位相空間論セミナー IV：コンパクト空間 Ver.1.2

大阪大学大学院基礎工学
平井祐紀

2020 年 4 月 23 日

更新履歴
2018.9.14 コンパクト化など加筆．ver.1.1
2020.4.23 誤植を訂正．索引を作成．ver.1.2

概要

今回のセミナーでは，位相空間論において重要な概念であるコンパクト性について学ぶ．

目次

1 有向族とフィルターについての補足

有向族とフィルターについては第 1 回のセミナーで基本的な事実を述べたが，重要な概念を導入し忘れていたのでここで扱う．

定義 1.1. X を位相空間とする．

(i) $x=(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の有向族とし，$a\in X$ とする．a の任意の近傍 V と任意の $\lambda_0\in\Lambda$ に対して，

$$\exists\lambda\,(\lambda\geq\lambda_0\wedge x_\lambda\in U)$$

が成り立つとき，a を有向族 x の群集点 (cluster point) と呼ぶ．

(ii) $\mathscr{B}$ を X のフィルター基底とする．任意の $B\in\mathscr{B}$ に対して $x\in\overline{B}$ が成り立つとき，x は $\mathscr{B}$ の群集点であるという．

cluster point の訳を群集点としたのは，このノート独自の用語である．適当な訳語がないので，とりあえずこう呼ぶことにする．群集という言葉は人や生物の集まりに使われることが多いようだが，漢字が何となく群集点の雰囲気を表してないだろうか？（そうでもないかも知れない．）Cluster point は集積点や収積点と訳されることがある．位相空間論について集積点という用語は accumulation point の訳としても用いられるので，あまり望ましくないだろう．位相空間 X の部分集合 $A\subset X$ の集積点 (accumulation point) とは，$x\in X$ であって，x の全ての近傍 V について $(V\setminus\{x\})\cap A$ が空でないような点のことであった．収積点という用語も集積点と紛らわしいので，あまり良くないように思う．

有向族の極限点は，明らかに群集点でもある．x がフィルター基底 $\mathscr{B}$ の極限点なら，それは群集点でもある．実際，$B\in\mathscr{B}$ とすれば，$\mathscr{B}$ は x に収束することから B はある $U\in\mathscr{V}_x$ を含む．V を x の任意の近傍とすれば，$\emptyset\neq V\cap U\subset V\cap B$ となるから，$V\cap B$ は空ではない．したがって $x\in\overline{B}$ がわかる．

命題 1.2. X を位相空間，$x\colon\Lambda\to X$ を有向族とする．a が x のある部分有向族の群集点ならば，a は x の群集点である．

証明. $y=\varphi\circ x\colon M\to X$ は a を群集点に持つような x の部分有向族とする．$V\in\mathscr{V}_a$ および $\lambda\in\Lambda$ とし，$\mu\in M$ を次を満たすように選ぶ．

$$\forall\mu'\in M(\mu'\geq\mu\implies\varphi(\mu')\geq\lambda).$$

a が y の群集点であることに注意すれば，$y_{\mu'}\in V$ を満たすような $\mu'\geq\mu$ がとれる．ここで $\lambda'=\varphi(\mu')$ とすれば，$\lambda'\geq\lambda$ かつ $x_{\lambda'}=x_{\varphi(\mu')}=y_{\mu'}\in V$ が成り立つ．λ と V は任意にとっていたので，a は x の群集点であることが示された． □

仰々しく群集点という言葉を導入してみたが，実は群集点は部分有向族の収束を用いて特徴づけられる．

命題 1.3. $x=(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間 X の有向族とし，$a\in X$ とする．このとき，次の 2 条件は同値である．

(i) a は (x_λ) の群集点である．

(ii) a に収束する (x_λ) の部分有向族が存在する．

証明. **(i) $\Longrightarrow$ (ii).** a の近傍系 $\mathscr{V}_a$ を逆向きの包含関係により有向集合と考える．このとき

$$M=\{(\lambda,V)\in\Lambda\times\mathscr{V}_a\mid x_\lambda\in V\}$$

は直積順序の制限により有向集合となる．写像 $\varphi\colon M\to\Lambda$ を $\varphi(\lambda,V)=\lambda$ と定めれば，$y:=\varphi\circ x$ は x の部分有向族である．ここで $V\in\mathscr{V}_a$ を任意に選ぶと，$x_\lambda\in V$ なる λ が存在する．$(\lambda',V')\geq(\lambda,V)$ とすれば，$x_{\lambda'}\in V'\subset V$ である．すなわち $(y_\mu)_{\mu\in M}$ は a に収束する．

(ii) $\Longrightarrow$ (i). $y = (y_\mu)_{\mu \in M} = \varphi \circ x$ を a に収束する x の部分有向族とし，$V \in \mathscr{V}_a$ と $\lambda \in \Lambda$ 任意に選ぶ．y が x の部分有向族であることから，ある $\mu_1 \in M$ で

$$\forall \mu (\mu \geq \mu_1 \implies \varphi(\mu) \geq \lambda)$$

を満たすものがとれる．さらに y は a に収束するから，$\mu_2 \in M$ をうまく選べば

$$\forall \mu \, (\mu \geq \mu_2 \implies y_\mu \in V)$$

が成り立つ．ここで $\mu \geq \mu_1$ かつ $\mu \geq \mu_2$ を満たすような μ を一つ選んで $\lambda' = \varphi(\mu)$ と定める．この λ' は $\lambda' \geq \lambda$ かつ $x_{\lambda'} \in V$ を満たしている．いま V, λ は任意に選んだから，a は x の群集点であることがわかる． □

フィルターの群集点についても似たような性質が成り立つ．

命題 1.4. X を位相空間とし，$\mathscr{B}$ を X 上のフィルター基底とする．$x \in X$ があるフィルター基底 $\mathscr{B}' \supset \mathscr{B}$ の群集点ならば，x は $\mathscr{B}$ の群集点でもある．

証明．明らか． □

補題 1.5. X を集合とし，$\mathscr{C}$ をその部分集合族で，空でないものとする．任意の空でない有限部分集合 $\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$ に対して $\bigcap \mathscr{C}' \neq \emptyset$ が成り立つならば，以下の集合族は X 上のフィルター基底である．

$$\mathscr{B} = \left\{ \bigcap \mathscr{C}' \,\middle|\, \mathscr{C}' \text{ は } \mathscr{C} \text{ の空でない有限部分集合} \right\}$$

証明．仮定より $\mathscr{B}$ は明らかに空集合ではなく，また空集合を元にもたない．また $\mathscr{B}$ はその定義より共通部分をとる操作について閉じている．よって $\mathscr{B}$ は X 上のフィルター基底である． □

補題 1.5 のフィルター基底 $\mathscr{B}$ を，部分集合族 $\mathscr{C}$ によって生成されるフィルター基底などと呼ぶ．

命題 1.6. X を位相空間とし，$\mathscr{F}$ を X 上のフィルターとする．$x \in X$ が $\mathscr{F}$ の群集点であるための必要十分条件は，$\mathscr{F}$ より細かいフィルターで x に収束するものが存在することである．

証明．十分性は命題 1.4 より直ちに従うので，必要性を示せばよい．

$x \in X$ をフィルター $\mathscr{F}$ の群集点とする．まずは $\mathscr{V}_x$ を x の近傍系としたとき，$\mathscr{F} \cup \mathscr{V}_x$ が補題 1.5 の仮定を満たすことを示そう．$A_0, \ldots, A_n \in \mathscr{F}$ および $B_0, \ldots, B_m \in \mathscr{V}_x$ とすれば，$\mathscr{F}$ と $\mathscr{V}_x$ はともにフィルターであることから $\bigcap_k A_k \in \mathscr{F}$ かつ $\bigcap_l B_l \in \mathscr{V}_x$ がわかる．いま $x \in X$ は $\mathscr{F}$ の群集点だから，$\bigcap_k A_k \cap \bigcap_l B_l \neq \emptyset$ が成立．よって $\mathscr{F} \cup \mathscr{V}_x$ は補題 1.5 の条件を満たし，それによって生成されるフィルター基底 $\mathscr{B}$ が存在する．このフィルター基底 $\mathscr{B}$ は定義より $\mathscr{V}_x$ を含み，それゆえ x に収束する．したがって $\mathscr{B}$ によって生成されるフィルター $\mathscr{F}$ より細かく，x に収束するものである． □

上の命題の証明で用いられたフィルター基底 $\mathscr{B}$ によって生成されるフィルターは，$\mathscr{F} \cup \mathscr{V}_x$ を含む最小のフィルターとなっている．すなわち，これはフィルター族 $\{\mathscr{F}, \mathscr{V}_x\}$ の上限である．フィルター族の下限は常に存在したが，上限は存在するとは限らない．

系 1.7. 位相空間 X 上の超フィルター $\mathscr{F}$ が $x \in X$ に収束するための必要十分条件は，x が $\mathscr{F}$ の群集点であることである．

証明．超フィルター $\mathscr{F}$ が x に収束すれば，明らかに x は $\mathscr{F}$ の群集点である．逆に x が $\mathscr{F}$ の群集点であれば，命題 1.6 より $\mathscr{F}$ より細かいフィルター $\mathscr{F}'$ で x に収束するものが存在する．いま $\mathscr{F}$ は超フィルターであったから，極大性より $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$ となる．すなわち $\mathscr{F}$ は x に収束する． □

命題 1.8. X と Y を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．$x \in X$ がフィルター基底 $\mathscr{B}$ の群集点ならば，$f(x)$ はフィルター基底 $f_*\mathscr{B}$ の群集点である．

証明．x を $\mathscr{B}$ の群集点とする．このとき f の連続性より，任意の $B \in \mathscr{B}$ に対して $f(x) \in f(\overline{B}) \subset \overline{f(B)}$ が成り立つ．よって $f(x)$ は $f_*\mathscr{B}$ の群集点である． □

2 コンパクト空間

本節ではコンパクト空間を定義し，その基本的な性質を調べる．

X を集合とする．$\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ が $X' \subset X$ の被覆 (cover) であるとは $\bigcup \mathscr{A} \supset X'$ を満たすということであった．$\mathscr{A}$ の部分集合 $\mathscr{A}'$ がまた X' の被覆であるとき，$\mathscr{A}'$ を $\mathscr{A}$ の部分被覆 (subcover) とよぶ．$\mathscr{P}(X)$ の部分集合の代わりに，像が X' の被覆であるような族 $\Lambda \to \mathscr{P}(X)$ のことを被覆とよぶことも多い．この場合，部分被覆とは包含写像 $\Lambda' \hookrightarrow \Lambda$ と被覆の合成のことである．

空でない $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ において，任意の $n \in \mathbb{N}$ と $F_0, \dots, F_n \in \mathscr{F}$ に対して $\bigcap_{0 \le k \le n} F_k \neq \emptyset$ が成り立つとき，$\mathscr{F}$ が有限交叉性 (finite intersection property) を持つという．

X が位相空間であるとき，開集合からなる X の被覆を開被覆 (open cover) という．A が X の部分位相空間であるとき，X の開集合からなる A の被覆を，X における A の開被覆とよぶことにする．

定義 2.1. X を位相空間とする．X の任意の開被覆が有限部分被覆をもつとき，X をコンパクト (compact) 空間と呼ばれる．X の部分集合 A は X の部分位相空間としてコンパクトであるとき，コンパクトであるという．

コンパクト性の定義に Hausdorff 空間であることを要請し，ここでのコンパクト空間を準コンパクト (quasi-compact) などと呼ぶ流儀もある*1．位相空間 X の部分集合 A がコンパクトであるための必要十分条件は，X における A の任意の開被覆はかならず有限部分被覆をもつということである．

任意の密着空間はコンパクト空間である．離散空間がコンパクトであるための条件は，それが有限集合であることである．Hausdoff 性は位相が細かければ細かいほど成り立ちやすい性質であったが，コンパクト空間は逆に位相が粗いほど成り立ちやすい性質である．

コンパクト空間は以下のように特徴付けられる．

定理 2.2. X を位相空間とする．このとき，次の二条件は同値である．

(i) X はコンパクト空間である．
(ii) X の閉集合からなる族 $\mathscr{F}$ が有限交叉性をもつならば，$\bigcap \mathscr{F} \neq \emptyset$ が成り立つ．

