集合と写像，順序

平井祐紀

2019 年 8 月 16 日

概要

本ノートでは，位相空間論を学ぶ上で必要となる集合論の基礎事項を解説する．

目次

1　集合論の公理

本節では，我々が数学を展開する基礎となる，集合論の公理を紹介する．1 階論理による厳密な扱いをするわけではないので，本節の内容を「公理的集合論入門」と呼ぶのは気が引ける．しかし，ZF の公理系をぼんやりと眺めてみるだけでも何となく雰囲気はわかりそうな気もするし，雰囲気がわかるだけで次節以降の理解も少しは深まるのではないかと思う．

早速，本節の主役となる公理たちのうちいくつかを列挙してみよう．

(0) $\exists x(x = x)$．（集合の存在）

(i) $\forall z(z \in x \iff z \in y) \implies (x = y)$．（外延性公理）

(ii) 論理式 φ と φ に自由変数として含まれない y について，$\exists y \forall x(x \in y \iff x \in z \wedge \varphi(x))$．（内包公理図式）

(iii) $\exists(x \in z \wedge y \in z)$．（対の公理）

(iv) $\exists z \forall y \forall x(x \in y \wedge y \in u \implies x \in z)$．（和集合公理）

ここでひとまず休憩して，上記の公理の意味を簡単に考えてみる．公理 (0) は，言うまでもなく集合が存在するという意味である．公理を記述するのに出てくる記号 $x \in y$ は，x は y の元であると読むことにする．論理式 $x \in y$ の否定 $\neg(x \in y)$ を $x \notin y$ と，$x = y$ の否定 $\neg(x = y)$ を $x \neq y$ とそれぞれ略記する．

公理 (i) の主張は，二つの集合が等しいということは，その元が全て等しいということである，という意味である．公理 (i) の示唆によれば，集合はその元全体によって決まるということであり，これにより集合は元の集まりだと見なすことができる．

集合 y と z について

$$\forall x(x \in y \implies x \in z)$$

が成り立つとき，y は x の部分集合であるといい $y \subset z$ と表すことにする．y が z の部分集合であるとは，y の元はどれも z の元でもあるということである．$y \subset z$ かつ $y \neq z$ が成り立つことを，しばしば $y \subsetneq z$ で表す．

公理 (ii) は集合 z と（y を自由変数として含まない）論理式 φ が与えられたとき，z の部分集合 y で，$x \in y$ が $x \in \varphi(x) \wedge x \in z$ と同値になるようなものが存在するということを言っている．その集合 y を

$$y = \{x \in z \mid \varphi(x)\}$$

のように表すことにする．外延性公理によりそのような集合は一意に定まるので，上記のような書き方をしても差し支えない．これは集合 z から $\varphi(x)$ を満たすような元を抜き出す操作なので，分出公理図式と呼ばれることもある．公理 (ii) を内包公理「図式」と呼んでいるのは，これは単一の公理ではなくて論理式 φ ごとにそれぞれ公理が一つ定まっている，無数の公理の集まりだからである．ここで注意しておきたいことは，あくまで z が与えれた時にその部分集合 $\{x \in z \mid \varphi(x)\}$ が定まるということであり，任意の論理式について $\{x \mid \varphi(x)\}$ という「集合」が存在するわけではないということである．

対の公理は，二つの集合 x, y が与えられたとき，x と y を元に持つ集合 z が存在するということである．このとき内包性公理により集合 $\{w \in z \mid w = x \vee w = y\}$ が存在するので，これを $\{x, y\}$ で表す．$\{x, y\}$ と $\{y, x\}$ は同じ集合なので，$\{x, y\}$ を x と y の非順序対と呼ぶことがある．特に $x = y$ の場合はこれを $\{x\}$ で表し，x からなる 1 点集合という．同様にして，$\{x, y, u\}$，$\{x, y, u, v\}$ なども定義される．

公理 (iv) は，集合の集まり u が与えられたときに，u の元の元をすべて集めた集合が存在するということである．和集合公理に出てきた集合 z に対して $\bigcup u = \{z \in u \mid \exists y(y \in u \wedge x \in y)\}$ と定義する．これがまさしく u に属する集合の元をすべて集めた集合であり，集合族 u の和集合と呼ぶ．$u = \{a, b\}$ の時は，特に和集合 $\bigcup u$ を $a \cup b$ などと表すことも多い．

ここから先の公理を記述するため，いくつか記号を用意しよう．集合の存在定理と分出公理により，$\exists z \forall x(x \notin z)$ なる主張が成り立つことがわかる．つまり，元を一つも持たない集合が存在するということであ

る．外延性公理よりそのような集合はただ一つしか存在しないので，それを $\emptyset$ や 0 で表し空集合と呼ぶ．また，集合 x に対して $S(x) = x \cup \{\quad x\}$ と定める．現時点ではこの集合の存在意義はわかりにくいが，順序数を扱うときに必要となる集合である．集合 x, y に対して，その共通部分 $x \cap y$ を $x \cap y = \{z \in x \mid z \in y\}$ と定義する．このとき $x \cap y = y \cap x$ が成り立つことに注意しておく．

(v) $\exists y \forall x (x \subset z \implies x \in y)$.（冪集合公理）
(vi) $\exists x (\emptyset \in x \land \forall y (y \in x \implies S(y) \in x))$.（無限公理）
(vii) $x \neq \emptyset \implies \exists y (y \in x \land x \cap y = \emptyset)$.（基礎の公理）

冪集合公理は，集合 x の部分集合全てを元に持つ集合 y が存在するということを主張している．内包性公理よりそのような y に対して $\{z \in y \mid z \subset x\}$ という集合が定義されるので，それを x の冪集合と呼び $\mathscr{P}x$ や Px で表す．このとき $z \in Px$ は $z \subset x$ と同値になる．

無限公理が何を言っているのかは現時点ではよくわからないが，これは無限集合が存在することを保証する公理である．

基礎の公理はいっそう何を言っているかよく分からないが，$x \in x$ を満たすような集合とかいう，病的な例を排除するためのものだと解釈すれば良いようだ．$x \in x$ を満たす集合が存在するというのは，いかにも奇妙なことのように思える．$x \in x$ を満たす集合があったとしよう．$\{x\}$ はただ一つの要素 x について $x \in x \cap \{x\}$ を満たし，$x \cap \{x\}$ は空でない．これは基礎の公理に反するので，このような集合は存在しないということになる．

最後にもう一つ公理を述べるために，記号の準備をしよう．論理式

$$\exists x (\varphi(x) \land \forall y (\varphi(y) \implies x = y))$$

を $\exists! x \varphi(x)$ と略記し，$\varphi(x)$ を満たす x がただ一つ存在する，と読むことにする．

(viii) w を自由変数として含まない論理式 φ について，

$$\forall x (x \in z \implies \exists! y \varphi(x, y)) \implies \exists w \forall x (x \in z \implies \exists y (y \in w \land \varphi(x, y))).$$

（置換公理図式）

置換公理図式も，論理式 φ ごとに公理が定まる無数の公理系である．置換公理は主張が長くて難しいが，次のように解釈できる :「z を集合とし，任意の $x \in z$ に対して，ある集合 y で $\varphi(x, y)$ を満たすものがただ一つ存在するとする．このとき，そのような y をすべて含む集合が存在する．」本ノートではまだ写像を定義していないが，写像の言葉を借りると置換公理は次のように解釈できるだろう :「各 $x \in z$ に対して集合 $\Phi(x)$ を対応させる規則 Φ が定まっているとする．このとき，$\Phi\colon z \to w$ が写像となるような集合 w が存在する．」

以上の公理 (0)–(viii) を ZF(Zermelo-Fraenkel) の公理系と呼ぶ．本当は公理 (0) は不要なのだが，論理に深入りするのを避けるために仮定することにした．大体の数学は，ZF 公理系に選択公理を追加した ZFC 集合論に上で展開されている．

今後使う略記法をあと少し導入しよう．論理式 φ に対して，$\forall x (x \in y \implies \varphi(x))$ を $\forall x \in y \varphi(x)$ と略記する．また，$\exists x (x \in y \land \varphi(x))$ を $\exists x \in y \varphi(x)$ と略記することにする．

本節の最後に，インフォーマルな概念ではあるが有用なものとして「クラス」という概念を導入しよう．論理式 Φ が与えられたときに，$\Phi(x)$ を満たす x の「集まり」を「クラス」と呼ぶことがある．具体的に言うと，論理式 Φ が与えられ時に，$x \in \mathscr{C}$ を $\Phi(x)$ の別表記だと定義し，記号 $\mathscr{C}$ を Φ から定まるクラスと呼ぶ．Φ か

ら定まるクラスを $\{x \mid \Phi(x)\}$ と書くこともある．言い換えれば，クラスとは論理式の別称であるということである．クラス $\mathscr{C}$ で $x \in \mathscr{C}$ が $x \in z$ と同値になるような集合 z が存在しないようなものを，真のクラスと呼ぶ．集合全体のクラスを $\mathfrak{U}$ で表すことにする[*1]．つまり，$\mathfrak{U} = \{x \mid x = x\}$ ということであり，$x \in \mathfrak{U}$ とはある意味では何も言っていないことになる．置換公理についてクラスを用いてラフな説明をしてみよう．置換公理とは，クラス $\mathfrak{U}$ 上の「写像」$F\colon \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ が与えられれば，集合 X についてその「制限」$F|_X$ は実際に X 上の写像となる，というようなことを言っている．

2　集合演算

公理的集合論では全ての対象は集合なので，集合の元はどれも集合であり，また集合を集めたものも集合である．集合が $\mathscr{A}$ 与えられたときに，その元だけでなくてその元の元にも興味がある場合には，$\mathscr{A}$ を集合族と呼ぶことがある．

既に述べたように，集合 $\mathscr{A}$ が与えられたとき

$$\forall x \left(x \in \bigcup \mathscr{A} \iff \exists A \in \mathscr{A}\ x \in A \right)$$

を満たす集合 $\bigcup \mathscr{A}$ がただ一つ存在し，これを集合族 $\mathscr{A}$ の和 (sum) あるいは合併 (union) と呼ぶ．和集合 $\bigcup \mathscr{A}$ を $\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$ と表すこともある．2 元集合 $\{A, B\}$ の和集合 $\bigcup \{A, B\}$ は $A \cup B$ で表すことも多い．

また $\mathscr{A}$ が空でない集合族のとき，

$$\forall x \left(x \in \bigcap \mathscr{A} \iff \forall A \in \mathscr{A}\ x \in A \right)$$

を満たす集合 $\bigcap \mathscr{A}$ がただ一つ存在するので，それを $\bigcap \mathscr{A}$ で表し集合族 $\mathscr{A}$ の共通部分 (intersection) と呼ぶ．具体的には，

$$\bigcap \mathscr{A} = \left\{ x \in \bigcup \mathscr{A} \,\middle|\, \forall A \in \mathscr{A}\ x \in A \right\}$$

と定義すればよい．$\mathscr{A}$ が空の場合にも上の集合を定義することは可能だが，このときは $x \in \bigcap \mathscr{A}$ と $\forall A \in \mathscr{A}\ x \in A$ は同値にはならない．$\mathscr{A}$ が空集合の時には $\forall A \in \mathscr{A}\ x \in A$ は常に真となるので，このような条件を満たす集合は全ての集合を元に持たなければならない．一方，全ての集合を元にもつ集合は存在しないので，$\mathscr{A} = \emptyset$ の時は何を $\bigcap \mathscr{A}$ の定義とするべきかよくわからない．そこで，本ノートでは $\mathscr{A}$ が空な族であるときは，$\bigcap \mathscr{A}$ は考えないこととする．共通部分 $\bigcap \mathscr{A}$ のことを $\bigcap_{A \in \mathscr{A}} A$ と表すこともある．和集合の場合と同じように，2 元集合 $\{A, B\}$ の共通部分 $\bigcap \{A, B\}$ は $A \cap B$ と表すことにする．

集合 X と Y が与えられたときに，集合 $X \setminus Y$ を

$$X \setminus Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}$$

と定義し，X と Y の差 (difference) と呼ぶ．$A \subset X$ のときは $X \setminus A$ を X における A の補集合 (complement) と呼ぶ．補集合 $X \setminus A$ を A^{c} で表すことも多いが，A^{c} と書いた時には，全体集合が何であるのかに注意しなくてはいけない．

$$X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$$

を X と Y の対称差 (symmetric difference) と呼ぶ．

[*1] $\mathfrak{U}$ はドイツ文字の大文字 U で，universe の頭文字．

これまで導入してきた集合演算の性質を調べよう．集合の二項演算については，以下のような演算規則が成り立つ．これらの性質は，代数的な言葉で言えば，Boole 代数とか Boole 環という対象に関するものである．

