位相空間論セミナー IX：関数空間 Ver.1.3

平井祐紀

2021 年 5 月 9 日

更新履歴

2018.9.19 Ver. 1.0.

2020.4.28 Ver. 1.1. 誤植を訂正．索引を追加するなど．

2020.10.5 Ver. 1.2. 誤植を訂正．命題 4.1 証明の記述を少し変更．

2021.5.9 Ver. 1.3. 誤植を訂正．体裁を少し変更．

目次

1　関数空間の位相

本ノートでは，関数空間に連続関数の空間に適当な位相を入れることを考える．位相空間 X と Y が与えられたとき，X から Y への連続関数全体の空間を $C(X,Y)$ で表すのであった．$\mathrm{Map}(X,Y)$ の適当な部分集合，特に $C(X,Y)$ に何らかの位相を入れて，これを位相空間と考えたい．ところが一般に位相と言うと，離散位相から密着位相まで様々な位相を考えることができる．関数空間の位相を考える際の指導原理はどのようなものであろうか？

X,Y,Z を集合としたとき，写像の空間における同型 $\mathrm{Map}(X\times Z,Y)\cong \mathrm{Map}(Z,Y^X)$ があったことを思い出そう．ただし，$\mathrm{Map}(A,B)$ および B^A はともに A から B への写像全体の空間を表すものとする．これと同じように，同型 $C(X\times Z,Y)\cong C(Z,C(X,Y))$ が存在するような $C(X,Y)$ の位相は存在するだろうか？関数空間の位相を考えるときには，これが一つの目標となる．Y^X は集合の圏 **Sets** における冪であるから，この問題は位相空間の圏 **Top** は常に冪を持つか？という風に言い換えても良いだろう．本ノートでは，このような観点を持ちながら，関数空間の位相について考えていく．

集合 X と Y が与えられたとき，評価写像 $\mathrm{ev}\colon X \times Y^X \to Y$ を $(x, f) \mapsto f(x)$ で定義する．また，$x \in X$ を固定したときに定まる写像 $f \mapsto \mathrm{ev}(x, f)$ を ev_x で表し，これもまた評価写像と呼ぶことにする．評価写像 ev_x は，第 x 成分への射影 $Y^X \to Y$ と同じものである．

定義 1.1 X, Y を位相空間とし，位相空間 Z に対して集合としての標準的な同型 $\Phi_Z\colon \mathrm{Map}(X \times Z, Y) \to \mathrm{Map}(Z, Y^X)$ を考える．$C(X, Y)$ の位相は，

(i) 任意の位相空間 Z について $\Phi_Z(C(X \times Z, Y)) \subset C(Z, C(X, Y))$ が成り立つとき，適切 (proper) であるという．
(ii) 任意の位相空間 Z について $\Phi_Z^{-1}(C(Z, C(X, Y))) \subset C(X \times Z, Y)$ が成り立つとき，許容可能 (admissible) であるという．
(iii) 適切かつ許容可能であるとき，受容可能 (acceptable) であるという．

$C(X, Y)$ の位相が適切とは，連続写像 $f\colon X \times Y \to Z$ から定まる写像 $z \mapsto f(\,\cdot\,, z)$ は $C(X, Y)$ の位相について連続になるということである．また，$C(X, Y)$ の位相が許容可能であるとは，写像 $Z \ni z \mapsto f_z \in C(X, Y)$ が連続なら，$(x, z) \mapsto f_z(x)$ が 2 変数について（同時に）連続になるということである．

命題 1.2 X，Y を位相空間とし，$\mathscr{O}$，$\mathscr{O}'$ を $C(X, Y)$ 上の位相とする．

(i) $\mathscr{O}$ が適切で $\mathscr{O}' \subset \mathscr{O}$ が成り立つなら，$\mathscr{O}'$ も適切である．
(ii) $\mathscr{O}$ が許容可能で $\mathscr{O} \subset \mathscr{O}'$ が成り立つなら，$\mathscr{O}'$ も許容可能である．
(iii) $\mathscr{O}$ が適切で $\mathscr{O}'$ が許容可能なら，$\mathscr{O} \subset \mathscr{O}'$ が成り立つ．
(iv) $C(X, Y)$ 上の受容可能な位相は高々一つしかない．

証明 $\mathscr{O} \subset \mathscr{O}'$ なら $C(Z, (C(X, Y), \mathscr{O})) \supset C(Z, (C(X, Y), \mathscr{O}'))$ となることに注意すれば (i) と (ii) がわかる．(iv) は (iii) よりすぐにわかるので，後は (iii) を示せばよい．$\mathscr{O}$ が適切で $\mathscr{O}'$ が許容可能なら，

$$\Phi_Z(C(X \times Z, Y)) \subset C(Z, (C(X, Y), \mathscr{O}), \qquad \Phi_Z^{-1}(C(Z, (C(X, Y), \mathscr{O}'))) \subset C(X \times Z, Y) \tag{1}$$

が成り立つ．これより

$$C(Z, (C(X, Y), \mathscr{O}')) \subset C(Z, (C(X, Y), \mathscr{O}) \tag{2}$$

が成り立つ．すなわち，$\mathscr{O}'$ について連続な任意の関数 $Z \to C(X, Y)$ は $\mathscr{O}$ についても連続である．これは $\mathscr{O} \subset \mathscr{O}'$ が成り立つということに他ならない． □

命題 1.3 $C(X, Y)$ 上の位相が許容可能であるための必要十分条件は，評価写像 $\mathrm{ev}\colon X \times C(X, Y) \to Y$ が連続になることである．

証明　標準的な同型 $\Phi_Z\colon \mathrm{Map}(X\times Z, Y)\to \mathrm{Map}(Z, Y^X)$ は，$f\in \mathrm{Map}(X\times Z, Y)$ に対して以下の図式を可換にする $\widetilde{f}\in \mathrm{Map}(Z, Y^X)$ を対応させる写像であった．

$$
\begin{tikzcd}
X\times Z \arrow[r, "\mathrm{id}_X\times\widetilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & X\times Y^X \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\
& Z
\end{tikzcd}
\tag{3}
$$

評価写像 $\mathrm{ev}\colon X\times C(X,Y)\to Y$ が連続なら、任意の連続関数 $g\colon Z\to C(X,Y)$ について $\Phi_Z^{-1}(g)=\mathrm{ev}\circ(\mathrm{id}_X\times g)$ は連続となる．よって $C(X,Y)$ の位相は許容可能である．

逆に，$C(X,Y)$ の位相が許容可能であるとする．$Z=C(X,Y)$ とおけば，位相が許容可能であることと恒等写像 $\mathrm{id}_{C(X,Y)}\colon C(X,Y)\to C(X,Y)$ が連続であることから，

$$
\mathrm{ev}=\mathrm{ev}\circ(\mathrm{id}_X\times\mathrm{id}_{C(X,Y)})=\Phi_{C(X,Y)}^{-1}(\mathrm{id}_{C(X,Y)})
$$

も連続となることがわかる． □

Y が位相空間なら，任意の集合 X に対して Y^X を積位相空間と考えることができる．特に X が位相空間であるとき，Y^X 上の積位相の $C(X,Y)$ への制限は十分良い位相と言えるだろうか？積位相空間 Y^X の部分位相空間の位相を各点収束位相 (topology of pointwise convergence) といい，各点収束位相により $C(X,Y)$ を位相空間と考えたものを $C_{\mathrm{p}}(X,Y)$ で表すことにする．この位相を各点収束位相と呼ぶのは，$C_{\mathrm{p}}(X,Y)$ において有向族 (f_λ) が収束するための必要十分条件が，全ての $x\in X$ で $(f_\lambda(x))$ が収束することだからである．

