字符串

4182_543_731

2025/07

目录

目录

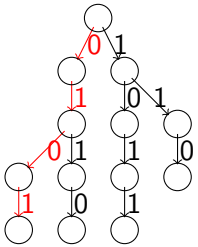
记号约定 & 前言

- S, T 等大写符号通常表示字符串。n 表示字符串长度，默认为 10^5 级别。
- Σ 表示字符集，$|\Sigma|$ 表示字符集大小，默认 $|\Sigma| = 26$。
- $S[l:r]$ 表示 S 中下标 l 到 r 的子串。特别地，$S[l:]$ 表示从位置 l 开始的后缀。字符串下标使用 1-base。
- 简写：LCP 表示两个串的最长公共前缀。
- 一些本课件不涉及的内容：如果你发现 Hash 就够用了并且你认为用 Hash 更简洁，那你可以直接 Hash。
- 关于题目来源：所有这个颜色的文字都是可以点击的。
- Hint: Think in **both** directions!

回顾——Trie

定义：给定若干个串，

- 节点构成有向树的结构。
- 每个节点对应一个字符串的前缀，根表示空串。
- 每条边标记一个字符 c，表示儿子对应字符串为父亲对应字符串向后加入 c 的结果。



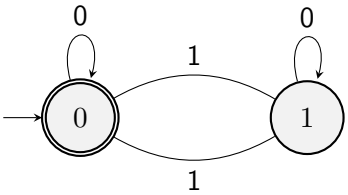
性质：两串的 LCP 正是 Trie 上的 LCA。

引言——自动机

什么是一个自动机?

想象你需要判断一个串是否满足某些性质（例如，包含 S/是 S 的子串/...）。

一位一位地把这个串读进来。在这个过程中，我们维护一个**状态**，它记录了读进来的前缀与性质之间的信息。每次读入下一个字符后，我们根据当前状态和这个字符**转移**到下一个状态。这样的状态与转移就被称为自动机。

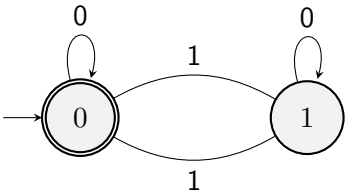


引言——自动机

什么是一个自动机?

想象你需要判断一个串是否满足某些性质（例如，包含 S/是 S 的子串/...）。

一位一位地把这个串读进来。在这个过程中，我们维护一个**状态**，它记录了读进来的前缀与性质之间的信息。每次读入下一个字符后，我们根据当前状态和这个字符**转移**到下一个状态。这样的状态与转移就被称为自动机。



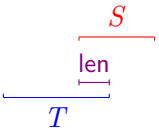
自然的，自动机可以拿来判断一个串是否满足性质。但也有一些时候，构造自动机的过程也揭示了这个性质（也就是 S）的更多特点，使得我们能有更好的关于 S 的结论。

目录

KMP

想象我们读进来一个串 T，需要判定它是否包含了 S 作为子串。那读了 T 的一个前缀后，需要记录什么信息？

如果之后有一个 S 的匹配，那么当前 T 的一个后缀一定能匹配 S 的前缀。



因此，考虑记录最长的长度 len，使得当前 T 这么长的后缀等于 S 这么长的前缀。这自动包含了更短后缀的匹配信息。

KMP——状态

状态为 len，表示当前 T 这么长的后缀匹配 S 这么长的前缀，且这是最长的一组匹配。

然后是转移。在 T 加入下一个字符后，如果上一步这个 len 长度的后缀加上下一个字符还能匹配，那现在 $len+1$，就可以了。[1]

[1]不会存在更长的匹配。因为如果存在，那么去掉最后一个字符就是上一步更长的匹配。

KMP——状态

KMP——状态

状态为 len，表示当前 T 这么长的后缀匹配 S 这么长的前缀，且这是最长的一组匹配。

然后是转移。在 T 加入下一个字符后，如果上一步这个 len 长度的后缀加上下一个字符还能匹配，那现在 $len+1$，就可以了。[1]

否则，我们需要找一个更短的后缀，使得它可以匹配 S 的前缀，同时可以向后扩展这一个字符。因为这个后缀匹配 S 的前缀 $S[1:len]$，问题相当于：

$S[1:len]$ 的后缀中，有哪些可以和 S 的前缀匹配?

我们需要在 S 上找到一些东西来回答这个问题。

[1]不会存在更长的匹配。因为如果存在，那么去掉最后一个字符就是上一步更长的匹配。

KMP——fail

KMP——状态

状态为 len，表示当前 T 这么长的后缀匹配 S 这么长的前缀，且这是最长的一组匹配。

$S[1:len]$ 的后缀中，有哪些可以和 S 的前缀匹配?

为此，我们定义 $fail_{len}$ 表示 $S[1:len]$ 的非平凡后缀中，与 S 前缀匹配的最长后缀长度。

那更短的后缀呢？ 长度为 $fail_{len}$ 的后缀匹配了前缀，而更短的后缀也是它的后缀，从而可以匹配到对应前缀上考虑。

进一步可以发现，所有匹配的后缀长度就是沿着 fail 一直跳，跳到的所有长度。

KMP——fail

KMP——状态

状态为 len，表示当前 T 这么长的后缀匹配 S 这么长的前缀，且这是最长的一组匹配。

我们定义 $fail_{len}$ 表示 $S[1:len]$ 的非平凡后缀中，与 S 前缀匹配的最长后缀长度，此时 $S[1:len]$ 的后缀中，与 S 前缀匹配的后缀长度为不断跳 fail 经过的所有长度。

如果有了 fail，那转移是自然的：不断跳 fail，直到当前长度的前缀可以扩展下一个字符，然后跳过去（$+1$）。那么，如何求 fail?

KMP——fail

KMP——状态

状态为 len，表示当前 T 这么长的后缀匹配 S 这么长的前缀，且这是最长的一组匹配。

我们定义 $fail_{len}$ 表示 $S[1:len]$ 的非平凡后缀中，与 S 前缀匹配的最长后缀长度，此时 $S[1:len]$ 的后缀中，与 S 前缀匹配的后缀长度为不断跳 fail 经过的所有长度。

如果有了 fail，那转移是自然的：不断跳 fail，直到当前长度的前缀可以扩展下一个字符，然后跳过去（$+1$）。那么，如何求 fail?

可以看到，fail 的定义和最开始的匹配问题是完全一样的，因此，做法正和匹配相同——从 $fail_{i-1}$ 开始往上跳，直到找到一个能扩展 S_i 的前缀。

每次跳 fail 都减少长度，只有扩展时增加长度。势能分析可知复杂度为 $O(n)$。

KMP

KMP——状态

状态为 len，表示当前 T 这么长的后缀匹配 S 这么长的前缀，且这是最长的一组匹配。

KMP——转移（fail）

定义 $fail_{len}$ 表示 $S[1:len]$ 的非平凡后缀中，与 S 前缀匹配的最长后缀长度。

转移时，不断跳 fail 直到当前前缀可以扩展下一个字符，然后 $+1$。

这样我们就得到了一个判定 T 是否包含 S 的自动机。自然也可以算 S 在 T 中出现次数(有几次停在整个 S)。

[2]这方面有一些智慧题，但由于篇幅原因+我也没学过

KMP——状态

状态为 len，表示当前 T 这么长的后缀匹配 S 这么长的前缀，且这是最长的一组匹配。

KMP——转移（fail）

定义 $fail_{len}$ 表示 $S[1:len]$ 的非平凡后缀中，与 S 前缀匹配的最长后缀长度。

转移时，不断跳 fail 直到当前前缀可以扩展下一个字符，然后 $+1$。

这样我们就得到了一个判定 T 是否包含 S 的自动机。自然也可以算 S 在 T 中出现次数(有几次停在整个 S)。

而除了匹配之外，我们构造用到的 fail，也描述了很多 S 自身的性质。对于每个前缀，沿着它的 fail 向上，我们可以找到这个前缀中与前缀匹配的后缀——也被称为 border。[2]

[2]这方面有一些智慧题，但由于篇幅原因+我也没学过

AC 自动机

KMP

给定一个串 S，我们构造：

- 状态为 S 的所有前缀。
- 对于每个前缀，fail 指向其最长的匹配某个前缀的后缀。
- 我们隐式地得到了转移边：对于每个前缀，$next_c$ 表示向这个前缀加入字符 c 后，其最长的匹配某个前缀的后缀。

基本应用：单字符串匹配。

现在，考虑把这个东西放到多个 S 上。

AC 自动机

AC 自动机

给定多个串 $S_1, S_2, \ldots$，我们构造：

- 状态为这些串的所有前缀。
- 对于每个节点，fail 指向这个串最长的匹配某个前缀（可以来自其它串）的后缀。
- 也可以得到转移边：对于每个串，$next_c$ 表示向这个串加入字符 c 后，其最长的匹配某个前缀的后缀。

此时状态是所有前缀，因此可以用一个 Trie 表示。KMP 可以看作 Trie 是一条链的特殊情况。那因为 KMP 是一条链的情况，可以考虑自然地扩展到一棵 Trie 树的情况：

AC 自动机——构造

KMP——构造

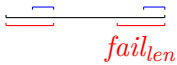
从小到大考虑每个前缀。对于一个前缀 $S[1:i]$，从上一个前缀 $S[1:i-1]$ 开始向上跳 fail (不包含自己)，直到某个前缀能够扩展出 S_i。

自然的扩展：

AC 自动机——构造

按长度从小到大考虑每个前缀（Trie 树上 BFS)。对于一个前缀，从 Trie 树的父亲节点开始向上跳 fail（不包含自己)，直到某个前缀能够扩展出 S_i（在 Trie 树上有这个儿子)。

此时仍然有一个串沿着 fail 向上会经过其所有出现的后缀。唯一变化的是复杂度分析。



AC 自动机——复杂度分析

AC 自动机——构造

按长度从小到大考虑每个前缀（Trie 树上 BFS）。对于一个前缀，从 Trie 树的父亲节点开始向上跳 fail（不包含自己），直到某个前缀能够扩展出 S_i（在 Trie 树上有这个儿子）。

KMP——复杂度证明

记势能为当前点的长度。每次向上跳时势能减少，只在扩展时增加势能。因此复杂度为 $O(n)$。

在树上这不一定对：可能一个长度很大的点有很多儿子，每一个都向上跳回去。不过可以证明，沿着 Trie 中的每个字符串走过去，这条路径上的代价总和是 $O(|S_i|)$。因此总复杂度是 $O(\sum |S|)$。

由此，如果是输入若干个字符串，然后我们建 Trie。那直接这样做复杂度就是对的。但不一定是这种情况... ...

