一些题

Y25t

2024 年 7 月

QOJ2173 What’s Our Vector, Victor?

给出 n 个 d 维空间中的点 v_i 和 n 个实数 e_i，你要找到 d 维空间中的一个点 x，满足 x 到 v_i 的欧几里得距离为 e_i。

$1 \le n, d \le 500$，坐标均为 $[-100, 100]$ 中的实数，精度误差 10^{-5}。

数据生成方式为：先随机生成 v_i 和 x，它们的每一维坐标均在 $[-100, 100]$ 中的实数中均匀随机，然后求出每个 e_i，最后隐藏 x。这样也就保证了一定有解。

题解

首先用第一个超球的方程减去剩下的超球的方程，可以得到 $n-1$ 个线性方程组，用高斯消元后能解出一个无限延申的超立方体。接着可以通过拉格朗日乘数法解出超立方体上离第一个超球的球心最近的点，然后从这个点往任意一个方向沿着超立方体走直到它到球心的距离等于半径长度，走的距离可以二分。

LOJ6886. 「THUPC 2023」Freshman Dream

给定随机生成的 $n \times n$ 的 01 矩阵 A, 构造 $n \times n$ 的 01 矩阵 B 使得 $(AB)_{ij} \equiv A_{ij}B_{ij} \pmod 2$ 对所有 $1 \le i, j \le n$ 成立且 B 中恰有 k 个 1.

$n = 100, 0 \le k \le n^2$, A 的每个元素独立等概率的从 $\{0, 1\}$ 中随机生成.

题解

有解等价于在每一列挖掉对角线对应的那个方程组的零空间里面各找一个。由于随机，秩不会太小，直接在每一个线性基中暴力的找所有可能的值，然后背包起来即可。

题解

有解等价于在每一列挖掉对角线对应的那个方程组的零空间里面各找一个。由于随机，秩不会太小，直接在每一个线性基中暴力的找所有可能的值，然后背包起来即可。

注：$(n-1)\times n$ 矩阵秩为 $n-1-k$ 的概率可以这样估计，考虑这些向量都在对应的空间中的概率为 $\frac{1}{2^{kn}}$，而这样的空间数量和零空间数量相同，后者可以用零空间的任意张成组来简单估计上界为 $\binom{2^n}{k}$，因此是 $O(\frac{1}{k!})$ 级别的。

github.com/THUSAAC/THUPC2023/blob/master/day0/F/solution/zh-cn.md

UOJ698.【候选队互测 2022】枪打出头鸟

给定 n 个可重集。Q 次询问，每次给出 x，求出最小的 i 满足前 $i-1$ 个可重集均能表出 x 而第 i 个不能，若无这样的 i 则输出 $n+1$。其中表出 x 是指能从该可重集里选出一个异或和为 x 的子集。

$n \le 10^5, Q \le 10^6$，可重集大小 ≤ 64，可重集中元素与 x 均 $< 2^{64}$。

题解

线性基求交：对于两个维数 $\leq W$ 的线性基 A, B，可以在 $O(W^2)$ 的时间求出它们子空间的交的基。也就是选出尽量多的、线性无关的、能被 A, B 同时表示出的数。

题解

线性基求交：对于两个维数 $\leq W$ 的线性基 A, B，可以在 $O(W^2)$ 的时间求出它们子空间的交的基。也就是选出尽量多的、线性无关的、能被 A, B 同时表示出的数。

算法是依次对每个 B_i，看它能否被 $A \cup \{B_1, \ldots, B_{i-1}\}$ 的子集异或出来，若行，则将此方案中属于 A 的子集的异或和加进交的基里。容易证明这样是对的。

题解

有了这个算法，就可以直接求出前缀线性基的交然后二分，单次询问复杂度 $O(W\log n)$。

题解

有了这个算法，就可以直接求出前缀线性基的交然后二分，单次询问复杂度 $O(W\log n)$。

然后发现本质不同的前缀线性基至多 W 个，只在其中二分即可做到 $O(W\log W)$。

题解

有了这个算法，就可以直接求出前缀线性基的交然后二分，单次询问复杂度 $O(W\log n)$。

然后发现本质不同的前缀线性基至多 W 个，只在其中二分即可做到 $O(W\log W)$。

要更进一步，可以记录每一位主元在求交时被去掉的时间，然后回答时算出把 x 表示出的主元的最早去掉时间即可，这样是 $O(W)$ 的。

UOJ703. 赵云八卦阵

给定一个长度为 n 的序列 $a_1,\ldots,a_n$。你每次可以选择一个 $x(1<x\le n)$ 然后将 a_x 变为 $a_x\oplus a_{x-1}$（可进行任意次）。求这个序列最长上升子序列长度的最大可能值。