証明．**(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明.** X はコンパクトであると仮定し，条件 (ii) の対偶を示す．$\mathscr{F}$ は共通部分が空であるような X の閉集合族とする．

$$\mathscr{U} = \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{F}\}$$

*1 Engelking [2] や Bourbaki [1] などを見よ．

と定めれば，

$$\bigcup \mathscr{U} = \bigcup_{F \in \mathscr{F}} X \setminus F = X \setminus \bigcap \mathscr{F} = X$$

となり，$\mathscr{U}$ は X の開被覆である．X はコンパクトなので，$\mathscr{U}$ の部分被覆 $\{U_0, \ldots, U_n\}$ を選び出すことが出来る．いま $F_k = X \setminus U_k$ とおけば，

$$\bigcap_{0 \leq k \leq n} F_k = \bigcap_{0 \leq k \leq n} X \setminus U_k = X \setminus \bigcup_{0 \leq k \leq n} U_k = \emptyset$$

である．定義より $\{F_0, \ldots, F_n\} \subset \mathscr{F}$ だったから，$\mathscr{F}$ は有限交叉性を持たないことが示された．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． 逆とほとんど一緒だが，こっちもきちんと証明してみよう．X は条件 (ii) を満たす位相空間とし，$\mathscr{U}$ を X の開被覆とする．

$$\mathscr{F} = \{X \setminus U \mid U \in \mathscr{U}\}$$

と定めれば，$\mathscr{F}$ は明らかに X の閉集合族である．また，$\mathscr{U}$ が開被覆であることから

$$\bigcap \mathscr{F} = X \setminus \bigcup \mathscr{U} = \emptyset$$

が成り立つ．いま，X は条件 (ii) を満たす位相空間だったから，有限個の元 $F_0, \ldots, F_n \in \mathscr{F}$ でその共通部分が空であるようなものを選び出すことができる．$U_k = X \setminus F_k$ $(0 \leq k \leq n)$ とすれば，これらは $\{U_0, \ldots, U_n\} \subset \mathscr{U}$ および

$$\bigcup_{0 \leq k \leq n} U_k = X \setminus \bigcap_{0 \leq k \leq n} F_k$$

を満たす．こうして $\mathscr{U}$ の有限部分被覆 $\{U_0, \ldots, U_n\}$ を作り出すことが出来たから，X はコンパクトである． □

コンパクト空間は収束の言葉をつかって特徴付けることもできる．

定理 2.3. X を位相空間とする．このとき，次の条件は同値である．

(i) X はコンパクト空間である．
(ii) X の任意の有向族は群集点を持つ．
(iii) X の任意の有向族は収束する部分有向族を持つ．
(iv) X の任意のフィルターは群集点を持つ．
(v) X の任意の超フィルターは収束する．

証明．**(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明．** X をコンパクト空間とし，$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を X の有向族とする．X の閉集合族 $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を

$$F_\lambda = \mathrm{Cl}\{x_{\lambda'} \mid \lambda' \geq \lambda\}$$

によって定義する．このとき，$(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は有限交叉性をもつ族である．実際，$\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ を任意に選んだとき，$\lambda_0, \ldots, \lambda_n \leq \widetilde{\lambda}$ に[*2]対して

$$\bigcap_{0 \leq k \leq n} F_{\lambda_k} \supset \{x_{\lambda'} \mid \lambda' \geq \widetilde{\lambda}\} \neq \emptyset$$

[*2] Λ は有向族だからこのような $\widetilde{\lambda}$ が存在する．

となる．いま X はコンパクト空間であったから，定理 2.2 より $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ は空でないことがわかる．このとき $a\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ は $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の群集点であることを示そう．a の近傍 V と $\lambda\in\Lambda$ を任意に選べば，$V\cap\{x_{\lambda'};\lambda'\geq\lambda\}\neq\emptyset$ が成立[*3]．これは a が (x_λ) の群集点であるということに他ならない．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． 位相空間 X は条件 (ii) を満たすとし，有限交叉性をもつ閉集合族 $\mathscr{F}$ を考える．$\mathscr{F}$ の有限部分集合全体 Λ において，関係 $\lambda\leq\lambda'$ を

$$\lambda\leq\lambda' :\Longleftrightarrow \bigcap\lambda\supset\bigcap\lambda'$$

によって定義する．この順序により，Λ は有向集合となる．有向族 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in\prod_{\lambda\in\Lambda}\lambda$ を任意に選べば，条件 (ii) より (x_λ) には群集点 a が存在する．このとき $a\in\bigcap\mathscr{F}$ を示すことが目標となる．$F_0\in\mathscr{F}$ を任意に選ぶ．a は (x_λ) の群集点だから，a の任意の近傍 U に対して，ある $\lambda=\{F_1,\dots,F_n\}\geq\lambda_0:=\{F_0\}$ で $x_\lambda\in U$ を満たすものが存在する．

$$x_\lambda\in\left(\bigcap_{1\leq k\leq n} F_k\right)\cap U\subset F_0\cap U$$

より $F_0\cap U\neq\emptyset$ が成立．U は a の近傍を任意に選んだものだったから，これより a は F_0 の触点であることがわかる．今 F_0 は閉集合だったから，$a\in F_0$ である．F_0 は $\mathscr{F}$ の元を任意に選んでいたから，$a\in\bigcap\mathscr{F}$ となる．すなわち $\bigcap\mathscr{F}$ は空でなく，定理 2.2 より X はコンパクト性が従う．

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) の証明． 命題 1.3 より明らか．

(i) $\Longrightarrow$ (iv) の証明． $\mathscr{F}$ をコンパクト空間 X 上のフィルターとし，

$$\mathscr{C}=\{\operatorname{Cl}F\mid F\in\mathscr{F}\}$$

と定義する．フィルターの定義よりこの $\mathscr{C}$ は有限交叉性を持つ．今 X はコンパクトだから $\bigcap\mathscr{C}$ は空ではない．よって $x\in\bigcap\mathscr{C}$ が存在するが，この x は明らかに $\mathscr{F}$ の群集点である．

(iv) $\Longrightarrow$ (i) の証明． 位相空間 X は (iv) を満たすと仮定し，$\mathscr{F}$ を X の閉集合族で有限交叉性をもつようなものとする．補題 1.5 より $\mathscr{F}$ によって生成される X のフィルター基底が存在するから，それを $\mathscr{B}$ で表すことにする．このとき $\mathscr{B}$ の元はどれも空でない閉集合であることに注意する．$\mathscr{B}$ によって生成されるフィルターの群集点を a で表せば，任意の $B\in\mathscr{B}=B$ に対して $a\in\operatorname{Cl}B=B$ が成り立つ．よって

$$a\in\bigcap\mathscr{B}\subset\bigcap\mathscr{F}$$

であり，$\bigcap\mathscr{F}$ は空でない．

(iv) $\Longleftrightarrow$ (v) の証明． X 上の任意のフィルターが群集点をもつならば，もちろん X 上の任意の超フィルターは群集点をもつ．系 1.7 より超フィルターはその群集点に収束するから，X 上の任意の超フィルターは収束する．

逆に X 上の任意の超フィルターが収束すると仮定する．X の任意のフィルター $\mathscr{F}$ にはそれより細かい超フィルターが存在し，仮定よりその超フィルターは収束する．$\mathscr{F}$ より細かい収束フィルターが存在するから，命題 1.6 により $\mathscr{F}$ は群集点をもつ．□

位相空間のコンパクト性は射影の言葉を使って表現することも出来る．その証明のために一つ補題を用意する．

[*3] a は F_λ の元，すなわち集合 $\{x_{\lambda'}\mid\lambda'\geq\lambda\}$ の触点なので，a の任意の近傍 W に対して $W\cap\{x_{\lambda'}\mid\lambda'\geq\lambda\}\neq\emptyset$ が成り立つ．

補題 2.4. X を位相空間とし，A をその部分集合とする．このとき，次の条件 (i)–(iii) は同値である．

(i) A はコンパクトである．

(ii) Y を任意の位相空間，$y \in Y$ を任意の点とする．このとき積空間 $X \times Y$ における $A \times \{y\}$ の任意の開近傍 W に対して，A の開近傍 U と y の開近傍 V で，$U \times V \subset W$ を満たすものが存在する．

(iii) Y を任意の位相空間，$y \in Y$ を任意の点とする．このとき積空間 $X \times Y$ における $A \times \{y\}$ の任意の開近傍 W に対して，y の開近傍 V で $A \times V \subset W$ を満たすものが存在する．

A が 1 点集合のとき，積位相の定義より条件 (ii) が満たされることは明らかである．この命題は，コンパクト空間が位相的に有限集合と同じような性質をもつことを示唆している．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii) : W を積空間 $X \times Y$ における $A \times \{y\}$ の開近傍とすれば，任意の $x \in A$ に対して x の開近傍 U_x と y の開近傍 V_x で $U_x \times V_x \subset W$ を満たすものが存在する．A はコンパクトだから，有限個の $x_0, \ldots, x_n$ で $A \subset \bigcup_{0 \leq i \leq n} U_{x_i}$ を満たすものを選ぶことが出来る．このとき

$$A \times \{y\} \subset \left(\bigcup_{0 \leq i \leq n} U_{x_i} \right) \times \left(\bigcap_{0 \leq i \leq n} V_{x_i} \right) \subset \bigcup_{0 \leq i \leq n} U_{x_i} \times V_{x_i} \subset W$$

が成り立つから，$U = \bigcup_{0 \leq i \leq n} U_{x_i}$ および $V = \bigcap_{0 \leq i \leq n} V_{x_i}$ と定めればよい．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : 明らか．

(iii) $\Longrightarrow$ (i) : $(U_i)_{i \in I}$ を X における A の開被覆とし，$Y = \mathbb{2}^I$ を積位相空間とする[*4]．$y \in Y$ は定数関数 $i \mapsto 1$ を表すものとする．また，第 i 射影 $\mathrm{pr}_i \colon Y \to \mathbb{2}$ を用いて Y の開集合 V_i を $V_i = \mathrm{pr}_i^{-1}(1)$ と定義する[*5]．さらに，積空間 $X \times Y$ の開集合 W を $W = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i$ によって定める．このとき W は $A \times \{y\}$ の開近傍であるから，条件 (iii) より y の開近傍 V で $A \times V \subset W$ を満たすものが存在する．さらに，積位相の性質よりある空でない有限集合 $J \subset I$ で $y \in V_J := \bigcap_{i \in J} \mathrm{pr}_i^{-1}(1) \subset V$ を満たすものがとれる[*6]．

この J に対して $(U_i)_{i \in J}$ が A の被覆であることを示そう．J の特性関数 $1_J \colon I \to \mathbb{2}$ は V_J の元であるから，$A \times \{1_J\} \subset A \times V \subset W$ が成り立っている．これより

$$(X \times \{1_J\}) \cap W = \bigcup_{i \in I} [(U_i \times V_i) \cap (X \times \{1_J\})] = \bigcup_{i \in J} U_i \times \{1_J\}$$

となり，

$$A \times \{1_J\} \subset (X \times \{1_J\}) \cap W = \bigcup_{i \in J} U_i \times \{1_J\}$$

がわかる．ゆえに $A \subset \bigcup_{i \in J} U_i$ がなりたち，$(U_i)_{i \in J}$ は実際に A の被覆となっている．以上の議論により，A の X における任意の開被覆は有限部分被覆をもつことが示された． □

定理 2.5. 位相空間 X について，次の 2 条件は同値である．

(i) X はコンパクトである．

(ii) 任意の位相空間 Y に対して，射影 $\mathrm{pr}_2 \colon X \times Y \to Y$ は閉写像である．

[*4] このセミナーでは，$\mathbb{2}$ は有限集合 $2 = \{0, 1\}$ に開集合系 $\{0, \{1\}, 2\}$ を入れた位相空間を表すのであった．

[*5] 積位相の定義より V_i は実際に開集合であることがわかる．

[*6] $\mathbb{2}$ の開集合は $\{1\}$ か $\{0, 1\}$ しかないことに注意．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii)．X をコンパクト空間，Y を位相空間とし，F を積空間 $X \times Y$ の閉集合とする．$\mathrm{pr}_2(F) = Y$ なら，これはあきらかに閉集合である．$\mathrm{pr}_2(F) \subsetneq Y$ であるとき，$Y \setminus \mathrm{pr}_2(F)$ が Y の開集合であることを示す．$y \in Y \setminus \mathrm{pr}_2(F)$ を任意に選ぶ．いま

$$X \times \{y\} \subset (X \times Y) \setminus \mathrm{pr}_2^{-1}\mathrm{pr}_2(F) \subset (X \times Y) \setminus F$$

