位相空間論セミナー I：位相空間論の基礎概念 ver. 2.1

平井祐紀

2021 年 2 月 27 日

編集履歴
2018/9/4 何かを編集.（内容は忘れた）
2020/4/14 大幅に修正を加えたので ver. 2.0 と改名.
2020/2/27 文書の体裁を少し変更．誤植を訂正．用語を少し変更．Ver. 2.1

概要

このノートでは，位相空間論におけるもっとも基本的な諸概念— 開集合，閉集合，近傍，連続写像など—を導入し，それらの基本的な性質を調べる．さらに，位相空間における収束の概念を定義し，収束を用いた前述の諸概念の特徴付けを行う．

目次

記号・用語

- $\mathscr{P}X$：集合 X の冪集合．
- 写像 $f\colon X \to Y$ が与えられたとき，
  - $\mathscr{P}(X) \ni A \mapsto f(A) \in \mathscr{P}(Y)$ で定まる写像を $f_*\colon \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y)$ で表す．
  - $\mathscr{P}(Y) \ni B \mapsto f^{-1}(B) \in \mathscr{P}(X)$ で定まる写像を $f^*\colon \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X)$ で表す．
- **Set**：集合と写像の圏．

1　位相空間の定義と開集合

1.1　開集合系

定義 1.1（開集合系の公理）　X を集合とする．X の部分集合族 $\mathscr{O}_X$ が次の条件 (O1)–(O3) を満たすとき，$\mathscr{O}_X$ を X の開集合系 (system of open sets) ないし位相 (topology) 呼び，$\mathscr{O}_X$ の元を X の開集合 (open set) と呼ぶ．

(O1) $\emptyset \in \mathscr{O}_X \wedge X \in \mathscr{O}_X$.
(O2) $\forall \mathscr{U} \subset \mathscr{O}_X,\ \bigcup \mathscr{U} \in \mathscr{O}_X$.
(O3) $\forall U, V \in \mathscr{O}_X,\ U \cap V \in \mathscr{O}_X$.

集合 X とその開集合系 $\mathscr{O}_X$ の組 $(X, \mathscr{O}_X)$ を位相空間 (topological space) という．

定義 1.1 における条件 (O1)–(O3) を，開集合系の公理と呼ぶ．位相空間 $(X, \mathscr{O}_X)$ において，考えている位相が明らかなときや，明示しなくても数学的議論に支障がないときは，単に X を位相空間と呼ぶこともある．

$\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2$ を X の位相とする．$\mathscr{O}_1 \subset \mathscr{O}_2$ なるとき，$\mathscr{O}_1$ は $\mathscr{O}_2$ より粗い (coarser) といい，$\mathscr{O}_2$ は $\mathscr{O}_1$ より細かい (finer) という．位相空間 $(X, \mathscr{O}_1), (X, \mathscr{O}_2)$ において，基礎となる集合 X はどちらの空間も同じである．しかし $\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2$ が異なるなら，位相空間として $(X, \mathscr{O}_1)$ と $(X, \mathscr{O}_2)$ は全く異なるものである．

もっとも基本的な位相空間の例をあげよう．

例 1.2 (i) X を任意の集合とし，$\mathscr{O}_X = \{\emptyset, X\}$ と定義する．このとき $\mathscr{O}_X$ は X の開集合系である．この位相を密着位相 (indiscrete topology, anti-discrete topology) と呼ぶ．また，この位相空間 $(X, \mathscr{O}_X)$ を密着空間 (indiscrete space, anti-discrete space) と呼ぶ．

(ii) X を任意の集合とし，$\mathscr{O}_X = \mathscr{P}(X)$ とする．このとき $(X, \mathscr{O}_X)$ は位相空間となる．この位相を離散位相 (discrete topology) と呼び，離散位相を備えた位相空間を離散空間 (discrete space) と呼ぶ．

(iii) 順序数 $2 = \{0, 1\}$ に対して，$\{0, \{1\}, 2\}$ は 2 の位相を定める．この位相空間を $\mathbb{S}$ で表し，Sierpiński 空間 (Sierpiński space) といい，$\mathbb{S}$ で表す．また $\mathbb{S}$ の位相を Sierpiński 位相 (Sierpiński topology) と呼ぶ．

位相空間 $(X, \mathscr{O})$ における開集合の定義には，集合 X における点の概念を一切登場していなかった．なので，この形のままでは位相がとある点の近くとか，そういった概念を表すものだということがわかりにくい．そこで，開集合系の公理を点が登場する形に書き換えてみよう．

補題 1.3 X を集合とし，$\mathscr{U} \subset \mathscr{P}(X)$ とする．このとき，次の 2 条件は同値である．

(i) 任意の族 $\mathscr{A} \subset \mathscr{U}$ について，$\bigcup \mathscr{A} \in \mathscr{U}$ が成り立つ．

(ii) $U \in \mathscr{P}(X)$ とする．任意の $x \in U$ に対して，ある $V \in \mathscr{U}$ で $x \in V \subset U$ を満たすものが存在するとしよう．このとき $U \in \mathscr{U}$ が成り立つ．

証明 Step 1：(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明． (i) が成り立つとする．$U \in \mathscr{P}(X)$ とし，全ての $x \in U$ に対して，ある $V \in \mathscr{U}$ で $x \in V \subset U$ を満たすものが存在すると仮定しよう．この条件より，

$$\mathscr{U}_U = \{V \in \mathscr{U} \mid V \subset U\}$$

とおけば，$U \subset \bigcup \mathscr{U}_U$ が成り立つ．また $\mathscr{U}_U$ は U の部分集合族だから，$\bigcup \mathscr{U}_U \subset U$ も成り立つ．したがって，$U = \bigcup \mathscr{U}_U$ である．条件 (i) より $\bigcup \mathscr{U}_U \in \mathscr{U}$ となるから，$U \in \mathscr{U}$ がわかる．

Step 2：(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． (ii) が成り立つと仮定する．$\mathscr{A} \subset \mathscr{U}$ を任意に選び，$U = \bigcup \mathscr{A}$ と定める．このとき $U \in \mathscr{U}$ であることを示せばよい．$x \in U$ とすれば，ある $A \in \mathscr{A}$ で $x \in A$ を満たすものが存在する．このとき $A \subset U = \bigcup \mathscr{A}$ が成り立っているから，集合 U は条件 (ii) における仮定を満たしていることがわかる．よって $U \in \mathscr{U}$ がしたがう． □

補題 1.3 より，位相の定義において条件 (O2) は補題 1.3 の条件 (ii) で置き換えてもよいことが分かる．補題 1.3 を用いれば，位相空間の開集合の特徴づけが得られる．

命題 1.4 $(X, \mathscr{O}_X)$ を位相空間とし，$U \in \mathscr{P}(X)$ とする．このとき，U について次の 2 条件は同値である．

(i) U は X の開集合である．

(ii) 任意の $x \in U$ について，ある $V \in \mathscr{O}_X$ で $x \in V \subset U$ を満たすものが存在する．

証明 **(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明．** U を開集合とする．このとき，(ii) の条件における V として U 自身を取ればよい．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． U を条件 (ii) を満たす集合とすれば，補題 1.3 の (i) $\Longrightarrow$ (ii) より，$U \in \mathscr{O}_X$ が導かれる． □

線形空間では，基底と呼ばれる元の族が重要な役割を果たした．位相空間でも，位相の基本となる開集合族を表す概念が存在する．

定義 1.5 $(X, \mathscr{O}_X)$ を位相空間とし，$\mathscr{U} \subset \mathscr{P}(X)$ とする．任意の $U \in \mathscr{O}_X$ に対して，ある $\mathscr{U}_0 \subset \mathscr{U}$ で $U = \bigcup \mathscr{U}_0$ を満たすものが存在するとき，$\mathscr{U}$ は X の開集合の基底 (basis) または開基であるという．

注意 1.6 線形空間において，基底（集合）の濃度[1)]は一意に定まるのであった．その濃度は次元と呼ばれ，（特に有限次元）線形空間の性質を調べる上で重要なものとなる．線形空間の次元は，線形空間の大きさを表す指標であるといってよい．

位相空間においては，一般に開基の濃度は一意には定まらない．しかし，次のような手続きを経ることで，開基を用いて位相空間の“大きさ”を測る指標となる基数を定義することができる．$(X, \mathscr{O})$ を位相空間とし，$\mathrm{Card}\, \mathscr{O} = \kappa$ と定義する．

$$\{\alpha \in \kappa \mid \exists \mathscr{U}, \mathscr{U} \text{ は } X \text{ の開基であり}, \mathrm{Card}\, \mathscr{U} = \alpha \text{ が成り立つ．}\}$$

とすれば，順序数の性質よりこの集合は最小元を持つ．その最小元である基数を位相空間の荷重 (weight) と呼び，$w(X)$ などで表す．[2)]

定義 1.7 位相空間 X の開基で可算個の元からなるものが存在するとき，X は第 2 可算 (second-countable) であるという．すなわち，X が第 2 可算であるとは，$w(X) \leq \omega$ が成り立つということである[3)]．

1.2 集合の内部と開核作用素

集合の内部の概念を定義する．

定義 1.8 X を位相空間とし，A を X の部分集合とする．

(i) $x \in A$ とする．ある開集合 U で $x \in U \subset A$ を満たすものが存在するとき，x は A の内点 (interior point) であるという．

1) 大雑把に言うと元の数
2) Engelking [2, p.12]．児玉・永見では「位相濃度」とか呼んでいる．
3) ω は最小の無限順序数．つまり，自然数全体の集合．

(ii) A の内点全体からなる集合を A° で表し，これを A の内部 (interior) と呼ぶ．A の内部を $\mathrm{Int}\, A$ とも書くことにする．

集合の内部に関する基本的な性質を調べよう．

命題 1.9 $(X,\mathscr{O})$ を位相空間とし，A および B を X の部分集合とする．

(i) A° は X の開集合である．
(ii) A° は A に含まれる開集合のうち，最大のものである．
(iii) A が開集合であることは，$A = A^\circ$ が成り立つことと同値である．
(iv) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ が成り立つ．
(v) $A \subset B$ なら，$A^\circ \subset B^\circ$ が成り立つ．
(vi) $(A\cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ である．

証明 **(i) の証明．**内点の定義と，命題 1.4(ii) $\Longrightarrow$ (i) よりわかる．

(ii) の証明．まずは A° が A に含まれる開集合であることを示そう．A の内点はどれも A の点であるから，$A^\circ \subset A$ である．このことと (i) より，A° は A に含まれる開集合であることが分かる．

次に A° の最大性を証明する．

$$\mathscr{U}_A = \{V \in \mathscr{O}_X \mid V \subset A\}$$

と定義しよう．既に述べたように A° は A に含まれる開集合であるから，$A^\circ \in \mathscr{U}_A$ であり，これより $A^\circ \subset \bigcup \mathscr{U}_A$ がわかる．$x \in \bigcup \mathscr{U}_A$ なら，ある $V \in \mathscr{U}_A$ で $x \in V$ を満たすものが存在する．これは x が A° の内点であるということに他ならないので，$x \in A^\circ$ が導かれる．ゆえに $\bigcup \mathscr{U}_A \subset A^\circ$ となり，$A^\circ = \bigcup \mathscr{U}_A$ がわかった．すなわち，A° は A に含まれる開集合のうち，最大のものである．

(iii) の証明．A が開集合ならば，A に含まれる最大の開集合は A 自身である．ゆえに，(ii) を用いることで $A = A^\circ$ を得る．

逆に $A = A^\circ$ が成り立つと仮定しよう．(i) より A° は開集合なので，このとき A も開集合である．

(iv) の証明．(i) より A° は開集合であるから，(iii) により $A^\circ = (A^\circ)^\circ$ となる．

(v) の証明．$x \in A^\circ$ ならば，内点の定義より，ある $U \in \mathscr{O}$ で $x \in U \subset A$ を満たすものが存在する．このとき $x \in U \subset A \subset B$ だから，x は B の内点でもある．ゆえに $A^\circ \subset B^\circ$ が成立する．

(vi) の証明．まずは $A^\circ \cap B^\circ \subset (A\cap B)^\circ$ を示そう．(i) と開集合の公理より $A^\circ \cap B^\circ$ は $A\cap B$ に含まれる開集合である．このことと (ii) より，$A^\circ \cap B^\circ \subset (A\cap B)^\circ$ が分かる．

次に逆向きの包含関係を示す．$x \in (A\cap B)^\circ$ として，$x \in U \subset A\cap B$ を満たす開集合 U をとる．このとき $x \in U \subset A$ および $x \in U \subset B$ であるから，$x \in A^\circ$ であることと，$x \in B^\circ$ であることがわかる．したがって $x \in A^\circ \cap B^\circ$ となる．$\square$

注意 1.10（開核作用素） $(X,\mathscr{O})$ を位相空間とする．$A \in \mathscr{P}(X)$ に対してその内部 $\mathrm{Int}\, A$ を対応さ

せることで，写像 $\mathrm{Int}\colon \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ が定まる．この写像は開核作用素 (interior operator) と呼ばれている．命題 1.9 より，開核作用素は以下の条件件を満たすことがわかる．

(IO1) $\mathrm{Int}\, X = X$.

(IO2) $\forall A \in \mathscr{P}(X)$, $\mathrm{Int}\, A \subset A$.

(IO3) $\forall A, B \in \mathscr{P}(X)$, $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}\, A \cap \mathrm{Int}\, B$.

(IO4) $\forall A \in \mathscr{P}(X)$, $\mathrm{Int}\,\mathrm{Int}\, A = \mathrm{Int}\, A$.