$n\le 10^6, 1\le a_i\le 2^{60}$。

题解

假设操作后的序列为 $b_1, \ldots, b_n$，那么 b_i 的取值为 $a_{1\ldots i-1}$ 的线性基能表出的所有数再 $\oplus a_i$。

题解

假设操作后的序列为 $b_1, \ldots, b_n$，那么 b_i 的取值为 $a_{1\ldots i-1}$ 的线性基能表出的所有数再 $\oplus a_i$。

那么如果 a_i 已经能被 $a_{1\ldots i-1}$ 的线性基表出，就可以把它当作 0。这样 a 中只剩下至多 60 个非 0 元素。

题解

假设操作后的序列为 $b_1,\dots,b_n$，那么 b_i 的取值为 $a_{1\dots i-1}$ 的线性基能表出的所有数再 $\oplus a_i$。

那么如果 a_i 已经能被 $a_{1\dots i-1}$ 的线性基表出，就可以把它当作 0。这样 a 中只剩下至多 60 个非 0 元素。

考虑从后往前求出 LIS。对于 $a_i = 0$ 的那些 i，若 b_i 能被加入就一定会被加入，因为它的取值范围不比任何 $b_j (j < i)$ 小。

题解

于是只用管那些非 0 位是否加入 LIS 即可。

题解

于是只用管那些非 0 位是否加入 LIS 即可。

考虑从后往前 dp，设 $f_{i,j}$ 表示进行到 i 个非 0 位，已经有 j 个非 0 位加入 LIS 且所有为 0 的位均在 LIS 时，LIS 中最小元素的最大可能值。

题解

于是只用管那些非 0 位是否加入 LIS 即可。

考虑从后往前 dp，设 $f_{i,j}$ 表示进行到 i 个非 0 位，已经有 j 个非 0 位加入 LIS 且所有为 0 的位均在 LIS 时，LIS 中最小元素的最大可能值。

转移时只需在线性基里寻找小于某个数的第若干大能够被表出的数即可，这可以做到 $O(\log a_i)$。而在某个 $a_i = 0$ 的位置上已经无法将 b_i 加入 LIS，就可以直接更新答案。

题解

于是只用管那些非 0 位是否加入 LIS 即可。

考虑从后往前 dp，设 $f_{i,j}$ 表示进行到 i 个非 0 位，已经有 j 个非 0 位加入 LIS 且所有为 0 的位均在 LIS 时，LIS 中最小元素的最大可能值。

转移时只需在线性基里寻找小于某个数的第若干大能够被表出的数即可，这可以做到 $O(\log a_i)$。而在某个 $a_i = 0$ 的位置上已经无法将 b_i 加入 LIS，就可以直接更新答案。

总时间复杂度 $O(n \log a_i + \log^3 a_i)$。

PKU-CPC2023C. Empty up a Bottle

我们对于一个数x可以进行如下一次分解操作：

选择两个大于1的数a 和 b，要求a ^ b | x 且 b | x

分解结果为 $\frac{x}{a^b}$

我们定义一个数的牢固值为其最多能进行分解操作的次数。

给定n，求1到n中所有数的牢固值之和。

$n \leq 1e14$

题解

最优的分解策略中a和b一定是两个质数且b一定是x的最小质因数。

考虑枚举每一个a的贡献，

然后枚举小于a的b

然后贡献 = 所有满足 不能被b以内的数整除 且 能整除b 且 能整除 a^b 的数 + 所有满足 不能被b以内的数整除 且 能整除b 且 能整除 $(a^b)^2$ 的数$+\cdots$

这个贡献可以容斥算出来。

注意这个b非常小，std可以0.2s算出1e14（

PKU-CPC2023C. Empty up a Bottle

题意：给你三个正整数，每一次你可以将选择其中两个，让较大（≥另一个）的数砍下一部分，加到较小的数上，但要保证较小的数在一次操作以后**恰好翻倍**。构造一组方案，将某一个数**清零**。

特别的，允许**压缩输出**------假设对某两个数连续操作$1 \le t \le 10^{18}$次，我们可以用**一行**表示这t次操作。总共要求输出200行的方案，或报告无解。

三个数 $A, B, C \le 3 \times 10^{13}$.

