位相空間論セミナー II：位相空間の構成 Ver.2.0

平井祐紀

2021 年 3 月 1 日

更新履歴
2016.11.27 Ver.1.0
2020.4.23 公開用に少し修正（Ver.1.1）
2021.3.1 大幅に更新．Ver.2.0.

概要

本ノートでは，位相空間の構成方法のうち基本的なものを学ぶ.

目次

記号・用語

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$，$\mathbb{N}_{\geq 1} = \{1, 2, \dots\}$.
- $\mathscr{P}X$：集合 X の冪集合.
- 写像 $f\colon X \to Y$ が与えられたとき，
  - $\mathscr{P}(X) \ni A \mapsto f(A) \in \mathscr{P}(Y)$ で定まる写像を $f_*\colon \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y)$ で表す.
  - $\mathscr{P}(Y) \ni B \mapsto f^{-1}(B) \in \mathscr{P}(X)$ で定まる写像を $f^*\colon \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X)$ で表す.

- **Set**：集合と写像の圏.
- 写像の合成 $f \circ g$ を fg と省略して書くこともある.
- 開集合系の公理に，それぞれ以下のような名前をつける.
  (O1) $\emptyset \in \mathscr{O}$ かつ $X \in \mathscr{O}$ が成り立つ.
  (O2) 全ての $\mathscr{U} \subset \mathscr{O}$ について，$\bigcup \mathscr{U} \in \mathscr{O}$ が成り立つ.
  (O3) 全ての $U, V \in \mathscr{O}$ について $U \cap V \in \mathscr{O}$ が成り立つ.
- **Top**：位相空間と連続写像の圏.
- Cl_X：位相空間 X の閉包作用素.
- $(\mathscr{V}_x)_{x \in X}$：位相空間 X の近傍系

1 写像による位相の引き戻し，像位相

§1 では，写像によって位相を送ったり引き戻したりする方法を説明する.

命題 1.1 X, Y を集合，$f\colon X \to Y$ を写像とする.

(i) $\mathscr{O}_Y$ を Y の開集合系とする．このとき

$$f^*\mathscr{O}_Y = \{V \in \mathscr{P}X \mid \exists U \in \mathscr{O}_Y,\ V = f^*U\}$$

は X 上の開集合系である.

(ii) $\mathscr{O}_X$ を X の開集合系とする．このとき

$$(f^*)^*\mathscr{O}_X = (f^*)^{-1}\mathscr{O}_X = \{G \in \mathscr{P}(Y) \mid f^*(G) \in \mathscr{O}_X\}$$

は Y 上の開集合系である.

証明 (i) の証明. $Y \in \mathscr{O}_Y$ だから, $f^*(Y) = X \in f^*\mathscr{O}_Y$ である．また, $\emptyset \in \mathscr{O}_Y$ より, $f^*(\emptyset) = \emptyset \in f^*\mathscr{O}_Y$ となる．よって $f^*\mathscr{O}_Y$ は開集合の公理 (O1) を満たす.

$(U_i)_{i \in I}$ を $f^*\mathscr{O}_Y$ の元の族とし，$\mathscr{O}_Y$ の元の族 $(V_i)_{i \in I}$ は全ての $i \in I$ について $U_i = f^*(V_i)$ を満たしているとする．このとき

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} V_i\right) = f^*\left(\bigcup_{i \in I} V_i\right)$$

かつ $\bigcup_i V_i \in \mathscr{O}_Y$ なので，$\bigcup_i U_i \in f^*\mathscr{O}_Y$ である．よって開集合の公理 (O2) も満たされる.

$U, V \in f^*\mathscr{O}_Y$ として，$U = f^*(U')$ かつ $V = f^*(V')$ なる $U', V' \in \mathscr{O}_Y$ をとる．このとき $U \cap V = f^{-1}(U' \cap V')$ かつ $U' \cap V' \in \mathscr{O}_Y$ なので，$U \cap V \in f^*\mathscr{O}_Y$ がわかる.

以上の議論により，$f^*\mathscr{O}_Y$ は開集合の公理 (O1) から (O3) を満たすことが確かめられた.

(ii) の証明. まずは，条件 (O1) を確かめる $f^*Y = X \in \mathscr{O}_X$ だから，$X \in (f^*)^*\mathscr{O}_X$ である. $f^*\emptyset = \emptyset \in \mathscr{O}_X$ だから，$\emptyset \in \mathscr{O}_X$ もわかる.

次に (O2) を満たすかどうか調べる．$(A_i)_{i\in I}$ を $(f^*)^*\mathscr{O}_X$ の元の族とすれば，$f^*\bigcup_i U_i=\bigcup_i f^*U_i\in(f^*)^*\mathscr{O}_X$ が成り立つ．よって $\bigcup_i U_i\in(f^*)^*\mathscr{O}_X$ となり，条件 (O2) を満たしていることもわかる．

最後に，(O3) が成り立つかどうか確かめる．$A,B\in(f^*)^*\mathscr{O}_X$ とすれば $f^*(A\cap B)=f^*A\cap f^*B\in\mathscr{O}_X$ だから，$A\cap B\in(f^*)^*\mathscr{O}_X$ である．

よって $(f^*)^*\mathscr{O}_X$ は開集合の公理系 (O1)–(O3) を満たす． □

定義 1.2 命題 1.1 における開集合系 f^*O_Y によって定まる位相を，f による位相の引き戻し，あるいは始位相 (initial topology) という．また，$(f^*)^*\mathscr{O}_X$ によって定まる Y の位相を，f による像位相あるいは終位相 (final topology) という．

位相空間論セミナー I において既に見たように，位相空間 $(X,\mathscr{O}_X)$ から $(Y,\mathscr{O}_Y)$ への写像 f が連続であることは，Y の位相の f による引き戻しが X の位相より粗いことと同値である．また，これは f による像位相が Y の位相より細かいこととも同値である．言い換えれば，$f^*\mathscr{O}_Y$ は $(Y,\mathscr{O}_Y)$ への写像 f が連続になるような X の位相のうち最小のものである．そして，$(f^*)^*\mathscr{O}_X$ は $(X,\mathscr{O}_X)$ からの写像 f が連続になるような f の位相のうち，最大のものである．

$(Y,\mathscr{O}_Y)$ を位相空間とすると，位相の引き戻しの概念はスライス圏 $\mathbf{Set}/Y$ から位相空間の圏 $\mathbf{Top}$ への関手を定める．

$$\mathbf{Set}/Y \xrightarrow{\quad\mathscr{O}_Y\quad} \mathbf{Top}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rd, "f"] \arrow[dd, "h"'] & \\ \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \\ Z \arrow[ru, "g"'] & \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} (X, f^*\mathscr{O}_Y) \arrow[d, "h"] \\ (Z, g^*\mathscr{O}_Y) \end{tikzcd}$$

双対的に，$(X,\mathscr{O}_X)$ を位相空間とすれば，像位相の概念は余スライス圏 $X/\mathbf{Set}$ から $\mathbf{Top}$ への関手を定める．

$$X/\mathbf{Set} \xrightarrow{\quad\mathscr{O}_X\quad} \mathbf{Top}$$

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dd, "h"] \\ X \arrow[ru, "f"] \arrow[rd, "g"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ & Z \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} (Y, (f^*)^*\mathscr{O}_X) \arrow[d, "h"] \\ (Z, (g^*)^*\mathscr{O}_X) \end{tikzcd}$$

位相の引き戻しと像位相に関する写像の連続性は，以下の命題のように特徴づけることができる．

命題 1.3 (i) $(Y,\mathscr{O}_Y)$ を位相空間とし，$f\colon X\to Y$ を写像とする．また $(Z,\mathscr{O}_Z)$ を任意の位相空間

とし，$g\colon Z \to X$ を写像とする．このとき，g が引き戻し $f^*\mathscr{O}_Y$ について連続となるための必要十分条件は $f\circ g$ が連続になることである．

(ii) $(X,\mathscr{O}_X)$ を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を写像とする．また $(W,\mathscr{O}_W)$ を任意の位相空間とし，$h\colon Y \to W$ を写像とする．このとき，h が像位相 $(f^*)^*\mathscr{O}_X$ について連続となるための必要十分条件は，$h\circ f$ が連続になることである．

証明　(i) $f\circ g$ が連続であるとは，$(f\circ g)^*\mathscr{O}_Y \subset \mathscr{O}_Z$ が成り立つということである．写像の像と逆像の性質より，これは $g^*(f^*\mathscr{O}_Y) \subset \mathscr{O}_Z$ が成り立つということと同値である．したがって，$f\circ g$ が連続であることと g が $f^*\mathscr{O}_Y$ について連続であることは同値となる．

(ii) $h\circ f\colon X \to W$ が連続であるとは，$((h\circ f)^*)^{-1}\mathscr{O}_X \supset \mathscr{O}_W$ が成り立つということである．写像の像と逆像の性質より，これは $(h^*)^{-1}((f^*)^*\mathscr{O}_X) \subset \mathscr{O}_W$ が成り立つということと同値である．したがって $h\circ f$ が連続であることと h が連続となることは同値となる．　□

位相の引き戻しにおける基本近傍系は，元の位相空間の基本近傍系を用いて記述することができる．

命題 1.4　X を集合，$(Y,\mathscr{O}_Y)$ を位相空間とする．写像 $f\colon X \to Y$ による引き戻しにより，X を位相空間と見る．$x \in X$ とし，$\mathscr{U}_{f(x)}$ を $f(x) \in Y$ における基本近傍系とする．このとき，$f^*\mathscr{U}_{f(x)}$ は x の基本近傍系である．

証明　$f\colon X \to Y$ は連続だから，f は $f(x)$ の近傍を x の近傍に引き戻すことに注意しておく．$V \in \mathscr{V}_x$ とすれば，開集合 $U \in f^*\mathscr{O}_Y$ で $x \in U \subset V$ を満たすものがとれる．$U \in f^*\mathscr{O}_Y$ だから，適当な $U' \in \mathscr{O}_Y$ を用いて $U = f^{-1}(U')$ と表現することができる．$x \in f^{-1}(U')$ かつ U' は開集合なので，U' は $f(x)$ の開近傍である．仮定より $\mathscr{U}_{f(x)}$ は $f(x)$ の基本近傍系だから，$f(x) \in W \subset U'$ を満たす $W \in \mathscr{U}_{f(x)}$ がとれる．このとき $x \in f^{-1}(W) \subset f^{-1}(U') = U \subset V$ および $f^{-1}(W) \in f^*\mathscr{U}_{f(x)}$ が成り立つから，$f^*\mathscr{U}_{f(x)}$ は x の基本近傍系であることが分かった．　□

定義 1.5　$(X,\mathscr{O})$ を位相空間とし，$i\colon A \hookrightarrow X$ を包含写像とする．i による引き戻しによって定義される A の位相を相対位相といい，$(A, i^*\mathscr{O})$ を X の部分位相空間と呼ぶ．

$i\colon A \hookrightarrow X$ が包含写像なら，全ての $B \subset X$ に対して $i^*(B) = A \cap B$ が成り立つ．よって相対位相の開集合系は

$$\{A \cap U \mid U \in \mathscr{O}\}$$

と表現できる．一般に，部分位相空間 A の開集合は X の開集合にはなっていないが，特に A が X の開集合なら $i^*\mathscr{O} \subset \mathscr{O}$ である．

$B \subset A \subset X$ としたとき，B の A における相対位相に関する閉包を $\mathrm{Cl}_A B$，内部を $\mathrm{Int}_A B$ などと表すことにする．

命題 1.6 X を位相空間，A をその部分位相空間とする．$B \subset A$ とすれば，$\mathrm{Cl}_A B = (\mathrm{Cl}_X B) \cap A$ が成り立つ．

証明 明らかに $B = B \cap A \subset (\mathrm{Cl}_X B) \cap A$ であり，$(\mathrm{Cl}_X B) \cap A$ は A の閉集合なので $\mathrm{Cl}_A B \subset (\mathrm{Cl}_X B) \cap A$ が成立．F は B を含む A の閉集合とすれば，F は X のある閉集合 F' によって $F = F' \cap A$ と表現される．F' は F を含む X の閉集合なので $\mathrm{Cl}_X B \subset \mathrm{Cl}_X F \subset F'$ が成立．これより $(\mathrm{Cl}_X B) \cap A \subset (\mathrm{Cl}_X F) \cap A \subset F' \cap A = F$ が成立．すなわち $(\mathrm{Cl}_X B) \cap A$ は B を含む A の閉集合のうち最小のものであり，A における B の閉包に等しい． □

定義 1.7 $(A, \mathscr{O}_A)$ と $(Y, \mathscr{O}_Y)$ を位相空間とし，$i \colon A \to Y$ を単射とする．

(i) i が連続であるとき，i を連続な埋め込み (embedding) という．
(ii) $\mathscr{O}_A = i^* \mathscr{O}_Y$ のとき，i を同相埋め込み (homeomorphic embedding) という．

埋め込みという言葉で何を指すのかはその本によって違うので，注意が必要である．

命題 1.8 $(X, \mathscr{O}_X)$ と $(Y, \mathscr{O}_Y)$ を位相空間とし，$f \colon X \to Y$ を連続単射とする．

(i) f について，次の 2 条件は同値である．
  (a) $f \colon X \to Y$ は同相埋め込みである．
  (b) f が引き起こす写像 $\overline{f} \colon X \to f(X)$ は，$f(X) \subset Y$ の相対位相について同相写像である．
(ii) f について，次の 2 条件は同値である．
  (a) $f \colon X \to Y$ は同相埋め込みかつ $f(X)$ は Y の開集合である．
  (b) f は開写像である．

証明 (i) $i \colon f(X) \to Y$ を包含写像とすれば，$f = i \circ \overline{f}$ である．よって $f^* \mathscr{O}_Y = \overline{f}^* i^* \mathscr{O}_Y$ が成り立つ．f が同相埋め込みであるとは $f^* \mathscr{O}_Y = \mathscr{O}_X$ が成り立つということである．また $f(X)$ の相対位相の開集合系は $i^* \mathscr{O}_Y$ で与えられるから，$\overline{f} \colon X \to f(X)$ が同相であるとは $\overline{f}^* i^* \mathscr{O}_Y = \mathscr{O}_X$ が成り立つということである．したがって，(a) と (b) は同値である．

(ii) (a) $\Longrightarrow$ (b)．$f \colon X \to Y$ は同相埋め込みかつ $f(X)$ は Y の開集合であるとする．(i) より f が引き起こす写像 $f \colon X \to f(X)$ は同相写像だから，任意の開集合 $U \subset X$ について $f(U)$ は $f(X)$ の開集合となる．いま $f(X)$ は Y の開集合だから，$f(X)$ の相対位相に関する開集合 $f(U)$ は Y の開集合でもある．よって f は開写像である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)．$f \colon X \to Y$ は開写像であるとする．このとき X 自身は X の開集合なので $f(X)$ は Y の開集合となる．後は $\mathscr{O}_X \subset f^* \mathscr{O}_Y$ を示せば良い．$U \subset \mathscr{O}_X$ とすれば，f が開写像であることから $f(U) \in \mathscr{O}_Y$ となる．いま f は単射なので，これより $U = f^{-1} f(U) \in \mathscr{O}_Y$ がわかる． □

まとめ

- 写像 $f\colon X \to Y$ が与えられると，f によって X の位相を Y に送ったり，Y の位相を X へと引き戻したりできる．
- 包含写像 $i\colon A \hookrightarrow X$ による X の位相の引き戻しを，A の相対位相という．

