

综述图论中连通性及相关问题的一些处理方法

华东师范大学第二附属中学 万成章

摘要

本文分成无向图和有向图两个部分，讨论了在信息学竞赛中实用的一些有关连通性的算法思想，此外还探讨了一些和连通性有一定联系的图论问题。

1 定义与约定

对于无向图或有向图 G ：

默认记 V 表示 G 的点集， E 表示 G 的边集， $n = |V|$ 表示 G 的点数， $m = |E|$ 表示 G 的边数。

若 E 中没有重复元素，则称 G 无重边；若任何 $(u, u) \notin E$ ，则称 G 无自环；

称 G 为简单图，当且仅当 G 无重边且无自环；

记 $u \rightarrow v$ 表示一条边 (u, v) ；

记 $u \rightsquigarrow v$ 表示一条以 u 开始到 v 结束的路径，即 $u = x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_k = v$ ；

一个环指的是一条形如 $u \rightsquigarrow u$ 的路径；

简单路径指的是不经过重复结点的路径；

简单环指的是除了起点和终点外不经过重复结点的环；

称 $G' = (V', E')$ 为 G 的子图，当且仅当 $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ ；

G 关于点集 V' 的（点）导出子图为 $G' = (V', E')$ ， $E' = \{(u, v) \in E \mid u, v \in V'\}$ ；

G 关于边集 E' 的（边）导出子图为 $G' = (V', E')$ ， $V' = \{x \in V \mid (\exists y)((x, y) \in E' \vee (y, x) \in E')\}$ 。

2 无向图

无向图中的连通性是一个很容易理解的概念，若存在路径 $u \rightsquigarrow v$ ，则称 u, v 是连通的（就以记号 $u \rightsquigarrow v$ 表示 u, v 连通），这是一个等价关系。接下来我们定义一些后续将会用到的概念。

定义 2.1 (点/边割集). 对于无向图 $G = (V, E)$ 以及 $u, v \in V$: 若 $S \subseteq V$ 满足 $u, v \notin S$, 且 G 关于 $V \setminus S$ 的导出子图上 $u \not\rightsquigarrow v$, 则称 S 是 u, v 的点割集; 若 $T \subseteq E$ 满足 $G' = (V, E \setminus T)$ 中 $u \not\rightsquigarrow v$, 则称 T 是 u, v 的边割集。

定义 2.2 (点/边连通度). 对于无向图 $G = (V, E)$ 以及 $u, v \in V, u \neq v$, 若 u, v 的任意点割集大小不小于 s , 则称 u, v 是 s -点连通的; 若 u, v 的任意边割集大小不小于 t , 则称 u, v 是 t -边连通的。 u, v 间的点/边连通度为上述 s, t 的最小值。 G 的点/边连通度是任意点对间点/边连通度的最小值。

例如, 1-点连通和 1-边连通是等价的, 它们都与一般意义上的连通等价。

定理 2.1 (Menger). 对于无向图 $G = (V, E)$ 以及 $u, v \in V, u \neq v$:

u, v 是 k -边连通的, 当且仅当存在 k 条 $u \rightsquigarrow v$ 的两两边不交的路径;

u, v 是 k -点连通的, 当且仅当存在 k 条 $u \rightsquigarrow v$ 的除端点外两两点不交的路径。

这实际上就是最大流最小割定理的一个特化版本, 由于证明与本文关系不大, 因此省略。值得注意的是在 Menger 定理中我们不要求路径是不同的, 包含两个点的完全图 K_2 对于任意的 k 是 k -点连通的, 但是其中只存在一条简单路径。

2.1 DFS 树

我们首先考虑最简单的连通, 即 1-连通。

对于一个连通的无向图 G , 必定可以找到其一个包含所有顶点的无环子图 T , 将这样的 T 称为 G 的生成树。

定义 2.3 (DFS 序, DFS 树). 在连通无向图 $G = (V, E)$ 上以 $r \in V$ 为起点进行深度优先搜索, 若结点 x 是第 p 个被访问到的结点, 则称 p 为 x 的 DFS 序, 记为 $dfn_x = p$ 。若 $x \neq r$, 则在 x 与第一次访问到 x 的结点 y 间连一条边, 形成的图 T 称为以 r 为根的一棵 DFS 树。

上述的 T 有 $n-1$ 条边, 且可以归纳地说明 T 连通, 因此 T 确实是 G 的一棵生成树, 一般将它看作以 r 为根的有根树, 将 T 上的边称为树边, 其余边称为非树边。

需要注意, DFS 序和 DFS 树是一一对应的, 同一个 r 可能拥有不同的 DFS 序和 DFS 树。

性质 2.1.1. 所有结点的 DFS 序构成 $1, \dots, n$ 的一个排列。DFS 树上以任何结点 x 为根的子树中所有点的 DFS 序构成一段以 dfn_x 开始的连续区间。

性质 2.1.2. 任意一条非树边连接了 DFS 树上一对祖先-后代结点, 这样的边称为返祖边。

证明只需考虑 DFS 过程的性质即可。

性质 2.1.2 是 DFS 树的核心性质，这也是许多连通图相关的问题考虑用 DFS 树解决的原因。

例 2.1.1 (Ehab's Last Theorem¹). 对于 n 个点的无向连通图 G ，以下两个命题至少有一个成立：

1. G 有一个长度不小于 \sqrt{n} 的简单环。
2. G 有一个大小不小于 \sqrt{n} 的独立集。

证明. 令 $p = \lceil \sqrt{n} \rceil$ ，接下来我们将给出一个构造性的证明。

首先我们求出 G 的一棵以 1 为根的 DFS 树，设 d_x 表示 x 在 DFS 树上的深度。

考虑任意非树边 $x \rightarrow y$ ，其中 x 是后代，则如果 $d_x - d_y \geq p - 1$ ，则我们已经找到一个长度至少为 p 的简单环，即由树上路径 $x \rightsquigarrow y$ 加上非树边 $x \rightarrow y$ 构成的简单环。

假设不存在这样的环，那么对于任意非树边 $x \rightarrow y$ 有 $|d_x - d_y| < p - 1$ ，我们通过如下过程可以构造一个大小至少为 p 的独立集：

- 定义点集 S ，初始为空。
- 找到当前未被标记的深度最大的任意一个结点 x ，令 $S \leftarrow S \cup \{x\}$ ，然后将 x 的 $0, 1, 2, \dots, p - 2$ 级祖先都进行标记。
- 重复上述过程，直到所有结点被标记， S 即为目标独立集。

注意上述过程中每一轮最多标记 $p - 1$ 个结点，所以 $|S| \geq \frac{n}{p-1} > p - 1$ ，同时每次选出的 x 只可能与其子树内的结点或者其 $0, 1, \dots, p - 2$ 级祖先之间可能有边， x 的选取方式（深度最大）保证了子树内的点都被标记，同时其 $0, 1, \dots, p - 2$ 级祖先也被标记，所以任意时刻与 S 中结点有边相连的结点一定被标记了，这保证了 S 确实是独立集。

从而原命题得证。

□

对于不连通的无向图，我们可以对于其每个连通分量各选择一个点为根构建 DFS 树，这就形成了一个 DFS 森林，同样可以套用 DFS 序等概念，同样可以使用上面介绍的性质。例如例 2.1.1 其实对于不连通的图也是成立的，证明和连通图的情形相似。

2.2 双连通性

接下来我们来研究比 1-连通稍复杂一些的 2-连通性，或称双连通性。

由于双连通性在 OI 中是相对来说比较熟知的，因此本文在基础部分会简略一些，不过仍会完整地说明会用到的所有性质，此部分内容在参考资料 [1] 中也有全面的描述。

¹CF 1325 F

2.2.1 边双连通

由于边双连通性比点双连通性直观一些，因此首先介绍边双连通性。

边双连通的点对必定是 1-连通的，故不同连通块独立，因此先考虑 G 是连通图的情形。

我们首先要说明的是，边双连通性（可以推广到任意的 k -边连通性）是点集 V 上的一个等价关系，也就是说我们可以按照边双连通性对 V 进行划分。

定义 2.4 (割边). 对于无向连通图 $G = (V, E)$ ，若 $e \in E$ 满足 $G' = (V, E \setminus \{e\})$ 不连通，则称 e 是一条割边或桥。对于不一定连通的无向图 G ，其任意一个连通分量的割边都称为其割边。

一种等价的描述是：如果 $\{e\}$ 是某个点对 (u, v) 的边割集，则 e 是割边。

引理 2.2.1. 对于无向连通图 G ，割边一定在 DFS 树上。设某条割边 e 为 $x \rightarrow y$ ，其中 x 为子结点，则删除 e 后会形成两个连通分量，分别是 x 的子树和 x 的子树的补。

引理 2.2.2. 设无向连通图 $G = (V, E)$ 的割边集合为 E' ， $G' = (V, E \setminus E')$ 。则对任意的 $u, v \in V$ ， $u \neq v$ ， u, v 在 G 中边双连通当且仅当 u, v 在 G' 中连通。

证明. 若 u, v 在 G' 中连通，假设它们不是边双连通的，则存在一条边 e 使得删去 e 后 u, v 不连通，则 e 必然是割边，然而删除全部割边的 G' 中 u, v 仍是连通的，矛盾。因此 u, v 边双连通。

若 u, v 在 G' 中不连通，考虑树上路径 $u \rightsquigarrow v$ ，一定存在路径上一条边 e 使得 e 是割边（否则 u, v 就连通了），根据引理 2.2.1，删去这条边后 u, v 不在同一连通分量，因此 u, v 不边双连通。□

至此我们就可以定义：

定义 2.5 (边双连通分量). 无向图 G 中的结点按照边双连通关系可以划分为若干个等价类，每个等价类的导出子图称为 G 的一个边双连通分量。

边双连通分量的存在性由引理 2.2.2 保证：只需要将 G 的所有割边删去得到 G' ，则 G' 中的所有连通块就是 G 的边双连通分量。

我们可根据引理 2.2.2 求出所有的边双连通分量，利用一些数据结构技巧可以做到 $O(n+m)$ 的时间复杂度。不过 Tarjan 算法是一种同样复杂度却更加简洁的算法。

考虑怎样的边会成为割边，设 DFS 树边 $e = (x, y)$ ，其中 x 为子结点。那么 e 是割边当且仅当不存在 x 子树中的点到 x 的祖先（但不包括 x ）的边（注意非树边都是返祖边）。于是我们可以求出 low_x 表示：从 x 子树中的任意一个点出发，只能通过至多一条非树边能够到达的结点的最小 DFS 序。这可以通过一个树形 DP 求出：

$$low_x = \min \left(dfn_x, \min_{y \in Son(x)} (low_y), \min_{(x,y) \in E} (dfn_y) \right)$$

满足 $low_x = dfn_x$ 的点是一个边双连通分量的最浅点，当我们 DFS 过程中发现这样的点时，其子树中未被删除的部分就构成一个边双连通分量，随后将这个子树删除即可。