この条件 (IO1)–(IO4) を，開核作用素の公理という．

先ほどとは逆に，まず集合 X 上に開核作用素の公理 (IO1)–(IO4) を満たす写像 $\mathrm{Int}\colon \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ が定義されているとしよう．このとき

$$\mathscr{O} = \{O \in \mathscr{P}(X) \mid \mathrm{Int}\, O = O\}$$

と定義すれば，$\mathscr{O}$ は X 上の開集合系を成す．さらに，このとき $(X, \mathscr{O})$ における位相空間の意味での開核作用素は，先ほどの作用素 Int と一致する．

以上のことから，開集合系の公理 (O1)-(O3) と，開核作用素の公理 (IO1)–(IO4) は同値な公理系であることがわかる．つまり，位相空間論は開集合系から出発しても，開核作用素から出発しても，全く同じ理論となるのである．このような公理系は他にもいろいろあり，そのいくつかを本ノートのこれより先の部分で見ていくことになる．

まとめ

- 位相空間とは，集合 X と，開集合系の公理 (O1)–(O3) を満たす $\mathscr{O} \subset \mathscr{P}(X)$ の組 $(X, \mathscr{O})$ のことである．
- 位相空間 $(X, \mathscr{O})$ において，$\mathscr{O}$ の元を X の開集合と呼ぶ．
- 任意の $A \subset \mathscr{O}$ に対して，A に含まれる X の開集合のうち最大のものが存在する．その開集合を A° で表し，A の内部と呼ぶ．
- 写像 $A \mapsto A^\circ$ は，開核作用素の公理 (IO1)–(IO4) を満たす．

2 連続写像

2.1 連続写像

定義 2.1 $(X, \mathscr{O}_X), (Y, \mathscr{O}_Y)$ を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を写像とする．

(i) 全ての $U \in \mathscr{O}_Y$ に対して $f^{-1}(U) \in \mathscr{O}_X$ が成り立つとき，写像 f は連続 (continuous) であるという．

(ii) $a \in X$ とする．$f(a) \in V$ を満たす全ての $V \in \mathscr{O}_Y$ に対して，ある $U \in \mathscr{O}_X$ で $U \subset f^{-1}(V)$ を満

たすものが存在するとき，f は a で連続であるという．

位相空間 $(X,\mathscr{O}_X)$ から $(Y,\mathscr{O}_Y)$ への連続写像全体の集合を，$C((X,\mathscr{O}_X),(Y,\mathscr{O}_Y))$ や $C(X,Y)$ で表すことにする．

写像の像と逆像の性質より，定義 2.1(ii) は，次の (ii)' のように言い換えることができる．

(ii)' $a \in X$ とする．$f(a) \in V$ を満たす全ての $V \in \mathscr{O}_Y$ に対して，ある $U \in \mathscr{O}_X$ で $f(U) \subset V$ を満たすものが存在するとき，f は a で連続であるという．

写像の連続性は，集合の包含関係の言葉で書き直すことができる．

命題 2.2 $(X,\mathscr{O}_X),(Y,\mathscr{O}_Y)$ を位相空間，$f\colon X \to Y$ を写像とする．このとき，次の 3 条件は同値である．

(i) $f\colon X \to Y$ は連続である．
(ii) $f^*\mathscr{O}_Y \subset \mathscr{O}_X$.
(iii) $\mathscr{O}_Y \subset (f^*)^{-1}\mathscr{O}_X$.

証明 (ii) と (iii) の同値性は，写像 $f^*\colon \mathscr{P}Y \to \mathscr{P}X$ に関する像と逆像の関係からわかる．

(i) と (ii) の同値性を示そう．写像による集合の像の定義より，

$$\begin{aligned} f^*\mathscr{O}_Y &= \{U \in \mathscr{P}X \mid \exists O \in \mathscr{O}_Y,\ f^*O = U\} \\ &= \{U \in \mathscr{P}X \mid \exists O \in \mathscr{O}_Y,\ f^{-1}(O) = U\} \end{aligned}$$

である．したがって，(ii) の条件 $f^*\mathscr{O}_Y \subset \mathscr{O}_X$ は

$$\forall O \in \mathscr{O}_Y,\ f^{-1}(O) \in \mathscr{O}_X$$

と書き換えることができる．言うまでもなく，この条件は f が連続であることの定義そのものである． □

命題 2.2 を眺めてみると，$f\colon X \to Y$ は X の位相が細かければ細かいほど連続になりやすいことがわかる．実際，f は $\mathscr{O}_X$, $\mathscr{O}_Y$ に関して連続であるとし，X 上で $\mathscr{O}_X$ より細かい別の位相 $\mathscr{O}'_X$ を考えてみる．このとき $f^*\mathscr{O}_Y \subset \mathscr{O}_X \subset \mathscr{O}'_X$ となるから，命題 2.2 より f は $\mathscr{O}'_X$, $\mathscr{O}_Y$ に関しても連続となっていることがわかる．特に X が離散位相空間なら，いかなる写像 f も必ず連続写像となる．言い換えれば，X が離散空間なら $C(X,Y) = \mathrm{Map}(X,Y) = Y^X$ が成り立つということである．

逆に，Y の位相が粗ければ粗いほど，写像 $f\colon X \to Y$ は連続になりやすい．もし Y が密着空間ならば，X から Y への全ての写像は連続になってしまう．すなわち，任意の密着空間 Y と任意の位相空間 X について $C(X,Y) = \mathrm{Map}(X,Y) = Y^X$ が成り立つ．

位相空間 $(X,\mathscr{O}_1)$, $(X,\mathscr{O}_2)$ を，それぞれ X_1, X_2 で表すことにする．このとき，$\mathscr{O}_1$ が $\mathscr{O}_2$ より細かいとは，恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon X_1 \to X_2$ が連続であるということに他ならない．

位相空間 $(X,\mathscr{O}_X)$ において，部分集合 $A\subset X$ の特性関数 $\chi_A\colon X\to\mathbb{S}$ を考える．このとき，A が X の開集合であることと，χ_A が連続写像であることは同値である．というのも，χ_A による位相 $\{0,\{1\},2\}$ の引き戻しは，$\{\emptyset,A,X\}$ になるからである．したがって，開集合 U に対して特性関数 χ_A を対応させる写像 $\mathscr{O}\to C(X,\mathbb{S})$ は全単射となる．

次に，連続写像の合成はまた連続写像になることを確かめよう．

命題 2.3 $(X,\mathscr{O}_X),(Y,\mathscr{O}_Y),(Z,\mathscr{O}_Z)$ を位相空間とする．$f\colon X\to Y$ および $g\colon Y\to Z$ が連続写像ならば，$g\circ f$ も連続写像である．

証明 写像の性質より，$(g\circ f)^*=f^*\circ g^*$ が成り立つことに注意しておく．

f,g は連続であるとの仮定と命題 2.2 より，$f^*\mathscr{O}_Y\subset\mathscr{O}_X$ および $g^*\mathscr{O}_Z\subset\mathscr{O}_Y$ が成り立つ．このことと写像による集合の像の性質より，

$$(g\circ f)^*(\mathscr{O}_Z)=f^*(g^*(\mathscr{O}_Z))\subset f^*(\mathscr{O}_Y)\subset\mathscr{O}_X$$

なる関係が成り立つことがわかる．したがって，命題 2.2 により $g\circ f$ は連続となる． □

開集合系の公理を点が登場する形に書き換えることが出来たように，写像の連続性も点を用いた記述が可能である．このことにより，写像の連続性は局所的な概念であることが明らかになる．

命題 2.4 $(X,\mathscr{O}_X)$ および $(Y,\mathscr{O}_Y)$ を位相空間とする．このとき，写像 $f\colon X\to Y$ について次の 2 条件は同値である．

(i) f は連続である．
(ii) f は全ての $x\in X$ で連続である．

証明 **(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明．** f は連続であると仮定する．$x\in X$ を任意に固定し，$V\in\mathscr{O}_Y$ を $f(x)\in V$ となるように選ぶ．f は連続であるから，このとき $f^{-1}(V)$ は X の開集合となる．いま $x\in f^{-1}(V)$ であるから，定義 2.1.(ii) における U として，$U=f^{-1}(V)$ をとればよいことがわかる．よって f は x で連続である．x は任意に選んだものであったから，これで f は全ての点で連続であることが示された．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． f は全ての $x\in X$ で連続であるとする．このとき，任意に選んだ $V\in\mathscr{O}_Y$ について，$f^{-1}(V)$ が X の開集合となることを示せばよい．$x\in f^{-1}(V)$ を任意に選べば，f の x での連続性より $x\in U\subset f^{-1}(V)$ を満たす開集合 $U\in\mathscr{O}_X$ が存在する．このことと命題 1.4 より，$f^{-1}(V)$ が開集合であることがわかる． □

2.2 同相写像

二つの位相空間が位相空間として同じ構造をもつことを意味する，同相と呼ばれる概念を導入しよう．

定義 2.5 X と Y を位相空間とする．

(i) $f\colon X\to Y$ を連続写像とする．連続写像 $g\colon Y\to X$ で $g\circ f=\mathrm{id}_X$ かつ $f\circ g=\mathrm{id}_Y$ を満たすものが存在するとき，f は同相写像 (homeomorphism) であるという．

(ii) X から Y への同相写像が存在するとき，X と Y は同相 (homeomorphic) であるという．

f が同相写像であるとは，すなわち f が全単射で f^{-1} も連続であるということである．連続写像 f が全単射だからといって，それが同相写像であるとは限らない．f が同相写像ならば，逆写像 f^{-1} もまた同相写像となる．

位相空間 X,Y が同相であるとは，X,Y のもつ位相的な構造が全く同じであるという意味である．このとき X と Y は位相空間としては同じものであると考えることが出来る．

命題 2.6 $(X,\mathscr{O}_X),(Y,\mathscr{O}_Y)$ を位相空間とし，$f\colon X\to Y$ を可逆写像とする．このとき，次の 2 条件は同値である．

(i) f は同相写像である．

(ii) $f^*\mathscr{O}_Y=\mathscr{O}_X$ が成り立つ．

証明 f の逆写像を g で表すことにする．

(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明． f は同相写像であるとする．このとき，f の連続性より

$$f^*\mathscr{O}_Y\subset\mathscr{O}_X$$

が成り立つ．

次に逆向きの包含関係を示そう．逆写像 g の連続性より

$$g^*(\mathscr{O}_X)\subset\mathscr{O}_Y$$

が成り立つ．この式の各辺に左から f^* を施せば

$$\mathscr{O}_X=(g\circ f)^*(\mathscr{O}_X)=f^*g^*\mathscr{O}_X\subset f^*\mathscr{O}_Y$$

を得る．すなわち $\mathscr{O}_X\subset f^*\mathscr{O}_Y$ である．以上の議論で (ii) が成り立つことが示された．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． (ii) が成り立つと仮定する．このとき，命題 2.2 により f は連続写像となる．また，仮定 $f^*\mathscr{O}_Y=\mathscr{O}_X$ において左から g^* を作用させれば

$$g^*(\mathscr{O}_X)=g^*(f^*\mathscr{O}_Y)=(f\circ g)^*\mathscr{O}_Y=\mathscr{O}_Y$$

なる関係式を得る．したがって，命題 2.2 により g も連続写像となる． □

定義 2.7 $(X,\mathscr{O}_X)$, $(Y,\mathscr{O}_Y)$ を位相空間とし，$f\colon X\to Y$ を写像とする．X の全ての開集合 U について $f(U)$ が Y の開集合となるとき，f は開写像 (open mapping) であるという．

一般に連続写像は開写像とは限らないし，開写像が連続写像になるわけでもない．しかし，同相写像は連続写像かつ開写像である．逆に，可逆写像が連続写像かつ開写像なら，それは同相写像となる．

2.3 位相空間の圏

連続写像は，言わば位相空間の間の準同型である．現代数学では，数学的対象の空間だけでなく，その間の準同型が大切だという立場をとる．その考え方を念頭に，位相空間とその準同型の圏を構成してみよう．

- 圏の対象：位相空間 $(X, \mathscr{O}_X)$.
- 射：位相空間 $(X, \mathscr{O}_X)$ から $(Y, \mathscr{O}_Y)$ への連続写像 $f\colon X \to Y$.
- 恒等射：恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$.
- 射の合成：連続写像 f, g の，写像としての合成 $g \circ f$

以上のように構成された圏を，**Top** で表すことにする． $(X, \mathscr{O}_X)$ から $(Y, \mathscr{O}_Y)$ への連続写像 $f\colon X \to Y$ を，**Top** の射であることを意識して $f\colon (X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ などと書いたりもすることにする．$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y) = C(X, Y)$ は集合であるから，**Top** は局所的に小さい圏となる．一方で **Top** は小さい圏とはならない．

位相空間 $(X, \mathscr{O}_X)$ に対して集合 X を，連続写像 f に対してそれ自身を対応させることで，忘却関手 $U\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ が定まる．**Set** から **Top** への関手 D, I を，それぞれ次のように定めよう．

- $D\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}$
  - 集合 X に対して，離散空間 $(X, \mathscr{P}X)$ を対応させる．
  - 写像 $f\colon X \to Y$ に対して，連続写像 $f\colon (X, \mathscr{P}X) \to (Y, \mathscr{P}Y)$ を対応させる．
- $I\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}$
  - 集合 X に対して，密着空間 $(X, \{\emptyset, X\})$ を対応させる．
  - 写像 $f\colon X \to Y$ に対して，連続写像 $f\colon (X, \{\emptyset, X\}) \to (Y, \{\emptyset, Y\})$ を対応させる．

このとき，これらの関手 U, D, I は，以下の随伴の関係にある．

$$D \dashv U \dashv I.$$

このことは，$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(D(X), (Y, \mathscr{O}_Y))$ および $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}((X, \mathscr{O}_X), I(Y))$ がどちらも集合として $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, Y)$ と等しいことからしたがう．

まとめ

- 開集合を開集合に引き戻す写像を，連続写像と呼ぶ．
- 写像が連続であることと，各点で連続であることは同値である．
- 連続写像の合成はまた連続写像となる．
- 連続な逆写像をもつ写像を，同相写像と呼ぶ．
- 位相空間を対象とし，連続写像を射とする圏を **Top** で表す．

