位相空間論セミナー VIII：束上の位相 ver1.1.

平井祐紀

2020 年 4 月 28 日

更新履歴
2018.9.10 ver.1.0
2020.4.28 ver.1.1 誤植を訂正．索引を作成．

目次

今回は，順序と位相の関係について調べる．束に関する記法については前回の位相空間論セミナー VII を踏襲する．

1 束上の閉包作用素

閉包作用素の概念を一般の順序集合に拡張しよう．

定義 1.1. $(X, \leq)$ を順序集合とする．X 上の作用素 $\mathrm{Cl}\colon X \to X$ が

(i) 全ての $x \in X$ について $x \leq \mathrm{Cl}(x)$ が成り立つ．
(ii) $\mathrm{Cl} \circ \mathrm{Cl} = \mathrm{Cl}$ が成り立つ．
(iii) 全ての $x, y \in X$ について，$x \leq y$ なら $\mathrm{Cl}(x) \leq \mathrm{Cl}(y)$ が成り立つ．

を満たすとき，Cl を X 上の閉包作用素 (closure operator) という．閉包作用素 Cl に対して $x = \mathrm{Cl}(x)$ を満たすような元 $x \in X$ は Cl について閉 (closed) であるという．

定義 1.1 を標語的に言えば，順序を保つ拡大的な冪等作用素を閉包作用と呼ぶということである．X 上の恒等写像は明らかに閉包作用素である．定義 1.1 の閉包作用素は，位相空間論における閉包作用素の一般化になっている．

命題 1.2. $(X, \leq)$ は結び半束であるとし，半束準同型 $f\colon X \to X$ は定義 1.1 の条件 (i) と (ii) を満たすとする．このとき f は X 上の閉包作用素である．

証明．半束準同型は順序を保つことからわかる． □

命題 1.3. $(X, \leq)$ を完備束，Cl を X 上の閉包作用素とする．X の閉元全体の集合を $\mathscr{F}$ で表せば，全ての $A \subset \mathscr{F}$ について $\bigwedge A \in \mathscr{F}$ が成り立つ．

命題 1.3 における $\bigwedge A$ は X における交わりなので，命題 1.3 は「$\mathscr{F}$ は X から誘導される順序により完備束となる」という主張よりは，少し強いことを言っている．

証明．任意の $A \subset \mathscr{F}$ について $\mathrm{Cl}\,(\bigwedge A) \leq \bigwedge A$ が成り立つことを示せばよい．（逆向きの不等号は条件 (i) からすぐわかる．）任意の $a \in A$ は閉元だから，$\mathrm{Cl}(a) \leq a$ が成り立つ．閉包作用素は順序を保つから，これより $\mathrm{Cl}\,(\bigwedge A) \leq \mathrm{Cl}(a) \leq a$ がわかる．いま $a \in A$ は任意に選んでいたから $\mathrm{Cl}\,(\bigwedge A)$ は A の下界となり，交わりの最大性より $\mathrm{Cl}\,(\bigwedge A) \leq \bigwedge A$ が従う． □

系 1.4. $(X, \leq)$ を完備束，Cl を X 上の閉包作用素とする．このとき，X の閉元全体からなる集合は，X から誘導される順序により完備束となる．

命題 1.3 の逆が成り立つことを主張するのが次の命題である．

命題 1.5. X を完備束とし，$\mathscr{F} \subset X$ は，次の条件を満たしているとする．

(∗) 全ての $\mathscr{A} \subset \mathscr{F}$ について $\bigwedge \mathscr{A} \in \mathscr{F}$ が成り立つ．

このとき，写像 $F\colon X \ni x \mapsto \bigwedge_X \uparrow(x; \mathscr{F}) \in X$ は閉包作用素である．さらに，$x \in \mathscr{F}$ は $F(x) = x$ と同値である．

証明．まずは条件 (i) と (iii) を示そう．写像 $F\colon X \to X$ を $x \mapsto \bigwedge \uparrow(x; \mathscr{F})$ によって定義する．閉包作用素の条件 (i)（$x \leq F(x)$）は，$\uparrow$ と交わりの定義より分かる．$x \leq y$ なら $\uparrow(y; \mathscr{F}) \subset \uparrow(x; \mathscr{F})$ なので，$F(x) \leq F(y)$ が成り立つ．よって閉包作用素の条件 (iii) も満たされる．$F(x) \leq F(F(x))$ は条件 (i) よりわかる．

次に $x \in \mathscr{F}$ と $F(x) = x$ が同値であることを示す．条件 (∗) より $F(x) = \bigwedge \uparrow(x; \mathscr{F}) \in \mathscr{F}$ なので，$F(x) = x$ なら $x \in \mathscr{F}$ である．逆に $x \in \mathscr{F}$ を仮定すれば，$\uparrow(x; \mathscr{F})$ が成り立つ．したがって交わりの定義より $F(x) \leq x$ となり，条件 (i) と合わせて $F(x) = x$ を得る．

後は条件 (iii) を示せばよいが，条件 (∗) より $F(x) \in \mathscr{F}$ なので，先ほどの議論により $F(F(x)) = F(x)$ となりこれも成り立っている． □

命題 1.3 と命題 1.5 より，完備束における閉包作用素と条件 (∗) を満たす部分集合は，実質的に同じ概念であることがわかる．条件 (∗) を満たす族を Moore 族 (Moore family) と呼ぶことにする．Moore 族という言葉は Birkhoff [2, Chapter V] から取った．$\mathscr{F}$ が完備であるというと系 1.4 の意味での完備性とややこしいので，Moore 族という言葉を使うことにした．