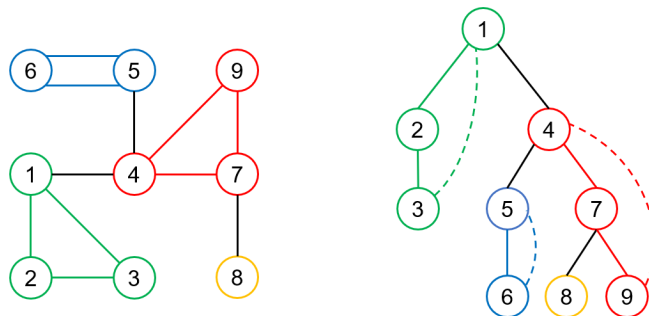


图 1: 一张无向图和它的不同边双连通分量

2.2.2 点双连通

点双连通关于点并不是一个等价关系，不过我们仍可以从 DFS 树开始研究。

定义 2.6 (割点). 对于无向连通图 $G = (V, E)$ ，若 $u \in V$ 满足 G 关于 $V \setminus \{u\}$ 的导出子图不连通，则称 u 是一个割点。对于不一定连通的无向图 G ，其任意一个连通分量的割点都称为其割点。

割点同样有等价的描述：如果 $\{u\}$ 是某个点对的点割集，则 u 是割点。

回忆 Tarjan 算法中定义的 low 数组： low_x 表示 DFS 树上从 x 子树内任意一点出发经过至多一条非树边能够到达的结点的最小的 DFS 序。我们可以用它来求割点。

引理 2.2.3. 无向连通图 $G = (V, E)$ 中， x 是割点当且仅当以下两个条件至少满足一个：

1. x 是 DFS 树的根结点且有至少两个子结点；
2. x 是 DFS 树的非根结点，且存在一个子结点 y 满足 $low_y \geq dfn_x$ 。

证明. 第一个条件是比较显然的。

考虑第二个条件，若存在这样的子结点 y ，则 y 的子树中没有通向 x 的祖先（但不包括 x ）的返祖边。删去 x 后 y 的子树与外界不连通，单独形成了一个连通分量，则 x 必是一个割点。

反之, 如果非根结点 x 是割点, 设 V' 为 x 的子树关于 V 的补集, 则删去 x 后至少有一个 x 的子结点 y 与 V' 不连通, 这就表示 y 子树中任何一个点都没有通往 V' 的返祖边, 即 $low_y \geq dfn_x$ 。□

定义 2.7 (点双连通分量). 无向图 $G = (V, E)$ 中, 若点集 $V' \subseteq V$ 满足 V' 的导出子图 G' 点双连通, 且对于任何 $V' \subset V'' \subseteq V$, V'' 的导出子图不点双连通, 则称 G' 是 G 的一个点双连通分量。

Tarjan 算法可用于求解所有点双连通分量, 方法与求边双连通分量有些类似: 进行树形 DP 求出 low_x , 若对于一对父子 (x, y) 满足 $low_y \geq dfn_x$, 则取出 y 子树内未被删除的部分, 与 x 共同组成一个点双连通分量。随后我们将 y 子树内未被删除的部分进行删除。时间复杂度 $O(n + m)$ 。

根据引理 2.2.3 及其证明, 不难说明 Tarjan 算法的正确性。不过目前我们并不掌握点双连通分量的太多性质。在 2.2.1 节中我们根据对 V' 的划分定义了边双连通分量, 那么点双连通分量是否也有类似的形式呢? 答案是肯定的, 不过我们需要将研究对象从点转移到边上。接下来我们就给出一种从边的视角刻画点双连通分量的方法。在本节剩余的讨论中, 我们均默认图是无自环的。

引理 2.2.4. 对于点双连通图 G 中任意不同两点 u, v , 存在经过 u, v 的简单环。

证明. 这是 Menger 定理的直接推论。□

引理 2.2.5. 对于点双连通图 G 中任意一点 u 和一条边 e , 存在经过 u, e 的简单环; 对于任意两条边 e_1, e_2 , 存在经过 e_1, e_2 的简单环。

证明. 我们将一条边 $x \rightarrow y$ 拆成 $x \rightarrow z$ 和 $z \rightarrow y$ 两条边, 显然新图仍是点双连通的, 但此时边就被转化成了点, 直接应用引理 2.2.4 即得证。□

定义 2.8. 无向图 G 上的两条边 e_1, e_2 , 若存在一个简单环同时包含 e_1, e_2 , 则称它们是共环的。

引理 2.2.6. 共环是等价关系, 每个点双连通分量中的边是共环意义下的一个等价类。

证明. 首先, 同一点双连通分量中的任意两条边共环, 这是由引理 2.2.5 得到的。

对于不同点双连通分量中的两条边 $e_1 = (x, y)$, $e_2 = (u, v)$, 假设存在一个简单环同时包含 e_1, e_2 , 那么这个环上的所有点一定是点双连通的, 这与 e_1, e_2 属于不同点双连通分量矛盾。□

注意，无论在点双连通分量的定义还是在上面的证明中，我们都没有证明一个基本的事实：每条边只属于一个点双连通分量。不过事实上根据定义或 Tarjan 算法都可以简单地说明任意两个点双连通分量交集大小至多为 1，因此每条边确实只在一个点双连通分量中。

有了引理 2.2.6，我们就可以像看待边双连通分量一样看待点双连通分量，只不过边双连通分量是对点集的划分，而点双连通分量是对边集的划分。

2.2.3 圆方树

圆方树是用来描述无向图点双连通分量结构的一种数据结构。

定义 2.9 (圆方树). 对于至少有 2 个结点的无向连通图 $G = (V, E)$ ，建立一张新的无向图 T ，每个结点对应 G 的一个结点或点双连通分量，两个结点之间有边当且仅当它们分别代表一个 G 中的结点 x 和一个 G 的点双连通分量 $G' = (V', E')$ ，且 $x \in V'$ 。这 T 叫做 G 的圆方树。 T 中对应原图上结点的结点称为圆点，对应原图点双连通分量的结点称为方点。

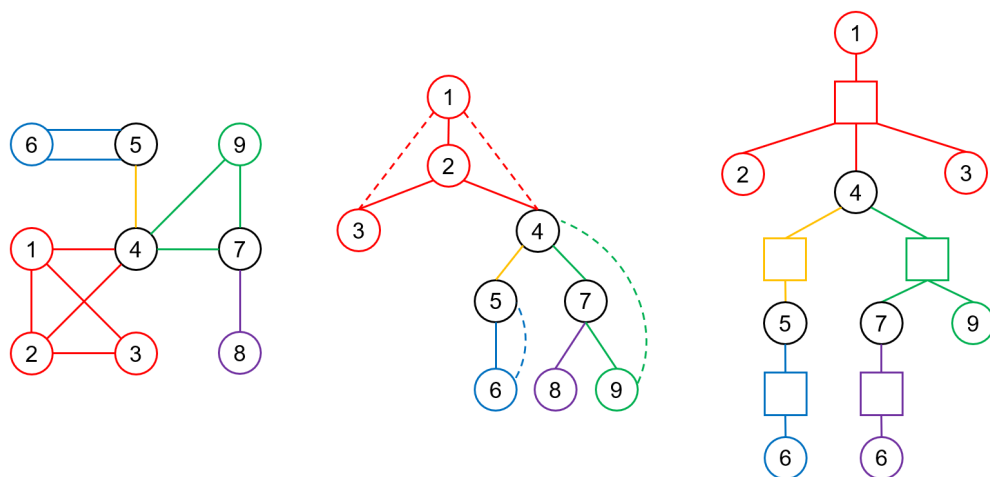


图 2: 一张无向图和它的不同点双连通分量、圆方树

考虑一条长度为 k 的路径 $u \rightsquigarrow v$ ，它会依次经过它的每条边所属的点双连通分量，因此它就对应于圆方树上的长度为 $2k$ 的路径 $u \rightsquigarrow v$ ，除了原来路径上的点外还依次经过每条边所属点双连通分量对应的方点。因此，连通图的圆方树是连通的；同时，圆方树一定是无环的，否则环可以缩成一个点双连通分量。于是，圆方树确实是树。对于不一定连通的无向图 G ，可以定义它的“圆方森林”，即对每个连通分量各建圆方树。

性质 2.2.1. 圆方树是二分图，两部分别是圆点和方点。

性质 2.2.2. 一个点是割点当且仅当它在圆方树上（对应的圆点）度数大于 1。圆方树上的叶结点（包括度数为 1 的根）必定是圆点，并且它们就是全部的非割点。

性质 2.2.3. 一张 $n \geq 2$ 个点的无向图的全部点双连通分量的点数之和不超过 $2n - 2$ 。

证明. 在圆方树上以某个圆点为根，然后我们为每个方点指定一个子结点，这些子结点都是圆点且一定不会有重复，因此方点的数量不超过非根的圆点的数量，即 $n - 1$ 。

因此圆方树的总点数不超过 $2n - 1$ ，总边数不超过 $2n - 2$ ，而每个点双连通分量大小之和就是方点的度数和，即圆方树的总边数，于是得证。□

性质 2.2.4. 无向连通图 G 上两个结点 $u, v \in V$ 间的任何简单路径，一定经过且只经过在它们圆方树路径上的所有方点对应的点双连通分量（所包含的边），一定经过它们圆方树路径上的所有圆点（对应的原图的点）。

圆方树在 OI 中是一种很重要的结构，在许多题目中有着应用，下面试举几例。

例 2.2.1 (仙人掌). 每条边只在至多一个简单环上的无向连通图叫做（边）仙人掌。许多树上可以完成的操作可以通过圆方树被搬到仙人掌上进行。

考虑在仙人掌上进行 Tarjan 算法，我们会得到一棵 DFS 树，并且每条非树边对应的的树上路径两两边不交，每条非树边就对应了一个简单环。因此 Tarjan 算法的过程可以直接帮我们找到所有环，这是很方便的。例如我们需要在仙人掌上进行 DP 时，就可以在圆方树（或 DFS 树）上自底向上进行，每找到一个环就在环上进行 DP，否则进行树上 DP。

而当我们需要在仙人掌上进行路径修改查询等操作时，一般就需要将仙人掌上路径转化为圆方树的树上路径，通过一些讨论将问题转化为树上问题解决。不过这类问题一般代码难度较高，在目前的 OI 题目中是很少见的。

例 2.2.2 (地地铁铁²). 给定无向连通图 $G = (V, E)$ ，边有黑白两种颜色，请求出有多少个无序点对 (x, y) 满足存在一条简单路径 $x \rightsquigarrow y$ 上同时有黑边和白边出现。

我们只需求出不满足条件的点对 (x, y) ，而这又可以分成三种：

1. 任何简单路径 $x \rightsquigarrow y$ 都只经过黑色边；
2. 任何简单路径 $x \rightsquigarrow y$ 都只经过白色边；
3. 分别存在简单路径 $x \rightsquigarrow y$ 只经过黑色边和白色边，但没有同时经过两种边的简单路径。

我们首先来看情况 1。根据圆方树的性质 2.2.4 我们已经知道，只需要考虑位于圆方树上路径 $x \rightsquigarrow y$ 上的所有方点中的边即可，因为其他边都是 x 到 y 的简单路径不可能经过的。

²Luogu P8456, SWTR-8

我们称一个方点是纯黑的，当且仅当其（对应的点双连通分量）中所有边都是黑的，纯白定义类似。那么我们断言，情况 1 成立当且仅当圆方树上路径 $x \rightsquigarrow y$ 上的所有方点都是纯黑的。

引理：点双连通图中，任意给定两点 $x, y (x \neq y)$ 和一条边 e ，存在经过 e 的简单路径 $x \rightsquigarrow y$ 。

上述引理的证明只需回忆引理 2.2.5，我们首先找到一个包含 x, e 的环 C ，然后选择一条 y 到 x 的简单路径 P ，满足 P 与 C 的点集交大于 1（注意 x 一定在交中，因此一定能找到这样的 P ，否则 x 是割点）。设它们的点集交中在 P 上最靠近 y 的点为 u ，那么选择包含 e 的环上路 $x \rightsquigarrow u$ 并上 P 的前缀 $u \rightsquigarrow y$ ，就得到了 $x \rightsquigarrow y$ 的经过 e 的简单路径。

