OI 中的线性代数

陈雨昕

1. 向量与矩阵

矩阵和向量

- n 行 m 列矩阵：标量的 $n \times m$ 表，记作 $A = (a_{ij})$
- n 阶方阵：$n \times n$ 矩阵
- n 维行（列）向量：$1 \times n$（$n \times 1$）矩阵
- 加法 $A + B$, 减法 $A - B$, 取负 $-A$: 对应位置元素加/减/取负
- 数乘 $\lambda A = A\lambda$: A 的每个元素都乘以标量 λ
- $n \times m$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 的**转置**是 $m \times n$ 矩阵 $A^{\mathrm{T}} = (b_{ij})$，其中 $b_{ij} = a_{ji}$

矩阵乘法

- 乘法：$n \times m$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 和 $m \times l$ 矩阵 $B = (b_{ij})$ 的乘积为 $n \times l$ 矩阵 $AB = (c_{ik})$
- 其中 $c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

- 单位矩阵 $I_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$
- 对于 $n \times m$ 矩阵 A，$AI_m = I_n A = A$
- （方阵）逆矩阵：$AA^{-1} = A^{-1}A = I$, 不一定有，如果有说 A 可逆

矩阵乘法

- 较快的写法：依次枚举 i,j,k，$c_{ik} \overset{+}{\leftarrow} a_{ij}b_{jk}$，若 $a_{ij}=0$ 可以直接跳过
- 矩阵乘法需要运算满足性质：
- 加法交换律，加法结合律，乘法结合律，乘法分配律
- 所以矩阵的元素甚至可以是矩阵，这样称为分块矩阵
- 常见技巧：用 max 和 $+$ 替代 $+$ 和 $\times$
- 配合快速幂，常用于求解递推
- 针对类型：阶段非常多，每个阶段状态较少，且相邻阶段转移为固定的线性变换

矩阵的运算律

- 加法交换律 $A+B=B+A$
- 加法结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$
- 数乘结合律 $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$
- 数乘分配律 $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A, \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
- **乘法交换律一般不成立**
- 乘法结合律 $(ab)c=a(bc)$
- 乘法分配律 $(a+b)c=ac+bc, a(b+c)=ab+ac$

例题

- 题意已缩略
- 给出一个随机数生成器（如右图所示）
- T 组询问，每组询问给定种子和 n，询问第 n 次生成的值
- $T \le 2 \times 10^5, n \le 10^{18}$, 2s, 256MB

```
unsigned long long seed;
unsigned long long getint() {
        seed ^= seed << 13;
        seed ^= seed >> 17;
        seed ^= seed << 5;
        return seed;
}
```

解

- 把一个 $w = 64$ 位整数看成域 $\mathbb{F}_2$ 下的 w 维向量
- 那么位移、异或都可以看作该向量左乘上一个矩阵
- 因此一次变换就是一个矩阵 A
- 因此若种子为 $\vec{v}$，只需求 $A^n\vec{v}$
- 压位后，矩阵乘法需 $O(w^2)$ 时间，矩阵乘向量需 $O(w)$ 时间
- 由于多组询问，可以预处理 A^{pb^q}，询问时将 n 表示为 b 进制
- 时间复杂度 $O\left((w^2b + Qw)\log_b N\right)$，空间复杂度 $O(w^2b\log_b N)$
- 取 $b = 256$

美食家

NOI2020

- 给一张 n 个点、m 条边的有向图
- 点 i 的权值 c_i 表示得分，边 $\langle u_i, v_i \rangle$ 权值 w_i 表示通过的用时
- 有 k 个加分项，每个加分项形如：在 t_i 时刻若位于点 x_i 加 y_i 分，t_i 两两不同
- 求用时恰好为 T 的一条从 1 出发、到 1 结束的回路，使得途中得分最高
- 或声明不存在如此路径
- $n \le 50, n \le m \le 501, k \le 200, t_i \le T \le 10^9, 1 \le w_i \le 5$
- $1 \le c_i \le 52501, 1 \le y_i \le 10^9$
- $2\text{s}, 512\text{MB}$

解

- 首先注意 $1 \le w_i \le 5$, 可以把一个点拆成 5 个点，分别对应 0~4 刻延迟
- 如果将 max 看作加法、加法看作乘法，转移可以写成矩阵的形式
- 预处理矩阵的 $2^0, 2^1, \ldots$ 次幂，用并用矩阵快速转移两个加分项之间的过程
- 时间复杂度 $O\left(\left((wn)^3 + (wn)^2 k\right) \log T\right)$
- 一看就不太过得去，要不打个表找找规律？
- 一打表，发现直接做就能通过
- 原因：
  1. max 与 + 的矩阵乘法比 + 与 × 并取模的矩阵乘法快；
  2. 考场使用的是新机，运行速度十分快