補題 1.6. X を完備束とすれば，X の Moore 族全体の集合は $\mathscr{P}(X)$ の Moore 族である．

証明. $\mathscr{M} \subset \mathscr{P}(X)$ を X の Moore 族全体の集合とし，$\mathscr{A} \subset \mathscr{M}$ を任意に選ぶ．$\mathscr{A}$ が空なら $\bigcap \mathscr{A} = X$ となり，X は Moore 族だから $\bigcap \mathscr{A} \in \mathscr{M}$ である．$\mathscr{A}$ は空でないとする．$B \subset \bigcap \mathscr{A}$ を任意に選ぶ．このとき全ての $U \in \mathscr{A}$ に対して $B \subset U$ が成り立ち，U は Moore 族だから $\bigwedge_X B \in U$ となる．したがって全ての $U \in \mathscr{A}$ に対して $\bigwedge_X B \in U$ であり，$\bigwedge_X B \in \bigcap \mathscr{A}$ がわかる．ゆえに $\bigcap \mathscr{A}$ は Moore 族であり，$\bigcap \mathscr{A} \in \mathscr{M}$ となる．以上の議論により，$\mathscr{M}$ は Moore 族であることが示された． □

2 完備化

束は一般に完備ではないが，イデアルを用いると完備化することができる．これは $\mathbb{Q}$ の Dedekind 切断による完備化と類似の操作である．

束 X に対して，$\operatorname{Idl} X$ で X のイデアル全体の集合を，$\operatorname{Idl}_0 X$ で $\operatorname{Idl} X \cup \{\emptyset\}$ を表すことにする．

補題 2.1. (i) X が束なら $\operatorname{Idl}_0 X$ は Moore 族である．

(ii) X が単位的結び半束なら，$\operatorname{Idl} X$ は Moore 族である．

証明. (i) $A \subset \operatorname{Idl}_0 X$ なら $\bigcap A \neq \emptyset$ の場合は $\bigcap A$ はイデアルであり，$\bigcap A = \emptyset$ でも $\operatorname{Idl}_0 X$ となる．よって $\operatorname{Idl}_0 X$ は Moore 族である．

(ii) X が単位的結び半束なら任意の $A \subset \operatorname{Idl} X$ について $\emptyset \neq \{0\} \subset \bigcap A$ が成り立つので，$\bigcap A \in \operatorname{Idl} X$ はイデアルとなる．よって $\operatorname{Idl} X$ は Moore 族である． □

命題 2.2. (i) 束 X について，$\operatorname{Idl} X$ は包含関係による順序によって束となり，$\operatorname{Idl}_0 X$ は完備束となる．

(ii) X が単位的結び半束なら，$\operatorname{Idl} X$ は完備束となる．

証明. (i) $I, J \in \operatorname{Idl} X$ なら I と J はともに空でないから，$I \cup JI \cup J$ を含む最小のイデアルが存在し，それが結び $I \vee J$ である．また，$I, J \in \operatorname{Idl} X$ ならイデアルが空でない下方集合であるから $I \cap J \neq \emptyset$ であり，$I \cap J \in \operatorname{Idl} X$ となる．すなわち $\operatorname{Idl} X$ は束である．

(i) 後半の主張と (ii) は補題 2.1 からわかる． □

束の完備化を定義しよう．完備束 X に対して，X の Moore 族全体の集合は Moore 族となるのであった．それによって定まる閉包作用素 $\mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ を $\operatorname{Cpl}\colon \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ で表すことにする[*1]．

定義 2.3. X を束とし，$i\colon X \to \widehat{X}$ を完備束への束準同型で，次のような条件を満たすものとする．

(i) 任意の $A \subset X$ について $\bigwedge A$ が存在すれば $i(\bigwedge A) = \bigwedge i(A)$ が成り立つ．

(ii) 任意の $A \subset X$ について $\bigvee A$ が存在すれば $i(\bigvee A) = \bigvee i(A)$ が成り立つ．

さらに $\operatorname{Cpl}(i(X)) = \widehat{X}$ が成り立つとき，本ノートでは $(\widehat{X}, i)$ を束 X の完備化 (completion) と呼ぶことにする．

筆者は束論を全然知らないので，束の完備化という用語が一般に定まっているかもわかっていない．まあしかし，Grätzer [6, p.52] を見ると定義 2.3 を完備化と呼んでもあながち間違いではなさそうである．

[*1] Cpl は completion の略で，本ノート独自の記号である．

$\mathrm{Cpl}(i(X)) = \widehat{X}$ とは，「完備化に関する閉包」をとれば X が $\widehat{X}$ 全体になるということであり，一様空間の完備化における「稠密性」に対応する条件である．束の完備性と区別するために，一様空間の完備性を Cauchy 完備性，一様空間の完備化を Cauchy 完備化と呼ぶことがある．

命題 2.4. 任意の束には完備化が存在する．

証明. 写像 $i\colon X \to \mathrm{Idl}_0 X$ を $x \mapsto {\downarrow}x$ によって定義する．このとき $(\mathrm{Cpl}(i(X)), i)$ が X の完備化となっている．$\mathrm{Cpl}(i(X))$ は完備束 $\mathrm{Idl}_0 X$ において $i(X)$ を含む最小の Moore 族であるからそれ自身 Moore 族であり，したがって包含関係による順序について完備である．i が $\bigwedge$ と $\bigvee$ を保つ束準同型であることは単項イデアルの定義に従って示せばよい． □

$\mathrm{Idl}_0 X$ が $i(X)$ の完備化になっていないのは，$I = \{x \in X \mid x < a\}$ のようなイデアルが $\mathrm{Cpl}(i(X))$ には含まれないからである．特に X が 0 を持つ束なら $\mathrm{Idl}_0 X$ の $\emptyset$ は完全に無駄な点であり，$\mathrm{Idl}\, X$ 自体を使って完備化できる．さらに無駄のない作り方をするなら，閉包作用素を

$$I \mapsto \bigcap \{{\downarrow}x\,;\, x \text{ は } I \text{ の上界 }\}$$

と定め，これについて閉じたイデアル全体の集合などを考えればよいだろう．

3 順序収束

順序集合においては，順序から誘導されるある種の「収束」概念が存在する．これは一般には Moore-Smith の公理系を満たさないが，適当な閉包作用素を用意することでこの収束と関連した位相を定義することができる．

