

杂题选讲

kradcigam

江苏省常州高级中学

2025.4.11

Contents

1 Easy (蓝)

2 Medium (紫)

3 Hard (黑)

4 谢谢大家

使用说明

- 难度分布 (要求我的):
 - 蓝: 2 道;
 - 紫: 5 道;
 - 黑: 4 道。
- 题目都有超链接, 可以直接点开;
- 希望大家能认真思考!

Contents

1 Easy (蓝)

2 Medium (紫)

3 Hard (黑)

4 谢谢大家

Candies and Stones 4'

题目描述

有 n 个糖果和 m 块石头。Alice 和 Bob 轮流行动，Alice 先行动。

- Alice 行动时，如果 Bob 吃了 a 块糖和 b 块石头，Bob 就会得到 $f(a, b)$ 奖分。其中 $f(a, b) = (x_a + y_b) \bmod p$ 。
- Bob 行动时，他要么吃掉一块糖果，要么吃掉一块石头。

当 Bob 把除了一块糖和一块石头之外的糖果和石头都吃光时，他最后一次得分，游戏结束。Alice 不允许 Bob 吃所有的糖果，也不允许他吃所有的石头。求出 Bob 如何游戏才能获得最大的分数，并求出一组方案。

数据范围

$2 \leq n, m \leq 20000$, $1 \leq p \leq 10^9$, 7.5s, 45MB。

走亲访友 8'

题目描述

n 个点 m 条边的简单无向连通图，构造满足下面要求的路径：

- 起点为 s ，终点不限。
- 对于走过的每条边 (u_i, v_i) ，你要额外决定 $p_i \in \{0, 1\}$ ，满足：
 - 1 $p_i = 0$ 表示删除这条边，且之后不能再次经过该边；
 $p_i = 1$ 表示不删除这条边。
 - 2 如果 $i > 1$ ，那么 $u_i = v_{i-1}$ 。
- 路径的长度不能超过 k 。
- 最后未删除的边组成一棵 n 个节点的树。

数据范围

$$1 \leq n \leq 10^3, 1 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}, k \geq n + m。$$

Contents

1 Easy (蓝)

2 Medium (紫)

3 Hard (黑)

4 谢谢大家

与自动辅助驾驶畅游世界 8'

题目描述

给定一张 n 个点, m 条边的有向图, 有一个起点 s , 终点 t 。
初始时, 小明在起点 s , 每次他可以选择:

- 随波逐流: 随机移动到一条出边;
- 矢志不渝: 移动到一条指定的出边, 花费 1 的金币 (若再次到达该点需重新支付费用)。

小明想要知道, 他最少需要准备多少枚金币, 才能保证在抵达终点 t 前的任何时刻都存在一条从他的所在地抵达终点 t 的路径。

数据范围

$1 \leq n \leq 3000$, $1 \leq m \leq 30000$ 。

摆棋 7'

题目描述

给定一个 $A \times B \times C$ 的立体棋盘。每个格子可以用三元组 (i, j, k) 描述, 其中 $1 \leq i \leq A, 1 \leq j \leq B, 1 \leq k \leq C$ 。

起初, (i, j, k) 上有 $a_{i,j,k}$ 个棋子。

每次操作, 可以选择一个格子 (i, j, k) , 满足 (i, j, k) 上至少有一个棋子, 然后将这枚棋子移动到 $(i+1, j, k)$ 或 $(i, j+1, k)$ 或 $(i, j, k+1)$ 中的一个。棋子不能移出棋盘边界。

目标是让 (i, j, k) 上有 $b_{i,j,k}$ 个棋子。判断是否能够达成目标。

数据范围

$$1 \leq A \leq 10^4, 1 \leq B, C \leq 6, 0 \leq a_{i,j,k}, b_{i,j,k} \leq 10^{12}, \\ \sum a_{i,j,k} = \sum b_{i,j,k}。$$

健身房 9'

题目描述

健身房里有 k 个器材。

有 n 个人预约了健身。第 i 个人预约给定了 l_i, r_i, p_i , 意思是要分配给他 $l_i, l_i + 1, \dots, r_i$ 中的一个 (记为 x), 他在第 x 个小时中用器材 p_i 健身。

