16年数值分析解答

大题：

二（10分）设函数 $y=f(x)$，已知 $f(0)=f'(0)=1$，$f(1)=4$

（1）试求过这两点的二次 Hermite 插值多项式 $H_2(x)$；

（2）若还已知 $f(2)=15$，求次数不超过三次的插值多项式 $H_3(x)$

~~解：利用 Newton 插值公式.~~

~~$H_2(x)=f(x_0)+f'$~~

解：利用重节点差商公式做差商表.

x_i	y_i	一阶	二阶	三阶
0	1			
0	1	1		
1	4	3	2	
2	15	11	4	1

根据 Newton 插值公式.

$$H_2(x)=1+x+2x^2$$

（2）由（1）差商表.

$$H_3(x)=1+x+2x^2+x^2(x-1)$$

三（10分）求 $f(x)=\cos(2x)$ 在 $[0,1]$ 上的一次最佳平方逼近多项式 $P_1(x)$，并计算平方误差.

解：设 $\varphi_0=1$，$\varphi_1=x$.

公式 $$\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1)\\(\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\varphi_0,f)\\(\varphi_1,f)\end{bmatrix}$$

$(\varphi_0,\varphi_0)=\int_0^1 1\,dx=1$，$(\varphi_0,\varphi_1)=(\varphi_1,\varphi_0)=\frac{1}{2}$，$(\varphi_1,\varphi_1)=\frac{1}{3}$

$(\varphi_0,f)=\int_0^1\cos(2x)\,dx=0$ $\quad(\varphi_1,f)=\int_0^1\cos(2x)\,dx=-\frac{2}{\pi^2}$

则 $$\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-\frac{2}{\pi^2}\end{bmatrix}$$ 解得 $a_0=\frac{12}{\pi^2}$

则 $P_1(x)=\frac{12}{\pi^2}-\frac{24}{\pi^2}x$.

平方误差：$\|\delta\|_2^2=(f,f)-\sum_{k=0}(f,\varphi_k)=\int_0^1\cos^2(\pi x)dx-\sum_{k=0}a_k^*d_k$

$$=\frac{1}{2}-\left[\frac{12}{\pi^2}\times 0+(-\frac{24}{\pi^2})\times(-\frac{2}{\pi^2})\right]$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{48}{\pi^4}=0.007232\text{g}$$

四 (12分) 利用2次 Legendre 正交多项式 $P_2(x)=(3x^2-1)/2$ 构造两点 Gauss 型求积分式 $\int_{-1}^1 f(x)dx\approx A_{-1}f(x_{-1})+A_1f(x)$

(1) 试确定求积公式中的 Gauss 点 x_k ($k=-1,1$) 及求积系数 A_k ($k=-1,1$)，并说明求积公式的代数精度是多少？

(2) 用所得求积公式计算 $\int_0^1(x^3-2x+1)dx$，并给出相应的截断误差

解：由 $P_2(x)=(3x^2-1)/2=0$ 得 $x_{-1}=\frac{\sqrt3}{3}$ $x_1=-\frac{\sqrt3}{3}$

$$A_{-1}=A_1=\int_{-1}^1\frac{x-x_1}{x_{-1}-x_1}dx=\int_{-1}^1\frac{x+\frac{\sqrt3}{3}}{\frac{\sqrt3}{3}+\frac{\sqrt3}{3}}dx=1$$

则 $\int_{-1}^1 f(x)dx\approx f(\frac{\sqrt3}{3})+f(-\frac{\sqrt3}{3})$

当 $f(x)=1$ 时 成立 $2=2$

$f(x)=x$ 时 成立. $0=0$

$f(x)=x^2$ 时. 成立. $\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

$f(x)=x^3$ 时. 不成立.

