位相空間論セミナー VI：距離空間と擬距離空間

平井祐紀

2020 年 4 月 26 日

更新履歴
2018.9.14 ver.1.1.
2020.4.26 誤植を訂正．索引を追加．ver.1.2.

目次

1 擬距離空間の基礎概念

距離の定義は既に前回学んだが，もう一度復習しよう．

定義 1.1. X を空でない集合とし，$\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を写像とする．ρ が条件

(M1) 全ての $x \in X$ について，$\rho(x,x) = 0$ が成り立つ．
(M2) 全ての $x, y \in X$ について，$\rho(x,y) = \rho(y,x)$ が成り立つ．（対称性）
(M3) 全ての $x, y, z \in X$ について，$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ が成り立つ．（三角不等式）

を満たすとき，ρ を X 上の擬距離 (pseudometric) という．さらに ρ が

(M4) 全ての $x, y \in X$ について，$\rho(x,y) = 0$ なら $x = y$ が成り立つ．

を満たすなら，ρ は X 上の距離 (metric) であるという．ρ が（擬）距離であるとき，(X, ρ) を（擬）距離空間 ((pseudo)metric space) という．

前回のノートで紹介したように，擬距離空間は一様系を定め，さらにそこから一様位相が定まる．特に，距離空間は Hausdorff 一様空間となるのであった．擬距離空間 (X, ρ) において，擬距離 ρ が定める一様系を $\mathscr{U}_\rho$ で表すことにする．また，その近縁 $\{(x, y) \in X \times X \mid \rho(x, y) < r\}$ を $U(\rho; r)$ または U_r^ρ で表す．このとき，$U_r^\rho(x)$ とは中心 x 半径 r の開球のことである．考えている擬距離 ρ が明らかなときには，単に U_r と書いたりもする．$\{U_r\,;\, r \in \mathbb{R}_{>0}\}$ や $\{U_r\,;\, r \in \mathbb{Q}_{>0}\}$ は一様系の基底であり，$\{U_r(x)\,;\, r \in \mathbb{R}_{>0}\}$ や $\{U_r(x)\,;\, r \in \mathbb{Q}_{>0}\}$ は x の基本近傍系である．

定義 1.2. X を空でない集合とし，ρ_1 と ρ_2 をその上の擬距離とする．ρ_1 と ρ_2 の誘導する位相が一致するとき，ρ_1 と ρ_2 は同値 (equivalent) であるという．また，ρ_1 と ρ_2 から定まる一様系が一致するとき，ρ_1 と ρ_2 は一様同値 (uniformly equivalent) であるという．

一様同値な距離は明らかに同値な距離である．
擬距離空間においては，点列の収束で位相に関する様々な概念を特徴づけることができる．

命題 1.3. (X, ρ) を擬距離空間とし，A を X の部分集合とする．このとき，次の条件は同値である．

(i) $x \in \overline{A}$ が成り立つ．
(ii) x に収束する A の点列が存在する．

証明. (i) $\Longrightarrow$ (ii)．$x \in \overline{A}$ とし，$(x_n) \in \prod_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} [A \cap U_{1/n}^\rho(x)]$ を任意に 1 点選ぶ．$x \in \overline{A}$ より，この積集合は空ではない．$\{U_{1/n}^\rho(x)\,;\, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$ は x の基本近傍系だから，(x_n) は x に収束する．
(ii) $\Longrightarrow$ (i)．位相空間論セミナー I 命題 6.1 よりわかる． □

系 1.4. (X, ρ) を擬距離空間とし，F をその部分集合とする．

(i) F は閉集合である．
(ii) F の元からなる任意の収束点列 (x_n) について，$\lim(x_n) \subset F$ が成り立つ．

証明. (i) $\Longrightarrow$ (ii)．(x_n) を F の元からなる X の収束点列とする．$x \in \lim(x_n)$ なら命題 1.3 より $x \in \overline{F} = F$ である．よって (ii) が成り立つ．
(ii) $\Longrightarrow$ (i)．$x \in \overline{F}$ なら，命題 1.3 より x に収束する F の点列 (x_n) がとれる．このとき $x \in \lim(x_n) \subset F$ なので，$\overline{F} \subset F$ がわかる．よって F は閉集合である． □

系 1.5. X を空でない集合とし，ρ_1 と ρ_2 をその上の擬距離とする．ρ_1 と ρ_2 が同値な擬距離であるための必要十分条件は，ρ_1 と ρ_2 における収束概念が一致することである．

証明. 系 1.4 より，ρ_1 と ρ_2 の収束概念が一致すれば，それぞれに関する閉集合も一致する．よって位相も一致し，ρ_1 と ρ_2 は同値な距離となる．逆は明らかである． □

定義 1.6. (X, ρ)，(Y, σ) を擬距離空間とし，$f\colon X \to Y$ を写像とする．

(i) ある定数 $C > 0$ で全ての $(x, y) \in X \times X$ に対して $\sigma(f(x), f(y)) \leq C\rho(x, y)$ を満たすものが存在するとき，f は Lipschitz 連続 (Lipschitz continuous) であるという．このような定数 C を，f の Lipschitz

定数 (Lipschitz constant) という．

(ii) ある定数 $C > 0$ で $C^{-1}\rho(x,y) \leq \sigma(f(x),f(y)) \leq C\rho(x,y)$ を満たすものが存在するとき，f は双 Lipschitz (bi-Lipschitz) であるという．このとき C を双 Lipschitz 定数 (bi-Lipschitz constant) と呼ぶ．

(iii) $\rho = \sigma \circ (f \times f)$ が成り立つとき，f は等長 (isometry) であるという．

(iv) 任意の $x \in X$ について，X の近傍 V で $f|_V \colon V \to Y$ が Lipschitz 連続となるようなものが存在するとき，f は局所 Lipschitz 連続 (locally Lipschitz continuous) であるという．

等長写像は，明らかに双 Lipschitz である．恒等写像 $\mathrm{id}_X \colon (X,\rho_1) \to (X,\rho_2)$ が双 Lipschitz なら，ρ_1 と ρ_2 は一様同値な距離となる．

命題 1.7. (i) Lipschitz 連続写像は一様連続である．

(ii) 双 Lipschitz 写像が単射なら，一様同型な埋め込みである．

(iii) 局所 Lipschitz 連続写像は，連続である．

証明．(i)．(X,ρ)，(Y,σ) を擬距離空間とし，$f\colon X \to Y$ を Lipschitz 連続写像とする．また，C を f の Lipschitz 定数とする．$r > 0$ に対して $s > 0$ を $s < r/C$ となるように選べば，$U^\rho_s \subset (f \times f)^{-1}(U^\sigma_r)$ が成り立つ．したがって $(f \times f)^{-1}(U^\sigma_r)$ は X における近縁であり，f は一様連続である．

