数学 I：2 次関数
Ver. 1.0

平井祐紀

2020 年 10 月 31 日

更新履歴

バージョン	更新日	コメント
0.0	2020/7/11	主要な部分はほぼ作りました．
0.1	2020/7/29	誤植を訂正．
0.2	2020/8/4	誤植を訂正．演習問題をいくつか追加．記法を少し変更．
0.3	2020/8/5	誤植を訂正．
0.4	2020/8/13	演習問題の解答をいくつか追加．記号を少し変更．
0.5	2020/8/15	誤植を訂正．演習問題の解答を追加．
0.6	2020/8/19	誤植を訂正．索引を追加．例を追加．
0.7	2020/8/24	目次を変更．問題とその解答を追加．§1.1.2 を追加．
0.8	2020/8/28	間違いをいくつか修正．
0.9	2020/9/4	§2.3.1 を追加．
0.10	2020/9/9	文章を少し修正．誤植を訂正．例題と演習問題，その解答を追加．
0.11	2020/9/11	解の公式を一つ追加．例題を追加．
0.12	2020/9/24	間違いを訂正．図を調整．演習問題を追加．
0.13	2020/9/26	体裁を少し変更．演習問題と解答を追加．
0.14	2020/10/29	§1.2.3 および §2.3.2 を追加．主要部分はできたの校正作業へ．
1.0	2020/10/31	一通り目を通したので，ver.1.0 とする．随分と長くなってしまったものだ．

目次

記号

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$：自然数全体の集合
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$：整数全体の集合
- $\mathbb{Q}$：有理数全体の集合
- $\mathbb{R}$：実数全体の集合
- $a \leq b$ を満たす実数 a, b に対し，4 種類の有界区間を次のように定義する．

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \qquad (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \qquad [a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.$$

- $a \in \mathbb{R}$ に対して，4 種類の非有界区間を次のように定義する．

$$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, \qquad (a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\},$$
$$(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}, \qquad (-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}.$$

ここでの ∞ や $-\infty$ は単なる象徴的な記号であって，そういった名前の数を導入するわけではない．

- $f\colon A \to B$：集合 A から B への関数

1　2 次関数とそのグラフ

第 1 節では，2 次関数の基礎的事項を学習します．2 次関数とは，2 次式を用いて

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{1.1}$$

と表されるような関数です．本ノートの数学的内容は，まずは 1.1 節において 2 次関数の定義を与えるところから始まります．

次に，1.2 節において 2 次関数のグラフがどのような形をしているかについて調べます．特に，2 次関数を表す式と 2 次関数のグラフの形との関係性を把握することが大切です．具体的に言うと，2 次関数 f が

$$f(x) = a(x-p)^2 + q \tag{1.2}$$

と表されているような場合は，f のグラフは (p,q) を頂点とした放物線となっています．その放物線が下に凸となるのか，上に凸となるのかは 2 次の係数 a の符号で決まります．

このように，(1.2) のような表現を持つ 2 次関数は，グラフの形が容易にわかるわけですが，私たちが知っている一般の 2 次関数は (1.1) のような表現をされています．そこで，1.3 節では (1.2) の表現を (1.1) の表現に変換する方法を学びます．そのような操作は平方完成と呼ばれています．

1.1　2 次関数とは

1.1.1　2 次多項式と 2 次関数

本ノートのテーマは 2 次関数です．2 次関数について論じるためには，まずは 2 次関数とは何か，という定義を行うところから始めなければいけません．2 次関数とは 2 次の（1 変数）多項式で定まる関数のことですが，そもそも 2 次多項式とはどのようなものだったかを思い出しておきましょう．

定義 1.1.
$a,b,c \in \mathbb{R}$ とする．$a \neq 0$ であるとき，変数 x を用いて

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

と表される式 $p(x)$ を，2 次の（1 変数）多項式と呼ぶ．

2 次多項式の定義において $a \neq 0$ であるとしたのは，$a = 0$ のとき $p(x)$ は 1 次多項式 $bx + c$ と等しくなってしまい，ずいぶんと性質の異なるものになってしまうからです．このことを念頭に，2 次関数の定義をしましょう．

定義 1.2 (2 次関数の定義その 1).
f を $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数とする．ある実数 $a \neq 0$ と実数 b, c で全ての $x \in \mathbb{R}$ について

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

を満たすようなものが存在するとする．このとき f は **2 次関数** (quadratic function) であるという．

上の定義では，2 次関数は全ての実数について値を定義されているとしました．しかし，実際は $\mathbb{R}$ の部分集合上で定められた 2 次関数を考えたほうが良いこともあり，さっそくですが定義を以下のように拡張しておきましょう．

定義 1.3 (2 次関数の定義その 2).
$A \subset \mathbb{R}$ とし，f を A から $\mathbb{R}$ への関数とする．ある実数 $a \neq 0$ と実数 b, c で全ての $x \in \mathbb{R}$ について

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

を満たすようなものが存在するとき，f は **2 次関数**であるという．

2 次関数の定義は，以上のようにシンプルなものです．これで定義がきちんとできましたので，これからは 2 次関数の性質をいろいろと調べていくことにしましょう．

最初に示すことは，2 次関数の表現の一意性です．

命題 1.4.
2 次関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は 2 種類の表現

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$
$$f(x) = a'x^2 + b'x + c'$$

を持つとする．このとき，$a = a'$，$b = b'$ および $c = c'$ が成り立つ．

証明. まずは $x = 0$ をそれぞれの式に代入すると，$f(0) = c$ かつ $f(0) = c'$ が得られる．よって，$c = c'$ である．

次に，$c = c'$ から全ての $x \in \mathbb{R}$ について

$$x(ax + b) = ax^2 + bx = a'x^2 + b'x = x(a'x + b')$$

となることがわかる．特に $x \neq 0$ ならば

$$ax + b = a'x + b'$$

となる．さて，この式に $x = 1, 2$ を代入すれば，連立方程式

$$a + b = a' + b' \tag{1.3}$$
$$2a + b = 2a' + b' \tag{1.4}$$

が得られる．(1.4) − (1.3) を計算すると，

$$\begin{array}{rrcl} & 2a+b & = & 2a'+b' \\ -) & a+b & = & a'+b' \\ \hline & a & = & a' \end{array}$$

となり，$a = a'$ を得る．さらに (1.3) の a' に a を代入すると

$$a + b = a + b'$$

となり，この式より $b = b'$ がわかる．以上の議論で $a = a'$ かつ $b = b'$ かつ $c = c'$ が成り立っていることが示された． □

1.1.2　平方根

2 次関数を学ぶ上で大切な，平方根に関する事項を復習しておきましょう．

実数 a に対して $b^2 = a$ を満たす実数 b を a の**平方根** (square root) と呼ぶのでした．$a \geq 0$ のとき，a の平方根 b で $b \geq 0$ を満たすものがただ一つ存在します．これを $\sqrt{a}$ で表すことにします．

$a > 0$ のとき，その平方根は $\sqrt{a}$ と $-\sqrt{a}$ のちょうど二つ存在します．0 の平方根は 0 だけです．

平方根の基本的な性質をいくつか思い出しましょう．$a \geq 0$ ならば

$$\sqrt{a^2} = a$$

が成り立ちます．これより任意の実数 a に対して

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

となることもわかります．

$a \geq 0$ かつ $b \geq 0$ ならば

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

であり，$a \geq 0$ かつ $b > 0$ ならば

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

も成り立ちます．

さらに $a \geq 0$ かつ $b \geq 0$ のとき

$$a \leq b \iff \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$$

であることに注意しておきましょう．

1.2　2 次関数のグラフ

関数の性質を調べるためには，そのグラフを調べることが便利です．なので，本小節では 2 次関数のグラフがどのような形をしているかを調べていきましょう．ここからしばらくは，2 次関数の定義域は $\mathbb{R}$ 全体であるとして話を進めていきます．

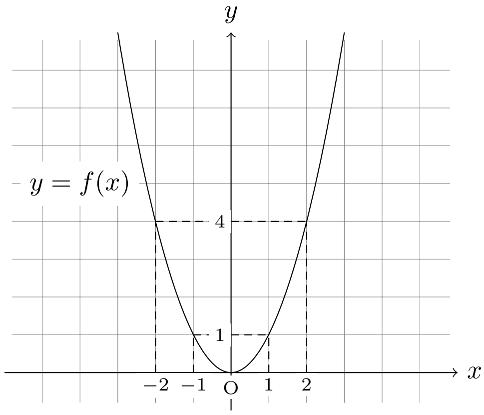


図 1: f のグラフ

1.2.1　$f(x)=ax^2$ の場合

まずは最も簡単な 2 次関数である $f(x)=x^2$ について考えてみましょう．この 2 次関数 f のグラフは，図 1 のような形をしています．

この様な形の曲線は**放物線** (parabola) と呼ばれます．実は，全ての 2 次関数のグラフは放物線の形をしています．2 次関数を定める 2 次式係数が変わることによって，$f(x)=x^2$ の放物線をひっくり返したり，拡大縮小したり，平行移動したりしたり，そういった形のグラフが現れるのです．

次は，先ほどより少しだけ複雑な 2 次関数を考えてみましょう．具体的にいうと，とある $a>0$ によって，$g(x)=ax^2$ と表されるような関数です．先ほどの 2 次関数 $f(x)=x^2$ と，a に具体的な値を入れた 2 次関数のグラフをいくつか比較してみることにします．

$f(x)=x^2$，$f_1(x)=4x^2$，$f_2(x)=\frac{1}{4}x^2$ とします．これらの関数のグラフを同一平面に描いてみると，図 2 のようになることがわかります．図 2 より分かるように，$g(x)=ax^2$（ただし，$a>0$）で定まる 2 次関数 g のグラフは，a の値が大きいほど細長い形の放物線となります．つまり，$a>0$ は放物線の開き具合を決定するパラメータなのです．

今度は，$a<0$ のときの $g(x)=ax^2$ を考えてみましょう．まずは，最も簡単な場合である $g_1(x)=-x^2$ のグラフを描いてみると，その様子は図 3 のようになります．g_1 のグラフの形を $y=x^2$ のグラフと比較するために，両方のグラフを同一平面に置いてみました．図 3 を見ればわかるように，g_1 のグラフは，$y=x^2$ のグラフと x 軸に対して対称な位置にあるのです．$y=x^2$ のグラフの放物線は**下に凸** (convex downward) であるといい，g_1 のグラフの放物線は**上に凸** (convex upward) であるといいます．

今度はもう少し一般の $g(x)=ax^2$（$a<0$）を考えてみます．ここまで観察したことを基に考えると，$g(x)=ax^2$（$a<0$）で定まる 2 次関数のグラフは，$y=(-a)x^2$ のグラフとちょうど x 軸について対称な放物線だと予想できます．この予想は実際に正しいものです．今度は $g_1(x)=-4x^2$，$g_2(x)=-\frac{1}{4}x^2$，そして $g_3(x)=-x^2$ のグラフを同一平面上に描いてみると，その様子は図 4 のようになっています．これより，$a<0$ の場合の $g(x)=ax^2$ は，a の絶対値 $|a|$ が放物線の開き具合を決定する要因だとわかるのです．

ここまで調べたことをまとめると，$g(x)=ax^2$ で定まる 2 次関数 g のグラフは，以下のような性質を持つことがわかります．

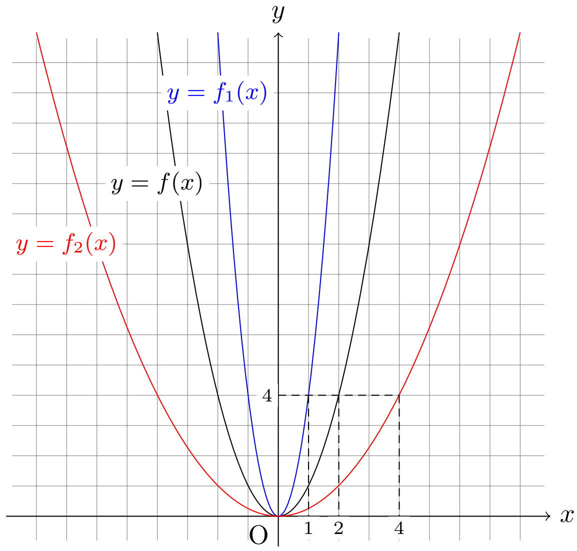


図 2: f, f_1, f_2 のグラフ

$y = ax^2$ のグラフ

(i) $a > 0$ の場合：下に凸の放物線
- (a) $|a|$ が大きい（i.e. a が大きい）ほど，開き方がより小さい
- (b) $|a|$ が小さい（i.e. a が小さい）ほど，開き方がより大きい

(ii) $a < 0$ の場合：上に凸の放物線
- (a) $|a|$ が大きい（i.e. a 小さい）ほど，開き方がより小さい
- (b) $|a|$ が小さい（i.e. a が大きい）ほど，開き方がより大きい

1.2.1 節においてわかったことを用いて，2 次関数のグラフを描く練習をしてみましょう．グラフの概形はどれも放物線になるわけですから，まずは係数の符号を調べて上に凸なのか，下に凸なのかを明らかにします．そして，x に具体的な数字を代入して f の値を計算し，グラフが通る点をいくつか記入してみましょう．

問題 1. (i) $f(x) = 3x^2$ のとき，$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ のグラフを描け．
(ii) $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$ のとき，$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ のグラフを描け．
(iii) $h(x) = -\frac{16}{9}x^2$ のとき，$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ のグラフを描け．

1.2.2 2 次関数のグラフの平行移動；放物線の軸と頂点

ここまで議論してきたことにより，2 次式 ax^2 で定まる 2 次関数のグラフは十分にその形がわかったと言えそうです．ここからは，もう少し複雑な形の 2 次関数のグラフを調べていくことしましょう．

■x 軸方向への平行移動 $f(x) = ax^2$ で定まる 2 次関数 f のグラフを，x 軸方向に p だけ平行移動して得られる関数 g を考えましょう．このとき，g は f を用いて

$$g(x) = f(x - p)$$

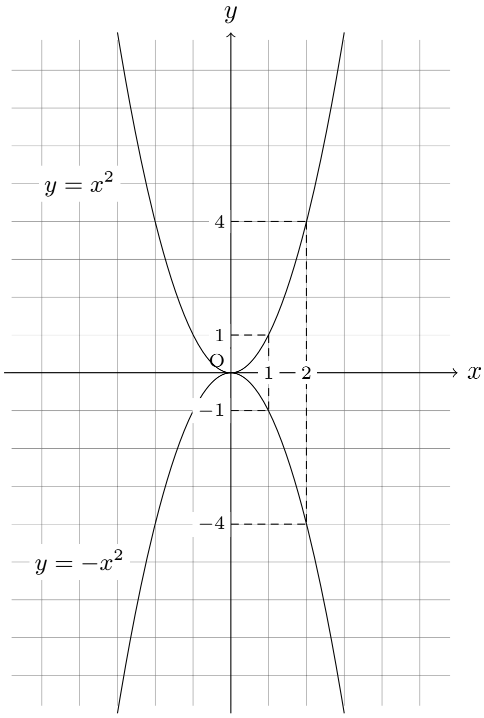


図 3: $y = x^2$ および $y = -x^2$ のグラフ

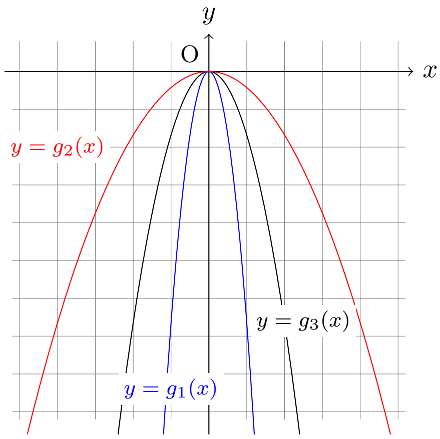


図 4: g_1, g_2, g_3 のグラフ

と表現することができるのでした．g を具体的に計算すると，

$$g(x) = f(x-p) = a(x-p)^2 = a(x^2 - 2px + p^2) = ax^2 - 2apx + ap^2$$

となります．いま $a \neq 0$ でしたから，この様にして得られた関数 g もまた 2 次関数であるということがわかりました．g は f を p だけ平行移動した 2 次関数ですから，そのグラフの形はまた放物線となります．特に $a > 0$ かつ $p > 0$ 場合は，f と g のグラフは図 5 のようになっています．

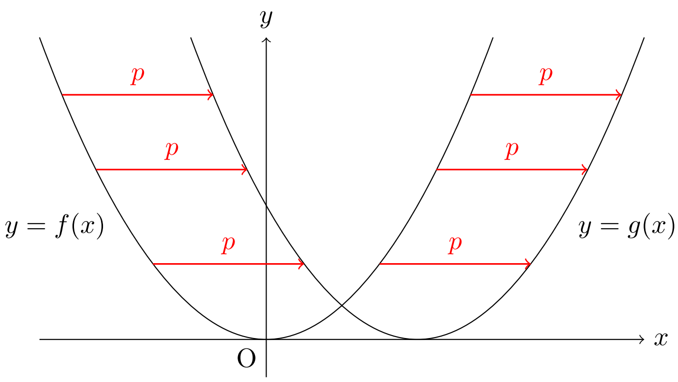


図 5: f と g のグラフ

このようにして，2 次関数 $g(x) = a(x-p)^2$ のグラフがどのような形をしているか確かめることができました．

■y **軸方向への平行移動**　次は，g をさらに y 軸方向に平行移動することを考えましょう．g を y 軸方向に q 平行移動して得られる関数を h をおくと，h は g を用いて

$$h(x) = g(x) + q$$

と表現することが出来るのでした．g を表す式の具体的な形を思い出せば，h は

$$h(x) = a(x-p)^2 + q = ax^2 - 2apx + (ap^2 + q)$$

となるので，h はまた 2 次関数であることがわかります．特に $q < 0$ の場合に h のグラフを g の様子と比べてみると，その様子は図 6 のようになっています．

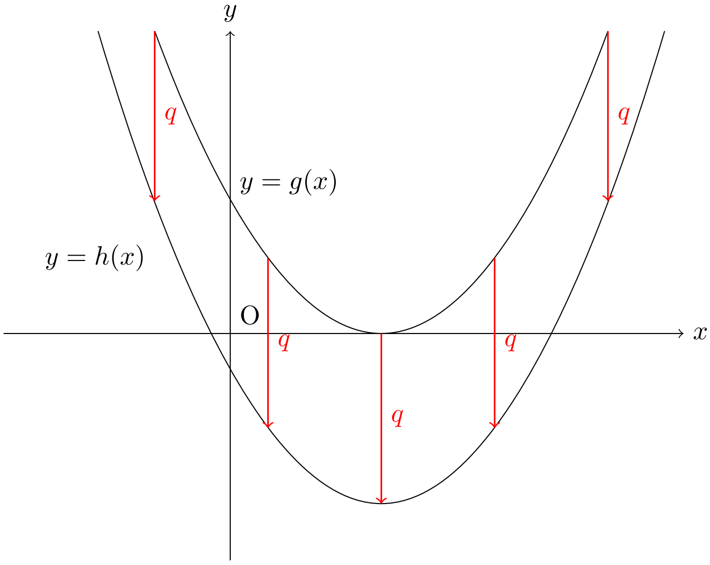


図 6: g と h のグラフ

以上の議論により，$h(x) = a(x-p)^2 + q$ と表されるような 2 次関数のグラフの形が明らかになりました．さて，$a > 0$，$p > 0$ および $q < 0$ の場合に，この h のグラフを単体で図 7 に表してみます．図 7 における点 (p, q) を放物線の**頂点** (vertex) と呼びます．文字通り，放物線が最も尖っている地点です．また，この図における直線 $x = p$ は放物線の**対称軸** (axis of symmetry) あるいは単に**軸**と呼ばれています．放物線は $x = p$ を対称軸とした線対称な図形となっているので，このような名で呼ばれています．

例 1.5. 2 次関数 $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $f(x) = (x+1)^2 + 1$ で定義されているとします．このとき，f のグラフが定める放物線の軸は直線 $x = -1$ であり，放物線の頂点は $(-1, 1)$ となります．■

問題 2. 次の 2 次関数が定める放物線の，頂点と軸の方程式を答えよ．

(i) $f(x) = (x-2)^2 + 1$.
(ii) $g(x) = -\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4}$.
(iii) $h(x) = (x+6)^2$.

2 次関数のグラフについて，ここまでわかったことをまとめましょう．

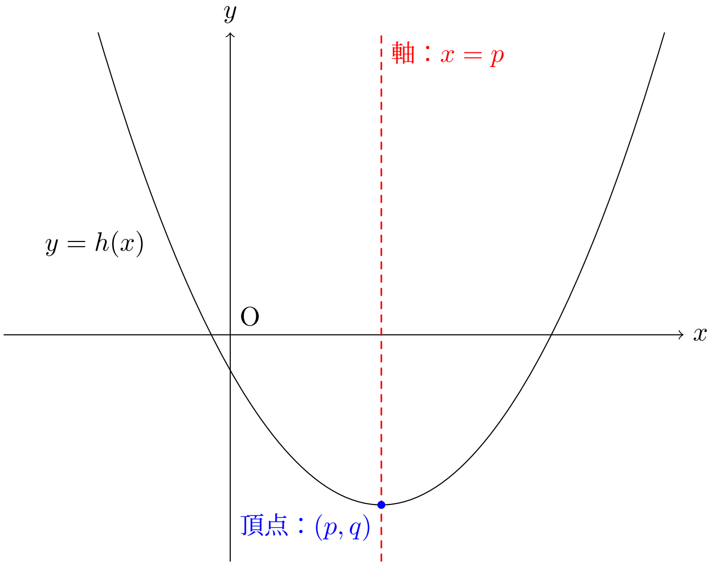


図 7: h のグラフ

$y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ

(i) $a > 0$ の場合：頂点が (p, q) で下に凸の放物線
  (a) $|a|$ が大きい（i.e. a が大きい）ほど，開き方がより小さい
  (b) $|a|$ が小さい（i.e. a が小さい）ほど，開き方がより大きい
(ii) $a < 0$ の場合：頂点 (p, q) で上に凸の放物線
  (a) $|a|$ が大きい（i.e. a が小さい）ほど，開き方がより小さい
  (b) $|a|$ が小さい（i.e. a が大きい）ほど，開き方がより大きい

1.2.2 節におけるこれまでの議論を通して，我々は 1.2.1 節よりも一般の 2 次関数のグラフの形を知ることができました．最後に，2 次関数のグラフをいくつか描く練習をしてみましょう．これらのグラフを描くときは，先ほどと同じようにまずは 2 次の係数を調べて，グラフが上に凸なのか，下に凸なのかを明らかにします．そして，放物線を描いたら頂点の座標と，もう一つ異なる点の座標を記入してみて下さい．

問題 3. (i) $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ のとき，f のグラフを描け．
(ii) $g(x) = \frac{1}{4}(x-3)^2 - 4$ のとき，g グラフを描け．
(iii) $h(x) = -\frac{4}{25}(x-5)^2 + 1$ のとき，h のグラフを描け．

1.2.3　2 次関数の対称移動

先ほどの 1.2.2 節では 2 次関数のグラフの平行移動を考えました．本節では 2 次関数のグラフを x 軸や y 軸に関して対称移動した場合に，どのような関数が得られるのかを調べてみましょう．

■y 軸に関する対称移動　2 次関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $f(x) = a(x-p)^2 + q$ で表されているとします．f のグラフを y 軸に対して対称移動すると，どのような図形が得られるでしょうか．

x-y 平面において，y 軸について点 (a, b) と対称な点は $(-a, b)$ で表されるのでした．したがって，関数 f

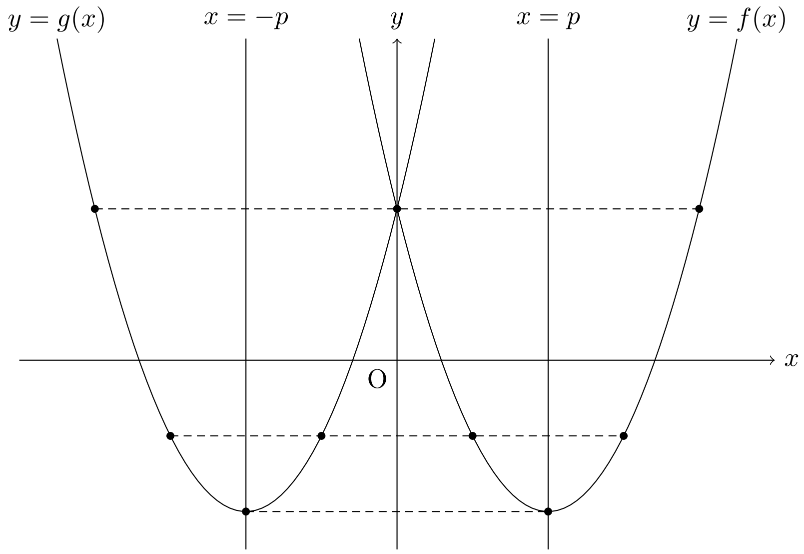


図 8: 2 次関数のグラフの対称移動

のグラフ

$$\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R},\ y = f(x)\}$$

を y 軸について対称移動して得られる図形は

$$\{(-x, y) \mid x, y \in \mathbb{R},\ y = f(x)\}$$

という集合になっています．この集合は

$$\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R},\ y = f(-x)\}$$

と表すこともできます．

ここで，$x \in \mathbb{R}$ に対して $g(x) = f(-x)$ と定義しましょう．この対応により，関数 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が定まります．さらに，先ほどの議論よりそのグラフ

$$\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R},\ y = g(x)\}$$

は f のグラフを y 軸に対して対称移動させて得られる図形となっていることがわかります．g の定義より

$$g(x) = f(-x) = (-x - p)^2 + q = (x + p)^2 + q$$

となるので，g はグラフの軸が $x = -p$，頂点が $(-p, q)$ であるような 2 次関数であることがわかります．

以上の議論を図にしてみると，図 8 のようになるでしょう．ただし，図 8 では $a > 0$ かつ $p > 0$ かつ $q < 0$ の場合を図に表しています．

■x 軸に関する対称移動　今度は，2 次関数のグラフを x 軸に関して対称移動させてみましょう．

2 次関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $f(x) = a(x - p)^2 + q$ と表示されているとします．このとき f のグラフは頂点が (p, q) の放物線で，a の符号に応じて下に凸か上に凸かが定まるのでした．

x-y 平面において，x 軸に関して点 (a, b) と対称な点の座標は $(a, -b)$ となっています．よって f のグラフ

$$\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R},\ y = f(x)\}$$

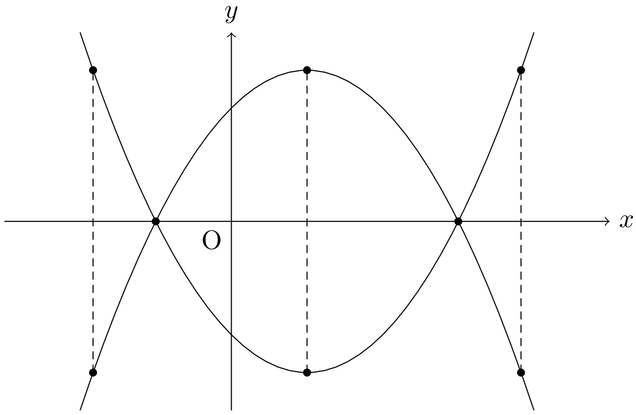


図 9: 2 次関数のグラフの対称移動

を x 軸について対称移動させて得られる図形は,

$$\{(x, -y) \mid x, y \in \mathbb{R},\ y = f(x)\}$$

という集合となっています．これはさらに

$$\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R},\ y = -f(x)\}$$

と書き換えることができることに注意しておきましょう．

ここで $x \in \mathbb{R}$ に対して $g(x) = -f(x)$ とすれば，関数 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が定義されます．先ほどの議論により，g のグラフ

$$\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R},\ y = g(x)\}$$

は，x 軸に関して f のグラフと対称な図形となっています．f の式と g の定義に従って g の式を計算してみると

$$g(x) = -f(x) = -\{a(x-p)^2 + q\} = -a(x-p)^2 - q$$

となります．したがって，g はそのグラフの軸が $x = p$，頂点が $(p, -q)$ であるような 2 次関数であることがわかります．もちろん，g の頂点 $(p, -q)$ は元の関数 f の頂点 (p, q) と，x 軸に対して対称な位置にあります．

以上の議論は図 9 のようにまとめることができるでしょう．なお，図 9 は $a > 0$ かつ $p > 0$ かつ $a < 0$ の場合の様子を表しています．

1.2.4　2 次関数の決定

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は 2 次関数であるとします．f について適当な条件が与えられたとき，f を表す 2 次式

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

を決定するためにはどのようにすれば良いでしょうか．より具体的に言うと，f についてどのような情報を与えれば係数 a, b, c を実際に求めることができるか，という問題について考えてみましょう．全く一般の関数の場合は，あらゆる入力 x について，関数の出力する値 $f(x)$ を調べなければ，f を完全に決定することはできません．しかし，f が 2 次関数であるということがわかっていれば，実はわずかな情報だけから f の形を完全に復元することができます．

まずは，2 次関数の頂点に関する情報が与えられた場合を考えてみます．以下の命題は，2 次関数が放物線の形を定めるパラメーター a と頂点 (p, q) だけから完全に決定されるということを示しています．