AC 自动机——构造（2）

另一种情形：给一个 Trie，对这个 Trie 建 AC 自动机。此时 $\sum |S|$ 不一定只有 Trie 大小级别。此时就不能用之前的算法了。

AC 自动机——构造

按长度从小到大考虑每个前缀（Trie 树上 BFS）。对于一个前缀，从 Trie 树的父亲节点开始向上跳 fail（不包含自己），直到某个前缀能够扩展出 S_i（在 Trie 树上有这个儿子）。

现在的复杂度在于向上跳 fail 找一个字符的扩展时，可能需要在 fail 树上一个地方重复跳多次。为避免重复，考虑把这个扩展的结果存下来，就是之前提到的转移边：

- 转移边：对于每个前缀，$next_c$ 表示向这个前缀加入字符 c 后，其最长的匹配某个前缀的后缀。

AC 自动机——构造（2）

- 状态为这些串的所有前缀。
- 对于每个节点，fail 指向其最长的匹配某个前缀的后缀。
- 转移边：对于每个节点，$next_c$ 表示向这个前缀加入字符 c 后，其最长的匹配某个前缀的后缀。

如何求转移边？

- 如果 Trie 树上它就有这个儿子，那么 $next_c$ 就指向这个儿子。
- 否则，按照之前的做法，我们沿着 fail 向上跳，直到有一个点有这个儿子。但如果我们求出了 $fail_u$ 的转移边，那跳过去之后我们就直接知道了答案。

Trie 树上 BFS 即可，复杂度 $O(n|\Sigma|)$。字符集过大时不建议使用。

AC 自动机——多串匹配

AC 自动机

给定多个串 $S_1, S_2, \ldots$，我们构造：

- 状态为这些串的所有前缀。
- 对于每个节点，fail 指向其最长的匹配某个前缀的后缀。
- 转移边：对于每个节点，$next_c$ 表示向这个前缀加入字符 c 后，其最长的匹配某个前缀的后缀。

类似 KMP 的应用方式，考虑读入一个 T，我们看它匹配了哪些串。

AC 自动机——多串匹配

AC 自动机

给定多个串 $S_1, S_2, \ldots$，我们构造：

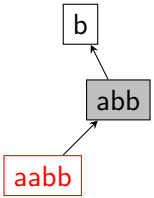
- 状态为这些串的所有前缀。
- 对于每个节点，fail 指向其最长的匹配某个前缀的后缀。
- 转移边：对于每个节点，$next_c$ 表示向这个前缀加入字符 c 后，其最长的匹配某个前缀的后缀。

类似 KMP 的应用方式，考虑读入一个 T，我们看它匹配了哪些串。和之前一样，每读入一个字符，我们更新当前 T 的后缀最长可以和哪个前缀匹配，然后通过这个看是否有匹配... ...

与 KMP 不同的是，只有一个串的时候，匹配当且仅当当前最长匹配到整串。但多个串的时候，有可能现在匹配了这个串，但同时匹配了别的串一个更长的前缀，这时就会记录到那个前缀上。

AC 自动机——多串匹配

与 KMP 不同的是，只有一个串的时候，匹配当且仅当当前最长匹配到整串。但多个串的时候，有可能现在匹配了这个串，但同时匹配了别的串一个更长的前缀，这时就会记录到那个前缀上。



因此，每匹配一位，我们需要在 fail 树（不是 Trie 树）上，把当前点到根上的匹配次数都 $+1$。这样才能正确算出每个给定串的出现次数。

这也相当于每个串的匹配次数是有多少次匹配停在它 fail 树子树内。那么在线询问可以 DFS 序+区间求和，离线可以最后一次树上子树和。

AC 自动机——应用

AC 自动机——多串匹配

对所有 S_i 建 AC 自动机，然后对 T 做匹配。一个 S_i 出现的次数等于匹配时有多少步停在了它 fail 树子树内。

AC 自动机——应用

AC 自动机——多串匹配

对所有 S_i 建 AC 自动机，然后对 T 做匹配。一个 S_i 出现的次数等于匹配时有多少步停在了它 fail 树子树内。

有一些直接的板子，形如：

单词

给一些串，问每个串在所有串中出现了多少次。

对所有串建 AC 自动机，再把所有串在上面跑一遍。

AC 自动机——应用

AC 自动机——多串匹配

对所有 S_i 建 AC 自动机，然后对 T 做匹配。一个 S_i 出现的次数等于匹配时有多少步停在了它 fail 树子树内。

阿狸的打字机

给一棵 Trie（不保证总串长很小），每次给出 Trie 上两个点，问一个点对应的字符串在另一个点对应的字符串中出现了多少次。

AC 自动机——应用

AC 自动机——多串匹配

对所有 S_i 建 AC 自动机，然后对 T 做匹配。一个 S_i 出现的次数等于匹配时有多少步停在了它 fail 树子树内。

阿狸的打字机

给一棵 Trie（不保证总串长很小），每次给出 Trie 上两个点，问一个点对应的字符串在另一个点对应的字符串中出现了多少次。

对所有串建 AC 自动机。问题相当于，如果将一个串放到 AC 自动机上匹配，那有多少次停在了另一个点的 fail 子树内。

因为这个串也在 AC 自动机内，所以它在 AC 自动机上走就是沿着 Trie 向下。那么问题就是:

有两棵树 Trie, Fail。每次问 Trie 树上一条根到某个点的链在 Fail 树上有多少在某个子树内。

AC 自动机——应用

有两棵树 Trie, Fail。每次问 Trie 树上一条根到某个点的链在 Fail 树上有多少在某个子树内。

维护一条到根的链的信息有一个经典方式：从根开始 DFS，到某个点时加入它的信息，离开时删除它的信息。这样 DFS 到某个点时，就维护了这个点到根的信息。

这里信息是 Fail 树上做子树查询，所以每次加入/删除信息就是 Fail 树 DFS 序+树状数组。复杂度 $O(n \log n)$。

AC 自动机——应用

AC 自动机——多串匹配

对所有 S_i 建 AC 自动机，然后对 T 做匹配。一个 S_i 出现的次数等于匹配时有多少步停在了它 fail 树子树内。

Divljak

给 n 个串 S_i。每次操作：

- 加入一个询问串 T。
- 询问某个 S_i 在多少个之前加入的 T 中出现过。

AC 自动机——应用

AC 自动机——多串匹配

对所有 S_i 建 AC 自动机，然后对 T 做匹配。一个 S_i 出现的次数等于匹配时有多少步停在了它 fail 树子树内。

Divljak

给 n 个串 S_i。每次操作：

- 加入一个询问串 T。
- 询问某个 S_i 在多少个之前加入的 T 中出现过。

如果是出现次数求和，那就和之前一样，对 S_i 建自动机，每次把 T 放到上面匹配，询问有多少步在 S_i fail 子树内。

现在的问题是一个 T 之内的要去重，

AC 自动机——应用

AC 自动机——多串匹配

对所有 S_i 建 AC 自动机，然后对 T 做匹配。一个 S_i 出现的次数等于匹配时有多少步停在了它 fail 树子树内。

Divljak

给 n 个串 S_i。每次操作：

- 加入一个询问串 T。
- 询问某个 S_i 在多少个之前加入的 T 中出现过。

如果是出现次数求和，那就和之前一样，对 S_i 建自动机，每次把 T 放到上面匹配，询问有多少步在 S_i fail 子树内。

现在的问题是一个 T 之内的要去重，而不是直接全部链加。所以是每步匹配到的点向上的链并起来再 $+1$。对这些点求个虚树再更新即可。 另一个小练习

AC 自动机——应用

AC 自动机——多串匹配

对所有 S_i 建 AC 自动机，然后对 T 做匹配。一个 S_i 出现的次数等于匹配时有多少步停在了它 fail 树子树内。

还有一类题目——问 T 是否不包含任意一个 S_i。这相当于，T 在 AC 自动机上走，不能走到某个 S_i 的点，也不能走到 S_i fail 树子树内的点。

限制只有沿着 next 走不能走到某些点，这非常简单。因此可以计数有多少合法路径：

文本生成器

给一些串 S_i，询问有多少长度为 m 的串，使得至少有一个 S_i 在里面出现了。

$m, \sum |S_i| \leq 1000$

然后还有 带一点点限制的计数路径数，10^9 的计数路径数。

目录

子序列自动机

现在你有一个字符串 S，然后读入一个字符串 T，你需要判断 T 是不是 S 的子序列。

相当于，我们需要在 S 中选出一些递增的位置，使得它们拼起来等于 T。那贪心地想，我们应该让第一个位置尽量靠前，然后在第二个尽量靠前，接下来也一样。如果能匹配，那这样一定能匹配到。

因此判定方法是，记录匹配 T 之前的部分需要选到的位置 now，加入下一个字符后，选择 now 之后这个字符下次在 S 出现的位置。

子序列自动机

现在你有一个字符串 S，然后读入一个字符串 T，你需要判断 T 是不是 S 的子序列。

相当于，我们需要在 S 中选出一些递增的位置，使得它们拼起来等于 T。那贪心地想，我们应该让第一个位置尽量靠前，然后在第二个尽量靠前，接下来也一样。如果能匹配，那这样一定能匹配到。

因此判定方法是，记录匹配 T 之前的部分需要选到的位置 now，加入下一个字符后，选择 now 之后这个字符下次在 S 出现的位置。这可以写成自动机的形式，now 即为状态：

子序列自动机

- 状态是 S 的每个下标，表示当前贪心匹配到了这个位置。
- 转移 $next_{i,c}$ 表示位置 i 之后字符 c 第一次出现的位置。

根据刚才的分析，走 next 能走出的所有串正是 S 的所有子序列。

自动机小练习

子序列自动机

- 状态是 S 的每个下标，表示当前贪心匹配到了这个位置。
- 转移 $next_{i,c}$ 表示位置 i 之后字符 c 第一次出现的位置。

所有从起点出发，沿着 next 能走到的串是 S 的所有子序列。

还有一些问题也可以表示为这样的自动机：例如，之前提到的“不匹配任意一个 S_i 的字符串”[3]，以及之后将会看到的“S 的所有子串”。

有这样一类问题：问 S 的所有子序列/子串/…… 中的一些性质（数量，字典序第 k 小，……）。因为所有串正是自动机上从起点走出的所有路径，我们能利用自动机的性质来解决问题。

[3]略有不同的是，此处自动机不限制串长度，因此会询问走 k 步，或者说长度为 k 的串。

自动机小练习——计数

自动机

- 有若干状态，每个状态 u 有转移 $next_{i,c}$，表示向后加入字符 c 后转移到的状态（可以不存在）。
- 所有从起点出发，沿着 next 能走到的串即为自动机接受的所有串，它们正好是满足某个性质的所有串。

求自动机接受（即满足性质）的串数量。例如子序列计数。

自动机小练习——计数

自动机

- 有若干状态，每个状态 u 有转移 $next_{i,c}$，表示向后加入字符 c 后转移到的状态（可以不存在）。
- 所有从起点出发，沿着 next 能走到的串即为自动机接受的所有串，它们正好是满足某个性质的所有串。

求自动机接受（即满足性质）的串数量。例如子序列计数。

相当于自动机上的路径计数。DP。

自动机小练习——DP

自动机

- 有若干状态，每个状态 u 有转移 $next_{i,c}$，表示向后加入字符 c 后转移到的状态（可以不存在）。
- 所有从起点出发，沿着 next 能走到的串即为自动机接受的所有串，它们正好是满足某个性质的所有串。

求最短的不被接受的串。

自动机小练习——DP

自动机

- 有若干状态，每个状态 u 有转移 $next_{i,c}$，表示向后加入字符 c 后转移到的状态（可以不存在）。
- 所有从起点出发，沿着 next 能走到的串即为自动机接受的所有串，它们正好是满足某个性质的所有串。

求最短的不被接受的串。

dp_u 表示从 u 出发最少需要几步才能走出状态。

自动机小练习——DP

求最短的不被接受的串。

dp_u 表示从 u 出发最少需要几步才能走出状态。

最短不公共子序列

给定 A, B，求最短的串，使得它是 A 的子序列但不是 B 的子序列。$n \leq 2000$

状态里面可以放更多的东西，

自动机小练习——DP

求最短的不被接受的串。

dp_u 表示从 u 出发最少需要几步才能走出状态。

最短不公共子序列

给定 A, B，求最短的串，使得它是 A 的子序列但不是 B 的子序列。$n \leq 2000$

状态里面可以放更多的东西，例如两个自动机。令 dp_{u_1,u_2} 表示在第一个自动机上走到 u_1，第二个自动机上走到 u_2 时，接下来最少需要几步才能在不走出第一个自动机的情况下走出第二个自动机。

