容斥原理

陈雨昕（清华大学）

1. 基础知识

容斥原理

Min-max 容斥

高维前缀和与差分

- 高维前缀和（莫比乌斯变换）：$F(S) = \sum_{T \subseteq S} f(T)$
- 高维差分（莫比乌斯反演）：$f(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} F(T)$
- 对于每一维依次进行前缀和或差分，时间复杂度 $O(N2^N)$
- 设 f 的高维前缀和为 F, g 的高维前缀和为 G
- 并卷积 $(f * g)(S) = \sum_{T_1 \cup T_2 = S} f(T_1) g(T_2)$ 的高维前缀和为 $F \cdot G$
- 即 $f * g$ 为 $F \cdot G$ 的高维差分

二项式反演

- 对于数列 $f_0, f_1, \ldots$, 若 $g_0, g_1, \ldots$ 满足

$$g_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f_i$$

- 那么反过来有

$$f_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} g_i$$

- 作用：将“恰好 k 个”化为“除了 k 个都不”

二项式反演（反向）

莫比乌斯变换与反演

- 对于狄利克雷卷积 $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$
- 莫比乌斯变换：$g = 1 * f$
- 构造莫比乌斯函数 $\mu * 1 = \epsilon$
- 莫比乌斯反演：$f = \mu * g$
- 朴素算法时间：$O(n \log n)$
- 反向同样成立：若 $g(n) = \sum_{k=1}^{\infty} f(kn)$, 那么 $f(n) = \sum_{d=1}^{\infty} \mu(k)g(kn)$

莫比乌斯变换与反演

求逆

- 多项式卷积 $(A * B)(n) = \sum_{i=0}^{m} A(i)B(n-i)$
- 如果 $f = g * A$
- 求 $A * B = 1$
- 则 $g = f * B$
- 其中 B 可由 A 递推得到

2. 例题选讲

随机立方体
CTS2019

- 有一个 $n \times m \times l$ 的立方体
- 等概率地将 1 至 nml 的排列填入立方体的每个格子
- 如果某个格子上的数比三维坐标**至少有一维**相同的格子上的数都大，称为极大的
- 求恰好有 k 个极大的格子的概率
- 显然答案为有理数，输出它对 998244353 取模的值
- 保证正常的计算过程中分母一定有逆元
- $1 \le n, m, l \le 5 \times 10^6, k \le 100$
- $T \le 10$ 组数据，$12s, 512MB$

解

- 利用二项式反演，可将“恰好 k 个”改写为“选取 k 个”
- 首先选定 k 个位置，这些位置的三维坐标互不相同，因此方案数为 $n^{\underline{k}}m^{\underline{k}}l^{\underline{k}}$
- 这里位置是有序的
- 从小到大考虑，假设前 $i-1$ 小的极大值已经放置在前 $i-1$ 个位置
- 考虑第 i 个位置确实是第 i 小的极大值的概率
- 注意到一个极大值是第 i 小，意味着它是前 i 个位置所占的截面的并上的最大值
- 这就是树的拓扑序模型，因此此情况概率为 $\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{nml-(n-i)(m-i)(l-i)}$
- 利用离线求逆元，单组询问时空复杂度 $O(\min\{n,m,l\})$

GCD Counting

CF990G

- 给定 n 个点的树，每个点 i 有一个权值 a_i，为 m 以内正整数
- 定义 $g(x,y)$ 为 x,y 间简单路径的权值最大公约数
- 对于所有可能的 k，分别求有多少对 x,y $(x \le y)$ 使得 $g(x,y)=k$
- $n,m \le 2 \times 10^5, 4.5\text{s}, 256\text{MB}$

解

- 限定 $g(x,y)=k$ 较为困难，但是限定 $k \mid g(x,y)$ 相对容易，然后莫比乌斯反演
- 只需要取出所有权值被 k 整除的点，一个大小为 s 的连通块贡献 $\frac{s(s+1)}{2}$
- 用并查集来维护连通块大小
- 对于边，可以设定其边权为两端点权值的最大公约数
- 时间复杂度 $O\left(\sum_{i=1}^{n} d(a_i)\,\alpha(n)\right)$