命題 1.6.
2 次関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は，$f(x) = ax^2 + bx + c$ と表されているとする．f のグラフの頂点が (p, q) ならば

$$b = -2ap, \quad c = ap^2 + q$$

が成り立つ．

証明. f のグラフの頂点が (p, q) であることから，f はある $r \neq 0$ を用いて

$$f(x) = r(x-p)^2 + q$$

と表現されることがわかる．この表現を展開すると，

$$f(x) = r(x-p)^2 + q = r(x^2 - 2px + p^2) + q = rx^2 - 2rpx + (rp^2 + q)$$

となる．2 次関数の表現の一意性（命題 1.4）に注意すれば，これより

$$\begin{cases} a = r, \\ b = -2rp, \\ c = rp^2 + q, \end{cases}$$

がわかる．したがって，$b = -2ap$ かつ $c = ap^2 + q$ が成り立つ． □

次に，2 次の係数 a が事前にはわかっていない場合を考えましょう．そのときは，頂点の位置とグラフが通る 1 点の情報が与えられると，2 次関数を一意に定めることができます．

命題 1.7.
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ はグラフの頂点が (p, q) であるような 2 次関数であるとする．また実数 α と β は $p \neq \alpha$ かつ $q \neq \beta$ を満たし，f のグラフは点 (α, β) を通るとする．このとき f は以下の式で与えられる．

$$f(x) = \frac{\beta - q}{(\alpha - p)^2}(x-p)^2 + q \tag{1.5}$$

証明. f はグラフの頂点が (p, q) であることから，ある $a \neq 0$ を用いて

$$f(x) = a(x-p)^2 + q$$

と表現することができる．

f が点 (α, β) を通るので，α と β は $f(\alpha) = \beta$ を満たしている．いま

$$f(\alpha) = a(\alpha - p)^2 + q$$

であるから，これより

$$a(\alpha - p)^2 + q = \beta$$

が成り立つ．$\alpha \neq p$ であることに注意して上の式を a について解けば，

$$a = \frac{\beta - q}{(\alpha - p)^2}$$

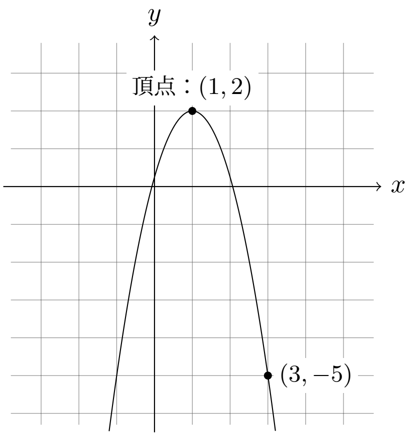
となる．これを f の式に代入すると，

$$f(x) = \frac{\beta - q}{(\alpha - p)^2}(x - p)^2 + q$$

を得る． □

命題 1.7 により，グラフの頂点とその他 1 点がわかれば 2 次関数の式を決定できることがわかりました．今度は具体的な数字が与えられた場合に，2 次関数を表す式を実際に計算で求めてみましょう．

例 1.8. 2 次関数 f のグラフは頂点が $(1, 2)$ であり，さらに $(3, -5)$ を通るとします．このとき f を表す式を求めましょう．



頂点が $(1, 2)$ であることから，f はある $a \neq 0$ を用いて

$$f(x) = a(x - 1)^2 + 2$$

のように表現することができます．また f のグラフが $(3, -5)$ を通ることから，f は $f(3) = -5$ を満たします．$f(3)$ を計算すると

$$f(3) = a(3 - 1)^2 + 2 = 4a + 2$$

となるので，これより

$$4a + 2 = -5$$

が成り立ちます．この式から a を求めると，その値は

$$a = -\frac{7}{4}$$

であることがわかります．

したがって，f を表す式は

$$f(x) = -\frac{7}{4}(x - 1)^2 + 2$$

となります． ■

問題 4. (i) 2 次関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ のグラフは頂点が $(1,2)$ で，さらに点 $(3,6)$ を通るとする．このとき，f の式を求めよ．

(ii) 2 次関数 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ のグラフは頂点が $(6,7)$ で，さらに点 $(4,-5)$ を通るとする．このとき，g の式を求めよ．

(iii) 2 次関数 $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ のグラフは頂点が $\left(-\frac{4}{3}, 3\right)$ で，さらに点 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ を通るとする．このとき，h の式を求めよ．

2 次関数のグラフは，頂点とその他の 1 点が指定されれば完全に決定されることを見ました．しかし，指定する 2 点が頂点を含まない場合は，一般に 2 次関数は一意に定まりません．頂点の座標がわからない場合は，グラフが通る点を 3 つ指定する必要があります．このことは，2 次式 $ax^2 + bx + c$ において係数は a, b, c の 3 つ存在することに起因します．

命題 1.9.
関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

と表されているとする．f のグラフが，異なる 3 点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3) を通るならば，

$$\begin{aligned}
a &= \frac{(x_2 - x_3)y_1 + (x_3 - x_1)y_2 + (x_1 - x_2)y_3}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)}, \\
b &= \frac{x_1^2(y_2 - y_3) + x_2^2(y_3 - y_1) + x_3^2(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)}, \\
c &= \frac{x_1^2(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2^2(x_3y_1 - x_1y_3) + x_3^2(x_1y_2 - x_2y_1)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)},
\end{aligned}$$

が成り立つ．特に (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3) が同一直線上になければ，a は 0 でなく，f は 2 次関数となる．

証明. $f(x) = ax^2 + bx + c$ とする．f のグラフは (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3) の 3 点を通るから，(a, b, c) に関して以下の連立一次方程式が成り立つ．

$$x_1^2 a + x_1 b + c = y_1, \tag{1.6}$$
$$x_2^2 a + x_2 b + c = y_2, \tag{1.7}$$
$$x_3^2 a + x_2 b + c = y_3, \tag{1.8}$$

この連立方程式 (1.6)–(1.8) を解けば，係数 (a, b, c) を求めることができる．

(1.6) − (1.7) と (1.7) − (1.8) をそれぞれ計算することで，連立方程式 (1.6)–(1.8) は

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)a + (x_1 - x_2)b = (y_1 - y_2), \tag{1.9}$$
$$(x_2 - x_3)(x_2 + x_3)a + (x_2 - x_3)b = (y_2 - y_3), \tag{1.10}$$
$$x_3^2 a + x_2 b + c = y_3, \tag{1.11}$$

と同値であることがわかる．

まずは連立方程式 (1.9) かつ (1.10) を解いてみよう．$(x_2 - x_3) \times (1.9) - (x_1 - x_2) \times (1.10)$ を計算すると，

$$
\begin{array}{rr}
& (x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1+x_2)a + (x_1-x_2)(x_2-x_3)b = (x_2-x_3)(y_1-y_2) \\
-) & (x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_2+x_3)a + (x_1-x_2)(x_2-x_3)b = (x_1-x_2)(y_2-y_3) \\
\hline
& (x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)a = (x_2-x_3)(y_1-y_2) - (x_1-x_2)(y_2-y_3)
\end{array}
$$

となる．いま x_1, x_2, x_3 はどれも異なるから，これより

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{(x_2-x_3)(y_1-y_2) - (x_1-x_2)(y_2-y_3)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)} \\
&= \frac{(x_2-x_3)y_1 + (x_3-x_1)y_2 + (x_1-x_2)y_3}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)}
\end{aligned}
$$

がわかる．$x_1 \neq x_2$ であることに注意して (1.9) を変形すると

$$
b = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} - (x_1+x_2)a
$$

となるから，先ほど求めた a の値を代入することでこの a の値を (1.9) に代入すると，

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} - (x_1+x_2)\frac{(x_2-x_3)(y_1-y_2) - (x_1-x_2)(y_2-y_3)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)} \\
&= \frac{(y_1-y_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3) - (x_1+x_2)(x_2-x_3)(y_1-y_2) + (x_1+x_2)(x_1-x_2)(y_2-y_3)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)} \\
&= \frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)(y_2-y_3) - (y_1-y_2)(x_2-x_3)(x_2+x_3)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)} \\
&= \frac{(x_1^2-x_2^2)(y_2-y_3) - (y_1-y_2)(x_2^2-x_3^2)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)} \\
&= \frac{x_1^2(y_2-y_3) + x_2^2(y_3-y_1) + x_3^2(y_1-y_2)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)}
\end{aligned}
$$

を得る．

ここまで求めた a, b を (1.8) に代入すると，

$$
\begin{aligned}
c &= y_3 - x_3^2 a - x_3 b \\
&= \frac{y_3(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)} \\
&\quad - x_3^2\frac{(x_2-x_3)(y_1-y_2) - (x_1-x_2)(y_2-y_3)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)} \\
&\quad - x_3\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)(y_2-y_3) - (y_1-y_2)(x_2-x_3)(x_2+x_3)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)} \\
&= \frac{1}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)} \times \{y_3(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3) \\
&\quad - x_3^2(x_2-x_3)(y_1-y_2) + x_3^2(x_1-x_2)(y_2-y_3) \\
&\quad - x_3(x_1+x_2)(x_1-x_2)(y_2-y_3) + x_3(y_1-y_2)(x_2-x_3)(x_2+x_3)\} \\
&= \frac{-x_3x_1^2y_2 + x_2x_1^2y_3 + x_3^2x_1y_2 - x_2^2x_1y_3 - x_2x_3^2y_1 + x_2^2x_3y_1}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)} \\
&= \frac{x_1^2(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2^2(x_3y_1 - x_1y_3) + x_3^2(x_1y_2 - x_2y_1)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)}
\end{aligned}
$$

となり，c も具体的に求めることができた．

さて，最後に a が 0 となる必要十分条件を求めよう．いま (x_1,y_1) と (x_2,y_2) を通る直線を l，(x_1,y_1) と (x_3,y_3) を通る直線を l' と置くことにする．このとき 3 点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3) が同一直線上にあるための必要十分条件は，直線 l と直線 l' の傾きが等しくなることである．直線 l の傾きは

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

であり，直線 l' の傾きが

$$\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$$

であることを用いれば，3 点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3) が同一直線上にあるための必要十分条件は

$$\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

と表現される．ここで両辺に 0 でない数 $(x_3-x_1)(x_2-x_1)$ をかけることで，この式は

$$(y_3-y_1)(x_2-x_1)=(y_2-y_1)(x_3-x_1)$$

と同値であり，さらに

$$(y_2-y_1)(x_3-x_1)-(y_3-y_1)(x_2-x_1)=0$$

とも同値であることがわかる．左辺の式を変形すると，

$$\begin{aligned}
&(y_2-y_1)(x_3-x_1)-(y_3-y_1)(x_2-x_1)\\
&=(x_3-x_1)y_2+(x_1-x_2)y_3-(x_3-x_1)y_1+y_1(x_2-x_1)\\
&=(x_2-x_3)y_1+(x_3-x_1)y_2+(x_1-x_2)y_3
\end{aligned}$$

となる．したがって，3 点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3) が同一直線上にあるための必要十分条件は

$$(x_2-x_3)y_1+(x_3-x_1)y_2+(x_1-x_2)y_3=0$$

となる．左辺の量は a の分子と一致するので，これが 0 であることは a が 0 であることと同値である． □

命題 1.9 から，同一直線状にはない 3 点が与えられると，その全てを通る 2 次関数がただ一つ存在することがわかりました．しかし，命題 1.9 を「公式」として覚えるのは現実的ではないので，覚えて欲しいのは証明で用いた計算手法です．実際に数字を与えて，2 次関数の係数を計算してみましょう．

例 1.10. 2 次関数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ のグラフは，$(1,2)$, $(2,6)$, $(-4,5)$ を通るとします．このとき，2 次関数 f を表現する 2 次式の係数を求めてみましょう．

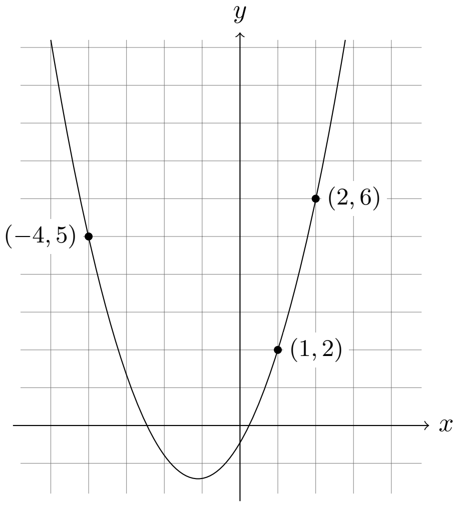
$f(x)=ax^2+bx+c$ とおいて 3 点の座標を代入すると，以下の連立 1 次方程式が得られます．

$$a+b+c=2, \tag{1.12}$$
$$4a+2b+c=6, \tag{1.13}$$
$$16a-4b+c=5. \tag{1.14}$$

この連立方程式 (1.12) から (1.14) を解いて，係数 (a,b,c) を決定します．

まずは，文字 c を消去することで，a,b に関する連立方程式を作りましょう．(1.14) − (1.13) を計算すれば

$$\begin{array}{rrl}
 & 16a-4b+c & =5\\
-) & 4a+2b+c & =6\\ \hline
 & 12a-6b & =-1
\end{array}$$



となります．また (1.13) − (1.12) を計算すれば，

$$
\begin{array}{rrl}
 & 4a + 2b + c & = 6 \\
-) & a + b + c & = 2 \\
\hline
 & 3a + b & = 4
\end{array}
$$

となります．これより，a, b に関する連立 1 次方程式

$$12a - 6b = -1, \tag{1.15}$$
$$3a + b = 4, \tag{1.16}$$

が得られます．連立方程式 (1.15) かつ (1.16) を解いて，a, b の値を求めましょう．(1.15) $- 4 \times$ (1.16) を計算すると，

$$
\begin{array}{rrl}
 & 12a - 6b & = -1 \\
-) & 12a + 4b & = 16 \\
\hline
 & -10b & = -17
\end{array}
$$

となり，a が消去できます．ここから b を求めると，

$$b = \frac{17}{10}$$

となることがわかります．さらにこの b の値を (1.16) に代入すれば，

$$3a + \frac{17}{10} = 4$$

となるので，

$$a = \frac{1}{3}\left(4 - \frac{17}{10}\right) = \frac{1}{3}\frac{40 - 17}{10} = \frac{23}{30}$$

がわかります．

最後に係数 c を求めましょう．$a = \frac{23}{30}$ および $b = \frac{17}{10}$ を (1.12) に代入すると，

$$\frac{23}{30} + \frac{17}{10} + c = 2$$

となります．これより，c の値は

$$c = 2 - \frac{23}{30} - \frac{17}{10} = \frac{60 - 23 - 51}{30} = -\frac{14}{30} = -\frac{7}{15}$$

と計算できます．

以上の計算結果をまとめると，

$$a = \frac{23}{30}, \quad b = \frac{17}{10}, \quad c = -\frac{7}{15},$$

となります．したがって，2 次関数 f を表す式は，

$$f(x) = \frac{23}{30}x^2 + \frac{17}{10}x - \frac{7}{15}$$

であることがわかりました． ■

問題 5. (i) 2 次関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は 3 点 $(0,-1)$，$(-2,1)$，$(3,11)$ を通るとする．このとき，f を表現する式を求めよ．

(ii) 2 次関数 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は 3 点 $(0,-3)$，$(-2,-11)$，$\left(\frac{1}{2},-\frac{7}{2}\right)$ を通るとする．このとき，g を表現する式を求めよ．

(iii) 2 次関数 $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は 3 点 $\left(1,-\frac{3}{5}\right)$，$\left(\frac{11}{2},\frac{3}{10}\right)$，$\left(7,\frac{21}{5}\right)$ を通るとする．このとき，h を表現する式を求めよ．

1.3 2 次式の変形：平方完成

1.2 節では，2 次関数のグラフの形は，2 次の係数と頂点によって決まることを明らかにしました．2 次の係数が a で頂点が (p,q) のときには，2 次関数 f の式は

$$f(x) = a(x-p)^2 + q \tag{1.17}$$

と表すことができます．f のグラフの概形を知るためには，(1.17) 式のような表示が有用なわけです．では，一般の 2 次関数

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

が与えられた時に，それを (1.17) の形に変形することは出来るでしょうか．

命題 1.11.
$a,b,c \in \mathbb{R}$ は $a \neq 0$ を満たしているとする．このとき 2 次多項式

$$ax^2 + bx + c$$

は以下のように変形することができる．

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

証明. $a \neq 0$ であることに注意すれば,

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) \\
&= a\left\{x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} \\
&= a\left\{x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}
\end{aligned}
$$

となる．これを用いれば

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} - \frac{-4ac}{4a} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}
\end{aligned}
$$

となり，等式

$$
ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}
$$

を得る． □

2 次の多項式

$$
ax^2 + bx + c
$$

を

$$
a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}
$$

の形に変形することを，**平方完成**（completing the square）と呼びます．

平方完成をすることで，2 次関数のグラフの頂点を明示的に求めることができます．

系 1.12.
2 次関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は

$$
f(x) = ax^2 + bx + c
$$

と表されているとする．このとき，f のグラフの頂点は

$$
\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)
$$

である．

さて，ここで実際に平方完成の計算練習をしてみましょう．

例 1.13. 2 次式 $3x^2 - 12x + 18$ を平方完成してみます．そのためには，以下のような計算手順を踏めばよいわけです．

$$\begin{aligned}
3x^2 - 12x + 18 &= 3(x^2 - 4x) + 18 \\
&= 3(x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2 - 2^2) + 18 \\
&= 3(x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2) - 3 \cdot 2^2 + 18 \\
&= 3(x-2)^2 - 12 + 18 \\
&= 3(x-2)^2 + 6.
\end{aligned}$$

したがって，$3x^2 - 12x + 18$ を平方完成すると，その結果は

$$3(x-2)^2 + 6$$

となることがわかりました． ■

平方完成の練習のために，いくつか演習問題を出しておきます．平方完成は単なる計算なので，とにかく何度もやってみて慣れるしかありません．

問題 6.
(i) $x^2 + 2x - 3$ を平方完成せよ．
(ii) $2x^2 - 3x + 1$ を平方完成せよ．
(iii) $-3x^2 + 2x - 7$ を平方完成せよ．
(iv) $\frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{17}{3}$ を平方完成せよ．
(v) $7x^2 - 7x + \frac{59}{4}$ を平方完成せよ．
(vi) $-3x^2 - 10x - \frac{40}{3}$ を平方完成せよ．

2　2 次関数の値域

第 2 節では，2 次関数の値域について学びます．関数 $f\colon A \to \mathbb{R}$ の値域とは，

$$\{f(x) \mid x \in A\}$$

で表される集合のことでした．本節における私たちの目標は，f が 2 次関数の場合にその値域がどのような集合となっているかを知ることです．2 次関数の値域を調べるためには，2 次関数のグラフを用いると便利です．そのため，第 1 節で学んだ内容が役に立ちます．

2.1 節では，2 次関数 f が $\mathbb{R}$ 全体で定義されている場合を考えます．f が

$$f(x) = a(x-p)^2 + q$$

という表現を持つときは，a の符号に応じて f の値域は $[q, \infty)$ という集合か，または $(-\infty, q]$ という集合となります．

2.2 節では，f の定義域が $[\alpha, \beta]$ のような形の集合である場合を考えます．このとき，f の値域を明らかにするためには α, β と頂点の x 座標 p の位置関係に応じて，細かい場合分けをして考える必要が出てきます．ここでも 2 次関数のグラフを見ることによって，各々の場合における 2 次関数の値域の構造を完全に明らかにすることができます．

2.3 節では，f の定義域がより一般の区間であるような場合を考えます．一般の場合でも f の値域を調べるために重要なことは，定義域と頂点の x 座標 p の位置関係について適切な場合分けを行うことです．2.2 節と同じように，場合分けをして f のグラフの形を調べることで，f の値域の構造が明らかにされます．

2.1　$\mathbb{R}$ 上定義された 2 次関数の値域

第 2 節では，2 次関数の値域について調べます．まずは，2 次関数 $\mathbb{R}$ 全体で定義されている場合を考えましょう．そのためには，2 次関数のグラフを調べることが便利です．

2 次関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は以下の表現を持つとします．

$$f(x) = a(x-p)^2 + q \tag{2.1}$$

f のグラフは (p, q) を頂点とした放物線になりますが，それが上に凸となるのか，下に凸となるのかは a の符号によって決まるのでした．

(2.1) の 2 次関数が $a > 0$ を満たす場合を考えましょう．そのとき，f のグラフは図 10 のようになります．グラフを観察してみると，f の値はどれも q 以上であることがわかります．また，$r \geq q$ であるとして破線

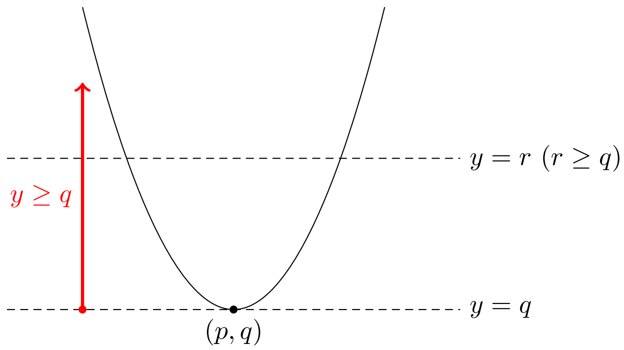


図 10: f のグラフ（$a > 0$ の場合）

$y = r$ を見ると，これは f のグラフと共有点を持っていそうです．以上の観察結果より，f の値域は $[q, \infty)$ になりそうです[*1]．

さて，次は $a < 0$ の場合を考えてみましょう．この場合の f のグラフは，図 11 のようになるのでした．図 11 のグラフを観察してみましょう．これによると，f の値はどれも $y \leq q$ の範囲に位置していそうです．さらに，$r \leq q$ なら破線 $y = q$ は f のグラフと共有点を持ちそうです．したがって，f の値域は $(-\infty, q]$ となるのではないかと予想できます．

命題 2.1.
2 次関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は

$$f(x) = a(x-p)^2 + q$$

と表されているとする．

[*1] $[q, \infty) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq q\}$ と定義されるのでした．

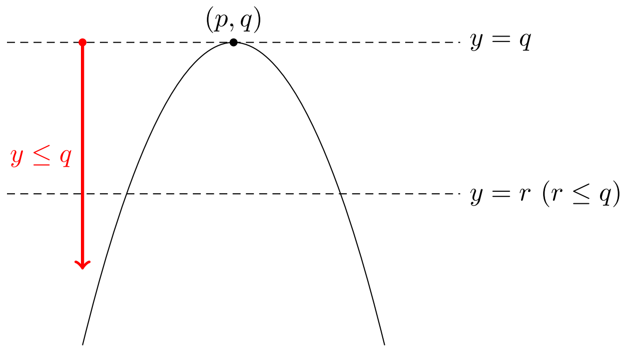


図 11: f のグラフ（$a<0$ の場合）

(i) $a>0$ なら，f の値域は $[q,\infty)$ である．

(ii) $a<0$ なら，f の値域は $(-\infty,q]$ である．

証明. (i) $a>0$ とする．$r\in\mathbb{R}$ に対して，$f(x)=r$ を満たす x が存在するか考えよう．

$r\geq q$ のとき，方程式

$$(x-p)^2=\frac{r-q}{a}$$

を考える．いま $r\geq q$ および $a>0$ と仮定しているから

$$\frac{r-q}{a}>0$$

であり，

$$x-p=\sqrt{\frac{r-q}{a}} \quad \text{または} \quad x-p=-\sqrt{\frac{r-q}{a}}$$

が成り立つ．このとき，特に

$$x=p+\sqrt{\frac{r-q}{a}}$$

は $f(x)=r$ を満たしている．

$r<q$ の場合は $a>0$ に注意すれば

$$f(x)=a(x-p)^2+q\geq q>r$$

が成り立つ．よって，方程式 $f(x)=r$ は解を持たない．

以上の議論により，$r\geq q$ のときは $f(x)=r$ を満たす x が存在し，$r<q$ のときは $f(x)=r$ を満たす x が存在しないということがわかった．これは f の値域が $[q,\infty)$ であるということに他ならない．

(ii) $a<0$ とし，

$$g(x)=-f(x)=-a(x-p)^2-q$$

と定める．このとき (i) の結果より，2 次関数 g の値域は $[-q,\infty)$ であることがわかる．

さて $r\leq q$ とすれば $-r\geq -q$ であるから，$f(x)=-g(x)=-r$ となる実数 x が存在する．また $r>q$ なら $-r<-q$ であるから，$g(x)=-r$ となるような実数 x は存在しない．よって $f(x)=-g(x)=r$ となるような実数 x も存在しない．

以上の議論により，f の値域は $(-\infty,q]$ であることが示された． □

命題 2.1 より，2 次関数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ の値域は 2 次の係数と頂点の y 座標の情報だけで決まることがわかりました．命題 2.1 より，直ちに以下の事実が導かれます．

系 2.2.
2 次関数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は
$$f(x)=a(x-p)^2+q$$
と表されているとする．

(i) $a>0$ なら，f は $x=p$ で最小値 q をとり，最大値は存在しない．
(ii) $a<0$ なら，f は $x=p$ で最大値 q をとり，最小値は存在しない．

具体的な 2 次関数について，その値域を見てみましょう．

例 2.3. $f(x)=2(x-1)^2-3$ で定まる 2 次関数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ の値域は $[-3,\infty)$ です．特に f は $x=1$ で最小値 -3 をとります． ■

2 次関数が平方完成されていない形で与えられているときはそのままでは値域がわかりにくいので，まずは平方完成を行ってから値域を調べます．

例 2.4. 2 次関数 $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は
$$g(x)=-x^2+3x-1$$
で与えられているとします．このとき，g の値域を求めてみましょう．このままでは g の振る舞いがわかりにくいので，g を表す式を平方完成してみます．
$$\begin{aligned}
-x^2+3x-1&=-(x^2-3x)-1\\
&=-\left(x-2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)-1\\
&=-\left(x-2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)+\frac{9}{4}-1\\
&=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9-4}{4}\\
&=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{4}
\end{aligned}$$
と式を変形できますから，g は
$$g(x)=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$$
とも表すことができます．この表現に注目すれば，g の値域は
$$\left(-\infty,\frac{5}{4}\right]$$
となることがわかります．特に g は $\frac{3}{2}$ において最大値 $\frac{5}{4}$ をとります． ■

問題 7. (i) 2 次関数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x)=-3(x+4)^2-5$ で定める．このとき f の値域を求めよ．

(ii) 2 次関数 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $g(x) = x^2 + x + 1$ で定める．このとき g の値域を求めよ．

(iii) 2 次関数 $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $h(x) = -2x^2 + 3x$ で定める．このとき h の値域を求めよ．

2.2 $[\alpha, \beta]$ 上で定義された 2 次関数の値域

2.2 節では，f の定義域が $\mathbb{R}$ 全体ではなく，$[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \leq \beta\}$ の形の集合である場合を考えます．このときは 2.1 節とは随分と事情が違い，いろいろと場合分けをして考えなくてはいけません．

$[\alpha, \beta]$ 上の 2 次関数の値域を考えるときも，2 次関数は平方完成をした形で表しておくと便利です．こうすることで，軸と α, β の位置関係が見やすくなります．

本節ではこれ以降，実数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ は $\alpha < \beta$ を満たすとし，2 次関数 $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ は常に

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

と表現されているものと仮定します．

2.2.1 $a > 0$ の場合

まずは $a > 0$ の場合を考えましょう．$a < 0$ の場合は最大値，最小値は丁度逆の関係になるので，$a > 0$ の場合を詳しく調べておけばよいわけです．いま定義域は $[\alpha, \beta]$ という限られた場所となっていますから，f のグラフが定める放物線の軸が，$[\alpha, \beta]$ に対してどのような位置にあるのか，いくつかの場合が考えられます．場合分けを行ったうえでそれぞれの場合についてグラフを描いて，f の値域を調べていきましょう．

■Case 1：$p < \alpha$ の場合　最初に調べるのは $x = p$ が定義域に含まれず，定義域の左側にある場合です．数式でいうと，$p < \alpha$ ということになります．このとき，f のグラフは図 12 のようになっています．

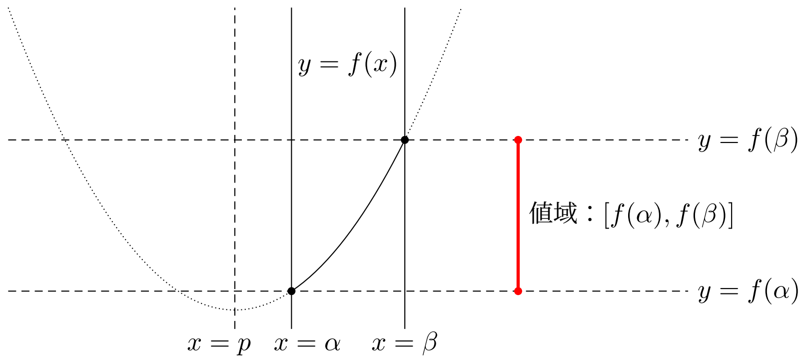


図 12: f のグラフ

図 12 をじっくりと観察してみましょう．f のグラフは，図 12 における放物線の実線部分です．点線部分は f のグラフを延長したときに現れる放物線ですが，今は定義域外にあるので我々の興味の範疇にはありません．

グラフを眺めてみると，$p < \alpha$ のとき f は定義域 $[\alpha, \beta]$ 上で x について単調に増加しています．したがって，f は α で最小値 $f(\alpha)$ をとり，β で最大値 $f(\beta)$ をとることがわかります．値域はその間全体となるので，区間 $[f(\alpha), f(\beta)]$ が f の値域となります．