(ii)．(i) より明らか．

(iii)．$x \in X$ に対して，その近傍 V を $f|_V$ が Lipschitz 連続となるように選ぶ．このとき (i) より $f|_V$ は一様連続であり，特に x で連続である．したがって f も x で連続であり，x は任意に選んでいたから f は X 全体でも連続である． □

命題 1.8. 距離空間における双 Lipschitz 写像は単射であり，一様同型な埋め込みである．

証明．(X,ρ), (Y,σ) を距離空間，$f\colon X \to Y$ を双 Lipschitz 写像とする．$f(x) = f(y)$ なら $\sigma(f(x),f(y)) = 0$ であり，双 Lipschitz 性より $\rho(x,y) = 0$ となる．ρ は距離だからこのとき $x = y$ が成り立つ．したがって f は単射である．$f\colon X \to f(X)$ が一様同型であることは，命題 1.7 よりわかる． □

命題 1.9. (X,ρ)，(Y,σ) を擬距離空間とし，$f\colon X \to Y$ を写像とする．このとき，次の条件は同値である．

(i) f は x で連続である．

(ii) x に収束する全ての点列 (x_n) について，$(f(x_n))$ は $f(x)$ に収束する．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii) は位相空間論セミナー I の命題 6.3 よりわかる．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．対偶を示す．f が x で連続でないと仮定し，$r > 0$ を任意の $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ に対して $U^\rho_{n^{-1}}(x) \cap f^{-1}[Y \setminus U^\sigma_r(f(x))]$ が空とならないように選ぶ．点列 (x_n) を，$x_n \in U^\rho_{n^{-1}}(x) \cap f^{-1}[Y \setminus U^\sigma_r(f(x))]$ となるようにとれば，(x_n) は x に収束するが $(f(x_n))$ は $f(x)$ に収束しない． □

擬距離空間においては，集合の大きさや集合間の「距離」を測ることができる．

定義 1.10. (X,ρ) を擬距離空間とする．

(i) $A, B \subset X$ に対して，

$$\rho(A,B) = \inf\{\rho(x,y)\,;\,(x,y) \in A \times B\}$$

と定義し，$\rho(A,B)$ を A と B の距離 (distance) と呼ぶ．$A=\{x\}$ の場合には，特に $\rho(\{x\},B)=\rho(x,B)$ と書く．

(ii) $A\subset X$ に対して，
$$\mathrm{diam}(A)=\sup\{\rho(x,y)\,;\,x,y\in A\}$$
と定義し，$\mathrm{diam}(A)$ を A の直径 (diameter) という．

(iii) $\mathrm{diam}(X)<\infty$ であるとき，X は有界であるという．

命題 1.11. (X,ρ) を擬距離空間とする．このとき，X 上の擬距離 $\rho'\colon X\times X\to[0,1]$ で，ρ と一様同値なものが存在する．

証明. $\rho'(x,y)=1\wedge\rho(x,y)$ と定義する．

まずは ρ' が X 上の擬距離であることを示そう．(M1) と (M2) は明らかなので，三角不等式を示せばよい．そのために，$a,b\geq 0$ に対して
$$(a+b)\wedge 1\leq a\wedge 1+b\wedge 1 \tag{1}$$
が成り立つことを示そう．$a\geq 1$ のときは
$$(a+b)\wedge 1\leq 1\leq 1+b\wedge 1=a\wedge 1+b\wedge 1$$
である．$b\geq 1$ のときも同様である．$a,b<1$ のときは
$$(a+b)\wedge 1\leq a+b=a\wedge 1+b\wedge 1$$
となり，いずれの場合も求める不等式 (1) が成り立つことがわかった．(1) と ρ に関する三角不等式を組み合わせれば，
$$\rho'(x,y)\leq(\rho(x,z)+\rho(z,y))\wedge 1\leq\rho(x,z)\wedge 1+\rho(z,y)\wedge 1=\rho'(x,z)+\rho'(z,y)$$
となり，ρ' が三角不等式を満たすことが確かめられた．

次に ρ と ρ' が一様同値であることを示そう．$\rho'\leq\rho$ より全ての $r>0$ について $U(\rho;r)\subset U(\rho';r)$ が成り立つので，ρ に関する近縁は ρ' に関する近縁より細かい．すなわち，$\mathscr{U}_{\rho'}\subset\mathscr{U}_\rho$ が成り立つ．今度は逆向きの包含関係を示そう．$r<1$ なら $U(\rho;r)=U(\rho';r)$ なので，$U(\rho;r)\in\mathscr{U}_{\rho'}$ である．また $r\geq 1$ なら $U(\rho';1/2)=U(\rho;1/2)\subset U(\rho;r)$ なので，やはり $U(\rho;r)\in\mathscr{U}_{\rho'}$ となる．$\mathscr{U}_\rho$ は全ての $U(\rho;r)$ を含む最小のフィルターなので，これより $\mathscr{U}_\rho\subset\mathscr{U}_{\rho'}$ がわかる．以上の議論により $\mathscr{U}_\rho=\mathscr{U}_{\rho'}$ となり，ρ と ρ' が一様同値であることが示された．□

命題 1.12. (X,ρ) を擬距離空間とする．

(i) $A\cap B\neq\emptyset$ ならば，$\rho(A,B)=0$ である．

(ii) $A\subset A'$ かつ $B\subset B'$ なら，$\rho(A',B')\leq\rho(A,B)$ が成り立つ．

(iii) $A,B\subset X$ なら
$$\rho(A,B)=\inf\{\rho(x,B)\,;\,x\in A\}=\inf\{\rho(A,y)\,;\,y\in B\}$$
が成り立つ．

(iv) $A\subset X$ とする．このとき，写像 $x\mapsto\rho(x,A)$ は Lipschitz 連続である．

証明．(i) は inf の定義と (M1) から，(ii) は inf の定義から明らかである．

(iii)．擬距離の対称性より，一つ目の等号を示せば十分である．(ii) より任意の $x \in A$ に対して $\rho(A,B) \leq \rho(x,B)$ となるから，$\rho(A,B) \leq \inf\{\rho(x,B)\,;\, x \in A\}$ はすぐにわかる．$\varepsilon > 0$ とすれば，ある $x,y \in A \times B$ で

$$\rho(x,y) < \rho(A,B) + \varepsilon$$

を満たすものが存在する．このとき $\rho(x,B) \leq \rho(x,y)$ であるから，

$$\inf\{\rho(x,B)\,;\, x \in A\} \leq \rho(x,B) < \rho(A,B) + \varepsilon$$

となる．いま $\varepsilon > 0$ は任意に選んでいるから，これより $\inf\{\rho(x,B)\,;\, x \in A\} \leq \rho(A,B)$ が従う．

