

# 一些题

Y25t

2024 年 7 月

???

有  $2n$  个 bot，编号分别为  $1 \sim 2n$ ，你想把他们分为两组，每组  $n$  个 bot，分法如下：

- ▶ 所有 bot 按编号从小到大顺序抛一枚完全均匀（正反面朝上概率均为 0.5）的硬币。
- ▶ 如果硬币正面朝上就被分进 A 组，除非 A 组已经有  $n$  个 bot（这时他被分进 B 组）。
- ▶ 如果硬币反面朝上就被分进 B 组，除非 B 组已经有  $n$  个 bot（这时他被分进 A 组）。

有  $q$  次相互独立的询问，每次询问给定  $k$  个 bot 的编号  $b_1 \sim b_k$ ，求这  $k$  个 bot 被分进同一组的概率。答案对 998244353 取模。  
 $2 \leq n \leq 10^5, 1 \leq q \leq 10^5, 1 \leq b_i \leq 2n, b_i > b_{i-1}, 2 \leq k \leq n, \sum k \leq 2 \times 10^5$ 。

???

给定一张  $n$  ( $2 \leq n \leq 100$ ) 个节点的无向完全图和这个图的一棵生成树。对于  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , 求出有多少棵这个完全图的生成树, 使得这些生成树与给定的生成树恰好有  $i$  条边重复。答案对  $(10^9 + 7)$  取模。

???

求有多少  $n \times m$ , 元素均为非负整数的矩阵使得所有从左上角到右下角的路径 (每次只能往上或右走一格) 的元素和均不超过  $k$ 。答案对  $10^9 + 7$  取模。

$n, m, k \leq 100$ 。

???

求有多少  $N \times M$  的整数矩阵  $(a_{i,j})$  使得:

- ▶  $1 \leq a_{i,j} \leq K.$
- ▶  $a_{i,j} \leq a_{i+1,j}.$
- ▶  $a_{i,j} \leq a_{i,j+1}.$
- ▶  $a_{R,C} = V.$

答案对 998244353 取模。

$N, M \leq 200, K \leq 100. R \leq N, C \leq M, V \leq K.$

???

对所有  $2 \leq n \leq M$ , 求出满足以下条件的  $n$  个节点的有根树对  $(T_1, T_2)$  的个数:

- ▶  $T_1$  的根为 1, 其它节点的父亲节点编号均小于自己的编号.
- ▶  $T_2$  的根为  $n$ , 其它节点的父亲节点编号均大于自己的编号.
- ▶ 不存在  $i$  使得节点  $i$  在  $T_1$  和  $T_2$  中均为叶子.

答案对给定模数  $M$  取模.

$2 \leq N \leq 500, 10 \leq M \leq 2^{30}$ .

???

求  $S \subseteq \{1, \dots, N\}$  的个数满足对所有  $1 \leq k \leq N$ ,  $S$  存在和为  $k$  的子集.  
答案对给定模数  $M$  取模.

$1 \leq N \leq 5 \times 10^5, 2 \leq M \leq 1.01 \times 10^9$ .

???

给出一个  $n \times n$  的 01 矩阵  $c$ , 求有多少长度为  $n$  的 01 序列  $a, b$ , 满足  $c_{i,j} = a_i$  或  $c_{i,j} = b_j$ , 答案对 998244353 取模.  
 $1 \leq n \leq 5000$ .



???

定义一个 01 串是平衡的当且仅当它的 01 个数相同。

现在给定  $n, k$  和一个长度为  $m$  的 01 串  $S$ ，求有多少长度为  $n$  且以  $S$  为前缀的 01 串满足其不存在长度为  $k$  的平衡子串，对 998244353 取模。

$1 \leq m+1 \leq k \leq n \leq 114$ ,  $k$  是偶数.

???

给定  $n$  和  $n$  个整数  $a_1, \dots, a_n$ , 你要对满足如下条件的  $1, \dots, n$  的排列  $p$  计数:  $\forall 1 \leq i < n, a_i a_{i+1} \leq w$ , 其中  $w$  为给定的非负整数。

答案对 998244353 取模。

$0 \leq w, |a_i| \leq 10^9, 1 \leq n \leq 2 \times 10^5$ 。

(不超纲的) 部分分:  $a_i \geq 0$  或  $n \leq 2000$ 。