因此如果存在一个路径上的方点不是纯黑的，那么我们走到那个点双连通分量时随意通过一条其中的白色边，就与情况 1 矛盾了；同时如果路径上每个方点都是纯黑的，显然 x 到 y 的任何简单路径都是纯黑的。这证明了我们的断言。

情况 2 与情况 1 是类似的。

情况 3 看上去稍微复杂一些。我们首先需要引理。

引理：如果 (x, y) 满足条件 3，那么任取两条分别是纯白和纯黑的 x 到 y 的简单路径 P_1, P_2 ，它们除端点外是点不交的。

引理的证明并不困难：假设两条路径除端点外还是点相交的，则可以分别取一个前缀和后缀构成一条新的路径，但新的路径并不是纯黑或纯白的，与情况 3 的描述矛盾。

这个引理告诉我们， x, y 一定在同一个点双连通分量中（否则它们间的任意路径都会经过某个割点）。此外，假设 x, y 所在的点双连通分量中，除了 x, y 外还存在一个点 u 满足有一黑一白的两条边 e_1, e_2 与之关联，则 x, y 一定不满足情况 3。这是因为我们可以找到两条 $x \rightsquigarrow y$ 的简单路径，分别经过 e_1, e_2 ，而它们点相交于 u ，与引理矛盾。

由上面的分析，每个点双连通分量中至多有一对满足情况 3 的 (x, y) ，只要找到同时有黑白边与之关联的那些结点即可。

三种情况分析完毕，剩余的部分只是计算这些点对的数量，这部分比较简单，从略。

例 2.2.3 (Tom & Jerry³). 在一张无向连通图 G 上， Tom 追逐 $Jerry$ 。每一回合由 $Jerry$ 先行动， Tom 后行动。 $Jerry$ 每次行动可以经过任意多条边，但不能经过 Tom 所在结点； Tom 每次行动只能经过至多一条边，若行动结束后位于 $Jerry$ 所在位置则 Tom 获胜。现在 q 次给出 (a, b) ，问当 Tom 和 $Jerry$ 初始分别位于 a, b 两点时， Tom 能否在有限时间内获胜。

定义点对 (x, y) 是好的，当且仅当圆方树上路径 $x \rightsquigarrow y$ 上任意两个相邻的圆点在原图 G 上也相邻。

主结论： Tom 能获胜，当且仅当以下两个条件成立至少一个：

³Luogu P7353，本题是笔者为 IOI2021 精英集训作业命题的一道题目。

1. 存在一个点 u , 使得对于任意的 x , (u, x) 是好的;
2. 对于删去 a 后 b 所在的连通块中任意一点 x , (a, x) 是好的。

首先证明充分性。两个条件实际上是类似的, 我们以条件 2 为例。Tom 只需每次沿着圆方树上路径向 Jerry 靠近一步即可 (这里的可行性就是由条件 2 保证的), 由圆方树的性质可知 Jerry 始终只能在 Tom 所在点的一个分支中行动, 因此 Tom 和 Jerry 最终会相遇, Tom 获胜。

再考虑必要性。假设两个条件都不满足, 那么 Jerry 第一步可以走到一个点 x 使得 (a, x) 不是好的, 随后在原地等待, 直到 Tom 走到了一个不在 $a \rightsquigarrow x$ 树上路径上的点 y 。根据第一个条件不成立, 我们知道整张图上一定存在一个点 z 使得 (y, z) 不是好的。假设树上路径 $z \rightsquigarrow x$ 不经过 x , 那么此时 Jerry 直接从 x 走到 z 即可; 否则, Jerry 可以在 Tom 走到 y 的上一步走到 z 。总之, 现在又回到了 Tom 所在点和 Jerry 所在点构成的点不是好的情形, 于是 Tom 永远是追不上 Jerry 的。

在有了主结论的基础上加以圆方树上 DP 即可完成本题, 不过后续部分与本文无关, 从略。

2.2.4 耳分解

耳分解是对双连通图的另一种刻画, 在一些问题上可以给我们提供一些不同的视角。

定义 2.10 (耳、开耳). 在无向图 $G = (V, E)$ 中, 有一个子图 $G' = (V', E')$, 若简单路径或简单环 $P: x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_k$ 满足: $x_1, x_k \in V'$, $x_2, \dots, x_{k-1} \notin V'$, 则称 P 是 G 关于 G' 的耳。若 P 是简单路径, 则称 P 是 G 关于 G' 的开耳。

定义 2.11 (耳分解、开耳分解). 对于无向连通图 G , 若连通图序列 (G_0, G_1, \dots, G_k) 满足:

1. G_0 是一个简单环 (可以只有一个点), $G_k = G$;
 2. G_{i-1} 是 G_i 的子图;
 3. 设 $G_i = (V_i, E_i)$, 则 $E_i \setminus E_{i-1}$ 构成 G_{i-1} 的一个耳 (开耳)。
- 则称 (G_0, G_1, \dots, G_k) 是 G 的一个耳分解 (开耳分解)。

定理 2.2. 无向连通图 G 存在耳分解当且仅当 G 边双连通。

证明. 先证必要性。若 G 有耳分解 (G_0, \dots, G_k) , 则由于 G_0 是简单环, G_0 一定是边双连通的。若 G_i 是边双连通的, 则在 G_i 的基础上加一条路径构成的 G_{i+1} 也是边双连通的 (因为任何边都不可能是割边)。利用数学归纳法知 $G = G_k$ 是边双连通的。

再证充分性。若 $G = (V, E)$ 是边双连通的, 如果它不含任何边, 则结论显然。否则, 我们求出它以 1 为根的一棵 DFS 树, 然后按照如下方法得到 G 的一个耳分解:

1. 找到一条以 1 为端点的非树边 $1 \rightarrow x$, 令 G_0 是由树上路径 $1 \rightsquigarrow x$ 加上这条非树边构成的简单环。

2. 若现在已经生成了 G_i , 如果 G_i 的点集不为 V , 找到一个不属于 G_i 的点 x 满足 x 的父亲 y 属于 G_i , 则由边双连通性知存在一条返祖边, 两端点分别是 y 的祖先 u 和 x 的后代 v , 然后我们选择树上路径 $y \rightsquigarrow v$ 并上边 $v \rightarrow u$, 这是 G_i 的一个耳, 令 G_{i+1} 为 G_i 加上这个耳。

3. 重复上述过程直到 G_i 的点集为 V , 此时若还有 G 中的边未加入 G_i , 则可以每条边作为一个耳依次加入。

第二步中, 我们始终保证 G_i 的点集是个包含 1 的树上连通块, 因此这样的 x 总能找到。□

例 2.2.4 (Quare⁴). 给定带边权无向边双连通图 G , 求包含所有点的边双连通子图的最小边权和。

直接考虑边双连通图的形态是比较困难的, 但是从耳分解的角度就比较容易处理。

设 $f(S)$ 表示将集合 S 中的点连成一个边双连通图的最小边权和, 那么转移为 $f(S) + E(S, T \setminus S) \rightarrow f(T)$, 其中 $E(S, R)$ 表示由 R 中的点和 S 中的两个端点构成的耳的最小边权和。 $E(S, R)$ 的计算可以通过枚举耳上除端点外的最后一个点来计算, 时间复杂度为 $O(2^n \times \text{Poly}(n))$, 但是计算 f 数组时我们需要枚举子集, 总复杂度为 $O(3^n \times \text{Poly}(n))$ 。

这是可优化的, 我们不计算 $E(S, R)$, 转而直接在计算 f 数组时枚举耳上点的顺序, 每次只在耳的最后加一个点, 而不是加入整个耳。具体地, 令 $f(S, i, j)$ 表示已经将集合 S 中的结点连成边双连通图, 现在正在加入一个耳, 这个耳已经从一端开始延伸到 i , 钦定耳的另一个端点是 $j \in S$ 。在转移时只需要枚举耳上 i 的下一个点即可。时间复杂度为 $O(2^n \times \text{Poly}(n))$ 。

定理 2.3. 至少含有三个点的无自环无向连通图 G 存在开耳分解当且仅当 G 点双连通。

证明. 证明总体和定理 2.2 类似。

先证必要性。若 G 有开耳分解 (G_0, \dots, G_k) , 则由于 G_0 是简单环, G_0 一定是点双连通的。若 G_i 是点双连通的, 则在 G_i 的基础上加一条路径构成的 G_{i+1} 也是边双连通的 (因为任何边都不可能是割边)。利用数学归纳法知 $G = G_k$ 是点双连通的。

再证充分性。若 $G = (V, E)$ 是点双连通的, 我们求出它以 1 为根的一棵 DFS 树, 然后按照如下方法得到 G 的一个开耳分解:

1. 找到一条以 1 为端点的非树边 $1 \rightarrow x$, 令 G_0 是由树上路径 $1 \rightsquigarrow x$ 加上这条非树边构成的简单环。

2. 若现在已经生成了 G_i , 如果 G_i 的点集不为 V , 找到一个不属于 G_i 的点 x 满足 x 的父亲 y 属于 G_i , 则由点双连通性知存在一条返祖边, 两端点分别是 y 的父亲的祖先 u 和 x

⁴SNOI 2013

的后代 v ，然后我们选择树上路径 $y \rightsquigarrow v$ 并上边 $v \rightarrow u$ ，这是 G_i 的一个开耳，令 G_{i+1} 为 G_i 加上这个开耳。

3. 重复上述过程直到 G_i 的点集为 V ，此时若还有 G 中的边未加入 G_i ，则可以每条边作为一个开耳依次加入（这里用到了无自环的条件）。

第二步中，我们始终保证 G_i 的点集是个包含 1 的树上连通块，因此这样的 x 总能找到。 \square

例 2.2.5 (双极定向 (Bipolar Orientation)). 给定无向图 $G = (V, E)$ 和不同的两个结点 s, t ，以下四个命题等价：

1. 在添加无向边 $s \rightarrow t$ 后， G 点双连通；
2. G 的圆方树中所有方点构成一条链， $s \rightsquigarrow t$ 是圆方树的一条直径；
3. 存在一种对 G 的边进行定向的方法，得到一个有向无环图，且 s 入度为零， t 出度为零，其余点出入度都不为零。
4. 存在一个所有点的排列 p_1, p_2, \dots, p_n ，使得 $p_1 = s, p_n = t$ ，且任意前缀以及任意后缀的导出子图都是连通的。

