位相空間論セミナー X：ポーランド空間と Borel 集合 Ver.1.2

平井祐紀

2020 年 4 月 28 日

更新履歴
2019.8.1 Ver.1.1（たぶん）
2020.4.28 Ver.1.2 誤植を訂正．索引を作成．

目次

1 ポーランド空間

定義 1.1. X を位相空間とする．X の位相と整合的な距離関数 d で，(X,d) が完備可分距離空間となるようなものが存在するとき，X をポーランド空間 (Polish space) と呼ぶ．

単に完備可分距離空間を考えるのなら，わざわざポーランド空間と呼ぶまでもない．ポーランド空間を扱うときには，一様構造や距離ではなく，主にその位相に興味があるということである．

例 1.2. 離散空間 $2=\{0,1\}$ はポーランド空間である．

例 1.3. $\mathbb{R}$ はポーランド空間である．

ポーランド空間やその列が与えられたときに，そこからポーランド空間を作る方法を考えよう．

命題 1.4. (i) ポーランド空間の閉部分空間はポーランド空間である．

(ii) ポーランド空間の開部分空間はポーランド空間である．

証明．(i) 完備可分な距離空間の閉部分空間は，その距離の制限により完備かつ可分となることからわかる．

(ii) X をポーランド空間とし，$U \subset X$ を開集合とする．X の位相と整合的な完備距離 d を一つ固定し，写像 $f\colon U \to X \times \mathbb{R}$ を以下のように定める[*1]．

$$f(x) = \left(x, \frac{1}{d(x, X \setminus U)}\right), \quad x \in U$$

このとき f は $X \times \mathbb{R}$ への閉埋め込みとなっていることを示そう．f が連続単射であることは明らかだろう．$\mathrm{pr}_1\colon X \times \mathbb{R} \to X$ を射影とすれば，$\mathrm{pr}_1|_{f(U)} \circ f = \mathrm{id}_U$ かつ $f \circ \mathrm{pr}_1|_{f(U)} = \mathrm{id}_{f(U)}$ が成り立つ．射影 pr_1 は連続だから，$f\colon U \to f(U)$ は同相写像である．後は $f(U)$ が $X \times \mathbb{R}$ の閉集合であることを示せばよい．$f(x_n) \to (x, y)$ なる点列を持ってきたとき，$(x, y) \in f(U)$ であることを示せばよい[*2]．$f(x_n) \to (x, y)$ は $x_n \to x$ かつ $1/d(x_n, X \setminus U) \to y$ という意味である．距離関数の連続性より $d(x_n, X \setminus U) \to d(x, X \setminus U)$ となるから，このとき $y = 1/(x, X \setminus U)$ となる．すなわち，$d(x, X \setminus U)$ は 0 でない正の値をとる．これは $x \in U$ という意味であり，$f(x) = (x, y) \in U$ がわかる．つまり $f(U)$ はポーランド空間 $X \times \mathbb{R}$ の閉集合であり，(i) よりポーランド空間となる．f は同相写像であるから，U もまたポーランド空間となることがわかった． □

ポーランド空間の適当な意味での極限は，またポーランド空間となる．

命題 1.5. (i) (X_n) をポーランド空間の列とすれば，積空間 $\prod_n X_n$ もまたポーランド空間である．

(ii) A を可算な有向集合とし，$(X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}\,;\, \alpha, \beta \in A, \alpha \leq \beta)$ をポーランド空間の射影系とする．このとき，射影極限 $\varprojlim X_\alpha$ はまたポーランド空間である．

(iii) (X_n) をポーランド空間の列とすれば，直和 $\coprod_n X_n$ もまたポーランド空間である．

(iv) A を可算な有向集合とし，$(X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}\,;\, \alpha, \beta \in A, \alpha \leq \beta)$ をポーランド空間の帰納系とする．このとき，帰納極限 $\varinjlim X_\alpha$ はまたポーランド空間である．

証明．(i) と (iii) は容易である．

(ii) (i) より $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ はまたポーランド空間となる．逆極限の構成法を思い出せば，

$$\begin{aligned}\varprojlim X_\alpha &= \left\{ (x_\alpha) \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \;\middle|\; \forall \alpha \leq \forall \beta\ \pi_{\alpha\beta}(x_\beta) = x_\alpha \right\} \\ &= \bigcap_{\alpha \leq \beta} \left\{ (x_\alpha) \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \;\middle|\; \pi_{\alpha\beta}(x_\beta) = x_\alpha \right\}\end{aligned}$$

となるのであった．各 X_α は Hausdorff 空間なので

$$\left\{ (x_\alpha) \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \;\middle|\; \pi_{\alpha\beta}(x_\beta) = x_\alpha \right\}$$

[*1] U は距離空間の開集合だから，$x \in U$ と $X \setminus U$ の距離は 0 にはならない．

[*2] $X \times \mathbb{R}$ は距離付けられるので，点列の収束のみを考えればよい．

はどれも閉集合であり，$\varprojlim X_\alpha$ も $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ の閉集合である．したがって命題 1.4 (i) により $\varprojlim X_\alpha$ はポーランド空間となる．

(iv) $\varinjlim X_\alpha$ はポーランド空間 $\coprod_n X_n$ の商空間として構成されるから，またポーランド空間である． □

命題 1.4 と 1.5 を組み合わせれば，次がわかる．

系 1.6. ポーランド空間の G_δ 集合はまたポーランド空間である．

例 1.7. $2^{\mathbb{N}}$，$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，$[0,1]$，$[0,1]^{\mathbb{N}}$ はどれもポーランド空間である．

ポーランド空間のもう一つの重要な例は，次のようなものである．

定理 1.8. X をコンパクト距離空間，Y をポーランド空間とする．このとき $C(X,Y)$ に一様収束の距離を入れた空間は完備可分な距離空間となる．

証明．X の距離を d_X，Y を可分完備距離空間とする距離を d_Y，$C(X,Y)$ の距離を d_C で表す．（すなわち

$$d_C(f,g) = \sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x))$$

である．）$C(X,Y)$ が d_C により完備になることはよく知られた結果なので証明を省く．可分性を示そう．$m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ に対し，有限集合 $X_m = \{x_1, \dots, x_{k(m)}\}$ を

$$X = \bigcup_{1\leq j\leq k(m)} U_{\frac{1}{m}}(x_j)$$

を満たすように選ぶ．（X のコンパクト性による．）また，各 $l \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ に対して $\mathrm{diam}(U_i) < 1/l$ を満たす開被覆

$$\mathscr{U}_l = \{U_0, U_1, \dots\}$$

をとる．（Y は Lindelöf である[*3]ことから，この操作が可能である．）$m, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ に対して

$$C_{m,n} = \left\{ f \in C(X,Y) \;\middle|\; \forall x, y \left(d_X(x,y) < \frac{1}{m} \implies d_Y(f(x), f(y)) < \frac{1}{n} \right) \right\}$$

と定義する．f は X 上で一様連続だから[*4]，

$$C(X,Y) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}_{\geq 1}} C_{m,n}$$

が成り立つ．

また $s = (i_1, \dots, i_{k(m)}) \in \mathbb{N}^{k(m)}$ について，$f \in C_{m,n}$ で

$$\forall j \in \{1, \dots, k(m)\}, \quad f(x_j) \in U_{i_j} \in \mathscr{U}_l \tag{1}$$

を満たすものがあればそれを一つ選び f_s と表記する．そのような関数がないときは，f_s は定義しない．このように定義された関数 f_s の全体を $D_{m,n,l}$ と表し，$D_{m,n} = \bigcup_{l\in\mathbb{N}_{\geq 1}} D_{m,n,l}$ と定める．

ここで，次の主張を示す．

[*3] 可分距離空間は第二可算であり，よって Lindelöf である．

[*4] X はコンパクトだから．

主張 1

任意の $f \in C_{m,n}$ と $\varepsilon > 0$ について，$g \in D_{m,n}$ で X_m 上 $d_Y(f(y), g(y)) < \varepsilon$ を満たすものが存在する．

$\varepsilon > 0$ に対して，$l > 1/\varepsilon$ を満たす l をとる．さらに，$j \in \{1, \ldots, k(m)\}$ に対して $f(x_j) \in U_{i_j} \in \mathscr{U}_l$ となるように i_j を選ぶ[*5]．このように定めた $s = (i_1, \ldots, i_{k(m)})$ に対しては f 自身が条件 (??) を満たすから，$f_s \in D_{m,n,l}$ が存在することが分かる．いま $g = f_s \in D_{m,n,l} \subset D_{m,n}$ とおけば，任意の $j \in \{1, \ldots, k(m)\}$ について

$$d_Y(f(x_j), g(x_j)) = d_Y(f(x_j), f_s(x_j)) < \frac{1}{l} < \varepsilon$$

が成立．すなわち $X_m = \{x_1, \ldots, x_k(m)\}$ 上 $d_Y(f(x), g(x)) < \varepsilon$ となる．

$D = \bigcup_{m,n} D_{m,n}$ と定義すれば，D は可算集合である[*6]．主張 1 を用いて，この D が $C(X,Y)$ で稠密なことを示す．$f \in C(X,Y)$ および $\varepsilon > 0$ とする．$C(X,Y) = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{m \geq 1} C_{m,n}$ だから，$n > 3/\varepsilon$ なる n に対応して $f \in C_{m,n}$ を満たす m を選べる．ここで $g \in D_{m,n}$ を X_m 上 $d_Y(f(x), g(x)) < \varepsilon/3$ を満たすようにとる（主張 1 ）．$x \in X$ として $x \in U_{1/m}(x_j)$ を満たす $j \in \{1, \ldots, k(m)\}$ をとれば

$$\begin{aligned}
d_Y(f(x), g(x)) &\leq d_Y(f(x), f(x_j)) + d_Y(f(x_j), g(x_j)) + d_Y(g(x_j), g(x)) \\
&< d_Y(f(x), f(x_j)) + \frac{\varepsilon}{3} + d_Y(g(x_j), g(x)) \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

が分かる．（ただし，2 つめの不等号は X_m 上 $d_Y(f(x), g(x)) < \varepsilon/3$ であることを，3 つ目の不等号は $d_X(x, x_j) < 1/m$ および $f \in C_{m,n}$ であることを，それぞれ用いた．）これより

$$d_C(f, g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(y)) \leq \varepsilon$$

となる．すなわち任意の $f \in C(X,Y)$ と $\varepsilon > 0$ に対して，$g \in D$ で

$$d_C(f, g) \leq \varepsilon$$

を満たすものが存在するということが示された．これは D が $C(X,Y)$ で稠密だということに他ならない． □

2 Borel 集合と Borel 階層

定義 2.1. (i) X を集合とする．$\mathscr{P}X$ の部分 Boole 代数で任意の可算集合が $\bigwedge$ と $\bigvee$ を持つものを，X 上の σ-代数と呼ぶ．また，X とその上の σ-代数 $\mathscr{A}$ の組 $(X, \mathscr{A})$ を可測空間 (measurable space) と呼ぶ．

(ii) $(X, \mathscr{A})$ と $(Y, \mathscr{B})$ を可測空間とし，$f \colon X \to Y$ を写像とする．全ての $B \in \mathscr{B}$ について $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ が成り立つとき，f は $\mathscr{A}/\mathscr{B}$-可測である，あるいは単に可測 (measurable) であるという．

(iii) $(X, \mathscr{A})$ と $(Y, \mathscr{B})$ を可測空間とし，$f \colon X \to Y$ を $\mathscr{A}/\mathscr{B}$ 可測写像とする．f が可逆でその逆写像が $\mathscr{B}/\mathscr{A}$-可測となるとき，f を可測空間としての同型写像 (isomorphism) という．$(X, \mathscr{A})$ と $(Y, \mathscr{B})$ の間に可測空間としての同型写像が存在するとき，$(X, \mathscr{A})$ と $(Y, \mathscr{B})$ は可測空間として同型 (isomorphic) であるという．

[*5] $\mathscr{U}_l$ は Y の被覆であることに注意せよ．

[*6] 各 $D_{m,n,l}$ は高々 $\mathbb{N}^{k(m)}$ 個の元しか持たない．

X 上の σ-代数全体を $\sigma\mathrm{Alg}(X)$ で表すことにする．$\mathscr{C} \subset \sigma\mathrm{Alg}(X)$ なら $\bigwedge \mathscr{C} = \bigcap \mathscr{C} \in \sigma\mathrm{Alg}(X)$ であるから，$\sigma\mathrm{Alg}(X)$ は「位相空間論セミナー VIII」の意味での Moore 族となる．したがって $\sigma\mathrm{Alg}(X)$ は包含関係について完備束である．$\sigma\mathrm{Alg}(X)$ から定まる閉包作用素 $\mathscr{P}\mathscr{P}X \to \mathscr{P}\mathscr{P}X$ を σ で表すことにする．もう少し具体的にいうと，$\mathscr{A} \subset \mathscr{P}X$ に対して

$$\sigma(\mathscr{A}) = \bigcap \{\mathscr{E} \subset \mathscr{P}X \mid \mathscr{E} \text{ は } \mathscr{A} \text{ を含む } \sigma\text{-代数}\}$$

