博弈论讲选题杂

AFewSuns

2025 年 7 月 25 日

题目较为简单，大致按难度顺序排序。

看题目已经秒的同学可以随机游荡。

可能（?）有披着博弈衣服的 dp 题混了进去。小问题。

博弈论要讲什么	形式保守	形式中立	形式自由
内容保守	Nim 公平组合游戏	递推 SG 函数	Surreal Number
内容中立	围棋	狼人杀	贪心也是博弈
内容自由	hide and seek	在 QQ 群里对线也是博弈	

P7589 黑白棋

Statement

有 n 个独立的坐标轴，Alice 和 Bob 在坐标轴上玩游戏。

起初 Alice 在第 i 个坐标轴上的 a_i 处放置一枚黑棋，Bob 在第 i 个坐标轴上的 b_i 处放置一枚白棋，a_i, b_i 均为整数且不相同。

接下来每个玩家（Alice 先手）可以轮流操控自己的棋子往对方的棋子方向走任意正整数格，需保证自己棋子不与对方重合或超过对方；或者操控自己的棋子往远离对方的棋子方向走任意正整数格，但每个人此类操作不能超过 k 次。

不能操作者输，问谁获胜。

$1 \le n \le 10^6, |a_i|, |b_i| \le 10^9$。

假如没有远离操作，那么可以看作有 n 堆大小为 $|b_i - a_i| - 1$ 的石子，是标准的 Nim 游戏。

假如有远离操作，那么自己在操作棋子远离后对方可以前进同样的距离以实现抵消，而后退的操作是有限的，所以胜方总能保证自己获胜。

P2575 高手过招

Statement

有一个 $n \times 20$ 的棋盘，有些格子上有棋子。Alice 和 Bob 能轮流操作。

对于一个棋子，能将它向右移动一格，如果右边有棋子，则向右跳到第一个空格，如果右边没有空格，则不能移动这个棋子，如果所有棋子都不能移动，那么将输掉这场比赛。

$1 \le n \le 10^6$。

显然每一行都是独立的。将棋子所在的格子看作 1，其余格子看作 0，然后考虑每个 0 前面的 1 连续段长度。

设这一行所有 1 连续段长度从左到右为 $a_1, \cdots, a_m$，不难发现一次操作相当于将 a_i 移一个值到 a_{i-1}。于是就变成了经典的阶梯 Nim 问题。

loj6364 烂柯

Statement

有一棵 n 个点的树，每个节点上有 a_i 个柿子。Alice 和 Bob 两人轮流操作（Alice 先手），操作分为如下两种：

1. 选择某个节点，将这个节点上的至少一个柿子推到相邻节点，且对每个柿子来说不能走回头路；

2. 选择一个到节点 k 距离为奇数且度数为 1 的点，丢掉上面的至少一个柿子。

不能操作者输。k 为定值，问谁获胜。

$1 \le n \le 10^6, 0 \le a_i \le 10^9$。

经典阶梯 Nim 问题，是不过放到了树上。

把 k 当作根，答案就是所有距离 k 为奇数的点的权值异或和。

P13114 Bacterial Tactics

Statement

Alice 和 Bob 是微生物学家。现在有一个 $n \times m$ 的网格，其中有一些格子上有抗生素。两人要在网格上面放置细菌。

两人轮流操作，每次可以选择一个空的格子（没有细菌和抗生素）放置细菌，并选定一个方向（横着或竖着）让细菌不断延伸，直到碰到了其他细菌或抗生素或网格边界。

当碰到了抗生素时该玩家输掉游戏。当无法操作时该玩家输掉游戏。问谁获胜。

多测，$t \leq 100, 1 \leq n, m \leq 15$。

数据范围非常小，考虑直接 dp。

设 f_{x_1,y_1,x_2,y_2} 表示左上角为 (x_1, y_1)，右下角为 (x_2, y_2) 的矩阵的 SG 值，每次枚举当前先手要删掉哪一行或哪一列。预处理每个格子上下左右碰到的第一个抗生素位置，然后就可以快速判断合法性并做到 $\mathcal{O}(n+m)$ 转移。