3 近傍と閉集合

3.1 近傍

定義 3.1 $(X, \mathscr{O}_X)$ を位相空間とする．$V \in \mathscr{P}(X)$ が $x \in V^\circ$ を満たすとき，V は x の近傍 (neighbourhood) であるという．$x \in X$ の近傍全体のなす集合を x の近傍系 (neighbourhood system) といい，このノートでは $\mathscr{V}_x$ で表す．

x を元に持つ開集合は x の近傍であるが，これを特に開近傍 (open neighbourhood) と呼ぶことにする．

命題 3.2 $(X, \mathscr{O}_X)$ を位相空間とし，$x \in X$ とする．このとき，x の近傍系 $\mathscr{V}_x$ は以下の条件を満たす．

(N1) 全ての $V \in \mathscr{V}_x$ に対して $x \in V$ が成り立つ．
(N2) $X \in \mathscr{V}_x$ が成り立つ．
(N3) 全ての $V \in \mathscr{V}_x$ と $W \in \mathscr{P}X$ について，$V \subset W$ ならば $W \in \mathscr{V}_x$ が成り立つ．
(N4) 全ての $U, V \in \mathscr{V}_x$ について，$U \cap V \in \mathscr{V}_x$ が成立する．
(N5) 全ての $V \in \mathscr{V}_x$ に対して，ある $W \in \mathscr{V}_x$ で次の条件を満たすものが存在する：$W \subset V$ かつ全ての $y \in W$ について $V \in \mathscr{V}_y$ が成り立つ．

証明 **(N1) の証明．** $V \in \mathscr{V}_x$ とする．内部の定義より $V^\circ \subset V$ であるから，$x \in V^\circ$ と併せて $x \in V$ を得る．

(N2) の証明． X 自身は X の開集合であるから，命題 1.9 より $X^\circ = X$ が成り立つ．これより $x \in X^\circ$ がわかる．

(N3) の証明． $V \in \mathscr{V}_x$ かつ $V \subset W$ が成り立つと仮定する．命題 1.9 より $V^\circ \subset W^\circ$ が成り立つことに注意する．V は x の近傍だから $x \in V^\circ$ であり，先ほどの包含関係と併せて $x \in W^\circ$ を得る．したがって W はまた x の近傍である．

(N4) の証明． $U, V \in \mathscr{V}_x$ とは，$x \in U^\circ$ かつ $x \in V^\circ$ が成り立つということである．ゆえに

$x \in U^\circ \cap V^\circ$ が成立する．命題 1.9 より $U^\circ \cap V^\circ = (U \cap V)^\circ$ であるから，これより $x \in (U \cap V)^\circ$ がわかる．

(N5) の証明． $V \in \mathscr{V}_x$ を任意に固定する．開集合 W を $x \in W \subset V$ となるように選べば，この W は x の近傍である．いま W は開集合であるから，全ての $y \in W$ について W は y の近傍でもある．ゆえに (N5) が成り立つ． □

位相空間の開集合は，近傍の言葉を用いて特徴づけることが可能である．

命題 3.3 X を位相空間とし，その部分集合 A を考える．A について次の 2 条件は同値である．

(i) A は開集合である．
(ii) 全ての $a \in A$ に対して，ある $V \in \mathscr{V}_a$ で $a \in V \subset A$ を満たすものが存在する．

証明 **(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明．** A を開集合とする．命題 1.4 より，任意の $a \in A$ に対して，ある開集合 U で $a \in U \subset A$ を満たすものが存在する．a を元に持つ開集合 U は a の近傍であるから，A は (ii) を満たしている．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． $A \subset X$ は条件 (ii) を満たすと仮定する．このとき，任意の $a \in A$ に対して，ある $V \in \mathscr{V}_a$ で $a \in V \subset A$ を満たすものが存在する．近傍の定義より $a \in V^\circ \subset V \subset A$ であるから，命題 1.4 により A が開集合であることがわかる． □

注意 3.4 命題 3.2 の条件 (N1)–(N5) を近傍系の公理と呼ぶ．命題 3.2 より，位相空間 $(X, \mathscr{O}_X)$ が与えられると，近傍系の公理を満たす族 $(\mathscr{V}_x)_{x \in X}$ が定まることがわかる．

逆に，集合 X の各点 x に対して (N1)–(N5) を満たす集合系 $\mathscr{V}_x$ が定義されているとしよう．このとき

$$\mathscr{O} = \{O \in \mathscr{P}X \mid \forall x \in O, \exists V \in \mathscr{V}_x, x \in V \subset O\}$$

と定義すれば，$\mathscr{O}$ は X の開集合となる．さらに位相空間 $(X, \mathscr{O}_X)$ の意味での x の近傍系は，元の $\mathscr{V}_x$ と一致する．したがって，位相空間論は近傍系の公理から出発して展開することもできるのである．

定義 3.5 X を位相空間とし，$x \in X$ の近傍系を $\mathscr{V}_x$ で表す．$\mathscr{B}_x \subset \mathscr{P}(X)$ が

(i) $\mathscr{B}_x \subset \mathscr{V}_x$.
(ii) 全ての $V \in \mathscr{V}_x$ に対して，ある $U \in \mathscr{B}_x$ で $x \in U \subset V$ を満たすものが存在する．

の 2 条件を満足するとき，$\mathscr{B}_x$ は x の近傍基底 (neighbourhood base)，または基本近傍系 (fundamental system of neighbourhoods) であるという．

基本近傍系 $\mathscr{B}_x$ の各元が開集合のとき，$\mathscr{B}_x$ を特に基本開近傍系とよぶこともある．

近傍系 $\mathscr{V}_x$ に関する基本近傍系 $\mathscr{B}_x$ は，一意には定まらない．$\mathscr{V}_x$ 自体は $\mathscr{V}_x$ の基本近傍系であるが，実用上はもっと小さな基本近傍系をとって議論をすることが便利であることも多い．基本近傍系 $\mathscr{B}_x$ が先に与えられれば,

$$\{V \in \mathscr{P}X \mid \exists U \in \mathscr{B}_x, U \subset V\}$$

によって近傍系 $\mathscr{V}_x$ を復元することができる．

注意 3.6 X を位相空間とし，$(\mathscr{B}_x)_{x \in X}$ を基本近傍系の族とする．このとき全ての $x \in X$ について以下の条件が成り立つ．

(NB1) $\mathscr{B}_x$ は空ではない．

(NB2) 全ての $V \in \mathscr{B}_x$ に対して $x \in V$ が成り立つ．

(NB3) 全ての $U, V \in \mathscr{B}_x$ に対して，ある $W \in \mathscr{B}_x$ で $W \subset U \cap V$ を満たすものが存在する．

(NB4) 全ての $V \in \mathscr{B}_x$ に対して，ある $W \in \mathscr{P}X$ で次の条件を満たすものが存在する：$x \in W$ かつ $W \subset V$ が成り立ち，さらに全ての $y \in W$ についてある $U \in \mathscr{B}_y$ で $y \in U \subset W$ を満たすものが存在する．

以上の (NB1)–(NB4) を，基本近傍系の公理という．つまり，位相空間における基本近傍系族 $(\mathscr{B}_x)_{x \in X}$ は基本近傍系の公理を満たしている．

逆に集合 X 上に基本近傍系の公理を満たす族 $(\mathscr{B}_x)_{x \in X}$ が与えられたとしよう．このとき

$$\mathscr{O} = \{O \in \mathscr{P}X \mid \forall x \in O, \exists V \in \mathscr{V}_x, x \in V \subset O\}$$

と定義すれば $\mathscr{O}$ は X の開集合系であり，全ての $x \in X$ について $\mathscr{B}_x$ は位相空間の意味での基本近傍系となる．

関数の 1 点での連続性は，近傍系の言葉を使って書き直すことが出来る．

命題 3.7 X, Y を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を写像とする．このとき，全ての $x \in X$ について，次の 3 条件は同値である．

(i) f は x で連続である．

(ii) 全ての $V \in \mathscr{V}_{f(x)}$ に対し，ある $U \in \mathscr{V}_x$ で $U \subset f^{-1}(V)$ を満たすものが存在する．

(iii) $\mathscr{B}_x$ および $\mathscr{B}_{f(x)}$ をそれぞれ $x, f(x)$ の基本近傍系の一つとする．このとき，全ての $V \in \mathscr{B}_{f(x)}$ に対して，ある $U \in \mathscr{B}_x$ で $U \subset f^{-1}(V)$ 満たすものが存在する．

証明 (i) $\Longrightarrow$ (iii) の証明． f は x で連続であると仮定する．$V \in \mathscr{U}_{f(x)}$ とすれば，近傍の定義より $f(x) \in V^\circ$ であるから，$x \in f^{-1}(V^\circ)$ が成り立つ．f の連続性より $f^{-1}(V^\circ)$ は X の開集合なので，開集合 $W \subset X$ で $x \in W \subset f^{-1}(V^\circ) \subset f^{-1}(V)$ なるものが存在する．いま W は x の近傍であるか

ら，基本近傍系の定義よりある $U \in \mathcal{U}_x$ で，$U \subset W$ を満たすものを選ぶことができる．このとき $U \subset W \subset f^{-1}(V)$ となっているから，(iii) が成り立つことがわかった．

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) の証明． 写像 f は条件 (iii) を満たしていると仮定する．$V \in \mathcal{V}_{f(x)}$ とし，$V' \subset V$ である様な $V' \in \mathcal{U}_{f(x)}$ を選ぶ．このとき (iii) より，$U \in \mathcal{U}_x$ で $U \subset f^{-1}(V')$ となるものが選べる．いま $U \in \mathcal{U}_x \subset \mathcal{V}_x$ であることに注意すれば，(ii) が成り立っていることがわかる．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． 写像 f は条件 (ii) を満たすと仮定しよう．$f(x) \in V$ なる開集合をとれば，$V \in \mathcal{V}_{f(x)}$ が成り立つ．このとき (ii) から，x の近傍 W で $W \subset f^{-1}(V)$ を満たすものがとれる．いま $U = W^\circ$ とすれば，U は $x \in U$ かつ $U \subset W \subset f^{-1}(V)$ を満たす開集合である．したがって，f は x で連続であることが示された． □

命題 3.7 より，写像 f が x で連続であるとは，f が $f(x)$ の近傍を x の近傍に引き戻すという性質を持つことだとわかる．

定義 3.8　X を位相空間とする．各点 $x \in X$ が可算個の元からなる基本近傍系を持つとき，X は第 1 可算 (first-countable) であるという．

よく知られている例として，距離から定まる位相は第一可算であるというものがある．距離空間についてはもっと先のノートで扱う予定である．

3.2　閉集合と閉包作用素

次に，閉集合と閉包の概念を導入する．

定義 3.9　X を位相空間とする．

(i) $F \subset X$ とする．$X \setminus F$ が X の開集合であるとき，F は閉集合 (closed set) であるという．

(ii) $A \subset X$ に対して，その閉包 (closure)$\overline{A}$ を

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{V}_x,\ U \cap A \neq \emptyset\}$$

で定義する．$\overline{A}$ の元を A の触点 (adherent point) と呼ぶ．集合 A の閉包を表すのに，上記の記号以外にも $\mathrm{Cl}\, A$ や $\mathrm{Cl}_X\, A$ なども用いることにする．

(iii) $A \subset X$ および $x \in X$ とする．全ての $V \in \mathcal{V}_x$ について $A \cap (V \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ が成り立つとき，x は A の集積点 (accumulating point) であるという．

(iv) $A \subset X$ に対し $X \setminus \overline{A}$ で定義される集合を，A の外部 (exterior) と呼ぶ．

(v) $A \subset X$ に対し $\overline{A} \setminus A^\circ$ で定まる集合を A の境界 (boundary) といい，∂A で表す．

(vi) $A \subset X$ が $\overline{A} = X$ を満たすとき，A は X で稠密 (dense) であるという．

(vii) X の稠密部分集合 A で可算集合であるようなものが存在するとき，X は可分 (separable) であるという．

命題 3.10 $(X,\mathscr{O})$ を位相空間とし，$\mathscr{C}$ を X の閉集合全体の集合とする．このとき，$\mathscr{C}$ は次の性質をもつ．

(i) $\emptyset, X \in \mathscr{C}$.

(ii) $\forall F_1, F_2 \in \mathscr{C}$, $F_1 \cup F_2 \in \mathscr{C}$.

