位相空間論セミナー VII：束と Boole 代数 Ver1.1

平井祐紀

2020 年 4 月 27 日

更新履歴
2018.9.2 ver.1.0.
2020.4.27 誤植を訂正．索引を作成 ver.1.1.

目次

1 束

本節では，束の概念を導入しよう．

定義 1.1. X を集合とし，$\leq$ を X 上の 2 項関係とする．$\leq$ について，次の条件を考える．

(i) 全ての $x \in X$ について $x \leq x$ が成り立つ．（反射律）
(ii) 全ての $x, y, z \in X$ について，$x \leq y$ かつ $y \leq z$ なら $x \leq z$ が成り立つ．（推移律）
(iii) 全ての $x, y \in X$ について，$x \leq y$ かつ $y \leq x$ なら $x = y$ が成り立つ．（反対称律）
(iv) 全ての $x, y \in X$ について，$x \leq y$ または $y \leq x$ が成り立つ．

$\leq$ が上記の (i) と (ii) を満たすとき，$\leq$ を X 上の前順序 (preorder) と呼ぶ．$\leq$ が条件 (i)-(iii) を満たすなら，$\leq$ は半順序 (partial order) あるいは単に順序 (order) であるといい，$(X, \leq)$ を半順序集合 (partially ordered set) という．半順序 $\leq$ が (iv) も満たすとき，$(X, \leq)$ は全順序集合 (totally ordered set) あるいは線形順序集

合 (linearly ordered set) と呼ばれる．

半順序集合のことを poset と略すことも多い．順序を考えている集合がいくつかあって紛らわしい場合には，X 上の順序を特に強調して $\leq_X$ などと書いたりもする．半順序集合 $(X, \leq)$ が与えられたとき，$\leq$ の逆（opposite）あるいは双対（dual）を

$$x \leq^{\mathrm{op}} y :\Longleftrightarrow y \leq x \tag{1}$$

によって定義する．このとき $(X, \leq^{\mathrm{op}})$ はまた半順序集合となる．これを X^{op} などと表すことにする．

定義 1.2. $(X, \leq)$ を半順序集合とし，$A \subset X$ とする．

(i) 全ての $a \in A$ に対して $a \leq x$ が成り立つとき，x は A の上界 (upper bound) であるという．A の上界 x が A の元でもあるとき，x を A の最大元 (greatest element, maximum element) と呼ぶ．

(ii) 全ての $a \in A$ に対して $x \leq a$ が成り立つとき，x は A の下界 (lower bound) であるという．A の下界 x が A の元でもあるとき，x を A の最小元 (least element, minimum element) と呼ぶ．

(iii) A の上界のうち最小のものが存在するとき，それを A の結び (join) あるいは上限 (supremum) と呼び $\bigvee A$ で表す．

(iv) A の下界のうち最大のものが存在するとき，それを A の交わり (meet) あるいは下限 (infimum) と呼び $\bigwedge A$ で表す．

(v) A が次の条件を満たすとき，A は下方集合 (lower set) であるという．

$$\forall a \, \forall b \, (a \in A \land b \leq a \implies b \in A).$$

(vi) A が次の条件を満たすとき，A は上方集合 (upper set) であるという．

$$\forall a \, \forall b \, (a \in A \land a \leq b \implies b \in A).$$

(vii) $\uparrow A = \{x \in X \mid \exists a \in A \; a \leq x\}$ および $\downarrow A = \{x \in X \mid \exists a \in A \; x \leq a\}$ と定義する． 特に $A = \{a\}$ の場合には，$\uparrow\{a\}$ と $\downarrow\{a\}$ をそれぞれ $\uparrow a$ および $\downarrow a$ と表す．

集合 $\{a, b\}$ の結び $\bigvee\{a, b\}$ と交わり $\bigwedge\{a, b\}$ を，それぞれ $a \vee b$ と $a \wedge b$ で表すことも多い．反対称律より，結びあるいは交わりが存在すればそれはただ一つである．$(X, \leq)$ において空集合の結び $\bigvee \emptyset$ が存在すれば，それは X の最小元である．また，空集合の交わり $\bigwedge \emptyset$ が存在すれば，それは X の最大元である．束論においては，X の最小元を 0 で表し，最大元を 1 で表すことも多いようである．$\uparrow A$ は A を含む最小の上方集合であり，$\downarrow A$ は A を含む最小の下方集合である．考えている全体集合を明示したいときは，$\uparrow A$，$\downarrow A$ をそれぞれ $\uparrow(A; X)$，$\downarrow(A; X)$ などとも書くことにする．上界とは双対順序における下界であり，結びとは双対順序における交わりに他ならない．

定義 1.3. 任意の 2 元集合が結びを持つ半順序集合を結び半束（join semilattice）と呼ぶ．また，任意の 2 元集合が交わりを持つような半順序集合を交わり半束 (meet semilattie) と呼ぶ．結び半束かつ交わり半束であるような順序集合を束 (lattice) という．

$(X, \leq)$ が結び半束なら，$(X, \leq^{\mathrm{op}})$ は交わり半束であり，$x \vee y = x \wedge^{\mathrm{op}} y$ が成り立つ．したがって結び半束と交わり半束は両者は論理的には同じ概念である．結び半束と交わり半束をまとめて単に半束 (semilattice) と呼ぶことにする．既に述べたように $\bigvee \emptyset$ は X の最小元であるから，結び半束が最小元を持つことは，全て

の有限集合が結びをもつことと同値である．結び半束 $(X, \leq)$ においては，$\vee$ は二項演算 $(x, y) \mapsto x \vee y$ を定める．$\vee$ の二項演算としての性質を調べよう．証明は定義に従えばよい．

命題 1.4. $(X, \leq)$ を結び半束とする．このとき，$\vee\colon X \times X \to X$ は以下の性質を満たす．

(i) $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$．（結合律）
(ii) $x \vee y = y \vee x$．（可換性）
(iii) $x \vee x = x$．（冪等性）
(iv) 0 が存在するなら，全ての $x \in X$ に対して $0 \vee x = x$ が成り立つ．（すなわち，0 は $\vee$ に関する単位元である．）

交わり半束は双対順序における結び半束であったから，命題 1.4 は $\vee$ を $\wedge$ に，0 を 1 に置き換えてもそのまま成り立つ．

命題 1.4 を代数の言葉で表現すれば，結び半束は冪等可換半群であるということである．単位的な半群はモノイドと言ったから，結び半束が 0 をもつなら，それは冪等な可換モノイドである．

逆に，冪等な可換半群が与えられると，それが結び半群（交わり半群）となるような順序を定義することができる．

命題 1.5. $(X, \cdot)$ を冪等な可換半群とする．$x, y \in X$ に対して $x \leq y$ を $x \cdot y = y$ によって定義すれば，$\leq$ は X 上の順序であり $(X, \leq)$ は交わり半束となり $x \vee y = x \cdot y$ が成り立つ．さらに $(X, \cdot)$ が単位元 e を持てば，e は $\leq$ について $(X, \leq)$ の最小元となる．

証明．$\leq$ の反射律は $\cdot$ の冪等性より，推移律は結合律より，反対称律は可換性より従う．よって $\leq$ は X 上の順序である．

$x, y \in X$ とすれば，冪等性と結合律より

$$x \cdot (x \cdot y) = (x \cdot x) \cdot y = x \cdot y, \qquad y \cdot (x \cdot y) = x \cdot (y \cdot y) = x\dot{y} \tag{2}$$

となるから，$x \cdot y$ は $\{x, y\}$ の上界である．z を $\{x, y\}$ の上界とすれば

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot z = z \tag{3}$$

が成り立つから，$x \cdot y \leq z$ がわかる．すなわち $x \cdot y$ は $\{x, y\}$ の最小上界であり，その結び $x \vee y$ であることが示された．

最後に，$(X, \cdot)$ は単位元 e を持つとする．このとき，全ての $x \in X$ について $e \cdot x = x$ が成り立つ．これは全ての x について $e \leq x$ が成り立つということであり，ゆえに e は $(X, \leq)$ の最小元である． □