城市路径问题

BZOJ3583/FJOI2018

- n 个城市，第 i 个城市有 $2k$ 个点权 $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,k}; b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,k})$
- 从城市 u 直接到 v 一共有 $\sum_{i=1}^{k} a_{u,i} b_{v,i}$ 种方案，u 可以等于 v
- m 组询问，询问城市 u 在 d 步内到达城市 v 的方案数，对 $10^9 + 7$ 取模
- $n \le 1000, d < 2^{31}$
- $k \le 20, m \le 50$ 或 $k = 1, m = 100$
- $1\text{s}, 128\text{MB}$

解

- 设转移矩阵 C，则所求为 $I_n + C + \cdots + C^d$ 的第 u 行第 v 列的值
- 我们先看如何求 $I_n + C + \cdots + C^d$，这可以倍增
- 假设已经求出 C^t 和 $I_n + C + \cdots + C^{t-1}$
- 那么 $I_n + C + \cdots + C^{2t-1} = (I_n + C + \cdots + C^{t-1})(I_n + C^t)$
- 当然对 n 阶方阵这么做是过不去
- 注意到题意保证 $C = AB$
- $\vec{u}(AB)^i\vec{v} = (\vec{u}A)(BA)^{i-1}(B\vec{v})$，$BA$ 是 k 阶方阵，再用上述倍增
- 因此单次询问的时间复杂度降为 $O(nk + k^3 \log d)$

Mr. Kitayuta's Gift

CF506E

- 字符集为小写英文字母
- 给出一个字符串 s, 往里添加恰好 n 个字符
- 求能生成的本质不同回文串个数，对 10007 取模
- $|s| \le 200, n \le 10^9$

解

- 记 $m = |s|, N = m + n$
- 记 $f(i, j, k)$ 为长度为 i 的回文串使得 $s[j, k]$ 为其子序列的方案数
- 边界：对于 $j > k, f(i, j, k) = 26^{\lceil \frac{i}{2} \rceil}$
- 边界：对于 $i = 0, f(i, j, k) = [j > k]$; 对于 $i = 1, f(i, j, k) = [j \geq k]$
- 转移：对于 $s_j = s_k, f(i, j, k) = 25f(i-2, j, k) + f(i-2, j+1, k-1)$
- 转移：对于 $s_j \neq s_k, f(i, j, k) = 24f(i-2, j, k) + f(i-2, j+1, k) + f(i-2, j, k-1)$
- 答案：$f(N, 1, m)$
- 时间复杂度：$O(Nm^2)$, 直接矩阵快速幂显然也不行，考虑优化

解

- 将状态看成图，转化为路径计数
- 分 N 的奇偶性讨论，先讨论 N 为偶数的情况
- 点可分为三类：目标点 $(j>k)$, 相等点 $(s_j=s_k)$, 不等点 $(s_j\neq s_k)$
- 先递推出经过恰好 a 个不等点、$b=\left\lceil\frac{m-a}{2}\right\rceil$ 个相等点（不计重数）的路径数
- 建立一张新图：$A_{m-1}\to A_{m-2}\to\cdots\to A_1\to B_1\to B_2\to\cdots\to B_{\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil}, B_i\to C_i$
- 且 A,B,C 分别有 $24,25,26$ 个自环，令 A_0 为 B_1
- 经过恰好 a 个不等点、b 个相等点的路径，就等效于 A_a 到 C_b 的路径
- 用矩阵快速幂算出这些点两两之间长度为 $\frac{N}{2}$ 的路径数

解

- 接下来考虑 N 为奇数的情况
- 和偶数一样做一个长度为 $\left\lceil\frac{N}{2}\right\rceil$ 的路径计数
- 但是最后一步不能从 $(j, j+1)$ $\left(s_j = s_{j+1}\right)$ 直通目标点
- 因此要扣除的路径含有 $m-2b$ 个不等点、b 个相等点，且 $\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor$ 步终于一个相等点
- 所以这等价于 A_{m-2b} 到 B_b 的一条长度为 $\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor$ 的路径
- 时间复杂度 $O(m^3 \log N)$

2. 高斯消元法

2.1 线性方程组

域

- 在集合 F 上定义加减乘除运算：
  - 加法有交换律、结合律，零元素 0, a 的负元素 $-a$
  - 乘法有交换律、结合律，单位元 1, $a \neq 0$ 的乘法逆元 a^{-1}
  - 加法、乘法有分配律
  - 由此定义减法与除法
- 有理数、实数、复数都是域（整数不是）
- OI 中常用的域是 $\mathbb{F}_p$（对于素数 p）
- $\mathbb{F}_p$ 每个元素都是模 p 的一个剩余类，加法、乘法分别为模 p 意义的加法、乘法
- 以下如无说明，标量都在某域 F 下讨论