■Case 2：$\beta < p$ **の場合**　次に考えるのは，放物線の軸 $x = p$ が f の定義域には含まれず，定義域の右側にあるような場合です．式で表すと，その条件は $\beta < p$ となります．この場合，f のグラフは図 13 のような姿をしています．

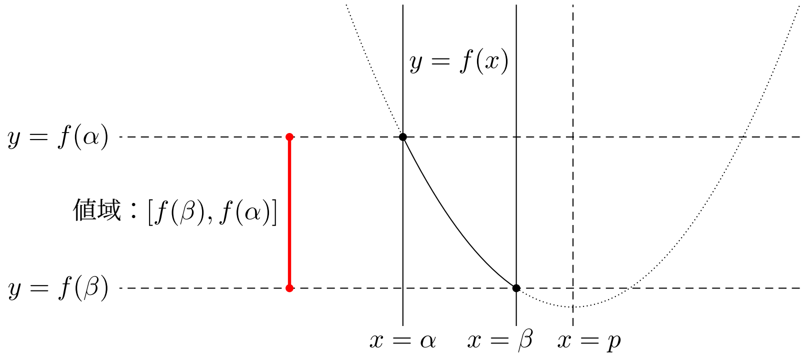


図 13: f のグラフ

図 13 を詳しく観察してみます．f のグラフは図 13 における放物線の実線部分です．点線部分は同じ放物線の延長上にあるわけですが，定義域 $[\alpha, \beta]$ の外にあるため今現在の我々からすると特に興味のない部分です．

図 13 をよく見てみると，f のグラフは定義域 $[\alpha, \beta]$ 上で，x について単調に減少していることがわかります．このことから，$f(\alpha) \geq f(\beta)$ であることにも気が付きます．したがって，f の値域は $[f(\beta), f(\alpha)]$ で，さらに β で最小値 $f(\beta)$ を，α で最大値 $f(\alpha)$ をとることがわかりました．

■Case 3：$\alpha \leq p \leq \beta$ **の場合**　3 番目に調べるのは，放物線の軸 $x = p$ が f の定義域 $[\alpha, \beta]$ に含まれるような場合です．この場合が最も複雑です．$\alpha \leq p \leq \beta$ という条件だけでは値域を確定させることはできず，さらなる場合分けが必要となるからです．

Case 3-1：$\alpha \leq p < \frac{\alpha+\beta}{2}$ **の場合**　放物線の軸が，定義域 $[\alpha, \beta]$ の中心よりも左側にある場合を考えましょう．$\alpha \leq p < \frac{\alpha+\beta}{2}$ という条件は，$0 \leq p - \alpha < \beta - p$ と言い替えても同じであることに注意しておきます．この場合は，f のグラフは図 14 のようになっています．

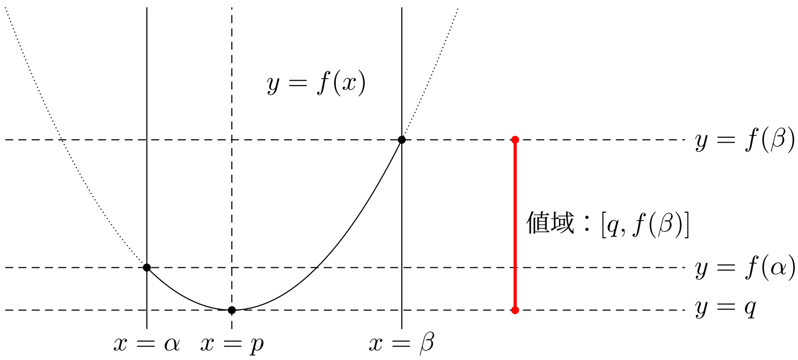


図 14: f のグラフ

f のグラフは図 14 の放物線の実線部分です．先ほどまでと同じように，点線部分は定義域の外にあるので，我々が f の値域を考える際には特に関係のない部分です．

さて，図 14 を観察してみると，残念ながら $[\alpha,\beta]$ 上で f は単調に増加しているわけでも，単調に減少しているわけでもないことがわかります．なので，先ほど調べた二つの場合とは少し事情が違うということになります．ここで，グラフの軸 $x=p$ に注目してみましょう．2.1 節で学んだように，$\mathbb{R}$ 上定義された下に凸な 2 次関数は，グラフの頂点で最小値をとるのでした．定義域が $[\alpha,\beta]$ に制限されていても，頂点が定義域内にあればそこで最小値をとるはずです．図 14 を見てみても，実際に p で最小値をとるということがわかります．

先ほども言ったように，f は定義域内で単調増加でも単調減少でもないので，case 1 や case 2 とは多少事情が異なります．そこで，放物線の軸を中心に定義域を二つに分けて考えてみることにしましょう．f の定義域は $[\alpha,\beta]$ であって，$p\in[\alpha,\beta]$ ですから，

$$[\alpha,\beta]=[\alpha,p]\cup[p,\beta]$$

と書き直すことができます．ですから，f の値域を明らかにするためには，$[\alpha,p]$ と $[p,\beta]$ それぞれの範囲において，f がどのように振る舞うかを調べればよいことになります．図 14 を観察してみると，$\alpha x\leq p$ の範囲において，f 単調減少となります．したがって

$$\{f(x)\mid\alpha\leq x\leq p\}=[q,f(\alpha)]$$

が成り立ちます．また $p\leq x\leq\beta$ の範囲では f は単調増加ですから，

$$\{f(x)\mid p\leq x\leq\beta\}=[q,f(\beta)]$$

となるでしょう．これらの区間を合わせれば，

$$\{f(x)\mid\alpha\leq x\leq\beta\}=\{f(x)\mid\alpha\leq x\leq p\}\cup\{f(x)\mid p\leq x\leq\beta\}=[q,f(\alpha)]\cup[q,f(\beta)]$$

となることがわかります．さて，ここで私たちは $0\leq p-\alpha<\beta-p$ と仮定していたことを思い出しましょう．この条件より $(p-\alpha)^2<(\beta-p)^2$ となるので，$a>0$ であることに注意すれば

$$f(\alpha)=a(\alpha-p)^2+q<a(\beta-p)^2+q=f(\beta)$$

が従います．これより

$$\{f(x)\mid\alpha\leq x\leq\beta\}=[q,f(\alpha)]\cup[q,f(\beta)]=[q,f(\beta)]$$

であることが導かれ，f の値域がわかりました．

以上の考察結果をまとめると，f の値域は $[q,f(\beta)]$ であり，f は p において最小値 q を，β において最大値 $f(\beta)$ をとるということになります．

Case 3-2：$\frac{\alpha+\beta}{2}<p\leq\beta$ の場合　先ほどは放物線の軸が定義域の中心より左側にある場合を考えましたが，今度は定義域の中心より右側に位置している場合について調べましょう．α と β の中点は $\frac{\alpha+\beta}{2}$ なので，この条件を数式にすると $\frac{\alpha+\beta}{2}<p\leq\beta$ となります．あるいは，同値な表現として $0\leq\beta-p<p-\alpha$ としても良いでしょう．このような条件を満たす 2 次関数 f のグラフを描いていますと，その概形は図 15 のようになることがわかります．このグラフを眺めるとどのようなことがわかるでしょうか．

図 15 で起こっていることは，一つ前の場合と対照的です．定義域 $[\alpha,\beta]$ は p を含んでいますから，やはり p において最小値 q をとることはわかります．値域全体を明らかにするには，先ほどと同様に定義域を

$$[\alpha,\beta]=[\alpha,p]\cup[p,\beta]$$

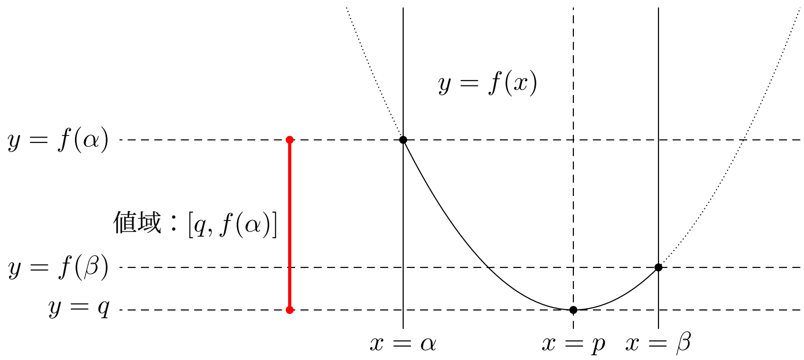


図 15: f のグラフ

と二つに分けてみると良いでしょう．f は $[\alpha, p]$ 上では単調減少であり，$[p, \beta]$ 上では単調増加です．したがって f の値域は

$$\begin{aligned}\{f(x) \mid \alpha \leq x \leq \beta\} &= \{f(x) \mid \alpha \leq x \leq p\} \cup \{f(x) \mid p \leq x \leq \beta\} \\ &= [q, f(\alpha)] \cup [q, f(\beta)]\end{aligned}$$

と書くことができます．ここで私たちが仮定していた条件 $0 \leq \beta - p < p - \alpha$ を思い出すと，$(\beta - p)^2 < (\alpha - p)^2$ であることがわかるので，

$$f(\beta) = (\beta - p)^2 + q < (\alpha - p)^2 + q = f(\alpha)$$

となります．ゆえに $[q, f(\alpha)] \supset [q, f(\beta)]$ であり，

$$\{f(x) \mid \alpha \leq x \leq \beta\} = [q, f(\alpha)] \cup [q, f(\beta)] = [q, f(\alpha)]$$

が得られます．特に f の最大値は $f(\alpha)$ となります．

以上の議論をまとめると，f の値域は $[q, f(\alpha)]$ であり，特に $x = p$ で最小値 q をとり，$x = \alpha$ で最大値 $f(\alpha)$ をとるということがわかります．

Case 3-3：$p = \frac{\alpha+\beta}{2}$ の場合　最後に，放物線の軸が定義域 $[\alpha, \beta]$ の中央に位置している場合を考えましょう．α と β の中点は $\frac{\alpha+\beta}{2}$ ですから，この条件を数式で書くと $p = \frac{\alpha+\beta}{2}$ であり，また同値な表現として $p - \alpha = \beta - p$ ということもできます．この条件のもと，f のグラフの概形は図 16 の様に表せるでしょう．

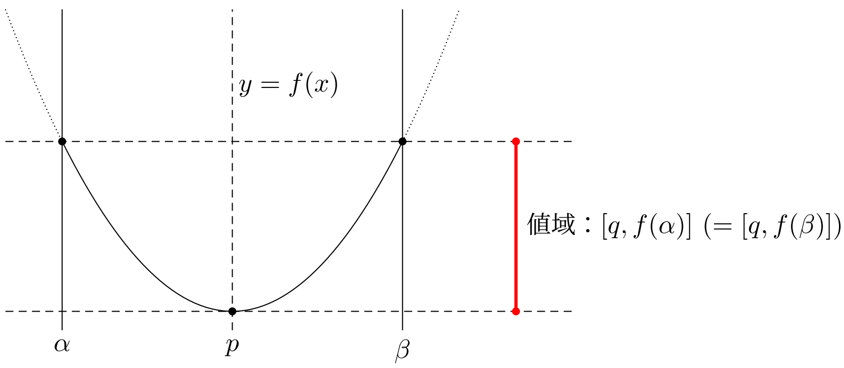


図 16: f のグラフ

定義域 $[\alpha, \beta]$ を p を境に $[\alpha, \beta] = [\alpha, p] \cup [p, \beta]$ と分けるとそれぞれの範囲で f は単調減少，あるいは単調増加となりますから，f の値域は

$$\begin{aligned}\{f(x) \mid \alpha \leq x \leq \beta\} &= \{f(x) \mid \alpha \leq x \leq p\} \cup \{f(x) \mid p \leq x \leq \beta\} \\ &= [q, f(\alpha)] \cup [q, f(\beta)]\end{aligned}$$

と求められます．いま仮定より $f(\alpha) = f(\beta)$ となることがわかるので，

$$\{f(x) \mid \alpha \leq x \leq \beta\} = [q, f(\alpha)] = [q, f(\beta)]$$

となります．

■$a > 0$ の場合のまとめ　ここまでの考察で明らかになった 2 次関数の値域の性質をまとめてみましょう．2 次関数 $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ は

$$f(x) = a(x-p)^2 + q$$

という式で定まっていて，$a > 0$ であると仮定します．このとき，f の値域は p の位置によって表 1 のように分類することができます．

表 1: $a > 0$ のときの 2 次関数 $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ の値域

$[\alpha, \beta]$ と p の位置関係	値域	最大値	最小値
$p \leq \alpha < \beta$	$[f(\alpha), f(\beta)]$	$f(\beta)\ (x = \beta)$	$f(\alpha)\ (x = \alpha)$
$\alpha \leq p < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$	$[q, f(\beta)]$	$f(\beta)\ (x = \beta)$	$q\ (x = p)$
$p = \frac{\alpha+\beta}{2}$	$[q, f(\alpha)]$	$f(\alpha)\ (x = \alpha, \beta)$	$q\ (x = p)$
$\frac{\alpha+\beta}{2} < p \leq \beta$	$[q, f(\alpha)]$	$f(\alpha)\ (x = \alpha)$	$q\ (x = p)$
$\alpha < \beta \leq p$	$[f(\beta), f(\alpha)]$	$f(\alpha)\ (x = \alpha)$	$f(\beta)\ (x = \beta)$

いままで学んだことを用いて，実際に具体的な 2 次関数の最大値および最小値を求めてみましょう．表 1 の内容を丸ごと暗記するというよりは，その結果を導出するために行ってきた議論をトレース出来るようになることが大切です．

例 2.5. 2 次関数 $f\colon [-3, 3] \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2 - 3x + 2$ によって定義します．このとき f の最大値，最小値を求めてみましょう．

まずは，f の式を平方完成します．

$$\begin{aligned}x^2 - 3x + 2 &= \left(x^2 + 2\left(-\frac{3}{2}\right)x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) + 2 \\ &= \left(x^2 + 2\left(-\frac{3}{2}\right)x + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) - \frac{9}{4} + 2 \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

ですから，f は

$$f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

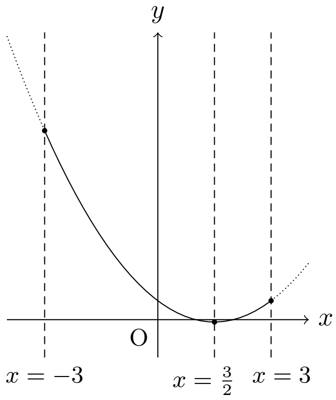


図 17: 例 2.5 における f のグラフ

とも表されます．（グラフは図 17 を参照.）

f のグラフの軸 $x=\frac{3}{2}$ は f の定義域に含まれますから，f は $\frac{3}{2}$ において最小値 $-\frac{1}{4}$ をとります.

次に最大値について考えてみましょう．頂点の x 座標 $\frac{3}{2}$ と定義域の端点 3 および -3 との距離をそれぞれ比べてみましょう．すると，-3 と $\frac{3}{2}$ との距離の方が，3 と $\frac{3}{2}$ よりも大きいことがわかります．したがって f は -3 で最大値をとることになります．その値を計算してみると

$$f(-3)=(-3)^2-3(-3)+2=20$$

となるので，f は -3 で最大値 20 をとるということが示されました. ■

問題 8. (i) $f_1\colon[1,2]\to\mathbb{R}$ を，$f_1(x)=3x^2$ によって定める．このとき，f_1 の最大値と最小値を求めよ.

(ii) $f_2\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$ を，$f_2(x)=2x^2-12x+19$ によって定める．このとき f_2 の最大値と最小値を求めよ.

(iii) $f_3\colon[-3,0]\to\mathbb{R}$ を，$f_3(x)=x^2+2x-2$ によって定める．このとき，f_3 の最大値と最小値を求めよ.

(iv) $f_4\colon[-2,2]\to\mathbb{R}$ を，$f_4(x)=x^2+2x-2$ によって定める．このとき，f_4 の最大値と最小値を求めよ.

(v) $f_5\colon[1,5]\colon\mathbb{R}$ を，$f_5(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+\frac{17}{8}$ によって定める．このとき，f_5 の最大値と最小値を求めよ.

2.2.2 $a<0$ の場合

$a<0$ の場合，2 次関数のグラフは上に凸の放物線となるのでした．このことを念頭におきながら，2.2.1 節の場合と同じように α,β と p の位置関係に応じて場合分けを行い，f の値域を調べましょう.

■Case 1：$p<\alpha<\beta$ の場合　まずは，放物線の軸 $x=p$ が f の定義域には入らず，それより左側の領域にあるという場合を考えてみます．数式で書くと，条件は $p<\alpha<\beta$ となるでしょう．このとき f のグラフの概形を描いてみれば，図 18 のようになることがわかります．図 18 を観察してみると，f は定義域 $[\alpha,\beta]$ 上で単調減少であることがわかります．したがって，$f\alpha$ で最大値 $f(\alpha)$ をとり，β で最小値 $f(\beta)$ をとります．値域はその間の全ての点の集まりとなるので，区間 $[f(\beta),f(\alpha)]$ が f の値域となります.

■Case 2：$\alpha<\beta<p$ の場合　次は，放物線の軸 $x=p$ が f の定義域には入らず，それより右側の領域にあるという場合を見てみましょう．条件を正確に書くと，$\alpha<\beta<p$ ということになります．この場合，2 次関数 $f\colon[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ グラフは図 19 の様な形をしています．グラフを眺めてみると，f は定義域 $[\alpha,\beta]$ 上で単調

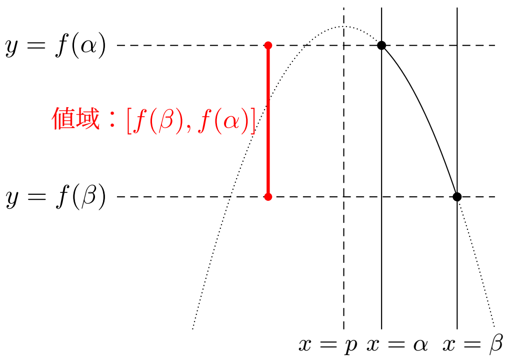


図 18: $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ のグラフ $(p < \alpha < \beta)$

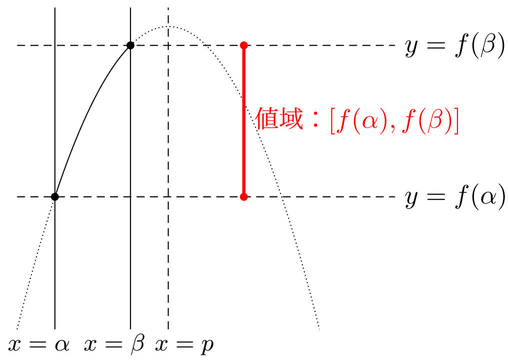


図 19: $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ のグラフ $(\alpha < \beta < p)$

増加となっていることがわかるでしょう．したがって，2 次関数 f は β で最大値 $f(\beta)$ を，α で最小値 $f(\alpha)$ をとります．f の値域は最大値と最小値をつなぐ区間であり，具体的に書くと $[f(\alpha), f(\beta)]$ となります．

■Case 3：$\alpha \leq p \leq \beta$ の場合　最後に $\alpha \leq p \leq \beta$ の場合を考えましょう．この場合は，軸 $x = p$ が定義域の中央より左側に位置するのか，右側に位置するのか，あるいはちょうど中央に位置するのかによって，場合分けをしてみる必要があります．

$\alpha \leq p < \frac{\alpha+\beta}{2}$ のときは，f のグラフは図 20 のようになります．$a > 0$ の場合と同じように f の定義域を $[\alpha, \beta] = [\alpha, p] \cup [p, \beta]$ と 2 つに分けてみます．それぞれの範囲において f は単調増加，あるいは単調減少となっていますから，f の値域は

$$\{f(x) \mid \alpha \leq x \leq \beta\} = \{f(x) \mid \alpha \leq x \leq p\} \cup \{f(x) \mid p \leq x \leq \beta\} = [f(\alpha), q] \cup [f(\beta), q]$$

と書くことができます．$\alpha \leq p < \frac{\alpha+\beta}{2}$ のときは $(\alpha - p)^2 < (\beta - p)^2$ ですから，$a < 0$ に注意すれば

$$f(\alpha) = a(\alpha - p)^2 + q > (\beta - p)^2 + q = f(\beta)$$

となることがわかります．これより，f の値域は

$$\{f(x) \mid \alpha \leq x \leq \beta\} = [f(\alpha), q] \cup [f(\beta), q] = [f(\beta), q]$$

となります．特に f は $x = p$ で最大値 q をとり，$x = \beta$ で最小値 $f(\beta)$ をとることがわかります．

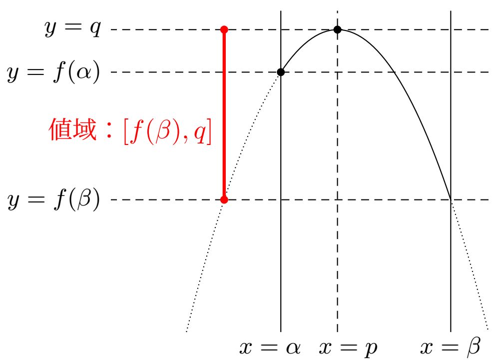


図 20: $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ のグラフ $(\alpha \leq p < \frac{\alpha+\beta}{2})$

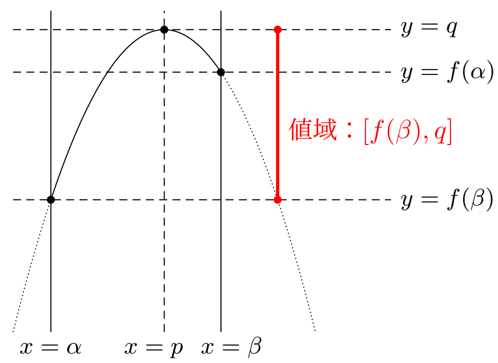


図 21: $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ のグラフ $(\frac{\alpha+\beta}{2} < p \leq \beta)$

$\frac{\alpha+\beta}{<}p \leq \beta$ のとき，f のグラフは図 21 のようになっています．このときは先ほどととは逆に $f(\alpha) < f(\beta)$ となっていますから，

$$\begin{aligned}\{f(x) \mid \alpha \leq x \leq \beta\} &= \{f(x) \mid \alpha \leq x \leq p\} \cup \{f(x) \mid p \leq x \leq \beta\} \\ &= [f(\alpha), q] \cup [f(\beta), q] \\ &= [f(\alpha), q]\end{aligned}$$

これより f は p で最大値 q をとり，α で最小値 $f(\alpha)$ をとるということが確かめられます．

最後に，$\alpha < p = \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$ の場合を考えましょう．この場合の f のグラフは図 22 のようになっています．このときちょうど $f(\alpha) = f(\beta)$ となっていますから，f の値域は

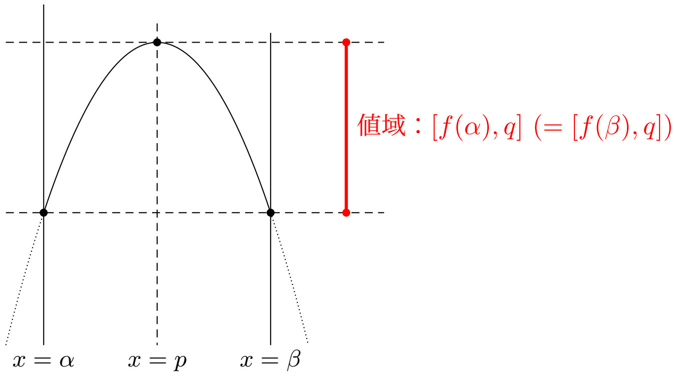


図 22: $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ のグラフ $(p = \frac{\alpha+\beta}{2})$

$$\begin{aligned}\{f(x) \mid \alpha \leq x \leq \beta\} &= \{f(x) \mid \alpha \leq x \leq p\} \cup \{f(x) \mid p \leq x \leq \beta\} \\ &= [f(\alpha), q] \cup [f(\beta), q] \\ &= [f(\alpha), q] = [f(\beta), q]\end{aligned}$$

となります．特に，f は $x = p$ で最大値 q をとり，$x = \alpha, \beta$ において最小値 $f(\alpha)$（これは $f(\beta)$ とも等しい）をとることになります．最小値を実現する x の値が 2 つあることに注意しましょう．

■$a < 0$ の場合のまとめ　以上の議論からわかった f の値域に関する結果をまとめていましょう．2 次関数 $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ は

$$f(x) = a(x-p)^2 + q$$

と表されていて，$a < 0$ であると仮定します．このとき，f の値域は p と定義域 $[\alpha, \beta]$ の位置関係によって，表 2 のように分類することができます．

以上で学んだことを使って，グラフが下に凸となるような 2 次関数の最大値，最小値を実際に求めてみましょう．表 2 を機械的に適用するのではなく，表 2 の内容を導き出した議論の方法自体を追って解いて見ることが大切です．

例 2.6. 2 次関数 $f\colon [-1, 2] \to \mathbb{R}$ を $f(x) = -x^2 + x + 2$ によって定義します．このとき，f の値域と最大値，最小値はどのようになるでしょうか．

表 2: $a < 0$ のときの 2 次関数 $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ の値域

$[\alpha, \beta]$ と p の位置関係	値域	最大値	最小値
$p < \alpha < \beta$	$[f(\beta), f(\alpha)]$	$f(\alpha)\ (x = \alpha)$	$f(\beta)\ (x = \beta)$
$\alpha \leq p < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$	$[f(\beta), q]$	$q\ (x = p)$	$f(\beta)\ (x = \beta)$
$\alpha < p = \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$	$[f(\alpha), q]$	p で最大値 q	$f(\alpha)\ (x = \alpha, \beta)$
$\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < p \leq \beta$	$[f(\alpha), q]$	$q\ (x = p)$	$f(\alpha)\ (x = \alpha)$
$\alpha < \beta < p$	$[f(\alpha), f(\beta)]$	$f(\beta)\ (x = \beta)$	$f(\alpha)\ (x = \alpha)$

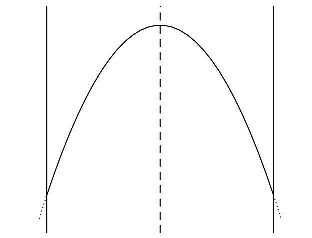


図 23: f のグラフ

このままでは 2 次関数のグラフの形がわからないので，まずは f の式を平方完成します．f を定める 2 次式は

$$\begin{aligned}
-x^2 + x + 2 &= -(x^2 - x) + 2 \\
&= -\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + 2 \\
&= -\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \\
&= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} + \frac{8}{4} \\
&= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

と変形されますから，f は

$$f(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

とも表すことができます．これより f のグラフは図 23 のようになることがわかります．

いま f の定義域は $[-1, 2]$ ですから，f が定める放物線の軸 $x = \frac{1}{2}$ は定義域に含まれます．したがって，f は $x = -1$ で最大値 $\frac{9}{4}$ をとります．

また f の軸 $x = \frac{1}{2}$ と $x = -1$ および $x = 2$ との距離を比べてみると，どちらの距離も等しいことがわかります．したがって，f は $x = -1$ と $x = 2$ で最小値 $f(-1)$ をとります．その値を具体的に求めてみると，

$$f(-1) = -(-1)^2 + (-1) + 2 = -1 - 1 + 2 = 0$$

となるので，f の最小値は 0 です．

以上の計算結果より f の値域は $[0,\frac{9}{4}]$ となることがわかります． ■

問題 9. (i) 2 次関数 $f_1\colon [0,3]\to\mathbb{R}$ を $f_1(x)=-x^2-x+1$ によって定める．このとき，f の最大値と最小値を求めよ．

(ii) 2 次関数 $f_2\colon [-3,0]\to\mathbb{R}$ を $f_2(x)=-x^2-x+1$ によって定める．このとき，f の最大値と最小値を求めよ．

2.3 一般の区間上で定義された 2 次関数の値域

2.1 節と 2.2 節は，2 次関数の定義域が $\mathbb{R}$ 全体である場合と，有界区間 $[\alpha,\beta]$ の形の場合に 2 次関数の値域を調べてきました．2.3 節では，より一般の区間を定義域として持つ 2 次関数の値域について考えてみましょう．

定義域がより一般の区間の場合を考えるとは言っても，基本的なアプローチは 2.1 節や 2.2 節で行った議論と大きく変わるものではありません．これまでに行ってきた議論を少し修正すれば，区間上で定義された 2 次関数の値域を完全に調べることが可能なのです．ここでも基本的な立場は 2 次関数のグラフをよく観察するということなので，2.3 節を通じて 2 次関数を表す式は平方完成されたもの

$$f(x)=a(x-p)^2+q \tag{2.2}$$

を考えます．

2.3.1 非有界区間の場合

2.1.3 節で扱う非有界区間とは，ある実数 α を用いて以下のように表される 4 種類の区間です．

$$[\alpha,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid \alpha\le x\},\qquad (\alpha,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid \alpha< x\},$$
$$(-\infty,\alpha]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le\alpha\},\qquad (-\infty,\alpha)=\{x\in\mathbb{R}\mid x<\alpha\}.$$

このような区間で定義された 2 次関数の値域は，比較的単純な議論で明らかにすることができます．

■定義域が $[\alpha,\infty)$ の場合　まずは定義域が $[\alpha,\infty)$ という形の区間である場合を考えましょう．2 次関数 $f\colon[\alpha,\infty)\to\mathbb{R}$ は (2.2) という式で定まっているとします．f のグラフの形は 2 次の係数 $a\neq 0$ と頂点 (p,q) の位置によって完全に決まるので，その値の範囲によって場合分けをして考えます．2 次の係数 a の符号に加えて，放物線の軸 $x=p$ が定義域内に含まれるか否かに注目することが大切です．

