# 関数解析ノート

大阪大学大学院基礎工学研究科
平井祐紀

2017 年 3 月 19 日

# このノートについて

この資料は，大阪大学で 2014 年度に開講された土居伸一先生担当「関数解析 I」「関数解析 II」の講義ノートをもとに私が作ったものです．構成は講義内容に準じていますが，記号や言葉遣いなどは私好みに直してあります．また，細かい修正や補足もしてあるので，完全な講義ノートになっているわけではありません．読む方は以上の事項に注意してください．

このノートを個人使用のためにコピー，印刷，改変することは許しますが，平井に無断で再配布，販売など行うことは禁止します．

以下，内容について簡単な説明をします．

# 目次


このノートについて i

第 1 章 Banach 空間 1
- 1.1 Banach 空間の定義 . . . 1
- 1.2 有限次元ノルム空間 . . . 4
- 1.3 Banach 空間の例 . . . 8
- 1.4 Banach 空間の構成 . . . 12
- 1.5 有界線形写像 . . . 15

第 2 章 Hilbert 空間 21
- 2.1 Hilbert 空間の定義 . . . 21
- 2.2 直交分解 . . . 23
- 2.3 Riesz の定理 . . . 23
- 2.4 正規直交系 . . . 23

第 3 章 一様有界性原理と開写像定理. 24
- 3.1 Baire のカテゴリー定理 . . . 24
- 3.2 一様有界性の定理 . . . 25
- 3.3 開写像定理 . . . 27

第 4 章 非有界作用素 30
- 4.1 基本的な概念の定義 . . . 30
- 4.2 閉作用素 . . . 31
- 4.3 Hilbert 空間における共役作用素 . . . 31
- 4.4 ノルム空間における共役作用素 . . . 31

参考文献 32

索引 33

# 第 1 章

# Banach 空間

## 1.1 Banach 空間の定義

まずは，関数解析における基本的な空間である Banach 空間を導入しよう．線形空間の係数体 $\mathbb{K}$ は $\mathbb{C}$ か $\mathbb{R}$ とする．

**定義 1.1.1.** $X$ を $\mathbb{K}$ 線形空間とする．写像 $\|\ \| : X \to \mathbb{R}$ について次の条件を考える．

(i) 任意の $x \in X$ に対して $\|x\| \geq 0$ である．
(ii) 任意の $x \in X$ に対して，$\|x\| = 0 \iff x = 0$ がなりたつ．
(iii) 任意の $\alpha \in \mathbb{K}$ と任意の $x \in X$ に対して $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$.
(iv) 任意の $x, y \in X$ に対して $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.（三角不等式.）

$\|\ \|$ が条件 (i)，(iii)，(iv) を満たすとき，$\|\ \|$ を $X$ 上のセミノルム (seminorm) という． さらに条件 (ii) を満たすときに，$\|\ \|$ を $X$ 上のノルムという． $\|\ \|$ がノルムのとき，二つ組 $(X, \|\ \|)$ をノルム空間 (normed space) という．考えているノルムが明らかなときは単に $X$ をノルム空間ということもある．

ノルム空間 $(X, \|\ \|)$ において

$$d(x, y) := \|x - y\| \quad (x, y \in X)$$

と定めれば，$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ は $X$ 上の距離を定める．これ以降，特に断らない限り $X$ はこの距離により距離空間とみなすことにする．ノルムによって定まる位相をノルム位相などということがある[*1].

**定義 1.1.2.** ノルム空間 $(X, \|\ \|)$ がノルムから定まる距離について完備であるとき，$(X, \|\ \|)$ を（または単に $X$ を）Banach 空間 (Banach space) と呼ぶ．

ここで，いくつか記号を導入しよう．距離空間 $(X, d)$ が与えられたとき，その開球，閉球，球面を

$$B_X(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$$
$$\overline{B}_X(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}$$
$$S_X(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) = r\}$$

と定める[*2]．考えている距離空間が明らかな時には，単に $B(a, r)$ などとも書くことにする．

[*1] 関数解析では，一つの空間に色々な位相を入れることがあるので，区別するためにこう呼ぶことがある．
[*2] 閉球はもちろん開球の閉包 $\overline{B_X(a, r)}$ だが，上部の横棒があまり長くなると見づらいので，このように書くことにする．

ノルム空間における基本的な（そしてとても重要な！）性質として，和とスカラー倍，そしてノルムが連続写像になっていることを示す[*3]．

**定理 1.1.3.** 次の三つの写像は連続である．ただし，$X \times X$ および $\mathbb{K} \times X$ は積位相空間と考える．

(i) $+ : X \times X \longrightarrow X, (x, y) \longmapsto x + y$

(ii) $\cdot : \mathbb{K} \times X \longrightarrow X, (\lambda, x) \longmapsto \lambda x$

(iii) $\| \ \| : X \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \|x\|$

証明．(i)．$((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ を $X \times X$ における任意の収束点列，$(x, y)$ をその極限とする．

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \le \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

より和の連続性が分かる．

(ii) $((\lambda_n, x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{K} \times X$ における任意の収束点列とし $(\lambda, x)$ をその極限とすれば

$$\begin{aligned}\|\lambda_n x_n - \lambda x\| &\le \|\lambda_n x_n - \lambda_n x\| + \|\lambda_n x - \lambda x\| \\ &= |\lambda_n|\|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda|\|x\| \\ &\le M\|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda|\|x\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

ただし，$(\lambda_n)$ は収束列ゆえ有界なので，その上界を $M$ とおいた．

(iii) $x_n \longrightarrow x$ を $X$ の収束列とすれば，三角不等式より

$$|\|x_n\| - \|x\|| \le \|x_n - x\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立つ． □

**命題 1.1.4.** $X$ をノルム空間，$X \supset Y$ をその線形部分空間とする．このとき，$Y$ の閉包 $\overline{Y}$ もまた線形部分空間である．

証明．$x, y \in \overline{Y}$ とすれば $Y$ の点列 $(x_n), (y_n)$ で $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ かつ $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ を満たすものが存在する．このとき，和の連続性と $\overline{Y}$ が閉集合であることより

$$x + y = \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) \in \overline{Y}.$$

また，$\lambda \in \mathbb{K}$ とすれば，スカラー倍の連続性より同様に

$$\lambda x = \lim_{n\to\infty} \lambda x_n \in \overline{Y}.$$

□

$X$ を $\mathbb{K}$-線形空間，$S$ をその部分集合とする．[*4]

$$\mathrm{L.h.}[S] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, (\alpha_i) \in \mathbb{K}^n, (x_i) \in S^n \right\}$$

[*3] 線形空間に和とスカラー倍が連続になるような位相が与えられているとき，その空間は位相線形空間と呼ばれる．(topological vector space)．どうでもいい話だが，位相線形空間はしばしば TVS などと略される．

[*4] 線形部分空間とは限らない．

とおき，L.h.$[S]$ を $S$ によって生成される部分空間や，線形包 (linear hull, linear span) などという．L.h.$[S]$ は $\langle S\rangle$ とか $\mathrm{Span}\, S$ で表されることもある．

$X$ ノルム空間なら $\overline{\mathrm{L.h.}[S]}$ は $S$ を含む閉線形部分空間のうち最小のものである．これを $S$ によって生成される閉部分空間という．

**例 1.1.5.** 一つの線形空間にはいくつかのノルムが入り得る．例えば，$\mathbb{K}^d$ において次のようなものを考えてみよう．$x=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{K}^d$ に対して

$$\|x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^d |x_i|^2}$$
$$\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le d}|x_i|$$
$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^d |x_i|$$

と定める．これらはノルムであり以下の関係がなりたつ．

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{d}}\|x\|_2\le\|x\|_\infty\le\|x\|_2\\ \|x\|_2\le\|x\|_1\le\sqrt{d}\|x\|_2\end{cases}$$

一つ目のノルム $\|\ \ \|_2$ を Euclid ノルム (Euclidean norm) といい，特に断らない限りは $\mathbb{K}^d$ のノルムは Euclid ノルムとする．

**定義 1.1.6.** $X$ を線形空間とし，$\|\ \ \|_1$ と $\|\ \ \|_2$ を $X$ のノルムとする．ある実数 $C_1, C_2>0$ が存在して任意の $x\in X$ に対して

$$C_1\|x\|_1\le\|x\|_2\le C_2\|x\|_1$$

がなりたつとき，ノルム $\|\ \ \|_1$ と $\|\ \ \|_2$ は同値であるという．[*5]

**命題 1.1.7.** ノルム空間 $(X,\|\ \ \|_1),(X,\|\ \ \|_2)$ について以下の二条件は同値である．

(i) $\mathrm{Id}_X:(X,\|\ \ \|_1)\longrightarrow(X,\|\ \ \|_2)$ は同相写像．

(ii) ノルム $\|\ \ \|_1,\|\ \ \|_2$ は同値．

証明．(i)$\Longrightarrow$(ii)．恒等写像 $\mathrm{Id}_X$ は線形写像であるから，連続性と有界性は同値である[*6]．したがって，(i) と (ii) はともに $\exists C_1,C_2>0$ が存在して，$\forall x,y\in X$ に対して

$$\|x-y\|_2=\|\mathrm{Id}_X(x-y)\|_2\le C_1\|x-y\|_1,$$
$$\|x-y\|_1=\|\mathrm{Id}_X^{-1}(x-y)\|_1\le C_2\|x-y\|_2.$$

がなりたつということを主張している．□

[*5] 同値なノルムは定める位相が等しいだけではなく，これらのノルムが定めるコーシー列や完備化といった概念も同値になる．抽象的な言い方をすれば，同値なノルムの定める一様構造は等しいということである．

[*6] このことは後に示される．その証明にこの命題の結果を使うことはないので，循環論法に陥る心配はない．

ノルム空間は位相が入った線形空間であるから，数列の有限和の列 $(\sum_{0\leq k\leq n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ の（ノルム位相に関する）極限として級数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ を定義することが出来る．ノルム空間 $(X, \|\ \ \|)$ の列 $(a_n)$ が

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| < \infty$$

を満たすとき，級数 $\sum a_n$ は絶対収束 (absolute convergence) するという．

**命題 1.1.8.** $(X, \|\ \ \|)$ を Banach 空間とする．級数 $\sum x_n$ が絶対収束するなら，その級数はノルム位相の意味でも収束する．

*証明.* $X$ の完備性より，級数 $\sum_n x_n$ の収束は部分和列 $\left(\sum_{0\leq j\leq n} x_j\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が $X$ の Cauchy 列であることと同値である．これより，級数が絶対収束するなら部分和の列が Cauchy 列になっていることを示せばよい．級数 $\sum_j x_j$ が絶対収束すると仮定すれば，数列 $\left(\sum_{0\leq j\leq n} \|x_j\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}$ の Cauchy 列である．したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n > m > N \implies \sum_{i=m+1}^{n} \|x_j\| < \varepsilon.$$