题解

有三个关键点:

1. 对于任意三个正整数，都有解，-1的case根本不存在。
2. 对于两个正整数a, b，对它们做一次操作，等价于把它们变成$2a \ mod \ (a+b)$和$2b \ mod \ (a+b)$。这个转换在出现$a=b$时会多造出一个0，但这是"不妨"的，因为你已经成功了。进一步可以得到：对于a, b操作t次会变成$2^t a \ mod \ (a+b)$和$2^t b \ mod \ (a+b)$。~~你反着想，假设没有这么好的性质，spj是怎么跑1e18的~~
3. 对于一个奇数$2t+1$和一个偶数$2h$，根据**欧拉定理**，操作$\phi(2t+2h)$次可以变成$2t+h+1$和h。

一种构造如下：**不妨**假设两个奇数一个偶数。我们让较大偶数先给较小的偶数**加倍**一次，再利用关键点3，给这个偶数砍去一半。如此让两个偶数开始了**更相减损**。特别的，为了保证复杂度，需要考虑两个偶数差距悬殊的情况。我们可以可以让大偶数给小偶数**加倍多次**，直到他们大小关系被反转。这样可以一轮至少可以让**两个偶数的和**削减$1/4$，总共构造的行数为$O(\log_{4/3}(A+B+C)\ )$，保证可以在200次内完成。

构造过程中需要求大整数的ϕ函数，预处理线性筛到$\sqrt{A+B+C}$，然后用素数试除分解大整数。总时间复杂度$O(\log_{4/3}(A+B+C) \times \frac{\sqrt{A+B+C}}{log\sqrt{A+B+C}}) = O(\sqrt{A+B+C})$。

修锅: 不妨设两个**偶数**一个**奇数**.

洛谷 P8457「SWTR-8」幂塔方程

求解关于 x 的方程 $x^x \equiv D \pmod{n}$。你需要得到 $[0, 2^{125}]$ 中的任意一个整数解或判断在此范围内无解。

多测，$1 \le T \le 4 \times 10^4, 2 \le n \le 10^{18}, 1 \le D < n$，给出 n 的所有质因子且保证它们均不超过 10^5，保证 n 与 D 互质。

题解

令 $n=p_1^{\alpha 1}p_2^{\alpha 2}\cdots p_k^{\alpha k}$ 为标准分解，再考虑 $n\phi(n)$ 的所有素因子构成可重集 S，我们对 $1\le t\le k$ 归纳证明可以构造 x 使得 $x^x\equiv d(\bmod x_t)$，且 x 与 S 中不超过 p_t 的元素互素.其中 $x_t=p_1^{\alpha 1}p_2^{\alpha 2}\cdots p_t^{\alpha t}$.

$t=0$ 时显然，下假设 $t\ge 1$ 且 $t-1$ 时成立.

设归纳假设中给出了 x_0.我们固定 x 模 M 的余数，其中 M 为 S 中小于 p_t 的元素的乘积.（注意要适当调整使得和 S 中归纳假设没有覆盖到的元素互素）这样只用考虑 $\bmod p_t^{\alpha t}$ 的余数.现在开始构造.

