

构造专题题目选讲

徐锦涛

2024 年 1 月 6 日

什么是构造题

- 构造一组满足特定条件的数据或对象
- 通常不要求找到最优解，而是要求满足一系列规则或条件

构造题解决步骤

- 理解问题：理解问题的要求和限制条件
- 找到规律：尝试找到满足条件的模式或规律
- 构造解：根据规律逐步构造满足条件的解
- 证明正确性：验证所构造的解是否满足所有问题条件

近几年构造真题

- [NOIP2020] 移球游戏
- [NOIP2022] 喵了个喵

2023 CCPC Qinhuangdao A

- 题意：给定 $n * n$ 矩阵，构造一组填数方案，使得第 i 行等于第 i 列的 gcd。
- 要求 1 到 k 都恰好出现一次，且每行每列至少两个数，某些格子可以不填
- $2 * n \leq k \leq n^2$

2023 CCPC Qinhuangdao A

- 按如下方式构造即可，因为任意行和列 gcd 都为 1

▲	A	B	C	D	E	F
1	1	2				
2		3	4			
3			5	6		
4				7	8	
5					.	.
6						

Graph Factorization Andrew Stankevich Contest 35 F

题目大意

对于一张 $2n$ 个点的无向完全图 G 。

要求将其拆为 m 个边集不相交的子图，其中第 i 张子图的每个点的度数都必须恰好为 a_i 。

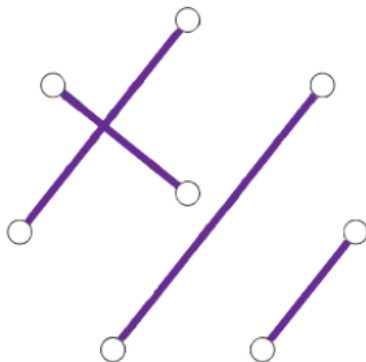
构造一组可行解。

数据范围

$n \leq 100$, $m \leq 2n - 1$, $\sum a_i = 2n - 1$

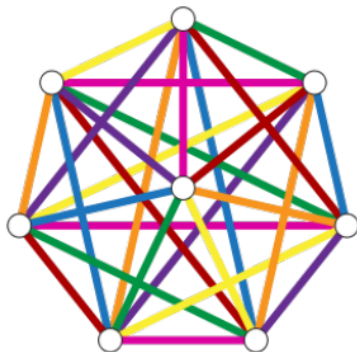
Graph Factorization Andrew Stankevich Contest 35 F

- 由于 m 可以取到 $2n - 1$ ，所以问题等价于 $a_i = 1$ 。
- 考虑将 $2n - 1$ 个点排成一个环，剩下一个点放中间。



Graph Factorization Andrew Stankevich Contest 35 F

- 最终整张图会被划分成这样，问题解决。



Drunkard's Walk Andrew Stankevich Contest 45 D

题目大意

构造一张 n 个点的图，除了点 $n-1$ 和点 n 外均有两条出边。一开始的位置在点 1，每次等概率选择一条出边走，最终必须到达 $n-1$ 或 n ，并且到 $n-1$ 的概率为 $\frac{p}{q}$ 。

数据范围

$$1 \leq p < q \leq 100$$

要求构造出的 $n \leq 1000$

Drunkard's Walk Andrew Stankevich Contest 45 D

- 构造一条 $q + 1$ 个点的链



- 起点设为 p ，两个终点分别为 0 和 q 。
- 设这条链上第 i ($1 \leq i \leq q$) 个点最终走到 0 的概率为 g_i 。
- 那么有 $g_i = \frac{g_{i-1} + g_{i+1}}{2}$
- 易得 $g_i = \frac{i}{q}$, $g_p = \frac{p}{q}$, 问题解决。

Decomposable Single Word Languages Andrew Stankevich Contest 47 D

题目大意

给出一个长度为 n 的串，要求构造两个的 DFA 自动机。

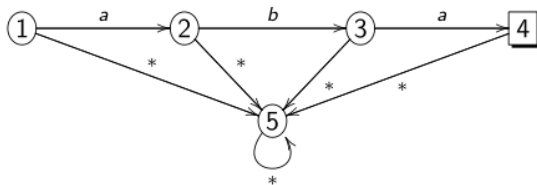
- 状态数不超过 $n + 1$
- 1 为起始态，可以自由确定若干接受态。
- 对于字符集（小写字母）中的每种字符都有对应转移。
- 这两个 DFA 自动机能接受的串的集合的交为给定串。

数据范围

$$1 \leq n \leq 50$$

Decomposable Single Word Languages Andrew Stankevich Contest 47 D

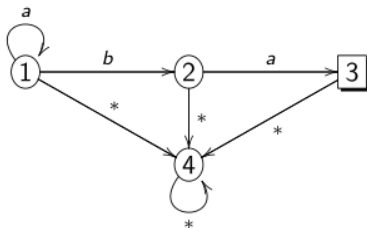
- 为了帮助理解题意，再给出一些说明。
- 容易构造一个状态数为 $n + 2$ 的 DFA 自动机使得它只能接收给定的串。



