位相空間論セミナー III：分離公理と連結性 Ver.1.2

大阪大学大学院基礎工学研究科
平井祐紀

2020 年 4 月 23 日

更新履歴
2018.9.14 §1.4 など，大幅に加筆．Ver.1.1
2020.4.23 誤植を訂正．索引を追加．Ver.1.2.

目次

今回は，位相空間の分離性と連結性の概念を扱う．

1 分離公理

1.1 分離公理の導入

本節では，位相空間に分離公理を導入する．分離公理とは，大雑把に言えば位相空間の点や集合が近傍で分離できるという条件である．どのようなレベルで分離できるかによって，さまざまの種類の公理が存在する．

定義 1.1. $(X,\mathscr{O})$ を位相空間とする．以下の公理を考える．

- (T_0) 任意の異なる 2 点 $x,y\in X$ に対して，ある $U\in\mathscr{O}$ で $x\in U$ かつ $y\notin U$ であるか，または $y\in U$ かつ $x\in U$ であるものが存在する．
- (T_1) 任意の相異なる 2 点 $x,y\in X$ に対して，ある $U,V\in\mathscr{O}$ で $x\in U$ かつ $y\notin U$，および $y\in V$ かつ $x\notin V$ を，共に満たすものが存在する．
- (T_2) 任意の相異なる 2 点 $x,y\in X$ に対して，$U,V\in\mathscr{O}$ で $x\in U$，$y\in V$ かつ $U\cap V$ なるものが存在する．

(T_3) 任意の $x \in X$ と $x \in X \setminus F$ なる任意の閉集合 F に対して，開集合 U, V で $x \in U$，$F \subset V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在する．

($T_{3\frac{1}{2}}$) 任意の $x \in X$ と $x \in X \setminus F$ なる任意の閉集合 F に対して，連続関数 $f\colon X \to [0,1]$ で $f(x) = 0$ かつ $f(F) \subset \{1\}$ を満たすものが存在する．

(T_4) 任意の交わらない 2 つの閉集合 F_1, F_2 に対して，開集合 U_1, U_2 で $F_1 \subset U_1$，$F_2 \subset U_2$ かつ $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ を満たすようなものが存在する．

(T_5) 任意の部分空間が (T_4) を満たす．

(T_6) (T_4) を満たし，さらに任意の閉集合が G_δ 集合である．

$i \leq 2$ のとき，公理 (T_i) を満たす区間は T_i 空間とよばれる．T_2 空間は特に Hausdorff 空間ともいう．$i \geq 3$ のときは，公理 (T_1) と (T_i) をともに満たす空間を T_i 空間という．T_3 空間は正則空間 (regular space)，$T_{3\frac{1}{2}}$ 空間は完全正則 (completely regular) あるいは Tychonoff 空間，T_4 は正規空間 (normal space)，T_5 空間は遺伝的正規空間 (hereditarily normal) あるいは全部分正規空間 (completely normal space)，T_6 空間は完全正規空間 (perfectly normal space) ともいう[*1]．

これらの公理の中で，もっとも重要なのは Hausdorff 空間である．正規空間は Urysohn の補題や距離付け可能性などの関係でよく出てくる．完全正則空間はコンパクト化や一様空間との関係上も重要である．完全正規空間は可算性の議論に帰着できる話が多く，測度論でも重要な空間である．正則空間，完全正則空間，正規空間，遺伝的正規空間，完全正規空間などの用語については，T_1 を課さない流儀もあるらしいので，注意が必要である[*2]．

命題 1.2. 位相空間 $(X, \mathscr{O}_X)$ が T_1 空間であることは，任意の 1 点集合が閉集合であることと同値である．

証明．X は T_1 空間であると仮定し，$x \in X$ とする．このとき，任意の $y \in X \setminus \{x\}$ に対して，y の開近傍 U で $x \notin U$ なるものがとれる．（T_1 公理）このとき $y \in U \subset X \setminus \{x\}$ となるので，$X \setminus \{x\}$ が開集合であることが分かる．よって $\{x\}$ は閉集合である．

逆に，任意の 1 点集合が閉集合であると仮定する．$x, y \in X$ とする．$y \in X \setminus \{x\}$ とすれば，$y \in U \subset X \setminus \{x\}$ を満たすような開集合 y がとれる．この U は明らかに $x \notin U$ を満たしている．同様にして，$x \in V$ かつ $y \notin V$ なる開集合 V も選べる． □

各分離公理については，次の明らかな関係性がある．

$$T_5 \text{ 空間} \implies T_4 \text{ 空間} \implies T_3 \text{ 空間} \implies T_2 \text{ 空間} \implies T_1 \text{ 空間}$$

大雑把に言えば i が大きいほどに T_i 空間であることは強い条件だということである．たぶん，この関係を満たすために各公理に T_1 を付け加えたものを T_i 空間 ($i \geq 3$) と呼ぶのであろう．

また，$T_{3\frac{1}{2}}$ 空間は T_3 空間であることは次のようにして分かる．X を $T_{3\frac{1}{2}}$ 空間とし，$x \in X$ と $x \notin F$ なる閉集合を考える．また連続関数 $f\colon X \to [0,1]$ を $f(x) = 0$ かつ $f(F) = \{1\}$ を満たすように選ぶ．このとき開集合 $f^{-1}([0, 1/2[), f^{-1}(]1/2, 1])$ は

$$x \in f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right[\right), \quad F \subset f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2}, 1\right]\right)$$

[*1] completely regular は「完全」正則，completely normal は「全部分」正規，perfectly normal は「完全」正規と訳しているのは，なかなかわかりにくい．

[*2] 例えば，児玉・永見 [6]．

を満たす．さらにこれらは

$$f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right[\right)\cap f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2},1\right]\right)=f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right[\cap\left]\frac{1}{2},1\right]\right)=f^{-1}(\emptyset)=\emptyset$$

も満たすので，X が T_3 空間であることが分かる．

実のところ

$$T_4\ \text{空間}\implies T_{3\frac{1}{2}}\ \text{空間}$$

および

$$T_6\ \text{空間}\implies T_5\ \text{空間}$$

も成り立つのだが，これらの証明には少しだけ準備が必要なのでもう少しあとで証明する．結局のところ

$$T_6\ \text{空間}\implies T_5\ \text{空間}\implies T_4\ \text{空間}\implies T_{3\frac{1}{2}}\ \text{空間}\implies T_3\ \text{空間}\implies T_2\ \text{空間}\implies T_1\ \text{空間}$$

が成り立つということである．分離空間の名前はややこしいので，以下に表としてまとめておこう．

空間の名前	公理
Hausdorff 空間	(T_2)
正則空間 (regular space)	(T_3)+(T_1)
完全正則空間 (completely regular space) Tychonoff 空間	$(T_{3\frac{1}{2}})$+(T_1)
正規空間 (normal space)	(T_4)+(T_1)
遺伝的正規空間 (hereditarily normal space) 全部分正規空間 (completely regular space)	(T_5)+(T_1)
完全正規空間 (perfectly normal space)	(T_6)+(T_1)

1.2 Hausdorff 空間

本小節では，分離空間のうち特に Hausdorff 空間について調べよう．まずは T_2 公理を同値な命題で言い換える．

命題 1.3. X を位相空間とする．このとき，次の条件は同値である．

(i) X は Hausdorff である．

(ii) 対角集合 $\Delta_X=\{(x,y)\in X\times X\mid x=y\}$ は積位相空間 $X\times X$ の閉集合である．

(iii) 任意の位相空間 T と連続写像 $f,g\in C(T,X)$ に対して，$\mathrm{Ker}(f,g)=\{t\in T\mid f(t)=g(t)\}$[*3] は T の閉集合である．

(iv) 任意の位相空間 T と $f\in C(T,X)$ に対して，f のグラフ $\Gamma_f:=\{(t,x)\mid f(t)=x\}$ は積空間 $T\times X$ の閉集合である．

証明．**(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) の証明．** T_2 公理は次の条件と同値である

(T_2)' 任意の $(x,y)\in(X\times X)\setminus\Delta_X$ に対して，ある開集合 $U,V\subset X$ で $(x,y)\in U\times V\subset(X\times X)\setminus\Delta_X$ を満たすものが存在する．

[*3] この集合 $\mathrm{Ker}(f,g)$ は関数 f,g の差核ないし等化子と呼ばれるものである．

位相空間論セミナー第 2 回の定理 2.2 および定理 3.7(1) により，条件 (T_2)' はさらに $(X \times X) \setminus \Delta_X$ が開集合であることと同値である．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) の証明． $f, g \in C(T, X)$ とすれば，その積 $(f, g)\colon T \to X \times X$ は連続写像である．(ii) より Δ_X は閉集合なので，その引き戻し $(f, g)^{-1}(\Delta_X) = \mathrm{Ker}(f, g)$ も閉集合である．

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) の証明． $T \times X$ を積空間とし，pr_i $(i \in \{1, 2\})$ を第 i 射影とする．このとき，(iii) より差核 $\mathrm{Ker}(f \circ \mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2) = \Gamma_f$ は $T \times X$ の閉集合である．

