関数解析 II 期末レポート
担当：土居伸一教授
問題番号 3, 4, 5, 6, 7, 9

基礎工学研究科修士課程 1 年
学籍番号 29C14071
平井祐紀

2015 年 2 月 3 日

$\mathbb{N}$ は正の自然数を表すものとする．線形写像 $T : X \to Y$ に対して

$$N(T) := \{x \in X \mid Tx = 0\}$$
$$R(T) := \{y \in Y \mid \exists x \in X \ y = Tx\}$$

とおくことにする．

問題 3. $a > 0$,$I = [0, a]$ とおき，$C(I)$ から $C(I)$ への線形作用素 T を次で定める：

$$D(T) = \{u \in C^1(I) \mid u(a) = -u(0)\}, \quad Tu(x) = -u'(x) \ (x \in I).$$

このとき，$\sigma_p(T)$ および $\sigma(T)$ を求めよ．

解答．**Step1：$\sigma_p(T)$ について．**

固有値の定義より，作用素 $\lambda I - T$ が単射とならないような λ を見つければよい．すなわち，$N(\lambda I - T) \supsetneq \{0\}$ となるような λ の全体が $\sigma_p(T)$ である．いま条件 $(\lambda I - T)u = 0$ を考えてみると，これは常微分方程式

$$\lambda u(x) = u'(x)$$

に他ならないからその解は $u(x) = Ce^{\lambda x}$ である．（ただし，C は任意の定数．）$u \in D(T)$ であるための条件は $Ce^{\lambda a} = u(a) = -u(0) = -C$ であるが，今 u として特に 0 でないものを探したいから $e^{\lambda a} = -1$ を考えればよい．これを満たす λ は

$$\lambda = \frac{(2n+1)\pi i}{a} \quad n \in \mathbb{Z}$$

と表される．すなわち

$$\sigma_p(T) = \frac{(2\mathbb{Z}+1)\pi i}{a} = \left\{ \frac{(2n+1)\pi i}{a} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

である．

Step2：$\sigma(T)$ について．

$\sigma(T) = \sigma_p(T) = (2\mathbb{Z}+1)\pi i/a$ であることを示す．そのためには，$\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T)$ をいえばよい．$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T)$ とすれば $\lambda I - T$ は単射であるから，その逆作用素 $(\lambda I - T)^{-1} : R(\lambda I - T) \to C(I)$ が定義できる．ここではその逆作用素を実際に構成して，その性質を調べることで λ がレゾルベント集合の元であることを示す．

はじめに，$f \in R(\lambda I - T)$ $(\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T))$ が

$$(\lambda I - T)u = f$$

を満たすとき，常微分方程式の理論より

$$u(x) = Ce^{\lambda x} - e^{\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda y} f(y) dy$$

と表現されることに注意されたい．（“定数変化法” などと呼ばれることも多いものである．）$u \in D(T)$ となるためには境界条件 $u(a) = -u(0)$ が満たされる必要があるので

$$-C = -u(0) = u(a) = Ce^{\lambda a} - e^{\lambda a} \int_0^a e^{-\lambda y} f(y) dy,$$

すなわち

$$C = \frac{e^{\lambda a}}{1 + e^{\lambda a}} \int_0^a e^{-\lambda y} f(y) dy$$

となる．ここで，$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T)$ としていたから $1 + e^{\lambda a} \neq 1$ であることに注意されたい．このことを用いて，$\lambda I - T$ の逆作用素となるべき作用素を構成しよう．

$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T)$ とする．$f \in C(I)$ に対して

$$R_\lambda f(x) = C(f)e^{\lambda x} - e^{\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda y} f(y) dy$$

と定義することにする．ただし，$C(f)$ は f に依存する定数で

$$C(f) = \frac{e^{\lambda a}}{1 + e^{\lambda a}} \int_0^a e^{-\lambda y} f(y) dy$$

で与えられるものである．このとき，写像 $R_\lambda : C(I) \ni f \mapsto R_\lambda f \in C(I)$ について以下のことが成り立つ．

(1) R_λ は有界線形作用素.

(2) R_λ は $\lambda I - T$ の逆作用素.

まずは (1) を示す．$f, g \in C(I)$ および $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ とすれば,

$$\begin{aligned}
&R_\lambda(\alpha f + \beta g)(x) \\
&= \frac{e^{\lambda x} e^{\lambda a}}{1 + e^{\lambda a}} \int_0^a e^{-\lambda y} (\alpha f(y) + \beta g(y)) dy - e^{\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda y} (\alpha f(y) + \beta g(y)) dy \\
&= \alpha \left(\frac{e^{\lambda x} e^{\lambda a}}{1 + e^{\lambda a}} \int_0^a e^{-\lambda y} f(y) dy - e^{\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda y} f(y) dy \right) + \beta \left(\frac{e^{\lambda x} e^{\lambda a}}{1 + e^{\lambda a}} \int_0^a e^{-\lambda y} g(y) dy - e^{\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda y} g(y) dy \right) \\
&= \alpha R_\lambda f(x) + \beta R_\lambda g(x)
\end{aligned}$$

より線形性が分かる．また,

$$\begin{aligned}
&|R_\lambda f(x)| \\
&\leq \left| C(f) e^{\lambda x} \right| + \left| e^{\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda y} f(y) dy \right| \\
&= |e^{\lambda x}| \left| \frac{e^{\lambda a}}{1 + e^{\lambda a}} \right| \left| \int_0^a e^{-\lambda y} f(y) dy \right| + |e^{\lambda x}| \left| \int_0^x e^{-\lambda y} f(y) dy \right| \\
&\leq |e^{\lambda x}| \left| \frac{e^{\lambda a}}{1 + e^{\lambda a}} \right| \int_0^a |e^{-\lambda y}| \, |f(y)| dy + |e^{\lambda x}| \int_0^a |e^{-\lambda y}| \, |f(y)| dy \\
&\leq \|f\|_{C(I)} \left(\left| \frac{e^{\lambda a}}{1 + e^{\lambda a}} \right| + 1 \right) \left(\sup_{x \in [0,a]} |e^{\lambda x}| \right) \left(\sup_{y \in [0,a]} |e^{-\lambda y}| \right) a
\end{aligned}$$

となるから，最後の辺が x によらないことに注意して

$$K = \left(\left| \frac{e^{\lambda a}}{1 + e^{\lambda a}} \right| + 1 \right) \left(\sup_{x \in [0,a]} |e^{\lambda x}| \right) \left(\sup_{y \in [0,a]} |e^{-\lambda y}| \right) a$$

とおけば,

$$|R_\lambda f(x)| \leq K \|f\|_{C(I)} \quad \forall x \in [0, a]$$

である．左辺で x について上限をとれば $\|R_\lambda f\|_{C(I)} \leq K \|f\|_{C(I)}$ となり，R_λ が有界作用素であることがわかった．