命題 1.4　$C(X,Y)$ の各点収束位相は適切である．

証明　Z を任意の位相空間とし，$f\colon X\times Z\to Y$ を連続写像とする．$\Phi_Z(f)\in C(Z, C_{\mathrm{p}}(X,Y))$ を示すということは，(i) 全ての $z\in Z$ について $\Phi_Z(f)(z)\colon x\mapsto f(x,z)$ が連続になること，(ii) 全ての評価写像 $\mathrm{ev}_x\colon Y^X\ni g\mapsto g(x)\in Y$ について $\mathrm{ev}_x\circ\Phi(Z)(f)$ が連続になること，の 2 点を示すということである．(i) については，積位相に関する写像 $x\mapsto(x,z)$ の連続性と f の連続性よりわかる．(ii) は $z\mapsto f(x,z)$ が連続になるということなので，やはり (i) と同様にしてわかる． □

これまで学んできた各点収束位相の性質を復習しておこう．

命題 1.5　X を集合，Y を位相空間とする．

(i) Y が (T_i) 空間（$i\leq 3\frac{1}{2}$）ならば，$\mathrm{Map}(X,Y)$ は各点収束位相について (T_i) 空間である．
(ii) Y がコンパクト空間なら，$\mathrm{Map}(X,Y)$ は各点収束位相についてコンパクト空間である．
(iii) Y が連結空間なら，$\mathrm{Map}(X,Y)$ は各点収束位相について連結空間となる．

各点収束位相を入れた関数空間の間の写像の連続性について考える．

命題 1.6　X を集合，Y と Z を位相空間とする．

(i) 任意の写像 $f\colon X \to Y$ について，積空間の間の写像 $f^\sharp\colon Z^Y \ni g \mapsto g \circ f \in Z^X$ は連続である．
(ii) $g\colon Y \to Z$ が連続写像なら，積空間の間の写像 $g_\sharp\colon Y^X \ni f \mapsto g \circ f \in Z^X$ は連続である．

証明　(i) 任意の $x \in X$ について $\mathrm{ev}_x \circ f^\sharp$ が連続になることを示せばよい．(g_λ) を g に各点収束する Z^Y 有向族とすれば，$\mathrm{ev}_x \circ f^\sharp(g_\lambda) = g_\lambda(f(x)) \to g(f(x)) \to \mathrm{ev}_x \circ f^\sharp(g)$ が Z において成り立つ．よって $\mathrm{ev}_x \circ f^\sharp$ は連続である．

(ii) 任意の $x \in X$ について $\mathrm{ev}_x \circ g_\sharp$ が連続になることを示せばよい．(f_λ) を f に各点収束する Y^X の有向族とすれば，g の連続性より $\mathrm{ev}_x \circ g_\sharp(f_\lambda) = g(f_\lambda(x)) \to g(f(x)) = \mathrm{ev}_x \circ g_\sharp(f)$ が成り立つ．よって $\mathrm{ev}_x \circ g_\sharp$ は連続である．　□

2　コンパクト開位相

各点収束位相というのはわりと粗い位相であるので適切になりやすいが，そのため許容可能にはなりにくい．本節では，各点収束位相よりはもう少し細かい「コンパクト開位相」と呼ばれる位相を導入しよう．集合 X と Y が与えられたとき，$A \subset X$ と $B \subset Y$ に対して，

$$[A, B] = \{f \in \mathrm{Map}(X, Y) \mid f(A) \subset B\} = \{f \in \mathrm{Map}(X, Y) \mid A \subset f^{-1}(B)\} \tag{4}$$

という記号を用意する．

定義 2.1　X と Y を位相空間とする．

$$\{[K, O]\,;\, K \text{ は } X \text{ のコンパクト集合で，} O \text{ は } Y \text{ の開集合}\} \tag{5}$$

によって生成される位相を，$\mathrm{Map}(X, Y)$ 上のコンパクト開位相 (compact open topology) という．$C(X, Y)$ をコンパクト開位相により位相空間と考えたものを，$C_{\mathrm{co}}(X, Y)$ で表すことにする．

命題 2.2　$C(X, Y)$ 上のコンパクト開位相は適切である．

証明　Z を位相空間とし，$f\colon X \times Z \to Y$ を連続関数とする．$\Phi_Z(f)\colon Z \to C_{\mathrm{co}}(X, Y)$ の連続性を示すためには，任意のコンパクト集合 $K \subset X$ と開集合 $O \subset Y$ について，$[\Phi_Z(f)]^{-1}[K, O]$ が Z の開集合となることを示せばよい．いま

$$[\Phi_Z(f)]^{-1}[K, O] = \{z \in Z \mid \Phi(f)(z)(K) \subset O\} \tag{6}$$
$$= \{z \in Z \mid f(K \times \{z\}) \subset O\} \tag{7}$$
$$= \{z \in Z \mid K \times \{z\} \subset f^{-1}(O)\} \tag{8}$$

が成り立っている．K はコンパクトで $f^{-1}(O)$ は開集合だから，$K \times \{z\} \subset f^{-1}(O)$ を満たす任意の $z \in Z$ に対して，z の開近傍 U で $K \times U \subset f^{-1}(O)$ を満たすものが存在する[1)]．これは $[\Phi_Z(f)]^{-1}[K,O]$ の任意の点が内点であるということであり，よって $[\Phi_Z(f)]^{-1}[K,O]$ は Z の開集合である． □

命題 2.3　コンパクト開位相は，各点収束位相よりも細かい．

証明　Y^X において $[\{x\},O] = \mathrm{pr}_x^{-1}(O)$ が成り立つから，各点収束位相は

$$\{[\{x\},O]\,;\, x \in X \text{ かつ } O \subset Y \text{ は開集合}\} \tag{9}$$

を準基とする位相である．したがってコンパクト開位相よりも粗い． □

補題 2.4　X を集合とし，Y を位相空間とする．任意の $A \subset X$ と閉集合 $F \subset Y$ について $[A,F]$ は Y^X の各点収束位相について閉集合である．X も位相空間なら，$[A,F]$ はコンパクト開位相についても閉である．

証明　$A \subset X$ とし，F を Y の閉集合とする．

$$[A,F] = \bigcap_{x \in A} [\{x\},F] \tag{10}$$
$$= \bigcap_{x \in A} \{f \in Y^X \mid f(x) \subset F\} \tag{11}$$
$$= \bigcap_{x \in A} Y^X \setminus \{f \in Y^X \mid f(x) \subset Y \setminus F\} \tag{12}$$
$$= \bigcap_{x \in A} Y^X \setminus [\{x\},Y \setminus F] \tag{13}$$

が成り立つ．$[\{x\},Y \setminus F]$ は各点収束位相に関する開集合なので $Y^X \setminus [\{x\},Y \setminus F]$ は各点収束位相に関する閉集合であり，よってその共通部分である $[A,F]$ も各点収束位相について閉である．後半の主張は命題 2.3 よりわかる． □

コンパクト開位相の分離性について調べよう．

命題 2.5　(i) Y が Hausdorff 空間なら，Y^X はコンパクト開位相について Hausdorff である．
(ii) Y が (T_3) を満たすなら，部分空間 $F \subset C_{\mathrm{co}}(X,Y)$ も (T_3) を満たす．
(iii) Y が Tychonoff 空間なら，$C_{\mathrm{co}}(X,Y)$ は Tychonoff 空間である．

証明　(i) コンパクト開位相は各点収束位相より細かく，各点収束位相は Hausdorff なので，コンパクト開位相も Hausdorff である．

1) 位相空間論セミナー IV 補題 2.4.