自动机小练习——字典序

自动机

- 有若干状态，每个状态 u 有转移 $next_{i,c}$，表示向后加入字符 c 后转移到的状态（可以不存在）。
- 所有从起点出发，沿着 next 能走到的串即为自动机接受的所有串，它们正好是满足某个性质的所有串。

按字典序从小到大枚举所有自动机接受的串。

自动机小练习——字典序

自动机

- 有若干状态，每个状态 u 有转移 $next_{i,c}$，表示向后加入字符 c 后转移到的状态（可以不存在）。
- 所有从起点出发，沿着 next 能走到的串即为自动机接受的所有串，它们正好是满足某个性质的所有串。

按字典序从小到大枚举所有自动机接受的串。

相当于按字典序枚举从起点出发的路径。按照字典序，一个点出发的路径可以分为如下几类：直接结束的，以 a 开头的，以 b 开头的，以此类推。只需要在每一类内部继续字典序枚举。

每一类相当于沿着 next 走一步，然后考虑从这个点出发的所有串。这是一个一模一样的子问题（字典序枚举某个点出发的路径），那么递归，可以写成 DFS。

自动机小练习——字典序

自动机

- 有若干状态，每个状态 u 有转移 $next_{i,c}$，表示向后加入字符 c 后转移到的状态（可以不存在）。
- 所有从起点出发，沿着 next 能走到的串即为自动机接受的所有串，它们正好是满足某个性质的所有串。

求字典序第 k 小的接受串。

自动机小练习——字典序

自动机

- 有若干状态，每个状态 u 有转移 $next_{i,c}$，表示向后加入字符 c 后转移到的状态（可以不存在）。
- 所有从起点出发，沿着 next 能走到的串即为自动机接受的所有串，它们正好是满足某个性质的所有串。

求字典序第 k 小的接受串。

仍然考虑按字典序枚举。类似上一个问题的思路，按照第一个字符分为 $|\Sigma|+1$ 类。为了确定第一个字符，我们需要知道每一类里面的字符串数量，即从这个点出发的路径数量。

因此再结合第一个问题的想法，DP 求出每个点出发的路径数量，即可 $O(n|\Sigma|)$ 依次求出每一位。

自动机小练习（2）

求字典序第 k 小的接受串，但是多组询问（可以认为每次只输出答案的最后一位）

有一个基于轻重链剖分的思想，也被称为 DAG 剖分。

[4]实现时会有 dp 远大于 k 的情况，一般会对上限取 $\min$。但此时不可能走到后面那些溢出的。

自动机小练习（2）

求字典序第 k 小的接受串，但是多组询问（可以认为每次只输出答案的最后一位）

有一个基于轻重链剖分的思想，也被称为 DAG 剖分。

记 dp_u 表示 u 出发的路径数。对每个点，记录其重儿子为 next 转移到节点中 dp 最大的。那么每步轻儿子会使 dp_u 减半，只会有 $O(\log k)$ 步走轻儿子[4]。

只需要快速沿着重儿子跳。对于每条这样的链，维护跳一段时中间会有多少字典序更小的轻儿子 dp 贡献，然后倍增向前。复杂度 $O(\log n \log k)$。

[4]实现时会有 dp 远大于 k 的情况，一般会对上限取 $\min$。但此时不可能走到后面那些溢出的。

目录

Manacher

在一些情况下，我们想要维护一个串 S 中所有回文子串的信息。

回文串的一个性质：两侧各自删去一个字符还是回文串。因此每个回文串都对应一个中心，以及从中心延展的回文长度。那么我们只需要

对于每个位置，求出以这个位置为中心的最长回文子串长度。

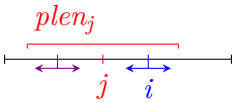
注意从中心角度看，实际上有两种回文串：以字符为中心（奇数长度）和以两个字符中间为中心（偶数长度）。一种偷懒方式是把字符串 abca 变成 a_b_c_a。

这当然可以 Hash 然后二分。但有一个比两个方向 Hash 还要简单的做法。

Manacher

对于每个位置，求出以这个位置为中心的最长回文子串长度 $plen_i$。

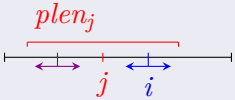
从小到大依次求出每个位置的答案。对于位置 i，考虑找到之前的一个位置 j，使得 j 为中心扩展的回文串覆盖到了 i。那么借助 j 的对称性：



从 i 出发向两侧匹配的过程和从对称位置 $2j - i$ 出发的过程完全一致——直到超出 j 给的对称性之前，那么借用 $2j - i$ 扩展的长度，

- 如果 i 加上这个长度小于 j 覆盖的 $j + plen_j$，那么不能匹配导致终止的这一步也对称过来了，从而完全一致地，$plen_i = plen_{2j-i}$。
- 否则，超出 j 覆盖范围的部分无法确认，因此我们继续暴力扩展。

Manacher's Algorithm



- 如果 i 加上这个长度小于 j 覆盖的 $j + plen_j$，那么不能匹配导致终止的这一步也对称过来了，从而完全一致地，$plen_i = plen_{2j-i}$。
- 否则，超出 j 覆盖范围的部分无法确认，因此我们继续暴力扩展。

为了最好利用之前的回文，显然选择能覆盖到最靠右的 j 最好，也就是 $j + plen_j$ 最大。

然后这就对了：从覆盖最远的位置开始继续扩展，那么每一步都会让最大 $i + plen_i$ 覆盖更远。复杂度 $O(n)$。

Manacher

Manacher's Algorithm

对于每个位置，求出以这个位置为中心的最长回文子串长度 $plen_i$。

这样，我们就把 S 中所有出现的回文串（不去重）表示成了如下 n 组：以 i 为中心，向两侧扩展不超过 $plen_i$ 长度。

简单小练习：

最长双回文串

求出 S 最长的子串，使得其可以被表示为两个非空回文串的拼接。

Manacher

Manacher's Algorithm

对于每个位置，求出以这个位置为中心的最长回文子串长度 $plen_i$。

这样，我们就把 S 中所有出现的回文串（不去重）表示成了如下 n 组：以 i 为中心，向两侧扩展不超过 $plen_i$ 长度。

简单小练习：

最长双回文串

求出 S 最长的子串，使得其可以被表示为两个非空回文串的拼接。

只需对每个位置求出以它为左右端点分别的最长回文串长度。

回文树

通过中心+扩展长度的表示，我们能找到所有回文串的所有出现。但这样并不能看出哪些串是相同的，或者说统计每个回文串出现了多少次。

那么，我们希望有一个结构，能够表示 S 所有的本质不同回文子串。

给定 S，我们构造一个数据结构，其中

- 每个节点对应 S 的一个回文子串。

接下来，我们考虑如何来构造这一结构，以及我们需要维护什么样的信息。

回文树——fail

给定 S，我们构造一个数据结构，其中

- 每个节点对应 S 的一个回文子串。

考虑增量构造：每次向后加入一个字符，然后更新新出现的回文子串。那么记当前处理的前缀为 $S[1:i]$，在加入第 $i+1$ 个字符后，会多出来哪些回文串？

加入的回文串一定形如 $S[j:i+1]$。但这样的回文串都对应了一个以 i 结尾的回文串 $S[j+1:i]$。因此，找出以 i 结尾的回文串，然后看哪些可以扩展到 $i+1$，我们就能知道加入 $i+1$ 可能新增的回文串。

回文树——fail

给定 S，我们构造一个数据结构，其中

- 每个节点对应 S 的一个回文子串。

考虑增量构造：每次向后加入一个字符，然后更新新出现的回文子串。那么记当前处理的前缀为 $S[1:i]$，在加入第 $i+1$ 个字符后，会多出来哪些回文串?

加入的回文串一定形如 $S[j:i+1]$。但这样的回文串都对应了一个以 i 结尾的回文串 $S[j+1:i]$。因此，找出以 i 结尾的回文串，然后看哪些可以扩展到 $i+1$，我们就能知道加入 $i+1$ 可能新增的回文串。

我们需要知道 $S[1:i]$ 的所有回文后缀。学习 KMP 的思路，我们定义：

- 对于每个节点，$fail_u$ 表示它的最长回文后缀。

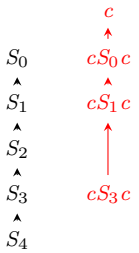
类似地，我们记录当前整串的最长回文后缀，从这里沿着 fail 走可以得到所有的回文后缀。

回文树——fail

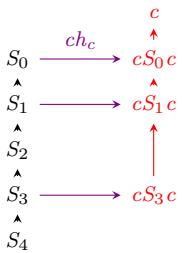
给定 S，我们构造一个数据结构，其中

- 每个节点对应 S 的一个回文子串。
- 对于每个节点，$fail_u$ 表示它的最长回文后缀。

维护当前的最长回文后缀。加入新字符后，我们可以像这样求出新加入字符涉及到的回文串(链接表示 fail)：



回文树——ch



此时右边是加入新字符后所有的后缀回文串。但还需要去重：我们需要判断每一个扩展出来的 cS_ic 是新出现的回文串，还是之前就有的。

为了去重，我们定义 $ch_{u,c}$ 表示向 u 对应字符串两侧扩展字符 c 后，在回文串上对应的字符串。那么只需要看是否之前就存在 $ch_{S_i,c}$。更新 ch 只需要加入新节点 cS_ic 的时候，把 $ch_{S_i,c}$ 连过去。

回文树——构造

给定 S，我们构造一个数据结构，其中

- 每个节点对应 S 的一个回文子串。
- 对于每个节点，$fail_u$ 表示它的最长回文后缀，然后
- $ch_{u,c}$ 表示向 u 对应字符串两侧扩展字符 c 后，在回文串上对应的字符串。

刚才的分析已经给出了一个构造方式：沿着 fail 向上找到当前所有回文后缀，看每一个能否向后扩展；对可以扩展的，用 ch 看是否需要加新的点；然后把 ch 连到扩展后的部分，再在扩展后的部分之间连 fail（它们是所有新的回文后缀）。

回文树——构造

给定 S，我们构造一个数据结构，其中

- 每个节点对应 S 的一个回文子串。
- 对于每个节点，$fail_u$ 表示它的最长回文后缀，然后
- $ch_{u,c}$ 表示向 u 对应字符串两侧扩展字符 c 后，在回文串上对应的字符串。

刚才的分析已经给出了一个构造方式：沿着 fail 向上找到当前所有回文后缀，看每一个能否向后扩展；对可以扩展的，用 ch 看是否需要加新的点；然后把 ch 连到扩展后的部分，再在扩展后的部分之间连 fail（它们是所有新的回文后缀）。

直接这样看好像复杂度不一定对。但回文串保证了一个关键性质：

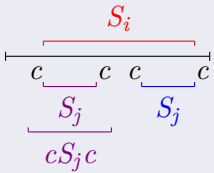
记向上跳到的第一个能扩展的回文后缀为 S_i，扩展后为 cS_ic。则对于之后所有可以扩展的后缀 S_j，它们的扩展 cS_jc 一定之前就已经存在。