矩阵的初等变换

- 初等行变换：
  - 交换两行
  - 一行乘上一个非零标量
  - 把一行的若干倍加到另一行上
- 初等列变换类似
- 显然都可逆
- 初等变换对应的**初等矩阵**：单位矩阵经该变换后的结果
- 初等行变换相当于左乘对应初等矩阵，列变换右乘

高斯消元法

- 高斯消元法：通过初等行变换，将矩阵化为行阶梯形
- 高斯-若当消元法：高斯消元后，再反向消元，将矩阵化为行最简形
- 可用于解线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$
- 对**增广矩阵** $(A \quad \vec{b})$ 做初等行变换不影响解
- 所以可以直接高斯-若当消元

例题

- 给定线性方程组 $\begin{cases} w_{11}x_1 + w_{12}x_2 + \cdots + w_{1n}x_n = a_1 \\ w_{21}x_1 + w_{22}x_2 + \cdots + w_{2n}x_n = a_2 \\ \vdots \\ w_{n1}x_1 + w_{n2}x_2 + \cdots + w_{nn}x_n = a_n \end{cases}$
- 预先给定 (w_{ij})
- d 组询问，每组询问给出 (a_i)，求 (x_i)，答案对 p 取模，保证有唯一解
- $d \le 1000, n \le 100, p \le 998244353$
- $1\text{s}, 128\text{MB}$

解

- 直接高斯消元法时间 $O(dn^3)$，过不去
- 考虑把所有询问一块儿做高斯消元法
- 也就是，增广矩阵的右边增至 d 列，全部用来放询问的常数项
- 时间复杂度降至 $O(n^2(n+d))$

game

LOJ6357

- 环上 n 个人逆时针编号 $1, 2, \dots, n$
- 从 1 开始逆时针按照 $1, 2, \dots, k$ 循环报数
- 报到 k 的人有 $\frac{1}{2}$ 概率出局
- 求 1 最后一个出局的概率
- $n \le 2000, k \le 10^9$

解

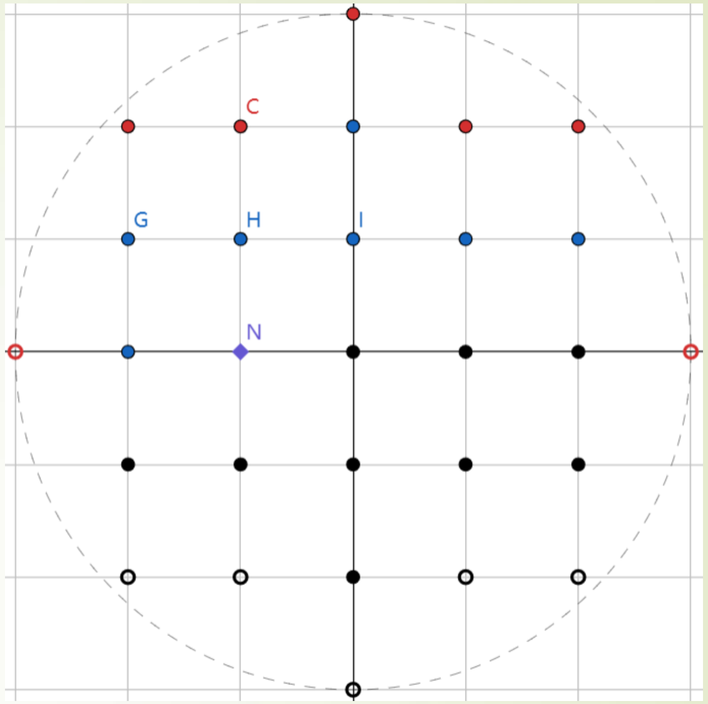
- 为了好看不妨编号全部减去 1
- $f(i,j)$ 表示场上 i 个人，目前报到 k 的是 j 号，最后 0 号幸存的概率
  - 每次有人出局就重新逆时针编号为 $0,1,\dots,i-1$
- 转移：$f(i,j)=\frac{1}{2}[j\neq 0]f\big(i-1,(j+k-1)\bmod (i-1)\big)+\frac{1}{2}f(i,(j+k)\bmod i)$
- 有形式 $F(j)=V(j)+\frac{1}{2}F\big((j+k)\bmod i\big)$
- $j \bmod \gcd(i,k)$ 不同的 j 之间独立，相同的 j 中取一个主元，能线性表示其余所有
- 因此每轮解方程都是 $O(n)$ 的时间
- 总时间复杂度为 $O(n^2)$, 空间 $O(n)$