命題 1.5 において逆に $x \leq y$ を $x \cdot y = x$ と定義すれば，$(X, \leq)$ は交わり半束になる．命題 1.5 より，冪等な可換半群を半束と呼んでも良いことがわかる．今後は，半束をその代数的な形で $(X, \vee)$ や $(X, \wedge)$，単位的な半束を $(X, \vee, 0)$ や $(X, \wedge, 1)$ とも表すことにする．

順序集合が束である場合，そこには $\vee$ と $\wedge$ という二つの二項演算が定義されていることになる．次は，それらの関係性を調べよう．

命題 1.6. (i) $(X, \leq)$ が束なら，その結びと交わりは以下の吸収律を満たす．

$$x \wedge (x \vee y) = x, \qquad x \vee (x \wedge y) = x. \tag{4}$$

(ii) $(X, \wedge)$ と $(X, \vee)$ はそれぞれ冪等可換半群とする．$\wedge$ と $\vee$ が吸収律を満たすなら，X 上の順序で $\wedge$ と $\vee$ がそれに関する交わりと結びに位置するようなものが存在する．

証明．(i) $x \wedge (x \vee y) \leq x$ は明らかである．また x は $\{x, x \vee y\}$ の下界だから，交わりの最大性より $x \leq x \wedge (x \vee y)$ もわかる．したがって反対称律から $x = x \wedge (x \vee y)$ となる．もう一方の等式も同様に示される．

(ii) $\vee$ と $\wedge$ が吸収律を満たすときに，$\vee$ と $\wedge$ それぞれから定義される順序が一致することを示す．そのためには，$x \wedge y = x$ と $x \vee y = y$ が同値であることを示せばよい．$x \wedge y = x$ なら，吸収律より

$$y = y \vee (x \wedge y) = y \vee x = x \vee y \tag{5}$$

が成り立つ．逆に $x \vee y = y$ なら

$$x = x \wedge (x \vee y) = x \wedge y \tag{6}$$

となる．したがって $x \wedge y = x$ と $x \vee y = y$ は同値である． $\square$

命題 1.6 より，順序から定義された束の概念を，代数的な見地から特徴づけることができた．今後は，束をその代数的な表現で $(X, \wedge, \vee)$ と表すことにする．束 $(X, \wedge, \vee)$ が最小元 0 と最大元 1 を持つとき，これを有界束 (bounded lattice) という．

例 1.7. X を集合とし，$\mathscr{P}(X)$ をその冪集合とする．このとき，$\mathscr{P}(X)$ は $\wedge = \cap$，$\vee = \cup$，$0 = \emptyset$，$1 = X$ により有界束となる．

半束や束は代数系であるから，準同型の概念が自然に与えられる．$(X, \vee)$ が半束であるとき，半束準同型 (semilattice homomorphism) とは半群の準同型のことである．半束準同型は順序を保つ．実際，$x \leq y$ は $x \vee y = y$ と同値なので，$f(x) \leq f(x) \vee f(y) = f(x \vee y) = f(y)$ が成り立つ．単位的な半束 $(X, \vee, 0)$ については，モノイド準同型が自然な準同型概念である．束 $(X, \wedge, \vee)$ においては，$\wedge$ と $\vee$ 両方について半束準同型となっているものを束準同型 (lattice homomorphism) という．有界束 $(X, \wedge, \vee, 1, 0)$ の準同型とは，$(X, \wedge, 1)$ と $(X, \vee, 0)$ 両方について準同型となっている写像のことである．

束 $(X, \wedge, \vee)$ の部分集合 A がそれ自身束であって，包含写像 $A \to X$ が束準同型になっているものを部分束 (sublattice) という．A が X の部分束であるとは，$x, y \in A$ なら $x \wedge y, x \vee y \in A$ が成り立つということである．同様に考えると，有界束の部分有界束とはその部分集合で包含写像が有界束準同型になっているようなものということになる．つまり，最小元と最大元を保存することを要請する．一方で，有界束は束であるから 0 と 1 を忘れてその部分束を考えることができる．そのとき $A \subset X$ が最大元，最小元を持ってもそれが全空間 X の 1 と 0 と一致するとは限らない．したがって有界束の部分束を考えるときには注意が必要である．本ノートでは，全体が有界束であっても単に「部分束」といった場合には 0 と 1 の構造を忘れた部分束を表すことにする．

例 1.8. $(X, \Omega(X))$ を位相空間とする．このとき，$\Omega(X)$ は $\mathscr{P}(X)$ の部分束であって，さらに 0 と 1 を保存する．（すなわち，有界束としての部分有界束である．）

2 Boole 代数

本節では，束に付加構造を加えた Boole 代数という代数系を考えよう．まずは，分配束の概念を導入する．

定義 2.1. $(X,\wedge,\vee)$ を束とする．演算 $\wedge$ と $\vee$ が以下の分配律 (distributive law) を満たすとき，$(X,\wedge,\vee)$ を分配束 (distributive lattice) と呼ぶ．

$$x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z) \tag{7}$$

分配束は，次の双対分配律 (dual distributive law) も満たす．

$$x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z) \tag{8}$$

これは次のような計算で確かめることができる．

$$\begin{aligned}
(x\vee y)\wedge(x\vee z)&=[(x\vee y)\wedge x]\vee[(x\vee y)\wedge z] &(9)\\
&=x\vee[(x\vee y)\wedge z] &(10)\\
&=x\vee[(x\wedge z)\vee(y\wedge z)] &(11)\\
&=[x\vee(x\wedge z)]\vee(y\wedge z) &(12)\\
&=x\vee(y\wedge z) &(13)
\end{aligned}$$

ただし，二つ目と最後の等号には吸収律を用いた．

命題 2.2. $(X,\wedge,\vee)$ を分配束とし，$a\in X$ とする．$x,y\in X$ が $x\wedge a=y\wedge a$ かつ $x\vee a=y\vee a$ を満たすとしたら，$x=y$ が成り立つ．

証明．仮定より，

$$\begin{aligned}
x&=x\wedge(x\vee a) \qquad (\text{吸収律}) &(14)\\
&=x\wedge(y\vee a) &(15)\\
&=(x\wedge y)\vee(x\wedge a) \qquad (\text{分配律}) &(16)\\
&=(x\wedge y)\vee(y\wedge a) &(17)\\
&=y\wedge(x\vee a) \qquad (\text{分配律}) &(18)\\
&=y\wedge(y\vee a) &(19)\\
&=y \qquad (\text{吸収律}) &(20)
\end{aligned}$$

となる． □

定義 2.3. $(X,\vee,\wedge,0,1)$ を有界な分配束とする．$x\in X$ に対して $x\wedge a=0$ かつ $x\vee a=1$ を満たすような $a\in X$ が存在するとき，そのような a を x の補元 (complement) という．命題 2.2 より，x の補元は存在すれば唯一つであり，それを $\neg x$ で表す．全ての元が補元をもつような有界束を Boole 代数 (Boolean algebra) という．

Boole 代数のことを Boole 束 (Boolean lattice) と呼ぶこともある．Boole 代数間の有界束としての準同型のことを，Boole 代数の準同型と呼ぶ．実際，$(X,\vee,\wedge,0,1,\neg)$ と $(X',\vee',\wedge',0',1',\neg')$ を Boole 代数，$f\colon X\to X'$ を有界束準同型とすれば，

$$f(x)\wedge' f(\neg x)=f(x\wedge\neg x)=f(0)=0',\qquad f(x)\vee' f(\neg x)=f(x\vee\neg x)=f(1)=1' \tag{21}$$

が成り立つから $f(\neg x)=\neg' f(x)$ である．したがって束準同型 f は Boole 代数に適した準同型概念にもなっていることがわかる．

$A \subset X$ が Boole 代数 $(X, \vee, \wedge, 0, 1, \neg)$ の部分 Boole 代数であるとは，包含写像 $A \to X$ が Boole 代数準同型になっているということである．具体的に言えば，A は演算 $\vee, \wedge, \neg$ について閉じていて，さらに $0, 1 \in A$ が成り立つということである．