(ii) $f \in F \subset C_{\mathrm{co}}(X,Y)$ および，$f \in [K,O]$（K は X のコンパクト集合で O は Y の開集合）とする．$f(K)$ は Y のコンパクト集合だから，このときある開集合 U で $f(K) \subset U \subset \overline{U} \subset O$ を満たすものが存在する．（以下の補題 2.6 を参照．）このとき $f \in [K,U] \subset [K,\overline{U}] \subset [K,O]$ が成り立つから，$[K,\overline{U}]$ がコンパクト開位相について閉であることを示せばよい．$\bigcap_{x\in K}[\{x\},\overline{U}] = [K,\overline{U}]$ であり，各 $[\{x\},O]$ は各点収束位相に関する閉集合なので，命題 2.3 によりコンパクト開位相でも閉である．したがって F は (T_3) を満たす．

(iii) $K \subset X$ をコンパクト集合，$O \subset Y$ を開集合とする．このとき，任意の $f \in [K,O] \cap C(X,Y)$ に対して，ある連続関数 $G\colon C_{\mathrm{co}}(X,Y) \to [0,1]$ で $G(f) \subset \{0\}$ かつ $G(C(X,Y) \setminus [K,O]) \subset \{1\}$ を満たすものが存在することを示せばよい．

$f \in [K,O] \cap C(X,Y)$ とすれば $f(K)$ は Y のコンパクト集合なので，連続関数 $g\colon Y \to [0,1]$ で $g(f(K)) \subset \{0\}$ かつ $g(Y \setminus O) \subset \{1\}$ を満たすものが存在する．$h \in C(X,Y)$ に対して，$G(h) = \sup_{x\in K}(g\circ h)(x)$ と定義しよう．以下の補題 2.7 より $G\colon C_{\mathrm{co}}(X,Y) \to [0,1]$ は連続関数であり，その定義より $G(f) = 0$ を満たしている．$h \in C(X,Y) \setminus [K,O]$ なら $h(K) \not\subset O$ なので，$x \in K$ で $h(x) \in Y \setminus O$ を満たすものが存在する．このような x については $g(h(x)) = 1$ が成り立つので，$G(h) = 1$ が成り立つ．したがって $G(C(X,Y) \setminus [K,O]) \subset \{1\}$ であり，G が求める性質を持つことがわかった． □

補題 2.6 位相空間 X が (T_3) を満たすならば，任意のコンパクト集合 K とその開近傍 U に対して，ある開集合 V で $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$ を満たすものが存在する．

証明 X は (T_3) を満たすので，各 $x \in K$ に対して $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U$ なる開集合 V_x を選ぶことが出来る．K はコンパクトなので，$(V_x)_{x\in K}$ には部分被覆 $(V_{x_i})_{0\le i\le n}$ が存在する．このとき

$$K \subset \bigcup_{0\le i\le n} V_{x_i} \subset \bigcup_{0\le i\le n} \overline{V_{x_i}} = \overline{\bigcup_{0\le i\le n} V_{x_i}} \subset U \tag{14}$$

が成り立つから，求める開集合が構成出来た． □

補題 2.7 X を位相空間とし，$K \subset X$ をそのコンパクト集合とする．このとき，写像 $C_{\mathrm{co}}(X,[0,1]) \ni f \mapsto \sup_{x\in K} f(x) \in [0,1]$ は連続である．

証明 sup の定義より明らかに

$$\left\{ f \in C(X,[0,1]) \,\middle|\, a < \sup_{x\in K} f(x) \right\} = C(X,[0,1]) \setminus \left\{ f \in C(X,[0,1]) \,\middle|\, \sup_{x\in K} f(x) \le a \right\} \tag{15}$$

$$= C(X,[0,1]) \setminus [K,[0,a]] \tag{16}$$

となるので，補題 2.4 より $\{f \in C(X,[0,1]) \mid a < \sup_{x\in K} f(x)\}$ はコンパクト開位相における開集合

である．また，K はコンパクトだから，

$$\left\{f \in C(X,[0,1]) \,\middle|\, \sup_{x\in K} f(x) < b\right\} = \big[K,[0,b[\,\big] \tag{17}$$

であり，これもコンパクト開位相に関する開集合である．$[0,b[$ と $]a,1]$ の形の集合は $[0,1]$ の位相の準基であるから，これより $f \mapsto \sup_{x\in K} f(x)$ の連続性がわかる． □

コンパクト開位相が適切であることはすでに見たが，コンパクト開位相は許容可能にもなっているだろうか？$C(X,Y)$ 上の位相が許容可能になるための必要十分条件は，評価写像 $\mathrm{ev}\colon X\times C(X,Y)\to Y$ が連続になることであった．コンパクト開位相を調べるために，評価写像について，これよりも弱い連続性を考えよう．

位相空間 X と Y と，$\mathfrak{S}\subset\mathscr{P}X$ が与えられているとする．$C_{\mathfrak{S}}(X,Y)$ で X の任意の $S\in\mathfrak{S}$ について $f|_S$ が連続となるような関数 $f\colon X\to Y$ 全体の集合を表すこととする．

特に重要なのは，$\mathfrak{S} = (X$ のコンパクト集合全体$)$ の時である．X が局所コンパクトならばこのとき $C_{\mathfrak{S}}(X,Y)$ はもちろん $C(X,Y)$ と一致するが，一般にはそうとは限らない．

命題 2.8 X を位相空間とし，$\mathscr{K}$ を X のコンパクト集合全体の集合とする．また，Y を位相空間とする．

(i) Y^X 上の位相 $\mathscr{O}$ は，任意の $K\in\mathscr{K}$ について $\mathrm{ev}|_{K\times Y^X}$ が連続になるようなものとする．このとき，$\mathscr{O}$ はコンパクト開位相よりも細かい．

(ii) X が (T_2) あるいは (T_3) を満たすならば, 任意のコンパクト集合 $K\in\mathscr{K}$ について $\mathrm{ev}|_{K\times C_{\mathscr{K}}(X,Y)}$ はコンパクト開位相について連続である．

証明 (i) 任意のコンパクト集合 $K\subset X$ と開集合 $O\subset Y$ について，$[K,O]\in\mathscr{O}$ が成り立つことを示せばよい．仮定より，$(K\times Y^X)\cap\mathrm{ev}^{-1}(O)$ は $K\times Y^X$ の開集合である．$f\in[K,O]$ なら $\mathrm{ev}(K\times\{f\}) = f(K)\subset O$ なので，$K\times\{f\}\subset(K\times Y^X)\cap\mathrm{ev}^{-1}(O)$ が成り立つ．いま K はコンパクトだから，f の開近傍 $U\in\mathscr{O}$ で $K\times U\subset(K\times Y^X)\cap\mathrm{ev}^{-1}(O)$ を満たすものが存在する．特に $K\times U\subset\mathrm{ev}^{-1}(O)$ が成り立つが，これは $U\subset[K,O]$ が成り立つということである．したがって $[K,O]$ は $\mathscr{O}$ についても f の開近傍であり，$[K,O]\in\mathscr{O}$ が成り立っている．$[K,O]$ の形の集合全体はコンパクト開位相の準基だから，これより $\mathscr{O}$ がコンパクト開位相よりも細かいことがわかる．

(ii) X は (T_2) あるいは (T_3) を満たすと仮定する．K を X のコンパクト集合とし, O を Y の開集合とする．このとき，$\mathrm{ev}^{-1}(O)\cap(K\times C_{\mathscr{K}}(X,Y))$ が部分空間 $K\times C_{\mathscr{K}}(X,Y)$ のコンパクト開位相に関する開集合であることを示せばよい．$(x,f)\in\mathrm{ev}^{-1}(O)\cap(K\times C_{\mathscr{K}}(X,Y))$ であるとする．いま X は (T_2) あるいは (T_3) を満たすから, $x\in K$ は部分空間 K においてコンパクト集合からなる基本近傍系を持つ[2)]．$f|_K$ は連続だから，これよりコンパクト近傍 $x\in C\subset K$ で $f(C)\subset O$ を満たす

2) X が (T_2) の場合は，K はコンパクト Hausdorff 空間なので (T_3) となり，x は K の閉集合からなる基本近傍系をもつ．K の閉集合はコンパクトだから，それがコンパクトな基本近傍系である．X が (T_3) の場合は x は X 全体で閉集合からなる基本近傍系を持つので，その K への制限はやはりコンパクトな基本近傍系となる．