令 $x_i(0<i\le\alpha_t)$ 满足 $x_i^{x_i}\equiv D \pmod{p_t^i}$ 且 $x_i\equiv x_0 \pmod{M}$。那么要做的就是通过 x_{i-1} 求出 x_i。

以下记 $x = x_{i-1}, p = p_t$，不妨设 $x_i \equiv x + kMp^{i-1} \pmod{p^i}$，其中 k 待定。

以下记 $x = x_{i-1}, p = p_t$，不妨设 $x_i \equiv x + kMp^{i-1} \pmod{p^i}$，其中 k 待定。

那么有
$D \equiv x_i^{x_i} \equiv (x + kMp^{i-1})^{x+kMp^{i-1}} \equiv (x + kMp^{i-1})^x \equiv \sum_{j=0}^{x} \binom{x}{j} (kMp^{i-1})^j x^{x-j} \pmod{p^i}$，第三个“$\equiv$”是因为 $Mp^{i-1} | \varphi(p^i)$。

以下记 $x=x_{i-1},p=p_t$，不妨设 $x_i\equiv x+kMp^{i-1}\pmod{p^i}$，其中 k 待定。

那么有
$D\equiv x_i^{x_i}\equiv(x+kMp^{i-1})^{x+kMp^{i-1}}\equiv(x+kMp^{i-1})^x\equiv\sum_{j=0}^{x}\binom{x}{j}(kMp^{i-1})^jx^{x-j}\pmod{p^i}$，第三个“≡”是因为 $Mp^{i-1}|\varphi(p^i)$。

注意到当 $i>1$ 时，若 $j>1$ 则有 $(i-1)j\geq i$ 于是那个求和号只用保留 $j=0,1$ 的两项，为 $x^x+x^xkMp^{i-1}$。那么可以解出 $k\equiv((D(x^x)^{-1}-1)/p^{i-1})M^{-1}\pmod{p^i}$，归纳保证了式子中求逆和除法均有定义。

而当 $i=1$ 时，需要求解 $(x+kM)^x \equiv D \pmod{p^i}$，注意 x 与 D 互质，于是求离散对数即可解出 k。

而当 $i=1$ 时，需要求解 $(x+kM)^x \equiv D \pmod{p^i}$，注意 x 与 D 互质，于是求离散对数即可解出 k。

以上，我们归纳地给出了构造，也就证明了解一定存在，且这样构造的解不超过 $n\varphi(n)$。单组数据时间复杂度差不多 $O(\sum_i \sqrt{p_i} + \alpha_i \log n)$。

LOJ3632. 「2021 集训队互测」Lovely Dogs

1.2 题目大意

给定一棵大小为 n 的树，1 号节点是树根，树上每个点有一个权值 a_i。
给定常数 d。我们将 z 拆解成一些质数的幂次的乘积 $z=\prod_i p_i^{k_i}$，我们定义：

$$f_d(z)=\prod_i(-1)^{k_i}[k_i\le d]$$

对于树上每个节点 x，你需要求出 i,j 均在 x 的子树中的所有点对 (i,j) 的 $f_d(a_ia_j)$ 的和。
注意此题中 (i,j) 和 (j,i) 是一样的点对。

1.3 时空限制

时间限制 1s，空间限制 256MB。

1.4 数据范围

对于 100% 的数据满足 $1\le n\le 2\times 10^5, 1\le d\le 20$，保证所有的 a_i 构成一个 1 到 n 的排列。

题解

对 $z=\prod_i p_i^{k_i}$, 设 $g(z)=\prod_i(-1)^{k_i}$. 那么 g 是完全积性函数并且 $f_d(ij)=g(i)g(j)f_d(ij)^2$. 设 $h(x)$ 为使得 $t^{d+1}\mid x$ 的最大的 t, 那么 $f_d(x)^2=[h(x)=1]=\sum_{t\mid h(x)}\mu(t)=\sum_{t^{d+1}\mid x}\mu(t)$.

题解

对 $z=\prod_i p_i^{k_i}$, 设 $g(z)=\prod_i(-1)^{k_i}$. 那么 g 是完全积性函数并且 $f_d(ij)=g(i)g(j)f_d(ij)^2$. 设 $h(x)$ 为使得 $t^{d+1}\mid x$ 的最大的 t, 那么 $f_d(x)^2=[h(x)=1]=\sum_{t\mid h(x)}\mu(t)=\sum_{t^{d+1}\mid x}\mu(t)$.
于是可以 dsu on tree, 合并的部分是:

$$\begin{aligned}\sum_{a\in S}f_d(ab)&=\sum_{a\in S}g(a)g(b)\sum_{t^{d+1}\mid ab}\mu(t)\\&=g(b)\sum_{t\mid b}\mu(t)\sum_{a\in S}g(a)[t^{d+1}/\gcd(t^{d+1},b)\mid a].\end{aligned}$$

最后可以只考虑 $t\mid b$ 是因为若不然则 $t>1$ 且 $t^{d+1}\mid a$ 从而 $f_d(a)=0$.