次に (2) を示す．$f \in C(I)$ に対して $R_\lambda f$ は C^1-級関数の和や積で表されていることから，$R_\lambda f \in C^1$ となる．

$$
\begin{aligned}
R_\lambda f(0) &= C(f) = \frac{e^{\lambda a}}{1+e^{\lambda a}} \int_0^a e^{-\lambda y} f(y) dy \\
R_\lambda f(a) &= C(f) e^{\lambda a} - e^{\lambda a} \int_0^a e^{-\lambda y} f(y) dy \\
&= \left(e^{\lambda a} \int_0^a e^{-\lambda y} f(y) dy \right) \left(\frac{e^{\lambda a}}{1+e^{\lambda a}} - 1 \right) \\
&= \left(e^{\lambda a} \int_0^a e^{-\lambda y} f(y) dy \right) \left(\frac{-1}{1+e^{\lambda a}} \right) \\
&= \frac{-e^{\lambda a}}{1+e^{\lambda a}} \int_0^a e^{-\lambda y} f(y) dy
\end{aligned}
$$

であるから，境界条件 $R_\lambda f(a) = -R_\lambda f(0)$ を満たす．これより，$R(R_\lambda) \subset D(\lambda I - T) = D(T)$ であることが分かる．$f \in C(I)$ とすれば

$$
\begin{aligned}
&(\lambda I - T) R_\lambda f(x) \\
&= \lambda \left(C(f) e^{\lambda x} - e^{\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda y} f(y) \right) - T \left(C(f) e^{\lambda x} - e^{\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda y} f(y) \right) \\
&= \lambda C(f) e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda y} f(y) dy - C(f) \frac{d}{dx}(e^{\lambda x}) + \frac{d}{dx} \left(e^{\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda y} f(y) dy \right) \\
&= \lambda C(f) e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda y} f(y) dy - C(f) \lambda e^{\lambda x} + \left(\lambda e^{\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda y} f(y) dy + e^{\lambda x} e^{-\lambda x} f(x) \right) \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

である．これより任意の $f \in C(I)$ は $(\lambda I - T)$ による $R_\lambda f$ の像であるから，$R(\lambda I - T) = C(I)$ である．また，$C(I)$ 上 $(\lambda I - T) R_\lambda f = f$ となっているから，結局 $(\lambda I - T)^{-1} = R_\lambda$ がわかる．すでに調べた R_λ の性質より $(\lambda I - T)^{-1}$ は $C(I)$ 全体で定義された有界線形作用素となっているので，これは $\lambda \in \rho(T)$ ということに他ならない．したがって

$$
\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T) = \sigma_p(T) = \left\{ \frac{(2n+1)\pi i}{a} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right\}
$$

である． □

問題 4. $(X, d_X), (Y, d_Y)$ はコンパクト距離空間，μ を Y 上の有限 Borel 測度，$K \in C(X, Y)$ とするとき

$$
T : C(Y) \to C(X), \quad Tf(x) = \int_Y K(x, y) f(y) \mu(dy) \quad (f \in C(Y))
$$

はコンパクト作用素であることを示せ．

解答. $C(Y)$ における任意の空でない有界集合 A に対して，その T による像 $T(A)$ が $C(X)$ の相対コンパクト集合になっていることを示せばよい．ここでは，特に $T(A)$ が Ascoli-Arzela の定理の条件を満たすことを証明する．$A = \{0\}$ ならば $T(A) = \{0\}$ で $T(A)$ は明らかにコンパクト集合なので，$A \neq \{0\}$ として示すことにする．また，μ が零測度ならば $T = 0$ となり主張は自明なので，$\mu(Y) > 0$ としてよい．

Step1: $T(A)$ の有界性．$f \in A \subset C(S)$ とすれば

$$
\begin{aligned}
|Tf(x)| &\leq \int_Y |K(x,y)|\,|f(y)|\mu(dy) \\
&\leq \left(\sup_{(x,y)\in X\times Y} |K(x,y)| \right) \|f\|_{C(Y)}\,\mu(Y) \\
&\leq \left(\sup_{(x,y)\in X\times Y} |K(x,y)| \right) \left(\sup_{f\in A} \|f\|_{C(Y)} \right) \mu(Y) < \infty
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
\|Tf\|_{C(X)} \leq \left(\sup_{(x,y)\in X\times Y} |K(x,y)| \right) \left(\sup_{f\in A} \|f\|_{C(Y)} \right) \mu(Y) < \infty \quad \forall f \in A.
$$

$f \in A$ に関して上限をとれば

$$
\sup_{u\in T(A)} \|u\|_{C(X)} = \sup_{f\in A} \|Tf\|_{C(X)} \leq \left(\sup_{(x,y)\in X\times Y} |K(x,y)| \right) \left(\sup_{f\in A} \|f\|_{C(Y)} \right) \mu(Y) < \infty
$$

となり $T(A)$ の有界性が分かる．

Step2: 同程度連続性．$A = \{0\}$ ならば $X \times Y$ はコンパクトだから K は $X \times Y$ 上一様連続である．よって任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，任意の $x, x' \in X$ と任意の $y \in Y$ に対して $d_X(x,x') < \delta$ ならば

$$
|K(x,y) - K(x',y)| < \frac{\varepsilon}{\mu(Y) \sup_{f\in A} \|f\|}
$$

となる．したがって，$d_X(x,x') < \delta$ ならば，任意の $f \in A$ に対して

$$
\begin{aligned}
|Tf(x) - Tf(x')| &\leq \int_Y |K(x,y) - K(x',y)|\,|f(y)| \\
&\leq \sup_{f\in A} \|f\| \int_Y \frac{\varepsilon}{\mu(Y) \sup_{f\in A} \|f\|} \mu(dy) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

である．したがって，任意の $x \in X$ における同程度連続性も示された．

以上のことより，Ascoli-Arzela の定理を用いれば $T(A)$ の相対コンパクト性が分かる． □

問題 5. H を無限次元可分 Hilbert 空間とする．$(u_j)_{j=1}^{\infty}$ を H の完全正規直交系（略して CONS）とする．$T \in B(H)$ に対し，

$$
\|T\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|Tu_j\|^2 \right)^{1/2} \in [0, \infty]
$$

とおくと，この値は H の CONS の取り方によらず，さらに $\|T\| \leq \|T\|_2$ が成り立つことを講義で証明した．$\|T\|_2 < \infty$ である $T \in B(H)$ 全体のなす集合を $B(H)$ とおく．$A, B \in B(H)$ に対し，

$$
(A,B)_2 = \sum_{j=1}^{\infty} (Au_j, Bu_j)
$$

と定める．

(1) $B_2(H)$ は $B(H)$ の部分空間であり，$(\cdot,\cdot)_2$ を内積として Hilbert 空間であることを示せ．

(2) $(\cdot,\cdot)_2$ の値は H の CONS の取り方によらず，$(A,B)_2=(B^*,A^*)_2$ が成り立つことを示せ．

解答．(1)．**Step1：線形部分空間であること．** $A,B\in B_2(H)$ および $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ とすれば，離散型の Minkowski の不等式により[*1]

$$\begin{aligned}
\|\alpha A+\beta B\|_2 &= \left(\sum_{j=1}^{\infty}\|\alpha Au_j+\beta Bu_j\|^2\right)^{1/2}\\
&\le \left(\sum_{j=1}^{\infty}\|\alpha Au_j\|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|\beta Bu_j\|^2\right)^{1/2}\\
&\le \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha|^2\|Au_j\|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\beta|^2\|Bu_j\|^2\right)^{1/2}\\
&= |\alpha|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|Au_j\|^2\right)^{1/2}+|\beta|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|Bu_j\|^2\right)^{1/2}\\
&= |\alpha|\|A\|_2+|\beta|\|B\|_2<\infty
\end{aligned}$$

