関数解析ノート IV：C_0-半群 Ver. 2.2

平井祐紀

2021 年 5 月 10 日

概要

C_0-半群の基礎事項を解説する．

更新履歴

バージョン	更新日	コメント
1.0	2019/8/28	ひとまず完成.
1.1	2020/4/15	誤植を修正.
1.2	2020/4/16	Hille-Yosida の定理で C_0-半群が縮小的との条件が抜けていたので追加.
1.3	2020/11/4	§5 を追加．既存の節にもいくつか命題や証明を追加．誤植を訂正.
1.4	2020/11/8	§6 を追加．閉作用素の定義と特徴づけを，より一般的な設定へと修正.
1.5	2020/11/11	誤植を訂正．本文を少し修正．付録 B を追加.
2.0	2020/11/13	命題 D.1 の証明を追加．誤植を訂正．索引を追加.
2.1	2021/2/22	間違いを訂正．図を修正．文書クラスを変更．§0 を追加.
2.2	2021/5/10	誤植を訂正．体裁を少し変更.

目次

0 導入

次のような形の常微分方程式の初期値問題を考えよう．

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t), \quad t \geq 0 \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{0.1}$$

ただし，a と x_0 はともに実数であるとし，$t = 0$ では左微分を考えるものとする．(0.1) の形の常微分方程式は，線形の常微分方程式と呼ばれている．良く知られているように，任意の初期値 x_0 に対してこの常微分方程式は一意解を持ち，それは指数関数を用いて具体的に

$$x(t) = x_0 e^{at}$$

と表すことができる．逆に，指数関数 e^{at} は，$x_0 = 1$ の場合の初期値問題 (0.1) の解として特徴づけることができる．したがって，指数関数 $t \mapsto e^{at}$ を考えることと斉次の線形常微分方程式を考えることは本質的には同じことだと言うことが出来るだろう．

次に，もう少し複雑な d 次元の線形常微分方程式を考えてみたい．d 次元の線形常微分方程式の初期値問題は，$d \times d$ 行列 A と初期値 $x_0 \in \mathbb{R}^d$ を用いて

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t), \quad t \geq 0 \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{0.2}$$

と記述することが出来る．(0.2) も一意解を持ち，それは 1 次元の場合と同様に

$$x(t) = e^{tA} x_0$$

と表現されることが知られている．ただし，行列 B に対してその指数関数 e^B は

$$e^B = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} B^n$$

と定義されるのであった．d 次元空間においても，線形常微分方程式 (0.2) を考えることと，「指数関数」$t \mapsto e^{tA}$ を考えることは，本質的には同様のことであるということが出来る．

今度は，線形常微分方程式 (0.2) をより一般の次元の空間について考えてみたい．X を Banach 空間とし，A を X から X への線形作用素とする．このとき，X における線形常微分方程式の初期値問題は

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t), & t \geq 0 \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{0.3}$$

と定式化される．ただし x_0 はこの方程式の初期値で，X の元である．A が有界作用素の場合には，(0.2) の場合と同じように作用素の指数関数を

$$e^{tA} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}(tA)^n$$

と定義することで，(0.3) の一意解を

$$x(t) = e^{tA}x_0$$

と構成することが出来る．ところが，X が無限次元の Banach 空間の場合には，有界作用素のみを考えれば十分だとは言い難い．たとえば，X が連続関数空間で A が微分作用素の類である場合などは，それは X 上の有界作用素とはならないからである．A が有界ではない場合に (0.3) を解くにはどうすれば良いだろうか．有限次元の場合の類推として，その場合も A に関連する指数関数のようなものを用いて，常微分方程式 (0.3) を解くことは出来ないかと考えてみたい．その時に現れるのが，作用素の C_0-半群の概念である．

有界線形作用素の族 $(T_t)_{t \geq 0}$ は，次のような条件を満たすときに C_0-半群と呼ばれる．

(i) 全ての $s, t \geq 0$ に対して，$T_{s+t} = T_s T_t$ が成り立つ．
(ii) $T_0 = \mathrm{id}_X$．
(iii) 全ての $x \in X$ について，関数 $t \mapsto T_t x$ は連続である．

条件 (i) が指数法則に対応する性質である．A が有界作用素ならば，$(e^{tA})_{t \geq 0}$ は C_0 半群となる．したがって，C_0-半群は $(e^{tA})_{t \geq 0}$ を一般化した概念だということができる．A が有界作用素でなくても，十分良い条件を満たす閉作用素ならば A に対応する C_0-半群が存在する．このとき，常微分方程式 (0.3) は任意の初期値 $x_0 \in \mathrm{Dom}\, A$ に対して，$x(t) = T_t x_0$ という形の一意解を持つ．以上のことから，無限次元を含む Banach 空間の設定下においても，常微分方程式 (0.3) を解くことと C_0-半群 $(T_t)_{t \geq 0}$ を考えることは本質的に同等のことだと言うことが出来る．

本ノートの目的は，C_0-半群の基礎理論を解説することである．C_0-半群の一般的理論から初めて，常微分方程式の初期値問題との関係性を論じるところまでが目標となる．以下，本ノートの構成を述べよう．

§1–4 では，C_0-半群の一般論を調べていく．まず §1 では C_0-半群の理論を展開するための準備として，レゾルベントについて解説する．§2 で C_0-半群とその生成作用素のを導入し，それらの基本的な性質を調べる．生成作用素は，C_0-半群の（作用素強位相の意味での）微分を考えるときに現れる概念であり，C_0-半群はその生成作用素によって完全に決定される．§3 では，特に有界作用素

L を用いて $(e^{tL})_{t\geq 0}$ と定義される C_0-半群を扱う．§4 では C_0-半群とレゾルベントの関係を調べる．まずは作用素のレゾルベントが，その C_0-半群の Laplace で与えられることを明らかにする．逆に C_0 半群はレゾルベントを通じた作用素の吉田近似を用いて復元できることを証明する．これが高名な Hille-Yosida の定理である．本ノートでは完全に一般の場合は扱わず，縮小半群に関する Hille-Yosida の定理を証明することにする．

§5–6 においては，C_0-半群の常微分方程式の初期値問題について論じる．§5 では，(0.3) 問題が一意解を持つことと，作用素 A が C_0-半群を生成することが同値であるという定理を証明する．§6 では §5 の結果を用いて，非斉次の線形方程式を調べる．

付録 A–D では，本文で用いる関数解析の諸結果について補足する．付録 E にはごく簡単な文献ノートを記した．

1 レゾルベント

係数体 $\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ とする．本ノートでは，$\mathbb{K}$-Banach 空間 X を固定して議論を進めることにする．有界線形作用素 $X \to X$ 全体の空間を $\mathscr{L}(X)$ で表すことにしよう．

定義 1.1 $U \subset \mathbb{K}$ とし，$R\colon U \to \mathscr{L}(X)$ を写像とする．全ての $\alpha, \beta \in U$ について

$$R(\alpha) - R(\beta) = (\beta - \alpha)R(\alpha)R(\beta) \tag{1.1}$$

が成り立つとき，R を擬レゾルベント (pseudo-resolvent) と呼ぶ．

(1.1) は（第一）レゾルベント方程式 (resolvent equation) [1)]と呼ばれる関係式である．レゾルベントを有界作用素の族と考え，$(R_\alpha)_{\alpha \in U}$ のように表すことも多い．

命題 1.2 $R\colon U \to \mathscr{L}(X)$ を擬レゾルベントとする．

(i) 全ての $\alpha, \beta \in U$ について $R(\alpha)R(\beta) = R(\beta)R(\alpha)$ が成り立つ．
(ii) $\operatorname{Im} R(\alpha)$ と $\operatorname{Ker} R(\alpha)$ は α によらない．

証明 (i) $\alpha = \beta$ のとき可換性は明らかである．$\alpha \neq \beta$ のときは，レゾルベント方程式より

$$R(\alpha)R(\beta) = \frac{1}{\beta - \alpha}(R(\alpha) - R(\beta)) = \frac{1}{\alpha - \beta}(R(\beta) - R(\alpha)) = R(\beta)R(\alpha)$$

と計算できる．

(ii) レゾルベント方程式と (i) より，

$$R(\alpha) = R(\beta)(\mathrm{id}_X + (\beta - \alpha)R(\alpha))$$

1) 第二レゾルベント方程式というのもあるが，それがどこで使われるものなのか筆者は全く知らない．

となるので，$\operatorname{Im} R(\alpha) \subset \operatorname{Im} R(\beta)$ がわかる．α と β に関する対称性より逆向きの包含関係も成り立つので，任意の α, β について $\operatorname{Im} R(\alpha) = \operatorname{Im} R(\beta)$ であることが示された．また可換性を用いて先ほどの式を書き換えると

$$R(\alpha) = (\mathrm{id}_X + (\beta - \alpha) R(\alpha)) R(\beta)$$

となるので，今度は $\operatorname{Ker} R(\beta) \subset \operatorname{Ker} R(\alpha)$ がわかる．さらに先ほどと同様の手続きを行えば，任意の α, β について $\operatorname{Ker} R(\beta) = \operatorname{Ker} R(\alpha)$ となることが示される． □

擬レゾルベントの例は，線形作用素のレゾルベント作用素族である．

定義 1.3 L を X における線形作用とする．集合 $\rho(L) \subset \mathbb{K}$ を，$\alpha \in \rho(L)$ が以下の 2 条件と同値になるように定義する．

(i) $\alpha - L\colon \operatorname{Dom} L \to X$ は可逆である．
(ii) $(\alpha - L)^{-1}$ は有界である．

このとき，$\rho(L)$ を作用素 L のレゾルベント集合 (resolvent set) といい，$(\alpha - L)^{-1}$ をレゾルベント作用素 (resolvent operator) という．また集合 $\mathbb{K} \setminus \rho(L)$ は L のスペクトル (spectrum) と呼ばれる．

作用素のスペクトルは行列の固有値の一般化であり，関数解析学において重要な対象である．しかし，本ノートでの主役はむしろレゾルベントである．作用素のレゾルベント集合を調べると，それが閉作用素であるかどうかがわかる．

補題 1.4 L を X における線形作用素とする．$\rho(L) \neq \emptyset$ が成り立つなら，L は閉作用素である．

証明 $\alpha \in \rho(L)$ とする．(u_n, Lu_n) を $\operatorname{Graph}(L)$ の点列で，直和 Banach 空間 $X \oplus X$ 内で (u, v) に収束するものとする．このとき $(u, v) \in \operatorname{Graph}(L)$ であることを示せばよいのであった．このとき u の定義より

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (\alpha - L)^{-1} (\alpha - L) u_n$$

が B において成り立つ．レゾルベント集合の定義より $(\alpha - L)^{-1}$ は有界作用素であるから，v の定義と合わせて

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha - L)^{-1} (\alpha - L) u_n = (\alpha - L)^{-1} \lim_{n\to\infty} (\alpha - L) u_n = (\alpha - L)^{-1} (\alpha u - v)$$

となる．したがって

$$u = (\alpha - L)^{-1} (\alpha u - v) \in \operatorname{Im}(\alpha - L)^{-1} = \operatorname{Dom} L$$

となり，$u \in \operatorname{Dom} L$ がわかる．またこの式の両辺に $\alpha - L$ を施すことで

$$(\alpha - L) u = \alpha u - v$$

となり，これを変形すると

$$v = Lu$$

を得る．すなわち $(u, v) \in \mathrm{Graph}(L)$ をである．よって $\mathrm{Graph}(L)$ は $X \oplus X$ の閉集合であり，L は閉作用素である． □

閉作用素 L が与えられたときに，$\alpha \in \rho(L)$ に対して

$$R(\alpha, L) = (\alpha - L)^{-1}$$

と定める．レゾルベント集合の定義より，このとき $R(\alpha, L) \in \mathscr{L}(X)$ が成り立っている．

命題 1.5 写像 $\rho(L) \ni \alpha \mapsto R(\alpha, L) \in \mathscr{L}(X)$ は擬レゾルベントであり，$\mathrm{Ker}\, R(\alpha, L) = 0$ が成り立つ．

証明 $\alpha, \beta \in \rho(L)$ とすれば，作用素のレゾルベント作用素の定義より

$$\begin{aligned}
(\beta - \alpha)R(\alpha, L)R(\beta, L) &= (\alpha - L)^{-1}(\beta - \alpha)(\beta - L)^{-1} \\
&= (\alpha - L)^{-1}[(\beta - L) - (\alpha - L)](\beta - L)^{-1} \\
&= (\alpha - L)^{-1} - (\beta - L)^{-1} \\
&= R(\alpha, L) - R(\alpha, L)
\end{aligned}$$

と計算できる．よって $(R(\alpha, L))_{\alpha \in \rho(L)}$ はレゾルベント方程式を満たしている．

また $R(\alpha, L)x = 0$ なら

$$0 = (\alpha - L)R(\alpha, L)x = x$$

となり，$\mathrm{Ker}\, R(\alpha, L) = 0$ がわかる． □

閉作用素のレゾルベント作用素族は擬レゾルベントであったが，逆に擬レゾルベントが与えられたときにそれがとある作用素のレゾルベント作用素族と一致しているのはどういう場合であろうか？その答えは擬レゾルベントの核を調べることで分かる．

命題 1.6 U を空でない $\mathbb{K}$ の部分集合とし，$(R_\alpha)_{\alpha \in U}$ を擬レゾルベントとする．このとき閉作用素 L で，全ての $\alpha \in U$ に対して $R_\alpha = R(\alpha, L)$ を満たすものが存在するための必要十分条件は，$\mathrm{Ker}\, R_\alpha = 0$ が成り立つことである．

証明 必要性は命題 1.5 で示されているから，十分性を示せばよい．$\alpha_0 \in A$ を任意に固定し，$\mathrm{Dom}\, L = \mathrm{Im}\, R_{\alpha_0}$ と定義する．このとき $\mathrm{Dom}\, L$ が α_0 の選び方によらないことは，命題 1.2 よりわかる．仮定より R_{α_0} は単射であるから，逆作用素 $R_{\alpha_0}^{-1} \colon \mathrm{Dom}\, L \to X$ が存在する．そこで

$$L = \alpha_0 - R_{\alpha_0}^{-1}$$

と定義することにする．このとき明らかに $\alpha_0 \in \rho(L)$ であり，$R_{\alpha_0} = (\alpha_0 - L)^{-1}$ が成り立つ．一般の $\alpha \in U$ に対しては,

$$\begin{aligned}
&(\alpha - L)R(\alpha)\\
&= [(\alpha - \alpha_0) + (\alpha_0 - L)]R(\alpha)\\
&= [(\alpha - \alpha_0) + (\alpha_0 - L)]R(\alpha_0)[\mathrm{id}_X - (\alpha - \alpha_0)R(\alpha)]\\
&= (\alpha - \alpha_0)R(\alpha_0) - (\alpha - \alpha_0)^2 R(\alpha_0)R(\alpha) + (\alpha_0 - L)R(\alpha_0) - (\alpha - \alpha_0)(\alpha_0 - L)R(\alpha_0)R(\alpha)\\
&= \mathrm{id}_X + (\alpha - \alpha_0)[R(\alpha_0) - R(\alpha) - (\alpha - \alpha_0)R(\alpha_0)R(\alpha)]\\
&= \mathrm{id}_X
\end{aligned}$$

が成り立つ．同様に $R(\alpha)(\alpha - L) = \mathrm{id}_{\mathrm{Dom}\, L}$ も成り立つので，$\alpha \in \rho(L)$ かつ $R(\alpha) = (\alpha - L)^{-1}$ がわかる． □

命題 1.6 を用いて，擬レゾルベントがある閉作用素のレゾルベントであるための十分条件を調べよう．

命題 1.7 $U \subset \mathbb{K}$ を非有界集合とし，$R\colon U \to \mathscr{L}(X)$ を擬レゾルベントとする．U の点列 (α_n) で $(\alpha_n R_{\alpha_n})$ が $\mathscr{L}(X)$ の強位相で id_X に収束するようなものが存在するなら，R はある閉作用素のレゾルベントである．

証明 命題 1.6 より，$\mathrm{Ker}\, R_\alpha = 0$ を示せばよい．ある α（よって全ての α）について $x \in \mathrm{Ker}\, R(\alpha)$ であるとする．このとき仮定より

$$x = \lim_{n\to\infty} \alpha_n R_{\alpha_n} x = 0$$

であるから，$x = 0$ がわかる．x は任意に選んでいたから，これより $\mathrm{Ker}\, R_\alpha = 0$ となる． □

レゾルベントの像が稠密ならば，命題 1.7 よりも一見弱く見える仮定から R が作用素のレゾルベントであることが導かれる．

命題 1.8 $U \subset \mathbb{K}$ を非有界集合とする．$R\colon U \to \mathscr{L}(X)$ は擬レゾルベントで，$\mathrm{Im}\, R_\alpha$ は X において稠密であると仮定する．U の点列 (α_n) で $\lim_{n\to\infty}|\alpha_n| = \infty$ かつ $(\alpha_n R(\alpha_n))_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathscr{L}(X)$ でノルム有界となるようなものが存在するなら，R は稠密に定義された閉作用素のレゾルベントである．

証明 M を $(\|\alpha_n R_{\alpha_n}\|)_{n\in\mathbb{N}}$ の上界とすれば，仮定より

$$\|R_{\alpha_n}\| \le \frac{1}{|\alpha_n|} M \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

が成り立つ．$\beta \in U$ とすれば，レゾルベント方程式より全ての n について

$$R(\beta) - \alpha_n R(\alpha_n)R(\beta) = [\mathrm{id}_X - \beta R(\beta)]R(\alpha_n)$$

であるから，

$$\begin{aligned}\|[\alpha_n R(\alpha_n) - \mathrm{id}_X]R(\beta)\| &= \|[\mathrm{id}_X - \beta R(\beta)]R(\alpha_n)\| \\ &\le \|\mathrm{id}_X - \beta R(\beta)\| \, \|R(\alpha_n)\| \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

が成立．したがって $x \in \operatorname{Im} R(\beta)$ ならば

$$\alpha_n R(\alpha_n)x \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

となる．さらに $\operatorname{Im} R_\beta$ が X で稠密であることと，$(\alpha_n R_{\alpha_n})$ の一様有界性を用いれば，全ての $x \in X$ について

$$\alpha_n R(\alpha_n)x \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

が成り立つことがわかる．すなわち，$(\alpha_n R(\alpha_n))$ は $\mathscr{L}(X)$ の強位相で id に収束する．よって命題 1.7 より R はある（稠密に定義された）閉作用素のレゾルベントであることがしたがう． □

レゾルベントに関する用語をいくつか導入しよう．

定義 1.9 $R\colon U \to \mathscr{L}(X)$ を擬レゾルベントとする．

(i) U が非有界で $\alpha R_\alpha \to \mathrm{id}_X$ $(|\alpha| \to \infty)$ が $\mathscr{L}(X)$ の強位相について成り立っているとき，R は強連続 (strongly continuous) であるという．
(ii) 全ての $\alpha \in U$ について $\|\alpha R_\alpha\| \le 1$ が成り立つとき，R は縮小的 (contraction) であるという．

命題 1.8 の証明と同様の手順をたどれば，X で稠密な像を持つ縮小的擬レゾルベントは強連続性を満たすことがわかる．

命題 1.10 $U \subset \mathbb{K}$ を非有界集合とする．$R\colon U \to \mathscr{L}(X)$ は擬レゾルベントで，$\operatorname{Im} R_\alpha$ は X において稠密であると仮定する．$(\alpha R_\alpha)_{\alpha\in U}$ が $\mathscr{L}(X)$ のノルムで有界なら，R は強連続擬レゾルベントである．

証明 (α_n) を U の列で，$|\alpha_n| \to +\infty$ を満たすような任意のものとする．このとき命題 1.8 の証明を辿ることにより，全ての $x \in X$ について

$$\alpha_n R(\alpha_n)x \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

が成り立つことがわかる．いま (α_n) は任意に選んでいるから，これより全ての $x \in X$ について

$$\alpha R(\alpha)x \xrightarrow[|\alpha|\to\infty]{} x$$

であることがしたがう． □

まとめ

- レゾルベント方程式を満たす有界作用素の族 $R_\alpha\colon X \to X$ を擬レゾルベントという．
- 空でないレゾルベント集合 $\rho(L)$ を持つ作用素 L のレゾルベント作用素族 $(\alpha - L)^{-1}$ は擬レゾルベントである．
- 核が 0 であるような擬レゾルベントは，ある閉作用素のレゾルベントとなっている．
- 稠密な像を持つレゾルベント (R_α) は (αR_α) が一様有界であるなら，強連続性を満たす．

2 C_0-半群とその生成作用素

定義 2.1 $[0,\infty[$ を通常の和について，また $\mathscr{L}(X)$ を作用素の合成について，単位的半群（すなわちモノイド）と考える．

(i) モノイドの準同型 $T\colon [0,\infty[\to \mathscr{L}(X)$ を作用素の半群 (semigroup) という．

(ii) 半群 $T\colon [0,\infty[\to \mathscr{L}(X)$ が強連続であるとき，T を強連続半群 (strongly continuous semigroup) や C_0-半群 (C_0-semigroup) という．

(iii) 全ての $t \in [0,\infty[$ について $\|T_t\| \leq 1$ が成り立つとき，T は縮小的 (contraction) であるという．

半群 T を作用素の族と考え $(T_t)_{t\geq 0}$ のように表すことも多い．半群 T が半群準同型であるという部分，すなわち全ての s,t について $T_{s+t} = T_sT_t$ であるという性質を，特に半群性と呼んだりする．$[0,\infty[$ は可換な半群であるから，半群性より $T_tT_s = T_sT_t$ が成り立つ．すなわち (T_t) は可換な作用素族である．

さて半群性 $T_{s+t} = T_sT_t$ は和を積に変換する性質であるが，これはどこかで見覚えがある気がする．そう，皆さんよくご存じの指数法則である．指数関数 $t \mapsto e^t$ は $[0,\infty[$ から Banach 空間 $\mathbb{R} \cong \mathscr{L}(\mathbb{R})$ へ作用素半群と見なすことができる．作用素半群は指数関数のようなものなのではないか？という思いを念頭に，ここから作用素半群の様々な性質を調べていこう．まずは，C_0 半群は指数増大的であることを証明する．

補題 2.2 写像 $T\colon [0,\infty[\to \mathscr{L}(X)$ は 0 で強連続であるとする．このとき，ある $t \in]0,\infty[$ について (T_s) は $[0,t]$ 上ノルム有界となる．

証明 いかなる $t > 0$ についても (T_s) は $[0,t]$ 上で非有界であるとすると，$t_n \to 0$ かつ $(\|T_{t_n}\|)$ が非有界となるような正数列 t_n がとれる．一方で 0 での強連続性と一様有界性原理より，(T_{t_n}) はノルム有界列とならなければいけない．これは矛盾である． □

