华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称：<u>数值分析</u>　　课程类别 ☑公共课 □专业课　　考核形式 □开卷 ☑闭卷

学生类别<u>研究生</u>考试日期<u>2013-5-23</u>学生所在院系__________

学号__________姓名[redacted]任课教师__________

一、填空（每题3分，共24分）

1. 已知 $\sqrt{7}=2.64575131106\cdots$，则其近似值 2.6457513 有________位有效数字；通过四舍五入得到其有四位有效数字的近似值为____________。

2. 已知 $f(x)=2x^2-1$，则 $f[1,2,3]=$________，$f[1,2,3,4]=$________。

3. 当常数 $a=$____，$b=$____时，$\max\limits_{-1\le x\le 1}\left|4x^3+ax\right|$ 与 $\int_0^1\left(3x^2+b\right)^2dx$ 分别达到极小。

4. 四个求积节点的插值型求积公式至少具有_______阶代数精度，至多能达到_______阶代数精度。

5. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix},x=\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}$，则 $\|Ax\|_\infty=$________，$cond(A)_1=$________。

6. 设步长为h,应用2阶中点公式 $y_{n+1}=y_n+hf\left(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}f(x_n,y_n)\right)$ 求解

$\begin{cases}y'(x)=\lambda y(x)\\ y(0)=1\end{cases}$,则在节点 $x_n=nh$ 处的数值解 $y_n=$________________。

7. 对矩阵 $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & -1\\ 8 & 5 & -2\\ 4 & -1 & 2\end{bmatrix}$ 进行LU分解, 则单位下三角阵

L=________________，上三角阵U=________________。

8. 若求解方程 $x^2=3$ 的简单迭代格式 $x_{k+1}=ax_k+\frac{b}{x_k}$ 在根 $x^*=\sqrt{3}$ 附近平方收敛，则

$a=$__________，$b=$__________。

二、(12 分) 对函数 $y=f(x)$, 已知 $f(0)=f'(0)=0, f(1)=f'(1)=1$.

（1） 试求过这 2 点的三次 Hermite 插值多项式 $H_3(x)$, 并写出余项表达式;

（2）如果还已知 $f(2)=1$，求次数不超过 4 的插值多项式 $P_4(x)$。

三、(10 分) 求 $f(x)=\sqrt{x}$ 在[0, 1]上的一次最佳平方逼近多项式 P(x)，并计算平方误差。

四、(12 分) 利用 3 次 Legendre 正交多项式 $P_3(x)=(5x^3-3x)/2$ 构造三点 Gauss 型求积公式

$$\int_0^2 f(x)dx \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)+A_2 f(x_2)$$

并问:

（1）所得求积公式的代数精度是多少?

（2）用所得求积公式计算 $\int_0^2 (x^4+3x^2+2x-1)dx$ 时截断误差是多少?

五、(12 分) 给定线性方程组 $AX=b$，其中 $A=\begin{bmatrix} 1 & a \\ 4a & 1 \end{bmatrix}$, $X, b \in R^2$,

（1）求出使 Jacobi 迭代法和 G-S 迭代法均收敛的 α 的取值范围。

（2）当 $\alpha \neq 0$ 时，给出这两种迭代法的收敛速度之比。

六、(10 分) 设有 $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$，试构造形如

$$y_{n+1}=\alpha(y_n+y_{n-1})+h(\beta_0 f_n+\beta_1 f_{n-1})$$

的二阶方法，并推导其局部截断误差首项。

七、(12 分)设有解方程 $12-3x+2\cos x=0$ 的迭代法 $x_{n+1}=4+\dfrac{2}{3}\cos x_n$,

（1）证明: $\forall x_0 \in R$, 均有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$（$x^*$ 为方程的根);

（2）此迭代法的收敛阶是多少?

（3）试构造至少具有二阶收敛速度的迭代公式。

八、(8 分) 若 n 阶方阵 A 为严格对角占优阵，证明解线性方程组 AX=b 的雅可比迭代收敛。