位相空間論セミナー II：位相空間の構成 Ver.1.1

大阪大学大学院基礎工学研究科
平井祐紀

2020 年 4 月 23 日

更新履歴
2016.11.27 Ver.1.0
2020.4.23 Ver.1.1 公開用に少し修正

概要

本ノートでは，位相空間の構成方法のうち基本的なものを学ぶ．

1　写像による位相の引き戻し，像位相

位相空間の開集合系は，写像によって送ったり引き戻したりすることが出来る．

命題 1.1. X, Y を集合，$f\colon X \to Y$ を写像とする．$f^*\colon \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X)$ を $A \mapsto f^{-1}(A)$ で定義する．

(i) $\mathscr{O}_Y$ を Y の開集合系とする．このとき

$$f^*\mathscr{O}_Y = \{f^*(U) \mid U \in \mathscr{O}_Y\}$$

は X の開集合系である．

(ii) $\mathscr{O}_X$ を X の開集合系とする．このとき

$$(f^*)^{-1}\mathscr{O}_X = \{G \in \mathscr{P}(Y) \mid f^*(G) \in \mathscr{O}_X\}$$

は Y の開集合系となる．

証明. (i) $Y \in \mathscr{O}_Y$ だから，$f^*(Y) = X \in f^*\mathscr{O}_Y$ である．また，$\emptyset \in \mathscr{O}_Y$ より，$f^*(\emptyset) = \emptyset \in f^*\mathscr{O}_Y$ となる．よって $f^*\mathscr{O}_Y$ は開集合の公理 (O1) を満たす．

$(U_i)_{i\in I}$ を $f^*\mathscr{O}_Y$ の族とすれば，$U_i = f^*(V_i)$ なる $\mathscr{O}_Y$ の元の族がとれる．このとき

$$\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} V_i\right) = f^*\left(\bigcup_{i\in I} V_i\right)$$

かつ $\bigcup_i V_i \in \mathscr{O}_Y$ なので，$\bigcup_i U_i \in f^*\mathscr{O}_Y$ である．よって開集合の公理 (O2) も満たされる．

$U, V \in f^*\mathscr{O}_Y$ として，$U = f^*(U')$ かつ $V = f^*(V')$ なる $U', V' \in \mathscr{O}_Y$ をとる．このとき $U \cap V = f^{-1}(U' \cap V')$ かつ $U' \cap V' \in \mathscr{O}_Y$ なので，$U \cap V \in f^*\mathscr{O}_Y$ が分かる．

以上の議論により，$f^*\mathscr{O}_Y$ は開集合の公理 (O1) から (O3) を満たすことが確かめられた．

(ii) まずは，条件 (O1) を確かめる $f^*Y = X \in \mathscr{O}_X$ だから，$X \in (f^*)^{-1}\mathscr{O}_X$ である．$f^*\emptyset = \emptyset\mathscr{O}_X$ だから，$\emptyset \in \mathscr{O}_X$ も分かる．

次に (O2) を満たすかどうか調べる．$(A_i)_{i\in i}$ を $(f^*)^{-1}\mathscr{O}_X$ の元の族とすれば，$f^*\bigcup_i U_i = \bigcup_i f^*U_i \in (f^*)^{-1}\mathscr{O}_X$．よって $\bigcup_i U_i \in (f^*)^{-1}\mathscr{O}_X$ も分かる．

最後に，(O3) が成り立つかどうか確かめる．$A, B \in (f^*)^{-1}\mathscr{O}_X$ とすれば $f^*(A\cap B) = f^*A \cap f^*B \in \mathscr{O}_X$ だから，$A\cap B \in (f^*)^{-1}\mathscr{O}_X$ である．

よって $(f^*)^{-1}\mathscr{O}_X$ は開集合の公理系を満たす． □

定義 1.2. 命題 1.1 における開集合系 f^*O_Y によって定まる位相を，f による位相の引き戻しという．また，$(f^*)^{-1}\mathscr{O}_X$ によって定まる Y の位相を，f による像位相という．

既に見たように，位相空間 $(X,\mathscr{O}_X)$ から $(Y,\mathscr{O}_Y)$ への写像 f が連続であることは，Y の位相の f による引き戻しが X の位相より粗いことと同値である．また，これは f による像位相が Y の位相より細かいこととも同値である．言い換えれば，$f^*\mathscr{O}_Y$ は $(Y,\mathscr{O}_Y)$ への写像 f が連続になるような X の位相のうち最小のものである．また，$(f^*)^{-1}\mathscr{O}_X$ は $(X,\mathscr{O}_X)$ からの写像 f が連続になるような f の位相のうち，最大のものである．

位相の引き戻しにおける基本近傍系は，元の位相空間の基本近傍系で記述できる．

命題 1.3. X を集合，$(Y,\mathscr{O}_Y)$ を位相空間とする．写像 $f\colon X\to Y$ による引き戻しにより，X を位相空間と見る．$x\in X$ とし，$\mathscr{U}_{f(x)}$ を $f(x)\in Y$ における基本近傍系とする．$f^*\mathscr{U}_{f(x)}$ は x の基本近傍系である．

証明. $V \in \mathscr{V}_x$ とすれば，開集合 $U \in f^*\mathscr{O}_Y$ で $x\in U\subset V$ なるものがとれる．$U\in f^*\mathscr{O}_Y$ だから，適当な $U' \in \mathscr{O}_Y$ によって $U = f^{-1}(U')$ と表現されることに注意する．$x\in f^{-1}(U')$ かつ U' は開集合なので，$U' \in \mathscr{V}_{f(x)}$ である．$\mathscr{U}_{f(x)}$ は $f(x)$ の基本近傍系だから，$f(x) \in W \subset U'$ なる $W \in \mathscr{U}_{f(x)}$ がとれる．このとき $x \in f^{-1}(W) \subset f^{-1}(U') = U \subset V$ および $f^{-1}(W) \in f^*\mathscr{U}_{f(x)}$ が成り立つから，$f^*\mathscr{U}_{f(x)}$ は x の基本近傍系であることが分かった． □

定義 1.4. $(X,\mathscr{O})$ を位相空間とし，$i\colon A\hookrightarrow X$ を包含写像とする．i による引き戻しによって定義される A の位相を相対位相といい，$(A, i^*\mathscr{O})$ を X の部分位相空間と呼ぶ．

$i\colon A\hookrightarrow X$ が包含写像なら，全ての $B\subset X$ に対して $i^*(B) = A\cap B$ が成り立つ．よって相対位相の開集合系は

$$\{A\cap U \mid U\in\mathscr{O}\}$$

と表現できる．一般に，部分位相空間 A の開集合は X の開集合にはなっていないが，特に A が X の開集合なら $i^*\mathscr{O}\subset\mathscr{O}$ である．

$B\subset A\subset X$ としたとき，B の A における相対位相に関する閉包を $\mathrm{Cl}_A B$，内部を $\mathrm{Int}_A B$ などと表すことにする．

命題 1.5. X を位相空間，A をその部分位相空間とする．$B\subset A$ とすれば，$\mathrm{Cl}_A B = (\mathrm{Cl}_X B)\cap A$ が成り立つ．

証明. 明らかに $B = B\cap A \subset (\mathrm{Cl}_X B)\cap A$ であり，$(\mathrm{Cl}_X B)\cap A$ は A の閉集合なので $\mathrm{Cl}_A B \subset (\mathrm{Cl}_X B)\cap A$ が成立．F は B を含む A の閉集合とすれば，F は X のある閉集合 F' によって $F = F'\cap A$ と表現される．F' は F を含む X の閉集合なので $\mathrm{Cl}_X B \subset \mathrm{Cl}_X F \subset F'$ が成立．これより $(\mathrm{Cl}_X B)\cap A \subset (\mathrm{Cl}_X F)\cap A \subset F'\cap A = F$

が成立．すなわち $(\mathrm{Cl}_X B) \cap A$ は B を含む A の閉集合のうち最小のものであり，A における B の閉包に等しい． $\square$

定義 1.6. $(A, \mathscr{O}_A)$ と $(Y, \mathscr{O}_Y)$ を位相空間とし，$i\colon A \to Y$ を単射とする．

(i) i が連続であるとき，i を連続な埋め込み (embedding) という．

(ii) $\mathscr{O}_A = i^* \mathscr{O}_Y$ のとき，i を同相埋め込み (homeomorphic embedding) という．

埋め込みという言葉で何を指すのかはその本によって違うので，注意が必要である．

2 集合族によって生成される位相

定義 2.1. X を集合とし，$\mathscr{U}$ を X の部分集合族とする．このとき，$\mathscr{U}$ の元をすべて開集合とするような X の開集合系で，最小のものが存在する．これを $\mathscr{U}$ によって生成される位相といい，$\mathscr{O}(\mathscr{U})$ で表すことにする．X の位相 $\mathscr{O}$ が $\mathscr{O} = \mathscr{O}(\mathscr{U})$ を満たすとき，$\mathscr{U}$ は $\mathscr{U}$ の準基 (subbase) であるという．