命題 2.3 作用素半群 T は 0 で強連続であるとする．このとき，定数 $\omega \geq 0$ と $M > 1$ で，

$$\|T_t\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \in [0,\infty[$$

を満たすものが存在する．

証明　補題 2.2 より，適当な $t_0 > 0$ について $(T_t)_{t\le t_0}$ は $\mathscr{L}(X)$ のノルムで有界となる．そこで M を $M > \sup_{t\in[0,t_0]}\|T_t\|$ を満たすように選ぶことにする．$T_0 = \mathrm{id}$ であることから，$M > 1$ であることがわかる．ここで $\omega = (t_0 \log M)^{-1}$ と定義しよう．$t \in [0,\infty[$ とすれば，自然数 n と $0 \le \alpha < t_0$ で $t = nt_0 + \alpha$ を満たすものがとれる．このとき半群性より

$$\|T_t\| \le \|T_\alpha\|\|T_{t_0}\|^n \le M \cdot M^n \le M \cdot M^{t/t_0} = MM^{\omega t \log M} = Me^{\omega t}$$

となり，求める不等式を得る．□

命題 2.3 および半群性を用いると，作用素半群が連続かどうかは 0 付近での振る舞いのみで決定できることがわかる．

命題 2.4　作用素半群 T について，以下の 2 条件は同値である．

(i) T は強連続である．
(ii) T は 0 で強連続である．

証明　(i) $\Longrightarrow$ (ii) は明らかなので，(ii) $\Longrightarrow$ (i) を示せばよい．$t > 0$ と $x \in X$ を任意に固定する．このとき半群性と 0 における連続性より，

$$\lim_{h\downarrow 0} T_{t+h}x = T_h T_t x = T_t x$$

が成り立つ．よって $s \mapsto T_s x$ は t において右連続である．また $0 < h < t$ のとき半群性より

$$T_{t-h}x - x = T_{t-h}(\mathrm{id} - T_h)x$$

であるから，命題 2.3 と 0 での強連続性より

$$\|T_{t-h}x\| \le Me^{\omega t}\|T_h x - x\| \xrightarrow[h\downarrow\downarrow 0]{} 0$$

となる．ゆえに $s \mapsto T_s x$ は t で左連続であることも示された．□

例 2.5　$L \in \mathscr{L}(X)$ に対して，

$$e^{tL} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(tL)^n}{n!}$$

と定義すれば，$t \mapsto e^{tL}$ は C_0-半群となる．（右辺の級数は t について局所一様に絶対収束することに注意せよ．）この半群については，次の節でもう少し詳しく扱う．

指数関数によって定まる半群 $t \mapsto e^{at}$ の振る舞いは，係数 $a \in \mathbb{R}$ に支配される．a の値が未知の場合にそれを具体的に計算するためには，導関数 ae^{at} の $t = 0$ での値を調べればよい．つまり，e^{at}

の性質は 0 での微分によって決定されるということである．類推として，一般の C_0-半群についてもその 0 での微分に相当する作用素を導入し，その性質を調べてみよう．

定義 2.6 C_0-半群 $(T_t)_{t\geq 0}$ に対して，

$$\mathrm{Dom}\, L = \left\{ x \in X \;\middle|\; \lim_{t\downarrow\downarrow 0} \frac{1}{t}(T_t x - x) \text{ が存在する} \right\}$$

$$Lx = \lim_{t\downarrow\downarrow 0} \frac{1}{t}(T_t x - x) \quad x \in \mathrm{Dom}\, L$$

と定義する．これによって定まる写像 $L\colon \mathrm{Dom}\, L \to X$ を $(T_t)_{t\geq 0}$ の無限小生成作用素 (infinitesimal generator) あるいは単に生成作用素 (generator) という．

半群の生成作用素の基本的な性質を調べよう．

命題 2.7 (T_t) を C_0-半群とし，L をその生成作用素とする．

(i) $L\colon \mathrm{Dom}\, L \to X$ は線形作用素である．

(ii) 任意の t と $x \in \mathrm{Dom}\, L$ について $T_t x \in \mathrm{Dom}\, L$ であり，

$$\frac{d}{dt} T_t x = L T_t x = T_t L x$$

が成り立つ．

(iii) 全ての $x \in X$ と全ての $t \in [0, \infty[$ について，$\int_0^t T_s x\, ds \in \mathrm{Dom}\, L$ であり，

$$L\left(\int_0^t T_s\, ds \right) = T_t x - x$$

が成り立つ．

(iv) L は稠密に定義された閉作用素である．

証明 (i) $\mathrm{Dom}\, L$ が線形部分空間であることと L が線形作用素であることは，X の線形演算が連続であることと T_t の線形性よりしたがう．

(ii) $x \in \mathrm{Dom}\, L$ のとき，$h > 0$ について

$$\frac{1}{h}(T_h T_t x - T_t x) = T_t \frac{1}{h}(T_h x - x)$$

が成り立つ．$x \in \mathrm{Dom}\, L$ であることと T_t の連続性に注意して極限をとれば，

$$\lim_{h\downarrow\downarrow 0} \frac{1}{h}(T_h T_t x - T_t x) = T_t A x$$

となる．これより $T_t x \in \mathrm{Dom}\, L$ であることと $A T_t x = T_t A x$ であることがわかる．$h > 0$ なら

$$\frac{1}{h}(T_{t+h} x - T_t x) = \frac{1}{h}(T_h T_t x - T_t x) \xrightarrow[h\downarrow\downarrow 0]{} A T_t x$$

となるから，$s \mapsto T_s x$ の t における右側導関数は $AT_t x$ に一致する．また $0 < h < t$ なら

$$\begin{aligned}\left\| \frac{1}{h} T_{t-h} x - T_t x - T_t A x \right\| &\leq \|T_{t-h}\| \left\| \frac{1}{h}(x - T_h x) - T_h A x \right\| \\ &\leq M e^{\omega t} \left\| \frac{1}{h}(x - T_h x) - T_h A x \right\| \\ &\xrightarrow[h \downarrow\downarrow 0]{} 0\end{aligned}$$

が成立する．ただし，最後の極限は $x \in \operatorname{Dom} L$ であることと T の強連続性より従う．ゆえに $s \mapsto T_s x$ の t における左側導関数は $T_t L x$ と一致する．以上の議論により

$$\frac{d}{dt} T_t x = L T_t x = T_t L x$$

であることが示された．

(iii) $x \in X$ かつ $t \in [0, \infty[$ とする．関数 $t \mapsto T_t x$ は連続であるから，特に Bochner 可積分であることに注意しておく．ここで，$h > 0$ を任意に選ぶ．$T_h \colon X \to X$ が有界作用素であることに注意して命題 D.3 を適用すれば，

$$\begin{aligned}\frac{T_h - \mathrm{id}}{h} \left(\int_0^t T_s x \, ds \right) &= \frac{T_h}{h} \int_0^t T_s x \, ds - \frac{\mathrm{id}}{h} \int_0^t T_s x \, ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^t T_{s+h} x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^t T_s x \, ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^t T_{s+h} x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^t T_s x \, ds \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T_s x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^t T_s x \, ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^{t+h} T_s x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^h T_s x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^t T_s x \, ds \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T_s x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^h T_s x \, ds\end{aligned}$$

となる．いま，微積分学の基本定理と $t \mapsto T_t x$ の連続性から，

$$\lim_{h \downarrow\downarrow 0} \left(\frac{1}{h} \int_t^{t+h} T_s x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^h T_s x \, ds \right) = T_t x - T_0 x = T_t x - x$$

が成り立つ．このことと先ほどの等式，そして生成作用素の定義から $\int_0^t T_s x \, ds \in \operatorname{Dom} L$ かつ

$$L \left(\int_0^t T_s x \, ds \right) = T_t x - x$$

がわかる．

(iv) $x \in X$ に対して

$$x_t = \frac{1}{t} \int_0^t T_s x \, ds$$

と定義する．このとき (iii) の結果より $x_t \in \operatorname{Dom} L$ となる．さらに微積分学の基本定理を用いれば,

$$x_t = \frac{1}{t}\int_0^t T_s x\, ds \xrightarrow[t\downarrow\downarrow 0]{} T_0 x = x$$

となるので，$x \in \overline{\operatorname{Dom} L}$ である．いま x は任意に選んでいるから，これより $\overline{\operatorname{Dom} L} = X$ がしたがう．

次に L が閉作用素であることを示そう．(x_n) を $\operatorname{Dom} L$ の点列で，$(x_n, Lx_n) \to (x, y)$ を満たすようなものとする．このとき $(x, y) \in \operatorname{Graph}(L)$ であることを示せばよいのであった．微積分学の基本定理と (ii) から，

$$\begin{aligned}
T_t x_n - x_n &= \int_0^t \frac{d}{ds} T_s x_n\, ds \\
&= \int_0^t T_s L x_n\, ds
\end{aligned}$$

が成立．仮定より $T_s L x_n \to T_s y$ であって，さらに

$$\|T_s L x_n\| \le \|T_s\| \|L x_n\| \le M e^{\omega s} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|L x_n\|$$

が成り立つから，優収束定理により

$$\int_0^t T_s L x_n\, ds \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^t T_s y\, ds$$

となることがわかる．このことと微積分学の基本定理より

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\left(T_t x - x\right) &= \frac{1}{t}\lim_{n\to\infty}\left(T_t x_n - x_n\right) \\
&= \frac{1}{t}\lim_{n\to\infty}\int_0^t T_s L x_n\, ds \\
&= \int_0^t T_s y\, ds \\
&\xrightarrow[t\downarrow\downarrow 0]{} T_0 y = y
\end{aligned}$$

となるので，

$$\lim_{t\downarrow\downarrow 0}\frac{1}{t}\left(T_t x - x\right) = y$$

を得る．すなわち $x \in \operatorname{Dom} L$ および $Lx = y$ が成り立ち，$(x, y) \in \operatorname{Graph}(L)$ が示された． □

指数関数の場合と同様に，C_0-半群もその生成作用素で完全に決定されることを示そう．

命題 2.8 $T, S\colon [0, \infty[\to \mathscr{L}(X)$ を C_0-半群とし，対応する生成作用素をそれぞれ L, K で表す．このとき $L = K$ なら，$T = S$ が成り立つ．

命題 2.8 の証明のために，一つ補題を用意する．

補題 2.9　$T\colon [0,\infty[\to \mathscr{L}(X)$ を C_0-半群とし，$f\colon [0,\infty[\to X$ を連続写像とする．このとき写像

$$\begin{aligned}\varphi\colon [0,\infty[\times [0,\infty[&\longrightarrow X \\ (t,s) &\longmapsto T(t)f(s)\end{aligned}$$

は連続である．

証明　M と ω を命題 2.3 の定数とする．$s_1, s_2, r_1, r_2 \in$ とすれば，

$$\begin{aligned}\|\varphi(r_1,s_1) - \varphi(r_2,s_2)\|_X &= \|T(r_1)f(s_1) - T(r_2)f(s_2)\|_X \\ &= \|T(r_1)f(s_1) - T(r_1)f(s_2) + T(r_1)f(s_2) - T(r_2)f(s_2)\|_X \\ &\le \|T(r_1)f(s_1) - T(r_1)f(s_2)\| + \|T(r_1)f(s_2) - T(r_2)f(s_2)\| \\ &\le \|T(r_1)\|\,\|f(s_1) - f(s_2)\| + \|T(r_1)f(s_2) - T(r_2)f(s_2)\| \\ &\le Me^{\omega t}\|f(s_1) - f(s_2)\| + \|T(r_1)f(s_2) - T(r_2)f(s_2)\|\end{aligned}$$

が成り立つ．この評価と T の強連続性から，φ の連続性がわかる．□

命題 2.8 の証明　$x \in \operatorname{Dom} L = \operatorname{Dom} K$ を任意に固定し，写像 $\varphi\colon [0,\infty[\times [0,\infty[\to X$ を

$$\varphi(t,s) = T_t S_s x$$

によって定める．このとき命題 2.7 より $S_s x \in \operatorname{Dom} K = \operatorname{Dom} L$ である．T_t が有界線形作用素であることに注意して命題 2.7 を用いれば，φ は各変数について偏微分可能であり，

$$\begin{aligned}\partial_1\varphi(t,s) &= \frac{d}{dt}T_t S_s x = L T_t S_s x, \\ \partial_2\varphi(t,s) &= \frac{d}{ds}T_t S_s x = T_t \frac{d}{ds}S_s x = T_t K S_s x\end{aligned}$$

であることがわかる．いま $x \in \operatorname{Dom} K$ であったから，命題 2.7 により

$$\partial_2\varphi(t,s) = T_t K S_s x = T_t S_s K x$$

となり，この表現と補題 2.9 から $\partial_2\varphi$ の連続性がわかる．また，仮定より $K = L$ であることに注意して命題 2.7 を用いれば

$$\partial_1\varphi(t,s) = L T_t S_s x = T_t L S_s x = T_t K S_s x = T_t S_s K x$$

となり，やはりこの表現と補題 2.9 から $\partial_1\varphi$ の連続性も従う．以上の議論により，$\varphi\colon [0,\infty[\times [0,\infty[\to X$ は C^1 級の関数であることが確かめられた．

ここで $t > 0$ を任意に固定する．このとき写像

$$\begin{aligned}[0,t] &\longrightarrow X \\ s &\longmapsto \varphi(t-s,s)\end{aligned}$$

は微分可能であり，合成関数の微分則により

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\varphi(t-s,s) &= \partial_1\varphi(t-s,s)\frac{d}{ds}(t-s)+\partial_2\varphi(t-s,s)\\&= -LT_{t-s}S_s x + T_{t-s}KS_s x\\&= (K-L)T_{t-s}S_s x\\&= 0\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって $[0,t]\ni s\mapsto \varphi(t-s,s)\in\mathscr{L}(X)$ は定数関数であり，

$$T_t x = T_{t-0}S_0 x = \varphi(t-0,0) = \varphi(t-t,t) = T_{t-t}S_t x = S_t x$$

が成り立つ．命題 2.7 より $\operatorname{Dom} L$ は X で稠密であり，T_t と S_t がともに有界作用素であることに注意すれば，これより $T_t = S_t$ となることがわかる．t は任意に選んだ正の数であったから，$T=S$ であることが示された． □

まとめ

- モノイド準同型 $[0,\infty[\ \to \mathscr{L}(X)$ を線形作用素の半群という．線形作用素の半群が強位相に関して連続であるとき，それを特に C_0-半群という．
- C_0-半群の 0 における微分で定義される作用素を，生成作用素という．C_0-半群の正詩作用素は稠密な定義域を持つ閉作用素である．
- C_0-半群 T とその生成作用素 L は，全ての $x\in\operatorname{Dom} L$ について

  $$\frac{d}{dt}T_t x = LT_t x = T_t Lx$$

  という関係式を満たす．
- 二つの C_0-半群の生成作用素が等しければ，それらの C_0-半群は一致する．

3 作用素半群 $(e^{tL})_{t\geq 0}$

本節では C_0 半群のうち，特に (e^{tL}) という形のものの性質を調べる．

命題 3.1 $L\in\mathscr{L}(X)$ に対して，

$$e^L = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}L^n$$

とすれば，右辺の級数は絶対収束し，これにより $e^L\in\mathscr{L}(X)$ が定まる．

証明

$$\sum_{n\geq 0}\left\|\frac{1}{n!}L^n\right\| \leq \sum_{n\geq 0}\frac{\|L\|^n}{n!} = e^{\|L\|} < \infty$$

より，級数は絶対収束する．したがってその級数で定まる e^L は有界線形作用素である． □

命題 3.1 で定めた線形作用素を作用素の指数関数と呼んだりする．作用素の指数関数については，適当な条件のもと指数法則が成り立つ．

命題 3.2 $K, L \in \mathscr{L}(X)$ は $LK = LK$ を満たすとする．このとき，$e^{K+L} = e^K e^L = e^L e^K$ が成り立つ．

証明 c を $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ 上の数え上げ測度とし，$A \in \mathscr{L}(X)$ に対して，可測関数 $\mathbb{N} \to \mathscr{L}(X)$ を

$$f_A(n) = \frac{1}{n!}A^n$$

と定義する．K と L の可換性に注意すれば，

$$\begin{aligned} f_{K+L}(n) &= \frac{1}{n!}(K+L)^n \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{0\le k\le n}\binom{n}{k}K^k L^{n-k} \\ &= \sum_{0\le k\le n}\frac{1}{k!}K^k\frac{1}{(n-k)!}L^{n-k} \\ &= \int_{\mathbb{N}} 1_{\{0,\dots,n\}}(k) f_K(k) f_L(n-k) c(dk) \end{aligned}$$

であることがわかる．したがって，Fubini の定理と命題 D.3 を用いて積分を計算すれば

$$\begin{aligned} e^{K+L} &= \int_{\mathbb{N}} f_{K+L}(n)c(dn) \\ &= \int_{\mathbb{N}}\left(\int_{\mathbb{N}} 1_{\{0,\dots,n\}}(k) f_K(k) f_L(n-k)c(dk)\right)c(dn) \\ &= \int_{\mathbb{N}} f_K(k)\left(\int_{\mathbb{N}} 1_{\{k,k+1,\dots\}}(n) f_L(n-k)c(dn)\right)c(dk) \\ &= \int_{\mathbb{N}} f_K(k)\left(\int_{\mathbb{N}} f_L(m)c(dm)\right)c(dk) \\ &= \left(\int_{\mathbb{N}} f_K(k)c(dk)\right)\left(\int_{\mathbb{N}} f_L(m)c(dm)\right) \\ &= e^K e^L \end{aligned}$$

となり，求める関係式が示された． □

指数法則を用いれば，$t \mapsto e^{tL}$ は作用素半群となることがわかる．

命題 3.3 $L \in \mathscr{L}(X)$ に対して，$T_t x = e^{tL}x$ と定義する．このとき $T\colon [0,\infty[\to \mathscr{L}(X)$ は C_0-半群である．

証明　命題 3.2 の証明と同様の記号を用いる．$s, t \geq 0$ に対して sL と tL は可換だから，命題 3.2 により

$$e^{(s+t)L} = e^{sL+tL} = e^{sL}e^{tL}$$

が成り立つ．よって $(e^{tL})_{t\geq 0}$ は線形作用素の半群である．また e^{tL} の定義より

$$\left\| e^{tL} - \mathrm{id}_X \right\| = \left\| \sum_{n\geq 1} \frac{(tL)^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n\geq 1} \frac{t^n \|L\|^n}{n!} \leq t\|L\|e^{t\|L\|}$$

となるので，この評価により e^{tL} は 0 においてノルム連続であることがわかり，特に強連続であることがしたがう[2]．□

C_0-半群 $(e^{tL})_{t\geq 0}$ の生成作用素を求めてみよう．

命題 3.4　C_0-半群 $(e^{tL})_{t\geq 0}$ の生成作用素は L である．

証明　$t \geq 0$ とすれば，

$$\begin{aligned}
\left\| e^{tL} - \mathrm{id}_X - tL \right\| &\leq \sum_{n\geq 2} \frac{\|tL\|^n}{n!} \\
&= t\|L\| \sum_{n\geq 2} \frac{\|tL\|^{n-1}}{n!} \\
&\leq t\|L\| \sum_{n\geq 2} \frac{\|tL\|^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= t\|L\| \left(e^{t\|L\|} - 1 \right)
\end{aligned}$$

が成り立つ．これは $t \mapsto e^{tL}$ が 0 で（右側）微分可能で，その導関数が L に等しいことを表す不等式である．□

作用素の指数関数には，もう少し強い評価も存在する．

命題 3.5　$c > 0$ を定数とする．このとき, 適当な定数 $C > 0$ をとれば全ての $x \in X$ と $\|L\|, \|K\| \leq c$ かつ $LK = KL$ 満たす全ての $L, K \in \mathscr{L}(X)$ について

$$\|e^L x - e^K x\| \leq C\|Lx - Kx\|$$

が成り立つ．

命題 3.5 は，作用素の指数関数についてある種の Lipschitz 型評価が成り立つとを主張している．

2)　強位相はノルム位相より粗いので．

証明 まずは全ての $A \in \mathscr{L}(X)$ と全ての $x \in X$ について

$$\|e^A x - x\| \le \sum_{n\ge1} \left\| \frac{A^n x}{n!} \right\| \le \left(\sum_{n\ge1} \frac{\|A\|^{n-1}}{n!} \right) \|Ax\| \le e^{\|A\|}\|Ax\|$$

が成り立つことに注意しておく．K, L はノルムが c より小さいような有界作用素で，$KL = LK$ を満たしていると仮定する．このとき指数法則と先ほどの評価を用いれば

$$\begin{aligned}\|e^L x - e^K x\| &\le \|e^K\|\|e^{L-K}x - x\| \\ &\le e^{\|K\|}e^{\|L-K\|}\|Lx - Kx\| \\ &\le e^{3c}\|Lx - Kx\|\end{aligned}$$

となるので，$C = e^{3c}$ とおけばよい． □

まとめ

- $L \in \mathscr{L}(X)$ なら，作用素の冪級数 $\sum_{n\ge0} \frac{L^n}{n!}$ により有界線形作用素が定まり，これを e^L で表す．
- K と L が可換ならば，$e^{K+L} = e^K e^L = e^L e^K$ が成り立つ．
- $(e^{tL})_{t\ge0}$ は生成作用素 L を持つ C_0 半群である．

4 C_0-半群とレゾルベント

本節では，C_0-半群とレゾルベントの関係を調べよう．C_0-半群が与えられると，その生成作用素 L が定まる．また L のレゾルベント集合が空でないなら，それにはレゾルベント $(R(\alpha, L))_{\alpha\in\rho(L)}$ が対応している．とすると，C_0-半群とレゾルベントにも何からしらの関係があるだろう．本節では，C_0-半群，生成作用素，レゾルベントという 3 つのモノの関係をさらに詳しく調べよう．

命題 4.1 $(T_t)_{t\ge0}$ を一様有界な C_0-半群とすれば，その生成作用素 L は $]0,\infty[\ \subset \rho(L)$ を満たす．さらに $\alpha > 0$ に対して

$$R_\alpha x = \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t x \, dt$$

と定義すれば，$R_\alpha = (\alpha - L)^{-1}$ が成り立つ．

命題 4.1 より，生成作用素のレゾルベント $(R(\alpha, L))_{\alpha>0}$ は，生成作用素を具体的に求めなくても半群の Laplace 変換 (Laplace transform) として直接計算できることがわかる．

証明 **Step 1：積分が well-defined であることの証明．** $\sup_{t\ge0}\|T_t\| \le K$ を満たす K を固定すれば

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\|T_t x\| \, dt \le K \int_0^\infty e^{-\alpha t}\|x\| \, dt < \infty$$

となり，関数 $t \mapsto e^{-\alpha t}T_t x$ は Bochner 可積分であることがわかる．したがって，全ての $x \in X$ について

$$R_\alpha x = \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t x \, dt$$

を定義することができる．

Step 2：R_α が有界作用素 $X \to \operatorname{Dom} L$ を定めることの証明． R_α の線形性は，Bochner 積分の線形性と作用素 T_t の線形性よりわかる．R_α が有界作用素であることは，step 1 と同様の評価

$$\|R_\alpha x\| \le K\|x\| \int_0^\infty e^{-\alpha t} \|\cancel{x}\| \, dt$$

よりしたがう．次に，任意の $x \in X$ について $R_\alpha x \in \operatorname{Dom} L$ となることを示そう．R_α と命題 D.3，変数変換公式により

$$\begin{aligned}
T_t R_\alpha x &= T_t \int_0^\infty e^{-\alpha s} T_s x \, ds \\
&= \int_0^\infty e^{-\alpha s} T_t T_s x \, ds \\
&= \int_0^\infty e^{-\alpha s} T_{t+s} x \, ds \\
&= \int_0^\infty e^{-\alpha u - t} T_u x \, du \\
&= e^{\alpha t} \int_t^\infty e^{-\alpha u} T_u x \, du
\end{aligned}$$