と定義するということである．

定義 2.2. (i) $(X, \mathscr{O})$ を位相空間とする．$\sigma(\mathscr{O}) = \mathscr{B}(X)$ と書き，$\mathscr{B}(X)$ を X 上の Borel σ-代数 (Borel σ-algebra) という．また $\mathscr{B}(X)$ の元を X の Borel 集合 (Borel set) と呼ぶ．

(ii) X, Y を位相空間とし，それぞれを Borel σ-代数により可測空間 $(X, \mathscr{B}(X))$，$(Y, \mathscr{B}(Y))$ と考える．写像 $f\colon X \to Y$ が $\mathscr{B}(X)/\mathscr{B}(Y)$-可測であるとき，$f$ は Borel 可測 (Borel measurable) であるという．

(iii) (ii) において $f\colon X \to Y$ が可測空間としての同型写像であるとき，f を Borel 同型写像 (Borel isomorphism) と呼ぶ．Borel 同型写像が存在するとき，位相空間 X と Y は Borel 同型 (Borel isomorphic) であるという．

Borel 集合は束論的な意味での閉包作用素によって定義されているから，それが具体的にどのような姿をしているかは明らかではない．一方で，$\mathscr{B}(X)$ は開集合系 $\mathscr{O}$ から生成される σ-代数なので，直観的に考えると開集合の $\bigcup$，$\bigcap$ および補集合を取る操作を繰り返していていけばいつかは到達できそうな気もする．これはある意味では正解なのだが，実はその繰り返しの回数は途方もなく多い．それを明らかにするために，Borel 階層の概念を導入しよう．集合族 $\mathscr{C}$ が与えられたときに，$\mathscr{C}_\sigma$ でその元の可算和で表現される集合全体を，$\mathscr{C}_\delta$ でその元の可算共通部分で表現される集合全体を表すものとする．また ω_1 は最小の非可算順序数（よって基数である）を表すものとする[*7]．

$(X, \mathscr{O})$ を距離化可能空間とする．X 上の Borel 階層を，次の手順で（超限）再帰的に定義しよう．まずは

$$\mathbf{\Sigma}^0_1(X) = \mathscr{O}, \qquad \mathbf{\Pi}^0_1(X) = \{A \in \mathscr{P} \mid X \setminus A \in \mathscr{O}\}, \qquad \mathbf{\Delta}^0_1(X) = \mathbf{\Sigma}^0_1(X) \cap \mathbf{\Pi}^0_1(X)$$

と定める．$\alpha < \omega_1$ に対しては，

$$\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) = \left(\bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{\Pi}^0_\xi(X) \right)_\sigma, \qquad \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X) = \left(\bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X) \right)_\delta, \qquad \mathbf{\Delta}^0_\alpha(X) = \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) \cap \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$$

と定義する．このように定義された族

$$(\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X), \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X), \mathbf{\Delta}^0_\alpha(X))_{\alpha<\omega_1}$$

を X 上の Borel 階層 (Borel hierarchy) という．定義より $\mathbf{\Sigma}^0_1(X)$ は X の開集合系であり，$\mathbf{\Pi}^0_1(X)$ は閉集合系である．また $\mathbf{\Sigma}^0_2(X)$ は F_σ 集合全体であり，$\mathbf{\Pi}^0_2(X)$ は G_δ 集合全体である．さらに $\mathbf{\Sigma}^0_2(X)$ は $G_{\delta\sigma}$ 集合全体であり，$\mathbf{\Pi}^0_2(X)$ は $F_{\delta\sigma}$ 集合全体である... という列が無数に続いていく．しかもこの列は ω で止まることなく，ω_1 に向かって進み続けるのである．直観的に見ると，途方もなく長い．

命題 2.3. X を距離空間とする．

[*7] $\aleph_1$ と同じもの．

(i) 任意の $1 \leq \alpha < \omega_1$ に対して，$\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) \cup \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X) \subset \mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1}(X)$ が成り立つ．

(ii) $1 < \alpha < \omega_1$ なら，$\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) = \left(\mathbf{\Delta}^0_\alpha(X)\right)_\sigma$ および $\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X) = \left(\mathbf{\Delta}^0_\alpha(X)\right)_\delta$ が成り立つ．

(iii) $\mathscr{B}(X) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$ が成り立つ．

証明. (i) α に関する超限帰納法で示す．距離空間において開集合は F_σ 集合であり，閉集合は G_δ 集合であるから，$\alpha = 1$ の時には主張が成り立つ．任意の $\xi < \alpha$ で主張が成り立つと仮定する．このとき

$$\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) = \left(\bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{\Pi}^0_\xi(X)\right)_\sigma \subset \left(\bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{\Pi}^0_{\xi+1}(X)\right)_\sigma \subset \left(\bigcup_{\xi<\alpha+1} \mathbf{\Pi}^0_\xi(X)\right)_\sigma = \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}(X) \tag{2}$$

$$\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X) = \left(\bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)\right)_\delta \subset \left(\bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{\Sigma}^0_{\xi+1}(X)\right)_\delta \subset \left(\bigcup_{\xi<\alpha+1} \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)\right)_\delta = \mathbf{\Pi}^0_{\alpha+1}(X) \tag{3}$$

が成り立つ．定義より明らかに $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) \subset \mathbf{\Pi}^0_{\alpha+1}(X)$ と $\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X) \subset \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}(X)$ は成り立つから，$\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) \cup \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X) \subset \mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1}(X)$ がわかる．したがって α でも主張が成り立つことが示された．

(ii) 定義より明らかに $\mathbf{\Delta}^0_\alpha(X) \subset \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$ であり，また $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$ は可算和を取る操作について閉じているので，$\left(\mathbf{\Delta}^0_\alpha(X)\right)_\sigma \subset \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$ がわかる．また (i) より $1 \leq \xi < \alpha$ なら $\mathbf{\Pi}^0_\xi(X) \subset \mathbf{\Delta}^0_{\xi+1}(X) \subset \mathbf{\Delta}^0_\alpha(X)$ となるので，$\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) \subset \left(\mathbf{\Delta}^0_\alpha(X)\right)_\sigma$ がわかる．すなわち $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) = \left(\mathbf{\Delta}^0_\alpha(X)\right)_\sigma$ が成り立つ．同様にして $\mathbf{\Pi}^0_\alpha = \left(\mathbf{\Delta}^0_\alpha\right)_\delta$ も示される．

(iii) まずは $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\alpha \subset \mathscr{B}(X)$ かつ $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathbf{\Pi}^0_\alpha \subset \mathscr{B}(X)$ が成り立つことを超限帰納法で示す．Borel 集合の定義より，$\mathbf{\Sigma}^0_1(X), \mathbf{\Pi}^0_1(X) \subset \mathscr{B}(X)$ が成り立つ．また，$0 \leq \forall \xi < \alpha < \omega$ について $\mathbf{\Sigma}^0_\xi(X), \mathbf{\Pi}^0_\xi(X) \subset \mathscr{B}(X)$ が成り立つとすれば，

$$\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) = \left(\bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{\Pi}^0_\xi(X)\right)_\sigma \subset (\mathscr{B}(X))_\sigma = \mathscr{B}(X), \tag{4}$$

$$\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X) = \left(\bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)\right)_\delta \subset (\mathscr{B}(X))_\delta = \mathscr{B}(X) \tag{5}$$

となるので，α でも主張が成り立つ．

逆向きの包含関係を示そう．

$$\mathscr{B} := \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$$

と定義する．二つ目の等号が成り立つことは，(i) よりわかる．このとき $\mathscr{B}$ は全ての開集合を含む σ-代数になっているから，$\mathscr{B}(X)$ の最小性から $\mathscr{B}(X) \subset \mathscr{B}$ がわかる．ただし，$\mathscr{B}$ が可算和について閉じていることを示すには，可算族 $A \subset \omega_1$ に対して $\sup A + 1 \in \omega_1$ が成り立つことを用いる． □

命題 2.3 を図示すると，次のようなものになる．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{\Sigma}^0_1(X) \arrow[dr, hook] & & \mathbf{\Sigma}^0_2(X) \arrow[dr, hook] & & \mathbf{\Sigma}^0_3(X) & \dots & \\
\mathbf{\Delta}^0_1(X) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathbf{\Delta}^0_2(X) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathbf{\Delta}^0_3(X) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \dots \arrow[r] & \mathscr{B}(X) \\
 & \mathbf{\Pi}^0_1(X) \arrow[ur, hook] & & \mathbf{\Pi}^0_2(X) \arrow[ur, hook] & & \mathbf{\Pi}^0_3(X) & \dots &
\end{tikzcd}$$

証明の中ではこの列が ω_1 を添え字集合に持つことを使ったけれども，実はこの列はもっと手前で止まっているのではないかと考える人もいるだろう．しかし，X が非可算なポーランド空間である場合には，Borel 階層は狭義に増加的な列となることが知られている．（例えば，Kechris [11, (22.4) Theorem] などを見よ．）

3　Souslin 空間と解析集合

定義 3.1.　(i) X を Hausdorff 空間とする．あるポーランド空間 Z からの連続全射 $f\colon Y \to X$ が存在するとき，X は Souslin 空間 (Souslin space) であるという．

(ii) ポーランド空間の部分空間で Souslin 空間であるものを，解析集合 (analytic set) という．

言うまでもなくポーランド空間は Souslin 空間であり，解析集合は Souslin 空間である．これ以降，解析集合上の位相や σ-代数を考えるときは，全体のポーランド空間からの部分空間として考えることにする．

まずは，Souslin 空間や解析集合の基本的な性質を調べよう．

命題 3.2.　(i) Souslin 空間の高々可算直積は Souslin 空間である．

(ii) Souslin 空間の高々可算直和は Souslin 空間である．

(iii) 解析集合の高々可算直積は解析集合である．

(iv) 解析集合の可算和，可算共通部分はまた解析集合である．

(v) ポーランド空間の開部分集合および閉部分集合は，解析集合である．

(vi) ポーランド空間の Borel 集合は解析集合である．

証明. (i) と (ii) 可算無限の場合のみ証明する．(X_n) を Souslin 空間の列とし，$f_n\colon Z_n \to X_n$ をポーランド空間からの連続全射の列とする．その積 $\prod_n f_n\colon \prod_n Z_n \to \prod_n X_n$ はポーランド空間 $\prod_n Z_n$ からの連続全射であり，また直和 $\coprod_n f_n\colon \coprod_n Z_n \to \coprod_n X_n$ はポーランド空間 $\coprod_n Z_n$ からの連続全射である．したがって $\prod_n X_n$ と $\coprod_n X_n$ は Souslin 空間である．

(iii) は (i) よりわかる．

(iv) X をポーランド空間，(A_n) をその解析集合列とし，$f_n\colon Z_n \to A_n$ をポーランド空間からの連続全射の列とする．このとき，(f_n) の和 $f\colon \coprod_n Z_n \to \bigcup_n A_n$ はポーランド空間からの連続全射であり，ゆえに $\bigcup_n A_n$ は解析集合である．

次に，(f_n) の直積 $F\colon \prod_n Z_n \to \prod_n A_n \subset X^{\mathbb{N}}$ を考える．

$$\Delta := \{(x_n) \in X^{\mathbb{N}} \mid \forall n, m,\ x_n = x_m\} = \bigcap_{n,m} (\mathrm{pr}_n, \mathrm{pr}_m)^{-1}(\Delta_X)$$

は閉集合であるから，$Z := F^{-1}(\Delta)$ はポーランド空間 $\prod_n Z_n$ の閉部分空間となり，これもまたポーランド空間である．なお，この Z は空である可能性もある．Z が空でないための必要十分条件はもちろん $\Delta \cap \prod_n A_n \neq \emptyset$ であり，これは $\bigcap_n A_n \neq \emptyset$ とも同値である．

写像 $g\colon Z \to X$ を $g = f_1 \circ \mathrm{pr}_1|_Z\colon Z \to A_1$ と定めればこれは明らかに連続写像である．Z の定義より任意の n に対して $g = f_n \circ \mathrm{pr}_n|_Z$ が成り立つから $g(Z) \subset \bigcap_n A_n$ が成り立つ．さらに $x \in \bigcap_n A_n$ とすれば，$F^{-1}(x, x, \dots) \subset F^{-1}(\Delta \cap \prod_n A_n) \in Z$ であり，$z \in F^{-1}(x, x, \dots)$ に対して $g(z) = x$ が成り立つ．ゆえに $g\colon Z \to \bigcap_n A_n$ は連続全射であり，$\bigcap_n A_n$ は解析集合である．

