位相空間論セミナー I：位相空間論の基礎概念

関根・深澤研究室
平井祐紀

2018 年 9 月 4 日

（素朴）集合論に関する初歩的な知識を仮定する．

このノートでは，位相空間論の基礎概念を学ぶ．開集合，閉集合，近傍，連続写像などの概念を導入し，その基本的な性質を調べる．さらに，位相空間における収束の概念を定義するが，それらを点列に限らず，有向族やフィルターなどの一般的な設定の下で論じる．

1　開集合

集合 X に対してその冪集合を $\mathscr{P}(X)$ で表すことにする．

定義 1.1. X を集合とする．X の部分集合族 $\mathscr{O}_X$ が次の条件 (O1)–(O3) を満たすとき，$\mathscr{O}_X$ を X の開集合系ないし位相とよび，$\mathscr{O}_X$ の元を X の開集合と呼ぶ．

(O1) $\emptyset \in \mathscr{O}_X$ かつ $X \in \mathscr{O}_X$.
(O2) 任意の族 $\mathscr{U} \subset \mathscr{O}_X$ に対して $\bigcup \mathscr{U} \in \mathscr{O}_X$.
(O3) 任意の $U, V \subset \mathscr{O}_X$ に対して $U \cap V \in \mathscr{O}_X$.

集合 X とその開集合系 $\mathscr{O}_X$ の組 $(X, \mathscr{O}_X)$ を位相空間 (topological space) という．

考えている位相が明らかなときは，単に X を位相空間と呼ぶこともある．

$\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2$ を X の位相とする．$\mathscr{O}_1 \subset \mathscr{O}_2$ なるとき，$\mathscr{O}_1$ は $\mathscr{O}_2$ より粗いといい，$\mathscr{O}_2$ は $\mathscr{O}_1$ より細かいという．集合としてはどちらの空間も同じであるが，位相空間としては $(X, \mathscr{O}_1)$ と $(X, \mathscr{O}_2)$ は別物と考える．

例 1.2. (i) X を任意の集合とし，$\mathscr{O}_X = \{\emptyset, X\}$ と定義する．このとき $\mathscr{O}_X$ は X の開集合系である．この位相を密着位相と呼ぶ．

(ii) X を任意の集合とし，$\mathscr{O}_X = \mathscr{P}(X)$ とする．このとき $(X, \mathscr{O}_X)$ は位相空間となる．この位相を離散位相と呼ぶ．

(iii) $2 = \{0, 1\}$ に対して，$\{0, \{1\}, 2\}$ は 2 の位相を定める．この位相空間を $\mathbb{2}$ で表すことにする[*1]．

X の位相の特徴づけを行う．

補題 1.3. X を集合とし，$\mathscr{U} \subset \mathscr{P}(X)$ とする．このとき，次の 2 条件は同値である．

[*1] これは一般的な記号ではない．斎藤 [10] では $\mathbb{S}$ と書かれている空間である．

(i) 任意の族 $(U_i)_{i\in I} \in \mathscr{U}^I$ について，$\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathscr{U}$ が成り立つ．
(ii) $U \in \mathscr{P}(X)$ とする．任意の $x \in U$ に対してある $V \in \mathscr{U}$ が存在して $x \in V \subset U$ が成り立つなら，$U \in \mathscr{U}$ である．

証明．*Step 1*：*(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)* **の証明．** $U \in \mathscr{P}(X)$ に対して

$$\mathscr{U}_U = \{V \in \mathscr{U} \mid V \subset U\}$$

と定義する．このとき (ii) とは，$U = \bigcup \mathscr{U}_U$ ならば $U \in \mathscr{U}$ ということである．したがって (i) ならば (ii) が成立する．

Step 2：*(ii)* $\Longrightarrow$ *(i)* **の証明．** $(U_i)_{i\in I}$ を $\mathscr{U}$ の元の族とし，$U = \bigcup_{i\in I} U_i$ と定義する．$x \in U$ とすれば $x \in U_j \subset \bigcup_i U_i = U$ なる $U_j \in \mathscr{U}$ が取れるから，U は条件 (ii) の仮定を満たす．よって $U = \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathscr{U}$ が成り立つ． □

補題 1.3 より，位相の定義において条件 (O2) は補題 1.3 の条件 (ii) で置き換えてもよいことが分かる．補題 1.3 を用いれば，位相空間の開集合の特徴づけが得られる．

命題 1.4. $(X, \mathscr{O}_X)$ を位相空間とする．このとき，次の 2 条件は同値である．

(i) U は X の開集合である．
(ii) 任意の $x \in U$ について，$V \in \mathscr{O}_X$ で $x \in V \subset U$ を満たすものが存在する．

証明．*(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)* **の証明．** U を開集合とする．このとき，(ii) の条件における V として U 自身を取ればよい．

(ii) $\Longrightarrow$ *(i)* **の証明．** U を条件 (ii) を満たす集合とする．

$$\mathscr{U}_U = \{V \in \mathscr{O}_X \mid V \subset U\}$$

とすれば，条件 (ii) より $U = \bigcup \mathscr{U}_U$ が成り立つ．これより $U \in \mathscr{O}$ が成立． □

線形空間では，基底と呼ばれる元の族が重要な役割を果たした．位相空間でも，位相の基本となる開集合族という概念が存在する．

定義 1.5. $(X, \mathscr{O}_X)$ を位相空間とし，$\mathscr{U} \subset \mathscr{P}(X)$ とする．任意の $U \in \mathscr{O}_X$ に対してある $\mathscr{U}_0 \subset \mathscr{U}$ で $U = \bigcup \mathscr{U}_0$ なるものが存在するとき，$\mathscr{U}$ は開集合の基底 (basis) または開基であるという．

注意 1.6. 線形空間の基底の元の数[*2]は一意であったが，開基の濃度は一意には定まらない．しかし，基数の性質より，位相空間の開基の濃度のうち最小のものが存在する．この基数を位相空間の荷重 (weight) と呼び，$w(X)$ などと表す．[*3] [*4]．

定義 1.7. 位相空間 X の開基で可算個の元からなるものが存在するとき，X は第 2 可算であるという．

集合の内部の概念を定義する．

定義 1.8. X を位相空間とし，A を X の部分集合とする．

---

*2 正確に言えば濃度
*3 Engelking [2]
*4 児玉・永見では「位相濃度」とか呼んでいる．

(i) $x \in A$ とする．開集合 U で $x \in U \subset A$ を満たすものが存在するとき，x は A の内点であるという．

(ii) A の内点全体からなる集合を A° で表し，これを A の内部と呼ぶ．A の内部を $\operatorname{Int} A$ と書くこともある．

命題 1.9. $(X, \mathscr{O}_X)$ を位相空間，A および B を X の部分集合とする．

(i) A° は X の開集合である．

(ii) A° は A に含まれる開集合のうち，最大のものである．

(iii) A が開集合であることは，$A = A^\circ$ であることと同値である．

(iv) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ である．

(v) $A \subset B$ なら，$A^\circ \subset B^\circ$ が成り立つ．

(vi) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ である．

証明．
$$\mathscr{U}_A = \{V \in \mathscr{O}_X \mid V \subset A\}$$
と定義すれば，集合の内部の定義より $A^\circ = \bigcup \mathscr{U}_A$ となるから，(ii) が分かる．(ii) と命題 1.4 より (i) と (iii) が従う．(iv) は (i) と (iii) から分かる．

(v) を示す．$x \in A^\circ$ ならば，$U \in \mathscr{O}_X$ で
$$x \in U \subset A$$
を満たすものが存在する．このとき $x \in U \subset A \subset B$ だから，x は B の内点でもある．すなわち $A^\circ \subset B^\circ$ が成立．

(vi) (i) と開集合の公理より $A^\circ \cap B^\circ$ は $A \cap B$ に含まれる開集合である．(ii) より $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$ が分かる．$x \in (A \cap B)^\circ$ として，$x \in U \subset A \cap B$ を満たす開集合 U をとる．このとき $x \in U \subset A$ および $x \in U \subset B$ から $x \in A^\circ \cap B^\circ$ となる．よって逆向きの包含関係 $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$ も示された． □

2 連続写像

定義 2.1. $(X, \mathscr{O}_X), (Y, \mathscr{O}_Y)$ を位相空間，$f \colon X \to Y$ を写像とする．

(i) 任意の $U \in \mathscr{O}_Y$ に対して $f^{-1}(U) \in \mathscr{O}_X$ となるとき，f は連続であるという．

(ii) $a \in X$ とする．$f(a) \in V$ なる任意の $V \in \mathscr{O}_Y$ に対して，$U \in \mathscr{O}_X$ で $U \subset f^{-1}(V)$ を満たすものが存在するとき，f は a で連続であるという．

連続写像 : $X \to Y$ の全体を $C(X, Y)$ で表す．

命題 2.2. $(X, \mathscr{O}_X), (Y, \mathscr{O}_Y)$ を位相空間，$f \colon X \to Y$ を写像とする．写像 $f^* \colon \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X)$ を $A \mapsto f^{-1}(A)$ で定める．このとき，次の 3 条件は同値である．

(i) $f \colon X \to Y$ は連続である．

(ii) $f^* \mathscr{O}_Y \subset \mathscr{O}_X$.

(iii) $\mathscr{O}_Y \subset (f^*)^{-1} \mathscr{O}_X$.