Circles of Waiting

CF963E

- 平面直角坐标系上有一个醉汉位于原点
- 每一步，他分别有 p_1, p_2, p_3, p_4 概率向西、南、东、北方向走一个单位长度
- 读入方式：给出整数 $1 \le a_i \le 1000, p_i = \frac{a_i}{a_1+a_2+a_3+a_4}$
- 现在给定一个圆 $x^2 + y^2 = R^2$, 求此醉汉期望多少步走到圆外部（不含边界）
- 模 $10^9 + 7$
- $R \le 50, 2s, 256MB$

解



- 记 $f(i,j)$ 为从 (i,j) 出发走到圆外的期望步数
- 边界：对于 $i^2+j^2>R^2, f(i,j)=0$
- 转移：$f(i,j)=\sum_{i=1}^{4} p_i f(i+\Delta x_i, j+\Delta y_i)$
- 没有拓扑序，不能递推
- 不过这是线性方程组，可以用高斯消元法求解，但是时间复杂度 $O(R^6)$, 过不去
- 将每条经线的最北端的期望作为主元，其余点的期望可以用主元线性表示
- 如图：使用主元表示 $f(C), f(G), f(H), f(I)$ 后，利用 H 对应的方程，$f(N)$ 也能被主元表示
- 解每条经线的最南端对应的方程组，这样做，时间复杂度降为 $O(R^3)$

2.2 线性空间、线性映射

线性空间

- 从 n 维行/列向量抽象而来
- 在集合 V 上定义加法和数乘运算
- 满足以下定律的称为线性空间：
  - 加法有交换律、结合律，存在零元素 0、负元素 $-\alpha$
  - 数乘有结合律，$1 \cdot \alpha = \alpha$
  - 加法与数乘有分配律
- V 的每个元素仍称为**向量**

线性相关

- 对于向量集合 $S \subseteq V$, 取 S 中**有限个**向量 $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ 和标量 $k_1, k_2, \ldots, k_n$
- $\sum_{i=1}^{n} k_i \overrightarrow{a_i}$ 是 S 的一个**线性组合**
- 全体线性组合叫做 S 的**线性生成** $\mathrm{span}(S)$
- 如果 $\vec{b} \in \mathrm{span}(S)$, 称 $\vec{b}$ 能被 $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ **线性表示**
- 如果 $\vec{0}$ 的线性表示唯一，称这组向量线性无关，否则称为线性相关
- 线性无关的等价表述：**任意**一个都不能被其它的线性表示

基、坐标、维数

- 两个线性无关向量组 β, γ
- 如果 $|\gamma| < |\beta|$, 总能找到 $x \in \beta$ 使得 γ 不能表示 x（线性拟阵）
- **基**：能生成 V 的一个线性无关向量组
- 基都一样大，如果有限，它的大小叫做**维数** $\dim V$
- 基无穷的情况性质很差，以下如无说明基都是有限的
- 以下考虑的都是有限维线性空间，并给基定一个顺序
- 在一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下，向量 $\vec{v} \in V$ 可以唯一写成 $\sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i$
- （列）向量 $(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^{\mathrm{T}}$ 称为 $\vec{v}$ 在基 ε 下的**坐标**，记作 $[\vec{v}]_\varepsilon$

线性映射的矩阵

- 对于线性空间 V, W, 映射 $\boldsymbol{A}: V \to W$ 是**线性映射**，当且仅当 $\boldsymbol{A}(k\alpha + \beta) = k\boldsymbol{A}\alpha + \boldsymbol{A}\beta$
- 如果 $V = W$ 就说 $\boldsymbol{A}$ 是 V 上的**线性变换**
- 取 V 的一组基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$; W 的一组基 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$
- 如果 $\boldsymbol{A}\beta_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\gamma_i$，那么说 $\boldsymbol{A}$ 在基 β, γ 下的矩阵为 $[\boldsymbol{A}]_\beta^\gamma = \left(a_{ij}\right)$
- 若 $V = W, \beta = \gamma$ 可以省略右上角的 γ
- 也就是将基的第 j 项在映射下的像的坐标竖排放在第 j 列
- 线性映射——矩阵乘列向量：$[\boldsymbol{A}(\vec{v})]_\gamma = [\boldsymbol{A}]_\beta^\gamma [\vec{v}]_\beta$
- 线性映射复合——矩阵乘法：$[\boldsymbol{AB}]_\alpha^\gamma = [\boldsymbol{A}]_\beta^\gamma [\boldsymbol{B}]_\alpha^\beta$