が成り立つ．三角不等式より

$$\left\| \sum_{i=m+1}^{n} x_j \right\| \leq \sum_{i=m+1}^{n} \|x_j\|$$

であるから，$n, m \geq N(\varepsilon)$ なら

$$\left\| \sum_{i=m+1}^{n} x_j \right\| < \varepsilon$$

も成り立つ．よって部分和の列は Cauchy 列である． □

まとめ

- $\mathbb{K}$-線形空間 $X$ 上の写像 $\|\ \ \|: X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ でいくつかの良い性質を満たすものをノルムという．
- ノルム空間 $(X, \|\ \ \|)$ は距離 $d(x, y) = \|x - y\|$ により距離空間となる．ノルム空間ではノルム，和，スカラー倍は連続写像である．
- ノルムが定める距離について完備なノルム空間を Banach 空間という．
- Banach 空間の級数が絶対収束するなら，それはノルム位相の意味でも収束する．

## 1.2　有限次元ノルム空間

本節では，ノルム空間のうち特に有限次元であるものを考える．$\mathbb{K}^d$ にはすでに述べたように標準的な Euclid ノルムというものが存在する．では，他の有限次元空間には標準的なノルムと呼べるものはあるだろうか？実は有限次元空間のノルムはすべて同値なので，どのノルムを入れても位相的構造は全く同じになってしまう．これは無限次元空間では成り立たないので，有限次元空間の顕著な性質である．

有限次元空間におけるもう一つの重要な性質としては，局所コンパクト性がある．その証明が 1.2 節後半の目標である．

**補題 1.2.1.** $\mathbb{K}^d$ 上のノルムはすべて同値である．

証明. $\|x\|$ で $x \in \mathbb{K}^d$ の Euclid ノルムを表すことにする．このとき，$\mathbb{K}^d$ 上の任意のノルム $\|\ \ \|' \colon \mathbb{K}^d \to \mathbb{R}$ は $\|\ \ \|$ と同値であることを示す．

**Step1：$\|\ \ \|'$ の連続性．** $\|\ \ \|$ は $(\mathbb{K}, \|\ \ \|)$ における連続関数となることを示す．$(e_1, \ldots, e_d)$ を $\mathbb{K}^d$ の標準基底とすれば

$$\begin{aligned} \|x-y\|' &= \|(x_1-y_1)e_1 + \cdots + (x_d-y_d)e_d\|' \\ &\leq |x_1-y_1|\,\|e_1\|' + \cdots + |x_d-y_d|\,\|e_d\|' \\ &\leq \|x-y\|\,\|e_1\|' + \cdots + \|x-y\|\|e_d\|' \\ &= \left(\sum_{i=1}^{d}\|e_i\|'\right)\|x-y\| \end{aligned}$$

という評価が成り立つから，$\|\ \ \|'$ は実際に連続である[*7]．

**Step2：ノルムの同値性を示す．** $S = S_{\mathbb{K}^d}(0,1)$ とする．（Euclid ノルムについての単位球面.）Euclid 空間の単位球面 $S$ はコンパクトだから，$\|\ \ \|'$ は $S$ 上で最大値，最小値をとる．ここで

$$M = \max_{x\in S}\|x\|', \quad m = \min_{x\in S}\|x\|'$$

とする．$x \in \mathbb{K}^d$ が 0 でなければ $x/\|x\| \in S$ だから，

$$m \leq \left\|\frac{x}{\|x\|}\right\|' \leq M$$

という不等式がなりたつ．よって，任意の $x \in S$ に対して $m\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|$ である． □

**定理 1.2.2.** 有限次元線形空間のノルムはすべて同値である．

証明. $V$ を $d$ 次元線形空間とし，$\|\ \ \|_1, \|\ \ \|_2$ をその上のノルムとする．$T\colon \mathbb{K}^d \longrightarrow V$ を同型写像とすれば

$$\begin{aligned} \|x\|_1' &= \|Tx\|_1 \\ \|x\|_2' &= \|Tx\|_2 \end{aligned}$$

はそれぞれ $\mathbb{K}^d$ のノルムを定める．$\mathbb{K}^d$ のノルムはすべて同値であったから，$C_1, C_2 > 0$ を適当にとれば

$$C_1\|x\|_1' \leq \|x\|_2' \leq C_2\|x\|_1' \quad (\forall x \in \mathbb{K}^d)$$

が成り立つ．これより，任意の $y \in V$ に対して

$$C_1\|y\|_1 = C_1\|T^{-1}y\|_1' \leq \|T^{-1}y\|_2' = \|y\|_2 \leq C_2\|T^{-1}y\|_1' = C_2\|y\|_2$$

がなりたつ．すなわち，$\|\ \ \|_1$ と $\|\ \ \|_2$ は同値なノルムである． □

ここから先は，ノルム空間における局所コンパクト性を示そう．その準備として，いくつかの命題を用意する．

**命題 1.2.3.** $(X, \|\ \ \|)$ をノルム空間としたとき，その有限次元部分空間 $(Y, \|\ \ \|\restriction_Y)$ は Banach 空間である．特に，$Y$ は $X$ の閉集合である．

[*7] もちろん，この評価は大域的な Lipschitz 連続性を示している．

証明．$(Y, \| \ \|)$ がノルム空間であることは明らかなので，完備性を示せばよい．$T : Y \longrightarrow \mathbb{K}^d$ を線形空間としての同型写像とし，$Y$ のノルム $\| \ \|'$ を

$$\|x\|' = \|Tx\|_{\mathbb{K}^d} \quad (x \in Y)$$

によって定める．定理 1.2.2 によりこれはもとのノルムと同値であるから

$$\exists C_1, C_2 > 0 \ \forall x \in Y \quad C_1\|x\| \leq \|x\|' \leq C_2\|x\| \tag{1.1}$$

が成り立つ．いま $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $Y$ の Cauchy 列とすれば，これは $\| \ \|'$ に関する Cauchy 列でもある．これより $(Tx_n)$ は $\mathbb{K}^d$ の Cauchy 列である．$\mathbb{K}^d$ の完備性より $(Tx_n)$ には極限が存在するので．それを $z_\infty \in \mathbb{K}^d$ で表すことにする．$x_\infty = T^{-1}z_\infty \in Y$ とおけば

$$\begin{aligned}\|x_\infty - x_n\| &\leq \frac{1}{C_1}\|x_\infty - x_n\|' \\ &= \|z_\infty - Tx_n\|_{\mathbb{K}^d}\end{aligned}$$

であるから，$n \longrightarrow \infty$ の極限をとれば $\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty$ を得る．よって $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $Y$ において極限をもち，$Y$ の任意の Cauchy 列は収束することが分かった．すなわち $Y$ は完備である．距離空間の部分集合が完備ならば閉集合なので，$Y$ は特に閉集合である． □

**補題 1.2.4.** $X$ をノルム空間，$S$ を $X$ における単位球面とする．$X \supset Y$ は閉部分空間であって，$X \setminus Y \neq \emptyset$ であるものとする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $x_\varepsilon \in S$ が存在して，

$$d(x_\varepsilon, Y) > 1 - \varepsilon$$

とできる．（ただし，$d(x, Y) = \inf_{y\in Y}\|x - y\|$ と定める．）

証明．$x_0 \in X \setminus Y$ を任意に選び固定する．$Y$ は閉集合であるから，$B(x_0, r_0) \cap Y = \emptyset$ となる $r_0 > 0$ がとれる．このとき $d_0 := d(x_0, Y) \geq r_0$ である．いま，任意の $\delta > 0$ に対してある $y_\delta \in Y$ が存在して

$$\|x_0 - y_\delta\| \leq d(x_0, Y) = d_0 < d_0(1 + \delta)$$

が成り立つ．ここで

$$x_\delta = \frac{x_0 - y_\delta}{\|x_0 - y_\delta\|} \in S$$

とおけば，任意の $y \in Y$ に対して

$$\begin{aligned}\|x_\delta - y\| &= \frac{1}{\|x_0 - y_\delta\|}\|(x_0 - y_\delta) - y\|x_0 - y_\delta\|\| \\ &\geq \frac{1}{\|x_0 - y_\delta\|}d(x_0, Y) \quad (\because y_\delta + \|x_0 - y_\delta\|y \in Y) \\ &> \frac{1}{1 + \delta}\end{aligned}$$

となる．

任意の $\varepsilon > 0$ に対して $1 - \varepsilon < (1 + \delta)^{-1}$ をみたす $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ をとり，$x_\varepsilon = x_{\delta_\varepsilon}$ とすれば補題の主張を得る． □

**定理 1.2.5.** $X$ をノルム空間とする．このとき以下の二条件は同値である．

(i) $X$ は有限次元である．

(ii) $X$ の単位球面 $\{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ はコンパクトである．

証明．(i)$\Longrightarrow$(ii)．$S$ がある連続写像によるコンパクト集合の像であることを示す．$T\colon \mathbb{K}^d \to X$ を同型写像とし，$\|u\|'_{\mathbb{K}^d} = \|Tu\|$ と定める．このとき $\|\ \ \|'$ は $\mathbb{K}^d$ のノルムであり，$T$ は $\|\ \ \|'$ について連続となる．

$$\widetilde{S} = \{u \in \mathbb{K}^d \mid \|u\|'_{\mathbb{K}^d} = 1\} = \{u \in \mathbb{K}^d \mid \|Tu\| = 1\}$$

とおけば，Euclid ノルム $\|\ \ \|_{\mathbb{K}^d}$ と $\|\ \ \|'_{\mathbb{K}^d}$ の同値性より $\widetilde{S} \subset \mathbb{K}^d$ は $(\mathbb{K}^d, \|\ \ \|)$ のコンパクト集合でもある．$T$ の連続全単射であることと $\widetilde{S}$ のコンパクト性より，$S = T(\widetilde{S})$ は $X$ のコンパクト集合である．

(ii)$\Longrightarrow$(i)．対偶を示す．$X$ を無限次元であると仮定し，$S$ が点列コンパクトではないことを示す．$a_0 \in S$ を任意に選び，$Y_0 = \langle a_0 \rangle$ とする．$Y_0$ は有限次元なので，命題 1.2.3 により $Y_0 \subsetneq X$ は閉部分空間である．このとき，補題 1.2.4 により $a_1 \in S \setminus Y_0$ で $d(a_1, Y_0) > 1/2$ なるものをとれる．次に $Y_1 = \langle a_0, a_1 \rangle$ とおくことにより，$a_2 \in S \setminus Y_1$ をとって $d(a_2, Y_1) > 1/2$ とできる．このようにして帰納的に以下の条件を満たす $S$ の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と部分空間の列 $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が構成される．

$$\begin{cases} Y_n = \langle a_0, \dots, a_n \rangle \\ d(a_{n+1}, Y_n) > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