ようなものが存在する．このとき $C \times [C, O]$ は $K \times C_{\mathscr{K}}(X, Y)$ において，コンパクト開位相に関して (x, f) の近傍であり，$C \times [C, O] \subset \mathrm{ev}^{-1}(O)$ を満たしている．ゆえに $\mathrm{ev}^{-1}(O) \cap (K \times C_{\mathscr{K}}(X, Y))$ は $K \times C_{\mathscr{K}}(X, Y)$ のコンパクト開位相に関する開集合であり，$\mathrm{ev}|_{K \times C_{\mathscr{K}}(X,Y)}$ の連続性が示された．
□

系 2.9　X が局所コンパクト Hausdorff 空間なら $C(X, Y)$ のコンパクト開位相は許容可能であり，したがって[3]受容可能である．

証明　X が局所コンパクト Hausdorff 空間なら，任意の $(x, f) \in X \times C(X, Y)$ は $K \times C(X, Y)$（$K \subset X$ はコンパクト）の形の近傍を持つ．命題 2.8(ii) より $\mathrm{ev}_{K \times C_{\mathrm{co}}(X,Y)}$ は連続であり，よって ev は (x, f) で連続である．(x, f) は任意に選んでいたから ev は $X \times C_{\mathrm{co}}(X, Y)$ で連続であることがわかり，命題 1.3 より $C(X, Y)$ のコンパクト開位相は許容可能となる．□

3　一様収束と $\mathfrak{S}$-収束

本節では，関数空間 Y^X や $C(X, Y)$ において，特に Y に一様構造が入っている場合を考えよう．

定義 3.1　X を集合，$(Y, \mathscr{U})$ を一様空間とする．

(i) $U \in \mathscr{U}$ によって
$$\widehat{U} := \{(f, g) \in Y^X \times Y^X \mid \forall x \in X \ (f(x), g(x)) \in U\} \tag{18}$$
と表される集合全体から生成される Y^X 上の一様系を，Y における一様収束から定まる一様系 (uniformity of uniform convergence) と呼ぶ．本ノートでは，$(Y, \mathscr{U})$ における一様収束から定まる一様系を $\widehat{\mathscr{U}}$ で表すことにする．

(ii) $\mathfrak{S}$ を X の部分集合族とする．$U \in \mathscr{U}$ と $A \in \mathfrak{S}$ によって
$$\widehat{U}|_A := \{(f, g) \in Y^X \times Y^X \mid \forall x \in A \ (f(x), g(x)) \in U\} \tag{19}$$
と表現される集合全体から生成される Y^X の一様系を，$\widehat{\mathscr{U}}|_{\mathfrak{S}}$ で表す．

一様収束から定まる一様系とは，$\{\bigcap_{x \in X} (\mathrm{ev}_x \times \mathrm{ev}_x)^{-1}(U) \,;\, U \in \mathscr{U}\}$ から生成される一様系である．したがって，これは Y^X 上の直積一様系よりも細かい一様系である．X が位相空間の時，$(Y^X, \widehat{\mathscr{U}})$ の部分空間としての $C(X, Y)$ を位相空間と考えたものを $C_{\mathrm{u}}(X, Y)$ で表す．X も一様空間の時は，一様連続関数全体の空間を $UC(X, Y)$ で表すことにする．$\mathfrak{S} = \{X\}$ のときは $\widehat{\mathscr{U}}|_{\mathfrak{S}} = \widehat{\mathscr{U}}$ が成り立つ．$\widehat{\mathscr{U}}|_{\mathfrak{S}}$ を Bourbaki [2] では $\mathfrak{S}$-収束の一様系 (uniformity of $\mathfrak{S}$-convergence) と呼んでいる．

3)　命題 2.2 より．

定義 3.2 (i) X を集合，$(Y,\mathscr{U})$ を一様空間とする．Y^X の有向族あるいはフィルターが $\widehat{\mathscr{U}}$ から生成される位相について収束するとき，一様収束 (uniform convergence) するという．

(ii) X を位相空間とし，$\mathfrak{S}$ を X の部分集合族とする．Y^X の有向族あるいはフィルターが $\widehat{\mathscr{U}}|_{\mathfrak{S}}$ から生成される位相について収束するとき，$\mathfrak{S}$-一様収束するまたは単に $\mathfrak{S}$-収束 ($\mathfrak{S}$-convergence) するという．

(iii) X を位相空間とし，$\mathscr{K}(X)$ を X のコンパクト集合全体とする．Y^X の有向族あるいはフィルターが $\mathscr{K}(X)$-一様収束するとき，特にコンパクト一様収束 (uniform convergence on compacta) するという．

命題 3.3 X を集合，$\mathfrak{S}$ を X の被覆とし，$(Y,\mathscr{U})$ を一様空間とする．$\widehat{\mathscr{U}}|_{\mathfrak{S}}$ は Y^X の直積一様系より細かく，$\widehat{\mathscr{U}}$ より粗い．

証明 $U\in\mathscr{U}$ とすれば，任意の $A\in\mathfrak{S}$ について $\widehat{U}\subset\widehat{U}|_A$ が成り立つ．よって $\widehat{U}|_A\in\widehat{\mathscr{U}}$ であり，$\widehat{\mathscr{U}}$ は $\widehat{\mathscr{U}}|_{\mathfrak{S}}$ より細かいことがわかる．また，$\mathfrak{S}$ が X の被覆であることから，任意の $x\in X$ についてある $A\in\mathfrak{S}$ で $x\in A$ を満たすものが存在する．このとき任意の $U\in\mathscr{U}$ について $\widehat{U}|_A\subset\widehat{U}|_{\{x\}}$ が成り立つ．よって任意の $x\in X$ と $U\in\mathscr{U}$ について $\widehat{U}|_{\{x\}}\in\widehat{\mathscr{U}}|_{\mathfrak{S}}$ となることがわかる．直積一様系は $\widehat{U}|_{\{x\}}$ の形の集合全体によって生成されるから，これより $\widehat{\mathscr{U}}|_{\mathfrak{S}}$ が直積一様系より細かいことがわかる． □

命題 3.4 X を集合，$\mathfrak{S}$ を X の被覆，$(Y,\mathscr{U})$ を一様空間とする．このとき Y^X の有向族あるいはフィルターが $\widehat{\mathscr{U}}|_{\mathfrak{S}}$ の一様位相について収束するための必要十分条件は，それが Cauchy 有向族あるいは Cauchy フィルターであり，かつ各点収束することである．

証明 必要性は命題 3.3 と収束フィルターは Cauchy フィルターであることからわかる．十分性を示そう．$\mathscr{F}$ は $(Y^X,\widehat{\mathscr{U}}|_{\mathfrak{S}})$ の Cauchy フィルターであり，$g\in Y^X$ に各点収束していると仮定する．これはすなわち，任意の x について $(\mathrm{ev}_x)_*\mathscr{F}$ が $g(x)$ に収束しているという意味である．いま $\mathscr{F}$ は Cauchy フィルターなので，F が g に収束することを示すためには，g が $\mathscr{F}$ の群集点 (cluster point) であることを示せば十分である．より具体的に言えば，任意の $F\in\mathscr{F}$ に対して $g\in\mathrm{Cl}\,F$ が成り立つことを示せばよい．そのためには，任意の閉近縁 $V\in\mathscr{U}$ と $A\in\mathfrak{S}$ に対して $g\in\widehat{V}|_A(F)$ が成り立つことを示せば良いことになる[4)]．定義より

$$\widehat{V}|_A=\bigcap_{x\in A}(\mathrm{ev}_x\times\mathrm{ev}_x)^{-1}(V) \tag{20}$$

であり，右辺はどれも閉近縁なので，$\widehat{V}|_A$ は Y^X の各点収束位相（の直積）について閉であることがわかる．$\mathscr{F}$ は g に各点収束するから g が F の各点収束位相の閉包に入ることはわかるので，結局 $g\in\widehat{V}|_A(F)$ となることがわかる． □