(iv) $\Longrightarrow$ (ii) の証明． 対角集合 Δ_X は恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ のグラフなので，(iv) より閉集合である． □

位相が細かければ細かいほど，Hausdorff 空間になりやすい．

系 1.4. X を集合，$\mathscr{O}_1$ および $\mathscr{O}_2$ を X の開集合系とし，$\mathscr{O}_1 \subset \mathscr{O}_2$ が成り立っているとする．$(X, \mathscr{O}_1)$ が Hausdorff 空間ならば $(X, \mathscr{O}_2)$ も Hausdorff 空間である．

証明. $\mathscr{O}_1$ を開集合系とする位相空間 X を X_1 で，$\mathscr{O}_2$ を開集合系とする位相空間 X を X_2 で表すことにする．このとき恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon X_2 \to X_1$ は連続である．いま X_1 は Hausdorff 空間で $\mathrm{id}_X \times \mathrm{id}_X\colon X_2 \to X_1$ は連続写像だから，$\Delta_{X_2} = (\mathrm{id}_X \times \mathrm{id}_X)^{-1}(\Delta X_1)$ は X_2 の閉集合である．これより X_2 も Hausdorff 空間である． □

驚くべきことに，Hausdorff 空間への連続写像は定義域の稠密部分集合上で一意に決まる．

系 1.5. X を位相空間，A を X の稠密部分空間とし，Y を Hausdorff 空間とする．$f, g \in C(X, Y)$ が $f{\restriction_A} = g{\restriction_A}$ を満たすなら，$f = g$ である．

証明. $f, g \in C(X, Y)$ が $f{\restriction_A} = g{\restriction_A}$ を満たすということは，$A \subset \mathrm{Ker}(f, g)$ ということである．A が稠密なことと $\mathrm{Ker}(f, g)$ が X の閉集合であることから，$X = \overline{A} = \mathrm{Ker}(f, g)$ となる．$\mathrm{Ker}(f, g) = X$ とは $f = g$ ということに他ならない． □

系 1.4 の言っていることは，制限写像 $C(X, Y) \to C(A, Y)$ が単射ということである．この制限写像が全射かどうか（すなわち部分空間上の連続写像の拡張可能性）はまた別の問題である．

ある集合に位相を入れるとき，基本近傍系の構成から出発することも多い．基本近傍系から構成された位相が Hausdorff 性を満たすための十分条件を調べよう．

命題 1.6. X を集合とし，$(\mathscr{B}_x)_{x \in X}$ は基本近傍系の公理を満たすものとする[*4]．$\mathscr{U}_x$ はさらに次の条件を満たすとする．

- 任意の $x, y \in X$ に対して，ある $U \in \mathscr{B}_x$ と $V \in \mathscr{B}_y$ で $U \cap V = \emptyset$ となるものが存在する．

このとき，$(\mathscr{B}_x)_{x \in X}$ によって導入された位相は T_2 公理を満たす．

証明. $x, y \in X$ として，$U \in \mathscr{B}_x$ と $V \in \mathscr{B}_y$ を $U \cap V = \emptyset$ となるようにとる．このとき $\mathrm{Int}\, U$ と $\mathrm{Int}\, V$ はそれぞれ x, y を含む開集合であり，$\mathrm{Int}\, U \cap \mathrm{Int}\, V \subset U \cap V = \emptyset$ を満たす．よって，この位相空間 X は Hausdorff

[*4] 基本近傍系の公理とは，次のようなものであった．
(i) $\mathscr{B}_x$ は空ではなく，$U \in \mathscr{B}_x$ なら $x \in U$．
(ii) $U, V \in \mathscr{B}_x$ なら，$W \subset U \cap V$ を満たす W が存在する．
(iii) 任意の $U \in \mathscr{B}_x$ に対してある V が存在して，$x \in V \subset U$ かつ $y \in V$ ならある $W \in \mathscr{U}_y$ が存在して $W \subset U$．

である． $\square$

Hausdorff 空間がいくつか与えられたとき，それらを用いて構成される位相空間が Hausdorff になるかについては，次の結果が有用である．

命題 1.7. (i) $(Y_i)_{i\in I}$ を Hausdorff 空間の族とし，写像の族 $(f_i)\in\prod_{i\in I}\mathrm{Map}(X,Y_i)$ が与えられたとする．積写像 $(f_i)\colon X\to\prod_{i\in I}Y_i$ が単射ならば，$(X,\mathscr{O}(f_i;i\in I))$ は Hausdorff 空間である．

(ii) Hausdorff 空間 $(X_i)_{i\in I}$ の積位相空間 $\prod_{i\in I}X_i$ はまた Hausdorff である．

(iii) Hausdorff 空間の任意の部分空間はまた Hausdorff 空間である．

(iv) X,Y は位相空間で，積空間 $X\times Y$ が Hausdorff であるようなものとする．このとき Y が空でなければ，X は Hausdorff である．

証明．(i) 積写像 $(f_i)\colon X\to\prod_{i\in I}Y_i$ が単射なら

$$\Delta_X=\bigcap_{i\in I}(f_i\times f_i)^{-1}(\Delta_{Y_i})$$

が成り立つ．積写像 $f_i\times f_i\colon X\times X\to Y_i\times Y_i$ は連続で Δ_{Y_i} は $Y_i\times Y_i$ の閉集合なので，各 $(f_i\times f_i)^{-1}(\Delta_{Y_i})$ は閉集合である．よってそれらの共通部分であるところの Δ_X も閉集合である．命題 1.3 より，X は Hausdorff 空間である．

(ii) 射影の族 $(\mathrm{pr}_i\colon\prod X_i\to X_i)$ の積は恒等写像 $\prod X_i\to\prod X_i$ であり，単射である．したがって (i) より積空間 $\prod X_i$ は Hausdorff となる．

(iii) X を Hausdorff 空間とし，$i\colon A\to X$ を包含写像とする．i は単射であるから，(i) により部分空間 A はまた Hausdorff である．

(iv) X が空でないとして示せば十分である．$a\colon X\to Y$ を定値写像とする．このとき，X の位相は単射 $(\mathrm{id}_X,a)\colon X\to X\times Y$ による引き戻しと一致する．これより X は Hausdorff である． $\square$

系 1.4 と命題 1.7 より，Hausdorff 空間への連続単射 $f\colon X\to Y$ が存在すれば X は Hausdorff 空間となることが分かる．

位相空間が Hausdorff であるかどうかは，収束の言葉を使っても調べることが出来る．

命題 1.8. X を位相空間とする．このとき，次の 3 条件は同値である．

(i) X は Hausdorff である．

(ii) X の任意の有向族の極限点は高々一つである．

(iii) X の任意のフィルターの極限点は高々一つである．

証明．**(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明．** X を Hausdorff 空間とし，$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の任意の有向族とする．$\lim(x_\lambda)$ が空でないとき，1 点集合であることを示せばよい．$x_1,x_2\in\lim(x_\lambda)$ とし，U_1,U_2 はそれぞれ x_1, x_2 の任意の近傍とする．(x_λ) は x_1 と x_2 に収束するから

$$\exists\lambda_1,\ \forall\lambda\geq\lambda_1,\ x_\lambda\in U_1$$
$$\exists\lambda_2,\ \forall\lambda\geq\lambda_2,\ x_\lambda\in U_2$$

が成り立つ．ここで λ_0 を $\lambda_0\geq\lambda_1$ かつ $\lambda_0\geq\lambda_2$ を満たすようにとれば，$\lambda\geq\lambda_0$ に対して $x_\lambda\in U_1\cap U_2$ となる．よって $U_1\cap U_2$ は空ではない．すなわち，x_1 と x_2 任意の開近傍は共通部分をもつ．Hausdorff 性より $x_1=x_2$ が従う．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． 対偶を示す．X は Hausdorff でないとし，X の点 x, y で $x \neq y$ かつ任意の $U \in \mathscr{V}_x$ と $V \in \mathscr{V}_y$ について $U \cap V \neq \emptyset$ が成り立つようなものをとる．$\Lambda = \mathscr{V}_x \times \mathscr{V}_y$ とし，成分ごとの順序により有向集合とみなす．有向族 $(x_{U,V})_{(U,V)\in\Lambda}$ を $x_{U,V} \in U \cap V$ を満たすように選べば，これは x と y に収束する有向族である．よって X は Hausdorff ではない．

(i) $\Longrightarrow$ (iii) の証明． $\mathscr{F}$ を X 上のフィルターとし，$x, y \in \lim \mathscr{F}$ とする．すなわち $\mathscr{V}_x \cup \mathscr{V}_y \in \mathscr{F}$ ということである．フィルターの二つの元の共通部分はまたフィルターの元となるので，特に任意の $U \in \mathscr{V}_x$ と $V \in \mathscr{V}_y$ に対して $U \cap V \neq \emptyset$ が成り立つ．X の Hausdorff 性より $x = y$ となる．