任意の $n < m$ に対して

$$\|a_m - a_n\| \geq d(a_m, Y_{m-1}) > \frac{1}{2}$$

となるから $(a_n)$ は収束部分列を持たない．よって $S$ はコンパクトではないことが分かる． $\square$

**系 1.2.6.** ノルム空間 $(X, \|\ \ \|)$ において，次の 2 条件は同値である．

(i) $X$ は有限次元である．

(ii) $X$ は局所コンパクトである．

証明．**(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明．** 定理 1.2.5 より，各点 $x \in X$ は相対コンパクトな近傍 $B_X(x, 1)$ をもつ．

**(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明．** $X$ が局所コンパクトであると仮定すれば，$0 \in X$ は相対コンパクトな近傍 $U$ をもつ．$U$ は距離空間の開集合なので，十分小さい $r$ をとれば $B_X(0, r) \subset U$ が成り立つ．$\overline{B}_X(0, r)$ はコンパクト集合 $\overline{U}$ の閉部分集合なので，コンパクトである．

いま $(x_n)$ を $S_X(0, 1)$ の点列とすれば，$(rx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はコンパクト集合 $\overline{B}_X(0, r)$ の列であり，収束部分列 $(rx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ をもつ．このとき $(x_{n_k})$ は $S_X(0, 1)$ の収束列であり，$S_X(0, 1)$ は閉集合なので[*8]その極限はまた $S_X(0, 1)$ に属する．すなわち $S_X(0; 1)$ は点列コンパクトであり，定理 1.2.5 より $X$ は有限次元である． $\square$

まとめ

- 有限次元線形空間 $V$ 上のノルムはすべて同値である．
- ノルム空間において，有限次元であることと局所コンパクト性は同値である．

[*8] 単位球面は連続関数 $x \mapsto \|x\|$ による閉集合 $\{1\}$ の逆像である．

## 1.3 Banach 空間の例

本節では，Banach 空間の例をいくつか挙げる．重要な Banach 空間として $L^p$ 空間があるが，これについては後の章で扱うことにする．

いくつか記号を用意する．$X, Y$ を集合としたとき，$X$ から $Y$ への写像全体の集合を $\mathrm{Map}(X, Y)$ とする．同様に $X, Y$ は位相空間のとき $C(X, Y)$ で連続写像の全体を表す．$Y = \mathbb{C}$ のときは，特に $C(X) = C(X, \mathbb{C})$ とも書くことにする．

**例 1.3.1.** $X$ を任意の集合とする．$F_b(X) = F_b(X, \mathbb{C}) = \{f \in \mathrm{Map}(X, \mathbb{C}) \mid f \text{ は有界 }\}$ とし，

$$\|f\|_{F_b(X)} := \sup_{x \in X} |f(x)| \quad f \in F_b(X)$$

と定義する． このとき $(F_b(X), \|\ \|_{F_b(X)})$ は Banach 空間である．

証明. **ステップ 1：$F_b(X)$ が線形空間であることの証明．** $\mathrm{Map}(X, \mathbb{C})$ が各点ごとの和とスカラー倍によって線形空間となることは明らかなので，$F_b(X)$ がその線形部分空間であることを示せばよい。$f, g \in F_b(X)$ とすれば，任意の $x \in X$ に対して

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)| + \sup_{x \in X} |g(x)| < \infty \tag{1.2}$$

である．式 (1.2) において $x$ に関して上限をとることにより

$$\sup_{x \in X} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)| + \sup_{x \in X} |g(x)| < \infty \tag{1.3}$$

を得る．したがって $f + g$ はまた有界であり，$f + g \in F_b(X)$ である．また，任意の複素数 $\lambda$ と任意の $f \in F_b(X)$ に対して

$$|\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| \leq |\lambda| \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty \tag{1.4}$$

がなりたつから式 (1.4) で上限をとることにより

$$\sup_{x \in X} |\lambda f(x)| \leq |\lambda| \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty \tag{1.5}$$

となるから，$\lambda f$ はまた有界であり $F_b(X)$ の元であることがわかる．よって，$F_b(X)$ は $\mathrm{Map}(X, \mathbb{C})$ の線形部分空間である．

**ステップ 2：$F_b(X)$ がノルム空間であることの証明．** $\|\ \|$ が $F_b(X)$ 上のノルムであることを示す．定義より明らかに $\|f\| \geq 0$ $(f \in F_b(X))$ である．また，$\|f\| = 0$ は $\sup_{x \in X} |f(x)| = 0$ という意味なので，明らかに $f = 0$ と同値である．式（1.3）は三角不等式

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \tag{1.6}$$

を表している．さらに，$|\lambda| \sup_{x \in X} |f(x)| = \sup_{x \in X} |\lambda||f(x)| = \sup_{x \in X} |\lambda f(x)|$ であることに注意すれば，$|\lambda|\|f(x)\| = \|\lambda f(x)\|$ も分かる．したがって $\|\ \|$ はノルムの性質を満たし，ステップ 1 の結果と合わせて $(F_b(X), \|\ \|)$ はノルム空間であることが確かめられた．

**ステップ 3：完備性の証明．** $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を $F_b(X)$ の Cauchy 列とする．このとき，

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| = \|f_n - f_m\| \quad (x \in X)$$

という評価より，各点 $x \in X$ について点列 $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{C}$ の Cauchy 列であることがわかる．$\mathbb{C}$ の完備性より Cauchy 列には極限が存在するから，$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とおくことにより写像 $f \in \mathrm{Map}(X,\mathbb{C})$ が定まる．したがって，$f \in F_b(X)$ および $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$ を示せば証明が完了する．$(f_n)$ は $F_b(X)$ の Cauchy 列であったから，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $n_0 = n_0(\varepsilon)$ が存在して任意の $n, m \geq n_0$ について

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| < \varepsilon \quad (x \in X)$$

がなりたつ．この式で極限をとることにより，

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \limsup_{m\to\infty}\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon \quad (x \in X).$$

$x$ に関して上限をとれば，

$$\sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

を得るが，これより任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $n_0 = n_0(\varepsilon)$ が存在して，任意の $n \geq n_0$ に対して

$$\sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

となる．言い換えれば

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)| = 0 \tag{1.7}$$

が成立するということである．さらに，十分大きい $n$ をとれば三角不等式により

$$\sup_{x\in X}|f(x)| \leq \sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)| + \sup_{x\in X}|f_n(x)| \leq 1 + |f_n| < \infty$$

であるから，$f \in F_b(X)$ も分かる．以上の議論により $(F_b(X), \|\ \ \|)$ が Banach 空間であることが示された． □

**例 1.3.2.** $X$ を位相空間とし，例 1.3.1 の記号を用いて $C_b(X) = C(X) \cap F_b(X)$ と定める．このとき $C_b(X)$ は $F_b(X)$ の閉部分空間であり，したがって Banach 空間である．

証明. **ステップ 1：線形部分空間であることの証明.** $C_b(X)$ の定義より $C_b(X) = C(X) \cap F_b(X) \subset F_b(X)$ である．例 1.3.1 の結果により $F_b(X)$ は $\mathrm{Map}(X,\mathbb{C})$ の線形部分空間である．連続関数の和とスカラー倍はまた連続関数になるから，$C(X)$ もまた $\mathrm{Map}(X,\mathbb{C})$ の線形部分空間である．二つの線形部分空間の共通部分はまた線形部分空間になるから，$C_b(X)$ は $\mathrm{Map}(X,\mathbb{C})$ の線形部分空間である．$C_b(X) \subset F_b(X)$ であるから，$F_b(X)$ を新たに全空間と思えばよい．

**ステップ 2：閉であることの証明.** $F_b(X)$ はノルム $\|\ \ \|\colon F_b(X) \to \mathbb{R}$ により距離空間となっているから，$C_b(X)$ の任意の収束列の極限がまた $C_b(X)$ の元であることを示せば十分である．$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $C_b(X)$ の元の列，$f \in F_b(X)$ とし，$|f_n - f| \to 0$ が成り立っているとしよう．$C_b(X)$ の定義より，このとき $f \in C(X)$ を示せば $C_b(X)$ が $F_b(X)$ の閉集合であることがわかる．任意の $x_0 \in X$ を固定すれば，任意の $y \in X$ に対して

$$\begin{aligned}|f(x_0) - f(y)| &\leq |f(x_0) - f_n(x)| + |f_n(x_0) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\leq |f_n(x_0) - f_n(y)| + 2\|f_n - f\|\end{aligned}$$

なることに注意しておく．仮定より $\|f_n - f\| \to 0$ $(n \to \infty)$ であったから，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $n_0 = n_0(\varepsilon)$ が存在して

$$|f_{n_0} - f| < \frac{\varepsilon}{4}$$

とすることができる．このとき，$f_{n_0}$ の連続性より，ある $x_0$ の開近傍 $U_0 \subset X$ で任意の $y \in U_0$ に対して $|f_{n_0}(x_0) - f_{n_0}(y)| < \varepsilon/2$ となるようなものをとれる．このとき，任意の $y \in U_0$ に対して

$$|f(x_0) - f(y)| \le |f_{n_0}(x_0) - f_{n_0}(y)| + 2\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

がなりたつ．すなわち，$f$ は $x_0$ で連続である．$x_0$ は任意に選んだものだったから $f$ は $X$ の各点で連続であり，$f \in C(X)$ である．したがって $f \in C(X) \cap F_b(X) = C_b(X)$ となる． $\square$

**例 1.3.3.** $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を開集合とし，以下の関数空間を導入しよう．

$$C^m(\Omega) = \{f \in C(\Omega) \mid f \text{ は } C^m \text{ 級関数.}\} \quad (m \in \mathbb{N}_{\ge 0})$$
$$C^0(\Omega) = C(\Omega)$$
$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(\Omega)$$

表記の簡略化のために多重指数（multi index） の記法を用意する．

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$$
$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d, \quad \alpha! = \prod_{i=1}^d \alpha_i!$$

と約束する．$x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_d^{\alpha_d}$$

とする．

$$\partial_x = (\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_d}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_d}\right)$$

とおけば,

$$\partial_x^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d}$$

である．$\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ に対して

$$\alpha \le \beta \iff \forall j \in \{1, 2, \ldots, d\} \quad \alpha_j \le \beta_j$$

と定める．

$$C_b^m = \{f \in C^m(\Omega) \mid f \text{ の } m \text{ 次以下の導関数はすべて } \Omega \text{ で有界.}\} \quad (m \in \mathbb{N})$$

とし，

$$\|f\|_{C_b^m(\Omega)} := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \le m} \sup_{x \in \Omega} |\partial_x^\alpha f(x)|$$

