Flow

FSYo

July 21, 2022

CF884F Anti-Palindromize

对于一个字串 a，若其长度 m 为偶数，且对于 $\forall i \in [1, m]$ 有 $a_i \neq a_{m-i+1}$，则将其称为反回文串。
Ivan 有一个由 $2 \mid n$ 个小写拉丁字母构成的字串 s。他想用 s 的一些排列构成一些反回文串 t。同时他称 i 的美丽值为 b_i，且字串 t 的美丽值为 $\sum_{i=1}^{|S|} b_i[s_i = t_i]$，求其最大值，$n \leq 100$。

CF884F Anti-Palindromize

S 向每个字符连字符出现次数流量的边，这样就保证了字符出现次数与原串相同。
考虑对称位置不能相同，我们建 $n/2$ 个节点，每个字符向这 $n/2$ 个节点连边。如果 s_i 和 s_{n-i+1} 都是当前字符，那么只能满足一个，费用连 $max(v_i, v_{n-i+1})$。如果有一个为当前字符，那么直接连费用为它的边。
如果两个都不是，那就是去用来调节的，连一条费用为 0 的边，最后最大费用最大流就可以了。

BZOJ4205 卡牌配对

现在有一种卡牌游戏，每张卡牌上有三个属性值：A, B, C。把卡牌分为 X, Y 两类，分别有 n_1, n_2 张。
两张卡牌能够配对，当且仅当，存在至多一项属性值使得两张卡牌该项属性值互质，且两张卡牌类别不同。
比如一张 X 类卡牌属性值分别是 225,233,101，一张 Y 类卡牌属性值分别为 115,466,99。那么这两张牌是可以配对的，因为只有 101 和 99 一组属性互质。
游戏的目的是最大化匹配上的卡牌组数，当然每张卡牌只能用一次。
$n_1, n_2 \le 30000$，属性值为不超过 200 的正整数

BZOJ4205 卡牌配对

优化建图，≤ 200 的质数只有 46 个，建 $3 \times 46 \times 46$ 个点，一个点 $(0, p_i, p_j)$ 连边表示 $p_i \mid a_x, p_j \mid b_x$，$(1, p_i, p_j), (2, p_i, p_j)$ 同理。
之间跑最大流，这样边数是 $n(\log \log a_i)^2$ 的，复杂度可以近似看为 $O(n\sqrt{n})$，可以通过。

UOJ 77 A+B Problem

从前有个 n 个方格排成一行。
有一天思考熊想给这 n 个方格染上黑白两色。
第 i 个方格上有 6 个属性：$a_i, b_i, w_i, l_i, r_i, p_i$。
如果方格 i 染成黑色就会获得 b_i 的好看度。
如果方格 i 染成白色就会获得 w_i 的好看度。
但是太多了黑色就不好看了。如果方格 i 是黑色，并且存在一个 j 使得 $1 \le j < i$ 且 $l_i \le a_j \le r_i$ 且方格 j 为白色，那么方格 i 就被称为奇怪的方格。如果方格 i 是奇怪的方格，就会使总好看度减少 p_i。
也就是说对于一个染色方案，好看度为：
$\sum_{i \in Black} b_i + \sum_{j \in White} w_j - \sum_{k \in Strange} p_k$
现在给你 n, a, b, w, l, r, p，问所有染色方案中最大的好看度是多少。
$n \le 5000$。

UOJ 77 A+B Problem

首先，分配黑白，应该是最小割的模型。
考虑先令答案为 $\sum(b_i + w_i)$，要让减去最小割为答案。
原点向每个点连边，边权为 b_i，如果割掉表示选白，此时不需要考虑为黑的限制。
每个点向汇点连边，边权为 w_i，如果割掉表示选黑，此时要考虑限制。
限制为对于任何满足条件的 j，j 如果要选白，也就是割黑，就要额外付出 p_i 的代价。
先建一个虚点 i'，i 向 i' 连边权为 p_i 的边，i' 向 j 连 ∞ 的边即可。
使用主席树优化建图，点边都是 $O(n \log n)$。

BZOJ 2400 Optimal Marks

定义无向图中的一条边的值为：这条边连接的两个点的值的异或值。
定义一个无向图的值为：这个无向图所有边的值的和。
给你一个有 n 个结点 m 条边的无向图。其中的一些点的值是给定的，而其余的点的值由你决定（但要求均为非负数），使得这个无向图的值最小。在无向图的值最小的前提下，使得无向图中所有点的值的和最小。
$n \le 500, m \le 2000, a_i \le 10^9$。

BZOJ 2400 Optimal Marks

首先位与位是互不干扰的，按位处理
题目转换为，把点分为 $0/1$ 集合，只有 $0/1$ 之间的边有贡献。
令原点为 1 集合，汇点为 0 集合，原点向这一位为 1 的连边，这一位为 0 的连向汇点，边权为 ∞。
对于原图上的边 (u, v)，连边 $(u, v, 1)(v, u, 1)$。
题目要求 S 联通块里面的点最少，那么我们把割掉的权值改为 10^6，每个点再向 T 连一条权值为 1 的边，那么最后的最小割就是 $a \times 10^6 + b$，其中 a 为边权最小值，b 为 S 连通块的最小点数。

