水题选讲

彭博

北京大学

2023.10

给定一棵 n 个点的树，你需要给每个点一个 1 到 m 的颜色，使得任意两个距离不超过 2 的点的颜色不同。求方案数模 10^9+7 。

你需要造一个形式很好的式子，因为原题需要搜索所有 $n \le 120$ 的树。

$m < 10^9 + 7$

以 1 为根，从上往下确定颜色。

显然 1 与其儿子的颜色必须两两不同，因此这里的方案数是 $\binom{m}{d_1+1}(d_1+1)!$ 。

对于每个 1 的儿子 v ，v 的儿子的颜色必须两两不同且与 v 和 1 不同，因此这里的方案数是 $\binom{m-2}{d_v-1}(d_v-1)!$ 。

以此类推，不难得到整棵树的方案数就是

$$m(m-1)\prod_{i=1}^{n}\binom{m-2}{d_i-1}(d_i-1)!$$

给定一个长度为 n 的排列 p 。对于两个点 i,j ，如果 $\forall \min(i,j) < k < \max(i,j), p_j > p_k$ ，那么 i 就向 j 连一条有向边。

对每个 i 求出它到其他所有点的最短路长度之和。

$n \leq 3 \times 10^5$

直接考虑任意两个点 i,j 的最短路怎么求。

倒着走，每次从 j 贪心反向跳到最大的 p_k ，直到存在 $i \to k$ 的边为止。

这是一个不断扩大的区间，在第一个区间里的 i 的最短路是 1 ，第二个是 2 ，等等。

另外建一棵树，每个 j 的父亲是最大的 p_k ，这就对应一条从 j 到根的路径，给路径上每个区间加一。

用数据结构简单维护一下。

考虑如下一种选举方式：

1. 每个投票者对 n 个候选人有一个排序。
2. 进行 $n-1$ 轮，每轮每个投票者会投给自己最喜欢的未被淘汰的候选人，然后把得票数最少的候选人淘汰。如果平局就淘汰编号靠后的。
3. 剩下的一个候选人即为胜者。

现在有三个候选人 A,B,C ，你是 A 。你希望加入一个候选人 Z ，你可以任意操控每个投票者对 Z 的喜欢程度，使得最终胜者是你。

判断是否可能。

$n \leq 1000$

不妨假设你本来赢不了，否则是平凡的。

显然第一轮淘汰的不可能是 Z，否则你还是赢不了。

假设第一轮被淘汰的是 B。如果一个投票者原来的顺序是 BCA，那么它不可能被改为 BZCA。这是因为与其等 B 被淘汰了再让它投给 Z，不如一开始就投给 Z，这样 B 还是会被淘汰。

而就算第一轮被淘汰的是 C，可以发现 BCAZ 也比 BZCA 优，这是因为在第二轮他仍然会投给 B，而第三轮让他投给 A 显然优于投给 Z。

用类似的方式可以说明，对于 BCA,CBA,BAC,CAB，Z 只会被加在头尾。而对于 ABC,ACB，Z 只会被加在末尾，这是因为抢 A 的票不如抢第一个就被淘汰的人的票。

2nd ucup stage 6 H Ranked Choice Spoiling

最后，可以发现抢 BCA 比抢 BAC 要好，因为后者在 B 淘汰之后会投给 A 而不是 C 。

因此只需要枚举 Z 抢了 B 几票、抢了 C 几票，然后模拟即可。

2nd ucup stage 4 B Bocchi the Rock

给定一个长度为 n 的环，每个点是红色或蓝色，每条边是黄色或粉色。

你需要连若干根弦，弦不能相交（端点也不能相同），且只能连接颜色相同的点。

如果存在一种连弦的方式使得连完若干根弦之后，每个部分的边的颜色都相同，就称这组染色方案是好的。

现在有一些点和边的颜色不确定。求出有多少种好的染色方案。

$n \le 5 \times 10^4$

可以发现，如果一个点旁边的两条边的颜色相同，那么不会有弦连接它，否则一定不优。而如果旁边的两条边颜色不同，那么显然必须有弦连接它。

对于必须要连的点，它旁边的边的颜色顺序可能是粉黄，也可能是黄粉。不难发现粉黄的点必须连黄粉的点。

于是每个点有 ，$\times$ ， 四种状态，问题转为判断是否能括号匹配。

因为奇数位置只能是粉黄，偶数位置只能是黄粉，因此一段无法匹配的点只能是红蓝交替且粉黄、黄粉交替，只需要 $O(n)$ 个状态就可以表示。这就有了一个 $O(n^2)$ dp 的做法。

