# 位相空間論セミナーV：一様空間 Ver.1.2

大阪大学大学院基礎工学研究科
平井祐紀

2020 年 4 月 23 日

更新履歴
2018.9.14 何かを修正．
2020.4.23 誤植を訂正．索引を作成．ver.1.2.

## 目次



## 1 一様系

一様空間は，$X \times X$ 上の一様系と呼ばれる集合族によって定められる．それ条件を記述するために，$X$ 上の関係についての記号を用意しよう．$X$ 上の関係とは，$X \times X$ の部分集合のことであった．$X$ 上の関係 $R$ に対して，

$$R(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in R\}$$

と定義する．$A \subset X$ に対しては，

$$R(A) = \{y \in X \mid \exists x \in A\ (x, y) \in R\} = \bigcup_{x \in A} R(x)$$

と定める．$R(x)$ と $R(A)$ は関数の値や像の記法 $f(x)$，$f(A)$ の類似物である．$R$ の逆関係 $R^{-1} \subset X \times X$ を

$$R^{-1} = \{(x, y) \in X \times X \mid (y, x) \in R\}$$

によって定義する．$R = R^{-1}$ が成り立つということは関係 $R$ が対称律を満たすということであり，このとき $R$ は対称であるという．二つの関係 $R$，$S$ が与えられたとき，その合成 $R \circ S$ を

$$R \circ S = \{(x, z) \mid \exists y \in X,\ (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$$

と定める．$R$ が関係なら，$R \cap R^{-1}$ と $R \cup R^{-1}$ はともに対称な関係である．$R \circ R$ のことを $R^{\circ 2}$ とも表すことにする．再帰的に $R^{\circ n+1} = R \circ (R^{\circ n})$ と定義する．

**定義 1.1.** (i) $X$ を集合とし，$\mathscr{U}$ を $X \times X$ のフィルターとする．$\mathscr{U}$ がさらに条件

(U1) 全ての $U \in \mathscr{U}$ について，$\Delta_X \subset U$ が成り立つ．

(U2) 全ての $U \in \mathscr{U}$ について，$U^{-1} \in \mathscr{U}$ が成り立つ．

(U3) 全ての $U \in \mathscr{U}$ に対して，ある $W \in \mathscr{U}$ で $W \circ W \subset U$ を満たすものが存在する．

を満たすとき，$\mathscr{U}$ を対角一様系 (diagonal uniformity) あるいは単に一様系 (uniformity) といい，$(X, \mathscr{U})$ を一様空間 (uniform space) という．また，$\mathscr{U}$ の元を（対角集合の）近縁 (entourage) という．

(ii) $(X, \mathscr{U})$ を一様空間とし，$\mathscr{B}$ を $X \times X$ 上のフィルター基底とする．$\mathscr{B}$ によって生成されるフィルターが一様系 $\mathscr{U}$ と一致するとき，$\mathscr{B}$ を（一様系 $\mathscr{U}$ の）基底 (base) と呼ぶ．

$X$ 上の一様系 $\mathscr{U}_1$ と $\mathscr{U}_2$ について $\mathscr{U}_1 \subset \mathscr{U}_2$ が成り立つとき，$\mathscr{U}_2$ は $\mathscr{U}_1$ より細かい (finer) といい，$\mathscr{U}_1$ は $\mathscr{U}_2$ より粗い (coarser) という．

一様系の定義に $\mathscr{U}$ が（真の）フィルターであること（i.e. $\emptyset \notin \mathscr{U}$）を課さない流儀もあり，空集合上の一様系を考える際に違いが出てくる[*1]．空集合上には真のフィルターは存在しないから，我々の立場では空集合は一様空間とはならない．一様空間の代表例は距離空間だが，距離空間の性質については別の回で詳しく扱う予定である．一様系の定義は何を言っているかいまいちわかりにくいが，$\mathscr{U}$ は $X$ における 2 点の近さを表す指標のようなものである．特に $U \in \mathscr{U}$ が対称な場合，$(x, y) \in \mathscr{U}$ かつ $(z, w) \in \mathscr{U}$ が成り立つとは，「$x$ と $y$ の近さ」と「$z$ と $w$ の近さ」が同じ程度には小さいということを示している．

**命題 1.2.** $(X, \mathscr{U})$ を一様系とし，$\mathfrak{S}(\mathscr{U}) = \{V \in \mathscr{U} \mid V = V^{-1}\}$ と定義する．このとき，$\mathfrak{S}(\mathscr{U})$ は $\mathscr{U}$ の基底である．

証明. $\mathfrak{S}(\mathscr{U})$ がフィルター基底であることと，$\mathscr{U}$ の任意の元は $\mathfrak{S}(\mathscr{U})$ の元を含むことを示せばよい．

$X \times X \in \mathscr{B}$ なので，$\mathfrak{S}(\mathscr{U})$ は空ではない．また $\mathfrak{S}(\mathscr{U})$ の元は $\mathscr{U}$ の元でもあるからどれも空ではなく，よって $\mathfrak{S}(\mathscr{U})$ は空集合を元に持たない．$U_1$，$U_2 \in \mathfrak{S}(\mathscr{U})$ ならば，$W = [U_1 \cap U_2] \circ [U_1 \cap U_2]^{-1}$ とおけば $W$ は対称な近縁でかつ $W \subset U_1 \cap U_2$ を満たしている．よって $\mathfrak{S}(\mathscr{U})$ はフィルター基底であることが確かめられた．

$U \in \mathscr{U}$ を任意に選べば，このとき $U \cap U^{-1} \in \mathfrak{S}(\mathscr{U})$ かつ $U \cap U^{-1} \subset U$ が成り立つ．ゆえに $\mathscr{U}$ の任意の元は $\mathfrak{S}(\mathscr{U})$ の元を含み，$\mathscr{U}$ は $\mathfrak{S}(\mathscr{U})$ によって生成されることがわかる． □

*1 Bourbaki [1, Chapter II §1.1] を見よ．

これ以降，命題 1.2 と同じように一様空間 $(X,\mathscr{U})$ の対称な近縁全体を $\mathfrak{S}(\mathscr{U})$ で表すことにする．

距離空間において開球から出発して位相を定義出来たように，一様空間にも一様系を用いて位相を定めることができる．

**命題 1.3.** $(X,\mathscr{U})$ を一様空間とし，$x \in X$ に対して $\mathscr{V}(x) = \{V(x)\,;\, V \in \mathscr{U}\}$ と定義する．このとき $\{\mathscr{V}(x)\,;\, x \in X\}$ は近傍系の公理を満たす．さらに $\mathscr{B}$ が $\mathscr{U}$ の基底であるとき，$\mathscr{B}(x) = \{U(x)\,;\, U \in \mathscr{B}\}$ とすれば各 $\mathscr{B}(x)$ は $\mathscr{U}(x)$ の基底となっている．

復習しておくと，$\mathscr{V}(x)$ が近傍系の公理を満たすとは，各 $\mathscr{V}(x)$ は $X$ 上のフィルターであって，さらに

(i) 全ての $V \in \mathscr{V}(x)$ について $x \in V$ が成り立つ，

(ii) 全ての $V \in \mathscr{V}(x)$ について，ある $W \in \mathscr{V}(x)$ で $W \subset V$ かつ全ての $y \in W$ に対して $V \in \mathscr{V}(y)$ を満たすものが存在する．

を満たすということであった[*2]．

証明．$x \in X$ とする．まずは，各 $\mathscr{V}(x)$ がフィルターであることを示そう．$\mathscr{U}$ はフィルターだから $X \times X \in \mathscr{U}$ であり，$(X \times X)(x) = X \in \mathscr{V}(x)$ だから $\mathscr{V}(x)$ は空ではない．また $U \in \mathscr{V}(x)$ とすれば $\Delta_X \subset U$ なので，$\{x\} = \Delta_X(x) \subset U$ である．したがって $\mathscr{V}(x)$ の元はどれも空ではない．$U$, $V \in \mathscr{V}(x)$ とする．このときある $U'$ と $V' \in \mathscr{U}$ で $U = U'(x)$ および $V = V'(x)$ を満たすものが存在する．$U' \cap V' \in \mathscr{U}$ および $U \cap V = (U' \cap V')(x)$ が成り立つから，$U \cap V \in \mathscr{V}(x)$ である．さらに $U \subset W$ であるとする．このとき $U' \subset U' \cup X \times W \in \mathscr{U}$ かつ $[U' \cup (X \times W)](x) = W$ が成り立つので，$W \in \mathscr{V}(x)$ である．したがって $\mathscr{V}(x)$ は $X$ のフィルターであることがわかった．

既に説明したように全ての $U \in \mathscr{V}(x)$ について $\{x\} \subset U$ が成り立つ．あとは，先ほどの公理の条件 (ii) [*3] が成り立つことを示せばよい．$U \in \mathscr{V}(x)$ とし，$U' \in \mathscr{U}$ を $U'(x) = U$ となるように選ぶ．また，$W \in \mathscr{U}$ を $W \circ W \subset U$ となるようにとる．いま $\mathscr{U}$ は一様系なので $(x,y) \in W$ なら $(x,x) \in W$ かつ $(x,y) \in W$ となり，$(x,y) \in W \circ W$ がわかる．よって $W \subset W \circ W$ であり，$W(x) \subset U$ が従う．さて，$y \in W(x)$ を任意に選ぼう．$(y,z) \in W$ なら $(x,z) \in W \circ W \subset U'$ であるから，$W(y) \subset U = U'(x)$ である．既に示したように $\mathscr{V}(y)$ はフィルターであるから，これより $U \in \mathscr{V}(y)$ がわかる．したがって，すべての $y \in W(x)$ について $U \in \mathscr{V}(y)$ が成り立ち，$\mathscr{V}(x)$ が近傍系の公理を満たすことが示された．

後半の主張を証明しよう．$\mathscr{B}$ を $\mathscr{U}$ の基底とし，$\mathscr{B}(x)$ を命題の主張のように定義する．$x \in X$ および $B \in \mathscr{B}(x)$ を任意に選ぶ．さらに $B = W(x)$ となるように $V \in \mathscr{B}$ をとる．$\mathscr{B}$ はフィルター $\mathscr{U}$ の基底だから，ある $U \in \mathscr{U}$ で $U \subset W$ を満たすようなものがとれる．このとき $x \in U(x) \subset W(x) = B$ が成り立つから，$\mathscr{B}(x)$ は $\mathscr{U}(x)$ の基底である． □

**定義 1.4.** (i) 命題 1.3 より，一様空間 $(X,\mathscr{U})$ が与えられると，一様系 $\mathscr{U}$ から $X$ 上の近傍系の公理を満たす系 $\{\mathscr{V}(x)\,;\, x \in X\}$ を定義することができる．したがって，これを各点の近傍系とする $X$ 上の開集合系が自然に定まる．これを，一様系 $\mathscr{U}$ によって誘導された $X$ の位相，あるいは単に $X$ の一様位相 (uniform topology) という．

(ii) $X$ を位相空間とする．$X$ 上の一様系 $\mathscr{U}$ で $\mathscr{U}$ から誘導される一様位相が元の $X$ の位相と一致するよう

[*2] 位相空間論セミナー I 命題 3.2，注意 3.3 を見よ．

[*3] 位相空間論セミナー I の公理 (N5)．

なものが存在するとする．このとき $X$ は一様化可能 (uniformizable) であるといい，一様系 $\mathscr{U}$ は $X$ の位相と整合的であるという．

当然ながら一様系から定義された位相と一様系の間には密接な関係がある．その例をいくつか見ていこう．

**命題 1.5.** $(X, \mathscr{U})$ を一様空間とする．このとき，全ての $M \subset X \times X$ と全ての $V \in \mathfrak{S}(\mathscr{U})$ について，$V \circ M \circ V$ は積空間 $X \times X$ における $M$ の近傍となる．さらに，

$$\operatorname{Cl}_{X \times X} M = \bigcap_{V \in \mathfrak{S}(\mathscr{U})} V \circ M \circ V$$

が成り立つ．

*証明.* まずは，一つ目の主張を示す．$(x, y) \in M$ とする．このとき $V(x) \times V(y)$ は $(x, y)$ の近傍である．$(z, w) \in V(x) \times V(y)$ とすれば $(x, z) \in V$ かつ $(y, w) \in V$ が成り立つが，いま $V$ は対称だから $(z, x) \in V$ かつ $(y, w) \in V$ も成り立つ．$(x, y) \in M$ と合わせれば $(z, w) \in V \circ M \circ V$ となり，$V(x) \times V(y) \subset V \circ M \circ V$ がわかる．したがって $V \circ M \circ V$ は積位相空間 $X \times X$ における $M$ の近傍である．

次に二つ目の主張を示そう．$\mathfrak{S}(\mathscr{U})$ は $\mathscr{U}$ の基底だから $\{V(x) \mid V \in \mathfrak{S}(\mathscr{U})\}$ は $x$ の基本近傍系であり，ゆえに $\{V(x) \times V(y) \mid V \in \mathfrak{S}(\mathscr{U})\}$ は $(x, y)$ の基本近傍系であることに注意しよう．したがって，$(x, y) \in \operatorname{Cl}_{X \times X} M$ は全ての $V \in \mathfrak{S}(\mathscr{U})$ について $[V(x) \times V(y)] \cap M \neq \emptyset$ が成り立つことと同値である．これは全ての $V \in \mathfrak{S}(\mathscr{U})$ に対して，ある $(z, w) \in M$ が存在して $(x, z) \in V$ かつ $(w, y) \in V$ が成り立つこととも同値である．（$V$ の対称性に注意せよ．）したがってこれは全ての $V \in \mathfrak{S}(\mathscr{U})$ について $(x, y) \in V \circ M \circ V$ が成り立つということと同値であり，$(x, y) \in \overline{M}$ と $(x, y) \in \bigcap_{V \in \mathfrak{S}(\mathscr{U})} V \circ M \circ V$ の同値性が分かる． □

**系 1.6.** $(X, \mathscr{U})$ を一様空間とする．

(i) 全ての $A \subset X$ と全ての $V \in \mathfrak{S}(\mathscr{U})$ について $V(A)$ は $A$ の近傍であり，

$$\operatorname{Cl}_X A = \bigcap_{V \in \mathfrak{S}(\mathscr{U})} V(A) = \bigcap_{V \in \mathscr{U}} V(A)$$

が成り立つ．

(ii) $\mathscr{U}$ に属する $X \times X$ の開集合全体は $\mathscr{U}$ の基底である．

(iii) $\mathscr{U}$ に属する $X \times X$ の閉集合全体は $\mathscr{U}$ の基底である．

*証明.* (i) $A \subset X$ とすれば，命題 1.5 より任意の $V \in \mathfrak{S}(\mathscr{U})$ に対して $V(A) \times V(A) = V \circ [A \times A] \circ V$ は $A \times A$ の近傍である．$x \in A$ なら $(x, x) \in A \times A$ なので，ある $U$，$W \in \mathscr{V}(x)$ で $U \times W \subset V(A) \times V(A)$ を満たすものがとれる．このとき特に $U \subset V(A)$ なので，$V(A)$ は $A$ の近傍であることがわかる．

命題 1.5 および積位相の性質より

$$\begin{aligned}
\overline{A} &= \operatorname{pr}_1(\overline{A} \times \overline{A}) \\
&= \operatorname{pr}_1(\overline{A \times A}) \\
&= \operatorname{pr}_1\left(\bigcap_{V \in \mathfrak{S}} V(A) \times V(A)\right) \\
&\subset \bigcap_{V \in \mathfrak{S}} \operatorname{pr}_1(V(A) \times V(A))
\end{aligned}$$

$$= \bigcap_{V \in \mathfrak{S}} V(A)$$

が成り立つ．また $x \in \bigcap_{V\in\mathfrak{S}} V(A)$ ならすべての $V \in \mathfrak{S}(\mathscr{U})$ に対して $x \in V(A) = \bigcup_{a\in A} V(a)$ である．このとき，各 $V \in \mathfrak{S}(\mathscr{U})$ に対して，ある $a_V \in A$ で $x \in V(a_V)$ となるようなものが選べば，$V$ の対称性より $a_V \in V(x)$ となる．いま $\{V(x)\,;\, V \in \mathfrak{S}(\mathscr{U})\}$ は $x$ の基本近傍系だから，先ほどの手続きで得られた有向族 $(a_V)\colon \mathfrak{S}(\mathscr{U}) \to A$ は $x$ に収束する．ゆえに $x \in \overline{A}$ である．よって一つ目の等号が示された．二つ目の等号は $\{V(x)\,;\, V \in \mathfrak{S}(\mathscr{U})\}$ が $\{V(x)\,;\, V \in \mathscr{U}\}$ の基底になっていることからわかる．