とおけば $(C_b^m(\Omega), \| \quad \|_{C_b^m(\Omega)})$ は Banach 空間である．

**補題 1.3.4** (多変数の Taylor の定理)**.** $f \in C^m(\Omega)$ とし，$x_0 \in \Omega$，$h \in \mathbb{R}^d$，$x_0 + th \in \Omega$ $(t \in [0, 1])$ であるものとする．このとき

$$f(x_0 + h) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha| \le m-1}} \frac{\partial_x^\alpha f(x_0)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha| = m}} \int_0^1 \frac{m(1-t)^{m-1}}{\alpha!} \partial_x^\alpha f(x_0 + th) h^\alpha dt \tag{1.8}$$

がなりたつ．

証明．$x_0, h$ を固定し $\varphi(t) = f(x_0 + th)$ と定義すれば，$\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ は $C^m$ 級の関数となる．1 変数の $C^m$ 級関数についての Taylor の定理（積分型）を用いれば，

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \sum_{1 \leq j \leq m-1} \frac{\varphi^{(j)}}{j!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}}{(m-1)!} \varphi^{(m)}(t)dt$$

が成り立つ．合成関数微分により

$$\varphi^{(j)}(t) = \sum_{|\alpha|=j} \partial_x^\alpha f(x_0 + th)h^\alpha \quad (0 \leq j \leq m)$$

となるから，等式 (1.8) を得る．$\square$

$C_b^m(\Omega)$ の完備性を示すための準備として，以下の補題を示す．

**補題 1.3.5.** $j \in \{1 \ldots, d\}$ とし，$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $C(\Omega)$ の列とする．各 $f_n$ は偏導関数 $\partial_{x_j} f_n$ を持ち，それは $\Omega$ 上連続であると仮定する．$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $\Omega$ 上である関数 $f$ にコンパクト一様収束し，また $(\partial_{x_j} f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はある関数 $g$ にコンパクト一様収束しているものとする．このとき $f$ の偏導関数 $\partial_{x_j} f$ が存在し，それは $\Omega$ 上 $g$ に等しい．

証明．$U \Subset \Omega$ とすれば[*9]，$f_n\restriction_U$, $\partial_{x_j} f_n \restriction_U \in C_b(U)$ および $C_b(U)$ の完備性より，$f, g \in C_b(U)$ がわかる．$x_0 \in U$ に対して

$$|t| < \delta \implies x_0 + te_j \in U$$

なる[*10]$\delta$ をとれば，微積分学の基本定理により

$$f_n(x_0 + te_j) - f_n(x_0) = \int_0^t \partial_{x_j} f_n(x_0 + \theta e_j) d\theta$$

が成り立つ．ここで $n \to \infty$ とすれば，仮定より

$$f(x_0 + te_j) - f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \partial_{x_j} f_n(x_0 + \theta e_j) d\theta = \int_0^t g(x_0 + \theta e_j) d\theta \quad (|t| < \delta)$$

となる．これの各辺を $t$ について微分すれば，再び微積分学の基本定理を用いることにより

$$\partial_{x_j} f(x_0) = \lim_{\substack{t\to 0 \\ 0<|t|<\delta}} \frac{f(x_0 + te_j) - f(x_0)}{t} = g(x_0)$$

を得る．$x_0$ は $U$ の中から任意に選んでいるから，$f$ は $U$ の各点で $x_j$ について偏微分可能でその偏導関数は $g$ に等しいことがわかる．さらに $U \Subset \Omega$ も任意に選べるので，$f, g \in C(\Omega)$ および $\Omega$ 上 $\exists \partial_{x_j} f = g$ が成り立つ．$\square$

$C_b^m(\Omega)$ が *Banach* 空間であることの証明．完備性以外の性質は明らかである．$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $C_b^m(\Omega)$ の Cauchy 列とする．このときノルム $\| \ \|_{C_b^m(\Omega)}$ の定義より，各 $|\alpha| \leq m$ について $(\partial_x^\alpha f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $(C_b(\Omega), \| \ \|_{C_b(\Omega)})$ の Cauchy 列となっている．$C_b(\Omega)$ の完備性より列 $(\partial_x^\alpha f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束するから，その極限を $g_\alpha$ で表すことにす

[*9] $U \Subset \Omega$ は ($\mathbb{R}^d$ における閉包)$\overline{U}$ が $\mathbb{R}^d$ のコンパクト集合で，$\overline{U} \subset \Omega$ が成り立つという意味．
[*10] $e_j$ は第 $j$ 成分のみが 1 であとは 0 の数ベクトル．

る．ここで補題 1.3.5 を用いれば，各々の $j \in \{1, \ldots, d\}$ と $|\alpha| \le m$ について $\partial_{x_j} g_\alpha(x) = g_{\alpha+e_j}(x)$ $(x \in \Omega)$ が[*11]成り立つことがわかる．いま $f := g_0 = g_{(0,\ldots,0)}$ と定めれば，

$$\partial_x^\alpha f(x) = \partial_x^\alpha g_0(x) = g_{\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_d e_d}(x) = g_\alpha(x)$$

となる．これより $f \in C_b^m(\Omega)$ および

$$\|f - f_n\|_{C_b^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le m} \|\partial_x^\alpha f - \partial_x^\alpha f_n\|_{C_b(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le m} \|g_\alpha - \partial_x^\alpha f_n\|_{C_b(\Omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

が従う． □

**注意 1.3.6.** $d = 1$ のときは，$\Omega$ を（開とは限らない）区間 $I$ におきかえても $C_b^m(\Omega)$ はやはり Banach 空間となる．（ただし，$I$ が端点を含むときは片側微分を考える．）

**問 1.1.** $I = [0, 2\pi]$ とし，複素数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ を考える．$m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| n^m < \infty$$

がなりたつならば，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$$

は $C^m(I)$ で収束する．

まとめ

- 集合 $X$ 上の複素数値有界関数の集合に上限ノルムを入れた空間 $F_b(X)$ は Banach 空間である．
- 位相空間 $X$ 上の複素数値有界連続関数全体の集合に上限ノルムを入れた空間 $C_b(X)$ は Banach 空間である．
- 開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 上の関数で $m$ $(\in \mathbb{N})$ 階までの全ての導関数が有界なもの全体の集合 $C_b^m(\Omega)$ は，適切なノルムにより Banach 空間となる．

## 1.4 Banach 空間の構成

本節では，ノルム空間がいくつか与えられたときにそこから新たなノルム空間を構成する方法を紹介する．

**命題 1.4.1** (部分ノルム空間)**.** $X$ をノルム空間，$Y$ をその線形部分空間とすれば，$X$ のノルムの制限により $Y$ はノルム空間となる．特に $X$ が Banach 空間ならば，$Y$ 閉集合であることと Banach 空間であることは同値である．

命題 1.4.1 で，$Y \subset X$ にノルムを制限した空間 $Y$ を部分ノルム空間という．特に $X$ が Banach 空間の時は，その閉部分空間にノルムを制限したものを部分 Banach 空間という．

[*11] $\alpha + e_j = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_j + 1, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_d)$ であった．

証明．$X$ のノルムの $Y$ への制限がまたノルムの条件を満たすことは明らかである．$X$ が Banach 空間であると仮定し，$Y$ が閉であることと完備であることが同値であることを示せばよい．

$Y$ が Banach 空間 $X$ の閉部分空間であるとし，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $Y$ の Cauchy 列とする．$(x_n)$ は $X$ の Cauchy 列でもあるから，$X$ において極限 $x_\infty$ を持つ．$Y$ は閉集合であるから $Y$ の点列の極限はまた $Y$ の元であり，$x_\infty \in Y$ となる．$(x_n)$ は $Y$ の任意の Cauchy 列として選んでいたから，$Y$ は完備であることがわかる．

逆に $Y$ が Banach 空間であると仮定する．$(x_n)$ は $Y$ の点列で，$X$ で極限 $x_\infty$ を持つとする．$X$ における収束列 $(x_n)$Cauchy 列であるから，$(x_n)$ は $Y$ においても Cauchy 列である．$Y$ の完備性によりその列は $Y$ において極限 $y_\infty$ を持つ．いま距離空間における極限の一意性より，$x_\infty = y_\infty \in Y$ である．したがって，$Y$ の元の列で $X$ において収束するようなものの極限は必ず $Y$ に属する．すなわち $Y$ は閉集合である． □

**命題 1.4.2.** $(X_1, \| \ \|_{X_1}), \dots, (X_n, \| \ \|_{X_n})$ をノルム空間とする．直積 $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ はノルム

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_X = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|_{X_j}$$

によりノルム空間となる．[*12]各 $X_j$ が Banach 空間ならば $X$ も Banach 空間となる．

証明．容易． □

命題 1.4.2 において構成されたノルム空間（Banach 空間）を直積ノルム空間（直積 Banach 空間）という．直積ノルム空間における位相は $X_1, \dots, X_n$ の直積位相[*13]と一致している．

**命題 1.4.3.** $X$ をノルム空間，$Y$ をその閉部分空間とする．$x \in X$ の $Y$ に関する同値類 $[x] \in X/Y$ に対して，

$$\|[x]\|_{X/Y} := d(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\|_X$$

と定める[*14]．このとき，$X/Y$ は $\| \ \|_{X/Y}$ によりノルム空間となる．特に，$X$ が Banach 空間ならば $X/Y$ も Banach 空間となる．

命題 1.4.3 における空間 $X/Y$ を商ノルム空間という．特に $X$ が Banach 空間の時は，$X/Y$ を商 Banach 空間という．

証明．**Step1：$\| \ \|_{X/Y}$ がノルムであることの証明．** $\| \ \|$ が $X/Y$ 上のノルムであることを示す．

任意の $x \in X$ について明らかに $\|[x]\| \geq 0$ であり，$x = 0$ なら

$$\|[0]\|_{X/Y} = \inf_{y \in Y} \|0 - y\| = 0$$

が成り立つ．逆に $\|[x]\|_{X/Y} = 0$ を仮定する．このとき商ノルムの定義より $x_n \to x$ なる $Y$ の点列が存在する．いま $Y$ は閉集合なので $x = \lim_n x_n \in Y$ が成り立つ．これより $[x] = Y = [0]$ となり，$\|[x]\|_{X/Y} = 0$ と

[*12] このノルムは $X$ の積位相を定める．
[*13] 直積位相とは，その位相における収束が成分ごとの収束と同値になるような位相あった．
[*14] このノルムは $X/Y$ の商位相を定める．

$[x]=0$ の同値性が示された．さらに

$$\begin{aligned}\|[x]+[y]\| &= \|[x+y]\| \\ &= \inf_{z\in Y}\|(x+y)-z\|_X \\ &\leq \inf_{z\in Y}\|x-z\|_X + \inf_{z'\in Y}\|y-z'\|_X \\ &= \|[x]\|+\|[y]\|\end{aligned}$$