(iii) 空でない全ての $\mathscr{F} \subset \mathscr{C}$ について，$\bigcap \mathscr{F} \in \mathscr{C}$ が成り立つ．

証明 (i) の証明． $\emptyset$ は開集合だから，$X = X \setminus \emptyset$ は閉集合である．また X は開集合だから，$\emptyset = X \setminus X$ も閉集合である．

(ii) の証明． F_1, F_2 を閉集合とすれば，条件 (O3) から $X \setminus (F_1 \cup F_2) = (X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2)$ は開集合である．よって $F_1 \cup F_2$ も閉集合である．

(iii) の証明． $\mathscr{F}$ を閉集合の空でない族とする．集合族の演算規則より

$$X \setminus \bigcap \mathscr{F} = X \setminus \bigcap_{F \in \mathscr{F}} F = \bigcup_{F \in \mathscr{F}} X \setminus F$$

であるから，$\mathscr{F}$ の元が閉集合であることと条件 (O2) より，$X \setminus \bigcap \mathscr{F}$ は開集合であることがわかる．したがって $\bigcap \mathscr{F}$ は閉集合である． □

位相空間の閉部分集合は，閉包の概念を用いて特徴付けられる．

命題 3.11 X を位相空間とし，A をその任意の部分集合とする．

(i) $\overline{A} = X \setminus (X \setminus A)^\circ$ が成り立つ．

(ii) $\overline{A}$ は A を含む閉集合である．また，A を含む閉集合の中で $\overline{A}$ は包含関係について最小である．

(iii) A が閉集合であることと $A = \overline{A}$ が成り立つことは同値である．

証明 (i) の証明． 閉包の定義における条件を否定すれば，$x \in X \setminus \overline{A}$ とは「ある x の近傍 U で，$A \cap U = \emptyset$ を満たすものが存在する」ということだとわかる．これは「ある x の近傍 U で，$U \subset X \setminus A$ を満たすものが存在する」ということと同値である．最後の条件は，x が $X \setminus A$ の内点であることと同値である．

(ii) の証明． まずは $\overline{A}$ が A を含む閉集合であることを示そう．命題 1.9 より $(X \setminus A)^\circ \subset X \setminus A$ であるから，集合の演算，包含関係の性質より $A = X \setminus (X \setminus A) \subset X \setminus (X \setminus A)^\circ$ がわかる．(i) より $X \setminus (X \setminus A)^\circ = \overline{A}$ が成り立つから，これより $A \subset \overline{A}$ が従う．また $(X \setminus A)^\circ$ は開集合であるから，再び (i) を用いれば $\overline{A}$ が閉集合であることも分かる．

次に，包含関係の意味での最小性を示そう．$A \subset F$ を満たす閉集合 F を考える．このとき $X \setminus F$ は $X \setminus F \subset X \setminus A$ を満たす開集合である．したがって集合の内部の最大性（命題 1.9）より，$X \setminus F \subset (X \setminus A)^\circ$ となり，

$$\overline{A} = X \setminus (X \setminus A)^\circ \subset X \setminus (X \setminus F) = F$$

が分かる．以上の議論により，$\overline{A}$ は A を含む閉集合のうち，包含関係について最小のものであることが示された．

(iii) の証明． A が閉集合であるとは，$X \setminus A$ が開集合であるということである．また，命題 1.9 より $X \setminus A$ が開集合であることは $X \setminus A = (X \setminus A)^\circ$ が成り立つことと同値である．集合演算の基本性質より，このことは

$$X \setminus (X \setminus A) = X \setminus (X \setminus A)^\circ$$

が成り立つこととも同値である．さらに集合演算の性質と (i) より

$$A = X \setminus (X \setminus A), \quad \overline{A} = X \setminus (X \setminus A)^\circ$$

が成り立つことに注意すれば，(3.2) は $A = \overline{A}$ と同値であることがわかる．以上の議論をまとめれば，A が閉集合であることと $A = \overline{A}$ であることの同値性が導かれる． □

触点の定義は近傍系を用いて書かれていたが，それは以下のように基本近傍系の言葉を用いて書き換えることもできる．

命題 3.12 X を位相空間とし，$A \subset X$ とする．$\mathscr{B}_x$ を $x \in X$ の基本近傍系とする．このとき，次の 2 条件は同値である．

(i) $x \in \overline{A}$ が成り立つ．

(ii) 全ての $V \in \mathscr{B}_x$ について，$V \cap A \neq \emptyset$ が成り立つ．

証明 (i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明． (i) を仮定する．基本近傍系の定義より $\mathscr{B}_x \subset \mathscr{V}_x$ であったから，ただちに (ii) が従う．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． (ii) が成り立つと仮定する．$V \in \mathscr{V}_x$ とすれば，基本近傍系の定義よりある $W \in \mathscr{B}_x$ で $x \in W \subset V$ を満たすものをとることができる．いま条件 (ii) より $W \cap A \neq \emptyset$ であり，また W の選び方より $W \cap A \subset V \cap A$ が成り立っているから，$V \cap A \neq \emptyset$ であることがわかる． □

位相空間の部分集合に対してその閉包を対応付ける写像 $A \mapsto \overline{A}$ の，代数的な性質を調べよう．

命題 3.13 X を位相空間とする．X の部分集合の閉包について，次の性質が成り立つ．

(CO1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ が成り立つ．

(CO2) 全ての $A \in \mathscr{P}X$ について，$A \subset \overline{A}$ が成り立つ．

(CO3) 全ての $A \in \mathscr{P}X$ について，$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ が成り立つ．

(CO4) 全ての $A, B \in \mathscr{P}X$ について，$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ が成り立つ．

証明 (CO1) の証明． $\emptyset$ は X の閉集合であるから，命題 3.11(iii) より $\emptyset = \overline{\emptyset}$ を満たすことがわかる．

(CO2) の証明． 命題 3.11(ii) よりしたがう．

(CO3) の証明． 命題 3.11(ii) より $\overline{A}$ は X の閉集合であるから，命題 3.11(iii) により $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ を満たすことがわかる．

(CO4) の証明． 命題 1.9 および命題 3.11 の結果を用いて計算すれば，

$$\begin{aligned}
\overline{A \cup B} &= X \setminus [X \setminus (A \cup B)]^\circ \\
&= X \setminus [(X \setminus A) \cap (X \setminus B)]^\circ \\
&= X \setminus [(X \setminus A)^\circ \cap (X \setminus B)^\circ] \\
&= [X \setminus (X \setminus A)^\circ] \cup [X \setminus (X \setminus B)^\circ] \\
&= \overline{A} \cup \overline{B}
\end{aligned}$$

となる．すなわち (CO4) が成り立つ． □

注意 3.14 (i) 位相空間 $(X, \mathscr{O})$ において，部分集合 A に対してその閉包 $\mathrm{Cl}\, A$ を対応させることで，写像 $\mathrm{Cl}\colon \mathscr{P}X \to \mathscr{P}X$ が定まる．この写像を（位相的）閉包作用素 (closure operator) と呼ぶ．また，命題 3.13 における条件 (CO1)–(CO4) を閉包作用素の公理という．

(ii) 逆に，集合 X において閉包作用素の公理 (CO1)–(CO4) を満たす写像 $F\colon \mathscr{P}X \to \mathscr{P}X$ が定まっているとする．このとき

$$\mathscr{O} = \{O \in \mathscr{P}X \mid F(X \setminus O) = X \setminus O\}$$

と定義すれば，$\mathscr{O}$ は開集合の公理 (O1)–(O3) を満たす．このように，閉包作用素を基礎に位相空間論を展開することも出来る[4]．

(iii)

位相空間から位相空間への写像が連続である条件を，閉集合や閉包の言葉を使って言い換えてみよう．

命題 3.15 X と Y を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を写像とする．このとき，次の 3 条件は同値である．

(i) f は連続である．

(ii) 任意の閉集合 $F \subset Y$ について，$f^{-1}(F)$ は X の閉集合となる．

(iii) 任意の部分集合 $A \subset X$ について，$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ が成り立つ．

証明 (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) の証明． 任意の $B \subset Y$ に対して

$$f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$$

4) 児玉・永見 [6]，Kuratowski [7] などを見よ．

が成り立つことに注意すれば，定義より直ちにわかる．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) の証明． (ii) が成り立つと仮定する．命題 3.13 より $f(A) \subset \overline{f(A)}$ であるから，逆像を取ることで

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$$

を得る．いま条件 (ii) より $f^{-1}(\overline{f(A)})$ は X の閉集合であるから，閉包の最小性（命題 3.11）に注意すれば $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ がわかる．これより $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ が従う．

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) の証明． (iii) が成り立つと仮定する．$F \subset Y$ を閉集合とし，$A := f^{-1}(F)$ とする．このとき集合演算と閉包作用素の基本性質より，$\overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F}$ が成り立つ．いま F が閉集合であるとの仮定から $F = \overline{F}$ であり，さらに条件 (iii) より $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ も成立する．したがって以上の議論をまとめれば $f(\overline{A}) \subset F$ を得る．この式において逆像をとれば

$$\overline{A} \subset f^{-1}(f(\overline{A})) \subset f^{-1}(F) = A$$

がわかる．閉包の性質より $A \subset \overline{A}$ は一般になりたつから，このとき $A = \overline{A}$ となることが示された．すなわち $A = f^{-1}(F)$ は閉集合である． □

まとめ

- $x \in X$ を位相空間の点とするとき，x を内点にもつような集合 V を x の近傍と呼ぶ．x 近傍全体を x の近傍系といい，本ノートでは $\mathscr{V}_x$ で表す．
- 全ての $V \in \mathscr{V}_x$ についてある $U \in \mathscr{B}_x$ で $x \in U \subset V$ を満たすようなものが存在するとき，$\mathscr{B}_x (\subset \mathscr{V}_x)$ を $\mathscr{V}_x$ の基本近傍系と呼ぶ．
- 位相空間は近傍系の公理 (N1)–(N5) や，基本近傍系の公理 (NB1)–(NB4) を用いて構成することもできる．
- 位相空間の間の写像 $f\colon X \to Y$ が連続であることは，各点 x について f が $f(x)$ の近傍を x の近傍に引き戻すということと同値である．
- 補集合が開集合であるような集合を閉集合と呼ぶ．
- 点 x の如何なる近傍も A との共通部分が空でないとき，x を A の触点と呼ぶ．A の触点全体の集合を A の閉包といい，$\overline{A}$ で表す．
- 閉包は A を含む最小の閉集合である．
- 写像 $A \mapsto \overline{A}$ は閉包作用素の公理 (CO1)–(CO4) を満たす．
- 写像の連続性は，閉集合や閉包の言葉を用いても表現することができる．

4 有向族

4.1 有向集合と有向族

本節では有向族の概念を導入する．有向族は点列を一般化した概念で，位相空間においては有向族の極限を考えることが出来る．まずは，有向集合を定義しよう．

定義 4.1（有向集合） Λ を集合，$\leq$ をその上の二項関係とする．

(i) 全ての $\lambda \in \Lambda$ について，$\lambda \leq \lambda$ が成り立つ．
(ii) 全ての $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ について，$\lambda \leq \mu$ かつ $\mu \leq \nu$ ならば $\lambda \leq \nu$ が成り立つ．
(iii) 全ての $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対して，ある $\nu \in \Lambda$ で $\lambda \leq \nu$ かつ $\mu \leq \nu$ を満たすものが存在する．

が成り立つとき，$(\Lambda, \leq)$ は有向集合 (directed set) であるという．

さらに，有向族 Λ の部分集合 Λ_0 が次の条件を満たすとき，Λ_0 は Λ において共終 (co-final) であるという．

(iv) 全ての $\lambda \in \Lambda$ に対して，ある $\mu \in \Lambda_0$ で $\mu \geq \lambda$ を満たすものが存在する．

有向集合とは，条件 (iii) を満たす前順序集合であると言うこともできる．したがって，「有向」であるために本質的な条件は (iii) である．(iii) を感覚的に表現すると，有向集合とは無限の彼方に向かって伸びているといった感じの意味である．「無限の彼方」は実際は Λ の元であっても良く，最大元をもつ順序集合は有向集合となる．

有向集合の共終部分集合は，元の順序の制限により，それ自体また有向集合となる．

例 4.2 (i) $(X, \mathscr{O})$ を位相空間とする．$x \in X$ に対して $\mathscr{V}_x$ でその近傍系を表すのであった．$\mathscr{V}_x$ 上の順序 $U \leq_{\mathscr{V}_x} V$ を $U \supset V$ で定義する．このとき，半順序集合 $(\mathscr{V}_x, \leq_{\mathscr{V}_x})$ は有向集合である．実際，条件 (N4) より $U, V \in \mathscr{V}_x$ ならば $U \cap V \in \mathscr{V}_x$ が成り立つ．集合演算の性質より $U, V \leq_{\mathscr{V}_x} U \cap V$ であるから，これより定義 4.1 の条件 (iii) が従う．

(ii) $\mathscr{U}_x$ を x の基本近傍系とする．$V \in \mathscr{V}_x$ とすれば，基本近傍系の定義より $W \subset V$ を満たす $W \in \mathscr{U}_x$ が存在する．これを $\mathscr{V}_x$ における順序の言葉で書けば，全ての $V \in \mathscr{V}_x$ に対して，ある $W \in \mathscr{U}_x$ で $V \leq_{\mathscr{V}_x} W$ を満たすものが存在するということになる．すなわち，基本近傍系とは近傍系の共終部分集合のことなのである．

有向集合で添え字付けられた点の族を有向族という．

定義 4.3（有向族） Λ を空でない有向集合，X を集合とする．

(i) 写像 $\Lambda \to X$ を X の有向族，またはネット (net) と呼ぶ．有向族を $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ のように表すことも多い．
(ii) M を有向集合とし，$x\colon \Lambda \to X$ および $y\colon M \to X$ をネットとする．写像 $\varphi\colon M \to \Lambda$ で，

$y = x \circ \varphi$ かつ

$$\forall \lambda \in \Lambda,\ \exists \mu_0 \in M,\ \forall \mu \in M (\mu \geq \mu_0 \implies \varphi(\mu) \geq \lambda)$$

を満たすものが存在するとき，$y = (y_\mu)_{\mu \in M}$ は $x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の部分有向族 (subnet) であるという．

$(x_{\varphi(\alpha)})_{\alpha \in A}$ が $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の部分有向族であるとき，$\varphi(A)$ は Λ で共終である．$\varphi\colon A \to \Lambda$ が特に単調写像のときは，$(x_{\varphi(\alpha)})$ が (x_λ) の部分有向族であることと，$\varphi(A)$ が共終であることは同値となる．

4.2 有向族の極限

位相空間における有向族について，その極限を定義することが出来る．

定義 4.4（有向族の極限） X を位相空間とし，$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を X の有向族とする．全ての $U \in \mathscr{V}_a$ に対して，ある $\lambda \in \Lambda$ で

$$\forall \kappa \in \Lambda\ (\kappa \geq \lambda \implies x_\kappa \in U)$$

を満たすものが存在するとき，$x\colon \Lambda \to X$ は a に収束 (converge) するといい，a は (x_λ) の極限 (limit) または極限点 (limit point) であるという．有向族 (x_λ) の極限全体の集合を

$$\lim_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda, \quad \lim_\lambda x_\lambda, \quad \lim (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$$

などと表記する．(x_λ) が a に収束するとき，

$$x_\lambda \xrightarrow[\lambda]{} a, \quad x_\lambda \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} a, \quad x_\lambda \to a$$