(ii) $\mathscr{U}$ に属する $X \times X$ の開集合全体を $\mathscr{O}_{\mathscr{U}}$ で表すことにする．$X \times X \in \mathscr{O}_{\mathscr{U}}$ より $\mathscr{O}_{\mathscr{U}}$ は空でなく，また公理 (U1) より $\mathscr{O}_{\mathscr{U}}$ の元はどれも空ではない．フィルター $\mathscr{U}$ が有限交叉性をもつことと，開集合の共通部分がまた開集合であることを用いれば $\mathscr{O}_{\mathscr{U}}$ が有限交叉性をもつこともわかる．よって $\mathscr{O}_{\mathscr{U}}$ はフィルター基底である．さらに $U \in \mathscr{U}$ とすれば $\mathrm{Int}_{X\times X} U \in \mathscr{O}_{\mathscr{U}}$ なので，$\mathscr{U}$ の任意の元は $\mathscr{O}_{\mathscr{U}}$ の元を含む．よって，$\mathscr{U}$ は $\mathscr{O}_{\mathscr{U}}$ によって生成されるフィルターである．

(iii) $\mathscr{U}$ に属する閉集合全体を $\mathscr{F}_{\mathscr{U}}$ で表すことにする．$\mathscr{F}_{\mathscr{U}}$ がフィルター基底であることは，(ii) と同様にしてわかる．$U \in \mathscr{U}$ を任意に選び，$V \in \mathfrak{S}(\mathscr{U})$ を $V^{\circ 3} \subset U$ を満たすようにとる．このとき命題 1.5 より $\mathrm{Cl}_{X\times X} V \subset V^{\circ 3} \subset U$ なので，$\mathscr{U}$ の任意の元は $\mathscr{F}_{\mathscr{U}}$ の元を含む．よって $\mathscr{U}$ は $\mathscr{F}_{\mathscr{U}}$ によって生成されるフィルターである． □

**系 1.7.** $(X, \mathscr{U})$ を一様空間とすれば，$\mathscr{U}$ は $X \times X$ の対称な閉集合（開集合）からなる基底をもつ．

証明. $\mathscr{V}$ を $\mathscr{U}$ の対称な閉集合全体の族とする．$\mathscr{V}$ がフィルター基底であることはこれまでの証明と同様にしてわかる．$U \in \mathscr{U}$ とすれば，系 1.6 より閉集合 $V \in \mathscr{U}$ で $V \subset U$ を満たすものがとれる．$W = V \cap V^{-1}$ とすれば $W$ は対称な閉集合であり，$W \subset V \subset U$ を満たす．したがって，$\mathscr{V}$ は $\mathscr{U}$ の基底である．開集合の場合も同様に示される． □

## 2 一様連続写像

位相空間における準同型概念として連続写像があったように，一様空間にも準同型概念が存在し，それを一様連続写像と呼ぶ．

**定義 2.1.** $(X, \mathscr{U})$ と $(Y, \mathscr{V})$ を一様空間とし，$f\colon X \to Y$ を写像とする．

(i) 全ての $V \in \mathscr{V}$ について $(f \times f)^{-1}(V) \in \mathscr{U}$ が成り立つとき，$f$ は一様連続 (uniformly continuous) であるという．

(ii) $f$ は一様連続であるとする．もう一つの一様連続写像 $g\colon Y \to X$ で $g \circ f = \mathrm{id}_X$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ を満たすものが存在するとき，$f$ は一様同型写像 (uniform isomorphism) であるという．また $(X, \mathscr{U})$ と $(Y, \mathscr{V})$ の間に一様同型写像が存在するとき，$(X, \mathscr{U})$ と $(Y, \mathscr{V})$ は一様同型 (uniformly isomorphic) あるいは一様同値 (uniformly equivalent) であるという．

(iii) 一様連続写像 $f$ が単射であるとき，$f$ を一様連続な埋め込みという．

(iv) $f\colon X \to f(X) \subset Y$ が一様同型であるとき，$f$ は一様同型な埋め込みであるという．

写像の連続性は各点の周りの局所的な性質であったが，一様連続性はもっと大域的な性質である．一様連続写像の定義より，二つの一様連続写像の合成はまた一様連続であることが容易にわかる．写像の一様連続性は

以下のように特徴づけることができる．

**命題 2.2.** $(X,\mathscr{U})$ と $(Y,\mathscr{V})$ を一様空間，$f\colon X\to Y$ を写像とする．さらに，$\mathscr{B}$ を $\mathscr{V}$ の基底とする．このとき，次の条件は同値である．

(i) $f$ は一様連続である．
(ii) 全ての $V\in\mathscr{V}$ に対して，ある $U\in\mathscr{U}$ で $(f\times f)(U)\subset V$ を満たすものが存在する．
(iii) 全ての $V\in\mathscr{B}$ に対して，ある $U\in\mathscr{U}$ で $(f\times f)(U)\subset V$ を満たすものが存在する．

命題 2.2 の条件 (ii) は，フィルター基底 $(f\times f)_*\mathscr{U}$ によって生成されるフィルターが $\mathscr{V}$ より粗いということである．また，条件 (iii) は $(f\times f)_*\mathscr{B}$ によって生成されるフィルターが，フィルター基底 $\mathscr{B}$ より粗いということである．さらに，$f$ が一様連続であるとは，フィルター基底 $(f\times f)^*\mathscr{V}$ が $\mathscr{U}$ より粗いという言葉でも表現できる[*4]．

証明．(ii) $\Longrightarrow$ (iii) は明らかである．

(iii) $\Longrightarrow$ (i)．$V\in\mathscr{V}$ とすれば，$\mathscr{B}$ が $\mathscr{V}$ の基底であることより $B\in\mathscr{B}$ で $B\subset V$ を満たすものがとれる．このとき条件 (iii) より $U\subset(f\times f)^{-1}(B)\subset(f\times f)^{-1}(V)$ を満たす $U\in\mathscr{U}$ が存在する．いま $\mathscr{U}$ はフィルターだから，これより $(f\times f)^{-1}(V)\in\mathscr{U}$ が従う．

(i) $\Longrightarrow$ (ii)．$U$ として $(f\times f)^{-1}(V)$ をとればよい． □

**命題 2.3.** 一様連続写像は連続である．

証明．$(X,\mathscr{U})$ と $(Y,\mathscr{V})$ を一様空間とし，$f\colon X\to Y$ を一様連続写像とする．$x\in X$ とし，$f(x)$ の近傍 $W$ を任意に選ぶ．このとき，一様位相の定義よりある $V\in\mathscr{V}$ で $V(f(x))\subset W$ を満たすものが存在する．このとき

$$f^{-1}(V(f(x)))=\{z\in X\mid f(z)\in V(f(x))\}=\{z\in X\mid (f(x),f(z))\in V\}=(f\times f)^{-1}(V)(x)$$

が成り立っている．いま $f$ は一様連続だから $(f\times f)^{-1}(V)\in\mathscr{U}$ であり，ゆえに $(f\times f)^{-1}(V)(x)$ は $x$ の近傍である．$f$ は $f(x)$ の近傍を $x$ の近傍に引き戻すから，$x$ において連続であることがわかる．$x$ は任意に選んでいるから，$f$ は $X$ 上で連続である． □

## 3 擬距離

本ノートでは近縁全体を定めることで一様空間を導入したが，一様系を定める方法は他にもいくつかある．本節では，擬距離から定まる一様系について考える．

**定義 3.1.** $X$ を空でない集合とし，$\rho\colon X\times X\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ を写像とする．$\rho$ が条件

(M1) 全ての $x\in X$ について，$\rho(x,x)=0$ が成り立つ．
(M2) 全ての $x,y\in X$ について，$\rho(x,y)=\rho(y,x)$ が成り立つ．
(M3) 全ての $x,y,z\in X$ について，$\rho(x,z)\leq\rho(x,y)+\rho(y,z)$ が成り立つ．

[*4] いま任意の $V\in\mathscr{V}$ について $(f\times f)(X\times X)\cap V\supset f(X)\times f(X)\cap\Delta_Y\neq\emptyset$ なので，$(f\times f)^*\mathscr{V}$ は $X\times X$ のフィルター基底となっている．

を満たすとき，$\rho$ を $X$ 上の擬距離 (pseudometric) と呼ぶ．さらに $\rho$ が

(M4) 全ての $x, y \in X$ について，$\rho(x, y) = 0$ なら $x = y$ が成り立つ．

を満たすなら，$\rho$ は $X$ 上の距離 (metric) であるという．$\rho$ が（擬）距離であるとき，$(X, \rho)$ を（擬）距離空間という．

条件 (M3) はしばしば三角不等式と呼ばれている．条件 (M2) は $\rho$ は $\rho$ の対称性である．条件 (M4) を満たすとき，$\rho$ は非退化であるといったりする．

擬距離の族が与えられると，そこから一様系を定義することができる．

**命題 3.2.** $P$ を $X$ 上の擬距離の族とする．$\rho \in P$ と $r > 0$ に対して

$$U(\rho; r) = \{(x, y) \in X \times X \mid \rho(x, y) < r\}$$

と定義し，$\mathscr{B}$ で $\{U(\rho; r) \,;\, \rho \in P,\ r > 0\}$ の元の有限個の共通部分全体を表す．このとき $\mathscr{B}$ は $X \times X$ 上のフィルター基底であり，$\mathscr{B}$ によって生成されるフィルターは $X$ 上の一様系を定める．

*証明.* $\mathscr{B}$ が空でないことは明らかだろう．$\mathscr{B}$ の元が空集合でないことは，(M1) よりわかる．$\mathscr{B}$ が有限個の共通部分をとる操作について閉じていることは，その定義よりわかる．よって $\mathscr{B}$ は $X \times X$ 上のフィルター基底である．

$U \in \mathscr{B}$ なら，条件 (M1) より $\Delta_X \subset U$ がわかるので，$\mathscr{B}$ は (U1) を満たす．また条件 (M2) より，$U \in \mathscr{B}$ なら $U^{-1} \in \mathscr{B}$ であることもわかる．あとは，$\mathscr{B}$ が条件 (U3) を満たすことを示せばよい．$U \in \mathscr{B}$ を

$$U = U(\rho_1; r_1) \cap \cdots \cap U(\rho_n; r_n)$$

と表記し，

$$W = U\left(\rho_1; \frac{r_1}{2}\right) \cap \cdots \cap U\left(\rho_n; \frac{r_n}{2}\right)$$

と定義する．$(x, z) \in W \circ W$ のとき，ある $y \in X$ で $(x, y) \in W$ かつ $(y, z) \in W$ を満たすものが存在する．このとき，$W$ の定義と条件 (M3) よりより全ての $i$ について

$$\rho_i(x, z) \leq \rho_i(x, y) + \rho_i(y, z) < \frac{r_i}{2} + \frac{r_i}{2} < r_i$$

が成り立つ．ゆえに $(x, z) \in U$ となり，$W \circ W \subset U$ がわかった．これより，$\mathscr{B}$ は条件 (U3) も満たしている． □

**定義 3.3.** (i) 命題 3.2 より，$X$ 上の擬距離の族 $P$ が与えられると，そこから $X$ に一様系を定めることができる．これを，$P$ によって誘導された一様系と呼び，$\mathscr{U}_P$ で表す．

(ii) $(X, \mathscr{U})$ 上の擬距離 $\rho$ が全ての $r > 0$ について $U(\rho; r) \in \mathscr{U}$ を満たすとき，$\rho$ は $\mathscr{U}$ について一様 (uniform) であるという．

(iii) $(X, \mathscr{U})$ 上の擬距離 $\rho$ で $\mathscr{U}$ が $\{\rho\}$ によって誘導された一様系と一致するようなものが存在するとき，一様空間 $(X, \mathscr{U})$ が擬距離化可能 (pseudometirizable) であるという．特に $\rho$ として距離であるようなものが選べるとき，$(X, \mathscr{U})$ は距離化可能 (metrizable) であるという．

全ての $\rho \in P$ は明らかに $\mathscr{U}_P$ について一様である．また $\mathscr{U}$ が $\rho$ によって擬距離化可能なら，$\rho$ は $\mathscr{U}$ について一様である．

**命題 3.4.** $(X,\mathscr{U})$ を一様空間とし，$X$ をその一様位相によって位相空間と考える．このとき，$\mathscr{U}$ について一様な擬距離 $\rho$ は，$X\times X$ 上の連続関数である．

証明．$(x_0,y_0)\in X\times X$ を任意に固定し，$\rho$ が $(x_0,y_0)$ で連続なことを示す．$\varepsilon>0$ を任意に固定する．$(x,y)\in U(\rho,\varepsilon/2)(x_0)\times U(\rho,\varepsilon/2)(y_0)$ なら

$$|\rho(x_0,y_0)-\rho(x,y)|\leq \rho(x_0,x)+\rho(y_0,y)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

が成り立つ．（一つ目の不等号は三角不等式と対称性よりわかる．）ゆえに $\rho$ は連続である． □

一般に一様空間は擬距離化可能だとは限らないが，その一様構造を定めるような擬距離の族は常に存在する．

**補題 3.5.** $(X,\mathscr{U})$ を一様空間とし，$(V_n)\in\mathscr{U}^{\mathbb{N}}$ は以下の条件を満たすとする．

$$V_0=X\times X,\quad V_{n+1}^{\circ 3}\subset V_n,\quad n\geq 0$$

このとき，写像 $\rho\colon X\times X\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ で，(M1)，(M3) および全ての $n\geq 1$ について

$$U\left(\rho;\frac{1}{2^n}\right):=\left\{(x,y)\in X\times Y\ \middle|\ \rho(x,y)<\frac{1}{2^n}\right\}\subset V_n\subset\left\{(x,y)\in X\times Y\ \middle|\ \rho(x,y)\leq\frac{1}{2^n}\right\}$$

を満たすものが存在する．特に，$V_n$ がどれも対称なら $\rho$ は擬距離である．

証明．$x,y\in X$ に対して，

$$\rho(x,y)=\inf\left\{\sum_{1\leq k\leq n}\frac{1}{2^{i_k}}\ \middle|\ n\geq 1,\ i_1,\dots,i_n\in\mathbb{N},\ (x,y)\in V_{i_1}\circ\cdots\circ V_{i_n}\right\}$$

と定義する．まずは $\rho$ が擬距離であることを示そう．定義より $V_0=X\times X$ であるから，$\rho(x,y)$ が非負実数として well-defined であることに注意しておく．$r>0$ に対して $2^{-n}<r$ なる $n\geq 1$ をとれば，$(x,x)\in V_n$ なので $\rho(x,x)\leq 2^{-n}$ がわかる．$r$ は任意に選んでよいので，これより $\rho(x,x)=0$ となり，$\rho$ は (M1) を満たす．$x,y,z\in X$ とする．$(x,y)\in V_{i_1}\circ V_{i_n}$ かつ $(y,z)\in V_{j_1}\circ\cdots\circ V_{j_m}$ なら $(x,z)\in V_{i_1}\circ\cdots\circ V_{i_n}\circ V_{j_1}\circ\cdots\circ V_{j_m}$ なので，

$$d(x,z)\leq\sum_{1\leq k\leq n}\frac{1}{2^{i_k}}+\sum_{1\leq k\leq m}\frac{1}{2^{j_k}}$$

は成立．右辺で inf をとれば

$$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$$

がわかる．よって $\rho$ は (M3) も満たす．$V_n$ がどれも対称なら，$(x,y)\in V_{i_1}\circ\cdots\circ V_{i_n}$ と $(y,z)\in V_{i_1}\circ\cdots\circ V_{i_n}$ は同値になるので，$\rho$ は特に対称となる．

$\rho$ の定義より $(x,y)\in V_n$ なら $\rho(x,y)\leq 2^{-n}$ となるので，$V_n\subset\{\rho(x,y)\leq 2^{-n}\}$ は成り立つ．あとは $U(\rho;2^{-n})\subset V_n$ を示せばよい．具体的には，全ての $m\geq 1$ に対して

