# nim 游戏 解题报告

杜沛键

January 20, 2025

## 简要题意

#### 给定一个长度为 n 的非负整数序列 a,求另一个非负整数序列 x 使得:

$$(a_1 + x_1) \oplus (a_2 + x_2) \oplus \cdots \oplus (a_n + x_n) = 0$$

且要求  $\sum x_i$  最小。输出至多 m 种不同的方案。

数据范围:  $1 \le n \le 10^5, 1 \le m \le 2 \times 10^4$ 。

杜沛键

# 算法一

我会 n = 2!

## 算法一

- 我会 n = 2!
- $k = |a_1 a_2|$ , 方案一定只有一种。

- 我会 n = 2!
- $k = |a_1 a_2|$ ,方案一定只有一种。

期望得分: 4分。

● 我会暴力枚举 a<sub>i</sub> 的改变量!

 杜沛键
 nim 游戏 解题报告
 4 / 7

- 我会暴力枚举 a<sub>i</sub> 的改变量!
- 时间复杂度  $O(a_i^n)$ , 结合算法一期望得分 16 分。

杜沛键 nim 游戏 解题报告 4 /

- 我会暴力枚举 a; 的改变量!
- 时间复杂度  $O(a_i^n)$ , 结合算法一期望得分 16 分。

● 思考思路: 从高位到低位枚举, 枚举到第t 位选择若干个第t 位不为 1 的数  $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{len_t}}$ , 将这些数第t 位变成 1, 并将更低的位全部变为 0。

杜沛键 nim 游戏 解题报告 4

- 我会暴力枚举 a; 的改变量!
- 时间复杂度  $O(a_i^n)$ , 结合算法一期望得分 16 分。

- 思考思路: 从高位到低位枚举, 枚举到第 t 位选择若干个第 t 位不为 1 的数  $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{lent}}$ , 将这些数第 t 位变成 1, 并将更低的位全部变为 0。
- 贪心结论  $\vdash$ : 在  $a_1=0$  时,一定有  $len_t=0/1$ ,取决于该为 1 的数量是否为偶数。

杜沛键 nim 游戏 解题报告 4 /

- 我会暴力枚举 a; 的改变量!
- 时间复杂度  $O(a_i^n)$ , 结合算法一期望得分 16 分。

- 思考思路: 从高位到低位枚举, 枚举到第 t 位选择若干个第 t 位不为 1 的数  $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{len_t}}$ , 将这些数第 t 位变成 1, 并将更低的位全部变为 0。
- 贪心结论  $\vdash$ : 在  $a_1=0$  时,一定有  $len_t=0/1$ ,取决于该为 1 的数量是否为偶数。
- 可以在  $len_t = 1$  的时候暴力枚举改变谁,时间复杂度  $O(\log^n(a_i))$ ,结合算法一期望得分 28 分。

thite nim 游戏 解题报告 4 / 7

● 贪心结论 | | | 为了使 | k | 最小,在第 | i | 位时一定会选择后 | i | 位尽量大的  $| a_x |$  将 改变。

算法四

 杜沛键
 nim 游戏 解题报告
 5 / 7

- 贪心结论 ||: 为了使 k 最小,在第 i 位时一定会选择后 i-1 位尽量大的  $a_x$  将 改变。
- 故对于 m=1 的情况可以按照这个贪心完成。时间复杂度  $O(n \log n)$ 。

 杜沛键
 nim 游戏 解题报告
 5 / 7

- 贪心结论 II: 为了使 k 最小,在第 i 位时一定会选择后 i-1 位尽量大的  $a_x$  将 改变。
- 故对于 m=1 的情况可以按照这个贪心完成。时间复杂度  $O(n \log n)$ 。
- 结合算法一, 算法二期望得分 40 分。