(v) ポーランド空間の開部分空間と閉部分空間はポーランド空間なので，解析集合である．

(vi) X をポーランド空間，$\mathscr{A}(X)$ をその解析集合全体の集合とする．$\mathscr{E} = \{A \in \mathscr{A}(X) \mid X \setminus A \in \mathscr{A}(X)\}$

と定義したとき，$\mathscr{B}(X) \subset \mathscr{E}$ であることを示そう．そのためには，$\mathscr{E}$ が X の開集合をすべて含む σ-代数であることを示せばよい．G が開集合なら (v) より $G \in \mathscr{A}(X)$ かつ $X \setminus G \in \mathscr{A}(X)$ なので，$\mathscr{E}$ は X の開集合を含む．定義より明らかに，$\mathscr{E}$ は補集合をとる操作について閉じている．(A_n) を $\mathscr{E}$ の列とすれば，(iv) より $\bigcup_n A_n \in \mathscr{A}(X)$ が成り立つ．さらに (iii) と $\mathscr{E}$ の定義より，$X \setminus \bigcap_n A_n = \bigcap_n X \setminus A_n \in \mathscr{A}(X)$ となり，これより $\bigcup_n A_n \in \mathscr{A}(X)$ がわかる．以上の議論により $\mathscr{E}$ は開集合を全て含む σ-代数であることが示されたので，$\mathscr{B}(X) \subset \mathscr{E}$ である． □

命題 3.2 (v) の証明において，実は $\mathscr{E} = \mathscr{B}(X)$ が成り立っている．それを示すためには，もう少し準備が必要となる．

命題 3.3. Souslin 空間は遺伝的 Lindelöf 空間である[*8]．

証明. 初めに，任意の第 2 可算空間は Lindelöf であることに注意しておこう．X を Souslin 空間，Z をポーランド空間，$f\colon Z \to X$ を連続全射とする．$\mathscr{U}$ を $A \subset X$ の開被覆とする．$(f^{-1}(U); U \in \mathscr{U})$ を部分空間 $f^{-1}\bigcup\mathscr{U}$ の開被覆と思うと，$f^{-1}\bigcup\mathscr{U}$ の Lindelöf 性より可算部分被覆 $(f^{-1}(U_n); n \in \mathbb{N})$ を選び出すことができる．いま $f^{-1}(A) \subset \bigcup_n f^{-1}(U_n)$ であるから，f が全射であることに注意すれば

$$A = ff^{-1}(A) \subset f\left(\bigcup_n f^{-1}(U_n)\right) = \bigcup_n ff^{-1}(U_n) \subset \bigcup_n U_n$$

が成り立つ．ゆえに $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は A の可算部分被覆である．これより，X は遺伝的 Lindelöf 空間であることがわかる． □

X が第 2 可算な Hausdorff 空間なら $\mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(X) = \mathscr{B}(X \times X)$ であるから，$\Delta_X \in \mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(X)$ が成り立つ[*9]．しかし一般の Hausdorff 空間においては $\mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(X) \subset \mathscr{B}(X \times X)$ しかいえないから，$\Delta_X \in \mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(X)$ が成り立つとは限らない．$\Delta_X \in \mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(X)$ が成り立つための十分条件を与えるのが次の命題である．対角集合の可測性は，可測関数のグラフの可測性を論じる際に重要な概念である．

補題 3.4. X を Hausdorff 空間とする．$X \times X$ が遺伝的 Lindelöf 空間なら，$\Delta_X = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\} \in \mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(X)$ である．

証明. X は Hausdorff 空間なので，Δ_X は $X \times X$ の閉集合である．よってその補集合は開集合であり，遺伝的 Lindelöf 性よりこれは $U \times V$ の形の開集合の可算和で表現される．よって $\mathscr{B}(X) \times \mathscr{B}(X)$ 可測である． □

特に X が Souslin 空間なら $X \times X$ はまた Souslin 空間となるので，Δ_X は $\mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(X)$ 可測となる．

命題 3.5. $(X, \mathscr{A})$ と $(Y, \mathscr{B})$ を可測空間とし，$f\colon X \to Y$ を可測関数とする．$\Delta_Y \in \mathscr{B} \otimes \mathscr{B}$ なら，f のグラフ $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$ は $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ に属する．

証明. $\Gamma_f = (f \times \mathrm{id}_Y)^{-1}(\Delta_Y)$ に注意すればよい． □

[*8] Lindelöf 空間は，任意の開被覆が可算部分被覆を持つ位相空間である．遺伝的 Lindelöf 空間は，任意の部分空間が Lindelöf となる空間のことである．

[*9] $\Delta_X = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$ であった．X が Hausdorff 空間なら Δ_X は積位相空間 $X \times X$ の閉集合である．

系 3.6. X が位相空間，Y が Souslin 空間なら，Borel 可測関数 $f\colon X \to Y$ のグラフ Γ_f は $\mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y)$-可測である．

証明. 補題 3.4 と命題 3.5 より明らかである． □

ポーランド空間の間の可測関数 $f\colon X \to Y$ が与えられたとき，Borel 集合 B の像 $f(B)$ が Borel 可測になるかは難しい問題である．しかし，議論の結果を用いればそれが解析集合になることは示すことができる．このことを示すのには，グラフの可測性の議論が有効である．

命題 3.7. X, Y をポーランド空間，A を X の解析集合，$f\colon A \to Y$ を可測関数とする．このとき，任意の解析集合 $B \subset A$ に対して，$f(B)$ は Y の解析集合となる．

証明. いま Y はポーランド空間（よって Souslin 空間）であるから，系 3.6 より $\Gamma_f \in \mathscr{B}(A) \otimes \mathscr{B}(Y) \subset \mathscr{B}(A \times Y)$ が成り立つ．特に，Γ_f は $X \times Y$ の解析集合である．いま $i\colon A \times Y \to X \times Y$ を包含写像とすれば，ある $C \in \mathscr{B}(X \times Y)$ によって $i^{-1}(C) = \Gamma_f$ という表現が可能である．$B(\subset A \subset X)$ を解析集合とすれば，命題 3.2 より，$(B \times Y) \cap \Gamma_f$ は $X \times Y$ の解析集合である．

ここで，$g\colon Z \to (B \times Y) \cap \Gamma_f$ をポーランド空間からの連続全射とする．$\mathrm{pr}_2\colon X \times Y \to Y$ を射影とすれば，$f(B) = \mathrm{pr}_2((B \times Y) \cap \Gamma_f) = \mathrm{pr}_2 g(Z)$ が成立．したがってポーランド空間からの連続全射 $\mathrm{pr}_2 \circ g\colon Z \to f(B)$ が存在し，$f(B)$ が解析集合であることがわかった． □

4 解析集合の特徴付け

本節では，集合演算の観点から解析集合の特徴付けを考える．そのために，まずは Souslin スキームと Souslin 演算という概念を導入しよう．

$\mathbb{N}^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^n$ と定義する．すなわち，$\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ は自然数の有限列全体の集合である．$s = (s_0, \ldots, s_{n-1}) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ に対して $|s| = n$ と定義する．$|s|$ とはつまり有限数列 s の長さである．X を集合とし，$\mathscr{E}$ を X の部分集合族とする．写像：$\mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathscr{E}$ を，$\mathscr{E}$-値の Souslin スキーム (Souslin scheme) と呼ぶ．Souslin スキーム $P = (P_s)_{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ が与えたとき，P に集合

$$S(P) = \bigcup_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} P_{\mathbf{n}|_k}$$

を対応させる操作を，Souslin 演算 (Souslin operation) や A-演算 (A-operation) と呼ぶ．ただし，$\mathbf{n}|_k$ は自然数列 $\mathbf{n}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ の $k = \{0, \ldots, k-1\}$ 上への制限であり，具体的に書くと有限列 $(\mathbf{n}_0, \ldots, \mathbf{n}_{k-1})$ である．$\mathscr{E}$-値の Souslin スキームに対する Souslin 演算で得られる集合全体を $S(\mathscr{E})$ で表す．$s = (s_0, \ldots, s_n) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ と $t = (t_0, \ldots, t_m) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ を並べて出来る有限列 $(s_0, \ldots, s_n, t_0, \ldots, t_m)$ を st で表すことにする．$|s| \leq |t|$ を満たす $s, t \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ について，$t|_{|s|} = s$ が成り立っているとき，$s \prec t$ と書く．Souslin スキーム P が $s \prec t$ なら $P_s \supset P_t$ を満たすとき，P は正則 (regular) であるという．

Souslin 演算の基本的な性質を調べる．特に重要なのは冪等性 $S(\mathscr{E}) = S(S(\mathscr{E}))$ である．それを示すために，まずは一つ技術的な補題を用意しよう．

補題 4.1. 全単射

$$\beta\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad \Phi\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

で，次の条件を満たすものが存在する：

(i) $\Phi(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = \beta \circ (\mathbf{n}, \mathbf{m} \circ \beta^{-1})$ を満たす．

(ii) 全ての m と n に対して $m \leq \beta(m,n)$ が成り立つ．また，全ての m と $n < k$ に対して $\beta(m,n) < \beta(m,k)$ が成り立つ．

ここで，条件 (ii) は以下の (ii)" と書き換えられることに注意されたい．

(ii)" 全ての k に対して $\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1}(k) \leq k$ が成り立つ．また，全ての $p \leq l$ に対して $\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1}(p) = \mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1}(l)$ なら，$\mathrm{pr}_2 \circ \beta^{-1}(p) \leq \mathrm{pr}_2 \circ \beta^{-1}(l)$ が成り立つ．

証明. 写像 $\beta \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $\beta(m,n) = 2^m(2n+1) - 1$ と定めれば，これは全単射である[*10]．このとき任意の m, n に対して $m < 2^m \leq 2^m(2n+1)$ が成り立つから，$m \leq \beta(m,n)$ である．さらに，任意の $n < k$ に対して $\beta(m,n) < \beta(m,k)$ が成り立つことにも注意しておく．

既に β は定まっているので $\Phi(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = \beta \circ (\mathbf{n}, \mathbf{m} \circ \beta^{-1})$ と定義し，これが全単射であることを示せばよい．いまは逆写像 Ψ を具体的に構成することにする．$\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に対して，

$$\Psi(\mathbf{n}) = (\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1} \circ \mathbf{n}, \mathrm{pr}_2 \circ \beta^{-1} \circ \mathbf{n} \circ \beta) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$$

と定義する．これが Φ の逆写像であることを示そう．$(\mathbf{n}, \mathbf{m}) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ なら

$$\begin{aligned}
\Psi \circ \Phi(\mathbf{n}, \mathbf{m}) &= (\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1} \circ \Phi(\mathbf{n}, \mathbf{m}), \mathrm{pr}_2 \circ \Phi(\mathbf{n}, \mathbf{m}) \circ \beta) \\
&= (\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1} \circ \beta \circ (\mathbf{n}, \mathbf{m} \circ \beta^{-1}), \mathrm{pr}_2 \circ \beta^{-1} \circ \beta \circ (\mathbf{n}, \mathbf{m} \circ \beta^{-1}) \circ \beta) \\
&= (\mathrm{pr}_1 \circ (\mathbf{n}, \mathbf{m} \circ \beta^{-1}), \mathrm{pr}_2 \circ (\mathbf{n} \circ \beta, \mathbf{m})) \\
&= (\mathbf{n}, \mathbf{m})
\end{aligned}$$

である．一方，$\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ なら

$$\begin{aligned}
\Phi \circ \Psi(\mathbf{n}) &= \Phi\left(\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1} \circ \mathbf{n}, \mathrm{pr}_2 \circ \beta^{-1} \circ \mathbf{n} \circ \beta\right) \\
&= \beta \circ \left(\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1} \circ \mathbf{n}, \mathrm{pr}_2 \circ \beta^{-1} \circ \mathbf{n} \circ \beta \circ \beta^{-1}\right) \\
&= \beta \circ \left(\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1} \circ \mathbf{n}, \mathrm{pr}_2 \circ \beta^{-1} \circ \mathbf{n}\right) \\
&= \beta \circ (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2) \circ \beta^{-1} \circ \mathbf{n} \\
&= \mathbf{n}
\end{aligned}$$

が成立．よって Ψ は Φ の逆写像である． □

命題 4.2. $\mathscr{E}$ を X の部分集合族とする．このとき，Souslin 演算について以下が成り立つ．

(i) $\mathscr{E}, \mathscr{E}_\sigma, \mathscr{E}_\delta \subset S(\mathscr{E})$ が成り立つ．