がなりたつから，$\alpha A+\beta B\in B(H)_2$ である．よって $B(H)_2$ は $B(H)$ の線形部分空間．

Step2: $(\cdot,\cdot)_2$ **が内積であること．** はじめに，$(A,B)_2$ が任意の $A,B\in B(H)_2$ に対して収束していることを示す．$A,B\in B(H)_2$ としたとき，$(\sum_{j=1}^{n}(Au_j,Bu_j))_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{C}$ のコーシー列になっていることを示せばよい．$n>m\ge 1$ として，

$$\left|\sum_{j=m}^{n}(Au_j,Bu_j)\right|\le\sum_{j=m}^{n}|(Au_j,Bu_j)|\le\sum_{j=m}^{n}\|Au_j\|\,\|Bu_j\|\le\left(\sum_{j=m}^{n}\|Au_j\|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=m}^{n}\|Bu_j\|^2\right)^{1/2}\qquad(*)$$

となる評価と $(\sum_{j=1}^{n}\|Au_j\|)_{n=1}^{\infty}$ および $(\sum_{j=1}^{n}\|Bu_j\|)_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列になっていることから結論がしたがう．ただし，$(*)$ において二つ目および三つ目の不等号には Schwarz の不等式を用いた．

ここからは，$(\cdot,\cdot)_2$ が実際に $B(H)_2$ の内積になっていることを示そう．

$A\in B(H)_2$ とすれば，明らかに

$$\|A\|_2=\sum_{j=1}^{\infty}(Au_j,Au_j)=\sum_{j=1}^{\infty}\|Au_j\|\ge 0$$

である．また，この表示より $(A,A)_2=0$ は任意の $j\in\mathbb{N}$ に対して $\|Au_j\|=0$ と同値であるが，(u_j) が H の

[*1] 可測空間 $(\mathbb{N},2^{\mathbb{N}})$ 上の数え上げ測度による積分に対して Minkowski の不等式を適用すればよい．

CONS であることに注意すれば $A=0$ とも同値である．$A_1, A_2, B \in B(H)_2$ および $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, B)_2 &= \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, B)_2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \{\lambda_1 (A_1, B) + \lambda_2 (A_2, B)\} \\ &= \lambda_1 \sum_{j=1}^{\infty} (A_1, B) + \lambda_2 \sum_{j=1}^{\infty} (A_2, B) \\ &= \lambda_1 (A_1, B)_1 + \lambda_2 (A_2, B)_2\end{aligned}$$

であるから，第一成分に関する線形性も分かる．

$$\sum_{j=1}^{n} (Bu_j, Au_j) = \sum_{j=1}^{n} \overline{(Au_j, Bu_j)} = \overline{\sum_{j=1}^{n} (Au_j, Bu_j)}$$

において $n \to \infty$ とすれば

$$(B, A)_2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (Bu_j, Au_j) = \lim_{n\to\infty} \overline{\sum_{j=1}^{n} (Au_j, Bu_j)} = \overline{\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (Au_j, Bu_j)} = \overline{(A, B)_2}$$

となる．以上のことより，$(\cdot, \cdot)_2$ が $B(H)_2$ 上の内積であることが分かった．

Step3:　完備性の証明． $B(H)_2$ がノルム $\|\cdot\|_2 = \sqrt{(\cdot,\cdot)_2}$ に関して完備であることを示す．(A_n) を $(B(H)_2, \|\quad\|_2)$ における Cauchy 列とする．任意の $T \in B(H)_2$ に対して $\|T\| \leq \|T\|_2$ だったことを思い出せば，(A_n) は作用素ノルム $\|\cdot\|$ についても Cauchy 列になっている．$B(H)$ の（作用素ノルムに関する）完備性より，(A_n) の $\|\cdot\|$ に関する極限 $A \in B(H)$ が存在する．このとき，$A \in B(H)_2$ と $\|A - A_n\|_2 \to 0$ となっていることを示せば良い．

まずは $A \in B(H)_2$ を示す．$(\|A_n\|_2)_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}$ の Cauchy 列であるから有界列．よってその上界 $K > 0$ をとれば，任意の自然数 m と n に対して

$$\sum_{j=1}^{n} \|A_m u_j\|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|A_m u_j\|^2 = \|A_m\|_2^2 \leq K^2 \tag{$**$}$$

となる．(A_n) は作用素ノルムで A に収束していたから，強収束（i.e. 各点収束）もしている．したがって，$(**)$ より任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{j=1}^{n} \|Au_j\|^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \|A_m u_j\|^2 \leq K^2$$

がなりたつ．n について極限をとれば，

$$\|A\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|Au_j\|^2 \leq K^2$$

がなりたつ．すなわち $A \in B(H)_2$ である．

次に $A_n \to A$ in $B(H)_2$ を示す．(A_n) は $B(H)_2$ の Cauchy 列であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N(\varepsilon)$ が存在して，任意の $n, m \geq N(\varepsilon)$ に対して $\|A_n - A_m\| < \varepsilon$ がなりたつ．これより任意の $k \in \mathbb{N}$ に対

して

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}\|(A-A_m)u_j\|^2 &= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k}\|(A_n-A_m)u_j\|^2\\ &\le \limsup_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\|(A_n-A_m)u_j\|^2\\ &= \limsup_{n\to\infty}\|A_n-A_m\|_2^2 \le \varepsilon^2\end{aligned}$$

となる．ここで $k\to\infty$ とすれば，任意の $m\ge N(\varepsilon)$ に対して

$$\|A-A_m\|_2^2 = \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}\|(A-A_m)u_j\|^2 \le \varepsilon^2$$

となり，(A_n) が $\|\cdot\|_2$ について A に収束することが分かる．

(2).**Step1: CONS によらないこと．** $B(H)_2$ のノルムと内積に関して，以下の関係式（極化等式）がなりたつことに注意する．

$$(A,B)_2 = \frac{1}{4}\left\{\left(\|A+B\|_2^2-\|A-B\|_2^2\right)+i\left(\|A+iB\|_2^2-\|A-iB\|_2^2\right)\right\}$$

右辺のノルムが CONS のとりかたによらないことは講義中に既に示されているので，左辺の内積が CONS によらないことも分かる．

Step2: $(A,B)_2=(B^*,A^*)_2$ であること． $A,B\in B(H)_2$ とする．$(v_j)_{j=1}^{\infty}$ を H の任意の CONS とすれば，Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{\infty}|(Au_j,v_k)(v_k,Bu_j)| &\le \left(\sum_{j,k=1}^{\infty}|(Au_j,v_k)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j,k=1}^{\infty}|(v_k,Bu_j)|^2\right)^{1/2}\\ &= \left(\sum_{j=1}^{\infty}\|Au_j\|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|Bu_j\|^2\right)^{1/2}\\ &= \|A\|_2\,\|B\|_2 < \infty\end{aligned}$$