命題 2.4. $(X, \vee, \wedge, 0, 1, \neg)$ を Boole 代数とすれば，次のド・モルガンの法則が成り立つ．

$$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y, \qquad \neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y \tag{22}$$

証明．$x, y \in X$ なら，

$$\begin{align}
(x \wedge y) \vee (\neg x \vee \neg y) &= [x \vee (\neg x \vee \neg y)] \wedge [y \vee (\neg x \vee \neg y)] \tag{23}\\
&= [(x \vee \neg x) \vee \neg y)] \wedge [\neg x \vee (y \vee \neg y)] \tag{24}\\
&= (1 \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee 1) \tag{25}\\
&= 1 \wedge 1 \tag{26}\\
&= 1 \tag{27}
\end{align}$$

および

$$\begin{align}
(x \wedge y) \wedge (\neg x \vee \neg y) &= [(x \wedge y) \wedge \neg x] \vee [(x \wedge y) \wedge \neg y] \tag{28}\\
&= [(x \wedge \neg x) \wedge y] \vee [x \wedge (y \wedge \neg y)] \tag{29}\\
&= (0 \wedge y) \vee (x \wedge 0) \tag{30}\\
&= 0 \vee 0 \tag{31}\\
&= 0 \tag{32}
\end{align}$$

が成り立つ．よって $(\neg x \vee \neg y) = \neg(x \wedge y)$ である．もう一つの等号も同じような計算で示される． □

例 2.5. X，Y を集合とする．

(i) $\mathscr{P}(X)$ は $\wedge = \cap$，$\vee = \cup$，$0 = \emptyset$，$1 = X$，$\neg A = X \setminus A$ により Boole 代数となる．測度論に出てくる X 上の集合代数あるいは有限加法族とは，$\mathscr{P}(X)$ の部分 Boole 代数に他ならない．

(ii) 写像 $f\colon X \to Y$ に対して，$f^*\colon \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X)$ を $f^*(A) = f^{-1}(A)$ で定義する．このとき，f^* は Boole 代数の準同型である．

3 Boole 環

Boole 代数を代数的に特徴づける別の方法として，Boole 環という代数系を用いる方法がある．まずは，冪集合の Boole 代数 $\mathscr{P}(X)$ における例から見ていこう．

例 3.1. X を集合とする．$A, B \in \mathscr{P}(X)$ に対して，$A \cdot B = A \cap B$，$A + B = A \triangle B$ [*1]，と定義し，$0 = \emptyset$，$1 = X$ と書くことにする．このとき，$\mathscr{P}(X)$ は和 $+$ と積 $\cdot$ について（単位的な）可換環となる．この環における $+$ に関する逆元 $-A$ は，A 自身である．さらに，積 $\cdot$ は冪等律 $A \cdot A = A$ を満たす．

定義 3.2. 冪等律を満たす単位的可換環を Boole 環 (Boolean ring) という．

[*1] 集合の対称差 $A \triangle B$ は $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ によって定義されるのであった．

Boole 環においては，$-x = x$ が成り立つ．Boole 環の定義では可換環であることを課したが，実は可換性は冪等律から導出可能である．以上のことを確かめよう．$(X, +, \cdot, 0, 1, -)$ を冪等な単位的可換環とすれば，全ての $x, y \in X$ について

$$x + y = (x + y)^2 = x + y + xy + yx \tag{33}$$

が成り立つ．これより $xy + yx = 0$ となり，$x = -x$ と $xy = yx$ がわかる．

例 3.1 で見たように，冪集合 $\mathscr{P}(X)$ は $\cap$ を積，対称差 $\triangle$ を和と見れば Boole 環となる．測度論で出てきた X 上の集合の環とは，$\mathscr{P}(X)$ の（非単位的な）部分環に他ならない．

Boole 環が与えられるとそこから Boole 代数を作ることができ，逆に Boole 代数が与えられるとそこから Boole 環を構成することができる．

命題 3.3. $(X, \vee, \wedge, 0, 1, \neg)$ を Boole 代数とし，$x \cdot y = x \wedge y$，$x + y = (x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg x)$ と定義する．このとき，$(X, +, \cdot, 0, 1, -)$ は Boole 環となる．

証明．例 3.1 で述べたように，和に関する x の逆元は x 自身である．X が Boole 環となることについて，分配律以外の性質は明らかであろう．分配律については，

$$\begin{aligned} x \cdot (y + z) &= x \wedge [(y \wedge \neg z) \vee (z \wedge \neg y)] && (34)\\ &= (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) && (35) \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} (x \cdot y) + (x \cdot z) &= [(x \wedge y) \wedge \neg(x \wedge z)] \vee [(x \wedge z) \wedge \neg(x \wedge y)] && (36)\\ &= [(x \wedge y) \wedge (\neg x \vee \neg z)] \vee [(x \wedge z) \wedge (\neg x \vee \neg y)] && (37)\\ &= [(x \wedge y \wedge \neg x) \vee (x \wedge y \wedge \neg z)] \vee [(x \wedge z \wedge \neg x) \vee (x \wedge z \wedge \neg y)] && (38)\\ &= [0 \vee (x \wedge y \wedge \neg z)] \vee [0 \vee (x \wedge z \wedge \neg y)] && (39)\\ &= (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge z \wedge \neg y) && (40) \end{aligned}$$

からわかる． □

命題 3.4. $(X, +, \cdot, 0, 1, -)$ を Boole 環とする．$x, y \in X$ に対して，$x \wedge y = x \cdot y$，$x \vee y = x + y + x \cdot y$，$\neg x = 1 - x$ と定義する．このとき，$(X, \vee, \wedge, 0, 1, \neg)$ は Boole 代数である．

証明．$(X, \vee, 0)$ と $(X, \wedge, 1)$ が冪等な可換半束になっていることは容易に確かめられる．吸収律は，

$$x \wedge (x \vee y) = x \cdot (x + y + x \cdot y) = x \cdot x + x \cdot y + (x \cdot x) \cdot y = x + x \cdot y + x \cdot y = x \tag{41}$$

および

$$x \vee (x \wedge y) = x + x \cdot y + x \cdot (x \cdot y) = x + x \cdot y + x \cdot y = x \tag{42}$$

という計算からわかる．分配律は，

$$\begin{aligned} x \wedge (y \vee z) &= x \cdot (y + z + y \cdot z) && (43)\\ &= x \cdot y + x \cdot z + x \cdot (y \cdot z) && (44)\\ &= x \cdot y + x \cdot z + (x \cdot y) \cdot (x \cdot z) && (45)\\ &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z) && (46) \end{aligned}$$

という計算で示される．$\neg$ が補元を定めることについては

$$x \vee \neg x = x + (1-x) + x \cdot (1-x) = 1 + x + x \cdot (-x) = 1 + x + x = 1 \tag{47}$$

および

$$x \wedge \neg x = x \cdot (1-x) = x + x \cdot (-x) = x + x = 0 \tag{48}$$

からわかる． □

4 イデアルとフィルター

前節で Boole 代数を環論的な見地から見直したのは，イデアルの概念を自然に導入するためである．環 $(R, +, \cdot, 0, 1, -)$ を単位的な可換環とする．空でない部分集合 $I \subset R$ が R のイデアル (ideal) であるとは，

(i) $x, y \in I$ ならば $x + y \in I$ である．

(ii) $a \in I$ かつ $x \in R$ なら $ax \in I$ である．

の 2 条件が成り立つということであった．R において $\{0\}$ と R 自身は常に R のイデアルとなり，これらを自明なイデアルと呼ぶ．イデアルは常に 0 を元に持つから，$\{0\}$ は包含関係について最小のイデアルであり，R は包含関係について最大のイデアルである．R のイデアルのうちで R 自身ではないものを，真のイデアル (proper ideal) と呼んだりする．イデアル I が 1 を元に持つなら，条件 (ii) より $I = R$ となってしまう．したがって，イデアルが真のイデアルであるための必要十分条件は，それが単位元を元に持たないことである．