时间复杂度 $\mathcal{O}(tn^2m^2(n+m))$。

有一棵 n 个点 $n-1$ 条边的树，第 i 个点上有 a_i 枚金币，Alice 和 Bob 在树上面玩游戏，规则如下：

1. Alice 先选择一个起点，然后 Bob 再选择一个起点；

2. 之后双方轮流操作（Alice 先手），先拿走自己所在节点上的金币（如果之前已被拿走则为 0 金币），再沿着一条边走到相邻的节点，**且这条边没被任何一个玩家走过**。当一方无法操作时跳过该玩家；当双方都无法操作时游戏结束。

3. 最后每个人的得分为自己获得的金币数减去对手获得的金币数。双方都想最大化自己得分，求 Alice（先手）得分。

$2 \leq n \leq 2000, 0 \leq a_i \leq 10^9$。

当 $n=2$ 时，答案为 $|a_1-a_2|$。

P13263 Willow

Solution

当 $n = 2$ 时，答案为 $|a_1 - a_2|$。

当 $n \geq 3$ 时，考虑枚举双方选择的第一条**边**：$(u_1 \to v_1)$ 和 $(u_2 \to v_2)$，然后分类讨论：

当 $n = 2$ 时，答案为 $|a_1 - a_2|$。

当 $n \geq 3$ 时，考虑枚举双方选择的第一条**边**：$(u_1 \to v_1)$ 和 $(u_2 \to v_2)$，然后分类讨论：

1. 两条边背向

那么之后双方互不影响，必走子树内金币最多的链。

当 $n = 2$ 时，答案为 $|a_1 - a_2|$。

当 $n \geq 3$ 时，考虑枚举双方选择的第一条**边**：$(u_1 \to v_1)$ 和 $(u_2 \to v_2)$，然后分类讨论：

1. 两条边背向

那么之后双方互不影响，必走子树内金币最多的链。

2. 两条边同向

不妨假设方向为 $u_1 \to v_1 \rightsquigarrow u_2 \to v_2$，那么后手自己独立，先手只有不走到后手子树的限制，枚举 $u_2 \to v_2$ 这条边进行预处理。

3. 两条边相向

比较麻烦。先考虑两条边中间隔了 >1 条边的情况。假设拿出来的链为 $u_1 \to v_1 \to w_1 \cdots w_2 \leftarrow v_2 \leftarrow u_2$，然后考虑先手下一条边走哪。

如果不是 $v_1 \to w_1$，那么此时就变成了子问题 $(u_2 \to v_2, v_1 \to w')$ 且两条边同向，这时原来的先手自己独立，必走子树内金币最多的链，w' 唯一。

如果是 $v_1 \to w_1$，那么就变成了子问题 $(u_2 \to v_2, v_1 \to w_1)$，虽然两条边仍然相向，但距离缩短，可以递推。

而两条边相邻或相隔 1 条边的情况与上面类似，不再赘述。

Alice 和 Bob 在玩字符串游戏。

初始两人只有一个字符串。每次操作可以选择一个字符串和其中的一个字符，删除该字符串内的所有该字符，并将删除后剩下的字符串重新加入游戏。Alice 先手，无法操作者判负。

现在给定字符串 s 和 q 次询问，每次询问给定 l, r，表示两人玩游戏的初始字符串为 $s_{l\sim r}$。请你判断每局游戏谁会获胜。

$1 \le |s|, q \le 10^5, |\Sigma| \le 26$。

暴力：设 $f_{l,r}$ 表示 $s_{l\sim r}$ 的 SG 值，每次枚举删除的字符后转移，时间复杂度 $\mathcal{O}(n^3)$（$n=|s|$）。