定義 2.1 で述べたように，任意の $\mathscr{U} \subset \mathscr{P}(X)$ に対し，$\mathscr{U}$ を含む最小の開集合系が存在する．実際，次のように定義すればよい．

$$\mathscr{A} = \{\mathscr{G} \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(X)) \mid \mathscr{G} \text{ は } X \text{ の開集合系で，} \mathscr{G} \supset \mathscr{U}\}$$

とすれば，$X \in \mathscr{A}$ より $\mathscr{A}$ は空でない集合族である．$\mathscr{O} = \bigcap \mathscr{A}$ とすれば，これは $\mathscr{U}$ を含む最小の開集合系になっている．ここまでは $\mathscr{O}(\mathscr{U})$ は抽象的に定義をしたが，これはもう少しだけ具体的に書くことが出来る．

定理 2.2. X を集合とし，$\mathscr{U}$ をその部分集合族で，$\bigcup \mathscr{U} = X$ なるものとする[*1]．このとき

$$\mathscr{O}(\mathscr{U}) = \left\{ G \in \mathscr{P}(X) \,\middle|\, \forall x \in G,\ \exists n \in \mathbb{N}_{\geq 1},\ \exists U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{U},\ x \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i \subset G \right\} \tag{1}$$

が成立する．特に

$$\mathscr{U}' := \{U_1 \cap \cdots \cap U_n \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1},\ U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{U}\}$$

は $\mathscr{O}(\mathscr{U})$ の開基である．

証明．*Step1* : (1) **右辺が実際に開集合系を定めることの証明．** (1) 右辺の集合を $\mathscr{W}$ で表すことにする．$\emptyset$ は明らかに (1) 右辺の条件を満たすので，$\emptyset \in \mathscr{W}$ である．また，仮定 $\bigcup \mathscr{U} = X$ より，任意の $x \in X$ についてある $U \in \mathscr{U}$ で $x \in U \subset X$ なるものが存在する．これより $X \in \mathscr{W}$ である．よって $\mathscr{W}$ は開集合系の公理 (O1) を満たす．

$\mathscr{A} \subset \mathscr{W}$ は空でない族とする．$x \in \bigcup \mathscr{A}$ とすれば，ある $A \in \mathscr{A}$ について $x \in A$ となる．$\mathscr{W}$ の定義より $x \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i \subset A$ なる $U_1, \ldots, U_n$ が取れる．このとき $x \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i \subset A \subset \bigcup \mathscr{A}$ となっているから，$\bigcup \mathscr{A} \in \mathscr{W}$ が分かる．よって開集合の公理 (O2) も成立．

あとは，開集合の公理 (O3) を調べれば良い．$U, V \in \mathscr{W}$ とする．$x \in U \cap V$ とすれば，$U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_m$ で

$$x \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i \subset U, \quad x \in \bigcap_{1 \leq j \leq m} V_j \subset V$$

[*1] この条件を満たすときに限って準基と呼ぶこともある．

を満たすものがとれる．このとき

$$x \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i \cap \bigcap_{1 \leq j \leq m} V_j \subset U \cap V$$

となり，$U \cap V \in \mathscr{W}$ が分かる．以上の議論により，$\mathscr{W}$ が実際に X 上の開集合系であることが確かめられた．

Step2 : $\mathscr{W} = \mathscr{O}(\mathscr{U})$ **の証明．** Step1 と $\mathscr{W}$ の定義より，$\mathscr{W}$ は $\mathscr{U} \subset \mathscr{W}$ を満たす開集合系である．$\mathscr{O}(\mathscr{U})$ の最小性より，$\mathscr{O}(\mathscr{U}) \subset \mathscr{W}$ である．

逆向きの包含関係を示す．$W \in \mathscr{W}$ とすれば，任意の $x \in X$ に対してある $U \in \mathscr{U}' \subset \mathscr{O}(\mathscr{U})$ で $x \in U \subset W$ なるものが存在する．これより，W は $(X, \mathscr{O}(\mathscr{U}))$ の開集合である．すなわち $\mathscr{W} \subset \mathscr{O}(\mathscr{U})$ □

定理 2.2 の特徴づけを用いると，$\mathscr{U}$ によって生成される位相の基本近傍系は次の命題のようになる．

命題 2.3. X を集合とし，$\mathscr{U} \subset \mathscr{P}(X)$ は $\bigcup \mathscr{U} = X$ を満たすとする．さらに，$\mathscr{U}'$ は $\mathscr{U}$ の元の（0 でない）有限個の共通部分全体のなす集合族とする．このとき

$$\mathscr{U}_x := \{U \in \mathscr{U}' \mid x \in U\}$$

は，位相空間 $(X, \mathscr{O}(\mathscr{U}))$ での x における基本近傍系である．

証明．$V \in \mathscr{V}_x$ とする．このとき，開集合 $U \in \mathscr{O}(\mathscr{U})$ で $x \in U \subset V$ なるものが存在する．定理 2.2 より，$U' = U_1 \cap \cdots \cap U_n$ で $x \in U' \subset U$ なるものがとれる．$\mathscr{U}_x$ の定義より $U' \in \mathscr{U}_x$ であるから，$\mathscr{U}_x$ が基本近傍系であることが分かった． □

命題 2.4. $(X, \mathscr{O}_X), (Y, \mathscr{O}_Y)$ を位相空間とし，$\mathscr{U}$ を $\mathscr{O}_Y$ の準基とする．このとき，$f\colon X \to Y$ について次の 2 条件は同値である．

(i) f は連続．
(ii) 任意の $U \in \mathscr{U}$ について $f^{-1}(U) \in \mathscr{O}_X$．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii) は明らか．

(ii) を仮定すれば，$\mathscr{U} \subset (f^*)^{-1}\mathscr{O}_X$ である．$\mathscr{U}$ は $\mathscr{O}_Y = \mathscr{O}(\mathscr{U})$ だから，位相の最小性より $\mathscr{O}_Y \subset (f^*)^{-1}\mathscr{O}_X$ となる．よって f は連続である． □

準基の引き戻しは，引き戻しによって定まる位相の準基である．

系 2.5. X, Y を集合とし，$f\colon X \to Y$ を写像とする．$\mathscr{U} \subset \mathscr{P}(Y)$ とする．このとき，$f^*\mathscr{U}$ は $f^*\mathscr{O}(\mathscr{U})$ の準基である．

証明．命題 2.5 を言い換えると，$\mathscr{O}(f^*\mathscr{U}) = f^*\mathscr{O}(\mathscr{U})$ が成り立つということである．明らかに $f^*\mathscr{U} \subset f^*\mathscr{O}(\mathscr{U})$ なので，生成される位相の最小性より $\mathscr{O}(f^*\mathscr{U}) \subset f^*\mathscr{O}(\mathscr{U})$ である．一方，$f^*\mathscr{U} \subset \mathscr{O}(f^*\mathscr{U})$ だから，命題 2.4 より $f\colon (X, \mathscr{O}(f^*\mathscr{U})) \to (Y, \mathscr{O}(\mathscr{U}))$ は連続写像である．したがって，連続写像の特徴づけにより $f^*\mathscr{O}(\mathscr{U}) \subset \mathscr{O}(f^*\mathscr{U})$ も分かる． □

3 直積位相と誘導位相

本セミナーの最初の節では，写像 $f\colon X \to Y$ が連続なるような最小の位相 $f^*\mathscr{O}_Y$ を導入した．同様にして，一つの写像ではなく写像の族が連続となるような最小の位相を考えることが出来る．

定義 3.1. X を集合とし，$(Y_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}$ を位相空間の族，$(f_i\colon X \to Y_i)_{i\in I}$ を写像の族とする．集合族 $\bigcup_{i\in I} f_i^* \mathscr{O}_i$ によって生成される位相を，写像の族 (f_i) による誘導位相 (induced topology) または逆位相，始位相 (initial topology) などとよぶ．誘導位相を $\mathscr{O}(f_i; i \in I)$ で表すことにする．

写像 $f\colon X \to Y$ が一つだけあるときは，f による誘導位相は f による位相の引き戻しである．このときは X の開集合は $f^*\mathscr{O}_Y$ と具体的に書けるが，一般の場合には誘導位相による開集合は明示的に書くことは出来ない．しかし，基本近傍系については具体的な表現が存在する．

命題 3.2. X を集合，$(Y_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}$ を位相空間の族，$(f_i\colon X \to Y_i)_{i\in I}$ を写像の族とする．(f_i) による誘導位相によって，X を位相空間と考える．

(i) 各 $\mathscr{O}_i$ について，準基 $\mathscr{U}_i$ で $\bigcup \mathscr{U}_i = Y_i$ を満たすものが与えられているとする．このとき $\bigcup_i f_i^* \mathscr{U}_i$ は $\mathscr{O}(f_i; i \in I)$ の準基である．

(ii) $x \in X$ とし，各 i について $f_i(x)$ の基本近傍系 $\mathscr{U}_{f_i(x)}$ が与えられているとする．このとき，$\bigcup_i f_i^* \mathscr{U}_{f_i(x)}$ の元の（0 でない）有限個の共通部分全体は，x の基本近傍系をなす．

