

# 杂题选讲

陈东武

广州大学附属中学

2023 年 9 月 30 日  
初版于 2023 年 9 月 30 日

# 目录

## 1 ProbSet I

- Tree Weights
- Tenzing and Random Operations
- Tenzing and Random Real Numbers
- Asterism Stream

- Strange Triples

## 2 ProbSet II

- Flip and Reverse
- 01 Balanced
- Minmaxtree
- James and the Chase
- alphago

1

# ProbSet I

给定  $n$  个点的树, 以及正整数列  $d_1, \dots, d_{n-1}$ . 请你构造每条边的正整数边权使得  $i$  到  $i+1$  的距离为  $d_i$ .

$2 \leq n \leq 10^5$ ,  $d_i \leq 10^{12}$ , 需判断无解.

给定长为  $n$  的正整数列  $a_1, \dots, a_n$  以及正整数  $m, v$ , 对序列进行  $m$  次操作, 每次取  $1 \sim n$  的均匀随机整数  $i$ , 令  $a_i, \dots, a_n$  分别加上  $v$ . 求操作之后  $\prod a_i$  的期望对  $10^9 + 7$  取模的值.

$$n \leq 5 \cdot 10^3, m, v, a_i \leq 10^9.$$

设  $x_1, \dots, x_n$  是  $[0, 1]$  范围内的均匀随机变量, 给定若干条形如  $x_i + x_j \leq 1$  或  $x_i + x_j \geq 1$  的限制, 求满足这些限制的概率对 998 244 353 取模的值.

$n \leq 20$ .

给定正整数  $n$ , 变量  $x$  初始为 1, 对其进行若干次操作, 每次操作时先掷一枚均匀硬币, 若正面朝上则令  $x$  变为  $x + 1$ , 否则变为  $2x$ , 直至  $x \geq n$ . 求期望操作次数对 998 244 353 取模的值.

$T \leq 100$  组数据,  $n \leq 10^{18}$ .

给定正整数  $A, B, N$ , 求满足  $a < A, b < B, n < N$ , 以及

$$\frac{a \cdot 10^{\text{len}(n)} + n}{n \cdot 10^{\text{len}(b)} + b} = \frac{a}{b}$$

的正整数三元组  $(a, b, n)$  的数量, 其中  $\text{len}(n) := \lfloor \log_{10} n \rfloor + 1$ .

$A, B \leq 10^5, N \leq 10^9$ , 时限 10 秒.



2

## ProbSet II

给定 01 串  $s$ , 你可以进行任意次操作, 每次选择一段 01 个数相同的子串, 将其 01 反转并左右翻转. 求能得到的字典序最小的字符串.

多组数据,  $\sum |s| \leq 5 \cdot 10^5$ .

给定正整数  $n$ , 以及  $m$  条形如区间  $[l, r]$  的 01 个数相同的限制.  
求满足限制且字典序最小的 01 串.

$$n \leq 10^6, m \leq 2 \cdot 10^5.$$

给定  $n$  个点的树, 以及  $k$  条形如点  $x$  到点  $y$  的简单路径的最大/最小边权为  $z$  的限制, 请你构造每条边的整数边权以满足这些限制.

$n, k \leq 7 \cdot 10^4$ , 所有  $z$  两两不同, 保证有解.

给定  $n$  个点  $m$  条边的有向强连通图, 称某个点是**好的**当且仅当它到其他点都只有一条简单路径. 请你判断是否至少有  $n/5$  个好点, 若是则求出所有好点.

$T \leq 2 \cdot 10^3$  组数据,  $\sum n \leq 10^5$ ,  $\sum m \leq 2 \cdot 10^5$ .

给定  $n$  个点的简单无向连通图, 每条边有非负整数权值, 每个点上有 0 或 1 个棋子, 棋子是白的或黑的. 你可以进行任意次操作, 每次选择没有棋子的点  $u$ , 然后分别对每个棋子, 设其在点  $v$ , 则你选择一条  $v$  到  $u$  的简单路径, 并将这个棋子沿着这条路径移动一步. 所有操作完成后结算分数, 对于每一对颜色不同的棋子, 若它们所在的顶点之间由一条权值为  $w$  的边相连, 则会产生  $w$  的分数, 你的分数是所有棋子对所产生的分数之和. 求你能获得的最大分数.

$3 \leq n \leq 100$ , 边权  $\leq 10^5$ , 至少有一个点上没有棋子.

注意操作之后同一点上可能有多个棋子, 对于这些棋子, 一次操作中选取的路径可以不同. 一条边可能被结算多次分数.