より三角不等式もわかる．よって $\|\ \ \|_{X/Y}$ は $X/Y$ のノルムである．

**Step2 : 完備性の証明．** $X$ が Banach 空間であるとして，$X/Y$ が完備となることを示す．$(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $X/Y$ の任意の Cauchy 列としたとき，$(\xi_n)$ が収束部分列を持つことを証明しよう．$(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列で，任意の $j\in\mathbb{N}$ に対して

$$\|\xi_{n_{j+1}}-\xi_{n_j}\|_{X/Y} < \frac{1}{2^{j+1}}$$

を満たすようなものを選ぶ．$y_j$ を $\xi_{n_{j+1}}-\xi_{n_j}\in X/Y$ の適当な代表元とする．このとき

$$\|\xi_{n_{j+1}}-\xi_{n_j}\|_{X/Y} = \inf_{y\in Y}\|y-y_j\|_X < \frac{1}{2^{j+1}}$$

が成り立つから，$y'_j\in Y$ で $\|y'_j-y_j\| < 2^{-j-1}$ を満たすものがとれる．改めて $x_j=y'_j-y_j$ とおけば，$[x_j]=[y_j]=\xi_{n_{j+1}}-\xi_{n_j}$ および $\|x_j\|_X < 2^{-j-1}$ が成立する．ここで $\sum_{j\in\mathbb{N}}x_j$ は絶対収束するので，命題 1.1.8 より $X$ のノルムの意味で収束する．その極限を

$$x=\sum_{j\in\mathbb{N}}x_j$$

としたとき，$(\xi_{n_j})$ が $\xi:=[x]$ に収束することを確かめよう．

$$\begin{aligned}\|\xi-\xi_{n_j}\|_{X/Y} &= \left\|\xi-\sum_{l=0}^{j-1}(\xi_{l+1}-\xi_l)\right\|_{X/Y} \\ &= \left\|[x]-\sum_{l=0}^{j-1}[x_l]\right\|_{X/Y} \\ &= \left\|\left[x-\sum_{l=0}^{j-1}x_l\right]\right\|_{X/Y} \\ &\leq \left\|x-\sum_{l=1}^{j-1}x_j\right\|_X\end{aligned}$$

という評価が成り立つから，この式で $j\to\infty$ とすることで $\xi_{n_j}\to\xi$ in $X/Y$ を得る．一般に Cauchy 列の部分列が収束すれば，もとの列も同じ極限に収束するから $(\xi_n)$ は $\xi$ に収束する．以上で商ノルム空間 $X/Y$ の完備性が示された． $\square$

まとめ

- ノルム空間線形部分空間は，もとの空間のノルムの制限によりノルム空間となる．もとの空間が Banach 空間ならば，その閉線形部分空間は Banach 空間である．
- ノルム空間の有限個の直積は，成分ごとのノルムの和によりノルム空間となる．もとの空間が全て Banach 空間なら，有限個の積空間は Banach 空間となる．
- ノルム空間 $X$ と閉部分空間 $Y$ が与えられたとき，$X/Y$ は商ノルムによりノルム空間となる．$X$ が Banach 空間なら，商ノルム空間 $X/Y$ は Banach 空間となる．

## 1.5 有界線形写像

本節では，ノルム空間からノルム空間への連続な線形写像について考察する．有限次元ノルム空間上の線形写像はすべて連続であるが，無限次元空間においてはそうとは限らない．そのため，特に連続な線形写像に対象を絞って調べることが重要である．

**定理 1.5.1.** $X, Y$ をノルム空間とし，$A : X \to Y$ を線形写像とする．このとき以下の (i) から (iii) は同値である．

(i) $A$ は連続．
(ii) $A$ は $0$ で連続．
(iii) ある $C > 0$ が存在して，すべての $x \in X$ について $\|Ax\|_Y \leq \|x\|_X$ が成り立つ．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii) は明らかである．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) $0$ での連続性より $\delta > 0$ を適当に選んで

$$\|x\|_X < \delta \Longrightarrow \|Ax\|_Y < 1$$

とできる．これより任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $x \in X$ に対して

$$\left\| A\left(\frac{\delta x}{\|x\|_X + \varepsilon}\right)\right\| < 1$$

である．すなわち

$$\|Ax\| < \frac{\|x\|_X + \varepsilon}{\delta}$$

であるが，$\varepsilon$ の任意性より

$$\|Ax\| \leq \frac{\|x\|_X}{\delta}$$

が分かる．よって $A$ は有界である．

(iii) $\Longrightarrow$ (i) 有界性よりある $C > 0$ が存在して，任意の $x, y \in X$ に対して

$$\|Ax - Ay\|_Y = \|A(x - y)\|_Y \leq C\|x - y\|_X$$

がなりたつから $A$ は $X$ 上でリプシッツ連続である．よって $A$ は $X$ 上連続である．□

**定義 1.5.2.** $X, Y$ をノルム空間とする．写像 $A\colon X \to Y$ が定理 1.5.1 の同値条件を満たすとき，$A$ を有界線形写像 (bounded linear map) や有界線形作用素 (bounded linear operator) という．

$$B(X, Y) = \{A\colon X \to Y \mid A \text{ は有界線形写像.}\}$$

と定め，特に $Y=X$ のときは $B(X,X)=B(X)$ などと書く．$A\in B(X,Y)$ に対し

$$\|A\| = \inf\{C\geq 0 \mid \forall x\in X\ \|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X\}$$

と定め，これを $A$ の作用素ノルム (operator norm) という

**命題 1.5.3.** $X,Y$ をノルム空間としたとき，以下が成り立つ．

(i) 任意の $A\in B(X,Y)$ と任意の $x\in X$ に対して $\|Ax\|_Y\leq\|A\|\|x\|_X$ が成り立つ．

(ii) $X\neq\{0\}$ のとき，任意の $A\in B(X,Y)$ に対して，次が成り立つ．

$$\|A\| = \sup_{x\in X\setminus\{0\}}\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x\in X,\|x\|=1}\|Ax\|_Y = \sup_{x\in X,\|x\|\leq 1}\|Ax\|_Y.$$

(iii) $Z$ をノルム空間とする．$A\in B(X,Y)$ かつ $B\in B(Y,Z)$ なら $BA\in B(X,Z)$ である．さらに，その作用素ノルムについて $\|BA\|\leq\|B\|\|A\|$ が成立．

証明. (i)．作用素ノルムの定義より明らか.

(ii)．(i) より $\|x\|_X\leq 1$ なるとき

$$\|Ax\|_Y\leq\|A\|\|x\|_X\leq\|A\|.$$

よって

$$\sup_{x\in X,\|x\|=1}\|Ax\|_Y\leq\sup_{x\in X,\|x\|\leq 1}\|Ax\|_Y\leq\|A\|$$

である．また，任意の $x\in X\setminus\{0\}$ に対して

$$\left\|\frac{x}{\|x\|_X}\right\|_X = \frac{1}{\|x\|_X}\|x\|_X = 1$$

となることに注意すれば

$$\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \|\frac{1}{\|x\|_X}Ax\|_Y = \|A\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\|_Y \leq \sup_{\|x\|=1}\|Ax\|_Y$$

がなりたつ．よって

$$\sup_{x\in X\setminus\{0\}}\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}\leq\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|_Y.$$

また，$\|x\|_X\neq 0$ としたとき，

$$\|x\|_X\left(\sup_{x\in X\setminus\{0\}}\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}\right)\geq\|x\|_X\left(\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}\right)\geq\|Ax\|_Y.$$

$x=0$ の場合の不等式は明らかなので，全ての $x\in X$ に対して

$$\|x\|_X\left(\sup_{x\in X\setminus\{0\}}\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}\right)\geq\|Ax\|_Y$$

がなりたち，作用素ノルムの定義より

$$\|A\|\leq\sup_{x\in X\setminus\{0\}}\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$$

となる．以上の議論をまとめれば

$$\|A\| \leq \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_Y \leq \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} \|Ax\|_Y \leq \|A\|.$$

(iii)．線形性は明らかなので、有界性のみ示す。$A \in B(X,Y)$ かつ $B \in B(X,Z)$ であるから、(i) の結果により

$$\|BAx\|_Z \leq \|B\|\|Ax\|_Y \leq \|B\|\|A\|\|x\|_X$$

が任意の $x \in X$ に対して なりたつ。したがって作用素ノルムの定義より

$$\|BA\| \leq \|B\|\|A\|$$

が分かる． □

**定理 1.5.4.** $X, Y$ をノルム空間とし，$\| \ \ \|$ で作用素ノルムを表すことにする．

(i) $(B(X,Y), \| \ \ \|)$ はノルム空間である。
(ii) $Y$ が Banach 空間なら，$(B(X,Y), \| \ \ \|)$ は Banach 空間となる．

証明. (i) $B(X,Y)$ は連続な線形写像の空間であるから，これが線形空間であることは容易にわかる．作用素ノルムが実際に $B(X,Y)$ のノルムであることを確かめよう．$A, B \in B(X,Y)$ とすれば，任意の $x \in X$ に対して

$$\|(A+B)x\|_Y \leq \|Ax\|_Y + \|Bx\|_Y \leq \|A\|\|x\|_X + \|B\|\|x\|_X \leq (\|A\| + \|B\|)\|x\|_X$$

が成り立つから，$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ である．$A = 0$ なら，明らかに $\|A\| = 0$ である．逆に作用素ノルムが 0 なら常に $\|Ax\|_Y = 0$ なので，$A = 0$ となる．$\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$ は命題 1.5.3 (ii) の表現を用いれば容易に示される．これより，作用素ノルムは実際に $B(X,Y)$ のノルムであることがわかった．

(ii) $Y$ が Banach 空間のとき，$B(X,Y)$ も完備になることを示そう．$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $B(X,Y)$ の Cauchy 列とする．このとき，任意の $x \in X$ について $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ は $Y$ の Cauchy 列である[*15]．その極限を $Ax$ と書くとき，写像 $x \mapsto Ax$ がまた $B(X,Y)$ の元であることおよび，$(A_n)$ が $B(X,Y)$ のノルムで $A$ に収束することを示せばよい．極限 $A$ の線形性は明らかである．$(A_n)$ は $B(X,Y)$ の Cauchy 列であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n, m \geq N_\varepsilon \implies \|A_n x - A_m x\|_Y \leq \|A_n - A_m\|\|x\|_X \leq \varepsilon\|x\|_X \quad \forall x \in X$$

が成立．特に $\varepsilon = 1$ とすれば，$n, m \geq N_1$ に対して

$$\|A_n x - A_m x\|_Y \leq \|x\|_X \quad \forall x \in X$$

となる．いま $Y$ のノルムで $A_m x \to Ax$ が成り立っているから，ここで $m \to \infty$ とすれば

$$\|A_n x - Ax\|_Y \leq \|x\|_X \quad \forall x \in X$$

を得る．すなわち $n \geq N_1$ なら $A_n - A \in B(X,Y)$ であり，さらに

$$A = A_n - (A_n - A) \in B(X,Y)$$

[*15] 1.5.3 (i) の評価よりわかる．

がわかる．また $n \geq N_\varepsilon$ なら

$$\|A_n x - Ax\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X \quad \forall x \in X$$

