

杂题选讲

刘海峰

June 18, 2025

定义一个序列 $[a_1, a_2, \dots, a_m]$ 是回文的，当且仅当对于任意 $1 \leq i \leq m, |a_i - a_{m-i+1}| \leq k$ 。

给定序列 $a_{1\dots n}$ ，对于 $i = k \times 0.5$ ($2 \leq k \leq 2n$)，求最大的 $r - l + 1$ 满足 $\frac{l+r}{2} = k$ 并且序列 a 的区间 $[l, r]$ 是回文的。

$n \leq 2 \times 10^5, 1 \leq a_i \leq 10^3, 0 \leq k \leq 10^3$ 。

时空限制：2s, 256MB。

给定 A, B, C , 有递推序列

$$f_1 = A, f_2 = B, f_i = (f_{i-1} \oplus f_{i-2}) + C \ (i > 2).$$

求 $f_n \bmod 998244353$ 的结果。

$$0 \leq A, B, C < 2^{20}, 1 \leq n \leq 10^{18}.$$

时空限制: 8s, 1024MB。

有 $2n$ 个人，编号为 $1 \sim 2n$ ，初始每个人的分数是 0。

现在需要进行 k 轮比赛，每轮比赛方式就是找到一组大小为 n 的匹配，然后对于一对匹配，如果两个人分数不一样，那么分数低的人获胜。如果分数相同则编号小的获胜。

获胜的人会加一分，没获胜的人会扣一分。

问有多少种方案使得任意时刻不存在人分数的绝对值大于 3，答案对大质数 P 取模。

$$1 \leq n \leq 400, 1 \leq k \leq 20, 10^8 \leq P \leq 10^9 + 9.$$

时空限制：6s, 512MB。

给定 n 和两个长度为 n 的排列 a, b , 初始有一个二元组 (x, y) 满足 $x = a_1, y = a_2$, 然后对于 $i = 2 \sim n$ 依次执行以下两个操作之一:

- 将 (x, y) 变成 $(\max(x, a_i), \max(y, b_i))$ 。
- 将 (x, y) 变成 $(\min(x, a_i), \min(y, b_i))$

对于 $k = 0 \sim n - 1$ 问有多少组可能达到的 (x, y) 满足 $|x - y| = k$ 。

$$1 \leq n \leq 5 \times 10^5。$$

时空限制: 5s, 1024MB。

给定长度为 m 的单调不降正整数序列 b ，定义 $f(k)$ 为最大的 i 满足 $0 \leq i \leq m, \sum_{j=1}^i b_j \leq k$ 。

再给定长度为 n 的正整数序列 a ，你需要将其划分成若干段，设每一段中 a 的和为 s ，那么该段对答案的贡献为 $f(s) - c$ ，其中 c 是给定的常数，求所有划分方案的贡献和的最大值。

$1 \leq n, m, c \leq 5 \times 10^5, 1 \leq a_i, b_j \leq 10^{12}$ 。

时空限制：3s, 1024MB。

给定一个 $n \times m$ 的网格图，每条边都有正整数边权，边是无向边，定义网格图的权值为从最左侧的某个点走到最右侧某个点的最短距离。

你可以执行 k 次操作，每次可以将一条边的权值增加 1，最大化操作之后的网格图的权值。

$n \times m \leq 500, 1 \leq k \leq 100$ ，网格图的边权 $\leq 2 \times 10^9$ 。

时空限制：1s,1024MB。

魔术师在表演，现在他有 n 个箱子，其中一个有宝藏。魔术师会随机打乱这些箱子，此后箱子顺序不变，你的任务是在这 n 个箱子中找到有宝藏的那个。

但是，在你找宝藏的过程中，会有一些特殊的限制和操作：

- 你只能一个箱子一个箱子打开，且打开一个箱子后必须在打开另外一个之前关闭它。
- 每一个箱子最多能打开 a_i 次。

魔术师会在你找宝藏的过程中最多做 k 次如下操作：除了在你正在打开箱子的时候，他可能会将宝藏从一个箱子移动到另外一个箱子中。也就是说，他可能会在你打开一个箱子之前、关闭一个箱子并打开下一个中间这段时间这两种情况中移动宝藏位置。

请输出一种方案（不要求操作数最少），确保你能找到宝藏，如果没有这样的方案，输出 -1。

$$n \leq 50, 1 \leq k \leq 50, 1 \leq a_i \leq 100.$$

现在有一个无穷大的网格图。

初始有一个黑色格子 (X, Y) ，剩余格子均为白色，可以执行如下操作（不限次数）：

- 选择一个 x, y ，翻转 $(x, y), (x + 1, y), (x, y + 1)$ 的颜色。

经过若干次操作之后，只有 n 个格子是黑色的，给定这些格子，求初始的 (X, Y) 。

$$n \leq 10^4, |x_i|, |y_i| \leq 10^{17}。$$

Hint:



给定长度为 n 的排列 p 。

你需要执行若干次交换相邻两个数的操作，使得最终的排列至多存在一个 $i (1 \leq i < n)$ 满足 $p_i > p_{i+1}$ 。

求最小交换次数。

$n \leq 8 \times 10^5$ 。