$n \le$	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9
$\max\{\omega(n)\}$	2	3	4	5	6	7	8	8	9
$\max\{d(n)\}$	4	12	32	64	128	240	448	768	1344
$n \le$	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}	10^{14}	10^{15}	10^{16}	10^{17}	10^{18}
$\max\{\omega(n)\}$	10	10	11	12	12	13	13	14	15
$\max\{d(n)\}$	2304	4032	6720	10752	17280	26880	41472	64512	103680

新家具设计方案

FJOI2019

解

- 现在简记 s_x 表示 x 的各维度坐标之和
- 对于点集 S, 简记 $\max S$ 表示点集 S 中各维度坐标均取最大值所得的点
- 那么 $s_x \le S$ 且 $y \preccurlyeq x$ 的方案数是 $f(s_y) = \begin{cases} \binom{S-s_y+K}{K}, & s_y \le S; \\ 0, & s_y > S, \end{cases}$ 可以预处理
- 一方面，要求 $y \in B \to y \preccurlyeq x$, 这只需要 $\max B \preccurlyeq x$, $\max B$ 容易预处理
- 设 $G(B) = f(s_{\max B})$
- 另一方面，要求 $y \notin B \to y \not\preccurlyeq x$, 不好处理，考虑容斥
- 设答案为 $g(B)$, 那么 G 是 g 的高维前缀和，因此 g 是 G 的高维差分
- 预处理时空复杂度 $O(SK\log S + 2^N K + 2^N N \log S)$, 单次查询 $O(\log S)$

小Z的礼物

集训队作业 2018

- 有 $n \times m$ 网格，其中一些格子是黑色的，其余是白色的
- 定义一张骨牌为一对相邻的格子，横向或纵向皆可
- 每次抽奖会从所有骨牌中等概率选出一张，覆盖这两个格子，可以重复抽到同一张
- 求期望抽多少次能覆盖所有黑色格子
- 答案显然是有理数 $\frac{p}{q}$，输出 $pq^{-1} \bmod 998244353$，保证 q 有逆元
- $n \leq 6, 2 \leq m \leq 100, 1\text{s}, 512\text{MB}$

解

- 可以从两个角度看，殊途同归，设黑格集合为 S
- 记总骨牌数为 k, 覆盖格子集合 T 中任意一格（简称覆盖 T）的骨牌数为 $f(T)$
- 那么等概率抽取一张骨牌且覆盖 T 的方案数就是 $p(T)=\frac{f(T)}{k}$

1. Min-max 容斥
   - 设 t_x 是首次覆盖格子 x 的时刻，答案为 $E\left(\max_{x\in S} t_x\right)=\sum_{\emptyset\neq T\subseteq S}^{n}(-1)^{|T|-1}E\left(\min_{x\in T} t_x\right)$
   - $\min_{x\in T} t_x$ 服从参数为 $p(T)$ 的几何分布，因此 $E\left(\min_{x\in T} t_x\right)=\left(p(T)\right)^{-1}$
2. 直接容斥
   - 答案等于 $\sum_{t=0}^{\infty}\Pr A_t$, 其中事件 A_t 表示 t 时刻至少一个黑格不能覆盖
   - $\Pr A_t$ 可以容斥为 $\sum_{\emptyset\neq T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}\left(1-p(T)\right)^t$, 交换求和顺序后也可以得出类似的式子

解

- 设 k 是总骨牌数，那么 $f(T) = kP(T)$ 是覆盖 T 的骨牌数
- 求 $f(T)$ 可以转化为求多少个 T 使得 $f(T) = f$, 记为 N_f $(0 \le f \le k)$
- 按照轮廓线划分递推阶段
- 记 $g(i, j, S, f)$ 表示当前轮廓线拐角为 (i, j), 只考虑轮廓线以内的格与骨牌，轮廓线上的选取情况为 S 时，有多少个黑格子集恰被 f 张骨牌覆盖
- 这样做，时间复杂度为 $O(m^2n^22^n)$, 空间复杂度为 $O(mn2^n)$, 可以通过

例题

- 平面直角坐标系上有一个醉汉位于原点
- 每一步，他分别有 p_1, p_2, p_3, p_4 概率向西、南、东、北方向走一个单位长度
- p_i 保留三位小数，$\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$
- 移动 n 步，求经过的点数期望值（经过多次只算一次），保留三位小数
- $n \leq 50, 2s, 256MB$