(iii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． 対偶を示す．X は Hausdorff でないとし，$x, y \in X$ は $x \neq y$ でお互いの近傍が常に共通部分をもつようなものとする．ここで

$$\mathscr{F} = \{U \cap V \mid U \in \mathscr{V}_x,\ V \in \mathscr{V}_y\}$$

と定めれば，これは X 上のフィルターである．定義より $\mathscr{V}_x \cup \mathscr{V}_y \subset \mathscr{F}$ が成り立つから，$\mathscr{F}$ は異なる 2 点 x, y に収束する． □

命題 1.8 により，Hausdorff 空間は収束の概念ととても相性のよい空間であることがわかるだろう．Hausdorff 空間では極限の一意性が成り立つので，Hausdorff 空間においては $\lim(x_\lambda)$ や $\lim \mathscr{F}$ で極限点そのものを表すことも多い．

1.3 ほかの分離公理

この小節では，ほかの分離公理（特に $i \geq 3$）の基本的な性質を見ていこう．まずは，それぞれの公理を同値な条件で言い換える．

命題 1.9. X を位相空間とする．このとき次の 2 条件は同値である．

(i) X は公理 (T_3) を満たす．

(ii) $x \in X$ とし，U を x の開近傍とする．このとき，x の開近傍 V で $\overline{V} \subset U$ を満たすものが存在する．

証明．**(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明．** $x \in U = X \setminus (X \setminus U)$ であるから，公理 (T_3) より開集合 V, W で $x \in V$ かつ $(X \setminus U) \subset W$ かつ $V \cap W = \emptyset$ を満たすものがとれる．このとき $V \subset X \setminus W = X \setminus (X \setminus U) = U$ であるから，$\overline{V} \subset \overline{X \setminus W} = X \setminus W \subset U$ が成り立つ．よって (ii) が成立していることが分かった．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． $x \in X$ とし，F は $x \notin F$ なる閉集合とする．$X \setminus F$ は x の開近傍であるから，$x \in V \subset \overline{V} \subset X \setminus F$ なる開集合 V がとれる．いま $U = X \setminus \overline{V}$ と定めれば，$F \subset U$ かつ $U \cap V = \emptyset$ が成り立つ．これより (i) が従う． □

命題 1.9 より，(T_3) 公理を満たす位相空間においては，各点が閉近傍からなる基本近傍系をもつことがわかる．

命題 1.10. X を位相空間とする．このとき次の 2 条件は同値である．

(i) X は公理 (T_4) を満たす．

(ii) 閉集合 F と開集合 U は $F \subset U$ を満たす開集合とする．$F \subset V$ なる開近傍 V で $\overline{V} \subset U$ を満たすものが存在する．

証明．(1.9) の証明で点 x を閉集合 F で置き換えればよい． □

T_5 空間の特徴付けは，もう少し複雑である．

命題 1.11. X を位相空間とする．このとき次の 2 条件は同値である．

(i) X は公理 (T_5) を満たす．

(ii) $A, B \subset X$ は $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ を満たすとする[*5]．このとき，開集合 U, V で $A \subset U$，$B \subset V$ および $U \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在する．

証明．**(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明．** A, B は (ii) の条件を満たす集合とする．$C = X \setminus (\overline{A} \cap \overline{B})$ と定義すれば，C は X の開集合である．

$$A_1 = \overline{A} \cap C, \quad B_1 = \overline{B} \cap C$$

とおけば，A_1 および A_2 は C の相対位相で閉集合であり，

$$A_1 \cap B_1 = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap [X \setminus (\overline{A} \cap \overline{B})] = \emptyset$$

を満たす．X は (T_5) 公理を満たすから，部分空間 C の開集合 U, V で $A_1 \subset U$ かつ $B_1 \subset V$ かつ $U \cap V$ を満たすものが存在する．いま C は X の開集合なので，U と V は X の部分集合としても開集合である．$\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ という仮定より，$A \cup B \subset C$ が成り立つ．これより

$$A = A \cap C \subset A_1 \subset U, \quad B = B \cap C \subset B_1 \subset V$$

が成り立つ．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． A を X の任意の部分空間とし，F_1, F_2 は $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ を満たす A の閉集合とする．$F_1 = \overline{F_1} \cap A$ および $F_2 = \overline{F_2} \cap A$ が成り立つから[*6]，

$$\overline{F_1} \cap F_2 = \overline{F_1} \cap (F_2 \cap A) = (\overline{F_1} \cap A) \cap F_2 = F_1 \cap F_2 = \emptyset$$
$$F_1 \cap \overline{F_2} = (F_1 \cap A) \cap \overline{F_2} = F_1 \cap (\overline{F_2} \cap A) = F_1 \cap F_2 = \emptyset$$

となる．これより (ii) が適用出来て，X の開集合 U_1, U_2 で $F_1 \subset U_1$，$F_2 \subset U_2$ かつ $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ を満たすものが取れる．いま $V_1 = U_1 \cap A$ および $V_2 = U_2 \cap A$ と定義すれば，V_1 と V_2 は A の開集合であり，$F_1 \subset V_1$ と $F_2 \subset V_2$ および $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ を満たす．したがって X は公理 (T_5) を満たすことが確かめられた． □

ここからは，連続関数による集合の分離可能性を論じる．そのためには，次に述べる Urysohn の補題がとても大切である[*7]．

定理 1.12 (Urysohn の補題)**.** X を正規空間とし，E, F を互いに素な X の空でない閉部分集合とする．このとき，連続関数 $f\colon X \to [0, 1]$ で $f(E) \subset \{0\}$ かつ $f(F) \subset \{1\}$ を満たすものが存在する．

証明．まずは，$[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ の元を添え字にもつ X の開集合族で

$$r < s \implies \overline{V_r} \subset V_s \tag{1}$$
$$A \subset V_0 \subset V_1 \subset X \setminus B \tag{2}$$

---

*5 この条件をもって「A と B は分離されている」という著者もいる．Engelking [3]

*6 A の部分空間における $E \subset A$ の閉包 $\mathrm{Cl}_A E$ は $\mathrm{Cl}_A E = (\mathrm{Cl}_X E) \cap A$ を満たすのであった．

*7 とても大切なのに，なぜか補題と呼ばれている．他にも Zorn の補題とか，測度論だと Borel-Cantelli の補題とか，超重要定理がしばしば補題と呼ばれるのはなぜなのだろうか？個々の数学的問題においては，その主張自体よりもそれらを用いて得られる結果が重要だからだろうか．

を満たすものを構成しよう．このような集合族を帰納的に定義したいのだが，順序を保ったまま $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ の点を並べることは出来ないので，少し工夫が必要である．

$r_0=0$ および $r_1=1$ とし，$]0,1[$ の有理数を適当に順番付けて数列 $(r_k)_{k\geq 2}$ を作る．いま X は正規空間で $E\subset X\setminus F$ が成り立つから，$E\subset U\subset\overline{U}\subset X\setminus F$ を満たす開集合 U がとれる．そのような U を一つ選んで V_0 とおき，$V_1=X\setminus F$ とする．このとき，$n=2$ に対して次の主張が成り立つ．

$$\forall i,j\leq n,\ r_i<r_j \implies \overline{V_{r_i}}\subset V_{r_j}. \tag{条件 n}$$

$n\geq 2$ として，(条件 n) を満たす $(V_{r_i})_{1\leq i\leq n}$ が定義されているとする．$\{r_1,\dots,r_n\}$ の中から r_{n+1} の直前，直後の数を選び出してそれぞれ r'_n, r''_n で表すことにする．このとき $V_{r'_n}$, $V_{r''_n}$ は $\overline{V_{r'_n}}\subset V_{r''_n}$ を満たす開集合だから，$\overline{V_{r'_n}}\subset U\subset\overline{U}\subset V_{r''_n}$ を満たす開集合 U が存在する．そのような開集合を一つ選んで $V_{r_{n+1}}$ とする．このとき，開集合列 $(V_{r_i})_{1\leq i\leq n+1}$ は明らかに (条件 $n+1$) を満たす．このように定義された $(V_{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ において添え字の構造 $(r_n)\colon\mathbb{N}\to[0,1]\cap\mathbb{Q}$ を忘れれば，(1)，(2) を満たす開集合族 $(V_r)_{r\in[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ が得られる．

開集合族 (V_r) を用いて連続関数 $f\colon X\to[0,1]$ を定義しよう．

$$f(x)=\begin{cases}\inf\{r\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\mid x\in V_r\} & \text{if } x\in V_1\\ 1 & \text{if } x\in X\setminus V_1\end{cases}$$