证明. 我们先证命题 1,2 和命题 3,4 分别等价，再证这两对命题也等价。

第 1,2 个命题的等价是比较显然的。

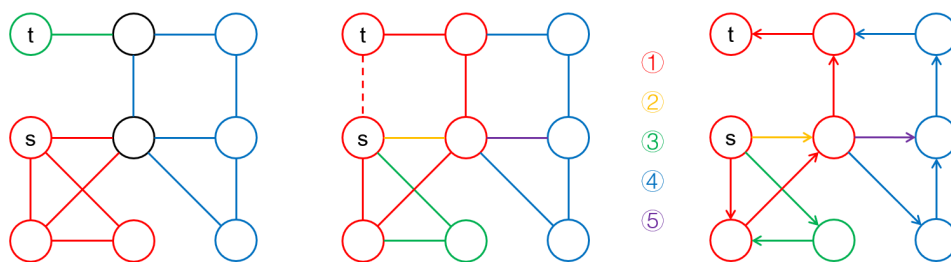
考虑第 3,4 个命题。

如果命题 3 成立，则我们任取定向后的一个拓扑排序作为命题 4 中的 p 。由命题 3 的描述知除 s 外每个点都存在一个拓扑序比它小的邻居，从而对任意的 p_i ，一定存在一个邻居在 p_1, \dots, p_{i-1} 中，于是由 p_1, \dots, p_{i-1} 导出子图连通可以推出 p_1, \dots, p_i 导出子图连通，归纳即得任意前缀的导出子图连通，同理任意后缀的导出子图连通。如果命题 4 成立，则我们令每条边的方向是从 p 中排在靠前的点连向靠后的点，容易验证命题 3 成立。

接下来我们由命题 1 推命题 3。连接 s, t 后我们求出 G 的一个开耳分解 (G_0, \dots, G_k) ，满足 G_0 包含边 $s \rightarrow t$ （回忆定理 2.3 的证明，我们可以在构造中做到这一点）。 G_0 是一个简单环，显然可以将 $s \rightarrow t$ 以外的边都定向为从 s 到 t 的。接下来进行归纳，如果 G_i 已经定向完毕，现在向其中加入一个开耳得到 G_{i+1} ，设开耳的两端点为 u, v 。若 G_i 的定向中 u 可达 v ，则我们令耳的方向为从 u 到 v ，否则令耳的方向为从 v 到 u 。这不会破坏图的无环性，并且除 s, t 外每个点在加入时都拥有了 1 的入度和出度，因此最终 $G = G_k$ 的定向满足命题 3。

最后我们由命题 4 推命题 1。假设命题 1 不成立，那么存在一个割点 u 满足删去 u 后 s, t 在同一连通块，于是一定还有一个不包含 s, t 的连通块，设为 S 。设 $S \cup \{u\}$ 中在排列 p 里出现最早和最晚的点分别是 x, y ，则 x, y 中至少有一个不是 u 。不妨设 $x \neq u$ ，那么考察前缀 $p_1, \dots, p_i = x$ 的导出子图，由于 u 不在其中而 s, x 都在其中，所以这张图一定不连通，与命题 4 矛盾。因此命题 4 可以推出命题 1。

结合以上，我们证明了四个命题的等价性，同时我们给出了由命题 1 到命题 3,4 的构造。 \square

图 3: 一张无向图、连接 s, t 后的开耳分解与双极定向

2.3 割集与切边等价

2.3.1 割空间和环空间

之前我们定义了两点之间的点割集和边割集，但这里我们要说的割集意义不太一样，它是定义在点集 V 的一个二划分上的。

定义 2.12 (割集). 在无向图 $G = (V, E)$ 中，对于 V 的一个二划分 $V = V_1 \uplus V_2$ ，定义 V_1, V_2 间的割集为 $\{e \in E \mid e = (x, y), x \in V_1, y \in V_2\}$ ，记为 $C(V_1, V_2)$ ，本文中也简记为 $C(V_1)$ 或 $C(V_2)$ 。

可以发现，如果 G 不连通，则 G 的割集可以拆分为 G 的各个连通分量的割集的并。因此我们基本只需要考虑连通图的割集。最简单的连通图是树，因此我们从树的割集出发进行研究。

引理 2.3.1. 对于树 $T = (V, E)$ ，任意边的子集 $E' \subseteq E$ 都是割集，且对应的划分 V_1, V_2 唯一。

证明. 对于任意的边的子集 $E' \subseteq E$ ，删去 E' 中的边后树将分裂成若干个连通分量，设这些连通分量构成的集合为 C 。 E' 中的边会将 C 中的元素连成树，设这个以 C 的元素为结点的树为 T' 。

若 E' 确实是割集，则对于任意 $c \in C$ ，所有 c 中的结点必然在割集的同侧，且对于 T' 上相邻的两个结点 $c_1, c_2 \in C$ ，它们必然在割集的两侧。

于是我们得到了唯一可能的划分，即一部分是 T' 上深度为奇数的结点对应的连通分量中的所有点，另一部分是 T' 上深度为偶数的结点对应的连通分量中的所有点。同时容易验证 E' 确实是这个划分的割集，因此命题得证。 \square

引理 2.3.2. 若连通图 $G = (V, E)$ 有一棵生成树 $T = (V, E_0)$ ，则对于任意 $E'_0 \subseteq E_0$ ， G 存在唯一的割集 E' 满足 $E' \cap E_0 = E'_0$ ，且对应的划分 V_1, V_2 唯一。

证明. 根据引理 2.3.1, 由 E'_0 我们可以直接得出唯一的一组 V_1, V_2 , 于是对于所有非树边 e , 若 e 的两端都在 V_1 或都在 V_2 中则 $e \notin E'$, 否则 $e \in E'$, 就得到了满足条件的唯一割集 E' . \square

我们还可以进一步分析 E' 中有哪些非树边. 考虑非树边 e 的两个端点 x, y , 若树上路径 $x \rightsquigarrow y$ 上有奇数条边在 E'_0 中, 说明在引理 2.3.1 的证明中所说的 T' 上 x, y 所在连通分量的深度奇偶性不同, 也就是说它们位于割集两侧, 因此 $e \in E'$, 否则 $e \notin E'$. 也就是说, E' 恰好包含所有跨过奇数条 E'_0 中树边的那些非树边.

定理 2.4 (割空间). 在无向图 $G = (V, E)$ 中, 将任何一个边的集合看成 \mathbb{F}_2 上的 m 维向量, 则所有割集组成的集合是 \mathbb{F}_2 上的线性空间, 称为割空间. 它的维数为 $n - c$, c 为 G 的连通分量个数.

证明. 先考虑连通图的情形.

要证明割集组成的集合是线性空间, 只要证任意两个割集的对称差仍是割集.

若有割集 C_1, C_2 , 它们位于生成树上的子集分别是 E_1, E_2 , 则 $C_1 \oplus C_2$ 位于生成树上的子集就是 $E_1 \oplus E_2$. 考虑一条非树边 e , 若它跨过奇数条 $E_1 \oplus E_2$ 中的边, 则根据对称差保持奇偶性的性质, 可以得到 e 要么经过奇数条 E_1 中的边, 要么经过奇数条 E_2 中的边, 二者只居其一, 这等价于 $e \in C_1 \oplus C_2$, 因此 $C_1 \oplus C_2$ 确是割集.

要求空间的维数只需给出一组基, 根据引理 2.3.2, 对于生成树上的每条边 e 定义 $f(e)$ 为 e 与跨过 e 的非树边构成的边集, 则所有的 $f(e)$ 构成割空间的一组基, 因此割空间的维数为 $n - 1$.

当图不连通时, 不同的连通分量彼此独立, 完整的图的割空间等于各个连通分量割空间的直和, 因此维数相加, 算得 G 的割空间维数为 $n - c$. \square

无向图中还有另一种 \mathbb{F}_2 上的线性空间, 由于它的结构更加简单直观, 而且讨论过程与割空间相似, 因此这里不加证明地直接给出结论:

定理 2.5 (环空间). 在无向图 $G = (V, E)$ 中, 考虑所有满足每个点的度数都为偶数的子图 $G' = (V, E')$, 其中的 E' 看成 \mathbb{F}_2 上的 m 维向量, 构成了一个 \mathbb{F}_2 上的线性空间, 称为 G 的环空间, 维数为 $m - n + c$, c 为 G 的连通分量个数.

与割空间类似, 环空间的一组基是由每条非树边导出的: 对于每条非树边 $e = (x, y)$, 它并上树上路径 $x \rightsquigarrow y$ 就构成一个环, 这些环就是环空间的一组基.

定理 2.6. 同一张无向图的割空间与环空间互为正交补.

证明. 使用同一个生成森林, 我们尝试证明由这个生成森林构造出的割空间和环空间的基中的元素两两正交. 考虑一条树边 e_1 和一条非树边 $e_2 = (x, y)$, 它们对应的割空间和环空

间的基中的元素分别是 v_1, v_2 。若 e_1 不在树上路径 $x \rightsquigarrow y$ 上, 则 v_1 和 v_2 对应的边集无交; 若 e_1 在树上路径 $x \rightsquigarrow y$ 上, 则 v_1 和 v_2 对应的边集交集只有 e_1, e_2 。对于这两种情况都有 $v_1 \cdot v_2 = 0$ 。

同时由于两个空间的维数之和为 m , 因此它们互为正交补。 \square

例 2.3.1 (环覆盖⁵)。给定简单无向图 G , 对于每个 $i \in [1, m]$ 求出环空间中对应边集大小为 i 的元素数量。

本题有两种主要的考虑方式。

解一：一种直接的做法。将每条边 $e = (x, y)$ 看成一个 \mathbb{F}_2 上的 n 维向量, 只有第 x, y 维为 1, 则问题转化为有多少 i 元子集的和为零。

解二：找一个 G 的生成森林, 然后考虑由森林导出的环空间的一组基。枚举某个元素是基的 x 元子集的和, 并只保留树边对应的那些维 (因为已经枚举了非树边的数量 x), 问题转化为求基的 x 元子集中有多少个的和当中 1 的个数为 $i - x$ 。

两种转化直接使用 FWT 进行处理, 复杂度均为 $O(n \times 2^n + \text{Poly}(m))$ 。

在此基础上, 解一可以使用 FWT 的定义将 FWT 转化为一个状压 DP, 使用 $O(1)$ 求 popcount 和 lowbit 即可实现 $O(2^n + \text{Poly}(m))$ 。

对解二的优化需要用到一些前置知识, 由于这比较复杂因此在此不详细叙述, 感兴趣的读者可以参考 CF1336E2 的题解。解二实际上是在求一个 \mathbb{F}_2 上线性空间中所有元素的为 1 的位数的分布, 我们的结论是: 如果能够在正交补空间中解决这个问题, 则可以用多项式复杂度的代价得到原空间的答案。因此我们可以在环空间的正交补——割空间上考虑这个问题, 而割空间的维数为 $n - c$, 可以直接枚举。最终复杂度为 $O(\frac{2^n \times m}{w} + \text{Poly}(m))$ 。

2.3.2 割集的应用与切边等价

虽然已经介绍了割空间的有关性质, 但我们至此还不知道如何判断一个集合是否是割集。

设图中共有 t 条非树边, 我们将每条边看作一个 \mathbb{F}_2 中的 t 维向量: 第 i 条非树边对应的向量只有第 i 位为 1, 而树边对应的向量中, 所有跨过这条树边的非树边对应的位为 1, 其他位为 0。

现在考虑由生成森林得到的割空间的基, 基中的每个元素形如一条树边并上所有跨过这条树边的非树边, 根据上面的定义, 基中每个元素对应的边的 t 维向量之和为零。

我们知道割空间是线性空间, 再结合上面对边对应 t 维向量的定义, 我们就不难得到一个边集是割集, 当且仅当其中所有边对应的 t 维向量之和为零。

⁵IOI 2023 中国国家集训队互测

在实现时我们不可能真的用 t 维向量进行操作。我们可以选择将每一维都对应到一个 2^{64} 以内的权值，一个向量就用其中所有为 1 的位对应的权值异或和来表达。也就是说，我们为每条非树边设定一个随机权值，再定义树边的权值为所有跨过它的非树边的权值异或和。如果一个边集边权异或和为零，我们就相信它是割集。