定義 3.1. $(X, \leq)$ を順序集合とする．

(i) 順序を保存する有向族 $\Lambda \to X$ に対して，$s = \bigvee x(\Lambda)$ が成り立つときに $x_\lambda \uparrow s$ と書く．また $x\colon \Lambda \to X$ が X^{op} において $x_\lambda \uparrow s$ を満たすときに，$x_\lambda \downarrow s$ と書く．すなわち，$x_\lambda \downarrow s$ とは x が（広義）単調減少で $s = \bigwedge x(\Lambda)$ が成り立つということである．

(ii) $l, x, u\colon \Lambda \to X$ を有向族の組とする．$l_\lambda \leq x_\lambda \leq u_\lambda$, $u_\lambda \downarrow a$, かつ $l_\lambda \uparrow a$ が成り立つときに，$(l_\lambda, x_\lambda, u_\lambda)$ は a に収束するといい，$(l_\lambda, x_\lambda, u_\lambda) \to a$ と表す．また，有向族 $x\colon \Lambda \to X$ について，ある有向族 $(l_\lambda), (u_\lambda)$ で $(l_\lambda, x_\lambda, u_\lambda)$ が a に収束するようなものが存在するとき，(x_λ) は a に順序収束するといい，$x_\lambda \to a$ と表す．

定数有向族は，明らかにそれ自身に順序収束する．また，$x_\lambda \uparrow a$ なら $x_\lambda \to a$ であり，$x_\lambda \downarrow a$ でも $x_\lambda \to a$ となる．反対称律より，順序収束の極限は存在すれば一意である．

命題 3.2. 順序集合 X において，X の部分集合族 $\mathscr{F}$ を

$$F \in \mathscr{F} \iff (x_\lambda) \text{ が } x \text{ に順序収束する } F \text{ の有向族なら，} x \in F \text{ となる}$$

と定義する．このとき，$\mathscr{F}$ は Moore 族となり，$\mathscr{F}$ から定まる閉包作用素 $F\colon \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ は $F(A \cup B) = F(A) \cup F(B)$ を満たす．したがって，F は位相空間論の意味での閉包作用素となる．

証明. $\mathscr{F}$ が Moore 族であることは定義からすぐにわかる．$\mathscr{F}$ の定める閉包作用素 Cl の単調性より $F(A), F(B) \subset F(A \cup B)$ が成り立つので，$F(A) \cup F(B) \subset F(A \cup B)$ である．$a \in F(A \cup B)$ とし，

また，$A \cup B \subset F(A) \cup F(B)$ も明らかに成り立つので，$F(A) \cup F(B)$ が $A \cup B$ を含む $\mathscr{F}$ の元であることを示せばよい．$(l_\lambda, x_\lambda, u_\lambda)$ は a に収束する $A \cup B$ の有向族の組とする．集合 M_A, M_B を

$$M_A = \{\lambda \in \Lambda \mid x_\lambda \in A\}, \qquad M_B = \{\lambda \in \Lambda \mid x_\lambda \in B\}$$

と定義し，Λ から誘導される順序を入れる．このとき，M_A か M_B のどちらかは Λ の共終部分集合になっている．（いずれも共終部分集合でないとすると，(x_λ) は $A \cup B$ の有向族でないことになる．）特に M_A が共終であると仮定しても一般性を失わない．このとき $(x_\lambda)_{\lambda \in M_A}$ は (x_λ) の部分有向族で，A の点からなるものである．M_A が共終であることから

$$\bigvee_{\lambda \in \Lambda} l_\lambda = \bigvee_{\lambda \in M_A} l_\lambda, \qquad \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda = \bigwedge_{\lambda \in M_A} u_\lambda$$

が成り立ち，さらに $M_A \hookrightarrow \Lambda$ は順序を保存するので，$(l_\lambda)_{\lambda \in M_A}$ は単調増大，$(u_\lambda)_{\lambda \in M_A}$ は単調減少である．これより $(l_\lambda, x_\lambda, u_\lambda)_{\lambda \in M_A}$ が a に収束する A の有向族であることがわかった．これより $a \in F(A) \cup F(B)$ となり，$F(A) \cup F(B)$ はまた $\mathscr{F}$ の元であることが示された． □

命題 3.2 における F について $F(A) = A$ が成り立つとき，$A \subset X$ は順序収束の意味で閉であるという．

定義 3.3. 命題 3.2 における閉包作用素から定まる位相を，順序集合 X の順序位相 (order topology) という．

命題 3.4. 順序収束する有向族は，順序位相で収束する．

証明. $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は順序収束するが，順序位相では a に収束しないと仮定しよう．a の開近傍 U を条件「どんな λ に対しても，ある $\lambda' \geq \lambda$ で $x_{\lambda'} \notin U$ を満たすものが存在する」を満たすように選ぶ．このとき $M = \{\lambda \in \Lambda \mid x_\lambda \notin U\}$ は Λ の共終部分集合であり，$(x_\lambda)_{\lambda \in M}$ は $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の部分有向族となる．(x_λ) は順序収束するから，（有向族の対応が狭義単調な）部分有向族 $(x_\lambda)_{\lambda \in M}$ は a に収束する．したがって，$a \in \overline{X \setminus U}$ であり，一方で $a \notin X \setminus U$ だから U が開集合であるという仮定に矛盾する． □

注意 3.5. 命題 3.4 の逆が成り立つとは限らない．つまり，順序位相における収束概念と順序収束が一致するかは不明だということである．閉包作用素 Cl' を

$$\mathrm{Cl}'(A) = \{x \in X \mid x \text{ に順序収束する } A \text{ の有向族が存在する }\}$$

と定義しよう．もし順序収束が位相的収束（i.e. Moore-Smith の公理系を満たす）ならば，Cl と Cl' は一致するが，一般には $\mathrm{Cl}'(A) \subsetneq \mathrm{Cl}(A)$ かも知れない．Cl' による拡大作業をどのくらい繰り返せば A が $\mathrm{Cl}(A)$ に辿りつけるかは，なかなか難しい問題である．