- 整个串由同一种字符构成时，无解。

Decomposable Single Word Languages Andrew Stankevich Contest 47 D

- 可以构造出一个点数不超过 $n + 1$ 的 *DFA* 来接收将串首字符无限复制的串集。



- 同理可以对串尾字符构造，将这个两个 *DFA* 取交即为给定串。

Permutation Reconstruction Andrew Stankevich Contest 24 E

题目大意

对于一个 $1 \sim n$ 的排列 a ，定义 a/i 为在该排列中去掉 i 后，剩下数相对大小和位置不变构成一个 $1 \sim n-1$ 的排列。

如 $(1,3,5,2,6,4) / 2 = (1,2,4,5,3)$ 。

所有 $1 \leq i \leq n$ 的 a/i 顺序打乱后给出。

要求还原一个合法的排列 a 。

数据范围

$5 \leq n \leq 300$

Permutation Reconstruction Andrew Stankevich Contest 24 E

- 移除一个 i (≥ 2) 后, 排列中 1 的大小一定不变, 位置不变或前移一格。
- 1 在原排列中的位置最多只有 3 种可能。
- 枚举哪个读入的排列是删 1 的, 将 1 补在对应位置。
- 用 *hash* 判断是否和输入符合。
- 复杂度 $O(n^3)$

Robots' Art Andrew Stankevich Contest 35 H

题目大意

给出两个由 $\leq k$ 的正整数构成的数列 A, B ，长度为 n, m 。

求出一个由 $\leq k$ 的正整数构成的数列 C ，使得 C 既不是 A 的子序列也不是 B 的子序列。

要求输出一个最小长度的可行方案。

数据范围

$n, m, k \leq 5000$

Robots' Art Andrew Stankevich Contest 35 H

- 对于一个已知数列，如何判断它是否是 A, B 的子序列？
- 在 A, B 上贪心逐个匹配，尽可能匹配靠前位置。
- 预估一下答案的上界。
- 设 $nextA_{i,c}$ 为数列 A 中， i 之后第一次出现 c 的位置。
- 这个数组可以 $O(nk)$ 递推得到。
- 对于一个 i ， $Max\{nextA_{i,c}\} - i \geq k - 1$
- 一定能找到一个 c ，使得 c 下次出现在 k 这个位置之后。
- 可以贪心每次选择一个在 A, B 中下次出现最靠后的数放到 C 末端，所以答案在 $O(\frac{n+m}{k})$ 范围内。

Robots' Art Andrew Stankevich Contest 35 H

- 设 $F[i][j]$ 表示长度为 i 的 C 数列，在 A 数列中匹配到第 j 位时， B 数列中匹配的最远位置。
- 可以 $O(k)$ 枚举下一个位置的数。
- 利用 $nextA_{i,c}$ 和 $nextB_{i,c}$ 转移。
- 这一部分的复杂度为 $O(|C_{ans}|nk \leq O(\frac{n+m}{k}nk) = O((n+m)n)$
- 时间复杂度 $O((n+m)k + (n+m)n)$

[USACO23OPEN] Tree Merging

题目大意

定义一棵有根树的一次合并操作为：选择两个具有相同父亲的结点，将其合并成一个节点，新节点的编号为原来的两个节点编号的较大值，新节点的子节点集合为原来的两个节点子节点集合的并集。

构造出任意一组满足上述条件的合并操作序列，使得对一棵具有 n 个节点的有根树变成一棵具有 m 个节点的树

数据范围

$n, m \leq 5000$

[USACO23OPEN] Tree Merging

- $C_{a,b}$ 为节点 a 是否可以合并进节点 b
- 从树的叶子节点开始按照深度递减一直算到根节点即可

[USACO23OPEN] Tree Merging

- 最后构造方案时，从根节点开始按照深度递增一直算到叶子节点
- 枚举每一个深度指定的节点 a ，令其在原状态中的父亲为 f ，那么只要找到一个最大的节点 b 满足 b 在目标状态中的父亲与 w_f 相等，且 $c_{a,b}$ 为真
- 若最终 $a \neq b$ 就合并 a, b

[USACO22OPEN] Balancing a Tree

题目大意

每个点有权值范围，要求你钦定每个点的权值。

满足，全局的 (i, j) （其中 i 是 j 的祖先）的 $|a_i - a_j|$ 的最大值最小。

数据范围

$$n \leq 10^5$$

[USACO22OPEN] Balancing a Tree

- 确定了 s_1 的值以后就知道了其他的所有 s_i , 让所有 s_i 都尽量靠近 s_1 显然使得 Ans 最小
- 非根节点和其非根节点的祖先对答案的贡献是固定的
- $s_1 = (\max(l_i) - \min(r_i))/2$

[USACO22JAN] Tests for Haybales

题目大意

有一个长为 n 的递增的整数数组满足 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ 和一个整数 k 。

你不知道这个数组 x 和这个整数 k ，但你知道对于每个下标 i 满足 $x_{j_i} \leq x_i + k$ 的最大下标 j_i 。

保证 $i \leq j_i$ ，且 $j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_n \leq n$ 。通过 j 数组，构造一个任意数组 x 和整数 k 满足上述条件

数据范围

$$1 \leq n \leq 10^5$$

[USACO22JAN] Tests for Haybales

- 建立一棵有 $n + 1$ 个节点的树，对于每个节点，与父亲 $j_i + 1$ 连一条边
- 根据构造条件， $x[j_i + 1]$ 应当大约比 $x[i]$ 大 K 。由此可以猜测每个节点权值为 $d[i] * K + t$

[USACO22JAN] Tests for Haybales

- 我们要使得同一层排在后面的节点, t 都小于它的任意子节点, 与此同时, 它自己的 t 要大于它的任意儿子。
- 于是我们令 $t = K - dfn[i]$ 即可