2 集合族によって生成される位相

定義 2.1 X を集合とし，$\mathscr{U}$ を X の部分集合族とする．このとき，$\mathscr{U}$ の元をすべて開集合とするような X の開集合系で，最小のものが存在する．これを $\mathscr{U}$ によって生成される位相といい，$\mathscr{O}(\mathscr{U})$ で表すことにする．X の位相 $\mathscr{O}$ が $\mathscr{O} = \mathscr{O}(\mathscr{U})$ を満たすとき，$\mathscr{U}$ は $\mathscr{U}$ の準基 (subbase) であるという．

定義 2.1 で述べたように，任意の $\mathscr{U} \subset \mathscr{P}(X)$ に対し，$\mathscr{U}$ を含む最小の開集合系が存在する．実際，次のように定義すればよい．

$$\mathscr{A} = \{\mathscr{G} \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(X)) \mid \mathscr{G} \text{ は } X \text{ の開集合系で，} \mathscr{G} \supset \mathscr{U}\}$$

とすれば，$\mathscr{P}X \in \mathscr{A}$ より $\mathscr{A}$ は空でない集合族である．$\mathscr{O} = \bigcap \mathscr{A}$ とすれば，これは $\mathscr{U}$ を含む最小の開集合系になっている．

注意 2.2 X を集合とし $\mathscr{U}$ をその部分集合族とすれば，定義 2.1 のように X 上の開集合系 $\mathscr{O}(\mathscr{U})$ がが与えられる．この対応により定まる写像 $\mathscr{O}\colon \mathscr{P}\mathscr{P}X \to \mathscr{P}\mathscr{P}X$ は，次の 3 条件を満たしている．

(i) 全ての $\mathscr{U} \in \mathscr{P}\mathscr{P}X$ について，$\mathscr{U} \subset \mathscr{O}(\mathscr{U})$ が成り立つ．
(ii) $\mathscr{O} \circ \mathscr{O} = \mathscr{O}$ が成り立つ．
(iii) 全ての $\mathscr{U}, \mathscr{V} \in \mathscr{P}\mathscr{P}X$ について，$\mathscr{U} \subset \mathscr{V}$ ならば $\mathscr{O}(\mathscr{U}) \subset \mathscr{O}(\mathscr{V})$ が成り立つ．

したがって，$\mathscr{O}\colon \mathscr{P}\mathscr{P}X \to \mathscr{P}\mathscr{P}X$ は順序論的な意味での閉包作用素となっている[1)]．

$(\mathscr{O}_i)_{i\in I}$ を，X の開集合系の族とする．I が空でないとき，共通部分 $\bigcap_{i\in I}\mathscr{O}_i$ はまた X の開集合系となる．これを $(\mathscr{O}_i)_{i\in I}$ の下限といい，$\bigwedge_{i\in I}\mathscr{O}_i$ で表す．また，$\bigcup_{i\in I}\mathscr{O}_i$ によって生成される位相を $\bigvee_{i\in I}\mathscr{O}_i$ と表し，$(\mathscr{O}_i)_{i\in I}$ の上限と呼ぶ．一般には $\bigcup_{i\in I}\mathscr{O}_i \neq \bigvee_{i\in I}\mathscr{O}_i$ なので注意が必要である．$(\mathscr{O}_i)_{i\in I}$ が空な族の時は，$\bigvee_{i\in I}\mathscr{O}_i = \{\emptyset, X\}$ かつ $\bigwedge_{i\in I}\mathscr{O}_i = \mathscr{P}X$ とすれば，位相の上限と下限は開集合系の任意の族 $(\mathscr{O}_i)_{i\in I}$ について定義される．

集合 X の部分集合族 $\mathscr{A}$ は，$X = \bigcup\mathscr{A}$ を満たすとき X の被覆 (cover) と呼ばれるのであった．X の部分集合族が $\mathscr{U}$ 位相の準基であることに，$\mathscr{U}$ が X の被覆であることを課す流儀もあるので注意が必要である．定義 2.1 では抽象的に $\mathscr{O}(\mathscr{U})$ を定義をしたのが，$\mathscr{U}$ が X の被覆である場合には，

1) Birkhoff [2, Chapter V §1]

$\mathscr{O}(\mathscr{U})$ はもう少し具体的に表現することができる．

定理 2.3　X を集合とし，$\mathscr{U}$ をその被覆とする．このとき

$$\mathscr{O}(\mathscr{U}) = \left\{ G \in \mathscr{P}(X) \;\middle|\; \forall x \in G,\ \exists n \in \mathbb{N}_{\geq 1},\ \exists U_1, \dots, U_n \in \mathscr{U},\ x \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i \subset G \right\} \tag{2.1}$$

が成立する．特に

$$\mathscr{U}' := \{U_1 \cap \cdots \cap U_n \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1},\ U_1, \dots, U_n \in \mathscr{U}\}$$

は $\mathscr{O}(\mathscr{U})$ の開基である．

証明　*Step1*：(2.1) **右辺が実際に開集合系を定めることの証明．**(2.1) 右辺の集合を $\mathscr{W}$ で表すことにする．$\emptyset$ は明らかに (2.1) 右辺の条件を満たすので，$\emptyset \in \mathscr{W}$ である．また，仮定 $\bigcup \mathscr{U} = X$ より，任意の $x \in X$ についてある $U \in \mathscr{U}$ で $x \in U \subset X$ なるものが存在する．これより $X \in \mathscr{W}$ である．よって $\mathscr{W}$ は開集合系の公理 (O1) を満たす．

$\mathscr{A} \subset \mathscr{W}$ は空でない族とする．$x \in \bigcup \mathscr{A}$ とすれば，ある $A \in \mathscr{A}$ について $x \in A$ となる．$\mathscr{W}$ の定義より $x \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i \subset A$ なる $U_1, \dots, U_n$ が取れる．このとき $x \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i \subset A \subset \bigcup \mathscr{A}$ となっているから，$\bigcup \mathscr{A} \in \mathscr{W}$ がわかる．よって $\mathscr{W}$ は開集合の公理 (O2) も満たしている．

後は，$\mathscr{W}$ について開集合の公理 (O3) が成り立つことを示せば良い．$U, V \in \mathscr{W}$ とする．$x \in U \cap V$ とすれば，有限個の $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_m \in \mathscr{U}$ で

$$x \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i \subset U, \quad x \in \bigcap_{1 \leq j \leq m} V_j \subset V$$

を満たすものがとれる．このとき

$$x \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i \cap \bigcap_{1 \leq j \leq m} V_j \subset U \cap V$$

となり，$U \cap V \in \mathscr{W}$ がわかる．

以上の議論により，$\mathscr{W}$ が実際に X 上の開集合系であることが確かめられた．

Step2：$\mathscr{W} = \mathscr{O}(\mathscr{U})$ **の証明．**Step1 と $\mathscr{W}$ の定義より，$\mathscr{W}$ は $\mathscr{U} \subset \mathscr{W}$ を満たす開集合系である．したがって $\mathscr{O}(\mathscr{U})$ の最小性により $\mathscr{O}(\mathscr{U}) \subset \mathscr{W}$ がわかる．

最後に逆向きの包含関係を示そう．$W \in \mathscr{W}$ とする．$x \in W$ を任意の選ぶと，$\mathscr{W}$ の定義より有限個の $U_1, \dots, U_n \in \mathscr{U}$ で $x \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i \subset W$ を満たすものがとれる．このとき $\mathscr{U} \subset \mathscr{O}(\mathscr{U})$ より $U_1, \dots, U_n \in \mathscr{O}(\mathscr{U})$ であることがわかるので，公理 (O3) より $\bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i \in \mathscr{O}(\mathscr{U})$ が従う．ゆえに W は $\mathscr{O}(\mathscr{U})$ に関する x の近傍であり，x は任意の選んでいたことから W は $(X, \mathscr{O}(\mathscr{U}))$ の開集合であることが得られる．すなわち $\mathscr{W} \subset \mathscr{O}(\mathscr{U})$ である．□

定理 2.3 の特徴づけを用いると，$\mathscr{U}$ によって生成される位相の基本近傍系を具体的が具体的に得られる．

命題 2.4　X を集合とする．X の被覆 $\mathscr{U}$ に対して，$\mathscr{U}'$ を定理 2.3 のように定めよう．このとき

$$\mathscr{U}_x := \{U \in \mathscr{U}' \mid x \in U\}$$

は，位相空間 $(X, \mathscr{O}(\mathscr{U}))$ における点 x の基本近傍系である．

証明　$x \in X$ とし，その近傍 $V \in \mathscr{V}_x$ を任意に選ぶ．このとき近傍の定義より，開集合 $U \in \mathscr{O}(\mathscr{U})$ で $x \in U \subset V$ を満たすものをとることができる．さらに，定理 2.3 より $U' = U_1 \cap \cdots \cap U_n$ で $x \in U' \subset U$ なるものが存在する．$\mathscr{U}_x$ の定義より $U' \in \mathscr{U}_x$ であるから，以上の議論で $\mathscr{U}_x$ が x の基本近傍系であることが示された．□

命題 2.5　$(X, \mathscr{O}_X), (Y, \mathscr{O}_Y)$ を位相空間とし，$\mathscr{U}$ を $\mathscr{O}_Y$ の準基とする．このとき，$f\colon X \to Y$ について次の 2 条件は同値である．

(i) f は連続である．

(ii) 全ての $U \in \mathscr{U}$ について $f^{-1}(U) \in \mathscr{O}_X$ が成り立つ．

証明　$\mathscr{U} \subset \mathscr{O}_Y$ と写像の連続性の定義より，(i) $\Longrightarrow$ (ii) は直ちに従う．

(ii) を仮定すれば，$\mathscr{U} \subset (f^*)^*\mathscr{O}_X$ が成り立つ．$\mathscr{U}$ は $\mathscr{O}_Y = \mathscr{O}(\mathscr{U})$ を満たすから，位相の最小性より $\mathscr{O}_Y \subset (f^*)^*\mathscr{O}_X$ となる．したがって f は連続である．□

準基の引き戻しは，引き戻しによって定まる位相の準基である．

系 2.6　X, Y を集合とし，$f\colon X \to Y$ を写像とする．$\mathscr{U} \subset \mathscr{P}(Y)$ とする．このとき，$f^*\mathscr{U}$ は $f^*\mathscr{O}(\mathscr{U})$ の準基である．

証明　系 2.6 の主張は, $\mathscr{O}(f^*\mathscr{U}) = f^*\mathscr{O}(\mathscr{U})$ が成り立つということである．明らかに $f^*\mathscr{U} \subset f^*\mathscr{O}(\mathscr{U})$ なので，集合族によって生成される位相の最小性から $\mathscr{O}(f^*\mathscr{U}) \subset f^*\mathscr{O}(\mathscr{U})$ となる．一方，$f^*\mathscr{U} \subset \mathscr{O}(f^*\mathscr{U})$ だから，命題 2.5 より f は $(X, \mathscr{O}(f^*\mathscr{U}))$ から $(Y, \mathscr{O}(\mathscr{U}))$ への写像として連続となる．したがって，連続写像の特徴づけにより $f^*\mathscr{O}(\mathscr{U}) \subset \mathscr{O}(f^*\mathscr{U})$ もわかる．□

まとめ

- X の部分集合族 $\mathscr{U}$ が与えられると，$\mathscr{U}$ を含む X 上の開集合系で包含関係について最小のものが存在する．これを $\mathscr{U}$ によって生成される位相という．
- X 上の位相 $\mathscr{O}$ が X の部分集合族 $\mathscr{U}$ によって生成されるとき，$\mathscr{U}$ は $\mathscr{O}$ の準基であるという．
- $\mathscr{U}$ を Y の位相の準基とする．このとき，$f\colon X \to Y$ が連続になるための必要十分条件は，全ての $U \in \mathscr{U}$ について $f^{-1}(U)$ が X の開集合になることである．

3 始位相と積位相

本セミナーの最初の節では，写像 $f\colon X \to Y$ が連続なるような最小の位相 $f^*\mathscr{O}_Y$ を導入した．同様にして，一つの写像ではなく写像の族が全て連続となるような最小の位相を考えることができる．

定義 3.1 X を集合とし，$(Y_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}$ を位相空間の族，$(f_i\colon X \to Y_i)_{i\in I}$ を写像の族とする．集合族 $\bigcup_{i\in I} f_i^*\mathscr{O}_i$ によって生成される位相を，写像の族 (f_i) による誘導位相 (induced topology) または逆位相，始位相 (initial topology) などとよぶ．

本ノートでは，写像の族 $(f_i)_{i\in I}$ による誘導位相を $\mathscr{O}(f_i; i \in I)$ で表すことにする．$\mathscr{O}(f_i; i\in I)$ は全ての f_i が連続となるような X の開集合系の内，包含関係について最小のものである．このとき $\mathscr{O}(f_i; i \in I) = \bigvee_{i\in I} \mathscr{O}(f_i)$ が成り立つことに注意しておく．$(f_i)_{i\in I}$ が空な族なら $\bigcup_{i\in I} f_i^*\mathscr{O}_i = \emptyset$ となるので，(f_i) による誘導位相は密着位相 $\{\emptyset, X\}$ である．

写像 $f\colon X \to Y$ が一つだけあるときは，f による誘導位相は f による位相の引き戻しである．このときは X の開集合は $f^*\mathscr{O}_Y$ と具体的に書けるが，一般の場合には誘導位相による開集合は明示的に書くことは出来ない．しかし，準基や基本近傍系については具体的な表現が存在する．

命題 3.2 X を集合，$(Y_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}$ を位相空間の族，$(f_i\colon X \to Y_i)_{i\in I}$ を写像の族とする．$(f_i)_{i\in I}$ による誘導位相によって，X を位相空間と考える．

(i) 各 $i \in I$ について準基 $\mathscr{U}_i$ は Y_i の被覆かつ $\mathscr{O}_i$ の準基であるとする．このとき $\bigcup_i f_i^*\mathscr{U}_i$ は $\mathscr{O}(f_i; i \in I)$ の準基である．

(ii) $x \in X$ とし，各 i について $f_i(x)$ の基本近傍系 $\mathscr{U}_{f_i(x)}$ が与えられているとする．このとき，$\bigcup_i f_i^*\mathscr{U}_{f_i(x)}$ の元の（0 でない）有限個の共通部分全体は，x の基本近傍系をなす．

証明 (i) $U \in \mathscr{O}(f_i; i \in I)$ とし，$x \in U$ をとる．$\bigcup_{i\in I} f_i^*\mathscr{O}_i$ が準基であることから，

$$x \in \bigcap_{1\le k\le n} f_{i_k}^* U_{i_k} \subset U$$

を満たす $i_1, \ldots, i_n$ と $U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$ がとれる．さらに，Y_i の被覆 $\mathscr{U}_i$ は $\mathscr{O}_i$ の準基であることから，

$$f_{i_k}(x) \in V_1^{i_k} \cap \cdots \cap V_{m_k}^{i_k} \subset U_{i_k}$$

を見たす $m_k \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ と $V_j^{i_k} \in \mathscr{U}_i$ が存在する．このとき

$$x \in \bigcap_{1\le k\le n} \bigcap_{1\le j\le m_k} f_{i_k}^*(V_j^{i_k}) \subset \bigcap_{1\le k\le n} f_{i_k}^* U_{i_k} \subset U$$

が成り立つから，$\bigcup_i f_i^*\mathscr{U}_i$ の元の有限個の共通部分全体は $\mathscr{O}(f_i; i \in I)$ の開基を成すことがわかる．したがって，$\bigcup_i f_i^*\mathscr{U}_i$ は $\mathscr{O}(f_i; i \in I)$ の準基となっている．

(ii) $V \in \mathscr{V}_x$ とすれば，

$$x \in \bigcap_{1\le k\le n} f_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) =\subset V$$