によって関数 $f\colon X\to[0,1]$ を定める．この関数は明らかに $f(V_0)=\{0\}$ および $f(X\setminus V_1)=\{1\}$ を満たす．これより，特に $f(E)=\{0\}$ かつ $f(F)=\{1\}$ が成り立つ．あとはこの f が連続であることを示せば定理の証明が完了する．$[0,1]$ の位相の定めかたより，特に $a\in[0,1]$ に対して $f^{-1}([0,a[)$ および $f^{-1}(]a,1)$ の形の集合が X の開集合となることを示せば十分である．まずは $[0,a[$（ただし $a\in]0,1]$）の場合を考える．

$$\begin{aligned}f^{-1}([0,a[)&=\{x\in X\mid f(x)<a\}\\&=\{x\in X\mid \exists s<a,\ x\in V_s\}\\&=\bigcup_{s\in[0,a[}V_s\end{aligned}$$

と変形できるから，$f^{-1}([0,a[)$ は X の開集合である．次に $b\in[0,1[$ で $]b,1]$ の場合を考える．このとき

$$\begin{aligned}f^{-1}(]b,1)&=\{x\in X\mid f(x)>b\}\\&=\{x\in X\mid \exists t>b,\ x\notin\overline{V_t}\}\\&=\bigcup_{t\in]b,1]}X\setminus\overline{V_t}\\&=X\setminus\bigcap_{t\in]b,1]}\overline{V_t}\end{aligned}$$

となり，これもやはり開集合である[*8]．以上で f の連続性が示された． □

系 1.13. T_4 空間は $T_{3\frac{1}{2}}$ 空間である．

証明．定理 1.12 を，互いに素な閉集合の一方が 1 点集合の場合に適用すればよい． □

[*8] 二つ目の等号について解説．（念のため）$f(x)>b$ なら，$f(x)>s>b$ なる $s\in[0,1]\cap\mathbb{Q}$ がとれる．$s<f(x)$ なので $x\notin V_s$ が成り立つ．ここでさらに $s>t>b$ なる $t\in[0,1]\cap\mathbb{Q}$ をとれば $x\in X\setminus V_s\subset X\setminus\overline{V_t}$ となる．

逆に "$\exists t\in]b,1]\cap\mathbb{Q},\ x\notin\overline{V_t}$" が成り立つと仮定する．$x\notin\overline{V_t}$ より，$x\in V_s$ なら $s>t$ である．（V_r は r について増加的．）これより $f(x)\geq t>b$ が成り立つ．

Urysohn の補題を使うと，正規空間の F_σ 集合や G_δ 集合を調べることが出来る．そのまえに少し用語を導入しよう．X を位相空間とする．$A \subset X$ がある連続関数 $f\colon X \to [0,1]$ によって $A = f^{-1}(0)$ と表現されるとき，A は関数閉集合 (functionally closed set) であるという．関数閉集合は明らかに閉集合である．補集合が関数閉集合であるような集合は，関数開集合 (functionally open set) という[*9]．

系 1.14. X を正規空間とする．

(i) $A \subset X$ が G_δ かつ閉であることの必要十分条件は，A が関数閉集合であることである．

(ii) $A \subset X$ が F_σ かつ開であることの必要十分条件は，A が関数開集合であることである．

証明. (i) $[0,1]$ の閉集合 $\{0\}$ は，$\{0\} = \bigcap_{n\geq 1}[0,1/n[$ より G_δ 集合である．$f\colon X \to [0,1]$ を連続写像とすれば

$$f^{-1}(0) = \bigcap_{n\geq 1} f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{n}\right[\right)$$

であるから，$f^{-1}(0)$ は G_δ である．よって，任意の関数閉集合は G_δ かつ閉である．

$A \subset X$ を G_δ かつ閉な集合とする．$X \setminus A$ は F_σ なる開集合なので，閉集合列 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ によって $X \setminus A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ と表現される．いま $A \cap F_n = \emptyset$ なので，Urysohn の補題より連続関数 $f_n\colon X \to [0,1]$ で $f(A) \subset \{0\}$ かつ $f(F_n) \subset \{1\}$ を満たすものがとれる．ここで

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+1}} f_n(x)$$

とすれば，$f\colon X \to [0,1]$ は連続関数である[*10]．この関数は明らかに $f(A) \subset \{0\}$ を満たす．また，$x \notin A$ ならある n について $x \in F_n$ となるから，$f(x) \geq 2^{-n-1} f_n(x) = 2^{-n-1} > 0$ となるから，$(X \setminus A) \cap f^{-1}(0) = \emptyset$ である．これより $f^{-1}(0) = A$ となる．すなわち，G_δ 閉集合は関数閉集合である．

(ii) は (i) において補集合を取ればよい． □

上の結果を用いて，完全正規空間を特徴づける．

命題 1.15. X を T_1 空間とする．このとき，次の 4 条件は同値である．

(i) X は完全正規空間である．

(ii) X の任意の開集合は関数開集合である．

(iii) X の任意の閉集合は関数閉集合である．

(iv) 互いに素な任意の閉集合 A, B に対して，連続関数 $f\colon X \to [0,1]$ で $f^{-1}(0) = A$ かつ $f^{-1}(1) = B$ なるものが存在する．

証明. **(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明．** X は完全正規空間なので正規空間であり，その任意の開集合は F_σ 集合である．系 1.14 より，X の任意の開集合は関数開集合であることが従う．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) の証明． 補集合をとればよい．

---

*9 functionally closed set と functionally open set はそれぞれゼロ集合 (zero-set) および余ゼロ集合 (cozero-set) とも呼ばれる．ゼロ集合との用語は測度論の立場から見ると非常に紛らわしいので，このノートでは functionally open/closed の用語を用いることにした．（用語の出典は Engelking [3]）

*10 この級数が一様収束するからである．ここまでの位相空間論ゼミでは一様収束の概念はまだ出てきていないが，まあ細かいことは忘れよう．

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) の証明. A, B を互いに素な X の閉集合とする．このとき (iii) より連続関数 $g\colon X \to [0,1]$ と $h\colon X \to [0,1]$ で $g^{-1}(0) = A$ かつ $h^{-1}(0) = B$ を満たすものが存在する．ここで

$$f(x) = \frac{g(x)}{g(x) + h(x)}$$

によって連続関数 $f\colon X \to [0,1]$ を定義する．$A \cap B =$ との仮定より $g(x) + h(x) > 0$ となるから，この関数は well-defined である．f の定義より

$$f^{-1}(0) = g^{-1}(0) = A$$

および

$$f^{-1}(1) = h^{-1}(0) = B$$

が成り立つ．

(iv) $\Longrightarrow$ (i) の証明. A, B を互いに素な閉集合とする．このとき連続関数 $f\colon X \to [0,1]$ で $f^{-1}(0) = A$ かつ $f^{-1}(1) = B$ を満たすものが存在する．このとき $f^{-1}([0, 1/2[)$ は A を含む開集合で，$f^{-1}(]1/2, 1])$ は B を含む開集合である．さらに $f^{-1}([0, 1/2[) \cap f^{-1}(]1/2, 1]) = \emptyset$ であるから，X は正規空間であることが分かる．特に $B = \emptyset$ の場合を考えれば，任意の閉集合 A は $f^{-1}(0) = A$ と表現され，G_δ 集合であることがわかる． □

系 1.16. T_6 空間は T_5 空間である．

証明. X を T_6 空間とし，A をその部分空間とする．A の閉集合が関数閉集合であることを示せば，命題 1.15 の (iii) $\Longrightarrow$ (i) から A が正規空間であることが分かる[*11]．$i\colon A \to X$ を包含写像とし，F を A の閉集合とする．このとき F はある X の閉集合 F' を用いて $F = i^{-1}(F')$ と表現される．X は完全正規なので，F' はさらにある連続関数 $f\colon X \to [0,1]$ によって $F' = f^{-1}(0)$ と表現される．いま $f \circ i\colon A \to [0,1]$ は連続関数であり

$$(f \circ i)^{-1}(0) = i^{-1}(f^{-1}(0)) = i^{-1}(F') = 0$$

を満たす．これより F は A の関数閉集合である． □

Hausdorff 空間以外の分離空間の積については，次の結果が存在する．

命題 1.17. $(X_i)_{i \in I}$ を T_i 空間（$i \leq 3\frac{1}{2}$）の族とすれば，積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ はまた T_i 空間である．

証明. **T_1 空間の場合：** $x = (x_i) \in \prod_{i \in I} X_i$ を任意に選べば，「位相空間論セミナー II」の系 3.9 により $\{x\} = \prod_{i \in I} \{x_i\}$ は閉集合である．よって $\prod_{i \in I} X_i$ は T_1 空間である．

T_2 空間の場合： 既に証明した．

T_0 空間の場合： $x, y \in \prod_{i \in I} X_i$ を相異なる 2 点とする．このとき，ある $i \in I$ で $x_i \neq y_i$ を満たすようなものが存在する．この i について X_i は T_0 空間だから，ある開集合 U で $x_i \in U \subset X_i \setminus \{y_i\}$ であるから，または $y_i \in U \subset X_i \setminus \{x_i\}$ を満たすものがとれる．全射の場合，$\prod_i X_i$ の開集合 $\mathrm{pr}_i^{-1}(U)$ は $x \in \mathrm{pr}_i^{-1}(U)$ かつ $y_i \notin \mathrm{pr}_i^{-1}(U)$ を満たす．後者の場合は，$x \notin \mathrm{pr}_i^{-1}(U)$ かつ $y_i \in \mathrm{pr}_i^{-1}(U)$ が成り立つ．ゆえに $\prod_i X_i$ は T_0 空間である．