証明．(i) $U \in \mathscr{O}(f_i; i \in I)$ とし，$x \in U$ をとる．$\bigcup_i f^* \mathscr{O}_i$ が準基であることから，

$$x \in \bigcap_{1\le k\le n} f_{i_k}^* U_{i_k} \subset U$$

を満たす $i_1, \dots, i_n$ と $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$ がとれる．さらに，$\mathscr{U}_i$ が $\bigcup \mathscr{U}_i$ を満たす $\mathscr{O}_i$ の準基であることから，

$$f_{i_k}(x) \in V_1^{i_k} \cap \cdots \cap V_{m_k}^{i_k} \subset U_{i_k}$$

を見たす $m_k \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ と $V_j^{i_k} \in \mathscr{U}_i$ が存在する．このとき

$$x \in \bigcap_{1\le k\le n} \bigcap_{1\le j\le m_k} f_{i_k}^*(V_j^{i_k}) \subset \bigcap_{1\le k\le n} f_{i_k}^* U_{i_k} \subset U$$

が成り立つから，$\bigcup_i f_i^* \mathscr{U}_i$ の元の有限個の共通部分全体は $\mathscr{O}(f_i; i \in I)$ の開基を成すことが分かる．よって $\bigcup_i f_i^* \mathscr{U}_i$ は $\mathscr{O}(f_i; i \in I)$ の準基である．

(ii) $V \in \mathscr{V}_x$ とすれば，

$$x \in \bigcap_{1\le k\le n} f_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \subset V$$

を満たす $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ および $i_1, \dots, i_n \in I$，$U_{i_k} \in \mathscr{O}_i$ が存在する．各 U_{i_k} は $f_{i_k}(x)$ の近傍になっているから，$V_{i_k} \in \mathscr{U}_{f_{i_k}(x)}$ で

$$f_{i_k}(x) \in V_{i_k} \subset U_{i_k}$$

なるものがとれる．f_{i_k} は $\mathscr{O}(f_i; i \in I)$ のもとで連続だから，$f_{i_k}^{-1} V_{i_k}$ はまた x の近傍になっていることに注意する．このとき

$$x \in \bigcap_{1\le k\le n} f_{i_k}^{-1} V_{i_k} \subset \bigcap_{1\le k\le n} f_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \subset V$$

である．これより $\bigcup_i f_i^* \mathscr{U}_{f_i(x)}$ の元の（0 でない）有限個の共通部分全体は，x の基本近傍系をなすことが分かる．□

誘導位相をいれた位相空間への関数の連続性には，次の特徴づけがある．

命題 3.3. X を集合，$(f_i\colon X\to Y_i)_{i\in I}$ を位相空間への写像の族とし，X は $\mathscr{O}(f_i; i\in I)$ により位相空間と見なす．$(T,\mathscr{O}_T)$ を任意の位相空間とし，$g\colon T\to X$ を写像とする．このとき，次の 2 条件は同値である．

(i) g は連続.

(ii) 任意の $i\in I$ について $f_i\circ g$ は連続.

証明. (i) $\Longrightarrow$ (ii) $f_i\colon X\to Y_i$ は連続だから，合成 $f_i\circ g$ は連続である．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) $U\in\bigcup_i f_i^*\mathscr{O}_{Y_i}$ とすれば，$U=f_i^{-1}U_i$ となる $U_i\in\mathscr{O}_{Y_i}$ がとれる．$f_i\circ g$ は連続だから $g^{-1}(U)=g^{-1}(f_i^{-1}(U_i))\in\mathscr{O}_T$ である．すなわち，任意の $U\in\bigcup_i f_i^*\mathscr{O}_{Y_i}$ について $g^{-1}(U)\in\mathscr{O}_T$ が成立．$\bigcup_i f_i^*\mathscr{O}_{Y_i}$ は $\mathscr{O}(f_i; i\in I)$ の準基だから，命題 2.4 より g の連続性が従う． □

命題 3.4. X を集合，$(Y_i,\mathscr{O}_i)_{i\in I}$ を位相空間の族，$(f_i\colon X\to Y_i)_{i\in I}$ を写像の族とする．(f_i) による誘導位相によって，X を位相空間と考える．X の有向集合 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ について，次の 2 条件は同値.

(i) $x\in\lim_\lambda x_\lambda$.

(ii) 任意の $i\in I$ について $f_i(x)\in\lim_\lambda f_i(x_\lambda)$

証明. (i) $\Longrightarrow$ (ii) 各 f_i は連続関数だから，明らか.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) $U\in\mathscr{V}_x$ とすれば，$x\in\bigcap_{1\le k\le n} f_{i_k}^*U_{i_k}\subset U$ を満たす $n\in\mathbb{N}_{\ge1}$ と $i_1,\dots,i_n\in I$，そして $U_{i_k}\in\mathscr{O}_{i_k}$ $(1\le k\le n)$ が取れる．各 k について U_{i_k} は $f_{i_k}(x)$ の開近傍だから，仮定よりある λ_k が存在して，任意の $\lambda\ge\lambda_k$ について $f_{i_k}(x_\lambda)\in U_{i_k}$ となる．ここで $\overline{\lambda}$ を $\overline{\lambda}\ge\lambda_k$ $(1\le k\le n)$ を満たすように選べば，任意の $\lambda\ge\overline{\lambda}$ について

$$x_\lambda\in\bigcap_{1\le k\le n} f_{i_k}^{-1}U_{i_k}\subset U$$

が成り立つ．これより，(x_λ) は x に収束することが分かる． □

命題 3.4 のフィルター版の主張は，以下のようになる．

命題 3.5. X を集合，$(Y_i,\mathscr{O}_i)_{i\in I}$ を位相空間の族，$(f_i\colon X\to Y_i)_{i\in I}$ を写像の族とする．(f_i) による誘導位相によって，X を位相空間と考える．X のフィルター $\mathscr{F}$ について，次の 2 条件は同値である．

(i) $x\in\lim\mathscr{F}$.

(ii) 任意の $i\in I$ について，$f_i(x)\in\lim(f_i)_*(\mathscr{F})$.

証明. (i) $\Longrightarrow$ (ii) 各 f_i が連続であることから明らか.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) 任意の $i\in I$ について $f_i(x)\in\lim(f_i)_*\mathscr{F}$ であるとする．$V\in\mathscr{V}_x$ としたとき，$V\in\mathscr{F}$ となることを示せばよい．V は x の近傍だから，$x\in\bigcap_{1\le k\le n} f_{i_k}^*U_{i_k}\subset V$ を満たす $n\in\mathbb{N}_{\ge1}$ と $i_1,\dots,i_n\in I$，そして $U_{i_k}\in\mathscr{O}_{i_k}$ $(1\le k\le n)$ が取れる．フィルター基底 $(f_i)_*\mathscr{F}$ は $f_i(x)$ に収束するから，$f_{i_j}(x)$ の近傍 $U_{i_k}\in\mathscr{V}_{f_{i_k}(x)}$ はある $B_{i_k}\in(f_{i_k})_*\mathscr{F}$ を含む．$f_{i_k}(B'_{i_k})=B_{i_k}$ なる B'_{i_k} を選べば，$f_{i_k}(B'_{i_k})\subset U_{i_k}$ だから

$$\bigcap_{1\le k\le n} B'_{i_k}\subset\bigcap_{1\le k\le n} f_{i_k}^{-1}(U_{i_k})\subset V,\qquad \bigcap_{1\le k\le n} B'_{i_k}\in\mathscr{F}$$

が成立．$\mathscr{F}$ はフィルターだから $V\in\mathscr{F}$ も分かる． □

誘導位相の概念を用いれば，位相空間の族の直積に位相を誘導することができる．

定義 3.6. $(X_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}$ を位相空間の族とし，$\mathrm{pr}_i\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ を射影とする．射影の族 $(\mathrm{pr}_i)_{i\in I}$ による誘導位相を，$\prod_{i\in I} X_i$ の積位相 (product topology) という．積集合 $\prod_{i\in I} X_i$ を積位相により位相空間と考えたものを，$(X_i)_{i\in I}$ の積位相空間，あるいは単に積空間とよぶ．

定理 3.7. $(X_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}$ を位相空間の族とし，$\mathrm{pr}_i\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ を射影とする．$X = \prod_{i\in I} X_i$ は積位相により位相空間と考える．

(i) $\mathscr{U}_i$ は X_i の準基で，$\bigcup \mathscr{U}_i = X_i$ を満たすとする．このとき，$\bigcup_i \mathrm{pr}_i^* \mathscr{U}_i$ は X の位相の準基である．

(ii) $x \in X$ とし，各 i について $\mathrm{pr}_i(x)$ の基本近傍系 $\mathscr{U}_{\mathrm{pr}_i(x)}$ が与えられているとする．このとき，$\bigcup_i \mathrm{pr}_i^* \mathscr{U}_{\mathrm{pr}_i(x)}$ の元の（0 でない）有限個の共通部分全体は，x の基本近傍系をなす．

(iii) T を任意の位相空間とし，$g\colon T \to X$ を写像とする．このとき，次の 2 条件は同値である．

　(a) g は連続である．

　(b) 任意の $i \in I$ について $\mathrm{pr}_i \circ g$ は連続である．

(iv) $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の有向族とする．$y \in X$ について，その第 i 成分を y_i で表すことにする．このとき，次の 2 条件は同値である．

　(a) $x \in \lim_\lambda x_\lambda$.