命題 2.1. A, B, C, D などはどれも集合とする．このとき，それらの集合演算について次が成り立つ．

(i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$．（結合律）
(ii) $A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$．（可換性）
(iii) $A \cap A = A$，$B \cap B = B$．（冪等律）
(iv) $A \cap (A \cup B) = A$，$A \cup (A \cap B) = A$．（吸収律）
(v) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$，$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$．（分配律）
(vi) $A \cup B = B$ は $A \subset B$ と同値である．又，$A \cap B = A$ は $A \subset B$ と同値である．
(vii) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$，$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$．（De Morgan の法則）
(viii) $A \subset C$ かつ $B \subset D$ なら，$A \cup B \subset C \cup D$ および $A \cap B \subset C \cap D$ が成り立つ．（単調性）
(ix) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$．（結合律）
(x) $A \triangle B = B \triangle A$．（可換性）
(xi) $A \triangle A = \emptyset$．
(xii) $A \triangle (B \cap C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$．（分配律）
(xiii) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$．

命 2.1 の証明は，集合論の問題というよりはどちらかというと論理学の問題である．ということで（？）ここでは省略する．

集合 A が与えられたとき，$\mathscr{A} \subset \mathscr{P} A$ で

- $\bigcup \mathscr{A} = A$，
- $B, C \in \mathscr{A}$ かつ $B \neq C$ なら $B \cap C = \emptyset$，

を満たすものを，A の分割と呼ぶことにする．集合族に関する集合演算については，次の性質が成り立つ．

命題 2.2. $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}$ などはどれも集合族とし，A, B, C, D などはどれも集合とする．このとき，それらの集合演算について次が成り立つ．

(i) $\mathscr{U}$ が $\mathscr{A}$ の分割なら，$\bigcup \mathscr{A} = \bigcup_{U \in \mathscr{U}} \bigcup U$ および $\bigcap \mathscr{A} = \bigcap_{U \in \mathscr{U}} \bigcap U$ が成り立つ．（結合律）
(ii) $A \cap \bigcup \mathscr{B} = \bigcup_{B \in \mathscr{B}} [A \cap B]$，$A \cup \bigcap \mathscr{B} = \bigcap_{B \in \mathscr{B}} [A \cup B]$．（分配律）
(iii) $A \setminus \bigcup \mathscr{B} = \bigcap_{B \in \mathscr{B}} A \setminus B$，$A \setminus \bigcap \mathscr{B} = \bigcup_{B \in \mathscr{B}} A \setminus B$．（De Morgan の法則）
(iv) 全ての $A \in \mathscr{A}$ について $A \subset B$ なら，$\bigcup \mathscr{A} \subset B$ が成り立つ．また，全ての $C \in \mathscr{C}$ について $B \subset C$ なら，$B \subset \bigcap \mathscr{C}$ が成り立つ．（単調性）
(v) $(\bigcup \mathscr{A}) \setminus B = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \setminus B$，$(\bigcap \mathscr{A}) \setminus B = \bigcap_{A \in \mathscr{A}} A \setminus B$．（分配律）

3 直積

集合 x, y が与えられたとき，その順序対 (ordered pair) を

$$\{\{x\}, \{x, y\}\}$$

と定義する．このような集合の存在は，対の公理よりわかる．

命題 3.1. $(x, y) = (x', y')$ なら，$x = x'$ かつ $y = y'$ が成り立つ．

証明. $(x, y) = (x', y')$ が成り立つとする．このとき $\{x\}, \{x, y\} \in (x', y')$ だから，外延性公理により $\{x\} = \{x'\}$ かつ $\{x, y\} = \{x', y'\}$ となる．さらに外延性公理から，$x = x'$ かつ $y = y'$ が導かれる． □

順序対 (x, y) について重要なのは，その定義ではなくて命題 2.1 である．(x, y) と (y, x) は一般に異なる集合であることが，これが順序対と呼ばれている理由であろう．

集合 X, Y が与えられたとき，その直積 (direct product, Cartesian product) を

$$X \times Y = \{(x, y) \in \mathscr{P}\mathscr{P}(X \cup Y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$$

と定義する．定義より明らかに $(x, y) \in X \times Y$ は $x \in X$ かつ $y \in Y$ と同値あり，さらに $(y, x) \in Y \times X$ とも同値である．しかし，一般には $(x, y) \neq (y, x)$ だから，$X \times Y$ と $Y \times X$ は同じ集合とはならない．これらが同じになるのは，$X = Y$ の場合のみである．

$X \times X$ の部分集合 Δ_X を

$$\Delta_X = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$$

によって定義し，対角集合 (diagonal set) とか，対角線集合とか呼ぶ．

命題 3.2. (i) $\bigcap \mathscr{A} \times \bigcap \mathscr{B} = \bigcap_{A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}} A \times B$.

(ii) $\bigcup \mathscr{A} \times \bigcup \mathscr{B} = \bigcup_{A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}} A \times B$.

証明. $(a, b) \in \bigcap \mathscr{A} \times \bigcap \mathscr{B}$ を書き下せば

$$(\forall A \in \mathscr{A}\ a \in A) \wedge (\forall B \in \mathscr{B}\ b\ inB)$$

となるが，これは

$$\forall A \in \mathscr{A}\ \forall B \in \mathscr{B}\ (a \in A \wedge b\ inB)$$

と同値である．この論理式は $(a, b) \in \bigcap_{A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}} A \times B$ が成り立つという意味だから，(i) が成立する．(ii) の証明も同様である． □

4　対応と写像

定義 4.1. X と Y を集合とする．部分集合 $R \subset X \times Y$ を，X から Y への対応という．対応 R に対して，

$$\operatorname{dom} R = \{x \in X \mid \exists y\ (x, y) \in R\}, \qquad \operatorname{ran} R = \{y \in Y \mid \exists x\ (x, y) \in R\}$$

と定め，$\operatorname{dom} R$ を R の定義域，$\operatorname{ran} R$ を R の値域と呼ぶ．

X から Y への対応とは，X のとある元に対して Y の元を対応させる規則のようなものである．ただし，一般の対応においてはどの $x \in X$ についてもそれに対応する Y の元があるとは限らないし，またその x に対応する Y の元が一つとも限らない．

対応 $R \subset X \times Y$ と $x \in X$ に対して，

$$R(x) = \{y \in Y \mid (x, y) \in R\}$$

と定義する．また，$A \subset X$ に対しては

$$R(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in X \ (x, y) \in R\}$$

と定める．$\mathrm{dom}\, R \subsetneq X$ なら，$R(x)$ は空集合の可能性もある．$A \subset X$ のとき，

$$R|_A = R{\restriction}A := \{(x, y) \in A \times Y \mid (x, y) \in R\}$$

は A から Y への対応を定める．これを対応 R の $A \subset X$ への制限と呼ぶ．制限について，$\mathrm{dom}\, R|_A = \mathrm{dom}\, R \cap A$ が成り立つ．

対応 R の逆対応 R^{-1} を

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in R\}$$

と定義する．このとき $\mathrm{dom}\, R^{-1} = \mathrm{ran}\, R$ および $\mathrm{ran}\, R^{-1} = \mathrm{dom}\, R$ が成り立つ．

二つの対応 $R \subset X \times Y$ と $S \subset Y \times Z$ が与えられたとき，その合成 $R \circ S$ を

$$R \circ S = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y \ (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R\}$$

と定義する．合成 $R \circ S$ について，$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$，$\mathrm{dom}\, R \circ S = R^{-1}(\mathrm{dom}\, S)$ および $\mathrm{ran}\, R \circ S = S(\mathrm{ran}\, R)$ が成り立つ．

定義 4.2. X，Y を集合とし，f を X から Y への対応する．$\mathrm{dom}\, f = X$ かつ，全ての $x \in X$ について $y, z \in f(x)$ なら $y = z$ が成り立つとき，f は X から Y への写像であるといい，$f\colon X \to Y$ や $X \xrightarrow{f} Y$ のように表す．

内包性公理より X から Y への写像全体からなる集合が存在することがわかるので，その集合を $\mathrm{Map}(X, Y)$ や Y^X で表すことにする．

$\emptyset$ から Y への写像は $\emptyset \subset \emptyset \times Y$ のみであり，これを空写像と呼ぶ．つまり，$\mathrm{Map}(\emptyset, Y) = \{\emptyset\}$ が成り立つ．また，空集合への唯一つの対応 $\emptyset \subset X \times \emptyset$ が写像となるための必要十分条件は，X が空集合であることである．

X が空でない集合で $f\colon X \to Y$ が写像なら，定義より $f(x)$ は 1 点集合となる．このとき，同じ記号 $f(x)$ で 1 点集合ではなくてその元を表すことにする．つまり，写像 $f\colon X \to Y$ に対して

$$y = f(x) \iff (x, y) \in f$$

と定義するということである．写像における元の対応関係を $x \mapsto f(x)$ で表すこともある．$f(x) \in Y$ を，f による x の像などと呼ぶ．f が写像の時，逆関係 f^{-1} に対する $f^{-1}(y)$ を y の逆像あるいはファイバーと呼ぶ．写像 $f\colon X \to Y$ に対しても，対応の場合と同様に $f(A)$，$f^{-1}(B)$ などの記法を用いる．写像 $f\colon X \to Y$ が与えられると，$\mathscr{P}X \ni A \mapsto f(A) \in \mathscr{P}Y$ により写像 $\mathscr{P}X \to \mathscr{P}Y$ が定まる．これを $f_*\colon \mathscr{P}X \to \mathscr{P}Y$ で表すことにする．また，$B \in \mathscr{P}Y$ に対して $f^{-1}(B) \in \mathscr{P}X$ を対応させることで写像 $\mathscr{P}Y \to \mathscr{P}X$ が定まるが，これを f^* で表すことにする．下付き添え字で $*$ が付いているのは，共変性という性質を表すためである．共変性というのは，写像 $f\colon X \to Y$ と $f_*\colon \mathscr{P}X \to \mathscr{P}Y$ が同じ向き（X から出て，Y に入る）であるということである．上付き添え字の $*$ は反変性という性質を表し，これは $f\colon X \to Y$ と $f^*\colon \mathscr{P}Y \to \mathscr{P}X$ が逆向きであるという意味を持っている[*2]．

[*2] より正確に言えば，$f\colon X \to Y$ に $f_*\colon \mathscr{P}X \to \mathscr{P}Y$ を対応させることで，集合と写像の圏からそれ自身への共変関手が定まり，$f^*\colon \mathscr{P}Y \to \mathscr{P}X$ を対応させることで反変関手が定まるということである．

命題 4.3. $f\colon X \to Y$ を写像とする．このとき，写像による像と逆像について以下の性質が成り立つ．

(i) $A \subset A' \subset X$ なら $f(A) \subset f(A')$ であり，$B \subset B' \subset Y$ なら $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$ が成り立つ．

(ii) $A \subset X$ と $B \subset Y$ について $f(A) \subset B \iff A \subset f^{-1}(B)$ が成り立つ．

(iii) $A \subset X$ と $B \subset Y$ について $A \subset f^{-1}(f(A))$ および $f(f^{-1}(B)) \subset B$ が成り立つ．

(iv) 任意の集合族 $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}Y$ について，

$$f^{-1}\left(\bigcup \mathscr{B}\right) = \bigcup_{B\in\mathscr{B}} f^{-1}(B), \qquad f^{-1}\left(\bigcap \mathscr{B}\right) = \bigcap_{B\in\mathscr{B}} f^{-1}(B)$$

が成り立つ．

(v) 任意の集合族 $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}X$ について，

$$f\left(\bigcup \mathscr{A}\right) = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} f(A), \qquad f\left(\bigcap \mathscr{A}\right) \subset \bigcap_{A\in\mathscr{A}} f(A)$$

が成り立つ．

(vi) $B, C \subset Y$ なら，$f^{-1}(B \setminus C) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(C)$．

命題 4.3 の (ii) は，写像 f_* と f^* が互いに順序随伴という関係性にあることを示している．(iv) と (vi) は，写像 f^* があらゆる集合演算を保存することを表している．

証明．(i) $y \in f(A)$ とする．$y = f(x)$ かつ $x \in A$ なら，$x \in A'$ でもあるから $y = f(x) \in f(A')$ となる．よって $f(A) \subset f(A')$ である．

また $x \in f^{-1}(B)$ なら，$f(x) \in B \subset B'$ でもあるから，$x \in f^{-1}(B')$ がわかる．ゆえに $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$ である．

(ii) $f(A) \subset B$ を仮定する．$x \in A$ なら $f(x) \in f(A)$ だから，仮定より $f(x) \in B$ となる．これは $x \in f^{-1}(B)$ が成り立つということであり，$A \subset f^{-1}(B)$ がわかる．

逆に $A \subset f^{-1}(B)$ を仮定する．$y \in f(A)$ とし，$x \in A$ を $f(x) = y$ となるように選ぶ．仮定より $x \in f^{-1}(B)$ であるから，$y = f(x) \in B$ が成り立つ．これより $f(A) \subset B$ がわかる．

(iii) 明らかに $f(A) \subset f(A)$ が成り立つから，(ii) より $A \subset f^{-1}(f(A))$ となる．同様に $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B)$ と (ii) より $f(f^{-1}(B)) \subset B$ が導かれる．

(iv) 合併と共通部分の定義および (i) より，任意の $B \in \mathscr{B}$ について

$$f^{-1}(B) \subset f^{-1}\left(\bigcup \mathscr{B}\right), \qquad f^{-1}\left(\bigcap \mathscr{B}\right) \subset f^{-1}(B)$$