例 2.3.2 (DZY Loves Chinese II⁶). 给定无向图 $G = (V, E)$, q 次询问每次给定一个边集，求删除该边集后图是否连通。保证边集大小不超过 15。

通过之前所说的转化，我们需要判定是否存在一个给定边集的非空子集，边权异或和为零。只需要建立一个线性基即可判断。

注意这里边集大小不超过 15 是重要的。因为我们将边权设定在 2^{64} 以内，由于本题需要对所有子集判断是否存在一个异或和为零，所以错误率比判定单个集合是否是割集要高得多，因此只能处理比较小的数据范围。（考虑如果给定边集大小大于 64，则无论如何我们都会判定为不连通，这是荒谬的。）

按照上述方式定义的边权（向量）会将所有边分为若干个等价类，每个等价类中边权相等。我们将这种等价关系称为切边等价。切边等价有一些不同的定义形式：

引理 2.3.3. 在无向图 G 中， e_1, e_2 是边，以下三个命题等价：

1. e_1, e_2 切边等价；
2. e_1, e_2 都是割边；或者 e_1, e_2 在同一边双连通分量，且删除 e_1, e_2 后这个边双连通分量不再连通；
3. 对于任意一个环，或者同时包含 e_1, e_2 ，或者同时不包含 e_1, e_2 。

证明. 根据边权的定义即可知道命题 1 和命题 2 等价。

若命题 2 成立，则假设有一个环包含 e_1 却不包含 e_2 ，则 e_1, e_2 不是割边，所以删除 e_2 后边双连通分量仍然连通，并且此时还有一个包含 e_1 的环，因此再删除 e_1 也不影响连通性，这说明删除 e_1, e_2 后边双连通分量仍连通，矛盾。故命题 3 成立。

若命题 3 成立，则假设删除 e_1 后 e_2 不是割边，那么说明存在一个环包含 e_2 而不包含 e_1 ，矛盾。故命题 2 成立。这就证明了命题 2 和命题 3 的等价性。□

例 2.3.3 (Tours⁷). 给定无向有环图 G ，你需要用 k 种颜色对每条边进行染色，使得每个简单环上每种颜色的边出现次数相等，求 k 的最大值。

⁶BZOJ 3569

⁷ICPC 2015 World Final

直观地想，由于要求所有简单环上颜色都均匀分布，那么对于除割边外的每个切边等价的等价类，颜色都应该是均匀分布的。显然这导出一个可行的染色方案，即取 k 为所有除割边外等价类大小的最大公因数，然后将每个等价类均匀染色。根据引理 2.3.3 的命题 3，我们知道每个环上的颜色确实是均匀分布的。

下面我们要证明这样的 k 确实是最大的，即证明每个等价类的颜色都要均匀分布。建立一棵 DFS 树，设非树边共有 t 条，仅包含第 i 条非树边的简单环为 C_i ，我们只需证明每个 $D_1 \cap D_2 \cap \dots \cap D_t$ ——其中每个 D_i 为 C_i 或 C_i 的补，这个交集如果非空就是一个切边等价类——都可以表示成 $\{\bigoplus_{i \in S} C_i\}$ （这是环空间的所有元素）的实系数线性组合，即可证明所需结论（有这个结论之后可以对每种颜色分别证明个数是对的）。

首先我们证明若干个 C_i 的交，即 $\bigcap_{i \in S} C_i$ 可以表示为 $\{\bigoplus_{i \in S} C_i\}$ 的线性组合。事实上我们有

$$\bigcap_{i \in S} C_i = \frac{1}{2^{|S|-1}} \times \sum_{\emptyset \subset T \subseteq S} (-1)^{|T|} \bigoplus_{i \in T} C_i,$$

这个结论可以由 FWT 的性质导出。由于本文没有专门介绍 FWT，而且这个结论和我们的主题没有关系，所以这里就不证明了。

接下来，通过一个容斥原理即可从若干个 C_i 的交过渡到 D_i 的交，即如果有一个 D_i 为 C_i 的补，我们就将它写成全集减去 C_i ，这样就可以转化为 2^s 个子集的 C_i 的交的线性组合， s 表示 D_i 为 C_i 的补的 i 的数量。于是命题得证。

因此，除割边外所有切边等价类大小的最大公因数即为答案。利用前述随机方法，时间复杂度可以轻松地做到 $O((n+m) \log n)$ 。

3 有向图

有向图中不一定有双向的连通关系。在有向图中若存在路径 $x \rightsquigarrow y$ ，则我们称 x 可达 y 。

将一个有向图中的所有有向边变为无向边，得到的无向图称为原来有向图的基图。若基图连通，则称原来的有向图弱连通。

对于有向无环图，定义它的拓扑排序：拓扑排序是一个点的排列，满足若 x 可达 y ，则 x 在拓扑排序中须排在 y 之前。

3.1 可达性问题

可达性问题根据要求的是某一对/一些给定点对之间的可达性关系，或是要求所有点对间的可达性关系，可分为两类，后者称为传递闭包问题。

3.1.1 静态传递闭包

在离散数学中，二元关系 R 的闭包是指使得 $R \subseteq R'$ 且满足某种性质的最小的 R' 。那么传递闭包即满足传递性的最小的 R' 。显然，对于有向图 G ，我们首先将其连边关系 R 补全为自反的（即补充自环），然后其传递闭包就是可达性关系 R' 。

Floyd 算法是最常用的传递闭包算法。设关系 R'_k 表示只能途径编号为 $1, 2, \dots, k$ 的点的情况下的可达性关系，通过枚举途径 k 的路径即可得到 R'_{k-1} 到 R'_k 的递推关系。由于 Floyd 算法在 OI 中是熟知的，这里就不进行具体介绍了。Floyd 算法的时间复杂度为 $O(n^3)$ 。

在稀疏图中 Floyd 算法很低效。事实上，我们直接枚举终点 y ，然后在反图上从 y 开始搜索，就可以得到所有可达 y 的点 x 。对每个 y 都这样处理即可得到传递闭包，复杂度 $O(nm)$ 。

上述算法可以使用 bitset 优化，但在此之前我们需要先将图变为无环的。利用即将在 3.2 节中介绍的内容，我们可以将每个强连通分量缩成一个点，这样原图就变为一个有向无环图 G' 。

设 $f(x, y)$ 表示 x 是否可达 y ，我们将 $f(x, *)$ 看成一个 01 向量并用 bitset 维护。我们按照 G' 的一个拓扑排序逆序枚举每个点 u ，它的 $f(u, *)$ 是由它所有后继点 v 的 $f(v, *)$ 按位或得到的，当然还要加上它到自身的可达性 $f(u, u) = 1$ 。bitset 进行长度为 n 的 01 向量的位运算复杂度为 $O(\frac{n}{w})$ ，因此总复杂度 $O(\frac{nm}{w})$ 。

3.1.2 动态可达性问题举例

一般来说，动态传递闭包是一个比较困难的问题，在本文的参考文献部分列出了相关研究。而更常见的一类问题是给定的若干点对间的动态可达性问题。这类问题中我们一般要沿用求传递闭包的 bitset 方法，同时结合询问分块（或操作分块）等数据结构技巧来解决。

例 3.1.1 (Range Reachability Query⁸). 给定有向无环图 $G = (V, E)$ ，边有编号。现有 q 次询问，每次给定 $u, v \in V$ 和 l, r ，求在只保留编号在 $[l, r]$ 中的边的情况下， u 是否可达 v 。

由于只有 q 组询问，我们可以仿照之前的 bitset 方法，但是将使用 bitset 存储的第二维由点转化为询问。具体地，设 $f(x, i)$ 表示：在只保留编号为 $[l_i, r_i]$ 中的边的情况下， x 是否可达 v_i ，其中 l_i, r_i, v_i 表示第 i 次询问的对应参数。那么第 i 次询问的答案即 $f(u_i, i)$ 。

考虑一条编号为 c 的边 $x \rightarrow y$ ，这条边对应的转移为：对于所有满足 $l_i \leq c \leq r_i$ 的 i 有 $f(x, i) \leftarrow f(x, i) \vee f(y, i)$ 。用 bitset 的语言表达，若记 S_c 表示所有满足 $l_i \leq c \leq r_i$ 的 i 组成的集合，用一个长度为 q 的 01 向量表示，那么 $f(x) \leftarrow f(x) \vee (f(y) \wedge S_c)$ 。

用扫描线可以求出所有的 S_c ，然后再按照拓扑序逆序转移即可。来考虑一下复杂度，这个做法时间复杂度为 $O(\frac{q(m+n)}{w})$ ，但空间复杂度也为 $O(\frac{q(m+n)}{w})$ ，略大。

⁸2022 年杭电多校训练

这类题目有一种经典的优化空间复杂度的方法,即对使用 `bitset` 存储的那一维进行分块。在本题中,我们对询问分块,每 B 个询问一块,对于每一块单独运行上面的算法。这样空间复杂度就被优化为了 $O(\frac{B(m+n)}{w})$,而时间复杂度是对每一块进行求和,总和依然为 $O(\frac{q(m+n)}{w})$ 。当然块长 B 不能太小,否则时间复杂度中的 $\frac{1}{w}$ 将失效。

例 3.1.2 (Dynamic Reachability⁹). 给定有向图 $G = (V, E)$, 每条边是黑色或白色, 初始时每条边都是黑色。接下来进行 q 次操作, 每次反转一条边的颜色, 或者给定 $u, v \in V$ 询问 u 仅通过黑色边是否可达 v 。

由于边的颜色在变化, 我们此前的静态传递闭包很难派上用场。因此我们考虑询问分块, 这样在同一块内有大量边的颜色都是不变的, 有利于我们沿用之前的 `bitset` 方法。

设块长为 B , 这一块内所有修改和询问涉及到的总点数至多为 $2B$, 我们称这些点为关键点, 记它们依次为 u_1, \dots, u_k 。首先我们需要求出那些在块内永不变色的黑色边产生的影响, 记 $f(i, j)$ 表示仅考虑块内永不变色的黑色边, i 是否可达 j 。注意到我们其实只需要 i, j 都是关键点时的信息, 所以使用 `bitset` 维护的第二维大小仅为 $k = O(B)$ (因为第二维只需要记 u_1, \dots, u_k), 这部分预处理的复杂度也就是 $O(\frac{B(m+n)}{w})$ 。

现在我们得到了一张仅包含 k 个关键点的有向图 G' , 其中 u_i 到 u_j 有边当且仅当 $f(u_i, u_j) = 1$, 这样问题的规模就缩小了, 所有非关键的点和边产生的影响全部体现在了 G' 中。

现在考虑如何回答询问, 设要查询 u_i 到 u_j 的可达性, 在 G' 的边的基础上还需要考虑由块内修改产生的新的黑边, 这样的黑边有 $O(B)$ 条。我们可以直接采用暴力搜索的方法, 找到 u_i 能到达的关键点集合。以 BFS 为例, 每次从队列取出一个元素时, 我们需要将由这个点能够新访问到的点加入队列中, 这个过程显然是可以用 `bitset` 优化的: 只需要维护当前在队列中或已经出队过的所有点的集合, 就可以快速找到当前应该入队的点是哪些了, 时间复杂度为 $O(\frac{B^2}{w})$ 。

