A JAÙ 0 Z&é5 0 Z&éF1 2 ,´ Ö

¾ _-; Ö w ¦ T @ È a º p 9 l xL” 2

j p 9CO&éM0?± Î Ð,´ l { ¼1y ¾ p 9!“&éM0?± ÿ A,´ l { ¼ È º ³ * @ ¼ 6 . È!ÿ Z&é A$À&é F"w&éF ³M0?±,´ FGÿ

'f >+X A i ž Ê - A,´ AEé X . :F È>˜/jF ‘Eé ý A JAÙ m ,´ l 1 p,´ l +1

ƒ A D *% #q { > È X!» ‰5•5 : a Ç `!ÿ ‘ AEé,´ é A ¶

$' 8 .!W ù D NÈ@

63<• 9 A .!W ù D u?± ‘ & Ö aF FJ È • Ö * Ö-(1y
OÆ x x5 !ÿ ‘ AEéL¿ ï Ê A Ä!” & M0?± !“ Ö
AÑ1Ç!ÿ Z&é,´ • Ö ÿ * Ö È J Ç `!“,´&é ¼CO,´&é Ä!ÿ ‘ AEé ý
A JAÙ 0 Z&é5 0 Z&éF1 2 ,´ Ö

¾ _-; Ö w ¦ T @ È a º p 9 I xL” 2

j p 9CO&éM0?± Î Ð,´ I { ¼1y ¾ p 9!“&éM0?± ÿ A,´ I { ¼ È
º ³ * @ ¼ 6 . È!ÿ Z&é A$À&é F"w&éF ³M0?±,´ FGÿ

'f >+X A i ž Ê - A,´ AEé X . :F È>˜/jF ‘Eé ý A JAÙ m
,´ I 1 p,´ I +1

ƒ A D *% #q { > È X!» ‰5•5 : a Ç `!ÿ ‘ AEé,´ é A ¶
ÎLu : A *,´ .,´ ? y a _ » x5 0 Ë&é Ð : • Ö F * Ö È'f >
½AÙ5•5 #q ¯ .#qGÿ £>‘