完備束の場合には，順序収束は上極限，下極限を用いて特徴づけることができる．

定義 3.6. X を完備束とし，$x\colon \Lambda \to X$ を有向族とする．

$$\limsup_\lambda x_\lambda = \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} \bigvee_{\mu \geq \lambda} x_\mu, \qquad \liminf_\lambda x_\lambda = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} \bigwedge_{\mu \geq \lambda} x_\mu$$

と定義し，$\limsup_\lambda x_\lambda$ と $\limsup_\lambda x_\lambda$ をそれぞれ (x_λ) の上極限 (supremum, least upper bound)，下極限 (infimum, greatest lower bound) という．

命題 3.7. 完備束 X の有向族 (x_λ) について，$x_\lambda \to a$ が成り立つための必要十分条件は $\limsup_\lambda x_\lambda = \limsup_\lambda x_\lambda = a$ が成り立つことである．

証明．$\limsup_\lambda x_\lambda = \limsup_\lambda x_\lambda$ のとき，$l_\lambda = \bigwedge_{\mu\geq\lambda} x_\mu$，$u_\lambda = \bigvee_{\mu\geq\lambda} x_\mu$ と定めれば，$(l_\lambda, x_\lambda, u_\lambda)$ は a に収束する．

逆に，$(l_\lambda, x_\lambda, u_\lambda)$ は a に収束すると仮定しよう．このとき，$l_\lambda \leq x_\lambda$ と l の単調性より $l_\lambda \leq \bigwedge_{\mu\geq\lambda} x_\mu$ が成り立つ．同様にして $\bigvee_{\mu\geq\lambda} x_\mu \leq u_\lambda$ も成り立つので，

$$a = \bigvee_{\lambda\in\Lambda} l_\lambda \leq \liminf_\lambda x_\lambda \leq \limsup_\lambda x_\lambda \leq \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} u_\lambda = a$$

がわかる． □

最後に，収束に関する Urysohn 性を導入しよう．位相空間論における収束の公理には，以下の条件が含まれているのだった．

(MS3) (x_λ) の任意の部分有向族が a に収束する部分有向族をもつなら，(x_λ) も a に収束する．

これを点列に置き換えた条件

(U) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の任意の部分列が a に収束する部分有向族をもつなら，(x_n) も a に収束する．

収束に関する上記の条件を Urysohn 性と呼ぶ．

命題 3.8. X を順序集合とする．点列の順序収束が Urysohn 性を満たすならば，点列の順序収束に関する閉包作用素は閉包作用素の公理 (CO1)–(CO4) を満たす．さらに，その閉包作用素から定まる点列の収束は順序収束と一致する．

証明．X における閉集合全体 $\mathscr{F}$ を，

$$F \in \mathscr{F} \iff F \text{ の点列 } (x_n) \text{ が } x \text{ に順序収束するなら，} x \in F \text{ となる}$$

と定義し，写像 $F\colon \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ を $\mathscr{F}$ から定まる閉包作用素とする．(CO1) は明らかであり，また F は定義 1.1 の意味での閉包作用素なので，もちろん (CO2) と (CO3) も満たすこともわかる．この作用素が (CO4) を満たすことは，命題 3.2 と同様にして示すことができる．

F から定まる位相を (T) と呼ぶことにする．このとき，(T) における収束と順序収束が同値になることを示そう．まずは，$a \in X$ に順序収束する点列は (T) でも a に収束することを示す．(x_n) は (T) で a に収束しないと仮定し，a の開近傍 U を「どんな n に対しても，ある $k \geq n$ で $x_k \notin U$ を満たすものが存在する．」という条件を満たすように選ぼう．このとき (x_n) の部分列 (x_{n_k}) で全ての k について $x_{n_k} \notin U$ となるようなものが選べる．この (x_{n_k}) がもし収束部分列を含めば，その順序収束極限たる a は順序閉集合 $X \setminus U$ に入ることになるので，(x_{n_k}) は収束部分列をもたない．したがって Urysohn 性より順序収束しないことがわかる．

最後に，(T) で $a \in X$ に収束する有向族は a に順序収束することを示そう．$(x_n)_{\lambda\in\Lambda}$ は a に順序収束しないとすれば，そのいかなる部分列も a に順序収束する部分列を含まない．したがって a は $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ の孤立点であり[*2]，またいかなる部分列も a に順序収束しないから，$a = x_k$ となる k は高々有限個である．以上の条件から，(x_n) は (T) で a に収束しないことがわかる． □

証明を見ればわかるように，命題 3.8 は位相を定義する際に使った収束が順序収束であることは用いていない．もう少し一般の点列の収束に関して成り立つ結果である．

---

*2 これが可算集合であることに注意．

一般に順序収束が Urysohn 性をもつとは限らないが，Urysohn 性を持つように順序集合を修正することができる．

順序集合の点列 (x_n) に対して，

$$(x_n) \text{ が } a \text{ に順序*収束する} \iff (x_n) \text{ の任意の部分列が } a \text{ に収束する部分列を持つ}$$

と定義する．このとき，順序*収束は

(i) 定数列は収束する．
(ii) 収束列の任意の部分列は収束する．
(iii) Urysohn 性を満たす．

の 3 条件を満たし，よってこれは位相的収束となる．

例 3.9. 測度空間上の関数列の（同値類の空間）における概収束は $f \leq g$ a.e. という順序に関する順序収束であり，測度収束はその順序*収束である．

定義 3.10. X を束とし，X には収束概念 (C) が定義されているとする．$x_\lambda \to x$ かつ $y_\lambda \to y$ なら，$x_\lambda \wedge y_\lambda \to x \wedge y$ が成り立つとき $\wedge$ は (C) について連続であるといい，$x_\lambda \vee y_\lambda \to x \vee y$ が成り立つとき，$\vee$ は (C) について連続であるという．