AGC038F Two Permutations

题目就是可以把一些环给拆掉。
讨论：

1. $p_i = q_i = i$，那么一定有 $a_i = b_i$。
2. $p_i = i, q_i \neq i$，当 q_i 被拆的时候，$a_i = b_i$。
3. $p_i \neq i, q_i = i$，当 p_i 被拆的时候，$a_i = b_i$。
4. $p_i \neq q_i, p_i \neq i, q_i \neq i$，都拆的时候，$a_i = b_i$。
5. $p_i = q_i, p_i \neq i, q_i \neq i$，都拆或都不拆，$a_i = b_i$。

所以最小割建图，每个环表示一个点。

AGC038F Two Permutations

P 在 S 中表示 P 拆掉，Q 在 T 中表示 Q 拆掉
连边分别对应为:
1. 摆烂。
2. S 向 Q 连边权为 1 的边。
3. P 向 T 连边权为 1 的边。
4. P 向 Q 连边权为 1 的边。
5. P, Q 互相连边权为 1 的边。

All Pair Maximum Flow

有一张特殊的无向图。你可以把它看作一个正 n 边形，包含顺时针排列的 n 个节点以及顺次相连 n 条边，存在额外的 $m-n$ 条边，所有这些边都在多边形内部并且只可能在节点处相交。每条边有一个容量 c_i，定义 $f(s,t)$ 表示从 s 到 t 的最大流量。

求 $\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=s+1}^{n} f(s,t)\right) \bmod 998244353$。

$3 \le n \le 200000, n \le m \le 400000$

All Pair Maximum Flow

发现题目中所给的图是一张平面图，不妨转成对偶图来考虑。
考虑外侧权值最小的边 e，边权为 w，它对应里面的平面区域为 u。如果最短路经过点 u，易证边 e 一定被跨过。所以可以将边 e 删去，u 的其他边的边权加上 w。
删完之后就得到了最小割树，用一个 Kruskal 重构树统计答案即可。

gym 102341 B

给一个分层图，$n \leq 4 \times 10^4$ 层，每层 $k \leq 10$ 个结点，层之间有边。定义 $f(i,j)$ 表示层 i 到层 j 的最大流（每个点只能经过一次），问 $\sum_{i<j} f(i,j)$。

gym 102341 B

考虑对于 i，我们从每个点开始尽量往后流，我们加上 $\sum_i len_i$ 即可。
考虑扩展到 $i+1$ 的答案，此时我们将 $i, i+1$ 的边删除，这时第 $i+1$ 层可能没有尽量流满。
我们考虑从 $i+1$ 层继续向后面增广，我们知道如果从 $i+1$ 开始找到了一条长为 d 的流，复杂度是可以做到 $O(dk^2)$ 的。
由于总的流量是 $O(nk)$，故复杂度 $O(nk^3)$。

gym102220 A

有一个 n 个点的二叉树，$i \to \lfloor \frac{i}{2} \rfloor$ 连边，每个点有 a_i 个苹果。
现在有 m 个需求，每个需求形如在 $u \to v$ 上买 $\leq c$ 个苹果，价格为 w，保证 v 是 u 的祖先，问最大价值。
$n, m \leq 10^5$。

gym102220 A

注意到费用流的性质，可以按 w 从大往小放，我们只需要保证有完美匹配就可以了。
即我们选一个树上的联通块，要求包涵路径选的个数要 $\leq$ 联通块的总点数。
我们对这个差值进行 DP，由于路径是直上直下的，我们直接记 $dp_{u,i}$ 表示 u 的子树，最高点在 i 的 $\sum a_i - \sum c_e$ 的最小值。
插入一个新的路径时，可以 $O(\log^2 n)$ 更新。

gym 102482 C

给一棵树，每个点有 a_i 个球和 b_i 个洞，边权为 c_i，要移动球使得所有球都进洞，问最小移动距离。$n \leq 10^5, \sum a, \sum b \leq 10^6$。

gym 102482 C

观察每个球的移动路径，我们知道这些路径是不交，否则可以交换。
于是可以考虑模拟费用流，枚举 lca，那么贡献为 $c = d_x + d_y - 2d_{lca}$（x 有一个球，y 有一个洞）。
我们需要考虑的是在 lca 上方有个洞，它可能会跟 x 匹配，上方有个球，它可能跟 y 匹配。
此时我们在 y 处放一个球，上面跟它匹配相当于有贡献 $d_y - c$，并在 x 放一个洞，有 $d_x - c$ 的匹配贡献。
trick：为了保证满配，我们每匹配一个就增加 $-\infty$ 的贡献，最后再加上就可以了

BZOJ 3693

有 n 组人要一起开一个圆桌会议（编号为 0 n-1），会议的圆桌上有 m 个位置（编号为 0 m-1）。每个组有 ai 个人，他们需要被安排在（li，(li+1) 都需要被安排一个座位。现在你需要判断是否存在满足条件的座位安排。$n \leq 10^5$。

BZOJ 3693

首先可以暴力 n^2 建图判一下有没有完美匹配。
根据二分图 *Hall* 定理，对于任意区间 $[L, R]$ 如果对包涵的区间的 a_i 求和需满足 $R-L+1 \geq sum$。
显然只有在原区间左右端点上的 L, R 才有用。
于是转换为，对于任意区间 $[L, R](L \in l_j, R \in r_i)$，需要满足 $\sum_{k=j}^{i} a_k \leq R-L+1$，也就是 $R \geq sum+L-1$。
按 r_i 排序，线段树对于每一个 l_i 维护 $max(sum+L-1)$。
考虑每次添加一条线段的影响，对于 $l \leq l_i$ 的 l 有 a_i 的贡献。
线段树区间加，区间 *max* 即可。