が成立．したがって

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t} T_t R_\alpha x - R_\alpha x &= \frac{1}{t}\left(e^{\alpha t} - 1\right) \int_t^\infty e^{-\alpha s} T_s x \, ds - \int_0^t e^{-\alpha s} T_s x \, ds \\
&\xrightarrow[t \downarrow\downarrow 0]{} \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha s} T_s x \, ds - T_0 x
\end{aligned}$$

となり，$R_\alpha x \in \operatorname{Dom} L$ および $LR_\alpha x = \alpha R_\alpha x - x$ がわかる．ただし，最後の極限操作はスカラー倍の連続性と積分の連続性，そして微積分学の基本定理より正当化されることに注意しておく．

Step 3：$R_\alpha = (\alpha - L)^{-1}$ であることの証明． Step 2 での議論により，全ての $x \in X$ について $(\alpha - L)R_\alpha x = x$ が成り立つことがわかっているので，あとは全ての $x \in \operatorname{Dom} L$ について $R_\alpha(\alpha - L)x = x$ が成り立つことを示せばよい．まずは R_α と L の可換性を示そう．生成作用素 L は $x \in \operatorname{Dom} L$ に対して

$$Le^{-\alpha t} T_t x = e^{-\alpha t} T_t L x$$

を満たすことに注意すれば，$Le^{-\alpha t}T_t x$ が Bochner 可積分であることがわかる．したがって命題 D.3 を用いて計算すれば，$x \in \operatorname{Dom} L$ について

$$LR_\alpha x = L \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t x \, dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t L x \, dt = R_\alpha L x$$

となる．これより $x \in \mathrm{Dom}\, L$ なら

$$R_\alpha(\alpha - L)x = (\alpha - L)R_\alpha x$$

となるが，step 2 での結果により右辺は x に等しいことがわかるから

$$R_\alpha(\alpha - L)x = x$$

を得る．これで $R_\alpha = (\alpha - L)^{-1}$ であることが示された． □

系 4.2 $(T_t)_{t\geq 0}$ を縮小的な C_0-半群とし，L をその生成作用素とする．このときレゾルベント $(R(\alpha, L))_{\alpha>0}$ は縮小的である．

証明 命題 4.1 によるレゾルベントの積分表現を用いれば，$x \in X$ と $\alpha > 0$ について

$$\begin{aligned}
\|\alpha R(\alpha, L)x\| &= \alpha \left\| \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t x \, dt \right\| \\
&\leq \alpha \int_0^\infty \left\| e^{-\alpha t} T_t x \right\| \, dt \\
&\leq \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha t} \|x\| \, dt \\
&= \|x\| \lim_{R\to\infty} (-e^{-\alpha R} + e^{-\alpha \cdot 0}) \\
&= \|x\|
\end{aligned}$$

という評価をすることができる．これより $\|\alpha R(\alpha, L)\| \leq 1$ がわかる． □

ここまでで，半群，レゾルベント，生成作用素について（大雑把に言うと）図 1 のような関係性があることを見た． この図式のうち，まだ矢印がない部分の対応 $(G_\alpha) \to (T_t)$ と $L \to (T_t)$ を明ら

$$\begin{tikzcd}
(R_\alpha)_{\alpha>0} \arrow[dr, shift right, "\alpha - R_\alpha^{-1}"'] & & (T_t)_{t\geq 0} \arrow[ll, "\int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t x\, dt"'] \arrow[dl, "\frac{d}{dt} T_t x|_{t=0}"] \\
& L \arrow[ul, shift right, "(\alpha - L)^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

図 1

かにするのが Hille-Yosida の定理である．

生成作用素 L から C_0-半群を構成するためには，気分的には $T_t = e^{tL}$ と定めたい．ところが一般の C_0-半群については L は有界作用素とはならないので，残念ながら作用素の指数関数 e^{tL} を冪級

数として直接定義することはできない．そこで，L を有界作用素の族 $(L_\lambda)_\lambda$ で何らかの意味で近似して，

$$T_t x = \lim_{\lambda} e^{tL_\lambda} x$$

と構成してみてはどうだろうか，というのが Hille-Yosida の定理の発想である．

言うまでもなく問題となるのは，L を近似するそのような作用素族をどのように作るか，ということだ．そのために用いられる近似手法が，作用素の吉田近似である．吉田近似の定義をする前に，まずはその気持ちを考えてみよう．L を近似する有界作用素の族を上手く作りたいのが，もちろん L と無関係なところからちょうど良いものを見つけてくるのは至難の業である．L と何やら関係のありそうな有界作用素を使って近似を構成したいわけである．L に付随する有界作用素として，我々はレゾルベント作用素 $(R(\alpha, L))_{\alpha\in\rho(L)}$ を知っている．そこで $(R(\alpha, L))_{\alpha\in\rho(L)}$ を用いて L を近似したいわけであるが，いったいどうすれば良いだろうか．

まずは数学的な厳密性は忘れて，いい加減な議論をしてみよう．レゾルベントを $(\alpha - z)^{-1} = \frac{1}{\alpha - z}$ と思い，形式的に

$$\frac{\alpha}{\alpha - z}$$

というモノを考えてみる．この量で $\alpha \to \infty$ とすれば，

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{\alpha}{\alpha - z} = 1$$

となりそうな気がする．さらに両辺に z を掛ければ，

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{\alpha z}{\alpha - z} = z$$

となるだろう．この式で極限を取る左辺の量を書き換えると，

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha z}{\alpha - z} &= \frac{\alpha z - \alpha^2 + \alpha^2}{\alpha - z} \\
&= \frac{-\alpha(\alpha - z) + \alpha^2}{\alpha - z} \\
&= \frac{\alpha^2}{\alpha - z} - \alpha \\
&= \alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha - z} - 1\right)
\end{aligned}$$

となる．これにより，z を $(\alpha - z)^{-1}$ と α の極限として復元できた．今までの議論で，z を線形作用素 L に置き換えてみてはどうだろうか．

さて，以上の考えを念頭に，実際に作用素の吉田近似の概念を導入しよう．$\alpha \in \rho(L)$ に対して，

$$L^{(\alpha)} = \alpha L R(\alpha, L) = \alpha(\alpha R(\alpha, L) - \mathrm{id}_X)$$

と定義し，これを L の吉田近似 (Yosida approximation) とよぶ．二つ目の表現より，吉田近似は有界作用素であることがわかる．

補題 4.3　L を稠密に定義された閉作用素で，$]0,\infty[\ \subset \rho(L)$ を満たすものとする．レゾルベント $(R(\alpha,L))_\alpha$ が縮小的ならば，全ての $x \in \operatorname{Dom} L$ について

$$\lim_{\alpha\to\infty} L^{(\alpha)}x = Lx$$

が成り立つ．

証明　命題 1.10 より $(R(\alpha,L))_{\alpha>0}$ は強連続となるので，

$$\|L^{(\alpha)}x - Lx\| = \|\alpha R(\alpha,L)Lx - Lx\| \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} 0$$

となる． □

以上の準備の下，Hille-Yosida の定理を証明しよう．

命題 4.4（Hille-Yosida の定理）　L を X から X への（非有界）線形作用素とする．このとき，L がある縮小的 C_0-半群の生成作用素であるための必要十分条件は，以下の 3 条件を満たすことである．

(i) L は稠密な定義域もつ閉作用素である．

(ii) $]0,\infty[\ \subset \rho(L)$ が成り立つ．

(iii) レゾルベント $(R(\alpha,L))_{\alpha>0}$ は縮小的である．

証明　**必要性の証明．** L はある縮小的 C_0 半群の生成作用素であると仮定する．このとき命題 2.7 より L は稠密な定義域を持つ閉作用素である．また命題 4.1 より $]0,\infty[\ \subset \rho(L)$ であることがわかり，系 4.2 より $(R(\alpha,L))_{\alpha>0}$ は縮小的であることもわかる．

十分性の証明．

Step 1：$(T_t)_{t\geq0}$ の構成． L は条件 (i)–(iii) を満たすと仮定し，L に対応する半群を構成しよう．これらの条件と補題 4.3 より，吉田近似 $(L^{(\alpha)})_{\alpha>0}$ は全ての $x \in \operatorname{Dom} L$ について

$$\lim_{\alpha\to\infty} L^{(\alpha)}x = Lx$$

を満たしていることがわかる．さて，吉田近似を用いて C_0-半群 $T^{(\alpha)}$ を $T_t^{(\alpha)} = e^{tL^{(\alpha)}}$ と定義する．このとき，(iii) より $(T^{(\alpha)})_{t\geq0}$ は縮小半群となる．これは実際，レゾルベントの縮小性を用いて以下のような評価をすればわかる．

$$\begin{aligned}
\left\|T_t^{(\alpha)}\right\| &= \left\|e^{-\alpha t}e^{t\alpha^2 R(\alpha,L)}\right\| \\
&\leq e^{-\alpha t}\sum_{n\geq0}\frac{\alpha t}{n!}\|\alpha R(\alpha,L)\|^n \\
&\leq e^{-\alpha t}\sum_{n\geq0}\frac{\alpha t}{n!} \\
&= e^{-\alpha t}e^{\alpha t} = 1
\end{aligned}$$

いま $T^{(\alpha)}$ の極限を考えることで C_0-半群が定義されることを示したい．$t_0 > 0$ を固定しレゾルベントが縮小的であることに注意すれば，命題 3.5 の評価より任意の $x \in X$ について

$$\sup_{t\in[0,t_0]} \left\| T_t^{(\alpha)} x - T_t^{(\beta)} x \right\| \leq (\mathrm{const.}) \| L^{(\alpha)} x - L^{(\beta)} x \|$$

を得る．したがって補題 4.3 から任意の $x \in \operatorname{Dom} L$ について極限

$$T_t x := \lim_{\alpha\to\infty} T_t^{(\alpha)} x$$

が存在し，さらにこの収束はコンパクト一様であることがわかる．次に一般の $x \in X$ に対しても $T_t^{(\alpha)} x$ が収束することを示そう．$\varepsilon > 0$ を任意に固定し，$y \in \operatorname{Dom} L$ を $\|x - y\| < \varepsilon$ となるように選ぶ．このとき半群の縮小性に注意すれば，任意に固定した $t_0 > 0$ と任意の $\alpha, \beta > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,t_0]} \left\| T_t^{(\alpha)} x - T_t^{(\beta)} x \right\| \\
&\leq \sup_{t\in[0,t_0]} \left\| T_t^{(\alpha)} x - T_t^{(\alpha)} y \right\| + \sup_{t\in[0,t_0]} \left\| T_t^{(\alpha)} y - T_t^{(\beta)} y \right\| + \sup_{t\in[0,t_0]} \left\| T_t^{(\beta)} y - T_t^{(\beta)} x \right\| \\
&\leq \|x - y\| + \sup_{t\in[0,t_0]} \left\| T_t^{(\alpha)} y - T_t^{(\beta)} y \right\| + \|x - y\| \\
&\leq 2\varepsilon + \sup_{t\in[0,t_0]} \left\| T_t^{(\alpha)} y - T_t^{(\beta)} y \right\|
\end{aligned}$$

という不等式得る．先ほどの結果より，十分大きな $\alpha, \beta > 0$ に対して[3)]

$$\sup_{t\in[0,t_0]} \left\| T_t^{(\alpha)} y - T_t^{(\beta)} y \right\| < \varepsilon$$

となるので，結局十分大きな $\alpha, \beta > 0$ に対して

$$\sup_{t\in[0,t_0]} \left\| T_t^{(\alpha)} x - T_t^{(\beta)} x \right\| < 3\varepsilon$$

が成り立つことがわかる．したがって $(T_t^{(\alpha)} x)_{\alpha>0}$ は Cauchy 条件を満たし，極限

$$T_t x := \lim_{\alpha\to\infty} T_t^{(\alpha)} x$$

が存在する．特にこの収束は t についてコンパクト一様である．

Step 2：$(T_t)_{t\geq 0}$ が縮小的 C_0-半群であることの証明． T_t が線形作用素であることは定義よりすぐにわかる．次に半群性を示そう．$\alpha > 0$，$t, s \geq 0$，および $x \in X$ とすれば，

$$\begin{aligned}
&\|T_{t+s} x - T_t T_s x\| \\
&\leq \left\| T_{t+s} x - T_{t+s}^{(\alpha)} x \right\| + \left\| T_{t+s}^{(\alpha)} x - T_t^{(\alpha)} T_s^{(\alpha)} x \right\| + \left\| T_t^{(\alpha)} T_s^{(\alpha)} x - T_t T_s x \right\| \\
&\leq \left\| T_{t+s} x - T_{t+s}^{(\alpha)} x \right\| + \left\| T_t^{(\alpha)} T_s^{(\alpha)} x - T_t^{(\alpha)} T_s x \right\| + \left\| T_t^{(\alpha)} T_s x - T_t T_s x \right\| \\
&\leq \left\| T_{t+s} x - T_{t+s}^{(\alpha)} x \right\| + \left\| T_s^{(\alpha)} x - T_s x \right\| + \left\| T_t^{(\alpha)} T_s x - T_t T_s x \right\|
\end{aligned}$$

3) α, β は y に依存する．

が成立．この式で $\alpha \to \infty$ とすれば，

$$\|T_{t+s}x - T_tT_sx\| = 0$$

がわかる．$T_0 = \mathrm{id}_X$ は定義より明らかなので，$(T_t)_{t\geq 0}$ は有界作用素の半群であることが示された．(T_t) の強連続性は $T_t^{(\alpha)}x$ の収束が t についてコンパクト一様であることからすぐにしたがう．最後に (T_t) の縮小性を示したいが，これは $(T_t^{(\alpha)})$ の縮小性と，$(T_t^{(\alpha)})$ が (T_t) に強収束することからわかる．

Step 3：L が T の生成作用素であることの証明． 微積分学の基本定理と命題 2.7 より，全ての $x \in \mathrm{Dom}\,L$ について

$$T_t^{(\alpha)}x - x = \int_0^t \frac{d}{ds}\left(T_s^{(\alpha)}x\right)ds = \int_0^t T_s^{(\alpha)}L^{(\alpha)}x\,ds$$

が成り立つのであった．この式において極限操作をすれば，

$$T_tx - x = \int_0^t T_sLx\,ds \tag{4.1}$$

なる関係式を得る．右辺において上のような極限操作が正当化されることを確かめよう．

$$\begin{aligned}
&\left\|T_s^{(\alpha)}L^{(\alpha)}x - T_sLx\right\| \\
&\leq \left\|T_s^{(\alpha)}L^{(\alpha)}x - T_s^{(\alpha)}Lx\right\| + \left\|T_s^{(\alpha)}Lx - T_sLx\right\| \\
&\leq \left\|L^{(\alpha)}x - Lx\right\| + \left\|T_s^{(\alpha)}Lx - T_sLx\right\|
\end{aligned}$$

という評価と補題 4.3，そして step 1 での議論を用いれば，全ての $x \in \mathrm{Dom}\,L$ について

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left\|T_s^{(\alpha)}L^{(\alpha)}x - T_sLx\right\| = 0$$

が成り立つことがわかる．さらに補題 4.3 より全ての $x \in \mathrm{Dom}\,L$ について

$$\sup_{\alpha>0}\left\|T_s^{(\alpha)}L^{(\alpha)}x\right\| \leq \sup_{\alpha>0}\left\|L^{(\alpha)}x\right\|$$

となるから，被積分関数に優収束定理を適用することができる．したがって (4.1) を導出した極限操作は完全に正当なものである．

ここで，$(T_t)_{t\geq 0}$ の生成作用素を $\widetilde{L}$ で表すことにする．(4.1) の両辺に t^{-1} をかけて $t \to 0$ という極限操作を施せば，微積分学の基本定理により

$$\lim_{t\downarrow\downarrow 0}\frac{1}{t}(T_tx - x) = T_0Lx = Lx \quad \forall x \in \mathrm{Dom}\,L$$

となる．ゆえに $\mathrm{Dom}\,L \subset \mathrm{Dom}\,\widetilde{L}$ かつ $\widetilde{L}|_{\mathrm{Dom}\,L} = L$ がわかる．$\widetilde{L}$ は (T_t) の生成作用素なので，必要性より $1 \in \rho(\widetilde{L})$ を満たす．また仮定より $1 \in \rho(L)$ でもある．レゾルベント集合の定義と先ほどの議論より

$$X = (1-L)\,\mathrm{Dom}\,L = (1-\widetilde{L})\,\mathrm{Dom}\,L$$

となるので，これに $(1-\widetilde{L})^{-1}$ をほどこせば，

$$\operatorname{Dom}\widetilde{L} = (1-\widetilde{L})^{-1}X = \operatorname{Dom}L$$

となる．すなわち $\operatorname{Dom}\widetilde{L} = \operatorname{Dom}L$ かつ $\widetilde{L}|_{\operatorname{Dom}L} = L$ が成り立つ．以上の議論で $\widetilde{L} = L$ が示された． □

本ノートでここまで紹介してきた事項は，図 2 に集約される．

$$\begin{tikzcd}
(R_\alpha)_{\alpha>0} \arrow[rr, shift right, "\lim\limits_{\alpha\to\infty} e^{t\alpha(\alpha R_\alpha - \mathrm{id})}"'] \arrow[dr, shift right, "\alpha - R_\alpha^{-1}"'] & & (T_t)_{t\geq 0} \arrow[ll, shift right, "\int_0^\infty e^{-\alpha t}T_t x\,dt"'] \arrow[dl, shift right, "\frac{d}{dt}T_t x|_{t=0}"'] \\
& L \arrow[ul, shift right, "(\alpha - L)^{-1}"'] \arrow[ur, shift right, "\lim\limits_{\alpha\to\infty} e^{t\alpha L R(\alpha,L)}"'] &
\end{tikzcd}$$

図 2

後の章で抽象的 Cauchy 問題における解の存在と一意性証明に用いるため，命題 4.1 を一般化する．証明のストーリーはほぼ同じで，ω を選ぶ際に命題 2.3 を用いるだけである．

命題 4.5 L を C_0 半群の生成作用素とすると，$\omega \geq 0$ で $]\omega,\infty[\, \subset \rho(L)$ を満たすようなものが存在する．さらに $\alpha \in\,]\omega,\infty[$ と $x \in X$ に対して

$$R_\alpha x = \int_0^\infty e^{-\alpha t}T_t x\,dt$$

と定めれば，$R_\alpha = (\alpha - L)^{-1}$ が成り立つ．さらに，R_α は

$$R_\alpha x = \alpha\int_0^\infty e^{-\alpha t}\left(\int_0^t T_s x\,ds\right)dt \tag{4.2}$$

とも表現できる．

証明 **Step 0：ω の選択．** L に付随する C_0 半群 $T=(T_t)$ に対して，定数 $M>0$ と $\omega \geq 0$ を，命題 2.3 のように選ぶ．すなわち，全ての $t \in [0,\infty[$ について

$$\|T_t\| \leq Me^{\omega t}$$

が成り立っているとする．$\alpha \in \mathbb{R}$ を $\alpha > \omega$ となるように選んで，$x \in X$ に対して

$$R_\alpha x = \int_0^\infty e^{-\alpha t}T_t x\,dt$$

と定義する．

Step 1：積分が well-defined であることの証明． $-\alpha+\omega<0$ であるから，M と ω の選び方から

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\|T_t x\|\,dt \le \int_0^\infty e^{-\alpha t}\|T_t\|\,\|x\|\,dt < M\|x\|\int_0^\infty e^{-(\alpha-\omega)t}\,dt < \infty$$

となり，関数 $t\mapsto e^{-\alpha t}T_t x$ は Bochner 可積分であることがわかる．したがって，全ての $\alpha\in\,]\omega,\infty[$ と $x\in X$ について積分

$$R_\alpha x = \int_0^\infty e^{-\alpha t}T_t x\,dt$$

を定義することができる．

Step 2：R_α が有界線形有界作用素 $X\to \mathrm{Dom}\,L$ を定めることの証明． R_α の線形性は，Bochner 積分の線形性と作用素 T_t の線形性よりわかる．R_α が有界作用素であることは，step 1 の評価

$$\|R_\alpha x\| \le M\|x\|\int_0^\infty e^{-(\alpha-\omega)t}\,dt$$

より従う．次に，任意の $x\in X$ について $R_\alpha x\in \mathrm{Dom}\,L$ となることを示そう．R_α の定義と命題 D.3，変数変換公式により

$$\begin{aligned}
T_tR_\alpha x &= T_t\int_0^\infty e^{-\alpha s}T_s x\,ds\\
&= \int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-\alpha(t+s)}T_{t+s}x\,ds\\
&= e^{\alpha t}\int_t^\infty e^{-\alpha u}T_u x\,du
\end{aligned}$$

が成立．したがって，微積分学の基本定理と線形演算の連続性，そして積分の連続性より

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}T_tR_\alpha x - R_\alpha x &= \frac{1}{t}\left(e^{\alpha t}-1\right)\int_t^\infty e^{-\alpha s}T_s x\,ds - \int_0^t e^{-\alpha s}T_s x\,ds\\
&\xrightarrow[t\downarrow\downarrow 0]{} \alpha\int_0^\infty e^{-\alpha s}T_s x\,ds - T_0 x
\end{aligned}$$

となる．これより $R_\alpha x\in\mathrm{Dom}\,L$ および $LR_\alpha x = \alpha R_\alpha x - x$ がわかる．

Step 3：$R_\alpha=(\alpha-L)^{-1}$ であることの証明． Step 2 での議論により，全ての $x\in X$ について $(\alpha-L)R_\alpha x = x$ が成り立つことがわかっているので，あとは全ての $x\in\mathrm{Dom}\,L$ について $R_\alpha(\alpha-L)x = x$ が成り立つことを示せばよい．まずは R_α と L の可換性を示そう．生成作用素 L は $x\in\mathrm{Dom}\,L$ に対して

$$Le^{-\alpha t}T_t x = e^{-\alpha t}T_t Lx$$

を満たすことに注意すれば，$Le^{-\alpha t}T_t x$ が Bochner 可積分であることがわかる．したがって命題 D.3 を用いて計算すれば，$x\in\mathrm{Dom}\,L$ について

$$LR_\alpha x = L\int_0^\infty e^{-\alpha t}T_t x\,dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t}T_t Lx\,dt = R_\alpha Lx$$