Case 1-1: **$a>0$ かつ $p<\alpha$ の場合**　まずは f のグラフが定める放物線が下に凸であり，放物線の軸が f の定義域に含まれないような場合を考えましょう．軸が定義域 $[\alpha,\infty)$ に含まれないとは，つまり $p<\alpha$ が成り立つということです．この仮定の下，f のグラフの大まかな形は図 24 のようになっています．図 24 を観察してみますと，f のグラフは定義域内で単調増加であることがわかります．いま定義域は左端点 α を含むので，f は $x=\alpha$ で最小値 $f(\alpha)$ をとることがわかります．

2 次関数 f は最大値を持つかどうかについて考えてみます．これは最初の場合分けですから，じっくりと精密な考察をしてみることにしましょう．$y\ge f(\alpha)$ なる実数を任意に選びます．このとき

$$y-q\ge y-f(\alpha)\ge 0$$

ですから，実数 x を

$$x-p=\sqrt{\frac{y-q}{a}}$$

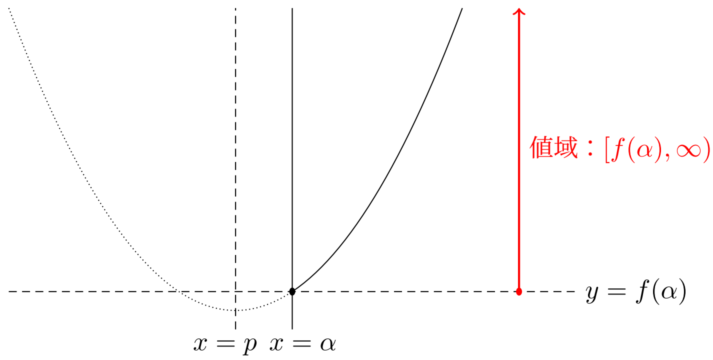


図 24: $f\colon [\alpha,\infty)\to\mathbb{R}$ のグラフ

となるように選ぶことができます．いま $y-q\geq y-f(\alpha)$ でしたから，

$$x-p=\sqrt{\frac{y-q}{a}}\geq\sqrt{\frac{f(\alpha)-q}{a}}=\alpha-p>0$$

が成り立ちます．右側の等号は，両辺が正であることに注意して 2 乗してみることで正しいと確かめられます．これより $x\geq\alpha$ となり，x は f の定義域に入ることがわかりました．このとき x の選び方より $f(x)=y$ が成り立っています．以上の議論が示していることは，$f(\alpha)$ 以上のいかなる実数も，2 次関数 $f\colon[\alpha,\infty)\to\mathbb{R}$ の値域に入っているということです．すなわち，f の値域は

$$\{f(x)\mid\alpha\leq x\}=\{y\mid y\geq f(\alpha)\}=[f(\alpha),\infty)$$

となります．f の値域はいくらでも大きな値を含みますから，f は最大値が持たないことがわかります．

以上の議論において判明したことをまとめると，関数 $f\colon[\alpha,\infty)\to\mathbb{R}$ の値域は $[f(\alpha),\infty)$ であり，特に f は $x=\alpha$ で最小値をとるということになります．また，この場合は f は最大値は持ちません．

Case 1-2: $a>0$ かつ $\alpha\leq p$ の場合　次に，放物線は先ほどと同じく下に凸であるけれども，その軸は f の定義域に含まれているという場合を考えてみます．このとき f のグラフはの概形は図 25 のようになります．

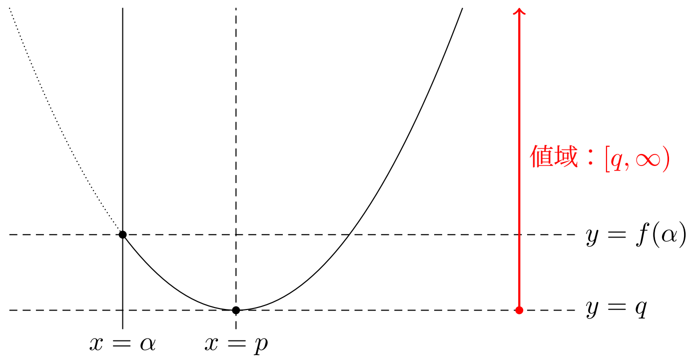


図 25: $f\colon [\alpha,\infty)\to\mathbb{R}$ のグラフ

図 25 を眺めてみると，f は $x=p$ において最小値 q をとることがわかります．f の値域全体を調べるために，定義域 $[\alpha,\infty)$ は，p を境に

$$[\alpha,\infty)=[\alpha,p]\cup[p,\infty)$$

と分けてみることにしましょう．$[\alpha, p]$ 上で f は単調減少ですから，§2.3 での議論と同様にして

$$\{f(x) \mid \alpha \leq x \leq p\} = [q, f(\alpha)]$$

となることがわかります．また $[p, \infty)$ 上で f は単調増加ですから，case 1 での議論と同様にして

$$\{f(x) \mid x \geq p\} = [q, \infty)$$

であることが確かめられます．したがって f の値域は

$$\{f(x) \mid x \leq p\} = [q, f(\alpha)] \cup [q, \infty) = [q, \infty)$$

となります．

以上の議論からわかったことを整理すると，f の値域は $[q, \infty)$ であり f は $x = p$ で最小値 q をとるということになります．f はいくらでも大きな値を取りうるので，最大値を持ちません．

Case 2-1：$a < 0$ かつ $p < \alpha$ の場合　今度は，f のグラフが定める放物線が上に凸の場合を考えてみましょう．ここでもまずは放物線の軸が f の定義域に含まれていない場合を調べます．このとき f のグラフは図 26 のような形をしています．

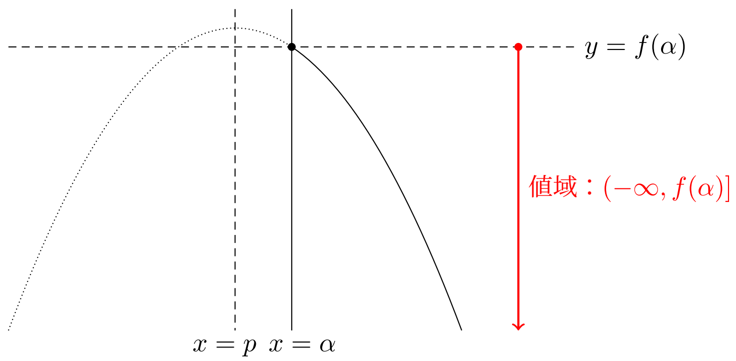


図 26: $f\colon [\alpha, \infty) \to \mathbb{R}$ のグラフ

図 26 を観察すると，f は $[\alpha, \infty)$ において単調減少であることがわかります．したがって，定義域の左端点 α で最大値 $f(\alpha)$ をとります．定義域内で x はいくらでも大きな値を取り得るので，それにともない $f(x)$ はいくらでも小さな値をとり得ます．したがって f は最小値を持たず，f の値域は $(-\infty, f(\alpha)]$ となることがわかります．

Case 2-2：$a < 0$ かつ $\alpha \leq p$ の場合　f のグラフが定める放物線が上に凸であり，軸 $x = p$ が f の定義域内に含まれる場合を調べます．このとき f のグラフは図 27 のようになります．

グラフより直ちにわかるように，f はグラフの頂点で最大値をとります．すなわち，$x = p$ において最大値 q をとります．f の値域を明らかにするためには，定義域を

$$[\alpha, \beta) = [\alpha, p] \cup [p, \infty)$$

と二つに分けてみると調べやすくなります．$[\alpha, p]$ 上で f は単調増加ですから，§2.3 での議論と同様にして

$$\{f(x) \mid \alpha \leq x \leq p\} = [f(\alpha), q]$$

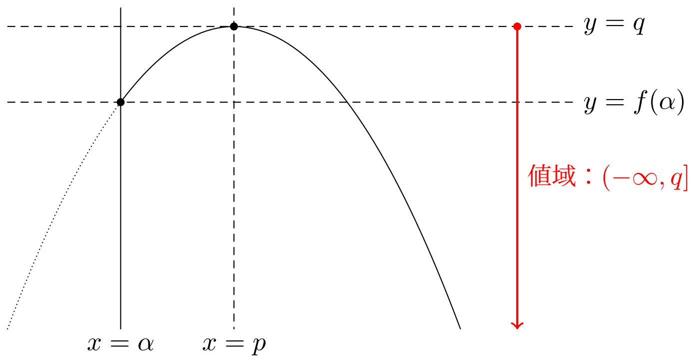


図 27: $f\colon [\alpha, \infty) \to \mathbb{R}$ のグラフ

であることがわかります．また $[p, \infty)$ 上で f は単調減少なので，case 2-1 から

$$\{f(x) \mid x \geq p\} = (-\infty, q]$$

となります．したがって，f の値域は

$$\begin{aligned}\{f(x) \mid x \geq \alpha\} &= \{f(x) \mid \alpha \leq x \leq p\} \cup \{f(x) \mid x \geq p\} \\ &= [f(\alpha), q] \cup (-\infty, q] = (-\infty, q]\end{aligned}$$

と求めることができます．

以上の議論により，f の値域は $(-\infty, q]$ であることがわかりました．特に f は $x = p$ で最大値 q をとり，最小値は持ちません．

まとめ：$[\alpha, \infty)$ 上定義された 2 次関数の値域　ここまで調べてきた，$[\alpha, \infty)$ 上定義された 2 次関数の値域についてまとめてみましょう．2 次関数 $f\colon [\alpha, \infty) \to \mathbb{R}$ は

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

と表されているとします．このとき，f の値域は 2 次係数 a の符号と，p と定義域 $[\alpha, \infty)$ の位置関係に応じて，表 3 のように分類されます．

表 3: 2 次関数 $f\colon [\alpha, \infty) \to \mathbb{R}$ の値域

a の範囲	p と $[\alpha, \infty)$ の関係	値域	最大値	最小値
$a > 0$	$p < \alpha$	$[f(\alpha), \infty)$	なし	$f(\alpha)$ $(x = \alpha)$
	$\alpha \leq p$	$[q, \infty)$	なし	q $(x = p)$
$a < 0$	$p < \alpha$	$(-\infty, f(\alpha)]$	$f(\alpha)$ $(x = \alpha)$	なし
	$\alpha \leq p$	$(-\infty, q]$	q $(x = p)$	なし

■定義域が (α, ∞) の場合　今度は定義域が (α, ∞) という形の区間である場合に，2 次関数の値域がどうなるのかを調べてみましょう．大まかな方針は定義域が $[\alpha, \infty)$ であるときと同じで，2 次の係数の符号は正か負か，放物線の軸が定義域に含まれるか否かで場合分けをして考えます．

Case 1-1: $a > 0$ **かつ** $p \leq \alpha$ **の場合**　最初は f のグラフが定める放物線が下に凸であり，放物線の軸が f の定義域に含まれないような場合を調べます．このとき，f のグラフの大まかな形は図 28 のようになっています．

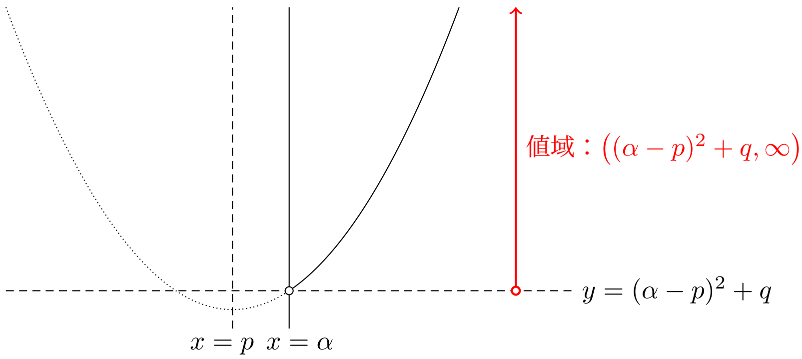


図 28: $f\colon (\alpha, \infty) \to \mathbb{R}$ のグラフ

図 28 を眺めてみると，f のグラフは定義域内で単調に増加していることがわかります．なので $x = \alpha$ で最小値 $f(\alpha)$ をとる，と言いたいところですが，実はそうはなりません．いま α は f の定義域には入っていないので，関数 f は $f(\alpha)$ という値をとりたくてもとれないからです．よってこの関数は最小値をもたないことになります．f は最小値はもちませんが，それはいくらでも小さい値をとり得るからではありません．図 28 の通り，f がとる値は一定の水準を下回ることはできません．その水準は f の式に α を代入した数値

$$(\alpha - p)^2 + q$$

であるわけです．

すでに述べたように f は定義域 (α, ∞) の中で単調に増加しているので，x が大きくなるにしたがって $f(x)$ も大きくなります．ですから，f が最大値を持つか調べるためには，x が大きくなっていった先の振る舞いを観察すればよいことになります．f のグラフを眺めてみると，x が大きくなるにしたがって，$f(x)$ はいくらでも大きな値をとり得ることがわかります．特に，f は最大値を持ちません．

以上の考察より，f の値が小さいほう目を向けてみると，最小値こそもちませんが値域の「底」として $(\alpha - p)^2 + q$ という値を持つということがわかるのでした．また，値が大きいほうを調べてみると，いくらでも大きな値をとり得ます．したがって，f の値域は $\left((\alpha - p)^2 + q, \infty\right)$ という形の区間となっているのです．

Case 1-2: $a > 0$ **かつ** $\alpha < p$ **の場合**　2 番目に考えるのは，放物線は先ほどと同じく下に凸であるけれども，その軸は f の定義域に含まれているという場合です．このとき f のグラフは図 29 のような形をしています．

図 29 を観察してみましょう．f の定義域に放物線の軸 $x = p$ は含まれますから，f は $x = p$ において最小値 q をとることがわかります．

f がどのくらい大きな値をとるか調べるためには，定義域全体を眺めてみる必要があります．$x < p$ の範囲を見てみると，こちらがわでは f の値はとある水準を超えることはないことがわかります．一方，$p < x$ の範囲を調べてみると f はいくらでも大きい値をとり得るということが読み取れます．

以上の議論をまとめると f は最小値 q をとり，いくらでも大きな値をとり得るということになります．これより f の値域は $[q, \infty)$ であると結論づけることができるでしょう．

Case 2-1：$a < 0$ **かつ** $p \leq \alpha$ **の場合**　次は f のグラフが定める放物線が上に凸であり，放物線の軸が f の定義域に含まれていないという場合を扱いましょう．このとき f のグラフは図 30 のような形をしています．

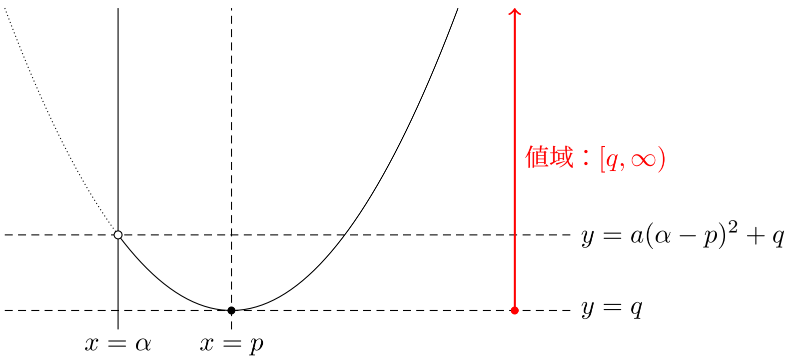


図 29: $f\colon(\alpha,\infty)\to\mathbb{R}$ のグラフ

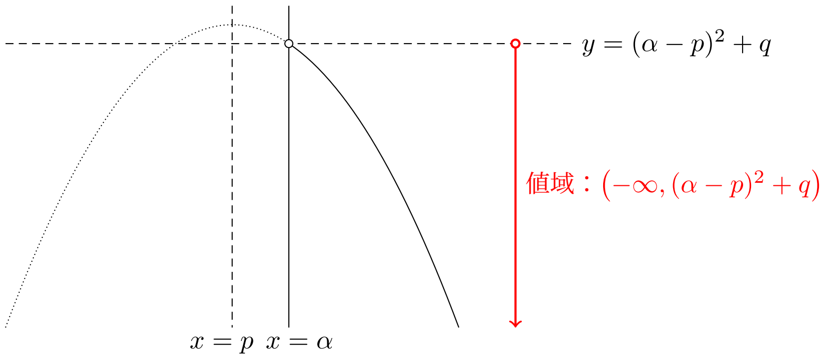


図 30: $f\colon(\alpha,\infty)\to\mathbb{R}$ のグラフ

図 30 を観察してみましょう，f は定義域内で左に向かっていくにしたがって大きくなり，ちょうど左端点で最大の値をとるように見えます．しかし，左端点 α は f の定義域に含まれておらず，f は $f(\alpha)$ という「最大値」をとることが出来ません．つまり f は最大値を持たないということになります．f は最大値を持ちませんが，図 30 を見ればその値には天井があるとわかります．その天井の値は f の式に α を代入した値 $(\alpha-p)^2+q$ となっているのです．

f は定義域内で右に向かうにしたがい小さな値をとるので，f に最小値があるか知るためには x が大きな値をとったときの f の振る舞いを調べればよいでしょう．定義域内で x はいくらでも大きな値をとることができ，それに伴って f はいくらでも小さな値をとり得る，ということがグラフより読み取れるでしょう．ゆえに f は最小値をもちません．

先ほどの議論により，f は最大値は持ちませんが，値の天井として $(\alpha-p)^2+q$ という数値が存在していることがわかったのでした．一方，f は x が大きくなるにしたがっていくらでも小さい値をとり得ます．したがって，f の値域は $\bigl(-\infty,(\alpha-p)^2+q\bigr)$ という形の区間となっています．

Case 2-2：$a<0$ かつ $\alpha<p$ の場合　最後に f のグラフが定める放物線が上に凸であり，軸 $x=p$ が f の定義域内に含まれる場合を調べます．このとき f のグラフは図 31 のようになります．

上に凸の放物線は，一般に頂点で最大の値をとるのでした．いま $x=p$ は f の定義域内にいますから，これより f は $x=p$ で最大値 q をとることがわかります．

最小値を調べるため，定義域全体を眺めてみましょう．図 31 を見てみると，$\alpha<x<p$ の範囲において

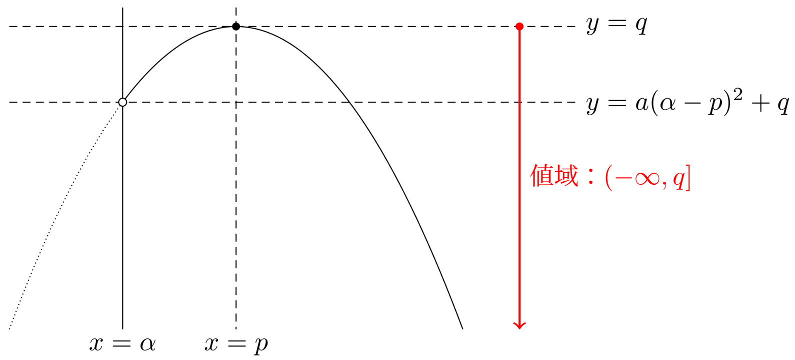


図 31: $f\colon (\alpha, \infty) \to \mathbb{R}$ のグラフ

$f(x)$ の値は一定の水準より上にあることがわかります．一方 $x > p$ の範囲では，$f(x)$ はいくらでも小さな値をとり得ます．したがって f は最小値を持たないわけです．

以上の議論をまとめると，f は最大値 q をとり，またいくらでも小さな値をとるということになります．これより，f の値域は $(-\infty, q]$ であることがわかりました．

まとめ：(α, ∞) 上定義された 2 次関数の値域　ここまで調べてきた，(α, ∞) 上定義された 2 次関数の値域についてまとめてみましょう．2 次関数 $f\colon (\alpha, \infty) \to \mathbb{R}$ は

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

と表されているとします．このとき，f の値域は 2 次係数 a の符号と，p と定義域 (α, ∞) の位置関係に応じて，表 4 のように分類されます．

ただし，f の式は (2.2) で表されているとしていましたから，a，p，q などは (2.2) におけるものです．

表 4: 2 次関数 $f\colon (\alpha, \infty) \to \mathbb{R}$ の値域

a の範囲	p と (α, ∞) の関係	値域	最大値	最小値
$a > 0$	$p \leq \alpha$	$\bigl((\alpha - p)^2 + q, \infty\bigr)$	なし	なし
	$\alpha < p$	$[q, \infty)$	なし	$q\ (x = p)$
$a < 0$	$p \leq \alpha$	$\bigl(-\infty, (\alpha - p)^2 + q\bigr)$	なし	なし
	$\alpha < p$	$(-\infty, q]$	$q\ (x = p)$	なし

■定義域が $(-\infty, \alpha]$ の場合　$(-\infty, \alpha]$ という区間上で定義された 2 次関数について考えましょう．これまでと同じように，2 次の係数の符号と，放物線の軸が定義域に含まれるかどうかに応じて場合分けをして，2 次関数 $f\colon (-\infty, \alpha] \to \mathbb{R}$ の値域について調べていきます．全体的な議論の流れはこれまでと同じですので，先ほどよりは少し急ぎ足で説明することにしましょう．

Case 1：$a > 0$ の場合　$a > 0$ の場合は，f のグラフが定める放物線の軸 $x = p$ と f の定義域の位置関係に応じて，f のグラフは図 32 あるいは図 33 のような形をしています．

まずは $\alpha < p$ の場合を考えましょう．このとき f は定義域内で単調に減少しており，図 32 を観察することにより $x = \alpha$ で最小値 $f(\alpha)$ をとることがわかります．また f はいくらでも大きな値をとり得るので最大値は存在せず，その値域は $[f(\alpha), \infty)$ となります．

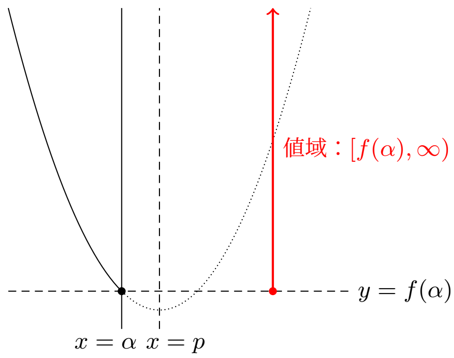


図 32: $f\colon(-\infty,\alpha]\to\mathbb{R}$ のグラフ（$\alpha<p$ の場合）

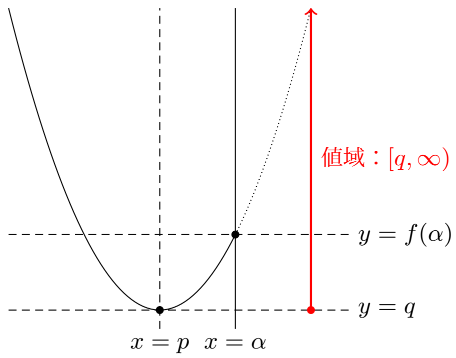


図 33: $f\colon(-\infty,\alpha]\to\mathbb{R}$ のグラフ（$p\leq\alpha$ の場合）

次に $p\leq\alpha$ の場合を考えます．$p\leq\alpha$ が成り立つとは，放物線の軸 $x=p$ が f の定義域内に含まれるということです．したがって f は $x=p$ で最小値をとることになります．さらに f は x が小さくなるにともなっていくらでも小さい値をとり得るので，f の値域は $[q,\infty)$ であることがわかります．

Case 2：$a<0$ の場合　$a<0$ のとき f のグラフが定める放物線は上に凸となっていますから，定義域 $(-\infty,\alpha]$ と p の位置関係に応じて f のグラフは図 34 または図 35 のようになります．

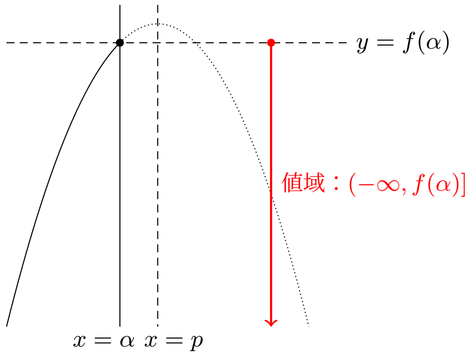


図 34: $f\colon(-\infty,\alpha]\to\mathbb{R}$ のグラフ（$\alpha<p$ の場合）

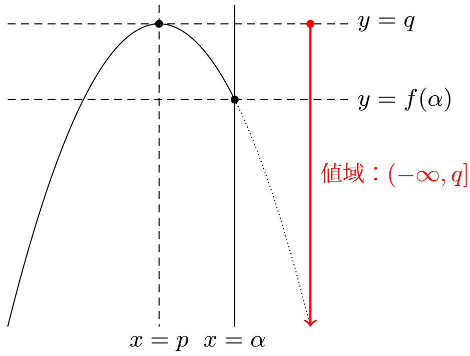


図 35: $f\colon(-\infty,\alpha]\to\mathbb{R}$ のグラフ（$p\leq\alpha$ の場合）

$\alpha<p$ の場合は f は定義域内で単調増加であり，定義域の右端点 α で最大値 $f(\alpha)$ をとります．また x が小さくなるにしたがい $f(x)$ もいくらでも小さな値をとり得ますから，f は最小値を持たず $(-\infty,f(\alpha)]$ が値域となります．

$p\leq\alpha$ の場合は放物線の軸が f の定義域に含まれるため，f は $x=p$ で最大値 q をとります．この場合も x が $x<p$ の範囲で小さくなるにしたがって $f(x)$ もいくらでも小さな値をとり得るので，f は最小値を持たずその値域は $(-\infty,q]$ となるのです．

まとめ：2 次関数 $f\colon(-\infty,\alpha]\to\mathbb{R}$ の値域　以上の議論により明らかになった，$[\alpha,\infty)$ 上定義された 2 次関数の値域についてまとめてみましょう．2 次関数 $f\colon(\alpha,\infty)\to\mathbb{R}$ は

$$f(x)=a(x-p)^2+q$$

と表されているとします．このとき，f の値域は 2 次係数 a の符号と，p と定義域 $(-\infty,\alpha]$ の位置関係に応じて，表 5 のように分類されます．

表 5: 2 次関数 $f\colon (-\infty,\alpha] \to \mathbb{R}$ の値域

a の範囲	p と $[\alpha,\infty)$ の関係	値域	最大値	最小値
$a>0$	$\alpha<p$	$[f(\alpha),\infty)$	なし	$f(\alpha)$ $(x=\alpha)$
	$p\le\alpha$	$[q,\infty)$	なし	q $(x=p)$
$a<0$	$\alpha<p$	$(-\infty,f(\alpha)]$	$f(\alpha)$ $(x=\alpha)$	なし
	$\alpha\le p$	$(-\infty,q]$	q $(x=p)$	なし

■定義域が $(-\infty,\alpha)$ の場合　最後に $(-\infty,\alpha)$ という形の区間上で定義された 2 次関数の値域を考えてみましょう．

Case 1：$a>0$ の場合　f のグラフが定める放物線が下に凸な場合，放物線の軸と定義域の位置関係に応じて f のグラフは図 36 または図 37 のような形をしています．

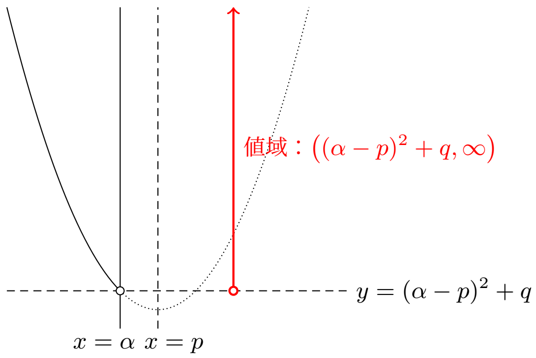


図 36: $f\colon (-\infty,\alpha)\to\mathbb{R}$ のグラフ（$\alpha\le p$ の場合）

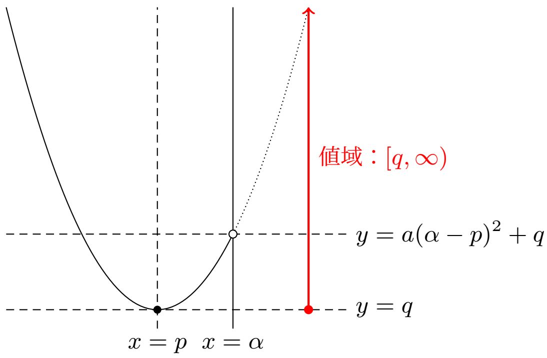


図 37: $f\colon (-\infty,\alpha)\to\mathbb{R}$ のグラフ（$p<\alpha$ の場合）

$\alpha\le p$ の場合は，f は定義域内で単調に減少しています．したがって右端点 α で最小値をとると言いたいところですが，いま α は定義域内の点ではないので f は最小値は持ちません．f の式に $x=\alpha$ を代入した値 $(\alpha-p)^2+q$ は f の値の「底」に位置していますが，f はちょうどその値をとることはできない，という状況になっているのです．$f(x)$ の値が大きくなる方を調べてみると，x が小さくなるにつれて $f(x)$ はいくらでも大きな値をとり得ることがわかります．したがって，f の値域は $\bigl((\alpha-p)^2+q,\infty\bigr)$ となっています．