証明．定義より明らか． □

命題 2.3. $(X,\mathscr{O}_X),(Y,\mathscr{O}_Y),(Z,\mathscr{O}_Z)$ を位相空間とする．$f\colon X\to Y$ および $g\colon Y\to Z$ が連続写像ならば，$g\circ f$ も連続写像である．

証明．
$$(g\circ f)^*(\mathscr{O}_Z)=f^*(g^*(\mathscr{O}_Z))\subset f^*(\mathscr{O}_Y)\subset \mathscr{O}_X$$
より分かる．（命題 2.2 を参照．） □

写像 $f\colon X\to Y$ は，X の位相が細かければ細かいほど連続になりやすい．X が離散位相空間なら，f は必ず連続写像となる．逆に，Y の位相は粗ければ粗いほど f は連続になりやすい．Y が密着空間なら，Y への写像はどれも連続である．

位相空間 $(X,\mathscr{O}_1)$, $(X,\mathscr{O}_2)$ を，それぞれ X_1, X_2 で表すことにする．このとき，$\mathscr{O}_1$ が $\mathscr{O}_2$ より細かいとは，$\mathrm{id}_X\colon X_1\to X_2$ が連続であるということに他ならない．

$(X,\mathscr{O}_X)$ において，部分集合 $A\subset X$ の特性関数 $1_A\colon X\to \mathbb{2}$ を考える．このとき，A が X の開集合であることと，1_A が連続写像であることは同値である．

関数の連続性とは，基本的には局所的な性質である．そのことを端的に表しているのが次の命題である．

命題 2.4. $(X,\mathscr{O}_X)$ および $(Y,\mathscr{O}_Y)$ を位相空間とする．このとき，写像 $f\colon X\to Y$ において次の 2 条件は同値である．

(i) f は連続である．
(ii) f は任意の $x\in X$ で連続である．

証明．*(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)* **の証明．** f が連続であるとする．$x\in X$ とし，$f(x)$ の任意の開近傍 V をとる．定義 2.1.(ii) における U として，$U=f^{-1}(V)$ をとればよい．

(ii) $\Longrightarrow$ *(i)* **の証明．** f は任意の $x\in X$ で連続であるとする．任意の $V\in\mathscr{O}_Y$ について，$f^{-1}(V)$ が X の開集合となることを示せばよい．$x\in f^{-1}(V)$ とすれば，f の x での連続性より $x\in U\subset f^{-1}(V)$ を満たす開集合 $U\in\mathscr{O}_X$ が存在する．命題 1.4 より，これは $f^{-1}(V)$ が開集合であるということに他ならない． □

定義 2.5. X と Y を位相空間とする．

(i) $f\colon X\to Y$ を連続写像とする．連続写像 $g\colon Y\to X$ で $g\circ f=\mathrm{id}_X$ かつ $f\circ g=\mathrm{id}_Y$ を満たすことが存在するとき，f は同相写像 (homeomorphism) であるという．f が同相写像であるとは，すなわち f が全単射で f^{-1} も連続であるということである．
(ii) 同相写像 : $X\to Y$ が存在するとき，X と Y は同相であるという．

位相空間 X,Y が同相であるとは，X,Y のもつ位相的な構造が全く同じであるという意味である．このとき X と Y は位相空間としては同じもであると考えることが出来る．

命題 2.6. $(X,\mathscr{O}_X),(Y,\mathscr{O}_Y)$ を位相空間，$f\colon X\to Y$ を可逆写像とする．このとき，次の 2 条件は同値である．

(i) f は同相写像である．
(ii) $f^*\mathscr{O}_Y=\mathscr{O}_X$

証明．f の逆写像を g で表す．

(i) $\Longrightarrow$ *(ii)* **の証明．** f を同相写像とする．f の連続性より

$$f^*\mathscr{O}_Y \subset \mathscr{O}_X$$

である．また，逆写像 g の連続性より

$$g^*(\mathscr{O}_X) \subset \mathscr{O}_Y$$

となるから，左から f^* を施せば

$$\mathscr{O}_X = (g \circ f)^*(\mathscr{O}_X) = f^*g^*\mathscr{O}_X \subset f^*\mathscr{O}_Y$$

を得る．これより (ii) が分かる．

(ii) $\Longrightarrow$ *(i)* **の証明．** (ii) を仮定すれば f は明らかに連続である．（命題 2.2）また，仮定 $f^*\mathscr{O}_Y = \mathscr{O}_X$ において左から g^* を作用させれば

$$g^*(\mathscr{O}_X) = g^*(f^*\mathscr{O}_Y) = (f \circ g)^*\mathscr{O}_Y = \mathscr{O}_Y$$

となり，g の連続性も分かる． □

定義 2.7. $(X,\mathscr{O}_X)$, $(Y,\mathscr{O}_Y)$ を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を写像とする．

(i) X の任意の開集合 U について $f(U)$ が Y の開集合となるとき，f を開写像 (open mapping) という．

(ii) X の任意の閉集合 F について $f(F)$ が Y の閉集合となるとき，f を閉写像 (closed mapping) という．

一般に連続写像は開写像でも閉写像でもないが，同相写像は明らかに開写像かつ閉写像である．

3　近傍，閉集合

定義 3.1. $(X,\mathscr{O}_X)$ を位相空間とする．$V \in \mathscr{P}(X)$ が $x \in V^\circ$ を満たすとき，V は x の近傍であるという．V が x の近傍かつ開集合のときは，特にこれを開近傍という．$x \in X$ の近傍全体のなす集合を，x の近傍系といい，このノートでは $\mathscr{V}_x$ で表すことにする．

命題 3.2. $(X,\mathscr{O}_X)$ を位相空間とし，$x \in X$ の近傍系を $\mathscr{V}_x$ で表すことにする．

(N1) 任意の $V \in \mathscr{V}_x$ に対して $x \in V$ である．

(N2) $X \in \mathscr{V}_x$

(N3) $V \in \mathscr{V}_x$ かつ $V \subset W$ ならば $W \in \mathscr{V}_x$ である．

(N4) $U, V \in \mathscr{V}_x$ ならば $U \cap V \in \mathscr{V}_x$

(N5) 任意の $V \in \mathscr{V}_x$ に対してある $W \in \mathscr{V}_x$ が存在して，$W \subset V$ かつ任意の $y \in W$ について $V \in \mathscr{V}_y$ となる．

証明．(N1) 近傍の定義より明らか．

(N2) $x \in X = X^\circ$ より明らか．

(N3) $V \in \mathscr{V}_x$ かつ $V \subset W$ とすれば，$x \in V^\circ \subset W^\circ$ から W はまた x の近傍である．

(N4) $U^\circ \cap V^\circ = (U \cap V)^\circ$ より分かる．

(N5) $V \in \mathscr{V}_x$ に対して，$x \in W \subset V$ なる開集合 W をとる．このとき，任意の $y \in W$ について $y \in W = W^\circ \subset V^\circ$ となり，$V \in \mathscr{V}_y$ が分かる． □

注意 3.3. 命題 3.2 の条件 (N1)–(N5) を近傍系の公理と呼ぶ．各点 $x \in X$ に対して (N1)–(N5) を満たす集合系 $\mathscr{V}_x$ が定義されているというところから出発して，位相空間を考えることも出来る．

命題 3.4. X を位相空間とし，その部分集合 A を考える．A について次の 2 条件は同値である．

(i) A は開集合である．

(ii) 任意の $a \in A$ について，$V \in \mathscr{V}_a$ で $a \in V \subset A$ を満たすものが存在する．

証明. (i) $\Longrightarrow$ (ii) 命題 1.4 より，任意の $a \in A$ に対して，ある開集合 U で $a \in U \subset A$ を満たすものが存在する．U は明らかに a の近傍であり，(ii) が従う．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) 仮定より，任意の $a \in A$ に対して，$V \in \mathscr{V}_a$ で $a \in V \subset A$ を満たすものが存在する．近傍の定義より $a \in V^\circ \subset V \subset A$ であるから，命題 1.4 より A が開集合となる． □

定義 3.5. X を位相空間とし，$x \in X$ の近傍系を $\mathscr{V}_x$ で表す．$\mathscr{U}_x \subset \mathscr{P}(X)$ が

(i) $\mathscr{U}_x \subset \mathscr{V}_x$,

(ii) 任意の $V \in \mathscr{V}_x$ に対して $U \in \mathscr{U}_x$ で $x \in U \subset V$ を満たすものが存在する，

を満足するとき，$\mathscr{U}_x$ は x の近傍基底，または基本近傍系であるという．

基本近傍系 $\mathscr{U}_x$ の各元が開集合のとき，$\mathscr{U}_x$ を特に基本開近傍系とよぶこともある．

関数の 1 点での連続性は，近傍系の言葉を使って書き直すことが出来る．

命題 3.6. X, Y を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を写像とする．任意の点 $x \in X$ について，次の 3 条件は同値．

(i) f は $x \in X$ で連続．

(ii) 任意の $V \in \mathscr{V}_{f(x)}$ に対し，$U \in \mathscr{V}_x$ で $f(U) \subset V$ を満たすものが存在する．

(iii) $\mathscr{U}_x$ および $\mathscr{U}_{f(x)}$ をそれぞれ $x, f(x)$ の任意の基本近傍系の一つとする．任意の $V \in \mathscr{U}_{f(x)}$ に対して，ある $U \in \mathscr{V}_x$ で $f(U) \subset V$ 満たすものが存在する．