暴力：设 $f_{l,r}$ 表示 $s_{l\sim r}$ 的 SG 值，每次枚举删除的字符后转移，时间复杂度 $\mathcal{O}(n^3)$（$n=|s|$）。

但是可以发现有用的区间其实很少。考虑删除一个字符，那么中间剩下的串都满足两边是同一个字符（我们称其为一般串），只有两边的串不是（我们称其为特殊串）。

一般串的个数显然是 $\mathcal{O}(n)$ 个的，而特殊串肯定是一般串的前缀或后缀，所以是 $\mathcal{O}(n|\Sigma|)$ 个的。

CF1037G A Game on Strings

Solution

我们把两边相同字符一样的一般串放到一类。由于同一类的一般串互不相交，所以它们加起来最多会被转移 $\mathcal{O}(n|\Sigma|)$ 次。

我们再把是同一类一般串的前缀后缀的特殊串分为一类。不难发现同一类的特殊串可以被分为 $|\Sigma|$ 组互不相交的串，每组串加起来最多被 $\mathcal{O}(n)$ 个一般串转移，每个串最多被 $\mathcal{O}(|\Sigma|)$ 个特殊串转移。

所以记忆化后的预处理时间复杂度为 $\mathcal{O}(n|\Sigma|^2)$。

我们把两边相同字符一样的一般串放到一类。由于同一类的一般串互不相交，所以它们加起来最多会被转移 $\mathcal{O}(n|\Sigma|)$ 次。

我们再把是同一类一般串的前缀后缀的特殊串分为一类。不难发现同一类的特殊串可以被分为 $|\Sigma|$ 组互不相交的串，每组串加起来最多被 $\mathcal{O}(n)$ 个一般串转移，每个串最多被 $\mathcal{O}(|\Sigma|)$ 个特殊串转移。

所以记忆化后的预处理时间复杂度为 $\mathcal{O}(n|\Sigma|^2)$。

对于询问，可以预处理每类一般串的前缀异或和做到快速求区间异或，而两边的特殊串最多被递归 $\mathcal{O}(|\Sigma|)$ 次，所以询问复杂度为 $\mathcal{O}(q|\Sigma|)$。

给定 n 个格子，第 i 个格子有颜色红色或蓝色。

先手可以选择两个相邻的格子满足至少一个格子为红色，然后将这两个格子染成白色；后手可以选择两个相邻的格子满足至少一个格子为蓝色，然后将这两个格子染成白色。

无法进行操作的输，求先手还是后手必胜。

$2 \le n \le 5 \times 10^5$。

设红色为 R，蓝色为 B，白色为 W。

以先手的角度来看，能操作的格子种类只有 RR，RW，RB 这三种，后手同理。

假设没有 RB，那么先后手操作独立，且每个人肯定会选择 RW 而非 RR，此时答案只与 R 和 B 的数量有关。如果 R 和 B 的数量不同，那么多的那一方获胜，否则先手获胜。

现在加上 RB，那么每个人都会优先去操作 RB，因为这样可以让对方也减少数量。同时注意到若初始的 R，B 数量不同，那么胜负已定。

于是现在 R，B 数量相同，且变成了另一个问题：先后手每次操作 RB，无法操作的人赢。

将所有的 RBRBRB…… 交错连续段拿出来，每一段独立，且操作一次 RB 将会使一段分裂成两段。

设 f_i 表示长度为 i 的连续段的 SG 值，那么有转移 $f_i = \text{mex}_{j+k=i-2}\{f_j \oplus f_k\}$。打表发现其有长度为 34 的周期，然后做完了。

给定 n 对照片，Alice 与 Bob 轮流取照片，每对照片只有取了第一张才能取第二张。

同时每对照片有四个权值 a_1, b_1, a_2, b_2，分别表示第一张照片对 Alice 与 Bob 的价值与第二张照片对两人的价值。

两人都以最优策略行动，且每回合可取可不取，两人都不取游戏结束。两人都希望自己的价值与对方价值之差最大，求 Alice 能得到的价值与 Bob 能得到的价值的差的最大值。

