单调性与数据结构优化 DP

wlx

2025 年 7 月 25 日

P1 UOJ285

- 有一个长为 $n-1$ 的数组和 q 个区间求和的查询 $[l_i, r_i) \subset [1, n)$。
- 你需要选择若干个切分点 $1 = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k = n$，将这个数组切分为 k 段，第 i 段为 $[a_{i-1}, a_i)$，k 由你决定。
- 这 q 次查询的代价如下：对于任意一对有交的 $[a_i, a_{i+1}), [l_j, r_j)$，若 $[a_i, a_{i+1}) \subset [l_j, r_j)$，则代价为 1；若 $[a_i, a_{i+1}) \supset [l_j, r_j)$，则代价为 $(l_j - a_i) + (a_{i+1} - r_j)$；其余情况下，记 $L = [a_i, a_{i+1}) \cap [l_j, r_j)$，则代价为 $\min(|L|, a_{i+1} - a_i - |L|)$。
- 请计算所有可能划分的最小代价。
- $n \le 5 \times 10^4, q \le 10^5$

P2 ARC066F

- 有 n 道题，做出第 i 题需要 T_i 的时间。
- 你可以任选题目作答，假如你做的题目集合为 S，则你的分数为

$$\sum_{1\le l\le r\le n} [[l,r]\subset S] - \sum_{i\in S} T_i$$

- 有 q 次询问，每次询问给出 u,w，问假如将初始的 T_u 改为 w，你的最大分数是多少。询问之间两两独立。
- $n,q\le 3\times 10^5$

P3 无来源

- 有 n 家商店，它们一共售卖 m 个商品，每个商品有价格 v_i。
- 如果想购买第 i 商店的商品，需要先交 c_i 的入场费。
- 已知每家商店售卖的物品和价格，询问购买 $1, 2, \ldots, k$ 件商品的最小代价。
- $n, m \le 2 \times 10^6, k \le 1000$

P4 UOJ672

- 平面上有一个正 n 边形，顶点编号顺时针依次为 $1, 2, \dots, n$。
- 这 n 个顶点之间有 $2n-3$ 条边，恰好构成了这个多边形的所有边和一个三角剖分，每条边有一个长度。
- 初始时，图上有两枚棋子。接下来有 q 个请求，在第 i 个请求中，你需要选择两个棋子中的一个，移动到 p_i 上。假设你选择的棋子现在在 u 上，则收益为 u, p_i 之间的最短路长度。棋子可以同时位于同一个结点上。
- 你不知道图的结构，只知道要求和棋子的初始位置。你可以进行 L 次查询，每次获取两个点之间的最短路长度。
- 你需要按顺序满足所有要求，并最大化收益。
- $n \le 5 \times 10^4, q \le 3 \times 10^4, L \le 2 \times 10^6$

P5 LOJ3919

- 给定一个长为 n 的 (,) 括号串，你需要将其划分为恰好 k 段，并最小化每段内合法括号子串数量之和。
- $k \le n \le 10^6$

P6 P8864

- 给定一个长度为 n 的 01 序列 a 和参数 k。
- 有 q 次询问，每次给定 L, R，你可以若干次选择某个 $i \in (L, R]$，将 a_{i-1} 修改为 $a_{i-1} \oplus a_i$，a_{i+1} 修改为 $a_{i+1} \oplus a_i$（如果 $i+1 \leq R$）。询问之间相互独立。
- 求使得 $[L, R]$ 内至多有 k 个 1 的最小操作数。
- $n \leq 3000, k \leq \min(n, 1000), q \leq 5 \times 10^5$

P7 CF1534G

- 一个棋子初始在二维平面的原点上，只能向上和向右移动。
- 给定平面上的 n 个点，第 i 个点为 (x_i, y_i)。
- 当棋子在 (x, y) 上时，它给第 i 个点打标记需要 $\max(|x - x_i|, |y - y_i|)$ 的代价。
- 求给所有点都打上标记的最小代价。
- $n \le 8 \times 10^5$

P8 LOJ2537

- 给定一颗 n 个节点的二叉树，初始给定所有叶子节点的点权，保证点权各不相同。
- 对于非叶子结点 u，它的权值有 p_u 的概率是子节点权值的较大值，$1-p_u$ 的概率是较小值。
- 假设根节点的权值有 m 种可能性，第 i 小可能性的权值是 V_i，对应的概率为 D_i，求 $\sum_i i\cdot V_i\cdot D_i^2 \bmod 998244353$
- $n\le 3\times 10^5$

P9 QOJ5171

- 有 n 个人参加 m 场比赛，第 i 个人只参加 $[l_i, r_i]$ 中的比赛。
- 初始时第 i 个人分数为 w_i，每场有人参加比赛会使某一名参赛者分数 $+1$。
- 记所有比赛结束后分数 $\le v$ 的选手的集合为 S。
- 问 $|S|$ 的最大值，以及有多少种可能的 S 可以取到最大值。
- $n, m \le 2 \times 10^5$，满足 $\forall i, j$ s.t. $l_i < l_j$ 都有 $r_i \le r_j$，答案模 $10^9 + 7$

P10 LOJ3044

- 给定一颗以 1 为根，有 n 个结点的二叉树，初始所有叶子节点的点权等于它们的编号。
- 对于非叶子结点，若其深度为奇数，则其点权为子节点点权的较大值，反之则为较小值。
- 将叶子节点 i 的点权修改为 w_i 所需的代价为 $|i - w_i|$。对于一个叶子节点的集合 S，$w(S)$ 定义为：所有修改 S 中点的点权，使得根节点点权改变的方案的最小代价。此处一个方案的代价定义 $\max_{i \in S} |i - w_i|$。
- 特别的，如果无论如何也无法使根节点点权改变，则定义 $w(S) = n$
- 给出 L, R，请你对每个 $k \in [L, R]$，求出使得 $w(S) = k$ 的 S 的数量。
- $2 \le n \le 2 \times 10^5$，模 998244353

P11 GYM102155J

- 给定一个长为 n 的序列 a 。你需要将 a 划分成两个子序列（可为空），使得它们的权值和最小。
- 一个序列 b 的权值定义为 $\sum_i \max\{b[1,i]\} - b_i$
- $n \leq 10^5, a_i \leq 10^9$

P12 LOJ3711

- 给定一棵 n 个结点的树，每个点有点权。
- 我们定义 (x, y) 合法当且仅当 x 是 y 的祖先。此时 $f(x, y)$ 定义为从 x 出发，对 x 的子树进行 DFS 寻找 y，期间访问过的所有结点点权的最小值的期望。此处规定 DFS 时对未访问的子节点的选取时等概率随机的。
- 请求出所有合法的 (x, y) 的 $f(x, y)$ 之和，对 998244353 取模。
- $1 \le n \le 4 \times 10^5$