証明. (i) $\Longrightarrow$ (iii) f は x で連続とする．$V \in \mathscr{U}_{f(x)}$ とすれば，$f(x) \in V^\circ$ だからある開集合 $W \ni x$ で $f(W) \subset V^\circ \subset V$ なるものが存在する．W は x の近傍だから，$U \in \mathscr{U}_x$ で $U \subset W$ なるものがとれる．このとき $f(U) \subset f(W) \subset V$ である．つまり，(iii) が成り立つ．

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) $V \in \mathscr{V}_{f(x)}$ に対して，$V' \subset V$ となるような $V' \in \mathscr{U}_{f(x)}$ を選ぶ．(iii) より，$U \in \mathscr{U}_x$ で $f(U) \subset V$ なるものがとれる．$U \in \mathscr{U}_x \subset \mathscr{V}_x$ だから，(ii) が従う．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) $f(x) \in V$ なる開集合をとれば，$V \in \mathscr{V}_{f(x)}$ である．(ii) から，x の近傍 W で $f(W) \subset V$ なるものがとれる．$U = W^\circ$ とすれば，U は $x \in U$ なる開集合で $f(U) \subset f(W) \subset V$ を満たすものである．よって f は x で連続である． □

定義 3.7. X を位相空間とする．各点 $x \in X$ が可算個の元からなる基本近傍系を持つとき，X は第 1 可算であるという．

次に，閉集合と閉包の概念を導入する．

定義 3.8. X を位相空間とする．

(i) $F \subset X$ とする．$X \setminus F$ が X の開集合であるとき，F は閉集合であるという．

(ii) $A \subset X$ に対して，その閉包 (closure)$\overline{A}$ を

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \forall U \in \mathscr{V}_x,\ U \cap A \neq \emptyset\}$$

で定義する．$\overline{A}$ の元を A の触点と呼ぶ．閉包を $\mathrm{Cl}\,A$ で表すこともある．

(iii) $A \subset X$ および $x \in X$ とする．任意の $V \in \mathscr{V}_x$ について $A \cap (V \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ となるとき，x は A の集積点 (accumulating point) であるという．

(iv) $A \subset X$ に対し，$X \setminus \overline{A}$ を A の外部 (exterior) という．

(v) $A \subset X$ に対し，$\overline{A} \setminus A^\circ$ を A の境界 (boundary) といい，∂A と表す．

(vi) $A \subset X$ が $\overline{A} = X$ を満たすとき，A は X で稠密 (dense) であるという．

(vii) X の稠密部分集合 A で可算集合なるものが存在するとき，X は可分 (separable) であるという．

命題 3.9. $(X, \mathscr{O})$ を位相空間とし，$\mathscr{C}$ を X の閉集合全体の集合とする．このとき，$\mathscr{C}$ は次の性質をもつ．

(i) $\emptyset, X \in \mathscr{C}$.

(ii) $F_1, F_2 \in \mathscr{C}$ なら，$F_1 \cup F_2 \in \mathscr{C}$.

(iii) 空でない $\mathscr{F} \subset \mathscr{C}$ について，$\bigcap \mathscr{F} \in \mathscr{C}$ が成り立つ．

証明. (i) $\emptyset$ は開集合だから，$X = X \setminus \emptyset$ は閉集合である．また X は開集合だから，$\emptyset = X \setminus X$ も閉集合である．

(ii) F_1, F_2 を閉集合とすれば，条件 (O3) から $X \setminus (F_1 \cup F_2) = (X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2)$ は開集合である．よって $F_1 \cup F_2$ も閉集合である．

(iii) $\mathscr{F}$ を閉集合族とすれば，条件 (O2) から

$$X \setminus \bigcap \mathscr{F} = X \setminus \bigcap_{F \in \mathscr{F}} F = \bigcup_{F \in \mathscr{F}} X \setminus F$$

は開集合である．よって $\bigcap \mathscr{F}$ は閉集合となる． □

位相空間の閉部分集合は，閉包によって特徴付けられる．

命題 3.10. X を位相空間，A をその部分集合とする．

(i) $\overline{A} = X \setminus (X \setminus A)^\circ$.

(ii) $\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合である．

(iii) A が閉集合であることと $A = \overline{A}$ は同値である．

証明. (i) 閉包の定義における条件を否定すれば，$x \in X \setminus \overline{A}$ は「x の適当な近傍 U をとれば $A \cap U = \emptyset$」ということであり，これは「x の適当な近傍 U をとれば $U \subset X \setminus A$」と同値である．最後の条件は x が $X \setminus A$ の内点であるということに他ならない．

(ii) 命題 1.9 と (i) より $A = X \setminus (X \setminus A) \subset X \setminus (X \setminus A)^\circ$ である．(i) より $\overline{A}$ が閉集合であることも分かる．F を $A \subset F$ なる閉集合とすれば，$X \setminus F$ は $X \setminus F \subset X \setminus A$ を満たす開集合である．内部の最大性より，$X \setminus F \subset (X \setminus A)^\circ$ となり，$\overline{A} = X \setminus (X \setminus A)^\circ \subset X \setminus (X \setminus F) = F$ が分かる．これより $\overline{A}$ は A を含む閉集合のうち最小のものである．

(iii) A が閉集合であるとは，$X \setminus A$ が開集合であるということである．$X \setminus A$ が開集合であることは $X \setminus A = (X \setminus A)^\circ$ であることと同値であり，これは $A = X \setminus (X \setminus A) = X \setminus (X \setminus A)^\circ = \overline{A}$ とも同値である． □

命題 3.11. X を位相空間とし，$A \subset X$ とする．$\mathcal{U}_x$ を $x \in X$ の基本近傍系とする．このとき，次の 2 条件は同値である．

(i) $x \in \overline{A}$.

(ii) 任意の $V \in \mathcal{U}_x$ について，$V \cap A \neq \emptyset$ が成り立つ．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii) 明らか．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) $V \in \mathcal{V}_x$ とすれば，$x \in W \subset V$ なる $W \in \mathcal{U}_x$ がとれる．仮定 (ii) より $W \cap A \neq \emptyset$ だから，$V \cap A \neq \emptyset$ となる． □

命題 3.12. X を位相空間とする．X の部分集合の閉包について，次の性質が成り立つ．

(CO1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

(CO2) $A \subset \overline{A}$.

(CO3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

(CO4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

証明．(CO1)–(CO3) は命題 3.10 より明らかである．

(CO4) 命題 1.9 および命題 3.10 から

$$\begin{aligned}\overline{A \cup B} &= X \setminus [X \setminus (A \cup B)]^\circ \\ &= X \setminus [(X \setminus A) \cap (X \setminus B)]^\circ \\ &= X \setminus [(X \setminus A)^\circ \cap (X \setminus B)^\circ] \\ &= [X \setminus (X \setminus A)^\circ] \cup [X \setminus (X \setminus B)^\circ] \\ &= \overline{A} \cup \overline{B}\end{aligned}$$

となる． □

注意 3.13. 命題 3.12 における条件 (CO1)–(CO4) を閉包作用素の公理という．閉包作用素の公理から出発して，位相空間を定義することも出来る[*5]．

位相空間から位相空間への写像が連続である条件を，閉集合や閉包の言葉を使って言い換える．

命題 3.14. X と Y を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を写像とする．このとき，次の 3 条件は同値である．

(i) f は連続である．

(ii) 任意の閉集合 $F \subset Y$ について，$f^{-1}(F)$ は X の閉集合となる．

(iii) 任意の部分集合 $A \subset X$ について，$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ が成り立つ．

証明．(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) は明らか．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) $f(A) \subset \overline{f(A)}$ だから，$A \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ である．(ii) より $f^{-1}(\overline{f(A)})$ は閉集合だから，閉包の最小生より $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ となる．これより $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ が分かる．

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) $F \subset Y$ を閉集合とし，$A := f^{-1}(F)$ とする．仮定より $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F} = F$ となるから，$A = f^{-1}(F) \supset \overline{A}$ が分かる．よって $A = \overline{A}$ であり，$A = f^{-1}(F)$ は閉集合であることが分かっ

[*5] 児玉・永見 [8] などを見よ．

た． □

4 有向族

本節では有向族の概念を導入する．有向族は点列を一般化した概念で，位相空間においては有向族の極限を考えることが出来る．まずは，有向集合を定義する．

定義 4.1 (有向集合)**.** Λ を集合，$\leq$ をその上の二項関係とする．

(i) $\lambda \in \Lambda$ なら $\lambda \leq \lambda$.
(ii) $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ が $\lambda \leq \mu$ かつ $\mu \leq \nu$ を満たすならば，$\lambda \leq \nu$ も成り立つ．
(iii) 任意の $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対してある $\nu \in \Lambda$ で $\lambda \leq \nu$ かつ $\mu \leq \nu$ を満たすものが存在する．

が成り立つとき，$(\Lambda, \leq)$ は有向集合 (directed set) であるという．
$\Lambda_0 \subset \Lambda$ が次の条件を満たすとき，Λ_0 は Λ において共終 (co-final) であるという．

(iv) 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して，$\mu \geq \lambda$ なる $\mu \in \Lambda_0$ が存在する．

