

# Constructive Algorithms

Charlie

2023 年 7 月 8 日

# 引言

在近年的算法竞赛中，构造题的出现越来越频繁。不同于传统的计数、最优化等问题，构造题只要求选手给出一组满足约束条件的解，而不需要统计解的数量，或是寻找一组“最优”的解。然而，由于其模型繁多，涉及图论、数论、字符串等各领域，且常常难以发现，要解决起来并不容易。本课件对构造题中较常出现的一些解题思路进行了介绍，并给出了例题和讲解，希望对读者有所启发，在解决构造题时能更加得心应手。



# Tips

前 6 题分成三类，每类两题，难度有一定差异，并且乱序排列。  
后 6 题大致按难度顺序排列，不过没有明显偏序关系。  
倒数第 3 页有后 6 题的 Hints，可自行取用。

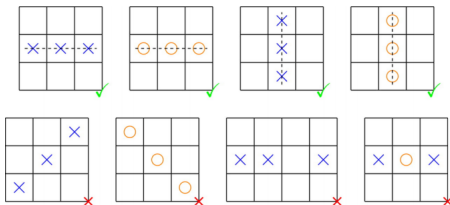
# 抽屉原理

- 抽屉原理, 或称为鸽巢原理, 是组合数学中一个非常重要的原理。通常的表述是, 若将  $n$  件物品放入  $k$  个抽屉, 则其中一定有一个抽屉包含至少  $\lceil \frac{n}{k} \rceil$  件物品, 也一定有一个抽屉包含至多  $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$  件物品。
- 在一些构造题中, 常常会要求构造一个权值至少为 (或不超过) 某一个数的方案。很多时候, 可以考虑找出若干个可行的方案, 使得它们的权值和是定值。假设找出了  $k$  个可行方案, 其总权值和为  $n$ , 由抽屉原理, 这些方案中最小的权值一定不超过  $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ , 最大的权值至少为  $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ 。

# CF1450C2 Erich-Tac-Toe

## Statement

- 给定一张  $n$  行  $n$  列的棋盘，每个格子可能是空的或包含一个标志，标志有  $\times$  和  $\circ$  两种。如果有三个相同的标志排列在一行或一列上的三个连续的位置，则称这个棋盘是一个胜局，否则称其为平局。



- 例如，上图第一行的局面都是胜局，而第二行的局面都是平局。
- 在一次操作中，你可以将一个  $\times$  改成  $\circ$ ，或将一个  $\circ$  改成  $\times$ 。
- 设棋盘中标志的总数为  $k$ ，你需要用不超过  $\lfloor \frac{k}{3} \rfloor$  次操作把给定的局面变成平局。
- $1 \leq n \leq 300$ 。

# Gym102900B Mine Sweeper II

## Statement

- 扫雷地图是一张  $n$  行  $m$  列的网格, 其中每个格子是地雷或空地。每个空地会显示一个数字代表与它相邻的雷的数量 (两个格子相邻当且仅当它们共用一个顶点或一条边, 不在边界上的格子与恰好 8 个格子相邻)。
- 在一次操作中, 你可以将一个地雷改成空地, 或将空地改成地雷。
- 给定两张扫雷地图  $A, B$ , 你需要对  $A$  进行不超过  $\lfloor \frac{nm}{2} \rfloor$  次操作, 使得  $A$  所有空地上的数字之和等于  $B$  所有空地上的数字之和。
- $1 \leq n, m \leq 1000$ 。

# DFS 树

- 在解决一些图上的构造问题时, DFS 树往往有非常大的帮助。
- 一张图的 DFS 树是在对其进行深度优先遍历时, 所形成的树结构。建立了 DFS 树后, 图上的边可以分成四类:
  - **树边**即每个点到其所有孩子结点的边, 也即每个点第一次被访问时经过的边。
  - **前向边**是每个点到其后代的边, 不包括树边。
  - **后向边**是每个点到其祖先的边。
  - 其余边称为**横叉边**。
- 其中, 前向边、后向边、横叉边统称为**非树边**。
- 在构造题中, 通常我们用到的是无向图的 DFS 树。如果我们将每条边按照第一次经过时的方向进行定向, 则无向图的 DFS 树满足所有非树边都是后向边。这个性质在解题过程中有非常大的作用。

# CF1364D Ehab's Last Corollary

## Statement

- 给定一张  $n$  个点  $m$  条边的无向连通图, 以及一个整数  $k$ , 你需要:
  - 找到一个恰好  $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$  个点的独立集,
  - 或者找到一个长度不超过  $k$  的简单环。
- $3 \leq k \leq n \leq 10^5, n - 1 \leq m \leq 2 \times 10^5$ 。



# LOJ3176 景点划分

## Statement

- 给定一张  $n$  个点  $m$  条边的无向连通图, 以及三个整数  $a, b, c$ , 满足  $a + b + c = n$ 。
- 你需要将  $n$  个顶点分成三个集合  $A, B, C$ , 大小分别为  $a, b, c$ , 使得其中至少两个集合是连通的 (集合中的任意两个点能只经过该集合内的点互相到达)。有可能无解。
- $3 \leq n \leq 10^5, 2 \leq m \leq 2 \times 10^5$ 。