　(b) 任意の $i \in I$ について $x_i \in \lim_\lambda x_{\lambda i}$

(v) X のフィルター $\mathscr{F}$ について，次の 2 条件は同値である．

　(a) $x \in \lim \mathscr{F}$.

　(b) 任意の $i \in I$ について，$x_i \in \lim(\mathrm{pr}_i)_*(\mathscr{F})$.

証明. 命題 3.2，命題 3.3，命題 3.4，命題 3.5 より明らか． □

定理 3.7 の (iii) の言っていることは，積空間 $\prod_{i\in I} X_i$ への連続写像とは，X_i への連続写像は I だけ並べたものだということである．(iv) の言っていることは，積空間での収束は成分ごとの収束と同値だということである．特に任意の i で $X_i = X_0$ のような場合は，関数空間 X_0^I の積位相とは，関数族 $f_\lambda : I \to X_0$ の収束が各点収束と同値になるような位相である．

命題 3.8. $(X_i)_{i\in I}$ を位相空間の族とし，各 i で部分集合 $A_i \subset X_i$ が与えられているとする．$\prod_i X_i$ を積位相空間と見たとき，$\overline{\prod_i A_i} = \prod_i \overline{A_i}$ が成り立つ．

証明. いずれかの A_i が空のときは明らかなので，どの A_i も空でないとして示す．各 pr_i は連続だから，任意の $i \in I$ で

$$\mathrm{pr}_i\left(\overline{\prod_{i\in I} A_i}\right) \subset \overline{\mathrm{pr}_i\left(\prod_{i\in I} A_i\right)} = \overline{A_i}$$

が成立．これより，任意の i で

$$\overline{\prod_{i\in I} A_i} \subset \mathrm{pr}_i^{-1}\mathrm{pr}_i\left(\overline{\prod_{i\in I} A_i}\right) \subset \mathrm{pr}_i^{-1}(\overline{A_i}).$$

したがって

$$\overline{\prod_{i\in I} A_i} \subset \bigcap_{i\in I} \mathrm{pr}_i^{-1}(\overline{A_i}) = \prod_{i\in I} \overline{A_i}$$

となる．

逆向きの包含関係を示す．$x = (x_i) \in \prod_{i \in I} \overline{A_i}$ とする．$V \in \mathscr{V}_x$ とすれば，有限個の $i_1 \leq \cdots \leq i_n$ と開集合 $x_i \in U_i \in \mathscr{O}_{X_i}$ を上手くとって $x \in \bigcap_{1 \leq k \leq n} \mathrm{pr}_{i_k}^* U_{i_k} \subset V$ と出来る．$x_{i_k} \in \overline{A}_{i_k}$ であることに注意すれば，$A_{i_k} \cap U_{i_k} \neq \emptyset$ である．ここで

$$W_i = \begin{cases} A_{i_k} \cap U_{i_k} & i \in \{i_1, \dots, i_n\} \\ A_i & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定めれば，$\prod_i W_i$ は空でない．これより

$$\left(\prod_{i \in I} A_i \right) \cap V \supset \prod_{i \in I} W_i \neq \emptyset$$

となり，$\left(\prod_{i \in I} A_i\right) \cap V$ も空ではない．V は x の任意の近傍であったから $x \in \overline{\prod_i A_i}$ が分かる．すなわち

$$\prod_{i \in I} \overline{A}_i \subset \overline{\prod_{i \in I} A_i}$$

も成り立つ． □

系 3.9. $(X_i)_{i \in I}$ を位相空間の族とする．

(i) 任意の i に対して，F_i は X_i の閉集合であるとする．このとき $\prod_{i \in I} F_i$ は積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ の閉集合である．

(ii) 任意の $i \in I$ に対して，A_i は X_i の稠密部分集合とする．このとき，$\prod_{i \in I} A_i$ は積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ で稠密である．

(iii) $I = \mathbb{N}$ とする．各 X_i が可分ならば，積空間 $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ も可分である．

証明. どれも命題 3.8 より明らか． □

命題 3.10. $(X_i)_{i \in I}$ を位相空間の族とし，$\left(\mathrm{pr}_i \colon \prod_{i \in I} X_i \to X_i\right)$ を射影の族とする．このとき，各々の射影 $\mathrm{pr}_i \colon \prod_{i \in I} X_i \to X_i$ は開写像である．

証明. $U \subset \prod_{i \in I} X_i$ を任意の開集合として，$\mathrm{pr}_i(U)$ が開集合であることを示す．$x_i \in \mathrm{pr}_i(U)$ として，$(x_j) \in \mathrm{pr}_i^{-1}(x_i) \cap U \subset U$ を任意にとる．さらに，

$$(x_j) \subset \bigcap_{1 \leq k \leq n} \mathrm{pr}_{i_k}^{-1} U_{i_k} \subset U$$

を満たす開集合 $U_{i_k} \subset X_{i_k}$ を選ぶ．このとき，明らかに

$$x_i \in \mathrm{pr}_i \left(\bigcap_{1 \leq k \leq n} \mathrm{pr}_{i_k}^{-1} U_{i_k} \right) \subset \mathrm{pr}_i(U)$$

である．ある k で $i = i_k$ なら，

$$x_i \in \mathrm{pr}_i \left(\bigcap_{1 \leq k \leq n} \mathrm{pr}_{i_k}^{-1} U_{i_k} \right) = U_{i_k} \subset \mathrm{pr}_i(U)$$

となり，x_i は $U_{i_k} \subset \mathrm{pr}_i(U)$ の内点である．$i \notin \{i_1, \dots, i_n\}$ なら

$$\mathrm{pr}_i \left(\bigcap_{1 \leq k \leq n} \mathrm{pr}_{i_k}^{-1} U_{i_k} \right) = X_i \subset U_{i_k} \subset \mathrm{pr}_i(U)$$

となり，$\mathrm{pr}_i(U) = X_i$ である．いずれの場合でも x_i は $\mathrm{Int}\,\mathrm{pr}_i(U)$ となり，$\mathrm{pr}_i(U)$ は開集合であることが分かる． □

命題 3.11. $(X_i, \mathscr{O}_{X_i})_{i\in I}$ と $(Y_i, \mathscr{O}_{Y_i})_{i\in I}$ を位相空間の族とし，$(f_i \colon X_i \to Y_i)_{i\in I}$ を連続写像の族とする．このとき，積写像 $\prod_{i\in I} f_i$ は連続写像である．各 f_i が同相写像であるならば，$\prod_{i\in I} f_i$ も同相写像である．

証明．*Step1*：**前半の主張．**以下の可換図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} X_i \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"] \arrow[d, "\prod f_i"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X_i \arrow[d, "f_i"] \\
\prod_{i\in I} Y_i \arrow[r, "\mathrm{pr}'_i"'] & Y_i
\end{tikzcd}$$

これより

$$\mathrm{pr}'_i \circ \left(\prod_{i\in I} f_i \right) = f_i \circ \mathrm{pr}_i$$

となるが，右辺は連続関数の合成なので，連続である．よって任意の i について $\mathrm{pr}'_i \circ \left(\prod_{i\in I} f_i\right)$ は連続となり，定理 3.7 より $\left(\prod_{i\in I} f_i\right)$ が連続であることが分かる．

Step2：**後半の主張．**Step1 の結果より，

$$\prod_{i\in I} f_i^{-1} \colon \prod_{i\in I} Y_i \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i$$

が $\prod_{i\in I} f_i$ の逆写像になっていることを示せば十分であるが，これは積の普遍性より明らかである． □

4 像位相

前の節では位相の引き戻しの一般化を考えた．ここでは，§1 で扱った像位相の一般化を考える．

定義 4.1. $(X_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}$ を位相空間の族，Y を集合とし，$(f_i \colon X_i \to Y)_{i\in I}$ を写像の族とする．開集合系 $\bigcap_{i\in I} (f_i^*)^{-1}(\mathscr{O}_i)$ によって定まる Y の位相を像位相また終位相 (final topology) という．

命題 1.1 より各 $(f_i^*)^{-1}\mathscr{O}_i$ は開集合系であり，その共通部分 $\bigcap_{i\in I} (f_i^*)^{-1}(\mathscr{O}_i)$ は実際に開集合系を定める．像位相は，写像の族 f_i が全て連続になるような Y の位相のうち，最大のものである．

