

# DP 杂题选讲 Preview

Alan\_Zhao

2025 年 2 月 5 日

给定两个  $1, 2, \dots, n$  的排列  $\{a_n\}, \{b_n\}$ 。有一个序列  $c$ ，初始时  $c$  是空的。你需要执行  $2n - 2$  次操作，每次选择  $a$  或  $b$ （你需要保证选择的序列的长度至少是 2），并将选择的序列的第一个数字删去，将另外一个序列的第一个数字添加到  $c$  的末尾。求能得到多少种不同的序列  $\{c_{2n-2}\}$ ，对  $10^9 + 7$  取模。  
 $n \leq 2000$ 。

有  $n$  个细胞排成一排，编号为  $1, 2, \dots, n$ ，每个细胞有一个大小  $s_i$ 。有  $(n - 1)$  次操作，每次随机选择一对相邻的细胞，设它们的大小是  $x, y$ ，会将它们合并成一个大小为  $x + y$  的细胞，新细胞的编号是较大细胞的编号，若大小一样则为编号较大的细胞的编号。

对于每个细胞  $i = 1, 2, \dots, n$ ，求出最终合并得到的细胞具有编号  $i$  的概率，对  $10^9 + 7$  取模。

$n \leq 5000$ 。

有一个  $n \times m$  的矩形，你需要用若干  $1 \times 1$  和  $1 \times 2$  的积木不重不漏地覆盖，且  $1 \times 2$  的积木只能横向放置。

若两个积木有公共边，则在它们之间连一条无向边，你需要保证所有积木连通。求方案数对  $10^9 + 7$  取模的结果。

$$n \times m \leq 5 \times 10^5。$$

有  $N$  个点，第  $i$  个点的高度是  $H_i$ 。开始时点之间没有边，**每个点有一个接口**。

对于每个点  $i$ ，你可以做任意次如下操作：

- 将  $H_i$  增加 1，代价为  $K$ ；
- 增加一个接口，代价为  $C_i$ 。

所有操作完成后，你需要将这  $N$  个点连成一棵有根内向树，满足：

- 每个非根节点  $i$  的父亲的高度严格小于  $H_i$ ；
- 每个点的儿子个数小于等于它的接口的个数。**与父亲相连不消耗接口**。

求出最小代价。

$$1 \leq N \leq 300, 0 \leq H_i \leq 10^9。$$

有一个长度为  $N$  的数组  $a_1, a_2, \dots, a_N$ , 其中有  $K$  个特殊位置  $x_1, x_2, \dots, x_K$ , 除了这些特殊位置以外的位置可以任意交换。

最小化  $\sum_{i=1}^{N-1} \max(a_i, a_{i+1})$ 。

$N \leq 300, K \leq 6$ 。

有  $n$  本书，每本书有一个重量，你需要将这些书合并成一摞。每次你可以选择一摞书  $i$  放到另一摞书  $j$  上，消耗的体力是第  $i$  摞书的磨损值加上两摞书的重量之和。设两摞书的磨损值分别是  $x, y$ ，合并后得到的一摞书的磨损值为  $2 \max(x, y) + 1$ ，重量为两摞书的重量之和。初始时所有书的磨损值都是 0。求最小体力花费。

$$\sum n^2 \leq 10^8, \sum n \leq 5 \times 10^5.$$

给定长度为  $n$  的非负整数数列  $a$ , 选择一个长为  $k$  且元素在  $[1, n]$  中的整数数列  $b$ , 最大化

$$\sum_{i=1}^k a_{b_i} - \prod_{i=1}^k b_i.$$

$$k, n \leq 10^6, a_i \leq 10^9.$$



给定一棵  $n$  个点的有根树  $T$ , 每个点有一个正整数权值  $v_i$ 。  
有  $q$  次询问, 每次给定  $x, k$ , 设以  $x$  为根的子树内距离  $x$  不超过  $k$  的节点是  $c_1, c_2, \dots, c_l$ , 求

$$\sum_{i=1}^l (v_{c_i} \oplus \text{dist}(c_i, x)).$$

$$1 \leq n, q \leq 10^6, \quad v_i \leq 10^9.$$

给定一棵  $N$  个点的有根树  $T$ ，其中每个点  $u$  有价值  $B_u$ ，重量  $W_u$  和颜色  $C_u$ ，其中  $C_u \in \{0, 1\}$ 。

对于每个  $u \in T$ ，求出在以  $u$  为根的子树上做如下问题的答案：

- 你可以做若干次操作：选择一个非根节点  $v$ ，将  $v$  删去，并将  $v$  的所有儿子连接到  $v$  的父亲上；
- 所有操作后，你需要保证相邻节点的颜色不同，并且所有节点的重量之和不超  $X$ ；
- 最大化未被删除的点的价值之和。

$1 \leq N \leq 200$ ,  $1 \leq X \leq 5 \times 10^4$ ,  $0 \leq B_u \leq 10^{15}$ 。

给定两个字符串  $S, T$  以及一个正整数  $k$ , 对于每个  $i = 0, 1, \dots, k$ , 求出有多少对  $(l, r)$  满足  $T[l, r]$  与  $S$  的编辑距离恰好是  $i$ 。

$|S|, |T| \leq 10^5, k \leq 30$ 。