4) 任意の $A\subset Y$ について $V(A)$ は A の近傍であり，$\mathrm{Cl}\,F=\bigcap_{V\in\mathscr{U}}V(A)$ が成り立つのであった。（位相空間論セミナー V 系 1.6.）さらに，閉近縁全体が近縁の基底であることに注意されたい．

命題 3.5　X を位相空間，$\mathfrak{S}$ をその被覆とし，$(Y,\mathscr{U})$ を一様空間とする．また，$F=C_{\mathfrak{S}}(X,Y)$ と定める．

(i) 任意の $A\in\mathfrak{S}$ について $\mathrm{ev}|_{A\times F}$ は $\widehat{\mathscr{U}}|_{\mathfrak{S}}$ から定まる一様位相について連続である．
(ii) F は $\widehat{\mathscr{U}}|_{\mathfrak{S}}$ から定まる一様位相について閉である．

証明　(i) $(x,f)\in A\times F$ を任意に固定し，$V\in\mathscr{U}$ を任意に選ぶ．$W\in\mathscr{U}$ を $W\circ W\subset V$ となるようにとり，X の開集合 U を $x\in U$ かつ $f(U\cap A)\subset W(f(x))$ が成り立つように選ぶ[5)]．このとき

$$
\begin{aligned}
(A\times F)\cap\bigl(U\times\widehat{W}|_A(f)\bigr) &\subset\{(z,g)\in A\times F\mid(f(x),f(z))\in W,\ (f(z),g(z))\in W\} &(21)\\
&\subset\{(z,g)\in A\times F\mid(f(x),g(z))\in V\} &(22)\\
&=\mathrm{ev}|_{A\times F}^{-1}(V(f(x))) &(23)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．したがって $\mathrm{ev}|_{A\times F}^{-1}(V(f(x)))$ は $A\times F$ における (x,f) の近傍であり，$\mathrm{ev}|_{A\times F}$ は (x,f) で連続であることがわかる．(x,f) は任意に選んだものだったから，$\mathrm{ev}|_{A\times F}$ は連続となる．

(ii) (f_λ) は $\widehat{\mathscr{U}}|_{\mathfrak{S}}$ から定まる一様位相について f に収束するとする．$A\in\mathfrak{S}$，$x\in A$，および $V\in\mathscr{U}$ を任意に選ぶ．さらに，対称な $W\in\mathscr{U}$ を $W\circ W\subset V$ となるように選ぶ．(f_λ) は $\widehat{\mathscr{U}}_{\{A\}}$ について f に収束するから，ある λ_0 について $f_{\lambda_0}\in\widehat{W}(f)$ が成り立つ．$f_{\lambda_0}|_A$ は連続だから，このときある開近傍 $x\in U$ で $f_{\lambda_0}(A\cap U)\subset W(f_{\lambda_0}(x))$ を満たすものが存在する．$z\in A\cap U$ を任意に選べば，$(f_{\lambda_0}(x),f_{\lambda_0}(z))\in W$ かつ $(f_{\lambda_0}(z),f(z))\in W$ が成り立つ．したがって $z\in A\cap U$ なら $(f(x),f(z))\in W\circ W\subset V$ であり，$f(A\cap U)\subset V(f(x))$ がわかる．すなわち $f|_A$ は x で連続であり，x は任意に選んでいたから $f|_A$ は連続である．さらに $A\in\mathfrak{S}$ も任意に選んでいたから，$f\in F$ であることがわかる．□

系 3.6　X を位相空間，$(Y,\mathscr{U})$ を一様空間とする．このとき，一様空間 $(Y^X,\widehat{\mathscr{U}})$ の部分空間 $C(X,Y)$ の一様収束位相は許容可能である．

証明　命題 3.5 (i) において $\mathfrak{S}=\{X\}$ とすれば良い．□

コンパクト一様収束位相とコンパクト開位相の関係を調べよう．

命題 3.7　X を位相空間，$\mathscr{K}(X)$ を X のコンパクト集合全体とし，$(Y,\mathscr{U})$ を一様空間とする．このとき $\widehat{\mathscr{U}}|_{\mathscr{K}(X)}$ から定まる $C(X,Y)$ 上の一様位相はコンパクト開位相であり，$\widehat{\mathscr{U}}$ の一様位相はコンパクト開位相よりも細かい．

補題 3.8　$(Y,\mathscr{U})$ を一様空間とし，$K\subset Y$ を一様位相に関するコンパクト集合，G を $K\subset G$ を満たす開集合とする．このとき，近縁 $V\in\mathscr{U}$ で $V(K)\subset G$ を満たすものが存在する．

5) $f|_A$ の連続性よりこのような U がとれる．

証明　$x \in K$ に対して，対称な近縁 $V_x \in \mathscr{U}$ を $[V_x \circ V_x](x) \subset G$ を満たすように選ぶ．このとき $(\mathrm{Int}\, V_x(x))_{x\in K}$ は K の開近傍なので，コンパクト性より有限部分被覆 $(\mathrm{Int}\, V_{x_i}(x_i))_{0\le i\le n}$ を選び出すことが出来る．ここで $V = \bigcap_{0\le i\le n} V_{x_i}$ と定義しよう．$a \in V(K)$ とすれば，ある $b \in K$ が存在して $(a,b) \in V$ が成り立つ．定義より $b \in K$ であるから，さらにある i が存在して $b \in V_{x_i}(x_i)$ となる．このとき $(a,x_i) \in V \circ V_{x_i} \subset V_{x_i} \circ V_{x_i}$ であるから，$a \in [V_{x_i} \circ V_{x_i}](x_i) \subset G$ となる．すなわち $V(K) \subset G$ である．□

命題 3.7 の証明　後半の主張は 3.3 よりすぐにわかるので，前半の主張を示せばよい．

$\mathscr{O}_1$ を $\widehat{\mathscr{U}}|_{\mathscr{K}(X)}$ から定まる $C(X,Y)$ 上の一様位相とし，$\mathscr{O}_2$ を $C(X,Y)$ 上のコンパクト開位相とする．まずは $\mathscr{O}_2 \subset \mathscr{O}_1$ を示そう．K を X のコンパクト集合とし，O を Y の開集合とする．$f \in [K,O]$ とすれば，$f(K)$ は $f(K) \subset O$ を満たすコンパクト集合なので，補題 3.8 よりある近縁 $V \in \mathscr{U}$ で $V(f(K)) \subset O$ を満たすものが存在する．$(f,g) \in \widehat{V}|_K$ なら任意の $x \in K$ について $(f(x),g(x)) \in V$ であり，ゆえに任意の $x \in K$ について $g(x) \in V(f(x)) \subset O$ が成り立つ．これより $g(K) \subset O$ となり，$g \in [K,O]$ がわかる．したがって $\widehat{V}|_K(f) \subset [K,O]$ が成り立つ．すなわち任意の $f \in [K,O]$ に対してある $V \in \mathscr{U}$ で $\widehat{V}|_K(f) \subset [K,O]$ を満たすものが存在するということであり，$[K,O]$ は $\widehat{\mathscr{U}}$ から定まる一様位相について開集合であることがわかる．

次に，逆向きの包含関係 $\mathscr{O}_1 \subset \mathscr{O}_2$ を示そう．$f \in C(X,Y)$ と対称な $V \in \mathscr{U}$ を任意に固定して，$\widehat{V}(f,V)$ が $\mathscr{O}_2$ についても f の近傍であることを示せばよい．対称な近縁 $W \in \mathscr{U}$ を，$W^{\circ 3} \subset V$ を満たすように選ぶ．このとき $(\mathrm{Int}\, W(f(x)))_{x\in K}$ はコンパクト集合 $f(K)$ の開被覆だから，有限部分被覆 $(W(f(x_i)))_{0\le i\le n}$ を選び出すことが出来る．ここで

$$K_i = K \cap f^{-1}(W(f(x_i))), \qquad O_i = \mathrm{Int}[W \circ W](f(x_i)) \tag{24}$$