などと表したりもする．一般に有向族の極限は一意とは限らないが，極限が唯一点のみ存在するときは

$$\lim_\lambda x_\lambda = a$$

などと書くこともある．

次に，有向族の収束についての基本的な性質を調べる．

その前に，予備概念を一つ用意しよう．$(\Lambda, \leq_\Lambda)$ を有向族とし，$(A_\lambda, \leq_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を有向集合の族とする．$\Lambda \times \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ は成分ごとの順序を入れることで，また有向集合となる．各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，集合 X における有向族 $x_\lambda\colon A_\lambda \ni \alpha \mapsto x_{\lambda\alpha} \in X$ が与えられているとしよう．このとき，対角有向族 $\Delta(x_\lambda)$ を

$$\begin{aligned}\Delta(x_\lambda)\colon \Lambda \times \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda &\longrightarrow X \\ (\lambda, \varphi) &\longmapsto x_{\lambda\varphi(\lambda)}\end{aligned}$$

と定義する．

命題 4.5 X を位相空間とする．X における有向族の収束について，次の主張が成り立つ．

(MS1) 全ての $\lambda \in \Lambda$ について $x_\lambda = x$ が成り立つなら，$x \in \lim x_\lambda$ である．

(MS2) 有向族 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が x に収束するなら，その任意の部分有向族も x に収束する．

(MS3) 有向族 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の全ての部分有向族が，$x \in X$ に収束する部分有向族をもつなら，(x_λ) 自身も x に収束する．

(MS4) $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ および $(x_{\lambda\alpha})_{\alpha\in A_\lambda}$ を有向族とし，$y \in \lim_\lambda y_\lambda$ および $y_\lambda \in \lim_\alpha x_{\lambda\alpha}$ $(\lambda \in \Lambda)$ が成り立っているとする．このとき，対角有向族 $\Delta(x_\lambda)$ は y に収束する．

証明 **(MS1) の証明．** 全ての $\lambda \in \Lambda$ について $x_\lambda = x \in X$ が成り立っているとする．このとき，全ての $V \in \mathscr{V}_x$ と全ての $\lambda \in \Lambda$ について $x_\lambda = x \in V$ となるから，$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は x に収束する．

(MS2) の証明． $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を x に収束する X の有向族とする．また，$(x_{\varphi(\alpha)})_{\alpha\in A}$ を $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の任意の部分有向族とする．仮定より $x_\lambda \to x$ だから，任意の $V \in \mathscr{V}_x$ に対してある $\lambda_V \in \Lambda$ で，

$$\forall\lambda \in \Lambda\ (\lambda \geq \lambda_V \implies x_\lambda \in V) \tag{1}$$

を満たすものが存在する．$(x_{\varphi(\alpha)})$ が部分有向族であるとの仮定より，λ_V に対してある $\alpha_V \in A_\lambda$ で

$$\forall\alpha \in A\ (\alpha \geq \alpha_V \implies \varphi(\alpha) \geq \lambda_V) \tag{2}$$

を満たすものがとれる．このとき (1) と (2) から，$\alpha \geq \alpha_V$ ならば $x_{\varphi(\alpha)} \in V$ となることが分かる．以上の議論により，$(x_{\varphi(\alpha)})_{\alpha\in A}$ もまた x に収束することが示された．

(MS3) の証明． 対偶を示す．有向族 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は $x \in X$ に収束しないとする．このとき，x のとある近傍 V_0 をとれば，

$$\forall\lambda \in \Lambda(\exists\kappa \in \Lambda(\kappa \geq \lambda \land x_\kappa \notin V_0))$$

が成り立つ．$\lambda \in \Lambda$ に対して，上の条件を満たす $\kappa \in \Lambda$ を一つ選んで $\kappa = \varphi(\lambda)$ とすれば，この操作により写像 $\varphi\colon \Lambda \to \Lambda$ が定まる．このとき，$(x_{\varphi(\lambda)})_\lambda$ が x の部分有向族で，$x \notin \lim_\lambda x_{\varphi(\lambda)}$ となることを示そう．Λ が有向集合であることから，$(x_{\varphi(\lambda)})_\lambda$ が有向族であることはただちにわかる．$\lambda \in \Lambda$ に対して $\kappa := \varphi(\lambda)$ とすれば，$\mu \geq \kappa$ なる μ について

$$\varphi(\mu) \geq \mu \geq \kappa = \varphi(\lambda) \geq \lambda$$

となる．これより，$(x_{\varphi(\lambda)})_\lambda$ は (x_λ) の部分有向族であることが確かめられる．φ の定義より全ての $\lambda \in \Lambda$ について $x_{\varphi(\lambda)} \notin V_0$ が成り立つから，$(x_{\varphi(\lambda)})_\lambda$ の如何なる部分有向族も x には収束しない．

(MS4) の証明． $(x_{\lambda\alpha})$ および (y_λ) は (iv) の仮定を満たすものとする．このとき対角有向族 $\Delta(x_\lambda)$ が y に収束することを示す．V は y の任意の近傍とする．このとき命題 3.2 より $W \subset V$ なる y の近傍で，任意の $z \in W$ について $V \in \mathscr{V}_z$ となるようなものがとれる．$\lambda_0 \in \Lambda$ を

$$\lambda \geq \lambda_0 \implies y_\lambda \in W$$

となるようにとる[5]．W の選びかたより V は各 y_λ $(\lambda \geq \lambda_0)$ の近傍となっているから，

$$\alpha \geq \alpha_0(\lambda) \implies x_{\lambda\alpha} \in V$$

となるような $\alpha_0(\lambda) \in A_\lambda$ がとれる．ここで $\nu_0 = (\lambda_0, (\alpha_0(\lambda))_{\lambda\in\Lambda}) \in \Lambda \times \prod_\lambda A_\lambda$ と定義する．このとき，$\nu = (\kappa, (\beta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \geq \nu_0$ ならば，$\Delta(x_\lambda)(\nu) = x_{\kappa\beta_\kappa} \in V$ である[6]．これより $\Delta(x_\lambda)$ は y に収束することが示された． □

命題 4.5 は「収束の公理」とでも呼ぶべきものであって，これらの条件から出発して位相を導入できることができる．これは Moore-Smith の収束理論などとも呼ばれていて，そのため公理の条件を (MS·) のように表しているわけである．以下の命題では，収束の公理 (MS1)–(MS4) を用いて，実際に位相的閉包作用素を定義してみよう．

命題 4.6 集合 X には公理 (MS1)–(MS4) を満たす収束概念 $(\mathscr{C})$ が定義されているとする[7]．$A \subset X$ に対して

$$\mathrm{Cl}(A) = \{a \in X \mid A \text{ の元からなる有向族で，} a \text{ に収束するものが存在する}\}$$

と定義すれば，$\mathrm{Cl}\colon \mathscr{P}X \to \mathscr{P}X$ は閉包作用素の公理 (CO1)–(CO4) を満たす．さらに，閉包作用素 Cl から定まる位相における収束は，$(\mathscr{C})$ による収束概念と一致する．

証明 **Step 1：(CO1) の証明．** $\emptyset$ に値をとる写像は空写像 $\emptyset \to \emptyset$ のみだが，定義 4.3 よりこれは有向族ではない．したがって，$\mathrm{Cl}(\emptyset) = \emptyset$ が成り立つ．

Step 2：(CO2) の証明． $a \in A$ なら，a に値をとる定値有向族は a に収束するので，$a \in \mathrm{Cl}(A)$ である．よって (CO2) も成り立つ．

Step 3：(CO4) の証明． $A \subset B$ かつ $a \in \mathrm{Cl}(A)$ とする．A の有向族で a に収束するものは，a に収束する B の有向族でもあるので，このとき $a \in \mathrm{Cl}(B)$ が成り立つ．よって $\mathrm{Cl}(A) \subset \mathrm{Cl}(B)$ である．すなわち，$\mathrm{Cl}\colon \mathscr{P}X \to \mathscr{P}X$ は包含関係について単調増大である．

写像 Cl の単調性より $\mathrm{Cl}(A), \mathrm{Cl}(B) \subset \mathrm{Cl}(A \cup B)$ が成り立つので，$\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subset \mathrm{Cl}(A \cup B)$ がわかる．逆向きの包含関係を示そう．$a \in \mathrm{Cl}(A \cup B)$ とし，(x_λ) を a に収束する $A \cup B$ の有向族とする．集合 M_A, M_B を

$$M_A = \{\lambda \in \Lambda \mid x_\lambda \in A\}, \qquad M_B = \{\lambda \in \Lambda \mid x_\lambda \in B\}$$

と定義し，Λ から誘導される順序を入れる．このとき，M_A か M_B のどちらかは Λ の共終部分集合になっている．（いずれも共終部分集合でないとすると，(x_λ) は $A \cup B$ の有向族でないことになる．）特に M_A が共終であると仮定しても一般性を失わない．このとき $(x_\lambda)_{\lambda\in M_A}$ は (x_λ) の部分有

5） 収束の定義

6） $\beta_\kappa \geq \alpha_0(\lambda)$ に注意.

7） 収束する有向族のクラスが定められているということであり，言い換えれば各 $a \in X$ について「有向族 x が a に収束する」ことを意味する論理式が定められているということである．

向族で，A の点からなるものである．条件 (MS2) より $(x_\lambda)_{\lambda\in M_A}$ は a に収束するので，$a \in \mathrm{Cl}(A)$ がわかる．これより $a \in \mathrm{Cl}(A)\cup\mathrm{Cl}(B)$ となり，$\mathrm{Cl}(A\cup B)\subset\mathrm{Cl}(A)\cup\mathrm{Cl}(B)$ が示された．

Step 4：(CO3) の証明． (CO2) より $\mathrm{Cl}(A)\subset\mathrm{Cl}\,\mathrm{Cl}(A)$ は分かっているので，逆向きの包含関係を示す．$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathrm{Cl}(A)$ の有向族で a に収束するようなものとし，さらに各 $\lambda\in\Lambda$ について x_λ に収束する有向族 $(x_{\lambda\alpha})_{\alpha\in A_\lambda}$ が与えられているとする．このとき，公理 (MS4) より対角有向族 $\Delta(x_\lambda)$ は a に収束する．よって $a\in\mathrm{Cl}(A)$ となり，$\mathrm{Cl}\,\mathrm{Cl}(A)\subset\mathrm{Cl}(A)$ が示された．

Step 5：Cl から定まる収束と $(\mathscr{C})$ の収束の一致性． Cl から定まる位相を $(\mathscr{T})$ と呼ぶことにする．

Step 5-1：「$(\mathscr{C})$ で収束 $\Longrightarrow$ $(\mathscr{T})$ で収束」の証明． まずは，$(\mathscr{C})$ で $a\in X$ に収束する有向族は $(\mathscr{T})$ でも a に収束することを示す．$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は $(\mathscr{C})$ で a に収束するが，$(\mathscr{T})$ では a に収束しないと仮定しよう．a の開近傍 U_0 を

$$\text{いかなる } \lambda \text{ に対しても，ある } \lambda'\geq\lambda \text{ で } x_{\lambda'}\notin U_0 \text{ を満たすものが存在する．} \tag{3}$$

を満たすように選ぶ．このとき $M=\{\lambda\in\Lambda\mid x_\lambda\notin U_0\}$ は Λ の共終部分集合であり，$(x_\lambda)_{\lambda\in M}$ は $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の部分有向族となる．(x_λ) は $(\mathscr{C})$ で $a\in X$ に収束するから，(MS2) により部分有向族 $(x_\lambda)_{\lambda\in M}$ は a に収束する．したがって，$a\in\overline{X\setminus U_0}$ であり，一方で $a\notin X\setminus U_0$ だから U_0 が開集合であるという仮定に矛盾する．

Step 5-2：「$(\mathscr{T})$ で収束 $\Longrightarrow$ $(\mathscr{C})$ で収束」の証明． 逆に，$(\mathscr{T})$ で $a\in X$ に収束する有向族は $(\mathscr{C})$ でも a に収束することを示そう．$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は $(\mathscr{T})$ で $a\in X$ に収束するとし，$(y_\mu)_{\mu\in M}=(x_{\varphi(\mu)})_{\mu\in M}$ を (x_λ) の任意の部分有向族とする．このとき (y_μ) が a に収束する部分有向族を持つことを示せば，(MS3) により (x_λ) 自身が a に収束することがわかる．

$$M_{\geq\alpha}=\{\mu\in M\mid\mu\geq\alpha\},\qquad A_\alpha=\{z\in X\mid\exists\mu\in M_\alpha\ z=y_\mu\}=y(M_{\geq\alpha})$$

と定義する．$M_{\geq\alpha}$ は M の共終部分集合だから $(y_\mu)_{\mu\in M_\alpha}$ は $(y_\mu)_{\mu\in M}$ の部分有向族であり，ゆえに $(y_\mu)_{\mu\in M_\alpha}$ は $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の部分有向族でもある．位相空間における収束の性質により[8] $(y_\mu)_{\mu\in M_\alpha}$ は $(\mathscr{T})$ について a に収束するから，$(\mathscr{T})$ の定義により $a\in\bigcap_{\alpha\in M}\mathrm{Cl}(A_\alpha)$ が成り立つ．Cl の定義より，各 $\alpha\in M$ に対して，$(\mathscr{C})$ の意味で a に収束する A_α の有向族 $(z_{\alpha\beta})_{\beta\in B_\alpha}$ が存在する．$(z_{\alpha\beta})_{\beta\in B_\alpha}$ が A_α の有向族であるということは，任意の $\beta\in B_\alpha$ に対して，ある $\mu\in M_\alpha$ で $y_\mu=z_{\alpha\beta}$ を満たすものが存在するということである．ここで，

$$D_\alpha=\{(\mu,\beta)\in M_\alpha\times B_\alpha\mid z_{\alpha\beta}=y_\mu\}$$

と定義し，B_α の順序によって有向集合と見なす．（M_α の構造は忘れる．）写像 $\Theta_\alpha\colon D_\alpha\to M$，を $\Theta_\alpha(\mu,\beta)=\mu$ によって定義し，$\Xi_\alpha\colon D_\alpha\to M$ を $\Xi_\alpha(\mu,\beta)=\beta$ によって定めれば，$z_{\alpha\Xi_\alpha(\mu,\beta)}=y(\Theta_\alpha(\mu,\beta))$ が成り立つ．そこで，$w_{\alpha\delta}=z_{\alpha\Xi_\alpha(\mu,\beta)}$ と定義すれば，$(w_{\alpha\delta})_{\delta\in D_\alpha}$ は $(z_{\alpha\beta})_{\beta\in B_\alpha}$ の部分有向族であり，(MS2) より a に収束する．さらに $(w_{\alpha\delta})_{\delta\in D_\alpha}=y\circ\Theta_\alpha$ も成り立っ

8）要するに (MS2) を使うのだが，$(\mathscr{C})$ が満たしている (MS2) ではなくて $(\mathscr{T})$ からくる (MS2) である．ややこしい...