例 4.2. $(X, \mathscr{O})$ を位相空間とする．$x \in X$ に対して，$\mathscr{U}_x$ をその基本近傍系とする．$\mathscr{U}_x$ 上の順序 $U \leq_{\mathscr{U}_x} V$ を $U \supset V$ で定義する．このとき，半順序集合 $(\mathscr{U}_x, \leq_{\mathscr{U}_x})$ は有向集合である．実際，任意の $U, V \in \mathscr{U}_x \subset \mathscr{V}_x$ について $U \cap V \in \mathscr{V}_x$ だから，基本近傍系の定義より $W \subset U \cap V$ を満たす $W \in \mathscr{U}_x$ が存在する．これは $U \leq_{\mathscr{U}_x} W$ かつ $V \leq_{\mathscr{U}_x} W$ を満たす $\mathscr{U}_x$ の元である．基本近傍系の定義より，任意の基本近傍系 $\mathscr{U}_x \subset \mathscr{V}_x$ は明らかに $\mathscr{V}_x$ で共終である．

有向集合で添え字付けられた点の族を有向族という．

定義 4.3 (有向族)**.** Λ を有向集合，X を集合とする．

(i) 写像 $\Lambda \to X$ を X の有向族，またはネット (net) と呼ぶ．有向族を $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ と書くことも多い．
(ii) M を有向集合とし，$x \colon \Lambda \to X$ および $y \colon M \to X$ をネットとする．$\varphi \colon M \to \Lambda$ で，$y = x \circ \varphi$ かつ

$$\forall \lambda \in \Lambda,\ \exists \mu_0 \in M,\ \forall \mu \in M (\mu \geq \mu_0 \implies \varphi(\mu) \geq \lambda)$$

が成り立つとき，$y = (y_\mu)_{\mu \in M}$ は $x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の部分有向族 (subnet) であるという．

$(x_{\varphi(\alpha)})_{\alpha \in A}$ が $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の部分有向族であるとき，$\varphi(A)$ は Λ で共終である．$\varphi \colon A \to \Lambda$ が特に単調写像のときは，$(x_{\varphi(\alpha)})$ が (x_λ) の部分有向族であることと，$\varphi(A)$ が共終であることは同値となる．
位相空間における有向族について，その極限を定義することが出来る．

定義 4.4. X を位相空間とし，$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を X の有向族とする．任意の $U \in \mathscr{V}_x$ に対して，ある $\lambda \in \Lambda$ で

$$\kappa \geq \lambda \implies x_\kappa \in U$$

を満たすものが存在するとき，$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は x に収束するといい，x は (x_λ) の極限 (limit) または極限点 (limit point) であるという．有向族 (x_λ) の極限全体の集合を

$$\lim_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda, \quad \lim_{\lambda} x_\lambda, \quad \lim (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$$

などと表記する．(x_λ) が x に収束するとき，

$$x_\lambda \underset{\lambda}{\to} x$$

という表記もよく用いられる．一般に有向族の極限は一意とは限らないが，極限が唯一点のみ存在するときは

$$\lim_\lambda x_\lambda = x$$

などと表現する．

次に，有向族の収束についての基本的な性質を調べる．その前に，予備概念を一つ用意する．

$(\Lambda, \leq_\Lambda)$ および $(A_\lambda, \leq_\lambda)$ を有向集合の族とする．$\Lambda \times \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ は成分ごとの順序を入れることで，また有向集合となる．集合 X における有向族の族 $x_\lambda\colon A_\lambda \ni \alpha \mapsto x_{\lambda\alpha} \in X$ が与えられたとき，対角有向族 $\Delta(x_\lambda)$ を

$$\begin{aligned} \Delta(x_\lambda)\colon \Lambda \times \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda &\longrightarrow X \\ (\lambda, \varphi) &\longmapsto x_{\lambda\varphi(\lambda)} \end{aligned}$$

で定義する．

命題 4.5. X を位相空間とする．X における有向族の収束について，次の主張が成り立つ．

(MS1) $x_\lambda = x$ $(\forall\lambda \in \Lambda)$ なら，$x \in \lim x_\lambda$

(MS2) $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が x に収束するなら，その任意の部分有向族も x に収束する．

(MS3) $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の任意の部分有向族が，$x \in X$ に収束する部分有向族をもつなら，(x_λ) 自身も x に収束する．

(MS4) $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ および $(x_{\lambda\alpha})_{\alpha\in A_\lambda}$ を有向族とし，$y \in \lim_\lambda y_\lambda$ および $y_\lambda \in \lim_\alpha x_{\lambda\alpha}$ $(\lambda \in \Lambda)$ が成り立っているとする．このとき，対角有向族 $\Delta(x_\lambda)$ は y に収束する．

証明．(i) 任意の $V \in \mathscr{V}_x$ に対して $x_\lambda = x \in V$ であることから分かる．

(ii) $(x_{\varphi(\alpha)})_{\alpha\in A}$ を $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の任意の有向族とする．$x_\lambda \to x$ だから，任意の $V \in \mathscr{V}_x$ に対してある $\lambda_V \in \Lambda$ が存在して

$$\forall\lambda(\lambda \geq \lambda_V \implies x_\lambda \in V) \tag{1}$$

となる．$(x_{\varphi(\alpha)})$ が部分有向族であるとの仮定より，λ_V に対してある $\alpha_V \in A_\lambda$ で

$$\forall\alpha(\alpha \geq \alpha_V \implies \varphi(\alpha) \geq \lambda_V) \tag{2}$$

を満たすものがとれる．このとき (1) と (2) から，$\alpha \geq \alpha_V$ ならば $x_{\varphi(\alpha)} \in V$ となることが分かる．これより $(x_{\varphi(\alpha)})_{\alpha\in A}$ もまた x に収束することが分かる．

(iii) 対偶を示す．$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は x に収束しないとする．このとき，x のとある近傍 V をとれば，

$$\forall\lambda \in \Lambda(\exists\kappa \in \Lambda(\kappa \geq \lambda \wedge x_\kappa \notin V))$$

が成り立つ．$\lambda \in \Lambda$ に対して，上の条件を満たす κ を一つ選んで $\kappa = \varphi(\lambda)$ とする．このとき，$(x_{\varphi(\lambda)})_\lambda$ が x の部分有向族で，$x \notin \lim_\lambda x_{\varphi(\lambda)}$ となることを示す．$(x_{\varphi(\lambda)})_\lambda$ が有向族であることは明らかである．$\lambda \in \Lambda$ に対して $\kappa := \varphi(\lambda)$ とすれば，$\mu \geq \kappa$ なる μ について

$$\varphi(\mu) \geq \mu \geq \kappa = \varphi(\lambda) \geq \lambda$$

となる．これより，$(x_{\varphi(\lambda)})_\lambda$ は (x_λ) の部分有向族であることが分かる．$(x_{\varphi(\lambda)})_\lambda$ のいかなる部分有向族も x に収束しないことは定義より明らかである．

(iv) $(x_{\lambda\alpha})$ および (y_λ) は (iv) の仮定を満たすものとする．このとき $\Delta(x_\lambda)$ が y に収束することを示す．V は y の任意の近傍とする．このとき命題 3.2 より $W \subset V$ なる y の近傍で，任意の $z \in W$ について $V \in \mathscr{V}_z$ となるようなものがとれる．$\lambda_0 \in \Lambda$ を

$$\lambda \geq \lambda_0 \implies y_\lambda \in W$$

となるようにとる[*6]．W の選びかたより V は各 y_λ $(\lambda \geq \lambda_0)$ の近傍となっているから，

$$\alpha \geq \alpha_0(\lambda) \implies x_{\lambda\alpha} \in V$$

となるような $\alpha_0(\lambda) \in A_\lambda$ がとれる．ここで $\nu_0 = (\lambda_0, (\alpha_0(\lambda))_{\lambda\in\Lambda}) \in \Lambda \times \prod_\lambda A_\lambda$ と定義する．このとき，$\nu = (\kappa, (\beta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \geq \nu_0$ ならば，$\Delta(x_\lambda)(\nu) = x_{\kappa\beta_\kappa} \in V$ である[*7]．これより $\Delta(x_\lambda)$ は y に収束することが示された． $\square$

命題 4.5 は「収束の公理」とでも呼ぶべきものであって，これらの条件から出発して位相を導入できることができる．これは Moore-Smith の収束理論などとも呼ばれていて，そのため公理の条件を (MS$\cdot$) のように表しているわけである．

命題 4.6. X を収束とし，X には公理 (MS1)–(MS4) を満たす収束概念 $(\mathscr{C})$ が定義されているとする．$A \subset X$ に対して

$$\mathrm{Cl}(A) = \{a \in X \mid A \text{ の元からなる有向族で，} a \text{ に収束するものが存在する }\} \tag{3}$$

と定義すれば，Cl は閉包作用素の公理 (CO1)–(CO4) を満たす．さらに，閉包作用素 Cl から定まる位相における収束は，$(\mathscr{C})$ による収束概念と一致する．

証明. **Step 1 : (CO1) と (CO2) について．** (CO1) は明らかである．$a \in A$ なら定数有向族 a は a に収束するので，$a \in \mathrm{Cl}(A)$ である．よって (CO2) も成り立つ．