解

- 可以分开来，计算：对于格子 (i,j), 有多大概率在 n 步以内经过它至少一次
- 记 $f(i,j,k)$ 表示第 k 步落脚于 (i,j) 的概率，递推求出
- 记 $g(i,j,k)$表示第 k 步首次落脚于 (i,j) 的概率
- 那么 $f(i,j,k) = \sum_{t=0}^{k} g(i,j,t)f(0,0,k-t)$
- 求逆可得 g
- 时空复杂度 $O(n^3)$, 空间复杂度 $O(n^2)$
- 实验表明这样做能够胜任精度要求

Chords

AGC028D

- 圆上 $2N$ 个点，要画 N 条弦，每个点恰好连接一根弦
- 其中 K 条弦已给定
- 求所有连接其余弦的方案下弦的连通块的个数的和
- 模 10^9+7
- 弦的连通块个数，即把弦看作点，在相交的弦之间连边的无向图的连通块个数
- $1 \le N \le 300$
- $2s, 1GB$

解

- 两条弦 ij, xy, 不妨 $i < j, i < x < y$, 相交当且仅当 $x < j < y$, 所以圆是骗人的
- 记 $f(l,r)$ 表示安排 $[l,r]$ 使 l,r 连通，但与区间外均不连通的方案数
- 用“区间外的点随便连的方案数”乘上 $f(l,r)$ 贡献答案
- 直接求 $f(l,r)$ 较难
- 可假设先乱连，再枚举 l 所在连通块的编号最大者 r' 扣除

Square Constriants

AGC036F

- 求有多少 $(0, 1, \ldots, 2N-1)$ 的排列 $(P_0, P_1, \ldots, P_{2N-1})$ 使得 $N^2 \le i^2 + P_i^2 \le (2N)^2$
- 模 $M, 2 \le M \le 10^9$
- $1 \le N \le 250$
- $4s, 1GB$

解

- 预处理范围 $l_i \le P_i < r_i$, 对于 $i \ge N$ 有 $l_i = 0$
- 如果只有上限 $P_i < u_i$, 只需排序 $u_0 \le u_1 \le \cdots \le u_{2N-1}$, 方案数 $\prod_{0 \le i < 2N}(u_i - i)$
- 现在 $i < N$ 有下限，那就枚举选了 k 个 r 变成 l 容斥
- 由于这时最大的 l_i 都比最小的 r_i 小，这个顺序可以描述
- 对于 $i < N$ 令排序关键字为 (l_i, r_i), 对于 $i \ge N$ 令排序关键字为 $(r_i, 0)$, 先行排序
- 记 $f(i,j)$ 表示排序的前 i 个中选了 j 个变成 l

Stranger Trees +

CF917D加强版

- 给定一棵 n 个点的树 T
- 对于所有 $0 \le k < n$ 分别求该点集上有多少棵树 T' 与 T 恰有 k 条公共边
- 模 $10^9 + 7$
- $n \le 5000, 1\text{s}, 256\text{MB}$

解

- 将问题转化为选取 T 的 k 条边并令它们属于新树，二项式反演即得答案
- 设 k 条边将 T 连成了 $n-k$ 个大小分别为 $a_1, a_2, \ldots, a_{n-k}$ 的连通块
- 将连通块压缩成一个点，那么点 i, j 间的边有 $a_i a_j$ 种连法
- 生成连通块的Prüfer序列，当连通块 i 为 d_i 度时，其贡献权值 $a_i^{d_i}$
- i 在Prüfer序列中出现了 $d_i - 1$ 次，将 i 的每次出现都替换成 a_i 个点之一
- 替换后相当于长度为 $n-k-2$ 的 $1 \sim n$ 序列，可得生成树有 $n^{n-k-2} \prod_{i=1}^{n-k} a_i$ 种
- 因此现在问题转化为：求所有选取 k 条边的方案中，各连通块大小的积之和
- 直接树形动态规划的时间复杂度惨不忍睹

解

- $\prod_{i=1}^{n-k} a_i$ 的组合意义：在每个连通块中各选出恰好一个特殊点
- 记 $f(u,i,j)$ 表示以 u 为根的子树中，选取了 i 条边，恰好有 j 个特殊点的方案数
- 转移显然
- 时间复杂度 $O(n^2)$