ている．($(w_{\alpha\beta})$ が (y_μ) の部分有向族になっているかは問わない．) (MS1) より定数有向族 $w_\alpha = a$ は $(\mathscr{C})$ の意味でも a に収束するので，(MS4) により対角有向族 $\Delta(w) = (w_{\alpha\varphi(\alpha)}\,;\,(\alpha,\varphi) \in M \times \prod_\alpha D_\alpha)$ は $(\mathscr{C})$ の意味で a に収束する．後は $\Delta(w)$ が (y_μ) の部分有向族であることを示せば，(MS3) により (x_λ) も $(\mathscr{C})$ で a に収束することがわかる．$(w_{\alpha\beta})$ の定義より，$\Delta(w)_{\alpha\varphi} = w(\alpha\varphi(\alpha)) = y(\Theta_\alpha(\varphi(\alpha)))$ が成り立っている．$\mu \in M$ に対して，$\alpha \geq \mu$ とすれば，任意の $(\alpha,\varphi) \in M \times \prod_\alpha D_\alpha$ について $\Theta_\alpha(\varphi(\alpha)) \geq \alpha \geq \mu$ が成り立つ[9]．ゆえに $\Delta(w)$ は (y_μ) の部分有向族である． □

Moore-Smith の収束理論についてより詳しいことは，Kelley [5] [10] などを参照されたい．

まとめ

- 有向集合によって添え字づけられた X 点の族 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を，X の有向族という．
- 有向族 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が以下の条件を満たすとき，(x_λ) は $x \in X$ に収束するという：

$$\forall V \in \mathscr{V}_x \ \exists \lambda_0 \in \Lambda \ (\lambda \geq \lambda_0 \implies x_\lambda \in V).$$

- 有向族の収束は，条件 (MS1)–(MS4) を満たす．
- Moore-Smith の公理系 (MS1)–(MS4) から出発して位相空間を構成することもできる．

5　フィルター

5.1　フィルターと超フィルター

定義 5.1　X を集合とする．$\mathscr{F} \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ が次の三条件を満たすとき，$\mathscr{F}$ を X 上のフィルター (filter) と呼ぶ．

(F1) $\mathscr{F}$ は空でなく，$\emptyset \notin \mathscr{F}$ が成り立つ．
(F2) 全ての $A, B \in \mathscr{F}$ について，$A \cap B \in \mathscr{F}$ が成り立つ．
(F3) 全ての $F \in \mathscr{F}$ と，$F \subset F'$ を満たす全ての $F' \in \mathscr{P}(X)$ について，$F' \in \mathscr{F}$ が成り立つ．

フィルターは本来束論的な概念である．条件 (F1)–(F3) は，$\mathscr{F}$ が Boole 代数 $\mathscr{P}X$ における真のフィルターであるということを述べている．束や Boole 代数の基礎事項については，位相空間論セミナー VII で扱うことになる．

条件 (F2) は，フィルター $\mathscr{F}$ は有限交叉性をもつ[11]ということである．条件 (F1) と (F3) を用いれば，任意のフィルター $\mathscr{F}$ は $X \in \mathscr{F}$ を満たすことがわかる．$\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ であるから，$\emptyset$ 上のフィルターは存在しない．$\{X\} \subset \mathscr{P}(X)$ は X 上の最小のフィルターである．

$\mathscr{F}$ および $\mathscr{F}'$ を集合 X 上のフィルターとする．$\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$ なるとき，$\mathscr{F}'$ は $\mathscr{F}$ より細かいといい，$\mathscr{F}$

9） $\varphi(\alpha) \in D_\alpha$ なので，その M_α 成分は α より大きい．
10） 邦訳：ケリー [4]
11） フィルターの元の任意の（空でない）有限族の共通部分は空でないということ．

は $\mathscr{F}'$ より粗いという．$\mathscr{F} \subsetneq \mathscr{F}'$ であるとき，$\mathscr{F}'$ は $\mathscr{F}$ より真に細かいといい，$\mathscr{F}$ は $\mathscr{F}'$ より真に粗いという．$\mathscr{F}$ と $\mathscr{F}'$ に包含関係が成り立つとき，これら二つのフィルターは比較可能であるという．

X 上のフィルターの非空な族 $(\mathscr{F}_i)_{i\in I}$ を考えよう．

$$\bigwedge_{i\in I}\mathscr{F}_i := \bigcap_{i\in I}\mathscr{F}_i$$

と定義すれば，$\bigwedge_{i\in I}\mathscr{F}_i$ はまた X 上のフィルターとなっている．これは，全ての $\mathscr{F}_i$ より細かいフィルターのうちで最大のものであり，すなわちフィルター族 $(\mathscr{F}_i)$ の下限を成している．

位相空間 X に対して，$x \in X$ の近傍系 $\mathscr{V}_x$ は X 上のフィルターである．実際，条件 (N1) と (N2) から (F1) が，(N2) から (F2) が，そして (N3) から (F3) がそれぞれ従う．このフィルター $\mathscr{V}_x$ は x の近傍フィルター (neighbourhood filter) と呼ばれている．

定義 5.2 X を集合とする．$\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$ が次の二条件を満たすとき，$\mathscr{B}$ を X のフィルター基底 (filter base) と呼ぶ．

(Fb1) $\mathscr{B} \neq \emptyset$ かつ $\emptyset \notin \mathscr{B}$ が成り立つ．
(Fb2) 全ての $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ について，ある $B \in \mathscr{B}$ で $B \subset B_1 \cap B_2$ を満たすものが存在する．

フィルターは明らかにフィルター基底である．逆に，フィルター基底が条件 (F3) を満たせばそれはフィルターである．したがって，(F3) を満たすフィルター基底をフィルターと定義しても同値である．

フィルター基底 $\mathscr{B}$ に対して

$$\mathrm{flt}(\mathscr{B}) := \{F \in \mathscr{P}(X) \mid \exists B \in \mathscr{B},\ B \subset F\}$$

とすれば $\mathrm{flt}(\mathscr{B})$ は $\mathscr{B}$ を含むフィルターであるが，これを $\mathscr{B}$ によって生成されるフィルターと呼ぶ．$\mathrm{flt}(\mathscr{B})$ は，$\mathscr{B}$ を含むフィルターのうちで，包含関係について最小のものである．

位相空間 X において，$x \in X$ の基本近傍系 $\mathscr{U}_x$ は X 上のフィルター基底である．$\mathscr{U}_x$ が x の基本近傍系であるとは，$\mathscr{U}_x$ が $\mathrm{flt}(\mathscr{U}_x) = \mathscr{V}_x$ を満たすフィルター基底であるということに他ならない．

定義 5.3 X のフィルター $\mathscr{F}$ より真に細かい X のフィルターが存在しないとき，$\mathscr{F}$ は X の超フィルター (ultrafilter) であるという．

補題 5.4 X を集合，$\mathscr{B}$ をフィルター基底とする．このとき，次の 2 条件は同値である．

(i) $\mathscr{B}$ は X の超フィルターである．
(ii) $\mathscr{B}$ を真に含むフィルター基底は存在しない．

証明 **Step 1：(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明．** $\mathscr{B}$ は超フィルターであるとし，フィルター基底 $\mathscr{C}$ は $\mathscr{B}$ を含むとする．フィルター基底によって生成されるフィルターの最小性より，$\mathrm{flt}(\mathscr{B}) \subset \mathrm{flt}(\mathscr{C})$ が成り立

つが，いま $\mathscr{B}$ 自身がフィルターであることから $\mathscr{B} \subset \mathrm{flt}(\mathscr{C})$ となる．$\mathscr{B}$ はフィルター基底であることから，これより $\mathscr{B} = \mathrm{flt}(\mathscr{C})$ がわかる．また仮定より $\mathscr{B} \subset \mathscr{C} \subset \mathrm{flt}(\mathscr{C})$ であることに注意すれば，結論として $\mathscr{B} = \mathscr{C}$ を得る．したがって，$\mathscr{B}$ を真に含むフィルター基底は存在しないことがわかった．

Step 2：(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． $\mathscr{B}$ はフィルター基底で，$\mathscr{B}$ より真に細かいフィルター基底が存在しないものとする．定義より明らかに $\mathscr{B} \subset \mathrm{flt}(B)$ であるが，仮定より $\mathrm{flt}(B)$ が $\mathscr{B}$ より真に細かいことはないので，$\mathscr{B} = \mathrm{flt}(B)$ となる．ゆえに，$\mathscr{B}$ 自身がフィルターである．

$\mathscr{B}$ を含むフィルターは $\mathscr{B}$ を含むフィルター基底でもあるから，条件 (ii) により $\mathscr{B}$ と等しくなる．したがって，$\mathscr{B}$ より真に細かいフィルターは存在しないことがわかる．

以上の議論により，(ii) を仮定すれば $\mathscr{B}$ は超フィルターとなることが示された． □

フィルターが与えられると，必ずそれを含む超フィルターが存在する．

命題 5.5 X を集合とし，$\mathscr{F}$ を X 上のフィルターとする．このとき，$\mathscr{F}$ を含む X の超フィルターが存在する．

証明 Step 1：超フィルターの構成． フィルター $\mathscr{F}$ に対して

$$\mathscr{A} = \{\mathscr{G} \in \mathscr{P}\mathscr{P}X \mid \mathscr{G} \text{ は } \mathscr{F} \subset \mathscr{G} \text{ を満たすフィルター}\}$$

と定義する．このとき $\mathscr{A}$ は集合の包含関係について半順序集合であり，さらにその順序について空でない帰納的順序集合となっている．$\mathscr{A}$ に Zorn の補題を適用すれば，極大元 $\mathscr{F}'$ をとることが出来る．定義より $\mathscr{F}'$ は $\mathscr{F}$ より細かいフィルターであり，極大性よりこれは超フィルターである．

Step 2：$\mathscr{A}$ が空でない帰納的順序集合であることの証明． $\mathscr{F} \in \mathscr{A}$ だから，$\mathscr{A}$ は空集合ではない．$\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$ を任意の空でない全順序部分集合とする．このとき $\bigcup\mathscr{C}$ はまた $\mathscr{F}$ より細かいフィルターであることを示そう．

まずは条件 (F1) を示そう．$\mathscr{C}$ の元はフィルターであることから，如何なる $\mathscr{B} \in \mathscr{C}$ も $\emptyset$ を元に持たない．よって $\emptyset \notin \bigcup\mathscr{C}$ である．また $\mathscr{C}$ の元はフィルターだから空集合ではなく，ゆえに $\bigcup\mathscr{C}$ も空集合ではないことがわかる．

次に条件 (F2) を示す．$A, B \in \bigcup\mathscr{C}$ とすれば，$\mathscr{F}$ より細かいフィルター $\mathscr{E}, \mathscr{G} \in \mathscr{C}$ で $A \in \mathscr{E}$，$B \in \mathscr{G}$ なるものが存在する．$\mathscr{C}$ は包含関係について全順序であるから，$\mathscr{E} \subset \mathscr{G}$ と仮定しても一般性を失わない．このとき $A \cap B \in \mathscr{G} \subset \bigcup\mathscr{C}$ が成り立つ．

今度は条件 (F3) を確かめよう．$A \in \bigcup\mathscr{C}$ とし，E は $A \subset E \subset X$ を満たす任意の集合とする．$A \in \mathscr{G} \subset \bigcup\mathscr{C}$ なる $\mathscr{G} \in \mathscr{C}$ を選べば，$\mathscr{G}$ はフィルターであることから $E \in \mathscr{G}$ がわかる．これより $E \in \bigcup\mathscr{C}$ となり，$\bigcup\mathscr{C}$ がフィルターの条件 (F3) を見たすことも示された．

$\mathscr{C}$ の元はどれも $\mathscr{F}$ を含むから，$\bigcup\mathscr{C}$ もまた $\mathscr{F}$ を含む．

以上の議論をまとめれば，$\bigcup\mathscr{C}$ は $\mathscr{F}$ を含む X のフィルターであることがわかる．このとき定義より $\bigcup\mathscr{C} \in \mathscr{A}$ となるので，$\bigcup\mathscr{C}$ は全順序部分集合 $\mathscr{C}$ の上界であることが証明された． □

超フィルターの存在は命題 5.5 により保証されたのでひとまず安心して，今度は超フィルターの基本的な性質を調べてみよう．

命題 5.6 X を集合とする．X 上の超フィルター $\mathscr{F}$ は次の性質を持つ．

(i) $A \subset X$ とする．任意の $F \in \mathscr{F}$ に対して $A \cap F \neq \emptyset$ なら，$A \in \mathscr{F}$ である．

(ii) $F_1 \cup F_2 \in \mathscr{F}$ ならば，$F_1 \in \mathscr{F}$ または $F_2 \in \mathscr{F}$ が成り立つ．

証明 **(i) の証明．** $A \subset X$ は全ての $F \in \mathscr{F}$ に対して $A \cap F \neq \emptyset$ を満たすと仮定する．

$$\mathscr{B} = \mathscr{F} \cup \{A \cap F \mid F \in \mathscr{F}\}$$

と定義したとき，$\mathscr{B}$ はフィルター基底であることを示そう．

$\mathscr{F}$ はフィルターであるから空でなく，ゆえに $\mathscr{B}$ も空ではない．また $\mathscr{F}$ は空集合を元に持たず，仮定より $A \cap F$（$F \in \mathscr{F}$）のいずれも空集合ではないから，$\mathscr{B}$ は空集合を元に持たない．したがって，$\mathscr{B}$ はフィルター基底の条件 (Fb1) を満たす．