(ii) $S(S(\mathscr{E})) = S(\mathscr{E})$．特に，$S(\mathscr{E})$ は可算個の和と共通部分をとる操作について閉じている．

(iii) $\emptyset \in \mathscr{E}$ とする．$A \in \mathscr{E}$ なら $X \setminus A \in S(\mathscr{E})$ が成り立つなら，$\sigma(\mathscr{E}) \subset S(\mathscr{E})$ が成り立つ．

ただし，$\mathscr{E}_\sigma$ は $\mathscr{E}$ の元の可算和として表現される集合全体で，$\mathscr{E}_\delta$ は $\mathscr{E}$ の元の可算個の有限部分集合で表される集合全体である．

証明. (i) $A \in \mathscr{E}$ に対して $P_s = A$ と定めれば，$S((P_s)) = A \in S(\mathscr{E})$ となる．(A_n) を $\mathscr{E}$ の元の列とする．

[*10] 整数 $l + 1 \geq 1$ は $l + 1 = 2^m(2n+1)$ と一意的に表現できるから．

Souslin スキーム P を $s=(s_0,\dots,s_n)$ に対して $P_s=A_{s_0}$ と定めることにする．このとき

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\mathbb{N}}\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_{\mathbf{n}_0} = \bigcup_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\mathbb{N}}\bigcap_{k\in\mathbb{N}} P_{\mathbf{n}|_k} = S(P)\in S(\mathscr{E})$$

である．また，Souslin スキーム Q を $Q_s=A_{|s|}$ と定義する．このとき

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\mathbb{N}}\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\mathbb{N}}\bigcap_{k\in\mathbb{N}} Q_{\mathbf{n}|_k} = S(Q)\in S(\mathscr{E})$$

(ii) (i) より $S(\mathscr{E})\subset S(S(\mathscr{E}))$ が成り立つから，逆向きの包含関係 $S(S(\mathscr{E}))\subset S(\mathscr{E})$ を示せばよい．$P=(P_s)$ を $S(\mathscr{E})$ に値をとる Souslin スキームとし，$A=S(P)$ と定める．各 s に対して，$\mathscr{E}$ に値をとる Souslin スキーム $Q_s=(Q_{s,t})$ で $AQ_s=P_s$ を満たすものが存在する．この $Q_{s,t}$ を用いて，$\mathscr{E}$ 値の Souslin スキーム $R=(R_s)$ で $S(R)=A$ を満たすようなものを構成すればよい．

β, Φ を補題 4.1 の写像とする．さらに写像 $\varphi\colon \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\to\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ を次の要領で定義する：$s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ に対して，$\mathbf{n}|_n=s$ なる $\mathbf{n}$ を選んで

$$\varphi(s)=\bigl(\mathrm{pr}_1\circ\beta^{-1}\circ\mathbf{n}|_{\mathrm{pr}_1\circ\beta^{-1}(n)},\mathrm{pr}_2\circ\beta^{-1}\circ\mathbf{n}\circ\beta_{\mathrm{pr}_1\circ\beta^{-1}(n)}|_{\mathrm{pr}_2\circ\beta^{-1}(n)}\bigr)$$

と定義する．これが $\mathbf{n}$ の選びかたによらず定まることは，補題 4.1 の条件 (ii) および (ii)” からわかる[*11]．この φ を用いて $R_s=Q_{\varphi(s)}$ と定めると，これはまた $\mathscr{E}$-値の Souslin スキームである．あとは，この新たな Souslin スキーム $R=(R_s)$ が $S(R)=A$ を満たすことを示せばよい．そのために，まずは以下の同値関係があることを確かめよう．

$$\begin{aligned}
x\in A &\iff x\in S(P)\\
&\iff \exists\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\mathbb{N}\ \forall k\in\mathbb{N}\ x\in P_{\mathbf{n}|_k}\\
&\iff \exists\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\mathbb{N}\ \forall k\in\mathbb{N}\ \exists\mathbf{m}\in\mathbb{N}^\mathbb{N}\ \forall l\in\mathbb{N}\ x\in Q_{\mathbf{n}|_k,\mathbf{m}|_l}\\
&\iff \exists\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\mathbb{N}\ \exists\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}^\mathbb{N}}\ \forall k\in\mathbb{N}\ \forall l\in\mathbb{N}\ x\in Q_{\mathbf{n}|_k,\alpha_k|_l}
\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}
x\in S(R) &\iff \exists\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\mathbb{N}\ \forall k\in\mathbb{N}\ x\in R_{\mathbf{n}|_k}\\
&\iff \exists\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\mathbb{N}\ \forall k\in\mathbb{N}\ x\in Q_{\phi(\mathbf{n}|_k)}
\end{aligned}$$

であるから，これらの条件を比較すればよい．いま，我々が確かめたいのは

$$\exists\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\mathbb{N}\ \exists\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}^\mathbb{N}}\ \forall k\in\mathbb{N}\ \forall l\in\mathbb{N}\ x\in Q_{\mathbf{n}|_k,\alpha_k|_l} \iff \exists\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\mathbb{N}\ \forall k\in\mathbb{N}\ x\in Q_{\phi(\mathbf{n}|_k)} \tag{6}$$

である．(6) の左辺が成り立つと仮定する．$\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\mathbb{N}$ と $\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}^\mathbb{N}}$ は，すべての $k,l\in\mathbb{N}$ に対して $x\in Q_{\mathbf{n}|_k,\alpha_k|_l}$ を満たすと仮定する．ここで $\mathbf{m}=\Phi(\mathbf{n},\alpha)$ と定義しよう．いま

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{m}|_k) &= \bigl(\mathrm{pr}_1\circ\beta^{-1}\circ\Phi(\mathbf{n},\alpha)|_{\mathrm{pr}_1\circ\beta^{-1}(n)},\mathrm{pr}_2\circ\beta^{-1}\circ\Phi(\mathbf{n},\alpha)\circ\beta_{\mathrm{pr}_1\circ\beta^{-1}(n)}|_{\mathrm{pr}_2\circ\beta^{-1}(n)}\bigr)\\
&= \bigl(\mathbf{n}|_{\mathrm{pr}_1\circ\beta^{-1}(n)},\alpha\circ\beta^{-1}\circ\beta_{\mathrm{pr}_1\circ\beta^{-1}(n)}|_{\mathrm{pr}_2\circ\beta^{-1}(n)}\bigr)\\
&= \bigl(\mathbf{n}|_{\mathrm{pr}_1\circ\beta^{-1}(n)},\alpha_{\mathrm{pr}_1\circ\beta^{-1}(n)}|_{\mathrm{pr}_2\circ\beta^{-1}(n)}\bigr)
\end{aligned}$$

[*11] 一つ目の項は，$\mathrm{pr}_1\circ\beta^{-1}(n)\le n$ よりわかる．二つ目の項は $\beta(\mathrm{pr}_1\circ\beta^{-1}(n),\mathrm{pr}_2\circ\beta^{-1}(n))=n$ と条件 (ii)” の後半よりわかる．

であることに注意すれば，全ての k に対して

$$x \in Q\left(\mathbf{n}|_{\mathrm{pr}_1\circ\beta^{-1}(n)}, \alpha_{\mathrm{pr}_1\circ\beta^{-1}(n)}|_{\mathrm{pr}_2\circ\beta^{-1}(n)}\right) = Q_{\phi(\mathbf{m}|_k)} = R_{\mathbf{m}|_k}$$

が成立．

逆に，(6) の右辺を仮定しよう．$\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ は，全ての $k \in \mathbb{N}$ に対して $x \in Q_{\phi(\mathbf{n}|_k)}$ を満たすと仮定する．ここで $(\mathbf{m}, \alpha) = \Psi(\mathbf{n})$ と定めれば，

$$\begin{aligned}(\mathbf{n}|_k, \alpha_k|_l) &= (\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1} \circ \mathbf{m}|_k, \mathrm{pr}_2 \circ \beta^{-1} \circ \mathbf{m} \circ \beta_k|_l) \\ &= \left(\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1} \circ \mathbf{m}|_{\mathrm{pr}_1\circ\beta^{-1}(\beta(k,l))}, \mathrm{pr}_2 \circ \beta^{-1} \circ \mathbf{m} \circ \beta_{\mathrm{pr}_1\circ\beta^{-1}(\beta(k,l))}|_{\mathrm{pr}_2\circ\beta^{-1}(\beta(k,l))}\right) \\ &= \varphi(\mathbf{n}|_{\beta(k,l)})\end{aligned}$$

が成立．これより全ての $k, l \in \mathbb{N}$ について

$$x \in Q(\varphi(\mathbf{n}|_{\beta(k,l)})) = Q(\mathbf{n}|_k, \alpha_k|_l)$$

となり，(6) 左辺を得る．

(iii) $\mathscr{A} = \{A \in S(\mathscr{E}) \mid X \setminus A \in S(\mathscr{E})\}$ と定義すれば，仮定よりこれは $\mathscr{E}$ を含む．定義より明らかに $\mathscr{A}$ は補集合をとる操作について閉じており，また空集合は $\mathscr{A}$ に属する．さらに (ii) より $S(\mathscr{E})$ は可算和と可算共通部分をとる操作について閉じているから，$\mathscr{A}$ は σ-代数であることがわかる．したがって，最小性より $\sigma(\mathscr{E}) \subset \mathscr{A}$ となる． □

ポーランド空間の解析部分集合は，以下のように特徴づけることができる．

命題 4.3. X をポーランド空間とし，d をその位相構造と整合的な完備距離とする．このとき，X の部分集合 A について次の条件は同値である．

(i) A は解析集合である．

(ii) A は閉集合からなる Souslin スキーム $F = (F_s)$ によって $S(F)$ と表現される．

(iii) A は閉集合からなる正則 Souslin スキーム $F = (F_s)$ によって $S(F)$ と表現される．さらに，この F は全ての $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に対して $\mathrm{diam}(F_{x|_n}) \to 0$ $(n \to \infty)$ を満たすように取れる．特に A が空でなければ，各 F_s は空でないとしてよい．

(iv) A が空でなければ，連続全射 $f\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to A$ が存在する．

(v) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X$ の閉集合 F で，$A = \mathrm{pr}_2(F) = A$ を満たすものが存在する．

証明．(iii) $\Longrightarrow$ (ii) は明らかである．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．A は閉集合からなる Souslin スキーム $F = (F_s)$ によって $A = S(F)$ と表現されているとする．ここで $E \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X$ を

$$\begin{aligned}E &= \{(\mathbf{n}, x) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X \mid \forall k \in \mathbb{N}\ x \in F_{\mathbf{n}|_k}\} \\ &= \bigcup_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \left(\{\mathbf{n}\} \times \bigcap_k F_{\mathbf{n}|_k}\right) = \coprod_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_{\mathbf{n}|_k}\end{aligned}$$

と定義する．E は

$$E = \bigcap_k \bigcup_{s\in\mathbb{N}^k} \{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \mathbf{n}|_k = s\} \times F_s \tag{7}$$

とも表現できることに注意されたい．$\{\mathbf{n}|_k = s\}$ は射影による $\{s\}$ の引き戻しなので閉集合であり，よって $\{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \mathbf{n}|_k = s\} \times F_s$ も閉集合である．ゆえに (7) の表現と命題 4.2 から E はポーランド空間 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X$ の解析集合であることがわかる．いま，$A = \mathrm{pr}_2(E)$ だから A は連続写像 $\mathrm{pr}_2 \colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X \to X$ による解析集合 E の像であり，命題 3.7 より解析集合である．

(i) $\Longrightarrow$ (iv)．A を空でない解析集合とし，$g \colon Z \to A$ を空でないポーランド空間 Z からの連続全射とする．いま，d_Z で Z の位相と整合的な完備距離を表すこととする．$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の距離 ρ を

$$\rho(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{1 \wedge |n_j - m_j|}{2^{k+1}}$$

によって定めよう．

いま，Z の閉部分集合に値をとる正則 Souslin スキームで，以下の条件を満たすものが存在する．

(i) A_s の直径は $1/|s|$ 以下である．
(ii) $A_s = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{sk}$ [*12]．
(iii) $Z = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$．

これは実際，次のような手順で再帰的に構成できる．$\{z_n ; n \in \mathbb{N}\}$ を Z の稠密部分集合とし，A_n を中心 z_n，半径 $1/2$ の閉球とする．上の条件 (i)–(iii) を満たす $(A_s)_{s \in \mathbb{N}^n}$ が与えられているとする．このとき A_s は可分距離空間 Z の閉部分区間なので，これもまた閉部分空間である．その稠密な可算集合 $\{x_{sn}\}_n$ を選んで，A_{s_n} を中心 x_{sn} で半径 $(2(n+1))^{-1}$ の閉球と，A_s の共通部分とする．このようにして作られた Souslin スキームは上の条件 (i)–(iii) を満たす．