が成り立つ．これより

$$\bigcup_{B\in\mathscr{B}} f^{-1}(B) \subset f^{-1}\left(\bigcup \mathscr{B}\right), \qquad f^{-1}\left(\bigcap \mathscr{B}\right) \subset \bigcap_{B\in\mathscr{B}} f^{-1}(B)$$

が従う．

次に逆向きの包含関係を示そう．$x \in f^{-1}\left(\bigcup \mathscr{B}\right)$ であるとする．定義よりこれは $f(x) \in \bigcup \mathscr{B}$ と同値である．$B \in \mathscr{B}$ かつ $f(x) \in B$ とすれば，$x \in f^{-1}(B)$ である．したがって

$$x \in \bigcup_{B\in\mathscr{B}} f^{-1}(B)$$

となり，

$$f^{-1}\left(\bigcup\mathscr{B}\right)\subset\bigcup_{B\in\mathscr{B}}f^{-1}(B)$$

がわかる．また

$$x\in\bigcap_{B\in\mathscr{B}}f^{-1}(B)$$

とすれば，任意の $B\in\mathscr{B}$ に対して $f(x)\in B$ が成り立つ．これより $f(x)\in\bigcap\mathscr{B}$ であり，$x\in f^{-1}\left(\bigcap\mathscr{B}\right)$ が従う．以上の議論により

$$\bigcap_{B\in\mathscr{B}}f^{-1}(B)\subset f^{-1}\left(\bigcap\mathscr{B}\right)$$

が示された．

(v) 合併と共通部分の定義，そして (i) より任意の $A\in\mathscr{A}$ について

$$f(A)\subset f\left(\bigcup\mathscr{A}\right),\qquad f\left(\bigcap\mathscr{A}\right)\subset f(A)$$

が成り立ち，これより

$$\bigcup_{A\in\mathscr{A}}f(A)\subset f\left(\bigcup\mathscr{A}\right),\qquad f\left(\bigcap\mathscr{A}\right)\subset\bigcap_{A\in\mathscr{A}}f(A)$$

が従う．

また $y\in f\left(\bigcup\mathscr{A}\right)$ とすれば，これはある $x\in\bigcup\mathscr{A}$ について $f(x)=y$ が成り立つことと同値である．$x\in A$ なら

$$y=f(x)\in f(A)\subset\bigcup_{A\in\mathscr{A}}f(A)$$

となり，

$$f\left(\bigcup\mathscr{A}\right)\subset\bigcup_{A\in\mathscr{A}}f(A)$$

がわかる．

(vi) $x\in f^{-1}(B\setminus C)$ は $f(x)\in B\setminus C$ と同値であり，さらに $f(x)\in B$ かつ $f(x)\notin C$ と同値である．これは $x\in f^{-1}(B)$ かつ $x\notin f^{-1}(C)$ とも言い換えられるので，$x\in f^{-1}(B)\setminus f^{-1}(C)$ とも同値である． □

部分集合 $\Delta_X\subset X\times X$ を対応と見たとき，これは特に写像となる．これを X 上の恒等写像と呼び，id_X で表す．恒等写像は，任意の写像 $f\colon X\to Y$ に対して $f\circ\mathrm{id}_X=f$ と満たし，また任意の写像 $g\colon Z\to X$ に対して $\mathrm{id}_X\circ g=g$ を満たす．

定義 4.4. $f\colon X\to Y$ を写像とする．写像 $g\colon Y\to X$ で $g\circ f=\mathrm{id}_X$ かつ $f\circ g=\mathrm{id}_Y$ なるものが存在するとき，f は可逆 (invertible) であるといい，g を f の逆写像 (inverse) と呼ぶ．

写像 $f\colon X\to Y$ が可逆であるとき，その逆写像は f の逆対応 f^{-1} に他ならない．X と Y の間に可逆写像が存在するとは，X と Y が集合としてほぼ同じ構造を持っているということである．

定義 4.5. $f\colon X\to Y$ を写像とする．

(i) $f(x)=f(y)$ なら $x=y$ が成り立つとき，f は単射 (injection) であるという．
(ii) $f(X)=Y$ のとき，f は全射 (surjection) であるという．
(iii) f が全射かつ単射であるとき，全単射 (bijection) であるという．

単射のことを1対1の写像，全射のことを上への写像などと呼ぶこともある．全射や単射の基本的な性質を調べよう．

命題 4.6. $f\colon X \to Y$ を写像とする．

(i) $g\colon Y \to X$ が写像で $g \circ f = \mathrm{id}_X$ を満たすならば，f は単射で g は全射である．

(ii) f について次の条件は同値である．

(a) f は単射である．

(b) 全ての $y \in Y$ と全ての $x, x' \in X$ について，$x, x' \in f^{-1}(y) \implies x = x'$ が成り立つ．

(c) $f_*\colon \mathscr{P}X \to \mathscr{P}Y$ は単射である．

(d) $f^*\colon \mathscr{P}Y \to \mathscr{P}X$ は全射である．

(e) 全ての $A \subset X$ について $f^{-1}(f(A)) = A$ が成り立つ．

(f) 任意の集合 Z について，写像

$$\begin{aligned} f_\sharp\colon \mathrm{Map}(Z, X) &\longrightarrow \mathrm{Map}(Z, Y) \\ g &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

は単射となる．

(g) X が空でなければ，写像 $r\colon Y \to X$ で $r \circ f = \mathrm{id}_X$ を満たすものが存在する．

(iii) f について次の条件は同値である．

(a) f は全射である．

(b) 任意の $y \in Y$ について，$f^{-1}(y)$ は空でない．

(c) $f^*\colon \mathscr{P}Y \to \mathscr{P}X$ は単射である．

(d) $f_*\colon \mathscr{P}X \to \mathscr{P}Y$ は全射である．

(e) 全ての $B \subset Y$ について $f(f^{-1}(B)) = B$ が成り立つ．

(f) 任意の集合 Z について，写像

$$\begin{aligned} f^\sharp\colon \mathrm{Map}(Y, Z) &\longrightarrow \mathrm{Map}(X, Z) \\ h &\longmapsto h \circ f \end{aligned}$$

は単射となる．

(g) 写像 $s\colon Y \to X$ で $f \circ s = \mathrm{id}_Y$ を満たすものが存在する．

証明．(i) $f(x) = f(x')$ ならば

$$x = \mathrm{id}_X(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = \mathrm{id}_X(x') = x'$$

が成り立つので，f は単射である．また

$$X = \mathrm{id}_X(X) = g(f(X)) \subset g(Y)$$

より $g(Y) = X$ となるので，g は全射である．

(ii) (b) は単射の定義の簡単な言い換えである．

(a) $\Longrightarrow$ (e) の証明． 命題 4.3 より $A \subset f^{-1}(f(A))$ は一般に成り立つので，f が単射のとき逆向きの包含関係が成り立つことを示せばよい．$x \in f^{-1}f(A)$ なら，$f(x) \in f(A)$ である．これより $f^{-1}(f(x)) \cap A \neq \emptyset$ で

あるが，f の単射性より $f^{-1}(f(x))$ は 1 点集合なので $f^{-1}f(x) \subset A$ となる．したがって $x \in f^{-1}f(x) \subset A$ となり $x \in A$ がわかる．

(e) $\Longrightarrow$ (c) および (e) $\Longrightarrow$ (d) の証明． (e) は $f^*f_* = \mathrm{id}_{\mathscr{P}X}$ が成り立つということなので，(i) より f^* は全射であり f_* は単射であることがわかる．

(c) $\Longrightarrow$ (a) の証明． f_* は単射であるから，$x \neq x'$ ならば

$$\{f(x)\} = f_*(\{x\}) \neq f_*(\{x'\}) = \{f(x')\}$$

である．これより $f(x) \neq f(x')$ となり，f は単射であることがわかる．

(d) $\Longrightarrow$ (a) の証明． $x \in X$ とする．f^* は全射であるから，$\{x\} = f^{-1}(B)$ を満たすような $B \in \mathscr{P}Y$ が存在する．これより $f^{-1}(f(x)) \subset f^{-1}(B) = \{x\}$ となり，$f^{-1}(f(x)) = \{x\}$ が成り立つ．これは f が単射だということである．

(a) $\Longrightarrow$ (g) の証明． X が空でないとき，$a \in X$ を適当に選び固定する．f は単射なので，$f^{-1}(y)$ は空集合かまたは 1 点集合である．$f^{-1}(y)$ が空の時，$r(y) = a$ と定め，$f^{-1}(y)$ が 1 点集合の時，$r(y) \in f^{-1}(y)$ となるように定める．このとき r は $r \circ f = \mathrm{id}_X$ を満たしている．

(g) $\Longrightarrow$ (a) の証明． (i) よりわかる．

(a) $\Longrightarrow$ (f) の証明． Z を集合とし，$f_\sharp$ を (f) のように定義する．$f_\sharp(g) = f_\sharp(g')$ なら，任意の $x \in X$ について $f(g(x)) = f(g'(x))$ が成り立つ．f は単射であるから，これより $g(x) = g'(x)$ が従う．x は任意の選んでいたから，これは $g = g'$ が成り立つということである．ゆえに $f_\sharp$ は単射である．

(f) $\Longrightarrow$ (a) の証明． (f) において $Z = \{0\}$ とし，Z から X への写像 $0 \mapsto x$ を g_x で表すことにする．$f(x) = f(x')$ なら $f \circ g_x = f \circ g_{x'}$ であり，$f_\sharp$ の単射性より $g_x = g_{x'}$ となる．これは $x = x'$ が成り立つということにほかならず，f は単射であることがわかる．

(iii) 条件 (b) は (a) の簡単な言い換えである．

(a) $\Longrightarrow$ (e) の証明． 命題 4.3 より一般に $f(f^{-1}(B)) \subset B$ が成り立つので，f が全射のとき逆向きの包含関係が成り立つことを示せばよい．$y \in B$ なら，y が全射であることから

$$f^{-1}(y) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(\{y\} \cap B) = f^{-1}(y) \neq \emptyset$$

となる．よって $y \in ff^{-1}(B)$ であり，$B \subset ff^{-1}(B)$ が成り立つことがわかる．

(e) $\Longrightarrow$ (c) および (e) $\Longrightarrow$ (d) の証明． (e) は $f_* \circ f^* = \mathrm{id}_{\mathscr{P}Y}$ が成り立つということなので，(i) より f_* は全射であり f^* は単射であることがわかる．

(c) $\Longrightarrow$ (a) の証明． f^* は単射であるから，$f^*(Y) = X = f^*(f(X))$ より $Y = f(X)$ がわかる．よって f は全射である．

(d) $\Longrightarrow$ (a) の証明． $y \in Y$ とすれば，f_* は全射であるから $\{y\} = f_*(A)$ を満たす $A \in \mathscr{P}X$ が存在する．これより $\{y\} = f(A) \subset f(X)$ となるが，y は任意に選んでいたから $Y \subset f(X)$ がわかる．

(a) $\Longrightarrow$ (g) の証明． Y が空でなければ，選択公理より各 $y \in Y$ に対して $s(y) \in f^{-1}(y)$ を満たすような写像 r が存在する．そのような写像を一つ固定する．このとき全ての $y \in Y$ について $(f \circ s)(y) = f(s(y)) = y$ が成り立つから，$f \circ s = \mathrm{id}_Y$ である．

(g) $\Longrightarrow$ (a) の証明． Y が空なら X も空なので，f は全射である．Y が空でない場合は，f が全射であることは (i) よりわかる．

(a) $\Longrightarrow$ (f) の証明． Z を集合とし，$f^\sharp$ を (f) のように定義する．$f^\sharp(h) = f^\sharp(h')$ なら，任意の $x \in X$ について $h(f(x)) = h'(f(x))$ が成り立つ．いま f は全射なので，これより任意の $y \in Y$ について $h(y) = h'(y)$

となることがわかる．すなわち $h = h'$ であり，$f^\sharp$ は単射である．

(f) $\Longrightarrow$ (a) の証明． 対偶を示す．a, b を $f(X)$ に含まれない点とし，$Z = f(X) \cup \{a, b\}$ と定義する．写像 $h_a, h_b \colon Y \to Z$ をそれぞれ

$$h_a(y) = \begin{cases} y & y \in f(X) \\ a & y \in Y \setminus f(X) \end{cases} \qquad h_b(y) = \begin{cases} y & y \in f(X) \\ b & y \in Y \setminus f(X) \end{cases}$$

と定めよう．このとき $f^\sharp(h_a) = f^\sharp(h_b)$ だが $h_a \neq h_b$ なので，$f^\sharp$ は単射ではない． □

いくつかの写像やその合成を扱うときには，それらの写像がどの集合からどの集合へ向かうものなのかが大変紛らわしい．そういったときは図式 (diagram) を考えると便利である．集合と写像に関する以下のような図を図式と呼ぶ．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \\ Z \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \\ C \arrow[r, "\psi"'] & G \arrow[u, "\chi"'] \end{tikzcd}$$