Step 2 : (CO4) について． $A \subset B$ かつ $a \in \mathrm{Cl}(A)$ とする．A の有向族で a に収束するものは，a に収束する B の有向族でもあるので，このとき $a \in \mathrm{Cl}(B)$ が成り立つ．よって $\mathrm{Cl}(A) \subset \mathrm{Cl}(B)$ である．すなわち，Cl は包含関係について単調である．これより $\mathrm{Cl}(A), F(B) \subset F(A \cup B)$ が成り立つので，$F(A) \cup F(B) \subset F(A \cup B)$ がわかる．逆向きの包含関係を示そう．$a \in F(A \cup B)$ とし，(x_λ) を a に収束する $A \cup B$ の有向族とする．集合 M_A, M_B を

$$M_A = \{\lambda \in \Lambda \mid x_\lambda \in A\}, \qquad M_B = \{\lambda \in \Lambda \mid x_\lambda \in B\} \tag{4}$$

と定義し，Λ から誘導される順序を入れる．このとき，M_A か M_B のどちらかは Λ の共終部分集合になっている．（いずれも共終部分集合でないとすると，(x_λ) は $A \cup B$ の有向族でないことになる．）特に M_A が共終であると仮定しても一般性を失わない．このとき $(x_\lambda)_{\lambda\in M_A}$ は (x_λ) の部分有向族で，A の点からなるものである．条件 (MS2) より $(x_\lambda)_{\lambda\in M_A}$ は a に収束するので，$a \in \mathrm{Cl}(A)$ がわかる．これより $a \in F(A) \cup F(B)$ となり，$F(A \cup B) \subset F(A) \cup F(B)$ が示された．

Step 3 : (CO3) について． (CO2) より $\mathrm{Cl}(A) \subset \mathrm{Cl}\,\mathrm{Cl}(A)$ は分かっているので，逆向きの包含関係を示す．$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathrm{Cl}(A)$ の有向族で a に収束するようなものとし，さらに各 $\lambda \in \Lambda$ について x_λ に収束する有

[*6] 収束の定義

[*7] $\beta_\kappa \geq \alpha_0(\lambda)$ に注意．

向族 $(x_{\lambda\alpha})_{\alpha\in A_\lambda}$ が与えられているとする．このとき，公理 (MS4) より対角有向族 $\Delta(x_\lambda)$ は a に収束する．よって $a\in\mathrm{Cl}(A)$ となり，$\mathrm{Cl}\,\mathrm{Cl}(A)\subset\mathrm{Cl}(A)$ がわかった．

Step 4 : Cl から定まる収束と $(\mathscr{C})$ の収束の一致性． Cl から定まる位相を $(\mathscr{T})$ と呼ぶことにする．まずは，$(\mathscr{C})$ で $a\in X$ に収束する有向族は $(\mathscr{T})$ でも a に収束することを示す．$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は $(\mathscr{C})$ で a に収束するが，$(\mathscr{T})$ では a に収束しないと仮定しよう．a の開近傍 U を

- どんな λ に対しても，ある $\lambda'\geq\lambda$ で $x_{\lambda'}\notin U$ を満たすものが存在する．

を満たすように選ぶ．このとき $M=\{\lambda\in\Lambda\mid x_\lambda\notin U\}$ は Λ の共終部分集合であり，$(x_\lambda)_{\lambda\in M}$ は $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の部分有向族となる．(x_λ) は $(\mathscr{C})$ で $a\in X$ に収束するから，(MS2) により部分有向族 $(x_\lambda)_{\lambda\in M}$ は a に収束する．したがって，$a\in\overline{X\setminus U}$ であり，一方で $a\notin X\setminus U$ だから U が開集合であるという仮定に矛盾する．

最後に，$(\mathscr{T})$ で $a\in X$ に収束する有向族は $(\mathscr{C})$ でも a に収束することを示そう．$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は $(\mathscr{T})$ で $a\in X$ に収束するとし，$(y_\mu)_{\mu\in M}=(x_{\varphi(\mu)})_{\mu\in M}$ を (x_λ) の任意の部分有向族とする．

$$M_\alpha=\{\mu\in M\mid\mu\geq\alpha\},\qquad A_\alpha=\{y_\mu\mid\mu\in M_\alpha\}\tag{5}$$

と定義する．$(y_\mu)_{\mu\in M_\alpha}$ は $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の部分有向族だから $(\mathscr{T})$ について a に収束し，したがって $(\mathscr{T})$ の定義により $a\in\bigcap_{\alpha\in M}\mathrm{Cl}(A_\alpha)$ が成り立つ．Cl の定義より，各 $\alpha\in M$ に対して，$(\mathscr{C})$ の意味で a に収束する A_α の有向族 $(z_{\alpha\beta})_{\beta\in B_\alpha}$ が存在する．$(z_{\alpha\beta})_{\beta\in B_\alpha}$ が A_α の有向族であるということは，任意の $\beta\in B_\alpha$ に対して，ある $\mu\in M_\alpha$ で $y_\mu=z_{\alpha\beta}$ を満たすものが存在するということである．ここで，

$$D_\alpha=\{(\mu,\beta)\in M_\alpha\times B_\alpha\mid z_{\alpha\beta}=y_\mu\}\tag{6}$$

と定義し，B_α の順序によって有向集合と見なす．（M_α の構造は忘れる．）写像 $\Theta_\alpha\colon D_\alpha\to M$，を $\Theta_\alpha(\mu,\beta)=\mu$ によって定義し，$\Xi_\alpha\colon D_\alpha\to M$ を $\Xi_\alpha(\mu,\beta)=\beta$ によって定めれば，$z_{\alpha\Xi_\alpha(\mu,\beta)}=y(\Theta_\alpha(\mu,\beta))$ が成り立つ．そこで，$w_{\alpha\delta}=z_{\alpha\Xi_\alpha(\mu,\beta)}$ と定義すれば，$(w_{\alpha\delta})_{\delta\in D_\alpha}$ は $(z_{\alpha\beta})_{\beta\in B_\alpha}$ の部分有向族であり，(MS2) より a に収束する．さらに $(w_{\alpha\delta})_{\delta\in D_\alpha}=y\circ\Theta_\alpha$ も成り立っている．（$(w_{\alpha\beta})$ が (y_μ) の部分有向族になっているかは問わない．）(MS1) より定数有向族 $w_\alpha=a$ は $(\mathscr{C})$ の意味でも a に収束するので，(MS4) により対角有向族 $\Delta(w)=(w_{\alpha\varphi(\alpha)}\,;\,(\alpha,\varphi)\in M\times\prod_\alpha D_\alpha)$ は $(\mathscr{C})$ の意味で a に収束する．後は $\Delta(w)$ が (y_μ) の部分有向族であることを示せば，(MS3) により (x_λ) も $(\mathscr{C})$ で a に収束することがわかる．$(w_{\alpha\beta})$ の定義より，$\Delta(w)_{\alpha\varphi}=w(\alpha\varphi(\alpha))=y(\Theta_\alpha(\varphi(\alpha)))$ が成り立っている．$\mu\in M$ に対して，$\alpha\geq\mu$ とすれば，任意の $(\alpha,\varphi)\in M\times\prod_\alpha D_\alpha$ について $\Theta_\alpha(\varphi(\alpha))\geq\alpha\geq\mu$ が成り立つ[*8]．ゆえに $\Delta(w)$ は (y_μ) の部分有向族である． □

5 フィルター

定義 5.1. X を集合とする．$\mathscr{F}\in\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ が次の三条件を満たすとき，$\mathscr{F}$ を X のフィルター (filter) と呼ぶ．

(F1). $\mathscr{F}$ は空でなく，$\emptyset\notin\mathscr{F}$．
(F2). $A,B\in\mathscr{F}$ なら，$A\cap B\in\mathscr{F}$．
(F3). $F\in\mathscr{F}$ かつ $F\subset F'\in\mathscr{P}(X)$ ならば $F'\in\mathscr{F}$．

[*8] $\varphi(\alpha)\in D_\alpha$ なので，その M_α 成分は α より大きい．

$\mathscr{F}$ を X のフィルターとすれば，フィルターは有限交叉性をもつ[*9]．定義より明らかに $X \in \mathscr{F}$ である．$\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ であるから，$\emptyset$ 上のフィルターは存在しない．$\{X\} \subset \mathscr{P}(X)$ は X 上の最小のフィルターである．

$\mathscr{F}$ および $\mathscr{F}'$ を集合 X のフィルターとする．$\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$ なるとき，$\mathscr{F}'$ は $\mathscr{F}$ より細かいといい，$\mathscr{F}$ は $\mathscr{F}'$ より粗いという．$\mathscr{F} \subsetneq \mathscr{F}'$ であるとき，$\mathscr{F}'$ は $\mathscr{F}$ より真に細かいといい，$\mathscr{F}$ は $\mathscr{F}'$ より真に粗いという．$\mathscr{F}$ と $\mathscr{F}'$ に包含関係が成り立つとき，これら二つのフィルターは比較可能であるという．

空でない X 上のフィルターの族 $(\mathscr{F}_i)_{i \in I}$ を考えよう．

$$\mathscr{F} := \bigcap_{i \in I} \mathscr{F}_i$$

は明らかに X 上のフィルターであり，フィルター族 $(\mathscr{F}_i)$ の下限を成している．

位相空間 X に対して，$x \in X$ の近傍系 $\mathscr{V}_x$ は明らかに X 上のフィルターである．これを x の近傍フィルターと呼ぶ．

定義 5.2. X を集合とする．$\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$ が次の二条件を満たすとき，$\mathscr{F}$ を X のフィルター基底 (filter base) と呼ぶ．