回文树——构造

结论

记向上跳到的第一个能扩展的回文后缀为 S_i，扩展后为 cS_ic。则对于之后所有可以扩展的后缀 S_j，它们的扩展 cS_jc 一定之前就已经存在。

证明

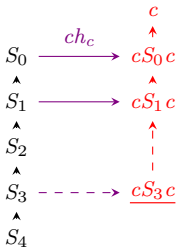


回文树——构造

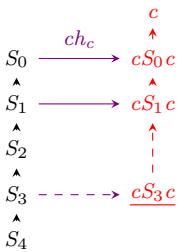
结论

记向上跳到的第一个能扩展的回文后缀为 S_i，扩展后为 cS_ic。则对于之后所有可以扩展的后缀 S_j，它们的扩展 cS_jc 一定之前就已经存在。

换言之，只需要修改标注的两条线，cS_1c 向上都不需要再改。



回文树——构造



更新时，向上跳到第一个可以扩展的 S_i，此时

- 如果 cS_ic（$ch_{S_i,c}$）存在，那么上面的部分一定之前构造过了，只需要更新最长回文后缀。
- 否则，再向上找到第二个可以扩展的 S_j，此时 cS_jc 必然存在，并且上面都构造好了。只需要把新建 cS_ic 的 fail 更新为 cS_jc。同时更新 $ch_{S_i,c}$。

回文树——构造

回文树——构造

从最长回文后缀开始，向上跳到第一个可以扩展的 S_i，此时

- 如果 cS_ic（$ch_{S_i,c}$）存在，那么上面的部分一定之前构造过了，只需要更新最长回文后缀。
- 否则，再向上找到第二个可以扩展的 S_j，此时 cS_jc 必然存在，并且上面都构造好了。只需要把新建 cS_ic 的 fail 更新为 cS_jc。同时更新 $ch_{S_i,c}$。

需要判断一个串是否能扩展。但此时找到的 S_i 都是当前的后缀，因此只需要记录每个点的长度 len 即可判断。

回文树——构造

回文树——构造

从最长回文后缀开始，向上跳到第一个可以扩展的 S_i，此时

- 如果 cS_ic（$ch_{S_i,c}$）存在，那么上面的部分一定之前构造过了，只需要更新最长回文后缀。
- 否则，再向上找到第二个可以扩展的 S_j，此时 cS_jc 必然存在，并且上面都构造好了。只需要把新建 cS_ic 的 fail 更新为 cS_jc。同时更新 $ch_{S_i,c}$。

需要判断一个串是否能扩展。但此时找到的 S_i 都是当前的后缀，因此只需要记录每个点的长度 len 即可判断。

但还有一个小问题——假设现在往上跳到了空串，那么空串也可以扩展回文串。但空串向两侧扩展字符 c，得到 c 还是 cc?

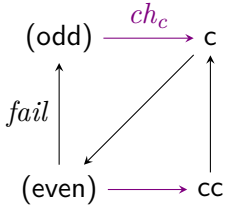
事实上两个应该被考虑。因此我们定义两个奇偶节点，分别考虑这两种情况。

回文树——奇偶节点

定义两个表示空串的节点——奇节点与偶节点。唯一的区别是，奇节点的 ch_c 指向字符串 c，而偶节点的 ch_c 指向字符串 cc。

巧妙的实现方式是，结合用 len 判是否扩展（$S_i = S_{i-len_u-1}$），然后偶节点 $len = 0$，奇节点 $len = -1$。

我们希望向上跳 fail 的时候这两种转移都要考虑，可以实现成如下方式：指向空串的 fail 都指向偶节点，然后偶节点 fail 指向奇节点。



回文树——参考实现

不存在的 fail 连到偶节点/二次跳 fail 不存在的情况需要注意。这里巧妙地避开了所有问题。

```
void init(){fail[0]=fail[1]=1;len[1]=-1;las=1;ct=1;}
void insert(int s,int c)
{
  while(st[s]!=st[s-len[las]-1])las=fail[las];
  if(ch[las][c])las=ch[las][c];
  else
  {
    int s1=++ct,tp=fail[las];
    while(st[s]!=st[s-len[tp]-1])tp=fail[tp];
    fail[s1]=ch[tp][c];ch[las][c]=s1;len[s1]=len[las]+2;las=ct;
  }
}
```

回文树——基本性质

有一些性质：

结论 1

任意串最多只有 n 个本质不同的回文子串。

证明：在上述构造中，每次加一个字符我们最多加一个点。

结论 2

上述构造的复杂度是 $O(n)$。

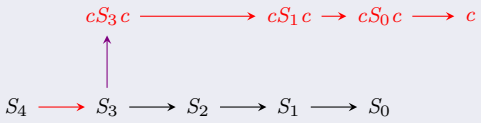
回文树——复杂度证明

线性复杂度证明

每次更新的过程是，从最长回文后缀开始往上跳 fail 直到可以扩展。如果那里 ch_c 已经存在了就直接接过去，否则加一个点，然后向上跳到第二个可以扩展的点来更新 fail。

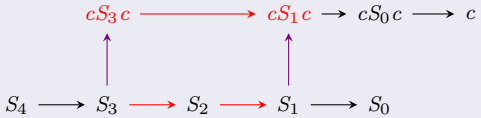
进行势能分析。我们定义势能 ϕ 为当前记录的最长回文后缀节点在 fail 树上的高度。此时，

- 向上跳 fail 的步骤，每次跳 ϕ 减一，可以均摊分析。
- 然后考虑跳 ch_c 的一步。沿着 fail 向上跳是遍历当前的所有回文后缀。那么根据之前的分析，加一个 c 之后的回文后缀都是先前的回文后缀——最多多一个 1 或 2 字符的。



回文树——复杂度证明

线性复杂度证明 Part 2



最后一步是，如果我们加了新点，那还需要沿着原来的 fail 向上找到第二个能扩展的，然后把 fail 接过去。

此时每跳一步，就会说明 ϕ 又减了 1：这部分跳过的在新 fail 上都没有了。

因此除去 $O(1)$ 步外，剩下的步骤都被势能抵消了，从而均摊复杂度 $O(n)$。

回文树——回文自动机

回文树

给定 S，我们构造一个数据结构，每个节点对应 S 的一个回文子串。对于每个点，我们维护

- len_u 表示这个点对应串的长度，然后
- $fail_u$ 表示它的最长回文后缀，以及
- $ch_{u,c}$ 表示向两侧加入 c 后对应的串（如果那还是 S 的子串）

这样，我们就维护了 S 所有本质不同回文子串之间的一个结构。fail 表示了这些子串之间的一个后缀关系。ch 表示了向外扩展的关系。

不简单的练习题：Virus Synthesis。

回文树——回文自动机

回文树

给定 S，我们构造一个数据结构，每个节点对应 S 的一个回文子串。对于每个点，我们维护

- len_u 表示这个点对应串的长度，然后
- $fail_u$ 表示它的最长回文后缀，以及
- $ch_{u,c}$ 表示向两侧加入 c 后对应的串（如果那还是 S 的子串）

沿着 ch 走，可以支持读入一个回文串，判断它是不是 S 的子串。因此这也被称作回文自动机。

注意这个和一般自动机读字符的顺序不一样。

回文树——出现位置/Occ

Occ 是出现位置的简写。

回文树直接给出了 S 中所有的本质不同子串。但在处理 S 中问题时，我们不仅希望知道这些串，还希望把它们和 S 关联起来——或者说，求出每个回文串在 S 中出现在了哪里。

$Occ(T)$ 表示 T 在 S 中出现的位置构成的集合。视情况不同，我们可能使用出现的开头或结尾位置表示它。

怎么知道 Occ 呢?

回文树——出现位置/Occ

Occ 是出现位置的简写。

回文树直接给出了 S 中所有的本质不同子串。但在处理 S 中问题时，我们不仅希望知道这些串，还希望把它们和 S 关联起来——或者说，求出每个回文串在 S 中出现在了哪里。

$Occ(T)$ 表示 T 在 S 中出现的位置构成的集合。视情况不同，我们可能使用出现的开头或结尾位置表示它。

怎么知道 Occ 呢？ 我们在构造的时候，每一步维护了当前前缀的最长回文后缀 las_i，并且说，沿着 fail 跳就可以得到它的所有回文后缀。

注意到，出现次数等于“它是多少个后缀的前缀”。那么从每一个 las_i 开始沿着 fail 树向上跳，将经过的点出现次数 $+1$，最后就得到了所有串的出现次数。换言之：

记 las_i 是 $S[1:i]$ 的最长回文后缀。回文树上一个点 u 对应串在 S 中的所有出现位置（结束位置）即为 fail 树上 u 子树内包含的所有 las_i 对应下标。

回文树——Occ

记 las_i 是 $S[1:i]$ 的最长回文后缀。回文树上一个点 u 对应串在 S 中的所有出现位置（结束位置）即为 fail 树上 u 子树内包含的所有 las_i 对应下标。

维护出现次数的板子：

回文串

给定 S，求其回文子串中最大的 $|T| \cdot |Occ(T)|$。

快乐的 JYY

给定 S, T，对所有回文子串 A 求和 $|Occ_S(A)| \cdot |Occ_T(A)|$。

可以拼在一起跑回文树，也可以两边分别建回文树，然后用自动机的手法，通过 ch 一起遍历所有公共回文串，~~当然你还可以 Hash 找公共回文串~~。

回文树——Occ

记 las_i 是 $S[1:i]$ 的最长回文后缀。回文树上一个点 u 对应串在 S 中的所有出现位置（结束位置）即为 fail 树上 u 子树内包含的所有 las_i 对应下标。

还可以维护出每个点的所有出现位置，例如使用线段树合并。然后可以做很多出现位置相关的查询。

但好像很少有这样的题目，原因可能是大家更愿意出后缀树。那里的题目都可以复制到回文串的情况下，甚至这个也可以。

回文树——扩展

双向插入回文树

如题，现在还需要支持向前加入字符。

和下一章的情况不同，这实际上是一个脑筋急转弯。

回文树——扩展

双向插入回文树

如题，现在还需要支持向前加入字符。

和下一章的情况不同，这实际上是一个脑筋急转弯。

在向后加入时，我们维护 $fail_u$ 表示回文串 u 的最长非平凡回文后缀。向外扩展的 ch 显然是一个对称的东西。如果改成向前，直接镜像的话，我们希望 $fail_u$ 表示 u 的最长非平凡回文前缀... ...

回文树——扩展

双向插入回文树

如题，现在还需要支持向前加入字符。

和下一章的情况不同，这实际上是一个脑筋急转弯。

在向后加入时，我们维护 $fail_u$ 表示回文串 u 的最长非平凡回文后缀。向外扩展的 ch 显然是一个对称的东西。如果改成向前，直接镜像的话，我们希望 $fail_u$ 表示 u 的最长非平凡回文前缀... ...