以上のような事実を思い出して，Boole 環のイデアルを Boole 代数的な立場から見直してみよう．以下，Boole 代数は命題 3.3 の演算により Boole 環ともみなすことにする．

命題 4.1. $(X, \vee, \wedge, 0, 1, \neg)$ を Boole 代数とする．このとき，$I \subset X$ について次の条件は同値である．

(i) I は Boole 環 X のイデアルである．

(ii) I は次の 2 条件を満たす．

 (a) $x, y \in I$ なら，$x \vee y \in I$ である．

 (b) $y \in I$ かつ $x \leq y$ なら，$x \in I$ となる．（すなわち，I は下方集合である．）

命題 4.1 の言っていることは，Boole 代数のイデアルとは結び $\vee$ について閉じた下方集合であるということである．

証明. (i) $\Longrightarrow$ (ii)．I は X のイデアルであるとする．$x, y \in I$ なら $x + y \in I$ かつ $x \cdot y \in I$ であるから，$x \vee y = x + y + x \cdot y \in I$ である．また，$y \in I$ かつ $x \leq y$ なら，$x = x \wedge y = x \cdot y \in I$ となり，$x \in I$ がわかる．よって I は条件 (ii) を満たす．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．I は条件 (ii) を満たすと仮定する．$x, y \in I$ とすれば，I は下方集合だから $x \wedge \neg y, y \wedge \neg x \in I$ であり，(a) より $x + y = (x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg x) \in I$ となる．また，$a \in I$ かつ $x \in X$ なら $a \wedge x \leq a$ であり，よって $a \cdot x = a \wedge x \in I$ がわかる．したがって I はイデアルである． □

Boole 代数におけるイデアルの特徴付けには順序 $\leq$ と $\vee$ は出てきていなかったから，Boole 代数におけるイデアルと同じ概念は結び半束についても定義できることが分かる．

定義 4.2. (i) $(X, \vee)$ を結び半束とする．空でない部分集合 $I \subset X$ が X の部分半束かつ下方集合であるとき，I は X のイデアル (ideal) だという．

(ii) $(X, \wedge)$ を交わり半束とする．空でない部分集合 $F \subset X$ が X の部分半束かつ上方集合であるとき，F を X のフィルター (filter) または双対イデアル (dual ideal) という．

半束のイデアル，フィルターでそれぞれ全空間の真部分集合であるものを，それぞれ真のイデアル，真のフィルターと呼ぶ．結び半束 $(X, \vee)$ において，X 自身は常に X のイデアルである．さらに X が 0 をもつなら，$\{0\}$ も X のイデアルとなる．双対的に，交わり半束 $(X, \wedge)$ において X 自身は常に X のフィルターであり，さらに X が 1 を持つなら $\{1\}$ も X のフィルターとなる．

単位的結び半束 $(X, \vee, 0)$ において，$\downarrow a$ は X のイデアルである．これは $\{a\}$ を含む最小のイデアルであり，環論における単項イデアル (a) に対応するものである．空でない部分集合 $A \subset X$ についても A を含む最小のイデアルは存在するが，それが $\downarrow A$ と一致するとは限らない．A が $\vee$ について閉じていれば $\downarrow A$ は X のイデアルとなる．

双対的に，$(X, \wedge, 1)$ が単位的な交わり半束なら a によって生成される単項フィルター $\uparrow a$ が定まり，A が $\wedge$ について閉じていれば $\uparrow A$ は X のフィルターとなる．

例 4.3. X を集合とする．このとき，X の部分集合のフィルターとは，Boole 代数 $\mathscr{P}(X)$ における真のフィルターに他ならない．

例 4.4. $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を測度空間とする．このとき，X 上の μ-零集合全体は，$\mathscr{P}(X)$ 上のイデアルである．

R, R' を環とする．$f\colon R \to R'$ が環準同型なら，f の核 $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(0)$ は R のイデアルとなる．逆に，I が R のイデアルなら I は剰余環への標準的な全射 $R \to R/I$ の核となる．したがって，環のイデアルと準同型の核は実質的に同じ概念である．同様の現象が半束のイデアルについても成立するか調べてみよう．

まずは，剰余環の構成方法を思い出してみよう．X を環，I をそのイデアルとする．$x, y \in X$ に対して，同値関係 $\sim_I$ を

$$x \sim_I y \ :\Longleftrightarrow\ x - y \in I \tag{49}$$

と定義する．商写像 $q\colon X \to X/\sim_I$ に対して q が環準同型になるような $X \sim_I$ 上の和と積の組が一意に定まるので，それにより $X/\sim_I$ を環と見なす．これを剰余環や商環と呼び X/I で表すのであった．

以上の構成方法を，Boole 代数の言葉で見てみよう．

補題 4.5. X を Boole 代数，I をそのイデアルとする．このとき，$x, y \in I$ について次の条件は同値である．

(i) $x - y \in I$ が成り立つ．

(ii) ある $a \in I$ で，$x \vee a = y \vee a$ を満たすものが存在する．

ちなみに，Boole 代数では $x = -x$ が成り立つから，条件 (i) は $x + y \in I$ と言っても同じである．

証明. Boole 代数において一般に

$$\begin{aligned} x + y \le a &\iff x + y = (x + y) \cdot a && (50)\\ &\iff x + a + x \cdot a = y + a + y \cdot a && (51)\\ &\iff x \vee a = y \vee a && (52)\end{aligned}$$

が成り立つことに注意すればわかる． □

$(X,\vee,0)$ を単位的な結び半束とし，I をそのイデアルとする．補題 4.5 の示唆するところに従えば，$x,y\in X$ に対して同値関係 $x\sim_I y$ を，「ある $a\in I$ について $x\vee a=y\vee a$ が成り立つ」と定義すれば良いだろう．その商集合 $X/\sim_I$ を X/I で表し，X から誘導される演算により結び半束と考えることにする．

命題 4.6. X を単位的な結び半束とする．

(i) I が X のイデアルなら $\sim_I$ は実際に X 上の同値関係となり，そこから誘導される演算により X/I はまた単位的結び半束となる．

(ii) Y も単位的な結び半束で $f\colon X\to Y$ が準同型なら，$f^{-1}(0)$ は X のイデアルである．

(iii) I が X のイデアルなら，単位的な結び半束 Y と準同型 $f\colon X\to Y$ で $f^{-1}(0)=I$ を満たすものが存在する．

証明. (i) $\sim_I$ が対称であることは明らかだろう．$0\in I$ に注意すれば x が反射律を満たすこともわかる．$x\sim_I y$ かつ $y\sim_I z$ が成り立つと仮定し，$a,b\in I$ を $x\vee a=y\vee a$ かつ $y\vee b=z\vee b$ となるように選ぶ．このとき，$a\vee b\in I$ であり

$$x\vee(a\vee b)=(x\vee a)\vee b=(y\vee a)\vee b=(y\vee b)\vee a=(z\vee b)\vee a=z\vee(a\vee b) \tag{53}$$

となるので，$x\sim_I z$ である．ゆえに $\sim_I$ は推移律も満たし，X 上の同値関係であることがわかった．

$q\colon X\to X/I$ を x に対してその同値類を対応される写像とする．$z,w\in X/I$ に対して，$x\in q^{-1}(z)$ と $y\in q^{-1}(w)$ を一点ずつ選び，$z\vee w=q(x\vee y)$ と定義する．このとき，$z\vee w$ は代表元の選び方によらず定まる．実際，$x,x'\in q^{-1}(z)$ かつ $y,y'\in q^{-1}(w)$ とすれば，$x\vee a=x'\vee a$ かつ $y\vee b=y'\vee b$ となる $a,b\in I$ が存在する．このとき $a\vee b\in I$ であり，

$$(x\vee y)\vee(a\vee b)=(x\vee a)\vee(y\vee b)=(x'\vee a)\vee(y'\vee b)=(x'\vee y')\vee(a\vee b) \tag{54}$$