$1 \le n \le 10^5$。

对同一对照片分类讨论。

1. $a_1 + b_1 \geq a_2 + b_2$

此时有 $a_1 - b_2 \geq a_2 - b_1$ 和 $b_1 - a_2 \geq b_2 - a_1$，可以发现两人都是选第一张照片最优。

对同一对照片分类讨论。

1. $a_1 + b_1 \geq a_2 + b_2$

此时有 $a_1 - b_2 \geq a_2 - b_1$ 和 $b_1 - a_2 \geq b_2 - a_1$，可以发现两人都是选第一张照片最优。

2. $a_1 + b_1 < a_2 + b_2$ 且 $a_1 > b_2$

此时有 $a_1 - b_2 < a_2 - b_1$ 和 $b_1 - a_2 < b_2 - a_1$，两人都不想选第一张。但是 $a_1 - b_2 > 0$ 而 $b_1 - a_2 < 0$，说明最后 Alice 还是会选走第一张（不要白不要）。于是有固定贡献 $a_1 - b_2$。

CF725F Family Photos

Solution

对同一对照片分类讨论。

1. $a_1 + b_1 \geq a_2 + b_2$

此时有 $a_1 - b_2 \geq a_2 - b_1$ 和 $b_1 - a_2 \geq b_2 - a_1$，可以发现两人都是选第一张照片最优。

2. $a_1 + b_1 < a_2 + b_2$ 且 $a_1 > b_2$

此时有 $a_1 - b_2 < a_2 - b_1$ 和 $b_1 - a_2 < b_2 - a_1$，两人都不想选第一张。但是 $a_1 - b_2 > 0$ 而 $b_1 - a_2 < 0$，说明最后 Alice 还是会选走第一张（不要白不要）。于是有固定贡献 $a_1 - b_2$。

3. $a_1 + b_1 < a_2 + b_2$ 且 $b_1 > a_2$

与 2 类似，有固定贡献 $a_2 - b_1$。

4. $a_1 + b_1 < a_2 + b_2$ 且 $a_1 \le b_2, b_1 \le a_2$

这时 $a_1 - b_2$ 与 $b_1 - a_2$ 均 < 0，两人必定不会选，直接扔掉。

于是只剩下第一类照片，Alice 选的时候 ** 对答案 ** 贡献为 $a_1 - b_2$，Bob 选的时候**对答案**贡献为 $a_2 - b_1$。

考虑先在全局加上 $\frac{a_i - b_i}{2}$，然后将一张照片的价值定义为 $\frac{a_i + b_i}{2}$，Alice 选的时候就加上价值，Bob 选的时候就减去价值。这样刚好符合贡献。

由于 $a_1 + b_1 \ge a_2 + b_2$，所以第一张照片肯定在第二张前面被选，从大到小按价值排序即可。

AGC010D Decrementing

Statement

给定大小为 n 的正整数数列 $\{a_i\}$，初始所有数的最大公因数为 1。

现在 Alice 和 Bob 轮流操作，每次可以将数列中一个 >1 的数减 1，然后所有数除于所有数的最大公因数。不能操作者输。问先后手谁赢。

$1 \le n \le 10^5, 1 \le a_i \le 10^9$。

考虑如果数列里已经有 1 了，那么所有数将不再被除，只剩下了减 1 的影响，计算 $\sum a_i - 1$ 的奇偶性即可。

这启发我们关注每个数的奇偶性。每次操作减 1 都会固定改变奇偶性，而除 gcd 则只有 gcd 为偶数时才可能改变奇偶性。

站在先手的角度看，如果初始的 $\sum a_i - 1$ 为奇数，那么我们占优势，应该想尽办法不让 gcd 为偶数，即 $\{a_i\}$ 中有奇数。

注意到初始 $\{a_i\}$ 至少有一个奇数，于是先手就可以不断让一个偶数减一得到至少两个奇数（如果没有偶数那就更好了），这样后手无论如何操作都无法做到全为偶数，此时先手必胜。