となる．これより $x \in \operatorname{Dom} L$ なら

$$R_\alpha(\alpha - L)x = (\alpha - L)R_\alpha x$$

となるが，step 2 での結果により右辺は x に等しいことがわかるから

$$R_\alpha(\alpha - L)x = x$$

を得る．これで $R_\alpha = (\alpha - L)^{-1}$ であることが示された．

Step 4：(4.2) の証明． スカラー倍写像の有界双線形性に注意して $s \mapsto e^{-\alpha s}\int_0^s T_r x\,dr$ を微分すれば，Leibniz 則と微積分学の基本定理から

$$\frac{d}{ds}\left(e^{-\alpha s}\int_0^s T_r x\,dr\right) = -\alpha e^{-\alpha s}\int_0^s T_r x\,dr + e^{-\alpha s}T_s x$$

となる．この等式の各辺を 0 から t まで積分すれば，

$$e^{-\alpha t}\int_0^t T_r x\,dr = -\alpha\int_0^t e^{-\alpha s}\left(\int_0^s T_r x\,dr\right)ds + \int_0^t e^{-\alpha s}T_s x\,ds \tag{4.3}$$

を得る．この等式で極限操作をするために，各項の評価を行おう．既に述べたように

$$\int_0^\infty e^{-\alpha s}\|T_s x\|\,ds \le \|x\|M\int_0^\infty e^{-(\alpha-\omega)t}\,dt < \infty$$

である．また，$\alpha - \omega > \varepsilon > 0$ を満たす $\varepsilon > 0$ をとれば，

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left\|e^{-\alpha s}\int_0^s T_r x\,dr\right\|_X ds &\le \int_0^\infty e^{-\alpha s}\int_0^s \|T_r x\|_X dr\,ds \\
&\le \int_0^\infty e^{-\alpha s}\int_0^s e^{\omega r}M\|x\|_X dr\,ds \\
&\le M\|x\|_X\int_0^\infty e^{-\alpha s}\int_0^s e^{(\omega+\varepsilon)r}dr\,ds \\
&= M\|x\|_X\int_0^\infty e^{-\alpha s}\frac{1}{\omega+\varepsilon}e^{(\omega+\varepsilon)s}\,ds \\
&= \frac{M\|x\|}{\omega+\varepsilon}\int_0^\infty e^{-(\alpha-\omega-\varepsilon)s}\,ds \\
&< \infty
\end{aligned}$$

という可積分性もわかる．さらに同様の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\begin{aligned}\left\| e^{-\alpha t}\int_0^t T_r x\,dr \right\| &\le e^{-\alpha t}\int_0^t \|T_r x\|_X\,dr \\ &\le e^{-\alpha t}\int_0^t M e^{\omega r}\|x\|_X dr \\ &\le M\|x\|_X e^{-\alpha t}\int_0^t e^{(\omega+\varepsilon)} dr \\ &= M\|x\|_X e^{-\alpha t}\frac{e^{(\omega+\varepsilon)t}-1}{\omega+\varepsilon} \\ &= \frac{M\|x\|_X}{\omega+\varepsilon}\left(e^{-(\alpha-\omega-\varepsilon)t} - e^{-\alpha t}\right) \\ &\xrightarrow[t\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

という評価が成り立つ．以上の 3 つの評価に注意して，(4.3) で $t \to \infty$ とすれば，優収束定理から

$$0 = -\alpha\int_0^\infty e^{-\alpha s}\left(\int_0^s T_r x\,dr\right) + \int_0^\infty e^{-\alpha s} T_s x\,ds$$

となる．すなわち，

$$R_\alpha x = \int_0^\infty e^{-\alpha s} T_s x\,ds = \alpha\int_0^\infty e^{-\alpha s}\left(\int_0^s T_r x\,dr\right) ds$$

である． □

注意 4.6 縮小的 C_0 半群ではなくて，一般の C_0 半群についても Hille-Yosida の定理に対応する定理が存在する．主張や証明は，Arendt et at. [2, Theorem 3.3.4] を参照されたい．

まとめ

- 一様有界な C_0-半群 $(T_t)_{t\ge 0}$ の生成作用素 L は $]0,\infty[$ をレゾルベント集合に含む．さらに L のレゾルベントは，$T_t x$ のラプラス変換で求めることができる．
- 稠密な定義域を持つ閉作用素が $]0,\infty[$ をレゾルベント集合に含むなら，その吉田近似は $\mathrm{Dom}\,L$ 上で L に各点収束する．
- 非有界線形作用素 L がある縮小的 C_0-半群の生成作用素であるための必要十分条件は，L が稠密に定義された閉作用素で，レゾルベント集合が $]0,\infty[$ を含み，レゾルベント $(R(\alpha, L))_{\alpha>0}$ が縮小的となることである．(Hille-Yosida の定理)

5 抽象的 Cauchy 問題（斉次の場合）

X を Banach 空間とし，A を X における線形作用素とする．X における常微分方程式の初期値問題

$$\text{(ACP)} \qquad \begin{cases} u'(t) = Au(t), & t \geq 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

を，抽象的 Cauchy 問題 (abstract Cauchy problem) と呼ぶ．ただし，u' は u の導関数である．抽象的 Cauchy 問題を C_0 半群の理論を通じて調べることが，本節における目標である．

抽象的 Cauchy 問題について解の存在や一意性を調べたいのだが，そのためにはまずは解の定義をしなければならない．

定義 5.1 $I \subset [0, \infty[$ は 0 を含む区間であるとし，$u \colon I \to X$ を連続関数とする．

(i) $u \in C^1(I, \cancel{\mathrm{Dom}\, A})$ であり，$u(0) = x$ かつ全ての $t \in I$ に対して $u(t) \in \mathrm{Dom}\, A$ かつ

$$u'(t) = Au(t)$$

が成り立つとき，u は (ACP) の $[0, T]$ 上での古典解 (classical solution) であるという．

(ii) 全ての $t \in I$ について

$$\int_0^t u(s)ds \in \mathrm{Dom}\, A \quad \text{and} \quad u(t) = x + A\int_0^t u(s)ds$$

が成り立つとき，u は (ACP) の軟解 (mild solution) であるという．

u が古典解なら，$x = u(0) \in \mathrm{Dom}\, A$ とならなければいけないことに注意しておく．

まずは，古典解の積分による特徴づけを与える．

命題 5.2 抽象的 Cauchy 問題 (ACP) について，以下の 2 条件は同値である．

(i) $u \colon I \to X$ は (ACP) の古典解である．

(ii) 全ての t について $u(t) \in \mathrm{Dom}\, A$ である．さらに $t \mapsto Au(t)$ は連続関数であり，全ての $t \in I$ について

$$u(t) = x + \int_0^t Au(s)ds$$

が成り立つ．

証明 (i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明． u は (ACP) の古典解であるとする．このとき u は C^1 級なので $\frac{d}{dt}u$ は連続であり，よって $t \mapsto Au(t)$ も連続である．$u(0) = x$ に注意して積分を行えば，微積分学の基本

定理より

$$u(t) - x = \int_0^t u'(s)ds = \int_0^t Au(s)ds$$

を得る．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． 連続関数 $u\colon I \to \cancel{\operatorname{Dom} A}$ X は条件 (ii) を満たすとする．このとき明らかに $u(0) = 0$ である．また $t \mapsto Au(t)$ の連続性に注意して微積分学の基本定理を用いれば，全ての t について

$$\frac{d}{dt}u(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t Au(s)ds = Au(t)$$

となることがわかる． □

次に古典解と軟解の関係性について調べてみよう．A が有界作用素の場合には，古典解と軟解の概念は同一のものとなる．

系 5.3 $A\colon X \to Y$ を有界作用素とする．このとき，u が (ACP) の古典解であるための必要十分条件は，それが軟解であることである．

証明 $A\colon X \to Y$ が有界作用素なら，$t \mapsto Au(t)$ は連続関数となる．したがって u が古典解であることは

$$u(t) = x + \int_0^t Au(s)ds, \quad t \in I \tag{5.1}$$

が成り立つことと同値である．A は有界作用素なので，命題 D.3 より

$$\int_0^t Au(s)ds = A\int_0^t u(s)ds, \quad t \in I$$

であるから，(5.1) は

$$u(t) = x + A\int_0^t u(s)ds, \quad t \in I$$

とも同値である．いま $\operatorname{Dom} A = X$ であるから，これは軟解の定義に他ならない． □

A が一般の閉作用素の場合には，古典解と軟解の関係性は以下のようなものである．

命題 5.4 A は閉作用素であるとする．

(i) (ACP) の古典解は軟解である．

(ii) $u\colon I \to X$ は (ACP) の軟解であるとする．このとき，次の 2 条件は同値である．

  (a) u は (ACP) の古典解である．

  (b) $u \in C^1(I, X)$ である．

命題 5.4 で主張されているように，軟解 u が C^1 級ならそれは古典解となる．古典解には $u(I) \subset \operatorname{Dom} A$ という条件が課されているが，滑らかさの条件だけからこれが導かれるというのは，

一見奇妙にも思える．しかし u が軟解であるという時点で $\int_0^t u(s)\,ds \in \operatorname{Dom} A$ であるから，そもそも u は「平均的には」$\operatorname{Dom} A$ に入っているのである．$u(t)$ が「平均的には」$\operatorname{Dom} A$ に入っていることから u 自身が $\operatorname{Dom} A$ に属していることを導出するために，滑らかさの条件が用いられるという仕組みである．なので，実際はそれほど驚くべき事実でもないと言えるだろう．

証明 (i) $u \in C^1(I, \operatorname{Dom} A)$ を (ACP) の古典解とする．$t \in I$ とすれば，u の連続性より u は $[0,t]$ 上 Bochner 可積分である．また u は (ACP) の古典解であるから，写像 $s \mapsto Au(s)$ は連続関数 $\frac{d}{dt}u\colon I \to X$ と等しい．これより $s \mapsto Au(s)$ は $[0,t]$ 上で Bochner 可積分であり，命題 D.3 より $\int_{[0,t]} u(s)ds \in \operatorname{Dom} A$ および

$$A\int_{[0,t]} u(s)ds = \int_{[0,t]} Au(s)ds$$

が成り立つ．u が古典解であることと微積分学の基本定理を用いれば

$$\int_{[0,t]} Au(s)ds = \int_{[0,t]} u'(s)ds = u(t) - u(0) = u(t) - x$$

となり，u が (ACP) の軟解であることが示された．

(ii) $u \in C(I, X)$ を (ACP) の軟解とする．u は条件 (a) を満たす，すなわち u が古典解でもあるとする．このとき $u\colon I \to X$ は C^1 級なので，明らかに (b) が成り立つ．

u は条件 (b) を満たす軟解であるとしよう．$n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ とすれば，u が軟解であることと A の線形性より，

$$\begin{aligned} A\left(n\int_t^{t+\frac{1}{n}} u(s)ds\right) &= n\left\{A\left(\int_0^{t+\frac{1}{n}} u(s)ds\right) - A\left(\int_0^t u(s)ds\right)\right\} \\ &= n\left(\left\{u\left(t+\frac{1}{n}\right) - x\right\} - \{u(t) - x\}\right) \\ &= n\left\{u\left(t+\frac{1}{n}\right) - u(t)\right\} \end{aligned}$$

が成り立つ．u は連続であるから，微積分学の基本的理により

$$n\int_t^{t+\frac{1}{n}} u(s)ds \xrightarrow[n\to\infty]{} u(t)$$

となる．また u が C^1 級であるとの仮定から，

$$n\left\{u\left(t+\frac{1}{n}\right) - u(t)\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} u'(t)$$

である．したがって A が閉作用素であることに注意すれば，$u(t) \in \operatorname{Dom} A$ および

$$Au(t) = u'(t)$$

を得る． □

A がとある C_0 半群の生成作用素になっているときには，半群を用いて軟解を構成することができる．

命題 5.5 抽象的 Cauchy 問題 (ACP) において，A はある C_0-半群の生成作用素になっているとする．このとき，任意の $x \in X$ について，(ACP) は $[0,\infty[$ 上で一意的な軟解を持つ．

証明 **Step 1：解の存在** A に付随する C_0-半群を $T = (T_t)_{t\geq 0}$ で表すことにする．$x \in X$ に対して，$u(t) = T_t x$ と定義する．このとき命題 2.7 の (iv) より，u は (ACP) の軟解であることがわかる．

Step 2：一意性 $u \in C([0,\infty[, X)$ を (ACP) の軟解とする．すなわち，全ての t で $\int_0^t u(s)ds \in \operatorname{Dom} A$ かつ

$$u(t) = x + A\int_0^t u(s)ds$$

が成り立っているとする．$t \in [0,\infty[$ に対して

$$v(t) = \int_0^t (u(s) - T_s x)ds$$

と定義しよう．被積分関数の連続性より，右辺の積分は well-defined であり，$v \in C([0,\infty[, X)$ が成り立つことに注意しておく．また $v(0) = 0$ である．u と $t \mapsto T_t x$ はともに (ACP) の軟解だから，全ての t について $v(t) \in \operatorname{Dom} A$ であり，

$$\begin{aligned}
Av(t) &= A\left(\int_0^t (u(s) - T_s x)ds\right) \\
&= A\int_0^t u(s)\,ds - A\int_0^t T_s x\,ds \\
&= (u(t) - x) - (T_t x - x) \\
&= u(t) - T_t x \\
&= \frac{d}{dt}\int_0^t (u(s) - T_s x)ds \\
&= v'(t)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，最後の等号は被積分関数の連続性と微積分学の基本定理より従う．

このとき v が恒等的に 0 であることを証明しよう．$y \in X$ に対して，

$$S_t y = \int_0^t T_s y\,ds$$

と定義する．このとき，命題 2.7 より全ての $y \in X$ とすべての $t \in [0,\infty[$ について $S_t y \in \operatorname{Dom} A$ が成り立つ．各 T_t の線形性と積分の線形性に注意すれば，$S_t \colon X \to \operatorname{Dom} A$ が線形写像であることがわかる．さらに，任意の $y, z \in X$ について

$$\begin{aligned}
\|S_t y - S_t z\|_X &= \left\|\int_0^t T_s(y - z)\,ds\right\| \\
&\leq \int_0^t \|T_s(y - z)\|_X ds \\
&\leq \int_0^t \|T_s\|\|y - z\|_X ds \\
&\leq (\text{const.})te^{\omega t}\|y - z\|
\end{aligned}$$

という評価ができるから，S_t は有界作用素である．ただし，最後の不等号は命題 2.3 によるものである．

先ほど用意した v と，この作用素 S_t を用いて，

$$\varphi(t,s) = S_t v(s) = \int_0^t T_r v(s)\,dr$$

と定めよう．このとき φ は偏微分可能であり，その偏導関数は

$$\partial_1\varphi(t,s) = T_t v(s), \quad \partial_2\varphi(t,s) = S_t v'(s)$$

となる．一つ目の偏導関数の計算は微積分学の基本定理により，二つ目の偏導関数の計算は S_t の有界性から保証されることに注意しておく．さらに補題 2.9 を用いれば $\partial_1\varphi$ と $\partial_2\varphi$ はそれぞれ連続であり，φ は C^1 級となることがわかる．

以上の議論の結果を用いて関数 $[0,t] \mapsto s \mapsto \varphi(t-s,s) \in X$ を s について微分すると，合成関数の微分則により

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\varphi(t-s,s) &= \partial_1\varphi(t-s,s)\frac{d}{ds}(t-s) + \partial_2\varphi(t-s,s) \\
&= -T_{t-s}v(s) + S_{t-s}v'(s) \\
&= -T_{t-s}v(s) + S_{t-s}Av(s) \\
&= -T_{t-s}v(s) + \int_0^{t-s} T_r Av(s)\,dr
\end{aligned}$$

となる．ここで，最後の辺の第 2 項の積分について考えよう．全ての $v(s) \in \operatorname{Dom} A$ であったことに注意すれば，命題 2.7 より

$$T_r Av(s) = AT_r v(s) = \frac{d}{dr}T_r v(s)$$

が成り立つ．したがって，微積分学の基本定理により

$$\int_0^{t-s} T_r Av(s)\,ds = \int_0^{t-s} \frac{d}{dr}T_r v(s)\,dr = T_{t-s}v(s) - T_0 v(s) = T_{t-s}v(s) - v(s)$$

となり，

$$\frac{d}{ds}\varphi(t-s,s) = -T_{t-s}v(s) + T_{t-s}v(s) - v(s) = -v(s)$$

を得る．いま $\varphi(0,t) = \varphi(t,0) = 0$ であることに注意して微積分学の基本定理を用いれば，

$$0 = \varphi(t-t,t) - \varphi(t-0,0) = \int_0^t \frac{d}{ds}\varphi(t-s,s)\,ds = -\int_0^t v(s)\,ds$$

となることがわかる．t は任意に選んでいたから，これより

$$\forall t \in [0,\infty[\quad \int_0^t v(s)\,ds = 0$$

となる．v の連続性と併せて命題 D.5 を用いれば，全ての t について $v(t) = 0$ であることが示される． □

さて，抽象的 Cauchy 問題 (ACP) が任意の初期値 $x \in \mathrm{Dom}\, A$ について，一意的な古典解を持つのはどのような場合だろうか．結論から言うと，それは A が C_0-半群の生成作用素になっているということと同値になる．

定理 5.6　A を X から Y への閉作用素とする．このとき，以下の 3 条件は同値である．

(i) $\rho(A) \neq \overset{\emptyset}{0}$ であり，抽象的 Cauchy 問題 (ACP) は，全ての $x \in \mathrm{Dom}\, A$ について $[0, \infty[$ 上で一意的な古典解を持つ．

(ii) 抽象的 Cauchy 問題 (ACP) は，全ての $x \in X$ について $[0, \infty[$ 上で一意的な軟解を持つ．

(iii) A はある C_0 半群の生成作用素となっている．

以上の同値条件の下で，$x \in X$ に対して x を初期値とする軟解は $t \mapsto T_t x$ で与えられる．さらに $x \in \mathrm{Dom}\, A$ なら，それは古典解となる．

証明　**Step 1：(iii) $\Longrightarrow$ (i) の証明．** $\rho(A) \neq \emptyset$ であることは，命題 4.5 より従う．

Step 1-1：解の存在． A に付随する C_0 半群を $T = (T_t)_{t \geq 0}$ で表すことにする．$x \in \mathrm{Dom}\, A$ および $t \in [0, \infty[$ に対して

$$u(t) = T_t x$$

と定める．$T\colon [0, \infty[\to \mathscr{L}(X)$ の強連続性より，これにより定まる関数 $u\colon [0, \infty[\to X$ は連続となる．$T_0 = \mathrm{id}_X$ であったから，

$$u(0) = T_0 x = \mathrm{id}_X\, x = x$$

もわかる．$x \in \mathrm{Dom}\, A$ であることに注意して命題 2.7 を用いれば，全ての $t \in [0, \infty[$ について

$$\frac{d}{dt} u(t) = \frac{d}{dt} T_t x = T_t A x = A T_t x = A u(t)$$

となる．最初の項と最後の項から，u が全ての $t \in [0, \infty[$ で

$$u'(t) = A u(t)$$

を満たすことがわかる．また

$$\forall t \in [0, \infty[\quad u'(t) = T_t A x$$

という表示と T の強連続性より，$u'\colon [0, \infty[\to X$ の連続性が従う．以上の議論から，u は抽象的 Cauchy 問題 (ACP) の古典解であることが示された．

Step 1-2：解の一意性命題 5.4 より (ACP) の古典解は軟解でもあるから，命題 5.5 により一意性が成り立つ．

Step 2：(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明．

Step 2-1：軟解の存在． $\alpha \in \rho(A)$ とする．$x \in X$ に対して $R(\alpha, A)x \in \mathrm{Dom}\, A$ が成り立つから，仮定より $R(\alpha, A)x$ を初期値とする (ACP) の古典解 v が存在する．v を用いて，$t \in [0, \infty[$ に対して

$$u(t) = (\alpha - A) v(t)$$

と定義する．このとき，u が (ACP) の軟解で初期値が x であることを示そう．v は初期値 $R(\alpha, A)x$ の古典解であるから，$Av = v'$ は $[0,t]$ 上で Bochner 可積分であり，命題 D.3 より $\int_0^t v(s)\,ds \in \operatorname{Dom} A$ および

$$A\int_0^t v(s)\,ds = \int_0^t Av(s)\,ds$$

が従う．v が古典解であることから，

$$\begin{aligned}
\int_0^t u(s)\,ds &= \int_0^t (\alpha - A)v(s)\,ds \\
&= \alpha\int_0^t v(s)\,ds - \int_0^t Av(s)\,ds \\
&= \alpha\int_0^t v(s)\,ds - \int_0^t v'(s)\,ds \\
&= \alpha\int_0^t v(s)\,ds - v(t) + R(\alpha, A)x
\end{aligned}$$

という表示が成り立つので，先ほどの注意から $\int_0^t u(s)\,ds \in \operatorname{Dom} A$ がわかる．この等式に A を作用させれば，再び積分と作用素 A の可換性に注意して計算することで，

$$\begin{aligned}
A\int_0^t u(s)\,ds &= \alpha A\int_0^t v(s)\,ds - Av(t) + AR(\alpha, A)x \\
&= \alpha\int_0^t Av(s)\,ds - Av(t) + AR(\alpha, A)x \\
&= \alpha\int_0^t v'(s)\,ds - Av(t) + AR(\alpha, A)x \\
&= \alpha(v(t) - R(\alpha, A)x) - Av(t) + AR(\alpha, A)x \\
&= (\alpha - A)v(t) - (\alpha - A)R(\alpha, A)x \\
&= u(t) - x
\end{aligned}$$

を得る．すなわち，u は (ACP) の軟解である．

Step 2-2：軟解の一意性． $x \in X$ とし，u, v を x を初期値にもつ軟解とする．$t \in [0,\infty[$ に対して，

$$w(t) = \int_0^t (u(s) - v(s))\,ds$$

と定義すれば，w は $\operatorname{Dom} A$ に値をとる C^1 級の関数であり，

$$\begin{aligned}
w'(t) &= u(t) - v(t) \\
&= A\int_0^t u(s)\,ds - A\int_0^t v(s)\,ds \\
&= A\int_0^t (u(s) - v(s))\,ds \\
&= Aw(t)
\end{aligned}$$

が成り立つ．このことと $w(0) = 0$ から，w は初期値 0 の (ACP) の古典解であることがわかる．恒等的に 0 という関数は (ACP) の古典解であるから，古典解の一意性より $w = 0$ となる．したがって，全ての $t \in [0,\infty[$ について

$$\int_0^t u(s)\,ds = \int_0^t v(s)\,ds$$

が成り立つ．いま u と v はともに初期値 x の軟解であるから，上の式より全ての $t \in [0,\infty]$ について

$$u(t) = x + A\int_0^t u(s)\,ds = x + A\int_0^t v(s)\,ds = v(t)$$

であることが従う．

Step 3：(ii) $\Longrightarrow$ (iii) の証明．

Step 3-1：有界作用素 T_t の構成． 仮定より $x \in X$ に対して x を初期値とする (ACP) の軟解がただ一つ存在するので，それを $u_x = u(x;\cdot) \in C([0,\infty[,X)$ で表すことにする．初期値に軟解を対応させることによって，写像

$$\begin{aligned}\Phi\colon X &\longrightarrow C([0,\infty[,X)\\ x &\longmapsto u_x\end{aligned}$$