であるから，補題 2.4 の (i) $\Longrightarrow$ (iii) より y の開近傍 V で $X \times V \subset (X \times Y) \setminus F$ を満たすものがとれる．このとき $\mathrm{pr}_2^{-1}(V) \cap F = \emptyset$ なので，$V \cap \mathrm{pr}_2(F) \neq \emptyset$ である[*7]．ゆえに $V \subset Y \setminus \mathrm{pr}_2(F)$ が成り立つ．いま V は y の開近傍であったから，これにより $Y \setminus \mathrm{pr}_2(F)$ は Y の開集合であることがわかる．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．条件 (ii) が成り立つと仮定したとき，空間 X が補題 2.4 の条件 (iii) を満たすことを示す．Y を任意の位相空間とし，$y \in Y$ を任意の点とする．$X \times \{y\} \subset W$ なる開集合 $W \subset X \times Y$ をとれば，条件 (ii) より $\mathrm{pr}_2(X \times Y \setminus W)$ は Y の閉集合である．いま $y \notin \mathrm{pr}_2(X \times Y \setminus W)$ なので，y の適当な開近傍を選べば $V \cap \mathrm{pr}_2(X \times Y \setminus W) = \emptyset$ が成り立つ．すなわち $\mathrm{pr}_2^{-1}(V) \cap (X \times Y \setminus W) = \emptyset$ であり[*8]，

$$X \times \{y\} \subset X \times V = \mathrm{pr}_2^{-1}(V) \subset W$$

となる．以上の議論により，X は補題 2.4 の条件 (iii) を満たすことが示された． □

3 コンパクト空間の構成

本節では，コンパクト空間が与えられたときに，それを用いて新たなコンパクト空間を構成する方法を調べる．

命題 3.1. コンパクト空間の閉部分空間はコンパクトである．

証明．X をコンパクト空間，A をその閉部分空間とする．$\mathscr{F}$ を A の閉集合族で，有限交叉性をもつものとする．A は X の閉集合であるから，$\mathscr{F}$ の元は X の閉集合族でもある．X はコンパクトなので，$\emptyset \neq \bigcap \mathscr{F} \subset A$ が成立．よって，A はコンパクトである． □

命題 3.2. X を位相空間とし，$A_1, \ldots, A_n$ をそのコンパクト集合とする．このとき $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ もコンパクトである．

証明．$A_1 \cup \cdots \cup A_n$ の開被覆は各 A_i の開被覆でもあるから，それぞれ有限部分被覆をもつ．それらの有限部分被覆をあわせたものは，$A_1 \cup \cdots \cup A_n$ の被覆になっている． □

命題 3.3. X および Y を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．X がコンパクト空間ならば，$f(X)$ は Y のコンパクト集合である．

[*7] 一般に，写像 $f\colon A \to B$ と $A' \subset A$，$B' \subset B$ に対して，$A' \cap f^{-1}(B') \neq \emptyset$ は $f(A') \cap B' \neq \emptyset$ と同値である．実際，$A' \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$ ならば

$$\emptyset \subsetneq f(A' \cap f^{-1}(B')) \subset f(A') \cap ff^{-1}(B) \subset f(A') \cap B$$

となり，$f(A') \cap B'$ も空ではない．逆に $f(A') \cap B'$ が空でないと仮定し $y \in f(A') \cap B$ を任意に選べば，

$$\emptyset \subsetneq f^{-1}(y) \cap A' \subset f^{-1}(B') \cap A'$$

となり，$f^{-1}(B') \cap A'$ は空でないことがわかる．

[*8] ひとつ前の注釈を見よ．

証明. $\mathscr{U}$ を $f(X)$ の開被覆とすれば，f の連続性より $f^*\mathscr{U}$ は X の開被覆である．X はコンパクトだから，有限部分被覆 $f^{-1}(U_1),\dots,f^{-1}(U_n)$ が存在する．このとき $U_1,\dots,U_n$ は $f(X)$ の開被覆となっている．よって $f(X)$ はコンパクトである． □

位相が粗いほどコンパクト空間になりやすいという主張は，以下の系のように定式化される．

系 3.4. 集合 X 開集合系 $\mathscr{O}_1$ により位相空間と見たものを X_1，開集合系 $\mathscr{O}_2$ により位相空間と考えたものを X_2 で表す．X_1 がコンパクト空間で $\mathscr{O}_1 \supset \mathscr{O}_2$ が成り立つなら，X_2 もコンパクト空間である．

証明. $\mathscr{O}_1 \supset \mathscr{O}_2$ がなりたつということは，恒等写像 $\mathrm{id}\colon X_1 \to X_2$ が連続だということである．このとき，命題 3.3 により $X_2 = \mathrm{id}(X_1)$ はコンパクト空間となる． □

定理 3.5. $(X_i)_{i\in I}$ を位相空間の族とする．直和空間 $\coprod_{i\in I} X_i$ がコンパクト空間であるための必要十分条件は，各 X_i コンパクトで I が有限集合であることである．

証明. $j_i\colon X_i \to \coprod_{i\in I} X_i$ を標準的な単射とする．

直和空間 $\coprod_{i\in I} X_i$ がコンパクトであるとすると，$j_i(X_i)$ は $\coprod_i X_i$ の閉集合なので命題 3.1 によりコンパクトである．I が無限集合なら，$(j_i(X_i))_{i\in I}$ は $\coprod_i X_i$ の開被覆だが，有限部分被覆をもたない．これは $\coprod_i X_i$ のコンパクト性に矛盾するので，I は有限集合である．

逆に I は有限集合で各 X_i がコンパクトであると仮定する．このとき，命題 3.3 より $j_i(X_i)$ は $\coprod_i X_i$ のコンパクト集合であり，さらに命題 3.2 より $\coprod_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I} j_i(X_i)$ はコンパクトであることがわかる． □

次に述べるのが高名な Tychonoff の定理である．

定理 3.6. $(X_i)_{i\in I}$ を位相空間の族とする．全ての X_i がコンパクトならば，積空間 $\prod_{i\in I} X_i$ はコンパクトである．もし X_i がどれも空でないなら，逆も成り立つ．

定理の証明のために，フィルターに関する補題をひとつ用意する．

補題 3.7. $f\colon X \to Y$ を写像とし，$\mathscr{F}$ を X 上の超フィルターとする．このとき，フィルター基底 $f_*\mathscr{F}$ によって生成されるフィルターは，Y 上の超フィルターである．

証明. $\mathscr{E}$ を $f_*\mathscr{F}$ によって生成されるフィルターとする．$A \subset Y$ とする．$\mathscr{F}$ は超フィルターなので，このとき $f^{-1}(A) \in \mathscr{F}$ または $X \setminus f^{-1}(A) \in \mathscr{F}$ が成り立つ．$f^{-1}(A) \in \mathscr{F}$ なら $ff^{-1}(A) \in f_*\mathscr{F}$ であり，$ff^{-1}(A) \subset A$ に注意すれば $A \in \mathscr{E}$ がわかる．$X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A) \in \mathscr{F}$ なら $ff^{-1}(Y \setminus A) \in f_*\mathscr{F}$ となり，$ff^{-1}(Y \setminus A) \subset Y \setminus A \in \mathscr{E}$ を得る．したがって，任意の $A \subset Y$ に対して，$A \in \mathscr{E}$ または $Y \setminus A \in \mathscr{E}$ が成り立つ．超フィルターの特徴付け[*9]より，$\mathscr{E}$ が実際に超フィルターであることがわかる． □

定理 *3.6* の証明. $(X_i)_{i\in I}$ をコンパクト空間の族とし，$\mathrm{pr}_i\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ を第 i 射影とする．$\mathscr{F}$ を $\prod_{i\in I} \mathscr{F}$ 上の超フィルターとする．このとき，$(\mathrm{pr}_i)_*\mathscr{F}$ は X_i 上のフィルター基底なのであった．補題 3.7 より $(\mathrm{pr}_i)_*\mathscr{F}$ によって生成されるフィルターは超フィルターであり，X_i のコンパクト性よりこれは収束フィルターである．その極限点の一つを x_i とし，$x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ と定める．いま任意の i に対して $(\mathrm{pr}_i)_*\mathscr{F}$ は x_i に収束するから，積空間における収束の特徴付け[*10]より $\mathscr{F}$ は x に収束する．任意の超フィルターが収束するから，

[*9] 位相空間論セミナー I の命題 5.7 を見よ．
[*10] 位相空間論セミナー II の定理 3.7 を見よ．

$\prod_{i\in I} X_i$ はコンパクトである．

次は X_i はどれも空でなく $\prod_{i\in I} X_i$ はコンパクトであると仮定する．このとき $\mathrm{pr}_i\left(\prod_{i\in I} X_i\right) = X_i$ で[*11] pr_i は連続だから，命題 3.3 により X_i はコンパクトである． □

4 コンパクト空間と Hausdorff 空間

コンパクト Hausdorff 空間は特に重要な位相空間である．ところが，すでに説明したようにコンパクト性は位相が粗いほうが成り立ちやすい性質で，Hausdorff 性は位相が細かいほうが成り立ちやすい性質である．よってこれらは両立しにくい性質のように思われる．本節では，コンパクト Hausdorff 空間のもつ性質や，これら二つの性質の関係性について調べていくことにする．

命題 4.1. Hausdorff 空間のコンパクト集合は，閉集合である．

証明．A を Hausdorff 空間 X のコンパクト集合とする．$x \in \overline{A}$ を任意に選んだ時，$x \in A$ であることを示せばよい．$x \in \overline{A}$ であるから，x の近傍フィルター $\mathscr{V}_x$ の任意の元 V に対して $A \cap V \neq \emptyset$ が成り立つ．これより，包含写像 $i\colon A \to X$ による近傍フィルターの引き戻し $i^*\mathscr{V}_x$ は A 上のフィルター基底を定める．いま i は単射であるから，$i^*\mathscr{V}_x$ は A 上のフィルターとなっている[*12]．A はコンパクトであるから，$i^*\mathscr{V}_x$ は群集点 $y \in A$ を持つ．このとき，$y = i(y)$ は X 上のフィルター基底 $i_*i^*\mathscr{V}_x$ の群集点でもある．$i_*i^*\mathscr{V}_x$ によって生成されるフィルターはフィルター $\mathscr{V}_x$ より細かいから，命題 1.4 より y は近傍フィルター $\mathscr{V}_x$ の群集点である．いま X は Hausdorff 空間であったから，$x = y \in A$ が従う． □

命題 4.2. X を位相空間，Y を Hausdoeff 空間とし，$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．A が X のコンパクト集合ならば，$f(A)$ は閉集合である．特に，X がコンパクトならば f は閉写像である．

証明．前半の主張は，命題 3.3 および命題 4.1 より明らか．後半についてはさらに命題 3.1 を用いればよい． □

定理 4.3. X をコンパクト空間，Y を Hausdorff 空間とし，$f\colon X \to Y$ を連続単射とする．f が単射なら，同相埋め込みで $f(X)$ は Y の閉集合である．さらに f が全単射なら，同相写像である．

一般に可逆な連続写像が同相になるわけではないので，この定理はかなり強いことを主張している．しかし，コンパクト空間と Hausdorff 空間の関係を思い出せば f と f^{-1} では f のほうが連続になりにくいので，この設定下ではそこまで驚くべき事実ではないのである．

証明．$f(X)$ が閉であることは既に示されている．命題 4.2 より f は閉写像なので，開集合 $U \subset X$ に対して $Y \setminus f(X \setminus U)$ は Y の開集合である．いま f は単射なので

$$U = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus U))$$

[*11] ここで X_i はどれも空でないという条件を使った．

[*12] $f\colon X \to Y$ を写像，$\mathscr{F}$ を Y のフィルターとする．任意の $F \in \mathscr{F}$ に対して $F \cap f(X) \neq \emptyset$ が成り立つなら，$f^*\mathscr{F}$ は X 上のフィルター基底となるのであった．（第一回のセミナー資料の命題 5.8.）特に f が単射ならば，$f^*\mathscr{F}$ はフィルターである．このことを確かめるのには，$f^*\mathscr{F}$ がフィルターの公理 (F3) を満たすことを言えばよい．つまり，$A \in \mathscr{F}$ に対して $f^{-1}(A) \subset B$ が成り立つとき，$B \in f^*\mathscr{F}$ を示せばよい．このことは，$A \cup f(B) \in \mathscr{F}$ と $f^{-1}(A \cup f(B)) = f^{-1}(A) \cup B = B$ からわかる．（ここで単射性を使った．）