を満たす $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ および $i_1, \dots, i_n \in I$，$U_{i_k} \in \mathscr{O}_i$ が存在する．各 U_{i_k} は $f_{i_k}(x)$ の開近傍であるから，$V_{i_k} \in \mathscr{U}_{f_{i_k}(x)}$ で

$$f_{i_k}(x) \in V_{i_k} \subset U_{i_k}$$

を満たすものがとれる．f_{i_k} は $\mathscr{O}(f_i; i \in I)$ のもとで連続だから，$f_{i_k}^{-1}V_{i_k}$ はまた x の近傍になっていることに注意する．このとき

$$x \in \bigcap_{1\le k\le n} f_{i_k}^{-1}V_{i_k} \subset \bigcap_{1\le k\le n} f_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \subset V$$

である．これより $\bigcup_i f_i^*\mathscr{U}_{f_i(x)}$ の元の（0 でない）有限個の共通部分全体は，x の基本近傍系をなすことがわかる． □

誘導位相をいれた位相空間への関数の連続性には，次の特徴づけがある．

命題 3.3 X を集合，$(f_i\colon X \to Y_i)_{i\in I}$ を位相空間への写像の族とし，X は $\mathscr{O}(f_i; i \in I)$ により位相空間と見なす．$(T, \mathscr{O}_T)$ を任意の位相空間とし，$g\colon T \to X$ を写像とする．このとき，次の 2 条件は同値である．

(i) g は連続である．
(ii) 全ての $i \in I$ について $f_i \circ g$ は連続である．

証明 (i) $\Longrightarrow$ (ii)．仮定より写像 $f_i\colon X \to Y_i$ と $g\colon T \to X$ は連続だから，その合成 $f_i \circ g$ も連続である．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．全ての i について，合成写像 $f_i \circ g\colon T \to Y_i$ は連続であるとする．$\bigcup_i f_i^*\mathscr{O}_{Y_i}$ は $\mathscr{O}(f_i; i \in I)$ の準基だから，命題 2.5 より全ての $U \in \bigcup_{i\in I} f_i^*\mathscr{O}_{Y_i}$ について $g^{-1}(U) \in \mathscr{O}_T$ が成り立つことを示せば良い．

$U \in \bigcup_i f_i^*\mathscr{O}_{Y_i}$ とすれば，$U = f_i^{-1}U_i$ を満たす $i \in I$ および $U_i \in \mathscr{O}_{Y_i}$ がとれる．仮定より $f_i \circ g$ は連続だから，$g^{-1}(U) = g^{-1}(f_i^{-1}(U_i)) = (f_i \circ g)^{-1}(U_i) \in \mathscr{O}_T$ となる． □

誘導位相に関する有向族の収束は，次の命題のように言い換えることができる．

命題 3.4 X を集合，$(Y_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}$ を位相空間の族，$(f_i\colon X \to Y_i)_{i\in I}$ を写像の族とする．(f_i) による誘導位相によって，X を位相空間と考える．このとき，X の有向族 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ について，次の 2 条件は同値である．

(i) $x \in \lim_\lambda x_\lambda$ が成り立つ．

(ii) 全ての $i \in I$ について $f_i(x) \in \lim_\lambda f_i(x_\lambda)$ が成り立つ．

証明 (i) $\Longrightarrow$ (ii)．各 f_i は連続関数だから，有向族の極限を保存する[2)]．すなわち，$f_i(\lim_\lambda x_\lambda) \subset \lim_\lambda f_i(x_\lambda)$ が成り立つ．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．$U \in \mathscr{V}_x$ とすれば，$x \in \bigcap_{1\leq k\leq n} f_{i_k}^* U_{i_k} \subset U$ を満たす $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ と $i_1, \dots, i_n \in I$，そして $U_{i_k} \in \mathscr{O}_{i_k}$ $(1 \leq k \leq n)$ が取れる．各 k について U_{i_k} は $f_{i_k}(x)$ の開近傍だから，仮定よりある λ_k が存在して，任意の $\lambda \geq \lambda_k$ について $f_{i_k}(x_\lambda) \in U_{i_k}$ となる．ここで $\overline{\lambda}$ を $\overline{\lambda} \geq \lambda_k$ $(1 \leq k \leq n)$ を満たすように選べば，任意の $\lambda \geq \overline{\lambda}$ について

$$x_\lambda \in \bigcap_{1\leq k\leq n} f_{i_k}^{-1} U_{i_k} \subset U$$

が成り立つ．これより，(x_λ) は x に収束することがわかる．□

命題 3.4 のフィルター版の主張は，以下のようになる．

命題 3.5 X を集合，$(Y_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}$ を位相空間の族，$(f_i \colon X \to Y_i)_{i\in I}$ を写像の族とする．(f_i) による誘導位相によって，X を位相空間と考える．このとき，X 上のフィルター $\mathscr{F}$ について次の 2 条件は同値である．

(i) $x \in \lim \mathscr{F}$ が成り立つ．

(ii) 全ての $i \in I$ について，$f_i(x) \in \lim (f_i)_*(\mathscr{F})$ が成り立つ．

証明 (i) $\Longrightarrow$ (ii)．各 f_i が連続写像になっていることから，$(f_i)_* \lim \mathscr{F} \subset \lim (f_i)_* \mathscr{F}$ が成り立つ[3)]．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．全ての $i \in I$ について $f_i(x) \in \lim (f_i)_* \mathscr{F}$ が成り立つと仮定する．このとき，フィルター $\mathscr{F}$ が x に収束することを示せば良い．ただし，フィルター $\mathscr{F}$ が x に収束するとは，$\mathscr{V}_x \subset \mathscr{F}$ が成り立つということであった[4)]．

$V \in \mathscr{V}_x$ を任意に選ぶと，V は x の近傍だから $x \in \bigcap_{1\leq k\leq n} f_{i_k}^* U_{i_k} \subset V$ を満たす $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ と $i_1, \dots, i_n \in I$，そして $U_{i_k} \in \mathscr{O}_{i_k}$ $(1 \leq k \leq n)$ を取ることができる．フィルター基底 $(f_i)_* \mathscr{F}$ は $f_i(x)$ に収束するから，$f_{i_j}(x)$ の開近傍 $U_{i_k} \in \mathscr{V}_{f_{i_k}(x)}$ はある $B_{i_k} \in (f_{i_k})_* \mathscr{F}$ を含む．$f_{i_k}(B'_{i_k}) = B_{i_k}$ かつ $B'_{i_k} \in \mathscr{F}$ を満たす選べば，$f_{i_k}(B'_{i_k}) \subset U_{i_k}$ だから

$$\bigcap_{1\leq k\leq n} B'_{i_k} \subset \bigcap_{1\leq k\leq n} f_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \subset V, \qquad \bigcap_{1\leq k\leq n} B'_{i_k} \in \mathscr{F}$$

が成立する．$\mathscr{F}$ はフィルターだから $V \in \mathscr{F}$ もわかる．□

誘導位相の概念を用いれば，位相空間の族の直積に位相を誘導することができる．

2） 位相空間論セミナー I 命題 6.3 [8]
3） 位相空間論セミナー I 命題 6.3 [8]
4） 位相空間論セミナー I 定義 5.9 [8]

定義 3.6（直積空間） $(X_i,\mathscr{O}_i)_{i\in I}$ を位相空間の族とし，$\mathrm{pr}_i\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ を射影とする．射影の族 $(\mathrm{pr}_i)_{i\in I}$ による誘導位相を，$\prod_{i\in I} X_i$ の積位相 (product topology) という．積集合 $\prod_{i\in I} X_i$ を積位相により位相空間と考えたものを，$(X_i,\mathscr{O}_i)_{i\in I}$ の積位相空間 (product topological space) や積空間 (product space) とよび，$\prod_{i\in I}(X_i,\mathscr{O}_i)$ や，単に $\prod_{i\in I} X_i$ で表す．

$(X_i,\mathscr{O}_i)_{i\in I}$ が空な族の時は $\prod_{i\in I}(X_i,\mathscr{O}_i)$ は離散空間かつ密着空間である $(1,\mathscr{P}(1))$ と同相になる．ただし，$1=\{0\}$ である．I が 1 点集合の時は $\prod_{i\in I}(X_i,\mathscr{O}_i)$ は $(X_i,\mathscr{O}_i)$ 自身と同相である．

命題 3.2，命題 3.3，命題 3.4，命題 3.5 を積空間に適用すると，次の定理を得る．

定理 3.7 $(X_i,\mathscr{O}_i)_{i\in I}$ を位相空間の族とし，$\mathrm{pr}_i\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ を射影とする．直積集合 $X=\prod_{i\in I} X_i$ を積位相により位相空間と考える．

(i) $\mathscr{U}_i$ は X_i の被覆で，$\mathscr{O}_i$ の準基であるとする．このとき，$\bigcup_i \mathrm{pr}_i^*\mathscr{U}_i$ は X の位相の準基である．

(ii) $x\in X$ とし，各 i について $\mathrm{pr}_i(x)$ の基本近傍系 $\mathscr{U}_{\mathrm{pr}_i(x)}$ が与えられているとする．このとき，$\bigcup_i \mathrm{pr}_i^*\mathscr{U}_{\mathrm{pr}_i(x)}$ の元の（0 でない）有限個の共通部分全体は，x の基本近傍系をなす．

(iii) T を任意の位相空間とし，$g\colon T\to X$ を写像とする．このとき，次の 2 条件は同値である．
  (a) g は連続である．
  (b) 全ての $i\in I$ について $\mathrm{pr}_i\circ g$ は連続である．

(iv) $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の有向族とする．$y\in X$ について，その第 i 成分を y_i で表すことにする．このとき，次の 2 条件は同値である．
  (a) $x\in\lim_\lambda x_\lambda$ が成り立つ．
  (b) 全ての $i\in I$ について $x_i\in\lim_\lambda x_{\lambda i}$ が成り立つ．

(v) X のフィルター $\mathscr{F}$ について，次の 2 条件は同値である．
  (a) $x\in\lim\mathscr{F}$ が成り立つ．
  (b) 全ての $i\in I$ について，$x_i\in\lim(\mathrm{pr}_i)_*(\mathscr{F})$ が成り立つ．

証明 いずれも命題 3.2，命題 3.3，命題 3.4，命題 3.5 より直ちに従う． □

定理 3.7 の (iv) および (v) の言っていることは，積空間での収束は成分ごとの収束と同値だということである．特に全ての i で $X_i=X_0$ が成り立ってるような場合は，関数空間 X_0^I の積位相とは，関数の有向族 $(f_\lambda : I\to X_0)_{\lambda\in\Lambda}$ の収束が各点収束と同値になるような位相である．このことから，X_0^I の積位相のことを各点収束位相 (topology of pointwise convergence) と呼ぶこともある．

積位相空間は，次の定理の意味での普遍性を満たす．

定理 3.8（直積空間の普遍性） $(X_i,\mathscr{O}_i)_{i\in I}$ を位相空間の族とし，$\mathrm{pr}_i\colon \prod_{i\in I} X_i\to X_i$ を射影とする．$(T,\mathscr{O}_T)$ を任意の位相空間とし，連続写像の族 $(g_i\colon T\to X_i)_{i\in I}$ が与えられているとする．このとき，積空間への連続写像 $g\colon T\to\prod_{i\in I} X_i$ で，全ての $i\in I$ について $\mathrm{pr}_i\circ g=g_i$ を満たすものがた

だ一つ存在する．

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "g_i"'] & \prod_{i\in I} X_i \arrow[d, "\mathrm{pr}_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

証明　写像 $g\colon T \to \prod_{i\in I} X_i$ の存在と一意性は，直積集合の普遍性より従う．g の連続性は命題 3.7 (iii) からわかる．　□

定理 3.8 の主張していることは，積空間 $\prod_{i\in I} X_i$ への連続写像とは，X_i への連続写像を I だけ並べたものだということである．このことから，写像の族 $(f_i\colon Z \to X_i)_{i\in I}$ による Z 上の誘導位相 $\mathcal{O}(f_i; i \in I)$ は積空間への写像 $f = (f_i)\colon Z \to \prod_{i\in I} X_i$ による誘導位相 $\mathcal{O}(f)$ と同じものであることもわかる．

定理 3.8 は直積位相空間 $\prod_{i\in I}(X_i, \mathcal{O}_i)$ が位相空間の圏 **Top** における積であるということを示している．すなわち，**Top** は任意の添え字集合について積を持つ．

積空間における閉包作用素の性質を調べよう．

命題 3.9　$(X_i)_{i\in I}$ を位相空間の族とし，各 i で部分集合 $A_i \subset X_i$ が与えられているとする．$\overline{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \overline{A_i}$ が成り立つ．

命題 3.9 の主張における等式 $\overline{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \overline{A_i}$ について，$\overline{}$ がそれぞれどの空間の閉包作用素を表しているのかは注意が必要である．より慎重に書くならば，積空間 $X = \prod_i X_i$ の閉包作用素について $\mathrm{Cl}_X \prod_{i\in I} A_i = \prod_{i\in I} \mathrm{Cl}_{X_i} A_i$ が成り立つということになる．

証明　射影 pr_i はいずれも連続だから，全ての $i \in I$ で

$$\mathrm{pr}_i\left(\overline{\prod_{i\in I} A_i}\right) \subset \overline{\mathrm{pr}_i\left(\prod_{i\in I} A_i\right)} = \overline{A_i}$$

が成り立つ．これより，任意の i で

$$\overline{\prod_{i\in I} A_i} \subset \mathrm{pr}_i^{-1}\mathrm{pr}_i\left(\overline{\prod_{i\in I} A_i}\right) \subset \mathrm{pr}_i^{-1}(\overline{A_i}).$$

となり，

$$\overline{\prod_{i\in I} A_i} \subset \bigcap_{i\in I} \mathrm{pr}_i^{-1}(\overline{A_i}) = \prod_{i\in I} \overline{A_i}$$

を得る．

次に逆向きの包含関係を示す．いずれかの A_i が空のときは明らかなので，どの A_i も空でないとして示せば良い．$x = (x_i) \in \prod_{i\in I} \overline{A_i}$ とする．$V \in \mathcal{V}_x$ とすれば，有限個の $i_1 \leq \cdots \leq i_n$ と開集合

$x_i \in U_i \in \mathscr{O}_{X_i}$ を上手くとって $x \in \bigcap_{1 \leq k \leq n} \mathrm{pr}_{i_k}^* U_{i_k} \subset V$ とできる．$x_{i_k} \in \overline{A}_{i_k}$ であることに注意すれば，$A_{i_k} \cap U_{i_k} \neq \emptyset$ である．ここで

$$W_i = \begin{cases} A_{i_k} \cap U_{i_k} & i \in \{i_1, \dots, i_n\} \\ A_i & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定めれば，$\prod_i W_i$ は空でない．これより

$$\left(\prod_{i \in I} A_i \right) \cap V \supset \prod_{i \in I} W_i \neq \emptyset$$

となり，$\left(\prod_{i \in I} A_i \right) \cap V$ も空ではない．V は x の任意の近傍であったから $x \in \overline{\prod_i A_i}$ がわかる．すなわち

$$\prod_{i \in I} \overline{A}_i \subset \overline{\prod_{i \in I} A_i}$$

も成り立つ． □

系 3.10 $(X_i)_{i \in I}$ を位相空間の族とする．

(i) 全ての i に対して，F_i は X_i の閉集合であるとする．このとき $\prod_{i \in I} F_i$ は積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ の閉集合である．

(ii) 全ての $i \in I$ に対して，A_i は X_i の稠密部分集合であるとする．このとき，$\prod_{i \in I} A_i$ は積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ で稠密である．

(iii) $I = \mathbb{N}$ とする．各 X_i が可分ならば，積空間 $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ も可分である．