この Souslin スキームを用いて連続全射 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to Z$ を構成しよう．$\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に対して，$(A_{\mathbf{n}|_k})_{k \in \mathbb{N}}$ は閉集合の減少列で $\mathrm{diam}(A_{\mathbf{n}|_k}) \to 0$ を満たす．したがって $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_{\mathbf{n}|_k}$ はただ 1 点からなり，これを $h(\mathbf{n})$ と定める．このとき，写像 $h \colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to Z$ は連続であることを示そう．$k \geq 1$ とする．$\rho(\mathbf{n}, \mathbf{m}) < 1/2^k$ なら $\mathbf{n}|_k = \mathbf{m}|_k = 0$ なので，$h(\mathbf{n}), h(\mathbf{m}) \in A_{\mathbf{n}_k}$ が成立．よって $d_Z(h(\mathbf{n}), h(\mathbf{m})) \leq \mathrm{diam}(A_{\mathbf{n}_k}) \leq \frac{1}{k}$ が成り立つ．すなわち，$h \colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to Z$ は一様連続である．後は，h が全射であることを示せばよい．$z \in X$ とすれば，$A = (A_s)$ の定義より $z \in A_{n_0}$ なる $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在する．さらに $A_{n_0} = \bigcup_n A_{n_0 n}$ だから，$x \in A_{n_0 n_1}$ なる n_{n_1} が存在する．このようにして $\mathbf{n}$ を再帰的に構成すれば，$h(\mathbf{n}) = z$ がわかる．

最後に，$f = g \circ h \colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to A$ と定めれば，これは連続全射の合成なので連続全射である．

(iv) $\Longrightarrow$ (v)．$f \colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to A$ を連続全射とすれば，そのグラフ $\Gamma_f \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X$ は閉集合となる[*13]．このとき，A は $\mathrm{pr}_2(\Gamma_f) = f(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = A$ と表現される．

(v) $\Longrightarrow$ (i)．ポーランド空間 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X$ の閉部分空間 $F \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X$ はまたポーランド空間と見なせるので，連続写像 $\mathrm{pr}_2|_F \colon F \to X$ による像 $\mathrm{pr}_2(F)$ は解析集合である． □

5 Lusin の分離定理

本節では，共通部分をもたない二つの解析集合は Borel 集合で分離できるという Lusin の分離定理の証明を行う．さらにその応用として，ポーランド空間の Borel 集合とは解析集合かつ余解析集合（補集合が解析集合）であるような集合に他ならないことを明らかにする．

[*12] st は s と t を並べたものであった．
[*13] Hausdorff 空間への連続写像のグラフは，積空間の閉集合である．

集合 X の部分集合 A, B, C について，$A \subset C$ かつ $B \subset X \setminus C$ が成り立っているとき，C は A と B を分離する (separate) という．

定理 5.1 (Lusin の分離定理)**.** X をポーランド空間，とし A, B をその解析集合とする．A と B の共通部分が空なら，それらはある Borel 集合で分離できる．

定理の証明の前に，一つ補題を用意する．

補題 5.2. 位相空間 X の部分集合 P, Q について $P = \bigcup_n P_n$, $Q = \bigcup_m Q_m$ が成り立っているとする．全ての n, m について P_n と Q_m が Borel 集合で分離できるなら，P と Q もボレル集合で分離できる．

証明. $R_{n,m}$ は $P_n \subset R_{n,m}$ かつ $Q_m \subset X \setminus R_{n,m}$ を満たす Borel 集合とする．このとき $R = \bigcup_n \bigcap_m R_{n,m}$ とすれば，これは P と Q を分離する Borel 集合である．実際，全ての n, m に対して $P_n \subset R_{n,m}$ だから $P = \bigcup_n P_n \subset \bigcup_n \bigcap_m R_{n,m}$ であり，また全ての n, m に対して $Q_m \subset X \setminus R_{n,m}$ だから $\bigcup_m Q_m \subset \bigcup_m \bigcap_n X \setminus R_{n,m} = X \setminus \bigcup_n \bigcap_m R_{n,m}$ となる． □

定理 5.1 の証明. **Step 1 : 準備.** A と B は空でないとして示せば十分である．$f\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to A$ と $g\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to B$ を連続全射とする．$s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ に対して定まる $\{\mathbf{n} \mid \mathbf{n}|_{|s|} = s\} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ を $\Sigma(s)$ で表すことにする．これは射影による $\{s\} \subset \mathbb{N}^{|s|}$ の引き戻しなので，$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の閉集合であることに注意しておく．この記法を用いて，$A_s = f(\Sigma(s))$ および $B_s = g(\Sigma(s))$ と定義する．

Step 2 : 証明に使う主張の証明. まずは，次の主張を示す．

主張 1

任意の $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に対してある k が存在して，$A_{\mathbf{n}|_k}$ と $B_{\mathbf{m}|_k}$ は Borel 集合で分離される．

$\{\Sigma(\mathbf{n}|_k); k \in \mathbb{N}\}$ と $\{\Sigma(\mathbf{m}|_k); k \in \mathbb{N}\}$ はそれぞれ $\mathbf{n}, \mathbf{m}$ に収束するフィルター基底であり，f の連続性より $\{A_{\mathbf{n}|_k}; k \in \mathbb{N}\}$ と $\{B_{\mathbf{m}|_k}; k \in \mathbb{N}\}$ はそれぞれ $f(\mathbf{n}) \in A_s \subset A$ と $g(\mathbf{m}) \in B_s \subset B$ に収束するフィルター基底となる．いま A と B は共通部分をもたないから，$f(\mathbf{n}) \in U$, $g(\mathbf{m}) \in V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ を満たすような X の開集合 U と V が存在する．フィルター基底の収束性より，十分大きい n をとれば $A_{\mathbf{n}|_k} \subset U$ かつ $B_{\mathbf{n}|_k} \subset V$ となり，$A_{\mathbf{n}|_k}$ と $B_{\mathbf{n}|_k}$ は Borel 集合で分離されることがわかった．

Step 3 : 定理の証明. 先ほどの主張 1 より，次の主張を示せば十分であることがわかる．

主張 2

任意の $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に対して，ある k が存在して，$A_{\mathbf{n}|_k}$ と $B_{\mathbf{m}|_k}$ は Borel 集合で分離されるとする．このとき，A と B は Borel 集合で分離できる．

対偶を示すことにする．A と B は Borel 集合で分離できないとする．このとき，いかなる k について $A_{\mathbf{n}|_k}$ と $B_{\mathbf{m}|_k}$ が分離できないような列 $\mathbf{n}$ と $\mathbf{m}$ を再帰的に構成しよう．$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ であることに注意すれば，補題 5.2 よりある $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ で A_{n_0} と B_{m_0} が分離できないようなものが存在する．次に，$A_{n_0 \dots n_{k-1}}$ と $B_{n_0 \dots n_{k-1}}$ が Borel 集合で分離できないと仮定する．このとき $A_{n_0 \dots n_{k-1}} = \bigcup_n A_{n_0 \dots n_{k-1} n}$ かつ $B_{n_0 \dots n_{k-1}} = \bigcup_n B_{n_0 \dots n_{k-1} n}$ が成り立つことに注意すれば，やはりある n_k, m_k で $A_{n_0 \dots n_{k-1} n}$ と $B_{n_0 \dots n_{k-1} n}$ が Borel 集合で分離できないようなものがとれる．これにより，求める性質をもつ列 $\mathbf{n} = (n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ と $\mathbf{m} = (m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ が構成された． □

系 5.3. X をポーランド空間とする．$A \subset X$ が Borel 集合であるための必要十分条件は，A と $X \setminus A$ がとも

に解析集合であることである．

証明．A が Borel 集合なら $X \setminus A$ も Borel 集合であり，命題 3.2 よりこれらは解析集合である．

$A \subset X$ を解析集合とし，さらに $X \setminus A$ も解析集合であるとする．A と $X \setminus A$ は共通部分が空の解析集合だから，定理 5.1 よりある Borel 集合 B で $A \subset B$ かつ $X \setminus A \subset X \setminus B$ を満たすものが存在する．このとき $A = B$ であり，A は X の Borel 集合である． □

6 標準可測空間，解析的可測空間

本節では，Souslin 空間や Lusin 空間の可測空間としての性質を調べる．本節での目標は，解析的可測空間が Blackwell 空間であることを示すことと，Souslin 空間は解析的空間であることを示すことである．

まずは可測空間に関する用語をいくつか導入しよう．

定義 6.1. $(X, \mathscr{A})$ を可測空間とする．

(i) X の部分集合からなる可算族 $\mathscr{E}$ で $\sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{A}$ を満たすものが存在するとき，$\mathscr{A}$ は可算生成 (countably generated) であるという．

(ii) $\mathscr{A}$ は可算生成かつすべての 1 点集合を含むとする．さらに，任意の可算生成かつすべての 1 点集合を含む $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ に対して $\mathscr{B} = \mathscr{A}$ が成り立つとき，$(X, \mathscr{A})$ を Blackwell 空間 (Blackwell space) という．

(iii) $x \in X$ とする．集合 $\bigcap_{x \in A \in \mathscr{A}} A$ を，$\mathscr{A}$ における x を含むアトム (atom) という．

(iv) $\mathscr{E}$ を X の部分集合族とする．全ての $x, y \in X$ に対して，ある $A \in \mathscr{E}$ で $x \in A$ かつ $y \notin A$ を満たすから，あるいは $x \notin A$ かつ $y \in A$ を満たすものが存在するとき，$\mathscr{E}$ は分離的 (separated) であるという．

(v) $\mathscr{A}$ の可算部分集合で分離的なものが存在するとき，$\mathscr{A}$ は可算分離的 (countably separated) であるという．

(vi) あるポーランド空間と可測空間として同型である可測空間を，標準可測空間 (standard measurable space) と呼ぶ．

(vii) ある解析集合と可測空間として同型であるような可測空間を，解析的可測空間 (analytic measurable space) という．

一般にアトムは可測集合とは限らない．$\mathscr{A}$ が分離的なら，$x \in X$ を含むアトムは 1 点集合である．$\mathscr{A}$ が可算分離的なら，アトム $\{x\}$ は $\mathscr{A}$-可測となる．1 点集合が可測なら，x を含むアトムは $\{x\}$ である．$\mathscr{A}$ が可算生成的かつ分離的なら，

X が第 2 可算な Haudorff 空間なら，$\mathscr{B}(X)$ は可算生成かつ可算分離的である．実際，X の可算開基は分離的で $\mathscr{B}(X)$ を生成する集合族になっている．ゆえにポーランド空間は可測空間として可算生成かつ可算分離的である．したがって標準可測空間の σ-代数は可算生成かつ可算分離的となる．

命題 6.2. $(X, \mathscr{A})$ を解析的可測空間，Y をポーランド空間，$f \colon X \to Y$ を可測関数とする．このとき，任意の $A \in \mathscr{A}$ の像 $f(A)$ は Y の解析集合である．

証明．$(Z, \mathscr{B}(Z))$ を $(X, \mathscr{A})$ と可測空間として同型である（あるポーランド空間の）解析集合とし，$g \colon Z \to X$ を同型写像とする．このとき $f(A) = f \circ g(g^{-1}(A))$ であることに注意する．$B = g^{-1}(A)$ とおけば，$B \in \mathscr{B}(Z)$

である．B は解析集合の Borel 部分集合であるから，また解析集合である[*14]．$f \circ g\colon Z \to Y$ は可測関数なので命題 3.7 により $f(A) = f \circ g(g^{-1}(A))$ はまた解析集合となる． □

補題 6.3. $\mathscr{E}$ を X の部分集合族とする．このとき，$\sigma(\mathscr{E})$ が分離的となる必要十分条件は，$\mathscr{E}$ が分離的であることである．

証明．$\mathscr{E}$ が分離的なら $\sigma(\mathscr{E})$ が分離的になることは明らかであろう．逆を示すために，その対偶を示すことにする．$\mathscr{E}$ は分離的でないとし，(x, y) を $\mathscr{E}$ で分離できない点の組とする．ここで

$$\mathscr{A} = \{A \subset X \mid \{x, y\} \subset A \text{ または } \{x, y\} \subset X \setminus A \text{ が成り立つ }\}$$

と定義する．このとき $\mathscr{A}$ は $\mathscr{E}$ を含む σ-代数であるから，$\sigma(\mathscr{E}) \subset \mathscr{A}$ が成り立つ．すなわち，$\sigma(\mathscr{E})$ は x と y を分離しない． □