上の図式を見ると，元の写像 f, g, h と $\Phi, \varphi, \psi, \chi$ だけでなく，それらの合成 $h \circ g, \chi \circ \psi \circ \varphi$ などの定義域と行先の集合も一目瞭然である．図式中の二つの集合において，その一方からでてもう一方の集合に入る写像として考えられるもの全てが等しくなるとき，その図式は可換であるという．上の二つの図式が可換になるとは，それぞれ $f = h \circ g$ および $\Phi = \chi \circ \psi \circ \varphi$ が成り立つということである．図式が可換であることを，中心に丸まった矢印を描いて

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \\ Z \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

のように表すこともある．

5　関係および順序

定義 5.1. X を集合とする．X から自身への対応 $R \subset X \times X$ を，X 上の二項関係あるいは単に関係という．

X 上の関係 R に対して，$(x, y) \in R$ を xRy と書くことが多い．関係について，いくつか用語を準備しよう．

定義 5.2. X を集合とし，R を X 上の関係とする．

(i) $\Delta_X \subset R$ が成り立つとき，R は反射律を満たすとか，反射的であるという．
(ii) $\Delta_X \cap R = \emptyset$ のとき，R は非反射的であるという．
(iii) $R \circ R \subset R$ が成り立つとき，R は推移律を満たすとか，推移的であるという．
(iv) $R^{-1} = R$ であるとき，R は対称であるという．
(v) $R \cap R^{-1} \subset \Delta_X$ であるとき，R は反対称律を満たすという．
(vi) $R \cup R^{-1} \cup \Delta_X = X \times X$ が成り立つとき，R は三分律を満たすという．

上に列挙した条件のうちいくつかを満たす関係には，特別な名前が付けられている．

定義 5.3. (i) 反射的かつ推移的かつ対称な関係を同値関係 (equivalence relation) という．

(ii) 反射的かつ推移的な関係を前順序 (preorder) という．
(iii) 反射的かつ推移的かつ反対称的な関係を，半順序 (partial order) あるいは順序 (order) という．
(iv) 三分律を満たす順序を，全順序 (total order) あるいは線形順序 (linear order) という．
(v) 推移的かつ非反射的な関係を，狭義の順序 (strict order) という．
(vi) 三分律を満たす狭義の順序を，狭義の全順序という．

狭義の順序と半順序とまとめて順序という場合もあるので，注意が必要である．$\leq$ が X 上の半順序であるとき，$x < y$ を「$x \leq y$ かつ $x \neq y$」と定義すれば $<$ は X 上の狭義順序となる．逆に X 上の狭義順序 $<$ が与えられたときに $x \leq y$ を「$x < y$ または $x \leq y$」と定義すれば，$\leq$ は X 上の半順序となる．集合上に半順序あるいは狭義順序が与えられたときには，上記の対応付けによりそれぞれ狭義順序あるいは半順序も定義されていると考えることにする．

定義 5.4. X を集合とし，R を $\leq$ 上の半順序とする．また，A を X の部分集合とする．

(i) 全ての $a \in A$ に対して $a \leq x$ が成り立つとき，x は A の上界 (upper bound) であるという．A の上界 x が A の元でもあるとき，x を A の最大元 (maximum) と呼ぶ．全ての $a \in A$ に対して $x \leq a$ が成り立つとき，x は A の下界 (lower bound) であるという．A の下界 x が A の元でもあるとき，x を A の最小元 (minimum) と呼ぶ．
(ii) A の上界のうち最小のものが存在するとき，それを A の結び (join) あるいは上限 (supremum) と呼び $\bigvee A$ または $\sup A$ で表す．A の下界のうち最大のものが存在するとき，それを A の交わり (meet) あるいは下限 (infimum) と呼び $\bigwedge A$ または $\inf A$ で表す．
(iii) $x \in A$ であるとする．$x < a$ を満たす $a \in A$ は存在しないとき，x は A の極大元であるという．$x \in A$ であるとする．$a < x$ を満たす $a \in A$ は存在しないとき，x は A の極小元であるという．
(iv) $a \in A$ かつ $b \leq a$ なら $b \in A$ となるとき，A は下方集合 (lower set) であるという．$a \in A$ かつ $a \leq b$ なら $b \in A$ となるとき，A は上方集合 (upper set) であるという．
(v) ${\uparrow}A = \{x \in X \mid \exists a \in A\ a \leq x\}$ および ${\downarrow}A = \{x \in X \mid \exists a \in A\ x \leq a\}$ と定義する．特に $A = \{a\}$ の場合には，${\uparrow}\{a\}$ と ${\downarrow}\{a\}$ をそれぞれ ${\uparrow}a$ および ${\downarrow}a$ と表す．
(vi) ${\uparrow\uparrow}A = \{x \in X \mid \exists a \in A\ a \leq x\} = {\uparrow}A \setminus \{a\}$，${\downarrow\downarrow}A = {\downarrow}A \setminus \{a\}$，${\uparrow\uparrow}'a = {\uparrow}a \setminus \{a\}$，および ${\downarrow\downarrow}a = {\downarrow}a \setminus \{a\}$ と定義する．

${\uparrow}A$ は A を含む最小の上方集合であり，${\downarrow}A$ は A を含む最小の下方集合である．考えている全体集合を明示したいときは，${\uparrow}A$，${\downarrow}A$ をそれぞれ ${\uparrow}(A; X)$，${\downarrow}(A; X)$ などとも書くことにする．

定義 5.5. X と Y を半順序集合とし，$f\colon X \to Y$ を写像とする．任意の $a, b \in X$ について $a \leq b$ ならば $f(a) \leq f(b)$ が成り立つとき，f は順序を保存するとい．f が可逆で逆写像も順序を保存するとき，f は順序同型であるという．

6 順序数

本節では，順序数の概念を導入し，その基本的な性質を調べる．

定義 6.1. (i) X を集合とし R をその上の関係とする．全ての空でない部分集合 $A \subset X$ において，A が

R について極小元を（A の中に）持つとき，順序 R は X 上で整礎的であるという．

(ii) X 上の整礎的な狭義全順序を，整列順序という．

(iii) X 上の整列順序が存在するとき，X は整列可能であるという．

X 上の整列順序とは，つまり任意の部分集合 $A \subset X$ が最小元を持つような順序のことである．R を X 上の整列順序とすれば，$A \subset X$ への R の制限はまた整列順序となる．

定義 6.2. (i) z を集合とする．全ての x, y について $x \in y$ かつ $y \in z$ なら $x \in z$ が成り立つとき，z は推移的集合であるという．

(ii) $\in$ によって整列順序付けされた推移的集合を，順序数という．

z が推移的集合であるとは「全ての y について，$y \in z$ なら $y \subset z$ が成り立つ」と述べても同じことである．無限公理を述べる際に用いた記号 $S(x)$ を用いれば，z が推移的であるとは「全ての $y \in z$ について $S(y) \subset z$ が成り立つ」とも言い換えられる．

順序数を表すのにはギリシャ文字を使うことが多い．順序数 α，β に対して，$\alpha < \beta$ を $\alpha \in \beta$ で定義することにする．また，「$\alpha < \beta$ または $\alpha = \beta$」が成り立つことを $\alpha \leq \beta$ と表記する．

ON を「x は順序数である」という論理式から定まるクラスとする．つまり，$x \in ON$ は「x は順序数である」という論理式の略記であるということである．後で説明するが，ON は真のクラスである．つまり，順序数全体の集合なるものは存在しない．また，部分集合の記号の類推から $x \subset ON$ を「x は集合であり，全ての y について $y \in x$ なら $y \in ON$ が成り立つ」の略記とする．つまり，$x \subset ON$ は「x は順序数からなる集合である」という意味である．

補題 6.3. (i) α と β が順序数なら，$\alpha \cap \beta$ も順序数である．

(ii) $x \in \alpha$ かつ $\alpha \in ON$ なら，$x \in ON$ が成り立つ．

(iii) α, β が順序数で $\alpha \subset \beta$ なら，$\alpha < \beta$ または $\alpha = \beta$ が成り立つ．

補題 6.3 (ii) は，すなわち順序数の元はまた順序数だということである．また，先ほど導入した記号を用いて (iii) を書き換えると，「$\alpha \subset \beta$ なら $\alpha \leq \beta$」ということになる．また，推移性より $\alpha < \beta$ なら $\alpha \subset \beta$ となるので，$\alpha \leq \beta$ ならば $\alpha \subset \beta$ も成り立つ．すなわち，$\alpha \subset \beta$ は $\alpha \leq \beta$ と同値だということになる．

証明. (i) $\alpha \cap \beta \subset \alpha$ は $\in$ の制限によりまた整列集合となるから，推移的であることを示せばよい．$x \in y$ かつ $y \in \alpha \cap \beta$ であると仮定する．α は推移的で $y \in \alpha \cap \beta \subset \alpha$ であるから，このとき $y \in \alpha$ となる．同様に $y \in \beta$ もわかるから，$y \in \alpha \cap \beta$ である．したがって $\alpha \cap \beta$ は推移的集合である．

(ii) $x \in \alpha$ かつ $\alpha \in ON$ であるとする．α は推移的集合なので，$x \subset \alpha$ が成り立つ．したがって x は α の順序 $\in$ の制限により整列順序付けられることがわかる．$z \in x$ かつ $y \in z$ であるとしよう．α は推移的だからこのとき $y, z \in \alpha$ となり，$\in$ が α 上の順序（よって推移的）であることにより $y \in x$ がわかる．すなわち，x も推移的集合である．

(iii) $\alpha \subset \beta$ かつ $\alpha \neq \beta$ が成り立つとする．β は整列順序付けられているから，$\in$ に関する $\beta \setminus \alpha \subset \beta$ の最小元 $\gamma \in \beta \setminus \alpha$ が存在する．このとき $\gamma = \alpha$ が成り立つことを示そう．γ は $\beta \setminus \alpha$ の最小元だから，$\xi \in \gamma$ なら $\xi \in \alpha$ である．よって $\gamma \subset \alpha$ が成り立つ．$\xi \in \alpha$ と仮定すれば，$\in$ が β 上の狭義全順序であることから $\xi \in \gamma$ または $\xi = \gamma$ または $\gamma \in \xi$ が成り立つ．$\xi = \gamma$ なら $\xi \in \beta \setminus \alpha$ かつ $\xi \in \alpha$ となり矛盾である．$\gamma \in \xi$ なら推移性より $\gamma \in \alpha$ となり，やはり矛盾である．ゆえに $\xi \in \gamma$ となり，$\alpha \subset \gamma$ がわかる．$\square$

定理 6.4. 順序数について，以下が成り立つ．

(i) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in ON[\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \implies \alpha < \gamma]$．（推移性）

(ii) $\forall \alpha \in ON \ \neg(\alpha < \alpha)$．（非反射性）

(iii) $\forall \alpha, \beta \in ON \ [\alpha < \beta \vee \beta < \alpha \vee \alpha = \beta]$．（三分律）

(iv) $X \subset ON$ が空でなければ，X は $<$ に関する最小元を持つ．

命題 6.2 を標語的に言うと，ON は $\in$ について整列順序付けられているということである．

証明．(i) は γ が推移的集合であるという主張そのものである．

(ii) は基礎の公理よりわかる．あるいは，次のようにもわかる．$\in$ は α 上の狭義順序だから，全ての $x \in \alpha$ について $x \notin x$ が成り立つ．$\alpha \in \alpha$ ならこれに矛盾するので，$\alpha \notin \alpha$ である．

(iii) $\alpha, \beta \in ON$ とする．補題 6.3 (i) より $\alpha \cap \beta$ は順序数であり，$\alpha \cap \beta \subset \alpha$ かつ $\alpha \cap \beta \subset \beta$ だから補題 6.3 (ii) より「$\alpha \cap \beta = \alpha$ または $\alpha \cap \beta \in \alpha$」かつ「$\alpha \cap \beta = \beta$ または $\alpha \cap \beta \in \beta$」が成り立つ．$\alpha \cap \beta = \alpha$ なら，$\beta \subset \alpha$ である．したがって補題 6.3 (ii) より $\beta \in \alpha$ または $\beta = \alpha$ となる．$\alpha \cap \beta = \beta$ なら，同様にして $\alpha \in \beta$ または $\alpha = \beta$ となる．$\alpha \cap \beta \in \alpha$ かつ $\alpha \cap \beta \in \beta$ なら，$\alpha \cap \beta \in \alpha \cap \beta$ となり矛盾である．

(iv) $X \subset ON$ は空でないとする．$\alpha \in X$ とすれば，α は $\in$ に関する最小元 β を持つ．$\gamma \in X$ を任意に選ぶと，(iii) より $\gamma \in \alpha$ または $\gamma = \alpha$ または $\alpha \in \gamma$ である．$\gamma \in \alpha$ なら β の最小性より $\beta = \gamma$ または $\beta \in \gamma$ である．$\gamma = \alpha$ なら $\beta \in \alpha = \gamma$ である．$\alpha \in \gamma$ なら，$\beta \in \alpha \in \gamma$ だから推移性から $\beta \in \gamma$ である．いずれにせよ $\beta \in \gamma$ または $\beta = \gamma$ が成り立つので，β は X における最小元であることがわかる．□

とりあえず順序数なるものの性質を調べてみたが，まだ順序数なるものが存在するかどうかについては述べていなかった．

命題 6.5. (i) $\emptyset$ は順序数である．

(ii) α が順序数なら，$S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ は順序数である．さらに，$\beta \in S(\alpha)$ は $\beta \leq \alpha$ と同値である．