剩下的分治 NTT 就没啥意思了。

2nd ucup stage 6 B The Doubling Game 2

给定一棵 n 个点的树，初始每个点上有恰好一枚硬币。硬币之间是等价的。

你每次可以选择相邻的硬币数相同的两个点，把一个点的硬币全部移动到另一个点上。

求出最终有多少种不同的情况。

$n \leq 3 \times 10^5$

2nd ucup stage 6 B The Doubling Game 2

不难发现每条边只会被硬币经过一次，以此可以给树上的边定向，并把边的权值定义为经过它的硬币数量。

不难发现，如果两个方案中边的定向方案不同，那么其最终状态也不相同。

因此只需要对给边定向的方案数计数。

2nd ucup stage 6 B The Doubling Game 2

直接自底向上 dp ，显然权值只有 $\log n$ 种，因此 dp 状态只有 $O(n \log n)$ 个。

但是问题出在合并：如果要往上连一条权值为 2^w 的边，那么儿子要分别向你连 $2^0, \cdots, 2^{w-1}$ 的边。这东西只能状压做。

不过不难发现 2^w 不能超过子树大小，否则没那么多硬币往上走，因此直接状压复杂度是 $O(n^2)$ 。

2nd ucup stage 6 B The Doubling Game 2

更进一步，2^w 只能是最大的轻子树大小的级别，不然也不可能 $2^0, \cdots, 2^{w-1}$ 都有。

更进一步，如果把所有子树按从小到大的顺序排序，那么 2^w 只能是当前子树大小的级别。

精细实现即可做到复杂度 $O(n \log^2 n)$ 。

2nd ucup stage 6 A Digital Nim

给定数字 n 。Alice 和 Bob 轮流操作，每次给 n 减掉一个不超过 $d(n)$ 的正整数，不能操作者输。其中 $d(n)$ 表示 n 十进制表示的数位和。

t 组询问。

$t \le 10^4, n \le 10^{18}$

并没有什么性质。唯一一个有用的性质是，暴力的时候，只需要关心最近的一个必败态。

因此可以用数位 dp 来加速暴力。设 $dp_{i,j,k}$ 表示最低 i 位的最近的一个必败态是 $-k$ ，而高位的数位和是 j ，那么做到进位之前的最后一个必败态在哪里。直接嗯转移就好。

假设有一个长度为 5 的小写字母串 s 。

给定 n 个长度为 5 的小写字母串 $t_1, \cdots, t_n$ ，以及它们与 s 的按位大小关系 $w_1, \cdots, w_n$ 。比如 $s = \mathsf{aaazz}, t_1 = \mathsf{zzaaa}$ ，那么 $w_1 =$ »=« 。

实际上这个 s 并不存在。对于每个 k ，你需要在 $\binom{n}{k} \cdot k!$ 种选出并排列 k 个 (t_i, w_i) 的方案中，求出有多少种方案使得，前 $k-1$ 对 (t_i, w_i) 不能推出矛盾，但加上第 k 对就可以。

$n \le 10^5$ ，时限 $25s$ 。

进行一些反演之后，问题变为，求出有多少个大小为 k 的集合，使得它们推不出矛盾。

如果字符串长度为 1 ，那么我们可以枚举这 k 个限制的交是哪个区间，进行计数。

更聪明一点的做法是，枚举 k 个限制的交的区间里的每一个字符 c ，再减掉每一个长度为 2 的区间 $[c, c+1]$ ，就刚好没有算重。

拓展到长度为 5 的字符串也差不多，就只是每一维都要分别选择长度是 1 还是 2 ，并乘上对应的容斥系数。

用 FMT 实现，这一部分的复杂度是 $5 \cdot 26^5 \cdot 2^5$ ；统计答案部分的复杂度是 $O(n^2)$ ，写的稍微好看一点即可通过。

给定三个长度为 $n+1$ 的序列 $a_0,\cdots,a_n,b_0,\cdots,b_n,c_0,\cdots,c_n$ 。

设一次函数 $F_i(t)$ 为 $it+\max_{x+y+z=i}(a_x+b_y+c_z)$ ，其中 $0\le i\le 3n$ 。

求出有多少个 $F_i(t)$ 的任何一部分都不在上凸壳上。

$n\le 3\times 10^5$

2nd ucup stage 4 L Lines

众所周知，$(\max,+)$ 卷积是很难快速做的。

考虑上凸壳的定义，就是对每个 t 求出 $\max_i F_i(t)$ ，不妨考虑对于一个固定的 t 怎么做。

发现因为 $x+y+z=i$ ，所以 it 的贡献可以分配到 $xt+yt+zt$ 上，于是相当于把 a_x 变成了一次函数 $A_x(t)=a_x+xt$ 。

设 A,B,C 分别为 A_x,B_x,C_x 组成的上凸壳，那么 $F_i(t)$ 就是 A_x,B_x,C_x 的闵可夫斯基和。

这个就简单了。