总的时间复杂度为 $O(\frac{q(n+m)}{w} + \frac{qB^2}{w})$ 。和上题一样, 块长不能太小, 否则 `bitset` 的 $\frac{1}{w}$ 将失效。因此我们可以就取 $B = \frac{w}{2} = 32$, 这样只需要一个 64 位整型就可以描述一个至多 $2B$ 维的 01 向量。不过在本题中将 B 取得稍大一些似乎能有更快的运行速度。

例 3.1.3 (有向无环图¹⁰). 给定有向无环图 $G = (V, E)$, 点带点权, 初始所有点权为零。接下来有 q 次操作, 操作包含如下三种:

1. 给定 u, x , 将 u 可达的所有点的点权赋值为 x ;
2. 给定 u, x , 将 u 可达的所有点的点权对 x 取 \min ;
3. 给定 u , 询问 u 的点权。

本题其实不是动态可达性问题, 不过处理方法有一定相似性。

⁹ZJCPC 2022, <https://codeforces.com/gym/103687>

¹⁰本题出处不可考。

首先, 我们求 G 的传递闭包, 复杂度 $O(\frac{nm}{w})$ 。

查询 u 的点权可以分为两个子问题: 先找到上一次对 u 的赋值操作, 再求这次操作到当前时间之间所有对 u 的取 \min 操作的最小值。

先看第一个问题。考虑以 B 为块长询问分块, 每当处理完一块操作后 $O(n+m)$ 更新一下每个点的上一次赋值操作。在查询时, 我们已经知道当前块的操作开始之前的答案, 只需再看一下当前块中有没有涉及 u 的赋值操作即可, 而这可以直接枚举当前块的所有赋值操作, 检查是否有某个操作对应的 u_i 可达 u 。

第二个问题处理方法基本相同, 我们对于每个 u 和每一个块, 都维护这个块中所有涉及 u 的取 \min 操作的最小值。查询的形式是给定 u 做区间查询, 同样对于整块采用预处理结果, 对于零散的部分暴力枚举每个操作即可。

时间复杂度为 $O(\frac{nm}{w} + qB + \frac{q(n+m)}{B})$, 取 $B = O(\sqrt{n+m})$, 则复杂度为 $O(\frac{nm}{w} + q\sqrt{n+m})$ 。注意这里我们面临和例 3.1.1 类似的空间问题, 可以采用类似的优化: 对于每个操作块, 我们在用 `bitset` 维护的那一维只保留块内修改或询问用到的点即可。

3.2 强连通性

定义 3.1 (强连通). 在有向图 G 中, 若两个结点 u, v 满足 u 可达 v 且 v 可达 u , 则称 u 和 v 是强连通的。若 G 中任意两点都是强连通的, 则称 G 是强连通的。

由于可达关系是传递的, 因此强连通关系也是传递的, 从而强连通关系是一种等价关系。在有向图 G 中我们可以将所有点按照强连通关系划分为等价类。

定义 3.2 (强连通分量). 有向图 G 中的结点按照强连通关系可以划分为若干个等价类, 每个等价类的导出子图称为 G 的一个强连通分量。

3.2.1 DFS 树和 Tarjan 算法

在有向图 G 中, 若点 r 可达所有点, 那么可以从点 r 开始对 G 进行 DFS。此时, 与无向图类似地, 我们可以定义 G 的 DFS 树。

定义 3.3 (DFS 序, DFS 树). 在有向 $G = (V, E)$ 上以一个可达所有点的结点 $r \in V$ 为起点进行深度优先搜索, 若结点 x 是第 p 个被访问到的结点, 则称 p 为 x 的 DFS 序, 记为 $dfn_x = p$ 。若 $x \neq r$, 则在 x 与第一次访问到 x 的结点 y 间连一条边, 形成的图 T 称为以 r 为根的一棵 DFS 树。

DFS 树是一棵外向树。在有向图 DFS 树上有一些和无向图类似的性质。

性质 3.2.1. 所有结点的 DFS 序构成 $1, \dots, n$ 的一个排列。 DFS 树上以任何结点 x 为根的子树中所有点的 DFS 序构成一段以 dfn_x 开始的连续区间。

性质 3.2.2. 非树边或者是从后代连向祖先的边（返祖边），或者是从祖先连向后代的边（前向边），或者是端点没有祖先关系，但是从 DFS 序大的点连向 DFS 序小的点的边（横叉边）。

证明是简单的，不过性质 3.2.2 说明有向图中非树边的结构比无向图更复杂一些。

下面考虑如何用 DFS 树求强连通分量，其过程和求双连通分量类似：我们依然在 DFS 过程中记录 low_x 表示从 x 子树中任意一个点出发，只能通过至多一条非树边到达的结点的最小 DFS 序，当找到 $low_x = dfn_x$ 的点 x 时就能得到一个以 x 为最浅点的强连通分量。

但是上述做法不完全正确，这是因为有横叉边的存在。如果 x 子树内有一个横叉边指向某个之前已经统计过的强连通分量，那么实际上这条横叉边是无效的（因为并不能帮助 x 走到 DFS 树上更浅的位置），我们需要忽略这样的横叉边，为此我们对算法做如下改进：

在 DFS 过程中维护一个栈，表示目前访问到的点中，尚未被划分到任何一个强连通分量的点集。依然在 DFS 过程中计算 low_x ，但这里我们要求只有当非树边的终点还在栈中（也就是还没有被划入任何强连通分量）时才统计入 low_x 里。当遇到 $low_x = dfn_x$ 的点时，就将当前栈中处于 x 子树里的部分（这一定是栈顶的一段）弹出，和 x 共同构成一个强连通分量。

注意，我们任意选择一个起点，不一定能保证 DFS 到每个点。但是这并不影响，如果有没访问到的点，就任选一个没访问过的点再进行 DFS ，重复这个过程直到所有点都被访问即可。

这就是求强连通分量的 Tarjan 算法，时间复杂度为 $O(n+m)$ 。我们并没有详细证明 Tarjan 算法的正确性，但在理解了无向图的 Tarjan 算法和有向图 DFS 树性质之后，这一切其实是自然的。

求出所有强连通分量后，将每个强连通分量看作一个点，原图中的边如果在一个强连通分量内部则忽略，否则看作连接两个强连通分量的边。这样新得到的有向图是一张有向无环图，这一过程称为缩点。

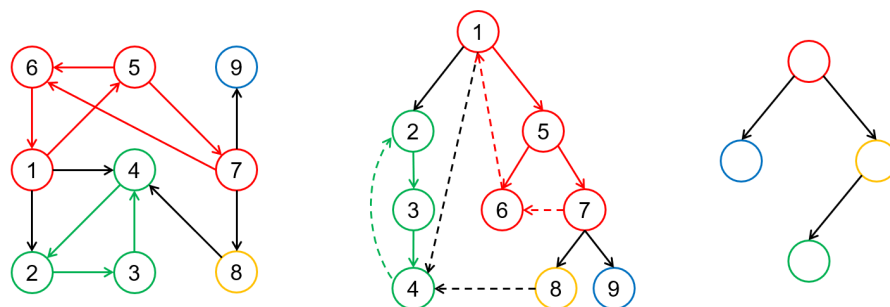


图 4: 一张有向图和它的不同强连通分量、缩点结果

如果 G 本身就是强连通的, 那么它的强连通分量只有自身。根据定义, 任选一个点出发进行 DFS 都能够访问到所有点。并且根据 Tarjan 算法可知, 在 DFS 树上, 任何一个点 x 的子树内必定存在一条边指向 DFS 序比 x 小的某个点, 无论是返祖边还是横叉边。

例 3.2.1 (Indiana Jones and the Uniform Cave¹¹). 交互题。有一张强连通的有向图 G , 每个结点的出度都等于 k 。每个结点处有一个石头指向一条出边, 同时有一个属于 $\{0, 1, 2\}$ 的标记, 初始时每个结点的石头指向随机的一条出边, 标记为 0。

你不知道 G 的结构, 但你需要从某个点出发遍历 G 的每条边。每当经过一条边到达一个点后, 你可以得知这个点的标记, 然后选择修改标记和石头指向的出边, 最后选择一条出边离开, 但修改后的标记只能是 1 或 2。一个点的所有出边可以看作是均匀地分布在一个圆周上, 因此你在描述一条出边时只能通过“沿着之前石头指向的出边顺时针数的第 i 条”这样的形式。

你只被允许通过 $O(nm)$ 条边, 注意你在任何时刻都是已知此前自己的所有决策的。

我们尝试模拟 DFS 的过程, 设对 x 的子树搜索的过程为 $dfs(x)$, 我们期望当 $dfs(x)$ 允许结束后, x 的每条出边都被访问过了。

三种标记中 0 自然地表示还没有访问过的点, 而我们规定 1 和 2 分别表示对应的点是/不是 x 的祖先, x 就是当前正在执行 dfs 过程的点。

对于过程 $dfs(x)$, 我们顺序枚举 x 的每条出边 $x \rightarrow y$, 考虑 y 的标记:

- y 的标记为 0。这对应了 y 是 DFS 树上 x 的儿子, 我们递归进行 $dfs(y)$, 然后回溯即可。
- y 的标记为 1。这说明 $x \rightarrow y$ 是返祖边。在走完这条边后我们希望走向 x , 为了不迷路, 我们规定标记为 1 的点上的石头指向的出边就是它在 DFS 树上到 x 的路径上的边。这样我们只要沿着石头指向的出边走就能够回到 x , 但一个问题是我們如何知道自己回到了 x ? 答案是将 x 的标记临时修改为 2, 这样下次访问到标记为 2 的点时就必然是回到 x 了。
- y 的标记为 2。这说明 $x \rightarrow y$ 是后向边或横叉边。无论如何, 我们还是希望走向 x , 但这时不像上一种情况那么方便了, 我们需要先逆着 DFS 树的方向往回走, 直到走到一个标记为 1 的点, 然后再按照上面的方式回到 x (这时判断回到 x 的方式有所不同, 但同样比较简单, 不再赘述)。那么问题在于如何走到一个标记为 1 的点。回忆 Tarjan 算法中定义的 low 数组, 如果我们不断从当前点 u 走到 low_u , 那么——根据图的强连通性——必然可以走向根结点, 也就一定能经过标记为 1 的点了。因此我们对于每个标记为 2 的点 u , 定义它的石头指向的出边为 low_u 的方向。也就是说如果

¹¹NEERC 2016, <https://codeforces.com/gym/101190>

low_u 对应的那条边就是 $u \rightarrow low_u$ ，那么石头就指向这条边；否则 low_u 对应的那条边是 $v \rightarrow low_u$ ， v 是 u 的后代，那么石头就指向 v 所在子树的方向。

最后一个问题：在执行完 $dfs(x)$ 后我们需要回溯至 x 的父结点，但这其实和上面所说的最后一种情况是一样的，只需先走到 low_x 再向下走一段距离即可。

在实现时有许多细节，但算法的大致框架已经明确了。我们需要 $O(nm)$ 步来遍历每条边。

3.2.2 耳分解

首先回忆无向图部分定义的耳分解，并将它扩展到有向图上。

定义 3.4 (耳和耳分解). 在有向图 $G = (V, E)$ 中有子图 $G' = (V', E')$ ，若简单路径或简单环 $P: x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_k$ 满足 $x_1, x_k \in V'$ ， $x_2, \dots, x_{k-1} \notin V'$ ，则称 P 是 G 关于 G' 的耳。