小星星

ZJOI2016

- 已知 n 个点、m 条边的简单图 G 和 n 个点的树 T
- 求有多少种 T 到图 G 的生成树的同构
- $n \le 17$, 1.5s, 128MB

解

- 求 $[n]$ 上置换 σ 的数量并不好做
- 考虑容斥，即任取映射 $\sigma: [n] \to [n]$, 容斥 σ 的像集只含于 S
- 对于给定的像集 S, 不难写出DP
- $f(u, v)$ 表示安排 u 的子树的像，且 u 的像为 v 的方案数
- 总时间复杂度小常数 $O(2^n nm)$, 空间复杂度 $O(n^2)$

无环生成子图计数

- 给出 n 个点的有向图，求有多少个无环生成子图
- 无环等价于能拓扑排序
- 记 $f(S)$ 表示点集 S 的导出子图的答案
- 现在 S 至少要删去一个 0 入度点，因此容斥 0 入度点集合 T
- $f(S) = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} 2^{e(T, S \setminus T)} f(S \setminus T)$, 其中 $e(A, B)$ 为 $A \to B$ 边数
- 时间复杂度 $O(3^n)$, 空间复杂度 $O(2^n)$

主旋律

清华集训2014

- 给出 n 个点的有向图，求有多少个强连通生成子图
- 模 10^9+7
- $n \leq 15$
- $1\text{s}, 256\text{MB}$

解

- 强连通比较难搞，考虑其反面，即能划分为多个SCC
- 记 $e(S)$ 表示点集 S 的导出子图的边数
- 记 $f(S)$ 表示点集 S 的导出子图的答案
- $f_k(S)$ 表示点集 S 划分成 k 个子集，各子集导出子图的答案乘积总和
- 容斥 0 入度SCC: $2^{e(S)} = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq S} 2^{e(T,S\setminus T)+e(S\setminus T)} \sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1} f_k(T)$
- 令 $g = \sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1} f_k$, $2^{e(S)} = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq S} 2^{e(T,S\setminus T)+e(S\setminus T)} g(T)$ 解出 g
- $g(S) = f(S) - \sum_{\{\min S\} \subseteq T \subset S} f(T) g(S \setminus T)$ 解出 f
- 时间复杂度 $O(3^n)$, 空间复杂度 $O(2^n)$

连续子数列

NOI.AC 2201

- 设 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 是 $1,2,\ldots,n$ 的一个排列
- 如果连续子序列 $p_l, p_{l+1}, \ldots, p_r$ 满足相邻两项的差的绝对值为 1, 则说它是一个顺子
- 现已知任意顺子的长度均不超过 m
- 求满足该条件的排列数，对 10^9+7 取模
- $1 \le m \le n \le 5000$, 1s, 128MB

解

- 长度不超过 m 等价于没有长度为 $m+1$ 的
- 容斥，变成强制取一些长度为 $m+1$ 的区间，使得它们构成顺子
- 如果两段限制区间有公共元素，那么它们的公差必须相同
- 合并有公共元素的限制区间，合并后两两交集为空
- 设限制区间有 x 个，不在限制区间里的有 y 个
- 先把所有限制区间各看作一个数，排列所有数的相对大小，有 $(x+y)!$ 种情况
- 再考虑限制区间的公差，有 2^x 种情况
- 因此总方案数为 $2^x(x+y)!$
- 2^x 可以看作每有一个限制区间，就乘上 2 的系数，所以只要关于 $x+y$ 写递推

解

- 记 $f(i,j)$ 表示把前 i 个点分成总共 j 个限制区间或无限制点的容斥系数和
- 记 $g(i,j)$ 表示在上述条件下 i 作为限制区间末尾的容斥系数和
- 初值 $f(0,0)=g(0,0)=1$
- 转移 $g(i,j)=-\sum_{p=i-m}^{i-1} g(p,j)-2f(i-m-1,j-1)$
  $f(i,j)=g(i,j)+f(i-1,j-1)$
- 答案 $\sum_{j=0}^{n} f(n,j)\cdot j!$
- 前缀和优化后时间复杂度 $O(n^2)$
- 滚动数组优化后空间复杂度 $O(n)$