命題 4.2. $(X_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}$ を位相空間の族，Y を集合とし，$(f_i \colon X_i \to Y)_{i\in I}$ による像位相で Y を位相空間と考える．任意の位相空間 $(T, \mathscr{O}_T)$ と写像 $g \colon Y \to T$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(i) g は連続である．
(ii) 任意の $i \in I$ について $g \circ f_i$ は連続である．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii) 各 f_i は連続なので，連続写像 $g \colon Y \to T$ との合成も連続である．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) 任意の $i \in I$ で $g \circ f_i$ は連続だから，$U \in \mathscr{O}_T$ とすれば

$$(g \circ f_i)^{-1}(U) = f_i^{-1}(g^{-1}U) \in \mathscr{O}_i, \quad \forall i \in I$$

すなわち

$$g^{-1}U \in \bigcap_{i \in I} (f_i^*)^{-1}\mathscr{O}_i$$

であり，g の連続性が分かる． □

定義 4.3. $(X_i, \mathscr{O}_i)_{i \in I}$ を位相空間の族とし，$j_i\colon X_i \to \coprod_{i \in I} X_i$ を標準単射とする．すなわち，j_i は以下で定義する写像とする．

$$\begin{aligned} j_i\colon X_i &\longrightarrow \coprod_{i \in I} X_i = \left\{ (i, x) \in I \times \bigcup_{i \in I} X_i \;\middle|\; x \in X_i \right\} \\ x &\longmapsto (i, x) \end{aligned}$$

写像の族 $(j_i)_{i \in I}$ による $\coprod_{i \in I} X_i$ の像位相を直和位相という．直和位相により $\coprod_{i \in I} X_i$ を位相空間と考えたものを，直和位相空間，あるいは単に直和空間などとよぶ．

直和の普遍性より，写像の族 $f_i\colon X_i \to \coprod_{i \in I} X_i$ が与えられたとき，図式

$$\begin{tikzcd} \coprod_{i \in I} X_i \arrow[r, "g"] & Y \\ X_i \arrow[u, "j_i"] \arrow[ur, "g_i"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にする $g\colon \coprod_{i \in I} X_i \to Y$ が唯一つ存在する．命題 4.2 よりこの写像 g が連続であることと各 g_i がどれも連続になることは同値である．言い換えれば，直和空間 $\coprod_{i \in I} X_i$ 上の連続関数とは，各 X_i 上で定義された連続関数をつなぎ合わせたものである．

命題 4.4. $(X, \mathscr{O}_X)$ を位相空間とし，$(U_i)_{i \in I}$ を X の開被覆とする．各 U_i 包含写像 $j_i\colon U_i \to X$ による誘導位相により，位相空間と考える．

(i) X の位相は，$(j_i)_{i \in I}$ による像位相である．

(ii) $\mathscr{U}_i$ を U_i の開集合系とする．このとき，X の位相は $\mathscr{U} = \bigcup_{i \in I} \mathscr{U}_i$ によって生成される位相である．

証明. (j_i) による像位相を $\mathscr{O}$ で表すことにする．各 U_i は開集合だから，$\mathscr{U} \subset \mathscr{O}_X$ である．像位相と集合族によって生成される位相の性質より $\mathscr{O}(\mathscr{U}) \subset \mathscr{O}_X \subset \mathscr{O}$ である．$U \in \mathscr{O}$ とすると，

$$U = \bigcup_{i \in I} U \cap U_i = \bigcup_{i \in I} j_i^{-1}(U) \in \mathscr{O}(\mathscr{U})$$

である．これより $\mathscr{O} \subset \mathscr{O}(\mathscr{U})$ も分かる． □

像位相の重要な例として，商空間に位相を入れるというものがある．

定義 4.5. $(X, \mathscr{O}_X)$ を位相空間とし，R を X の同値関係とする．商集合への標準全射 $p\colon X \to X/R$ による像位相を，R による商位相 (quotient topology) という．X/R を商位相によって位相空間と考えたものを，商空間 (quotient space) と呼ぶ．

補題 4.6. $f\colon X \to Z$ を写像，$p\colon X \to Y$ を全射とする．任意の $x, x' \in X$ に対して $p(x) = p(x')$ ならば $f(x) = f(x')$ が成立するとき，次の図式を可換にする g が存在する．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Z \\ Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

証明．斎藤 [6] を見よ． □

補題 4.6 によって存在の保証される写像を，f によってひきおこされた写像という．

命題 4.7. $f\colon X \to Y$ を位相空間から位相空間への写像とし，$p\colon X \to X/R$ を標準的な全射とする．さらに，写像 f は $g\colon X/R \to Y$ をひきおこすとする．このとき，f が連続であることと g が連続であることは同値である．

証明．g が連続なら，明らかに合成 $f = g \circ p$ も連続である．逆に f が連続であると仮定すれば，Y の開集合 U に対して $p^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathscr{O}_X$ である．よって $g^{-1}(U) \in (p^*)^{-1}\mathscr{O}_X$ となる． □

命題 4.8. $(X, \mathscr{O}_X)$ と $(Y, \mathscr{O}_Y)$ を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を全射とする．f が開写像または閉写像ならば，X/R_f と Y は同相である．

証明．f によってひきおこされる可逆写像 $X/R_f \to Y$ を $\overline{f}$ で表す．命題 4.7 より $\overline{f}$ は連続なので，$\overline{f}$ が開写像であることを示せばよい．U を X/R_f の開集合とする．このとき $\overline{f}(U)$ が Y の開集合であることを示す．U は X/R_f の開集合であるから，$p^{-1}(U)$ は X の開集合である．$\overline{f} \circ p = f$ と p の全射性，そして f が開写像であることから

$$\overline{f}(U) = \overline{f}(p(p^{-1}(U)) = f(p^{-1}(U)) \in \mathscr{O}_Y$$

となり，実際に $\overline{f}$ が開写像であることが確かめられた． □

5 逆極限

本節では，直積空間や直和空間を一般化した逆極限，順極限の概念を導入する．

定義 5.1. A を有向集合とし，$(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ を位相空間の族とする．$\alpha \leq \beta$ なる $\alpha, \beta \in A$ に対して，連続写像 $\pi_{\alpha,\beta}\colon X_\beta \to X_\alpha$ が与えられていて，$\pi_{\alpha,\alpha} = \mathrm{id}_{X_\alpha}$ であるとする．さらに，$\alpha \leq \beta \leq \gamma$ について $\pi_{\alpha,\beta}\pi_{\beta,\gamma} = \pi_{\alpha,\gamma}$ が成り立っているとする．

$$\begin{tikzcd} X_\beta \arrow[r, "\pi_{\alpha,\beta}"] & X_\alpha \\ X_\gamma \arrow[u, "\pi_{\beta,\gamma}"] \arrow[ur, "\pi_{\alpha,\gamma}"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft", pos=0.3, shift left=3ex] & \end{tikzcd}$$

このとき，$(X_\alpha, \pi_{\alpha,\beta}; A)$ を位相空間の逆系 (inverse system) あるいは射影系 (projective system) とよぶ．

逆系が与えられたとき，直積空間の適当な部分空間に位相を誘導することができる．

定義 5.2. $\mathbf{X} = (X_\alpha, \pi_{\alpha\alpha'}; A)$ を位相空間の逆系とし，

$$X = \left\{ (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \;\middle|\; \pi_{\alpha,\beta}(x_\beta) = x_\alpha, \forall\alpha \leq \forall\beta \right\}$$

と定義する．積空間 $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ の部分空間 X を，$(X_\alpha, \pi_{\alpha,\beta}; A)$ の逆極限 (inverse limit) あるいは射影極限 (projective limit) とよび，$\varprojlim X_\alpha$ や $\varprojlim \mathbf{X}$ であらわす．

位相空間の逆極限への写像は，次の意味での普遍性を満たす．

定理 5.3. $(X_\alpha, \pi_{\alpha\alpha'}; A)$ を位相空間の逆系とする．Z を位相空間とし，連続写像 $g_\alpha \colon Z \to X_\alpha$ の族で，任意の $\alpha \leq \beta$ について次の図式を可換にするものが与えられているとする．

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "g_\beta"'] \arrow[dr, "g_\alpha"] & \\ X_\beta \arrow[rr, "\pi_{\alpha\beta}"'] & & X_\alpha \end{tikzcd} \tag{2}$$

このとき，連続写像 $g \colon Z \to \varprojlim X_\alpha$ で，任意の $\alpha \in A$ について次の図式を可換にするものが唯一つ存在する．

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "g_\alpha"'] & \varprojlim X_\alpha \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\ & X_\alpha \end{tikzcd}$$

ただし，$\pi_\alpha \colon \varprojlim X_\alpha \to X_\alpha$ は標準射影である．

証明. 積の普遍性より定まる連続写像 $g = (g_\beta) \colon Z \to \prod_\alpha X_\alpha$ が，連続写像 $g \colon Z \to \varprojlim X_\alpha$ を誘導することを示せばよい．$z \in Z$ および $\alpha \leq \beta$ とすれば，積の普遍性と (2) から

$$\pi_{\alpha\beta}\pi_\beta g(z) = \pi_{\alpha\beta} g_\beta(z) = g_\alpha(z) \tag{3}$$