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \left[\sum_{k\leq m}\frac{1}{2^{i_k}}<\frac{1}{2^n}\implies V_{i_1}\circ\cdots\circ V_{i_m}\subset V_n\right]\tag{1}$$

が成り立っていることを，$m$ に関する帰納法で証明する．$m = 1$ なら $2^{-i_1} < 2^{-n}$ より $i_1 > n$ であり，$V_{i_1} \subset V_{i_1}^{\circ 3} \subset V_n$ が成り立つ．$k > 1$ とし，全ての $m < k$ に対して (1) が成り立っていると仮定する．さらに，$(i_1, \dots, i_k)$ は

$$\frac{1}{2^{i_1}} + \cdots + \frac{1}{2^{i_k}} < \frac{1}{2^n} \tag{2}$$

を満たしているとする．ここで，$p \geq 1$ を

$$\sum_{l \leq p} \frac{1}{2^{i_l}} < \frac{1}{2^{n+1}}$$

を満たす最大の $p \leq k-1$ として定義する．このような $p$ がない時には $p = 0$ とする．

$p < k-1$ なら，

$$\frac{1}{2^{i_1}} + \cdots + \frac{1}{2^{i_{p+1}}} \geq \frac{1}{2^{n+1}}$$

が成り立つ．これと (2) から

$$\frac{1}{2^{i_{p+2}}} + \cdots + \frac{1}{2^{i_k}} < \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

いま帰納法の仮定より $V_{i_{p+2}} \circ \cdots \circ V_{i_k} \subset V_{n+1}$ が成立．$p = 0$ なら $i_1 = n+1$ であり，$V_{i_1} = V_{n+1}$ となる．このとき $V_{i_1} \circ \cdots \circ V_{i_k} \subset V_{n+1} \circ V_{n+1} \subset V_n$ となり，これは求める結果である．また $p \geq 1$ なら

$$\frac{1}{2^{i_1}} + \cdots + \frac{1}{2^{i_p}} < \frac{1}{2^{n+1}}$$

と帰納法の仮定より，$V_{i_1} \circ \cdots \circ V_{i_p} \subset V_{n+1}$ となる．さらに仮定より $2^{-i_{p+1}} < 2^{-n}$ なので $i_{p+1} \geq n+1$ であり，$V_{i_{p+1}} \subset V_{n+1}$ が成立．したがって，

$$V_{i_1} \circ \cdots \circ V_{i_k} = (V_{i_1} \circ \cdots \circ V_{i_p}) \circ V_{i_{p+1}} \circ (V_{i_{p+2}} \circ \cdots \circ V_{i_k}) \subset V_{n+1} \circ V_{n+1} \circ V_{n+1} \subset V_n$$

となり，やはり求める結論を得る．

$p = k-1$ の場合，帰納法の仮定と

$$\frac{1}{2^{i_1}} + \cdots + \frac{1}{2^{i_{k-1}}} < \frac{1}{2^{n+1}}$$

より，$V_{i_1} \circ \cdots \circ V_{i_{k-1}} \subset V_{n+1}$ である．また $2^{-i_k} < 2^{-n}$ より $i_k \geq n+1$ なので，$V_{i_k} \subset V_{n+1}$ が成立．ゆえに $V_{i_1} \circ \cdots \circ V_{i_k} \subset V_{n+1} \circ V_{n+1} \subset V_n$ となる．したがって，任意の $m < k$ で (1) が成り立つなら，$m = k$ でも成り立つことが確かめられた．したがって，数学的帰納法によって全ての $m \geq 1$ について (1) は成り立つ． □

**命題 3.6.** $(X, \mathscr{U})$ を一様空間とする．このとき，全ての $V \in \mathfrak{S}(\mathscr{U})$ に対して，ある擬距離 $\rho$ で $U(\rho; 1) \subset V$ を満たすものが存在する．

証明．$V_0 = X \times X$，$V_1 = V$，$V_{n+1}^{\circ 3} \subset V_n$ を満たすように $(V_n) \in \mathfrak{S}(\mathscr{U})^{\mathbb{N}}$ を選び，$\rho_0$ を補題 3.5 で構成した擬距離とする．このとき $\rho = 2\rho_0$ と定義すれば，

$$U(\rho'; 1) = \left\{ (x, y) \in X \times X \mid \rho(x, y) < \frac{1}{2} \right\} \subset V_1 = V$$

が成り立つ． □

対称な $V \in \mathscr{U}$ が与えられたとき，それに対して命題 3.6 で作った擬距離を $\rho_V$ で表すことにする．このとき，任意の $r>0$ に対して $U(\rho_V;r) \in \mathscr{U}$ が成り立つ．実際，すでに述べたように $\{U(\rho_V;r);\, r>0\}$ は $X$ のフィルター基底を定める．実際，$r>0$ に対して $2^{-n}<r$ なる $n \in \mathbb{N}$ を一つ選ぼう．このとき

$$U\left(\rho_V;\frac{1}{2^n}\right) \subset V_{n+1} \subset \left\{(x,y) \in X \times Y \,\middle|\, \rho_V(x,y) \leq \frac{1}{2^n}\right\} \subset U(\rho_V;r)$$

が成り立っており，$V_{n+1} \in \mathscr{U}$ と $\mathscr{U}$ がフィルターであることから $U(\rho_V;r) \in \mathscr{U}$ がわかる．したがって，任意の一様系 $\mathscr{U}$ について，

$$P_{\mathscr{U}} = \{\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \rho \text{ は } X \text{ 上の擬距離で，全ての } r>0 \text{ に対して } U(\rho;r) \in \mathscr{U} \text{ を満たす }\}$$

は空集合ではない．この記法を用いると，一様空間における近縁系と擬距離族の関係は以下のように述べることができる．

**定理 3.7.** (i) 上で定義された擬距離族 $P=P_{\mathscr{U}}$ は $\mathscr{U}_{P_{\mathscr{U}}}=\mathscr{U}$ および以下の性質を満たす．

(∗) $(X,\mathscr{U}_P)$ から $(X,\mathscr{U}_{\{\rho'\}})$ への恒等写像 $\mathrm{id}_X$ が一様連続となるなら，$\rho' \in P$ である．

(ii) $X$ 上の擬距離族 $P$ は (i) の条件 (∗) を満たすとする．このとき $P_{\mathscr{U}_P}=P$ が成り立つ．

証明. (i) まずは $\mathscr{U}_{P_{\mathscr{U}}}=\mathscr{U}$ を示す．$P_{\mathscr{U}}$ の定義より，$\rho \in P_{\mathscr{U}}$ は任意の $r>0$ について $U(\rho;r) \in \mathscr{U}$ を満たす．$\mathscr{U}_{P_{\mathscr{U}}}$ はこのような形の集合の有限個の共通部分全体の成すフィルター基底から生成されるフィルターであった．その最小性より，$\mathscr{U}_{P_{\mathscr{U}}} \subset \mathscr{U}$ がわかる．逆向きの包含関係を示そう．$V \in \mathfrak{S}(\mathscr{U})$ とすれば，命題 3.6 とその後の議論より，ある $\rho \in P_{\mathscr{U}}$ で $U(\rho;1) \subset V$ を満たすものが存在する．よって $V \in \mathscr{U}_{P_{\mathscr{U}}}$ であり，$\mathfrak{S}(\mathscr{U})$ が $\mathscr{U}$ の基底であることから $\mathscr{U} \subset \mathscr{U}_{P_{\mathscr{U}}}$ も示された．

(a)$\rho_1,\rho_2 \in P_{\mathscr{U}}$ なら，任意の $r>0$ について

$$U(\rho_1 \vee \rho_2;r) = U(\rho_1;r) \cap U(\rho_2;r) \in \mathscr{U}$$

が成り立つ．よって $\rho_1 \vee \rho_2 \in P_{\mathscr{U}}$ である．

(b) $(X,\mathscr{U}_{P_{\mathscr{U}}})$ から $(X,\mathscr{U}_{\{\rho'\}})$ への恒等写像 $\mathrm{id}_X$ が一様連続となると仮定する．このとき，任意の $r>0$ に対して $U(\rho';r) \in \mathscr{U}_{P_{\mathscr{U}}}$ が成り立つ．既に示したように $\mathscr{U}_{P_{\mathscr{U}}}=\mathscr{U}$ であったから，$P_{\mathscr{U}}$ の定義より $\rho' \in P_{\mathscr{U}}$ となる．

(ii) まずは $P \subset P_{\mathscr{U}_P}$ を示す．$\rho \in P$ なら $U(\rho;r)$ は $\mathscr{U}_P$ の近縁なので，$\rho \in P_{\mathscr{U}_P}$ となる．次に逆向きの包含 $P_{\mathscr{U}_P} \subset P$ を示そう．$\rho \in P_{\mathscr{U}_P}$ とは，全ての $r>0$ に対して $U(\rho,r) \in \mathscr{U}_P$ が成り立つということである．これは $(X,\mathscr{U}_P)$ から $(X,\mathscr{U}_{\{\rho'\}})$ への恒等写像 $\mathrm{id}_X$ が一様連続となるという条件に他ならず，(∗) より $\rho \in P$ となる．よって逆向きの包含も示された． □

**注意 3.8.** 命題 3.7(i) の条件 (∗) は，以下の 2 条件と同値である．

(i) $\rho_1,\rho_2 \in P$ なら，$\rho_1 \vee \rho_2 \in P$.

(ii) $\rho'$ は擬距離であるとする．任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $\rho \in P$ と $\delta>0$ で，$U(\rho;\delta) \subset U(\rho';\varepsilon)$ を満たすものが存在するなら，$\rho' \in P$ である．

このことを確かめよう．$P$ が (∗) を満たすとする．このとき $U(\rho_1 \vee \rho_2;r) = U(\rho_1,r) \cap U(\rho_2,r) \in \mathscr{U}_P$ を満たし，(∗) から $\rho_1 \vee \rho_2 \in P$ がわかる．また，$\rho'$ が (ii) の条件を満たすなら $(X,\mathscr{U}_P)$ から $(X,\mathscr{U}_{\{\rho'\}})$ への恒等写像 $\mathrm{id}_X$ が一様連続となるので，やはり (∗) より $\rho' \in P$ がわかる．

逆に，$P$ が上の条件 (i) と (ii) を満たすと仮定する．$\rho'$ は $(X, \mathscr{U}_P)$ から $(X, \mathscr{U}_{\{\rho'\}})$ への恒等写像 $\mathrm{id}_X$ が一様連続となるような擬距離としよう．このとき，$r > 0$ に対してある有限個の $\rho_1, \dots, \rho_n \in P$ と $r_1, \dots, r_n > 0$ が存在して，

$$U(\rho_1; r_1) \cap \cdots \cap U(\rho_n; r_n) \subset U(\rho'; r)$$

を満たす．ここで $\rho = \rho_1 \vee \cdots \vee \rho_n$ および $\delta = r_1 \wedge \cdots \wedge r_n$ と定義すれば，(i) より $\rho \in P$ であり，

$$U(\rho; \delta) \subset U(\rho_1; r_1) \cap \cdots \cap U(\rho_n; r_n) \subset U(\rho'; r)$$

が成り立つ．したがって (ii) より $\rho' \in P$ がわかる．これで (i) と (ii) から $(*)$ が導かれた．

以上の議論で一様空間においては，一様系を定める擬距離の族が存在することがわかった．次は，より強く一様系が擬距離化可能となるための条件を考えてみよう．

**命題 3.9.** 一様空間 $(X, \mathscr{U})$ が擬距離化可能となるための必要十分条件は，$\mathscr{U}$ が可算基底をもつことである．

証明．$\rho$ が $\mathscr{U}$ を定める距離なら，$\{U(\rho; n^{-1})\,;\, n \geq 1\}$ は $\mathscr{U}$ の可算基底である．

逆に，$\mathscr{U}$ が可算基底をもつと仮定する．$(U_n)$ を $\mathscr{U}$ の可算基底とし，近縁の列 $(V_n)$ を次の手順で再帰的に定義しよう．まずは，$V_0 = X \times X$ とする．$V_n$ が定義されているとしよう．$W_{n+1} \in \mathscr{U}$ で $W_{n+1}^{\circ 4} \subset V_n$ を満たすものをとり，$V'_{n+1} = W_{n+1} \cap U_{n+1}$ と定める．そして，$V_{n+1} = V'_{n+1} \cap {V'_{n+1}}^{-1}$ と定義する．このとき $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は対称な近縁の列で，全ての $n$ に対して $V_{n+1}^{\circ 3} \subset V_n$ を満たしている．さらに，$(V_n)$ は空でない近縁の減少列なので，フィルター基底でもある．さらに $U \in \mathscr{U}$ なら $V_n \subset U_n \subset U$ なる $n$ が選べるから，$(V_n)$ によって生成されるフィルターは $\mathscr{U}$ である．この $(V_n)$ に対して，補題 3.5 で定義される擬距離を $\rho$ で表すことにする．補題 3.5 より全ての $n \geq 1$ に対して $U(\rho; 2^{-n}) \subset V_n$ が成り立つから，$\{U(\rho; r)\,;\, r > 0\}$ は $\mathscr{U}$ の基底であることがわかる． □

**系 3.10.** 一様空間 $(X, \mathscr{U})$ について，次の 2 条件は同値である．

(i) $(X, \mathscr{U})$ は距離付け可能である．
(ii) $\mathscr{U}$ は可算基底をもち，$\bigcap \mathscr{U} = \Delta_X$ が成り立つ．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii)．$(X, \mathscr{U})$ が $\rho$ によって距離付け可能ならば，命題 3.9 により $\mathscr{U}$ は可算基底をもつ．さらに

$$\Delta_X \subset \bigcap \mathscr{U} \subset \bigcap_{r>0} U(\rho; r) = \{(x, y) \in X \mid \rho(x, y) = 0\} = \Delta_X$$

が成り立つから，$\bigcap \mathscr{U} = \Delta_X$ である．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．条件 (ii) が成り立つとき命題 3.9 から $\mathscr{U}$ を定める擬距離 $\rho$ が存在するので，これが公理 (M4) を満たすことを示せばよい．$\rho(x, y) = 0$ が成り立つとする．$\{U(\rho; r)\,;\, r > 0\}$ が $\mathscr{U}$ の基底であることに注意すれば，このとき

$$(x, y) \in \bigcap_{r>0} U(\rho; r) \subset \bigcap \mathscr{U} = \Delta_X$$

がわかる．よって $x = y$ となる． □

## 4　一様被覆

一様空間を導入する方法としては，一様被覆を用いたものも良く知られている．これについて少しだけ説明しよう．まずは，被覆の細分に関する言葉を用意する．

**定義 4.1.** $X$ を集合とし，$\mathscr{U}$ と $\mathscr{V}$ をその被覆とする．

(i) 全ての $V \in \mathscr{V}$ についてある $U \in \mathscr{U}$ で $V \subset U$ を満たすものが存在するとき，$\mathscr{V}$ は $\mathscr{U}$ の細分であるという．

(ii) $A \subset X$ の被覆 $\mathscr{V}$ に対する星 (star) を

$$\mathrm{St}(A, \mathscr{V}) = \bigcup \{V \in \mathscr{V} \mid V \cap A \neq \emptyset\}$$

と定義する．特に $A$ が 1 点集合 $\{x\}$ のときは，$\mathrm{St}(\{x\}, \mathscr{V}) = \mathrm{St}(x, \mathscr{V})$ と表す．

(iii) 全ての $V \in \mathscr{V}$ に対して，ある $U \in \mathscr{U}$ で $\mathrm{St}(V, \mathscr{V}) \subset U$ を満たすようなものが存在するとき，$\mathscr{V}$ は $\mathscr{U}$ の星細分 (star refinement) であるという．

**定義 4.2.** $X$ を空でない集合とし，$\mathfrak{U}$ をその被覆の空でない族とする．

(UC1) $X$ の被覆 $\mathscr{A}$ が細分 $\mathscr{B} \in \mathfrak{U}$ をもつなら，$\mathscr{A} \in \mathfrak{U}$ となる．

(UC2) 全ての $\mathscr{A} \in \mathfrak{U}$ と $\mathscr{B} \in \mathfrak{U}$ に対して，ある $\mathscr{C} \in \mathfrak{U}$ で，$\mathscr{C}$ が $\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ 両方の細分であるようなものが存在する．