故代数精度为3次

(2) $\int_0^1(x^3-2x+1)dx \Longleftrightarrow \int_{-1}^1\frac{1}{8}(t+1)^3-(t+1)+1\,dt=$

$$\frac{1}{8}(\frac{\sqrt3}{3}+1)^3-(\frac{\sqrt3}{3}+1)+1-\left[\frac{1}{8}(1-\frac{\sqrt3}{3})^3-(1-\frac{\sqrt3}{3})+1\right]$$

$$=\frac{1}{8}(1+\frac{\sqrt3}{3})^3-\frac{1}{8}(1-\frac{\sqrt3}{3})^2$$

$$R_{G-L}(f)=\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_{-1}^1(x+\frac{1}{\sqrt3})^2(x-\frac{1}{\sqrt3})^2dx=\frac{f^{(4)}(\eta)}{135}\quad \eta\in(-1,1)$$

五、(14分) 设 $y'(x)=f(x,y)$，步长为 h，隐式公式 $y_{n+1}=y_n+h[\alpha f(x_n,y_n)+\beta f(x_{n+1},y_{n+1})]$ 具有二阶收敛，

(1) 试确定参数 α 和 β 的值；

(2) 若 $f(x,y)=\lambda y(x)$，$y(0)=1$，求 $y(x)$ 在节点 $x_n=nh$ 处的数值解 y_n；

(3) 若 $f(x,y)=\lambda y(x)$ 且 $\lambda<0$，证明公式是无条件稳定的.

解：由于隐式公式具有二阶收敛.

则令 $y=x^2$ 代入公式.

$$y_{n+1}=x_n^2+h[2\alpha x_n+2\beta x_{n+1}]=x_n^2+2h[\alpha x_n+\beta(x_n+h)]=(x_n+h)^2$$

则 $\alpha+\beta=1$，$\beta=\frac{1}{2}$. 则 $\alpha=\frac{1}{2}$.

(2) 解：
$$y_{n+1}=y_n+h[\alpha\cdot\lambda y_n+\beta\lambda y_{n+1}]$$
$$=y_n+\frac{\lambda h}{2}[y_n+y_{n+1}]$$

化简得 $y_{n+1}=\frac{2+h\lambda}{2-h\lambda}y_n$. …… $y_n=\left(\frac{2+h\lambda}{2-\lambda h}\right)^n y_0=\left(\frac{2+h\lambda}{2-h\lambda}\right)^n$

(3) 若 $\lambda<0$ 时. $y_n=\frac{2+h\lambda}{2-h\lambda}y_{n-1}$

记 δ_n 为 y_n 处的扰动.

则 $y_n+\delta_n=\frac{2+h\lambda}{2-h\lambda}(y_{n-1}+\delta_{n-1})$

由上两式相减：
$$\delta_n=\frac{2+h\lambda}{2-h\lambda}\delta_{n-1}$$

而 $\left|\frac{2+h\lambda}{2-h\lambda}\right|<1$ 总成立. 则 $|\delta_n|<|\delta_{n-1}|$ 成立.

则公式是无条件稳定的.

六. (12分) 已知方程组 $\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$，$a\in R$ 且 $a\neq\pm\sqrt{2}$，

(1) 利用Gauss消元法求方程组的解；

(2) 给出求解方程组的Jacobi迭代格式和Gauss-Seidel迭代格式，并说明两种迭代格式均收敛的a的取值范围。

解：$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 2 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{C_2-aC_1}\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 2-a^2 & -a\end{pmatrix}$

则 $\begin{cases}x_1+ax_2=1\\ (2-a^2)x_2=-a\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=\dfrac{2}{2-a^2}\\ x_2=-\dfrac{a}{2-a^2}\end{cases}$

(2) Jacobi：公式 $X=-D^{-1}(L+U)\cdot X+D^{-1}b$.

令 $B=-D^{-1}(L+U)=-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a\\ a & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -a\\ -\frac{a}{2} & 0\end{bmatrix}$

$|B-\lambda E|=0$ 得 $\lambda=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$. $|\lambda|<1$

则 $|a|<\sqrt{2}$.

Gauss-Seidel

公式：$X=-(D+L)^{-1}UX+(D+L)^{-1}b$

$B=-(D+L)^{-1}U$

$=-\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -a\\ 0 & \frac{a^2}{2}\end{pmatrix}$

$|B-\lambda|=0$ 得 $\lambda_1=0$. $\lambda_2=\frac{a^2}{2}$

且 $|\lambda|<1$ 则 $|a|<\sqrt{2}$.

综上所述：$a\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$