が成立．これは任意の $z \in Z$ に対して $g(z) \in \varprojlim X_\alpha$ が成り立つということに他ならない．あとは，$g \colon Y \to \varprojlim X_\alpha$ が連続であることを示せばよい．ところが，これは相対位相の定義より明らかである． □

上の命題は，次の図式に集約される．

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, dotted, "\exists! u"] \arrow[ddl, "g_\beta"'] \arrow[ddr, "g_\alpha"] & \\ & \varprojlim X_\alpha \arrow[dl, "\pi_\beta"'] \arrow[dr, "\pi_\alpha"] & \\ X_\beta \arrow[rr, "\pi_{\alpha\beta}"'] & & X_\alpha \end{tikzcd}$$

例 5.4. $(X_i)_{i \in I}$ を位相空間の族とする．I の有限部分集合全体を Λ とおけば，Λ は包含関係について有向集合となる．$\lambda \in \Lambda$ に対して

$$X_\lambda = \prod_{i \in \lambda} X_i$$

を積位相空間とする．さらに，$\lambda \subset \mu$ なる I の有限部分集合について $\pi_{\lambda\mu}$ を射影 $X_\mu \to X_\lambda$ とする．このとき $(X_\lambda, \pi_{\lambda\mu}; \Lambda)$ は位相空間の逆系であり，逆極限 $\varprojlim X_\lambda$ は積空間 $\prod_{i\in I} X_i$ と同相である．

このことは，次のようにして確かめられる．$\lambda_i := \{i\} \in \Lambda$ と表記し，次の写像を考える．

$$\begin{aligned} \varphi\colon \varprojlim X_\lambda &\longrightarrow \prod_{i\in I} X_i \\ (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} &\longrightarrow (x_{\lambda_i})_{i\in I} \end{aligned}$$

これが同相写像であることを示せばよい．写像 $\varphi_i := \pi_{\lambda_i} \circ \varphi$ は連続だから，その積であるところの φ も連続である．次に，φ の逆写像 ψ を構成する．$p_\lambda\colon \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in\lambda} X_i$ $(\lambda \in \Lambda)$ を射影とし，

$$\begin{aligned} \psi\colon \prod_{i\in I} X_i &\longrightarrow \varprojlim X_\lambda \\ x = (x_i)_{i\in I} &\longrightarrow ((p_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda} \end{aligned}$$

と定義する．ψ が $\varprojlim X_\lambda$ への写像となっていることは，射影の性質より分かる[*2]．このとき，積位相の定義より写像 $\psi_\lambda := \pi_\lambda \circ \psi$ は連続である．また $\lambda \le \mu$ に対して $\pi_{\lambda\mu}\psi_\mu = \pi_{\lambda\mu}\pi_\mu\psi = \pi_\lambda\psi = \psi_\lambda$ であるから，命題 5.3 より ψ も連続となる．あとは ψ が ϕ の逆写像になっていることを確かめればよい．$(x_i) \in \prod_{i\in I} X_i$ とすれば

$$\phi\psi((x_i)) = \phi((p_\lambda((x_i)_i))_\lambda) = (p_{\lambda_i}(x_i)_i)_{i\in I} = (x_i)_{i\in I}$$

となり，$\phi\psi = \mathrm{id}_{\prod X_i}$ である．逆に $(y_\lambda) \in \varprojlim X_\lambda$ とすれば

$$\psi\phi((y_\lambda)_\lambda) = \psi((y_{\lambda_i})_i) = (p_\lambda((y_{\lambda_i})_{i\in I}))_{\lambda\in\Lambda} = ((y_{\lambda_i})_{i\in\lambda})_{\lambda\in\Lambda} = (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

である，$\psi\phi = \mathrm{id}_{\varprojlim X_\lambda}$ も分かる[*3]．したがって，$\phi\colon \varprojlim X_\lambda \to \prod_{i\in I} X_i$ は同相写像である．

命題 5.5. $(X_\alpha, \pi_{\alpha,\beta}; A)$ を位相空間の逆系とする．$\mathrm{pr}_\alpha\colon \prod_\alpha X_\alpha \to X_\alpha$ を標準射影とし，π_α をその $\varprojlim X_\alpha$ への制限とする．さらに B を A の共終部分集合とし，

$$\mathscr{B} = \{\pi_\alpha^{-1}(U) \mid \alpha \in B, U \in \mathscr{O}_{X_\alpha}\}$$

と定義する．このとき $\mathscr{B}$ は逆極限 $\varprojlim X_\alpha$ の開基である．

証明．射影 $\pi_\alpha\colon \varprojlim X_\alpha \to X_\alpha$ は連続だから，$\mathscr{B}$ の元は明らかに $\varprojlim X_\alpha$ の開集合である．$\varprojlim X_\alpha$ の任意の開集合が $\mathscr{B}$ の元の合併で表現されることを示そう．$i\colon \varprojlim X_\alpha \to \prod_\alpha X_\alpha$ を包含写像とする．U を $\varprojlim X_\alpha$ の開集合とし，$x \in U$ とする．相対位相の定義より $U = i^{-1}(V)$ なる $\prod_\alpha X_\alpha$ の開集合がとれて，さらに定理 3.7 より

$$x \in \mathrm{pr}_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap \mathrm{pr}_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n}) \subset V$$

なる $U_{\alpha_i} \in \mathscr{O}_{X_{\alpha_i}}$ が存在する．B は A で共終だから，$\alpha_i \le \alpha$ $(1 \le i \le n)$ なる α を選び，

$$U_\alpha = \bigcap_{1\le i\le n} \pi_{\alpha_i,\alpha}^{-1}(U_i)$$

と定める．これは X_α の開集合である．いま $\pi_{\alpha_i,\alpha}\pi_\alpha = \pi_{\alpha_i} = \mathrm{pr}_{\alpha_i} \circ i$ に注意すれば，

$$\pi_\alpha^{-1}\pi_{\alpha_i,\alpha}^{-1}(U_i) = \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) = i^{-1}\mathrm{pr}_{\alpha_i}^{-1}(U_i)$$

[*2] $x = (x_i)_{i\in I}$ に対して，$\pi_{\lambda\mu}(\pi_\mu(\psi(x))) = \pi_{\lambda\mu}(p_\mu(x)) = p_\lambda(x)$ が成り立つ．

[*3] $y = (y_\lambda) \in \varprojlim X_\lambda$ より，$(y_{\lambda_i})_{i\in\lambda} = y_\lambda$ が成り立つことに注意せよ．

が成立．これより

$$
\begin{aligned}
\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) = \pi_\alpha^{-1}\left(\bigcap_{1\le i\le n} \pi_{\alpha_i,\alpha}^{-1}(U_i)\right) &= \bigcap_{1\le i\le n} \pi_\alpha^{-1}\pi_{\alpha_i,\alpha}^{-1}(U_i) \\
&= \bigcap_{1\le i\le n} i^{-1}\mathrm{pr}_{\alpha_i}^{-1}(U_i) = i^{-1}\left(\bigcap_{1\le i\le n} \mathrm{pr}_{\alpha_i}(U_i)\right)
\end{aligned}
$$

が成立．よって $x \in \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ となり，$\mathscr{B}$ が逆極限 $\varprojlim X_\alpha$ の基底であることがわかった． $\square$

$\mathbf{X} = (X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}; A)$ および $\mathbf{Y} = (Y_\beta, q_{\beta\beta'}; B)$ を逆系とする．逆系 $\mathbf{X}$ から $\mathbf{Y}$ への写像系 $\mathbf{f} = (f, f_\beta)$ とは，次の条件を満たす写像の族である．

(i) f は B から A への写像．

(ii) f_β は $X_{f(\beta)}$ から Y_β への写像．

(iii) 任意の $\beta \le \beta'$ に対してある $\alpha \in A$ で $f(\beta), f(\beta') \le \alpha$ かつ $f_\beta p_{f(\beta)\alpha} = q_{\beta,\beta'} f_{\beta'} p_{f(\beta')\alpha}$ を満たすものが存在する．

$$
\begin{tikzcd}
& X_{f(\beta')} \arrow[r, "f_{\beta'}"] & Y_{\beta'} \arrow[dd, "q_{\beta'\beta}"] \\
X_\alpha \arrow[ur, "p_{f(\beta')\alpha}"] \arrow[dr, "p_{f(\beta)\alpha}"'] & \circlearrowleft & \\
& X_{f(\beta)} \arrow[r, "f_\beta"'] & Y_\beta
\end{tikzcd}
$$

逆系から逆系への写像系が与えられたとき，次の図式を可換にする写像 $f\colon \varprojlim X_\alpha \to \varprojlim Y_\beta$ が存在する．

$$
\begin{tikzcd}
\varprojlim X_\alpha \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_{f(\beta)}"'] & \varprojlim Y_\beta \arrow[d, "q_\beta"] \\
X_{f(\beta)} \arrow[r, "f_\beta"'] & Y_\beta
\end{tikzcd}
$$