を定義する．さらに，$t \in [0,\infty[$ に対して ev_t で評価写像を表すこととする．すなわち，

$$\begin{aligned}\mathrm{ev}_t\colon C([0,\infty[,X) &\longrightarrow X\\ u &\longmapsto u(t)\end{aligned}$$

である．これらの写像の合成により，$T_t = \mathrm{ev}_t \circ \Phi$ と定義する．値を具体的に書けば，$T_t x = \Phi(x)(t) = u_x(t)$ である．

Step 3-2：$T_t \in \mathscr{L}(X)$ の証明． 全ての $t \in [0,\infty[$ について，先ほど構成した写像 $T_t\colon X \to X$ が有界線形写像であることを示そう．$C([0,\infty[,X)$ をコンパクト一様収束の位相により，Fréchet 空間と考える．このとき ev_t が連続な線形写像であることは，良く知られているとおりである．T_t は Φ と ev_t の合成であるから，我々は Φ が有界線形写像であることを示せば良いことになる．

$x, y \in X$ および $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ とする．このとき，u_x と u_y が軟解であることから

$$\begin{aligned}\lambda u_x(t) + \mu u_y(t) &= \lambda\left(x + A\left(\int_0^t u_x(s)\,ds\right)\right) + \mu\left(y + A\left(\int_0^t u_y(s)\,ds\right)\right)\\ &= (\lambda x + \mu y) + A\left(\int_0^t (\lambda u_x(s) + \mu u_y(s))\,ds\right)\end{aligned}$$

である．したがって $\lambda u_x + \mu u_y$ は初期値 $\lambda x + \mu y$ の軟解であり，軟解の一意性より $\lambda u_x + \mu u_y = u_{\lambda x + \mu y}$ がわかる．すなわち，Φ は線形写像である．

次に Φ の連続性を示そう．Φ は X 全体で定義されているから，閉グラフ定理により Φ が閉作用素であることを示せば良いということになる．X と $C([0,\infty[,X)$ はともに距離付けられているか

ら，Φ のグラフ $\mathrm{Graph}(\Phi)$ が点列の収束について閉じていることを示せば十分である．(x_n, u_{x_n}) は $X \times C([0,\infty[, X)$ の積位相で (x,u) に収束するとする．このとき，u が初期値 x の軟解であることを示せばよい．各 u_{x_n} は初期値 x_n の軟解だから，全ての $t \in [0,\infty[$ について $\int_0^t u_{x_n}(s)\,ds \in \mathrm{Dom}\,A$ かつ

$$u_{x_n}(t) - x_n = A\int_0^t u_{x_n}(s)\,ds$$

が成り立つ．$(x_n, u_{x_n}) \to (x,u)$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}(u_{x_n}(t) - x_n) = u(t) - x$$

である．また u_{x_n} は $[0,t]$ 上で u に一様収束しているから，優収束定理により

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t u_{x_n}(s)\,ds = \int_0^t u(s)\,ds$$

も成り立つ．したがって A が閉作用素であることに注意して極限をとれば，$\int_0^t u(s)\,ds \in \mathrm{Dom}\,A$ および

$$u(t) - x = A\int_0^t u(s)\,ds$$

を得る．ゆえに，u は初期値 x の軟解である．

Step 3-3：(T_t) の半群性． $T\colon [0,\infty[\to \mathscr{L}(X)$ を $t \mapsto T_t$ で定義する．このとき T が作用素半群であることを示そう．$t=0$ の時は全ての $x \in X$ について

$$T_0 x = \mathrm{ev}_0(u_x) = u_x(0) = x$$

だから，$T_0 = \mathrm{id}_X$ である．$s \in [0,\infty[$ とし，シフト作用素 $\theta_s\colon C([0,\infty[, X) \to C([0,\infty[, X)$ を $\theta_s u(t) = u(s+t)$ によって定義する．$x \in X$ と $t \in [0,\infty[$ を任意に選べば，A の線形性と積分の区間加法性，そして軟解の定義より，

$$\begin{aligned}
\theta_s u_x(t) &= u(x; t+s) \\
&= x + A\int_0^{t+s} u(x;r)\,dr \\
&= x + A\left(\int_0^s u(x;r)\,dr + \int_s^{s+t} u(x;r)\,dr\right) \\
&= x + A\int_0^s u_x(r)\,dr + A\int_s^{s+t} u(x;r)\,dr \\
&= T_s x + A\int_0^t u(x; r+s)\,dr \\
&= T_s x + A\int_0^t \theta_s u_x(r)\,dr
\end{aligned}$$

が成り立つ．すなわち，$\theta_s u_x$ は初期値 $T_s x$ の軟解であり，軟解の一意性より $\theta_s u_x = u(T_s x; \cdot)$ がわかる．これより，全ての t について

$$T_t T_s x = u(T_s x; t) = \theta_s u_x(t) = u(x; t+s) = T_{t+s} x$$

となる．さらに $s \in [0,\infty[$ と $x \in X$ も任意に選んでいたことから，全ての $t,s \in [0,\infty[$ について $T_{t+s} = T_t T_s$ であることがわかる．

Step 3-4：$T\colon [0,\infty[\to \mathscr{L}(X)$ の強連続性． $x \in X$ とする．このとき $t \mapsto T_t x$ は軟解 $t \mapsto u_x(t)$ に他ならないから，連続である．

Step 3-5：T の生成作用素が A であることの証明． ここまでで，$T = (T_t)_{t\in[0,\infty[}$ が C_0-半群であることが証明された．このステップでは，T の生成作用素が A であることを証明しよう．T の生成作用素を B としたとき，B と A をレゾルベントを通して比べることで，それらが等しいことを導き出す．

$\omega \geq 0$ を命題 4.5 のものとすれば $]\omega,\infty[\subset \rho(B)$ であり，$\alpha \in]\omega,\infty[$ に対して B の α-次レゾルベントは

$$R(\alpha,B)x = \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t x\, dt$$

と表されるのであった．このとき $\alpha \in \rho(A)$ であり，$R(\alpha,A) = R(\alpha,B)$ が成り立つことを示したい[4)]．

まずは $(\alpha - A)R(\alpha,B) = \mathrm{id}_X$ であることを示そう．T の定義より $s \mapsto T_s x$ は初期値 x の軟解であったから，全ての $s \in [0,\infty[$ について

$$e^{-\alpha s}(T_s x - x) = e^{-\alpha s} A \int_0^s T_r x\, dr = A e^{-\alpha s} \int_0^s T_r x\, dr$$

が成り立つ．いま

$$\|e^{-\alpha s}(T_s x - x)\|_X = e^{-\alpha t}\|T_s x - x\|_X \leq (\mathrm{const.}) e^{-(\alpha-\omega)}\|x\|_X + e^{-\alpha t}\|x\|_X$$

という評価よりこの関数は Bochner 可積分であり，先ほどの等式より $s \mapsto Ae^{-\alpha s}\int_0^s T_r x\, dr$ も Bochner 可積分であることがわかる．したがって，命題 D.3 により

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{-\alpha s}(T_s x - x)\, ds &= \int_0^t \left(A e^{-\alpha s} \int_0^s T_r x\, dr \right) ds \\ &= A \int_0^t e^{-\alpha s} \left(\int_0^s T_r x\, dr \right) ds\end{aligned}$$

という操作が正当化される．さて，ここで $\alpha - \omega > \varepsilon > 0$ となる $\varepsilon > 0$ をとれば，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left\| e^{-\alpha s} \int_0^s T_r x\, dr \right\|_X ds &\leq \int_0^\infty e^{-\alpha s} \int_0^s \|T_r x\|_X dr\, ds \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\alpha s} \int_0^s \|T_r x\|_X dr\, ds \\ &\leq (\mathrm{const.}) \int_0^\infty e^{-\alpha s} \int_0^s e^{\omega r}\|x\|_X dr\, ds \\ &\leq (\mathrm{const.}) \int_0^\infty e^{-\alpha s} \int_0^s e^{(\omega+\varepsilon) r}\|x\|_X dr\, ds \\ &= (\mathrm{const.})\|x\|_X \int_0^\infty e^{-\alpha s} \frac{1}{\omega+\varepsilon} e^{(\omega+\varepsilon)s}\, ds\end{aligned}$$

4） 現時点ではまだ $\rho(A)$ が空か否かも明らかでないことに注意されたい．

$$
\begin{aligned}
&= (\text{const.}) \frac{\|x\|}{\omega+\varepsilon} \int_0^\infty e^{-(\alpha-\omega-\varepsilon)s}\, ds \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

という評価より $s \mapsto e^{-\alpha s}\int_0^s T_r x\, dr$ は可積分となる．このことと A が閉作用素であることに注意して

$$
\int_0^t e^{-\alpha s}(T_s x - x)\, ds = A \int_0^t e^{-\alpha s} \left(\int_0^s T_r x\, dr \right) ds
$$

という等式において $t \to \infty$ の極限をとれば，$\int_0^\infty e^{-\alpha s} \left(\int_0^s T_r x\, dr \right) ds \in \operatorname{Dom} A$ および

$$
\int_0^\infty e^{-\alpha s}(T_s x - x)\, ds = A \int_0^\infty e^{-\alpha s} \left(\int_0^s T_r x\, dr \right) ds
$$

を得る．命題 4.5 より

$$
R(\alpha, B)x = \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t x\, dt = \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha s} \int_0^s T_r x\, dr
$$

であったから，これより $\frac{1}{\alpha}R(\alpha, B)x \in \operatorname{Dom} A$ であることと，

$$
\int_0^\infty e^{-\alpha s}(T_s x - x)\, ds = A \frac{1}{\alpha} R(\alpha, B)x
$$

がわかる．両辺に α を掛けて式を整理すれば，

$$
\alpha R(\alpha, B)x - x = AR(\alpha, B)x
$$

となる．いま $x \in X$ は任意に選んでいたから，これは $(\alpha - A)R(\alpha, B) = \mathrm{id}_X$ を示している．これより特に，$\alpha - A$ は全射となる．

次に $(\alpha - A)$ が単射であることを示す．任意に選んだ $x \in \operatorname{Ker}(\alpha - A) \subset \operatorname{Dom} A$ について，$x = 0$ が成り立つことを示せば良い．$x \in \operatorname{Ker}(\alpha - A)$ とは，$\alpha x = Ax$ が成り立つということである．このとき $u(t) = e^{\alpha t}x$ と定めれば，u は (ACP) の軟解である．実際，$x \in \operatorname{Dom} A$ より $\int_0^t u(s)\, ds \in \operatorname{Dom} A$ であることはすぐにわかる．さらに

$$
\begin{aligned}
u(t) - x &= \int_0^t e^{\alpha s} \alpha x\, ds \\
&= \int_0^t e^{\alpha s} Ax\, ds \\
&= A \int_0^t e^{\alpha s} x\, ds \\
&= A \int_0^t u(s)\, ds
\end{aligned}
$$

であるから，u が初期値 x の軟解であることが実際に確かめられた．C_0 半群の定義と軟解の一意性により，$T_t x = e^{\alpha t}$ となる．したがって，全ての $t \in [0, \infty]$ について

$$
\|T_t x\| = e^{\alpha t}\|x\|
$$

となる．一方，$T_t x$ のノルムは

$$\|T_t x\| \leq M e^{\omega t} \|x\|$$

という評価も持つのであった．いま $\alpha > \omega$ であるから，このような条件を満たす x は 0 に限る．

さて，以上の議論より，$\alpha - A\colon \operatorname{Dom} A \to X$ は全単射であり，$(\alpha - A)R(\alpha, B) = \mathrm{id}_X$ であることが示された．ゆえに $\alpha \in \rho(A)$ である．等式 $(\alpha - A)R(\alpha, B) = \mathrm{id}_X$ に左から $(\alpha - A)^{-1}$ を乗じれば，$R(\alpha, B) = (\alpha - A)^{-1}$ を得る．これより $\operatorname{Dom} B = \operatorname{Im} R(\alpha, B) = \operatorname{Im}(\alpha - A)^{-1} = \operatorname{Dom} A$ であることと，全ての $x \in \operatorname{Dom} A$ について $(\alpha - A)x = (\alpha - B)x$ が成り立つことがわかる．ゆえに $A = B$ である． □

注意 5.7 解の一意性自体は，C_0 半群の生成よりももう少し弱い条件下で成り立つことが知られている．例えば，Pazy [16, Theorem 4.1.2] などを参照されたい．

まとめ

- より精密に言うと，閉作用素 A に関する抽象的 Cauchy 問題 (ACP) について，以下の 3 条件は同値である．
  - (i) A は非空なレゾルベント集合を持ち，任意の初期値 $x \in \operatorname{Dom} A$ について (ACP) は一意的な古典解を持つ．
  - (ii) 任意の初期値 $x \in X$ について (ACP) は一意的な軟解を持つ．
  - (iii) A は C_0 半群の生成作用素である．
- 上の同値性が成り立つとき，(ACP) の解は $T_t x$ で求められる．

6 抽象的 Cauchy 問題（非斉次の場合）

§5 では斉次の抽象的 Cauchy 問題を扱ったが，本節ではより一般的に非斉次の抽象的 Cauchy 問題を考えてみよう．A を Banach 空間 X における線形作用素とする．X における常微分方程式の初期値問題

(IACP)
$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) \\ u(0) = x \end{cases}$$

を，非斉次の抽象的 Cauchy 問題 (abstract Cauchy problem) と呼ぶ．ただし，u' は u の導関数である．本節では，C_0 半群の理論を用いて (IACP) の解の存在や一意性の問題を論じよう．

§5 と同じように，まずは解とは何かという定義をするところが出発点である．

定義 6.1 $I \subset [0, \infty[$ は 0 を含む区間であるとし，$u\colon I \to X$ を連続関数とする．

X, $u(I) \subset \mathrm{Dom}\, A$

(i) f は連続であると仮定する．$u \in C^1(I, \mathrm{Dom}\, A)$ であり，$u(0) = x$ かつ全ての $t \in I$ に対して

$$u'(t) = Au(t) + f(t)$$

が成り立つとき，u は (IACP) の $[0, T]$ 上での古典解 (classical solution) であるという．

(ii) $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I; X)$ とする．全ての $t \in I$ について

$$\int_0^t u(s) ds \in \mathrm{Dom}\, A \quad \text{and} \quad u(t) = x + A\int_0^t u(s) ds + \int_0^t f(s)\, ds$$

が成り立つとき，u は (IACP) の軟解 (mild solution) であるという．

I がコンパクトな区間の時は，$L^1_{\mathrm{loc}}(I; X) = L^1(I; X)$ であるから，軟解の定義に現れる条件 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I; X)$ は $f \in L^1(I; X)$ と書き換えても同値である．

古典解の概念を (IACP) の古典解は，積分方程式を用いて以下のように特徴づけられる．

命題 6.2 抽象的 Cauchy 問題 (IACP) において，$f\colon I \to X$ は連続であるとする．このとき以下の 2 条件は同値である．

(i) $u\colon I \to X$ は (IACP) の古典解である．

(ii) $u(I) \subset \mathrm{Dom}\, A$ である．また $t \mapsto A(t)$ は連続であって，全ての $t \in I$ について

$u(t)$

$$u(t) = x + \int_0^t Au(s)\, ds + \int_0^t f(s)\, ds$$

が成り立つ．

証明 **(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明．** u が古典解なら

$$Au(s) = u'(s) - f(s)$$

という表示より，$s \mapsto Au(s)$ の連続性がわかる．連続性から局所可積分性が従うことに注意すれば，$t \in I$ として

$$u(s) = Au(s) + f(s)$$

の両辺を $[0, t]$ 上で積分することにより

$$u(t) - x = \int_0^t A(s)\, ds + \int_0^t f(s)\, ds$$

を得る．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． 条件 (ii) が成り立つとき，$t = 0$ とすることで $u(0) = x$ がわかる．$s \mapsto Au(s)$ と f の連続性に注意して微積分学の基本定理を適用すれば，全ての $t \in I$ について

$$u'(t) = Au(t) + f(t)$$

が成り立つことが従う．さらにこの表示より u' の連続性も確かめられるので，u は (IACP) の古典解である． □

A が閉作用素であるとき，(IACP) の性質やその関係性を調べてみよう．

命題 6.3 A は閉作用素であり，f は連続であるとする．

(i) $u \in C^1(I,X)$ が (IACP) の古典解なら，$u\colon I \to \mathrm{Dom}\, A$ は $\mathrm{Dom}\, A$ のグラフノルムについて連続である．

(ii) u が (IACP) の古典解なら，それは軟解でもある．

(iii) $u\colon I \to X$ を (IACP) の軟解とする．このとき，次の 2 条件は同値である．
 (a) u は (IACP) の古典解である．
 (b) $u \in C^1(I,X)$ が成り立つ．

証明 (i) $u\colon I \to X$ を (IACP) の古典解とする．$\mathrm{Dom}\, A$ 上のグラフノルム $\| \ \|_{\mathrm{G}}$ は

$$\|x\|_{\mathrm{G}} = \|x\|_X + \|Ax\|_X$$

と定義されるのであった．今 u が古典解であることを用いれば，$u, s \in I$ についてグラフノルムは

$$\begin{aligned}
\|u(t)-u(s)\|_{\mathrm{G}} &= \|u(t)-u(s)\|_X + \|A(u(t)-u(s))\|_X \\
&= \|u(t)-u(s)\|_X + \|Au(t)-Au(s)\|_X \\
&= \|u(t)-u(s)\|_X + \|u'(t)-f(t)-u'(s)+f(s)\|_X \\
&\le \|u(t)-u(s)\|_X + \|u'(t)-u'(s)\|_X + \|f(t)-f(s)\|_X
\end{aligned}$$

と評価できる．この不等号と u，u' そして f の連続性から，u のグラフノルムに関する連続性がわかる．

(ii) $u \in C^1(I, \mathrm{Dom}\, A)$ を (IACP) の古典解とする．$t \in I$ とすれば，u の連続性より u は $[0,t]$ 上で Bochner 可積分である．また u は (IACP) の古典解であるから，$Au = u' - f \in C(I,X)$ が成り立つ．よって $s \mapsto Au(s)$ は $[0,t]$ 上で Bochner 可積分であり，命題 D.3 より $\int_{[0,t]} u(s)ds \in \mathrm{Dom}\, A$ および

$$A\int_{[0,t]} u(s)ds = \int_{[0,t]} Au(s)ds$$

がわかる．さらに u が古典解であることと微積分学の基本定理を用いれば

$$\begin{aligned}
A\int_{[0,t]} u(s)ds &= \int_{[0,t]} Au(s)ds \\
&= \int_{[0,t]} (u'(s)-f(s))ds \\
&= \int_{[0,t]} u'(s)\,ds - \int_0^t f(s)\,ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= u(t) - u(0) - \int_0^t f(s)\,ds \\
&= u(t) - x - \int_0^t f(s)\,ds
\end{aligned}
$$

を得る．この式を整理すれば

$$
u(t) = x + A\int_{[0,t]} u(s)ds + \int_0^t f(s)\,ds
$$

となり，u が (IACP) の軟解であることが示された．

(iii) $u \in C(I,X)$ を (IACP) の軟解とする．u は条件 (a) を満たす，すなわち u が古典解でもあるとする．このとき $u\colon I \to X$ は C^1 級なので，明らかに (b) が成り立つ．

u は条件 (b) を満たす軟解であるとしよう．$h > 0$ とすれば，u が軟解であることと A の線形性より，

$$
\begin{aligned}
A\left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(s)ds\right) &= \frac{1}{h}\left\{A\left(\int_0^{t+h} u(s)ds\right) - A\left(\int_0^t u(s)ds\right)\right\} \\
&= \frac{1}{h}\left(\left\{u\left(t+h\right) - x - \int_0^{t+h} f(s)\,ds\right\} - \left\{u(t) - x - \int_0^t f(s)\,ds\right\}\right) \\
&= \frac{1}{h}\left\{u\left(t+h\right) - u(t)\right\} - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s)\,ds
\end{aligned}
$$

が成り立つ．いま u は連続であるから，微積分学の基本的理によリ

$$
\frac{1}{h}\int_t^{t+\frac{1}{n}} u(s)ds \xrightarrow[n\to\infty]{} u(t)
$$

となる．また u が C^1 級であることと f が連続であることから，

$$
\frac{1}{h}\left\{u\left(t+h\right) - u(t)\right\} - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s)\,ds \xrightarrow[n\to\infty]{} u'(t) + f(t)
$$

である．したがって A が閉作用素であることに注意すれば，$u(t) \in \operatorname{Dom} A$ および

$$
Au(t) = u'(t) - f(t)
$$

を得る． □

A が C_0 半群を生成する場合には，f の適当な可積分性の下で (IACP) について軟解の存在と一意性が保証される．軟解を構成するためには C_0 半群 T と $f\colon I \to X$ の畳み込みを考える必要があるので，それについて調べておこう．強可測関数 $T\colon [0,\infty[\to \mathscr{L}(X)$ と $f\colon [0,\infty[\to X$ が与えられているとする．$s \mapsto T(t-s)f(s)$ が $[0,t]$ 上 Bochner 可積分であるとき，

$$
(T*f)(t) = \int_{[0,t]} T(t-s)f(s)\,ds
$$

と定義し，$T*f$ を T と f の畳み込み (convolution) という．T が強連続である時には，畳み込みについて以下の性質が成り立つ．

命題 6.4 写像 $T\colon [0,\infty[\to \mathscr{L}(X)$ は強連続であるとし，$f \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty],X)$ とする．このとき全ての $t \in [0,\infty[$ について畳み込み

$$(T*f)(t) = \int_{[0,t]} T(t-s)f(s)\,ds$$

は well-defined であり，対応 $t \mapsto (T*f)(t)$ は連続関数 $T*f\colon [0,\infty[\to X$ を定める．

証明 $(t,s) \in [0,\infty[^2$ に対して

$$\varphi(t,s) = T(t)f(s)$$

と定義する．

Step 1：φ の強可測性． $n \in \mathbb{N}$ と $i \in \mathbb{N}$ に対して $t_i^n = \frac{i}{2^n}$ とし，

$$\varphi_n(t,s) = \sum_{i\in\mathbb{N}} 1_{[t_i^n, t_{i+1}^n[}(t)\varphi(t_{i+1}^n, s) = \sum_{i\in\mathbb{N}} 1_{[t_i^n, t_{i+1}^n[}(t)T(t_{i+1}^n)f(s)$$

と定義する．このとき各 n について φ_n は $\mathscr{B}([0,\infty[^2)$ 可測であり，T の強連続性より (φ_n) は φ に各点収束する．よって φ も $\mathscr{B}([0,\infty[^2)$ 可測である．後は φ の値域が可分であることを示せばよい．T の強連続性に注意すれば,

$$\begin{aligned}
\varphi([0,\infty[^2) &= \bigcup_{t\in[0,\infty[}\bigcup_{s\in[0,\infty[} \varphi(\{t\}\times\{s\}) \\
&= \bigcup_{t\in[0,\infty[}\bigcup_{s\in[0,\infty[} \{T(t)f(s)\} \\
&= \bigcup_{t\in[0,\infty[} T(t)f([0,\infty[) \\
&\subset \bigcup_{r\in[0,\infty[\cap\mathbb{Q}} \overline{T(r)\varphi([0,\infty[)}
\end{aligned}$$

f は強可測だから $f([0,\infty[)$ は可分であり，$T(r)$ の連続性から $T(r)\varphi([0,\infty[)$ も可分となる．したがってその可算和であるところの $\bigcup_{r\in[0,\infty[\cap\mathbb{Q}} \overline{T(r)\varphi([0,\infty[)}$ も可分である．距離空間の可分部分空間の部分空間は可分だから，$\varphi([0,\infty[^2)$ も可分となる．