(iv)．$x,y \in X$ および $z \in A$ とすれば，三角不等式より

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$$

が成り立つ．この不等式で $z \in A$ について inf をとれば，

$$\rho(x,A) \leq \rho(x,y) + \rho(y,A)$$

がわかる．これと擬距離の対称性から，

$$|\rho(x,A) - \rho(y,A)| \leq \rho(x,y)$$

を得る．したがって $x \mapsto \rho(x,A)$ は Lipschitz 連続である． □

擬距離空間の閉集合は，集合間の距離の概念を用いても特徴づけることができる．

命題 1.13. (X,ρ) を擬距離空間とすれば，全ての $A \subset X$ に対して

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \rho(x,A) = 0\}$$

が成り立つ．

証明．定義より明らかに $A \subset \{x \in X \mid \rho(x,A) = 0\}$ が成り立つ．命題 1.12 より $x \mapsto \rho(x,A)$ は連続写像なので $\{x \in X \mid \rho(x,A) = 0\}$ は閉集合であり，閉包の最小性より $\overline{A} \subset \{x \in X \mid \rho(x,A) = 0\}$ がわかる．また，$x \in \{x \in X \mid \rho(x,A) = 0\}$ なら x に収束する A の点列がとれるから，命題 1.3 により $x \in \overline{A}$ となる．したがって逆向きの包含関係 $\{x \in X \mid \rho(x,A) = 0\} \subset \overline{A}$ も示された． □

2　分離性

擬距離空間や距離空間がどのような分離公理を満たすかを調べる．擬距離空間は一様空間だから，位相空間論セミナー V の命題 5.1 より次が分かる．

命題 2.1. 擬距離空間は公理 $(T_{3\frac{1}{2}})$ を満たす．

(T_6) 公理と関係する内容としては，次の性質がある．

命題 2.2. (i) 擬距離空間の閉集合は関数閉集合である．

(ii) 擬距離空間の閉集合は，G_δ 集合である．

証明．(X,ρ) を擬距離空間とする．

(i)．命題 1.11 より，$\rho \leq 1$ が成り立つと仮定してよい．$F \subset X$ を閉集合とすれば命題 1.13 より $F = \{x \in X \mid \rho(x,F) = 0\}$ が成り立つから，F は関数閉集合である．

(ii)．閉集合 $F \subset X$ に対して，

$$G_n = \left\{ x \in X \,\middle|\, \rho(x,F) < \frac{1}{n} \right\} \quad n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$$

と定義する．$x \mapsto \rho(x,F)$ は連続関数だから，各 G_n は X の開集合である．定義より明らかに $F \subset \bigcap_{n\geq 1} G_n$ が成り立つ．$x \in \bigcap_{n\geq 1} G_n$ とすれば $\rho(x,F) = 0$ が成り立つから，命題 1.13 により $x \in \overline{F} = F$ となる．よって $\bigcap_{n\geq 1} G_n \subset F$ も成り立ち，$F \subset \bigcap_{n\geq 1} G_n$ がわかる．すなわち F は G_δ 集合である． □

命題 2.3. 擬距離空間 (X,ρ) が (T_1) を満たすための必要十分条件は，ρ が距離であることである．

証明．位相空間が (T_1) であるとは，全ての 1 点集合が閉集合であるということであった．命題 1.13 よりこれは

$$\forall x \in X \ [\rho(x,\{x\}) = 0 \iff x \in \{x\}]$$

と同値であり，これはさらに公理 (M4) とも同値である． □

以上の議論をまとめると，距離空間は非常に強い分離性をもつことがわかる．

命題 2.4. 距離空間は完全正規空間である．

証明．命題 2.2 と 2.3 より距離空間は全ての閉集合が関数閉集合であるような (T_1) 空間である．したがって位相空間論セミナー III 命題 1.15 により，完全正規空間であることがわかる． □

3 擬距離空間の生成

本節では，擬距離空間や距離空間が与えられたときに，そこから新たな擬距離空間や距離空間を作り出す方法を調べる．

次の命題の主張は明らかであろう．

命題 3.1. 擬距離空間の部分空間は，全空間の擬距離の制限により擬距離空間となる．また，距離空間の部分空間は，全空間の距離の制限により距離空間となる．

擬距離空間への写像の族が与えられたときに，そこから擬距離を作る方法を考えよう．

命題 3.2. X を空でない集合とし，$(Y_i,\rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を擬距離空間の列とする．$f_i \colon X \to Y_i$ を写像の列とし，X を $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ によって生成される一様系により一様空間 $(X, \mathcal{U}(f_i; i\in\mathbb{N}))$ と考える．このとき，$(X, \mathcal{U}(f_i; i\in\mathbb{N}))$ は擬距離化可能である．さらに

$$\forall x,y \in X,\ \Big[\big(\forall i \in \mathbb{N},\ \rho(f_i(x), f_i(y)) = 0\big) \implies x = y\Big]$$

が成り立つなら，$(X, \mathcal{U}(f_i; i\in\mathbb{N}))$ は距離化可能である．

証明．命題 1.11 より，ρ_i はどれも 1 以下であるとしてよい．$x, y \in X$ に対して，

$$\rho(x,y) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\rho_i(f_i(x), f_i(y))}{2^{i+1}}$$

ρ_i はどれも 1 以下としているから，右辺の和は収束することに注意しておく．この ρ が (M1)，(M2) を満たすことは明らかであり，各項ごとに三角不等式を用いれば ρ が三角不等式を満たすこともわかる．よって ρ は X 上の擬距離である．

ρ から定まる一様系が $\mathscr{U}(f_i; i\in\mathbb{N})$ と一致することを示そう．$i \in \mathbb{N}$ に対して

$$\rho_i(f_i(x), f_i(y)) \leq 2^{i+1}\rho(x,y)$$

が成り立つから，f_i は Lipschitz 連続であり，特に一様連続である．$\mathscr{U}(f_i; i\in\mathbb{N})$ は全ての f_i が一様連続となるような最小の一様系だったから，これより $\mathscr{U}(f_i; i\in\mathbb{N}) \subset \mathscr{U}_\rho$ がわかる．後は逆向きの包含関係を示せばよい．$r > 0$ とし，$N \in \mathbb{N}$ を

$$\sum_{i>N} \frac{\rho_i(f_i(x), f_i(y))}{2^{i+1}} < \frac{r}{2}$$

を満たすように選ぶ．このような N が実際に存在することは，級数が収束することからわかる．また，$0 \leq i \leq N$ に対して，$r_i = r/2$ と定義する．このとき $(x,y) \in \bigcap_{1\leq i\leq N}(f_i \times f_i)^{-1}(U(\rho_i; r_i))$ なら

$$\begin{aligned}
\rho(x,y) &= \sum_{0\leq i\leq N} \frac{\rho_i(f_i(x), f_i(y))}{2^{i+1}} + \sum_{i>N} \frac{\rho_i(f_i(x), f_i(y))}{2^{i+1}} \\
&< \sum_{0\leq i\leq N} \frac{1}{2^{i+1}}\frac{r}{2} + \frac{r}{2} \\
&< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r
\end{aligned}$$