G m Q ; m S e N 9 j (A * S * k y R 3 q 6) * Q M [m 2 ` h ? 2 q

5 0 % V s,´ A È!ÿ Z&é : 9 t_B Z ËLO È!ÿ Z&éM0?±8# Av_B Z Ë LO Ä

0 ? FB3 Ø ËLO,´ ' •% Cã!ÿ Z&é,´M0"r È ' j!ÿ Z ËLOC ,´ D ´K¯ Ö { ¼ Ä

8²&é 2:5 10^5 È ËLO Gÿ { ¼ 10^6 Ä

LuoguP6943 [ICPC2018 WF] Conquer The World 题解

问题就是军队和目的地的匹配。这里再维护 min 最大的路径不太合适。需要考虑的只是可撤销的问题。

记 $LCA = L$，考虑权值的计算为 $d_S + d_T - 2d_L$，考虑在树上进行子树的合并，那么此时 L 是确定的，可以当做常数

LuoguP6943 [ICPC2018 WF] Conquer The World 题解

问题就是军队和目的地的匹配。这里再维护 min 最大的路径不太合适。需要考虑的只是可撤销的问题。

记 $LCA = L$，考虑权值的计算为 $d_S + d_T - 2d_L$，考虑在树上进行子树的合并，那么此时 L 是确定的，可以当做常数

当一个目的地更换起点的时候，权值变化为 $2d_{L'} - 2d_L - d_S$，其中 d_L 是常量

LuoguP6943 [ICPC2018 WF] Conquer The World 题解

问题就是军队和目的地的匹配。这里再维护 min 最大的路径不太合适。需要考虑的只是可撤销的问题。

记 $LCA = L$ ，考虑权值的计算为 $d_S + d_T - 2d_L$ ，考虑在树上进行子树的合并，那么此时 L 是确定的，可以当做常数

当一个目的地更换起点的时候，权值变化为 $2d_{L'} - 2d_L - d_S$ ，其中 d_L 是常量

于是在匹配完后，为了做到可撤销，把目的地权值加上 $2d_L - d_S$ ，起点同理

LuoguP6943 [ICPC2018 WF] Conquer The World 题解

问题就是军队和目的地的匹配。这里再维护 min 最大的路径不太合适。需要考虑的只是可撤销的问题。

记 $LCA = L$，考虑权值的计算为 $d_S + d_T - 2d_L$，考虑在树上进行子树的合并，那么此时 L 是确定的，可以当做常数

当一个目的地更换起点的时候，权值变化为 $2d_{L'} - 2d_L - d_S$，其中 d_L 是常量

于是在匹配完后，为了做到可撤销，把目的地权值加上 $2d_L - d_S$，起点同理

这样子每次寻找起点和目的地的最小值，看看变化量是否小于零即可

LuoguP6943 [ICPC2018 WF] Conquer The World 题解

问题就是军队和目的地的匹配。这里再维护 min 最大的路径不太合适。需要考虑的只是可撤销的问题。

记 $LCA = L$ ，考虑权值的计算为 $d_S + d_T - 2d_L$ ，考虑在树上进行子树的合并，那么此时 L 是确定的，可以当做常数

当一个目的地更换起点的时候，权值变化为 $2d_{L'} - 2d_L - d_S$ ，其中 d_L 是常量

于是在匹配完后，为了做到可撤销，把目的地权值加上 $2d_L - d_S$ ，起点同理

这样子每次寻找起点和目的地的最小值，看看变化量是否小于零即可

需要注意的是要匹配完所有目的地，所以强制给目的地一个 $-\infty$ 的权值。剩下的用可并堆维护

LuoguP6943 [ICPC2018 WF] Conquer The World 题解

问题就是军队和目的地的匹配。这里再维护 min 最大的路径不太合适。需要考虑的只是可撤销的问题。

记 $LCA = L$ ，考虑权值的计算为 $d_S + d_T - 2d_L$ ，考虑在树上进行子树的合并，那么此时 L 是确定的，可以当做常数

当一个目的地更换起点的时候，权值变化为 $2d_{L'} - 2d_L - d_S$ ，其中 d_L 是常量

于是在匹配完后，为了做到可撤销，把目的地权值加上 $2d_L - d_S$ ，起点同理

这样子每次寻找起点和目的地的最小值，看看变化量是否小于零即可

需要注意的是要匹配完所有目的地，所以强制给目的地一个 $-\infty$ 的权值。剩下的用可并堆维护

1 Q&A

2 基础知识

3 杂题
- 热身题
- 一般题
- 进阶题

LuoguP4003 无限之环

$n \times m$ 网格中，每个格子可以有四个方向的接口，那么一共可以得到十五种水管。

可以任意次顺或逆时针旋转 90 度任意一个非直线型的水管，要求最后每个接口都对着接口。

求最少旋转步数。$nm \leq 2000$ 。

LuoguP4003 无限之环题解

最小费用最大流

LuoguP4003 无限之环题解

最小费用最大流
先黑白染色，黑点从源点连边，白点向汇点连边，每个边建两点

LuoguP4003 无限之环题解

最小费用最大流
先黑白染色，黑点从源点连边，白点向汇点连边，每个边建两点
1. 断头水管：

LuoguP4003 无限之环题解

最小费用最大流

先黑白染色，黑点从源点连边，白点向汇点连边，每个边建两点

1. 断头水管：向每个方向连转动方向费用边

LuoguP4003 无限之环题解

最小费用最大流
先黑白染色，黑点从源点连边，白点向汇点连边，每个边建两点
1. 断头水管：向每个方向连转动方向费用边
2. 直线水管：

LuoguP4003 无限之环题解

最小费用最大流
先黑白染色，黑点从源点连边，白点向汇点连边，每个边建两点
1. 断头水管：向每个方向连转动方向费用边
2. 直线水管：无法转，直接连

LuoguP4003 无限之环题解

最小费用最大流

先黑白染色，黑点从源点连边，白点向汇点连边，每个边建两点

1. 断头水管：向每个方向连转动方向费用边
2. 直线水管：无法转，直接连
3. 直角水管：

LuoguP4003 无限之环题解

最小费用最大流
先黑白染色，黑点从源点连边，白点向汇点连边，每个边建两点
1. 断头水管：向每个方向连转动方向费用边
2. 直线水管：无法转，直接连
3. 直角水管：先随便指定状态，向相反方向连费用 1 边

LuoguP4003 无限之环题解

最小费用最大流
先黑白染色，黑点从源点连边，白点向汇点连边，每个边建两点
1. 断头水管：向每个方向连转动方向费用边
2. 直线水管：无法转，直接连
3. 直角水管：先随便指定状态，向相反方向连费用 1 边
4. T 型水管：