4 区間位相

順序集合上に，順序位相とは別の位相を定義しよう．

定義 4.1. $(X, \leq)$ を順序集合とする．$\uparrow a$ および $\downarrow a$ という形の集合全体によって生成される閉集合系から定まる位相を，X の区間位相 (interval topology) という．

X において，$(\uparrow a) \cap (\downarrow b)$ の形の集合を有界閉区間と呼び，$[a, b]$ で表すことにする．また，$\uparrow a$ または $\downarrow a$ は非有界な閉区間といい，それぞれ $[a, \infty]$，$[-\infty, a]$ と表すことにする．これはあくまで記法の利便性のためであり，X に最大元や最小限の存在を仮定しているわけではない．開区間 $[-\infty, a[$，$]a, \infty]$，および $]a, b[$ をそれぞれ

$$[-\infty, a[= \{x \in X \mid x < a\}, \qquad]a, \infty] = \{x \in X \mid a < x\}, \qquad]a, b[= \{x \in X \mid a < x < b\}$$

で定義する．

区間位相において $\{x\} = [x, x]$ は閉集合となるから，これは (T_1) 公理を満たす．

命題 4.2. X が全順序集合なら，X の区間位相は Hausdorff となる．

証明. $x, y \in X$ を異なる 2 点とする．$x < y$ であると仮定しても一般性を失わない．$x < a < y$ なる z が存在するときは，$[-\infty, a[$ と $]a, \infty]$ が x と y を分離する開近傍である．そのような a が存在しない場合は，$[-\infty, y[$ と $]x, \infty]$ が x と y を分離する開近傍である． □

次は区間位相に関するコンパクト性を調べよう．

補題 4.3. X を順序集合とし，区間位相によって位相空間と考える．このとき，X がコンパクトであるための必要十分条件は，有限交叉性を持つ閉区間族 $\mathscr{I}$ は $\bigcap \mathscr{I} \neq \emptyset$ を満たすことである．

証明．系 A.3 よりわかる． □

命題 4.4. 束 X を区間位相によって位相空間と考えたとき，X がコンパクトになるための必要十分条件は，X が完備束となることである．

証明．X を完備束とする．$\mathscr{I}$ は有限交叉性を持つ閉区間族とし，各 $I \in \mathscr{I}$ を $I = [a_I, b_I]$ と表示することにする[*3]．$\mathscr{I}$ は有限交叉性を持つから，任意の $I, J \in \mathscr{I}$ について $a_I \leq b_J$ が成り立つ．これより $\bigvee_I a_I \leq \bigwedge_I b_I$ となり，

$$\emptyset \neq \left[\bigvee_I a_I, \bigwedge_I b_I\right] \subset \bigcap_{I \in \mathscr{I}} [a_I, b_I] = \bigcap \mathscr{I}$$

がわかる。よって $\bigcap \mathscr{I} \neq \emptyset$ であり，補題 4.3 より X のコンパクト性が従う．

逆に，X は区間位相についてコンパクトな束とする．X は束だから $\{[a, \infty]\,;\, a \in X\}$ は有限交叉性を持つ閉区間族であり，コンパクト性から $\bigcap \{[a, \infty]\,;\, a \in X\}$ は空ではない．$\bigcap \{[a, \infty]\,;\, a \in X\}$ の元は明らかに X の最大元である．$A \subset X$ を非空な部分集合とし，S を A の上界全体の集合とする．既に示した最大限の存在により，S は空でないことに注意しておく．$\mathscr{I} = \{[a, s] \mid a \in A,\ s \in S\}$ は有限交叉性を持つ閉区間族なので，コンパクト性より $\bigcap \mathscr{I}$ は空ではない．このとき $\bigcap \mathscr{I}$ の元が A の交わりに他ならない．同様にして，同様にして最小限が存在することと，任意の非空な部分集合が結びを持つこともわかる．したがって X は完備束である． □

本節の最後に，区間位相と順序位相の関係を調べよう．

命題 4.5. 束の区間位相において閉であるような集合は，順序位相についても閉である．つまり，束において区間位相は順序位相よりも粗い．

証明．閉区間が順序位相について閉となることを示せばよい．$[a, b]$ を閉区間とし，$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を $[a, b]$ の元からなる有向族で $c \in X$ に順序収束するようなものとする．このとき $c \in [a, b]$ であることを示せばよい．単調増加な有向族 (l_λ) と単調減少な有向族 (u_λ) を $l_\lambda \leq x_\lambda \leq u_\lambda$ かつ $\bigvee_\lambda l_\lambda = \bigwedge_\lambda u_\lambda = c$ を満たすように選ぶ．いま全ての λ について $a \leq x_\lambda \leq u_\lambda$ が成り立つから，$a \leq \bigwedge_\lambda u_\lambda = c$ がわかる．同様にして $c = \bigvee_\lambda l_\lambda \leq b$ もわかるので，$c \in [a, b]$ となる． □

5 束上の評価と擬距離

複数の構造の入った数学的対象では，構造の間の整合性が大切となる．本節では，束構造と整合的な距離の入った束について考察する．

定義 5.1. $(X, \vee, \wedge)$ を束とする．X 上に位相が定まっていて，$\vee, \wedge \colon X \times X \to X$ がともに連続関数となるとき，X は位相束 (topological lattice) であるという．

束上に距離を入れる方法を考えよう．

[*3] X は完備束なので，全ての閉区間は有界閉空間である．

定義 5.2. X を束とする．関数 $\mu\colon X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ は

(i) $\mu(0) = 0$.
(ii) $x \leq y$ なら $\mu(x) \leq \mu(y)$.（単調性）
(iii) $\mu(x) + \mu(y) = \mu(x \vee y) + \mu(x \wedge y)$.（モジュラー性）

を満たすとき，X 上の正の評価 (valuation) であるという．

$\mu(X) \subset [0, \infty[$ であるとき，評価 μ は有限であるという．条件 (i) と (iii) より，$x \wedge y = 0$ なら $\mu(x) + \mu(y) = \mu(x \vee y)$ が成り立つ．これを μ の加法性という．