 杜沛键
 nim 游戏 解题报告
 5 / 7

## 算法四

● 可以将贪心结论 || 进一步扩展。

杜沛键

## 算法四

- 可以将贪心结论 || 进一步扩展。
- 固定 k 时,在第 i 位时如果后 i-1 位更大的  $a_x$  改变不可行,则更小的  $a_y$  也不可行。

杜沛键 nim 游戏 解题报告 6 / 7

## 算法四

- 可以将贪心结论 Ⅱ 进一步扩展。
- 固定 k 时,在第 i 位时如果后 i-1 位更大的  $a_x$  改变不可行,则更小的  $a_y$  也不可行。
- 由此我们可以得到一个搜索的思路:对于每一位按照更小位的大小排序(如果该位为1则设为 inf),并且按照从大到小的顺序搜索答案。搜索到不合法方案/方案已经被填满则返回。

 杜沛键
 nim 游戏 解题报告
 6 / 7

## 算法四

- 可以将贪心结论 Ⅱ 进一步扩展。
- 固定 k 时,在第 i 位时如果后 i-1 位更大的  $a_x$  改变不可行,则更小的  $a_y$  也不可行。
- 由此我们可以得到一个搜索的思路: 对于每一位按照更小位的大小排序(如果该位为 1 则设为 inf),并且按照从大到小的顺序搜索答案。搜索到不合法方案/方案已经被填满则返回。
- 时间复杂度  $O(n \log n \log(a_i) + m \log(a_i))$ 。结合算法一期望得分 72 分。

杜沛键 nim 游戏 解题报告 6 / 7

## 算法五

● 最后只需要考虑没有特殊性质 B 的情况。需要略微修改贪心结论 I。

tim 游戏 解題报告 7 / 7

## 算法五

- 最后只需要考虑没有特殊性质 B 的情况。需要略微修改贪心结论 I。
- 贪心结论 I (修改后): 当 n 为奇数且存在某一位全为 1 时,可能会在更高的某一位 1 数量为偶数的地方选择  $len_t = 2$ 。其他情况不变。

tin键 nim 游戏 解题报告 7/7

## 算法五

- 最后只需要考虑没有特殊性质 B 的情况。需要略微修改贪心结论 L。
- 贪心结论 I (修改后): 当 n 为奇数且存在某一位全为 1 时,可能会在更高的某一位 1 数量为偶数的地方选择  $len_t = 2$ 。其他情况不变。
- 所以不管是求 k 还是求方案,我们在每一位若满足条件时选择一次  $len_t = 2$  即可。其他情况不变。

tin键 nim 游戏 解题报告 7 / 7

#### 算法五

- 最后只需要考虑没有特殊性质 B 的情况。需要略微修改贪心结论 L。
- 贪心结论 I (修改后): 当 n 为奇数且存在某一位全为 1 时,可能会在更高的某一位 1 数量为偶数的地方选择  $len_t = 2$ 。其他情况不变。
- 所以不管是求 k 还是求方案,我们在每一位若满足条件时选择一次  $len_t = 2$  即可。其他情况不变。
- 这样也就多一个  $\log(a_i)$  的代价。最后总时间复杂度  $O(n \log n \log(a_i) + m \log^2(a_i))$ 。期望得分 100 分。

 杜沛键
 nim 游戏 解題报告
 7 / 7

## 算法五

- 最后只需要考虑没有特殊性质 B 的情况。需要略微修改贪心结论 L。
- 念心结论 | (修改后): 当 n 为奇数目存在某一位全为 1 时,可能会在更高的某 一位 1 数量为偶数的地方选择  $len_t = 2$ 。其他情况不变。
- 所以不管是求 k 还是求方案,我们在每一位若满足条件时选择一次 len, = 2 即 可。其他情况不变。
- 这样也就多一个 log(a<sub>i</sub>) 的代价。最后总时间复杂度  $O(n \log n \log(a_i) + m \log^2(a_i))$ 。 期望得分 100 分。
- 具体实现时可能会多一个 log, 但应该也能通过。

村沛键 nim 游戏 解题报告 7 / 7