LuoguP4003 无限之环题解

最小费用最大流
先黑白染色，黑点从源点连边，白点向汇点连边，每个边建两点
1. 断头水管：向每个方向连转动方向费用边
2. 直线水管：无法转，直接连
3. 直角水管：先随便指定状态，向相反方向连费用 1 边
4. T 型水管：相当于断头水管的反图

LuoguP4003 无限之环题解

最小费用最大流

先黑白染色，黑点从源点连边，白点向汇点连边，每个边建两点

1. 断头水管：向每个方向连转动方向费用边
2. 直线水管：无法转，直接连
3. 直角水管：先随便指定状态，向相反方向连费用 1 边
4. T 型水管：相当于断头水管的反图
5. 十字水管：

LuoguP4003 无限之环题解

最小费用最大流

先黑白染色，黑点从源点连边，白点向汇点连边，每个边建两点

1. 断头水管：向每个方向连转动方向费用边
2. 直线水管：无法转，直接连
3. 直角水管：先随便指定状态，向相反方向连费用 1 边
4. T 型水管：相当于断头水管的反图
5. 十字水管：不用转，直接连

LuoguP4003 无限之环题解

最小费用最大流
先黑白染色，黑点从源点连边，白点向汇点连边，每个边建两点
1. 断头水管：向每个方向连转动方向费用边
2. 直线水管：无法转，直接连
3. 直角水管：先随便指定状态，向相反方向连费用 1 边
4. T 型水管：相当于断头水管的反图
5. 十字水管：不用转，直接连
点数 $O(nm)$

LuoguP4003 无限之环题解

最小费用最大流

先黑白染色，黑点从源点连边，白点向汇点连边，每个边建两点

1. 断头水管：向每个方向连转动方向费用边
2. 直线水管：无法转，直接连
3. 直角水管：先随便指定状态，向相反方向连费用 1 边
4. T 型水管：相当于断头水管的反图
5. 十字水管：不用转，直接连

点数 $O(nm)$，边数 $O(nm)$，时间复杂度 $O((nm)^{1.5})$（常数巨大）

CF1383F Special Edges

给一个 m 个点 m 条边的有向网络，里面有 k 条特殊边，q 次询问，每次重新给出这 k 条特殊边的容量，求 1 到 n 的最大流。

$n, m \leq 10^4, q \leq 2 \times 10^5, k \leq 10, w \leq 25$

CF1383F Special Edges 题解

最大流与最小割等价

CF1383F Special Edges 题解

最大流与最小割等价
先求出初始状态最小割

CF1383F Special Edges 题解

最大流与最小割等价

先求出初始状态最小割

暴力做法：对 2^k 种状态跑 $Dinic$ ，时间复杂度过大 $O(2^k(Flow(n, m) + q))$

CF1383F Special Edges 题解

最大流与最小割等价

先求出初始状态最小割

暴力做法：对 2^k 种状态跑 $Dinic$ ，时间复杂度过大 $O(2^k(Flow(n,m)+q))$

优化：每次从上一个状态跑一遍 FF 算法，由于边权值不超过 w ，算法增广次数不超过 w

CF1383F Special Edges 题解

最大流与最小割等价

先求出初始状态最小割

暴力做法：对 2^k 种状态跑 $Dinic$，时间复杂度过大 $O(2^k(Flow(n, m) + q))$

优化：每次从上一个状态跑一遍 FF 算法，由于边权值不超过 w，算法增广次数不超过 w

时间复杂度：$O(Flow(n, m) + 2^k(wm + q))$

ABC326G Unlock Achievement

有 n 个技能，m 个成就。每个技能有一个等级，初始均为 1。

你可以用 c_i 块钱令技能 i 提升一个等级，该操作没有次数限制。

第 i 个成就达成的条件是对于 $\forall j \in [1, n], level_j \ge L_{i,j}$，其中 $level_j$ 表示第 j 个技能的等级。达成成就 i 后，你会获得 a_i 元的奖励。

请最大化获得的奖励与所需成本之差，并输出该值。

$n, m \le 50$, $1 \le L_{i,j} \le 5$, $1 \le a_i, c_i \le 10^6$。

ABC326G Unlock Achievement 题解

考虑构造最小割模型。

ABC326G Unlock Achievement 题解

考虑构造最小割模型。

因为 $L_{i,j} \le 5$，把点 i 拆成 6 个点，分别为 $id_{i,j}(j \in [1,6])$。令成就 i 为点 bel_i。则进行如下的建图：