例 5.3. X を集合，$\mathscr{A}$ を X 上の集合代数，μ を有限加法的測度とする．このとき，μ は束 $\mathscr{A}$ 上の評価である．

例 5.3 よりわかるように，束上の正の評価は非単位的 Boole 環上の有限加法的測度の一般化である．

命題 5.4. X を束とし，$\mu\colon X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を正の評価とする．

$$d(x, y) = \mu(x \vee y) - \mu(x \wedge y)$$

と定義すれば，d は X 上の擬距離となる．

証明. d の非負性は μ の単調性よりわかる．$d(x, x) = \mu(x) - \mu(x) = 0$ も成り立つ．対称性は束演算の対称性よりわかる．後は三角不等式を示せばよい．モジュラー性と単調性より，

$$\begin{aligned}
\mu(x \vee y) + \mu(y \vee z) &= \mu(x \vee y \vee z) + \mu([x \vee y] \wedge [y \vee z]) \\
&\geq \mu(x \vee z) + \mu([x \vee y] \wedge [y \vee z])
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
\mu(x \wedge y) + \mu(y \wedge z) &= \mu([x \wedge y] \vee [y \wedge z]) + \mu([x \wedge y] \wedge [y \wedge z]) \\
&\leq \mu([x \wedge y] \vee [y \wedge z]) + \mu(x \wedge z)
\end{aligned}$$

が成り立つ．これと，束で一般に

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z)$$

が成り立つことに注意すれば，

$$\begin{aligned}
d(x, y) + d(y, z) &= \mu(x \vee y) - \mu(x \wedge y) + \mu(y \vee z) - \mu(y \wedge z) \\
&\geq \mu(x \vee z) + \mu([x \vee y] \wedge [y \vee z]) \\
&\quad - \mu([x \wedge y] \vee [y \wedge z]) - \mu(x \wedge z) \\
&= \mu(x \vee z) - \mu(x \wedge z) \\
&\quad + \mu([x \vee y] \wedge [y \vee z]) - \mu([x \wedge y] \vee [y \wedge z]) \\
&\geq \mu(x \vee z) - \mu(x \wedge z) \\
&= d(x, z)
\end{aligned}$$

がわかる，すなわち，三角不等式が成り立つ． □

命題 5.4 より，X 上の正の評価が与えられればそこから X 上の擬距離を定義でき，X 上の位相や一様系が定まる．そういった構造が束構造と整合的であることを示そう．

補題 5.5. X を束，μ を X 上の正の評価，d を μ から定まる X の擬距離とする．このとき，以下の不等式が成り立つ．

$$d(x \wedge a, y \wedge a) + d(x \vee a, y \vee a) \leq d(x, y).$$

証明．d の定義と $(x \wedge a) \vee (y \wedge a) \leq a \wedge (x \vee y)$ から，

$$\begin{aligned} d(x \wedge a, y \wedge a) &= \mu([x \wedge a] \vee [y \wedge a]) - \mu(x \wedge y \wedge a) \\ &\leq \mu(a \wedge (x \vee y)) - \mu(x \wedge y \wedge a) \\ &= \mu(a) + \mu(x \vee y) - \mu(x \vee y \vee a) - \mu(x \wedge y \wedge a) \end{aligned}$$

が成り立つ．また，$(x \wedge y) \vee a \leq (x \vee a) \wedge (y \wedge a)$ から同様に

$$\begin{aligned} d(x \vee a, y \vee a) &= \mu(x \vee y \vee a) - \mu([x \vee a] \wedge [y \vee a]) \\ &\leq \mu(x \vee y \vee a) - \mu([x \wedge y] \vee a) \\ &= \mu(x \vee y \vee a) - \mu(x \wedge y) - \mu(a) + \mu(x \wedge y \wedge a) \end{aligned}$$

もわかる．これらの式を足し合わせれば，

$$d(x \wedge a, y \wedge a) + d(x \vee a, y \vee a) \leq \mu(x \vee y) - \mu(x \wedge y) = d(x, y)$$

を得る． □

命題 5.6. X を束，μ を X 上の正の評価，d を μ から定まる X の擬距離とする．このとき，束演算 $\vee$ と $\wedge$ は Lipschitz 連続である．

証明．三角不等式と補題 5.5 から

$$\begin{aligned} & d(x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2) + d(x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2) \\ & \leq d(x_1 \wedge x_2, x_1 \wedge y_2) + d(x_1 \wedge y_2, y_1 \wedge y_2) \\ & \quad + d(x_1 \vee x_2, x_1 \vee y_2) + d(x_1 \wedge y_2, y_1 \vee y_2) \\ & \leq d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2) \end{aligned}$$

となることからわかる． □

命題 5.6 より，正の評価から定まる擬距離を入れた束は位相束となる．

命題 5.7. X を束，μ を X 上の正の評価，d を μ から定まる X の擬距離とする．評価 $\mu\colon X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ は d に関して Lipschitz 連続である．

証明．$x, y \in X$ とすれば，補題 5.5 より

$$\begin{aligned} |\mu(x) - \mu(y)| &\leq \mu(x \vee y) - \mu(x) + \mu(x \vee y) - \mu(y) \\ &= d(x \vee y, x) + d(x \vee y, y) \\ &\leq 2d(x, y) \end{aligned}$$

が成り立つ． □

束 X を正の評価により擬距離空間と考えたとき，X には擬距離空間としての完備性（Cauchy 完備性）と束としての完備性（順序完備性）を考えることができる．これらの概念を混同してはいけないが，一方で無関係なものでもない．

命題 5.8. 完備束 X は正の評価 μ を持つとする．μ が

$$
\begin{aligned}
x_n \uparrow a &\implies \mu(x_n) \to \mu(a) \\
x_n \downarrow a &\implies \mu(x_n) \to \mu(a)
\end{aligned}
$$

を満たすならば，X は μ から定まる擬距離について完備である．

補題 5.9. 束 X は正の評価から定まる距離 d を持つとする．(x_n) が X の点列なら，任意の n について

$$
d\left(\bigvee_{0\le k\le n} x_k, \bigwedge_{0\le k\le n} x_k\right) \le 2\sum_{k\le n-1} d(x_k, x_{k+1})
$$