であり，$(x,y) \in U(\rho; r)$ がわかる．すなわち $\bigcap_{1\leq i\leq N}(f_i \times f_i)^{-1}(U(\rho_i; r_i)) \subset U(\rho; r)$ であり，それゆえ $U(\rho; r) \in \mathscr{U}(f_i; i\in\mathbb{N})$ となる．以上の議論で $\mathscr{U}_\rho \subset \mathscr{U}(f_i; i\in\mathbb{N})$ も示すことができた．

後半の主張を示そう．全ての $i \in \mathbb{N}$ について $\rho(f_i(x), f_i(y)) = 0$ なら $x = y$ が成り立つとする．このとき $\rho(x,y) = 0$ なら $x = y$ となり，ρ は X 上の距離であることがわかる． □

命題 3.2 における条件「全ての $i \in \mathbb{N}$ について $\rho(f_i(x), f_i(y)) = 0$ なら $x = y$ が成り立つ」とは，$\Delta_X = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \rho_i^{-1}(0)$ が成り立つということであり，このとき ρ の連続性より Δ_X は閉集合となる．したがって，X は Hausdorff であり，これと前半の主張からも後半の主張は示される．命題 3.2 の特別な場合として，次の系を述べておく．

系 3.3. X を空でない集合，$(Y_i, \rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を距離空間の列とし，$(f_i\colon X \to Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を写像の列とする．写像の積 $(f_i)\colon X \to \prod_{i\in\mathbb{N}} Y_i$ が単射ならば，一様空間 $(X, \mathscr{U}(f_i; i\in\mathbb{N}))$ は距離化可能である．

写像の積 $(f_i)\colon X \to \prod_{i\in I} Y_i$ が単射であるとは，写像の族 (f_i) が X の点を分離するということである．
命題 3.2 と系 3.3 より，直ちに次の結果を得る．

系 3.4. $(X_i, \rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が擬距離空間の列なら，直積一様空間 $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ は擬距離化可能である．さらに全ての $i \in \mathbb{N}$ について (X_i, ρ_i) が距離空間なら，$\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ もまた距離化可能である．

擬距離空間が与えられると，適当な商空間をとることで距離空間を得られる．

命題 3.5. (X,ρ) を擬距離空間とし，X 上の同値関係 R_ρ を

$$xR_\rho y :\Longleftrightarrow \rho(x,y)=0$$

と定義する．さらに商空間の元 $[x],[y]\in X/R_\rho$ に対して

$$\widehat{\rho}([x],[y])=\rho(x,y)$$

とする．（ただし，$[x]$ は $x\in X$ の同値類である．）このとき $(X/R_\rho,\widehat{\rho})$ は距離空間となり，$\widehat{\rho}$ の定める位相は X/R_ρ の商位相と一致する．

命題 3.5 において擬距離空間 (X,ρ) から作られた距離空間 $(X/R_\rho,\widehat{\rho})$ を，(X,ρ) の商距離空間と呼ぶことにする．

証明．まずは, $\widehat{\rho}$ が代表元の取り方によらず定まることを確認しよう．$[x]=[x'],[y]=[y']$ なる $x,y,x',y'\in X$ を任意に選ぶ．$[x]=[x']$ かつ $[y]=[y']$ が成り立つとは $xR_\rho x'$ かつ yy' が成り立つということであり，R_ρ の定義よりこれは $\rho(x,x')=\rho(y,y')=0$ だということである．したがって三角不等式より

$$|\rho(x,y)-(x',y')|\le\rho(x,x')+\rho(y,y')=0$$

となり, $\rho(x,y)$ と $\rho(y,y')$ は一致する．これより, $\widehat{\rho}$ は代表元の選び方によらず定まり, 写像として well-defined である．

次に，$\widehat{\rho}$ が距離であることを確かめる．$\widehat{\rho}$ が擬距離であることは，ρ が擬距離であることからすぐにわかる．$\widehat{\rho}([x],[y])=0$ なら $\rho(x,y)=0$ であり，したがって $xR_\rho y$ である．商空間の定義よりこのとき $[x]=[y]$ が成り立つ．よって $\widehat{\rho}$ は X/R_ρ 上の距離である．

最後に，$\widehat{\rho}$ の定める位相が X/R_ρ の商位相と一致することを示そう．写像 $x\mapsto[x]$ を $q\colon X\to X/R_\rho$ で表すことにする．$\widehat{\rho}$ の定義より q は等長写像なので，特に連続である．商位相は q が連続になるような最大の位相だったから，$(X/R_\rho,\widehat{\rho})$ の位相は商位相より粗い．後は，$(X/R_\rho,\widehat{\rho})$ の位相が商位相より細かいことを示せばよい．O を X/R_ρ の商位相に関する開集合とし，$[x]\in O$ とする．このとき $q^{-1}(O)$ は X の開集合であり，しかも $x\in q^{-1}([x])\subset q^{-1}(O)$ が成り立つから，ある $r>0$ で $U^\rho_r(x)\subset q^{-1}(O)$ を満たすものが存在する．$[y]\in U^{\widehat{\rho}}_r([x])$ なら $\rho(x,y)=\widehat{\rho}([x],[y])<r$ であり，よって $y\in U^\rho_r(x)$ となる．ゆえに $y\in q^{-1}(O)$ であり，これより $[y]\subset qq^{-1}(O)=O$ となり，$U^{\widehat{\rho}}_r([x])\subset O$ がわかる．したがって O は $\widehat{\rho}$ が定める位相について開集合であり，$(X/R_\rho,\widehat{\rho})$ の位相は商位相より細かい． □

注意 3.6. 命題 3.5 における商距離空間 $(X/R_\rho,\widehat{\rho})$ において，標準全射 $q\colon X\ni x\mapsto[x]\in X/R_\rho$ の切断 $s\colon X/R_\rho\to X$ は[*1]常に等長写像であり，特に一様連続である．

命題 3.7. 任意の Hausdorff 一様空間は，距離空間の直積に一様同型に埋め込むことができる．

証明．$(X,\mathscr{U})$ を Hausdorff 一様空間とし, 擬距離空間の族 $(Y_i,\rho_i)_{i\in I}$ と一様同型な埋め込み $\varphi\colon X\to\prod_{i\in I}Y_i$ を任意に選ぶ．(Y'_i,ρ'_i) を (Y_i,ρ_i) の商距離空間とし，$q_i\colon Y_i\to Y'_i$ を商空間への標準全射とする．このとき，$(\prod_i q_i)\circ\varphi\colon X\to\prod_i Y'_i$ が一様同型な埋め込みであることを示そう．そのためには，$(\prod_i q_i)|_{\varphi(X)}$ が一様同型な埋め込みであることを示せばよい．$\varphi(x)\ne\varphi(y)$ が成り立つとすれば，部分空間 $\varphi(X)$ の Hausdorff 性より $\prod_{i\in I}Y_i$ の近縁 V で $(\varphi(x),\varphi(y))\notin V$ を満たすものが存在する．V は積空間の近縁なので，この