証明．(i) は定義よりすぐにわかる．

(ii) $\in$ が $S(\alpha) \subset ON$ 上の狭義全順序であることは定理 6.4 の (i)–(iii) からわかる．$\in$ が $S(\alpha)$ 上の整礎的であることは，定理 6.4 の (iv) からわかる．

次に $S(\alpha)$ が $\beta < \gamma$ かつ $\gamma \in S(\alpha)$ であると仮定する．このとき $\gamma \in \alpha$ または $\gamma = \alpha$ が成り立つ．$\gamma \in \alpha$ なら推移性より $\beta \in \alpha$ となり，定義より $\alpha \subset S(\alpha)$ だから $\beta \in S(\alpha)$ がわかる．$\gamma = \alpha$ なら $\beta \in \gamma = \alpha \subset S(\alpha)$ となり，やはり $\beta \in S(\alpha)$ がわかる．これにより $S(\alpha)$ は推移的集合であり，順序数であることが示された．

$\beta \in S(\alpha)$ は「$\beta \in \alpha$ または $\beta = \alpha$」と同値であり，推移性よりこれは「$\beta \subset \alpha$」とも同値である．したがって $\beta \in S(\alpha)$ は $\beta \leq \alpha$ と同値となる．□

命題 6.5 より，$\emptyset$，$S(\emptyset)$，$S(S(\emptyset))$，$S(S(S(\emptyset))), \ldots$ はどれも順序数であることがわかる．

定義 6.6. (i) 順序数 $\emptyset$ を 0 で表す．

(ii) ある順序数 α によって $\beta = S(\alpha)$ と表される順序数 β を，後続型順序数という．

(iii) 0 でも後続型順序数でもない順序数を，極限順序数という．

(iv) $\alpha \leq \beta$ なる全ての順序数 α は 0 か後続型順序数であるとき，β を有限順序数あるいは自然数という．

n が自然数なら，$S(n)$ も自然数である．また n が自然数で $k \leq n$ なら，k もまた自然数である．順序数

$S(\alpha)$ のことを，$\alpha+1$ と表すこともある．

我々は少なくとも一つの順序数 0 が存在すること知っているから，順序数全体のクラス ON は空ではない．しかし，残念ながらこれは集合でもない．

命題 6.7. ON は真のクラスである．

証明. ON が集合であるとすると，定理 6.4 と補題 6.3 (ii) より ON 自身が順序数となる．したがって $ON \in ON$ となるが，これは矛盾である． □

ラフな言い方をすると，ON が真のクラスであるとは順序数が途方もなく沢山あるということである．しかし，実際のところどのくらいたくさんあるのだろうか．また，その順序数のうち構成的に得られるものはどのくらいあるのだろうか．我々が今現在知っている順序数は，0 とそこから後続型順序数 $S(\alpha)$ を取る操作を続けて得られる順序数だけである．例えば，自然数 n が与えられたときに $S(n)$ はまた自然数となるけれども，全ての自然数は 0 から初めて後続型順序数を取る操作によって得られるだろうか．仮にそうであったとして，自然数でない順序数はあるのだろうか．極限順序数なるものは存在するのだろうか．次はそういった問題について調べていこう．

定理 6.8 (帰納法の原理)**.** X を集合とする．$0 \in X$ かつ全ての $x \in X$ について $S(x) \in X$ が成り立つなら，X は全ての自然数を元に持つ．

証明. 自然数 n は $n \notin X$ を満たすとし，$Y = S(n) \setminus X$ と定義する．Y は順序数からなる空でない集合（$n \in Y$ だから）なので，最小元 $m \leq n$ を持つ．$m \in S(n)$ は自然数だから，0 か後続型順序数である．仮定より $0 \in X$ だから $m \neq 0$ であり，ある自然数 i で $S(i) = m$ を満たすものが存在する．m は Y の最小元で $i < m$ だから，$i \in X$ が成り立つ．ところがこのとき仮定より $m = S(i) \in X$ となり矛盾である． □

定理 6.8 より，0 から後続者 $S(\cdot)$ を取る操作を（ひょっとしたら無数に）繰り返すことによって，全ての自然数を得られることがわかる．いや，ちょっと待った．まだそこまでは分からないのである．確かに $0 \in X$ かつ全ての $x \in X$ について $S(x) \in X$ を満たすような集合 X があればそれは全ての自然数を含んでいるけれども，ひょっとしたらそのような集合は存在しないかも知れない．ここで，ZF 公理系のうち無限公理と呼ばれていたものを思い出して欲しい．無限公理とは，まさに定理 6.8 の仮定を満たすような集合の存在を仮定していたのである．そのような集合 X を用いて，$\omega = \{x \in X \mid x \in ON\}$ と定義する．

定義 6.9. 自然数全体の集合を ω または $\mathbb{N}$ で表す．

我々が次にしたいことは，自然数よりも大きい順序数を作ることである．そのためには，与えられた順序数の集合から順序数を作る方法を考えよう．

命題 6.10. $X \subset ON$ なら，$\bigcup X \in ON$ が成り立つ．

証明. $\bigcup X \subset ON$ は $\in$ により整列順序が入るから，$\bigcup X$ が推移的集合であることを示せばよい．和集合 $\bigcup X$ の定義より $x \in y$ かつ $y \in X$ なら，$x \in \bigcup X$ が成り立つ．よって $\bigcup X$ は推移的集合である． □

順序数の推移性より，$X \subset ON$ なら $\bigcup X \subset X$ が成り立つ．逆に $X \subset \bigcup X$ も成り立つなら，命題 6.10 より X は順序数となる．

命題 6.11. ω は最小の極限順序数である．

証明. $n \in \omega$ ならば $n \in S(n) \in \omega$ なので，$n \in \bigcup\omega$ が成り立つ．よって $\omega = \bigcup\omega$ となり，命題 6.10 より ω は順序数である．$n < \omega$ は極限順序数ではないので，ω は極小な極限順序数であることが分かる．全ての順序数は $\leq$ によって比較可能だから，これにより ω は最小の極限順序数となる． □

7 再帰的定義と超限帰納法

定理 6.8 で示したところによれば，全ての自然数について性質 $P(n)$ が成り立つことを示すには，$P(0)$ が成り立つことを示し，さらに $P(n)$ が成り立つなら $P(S(n))$ が成り立つことを示せばよいのであった．こういった証明方法は数学的帰納法と呼ばれる．この証明方法と類似の手法は，順序数より一般の順序数に対しても存在する．それを超限帰納法 (transfinite induction) と呼ぶ．

定理 7.1 (超限帰納法の原理)**.** (i) φ を論理式とする．$\varphi(\alpha)$ を満たす順序数 α が存在するなら，$\varphi(\xi)$ を満たす最小の順序数 ξ が存在する．

(ii) ψ を論理式とする．

（a）$\psi(0)$ が成り立つ．

（b）全ての $\xi < \alpha$ について $\psi(\xi)$ が成り立つなら，$\psi(\alpha)$ も成り立つ．

が成り立つなら、全ての順序数 α について $\psi(\alpha)$ が成り立つ．

証明. (i) α 自身が最小元であれば，それで完結している．そうでない場合には，$X = \{\xi < \alpha \mid \psi(\xi)\}$ と定義すれば，X の最小元が $\psi(\xi)$ を満たす最小の順序数である．

(ii) ある順序数 α について $\psi(\alpha)$ が成り立たないとする．$\varphi = \neg\psi$ とすれば，このとき (i) より $\varphi(\xi)$ を満たす最小の順序数 ξ が存在する．$\xi = 0$ なら，これは $\varphi(0)$ すなわち $\neg\psi(0)$ となり (i) に反する．$0 < \xi$ なら，全ての $\eta < \xi$ に対して $\psi(\eta)$ が成り立つけれども仮定より $\psi(\xi)$ は成り立たないので，(ii) に反する． □

ラフな言い方をすれば，帰納法とは「最初から数え上げていけば全ての順序数に対して主張が成立することがわかる」という原理である．ある意味，順序数とは「数え上げていけば分かる」構造を ω よりも一般化したものだと言えるかも知れない．

さっそく超限帰納法を用いてみよう．

命題 7.2. $\alpha, \beta \in ON$ とする．$f\colon \alpha \to \beta$ が順序同型なら，$\alpha = \beta$ が成り立ち，f は恒等写像である．

証明. 任意の ξ に対して $f(\xi) = \xi$ が成り立つことを示そう．f は順序同型だから，任意の $\xi \in \alpha$ に対して

$$f(\xi) = \downarrow\downarrow f(\xi) = f(\downarrow\downarrow \xi) = \{f(\mu) \mid \mu \in \xi\} \tag{1}$$

が成り立っていることに注意しておく[*3]．f が順序同型だから，明らかに $f(0) = 0$ が成り立つ．また全ての $\mu < \xi \in \alpha$ について $f(\mu) = \mu$ が成り立つなら，(1) により

$$f(\xi) = \{f(\mu) \mid \mu \in \xi\} = \{\mu \mid \mu \in \xi\} = \xi$$

が成り立つ．したがって超限帰納法により，全ての $\xi \in \alpha$ について $f(\xi) = \xi$ がなりたつことがわかる．f は全単射だから，これより $f = \mathrm{id}_\alpha$ となる． □

[*3] つまり，写像による ξ の値 $f(\xi)$ と，部分集合 ξ の像の意味での $f(\xi)$ が一致するということである．

命題 7.3. X を集合とし，R を X 上の整列順序とする．このとき，順序数 α で (X,R) と順序同型になるようなものがただ一つ存在する．

証明．一意性は命題 7.2 よりわかる．順序同型写像を構成しよう．

$$G = \{a \in X \mid {\downarrow\downarrow} a \text{ はある順序数と順序同型 }\}$$

と定義する．各 $a \in G$ について ${\downarrow\downarrow} a$ と順序同型なら順序数（命題 7.2 よりこれは一意的）を $f(a)$ と表し，その同型写像を $h_a\colon {\downarrow\downarrow} a \to f(a)$ と表すことにする．命題 7.2 によりこの同型写像もまた一意的であることに注意しよう．命題 6.10 より $\alpha := \bigcup_{a\in G} f(a)$ は順序数となるので，写像 $f\colon G \to \alpha$ を $f|_{\downarrow\downarrow a} = h_a$ となるように定義する．これが well-defined であることもまた命題 7.2 よりわかる．このとき f は狭義順序 $<$ を保存する全射なので，順序同型写像であることがわかる．よって $G = X$ が成り立つことを示せばよい．$G \subsetneq X$ であると仮定する．X には整列順序が入っているから，このとき $X \setminus G$ の最小元 a が存在する．このとき $G = {\downarrow\downarrow} a$ が成立し，${\downarrow\downarrow} a$ は f により α と順序同型となるから $a \in G$ である．これは矛盾である． □

定義 7.4. R が X 上の整列順序であるとき，(X,R) と順序同型になるような唯一つの順序数 $(\alpha,\in)$ を $\mathrm{type}(X,R)$ で表す．

順序 R や，あるいは考えている集合 X が明らかな場合には，単に $\mathrm{type}(X)$ や $\mathrm{type}(R)$ と書くこともある．

次は，順序数を用いた再帰的定義について述べよう．再帰は英語で recursion で，帰納は induction である．帰納法は既に述べたように証明の方法であり，これから扱う再帰は写像の定義の方法である．どちらも「最初から数え上げていく」という思想は同じであるが，異なる概念であるため混同に注意されたい．（と Kunnen は言っているが，これについては諸説あるようだ．筆者は Kunnen からの受け売りでこう言っておく．）

定理 7.5. Φ は論理式で $\forall x \exists ! y \Phi(x,y)$ を満たすようなものとする．このとき，論理式 φ を以下を満たすように定めることができる．

(i) $\forall x \exists ! y \varphi(x,y)$．このとき置換公理 u から $\xi \in ON$ に対して ξ 上の関数 $f\colon \xi \to \operatorname{ran} f$ で $\forall x \in \xi \varphi(x, f(x))$ を満たすものがただ一つ存在するので，それを F_ξ で表す．

(ii) $\forall \xi \in ON \forall y \forall z [\varphi(\xi, y) \wedge \Phi(F_\xi, z) \implies y = z]$．

定理 7.5 をラフにいうと，クラス「関数」$G\colon \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ が存在すれば，クラス「関数」$F\colon ON \to \mathfrak{U}$ で $G(F|_\xi) = F(\xi)$ を満たすものが存在するということである．一階の論理を用いる我々の立場では論理式 Φ や φ は量化できないから，定理 7.5 は存在形の定理というよりは，Φ から具体的に φ を作ったとき，それが所望の条件を満たすという定理だと考えるべきである．

証明．**Step 1 : φ の定義．** 順序数 δ に対して，「h は写像で，$\operatorname{dom} h = \delta$ かつ全ての $\xi < \delta$ について $\Phi(h|_\xi, h(\xi))$ となる」という論理式を $\mathrm{App}(\delta, h)$ と書くことにする．もう少し正確に書くと，$\mathrm{App}(\delta, h)$ とは以下のような論理式のことだと言っても良い．

$$[\forall \xi < \delta \exists ! y [(\delta, y) \in h]] \wedge \forall \xi < \delta \big[[\varphi(\xi, z) \wedge \{\forall \eta \forall y [(\eta, y) \in f \iff (\eta < \xi \wedge (\eta, y) \in h)]\} \implies \Phi(f, z)\big]$$