(Fb1). $\mathscr{B} \neq \emptyset$ かつ $\emptyset \notin \mathscr{B}$.
(Fb2). $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ ならば $B \subset B_1 \cap B_2$ なる $B \in \mathscr{B}$ が存在する．

フィルターは明らかにフィルター基底である．逆に，フィルター基底が条件 (F3) を満たせばそれはフィルターである．したがって，(F3) を満たすフィルター基底をフィルターと定義しても同値である．フィルター基底 $\mathscr{B}$ に対して

$$\mathscr{F} := \{F \in \mathscr{P}(X) \mid \exists B \in \mathscr{B},\ B \subset F\}$$

とすれば $\mathscr{F}$ は $\mathscr{B}$ を含むフィルターであるが，これを $\mathscr{B}$ によって生成されるフィルターと呼ぶ．$\mathscr{B}$ によって生成されるフィルターは，$\mathscr{B}$ を含むフィルターのうちで最小のものである．

位相空間 X において，$x \in X$ の基本近傍系 $\mathscr{U}_x$ は X 上のフィルター基底である．$\mathscr{U}_x$ によって生成されるフィルターは，近傍系 $\mathscr{V}_x$ である．

定義 5.3. X のフィルター $\mathscr{F}$ より真に細かい X のフィルターが存在しないとき，$\mathscr{F}$ は X の超フィルター (ultrafilter) であるという．

補題 5.4. X を集合，$\mathscr{F}$ をフィルター基底とする．このとき，次の 2 条件は同値．

(i) $\mathscr{F}$ は X の超フィルターである．
(ii) $\mathscr{F}$ を真に含むフィルター基底は存在しない．

証明. *Step 1* : *(i)* $\Longrightarrow$ *(ii).* $\mathscr{F}$ は超フィルターであるとし，$\mathscr{F}$ を真に含むフィルター基底が $\mathscr{B}$ は存在したとする．このとき，$\mathscr{B}$ から生成されるフィルターは $\mathscr{F}$ より真に細かいフィルターであり，超フィルター $\mathscr{F}$ の極大性に矛盾する．これより $\mathscr{F}$ を真に含むフィルター基底は存在しない．

Step 2 : *(ii)* $\Longrightarrow$ *(i).* $\mathscr{F}$ はフィルター基底で，$\mathscr{F}$ より真に細かいフィルター基底が存在しないものとする．このとき，明らかに $\mathscr{F}$ 自身もフィルターである[*10]．$\mathscr{F}$ より真に細かいフィルターがあれば，それは $\mathscr{F}$ を真に含むフィルター基底となって仮定 (ii) に矛盾する．よって $\mathscr{F}$ より真に細かいフィルターは存在しない． □

[*9] フィルターの元の任意の（空でない）有限族の共通部分は空でないということ．
[*10] フィルターはフィルター基底である．

命題 5.5. X を集合とし，$\mathscr{F}$ をその上のフィルターとする．このとき，$\mathscr{F}$ を含む X 上の超フィルターが存在する．

証明．フィルター $\mathscr{F}$ に対して

$$\mathscr{A} = \{\mathscr{G} \subset \mathscr{P}(X) \mid \mathscr{G} \text{ は } \mathscr{F} \subset \mathscr{G} \text{ を満たすフィルター }\}$$

と定義する．このとき $\mathscr{A}$ は集合の包含関係について半順序集合となる．これが空でない帰納的順序集合であることを示そう．$\mathscr{F} \in \mathscr{A}$ だから，$\mathscr{A}$ は空集合ではない．$\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$ を任意の空でない全順序部分集合とする．このとき $\bigcup \mathscr{C}$ はまた $\mathscr{F}$ より細かいフィルターである．

> $\because$ $\mathscr{F} \subset \bigcup \mathscr{C}$ と $\emptyset \notin \bigcup \mathscr{C}$ は明らかである．$A, B \in \bigcup \mathscr{C}$ とすれば，$\mathscr{F}$ より細かいフィルター $\mathscr{E}, \mathscr{G} \in \mathscr{C}$ で $A \in \mathscr{E}$, $B \in \mathscr{G}$ なるものが存在する．$\mathscr{C}$ は全順序だから，特に $\mathscr{E} \leq \mathscr{G}$ と仮定してよい．このとき $A \cap B \in \mathscr{G} \subset \bigcup \mathscr{C}$ が成り立つ．$A \in \bigcup \mathscr{C}$ とし，E は $A \subset E \subset X$ を満たす任意の集合とする．$A \in \mathscr{G} \subset \bigcup \mathscr{C}$ なるフィルター $\mathscr{G}$ を選べば，$E \in \mathscr{G} \subset \bigcup \mathscr{C}$ が分かる．よって $\bigcup \mathscr{C}$ がフィルターであることが示された．

構成法より $\bigcup \mathscr{C} \in \mathscr{A}$ は $\mathscr{C}$ の上界である．これより $\mathscr{A}$ が空でない帰納的順序集合であることが分かった．$\mathscr{A}$ に Zorn の補題を適用すれば，極大元 $\mathscr{F}'$ をとることが出来る．定義より $\mathscr{F}'$ は $\mathscr{F}$ より細かいフィルターであり，極大性よりこれは超フィルターである． □

命題 5.6. X を集合とする．X 上の超フィルター $\mathscr{F}$ は次の性質を持つ．

(i) $A \subset X$ とする．任意の $F \in \mathscr{F}$ に対して $A \cap F \neq \emptyset$ なら，$A \in \mathscr{F}$ である．

(ii) $F_1 \cup F_2 \in \mathscr{F}$ ならば，$F_1 \in \mathscr{F}$ または $F_2 \in \mathscr{F}$ が成り立つ．

証明．*Step 1* : *(i)* **の証明．** $A \subset X$ は任意の $F \in \mathscr{F}$ に対して $A \cap F \neq \emptyset$ を満たすと仮定する．

$$\mathscr{B} = \mathscr{F} \cup \{A \cap F \mid F \in \mathscr{F}\}$$

と定義したとき，$\mathscr{B}$ はフィルター基底である．定義より明らかに $\mathscr{F} \subset \mathscr{B}$ が成立．もし $\mathscr{F} \subsetneq \mathscr{B}$ が成り立つなら，フィルター基底 $\mathscr{B}$ によって生成されるフィルター $\mathscr{F}'$ は $\mathscr{F} \subsetneq \mathscr{F}'$ を満たし，超フィルターの極大性に矛盾する．したがって $\mathscr{F} = \mathscr{B}$ が成立．これより，$\{A \cap F \mid F \in \mathscr{F}\} \subset \mathscr{F}$ となり，特に $A = A \cap X \in \mathscr{F}$ が分かる．

Step 2 : *(ii)* **の証明．** 背理法で示す．(ii) の主張を否定すれば，$F_1, F_2 \notin \mathscr{F}$ かつ $F_1 \cup F_2 \in \mathscr{F}$ を満たす $F_1, F_2 \in \mathscr{P}(X)$ が存在する．

$$\mathscr{G} = \{G \in \mathscr{P}(X) \mid F_1 \cup G \in \mathscr{F}\}$$

と定義すれば，$\mathscr{G}$ は X 上のフィルターである．特に $G = F_2$ として取れば，$F_2 \in \mathscr{G} \setminus \mathscr{F}$ となるから，$\mathscr{G}$ は $\mathscr{F}$ より真に細かいフィルターである．これは超フィルター $\mathscr{F}$ の極大性に矛盾する． □

フィルター基底が超フィルターかどうか判別するための条件として，以下の補題がよく知られている．

命題 5.7. $\mathscr{B}$ を集合 X 上のフィルター基底とする．このとき，次の 2 条件は同値である．

(i) $\mathscr{B}$ は超フィルターである．

(ii) 任意の $A \in \mathscr{P}(X)$ に対して $A \in \mathscr{B}$ または $X \setminus A \in \mathscr{B}$ が成り立つ．

証明．*Step 1* : *(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)* **の証明．** $\mathscr{B}$ を超フィルターとする．$A \subset X$ に対して $X = A \cup (X \setminus A)$ となることに注意すれば，命題 5.6 の (ii) より明らかである．

Step 2: *(ii)* $\Longrightarrow$ *(i)* **の証明．** $\mathscr{B}$ を含むフィルター $\mathscr{F}$ を任意に選ぶ[*11]．このとき $\mathscr{F} = \mathscr{B}$ となることを示せばよい．$A \in \mathscr{F}$ とすれば，$\mathscr{F}$ はフィルターだから $X \setminus A \notin \mathscr{F}$ となる．$\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$ から，$X \setminus A \notin \mathscr{B}$ である．したがって条件 (ii) より $A \in \mathscr{B}$ となり，$\mathscr{F} \subset \mathscr{B}$ が示された． □

フィルター基底が与えられたとき，それを写像によって送ったり引き戻したり出来る．

命題 5.8. X, Y を集合，$f\colon X \to Y$ を写像とする．

(i) $\mathscr{B}$ は X のフィルター基底であるとする．このとき $f_*(\mathscr{B})$ は Y 上のフィルター基底である．
(ii) $\mathscr{B}'$ を Y のフィルター基底とする．任意の $B \in \mathscr{B}'$ に対して $B \cap f(X) \neq \emptyset$ ならば，$f^*(\mathscr{B}')$ は X 上のフィルター基底である．