よって $f^*\mathscr{O}_Y$ となり，f は同相埋め込みである．

次に，f は特に全単射であると仮定する．このとき f が閉写像であるということは逆写像 f^{-1} が閉集合を閉集合に引き戻すという意味であり，これは f^{-1} が連続であることと同値である．よって f は同相写像である． $\square$

定理 4.3 より，コンパクト Hausdorff 位相はコンパクト位相の中で極大で，Hausdorff 位相の中で極小であることがわかる．

定理 4.4. $(X_i)_{i\in I}$ をコンパクト Hausdorff 空間の族とすれば，積空間 $\prod_{i\in I} X_i$ はコンパクト Hausdorff 空間である．

定理の証明は既に終わっている．この定理からわかるように，積位相は Hausdorff 性を保つ程度には細かい．一方で，積位相はコンパクト性を保つ程度には粗い．

定理 4.5. $\mathbf{X} = (X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}; A)$ を空でないコンパクト Hausdorff 空間の逆系とする．このとき，$\varprojlim \mathbf{X}$ も空でないコンパクト Hausdorff 空間である．

証明．$\alpha \in A$ に対して，

$$Y_\alpha = \left\{ (x_\alpha) \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \,\middle|\, \pi_{\beta\alpha}(x_\alpha) = x_\beta,\ \forall\beta \le \alpha \right\}$$

と定義する．このとき，各 Y_α は空でない閉集合であることを示そう．$Y_\alpha x_\alpha \in X_\alpha$ に対して $x_\beta := \pi_{\beta\alpha}(x_\alpha)$ $(\beta \le \alpha)$ と定め，その他の β については $x_\beta \in X_\beta$ を任意に選ぶ．このように定めた (x_β) は Y_α の元であり，Y_α はどれも空でないことがわかる．また，

$$Y_\alpha = \bigcap_{\beta\le\alpha} \left\{ (x_\alpha) \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \,\middle|\, \pi_{\beta\alpha}(x_\alpha) = x_\beta \right\}$$

だから，$\pi_{\beta\alpha}\pi_\alpha, \pi_\beta \colon \prod_\alpha X_\alpha \to X_\beta$ の連続性と各 X_β が Hausdorff なことにより，Y_β は閉集合であることがわかる[*13]．いま $(Y_\alpha)_{\alpha\in A}$ は α について単調減少であることに注意しよう．有限個の $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ に対してこれらの上界 $\alpha \in A$ を選べば[*14]，

$$\bigcap_{1\le k\le n} Y_{\alpha_n} \supset Y_\alpha \supsetneq \emptyset$$

が成立．よって $(Y_\alpha)_{\alpha\in A}$ は有限交叉性をもつ閉集合族である．$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ のコンパクト性より，$\bigcap_{\alpha\in A} Y_\alpha = \varprojlim X_\alpha$ は空でない．$\varprojlim X_\alpha$ 閉集合族の共通部分なので閉集合であり，定理 4.4 と命題 3.1 よりこれはコンパクトである．さらに，「位相空間論セミナー III」の命題 1.7 より，$\varprojlim X_\alpha$ は Hausdorff 空間でもある． $\square$

この節の最後に，コンパクト Hausdorff 空間とその他の分離公理について論じる．

定理 4.6. コンパクト Hausdorff 空間は，正規である．

証明．X をコンパクト Hausdorff 空間とし，閉集合 $A, B \subset X$ は $A \cap B = \emptyset$ を満たすとする．A, B はコンパクト空間の閉集合なのでコンパクトである．$(x, y) \in A \times B$ に対して，開集合の組 $U_{(x,y)}, V_{(x,y)}$ を

$$x \in U_{(x,y)}, \quad y \in V_{(x,y)}, \quad U_{(x,y)} \cap V_{(x,y)} = \emptyset$$

[*13] 位相空間論セミナー III の命題 1.3 を見よ．

[*14] A は有向集合だからこのような α が存在する．

を満たすように選ぶ[*15]．いま $(V_{(x,y)})_{y\in B}$ は B の開被覆なので，コンパクト性より有限部分被覆 $(V_{(x,y_1)},\dots,V_{(x,y_n)})$ を選べる．$U_x=\bigcap_{1\le i\le n}U_{(x,y_i)}$ および $V_x=\bigcup_{1\le i\le n}V_{(x,y_i)}$ とすれば，U_x と V_x はともに X の開集合であって $x\in U_x$, $B\subset V_x$ かつ $U_x\cap V_x=\emptyset$ を満たす．さらに $(U_x)_{x\in A}$ は A の開被覆であるから，コンパクト性より有限部分被覆 $U_{x_1},\dots,U_{x_m}$ が存在する．今度は $U=\bigcup_{1\le i\le m}U_{x_i}$ および $V=\bigcap_{1\le i\le m}V_{x_i}$ と開集合 U と V を定義すれば，$A\subset U$，$B\subset V$ かつ $U\cap V=\emptyset$ となる．これより X は正規空間であることがわかった． □

定理 4.7. 位相空間 X について，次の 2 条件は同値である．

(i) X は Tychonoff 空間である．

(ii) あるコンパクト Hausdorff 空間 Y への同相埋め込み $X\hookrightarrow Y$ が存在する．

証明．**(i) $\Longrightarrow$ (ii)**：X が Tychonoff 空間なら，「位相空間論セミナー III」の定理 1.19 より同相埋め込み $X\hookrightarrow[0,1]^I$ が存在する．（I は適当な集合．）定理 4.4 より $[0,1]^I$ はコンパクト Hausdorff 空間なので，このとき条件 (ii) が成り立っている．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：定理 4.6 よりコンパクト Hausdorff 空間は正規であり，特に Tychonoff 空間である．「位相空間論セミナー III」の補題 1.18 より Tychonoff 空間の部分空間は Tychonoff 空間となるので，コンパクト Hausdorff 空間に埋め込まれた空間は Tychonoff 空間である． □

5 局所コンパクト空間

定義 5.1. X を位相空間とする．

(i) X の任意の点がコンパクトな近傍をもつとき，X は局所コンパクト (locally compact) であるという．

(ii) $A\subset X$ は $\overline{A}$ がコンパクトであるとき，相対コンパクト (relatively compact) であるという．

ここでは一般的な文脈で局所コンパクト空間の定義を行ったが，局所コンパクト空間は Hausdorff 性の仮定の下で扱われることも多い．Hausdorff 空間においては，局所コンパクト性は以下のように特徴づけられる．

命題 5.2. Hausdorff 空間 X について，以下の条件は同値である．

(i) X は局所コンパクトである．

(ii) X の全ての点が，相対コンパクトな近傍をもつ．

(iii) X の全ての点が，コンパクト集合からなる基本近傍系をもつ．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii)．コンパクト近傍は相対コンパクトであることよりわかる[*16]．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．相対コンパクト近傍の閉包はコンパクト近傍である．

(iii) $\Longrightarrow$ (i) は明らか．

(i) $\Longrightarrow$ (iii)．X を局所コンパクト Hausdorff 空間とし，その 1 点 $x\in X$ を固定する．X は局所コンパクト空間なので，x のコンパクト近傍 K_x をとれる．$\mathscr{F}_x$ を x の閉近傍全体とし，$\mathscr{U}_x=\{K_x\cap F\mid F\in\mathscr{F}_x\}$ と定義する．K_x は x のコンパクト近傍で $F\in\mathscr{F}_x$ は閉近傍なので，$\mathscr{U}_x$ の元はどれも x のコンパクト近傍であ

[*15] X の Hausdorff 性より．

[*16] Hausdorff 性よりコンパクト集合は閉集合なので，閉包はそれ自身である．

るである．したがって $\mathscr{U}_x$ が x の基本近傍系になっていることを示せばよいが，このことは $\mathscr{F}_x$ が x の基本近傍系になっていることからすぐにわかる． □

コンパクト Hausdorff 空間はより強い T_4 公理も満たすことを 4 節で見たのであった．局所コンパクト Hausdorff 空間も Hausdorff 性より強い分離性を満たすことが証明できる．

定理 5.3. 任意の局所コンパクト Hausdorff 空間は Tychonoff 空間である．

定理 5.3 を証明するための準備として，補題を一つ用意する．

命題 5.4. X を位相空間とし，$(F_i)_{i\in I}$ を局所有限[*17]な X の閉被覆とする．さらに位相空間 Y への連続写像の族 $(f_i\colon F_i \to Y)_{i\in I}$ で，任意の $i, j \in I$ に対して $f_i|_{F_i\cap F_j} = f_j|_{F_i\cap F_j}$ を満たすものが与えられているとする．このとき，連続写像 $f\colon X \to Y$ で任意の i に対して $f|_{F_i} = f_i$ を満たすものが唯一つ存在する．

証明. 族 $(f_i\colon F_i \to Y)_{i\in I}$ の満たす条件から，写像 f の存在と一意性は明らかであり，連続性のみ示せばよい．A を Y の閉集合とすれば，

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(A)$$

が成り立つ．各 $f_i^{-1}(A)$ は F_i の閉集合であり，いま F_i 自身が閉集合なので $f_i^{-1}(A)$ は X の閉集合でもある．したがって，命題の証明を完成させるためには以下の主張を示せばよい．

主張

$\mathscr{F}$ が X の局所有限な閉集合族ならば，$\bigcup\mathscr{F}$ は X の閉集合である．

閉包による閉集合の特徴づけより，

$$\overline{\bigcup\mathscr{F}} \subset \bigcup\mathscr{F}$$

を示せばよい．$x \in \overline{\bigcup\mathscr{F}}$ に対して，$V \in \mathscr{V}_x$ で

$$\mathscr{F}_0 = \{F \in \mathscr{F} \mid F \cap V \neq \emptyset\}$$

が有限集合となるようなものを選ぶ．このとき，

$$x \in U \subset \operatorname{Int}\left(X \setminus \bigcup\mathscr{F} \setminus \mathscr{F}_0\right) = X \setminus \overline{\bigcup\mathscr{F} \setminus \mathscr{F}_0}$$

かつ

$$x \in \overline{\bigcup\mathscr{F}} = \overline{\left(\bigcup\mathscr{F}_0\right) \cup \left(\bigcup\mathscr{F} \setminus \mathscr{F}_0\right)} = \overline{\bigcup\mathscr{F}_0} \cup \overline{\bigcup\mathscr{F} \setminus \mathscr{F}_0}$$

が成り立つから，$x \in \overline{\bigcup\mathscr{F}_0}$ である．ゆえに

$$x \in \overline{\bigcup\mathscr{F}_0} = \bigcup_{F\in\mathscr{F}_0} \overline{F} = \bigcup\mathscr{F}_0 \subset \bigcup\mathscr{F}$$

となり，$\overline{\bigcup\mathscr{F}} \subset \bigcup\mathscr{F}$ が示された． □

[*17] $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ は次の条件を満たすとき，局所有限であるという：任意の $x \in X$ に対して x の近傍 V で $\{A \in \mathscr{A} \mid A \cap V \neq \emptyset\}$ が有限集合となるようなものが存在する．

定理 *5.3* の証明．X を局所コンパクト Hausdorff 空間とし，$x \in X$ をその任意の点とする．さらに，F は $x \notin F$ を満たす X の閉集合とする．x の近傍 U で相対コンパクトなものを一つ固定し，$F_0 = \left(\overline{U} \setminus U\right) \cup \left(\overline{U} \cap F\right)$ と定義する．このとき F_0 は部分空間空間 $\overline{U}$ の閉集合であり，$x \in F_0$ を満たしている．定理 4.6 よりコンパクト Hausdorff 空間 $\overline{U}$ は正規（特に Tychonoff）だから，連続関数 $f_1 \colon \overline{U} \to [0,1]$ で $f_1(x) = 0$ かつ $f_1(F_0) \subset \{1\}$ を満たすものが存在する．さらに，$f_2 \colon X \setminus U \to [0,1]$ を定数関数 1 として定める．命題 5.4 より，連続関数 $f \colon X \to [0,1]$ で $f|_{\overline{U}} = f_1$ かつ $f|_{X \setminus U} = f_2$ であるものが存在する．この関数は明らかに $f(x) = 0$ かつ $f(F) \subset \{1\}$ を満たしている．□