証明 (i) F_i がどれも X_i の閉集合であることと命題 3.9 から，

$$\overline{\prod_{i \in I} F_i} = \prod_{i \in I} \overline{F_i} = \prod_{i \in I} F_i$$

が成り立つ．よって $\prod_{i \in I} F_i$ は積空間の閉集合である．

(ii) A_i はどれも X_i の稠密部分集合だから，全ての $i \in I$ で $\overline{A_i} = X_i$ が成り立つ．したがって，命題 3.9 より

$$\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i} = \prod_{i \in I} X_i$$

となり，$\prod_{i \in I} A_i$ は $\prod_{i \in I} X_i$ で稠密であることがわかる．

(iii) 各 $i \in \mathbb{N}$ について，X_i の可算な稠密部分集合 C_i を選ぶ．このときその可算直積 $\prod_{i \in \mathbb{N}} C_i$ はまた可算であり，(ii) よりこれは $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ で稠密でもある．ゆえに $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ は可分である． □

命題 3.11 $(X_i)_{i \in I}$ を位相空間の族とし，$\prod_{i \in I} X_i$ を積位相により位相空間と考える．このとき，射影 $\mathrm{pr}_i \colon \prod_{i \in I} X_i \to X_i$ はいずれも開写像である．

証明 $i \in I$ を任意に選び固定する．$U \subset \prod_{i \in I} X_i$ を任意の開集合として，$\mathrm{pr}_i(U)$ が開集合であることを示そう．そのためには，全ての $x_i \in \mathrm{pr}_i(U)$ について x_i が $\mathrm{pr}_i(U)$ の内点であることを示せば良い．

$x_i \in \mathrm{pr}_i(U)$ とし，$(x_j)_{j \in I} \in \mathrm{pr}_i^{-1}(x_i) \cap U \subset U$ を任意に選ぶ．このとき積位相の性質より，有限個の $i_1, \dots, i_n$ と開集合 $U_k \subset X_{i_k}$ $(1 \leq k \leq n)$ を，

$$(x_j)_{j \in I} \subset \bigcap_{1 \leq k \leq n} \mathrm{pr}_{i_k}^{-1} U_{i_k} \subset U$$

を満たすようにとることができる．上の式で射影をとれば，

$$x_i \in \mathrm{pr}_i \left(\bigcap_{1 \leq k \leq n} \mathrm{pr}_{i_k}^{-1} U_{i_k} \right) \subset \mathrm{pr}_i(U)$$

となる．ある k で $i = i_k$ なら，

$$x_i \in \mathrm{pr}_i \left(\bigcap_{1 \leq k \leq n} \mathrm{pr}_{i_k}^{-1} U_{i_k} \right) = U_{i_k} \subset \mathrm{pr}_i(U)$$

となり，x_i は $U_{i_k} \subset \mathrm{pr}_i(U)$ の内点である．一方 $i \notin \{i_1, \dots, i_n\}$ なら

$$\mathrm{pr}_i \left(\bigcap_{1 \leq k \leq n} \mathrm{pr}_{i_k}^{-1} U_{i_k} \right) = X_i \subset U_{i_k} \subset \mathrm{pr}_i(U)$$

となり，$\mathrm{pr}_i(U) = X_i$ である．いずれの場合でも $x_i \in \operatorname{Int} \mathrm{pr}_i(U)$ となっており，目的とする主張が示された． □

命題 3.12 $(X_i, \mathscr{O}_{X_i})_{i \in I}$ と $(Y_i, \mathscr{O}_{Y_i})_{i \in I}$ を位相空間の族とし，$(f_i \colon X_i \to Y_i)_{i \in I}$ を連続写像の族とする．このとき，積写像 $\prod_{i \in I} f_i$ は連続写像である．各 f_i が同相写像であるならば，$\prod_{i \in I} f_i$ も同相写像である．

証明 *Step1*：**前半の主張．** 以下の可換図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i \in I} X_i \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"] \arrow[d, "\prod f_i"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X_i \arrow[d, "f_i"] \\
\prod_{i \in I} Y_i \arrow[r, "\mathrm{pr}'_i"'] & Y_i
\end{tikzcd}$$

これより

$$\mathrm{pr}'_i \circ \left(\prod_{i \in I} f_i \right) = f_i \circ \mathrm{pr}_i$$

となるが，右辺は連続関数の合成なので，連続である．よって任意の i について $\mathrm{pr}'_i \circ (\prod_{i\in I} f_i)$ は連続となり，定理 3.7 より積写像 $\prod_{i\in I} f_i$ が連続であることがわかる．

Step2：**後半の主張．** f_i がどれも同相写像であるとき逆写像 $f_i^{-1} colon X_i \to Y_i$ は全て連続である．よって step1 から積写像

$$\prod_{i\in I} f_i^{-1} \colon \prod_{i\in I} Y_i \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i$$

の連続性が従う．後は $\prod_{i\in I} f_i^{-1}$ が $\prod_{i\in I} f_i$ の逆写像になっていることを示せば十分であるが，これは集合の直積の普遍性よりわかる． □

まとめ

- 集合 X から位相空間への写像の族 $(f_i \colon X \to Y_i)$ が与えられたとき，全ての f_i が連続になるような X 上の最小の位相を (f_i) による誘導位相という．
- $g \colon Z \to X$ が $(f_i \colon X \to Y_i)$ による誘導位相について連続となるための必要十分条件は，全ての i で $f_i \circ g$ が連続となることである．
- 標準的な射影の族 $(\mathrm{pr}_i \colon \prod_i X_i \to X_i)$ による $\prod_i X_i$ 上の誘導位相を積位相と呼ぶ．
- 積位相空間 $\prod_i X_i$ 上への連続写像とは，各成分が連続になるような写像のことである．また，積位相についての収束は，成分ごとの収束と同値である．
- 閉包作用素は積の構造を保存する．

4 終位相と直和位相，商位相

前の節では位相の引き戻しの一般化を考えた．ここでは，§1 で扱った像位相の一般化を考える．

定義 4.1 $(X_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}$ を位相空間の族，Y を集合とし，$(f_i \colon X_i \to Y)_{i\in I}$ を写像の族とする．このとき，Y の位相 $\bigwedge_{i\in I} (f_i^*)^{-1}(\mathscr{O}_i)$ を像位相または終位相 (final topology) という．

I が空でなければ, $(f_i \colon X_i \to Y)_{i\in I}$ による終位相は $\bigcap_{i\in I} (f_i^*)^{-1} \mathscr{O}_i$ で与えられる．$(f_i \colon X_i \to Y)_{i\in I}$ が空な族なら，終位相は離散位相 $\mathscr{P}X$ である．終位相は，写像の族 f_i が全て連続になるような Y の位相のうちで包含関係について最大のものである．

終位相に関する連続性について，命題 3.3 と双対的に以下の命題が成り立つ．

命題 4.2 $(X_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}$ を位相空間の族，Y を集合とし，写像の族 $(f_i \colon X_i \to Y)_{i\in I}$ による終位相で Y を位相空間と考える．このとき，任意の位相空間 $(T, \mathscr{O}_T)$ と写像 $g \colon Y \to T$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(i) g は連続である．

(ii) 全ての $i \in I$ について $g \circ f_i$ は連続となる．

証明 (i) $\Longrightarrow$ (ii)．各 f_i は連続なので，連続写像 $g\colon Y \to T$ との合成はいずれも連続である．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．I が空なら終位相は $\mathscr{P}Y$ なので，全ての写像 $g\colon Y \to T$ は連続である．よって (i) がしたがう．

I が空でない場合を考えよう．このとき全ての開集合 $U \subset T$ について $g^{-1}(U) \in \bigcap_{i\in I}(f_i^*)^{-1}\mathscr{O}_i$ が成り立つことを示せば良い．$U \in \mathscr{O}_T$ を任意に選べば，$g \circ f_i$ がいずれも連続であることから

$$(g \circ f_i)^{-1}(U) = f_i^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathscr{O}_i$$

が全ての $i \in I$ について成り立つ．ゆえに全ての $i \in I$ について

$$g^{-1}(U) \in \bigcap_{i\in I}(f_i^*)^{-1}\mathscr{O}_i$$

となる． □

位相空間 X の部分空間 $(U_i)_{i\in I}$ が開被覆を成している時，X の位相は $(U_i)_{i\in I}$ の位相の情報から復元可能である．

命題 4.3 $(X, \mathscr{O}_X)$ を位相空間とし，$(U_i)_{i\in I}$ を X の開被覆とする．各 U_i 包含写像 $j_i\colon U_i \to X$ による誘導位相により，位相空間と考える．

(i) X の位相は，$(j_i)_{i\in I}$ による終位相である．

(ii) $\mathscr{U}_i$ を U_i の開集合系とする．このとき，X の位相は $\mathscr{U} = \bigcup_{i\in I}\mathscr{U}_i$ によって生成される位相である．

証明 $(j_i)_{i\in I}$ による終位相を $\mathscr{O}$ で表すことにする．各 U_i は開集合だから，$\mathscr{U} \subset \mathscr{O}_X$ である．このとき終位相の最小性と，集合族によって生成される位相の性質より $\mathscr{O}(\mathscr{U}) \subset \mathscr{O}_X \subset \mathscr{O}$ が成り立つ．また $U \in \mathscr{O}$ とすると，

$$U = \bigcup_{i\in I} U \cap U_i = \bigcup_{i\in I} j_i^{-1}(U) \in \mathscr{O}(\mathscr{U})$$

である．これより $\mathscr{O} \subset \mathscr{O}(\mathscr{U})$ もわかる． □

終位相の代表例として，直積空間の双対的な概念である直和空間を考えることが出来る．

定義 4.4（直和空間） $(X_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}$ を位相空間の空でない族とし，$j_i\colon X_i \to \coprod_{i\in I} X_i$ を標準単射とする．すなわち，j_i は以下で定義する写像とする．

$$\begin{aligned} j_i\colon X_i &\longrightarrow \coprod_{i\in I} X_i = \left\{ (i,x) \in I \times \bigcup_{i\in I} X_i \,\middle|\, x \in X_i \right\} \\ x &\longmapsto (i,x) \end{aligned}$$

写像の族 $(j_i)_{i\in I}$ による $\coprod_{i\in I} X_i$ の終位相を直和位相という．直和位相により $\coprod_{i\in I} X_i$ を位相空間と考えたものを，直和位相空間 (direct sum)，あるいは単に直和空間と呼ぶ．位相空間の余積

(coproduct) ということもある．直和位相空間を表す記号を $\coprod_{i\in I}(X_i,\mathscr{O}_i)$ とし，誤解の恐れのないときには単に $\coprod_{i\in I}X_i$ なども用いる．

$(X_i,\mathscr{O}_i)_{i\in I}$ が空な族の時は $\coprod_{i\in I}X_i$ は空集合となるので，直和空間は空な位相空間 $\emptyset$ と考える．I が空集合の時も $(j_i)_{i\in I}$ を空写像 $\emptyset\to\mathrm{Map}(\emptyset,\emptyset)$ と見れば，直和位相は $(j_i)_{i\in I}$ による終位相となっている．

直和空間の基本的な性質を調べよう．

命題 4.5 $(X_i,\mathscr{O}_i)_{i\in I}$ を位相空間の族とし，$j_i\colon X_i\to\coprod_{i\in I}X_i$ を標準的な単射とする[5)]．直和 $X=\coprod_{i\in I}X_i$ を，直和位相により位相空間と考える．

(i) $(T,\mathscr{O}_T)$ を任意の位相空間とし，$g\colon X\to T$ を任意の写像とする．このとき，次の 2 条件は同値である．
  (a) $g\colon X\to T$ は連続である．
  (b) 全ての $i\in I$ について，$g\circ j_i$ は連続である．

(ii) 全ての $i\in I$ について，標準的な単射 $j_i\colon X_i\to X$ は開写像である．

(iii) $(j_i(X_i))_{i\in I}$ は $\coprod_{i\in I}X_i$ の開被覆である．

(iv) 各 i について，X_i の位相は $j_i\colon X_i\to X$ による引き戻しである．

(v) $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X における有向族とする．このとき，次の 2 条件は同値である．
  (a) $x\in\lim_\lambda x_\lambda$ が成り立つ．
  (b) ある $\lambda_0\in\Lambda$ と $i_0\in I$ で，$\lambda\geq\lambda_0$ ならば $x_\lambda\in j_{i_0}(X_{i_0})$ を満たすようなものが存在する．さらに，有向族 $(x_\lambda)_{\lambda\geq\lambda_0}$ は部分空間 $j_{i_0}(X_{i_0})$ の位相で x に収束する．

証明 (i) は命題 4.2 より直ちにしたがう．

(ii) $i\in I$ を固定する．$U\subset X_i$ を任意の開集合としたとき，$j_i(U)$ が直和空間 X の開集合となっていることを示そう．$k=i$ のときは $j_k^{-1}(j_i(U))=U\in\mathscr{O}_i$ であり，$k\neq i$ のときは $j_k^{-1}(j_i(U))=\emptyset\in\mathscr{O}_k$ である．したがって全ての $k\in I$ について $j_k^{-1}(j_i(U))\in\mathscr{O}_k$ が成り立ち，終位相の定義より $j_i(U)$ は X の開集合であることがわかる．

(iii) $(j_i(X_i))_{i\in I}$ が $\coprod_{i\in I}X_i$ の被覆であることは明らかなので，全ての $i\in I$ について $j_i(X_i)$ が X の開集合であることを示せば良い．(ii) より $j_i\colon X_i\to X$ はいずれも開写像なので，$j_i(X_i)$ は X の開集合である．

(iv) 連続単射 $j_i\colon X_i\to X$ は (ii) より開写像でもあるので，命題 1.8 より同相埋め込みとなる．

(v) (a) $\Longrightarrow$ (b)．$x\in\lim_\lambda x_\lambda$ とすれば，ある $i_0\in I$ で $x\in j_{i_0}(X_{i_0})$ を満たすものがただ一つ存在する．(ii) より $j_{i_0}(X_{i_0})$ は x の開近傍となるので，$\lambda_0\in\Lambda$ で全ての $\lambda\geq\lambda_0$ について $x_\lambda\in X_{i_0}$ を満たすようなものを選ぶことができる．$(x_\lambda)_{\lambda\geq\lambda_0}$ は x に収束する有向族 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の部分有向族なので，これは X の位相で x に収束する．ゆえに，部分空間としての位相

5） ただし，I が空集合の時は (j_i) を空写像 $\emptyset\to\mathrm{Map}(\emptyset,\emptyset)$ と考える．

(b) $\Longrightarrow$ (a)．直和空間 $X = \coprod_{i\in I} X_i$ における有向族 (x_λ) は条件 (b) を満たしているとする．V を x の任意の近傍とすれば，$V \cap j_{i_0}(X_{i_0})$ はまた x の近傍である．このとき，仮定より $\lambda_1 \geq \lambda_0$ を上手く選べば，全ての $\lambda \geq \lambda_1$ について $x_\lambda \in V \cap j_{i_0}(X_{i_0}) \subset V$ が成り立つ．よって $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は x に収束する． □

直積空間と双対的に，位相空間の直和は次の定理の意味での普遍性を持つ．

定理 4.6（直和空間の普遍性） $(X_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}$ を位相空間の族とし，$(j_i)_{i\in I}$ を標準単射 $j_i\colon X_i \to \coprod_{i\in I} X_i$ の族とする[6]．$(T, \mathscr{O}_T)$ を任意の位相空間とし，連続写像の族 $(g_i\colon X_i \to T)$ が与えられているとする．このとき，直和空間からの連続写像 $g\colon \coprod_{i\in I} X_i \to T$ で，全ての $i \in I$ について $g \circ j_i = g_i$ を満たすものがただ一つ存在する．