(UC3) 全ての $\mathscr{A} \in \mathfrak{U}$ に対して，ある $\mathscr{B} \in \mathfrak{U}$ で $\mathscr{B}$ が $\mathscr{A}$ の星細分であるようなものが存在する．

が成り立つとき，$\mathfrak{U}$ を $X$ の被覆一様系 (covering uniformity) という．また，$\mathfrak{U}$ の元は一様被覆と呼ばれる．

**命題 4.3.** (i) $(X, \mathscr{U})$ を一様空間とし，$V \in \mathscr{U}$ に対して $\mathscr{C}(V) = \{V(x)\,;\, x \in X\}$ と定義する．さらに

$$\mathfrak{U} = \left\{ \mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X) \;\middle|\; \begin{array}{c} \mathscr{A} \text{ は } X \text{ の被覆であって，} V \in \mathscr{U} \text{ で} \\ \mathscr{C}(V) \text{ が } A \text{ の細分となるようなものが存在する} \end{array} \right\}$$

とすれば，$\mathfrak{U}$ は $X$ の被覆一様系である．

(ii) $X$ を空でない集合とし，$\mathfrak{U}$ を $X$ 上の被覆一様系とする．$\mathscr{A} \in \mathfrak{U}$ に対して，$U(\mathscr{A}) = \bigcup \{A \times A\,;\, A \in \mathscr{A}\}$ と定義する．このとき $\mathscr{B} := \{U(\mathscr{A})\,;\, \mathscr{A} \in \mathfrak{U}\}$ によって生成されるフィルターは $X$ 上の対角一様系となる．

命題 4.3 より，一様空間を定義する際には被覆一様系から出発しても良いことがわかる．

証明. (i)．条件 (UC1) は $\mathfrak{U}$ の定義より明らかである．

$\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathfrak{U}$ とし，$U, V \in \mathscr{U}$ を $\mathscr{C}(U)$ と $\mathscr{C}(V)$ がそれぞれ $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ の細分となるように選ぶ．このとき，$U \cap V \in \mathscr{U}$ であり[*5]，$\mathscr{C}(U \cap V)$ は $\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ の細分である．このことは，$\mathscr{C}(U \cap V)$ が $\mathscr{C}(U)$ と $\mathscr{C}(V)$ 両方の細分になっていることからわかる．よって (UC2) も成り立つ．

後は (UC3) を示せばよい．$\mathscr{A} \in \mathfrak{U}$ とし，$V \in \mathscr{U}$ を $\mathscr{C}(V)$ が $\mathscr{A}$ の細分となるように選ぶ．さらに，$W \in \mathfrak{S}(\mathscr{U})$ を $W^{\circ 4} \subset U$ を満たすようにとる．このとき $\mathscr{C}(W)$ が $\mathscr{A}$ の星細分であることを示そう．

[*5] $\mathscr{U}$ はフィルターなので．

$W(x) \in \mathscr{C}(W)$ を一つ固定する．$W(x) \cap W(y) = \emptyset$ なら，$W$ の対称性より $(x,y) \in W \circ W$ となる．さらに $z \in W(y)$ なら $(x,z) \in W^{\circ 3} \subset V$ が成り立つ．したがって，$\mathrm{St}(W(x), \mathscr{C}(W)) \subset W^{\circ 3}(x) \subset V(x)$ となり，$\mathscr{C}(W)$ は $\mathscr{C}(V)$ の星細分となっている．これと $\mathscr{C}(V)$ が $\mathscr{A}$ の細分であることから，$\mathscr{C}(W)$ は $\mathscr{A}$ の星細分であることがわかる．

以上の議論により，$\mathfrak{U}$ が $X$ 上の被覆一様系であることが確かめられた．

(ii)．$\mathscr{A} \in \mathfrak{U}$ は $X$ の被覆であるから，$\Delta_X \subset U(\mathscr{A})$ が従う．すなわち $\mathscr{B}$ は (U1) を満たす．このことから $\mathscr{B}$ の元がどれも空でないこともわかる．$V, W \in \mathscr{B}$ とすれば，$\mathscr{A}, \mathscr{C} \in \mathfrak{U}$ で $V = U(\mathscr{A})$ かつ $W = U(\mathscr{C})$ を満たすようなものが存在する．このとき，条件 (UC2) からある $\mathscr{D} \in \mathfrak{U}$ で $\mathscr{A}$ と $\mathscr{C}$ 両方の細分であるようなものがとれる．$\mathscr{D}$ が細分であることから $U(\mathscr{D}) \subset U(\mathscr{A}) \cap U(\mathscr{C})$ が従うので，$\mathscr{B}$ はフィルター基底であることがわかる．

残りは $\mathscr{B}$ が (U2) と (U3) を満たすことを示せば良い．$U(\mathscr{A}) \in \mathscr{B}$ とすれば，$U(\mathscr{A})$ は対称だから $U(\mathscr{A})^{-1} \in \mathscr{B}$ となる．また，$U(\mathscr{A}) \in \mathscr{B}$ のとき，$\mathscr{A}$ の星細分 $\mathscr{C} \in \mathfrak{U}$ を一つ選ぶ．$(x,y) \in U(\mathscr{C}) \circ U(\mathscr{C})$ なら，ある $z$ と $B, C \in \mathscr{C}$ が存在して $(x,z) \in B \times B$ かつ $(z,y) \in C \times C$ を満たす．いま $\mathscr{A}$ は $\mathscr{C}$ の星細分だから，$x, y \in \mathrm{St}(B, \mathscr{C}) \subset A$ を満たす $A \in \mathscr{A}$ がとれる．よって $(x,y) \in A \times A \subset U(\mathscr{A})$ となり，$U(\mathscr{C}) \circ U(\mathscr{C}) \subset U(\mathscr{A})$ がわかった．

以上の議論により $\mathscr{B}$ は (U1)–(U3) を満たすフィルター基底であることが示された． □

## 5　一様位相と分離性

本節では，一様位相における分離性について調べる．一様位相は必ず $(T_{3\frac{1}{2}})$ 公理を満たすが，一般に Hausdorff になるとは限らない．

**命題 5.1.** 一様位相は公理 $(T_{3\frac{1}{2}})$ を満たす．

証明. $(X, \mathscr{U})$ を一様空間とし，$x \in X$ および $x \notin F$ なる閉集合 $F$ をとる．$X \setminus F$ は $x$ の開近傍なので，ある対称な $V \in \mathscr{U}$ で $x \in V(x) \subset X \setminus F$ を満たすものが存在する．命題 3.6 より，このとき擬距離 $\rho$ で $U(\rho; 1) \subset V$ を満たすものがとれる．ここで，$X$ 上の関数 $f$ を $f(y) = 1 \wedge \rho(x,y)$ によって定義すれば，これは $[0,1]$ に値をとる連続関数である．定義より $f(x) = \rho(x,x) = 0$ はすぐにわかる．また $y \in F$ なら $y \notin V(x)$ なので，$(x,y) \in X \times X \setminus V \subset U(\rho; 1)$ であり，ゆえに $\rho(x,y) \geq 1$ である．したがって $F$ 上で $f(y) = 1$ が成り立つ．これより，$X$ の一様位相は公理 $(T_{3\frac{1}{2}})$ を満たしている． □

**命題 5.2.** 位相空間 $(X, \mathscr{O})$ は公理 $(T_{3\frac{1}{2}})$ を満たすとする．このとき，$X$ 上は一様化可能である．

証明. 有限集合 $\mathscr{F} \subset C(X, \mathbb{R})$ に対して，

$$\rho_{\mathscr{F}}(x,y) = \max\{|f(x) - f(y)|\,;\, f \in \mathscr{F}\}$$

と定義すれば，$\rho_{\mathscr{F}}$ は $X$ 上の擬距離となる．各 $\rho_{\mathscr{F}}$ は連続関数の四則演算と絶対値，有限個の最大値をとる操作で得られるから，積空間 $(X, \mathscr{O}) \times (X, \mathscr{O})$ 上の連続関数であることに注意する．

$$P = \{\rho_{\mathscr{F}}\,;\, \mathscr{F} \subset C(X, \mathbb{R}) \text{ は有限集合 }\}$$

とすれば，$\mathscr{U}_P$ は $X$ 上の一様系となる．このとき $\mathscr{U}_P$ から定まる一様位相が $\mathscr{O}$ と一致することを示そう．

$\mathcal{O}$ が $\mathcal{U}_P$ から定まる一様位相より細かいことを示す．$\mathcal{U}_P$ の定義より，$\{U(\rho_{\mathscr{F}};r)(x)\,;\, r,\ \mathscr{F}\}$ の元の有限個の共通部分全体からなる族は $x \in X$ の基本近傍系を成す．$\rho_{\mathscr{F}}$ の $\mathcal{O}$ に関する連続性より関数 $y \mapsto \rho(x,y)$ も連続であり，よって各 $U(\rho_{\mathscr{F}};r)(x)$ は $x$ の開近傍である．したがって $\mathcal{O}$ における $x$ の近傍系は $\mathcal{U}_P$ に関する $x$ の近傍系より細かく，$\mathcal{O}$ は $\mathcal{U}_P$ から定まる一様位相より細かい．

次に，$\mathcal{U}_P$ から定まる一様位相が $\mathcal{O}$ より細かいことを示そう．$U \in \mathcal{O}$ かつ $x \in X$ とする．$X$ は公理 $(T_{3\frac{1}{2}})$ を満たすから，連続関数 $f\colon X \to [0,1] \subset \mathbb{R}$ で $f(x) = 0$ かつ $f(X \setminus U) \subset \{1\}$ を満たすものがとれる．このとき $U(\rho_{\{f\}};1)(x)$ は $\mathcal{U}_P$ に関する $x$ の近傍であり，$f$ の選び方より $U(\rho_{\{f\}};1)(x) \subset U$ が成り立つ．したがって $x$ は $\mathcal{U}_P$ についても $U$ の内点であり，$x$ は任意に選んでいたから $U$ は $\mathcal{U}_P$ に関して開集合である．したがって $\mathcal{O}$ の開集合は $\mathcal{U}_P$ についても開集合であり，$\mathcal{U}_P$ から定まる一様位相は $\mathcal{O}$ より細かい． □

**注意 5.3.** 命題 5.2 の証明において，$C(X,\mathbb{R})$ は有界連続関数全体の空間 $BC(X,\mathbb{R})$ で置き換えても良いことが知られている．（Engelking [3, 8.1.19. Example]）

命題 5.1 と 5.2 から，位相がとある一様系から定まるための必要十分条件は，それが公理 $(T_{3\frac{1}{2}})$ を満たすことだとわかる．

**命題 5.4.** $(X,\mathcal{U})$ を一様空間とする．このとき，$\mathcal{U}$ から誘導される一様位相について次の条件は同値である．

(i) $X$ は Hausdorff 空間である．
(ii) $\bigcap\mathcal{U} = \Delta_X$ が成り立つ．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii)．$X$ が Hausdorff ならば，$\Delta_X$ は積空間 $X \times X$ の閉集合である．よって命題 1.5 より

$$\Delta_X = \mathrm{Cl}_{X\times X}\,\Delta_X = \bigcap_{V\in\mathfrak{S}(\mathcal{U})} V \circ \Delta_X \circ V = \bigcap_{V\in\mathfrak{S}(\mathcal{U})} V \circ V$$

が成り立つ．さらに一様系の定義より

$$\Delta_X \subset \bigcap\mathcal{U} \subset \bigcap_{V\in\mathfrak{S}(\mathcal{U})} V \circ V$$

となるから，$\Delta_X = \bigcap\mathcal{U}$ がわかる．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．$\mathcal{U}$ に属する閉集合全体を $\mathscr{F}_{\mathcal{U}}$ で表わせば，系 1.6 より $\mathscr{F}_{\mathcal{U}}$ は $\mathcal{U}$ の基底なのであった．よって $\bigcap\mathcal{U} = \bigcap\mathscr{F}_{\mathcal{U}}$ が成り立つ．閉集合の共通部分は閉集合であるから，$\Delta_X = \bigcap\mathscr{F}_{\mathcal{U}}$ は $X \times X$ の閉集合である．したがって $X$ は Hausdorff 空間となる[*6]． □

系 3.10 と命題 5.4 から，一様位相が距離付け可能であるための必要十分条件は，それが Hausdorff かつ一様系が可算基底を持つことであるとわかる．

命題 5.1 と命題 5.4 から，直ちに次の主張が従う．

**命題 5.5.** 一様空間 $(X,\mathcal{U})$ が $\bigcap\mathcal{U} = \Delta_X$ を満たすなら，$X$ は Tychonoff 空間である．

## 6　一様空間の構成

本節では，与えられた集合族や写像の族から一様系を構成する方法について調べる．

[*6] 位相空間論セミナー III 命題 1.3.

**命題 6.1.** $\mathscr{S}$ は $X \times X$ の部分集合の空でない族で，(U1)，(U3) および次の (U2)' を満たすものとする．

(U2)' $U \in \mathscr{S}$ なら，ある $V \in \mathscr{S}$ で $U^{-1} \subset V$ を満たすものが存在する．

このとき，$X$ 上の一様系で $\mathscr{S}$ を含むものが存在する．

証明. 集合族 $\mathscr{B}$ を，$\mathscr{S}$ の元の有限個の共通部分全体からなる集合とする．このとき，$\mathscr{B}$ が一様系を生成するフィルター基底であることを示せばよい．$\mathscr{B}$ が空集合でないことは明らかであり，(U1) より $\mathscr{B}$ の元がどれも空でないことがわかる．定義より $\mathscr{B}$ は有限交叉性をもつから，$\mathscr{B}$ はフィルター基底である．$\mathscr{B}$ の構成法より，$\mathscr{B}$ 自身が (U1)，(U2)' および (U3) を満たすから，それによって生成されるフィルターは (U1)，(U2)，(U3) を満たす．よって $\mathscr{B}$ は一様系の基底である． □

命題 6.1 において構成された一様系は，$\mathscr{S}$ を含むフィルターのうち最小のものである．このように構成された一様系を $\mathscr{U}(\mathscr{S})$ と書き[*7]，$\mathscr{U} = \mathscr{U}(\mathscr{S})$ のとき $\mathscr{S}$ は $\mathscr{U}$ の準基 (subbase) であるという．

$X$ を集合とし，$\mathscr{X}$ を $X$ 上の一様系の族とする．このとき命題 6.1 より，$\mathscr{U}\left(\bigcup \mathscr{X}\right)$ が存在するから，これを一様系の族 $\mathscr{X}$ の上限といい $\bigvee \mathscr{X}$ で表す．

一様空間の非空な族 $(Y_i, \mathscr{V}_i)_{i \in I}$ と写像の族 $f_i \colon X \to Y_i$ が与えられたとき，各 $(f_i \times f_i)^* \mathscr{V}_i$ は一様系の基底であり，よって $\mathscr{U}\left(\bigcup_{i \in I} (f_i \times f_i)^* \mathscr{V}_i\right)$ が存在する．これを $(f_i \colon X \to Y_i)_{i \in I}$ によって生成される一様系といい，$\mathscr{U}(f_i; i \in I)$ で表すことにする．このとき $\bigvee_{i \in I} \mathscr{U}(f_i) = \mathscr{U}(f_i; i \in I)$ が成り立つことに注意されたい．$\mathscr{U}(f_i; i \in I)$ は全ての $f_i$ が一様連続となるような $X$ 上の一様系のうちで，もっとも粗いものである．$(X_i, \mathscr{U}_i)_{i \in I}$ が一様空間族で $X = \prod_{i \in I} X_i$，$\mathrm{pr}_i \colon X \to X_i$ が第 $i$ 射影のときは，一様空間 $(X, \mathscr{U}(\mathrm{pr}_i; i \in I))$ を特に $(X_i, \mathscr{U}_i)_{i \in I}$ の直積という．$(Y, \mathscr{V})$ が一様空間で $i \colon X \to Y$ が包含写像のときは，$(X, \mathscr{U}(i))$ を $Y$ の一様部分空間という．