定理 5.3 より局所コンパクト Hausdorff 空間は Tychonoff 空間であり，また定理 4.7 より Tychonoff 空間はコンパクト Hausdorff 空間に同相に埋め込めるので，任意の局所コンパクト Hausdorff 空間はコンパクト Hausdorff 空間に同相に埋め込めることになる．一方で，この事実だけからはこの埋め込みが稠密がどうかはわからない．コンパクト空間への稠密な埋め込みを構成するのがコンパクト化と呼ばれる操作であり，これについては本ノートの §6 で紹介する．

定理 5.5. X を局所コンパクト Hausdorff 空間とする．このとき，任意のコンパクト部分空間 A と $A \subset V$ なる開集合 V に対して，$A \subset U \subset \overline{U} \subset V$ かつ相対コンパクトな開集合 U が存在する．

この定理より，局所コンパクト Hausdorff 空間のコンパクト集合は，1 点集合と同じような性質満たすことがわかる．$A \subset U \subset \overline{U} \subset V$ の部分は，T_3 公理の言い換えに対応していることに注意されたい[*18]．

証明．$x \in A$ に対して，x の開近傍 V_x で $x \in V_x \subset \overline{V}_x \subset V$ を満たすものを選ぶ[*19]．さらに，W_x を相対コンパクトな x の開近傍とする．このとき $U_x = W_x \cap V_x$ はまた相対コンパクトな x の開近傍である[*20]．いま $(U_x)_{x \in A}$ は A の開近傍なので，有限個の $x_1, \ldots, x_n \in A$ で $(U_{x_k})_{1 \leq k \leq n}$ が A の開被覆となるようなものを選び出せる．ここで $U = \bigcup_{1 \leq k \leq n} U_{x_k}$ と定義すれば，U は $A \subset U$ を満たす開集合であり，$\overline{U} = \bigcup_{1 \leq k \leq n} \overline{U}_{x_k}$ はコンパクトである．さらに，これは

$$\overline{U} = \bigcup_{1 \leq k \leq n} \overline{U}_{x_k} \subset \bigcup_{1 \leq k \leq n} \overline{V_{x_k}} \subset V$$

を満たしている．以上で証明が完了した．□

局所コンパクト Hausdorff 空間のコンパクト部分集合は，T_3 公理のアナロジーという意味で，1 点集合と同じような性質を満たすというのが定理 5.5 の言っていることであった．ところが局所コンパクト Hausdorff 空間は Tychonoff でもあるから，$T_{3\frac{1}{2}}$ 公理のアナロジー的な意味でも 1 点集合と似たような性質を満たすことが期待される．そのことを保証するのが以下の命題である．

定理 5.6. A を局所コンパクト Hausdorff 空間 X のコンパクト部分集合とし，V を $A \subset V$ を満たす開集合とする．このとき，連続写像 $f \colon X \to [0,1]$ で $A \subset f^{-1}(0)$，$X \setminus V \subset f^{-1}(1)$ を満たし，さらに任意の $a < 1$ に対して $f^{-1}([0,a])$ がコンパクト集合となるようなものが存在する．

証明．定理 5.5 の条件を満たす相対コンパクト開集合 U をとる．局所コンパクト Hausdorff 空間 X は Tychonoff だから，任意の $x \in A$ に対してある連続写像 $f_x \colon X \to [0,1]$ で $x \in f_x^{-1}(0)$ かつ $X \setminus V \subset$

[*18] 位相空間論セミナー III，命題 1.9.
[*19] 局所コンパクト Hausdorff 空間は Tychonoff であり，特に正則空間である．正則空間がこのような性質を満たすことについては，「位相空間論セミナー III」命題 1.9 を見よ．
[*20] $\overline{U}_x$ はコンパクト集合 $\overline{W}_x$ の閉部分集合なので，コンパクトである．

$X \setminus U \subset f^{-1}(1)$ を満たすものが存在する．このとき $(f_x^{-1}([0,1/2[))_{x\in A}$ は A の開被覆であるから，有限部分被覆 $(f_{x_i}^{-1}([0,1/2[))_{i\in\{0,\dots,n\}}$ が存在する．ここで，$g = \bigwedge_{0\le i\le n} f_{x_i}$ と定義すれば，$g\colon X \to [0,1]$ はまた連続写像である．構成法よりこれは $X \setminus U \subset g^{-1}(1)$ かつ $A \subset g^{-1}[0,1/2[$ を満たしていることに注意されたい．ここで，さらに $f = 2[(g-1/2)\vee 0]$ と定義すれば，f は $[0,1]$ に値をとる連続関数である．$x \in X\setminus V$ なら $g(x) = 1$ なので，$f(x) = 1$ となる．また，$x \in A$ なら $0 \le g(x) < 1/2$ となるので，$f(x) = 0$ である．あとは，$a < 1$ なら $f^{-1}([0,a])$ がコンパクトになることを示せばよい．f の定義より $f^{-1}([0,a]) = g^{-1}([0,(a+1)/2]) = \bigcup_{0\le i\le n} f_{x_i}^{-1}([0,(a+1)/2])$ である．各 f_x の構成法を思い出せば，これらは $f_x^{-1}[0,(a+1)/2] \subset U \subset \overline{U}$ を満たすことがわかる．U の選び方より $\overline{U}$ はコンパクトなので，その閉部分集合 $f_x^{-1}([0,(a+1)/2])$ もコンパクトである．したがって $f^{-1}([0,a])$ はコンパクト集合の有限個の合併でかけており，これもコンパクトであることがわかる．□

局所コンパクト空間の局所コンパクト部分空間について調べる．

定理 5.7. (i) X を局所コンパクト空間とすれば，その閉部分空間は局所コンパクトである．

(ii) X を局所コンパクト Hausdorff 空間とする．この時，X の開集合 V と閉集合 F によって $V\cap F$ と表現される部分空間は，局所コンパクト Hausdorff 空間である．

(iii) X を Hausdorff 空間とし，M をその局所コンパクト部分空間とする．このとき，M は X の部分空間 $\mathrm{Cl}_X M$ の開部分空間である．

この定理より，局所コンパクト Hausdorff 性は開集合と閉集合について遺伝的であることがわかる．

証明. (i) F を局所コンパクト空間 X の閉部分集合とする．$x \in F$ とすれば，x は X におけるコンパクト近傍 K をもつ．このとき $F\cap K$ は F における x の近傍であることに注意する*21．集合 $F\cap K$ はコンパクト空間 K の閉部分空間とも見なせるから，$F\cap K$ はコンパクト空間である．よって $F\cap K$ は F における x のコンパクト近傍である*22．

(ii) (i) より閉集合 $F \subset X$ は局所コンパクト空間であり，Hausdorff 空間の任意の部分空間は Hausdorff であることから*23，F が Hausdorff であることもわかる．$V\cap F$ は Hausdorff 空間 F の部分空間なので，Hausdorff である．$V\cap F$ は局所コンパクト空間 $V\cap F$ の開部分空間なので，定理 5.5 より任意の $x \in V\cap F$ に対して $x \in U \subset \mathrm{Cl}_F U \subset V\cap F$ を満たす F の相対コンパクト開集合 U が存在する．あとはこの U が $V\cap F$ でも相対コンパクトであることを言えばよいが，それは $\mathrm{Cl}_{V\cap F} U = \mathrm{Cl}_F U \cap (V\cap F) = \mathrm{Cl}_F U$ となることからわかる．

(iii) X が局所コンパクト Hausdorff 空間で，M がその稠密な局所コンパクト部分空間である場合に示せば十分である．$x \in M$ とし，U を M における x の相対コンパクト開近傍とする．このとき，$\mathrm{Cl}_M U = \mathrm{Cl}_X U \cap M$ は M のコンパクト部分空間であり，よって X のコンパクト部分空間である*24．X は Hausdorff 空間なので $\mathrm{Cl}_M U$ は特に閉集合であり，ゆえに $\mathrm{Cl}_X U \subset \mathrm{Cl}_X \mathrm{Cl}_M U = \mathrm{Cl}_M U \subset M$ が成り立つ．X の開集合 W で $U = M\cap W$ を満たすものをとる．このとき，M の稠密性より $\mathrm{Cl}_X W = \mathrm{Cl}_X(M\cap W)$ が成り立つので（以下の補題 5.8 を参照），

$$x \in W \subset \mathrm{Cl}_X W = \mathrm{Cl}_X(M\cap W) = \mathrm{Cl}_X U \subset M$$

*21 連続写像による近傍の引き戻しは近傍である．（位相空間論セミナー I．命題 3.6.）

*22 $F\cap K$ は F の部分空間とみても K の部分空間とみても位相は同じであることに注意せよ．

*23 位相空間論セミナー III の命題 1.7.

*24 $\mathrm{Cl}_M U$ における X からの誘導位相と，部分空間 M からの誘導位相は等しいので，$\mathrm{Cl}_M U$ は X のコンパクト部分空間にもなっている．

となる．すなわち x は M の内点である．x は M の任意の点であったから，M は開集合である． □

補題 5.8. X を位相空間とする．

(i) $A \subset X$ が稠密であるための必要十分条件は，任意の非空な開集合 U について $A \cap U \neq \emptyset$ が成り立つことである．

(ii) A が X の稠密部分集合なら，任意の開集合 U について $\mathrm{Cl}_X(U \cap A) = \mathrm{Cl}_X U$ が成立．

証明. (i) A が X で稠密だと仮定する．U が空でない X の開集合なら，任意の $x \in U$ は A の触点である．よって $U \cap A \neq \emptyset$ となる．

逆に任意の空でない開集合 U について $A \cap U \neq \emptyset$ が成り立つと仮定する．$x \in X$ とすれば，$V \in \mathcal{V}_x$ に対して V は空でない開集合なので，$V \cap A \neq \emptyset$ が成立．よって　x は A の触点である．

(ii) $\mathrm{Cl}_X(U \cap A) \subset \mathrm{Cl}_X U$ は明らかなので，逆向きの包含を示せばよい．$x \in U$ とすれば，任意の $V \in \mathcal{V}_x$ に対して $V \cap (U \cap A) = (V \cap U) \cap A \neq \emptyset$ が成立．（A の稠密性と (i) より．）よって x は $U \cap A$ の触点である．したがって $U \subset \mathrm{Cl}_X(U \cap A)$ であり，$\mathrm{Cl}_X U \subset \mathrm{Cl}_X(U \cap A)$ がわかる． □

局所コンパクト空間の直和や直積について，以下の結果が成り立つ．

定理 5.9. $(X_i)_{i \in I}$ を局所コンパクト空間の族とする．

(i) 直和空間 $\coprod_{i \in I} X_i$ が局所コンパクト空間であるための必要十分条件は，各 X_i が局所コンパクト空間であることである．

(ii) X_i はどれも空でないとする．直積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ が局所コンパクト空間であるための必要十分条件は，各 X_i が局所コンパクト空間であり，さらに有限個の i を除いてそれらがコンパクトであることである．

証明. (i) X_i がどれも空でないとして示せば十分である．

$\coprod_{i \in I} X_i$ を局所コンパクト空間とする．各 X_i は $\coprod_{i \in I} X_i$ の閉部分集合だから，定理 5.7 により局所コンパクト空間である．

逆に，全ての X_i が局所コンパクト空間であるとする．$x \in \coprod_{i \in I} X_i$ とし，$x \in X_{i_0}$ なる i_0 を選ぶ．X_{i_0} は局所コンパクト空間なので，x のコンパクト近傍 $x \in K \subset X_{i_0}$ がとれる．この K は $\coprod_i X_i$ における x のコンパクト近傍である．