AGC010D Decrementing

Solution

站在先手的角度看，如果初始的 $\sum a_i - 1$ 为奇数，那么我们占优势，应该想尽办法不让 gcd 为偶数，即 $\{a_i\}$ 中有奇数。

注意到初始 $\{a_i\}$ 至少有一个奇数，于是先手就可以不断让一个偶数减一得到至少两个奇数（如果没有偶数那就更好了），这样后手无论如何操作都无法做到全为偶数，此时先手必胜。

如果初始的 $\sum a_i - 1$ 为偶数，那么我们占劣势，后手很有可能按照上面的策略让我们输掉，所以需要把握好先手的第一步优势。

由上面可知先手翻盘的唯一机会在于让 gcd 为偶数，即 $\{a_i\}$ 均为偶数，而初始 $\{a_i\}$ 至少有一个奇数。所以只有当 $\{a_i\}$ 只有一个奇数时，先手可以将其减一，让所有数同时除以一个偶数，从而可能翻盘。当 $\{a_i\}$ 有超过一个奇数时先手必败。

站在先手的角度看，如果初始的 $\sum a_i - 1$ 为奇数，那么我们占优势，应该想尽办法不让 gcd 为偶数，即 $\{a_i\}$ 中有奇数。

注意到初始 $\{a_i\}$ 至少有一个奇数，于是先手就可以不断让一个偶数减一得到至少两个奇数（如果没有偶数那就更好了），这样后手无论如何操作都无法做到全为偶数，此时先手必胜。

如果初始的 $\sum a_i - 1$ 为偶数，那么我们占劣势，后手很有可能按照上面的策略让我们输掉，所以需要把握好先手的第一步优势。

由上面可知先手翻盘的唯一机会在于让 gcd 为偶数，即 $\{a_i\}$ 均为偶数，而初始 $\{a_i\}$ 至少有一个奇数。所以只有当 $\{a_i\}$ 只有一个奇数时，先手可以将其减一，让所有数同时除以一个偶数，从而可能翻盘。当 $\{a_i\}$ 有超过一个奇数时先手必败。

模拟即可。模拟过程最多除以 $\log V$ 次，算上求 gcd 的复杂度就是 $\mathcal{O}(n\log^2 V)$。

给定一张 n 个点 m 条边的有向图，初始所有点有非负点权 a_i。

Alice 和 Bob 轮流操作（Alice 先手），操作如下：

- 选择一个节点 u 满足 $a_u > 0$，然后将 a_u **减小**到某个非负值（不能相等）；
- 然后将所有存在边 $u \to v$ 的点 v，任意修改其点权。

不能操作者输。保证不能无限操作。问谁获胜。

$1 \le n \le 2 \times 10^5, 0 \le m \le 2 \times 10^5$。

图退化成链的时候和阶梯 Nim 有点像，但又不完全一样，受其启发我们可以去关注奇数和偶数位置的异或和。

虽然有后继任意修改的存在，但是当前节点的 a 值必须改变，所以无论怎么操作，奇数和偶数位置的异或和总有一个会改变。

假如当前两个异或和均为 0，那么先手操作一步总会有一个变为非 0，而后手完全可以再让两个异或和变为全 0。

最终的状态肯定是所有 $a_i = 0$，也就是两个异或和均为 0，所以此时先手必败。

而假如其中有异或和为非 0，那么先手同样可以操作一步使两个值均为 0，此时先手必胜。

考虑非链的情况。

观察到上面博弈的核心在于给节点分组，并保证存在策略使得操作一步让所有组异或和为 0。

那么设 b_i 表示节点 i 的分组，并令 $b_u = \mathrm{mex}_{(u,v)\in E}\, b_v$。假设此时选择最大的异或和非 0 的组为 x，那么 x 组的任意节点的后继都有 $0 \sim x-1$，可以通过操作任意修改 $0 \sim x-1$ 组的异或和。