ABC326G Unlock Achievement 题解

考虑构造最小割模型。

因为 $L_{i,j} \le 5$，把点 i 拆成 6 个点，分别为 $id_{i,j}(j \in [1,6])$。令成就 i 为点 bel_i。则进行如下的建图：

- 连接源点 s 与 $id_{i,6}$，容量为 inf。

ABC326G Unlock Achievement 题解

考虑构造最小割模型。

因为 $L_{i,j} \le 5$，把点 i 拆成 6 个点，分别为 $id_{i,j}(j \in [1,6])$。令成就 i 为点 bel_i。则进行如下的建图：

- 连接源点 s 与 $id_{i,6}$，容量为 inf。
- 连接 $id_{i,j+1}$ 与 $id_{i,j}$，容量为 $c_i \times (j-1)$，割掉这条边则表示将技能 i 升级到 j。

ABC326G Unlock Achievement 题解

考虑构造最小割模型。

因为 $L_{i,j} \le 5$，把点 i 拆成 6 个点，分别为 $id_{i,j}(j \in [1,6])$。令成就 i 为点 bel_i。则进行如下的建图：

- 连接源点 s 与 $id_{i,6}$，容量为 inf。
- 连接 $id_{i,j+1}$ 与 $id_{i,j}$，容量为 $c_i \times (j-1)$，割掉这条边则表示将技能 i 升级到 j。
- 连接 $id_{i,L_{j,i}}$ 与 bel_j，容量为 inf。

ABC326G Unlock Achievement 题解

考虑构造最小割模型。

因为 $L_{i,j} \le 5$，把点 i 拆成 6 个点，分别为 $id_{i,j}(j \in [1,6])$。令成就 i 为点 bel_i。则进行如下的建图：

- 连接源点 s 与 $id_{i,6}$，容量为 inf。
- 连接 $id_{i,j+1}$ 与 $id_{i,j}$，容量为 $c_i \times (j-1)$，割掉这条边则表示将技能 i 升级到 j。
- 连接 $id_{i,L_{j,i}}$ 与 bel_j，容量为 inf。
- 连接 bel_i 与 t，容量为 a_i。如果这条边被割掉，说明至少有一个技能的等级未达到该奖励的条件，不能获得奖励。

ABC326G Unlock Achievement 题解

考虑构造最小割模型。

因为 $L_{i,j} \le 5$，把点 i 拆成 6 个点，分别为 $id_{i,j} (j \in [1,6])$。令成就 i 为点 bel_i。则进行如下的建图：

- 连接源点 s 与 $id_{i,6}$，容量为 inf。
- 连接 $id_{i,j+1}$ 与 $id_{i,j}$，容量为 $c_i \times (j-1)$，割掉这条边则表示将技能 i 升级到 j。
- 连接 $id_{i,L_{j,i}}$ 与 bel_j，容量为 inf。
- 连接 bel_i 与 t，容量为 a_i。如果这条边被割掉，说明至少有一个技能的等级未达到该奖励的条件，不能获得奖励。

那么这个图的最小割就是成本与**未获得**的奖励之和，用总奖励减去最小割即为答案。

ARC107F Sum of Abs

给一张 n 个点 m 条边的无向图，每个点有点权 A_i, B_i 。你可以选择任意个点删掉，代价为它们的 A_i 之和，然后对于剩下的每个连通块，获得的收益是其 B_i 之和的绝对值。

你要最大化收益减代价。

- $1 \le N, M \le 300$
- $1 \le A_i \le 10^6$
- $-10^6 \le B_i \le 10^6$

ARC107F Sum of Abs 题解

考虑在删完点之后的一个连通块 W 内的所有点，它们对于最终答案的贡献要么是 $\sum_{u\in W} b_u$，要么是 $-(\sum_{u\in W} b_u)$。因此，对于一个点 i，它对答案的贡献有 3 种：

ARC107F Sum of Abs 题解

考虑在删完点之后的一个连通块 W 内的所有点，它们对于最终答案的贡献要么是 $\sum_{u\in W} b_u$，要么是 $-(\sum_{u\in W} b_u)$。因此，对于一个点 i，它对答案的贡献有 3 种：