となるから，二重級数 $\sum_{j,k}(Au_j,v_k)(v_k,Bu_j)$ は絶対収束する．したがって極限の順序交換が可能で，

$$\begin{aligned}(A,B)_2 &= \sum_{j=1}^{\infty}(Au_j,Bu_j)\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(Au_j,v_k)(v_k,Bu_j)\right)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}(Au_j,v_k)(v_k,Bu_j)\right)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}(B^*v_k,u_j)(u_j,A^*v_k)\right)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(B^*v_k,A^*v_k) = (B^*,A^*)_2\end{aligned}$$

となり，求める等式が得られた．$\square$

問題 6. $a \in C_b(\mathbb{R}^d)$, $\lambda > d$ とする．$f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対し，

$$T_a f(x) = \int_{|x-y|>1} \frac{a(x)f(y)}{|x-y|^\lambda} dy \quad (\text{a.e.} x \in \mathbb{R}^d)$$

により $T_a : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ を定める．

(1) T_a は連続であることを示せ．
(2) $\lim_{|x|\to\infty} a(x) = 0$ ならば，T_a はコンパクト作用素であることを示せ．

解答．(1)．$z = x - y$ と変数変換すれば，

$$\int_{|x-y|>1} \frac{1}{|x-y|^\lambda} dy = \int_{|z|>1} \frac{1}{|z|^\lambda} dz$$

となる．さらに，$z = \Phi(r, \theta_1, \ldots, \theta_{d-1})$ という d 次元の極座標変換を行えば，

$$\begin{aligned}
&\int_{|z|>1} \frac{1}{|z|^\lambda} dz \\
&= \int \cdots \int_{r>1} \frac{1}{r^\lambda} r^{d-1} \sin^{d-2}\theta_1 \ldots \sin\theta_{d-2}\, dr\, d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1} \\
&= \left(\int_1^\infty r^{d-1-\lambda} dr\right) \left(\prod_{n=1}^{d-2} \int_0^\pi \sin^{d-1-n}\theta_n\, d\theta_n\right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta_{n-1}\right) \\
&\leq \pi^{d-2} \left(\int_1^\infty r^{d-1-\lambda} dr\right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta_{n-1}\right) \\
&= 2\pi^{d-1} \left(\frac{1}{\lambda - d}\right) < \infty
\end{aligned}$$

x, y に関する対称性より，この評価は x による積分に関しても同様になりたつことに注意しておく．$C = 2\pi^{d-1}\left(\frac{1}{\lambda-d}\right)$ とおくことにする．$|x-y|^\lambda = |x-y|^{\lambda/2}|x-y|^{\lambda/2}$ とみて Schwartz の不等式を用いれば，

$$\begin{aligned}
|T_a f(x)| &\leq \int_{|x-y|>1} \frac{|a(x)f(y)|}{|x-y|^\lambda} dy \\
&\leq \|a\|_{C_b(\mathbb{R})} \left(\int_{|x-y|>1} \frac{1}{|x-y|^\lambda} dy\right)^{1/2} \left(\int_{|x-y|>1} \frac{|f(y)|^2}{|x-y|^\lambda} dy\right)^{1/2} \\
&\leq \|a\|_{C_b(\mathbb{R})} C^{1/2} \left(\int_{|x-y|>1} \frac{|f(y)|^2}{|x-y|^\lambda} dy\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

なる評価が得られるから，これを二乗して x で積分すれば，Fubini の定理により

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |T_a f(x)|^2 dx &\leq \|a\|_{C_b(\mathbb{R})}^2 C \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{|x-y|>1} \frac{|f(y)|^2}{|x-y|^\lambda} dy\right) dx \\
&= \|a\|_{C_b(\mathbb{R})}^2 C \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{|x-y|>1\}} \frac{1}{|x-y|^\lambda} dx\right) dy \\
&\leq \|a\|_{C_b(\mathbb{R})}^2 C^2 \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^2 dy \\
&= C^2 \|a\|_{C_b(\mathbb{R})}^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2
\end{aligned}$$

がわかる．

$$\|T_a f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C\|a\|_{C_b(\mathbb{R}^d)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

であるから T_a は連続である．

(2). $a_n(x) = 1_{\{|x|\leq n\}}a(x)$ とおき，T_a と同様にして T_{a_n} を定めることにする．$k_n(x,y) = 1_{\{|x-y|>1\}}a_n(x)/|x-y|^\lambda$ とすれば，Fubini の定理より

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}|k_n(x,y)|^2dxdy &= \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}1_{\{|x-y|>1\}}\frac{a_n(x)^2}{|x-y|^{2\lambda}}dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}a_n(x)^2\left(\int_{|x-y|>1}\frac{1}{|x-y|^{2\lambda}}dy\right)dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d}a_n(x)^2\left(\int_{|x-y|>1}\frac{1}{|x-y|^{\lambda}}dy\right)dx \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^d}a_n(x)^2dx \\
&\leq C\|a\|_{C_b(\mathbb{R}^d)}\int_{\mathbb{R}^d}1_{\{|x|\leq n\}}dx \\
&= C\|a\|_{C_b(\mathbb{R}^d)}\frac{\pi^{d/2}n^d}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} < \infty
\end{aligned}$$

となるから[*2]，$k_n(x,y) \in L^2(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)$ である．したがって，T_{a_n} は Hilbert-Schmidt 型積分作用素であり，特にコンパクト作用素である．あとは作用素ノルムで $\|T_{a_n}-T_a\| \to 0$ となることを示せば，極限たるところの T_a もコンパクト作用素であることがわかる．

$\lim_{|x|\to\infty}a(x) = 0$ との仮定より，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N(\varepsilon)$ が存在して，$n \geq N(\varepsilon)$ ならば

$$|a_n(x)-a(x)| = \begin{cases}|a(x)| < \varepsilon/C & \text{if } |x| > n \\ 0 & \text{if } |x| \leq n\end{cases}$$

がなりたつ．よって $n \geq N(\varepsilon)$ ならば $\|a_n - a\|_{C_b(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon/C$ である．(1) の証明と同様の評価を行えば．

$$\begin{aligned}
&|T_{a_n}f(x) - T_af(x)| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d}\frac{|a_n(x)-a(x)||f(y)|}{|x-y|^\lambda}dy \\
&\leq \|a_n-a\|_{C_b(\mathbb{R}^d)}\left(\int_{|x-y|>1}\frac{1}{|x-y|^\lambda}dy\right)^{1/2}\left(\int_{|x-y|>1}\frac{|f(y)|^2}{|x-y|^\lambda}dy\right)^{1/2} \\
&\leq \|a_n-a\|_{C_b(\mathbb{R}^d)}C^{1/2}\left(\int_{|x-y|>1}\frac{|f(y)|^2}{|x-y|^\lambda}dy\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\|T_{a_n}f - T_af\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq \|a_n-a\|^2_{C_b(\mathbb{R}^d)}C\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{|x-y|>1}\frac{|f(y)|^2}{|x-y|^\lambda}dy\right)dx \\
&\leq \|a_n-a\|^2_{C_b(\mathbb{R}^d)}C^2\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}
\end{aligned}$$

[*2] $\Gamma(x)$ はガンマ関数を表している．最後の等式は d 次元の球の体積を求めたものだが，文脈上は単に有限なる定数であることが分かれば何ら問題はない．