Step 2：$s \mapsto \varphi(t-s,s)$ の強可測性． $t \in [0,\infty[$ を固定すれば

$$\begin{aligned}
[0,t] &\longrightarrow [0,\infty[\times[0,\infty[\\
s &\longmapsto (t-s,s)
\end{aligned}$$

は連続なので，特に $\mathscr{B}([0,t])$ 可測である．Step 1 の議論より φ は可測なので，これらの関数の合成 $s \mapsto \varphi(t-s,s)$ も $\mathscr{B}([0,t])/\mathscr{B}(X)$ 可測となる．写像 $s \mapsto \varphi(t-s,s)$ の像は $\varphi([0,\infty[^2)$ に含まれるから，可分である．

Step 3：$s \mapsto \varphi(t-s,s)$ の可積分性． $T\colon [0,\infty[$ は強連続であるから，一様有界性原理により局所有界となる．したがって，$t \in [0,\infty[$ 適当な定数 M をとることで

$$\|\varphi(t-s,s)\| = \|T(t-s)f(s)\| \le \|T(t-s)\|\,\|f(s)\| \le M$$

とすることができる．これより $s \mapsto \varphi(t-s,s)$ は Bochner 可積分であり，全ての $t \in [0,\infty[$ について畳み込み

$$(T * f)(t) = \int_{[0,t]} T(t-s)f(s)\,ds$$

は well-defined となる．

Step 4：写像 $s \mapsto (T * f)(s)$ の連続性． まずは $t \in [0,\infty[$ を固定し，t での右連続性を示す．$\|T(t-s)f(s)\|$ の $[0,t+1]$ における上界 N をとる．$h \in [0,1]$ とすれば，T の強連続性と積分の連続性，そして上界 N の存在に注意して優収束定理を用いることで

$$\begin{aligned}
&\|(T*f)(t+h) - (T*f)(t)\| \\
&\leq \left\| \int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)\,ds - \int_0^t T(t+h-s)f(s)\,ds \right\| \\
&\qquad + \left\| \int_0^t T(t+h-s)f(s)\,ds - \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds \right\| \\
&\leq Nh + \left\| \int_0^t T(t+h-s)f(s)\,ds - \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds \right\| \\
&\xrightarrow[h\downarrow 0]{} 0
\end{aligned}$$

を得る．よって $T * f$ は t で右連続である．

次に，$t \in]0,\infty[$ を固定し，t での左連続性を示す．$h \in]0,t]$ として h をとれば $t-h \in [0,t]$ であり，

$$1_{[0,t-h]}(s)T(t-h-s)f(s) \xrightarrow[h\downarrow 0]{} 1_{[0,t[}(s)T(t-s)f(s)$$

となることに注意する．再び T の強連続性と積分の連続性，そして上界 N の存在に注意して優収束定理を用いることで

$$\begin{aligned}
&\|(T*f)(t-h) - (T*f)(t)\| \\
&\left\| \int_0^{t-h} T(t-h-s)f(s)\,ds - \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds \right\| \\
&\leq \left\| \int_0^{t-h} T(t-h-s)f(s)\,ds - \int_0^{t-h} T(t-s)f(s)\,ds \right\| \\
&\qquad + \left\| \int_0^{t-h} T(t-s)f(s)\,ds - \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds \right\| \\
&\leq \left\| \int_0^t 1_{[0,t-h]}T(t-h-s)f(s)\,ds - \int_0^t 1_{[0,t[}T(t-s)f(s)\,ds \right\| + Nh \\
&\xrightarrow[h\downarrow 0]{} 0
\end{aligned}$$

がわかる．したがって，$T * f$ は左連続でもある． □

命題 6.5 A は C_0 半群 T の生成作用素であるとし，$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I;X)$ とする．このとき，任意の $x \in X$ について (IACP) は初期値 x の軟解をただ一つ持つ．さらに，その軟解は

$$u(t) = T(t)x + (T * f)(t) \tag{6.1}$$

で与えられる．

証明 **Step 1：軟解の一意性．** $u_1, u_2 \in C(I;X)$ を (IACP) の軟解とし，$u = u_1 - u_2$ と定義する．このとき，全ての $t \in I$ について

$$\begin{aligned}
u(t) &= u_1(t) - u_2(t) \\
&= \left(x + A\int_0^t u_1(s)\,ds\right) - \left(x + A\int_0^t u_2(s)\,ds\right) \\
&= A\int_0^t \{u_1(s) - u_2(s)\}ds \\
&= A\int_0^t u(s)\,ds
\end{aligned}$$

が成り立つので，u は初期値 0 の，斉次問題 (ACP) の軟解である．A は C_0 半群を生成するから命題 5.5，あるいは定理 5.6 により軟解は一意となる．ゆえに $u = 0$ がわかる．

Step 2：軟解の存在，特に (6.1) が軟解であることの証明． u を (6.1) て定義したとき，これが初期値 x の軟解になることを示そう．命題 5.5 あるいは定理 5.6 より $T_t x$ は斉次問題 (ACP) の軟解であるから，全ての $t \in [0,\infty[$ について $\int_0^t T_s x\,ds \in \mathrm{Dom}\,A$ かつ

$$T_t x = x + A\int_0^t T_s x\,ds$$

が成り立つ．

次に畳み込み $T * f$ が初期値 0 の (IACP) の軟解であることを示そう．必要ならば $f\colon I \to X$ を $[0,\infty[\setminus I$ 上では 0 と拡張することで，$f \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty[, X)$ と考える．このとき，命題 6.4 より $T * f \in C(I;X)$ となる．定数 M と ω を命題 2.3 のものとすれば，

$$\begin{aligned}
\int_{[0,t]}\int_{[0,t]} \left\|1_{[0,s]}(r)T(s-r)f(r)\right\| dr\,ds &\le \int_{[0,t]}\int_{[0,t]} 1_{[0,s]}(r)Me^{\omega(s-r)}\|f(r)\|dr\,ds \\
&\le M\left(\int_{[0,t]} e^{\omega s}\,ds\right)\left(\int_{[0,t]} e^{-\omega r}\|f(r)\|dr\right) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

という評価が成り立つので，2 重積分に Fubini の定理が適用できることに注意しておく．Fubini の

定理を用いて計算を行えば,

$$\begin{aligned}
\int_0^t (T*f)(s)\,ds &= \int_{[0,t]}\left(\int_{[0,t]} 1_{[0,s]}(r)T(s-r)f(r)\,dr\right)ds \\
&= \int_{[0,t]}\left(\int_{[0,t]} 1_{[r,t]}(s)T(s-r)f(r)\,ds\right)ds \\
&= \int_{[0,t]}\left(\int_{[0,t]} 1_{[0,t-r]}(s-r)T(s-r)f(r)\,ds\right)dr \\
&= \int_{[0,t]}\left(\int_{[0,t]} 1_{[0,t-r]}(\xi)T(\xi)f(r)\,d\xi\right)dr \\
&= \int_{[0,t]}\left(\int_{[0,t-r]} T(\xi)f(r)\,d\xi\right)dr
\end{aligned}$$

となる．命題 2.7 より全ての $r \in [0,t]$ について $\int_{[0,t-r]} T(\xi)f(r)\,d\xi \in \mathrm{Dom}\,A$ かつ

$$A\int_{[0,t-r]} T(\xi)f(r)\,d\xi = T(t-r)f(r) - f(r)$$

が成り立つ．命題 6.4 より $r \mapsto T_{t-r}f(r) - f(r)$ は $[0,t]$ 上 Bochner 可積分となるので，f の $[0,t]$ 上での Bochner 可積分性と併せて $r \mapsto A\int_{[0,t-r]} T(\xi)f(r)\,d\xi$ の Bochner 可積分性を得る．したがって，命題 D.3 により $\int_{[0,t]}\int_{[0,t-r]} T(\xi)f(r)\,d\xi dr \in \mathrm{Dom}\,A$ かつ

$$\begin{aligned}
A\int_{[0,t]}\int_{[0,t-r]} T(\xi)f(r)\,d\xi dr &= \int_{[0,t]} A\left(\int_{[0,t-r]} T(\xi)f(r)\,d\xi\right)dr \\
&= \int_{[0,t]} \{T(t-r)f(r) - f(r)\}\,dr \\
&= (T*f)(t) - \int_{[0,t]} f(r)\,dr
\end{aligned}$$

がわかる．さらに

$$\int_0^t (T*f)(s)\,ds = \int_{[0,t]}\left(\int_{[0,t-r]} T(\xi)f(r)\,d\xi\right)dr$$

であったことを思い出せば，$\int_0^t (T*f)(s)\,ds \in \mathrm{Dom}\,A$ かつ

$$A\int_0^t (T*f)(s)\,ds = (T*f)(t) - \int_{[0,t]} f(r)\,dr$$

となる．したがって，$T*f$ は初期値 0 の (IACP) の軟解である．

以上の議論から，全ての $t \in I$ について

$$T_t x + \int_0^t (T*f)(s)\,ds \in \mathrm{Dom}\,A$$

かつ

$$
\begin{aligned}
A\int_0^t \{T_s x + (T*f)(s)\}\,ds &= A\int_0^t T_s x\,ds + A\int_0^t (T*f)(s)\,ds \\
&= T_t x - x + (T*f)(t) - \int_0^t f(r)\,dr
\end{aligned}
$$

が成り立つことがわかる．この式を整理すれば

$$
T_t x + (T*f)(t) = x + A\int_0^t \{T_s x + (T*f)(s)\}\,ds + \int_0^t f(r)\,dr
$$

となるので，$t \mapsto T_t x + (T*f)(t)$ は (IACP) の軟解である． □

命題 6.5 より，A が C_0 半群を生成し，$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I;X)$ とき (IACP) は一意的な軟解を持つのであった．その一意解が，さらに古典解となるための十分条件を調べてみよう．軟解が古典解でもあるのは，それが C^1 級となるときであった（命題 6.3）．命題 6.5 より軟解は $u(t) = T_t x + (T*f)(t)$ と表現されるのであるから，それぞれの項が C^1 級になればよい．定理 5.6 より，$x \in \mathrm{Dom}\,A$ について $t \mapsto T_t x$ は C^1 級となるから，調べるべき項は畳み込み $T*f$ である．$T*f$ は C^1 級となるための必要十分条件として，次の命題が知られている．

命題 6.6 T を C_0-半群とする．また関数 $f \in C(I;X)$ は，ある $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(I;X)$ によって $f(t) = x + \int_0^t g(s)\,ds$ と表現されているとする．このとき $T*f \in C([0,\infty[, X)$ は C^1 級であり，全ての $t \in [0,\infty[$ について $(T*f)'(t) = (T*g)(t) + T(t)x$ が成り立つ．

証明 写像 $u\colon [0,\infty[\to X$ を

$$
u(t) = (T*g)(t) + T(t)x
$$

と定義する．このとき，T の強連続性と命題 6.4 から u は連続写像となる．命題 6.5 証明 step 2 における畳み込みの可積分性評価を思い出せば，Fubini の定理と命題 D.3，変数変換により

$$
\begin{aligned}
\int_0^t u(s)\,ds &= \int_0^t (T*g)(s)\,ds + \int_0^t T(s)x\,ds \\
&= \int_0^t \left(\int_0^s T(s-r)g(r)\,dr\right) ds + \int_0^t T(s)x\,ds \\
&= \int_0^t \left(\int_0^s T(\xi)g(s-\xi)\,d\xi\right) ds + \int_0^t T(s)x\,ds \\
&= \int_0^t \left(\int_0^t 1_{[\xi,t]}(s)T(\xi)g(s-\xi)\,ds\right) d\xi + \int_0^t T(s)x\,ds \\
&= \int_0^t \left(\int_0^{t-\xi} T(\xi)g(\tau)\,d\tau\right) d\xi + \int_0^t T(\xi)x\,d\xi \\
&= \int_0^t T(\xi)\left(\int_0^{t-\xi} g(\tau)\,d\tau\right) d\xi + \int_0^t T(\xi)x\,d\xi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t T(\xi)\,(f(t-\xi)-x)\;d\xi + \int_0^t T(\xi)x\,d\xi \\
&= \int_0^t T(\xi)f(t-\xi)\,ds \\
&= \int_0^t T(t-s)f(s)ds \\
&= (T*f)(t)
\end{aligned}
$$

と計算できる．いま u の連続性に注意して微積分学の基本定理を用いれば，$T*f$ が C^1 級であることと

$$(T*f)'(t) = u(t) = (T*g)(t) + T(t)x$$

がわかる． □

注意 6.7 命題 6.6 における f に関する仮定は，f が絶対連続だからといって満たされるわけではない．f の絶対連続性から (6.6) のような g の存在を導くためには，空間 X に Radon-Nikodym 性が必要である．

命題 6.8 $f \in C(I;X)$ は，$g \in L^1_{\mathrm{loc}}(I;X)$ によって $f = f(0) + \int_0^t g(s)\,ds$ と表現されているとする．このとき $x \in \mathrm{Dom}\,A$ に対して

$$u(t) = T_t x + (T*f)(t)$$

と定義すれば，u は (IACP) の古典解で初期値が x であるような，ただ一つのものである．

証明 定理 5.6 と命題 6.5，命題 6.6 からただちに従う． □

まとめ

- $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I;X)$ かつ A が C_0-半群を生成すると仮定する．このとき全ての $x \in X$ に対して，$t \mapsto T_t x + (T*f)(t)$ は x を初期値とする (IACP) のただ一つの軟解である．
- $f \in C(I;X)$ は，$g \in L^1_{\mathrm{loc}}(I;X)$ によって $f = f(0) + \int_0^t g(s)\,ds$ と表現されているとする．このとき，$x \in \mathrm{Dom}\,A$ について $t \mapsto T_t x + (T*f)(t)$ は (IACP) のただ一つの古典解である．

A 閉作用素

E，F を Hausdorff 位相線形空間とする．E の線形部分空間 $\mathrm{Dom}\,T$ 上で定義された線形写像 $L\colon \mathrm{Dom}\,T \to F$ を，E から F への（非有界）線形作用素 (linear operator) というのであった．線形作用素 T のグラフを $\mathrm{Graph}(T)$ で表すことにする．すなわち，

$$\mathrm{Graph}(T) = \{(x,y) \in E \times F \mid x \in \mathrm{Dom}\,T,\ y = Tx\}$$

である．

補題 A.1 $f\colon \mathrm{Dom}\, f \subset E \to F$ を写像とする．このとき，次の 2 条件は同値である．

(i) f は線形作用素である．
(ii) f のグラフ $\mathrm{Graph}(f)$ は直和線形空間 $E \oplus F$ の線形部分空間である．

証明 (i) $\Longrightarrow$ (ii)．$\mathrm{Graph}(f)$ は線形写像 $(\mathrm{id}_E, f)\colon E \ni x \mapsto (x, f(x)) \in E \oplus F$ の像なので，$E \oplus F$ の線形部分空間である．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathrm{Graph}(f)$ かつ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする．このとき, $(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2) \in \mathrm{Graph}(f)$ であるから，$\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathrm{Dom}(f)$ および

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

がわかる． □

定義 A.2 (i) 線形作用素 T のグラフ $\mathrm{Graph}(T)$ が直和位相線形空間 $E \oplus F$ [5] の閉集合となる時，T を閉作用素 (closed operator) という．

(ii) X から Y への線形作用素 $(\mathrm{Dom}(T), T)$ に対して，ある閉作用素 $(\mathrm{Dom}(S), S)$ で $\mathrm{Dom}(T) \subset \mathrm{Dom}(S)$ かつ $S|_{\mathrm{Dom}(T)} = T$ なるものが存在するとき，T は可閉 (closable) であるという．T が可閉作用素であるとき，上の条件を満たす閉作用素 S を T の閉拡張 (closed extension) という．可閉作用素 T の閉拡張のうち，その定義域が包含関係について最小のものを T の閉包 (closure) といい，$\overline{T}$ で表す．

線形作用素 S が T の閉拡張であるとは, $\mathrm{Graph}(S)$ が $E \times F$ の閉集合であり $\mathrm{Graph}(T) \subset \mathrm{Graph}(S)$ が成り立つということである．

有界作用素 $T\colon E \to F$ は閉作用素である．これは, T のグラフは連続写像 $T \times \mathrm{id}_F\colon E \times F \to F \times F$ による閉集合 Δ_F [6] の逆像となっていることからわかる[7]．一方で，T が閉作用素だからといって，それが $\mathrm{Dom}(T)$ 上で有界とは限らない．

閉集合の収束による特徴づけを思い出せば，T が閉作用素であるための必要十分条件は以下のように与えられることがわかる．

命題 A.3 T を E から F への線形作用素とする．このとき，次の 3 条件は同値である．

(i) T は閉作用素である．
(ii) $(x_\lambda, Tx_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が直積位相について $(x, y) \in E \oplus F$ に収束するなら，$x \in \mathrm{Dom}\, T$ かつ $Tx = y$ が

5） 位相は直積位相である．
6） $\Delta_F = \{(x, y) \in F \times F \mid x = y\}$ である．
7） F は Hausdorff だから，Δ_F は $F \times F$ の閉集合となる．

成り立つ.

(iii) $\mathscr{F}$ を Graph(T) 上の収束フィルターとする．$(x,y)\in\lim\mathscr{F}$ なら，$x\in\operatorname{Dom}T$ かつ $Tx=y$ が成り立つ.

E と F が距離付け可能な場合には，これらの条件は次の (iv) とも同値である.

(iv) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を x に収束する E の点列とする．$(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $y\in F$ に収束するなら，$x\in\operatorname{Dom}T$ かつ $Tx=y$ が成り立つ.

証明 いずれの条件も，Graph(T) が $E\oplus F$ の閉集合であるという条件を収束の言葉で言い換えたものである.

E と F が共に距離付け可能である場合には，$E\oplus F$ の位相は

$$d_{E\oplus F}((x_1,y_1),(x_2,y_2))=d_E(x_1,x_2)+d_F(y_1,y_2)$$

によって距離付け可能であることに注意しておく. □

線形作用素が可閉かどうかは，次の命題のようにして調べることができる.

命題 A.4 E から F への線形作用素 $(\operatorname{Dom}T,T)$ に関して次の 3 条件は同値である.

(i) T は可閉作用素である.

(ii) T のグラフの閉包 $\overline{\mathrm{Graph}(T)}\subset E\times F$ はある線形作用素のグラフになっている.

(iii) $\operatorname{Dom}(T)$ の有向族 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が $x_\lambda\to 0$ かつ $Tx_\lambda\to\exists y\in Y$ を満たすならば，$y=0$ である.

(iv) $\mathscr{F}$ を，$\operatorname{Dom}T$ 上のフィルターで 0 に収束するものとする．$T_*\mathscr{F}$ で $\mathscr{F}$ を T で F 上に送ったものを表そう．$y=\lim T_*\mathscr{F}$ ならば，$y=0$ が成り立つ.

E と F が距離付け可能ならば，以上の条件はさらに以下の (iv) とも同値である.

(v) $\operatorname{Dom}(T)$ の元の列 (x_n) が $x_n\to 0$ かつ $Tx_n\to\exists y\in Y$ を満たすならば，$y=0$ である.

証明 **Step 1：(i) $\Longrightarrow$ (iv) の証明．** S を T の閉拡張とする．$\mathscr{F}$ を $\operatorname{Dom}T$ 上のフィルターで，0 に収束するものとする．$\mathscr{G}$ で，フィルター基底 $(\mathrm{id}_E\times T)_*\mathscr{F}$ によって生成される Graph(T) 上のフィルターを表すことにする．$y\in\lim T_*\mathscr{F}$ とすれば，$\mathscr{G}$ を閉集合 Graph(S) 上のフィルター基底と思うことで,

$$(0,y)=\lim\mathscr{G}\subset\mathrm{Graph}(S)$$

がわかる．S は線形作用素だから，$y=S0=0$ である.

Step 2：(iv) $\Longrightarrow$ (iii) の証明． $x=(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を，0 に収束する $\operatorname{Dom}T$ 上の有向族とする．$\lambda\in\Lambda$ に対して

$$\Lambda_{\geq\lambda}=\{\kappa\in\Lambda\mid\kappa\geq\lambda\}$$

と定義すれば，$\mathscr{B} = \{\Lambda_{\geq\lambda} \mid \lambda \in \Lambda\}$ は Λ 上のフィルター基底であり，$x_*\mathscr{B}$ は $\lim x_*\mathscr{B} = \lim x_\lambda = 0$ を満たすのであった．また，$\lim(T \circ x)_*\mathscr{B} = \lim Tx_\lambda$ も成り立つので，$y = \lim Tx_\lambda$ なら条件 (iv) より $y = 0$ となる．

Step 3：(iii) $\Longrightarrow$ (ii) の証明． 線形演算の連続性より，$\overline{\mathrm{Graph}(T)}$ は線形空間であることがわかる．よって，これがある写像のグラフになっていることを示せば十分である[8)]．そのためには，(x,y)，$(x,z) \in \overline{\mathrm{Graph}(T)}$ なら $y = z$ であることを示せばよい．$\overline{\mathrm{Graph}(T)}$ の線形性より $(0, y-z) = (x,y) - (x,z) \in \overline{\mathrm{Graph}(T)}$ であるから，$\mathrm{Graph}(T)$ の有向族 $(x_\lambda, Tx_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ で $(x_\lambda, Tx_\lambda) \to (0, y-z)$ を満たすようなものがとれる．この有向族は条件 (iii) の仮定を満たすから，$y = z$ となる．

Step 4：(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． $\overline{\mathrm{Graph}(T)}$ をグラフにもつような線形作用素は，T の閉拡張となっている．

Step 5：(iii) $\Longrightarrow$ (v) の証明（距離付け可能な場合）． (iii) を特に点列に対して適用すればよい．

Step 6：(v) $\Longrightarrow$ (ii) の証明（距離付け可能な場合）． $E \times F$ の直積位相が距離付け可能であることに注意して，点列に対して step 3 と同様の議論を行えばよい． □

線形作用素 S が T の拡張であることは $\mathrm{Graph}(T) \subset \mathrm{Graph}(S)$ と同値である．このことと命題 A.4 から，T が可閉なら

$$\overline{\mathrm{Graph}(T)} = \mathrm{Graph}(\overline{T})$$

であることがわかる．

B　閉グラフ定理

本節では，Banach 空間よりは一般的な設定下で開写像定理や閉グラフ定理を証明しよう．

B.1　Baire の範疇定理

§B.1 では，開写像定理や閉グラフ定理を証明するのに用いる Baire の範疇定理を証明しよう．Baire の範疇定理は関数解析的な現象というより位相空間的な現象を記述している．まずは Baire 範疇の定義を行おう．

定義 B.1　X を位相空間とする．

(i) $A \subset X$ が $\mathrm{Int}\,\overline{A} = \emptyset$ を満たすとき，A は全疎 (nowhere dense) であるという．

(ii) $B \subset X$ とする．X の全疎な部分集合族 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $\bigcup_n A_n = B$ を満たすものが存在するとき，B は第 1 類 (first category) 集合または痩集合 (meager set) であるという．

(iii) $B \subset X$ が第 1 類でないとき，第 2 類 (second category) であるという．

8）補題 A.1.