証明. (i) $\mathscr{B}$ は空集合ではなく，空集合を要素に持たないから，空でない $A \in \mathscr{B}$ が存在する．このとき $f_*(A) = f(A)$ はまた空でないから，$f_*(\mathscr{B})$ もまた空集合ではない．$f(A) = \emptyset$ となる $A \subset X$ は空集合に限るから，$\emptyset \notin f_*(\mathscr{B})$ である．$A, B \in \mathscr{B}$ とすれば，$C \subset A \cap B$ なる C が取れる．このとき $f(C) \subset f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ となるから，$f_*(\mathscr{B})$ がフィルター基底であることが分かる．

(ii) 仮定より任意の $B' \in \mathscr{B}'$ について $f^{-1}(B')$ は空ではないから[*12]，$\emptyset \notin f^*(\mathscr{B}')$ かつ $f^*(\mathscr{B}') \neq \emptyset$ である．$A', B' \in \mathscr{B}'$ に対して $C' \subset A' \cap B'$ なる $C' \in \mathscr{B}'$ をとれば，$f^{-1}(C') \subset f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$ となるから，$\mathscr{B}'$ はフィルター基底である． □

フィルターについても収束の概念を定義することが出来る．

定義 5.9. X を位相空間とし，$\mathscr{F}$ を X のフィルターとする．$\mathscr{F}$ がある $x \in X$ の近傍フィルターより細かいとき，x を $\mathscr{F}$ の極限点 (limit point) あるいは単に極限 (limit) という．このとき，フィルター $\mathscr{F}$ は x に収束 (converge) するという．$\mathscr{F}$ はフィルター基底 $\mathscr{B}$ によって生成されるとき，$\mathscr{F}$ が x に収束するならばフィルター基底 $\mathscr{B}$ は x に収束するといい，x を $\mathscr{B}$ の極限という．フィルター基底 $\mathscr{B}$ の極限全体の集合を $\lim \mathscr{B}$ で表す．

命題 5.10. X を位相空間，$\mathscr{B}$ を X 上のフィルター基底とする．このとき，次の 2 条件は同値である．

(i) $\mathscr{B}$ は x に収束する．
(ii) 任意の $V \in \mathscr{V}_x$ は $\mathscr{B}$ の元を含む．

証明. (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\mathscr{F}_{\mathscr{B}}$ を $\mathscr{B}$ によって生成されるフィルターとする．$V \in \mathscr{V}_x \subset \mathscr{F}_{\mathscr{B}}$ とすれば，$\mathscr{F}_{\mathscr{B}}$ の定義より $B \in \mathscr{B}$ で $B \subset V$ なるものが存在する．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) $V \in \mathscr{V}_x$ を任意にとれば，$B \in \mathscr{B}$ で $B \subset V$ なるものが存在する．$B \in \mathscr{F}_{\mathscr{B}}$ かつ $B \subset V$ だから，$V \in \mathscr{F}_{\mathscr{B}}$ である．よって $\mathscr{V}_x \subset \mathscr{F}_{\mathscr{B}}$ であり，$\mathscr{B}$ は x に収束する． □

6 収束による特徴づけ

位相空間のいくつかの概念は，有向族やフィルターの収束の概念を用いて特徴付けることが出来る．

[*11] $\mathscr{B}$ から生成されるフィルターではない！
[*12] ここに仮定が必要！

命題 6.1. $(X,\mathscr{O})$ を位相空間とし，A をその部分集合とする．このとき，次の 3 条件は同値である．

(i) $x \in \overline{A}$.

(ii) A の有向族 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ で，x に収束するものが存在する．

(iii) A の部分集合からなる X のフィルター基底で，x に収束するものが存在する．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii) $U \in \mathscr{V}_x$ に対して，$x_U \in U \cap A$ を一つ選ぶ．このとき，$(x_U)_{U\in\mathscr{V}_x}$ は x に収束する A の有向族である．実際，任意の $V \in \mathscr{V}_x$ に対して，$W \geq_{\mathscr{V}_x} V$ (i.e. $W \subset U$) とすれば，$x_W \in W \subset U$ である．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X に収束する A の有向族とする．このとき，任意の $V \in \mathscr{V}_x$ について，ある $\lambda \in \Lambda$ で $x_\lambda \in V$ なるものが存在するから，$x_\lambda \in V \cap A$ となり $A \cap V$ は空ではない．

(i) $\Longrightarrow$ (iii)

$$\mathscr{B} = \{A \cap V \mid A \in \mathscr{V}_x\}$$

と定義する．このとき，$\mathscr{B}$ が x に収束するフィルター基底であることを示す．$i\colon A \to X$ を包含写像とすれば，$\mathscr{B} = i^*(\mathscr{V}_x)$ であることに注意する．$x \in \overline{A}$ から，任意の $V \in \mathscr{V}_x$ について $i(A)\cap V = A\cap V \neq \emptyset$ である．命題 5.8 より $\mathscr{B}$ は実際にフィルター基底であることが分かる．$V \in \mathscr{V}_x$ を任意にとれば，$V \supset V \cap A \in \mathscr{B}$ である．命題 5.10 より，$\mathscr{B}$ は x に収束することが分かる．

(iii) $\Longrightarrow$ (i) $\mathscr{B}$ を A の部分集合からなるフィルター基底で，x に収束するものとする．$V \in \mathscr{V}_x$ とすれば，$B \in \mathscr{B}$ で $B \subset V$ なるものが存在する[*13]．B は A の部分集合だから，$\emptyset \neq B \subset A \cap V$ となり，$A \cap V$ は空ではない．すなわち，x は A の閉包に属する．□

系 6.2. $(X,\mathscr{O})$ を位相空間とし，A をその部分集合とする．このとき，次の 3 条件は同値である．

(i) A は閉集合である．

(ii) A の任意の有向族 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対し，$\lim(x_\lambda) \subset A$ が成立．

(iii) A の部分集合からなる任意のフィルター基底 $\mathscr{B}$ に対して，$\lim \mathscr{B} \subset A$ が成り立つ．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii) $(x_\lambda)_\lambda$ を A の任意の有向族とする．$\lim(x_\lambda) = \emptyset$ なら，明らかに $\lim(x_\lambda) \subset A$ である．$x \in \lim(x_\lambda)$ なら，命題 6.1 の (ii) $\Longrightarrow$ (i) から $x \in \overline{A}$ が分かる．今 A は閉集合だから，$x \in \overline{A} = A$ となる．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\mathscr{B}$ を A の部分集合からなるフィルター基底とする．$x \in \mathscr{B}$ なら，任意の $V \in \mathscr{V}_x$ に対して $B \subset V$ を満たす $B \in \mathscr{B}$ がとれる．$x_V \in B$ を 1 点選べば，$(x_V)_{V\in\mathscr{V}_x}$ は x に収束する有向族である．条件 (ii) より，$x \in \lim(x_V) \subset A$ となる．

(iii) $\Longrightarrow$ (i) $x \in \overline{A}$ とすれば，命題 6.1 の (iii) $\Longrightarrow$ (i) より，A の部分集合からなるフィルター基底 $\mathscr{B}$ で $x \in \lim \mathscr{B}$ を満たすものが存在する．このとき，条件 (iii) より $x \in \lim \mathscr{B} \subset A$ となり，$\overline{A} \subset A$ が分かる．□

命題 6.3. X, Y を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を写像とする．このとき，次の 3 条件は同値である．

(i) f は連続である．

(ii) X の任意の有向族 (x_λ) について，$f(\lim x_\lambda) \subset \lim f(x_\lambda)$ が成り立つ．

(iii) X の任意のフィルター基底 $\mathscr{B}$ について $f_*(\lim \mathscr{B}) \subset \lim f_*(\mathscr{B})$ が成り立つ．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii) 有向族がいかなる点にも収束しないときには (ii) の包含関係は明らかである．$x \in \lim_\lambda x_\lambda$ としたとき，有向族 $(f(x_\lambda))_\lambda$ が $f(x)$ に収束することを示す．f は x で連続だから，任意の $V \in \mathscr{V}_{f(x)}$ に対

[*13] 命題 5.10

して x の近傍 W で $f(W) \subset V$ を満たすものがとれる．(x_λ) は x に収束するから，適当な λ_W をとれば，任意の $\kappa \geq \lambda_W$ について $x_\kappa \in W$ となる．これより，任意の $\kappa \geq \lambda_W$ について $f(x_\kappa) \subset f(W) \subset V$ となり，$(f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ が $f(x)$ に収束することが分かった．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) $A \subset X$ かつ $x \in \overline{A}$ とし，x に収束する有向族 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ をとる[*14]．このとき仮定 (ii) と系 6.2 より $f(x) \subset f(\lim(x_\lambda)) \subset \lim f(x_\lambda) \subset \overline{f(A)}$ となる．よって任意の $A \subset X$ に対して $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ が成り立ち，f は連続であることが分かる[*15]．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\mathscr{B}$ をフィルター基底とする．$\lim \mathscr{B} = \emptyset$ ならば $f_*(\lim \mathscr{B}) = \emptyset \subset \lim f_*(\mathscr{B})$ は明らかなので，$\mathscr{B}$ の極限が存在する場合を考えればよい．$x \in \mathscr{B}$ とする．$V \in \mathscr{V}_{f(x)}$ を任意にとれば，f の連続性より $f(W) \subset V$ なる $W \in \mathscr{V}_x$ が選べる．W は x の近傍で $\mathscr{B}$ は x に収束することから，$B \subset W$ なる $B \in \mathscr{B}$ が存在する．このとき $f(B) \subset f(W) \subset V$ かつ $f(B) = f_*(B) \in f_*(\mathscr{B})$ なので，$f_*(\mathscr{B})$ は $f(x)$ に収束する[*16]．