但因为 u 是回文串，所以非平凡的最长回文前缀当然就是最长回文后缀。所以直接用同一个 fail 做双向的插入就可以了。唯一改变的是，插入还需要记录整个串的最长回文后缀。同时记录最长回文前缀/后缀即可。

Palindromi

有 n 个串，每次拼接两个串，然后问拼接后串的本质不同回文子串数量。

回文树——进阶应用

在准备讲课之前我并没有学过这个东西，不过我昨天晚上现编了一些。此内容原本不在范围内，但听说有人水平较高，所以如果前面内容对你过于简单，我可以现场开始无 ppt 展示。

回文树——进阶应用

在准备讲课之前我并没有学过这个东西，不过我昨天晚上现编了一些。此内容原本不在范围内，但听说有人水平较高，所以如果前面内容对你过于简单，我可以现场开始无 ppt 展示。

刚才的 Occ 主要告诉了我们一个子串的出现位置。另一个方向是，一个位置有哪些相关的子串。

Palindrome Partition，经过一个人类智慧变换

求把 S 划分为一些回文串的方案数。

显然考虑 dp_i 表示当前划分到前缀 i。那么 dp_i 需要从所有划分掉 $S[1:i]$ 的一个回文后缀的地方转移。但如果你只看回文树，这样转移还是 $O(n^2)$ 的。

有一些 border 相关性质使得这个题能做。

分界线

休息 20 小时后继续。

目录

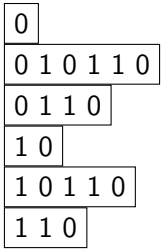
后缀数据结构

之前的一些算法，例如 KMP 和 AC 自动机，都是维护了一些串中所有前缀的信息。这就是为什么我写了个前缀数据结构在那，实际上应该没有这个名字。

如果我们能对一个串的所有后缀做类似的事，那我们就能维护一个串所有后缀的前缀信息，即所有的子串信息。因此后缀数据结构是一种解决子串问题的有效方案。

后缀数组

定义：将一个串的所有后缀按照字典序排序。



记号约定

- sa_i 表示第 i 小的后缀是谁。
- rk_i 表示第 i 个后缀的顺序。

后缀数组——倍增做法

~~二分+hash~~

经典的倍增求法：

- 在第 0 轮，求出每个后缀只保留至多前 1 个字符后的排序结果。
- 在第 i 轮，求出每个后缀只保留至多前 2^i 个字符的排序结果。

后缀数组——倍增做法

~~二分+hash~~

经典的倍增求法：

- 在第 0 轮，求出每个后缀只保留至多前 1 个字符后的排序结果。
- 在第 i 轮，求出每个后缀只保留至多前 2^i 个字符的排序结果。

对单个字符排序是简单的：桶排序。

```
for(int i=1;i<=n;i++)ct[i]=0;
for(int i=1;i<=n;i++)ct[s[i]]++;
for(int i=1;i<=n;i++)ct[i]+=ct[i-1];
for(int i=n;i>=1;i--)sa[ct[s[i]]--]=i;//rk[i]=ct[s[i]]--;
```

那第二轮，对两个字符排序呢？

后缀数组——基数排序

现在考虑对 n 个长度为 2 的字符串按照字典序排序，每个串记作 (a_i, b_i)。

需要的性质：按照 a_i 排序，a_i 相同时按照 b_i 排序……

```
for(int i=n;i>=1;i--)sa[ct[s[i]]--]=i;//rk[i]=ct[s[i]]--;
```

桶排序的性质：a_i 相同时，按照最后遍历顺序的倒序排序。从而我们可以

基数排序

首先按照 b_i 做一轮桶排序。然后按照 a_i 做桶排序，但在最后一步时按照上一轮结果**倒序**遍历。

后缀数组——倍增

- 在第 0 轮，求出每个后缀只保留至多前 1 个字符后的排序结果。
- 在第 i 轮，求出每个后缀只保留至多前 2^i 个字符的排序结果。

在第 i 轮，我们对每个后缀的前 2^i 个字符进行了排序。然后考虑第 $i+1$ 轮，对前 2^{i+1} 个字符排序... ...

$S[j:]$ 的前 2^{i+1} 个字符由两段 2^i 组成，其一是 $S[j:]$ 的前 2^i 个字符，其二是 $S[j+2^i:]$ 的前 2^i 个字符。因此，如果我们对每个长度为 2^i 的子串排序后得到了当前的 sa，那下一步只需要对所有 (rk_j, rk_{j+2^i})[5] 排序。用刚才的基数排序即可。

[5]如果超出边界，那后半是空串，字典序最小

后缀数组——去重

有一个细节问题：按照上面的方法倍增时，如果两个长度为 2^i 的串完全相同，则它们的 rk 也应该相同。但桶排序不满足这件事。

因此需要一个去重步骤：得到新的 sa/rk 后，依次看相邻两个串是否完全相同，相同就合并 rk。这就是判断两个 (rk_j, rk_{j+2^i}) 是否相同。

每一轮复杂度 $O(n)$，总复杂度 $O(n \log n)$。

后缀数组——去重

有一个细节问题：按照上面的方法倍增时，如果两个长度为 2^i 的串完全相同，则它们的 rk 也应该相同。但桶排序不满足这件事。

因此需要一个去重步骤：得到新的 sa/rk 后，依次看相邻两个串是否完全相同，相同就合并 rk。这就是判断两个 (rk_j, rk_{j+2^i}) 是否相同。

每一轮复杂度 $O(n)$，总复杂度 $O(n \log n)$。

常见实现细节：基数排序的第一步是按照 rk_{j+2^i} 基数排序，相当于将位置 j 按照 $j+2^i$ 向后长度 2^i 的子串排序。因此如果之前求 rk 的时候也记录了 sa，那么可以简化这一轮：

```
for(int i=n-l+1;i<=n;i++)b[++ct]=i;
for(int i=1;i<=n;i++)if(sa[i]>l)b[++ct]=sa[i]-l;
```

后缀数组——扩展

- 如果一开始字符集特大，可以先排序一次让字符集变回 $[n]$。
- 如果多个串一起做（常见 LCP 题目），简单做法是往中间加特殊分隔符。注意最好不要加相同分隔符。
- 上述问题还有更好的解决方法：事实上我们可以对一个 Trie 状物做后缀排序：给一个 Trie，每个点对应它出发向上到根的串，然后给这些排序。做法和之前的倍增一样——第 i 轮，我们对每个点向上的路径的前 2^i 位进行排序，然后两个 2^i 组合 2^{i+1}（模板）。
- 特例：如果是个环（例如字符加密），那么按照经典方法，复制两遍做即可考虑所有环后缀。
- 存在复杂度更好的算法，例如 SA-IS 与 DC3。如果你感兴趣可以自行学习，因为我不会。

后缀数组——height

将后缀排序给出了一些信息，但有些时候我们希望更多的信息。

例如，SA 可以直接比较两个后缀的字典序。但如果我们想要比较两个子串，此时直接比较后缀字典序的话，无法判断是否相等。

因此，我们希望记录相邻两个后缀比较时，比较到什么时候变得不同。据此，我们定义：

SA——height

height 表示 SA 中相邻两个后缀的公共前缀长度，即

$$height_i = LCP(S[sa_i :], S[sa_{i+1} :])$$

后缀数组——height 计算

SA——height

height 表示 SA 中相邻两个后缀的公共前缀长度，即

$$height_i = LCP(S[sa_i :], S[sa_{i+1} :])$$

~~二分+hash~~

结论

$$height_{rk_{i+1}} \geq height_{rk_i} - 1$$

人话：$S[i+1:]$ 和其字典序下一个后缀的 LCP 长度最多比 $S[i:]$ 与其下一个的 LCP 长度少 1。

证明：不妨设排序后，$S[i:]$ 的下一个是 $S[j:]$，则 $S[j:]$ 字典序大于 $S[i:]$。如果这个 LCP 长度至少是 1，那么比较下一位，$S[j+1:]$ 字典序也大于 $S[i+1:]$，且这个 LCP 长度只比之前少 1。因此位置 $i+1$ 对应的 height 至多比位置 i 对应的 height 少 1。

后缀数组——height 计算

SA——height

height 表示 SA 中相邻两个后缀的公共前缀长度，即

$$height_i = LCP(S[sa_i :], S[sa_{i+1} :])$$

结论

$$height_{rk_{i+1}} \geq height_{rk_i} - 1$$

人话：$S[i+1:]$ 和其字典序下一个后缀的 LCP 长度最多比 $S[i:]$ 与其下一个的 LCP 长度少 1。

那么有如下线性做法：

依次求 $height_{rk_i}$，即后缀 i 和字典序下一个的 LCP。每次从上一个长度（$height_{rk_{i-1}}$）减一开始贪心向后匹配。

后缀数组——height 视角

将所有后缀字典序排序，求出相邻后缀的 LCP 长度作为 height。

基础小练习：

- 不重复地找到所有本质不同子串。

所有子串即为所有后缀的前缀。

后缀数组——height 视角

将所有后缀字典序排序，求出相邻后缀的 LCP 长度作为 height。

基础小练习：

- 不重复地找到所有本质不同子串。

所有子串即为所有后缀的前缀。现在按字典序加入每个后缀的前缀，考虑重复了多少。与字典序上一个后缀的 LCP 部分内都是重复的，但之后部分都比前面字典序大。因此这个后缀带来的本质不同子串正是其所有长度大于当前 height 的前缀。答案是 $\frac{1}{2}n(n+1) - \sum height_i$。

弦论 Task 1

求第 k 小本质不同子串。

刚才提到，每次加进来的部分字典序都比之前大。

后缀数组——height 视角

所有子串即为所有后缀的前缀。现在按字典序加入每个后缀的前缀，考虑重复了多少。与字典序上一个后缀的 LCP 部分内都是重复的，但之后部分都比前面字典序大。因此这个后缀带来的本质不同子串正是其所有长度大于当前 height 的前缀。

因此本质不同子串可以用 n 组 (s, l, r) 表示，其中每一组表示以 s 开头，在 $[l, r]$ 间结尾的所有子串。然后不仅可以做本质不同子串计数，还可以对本质不同子串求和一些别的东西 (例：每种字符有个权值，求总和非负的本质不同子串数量)

后缀数组——LCP

将所有后缀字典序排序，求出相邻后缀的 LCP 长度作为 height。

那任意两个后缀的 LCP 呢？ 因为是字典序排序，有如下结论：

将后缀按字典序排序后，两串 LCP 即为它们中间所有的 height 最小值。

证明：因为 LCP 可以传递（$LCP(a,b) \geq \min(LCP(a,c), LCP(b,c))$），所以 LCP 至少是这个值。又因为是字典序，所以如果相邻两串某个字符不同，那么跨越这里的两个串要么之前就有不同的，要么之前相同，但这个字符必然不同。

这样就把 LCP 变成了区间 $\min$，一个序列上的问题。

后缀数组——LCP

将所有后缀字典序排序，求出相邻后缀的 LCP 长度作为 height。
将后缀按字典序排序后，两串 LCP 即为它们中间所有的 height 最小值。

很有用的工具：使用 ST 表预处理即可 $O(1)$ 算两后缀的 LCP。

另一个很有用的工具：比较两个子串的字典序。看一下两个后缀的字典序顺序，再用两个后缀的 LCP 判断是否相等。

后缀数组——LCP

将所有后缀字典序排序，求出相邻后缀的 LCP 长度作为 height。
将后缀按字典序排序后，两串 LCP 即为它们中间所有的 height 最小值。

- 求两串最长公共子串。

后缀数组——LCP

将所有后缀字典序排序，求出相邻后缀的 LCP 长度作为 height。
将后缀按字典序排序后，两串 LCP 即为它们中间所有的 height 最小值。

- 求两串最长公共子串。

相当于在两边各选一个后缀，最大化 LCP。那么一定是 SA 里面相邻的两个。

后缀数组——LCP

将所有后缀字典序排序，求出相邻后缀的 LCP 长度作为 height。
将后缀按字典序排序后，两串 LCP 即为它们中间所有的 height 最小值。

生成魔咒

求出每个前缀内的本质不同子串数。

后缀数组——LCP

将所有后缀字典序排序，求出相邻后缀的 LCP 长度作为 height。
将后缀按字典序排序后，两串 LCP 即为它们中间所有的 height 最小值。

生成魔咒

求出每个前缀内的本质不同子串数。

这不怎么后缀，所以**倒过来**，变成求每个后缀的答案。

根据之前所说，本质不同子串数就是把后缀拿出来排序，然后减去相邻的 height(LCP)。

那求每个后缀的答案相当于不断加后缀，然后维护排序后相邻后缀 LCP 之和。先给所有后缀排序，然后依次加入后缀，维护顺序。每插入一个就重新求相邻后缀的 LCP。

后缀数组——LCP/区间 min

将后缀按字典序排序后，两个后缀的 LCP 长度就是 height 的区间 $\min$。

LCP 是 height 的区间 $\min$。这样的序列问题我们有很多处理方式：

差异

求 $\sum_{i<j} LCP(S[i:], S[j:])$.