より $x\vee y\sim_I x'\vee y'$ となる．したがって $q(x\vee y)=q(x'\vee y')$ であり，$z\vee w$ は代表元の選び方によらず well-defined である．また，このとき q は $\vee$ を保つ写像である．さらに $q(0)=0$ とおけば，0 は X/I の単位元である．実際，全ての $x\in X$ に対して $q(0)\vee q(x)=q(0\vee x)=q(x)$ が成り立っている．X/I における可換性は X における $\vee$ の可換性より明らかであり，冪等性は X における冪等性と q が $\vee$ を保つことからわかる．

(ii) $f\colon X\to Y$ を束準同型とする．$x,y\in f^{-1}(0)$ なら，$f(x\vee y)=f(x)\vee f(y)=0\vee 0=0$ なので，$x\vee y\in f^{-1}(0)$ である．また，束準同型は順序を保つから，$x\leq y$ かつ $y\in f^{-1}(0)$ なら $x\in f^{-1}(0)$ となることもわかる．したがって $f^{-1}(0)$ は I のイデアルである．

(iii) $q\colon X\to X/I$ を (i) の写像とする．$x\in q^{-1}(0)$ とはある $a\in I$ に対して $x\vee a=0\vee a$ が成り立つということであった．これはある $a\in I$ に対して $x\vee a=a$ が成り立つということと同値であり，ゆえに $x\in{\downarrow}I$ と同値である．イデアル I は下方集合だから，$x\in{\downarrow}I$ とは $x\in I$ と同じことである．□

命題 4.6 において半束 X が Boole 代数の場合には，その商 X/I にまた Boole 代数の構造を入れることができる．

命題 4.7. X を分配的な有界束とし，I をそのイデアルとする．

(i) 半束としての商 X/I は $\vee$ から誘導される順序によりまた分配的な有界束となり，自然な全射 $X\to X/I$ は有界束としての準同型となる．

(ii) さらに X が Boole 代数ならば，X/I は Boole 代数となる．

証明. (i) $z, w \in X/I$ に対して $x \in q^{-1}(z)$ と $y \in q^{-1}(w)$ を任意に選び，$z \wedge w = q(x \wedge y)$ と定義する．このとき $\wedge$ は代表元の取り方によらず定まることを確かめよう．$x, x' \in q^{-1}(z)$ かつ $y, y' \in q^{-1}(w)$ とすれば，$x \vee a = x' \vee a$ かつ $y \vee b = y' \vee b$ となる $a, b \in I$ が存在する．このとき $a \vee b \in I$ であり，

$$(x \wedge y) \vee (a \vee b) = (x \vee a \vee b) \wedge (y \vee a \vee b) = (x' \vee a \vee b) \wedge (y' \vee a \vee b) = (x' \wedge y') \vee (a \vee b) \tag{55}$$

という計算から $q(x \wedge y) = q(x' \wedge y')$ がわかる．したがって $z \vee w$ は代表元の選び方によらず定まる．また，定義より明らかに q は $\wedge$ を保つ写像である．$q(1)$ が $\wedge$ に関する単位元であることは $\vee$ と同様にして示される．したがって，q は 0 と 1 を保つ束準同型である．$\wedge$ と $\vee$ が吸収律と分配律を満たすことは，q が束準同型であることからわかる．

(ii) 補元の存在を示せばよい．$z \in X/I$ かつ $x \in q^{-1}(z)$ とすれば，$z \vee q(\neg x) = q(x \vee \neg x) = q(1) = 1$ かつ $z \wedge q(\neg x) = q(x \wedge \neg x) = q(0) = 0$ となるから，$q(\neg x)$ は z の補元である． □

例 4.8. $(X, \mathscr{A}, \mu)$ を完備な測度空間とすれば，$I = \mu^{-1}(0)$ は Boole 代数 $\mathscr{A}$ のイデアルである．したがって，$\mathscr{A}/I$ はまた Boole 代数となる．なお，A, B が I に関して同値であるということは，$\mu(A \triangle B) = 0$ が成り立つということである．このとき $\mathscr{A}/I$ 上に μ から自然に測度が誘導され，$(\mathscr{A}/I, \mu)$ を測度代数と呼ぶ.

5 完備性

束においてはこれまで主に有限集合の結びと交わりのみを考えてきたが，順序集合における結びと交わりの定義はもっと一般的なものであった.

定義 5.1. 結び半束の部分集合が結びを持つとき，その半束は完備 (complete) であるという．結び半束かつ交わり半束として完備であるような束は，束として完備 (complete) であるという．束として完備であるとき，Boole 代数は完備であるという.

例 5.2. Boole 代数 $\mathscr{P}X$ は完備である.

$\mathscr{P}X$ は自明な例だったが，次に少し奇妙な例を挙げる.

例 5.3. $(X, \Omega(X))$ を位相空間とする．このとき，$\Omega(X)$ は完備束である．実際，$\mathscr{O} \subset \Omega(X)$ に対して $\bigvee \mathscr{O} = \bigcup \mathscr{O}$ および $\bigwedge \mathscr{O} = \mathrm{Int} \bigcap \mathscr{O}$ が成り立つ．$\Omega(X)$ は $\mathscr{P}X$ の部分束だが，$\Omega(X)$ における $\bigwedge$ と $\mathscr{P}(X)$ における $\bigwedge$ は一般には一致しないのである．$\mathscr{O}$ の $\mathscr{P}(X)$ における交わりは $\bigcap \mathscr{O}$ だが，もちろんこれは一般に開集合ではない.

命題 5.4. 順序集合 $(X, \leq)$ について，次の条件は同値である.

(i) X は完備束である.
(ii) 全ての部分集合 $A \subset X$ が $\bigwedge A$ を持つ.
(iii) 全ての部分集合 $A \subset X$ が $\bigvee A$ を持つ.

証明. (i) $\Longrightarrow$ (ii) と (i) $\Longrightarrow$ (iii) は明らかである.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). $A \subset X$ とし，B を A の上界全体の集合とする．このとき $\bigwedge B$ が $\vee A$ に他ならない.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) も同じように示される． $\square$

例 5.5. X を集合とし，$\mathrm{Opn}(X)$ をその開集合系全体とする．このとき，$\mathrm{Opn}(X)$ は包含関係の定める順序について完備束である．

例 5.6. X を有界束とし，$\mathrm{Idl}(X)$ をそのイデアル全体の集合とする．このとき $\mathrm{Idl}(X)$ は包含関係の定める順序について完備束である．

6 Heyting 代数

本節では Boole 代数を一般化した Heyting 代数の概念を導入してみよう．

定義 6.1. X を有界束とする．X 上の二項演算 $\to$ で

$$\forall x, y, z\ [z \leq (x \to y) \iff z \wedge x \leq y] \tag{56}$$

となるようなものが与えられているとき，X を Heyting 代数 (Heyting algebra) と呼ぶ．

命題 6.2. Boole 代数 X において $x \to y = \neg x \vee y$ と定めれば，X は Heyting 代数となる．

証明．$z \leq \neg x \vee y$ が成り立つとすれば，

$$z \wedge x \leq (\neg x \vee y) \wedge x = (\neg x \wedge x) \vee (x \wedge y) \leq y \tag{57}$$

となる．逆に $z \wedge x \leq y$ が成り立つとすれば，

$$\neg x \vee y \geq \neg x \vee (z \wedge x) = (\neg x \vee z) \wedge (\neg x \vee x) \geq z \tag{58}$$

となる．したがって X は $x \to y = \neg x \vee y$ により Heyting 代数となる． $\square$

有界束を Heyting 代数にするような二項演算 $\to$ は，存在するとすれば一意的であることが知られている．

補題 6.3. X を有界束とし，X 上の二項演算 $\to$ が定まっているとする．このとき，X が $\to$ について Heyting 代数となるための必要十分条件は，以下の 4 条件が成り立つことである．

(i) $a \to a = 1$.
(ii) $a \wedge (a \to b) = a \wedge b$.
(iii) $b \wedge (a \to b) = b$.
(iv) $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$.