と定義する．このとき任意の i について $f(K) \subset f(K) \cap W(f_{x_i})$ だから，$f \in \bigcap_i [K,O_i]$ が成り立っている．これは $\mathscr{O}_2$ における f の開近傍だから，あとは $\bigcap_i [K,O_i] \subset \widehat{V}(f,V)$ が成り立つことを示せばよい．$g \in \bigcap_i [K,O_i]$ とすれば，任意の i について $g(K) \subset O_i$ が成り立つ．$x \in K$ とすればある i について $f(x) \subset W(f(x_i))$ となるから，これより $(g(x),f(x)) \in [W \circ W] \circ W \subset V$ となり，任意の $x \in K$ について $(f(x),g(x)) \in V$ となり，$g \in \widehat{V}(f)$ がわかった．したがって $\bigcap_i [K,O_i] \subset \widehat{V}(f,V)$ である．□

命題 3.7 より，一様空間に値をとる関数の有向族がコンパクト開位相で収束することは，コンパクト一様収束することと同値であることがわかる．コンパクト開位相は完全に位相的な概念であり，コンパクト一様収束は一様構造的な概念を含むものであるから，これは幾分奇妙に思える出来事である．

関数空間の完備性について考えよう．

命題 3.9　X を集合，$\mathfrak{S}$ をその被覆とし，$(Y,\mathscr{U})$ を完備な一様空間とする．このとき，Y^X は $\widehat{\mathscr{U}}|_{\mathfrak{S}}$ について完備である．

証明 $\mathscr{F}$ を Y^X は $\widehat{\mathscr{U}}|_{\mathfrak{S}}$ の Cauchy フィルターとすれば，命題 3.3 より $\mathscr{F}$ は Y^X の直積一様系について Cauchy フィルターとなっていることがわかる．直積一様系は完備なので，$\mathscr{F}$ はある g に各点収束する．このとき命題 3.4 より $\mathscr{F}$ は $\widehat{\mathscr{U}}|_{\mathfrak{S}}$ の一様位相の意味でも g に収束することがわかるので，$\widehat{\mathscr{U}}|_{\mathfrak{S}}$ は完備である． □

系 3.10 X を集合，$\mathfrak{S}$ をその被覆とし，$(Y,\mathscr{U})$ を完備な一様空間とする．このとき，$C_{\mathfrak{S}}(X,Y)$ は $(Y^X,\widehat{\mathscr{U}}|_{\mathfrak{S}})$ の部分一様空間として完備である．

証明 命題 3.5 (ii) と命題 3.9 からわかる． □

4 同程度連続性とコンパクト性

まずは，コンパクト開位相に関するコンパクト性の特徴付けを，位相空間的な表現方法で行おう．

命題 4.1 X を (T_2) あるいは (T_3) を満たす空間とし，$\mathscr{K}$ を X のコンパクト集合全体とする．また，Y を Hausdorff 空間とし，$\mathscr{O}_{\mathrm{c}}$ と $\mathscr{O}_{\mathrm{p}}$ でそれぞれ Y^X 上のコンパクト開位相，各点収束位相の開集合系を表すことにしよう．このとき，$A \subset C_{\mathscr{K}}(X,Y)$ が $\mathscr{O}_{\mathrm{c}}$-コンパクトであるための必要十分条件は，以下の 3 条件が成り立つことである．

(i) A は $\mathscr{O}_{\mathrm{c}} \cap C_{\mathscr{K}}(X,Y)$ について閉集合である．

(ii) 全ての $x \in X$ について $\mathrm{ev}(\{x\} \times A)$ は Y において相対コンパクトである．

(iii) A の，Y^X の $\mathscr{O}_{\mathrm{p}}$ に関する閉包を $\overline{A}$ で表すことにする．このとき，任意のコンパクト集合 $K \subset X$ について，$\mathrm{ev}|_{K\times\overline{A}}$ は $\mathscr{O}_{\mathrm{p}} \cap \overline{A}$ について連続である．

証明 まずは必要性を示す．$A \subset C_{\mathscr{K}}(X,Y)$ はコンパクト開位相についてコンパクトであると仮定する．Y は Hausdorff であるから，命題 2.5 より Y^X は $\mathscr{O}_{\mathrm{c}}$ について Hausdorff であり，A はそのコンパクト集合なので $\mathscr{O}_{\mathrm{c}}$-閉集合である．よって (i) が成り立つ．

写像 $\mathrm{ev}_x\colon Y^X \to Y$ は $\mathscr{O}_{\mathrm{p}}$-連続なので $\mathscr{O}_{\mathrm{c}}$ 連続でもあり，よって $\mathrm{ev}_x(A) = \mathrm{ev}(\{x\}\times A)$ は Y のコンパクト集合である．ゆえに (ii) も成り立つ．

いま $\mathscr{O}_{\mathrm{p}} \subset \mathscr{O}_{\mathrm{c}}$ であることと $A \cap \mathscr{O}_{\mathrm{p}}$ は Hausdorff，$A \cap \mathscr{O}_{\mathrm{c}}$ はコンパクト位相であることから，これらはともに A 上のコンパクト Hausdorff 位相であり一致することに注意しておく．A は $\mathscr{O}_{\mathrm{p}}$-コンパクトであり $\mathscr{O}_{\mathrm{p}}$-は Hausdorff 位相なので，A は $\mathscr{O}_{\mathrm{p}}$-閉集合である．したがって $A = \overline{A}$ が成り立つ．いま，仮定より X は (T_2) または (T_3) を満たしているから，命題 2.8 を用いれば任意のコンパクト集合 $K \subset X$ に対して，$\mathrm{ev}_{K\times A}$ はコンパクト開位相について連続となることがわかる．先ほど述べたように A においてコンパクト開位相と各点収束位相は一致するから，(iii) が成り立つ．

次に十分性を示すため，(i)–(iii) が成り立つと仮定しよう．$\overline{A}$ を A の Y^X における $\mathscr{O}_{\mathrm{p}}$-閉包とす

る．条件 (ii) より各 x について $\overline{\mathrm{ev}(\{x\}\times A)}$ は Y でコンパクトなので，その積 $\prod_{x\in X}\overline{\mathrm{ev}(\{x\}\times A)}$ は Y^X において $\mathscr{O}_\mathrm{p}$-コンパクトである．直積の性質より

$$\prod_{x\in X}\overline{\mathrm{ev}(\{x\}\times A)}=\mathrm{Cl}_{\mathscr{O}_\mathrm{p}}\prod_{x\in X}\mathrm{ev}(\{x\}\times A)\supset\overline{A} \tag{25}$$

が成り立つので，$\overline{A}$ も $\mathscr{O}_\mathrm{p}$-コンパクトである．条件 (iii) より $f\in\overline{A}$ なら $f\in C_{\mathscr{K}}(X,Y)$ となることがわかるので，$\overline{A}\subset C_{\mathscr{K}}(X,Y)$ となる．また命題 2.8 より $\mathscr{O}_\mathrm{p}\cap\overline{A}$ は $\mathscr{O}_\mathrm{c}\cap\overline{A}$ よりも細かいことがわかるので，$\mathscr{O}_\mathrm{p}\cap\overline{A}$ がコンパクト Hausdorff 位相であることに注意すれば $\mathscr{O}_\mathrm{c}\cap\overline{A}$ もコンパクト Hausdorff 位相であり，これらの位相は一致することがわかる．条件 (i) より A は $\mathscr{O}_\mathrm{c}$ に関する閉集合なので，$A\subset\overline{A}\subset\mathrm{Cl}_{\mathscr{O}_\mathrm{c}}A=A$ となる．ゆえに A はコンパクトである． □

$C(X,Y)$ におけるコンパクト性の特徴付けのために，均等連続性の概念を導入しよう．$F\subset Y^X$ は次の条件を満たすとき，均等連続 (evenly continuous) [6]であるという．