后缀数组——LCP/区间 min

将后缀按字典序排序后，两个后缀的 LCP 长度就是 height 的区间 $\min$。

LCP 是 height 的区间 $\min$。这样的序列问题我们有很多处理方式：

差异

求 $\sum_{i<j} LCP(S[i:], S[j:])$.

等价于 height 上的所有区间 $\min$ 求和。单调栈。

品酒大会

对每个 i，求有多少对后缀的 LCP 至少是 i。

后缀数组——LCP/区间 min

将后缀按字典序排序后，两个后缀的 LCP 长度就是 height 的区间 $\min$。

LCP 是 height 的区间 $\min$。这样的序列问题我们有很多处理方式：

差异

求 $\sum_{i<j} LCP(S[i:], S[j:])$.

等价于 height 上的所有区间 $\min$ 求和。单调栈。

品酒大会

对每个 i，求有多少对后缀的 LCP 至少是 i。

那么就是求有多少个区间最小值至少是 i。一种做法是笛卡尔树。

后缀数组——LCP/区间 $\min$

将后缀按字典序排序后，两个后缀的 LCP 长度就是 height 的区间 $\min$。

字符串

给一个串 S，多次询问，每次问 $S[a:b]$ 中任选一个子串，它和 $S[c:d]$ 的 LCP 的最大值。

两个子串的 LCP 几乎是后缀的 LCP——但如果长度不够就需要截断。

后缀数组——LCP/区间 min

将后缀按字典序排序后，两个后缀的 LCP 长度就是 height 的区间 $\min$。

字符串

给一个串 S，多次询问，每次问 $S[a:b]$ 中任选一个子串，它和 $S[c:d]$ 的 LCP 的最大值。

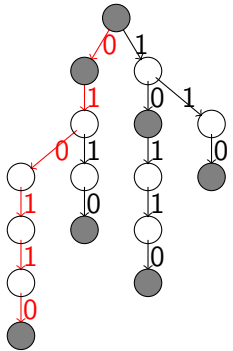
两个子串的 LCP 几乎是后缀的 LCP——但如果长度不够就需要截断。

为了不考虑截断，二分答案：假设判定答案是否至少是 k，那么只能在左侧选 $[a, b-k+1]$ 开头的后缀，问它们里面有没有一个和 c 开头的后缀 LCP 至少是 k。

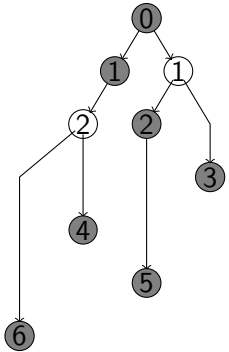
因为 LCP 是区间 $\min$，所以满足后一个条件的是 sa 上的一段区间。即询问序列区间中有没有某个值域区间中的数。一种做法是可持久化线段树。

后缀树

Trie 里面记录了所有输入 Trie 的前缀。为了维护子串信息，我们将所有后缀放入 Trie... ...



Suffix Trie



Suffix Tree

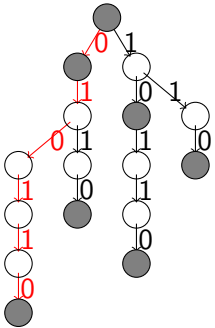
为了压缩，我们只需要保留后缀节点构成的虚树，以及虚树上每个节点的串长，记作 len_u。

后缀 Trie——更新

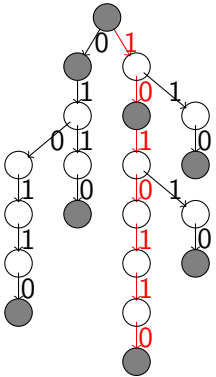
如何构造？ 考虑依次插入字符。加入字符后，我们需要更新后缀的 Trie。

向后插入？ 所有后缀都会变化，不太可行。

因此我们向前插入，加入一个后缀。



Before: S

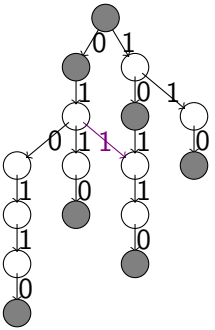


Insert 1: cS

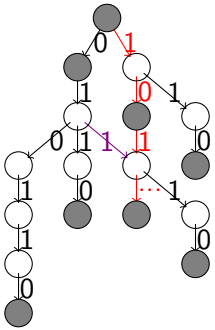
后缀 Trie——front

为此，我们需要在 Trie 上定位新加入的后缀... ... 这需要一些工具。

如果我们知道 $front_{u,c}$，表示节点 u **向前**加入字符 c 后所对应的后缀树节点，那就很简单了。



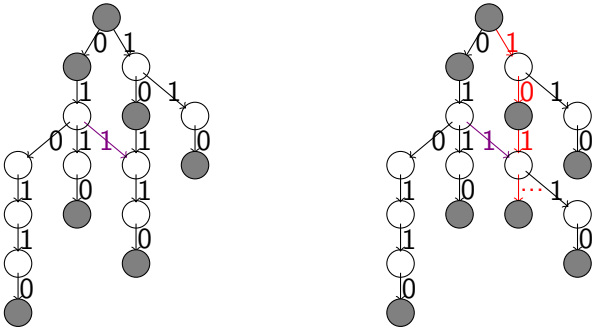
Using $front_1$



After: cS

后缀 Trie——更新 Trie

$front_{u,c}$ 表示节点 u **向前**加入字符 c 后所对应的后缀树节点。



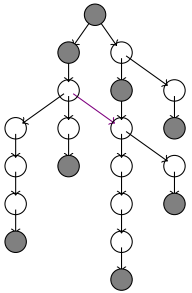
后缀树——更新 Trie

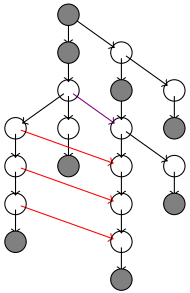
从整串 (S) 节点开始，向上找到第一个 $front_c$ 存在的节点，从指向的 $front_c$ 向下建新的链。

后缀 Trie——更新 front

$front_{u,c}$ 表示节点 u **向前**加入字符 c 后所对应的后缀树节点。

然后需要根据新加入的点更新 $front$。新加入的子串是 cS 的一些前缀。所以能 $front_c$ 转移到它的……正是 S 的一些前缀，向上找经过的那些。



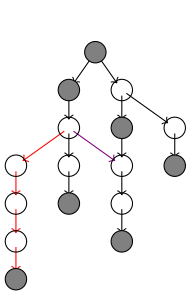


由于被 latex 击败，这里省略了最后一条 front

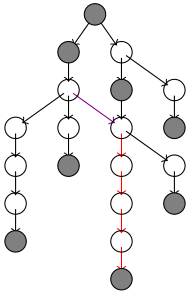
后缀 Trie——更新

因此更新只需要如下几步：记录 S 对应的节点，加入字符 c 时：

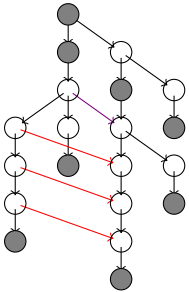
- 从 S 沿着树边向上，直到第一个 $front_c$ 存在的节点（或回到根）停止。
- 从该节点对应的 $front_c$ 开始向下建一条链，对应新加入的串。
- 将第一步向上走过部分的 $front_c$ 对应连向新加入部分。



Search



Insert



Update front

后缀 Trie

后缀 Trie

将 S 所有后缀加入 Trie，每个节点表示一个后缀的前缀，即 S 的一个子串。对于每个节点：

- fa_u 表示其在 Trie 树上的父亲节点。
- $front_{u,c}$ 表示其**向前**加入字符 c 后对应的节点。

后缀 Trie——构造

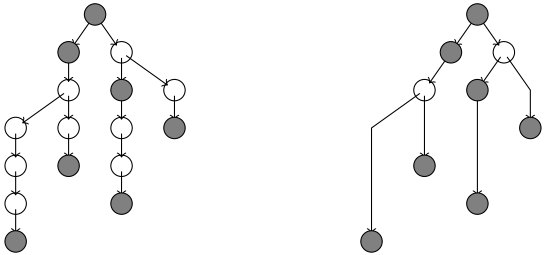
记录 S 对应的节点，加入字符 c 时：

- 从 S 沿着树边向上，直到第一个 $front_c$ 存在的节点（或回到根）停止。
- （更新 Trie）从该节点对应的 $front_c$ 开始向下建一条链，对应新加入的串。
- （更新 front）将第一步向上走过部分的 $front_c$ 对应连向新加入部分。

现在，把这些东西放到真正的后缀树上。

后缀 Trie $\rightarrow$ 树

真正的后缀树是后缀 Trie 的虚树。因此我们可以考虑使用上面的更新方式。唯一的区别是，一些链被压缩了起来。



压缩有什么影响？ 首先考虑压缩 $front$。好消息，没有影响：

一个压缩节点中，对于每一个 c，其中所有指向的 $front_c$ 在同一个压缩节点内。

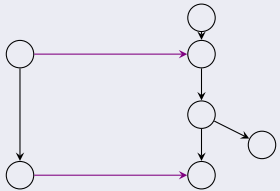
后缀 Trie $\rightarrow$ 树

结论

一个压缩节点中，对于每一个 c，其中所有指向的 $front_c$ 在同一个压缩节点内。

证明

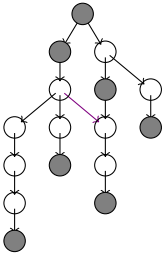
如果矛盾，一定出现了下图中的情况：



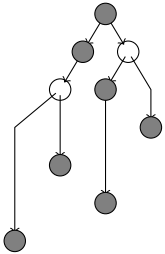
但这样的话，左边对应位置分叉的串也应该存在——右侧是左侧在前缀加一个字符的结果。

后缀树——更新

还有什么步骤中，压缩会导致问题?