次に (Fb2) を証明しよう．$B, C \in \mathscr{B}$ とする．B, C いずれも $\mathscr{F}$ に属するときは，$B \cap C \in \mathscr{F} \subset \mathscr{B}$ である．B のみが $\mathscr{F}$ に属する時は，$C = A \cap C'$（$C' \in \mathscr{F}$）と表記すれば，$B \cap C = A \cap (B \cap C')$ である．いま $\mathscr{F}$ はフィルターだから $B \cap C' \in \mathscr{F}$ であり，ゆえに $B \cap C \in \mathscr{B}$ がわかる．最後に B, C いずれも $\mathscr{F}$ に属さないときは，$B', C' \in \mathscr{F}$ を用いて $B = A \cap B'$ および $C = A \cap C'$ と表現しておく．これにより $B \cap C = A \cap (B' \cap C')$ となり，$B' \cap C' \in \mathscr{F}$ より $B \cap C \in \mathscr{B}$ が従う．以上の議論により，$\mathscr{B}$ がフィルター基底であることが示された．

さて，定義より明らかに $\mathscr{F} \subset \mathscr{B}$ であるが，いま $\mathscr{F}$ は超フィルターなので $\mathscr{F}$ より真に細かいフィルター基底は存在しないのであった．（補題 5.4）したがって $\mathscr{F} = \mathscr{B}$ が成立する．これより，$\{A \cap F \mid F \in \mathscr{F}\} \subset \mathscr{F}$ となり，特に $A = A \cap X \in \mathscr{F}$ が従う．

(ii) の証明． 背理法で示す．$F_1, F_2 \in \mathscr{P}(X)$ が $F_1 \cup F_2 \in \mathscr{F}$ かつ $F_1, F_2 \notin \mathscr{F}$ を満たすと仮定し，矛盾を導き出せばよい．

$$\mathscr{G} = \{G \in \mathscr{P}(X) \mid F_1 \cup G \in \mathscr{F}\} \tag{4}$$

と定義したとき，$\mathscr{G}$ が $\mathscr{F}$ を含むフィルターとなっていることを示そう．

$X \cup F_1 = X \in \mathscr{F}$ だから $X \in \mathscr{G}$ であり，よって $\mathscr{G}$ は空ではない．また $\emptyset \cup F_1 = F_1 \notin \mathscr{F}$ であるから，空集合は $\mathscr{G}$ に属さない．よって，$\mathscr{G}$ は条件 (F1) を満たす．

(F2) を示すために，$G, H \in \mathscr{G}$ と仮定する．分配律より

$$F_1 \cup (G \cap H) = (F_1 \cup G) \cap (F_1 \cup H)$$

であり，仮定より $F_1 \cup G, F_1 \cup H \in \mathscr{F}$ であることに注意すれば，$F_1 \cup (G \cup H) \in \mathscr{F}$ もわかる．ゆえに $G \cap H \in \mathscr{G}$ となり，$\mathscr{G}$ が条件 (F2) を満たすこともわかる．

次は (F3) を示そう．$G \in \mathscr{G}$ かつ $G \subset H$ が成り立つとする．このとき $F_1 \cup G \in \mathscr{F}$ かつ $F_1 \cup G \subset F_1 \cup H$ が成り立つから，$\mathscr{F}$ が条件 (F3) を満たすことを用いて $F_1 \cup H \in \mathscr{F}$ が得られる．

したがって $H \in \mathscr{G}$ である．これで $\mathscr{G}$ が (F3) を満たすことも確かめられた．

続いて，$\mathscr{G}$ が $\mathscr{F}$ を含むことを証明する．$F \in \mathscr{F}$ とすれば，$F \subset F_1 \cup F$ と $\mathscr{F}$ がフィルターであることから $F_1 \cup F \in \mathscr{F}$ が従う．よって $F \in \mathscr{G}$ であり，$\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ がわかった．

ここまでの議論をまとめれば，(4) によって定義された $\mathscr{G}$ は $\mathscr{F}$ を含むフィルターであるということになる．

さて，仮定より $F_1 \cup F_2 \in \mathscr{F}$ であるから，$F_2 \in \mathscr{G}$ が成り立つ．また，仮定より $F_2 \notin \mathscr{F}$ でもあるから，$F_2 \in \mathscr{G} \setminus \mathscr{F}$ ということになる．このとき $\mathscr{G}$ は $\mathscr{F}$ より真に細かいフィルターとなってしまうが，これは超フィルター $\mathscr{F}$ の極大性に矛盾する． □

与えられたフィルター基底が超フィルターかどうか判別するための条件として，以下の補題がよく知られている．

命題 5.7 $\mathscr{B}$ を集合 X 上のフィルター基底とする．このとき，次の 2 条件は同値である．

(i) $\mathscr{B}$ は超フィルターである．

(ii) 任意の $A \in \mathscr{P}(X)$ に対して $A \in \mathscr{B}$ または $X \setminus A \in \mathscr{B}$ が成り立つ．

証明 **(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明．** $\mathscr{B}$ を超フィルターとする．$A \subset X$ とすれば，集合演算の性質より $X = A \cup (X \setminus A)$ が成り立つ．$\mathscr{B}$ は超フィルターだから $X \in \mathscr{B}$ であり，命題 5.6 の (ii) を用いれば $A \in \mathscr{B}$ または $X \setminus A \in \mathscr{B}$ が成立することがわかる．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． 条件 (ii) を仮定する．$\mathscr{B}$ を含むフィルター $\mathscr{F}$ を任意に選んだとき，$\mathscr{F} = \mathscr{B}$ となることを示せばよい．$A \in \mathscr{F}$ とすれば，$\mathscr{F}$ はフィルターだから $X \setminus A \notin \mathscr{F}$ となる．$\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$ から，$X \setminus A \notin \mathscr{B}$ である．したがって条件 (ii) より $A \in \mathscr{B}$ となる．A は任意に選んだ $\mathscr{F}$ の元であったから，これより $\mathscr{F} \subset \mathscr{B}$ がわかる． □

フィルター基底が与えられたとき，それを写像によって送ったり引き戻したり出来る．

命題 5.8 X, Y を集合とし，$f\colon X \to Y$ を写像とする．

(i) $\mathscr{B}$ は X のフィルター基底であるとする．このとき $f_*(\mathscr{B})$ は Y 上のフィルター基底である．

(ii) $\mathscr{B}'$ を Y のフィルター基底とする．全ての $B \in \mathscr{B}'$ に対して $B \cap f(X) \neq \emptyset$ であるならば，$f^*(\mathscr{B}')$ は X 上のフィルター基底である．

証明 **(i) の証明．** まずは (Fb1) を示す．$\mathscr{B}$ は空集合ではないから，その f_* による像 $f_*\mathscr{B}$ も空ではない．$f(A) = \emptyset$ となる $A \subset X$ は空集合に限るが，$\emptyset \notin \mathscr{B}$ であるから，$\emptyset \notin f_*\mathscr{B}$ である．

次に (Fb2) を示そう．$A, B \in \mathscr{B}$ とし，$C \in \mathscr{B}$ を $C \subset A \cap B$ となるように選ぶ．このとき $f(A), f(B), f(C)$ はどれも $f_*\mathscr{B}$ の元であり，

$$f(C) \subset f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

を満たす．いま A, B は任意に選んでいるから，これより $f_*\mathscr{B}$ が (Fb2) を満たすことがわかる．

したがって $f_*(\mathscr{B})$ は条件 (Fb1) と (Fb2) を満たし，Y 上のフィルター基底である．

(ii) の証明． $\mathscr{B}'$ は空でないから，その像 $f^*\mathscr{B}'$ も空ではない．また仮定より全ての $B' \in \mathscr{B}'$ について $f^{-1}(B')$ は空ではないから，$\emptyset \notin f^*(\mathscr{B}')$ が成り立つ．よって $f^*\mathscr{B}'$ は (Fb1) を満たす．

後は (Fb2) 示せばよい．$A', B' \in \mathscr{B}'$ に対して $C' \subset A' \cap B'$ なる $C' \in \mathscr{B}'$ をとる．このとき $f^{-1}(A'), f^{-1}(B'), f^{-1}(C')$ はどれも $f^*\mathscr{B}'$ の元であり，$f^{-1}(C') \subset f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$ を見たす．いま A', B' は任意に選んでいたから, これより $f^*\mathscr{B}'$ が (Fb2) を満足することがわかる．

□

5.2 フィルターの収束

位相空間上のフィルターについては，収束の概念を定義することが出来る．

定義 5.9 X を位相空間とし，$\mathscr{F}$ を X 上のフィルターとする．$\mathscr{F}$ がある $x \in X$ の近傍フィルターより細かいとき，x を $\mathscr{F}$ の極限点 (limit point) あるいは単に極限 (limit) と呼ぶ．このとき，フィルター $\mathscr{F}$ は x に収束 (converge) するという．$\mathscr{F}$ がフィルター基底 $\mathscr{B}$ によって生成されるとき，$\mathscr{F}$ が x に収束するならばフィルター基底 $\mathscr{B}$ は x に収束するといい，x を $\mathscr{B}$ の極限という．フィルター基底 $\mathscr{B}$ の極限全体の集合を $\lim \mathscr{B}$ で表す．

フィルター基底が収束するための必要十分条件を考えよう．

命題 5.10 X を位相空間，$\mathscr{B}$ を X 上のフィルター基底とする．このとき，次の 2 条件は同値である．

(i) $\mathscr{B}$ は x に収束する．
(ii) 全ての $V \in \mathscr{V}_x$ に対して，ある $B \in \mathscr{B}$ で $B \subset V$ を満たすものが存在する．

証明 (i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明． $\mathscr{B}$ は x に収束すると仮定する．$\mathrm{flt}(\mathscr{B})$ は $\mathscr{V}_x$ に収束するから，$\mathscr{V}_x \subset \mathrm{flt}(\mathscr{B})$ が成り立つ．$V \in \mathscr{V}_x$ とすれば，$V \in \mathrm{flt}(\mathscr{B})$ でもあるから，$\mathrm{flt}(\mathscr{B})$ の定義よりある $B \in \mathscr{B}$ で $B \subset V$ を満たすものが存在する．よって $\mathscr{B}$ は条件 (ii) を満たす．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． フィルター基底 $\mathscr{B}$ は条件 (ii) を満たすと仮定する．$V \in \mathscr{V}_x$ を任意にとれば，$B \in \mathscr{B}$ で $B \subset V$ なるものが存在する．$B \in \mathscr{B} \subset \mathrm{flt}(\mathscr{B})$ かつ $B \subset V$ だから，フィルターの条件 (F3) より $V \in \mathrm{flt}(\mathscr{B})$ がわかる．よって $\mathscr{V}_x \subset \mathrm{flt}(\mathscr{B})$ であり，$\mathscr{B}$ は x に収束する． □

まとめ

- $\mathscr{P}X$ の部分集合で条件 (F1)–(F3) を満たすものを，X 上のフィルターと呼ぶ．また，条件 (Fb1)–(Fb2) を満たすものを X 上のフィルター基底と呼ぶ．
- 超フィルターとは包含関係について極大なフィルターのことである．
- フィルターを写像によって送ったり引き戻したりすることができる．
- 位相空間 X 上のフィルター $\mathscr{F}$ が近傍フィルター $\mathscr{V}_x$ より細かいとき，$\mathscr{F}$ は x に収束するという．

6 収束と位相空間の諸概念

6.1 収束を用いた特徴付け

位相空間のいくつかの概念は，有向族やフィルターの収束の概念を用いて特徴付けることが出来る．

命題 6.1 $(X,\mathscr{O})$ を位相空間とし，A をその部分集合とする．このとき，次の 3 条件は同値である．

(i) $a \in \overline{A}$ が成り立つ．

(ii) A の有向族 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ で，a に収束するものが存在する．

(iii) A の部分集合からなる X のフィルター基底で，a に収束するものが存在する．

証明 **(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明．** $x \in \prod_{V\in\mathscr{V}_a} V$ としたとき，$x\colon \mathscr{V}_a \to \bigcup\mathscr{V}_a = X$ は a に収束する有向族であることを示そう．$V \in \mathscr{V}_a$ を任意に選ぶ．このとき，$W \geq_{\mathscr{V}_a} V$ (i.e. $W \subset U$) を満たすような全ての $W \in \mathscr{V}_a$ について $x_W \in W \subset V$ が成り立つ．よって x は a に収束することが示された．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を a に収束する A の有向族とする．このとき，任意の $V \in \mathscr{V}_a$ について，ある $\lambda \in \Lambda$ で $x_\lambda \in V$ なるものが存在する．したがって $x_\lambda \in V \cap A$ であり，$A \cap V$ は空ではない．V は a の近傍を任意に選んだものであったから，これにより $a \in \overline{A}$ が従う．

(i) $\Longrightarrow$ (iii) の証明． $\mathscr{B} = \{A \cap V \mid A \in \mathscr{V}_a\}$ と定義したとき，$\mathscr{B}$ が a に収束するフィルター基底であることを示す．$i\colon A \to X$ を包含写像とすれば，$\mathscr{B} = i^*\mathscr{V}_a$ であることに注意する．$a \in \overline{A}$ だから，全ての $V \in \mathscr{V}_a$ について $i(A) \cap V = A \cap V \neq \emptyset$ である．したがって，命題 5.8 により，$\mathscr{B}$ は実際にフィルター基底となっている．$V \in \mathscr{V}_a$ を任意にとれば，$V \supset V \cap A \in \mathscr{B}$ である．命題 5.10 を用いれば，これにより $\mathscr{B}$ は a に収束することが分かる．