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[d, "j_i"'] \arrow[dr, "g_i"] & \\ \coprod_{i\in I} X_i \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

証明 このような写像 g の存在と一意性は，直和集合の普遍性からしたがう．g の連続性は命題 4.5 (i) よりわかる． □

定理 4.6 の言っていることは，直和空間 $\coprod_{i\in I} X_i$ 上の連続関数とは，各 X_i 上で定義された連続関数をつなぎ合わせた物に他ならないということである．さらに言い換えるならば，直和空間 $\coprod_{i\in I} X_i$ は位相空間の圏 **Top** における余積だということになる．

終位相の重要な例として，商空間に位相を入れるというものもある．

定義 4.7（商空間） $(X, \mathscr{O}_X)$ を位相空間とし，R を X の同値関係とする．商集合への標準全射 $p\colon X \to X/R$ による終位相を，R による商位相 (quotient topology) という．X/R を商位相によって位相空間と考えたものを，商空間 (quotient space) と呼ぶ．

位相空間 $(X, \mathscr{O}_X)$ から $(Y, \mathscr{O}_Y)$ への全射 $f\colon X \to Y$ は，$(f^*)^*\mathscr{O}_X = \mathscr{O}_Y$ を満たしている時に商写像 (quotient map) であるという．商位相とは，商空間への射影 $p\colon X \to X/R$ が商写像となるような X/R の位相である．

$f\colon X \to Z$ を写像，$p\colon X \to Y$ を全射とする．任意の $x, x' \in X$ に対して $p(x) = p(x')$ ならば $f(x) = f(x')$ が成立するとき，次の図式を可換にする g が存在するのであった．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Z \\ Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

6） ただし，I が空集合の時は (j_i) を空写像 $\emptyset \to \mathrm{Map}(\emptyset, \emptyset)$ と考える．

このような写像 g を f によってひきおこされた写像という．

命題 4.8　$(X, \mathscr{O}_X)$ と $(Y, \mathscr{O}_Y)$ を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を写像とする．また R を X の同値関係とし，$p\colon X \to X/R$ を射影とする．写像 f が写像 $g\colon X/R \to Y$ をひきおこすならば，f が連続であることと，g が商位相について連続であることは同値である．

証明　命題 4.2 を適用すればよい．　□

$f\colon X \to Y$ を全射としたとき，$f(x) = f(y)$ によって定まる X の同値関係を R_f によって定義する．射影 $p\colon X \to X/R_f$ を標準的な全射とすれば，以下の図式を可換にする連続写像 $\overline{f}$ がただ一つ存在する．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \\ X/R_f \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

集合と写像の一般論より $\overline{f}$ は全単射となるが，これは一般に同相写像になるとは限らない．$\overline{f}$ が同相となるための十分条件は，以下の命題によって与えられる．

命題 4.9　$(X, \mathscr{O}_X)$ と $(Y, \mathscr{O}_Y)$ を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を全射とする．f が開写像または閉写像ならば，X/R_f と Y は同相である．

証明　f によってひきおこされる連続全単射 $X/R_f \to Y$ を $\overline{f}$ で表す．

f が開写像である場合を考える．命題 4.8 より $\overline{f}$ は連続なので，$\overline{f}$ が開写像であることを示せばよい．U を X/R_f の開集合とする．このとき $\overline{f}(U)$ が Y の開集合であることを示す．U は X/R_f の開集合であるから，$p^{-1}(U)$ は X の開集合である．$\overline{f} \circ p = f$ と p の全射性，そして f が開写像であることから

$$\overline{f}(U) = \overline{f}(p(p^{-1}(U)) = f(p^{-1}(U)) \in \mathscr{O}_Y$$

となり，実際に $\overline{f}$ が開写像であることが確かめられた．

次に f が閉写像の場合は，$\overline{f}$ が可逆であることに注意すれば，$\overline{f}$ が閉写像であることを示せば良いことになる．これは f が開写像の場合と同様の議論で示される．　□

まとめ

- 位相空間から集合 Y への写像の族 $(f_i\colon X \to Y_i)$ が与えられたとき，全ての f_i が連続になるような Y 上の最大の位相を (f_i) による終位相という．
- $g\colon Y \to Z$ が $(f_i\colon X_i \to Y)$ による誘導位相について連続となるための必要十分条件は，全ての i で $g \circ f_i$ が連続となることである．
- 標準的な単射族 $(j_i\colon X_i \to \coprod_i X_i)$ による $\coprod_i X_i$ 上の終位相を直和位相という．
- 直和位相空間 $\coprod_i X_i$ 上の連続写像とは，それぞれの X_i 上で定義された連続写像をつなぎ合わせたものである．
- 位相空間 X 上の同値関係 R が与えられたとき，標準的な射影 $X \to X/R$ による X/R の終位相を商位相という．
- 連続全射 $f\colon X \to Y$ が開写像または閉写像なら，f が引き起こす自然な全単射 $X/R_f \to Y$ は同相写像である．

5 逆極限

本節では，直積空間や部分空間の一般化である，位相空間の逆極限について調べよう．

定義 5.1（位相空間の逆系） A を有向集合とし，$(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ を位相空間の族とする．$\alpha \le \beta$ なる $\alpha, \beta \in A$ に対して，連続写像 $\pi_{\alpha,\beta}\colon X_\beta \to X_\alpha$ が与えられていて，$\pi_{\alpha,\alpha} = \mathrm{id}_{X_\alpha}$ であるとする．さらに，$\alpha \le \beta \le \gamma$ について $\pi_{\alpha,\beta}\pi_{\beta,\gamma} = \pi_{\alpha,\gamma}$ が成り立っているとする．

$$\begin{tikzcd} & X_\beta \arrow[dr, "\pi_{\alpha,\beta}"] & \\ X_\gamma \arrow[ur, "\pi_{\beta,\gamma}"] \arrow[rr, "\pi_{\alpha,\gamma}"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4ex, "\circlearrowleft"] & & X_\alpha \end{tikzcd}$$

このとき，$(X_\alpha, \pi_{\alpha,\beta}; A)$ を位相空間の逆系 (inverse system) あるいは射影系 (projective system) とよぶ．

A を有向集合とすれば，位相空間の逆系 $\mathbf{X}$ とは反変関手 $\mathbf{X}\colon A \to \mathbf{Top}$ のことであり，また反対圏からの共変関手 $\mathbf{X}\colon A^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Top}$ のことである．圏 J から $\mathbf{Top}$ への関手のことを，$\mathbf{Top}$ における型 J の図式と呼んだりするのであった．

位相空間の逆系が与えられると，その逆極限と呼ばれる位相空間を構成することができる．

定義 5.2（位相空間の逆極限） $\mathbf{X} = (X_\alpha, \pi_{\alpha\alpha'}; A)$ を位相空間の逆系とし，

$$X = \left\{ (x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \;\middle|\; \forall\alpha, \beta \in A,\ \alpha \le \beta \implies \pi_{\alpha,\beta}(x_\beta) = x_\alpha \right\}$$

と定義する．積空間 $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ の部分空間 X を，$(X_\alpha, \pi_{\alpha,\beta}; A)$ の逆極限 (inverse limit) あるいは射影極限 (projective limit) とよび，$\varprojlim X_\alpha$ や $\varprojlim \mathbf{X}$ であらわす．

積空間 $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ の標準的な射影を $\pi_\alpha\colon \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\alpha$ で表すことにする．射影 π_α を用いて表現すれば，$x \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ が $\varprojlim \mathbf{X}$ に属することは，'$\alpha \le \beta$ なら $\pi_{\alpha,\beta}\pi_\beta(x) = \pi_\alpha(x)$ が成り立つ' ということと同値になる．射影 π_α を逆極限上に制限した写像 $\pi_\alpha\colon \varprojlim X_\alpha \to X_\alpha$ もまた標準的な射影と呼ぶことにする．積位相と相対位相の定義より，標準的な射影 π_α はいずれも連続写像となる．

位相空間の逆極限は次の定理の意味での普遍性を満たす．

定理 5.3（逆極限の普遍性） $(X_\alpha, \pi_{\alpha\alpha'}; A)$ を位相空間の逆系とする．また Z を任意の位相空間とし，連続写像の族 $(g_\alpha\colon Z \to X_\alpha)_{\alpha\in A}$ が与えられているとする．さらに，$\alpha \le \beta$ を満たす全ての $\alpha, \beta \in A$ について，次の図式は可換であると仮定する．

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "g_\beta"'] \arrow[dr, "g_\alpha"] & \\ X_\beta \arrow[rr, "\pi_{\alpha\beta}"'] & & X_\alpha \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

このとき，連続写像 $g\colon Z \to \varprojlim X_\alpha$ で，全ての $\alpha \in A$ について次の図式を可換にするものが唯一つ存在する．

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "g_\alpha"'] \arrow[d, "g"] \\ X_\alpha & \varprojlim X_\alpha \arrow[l, "\pi_\alpha"] \end{tikzcd}$$

ただし，$\pi_\alpha\colon \varprojlim X_\alpha \to X_\alpha$ は標準射影である．

証明 積の普遍性より定まる連続写像 $g = (g_\beta)\colon Z \to \prod_\alpha X_\alpha$ が，連続写像 $g\colon Z \to \varprojlim X_\alpha$ を引き起こすことを示せばよい．$z \in Z$ および $\alpha \le \beta$ とすれば，積の普遍性と (5.1) から

$$\pi_{\alpha\beta}\pi_\beta g(z) = \pi_{\alpha\beta} g_\beta(z) = g_\alpha(z) = \pi_\alpha g(z)$$

が成り立つ．これは全ての $z \in Z$ に対して $g(z) \in \varprojlim X_\alpha$ が成り立つということに他ならない．後は $g\colon Z \to \varprojlim X_\alpha$ が連続であることを示せばよい．積位相の定義より $g\colon Z \to \prod_\alpha X_\alpha$ は連続であり，$g(Z) \subset \varprojlim X_\alpha$ と誘導位相の定義から $g\colon Z \to \varprojlim X_\alpha$ も連続であることがわかる． □

上の命題は，次の図式に集約される．

$$
\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[d, dotted, "\exists ! u"] \arrow[ddl, "g_\beta"'] \arrow[ddr, "g_\alpha"] & \\
 & \varprojlim X_\alpha \arrow[dl, "\pi_\beta"'] \arrow[dr, "\pi_\alpha"] & \\
X_\beta \arrow[rr, "\pi_{\alpha\beta}"'] & & X_\alpha
\end{tikzcd}
$$

定理 5.3 を圏論的に表現すれば，$(\varprojlim X_\alpha, (\pi_\alpha)_{\alpha\in A})$ は図式 $\mathbf{X}\colon A^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Top}$ の極限だということになる．

次の例で見るように，積空間は逆極限の特別な場合であり，また逆極限は積空間の一般化であると考えることができる．

例 5.4 $(X_i)_{i\in I}$ を位相空間の族とする．I の有限部分集合全体を Λ とおけば，Λ は包含関係について有向集合となる．$\lambda \in \Lambda$ に対して

$$X_\lambda = \prod_{i\in\lambda} X_i$$

を積位相空間とする．さらに，$\lambda \subset \mu$ なる I の有限部分集合について $\pi_{\lambda\mu}$ を射影 $X_\mu \to X_\lambda$ とする．このとき $(X_\lambda, \pi_{\lambda\mu}; \Lambda)$ は位相空間の逆系であり，逆極限 $\varprojlim X_\lambda$ は積空間 $\prod_{i\in I} X_i$ と同相である．

このことは，次のようにして確かめられる．$\lambda_i := \{i\} \in \Lambda$ と表記し，次の写像を考える．

$$
\begin{aligned}
\varphi\colon \varprojlim X_\lambda &\longrightarrow \prod_{i\in I} X_i \\
(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} &\longrightarrow (x_{\lambda_i})_{i\in I}
\end{aligned}
$$

ただし，x_{λ_i} は自然な同型 $X_{\lambda_i} \to X_i$ により X_i の元と同一視している．このように定義された φ が同相写像であることを示せばよい．

各 $i \in I$ について写像 $\varphi_i = \pi_{\lambda_i} \circ \varphi$ は連続となるから，その積であるところの $\varphi\colon \varprojlim X_\lambda \to \prod_{i\in I} X_i$ も連続である．

次に，φ の逆写像の候補となる連続写像 ψ を構成しよう．$p_\lambda\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ を射影とし，

$$
\begin{aligned}
\psi\colon \prod_{i\in I} X_i &\longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \\
x = (x_i)_{i\in I} &\longmapsto ((p_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda}
\end{aligned}
$$

と定義する．また $\pi_\lambda\colon \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ も射影を表すとする．このとき射影の性質より

$$\pi_{\lambda\mu}\pi_\mu\psi = \pi_{\lambda\mu}p_\mu = p_\lambda = \pi_\lambda\psi$$

成り立つから，全ての $x \in \prod_{i \in I} X_i$ について $\psi(x) \in \varprojlim X_\lambda$ であることがわかる．したがって ψ は写像 $\psi\colon \prod_{i\in I} X_i \to \varprojlim X_\lambda$ を引き起こす．$\prod_{i\in I} X_i$ の積位相の定義より写像 $\pi_\lambda \circ \psi = p_\lambda$ は全ての $\lambda \in \Lambda$ について連続であり，ゆえに $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の定義から $\psi\colon \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の連続性がしたがう．さらに相対位相の定義から $\psi\colon \prod_{i\in I} X_i \to \varprojlim X_\lambda$ も連続であることがわかる．

後は ψ が φ の逆写像になっていることを確かめればよい．$x \in \prod_{i\in I} X_i$ とすれば

$$\varphi\psi(x) = \varphi(p_\lambda(x)_{\lambda\in\Lambda})) = (p_{\lambda_i}(x))_{i\in I} = (x_i)_{i\in I}$$

となり，$\varphi\psi = \mathrm{id}_{\prod_i X_i}$ である．$\psi\varphi = \mathrm{id}_{\varprojlim X_\lambda}$ を示すためには，$y = (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \varprojlim X_\lambda$ を任意に選ぶ．このとき，全ての $\lambda \in \Lambda$ について $p_\lambda\varphi(y) = \pi_\lambda(y)$ が成り立つことを示したい．$\lambda \in \Lambda$ とすれば，$y \in \varprojlim X_\lambda$ であることから全ての $i \in$ について

$$\pi_{\lambda_i\lambda} p_\lambda \varphi(y) = p_{\lambda_i}\varphi(y) = y_{\lambda_i} = \pi_{\lambda_i\lambda} y_\lambda = \pi_{\lambda_i\lambda}\pi_\lambda(y)$$

となる．よって実際に $p_\lambda\varphi(y) = \pi_\lambda(y)$ であることがわかった．このことに注意すれば，全ての $y \in \varprojlim X_\lambda$ について

$$\psi\varphi(y) = (p_\lambda\varphi(y))_{\lambda\in\Lambda} = (\pi_\lambda(y))_{\lambda\in\Lambda} = (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = y$$

となり，$\psi\varphi = \mathrm{id}_{\varprojlim X_\lambda}$ であることが示された．ゆえに ψ は φ の逆写像である．

有向集合 A の共終部分集合 B が与えられると，逆系 $\mathbf{X} = (X_\alpha, \pi_{\alpha\alpha'}; \alpha, \alpha' \in A)$ の逆極限 $\varprojlim X_\alpha$ の位相は $(\pi_\beta)_{\beta\in B}$ のみの情報から復元できる．