証明．X が $\to$ について Heyting 代数であると仮定する．

(i) $a \to a \leq 1$ は明らかである．また $a \wedge 1 \leq a$ から，$1 \leq (a \to a)$ もわかる．

(ii) $a \wedge b \leq b$ より $b \leq (a \to b)$ であり，よって $a \wedge b \leq a \wedge (a \to b)$ が成り立つ．$a \to b \leq a \to b$ より $a \wedge (a \to b) \leq b$ であり，したがって $a \wedge (a \to b) \leq a \wedge b$ がわかる．

(iii) $b \wedge (a \to b) \leq b$ は明らかである．(ii) の議論で既に $b \leq (a \to b)$ は示したから，$b \leq b \wedge (a \to b)$ もわかる．

(iv) $x \mapsto (a \to x)$ が順序を保存することを確かめておこう．実際，$x \leq y$ なら (ii) より $a \wedge (a \to x) \leq a \wedge x \leq x \leq y$ となり，ゆえに $a \to x \leq a \to y$ が成り立つ．$a \to (\cdot)$ が順序保存的であることから，

$a \to (b \wedge c) \leq a \to b, a \to c$ が成り立ち，これより $a \to (b \wedge c) \leq (a \to b) \wedge (a \to c)$ がわかる．また，(ii) から

$$\begin{aligned} a \wedge [(a \to b) \wedge (a \to c)] &= [a \wedge (a \to b)] \wedge (a \to c) && (59) \\ &= (a \wedge b) \wedge (a \to c) && (60) \\ &= b \wedge [a \wedge (a \to c)] && (61) \\ &= b \wedge (a \wedge c) && (62) \\ &\leq (b \wedge c) && (63) \end{aligned}$$

が成り立つから，$\to$ の定義より $(a \to b) \wedge (a \to c) \leq a \to (b \wedge c)$ となる．

X 上の演算 $\to$ が (i)–(iv) を満たすとしよう．$c \leq (a \to b)$ なら，(ii) より

$$a \wedge c \leq a \wedge (a \to b) = a \wedge b \leq b \tag{64}$$

である．逆に $a \wedge c \leq b$ を仮定すれば，(iii)，(i)，(iv) より

$$c = c \wedge (a \to c) \leq (a \to a) \wedge (a \to c) = a \to (a \wedge c) \leq a \to b \tag{65}$$

となる．ただし，最後の不等号は $a \to (\,\cdot\,)$ の単調性から導かれるが，これは (iv) からわかる． □

命題 6.4. Heyting 代数は分配束である．

証明．$x, y, z \in X$ とする．$x \wedge y, x \wedge z \leq x \wedge (y \vee z)$ だから，$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$ である．（これには Heyting 代数であることは用いない．）逆向きの不等号を示すために，Heyting 代数の性質を使おう．補題 6.3 から

$$\begin{aligned} x \to [(x \wedge y) \vee (x \wedge z)] &\geq [x \to (x \wedge y)] \vee [x \to (x \wedge z)] && (66) \\ &= [(x \to x) \wedge (x \to y)] \vee [(x \to x) \wedge (x \to z)] && (67) \\ &= [1 \wedge (x \to y)] \vee [1 \wedge (x \to z)] && (68) \\ &= (x \to y) \vee (x \to z) && (69) \\ &\geq y \vee z && (70) \end{aligned}$$

となるので，$x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ がわかる．したがって分配律が示された． □

7 圏と順序集合

本節では，順序集合を圏とみなし，今までに見てきたいくつかの現象を考察しなおしてみよう．まずは，圏論の概念をいくつか復習しておく．圏と関手の定義は既知としよう．順序数 2 をその順序構造により見なしたものを，$\mathbb{2}$ で表すことにする．

圏 $\mathscr{C}$ が与えられたとき，その射の圏 $\mathscr{C}^{\mathbb{2}}$ は $\mathscr{C}$ の射が対象で，

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "g"'] & C_1' \arrow[d, "g'"] \\ C_2 \arrow[r, "f_2"'] & C_2' \end{tikzcd} \tag{71}$$

を可換にするような $\mathscr{C}$ の射の組 $(g,g')\colon f_1\to f_2$ を射とするような圏である．これは順序数 $\mathbb{2}$ から $\mathscr{C}$ への関手の圏に他ならない．

関手 $F_1\colon\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ から $F_2\colon\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ の間の自然変換とは，$\mathscr{C}$ から $\mathscr{D}^{\mathbb{2}}$ への関手 θ で，$\theta(C)\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(F_1(C),F_2(C))$ かつ $\theta(f)=(F_1(f),F_2(f))$ を満たすようなものである．つまり，θ は下図のような図式の対応を定める．

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[from=1-2, to=2-2, Rightarrow, bend left=60, "\theta"] & C' \\
F_1(C) \arrow[r, "F_1(f)"] \arrow[d, "\theta(C)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F_1(C') \arrow[d, "\theta(C')"] \\
F_2(C) \arrow[r, "F_2(f)"'] & F_2(C')
\end{tikzcd} \tag{72}$$

関手 F と F の間には，当然以下の自明な自然変換 id_F がある．

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[from=1-2, to=2-2, Rightarrow, bend left=60, "\mathrm{id}_F"] & C' \\
F(C) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{F(C)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F(C') \arrow[d, "\mathrm{id}_{F(C')}"] \\
F(C) \arrow[r, "F(f)"'] & F(C')
\end{tikzcd} \tag{73}$$

$\mathscr{C}$ から $\mathscr{D}$ への関手の圏 $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$ は，$\mathscr{C}$ への $\mathscr{D}$ への関手を対象とし，自然変換を射とする圏である．$\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$ における同型を自然同型といい，自然同型が存在するとき関手 F_1 と F_2 は自然同型であるという．つまり，$\theta\colon F_1\to F_2$ が自然同型であるとは，ある自然変換 $\eta\colon F_2\to F_1$ で，$\eta\circ\theta=\mathrm{id}_{F_1}$ かつ $\theta\circ\eta=\mathrm{id}_{F_2}$ を満たすものが存在することである．すなわち，$\mathscr{C}$ の任意の射 $f\colon C\to C'$ に対して $\eta(C)\circ\theta(C)=\mathrm{id}_{F_1(C)}\colon F_1(C)\to F_1(C)$ と $\theta(C)\circ\eta(C)=\mathrm{id}_{F_2(C)}\colon F_2(C)\to F_2(C)$ が成り立っている．

$D\colon J\to\mathscr{C}$ を型 J の図式とする．（すなわち，D は J から $\mathscr{C}$ への関手である．）$\mathscr{C}$ の対象 C に対して，定数図式 $J\to\mathscr{C}$ を $i\mapsto C$，$(i\to j)\mapsto\mathrm{id}_C$ で定義し，これを同じ記号 $C\colon J\to\mathscr{C}$ で表すことにする．このとき，図式 D 上の錐 $\mathrm{Cone}(D)$ とは，自然変換 $c\colon C\to D$ を対象とし，以下の図式を可換にするような自然変換 $\theta\colon c\to c'$ を射とするような圏である．

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "c"'] & \circlearrowleft & C' \arrow[dl, "c'"] \\
& D &
\end{tikzcd} \tag{74}$$

$\mathrm{Cone}(D)$ における終対象を，図式 D の極限といい，$\varprojlim D$ で表すのであった．もう少しかみ砕いて説明すると，$\mathrm{Cone}(D)$ の対象は射の族 $c(j)\colon C\to D(j)$ で，全ての（J の射）$i\to j$ に対して，以下の図式を可換にするものである．

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "c(i)"'] \arrow[dr, "c(j)"] & \\
D(i) \arrow[rr, "D_{ij}"'] & & D(j)
\end{tikzcd} \tag{75}$$

$\mathrm{Cone}(D)$ の射 $\theta\colon c \to c'$ は，射 $\theta\colon C \to C'$ で，全ての J の射 $i \to j$ について以下の図式を可換にするようなものである．

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "c(i)"'] \arrow[dr, "c(j)" near start] & C' \arrow[d, "c'(j)"] \arrow[dl, "c'(i)"' near start] \\
D(i) \arrow[r, "D_{ij}"'] & D(j)
\end{tikzcd} \tag{76}$$