ただし，p_α と q_β は自然な射影を表す．まずは，f の素になる写像 $\widetilde{f}\colon \prod_\alpha X_\alpha \to \prod_\beta Y_\beta$ を構成する．$\beta \in B$ に対して $\widetilde{f}_\beta = f_\beta \circ p_{f(\beta)}$ と定義する．

$$
\begin{tikzcd}
\prod_{\alpha\in A} X_\alpha \arrow[r, "\widetilde{f}_\beta"] \arrow[d, "p_{f(\beta)}"'] & Y_\beta \\
X_{f(\beta)} \arrow[ur, "f_\beta"'] &
\end{tikzcd}
$$

また，$i\colon \varprojlim X_\alpha \to \prod_\alpha X_\alpha$ を包含写像とする．このとき任意の $\beta \le \beta'$ に対して次の図式が可換になることを示せば，命題 5.3 により $\varprojlim Y_\beta$ への写像が誘導されることがわかる．

$$
\begin{tikzcd}
& \varprojlim X_\alpha \arrow[dl, "\widetilde{f}_{\beta'}\circ i"'] \arrow[dr, "\widetilde{f}_\beta\circ i"] & \\
Y_{\beta'} \arrow[rr, "q_{\beta\beta'}"'] & & Y_\beta
\end{tikzcd}
$$

$x \in \varprojlim X_\alpha$ および $\beta \le \beta'$ とすれば，適当な $\alpha \ge f(\beta), f(\beta')$ をとることで

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}_\beta(x) &= f_\beta p_{f(\beta)}(x) \quad (\because \widetilde{f}_\beta \text{ の定義}) \\
&= f_\beta p_{f(\beta)\alpha}(p_\alpha(x)) \quad \left(\because x \in \varprojlim X_\alpha\right) \\
&= q_{\beta,\beta'} f_{\beta'} p_{f(\beta')\alpha}(p_\alpha(x)) \quad (\because \text{写像系の条件 (iii)}) \\
&= q_{\beta,\beta'} f_{\beta'} p_{f(\beta')}(x) \quad \left(\because x \in \varprojlim X_\alpha\right) \\
&= q_{\beta,\beta'} \widetilde{f}_{\beta'}(x) \quad (\because \widetilde{f}_{\beta'} \text{ の定義})
\end{aligned}$$

が分かる．これより，任意の $\beta \in B$ に対して以下の図式を可換にする $f\colon \varprojlim X_\alpha \to \varprojlim Y_\beta$ が唯一つ存在する．

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim X_\alpha \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\widetilde{f}_\beta \circ i"'] & \varprojlim Y_\beta \arrow[d, "q_\beta"] \\
& Y_\beta
\end{tikzcd}$$

ここで構成した写像 f を $\varprojlim \mathbf{f}$ と書き，写像系 $\mathbf{f}$ の逆極限ということにする．

定理 5.6. $\mathbf{X} = (X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}; A)$ および $\mathbf{Y} = (Y_\beta, q_{\beta\beta'}; B)$ を位相空間の逆系とし，$\mathbf{f} = (f, f_\beta)$ を $\mathbf{X}$ から $\mathbf{Y}$ への写像系とする．

(i) 各 $f_\beta\colon X_{f(\beta)} \to Y_\beta$ が連続なら，逆極限 $\varprojlim \mathbf{f}$ は連続である．

(ii) 写像系は，さらに次の条件を満たすとする：$X_{f(\beta)}$ が X_α の部分有向族になっており，$\beta \le \beta'$ かつ $f(\beta) \le f(\beta')$ ならば次の図式は可換である[*4]．

$$\begin{tikzcd}
X_{f(\beta')} \arrow[r, "f_{\beta'}"] \arrow[d, "p_{f(\beta)f(\beta')}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y_{\beta'} \arrow[d, "q_{\beta'\beta}"] \\
X_{f(\beta)} \arrow[r, "f_\beta"'] & Y_\beta
\end{tikzcd} \tag{4}$$

このとき各 f_β が同相写像なら，$\varprojlim \mathbf{f}$ も同相となる．

証明．(i) 命題 5.3 より明らか．

(ii) 連続な逆写像を普遍性を用いて構成しよう．$\alpha \in A$ に対して，写像 $\widetilde{g}_\alpha\colon \varprojlim Y_\beta \to X_\alpha$ を，次の図式が可換になるように定義する．

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim Y_\beta \arrow[r, "\widetilde{g}_\alpha"] \arrow[d, "q_\beta"'] & X_\alpha \\
Y_\beta \arrow[r, "f_\beta^{-1}"'] & X_{f(\beta)} \arrow[u, "p_{\alpha f(\beta)}"']
\end{tikzcd} \tag{5}$$

ただし，$f(\beta)$ は $f(\beta) \ge \alpha$ となるようなものである．この定義が $f(\beta) \ge \alpha$ のとり方に依らないことを確かめよう．$f(\beta), f(\beta') \ge \alpha$ なる β, β' をとったとき，さらに $\beta'' \ge \beta, \beta'$ かつ $f(\beta'') \ge f(\beta), f(\beta')$ を満たす β'' が存在する．このとき

$$p_{\alpha f(\beta)} f_\beta^{-1} q_\beta = p_{\alpha f(\beta')} f_{\beta'}^{-1} q_{\beta'} = p_{\alpha f(\beta'')} f_{\beta''}^{-1} q_{\beta''}$$

[*4] この条件を付け加えなければ私には証明出来なかった．これは必要なのか，情報を求む．

であることを示せばよい．まずは，以下の図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
Y_\beta \arrow[r, "f_\beta^{-1}"] & X_{f(\beta)} \\
Y_{\beta''} \arrow[u, "q_{\beta\beta''}"] \arrow[r, "f_{\beta''}^{-1}"'] & X_{f(\beta'')} \arrow[u, "p_{f(\beta)f(\beta'')}"']
\end{tikzcd}
$$

(ii) の仮定より，これは可換である．これと逆極限の定義より，以下の図式も可換になる．

$$
\begin{tikzcd}
& Y_\beta \arrow[rr, "f_\beta^{-1}"] & & X_{f(\beta)} \arrow[dr, "p_{\alpha f(\beta)}"] & \\
\varprojlim Y_\beta \arrow[ur, "q_\beta"] \arrow[dr, "q_{\beta''}"'] & & & & X_\alpha \\
& Y_{\beta''} \arrow[uu, "q_{\beta\beta'}"] \arrow[rr, "f_{\beta''}^{-1}"'] & & X_{f(\beta'')} \arrow[uu, "p_{f(\beta)f(\beta'')}"] \arrow[ur, "p_{\alpha f(\beta'')}"'] &
\end{tikzcd}
$$

これより

$$
p_{\alpha f(\beta)} f_\beta^{-1} q_\beta = p_{\alpha f(\beta'')} f_{\beta''}^{-1} q_{\beta''}
$$

が分かる．β' の場合も同様である．これより，写像の族 $\widetilde{g}_\alpha \colon \varprojlim Y_\beta \to X_\alpha$ は well-defined であることが分かった．構成法より各 $\widetilde{g}_\alpha$ は連続である．また，$\alpha \leq \alpha'$ に対して $f(\beta) \geq \alpha' \geq \alpha$ なる β をとれば以下の図式は可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
& \varprojlim Y_\beta \arrow[d, "q_\beta"] \arrow[dddl, "\widetilde{g}_{\alpha'}"'] \arrow[dddr, "\widetilde{g}_\alpha"] & \\
& Y_\beta \arrow[d, "f_\beta^{-1}"] & \\
& X_{f(\beta)} \arrow[dl, "p_{\alpha' f(\beta)}"] \arrow[dr, "p_{\alpha f(\beta)}"'] & \\
X_{\alpha'} \arrow[rr, "p_{\alpha\alpha'}"'] & & X_\alpha
\end{tikzcd}
$$

すなわち，任意の $\alpha \leq \alpha'$ に対して $p_{\alpha\alpha'}\widetilde{g}_{\alpha'} = \widetilde{g}_\alpha$ が成り立つ．したがって，命題 5.3 により次の図式を可換にする連続写像 $g \colon \varprojlim Y_\beta \to \varprojlim X_\alpha$ が唯一つ存在する．

$$
\begin{tikzcd}
& \varprojlim Y_\beta \arrow[d, "g"] \arrow[ddl, "\widetilde{g}_{\alpha'}"'] \arrow[ddr, "\widetilde{g}_\alpha"] & \\
& \varprojlim X_\alpha \arrow[dl, "p_{\alpha'}"] \arrow[dr, "p_\alpha"'] & \\
X_{\alpha'} \arrow[rr, "p_{\alpha\alpha'}"'] & & X_\alpha
\end{tikzcd}
$$

あとは，これが $\varprojlim f$ の逆写像になっていることを示せばよい．任意の β に対して

$$q_\beta fg = (q_\beta f)g = (f_\beta p_{f(\beta)})g = f_\beta(p_{f(\beta)}g) = f_\beta \widetilde{g}_{f(\beta)} = f_\beta f_\beta^{-1} q_\beta = q_\beta$$