命題 5.5 $(X_\alpha, \pi_{\alpha,\beta}; A)$ を位相空間の逆系とする．$\mathrm{pr}_\alpha\colon \prod_\alpha X_\alpha \to X_\alpha$ を標準射影とし，π_α をその $\varprojlim X_\alpha$ への制限とする．さらに B を A の共終部分集合とし，

$$\mathscr{B} = \bigcup_{\alpha\in B} \pi_\alpha^* \mathscr{O}_{X_\alpha} = \{\pi_\alpha^{-1}(U) \mid \alpha \in B, U \in \mathscr{O}_{X_\alpha}\}$$

と定義する．このとき $\mathscr{B}$ は逆極限 $\varprojlim X_\alpha$ の開基である．特に，$\varprojlim X_\alpha$ の位相は射影の部分族 $(\pi_\alpha)_{\alpha\in B}$ によって生成される．

証明 射影 $\pi_\alpha\colon \varprojlim X_\alpha \to X_\alpha$ は連続だから，$\mathscr{B}$ の元は明らかに $\varprojlim X_\alpha$ の開集合である．$\varprojlim X_\alpha$ の任意の開集合が $\mathscr{B}$ の元の合併で表現されることを示そう．$i\colon \varprojlim X_\alpha \to \prod_\alpha X_\alpha$ で包含写像を表すことにしておく．

U を $\varprojlim X_\alpha$ の任意の開集合とし，$x \in U$ を任意の点とする．このとき，ある $W \in \mathscr{B}$ で $x \in W \subset U$ を満たすようなものが存在することを示せば良い．相対位相の定義より $U = i^{-1}(V)$ を満たす $\prod_\alpha X_\alpha$ の開集合 V をとることができる．V は積空間 $\prod_\alpha X_\alpha$ の開集合であるから，定理 3.7 より有限個の $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ と開集合 $U_k \in \mathscr{O}_{X_{\alpha_k}}$ $(1 \le k \le n)$ を，

$$x \in \mathrm{pr}_{\alpha_1}^{-1}(U_1) \cap \dots \cap \mathrm{pr}_{\alpha_n}^{-1}(U_n) \subset V$$

となるように選ぶことができる．B は A で共終であることに注意して $\alpha_i \leq \alpha$ $(1 \leq i \leq n)$ なる $\alpha \in B$ を一つ選び，

$$U_\alpha = \bigcap_{1 \leq k \leq n} \pi_{\alpha_k,\alpha}^{-1}(U_k)$$

と定める．各 $\pi_{\alpha_k,\alpha}$ は連続なので U_α は X_α の開集合であり，ゆえに $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \mathscr{B}$ となる．後は $x \in \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \subset U$ が成り立っていることを示せば良い．いま $\pi_{\alpha_k,\alpha}\pi_\alpha = \pi_{\alpha_k} = \mathrm{pr}_{\alpha_k} i$ であることに注意すれば，

$$\pi_\alpha^{-1}\pi_{\alpha_k,\alpha}^{-1}(U_k) = \pi_{\alpha_k}^{-1}(U_k) = i^{-1}\mathrm{pr}_{\alpha_k}^{-1}(U_k)$$

がわかる．これより

$$\begin{aligned}
\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) &= \pi_\alpha^{-1}\left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} \pi_{\alpha_i,\alpha}^{-1}(U_i)\right) \\
&= \bigcap_{1 \leq i \leq n} \pi_\alpha^{-1}\pi_{\alpha_i,\alpha}^{-1}(U_i) \\
&= \bigcap_{1 \leq i \leq n} i^{-1}\mathrm{pr}_{\alpha_i}^{-1}(U_i) \\
&= i^{-1}\left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} \mathrm{pr}_{\alpha_i}(U_i)\right) \\
&\subset i^{-1}(V) = U
\end{aligned}$$

となり，$x \in \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \subset U$ を得る． □

$\mathbf{X} = (X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}; A)$ および $\mathbf{Y} = (Y_\beta, q_{\beta\beta'}; B)$ を位相空間の逆系とする．逆系 $\mathbf{X}$ から $\mathbf{Y}$ への写像系 $\mathbf{f} = (f, f_\beta)$ とは，次の条件を満たす写像の族である．

(i) f は B から A への単調写像である．
(ii) 各 $\beta \in B$ について，f_β は $X_{f(\beta)}$ から Y_β への連続写像である．
(iii) $\beta \leq \beta'$ を満たす全ての $\beta, \beta' \in B$ について，以下の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
X_{f(\beta')} \arrow[r, "f_{\beta'}"] \arrow[d, "p_{f(\beta)f(\beta')}"'] & Y_{\beta'} \arrow[d, "q_{\beta\beta'}"] \\
X_{f(\beta)} \arrow[r, "f_\beta"'] & Y_\beta
\end{tikzcd} \tag{5.2}$$

圏論的な表現をすれば，図式 $\mathbf{X}\colon A^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Top}$ から図式 $\mathbf{Y}\colon B^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Top}$ への写像系とは，関手 $f\colon A \to B$ と自然変換 $(f_\beta)\colon \mathbf{X} \circ f \to \mathbf{Y}$ の組のことである．

注意 5.6 逆系から逆系への写像系の定義は，ここでは少し簡略化してある．より一般的には，**Top** から生成される圏 pro-**Top** における射を写像系と呼ぶべきだろう．pro-**Top** は，形式的には

位相空間の逆極限として表されるような位相空間を対象とする圏である．より正式には，pro-**Top** の対象は余フィルター圏からの図式 $F\colon I \to \mathbf{Top}$ である．二つの図式 $F\colon I \to \mathbf{Top}$ と $G\colon J \to \mathbf{Top}$ に対して，関手

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(F(-), G(-))\colon I^{\mathrm{op}} \times J \longrightarrow \mathbf{Set}$$

を考える．このとき，pro-**Top** の射集合は

$$\mathrm{Hom}_{\text{pro-}\mathbf{Top}}(F, G) = \lim \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(F(-), G(-))$$

で与えられる．これは，圏 $\mathscr{C}$ から定まる pro-category と呼ばれるものである．詳しくは Johnston [9] や Kashiwara and Schapira [10]，Hart et al. [7, b-8] 等を参照されたい．

定理 5.7 $\mathbf{X} = (X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}; A)$ および $\mathbf{Y} = (Y_\beta, q_{\beta\beta'}; B)$ を位相空間の逆系とし，$\mathbf{f} = (f, f_\beta; \beta \in B)$ を $\mathbf{X}$ から $\mathbf{Y}$ への写像系とする．

(i) 以下の図式を可換にする連続写像 $F\colon \varprojlim X_\alpha \to \varprojlim Y_\beta$ がただ一つ存在する．

$$\begin{tikzcd} \varprojlim X_\alpha \arrow[r, "F"] \arrow[d, "p_{f(\beta)}"'] & \varprojlim Y_\beta \arrow[d, "q_\beta"] \\ X_{f(\beta)} \arrow[r, "f_\beta"'] & Y_\beta \end{tikzcd}$$

ただし，p_α と q_β は自然な射影を表す．

(ii) $f(B)$ は A において共終であるとする．このとき各 f_β が同相写像なら，(i) の写像 $F\colon \varprojlim X_\alpha \to \varprojlim Y_\beta$ は同相写像となる．

定理 5.7 における連続写像 F を $\varprojlim \mathbf{f}$ と書き，写像系 $\mathbf{f} = (f, f_\beta; \beta \in B)$ の逆極限ということにする．

証明 (i) 定理 5.3 より，連続写像の族 $(F_\beta\colon \varprojlim \mathbf{X} \to Y_\beta)_{\beta \in B}$ で，$\beta \leq \beta'$ を満たす全ての $\beta, \beta' \in B$ について以下の図式が可換になるようなものを構成すればよい．

$$\begin{tikzcd} & \varprojlim \mathbf{X} \arrow[dl, "F_{\beta'}"'] \arrow[dr, "F_\beta"] & \\ Y_{\beta'} \arrow[rr, "q_{\beta\beta'}"'] & & Y_\beta \end{tikzcd} \tag{5.3}$$

まずは F の素になる写像 $\widetilde{F}\colon \prod_\alpha X_\alpha \to \prod_\beta Y_\beta$ を構成しよう．$\beta \in B$ に対して $\widetilde{F}_\beta = f_\beta \circ p_{f(\beta)}$ と定義する．

$$\begin{tikzcd} \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \arrow[r, "\widetilde{F}_\beta"] \arrow[d, "p_{f(\beta)}"'] & Y_\beta \\ X_{f(\beta)} \arrow[ur, "f_\beta"'] & \end{tikzcd}$$

また，$i\colon \varprojlim X_\alpha \to \prod_\alpha X_\alpha$ を包含写像とする．これらを用いて $F_\beta = \widetilde{F}_\beta \circ i$ と定めた時，$(F_\beta)_{\beta\in B}$ が (5.3) を可換にする連続写像の族であることを示せば良い．

各 F_β の連続性はその定義よりすぐにわかる．$x \in \varprojlim X_\alpha$ および $\beta \le \beta'$ とすれば，

$$\begin{aligned}
F_\beta(x) &= \widetilde{F}_\beta(x) \\
&= f_\beta p_{f(\beta)}(x) \\
&= f_\beta[p_{f(\beta)f(\beta')}p_{f(\beta')}(x)] \qquad (\because x \in \varprojlim X_\alpha) \\
&= [f_\beta p_{f(\beta)f(\beta')}]p_{f(\beta')}(x) \\
&= [q_{\beta\beta'}f_{\beta'}]p_{f(\beta')}(x) \qquad (\because (5.2) \text{ の可換性}) \\
&= q_{\beta,\beta'}[f_{\beta'}p_{f(\beta')}(x)] \\
&= q_{\beta,\beta'}\widetilde{F}_{\beta'}(x)
\end{aligned}$$

となるので，図式 (5.3) の可換性が示された．したがって以下の図式を可換にする連続写像 F がただ一つ存在する．

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim \mathbf{X} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "p_{f(\beta)}"'] \arrow[dr, "F_\beta"] & \varprojlim \mathbf{Y} \arrow[d, "q_\beta"] \\
X_{f(\beta)} \arrow[r, "f_\beta"'] & Y_\beta
\end{tikzcd}$$

これが求める写像である．

(ii) 連続な逆写像を普遍性を用いて構成しよう．$\alpha \in A$ に対して，写像 $G_\alpha\colon \varprojlim Y_\beta \to X_\alpha$ を，次の図式が可換になるように定義する．

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim \mathbf{Y} \arrow[r, "G_\alpha"] \arrow[d, "q_\beta"'] & X_\alpha \\
Y_\beta \arrow[r, "f_\beta^{-1}"'] & X_{f(\beta)} \arrow[u, "p_{\alpha f(\beta)}"']
\end{tikzcd} \tag{5.4}$$

ただし，$\beta \in B$ は $f(\beta) \ge \alpha$ が成り立つように選んだものである．このような β の存在は，$f(B)$ が A で共終であるとの仮定よりしたがう．G_α の定義が β の取り方に依らないことを確かめよう．$f(\beta), f(\beta') \ge \alpha$ を満たす $\beta, \beta' \in B$ をに対して，$\beta'' \ge \beta, \beta'$ を満たす $\beta'' \in B$ をとる．このような β'' の存在は B が有向集合であることからわかる．このとき

$$p_{\alpha f(\beta)} f_\beta^{-1} q_\beta = p_{\alpha f(\beta')} f_{\beta'}^{-1} q_{\beta'} = p_{\alpha f(\beta'')} f_{\beta''}^{-1} q_{\beta''}$$

が成り立つことを示せば良い．まずは，以下の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
 & X_{f(\beta)} \arrow[r, "f_\beta"] & Y_\beta \arrow[r, "f_\beta^{-1}"] & X_{f(\beta)} \\
Y_{\beta''} \arrow[r, "f_{\beta''}^{-1}"'] & X_{f(\beta'')} \arrow[r, "f_{\beta''}"'] \arrow[u, "p_{f(\beta)f(\beta'')}"] & Y_{\beta''} \arrow[u, "q_{\beta\beta''}"'] &
\end{tikzcd}$$

(5.2) の可換性に注意してこの図式を追えば，以下の図式が可換であることがわかる．

$$\begin{tikzcd}
Y_\beta \arrow[r, "f_\beta^{-1}"] & X_{f(\beta)} \\
Y_{\beta''} \arrow[u, "q_{\beta\beta''}"] \arrow[r, "f_{\beta''}^{-1}"'] & X_{f(\beta'')} \arrow[u, "p_{f(\beta)f(\beta'')}"']
\end{tikzcd}$$

さらに，逆系と逆極限の定義より以下の図式も可換となる．

$$\begin{tikzcd}
 & Y_\beta \arrow[r, "f_\beta^{-1}"] & X_{f(\beta)} \arrow[dr, "p_{\alpha f(\beta)}"] & \\
\varprojlim Y_\beta \arrow[ur, "q_\beta"] \arrow[dr, "q_{\beta''}"'] & & & X_\alpha \\
 & Y_{\beta''} \arrow[uu, "q_{\beta\beta'}"] \arrow[r, "f_{\beta''}^{-1}"'] & X_{f(\beta'')} \arrow[uu, "p_{f(\beta)f(\beta'')}"] \arrow[ur, "p_{\alpha f(\beta'')}"'] &
\end{tikzcd}$$

これより

$$p_{\alpha f(\beta)} f_\beta^{-1} q_\beta = p_{\alpha f(\beta'')} f_{\beta''}^{-1} q_{\beta''}$$

がわかる．β' についても同様に

$$p_{\alpha f(\beta')} f_{\beta'}^{-1} q_{\beta'} = p_{\alpha f(\beta'')} f_{\beta''}^{-1} q_{\beta''}$$

が示される．以上の議論で，(5.4) により写像の族 $G_\alpha \colon \varprojlim Y_\beta \to X_\alpha$ が well-defined となることが確かめられた．射影の連続性と f_β^{-1} の連続性より，各 G_α は連続となる．

このように得られた $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ を用いて，求める写像を $\varprojlim \mathbf{Y} \to \varprojlim \mathbf{X}$ を構成したい．そのためには，$\alpha \le \alpha'$ を満たす全ての $\alpha, \alpha' \in A$ について，以下の図式が可換となることを示せば良い．

$$\begin{tikzcd}
 & \varprojlim Y_\beta \arrow[dl, "G_{\alpha'}"'] \arrow[dr, "G_\alpha"] & \\
X_{\alpha'} \arrow[rr, "p_{\alpha\alpha'}"'] & & X_\alpha
\end{tikzcd}$$

そのためには，$f(\beta) \geq \alpha' \geq \alpha$ を満たす β を任意に選んで，以下の図式を追えばよい．

$$
\begin{tikzcd}
 & \varprojlim Y_\beta \arrow[d, "q_\beta"] \arrow[dddl, "G_{\alpha'}"'] \arrow[dddr, "G_\alpha"] & \\
 & Y_\beta \arrow[d, "f_\beta^{-1}"] & \\
 & X_{f(\beta)} \arrow[dl, "p_{\alpha' f(\beta)}"] \arrow[dr, "p_{\alpha f(\beta)}"'] & \\
X_{\alpha'} \arrow[rr, "p_{\alpha\alpha'}"'] & & X_\alpha
\end{tikzcd}
$$

内部の 3 つの三角形の可換性は，(G_α) の定義及び $(X_\alpha, p_{\alpha\alpha'})$ が逆系であることからわかる．よって外側の三角形も可換となる．したがって，定理 5.3 により次の図式を可換にする唯一の連続写像 $G\colon \varprojlim Y_\beta \to \varprojlim X_\alpha$ を得る．

$$
\begin{tikzcd}
 & \varprojlim Y_\beta \arrow[d, "G"] \arrow[ddl, "G_{\alpha'}"'] \arrow[ddr, "G_\alpha"] & \\
 & \varprojlim X_\alpha \arrow[dl, "p_{\alpha'}"] \arrow[dr, "p_\alpha"'] & \\
X_{\alpha'} \arrow[rr, "p_{\alpha\alpha'}"'] & & X_\alpha
\end{tikzcd}
$$