这个性质与上面相符，于是先手必败当且仅当所有组异或和为 0，其余情况必胜。

Alice 和 Bob 正在玩游戏。一开始 Alice 手中有一个正整数集 S，Bob 手中有一个正整数集 T，两人轮流操作（Alice 先手）：

从手中集合选择两个不同的数 x, y，且 $|x-y|$ 不属于对方的集合，然后将 $|x-y|$ 加入对方的数集里。无法操作者输。

现在两人给你了一个正整数集 R，他们想知道如果两人初始的集合均从其中的 $2^{|R|}$ 个子集中等概率选择，Alice 有多少种情况下能赢。答案对 998244353 取模。

$1 \le |R| \le 20000, \forall x \in R, 1 \le x \le 20000$。

P9537 Qingshan and Daniel 2

Solution

注意到双方各操作一次后会使两个集合大小都加一。

1. $|S|>|T|+1$

此时 S 集合至少能凑出 $|T|+1$ 个不同的差，永远可以操作，先手必胜。

2. $|S|<|T|$

此时先手操作一步后变为上面的情况，后手必胜。

3. 特殊情况

上述观察告诉我们集合更大的人更容易获胜，但存在一个反例：

$S=\{a,a+d,a+2d,\cdots,a+(n-1)d\}, T=\{d,2d,\cdots,(n-1)d\}$

此时 $|S|=n,|T|=n-1$，但先手无法操作。考虑如何判断这种情况。

首先如果初始集合就长这样那肯定后手必胜。

否则 S 集合至少有一个数由 T 作差得到，于是 $d \mid a$。不妨设 $a = td$:

$S = \{td, (t+1)d, \cdots, (t+n-1)d\}, T = \{d, 2d, \cdots, (n-1)d\}$

当 $t > 1$ 时，两个集合可以规划到

$S = \{d, 2d, \cdots, (t+n-1)d\}, T = \{d, 2d, \cdots, (t+n-2)d\}$

的特殊情况当中，所以下面只需考虑 $t = 1$。

- $t=1$

$S=\{d,2d,\cdots,nd\},T=\{d,2d,\cdots,(n-1)d\}$

由于 T 内元素作差只能得到 $d\sim(n-2)d$，所以 $(n-1)d$ 和 nd 必须一开始就在 S 当中；同时初始 S,T 中的数均为 d 的倍数，且需保证 T 中的数不能超过 $(n-1)d$。

容易发现这就是充要条件。这是 $|S|=|T|+1$ 的特殊情况。

- $t = 1$

$S = \{d, 2d, \cdots, nd\}, T = \{d, 2d, \cdots, (n-1)d\}$

由于 T 内元素作差只能得到 $d \sim (n-2)d$，所以 $(n-1)d$ 和 nd 必须一开始就在 S 当中；同时初始 S, T 中的数均为 d 的倍数，且需保证 T 中的数不能超过 $(n-1)d$。

容易发现这就是充要条件。这是 $|S| = |T| + 1$ 的特殊情况。

$|S| = |T|$ 的特殊情况同理。考虑第一步操作，因为 S 内元素作差只能得到 $d \sim (n-2)d$，不会影响 T 的判定，所以充要条件与上面一模一样。