基的变换

- 从一组基 β 换到 β', 考虑同一向量的坐标如何变换
- $[x]_{\beta'} = [\boldsymbol{I}]_{\beta}^{\beta'}[x]_{\beta}$, 也就是只需乘一个**坐标变换矩阵** $Q = [\boldsymbol{I}]_{\beta}^{\beta'}$
- $[\boldsymbol{I}]_{\beta'}^{\beta} = Q^{-1}$
- V 的基从 β 换到 β', W 的基从 γ 换到 γ'（坐标变换矩阵 P）
- 同一线性映射 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵：$[\boldsymbol{A}]_{\beta'}^{\gamma'} = [\boldsymbol{I}_W]_{\gamma}^{\gamma'}[A]_{\beta}^{\gamma}[\boldsymbol{I}_V]_{\beta'}^{\beta} = P[A]_{\beta}^{\gamma}Q^{-1}$
- V 的基从 β 换到 β', $[\boldsymbol{A}]_{\beta'} = Q[\boldsymbol{A}]_{\beta}Q^{-1}$
- 如果存在可逆 Q 使得 $Q^{-1}AQ = B$ 则说方阵 A, B **相似**

求基

- 给定向量组 S, 求出 $\mathrm{span}(S)$ 的一组基
- 最常用的基：高斯消元后去掉所有零向量
- 把整数看作域 $\mathbb{F}_2$ 上的向量，按照从高位到低位的顺序，进行高斯消元
- 不但可以求解一些整数能异或出的数集，还可以比较大小
- 这种变体外号“线性基”

秩

- 向量组 S 的**秩**：$\operatorname{rank}(S) = \dim \operatorname{span}(S)$
- 线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的**秩**：$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \dim \operatorname{Im}(\boldsymbol{A})$
- 矩阵的**秩**：列向量组的秩，或说对应的线性变换的秩
- 初等变换不改变秩，可以将矩阵化为 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 的形式，r 即为秩
- 初等矩阵转置仍初等，因此 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\left(A^{\mathrm{T}}\right)$
- 求秩：高斯消元后非零的行向量数
- 秩的性质：$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - n \le \operatorname{rank}(AB) \le \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$
- 其中 n 表示 A 的宽度、B 的高度

线性方程组的解

- n 元线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$
- 如果 $\operatorname{rank}(A \quad \vec{b}) > \operatorname{rank}(A)$ 无解
- 否则能找到至少一个解 $A\vec{x}^*=\vec{b}$, 余下部分即 $A(\vec{x}-\vec{x}^*)=\vec{0}$
- 现在考虑齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$, 它的解构成线性空间，叫做 A 的**零空间** $\ker(A)$
- 利用高斯消元可知 $\operatorname{rank}(A)+\ker(A)=n$

Odd Subrectangles +

Yahoo Programming Contest 2019 E 加强版

- 给出 $N \times M$ 01矩形
- 求有多少种选取一些行、列的方案，使得这些行列交点的和为奇数
- $N, M \leq 2000, 2s, 1GB$

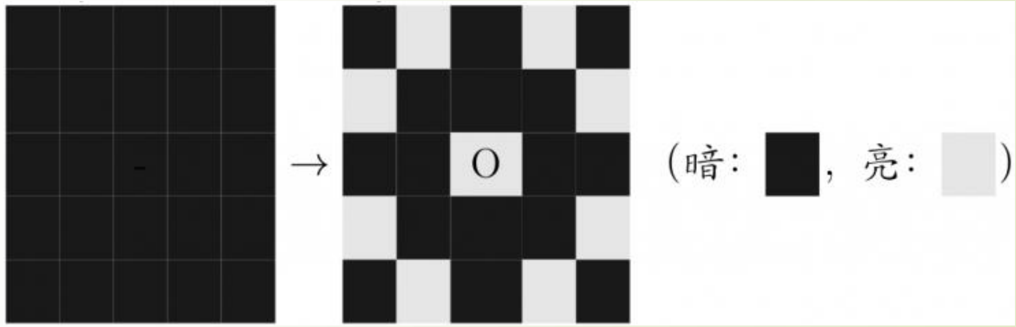
解

- 注意到本题在 $\mathbb{F}_2$ 下可以表述为：求 $\vec{x}^{\mathrm{T}}A\vec{y}=1$ 的解的个数
- 现在假设 A 通过初等变换可以化成 $P\Lambda Q$ 的形式，其中 $\Lambda=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$
- 那么 $\vec{x}^{\mathrm{T}}A\vec{y}=\sum_{i=1}^{r} x_i' y_i'$, 其中 $\vec{x}'=P^{\mathrm{T}}\vec{x}, \vec{y}'=Q\vec{y}$ 与原来的解是一一对应的
- $x_1', x_2', \dots, x_r'$ 肯定至少一个非零，只要不是全零，解的个数就是 2^{M-1}
- 所以解的个数为 $2^{N+M-1}-2^{N+M-r-1}$
- 求秩可以用压位优化

KnightsOut

TC SRM494 Div1

- 一个 $n \times m$ 黑白网格图，一开始全黑，目标全白
- 可以操作一个格子，可以使得它以及与它有日字关系的格子全部反色
- 每个格子至多操作一次，求方案数
- $n, m \le 600$