　このように構成した連続写像 G が F の逆写像になっていることを示そう．任意の β に対して

$$q_\beta FG = (q_\beta F)G = (f_\beta p_{f(\beta)})G = f_\beta(p_{f(\beta)}G) = f_\beta(f_\beta^{-1}q_\beta) = \mathrm{id}_{Y_\beta} q_\beta = q_\beta$$

が成り立つから，普遍性による写像の構成の一意性より $FG = \mathrm{id}_{\varprojlim Y_\beta}$ となる．以上の議論は以下の図式に表される．

$$
\begin{tikzcd}
\varprojlim Y_\beta \arrow[r, "q_\beta"] \arrow[d, "G"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y_\beta \arrow[d, "f_\beta^{-1}"] & & \varprojlim Y_\beta \arrow[dd, "FG"'] \arrow[ddr, "q_\beta"] & \\
\varprojlim X_\alpha \arrow[r, "p_{f(\beta)}"'] \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X_{f(\beta)} \arrow[d, "f_\beta"] & \Longrightarrow & \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
\varprojlim Y_\beta \arrow[r, "q_\beta"'] & Y_\beta & & \varprojlim Y_\beta \arrow[r, "q_\beta"'] & Y_\beta
\end{tikzcd}
$$

$GF = \mathrm{id}_{\varprojlim X_\alpha}$ を示すためには，任意の $\alpha \in A$ に対して $f(\beta) \geq \alpha$ を満たす $\beta \in B$ を選び，以下の図式を追えばよい．

$$
\begin{tikzcd}
\varprojlim X_\alpha \arrow[r, "p_{f(\beta)}"] \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X_{f(\beta)} \arrow[d, "f_\beta^{-1}"] & \\
\varprojlim Y_\beta \arrow[r, "q_\beta"'] \arrow[d, "G"'] \arrow[dr, "G_\alpha"] & Y_\beta \arrow[dr, "f_\beta"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
\arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & {} & X_{f(\beta)} \arrow[dl, "p_{\alpha f(\beta)}"] \\
\varprojlim X_\alpha \arrow[r, "p_\alpha"'] & X_\alpha &
\end{tikzcd}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{tikzcd}
\varprojlim X_\alpha \arrow[d, "GF"'] \arrow[dr, "p_\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"'] & \\
\varprojlim X_\alpha \arrow[r, "p_\alpha"'] & X_\alpha
\end{tikzcd}
$$

したがって，G は F の逆写像である．いま G と F はともに連続であったから，$F\colon \varprojlim X_\alpha \to \varprojlim Y_\beta$ は同相写像である． □

位相空間の逆系 $\mathbf{X} = (X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}; A)$ と，A の共終部分集合 B を考える．このとき，$\varprojlim X_\alpha$ の位相は $\bigcup_{\alpha \in B} \pi_\alpha^* \mathscr{O}_{X_\alpha}$ から復元できることを命題 5.5 で見たのであった．つまり，$\varprojlim X_\alpha$ の位相は実際には部分系 $\mathbf{X}' = (X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}; B)$ によって決まるのである．定理 5.7 を用いると，実際に同相写像 $\varprojlim \mathbf{X} \to \varprojlim \mathbf{X}'$ を構成することができる．

系 5.8 $\mathbf{X} = (X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}; A)$ を位相空間の逆系とし，B を A の共終部分集合，$i\colon B \to A$ を包含写像とする．さらに $i_\beta\colon X_\beta \to X_\beta$ を恒等写像とする．このとき，写像系 $(i, i_\beta; B)$ の逆極限 $\varprojlim(i, i_\beta)$ は $\varprojlim X_\alpha$ から $\varprojlim(X_\beta; \pi_{\beta,\beta'}; B)$ への同相写像である．

証明 恒等写像は同相であるから，定理 5.7 より主張がしたがう． □

系 5.9 $\mathbf{X} = (X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}; A)$ を位相空間の逆系とし，有向集合 A は最大限 α_0 をもつとする．このときこのとき $\varprojlim \mathbf{X}$ は X_{α_0} と同相である．

証明 $\{\alpha_0\}$ は A の共終部分集合だから，系 5.8 より従う． □

item

- 位相空間の逆系が与えられると，その逆極限と呼ばれる位相空間を定義することができる．
- 位相空間の逆極限は，定理 5.3 の意味での普遍性を満たす．
- 位相空間の逆極限は，逆系の共終な部分系への制限と同相である．

6 順極限

本節では，逆極限の双対的な概念である位相空間の順極限について調べる．

定義 6.1（位相空間の順系） A を有向集合とし，$(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ を位相空間の族とする．$\alpha \leq \beta$ なる $\alpha, \beta \in A$ に対して連続写像 $j_{\alpha\beta}\colon X_\alpha \to X_\beta$ が定まっていて，それらは以下の条件を満たすとする．

(i) $j_{\alpha\alpha} = \mathrm{id}_{X_\alpha}$ が成り立つ．
(ii) $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ なら $j_{\alpha\gamma} = j_{\beta\gamma} j_{\alpha\beta}$ が成り立つ．

このとき，系 $\mathbf{X} = (X_\alpha; j_{\alpha\beta}; A)$ を位相空間の順系 (direct system) あるいは帰納系 (inductive system) と呼ぶ．

位相空間の順系とは，有向集合 A を自然に小さい圏と見なしたとき共変関手 $A \to \mathbf{Top}$ のことに他ならない．逆系と双対的に，位相空間の順系が与えられるとその順極限が定まる．

定義 6.2（位相空間の順極限） $\mathbf{X} = (X_\alpha; j_{\alpha\alpha'}; A)$ を位相空間の順系とする．直和集合 $\coprod_{\alpha\in A} X_\alpha$ の同値関係 $R_{\mathbf{X}}$ を次の手順で定める．$(\alpha, x), (\alpha', x') \in \coprod_{\alpha\in A} X_\alpha$ とする．このとき，$(\alpha, x) R_{\mathbf{X}} (\alpha', x')$ が成り立つとは，ある $\alpha'' \in A$ で $\alpha'' \geq \alpha, \alpha'$ かつ $j_{\alpha\alpha''}(x) = j_{\alpha'\alpha''}(x')$ を見たすものが存在するということである．このとき，直和位相空間 $\coprod_\alpha X_\alpha$ の商位相空間 $\coprod_\alpha X_\alpha / R_{\mathbf{X}}$ を $\mathbf{X}$ の順極限 (direct limit) あるいは帰納極限 (inductive limit) といい，$\varinjlim X_\alpha$ や $\varinjlim \mathbf{X}$ で表す．

位相空間の順極限について，逆極限と双対的な普遍性が成り立つ．

定理 6.3（順極限の普遍性） $\mathbf{X} = (X_\alpha; j_{\alpha\alpha'}; A)$ を位相空間の順系とする．Z を任意の位相空間とし，連続写像の族 $(g_\alpha\colon X_\alpha \to Z)_{\alpha\in A}$ が与えられているとする．さらに，$\alpha \leq \beta$ を満たす全ての $\alpha, \beta \in A$ について次の図式は可換であると仮定する．

$$\begin{tikzcd} & Z & \\ X_\beta \arrow[ur, "g_\beta"] & & X_\alpha \arrow[ul, "g_\alpha"'] \arrow[ll, "j_{\alpha\beta}"] \end{tikzcd} \tag{6.1}$$

このとき，連続写像 $g\colon \varprojlim X_\alpha \to Z$ で，全ての $\alpha \in A$ について次の図式を可換にするものが唯一つ存在する．

$$\begin{tikzcd} & Z \\ X_\alpha \arrow[ur, "g_\alpha"] \arrow[r, "j_\alpha"'] & \varinjlim X_\alpha \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

ただし，標準的な写像 $j_\alpha\colon X_\alpha \to \varinjlim X_\alpha$ は標準単射 $i_\alpha\colon X_\alpha \to \coprod_{\alpha\in A} X_\alpha$ と商集合への射影 $q\colon \coprod_{\alpha\in A} X_\alpha \to \varinjlim X_\alpha$ の合成である．

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "i_\alpha"] \arrow[dr, "j_\alpha"'] & \coprod_{\alpha\in A} X_\alpha \arrow[d, "q"] \\ & \varinjlim X_\alpha \end{tikzcd}$$

証明　直和の普遍性より，連続写像 $\widetilde{g}\colon \coprod_{\alpha\in A} X_\alpha \to Z$ で全ての $\alpha \in A$ について以下の図式を可換にするものがただ一つ存在する．

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[d, "i_\alpha"'] \arrow[dr, "g_\alpha"] & \\ \coprod_{\alpha\in A} X_\alpha \arrow[r, "\widetilde{g}"'] & Z \end{tikzcd}$$

したがってこの写像 $\widetilde{g}$ が，以下の図式を可換にする g を引き起こすことを示せばよい．

$$\begin{tikzcd} \coprod_{\alpha\in A} X_\alpha \arrow[r, "\widetilde{g}"] \arrow[d, "q"'] & Z \\ \coprod_{\alpha\in A} X_\alpha/R_{\mathbf{X}} \arrow[ur, dotted, "g"'] & \end{tikzcd} \tag{6.2}$$

そのためには，$q(x) = q(y)$ なら $\widetilde{g}(x) = \widetilde{g}(y)$ が成り立つことを確かめればよい．$x = (\alpha, x'), y = (\beta, y') \in \coprod_\alpha X_\alpha$ とする．$q(x) = q(y)$ が成り立つとは，ある $\gamma \in A$ で $\gamma \geq \alpha, \beta$ かつ $j_{\alpha\gamma}(x') = j_{\beta\gamma}(y')$ を満たすものが存在するということであった．このとき

$$\widetilde{g}(x) = \widetilde{g}(\alpha, x') = g_\alpha(x') = g_\gamma j_{\alpha\gamma}(x') = g_\gamma j_{\beta\gamma}(y') = g_\beta(y') = \widetilde{g}(\beta, y') = \widetilde{g}(y)$$

が成り立つから，(6.2) を可換にする g がただ一つ存在することが確かめられた．この g の連続性は，命題 4.8 よりわかる．□

定理 6.3 の主張は以下の図式に集約される．

$$
\begin{tikzcd}
 & Z & \\
 & \varinjlim X_\alpha \arrow[u, dotted, "\exists ! u"'] & \\
X_\beta \arrow[uur, "g_\beta"] \arrow[ur, "\pi_\beta"'] & & X_\alpha \arrow[uul, "g_\alpha"'] \arrow[ul, "\pi_\alpha"] \arrow[ll, "\pi_{\alpha\beta}"]
\end{tikzcd}
$$

すなわち位相空間の順系 $\mathbf{X}$ の順極限とは図式 $\mathbf{X}\colon A \to \mathbf{Top}$ の余極限 (colimit) である．

$\mathbf{X} = (X_\alpha, \varphi_{\alpha\alpha'}; A)$ と $\mathbf{Y} = (Y_\beta, \psi_{\beta\beta'}; B)$ を位相空間の順系とする．写像族 $\mathbf{f} = (f, f_\alpha)$ で次の条件を満たすものを，$\mathbf{X}$ から $\mathbf{Y}$ への写像系と呼ぶことにする．

(i) $f\colon A \to B$ は単調写像である．

(ii) 各 $\alpha \in A$ について，$f_\alpha\colon X_\alpha \to Y_{f(\alpha)}$ は連続写像である．

(iii) $\alpha \le \alpha'$ を満たす全ての $\alpha \in A$ について，以下の図式は可換である．

$$
\begin{tikzcd}
X_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, "\varphi_{\alpha\alpha'}"'] & Y_{f(\alpha)} \arrow[d, "\psi_{f(\alpha)f(\alpha')}"] \\
X_{\alpha'} \arrow[r, "f_{\alpha'}"'] & Y_{f(\alpha')}
\end{tikzcd}
\tag{6.3}
$$

注意 6.4 ここでの写像系の定義も，**Top** の ind-category と呼ばれる圏の射のうち，簡単なものを考えたものである．一般の ind-object や ind-category については Johnstone [9] や Kashiwara and Schapira [10] を参照されたい．

位相空間の順系とその間の写像系について，定理 5.7 と双対的に次の定理が成り立つ．

定理 6.5 $\mathbf{X} = (X_\alpha, \varphi_{\alpha\alpha'}; A)$ および $\mathbf{Y} = (Y_\beta, \psi_{\beta\beta'}; B)$ を位相空間の順系とし，$\mathbf{f} = (f, f_\alpha; \alpha \in A)$ を $\mathbf{X}$ から $\mathbf{Y}$ への写像系とする．

(i) 以下の図式を可換にする連続写像 $F\colon \varinjlim X_\alpha \to \varinjlim Y_\beta$ がただ一つ存在する．

$$
\begin{tikzcd}
\varinjlim X_\alpha \arrow[r, "F"] & \varinjlim Y_\beta \\
X_\alpha \arrow[u, "\varphi_\alpha"] \arrow[r, "f_\beta"'] & Y_{f(\alpha)} \arrow[u, "\psi_{f(\alpha)}"']
\end{tikzcd}
$$

ただし，φ_α と ψ_β は標準的な写像である．

(ii) $f(A)$ は B において共終であるとする．このとき各 f_α が同相写像なら，(i) の写像 $F\colon \varprojlim X_\alpha \to \varprojlim Y_\beta$ は同相写像となる．

定理 6.5 における連続写像 F を $\varinjlim \mathbf{f}$ と書き，写像系 $\mathbf{f} = (f, f_\alpha; \alpha \in A)$ の順極限と呼ぶことにする．

証明 (i) 順極限の普遍性より，連続写像の族 $(\widetilde{F}_\alpha\colon X_\alpha \to \varinjlim \mathbf{Y})_{\alpha\in A}$ で，$\alpha \leq \alpha'$ を満たす全ての $\alpha, \alpha' \in A$ について以下の図式が可換になるようなものを構成すればよい．

$$\begin{tikzcd} & \varinjlim \mathbf{Y} & \\ X_\alpha \arrow[ur, "F_\alpha"] \arrow[rr, "\varphi_{\alpha\alpha'}"'] & & X_{\alpha'} \arrow[ul, "F_{\alpha'}"'] \end{tikzcd} \tag{6.4}$$

$\alpha \in A$ に対して，$F_\alpha = \psi_{f(\alpha)} f_\alpha$ と定義する．

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "\widetilde{F}_\alpha"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & \varinjlim Y_\beta \\ & Y_{f(\alpha)} \arrow[u, "\psi_{f(\alpha)}"'] \end{tikzcd}$$

$\psi_{f(\alpha)}$ と f_α はともに連続だから，このとき F_α も連続となる．(F_α) が (6.4) の図式を可換にすることは，以下の図式を追うことで示される．

$$\begin{tikzcd} & & \varinjlim Y_\beta & & \\ X_\alpha \arrow[urr, "F_\alpha"] \arrow[r, "f_\alpha"'] & Y_{f(\alpha)} \arrow[ur, "\psi_{f(\alpha)}"] \arrow[rr, "\psi_{f(\alpha)f(\alpha')}"'] & & Y_{f(\alpha')} \arrow[ul, "\psi_{f(\alpha')}"'] & X_{\alpha'} \arrow[ull, "F_{\alpha'}"'] \arrow[l, "f_{\alpha'}"] \end{tikzcd}$$

したがって以下の図式を可換にする連続写像 F がただ一つ存在する．

$$\begin{tikzcd} \varinjlim \mathbf{X} \arrow[r, "F"] & \varinjlim \mathbf{Y} \\ X_\alpha \arrow[u, "\varphi_\alpha"] \arrow[ur, "F_\alpha"] \arrow[r, "f_\alpha"'] & Y_{f(\alpha)} \arrow[u, "\psi_{f(\alpha)}"'] \end{tikzcd}$$