射の族 $p_j\colon \varprojlim D \to D_j$ が図式 D の極限であるとは，

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "c(i)"'] \arrow[dr, "c(j)"] & \\
D(i) \arrow[rr, "D_{ij}"'] & & D(j)
\end{tikzcd} \tag{77}$$

を可換にするような全ての対象 $c(j)\colon C \to D(j)$ に対して，ある射 $\varprojlim c\colon C \to \varprojlim D$ で，以下の図式を可換にするものがただ一つ存在するということである．

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[d, "\varprojlim c"] \arrow[ddl, "c(i)"'] \arrow[ddr, "c(j)"] & \\
& \varprojlim D \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] & \\
D(i) \arrow[rr, "D_{ij}"'] & & D(j)
\end{tikzcd} \tag{78}$$

同様に図式 $D\colon J \to \mathscr{C}$ の余錐と余極限も定義され，それは以下の図式に集約される．

$$\begin{tikzcd}
D(i) \arrow[rr, "D_{ij}"] \arrow[dr, "p_i"] \arrow[ddr, "c(i)"'] & & D(j) \arrow[dl, "p_j"'] \arrow[ddl, "c(j)"] \\
& \varinjlim D \arrow[d, "\varinjlim c"] & \\
& C &
\end{tikzcd} \tag{79}$$

一般に，順序集合は圏と見なすことができる．$(X, \leq)$ を半順序集合とし，X を圏 X の対象とする．$x, y \in X$ に対して $x \leq y$ が成り立つとき，$\mathrm{Hom}_X(x, y)$ はただ一つの元からなる集合とする．$x \leq y$ が成り立たないときは，$\mathrm{Hom}_X(x, y)$ は空集合としよう．この様にして X はそれ自身局所的に小さい圏となる．この時，$x \to y$ が X の射であるとは，$x \leq y$ という主張の言い換えと思っても差し支えない．したがって，双対圏 X^{op} は X に双対順序を入れた圏に他ならない．半順序集合 X から Y への関手とは，順序保存的な写像 (i.e. 単調増大な写像) のことである．

圏における極限や余極限の概念が，順序集合ではどのようなものになるのか調べてみよう．$(X, \leq)$ を順序集合とし，$D\colon J \to X$ を関手とする．この図式 D の極限と余極限（があるかはわからないが，あるとしたらそれ

が何なのか）を調べてみよう．図式 $D\colon J \to X$ 上の錐 $\mathrm{Cone}(D)$ の対象は，射の族 $(x \to D_j)_{j \in \mathrm{Ob}\, J}$ である．つまり，$\mathrm{Cone}(D)$ の対象は $\{D_j,\ j \in \mathrm{Ob}\, J\}$ の下界 x である．したがって，D の極限とは，$\{D_j,\ j \in \mathrm{Ob}\, J\}$ の下界 a であって，全ての $\{D_j,\ j \in \mathrm{Ob}\, J\}$ の下界 x に対してただ一つの射 $x \to a$ が存在するようなものである．つまり，図式 D の極限とは，$\bigwedge_j D_j$ に他ならない．同じように，図式 D の余極限は $\bigvee_j D_j$ なのである．特に，空な図式 $\emptyset \hookrightarrow X$ の極限は X の終対象（つまり最大元）で，余極限は X の始対象（最小元）である．以上の議論より，完備束を圏論的に特徴づけると，以下のようになる．

命題 7.1. X を順序集合とする．X が圏として任意の極限と余極限をもつための必要十分条件は，X が完備束となることである．

本ノートでの最後の目標は，フレームと完備 Heyting 代数は集合としては同じ概念だということである．そのためには，随伴の概念を復習しておこう．順序集合の枠組みで随伴を定義することも可能だが，とりあえず圏のレベルで導入することにしよう．

$\mathscr{C}$ と $\mathscr{D}$ を局所的に小さい圏とし，$F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ を関手とする．関手 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(\,\cdot\,),\,\cdot\,)\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{D} \to \mathbf{Sets}$ と $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\,\cdot\,, G(\,\cdot\,))\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{D} \to \mathbf{Sets}$ が自然同型であるとき，$F \dashv G$ と表現し，F は G の左随伴であり，G は F の右随伴であるという．この定義はスッキリしているが，順序集合のレベルに落とし込むために，各用語の定義を確認しておこう．

関手 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{C} \to \mathbf{Sets}$ は $(C, C') \in \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{C}$ に対して射集合 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, C')$ を，射 $(f, f') \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(C_1, C_2) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C_1', C_2')$ に対して写像

$$
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C_1, C_1') \ni g \longmapsto f' \circ g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C_2, C_2') \tag{80}
$$

を対応させる関手である．

さて，もうそろそろ随伴の定義に戻ろう．$F \dashv G$ であるとは，関手 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(\,\cdot\,),\,\cdot\,)\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{D} \to \mathbf{Sets}$ と $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\,\cdot\,, G(\,\cdot\,))\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{D} \to \mathbf{Sets}$ が自然同型であるということであった．すなわち，自然変換 $\theta\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(\,\cdot\,),\,\cdot\,) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\,\cdot\,, G(\,\cdot\,))$ で，$\theta(C, D)\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(C), D) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, G(D))$ が同型になり，以下の図式を可換にするようなものが存在するということである．

$$
\begin{tikzcd}
(C,D) \arrow[r, "{(f,g)}"] & (C',D') \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(C),D) \arrow[r, "\varphi\mapsto g\circ\varphi\circ F(f)"] \arrow[d, "\theta(C,D)"', "\simeq"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(C'),D') \arrow[d, "\simeq"', "\theta(C',D')"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,G(D)) \arrow[r, "\psi\mapsto G(g)\circ\psi\circ f"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C',G(D'))
\end{tikzcd} \tag{81}
$$

圏 $(X, \leq)$ における関手 $\mathrm{Hom}_X(\,\cdot,,\,\cdot\,)\colon X^{\mathrm{op}} \times X$ とは何だろう？ $y \to x$ と $z \to w$ を X の射としよう．すなわち，$x \to y$ は X^{op} の射である．これらに対応する **Sets** の射は，写像 $\mathrm{Hom}_X(x, z) \to \mathrm{Hom}_X(y, w)$ でなくてはならない．$x \to z$ が X の射なら，$y \leq x \leq z \leq w$ なので，射 $y \to w$ がただ一つ存在する．よって，$\mathrm{Hom}_X(\cdot,,\,\cdot\,)$ による $y \to x$ と $z \to w$ の像は，唯一つの写像 $\mathrm{Hom}_X(x, z) \to \mathrm{Hom}_X(y, w)$ である．さて，いま射の集合 $\mathrm{Hom}_X(a, b)$ は空集合であるか 1 点集合であるから，$\mathrm{Hom}_X(a, b) \simeq \mathrm{Hom}_X(c, d)$ とは $\mathrm{Hom}_X(a, b)$ と $\mathrm{Hom}_X(c, d)$ がともに 1 点集合であるか，あるいは $\mathrm{Hom}_X(a, b)$ と $\mathrm{Hom}_X(c, d)$ がともに空集合であるということである．このことは，$a \leq b \iff c \leq d$ が成り立つという言葉で言い換えることができる．

X と Y が半順序集合の時，関手 $f\colon X \to Y$ の随伴とは何であろうか？ $f \dashv g$ であるとする．このとき g は Y から X への関手であるから，順序保存的な写像 $g\colon Y \to X$ である．先ほどの議論より，$\mathrm{Hom}_Y(f(x), y) \simeq \mathrm{Hom}_X(x, g(y))$ が成り立つとは，$f(x) \leq y \iff x \leq g(y)$ が成り立つということである．以上の考察より，順序保存的な写像の随伴の概念を得る．