[*1] s が q の切断とは，$q\circ s=\mathrm{id}_{X/R_\rho}$ が成り立つということである．あるいは，s は選択写像であると言ってもよい．

とき有限個の $i_1,\dots,i_n$ と $V_{i_k}\in\mathscr{U}_{\rho_{i_k}}$ で，$\bigcap_{1\le k\le n}(\mathrm{pr}_{i_k}\times\mathrm{pr}_{i_k})^{-1}V_{i_k}\subset V$ を満たすものがとれる．いま $(\varphi(x),\varphi(y))\in\bigcup_{1\le k\le n}(\mathrm{pr}_{i_k}\times\mathrm{pr}_{i_k})^{-1}(Y_{i_k}\setminus V_{i_k})$ が成り立つから，さらに $(\varphi(x)_{i_{k_0}},\varphi(y)_{i_{k_0}})\in Y_{i_{k_0}}\setminus V_{i_{k_0}}$ なる $k_0\in\{1,\dots,n\}$ を選ぶことができる．$Y_{i_{k_0}}$ は擬距離空間だから $\rho i_{k_0}(\varphi(x)_{i_{k_0}},\varphi(y)_{i_{k_0}})>0$ であり，$q_{i_{k_0}}(\varphi(x)_{i_{k_0}})\neq q_{i_{k_0}}(\varphi(y)_{i_{k_0}})$ となる．ゆえに $\left(\prod_i q_i\right)(\varphi(x))\neq\left(\prod_i q_i\right)(\varphi(y))$ であり，$\left(\prod_i q_i\right)|_{\varphi(X)}$ が単射であることがわかる．$\left(\prod_i q_i\right)|_{\varphi(X)}\colon\varphi(X)\to\left(\prod_i q_i\right)(\varphi(X))$ の逆写像を ψ とおけば，ψ は q_i の切断 $Y_i'\to Y_i$ の積 $\prod_i Y_i'\to\prod_i Y_i$ の $\left(\prod_i q_i\right)(\varphi(X))$ 上への制限になっており，注意 3.6 よりこれは一様連続である．したがって，$\left(\prod_i q_i\right)|_{\varphi(X)}$ は一様連続な埋め込みである． □

4　完備性と完備化

擬距離空間は一様空間であるから，完備性について論じることができる．まずは，前回のノートで扱った命題を復習しよう．

命題 4.1. (X,ρ) を擬距離空間とすれば，次の条件は同値である．

(i) X は一様空間として完備である．

(ii) X の全ての Cauchy 列は収束する．

(iii) (F_n) 空でない閉集合の減少列で，$\mathrm{diam}(F_n)\to 0$ を満たすような任意のものとする．このとき，$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_n$ は空ではない．

距離空間においては，命題 4.1 の条件 (ii) をもって完備性を定義することも多い．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (iii)．(iii) の仮定を満たすような閉集合列 (F_n) は，閉集合からなるフィルター基底である．$r>0$ に対して n_0 を $n\ge n_0$ なら $\mathrm{diam}(F_n)<r$ となるようにとれば，$F_n\times F_n\subset U_r^\rho$ が成り立つ．よって (F_n) は閉集合からなる Cauchy フィルター基底であり，位相空間論セミナー V 命題 8.2 から $\bigcap_n F_n\neq\emptyset$ となる．

(iii) $\Longrightarrow$ (ii)．Cauchy 列 (x_n) に対して，$F_n=\overline{\{x_k\,;\,k\ge n\}}$ と定義する．このとき (F_n) は明らかに空でない閉集合の減少列であり，(x_n) が Cauchy であることから $\mathrm{diam}(F_n)\to 0$ も成り立つ．したがって，(iii) より $\bigcap_n F_n$ は空ではない．$x_\infty\in\bigcap_n F_n$ とすれば，$\rho(x,x_n)\le\mathrm{diam}(F_n)\to 0$ だから (x_n) は x に収束することがわかる．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．位相空間論セミナー V 補題 9.2 よりわかる． □

命題 4.2. (X,ρ) を完備擬距離空間とし，(X',ρ') をその商距離空間とする．このとき，(X',ρ') は完備である．

証明．商空間への標準全射 $q\colon X\to X'$ の切断 $s\colon X'\to X$ を一つ固定すれば，s は等長写像となるのであった．(y_n) を X' の Cauchy 列とすれば $(s(y_n))$ も X の Cauchy 列となり，X の完備性より $(s(y_n))$ は X の収束列となる．q は連続なのでこのとき $(y_n)=(q(s(y_n)))$ は X' の収束列となり，X' の任意の Cauchy 列は収束することがわかった．したがって命題 4.1 により (X',ρ') は完備となる． □

定理 4.3. 任意の擬距離空間は，完備な擬距離空間に等長かつ稠密に埋め込めこむことができる．また，任意の距離空間は完備な距離空間に等長に埋め込むことができる．

証明．一般の擬距離空間の場合は位相空間論セミナー V の定理 9.3 として既に証明したので，距離空間についての主張を証明しよう．(X,ρ) を距離空間とし，完備な擬距離空間 $(\widehat{X},\widehat{\rho})$ への等長かつ稠密な埋め込み $i\colon X \to \widehat{X}$ が与えられたとする．$(\widehat{X}',\widehat{\rho}')$ その商距離空間，$q\colon \widehat{X} \to \widehat{X}'$ を商空間への標準全射とすれば，命題 4.2 より $(\widehat{X}',\widehat{\rho}')$ は完備である．したがって $q\circ i$ は距離空間 X から完備距離空間 $\widehat{X}'$ への等長な埋め込みである．後は稠密性を証明すればよい．q の連続性より $q(\overline{i(X)}) \subset \overline{q(i(X))}$ が成り立つ．いま仮定より $\overline{i(X)} = \widehat{X}$ であり，q は全射だから $q(\widehat{X}) = \widehat{X}'$ となる．ゆえに $\widehat{X}' = \overline{q(i(X))}$ となり，$q\circ i$ は稠密な埋め込みであることがわかった． □