$p<\alpha$ のときは，放物線の軸が f の定義域に含まれるため f は頂点で最小値をとります．すなわち，f は $x=p$ で最小値 q をとるということです．$x<p$ の範囲で x が小さくなるとそれに応じて f はいくらでも大きな値となりますから，f は最大値をとらずその値域は $[p,\infty)$ であることがわかります．

Case 2：$a<0$ の場合　$f\colon (-\infty,\alpha)\to\mathbb{R}$ が定める放物線が上に凸である場合を考えましょう．f のグラフは放物線の軸 $x=p$ が定義域に含まれるか否かにより，それぞれ図 38 または 39 のような形をしています．

$\alpha\le p$ のときは f は定義域内で単調に増加していますが，定義域の右端点 α は定義域に属しません．よって f は最大値をもたないことになります．f は最大値は持ちませんが，f の式に α を代入して得られる値 $(\alpha-p)^2+q$ は f の値域の天井のような役割をしています．x が小さくなるにしたがい $f(x)$ はいくらでも小さな値をとり得ますから，f は最小値をもちません．したがって，f の値域は $\bigl(-\infty,(\alpha-p)^2+q\bigr)$ となります．

$p<\alpha$ のときは，放物線の軸は f の定義域に含まれます．よって f は $x=p$ で最大値 q をとります．f は

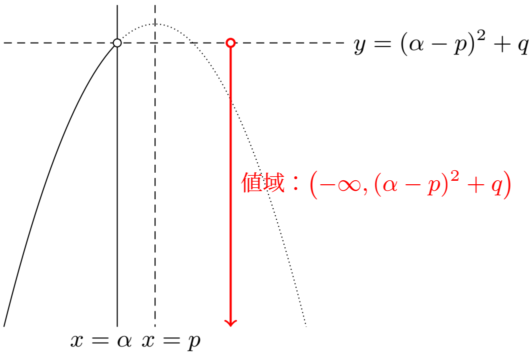


図 38: $f\colon(-\infty,\alpha]\to\mathbb{R}$ のグラフ（$\alpha\le p$ の場合）

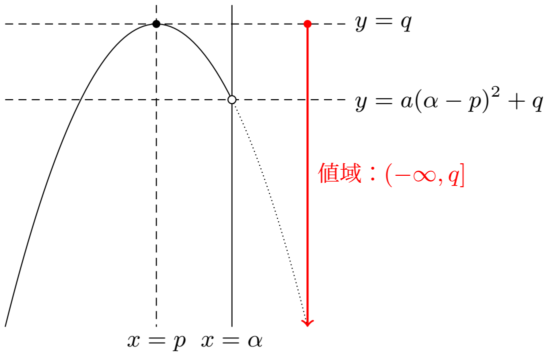


図 39: $f\colon(-\infty,\alpha]\to\mathbb{R}$ のグラフ（$p<\alpha$ の場合）

$x<p$ の範囲で x が小さくなるといくらでも小さな値をとり得るので，f の値域は $(-\infty,q]$ となることがわかります．

まとめ：2 次関数 $f\colon(-\infty,\alpha)\to\mathbb{R}$ の値域　2 次関数 $f\colon(-\infty,\alpha)\to\infty$ の値域についてわかったことを，まとめてみましょう．2 次関数 $f\colon(\alpha,\infty)\to\mathbb{R}$ は

$$f(x)=a(x-p)^2+q$$

と表されているとします．このとき，f の値域は 2 次係数 a の符号と，p と定義域 $(-\infty,\alpha)$ の位置関係に応じて，表 6 のように分類されます．

表 6: 2 次関数 $f\colon(-\infty,\alpha)\to\mathbb{R}$ の値域

a の範囲	p と $(-\infty,\alpha)$ の関係	値域	最大値	最小値
$a>0$	$\alpha\le p$	$\left((\alpha-p)^2+q,\infty\right)$	なし	なし
	$p<\alpha$	$[q,\infty)$	なし	$q\ (x=p)$
$a<0$	$\alpha\le p$	$\left(-\infty,(\alpha-p)^2+q\right)$	なし	なし
	$p<\alpha$	$(-\infty,q]$	$q\ (x=p)$	なし

2.3.2　有界区間の場合

2.3.2 節では，一般の有界区間上で定義された 2 次関数の値域について調べましょう．ここで「有界区間」という言葉が意味するものは，$\alpha<\beta$ であるような 2 つの実数を用いて

$$[\alpha,\beta]=\{x\in\mathbb{R}\mid\alpha\le x\le\beta\},\qquad [\alpha,\beta)=\{x\in\mathbb{R}\mid\alpha\le x<\beta\},$$
$$(\alpha,\beta]=\{x\in\mathbb{R}\mid\alpha<x\le\beta\},\qquad (\alpha,\beta)=\{x\in\mathbb{R}\mid\alpha<x<\beta\}.$$

と表されるような集合のことです．$[\alpha,\beta]$ を定義域とする 2 次関数については既に詳しく調べたので，2.3.2 節では定義域が $[\alpha,\beta)$，$(\alpha,\beta]$ または (α,β) の場合を学ぶことになります．

有界区間上で定義された 2 次関数の値域を調べる基本的な方法は，2.2 節の議論と同じです．放物線が上に凸か下に凸か，そして定義域と放物線の軸がどのような位置関係にあるかに応じて場合分けを行います．それぞれの状況においてグラフの概形を見ると，2 次関数の値域や最大値，最小値を明らかにすることができます．

■定義域が $[\alpha,\beta)$ の場合

Case 1-1：$a>0$ かつ $p\notin[\alpha,\beta)$ の場合　まずは，放物線の頂点が定義域 $[\alpha,\beta)$ に含まれない場合を考えます．つまり，$p<\alpha$ または $\beta\le p$ ということです．このとき，f のグラフはそれぞれ図 40 または図 41 のような形をしています．

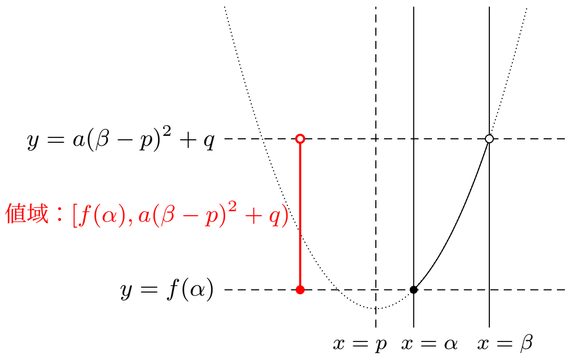


図 40: $f\colon[\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ のグラフ $(p<\alpha)$

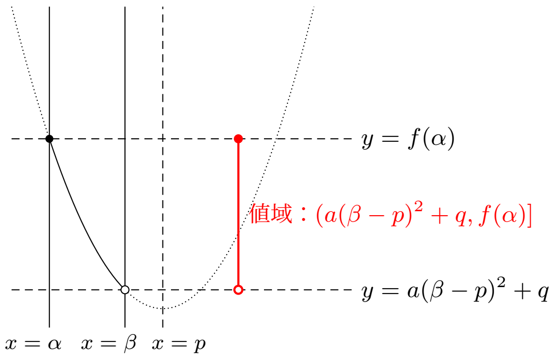


図 41: $f\colon[\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ のグラフ $(\beta\le p)$

$p<\alpha$ の場合，f は定義域 $[\alpha,\beta)$ 内で単調に増加しています．したがって，左に行くほど値が小さく，右に行くほど値が大きくなっているわけです．特に，定義域の左端点 $x=\alpha$ で f は最小値 $f(\alpha)$ をとります．さらに，一見 $x=\beta$ のとき最大値 $f(\beta)$ をとりそうにも思えますが，いま $x=\beta$ は定義域内に属さないので，f は最大値を持ちません．一方で f の値は $a(\beta-p)^2+q$ にいくらでも近い値を取ることができるので，f の値域は区間 $[f(\alpha),(\beta-p)^2+q)$ となります．

$\beta\le p$ の場合は，f は定義域 $[\alpha,\beta)$ 内で単調減少となります．したがって，x が小さいほど $f(x)$ は大きくなり，x が大きいほど $f(x)$ は小さくなります．特に，$x=\alpha$ で f は最大値 $f(\alpha)$ をとります．f は $x=\beta$ で最も小さい値を取りそうに見えますが，いま β は f の定義域に入っていないため，f はそこで最小値を取ることができません．しかし f の式に β を代入した値 $a(\beta-p)^2+q$ は f の値の下限となっており，f の値域は $(a(\beta-p)^2+q,f(\alpha)]$ となることがわかります．

Case 1-2：$a>0$ かつ $p\in[\alpha,\beta)$ の場合　今度は，放物線が下に凸かつ，放物線の軸が $\alpha\le x<\beta$ の範囲にある場合を考えます．このとき，$[\alpha,\beta)$ 内での p の位置によって，f のグラフはさらに図 42 または図 43 のように表すことができます．

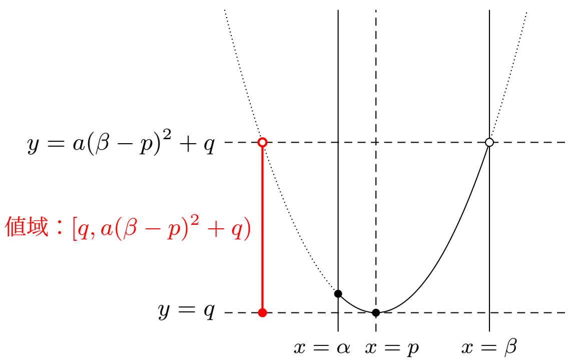


図 42: $f\colon[\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ のグラフ $(\alpha\le p<\frac{\alpha+\beta}{2})$

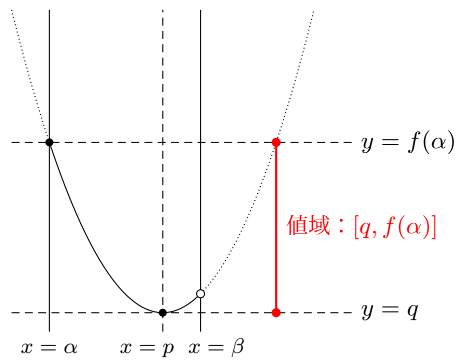


図 43: $f\colon[\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ のグラフ $(\frac{\alpha+\beta}{2}\le p<\beta)$

いずれの場合も定義域内に p を含みますから，f は $x=p$ で最小値 q を取ることがわかります．f の値域を明らかにするために，定義域を 2 つにわけて考えてみましょう．

まずは $\alpha \leq p < \frac{\alpha+\beta}{2}$ の場合を見てみます．$\alpha \leq x \leq p$ の範囲では f は単調減少なので，x の値が小さいほど大きな値をとります．このことに注意すれば，

$$\{f(x) \mid \alpha \leq x \leq p\} = \{y \mid q \leq y \leq f(\alpha)\} = [q, f(\alpha)]$$

であることがわかります．次に反対側の範囲 $p \leq x < \beta$ に目を向けてみましょう．この範囲では f は単調増加なので，β を含まないことに注意すれば

$$\{f(x) \mid p \leq x < \beta\} = \{y \mid q \leq y < a(\beta-p)^2+q)\} = [q, a(\beta-p)^2+q)$$

となることがわかるでしょう．これより

$$\begin{aligned}
\{f(x) \mid \alpha \leq x < \beta\} &= \{f(x) \mid \alpha \leq x \leq p\} \cup \{f(x) \mid p \leq x < \beta\} \\
&= \{y \mid q \leq y \leq f(\alpha)\} \cup \{y \mid q \leq y < a(\beta-p)^2+q\} \\
&= \{y \mid q \leq y \leq f(\alpha) \text{ または } q \leq y < a(\beta-p)^2+q\}
\end{aligned}$$

となります．いま $\alpha \leq p \leq \frac{\alpha+\beta}{2}$ より $f(\alpha) < a(\beta-p)^2+q$ であることに注意すれば，

$$\begin{aligned}
\{f(x) \mid \alpha \leq x < \beta\} &= \{y \mid q \leq y \leq f(\alpha) \text{ または } q \leq y < a(\beta-p)^2+q\} \\
&= \{y \mid q \leq y < a(\beta-p)^2+q\} = [q, a(\beta-p)^2+q)
\end{aligned}$$

がしたがいます．

頂点の x 座標 p が定義域 $[\alpha, \beta)$ の右半分にある，すなわち $\frac{\alpha+\beta}{2} \leq p < \beta$ の場合はどうでしょうか．この場合も定義域を $x \leq p$ と $p \leq x$ の範囲にわけてみると，それぞれでの値の範囲は

$$\begin{aligned}
\{f(x) \mid \alpha \leq x \leq p\} &= [q, f(\alpha)] = \{y \in \mathbb{R} \mid q \leq y \leq f(\alpha)\} \\
\{f(x) \mid p \leq x < \beta\} &= [q, a(\beta-p)^2+q) = \{y \in \mathbb{R} \mid q \leq y < a(\beta-p)^2+q\}
\end{aligned}$$

となることがわかります．ここで $\frac{\alpha+\beta}{2} \leq p < \beta$ より $f(\alpha) \geq a(\beta-p)^2+q$ となることに注意すれば，

$$\begin{aligned}
\{f(x) \mid \alpha \leq x < \beta\} &= \{f(x) \mid \alpha \leq x \leq p\} \cup \{f(x) \mid p \leq x < \beta\} \\
&= \{y \mid q \leq y \leq f(\alpha)\} \cup \{y \mid q \leq y < a(\beta-p)^2+q\} \\
&= \{y \mid q \leq y \leq f(\alpha) \text{ または } q \leq y < a(\beta-p)^2+q\} \\
&= \{y \mid q \leq y \leq f(\alpha)\} \\
&= [q, f(\alpha)]
\end{aligned}$$

を得ます．

Case 1 のまとめ　ここまでの議論で分かったことをまとめてみましょう．

$$f(x) = a(x-p)^2+q$$

で定義される 2 次関数 $f\colon [\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ を考えます．$a>0$ であるとき，f の値域は p と定義域 $[\alpha, \beta)$ の関係に応じて，表 7 のように分類されます．

表 7: $a > 0$ のときの 2 次関数 $f\colon [\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ の値域

$[\alpha,\beta)$ と p の位置関係	値域	最大値	最小値
$p < \alpha < \beta$	$[f(\alpha), a(\beta-p)^2+q)$	なし	$f(\alpha)\ (x=\alpha)$
$\alpha \le p < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$	$[q, a(\beta-p)^2+q)$	なし	$q\ (x=p)$
$\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} \le p < \beta$	$[q, f(\alpha)]$	$f(\alpha)\ (x=\alpha)$	$q\ (x=p)$
$\alpha < \beta \le p$	$(a(\beta-p)^2+q, f(\alpha)]$	$f(\alpha)\ (x=\alpha)$	なし

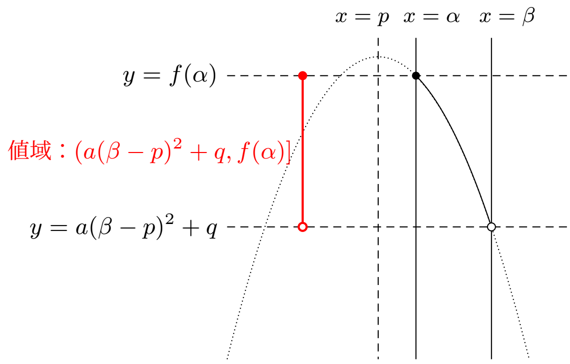


図 44: $f\colon [\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ のグラフ $(p<\alpha)$

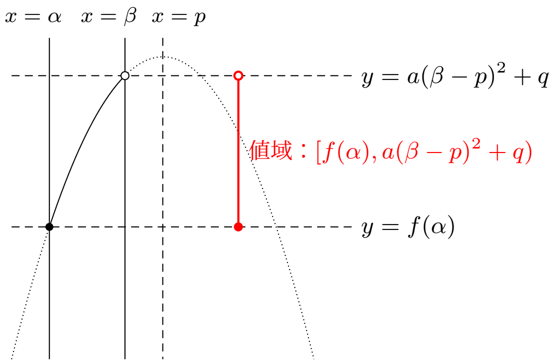


図 45: $f\colon [\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ のグラフ $(\beta \le p)$

Case 2-1：$a<0$ かつ $p \notin [\alpha,\beta)$ の場合　続いて扱うのは，放物線が上に凸であり，かつ放物線の頂点の x 座標 p が定義域内に入らないような場合です．このとき，f のグラフは図 44 または 45 のようになります．

まずは，$p<\alpha$ の場合について考えてみます．この場合 f のグラフは図 44 のようになりますから，f は定義域内で単調に減少していることがわかります．特に定義域の左端点 α で f は最大値 $f(\alpha)$ をとります．一方，定義域の右端で f は最も小さくなるはずですが，右端点 β は定義域には含まれないので，f は $a(\beta-p)^2+q$ という値をとることはできません．以上の観察から，f の値域は区間 $(a(\beta-p)+q, f(\alpha)]$ となることがわかります．

次に $\beta \le p$ の場合について調べてみます．この場合は f のグラフは図 45 のようであり，f は定義域内で単調に増加していることがわかります．したがって，定義域 $[\alpha,\beta)$ の左端点 α で最小値 $f(\alpha)$ をとります．f は右端点で最大値をとりたいのですが，残念ながら右端点 β は定義域に含まれず，f は $a(\beta-p)^2+q$ という値をとることはできません．したがって，f の値域は区間 $[f(\alpha), a(\beta-p)^2+q)$ となります．

Case 2-2：$a<0$ かつ $p \in [\alpha,\beta)$ の場合　f のグラフから決まる放物線が上に凸であり，かつ放物線の軸が f の定義域に含まれるという場合について調べてみましょう．このとき f のグラフは図 46 または 47 のようになります．

いずれの場合も定義域内に p を含みますから，f は $x=p$ で最大値 q を取ることがわかります．f の値が小さい方ではどのような振る舞いをするのか，それぞれの場合にわけて考えてみましょう．

まずは $\alpha \le p < \frac{\alpha+\beta}{2}$ の場合を見てみます．$\alpha \le x \le p$ の範囲では f は単調増加なので，x の値が小さいほど小さな値をとります．このことに注意すれば，

$$\{f(x) \mid \alpha \le x \le p\} = \{y \mid f(\alpha) \le y \le q\} = [f(\alpha), q]$$

であることがわかります．次に反対側の範囲 $p \le x < \beta$ に目を向けてみましょう．この範囲では f は単調現

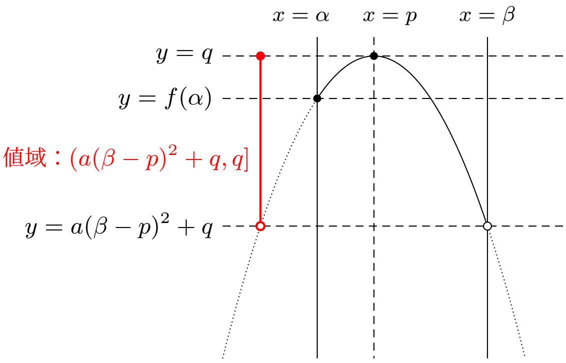


図 46: $f\colon [\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ のグラフ ($\alpha \le p < \frac{\alpha+\beta}{2}$)

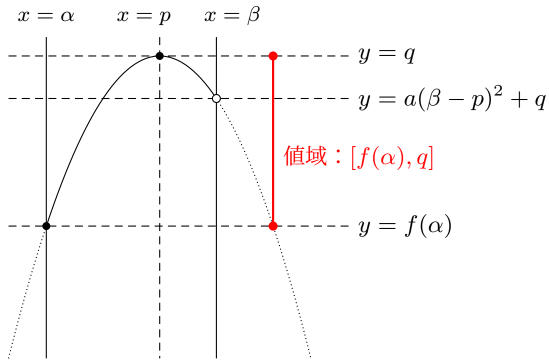


図 47: $f\colon [\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ のグラフ ($\frac{\alpha+\beta}{2} \le p < \beta$)

象なので，端点 β を含まないことに注意すれば

$$\{f(x) \mid p \le x < \beta\} = \{y \mid a(\beta-p)^2+q < y \le q\} = (a(\beta-p)^2+q, q]$$

となることがわかるでしょう．これより

$$\begin{aligned}\{f(x) \mid \alpha \le x < \beta\} &= \{f(x) \mid \alpha \le x \le p\} \cup \{f(x) \mid p \le x < \beta\} \\ &= \{y \mid f(\alpha) \le y \le q\} \cup \{y \mid a(\beta-p)^2+q < y \le q\} \\ &= \{y \mid f(\alpha) \le y \le q \text{ または } a(\beta-p)^2+q < y \le q\}\end{aligned}$$

となります．いま $\alpha \le p \le \frac{\alpha+\beta}{2}$ より $f(\alpha) > a(\beta-p)^2+q$ であることに注意すれば，

$$\begin{aligned}\{f(x) \mid \alpha \le x < \beta\} &= \{y \mid f(\alpha) \le y \le q \text{ または } a(\beta-p)^2+q) < y \le q\} \\ &= \{y \mid a(\beta-p)^2+q) < y \le q\} = (a(\beta-p)^2+q, q]\end{aligned}$$

がしたがいます．

頂点の x 座標 p が定義域 $[\alpha,\beta)$ の右半分にある，すなわち $\frac{\alpha+\beta}{2} \le p < \beta$ の場合はどうでしょうか．この場合も定義域を $x \le p$ と $p \le x$ の範囲にわけてみると，それぞれでの値の範囲は

$$\begin{aligned}\{f(x) \mid \alpha \le x \le p\} &= \{y \in \mathbb{R} \mid f(\alpha) \le y \le q\} = [f(\alpha), q] \\ \{f(x) \mid p \le x < \beta\} &= \{y \in \mathbb{R} \mid a(\beta-p)^2+q < y \le q\} = (a(\beta-p)^2+q, q]\end{aligned}$$

となることがわかります．ここで $\frac{\alpha+\beta}{2} \le p < \beta$ より $f(\alpha) \le a(\beta-p)^2+q$ となることに注意すれば，

$$\begin{aligned}\{f(x) \mid \alpha \le x < \beta\} &= \{f(x) \mid \alpha \le x \le p\} \cup \{f(x) \mid p \le x < \beta\} \\ &= \{y \mid f(\alpha) \le y \le q\} \cup \{y \mid a(\beta-p)^2+q < y \le q\} \\ &= \{y \mid f(\alpha) \le y \le q \text{ または } a(\beta-p)^2+q < y \le q\} \\ &= \{y \mid f(\alpha) \le y \le q\} \\ &= [f(\alpha), q]\end{aligned}$$

を得ます．

Case 2 のまとめ　これまでの議論の内容をまとめましょう．

$$f(x) = a(x-p)^2+q$$

によって 2 次関数 $f\colon [\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ を定義します．$a < 0$ ならば，p と定義域 $p\alpha,\beta)$ の関係に応じて，2 次関数 f の値域は表 8 のように分類することができます．

表 8: $a<0$ のときの 2 次関数 $f\colon [\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ の値域

$[\alpha,\beta)$ と p の位置関係	値域	最大値	最小値
$p<\alpha<\beta$	$(a(\beta-p)^2+q, f(\alpha)]$	$f(\alpha)$ $(x=\alpha)$	なし
$\alpha\le p<\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$	$(a(\beta-p)^2+q, q]$	q $(x=p)$	なし
$\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}\le p<\beta$	$[f(\alpha), q]$	q $(x=p)$	$f(\alpha)$ $(x=\alpha)$
$\alpha<\beta\le p$	$[f(\alpha), (a(\beta-p)^2+q)$	なし	$f(\alpha)$ $(x=\alpha)$

■定義域が $(\alpha,\beta]$ **の場合**　今度は，定義域が右端点を含まず，左端点を含む場合を考えてみます．

Case 1-1：$a>0$ **かつ** $p\notin(\alpha,\beta]$ **の場合**　最初に扱うのは，放物線の頂点の x 座標が定義域 $(\alpha,\beta]$ に含まれない場合です．すなわち $p\le\alpha$ または $\beta<p$ を仮定するということです．このとき，f のグラフはそれぞれ図 48 または図 49 のようになっています．

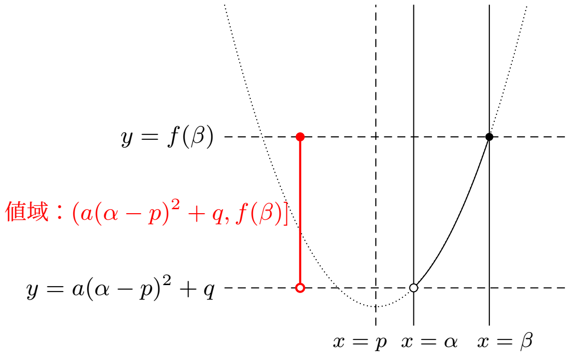


図 48: $f\colon [\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ のグラフ $(p<\alpha)$

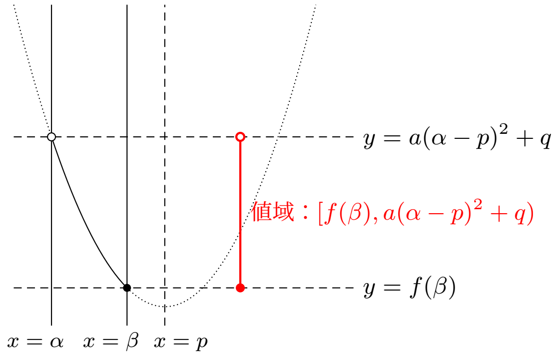


図 49: $f\colon [\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ のグラフ $(\beta\le p)$

$p\le\alpha$ の場合，f は定義域 $[\alpha,\beta)$ 内で単調に増加しています．したがって定義域の右端点 $x=\beta$ で f は最大値 $f(\beta)$ をとります．また定義域は左端点を含まないので小さい方の値は $a(\beta-p)^2+q<y$ で動きます．これより，f の値域は区間 $(a(\alpha-p)^2+q, f(\beta)]$ となります．

$\beta<p$ の場合は，f は定義域 $(\alpha,\beta]$ 内で単調減少であり，定義域の右端点 β で最小値 $f(\beta)$ をとります．f は定義域の左にゆくにしたがって大きくなりますが，左端点は定義域に含まれないので，$y<a(\alpha-p)^2+q$ の値しかとれません．このことより，f の値域は区間 $[f(\beta), a(\alpha-p)^2+q)$ となることがわかります．

Case 1-2：$a>0$ **かつ** $p\in(\alpha,\beta]$ **の場合**　放物線の軸が $\alpha<x\le\beta$ の範囲にある場合を考えます．このとき，$x=p$ が定義域の中央より左側にあるのか右側にあるのかの場合分けにより，f のグラフはさらに図 50 または図 51 のように表すことができます．

いずれの場合も定義域内に p を含みますから，f は $x=p$ で最小値 q を取ることがわかります．f の値が大きいほうではどのような振る舞いをするのか，それぞれの場合にわけて考えてみましょう．

まずは $\alpha<p\le\frac{\alpha+\beta}{2}$ の場合を見てみます．右端点を含み左端点を含まない範囲 $\alpha<x\le p$ において f は単調減少なので，

$$\{f(x)\mid\alpha<x\le p\}=[q, a(\alpha-p)^2+q)^2+q)$$

であることがわかります．次に反対側の範囲 $p\le x\le\beta$ に目を向けてみましょう．両端を含むこの範囲にお

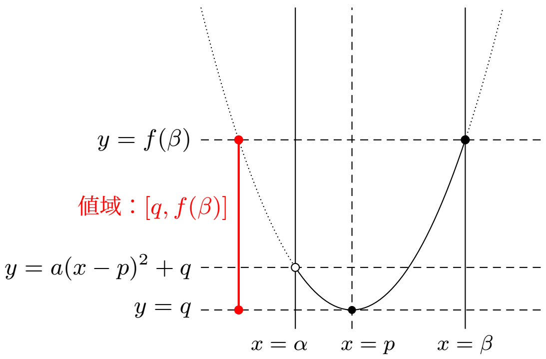


図 50: $f\colon (\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ のグラフ ($\alpha < p \leq \frac{\alpha+\beta}{2}$)

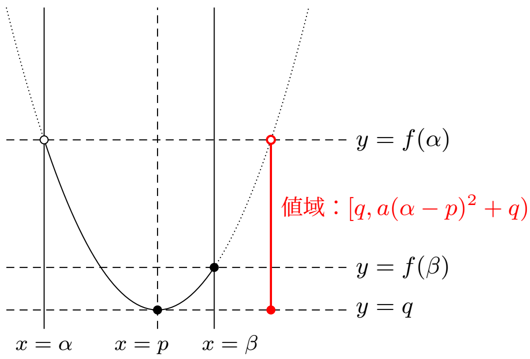


図 51: $f\colon (\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ のグラフ ($\frac{\alpha+\beta}{2} < p \leq \beta$)

いて f は単調増加ですから，

$$\{f(x) \mid p \leq x \leq \beta\} = [q, f(\beta)]$$

となることがわかります．いま $\alpha < p \leq \frac{\alpha+\beta}{2}$ より $a(\beta-p)^2+q \leq f(\beta)$ が成り立つので，

$$\begin{aligned}
\{f(x) \mid \alpha < x \leq \beta\} &= \{f(x) \mid \alpha < x \leq p\} \cup \{f(x) \mid p \leq x \leq \beta\} \\
&= \{y \mid q \leq y < a(\alpha-p)^2+q\} \cup \{y \mid q \leq y \leq f(\beta)\} \\
&= \{y \mid q \leq y \leq f(\beta)\} = [q, f(\beta)]
\end{aligned}$$