証明. n に関する帰納法で示す．$n=1$ のとき，

$$
d(x_0\vee x_1, x_0\wedge x_1) \le d(x_0, x_1)
$$

が成り立つことは d の定義よりわかる．n で主張が成り立つとすれば，補題 5.5 より

$$
\begin{aligned}
& d\left(\bigvee_{0\le k\le n+1} x_k, \bigwedge_{0\le k\le n+1} x_k\right) \\
& \le d\left(\bigvee_{0\le k\le n} x_k, \bigwedge_{0\le k\le n} x_k\right) + d\left(\bigvee_{0\le k\le n+1} x_k, \bigvee_{0\le k\le n} x_k\right) + d\left(\bigwedge_{0\le k\le n+1} x_k, \bigwedge_{0\le k\le n} x_k\right) \\
& = 2\sum_{0\le k\le n-1} d\left(x_k, x_{k+1}\right) + d\left(x_{n+1}\vee\bigvee_{0\le k\le n} x_k, x_n\vee\bigvee_{0\le k\le n} x_k\right) \\
& \quad + d\left(x_{n+1}\wedge\bigwedge_{0\le k\le n} x_k, x_n\wedge\bigwedge_{0\le k\le n} x_k\right) \\
& \le 2\sum_{0\le k\le n-1} d\left(x_k, x_{k+1}\right) + 2d(x_n, x_{n+1})
\end{aligned}
$$

となり，やはり主張が成り立つ． □

命題 *5.8* の証明. 擬距離空間の Cauchy 完備性を示すためには，任意の Cauchy 列が収束することを示せばよいのであった．(x_n) を μ から定まる擬距離 d に関する Cauchy 列とし，

$$
d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \le \frac{1}{2^{k+1}}
$$

を満たすような部分列を選ぶ．このとき μ に関する仮定より

$$
\begin{aligned}
d\left(\bigvee_{l\geq k} x_{n_l}, \bigwedge_{l\geq k} x_{n_l}\right) &= \mu\left(\bigvee_{l\geq k} x_{n_l}\right) - \mu\left(\bigwedge_{l\geq k} x_{n_l}\right) \\
&= \lim_{m\to\infty}\left[\mu\left(\bigvee_{k\leq l\leq m} x_{n_l}\right) - \mu\left(\bigwedge_{k\leq l\leq m} x_{n_l}\right)\right] \\
&= \lim_{m\to\infty} d\left(\bigvee_{k\leq l\leq m} x_{n_l}, \bigwedge_{k\leq l\leq m} x_{n_l}\right) \\
&\leq \lim_{m\to\infty} \sum_{k\leq l\leq m-1} d(x_{n_l}, x_{l+1}) \\
&\leq \frac{1}{2^k}
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
d\left(x_{n_k}, \bigwedge_{l\geq k} x_{n_l}\right) \leq d\left(\bigvee_{l\geq k} x_{n_l}, \bigwedge_{l\geq k} x_{n_l}\right) \leq \frac{1}{2^k}
$$

が成立．これより $x_{n_k} \to \liminf_k x_{n_k}$ in d がわかる．(x_n) は d に関する Cauchy 列でその部分列が $\liminf_k x_{n_k}$ に収束するから，(x_n) 自身も d について $\liminf_k x_{n_k}$ に収束する． □

命題 5.10. X は 0 を持つ束とし，μ は X 上の正の評価とする．このとき，$I = \{x \in X \mid \mu(x) = 0\}$ は X のイデアルであり，X/I は μ から誘導される擬距離の商をとることにより距離空間となる．

証明. $I = \{x \in X \mid \mu(x) = 0\}$ がイデアルになることは，正の評価 μ の正値性とモジュラー性よりわかる．イデアル I の定める同値関係は，「ある $a \in I$ が存在して $x \vee a = y \vee a$ が成り立つ」と定義されるのであった．そのような a について

$$
\begin{aligned}
d(x\vee a, x) = \mu(x\vee a) - \mu(x) = \mu(x) + \mu(a) + \mu(x\wedge a) - \mu(x) = 0 \\
d(y\vee a, y) = \mu(y\vee a) - \mu(y) = \mu(y) + \mu(a) + \mu(y\wedge a) - \mu(y) = 0
\end{aligned}
$$

が成り立つから，

$$
d(x,y) \leq d(x, x\vee a) + d(x\vee a, y\vee a) + d(y\vee a, y) = 0
$$

となる．ゆえに，x と y が I の定める距離について同値なら $d(x,y) = 0$ となり，d によって X/I 上に誘導される擬距離は距離となる． □

A　フレームのコンパクト性

本節では，位相空間がコンパクトになるための条件を位相の準基の言葉で与える定理を証明する．せっかく束を考えているので，フレームのレベルで定式化しておく．

X をフレームとし，$B \subset X$ とする．全ての $x \in X$ に対してある $A \subset B$ が存在して $\bigvee A = x$ となるとき，B は X の基底であるという．また，$S \subset X$ の元の有限個の交わり全体の集合が X の基底となるとき，S は X の準基であるという．$\bigvee A = 1$ となるような $A \subset X$ をフレーム X の被覆といい，$B \subset A$ かつ $\bigvee B = 1$

となるような部分集合を A の部分被覆という．フレームがコンパクトであるとは，もちろん全ての被覆が部分被覆をもつということである．

命題 A.1 (Alexander の定理)**.** X をフレームとし，S をその準基とする．X がコンパクトになるための必要十分条件は，S の元からなる任意の被覆が部分被覆をもつことである．

補題 A.2. X をフレームとし，$\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ を

$$\mathscr{F} = \left\{ A \subset X \,\middle|\, \text{任意の有限集合 } F \subset A \text{ に対して } \bigvee F < 1 \text{ が成り立つ} \right\}$$