**補題 6.2.** $(Y_i, \mathscr{V}_i)$ を一様空間の空でない族とし，$(f_i \colon X \to Y_i)_{i \in I}$ を写像の族とする．各 $\mathscr{S}_i$ が $\mathscr{V}_i$ の準基なら，$\bigcup_{i \in I} (f_i \times f_i)^* \mathscr{S}_i$ は $\mathscr{U}(f_i; i \in I)$ の準基である．

証明. まずは $\bigcup_{i \in I} (f_i \times f_i)^* \mathscr{S}_i$ が (U1), (U2)', (U3) を満たすことを示そう．$(f_i \times f_i)^*(U) \in \bigcup_{i \in I} (f_i \times f_i)^* \mathscr{S}_i$ であるとする．このとき $\Delta_{Y_i} \subset U$ であることから $\Delta_X \subset (f_i \times f_i)^*(\Delta_Y) \subset (f_i \times f_i)^*(S)$ がわかる．また，このとき $V \in \mathscr{S}_i$ で $U^{-1} \subset V$ を満たすものが存在する．$[(f_i \times f_i)^*(U)]^{-1} = (f_i \times f_i)^*(U^{-1})$ に注意すれば，$[(f_i \times f_i)^*(U)]^{-1} \subset (f_i \times f_i)^*(V)$ がわかる．さらに，$W \in \mathscr{S}_i$ で $W \circ W \subset U$ なるものをとれば，$(f_i \times f_i)^*(W) \circ (f_i \times f_i)^*(W) = (f_i \times f_i)^*(W \circ W) \subset (f_i \times f_i)^*(U)$ も成り立つ．いま $i$ と $V$ は任意に選んでいるから，これより $\bigcup_{i \in I} (f_i \times f_i)^* \mathscr{S}_i$ が (U1)，(U2)'，(U3) を満たすことがわかる．

後は，$\bigcup_{i \in I} (f_i \times f_i)^* \mathscr{V}_i \subset \mathscr{U}\left(\bigcup_{i \in I} (f_i \times f_i)^* \mathscr{S}_i\right)$ を示せば十分である．$V \in \mathscr{V}_i$ とすれば，有限個の $S_1, \ldots, S_n \in \mathscr{S}_i$ で $S_1 \cap \cdots \cap S_n \subset V$ を満たすものが存在する．このとき

$$(f_i \times f_i)^*(S_1) \cap \cdots \cap (f_i \times f_i)^*(S_n) = (f_i \times f_i)^*(S_1 \cap \cdots \cap S_n) \subset (f_i \times f_i)^* V$$

であり，$\mathscr{U}\left(\bigcup_{i \in I} (f_i \times f_i)^* \mathscr{S}_i\right)$ がフィルターであることから $(f_i \times f_i)^* V \in \mathscr{U}\left(\bigcup_{i \in I} (f_i \times f_i)^* \mathscr{S}_i\right)$ がわかる．$i$ と $V$ は任意に選んでいるから，求める包含関係 $\bigcup_{i \in I} (f_i \times f_i)^* \mathscr{V}_i \subset \mathscr{U}\left(\bigcup_{i \in I} (f_i \times f_i)^* \mathscr{S}_i\right)$ が示された． □

**命題 6.3.** $(X, \mathscr{U})$ と $(Y, \mathscr{V})$ を一様空間とし，$\mathscr{S}$ を $\mathscr{V}$ の準基とする．このとき，写像 $f \colon X \to Y$ について次の条件は同値である．

[*7] これはこのノートにおける記法であり，あまり一般的なものではないかも知れない．

(i) $f$ は一様連続である．

(ii) 全ての $B \in \mathscr{S}$ について，$(f \times f)^{-1}(B) \in \mathscr{U}$ が成り立つ．

証明．$f$ が一様連続であるとは，$f^*\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$ が成り立つということだが，$\mathscr{U}(f^*\mathscr{V})$ の最小性よりこれは $\mathscr{U}(f^*\mathscr{V}) \subset \mathscr{U}$ と同値である．補題 6.2 より $\mathscr{U}(f^*\mathscr{V}) = \mathscr{U}(f^*\mathscr{S})$ となるので，この条件は $f^*\mathscr{S} \subset \mathscr{U}$ とも同値である．最後の条件は (ii) の言い換えに他ならない． □

**命題 6.4.** $(Y_i, \mathscr{V}_i)_{i\in I}$ を一様空間の空でない族とし，$(f_i \colon X \to Y_i)_{i\in I}$ を写像の族とする．さらに，$(Z, \mathscr{W})$ をまた一様空間とする．このとき，次の条件は同値である．

(i) $h \colon Z \to X$ は $\mathscr{U}(f_i; i \in I)$ と $\mathscr{W}$ に関して一様連続である．

(ii) 全ての $i \in I$ について，$f_i \circ h \colon Z \to Y_i$ は一様連続である．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii)．一様連続写像の合成は一様連続であることからわかる．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．$U \in \bigcup_{i\in I}(f_i \times f_i)^*\mathscr{V}_i$ なら，条件 (ii) より $h^{-1}(U) \in \mathscr{W}$ が成り立つ．いま $\bigcup_{i\in I}(f_i \times f_i)^*\mathscr{V}_i$ は $\mathscr{U}(f_i; i \in I)$ の準基だから，命題 6.3 より $h$ は一様連続となる． □

一様空間 $(X, \mathscr{U})$ において，$X$ 上の一様位相における開集合系を $\mathscr{O}_{\mathscr{U}}$ と表すことにする．この記法の下で，以下の主張が成り立つ．

**命題 6.5.** $(Y_i, \mathscr{V}_i)_{i\in I}$ を一様空間の空でない族とする．このとき，$\mathscr{O}_{\mathscr{U}(f_i;i\in I)} = \mathscr{O}\left(\bigcup_{i\in I} f_i^*\mathscr{O}_{\mathscr{V}_i}\right)$ が成り立つ．

命題 6.5 の内容を標語的に言えば，$(f_i)$ によって生成される一様構造から定まる一様位相は，一様位相空間への写像 $(f_i \colon X \to Y_i)$ から生成される位相と一致する，ということになる．

証明．$i \in I$ を任意に固定すれば，$(X, \mathscr{U}(f_i; i \in I))$ から $(Y_i, \mathscr{V}_i)$ への一様連続写像は連続なので，$f^*\mathscr{O}_{\mathscr{U}_i} \subset \mathscr{O}_{\mathscr{U}(f_i;i\in I)}$ が成り立つ．よって $\bigcup_{i\in I} f_i^*\mathscr{O}_{\mathscr{V}_i} \subset \mathscr{O}_{\mathscr{U}(f_i;i\in I)}$ であり，これより $\mathscr{O}\left(\bigcup_{i\in I} f_i^*\mathscr{O}_{\mathscr{U}_i}\right) \subset \mathscr{O}_{\mathscr{U}(f_i;i\in I)}$ がわかる．

逆向きの包含関係を示そう．$G \in \mathscr{O}_{\mathscr{U}(f_i;i\in I)}$ とする．$x \in G$ とすれば，一様位相の定義より有限個の $f_{i_1}, \ldots, f_{i_n}$ と $V_{i_k} \in \mathscr{V}_{i_k}$ $(1 \leq k \leq n)$ で

$$x \in \bigcap_{1\leq k\leq n} f_{i_k}^* V_{i_k}(f(x)) = \bigcap_{1\leq k\leq n} (f_{i_k} \times f_{i_k})^* V_{i_k}(x) \subset G$$

を満たすものが存在する[*8]．$V_{i_k}(f_{i_k}(x))$ が $Y_{i_k}$ の一様位相について $f_{i_k}(x)$ の近傍であることから，$\bigcap_{1\leq k\leq n} f_{i_k}^* V_{i_k}(f(x))$ は位相 $\mathscr{O}\left(\bigcup_{i\in I} f_i^*\mathscr{O}_{\mathscr{V}_i}\right)$ について $x$ の近傍となっていることがわかる．したがって，$G$ は $\mathscr{O}\left(\bigcup_{i\in I} f_i^*\mathscr{O}_{\mathscr{V}_i}\right)$ の開集合でもあり，逆向きの包含関係が示された． □

一様空間上 $(X, \mathscr{U})$ の擬距離 $\rho$ は，$U(\rho; r)$ が近縁となるときに一様であるというのであった．擬距離は $X \times X$ 上の関数であるから，直積一様空間 $X \times X$ 上の関数としての一様連続性も定義される．この二つの「一様性」は大変紛らわしいが，実は同値な概念である．

**命題 6.6.** $(X, \mathscr{U})$ を一様空間とし，$\rho$ を $X$ 上の擬距離とする．このとき，次の条件は同値である．

(i) $\rho$ は $\mathscr{U}$ について一様である．

[*8] 真ん中の等号については，命題 2.3 の証明を見よ．

(ii) $\rho$ は積空間 $X \times X$ 上の関数として，一様連続である．ただし，$\mathbb{R}_{\geq 0}$ は通常の距離によって一様空間と考える．

証明. $\mathbb{R}_{\geq 0}$ の距離を $d(x, y) = |x - y|$ で表すことにする．

(i) $\Longrightarrow$ (ii). $\rho$ は一様であるとする．三角不等式より $(x, y), (x', y') \in X \times X$ に対して

$$d(\rho(x, y), \rho(x', y')) = |\rho(x, y) - \rho(x', y')| \leq \rho(x, x') + \rho(x, y')$$

が成り立つ．したがって任意の $r > 0$ に対して

$$(\mathrm{pr}_1 \times \mathrm{pr}_1)^{-1}\left(U\left(\rho; \frac{r}{2}\right)\right) \cap (\mathrm{pr}_2 \times \mathrm{pr}_2)^{-1}\left(U\left(\rho; \frac{r}{2}\right)\right) \subset (\rho \times \rho)^{-1}(U(d; r))$$

が成り立つ．積空間の定義より左辺の集合は $X \times X$ における近縁であり，よって右辺の集合も $(\rho \times \rho)^{-1}(U(d; r))$ も $X \times X$ における近縁となる．したがって $\rho$ は一様連続である．

(ii) $\Longrightarrow$ (i). $\rho$ は一様連続であるとする．$r > 0$ とすれば，一様連続性よりある $U, V \in \mathscr{U}$ で

$$(\mathrm{pr}_1 \times \mathrm{pr}_1)^{-1}(U) \cap (\mathrm{pr}_2 \times \mathrm{pr}_2)^{-1}(V) \subset (\rho \times \rho)^{-1}(U(d; r))$$

を満たすものが存在する．$(x, y) \in U$ を任意に選べば，近縁系の性質より

$$((x, y), (y, y)) \in (\mathrm{pr}_1 \times \mathrm{pr}_1)^{-1}(U) \cap (\mathrm{pr}_2 \times \mathrm{pr}_2)^{-1}(V)$$

が成り立つ．このとき $((x, y), (y, y)) \in (\rho \times \rho)^{-1}(U(d; r))$ であり，ゆえに $\rho(x, y) = d(\rho(x, y), \rho(y, y)) < r$ となる．したがって $(x, y) \in U(\rho; r)$ であり，$U \subset U(\rho; r)$ がわかった．いま $r > 0$ は任意に選んでいたから，$\rho$ は一様であることが示された． $\square$

**命題 6.7.** $(Y_i, \mathscr{V}_i)_{i \in I}$ を一様空間の空でない族とし，$(f_i \colon X \to Y_i)_{i \in I}$ を写像の族とする．$X$ を $\mathscr{U}(f_i; i \in I)$ によって一様空間と考え，$\prod_{i \in I} Y_i$ を一様空間の直積と考える．このとき，写像の積 $f = (f_i) \colon X \to \prod_{i \in I} Y_i$ が単射ならば $f$ は一様同型な埋め込みである．

証明. $f$ が一様連続であることは $\mathscr{U}(f_i; i \in I)$ の定義より明らかである．写像 $h \colon f(X) \to X$ を $f \colon X \to f(X)$ の逆写像として定義する．命題 6.4 より，このとき全ての $i \in I$ について $f_i \circ h$ が一様連続となることを示せばよい．$V \in \mathscr{V}_i$ なら，$(f_i \circ h)^{-1}(V) = h^{-1} f^{-1} \mathrm{pr}_i^{-1}(V) = f f^{-1} \mathrm{pr}_i^{-1}(V) = f(X) \cap \mathrm{pr}_i^{-1}(V)$ である．積空間の定義より $\mathrm{pr}_i^{-1}(V)$ は $\prod_i Y_i$ の近縁であり，さらに部分空間の定義より $f(X) \cap \mathrm{pr}_i^{-1}(V)$ は $f(X)$ の近縁となる．よって $h$ は一様連続である． $\square$

**系 6.8.** 任意の一様空間は擬距離空間の直積空間に一様同型に埋め込むことができる．

証明. $(X, \mathscr{U})$ を一様空間とし，$\mathscr{U}$ を生成するような擬距離の族 $P$ をとる[*9]．各 $\rho \in P$ について $(X, \rho)$ を擬距離 $\rho$ から定まる一様系により一様空間と考え，それを $X_\rho$ で表すことにする．このとき $\mathscr{U}$ は恒等写像の族 $\mathrm{id}_\rho \colon X \to X_\rho$ から定まる一様系 $\mathscr{U}(\mathrm{id}_\rho; \rho \in P)$ と一致する．いま対角写像 $X \ni x \mapsto (x)_{\rho \in P} \in X^P$ は単射だから，命題 6.7 によりこれは一様同型な埋め込みである． $\square$

**系 6.9.** $(X_i, \mathscr{U}_i)_{i \in I}$ と $(Y_i, \mathscr{V}_i)_{i \in I}$ を一様空間の空でない族とし，$(f_i \colon X_i \to Y_i)$ を一様同型写像とする．このとき，積写像 $\prod_i f_i \colon \prod_i X_i \to \prod_i Y_i$ は一様同型である．

[*9] 定理 3.7.

**命題 6.10.** $(X,\mathscr{U})$ と $(Y,\mathscr{V})$ を一様空間とし，$(A,\mathscr{U}_A)$，$(B,(V)_B)$ をその部分空間とする．$f\colon X\to Y$ が一様連続で $f(X)\subset B$ を満たすならば，$f$ が定める写像 $f|_A\colon A\to B$ は一様連続である．

証明. $i_A\colon A\to X$ を包含写像とする．$V\in\mathscr{V}$ を任意に選ぶ．このとき，$f$ の一様連続性と部分一様空間の定義より，

$$(f_A\times f_A)^{-1}[(B\times B)\cap V]=(i_A\times i_A)^{-1}(f\times f)^{-1}[(B\times B)\cap V]\in\mathscr{U}_A$$

が成り立つ．$(B\times B)\cap V$ の形の近縁全体は $\mathscr{V}_B$ 基底を成すから，$f_A\colon A\to B$ は一様連続である． □

**系 6.11.** 一様同型な埋め込みの合成は，一様同型である．

証明. $f\colon X\to Y$ と $g\colon Y\to Z$ を一様同型な埋め込みとし，$f'\colon f(X)\to X$ と $g'\colon g(Z)\to Y$ をそれぞれ一様連続な逆写像とする．命題 6.10 より $g'|_{g(f(X))}\colon g(f(X))\to f(X)$ は一様連続であり，したがって $f'\circ g'|_{g(f(X))}$ は一様連続な $g\circ f\colon X\to g(f(X))$ の逆写像である． □

# 7 Cauchy フィルター

一様空間 $(X,\mathscr{U})$ には一様位相が定まるから，$X$ における収束について論じることができる．

**定義 7.1.** $(X,\mathscr{U})$ を一様空間とする．

(i) $\mathscr{F}$ を $X$ の部分集合のフィルターとする．全ての $U\in\mathscr{U}$ に対してある $F\in\mathscr{F}$ で $F\times F\subset U$ を満たすものが存在するとき，$\mathscr{F}$ を Cauchy フィルター (Cauchy filter) という．また，フィルター基底 $\mathscr{B}$ によって生成されるフィルターが Cauchy フィルターであるとき，$\mathscr{B}$ は Cauchy フィルター基底 (Cauchy filter base) であるという．

(ii) $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $X$ の有向族とする．全ての $U\in\mathscr{U}$ について，ある $\lambda_0\in\Lambda$ で，$\mu,\nu\geq\lambda_0$ なら $(x_\mu,x_\nu)\in U$ となるようなものが存在するとき，$(x_\lambda)$ を Cauchy 有向族 (Cauchy net) という．