ここで f に関して sup をとれば

$$\|T_{a_n} - T_a\| \leq C\|a_n - a\|_{C_b(\mathbb{R}^d)}$$

である．したがって，$n \geq N(\varepsilon)$ とすれば

$$\|T_{a_n} - T_a\| \leq C\|a_n - a\|_{C_b(\mathbb{R}^d)} \leq C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$$

となり，(T_{a_n}) が作用素ノルムで T_a に収束することが分かった．T_a はコンパクト作用素列の作用素ノルムによる極限であるから，コンパクトである． □

問題 7. $a = (a_n)_{n=1}^\infty \in l^\infty$ に対して $T : l^2 \to l^2$ を $Tx = (a_n x_n)_{n=1}^\infty$ $(x = (x_n) \in l^2)$ で定める．

(1) T がコンパクト作用素であるための必要十分条件を求めよ．

(2) T が Hilbert-Schmidt 型作用素であるための必要十分条件を求めよ．

(3) T がフレドホルム作用素であるための必要十分条件を求めよ．

解答. l^2 の標準的な CONS $(e^{(k)})$ を $e_n^{(k)} = \delta_{kn}$ で与えることにする．l^p $(p = 2, \infty)$ の元 $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ に対して $(x_1, x_2, \dots)$ などという表記も用いることにする．

(1).

$$T \text{ がコンパクト} \iff \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

となることを示す．

Step1: $\Longrightarrow$ **の証明．** T はコンパクト作用素なので，l^2 の任意の弱収束列 $(x^{(k)})_{k=1}^\infty$ を l^2 のノルム収束列 $(Tx^{(k)})_{k=1}^\infty$ に写すことに注意しておく．

はじめに，CONS $(e^{(k)})$ が l^2 の弱収束列になっていることを示す．$l^2 \cong (l^2)^*$ に注意すれば，$b = (b_n) \in l^2$ に対して定まる汎関数 $S_b : x \to \sum_{n=1}^\infty b_n x_n$ に関して，$(S_b e^{(k)})_{k=1}^\infty$ が $\mathbb{C}$ の収束列になっていることを示せばよい．

$$S_b e^{(k)} = \sum_{n=1}^\infty b_n e_n^{(k)} = b_k$$

であるから，$(S_b e^{(k)})_{k=1}^\infty = (b_k)_{k=1}^\infty$ となる．$b = (b_k) \in l^2$ より $b_k \to 0$ なので，$(S_b e^{(k)})$ は 0 に収束する複素数列である．これは任意の $b \in l^2$ に対して成り立つので，$e^{(k)} \to 0$ weakly in l^2 が分かる．

いま $(e^{(k)})$ は l^2 で 0 に弱収束し，T はコンパクトであるから，$(Te^{(k)})_{k=1}^\infty$ は l^2 のノルムで 0 に収束する．

$$\|Te^{(k)}\|_{l^2}^2 = \sum_{n=1}^\infty |a_n e_n^{(k)}|^2 = |a_k|^2 \to 0 \quad (k \to \infty)$$

となることから，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．

Step2: $\Longleftarrow$ **の証明．** T は数列空間における掛け算作用素であるから，$\|T\| = \|a\|_{l^\infty}$ となることに注意しておく．このことは前期のレポート課題においても証明しているが，念のため補足としてレポートの最後に証明を載せている．T がコンパクト作用素であることを示すために，T をコンパクト作用素の列で近似することにする．作用素 $T^{(k)} : l^2 \ni x \mapsto (a_n^{(k)} x_n)_{n=1}^\infty \in l^2$ を

$$a_n^{(k)} = \begin{cases} a_n & (n \leq k) \\ 0 & (n > k) \end{cases}$$

で与える．このとき明らかに $\dim R(T^{(k)}) \leq k < \infty$ であるから $T^{(k)}$ はコンパクトである．あとは

$$\|T^{(k)} - T\| = \|a^{(k)} - a\|_{l^\infty} \to 0 \quad \text{as } k \to \infty$$

となることを示せば T のコンパクト性が分かる．いま，$n \leq k$ なるところでは $a_n^{(k)} - a_n = 0$，$n \geq k+1$ なるところでは $a_n^{(k)} - a_n = -a_n$ であることに注意すれば，

$$\|a^{(k)} - a\|_{l^\infty} = \sup_{n \geq k+1} |a_n|$$

がなりたつが，$\lim_{n\to\infty} a_n \to 0$ という仮定より右辺は $k \to \infty$ とすれば明らかに 0 に収束する．したがって $\lim_{k\to\infty} \|a^{(k)} - a\|_{l^\infty} = 0$ となることが示された．T はコンパクト作用素の列 $(T^{(k)})_{k=1}^\infty$ の作用素ノルムによる極限なので，T もコンパクトである．

(2).

$$T \text{ が Hilbert-Schmidt 型作用素} \iff a \in l^2$$

である．先ほどと同様に l^2 の自然な CONS $(e^{(k)})_{k=1}^\infty$ を考える．T が Hilbert-Schmidt 型であるとは

$$\sum_{k=1}^\infty \|Te^{(k)}\|_{l^2}^2 < \infty$$

であった．

$$\|Te^{(k)}\|_{l^2}^2 = \sum_{n=1}^\infty |a_n e_n^{(k)}|^2 = |a_k|^2$$

であることに注意すれば，

$$\sum_{k=1}^\infty \|Te^{(k)}\|_{l^2}^2 = \sum_{k=1}^\infty |a_k|^2$$

となる．これより，

$$\begin{aligned} T \text{ が Hilbert-Schmidt 型作用素} &\iff \sum_{k=1}^\infty \|Te^{(k)}\|_{l^2}^2 < \infty \\ &\iff \sum_{k=1}^\infty |a_k|^2 < \infty \\ &\iff a = (a_n)_{n=1}^\infty \in l^2 \end{aligned}$$

がわかる．

(3). T が Fredholm 作用素であることと，以下の二条件がなりたつことは同値である．

(i) $a_n = 0$ となる n は有限個しかない．

(ii) ある $\varepsilon > 0$ が存在して，$a_n \neq 0$ となる任意の n に対して $|a_n| \geq \varepsilon$ がなりたつ．

Step1: T が Fredholm $\Longrightarrow$ (i) かつ (ii).