*11 証明からわかるように，T_6 空間は遺伝的 T_4 空間であるだけでなく，遺伝的 T_6 空間となっている．

T_3 **空間の場合**：1 点 $x \in \prod_{i\in I} X_i$ および閉集合 $F \subset \prod_{i\in I} X_i$ を任意に選ぶ．有限個の $i_1, \dots, i_n$ と開集合 $U_k \subset X_{i_k}$ $(1 \le k \le n)$ で $x \in \bigcap_{1\le k\le n} \mathrm{pr}_{i_k}^{-1}(U_k) \subset \prod_i X_i \setminus F$ を満たすものがとれる．さらに各 X_{i_k} は T_3 空間だから，命題 1.9 より $x_{i_k} \in V_k \subset \overline{V_k} \subset U_k$ なる X_k の開集合 V_k が存在する．このとき，

$$x \in \bigcap_{1\le k\le n} \mathrm{pr}_{i_k}^{-1}(V_k) \subset \overline{\bigcap_{1\le k\le n} \mathrm{pr}_{i_k}^{-1}(V_k)} \subset \bigcap_{1\le k\le n} \mathrm{pr}_{i_k}^{-1}(\overline{V_k}) \subset \bigcap_{1\le k\le n} \mathrm{pr}_{i_k}^{-1}(U_k)$$

が成り立つから，命題 1.9 より $\prod_{i\in I} X_i$ は T_3 空間であることがわかる．

$T_{3\frac{1}{2}}$ **空間の場合**：1 点 $x \in \prod_{i\in I} X_i$ および閉集合 $F \subset \prod_{i\in I} X_i$ を任意に選ぶ．$x \in \prod_i X_i \setminus F$ だから，「位相空間論セミナー II」の定理 3.7 より有限個の $i_1, \dots, i_n$ と開集合 $U_k \subset X_{i_k}$ $(1 \le k \le n)$ で $x \in \bigcap_{1\le k\le n} \mathrm{pr}_{i_k}^{-1}(U_k) \subset \prod_i X_i \setminus F$ を満たすものがとれる．さらに各 X_{i_k} は $T_{3\frac{1}{2}}$ 空間だから，連続関数 $f_k \colon X_{i_k} \to [0,1]$ で $f(x) = 0$ かつ $f_k(X_{i_k} \setminus U_k) \subset \{1\}$ を満たすものが存在する．ここで，$f \colon \prod X_i \to [0,1]$ を $f = \max\{f_k \circ \mathrm{pr}_{i_k}; 1 \le k \le n\}$ で定義すれば，これは連続関数で $f(x) = 0$ かつ $f(F) \subset \{1\}$ を満たす．よって積空間 $\prod_{i\in I} X_i$ は $T_{3\frac{1}{2}}$ 公理を満たす．既に示したようにこれは T_1 空間でもあるから，$T_{3\frac{1}{2}}$ 空間である． □

Tychonoff 空間は次のように特徴づけることができる．

補題 1.18. Tychonoff 空間の任意の部分空間は Tychonoff 空間である．

証明. X を Tychonoff 空間，A をその部分集合，$i \colon A \to X$ を包含写像とする．$x \in A$ と A の閉集合 F で $x \notin F$ なるものを一つ固定すれば，F は X のある閉集合 F' を用いて $F = i^{-1}(F')$ と表現される．いま $x \notin F'$ だから，連続関数 $f \colon X \to [0,1]$ で $f(x) = 0$ かつ $f(F') \subset \{1\}$ を満たすものがとれる．このとき，$f \circ i$ はまた連続関数で $(f \circ i)(x) = f(x) = 0$ かつ $(f \circ i)(F) = f(F) \subset f(F') \subset \{1\}$ を満たす．よって部分空間 A は Tychonoff 空間である． □

定理 1.19. 位相空間 X について，次の 2 条件は同値である．

(i) X は Tychonoff 空間である．
(ii) 適当な集合 I と同相埋め込み $i \colon X \hookrightarrow [0,1]^I$ が存在する．

証明. **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)**：$I = C(X, [0,1])$ とし，$x \in X$ に対して値写像 $\mathrm{ev}_x \colon I \to [0,1]$ を $\mathrm{ev}_x(f) = f(x)$ で定める．このとき，写像 $\mathrm{ev} \colon X \ni x \mapsto \mathrm{ev}_x \in [0,1]^I$ が同相埋め込みであることを示そう．

まずは ev が連続であることを示す．そのためには，任意の射影 $\mathrm{pr}_f \colon [0,1]^I \to [0,1]$ に対して $\mathrm{pr}_f \circ \mathrm{ev} \colon X \to [0,1]$ が連続になることを示せばよい[*12]．いま $(\mathrm{pr}_f \circ \mathrm{ev})(x) = f(x)$ だからこれは写像 $f \in C(X, [0,1])$ に他ならず，明らかに連続である．よって ev は連続写像である．

次に，ev が単射であることを示す．$x, y \in X$ を $x \neq y$ なる 2 点とする．X は Tychonoff 空間だから，$f \in I$ で $f(x) = 0$ かつ $f(y) = 1$ を満たすものが存在する．したがって，この f に対して $\mathrm{ev}_x(f) \neq \mathrm{ev}_y(f)$ が成り立ち，$\mathrm{ev}_x \neq \mathrm{ev}_y$ が従う．よって ev は単射である．

あとは，ev が $\mathrm{ev}(X)$ への開写像であることを示せばよい[*13]．U を開集合とし，$b \in \mathrm{ev}(U) \subset [0,1]^I$ を任意に選ぶ．ev は単射だから，このとき $\mathrm{ev}_a = b$ を満たす $a \in U$ がただ一つ存在する．いま X は Tychonoff 空間だったから，連続関数 $f \colon X \to [0,1]$ で $f(a) = 0$ かつ $f(X \setminus U) \subset \{1\}$ を満たすものがとれる．このと

*12 積位相の普遍性を思い出すべし．
*13 $[0,1]^I$ への開写像とは限らない．

き，$\mathrm{pr}_f^{-1}([0,1/2[)$ は $[0,1]^I$ の開集合であり，$b = \mathrm{ev}_a \in \mathrm{pr}_f^{-1}([0,1/2[) \cap \mathrm{ev}(X) \subset \mathrm{ev}(U)$ を満たす．よって $\mathrm{ev}(U)$ は $\mathrm{ev}(X)$ の開集合である．

以上の議論により，写像 $\mathrm{ev}\colon X \to [0,1]^I$ は同相埋め込みであることが示された．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：命題 1.17 と補題 1.18 より $[0,1]^I$ の部分空間 $i(X)$ は Tychonoff 空間なので，それと同相な X も Tychonoff 空間である． □

1.4 分離公理と連続関数の拡張可能性

分離空間と関連した話題として，部分空間上で定義された連続関数が全空間に拡張できるかどうかという問題を考えよう．まずは，稠密部分空間上で定義された関数の場合を考える．

命題 1.20. X を位相空間，A をその稠密部分空間とし，$f\colon A \to Y$ を正則空間への写像とする．このとき，次の 2 条件は同値である．

(i) f はある連続関数 $\overline{f}\colon X \to Y$ へと拡張される．

(ii) 全ての $x \in X$ について，フィルター基底 $f_*(i_A)^*(\mathscr{V}_x)$ は Y で収束する．ただし，$i_A\colon A \to X$ は包含写像である．

証明．まずは，A が X で稠密であることから，$i_A^*(\mathscr{V}_x)$ は実際に A 上のフィルター基底を定めることに注意しておく[*14]．

(i) $\Longrightarrow$ (ii)．$i_A^*(\mathscr{V}_x)$ は x に収束 X のフィルター基底だから，$\overline{f}$ が f の連続拡張であることに注意すれば $\overline{f}_*((i_A)^*(\mathscr{V}_x)) = f_*((i_A)^*(\mathscr{V}_x))$ は $\overline{f}(x)$ に収束する．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．$x \in X$ に対して，$\overline{f}(x) = \lim f_*(i_A)^*(\mathscr{V}_x)$ と定義する．Y は正則空間なので Hausdorff であり，よってフィルター基底の極限は一意に定まる．したがって $\overline{f}$ は写像として well-defined である．$\overline{f}$ が連続であること示そう．$x \in X$ とし，V を $\overline{f}(x)$ の閉近傍とする．定義より $\overline{f}(x)$ はフィルター基底 $f_*(i_A)^*(\mathscr{V}_x)$ の（ただ一つの）極限点だから，ある開近傍 $U \in \mathscr{V}_x$ で $f(A \cap U) \subset V$ を満たすようなものがとれる．このとき $\overline{f}(U) \subset V$ が成り立っていることを示す．$z \in U$ とすれば $\overline{f}(z) \in f_*(i_A)^*(\mathscr{V}_z)$ だから，$\overline{f}(z) \in \overline{f(A \cap U)}$ が成り立つ[*15]．いま V は閉集合だから $\overline{f(A \cap U)} \subset V$ であり，したがって $\overline{f}(z) \subset V$ がわかる．$z \in U$ は任意に選んだ点だったから，これで $f(U) \subset V$ が示された．正則空間 Y の各点は閉近傍からなる基本近傍系をもつから，これは f が x で連続であることを表している． □

次は，位相空間の閉部分空間で定義された連続関数の拡張問題を考えよう．

定理 1.21 (Tietze-Urysohn の拡張定理)**.** X を正規空間とし，A をその閉部分空間とする．

(i) 連続関数 $f\colon A \to \mathbb{R}$ は X 全体に連続に拡張できる．

(ii) $[a,b]$ を $\mathbb{R}$ の有界閉区間とする．このとき，連続関数 $f\colon A \to [a,b]$ は X から $[a,b]$ への連続関数に拡張できる．

定理の証明のために，補題を一つ用意しよう．

[*14] 位相空間論セミナー I 命題 5.8.