解

- $\mathbb{F}_2$ 上的 n 元线性方程组 $A\vec{x} = \vec{b}$, 解的个数是 $2^{n-\mathrm{rank}(A)}$
- 本题有 nm 个元，太多了
- 先确定顶上两行和最左一列的操作状态作为主元
- 从上到下、从左到右遍历每一个格子 (r, c)
- 为了满足 $(r-2, c-1)$, 其操作情况已被确定
- 底下两行和最右一列则不会被强制满足，因此需要列出方程
- 所以 $O\left(\frac{(n+m)^3}{\mathrm{w}}\right)$ 就能解决

最大XOR和路径

WC2011

- n 个点、m 条边的带边权无向连通图
- 求图中从 1 点到 n 点的所有路径（不必为简单路径）中边权值异或的最大值
- $n \leq 50000, m \leq 10^5$，边权不超过 10^{18}
- $1s, 500MB$

解

- 求一棵 DFS 树，那么边有树边和返祖边两类
- 对于每条返祖边，只考虑它与树边构成的环
- 1 到 n 的路径，可以通过树上 1 到 n 的简单路径异或上若干个这种环表示
- 因此只需要求这些环的权值的线性基
- 从高到低依次检查每个为 0 的位，查询线性基基得出这位能否翻转
- 时间复杂度 $O(nw)$

Chiori and Doll Picking (easy version)

CF1336E1

- 给定正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，保证 $a_i < 2^m$
- 任取其中若干个，算出异或和（可以不取，此时异或和为 0）
- 对于 $c = 0, 1, \ldots, m$ 求有多少种取法使得异或和恰有 c 位为 1
- 两种取法不同当且仅当取的下标不同
- 答案对 998 244 353 取模
- $n \leq 2 \times 10^5, m \leq 35$
- 3s，512MB

解

- 仍然把整数看作域 $\mathbb{F}_2$ 上的 m 维向量，求出一组基，设基的大小为 k
- 凡能够被基线性表示的整数均有恰好 2^{n-k} 种表示法，因为其余的可以任取
- 所以只需在基上做原问题
- $k \le \frac{m}{2}$ 时可以直接搜索，考虑 $k > \frac{m}{2}$ 的情况
- 求基时可使用高斯-若当消元
- 交换两列不影响答案，所以不妨设主元占据最后 k 列
- 于是可以作计数递推：
- $f(i,j,S)$ 表示在基的前 i 个向量中取 j 个，使得非主元和为 S 的方案数
- 时间复杂度 $O\left(k^2 2^{m-k}\right)$，空间复杂度 $O\left(k 2^{m-k}\right)$

2.3 行列式

行列式

- $n \times n$ 标量表 $|a_{ij}|$ 称为 n 阶行列式
- 用于衡量高维空间的“有向体积”：
  - 单位化：$|I_n| = 1$
  - 列线性：$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots ka_{i1} + la'_{i1} \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots ka_{in} + la'_{in} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots a_{i1} \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots a_{in} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + l \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots a'_{i1} \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots a'_{in} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$
  - 反对称：交换两列，绝对值不变、符号相反
- $|a_{ij}| = \sum_{(p_1 p_2 \dots p_n)} (-1)^{t(p)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,p_i}$
- 其中 $(p_1 p_2 \dots p_n)$ 遍历所有 $(1, 2, \dots, n)$ 的排列，$t(p)$ 是 p 的逆序数
- n 阶方阵 A 的行列式记作 $|A|$ 或 $\det A$

行列式的展开

- 对于 n 阶行列式 $A = |a_{ij}|$
- 划去其第 i 行和第 j 列，余下的就是**余子式** M_{ij}
- **代数余子式** $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
- 按行展开公式：$\forall 1 \le i \le n, A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$
- 按列展开公式同理
- 上/下三角矩阵的行列式为对角线的积

求行列式

- 两列相等，值为 0
- 一列翻 k 倍加到另一列上，值不变
- 综上，初等列变换对行列式的影响：
  - 交换两列，变号
  - 一列乘以 $k \neq 0$，行列式也乘以 k
  - 一列加上另一列的 k 倍，不变
- 即乘以对应初等矩阵的行列式
- 按照上述过程高斯消元，直到变为下三角矩阵

行列式的性质

- 如果下三角矩阵对角线上有 0, 行列式为 0; 不然可以高斯-若当消元成单位阵
- 即：方阵满秩等价于行列式非 0
- 满秩方阵可以写成初等矩阵的乘积，行列式也是这些初等矩阵的行列式之积
- 注意到初等矩阵转置后行列式不变，于是 $|A^{\mathrm{T}}| = |A|$
- 因此上述所有对列成立的内容对行也成立，可以按照行高斯消元了
- 当 A, B 都满秩时，AB 是构成它们的初等矩阵的乘积，所以 $|AB| = |A||B|$
- 有一个不满秩时，AB 也不满秩，所以仍然有 $|AB| = |A||B| = 0$

