

# 神奇 DP 在哪里

nantf

2025 年 8 月 2 日

- 接到的指标是“非常规 DP 相关技巧”。这是人类智慧的意思吧！
- 所以请不要问“这是怎么想到的”一类问题。我是真的不知道！
- 题目大致按难度排序。但我真的不会判断这些题的难度，太为难我了！
- 难度跨度（应该）很大，可以让大家都接近一下神明！

- 维护一个  $n$  以内的质数集合  $S$ ，初始时包含最小的  $m$  个质数（保证均  $\leq n$ ）。
- 接下来  $q$  次操作，每次给定一个  $n$  以内的质数  $x$ ，若  $S$  包含  $x$  则将  $x$  删除，否则将  $x$  加入  $S$ 。
- 每次操作后，询问  $1$  到  $n$  中有多少个数被至少一个  $S$  中的质数整除。
- $1 \leq n \leq 10^6, 1 \leq q \leq 10^5$ 。

- (题面经过微小转化。)
- 给定长度为  $n$  的序列  $a_i$ , 其中  $0 \leq a_i \leq 6$ 。
- 你可以进行如下操作若干次: 选择一个区间以及  $0 \leq x \leq 6$ , 将区间内的所有  $a_i$  变为  $(a_i + x) \bmod 7$ 。
- 问将所有  $a_i$  变为 0 的最小操作次数。
- $1 \leq n \leq 501$ 。

## CF1178F2 Long Colorful Strip

- 初始有一条长度为  $m$  的纸带，每个位置有颜色 0。
- 接下来  $n$  次操作。第  $i$  次操作选择纸带上颜色全部相同的一个区间，并将区间内的颜色均变为  $i$ 。
- 问有多少种选择区间的方案，使得最终纸带每个位置的颜色为  $c_i$ 。对大质数取模。
- $1 \leq n \leq 500, n \leq m \leq 10^6, c_i \neq 0$ 。
- 部分分：  $n = m$  且  $c$  是一个 1 到  $n$  的排列。

## [JLOI2016] 字符串覆盖

- 给定字符串  $A$  及其  $n$  个子串  $B_i$ 。
- 将每个  $B_i$  放到其在  $A$  中出现的某个位置，问总共被覆盖的字符数量的最大值与最小值。
- $T$  组数据， $1 \leq T \leq 10, 1 \leq |A| \leq 10^4, 1 \leq n \leq 4$ 。

## CF1149D Abandoning Roads

- 给定一个  $n$  个点  $m$  条边的无向连通图，只有  $a, b$  两种边权 ( $1 \leq a < b$ )。
- 考虑这张图的所有最小生成树。对于每个点  $i$ ，求出 1 到  $i$  在所有最小生成树上的最短路的最小值。
- $2 \leq n \leq 70, 1 \leq m \leq 200$ 。

## [IOI2023 集训队互测 R3] 整数

- 给定长度为  $2^n$  的 01 序列  $\{b_i\}$ 。保证  $b_0 = 1$ 。
- 我们称一个长度为  $n$  的序列  $\{a_i\}$  是好的，当且仅当在每一个二进制位  $k$  下，所有  $a_i$  这一位的取值拼接成的  $n$  位二进制数  $s$  满足  $b_s = 1$ 。也即

$$\forall k \in \mathbb{N}, b_{\sum_{i=1}^n 2^{i-1} \lfloor \frac{a_i}{2^k} \rfloor} = 1$$

- 给定长度为  $n$  的序列  $\{r_i\}$ 。问有多少个满足  $a_i \leq r_i$  的序列  $\{a_i\}$  是好的。对大质数取模。
- $1 \leq n \leq 18, 0 \leq r_i < 2^{60}$ 。



## [IOI2023 集训队互测 R15] 翻修道路

- 给定一个  $n$  个点  $m$  条边的有向图，每条边有边权  $a_i$ 。你可以对每条边进行升级，第  $i$  条边升级后的边权会变为  $b_i$ 。保证  $1 \leq b_i \leq a_i$ 。
- 给定  $k$  个关键点的编号，对于每个  $x \in [0, m]$ ，问在升级至多  $x$  条边的情况下，从 1 号点到  $k$  个关键点的最短路的最大值最小是多少。
- $1 \leq n, m \leq 100, 1 \leq k \leq 8$ 。

## CF750G New Year and Binary Tree Paths

- 对于一棵标准编号的无穷二叉树（也即根节点编号为 1，点  $x$  的左右儿子编号分别为  $2x$  和  $2x + 1$ ）。
- 给定正整数  $s$ ，问该二叉树上有多少条路径的点编号和为  $s$ 。  
对大质数取模。
- $1 \leq s \leq 10^{15}$ 。

## [USACO19DEC Platinum] Tree Depth

- 给定  $n, k$  以及大质数模数  $M$ ，对于每个  $1 \leq i \leq n$ ，解决以下问题：
  - 对于每个有恰好  $k$  个逆序对的  $1$  到  $n$  的排列，以最小值为子树根建立笛卡尔树，求出点  $i$  的深度（注意是第  $i$  个位置而非  $i$  所在的位置）之和，其中根节点深度为  $1$ 。对  $M$  取模。
- $1 \leq n \leq 300$ 。

## CF1158F Density of Subarrays

- 如果一个正整数数组  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足对所有  $i$  都有  $1 \leq a_i \leq c$ , 则称其为  $c$ -数组。
- 定义  $c$ -数组  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的密度为最大的非负整数  $p$ , 使得任意长度为  $p$  的  $c$ -数组都是  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的一个子序列。
- 现给定一个整数  $c$  和一个  $c$ -数组  $a_1, a_2, \dots, a_n$ 。对于所有  $0 \leq p \leq n$ , 求出其密度为  $p$  的非空子序列的个数。对大质数取模。
- $1 \leq n, c \leq 3000$ 。

- 称一个长度为  $n$  的序列  $a$  是 PalindORme 的, 当且仅当对于任意  $1 \leq i \leq n$ , 满足  $a_1 | a_2 | \dots | a_i = a_n | a_{n-1} | \dots | a_{n-i+1}$ , 其中  $|$  表示按位或运算。
- 称一个长度为  $n$  的序列  $b$  是 good 的, 当且仅当它可以重排成一个 PalindORme 的序列。
- 给你  $n, k, m$ , 求长度为  $n$ , 每个元素值域为  $[0, 2^k)$  的序列中有多少个是 good 的, 对  $m$  取模。
- $1 \leq n, k \leq 80$ .  $10^8 < m < 10^9$  且  $m$  为质数。

- 给定正整数  $n$ ，对于每个  $0 \leq i, j \leq n-1$ ，计算 1 到  $n$  的所有排列中，有恰好  $i$  个超过和  $j$  个下降的个数。对给定模数取模。
- (对于排列  $p$ ，位置  $i$  是超过当且仅当  $p_i > i$ ，位置  $i$  是下降当且仅当  $p_i > p_{i+1}$ 。)
- $1 \leq n \leq 60$ 。

*Thanks!*