- 任意の $x\in X$ と $y\in Y$，任意の近傍 $y\in V$ に対して，ある x の近傍 U と y の近傍 W で $\mathrm{ev}(U\times(F\cap[\{x\},W]))\subset V$ を満たすものが存在する．

この条件は

- 任意の $x\in X$ と $y\in Y$，任意の近傍 $y\in V$ に対して，ある x の近傍 U と y の近傍 W で
$$F\subset\{f\in Y^X\mid f(x)\in W\implies f(U)\subset V\} \tag{26}$$
を満たすものが存在する．

と述べても同じである．F が均等連続なら，定義において $y=f(x)$ とすることで各 $f\in F$ が連続であることがわかる．よって F が均等連続なら $F\subset C(X,Y)$ である．均等連続性の定義は，本当は各 $x\in X$ において $f\in F$ が x の周りで同じ程度の激しさでしか動かないという定式化をしたいのだが，異なる $f_1,f_2\in F$ では $f_1(x)$ と $f_2(x)$ が離れたところにいるかも知れず，その場合位相空間の枠組みでは f_1 と f_2 の x の周りでの振る舞いを比較することは出来ない．そのため，上のような多少ややこしい定式化となっている．「全ての $f\in F$ が x の周りで同じような変動をする」という概念は，一様空間の枠組みでこそ正しく定式化されるのである．

補題 4.2 X を位相空間，Y を正則空間とする．$F\subset C(X,Y)$ は均等連続な族とし，$\overline{F}$ を Y^X の各点収束位相に関する閉包とする．このとき $\overline{F}$ もまた均等連続である．

証明 $x\in X$ と $y\in Y$，そして y の近傍 V を任意に固定する．さらに y の近傍 V' を $\overline{V'}\subset V$ となるように選ぶ．F は均等連続だから，x の近傍 U と y の近傍 W で $\mathrm{ev}(U\times(F\cap[\{x\},W]))\subset V'$ を

6） evenly continuous の標準的な訳がわからなかったので，とりあえずこう和訳することにした．

満たすものが存在する．いま

$$F \subset \{f \in Y^X \mid f(x) \in W \implies f(U) \subset \overline{V'}\} \tag{27}$$
$$= \mathrm{ev}_x^{-1}(Y \setminus W) \cup \bigcap_{x \in U} \mathrm{ev}_x^{-1}(\overline{V'}) \tag{28}$$
$$\subset \{f \in Y^X \mid f(x) \in W \implies f(U) \subset V\} \tag{29}$$

が成り立つから，真ん中の集合が各点収束位相について閉であることに注意すれば

$$\overline{F} \subset \{f \in Y^X \mid f(x) \in W \implies f(U) \subset V\} \tag{30}$$

がわかる．これは $\overline{F}$ が均等連続であるということに他ならない． □

命題 4.3 X を局所コンパクト Hausdorff 空間とし，Y を正則空間とする．このとき，$F \subset C_{\mathrm{co}}(X,Y)$ がコンパクトになるための必要十分条件は，次の 3 条件が成り立つことである．

(i) F はコンパクト開位相について閉である．
(ii) 任意の $x \in X$ について，$\mathrm{ev}(\{x\} \times F)$ は Y において相対コンパクトである．
(iii) F は均等連続である．

証明 F がコンパクトなら (i) と (ii) が成り立つことは，命題 4.1 よりわかる．いま X は局所コンパクトだから，命題 4.1 の条件 (iii) から，$\mathrm{ev}|_{X\times F}$ は連続となることがわかる．ここから F の均等連続性を導こう．$x \in X$，$y \in Y$ および y の近傍 V を任意に固定する．Y は正則空間だから，y の近傍 W で $\overline{W} \subset V$ を満たすものが存在する．補題 2.4 より $[\{x\},\overline{W}]$ はコンパクト開位相について閉なので，$F_0 := F \cap [\{x\},\overline{W}]$ はまた $C_{\mathrm{co}}(X,Y)$ のコンパクト集合となる．$\mathrm{ev}(\{x\} \times F_0) \subset V$ が成り立っているから $\{x\} \times F_0 \subset \mathrm{ev}|_{X\times F}^{-1}(V)$ であり，F_0 のコンパクト性よりある開近傍 $x \in U$ で $U \times F_0 \subset \mathrm{ev}|_{X\times F}^{-1}(V)$ を満たすものが存在する．定義より明らかに $U \times (F \cap [\{x\}, W]) \subset U \times F_0$ が成り立つので，$\mathrm{ev}(U \times (F \cap [\{x\}, W])) \subset V$ がわかる．ゆえに F は均等連続である．

逆に F は条件 (i)–(iii) を満たすとしよう．このとき，F が命題 4.1 の条件 (iii) を満たすことを示せばよい．$f \in C(X,Y)$ と $x \in X$ を任意に固定し，$y = f(x)$ とおく．補題 4.2 より $\overline{F}$ はまた均等連続となるので，y の任意の近傍 V に対して，ある x の近傍 U と y の近傍 W で $\mathrm{ev}(U \times (\overline{F} \cap [\{x\}, W])) \subset V$ を満たすものが存在する．$U \times \overline{F} \cap [\{x\}, W]$ は各点収束位相に関する (x,f) の近傍なので，$\mathrm{ev}|_{X\times\overline{F}}$ は連続であることがわかる． □

関数の値域が一様空間の場合には，コンパクト性は同程度連続性というもう少しすっきりした言葉で表現することが出来る．

定義 4.4 X を位相空間，$(Y, \mathscr{U})$ を一様空間とし，$F \subset Y^X$ とする．

(i) $x \in X$ とする．任意の $V \in \mathscr{U}$ に対して，ある近傍 $x \in U$ が存在して，任意の $x' \in U$ と $f \in F$ について $(f(x), f(x')) \in V$ となるとき，F は x で同程度連続 (equicontinuous) であるという．

(ii) 全ての $x \in X$ で同程度連続であるとき，F は同程度連続 (equicontinuous) であるという．

$F \subset Y^X$ が同程度連続なら，各 $f \in F$ は連続である．同程度連続性と均等連続性の関係を調べよう．

命題 4.5 X を位相空間，$(Y, \mathscr{U})$ を一様空間とし，$F \subset Y^X$ とする．

(i) F が同程度連続なら，Y の一様位相について均等連続である．
(ii) F は均等連続で，任意の $x \in X$ について $\mathrm{ev}_x(F)$ は Y の一様位相で相対コンパクトであるとする．このとき，F は同程度連続である．

証明 (i) F は同程度連続であるとする．$x \in X$，$y \in Y$ および y の近傍 V' を任意に選ぶ．Y は一様空間であるから，$V' = V(y)$（$V \in \mathscr{U}$）の形であるとしてよい．対称な $W \in \mathscr{U}$ を $W \circ W \subset V$ となるように選ぼう．このとき，ある x の近傍 U で，$x' \in U$ かつ $f \in F$ なら $(f(x), f(x')) \in W$ を満たすものが存在する．$x' \in U$ かつ $f(x) \in W(y)$ なら $(f(x'), y) \in W \circ W \subset V$ となるので，$f(x') \in V(y)$ である．したがって $f(x) \in W(y)$ なら $f(U) \subset V(y)$ となり，F は均等連続であることがわかる．