- 删掉这个点，贡献为 $-a_i$。

ARC107F Sum of Abs 题解

考虑在删完点之后的一个连通块 W 内的所有点，它们对于最终答案的贡献要么是 $\sum_{u\in W} b_u$，要么是 $-(\sum_{u\in W} b_u)$。因此，对于一个点 i，它对答案的贡献有 3 种：

- 删掉这个点，贡献为 $-a_i$。
- 把这个点放到 b_i 取正的连通块内，贡献为 b_i。

ARC107F Sum of Abs 题解

考虑在删完点之后的一个连通块 W 内的所有点，它们对于最终答案的贡献要么是 $\sum_{u\in W} b_u$，要么是 $-(\sum_{u\in W} b_u)$。因此，对于一个点 i，它对答案的贡献有 3 种：

- 删掉这个点，贡献为 $-a_i$。
- 把这个点放到 b_i 取正的连通块内，贡献为 b_i。
- 把这个点放到 b_i 取负的连通块内，贡献为 $-b_i$。

ARC107F Sum of Abs 题解

在最理想的情况下，我们的答案应该是 $-(\sum_{b_i<0} b_i) + \sum_{b_i \geq 0} b_i$。当然，在大多数情况下，并没有这样的合法情况。我们考虑情况变得合法的时候，答案的变化：

ARC107F Sum of Abs 题解

在最理想的情况下，我们的答案应该是 $-(\sum_{b_i<0} b_i) + \sum_{b_i \geq 0} b_i$。当然，在大多数情况下，并没有这样的合法情况。我们考虑情况变得合法的时候，答案的变化：

- 若这个点被删去，会使得答案减少 $a_i + |b_i|$。

ARC107F Sum of Abs 题解

在最理想的情况下，我们的答案应该是 $-(\sum_{b_i<0} b_i) + \sum_{b_i \ge 0} b_i$。当然，在大多数情况下，并没有这样的合法情况。我们考虑情况变得合法的时候，答案的变化：

- 若这个点被删去，会使得答案减少 $a_i + |b_i|$。
- 若一个 $b_i \ge 0$ 的点放入了 b 取负的连通块内，会使得答案减少 $2 \times b_i$。

ARC107F Sum of Abs 题解

在最理想的情况下，我们的答案应该是 $-(\sum_{b_i<0} b_i) + \sum_{b_i\ge 0} b_i$。当然，在大多数情况下，并没有这样的合法情况。我们考虑情况变得合法的时候，答案的变化：

- 若这个点被删去，会使得答案减少 $a_i + |b_i|$。
- 若一个 $b_i \ge 0$ 的点放入了 b 取负的连通块内，会使得答案减少 $2 \times b_i$。
- 若一个 $b_i < 0$ 的点放入了 b 取正的连通块内，会使得答案减少 $-2 \times b_i$。

ARC107F Sum of Abs 题解

在最理想的情况下，我们的答案应该是 $-(\sum_{b_i<0} b_i) + \sum_{b_i\geq 0} b_i$。当然，在大多数情况下，并没有这样的合法情况。我们考虑情况变得合法的时候，答案的变化：

- 若这个点被删去，会使得答案减少 $a_i + |b_i|$。
- 若一个 $b_i \geq 0$ 的点放入了 b 取负的连通块内，会使得答案减少 $2 \times b_i$。
- 若一个 $b_i < 0$ 的点放入了 b 取正的连通块内，会使得答案减少 $-2 \times b_i$。

除此之外，若这个点没有被删去，和它联通的点的 b 必须和它取的正负性相同。

ARC107F Sum of Abs 题解

问题转换为：我们需要将图分成两部分——b 取正的部分和 b 取负的部分，且每一个点的 b 取正和取负均有一定的代价。于是就可以想到利用网络流最小割解决这个问题。

ARC107F Sum of Abs 题解

问题转换为：我们需要将图分成两部分——b 取正的部分和 b 取负的部分，且每一个点的 b 取正和取负均有一定的代价。于是就可以想到利用网络流最小割解决这个问题。

我们设源点 s 和汇点 t 不联通之后，和 s 联通的点 b 取正，和 t 联通的点 b 取负。将一个点 u 分成两个点 u_{in} 和 u_{out}，则：

ARC107F Sum of Abs 题解

问题转换为：我们需要将图分成两部分——b 取正的部分和 b 取负的部分，且每一个点的 b 取正和取负均有一定的代价。于是就可以想到利用网络流最小割解决这个问题。

我们设源点 s 和汇点 t 不联通之后，和 s 联通的点 b 取正，和 t 联通的点 b 取负。将一个点 u 分成两个点 u_{in} 和 u_{out}，则：- u_{in} 向 u_{out} 连一条流量为 $a_u + |b_u|$ 的边。