であるから，任意の $n \geq N_\varepsilon$ に対して $\|A_n - A\| \leq \varepsilon$ が成り立つ．ゆえに $(A_n)$ は作用素ノルムに関して $A$ に収束する． □

ある線形作用素の逆作用素を求めることは一般には困難だが，次のような場合は逆作用素の具体的表現が可能である．これは，$x \in \,]-1,1[$ における Taylor 展開

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$$

において，形式的に $x = A$ としたものに対応している．

**命題 1.5.5.** $X$ を Banach 空間とし，$A \in B(X)$ とする．$\|A\| < 1$ なら $I - A \in B(X)$ は可逆で，$(I-A)^{-1} \in B(X)$ となる．さらに，$(I-A)^{-1}$ は次の具体的表現を持つ．

$$(I-A)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} A^n.$$

証明. $\|A\| < 1$ なので，

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|A^n\| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|A\|^n < \infty$$

が成立．定理 1.5.4 より $B(X)$ は Banach 空間だから，級数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} A^n$ は作用素ノルムの意味で収束[*16]し，その極限はまた $B(X)$ の元である．$P = \sum_{n\in\mathbb{N}} A^n$ としたとき，$P = (I-A)^{-1}$ であることを示そう．$P_n = \sum_{0\leq k\leq n} A^k$ と定めれば，

$$P_n A = AP_n = P_{n+1} - I$$

である．ここで $n \to \infty$ とすれば

$$PA = AP = P - I$$

を得る．これを変形すれば

$$(I-A)P = P(I-A) = I$$

となり，$P \in B(X)$ は $I - A$ の逆作用素である． □

**例 1.5.6.** $I = [0,1]$，$K \in C(I \times I)$ とし，$A\colon C(I) \to C(I)$ を

$$Au(x) = \int_{[0,x]} K(x,y)u(y)dy \quad x \in I \quad u \in C(I)$$

によって定める[*17]．ここで

$$M = \max_{x,y\in I} |K(x,y)|$$

とすれば，

$$|Au(x)|_{C(I)} \leq \int_{[0,x]} |K(x,y)u(y)|\, dy \leq M \int_{[0,x]} |u(y)| dy \leq M\|u\|_{C(I)}$$

[*16] 命題 1.1.8.
[*17] $x \mapsto Au(x)$ の連続性は Lebesgue の収束定理より従う．

という評価がなりたつから，$A \in B(C(I))$ となる．さらに，

$$\begin{aligned}
\|A^n u\|_{C(I)} &\le M \int_{[0,1]} A^{n-1}u(y_1)dy_1 \\
&\le M^2 \int_{[0,1]} \int_{[0,y_1]} |A^{n-2}u(y_2)|dy_2 dy_1 \\
&\le \cdots \\
&\le M^n \int_{[0,1]} \int_{[0,y_1]} \cdots \int_{[0,y_{n-1}]} |u(y_n)|dy_n \ldots dy_2 dy_1 \\
&\le M^n \|u\| \int_{[0,1]} \int_{[0,y_1]} \cdots \int_{[0,y_{n-1}]} dy_n \ldots dy_2 dy_1 \\
&= \frac{M^n}{n!} \|u\|_{C(I)}
\end{aligned}$$

より $A^n \le M^n/n!$ である．これより級数 $\sum_n A_n$ は絶対収束し，ゆえに $B(C(I))$ で収束する．命題 1.5.5 と同様にして，

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} A^n \in B(C(I))$$

が示される．

**定義 1.5.7.** $X$ と $Y$ をノルム空間とし，$A \colon X \to Y$ を線形写像とする．

(i) $A$ が可逆で $A, A^{-1} \in B(X, Y)$ のとき，$A$ をノルム空間としての同型写像 (isomorphism) とよぶ．このとき，$X$ と $Y$ はノルム空間として同型 (isomorphic) であるという．

(ii) 任意の $x \in X$ に対して $\|Ax\|_Y = \|x\|_X$ が成り立つとき，$A$ は等長写像 (isometry) とよばれる．

(iii) $A$ が可逆な等長写像であるとき，$A$ を等長同型写像といい，$X$ と $Y$ 等長同型であるという．

等長同型写像は，明らかに Banach 空間としての同型写像である．

**例 1.5.8.** $I = [0, 1]$ とし，$X = C(I)$ を上限ノルムにより Banach 空間と考える．このとき

$$Y := \{u \in X \mid u(0) = 0\}$$

は $X$ の閉部分空間であり，写像

$$\begin{aligned}
X/Y &\longrightarrow \mathbb{K} \\
[u] &\longmapsto u(0)
\end{aligned}$$

は等長同型である．

**命題 1.5.9.** $X$ をノルム空間，$Y$ をその部分空間とし，$P \colon X \to X/Y$ を商空間への標準全射とする．このとき $P \in B(X, X/Y)$ であり，$\|P\| \le 1$ が成り立つ．さらに $Y \subsetneq X$ なら $\|P\| = 1$ となる．

まとめ

- ノルム空間 $X$ から $Y$ への線形写像 $A$ が

$$\exists C > 0 \quad \forall x \in X \quad \|Ax\|_Y \leq C\|x\|_Y$$

を満たすとき，$A$ を有界線形写像と呼ぶ．上の定数 $C$ のうち最小のものを $A$ の作用素ノルムといい，$\|A\|$ で表す．

- ノルム空間 $X$ から Banach 空間 $Y$ への有界線形写像全体の空間 $B(X, Y)$ は，作用素ノルムにより Banach 空間となる．
- 線形空間として同型かつ同相である写像を，Banach 空間としての同型写像という．特に等長性を満たすものは，等長同型と呼ばれる．

# 第 2 章

# Hilbert 空間

## 2.1 Hilbert 空間の定義

**定義 2.1.1.** $X$ を $\mathbb{K}$-線形空間とし，$\langle\ ,\ \rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}$ を写像とする．$\langle\ ,\ \rangle$ が次の 5 条件を満たすとき，$\langle\ ,\ \rangle$ を $X$ 上の内積 (inner product) あるいはスカラー積 (scalar product) と呼ぶ．

(i) 任意の $x, y, z \in X$ に対して，$\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.
(ii) 任意の $x, y \in X$ と $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して，$\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$.
(iii) 任意の $x, y \in X$ に対して，$\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$.
(iv) 任意の $x \in X$ に対して，$\langle x, x\rangle \geq 0$.
(v) 任意の $x \in X$ が $\langle x, x\rangle = 0$ を満たすならば，$x = 0$.

さらに，線形空間 $X$ と $\langle\ ,\ \rangle$ の組 $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ を内積空間 (inner product space) という．考えている内積が明らかなときには，単に $X$ を内積空間ということもある．

条件 (i)–(iii) より，$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ のとき内積は

(a) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$.
(b) $\langle z, \alpha x + \beta y\rangle = \overline{\alpha}\langle z, x\rangle + \overline{\beta}\langle z, y\rangle$.

を満たす．一般にこの (a) と (b) を満たす写像 $X \times X \to \mathbb{C}$ のことを一次半形式 (sesqui-linear form) という[*1]．一次半形式が (iii) を満たすとき，それはエルミート形式 (Hermitian form) 呼ばれる．条件 (ii) より，一次半形式は任意の $x$ に対して $\langle 0, x\rangle = \langle x, 0\rangle = 0$ を満たす．また $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のときは

(a) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$.
(b') $\langle z, \alpha x + \beta y\rangle = \alpha\langle z, x\rangle + \beta\langle z, y\rangle$.

を満たし，内積は双線形形式 (bilinear form) となる．

条件 (iv) を満たす一次半形式（双線形形式）は正定値あるいは単に正であるという．さらに条件 (v) を満たすときは，狭義の正定値などという．つまり，内積とは狭義正定値のエルミート形式（あるいは対称双線形形式）のことである．

[*1] sesqui とは 1.5 倍の意味である．

**補題 2.1.2.** $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ を内積空間とすれば，次が成り立つ．

(i) 任意の $x, y \in X$ に対して $|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$ が成り立つ．（Schwarz の不等式）
(ii) 任意の $x, y \in X$ に対して，$\sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} \leq \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}$．（三角不等式）

内積の定義と補題 2.1.2 より，$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ は $X$ 上のノルムとなる．これを内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の定めるノルムという．

最も基本的な Hilbert 空間は $\mathbb{R}^d$ や $\mathbb{C}^d$ である．

**定義 2.1.3.** 内積空間 $(X, \langle\ ,\ \rangle$ が内積の定めるノルムに関して完備であるとき，これを Hilbert 空間と呼ぶ．

**例 2.1.4.** $\mathbb{K}^d$ において，$x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{K}^d$ と $y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{K}^d$ に対して

$$\langle x, y\rangle = \sum_{1\leq i\leq d} x_i \overline{y_i}$$

と定める．このとき，$\mathbb{K}^d$ はこの内積に関して Hilbert 空間となる．

Hilbert 空間 $\mathbb{K}^d$ を無限次元に拡張したものとして，次の数列空間がある．

**例 2.1.5.** $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ の部分空間 $l^2$ を

$$l^2 = \left\{ a = (a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 < \infty \right\}$$

とする．$a, b \in l^2$ に対して

$$\langle a, b\rangle_{l^2} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \overline{b_n}$$

と定めたとき，$l^2$ が $\langle\ ,\ \rangle_{l^2}$ のもとで Hilbert 空間となることを示そう．

内積の基本的な性質として，次のようなものがある．

**命題 2.1.6.** $X$ を内積空間とする．

(i) 内積 $\langle\ ,\ \rangle \colon X \times X \to \mathbb{K}$ は連続関数である．
(ii) $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2$.
(iii) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$．（中線定理）
(iv) $x_1, \ldots, x_n \in X$ が $\langle x_i, x_j\rangle = 0$ $(i \neq j)$ を満たすならば，

$$\left\| \sum_{1\leq i\leq n} x_i \right\|^2 = \sum_{1\leq i\leq n} \|x_i\|^2.$$

(v) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のとき，

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \quad x, y \in X.$$

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ のときは，

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) + \frac{i}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right) \quad x, y \in X.$$

**定義 2.1.7.** $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ を内積空間とし，$x, y \in X$ および $A, B \subset X$ とする．

(i) 任意の $a \in A$ と $b \in B$ に対して $\langle a, b\rangle = 0$ が成り立つとき，$A$ と $B$ は直交するといい，$A \perp B$ で表す．

(ii) $\{x\} \perp A$ のとき，$x \perp A$ と書き，$x$ と $A$ は直交するという．

(iii) $\{x\} \perp \{y\}$ のときは $x \perp y$ と書き $x$ と $y$ は直交するという．

(iv) $A^{\perp} = \{x \in X \mid \forall a \in A\ \langle a, x\rangle = 0\}$ と定める．