定義 7.2. X と Y を順序集合とし，$f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to X$ をそれぞれ順序保存的な写像とする．

$$\forall (x, y) \in X \times Y \ f(x) \leq y \iff x \leq g(y) \tag{82}$$

が成り立つとき，$f \dashv g$ と表現し，f は g の左随伴であり，かつ g は f の右随伴であるという．

g の左随伴 f は存在するとするとすれば唯一つである．実際，$f_1, f_2 \dashv g$ なら，全ての $(x, y) \in X \times Y$ について $f_1(x) \leq y$ と $f_2(x) \leq y$ は同値になる．明らかに $f_1(x) \leq f_1(x)$ なのでこれより $f_2(x) \leq f_1(x)$ が従い，逆の不等号 $f_1(x) \leq f_2(x)$ も同様にわかる．したがって $f_1 = f_2$ である．同様にして，f の右随伴も存在したとすればそれは一意的である．

随伴の概念を用いると，Heyting 代数は以下のように特徴づけられる．

命題 7.3. X を有界束とする．X が Heyting 代数となるための必要十分条件は，全ての a に対して写像 $a \wedge (\cdot)$ が右随伴を持つことである．

命題 7.3 と随伴の一意性より，有界束を Heyting 代数とするような演算 $\to$ は一意的であることがわかる．

随伴の著しい性質として，次のものが知られている．

命題 7.4. 右随伴は極限を保ち，左随伴は余極限を保つ．

また，左随伴関手の存在については，Freyd による随伴関手の存在定理が知られている．これらの事項については圏論の本，例えば Awodey [1, Chapter 9] などを参照されたい．

我々は一般の圏における随伴でなく，順序集合における随伴のみを考えよう．

命題 7.5. X と Y を順序集合とし，$f\colon X \to Y$，$g\colon Y \to X$ を順序を保つ写像とする．

(i) $f \dashv g$ なら，f は全ての $\bigvee$ を保ち，g は全ての $\bigwedge$ を保つ．
(ii) X は全ての $\bigvee$ を持ち f が全ての $\bigvee$ を保つならば，f は右随伴を持つ．
(iii) Y は全ての $\bigwedge$ を持ち g が全ての $\bigwedge$ を保つならば，g は左随伴をもつ．

証明. (i) $S \subset X$ は $\bigvee S$ を持つとする．f は順序保存的であるから，全ての $s \leq S$ に対して $f(s) \leq f(\bigvee S)$ を満たす．よって $f(\bigvee S)$ は $f(S)$ の上界である．t は $f(S)$ の上界であるとする．このとき全ての $s \in S$ に対して $f(s) \leq t$ が成り立つから，全ての s について $s \leq g(t)$ が成り立つ．したがって $g(t)$ は S の上界であり，$\bigvee S \leq g(t)$ が成り立つ．これより $f(\bigvee S) \leq t$ となり，$f(\bigvee S)$ は $f(S)$ の上界のうちで最小のものである．すなわち，$f(\bigvee S) = \bigvee f(S)$ が成立．右随伴が $\bigwedge$ を保つことも同様にして示される．

(ii) $y \in Y$ に対して，$g(y) = \bigvee \{x \in X \mid f(x) \leq y\}$ と定義する．X には全ての $\vee$ が存在するという仮定より $g\colon Y \to X$ は well-defined であり，また結びの定義より g は順序を保存する．これが f の右随伴であることを示そう．$f(x) \leq y$ なら，g の定義より $x \leq g(y)$ である．逆に $x \leq g(y)$ であると仮定する．このとき f の単調性と，f が $\bigvee$ を保つことから，$f(x) \leq f(g(y)) = \bigvee \{f(x) \mid f(x) \leq y\} = y$ がわかる．したがって g は f の右随伴である．

(iii) $f(x) = \bigwedge \{y \in Y \mid x \leq g(y)\}$ と定義すれば，(ii) と同様に示される． □

上の定理より，完備 Heyting 代数は以下のように特徴づけられる．

命題 7.6. 完備束 X が Heyting 代数となるための必要十分条件は，X が無限分配則 $a \wedge \bigvee B = \bigvee_{b\in B} a \wedge b$ を満たすことである．

証明．X が完備 Heyting 代数なら $a \wedge (\cdot)$ は $a \to (\cdot)$ の左随伴なので，命題 7.5(i) により無限分配則を満たす．

逆に X が完備束で無限分配則 $a \wedge \bigvee B = \bigvee_{b\in B} a \wedge b$ を満たすならば，命題 7.5(ii) により $a \wedge (\cdot)$ は右随伴 $a \to (\cdot)$ を持つ．この演算 $(a,b) \mapsto (a \to b)$ によって X は Heyting 代数となる． □

位相空間の開集合系は分配的完備束だが，さらに次のような性質を持っている．

例 7.7. $(X,\mathscr{O})$ を位相空間とする．このとき，全ての $V \in \mathscr{O}$ と $\mathscr{U} \subset \mathscr{O}$ に対して，次の無限分配律が成り立つ．

$$V \wedge \bigvee \mathscr{U} = \bigvee_{O\in\mathscr{U}} V \wedge O. \tag{83}$$

これは，$\bigvee$ は単なる $\bigcup$ であり，また有限個の交わり $\wedge$ は単なる $\cap$ であることからすぐにわかる．従って，$\mathscr{O}$ は完備な Heyting 代数となる．命題 7.5(ii) による構成を思い出せば，$\mathscr{O}$ における $A \to B$ は，$A \to B = \bigvee\{G \in \mathscr{O} \mid A \cap G \subset B\}$ である．

上の性質を抽象して束論的に見ることで，次の定義を得る．

定義 7.8. X を完備束とする．全ての $a \in X$ と $B \subset X$ に対して

$$a \wedge \bigvee B = \bigvee_{b\in B} a \wedge b \tag{84}$$

が成り立つとき，X をフレーム (frame, 枠) という．有限個の $\wedge$ と全ての $\bigvee$ を保つ写像を，フレーム準同型と呼ぶ．

位相空間と連続写像の成す圏を **Top** で，フレームとフレーム準同型の圏を **Frm** で表すことにする．また，**Frm** の双対圏 $\mathbf{Frm}^{\mathrm{op}}$ を **Loc** と表し，ロケールの圏と呼ぶ．つまり，フレームとロケールと完備 Heyting 代数は，対象としてはどれも同じものである．（違うのは射である．）位相空間 $(X,\mathscr{O})$ に対して $\Omega(X) = \mathscr{O}$ とし，連続写像 $f\colon X \to Y$ に対して $\Omega(f)\colon \Omega(Y) \to \Omega(X)$ を $\Omega(f)(G) = f^{-1}(G)$ によって定義する．このとき，Ω は関手 $\mathbf{Top} \to \mathbf{Frm}$ を定める．位相空間論を集合上の開集合系ではなく，フレーム上の出来事と思って調べる分野を点なし位相空間論 (pointless topology) などと言うらしい．詳しくは Johnstone [6] や Picado and Pultr [8] などを参照されたい．

References

[1] Steve Awodey. *Category Theory.* 2nd ed. Oxford Logic Guides 52. Oxford University Press, 2010.

[2] Steve Awodey. **圏論 — 原著第 2 版**. Trans. by 前原 和寿. 共立出版, 2015. URL: http://www.kyoritsu-pub.co.jp/bookdetail/9784320111158.

[3] Steven Givant and Paul Halmos. *Introduction to Boolean Algebras.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, 2009. DOI: 10.1007/978-0-387-68436-9.

[4] George Grätzer. *Lattice Theory: Foundation*. Springer Basel, 2011. DOI: 10.1007/978-3-0348-0018-1.

[5] 岩永 恭雄 and 佐藤 眞久. **環と加群のホモロジー代数的理論**. 日本評論社, 2002.

[6] Peter T. Johnstone. *Stone Spaces*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 3. Cambridge University Press, 1982.

[7] Serge Lang. *Algebra*. Revised third edition. Graduate Texts in Mathematics 211. Springer-Verlag New York, 2002. ISBN: 9780387953854. DOI: 10.1007/978-1-4613-0041-0. URL: https://www.springer.com/us/book/9780387953854.

[8] Jorge Picado and Aleš Pultr. *Frames and Locales: Topology without points*. Frontiers in Mathematics. Springer Basel, 2012. DOI: 10.1007/978-3-0348-0154-6.

[9] 田中俊一. **位相と論理**. (日評数学選書). 日本評論社, 2000. ISBN: 9784535601277.

索引