Step1-1: (i).

$$T \text{ が Fredholm} \Longrightarrow \text{(i)}$$

の対偶を示す．特に $a_n = 0$ となる n が無限個あった時に，$\dim N(T) = \infty$ を示せばよい．$a_n = 0$ となる n の列を n_k $(k = 1, 2, \dots)$ とおくことにする．$e^{(k)}$ の定義より $(e^{(n_k)})_{k=1}^\infty$ は明らかに一次独立である．$a_{n_k} = 0$ より

$$Te^{(n_k)} = \left(a_l e_l^{(n_k)}\right)_{l=1}^\infty = \left(0, \dots, 0, a_{n_k} e_{n_k}^{(n_k)}, 0, \dots\right) = 0$$

となり，$\{e^{(n_k)} \mid k = 1, 2, \dots\} \subset N(T)$ がなりたつ．$N(T)$ には一次独立な無限個の元 $e^{(n_k)}$ $(k = 1, 2, \dots)$ が存在するから，$N(T)$ は無限次元である．

Step1-2: (ii).

$$T \text{ が Fredholm} \Longrightarrow \text{(ii)}$$

を証明する．講義中に示されたことであるが，Banach 空間から Banach 空間への Fredholm 作用素 T において $R(T)$ は閉集合であることに注意する．背理法で示すことにする．(ii) を否定すれば任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$0 < |a_{n_k}| < \frac{1}{2^k}$$

をみたす n_k が存在する[*3]．ここで

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Te^{(n_k)}\|_{l^2} = \sum_{k=1}^{\infty} |a^{(n_k)}|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} < \infty$$

（絶対収束）であるから，級数 $\sum_{k=1}^{\infty} Te^{(n_k)}$ は l^2 で収束する．その極限を $b = \sum_{k=1}^{\infty} Te^{(n_k)}$ とおくことにする．(b は a において a_{n_k} $(k = 1, 2, \dots)$ 以外の点を 0 としたものに等しい．) b は $R(T)$ の元の列 $(\sum_{k=1}^{m} Te^{(n_k)})_{m=1}^{\infty}$ の極限であるから，$R(T)$ が閉集合だったことに注意すれば $b \in R(T)$ である．これより，ある $x \in l^2$ に対して $b = Tx = (a_n x_n)_{n=1}^{\infty}$ となることがわかる．ところで，定義より $b_{n_k} = a_{n_k} = a_{n_k} x_{n_k}$ であって，$a_{n_k} \neq 0$ から $x_{n_k} = 1$ がわかる．これより

$$\|x\|_{l^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_k}|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$$

となり $x \in l^2$ に矛盾する．以上の議論から，T が Fredholm ならば (ii) が成り立つことが示された．

Step2: (i) かつ (ii)$\Longrightarrow$ T は Fredholm 作用素.

(i) および (ii) がなりたつものとする．

全ての n に対して $a_n \neq 0$ であるときには $x \mapsto (x_n/a_n)_{n=1}^{\infty}$ は線形作用素 $l^2 \to l^2$ を定める．実際，$a_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ より任意の n に対して x_n/a_n は複素数として定まり，条件 (ii) より $(1/a_n)_{n=1}^{\infty} \in l^{\infty}$ となるから，これは有界な掛け算作用素 $l^2 \to l^2$ となる．このとき写像 $x \mapsto (x_n/a_n)_{n=1}^{\infty}$ は明らかに T の逆写像であり，したがって T は全単射だから $\dim N(T) = \operatorname{codim} R(T) = 0$ となる．

よって，$a_n = 0$ を満たす n の数は 1 以上の有限個として示せばよい．特に，$a_1 = a_2 = \cdots = a_N = 0$ かつ $a_{N+1}, a_{N+2}, \dots \neq 0$ であると仮定しても一般性を失わない．

Step2-1: $\dim N(T) < \infty$ **であること．**

$e^{(1)}, \dots, e^{(N)}$ が $N(T)$ の基底になっていることを示せばよい．$a_1, \dots, a_N = 0$ より $Te^{(k)} = 0$ $(k = 1, \dots, N)$ であり，$\{e^{(1)}, \dots, e^{(N)}\} \subset N(T)$ である．定義より $e^{(1)}, \dots, e^{(N)}$ は明らかに一次独立．$x \in N(T)$ とすれば $Tx = (a_n x_n)_{n=1}^{\infty} = 0$ であるから，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n x_n = 0$ であるが，$a_{N+1}, a_{N+2}, \dots \neq 0$ より特に $x_{N+1}, x_{N+2}, \dots = 0$ である．したがって $x = (x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots) = x_1 e^{(1)} + \cdots x_N e^{(N)}$ と表現されるから，系の一次独立性と併せて $e^{(1)}, \dots, e^{(N)}$ は $N(T)$ の基底であることがわかる．これより，$\dim N(T) = N < \infty$ となる．

Step2-2: $\operatorname{codim} R(T) = \dim l^2/R(T) < \infty$ **であること．** $\dim N(T) < \infty$ より，$N(T) \cong l^2/R(T)$（線形空間として同型）を示せばよい．以下では線形空間としての同型写像：$N(T) \to l^2/R(T)$ を実際に構成する．

[*3] この先の議論には差し支えないことだが，$k \mapsto n_k$ は増加的とは限らない点に注意しておく．

$[x]$ で x の（$R(T)$ に関する）同値類を表すことにする．$f : N(T) \ni x \to [x] \in l^2/R(T)$ を考える．これは商集合への標準全射 : $l^2 \to l^2/R(T)$ の $N(T)$ への制限で，線形写像になっていることに注意する．$[x] \in l^2/R(T)$ に対して $g([x]) = (x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots) \in l^2$ とおく．

まずは g が線形写像 $l^2/R(T) \to N(T)$ を定めることを示す $a_1, \dots, a_N = 0$ より

$$Tg([x]) = (a_1x_1, \dots, a_Nx_N, 0, 0, \dots) = (0, 0, \dots)$$

となるから，$g([x]) \in N(T)$ である．写像が well-defined であることを確かめる．$[x] = [y]$ とすれば $x - y \in R(T)$ だから，ある $z \in l^2$ が存在して $x - y = Tz = (a_nx_n)_{n=1}^{\infty}$ である．$a_1, \dots, a_N = 0$ だったから $x_1 - y_1 = \cdots = x_N - y_N = 0$，すなわち $g([x]) = (x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots) = (y_1, \dots, y_N, 0, 0, \dots) = g([y])$ となり，g の値は代表元の選び方によらないことがわかった．g の線形性は明らかである．

あとは，g が f の逆写像になっていることを示せばよい．任意の $x \in N(T)$ に対して

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g([x]) = (x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots)$$

である．Step2-1 での議論により $x \in N(T)$ から $x_{N+m} = 0$ $(m \geq 1)$ がわかるから，$(g \circ f)(x) = (x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots) = x$ となる．また，任意の $[x] \in l^2/R(T)$ に対して

$$(f \circ g)([x]) = f(g([x])) = f((x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots)) = [(x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots)]$$

である．

$$\begin{aligned} x - (x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots) &= (0, \dots, 0, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots) \\ &= \left(a_1 \cdot 0, \dots, a_N \cdot 0, a_{N+1}\frac{x_{N+1}}{a_{N+1}}, a_{N+2}\frac{x_{N+2}}{a_{N+2}}, \cdots \right) \\ &= T\left(0, \dots, 0, \frac{x_{N+1}}{a_{N+1}}, \frac{x_{N+2}}{a_{N+2}}, \cdots \right) \in R(T) \end{aligned}$$

に注意すれば，

$$(f \circ g)([x]) = [(x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots)] = [x]$$

もわかる．ただし，

$$\left(0, \dots, 0, \frac{x_{N+1}}{a_{N+1}}, \frac{x_{N+2}}{a_{N+2}}, \cdots \right)$$