(ii) F は均等連続かつ任意の $x \in X$ について $\mathrm{ev}_x(F)$ は相対コンパクトになると仮定する．$x \in X$ と $V \in \mathscr{U}$ を任意に固定しよう．対称な $W \in \mathscr{U}$ を $W \circ W \subset V$ となるように選ぶ．また $y \in \overline{\mathrm{ev}_x(F)}$ に対して，$x \in X$ の近傍 U_y と y の近傍 N_y を $f(x) \in N_y$ なら $f(U_y) \subset \operatorname{Int} W(y)$ となるように選ぶ．$\overline{\mathrm{ev}_x(F)}$ はコンパクトだから，その被覆 $(N_y)_{y \in \overline{\mathrm{ev}_x(F)}}$ から有限部分被覆 $(N_{y_i})_{i<n}$ を選び出すことが出来る．ここで，$U = \bigcap_{i<n} U_{y_i}$ と定義する．$x' \in U$ と $f \in F$ を任意に固定しよう．定義より $f(x) \in \overline{\mathrm{ev}_x(F)}$ だから，ある $i < n$ で $f(x) \in N_{y_i}$ を満たすものが存在する．このとき $f(U_{y_i}) \subset \operatorname{Int} W(y_i)$ なので，$f(x), f(x') \in W(y_i)$ であり，$(f(x), f(x')) \in W \circ W \subset V$ がわかる．したがって F は同程度連続である． □

同程度連続性の概念を用いると，コンパクト一様収束に関するコンパクト性は以下のように特徴づけられる．

命題 4.6 X を局所コンパクト Hausdorff 空間とし，Y を Hausdorff 一様空間とする．このとき，$F \subset C_{\mathrm{co}}(X, Y)$ がコンパクトになるための必要十分条件は，次の 3 条件が成り立つことである．

(i) F はコンパクト開位相について閉である．
(ii) 任意の $x \in X$ について，$\mathrm{ev}(\{x\} \times F)$ は Y において相対コンパクトである．
(iii) F は同程度連続である．

証明 命題 4.3 と命題 4.5 からわかる． □

5 関数空間と擬距離

全ての一様系は擬距離の族によって生成されるので，一様空間に値を取る関数の空間も擬距離の観点から調べることが出来る．

補題 5.1 $(X,\mathscr{U})$ を一様空間とする．このとき，$\mathscr{U}$ を生成する擬距離の族で，その元がどれも有界な擬距離であるようなものが存在する．

証明 P を一様系 $\mathscr{U}$ を生成する擬距離の族とする．このとき，$P' = \{\rho \wedge 1\,;\, \rho \in P\}$ は $\mathscr{U}$ を生成する擬距離の族である[7)]． □

命題 5.2 X を集合，$\mathfrak{S}$ を X の被覆とし，$(Y,\mathscr{U})$ を有界な擬距離の族 P によって生成される一様空間とする．$\rho \in P$ と $A \in \mathfrak{S}$ および $f,g \in Y^X$ に対して，

$$\rho^*|_A(f,g) = \sup\{\rho(f(x),g(x))\,;\, x \in A\} \tag{31}$$

と定義する．このとき $\rho^*|_A$ は Y^X 上の擬距離であり，$\widehat{\mathscr{U}}|_{\mathfrak{S}}$ は擬距離族 $\{\rho^*|_A\,;\, \rho \in P, A \in \mathfrak{S}\}$ によって生成される．

証明 各 $\rho^*|_A$ が非負で擬距離の公理 (M1) と (M2) を満たすことは明らかである．三角不等式は，任意の $x \in A$ について

$$\rho(f(x),h(x)) \le \rho(f(x),g(x)) + \rho(g(x),h(x)) \le \rho^*|_A(f,g) + \rho^*|_A(g,h) \tag{32}$$

が成り立つことからわかる．よって $\rho^*|_A$ はどれも Y^X 上の擬距離である．

$$\{(f,g) \in Y^X \times Y^X \mid \rho^*|_A(f,g) \le r\} = \bigcap_{x \in A}\{(f,g) \in Y^X \times Y^X \mid \rho(f(x),g(x)) \le r\} \in \widehat{\mathscr{U}}|_{\mathfrak{S}} \tag{33}$$

であるから，$\rho^*|_A$ はどれも一様であることがわかる．したがって，$\{\rho^*|_A\,;\, \rho \in P, A \in \mathfrak{S}\}$ によって生成される一様系は $\mathscr{U}$ より粗い．逆に $V \in \mathscr{U}$ とすれば，有限個の擬距離 $\rho_1,\dots,\rho_n$ と $r_1,\dots,r_n > 0$ で

$$\bigcap_{1 \le i \le n}\{(f,g) \in Y^X \times Y^X \mid \rho_i(f(x),g(x)) \le r_i\} \subset V \tag{34}$$

7) ρ と $\rho \wedge 1$ は一様同値な距離であることを思い出そう．（位相空間論セミナー VI 命題 1.11.）

を満たすものが存在する．このとき

$$\widehat{V}|_A = \bigcap_{x \in A} \{(f,g) \in Y^X \times Y^X \mid (f(x), g(x)) \in V\} \tag{35}$$

$$\supset \bigcap_{x \in A} \bigcap_{1 \leq i \leq n} \{(f,g) \in Y^X \times Y^X \mid \rho_i(f(x), g(x)) \leq r_i\} \tag{36}$$

$$= \bigcap_{1 \leq i \leq n} \bigcap_{x \in A} \{(f,g) \in Y^X \times Y^X \mid \rho_i(f(x), g(x)) \leq r_i\} \tag{37}$$

$$\supset \bigcap_{1 \leq i \leq n} \bigcap_{x \in A} \{(f,g) \in Y^X \times Y^X \mid \rho_i^*|_A(f(x), g(x)) \leq r_i\} \tag{38}$$

が成り立つから，$\widehat{V}|_A$ は $\{\rho^*|_A\, ;\, \rho \in P, A \in \mathfrak{S}\}$ によって生成される一様系に属する．このような近縁は $\widehat{\mathscr{U}}|_{\mathfrak{S}}$ の準基となるから，$\widehat{\mathscr{U}}|_{\mathfrak{S}}$ は $\{\rho^*|_A\, ;\, \rho \in P, A \in \mathfrak{S}\}$ によって生成される一様系より粗い．

□

系 5.3 X を集合とし，(Y, ρ) を擬距離空間とする．このとき，Y^X の一様収束から定まる一様系は，擬距離化可能である．ρ が距離ならば，Y^X の一様収束の一様系は距離化可能である．

証明 ρ を一様同値な有界擬距離で置き換えればよいから，有界であると仮定してよい．命題 5.2 において $\mathfrak{S} = \{X\}$ とすれば，Y^X の一様収束の一様系が距離化可能であることがわかる．ρ が距離の場合は，

$$\rho_X^*(f,g) = 0 \iff \forall x \in X\ \rho(f(x), g(x)) = 0 \iff \forall x \in X\ f(x) = g(x) \tag{39}$$

に注意すれば ρ_X^* が距離であることがわかる． □

References

[1] Steve Awodey. *Category Theory*. 2nd ed. Oxford Logic Guides 52. Oxford University Press, 2010. ISBN: 9780199237180.

[2] Nicolas Bourbaki. *General Topology Part 2*. Elements of Mathematics. Hermann, 1966.

[3] Nicolas Bourbaki. *General Topology Part I*. Elements of Mathematics. Hermann, 1966.

[4] Ryszard Engelking. *General topology*. Revised and completed edition. Sigma Series in Pure Mathematics 6. Translated from the Polish by the author. Heldermann Verlag, Berlin, 1989, pp. viii+529. ISBN: 3-88538-006-4.

[5] Klaas Pieter Hart, Jun-iti Nagata, and Jerry E. Vaughan, eds. *Encyclopedia of General Topology*. Elsevier Science, 2004, pp. x+526. ISBN: 0-444-50355-2. URL: https://www.elsevier.com/books/encyclopedia-of-general-topology/hart/978-0-444-50355-8.

[6] John L. Kelley. *General Topology*. Graduate Texts in Mathematics 27. Originally published by Van Nostrand, 1955. Springer-Verlag New York, 1975. xiv+298 pp. ISBN: 978-0-387-90125-1. URL: https://www.springer.com/gp/book/9780387901251.

[7] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics 5. Springer-Verlag New York, 1978. DOI: 10.1007/978-1-4757-4721-8.

索引