が成り立つから，普遍性による写像の構成の一意性より，$fg = \mathrm{id}_{\varprojlim Y_\beta}$ が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim Y_\beta \arrow[r, "q_\beta"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y_\beta \arrow[d, "f_\beta^{-1}"] & & \varprojlim Y_\beta \arrow[dd, "f\circ g"'] \arrow[ddr, "q_\beta"] & \\
\varprojlim X_\alpha \arrow[r, "p_{f(\beta)}"'] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X_{f(\beta)} \arrow[d, "f_\beta"] & \Longrightarrow & \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
\varprojlim Y_\beta \arrow[r, "q_\beta"'] & Y_\beta & & \varprojlim Y_\beta \arrow[r, "q_\beta"'] & Y_\beta
\end{tikzcd}$$

同様にして $gf = \mathrm{id}_{\varprojlim X_\alpha}$ も分かるから，g は f の逆写像である．g と f はともに連続だったから，$\varprojlim X_\alpha$ と $\varprojlim Y_\beta$ は同相である． □

系 5.7. $\mathbf{X} = (X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}; A)$ を位相空間の逆系とし，B を A の共終部分集合，$i\colon B \to A$ を包含写像とする．さらに $i_\beta\colon X_\beta \to X_\beta$ を恒等写像とする．このとき，写像系 $(i, i_\beta; B)$ の逆極限 $\varprojlim(i, i_\beta)$ は $\varprojlim X_\alpha$ から $\varprojlim(X_\beta; \pi_{\beta,\beta'}; B)$ への同相写像である．

証明．恒等写像は同相なので，定理 5.6 より明らか． □

系 5.8. $\mathbf{X} = (X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}; A)$ を位相空間の逆系とし，有向集合 A は最大限 α_0 をもつとする．このときこのとき $\varprojlim \mathbf{X}$ は X_{α_0} と同相である．

証明．$\{\alpha_0\}$ は A の共終部分集合だから，系 5.7 より従う． □

6 順極限

最後の節として，位相空間の順極限を扱う．順極限は逆極限の双対的な対象である．

定義 6.1. A を有向集合とし，X_α を集合族とする．$\alpha \leq \beta'$ なる任意の $\alpha, \alpha' \in A$ に対して，写像 $\pi_{\alpha\alpha'}\colon X_\alpha \to X_{\alpha'}$ が定まっていて，それらは以下を満たすとする．

(i) $\pi_{\alpha\alpha} = \mathrm{id}_{X_\alpha}$ が成り立つ．

(ii) $\alpha \leq \alpha' \leq \alpha''$ なら $\pi_{\alpha\alpha''} = \pi_{\alpha'\alpha''}\pi_{\alpha\alpha'}$ である．

このとき，系 $\mathbf{X} = (X_\alpha; \pi_{\alpha\alpha'}; A)$ を順系 (direct system) あるいは帰納系 (inductive system) という．順系が位相空間 X_α と連続写像 $\pi_{\alpha\alpha'}$ の族からなるとき，特に位相空間の順系とよぶことにする．

定義 6.2. $\mathbf{X} = (X_\alpha; \pi_{\alpha\alpha'}; A)$ を位相空間の順系とする．直和集合 $\coprod_{\alpha\in A} X_\alpha$ の同値関係 $R_{\mathbf{X}}$ を次の手順で定める：$(\alpha, x), (\alpha', x') \in \coprod_{\alpha\in A} X_\alpha$ に対して

$$(\alpha, x) R_{\mathbf{X}} (\alpha', x') :\Longleftrightarrow\ \exists \alpha'' \in A\ \pi_{\alpha\alpha''}(x) = \pi_{\alpha'\alpha''}(x')$$

と定める．このとき，直和位相空間 $\coprod_\alpha X_\alpha$ の商空間 $\coprod_\alpha X_\alpha / R_{\mathbf{X}}$ を $\mathbf{X}$ の順極限 (direct limit) あるいは帰納極限 (inductive limit) といい，$\varinjlim X_\alpha$ や $\varinjlim \mathbf{X}$ であらわす．

位相空間の順極限について，逆極限と双対的な普遍性が成り立つ．

定理 6.3. $\mathbf{X} = (X_\alpha; \pi_{\alpha\alpha'}; A)$ を位相空間の順系とする．Z を位相空間とし，連続写像 $g_\alpha\colon X_\alpha \to Z$ の族で，任意の $\alpha \leq \beta$ について次の図式を可換にするものが与えられているとする．

$$\begin{tikzcd}
& Z & \\
X_{\alpha'} \arrow[ur, "g_{\alpha'}"] & & X_\alpha \arrow[ul, "g_\alpha"'] \arrow[ll, "\pi_{\alpha\alpha'}"]
\end{tikzcd} \tag{6}$$

このとき，連続写像 $g\colon Z \to \varprojlim X_\alpha$ で，任意の $\alpha \in A$ について次の図式を可換にするものが唯一つ存在する[*5]．

$$\begin{tikzcd}
& Z & \\
& \varinjlim X_\alpha \arrow[u, dotted, "\exists! g"] & \\
X_{\alpha'} \arrow[uur, "g_{\alpha'}"] \arrow[ur, "\pi_{\alpha'}"] & & X_\alpha \arrow[uul, "g_\alpha"'] \arrow[ul, "\pi_\alpha"'] \arrow[ll, "\pi_{\alpha\alpha'}"]
\end{tikzcd}$$

ただし，$\pi_\alpha\colon \varprojlim X_\alpha \to X_\alpha$ は標準単射 $i_\alpha\colon X_\alpha \to \coprod_{\alpha\in A} X_\alpha$ と商写像 $q\colon \coprod_{\alpha\in A} X_\alpha \to \varinjlim X_\alpha$ の合成である．

$$\begin{tikzcd}
X_\alpha \arrow[r, "i_\alpha"] \arrow[dr, "\pi_\alpha"'] & \coprod_{\alpha\in A} X_\alpha \arrow[d, "q"] \\
& \varinjlim X_\alpha
\end{tikzcd}$$

証明．直和の普遍性より，連続写像 $\widetilde{g}\colon \coprod_{\alpha\in A} X_\alpha \to Z$ が唯一つ存在する．

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{\alpha\in A} X_\alpha \arrow[r, "\widetilde{g}"] & Z \\
X_\alpha \arrow[u, "i_\alpha"] \arrow[ur, "g_\alpha"']
\end{tikzcd}$$

したがってこの写像 $\widetilde{g}$ が，以下の図式を可換にする g を引き起こすことを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{\alpha\in A} X_\alpha \arrow[r, "\widetilde{g}"] \arrow[d, "q"] & Z \\
\coprod_{\alpha\in A} X_\alpha / R_{\mathbf{X}} \arrow[ur, dotted, "\exists g"']
\end{tikzcd} \tag{7}$$

そのためには，$q(x) = q(x')$ なら $\widetilde{g}(x) = \widetilde{g}(x')$ を示せばよろしい．$x = (\alpha, \widetilde{x})$, $x' = (\alpha', \widetilde{x}')$ とすれば，$q(x) = q(x')$ とは

$$\exists \alpha'' \in A \quad \pi_{\alpha\alpha''}(\widetilde{x}) = \pi_{\alpha'\alpha''}(\widetilde{x}')$$

[*5] 図式の一番下の三角形の可換性 $\pi_{\alpha'}\pi_{\alpha\alpha'} = \pi_\alpha$ は順系における写像族 $(\pi_{\alpha\alpha'})$ が満たす条件より分かる．

ということであった．このとき，

$$\widetilde{g}(x) = \widetilde{g}(\alpha, \widetilde{x}) = g_\alpha(\widetilde{x}) = g_{\alpha''}\pi_{\alpha\alpha''}(\widetilde{x}) = g_{\alpha''}\pi_{\alpha'\alpha''}(\widetilde{x}') = g_{\alpha'}(\widetilde{x}') = \widetilde{g}(\alpha', \widetilde{x}') = \widetilde{g}(x')$$

が成り立つから，実際に (7) を可換にする g がただ一つ存在することが確かめられた．この g の連続性は，命題 4.7 より分かる． □

References

[1] Nicolas Bourbaki. *General Topology Part I*. Elements of Mathematics. Hermann, 1966.

[2] Nicolas Bourbaki. *Theory of Sets*. Elements of Mathematics. Hermann, 1968.

[3] R. Engelking. *Outline of General Topology*. Nort-Holland Publishing Company/Polish Scientific Publishers, 1968.

[4] Ryszard Engelking. *General topology*. Translated from the Polish by the author, Monografie Matematyczne, Tom 60. [Mathematical Monographs, Vol. 60]. PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977, 626 pp. (errata insert).

[5] Klaas Pieter Hart, Jun-iti Nagata, and Jerry E. Vaughan, eds. *Encyclopedia of General Topology*. Elsevier Science, 2004, pp. x+526. ISBN: 0-444-50355-2. URL: https://www.elsevier.com/books/encyclopedia-of-general-topology/hart/978-0-444-50355-8.

[6] 斎藤毅. **集合と位相**. 大学数学の入門 8. 東京大学出版会, 2009.