$\mathrm{App}(\delta, h)$ は，これから定義するであろう関数の「素」のようなもので，その δ への制限を表していると考えられる．この論理式 $\mathrm{App}(\delta, h)$ を用いて，

$$\varphi(x,y) \iff \big(x \notin ON \wedge y = 0\big) \vee \big[x \in ON \wedge \exists \delta > x \exists h \big(\mathrm{App}(\delta, h) \wedge h(x) = y\big)\big]$$

と定義する．

Step 2： $\mathrm{App}(\delta,h)$ **の存在と整合性．** $\mathrm{App}(\delta,h)$ の整合性とは，

$$\delta \le \delta' \wedge \mathrm{App}(\delta,h) \wedge \mathrm{App}(\delta' h') \implies h = h'|_\delta$$

が成り立つということである．これを示すために，$\delta \le \delta' \wedge \mathrm{App}(\delta,h) \wedge \mathrm{App}(\delta' h')$ と仮定する．このとき全ての $\xi < \delta$ について $h(\xi) = h'(\xi)$ が成り立つことを，超限帰納法で示そう．$h(\xi) \neq h'(\xi)$ なる $\xi < \delta$ が存在したとして，そのような最小の順序数を η をおく．η の最小性より全ての $\beta < \eta$ について $h(\beta) = h'(\beta)$ となり，よって $h|_\eta = h'|_\eta$ がわかる．$\eta < \delta \le \delta'$ だから，仮定「$\mathrm{App}(\delta,h)$ かつ $\mathrm{App}(\delta',h')$」により $\Phi(h_\eta, h(\eta))$ かつ $\Phi(h'_\eta, h'(\eta))$ だから，$h|_\eta = h'|_\eta$ と合わせて $h(\eta) = h'(\eta)$ を得る．これは η の定義に矛盾する．よって全ての $\xi < \delta$ について $h(\xi) = h'(\xi)$ が成り立つ．

次に全ての順序数 δ について $\mathrm{App}(\delta,h)$ なる h が存在することを示そう．$\mathrm{App}(\delta,h)$ を満たすような写像 h が存在しないような δ があるとして，そのような最小の順序数 α を考える．α は最小であるから，$\beta < \alpha$ の時は $\mathrm{App}(\beta,h_\beta)$ なる h_β が存在する．先ほどの (7.5) により，このような h_β は一意的である．α は 0 か後続型順序数か極限順序数であるかのいずれかなので，場合分けをして証明しよう．

Case 1： $\alpha = 0$ **の場合．** $\mathrm{App}(0,\emptyset)$ は常に成り立つから，これは α の定義に反する．

Case 2： α **が後続型順序数の場合．** $\alpha = \beta + 1$ とする．このとき $f = h_\beta \cup \{(\beta,z) \mid \Phi(h_\beta,z)\}$ と定義する．Φ の満たす条件より，この f は α 上の写像として well-defined であり，さらに $f|_\beta = h_\beta$ を満たしている．f は定義より $\mathrm{App}(\alpha,f)$ を満たすので，これは α の定義に反する．

Case 3： α **が極限順序数の場合．** $f = \bigcup\{h_\beta \mid \beta < \alpha\}$ と定義する．これにより α 上の関数 f が定まることは，(7.5) よりわかる．また全ての $\beta < \alpha$ について $f|_\beta = h_\beta$ であることと (7.5) から，全ての $\beta < \alpha$ について $\Phi(f|_\beta, f(\beta)$ が成り立つことがわかる．ゆえに $\mathrm{App}(\alpha,f)$ となるが，これも α の定義に反する．

Step 3：(i) の証明． $x \in ON$ なら Step 2 より $\mathrm{App}(x+1,h)$ なる h が存在するので，$\forall x \exists y \varphi(x,y)$ である．$\varphi(x,y)$ かつ $\varphi(x,z)$ なら，(7.5) より $y = z$ となるので，これより $\forall x \exists! y \varphi(x,y)$ がわかる．

Step 4：(ii) の証明． (i) より，$\xi \in ON$ と $\delta > \xi$ を任意に固定し，F_ξ を $\mathrm{dom}\, F_\xi$ かつ $\forall \eta < \xi\ \varphi(\eta, F_\xi(\eta))$ を満たすように，F_δ を $\mathrm{dom}\, F_\xi$ かつ $\forall \eta < \delta\ \varphi(\eta, F_\delta(\eta))$ を満たすように，それぞれ選ぶ．さらに $\mathrm{App}(\delta,h)$ であるとする．このとき F の定義と (7.5) より全ての $\eta < \xi$ について $F_\delta(\eta) = F_\xi(\eta) = h(\eta)$ となることがわかり，$F_\xi = F_\delta|_\xi = h|_\xi$ である．$\varphi(\xi,y)$ なら (i) と F_δ の定義より $y = F_\delta(\xi) = h(\xi)$ が成立する．また $\Phi(F_\xi,z)$ なら $F_\xi = h|_\xi$，$\Phi(h|_\xi, h(\xi))$ と Φ の満たす仮定より $z = h(\xi)$ となるので，$y = z$ が成り立つ．したがって，$\forall y \forall z\ [\varphi(\xi,y) \wedge \Phi(F_\xi,z) \implies y = z]$ となることが示された．さらに ξ は任意に固定したものだったから，(ii) が成り立つことがわかる．□

例 7.6 (関数を用いた点列の定義)**.** X を空でない集合とする．このとき，再帰を用いて一定の規則に従って点列 $\mathbb{N} \to X$ を定義してみよう．$a \in X$ とする．$h\colon X \to X$ を写像とし，写像 $G\colon \bigcup_{n<\omega} X^n \to X$ を，$G(\emptyset) = a$ かつ $G(x) = h(x(n-1))$（$x \in X^n$ かつ $n > 1$ の時）と定義する．さらに，論理式 Φ を

$$\Phi(x,y) = \left[x \notin \bigcup_{n<\omega} X^n \wedge y = 0\right] \vee \left[x \in \bigcup_{n<\omega} X^n \wedge y \in X \wedge (x,y) \in G\right]$$

と定義する．この論理式は定理 7.5 の仮定を満たすので，写像 $F\colon \omega \to X$ で全ての $n < \omega$ に対して $\Phi(F|_n, F(n))$ を満たすものが存在する．$n = 0$ なら $F|_\emptyset = \emptyset$ なので，Φ の定義より $F(0) = G(\emptyset) = a$ が成り立つ．また，$0 < n < \omega$ なら Φ の定義より $F(n) = G(F|_n) = F(n-1)$ が成り立つ．すなわち，$F\colon \omega \to X$ は $F(0) = 0$ かつ $F(n+1) = F(n)$ を満たす点列である．

8　基数

本節では，集合の大きさを比較するための概念を導入しよう．

定義 8.1. X と Y を集合とする．

(i) 単射 $X \to Y$ が存在するとき，$X \precsim Y$ と書き，X の濃度は Y より小さい，あるいは Y の濃度は X より大きいという．

(ii) 全単射 $X \to Y$ が存在するとき，$X \approx Y$ と書き，X と Y の濃度は等しいという．

(iii) $X \precsim Y$ だが $X \approx Y$ ではないとき，$X \prec Y$ と書き X の濃度は Y より真に小さいという．

補題 8.2. $A \subset X$ かつ $X \precsim A$ なら，$X \approx A$ である．

証明．$f\colon X \to A$ を単射とし，写像の列 $(f^n\colon X \to X)_{n<\omega}$ を再帰により

$$f^0 = \mathrm{id}_X, \qquad f^{n+1} = f \circ f^n$$

と定義する．これにより以下のような集合列

$$f^0(X) = X \supset A = f^0(A) \supset f^1(X) \supset f^1(A) \supset f^2(X) \supset f^2(A) \supset f^3(X) \supset \cdots$$

が構成される．$n \in \omega$ に対して $B^n = f^n(X) \setminus f^n(A)$ および $C^n = f^n(A) \setminus f^{n+1}(X)$ と定義すれば，$f|_{B_n}\colon B_n \to B_{n+1}$ と $f|_{C_n}\colon C_n \to C_{n+1}$ はどれも全単射である．ここで，$D = \bigcap_{n<\omega} B_n = \bigcap_{n<\omega} C_n$ と定義すれば，

$$X = D \cup \left(\bigcup_{n<\omega} B_n\right) \cup \left(\bigcup_{n<\omega} C_n\right), \qquad A = D \cup \left(\bigcup_{1<n<\omega} B_n\right) \cup \left(\bigcup_{n<\omega} C_n\right)$$

が成り立っている．写像 g を

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \bigcup_{n<\omega} B_n \\ x & x \in D \cup \left(\bigcup_{n<\omega} C_n\right) \end{cases}$$

と定義すれば，これは X から A への全単射である．□

定理 8.3 (Cantor-Bernstein)**.** $X \precsim Y$ かつ $Y \precsim X$ なら，$X \approx Y$ が成り立つ．

証明．$f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to X$ を単射とすれば，$g \circ f\colon X \to g(Y)$ は単射であり，$g(Y) \subset X$ だから補題 8.2 により全単射 $h\colon g(Y) \to X$ が存在する．このとき $h \circ g\colon Y \to X$ は全単射なので，$X \precsim Y$ が成り立つ．□

定理 8.3 より，（インフォーマルな言い方ではあるが）$\precsim$ はクラス $\mathfrak{U}$ 上の「半順序」を定めるということがわかる．実はこれは「全順序」にもなっているのだが，それについては ZF のみでなく選択公理 (AC) が必要となる．

定義 8.4. (i) $X \precsim \omega$ が成り立つとき，X は可算であるという．

(ii) X が可算ではないとき，非可算であるという．

(iii) ある $n \in \omega$ について $X \precsim n$ となるとき，X は有限であるという．
(iv) X が有限ではないとき，X は無限であるという．
(v) X が可算かつ無限であるとき，可算無限であるという．

順序数を用いて基数の概念を導入しよう．

定義 8.5. 順序数 α で全ての $\xi < \alpha$ について $\xi \prec \alpha$ を満たすものを，基数という．

定理 8.6. ZFC の下で，全ての集合は整列可能である．

この定理の証明は次の節で行う．

命題 8.7. X を集合とする．$X \approx \alpha$ となる最小の順序数は基数である．

証明. α を $X \approx \alpha$ を満たす最小の順序数とする．このような順序数の存在は定理 8.6 と超限帰納法よりわかる．$\xi < \alpha$ なら $\xi \subset \alpha$ だから $\xi \precsim \alpha$ である．また α の定義より $\xi \not\approx A \approx \alpha$ なので，$\xi \not\approx \alpha$ も成り立つ．よって $\xi \prec \alpha$ であり，α は基数であることがわかる． □

定義 8.8. 集合 X に対して，$X \approx \alpha$ となる最小の順序数を $|X|$ あるいは $\mathrm{Card}(X)$ で表し，X の濃度と呼ぶ．

既に定義した「X と Y は同じ濃度を持つ」,「X の濃度は Y より小さい」という概念はそれぞれ $|X| = |Y|$ および $|X| \leq |Y|$ と同値であるから，これはこれまで用いてきた用語法とも整合的である．

集合 X が与えられた時に，それより真に大きい濃度をもつ集合を作ることは可能だろうか？それは冪集合を取る操作によって実現される．

補題 8.9 (対角線論法)**.** $f\colon X \to Y$ を写像とし，$D = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ と定義する．このとき，$D \notin \mathrm{ran}(f)$ が成り立つ．

証明. $D \in \mathrm{ran}(f)$ と仮定し，$D = f(a)$ であるとする．このとき $a \in D$ は $a \in f(a)$ と同値になり矛盾である． □

命題 8.10. 任意の集合 X について，$X \prec \mathscr{P}X$ が成り立つ．

証明. $X \ni x \mapsto \{x\} \in \mathscr{P}X$ は単射なので，$X \precsim \mathscr{P}X$ が成り立つ．いかなる写像 $f\colon X \to \mathscr{P}X$ に対しても $D = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \subset X$ は $D \notin \mathrm{ran}(f)$ を見たすから，f は全射とはならない．ゆえに $X \prec \mathscr{P}X$ が成り立つ． □

命題 8.11. X が基数からなる集合なら，$\bigcup X$ もまた基数である．

証明. $\bigcup X$ が順序数であることは，命題 6.10 よりわかる．$\xi \in \bigcup X$ であるとき，ある $\kappa \in X$ について $\xi \in \kappa$ となる．κ は基数だから $\xi \prec \kappa$ であり，また $\kappa \precsim \bigcup X$ は明らかなので $\xi \prec \bigcup X$ となる．ゆえに $\bigcup X$ は基数である． □

命題 8.12. 任意の集合 X に対して，基数 κ を $\neg(\kappa \precsim X)$ となるようにとることができる．

証明.