フィルター基底 $\mathscr{B}$ が $\mathscr{U}$ に関する Cauchy フィルター基底であることは，全ての $U\in\mathscr{U}$ に対してある $B\in\mathscr{B}$ で $B\times B\subset U$ を満たすものが存在することと同値である．$\mathscr{F}$ が Cauchy フィルターであるとは，対角写像 $\Delta\colon x\mapsto(x,x)$ によるフィルター基底 $\Delta_*\mathscr{F}$ によって生成されるフィルターが，$\mathscr{U}$ より細かいということである．Cauchy 有向族 $x\colon\Lambda\to X$ において $\Lambda=\mathbb{N}$ の場合には，$x$ を特に Cauchy 列と呼ぶ．

定義 7.1 ではフィルターと有向族の Cauchy 性を別々に定義したが，もちろんそれらは統一的な概念である．それを確かめるために，有向族をフィルターの言葉に置き換える方法を思い出そう．有向集合 $\Lambda$ において，$\Lambda_{\geq\alpha}=\{\lambda\in\Lambda\mid\lambda\geq\alpha\}$ と定義する．$\mathscr{B}(\Lambda)=\{\Lambda_{\geq\alpha}\,;\,\alpha\in\Lambda\}$ とすれば，$\mathscr{B}(\Lambda)$ は $\Lambda$ 上のフィルター基底となる．このとき，有向族 $x\colon\Lambda\to X$ が収束するとは，$x_*\mathscr{B}(\Lambda)$ が $X$ における収束フィルター基底となることと同値なのであった．

**命題 7.2.** 一様空間 $(X,\mathscr{U})$ における有向族 $x\colon\Lambda\to X$ について次の条件は同値である．

(i) $x$ は Cauchy 有向族である．

(ii) $x_*\mathscr{B}(\Lambda)$ によって生成されるフィルターは Cauchy フィルターである．

証明. (i) $\Longrightarrow$ (ii)．$x\colon\Lambda\to X$ は Cauchy 有向族であるとする．$U\in\mathscr{U}$ を任意に選べば，ある $\alpha\in\Lambda$ で $\beta,\gamma\geq\alpha$ ならば $(x(\beta),x(\gamma))\in U$ となるものが存在する．このとき $x(\Lambda_\alpha)\times x(\Lambda_\alpha)\subset U$ であり，$x_*\mathscr{B}(\Lambda)$ に

よって生成されるフィルターは Cauchy フィルターであることがわかる．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．$x_*\mathscr{B}(\Lambda)$ は Cauchy フィルター基底であるとする．$U \in \mathscr{U}$ を任意に選べば，ある $\alpha \in \Lambda$ で $x_*(\Lambda_{\geq\alpha}) \times x_*(\Lambda_{\geq\alpha}) \subset U$ を満たすものがとれる．これは $\beta, \gamma \geq \alpha$ なら $(x(\beta), x(\gamma)) \in U$ が成り立つということに他ならない． □

**命題 7.3.** Cauchy フィルターより細かいフィルターは Cauchy フィルターである．また，Cauchy 有向族の部分有向族は，Cauchy 有向族である．

証明．前半の主張は明らかである．$x \circ \varphi\colon M \to X$ を $x\colon \Lambda \to X$ の部分有向族とする．このとき，$\varphi$ の満たす条件は次のようなものであった：全ての $\lambda \in \Lambda$ に対して，ある $\mu \in M$ で $\varphi(M_{\geq\mu}) \subset \Lambda_{\geq\lambda}$ を満たすものが存在する．したがってフィルター基底 $(x \circ \varphi)_*\mathscr{B}(M)$ によって生成されるフィルターは $x_*\mathscr{B}(\Lambda)$ によって生成されるフィルターより細かく，前半の主張より $(x \circ \varphi)_*\mathscr{B}(M)$ は Cauchy フィルター基底となる． □

**命題 7.4.** $(X, \mathscr{U})$ を一様空間とする．

(i) $\mathscr{B}$ を Cauchy フィルター基底とする．このとき，$\mathscr{B}$ が $a$ に収束することと，$a$ が $\mathscr{B}$ の群集点 (cluster point) であることは同値である．

(ii) $x\colon \Lambda \to X$ を Cauchy 有向族とする．このとき，$x$ が $a$ に収束することと，$a$ が $x$ の群集点であることは同値である．

証明．(i)．極限点が群集点であることはすでに示しているので，群集点は極限点であることを示せばよい．$a$ が $\mathscr{B}$ の群集点であるとする．このとき，$a$ の任意の近傍はある $\mathscr{B}$ の元を含むことを示せばよい．$U \in \mathscr{U}$ とし，$V \subset U$ なる閉集合 $V \in \mathscr{U}$ をとる[*10]．このとき，$B \in \mathscr{B}$ で $B \times B \subset V$ を満たすものが存在する．いま $V$ は積位相空間 $X \times X$ の閉集合だから，$\overline{B} \times \overline{B} = \overline{B \times B} \subset V$ が成り立つ．$a$ は $\mathscr{B}$ の群集点なので $a \in \overline{B}$ であり，したがって $[\overline{B} \times \overline{B}](a) = \overline{B}$ となる．これより $B \subset \overline{B} \subset V(a) \subset U(a)$ となり，$U(a)$ は $\mathscr{B}$ の元を含むことがわかった．$\{U(a)\,;\, U \in \mathscr{U}\}$ は $a$ の近傍系なので，$\mathscr{B}$ は $a$ に収束する．

(ii)．$a$ が $x\colon \Lambda \to X$ の群集点なら，任意の $U \in \mathscr{U}$ について $x(\Lambda_{\geq\lambda}) \cap U(a)$ は空ではない．したがって $a \in \overline{x(\Lambda_{\geq\lambda})}$ であり，$a$ は Cauchy フィルター基底 $x_*\mathscr{B}(\Lambda)$ の群集点である．(i) により $a$ はフィルター基底 $x_*\mathscr{B}(\Lambda)$ に収束するので，$x$ は $a$ に収束する． □

**系 7.5.** Cauchy フィルター $\mathscr{F}$ より細かいフィルターで $x$ に収束するものが存在すれば，$\mathscr{F}$ も $x$ に収束する．

証明．Cauchy フィルター $\mathscr{F}$ より細かいフィルターで $x$ に収束するものが存在すれば，$x$ は $\mathscr{F}$ の群集点である[*11]．したがって命題 7.4 により $\mathscr{F}$ は $x$ に収束する． □

**命題 7.6.** $(X, \mathscr{U})$ を一様空間とし，$X$ をその一様位相により位相空間と考える．

(i) $X$ における収束フィルターは Cauchy フィルターである．

(ii) $X$ における収束有向族は，Cauchy 有向族である．

証明．(i) のみ示す．$\mathscr{F}$ を $X$ における収束フィルターとする．すなわち，$\mathscr{F}$ はある $x \in X$ の近傍系 $\mathscr{V}(x)$ を含む．$U \in \mathscr{U}$ とすれば $U(x)$ と $U^{-1}(x)$ はともに $x$ の近傍なので，$[U \cap U^{-1}](x) = U(x) \cap U^{-1}(x) \in \mathscr{F}$ が

[*10] $\mathscr{U}$ は $X \times X$ の閉集合からなる基底をもつのであった．（系 1.6.）

[*11] 位相空間論セミナー IV 命題 1.6.

成り立つ．このとき $[U\cap U^{-1}](x)\times[U\cap U^{-1}](x)\subset U\cap U^{-1}\subset U$ であるから，$\mathscr{F}$ は Cauchy フィルターであることがわかる． □

写像の一様連続性は，Cauchy フィルターの言葉を使って特徴づけることができる．

**命題 7.7.** $(X,\mathscr{U})$ と $(Y,\mathscr{V})$ を一様空間とし，$f\colon X\to Y$ を一様連続写像とする．このとき，次が成り立つ．

(i) $X$ 上の全ての Cauchy フィルター $\mathscr{F}$ について，$f_*\mathscr{F}$ は $Y$ 上の Cauchy フィルター基底となる．
(ii) $X$ 上の全ての Cauchy フィルター基底 $\mathscr{B}$ について，$f_*\mathscr{B}$ は $Y$ 上の Cauchy フィルター基底となる．
(iii) $X$ 上の全ての Cauchy 有向族 $x\colon\Lambda\to X$ について，$f\circ x\colon\Lambda\to Y$ は $Y$ 上の Cauchy 有向族となる．

証明．(ii)．$\mathscr{B}$ を $X$ 上の任意の Cauchy フィルター基底とする．$V\in\mathscr{V}$ とすれば，$f$ は一様連続であるから，$(f\times f)^{-1}(V)\in\mathscr{U}$ が成り立つ．よってある $B\in\mathscr{B}$ で，$B\times B\subset(f\times f)^{-1}(V)$ を満たすものがとれる．このとき $f(B)\in f_*(B)$ かつ

$$f(B)\times f(B)=(f\times f)(B\times B)\subset(f\times f)[(f\times f)^{-1}(V)]\subset V$$

が成立．よって $f_*\mathscr{B}$ は $Y$ 上の Cauchy フィルター基底である．
(i) と (iii) は (ii) よりわかる． □

**命題 7.8.** $(Y_i,\mathscr{V}_i)_{i\in I}$ を一様空間の空でない族とし，$(f_i\colon X\to Y_i)_{i\in I}$ を写像の族とする．このとき，$X$ 上のフィルター基底 $\mathscr{B}$ について次の条件は同値である．

(i) $\mathscr{B}$ は $\mathscr{U}(f_i;i\in I)$ について Cauchy フィルター基底である．
(ii) 全ての $i\in I$ について，$(f_i)_*\mathscr{B}$ は $(Y_i,\mathscr{V}_i)$ の Cauchy フィルター基底である．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii)．$f_i$ は $\mathscr{U}(f_i;i\in I)$ について一様連続なので，命題 7.7 より $(f_i)_*\mathscr{B}$ は $(Y_i,\mathscr{V}_i)$ の Cauchy フィルター基底となる．
(ii) $\Longrightarrow$ (i)．$U\in\mathscr{U}(f_i;i\in I)$ とする．一様系 $\mathscr{U}(f_i;i\in I)$ の定義より，このとき有限個の $f_{i_k}$ と $V_{i_k}\in\mathscr{V}_{i_k}$ $(1\leq k\leq n)$ で，$\bigcap_{1\leq k\leq n}(f_{i_k}\times f_{i_k})^*V_{i_k}\subset U$ を満たすものが存在する．仮定より各 $(f_{i_k})_*\mathscr{B}$ は Cauchy フィルター基底なので，$B_k\in\mathscr{B}$ で，$(f_{i_k})_*B_k\times(f_{i_k})_*B_k\subset V_{i_k}$ を満たすものがとれる．ここで $B\in\mathscr{B}$ を $B\subset\bigcap_{1\leq k\leq n}B_k$ を満たすように選ぶ．このとき

$$\begin{aligned}B\times B&\subset\bigcap_{1\leq k\leq n}(B_k\times B_k)\\&\subset\bigcap_{1\leq k\leq n}(f_{i_k}\times f_{i_k})^*(f_{i_k}\times f_{i_k})_*(B_k\times B_k)\\&=\bigcap_{1\leq k\leq n}(f_{i_k}\times f_{i_k})^*[(f_{i_k})_*B_k\times(f_{i_k})_*B_k]\\&\subset\bigcap_{1\leq k\leq n}(f_{i_k}\times f_{i_k})^*V_{i_k}\\&\subset U\end{aligned}$$

が成り立つ．よって $\mathscr{B}$ は Cauchy フィルター基底である． □

**系 7.9.** $(X,\mathscr{U})$ を一様空間とし，$A$ をその部分集合とする．$\mathscr{B}$ を $X$ 上の Cauchy フィルター基底で，全ての $B\in\mathscr{B}$ について $A\cap B\neq\emptyset$ が成り立つようなもとする．このとき $A$ 上のフィルター基底 $f^*\mathscr{B}$ は，Cauchy

フィルター基底である．

証明．フィルター基底 $f_* f^* \mathscr{B}$ は $\mathscr{B}$ より細かいから，$X$ 上の Cauchy フィルター基底である．したがって，命題 7.8 より $f^* \mathscr{B}$ は Cauchy フィルター基底となる． □

# 8 完備性

命題 7.6 より収束フィルターは Cauchy フィルターとなるが，逆は成り立つとは限らない．任意の Cauchy フィルターが収束するような一様空間は完備であるといい，本節でその性質を調べる．

**定義 8.1.** $(X, \mathscr{U})$ を一様空間とする．$X$ の全ての Cauchy フィルターが，一様位相に関してある点に収束するとき，$(X, \mathscr{U})$ は完備 (complete) であるという．

**命題 8.2.** $(X, \mathscr{U})$ を一様空間とする．このとき，次の条件は同値である．

(i) $X$ は完備である．

(ii) $\mathscr{B}$ が（一様位相に関する）閉集合からなる Cauchy フィルター基底なら，$\bigcap \mathscr{B}$ は空でない．

(iii) $X$ の全ての Cauchy 有向族は収束する．

命題 8.2 の条件 (ii) は，いわゆる区間縮小法の抽象化である．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii)．$X$ は完備であるとする．このとき閉集合からならなら Cauchy フィルター基底 $\mathscr{B}$ は収束するから，ある点 $x$ に収束する．特に $x$ は群集点 (cluster point) でもあるから，全ての $B \in \mathscr{B}$ に対して $x \in \overline{B}$ を満たす．いま $\mathscr{B}$ の元はどれも閉集合であるから $\overline{B} = B$ であり，$x \in \bigcap \mathscr{B}$ となる．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．$\mathscr{B}$ を $X$ の Cauchy フィルター基底とし，

$$\mathscr{B}' = \{\overline{B};\, B \in \mathscr{B}\}$$

と定義する．$\mathscr{U}$ は $X \times X$ の閉集合からなる基本近傍系をもつから，$\mathscr{B}'$ はまた $(X, \mathscr{U})$ の Cauchy フィルター基底である．いま条件 (ii) より $\bigcap \mathscr{B}' \neq \emptyset$ であることに注意する．$x \in \bigcap \mathscr{B}'$ とすれば，全ての $B \in \mathscr{B}$ について $x \in \overline{B}$ であり，$x$ は $\mathscr{B}$ の群集点である．したがって，命題 7.4 により $x$ は $\mathscr{B}$ の極限点である．

(i) と (iii) の同値性は，命題 7.2 よりすぐにわかる． □

**命題 8.3.** $(X, \mathscr{U})$ を一様空間とし，$(A, \mathscr{U}_A)$ をその空でない部分空間とする．

(i) $(X, \mathscr{U})$ は完備であるとする．$A$ が $X$ の一様位相に関して閉集合なら，$(A, \mathscr{U}_A)$ は完備である．

(ii) $X$ の一様位相は Hausdorff であるとする．$(A, \mathscr{U}_A)$ が完備ならば，$A$ は $X$ の一様位相について閉である．

証明．(i)．$A$ は $X$ の一様位相について閉であると仮定する．$\mathscr{B}$ が $(A, \mathscr{U}_A)$ の Cauchy フィルター基底なら，$i_* \mathscr{B} = \mathscr{B}$ は $X$ の Cauchy フィルター基底でもある．したがって $\mathscr{B}$ は $X$ で収束する．$A$ は閉集合なので $\lim \mathscr{B} \subset A$ であり，$\mathscr{B}$ は $A$ で収束する．

(ii)．部分一様空間 $(A, \mathscr{U}_A)$ は完備であると仮定する．$A$ の部分集合からなるフィルター基底 $\mathscr{B}$ を任意にとると，これは $A$ において収束する．$X$ は Hausdorff なので $\lim \mathscr{B}$ は 1 点集合であり，したがって $\lim \mathscr{B} \subset A$ となる． □