G 的一个子图序列 (G_0, G_1, \dots, G_k) 若满足：

1. G_0 是一个简单环（可以只有一个点）， $G_k = G$ ；
2. G_{i-1} 是 G_i 的子图；
3. 设 $G_i = (V_i, E_i)$ ，则 $E_i \setminus E_{i-1}$ 构成 G_{i-1} 的一个耳。

则称 (G_0, G_1, \dots, G_k) 是 G 的一个耳分解。

与无向图类似地，我们有如下结论：

定理 3.1. 有向图 G 可耳分解，当且仅当 G 强连通。

证明. 先证必要性。若 G 有耳分解 (G_0, \dots, G_k) ，则简单环 G_0 是强连通的。若 G_i 是强连通的，则设 G_{i+1} 中加入的耳为 $x \rightsquigarrow y$ ，由 G_i 的强连通性知 y 可达 x ，从而存在一个包含耳的环，因此耳上所有点与 x, y 强连通，那么 G_{i+1} 也是强连通的。用数学归纳法知 $G = G_k$ 强连通。

再证充分性。若 $G = (V, E)$ 强连通，我们下面给出一个耳分解的构造。先求出 G 的以 1 为根的一棵 DFS 树，并按照 Tarjan 算法算出 low 数组。 G 的强连通性告诉我们当 $x \neq 1$ 时都有 $low_x < dfn_x$ 。接下来，我们进行如下过程构造 (G_0, \dots, G_k) ：

G_0 为仅包含 1 的图。然后按照 DFS 序从小到大依次枚举每个点，设当前点 x 的 DFS 序为 p ，此时 DFS 序为 $1, \dots, p-1$ 的点都已经在当前的 G_i 中了。如果 x 已经在当前的 G_i 中则直接跳过，否则，根据 $low_x < dfn_x$ ，我们知道存在 x 的后代 y 使得存在边 $y \rightarrow z$ ， z 是一个已经在 G_i 中的点，于是我们将 $f_x \rightarrow x \rightsquigarrow y \rightarrow z$ 这条路径作为一个耳加入 G_i （其中 f_x 表示 x 的父结点），成为 G_{i+1} 。枚举完所有点后，所有点都在当前的 G_i 中了，此时再把尚未加入的边一条一条单独作为耳加入即可。□

例 3.2.2 (Economic One-way Roads¹²). 给定一张无向图 G , 你要为每条边指定一个方向, 每条边的每种方向各有一个代价, 你需要使得定向后的有向图强连通, 且每条边对应方向的代价之和最小。

作为对照, 本例其实是例 2.2.4 的强连通版本。

设 $f(S)$ 表示 S 的导出子图对应的答案, 每次在 S 的基础上加一个耳进行转移。直接枚举耳的点集复杂度为 $O(3^n \times \text{Poly}(n))$, 而如果在转移时就按照耳上的顺序一个一个将点加入耳即可做到 $O(2^n \times \text{Poly}(n))$ 。因为具体过程和例 2.2.4 基本一样, 所以不再赘述细节。

定理 3.2. 无向图 G 可以被定向为强连通图, 当且仅当 G 边双连通。

证明. 必要性: 如果 G 不是边双连通的, 则 G 不连通或有一条割边。 G 不连通显然不能被定向为强连通图, 而如果 G 存在割边 (x, y) , 则无论这条割边如何定向, 都有 x 不可达 y 或 y 不可达 x , 因此不可能存在强连通定向。

充分性: 如果 G 边双连通, 则它存在耳分解, 我们将 G_0 定向为有向环, 再将之后的每个耳都定向为有向路径或有向环, 就得到了有向的耳分解, 根据定理 3.1, 这种定向对应的有向图就是强连通的。 \square

事实上定向方式的构造并不需要把耳分解求出来那么麻烦, 我们只需对边双连通图求出 DFS 树, 将树边都从父到子定向, 非树边都从后代到祖先定向即可, 这和上面说的通过耳分解构造的定向是基本相同的。

例 3.2.3 (App 管理器¹³). 混合图 G (即可能同时包含有向边和无向边的图) 可以被 (对无向边) 定向为强连通图, 当且仅当以下两个条件满足:

1. 将有向边都看作无向边时, 图边双连通;
2. 将无向边拆成一对反向的有向边时, 图强连通。

证明. 必要性是显然的, 下面证明充分性。

若条件 1,2 都满足, 如果没有无向边, 那么就不用定向了; 否则, 我们任意取出一条无向边 (u, v) , 证明它存在一种定向使得定向后条件 1,2 仍然满足 (实际上只要考虑条件 2 即可, 因为条件 1 和方向无关), 这样就可以归纳地证明结论了。

记当前的图为 G_0 , 在 G_0 中删去无向边 (u, v) 形成的图为 G'_0 。对于任意结点 x , 由于 G_0 强连通, 所以存在一条简单路径 $x \rightsquigarrow u$, 若这条路径不经过无向边 (u, v) , 则说明 G'_0 中 x 可达 u ; 否则说明 G'_0 中 x 可达 v 。同理, G'_0 中要么 u 可达 x , 要么 v 可达 x 。

在 G'_0 中, 若存在 x 使得 u 可达 x , x 可达 v , 则说明 u 可达 v 。同理若存在 x 使得 v 可达 x , x 可达 u , 则说明 v 可达 u 。否则, 对于每个 x 都是 u, x 相互可达或 v, x 相互可达。因

¹²XXI Open Cup, Grand Prix of Korea, <https://codeforces.ml/gym/102759>

¹³UOJ Round 9, <https://uoj.ac/contest/18>

此整个图有至多两个强连通分量。假设 u, v 相互不可达，则这两个强连通分量之间没有边，这说明 G'_0 的基图不连通，即 G_0 中 (u, v) 是割边，与条件 1 矛盾。因此 u 可达 v 或 v 可达 u 至少有一个成立。

若 u 可达 v ，则将 (u, v) 定向为 $v \rightarrow u$ ，否则定向为 $u \rightarrow v$ ，这使得 u, v 互相可达，因此整张图还是强连通，这正是我们想证明的。 \square

3.2.3 有向环

在无向图中有环空间，而本节中我们将研究有向图的环结构。

定义 3.5 (可环覆盖图). 若有向图 G 的每个结点的入度都等于出度，则称 G 是可环覆盖的。

引理 3.2.1. 可环覆盖的有向图的边集可以表示为若干个简单环的不相交并。

证明 3.2.3 的证明考虑归纳即可。可环覆盖图的概念可以类比无向图中环空间的元素。

和环空间类似地，我们要通过 DFS 树得到可环覆盖子图的一组“基”，不过它并不是真正的线性基，因此并不总是通用。一般来说，我们考虑的是边带权情况下（若没有特别规定的边权，则认为每条边边权为 1），环的边权和在诸如异或空间或 $\text{mod } m$ 剩余类之类的结构下的性质。

引理 3.2.2. 强连通图 G 中，若存在一条路径 $P: x \rightsquigarrow y$ 边权和为 S ，则存在路径 $y \rightsquigarrow x$ 使得其边权和 S' 满足 $S' \equiv -S \pmod{m}$ 。

证明. 若 $m = 1$ 则结论显然。否则，任意找一条路径 $Q: y \rightsquigarrow x$ ，设其边权和为 T ，考虑路径 $Q + P + Q + P + \dots + Q$ ，其中包含 $m - 1$ 个 P 和 m 个 Q ，加法表示路径的拼接。则这条路径是 y 到 x 的，且边权和 $(m - 1) \times S + m \times T \equiv -S \pmod{m}$ 。 \square

引理 3.2.3. 强连通图 G 中，对于每条边 $x \rightarrow y$ ，边权为 z ，建立一条新边 $y \rightarrow x$ ，边权 $-z$ 。这样会得到一张边权具有反对称性的新图 G' 。 G 和 G' 的所有可环覆盖子图边权和的集合在 $\text{mod } m$ 意义下等价。

证明. 这是引理 3.2.2 的推论，因为 G' 的每个环可以通过引理 3.2.2 对应到 G 的一个环。 \square

于是我们只要研究这种边权具有反对称性的图即可。这种图的 DFS 树可以认为不再是单向的了，而是可以在树上双向行走，不过通过简单的计算可知，（不一定简单的）树上的路径 $x \rightsquigarrow y$ 的边权和必然为 $\text{dep}_y - \text{dep}_x$ ，其中 dep_x 表示 DFS 树上根结点到 x 的路径边权和。

引理 3.2.4. 在边权具有反对称性的图 G 上, 将仅包含一条非树边的简单环 (这里树边的反向边不算作非树边) 称为基本环。则任何一个 G 的可环覆盖子图的边权和等于一些基本环的边权和的整系数线性组合。

证明. 若某个环依次经过非树边 e_1, \dots, e_k , e_i 形如 $x_i \rightarrow y_i$, 边权为 z_i 。则这个环的边权和为 $\sum_{i=1}^k (z_i + dep_{y_{i+1}} - dep_{x_i})$, 其中 $y_{k+1} = y_1$ 。将求和项中的 y_i 项进行交换得到 $\sum_{i=1}^k (z_i + dep_{y_i} - dep_{x_i})$, 现在求和的每一项正好是一个基本环的边权和。再结合可环覆盖子图可以拆成若干个环的性质, 引理得证。 \square

定理 3.3. 强连通图 G 的所有可环覆盖子图的边权和的最大公因数, 等于所有 $z + dep_y - dep_x$ 的最大公因数, 其中 (x, y, z) 取遍一切非树边的起点、终点和边权构成的三元组, dep_x 表示树上根结点到 x 的路径长度。

证明. 设所求最大公因数为 g , 根据引理 3.2.3 和引理 3.2.4, 我们知道 G 的可环覆盖子图边权和的集合, 与所有 $z + dep_y - dep_x$ 的集合在 $\text{mod } g$ 意义下等价, 因此如果其中任何一个集合中所有元素都是 g 的倍数, 则另一个集合亦然, 这说明了用两种方式求得的最大公因数是相等的。 \square

上面我们只讨论了 $\text{mod } m$ 剩余类下的性质, 不过只要引理 3.2.2 仍然成立, 以上性质就可以推广到其他一些结构中, 比如异或空间, 或更加广义的 k 进制不进位加法的结构中。不过考虑 $\text{mod } m$ 的性质时只需要掌握最大公因数就基本可以得到全部的结构信息, 但在上述的其他结构中可能额外需要线性基等工具。

例 3.2.4 (有向图的周期). 在有向图 $G = (V, E)$ 中, 如果存在一组整数 p, k , 使得对图上任意两点 x, y 和任意的 $t \geq k$, 存在一条包含 t 条边的路径 $x \rightsquigarrow y$ 当且仅当存在一条包含 $t + p$ 条边的路径 $x \rightsquigarrow y$, 且以 p 为第一关键字, k 为第二关键字, 上述整数对是最小的, 则称 p, k 分别为 G 的一组周期和幂敛指数。

一种等价的说法是, 设 G 的邻接矩阵为 A , 对于任意 $t \geq k$ 有 $A^t = A^{t+p}$, 这里的矩阵乘法定义为乘法是按位与、加法是按位或。

考虑强连通图的周期, 这其实就是定理 3.3 所说的所有环长的最大公因数 g , 因为当 t 充分大时, 可以在强连通图中随意行走, 根据裴蜀定理, 我们可以用各环的整系数线性组合拼出 g 的任意倍数。当步数足够大时, 所有系数都可以是正整数。