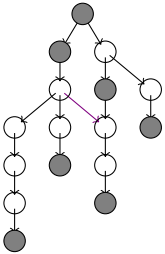
Uncompressed



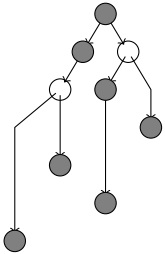
Compressed

后缀树——更新

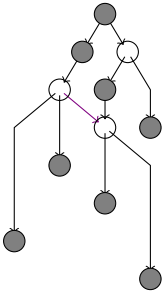
还有什么步骤中，压缩会导致问题？



Uncompressed



Compressed

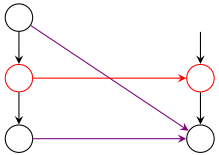


Node Split

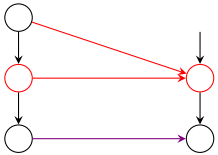
唯一的问题：可能找到的 $front$ 指向压缩节点的中间。此时应当拆点。

后缀树——拆点

那么拆点，会发生什么？



Before



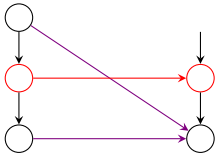
After

可能有一些连向被拆点的 front 转移。拆点之后我们需要把这其中的一些改为指向新的点。那么，哪些 front 应该指向拆出来的点？

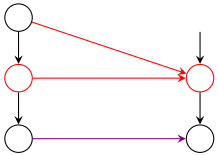
[6]理论上应当按照 len 分，但此时 len 更大的先前都没有这条 front。

后缀树——拆点

那么拆点，会发生什么？



Before



After

可能有一些连向被拆点的 front 转移。拆点之后我们需要把这其中的一些改为指向新的点。那么，哪些 front 应该指向拆出来的点？

拆出来的点是 cS 到根上的一段路径，那么里面的串是 cS 的前缀。那么 front 指向这里的一定是 S 的前缀。那是哪些前缀呢？ 正是那些指向被拆的点的。[6]

沿着左侧继续向上找到所有 $front_c$ 指向被拆的点的转移，全部换到新点上。

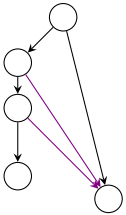
[6]理论上应当按照 len 分，但此时 len 更大的先前都没有这条 front。

后缀树——拆点更新

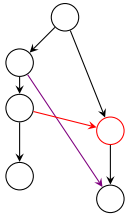
沿着左侧继续向上找到所有 $front_c$ 指向被拆的点的转移，全部换到新点上。

按照 len 考虑，如果往上走到了一个 $front_c$ 指向更小的串的位置，那么之后 $front_c$ 就不会再指回来了。因此不断向上更新，到不能更新时停止即可。

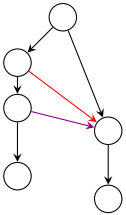
另一个图示：



Before



Split



Modify

后缀树——代码示例

```
int ch[N][26],len[N],fa[N],cnt;
int insert(int las,int c)
{
  int u=++ct;
  len[u]=len[las]+1;
  while(las&&!ch[las][c])ch[las][c]=u,las=fa[las];
  int v=ch[las][c];
  if(!las)fa[u]=1;
  else if(len[v]==len[las]+1)fa[u]=v;
  else {
    int cl=++ct;
    len[cl]=len[las]+1;fa[cl]=fa[v];
    for(int i=0;i<26;i++)ch[cl][i]=ch[v][i];
    fa[v]=fa[u]=cl;
    while(las&&ch[las][c]==v)ch[las][c]=cl,las=fa[las];
  }
  return u;
}
```

后缀树——复杂度分析

有如下结论[7]：

- 拆点次数不超过 n。
- 更新 $front$ 的总次数为 $O(n)$。
- 最后有效的 $front$ 数量为 $O(n)$。

常见字符集的情况下，经典实现是每次复制整个 $front$ 数组。前两个结论可以说明复杂度是 $O(n|\Sigma|)$。

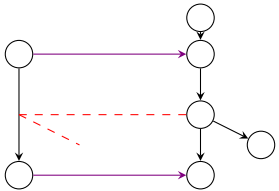
如果字符集很大，可以 map 实现转移。结合最后一个结论可以说明直接复制 map 复杂度也是 $O(n \log |\Sigma|)$。

[7]两处常数应该都不超过 3。

后缀树——更新次数证明

进行势能分析。定义势能 ϕ 为当前 S 对应节点在后缀树上的深度（压缩后）。分步考虑，

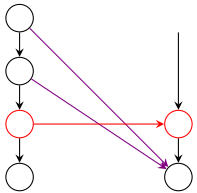
- 对于向上找 $front$ 的过程，每一步操作 ϕ 减一。
- 如果不需要拆点，可以证明跳到 $front$ 后 ϕ 最多加一：与之前的分析类似，沿 cS 向上遇到到每一个分叉在沿 S 向上时必定存在。这是因为，分叉对应字符串去掉开头的 c 就变成了 S 那边的情况。



后缀树——更新次数证明

最后是拆点后向上更新的情况。这段过程中，我们沿着 S 向上继续修改，原因是它们都指向了另一边压缩后的节点。

那么此时每向上一步，都会使得跳过去后深度减一——对应的点被压缩掉了。



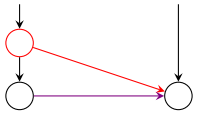
因此，除去跳 $front$ 的一步外，ϕ 加上总代价不会增加。跳的一步只影响常数。从而均摊复杂度为 $O(n)$。

后缀树——转移数量证明

现在我们证明最后有效 front 只有 $O(n)$ 个。由于拆点只会增加转移数量，且前面说明了其它更新只有 $O(n)$ 次，这样可以说明直接复制的拆点方式实际上只复制了 $O(n)$ 个东西。

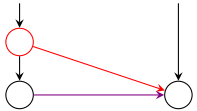
将转移分为两类：

- 没有经过压缩的（$len_v = len_u + 1$），这一类每个点只有一个入边，因此总共有 $O(n)$ 个。
- 经过压缩的，如下图：



此时，记红色节点对应串为 S，转移字符为 c。则这种情况说明：S 出现了很多次，使得它在后缀 Trie 上向下有分叉，但 cS 出现的次数更少，以至于没有分叉。

后缀树——转移数量证明



记红色节点对应串为 S，转移字符为 c。则这种情况说明：S 出现了很多次，使得它在后缀 Trie 上向下有分叉，但 cS 出现的次数更少，以至于没有分叉。

统计有多少转移 (S, cS) 满足 S 出现次数多于 cS 出现次数。考虑把整个串**倒过来**做，变成统计有多少 (S, Sc) 满足条件。

在倒过来的后缀 Trie 上，Sc 是 S 的儿子，即统计有多少儿子的子树大小小于父亲子树大小。答案即为虚树大小，因此也是 $O(n)$ 的[8] 。

[8]有一个常数更小的证明。

后缀树——扩展

- 如果对多个串做，那么仍然可以分隔符。
- 也可以考虑不用分隔符：这里每一步是找到一个串 S，然后加一个新的后缀 cS。因此也可以加完一个串重新加新的串。但有一个问题：之前每一步一定会向下拉一条新的链，原因是这个后缀最长。但现在不一定有这种情况，可能跳完 front 就不需要向下加一条链了，需要特判。
- 一个更好的处理方法是倒过来建 Trie，然后在这上面 bfs 往前加字符。这样就保证了每次加入的一定是当前最长的。
- 但按照上述方式，给一个 Trie 建 SAM 的复杂度似乎不是 Trie 大小的，可能与总串长有关。需要注意。

后缀树——LCP

给定后缀树，询问两个后缀的 LCP。

因为这是个 Trie，LCP 就是两个后缀在 Trie 上的 LCA（的 len）。

后缀树——LCP

给定后缀树，询问两个后缀的 LCP。

因为这是个 Trie，LCP 就是两个后缀在 Trie 上的 LCA（的 len）。

回顾一下 SA：

- 后缀数组将所有后缀排序，然后求出了相邻两个后缀的公共前缀长度。
- 后缀树将所有后缀插入 Trie，然后求出了树的结构。

这两个结构是等价的（区间 $\min$ 上笛卡尔树 $\leftrightarrow$ LCA 用 DFS 序）。在后缀树上 DFS 即可求出后缀排序与 height。对 height 求笛卡尔树即可得到后缀树。

后缀树——LCP

因此用 SA/height 能做的题用后缀树的 Trie 结构也能做：

差异

求 $\sum_{i<j} LCP(S[i:], S[j:])$.

品酒大会

对每个 i，求有多少对后缀的 LCP 至少是 i。

在每个点上统计 LCA 是这个点的答案。

后缀树相当于提供了另一个考虑 LCP 问题的视角。两种视角并不存在优劣之分，而是不同视角各自对一部分问题更直观。因此，实际问题需要灵活选择视角（例如，字符串 可能序列就比较直观。）

后缀树——LCP

树上视角小练习：

字符串

给两个串 a, b。对每个串，取它所有长度为 k 的子串（不去重），记得到的可重集为 A, B。对 A, B 做匹配，每一对的分数是两串 LCP。求最大分数。

后缀树——LCP

树上视角小练习：

字符串

给两个串 a, b。对每个串，取它所有长度为 k 的子串（不去重），记得到的可重集为 A, B。对 A, B 做匹配，每一对的分数是两串 LCP。求最大分数。

两个串一起建后缀树，然后相当于：两边各自有一些后缀做匹配，匹配的分数是 LCA 的深度 (len) 对 k 取 $\min$。

显然最优解是自下而上，子树内贪心匹配。

后缀树视角——Occ

给定后缀树上的一个节点[9]，其对应的串在 S 中出现了多少次?

这相当于，有多少个后缀包含它作为前缀。因此答案就是后缀树子树内的后缀节点数量。更一般地，

一个字符串在 S 中出现的所有起始位置[a]即为其子树中所有后缀的位置。

[a]常见实现会反过来建后缀树，此时相当于记录出现的所有结束位置。

维护这些位置，即可维护字符串在 S 中出现位置的信息。常见实现为启发式合并或（可持久化）线段树合并。

[9]常见情形是给出 l, r。由 l, r 定位子串的做法包括从 $S[l:]$ 开始倍增找到正确长度。

后缀树视角——Occ

一个字符串在 S 中出现的所有位置即为其子树中所有后缀的位置。

现在我们回顾一些经典操作：

求两串最长公共子串。

后缀树视角——Occ

一个字符串在 S 中出现的所有位置即为其子树中所有后缀的位置。

现在我们回顾一些经典操作：

求两串最长公共子串。

看哪些串的出现位置里面包含了两串的后缀。可以自然地做多串。

枚举本质不同子串。

后缀树视角——Occ

一个字符串在 S 中出现的所有位置即为其子树中所有后缀的位置。

现在我们回顾一些经典操作：

求两串最长公共子串。

看哪些串的出现位置里面包含了两串的后缀。可以自然地做多串。

枚举本质不同子串。

所有子串是所有后缀的前缀，即为后缀 Trie 上所有节点。那么取出压缩后后缀树的每个节点，其对应一组：从某个位置开始，长度在 $(len_{fa}, len_u]$ 内的子串。

更好的是，此时每一组对应一个节点，因此这一组中所有串的出现位置是相同的。因此可以做出现位置相关题目。

后缀树视角——Occ

所有本质不同子串按照节点分为多类，每一类表示为从某个位置开头，长度在 $[l, r]$ 之间。
每一类内的字符串，出现位置相同，都是其子树中所有后缀的位置。

甲苯先生和大中锋的字符串

统计在 S 中出现 k 次的子串数量/长度。

弦论 Task 2

求字典序第 k 小子串，重复出现算多次。

Trie 上按字典序遍历子串即为 DFS。记录每个点的出现次数即可。

后缀树视角——Occ

所有本质不同子串按照节点分为多类，每一类表示为从某个位置开头，长度在 $[l, r]$ 之间。
每一类内的字符串，出现位置相同，都是其子树中所有后缀的位置。

一道题

给一个串 S，求有多少个子串满足：

- 在 S 中覆盖这个子串的每一次出现后，正好覆盖了 k 个位置。

后缀树视角——Occ

所有本质不同子串按照节点分为多类，每一类表示为从某个位置开头，长度在 $[l, r]$ 之间。每一类内的字符串，出现位置相同，都是其子树中所有后缀的位置。

一道题

给一个串 S，求有多少个子串满足：

- 在 S 中覆盖这个子串的每一次出现后，正好覆盖了 k 个位置。

枚举节点，维护出现位置 Occ 的集合。覆盖相当于从每个位置开始向后覆盖那么多长度。容易发现覆盖数量即为 $\sum \min(len, occ_{i+1} - occ_i)$，其中 occ_{k+1} 定义为 $n+1$。

那么需要对每个节点维护出现位置 occ 的集合，以及其中相邻两位置的差构成的集合。可以对 occ 启发式合并，然后线段树合并所有差，再线段树二分找到每一组内正确的长度。

