

杂题选讲

彭博

北京大学

2025.7

数轴上有 n 个带颜色的点，你要用尽可能多的不相交的曲线连接它们，满足每条曲线都连接两个颜色不同的点，且都在数轴上方。

构造方案。

$$\sum n \leq 2 \times 10^5$$

这里给出简化后的题面。

给定数轴上的 $n + 1$ 个车站，其中固定了起点车站和终点车站，你初始在起点。

你有 n 张车票，其中 w 张往左走， $e = n - w$ 张往右走。你每次可以从一个车站走到另一个车站，并消耗一张对应方向的车票。

你需要在最小的移动距离内把每个车站走一遍。

$$n \leq 3 \times 10^5$$

给定一棵以 1 为根的有根树，每个点都只能给自己的祖先投票，不能不投，也不能投给自己。

求出哪些点可以成为得票数严格最多的点。

$$n \leq 10^6$$

有一个长度为 $2n$ 的数组 a ，初始都为 0。

有 n 次操作，每次给定 l_i, r_i ，令 $a_{l_i} \leftarrow 1, a_{r_i} \leftarrow 1$ ，然后把 $a[l_i + 1, r_i - 1]$ 全部赋为 0。

你可以任意重排操作之间的顺序。最大化操作结束时数组里 1 的个数。

$n \leq 5 \times 10^3$ ，保证所有 l_i, r_i 互不相同。

有 n 个玩家，从 1 到 n 编号，按顺序形成一个环。

现在有 n^2 张牌，每张上有一个整数，范围在 $[1, n]$ ，其中值为 i 的牌有 n 张。

每一次操作，令每个玩家选择一张牌给自己的下家。所有这些牌的移动都是同时执行的。

玩家 i 的目标是得到 n 张值为 i 的牌。请找出一种方案：在不超过 $(n^2 - n)$ 次操作使每个玩家达成目标。

你不需要使操作数最小化。

你有一个长度为 $2n + 1$ 的排列 p 。有 q 次操作，每次给出 x, y 表示 $\text{swap}(p_x, p_y)$ ，然后你需要找一个循环移位使得 LIS 长度不超过 n ，或者判断不存在。

$$n, q \leq 10^5$$

交互题。

有一个 $n \times n$ 的网格，初始有 $2n$ 个点分别被染色为 $1 \dots, 2n$ 。你每次可以让交互库给一个点染色。你需要在 10 次操作内找到一个矩形使得四个角都被染过色且颜色不同。

$$n \leq 1000$$

有一个 n 个点的树，每个点有一个点权 a_x 。

你每次可以选择一个点 x ，令 $a_x := -a_x + \sum_{(x,v) \in E} a_v$ ，然后把 a_v 清零。

你可以执行任意次操作。你需要使得最终只有至多一个点的点权非零，并最大化这个点权。

$$n \leq 10^5$$

有 n 个车站放在一个环上，相邻的车站有双向铁路相连。

有 m 组乘客，第 i 组有 c_i 个人，要从第 x_i 个车站到第 y_i 个车站。你需要给每个人选择两种路线中的一种，最小化每一段铁路被经过的次数的最大值。

$$n \leq 2 \times 10^5, m \leq 10^5$$

有一棵 n 个点的树，树上有 K 个老鼠和 K 个洞。保证老鼠位置两两不同且不相邻，洞也是。

每个时刻一个老鼠可以往相邻的点移动一步。移动之后仍然需要保证两两不相邻（即使处在洞中也不能相邻）。

问能否让最终的状态每个洞都有恰好一只老鼠。

$$n \leq 2000$$

有 n 个矩形，第 i 个矩形的长宽为 $a_i \times b_i$ ，被分成了 $a_i b_i$ 个 1×1 的小格子。

Alice 和 Bob 玩游戏。两人轮流操作，Alice 先手，每次选择一个矩形分成两部分。Alice 只能横着切，把 $a_i \times b_i$ 的矩形分为 $x \times b_i, (a_i - x) \times b_i$ 两个矩形；Bob 只能竖着切，效果类似。无法操作者输掉游戏。

求出胜者是谁。

有 n 堆石子，第 i 堆石子有 a_i 个。

两个人轮流取石子，每次只能从一堆石子取，不能不取，不能行动者输。

与经典游戏不同的是，给出一个集合 S ，如果某个人某一次取的石子个数 x 使得 $x \in S$ ，那么另外一个人下一次也必须在同一堆石子行动。

$$n \leq 10^5, a_i \leq 100$$