命題 6.4. X 上の σ-代数 $\mathscr{A}$ が可算生成かつ分離的なら，$\mathscr{A}$ は可算分離的である．

証明．補題 6.3 より明らか． □

以下の補題は，いわゆる Borel 同型定理と呼ばれる主張の核となる部分である．

補題 6.5. $\mathscr{A}$ を X 上の可算生成的な σ-代数とする．$\mathscr{A}$ は $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ によって生成されるとし，$F\colon X \to 2^{\mathbb{N}}$ を $x \mapsto (1_{A_n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ で定める．（ただし，$2 = \{0, 1\}$ は離散空間と考える．）このとき，$\mathscr{A}$ は F による $\mathscr{B}(2^{\mathbb{N}})$ の引き戻しである．

証明．F による $\mathscr{B}(2^{\mathbb{N}})$ の引き戻しを $F^*\mathscr{B}(2^{\mathbb{N}})$ で表すことにする．まずは，$\mathscr{B}(2^{\mathbb{N}}) = \mathscr{B}(2)^{\mathbb{N}}$ が成り立つことに注意しておこう．F は可測関数 $x \mapsto 1_{A_n}(x)$ の積であるから，$\mathscr{B}(2^{\mathbb{N}})$ 可測である．したがって $F^*\mathscr{B}(2^{\mathbb{N}}) \subset \mathscr{A}$ が成り立つ．また，各 A_n はファイバー $F^{-1}\mathrm{pr}_n^{-1}(1)$ に等しいから[*15]，$A_n \in \mathscr{B}(2^{\mathbb{N}})$ を満たす．これより $\mathscr{A} = \sigma(A_n; n \in \mathbb{N}) \subset \mathscr{B}(2^{\mathbb{N}})$ も成り立つ． □

解析的可測空間が Blackwell 空間であることを示すためには，以下の命題が重要である．

命題 6.6. $(X, \mathscr{A})$ を解析的可測空間とし，$\mathscr{A}_0$ を可算生成的な $\mathscr{A}$ の部分-σ-代数とする．このとき，$A \subset X$ について次の 2 条件は同値である．

(i) $A \in \mathscr{A}_0$.
(ii) $A \in \mathscr{A}$ であり，A は $\mathscr{A}_0$ におけるアトムの和として表現される．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii) は明らかなので，(ii) $\Longrightarrow$ (i) を示そう．$F\colon X \to 2^{\mathbb{N}}$ を $\mathscr{A}_0 = F^*\mathscr{B}(2^{\mathbb{N}})$ なる写像とする．（補題 6.5 のもの．）A を $\mathscr{A}_0$ における $x \in X$ を含むアトムとすれば，これは $A = F^{-1}F(x)$ を満たす．実際，$A = F^{-1}B$ と表現されているとき $x \in A$ は $F(x) \in B$ と同値なので，

$$\bigcap_{x \in A \in \mathscr{A}_0} A = \bigcap_{F(x) \in B \in \mathscr{B}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})} F^{-1}B = F^{-1}\left(\bigcap_{F(x) \in B \in \mathscr{B}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})} B\right)$$

[*14] B が解析集合 Z の Borel 部分集合なら，全体のポーランド空間の Borel 集合 C を用いて $C \cap A$ と表現される．Z と C はともに全体のポーランド空間の解析集合なので，命題 3.2 により解析集合である．
[*15] pr_n は第 n 射影 $2^{\mathbb{N}} \to \{0, 1\}$.

が成立．$2^{\mathbb{N}}$ はポーランド空間なので $F(x)$ を含む $\mathscr{B}2^{\mathbb{N}}$ のアトムは $\{F(x)\} \in \mathscr{B}\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ であり，ゆえに $F^{-1}(F(x))$ は x を含むアトムである．

さて，$A \in \mathscr{A}$ は $\mathscr{A}_0$ におけるアトムの和で表現されているとしよう．いま $A, X \setminus A \in \mathscr{A}$ であるから，命題 6.2 による $F(A)$ と $F(X \setminus A)$ は $2^{\mathbb{N}}$ の解析集合である．さらに，A が $\mathscr{A}_0$ におけるアトムの和で表現されているという条件と先ほどまでの議論により，$A = \bigcup_{x \in A} F^{-1}F(x)$ が成り立つ．これより $y \in F(A)$ なら $F^{-1}(y) \subset A$ であり，$F^{-1}(y) \cap (X \setminus A) = \emptyset$ となる．これより $y \notin X \setminus A$ となり[*16]，$F(A) \cap F(X \setminus A) = \emptyset$ がわかる．したがって $F(A)$ と $F(X \setminus A)$ は共通部分を持たない解析集合であり，定理 5.1 によりある Borel 集合 $C \subset 2^{\mathbb{N}}$ によって $F(A) \subset C$, $F(X \setminus A) \subset 2^{\mathbb{N}} \setminus C$ と分離される．この包含関係を変形すれば $A \subset FF^{-1}(A) \subset F^{-1}(C)$ かつ $X \setminus A \subset F^{-1}F(X \setminus A) \subset X \setminus F^{-1}(C)$ を得る．すなわち $F^{-1}(C) = A$ であり，$A \in \mathscr{A}_0 = F^*\mathscr{B}(2^{\mathbb{N}})$ がわかる． □

系 6.7. 解析的可測空間は Blackwell 空間である．

証明．$(X, \mathscr{A})$ を解析的可測空間とし，$\mathscr{A}_0$ は $\mathscr{A}$ の部分 σ 代数で可算生成かつ 1 点集合が可測であるようなものとする．$A \in \mathscr{A}$ とすれば，$\mathscr{A}_0$ は全ての 1 点集合を含むから，$x \in A$ を含む $\mathscr{A}_0$ のアトムは 1 点集合 $\{x\}$ である．したがって，$A = \bigcup_{x \in A}\{x\}$ となり A は命題 6.6 より $A \in \mathscr{A}_0$ がわかる．ゆえに $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}_0$ である． □

系 6.8. 解析的可測空間の σ-代数は可算生成的かつ分離的である．

ここからは，Souslin 空間や Lusin 空間の，可測空間としての構造を調べよう．

命題 6.9. (i) $(X, \mathscr{A})$ を解析的可測空間とし，可測空間 $(Y, \mathscr{B})$ は可算生成的かつ分離的であるとする．$f\colon X \to Y$ が可測な全射ならば，$(Y, \mathscr{B})$ は解析的可測空間である．

(ii) $(X, \mathscr{A})$ を標準可測空間とし，可測空間 $(Y, \mathscr{B})$ は可算生成的かつ分離的であるとする．このとき可測な全単射 $f\colon X \to Y$ は可測空間としての同型写像であり，特に $(Y, \mathscr{B})$ は標準可測空間となる．

証明．(i) $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を $\mathscr{B}$ を生成する可算族とし，$F\colon Y \to 2^{\mathbb{N}}$ を補題 6.4 のものとする．このとき補題 6.3 より F は単射であり，したがって $(Y, \mathscr{B})$ と $(F(Y), \mathscr{B}(F(Y))$ は F により可測空間として同型となる．いま $F(Y) = (F \circ f)(X)$ なので命題 6.2 より $F(Y)$ は解析集合であり，ゆえに $(Y, \mathscr{B})$ は解析的可測空間である．

(ii) いま f は可測な全単射なので，任意の $A \in \mathscr{A}$ に対して $f(A) \in \mathscr{B}$ が成り立つことを示せば十分である．(i) の結果より $(Y, \mathscr{B})$ は解析的なので，あるポーランド空間 Z の解析集合 Z_0 と同型である．$g\colon Y \to Z_0$ を可測空間としての同型写像とする．このとき，命題 6.2 より $g(f(A))$ と $g(f(X \setminus A))$ はともに Z の解析集合である．いま f と g は全単射なので $g(f(X \setminus A)) = Y \setminus g(f(A))$ であり，命題 5.3 より $g(f(A))$ はボレル集合となる．いま g は同型なので，$f(A) \in \mathscr{B}$ がわかる． □

系 6.10. (i) $(X, \mathscr{A})$ を解析的可測空間とし，可測空間 $(Y, \mathscr{B})$ は可算分離的であるとする．$f\colon X \to Y$ が可測な全射ならば，$(Y, \mathscr{B})$ は解析的可測空間である．

(ii) $(X, \mathscr{A})$ を標準可測空間とし，可測空間 $(Y, \mathscr{B})$ は可算分離的であるとする．$f\colon X \to Y$ が可測な全単射ならば可測空間としての同型写像であり，特に $(Y, \mathscr{B})$ は標準可測空間となる．

証明．命題 6.9 より，$(Y, \mathscr{B})$ が可算生成的であることを示せばよい．$\mathscr{C}$ を $\mathscr{B}$ の可算部分集合で，分離的なものとする．このとき，$\sigma(\mathscr{C}) \supset \mathscr{B}$ であることを示そう．定義より明らかに，$\sigma(\mathscr{C})$ は可算生成的かつ可算分離

[*16] 一般に，$B \subset X$ に対して $F(B) = \{y \in Y \mid F^{-1}(y) \cap B \neq \emptyset\}$ が成り立つのであった．

的であり，よって 1 点集合は可測であることに注意する．

$B \in \mathscr{B}$ に対して，$\mathscr{D}_B = \sigma(\mathscr{C} \cup \{B\})$ と定義する．$\mathscr{D}_B$ は可算生成的かつ分離的であり，f は $\mathscr{D}_B/\mathscr{A}$-可測な全射なので，命題 6.9 より $(Y, \mathscr{D}_B)$ は解析的である．系 6.7 より解析的可測空間は Blackwell 空間なので，$\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{D}_B$ である．したがってすべての $B \in \mathscr{B}$ に対して $B \in \sigma(\mathscr{C})$ となり，$\mathscr{B} \subset \sigma(\mathscr{C})$ がわかる． □

系 6.11. Souslin 空間は解析的可測空間である．

証明．(i) X を Souslin 空間とし $f\colon Z \to X$ をポーランド空間からの連続全射とする．$\mathscr{B}(X)$ が可算分離的であることを示せば，命題 6.10 より $(X, \mathscr{B}(X))$ は解析的であることがわかる．$\mathscr{U}$ を，$U \times V \subset X \times X \setminus \Delta_X$ を満たすような開集合 $U \times V$ の全体とする．これは $X \times X \setminus \Delta_X$ の開被覆であるから，$X \times X$ の遺伝的 Lindelöf 性より，可算な部分族 $\mathscr{U}_0$ が存在する．ここで $\mathscr{V} = \{\mathrm{pr}_1(V), \mathrm{pr}_2(V) \mid V \in \mathscr{U}_0\}$ と定めれば，$\mathscr{V}$ は可算な分離族である． □

7 Lusin 空間

定義 7.1. X を Hausdorff 空間とする．あるポーランド空間 Z からの連続全単射 $f\colon Z \to X$ が存在するとき，X を Lusin 空間 (Lusin space) と呼ぶ．

ポーランド空間は明らかに Lusin 空間であり，Lusin 空間は Souslin 空間である．すなわち，Lusin 空間はポーランド空間と Souslin 空間の間に位置するようなクラスである．

Souslin 空間に関する命題 3.2 に対応して，Lusin 空間については以下の主張が成り立つ．いくぶん主張が違う部分もあるので注意されたい．

命題 7.2. (i) Lusin 空間の高々可算直積は Lusin 空間である．
(ii) Lusin 空間の高々可算直和は Lusin 空間である．
(iii) Hausdorff 空間の Lusin 部分空間列の共通部分はまた Lusin 空間である．
(iv) ポーランド空間の開部分集合および閉部分集合は，Lusin 空間である．
(v) ポーランド空間の Borel 集合は Lusin 空間である．

証明．(i) と (ii) は Souslin 空間の場合の証明において「連続全射」を「連続全単射」で置き換えれば良いだけである．(v) はポーランド空間は Lusin 空間であることからわかる．

(iii) X を Hausdorff 空間，(A_n) をその Lusin 部分空間の列とし，$f_n\colon Z_n \to A_n$ をポーランド空間からの連続全単射の列とする．(f_n) の直積 $F\colon \prod_n Z_n \to \prod_n A_n \subset X^{\mathbb{N}}$ を考える．Souslin 空間の場合と同じように

$$\Delta := \{(x_n) \in X^{\mathbb{N}} \mid \forall n, m,\ x_n = x_m\} = \bigcap_{n,m} (\mathrm{pr}_n, \mathrm{pr}_m)^{-1}(\Delta_X)$$

と定義すれば，$Z := F^{-1}(\Delta)$ はポーランド空間であり，$g\colon Z \to \bigcap_n A_n$ は連続全単射となる．よって $\bigcap_n A_n$ は Lusin 空間である．