后缀树视角——Occ 扩展

一个字符串在 S 中出现的所有位置即为其子树中所有后缀的位置。

区间本质不同子串个数

如题

给定 $[l, r]$ 后，一个子串在其中出现，当且仅当其在 l 及之后的第一次出现位置（记作 recent）加上其长度不超过 r。

后缀树视角——Occ 扩展

一个字符串在 S 中出现的所有位置即为其子树中所有后缀的位置。

区间本质不同子串个数

如题

给定 $[l,r]$ 后，一个子串在其中出现，当且仅当其在 l 及之后的第一次出现位置（记作 recent）加上其长度不超过 r。

考虑从大到小枚举 l，然后在后缀树上维护每个串的 recent。那么每次减小 l 相当于把一个叶子到根的路径上 $recent = l$。

LCT。每次 access。

此时会得到若干条实链，每条链上 recent 相同，而它们对应的 len 是一段区间。因此每条链的贡献可以看成一个区间加，然后答案是 $\leq r$ 位置的前缀和。线段树维护。复杂度 $O(n \log^2 n)$。

后缀树——front

如果只用树边，那么它本质上还是和后缀数组一样的结构。你甚至可以直接拿 SA 建出后缀树的 Trie 结构。

但我们还有另一样东西——front。

后缀树 $\rightarrow$ 后缀自动机

回顾后缀树的结构：

- 每一个节点对应一些 S 的子串。具体来说，是从一个位置开始，长度在区间 $(height_{fa}, height_u]$ 间的那些串。
- 所有节点组成 Trie 树的结构，树上节点的父亲是它的前缀。
- 每个节点维护了 $front_c$，表示向前加入字符后字符串对应的节点。

现在 front 是向前加入，那如果我们反过来，对 S 的反串做后缀树呢？

后缀树 $\rightarrow$ 后缀自动机

回顾后缀树的结构：

- 每一个节点对应一些 S 的子串。具体来说，是从一个位置开始，长度在区间 $(height_{fa}, height_u]$ 间的那些串。
- 所有节点组成 Trie 树的结构，树上节点的父亲是它的前缀。
- 每个节点维护了 $front_c$，表示向前加入字符后字符串对应的节点。

现在 front 是向前加入，那如果我们反过来，对 S 的反串做后缀树呢？

- 每一个节点对应一些 S 的子串。现在是在某个位置结束，长度在一个区间内的串。
- 树上一个节点的父亲对应它的一个后缀。
- 每个节点维护 $next_c$，表示向后加入字符对应的节点。

后缀自动机——构造

后缀自动机

- 每一个节点对应一些 S 的子串。现在是在某个位置结束，长度在一个区间内的串。
- 树上一个节点的父亲对应它的一个后缀。
- 每个节点维护 $next_c$，表示向后加入字符对应的节点。

这只是把后缀树反过来，因此构造只需要沿用那个做法，但反过来插入字符。[10]

反过来之后，之前的东西仍然可以使用，但你需要反过来想：LCA 表示两个前缀的最长公共后缀。一个串的出现位置是它的子树内有多少前缀结点，然后这些对应了这个串的结束位置（因此它更经常被称为 endpos）。

那为什么要反过来呢？ 现在，next 变得更自然了。

[10]因为后缀树是从后向前，因此后缀自动机反而是从前向后。

为什么经常会反着建后缀树呢？ 因为经典教学方式是直接讲后缀自动机，再说反串后缀自动机就是后缀树。但我认为后缀树是更自然的表示。

后缀自动机——next

- 每一个节点对应一些 S 的子串。
- 每个节点维护 $next_c$，表示向后加入字符对应的节点。

沿着 next 走相当于，我们不断向一个串 T 的结尾加入字符，然后询问 T 还是不是 S 的子串。因此，沿着 next 走出的所有路径正对应 S 的所有子串。这就是一个接受 S 所有子串的自动机。

后缀自动机

沿着 next 转移能走出的所有字符串即为 S 的子串。

现在，回顾 自动机小练习。全文抄写可得：

多次询问，每次给一个 T，问 T 是不是 S 的子串。

后缀自动机

沿着 next 转移能走出的所有字符串即为 S 的子串。

现在，回顾 自动机小练习。全文抄写可得：

多次询问，每次给一个 T，问 T 是不是 S 的子串。

本质不同子串计数。

后缀自动机

沿着 next 转移能走出的所有字符串即为 S 的子串。

现在，回顾 自动机小练习。全文抄写可得：

多次询问，每次给一个 T，问 T 是不是 S 的子串。

本质不同子串计数。

字典序第 k 小本质不同子串。

后缀自动机

沿着 next 转移能走出的所有字符串即为 S 的子串。

继续回顾自动机小练习。

找到最短的不是 S 子串的串。

后缀自动机

沿着 next 转移能走出的所有字符串即为 S 的子串。

继续回顾自动机小练习。

找到最短的不是 S 子串的串。

dp_u 表示 u 向后至少需要几步才能走出自动机。

最短不公共子串

找到最短的串，使得它是 S 的子串/子序列，但不是 T 的子串/子序列。$n \leq 2000$。

后缀自动机

沿着 next 转移能走出的所有字符串即为 S 的子串。

继续回顾自动机小练习。

找到最短的不是 S 子串的串。

dp_u 表示 u 向后至少需要几步才能走出自动机。

最短不公共子串

找到最短的串，使得它是 S 的子串/子序列，但不是 T 的子串/子序列。$n \leq 2000$。

状态同时记录它在两个自动机上走到了哪里。

后缀自动机

沿着 next 转移能走出的所有字符串即为 S 的子串。

另一个自动机题目：

一道题

给定 S, T。求有多少个字符串能被表示为 $S_1 T_1$，使得 S_1 是 S 的子串，T_1 是 T 的子串。

计数可以先考虑判定。考虑判定一个串能否被这样表示。

后缀自动机

沿着 next 转移能走出的所有字符串即为 S 的子串。

另一个自动机题目：

一道题

给定 S, T。求有多少个字符串能被表示为 $S_1 T_1$，使得 S_1 是 S 的子串，T_1 是 T 的子串。

计数可以先考虑判定。考虑判定一个串能否被这样表示。子串的子串还是子串，所以可以贪心地把尽可能多地划分给 S_1。那么判定一个串是否合法的方式是：不断向后加字符直到当前前缀不是 S 的子串，然后判断剩下的部分是否是 T 的子串。

相当于，我们先走 S 的后缀自动机，在要走出去时跳到 T 的后缀自动机上继续。

这整体可以看成一个新的自动机。路径计数即可。

综合应用

后缀自动机

- 每一个节点对应一些 S 的子串。现在是在某个位置结束，长度在一个区间内的串。
- 树上一个节点的父亲对应它的一个后缀。
- 每个节点维护 $next_c$，表示向后加入字符对应的节点。

我们见过了用单独树边（后缀树）的题目，以及单独用转移边（后缀自动机）的题目，那么自然还有... ...

你的名字 Easy Version 的一步

给定 S, T。对于 T 的每一个前缀 $T[1:i]$，求出最小的 j 使得 $T[j:i]$ 是 S 的子串。

我们可以像 KMP 匹配前缀一样匹配子串.jpg

Hint: 如果你觉得压缩后的后缀树比较复杂，可以先考虑压缩前的版本。

综合应用

你的名字 Easy Version 的一步

给定 S, T。对于 T 的每一个前缀 $T[1:i]$，求出最小的 j 使得 $T[j:i]$ 是 S 的子串。

考虑没有经过压缩、倒过来的后缀树。此时每个节点对应一个串，然后：

- 节点的父亲是其删去第一个字符的后缀。
- 节点的 $next_c$ 是向后加入字符得到的串。

如果 $T[j:i+1]$ 是 S 的子串，那么 $T[j:i]$ 也是。因此学习 KMP：求出 i 的答案 $T[j:i]$ 后，我们尝试往里面加入 $i+1$，如果可以那这就是答案，否则不断增加 j。

放在这上面就相当于，不断跳父亲，直到存在 $next_c$，然后跳过去。

那压缩后呢？

[11] Full Version 提示：判断这个点在子区间 SAM 里面是否出现，只需要看一下 Occ。

综合应用

你的名字 Easy Version 的一步

给定 S, T。对于 T 的每一个前缀 $T[1:i]$，求出最小的 j 使得 $T[j:i]$ 是 S 的子串。

考虑没有经过压缩、倒过来的后缀树。此时每个节点对应一个串，然后：

- 节点的父亲是其删去第一个字符的后缀。
- 节点的 $next_c$ 是向后加入字符得到的串。

如果 $T[j:i+1]$ 是 S 的子串，那么 $T[j:i]$ 也是。因此学习 KMP：求出 i 的答案 $T[j:i]$ 后，我们尝试往里面加入 $i+1$，如果可以那这就是答案，否则不断增加 j。

放在这上面就相当于，不断跳父亲，直到存在 $next_c$，然后跳过去。

那压缩后呢？ 往树上跳一定是一次跳到上一个关键点，但走转移边可能走到压缩点的中间。记录当前串在哪个压缩后的节点，同时记录它当前的长度。[11]

[11] Full Version 提示：判断这个点在子区间 SAM 里面是否出现，只需要看一下 Occ。

综合应用

一道题

给定 S，多次询问，每次问 $S[l:r]$ 在 S 的所有本质不同子串中出现次数之和。

综合应用

一道题

给定 S，多次询问，每次问 $S[l:r]$ 在 S 的所有本质不同子串中出现次数之和。

神奇的转化：求有多少种 (x,y)，使得 $x+S[l:r]+y$ 是 S 的子串。

综合应用

一道题

给定 S，多次询问，每次问 $S[l:r]$ 在 S 的所有本质不同子串中出现次数之和。

神奇的转化：求有多少种 (x,y)，使得 $x+S[l:r]+y$ 是 S 的子串。

如果只加 y，那就相当于走 next 有多少种走法，只需要在 next 的 DAG 上 DP。

如果只加 x，那后缀自动机上树边向上是后缀，向下是往前面加字符。因此就是子树内点数和，但需要注意这里是压缩后的。

一起考虑，那就是子树内每个点的 next 走法之和。

目录

写在最后

- 字符串数据结构是一些基本的工具。想要熟练运用，更需要自行多加练习（OJ→ 字符串相关标签 → 刷题）。
- 还有更多更多的工具。一些我听说过名字但没学过的：SA-IS，双向插入后缀树/SAM(Ukkonen's algorithm)，Lyndon 分解，Runs，基本子串字典等等。如果你极其学有余力且感兴趣，那么可以看看。但我相信现在这类科技已经被考纲防出去了。
- 学会用这些工具是必要的，但也不要只想着用工具，要结合具体情况灵活判断。例如，AC 自动机求出现次数的题很多后缀树也能做，但大概率变复杂/有可能不能做。同时，还有一些题就是只靠智慧... ...

一个小例子

求出 S 中有多少个子串（重复算多次）能被表示成一个串重复两次。

这当然可以后缀树（统计 $LCP(S[i:], S[j:]) \geq |i-j|$，然后可以树剖）。但这样就做不了下面这个题目：

优秀的拆分

给定 S，求出有多少对 $i \leq j < k$，使得 $S[i:j], S[j+1:k]$ 都满足上一题的条件。

一个小例子

求出 S 中有多少个子串（重复算多次）能被表示成一个串重复两次。

一个智慧做法：

枚举长度 l，统计长度 l 的串重复两次的次数。

记 $l, 2l, 3l, \cdots$ 为关键位置。如果一个长度为 $2l$ 的串可以被表示为 AA 的形式，那么这两段 A 一定在同一个地方包含了一个关键位置：

那么，从相邻两个关键位置开始向后求后缀 LCP，向前求反向 LCP，就可以找到这个串。可行的中间位置就是两段 LCP 的交。

这样会得到 $O(n \log n)$ 个形如从 $[s_1, s_2]$ 开始，长度为 $2l$ 的合法串。这就可以做之前的题目了。

Thanks!