**補題 2.1.8.** $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ を内積空間とし，$A, B$ をその部分集合とする．

(i) $A^{\perp}$ は $X$ の閉部分空間である．

(ii) $A \subset B$ なら，$A^{\perp} \supset B^{\perp}$．

(iii) $A^{\perp} = \overline{\mathrm{L.h.}[A]}^{\perp}$．

証明. □

## 2.2 直交分解

## 2.3 Riesz の定理

## 2.4 正規直交系

# 第 3 章

# 一様有界性原理と開写像定理.

## 3.1 Baire のカテゴリー定理

**定理 3.1.1** (Baire のカテゴリー定理). $(X, d)$ を完備距離空間とする．$(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $X$ の閉集合族とする．このとき $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ が内点をもつならば，ある $F_{n_0}$ は内点をもつ．

証明. 対偶を証明する．$x_0 \in F$ と $r_0 > 0$ を任意にとって固定する．このとき，$F_1$ は内点をもたないとの仮定より，$x_0$ が $F_1$ の内点であることはない．したがって，$B(x_0, r_0) \cap F_1^c \neq \emptyset$ である．$F_1$ は閉集合であったから，$B(x_0, r_0) \cap F_1^c$ は開集合である．ゆえに，ある $x_1 \in X$ とある $r_1 > 0$ が存在して，

$$B(x_1, 2r_1) \subset B(x_0, r_0) \cap F_1^c$$

を満たす．同様の理由で，

$$B(x_n, 2r_n) \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap F_n^c$$

を満たす $(x_n, r_n) \in X \times (0, \infty)$ の列を帰納的に定義できる．いま，

$$0 < r_n < \frac{1}{2} r_{n-1} < \cdots < \frac{1}{2^n} r_0$$
$$x_k \in B(x_n, r_n) \quad (\text{for any } k \geq n)$$

がなりたつから，$(x_n)$ は $X$ の Cauchy 列である．$X$ の完備性より，その極限 $x_\infty$ が存在して

$$x_\infty \in \overline{B(x_n, r_n)} \subset B(x_n, 2r_n) \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \setminus F_n \subset X \setminus F_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

がなりたつ．すなわち

$$x_\infty \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X \setminus F_n = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = X \setminus F.$$

また，$x_\infty \in B(x_n, r_n) \subset B(x_0, r_0)$ より

$$x_\infty \in B(x_0, r_0) \cap F^c$$

がわかるので，$r_0$ は任意に選んだものだったことに注意すれば $x_0 \notin F^\circ$ がわかる．さらに，$x_0$ の任意性より，$F$ の任意の元は内点ではないことがわかり，$F^\circ = \emptyset$. □

まとめ

- 完備距離空間の閉集合で内点を持たないものの列が与えられたとき，その合併もまた内点を持たない．これを Baire のカテゴリー定理という．

## 3.2 一様有界性の定理

**補題 3.2.1.** $V$ をノルム空間，$F$ をその部分集合で以下の条件を満たすものとする．

$$F = -F, \quad \frac{1}{2}F + \frac{1}{2}F \subset F.$$

このとき，ある $x_0 \in F$ とある $r_0 > 0$ について $B(x_0, r_0) \subset F$ がなりたつなら，$B(0, r_0) \subset F$ である．

証明．$x \in B(0, r_0)$ とすれば，

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{2}(x_0 + x) + \frac{1}{2}(-x_0 + x) &\in \frac{1}{2}B(x_0, r_0) + \frac{1}{2}-B(x_0, r_0) \\ &\subset \frac{1}{2}F + \frac{1}{2}(-F) = \frac{1}{2}F + \frac{1}{2}F \\ &\subset F. \end{aligned}$$

□

有界線形作用素の族については，各点ごとの有界性が作用素族のノルム有界性を導くという著しい性質がある．

**定理 3.2.2** (一様有界性定理)**.** $X$ を Banach 空間，$Y$ をノルム空間とし，$(T_\lambda)$ を $B(X, Y)$ の元の族とする．このとき，任意の $x \in X$ に対して $\sup_{\lambda \in \Lambda} \|T_\lambda x\|_Y < \infty$ がなりたつならば，$\sup_{\lambda \in \Lambda} \|T_\lambda\| < \infty$ である．

証明．任意の自然数 $n$ に対して

$$\begin{aligned} F_n &:= \left\{ x \in X \;\middle|\; \sup_{\lambda \in \Lambda} \|T_\lambda x\|_Y \leq n \right\} \\ &= \{ x \in X \mid \forall x \in X \ \|T_\lambda x\|_Y \leq n \} \\ &= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \{ x \in X \mid \|T_\lambda x\|_Y \leq n \} \end{aligned}$$

とすれば，$F_n$ は閉集合かつ $X = \bigcup F_n$ となる．$X$ は Banach（よって完備距離）空間であるから，Baire のカテゴリー定理により $F_{n_0}$ が内点をもつような $n_0$ を選べる．すなわち，ある $x_0 \in F_{n_0}$ とある $r_0 > 0$ が存在して $B(x_0, r_0) \subset F_{n_0}$ を満たす．この $F_{n_0}$ は補題 3.2.1 の条件を満たすから，特に $B(0, r_0) \subset F_{n_0}$ が言える．これより $\|x\|_X < r_0$ となるような任意の $x$ に対して

$$\forall \lambda \in \Lambda \quad \|T_\lambda x\|_Y \leq n_0$$

がなりたつ．任意の 0 でない $x \in X$ に対して

$$\left( \frac{x}{\|x\|_X + \varepsilon} \right) r_0 < r_0 \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

がなりたつことに注意すれば，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して

$$\|T_\lambda x\|_Y \leq \frac{n_0}{r_0}(\|x\|_X + \varepsilon) \quad (\forall \varepsilon > 0).$$

ゆえに，$\sup_{\lambda \in \Lambda} \|T_\lambda\| \leq n_0 / r_0 < \infty$ となる． □

一般に連続関数列の各点収束極限は連続とは限らず，極限の連続性を保証する条件は一様収束などであった．しかし，Banach 空間上の有界線形作用素列については，各点収束極限は必ず連続となる．

**系 3.2.3.** $X$ を Banach 空間，$Y$ をノルム空間とする．$(T_n)$ を $B(X,Y)$ の列とし，任意の $x \in X$ に対して $T_n x$ は $Y$ の収束列とする．$Tx = \lim T_n x$ とおけば $T \in B(X,Y)$ で $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$ がなりたつ．

証明．各 $x \in X$ に対して $T_n x$ は $Y$ の有界列なので，定理 3.2.2 により

$$\|T_n\| \leq {}^{\exists}C \quad (n \in \mathbb{N}).$$

これより

$$\|T_n x\|_Y \leq \|T_n\| \|x\|_X \leq C \|x\|_X$$

がなりたつから下極限をとることにより

$$\|Tx\|_Y \leq \liminf_{n \to \infty} \|T_n\| \|x\|_X \leq C \|x\|_X$$

となる．これより，$T$ の有界性と求めたい不等式が得られる．$T$ の線型性は明らかである． □

**命題 3.2.4.** $X$ を Banach 空間，$Y$ をノルム空間とする．$(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B(X,Y)^{\mathbb{N}}$ は任意の $x \in X$ について $(T_n x)$ が $Y$ の収束列であるものとする．$Tx = \lim T_n x$ で $T \in B(X,Y)$ を定めたとき，次の結果が成立する．

(i) $(x_n)$ を $X$ の収束列とするとき，$T_n x_n \longrightarrow Tx$ in $Y$.

(ii) X における任意のコンパクト集合 $K$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in K} \|Tx - T_n x\|_Y = 0.$$

証明．(i).

$$\begin{aligned}
\|T_n x_n - Tx\|_Y &\leq \|T_n x_n - T_n x\|_Y + \|T_n x - Tx\|_Y \\
&= \|T_n(x_n - x)\|_Y + \|T_n x - Tx\|_Y \\
&\leq \|T_n\| \|x_n - x\|_X + \|T_n x - Tx\|_Y \\
&\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| \|x_n - x\|_X + \|T_n x - Tx\|_Y
\end{aligned}$$

である．一様有界性の定理より $\sup_n \|T_n\| < \infty$ であるから，$n \to \infty$ の極限をとれば仮定より右辺は 0 に収束する．

(ii). $\|T_n x\|_Y \longrightarrow 0$ $(\forall x \in X)$ のときに示せば十分である．背理法で示す．結論を否定すれば，ある $\varepsilon_0$ が存在して，部分列 $(T_{n_k})$ と $K$ の列 $(x_k)$ を

$$\|T_{n_k} x_k\|_Y \geq \varepsilon_0$$

を満たすようにとることができる．$K$ のコンパクト性より $(x_k)$ には収束部分列が存在するので，それを $x_{k(m)} \longrightarrow x_0 \in K$ とおくことにする．このとき，(i) により $\|T_{n_{k(m)}} x_{k(m)}\|_Y \longrightarrow 0$ となるから矛盾である． □

まとめ

- Banach 空間 $X$ からノルム空間 $Y$ への有界線形作用素の族については，各点でのノルム有界性から作用素ノルムについての有界性が従う．これを一様有界性の定理という．
- Banach 空間からノルム空間への有界線形作用素列 $(T_n)$ が各点収束するとき，その極限 $T$ はまた有界線形作用素で，$\|T\| \le \liminf\|T_n\|$ が成り立つ．

## 3.3 開写像定理

記号の混乱を避けるため

$$B_r^X := \{x \in X \mid \|x\|_X \le r\}$$
$$B_r^Y := \{y \in Y \mid \|y\|_Y \le r\}$$

と書くことにする．はじめに，以下の補題を示す．

**補題 3.3.1.** $X, Y$ をノルム空間とする．$T \in B(X,Y)$ に対して，以下の (i) と (ii) がなりたつ．

(i) $T(B_r^X) = rT(B_1^X)$.
(ii) $\overline{T(B_r^X)} = r\overline{T(B_1^X)}$.