と定義する．また M は $\mathscr{F}$ の極大元であるとする．S が X の有限集合で $\bigwedge S \in \downarrow M$ を満たすなら，ある $s \in S$ について $s \in M$ が成り立つ．

証明. S は有限集合で，$S \cap M = \emptyset$ を満たすものとする．M の極大性より，各 $s \in S$ に対して有限個の $x(s,1), \ldots, x(s,n_s)$ で $s \vee x(s,1) \vee \cdots \vee x(s,n_s) = 1$ を満たすものが存在する．このとき，分配則から

$$\begin{aligned}
\left(\bigwedge S\right) \vee \bigvee_{t \in S} \bigvee_{1 \le i \le n_t} x(t,i) &= \left(\bigwedge_{s \in S} s\right) \vee \bigvee_{t \in S} \bigvee_{1 \le i \le n_t} x(t,i) \\
&= \bigwedge_{s \in S} \left(s \vee \bigvee_{t \in S} \bigvee_{1 \le i \le n_t} x(t,i) \right) \\
&\ge \bigwedge_{s \in S} \left(s \vee \bigvee_{1 \le i \le n_s} x(s,i) \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

が成り立つ．有限族 $\{x(s,i); s \in S,\ 1 \le i \le n_s\}$ は M の部分集合だから，$M \in \mathscr{F}$ の極大性より $\bigwedge S \notin M$ である．さらにある $a \in M$ について $\bigwedge S \le a$ なら

$$a \vee \bigvee_{t \in S} \bigvee_{1 \le i \le n_t} x(t,i) \ge \left(\bigwedge S\right) \vee \bigvee_{t \in S} \bigvee_{1 \le i \le n_t} x(t,i) \ge 1$$

となるが，これも $M \in \mathscr{F}$ の極大性に反する． □

命題 A.1 の証明. 必要性は明らかなので，十分性を示せばよい．S の元からなる任意の被覆が部分被覆をもつと仮定しよう．B を S から生成される X の基底とする．このとき，$A \subset X$ が任意の有限集合 $F \subset A$ に対して $\bigvee F < 1$ を満たすなら，$\bigvee A < 1$ となることを示せばよい．$\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ を，補題 A.2 のものとする．$\mathscr{F}$ は有限特性の集合族なので，Tukey の補題より $A \subset M$ かつ包含関係について極大な $M \in \mathscr{F}$ が存在する．このとき，$\bigvee M < 1$ であることを示そう．

いま S は X の準基なので，任意の $x \in M$ は

$$x = \bigvee_{\lambda \in \Lambda(x)} \bigwedge S(x,\lambda)$$

のように表現される．このとき任意の $\lambda \in \Lambda(x)$ について $x \ge \bigwedge S(x,\lambda)$ であるから，補題 A.2 により $s_{x,\lambda} \in M$ なる $s_{x,\lambda}$ を選ぶことができる．したがって

$$\bigvee M = \bigvee_{x \in M} \bigvee_{\lambda \in \Lambda(x)} s_{x,\lambda} \le \bigvee_{s \in M \cap S} s < 1$$

となり，$\bigvee M < 1$ が示された． □

系 A.3. X を位相空間とし，$\mathscr{S}$ をその閉集合系の準基とする．X がコンパクトになるための必要十分条件は，任意の $\mathscr{F} \subset \mathscr{S}$ について，$\mathscr{F}$ が有限交叉性をもつなら $\bigcap \mathscr{F} = \emptyset$ が成り立つことである．

References

[1] R. Beattie and H.-P. Butzmann. *Convergence Structures and Applications to Functional Analysis.* Springer Netherlands, 2002. DOI: 10.1007/978-94-015-9942-9.

[2] Garrett Birkhoff. *Lattice theory.* 3rd ed. American Mathematical Society Colloquium Publications XXV. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1967, pp. vi+418.

[3] Orrin Frink. "Topology in Lattices". In: *Transactions of the American Mathematical Society* 51.3 (1942), pp. 569–582. ISSN: 00029947. DOI: 10.2307/1990078. URL: http://www.jstor.org/stable/1990078.

[4] G. Gierz et al. *Continuous Lattices and Domains.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications 93. Cambridge University Press, 2003. DOI: 10.1017/CBO9780511542725.

[5] Steven Givant and Paul Halmos. *Introduction to Boolean Algebras.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, 2009. DOI: 10.1007/978-0-387-68436-9.

[6] George Grätzer. *Lattice Theory: Foundation.* Springer Basel, 2011. DOI: 10.1007/978-3-0348-0018-1.

[7] Klaas Pieter Hart, Jun-iti Nagata, and Jerry E. Vaughan, eds. *Encyclopedia of General Topology.* Elsevier Science, 2004, pp. x+526. ISBN: 0-444-50355-2. URL: https://www.elsevier.com/books/encyclopedia-of-general-topology/hart/978-0-444-50355-8.

[8] Peter T. Johnstone. *Stone Spaces.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics 3. Cambridge University Press, 1982.

[9] John L. Kelley. *General Topology.* Graduate Texts in Mathematics 27. Originally published by Van Nostrand, 1955. Springer-Verlag New York, 1975, pp. xiv+298. URL: https://www.springer.com/la/book/9780387901251.

[10] Serge Lang. *Algebra.* Revised third edition. Graduate Texts in Mathematics 211. Springer-Verlag New York, 2002. ISBN: 9780387953854. DOI: 10.1007/978-1-4613-0041-0. URL: https://www.springer.com/us/book/9780387953854.

[11] Jorge Picado and Aleš Pultr. *Frames and Locales: Topology without points.* Frontiers in Mathematics. Springer Basel, 2012. DOI: 10.1007/978-3-0348-0154-6.

[12] Dona Papert Strauss. "Topological Lattices". In: *Proceedings of the London Mathematical Society* s3-18.2 (Apr. 1968), pp. 217–230. ISSN: 0024-6115. DOI: 10.1112/plms/s3-18.2.217. URL: http:https://doi.org/10.1112/plms/s3-18.2.217.

索引