同一时间不能有两个人用同一个健身器材。此外, 老板还希望让健身房里没人的时刻尽量多, 这样可以节约电费。

构造一组最优解。

数据范围

$$1 \leq n \leq 10^6, 1 \leq k \leq 10^9, 1 \leq l_i \leq r_i \leq 10^9, 1 \leq p_i \leq k.$$

信号 9'

题目描述

给定长度为 n 的非负整数序列 a_1, a_2, \dots, a_n 和正整数 k 。

你需要构造一个长度为 n 的非负整数序列 b_1, b_2, \dots, b_n , 满足:

- $\forall 1 \leq i \leq n, b_i \in [0, 2^k);$
- $\forall 1 \leq i \leq n, \text{popcount}(b_i \oplus b_{i \bmod n+1}) = a_i。$

或者报告不存在合法解。

这里, \oplus 代表按位异或运算, $\text{popcount}(n)$ 表示非负整数 n 二进制表示下 1 的个数。

数据范围

$$n \geq 2, k \geq 1, nk \leq 5 \times 10^6, 0 \leq a_i \leq k。$$

Squid Game 10'

题目描述

给定一个 n 个点的树，以及 m 条路径。

你需要选取尽可能少的点，使得对于每条路径 (x_i, y_i) ，都存在一个被选的 z 点，使得链上到 z 距离最短的点既不是 x_i 也不是 y_i 。

数据范围

$$1 \leq n, m \leq 3 \times 10^5。$$

Contents

1 Easy (蓝)

2 Medium (紫)

3 Hard (黑)

4 谢谢大家

Assigning Fares 12'

题目描述

给出一棵有 n 个节点的树和 m 条树上的路径。
你要给每个点分配一个可重复的正整数标号，使得这 m 条路径上点的标号都是单调的（增/减）。
如果有解，你还要使得标号的最大值最小并输出方案。

数据范围

$$2 \leq n \leq 5 \times 10^5, \quad 1 \leq m \leq 5 \times 10^5。$$

Fast as Fast as Ryser 13'

题目描述

有 n 个点，第 i 个点和第 j 个点之间有 $a_{i,j}$ 条边。
求大小为 k 的匹配的方案数，对 2^{64} 取模。
对 $k = 1, 2, 3, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 求出答案。

数据范围

$$1 \leq n \leq 40, 6s。$$

Bomb 15'

题目描述

Peter 在一条直线上有 n 个炸弹，第 i 个炸弹位于位置 x_i 。每个炸弹都有一个爆炸半径 r_i (r_i 是一个整数)。当一个炸弹爆炸时，所有不超过爆炸半径的炸弹也会爆炸。一个爆炸半径为 r 的炸弹将花费 r^2 美元。Peter 希望为每个炸弹选择爆炸半径 r_i ，以便无论最初引爆哪个炸弹，最终所有炸弹都会爆炸。帮助彼得最小化 n 个炸弹的总成本。

数据范围

$$1 \leq n \leq 3000, 1 \leq x_i \leq 10^6。$$

倾诉 18'

题目描述

小 I 的小圈子里有 n 个人，第 i 个人初始有正整数 a_i 的烦恼。
小 I 可以在活动中组织不超过 k 次倾诉。每次倾诉中，某个倾诉者 p ($1 \leq p \leq n-1$) 向右手边的人 $p+1$ 倾诉，这首先导致 $a_{p+1} \leftarrow a_{p+1} + \frac{1}{2}a_p$ ，然后 $a_p \leftarrow 0$ 。小 I 可以任意选择每次倾诉的倾诉者。注意编号为 n 的人不会向其他人倾诉。
小 I 希望大家的烦恼尽可能少，于是他想知道：在活动过后，所有人最终烦恼的最大值最小是多少。
你需要输出答案的精确值。具体地，答案总能写成 $\frac{S}{2^n}$ 的形式，你需要输出 S 的二进制表示。

数据范围

$$1 \leq n, \sum n \leq 2 \times 10^4, 1 \leq k \leq 10^9, \forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq a_i \leq 10^6.$$



Contents

1 Easy (蓝)

2 Medium (紫)

3 Hard (黑)

4 谢谢大家

谢谢大家

Thanks!

祝大家在 NOI2025 中取得好成绩!