(iii) $\Longrightarrow$ (i) $A \subset X$ かつ $x \in \overline{A}$ とし，$\mathscr{A}$ の部分集合からなるフィルター基底で x に収束するようなものをとる．（命題 6.1）このとき，仮定 (iii) および系 6.2 から $f(x) \in f_*(\lim \mathscr{B}) \subset \lim f_*(\mathscr{B}) \subset \overline{f(A)}$ が成り立つ．すなわち $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ となり，命題 3.14 より f は連続である． □

ここまで見てきたように，フィルターと有向族については，ほぼ似たような性質が成り立つ．これより，フィルターと有向族には何かしらの関係性があると予想される．次の命題に見るように，フィルターと有向族は実は 1 対 1 に対応する概念である．

定理 6.4. X を位相空間とし，$x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の任意の空でない有向族とする．集合族 $\mathscr{F}(x)$ を

$$\mathscr{F}(x) = \{A \subset X \mid \exists \lambda \in \Lambda,\ \forall \kappa \geq \lambda,\ x_\kappa \in A\}$$

と定義する．このとき $\mathscr{F}(x)$ は X 上のフィルターであり，$\lim \mathscr{F}(x) = \lim(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が成り立つ．

定理 6.4 におけるフィルター $\mathscr{F}(x)$ について少し考えてみよう．$\lambda \in \Lambda$ に対して，部分集合 Λ_λ を

$$\Lambda_\lambda = \{\kappa \in \Lambda \mid \kappa \geq \lambda\} \tag{7}$$

と定義する．Λ は空でない有向集合なので，各 Λ_λ は空でないその部分集合である．$\mathscr{B} = \{\Lambda_\lambda\,;\,\lambda \in \Lambda\}$ とすれば，Λ が有向集合であることから $\mathscr{B}$ が Λ 上のフィルター基底となることがわかる．したがって，$x\colon \Lambda \to X$ によって X 上のフィルター基底 $x_*\mathscr{B}$ が定義される．$A \in x_*\mathscr{B}$ とは，ある λ によって $A = x(\Lambda_\lambda)$ と表現されるということである．また，これより F が $x_*\mathscr{B}$ によって生成されるフィルターに属するとは，ある λ が存在して $F \supset x(\Lambda_\lambda)$ が成り立つということである．これはすなわち，ある λ が存在して，全ての $\kappa \geq \lambda$ について $x(\kappa) \in F$ が成り立つということに他ならない．したがって，この定理の意味するところは，有向族のが収束するとはフィルター基底 $x_*\mathscr{B}$ が収束することと同値だということである．このフィルター基底 $\mathscr{B}$ は言わば「無限遠点に収束」するようなフィルター基底であり，有向族の収束性とは有向族の「無限遠点」における連続性なのである．

証明．*Step1*：$\mathscr{F}(x)$ がフィルターであることの証明．

明らかに $X \in \mathscr{F}(x)$ かつ $\emptyset \notin \mathscr{F}(x)$ である．

[*14] 命題 6.1
[*15] 命題 3.14
[*16] 命題 5.10

$A_1, A_2 \in \mathscr{F}(x)$ とし，$\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ を

$$\begin{aligned} \lambda \geq \lambda_1 &\implies x_\lambda \in A_1 \\ \lambda \geq \lambda_2 &\implies x_\lambda \in A_2 \end{aligned}$$

を満たすように選ぶ．$\lambda_3 \geq \lambda_1$ かつ $\lambda_3 \geq \lambda_2$ なる $\lambda_3 \in \Lambda$ を選べば，

$$\lambda \geq \lambda_3 \implies x_\lambda \in A_1 \cap A_2$$

が成り立つ．よって $A_1 \cap A_2 \in \mathscr{F}(x)$ である．

$A \in \mathscr{F}$ かつ $A \subset B$ とし，λ_0 を

$$\lambda \geq \lambda_0 \implies x_\lambda \in A$$

を満たすようにとる．このとき

$$\lambda \geq \lambda_0 \implies x_\lambda \in B$$

が成り立つから，$B \in \mathscr{F}(x)$ が分かる．以上の議論により，$\mathscr{F}(x)$ が実際にフィルターであることが示された．

Step2 : $\lim \mathscr{F}(x) = \lim x$ **の証明．**

$y \in \lim(x_\lambda)$ とは，

$$\forall V \in \mathscr{V}_y \ \exists \lambda \in \Lambda \ \forall \kappa \geq \lambda \ x_\kappa \in V$$

ということである．これは明らかに任意の $V \in \mathscr{V}_y$ が $\mathscr{F}(x)$ の元であるということと同値である． □

定理 6.5. X を位相空間とし，$\mathscr{F}$ を X のフィルターとする．集合族 Λ を

$$\Lambda = \{(x, A) \in X \times \mathscr{F} \mid x \in A\}$$

と定義し，二項関係 $\leq_\Lambda$ を

$$(x_1, A_1) \leq_\Lambda (x_2, A_2) :\iff A_1 \supset A_2$$

によって定める．このとき，Λ は有向集合となる．有向族 $x(\mathscr{F}) = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を $(x, A) \mapsto x$ と定義すれば，$\lim(x_\lambda) = \lim \mathscr{F}$ および $\mathscr{F}(x(\mathscr{F})) = \mathscr{F}$ が成り立つ．

証明. *Step1* : Λ **が有向族であることの証明．** $\leq_\Lambda$ が反射律と推移率を満たすことは明らかである．$(x_1, A_1), (x_2, A_2) \in \Lambda$ とすれば，$\mathscr{F}$ はフィルターだから $\emptyset \neq A_1 \cap A_2 \in \mathscr{F}$ である．$x_3 \in A_1 \cap A_2$ を任意の選べば，$(x_3, A_1 \cap A_2) \in \Lambda$ は $(x_3, A_1 \cap A_2) \geq (x_1, A_1)$ かつ $(x_3, A_1 \cap A_2) \geq (x_2, A_2)$ を満たす．よって Λ は有向集合である．

Step2 : $\mathscr{F}(x) = \mathscr{F}$ **の証明．** $A \in \mathscr{F}(x(\mathscr{F}))$ とすれば，

$$\exists \lambda_A \in \Lambda \ \forall \lambda \geq \lambda_A \ x_\lambda \in A$$

が成り立つ．上の式を満たす λ_A を $\lambda_A = (y_0, B_0)$ と書くことにする．このとき任意の $y \in B_0$ に対して $(y, B_0) \geq (y_0, B_0)$ だから，$y = x_{(y, B_0)} \in A$ が成立．すなわち $B_0 \subset A$ である．$\mathscr{F}$ はフィルターで $B_0 \in \mathscr{F}$ だから，$A \in \mathscr{F}$ である．よって $\mathscr{F}(x(\mathscr{F})) \subset \mathscr{F}$ が成立する．

次に，逆向きの包含関係を示す．$A \in \mathscr{F}$ として，$x_0 \in A$ を 1 点固定する．$\lambda_0 = (x_0, A)$ とすれば，任意の $\lambda = (y, B) \geq \lambda_0$ に対して $x_\lambda = y \in B \subset A$ が成立．よって $A \subset \mathscr{F}(x(\mathscr{F}))$ が分かる．これで $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}(x(\mathscr{F}))$ も示された．

Step3 : $\lim(x_\lambda) = \lim \mathscr{F}$ **の証明．** Step2 および定理 6.4 より，

$$\lim \mathscr{F} = \lim \mathscr{F}(x(\mathscr{F})) = \lim x(\mathscr{F})$$

が従う． □

References

[1] Nicolas Bourbaki. *General Topology Part I.* Elements of Mathematics. Hermann, 1966.

[2] R. Engelking. *Outline of General Topology.* Nort-Holland Publishing Company/Polish Scientific Publishers, 1968.

[3] Ryszard Engelking. *General topology.* Revised and completed edition. Sigma Series in Pure Mathematics 6. Translated from the Polish by the author. Heldermann Verlag, Berlin, 1989, pp. viii+529. ISBN: 3-88538-006-4.

[4] Klaas Pieter Hart, Jun-iti Nagata, and Jerry E. Vaughan, eds. *Encyclopedia of General Topology.* Elsevier Science, 2004, pp. x+526. ISBN: 0-444-50355-2. URL: https://www.elsevier.com/books/encyclopedia-of-general-topology/hart/978-0-444-50355-8.

[5] John L. Kelley. *General Topology.* Graduate Texts in Mathematics 27. Originally published by Van Nostrand, 1955. Springer-Verlag New York, 1975, pp. xiv+298. URL: https://www.springer.com/la/book/9780387901251.

[6] ケリー. **位相空間論**. Trans. by 児玉 之宏. 吉岡書店, 1968.

[7] 宮島 静雄. **関数解析**. 横浜図書, 2014.

[8] 児玉 之宏 and 永見 啓応. **位相空間論**. 岩波書店, 1974.

[9] 齋藤 正彦. **数学の基礎. 集合・数・位相**. 東京大学出版会, 2002. URL: http://www.utp.or.jp/book/b302226.html.

[10] 斎藤 毅. **集合と位相**. 大学数学の入門 8. 東京大学出版会, 2009.