# 递归法

- 在一些构造题中，对于不同的输入，问题的结构有很大的相似性。在很多时候，这往往意味着我们的构造也具有很大的相似性，或是具有周期性。
- 这时，我们往往可以通过递归的方式，对子问题进行构造，并在子问题的构造的基础上进行一些小的调整，来得到原问题的构造。

# Gym101221A Baggage

## Statement

- 有  $2n$  个包裹, 其中有  $n$  个 A 类包裹, 和  $n$  个 B 类包裹, 初始时它们的排列如下:

B A B A B A ... B A

- 这些包裹占据了编号为 1 到  $2n$  的格子, 同时还有编号为  $-2n + 1$  到 0 的  $2n$  个空格子可供使用。
- 现在要将这些包裹重新排列, 使得它们形如

A A ... A B ... B B

- 即, 这些包裹占据了相邻的  $2n$  个格子 (不一定是 1 到  $2n$  ), 且所有的 A 类包裹在所有的 B 类包裹的左边。
- 排列过程由若干次操作组成, 在每一次操作中, 可以选择相邻的两个包裹 (不能只选择一个), 并将它们移动至某两个相邻的空格中。
- 给定  $n$ , 找到一个最短的操作序列。
- $3 \leq n \leq 100$ 。

# CF1470D Strange Housing

## Statement

- 给定一张  $n$  个点  $m$  条边的无向图, 你需要选择一个点集  $S$ , 满足:
  - 1. 一条边  $(u, v)$  是开启的当且仅当  $u \in S$  或  $v \in S$ , 则任意一对点都能只经过开启的边互相到达。
  - 2. 不存在一条边  $(u, v)$  满足  $u \in S$  且  $v \in S$ 。有可能无解。
- $2 \leq n \leq 3 \times 10^5, 0 \leq m \leq 3 \times 10^5$ 。

# 杂题

# 如小雪落下海岸线

## Statement

- 给定正整数  $k$ ，要求构造一个  $n \times n$  的网格图，满足  $n \leq 18$ ，每个格子中有一个  $[0, 131071]$  中的数字，并且从左上角出发，只往下或往右走，走到右下角，并且经过的所有数异或和为 0 的方案数为  $k$ 。
- $k \leq 131071$ 。

# 你说空瓶适合许愿

## Statement

- 给定正整数  $n$ , 要求将  $\{2, 3, \dots, 3n + 1\}$  划分成  $n$  个三元组, 使得每个三元组都形成一个钝角三角形。
- $n \leq 10^5$ 。

# CF1375E Inversion SwapSort

## Statement

- 给定长度为  $n$  ( $1 \leq n \leq 1000$ ) 的数列  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，找到其所有逆序对的一个排列  $(u_i, v_i)$ ，使得依次交换  $u_1$  和  $v_1$  位置上的数、 $u_2$  和  $v_2$  位置上的数、……最后得到的数列不减。



# CF1391E Pairs of Pairs

## Statement

- 给定一张  $n$  ( $2 \leq n \leq 5 \cdot 10^5$ ) 个点  $m$  ( $1 \leq m \leq 10^6$ ) 条边的简单连通图，在下面两项中选择一项完成：
  - 找到一条至少  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  个点的简单路径。
  - 找到一些点对，满足
    - 所有点互不相同；
    - 包含至少  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  个点；
    - 对于任意一对点对  $(a, b)$  和  $(c, d)$ ，点集  $\{a, b, c, d\}$  的导出子图包含至多 2 条边。
- 注意这里一对点不需要直接相连。

# CF1270G Subset with Zero Sum

## Statement

- 给定长度为  $n$  ( $1 \leq n \leq 10^6$ ) 的数列  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $i - n \leq a_i \leq i - 1$ ), 找到这些数的一个和为 0 的非空子集。

# 我们有相遇的时间

## Statement

- 平面上有 6 个初始已知点  $(0,0), (0, \frac{1}{2}), (0,1), (1,0), (1, \frac{1}{2}), (1,1)$ ，你需要进行若干次操作，每次操作形如：
  - 过两已知点作一条直线；
  - 将两条直线的交点变成已知点。
- 现在给定一个点  $(X_a/X_b, Y_a/Y_b)$ ，满足  $0 \leq X_a < X_b \leq 10^9, 0 \leq Y_a < Y_b \leq 10^9$ （注意这个点横纵坐标均在  $[0,1]$  内），要求使用不超过 150 次 1 操作将这个点变为已知点。
- 部分分：  $X_a = 0$ 。

以免有人无意翻到下一页。

如小雪落下海岸线： $\times 2 + 1$  法。  
你说空瓶适合许愿：递归折半/感性理解。  
CF1375E：逆排列思维。  
CF1391E：DFS 树。  
CF1270G：图。  
我们有相遇的时间：倍增。

以免有人无意翻到上一页。

# 感谢聆听!