氪金手游

CTS2019

- 给出一棵 N 个点的树，每条边定一个向
- 每个点都有一个在 $\{1,2,3\}$ 上随机的权值 W_i，$W_i=j$ 的概率为 $p_{i,j}$
- 第 i 个点在卡池中放 W_i 个，然后每次从卡池中均匀随机抽出一个点
- 求点的首次抽出顺序满足边上方向的概率，模 998244353
- $N \le 1000$, 1s, 512MB

解

- 由于树上边的方向不固定，不能直接套用树的拓扑序模型
- 考虑容斥，将内向的边拆成 #(不定向) − #(外向)
- 为了处理一个点出现多次的情况，稍微改写以下公式
- u 的贡献因子为 $\frac{W_u}{\sum_{u\to v} W_v}$, 这里若内向的边改为不定向，则删掉，不贡献分母
- 记 $f(u,s)$ 表示 u 子树内边的外向或不定向方式中，u 的子树 W 和为 s, 在此情况下容斥系数乘以子树贡献因子的积的期望
- 时间复杂度 $O(n^2)$, 空间复杂度 $O(n)$

An unavoidable detour for home +

CF814E加强版

- 求满足以下条件的图数：
  - 含有 n 个点 $1,2,\ldots,n$
  - 1 到 i 的最短路唯一，设长度为 l_i
  - $l_1 \le l_2 \le \cdots \le l_n$
  - i 的度数为 d_i
- 模 10^9+7
- $n \le 200, d_i \in \{2,3\}$
- $3\mathrm{s}, 256\mathrm{MB}$

解

- 将点按照 l 分为若干层，那么每层都是一段区间
- 距离为 1 的层显然为 $[2, d_0 + 1]$
- 层内可以连边，每个点到上一层必须选取恰一个点相连，除此之外没有别的边
- 设某层有 x 个 2 度点、y 个 3 度点
- 去掉到上层的边，还余下 x 个 1 度、y 个 2 度，又设这层内有 z 条边
- 那么下一层应有 $x + 2y - 2z$ 个点
- 现在将这 y 个 2 度点的出边视为不同的，为了还原需要除掉 2^y
- 任意分配这些到下层的边所指向的点，方案数为 $(x + 2y - 2z)!$

解

- 把 2 度点看成两个点，那么这样进行配对会产生一些重边、自环
- 首先说明从 n 个物品中取出 $2m$ 个不相交无序对，方案数为 $\frac{n!}{(n-2m)!m!2^m}$
- 进行容斥，选定 p 对重边、q 个自环，方案数为 $\frac{y!}{q!p!2^p(y-2p-q)!}$
- 现在我们选取掉 $s=2p+q$ 个 2 度点，也已经产生了 s 条边
- 所以余下部分方案数为 $\frac{(x+2y-2s)!}{(x+2y-2z)!(z-s)!2^{z-s}}$
- 可设 $C_s=\sum_{2p+q=s,p\geq 0,q\geq 0}\frac{(-1)^{p+q}}{q!p!2^p}$
- 从而总贡献可写成 $\sum_{0\leq s\leq \min\{y,z\}}\frac{y!(x+2y-2s)!C_s}{2^y(y-s)!}\cdot\frac{1}{(z-s)!2^{z-s}}$

解

- 现在可以列出计数DP
- 记 $f(i,j)$ 表示截至某层共 i 个点，向下一层引出 j 条边的方案数
- 设 $i+1, i+2, \ldots, j$ 中有 x 个 2 度点、y 个 3 度点
- 再枚举 z, 那么 $f(i,j)$ 乘以上述系数贡献到 $f(i+j, x+2y-2z)$
- 为了优化，注意到 $x+2y-2z = x+2y-2s-2(z-s)$
- 换元 $d = z - s$, 分步转移，即
- $f(i,j) \xrightarrow{x,y,s} g(i+j, x+2y-2s) \xrightarrow{d} f(i+j, x+2y-2z)$
- 时间复杂度 $O(n^3)$, 空间复杂度 $O(n^2)$
- 常数很小，足以通过 $n = 1000$ 的数据

例题

- 将长度为 $2n$ 的数组分为 k 段，每段长度都是偶数
- 将 $1\sim2n$ 的随机排列填入数组，然后将偶数位上的值升序排列（奇数随意）
- 划分的价值为这样生成的排列每段中逆序数的乘积的期望
- 所有划分的价值和，模素数 $5000 \le P \le 10^9+7$
- $T \le 10^4$ 组询问
- $k \le n \le 100$, 1s, 512MB