$$W = \{(A, R) \in \mathscr{P}X \times \mathscr{P}(X \times X) \mid R \subset A \times A \text{ かつ } R \text{ は } A \text{ 上の整列順序 }\}$$

と定義する．$\alpha \precsim X$ とは X の部分集合が単射 $\alpha \hookrightarrow X$ 整列可能だということなので，これはある $(A,R) \in W$ について $\mathrm{type}(A,R) = \alpha$ が成り立つことと同値である．$\emptyset \subset X$ は明らかに整列可能だから，W は空ではない．いま W は集合だから，置換公理により $\{\mathrm{type}(A,R)+1 \mid (A,R) \in W\}$ は集合となる．$\beta = \bigcup\{\mathrm{type}(A,R)+1 \mid (A,R) \in W\}$ と定義すれば，これはまた順序数である．$\alpha \precsim X$ なら，ある $(A,R) \in W$ について $\mathrm{type}(A,R) = \alpha$ となるから，$\alpha < \mathrm{type}(A,R)+1 \leq \beta$ が成り立つ．$\beta \precsim X$ なら $\beta < \beta$ となり矛盾なので，$\neg(\beta \precsim X)$ が成り立つ．$\kappa = |\beta|$ とすれば，κ は $\neg(\kappa \precsim X)$ を満たす基数である． □

9 選択公理

集合族 $\mathscr{X}$ が与えられたとき，写像 $f\colon \mathscr{X} \to \bigcup\mathscr{X}$ で全ての $X \in \mathscr{X}$ に対して $f(X) \in X$ を満たすものを，X の選択写像と呼ぶのであった．選択写像に関する次の公理を，選択公理と呼ぶ．

(AC) 空でない集合からなる任意の集合族は，選択写像を持つ．

ZF 公理系に選択公理 (AC) を付け加えたものを，ZFC 公理系という．本節では，ZC において選択公理と同値な主張のうち，よく知られたものについて述べる．

定理 9.1. ZF 集合論において，以下の条件は同値である．

(i) 選択公理が成り立つ．
(ii) 任意の集合に整列順序を入れることができる．
(iii) 任意の集合 X，Y について，$X \precsim Y$ か $Y \precsim X$ のいずれかが成り立つ．
(iv) Tukey の補題が成り立つ．
(v) Hausdorff の極大原理が成り立つ．
(vi) Zorn の補題が成り立つ．

(iv)–(vi) については後で主張を紹介するとして，まずは (i)–(iii) の同値性を証明しよう．

(i)–(iii) の同値性の証明. (i) $\Longrightarrow$ (ii)．X を集合とし，f を $\mathscr{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ に関する選択写像とする．X が空なら整列可能である．X が空でないとし，$a \in X$ を任意に一つ固定する．$x_0 = a$ とし，$X \setminus \{x_\xi\,;\, \xi < \alpha\}$ が空でないときは

$$x_\alpha = f(X \setminus \{x_\xi\,;\, \xi < \alpha\})$$

と再帰的に定義する．$X \setminus \{x_\xi\,;\, \xi < \alpha\}$ が空になるような最小の順序数を β とすれば，$x\colon \beta \to X$ は全単射となり，ゆえに X は β から誘導される整列順序が入る．$X \setminus \{x_\xi\,;\, \xi < \alpha\}$ が空になるような最小の順序数が存在しないとすれば，置換公理より集合 $Y = \{x \in X \mid \exists\alpha \in ON\ x = x_\alpha\}$ から ON への全単射写像が存在することになるが，ON は真のクラスなのでこれは矛盾である．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．$\mathscr{X}$ を空でない集合からなる集合族とし，$\bigcup\mathscr{X}$ に整列順序 R を入れる．$X \in \mathscr{X}$ を R の制限により整列集合とみなし，$f(X)$ を X の最小元とする．このとき $f\colon \mathscr{X} \to \bigcup\mathscr{X}$ は選択写像である．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)．X と Y を集合とすれば，(ii) よりそれらは整列可能である．順序数の性質より $\mathrm{type}(X) \subset \mathrm{type}(Y)$ あるいは $\mathrm{type}(Y) \subset \mathrm{type}(X)$ が成り立つので，この包含により $X \hookrightarrow Y$ あるいは $Y \hookrightarrow X$ が誘導される．ゆえに $X \precsim Y$ あるいは $Y \precsim X$ が成り立つ．

(iii) $\Longrightarrow$ (ii)．X を集合とし，κ を $\neg(\kappa \precsim X)$ を満たす基数とする．このとき (iii) より $X \precsim \kappa$ となるから，X は単射 $X \hookrightarrow \kappa$ から誘導される順序により整列可能である． $\square$

選択公理と (iv)–(vi) の同値性を示すために，(iv)–(vi) の主張を明らかにしよう．まずは，Tukey の補題を説明する．

itemize

定義 9.2. X を集合とし，$\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ とする．$A \subset X$ について，$A \in \mathscr{F}$ と A の全ての有限部分集合~~について $A \in$~~ か $\mathscr{F}$ が成り立つことが同値になるとき，$\mathscr{F}$ は有限特性 (finite character) の集合族であるという．

主張 (Tukey の補題)**.** X を集合とし，$\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ を有限特性の集合族とする．$A \in \mathscr{F}$ なら，$A \subset B$ かつ包含関係について極大な $B \in \mathscr{F}$ が存在する．

次は Hausdorff の極大原理と Zorn の補題について説明しよう．

定義 9.3. X を集合とし，$<$ を X 上の半順序とする．$C \subset X$ が $<$ の制限により全順序集合となるとき，C は鎖であるという．包含関係について極大な鎖を極大鎖という．

主張 (Hausdorff の極大原理)**.** $(X, \leq)$ を半順序集合とする．X が空でなければ，任意の $x \in X$ について極大鎖 C で $x \in C$ を満たすものが存在する．

X が空集合なら X 自身は明らかに極大鎖なので，Hausdorff の極大原理が成り立つなら全ての狭義半順序集合は極大鎖をもつことがわかる．

主張 (Zorn の補題)**.** $(X, \leq)$ を半順序集合とする．X の任意の鎖が X において上界をもつなら，任意の $x \in X$ についてある $a \geq x$ で X において極大なものが存在する．

空集合は X の鎖であるから，Zorn の補題の仮定を満たす X は空ではないことがわかる．

定理 9.1 *(iv)–(vi)* の同値性の証明．(iv) $\Longrightarrow$ (v)．$(X, \leq)$ を空でない半順序集合とし，$a \in X$ とする．$\mathscr{C} \subset \mathscr{P}X$ を X の鎖全体の集合とすれば，$\mathscr{C}$ は有限特性の集合族であり $\{a\} \in \mathscr{C}$ を満たす．したがって，Tukey の補題により包含関係について極大な $C \in \mathscr{C}$ で $\{x\} \subset C$ を満たすものが存在する．この C は極大鎖である．

(v) $\Longrightarrow$ (vi)．$(X, \leq)$ は任意の鎖が上界を持つような半順序集合とする．$a \in X$ を固定すれば，Hausdorff の極大原理により $a \in C$ なる極大鎖 C が存在する．c を C の上界としよう．C の極大性よりこのとき $c \in C$ である．$b \geq c$ なら b は C の上界なので，C の極大性より $b \in C$ となり，よって $b \leq c$ であることがわかる．すなわち c は極大元である．

(vi) $\Longrightarrow$ (iv)．$\mathscr{F} \subset \mathscr{P}X$ を有限特性の集合族とする．$\mathscr{F}$ を包含関係により半順序集合と考えよう．$\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$ が鎖ならば，$\bigcup \mathscr{C} \in \mathscr{F}$ である．実際，$F \subset \bigcup \mathscr{C}$ を有限集合とすれば，$\mathscr{C}$ が鎖であることからある $C \in \mathscr{C}$ で $F \subset C$ を満たすものが存在する．$C \in \mathscr{C} \subset \mathscr{F}$ で $\mathscr{F}$ は有限特性の集合族だからこのとき $F \in \mathscr{F}$ であり，任意の有限部分集合 $F \subset \bigcup \mathscr{C}$ について $F \in \mathscr{F}$ が成り立つことから $\bigcup \mathscr{C} \in \mathscr{F}$ となる．したがって $\mathscr{F}$ は Zorn の補題の仮定を満たし，任意の $A \in \mathscr{F}$ に対して，$\mathscr{F}$ の極大元 B で $A \subset B$ を満たすものが存在することがわかる．ゆえに Tukey の補題が成立する． $\square$

(i)–(iii) の同値性と (iv)–(vi) の同値性がわかったから，後はそれらの関係性を証明すれば良い．

定理 9.1 の証明（残りの部分）．(ii) $\Longrightarrow$ (iv)．X を集合，$\mathscr{F} \subset \mathscr{P}X$ を有限属性の集合族とし，$A \in \mathscr{F}$ とする．このとき極大な $B \in \mathscr{F}$ で $A \subset B$ を満たすものを，再帰によって構成しよう．

X は整列可能であるから，$X \approx \kappa$ を満たす最小の順序数 κ が存在する．（命題 8.7 によりこれは基数である．）$x\colon \kappa \to X$ を全単射とし，X の部分集合族 $(X_\alpha)_{\alpha \leq \kappa}$ を再帰によって次のように構成する：

1. $X_0 = A$ とする．
2. $X_\alpha \cup \{x_\alpha\} \in \mathscr{F}$ なら $X_{\alpha+1} = X_\alpha \cup \{x_\alpha\}$ とし，そうでなければ $X_{\alpha+1} = X_\alpha$ と定める．
3. β が極限順序数なら，$X_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} X_\alpha$ とする．

このとき任意の $\alpha \leq \gamma$ について $X_\alpha \in \mathscr{F}$ が成り立つことを確かめよう．α が 0 または後続型順序数の場合は明らかなので，極限順序数の場合に示せばよい．$F \subset X_\alpha$ を任意の有限集合とする．このとき，ある $\gamma < \alpha$ で $F \subset X_\gamma$ を満たすものが存在する．$\mathscr{F}$ は有限特性の集合族だから $F \in \mathscr{F}$ であり，F は任意の選んでいたから再び $\mathscr{F}$ が有限特性であることより $X_\alpha \in \mathscr{F}$ がわかる．

ここで，$B = X_\kappa$ と定義しよう．このとき $A \subset B$ かつ $B \in \mathscr{F}$ なので，B が包含関係について極大であることを示せばよい．$B \subset Z$ かつ $Z \in \mathscr{F}$ であるとする．$z \in Z$ を任意に選べば，$x\colon \kappa \to X$ が全単射であることから $z = x_\alpha$ なる x_α（$\alpha < \kappa$）が存在する．$X_\alpha \cup \{x_\alpha\} \in \mathscr{F}$ なら $x_\alpha \in X_{\alpha+1} \subset B$ である．$X_\alpha \cup \{x_\alpha\} \notin \mathscr{F}$ なら，ある有限部分集合 $F \subset X_\alpha \cup \{x_\alpha\}$ について $F \notin \mathscr{F}$ となるが，いま $F \subset Z$ なのでこれは $Z \in \mathscr{F}$ に矛盾する．ゆえに $x_\alpha \in B$ となり，$Z \subset B$ がわかる．したがって B は包含関係について極大となっている．

(vi) $\Longrightarrow$ (i)．$\mathscr{X}$ を空でない集合からなる集合族とし，

$$C = \left\{ (\mathscr{A}, f) \in \mathscr{P}\mathscr{X} \times \bigcup_{\mathscr{B} \subset \mathscr{X}} \mathrm{Map}\left(\mathscr{B}, \bigcup \mathscr{B}\right) \;\middle|\; \mathrm{dom}(f) = \mathscr{A} \text{ かつ } f \text{ は選択写像である} \right\}$$

と定義する．C 上の順序 $(\mathscr{A}, f) \leq (\mathscr{B}, g)$ を $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ かつ $g|_{\mathscr{A}} = f$ と定義しよう．$A \subset C$ を C の任意の鎖とすれば，各 $\mathscr{A} \in A$ 上で定義された選択関数を貼り合わせることで，$\bigcup\{\mathscr{A} \mid$ ある f について $(\mathscr{A}, f) \in A$ となる $\}$ 上の選択関数を定義できる．これは A の上界となるから，C の任意の鎖は上界を持つ．したがって Zorn の補題により C は極大元 $(\mathscr{A}, f)$ を持つ．このとき $\mathscr{A} = \mathscr{X}$ であることを示そう．$\mathscr{A} \subsetneq \mathscr{X}$ であるとし，$B \in \mathscr{X} \setminus \mathscr{A}$ を取る．$h\colon \{B\} \to B$ を写像として $F = f \cup \{(B, h(B))\}$ と定義すればこれは選択関数であり，$(\mathscr{A}, f) < (\mathscr{A} \cup \{B\}, F)$ が成り立つ．このことは $(\mathscr{A}, f)$ の極大性に矛盾するので，$\mathscr{A} = \mathscr{X}$ がわかる．したがって f は $\mathscr{X}$ 上の選択関数である． □

10 直積と直和

二つの集合の直積についてはすでに導入していた．本節ではより一般の集合族に対して直積を定義し，またその双対的な集合である直和についても考えたい．まずは準備段階とし，添字付けられた集合族の概念を導入しよう．直積を定義するために必ずしも添字付けられた集合族の導入が必要なわけではないが，こういったものも考えておくと今後の議論に便利である．