(ii) $\prod_{i \in I} X_i$ が局所コンパクトであると仮定する．$i_0 \in I$ と $x \in X_{i_0}$ とし，さらに $(x_i) \in \mathrm{pr}_{i_0}^{-1}(x)$ を任意に選ぶ．$\prod_{i \in I} X_i$ は局所コンパクトだから，(x_i) のコンパクト近傍 K がとれる．このとき $\mathrm{pr}_{i_0}(K)$ は x のコンパクト近傍となっている．実際，$\mathrm{pr}_{i_0}(K)$ のコンパクト性は K のコンパクト性と pr_{i_0} の連続性からわかる．$\mathrm{pr}_{i_0}(K)$ が x の近傍であることは，pr_{i_0} が開写像であることからわかる．よって X_{i_0} は局所コンパクトである．いま K が (x_i) の近傍であることに注意すれば，積位相の性質より有限集合 $I_0 \subset I$ と開集合 U_i $(i \in I_0)$ を適当に選んで $(x_i) \in \bigcap_{i \in I_0} \mathrm{pr}_i^{-1}(U_i) \subset K$ とできる．このとき，$i \in I \setminus I_0$ なら

$$X_i = \mathrm{pr}_i \bigcap_{j \in I_0} \mathrm{pr}_j^{-1}(U_i) \subset \mathrm{pr}_i(K)$$

となり，$\mathrm{pr}_i(K) = X_i$ がわかる．連続写像によるコンパクト集合の像はコンパクトなので，$i \in I \setminus I_0$ なら X_i はコンパクトである．

逆に，すべての X_i は局所コンパクトであり，また有限個の i を除いてどれもコンパクトであると仮定する．有限集合 $I_0 \subset I$ を，$i \in I \setminus I_0$ なら X_i がコンパクトとなるように選ぶ．$(x_i) \in \prod_{i \in I} X_i$ としよ

う．$i \in I_0$ に対して，x_i のコンパクト近傍 $K_i \subset X_i$ を各々選ぶ．さらに $i \in I \setminus I_0$ については $K_i = X_i$ 定める．いま $K = \prod_{i \in I} K_i$ とすれば，Tychonoff の定理により K はコンパクトである．K は連続な射影 $\prod_{i \in I} X_i \to \prod_{i \in I_0} X_i$ による $(x_i)_{i \in I_0}$ の近傍の引き戻しなので，$(x_i)_{i \in I}$ の近傍である*25． □

6 コンパクト化

6.1 コンパクト化

一般に位相空間はコンパクトではないが，それを適当なコンパクト空間に埋め込めると便利であることが多い．コンパクト空間への稠密かつ同相な埋め込みをその位相空間のコンパクト化という．以下で，このことをきちんとした言葉で述べよう．

定義 6.1. X を位相空間，Y をコンパクト空間とする．$c\colon X \to Y$ は同相埋め込みであってさらに $c(X)$ が Y で稠密であるとき，(Y, c) あるいは Y を X のコンパクト化 (compactification) という．

特に Y が Hausdorff 空間であるとき，(Y, c) を Hausdorff コンパクト化ということにする．今後はもっぱら Hausdorff コンパクト化について調べる．Hausdorff でないコンパクト化について詳しい文献にどのようなものあるのか，筆者は知らない．（知っていたら教えて頂きたい．）X がコンパクトなら，恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ 自身は X のコンパクト化となるが，これは面白くないので特に X がコンパクトでない場合に興味がある．

定理 6.2. 位相空間 X が Hausdorff コンパクト化をもつための必要十分条件は，それが Tychonoff 空間であることである．

証明．定理 4.7 よりすぐにわかる． □

X のコンパクト化は一意とは限らないので，様々なコンパクト化を比較する手段を用意しよう．$c_1\colon X \to Y_1$ と $c_2\colon X \to Y_2$ を X のコンパクト化とする．連続写像 $f\colon Y_1 \to Y_2$ で $f \circ c_1 = c_2$ を満たすものが存在するとき，$(Y_2, c_2) \leq (Y_1, c_1)$ と表現することにする．このとき $\leq$ は反射律，推移律を満たす「関係」である．また，上記の $f\colon Y_1 \to Y_2$ が同相写像としてとれるとき，(Y_1, c_1) と (Y_2, c_2) は同値であるという．コンパクト化 (Y_1, c_1) と (Y_2, c_2) が同値であるとは，二つのコンパクト化が実質的に同じものであるということである．

命題 6.3. (Y_1, c_1) と (Y_2, c_2) は X の Hausdorff コンパクト化であるとする．$(Y_2, c_2) \leq (Y_1, c_1)$ かつ $(Y_1, c_1) \leq (Y_2, c_2)$ なら，(Y_1, c_1) と (Y_2, c_2) は同値である．

証明．連続写像 $f_1\colon Y_1 \to Y_2$ と連続写像 $f_2\colon Y_2 \to Y_1$ を，それぞれ $f_1 \circ c_1 = c_2$ と $f_2 \circ c_2 = c_1$ を満たすものとする．いま $f_2 \circ f_1 \circ c_1 = c_1$ であるから，$f_2 \circ f_1\colon Y_1 \to Y_2$ と id_{Y_1} は $c_1(X)$ 上で一致する．Y_1 は Hausdorff 空間で $c_1(X)$ はその稠密部分空間だから，二つの連続写像 $f_2 \circ f_1$ と id_{Y_1} は Y_1 全体で一致する*26．同様にして $f_1 \circ f_2 = \mathrm{id}_{Y_2}$ もわかる．したがって，f_1 は同相写像である． □

注意 6.4. このノートにおける我々の定義では，$\leq$ はとある集合上の順序になっているわけではない．しかし，実は Tychonoff 空間 X の全ての Hausdorff コンパクト化はとある（共通の）Tychonoff 立方体 $[0, 1]^I$ 上に埋め込めるので，X のコンパクト化全体の空間というものを考えることができる．したがって，$\leq$ はある

*25 連続写像は近傍を近傍に引き戻す．
*26 位相空間論セミナー III 系 1.5

集合上の順序関係として定式化することが可能である．詳細は，Engelking [2, Section 3.5] などを参考にされたい．

6.2 Alexandoroff コンパクト化

コンパクトでない位相空間は，それに適当な 1 点を加えることでコンパクト化することができる．

命題 6.5. X をコンパクトでない位相空間とし，∞ を X に属さない点とする[*27]．$Y = X \cup \{\infty\}$ とし，Y の開集合系を以下で定める．

$$\mathscr{O}_Y = \mathscr{O}_X \cup \{ V \cup \{\infty\} \mid V \in \mathscr{O}_X \text{ で } X \setminus V \text{ はコンパクト } \}$$

このとき，包含写像 $i\colon X \to Y$ は X のコンパクト化である．

証明．まずは，Y がコンパクトであることを示す．$\mathscr{U}$ を Y の任意の開被覆とすれば，$\infty \in U_\infty$ なる $U_\infty \in \mathscr{U}$ が存在する．Y の開集合の定義より，これは $X \setminus V_\infty$ がコンパクトとなるような $V_\infty \in \mathscr{O}_X$ を用いて $U_\infty = V_\infty \cup \{\infty\}$ と表現される．$\mathscr{U}$ は明らかに $X \setminus V_\infty$ の被覆でもあるから，コンパクト性より有限部分被覆 $\{U_1, \dots, U_n\}$ を選び出すことが出来る．このとき $X \setminus V_\infty \subset \bigcup_{1 \le i \le n} U_i$ かつ $V_\infty \cup \{\infty\} \subset U_\infty$ だから，$\{U_1, \dots, U_n, U_\infty\}$ は $Y = (X \setminus V_\infty) \cup V_\infty \cup \{\infty\}$ の有限開被覆である．すなわち，Y の任意の開被覆には有限部分被覆が存在し，Y はコンパクトである．

次に，i が同相埋め込みであることを示そう．i が単射であることは定義より明らかである．あとは i が開写像であることを示せば十分だが，これは $\mathscr{O}_X \subset \mathscr{O}_Y$ よりわかる．

最後に X が Y で稠密なことを示す．X はコンパクトでないから，∞ の任意の開近傍は空でない X のある開集合によって $V \cup \{\infty\}$ と表現される．$X \cap (V \cup \{\infty\}) = V \neq \emptyset$ だから，∞ は X の触点である．よって X は $Y = X \cup \{\infty\}$ で稠密となっている． □

定義 6.6. 命題 6.5 において構成した X のコンパクト化を，X の Alexandroff コンパクト化 (Alexandroff compactification) あるいは 1 点コンパクト化 (one point compactification) と呼ぶ．

注意 6.7. X がコンパクトであってもその 1 点コンパクト化に対応する位相空間 $X \cup \{\infty\}$ を構成することは可能だが，その場合 ∞ は $X \cup \{\infty\}$ の孤立点となり，$X \hookrightarrow X \cup \{\infty\}$ はコンパクト化とはならない．

位相空間 X が Tychonoff 空間であっても，その 1 点コンパクト化が Hausdorff になるとは限らない．1 点コンパクト化が Hausdorff になるためには，局所コンパクト性が必要である．そこで，次は局所コンパクト空間 Hausdorff 空間のコンパクト化について考えよう．局所コンパクト Hausdorff 空間は Tychonoff 空間であったから[*28]，定理 6.2 より Hausdorff コンパクト化をもつ．Alexandoroff コンパクト化は，局所コンパクト Hausdorff 空間の Hausdorff コンパクト化の中で，先ほどの「順序」について最小のものである．

まずは，局所コンパクト空間 Hausdorff 空間をコンパクト化の観点から特徴づけよう．

命題 6.8. Tychonoff 空間 X について，以下の条件は同値である．

(i) X は局所コンパクトである．

---

*27 例えば，X 自身．

*28 定理 5.3.

(ii) X の全ての Hausdorff コンパクト化 $c\colon X \to Y$ について，$Y \setminus c(X)$ は Y の閉集合である．

(iii) X のある Hausdorff コンパクト化 $c\colon X \to Y$ で，$Y \setminus c(X)$ が Y の閉集合となるようなものが存在する．

証明. (ii) $\Longrightarrow$ (iii) は明らかである．

(iii) $\Longrightarrow$ (i). X のコンパクト化 $c\colon X \to Y$ を，$Y \setminus c(X)$ が閉集合となるように選ぶ．$x \in X$ を任意に選び，その近傍でコンパクトなものを見つければよい．閉集合 $Y \setminus c(X)$ は $\{c(x)\} \cap (Y \setminus c(X)) = \emptyset$ を満たす．コンパクト Hausdorff 空間は正規だから，Y の互いに素な開集合 U, V で $c(x) \in U$ かつ $Y \setminus c(X) \subset V$ を満たすものが存在する．$Y \setminus V$ はコンパクト空間 Y の閉集合だからコンパクトであり，定義より

$$c(x) \subset U \subset Y \setminus V \subset Y \setminus (Y \setminus c(X)) = c(X)$$

となる．よって $c(x)$ はコンパクトな近傍 $Y \setminus V$ をもつ．$c\colon X \to c(X)$ は同相写像で $Y \setminus V \subset c(X)$ だから，$X \setminus c^{-1}(V)$ は x のコンパクトな近傍である．これより，全ての $x \in X$ はコンパクトな近傍をもつ．

(i) $\Longrightarrow$ (ii). X を局所コンパクト Tychonoff 空間とし，$c\colon X \to Y$ をその Hausdorff コンパクト化とする．c は同相埋め込みだから，$c(X)$ は Y の局所コンパクトな部分空間である．位相空間論セミナー V の定理 5.7 (iii) より，$c(X)$ はその閉包 $\overline{c(X)}$ の開部分集合となっている．いま c は稠密な埋め込みだから $\overline{c(X)} = Y$ であり，ゆえに $c(X)$ は Y の開部分集合である．すなわち，$Y \setminus c(X)$ は閉集合である． □

命題 6.9. コンパクトでない位相空間 X の 1 点コンパクト化 $i\colon X \to Y$ が Hausdorff であるための必要十分条件は，X が局所コンパクト Hausdorff であることである．

証明. まずは X が局所コンパクト Hausdorff であると仮定して，Y が Hausdorff であることを示そう．X 自身は Hausdorff なので，異なる 2 点 $x, y \in X$ を閉集合で分離できることは明らかである．$x \in X$ と ∞ を分離できることを示す．X は局所コンパクト Hausdorff 空間だから，X における x の相対コンパクト近傍 U をとることができる．1 点コンパクト化における位相の定義より，このとき $(X \setminus \overline{U}) \cup \{\infty\}$ は ∞ を含む開集合である．いま $U \subset X = Y \setminus \{\infty\}$ なので $U \cap [(X \setminus \overline{U}) \cup \{\infty\}] = \emptyset$ であり，U と $(X \setminus \overline{U}) \cup \{\infty\}$ が x と ∞ を分離する開集合であることがわかる．よって Y は Hausdorff である．