(v) X をポーランド空間とし，$\mathscr{L}(X)$ をその Lusin 部分全体の集合とする．$\mathscr{E} = \{A \in \mathscr{L}(X) \mid X \setminus A \in \mathscr{L}(X)\}$ と定義したとき，$\mathscr{B}(X) \subset \mathscr{E}$ であることを示そう．そのためには，$\mathscr{E}$ が X の開集合をすべて含む σ-代数であることを示せばよい．$\mathscr{E}$ が X の開集合をすべて含むことは (iv) よりわかる．$\mathscr{E}$ が補集合をとる操作について閉じていることは，定義より明らかである．(A_n) を $\mathscr{E}$ の元の列としよう．このとき (iii) より $\bigcap_n A_n \in \mathscr{L}(X)$ が成り立つ．$X \setminus \bigcap_n A_n = \bigcup_n X \setminus A_n$ であることに注意して $B_n = X \setminus A_n$ と定めよう．

仮定より $B_n \in \mathscr{L}(X)$ かつ $X \setminus B_n \in \mathscr{L}(X)$ なので，(iii) に注意すれば $\bigcup_n B_n = \bigcup_m C_m$ かつ互いに素な $\mathscr{L}(X)$ の列 (C_m) を取ることが出来る．このとき (ii) より $\bigcup_m C_m$ は Lusin 空間となることがわかるので，$X \setminus \bigcap_n A_n = \bigcup_n B_n \in \mathscr{L}(X)$ を得る．ゆえに $\bigcap_n A_n \in \mathscr{E}$ であり，$\mathscr{E}$ は σ-代数であることが示された．□

Lusin 空間は位相空間としてはポーランド空間と Souslin 空間の中間的な存在だが，可測空間としてはポーランド空間とほとんど同じである．

命題 7.3. Lusin 空間は標準可測空間である．

証明. Lusin 空間は Souslin 空間なので，系 6.11 より可算分離的である．これより，命題 6.10 を用いれば Lusin 空間が標準可測空間であることがわかる．□

命題 7.4. Lusin 空間の部分集合が Lusin 空間であるための必要十分条件は，それが Borel 集合であることである．

証明. X を Lusin 空間とし，A をその部分集合で Lusin 空間であるようなものとする．$f\colon Z \to X$ と $g\colon Y \to A$ を，それぞれポーランド空間からの連続全単射とする．このとき命題 6.9 (ii) と命題 7.3 から f と g はともに可測空間としての同型写像となる．いま $A = g(Y)$ であり，$f^{-1}(g(Y)) \in \mathscr{B}(Z)$ だから，f が同型であることより $A = g(Y) \in \mathscr{B}(X)$ がわかる．

逆に，B を X の Borel 部分集合としよう．ポーランド空間からの連続全単射 $f\colon Z \to X$ をとれば $f^{-1}(B) \in \mathscr{B}(Z)$ となる．このとき命題 7.2 より $f^{-1}(B)$ は Lusin 空間であり，ポーランド空間からの連続全単射 $g\colon Y \to f^{-1}(B)$ が存在する．$f \circ g\colon Y \to B$ はポーランド空間からの連続全単射であり，ゆえに B は Lusin 空間であることがわかる．□

系 7.5. X と Y をポーランド空間とし，$A \subset X$ を Borel 集合とする．$f\colon X \to Y$ が連続写像で $f|_A$ が単射ならば，$f(A)$ は Borel 集合である．

証明. 仮定より A は Lusin 空間なので，その単射による像 $f(A)$ も Lusin 空間である．Y はポーランド空間なので，その Lusin 部分空間は Borel 集合である．□

系 7.6. $(X, \mathscr{A})$ と $(Y, \mathscr{B})$ を標準可測空間とし，$f\colon X \to Y$ を可測関数とする．$A \in \mathscr{A}$ かつ $f|_A$ が単射ならば，$f(A) \in \mathscr{B}$ となる．

証明. X と Y はともにポーランド空間であるとしてよい．このとき $\mathrm{pr}_2\colon X \times Y \to X$ は連続であり，系 3.6 より $(A \times Y) \cap \Gamma_f \in \mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y)$ が成り立つ.（Γ_f は写像 f のグラフ.）いま $f|_A$ が単射であるという仮定から，pr_2 も $(A \times Y) \cap \Gamma_f$ 上で単射となる．したがって系 7.5 により，$f(A) = \mathrm{pr}_2((A \times Y) \cap \Gamma_f)$ も可測であることがわかる．□

注意 7.7. ポーランド空間の Borel 集合と同型であるような可測空間のことを標準 Borel 空間と呼ぶことがある．定義 6.1 の意味での標準可測空間は，明らかに標準 Borel 空間である．ところが，ポーランド空間の Borel 集合は Lusin 空間であり Lusin 空間は標準可測空間なので，標準 Borel 空間は標準可測空間となることもわかる．したがって，結局のところ標準 Borel 空間とは標準可測空間と同じ概念なのである．

8 Borel 同型定理

本節では，高名な Borel 同型定理を証明する．

定理 8.1 (Borel 同型定理)**.** 二つの標準可測空間が Borel 同型であるのは，それらが同じ濃度をもつことである．具体的には，次の 3 パターンしかない．

(i) 有限可測空間.
(ii) 可算な離散空間 $\mathbb{N}$ と同型な空間.
(iii) 連続体濃度を持つ，$2^{\mathbb{N}}$ と同型な空間.

この主張を示すためには，もう少し準備が必要である．まずはいくつか用語を導入しよう．

定義 8.2. X を位相空間とする．

(i) 空でない $A \subset X$ は孤立点を持たないとき，自己稠密 (dense in itself) であるという．
(ii) 自己稠密な閉集合を，完全集合 (perfect set) という．
(iii) $x \in X$ の任意の開近傍が非可算集合となるとき，x は凝集点 (condensation point) であるという．

X を集合とする．$\mathscr{P}X$ 値の Cantor スキーム (Cantor scheme) とは，以下を満たす集合族 $(A_s)_{s\in 2^{<\mathbb{N}}}$ のことである．

(i) 全ての $s \in 2^{<\mathbb{N}}$ について $A_{s0} \cap A_{s1} = \emptyset$ が成り立つ[*17].
(ii) 全ての $s \in 2^{<\mathbb{N}}$ と $i \in \{0,1\}$ について，$A_{si} \subset A_s$ が成り立つ．

つまり，Cantor スキームとは集合から二つの互いな部分集合を取り出すという操作を続けてできる集合列のことである．

命題 8.3. X を空でない自己稠密ポーランド空間とする．このとき，連続埋め込み $2^{\mathbb{N}} \to X$ が存在する．

証明. 次の条件を満たす $\mathscr{P}X$ の Cantor スキーム (U_s) をとる．

(i) U_s はどれも空でない開集合，
(ii) $\mathrm{diam}(U_s) \leq 2^{-|s|}$,
(iii) $s \in 2^{<\mathbb{N}}$ かつ $i \in 0,1$ なら $\overline{U_{si}} \subset U_s$.

$x \in 2^{\mathbb{N}}$ とすれば，上記の Cantor スキームに対して $\bigcap_n U_{x|_n} = \bigcap_n \overline{U_{x|_n}}$ は 1 点集合である．その集合の元を $f(x)$ とすれば，写像 $f\colon 2^{\mathbb{N}} \to X$ が定まる．これが求める連続単射である． □

命題 8.4 (Cantor-Bendixson)**.** X をポーランド空間とする．このとき，X はある完全集合 P と可算開集合 C によって $X = P \sqcup C$ と一意的に分解される．

証明. まずは分解の存在を示そう．X をポーランド空間とし，

$$P = \{x \in X \mid x \text{ は } X \text{ の凝集点 }\}$$

[*17] 記法について 4 節の Souslin スキームの項を参照されたい．

と定義する．$C = X \setminus P$ とすれば，$X = P \sqcup C$ が求める分解であることを示そう．いま C は閉集合であり，P は開集合である．P の定義より $U \subset C$ なる開集合 U は可算集合であり，X が第二可算であることから C は可算集合であることがわかる．$x \in P$ なら任意の開近傍 $x \in U$ について U は非可算集合であり，C が可算であることから $P \cap U$ も非可算となる．ゆえに x は P の集積点であることがわかり，P は完全集合である．

次に分解の一意性を示す．$X = P' \cup C'$ も同様の仮定を満たす分解とする．$x \in P'$ なら任意の開集合 U について $U \cap P'$ は自己稠密なポーランド空間となり，命題 8.3 より埋め込み $2^{\mathbb{N}} \hookrightarrow U \cap P'$ が存在する．すなわち $U \cap P'$ は非可算集合であり，P' の点はどれも凝集点である．ゆえに $P' \subset P$ が成り立つ．また $x \in C'$ なら C' は x の可算開近傍なので，$x \in X \setminus P = C$ が成り立つ．ゆえに $C' \subset C$ も成り立ち，$P = P'$ かつ $C = C'$ がわかる． □

系 8.5. X が非可算ポーランド空間なら，$|2^{\mathbb{N}}| = |X|$ が成り立つ．

証明．X はポーランド空間なので，補題 6.3 と 6.5 より単射 $X \hookrightarrow 2^{\mathbb{N}}$ が存在する．また X は非可算であることから，命題 8.4 より単射 $2^{\mathbb{N}} \hookrightarrow X$ も存在する．したがって，Cantor-Bernstein の定理により $|2^{\mathbb{N}}| = |X|$ となる． □

定理 8.1 を示すためには，もう一つ「Cantor-Bernstein の定理の可測関数版」とでも呼ぶべき定理が必要である．

命題 8.6. $A \subset 2^{\mathbb{N}}$ を Borel 集合とし，可測な単射 $2^{\mathbb{N}} \to A$ が存在するとする．このとき，$2^{\mathbb{N}}$ と部分空間 A は Borel 同型である．

証明．Cantor-Bernstein の定理で構成する写像が可測であることを示せばよい．$f\colon 2^{\mathbb{N}} \to A$ を可測な単射とし，写像の列 $(f^n\colon 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ を再帰により $f^0 = \mathrm{id}_X$ かつ $f^{n+1} = f \circ f^n$ と定義する．$n \in \mathbb{N}$ に対して $B^n = f^n(X) \setminus f^n(A)$ および $C^n = f^n(A) \setminus f^{n+1}(X)$ と定義すれば，$f|_{B_n}\colon B_n \to B_{n+1}$ と $f|_{C_n}\colon C_n \to C_{n+1}$ はどれも全単射である．さらに，7.6 よりこれらの集合はどれも Borel 集合であり，これらの写像は標準可測空間の間の可測全単射なので Borel 同型である．したがって

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \\ x & x \in D \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \right) \end{cases}$$

によって定義される全単射 $g\colon 2^{\mathbb{N}} \to A$ は Borel 同型写像である． □

Borel 同型定理（定理 *8.1*）の証明．X が可算な標準可測空間なら，離散空間からの全単射 $\mathbb{N} \to X$ は必ず可測となり，6.10 より可測空間としての同型写像となる．

X が非可算標準可測空間なら，それはもちろん非可算なポーランド空間 Y と可測空間として同型である．このとき命題 8.3 と 8.4 より可測単射 $2^{\mathbb{N}} \hookrightarrow Y$ が存在する．また，補題 6.3 と 6.5 より可測単射 $Y \hookrightarrow 2^{\mathbb{N}}$ も存在する．これらの埋め込みにより命題 8.6 から Y は $2^{\mathbb{N}}$ と Borel 同型となる．ゆえに X は $2^{\mathbb{N}}$ と可測空間として同型となる． □

9 Choquet 容量

本節では Choquet 容量を導入し，その性質を調べる．Choquet 容量を用いると，解析集合の可測性を調べることができる．また，Choquet 容量は Souslin 空間上の有限測度の緊密性を調べるのにも有用である．本節では位相空間上の測度の知識を幾らか仮定する．

定義 9.1. X を Hausdorff 空間とする．$I\colon \mathscr{P}X \to [0,\infty]$ が次の 3 条件を満たすとき，I を X 上の容量 (capacity) と呼ぶ．

(i) $A \subset B$ なら，$I(A) \leq I(B)$.
(ii) (A_n) が増大列なら，$\lim_{n\to\infty} I(A_n) = I\left(\bigcup_n A_n\right)$.
(iii) K がコンパクト集合なら，$I(K) < \infty$.
(iv) K がコンパクトで $I(K) < a$ なら，ある開集合 $U \supset K$ で $I(U) < a$ を満たすものがとれる．

条件 (iv) は

$$I(K) = \inf\{I(U) \mid U\colon \text{open},\ K \subset U\}$$

と言い換えても良いだろう．

代表的な容量は有限測度から作られるものである．

命題 9.2. X をポーランド空間とし，μ をその上の有限 Borel 測度とする．このとき μ から作られる外測度 μ^* は X 上の容量である．ただし，外測度 μ^* は以下で定義される．

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) \mid B \in \mathscr{B}(X)\}$$