となるわけです．

頂点の x 座標 p が定義域 $(\alpha, \beta]$ の右半分にある，すなわち $\frac{\alpha+\beta}{2} < p \leq \beta$ の場合はどうでしょうか．この場合も定義域を $x \leq p$ と $p \leq x$ の範囲にわけてみると，それぞれでの値の範囲は

$$\begin{gathered}
\{f(x) \mid \alpha < x \leq p\} = [q, a(\alpha-p)^2+q) \\
\{f(x) \mid p \leq x \leq \beta\} = [q, f(\beta)]
\end{gathered}$$

となります．ここで $\frac{\alpha+\beta}{2} < p \leq \beta$ より $a(\alpha-p)^2+q > f(\beta)$ となることに注意すれば，

$$\begin{aligned}
\{f(x) \mid \alpha < x \leq \beta\} &= \{f(x) \mid \alpha < x \leq p\} \cup \{f(x) \mid p \leq x \leq \beta\} \\
&= \{y \mid q \leq y < a(\alpha-p)^2+q\} \cup \{y \mid q \leq y \leq f(\beta)\} \\
&= \{y \mid q \leq y < a(\alpha-p)^2+q \text{ または } q \leq y \leq f(\beta)]\} \\
&= \{y \mid q \leq y < a(\alpha-p)^2+q\} \\
&= [q, a(\alpha-p)^2+q)
\end{aligned}$$

を得ます．

Case 1：$a > 0$ の場合のまとめ　これまでの議論の内容をまとめてみましょう．$a > 0$ であるとし，2 次関数 $f\colon (\alpha, \beta]$ を

$$f(x) = a(x-p)^2+q$$

によって定めます．このとき，p と $(\alpha, \beta]$ の関係に応じて，f の値域は表 9 のように分類することができます．

表 9: $a > 0$ のときの 2 次関数 $f\colon (\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ の値域

$(\alpha, \beta]$ と p の位置関係	値域	最大値	最小値
$p \leq \alpha < \beta$	$(a(\alpha-p)^2+q, f(\beta)]$	$f(\beta)$ $(x=\beta)$	なし
$\alpha < p \leq \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$	$[q, f(\beta)]$	$f(\beta)$ $(x=\beta)$	q $(x=p)$
$\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < p \leq \beta$	$[q, a(\alpha-p)^2+q)$	なし	q $(x=p)$
$\alpha < \beta < p$	$[f(\beta), a(\alpha-p)^2+q)$	なし	$f(\beta)$ $(x=\beta)$

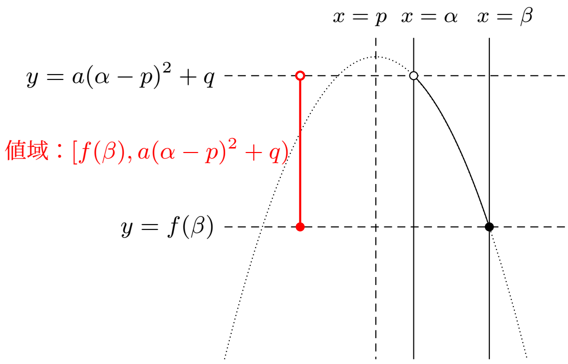


図 52: $f\colon (\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ のグラフ $(p \leq \alpha)$

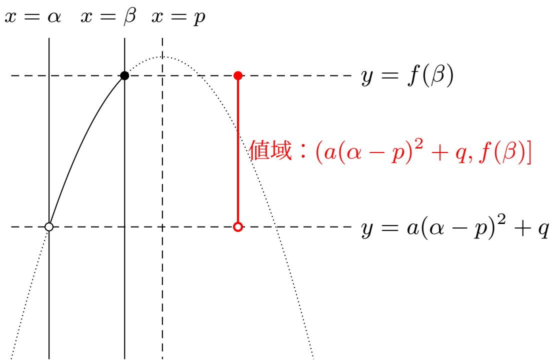


図 53: $f\colon (\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ のグラフ $(\beta < p)$

Case 2-1：$a < 0$ かつ $p \notin (\alpha, \beta]$ の場合　続いて扱うのは，放物線が上に凸であり，かつ放物線の頂点の x 座標 p が定義域内に入らないような場合です．このとき，f のグラフは図 52 または 53 のようになります．

まずは，$p \leq \alpha$ の場合について考えてみます．この場合 f のグラフは図 52 のようになりますから，f は定義域内で単調に減少していることがわかります．特に定義域の右端点 β で f は最小値 $f(\beta)$ をとります．f は定義域内で左側に進むほど大きな値をとりますが，左端点 α は定義域には含まれないので，f はこちら側では $f(x) < a(\beta-p)^2+q$ の範囲の値をとることがわかります．したがって f の値域は区間 $[f(\beta), a(\alpha-p)^2+q)$ となります．

次に $\beta < p$ の場合について調べてみます．この場合は f のグラフは図 53 のようであり，f は定義域内で単調に増加していることがわかります．したがって，定義域 $[\alpha, \beta)$ の右端点 β で最大値 $f(\beta)$ をとります．f は定義域内で左側に進むにしたがってより小さな値をとりますが，左端点 α は定義域に含まれないため，$f(x) > a(\alpha-p)^2+q$ となります．したがって，f の値域は区間 $(a(\alpha-p)^2+q, f(\beta)]$ であることがわかります．

Case 2-2：$a < 0$ かつ $p \in (\alpha, \beta]$ の場合　f のグラフから決まる放物線が上に凸であり，かつ放物線の軸が f の定義域に含まれるという場合について調べてみましょう．このとき f のグラフは図 54 または 55 のようになります．

いずれの場合も定義域内に p を含みますから，f は $x=p$ で最大値 q を取ることがわかります．f の値が小さい方ではどのような振る舞いをするのか，それぞれの場合にわけて考えてみましょう．

まずは $\alpha < p \leq \frac{\alpha+\beta}{2}$ の場合を見てみます．$\alpha < x \leq p$ の範囲では f は単調増加であることと，この範囲は右端点を含み左端点を含まないことに注意すれば，

$$\{f(x) \mid \alpha < x \leq p\} = (a(\alpha-p)^2+q, q]$$

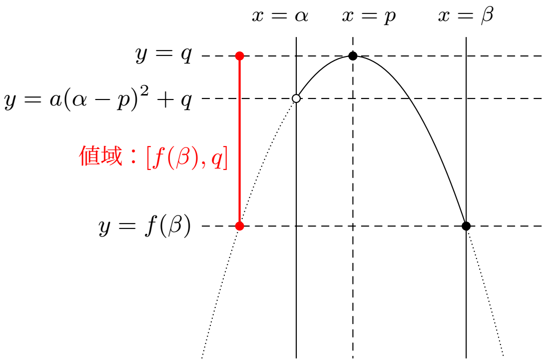


図 54: $f\colon(\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ のグラフ $(\alpha<p\leq\frac{\alpha+\beta}{2})$

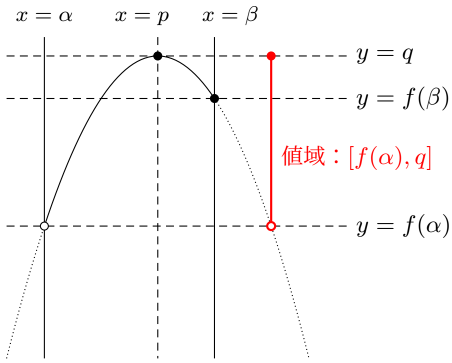


図 55: $f\colon(\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ のグラフ $(\frac{\alpha+\beta}{2}<p\leq\beta)$

であることがわかります．次に反対側の範囲 $p\leq x\leq\beta$ に目を向けてみましょう．この範囲では f は単調減少であり，かつこの範囲は両端点を含みますから，

$$\{f(x)\mid p\leq x\leq\beta\}=[f(\beta),q]$$

となることがわかるでしょう．いま $\alpha<p\leq\frac{\alpha+\beta}{2}$ と仮定しているので，$p-\alpha>\beta-p$ であり，$a(\alpha-p)^2+q\geq f(\beta)$ が成り立ちます．したがって，

$$\begin{aligned}\{f(x)\mid\alpha<x\leq\beta\}&=(a(\alpha-p)^2+q,q]\cup[f(\beta),q]\\&=[f(\beta),q]\end{aligned}$$

となります．

頂点の x 座標 p が定義域 $(\alpha,\beta]$ の右半分にある，すなわち $\frac{\alpha+\beta}{2}<p\leq\beta$ の場合はどうでしょうか．この場合も定義域を $x\leq p$ と $p\leq x$ の範囲にわけてみると，それぞれでの値の範囲は

$$\begin{aligned}\{f(x)\mid\alpha<x\leq p\}&=(a(\alpha-p)^2+q,q]\\\{f(x)\mid p\leq x<\beta\}&=[f(\beta),q]\end{aligned}$$

となることがわかります．ここで $\frac{\alpha+\beta}{2}\leq p<\beta$ より $a(\alpha-p)^2+q<f(\beta)$ となることに注意すれば，

$$\begin{aligned}\{f(x)\mid\alpha<x\leq\beta\}&=\{f(x)\mid\alpha\leq x\leq p\}\cup\{f(x)\mid p\leq x<\beta\}\\&=(a(\alpha-p)^2+q,q]\cup[f(\beta),q]\\&=(a(\alpha-p)^2+q,q]\end{aligned}$$

を得ます．

Case 2：$a<0$ の場合のまとめ　以上の考察結果をまとめましょう．$a<0$ とし，2 次関数 $f\colon(\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ を

$$f(x)=a(x-p)^2+q$$

によって定めます．このとき，f の値域は p と区間 $(\alpha,\beta]$ の関係に応じて，表 10 のように分類されます．

■定義域が (α,β) の場合

表 10: $a < 0$ のときの 2 次関数 $f\colon (\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ の値域

$(\alpha, \beta]$ と p の位置関係	値域	最大値	最小値
$p \leq \alpha < \beta$	$[f(\beta), a(\alpha - p)^2 + q)$	なし	$f(\beta)\ (x = \beta)$
$\alpha < p \leq \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$	$[f(\beta), q]$	$q\ (x = p)$	$f(\beta)\ (x = \beta)$
$\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < p \leq \beta$	$(a(\alpha - p)^2 + q, q]$	$q\ (x = p)$	なし
$\alpha < \beta < p$	$(a(\alpha - p)^2 + q, f(\beta)]$	$f(\beta)\ (x = \beta)$	なし

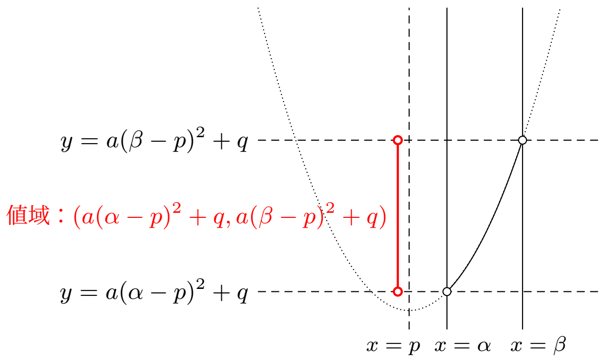


図 56: $f\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ のグラフ $(p \leq \alpha)$

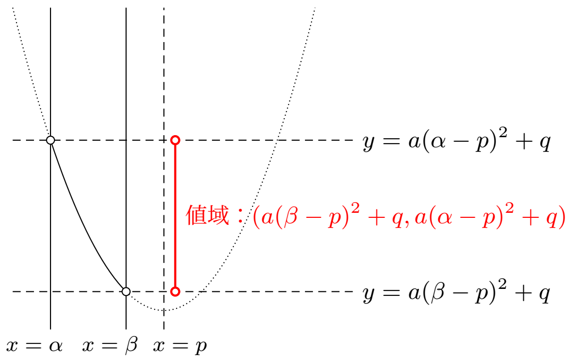


図 57: $f\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ のグラフ $(\beta \leq p)$

Case 1-1：$a > 0$ かつ $p \notin (\alpha, \beta)$ の場合　まずは，放物線の頂点が定義域 (α, β) に含まれない場合を考えます．つまり，$p \leq \alpha$ または $\beta \leq p$ ということです．このとき，f のグラフはそれぞれ図 56 または図 57 のような形をしています．

$p \leq \alpha$ の場合，f は定義域 (α, β) 内で単調に増加しています．このことと定義域が両端点を含まないことに注意すれば，f の値域は

$$\{f(x) \mid \alpha < x < \beta\} = (f(\alpha), f(\beta))$$

となることがわかります．

$\beta \leq p$ の場合は，f は定義域 (α, β) 内で単調減少となっているので，端点を含まないことに注意すれば

$$\{f(x) \mid \alpha < x < \beta\} = (f(\beta), f(\alpha))$$

が得られます．

Case 1-2：$a > 0$ かつ $p \in (\alpha, \beta)$ の場合　今度は，放物線が下に凸かつ，放物線の軸が $\alpha < x < \beta$ の範囲にある場合を考えます．このとき，(α, β) 内での p の位置によって，f のグラフはさらに図 59 または図 58 のように表すことができます．

いずれの場合も定義域内に p を含みますから，f は $x = p$ で最小値 q を取ることがわかります．値域を明らかにするためには，定義域 (α, β) を p の両側で二つにわけてみましょう．$\alpha < x \leq p$ の範囲では f は単調減少であり，この範囲は右端点を含み左端点を含まないから，

$$\{f(x) \mid \alpha < x \leq p\} = [q, a(\alpha - p)^2 + q)$$

であることがわかります．次に反対側の範囲 $p \leq x < \beta$ を眺めてみましょう．この範囲では f は単調増加であり，この範囲は左端点を含み右端点を含みますから，

$$\{f(x) \mid p \leq x < \beta\} = [q, a(\beta - p)^2 + q)$$

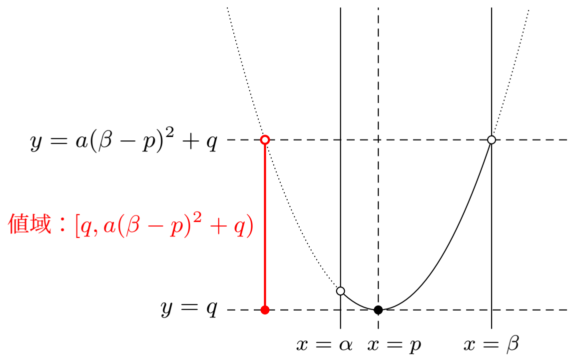


図 58: $f\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ のグラフ ($\alpha < p \leq \frac{\alpha+\beta}{2}$)

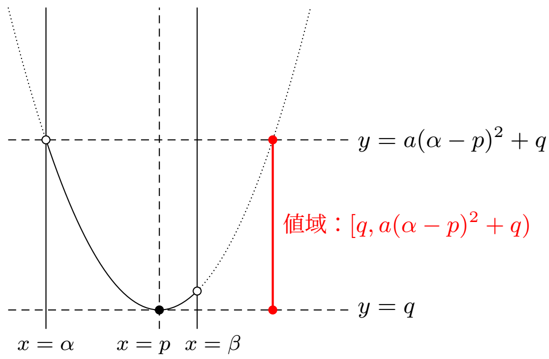


図 59: $f\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ のグラフ ($\frac{\alpha+\beta}{2} < p < \beta$)

となることがわかるでしょう．これより

$$\begin{aligned}\{f(x) \mid \alpha \leq x < \beta\} &= \{f(x) \mid \alpha \leq x \leq p\} \cup \{f(x) \mid p \leq x < \beta\} \\ &= \{y \mid q \leq y \leq f(\alpha)\} \cup \{y \mid q \leq y < a(\beta - p)^2 + q)\} \\ &= [q, a(\alpha - p)^2 + q) \cup [q, a(\beta - p)^2 + q)\end{aligned}$$

となります．

さて，$\alpha < p \leq \frac{\alpha+\beta}{2}$ のときは $a(\alpha - p)^2 + q \leq a(\beta - p)^2 + q$ なので，

$$\{f(x) \mid \alpha \leq x < \beta\} = [q, a(\alpha - p)^2 + q) \cup [q, a(\beta - p)^2 + q) = [q, a(\beta - p)^2 + q)$$

となっています．$\frac{\alpha+\beta}{2} < p < \beta$ の場合は逆に $a(\alpha - p)^2 + q > a(\beta - p)^2 + q$ なので，

$$\{f(x) \mid \alpha \leq x < \beta\} = [q, a(\alpha - p)^2 + q) \cup [q, a(\beta - p)^2 + q) = [q, a(\alpha - p)^2 + q)$$

であることがわかります．なお，$p = \frac{\alpha+\beta}{2}$ の場合には $a(\alpha - p)^2 + q = a(\beta - p)^2 + q$ であることに注意しておきましょう．

Case 1 のまとめ　以上の考察結果をまとめましょう．$a > 0$ とし，2 次関数 $f\colon (\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

によって定めます．このとき，f の値域は p と区間 (α, β) の関係に応じて，表 11 のように分類されます．なお，$p = \frac{\alpha+\beta}{2}$ のときは $a(\alpha - p)^2 + q = a(\beta - p)^2 + q$ であることに注意しておきましょう．

表 11: $a > 0$ のときの 2 次関数 $f\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ の値域

(α, β) と p の位置関係	値域	最大値	最小値
$p \leq \alpha < \beta$	$(a(\alpha - p)^2 + q, a(\beta - p)^2 + q)$	なし	なし
$\alpha < p \leq \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$	$[q, a(\beta - p)^2 + q)$	なし	q $(x = p)$
$\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < p < \beta$	$[q, a(\alpha - p)^2 + q)$	なし	q $(x = p)$
$\alpha < \beta \leq p$	$(a(\beta - p)^2 + q, a(\alpha - p)^2 + q)$	なし	なし

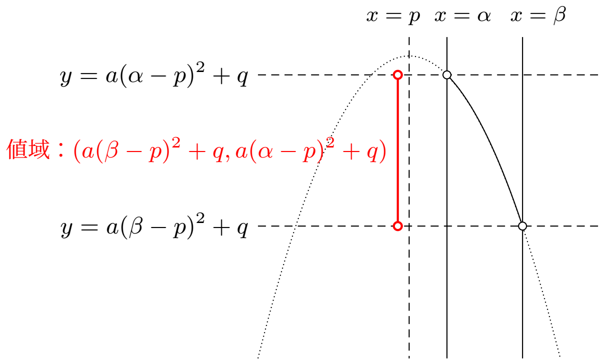


図 60: $f\colon(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ のグラフ $(p\le\alpha)$

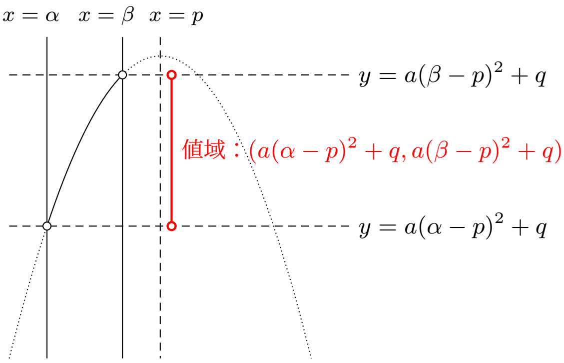


図 61: $f\colon(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ のグラフ $(\beta\le p)$

Case 2-1：$a<0$ かつ $p\notin(\alpha,\beta)$ の場合　続いて扱うのは，放物線が上に凸であり，かつ放物線の頂点の x 座標 p が定義域内に入らないような場合です．このとき，f のグラフは図 60 または 61 のようになります．

まずは，$p\le\alpha$ の場合について考えてみます．この場合 f のグラフは図 44 のように定義域内で単調減少となります．いま定義域 (α,β) は両端点を含まないので，f の値域は区間 $(a(\beta-p)+q, a(\alpha-p)^2+q)$ となることがわかります．

次に $\beta\le p$ の場合について調べてみます．この場合は f のグラフは図 45 のように，定義域内で単調増加となります．いま定義域 (α,β) が両端点を含まないことに注意すれば，$(a(\alpha-p)+q, a(\beta-p)^2+q)$ であることがわかります．

Case 2-2：$a<0$ かつ $p\in(\alpha,\beta)$ の場合　f のグラフから決まる放物線が上に凸であり，かつ放物線の軸が f の定義域に含まれるという場合について調べてみましょう．このとき f のグラフは図 62 または 63 のようになります．

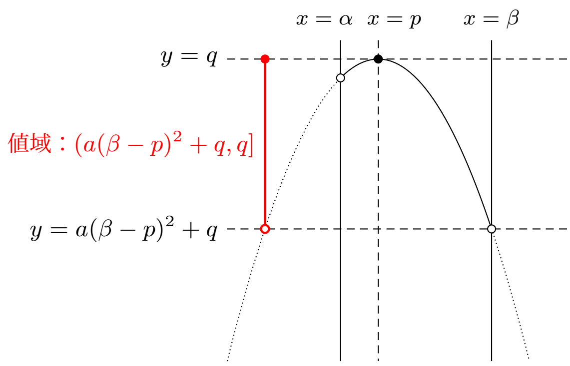


図 62: $f\colon(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ のグラフ $(\alpha<p\le\frac{\alpha+\beta}{2})$

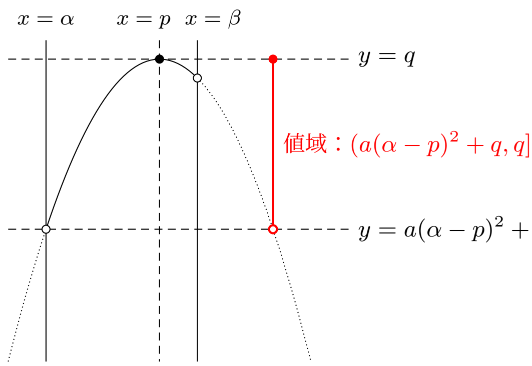


図 63: $f\colon(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ のグラフ $(\frac{\alpha+\beta}{2}<p<\beta)$

いずれの場合も定義域内に p を含みますから，f は $x=p$ で最大値 q を取ることがわかります．f の値域全体を求めるために，定義域を二つにわけてみます．$\alpha<x\le p$ の範囲では f は単調増加であり，この範囲が左端点を含まず右端点のみを含むことに注意すれば，

$$\{f(x)\mid\alpha\le x\le p\}=(a(\alpha-p)^2+q,q]$$

であることがわかります．また $p\le x<\beta$ で f は単調現象なので，この範囲が右端点 β を含まず左端点 p を

含むことに注意すれば

$$\{f(x) \mid p \leq x < \beta\} = (a(\beta - p)^2 + q, q]$$

となることがわかるでしょう．これより

$$\begin{aligned}\{f(x) \mid \alpha \leq x < \beta\} &= \{f(x) \mid \alpha \leq x \leq p\} \cup \{f(x) \mid p \leq x < \beta\} \\ &= (a(\alpha - p)^2 + q, q] \cup (a(\beta - p)^2 + q, q]\end{aligned}$$

となります．$\alpha < p \leq \frac{\alpha+\beta}{2}$ なら $a(\alpha - p)^2 + q \geq a(\beta - p)^2 + q$ なので，このとき f の値域は

$$\{f(x) \mid \alpha \leq x < \beta\} = (a(\alpha - p)^2 + q, q] \cup (a(\beta - p)^2 + q, q] = (a(\beta - p)^2 + q, q]$$

です．逆に $\frac{\alpha+\beta}{2} < p < \beta$ ならば $a(\alpha - p)^2 + q < a(\beta - p)^2 + q$ ですから，

$$\{f(x) \mid \alpha \leq x < \beta\} = (a(\alpha - p)^2 + q, q] \cup (a(\beta - p)^2 + q, q] = (a(\alpha - p)^2 + q, q]$$

であることがわかります．

Case 2：$a < 0$ の場合のまとめ　以上の考察結果をまとめてみましょう．$a < 0$ とし，2 次関数 $f\colon (\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

によって定義することにします．このとき，f の値域は p と区間 (α, β) の関係に応じて，表 12 のように分類することができます．なお，$p = \frac{\alpha+\beta}{2}$ のときには $a(\alpha - p)^2 + q = a(\beta - p) + q$ となり，値域は $(a(\beta - p)^2 + q, q]$

表 12: $a < 0$ のときの 2 次関数 $f\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ の値域

(α, β) と p の位置関係	値域	最大値	最小値
$p \leq \alpha < \beta$	$(a(\beta - p)^2 + q, a(\alpha - p)^2 + q)$	なし	なし
$\alpha < p \leq \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$	$(a(\beta - p)^2 + q, q]$	$q\ (x = p)$	なし
$\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < p < \beta$	$(a(\alpha - p)^2 + q, q]$	$q\ (x = p)$	なし
$\alpha < \beta \leq p$	$(a(\alpha - p)^2 + q, a(\beta - p)^2 + q)$	なし	なし

と書いても $(a(\alpha - p)^2 + q, q]$ と書いても同じことに注意しておきます．

3　2 次方程式

第 3 節の主題は 2 次方程式です．2 次関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が与えられたとき，

$$f(x) = 0 \tag{3.1}$$

という形の式を 2 次方程式といいます．第 3 節では，これまで調べてきた 2 次関数の性質を用いて，2 次方程式の解の性質について調べます．2 次方程式とは (3.1) という形の式のことなので，2 次方程式を解くとは，2 次関数のグラフと x 軸の共有点を求めるということに他なりません．そのため 2 次方程式の解を調べる際には，これまで 2 次関数やそのグラフについて議論してきた内容が役に立つのです．

3.1　2 次方程式とは

最初に，2 次方程式とは何なのかという定義を与えましょう．

定義 3.1.
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を 2 次関数とする．このとき，

$$f(x) = 0 \tag{3.2}$$

という形の式を，x に関する **2 次方程式** (quadratic equation) という．(3.2) を満たすような $x \in \mathbb{R}$ を 2 次方程式 (3.2) の**解**（solution）と呼び，解を全て求めることを 2 次方程式 (3.2) を**解く**という．

2 次方程式の解は**根** (root) とも呼ばれます．定義 3.1 の意味での解のことを，特に 2 次方程式の**実数解**と呼んだりします．実数の範囲で 2 次方程式を解くとは，集合 $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ を求めるということに他なりません．2 次方程式の異なる実数解は最大でも 2 つですが，1 つだけのこともありますし，そもそも実数解を持たないこともあります．2 次方程式が 1 つだけ実数解を持つとき，その解を**重解**と呼びます．これは，実数解が 1 つというのは，実数解が 2 つあってそれらが一致している（重なっている）という現象なのだ，という考え方に基づいています．

定義 3.1 の意味での解を実数解というのは，実数解に対して**虚数解**というものも存在するからです．しかし，高校数学で複素数や虚数という概念を扱うのはもっと先のことになるので，このノートでも虚数解は扱いません．任意の 2 次方程式は虚数解や重解の概念を含めれば，かならず 2 つの解を持つことが知られています．

3.2　実数解の存在

与えられた 2 次関数が実数解を持つかどうか，どのような方法によって確かめることができるでしょうか．私たちは 2 次関数のグラフを調べるという方法を持って，この問題に対処してみることにします．2 次関数のグラフの振る舞いを調べる際には平方完成された式で関数を表現すると便利でしたので，3.2 節において 2 次関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は

$$f(x) = a(x-p)^2 + q \tag{3.3}$$

のように表されていると仮定します．

3.2.1　$a > 0$ の場合

(3.3) の表現を持つ 2 次関数 f について $a > 0$ が成り立つとき，f のグラフは頂点が (p, q) で下に凸の放物線となるのでした．このとき，f のグラフが x 軸と共有点を持つかを考えてみます．f のグラフが x 軸と共有点を持つかは，頂点の y 座標 q の値によって決まります．q の値で場合分けをして考えてみましょう．

■Case 1：$a > 0$ かつ $q > 0$ の場合　まずは $a > 0$ かつ $a > 0$ の場合を考えましょう．このとき f のグラフを x 軸の位置関係は図 64 のようになっています．図 64 を眺めてみるとわかるように，この場合は f のグラフは x 軸と共有点を持ちません．したがって $a > 0$ かつ $q > 0$ の場合には 2 次方程式 $f(x) = 0$ は実数解を持たないということになります．

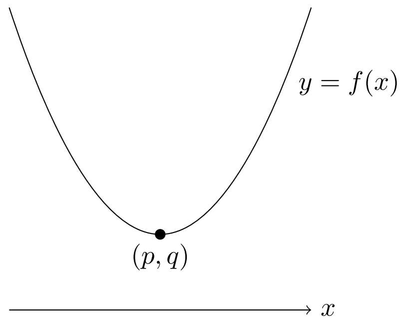


図 64: $a>0$ かつ $q>0$ の場合

このことを計算でも確かめてみましょう．いま $a>0$ ですから，全ての実数 x について

$$a(x-p)^2 \geq 0$$

が成り立ちます．したがって，全ての実数 x について

$$f(x)=a(x-p)^2+q \geq q > 0$$

となり，$f(x)$ は常に正の値をとることがわかります．ゆえに $f(x)=0$ を満たすような実数 x は存在しないのです．

■Case 2：$a>0$ かつ $q=0$ の場合　次は，$a>0$ かつ $q=0$ であるような場合を考えます．このとき，f のグラフは下に凸で，頂点の y 座標は 0 になっているので，f のグラフと x 軸の位置関係は図 65 のようになっています．図 65 を観察してみますと，この場合はどうやら f のグラフは x 軸との共有点を丁度一つ持つよう