以上の結果を用いて，前回のノートで証明を省略した以下の定理を証明しよう．

定理 4.4. Hausdorff 一様空間は，Hausdorff な完備化をもつ．さらに，完備化は一様同値の意味で一意的である．

証明．一意性は，位相空間論セミナー V 定理 9.5 において既に証明したので，Hausdorff 完備化の存在を示せばよい．

$(X,\mathscr{U})$ を Hausdorff 一様空間とする．このとき，命題 3.7 より距離空間の族 $(X_i,\rho_i)_{i\in I}$ と一様同型な埋め込み $\psi\colon X \to \prod_{i\in I} X_i$ が存在する．各 $i\in I$ に対して完備距離空間への稠密かつ等長な埋め込み（よって一様同型な埋め込み）$\varphi_i\colon X_i \to X_i'$ をとれば，その積 $\prod_{i\in I}\varphi_i\colon \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} X_i'$ は一様同型な埋め込みである．ここで，積空間 $\prod_{i\in I} X_i'$ は完備な Hausdorff 一様空間であることに注意すれば[*2]，いま合成 $\left(\prod_{i\in I}\varphi_i\right)\circ\psi$ は完備な Hausdorff 一様空間への一様同型な埋め込みである．$\widehat{X} = \overline{\left(\prod_{i\in I}\varphi_i\right)(\psi(X))}$ と定めれば，$\left(\prod_{i\in I}\varphi_i\right)\circ\psi\colon X \to \widehat{X}$ は X の Hausdorff 完備化となる． □

5　擬距離空間と可算公理

本節では距離空間の位相における可算性について考えよう．位相空間は各点が可算な基本近傍系をもつとき第一可算 (first countable) であるといい，可算開基をもつときに第二可算 (second countable) であるという．可算な稠密部分空間を持つような位相空間は，可分 (separable) であるというのであった．

命題 5.1. 擬距離空間は第一可算である．

証明．$(U_{n^{-1}}(x))_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}$ は x の基本近傍系である． □

擬距離空間における第二可算性を特徴づける．

定理 5.2. (X,ρ) を擬距離空間とする．このとき，次の 3 条件は同値である．

(i) X は第二可算である．
(ii) X は可分である．
(iii) X は Lindelöf 空間である．

証明．**(i) $\Longrightarrow$ (iii) の証明．** 位相空間論セミナー IV 命題 7.2 よりわかる．

[*2] Hausdorff 位相空間の積は Hausdorff であり（位相空間論セミナー III 命題 1.7），完備な一様空間の積は完備である（位相空間論セミナー V 命題 8.5）．

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) の証明． X は Lindelöf であるとする．

$$\mathscr{U}_n = \{U_{1/n}(x) \mid x \in X,\ n \geq 1\}$$

とすれば，$\mathscr{U}_n$ は X の開被覆である．Lindelöf 性より，各 n について $\mathscr{U}_n$ の可算部分被覆 $\mathscr{U}'_n$ がとれる．$C_n = \{x \in X \mid U_{1/n}(x) \in \mathscr{U}'_n\}$ とすれば，C_n は明らかに可算集合である．ここで $C = \bigcup_n C_n$ と定義すれば，C が X の稠密部分集合であることを示そう．U を X の空でない開集合とする．$x \in U$ を一つ選べば，$x \in U_r(x) \subset U$ なる $r > 0$ が選べる．ここで $1/n < r$ なる n を一つ選ぶと，$\mathscr{U}'_n$ が X の開被覆であることから $x \in U_{1/n}(x_n)$ なる $x_n \in C_n$ が選べる．このとき $x_n \in U_r(x) \subset U$ だから，$x_n \in U \cap C_n \subset U \cap C$．これより，任意の空でない開集合 U に対して $U \cap C \neq \emptyset$ となることが分かる．すなわち C は X の稠密部分集合である．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． C を X の稠密部分集合とし，

$$\mathscr{B} = \{U_r(x) \mid x \in C,\ r \in \mathbb{Q}\}$$

と定める．このとき，可算集合 $\mathscr{B}$ が X の開集合の基底となっていることを示せばよい．U を空でない X の開集合とする．C の稠密性より $C \cap U$ は空ではない．$x \in C \cap U$ に対して，$A(x)$ で $U_r(x) \subset U$ なる $r \in \mathbb{Q}$ 全体の集合を表すことにする．このとき明らかに $U_r(x) \in \mathscr{B}$ $(x \in C \cap U,\ r \in A(x))$ だから，後は

$$U \subset \bigcup_{x \in C \cap U} \bigcup_{r \in A(x)} U_r(x)$$

となっていることを示せばよい．（逆向きの包含関係は明らか．）$u \in U$ に対して，$U_\varepsilon(u) \subset U$ を満たす $\varepsilon > 0$ をとる．このとき，C の稠密性より $C \cap U_{\varepsilon/3}(u)$ は空ではない．$x \in C \cap U_{\varepsilon/3}(u)$ および $\varepsilon/3 < r < \varepsilon/2$ を満たす有理数 r をとれば，$u \in U_r(x) \subset U_\varepsilon(u) \subset U$ となる．これより，任意の $u \in U$ に対してある $U_r(x) \in \mathscr{B}$ が存在して，$u \in U_r(x) \subset U$ を満たすことが分かった． □

系 5.3. 可分距離空間の任意の部分空間は可分である．

証明．命題 5.2 より可分距離空間は第二可算である．その部分空間は第二可算な距離化可能空間であるから，可分である． □

6 コンパクト性

本節では，擬距離空間や距離空間におけるコンパクト性について調べる．

一様空間がコンパクトであるための必要十分条件は，それが完備かつ全有界であることであった．その特徴付けはもちろん成り立つ．さらに，擬距離空間や距離空間では，これまでと同じように数列を使った様々な特徴付けが可能である．

まずは，数列の部分列の概念を導入しよう．$\mathbb{N}$ を有向集合として持つ有向族と数列というのであった．$x \colon \mathbb{N} \to X$ と $y \colon \mathbb{N} \to X$ を数列とする．ある狭義単調増加 $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ で $y = x \circ \varphi$ を満たすものが存在するとき，y は x の部分列であるという．数列の部分列は部分有向族でもあるが，部分有向族が部分列であるとは限らない．有向族 x と部分有向族 y の定義域が同じ $\mathbb{N}$ であり，全く同じ順序構造を要求している点と，変換 $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ の狭義単調性を要請していることが相違点である．

命題 6.1. (X, ρ) を擬距離空間とする．このとき次の条件は同値である．

(i) X は全有界である．

(ii) 全ての $\varepsilon > 0$ に対して，ある有限集合 $X_0 \subset X$ で，$\{U_\varepsilon(x)\,;\, x \in X_0\}$ が X の被覆となるようなものが存在する．