逆に，Y が Hausdorff であると仮定して，X が局所コンパクト Hausdorff 空間であることを示そう．X は Hausdorff 空間 Y の部分空間だから，Hausdorff である．$x \in X$ とすれば，Y の Hausdorff 性より Y の開集合 U と V で $x \in U$，$\infty \in V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ を満たすものがとれる．Y の開集合系の定義より，$X \setminus V$ は X のコンパクト集合であり，$x \in U \subset X \setminus V$ よりこれは x の近傍になっている．よって X は局所コンパクトである． □

すでに述べたように，Tychonoff 空間の 1 点コンパクト化は Hausdorff コンパクト化の中での「順序」$\leq$ に対して最小のものである．このことを証明しよう．

命題 6.10. X を局所コンパクト Hausdorff 空間とし，(i, X_∞) を X の 1 点コンパクト化，(c, Y) を X の任意の Hausdorff コンパクト化とする．このとき，$(i, X_\infty) \leq (c, Y)$ が成り立つ．

証明. 写像 $f\colon Y \to X_\infty$ を

$$f(y) = \begin{cases} i(c^{-1}(y)) & y \in c(X) \\ \infty & y \in Y \setminus c(X) \end{cases}$$

と定義する．このとき f は $f \circ c = i$ を満たしている．f が連続であることを示そう．$U \subset X_\infty$ を開集合とす

る．$U \subset i(X) = X$ ならこれは X の開集合である．$f^{-1}(U) = c(U)$ と c が同相埋め込みであることよりこれは $c(X)$ の開集合であるが，命題 6.8 より $c(X)$ は Y の開集合なので，さらに $c(U)$ は Y の開集合でもある．$\infty \in U$ の場合，$X_\infty \setminus U$ は X のコンパクト集合である．このとき $f^{-1}(X_\infty \setminus U) = c(X_\infty \setminus U)$ なので，$f^{-1}(X_\infty \setminus U)$ は連続写像 c によるコンパクト集合の像であり，よって Y のコンパクト集合である．Hausdorff 空間のコンパクト集合は閉集合なので，その補集合 $f^{-1}(U)$ は Y の開集合である．したがって f は連続写像である．$f \circ c = i$ なる連続写像 $f\colon Y \to X_\infty$ が実際に構成出来たので，$(i, X_\infty) \le (c, Y)$ であることが示された． □

6.3 Stone-Čech コンパクト化

Alexandroff コンパクト化はある意味で最小のコンパクト化であったが，最大のコンパクト化と呼べるものが Stone-Čech コンパクト化である．Stone-Čech コンパクト化を実際に最大のコンパクト化として定義する流儀もあるが，本ノートでは Kelley [4] に従い具体的に Stone-Čech コンパクト化を構成する．

定義 6.11. X を Tychonoff 空間とし，$\mathrm{ev}\colon X \to [0,1]^{C(X,[0,1])}$ を $\mathrm{ev}(x)(f) = f(x)$ によって定める．このとき ev は同相埋め込みであり，したがって $\mathrm{ev}\colon X \to \overline{\mathrm{ev}(X)}$ は X の Hausdorff コンパクト化である．これを X の Stone-Čech コンパクト化 (Stone-Čech compactification) といい，βX で表す．

写像 $\mathrm{ev}\colon X \to [0,1]^I$ は Tychonoff 空間 X の Tychonoff 立方体への埋め込みを構成する際に用いた「値写像」と呼ばれる写像である．これが同相埋め込みであることの証明は，位相空間論セミナー III 定理 1.19 を参照されたい．

一般に位相空間の部分空間上で定義された連続写像があったときに，それが空間全体に連続性を保ったまま拡張できるかどうかはわからない．しかし，Tychonoff 空間 X からコンパクト Hausdorff 空間への連続写像は，その Stone-Čech コンパクト化 βX の上まで拡張することが可能である．

定理 6.12. X を Tychonoff 空間とし，$f\colon X \to Y$ をコンパクト Hausdorff 空間への連続写像とする．このとき，ある連続写像 $g\colon \beta X \to Y$ で $g \circ \mathrm{ev} = f$ を満たすものが存在する．ただし，ev は値写像 $X \to [0,1]^{C(X,[0,1])}$ である．

証明. 連続写像 $f\colon X \to Y$ に対して，$f^\sharp\colon C(Y,[0,1]) \to C(X,[0,1])$ を $f^\sharp(h) = h \circ f$ によって定める．また，写像 $f^{\sharp\sharp}\colon [0,1]^{C(X,[0,1])} \to [0,1]^{C(Y,[0,1])}$ を $f^{\sharp\sharp}(\varphi) = \varphi \circ f^\sharp$ と定義する．さらに，$\mathrm{ev}'\colon Y \to \beta(Y) \subset [0,1]^{C(Y,[0,1])}$ を値写像とする．

まずは $f^{\sharp\sharp}$ は積位相に関して連続写像となっていることを示そう．$h \in C(Y,[0,1])$ に対して，$\mathrm{pr}_h\colon [0,1]^{C(Y,[0,1])} \to [0,1]$ で標準的な射影を表すことにする．具体的に言えば，$\alpha \in [0,1]^{C(Y,[0,1])}$ に対して，$\mathrm{pr}_h(a) = \alpha(h)$ と定めるということである．積位相の性質より，$f^{\sharp\sharp}$ の連続性を示すということは，全ての $h \in C(Y,[0,1])$ について $\mathrm{pr}_h \circ f^{\sharp\sharp}\colon [0,1]^{C(X,[0,1])} \to [0,1]$ が連続であることを示すのと同じことであった．$\varphi \in [0,1]^{C(X,[0,1])}$ とすれば，$\mathrm{pr}_h \circ f^{\sharp\sharp}(\varphi) = \mathrm{pr}_h(\varphi \circ f^\sharp) = \varphi(f^\sharp(h))$ が成り立つ．したがって，$\mathrm{pr}_h \circ f^{\sharp\sharp}$ は $f^\sharp \circ h \in C(X,[0,1])$ 方向への射影 $[0,1]^{C(X,[0,1])} \to [0,1]$ に等しく，積位相の定義よりこれは連続写像である．したがって写像 $f^{\sharp\sharp}$ も連続である．

次に，$f^{\sharp\sharp} \circ \mathrm{ev} = \mathrm{ev}' \circ f$ が成り立つことを示そう．これは，言い換えれば以下の図式が可換になるというこ

とである．

$$\begin{tikzcd} \beta X \arrow[r, "f^{\sharp\sharp}"] & {[0,1]^{C(Y,[0,1])}} \\ X \arrow[u, "\mathrm{ev}"] \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[u, "\mathrm{ev}'"'] \end{tikzcd}$$

$x \in X$ とすれば，$f^{\sharp\sharp} \circ \mathrm{ev}(x) \in [0,1]^{C(Y,[0,1])}$ は $h \in [0,1]^{C(Y,[0,1])}$ に対して

$$f^{\sharp\sharp} \circ \mathrm{ev}(x)(h) = f^{\sharp\sharp}(\mathrm{ev}(x))(h) = (\mathrm{ev}(x) \circ f^{\sharp})(h) = \mathrm{ev}(x)(h \circ f) = h(f(x))$$

を対応させる関数である．また，ev' の定義より

$$\mathrm{ev}' \circ f(x)(h) = \mathrm{ev}'(f(x))(h) = h(f(x))$$

となるので，$f^{\sharp\sharp} \circ \mathrm{ev} = \mathrm{ev}' \circ f$ であることがわかった．

ev' はコンパクト空間から Hausdorff 空間への連続写像なので，像 $\mathrm{ev}'(Y)$ は $[0,1]^{C(Y,[0,1])}$ の閉集合である[*29]．したがって $\overline{\mathrm{ev}'(Y)} = \beta Y$ であり，$\mathrm{ev}' \colon Y \to \beta Y$ は同相埋め込みである．その連続な逆写像を $a \colon \beta Y \to Y$ で表すことにする．

いま $g = a \circ f^{\sharp\sharp}|_{\beta X}$ と定義したいのであるが，そのためには $f^{\sharp\sharp}|_{\beta X}$ の値が $\beta Y = \overline{\mathrm{ev}'(Y)}$ に落ちることを確かめなければいけない．先ほどの関係式 $f^{\sharp\sharp} \circ \mathrm{ev} = \mathrm{ev}' \circ f$ より，$f^{\sharp\sharp}(\mathrm{ev}(X)) \subset \mathrm{ev}'(Y)$ はすぐにわかる．$f^{\sharp\sharp}$ の連続性に注意して閉包をとれば $f^{\sharp\sharp}(\overline{\mathrm{ev}(X)}) \subset \overline{f^{\sharp\sharp}(\mathrm{ev}(X))} \subset \overline{\mathrm{ev}'(Y)} = \beta Y$ となり[*30]，実際に $f^{\sharp\sharp}|_{\beta X}$ が βY に値をとることが確かめられた．さて，先ほど予告したように $g = a \circ f^{\sharp\sharp}|_{\beta X}$ と定義することにする．a と $f^{\sharp\sharp}$ の連続性より，g は連続写像である．

$$\begin{tikzcd} \beta X \arrow[r, "f^{\sharp\sharp}|_{\beta X}"] & \beta Y \arrow[d, shift left, "a"] \\ X \arrow[u, "\mathrm{ev}"] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[u, shift left, "\mathrm{ev}'"] \end{tikzcd}$$

このとき，$g \circ \mathrm{ev} = a \circ f^{\sharp\sharp}|_{\beta X} \circ \mathrm{ev} = a \circ \mathrm{ev}' \circ f = f$ なので，g は実際に f の拡張になっていることがわかった． □

注意 6.13. いま $\mathrm{ev}(X)$ は βX で稠密で，Hausdorff 空間への写像を考えているから，定理 6.12 における f の連続拡張は一意的である[*31]．

Stone-Čech コンパクト化は，Tychonoff 空間の Hausdorff コンパクト化のなかで最大のものである．

系 6.14. X を Tychonoff 空間とし，$c \colon X \to Y$ をその Hausdorff コンパクト化とする．このとき，$(Y, c) \leq (\mathrm{ev}, \beta X)$ が成り立つ．

証明．定理 6.12 より，連続写像 $g \colon \beta X \to Y$ で $g \circ \mathrm{ev} = c$ を満たすものが存在する．これは $(Y, c) \leq (\beta X, \mathrm{ev})$ が成り立つということに他ならない． □

[*29] 命題 4.2 あるいは定理 4.3.
[*30] 位相空間論セミナー I 命題 3.14.
[*31] 位相空間論セミナー III 系 1.5.