[*15] a がフィルター基底 $\mathscr{B}$ の極限点なら，全ての $B \in \mathscr{B}$ について $a \in \overline{B}$ が成り立つ．

補題 1.22. X を正規空間とし，A をその閉部分空間，$f_0\colon A \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．f が A 上で $|f(x)| \leq c$ を満たすならば，ある連続関数 $g\colon X \to \mathbb{R}$ で

$$\forall x \in X \quad |g(x)| \leq \frac{c}{3} \tag{3}$$

$$\forall x \in A \quad |g(x) - f(x)| \leq \frac{2c}{3} \tag{4}$$

を満たすものが存在する．

証明. f_0 は連続関数だから，$E := f_0^{-1}([-c, -c/3])$ と $F := f_0^{-1}([c/3, c])$ は互いに素な M の閉集合である．A は X の閉部分空間だから，これらは X 上の閉集合でもある．いま X は正規空間だから，Urysohn の補題より連続関数 $h\colon X \to [0, 1]$ で $h(E) \subset \{0\}$ かつ $h(F) \subset \{1\}$ を満たすものが存在する．この h を用いて，

$$g(x) = \frac{2c}{3}\left(h(x) - \frac{1}{2}\right) \tag{5}$$

と定義する．この g が求めるべき関数であることを示そう．h は $[0, 1]$ に値をとるから $h - 1/2$ は $[-1/2, 1/2]$ に値をとり，よって g は $[-c/3, c/3]$ に値をとる．$x \in E$ なら $f_0(x) \in [-c, -c/3]$ かつ $g(x) = -c/3$ なので，$|g(x) - f_0(x)| \leq 2c/3$ である．また $x \in F$ なら $f_0(x) \in [c/3, c]$ かつ $g(x) = c/3$ なので，やはり $|g(x) - f_0(x)| \leq 2c/3$ である．最後に，$x \in A \setminus (E \cup F)$ なら，$f_0(x), g(x) \in [-c/3, c, 3]$ なので，この場合も $|g(x) - f_0(x)| \leq 2c/3$ となる． □

定理 1.21 の証明. (ii) から示す．有界閉区間はどれも同相だから，$[a, b] = [-1, 1]$ として示せば十分である．先ほどの補題に従い，連続関数 g_0 を

$$\forall x \in X \quad |g_0(x)| \leq \frac{1}{3} \tag{6}$$

$$\forall x \in A \quad |g_0(x) - f(x)| \leq \frac{2}{3} \tag{7}$$

を満たすように定義する．$g_0, \ldots, g_n$ が与えられているとき，連続関数 g_{n+1} を

$$\forall x \in X \quad |g_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \tag{8}$$

$$\forall x \in A \quad \left|\left(f(x) - \sum_{0 \leq i \leq n} g_i(x)\right) - g_{n+1}(x)\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} \tag{9}$$

を満たすように選ぶ．このようにして再帰的に定義された連続関数列 $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は，全ての $n \in \mathbb{N}$ について

$$\forall x \in X \quad |g_n(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} \tag{10}$$

$$\forall x \in A \quad \left|f(x) - \sum_{0 \leq i \leq n} g_i(x)\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \tag{11}$$

を満たしている．ここで，

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} g_n(x) \tag{12}$$

と定める．このとき，(10) から F は X 上の連続関数となる[*16]．また，同じ評価より $|F(x)| \leq 1$ となることもわかる．さらに (11) において $n \to \infty$ とすれば各 $x \in A$ で $f(x) = F(x)$ となるから，F は A 上で f と一致する．

次に, (i) を証明しよう．$f\colon A \to \mathbb{R}$ を連続関数とし, $\varphi\colon \mathbb{R} \to]-1,1[\subset [-1,1]$ を同相写像[*17]．このとき, (ii) より $\varphi \circ f\colon A \to [-1,1]$ は連続関数 $F_0\colon X \to [-1,1]$ に拡張することができる．いま $F_1^{-1}(\{-1,1\})$ は A と共通部分を持たない X の閉集合なので，ある連続関数 $h\colon X \to [0,1]$ で $h(A) \subset \{1\}$ かつ $h(F_1^{-1}(\{-1,1\})) \subset \{0\}$ を満たすものが存在する．ここで $F_2(x) = F_1(x)h(x)$ と定義すれば，$F_2\colon X \to [-1,1]$ はまた X 上の連続関数であり，$F_2(X) \subset]-1,1[$ を満たす．$F := \varphi^{-1} \circ F_2$ と定義すれば，F は X から $\mathbb{R}$ への連続関数である．特に $x \in A$ なら $F(x) = \varphi^{-1}(F_1(x)) = f(x)$ であり，F は f の拡張となっている． □

2 連結空間

本節では連結空間を扱う．連結空間についてはあまり深入りしない．（私がよく知らない．）

定義 2.1. X を位相空間とする．

(i) 空でない開集合 U, V で $U \cap V = \emptyset$ かつ $U \sqcup V = X$ を満たすようなものが存在しないとき，X は連結 (connected) であるという．$A \subset X$ は部分位相空間 A が連結であるとき，X の連結部分集合であるという．

(ii) 任意の $x, y \in X$ に対してある連続関数 $f\colon [0,1] \to X$ で $f(0) = x$，$f(1) = y$ を満たすものが存在するとき，X は弧状連結 (pathwise connected) であるという．

大雑把な言い方をすれば，位相空間 X が連結でないとは X に飛び地があるということである[*18]．

空集合の位相は $\{\emptyset\}$ のみであるから，空集合は連結空間である．また，密着空間は連結である．離散空間が連結であるための必要十分条件は，それが高々 1 点集合であるときである．位相空間の連結性は，次の定理のような言い換えが出来る．

定理 2.2. X を位相空間とする．

(i) X は連結空間である．

(ii) X の部分集合で開集合かつ閉集合となるようなものは，$\emptyset$ と X のみである．

(iii) $A, B \subset X$ は $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ かつ $A \cup B = X$ を満たすとする．このとき A が空であるかまたは B が空である．

(iv) 離散空間 $2 = \{0,1\}$ への任意の連続写像 $f\colon X \to 2$ は定数関数である．

証明．**(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明．** 対偶を示す．A は X の開かつ閉集合で $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$ を満たすものとする．このとき $X \setminus A$ も $\emptyset \subsetneq X \setminus A \subsetneq X$ なる開閉集合で，$X = (X \setminus A) \sqcup A$ を満たす．これより X は連結ではない．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) の証明． A, B は (iii) の仮定を満たす集合とする．このとき $\overline{A} \subset X \setminus B \subset A$ より，$\overline{A} = A$ である．同様にして $\overline{B} = B$ も分かるので，A と B はともに閉集合である．これらは互いに補集合の関係に

[*16] いわゆる「Weierstrass の M 判定法」である．
[*17] 例えば，$\varphi(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.
[*18] より正確に言うと，飛び地があるというのは「弧状連結でない」のほうに近い．

あるから，どちらも開集合でもある．これより $A=\emptyset$ かつ $B=X$ が成り立つか，または $A=X$ かつ $B=\emptyset$ が成り立つ．ゆえに A または B は空である．

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) の証明． 連続関数 $f\colon X\to 2$ が与えられたとする．$X_0=f^{-1}(0)$ および $X_1=f^{-1}(1)$ とすれば，X_1 と X_2 は明らかに $X=X_1\cup X_2$ かつ $\overline{X_1}\cap X_2=X_1\cap\overline{X_2}=\emptyset$ を満たす．これより X_1 または X_2 は空である．X_1 が空なら $f(X)=f(X_2)\subset\{1\}$ であり，X_2 が空なら $f(X)=f(X_1)\subset\{0\}$ となる．いずれにせよ f は定数関数である．