ARC107F Sum of Abs 题解

问题转换为：我们需要将图分成两部分——b 取正的部分和 b 取负的部分，且每一个点的 b 取正和取负均有一定的代价。于是就可以想到利用网络流最小割解决这个问题。

我们设源点 s 和汇点 t 不联通之后，和 s 联通的点 b 取正，和 t 联通的点 b 取负。将一个点 u 分成两个点 u_{in} 和 u_{out}，则：- u_{in} 向 u_{out} 连一条流量为 $a_u + |b_u|$ 的边。

- 若 $b_u < 0$，则 s 向 u_{in} 连一条流量为 $-2 \times b_u$ 的边。

ARC107F Sum of Abs 题解

问题转换为：我们需要将图分成两部分——b 取正的部分和 b 取负的部分，且每一个点的 b 取正和取负均有一定的代价。于是就可以想到利用网络流最小割解决这个问题。

我们设源点 s 和汇点 t 不联通之后，和 s 联通的点 b 取正，和 t 联通的点 b 取负。将一个点 u 分成两个点 u_{in} 和 u_{out}，则：- u_{in} 向 u_{out} 连一条流量为 $a_u + |b_u|$ 的边。

- 若 $b_u < 0$，则 s 向 u_{in} 连一条流量为 $-2 \times b_u$ 的边。
- 若 $b_u \geq 0$，则 u_{out} 向 t 连一条流量为 $2 \times b_u$ 的边。

ARC107F Sum of Abs 题解

问题转换为：我们需要将图分成两部分——b 取正的部分和 b 取负的部分，且每一个点的 b 取正和取负均有一定的代价。于是就可以想到利用网络流最小割解决这个问题。

我们设源点 s 和汇点 t 不联通之后，和 s 联通的点 b 取正，和 t 联通的点 b 取负。将一个点 u 分成两个点 u_{in} 和 u_{out}，则：- u_{in} 向 u_{out} 连一条流量为 $a_u + |b_u|$ 的边。

- 若 $b_u < 0$，则 s 向 u_{in} 连一条流量为 $-2 \times b_u$ 的边。

- 若 $b_u \geq 0$，则 u_{out} 向 t 连一条流量为 $2 \times b_u$ 的边。

- 对于原图中存在的一条边 (i, j)，我们由 i_{out} 向 j_{in}，j_{out} 向 i_{in} 分别连一条流量为 ∞ 的边。

ARC107F Sum of Abs 题解

对于原图中存在的点，为什么要由 out 向 in 连流量为 ∞ 的边呢？首先，同一个连通块内 b 的正负相同，这是必须遵守的，所以流量为 ∞。由 out 向 in 连边，则要么这两个点的 b 正负取值相同，要么其中一个点被删去。

ARC107F Sum of Abs 题解

对于原图中存在的点，为什么要由 out 向 in 连流量为 ∞ 的边呢？首先，同一个连通块内 b 的正负相同，这是必须遵守的，所以流量为 ∞。由 out 向 in 连边，则要么这两个点的 b 正负取值相同，要么其中一个点被删去。

上述的正负均为 b 前的符号，并非 b 本身的正负性。

ARC107F Sum of Abs 题解

对于原图中存在的点，为什么要由 out 向 in 连流量为 ∞ 的边呢？首先，同一个连通块内 b 的正负相同，这是必须遵守的，所以流量为 ∞。由 out 向 in 连边，则要么这两个点的 b 正负取值相同，要么其中一个点被删去。

上述的正负均为 b 前的符号，并非 b 本身的正负性。

设 $sum = -(\sum_{b_i<0} b_i) + \sum_{b_i\geq 0} b_i = \sum |b_i|$，则最终的答案为 sum 减去我们刚建出来的图的最小割。

ARC107F Sum of Abs 题解

对于原图中存在的点，为什么要由 out 向 in 连流量为 ∞ 的边呢？首先，同一个连通块内 b 的正负相同，这是必须遵守的，所以流量为 ∞。由 out 向 in 连边，则要么这两个点的 b 正负取值相同，要么其中一个点被删去。