题解

对 $z=\prod_i p_i^{k_i}$, 设 $g(z)=\prod_i(-1)^{k_i}$. 那么 g 是完全积性函数并且 $f_d(ij)=g(i)g(j)f_d(ij)^2$. 设 $h(x)$ 为使得 $t^{d+1}\mid x$ 的最大的 t, 那么 $f_d(x)^2=[h(x)=1]=\sum_{t\mid h(x)}\mu(t)=\sum_{t^{d+1}\mid x}\mu(t)$.
于是可以 dsu on tree, 合并的部分是:

$$\begin{aligned}\sum_{a\in S} f_d(ab) &= \sum_{a\in S} g(a)g(b)\sum_{t^{d+1}\mid ab}\mu(t)\\ &= g(b)\sum_{t\mid b}\mu(t)\sum_{a\in S} g(a)[t^{d+1}/\gcd(t^{d+1},b)\mid a].\end{aligned}$$

最后可以只考虑 $t\mid b$ 是因为若不然则 $t>1$ 且 $t^{d+1}\mid a$ 从而 $f_d(a)=0$.
所以加入一个权值时需要枚举它的约束去算/更新贡献, 但由于权值是排列, 故总复杂度 $O(n\log^2 n)$.

UOJ354. 新年的投票

任务 A

$n = 15$ 个选民围成一圈，每个人额头上有一个数字 0 或者 1，自己看不见自己额头上的数字，但是可以看见所有其他人头上的数字。

每个人投一票给 0 或者 1，目标是要投出所有人额头上数字的异或和的正确值，最终投票的结果就是票数最多的一个。

请你为每个人选择一个策略，在所有 $2^n = 32768$ 的可能的情况中，使得严格小于 2100 个情况投票结果无法投出正确值。

UOJ354. 新年的投票

任务 B

把任务 A 中每个人能投的票数从一票改为任意 $0 \le x \le 10^8$ 票。

但最终你要保证严格小于 3 个情况投票结果无法投出正确值（平票的情况算做错误）。

UOJ354. 新年的投票

任务 C

现在 $\binom{n}{k}$ 个人围成一圈，圈里是一个长度为 $n = 12$ 的 01 串，每个人可以看到自己编号对应的一个大小为 $k = 7$ 的位的集合（假设一个人可以看到的集合是 S，那么我们定义 $f(S) = \sum_{x \in S} 2^x$，第 i 个人就是 $f(S)$ 第 i 小的人）。