(iv) $\Longrightarrow$ (i) の証明． 対偶を示す．X は連結でないとし，開集合 A,B を $A\cup B=X$ かつ $A\cap B=\emptyset$ を満たすように選ぶ．このとき，特性関数 $1_A\colon X\to 2$ は離散空間 2 への連続全射である． □

系 2.3. 位相空間 X の部分集合 A について，次の条件は同値である．

(i) A は連結である．

(ii) X の開集合 U，V で $A\subset U\cap V$，$U\cap V\cap A=\emptyset$，$U\cap A,V\cap A\neq\emptyset$ を満たすものは存在しない．

(iii) $B,C\subset X$ は $(\mathrm{Cl}_X B)\cap C=B\cap(\mathrm{Cl}_X C)=\emptyset$ かつ $A=B\cup C$ を満たすと仮定する．このとき $B=\emptyset$ または $C=\emptyset$ である．

証明．**(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) の証明．** A の開集合 U は X の開集合 V によって $U=A\cap V$ と表現されることに注意すれば，定理 2.2 より明らか．

(i) $\Longleftrightarrow$ (iii) の証明． (i) を仮定し，(iii) の条件を満たす B と C を選ぶ．このとき

$$(\mathrm{Cl}_A B)\cap C=[(\mathrm{Cl}_X B)\cap A]\cap C\subset(\mathrm{Cl}_X B)\cap C=\emptyset,$$
$$B\cap(\mathrm{Cl}_A C)=B\cap[(\mathrm{Cl}_X C)\cap A]\subset B\cap(\mathrm{Cl}_X C)=\emptyset$$

が成り立つから[*19]，定理 2.2 の (i) $\Longrightarrow$ (iii) により $B=\emptyset$ または $C=\emptyset$ がわかる．

逆の主張は対偶を示すことにする．A が連結でないとし，A の空でない開集合 U と V を $U\cap V=\emptyset$ および $A=U\cup V$ を満たすように選ぶ．U と V はあきらかに A の閉集合でもある．このとき，

$$(\mathrm{Cl}_X U)\cap V=(\mathrm{Cl}_X U\cap A)\cap V=(\mathrm{Cl}_A U)\cap V=U\cap V=\emptyset,$$
$$U\cap(\mathrm{Cl}_X V)=U\cap(\mathrm{Cl}_X V\cap A)=U\cap(\mathrm{Cl}_A V)=U\cap V=\emptyset$$

が成り立つが，U も V も空ではないから条件 (iii) に反する．よって (iii) $\Longrightarrow$ (i) の対偶が示された． □

命題 2.4. X を連結空間，$f\colon X\to Y$ を連続写像とする．このとき f による X の像 $f(X)$ は連結である．

証明．X が空なら $f(X)$ も空であり，連結である．X が空でないとき，$g\colon f(X)\to 2$ を離散空間 2 への連続写像とする．合成 $g\circ f\colon X\to 2$ は連結空間 X から離散空間 2 への連続関数なので，定数関数である．さらに $f\colon X\to f(X)$ は全射なので，g も定数関数である．任意の連続関数 $f(X)\to 2$ が定数関数なので，定理 2.2 の (iv) $\Longrightarrow$ (i) により $f(X)$ は連結であることがわかる． □

命題 2.5. X を位相空間とし，$(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ をその連結部分集合からなる族とする．ある λ_0 が存在して，任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して

$$(\overline{A_{\lambda_0}}\cap A_\lambda)\cup(A_{\lambda_0}\cap\overline{A_\lambda})\neq\emptyset$$

が成り立っているとする．このとき，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ は連結集合である．

[*19] 位相空間論セミナー II の命題 1.5 を参照．

証明. $A = \bigcup_\lambda A_\lambda$ とし，B と C は A に対して系 2.3(iii) の仮定を満たすとする．このとき明らかに $A_{\lambda_0} \subset B \cup C$ であるから，$A_{\lambda_0} \cap B$ と $A_\lambda \cap C$ は連結集合 A_{λ_0} に対して系 2.3(iii) の仮定を満たす．よって $A_{\lambda_0} \cap B = \emptyset$ または $A_\lambda \cap C = \emptyset$ が成り立つ．特に $A_{\lambda_0} \cap C = \emptyset$，すなわち $A_{\lambda_0} \subset B$ であるとしてよい．$\lambda \in \Lambda$ を任意に選ぶ．このとき，$A_\lambda \cap C \subset$ このとき，同様の議論により $A_\lambda \subset B$ または $A_\lambda \subset C$ が成り立つ．$A_\lambda \subset C$ なら

$$\emptyset \neq \overline{A_{\lambda_0}} \cap A_\lambda \subset \overline{B} \cap C,$$
$$\emptyset \neq A_{\lambda_0} \cap \overline{A_\lambda} \subset B \cap \overline{C}$$

となり B と C に関する仮定に矛盾する．よって $A_\lambda \subset B$ である．λ は任意にとっていたから，$A \subset B$ がわかる．したがって A は系 2.3 (iii) を満たし，連結である． □

この命題の系として，次の主張が直ちにしたがう．

系 2.6. 位相空間 X の連結部分集合族 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ を満たすならば，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ は連結である．

命題 2.7. X を位相空間とし，$A \subset X$ をその連結部分集合とする．$A \subset B \subset \overline{A}$ を満たすような B は，連結である．

証明. $\Lambda = B \cup \{B\}$ とし，集合族 $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を

$$B_\lambda = \begin{cases} A & \text{if } \lambda = B \\ \{\lambda\} & \text{if } \lambda \in B \end{cases}$$

と定義する．このとき $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は X の連結部分集合からなる族であり，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\overline{B}_B \cap B_\lambda \neq \emptyset$ を満たしている．命題 2.5 から，$B = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ は連結であることがわかる． □

命題 2.7 の言っていることは，連結性は隣接する点を付け加える操作によって不変な概念だということである．触点は A を通って到達できるような点なので，飛び地が無いという連結性の直感的な理解にも整合的だと言えるだろう．

命題 2.8. 位相空間 X の任意の二点 x, y にたいして，ある連結集合 A で $\{x, y\} \subset A$ を満たすものが存在するとする．このとき X は連結である．

証明. $x_0 \in X$ を一つ固定する．任意の $x \in X$ に対して，$\{x, x_0\} \subset A$ なる連結集合 A を一つ選んで A_x で表す．このとき，連結集合族 $(A_x)_{x\in X}$ は $\bigcap_{x\in X} A_x \neq \emptyset$ を満たし，系 2.6 より $X = \bigcup_{x\in X} A_x$ は連結となる． □

次に連結性と弧状連結性の関係を調べる．その前に，$\mathbb{R}$ の部分集合の連結性について考察しよう．

命題 2.9. (i) $\mathbb{R}$ は連結である．

(ii) $\mathbb{R}$ の有界区間 $[a, b]$，$]a, b[$，$[a, b[$ および $]a, b]$ はどれも連結である．

証明. まずは，有界閉区間 $[a, b]$ 連結であることを示す．離散空間への全射 $f\colon [a, b] \to 2$ が連続ではないことを示せばよい[*20]．$f(a) \neq f(c)$ を満たすような $c \in]a, b]$ をとる。このとき $f^{-1}(f(a)) \cap [a, c]$ は有界集合なの

[*20] 定理 2.2 (iv) $\Longrightarrow$ (i).

で，上限 s をもつ．上限の定義より，$s_n \to s$，$s_n \le c$ および $f(s_n) = f(a)$ を満たす列 (s_n) をとることが出来る．$f(s) \neq f(a)$ なら，

$$\lim_{n\to\infty} f(s_n) = f(a) \neq f(s)$$

となり，f は明らかに連続関数ではない．$f(s) = f(a) \neq f(c)$ のとき，s の定義より $s < c$ である．s は上限だから $]s, c]$ 上 f は定数であり，f の s での右極限は $f(c)$ である．この場合は

$$\lim_{n\to\infty} f(s_n) = f(a) \neq \lim_{\substack{t\to s\\ s<t\le c}} f(t)$$

なので，やはり f は連続ではない．以上の議論により，閉区間 $[a, b]$ は連結であることが示された．

開区間 $]a, b[$ の連結性は，

$$]a, b[= \bigcup_{0<\varepsilon<\frac{b-a}{2}} [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$$

に注意すれば，系 2.6 より従う．その他の有界区間の連結性は命題 2.7 よりわかる．$\mathbb{R}$ は連続関数 $x \to \tan x$ による連結集合 $]-\pi/2, \pi/2[$ の像なので，命題 2.4 により連結である． □

命題 2.10. 位相空間 X が弧状連結ならば，連結である．

証明．X は弧状連結だから，任意の $x, y \in X$ に対してある連像写像 $f\colon [0,1] \to X$ が存在して $x, y \in f([0,1])$ となる．命題 2.4 と命題 2.9 から $f([0,1])$ は連結なので，X は命題 2.8 の仮定を満たすことがわかる．よって X は連結である． □