証明．単調性は外測度の性質より明らかである．μ^* の下からの連続性を示そう．(A_n) を X の部分集合の増大列とし，$A = \bigcup_n A_n$ と定める．μ^* の単調性より $\lim_n \mu^*(A_n) \leq \mu^*(A)$ は明らかである．逆向きの不等号を示そう．$\varepsilon > 0$ とし，$B'_n \in \mathscr{B}(X)$ を

$$\mu(B'_n) < \mu^*(A_n) + \varepsilon, \qquad B'_n \supset A_n$$

を満たすように選ぶ．このとき $B_n = \bigcap_{k\geq n} B'_k \in \mathscr{B}(X)$ と定めれば，(B_n) は増大列かつ

$$A_n = \bigcap_{k\geq n} A_k \subset \bigcap_{k\geq n} B'_k = B_n$$

であって，さらに

$$\mu(B_n) \leq \mu(B'_n) < \mu^*(A_n) + \varepsilon$$

を満たす．ここで $n \to \infty$ の極限をとれば，

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \leq \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon$$

が成り立つ．これより

$$\mu^*(A) \leq \mu(B) \leq \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon$$

となり，$\varepsilon > 0$ は任意に選んでいたから $\mu^*(A) \leq \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n)$ がわかる．したがって μ^* は下からの連続性を満たす．

μ は有限測度であるから，特に局所有限である．ポーランド空間上の有限 Borel 測度は Radon 測度なので，任意の Borel 集合に対して

$$\mu(B) = \inf\{\mu(O) \mid O \text{ is open}, \ B \subset O\}$$

が成り立つ．特に B をコンパクト集合としてとれば，定義 9.1 の条件 (iv) が従う． □

命題 9.3. X, Y を Hausdorff 空間とし，$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．I が Y 上の容量なら，$I_f(A) = I(f(A))$ は X 上の容量である．

証明．単調性は明らかである．K が X のコンパクト集合なら $f(K)$ は Y のコンパクト集合となるので，局所有限性もすぐにわかる．$\bigcup_n f(A_n) = f\left(\bigcup_n A_n\right)$ に注意すれば上からの連続性もわかる．最後に，容量の定義の条件 (iv) を確かめよう．K を X のコンパクト集合とし，$I_f(K) = I(f(K)) < a$ とする．$f(K)$ は Y でコンパクトなので，ある開集合 $O \supset f(K)$ で $I(O) < a$ を満たすものが存在する．f の連続性より $f^{-1}(O)$ は開集合で，さらに

$$I_f(f^{-1}(O)) = I(ff^{-1}(O)) \leq I(O) < a$$

を満たすので，I_f が条件 (iv) を満たすことがわかった． □

定義 9.4. I を Hausdorff 空間 X 上の容量とし，$A \subset X$ とする．

$$I(A) = \sup\{I(K) \mid K \subset A, \ K \text{ is compact}\}$$

が成り立つとき，A は I-可容 (capacitable) であるという．すべての容量 I に対して可容となると，A は普遍可容 (universally capacitable) であるという．

定理 9.5 (The Choquet Capacitability theorem)**.** ポーランド空間上の解析集合は普遍可容である．

定理 9.5 を示す前に，まずは特殊なポーランド空間の可容性を証明しよう．

命題 9.6. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ は普遍可容である．

証明．I を $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上の容量とする．$s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に対して，

$$\Sigma^*(s) = \{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \text{各点ごとの順序で } \mathbf{n}|_{|s|} \leq s \text{ を満たす}\}$$

と定義する．

$I(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) > a$ としたとき，$I(K) \geq a$ となるようなコンパクト集合 K を見つけよう．$\Sigma^*(n)$ は n について増大列で $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 全体を被覆するから，十分大きい n_0 を一つ固定して $I(\Sigma^*(n_0)) > a$ と出来る．また $\Sigma^*(n_0 n)$ は n について増大的で $\Sigma^*(n_0)$ を被覆するから，同様にして $I(\Sigma^*(n_0 n_1)) > a$ と出来る．このようにして再帰的に $I(\Sigma^*(\mathbf{n}|_k)) > a$ $(k \in \mathbb{N})$ を満たすような $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ を構成できる．ここで，$K = \{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \mathbf{m} \leq \mathbf{n}\}$（順序は各点ごとの順序）と定義すれば，これは $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ のコンパクト集合である．実際これはコンパクト集合族 $(\{\mathbf{n}_0, \ldots, \mathbf{n}_k\})_{k \in \mathbb{N}}$ の直積なので，Tychonoff の定理によりコンパクトであることがわかる．これが実際に $I(K) \geq a$ を満たすことを示そう．$I(K) < a$ なら，容量の定義よりある開集合 $U \supset K$ で $I(U) < a$ を満たすようなものが存在する．いま $U \supset K$ だから，ある k で $\Sigma^*(\mathbf{n}|_k) \subset U$ を満たすものが存在する．このとき $a > I(U) > I(\Sigma^*(\mathbf{n}|_k))$ となり，$\mathbf{n}$ の性質に矛盾する．よって $I(K) \geq a$ が成り立つ．

さて，最後に先ほど説明抜きで用いた事実「ある k で $\Sigma^*(\mathbf{n}|_k) \subset U$ を満たすものが存在する」を証明しよう．こちらも背理法で証明する．「全ての k で $\Sigma^*(\mathbf{n}|_k) \cap (\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus U)$ が成り立つ」と仮定する．このとき，$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

の列 $(x^{(n)})$ で $x^{(n)} \in \Sigma^*(\mathbf{n}|_k) \cap (\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus U)$ を満たすようなものが存在する．このとき，(x^n) の部分列 $(x^{(n_k)})$ で $x^{(n_k)} \to \exists x \leq \mathbf{n}$ を見たすようなものを選べる．実際，次のような手順を踏めばよい．$\{0, \ldots, \mathbf{n}(\mathbf{0})\}$ に属する 1 点 p で，無限個の n に対して $x^{(n)}(0) = p$ を満たすようなものが存在する．その点を $x(0)$ とおき，その部分列を $x^{(n_{0,i})}$ と表記する．同様の操作で再帰的に列 $x \leq \mathbf{n}$ と $(x^{(n_{k,i})})$ が構成できる．$x^{(n_k)} = x^{(n_{k,k})}$ とおけば，これが求める収束列である．この列は閉集合 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus U$ の収束列なので，その極限 x も $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus U$ に属さなければならない．一方で，条件 $x \leq \mathbf{n}$ より $x \in K \subset U$ となるから，これは矛盾である． □

定理 *9.5* の証明. X をあるポーランド空間 Y の解析集合とし，I を Y 上の容量とする．X が空集合なら主張は明らかなので，X は空でないとして示せばよい．$f\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X \subset Y$ を連続全射とすれば（命題 4.3），命題 9.3 より $A \mapsto I(f(A))$ は $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上の容量を定める．

いま $I(X) > a$ と仮定する．命題 9.6 より $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ は普遍可容なので，$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ のコンパクト集合 K を上手くとれば $I(X) = I(f(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})) > I(f(K)) > a$ と出来る．f の連続性より $f(K)$ は Y のコンパクト集合であり $f(K) \subset f(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = X$ を満たすから，これで X の I-可容性が示された． □

A　確率論者の言う Souslin 空間や Lusin 空間について

確率論の研究者は，Souslin 空間や Lusin 空間という言葉をしばしば本ノートと異なる意味で使う．それは確率論において重要な文献である Dellacherie and Meyer [7] の用語法に従っているためである．Dellacherie and Meyer に出てくる Souslin 空間や Lusin 空間と，本ノートでの Souslin 空間や Lusin 空間を比較しよう．

定義 A.1. (i) コンパクト距離空間の Borel 集合と同相な位相空間を，Lusin 距離化可能空間 (Lusin metrizable space) という．また，コンパクト距離空間の解析集合と同相な位相空間を，Souslin 距離化可能空間 (Souslin metrizable space) という．

(ii) Lusin 距離化可能空間と可測空間として同型な可測空間を，Lusin 可測空間 (Lusin measurable space) という．また，Souslin 距離化可能空間と可測空間として同型な可測空間を，Souslin 可測空間 (Souslin measurable space) という．

(iii) $(X, \mathscr{A})$ を全ての 1 点集合が可測な可測空間とする．部分可測空間 $(E, \mathscr{A} \cap E)$ が Lusin 可測空間となるとき，$E \subset X$ を X の Lusin 集合 (Lusin set) という．$(E, \mathscr{A} \cap E)$ が Souslin 可測空間となるとき，E を X の Souslin 集合 (Souslin set) という．

定義 A.1 における $\mathscr{A} \cap E$ は

$$\mathscr{A} \cap E = \{A \cap E \mid A \in \mathscr{A}\}$$

で定義される σ-代数である．

命題 A.2. (i) Lusin 距離化可能空間は Lusin 空間であり，Souslin 距離化可能空間は Souslin 空間である．

(ii) Lusin 可測空間は標準可測空間であり，Souslin 可測空間は解析的可測空間である．

証明. (i) 命題 7.4 よりコンパクト距離空間の Borel 集合は Lusin 空間なので，それと同相である Lusin 距離化可能空間も Lusin 空間である．またコンパクト距離空間の解析集合とは Souslin 空間のことであったから，それと同相である Souslin 距離化可能空間も Souslin 空間である．

(ii) (i) より Lusin 距離化可能空間は Lusin 空間であり，命題 7.3 より Lusin 空間は標準可測空間なので，Lusin 距離化可能空間は標準可測空間である．Lusin 可測空間は Lusin 距離化可能空間と可測空間として同

型なので，やはり標準可測空間となる．(i) より Souslin 距離化可能空間は Souslin 空間であり，系 6.11 より Souslin 空間は解析的可測空間である．ゆえに Souslin 距離化可能空間は解析的可測空間であり，Souslin 可測空間も解析的可測空間となる． □

References

[1] K. P. S. Bhaskara Rao and B. V. Rao. *Borel spaces*. Warszawa: Instytut Matematyczny Polskiej Akademi Nauk, 1981. URL: http://eudml.org/doc/268562.

[2] Vladimir I. Bogachev. *Measure Theory*. 2 vols. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. DOI: 10.1007/978-3-540-34514-5. URL: http://www.springer.com/us/book/9783540345138.

[3] Nicolas Bourbaki. *General Topology Part 2*. Elements of Mathematics. Hermann, 1966.

[4] Nicolas Bourbaki. *General Topology Part I*. Elements of Mathematics. Hermann, 1966.

[5] J. P. R. Christensen. *Topology and Borel Structures*. North Holland Mathematic Studies 10. Amsterdam: North Holland Publ. Co., 1974.

[6] Donald L. Cohn. *Measure theory*. 2nd ed. Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher. Birkhäuser, 2013. DOI: 10.1007/978-1-4614-6956-8. URL: https://www.springer.com/la/book/9781461469551.

[7] Claude Dellacherie and Paul-André Meyer. *Probabilities and Potential*. North-Holland Mathematics Studies 29. North-Holland, 1978. viii+189. ISBN: 0-7204-0701-X. URL: https://www.elsevier.com/books/probabilities-and-potential-a/dellacherie/978-0-7204-0701-3.

[8] R. M. Dudley. *Real Analysis and Probability*. 2nd ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 74. Cambridge University Press, 2002. DOI: http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511755347.

[9] Ryszard Engelking. *General topology*. Revised and completed edition. Sigma Series in Pure Mathematics 6. Translated from the Polish by the author. Heldermann Verlag, Berlin, 1989, pp. viii+529. ISBN: 3-88538-006-4.

[10] Klaas Pieter Hart, Jun-iti Nagata, and Jerry E. Vaughan, eds. *Encyclopedia of General Topology*. Elsevier Science, 2004, pp. x+526. ISBN: 0-444-50355-2. URL: https://www.elsevier.com/books/encyclopedia-of-general-topology/hart/978-0-444-50355-8.

[11] Alexander S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*. Graduate Texts in Mathematics 156. Springer-Verlag New York, 1995. DOI: 10.1007/978-1-4612-4190-4. URL: https://www.springer.com/us/book/9780387943749.

[12] Kenneth Kunen. *The Foundations of Mathematics*. Studies in Logic: Mathmatical Logic and Foundations 19. College Publications, 2009.

[13] Yiannis N. Moschovakis. *Descriptive Set Theory*. 2nd ed. Mathematical Surveys and Monographs 155. American Mathematical Society, 2009. DOI: http://dx.doi.org.remote.library.osaka-u.ac.jp/10.1090/surv/155. URL: http://bookstore.ams.org/surv-155.

[14] S. M. Srivastava. *A Course on Borel Sets*. Graduate Texts in Mathematics 180. Springer-Verlag New York, 1998. DOI: 10.1007/b98956.

索引