解

- 组合意义：
  逆序数的乘积 = #(在每段里取红蓝两数，使得红数先于并大于蓝数)
- 红蓝不能都是偶位
- 如果红蓝都是奇位，概率恒为$\frac{1}{2}$
- 如果红偶、蓝奇，则符合升序的方向
- 如果红奇、蓝偶，则不符合升序的方向，需要容斥
- 记 $f(q,w,e)$ 表示考虑前 $2q$ 位，分为 w 段，当前子树大小为 $q+e$ 的容斥系数和
- 注意到 $f(q,w,e)$ 的基调为 $\frac{1}{(q+e)!}$, 为简化，可统一系数 $\frac{1}{(q+e)!}$, 并补乘漏过去的项

解

- 这样写出来的DP形如
- $f(r,w+1,e) \leftarrow \left(\frac{1}{2}\binom{r-q}{2} + \binom{r-q+1}{2}\right) f(q,w,e)$
- $f(r,w+1,e+1) \leftarrow \left(\sum_{t=1}^{r-q}(q+e+t)(r-q-t) - \sum_{t=1}^{r-q}(q+e+t)t\right) f(q,w,e)$
- 转移系数与 w 无关，可预处理
- 时间复杂度 $O(\max n^4 + T)$

令人印象深刻的题目名称

THUWC2019

- 有一长度为 n 的序列 A, 定义一次操作 (l,r,v) 为 $A_i \leftarrow \min\{A_i, v\}$ $(l \le i \le r)$
- 一旦序列 A 变为 B 就停止
- 合法操作序列，就是指恰好在最后一次操作后 A 变为 B 的序列
- 求长度不超过 m 的合法操作序列数
- 模 10^9+7
- $n \le 50, m \le 10^9, 1 \le A_i \le n+1, 1 \le B_i \le \min\{n, A_i\}, A \ne B$
- $4\text{s}, 512\text{MB}$

解

- 记 $f(M)$ 表示长度为 M 的能够将 A_i 变为 B_i 的操作序列的个数
- 设 $I=\{i|A_i>B_i\}$
- A 变为 B 有两条件：$\forall(l,r,v),\forall i\in[l,r],v\geq B_i;\forall i\in I,\exists(l,r,v),i\in[l,r],v=B_i.$
- 容斥后一条件，也就是取 I 的子集 S, 令 $B_i\overset{+}{\leftarrow}1\ (i\in S)$
- 容斥 S 情况下所计得数设为 $g(S)$, 则 $f(M)=\sum_{S\subseteq I}(-1)^{|S|}\big(g(S)\big)^M$
- 答案 $=\sum_{M=1}^{m}f(M)-g(\emptyset)f(M-1)$
  $=\sum_{M=1}^{m}\sum_{S\subseteq I}(-1)^{|S|}\left(\big(g(S)\big)^M-g(\emptyset)\big(g(S)\big)^{M-1}\right)$
  $=\sum_{S\subseteq I}(-1)^{|S|}\left(\sum_{i=1}^{m}\big(g(S)\big)^i-g(\emptyset)\sum_{i=0}^{m-1}\big(g(S)\big)^i\right)$

解

- 注意到 $g(S) \le n^3$, 所以只需要对 $k \le n^3$ 求出所有 $g(S) = k$ 的 $(-1)^{|S|}$ 之和
- 操作可以按 v 分类，对于某 v 考虑其影响：
- $B_i > v$ 禁止操作，$B_i = v$ 容斥时禁止操作，$B_i < v$ 无限制
- 对于同一个 v, 写一个DP描述集合 $S_v = \{i \in S \mid B_i = v\}$
- 记 $h_v(i,j)$ 表示只考虑前 i 位，第 i 位禁止操作，$g_v(S_v) = j$ 的所有 S_v 的容斥系数和
- 最后做背包把 $h_v(n+1,j)$ 合并起来
- 注意到 $g(\emptyset) - \binom{n+1}{2} \le g(S) \le g(\emptyset)$, 对于所有 v, j 这维的大小总和为 $O(n^2)$ 级别
- 因此时间复杂度小常数 $O(n^4)$, 空间复杂度 $O(n^3)$