(iii) $\Longrightarrow$ (i)． $\mathscr{B}$ を A の部分集合からなるフィルター基底で，a に収束するものとする．$V \in \mathscr{V}_a$ とすれば，命題 5.10 より $B \in \mathscr{B}$ で $B \subset V$ 満たすものが存在する．そのような B は A の空でない部分集合だから，$\emptyset \neq B \subset A \cap V$ となり，$A \cap V$ も空ではない．いま V は任意の選んだ a の近傍であったから，a が A の閉包に属することがわかる．□

系 6.2　$(X,\mathscr{O})$ を位相空間とし，A をその部分集合とする．このとき，次の 3 条件は同値である．

(i) A は閉集合である．
(ii) A の任意の有向族 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対し，$\lim(x_\lambda)\subset A$ が成り立つ．
(iii) A の部分集合からなる任意のフィルター基底 $\mathscr{B}$ に対して，$\lim\mathscr{B}\subset A$ が成り立つ．

証明　**(i) $\Longrightarrow$ (ii)．** $(x_\lambda)_\lambda$ を A の任意の有向族とする．$\lim(x_\lambda)=\emptyset$ なら，明らかに $\lim(x_\lambda)\subset A$ である．$a\in\lim(x_\lambda)$ なら，命題 6.1 の (ii) $\Longrightarrow$ (i) から $a\in\overline{A}$ が分かる．今 A は閉集合だから，$a\in\overline{A}=A$ となる．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)． $\mathscr{B}$ を A の部分集合からなるフィルター基底とする．$a\in\mathscr{B}$ なら，任意の $V\in\mathscr{V}_a$ に対して $B\subset V$ を満たす $B\in\mathscr{B}$ がとれる．$x_V\in B$ を 1 点選べば，$(x_V)_{V\in\mathscr{V}_a}$ は x に収束する有向族である．条件 (ii) より，$a\in\lim(x_V)\subset A$ となる．

(iii) $\Longrightarrow$ (i)． $a\in\overline{A}$ とすれば，命題 6.1 の (iii) $\Longrightarrow$ (i) より，A の部分集合からなるフィルター基底 $\mathscr{B}$ で $a\in\lim\mathscr{B}$ を満たすものが存在する．このとき，条件 (iii) より $a\in\lim\mathscr{B}\subset A$ となり，$\overline{A}\subset A$ が分かる． □

位相空間から位相空間への写像の連続性も，収束の言葉を用いて特徴づけることができる．

命題 6.3　X,Y を位相空間とし，$f\colon X\to Y$ を写像とする．このとき，次の 3 条件は同値である．

(i) f は連続である．
(ii) X の任意の有向族 (x_λ) について，$f(\lim x_\lambda)\subset\lim f(x_\lambda)$ が成り立つ．
(iii) X の任意のフィルター基底 $\mathscr{B}$ について $f_*(\lim\mathscr{B})\subset\lim f_*(\mathscr{B})$ が成り立つ．

証明　**(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明．** 有向族がいかなる点にも収束しないときには (ii) の包含関係は明らかである．$a\in\lim_\lambda x_\lambda$ としたとき，有向族 $(f(x_\lambda))_\lambda$ が $f(a)$ に収束することを示す．f は a で連続だから，任意の $V\in\mathscr{V}_{f(a)}$ に対して a の近傍 W で $f(W)\subset V$ を満たすものがとれる．(x_λ) は a に収束するから，適当な λ_W をとれば，任意の $\kappa\geq\lambda_W$ について $x_\kappa\in W$ となる．これより，任意の $\kappa\geq\lambda_W$ について $f(x_\kappa)\subset f(W)\subset V$ となり，$(f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ が $f(a)$ に収束することが分かった．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． $A\subset X$ かつ $x\in\overline{A}$ とし，x に収束する有向族 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ をとる[12)]．このとき仮定 (ii) と系 6.2 より $f(a)\subset f(\lim(x_\lambda))\subset\lim f(x_\lambda)\subset\overline{f(A)}$ となる．よって任意の $A\subset X$ に対して $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$ が成り立ち，f は連続であることが分かる[13)]．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) の証明． $\mathscr{B}$ をフィルター基底とする．$\lim\mathscr{B}=\emptyset$ ならば $f_*(\lim\mathscr{B})=\emptyset\subset\lim f_*(\mathscr{B})$ は明らかなので，$\mathscr{B}$ の極限が存在する場合を考えればよい．$a\in\mathscr{B}$ とする．$V\in\mathscr{V}_{f(a)}$ を任意にとれば，f の連続性より $f(W)\subset V$ なる $W\in\mathscr{V}_a$ が選べる．W は a の近傍で $\mathscr{B}$ は a に収束することから，$B\subset W$ なる $B\in\mathscr{B}$ が存在する．このとき $f(B)\subset f(W)\subset V$ かつ $f(B)=f_*(B)\in f_*(\mathscr{B})$ な

12)　命題 6.1
13)　命題 3.15

ので，$f_*(\mathscr{B})$ は $f(a)$ に収束する[14]．

(iii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． $A \subset X$ かつ $x \in \overline{A}$ とし，$\mathscr{A}$ の部分集合からなるフィルター基底で a に収束するようなものをとる．（命題 6.1）このとき，仮定 (iii) および系 6.2 から $f(a) \in f_*(\lim \mathscr{B}) \subset \lim f_*(\mathscr{B}) \subset \overline{f(A)}$ が成り立つ．すなわち $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ となり，命題 3.15 より f は連続である． □

6.2 有向族とフィルターの関係

ここまで見てきたように，フィルターと有向族については，ほぼ似たような性質が成り立つ．これより，フィルターと有向族には何かしらの関係性があると予想される．続く二つの定理に見られるように，フィルターと有向族の関係は具体的に表現することが可能である．

定理 6.4 X を位相空間とし，$x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を X の任意の有向族とする．集合族 $\mathscr{F}(x)$ を

$$\mathscr{F}(x) = \{A \subset X \mid \exists \lambda \in \Lambda,\ \forall \kappa \geq \lambda,\ x_\kappa \in A\}$$

と定義する．このとき $\mathscr{F}(x)$ は X 上のフィルターであり，$\lim \mathscr{F}(x) = \lim(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が成り立つ．

証明　Step 1：準備—Λ 上のフィルター基底． $\lambda \in \Lambda$ に対して

$$\Lambda_{\geq \lambda} = \{\kappa \in \Lambda \mid \kappa \geq \lambda\} \tag{5}$$

と定義する．Λ は空でない有向集合なので，各 $\Lambda_{\geq \lambda}$ は空でない Λ の部分集合である．$\mathscr{B} = \{\Lambda_{\geq \lambda} \mid \lambda \in \Lambda\}$ と定めれば，$\mathscr{B}$ が Λ 上のフィルター基底となることを示そう．$\mathscr{B}$ が空でないことはすぐにわかる．また $\Lambda_{\geq \lambda}$ がどれも空でないことは既に述べた．つまり $\mathscr{B}$ は条件 (Fb1) を満たしている．$\lambda, \mu \in \Lambda$ とすれば，Λ が有向集合であることから，$\nu \in \Lambda$ を $\lambda, \mu \leq \nu$ となるように選ぶことができる．このとき $\Lambda_{\geq \nu} \subset \Lambda_{\geq \lambda} \cap \Lambda_{\geq \mu}$ であることから，$\mathscr{B}$ は (Fb2) も満たす．

Step 2：フィルター $\mathscr{F}(x)$ について． Step 1 より $\mathscr{B}$ は Λ 上のフィルター基底だから，命題 5.8 より $x_*\mathscr{B}$ は X 上のフィルター基底である．このフィルター基底 $x_*\mathscr{B}$ によって生成されるフィルター $\mathrm{flt}(x_*\mathscr{B})$ が命題の主張におけるフィルター $\mathscr{F}(x)$ に他ならない．

Step 3：$\lim \mathscr{F}(x) = \lim x$ の証明． $y \in \lim(x_\lambda)$ とは，

$$\forall V \in \mathscr{V}_y\ \exists \lambda \in \Lambda\ \forall \kappa \geq \lambda\ x_\kappa \in V$$

ということである．これは明らかに任意の $V \in \mathscr{V}_y$ が $\mathscr{F}(x)$ の元であるということと同値である． □

定理 6.4 の証明中に現れるフィルター基底 $\mathscr{B}$ は言わば「無限遠点に収束」するようなフィルター基底である．したがって，定理 6.4 の主張は「有向族の収束性とは有向族の『無限遠点』における連続性だ」という様なこと述べているとも解釈できるだろう．

14）命題 5.10

次は，定理 6.4 とは逆にフィルターが先に与えられたとし，それに対応する有向族の構成を行い性質を調べてみよう．

定理 6.5　X を位相空間とし，$\mathscr{F}$ を X のフィルターとする．集合族 Λ を

$$\Lambda = \{(x, A) \in X \times \mathscr{F} \mid x \in A\}$$

と定義し，二項関係 $\leq_\Lambda$ を

$$(x_1, A_1) \leq_\Lambda (x_2, A_2) :\Longleftrightarrow A_1 \supset A_2$$

によって定める．このとき，Λ は有向集合となる．有向族 $x(\mathscr{F}) = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を $(x, A) \mapsto x$ と定義すれば，$\lim(x_\lambda) = \lim \mathscr{F}$ および $\mathscr{F}(x(\mathscr{F})) = \mathscr{F}$ が成り立つ．

証明　Step1：Λ が有向集合であることの証明． $\leq_\Lambda$ が反射律と推移率を満たすことは明らかである．$(x_1, A_1), (x_2, A_2) \in \Lambda$ とすれば，$\mathscr{F}$ はフィルターだから $\emptyset \neq A_1 \cap A_2 \in \mathscr{F}$ である．$x_3 \in A_1 \cap A_2$ を任意の選べば，$(x_3, A_1 \cap A_2) \in \Lambda$ は $(x_3, A_1 \cap A_2) \geq (x_1, A_1)$ かつ $(x_3, A_1 \cap A_2) \geq (x_2, A_2)$ を満たす．よって Λ は有向集合である．

Step2：$\mathscr{F}(x(\mathscr{F})) = \mathscr{F}$ の証明． $A \in \mathscr{F}(x(\mathscr{F}))$ とすれば，

$$\exists \lambda_A \in \Lambda \ \forall \lambda \geq \lambda_A \ x_\lambda \in A$$

が成り立つ．上の式を満たす λ_A を $\lambda_A = (y_0, B_0)$ と書くことにする．このとき任意の $y \in B_0$ に対して $(y, B_0) \geq (y_0, B_0)$ だから，$y = x_{(y, B_0)} \in A$ が成立．すなわち $B_0 \subset A$ である．$\mathscr{F}$ はフィルターで $B_0 \in \mathscr{F}$ だから，$A \in \mathscr{F}$ である．よって $\mathscr{F}(x(\mathscr{F})) \subset \mathscr{F}$ が成立する．

次に，逆向きの包含関係を示す．$A \in \mathscr{F}$ として，$x_0 \in A$ を 1 点固定する．$\lambda_0 = (x_0, A)$ とすれば，任意の $\lambda = (y, B) \geq \lambda_0$ に対して $x_\lambda = y \in B \subset A$ が成立．よって $A \subset \mathscr{F}(x(\mathscr{F}))$ が分かる．これで $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}(x(\mathscr{F}))$ も示された．

Step3：$\lim(x_\lambda) = \lim \mathscr{F}$ の証明． Step2 および定理 6.4 より，

$$\lim \mathscr{F} = \lim \mathscr{F}(x(\mathscr{F})) = \lim x(\mathscr{F})$$

が従う．　□

まとめ

- 位相空間 X の部分集合 A が与えられたとき，点 $a \in X$ が A の触点であることと，A における有向族やフィルターで a に収束するものが存在することは，同値である．
- 連続写像とは，極限を保存するような写像のことである．
- 有向族とフィルターは具体的な対応関係がある．

References

[1] Nicolas Bourbaki. *General Topology. Chapters 1–4*. Elements of Mathematics. Original French edition published by MASSON, Paris, 1971. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995. vii+437 pp. DOI: 10.1007/978-3-642-61701-0. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540642411.

[2] Ryszard Engelking. *General topology*. Revised and completed edition. Sigma Series in Pure Mathematics 6. Translated from the Polish by the author. Heldermann Verlag, Berlin, 1989, pp. viii+529. ISBN: 3-88538-006-4.

[3] Klaas Pieter Hart, Jun-iti Nagata, and Jerry E. Vaughan, eds. *Encyclopedia of General Topology*. Elsevier Science, 2004, pp. x+526. ISBN: 0-444-50355-2. URL: https://www.elsevier.com/books/encyclopedia-of-general-topology/hart/978-0-444-50355-8.

[4] ケリー. **位相空間論**. Trans. by 児玉 之宏. 吉岡書店, 1968.

[5] John L. Kelley. *General Topology*. Graduate Texts in Mathematics 27. Originally published by Van Nostrand, 1955. Springer-Verlag New York, 1975. xiv+298 pp. ISBN: 978-0-387-90125-1. URL: https://www.springer.com/gp/book/9780387901251.

[6] 児玉之宏 and 永見啓応. **位相空間論**. 岩波書店, 1974.

[7] K. Kuratowski. *Topology. Volume I*. Trans. by J. Jaworowski. New edition, revised and augmented. Academic Press; Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1966. xx+560.

[8] Tom Leinster. *Basic Category Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 143. Cambridge University Press, Cambridge, 2014, pp. viii+183. ISBN: 978-1-107-04424-1. DOI: 10.1017/CBO9781107360068.

[9] 宮島静雄. **関数解析**. 横浜図書, 2014.

[10] Emily Riehl. *Category Theory in Context*. Aurora: Modern Math Originals. Dover Publications, 2016. URL: http://www.math.jhu.edu/~eriehl/context/.

[11] 齋藤正彦. **数学の基礎. 集合・数・位相**. 東京大学出版会, 2002. URL: http://www.utp.or.jp/book/b302226.html.

[12] 斎藤毅. **集合と位相**. 大学数学の入門 8. 東京大学出版会, 2009.

索引