集合族 $\mathscr{A}$ と集合 I が与えられたとする．このとき，写像 $I \to \mathscr{A}$ を I によって添字づけられた（$\bigcup \mathscr{A}$ の部分）集合族といい，I をその添字集合という．添字づけられた集合族 $I \ni i \mapsto A_i \in \mathscr{A}$ を，変数とその像を用いて $(A_i)_{i \in I}$ の様に表すことも多い．この場合写像の行き先の集合 $\mathscr{A}$ が明示されないが，今後考えるこういった族に対する集合演算については写像の値域だけを考えても同じなので，誤解の余地はない．添字集合 I を明示する必要がないときは，単に $(A_i)_i$ や (A_i) のように書いたりもする．集合族 $(A_i)_{i \in I}\colon I \to \mathscr{A}$ が全射である時，

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup \mathscr{A}, \qquad \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap \mathscr{A}$$

と定義し，それぞれ $(A_i)_{i\in I}$ の合併と共通部分と呼ぶ．この定義はラフに書くと

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup\{A_i \mid i \in I\}, \qquad \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap\{A_i \mid i \in I\}$$

ということである．添字集合を明示する必要がないときは，合併や共通部分を

$$\bigcup_i A_i, \qquad \bigcup A_i, \qquad \bigcap_i A_i, \qquad \bigcap A_i$$

のようにも表す．

任意の集合族 $\mathscr{A}$ は恒等写像 $\mathscr{A} \to \mathscr{A}$ によってそれ自身を添字集合とする集合族 $(A)_{A\in\mathscr{A}}$ とみなすことができる．集合族の合併や共通部分で導入した記法 $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$ や $\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A$ はこの考え方に従ったものであったのだ．

さて，添字付けられた集合族 $(A_i)_{i\in I}$ に対して，

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{ a\colon I \to \bigcup_{i\in I} A_i \;\middle|\; \forall i \in I\ a(i) \in A_i \right\}$$

と定義し，この集合を $(A_i)_{i\in I}$ の直積 (direct product)，デカルト積 (Cartesian product) あるいは単に積 (product) などと呼ぶ．大雑把にいうと，直積 $\prod_{i\in I} A_i$ は各 A_i の元を一つずつ選ぶという作業の全ての組み合わせを一つの集合と考えたものである．直積の定義の正当性は，写像の集合 $\mathrm{Map}\left(I, \bigcup_{i\in I} A_i\right)$ から分出公理を用いて集合を生成できることによる．$\mathscr{A}$ 自身が添字集合の時は，直積 $\prod_{A\in\mathscr{A}} A$ は $\mathscr{A}$ 上の選択写像全体の空間に他ならない．$\mathscr{A}$ の元がどれも空でないなら選択公理よりその上の選択写像が存在するので，各 A_i が空でないなら直積 $\prod_{i\in I} A_i$ も空ではない．直積 $\prod_{i\in I} A_i$ の元 $a\colon I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ のことを，しばしば $(a_i)_{i\in I}$ という記号を用いて表す．

各集合 A_i がどれもある集合 A に等しい場合を考える．このとき直積 $\prod_{i\in I} A_i$ は I から A への写像全体の空間 A^I に等しい．この場合，A^I の元 $(a_i)_{i\in I}$ のことを，A の元の族と呼んだりする．$I = \mathbb{N}$ のときは，特に $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を A の元の列とか，A の点列とか呼ぶことも多い．とある空間における族や列は，位相空間論を学ぶ上でとても重要な概念である．

$(A_i)_{i\in I}$ を集合族とし，$j \in I$ とする．$\mathrm{pr}_j((a_i)_{i\in I}) = a_j$ とすれば，これにより写像 $\mathrm{pr}_j\colon \prod_{i\in I} A_i \to A_j$ が定まる．この写像を直積 $\prod_{i\in I} A_i$ における射影とか，標準的な全射などという．

集合の直積に関するもっとも重要な事項は，射影を用いて記述される以下の普遍性と呼ばれる性質である．

命題 10.1. $(A_i)_{i\in I}$ を集合の族とし，各 $i \in I$ に対して写像 $f_i\colon B \to A_i$ が与えられているとする．このとき，写像 $f\colon B \to \prod_{i\in I} A_i$ で，全ての $i \in I$ について $\mathrm{pr}_i \circ f = f_i$ を満たすものがただ一つ存在する．

命題 10.1 の言っていることは，集合 B から直積 $\prod_{i\in I} A_i$ への写像とは，写像の族 $(f_i\colon B \to A_i)_{i\in I}$ をただ並べたものに他ならないということである．

証明. $x \in B$ に対して $f(x) = (f_i(x))_{i\in I}$ と定めれば，$f(x) \in \prod_{i\in I} A_i$ である．したがった，これにより写像 $f\colon B \to \prod_{i\in I} A_i$ が定まる．$i \in I$ および $x \in B$ とすれば

$$(\mathrm{pr}_i \circ f)(x) = \mathrm{pr}_i(f(x)) = \mathrm{pr}_i\left(\left(f_j(x)\right)_{j\in I}\right) = f_i(x)$$

が成り立つから，$\mathrm{pr}_i \circ f = f_i$ がわかる．

$g\colon B \to \prod_{i\in I} A_i$ を f と同様の条件を満たす写像としよう．このとき，全ての i と x について

$$\mathrm{pr}_i(f(x)) = f_i(x) = \mathrm{pr}_i(g(x))$$

がなりたつ．すなわち全ての $i \in I$ について $f(x)(i) = g(x)(i)$ となり，全ての $x \in B$ について $f(x), g(x)\colon I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ は写像として等しいことがわかる．したがって，f と g も B から $\prod_{i\in I} A_i$ への写像として等しい． $\square$

系 10.2. $(A_i)_{i\in I}, (B_i)_{i\in I}$ を添字付けられた集合族とし，$(f_i\colon A_i \to B_i)_{i\in I}$ を写像の族とする．このとき，写像 $f\colon \prod_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I} B_i$ で全ての $i \in I$ について以下の図式を可換にするものがただ一つ存在する．

$$\begin{tikzcd}
\prod_{j\in I} A_j \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"] \arrow[d, "f"'] & A_i \arrow[d, "f_i"] \\
\prod_{j\in I} B_j \arrow[r, "\mathrm{pr}'_i"'] & B_i
\end{tikzcd}$$

ただし，$\mathrm{pr}_i\colon \prod_j A_j \to A_i$ と $\mathrm{pr}'_i\colon \prod_j B_j \to B_i$ はともに第 i 射影である．

証明. $i \in I$ に対して $g_i = f_i \circ \mathrm{pr}_i$ と定義すれば，写像の族 $(g_i\colon \prod_j A_j \to B_i)_{i\in I}$ が得られる．この族に対して命題 10.1 を適用すれば，所望の写像の存在と一意性がわかる． $\square$

こういった普遍性による写像の構成は，今後も頻繁に出てくる．普遍性という考え方は，集合論というより圏論の考え方をより強く意識したものといえよう．

集合族の直積と双対的な集合として，集合族の直和がある．ここでは双対的という言葉をきちんと導入することはしないが，図式の向きが全て反対になる，というような意味である．

添え字づけられた集合族 $(A_i)_{i\in I}$ に対して

$$\coprod_{i\in I} A_i = \left\{ (i,a) \in I \times \bigcup_{i\in I} A_i \,\middle|\, a \in A_i \right\}$$

と定義し，この集合を $(A_i)_{i\in I}$ の直和 (direct sum) あるいは余積 (coproduct) と呼ぶ．A_i が全てとある集合 A に等しい時は $\coprod_{i\in I} A_i = I \times A$ となる．集合族の合併 $\bigcup_{i\in I} A_i$ においては，$a \in A_i \cap A_j$ の時 A_i の元としての a と A_j の元としての a ももちろん $\bigcup_{i\in I} A_i$ の元としては同じものである．一方，$\coprod_{i\in I} A_i$ では同じ $a \in A_i \cap A_j$ でも (i,a) と (j,a) のように異なるラベルがついていれば別物として扱われるのである．各 $i \in I$ に対して写像 $j_i\colon A_i \to \coprod_{i\in I} A_i$ を $j_i(a) = (i,a)$ によって定義すれば，j_i はどれも単射となる．写像の族 $(j_i)_{i\in I}$ は直和ついて，直積における射影の族と類似の役割を果たす．各 j_i のことは標準的な単射などと呼ぶことがある．直積の場合と双対的に，直和については以下の命題の意味での普遍性が成り立っている．

命題 10.3. $(A_i)_{i\in I}$ を集合の族とし，各 $i \in I$ に対して写像 $f_i\colon A_i \to B$ が与えられているとする．このとき，写像 $f\colon \coprod_{i\in I} A_i \to B$ で，全ての $i \in I$ について $f \circ j_i = f_i$ を満たすものがただ一つ存在する．

証明. $(i,a) \in \coprod_{i\in I} A_i$ に対して $f(i,a) = f_i(a)$ と定めれば，これが求める写像である． $\square$

系 10.4. $(A_i)_{i\in I}, (B_i)_{i\in I}$ を添字付けられた集合族とし，$(f_i\colon A_i \to B_i)_{i\in I}$ を写像の族とする．このとき，写像 $f\colon \coprod_{i\in I} A_i \to \coprod_{i\in I} B_i$ で全ての $i \in I$ について以下の図式を可換にするものがただ一つ存在する．

$$\begin{tikzcd} \coprod_{i\in I} A_i \arrow[d, "f"'] & A_i \arrow[l, "j_i"'] \arrow[d, "f_i"] \\ \coprod_{i\in I} B_i & B_i \arrow[l, "j'_i"] \end{tikzcd}$$

ただし，$j_i\colon A_i \to \coprod_i A_i$ と $j'_i\colon B_i \to \coprod_i B_i$ はともに標準的な単射である．

証明．$(j'_i \circ f_i)_{i\in I}$ が命題 10.3 の条件を満たす写像の族であることから従う． $\square$

11 商空間

R を集合 X 上の同値関係[*4]とする．$x \in X$ に対して，

$$[x]_R = \{y \in X \mid xRy\}$$

とおき，

$$X/R = \{A \in \mathscr{P}X \mid \exists x \in X,\ A = [x]_R\}$$

と定義する．このとき $[x]_R$ を R に関する x の同値類といい，X/R を同値関係 R に関する X の商集合という．$a \in X/R$ のとき，$x, y \in a$ は明らかに xRy と同値である．$x \mapsto [x]_R$ によって定まる写像 $q\colon X \to X/R$ は商集合への標準的な全射などと呼ばれる．選択公理より選択写像 $s\colon X/R \to X$ が存在するが，これは先ほどの標準全射と $q \circ s = \mathrm{id}_{X/R}$ なる関係を満たしている．

命題 11.1. $f\colon X \to Y$ を写像，R を X 上の同値関係，$q\colon X \to X/R$ を標準的な全射とする．このとき，以下の図式を可換にするような写像 $\widetilde{f}\colon X/R \to Y$ が存在するための必要十分条件は，xRx' ならば $f(x) = f(x')$ が成り立つことである．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ X/R \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

このような $\widetilde{f}$ が存在すれば，それは一意的である．

証明．q は全射であるから，$g \circ q = f = h \circ q$ なら $g = h$ となる．（命題 4.6）よって命題の主張を満たす $\widetilde{f}$ は一意的である．

$s\colon X/R \to X$ を選択写像とし，$\widetilde{f} = f \circ s$ と定義する．このとき任意の x について $(\widetilde{f} \circ q)(x) = f(s(q(x)))$ が成り立つ．s と q の定義より $s(q(x))Rx$ であり，仮定より $f(x) = f(s(q(x)))$ がわかる．したがって $(\widetilde{f} \circ q)(x) = f(x)$ となり，$\widetilde{f} \circ q = f$ が成り立つ． $\square$

*4 定義 5.3

12 逆極限と順極限

References

[1] Steve Awodey. *Category Theory*. 2nd ed. Oxford Logic Guides 52. Oxford University Press, 2010.

[2] Nicholas Bourbaki. *Theory of Sets*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004. VIII+414. DOI: 10.1007/978-3-642-59309-3. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540225256.

[3] R. M. Dudley. *Real Analysis and Probability*. 2nd ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 74. Cambridge University Press, 2002. DOI: http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511755347.

[4] Thomas Jech. *Set Theory*. Springer Monographs in Mathematics. Originally published in the series: Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003. DOI: 10.1007/3-540-44761-X.

[5] Kenneth Kunen. *The Foundations of Mathematics*. Studies in Logic: Mathmatical Logic and Foundations 19. College Publications, 2009.

[6] ケネス・キューネン. **キューネン数学基礎論講義**. Trans. by 藤田 博司. 日本評論社, 2016. URL: https://www.nippyo.co.jp/shop/book/7176.html.

[7] 齋藤 正彦. **数学の基礎. 集合・数・位相**. 東京大学出版会, 2002. URL: http://www.utp.or.jp/book/b302226.html.

[8] 斎藤 毅. **集合と位相**. 大学数学の入門 8. 東京大学出版会, 2009.