命題 2.10 より弧状連結空間は連結だが，逆は一般には成り立たない．齋藤 [7, 5.3.20 例] などを参照されたい．

連結性の応用として，中間値の定理を証明しよう．

命題 2.11 (中間値の定理)**.** X を連結空間とし，$f\colon X \to \mathbb{R}$ を連続写像とする．$x, y \in X$ が $f(x) \le f(y)$ を満たすならば，$[f(x), f(y)] \subset f(X)$ が成り立つ．

証明．$f(x) = f(y)$ の場合は明らかなので，$f(x) < f(y)$ として示せばよい．$f(x) < c < f(y)$ とすれば，$f^{-1}(]-\infty, c[)$ および $f^{-1}(]c, \infty[)$ は X の空でない開集合で，共通部分をもたない．このとき X の連結性より

$$f^{-1}(]-\infty, c[) \cup f^{-1}(]c, \infty[) \subsetneq X \tag{13}$$

が成り立つ．明らかに

$$f^{-1}(]-\infty, c[) \cup f^{-1}(c) \cup f^{-1}(]c, \infty[) = X$$

であり，(13) とあわせて $f^{-1}(c) \neq \emptyset$ がわかる．すなわち $c \in f(X)$ であり，$[f(x), f(y)] \subset f(X)$ が示された． □

連結性は積空間に遺伝する性質である．

補題 2.12. X と Y を空でない連結空間とする．このとき，$X \times Y$ はまた連結空間である．

証明．$X \times Y$ の 2 点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) を任意に選ぶ．$X \times \{y_1\}$ は標準的な連続写像 $x \to (x, y_1)$ による X の像であるから，$X \times Y$ の連結集合である．同様にして，$\{x_2\} \times Y$ も連結集合である．いま

$$(X \times \{y_1\}) \cap (\{x_2\} \times Y) = \{(x_1, x_2)\} \neq \emptyset$$

だから，系 2.6 により $(X \times \{y_1\}) \cup (\{x_2\} \times Y)$ も連結である．したがって $X \times Y$ の任意の 2 点に対してそれを含む連結集合が存在することになり，命題 2.8 により $X \times Y$ の連結性がわかる．□

命題 2.13. $(X_i)_{i \in I}$ が空でない位相空間のからなる族とする．このとき，$\prod_{i \in I} X_i$ が連結であるための必要十分条件は，全ての X_i が連結であることである．

証明．まずは $\prod_{i \in I} X_i$ が連結であると仮定する．標準射影 $\mathrm{pr}_i \colon \prod_{j \in I} X_j \to X_i$ は連続全射だから，命題 2.4 により全ての $i \in I$ について X_i は連結である．

逆に，X_i はどれも連結であると仮定する．このとき，補題 2.12 より任意の i, j について $X_i \times X_j$ は連結である．数学的帰納法により，任意の有限集合 $J \subset I$ について $\prod_{i \in J} X_i$ が連結となることもわかる．ここで $a \in \prod_{i \in I} X_i$ を一つ固定する．

$$\mathscr{J} = \{ J \subset I \mid J \text{ は有限集合 } \}$$

とし，$J \in \mathscr{J}$ に対して写像 $f_{a,J} \colon \prod_{i \in J} X_i \to \prod_{i \in I} X_i$ を

$$f_{a,J}(x)(i) = \begin{cases} x_i & \text{if } i \in J \\ a_i & \text{if } i \in I \setminus J \end{cases}$$

と定めれば，これは連続写像である．よってその像 $A_J := f_{a,J}\left(\prod_{i \in J} X_i\right)$ は連結集合となる．連結集合族 $(A_J)_{J \in \mathscr{J}}$ は $a \in \bigcap_{J \in \mathscr{J}} A_J$ を満たすので，系 2.6 により $\bigcup_{J \in \mathscr{J}} A_J$ は連結である．$\bigcup_{J \in \mathscr{J}}$ が X で稠密であることを示そう．$x \in X$ とし，U を x の任意の近傍とする．このとき，有限個の $i_1, \ldots, i_n$ と $U_{i_k} \in \mathscr{O}_{X_k}$ を上手く選んで

$$x \in \mathrm{pr}_{\{i_1, \ldots, i_n\}}^{-1}(U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_n}) \subset U$$

とすることが出来るのであった．ここで $J = \{i_1, \ldots, i_n\}$ として $y \in \prod_{i \in J} U_i$ を一つ選べば，

$$f_{a,J}(y) \in \mathrm{pr}_J^{-1}\left(\prod_{i \in J} U_i\right) \cap A_J \subset U \cap \bigcup_{J \in \mathscr{J}} A_J$$

となる．U は x の任意の近傍としてとっていたから，x は $\bigcup_{J \in \mathscr{J}} A_J$ の触点である．さらに x も任意に選んでいたから，$\bigcup_{J \in \mathscr{J}} A_J$ は $\prod_{i \in I} X_i$ で稠密であることがわかる．$\bigcup_{J \in \mathscr{J}} A_J$ は X の連結な部分集合なので，命題 2.7 より X 自身も連結であることが示される．□

位相空間 X における 1 点集合は連結なので，X は連結集合による分割 $(\{x\})_{x \in X}$ をもつ．連結集合からなる X の分割のうち，最も粗いのはどのようなものだろうか．次の命題では，それについて調べよう．

命題 2.14. X を位相空間とする．

(i) X 上の関係 R を，

$$xRy \iff x, y \in A \text{ なる連結集合 } A \text{ が存在する}$$

と定める．このとき R は同値関係である．

(ii) R を (i) で定めた同値関係とすると，X/R の元は X の連結閉集合である．

証明．(i) $\{x\}$ は明らかに x を含む連結集合なので，R は反射律 xRx を満たす．対称律 $xRy \iff yRx$ は明らかである．xRy かつ yRz であると仮定する．$x, y \in A$ および $y, z \in B$ を満たす連結集合 A と B をとれ

ば，$y \in a \cap B$ より $A \cup B$ は連結である．（系 2.6）いま $x, z \in A \cup B$ なので，xRz が成り立つ．すなわち R は推移律も満たす．ゆえに R は同値関係である．

(ii) $[x]$ を代表元 $x \in X$ をもつ同値類とする．このとき

$$[x] = \bigcup \{A \subset X \mid A \text{ は } x \text{ を含む連結集合 } \} \tag{14}$$

であることを示そう．右辺の集合族は x を共通部分に含むので，系 2.6 により連結である．$y \in [x]$ を任意にとれば，$x, y \in A$ なる連結集合 A が存在する．よって y は右辺の元でもあり，左辺の集合は右辺に含まれる．一方 $x \in A$ なる連結集合 A をとれば，全て $a \in A$ は明らかに aRx を満たす．よって $A \subset [x]$ であり，右辺が左辺に含まれることもわかる．したがって (14) が成立．

あとは $[x]$ が閉集合であることを示せばよい．$[x]$ は連結集合だから，命題 2.7 より $\overline{[x]}$ も連結集合である．よって $\bar{[x]}$ は x を元に持つ連結集合となり，(14) より $\overline{[x]} \subset [x]$ が成立．ゆえに $[x]$ は連結である． □

定義 2.15. X を位相空間とし，R を命題 2.14 における同値関係とする．X/R の元，すなわち X の R による同値類を，X の連結成分 (connected component) と呼ぶ．R が自明な同値関係[*21]のとき，X は全不連結 (totally disconnected) であるという．

X が連結空間のときは，X の連結成分は X のみである．命題 2.14 の証明より，点 x を含む連結成分は x を含む最大の連結集合である．

References

[1] Nicolas Bourbaki. *General Topology Part I*. Elements of Mathematics. Hermann, 1966.

[2] R. Engelking. *Outline of General Topology*. Nort-Holland Publishing Company/Polish Scientific Publishers, 1968.

[3] Ryszard Engelking. *General topology*. Revised and completed edition. Sigma Series in Pure Mathematics 6. Translated from the Polish by the author. Heldermann Verlag, Berlin, 1989, pp. viii+529. ISBN: 3-88538-006-4.

[4] Klaas Pieter Hart, Jun-iti Nagata, and Jerry E. Vaughan, eds. *Encyclopedia of General Topology*. Elsevier Science, 2004, pp. x+526. ISBN: 0-444-50355-2. URL: https://www.elsevier.com/books/encyclopedia-of-general-topology/hart/978-0-444-50355-8.

[5] John L. Kelley. *General Topology*. Graduate Texts in Mathematics 27. Originally published by Van Nostrand, 1955. Springer-Verlag New York, 1975, pp. xiv+298. URL: https://www.springer.com/la/book/9780387901251.

[6] 児玉之宏 and 永見啓応. **位相空間論**. 岩波書店, 1974.

[7] 齋藤正彦. **数学の基礎．集合・数・位相**. 東京大学出版会, 2002. URL: http://www.utp.or.jp/book/b302226.html.

[8] 斎藤毅. **集合と位相**. 大学数学の入門 8. 東京大学出版会, 2009.

[9] 日本数学会, ed. **岩波数学辞典**. 第 4 版. 岩波書店, 2007.

[*21] $=$ のこと．

索引