7 Lindelöf 空間

コンパクト空間の定義において，有限部分被覆がとれるという文言を可算部分被覆に置き換えたものを，Lindelöf 空間という．Lindelöf 空間においては様々な議論を可算性のもとに帰着できることもあり，解析学においては重要な空間である．

定義 7.1. X を位相空間とする．X の任意の開被覆が可算部分被覆を持つとき，X は Lindelöf 空間 (Lindelöf space) であるという．

Lindelöf 空間 X の部分空間 A が Lindelöf となるための必要十分条件は，X における A の任意の開被覆が可算部分被覆をもつことである．言うまでもなくコンパクト空間は Lindelöf 空間である．もう少し複雑な Lindelöf 空間の典型例は第 2 可算空間である．よって，可分な距離空間は Lindelöf となる．

命題 7.2. 第二可算空間は Lindelöf である．

証明．$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X の開集合の基底とする．$(V_i)_{i\in I}$ を X の開被覆とし，

$$H = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists i \in I,\ U_n \subset V_i\}$$

と定義する．このとき $(U_n)_{n\in H}$ は X の開被覆である．実際，$x \in X = \bigcup_i V_i$ に対して $x \in V_i$ なる i を選べば，(U_n) が開集合の基底であることから $x \in U_n \subset V_i$ なる $n \in \mathbb{N}$ がとれる．この n は明らかに H の元である．$\psi\colon H \to I$ を $n \in \mathbb{N}$ に対して $U_n \subset V_{\psi(n)}$ を満たすように選び，$J = \psi(H)$ と定める．ψ は可算集合から J への全射だから，J もまた高々可算である．また $X = \bigcup_n U_n \subset \bigcup_n V_{\psi(n)}$ より，$(V_i)_{i\in J}$ が X の開被覆になっていることも分かる．任意にとった開被覆 $(V_i)_{i\in I}$ から可算部分被覆 $(V_i)_{i\in J}$ を選び出すことができたから，X は Lindelöf であることが示された． □

コンパクト空間が閉集合と有限交叉性の言葉を使って特徴づけられたように，Lindelöf 空間は閉集合と可算交叉性の言葉を使って特徴づけることができる．空でない $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ において，任意の可算族 $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}$ に対して $\bigcap \mathscr{F}_0 \neq \emptyset$ が成り立つとき，$\mathscr{F}$ は可算交叉性をもつという．

命題 7.3. X が Lindelöf 空間であるための必要十分条件は，X の閉集合からなる族 $\mathscr{F}$ が可算交叉性をもつなら $\bigcap \mathscr{F} \neq \emptyset$ となることである．

証明．X は Lindelöf であると仮定する．$\mathscr{F}$ は X の閉集合族とで，$\bigcap \mathscr{F} = \emptyset$ を満たすものとする．このとき $\mathscr{F}$ が可算交叉性を持たないことを示せばよい．

$$\mathscr{U} = \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{F}\}$$

と定めれば，$\mathscr{U}$ は X の開被覆である．これは実際，

$$\bigcup \mathscr{U} = \bigcup_{F\in\mathscr{F}} X \setminus F = X \setminus \bigcap \mathscr{F} = X$$

となることからわかる．いま X は Lindelöf なので，$\mathscr{U}$ の可算部分被覆 $\mathscr{U}_0$ を選び出すことが出来る．ここで

$$\mathscr{F}_0 = \{F \mid X \setminus F \in \mathscr{U}_0\}$$

とおけば，

$$\bigcap \mathscr{F}_0 = \bigcap_{U \in \mathscr{U}_0} X \setminus U = X \setminus \bigcup \mathscr{U}_0 = \emptyset$$

となる．したがって $\mathscr{F}$ は可算交叉性を持たない．

逆も同様の議論で証明できるので詳細は省略する． □

命題 7.4. (i) Lindelöf 空間の閉部分空間は Lindelöf である．

(ii) X が Lindelöf 空間で $f\colon X \to Y$ が連続全射なら，Y は Lindelöf である．

(iii) $(X_i)_{i\in I}$ を空でない Lindelöf 空間の族とする．このとき，$\coprod_i X_i$ が Lindelöf 空間であるための必要十分条件は，全ての X_i が Lindelöf かつ I が可算集合であることである．

証明．(i)．X を Lindelöf 空間とし，A をその閉部分空間とする．$\mathscr{F}$ を A の閉集合族で，可算交叉性をもつものとする．A は X の閉集合だから，このとき $\mathscr{F}$ の元は X の閉集合でもある．よって $\mathscr{F}$ は可算交叉性をもつ X の閉集合族であり，Lindelöf 性より $\bigcap \mathscr{F} \neq \emptyset$ が成り立つ[*32]．よって A も Lindelöf 空間である．

(ii)．$(U_i)_{i\in I}$ を Y の開被覆とすれば，f の連続性より $(f^{-1}(U_i))_{i\in I}$ は X の開被覆である．X の Lindelöf 性より可算部分被覆 $(f^{-1}(U_{i_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ をとることができる．このとき (U_{i_n}) は Y における (U_i) の可算部分被覆である．

(iii)．まずは十分性を示す．全ての X_i が Lindelöf かつ I が可算集合であるとする．$\mathscr{U}$ を $\coprod_i X_i$ の開被覆とする．標準単射 $j_j\colon X_i \to \coprod_i X_i$ は同相埋め込みなので，各 $j_i(X_i)$ はまた Lindelöf 性を持つ．$\mathscr{U}_i$ をその可算部分被覆とすれば，$\bigcup_{i\in I} \mathscr{U}_i$ は $\coprod_{i\in I} X_i$ の可算部分被覆である．

次に必要性を示す．$(j_i(X_i))_{i\in I}$ は互いに素な $\coprod_i X_i$ の開被覆なので，$\coprod_i X_i$ が Lindelöf なら I は非可算にはなりえず，よって I は可算集合である．$(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X_{i_0} の開被覆とすれば，$\{\coprod_{i\leq i_0} X_j,\ j_{i_0}(U_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ は $\coprod_i X_i$ の開被覆であり，Lindelöf 性より可算部分被覆 $\{\coprod_{i\leq i_0} X_j,\ j_{i_0}(U_{\lambda_n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ を選び出すことができる．このとき $(U_{\lambda_n})_n$ は X_{i_0} の開被覆となっている．i_0 は任意に選んでいるから，全ての X_i は Lindelöf である． □

コンパクト Hausdorff 空間はより強い分離性をもつ正規空間となるのであった．同様に，Lindelöf 正則空間も正規空間となることが知られている．

命題 7.5. 正則 Lindelöf 空間は正規空間である．

命題 7.5 を証明するために，正規性の判定条件を一つ与えておく．

補題 7.6. X を T_1 空間とする．全ての閉集合 F と F を含む開集合 G に対して，ある X の開集合列 (G_n) で $F \subset \bigcup_n G_n$ かつ $\overline{G_n} \subset G$ を満たすものが存在するとする．このとき X は正規空間である．

証明．A と B を互いに素な閉集合とし，開集合列 (U_n) と (V_n) を

$$A \subset \bigcup_n U_n, \qquad \overline{U_n} \subset X \setminus B$$
$$B \subset \bigcup_n V_n, \qquad \overline{V_n} \subset X \setminus A$$

[*32] 命題 7.3.

を満たすように選ぶ．そして，$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$G_n = U_n \setminus \bigcup_{k \le n} \overline{V_k}, \qquad H_n = V_n \setminus \bigcup_{k \le n} \overline{U}_k$$

と定義する．このとき G_n と H_n はどれも開集合である．さらに，$G = \bigcup_n G_n$ および $H = \bigcup_n H_n$ とすれば G と H は開集合であり，$A \subset G$ かつ $B \subset H$ を見たす．実際，$x \in A$ ならある $n_0 \in \mathbb{N}$ について $x \in U_{n_0}$ となる．同時に $A \subset X \setminus \bigcup_n \overline{V_n}$ であるから，$x \in G_{n_0} = U_{n_0} \setminus \bigcup_{k \le n_0} \overline{V_k}$ がわかる．ゆえに $x \in G = \bigcup_n G_n$ である．同様にして $B \subset H$ も示される．あとは $G \cap H = \emptyset$ であることを示せばよい．$x \in G$ なら，任意の n に対して $x \in G_n$ である．G_n の定義より $k \le n$ について $x \notin V_k$ が成り立ち，よって $k \le n$ について $x \notin H_k$ がわかる．n は任意に選んでいるから全ての n について $x \notin H_n$ となり，$x \notin \bigcup_n H_n = H$ を得る．これより $G \subset X \setminus H$ が従う．□

命題 *7.5*. X は正則（ゆえに T_1）空間であるから，これが補題 7.6 の条件を満たすことを示せばよい．F を X の開集合，G を $F \subset G$ なる X の開集合とする．X は正則空間なので，任意の $x \in F$ に対して x の開近傍 U_x で $\overline{U}_x \subset G$ を満たすのものが存在する[*33]．このとき，$\{X \setminus F,\ U_x \mid x \in F\}$ は X の開被覆であり，Lindelöf 性より可算部分被覆 $\{X \setminus F,\ U_{x_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ を選び出すことができる．いま $G_n = U_{x_n}$ と定めれば，$\{X \setminus F,\ U_{x_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ が X の開被覆であることから (G_n) は F の開被覆となっている．また，(U_x) の選び方より $\overline{G_n} = \overline{U_{x_n}} \subset G$ であるから，(G_n) は補題 7.6 の仮定の条件を満たす開集合列である．したがって補題 7.6 から X は正規空間であることがわかる．□

一般に Lindelöf 空間の開集合は Lindelöf とは限らないが，全ての開部分集合が Lindelöf ならその空間は遺伝的 Lindelöf 空間となる．

命題 7.7. 位相空間 X について，次の条件は同値である．

(i) X の全ての部分空間は Lindelöf である．
(ii) X の全ての開部分空間は Lindelöf である．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii) は明らかなので，逆を示す．A を X の部分集合とし，$\mathscr{U}$ を A の開被覆とする．$\bigcup \mathscr{U}$ は X の開部分集合なので，その開被覆 $\mathscr{U}$ は可算部分被覆 $\mathscr{U}_0$ をもつ．このとき $\bigcup \mathscr{U}_0 = \bigcup \mathscr{U} \supset A$ なので，$\mathscr{U}_0$ は A の被覆にもなっている．ゆえに A は Lindelöf である．□

命題 7.8. X を正則 Lindelöf 空間とする．このとき，次の条件は同値である．

(i) X の全ての部分空間は Lindelöf である．
(ii) X の全ての開部分空間は Lindelöf である．
(iii) X は完全正規空間である．

証明．(i) と (ii) の同値性は命題 7.7 よりわかるので，(ii) と (iii) の同値性を示せばよい．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)．条件 (ii) を仮定したとき，X の全ての開部分集合が関数開集合であることを示せばよい[*34]．命題 7.5 より正則 Lindelöf 空間は正規空間だから，位相空間論セミナー III 系 1.14 より特に全ての開集合が F_σ 集合であることを示せばよい．G を X の任意の開集合とし，$x \in G$ の開近傍 U_x を $\overline{U_x} \subset G$ となるよう

[*33] T_3 公理の言い換え（位相空間論セミナー命題 1.9）を見よ．
[*34] 位相空間論セミナー III 命題 1.15.

に選ぶ[*35]．このとき $(U_x)_{x\in G}$ は G の開被覆なので，条件 (ii) より可算部分被覆 $(U_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ が存在する．このとき

$$G \subset \bigcup_n U_{x_n} \subset \bigcup_n \overline{U_{x_n}} \subset G$$

となっているから，G は F_σ 集合である．

(iii) $\Longrightarrow$ (ii)．X を完全正規空間とすれば，その任意の開部分集合 G は F_σ-集合である[*36]．したがって G は閉集合列 (F_n) を用いて $G = \bigcup_n F_n$ と表現できる．X は Lindelöf 空間なのでその閉部分空間 F_n はまた Lindelöf であることに注意する[*37]．$\mathscr{U}$ を G の開被覆とすれば，それは F_n の開被覆でもあるから，可算部分被覆 $\mathscr{U}_n$ が存在する．このとき $\mathscr{U}' := \bigcup_n \mathscr{U}_n$ は $\mathscr{U}$ の G 上の可算部分被覆であり，G はまた Lindelöf であることがわかる． □

References

[1] Nicolas Bourbaki. *General Topology Part I.* Elements of Mathematics. Hermann, 1966.

[2] Ryszard Engelking. *General topology.* Revised and completed edition. Sigma Series in Pure Mathematics 6. Translated from the Polish by the author. Heldermann Verlag, Berlin, 1989, pp. viii+529. ISBN: 3-88538-006-4.

[3] Klaas Pieter Hart, Jun-iti Nagata, and Jerry E. Vaughan, eds. *Encyclopedia of General Topology.* Elsevier Science, 2004, pp. x+526. ISBN: 0-444-50355-2. URL: https://www.elsevier.com/books/encyclopedia-of-general-topology/hart/978-0-444-50355-8.

[4] John L. Kelley. *General Topology.* Graduate Texts in Mathematics 27. Originally published by Van Nostrand, 1955. Springer-Verlag New York, 1975, pp. xiv+298. URL: https://www.springer.com/la/book/9780387901251.

[5] 斎藤毅. **集合と位相**. 大学数学の入門 8. 東京大学出版会, 2009.

[*35] X は正則空間なので，このような U_x がとれる．（位相空間論セミナー III の命題 1.9 を見よ．）
[*36] 位相空間論セミナー III 系 1.14 および命題 1.15.
[*37] 命題 7.4 (i).

索引