实现可以枚举 d 之后 bitset 优化，不细讲。

给定 n 个点 m 条边的简单无向图，且初始不包含奇环。

接下来 Alice 和 Bob 轮流进行如下操作（Alice 先手）：

在图中添加一条无向边 (i,j)，满足 $1 \le i < j \le n$ 且之前不包含在图中，需要保证添加完后图仍然不包含奇环。无法操作者输。

请问谁能获胜。

$1 \le n \le 2 \times 10^5, 0 \le m \le 2 \times 10^5$。

ABC398G Not Only Tree Game

Solution

没有奇环就相当于二分图。初始没有奇环就说明图由若干个连通二分图构成。

假设只有一个连通二分图，那么两人只能在左部点与右部点之间连边。设连通块内部还能连的边的总数是 x，根据 x 奇偶性判断即可。

没有奇环就相当于二分图。初始没有奇环就说明图由若干个连通二分图构成。

假设只有一个连通二分图，那么两人只能在左部点与右部点之间连边。设连通块内部还能连的边的总数是 x，根据 x 奇偶性判断即可。

如果 n 为奇数，那么最后二分图的两边肯定一奇一偶，相乘一定为偶数，根据初始边数 m 的奇偶性判断即可。

这启发我们按照二分图左右两边的奇偶性进行分类。现在 n 为偶数，将所有的连通块分为如下四类：

- 孤立点：数量为 cnt_0
- 二分图两边均为偶数：数量为 cnt_{00}
- 二分图两边一奇一偶：数量为 cnt_{10}
- 二分图两边均为奇数：数量为 cnt_{11}

先考虑一些简单的东西，比如只有 cnt_{00} 和 cnt_{11}。

还是设 x 表示连通块内部还能连的边的数量。那么当连通块内连一条边时，x 减一；当连通块之间连一条边时，无论是 $00 \times 00, 11 \times 11$ 还是 00×11，都会增加偶数条还能连的边，减掉刚连上的一条边，刚好会使 x 奇偶性改变。

所以每次操作必定会使 x 的奇偶性改变。而最终 x 肯定会变成 0，所以根据初始 x 的奇偶性即可判断胜负。

ABC398G Not Only Tree Game

Solution

再复杂一点，加上孤立点。由于 n 是偶数，所以 cnt_0 也一定是偶数。

考虑 $\frac{cnt_0}{2}+x$ 这个值：当非孤立点之间连边时只会影响 x，奇偶性改变；当两个孤立点之间连边时，会使 $\frac{cnt_0}{2}$ 减一而 x 不变，奇偶性也会改变；

而若孤立点与非孤立点之间连边，那么对方完全可以照猫画虎也把一个孤立点往这个连通块的另一边连，此时 $\frac{cnt_0}{2}+x$ 的奇偶性不变，所以也可以直接根据其奇偶性判断胜负。

再复杂一点，加上 cnt_{10}：

1. $cnt_{10} = 1$

因为 n 为偶数，所以一定有孤立点，先手第一步可以把孤立点与这个两边一奇一偶的连通块相连，并根据 $\frac{cnt_0}{2} + x$ 的奇偶性选择连到哪一边。于是先手必胜。

再复杂一点，加上 cnt_{10}：

1. $cnt_{10} = 1$

因为 n 为偶数，所以一定有孤立点，先手第一步可以把孤立点与这个两边一奇一偶的连通块相连，并根据 $\frac{cnt_0}{2} + x$ 的奇偶性选择连到哪一边。于是先手必胜。

2. $cnt_{10} = 2$

先手第一步可以把这两个连通块连在一起，并根据 $\frac{cnt_0}{2} + x$ 的奇偶性决定是奇连奇，偶连偶还是奇连偶，偶连奇。于是先手必胜。

3. $cnt_{10} \geq 3$

由于操作一步最多只会使 cnt_{10} 减二，而 $cnt_{10} = 1, 2$ 时先手必胜，所以两人都不会把 cnt_{10} 减到 2 以下。

又因为 n 是偶数，所以最后一定会恰好剩下 4 个一奇一偶的连通块且谁也不敢操作。

这时连通块的大小都是奇数，可以直接根据 m 的奇偶性判断胜负。