一些题

Y25t

2024 年 7 月

intro

分三个部分, 每个部分分别按难度升序:

- 数论相关, 涉及到欧拉函数, 原根, 莫比乌斯反演等等.
- 线性代数相关, 涉及到高斯消元, 线性基, 等等.
- 构造.

???

我们对于一个数x可以进行如下一次分解操作:

选择两个大于1的数a 和 b，要求a ^ b | x 且 b | x

分解结果为 $\frac{x}{a^b}$

我们定义一个数的牢固值为其最多能进行分解操作的次数。

给定n，求1到n中所有数的牢固值之和。

$n \leq 1e14$

???

题意：给你三个正整数，每一次你可以将选择其中两个，让较大（≥另一个）的数砍下一部分，加到较小的数上，但要保证较小的数在一次操作以后**恰好翻倍**。构造一组方案，将某一个数**清零**。

特别的，允许**压缩输出**------假设对某两个数连续操作$1 \le t \le 10^{18}$次，我们可以用**一行**表示这t次操作。总共要求输出200行的方案，或报告无解。

三个数 $A, B, C \le 3 \times 10^{13}$.

???

求解关于 x 的方程 $x^x \equiv D \pmod{n}$。你需要得到 $[0, 2^{125}]$ 中的任意一个整数解或判断在此范围内无解。

多测，$1 \le T \le 4 \times 10^4, 2 \le n \le 10^{18}, 1 \le D < n$，给出 n 的所有质因子且保证它们均不超过 10^5，保证 n 与 D 互质。

???

1.2 题目大意

给定一棵大小为 n 的树，1 号节点是树根，树上每个点有一个权值 a_i。
给定常数 d。我们将 z 拆解成一些质数的幂次的乘积 $z = \prod_i p_i^{k_i}$，我们定义：

$$f_d(z) = \prod_i (-1)^{k_i} [k_i \le d]$$

对于树上每个节点 x，你需要求出 i, j 均在 x 的子树中的所有点对 (i, j) 的 $f_d(a_i a_j)$ 的和。
注意此题中 (i, j) 和 (j, i) 是一样的点对。

1.3 时空限制

时间限制 1s，空间限制 256MB。

1.4 数据范围

对于 100% 的数据满足 $1 \le n \le 2 \times 10^5, 1 \le d \le 20$，保证所有的 a_i 构成一个 1 到 n 的排列。

???

给定随机生成的 $n \times n$ 的 01 矩阵 A, 构造 $n \times n$ 的 01 矩阵 B 使得 $(AB)_{ij} \equiv A_{ij}B_{ij} \pmod 2$ 对所有 $1 \le i, j \le n$ 成立且 B 中恰有 k 个 1.

$n = 100, 0 \le k \le n^2$, A 的每个元素独立等概率的从 $\{0, 1\}$ 中随机生成.

???

给出 n 个 d 维空间中的点 v_i 和 n 个实数 e_i，你要找到 d 维空间中的一个点 x，满足 x 到 v_i 的欧几里得距离为 e_i。

$1 \le n, d \le 500$，坐标均为 $[-100, 100]$ 中的实数，精度误差 10^{-5}。

数据生成方式为：先随机生成 v_i 和 x，它们的每一维坐标均在 $[-100, 100]$ 中的实数中均匀随机，然后求出每个 e_i，最后隐藏 x。这样也就保证了一定有解。

???

给定 n 个可重集。Q 次询问，每次给出 x，求出最小的 i 满足前 $i-1$ 个可重集均能表出 x 而第 i 个不能，若无这样的 i 则输出 $n+1$。其中表出 x 是指能从该可重集里选出一个异或和为 x 的子集。

$n \le 10^5, Q \le 10^6$，可重集大小 ≤ 64，可重集中元素与 x 均 $< 2^{64}$。

???

给定一个长度为 n 的序列 $a_1, \ldots, a_n$。你每次可以选择一个 $x(1 < x \le n)$ 然后将 a_x 变为 $a_x \oplus a_{x-1}$（可进行任意次）。求这个序列最长上升子序列长度的最大可能值。

$n \le 10^6, 1 \le a_i \le 2^{60}$。

???

任务 A

$n = 15$ 个选民围成一圈，每个人额头上有一个数字 0 或者 1，自己看不见自己额头上的数字，但是可以看见所有其他人头上的数字。

每个人投一票给 0 或者 1，目标是要投出所有人额头上数字的异或和的正确值，最终投票的结果就是票数最多的一个。

请你为每个人选择一个策略，在所有 $2^n = 32768$ 的可能的情况中，使得严格小于 2100 个情况投票结果无法投出正确值。

???

任务 B

把任务 A 中每个人能投的票数从一票改为任意 $0 \le x \le 10^8$ 票。

但最终你要保证严格小于 3 个情况投票结果无法投出正确值（平票的情况算做错误）。

???

任务 C

现在 $\binom{n}{k}$ 个人围成一圈，圈里是一个长度为 $n=12$ 的 01 串，每个人可以看到自己编号对应的一个大小为 $k=7$ 的位的集合（假设一个人可以看到的集合是 S，那么我们定义 $f(S)=\sum_{x\in S}2^x$，第 i 个人就是 $f(S)$ 第 i 小的人）。

他们的目标是要选出对应的 01 串的每一位异或起来是 0 还是 1，现在每个人可以投任意 x 票（$0\le x\le 10^8$）。

请你为每个人选择一个策略，在所有 $2^n=4096$ 的可能的情况中，使得严格小于 80 个情况投票结果无法投出正确值。

???

有 N 个人面对面围成一圈，每个人头上会佩戴一顶帽子，可能是黑色或白色的。每个人只能看到其他人的帽子颜色但不能得知自己的编号。

所有人在进行观察后要同时猜测自己帽子的颜色，你要设计一个针对所有人的确定性策略（即如果两个人看到的东西完全相同，那么他们做出的猜测也要相同），使得猜中的人数至少为 $\lfloor (N-1)/2 \rfloor$。

$N \leq 64$。