証明．(i)．$y \in T(B_1^X)$ とすれば，ある $x \in B_1^X$ が存在して $y = Tx$ とできる．$r > 0$ に対して $ry = T(rx)$ かつ $rx \in B_r^X$ となるので，$ry \in T(B_r^X)$ である．よって $rT(B_1^X) \subset T(B_r^X)$ である．逆に $y \in T(B_r^X)$ とすれば，$y = Tx$ をみたす $x \in B_r^X$ が存在する．$x/r \in B_1^X$ であるから $T(x/r) \in T(B_1^X)$．したがって，$y = rT(x/r) \in rT(B_1^X)$ となる．ゆえに，$T(B_r^X) \subset rT(B_1^X)$ である．

(ii)．(i) の結果より，$\overline{rT(B_1^X)} = r\overline{T(B_1^X)}$ を示せばよい．$r\overline{T(B_1^X)}$ は $rT(B_1^X)$ を含む閉集合なので，明らかに $\overline{rT(B_1^X)} \subset r\overline{T(B_1^X)}$ である．逆の包含関係を示そう．$y \in r\overline{T(B_1^X)}$ とすれば，適当な列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (B_1^X)^{\mathbb{N}}$ によって $y/r = \lim Tx_n$ とできる．このとき，$(rTx_n) \in (rT(B_1^X))^{\mathbb{N}}$ であって $y = \lim rTx_n$ であるから，$y \in \overline{rT(B_1^X)}$ が分かる．よって $r\overline{T(B_1^X)} \subset \overline{T(B_1^X)}$ となる． □

**補題 3.3.2.** $X$ と $Y$ をノルム空間とし，$T \in B(X,Y)$ は $R(T) = Y$ を満たすものとする．このとき，以下の (i) と (ii) がなりたつ．

(i) $Y$ が Banach 空間ならば，$B_\delta^Y \subset \overline{T(B_1^X)}$ を満たす $\delta > 0$ が存在する．(ただし，$B_\delta = B(0,\delta)$ とする．)
(ii) $X$ が Banach 空間で，ある $\delta > 0$ について $\overline{T(B_1^X)} \supset B_\delta^Y$ がなりたつとする．このとき，$T(B_1^X) \supset B_\delta^Y$ となる．

証明．(i)．$F_n := \overline{T(B_n^X)}$ とおく．$T$ は全射ゆえ $\bigcup F_n = Y$ であるから，Banach 空間 $Y$ に Baire の定理を適用すれば $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ F_{n_0}^\circ \ne \emptyset$ である．そこで，$y_0 \in Y$ と $\delta_0 > 0$ を適当に選んで

$$B^Y(y_0, \delta_0) \subset F_{n_0}$$

とできる．このとき，補題 3.2.1 と補題 3.3.1 により

$$B_{\delta_0}^Y \subset F_{n_0} = \overline{T(B_{n_0}^X)} = n_0\overline{T(B_1^X)}$$

であるから，$\delta = \delta_0/n_0$ とおけば

$$B_\delta^Y \subset \overline{T(B_1^X)}$$

となる．

(ii)．$y_0 \in B_\delta^Y$ とする．このとき，$r_0 \in (0,1)$ を適当に選んで $y_0 \in B_{r_0\delta}^Y$ とできる．次に，正数列 $(r_n)$ で $\sum r_n < 1$ なるものをとる．仮定より $y_0$ は $T(B_{r_0}^X)$ の集積点であったから，

$$y_0 - Tx_0 \in B_{r_1\delta}^Y \subset \overline{T(B_{r_1}^X)}$$

をみたす $x_0 \in B_0^X$ をとれる．さらに $y_0 - Tx_0$ は $T(B_{r_1}^X)$ の集積点であるから，

$$\exists x_1 \in B_{r_1}^X \quad (y_0 - Tx_0) - Tx_1 \in B_{r_2\delta}^Y \subset \overline{T(B_{r_2})^X}$$

とできる．同様にして，帰納的に次の条件を満たす点列 $(x_n)$ を構成できる．任意の $n \in \{1,2,\dots\}$ に対して

$$\begin{cases} x_n \in B_{r_n}^X \\ y_0 - T(x_0 + \cdots + x_n) \in B_{\delta r_{n+1}}^Y \subset \overline{T(B_{r_{n+1}}^X)}. \end{cases}$$

いま，$\|x_n\|_X < r_n$ かつ $\sum r_n < 1$ より $\sum x_n$ は $X$ で収束する．($\because$ $X$ は Banach かつ $\sum x_n$ は絶対収束．)
また，

$$\sum_{k=1}^n x_k \in B^X\left(0, \sum_{k=1}^n r_k\right) \subset B^X\left(0, \sum_{k=1}^\infty r_k\right)$$

であるから，極限をとって

$$\sum_{k=1}^\infty x_k \in \overline{B^X\left(0, \sum r_k\right)} \subset B_1^X$$

が分かる．

$$\|y_0 - T\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\|_Y \leq \delta r_{n+1} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

に注意すれば，

$$y_0 = T\left(\sum_{k=1}^\infty x_k\right) \in T(B_1^X)$$

となるから，$y_0 \in T(B_1^X)$ が示された． □

(ii) で全射はどこで使った？

**定理 3.3.3** (開写像定理)**.** $X, Y$ を Banach 空間とする．$T \in B(X,Y)$ は全射ならば開写像である．

証明. $G \subset X$ を開集合とする．$T(G)$ の元 $y_0$ を任意にとれば，全射性より $y_0 = Tx_0$ となる $x_0 \in G$ がとれる．$G$ は開集合なので，

$$\exists r_0 > 0 \quad B^X(x_0, r_0) \subset G.$$

ところで，補題??により（(i) と (ii) 両方使う）$B_{\delta r_0}^Y \subset T(B_{r_0}^X)$ なる $\delta > 0$ がとれるから，

$$B(y_0, \delta r_0)^Y = y_0 + B_{\delta r_0}^Y \subset Tx_0 + T(B_{r_0}^X) \subset T(B^X(x_0, r_0)) \subset T(G)$$

となる．よって，$y_0$ は $T(G)$ の内点である． □

一般に可逆な連続写像が同相であるとは限らないのであった．しかし，開写像定理を用いれば，Banach 空間における可逆な有界線形作用素の逆写像は必ず連続となる，という驚くべき結果が証明される．

**系 3.3.4.** $X, Y$ を Banach 空間，$T \in B(X,Y)$ とする．$T$ が可逆ならば，$T^{-1} \in B(X,Y)$ がなりたつ．

*証明.* $T$ は可逆だから，開集合 $U \subset X$ に対して $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ が成り立つ．定理**??**より $T$ は開写像なので，$T(U)$ は $Y$ の開集合である．すなわち $T^{-1}\colon Y \to X$ は連続である． $\square$

**系 3.3.5.** $X, Y$ を Banach 空間とする．$T \in B(X,Y)$ が全射ならば，$\widetilde{T} \in B(X/N(T), Y)$ は同相写像である．（ただし，$\widetilde{T}$ は $T$ によってひきおこされる可逆写像である．）

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \\
X/N(T) \arrow[ur, "\widetilde{T}"'] &
\end{tikzcd}$$

第 4 章

# 非有界作用素

第 6 章では，必ずしも有界ではない線形作用素を扱う．応用上重要な作用素は有界でないものも多く，それらの作用素の解析を行うための道具を準備するのが本章の目標である．

## 4.1 基本的な概念の定義

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ とする．

**定義 4.1.1.** $X, Y, Z$ を $\mathbb{K}$-線形空間とする．

(i) $X$ の部分集合 $D(T)$ から $Y$ への写像 $T\colon D(T) \to Y$ を $X$ から $Y$ への作用素 (operator) という．集合 $D(T)$ を作用素 $T$ の定義域といい，作用素 $T$ による $D(T)$ の像を $R(T)$ で表し，$T$ の値域という．

(ii) $X$ の線形部分空間 $D(T)$ 上で定義された作用素 $T$ が線形写像であるとき，$T$ を $X$ から $Y$ への線形作用素 (linear operator) という． 線形作用素の核を $N(T) = \{x \in D(T) \mid Tx = 0\}$ によって定義する．

線形写像 $A, B\colon X \to Y$ が与えられたとき，各点ごとの和及びスカラー倍により新たな線形写像 $A + B$ と $\alpha A$ が定まるのであった．一般に $X$ から $Y$ への作用素 $T, S$ が与えられたとき，$T$ と $S$ の定義域が等しいとは限らないので和やスカラー倍を考えるためには適当に定義域を制限する必要がある．

**定義 4.1.2.** $X, Y$ を $\mathbb{K}$-線形空間とし，$T, S$ を $X$ から $Y$ への作用素とする．$D(S + T) = D(S) \cap D(T)$ として，作用素 $S + T$ を

$$(S + T)x = Sx + Tx$$

によって定める．また，$\alpha \in \mathbb{K}$ に対して $D(\alpha T) = D(T)$ とおいて，作用素 $\alpha T$ を

$$(\alpha T)x = \alpha(Tx)$$

によって定義する．このように定まる作用素 $S + T$ を $S$ と $T$ の和といい，$\alpha T$ を $T$ の $\alpha$ 倍という．

写像 $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to Z$ が与えられたとき，その合成 $g \circ f$ が定義される．$X$ から $Y$ への作用素 $T$ と $Y$ から $Z$ への作用素 $S$ については，一般には $R(T) \subset D(S)$ とは限らないので，ここでも合成の定義するためには作用素の $T$ の定義域を制限する必要がある．

## 4.2 閉作用素

## 4.3 Hilbert 空間における共役作用素

## 4.4 ノルム空間における共役作用素

# 参考文献


[1] 日合文雄, 柳研二郎. ヒルベルト空間と線形作用素. 牧野書店, 1995.

[2] Serge Lang. *Algebra*, Vol. 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, revised third edition, 2002.

[3] 宮島静雄. ソボレフ空間の基礎と応用. 共立出版, 2006.

[4] 宮島静雄. 関数解析. 横浜図書, 2014.

[5] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis, Revised and Enlarged Edition*. Academic Press, 1980.

# 索引

$A \perp B$, 23
$A^{\perp}$, 23
$B(a, r)$, 1
$B_X(a, r)$, 1
$D(T)$, 30
$F_b(X)$, 8
$F_b(X, \mathbb{C})$, 8
$R(T)$, 30
$S(a, r)$, 1
$S_X(a, r)$, 1
$\Subset$, 11
$\overline{B}(a, r)$, 1
$\overline{B}_X(a, r)$, 1
$x \perp A$, 23
$x \perp y$, 23

absolute convergence, 4

Banach space, 1
bilinear form, 21
bounded linear map, 15
bounded linear operator, 15

Euclidean norm, 3

inner product, 21
isometry, 19

linear operator, 30

multi index, 10

norm, 1
normed space, 1

operator, 30
operator norm, 16

seminorm, 1

topological vector space, 2

位相線形空間, 2
開写像定理, 28
作用素, 30
作用素ノルム, 16
商ノルム空間, 13
商 Banach 空間, 13
（部分集合によって）生成される閉部分空間, 3
セミノルム, 1
線形作用素, 30
絶対収束, 4
双線形形式, 21
多重指数, 10
値域, 30
直積ノルム空間, 13
直積 Banach 空間, 13
定義域, 30
等長写像, 19
等長同型, 19
同型（Banach 空間として）, 19
内積, 21
ノルム, 1
ノルム位相, 1
ノルム空間, 1
Banach 空間, 1
部分ノルム空間, 12
部分 Banach 空間, 12
有界線形作用素, 15
有界線形写像, 15
Euclid ノルム, 3