これが求める写像である．

(ii) 連続な逆写像を普遍性を用いて構成しよう．$\beta \in B$ に対して，写像 $G_\beta\colon Y_\beta \to \varinjlim X_\alpha$ を，次

の図式が可換になるように定義する．

$$
\begin{tikzcd}
Y_\beta \arrow[r, "G_\alpha"] \arrow[d, "\psi_{\beta f(\alpha)}"'] & \varinjlim X_\alpha \\
Y_{f(\alpha)} \arrow[r, "f_\alpha^{-1}"'] & X_\alpha \arrow[u, "\varphi_\alpha"']
\end{tikzcd}
\tag{6.5}
$$

ただし，$\alpha \in B$ は $f(\alpha) \geq \beta$ が成り立つように選んだものである．このような β の存在は，$f(A)$ が B で共終であるとの仮定よりしたがう．G_α の定義が α の取り方に依らないことを確かめよう．$f(\alpha), f(\alpha') \geq \beta$ を満たす $\alpha, \alpha' \in A$ に対して，$\alpha'' \geq \alpha, \alpha'$ を満たす $\alpha'' \in A$ をとる．このような α'' の存在は A が有向集合であることからわかる．このとき

$$\varphi_\alpha f_\alpha^{-1} \psi_{\beta f(\alpha)} = \varphi_{\alpha'} f_{\alpha'}^{-1} \psi_{\beta f(\alpha')} = \varphi_{\alpha''} f_{\alpha''}^{-1} \psi_{\beta f(\alpha'')}$$

が成り立つことを示せば良い．まずは，以下の図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
Y_{f(\alpha)} \arrow[r, "f_\alpha^{-1}"] & X_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, "\varphi_{\alpha\alpha''}"'] & Y_{f(\alpha)} \arrow[d, "\psi_{f(\alpha)f(\alpha'')}"] & \\
& X_{\alpha''} \arrow[r, "f_{\alpha''}"'] & Y_{f(\alpha'')} \arrow[r, "f_{\alpha''}^{-1}"'] & X_{\alpha''}
\end{tikzcd}
$$

(6.3) の可換性に注意してこの図式を追えば，以下の図式が可換であることがわかる．

$$
\begin{tikzcd}
Y_{f(\alpha)} \arrow[r, "f_\alpha^{-1}"] \arrow[d, "\psi_{f(\alpha)f(\alpha'')}"'] & X_\alpha \arrow[d, "\varphi_{\alpha\alpha''}"] \\
Y_{f(\alpha'')} \arrow[r, "f_{\alpha''}^{-1}"'] & X_{\alpha''}
\end{tikzcd}
$$

さらに，順系と順極限の定義より以下の図式も可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
& Y_{f(\alpha)} \arrow[r, "f_\alpha^{-1}"] \arrow[dd, "\psi_{f(\alpha)f(\alpha'')}"] & X_\alpha \arrow[dr, "\varphi_\alpha"] \arrow[dd, "\varphi_{\alpha\alpha''}"] & \\
Y_\beta \arrow[ur, "\psi_{\beta f(\alpha)}"] \arrow[dr, "\psi_{\beta f(\alpha'')}"'] & & & \varinjlim X_\alpha \\
& Y_{f(\alpha'')} \arrow[r, "f_{\alpha''}^{-1}"'] & X_{\alpha''} \arrow[ur, "\varphi_{\alpha''}"'] &
\end{tikzcd}
$$

これより

$$\varphi_\alpha f_\alpha^{-1} \psi_{\beta f(\alpha)} = \varphi_{\alpha''} f_{\alpha''}^{-1} \psi_{\beta f(\alpha'')}$$

がわかる．β' についても同様に

$$\varphi_{\alpha'} f_{\alpha'}^{-1} \psi_{\beta f(\alpha')} = \varphi_{\alpha''} f_{\alpha''}^{-1} \psi_{\beta f(\alpha'')}$$

が示される．以上の議論で，(6.5) により写像の族 $G_\beta\colon Y_\beta \to \varinjlim X_\alpha$ が well-defined となることが確かめられた．射影の連続性と f_α^{-1} の連続性より，各 G_β は連続となる．

このように得られた $(G_\beta)_{\beta\in B}$ を用いて，求める写像 $\varinjlim \mathbf{Y} \to \varinjlim \mathbf{X}$ を構成したい．そのためには，$\beta \le \beta'$ を満たす全ての $\beta, \beta' \in B$ について，以下の図式が可換となることを示せば良い．

$$\begin{tikzcd}
 & \varinjlim X_\alpha & \\
Y_\beta \arrow[ur, "G_\beta"] \arrow[rr, "\psi_{\beta\beta'}"'] & & Y_{\beta'} \arrow[ul, "G_{\alpha'}"']
\end{tikzcd}$$

そのためには，$f(\alpha) \ge \beta' \ge \beta$ を満たす α を任意に選んで，以下の図式を追えばよい．

$$\begin{tikzcd}
 & & \varinjlim X_\alpha & & \\
 & & X_\alpha \arrow[u, "\varphi_\alpha"'] & & \\
 & & Y_{f(\alpha)} \arrow[u, "f_\alpha^{-1}"'] & & \\
Y_\beta \arrow[uuurr, "G_\beta"] \arrow[urr, "\psi_{\beta f(\alpha)}"] \arrow[rrrr, "\psi_{\beta\beta'}"'] & & & & X_{\beta'} \arrow[uuull, "G_{\beta'}"'] \arrow[ull, "\psi_{\beta' f(\alpha)}"']
\end{tikzcd}$$

内部の 3 つの三角形の可換性は，(G_β) の定義及び $(Y_\beta, p_{\beta\beta'})$ が順系であることからわかる．よって外側の三角形も可換となる．したがって，順極限の普遍性により次の図式を可換にする唯一の連続写像 $G\colon \varinjlim Y_\beta \to \varinjlim X_\alpha$ を得る．

$$\begin{tikzcd}
 & \varinjlim X_\alpha & \\
 & \varinjlim Y_\beta \arrow[u, "G"'] & \\
Y_\beta \arrow[uur, "G_\beta"] \arrow[ur, "\psi_\beta"] \arrow[rr, "\psi_{\beta\beta'}"'] & & Y_{\beta'} \arrow[uul, "G_{\beta'}"'] \arrow[ul, "\psi_{\beta'}"']
\end{tikzcd}$$

このように構成した連続写像 G が F の逆写像になっていることを示そう．$\beta \in B$ に対して，$f(\alpha) \ge \beta$ を満たす $\alpha \in B$ を任意に選ぶ．このとき以下の図式を追えば，$FG\psi_\beta = \psi_\beta$ であることが

わかる．

$$
\begin{tikzcd}
\varinjlim Y_\beta \arrow[dd, "G"'] \arrow[ddr, phantom, "\circlearrowleft", near start] & Y_\beta \arrow[l, "\psi_\beta"'] \arrow[dr, "\psi_{\beta f(\alpha)}"] \arrow[ddl, "G_\beta"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
& & Y_{f(\alpha)} \arrow[dl, "f_\alpha^{-1}"] \\
\varinjlim X_\alpha \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X_\alpha \arrow[l, "\varphi_\alpha"'] \arrow[d, "f_\alpha"] & \\
\varinjlim Y_\beta & Y_{f(\alpha)} \arrow[l, "\psi_{f(\alpha)}"] &
\end{tikzcd}
\quad\Longrightarrow\quad
\begin{tikzcd}
\varinjlim Y_\beta \arrow[d, "FG"'] & Y_\beta \arrow[l, "\psi_\beta"'] \arrow[dl, "\psi_\beta"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft", near start] \\
\varinjlim Y_\beta &
\end{tikzcd}
$$

いま β は任意に選んでいたから，普遍性による射の構成の一意性から $FG = \mathrm{id}_{\varinjlim Y_\beta}$ となる．同様に以下の図式を追えば，全ての $\alpha \in A$ について $GF\varphi_\alpha = \varphi_\alpha$ であることがわかる．

$$
\begin{tikzcd}
\varinjlim X_\alpha \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X_\alpha \arrow[l, "\varphi_\alpha"'] \arrow[d, "f_\alpha"] \\
\varinjlim Y_\beta \arrow[d, "G"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y_{f(\alpha)} \arrow[l, "\psi_{f(\alpha)}"] \arrow[d, "f_\alpha^{-1}"] \\
\varinjlim X_\alpha & X_\alpha \arrow[l, "\varphi_\alpha"]
\end{tikzcd}
\quad\Longrightarrow\quad
\begin{tikzcd}
\varinjlim X_\alpha \arrow[d, "GF"'] & X_\alpha \arrow[l, "\varphi_\alpha"'] \arrow[dl, "\varphi_\alpha"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft", near start] \\
\varinjlim X_\alpha &
\end{tikzcd}
$$

したがって，普遍性による射の構成の一意性より $GF = \mathrm{id}_{\varinjlim X_\alpha}$ を得る．

以上の議論により，連続写像 F と G は互いに逆写像になっていることが示された．すなわちこれらは同相写像であり，$\varinjlim X_\alpha$ と $\varinjlim Y_\beta$ は同相である． □

系 6.6 $\mathbf{X} = (X_\alpha, j_{\alpha\alpha'}; A)$ を位相空間の順系とし，$B \subset A$ を共終部分集合とする．$i\colon B \hookrightarrow A$ を包含写像とし，$\beta \in B$ に対して $i_\beta = \mathrm{id}_{X_\beta}$ と定める．このとき，写像系 $(i, i_\beta; \beta \in B)$ の順極限 $\varinjlim(i, i_\beta)$ は，$\varinjlim(X_\beta, j_{\beta\beta'}; B)$ から $\varinjlim(X_\alpha, j_{\alpha\alpha'}; A)$ への同相写像である．

例 6.7 A を有向集合とし，$(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ を位相空間の族とする．$\alpha \leq \alpha'$ なら，$i_{\alpha\alpha'}\colon X_\alpha \to X_{\alpha'}$ は包含写像になっているとする．$X = \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ と定め，$i_\alpha\colon X_\alpha \to X$ を包含写像とする．このとき，X 上に $(i_\alpha)_{\alpha\in A}$ による終位相を入れた空間は $\varinjlim X_\alpha$ と同相となっていることを示そう．

連続写像 $\varphi\colon \varinjlim X_\alpha \to X$ を以下の図式のように定義する．

$$
\begin{tikzcd}
 & X & \\
 & \varinjlim X_\alpha \arrow[u, "\varphi"] & \\
X_\alpha \arrow[uur, "i_\alpha"] \arrow[ur, "j_\alpha"'] \arrow[rr, "j_{\alpha\alpha'}"'] & & X_{\alpha'} \arrow[uul, "i_{\alpha'}"'] \arrow[ul, "j_{\alpha'}"]
\end{tikzcd}
$$

ただし，$j_\alpha\colon X_\alpha \to \varinjlim X_\alpha$ は順極限への標準的な写像を表す．このとき φ が同相写像となっていることを示せば良い．

φ の逆写像の候補 ψ を構成しよう．$q\colon \coprod_{\alpha\in A} X_\alpha \to \varinjlim X_\alpha$ を標準的な全射とする．$x \in X$ に対して $x \in X_\alpha$ を満たす α を用いて $\psi(x) = j_\alpha(x)$ と定義すれば，その値は α の選び方によらない．このようにして得られた写像 $\psi\colon X \to \varinjlim X_\alpha$ が連続であることを示そう．像位相の定義より，そのためには全ての $\alpha \in A$ について $\psi \circ i_\alpha$ が連続となることを確かめればよい．ところが，いま $\psi \circ i_\alpha$ は j_α と等しいから，その連続性は明らかである．

後は，ψ が φ の逆写像になっていることを示せば良い．

$$
\begin{tikzcd}
\varinjlim X_\alpha \arrow[d, "\varphi"'] & X_\alpha \arrow[l, "j_\alpha"'] \arrow[dl, "i_\alpha"] \arrow[ddl, "j_\alpha"] \\
X \arrow[d, "\psi"'] & \\
\varinjlim X_\alpha &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\psi"'] & X_\alpha \arrow[l, "i_\alpha"'] \arrow[dl, "j_\alpha"] \arrow[ddl, "i_\alpha"] \\
\varinjlim X_\alpha \arrow[d, "\varphi"'] & \\
X &
\end{tikzcd}
$$

左側の図式の可換性と普遍性による射の構成の一意性に注意すれば，$\psi\varphi = \mathrm{id}_{\varinjlim X_\alpha}$ であることがわかる．また，右側の図式の可換性より全ての α について $\varphi\psi i_\alpha = \mathrm{id}_X\, i_\alpha$ となる．いま $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ は X の被覆になっているので，これより $\varphi\psi = \mathrm{id}_X$ もしたがう．すなわち，φ と ψ は互いに逆写像である．

item

- 位相空間の順系が与えられると，その順極限と呼ばれる位相空間を定義することができる．
- 位相空間の順極限は，定理 6.3 の意味での普遍性を満たす．
- 位相空間の順極限は，順系の共終な部分系への制限と同相である．

References

[1] Steve Awodey. *Category Theory*. 2nd ed. Oxford Logic Guides 52. Oxford University Press, 2010. ISBN: 9780199237180.

[2] Garrett Birkhoff. *Lattice theory*. 3rd ed. American Mathematical Society Colloquium Publications XXV. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1967, pp. vi+418.

[3] Nicolas Bourbaki. *General Topology. Chapters 1–4*. Elements of Mathematics. Original French edition published by MASSON, Paris, 1971. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995. vii+437 pp. DOI: 10.1007/978-3-642-61701-0. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540642411.

[4] Nicolas Bourbaki. *Theory of Sets*. Elements of Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004. viii+414 pp. DOI: 10.1007/978-3-642-59309-3. URL: https://www.springer.com/jp/book/9783540225256.

[5] R. Engelking. *Outline of General Topology*. Nort-Holland Publishing Company/Polish Scientific Publishers, 1968.

[6] Ryszard Engelking. *General topology*. Translated from the Polish by the author, Monografie Matematyczne, Tom 60. [Mathematical Monographs, Vol. 60]. PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977, 626 pp. (errata insert).

[7] Klaas Pieter Hart, Jun-iti Nagata, and Jerry E. Vaughan, eds. *Encyclopedia of General Topology*. Elsevier Science, 2004, pp. x+526. ISBN: 0-444-50355-2. URL: https://www.elsevier.com/books/encyclopedia-of-general-topology/hart/978-0-444-50355-8.

[8] 平井祐紀. **位相空間論セミナー I：位相空間論の基礎概念**. Version 2.0. Apr. 14, 2020.

[9] Peter T. Johnstone. *Stone Spaces*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 3. Cambridge University Press, 1982. ISBN: 9780521337793.

[10] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Categories and Sheaves*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 332. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006. x+498 pp. ISBN: 978-3-540-27950-1. DOI: 10.1007/3-540-27950-4. URL: https://www.springer.com/gp/book/9783540279495.

[11] John L. Kelley. *General Topology*. Graduate Texts in Mathematics 27. Originally published by Van Nostrand, 1955. Springer-Verlag New York, 1975. xiv+298 pp. ISBN: 978-0-387-90125-1. URL: https://www.springer.com/gp/book/9780387901251.

[12] Emily Riehl. *Category Theory in Context*. Aurora: Modern Math Originals. Dover Publications, 2016. URL: http://www.math.jhu.edu/~eriehl/context/.

[13] 斎藤毅. **集合と位相**. 大学数学の入門 8. 東京大学出版会, 2009.

索引