例题

- 给定一个 1 到 n 的排列 q 和一个序列 h
- 定义一个 1 到 n 的排列 p 的值为

$$v(p)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\left([p_i\ge p_j]+[p_i+h_i\ge q_j]\right)$$

- 求有多少个 1 到 n 的排列 p 使得 $v(p)$ 为偶数
- 对 998244353 取模
- $n\le 300$

解

- 答案为 $\frac{n!+\sum_p(-1)^{v(p)}}{2}$
- 定睛一看，$\sum_p(-1)^{v(p)} = \sum_p(-1)^{t(p)}\prod_{i=1}^n a_{i,p_i} = \det\left(a_{ij}\right)$
- 其中 $a_{ij} = (-1)^{\sum_{j=i+1}^n [j+h_i \geq q_j]}$

例题

- 一张 $n = 2^m$ 个点的有向完全图
- 任意两点 i, j 之间的有向边 $i \to j$ 的边权是 $w_{(i-j) \bmod n}$
- 求这张图的所有生成内向森林的边权乘积之和
- $m \le 20$, 模 998244353

解

- 根据矩阵–树定理，答案可以写成行列式 $\det A$
- 其中 A 的 (i,j) 元素为 $\begin{cases} 1+\sum_{k=1}^{n-1} w_k\,, i=j \\ -w_{(i-j) \bmod n}, i\neq j \end{cases}$
- 令 $f(x)=1+\sum_{k=1}^{n-1} w_k-\sum_{k=1}^{n-1} w_{n-k}x^k$
- 令 V 的 (i,j) 元素为 ω_n^{ij}, 那么 $|V|=\prod_{0\le i<j<n}\left(\omega^j-\omega^i\right)\neq 0$
- 可得 AV 的 (i,k) 元素为 $\omega_n^{ik} f\left(\omega_n^k\right)$, 所以 $|AV|=|V|\prod_{k=0}^{n-1} f\left(\omega_n^k\right)$
- 所以 $|A|=\frac{|AV|}{|V|}=\prod_{k=0}^{n-1} f\left(\omega_n^k\right)$
- 用 FFT 求值，时间复杂度 $O(m\cdot 2^m)$, 空间复杂度 $O(2^m)$

交点路径

NOI2021

- k 层分层图，第 i 层有 n_i 个顶点，$n_1 = n_k$
- 第 i 层发出的边只能前往第 $i + 1$ 层
- 要求第 1 层每个点发出一条路径到第 n 层，其间无公共点
- 如果第 $i, i + 1$ 层之间有两条边 $(a, b), (c, d)$ 满足 $a < c, b > d$ 则说它们交叉
- 一种方案交叉的次数是偶数贡献 1, 奇数贡献 -1
- 模 998244353 输出
- $k \leq 100, n_i \leq 100, 1s, 1GB$

解

- 当 $k=2$ 时答案是邻接矩阵的行列式
- 考虑加一个中间层
- 如果路径有公共点，形如 AXP, BXQ, 那么同时也有 AXQ, BXP, 贡献一正一负抵消
  - 因此不用管公共点的问题
- 如果路径有交点，只要端点是顺序的就是偶数次，端点是逆序的就是奇数次
  - 因此也不用管中间交点的问题
- 把所有矩阵乘起来行列式

矩阵-树定理

- 设 n 个点的有向图中，从 i 到 j 有 W_{ij} 条边
- 从图中取一棵以 r 为根的生成内向树
- 设 u 的出度为 d_u, 度数矩阵 $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$
- 方案数为矩阵 $L = D - W$ 去掉第 r 行第 r 列的行列式
  - 除了第 r 个点都有一条出边，初始可任意连，但可能有环
  - 容斥环的集合，在环上的下一个点记为 p, 如果不在环上记为自己
  - 排列 p 的环数与 $n - t(p)$ 奇偶性相同
  - 因此每条边取 -1 系数，然后排列再乘以系数 $(-1)^{t(p)}$ 就得到容斥系数

2.4 逆矩阵

逆矩阵

- 对于 n 阶方阵 A，其**逆矩阵**是一个 n 阶方阵 A^{-1}，满足 $AA^{-1} = I_n$
- 如果可逆，那么逆矩阵唯一，且 $A^{-1}A = I_n$
- 可逆等价于满秩，等价于 $|A| \neq 0$
- 作分块矩阵 $(A \quad I_n)$
- 用高斯-若当消元法将左边化为 I_n
- 此时右边为 A^{-1}