が l^2 の元であることは $x \in l^2$ および条件 (ii) より従う．すなわち $g = f^{-1}$ で，f は線形空間としての同型写像 : $N(T) \to l^2/R(T)$ だということが示された．以上の議論より

$$\operatorname{codim} R(T) = \dim l^2/R(T) = \dim N(T) < \infty$$

となる． □

問題 9. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を σ-有限な測度空間，$H = L^2(X, \mathcal{M}, \mu) = L^2(\mu)$ とする．$\mathcal{M}$-可測関数 $a : X \to \mathcal{M}$ に対して，H から H への掛け算作用素 M_a を次で定める．

$$\begin{aligned} D(M_a) &= \{u \in H \mid au \in H\}, \\ (M_au)(x) &= a(x)u(x) \quad (x \in X). \end{aligned}$$

このとき，$D(M_a)$ は H で稠密であり，$M_a^* = M_{\bar{a}}$ が成り立つことを講義で証明した．

$\mathcal{B}(\mathbb{C})$ を $\mathbb{C}$ のボレル集合族とし，$E(A) = M_{1_{a^{-1}(A)}} \in B(H)$ $(A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ と定める．

(1) E は，$\mathcal{B}(\mathbb{C})$ 上で定義され，H 上の直交射影を値とするスペクトル測度であることを示せ．

(2) ボレル可測関数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ に対し，

$$T_f=\int_{\mathbb{C}} f(z)E(dx\,dy)\quad (z=x+iy),\ (x,y\in\mathbb{R}^2)$$

と定める．このとき，$T_f=M_{f\circ a}$ を示せ．

解答．(1). はじめに，任意の $A\in\mathcal{B}(\mathbb{C})$ に対して $1_{a^{-1}(A)}\in L^\infty(\mu)$ であるから，$D(M_a)=H$ になることを注意しておく[*4]．

Step1： 任意の $A\in\mathcal{B}(\mathbb{C})$ に対して $E(A)$ が H 上の直交射影になっていること． ヒルベルト空間上の線形作用素 P が直交射影になっていることを確かめるには，$P^2=P=P^*$ となっていることを言えばよいのであった．$A\in\mathcal{B}(\mathbb{C})$ とすれば，任意の $u\in H=L^2(\mu)$ に対して

$$\begin{aligned}(E(A)E(A)u)(x)&=(M_{1_{a^{-1}(A)}}M_{1_{a^{-1}(A)}}u)(x)\\&=1_{a^{-1}(A)}(x)1_{a^{-1}(A)}(x)u(x)\\&=1_{a^{-1}(A)}(x)u(x)\\&=(M_{1_{a^{-1}(A)}}u)(x)\\&=(E(A)u)(x)\quad (x\in X)\end{aligned}$$

がなりたつから，$E(A)^2=E(A)$ である．また

$$M^*_{1_{a^{-1}(A)}}=M_{\overline{1_{a^{-1}(A)}}}=M_{1_{a^{-1}(A)}}$$

より $E(A)^*=E(A)$ もわかる．よって $E(A)$ は H 上の直交射影である．

Step2 : E がスペクトル測度であること． $E(\mathbb{C})=M_{1_{a^{-1}(\mathbb{C})}}=M_{1_X}=I$ である．(A_n) を互いに素な $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ の元の列としたとき，

$$a^{-1}\left(\coprod_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)=\coprod_{n\in\mathbb{N}}a^{-1}(A_n)$$

となることに注意する．（ただし，記号 $\coprod$ は disjoint union を表すものとする．）このとき，任意の $u\in H$ に対して

$$\begin{aligned}\left(E\left(\coprod_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)u\right)(x)&=\left(M_{1_{a^{-1}(\coprod A_n)}}u\right)(x)\\&=1_{a^{-1}(\coprod A_n)}(x)u(x)\\&=1_{\coprod a^{-1}(A_n)}(x)u(x)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}1_{a^{-1}(A_n)}u(x)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(E(A_n)u)(x)\quad(\forall x\in X)\end{aligned}$$

がなりたつ．さらに，任意の n に対して

$$|(E(A_n)u)(x)|=\left|1_{a^{-1}(A_n)}u(x)\right|\le|u(x)|\quad(x\in X)$$

[*4] この事実も，補足として付け加えた掛け算作用素の性質の証明に含まれている．

という評価に気をつければ，Lebesgue の収束定理により，任意の $u \in H$ に対して $E(\coprod_{n=1}^{\infty} A_n)u = \sum_{n=1}^{\infty} E(A_n)u$ in $L^2(=H)$ が成立することまでわかる．したがって $E(\coprod_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} E(A_n)$ が作用素の強収束の意味で成り立っているので，E はスペクトル測度であることが示された．

(2). **Step1**：$D(T_f) = D(M_{f\circ a})$ **であること．**

$$D(T_f) = \left\{ u \in H \mid \int_X |f|^2 \mu_u(dx) < \infty \right\}$$

と定義されていたことを確認しておく．ただし，μ_u は $A \to (E(A)u, u)_H$ で与えられる $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ 上の複素測度である．$D(T_f) = D(M_{f\circ a})$ を示そう．$u \in D(M_{f\circ a})$ は

$$\int_X |f(a(x))u(x)|^2 \mu(dx) < \infty$$

と同値である．いま $d\nu = |u|^2 d\mu$ と定めれば，

$$\begin{aligned}
\mu_u(A) &= (E(A)u, u) \\
&= \int_X \left(M_{1_{a^{-1}(A)}} u \right)(x) \cdot \overline{u(x)} \mu(dx) \\
&= \int_X 1_{a^{-1}(A)} u(x) \overline{u(x)} \mu(dx) \\
&= \int_X 1_{a^{-1}(A)} |u(x)|^2 \mu(dx) \\
&= \int_X 1_A(a(x)) \nu(dx) \\
&= \int_X 1_A(y) \, \nu \circ a^{-1}(dy) \\
&= \nu \circ a^{-1}(A)
\end{aligned}$$

となるから，$u \in D(T_f)$ は

$$\begin{aligned}
\int_X |f(x)|^2 \mu_u(dx) &= \int_X |f(x)|^2 \, \nu \circ a^{-1}(dx) \\
&= \int_X |f(a(x))|^2 \, \nu(dx) \\
&= \int_X |f(a(x))|^2 |u(x)|^2 \mu(dx) < \infty
\end{aligned}$$

と同値である．すなわち $D(T_f) = D(M_{f\circ a})$．

Step2：f **が単関数の場合．**

$$f = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j 1_{A_j}$$

と表現される可測単関数であるとする．T_f 定義より，任意の $u \in D(T_f)$ に対して

$$
\begin{aligned}
(T_f u)(x) &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j (E(A_j)u)(x) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j 1_{a^{-1}(A_j)}(x)u(x) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j 1_{A_j}(a(x))u(x) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j 1_{A_j}(a(x)) \right) u(x) \\
&= f(a(x))u(x) \quad (x \in X)
\end{aligned}
$$

である．したがって，f が可測単関数の場合には $T_f = M_{f \circ a}$ である．

Step3：一般の f の場合．$f_n \to f$（各点収束）かつ $|f_n| \leq f$ なる単関数列 (f_n) をとれば，T_f の定義より任意の $u \in D(T_f)$ に対して

$$
T_f u = \lim_{n \to \infty} T_{f_n} u
$$

が L^2 収束の意味でなりたつ．また，$f_n \to f$（各点収束）であったから，

$$
\lim_{n \to \infty} f_n(a(x))u(x) = f(a(x))u(x) \quad (x \in X)
$$

も成立．これより $(T_f u)(x) = f(a(x))u(x)$ a.s. が任意の $u \in D(T_f)$ なりたつ．したがって $T_f = M_{f \circ a}$ がわかる． □