(iii) 全ての点列は Cauchy 部分列をもつ．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii)．全有界性の定義と，U_ε^ρ が X の近縁であることからわかる．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)．(x_n) を X の任意の点列とし，その Cauchy 部分列を再帰的に構成する．有限集合 $X_0 \subset X$ を，$\{U_1(x)\,;\, x \in X_0\}$ が X の被覆となるように選ぶ．このとき有限個の $U_1(x)$ のうちどれかは，(x_n) の元を無数に含む．そのような X_0 の元を一つ固定し，y_0 とおく．また，$x_{n_0} \in U_1(y_0)$ なる n_0 を一つ選ぶ．$(y_0, \dots, y_k)$ と $(x_{n_0}, \dots, x_{n_k})$ は，$1 \le i \le k$ について (i) $\bigcap_{0 \le j \le i} U_{2^{-j}}(y_j)$ は (x_n) の点を無数に含む．(ii) $x_{n_i} \in \bigcap_{0 \le j \le i} U_{2^{-j}}(y_j)$．を満たす有限列とする．このとき，ある有限集合 X_{k+1} で $\{U_{2^{-k-1}}(x)\,;\, x \in X_{k+1}\}$ が X の被覆となるようなものが存在する．$\{U_{2^{-k-1}}(x)\,;\, x \in X_{k+1}\}$ は特に $\bigcap_{0 \le j \le k} U_{2^{-j}}(y_j)$ の被覆でもあるから，$x \in X_{k+1}$ で $\bigcap_{0 \le j \le k} U_{2^{-j}}(y_j) \cap U_{2^{-k-1}}(x)$ が (x_n) の点を無数に含むようなものが存在する．そのような $x \in X_{k+1}$ を一つ選んで，y_{k+1} と定める．さらに，$x_{n_{k+1}}$ を $x_{n_{k+1}} \in \bigcap_{0 \le j \le k+1} U_{2^{-j}}(y_j)$ かつ $n_{k+1} > n_k$ となるように選ぶ．このようにすれば，再帰法により (x_n) の部分列 (x_{n_k}) と X の点列 (y_k) で，全ての $k \in \mathbb{N}$ に対して $x_{n_k} \in \bigcap_{0 \le j \le k} U_{2^{-j}}(y_j)$ を満たすようなものが構成できる．あとは (x_{n_k}) が Cauchy 列であることを示せばよい．$r > 0$ に対して，N を $2^{-N+2} < r$ となるように選ぶ．このとき，$N \le k < l$ なら

$$\begin{aligned}
\rho(x_{n_k}, x_{n_l}) &\le \sum_{k \le i \le l-1} \rho(x_{n_i}, x_{n_{i+1}}) \\
&\le \sum_{k \le i \le l-1} \bigl(\rho(x_{n_i}, y_i) + \rho(y_i, x_{n_{i+1}})\bigr) \\
&\le \sum_{k \le i \le l-1} \left(\frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^i}\right) \\
&= \sum_{k \le i \le l-1} \frac{1}{2^{i-1}} \le \frac{1}{2^{k-2}} < r
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって (x_{n_k}) は Cauchy 列である．

(iii) $\Longrightarrow$ (i)．位相空間論セミナー V 命題 10.5 の (iv) $\Longrightarrow$ (i) の証明と同じである． □

命題 6.2 (Lebesgue の被覆補題)．X をコンパクト擬距離空間とし，$\mathscr{U}$ をその開被覆とする．このとき，$\varepsilon > 0$ で $\{U_\varepsilon(x)\,;\, x \in X\}$ が $\mathscr{U}$ の細分となるようなものが存在する．

上記の正数 $\varepsilon > 0$ を，開被覆 $\mathscr{U}$ に関する Lebesgue 数という．Lebesgue の被覆補題を一様空間の言葉で言うと，「コンパクト一様空間の任意の開被覆は一様被覆である」ということになる．

証明．$x \in X$ に対して，$U \in \mathscr{U}$ を $x \in U$ となるように選ぶ．U は x の開近傍だから，$\varepsilon_x > 0$ を $U_{2\varepsilon_x}(x) \subset U$ となるようにとれる．このとき $\{U_{\varepsilon_x}(x)\,;\, x \in X\}$ は X の開被覆であり，有限部分被覆 $\{U_{\varepsilon_{x_i}}(x_i)\,;\, 1 \le i \le n\}$ が存在する．ここで，$\varepsilon = \min\{\varepsilon_{x_1}, \dots, \varepsilon_{x_n}\}$ と定義する．$x \in X$ に対して $U_{\varepsilon_{x_k}}(x_k)$ なる k を選び，さらに $U \in \mathscr{U}$ を $U_{2\varepsilon_{x_k}}(x_k) \subset U$ となるように選ぶ．$y \in U_\varepsilon(x)$ なら，

$$\rho(x_k, y) \le \rho(x_k, x) + \rho(x, y) < \varepsilon_{x_k} + \varepsilon \le 2\varepsilon_{x_k}$$

となり，$y \in U_{2\varepsilon_{x_k}}(x_k) \subset U$ がわかる．ゆえに $\{U_\varepsilon(x)\,;\, x \in X\}$ は $\mathscr{U}$ の細分である． □

擬距離空間のコンパクト性を特徴づけるために，コンパクト性と類似の条件をいくつか導入しよう．

定義 6.3. X を位相空間とする．

(i) X の全ての点列が収束部分列をもつとき，X は点列コンパクトであるという．

(ii) X の全ての可算開被覆が有限部分被覆を持つとき，X は可算コンパクトであるという．

明らかにコンパクト空間は可算コンパクト空間である．Lindelöf な可算コンパクト空間はコンパクトである．

コンパクト空間の閉集合族を用いた特徴付けと全く同じようにして，次の主張が証明できる．

補題 6.4. X を位相空間とする．このとき，次の条件は同値である．

(i) X は可算コンパクトである．

(ii) 閉集合の可算族 $\mathscr{F}$ が有限交叉性をもつなら，$\bigcap \mathscr{F} \neq \emptyset$ が成り立つ．

補題 6.5. 可算コンパクトな擬距離空間の無限集合は，集積点をもつ．

証明．(X, ρ) を可算コンパクトな擬距離空間とし，A のその無限部分集合とする．A が非可算ならあらためて可算無限な部分集合を取り直せばよいので，A は可算であると仮定してよい．A への全単射 $a \colon \mathbb{N} \to A$ を適当に選び，$F_n = \overline{\{a_k \,;\, k \geq n\}}$ と定義する．このとき (F_n) は閉集合の減少列なので，補題 6.4 により $\bigcap_n F_n$ は空ではない．$a \in \bigcap_n F_n$ とした時，a が A の集積点であることを示せばよい．$\varepsilon > 0$ とすれば，任意の n について $U_\varepsilon(a) \cap F_n$ は空ではない．F_n の定義より，ある $k \geq n$ で $a_k \in U_\varepsilon(a)$ を満たすものが存在する．したがって a の任意の近傍は A の点を無数に含み，a は A の集積点である． □