而一般图的周期必然要是每个强连通分量的周期的倍数, 取所有强连通分量的周期的最小公倍数即可, 这比较容易理解, 我们略去严格证明。

对于幂敛指数, 没有直接的公式可以用来计算。

例 3.2.5 (Phoenix and Odometers¹⁴). 给定一张边带权有向图 G , 进行 q 次询问, 每次给出 v, b, m , 求是否存在一个经过 v 的 (不一定简单的) 环边权和 S 满足 $S \equiv b \pmod{m}$ 。

这是 $\text{mod } m$ 剩余类结构的一个例子。显然只需要考虑 v 所在的强连通分量, 按照定理 3.3 求出其中所有环长的最大公因数 g , 判断是否有 $\text{gcd}(g, m) \mid b$ 即可。

例 3.2.6 (术树数¹⁵). 给定一张带权无向图 G 和整数 k , 进行 q 次询问, 每次给定 x, y, v , 求是否存在一条路径 $x \rightsquigarrow y$, 满足所有边权的 k 进制不进位加法运算结果等于 v 。

这是 k 进制不进位加法的一个例子。与之前不同, 这是一张无向图, 所以我们需要将每条无向边拆成一对有向边, 因此在进行定理 3.3 类似操作时, 除了非树边外还要考虑树边的反向边, 即对于边权为 w 的树边, $2w$ 也是基中的元素。然后我们就可以用所有这些基本环的边权和建立一个 k 进制线性基, 用来查询了。

本题中还有一个不同就是目标并非是环, 而是路径 $x \rightsquigarrow y$, 但我们只需任选一条路径 $x \rightsquigarrow y$, 比如树上路径, 再用它加上基中元素的一个子集, 就能得到所有 x 到 y 的路径。因此查询时我们以树上路径 $x \rightsquigarrow y$ 边权和为初值, 找线性基中是否存在一些数与这个初值的和为 v 即可。

3.3 竞赛图

竞赛图即对于任意一对不同结点 u, v , 在 $u \rightarrow v$ 和 $v \rightarrow u$ 之中恰有一条边存在的简单有向图。现在, 我们简单讨论一下竞赛图的一些与连通性有关的结论。

3.3.1 哈密顿路

定义 3.6 (哈密顿路、哈密顿回路). 图 G 中, 经过所有点恰好一次的路径称为哈密顿路, 经过所有点恰好一次 (起点和终点算作同一次) 的环称为哈密顿回路。

定理 3.4. 竞赛图有哈密顿路。

证明. 对点数归纳, 若 $n-1$ 个点的竞赛图有哈密顿路, 则在 n 个点的竞赛图中, 不妨设前 $n-1$ 个点的导出子图的哈密顿路就是 $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n-1$, 则:

1. 若有边 $n \rightarrow 1$, 则将 n 连在哈密顿路的开头;
2. 若有边 $n-1 \rightarrow n$, 则将 n 连在哈密顿路的末尾;
3. 若有边 $1 \rightarrow n, n \rightarrow n-1$, 则一定存在一个 $x \in [1, n-2]$ 使得 $x \rightarrow n, n \rightarrow x+1$ (可以使用二分法找这样的 x), 将 n 插在 x 与 $x+1$ 之间。

于是 n 个点的竞赛图也有哈密顿路, 由数学归纳法知结论成立。□

¹⁴CF 1515 G

¹⁵CTT 2020, 题意不完全一致

定理 3.5. 强连通的竞赛图有哈密顿回路。

证明. 根据定理 3.4, 首先构造一个哈密顿路, 不妨设为 $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n$ 。再找到最大的 t 使得存在边 $t \rightarrow 1$, 那么对于 t 之后的点 x 都有边 $1 \rightarrow x$, 即 $1 \rightarrow t+1, \dots, 1 \rightarrow n$ 。现在有一个环 $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow t \rightarrow 1$, 接下来尝试将 $t+1, \dots, n$ 中的点加入环中。

我们重新描述一下问题: 有一个包含 1 的环, 并且 1 到所有不在环上的点都有边, 我们想要证明, 存在一个当前不在环上的点可以被加入环中形成一个更大的环。事实上, 由于一定存在一个不在环上的点 x 和一个环上的点 y 使得有边 $x \rightarrow y$ (否则不在环上的点不可达环上的点, 图就不是强连通的了), 结合 $1 \rightarrow x$, 我们就可以找到环上一个合适的位置 z (在 $1, y$ 之间), 使得 $z \rightarrow x \rightarrow \text{next}_z$, 将 x 插入 z 和 next_z 即可, 其中 next_z 表示环上 z 的下一个点。□

3.3.2 强连通分量

一般图缩点之后会变成有向无环图, 对于竞赛图来说, 有更好的结果。

引理 3.3.1. 竞赛图缩点后形成一条链。

证明. 对于不同两个强连通分量中的点 x, y , 由于一定存在 $x \rightarrow y$ 或 $y \rightarrow x$, 因此 x 可达 y 或 y 可达 x 。所以强连通分量间的可达关系形成全序, 也就是缩点后形成一条链。□

在竞赛图中求强连通分量, 并不需要用 Tarjan 算法, 有许多更简单的方法。

我们可以首先找到竞赛图的一个哈密顿路, 不妨设为 $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n$, 则强连通分量必定是一段连续的区间。对于一条边 $x \rightarrow y$, 如果 $x < y$ 那么它对连通性无影响 (因为链上 x 就能到 y); 而如果 $x > y$, 则说明 $y \rightarrow y+1 \rightarrow \dots \rightarrow x$ 并上这条边形成一个环, 即 $[y, x]$ 中所有点属于同一强连通分量。我们将所有这样的区间 $[y, x]$ 都进行合并, 会得到 $[1, n]$ 的一个区间划分, 这些区间就是所有的强连通分量。

有一个更简单实用的方式求解竞赛图的强连通分量, 那就是借助下面的 Landau 定理。

定理 3.6 (Landau). 设竞赛图 G 中所有点按照出度从小到大排序为 p_1, \dots, p_n , p_i 的出度为 d_i , 则对于每个 $1 \leq k \leq n$, 有 $\sum_{i=1}^k d_i \geq \binom{k}{2}$ 。

扩展: G 的每个强连通分量是排列 p 中的一个连续段, 且 p_k 是一个强连通分量的右端点当且仅当 $\sum_{i=1}^k d_i = \binom{k}{2}$ 。

证明. 仅考虑前 k 个点的导出子图, 共有 $\binom{k}{2}$ 条边, 这已经为 $\sum_{i=1}^k d_i$ 贡献了 $\binom{k}{2}$, 因此 $\sum_{i=1}^k d_i \geq \binom{k}{2}$ 。

若 x, y 属于不同强连通分量, 且 x 可达 y 。那么对于所有 y 的出边 $y \rightarrow z$, 易证一定存在边 $x \rightarrow z$, 在此基础上 x 至少还多一条出边 $x \rightarrow y$, 因此 x 的出度大于 y 的出度。这说明每个强连通分量确实是排列 p 中连续的一段。

若 $\sum_{i=1}^k d_i \geq \binom{k}{2}$ 取到等号, 说明 p_{k+1}, \dots, p_n 到 p_1, \dots, p_k 没有任何边, 则 p_{k+1} 之后的点不可达 p_k 之前的点, 这两侧的点不可能属于同一强连通分量。另一方面, 若 p_i, \dots, p_k 构成强连通分量, 也能推出 p_{k+1} 之后的点不可达 p_k 之前的点, 即等号成立。这就证明了定理扩展。 \square

在 Landau 定理中将出度换为入度, 相应结论显然也是成立的, 我们下面采用入度的描述。

将所有点按入度从小到大排序, 按照 $\sum_{i=1}^k d_i = \binom{k}{2}$ 的 k 为右端点, 划分出的每个连续段就是所有的强连通分量, 且靠左的强连通分量可达靠右的强连通分量。

例 3.3.1 (基础图论练习题¹⁶). 给定竞赛图 G , 对于每条边求翻转这条边后图的强连通分量个数。

解一: 用哈密顿路解决这个问题。

如果翻转的边连接的是两个不同强连通分量, 那么显然翻转后会将哈密顿路上位于这两个强连通分量之间的所有强连通分量合并为一, 这部分很容易计算。

如果翻转的边在同一个强连通分量内部, 那么我们求出这个强连通分量的一个哈密顿回路。如果翻转的边不在哈密顿回路上, 显然对强连通性没有影响; 否则, 在哈密顿回路上删除这条边后, 还剩一个哈密顿路, 根据上文提到的, 对于所有和哈密顿路反向的边 $x \rightarrow y$, 其效果是将 $[y, x]$ 并成一个强连通分量。现在 $[y, x]$ 对应的是环上区间, 用一些数据结构技巧维护所有 $[y, x]$ 后可以 $O(1)$ 查询删除一条环上的边之后的强连通分量情况, 但具体的实现相当麻烦。

解二: 用 Landau 定理解决这个问题。

将所有点按照入度从小到大排序为 p_1, \dots, p_n , p_i 的入度为 d_i 。翻转一条边 $p_x \rightarrow p_y$ 会使得 p_x 的入度增加 1, p_y 的入度减少 1。我们仅考虑 d_i , 发现上述修改可以表示为 $O(1)$ 个 d_i 的单个修改, 而我们要回答的是满足 $\sum_{i=1}^k d_i = \binom{k}{2}$ 的 k 的个数, 为此我们只需维护每个区间中 $\sum_{i=1}^k d_i - \binom{k}{2}$ 的最小值和最小值数量, 即可简单地回答。

两个解法时间复杂度都为 $O(n^2)$, 但解二更简便一些。

4 总结

本文讨论了许多与图的连通性有关的问题和算法, 提供了一些解决这些问题的常用结构和思路。在无向图中我们以 DFS 树为中心, 重点讨论了双连通关系与割集的一些性质和应用。在有向图中我们以可达性关系和强连通分量为中心, 讨论了对应的一些性质和应用。

事实上有许多本文并未深入提及的内容, 比如无向图的最小割、三连通分量、有向图的支配关系、动态传递闭包等。没有提及的原因有二, 一是限于篇幅, 二是这些内容都曾在

¹⁶CTT 2020

之前几年的集训队论文中有过讨论了。笔者将这些内容对应的论文全部列在了参考文献中，感兴趣的读者可以作为延伸阅读。

5 致谢

- 感谢中国计算机学会提供学习和交流的平台。
- 感谢华东师范大学第二附属中学的金靖老师的关心与指导。
- 感谢与我交流相关内容的同学们的帮助。
- 感谢父母的关心与支持。

参考文献

- [1] 虞皓翔，《再谈图连通性相关算法》，IOI 2021 集训队论文集
- [2] 常瑞年，《线性代数在OI中的应用》，IOI 2022 集训队论文集
- [3] Wikipedia, “Ear Decomposition”, https://en.wikipedia.org/wiki/Ear_decomposition
- [4] Wikipedia, “Bipolar Orientation”, https://en.wikipedia.org/wiki/Bipolar_orientation
- [5] zx2003, 浅谈双极定向及其应用, <https://www.luogu.com.cn/blog/user19567/yi-dao-tu-lun-ti-ji-ji-yan-sheng>
- [6] CCF, 2020 全国信息学奥林匹克年鉴
- [7] 王文涛，《浅谈无向图最小割问题的一些算法及应用》，IOI 2016 集训队论文集
- [8] 孙耀峰，《动态传递闭包问题的探究》，IOI 2017 集训队论文集
- [9] 陈孙立，《浅谈支配树及其应用》，IOI 2020 集训队论文集