他们的目标是要选出对应的 01 串的每一位异或起来是 0 还是 1，现在每个人可以投任意 x 票（$0 \le x \le 10^8$）。

请你为每个人选择一个策略，在所有 $2^n = 4096$ 的可能的情况中，使得严格小于 80 个情况投票结果无法投出正确值。

题解

先看操作空间最大任务 B。

题解

先看操作空间最大任务 B。

第 i 个人的策略是看前 $i-1$ 个人是否有 1，若无则把自己当作 1 然后投给所有人的异或和 2^{i-1} 票，否则投 0 票。

题解

先看操作空间最大任务 B。

第 i 个人的策略是看前 $i-1$ 个人是否有 1，若无则把自己当作 1 然后投给所有人的异或和 2^{i-1} 票，否则投 0 票。

这样编号最小的 1 具有绝对的话语权，会投错当且仅当所有人都是 0 一种情况。

题解

再回头看任务 A。

题解

再回头看任务 A。

此时每个人只能投一票，可以考虑把他们分成 1,2,4,8 四组，把每组人当成一个人。

题解

再回头看任务 A。

此时每个人只能投一票，可以考虑把他们分成 $1, 2, 4, 8$ 四组，把每组人当成一个人。

这样每组人可以执行上述算法的所有操作（投 2^i 票或投 0 票），于是会投错当且仅当每组的异或和均为 0。

题解

最后是任务 C。

题解

最后是任务 C。

记这个 01 串为 $x_1,\ldots,x_n$，令 $s=x_1+\ldots+x_n$，最终要投出 s 的奇偶性。

题解

最后是任务 C。

记这个 01 串为 $x_1,\ldots,x_n$，令 $s = x_1 + \ldots + x_n$，最终要投出 s 的奇偶性。

如果把给奇数投票当作正，偶数投票当作负，那么最终投出的票数可以看作关于 $x_1,\ldots,x_n$ 的函数 f。

题解

最后是任务 C。

记这个 01 串为 $x_1,\ldots,x_n$，令 $s=x_1+\ldots+x_n$，最终要投出 s 的奇偶性。

如果把给奇数投票当作正，偶数投票当作负，那么最终投出的票数可以看作关于 $x_1,\ldots,x_n$ 的函数 f。

如果 f 是个不超过 k 次的整系数多项式，就能把对应的单项分给对应的人来达成。

题解

最后是任务 C。

记这个 01 串为 $x_1,\ldots,x_n$，令 $s=x_1+\ldots+x_n$，最终要投出 s 的奇偶性。

如果把给奇数投票当作正，偶数投票当作负，那么最终投出的票数可以看作关于 $x_1,\ldots,x_n$ 的函数 f。

如果 f 是个不超过 k 次的整系数多项式，就能把对应的单项分给对应的人来达成。

于是构造一个关于 s 的 k 次多项式 $f(s)$ 使其在尽可能多的 s 出取到正确的正负号即可。

QOJ5090. 妙妙题

有 N 个人面对面围成一圈，每个人头上会佩戴一顶帽子，可能是黑色或白色的。每个人只能看到其他人的帽子颜色但不能得知自己的编号。

所有人在进行观察后要同时猜测自己帽子的颜色，你要设计一个针对所有人的确定性策略（即如果两个人看到的东西完全相同，那么他们做出的猜测也要相同），使得猜中的人数至少为 $\lfloor (N-1)/2 \rfloor$。

$N \le 64$。

题解

先站在上帝视角看，把这 N 个人在单位圆的 N 等分点上，算出所有黑色帽子的人所在位置的矢量和 v。

题解

先站在上帝视角看，把这 N 个人在单位圆的 N 等分点上，算出所有黑色帽子的人所在位置的矢量和 v。

如果 $v \neq 0$，那么让 v 左边的人认为全场有奇数个黑帽子，而右边的人相反。这样一定会有一边人全部猜对。

题解

先站在上帝视角看，把这 N 个人在单位圆的 N 等分点上，算出所有黑色帽子的人所在位置的矢量和 v。

如果 $v \neq 0$，那么让 v 左边的人认为全场有奇数个黑帽子，而右边的人相反。这样一定会有一边人全部猜对。

然后发现判断自己在的哪一边并不需要在上帝视角知道自己帽子的颜色，只用把自己当作白帽子然后算出 v 判断即可。

题解

先站在上帝视角看，把这 N 个人在单位圆的 N 等分点上，算出所有黑色帽子的人所在位置的矢量和 v。

如果 $v \neq 0$，那么让 v 左边的人认为全场有奇数个黑帽子，而右边的人相反。这样一定会有一边人全部猜对。

然后发现判断自己在的哪一边并不需要在上帝视角知道自己帽子的颜色，只用把自己当作白帽子然后算出 v 判断即可。

还要打两个补丁：如果算出的 $v = 0$ 就猜白帽子；如果算出的 v 与自己共线就猜黑帽子。

题解

先站在上帝视角看，把这 N 个人在单位圆的 N 等分点上，算出所有黑色帽子的人所在位置的矢量和 v。

如果 $v \neq 0$，那么让 v 左边的人认为全场有奇数个黑帽子，而右边的人相反。这样一定会有一边人全部猜对。

然后发现判断自己在的哪一边并不需要在上帝视角知道自己帽子的颜色，只用把自己当作白帽子然后算出 v 判断即可。

还要打两个补丁：如果算出的 $v = 0$ 就猜白帽子；如果算出的 v 与自己共线就猜黑帽子。

这样真正的 $v = 0$ 的情况就能全部猜中，而 $v \neq 0$ 的情况能至少猜中 $\lfloor (N-1)/2 \rfloor$ 个（因为 v 至多穿过 $2-(n \bmod 2)$ 个人）。