定理 6.6. (X, ρ) を擬距離空間とする．このとき，次の条件は同値である．

(i) X はコンパクトである．

(ii) X は完備かつ全有界である．

(iii) X は点列コンパクトである．

(iv) X は可算コンパクトである．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii) は一般の一様空間について既に証明した．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)．X は完備かつ全有界であるとする．全有界より X の任意の点列は Cauchy 部分列をもつ．（命題 6.1.）完備性よりその Cauchy 部分列は収束するので，X の任意の点列は収束部分列をもつ．

(iii) $\Longrightarrow$ (iv)．対偶を示す．X は可算コンパクトでないとし，(U_n) は有限部分被覆を持たないようなその開被覆としよう．点列 (x_n) を，任意の n に対して $x_n \in X \setminus \bigcap_{0 \leq k \leq n} U_k$ を満たすように選ぶ．このとき，どの U_n も高々有限個しか (x_n) の点を持たないので，(x_n) は収束部分列を持たない．

(iv) $\Longrightarrow$ (i)．可算コンパクト距離空間 X は Lindelöf であることを示せばよい．X は擬距離空間なので，命題 5.2 より特に可分であることを示せばよい．$\mathscr{F}_n$ を

$$\mathscr{F}_n = \left\{ A \subset X \,\middle|\, \forall x, y \in A,\ \rho(x, y) > \frac{1}{n} \right\}$$

と定義する．このとき $\mathscr{F}_n$ は有限特性の集合族であるから，Tucky の補題（補題 A.2）により極大元が存在する．A_n を $\mathscr{F}_n$ の極大元とし，$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} A_n$ と定義する．このとき，A が X の可算な稠密部分集合であることを示そう．A_n は集積点を持たないから補題 6.5 により有限集合であり，したがってその可算和である A は可算集合である．$x \in X \setminus \overline{A}$ なら，命題 1.13 より $\rho(x, A) > 0$ が成り立つ．$\rho(x, A) > 1/n_0$ なる n_0 を一つ

選べば，$\rho(x, A_{n_0}) \geq \rho(x, A) > 1/n_0$ が成り立つ．このとき $\{x\} \cup A_{n_0} \in \mathscr{F}_{n_0}$ となるから，これは A_{n_0} の極大性に矛盾する．したがって，$X \setminus \overline{A}$ は空集合であり，A は X で稠密である． □

7　距離化定理

本節では，初歩的な距離化定理を扱う．

定理 7.1 (Urysohn の距離化定理)**.** 第二可算な正則空間は $[0,1]^{\mathbb{N}}$ に同相に埋め込むことが可能であり，よって距離化可能である．

証明. 第二可算空間正則空間 X は正則 Lindelöf 空間であり，したがって正規空間であることに注意する．

$\mathscr{U}$ を X の可算開基とする．$I = \{(U,V) \in \mathscr{U} \times \mathscr{U} \mid \overline{U} \subset V\}$ と定めれば，これはまた可算集合である．$(U,V) \in I$ に対して，連続写像 $f_{U,V} \colon X \to [0,1]$ を $f_{(U,V)}(\overline{U}) \subset \{0\}$ かつ $f_{(U,V)}(X \setminus V) \subset \{1\}$ を満たすように定める[*3]．さらに連続写像 $f \colon X \to [0,1]^I$ を $(f_{(U,V)})_{(U,V)\in I}$ の積として定義する．このとき，f が X の $[0,1]^I$ への同相埋め込みであることを示そう．積位相の定義より f は明らかに連続なので，f の単射性と X の位相が f による引き戻しであることを示せばよい．

X は正規だから，$x \neq y$ に対して $x \in U$, $y \in V$ かつ $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ を満たすものがとれる．このとき $(U, X \setminus \overline{V}) \in I$ であり，$f_{(U,X\setminus\overline{V})}(x) = 0 < 1 = f_{(U,X\setminus\overline{V})}(y)$ が成り立つ．よって $f(x) \neq f(y)$ であり，f は単射である．

$\mathscr{V} = \{f^{-1}_{(U,V)}([0,1[) \mid (U,V) \in I\}$ と定義したとき，$\mathscr{V}$ が X の位相の基底であることを示す．U を X の開集合とし，$x \in U$ とする．このとき，X の正則性より $x \in W \subset \overline{W} \subset U$ を満たす W がとれる．$(W,U) \in I$ であるから $x \in f^{-1}_{(W,U)}([0,1[) \subset U$ が成り立つ．これより $\mathscr{V}$ は X の開集合の基底であることがわかった．すなわち，$\mathscr{V}$ の含む最小の開集合系は X の開集合系に等しく，$f \colon X \to [0,1]^I$ は同相埋め込みである． □

局所コンパクト Hausdorff 空間は Tychonoff 空間なので，これより次の系がわかる．

系 7.2. 第二可算な局所コンパクト Hausdorff 空間は距離付け可能である．

A　Tukey の補題

ZF 公理系において，選択公理と同値な命題はたくさん知られている．例えば Zorn の補題はその中でも非常に重要なもので，本セミナーにおいても極大フィルターの存在を示すことなどに使っている．本節では，同じように選択公理と同値な命題で，Tukey の補題と呼ばれているものについて触れる．

定義 A.1. X を集合とし，$\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ とする．全ての $A \in \mathscr{P}X$ について，次の 2 条件は同値になっているとしよう．

(i) $A \in \mathscr{F}$ である．
(ii) A の全ての有限部分集合 F が，$F \in \mathscr{F}$ を満たす．

このとき，$\mathscr{F}$ は有限特性 (finite character) の集合族であるという．

[*3] Urysohn の補題より，このような写像が存在する．

ZFC 集合論においては，以下の Tukey の補題は定理として導かれる．ZF の下ではこれは選択公理と同値である．

命題 A.2 (Tukey の補題)**.** X を集合とし，$\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ を有限特性の集合族とする．$X \in \mathscr{F}$ なら，$X \subset Y$ かつ包含関係について極大な $Y \in \mathscr{F}$ が存在する．

References

[1] Emmanuele DiBenedetto. *Real Analysis*. 2nd ed. Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher. Birkhäuser Basel, 2016. DOI: 10.1007/978-1-4939-4005-9. URL: http://www.springer.com/us/book/9781493940035.

[2] Ryszard Engelking. *General topology*. Revised and completed edition. Sigma Series in Pure Mathematics 6. Translated from the Polish by the author. Heldermann Verlag, Berlin, 1989, pp. viii+529. ISBN: 3-88538-006-4.

[3] John L. Kelley. *General Topology*. Graduate Texts in Mathematics 27. Originally published by Van Nostrand, 1955. Springer-Verlag New York, 1975, pp. xiv+298. URL: https://www.springer.com/la/book/9780387901251.

[4] ケネス・キューネン. **キューネン数学基礎論講義**. Trans. by 藤田 博司. 日本評論社, 2016. URL: https://www.nippyo.co.jp/shop/book/7176.html.

索引