上述的正负均为 b 前的符号，并非 b 本身的正负性。

设 $sum = -(\sum_{b_i<0} b_i) + \sum_{b_i\geq 0} b_i = \sum |b_i|$，则最终的答案为 sum 减去我们刚建出来的图的最小割。

点数：$O(n)$

ARC107F Sum of Abs 题解

对于原图中存在的点，为什么要由 out 向 in 连流量为 ∞ 的边呢？首先，同一个连通块内 b 的正负相同，这是必须遵守的，所以流量为 ∞。由 out 向 in 连边，则要么这两个点的 b 正负取值相同，要么其中一个点被删去。

上述的正负均为 b 前的符号，并非 b 本身的正负性。

设 $sum = -(\sum_{b_i<0} b_i) + \sum_{b_i\geq 0} b_i = \sum |b_i|$，则最终的答案为 sum 减去我们刚建出来的图的最小割。

点数：$O(n)$

边数：$O(m)$

ARC107F Sum of Abs 题解

对于原图中存在的点，为什么要由 out 向 in 连流量为 ∞ 的边呢？首先，同一个连通块内 b 的正负相同，这是必须遵守的，所以流量为 ∞。由 out 向 in 连边，则要么这两个点的 b 正负取值相同，要么其中一个点被删去。

上述的正负均为 b 前的符号，并非 b 本身的正负性。

设 $sum = -(\sum_{b_i<0} b_i) + \sum_{b_i \geq 0} b_i = \sum |b_i|$，则最终的答案为 sum 减去我们刚建出来的图的最小割。

点数：$O(n)$

边数：$O(m)$

时间复杂度：$O(nm^2 \log V)$（能过）

LuoguP5996 [PA2014] Muzeum

吉丽的漫展有 n 件手办和 m 名警卫。

现在我们对其建立平面直角坐标系，每个手办和警卫都可以看做一个点。警卫们的目光都朝着 y 轴负方向，且都有相同大小的视角。警卫可以看见自己视角内（包括边界上的点）的所有手办，不用考虑视线的遮挡。

你打算抢劫吉丽的漫展，但不想被警卫发现。为了实施这次抢劫计划，你可以事先贿赂某些警卫，让他们闭上眼睛。只要某件手办不在任何睁着眼睛的警卫的视野内，你就可以偷走它。你知道每件手办的价格，以及每位警卫需要接受多少钱的贿赂。你想知道自己的最大收益是多少。

$1 \le n, m \le 2 \times 10^5$, $1 \le w, h \le 10^9$, $-10^9 \le x_i, y_i \le 10^9$, $1 \le v_i \le 10^9$

LuoguP4307 [JSOI2009] 球队收益 / 球队预算

在一个篮球联赛里，有 n 支球队，球队的支出是和他们的胜负场次有关系的，具体来说，第 i 支球队的赛季总支出是 $C_i \times x^2 + D_i \times y^2, D_i \leq C_i$ 。(赢得多，给球员的奖金就多嘛) 其中 x, y 分别表示这只球队本赛季的胜负场次。现在赛季进行到了一半，每只球队分别取得了 a_i 场胜利和 b_i 场失利。而接下来还有 m 场比赛要进行。问联盟球队的最小总支出是多少。

$2 \leq n \leq 5000, 0 \leq m \leq 1000, 0 \leq D_i \leq C_i \leq 10, 0 \leq a_i, b_i \leq 50$。

CF1307G Cow and Exercise

给出一个 n 个点 m 条边的 **有向图**，每条边有边权 w_i 。

有 Q 次询问，每次询问给出一个 x 。你可以把一条边修改成 $w_i + a_i$ 权值（a_i **不一定**是整数），不过需要保证 $a_i \geq 0$ 且 $\sum a_i \leq x$ 。

你要通过修改边权使得从 1 到 n 的最短路径尽可能长，每次询问之间**独立**。

数据保证至少存在一条从 1 到 n 的路径，无重边自环。

输出答案和标准答案的相对误差或绝对误差应不超过 10^{-6} 。

$2 \leq n \leq 50$, $1 \leq m \leq n \cdot (n-1)$, $1 \leq w_i \leq 10^6$, $1 \leq q \leq 10^5$