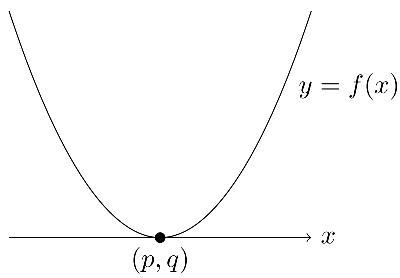


図 65: $a>0$ かつ $q=0$ の場合

です．なので，2 次方程式 $f(x)=0$ は実数解を一つ持つということになりそうです．

実際，p において $f(p)=q=0$ となりますから，p は $f(x)=0$ の解となります．$x \neq p$ のときは $a(x-p)^2>0$ なので，

$$f(x)=a(x-p)^2+q > q = 0$$

となり，$f(x)>0$ であることがわかります．したがって，p 以外の実数は $f(x)=0$ の解とはなりません．

■Case 3：$a>0$ かつ $q<0$ の場合　$a>0$ かつ $q<0$ のときは，f のグラフは下に凸で，頂点の y 座標は $q<0$ になっています．したがって，このとき f のグラフと x 軸の位置関係は図 66 のようになっています．図 66 より，f のグラフを x 軸は二つの共有点を持つようです．したがって，2 次方程式 $f(x)=0$ は実数解を

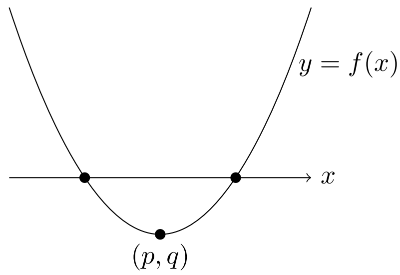


図 66: $a > 0$ かつ $q < 0$ の場合

2 つ持つはずです．

このことを式の操作によっても確かめてみましょう．いま $q < 0$ ですから，$-q > 0$ が成り立ちます．したがって $-\frac{q}{a} > 0$ となり，条件式

$$(x-p)^2 = -\frac{q}{a}$$

は

$$(x-p) = \sqrt{-\frac{q}{a}} \quad \text{または} \quad (x-p) = -\sqrt{-\frac{q}{a}}$$

と同値になります．これより，

$$x = p + \sqrt{-\frac{q}{a}} \quad \text{または} \quad x = p - \sqrt{-\frac{q}{a}}$$

と $f(x) = 0$ は同値であることがわかりました．以上の議論で，2 次方程式 $f(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解

$$p + \sqrt{-\frac{q}{a}}, \quad p - \sqrt{-\frac{q}{a}}$$

を持つということが示されました．

3.2.2 $a < 0$ の場合

ここからは，$a < 0$ の場合に 2 次方程式 $f(x) = 0$ と解くことを考えてみましょう．(3.3) の表現を持つ 2 次関数 f について $a < 0$ が成り立つとき，f のグラフは頂点が (p, q) で上に凸の放物線となります．この場合も，頂点の y 座標の位置によって，f のグラフを x 軸との共有点の数が決まることになります．議論の流れは $a > 0$ の場合と同じなので，今回は全ての場合をまとめて見ていきましょう．

$a < 0$ のとき，f のグラフと x 軸の位置関係は，q の値に応じてそれぞれ図 67，68，69 のようになります．図 67 より，$a < 0$ かつ $q < 0$ の場合には 2 次方程式 $f(x) = 0$ は実数解を持たないことがわかります．また図 68 を調べてみると，$a < 0$ かつ $q = 0$ の場合には $f(x) = 0$ は実数解をちょうど 1 つ持つということが確かめられます．図 69 は，$a < 0$ かつ $q > 0$ の場合 $f(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解を持つということを示しています．

以上の考察結果を，式の観点からも確かめてみましょう．いま $a < 0$ ですから，$q < 0$ の場合は常に

$$f(x) = a(x-p)^2 + q \leq q < 0$$

となり，$f(x) = 0$ を満たす実数 x は存在しないことがわかります．

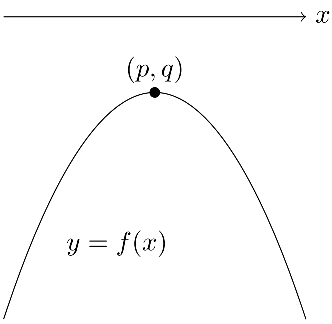


図 67: $a < 0$ かつ $q < 0$ の場合

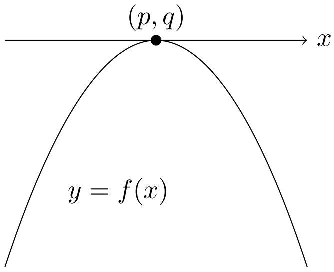


図 68: $a < 0$ かつ $q = 0$ の場合

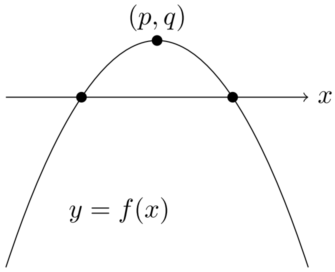


図 69: $a < 0$ かつ $q > 0$ の場合

$q = 0$ の場合は，$f(p) = q = 0$ なので，q は $f(x) = 0$ の解です．また p とは異なる x については $a(x-p)^2 < 0$ が成り立つので,

$$f(x) = a(x-p)^2 + q < q = 0$$

となります．ゆえに p 以外の実数解は存在しません．

$q > 0$ の場合は，$f(x) = 0$ と同値な方程式

$$(x-p)^2 = -\frac{q}{a}$$

を解くことで，$f(x) = 0$ はちょうど 2 つの実数解

$$p + \sqrt{-\frac{q}{a}}, \quad p - \sqrt{-\frac{q}{a}}$$

を持つということが示されます．

3.2.3 まとめ

ここまでは $a > 0$ と $a < 0$ でそれぞれ 3 種類，合計 6 種類の場合分けを行って，実数解がいつ，何個存在するのかを調べてきました．その結果を表 13 にまとめてみます．

表 13: 2 次方程式の実数解の数

a の符号	q の符号	実数解の数
	$q > 0$	なし
$a > 0$（グラフが下に凸）	$q = 0$	1 個
	$q < 0$	2 個
	$q > 0$	2 個
$a < 0$（グラフが下に凸）	$q = 0$	1 個
	$q < 0$	なし

表 13 を解の個数に注目して書き直したものを表 14 として書いてみます．表 14 を眺めているとあることに気が付くでしょうか．2 次方程式が実数解を持たないのは a と q の符号が一致するときで，2 つの実数解を持

表 14: 2 次方程式の実数解の数

実数解の数	a および q の符号
なし	$(a > 0$ かつ $q > 0)$ または $(a < 0$ かつ $q < 0)$
1 個	$(a > 0$ かつ $q = 0)$ または $(a < 0$ かつ $q = 0)$
2 個	$(a > 0$ かつ $q < 0)$ または $(a < 0$ かつ $q > 0)$

つのは a と q の符号が異なるときなのです．したがって，表 14 はさらにシンプルに，表 15 のように書き直すことができます[*2]．

表 15: 2 次方程式の実数解の数

実数解の数	a および q の符号
なし	$aq > 0$
1 個	$aq = 0$
2 個	$aq < 0$

3.2 節ではこれまで，2 次関数を f を表す式として平方完成された形 (3.3) を扱ってきました．では，2 次関数 f が

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{3.4}$$

と表されている場合，2 次方程式 $f(x) = 0$ の実数解の数と係数 a, b, c にはどのような関係があるでしょうか．最後にそのことについて調べてみましょう．

(3.4) を新たに平方完成すると，

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

となるのでした．（命題 1.11）したがって，2 次方程式の実数解の個数を決定づける値 aq は

$$aq = a\left(-\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4}$$

となります．この値の正負は分子の $b^2 - 4ac$ のみに依存しますから，2 次方程式 $f(x) = 0$ の実数解の個数は，表 16 のように分類できます．ここで出てきた $b^2 - 4ac$ は 2 次式 $ax^2 + bx + c$ の**判別式**（discriminant）と呼

表 16: 2 次方程式の実数解の数

実数解の数	a および q の符号
なし	$b^2 - 4ac < 0$
1 個	$b^2 - 4ac = 0$
2 個	$b^2 - 4ac > 0$

ばれる量です．discriminant の頭文字をとって $D = b^2 - 4ac$ などと書かれることもあります．

[*2] 二つの実数 r, s について，r と s の符号が一致することは $rs > 0$ と同値であり，r と s の符号が異なることは $rs < 0$ と同値なのでした．

例 3.2. (i) 2 次関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $f(x) = 2(x-3)^2 + 3$ で与えられているとします．このとき f のグラフは下に凸で，かつ頂点 $(3,3)$ の y 座標は正なので，$f(x) = 0$ は実数解をもちません．

(ii) 2 次関数 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $f(x) = -(x-1)^2 + 1$ で与えられているとします．このとき f のグラフは上に凸であり，頂点 $(1,1)$ の y 座標は正なので，$g(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解を持ちます．

(iii) 2 次関数 $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $h(x) = x^2 + x + 1$ で与えられているとします．h を定める 2 次式の判別式を計算すると，

$$1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

となるので，2 次方程式 $h(x) = 0$ は実数解を持ちません． ■

問題 10. (i) 2 次方程式 $4(x-2)^2 - 9 = 0$ の実数解の数を調べよ．

(ii) 2 次方程式 $-3(x-2)^2 - 1 = 0$ の実数解の数を調べよ．

(iii) 2 次方程式 $x^2 - 6x + 5 = 0$ の実数解の数を調べよ．

(iv) 2 次方程式 $4x^2 + 4x + 1 = 0$ の実数解の数を調べよ．

(v) 2 次方程式 $3x^2 - 3x + 4 = 0$ の実数解の数を調べよ．

3.3 解の計算

3.2 節での議論により，2 次方程式はどのような場合にいくつの実数解を持つか完全に分類することができました．しかし，私たちにとっては実際に 2 次方程式の解を求めることも大切です．3.3 節では，2 次方程式の解を具体的に求める方法について調べましょう．

3.3.1 因数分解

2 次方程式の解を求めるためのわかりやすい方法は，因数分解を行うことです．因数分解をすること自体は容易ではありませんが，もし因数分解が出来たならば 2 次方程式の解は即座に求めることができます．

命題 3.3.
$a \neq 0$ とし，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする．このとき，2 次方程式

$$a(x-\alpha)(x-\beta) = 0$$

の解は α および β である．

証明. $a \neq 0$ であることから，

$$a(x-\alpha)(x-\beta) = 0$$

が成り立つことと

$$(x-\alpha)(x-\beta) = 0$$

が成り立つことは同値である．これはさらに

$$x - \alpha = 0 \quad \text{または} \quad x - \beta = 0$$

が成り立つこととも同値であり，各々の式を変形すると

$$x = \alpha \quad \text{または} \quad x = \beta$$

とも同値であることがわかる．したがって，

$$a(x-\alpha)(x-\beta) = 0$$

の解は α と β である． □

命題 3.3 より，2 次式が

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$$

のように因数分解できる場合には，2 次方程式 $f(x)$ の解が具体的に求められることがわかりました．

今度は逆の問題を考えてみます．2 次方程式 $f(x) = 0$ は実数 α と β を解に持つとします．このとき，2 次式 $f(x)$ は先ほどのように因数分解することができるでしょうか．

命題 3.4.
2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

は実数 α と β を解に持ち，またそれ以外の解は持たないとする．このとき，全ての $x \in \mathbb{R}$ について

$$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$$

が成り立つ．

証明． 関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

と定義する．2 次方程式 $f(x) = 0$ は α と β を解に持つから，$f(\alpha) = 0$ かつ $f(\beta) = 0$ が成り立つ．すなわち

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0, \tag{3.5}$$
$$a\beta^2 + b\beta + c = 0 \tag{3.6}$$

である．

(3.5) − (3.6) を計算すると

$$\begin{array}{rr@{\;}l} & a\alpha^2 + b\alpha + c & = 0 \\ -) & a\beta^2 + b\beta + c & = 0 \\ \hline & a(\alpha^2 - \beta^2) + b(\alpha - \beta) & = 0 \end{array}$$

となる．いま

$$\begin{aligned} a(\alpha^2 - \beta^2) + b(\alpha - \beta) &= a(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) + b(\alpha-\beta) \\ &= (\alpha-\beta)\left\{a(\alpha+\beta) + b\right\} \end{aligned}$$

であることに注意すれば，これより

$$\alpha - \beta = 0 \quad \text{または} \quad a(\alpha+\beta) + b = 0$$

がわかる．これらの場合について，場合分けを行っていずれの場合も

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

という因数分解が可能であることを証明しよう．

Case 1． $\alpha = \beta$ のときは $f(x) = 0$ の実数解は 1 つとなり，3.2 節での結果により $b^2 - 4ac = 0$ となる．したがって f の式を平方完成すれば，全ての $x \in \mathbb{R}$ について

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

となることがわかる．この表現と命題 3.4 より $-\frac{b}{2a}$ は $f(x) = 0$ の解であることがしたがうので，$\alpha = \beta = -\frac{b}{2a}$ である．ゆえに，全ての x について

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

が成り立つ．

Case 2． $a(\alpha + \beta) + b = 0$ のときは，$b = -a(\alpha + \beta)$ を (3.5) に代入することで

$$a\alpha^2 - a(\alpha + \beta)\alpha + c = 0$$

を得る．この式を整理すると，

$$-a\alpha\beta + c = 0$$

となるので，

$$b = -a(\alpha + \beta) \quad \text{かつ} \quad c = a\alpha\beta$$

がわかる．したがって

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= ax^2 - a(\alpha + \beta)x + a\alpha\beta \\ &= a\left\{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\right\} \\ &= a(x - \alpha)(x - \beta) \end{aligned}$$

となり，全ての x について

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

が成立している． □

命題 3.4 より，2 次式 $p(x)$ が $a(x - \alpha)(x - \beta)$ と因数分解できれば，$p(x) = 0$ は α と β を解に持つことがわかりました．逆に，命題 3.5 より 2 次方程式 $p(x) = 0$ が α と β を解にもてば，$p(x)$ は $a(x - \alpha)(x - \beta)$ と因数分解することができます．つまり，2 次方程式を解くということと，2 次式を因数分解するということは，実質的に同等の操作なのです．

さて，因数分解を利用して実際に 2 次方程式を解いてみましょう．

例 3.5. (i) 2 次方程式 $3(2x + 1)(x - 6) = 0$ を考えます．$3(2x + 1)(x - 6) = 0$ は「$2x + 1 = 0$ または $x - 6 = 0$」と同値なので，この方程式の解は $-\frac{1}{2}$ および 6 となります．

(ii) 2 次方程式 $2x^2+5x+2=0$ を考えます．左辺の 2 次式は

$$2x^2+5x+2=(2x+1)(x+2)$$

と因数分解できるので，$2x^2+5x+2=0$ は「$2x+1=0$ または $x+2=0$」と同値です．したがってこの方程式の解は $-\frac{1}{2}$ および -2 となります． ■

問題 11. (i) 2 次方程式 $3(x-1)(x+2)$ を解け．

(ii) 2 次方程式 $(3x+1)(-x-1)=0$ を解け．

(iii) 2 次方程式 $8x^2+2x-3=0$ を解け．

(iv) 2 次方程式 $2x^2+11x+12$ を解け．

3.3.2 解の公式

3.3.1 節で学んだように 2 次方程式を解くことと，2 次式を因数分解することは実質的に同等の作業です．なので 2 次方程式を解くには因数分解さえできればよいわけですが，事はそう上手くはいきません．理論上は簡単でも，因数分解を実際に行うのは難しいのです．因数分解を求めるのが難しい場合は，2 次方程式の解の公式を用いるのが便利です．

解の公式にたどりつくために，2 次方程式を具体的に解くための方法を，簡単な場合から順番に考えてゆきましょう．

Step 1：$x^2=\alpha$ を解く　この 2 次方程式は $\alpha\geq 0$ の場合に $\sqrt{\alpha}$ と $-\sqrt{\alpha}$ を解に持ちます．なお，$\alpha=0$ のときこれらは重解となっています．

Step 2：$(x-p)^2=\alpha$ を解く　$z=x-p$ とすれば，この 2 次方程式は

$$z^2=\alpha$$

と変換することができます．先ほどの議論よりこの方程式は $\alpha\geq 0$ の場合に $z=\sqrt{\alpha}$ および $z=-\sqrt{\alpha}$ を解にもつことがわかります．いま $x=z+p$ なので，元の方程式の解は

$$p+\sqrt{\alpha},\quad p-\sqrt{\alpha}$$

となります．

Step 3：$a(x-p)^2+q=0$ の場合　この方程式を変形すると，

$$(x-p)^2=-\frac{q}{a}$$

となります．一つ前の議論の結果から，変換された方程式は $-\frac{q}{a}\geq 0$ のとき

$$p+\sqrt{-\frac{q}{a}},\quad p-\sqrt{-\frac{q}{a}}$$

を解に持つことがわかります．なお，解の存在条件 $-\frac{q}{a}\geq 0$ は $aq\leq 0$ と同値であることに注意しておきましょう．

ここまでの議論をまとめることで，2 次方程式の解について以下の解の公式が導かれます．

定理 3.6.
2 次方程式
$$a(x-p)^2+q=0 \tag{3.7}$$
は実数解を持つとする．(i.e. $aq \leq 0$ が成り立つ．) このとき (3.7) の実数解は
$$p+\sqrt{-\frac{q}{a}}, \quad p-\sqrt{-\frac{q}{a}}$$
である．

定理 3.6 の導出方法にしたがって，2 次方程式の解を求めてみましょう．

例 3.7. 2 次方程式
$$2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-3=0$$
を解いてみます．3 を右辺に移項して，両辺を 2 で割ると
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$$
となります．したがって，x がこの方程式を満たすとき
$$x+\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{または} \quad x+\frac{1}{2}=-\sqrt{\frac{3}{2}}$$
が成り立ちます．これより，求める解は
$$-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad -\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{2}}$$
の 2 つとなります．なお，この解を整理すると
$$\frac{-1+\sqrt{6}}{2}, \quad \frac{-1-\sqrt{6}}{2}$$
となることに注意しておきます． ■

定理 3.6 より，2 次式が平方完成された形をしている場合，それが定める 2 次方程式の解は具体的な計算で求められることがわかりました．平方完成されていない一般の 2 次式の場合は，平方完成をしてから先ほどと同じ議論を行うことで，解の公式を導出することができます．

定理 3.8 (2 次方程式の解の公式).
2 次方程式
$$ax^2+bx+c=0 \tag{3.8}$$
は実数解を持つとする．(i.e. $b^2-4ac \geq 0$ が成り立つ．) このとき (3.8) の実数解は
$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

である．

証明． まずは与えられた 2 次式を平方完成すると，(3.8) は

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$$

と同値であることがわかる．これを整理すると，

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

となる．いま $b^2-4ac\geq 0$ であることに注意すれば，この方程式は

$$x+\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\quad \text{または}\quad x+\frac{b}{2a}=-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

と同値である．これはさらに

$$x=-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\quad \text{または}\quad x=-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

とも同値であるから，(3.8) の解は

$$-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}},\quad -\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

である．最後にこの解の表現をもう少し整理してみると，

$$\begin{aligned}
-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}&=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}\\
&=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}&=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}\\
&=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
&=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

となるので，(3.8) の解は

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

であることがわかる． □

定理 3.8 より 2 次方程式 (3.8) の解は

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

となるわけですが，この二つの解をまとめて

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

と表したりすることもあります．書く文字の量を減らすという意味では便利な記法ですが，この解を用いてさらに計算を行う場合などは，符号の扱いを間違わないように注意が必要です．

解の公式を用いて 2 次方程式を解いてみましょう．

例 3.9. 2 次方程式

$$2x^2 - 6x + 1 = 0$$

を解いてみます．解の公式を適用すれば，この方程式の解は

$$\frac{-(-6) + \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}, \quad \frac{-(-6) - \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}$$

であることがわかります．これを計算して整理すれば，解は

$$\frac{3 + \sqrt{7}}{2}, \quad \frac{3 - \sqrt{7}}{2}$$

となります． ■

4　2 次関数と 2 次不等式

第 4 節では 2 次不等式について学びます．2 次関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が与えられると，以下の 4 つの不等式を考えることができます．

$$f(x) \leq 0, \qquad f(x) < 0,$$
$$f(x) \geq 0, \qquad f(x) > 0.$$

これらの不等式を 2 次不等式と呼びます．2 次不等式を解くとは，2 次関数のグラフが x 軸より下にあるような，あるいは上にあるような x の範囲を求めるということになります．したがって，これまで行ってきた 2 次関数のグラフに関する考察を用いれば，2 次不等式の解の仕組みを調べることができるのです．

4.1　2 次不等式

まずは，2 次不等式とは何かという定義を行いましょう．

定義 4.1.
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を 2 次関数とする．このとき，

$$f(x) \leq 0$$

あるいは

$$f(x) < 0$$

という形の式を **2 次不等式** (quadratic inequality) という．不等式を満たす $x \in \mathbb{R}$ を 2 次不等式の**解**といい，2 次不等式の解を全て求めることを 2 次不等式を**解く**という．

集合の記法を使えば，2 次不等式 $f(x) \leq 0$ を解くとは集合

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq 0\}$$

を具体的に求めるということになります．

定義 4.1 では $f(x) \leq 0$ あるいは $f(x) < 0$ という形の不等式しか扱っていませんでしたので，一見全ての場合を網羅していないようにも思えます．しかし $f(x) \geq 0$ や $f(x) > 0$ という形の不等式は $-f(x) \leq 0$ および $-f(x) < 0$ という不等式に書きかえられますから，実際に調べるのは定義 4.1 のパターンだけで十分だということがわかります．

4.2　2 次不等式の解

4.2 節では，実際に 2 次不等式を解くための方法を考えていきましょう．私たちはここでも，まずは 2 次関数のグラフを観察するというアプローチを採用してみることにします．その見方によれば，2 次不等式を解くとは f のグラフが x 軸より下にあるような，x の集合を解くということになります．2 次関数のグラフは 2 次の係数の符号によってその装いを大きく変えるわけでしたから，やはり a の符号による場合分けを行う必要があります．これ以降，2 次関数 f は

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

という表現を持っているものとします．

4.2.1　$a > 0$ の場合

まずは $a > 0$ の場合を考えます．このとき，2 次関数 f のグラフは下に凸の放物線となるのでした．

■$a > 0$ かつ $b^2 - 4ac < 0$ の場合　このとき，f のグラフは x 軸と共有点を持たないですから，f のグラフと x 軸の関係性は以下のようになります．図 70 よりわかるように f のグラフは常に x 軸より上にあるので，2

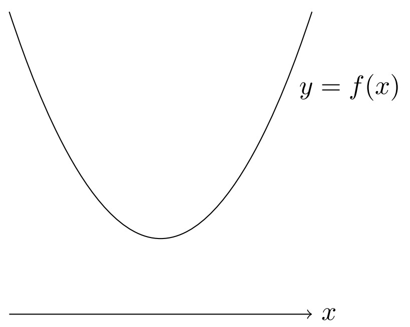


図 70: $a > 0$ かつ $b^2 - 4ac < 0$ の場合

次不等式 $f(x) \leq 0$ と $f(x) < 0$ はともに解を持ちません．言いかえれば，解の集合は空集合になります．

■$a > 0$ かつ $b^2 - 4ac = 0$ の場合　このとき，f のグラフは x 軸とただ一つ共有点を持つので，f のグラフと x 軸の関係性は図 71 のようになります．ここで $\alpha = -\frac{b}{2a}$ おくことにします．このとき α は 2 次方程式

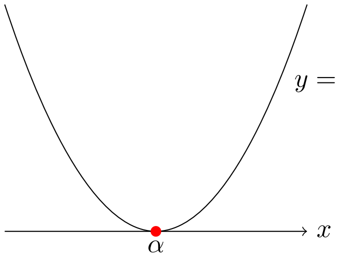


図 71: $a > 0$ かつ $b^2 - 4ac = 0$ の場合

$f(x) = 0$ のただ一つの解であり，f は

$$f(x) = a(x - \alpha)^2$$

と表現できるのでした．

図 71 をもとに，まずは 2 次不等式 $f(x) < 0$ について考えてみます．いま $f(x) \geq 0$ が全ての $x \in \mathbb{R}$ について成り立っているので，$f(x) < 0$ は解を持ちません．すなわち，解の集合は空集合です．

次に $f(x) \leq 0$ を考えてみます．$f(x)$ は $x = \alpha$ のときに 0 となり，それ以外の x 点では $f(x) > 0$ となっています．したがって，$f(x) \leq 0$ の解の集合は $\{\alpha\}$ となることがわかります．

■$a > 0$ かつ $b^2 - 4ac > 0$ の場合　$b^2 - 4ac > 0$ の場合を考えます．このとき f のグラフは x 軸との共有点を二つ持つような下に凸の放物線なので，図 72 のような姿をしています．いま 2 次方程式 $f(x) = 0$ の 2 つ

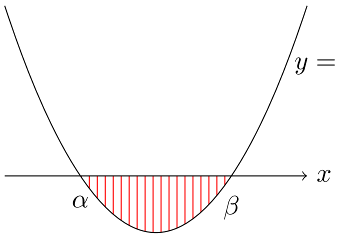


図 72: $a > 0$ かつ $b^2 - 4ac > 0$ の場合

の実数解のうち，小さいほうを α，大きいほうを β とおくことにします．いま $a > 0$ であることに注意すれば，解の公式より得られる二つの解は

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

を満たすことがわかります．よって

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

となっています．

図 72 を眺めてみると，$f(x)$ は $\alpha < x < \beta$ のときに $f(x) < 0$ を満たしていることがわかります．したがって $f(x) < 0$ の解全体の集合は

$$(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \beta\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x \text{ かつ } x < \beta\}$$

です．

さらに α と β で f はちょうど 0 の値をとりますから，$f(x) \leq 0$ の解全体の集合は

$$[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \leq \beta\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \text{ かつ } x \leq \beta\}$$

となることもわかります．

問題 12. 次の 2 次不等式を解け．

(i) $x^2 + x + 1 \leq 0$.

(ii) $x^2 + 2x + 1 < 0$.

(iii) $2x^2 - 4x + 1 \leq 0$.

4.2.2　$a < 0$ の場合

次は $a < 0$ の場合を考えます．このとき f のグラフは上に凸の放物線となります．

■$a < 0$ かつ $b^2 - 4ac > 0$ の場合　このとき，f のグラフは x 軸と二つの共有点を持ちます．したがって，f のグラフは図 73 のようになります．ここで $f(x) = 0$ の 2 つの実数解のうち小さいほうを α，大きいほうを

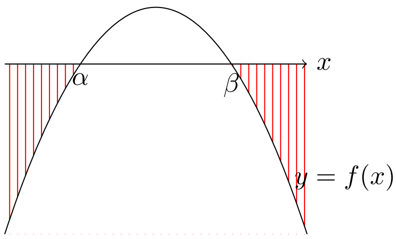


図 73: $a < 0$ かつ $b^2 - 4ac > 0$ の場合

β とおくことにしましょう．いま $a < 0$ より解の公式から求まる 2 つの実数解は

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

を満たします．これより α と β は具体的に

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

と書けることがわかります．

図 73 を見ると，$f(x) < 0$ を満たすような x は，$x < \alpha$ の部分と $x > \beta$ の部分に分布していることがわかります．したがって，$f(x) < 0$ の解全体の集合は

$$(-\infty, \alpha) \cup (\beta, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \alpha \text{ または } \beta < x\}$$

となります．

$f(x) \leq 0$ の場合は先ほどに $f(x) = 0$ を満たす x が加わるので，解全体の集合は

$$(-\infty, \alpha] \cup [\beta, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \alpha \text{ または } \beta \leq x\}$$

となるのです．

■$a<0$ かつ $b^2-4ac=0$ の場合　このとき，f のグラフは頂点のみで x 軸と交わる，上に凸の放物線となるのでした．したがって，f のグラフは図 74 のようになります．ただし，図 74 においては $\alpha=-\frac{b}{2a}$ とおいて

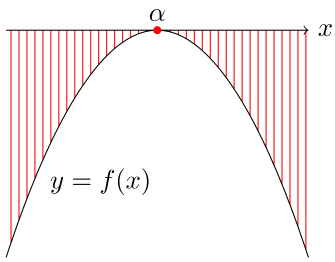


図 74: $a<0$ かつ $b^2-4ac=0$ の場合

います．

この場合，あらゆる実数 x について $f(x)\leq 0$ が成り立っています．よって $f(x)\leq 0$ の解全体の集合は，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ です．

また $x\neq\alpha$ ならば $f(x)<0$ が成り立っています．$f(\alpha)=0$ であることとあわせれば，$f(x)<0$ の解全体の集合は

$$\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq\alpha\}=(-\infty,\alpha)\cup(\alpha,\infty)$$

となることがわかります．

■$a<0$ かつ $b^2-4ac<0$ の場合　この場合は f のグラフは上に凸の放物線ですが，x 軸とは共有点を持ちません．（図 75 を参照．）したがって不等式 $f(x)\leq 0$ および $f(x)<0$ はどちらも全ての実数を解に持ちます．

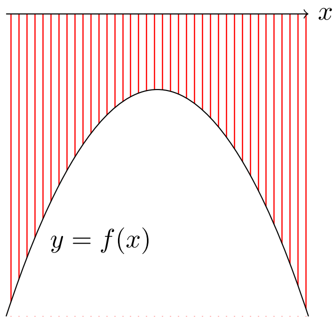


図 75: $a<0$ かつ $b^2-4ac<0$ の場合

問題 13. 次の 2 次不等式を解け．

(i) $-x^2+2x-1<0.$

(ii) $-3x^2+6x+1<-3.$

4.2.3　まとめ

ここまで議論してきたことを表にまとめてみましょう．まずは 2 次不等式 $f(x)\leq 0$ について考えます．表 17 を見て下さい．ただし，17 における α,β は 2 次方程式 $f(x)=0$ の実数解で，$\alpha\leq\beta$ となるようにとって

表 17: $f(x) \le 0$ の解

a の符号	b^2-4ac の符号	解の集合
$a>0$	$b^2-4ac>0$	$[\alpha,\beta]$
	$b^2-4ac=0$	$\{\alpha\}$
	$b^2-4ac<0$	$\emptyset$
$a<0$	$b^2-4ac>0$	$(-\infty,\alpha]\cup[\beta,\infty)$
	$b^2-4ac=0$	$\mathbb{R}$
	$b^2-4ac<0$	$\mathbb{R}$

います．

等号を含まない 2 次不等式 $f(x)<0$ の解についてまとめたものが，表 18 になります．ここの α と β は表 17 と同じものです．

表 18: $f(x) < 0$ の解

a の符号	b^2-4ac の符号	解の集合
$a>0$	$b^2-4ac>0$	(α,β)
	$b^2-4ac=0$	$\emptyset$
	$b^2-4ac<0$	$\emptyset$
$a<0$	$b^2-4ac>0$	$(-\infty,\alpha)\cup(\beta,\infty)$
	$b^2-4ac=0$	$\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq\alpha\}$
	$b^2-4ac<0$	$\mathbb{R}$

次に $f(x)\ge 0$ の形の 2 次不等式について考えましょう．$f(x)\ge 0$ は $f(x)<0$ の否定ですから，不等式 $f(x)\ge 0$ の解の集合は $f(x)<0$ の解の集合の補集合となるはずです．したがって，$f(x)\ge 0$ の解は表 19 のようにまとめることができます．

表 19: $f(x) \ge 0$ の解

a の符号	b^2-4ac の符号	解の集合
$a>0$	$b^2-4ac>0$	$(-\infty,\alpha]\cup[\beta,\infty)$
	$b^2-4ac=0$	$\mathbb{R}$
	$b^2-4ac<0$	$\mathbb{R}$
$a<0$	$b^2-4ac>0$	$[\alpha,\beta]$
	$b^2-4ac=0$	$\{\alpha\}$
	$b^2-4ac<0$	$\emptyset$

最後に $f(x)>0$ という 2 次不等式の解を分類します．$f(x)>0$ は $f(x)\le 0$ の否定ですから，$f(x)>0$ の解の集合は $f(x)\le 0$ の解の集合の補集合となります．これより，$f(x)>0$ の解は表 20 のようになっていることがわかります．

表 20: $f(x) > 0$ の解

a の符号	$b^2 - 4ac$ の符号	解の集合
	$b^2 - 4ac > 0$	$(-\infty, \alpha) \cup (\beta, \infty)$
$a > 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \alpha\}$
	$b^2 - 4ac < 0$	$\mathbb{R}$
	$b^2 - 4ac > 0$	(α, β)
$a < 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$\emptyset$
	$b^2 - 4ac < 0$	$\emptyset$

問題 14. 次の 2 次不等式を解け.