命題 8.3 よりただちに次の系を得る．

**系 8.4.** $(X, \mathscr{U})$ を完備な Hausdorff 一様空間とする．このとき，$X$ の部分空間が閉であることと完備であることは同値である．

**命題 8.5.** $(X_i, \mathscr{U}_i)_{i \in I}$ を一様空間の空でない族とする．このとき，次の条件は同値である．

(i) 積一様空間 $\prod_{i \in I} X_i$ は完備である．
(ii) 全ての $X_i$ は完備である．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii)．$\mathscr{F}_{i_0}$ を $X_{i_0}$ の Cauchy フィルターとする．$j \neq i_0$ に対しては，任意の Cauchy フィルター $\mathscr{F}_j$ を選ぶ．各射影 $\mathrm{pr}_j$ は全射だから $\mathrm{pr}_j^* \mathscr{F}_j$ は $\prod X_i$ 上のフィルター基底であり，$\bigcup_j \mathrm{pr}_j^* \mathscr{F}_j$ はフィルターの準基をなす．これによって生成されるフィルターを $\mathscr{F}$ で表すことにする[12]．このとき全ての $j \in I$ について $(\mathrm{pr}_j)_* \mathscr{F} = \mathscr{F}_j$ だから，命題 7.8 より $\mathscr{F}$ は Cauchy フィルターである．いま積空間 $\prod_j X_j$ が完備なので $\mathscr{F}$ は収束し，よってその連続写像による像 $(\mathrm{pr}_{i_0})_* \mathscr{F} = \mathscr{F}_{i_0}$ も収束する．よって $X_{i_0}$ は完備である．$i_0$ は任意に選んでいるから，条件 (ii) が従う．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．$\mathscr{F}$ が $\prod_i X_i$ の Cauchy フィルターなら，命題 7.8 より各 $(\mathrm{pr}_i)_* \mathscr{F}$ は $X_i$ の Cauchy フィルター基底である．$X_i$ はどれも完備なので，フィルター基底 $(\mathrm{pr}_i)_* \mathscr{F}$ は収束する．したがって $\mathscr{F}$ も収束フィルターである[13]． □

完備性に関連する話題として，一様連続関数の拡張可能性について論じよう．

**命題 8.6.** $X$ を位相空間，$A$ をその稠密部分空間とし，$i_A \colon A \to X$ を包含写像とする．また，$f \colon A \to Y$ を完備な Hausdorff 一様空間への写像とする．このとき，次の条件は同値である．

(i) $f$ は $X$ 上に連続写像に一意的に拡張できる．
(ii) 全ての $x \in X$ について，フィルター基底 $f_*(i_A^* \mathscr{V}_x)$ は $Y$ の Cauchy フィルターである．

証明．Hausdorff 一様空間は正則空間であることに注意すれば，完備性の定義と位相空間論セミナー III 命題 1.20 よりわかる． □

**命題 8.7.** $(X, \mathscr{U})$ を一様空間，$(A, \mathscr{U}_A)$ 部分空間とし，$(Y, \mathscr{V})$ を完備な Hausdorff 一様空間とする．$A$ は一様位相について $X$ で稠密であるとし，$f \colon A \to Y$ を一様連続関数とする．このとき，$f$ は $X$ 上の一様連続関数に一意的に拡張できる．

証明．$A$ は $X$ で稠密だから，系 7.9 より各 $x \in X$ について $i_A^*(\mathscr{V}(x))$ は $A$ 上の Cauchy フィルターとなる．したがって命題 7.7 より $f_*(i_A^* \mathscr{V}_x)$ は $Y$ の Cauchy フィルター基底であり，命題 8.6 より $f$ は $X$ 上への一意的な拡張拡張をもつことがわかる．その拡張を $\overline{f} \colon X \to Y$ としたとき，$\overline{f}$ が一様連続であることを示そう．$V \in \mathscr{V}$ は対称かつ $Y \times Y$ の閉集合であるとする．$f$ は一様連続だから $(f \times f)^{-1}(V) \in \mathscr{U}_A$ であり，部分空間の定義より開集合 $U \in \mathscr{U}$ で $(A \times A) \cap U = (i_A \times i_A)^{-1}(U) \subset (f \times f)^{-1}(V)$ を満たすようなものがとれる．いま $U$ は開集合で $A \times A$ は $X \times X$ で稠密[14]なので，$\mathrm{Cl}_{X \times X}(i_A \times i_A)^{-1}(U) = \mathrm{Cl}_{X \times X} U$ が成り立つ[15]．

---

[12] これをフィルター族 $(\mathscr{F}_j)$ の積と呼び，$\prod_j \mathscr{F}_j$ で表したりする．
[13] 位相空間論セミナー II 定理 3.7.
[14] 位相空間論セミナー II 系 3.9.
[15] 位相空間論セミナー IV 補題 5.8.

したがって $\overline{f}\times\overline{f}$ の連続性と $(\overline{f}\times\overline{f})\circ(i_A\times i_A)$ から $\mathrm{Cl}_{X\times X}U\subset(\overline{f}\times\overline{f})^{-1}(V)$ がわかる[*16]．$U\in\mathscr{U}$ だから $\mathrm{Cl}_{X\times X}U\in\mathscr{U}$ でもあり，これより任意の $V\in\mathscr{V}$ に対してある $W\in\mathscr{U}$ で $W\subset(\overline{f}\times\overline{f})^{-1}(V)$ を満たすものが存在することが示された．すなわち $\overline{f}\times\overline{f}$ は一様連続である． □

## 9 完備化

一様空間は一般に完備ではないが，それが完備な一様空間に一様同値に埋め込めると便利である．それが一様空間の完備化と呼ばれる操作である．

**定義 9.1.** $(X,\mathscr{U})$ 一様空間とし，$(Y,\mathscr{V})$ を完備な一様空間とする．$f\colon X\to Y$ は一様同値な埋め込みでさらに $f(X)$ が $Y$ の一様位相について稠密であるとき，$(Y,f)$ を一様空間 $X$ の完備化 (completion) と呼ぶ．

本節では任意の一様空間が完備化可能であるという定理を証明する．議論が簡単に済むように，擬距離空間の完備化に帰着させる方法をとることにする．

**補題 9.2.** 擬距離空間 $(X,\rho)$ を，$\rho$ から定まる一様系により一様空間と考える．このとき，次の条件は同値である．

(i) 一様空間 $X$ は完備である．

(ii) $X$ の全ての Cauchy 列は収束する．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii) は明らかなので，逆を示せばよい．$\mathscr{F}$ を $X$ の Cauchy フィルターとする．$(F_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathscr{F}^{\mathbb{N}}$ を全ての $n\in\mathbb{N}$ で $F_n\times F_n\subset U(\rho;n^{-n-1})$ かつ $F_n\supset F_{n+1}$ を満たすように選び，さらに $x=(x_n)\in\prod_{n\in\mathbb{N}}F_n$ とする．このとき $x$ は $X$ の Cauchy 列であり，条件 (ii) より極限点 $x_\infty$ をもつ．このとき $x_\infty\in\bigcap_n\overline{F}_n$ が成り立つことに注意しておく．$F\in\mathscr{F}$ とすれば $F\cap\overline{F_n}\neq\emptyset$ なので，$F\cap\overline{U(\rho;n^{-n-1})}(x_\infty)\neq\emptyset$ である．$\{\overline{U(\rho;n^{-n-1})}(x_\infty)\,;\,n\in\mathbb{N}\}$ は $x_\infty$ の基本近傍系であるから，これより $x_\infty\in\overline{F}$ がわかる．したがって $x_\infty$ は Cauchy フィルター $\mathscr{F}$ の群集点であり，命題 7.4 より $\mathscr{F}$ は $x_\infty$ に収束する． □

**定理 9.3.** 任意の擬距離空間は，（一様空間として）完備な擬距離空間に等長かつ稠密に埋め込むことができる．

ただし，擬距離空間 $(X,\rho)$ から $(X',\rho')$ への写像 $f\colon X\to X'$ が等長であるとは，$\rho'\circ(f\times f)=\rho$ が成り立つということである．等長な単射は一様同値な埋め込みである．

証明．$(X,\rho)$ を擬距離空間とし，$\widehat{X}\subset X^{\mathbb{N}}$ を $X$ の Cauchy 列全体の集合とする．$(x_n),(y_n)\in\widehat{X}$ に対して，

$$\widehat{\rho}((x_n),(y_n))=\lim_{n\in\mathbb{N}}\rho(x_n,y_n)$$

と定義する．右辺の極限が存在することは，$\mathbb{R}$ の完備性と

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_m,y_m)|\leq\rho(x_n,x_m)+\rho(y_n,y_m)$$

という評価からわかる．（この評価は三角不等式から従う．）このとき $(\widehat{X},\widehat{\rho})$ は擬距離空間であり，埋め込み写像 $i\colon X\to\widehat{X}$ を $x\mapsto(x)_{n\in\mathbb{N}}$（定数列）として定義する．$i$ は明らかに等長な単射なので，残りは $\widehat{X}$ が完備であることと $i(X)$ が $\widehat{X}$ で稠密であることを示せばよい．

[*16] $V$ は閉近傍なので，$(\overline{f}\times\overline{f})^{-1}(V)$ は閉集合である．

$x = (x_n) \in \widehat{X}$ に対して $x^{(k)} = i(x_k)$ と定義したとき，$(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ は $\widehat{\rho}$ に関して $x$ に収束することを証明しよう．$\varepsilon > 0$ に対して，$n_0$ を $n, m \geq n_0$ なら $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ となるように選ぶ．$k \geq n_0$ なら，

$$\widehat{\rho}(x, x^{(k)}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_k) \leq \sup_{n\geq n_0} \rho(x_n, x_k) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

が成り立つ．よって $(x^{(k)})$ は $x$ に収束し，$i(X)$ は $\widehat{X}$ で稠密であることがわかった．

最後に完備性を示そう．$x^{(k)}$ を $\widehat{X}$ の Cauchy 列とし，$x^{(\infty)} = (x_n^{(\infty)})_{n\in\mathbb{N}}$ を $\widehat{\rho}(x^{(k)}, i(x_k^{(\infty)})) < 1/(k+1)$ となるように選ぶ．このとき $x^{(\infty)} \in \widehat{X}$ であることと，$\lim_k x^{(k)} = x^{(\infty)}$ であることを示す．$\varepsilon > 0$ に対して，$N_0$ を $k, l \geq N_0$ なら $\widehat{\rho}(x^{(k)}, x^{(l)}) < \varepsilon/3$ となるように選ぶ．さらに，$N_1$ を $N_1 + 1 > 3/\varepsilon$ を満たすようにとる．このとき $k, l \geq N_0 \vee N_1$ なら

$$\begin{aligned}
\rho(x_k^{(\infty)}, x_l^{(\infty)}) &= \widehat{\rho}(i(x_k^{(\infty)}), i(x_l^{(\infty)})) \\
&\leq \widehat{\rho}(i(x_k^{(\infty)}), x^{(k)}) + \widehat{\rho}(x^{(k)}, x^{(l)}) + \widehat{\rho}(x^{(l)}, i(x_l^{(\infty)})) \\
&< \frac{1}{k+1} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{l+1} \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって $x^{(\infty)}$ は $(X, \rho)$ の Cauchy 列であり，$x^{(\infty)} \in \widehat{X}$ となる．また，$\varepsilon > 0$ に対して $N_1$ を先ほどと同様にとり，$N_2$ を $k, l \geq N_2$ なら $\widehat{\rho}(x^{(\infty)}, i(x_k^{\infty})) < \frac{\varepsilon}{2}$ となるように選ぶ．このような $N_2$ の存在は既に示したのであった．いま $k \geq N_1 \vee N_2$ とすれば，

$$\widehat{\rho}(x^{(\infty)}, x^{(k)}) \leq \widehat{\rho}(x^{(\infty)}, i(x_k^{\infty})) + \rho(i(x_k^{\infty}), x^{(k)}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{k+1} = \frac{5\varepsilon}{6} < \varepsilon$$

が成り立つ．ゆえに $(x^{(k)})$ は擬距離 $\widehat{\rho}$ に関して $x^{(\infty)}$ に収束する． □

**定理 9.4.** 任意の一様空間には完備化が存在する．

証明．$(X, \mathscr{U})$ を一様空間とし，擬距離空間の族 $(X_i, \rho_i)$ の直積 $\prod_{i\in I} X_i$ への一様同型な埋め込み $i\colon X \to \prod_{i\in I} X_i$ を用意する．さらに，$j_i\colon X_i \to \widehat{X_i}$ をその等長な完備化とする．このとき $j_i$ の積 $\prod_i j_i\colon \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} \widehat{X_i}$ は一様同型な埋め込みであり，その合成 $(\prod_i j_i) \circ i$ も一様同型な埋め込みである．一様空間 $\widehat{X_i}$ の完備性は命題 8.5 よりわかる．ここで，$\widehat{X} = \overline{(\prod_i j_i) \circ i(X)}$ と定義する．このとき，$\widehat{X}$ は完備な一様空間の閉部分空間なので，完備な一様空間である．したがって，$(\prod_i j_i) \circ i\colon X \to \widehat{X}$ は $X$ の完備化である． □

**定理 9.5.** Hausdorff 一様空間は，Hausdorff な完備化をもつ．さらに，完備化は一様同値の意味で一意的である．

Hausdorff 完備化の存在については，別の回で改めて紹介することにする．以下では一意性の証明のみ行う．

定理 *9.5* における一意性の証明．$(X, \mathscr{U})$ を Hausdorff 一様空間とし，$(Y_1, i_1)$ と $((Y_2, i_2)$ をそれぞれその Hausdorff 完備化とする．写像 $\varphi_1\colon i_1(Y_1) \to Y_2$ を，$\varphi_1(i_1(x)) = i_2(x)$ となるように定義する．同様にして，$\varphi_2\colon i_2(Y_2) \to Y_1$ も定義する．このとき，命題 8.7 より $\varphi_1$ と $\varphi_2$ はそれぞれ $Y_1$ と $Y_2$ 上に，一意的な一様連続拡張を持つ．その拡張をそれぞれ $\overline{\varphi_1}$，$\overline{\varphi_2}$ と表すことにする．このとき，

$$\overline{\varphi_2} \circ \overline{\varphi_1}(i_1(x)) = \varphi_2(\varphi_1(i_1(x))) = \varphi_2(i_2(x)) = i_1(x)$$

が成り立つから，$\overline{\varphi_2} \circ \overline{\varphi_1}$ は $i_1(X)$ 上で $\mathrm{id}_{Y_1}$ と一致する．Hausdorff 空間への連続写像は稠密部分集合上で一致すれば全体でも一致するので，これより $\overline{\varphi_2} \circ \overline{\varphi_1} = \mathrm{id}_{Y_1}$ がわかる．同様にして $\overline{\varphi_1} \circ \overline{\varphi_2} = \mathrm{id}_{Y_2}$ も示されるので，$\overline{\varphi_1}$ は一様同型写像であり，$Y_1$ と $Y_2$ は一様同値である． □

# 10　一様位相とコンパクト性

本節では，一様位相におけるコンパクト性について考える．一様空間におけるコンパクト性を特徴づけるために，全有界性の概念を導入しよう．

**定義 10.1.** $(X, \mathscr{U})$ を一様空間とする．全ての $U \in \mathscr{U}$ に対して，ある有限集合 $X_0 \subset X$ で $(U(x))_{x \in X_0}$ が $X$ の被覆となるようなものが存在するとき，$(X, \mathscr{U})$ は全有界 (totally bounded) であるという．

**命題 10.2.** $(X, \mathscr{U})$ と $(Y, \mathscr{V})$ を一様空間とする．$f\colon X \to Y$ が一様連続な全射なら，$Y$ も全有界である．

証明. $V \in \mathscr{V}$ とすれば，$f$ の一様連続性より $(f \times f)^{-1}(V) \in \mathscr{U}$ が成り立つ．$X$ は全有界だから，有限集合 $X_0 \subset X$ で $\{(f \times f)^{-1}(V)(x)\,;\, x \in X_0\}$ が $X$ の被覆となるようなものが存在する．このとき $\{V(f(x))\,;\, x \in X_0\}$ は $Y$ の被覆となっている． □

全有界性はコンパクト性と関係の深い性質である．コンパクト性は一般に部分空間には遺伝しないが，全有界性については部分空間に遺伝する．

**命題 10.3.** $(X, \mathscr{U})$ を一様空間とする．

(i) $X$ が全有界なら，その全ての部分空間 $(A, \mathscr{U}_A)$ は全有界である．
(ii) $(A, \mathscr{U}_A)$ を $X$ の全有界な部分空間とする．このとき，一様位相に関する閉包 $(\overline{A}, \mathscr{U}_{\overline{A}})$ も全有界な一様部分空間である．