$A \subset X$ すれば

$$X \setminus \operatorname{Int} \overline{A} = \overline{X \setminus \overline{A}}$$

であるから，A が全疎であることは $X \setminus \overline{A}$ が X で稠密であることと同値である．開核作用素と閉包作用素の単調性より，$B \subset A$ かつ A が全疎ならば，B も全疎となることがわかる．

補題 B.2 X を位相空間とし，その部分集合 A, B は $A \subset B$ を満たすとする．

(i) B が第 1 類なら，A も第 1 類である．
(ii) A が第 2 類なら，B も第 2 類である．

証明 (i) B は第 1 類集合であるとし，全疎な集合列 (B_n) を $B = \bigcup_n B_n$ となるように選ぶ．このとき $A \cap B_n$ はどれも全疎であり，

$$A = A \cap B = A \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A \cap B_n$$

が成り立つ．よって A は全疎である．

(ii) は (i) の対偶である． □

定義 B.3 X を位相空間とする．X の開集合列 (U_n) で各 U_n が X 稠密であるような任意のものについて，$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ もまた X で稠密であるとき，X は Baire 空間 (Baire space) であるという．

位相空間が Baire 空間であることは，次のように特徴づけられる．

命題 B.4 位相空間 X について，次の条件は同値である．

(i) X は Baire 空間である．
(ii) $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を X の任意の閉集合列とする．$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ が内点を持つならば, ある F_n は内点を持つ．
(iii) X の任意の第 1 類集合は，内点を持たない．
(iv) X の任意の空でない開集合は，第 2 類である．

証明 **(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明．** (i) を仮定し，(ii) の対偶を示す．各 F_n が内点を持たないような，X の閉集合族 $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を考える．閉集合 F_n が内点を持たないとは F_n が全疎であるということであり，さらにこれは $X \setminus F_n$ が X で稠密であるということでもある．よって条件 (i) から，

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus F_n) = X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

は X で稠密となる．したがって

$$X = \overline{X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n} = X \setminus \operatorname{Int} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

となり，$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ は内点を持たないことがわかる．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) の証明． (ii) を仮定する．(A_n) を X の全疎な部分集合族とし，$A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とする．このとき各 $\overline{A_n}$ は内点を持たない閉集合であり，仮定より $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n$ も内点を持たない．いま $A\subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n$ であるから，A は内点を持たないことがわかる．

(iii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． (iii) を仮定する．(U_n) を X で稠密な開集合の列とすれば，$(X\setminus U_n)$ は X の全疎な集合列である．よって $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X\setminus U_n)=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ は第 1 類集合であり，内点を持たない．ゆえに $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ は X で稠密である．

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) の証明． (iii) を仮定する．このとき X の空でない開集合 U は内点を持ち，条件 (iii) の対偶により第 1 類ではない．よって第 2 類である．

(iv) $\Longrightarrow$ (iii) の証明． (iv) を仮定し，(iii) の対偶を示す．$A\subset X$ とし，$x\in A$ をその内点とする．x の開近傍 U を $U\subset A$ となるようにとれば，U は空でない開集合なので，第 2 類である．いま $U\subset A$ であるから，補題 B.2 より A も第 2 類となる． □

位相空間が Baire 空間となるための十分条件を与えた以下の命題は，Baire の範疇定理 (Baire category theorem) あるいは，単に Baire の定理 (Baire theorem) と呼ばれている．

命題 B.5（Baire の範疇定理） (i) 完備な距離空間は，Baire 空間である．
(ii) 局所コンパクト Hausdorff 空間は，Baire 空間である．

証明 (i) の証明． X を完備な距離空間とする．$B(x;\varepsilon)$ で，$x\in X$ を中心とした半径 ε の開球を表すことにする．

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X で稠密な開集合の列とする．$U=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ と定めたとき，U が X で稠密であることを証明したい．そのためには，任意の開集合 $G\subset X$ について $U\cap G$ が空でないことを示せばよい．

X の点列 $(x_n)_{n\geq 1}$ と正の実数列 $(r_n)_{n\geq 1}$ を，以下の手順で再帰的に定義する．まずは $x_1\in G\cap U_0$ を任意に選び，r_1 を

$$\overline{B(x_1,r_1)}\subset G\cap U_0$$

かつ $r_1\leq 1$ となるように選ぶ．仮定より U_0 は稠密だから $G\cap U_0$ は空でなく，このような x_1 が実際に存在する．また，$G\cap U_0$ が開集合であることから，r_1 の存在がわかる．次に，$(x_n,r_n)\in X\times\,]0,\infty[$ が与えられているとしよう．U_n は X で稠密であるから，このとき $U_n\cap B(x_n;r_n)$ は空ではない．そこで $x_{n+1}\in U_n\cap B(x;r_n)$ とし，r_{n+1} を $0<r_{n+1}<r_n\wedge\frac{1}{n}$ かつ

$$\overline{B(x_{n+1};r_{n+1})}\subset U_n\cap B(x_n;r_n)$$

を満たすように選ぶ．このような r_{n+1} の存在は，やはり $G_n\cap U_n$ が開集合であることからわかる．

ここで，

$$K=\bigcap_{n\geq 1}\overline{B(x_n;r_n)}$$

と定義する．(x_n, r_n) の構成法より $\overline{B(x_0; r_0)} \subset U_0 \cap G$ かつ全ての $n \in \mathbb{N}$ について $\overline{B(x_{n+1}; r_{n+1})} \subset U_n \cap B(x_n; r_n)$ が成り立つから，

$$K = \bigcap_{n \geq 1} \overline{B(x_n; r_n)} \subset \bigcap_{n \geq 1} (U_n \cap G) = U \cap G$$

である．これより，後は $K \neq \emptyset$ を示せばよい．

先ほど構成した $(x_n)_{n \geq 1}$ が X の収束列であり，その極限が K に属することを示そう．$N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ を固定すれば，(x_n) と (r_n) の構成法より，全ての $n \geq N$ について

$$x_n \in \overline{B(x_N, r_N)}$$

が成り立つ．したがって，全ての $n, m \geq N$ について

$$d(x_n, x_m) \leq 2r_N \leq \frac{2}{N}$$

となり，この評価から (x_n) が Cauchy 列であることがわかる．X が完備距離空間であることから Cauchy 列 (x_n) はただ一つの極限を持つので，それを x_∞ で表すことにする．先ほど確かめたように，$N \geq 1$ を任意に固定すれば $(x_n)_{n \geq N}$ は $\overline{B(x_N, r_N)}$ の点列になっている．$\overline{B(x_N, r_N)}$ は X の閉集合であるから，$(x_n)_{n \geq 1}$ の部分列 $(x_n)_{n \geq N}$ の極限 x_∞ は再び $\overline{B(x_N, r_N)}$ に属する．いま N は任意に選んでいたから，これより

$$x_\infty \in \bigcap_{n \geq 1} \overline{B(x_n; r_n)} = K$$

がわかる．

以上の議論により，$K \neq \emptyset$ であり，ゆえに $U \cap G \neq \emptyset$ であることが示された．

(ii) の証明． 証明の手法は (i) と酷似しているので，少し急ぎ足で証明しよう．

X を局所コンパクト Hausdorff 空間とし，$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ をその稠密な開集合列とする．$U = \bigcap_n U_n$ と定義したとき，任意の開集合 G について $U \cap G$ が非空となることを示せばよい．

次の手順で，相対コンパクトな開集合列 $(G_n)_{n \geq 1}$ を再帰的に構成しよう．U_0 は X で稠密であるから，$U_0 \cap G$ は空ではない．そこで，$x \in U_0 \cap G$ を任意に選び，x の相対コンパクト開近傍 G_1 を $\overline{G_1} \subset U_0 \cap G$ を満たすように選ぶ．G_1 をこのように選べることは，X の局所コンパクト性と，局所コンパクト Hausdorff 空間は正則空間であることからわかる．次に，開集合 G_n が与えられているとする．U_n が X で稠密であることに注意して，先ほどと同様に空でない相対コンパクトな開集合 G_{n+1} を $\overline{G_{n+1}} \in G_n \cap U_n$ を満たすように選ぶ．

以上の手続きで，空でない相対コンパクトな開集合の減少列 (G_n) が得られる．この列は全ての $n \geq 1$ で $\overline{G_{n+1}} \subset G_n \cap U_n$ を満たしているから，

$$K := \bigcap_{n \geq 1} \overline{G_n} \subset \bigcap_{n \geq 1} U_n \cap G = U \cap G$$

が成り立つ．いま $\overline{G_n}$ のコンパクト性より，K は空でないから，$U \cap G$ も空ではない．□

B.2 開写像定理

Baire の範疇定理を用いて，関数解析における基礎的で重要な結果である，開写像定理を証明しよう．定理の主張を述べる前に，いくつか用語の復習をしておこう．

位相空間の間の写像 $f\colon E \to F$ は，E の任意の開集合 U を F の開集合 $f(U)$ に送るとき，開写像 (open mapping) というのであった．また，$a \in E$ の近傍を $f(a)$ の近傍に送るとき，f は a において開であるという．f が開写像であるための必要十分条件は，f が全ての点において開であるということである．連続全単射が同相写像であるとは，それが開写像であることに他ならない．

X を位相線形空間とする．X 上の距離 d で全ての x, y, z に対して

$$d(x, y) = d(x + z, y + z)$$

を満たすものを，平行移動不変な距離というのであった．X 上の平行移動不変な距離 d で，d は X の位相を定め，かつ X が d ついて完備となるようなものが存在するとき，X を F 空間 (F-space) という．F 空間で，0 が（よって各点が）凸集合からなら基本近傍系を持つようなものを，特に Fréchet 空間 (Fréchet space) と呼ぶ.

定理 B.6（開写像定理） F-空間 X から Hausdorff 位相線形空間 Y への連続線形写像 $T\colon X \to Y$ を考える．像 $T(X)$ が Y の第 2 類集合ならば，T は開写像である．

開写像定理の証明に用いる補題を用意する．線形写像 $T\colon X \to Y$ の像 $\operatorname{Im} T$ が第 2 類なら，0 の近傍 U の像の閉包 $\overline{T(U)}$ はまた 0 の近傍であるということを主張している．ここでは，X には距離付け可能性を課しておく．

補題 B.7 X を距離付け可能な位相線形空間，Y を線形位相空間とし，$T\colon X \to Y$ を線形写像とする．$T(X)$ が第 2 類なら，任意の $r > 0$ について $\overline{T(B(0; r))}$ は Y における 0 の近傍である．

証明 d を，X の位相と整合的な平行移動不変距離とする．$r > 0$ を任意に固定し，$U = B(0; r)$，$U' = B(0; r/2)$ とする．このとき $\overline{T(U)}$ が 0 を内点を持つことを示すのが目標である．$x, z \in U'$ とすれば,

$$d(0, x - z) = d(z, x) \le d(z, 0) + d(0, x) < r$$

であるから，$U' - U' \subset U$ が成り立つ．よって T の線形性から

$$T(U') - T(U') \subset T(U)$$

である．このことと線形演算の連続性から

$$\overline{T(U')} - \overline{T(U')} \subset \overline{T(U') - T(U')} \subset \overline{T(U)}$$

がわかる．この包含関係より，$\overline{T(U)}$ が 0 の近傍であることを示すためには，$\overline{T(U')}$ が内点を持つことを示せば良いということになる．実際，x を $\overline{T(U')}$ の内点とすれば，x の近傍 V を上手く選ぶことで $x \in W \subset \overline{T(U')}$ とできる．このとき $W - x$ は 0 の近傍であり，

$$W - x \subset \overline{T(U')} - \overline{T(U')} \subset \overline{T(U)}$$

を満たしている．

さて，実際に $\overline{T(U')}$ が内点を持つことを示そう．0 の近傍 U' は吸収的[9)]であるから，

$$X = \bigcup_{k \geq 1} kU'$$

が成り立つ．よって，T の線形性から

$$T(X) = \bigcup_{k \geq 1} kT(U')$$

となる．いま仮定より $T(X)$ は第 2 類なので，$kT(U')$ のいずれかは第 2 類である[10)]．$k \neq 0$ なので $x \mapsto kx$ は同相写像であり，ゆえに $T(U')$ も第 2 類であることがわかる．したがって，補題 B.2 によりその閉包 $\overline{T(U')}$ も第 2 類である．閉集合 $\overline{T(U')}$ は第 1 類ではないから，全疎ではない．すなわち，内点を持つ． □

定理 B.6 の証明　X は位相線形空間であるから，特に T が 0 において開であることを示せば十分である．すなわち，$U \subset X$ を 0 の任意の近傍としたとき，$T(U)$ が Y における 0 の近傍であることを示せばよい．

与えられた U に対して，$r > 0$ を $\overline{B(0;r)} \subset U$ となるように選ぶ．$n \in \mathbb{N}$ に対して，0 の開近傍 U_n を

$$U_n = B\left(x; \frac{r}{2^n}\right) = \left\{ x \in X \,\middle|\, d(0,x) < \frac{r}{2^n} \right\}$$

と定めよう．補題 B.7 より $\overline{T(U_1)}$ は 0 の近傍であるから，$\overline{T(U_1)} \subset T(U)$ が成り立つことを示せば十分である．

$y_1 \in \overline{T(U_1)}$ を任意に選び，これが $T(U)$ に属することを示そう．点列 $(x_n, y_n) \in \prod_{n \geq 1} U_n \times \overline{T(U_n)}$ を，次のような手順で再帰的に定義する．補題 B.7 より $\overline{T(U_2)}$ は 0 の近傍だから，$y_1 - \overline{T(U_2)}$ は y_1 の近傍である．仮定より $y_1 \in \overline{T(U_1)}$ であるから，触点の定義より

$$T(U_1) \cap [y_1 - \overline{T(U_2)}] \neq \emptyset$$

がわかる．そこで $x_1 \in U_1$ を

$$Tx_1 \in y_1 - \overline{T(U_2)}$$

となるように選ぶ．このとき，$y_1 - Tx_1 \in \overline{T(U_n)}$ であることに注意しておく．

---

9)　位相線形空間 X の部分集合 A が吸収的 (absorbing) であるとは，$\bigcup_{\lambda \geq 0} A = X$ が成り立つということであった．

10)　第 1 類集合の可算和は第 1 類である．

次に，$(x_n, y_n) \in U_n \times \overline{T(U_n)}$ は $y_n - Tx_n \in \overline{T(U_{n+1})}$ を満たしていると仮定する．

$$y_{n+1} = y_n - Tx_n$$

と定めれば，仮定より $y_{n+1} \in \overline{T(U_{n+1})}$ を満たす．補題 B.7 より $\overline{T(U_{n+2})}$ は 0 の近傍であるから，$y_{n+1} - \overline{T(U_{n+2})}$ は y_{n+1} の近傍である．いま y_{n+1} は $T(U_{n+1})$ の触点であるから，

$$[y_{n+1} - \overline{T(U_{n+2})}] \cap T(U_{n+1}) \neq \emptyset$$

が成り立つ．そこで，$x_{n+1} \in U_{n+1}$ を $Tx_{n+1} \in y_{n+1} - \overline{T(U_{n+2})}$ となるように選ぶ．

以上の手続きで得られた点列 $(x_n, y_n) \in U_n \times \overline{T(U_n)}$ は，全ての $n \geq 1$ について

$$y_{n+1} - y_n = -Tx_n$$

を満たしている．この差分方程式より，

$$y_{n+1} - y_1 = -\sum_{1 \leq i \leq n} T(x_i) = -T\left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i\right)$$

となることがわかる．いま全ての n について $x_n \in U_n = B(0; r2^{-n})$ が成り立っているから，特に $n < m$ ならば

$$d\left(\sum_{n \leq i \leq m} x_i, 0\right) \leq \sum_{n \leq i \leq m} d(x_i, 0) \leq \sum_{n \leq i \leq m} \frac{r}{2^i} \leq \frac{r}{2^{n-1}}$$

となる．したがって点列 $n \mapsto \sum_{1 \leq i \leq n} x_i$ は X の Cauchy 列であり，完備性より極限 $x_\infty \in X$ を持つ．特に

$$d\left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i, 0\right) < r$$

という式において極限をとれば，距離関数の連続性より

$$d(x_\infty, 0) \leq r$$

を得る．ゆえに $x_\infty \in \overline{U_0} \subset U$ である．

さて，今度は (y_n) の極限を考えてみる．

$$y_{n+1} = y_1 - T\left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i\right)$$

という式において $n \to \infty$ の極限をとれば，T の連続性より (y_n) が収束することと，

$$\lim_{n \to \infty} y_n = y_1 - \lim_{n \to \infty} T\left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i\right) = y_1 - T(x_\infty)$$

が成り立つことがわかる．(y_n) の極限を y_∞ と置いたとき，$y_\infty = 0$ であることを示そう．構成法より，(y_n) は全ての $n \geq 1$ について $y_n \in \overline{T(U_n)}$ を満たし，$\overline{T(U_n)}$ は閉集合であるから，$y_\infty \in \overline{T(U_n)}$ となる．よって

$$y_\infty \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{T(U_n)}$$

である．Y における 0 の任意の近傍 V に対して，x の閉近傍 F を $F \subset U$ を満たすように選ぶ[11]．T の 0 での連続性に注意して n を十分大きくとれば，$T(U_n) \subset F$ が成り立つ．したがって $\overline{T(U_n)} \subset F \subset V$ であり，$y_\infty \in V$ がわかる．いま V は 0 の任意の近傍であったから，Y が Hausdorff であることに注意すれば $y_\infty = 0$ であることが従う．

以上の議論により，$y_1 = T(x_\infty)$ であることが示された．$x_\infty \in U$ であったことから，これより $y_1 \in T(U)$ がわかる． □

定理 B.6 を用いると，より強く次の主張を示すことができる．

定理 B.8（開写像定理） $T\colon X \to Y$ を F 空間 X から Hausdorff 位相線形空間 Y への連続線形写像とする．$T(X)$ が Y の第 2 類集合ならば，T は全射開写像であり，Y はまた F 空間となる．

証明 T が開写像であることは，定理 B.6 より従う．特に $T(X)$ は Y の開部分空間であるから，Y に等しい．[12]．したがって T は連続かつ開写像かつ全射である．

T を通して Y に距離を誘導しよう．d を X 上の平行移動不変な距離で，X の位相を生成するものとする．T は連続かつ Y は Hausdorff だから，$N := \operatorname{Ker} T = T^{-1}(0)$ は X の閉部分空間である．$\pi\colon X \to X/N$ を自然な全射とすれば，商空間 X/N も π によって演算と距離を送ることで，自然に F 空間と見なせる．このとき X/N の位相は，π による商位相であることに注意しておく．$T\colon X \to Y$ は線形全射だから，それによって誘導される $\widetilde{T}\colon X/N \to Y$ は線形空間としての同型である．

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\
X/N \arrow[ur, "\widetilde{T}"'] &
\end{tikzcd}$$

後は T' が同相写像であることを示せば

$$d_Y(y_1, y_2) = d_{X/N}(\widetilde{T}^{-1}x_1, \widetilde{T}^{-1}x_2)$$

とすることにより，Y は d_Y により F 空間となることがわかる．商位相の定義より $\widetilde{T}$ は連続であるから，後は $\widetilde{T}$ が開写像であることを示せばよい．$G \subset X/N$ を任意の開集合とすれば，π は連続

11） Hausdorff な一様空間は正則なので．

12） Y の任意の開部分空間は，Y に等しい．実際 $Z \subset Y$ を開部分空間とし 0 の開近傍 U を $U \subset Z$ となるようにとる．$y \in Y$ を任意に選べば，線形演算の連続性より十分小さな正の λ について $\lambda y \in U \subset Z$ となる．Z は部分空間だから，$y = \lambda^{-}1\lambda y \in Z$ である．

だから $\pi^{-1}(G)$ は X の開集合である．いま π は全射だから $\pi\pi^{-1}G = G$ であり，

$$\widetilde{T}(G) = \widetilde{T}(\pi\pi^{-1}(G)) = T(\pi^{-1}(G))$$

が成り立つ．T は開写像であったから，これより $\widetilde{T}(G)$ も開となる．ゆえに $\widetilde{T}$ は開写像である．

□

開写像定理の系として，F 空間の間の連続な線形全単射は，位相線形空間としての同型であることが示される．

系 B.9　X と Y を F 空間とする．

(i) 連続線形写像 $T\colon X \to Y$ が全射なら，開写像である．

(ii) 連続線形写像 $T\colon X \to Y$ が全単射なら，同相である．

証明　(i) 完備距離空間は Baire 空間なので，Y は第 2 類である．よって定理 B.8 より T は開写像となる．

(ii) 連続線形写像 $T\colon X \to Y$ が全単射なら，(i) より T は開写像となる．全単射が連続かつ開写像なら同相となるので，このとき T は同相である． □

なお，系 B.9 より，位相線形空間を F 空間とするような位相は一意的であることがわかる．

B.3　閉グラフ定理

開写像定理の帰結として，閉グラフ定理の証明を行おう．

定理 B.10（閉グラフ定理）　X と Y を F 空間とする．このとき，線形写像 $T\colon X \to Y$ について次の 2 条件は同値である．

(i) T は連続である．

(ii) T は閉作用素である．

証明　(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明． T のグラフ $\mathrm{Graph}(T)$ は連続写像 $T \times \mathrm{id}_Y\colon X \times Y \to Y \times Y$ による，閉集合 $\Delta_Y = \{(y,z) \in Y \times Y \mid y = z\}$ の逆像であるから，閉集合である．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． 記号の簡略化のため，$\mathrm{Graph}(T) = \Gamma$ と表すことにする．d_X と d_Y をそれぞれ，X と Y の位相を生成する平行移動不変な距離とする．$X \times Y$ を，距離

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2)$$

により，F 空間と考える．仮定より Γ は F 空間 $X \times Y$ の閉部分空間なので，全体の線形演算と距離の制限により，また F 空間となる．さらに，標準的な射影

$$\mathrm{pr}_1\colon X \times Y \to X, \quad \mathrm{pr}_2\colon X \times Y \to Y$$

はともに連続線形写像であるから，その Γ への制限も連続となる．

写像 $S\colon X \to \Gamma$ を $S(x) = (x, Tx)$ で定義すれば，S は線形写像である．また $\mathrm{pr}_1|_\Gamma \circ S = \mathrm{id}_X$ かつ $S \circ \mathrm{pr}_1|_\Gamma = \mathrm{id}_\Gamma$ が成り立つから，S は $\mathrm{pr}_1|_\Gamma$ の逆写像である．いま $\mathrm{pr}_1|_\Gamma\colon \Gamma \to X$ は F 空間の間の連続な（線形空間としての）同型写像だから，開写像定理により同相写像となる．ゆえに，逆写像 S も連続である．$T = \mathrm{pr}_2|_\Gamma \circ S$ と T は連続写像の合成で書けるから，T も連続となる． □