補足

問題 4 の解答に用いた Ascoli-Arzela の定理の主張を述べておく．

命題 1 (Ascoli-Arzela)**.** S をコンパクト Hausdorff 空間とする．$A \subset C(S)$ が相対コンパクトであるための必要十分条件は，以下の二条件がなりたつことである．

(1) A は $C(S)$ における有界集合である．（すなわち，$\sup_{u \in C(S)} \|u\|_{C(S)} < +\infty$ がなりたつということ．）

(2) A は任意の $s \in S$ で同程度連続である．すなわち，各 $s \in S$ において，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある s の近傍 $V \subset S$ が存在して，任意の $t \in V$ と任意の $u \in A$ に対して $|u(t) - u(s)| < \varepsilon$ がなりたつ．

解答中に用いた，掛け算作用素の基本的な性質について証明を与える．なお，以下の証明は前期のレポートで問題 8 の解答として自分が作成したものをそのまま転載したものである．本レポートの問題 7 では，特に $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ 上の数え上げ測度に関して以下の結果を適用している．

命題 2. $(S, \mathfrak{M}, \mu)$ を σ -有限な測度空間，　$X = L^2(S, \mathfrak{M}, \mu) = L^2(\mu)$ とする．可測関数 $a : S \longrightarrow \mathbb{C}$ に対して，X 上の掛け算作用素 M_a を次で定める：

$$
D(M_a) = \{u \in X \mid au \in X\}, \quad (M_a u)(x) = a(x)u(x) \quad (x \in S).
$$

このとき，$a \in L^\infty(S, \mathfrak{M}, \mu)$ ならば $M_a \in B(X)$ であって，さらに $\|M_a\| = \|a\|_{L^\infty}$ がなりたつ．

証明．**Step1：**$a \in L^\infty(\mu)$ **なら** $M_a \in B(X)$ **であることの証明．** $a \in L^\infty(S, \mathfrak{M}, \mu)$ とすれば，任意の $u \in X$ に対して

$$\begin{aligned}\int_X |a(x)u(x)|^2 \mu(dx) &\leq \int_X \|a\|_{L^\infty(\mu)}^2 |u(x)|^2 \mu(dx) \\ &= \|a\|_{L^\infty(\mu)}^2 \int_X |u(x)|^2 \mu(dx) < \infty \end{aligned} \tag{1}$$

がなりたつ．これより任意の $u \in X$ に対して $au \in X = L^2(\mu)$，すなわち $D(M_a) = X$ がわかる．任意の $u, v \in D(M_a)$ および任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}&M_a(\alpha u + \beta v)(x) = a(x)\{(\alpha u + \beta v)(x)\} = a(x)(\alpha u(x) + \beta v(x)) \\ &= \alpha a(x)u(x) + \beta a(x)v(x) = \alpha M_a u(x) + \beta M_a v(x) = (\alpha M_a u + L\beta M_a v)(x) \quad (x \in S)\end{aligned}$$

であるから，$M_a(\alpha u + \beta v) = \alpha M_a u + \beta M_a v$，すなわち M_a は線形写像である．また，式（1）より

$$\begin{aligned}\|M_a u\|_X &= \sqrt{\int_X |a(x)u(x)|^2 \mu(dx)} \\ &\leq \sqrt{\|a\|_{L^\infty(\mu)}^2 \int_X |u(x)|^2 \mu(dx)} \\ &= \|a\|_{L^\infty(\mu)} \|u\|_X\end{aligned}$$

となるから $M_a : X \longrightarrow X$ の有界性もわかるので $M_a \in B(X)$ である．

Step2：$\|M_a\| = \|a\|_{L^\infty(\mu)}$ **の証明．** ステップ 1 により任意の $u \in X = D(M_a)$ に対して

$$\|M_a u\|_X \leq \|a\|_{L^\infty(\mu)} \|u\|_X$$

がなりたつから，$\|M_a\| \leq \|a\|_{L^\infty}$ である．

逆向きの不等号を示す．$a \in L^\infty(\mu)$ とする．$a = 0$ なら明らかに $\|M_a\| \geq 0 = \|a\|_{L^\infty(\mu)}$ なので $a \neq 0$ について示せばよい．また，$\mu(S) = 0$ のときは両辺共に 0 で明らかに成立するので，$\mu(S) > 0$ としよう．$(S, \mathfrak{M}, \mu)$ は σ -有限であるから，　$E_\varepsilon \in \mathfrak{M}$ を

$$E_\varepsilon \subset \{x \in S \mid |a(x)| > \|a\|_{L^\infty(\mu)} - \varepsilon\}$$

かつ $0 < \mu(E_\varepsilon) < \infty$ となるようにとることが出来る．さらに写像 $u_\varepsilon : S \longrightarrow \mathbb{C}$ を $u_\varepsilon = 1_{E_\varepsilon}$ で定めると

$$\int_X |u_\varepsilon(x)|^2 \mu(dx) = \int_X 1_{E_\varepsilon}(x) \mu(dx) = \mu(E_\varepsilon)$$

より，$u_\varepsilon \in X = L^2(\mu)$ かつ $\|u_\varepsilon\|_X^2 = \mu(E_\varepsilon) \in (0, \infty)$ がなりたつ．

$$\begin{aligned}\int_X |M_a u_\varepsilon|^2 \mu(dx) &= \int_X |a(x)u_\varepsilon(x)|^2 \mu(dx) \\ &= \int_X |a(x)|^2 1_{E_\varepsilon}(x) \mu(dx) \\ &\geq \int_X (\|a\|_{L^\infty(\mu)} - \varepsilon)^2 1_{E_\varepsilon}(x) \mu(dx) \\ &= (\|a\|_{L^\infty(\mu)} - \varepsilon)^2 \mu(E_\varepsilon) \\ &= (\|a\|_{L^\infty(\mu)} - \varepsilon)^2 \|u_\varepsilon\|_X^2\end{aligned}$$

から，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\|M_a u_\varepsilon\|_X \geq (\|a\|_{L^\infty(\mu)} - \varepsilon)\|u_\varepsilon\|_X$ である．すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\|M_a\| \geq \frac{\|M_a u_\varepsilon\|_X}{\|u_\varepsilon\|_X} \geq \|a\|_{L^\infty(\mu)} - \varepsilon$$

となることが分かるので，$\|M_a\| \geq \|a\|_{L^\infty(\mu)}$ が示された．以上の議論をまとめれば，$\|M_a\| = \|a\|_{L^\infty(\mu)}$ となる． □

参考文献

[1] N. Dunford and J. Schwartz, *Linear Operators—Part II*, Interscience publishers, 1963.

[2] B. S. Komal and K. Raj, Multiplication operators induced by operator valued maps, *Int. J. Comtemp. math. Sciences*, Vol.3, 2008, no. 14, 667-673.

[3] 宮島静雄，関数解析，横浜図書，2014.

[4] 杉浦光夫，解析入門 I，東京大学出版会，1980.