(i) $2x^2 - 2x + 3 \geq 0$.

(ii) $-2x^2 - 3x + 1 \geq 1$.

A 演習問題の解答

問題 1 の解答. $f(x) = 3x^2$，$g(x) = -\frac{1}{2}x^2$，$h(x) = -\frac{16}{9}x^2$ とすると，関数 f，g，h のグラフはそれぞれ図 76，図 77，図 78 のようになる.

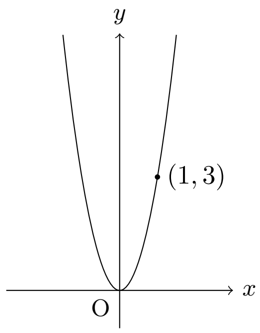


図 76: f のグラフ

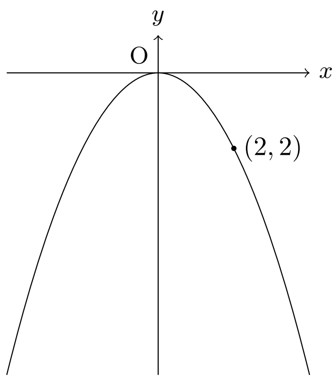


図 77: g のグラフ

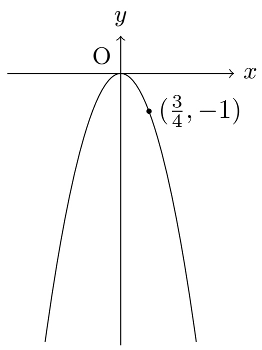


図 78: h のグラフ

問題 2 の解答. (i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $f(x) = (x-2)^2 + 1$ で定義されているので，**軸は** $x = 2$，**頂点は** $(2, 1)$ **である.**

(ii) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $g(x) = -\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4}$ と表されているから，**軸は** $x = -\frac{1}{2}$，**頂点は** $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$ **である.**

(iii) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $h(x) = (x+6)^2$ と表されているから，**軸は** $x = -6$，**頂点は** $(-6, 0)$ **である.**

問題 3 の解答. $f(x) = -(x-1)^2 + 2$，$g(x) = \frac{1}{4}(x-3)^2 - 4$，$h(x) = -\frac{4}{25}(x-5)^2 + 1$ とする．このとき，f，g，h のグラフはそれぞれ図 79，図 80，図 81 のようになる.

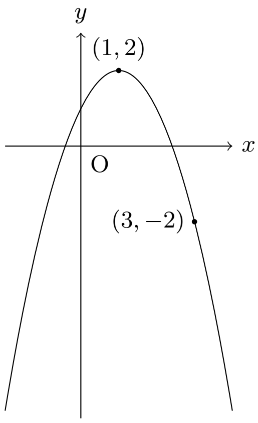


図 79: f のグラフ

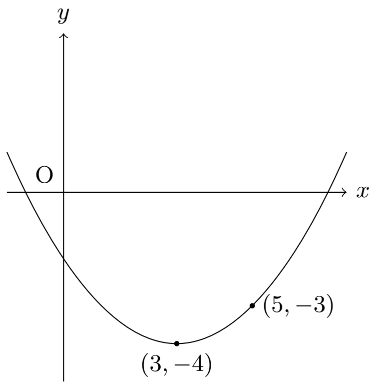


図 80: g のグラフ

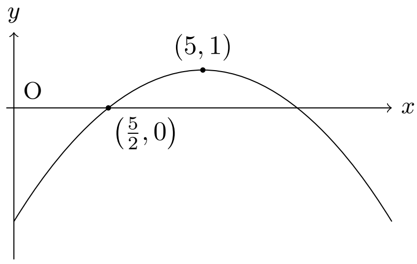


図 81: h のグラフ

問題 4 の解答. (i) f のグラフは頂点が $(1,2)$ であることから，f は

$$f(x) = a(x-1)^2 + 2$$

と表すことができる．さらに f のグラフは $(3,6)$ を通るから

$$6 = f(3) = a(3-1)^2 + 2 = 4a + 2$$

が成立．ゆえに

$$a = \frac{6-2}{4} = 1$$

となり，

$$\boxed{f(x) = (x-1)^2 + 2}$$

である．

(ii) g のグラフの頂点は $(6,7)$ であることから，g はある実数 $a \neq 0$ を用いて

$$g(x) = a(x-6)^2 + 7$$

と表現することができる．さらに g のグラフは $(4,-5)$ を通るから，

$$-5 = g(4) = a(4-6)^2 + 7 = 4a + 7$$

が成立．よって a の値は

$$a = \frac{-5-7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

である．したがって，g を表す式は

$$\boxed{g(x) = -3(x-6)^2 + 7}$$

となる．

(iii) h のグラフの頂点は $\left(-\frac{4}{3}, 3\right)$ であるから，h は

$$h(x) = a\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + 3$$

と表現することができる．さらに h は点 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ を通るから，

$$\frac{1}{3} = a\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 3 = \frac{16}{9} + 3$$

が成り立つ．よって a の値は

$$a = \frac{9}{16}\left(\frac{1}{3} - 3\right) = \frac{9}{16} \cdot \frac{1-9}{3} = \frac{9}{16} \cdot \frac{-8}{3} = -\frac{3}{2}$$

となる．よって h を表す式は

$$\boxed{h(x) = -\frac{3}{2}\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + 3}$$

である．

問題 5 の解答． (i) 2 次関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

と表されているとする．このとき f のグラフが $(0, -1)$，$(-2, 1)$，$(3, 11)$ を通ることから，

$$c = -1 \tag{1}$$
$$4a - 2b + c = 1 \tag{2}$$
$$9a + 3b + c = 11 \tag{3}$$

が成り立つ．$c = -1$ を (2) と (3) に代入すれば，a, b に関する以下の連立方程式を得る．

$$4a - 2b = 2 \tag{2'}$$
$$9a + 3b = 12 \tag{3'}$$

$3 \times$ (2') $+ 2 \times$ (3') を計算すれば，

$$\begin{array}{rrl} & 12a - 6b & = 6 \\ -) & 18a + 6b & = 24 \\ \hline & 30a & = 30 \end{array}$$

となる．したがって $a = 1$ である．さらに $a = 1$ を (3') に代入すれば，

$$3b = 12 - 9 \cdot 1 = 3$$

となり，$b = 1$ がわかる．

以上の議論から，$a = 1$，$b = 1$，$c = -1$ であることがわかった．ゆえに

$$\boxed{f(x) = x^2 + x - 1}$$

である．

(ii) 2 次関数 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

と表されているとする．このとき g のグラフが $(0, -3)$，$(-2, -11)$，$\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ を通ることから，

$$c = -3 \tag{1}$$
$$4a - 2b + c = -11 \tag{2}$$
$$\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c = -\frac{7}{2} \tag{3}$$

が成り立つ．$c = -3$ を (1) と (2) に代入すれば，a, b に関する以下の連立方程式を得る．

$$4a - 2b = -8 \tag{2'}$$
$$\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b = -\frac{1}{2} \tag{3'}$$

(2') $+ 4 \times$ (3') を計算すれば，

$$\begin{array}{rrl} & 4a - 2b & = -8 \\ -) & a + 2b & = -2 \\ \hline & 5a & = -10 \end{array}$$

となる．したがって $a = -2$ である．さらに $a = -2$ を (2') に代入すれば，

$$2b = 4 \cdot (-2) + 8 = 0$$

となり，$b = 0$ がわかる．

以上の議論から，$a = -2$，$b = 0$，$c = -3$ であることがわかった．ゆえに

$$\boxed{g(x) = -2x^2 - 3}$$

である．

(iii) 2 次関数 $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は

$$h(x) = ax^2 + bx + c$$

と表されているとする．このとき h のグラフが $(1, -\frac{3}{5})$，$\left(\frac{11}{2}, \frac{3}{10}\right)$，$\left(7, \frac{21}{5}\right)$ を通ることから，

$$a + b + c = -\frac{3}{5} \tag{1}$$
$$\frac{121}{4}a + \frac{11}{2}b + c = \frac{3}{10} \tag{2}$$
$$49a + 7b + c = \frac{21}{5} \tag{3}$$

が成り立つ．(2) $-$ (1) および (3) $-$ (1) を計算すれば，a, b に関する以下の連立方程式を得る．

$$\frac{117}{4}a + \frac{9}{2}b = \frac{9}{10} \tag{2'}$$
$$48a + 6b = \frac{24}{5} \tag{3'}$$

$4 \times$ (2') $- 3 \times$ (3') を計算すれば,

$$\begin{array}{rrl} & 117a + 18b & = \dfrac{18}{5} \\ -) & 144a + 18b & = \dfrac{72}{5} \\ \hline & -27a & = -\dfrac{54}{5} \end{array}$$

となる．したがって $a = \frac{2}{5}$ である．さらに $a = \frac{2}{5}$ を (3') に代入すれば,

$$6b = \frac{24}{5} - 48 \cdot \frac{2}{5} = \frac{24 - 96}{5} = -\frac{72}{5}$$

となるから,

$$b = -\frac{1}{6} \cdot \frac{72}{5} = -\frac{12}{5}$$

である．

さて，ここで (1) に $a = \frac{2}{5}$ および $b = -\frac{12}{5}$ を代入すれば,

$$\frac{2}{5} - \frac{12}{5} + c = -\frac{3}{5}$$

となるから,

$$c = -\frac{3}{5} - \frac{2}{5} + \frac{12}{5} = \frac{-3 - 2 + 12}{5} = \frac{7}{5}$$

である．

以上の議論により，$a = \frac{2}{5}$，$b = -\frac{12}{5}$，$c = \frac{7}{5}$ であることがわかった．したがって

$$\boxed{h(x) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{7}{5}}$$

である．

問題 6 の解答. (i) 2 次式

$$x^2 + 2x - 3$$

を平方完成する．

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 &= (x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x) - 3 \\ &= (x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2 - 1^2) - 3 \\ &= (x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2) - 1 - 3 \\ &= (x + 1)^2 - 4 \end{aligned}$$

となるから，答えは

$$\boxed{(x + 1)^2 - 4}$$

である．

(ii) 2 次式

$$2x^2 - 3x + 1$$

を平方完成する．基本的な計算を繰り返すことにより

$$
\begin{aligned}
2x^2-3x+1 &= 2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)+1 \\
&= 2\left(x^2+2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)x+\left(-\frac{3}{4}\right)^2-\left(-\frac{3}{4}\right)^2\right)+1 \\
&= 2\left(x^2+2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)x+\left(-\frac{3}{4}\right)^2\right)-2\left(-\frac{3}{4}\right)^2+1 \\
&= 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-2\cdot\frac{9}{16}+1 \\
&= 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2\frac{-9}{8}+\frac{8}{8} \\
&= 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

となるから，答えは

$$\boxed{2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}}$$

である．

(iii) 2 次式

$$-3x^2+2x-7$$

を変形すると

$$
\begin{aligned}
-3x^2+2x-7 &= -3\left(x^2-\frac{2}{3}x\right)-7 \\
&= -3\left(x^2+2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot x+\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right)-7 \\
&= -3\left(x^2+2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot x+\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right)+3\left(-\frac{1}{3}\right)^2-7 \\
&= -3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+3\frac{1}{9}-7 \\
&= -3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1-21}{3} \\
&= -3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{20}{3}
\end{aligned}
$$

となる．よって答えは

$$\boxed{-3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{20}{3}}$$

である．

(iv) 2 次式

$$\frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{17}{3}$$

を平方完成する．

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{17}{3} &= \frac{4}{3}\left(x^2 - 2x\right) - \frac{17}{3} \\
&= \frac{4}{3}\left(x^2 - 2x + 1 - 1\right) - \frac{17}{3} \\
&= \frac{4}{3}(x^2 - 2x + 1) - \frac{4}{3} - \frac{17}{3} \\
&= \frac{4}{3}(x-1)^2 - \frac{21}{3} \\
&= \frac{4}{3}(x-1)^2 - 7
\end{aligned}$$

となるから，答えは

$$\boxed{\frac{4}{3}(x-1)^2 - 7}$$

である．

(v) 2 次式

$$7x^2 - 7x + \frac{59}{4}$$

を平方完成する．この 2 次式を変形していくと

$$\begin{aligned}
7x^2 - 7x + \frac{59}{4} &= 7(x^2 - x) + \frac{59}{4} \\
&= 7\left(x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + \frac{59}{4} \\
&= 7\left(x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) - \frac{7}{4} + \frac{59}{4} \\
&= 7\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{59-7}{4} \\
&= 7\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{52}{4} \\
&= 7\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 13
\end{aligned}$$

となるから，答えは

$$\boxed{7\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 13}$$

である．

(vi) 2 次式

$$-3x^2 - 10x - \frac{40}{3}$$

を平方完成する．この式を変形していくと

$$
\begin{aligned}
-3x^2-10x-\frac{40}{3} &= -3\left(x^2+\frac{10}{3}x\right)-\frac{40}{3} \\
&= -3\left(x^2+2\cdot\frac{5}{3}x+\frac{25}{9}-\frac{25}{9}\right)-\frac{40}{3} \\
&= -3\left(x^2+2\cdot\frac{5}{3}x+\left(\frac{5}{3}\right)^2\right)+\frac{25}{3}-\frac{40}{3} \\
&= -3\left(x+\frac{5}{3}\right)^2-\frac{40-25}{3} \\
&= -3\left(x+\frac{5}{3}\right)^2-\frac{15}{3} \\
&= -3\left(x+\frac{5}{3}\right)^2-5
\end{aligned}
$$

となるで，答えは

$$\boxed{-3\left(x+\frac{5}{3}\right)^2-5}$$

である．

問題 7 の解答． (i) 2 次関数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は $f(x)=-3(x+4)^2-5$ と表現されているから，その**値域は** $(-\infty,-5]$ **である．**

(ii) $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ の式を平方完成すると

$$
\begin{aligned}
g(x) &= x^2+x+1 \\
&= \left(x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+1 \\
&= \left(x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)-\frac{1}{4}+1 \\
&= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

となるので，g **の値域は** $\left[\frac{3}{4},\infty\right)$ **である．**

(iii) $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を表す式を平方完成すると

$$
\begin{aligned}
h(x) &= -2x^2+3x \\
&= -2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right) \\
&= -2\left(x^2-2\cdot\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}\right) \\
&= -2\left(x^2-2\cdot\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)+\frac{9}{8} \\
&= -2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{8}
\end{aligned}
$$

となる．よって h **の値域は** $\left(-\infty, \frac{9}{8}\right]$ **である．**

問題 8 の解答． (i) $f_1\colon [1,2] \to \mathbb{R}$ を，$f_1(x) = 3x^2$ によって定める．f_1 は定義域 $[1,2]$ で単調に増加するか

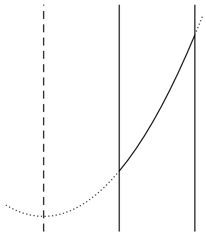


図 82: f_1 のグラフ

ら，1 で最小値，2 で最大値をとる．（図 82 を参照.）その値を具体的に計算すると

$$f_1(1) = 3 \cdot 1^2 = 3, \quad f_1(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$$

となる．したがって，f_1 **は** 1 **において最小値** 3 **を，**2 **において最大値** 12 **をとる．**

(ii) $f_2\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ を，$f_2(x) = 2x^2 - 12x + 19$ によって定める．f_2 を表す式を平方完成すると，

$$\begin{aligned}
2x^2 - 12x + 19 &= 2(x^2 - 6x) + 19 \\
&= 2(x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2 - 3^2) + 19 \\
&= 2(x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2) - 2 \cdot 9 + 19 \\
&= 2(x - 3)^2 + 1
\end{aligned}$$

となる．f_2 は定義域 $[-1,1]$ で単調に減少するから，左端点 -1 で最大値を，右端点 1 で最小値をとる．（図

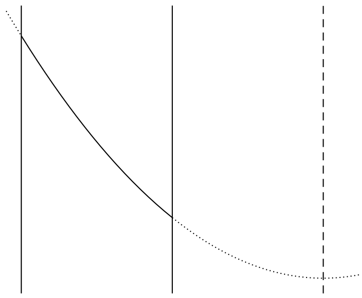


図 83: f_2 のグラフ

83 を参照.）その値を実際に計算すると

$$\begin{gathered}
f_2(-1) = 2(-1-3)^2 + 1 = 2 \cdot 16 + 1 = 33, \\
f_2(1) = 2(1-3)^2 + 1 = 2 \cdot 4 + 1 = 9
\end{gathered}$$

となる．したがって，f_2 **は** 1 **において最小値** 9 **を，**-1 **において最大値** 33 **をとる．**

(iii) $f_3 \colon [-3,0] \to \mathbb{R}$ を，$f_3(x) = x^2 + 2x - 2$ によって定める．f_3 を定める式を平方完成すると

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 2 &= (x^2 + 2 \cdot 1x + 1^2) - 1^2 - 2 \\ &= (x+1)^2 - 3 \end{aligned}$$

となる．これより f_3 のグラフは図 84 のようになっている．f_3 のグラフの軸 $x = -1$ は定義域に属するから，

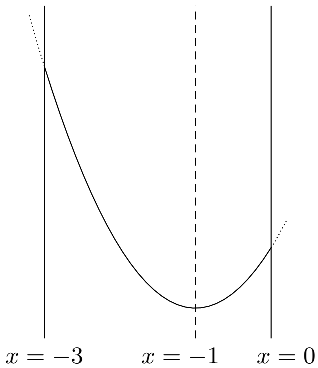


図 84: f_3 のグラフ

f_3 は頂点で最小値を取る．つまり，-1 で最小値 -3 をとる．次に -1 と定義域の端点 -3 および 0 の距離を比べると，0 と -3 との距離のほうが遠いことがわかる．よって f_3 は -3 において最大値 $f_3(-3)$ をとる．その値を実際に計算すれば,

$$f_3(-3) = (-3+1)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$$

である．ゆえに f_3 **は** -1 **において最小値** -3 **を，**-3 **において最大値** 1 **をとる．**

(iv) $f_4 \colon [-2,2] \to \mathbb{R}$ を，$f_4(x) = x^2 + 2x - 2$ によって定める．f_4 を定める 2 次式を平方完成すると

$$x^2 + 2x - 2 = (x+1)^2 - 3$$

となる．（先ほどの関数 f_3 と式は同じである．）これより，f_4 のグラフは図 85 のようになる．放物線の軸

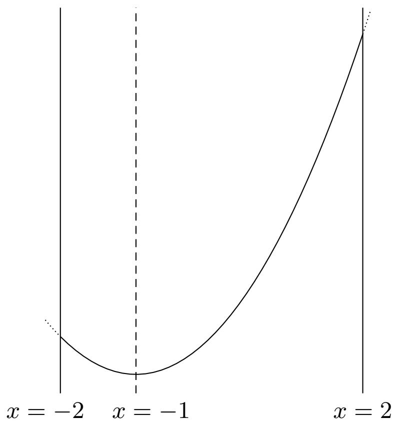


図 85: f_4 のグラフ

$x = -1$ は定義域に属するから，-1 で最小値 -3 をとる．次に軸 $x = -1$ と $x = -2$ および $x = 2$ との距離

を比べると，$x=2$ のほうがより遠くにあることがわかる．よって f_4 は 2 おいて最大値 $f(2)$ をとる．その値を実際に計算すると

$$f_4(2)=(2+1)^2-3=3^2-3=6$$

である．したがって **f_3 は -1 において最小値 -3 を，2 において最大値 6 をとる．**

(v) 2 次関数 $f_5\colon [1,5]\colon \mathbb{R}$ を，$f_5(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+\frac{17}{8}$ によって定める．f_5 の式を平方完成すると，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+\frac{17}{8} &= \frac{1}{2}\left(x^2-2\cdot\frac{5}{2}x\right)+\frac{17}{8}\\
&= \frac{1}{2}\left(x^2-2\cdot\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)+\frac{17}{8}\\
&= \frac{1}{2}\left(x^2-2\cdot\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2+\frac{17}{8}\\
&= \frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{8}+\frac{17}{8}\\
&= \frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-1
\end{aligned}$$

となる．これより f_5 のグラフは図 86 のようになることがわかる．f_5 のグラフの軸 $x=-\frac{5}{2}$ は定義域内に含

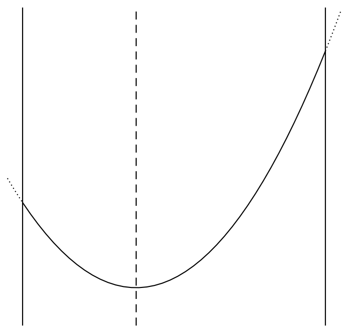


図 86: f_5 のグラフ

まれるから，f_5 は頂点で最小値を取る．すなわち，$-\frac{5}{2}$ で最小値 -1 をとる．次に頂点の x 座標 $-\frac{5}{2}$ と定義域の端点 -2 および 5 との距離を比較してみると，-1 と 5 の距離のほうが遠いことがわかる．よって f_5 は 5 で最大値 $f_5(5)$ をとる．その値を実際に計算してみると，

$$f_5(5)=\frac{1}{2}\left(5-\frac{5}{2}\right)^2-1=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^2-1=\frac{25}{8}-1=\frac{17}{8}$$

となる．したがって **f_5 は $-\frac{5}{2}$ において最小値 -1 を，5 において最大値 $\frac{17}{8}$ をとる．**

問題 9 の解答． (i) $f_1\colon [0,3]\to\mathbb{R}$ を $f_1(x)=-x^2-x+1$ によって定める．f_1 を定める 2 次式を平方完成す

れば，

$$
\begin{aligned}
-x^2-x+1 &= -(x^2+1)+1 \\
&= -\left(x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)+1 \\
&= -\left(x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)+\frac{1}{4}+1 \\
&= -\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

となる．よって f_1 のグラフは図 87 のようになる．f_1 は定義域 $[0,3]$ 上で単調に減少するから，0 で最大値

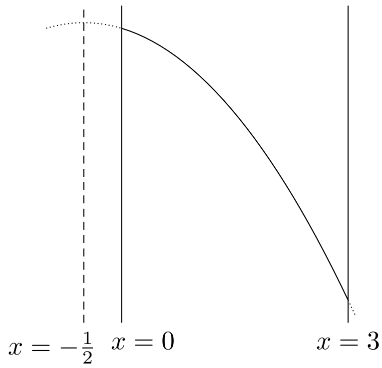


図 87: f_1 のグラフ

$f_1(0)$ をとり，3 で最小値 $f_1(3)$ をとる．その値を計算すると

$$
f_1(0) = -0^2-0+1 = 1
$$
$$
f_1(3) = -3^2-3+1 = -9-3+1 = -11
$$

となるから，**f_1 は 3 で最小値 -11 を，0 で最大値 1 をとる．**

(ii) 2 次関数 $f_2\colon [-3,0]\to\mathbb{R}$ を $f_2(x)=-x^2-x+1$ によって定める．f_2 の式は (i) の f_1 と同じだから，平方完成により

$$
f_2(x) = -\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}
$$

となる．これより，f_2 のグラフは図 88 のようになることがわかる．f_2 のグラフが定める放物線は上に凸であり，その軸 $x=-\frac{1}{2}$ は定義域に含まれるから，f_2 は $-\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{5}{4}$ をとる．次に軸 $x=-\frac{1}{2}$ と，$x=-3$ および $x=0$ との距離を比べてみると，$x=-3$ の方が遠くにあることがわかる．これより，f_2 は -3 で最小値 $f(-3)$ をとる．その値を計算すると，

$$
f(-3) = -(-3)^2-(-3)+1 = -9+3+1 = -5
$$

となるから，**f_2 は -3 で最小値 -5 を，$-\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{5}{4}$ をとる．**

問題 10 の解答． (i) $f(x)=4(x-2)^2-9$ で定まる 2 次関数 f のグラフは下に凸の放物線であり，その頂点 $(2,-9)$ の y 座標は負である．よって f のグラフは x 軸と 2 つの交点を持ち，**2 次方程式 $f(x)=0$ は異なる 2 つの実数解を持つ．**

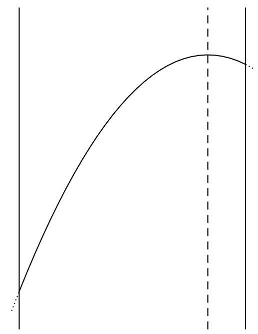


図 88: f_2 のグラフ

(ii) $f(x)=-3(x-2)^2-1=0$ で定まる 2 次関数 f のグラフは上に凸の放物線であり，その頂点 $(2,-1)$ の y 座標は負である．よって f のグラフは x 軸と交点を持たず，**2 次方程式 $f(x)=0$ は実数解を持たない．**

(iii) 2 次式 x^2-6x+5 の判別式を調べると，

$$(-6)^2-4\cdot1\cdot5=36-20=16>0$$

となる．よって **2 次方程式 $x^2-6x+5=0$ は異なる 2 つの実数解を持つ．**

(iv) 2 次式 $4x^2+4x+1$ の判別式は

$$4^2-4\cdot4\cdot1=16-16=0$$

である．よって **2 次方程式 $4x^2+4x+1=0$ はただ一つの実数解を持つ．**

(v) 2 次式 $3x^2-3x+4$ の判別式は

$$(-3)^2-4\cdot3\cdot4=9-48=-39<0$$

であるから，**2 次方程式 $3x^2-3x+4=0$ は実数解を持たない．**

問題 11 の解答． (i) 2 次方程式 $3(x-1)(x+2)=0$ は，$x-1=0$ または $x+2=0$ とも同値であるから，**解は 1，-2 である．**

(ii) 2 次方程式 $(3x+1)(-x-1)=0$ は $3x+1=0$ または $-x-1=0$ と同値であるから，**解は $-\frac{1}{3}$，-1 である．**

(iii) 2 次方程式 $8x^2+2x-3=0$ を考える．左辺の 2 次式は

$$8x^2+2x-3=(2x-1)(4x+3)$$

と因数分解できるから，この 2 次方程式は $2x-1=0$ または $4x+3$ と同値である．よってその**解は $\frac{1}{2}$ と $-\frac{3}{4}$ である．**

(iv) 2 次方程式 $2x^2+11x+12$ を考える．左辺の 2 次式は

$$2x^2+11x+12=(2x+3)(x+4)$$

と因数分解できるので，この方程式は $2x+3=0$ または $x+4=0$ と同値である．したがって**解は $-\frac{3}{2}$ と -4 である．**

索引