証明. (i) $U \in \mathscr{U}_A$ とすれば，部分空間の定義よりある $V \in \mathscr{U}$ で $(A \times A) \cap V \subset U$ を満たすものが存在する．$W \in \mathfrak{S}(\mathscr{U})$ を $W \circ W \subset V$ となるように選ぶ．有限集合 $X_0 \subset X$ を $\{W(x)\,;\, x \in X_0\}$ が $X$ の被覆となるように選び，$A_0' = X_0 \cap W(A)$ と定義する．そして，$\prod_{a \in A_0'} (W(a) \cap A)$ の点を一つ選んで並べた集合を $A_0$ とおく．このとき $\{U(x)\,;\, a \in A_0\}$ が $A$ の被覆であることを示そう．$x \in A$ とすれば，$X_0$ の定義よりある $x_0 \in X_0$ で $x \in W(x_0)$ を満たすものが存在する．$W$ の対称性より $(x, x_0) \in W$ であり，$x \in A$ とあわせて $x_0 \in W(A)$ がわかる．したがって $x_0 \in A_0' = X_0 \cap W(A)$ である．ここで $a_0 \in A_0 \cap (W(x_0) \cap A)$ とすれば $a_0 \in A$ であり，$(a_0, x_0) \in W$ かつ $(x_0, x) \in W$ から $(a_0, x) \in W \circ W \subset V$ がわかる．さらに $(a_0, x) \in A \times A$ でもあるから，$(a_0, x) \in U$ となる．以上の議論から，任意の $x \in A$ に対してある $a_0 \in A$ で $(a_0, x) \in U$ を満たすものが存在することがわかった．いま $U$ は部分空間 $A$ の近縁を任意に選んでいたから，$A$ は全有界であることが示された．

(ii) 部分空間 $(A, \mathscr{U}_A)$ は全有界であると仮定し，$U \in \mathscr{U}_{\overline{A}}$ を任意に選ぶ．さらに，$V, W \in \mathscr{U}$ を $W \circ W$ かつ $W$ は対称，$(\overline{A} \times \overline{A}) \cap V \subset U$ となるようにとる．このとき $(A \times A) \cap W$ は $A$ の近縁で $A$ は全有界だから，ある有限集合 $A_0 \subset A$ で $\{[(A \times A) \cap W](x)\,;\, x \in A_0\}$ が $A$ の被覆となるようなものがとれる．このとき，$\{U(a)\,;\, a \in A_0\}$ は $\overline{A}$ の被覆となっている．実際，$x \in \overline{A}$ なら $W(x) \cap A$ は空ではない．$a \in W(x) \cap A$ とすれば，ある $a_0 \in A_0$ で $(a_0, a) \in (A \times A) \cap W$ を満たすものがとれる．$(a_0, a), (a, x) \in W$ より $(a_0, x) \in V$ であり，加えて $(a_0, x) \in \overline{A} \times \overline{A}$ であることから $(a_0, x) \in U$ がわかる． □

コンパクト空間の直積がコンパクトであったのと同じように，全有界空間の直積は全有界となる．

**命題 10.4.** $(X_i, \mathscr{U}_i)_{i\in I}$ を一様空間の空でない族とする．このとき，次の条件は同値である．

(i) 直積一様空間 $\prod_{i\in I} X_i$ は全有界である．

(ii) 全ての $X_i$ は全有界である．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii)．$\mathrm{pr}_i\colon \prod_{j\in I} X_j \to X_i$ は一様連続な全射なので，命題 10.2 により $X_i = \mathrm{pr}_i\left(\prod_{j\in I} X_j\right)$ は全有界である．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．$X_i$ はどれも全有界であると仮定し，直積空間 $\prod_{i\in I} X_i$ の近縁 $U$ を任意に一つ固定する．このとき，有限集合 $I_0 \subset I$ と $V_i \in \mathscr{V}_i$ $(i \in I_0)$ で，$\bigcap_{i\in I_0}(\mathrm{pr}_i \times \mathrm{pr}_i)^{-1}V_i \subset U$ を満たすものがとれる．$i \in I_0$ に対して，有限集合 $X_i^0 \subset X_i$ を $\{V_i(x)\,;\, x \in X_i^0\}$ が $X_i$ の被覆となるように選ぶ．$\mathrm{pr}_{I_0}$ を標準的な射影として，$\prod_{x\in\prod_{i\in I_0} X_i^0} \mathrm{pr}_{I_0}^{-1}(x)$ の元を一つ選んで並べたものを $X_0$ とおく．いま $\prod_{i\in I_0} X_i^0$ は有限集合なので，$X_0$ も有限集合であることに注意しておく．$\{U(x)\,;\, x \in X_0\}$ が $\prod_i X_i$ の被覆であることを示そう．$y \in \prod_i X_i$ とする．$i \in I_0$ のとき $x_i^0 \in X_i^0$ を $y_i \in V_i(x_i^0)$ を満たすように選び，さらに $x^0 \in \mathrm{pr}_{I_0}^{-1}((x_i^0)_{i\in I_0})$ を任意にとる．このとき $y \in \mathrm{pr}_{I_0}^{-1}\left(\prod_{i\in I_0} V_i(x_i^0)\right)$ すなわち

$$\prod_{i\in I_0}(\mathrm{pr}_i \times \mathrm{pr}_i)(x^0, y) = (x_i^0, y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I_0} V_i = \bigcap_{i\in I_0}(\mathrm{pr}_i \times \mathrm{pr}_i)^{-1}V_i$$

であり，ゆえに $(x^0, y) \in \bigcap_{i\in I_0}(\mathrm{pr}_i \times \mathrm{pr}_i)^{-1}V_i \subset U$ となる．また $\mathrm{pr}_{I_0}(x^0) = (x_i^0)_{i\in I_0} \in \prod_{i\in I_0} X_i^0$ から $x^0 \in X_0$ であることもわかる．したがって，$\{U(x)\,;\, x \in X_0\}$ は実際に $\prod_{i\in I} X_i$ の被覆であることが確かめられた． □

全有界性の，フィルターや有向族を用いた特徴付けを行う．

**命題 10.5.** $(X, \mathscr{U})$ を一様空間とする．このとき，次の条件は同値である．

(i) $X$ は全有界である．

(ii) $X$ の全ての超フィルターは Cauchy フィルターである．

(iii) $X$ の全てのフィルターは，それより細かい Cauchy フィルターを持つ．

(iv) $X$ の全ての有向族は，Cauchy 部分有向族を持つ．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii)．$X$ は全有界であるとし，$\mathscr{F}$ を $X$ の超フィルターとする．$U \in \mathscr{U}$ を任意に選び，$W \in \mathfrak{S}(\mathscr{U})$ を $W \circ W \subset U$ となるようにとる．このとき $X$ の全有界性より有限被覆 $\{W(x_k)\,;\, 1 \leq k \leq n\}$ が存在する．$\bigcup_{1\leq k\leq n} W(x_k) = X \in \mathscr{F}$ だから，超フィルターの性質より少なくとも一つの $i$ について $W(x_i) \in \mathscr{F}$ が成り立つ[*17]．$W$ の選び方より $W(x_k) \times W(x_k) \subset U$ が成り立つから，$\mathscr{F}$ は Cauchy フィルターである．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)．任意のフィルターはそれを含む超フィルターをもち，条件 (ii) よりそれは Cauchy フィルターである．

(iii) $\Longrightarrow$ (iv)．$x\colon \Lambda \to X$ を有向族とする．$x_*\mathscr{B}(\Lambda)$ によって生成されるフィルターを $\mathscr{F}$ で表わせば，仮定 (iii) より $\mathscr{F}$ を含む Cauchy フィルター $\mathscr{G}$ が存在する．この $\mathscr{G}$ を用いて，

$$M = \{(\lambda, G) \in X \times \mathscr{G} \mid x_\lambda \in G\}$$

[*17] 位相空間論セミナー I 命題 5.6.

と定め，$M$ を直積順序の制限により有向集合と考える．($\mathscr{G}$ の順序は逆向きの包含関係とする．) これが実際に有向集合であることは，$\mathscr{G}$ が $\mathscr{F}$ を含むフィルターであることからわかる．$y = \mathrm{pr}_2|_M$ と定めたとき，$y$ は $x$ の部分有向族であることと，$y$ が Cauchy 有向族であることを示そう．$\lambda \in \Lambda$ とする．このとき，$(\lambda, X) \leq_M (\lambda', G)$ なら $\mathrm{pr}_2|_M(\lambda', G) = \lambda' \geq \lambda$ なので，$y$ は実際に $X$ の部分有向族である．$U \in \mathscr{U}$ を任意にとると，$G \in \mathscr{G}$ で $G \times G \subset U$ を満たすものが存在する．$x_{\lambda_0} \in G$ なる $\lambda_0 \in \Lambda$ を一点固定し，$\mu_0 = (\lambda_0, G) \in M$ と定義する．$\mu = (\lambda, H), \mu' = (\lambda', H') \geq \mu_0$ なら $(y_\mu, y_{\mu'}) = (x_\lambda, x_{\lambda'}) \in H \times H' \subset G \times G \subset U$ が成り立つ．したがって，$y$ は Cauchy 有向族であることが確かめられた．

(iv) $\Longrightarrow$ (i)．対偶を示す．$X$ は全有界でないと仮定し，$U \in \mathscr{U}$ はいかなる有限集合 $F \subset X$ をとっても $\bigcup_{x \in F} U(x) \subsetneq X$ となってしまうとする．ここで，点列 $(x_n)$ を次のように再帰的に定義する：$x_0 \in X$ を任意に選ぶ．$x_0, \ldots, x_n$ が与えられたとき，$x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{1 \leq k \leq n} U(x_k)$ となるように $x_{n+1}$ を選ぶ．このように構成された $x$ は全ての $n < m$ に対して $(x_n, x_m) \notin U$ を満たすから，いかなる部分有向族も Cauchy とはならない．$\square$

**定理 10.6.** 一様空間がコンパクトであるための必要十分条件は，それが完備かつ全有界であることである．

証明．一様空間 $(X, \mathscr{U})$ はコンパクトであると仮定する．$X$ の全ての超フィルターは収束するから Cauchy フィルターであり，命題 10.5 により $X$ は全有界である．また，$\mathscr{F}$ を Cauchy フィルターとすればそれを含む超フィルター $\mathscr{G}$ が存在し，コンパクト性より $\mathscr{G}$ は収束する．Cauchy フィルター $\mathscr{F}$ より細かい収束フィルターが存在するから，系 7.5 より $\mathscr{F}$ もフィルターである．したがって一様空間 $X$ は完備である．

逆に，$X$ は完備かつ全有界であると仮定する．$\mathscr{F}$ を $X$ の超フィルターとすれば，命題 10.5 によるそれは Cauchy フィルターでもある．完備性より $\mathscr{F}$ は収束するから，任意の超フィルターは収束することがわかる．したがって $X$ はコンパクトである．$\square$

**系 10.7.** 一様空間 $(X, \mathscr{U})$ の完備化がコンパクトになるための必要十分条件は，$X$ が全有界であることである．

証明．命題 10.3 と定理 10.6 からわかる．$\square$

一様空間における連続関数は一般に一様連続とは限らないが，定義域がコンパクトならば必ず一様連続となる．

**命題 10.8.** $(X, \mathscr{U})$ をコンパクト一様空間とし，$(Y, \mathscr{V})$ を一様空間とする．このとき，全ての連続関数 $f \colon X \to Y$ は一様連続である．

証明．$f \colon X \to Y$ は一様位相について連続であるとする．$V \in \mathscr{V}$ とし，$W \in \mathfrak{S}(\mathscr{U})$ を $W \circ W \subset V$ を満たすように選ぶ．$f$ の連続性より各 $f^{-1}(W(f(x)))$ は $x$ の近傍であり，よって開集合 $U_x \in \mathfrak{S}(\mathscr{U})$ を $[U_x \circ U_x](x) \subset f^{-1}(W(f(x)))$ となるように取ることができる．いま $\{U_x(x)\,;\, x \in X\}$ は $X$ の開被覆であり，コンパクト性より有限部分被覆 $\{U_{x_k}(x_k)\,;\, 1 \leq k \leq n\}$ が存在する．ここで $U = \bigcap_{1 \leq k \leq n} U_{x_k}$ と定義すれば，$U$ はまた $X$ における近縁である．この $U$ が $U \subset (f \times f)^{-1}(V)$ を満たすことを示せばよい．$(x, y) \in U$ とし，$k$ を $x \in U_{x_k}(x_k)$ となるように選ぶ．このとき $(x_k, x) \in U_{x_k} \subset U_{x_k} \circ U_{x_k}$ だから，$(f(x), f(x_k)) \in W$ であることに注意する．いま $(x, y) \in U_{x_k}$ だから，$(x_k, y) \in U_{x_k} \circ U_{x_k}$ であり，$(f(x_k), f(y)) \in W$ が成り立つ．したがって $(f(x), f(y)) \in W \circ W \subset V$ となり，$U \subset (f \times f)^{-1}(V)$ が示された．$\square$

**系 10.9.** $(X, \mathscr{U})$ をコンパクト一様空間とし，$\rho$ をその上の擬距離とする．$\rho \colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が積空間上の

連続関数なら，$\rho$ は一様である．

証明．積空間 $X \times X$ はコンパクトなので，命題 10.8 により $\rho$ は一様連続である．したがって，命題 6.7 から $\rho$ は一様となる． $\square$

Tychonoff 空間は一様化可能だが，その位相をもたらすような一様系は色々あるかも知れない．コンパクト Hausdorff 空間の場合には，位相と両立する一様系は一意的である．

**命題 10.10.** $X$ がコンパクト空間なら，その位相と整合的な一様系はただ一つである．

証明．$X$ をコンパクト空間とし，$\mathscr{U}_1$ と $\mathscr{U}_2$ をその位相と整合的な一様系とする．$X$ を $\mathscr{U}_1$ と $\mathscr{U}_2$ によって一様空間と考えたものを，それぞれ $X_1$，$X_2$ で表すことにする．また，$\mathrm{id}_1 \colon X_1 \to X_2$ と $\mathrm{id}_2 \colon X_2 \to X_1$ を恒等写像とする．$X_1$ と $X_2$ の位相は等しいから $\mathrm{id}_1$ と $\mathrm{id}_2$ はともに連続であり，命題 10.8 より一様連続となる．定義より明らかに $\mathrm{id}_1 \circ \mathrm{id}_2 = \mathrm{id}_2 \circ \mathrm{id}_1 = \mathrm{id}_X$ だから，$\mathrm{id}_1$ は一様同型であり，$X_1$ と $X_2$ は一様同値である．いま $\mathrm{id}_1$ は恒等写像だから，これは $\mathscr{U}_1 = \mathscr{U}_2$ が成り立つということに他ならない． $\square$

**命題 10.11.** コンパクト Hausdorff 空間は一様化可能であり，その位相と整合的な一様系は一意的である．

証明．コンパクト Hausdorff 空間は正規なので特に Tychonoff 空間であり，命題 5.2 により一様化可能である．一意性は命題 10.10 よりわかる． $\square$

## References


[1] Nicolas Bourbaki. *General Topology Part I.* Elements of Mathematics. Hermann, 1966.

[2] R. M. Dudley. *Real Analysis and Probability.* 2nd ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 74. Cambridge University Press, 2002. DOI: http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511755347.

[3] Ryszard Engelking. *General topology.* Revised and completed edition. Sigma Series in Pure Mathematics 6. Translated from the Polish by the author. Heldermann Verlag, Berlin, 1989, pp. viii+529. ISBN: 3-88538-006-4.

[4] Klaas Pieter Hart, Jun-iti Nagata, and Jerry E. Vaughan, eds. *Encyclopedia of General Topology.* Elsevier Science, 2004, pp. x+526. ISBN: 0-444-50355-2. URL: https://www.elsevier.com/books/encyclopedia-of-general-topology/hart/978-0-444-50355-8.

[5] John L. Kelley. *General Topology.* Graduate Texts in Mathematics 27. Originally published by Van Nostrand, 1955. Springer-Verlag New York, 1975, pp. xiv+298. URL: https://www.springer.com/la/book/9780387901251.

[6] 宮島静雄. **関数解析**. 横浜図書, 2014.

# 索引