伴随矩阵

- n 阶方阵 A
- 设 M_{ij} 为 A 删除第 i 行与第 j 列后的行列式
- 设 $A_{ij}^* = (-1)^{i+j} M_{ji}$
- 利用行列式的展开可得：$AA^* = |A|I$
- 所以 $|A| \neq 0$ 时有 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$
- 通常用逆矩阵求伴随矩阵，特别简单的矩阵则可能反之

伴随矩阵

- 当 $|A| = 0$ 时，如何求伴随矩阵？
- 当 $\operatorname{rank}(A) = n - 2$ 时，伴随矩阵就是 O
- 当 $\operatorname{rank}(A) = n - 1$ 时，由于 $\operatorname{rank}(AA^*) = 0, \operatorname{rank}(A^*) = 1$
- 因此 $A^* = \vec{p}\vec{q}^{\mathrm{T}}, \vec{p}, \vec{q} \neq \vec{0}$
- 代入 $AA^* = O$, 有 $A\vec{p}\vec{q}^{\mathrm{T}} = O$, 必然 $A\vec{p} = \vec{0}$, 同理 $A^{\mathrm{T}}\vec{q} = \vec{0}$
- 这样解出来的 $\vec{p}, \vec{q}$ 会差一个常数，找一处 $p_r, q_c \neq 0$ 计算 A_{rc}^* 就好
- 都是高斯消元，$O(n^3)$ 时间

子序列 +

LOJ6074（加强版）

- 给出长度为 n, 字符集为 Σ 的字符串 s
- q 个询问，每次询问 $s[l:r]$ 的本质不同子序列数
- 答案模 10^9+7
- $1 \le n, q \le 10^6, |\Sigma| \le 26, 1\mathrm{s}, 512\mathrm{MB}$

解

- 以下不妨设 $\Sigma = \{1, 2, \dots, |\Sigma|\}$
- 建立原串的序列自动机，设状态编号从 0 到 n
- 询问 $[l{:}r]$ 相当于求从 l 出发，编号在 $[l, r]$ 中的点形成的DAG路径条数
- 对于这样一条路径，取 $i \ge l$, 将结点 i 以后的部分截断，作线头DP
- 路径要么全在 i 左侧，要么有一条字符为 j 的边被截，前者我们说 $j = |\Sigma| + 1$
- 针对上述 l, i, j 记 $g_l(i, j)$ 表示本质不同的截线左侧的部分的方案数
- 那么可列出转移方程为：
- $g_l(l, 1..|\Sigma|) = 1,\ g_l(i, j) = g_l(i-1, j) + [j \ne s_{i-1}] g_l(i-1, s_{i-1})$
- 把它写成矩阵形式，可得 $\vec{G}_l(i) = A_{r-1} A_{r-2} \cdots A_l \vec{u}$

解

- 注意到 $|A_i| = 1 \neq 0$, 所以可设 $P_r = A_{r-1}A_{r-2}\cdots A_0$, $\vec{G}_l(i) = P_r P_l^{-1}\vec{u}$
- 现在我们需要 $\vec{v}^{\mathrm{T}}\vec{G}_l(r) = \vec{v}^{\mathrm{T}}P_r P_l^{-1}\vec{u}$, 因此若能维护 $\vec{v}^{\mathrm{T}}P_r$ 与 $P_l^{-1}\vec{u}$, 问题得解
- 注意到这些矩阵形式简单，易于维护
- 对于矩阵 M, $A_i M$ 就是将 M 的第 $j \neq s_i$ 行都加上第 s_i 行
- 可以对于每一列都维护一个整体加的标记
- 对应地 MA_i^{-1} 就是将 M 的第 s_i 列减去所有 $j \neq s_i$ 列之和
- 可以对于每一行都维护一个和
- 时间复杂度 $O\big((n+q)|\Sigma|\big)$, 空间复杂度 $O(n|\Sigma|)$.

作业题

统一省选2020A

- 给出 n 个点、m 条边的简单无向图，有边权 w_i
- 定义生成树的权值为边权的和乘以边权的最大公约数
- 求所有生成树的权值和，模 998244353
- $n \leq 30, 1 \leq w_i \leq 152501, 3s, 512MB$

解

- 设权值被 d 整除的边构成的所有生成树的边权总和为 $f(d)$
- 则答案为 $\sum_d f(d)\varphi(d)$, 问题转化为求生成树的边权总和
- 枚举一条边 (a,b) 求它在多少个生成树中出现
- 不妨以 1 为根，L 先去掉第一行第一列
- 讨论 a,b 哪个距离 1 更近，以 a 更近为例
- 相当于将 b 的所有出边除了到 a 的都删除，也就是将 b 的那行改为 $\vec{e}_b - \vec{e}_a$
- 展开，只要分别求删除第 b 行第 b 列与删除第 b 行第 a 列的行列式
- 求出伴随矩阵即可
- 注意总方案数为 0 可能是因为是模数的倍数，不一定是无解