C　$\mathscr{L}(X, Y)$ の位相

X, Y が Banach 空間の時，$\mathscr{L}(X, Y)$ で X から Y への有界線形写像全体の空間を表す．特に $X = Y$ のとき，$\mathscr{L}(X, X) = \mathscr{L}(X)$ と書くことにする．$L \in \mathscr{L}(X, Y)$ に対してその作用素ノルムは

$$\|L\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Lx\|_Y}{\|x\|_X} = \inf\{C > 0 \mid \forall x \in X,\ \|Lx\|_Y \leq C\|x\|_X\}$$

で定義されるのであった．作用素のノルムから定まる $\mathscr{L}(X, Y)$ の位相をノルム位相という．一方，$\mathscr{L}(X, Y)$ は X から Y への写像からなる空間であるから，各点収束位相も自然な位相である．$\mathscr{L}(X, Y)$ の各点収束位相のことを，作用素強位相 (strong operator topology, SOT) や単に強位相 (strong topology) と呼ぶ．位相空間 T からの写像 $T \to \mathscr{L}(X, Y)$ は強位相に関して連続であるとき，強連続 (strongly continuous) であるという．

D　Bochner 積分

D.1　強可測性

$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ を測度空間とし，X を Banach 空間とする．有限族 $(A_i) \in \mathscr{A}^I$ と $a_i \in X$ によって

$$\sum_i 1_{A_i} a_i$$

と表現される関数を，X 値の単関数と呼ぶのであった．全ての $i \in I$ で $\mu(A_i) < \infty$ であるとき，この単関数の積分を

$$\sum_i \mu(A_i) a_i$$

で定義する．$f\colon \Omega \to X$ は単関数列で各点近似できるとき，$\mathscr{A}$-強可測 (strongly measurable) であるという．関数の強可測性については，以下の特徴づけが知られている．

命題 D.1（Pettis の可測性定理）　$(\Omega, \mathscr{A})$ を可測空間とし，X を Banach 空間とする．このとき，$f\colon \Omega \to X$ について次の 4 条件は同値である．

(i) f は強可測である．

(ii) f は $\mathscr{A}/\mathscr{B}(X)$ 可測かつ，$f(\Omega)$ は可分である．
(iii) f は $\mathscr{A}/\sigma(X^*)$ 可測[13)] かつ，$f(\Omega)$ は可分である．
(iv) 可算値の $\mathscr{A}/\mathscr{B}(X)$ 可測関数列 (f_n) で，f を一様に近似するものが存在する．

命題 D.1 の (iii) で考えたように関数 f が $\mathscr{A}/\sigma(X^*)$ 可測であるとき，f は弱可測 (weakly measurable) であるという．

証明 (i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明． f は強可測であるとし，f を各点近似する単関数の列 (s_n) を任意に選ぶ．測度論において良く知られているように，単関数 s_n は $\mathscr{A}/\mathscr{B}(X)$ 可測である．X は距離空間だから可測関数の各点収束極限は可測であり，ゆえに f も $\mathscr{A}/\mathscr{B}(X)$ 可測となる．また，

$$f(\Omega) \subset \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} s_n(\Omega)}$$

であって，s_n は有限個の値しか取らないから，$f(\Omega)$ は可分である．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． $f\colon \Omega \to X$ は $\mathscr{A}/\mathscr{B}(X)$-可測で，$f(\Omega)$ は可分であると仮定する．$X_0 \subset X$ を $f(\Omega)$ を含む X の可分な閉部分空間とし，F を X_0 の可算部分集合で，X_0 で稠密なものとする．全単射 $y\colon : \mathbb{N} \to F$ により，F の元に適当に番号をつけておく．

$n \in \mathbb{N}$ に対して $F_n = y(\{0,\dots,n\})$ とし，写像 $\varphi_n\colon X_0 \to F_n$ を以下の手順で定義する．$i \in \{0,\dots,n\}$ に対して

$$E_i = \left\{ x \in X_0 \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall j \in \{0,\dots,i-1\},\ \|x-y_i\| < \|x-y_j\|, \\ \forall j \in \{i \le j \le n\},\ \|x-y_i\| \le \|x-y_j\| \end{array} \right\}$$

と定義する．このとき

$$E_i = \bigcap_{j<i}\{x \in X_0 \mid \|x-y_i\| < \|x-y_j\|\} \cap \bigcap_{i\le j}\{x \in X_0 \mid \|x-y_i\| \le \|x-y_j\|\}$$

であるから，ノルムの連続性と $X_0 \in \mathscr{A}$ であることから，$E_i \in \mathscr{B}(X_0)$ であることがわかる．ここで

$$\varphi_n(x) = \sum_{0\le i\le n} 1_{E_i} y_i$$

と定義すれば，$\varphi_n\colon X_0 \to F_n$ は $\mathscr{B}(X_0)$-可測な単関数である．φ_n は，$x \in X_0$ に対して F_n の元で x の最も近くにあるもののうち，特に添え字が最小のものを対応させるような関数である．

このように定めた関数を $\varphi_n\colon X_0 \to X_0$ と見なしたとき，関数列 (φ_n) は id_{X_0} に各点収束していることを示そう．$\varepsilon > 0$ を任意に選べば，F が X_0 で稠密であることから $B(x;\varepsilon) \cap F$ は空ではない．特に $F_n \uparrow F$ であることから，ある $N \in \mathbb{N}$ で，$n \ge N$ なら $B(x;\varepsilon) \cap F_n \neq \emptyset$ となるようなものが存在する．このとき $n \ge N$ とすれば，

$$\|x-\varphi_n(x)\| = \inf_{0\le k\le n}\|x-y_k\| < \varepsilon$$

13) ここで $\sigma(X^*)$ は X^* によって生成される σ 代数を表す．

が成り立つ．よって $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ は x に収束する．

$f(\Omega)\subset X_0$ であることに注意し，$f_n=\varphi_n\circ f$ と定義する．このとき f_n は二つの可測関数の合成であるから，$\mathscr{A}/\mathscr{B}(X_0)$-可測となる．さらに f_n を X への関数と思えば，相対位相の定義より f_n は $\mathscr{A}/\mathscr{B}(X)$ 可測であることもわかる．各 f_n の値は有限集合 $F_n\subset X$ に含まれるから，特に f_n は単関数である．先ほど示したように $\varphi_n\to \mathrm{id}_{X_0}$ が各点収束の意味で成り立つから，$f_n\to f$ も各点収束の意味で成り立つ．ゆえに f は強可測関数である．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) の証明． 双対空間 X^* によって生成される σ-代数 $\sigma(X^*)$ は Borel σ 代数 $\mathscr{B}(X)$ に含まれることからわかる．

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) の証明． f は $\mathscr{A}/\sigma(X^*)$ 可測かつ $f(\Omega)$ は可分であると仮定する．V で，$f(\Omega)$ から生成される X の閉部分空間を表すことにする．このとき，V もまた可分となる．実際，C を可算な $f(\Omega)$ の稠密部分空間とすれば

$$\{\lambda_1y_1+\dots\lambda_ny_n \mid n\in\mathbb{N},\ (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{Q}^n,\ (y_1,\dots,y_n)\in C^n\}$$

は可算な V の稠密部分集合である．

V で稠密な可算集合を一つ選んでその元に番号をつけ，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と表しておく．x_n に対して，$x_n^*\in X^*$ を $\|x_n^*\|=1$ かつ $\langle x_n^*,x_n\rangle=\|x_n\|$ となるように選ぶ．このような x_n^* の存在は，Hahn-Banach の定理よりわかる．

$\varepsilon>0$ を任意に選び，$x\in V$ に対して $x_n\in V$ を $\|x-x_n\|<\varepsilon$ となるようにとる．このとき，

$$\begin{aligned}\|x\| &\le \|x_n\|+\varepsilon\\ &=\langle x_n^*,x_n\rangle+\varepsilon\\ &=\langle x_n^*,x\rangle+\langle x_n^*,x_n-x\rangle+\varepsilon\\ &\le \sup_{n\in\mathbb{N}}\langle x_n^*,x\rangle+\|x_n^*\|\|x_n-x\|+\varepsilon\\ &\le \sup_{n\in\mathbb{N}}\langle x_n^*,x\rangle+2\varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ．いま $\varepsilon>0$ は任意に選んだものだったから，これより

$$\|x\|\le\sup_{n\in\mathbb{N}}\langle x_n^*,x\rangle$$

を得る．逆向きの不等号は Hahn-Banach の帰結としてすぐにわかるので，

$$\|x\|=\sup_{n\in\mathbb{N}}\langle x_n^*,x\rangle$$

が従う．

以上の議論より，全ての $\omega\in\Omega$ と $n\in\mathbb{N}$ について

$$\|f(\omega)\|=\sup_{k\in\mathbb{N}}\langle x_k^*,f(\omega)\rangle,\quad \|f(\omega)-x_n\|=\sup_{k\in\mathbb{N}}\langle x_k^*,f(\omega)-x_n\rangle$$

となることがわかる．弱可測性より $\omega \mapsto \langle x_k^*, f(\omega)\rangle$ と $\omega \mapsto \langle x_k^*, f(\omega) - x_n\rangle$ は $\mathscr{A}$-可測となるので，それらの可算個の上限をとったものである $\omega \mapsto \|f(\omega)\|$ と $\omega \mapsto \|f(\omega) - x_n\|$ も $\mathscr{A}$-可測である．

$n \in \mathbb{N}$ とし，$\mathscr{A}$ 可測集合列 $(E_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ を以下の手順で再帰的に定義する．

$$E_{n,0} = \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \|f(\omega) - x_0\| < \frac{1}{2^k}\right\},$$
$$E_{n,k+1} = \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \|f(\omega) - x_{k+1}\| < \frac{1}{2^k}\right\} \setminus \bigcup_{0\le l\le k} E_{n,l}.$$

これらの集合が $\mathscr{A}$ に属することは，$\omega \mapsto \|f(\omega) - x_n\|$ の可測性よりわかる．構成法より明らかに $(E_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ は互いに素な列である．また，(x_n) の稠密性より $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_{n,k} = \Omega$ が成り立つこともわかる．

このように構成した集合列 $(E_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ を用いて

$$f_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} 1_{E_{n,k}} x_k$$

と定義すれば，f_n は可算集合 $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ に値を持つ $\mathscr{A}$-可測関数である．さらに，定義より全ての $\omega \in \Omega$ について，$\|f(\omega) - f_n(\omega)\| < 2^{-n}$ が成り立つ．よって，(f_n) が求めるべき可測関数列である．

(iv) $\Longrightarrow$ (ii) の証明． 可算値の $\mathscr{A}/\mathscr{B}(X)$ 可測関数列 (f_n) を，f を一様に近似するように選ぶ．このとき

$$f(\Omega) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n(\Omega)$$

であるから，$f(\Omega)$ は可分である．また，f は可測関数列 (f_n) の一様収束極限であり，よって各点収束極限でもあるので，X が距離空間であることに注意すれば f も $\mathscr{A}/\mathscr{B}(X)$-可測であることがわかる． □

D.2 Bochner 積分

f が強可測関数なら $\omega \mapsto \|f(\omega)\|$ は実数値の可測関数となり，積分

$$\int_\Omega \|f(\omega)\|\mu(d\omega)$$

が定義できる．この積分が有限値となるとき，f は Bochner 可積分 (Bochner integrable) であるという．Bochner 可積分な f を近似する単関数列 (s_n) をとれば，積分の列 $(\int s_n d\mu)$ は X で収束する．その極限を

$$\int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega)$$

と書き，f の Bochner 積分 (Bochner integral) と名付ける．

命題 D.2（優収束定理） Bochner 可積分関数列 (g_n) は強可測関数 f に各点収束し，ある Bochner 可積分関数 $h\colon \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ で，全ての $\omega \in \Omega$ について $\sup_n \|g_n(\omega)\| \leq h(\omega)$ を満たすものが存在するとする．このとき f はまた Bochner 可積分で，

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n(\omega)\mu(d\omega) = \int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega)$$

が成り立つ．

証明 Fatou の補題を用いれば

$$\int_\Omega \|f(\omega)\|\mu(d\omega) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \|g_n(\omega)\|\mu(d\omega) \leq \int_\Omega h(\omega)\mu(d\omega) < \infty$$

となるので，f の Bochner 可積分性がわかる．さらに

$$\left\| \int_\Omega g_n(\omega)\mu(d\omega) - \int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega) \right\| \leq \int_\Omega \|g_n(\omega) - f(\omega)\|\mu(d\omega)$$

という評価と実数値関数についての優収束定理より，積分の収束が示される． □

閉作用素と積分作用素は，適当な条件のもと可換となる．

命題 D.3 $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ は σ-有限であると仮定する．T を Banach 空間 X から Y への閉作用素とし，f を X 値の強可測関数とする．f と $\omega \mapsto Tf(\omega)$ がともに Bochner 可積分ならば $\int_\Omega f d\mu \in \operatorname{Dom} T$ であって，

$$T\left(\int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega)\right) = \int_\Omega Tf(\omega)\mu(d\omega)$$

が成り立つ．

命題中の等式左辺の積分は X 値関数の Bochner 積分であり，右辺の積分は Y 値関数の Bochner 積分であることに注意しておく．特に T が有界作用素ならば $\omega \mapsto Tf(\omega)$ は強可測であり，自明な評価 $\|Tf(\omega)\| \leq \|T\|\|f(\omega)\|$ と f の可積分性より Tf の可積分性が導出される．したがって，命題 D.3 の等式が適用できることになる．

本ノートで与える命題 D.3 の証明は，Diestel and Uhl [6, Chapter II, Theorem 6] を参考にした．Arendt et al. [2, Proposition 1.1.7] にも見通しの良い証明が載っている．

命題 D.3 の証明のために，強可測関数の近似に関する補題を用意する．

補題 D.4 T を Banach 空間 X から Y への線形作用素とし，$f\colon \Omega \to \operatorname{Dom} T \subset X$ を強可測関数とする．また $\omega \mapsto Tf(\omega)$ は強可測であると仮定する．このとき，全ての $\varepsilon > 0$ に対して，ある（強）可測関数 $\varphi\colon \Omega \to X$ で[14] $\varphi(\Omega)$ が可算かつ $\varphi(\Omega) \subset \operatorname{Dom} T$，そして

$$\sup_{\omega\in\Omega} \|f(\omega) - \varphi(\omega)\|_X < \varepsilon, \quad \sup_{\omega\in\Omega} \|Tf(\omega) - T\varphi(\omega)\|_Y < \varepsilon$$

14） 強を括弧書きにしたのは，$\varphi(\Omega)$ が可算ならば可測関数は自然と強可測となるからである．

を満たすものが存在する．

証明 $\varepsilon > 0$ とする．$f\colon \Omega \to X$ は強可測であるから，可算値の可測関数

$$g = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n} x_n$$

を (A_n) が Ω の

$$\sup_{\omega\in\Omega} \|f(\omega) - g(\omega)\|_X < \frac{\varepsilon}{2}$$

となるように選ぶことができる．また，$Tf\colon \Omega \to Y$ も強可測であるから，同様に

$$h = \sum_{m\in\mathbb{N}} 1_{B_m} y_m$$

を (B_n) が Ω の分割であり，かつ

$$\sup_{\omega\in\Omega} \|Tf(\omega) - h(\omega)\|_Y < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たすように選ぶことができる．ここで

$$E_{n,m} = A_n \cap B_m$$

とすれば，$(E_{n,m})$ はまた $\mathscr{A}$ の元からなる Ω の分割である．さらに列 $(\omega_{n,m}) \in \prod_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} E_{n,m}$ を任意に選び，これらを用いて

$$\varphi = \sum_{n,m\in\mathbb{N}} 1_{E_{n,m}} f(\omega_{n,m})$$

と定めよう．各 (n,i) について $f(\omega_{n,i}) \in \operatorname{Dom} T$ であるから，$\varphi(\Omega) \subset \operatorname{Dom} T$ であることに注意しておく．後は，このように構成 φ が所望の条件を満たすことを示せばよい．

$\omega \in E_{n,m} \subset A_n$ なら，

$$\begin{aligned}
\|f(\omega) - \varphi(\omega)\|_X &\le \|f(\omega) - g(\omega)\|_X + \|g(\omega) - \varphi(\omega)\|_X \\
&= \|f(\omega) - g(\omega)\|_X + \|g(\omega_{n,m}) - f(\omega_{n,m})\|_X \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

である．$(E_{n,m})$ は Ω の分割であるから，これより

$$\sup_{\omega\in\Omega} \|f(\omega) - \varphi(\omega)\|_X \le \varepsilon$$

がわかる．いま $(E_{n,m})$ が互いに素であることと T が線形作用素であることに注意すれば，Tf は

$$T\varphi = \sum_{n,m\in\mathbb{N}} 1_{E_{n,m}} Tf(\omega_{n,m})$$

と書けることに注意する．再び $\omega \in E_{n,m} \subset B_m$ とすれば，

$$\begin{aligned}\|Tf(\omega) - T\varphi(\omega)\|_Y &\le \|Tf(\omega) - h(\omega)\|_Y + \|h(\omega) - T\varphi(\omega)\|_Y \\ &= \|Tf(\omega) - h(\omega)\|_Y + \|h(\omega_{n,m}) - Tf(\omega_{n,m})\|_Y \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

となる．これより

$$\sup_{\omega\in\Omega}\|Tf(\omega) - T\varphi(\omega)\|_Y \le \varepsilon$$

がしたがう． □

命題 D.3 の証明　$f\colon \Omega \to X$ と $Tf\colon \Omega \to Y$ は強可測であり，ともに μ-Bochner 可積分であるとする．

Step 1：μ が有限測度の場合． 可測関数列 (φ_n) を，各 φ_n が Ω の分割 $(A_{n,i})_{i\in\mathbb{N}}$ と列 $(x_{n,i})_i \in (\operatorname{Dom} T)^{\mathbb{N}}$ によって

$$\varphi_n = \sum_{i\in\mathbb{N}} 1_{A_{n,i}} x_{n,i}$$

と表現され，かつ全ての n について

$$\sup_{\omega\in\Omega}\|f(\omega) - \varphi_n(\omega)\|_X \le \frac{1}{n}, \quad \sup_{\omega\in\Omega}\|Tf(\omega) - T\varphi_n(\omega)\|_Y \le \frac{1}{n}$$

が成り立つように選ぶ．このような可測関数列の存在は，補題 D.4 より従う．いま μ は非負有限測度であるから，各 φ_n と $T\varphi_n$ は Bochner 可積分であり，

$$\int_\Omega \|f(\omega) - \varphi_n(\omega)\|_X \mu(d\omega) + \int_\Omega \|Tf(\omega) - T\varphi_n(\omega)\|_Y \mu(d\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

が満たされている．特に，

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \varphi_n d\mu = \int_\Omega f d\mu, \quad \lim_{n\to\infty}\int_\Omega T\varphi_n d\mu = \int_\Omega Tf d\mu$$

が成り立つ．いま，各 φ_n の表現と $(A_{n,i})_{i\in\mathbb{N}}$ が互いに素であることから，

$$\int_\Omega \varphi_n d\mu = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_{n,i}) x_{n,i},$$

$$\int_\Omega T\varphi_n d\mu = \int_\Omega \sum_{i\in\mathbb{N}} 1_{A_{n,i}} T x_{n,i} d\mu = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_{n,i}) T x_{n,i}$$

が従う[15)]．さて，上に出てきた級数の部分和を考えると，T の線形性より

$$T\left(\sum_{0\le i\le k} \mu(A_{n,i}) x_{n,i}\right) = \sum_{0\le i\le k} \mu(A_{n,i}) T x_{n,i}$$

15）　測度の性質よりこれらの級数の収束は無条件収束なので，$\sum_{i\in\mathbb{N}}$ と書いても誤解の恐れはない．

となる．この式で $k \to \infty$ とすれば，T が閉作用素であることから $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_{n,i})x_{n,i} \in \operatorname{Dom} T$ かつ

$$T\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_{n,i})x_{n,i}\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_{n,i})Tx_{n,i}$$

を得る．なお，この等式を積分の記号で書き直せば，

$$T\left(\int_\Omega \varphi_n d\mu\right) = \int_\Omega T\varphi_n d\mu$$

ということになる．ここで

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \varphi_n d\mu = \int_\Omega f d\mu, \quad \lim_{n\to\infty}\int_\Omega T\varphi_n d\mu = \int_\Omega Tf d\mu$$

であったことを思い出せば，T が閉作用素であることに注意して極限操作を行うことで，$\int_\Omega f\mu \in \operatorname{Dom} T$ かつ

$$T\left(\int_\Omega f d\mu\right) = \int_\Omega Tf d\mu$$

となり，求める等式が得られた．

Step 2：μ が σ-有限の場合． $\mathscr{A}$ の元の増大列列 $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を，$\Omega_n \uparrow \Omega$ かつ $\mu(\Omega_n) < \infty$ となるように選ぶ．このとき，f と Tf の Bochner 可積分性に注意すれば step 1 の結果より $\int_{\Omega_n} f d\mu \in \operatorname{Dom} T$ かつ

$$T\left(\int_{\Omega_n} f d\mu\right) = \int_{\Omega_n} Tf d\mu$$

となる．いま f と Tf はともに Bochner 可積分だから，優収束定理により

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_n} f d\mu = \int_\Omega f d\mu \quad \text{in } X,$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_n} Tf d\mu = \int_\Omega Tf d\mu \quad \text{in } Y$$

が成り立っている．以上の条件と T が閉作用素であることを用いれば，$\int_\Omega f d\mu \in \operatorname{Dom} T$ かつ

$$T\left(\int_\Omega f d\mu\right) = \int_\Omega Tf d\mu$$

がわかる． □

Bochner 積分を用いて，Banach 空間値連続関数が 0 となる条件を特徴づける．

命題 D.5 X を Banach 空間とし，$x\colon [0,T] \to X$ を連続関数とする．このとき，$x = 0$ となるための必要十分条件は，全ての $t \in [0,T]$ について

$$\int_0^t x(s)\, ds$$

が成り立つことである．

証明　$x^* \in X^*$ を任意に選ぶと，仮定より全ての $t \in [0,T]$ について

$$\left\langle x^*, \int_0^t x(s)\,ds \right\rangle = 0$$

が成り立つ．有界線形作用素 $x^* \colon X \to \mathbb{R}$ に命題 D.3 を適用すれば

$$\left\langle x^*, \int_0^t x(s)\,ds \right\rangle = \int_0^t \langle x^*, x(s)\rangle ds$$

となるので，先ほどの式とあわせて，全ての $t \in [0,T]$ について

$$\int_0^t \langle x^*, x(s)\rangle ds = 0$$

が成り立つことがわかる．したがって連続関数 $s \mapsto \langle x^*, x(t)\rangle$ は恒等的に 0 である[16)]．いま x^* は任意に選んでいたから，特に任意に固定した $t \in [0,T]$ について，

$$\forall x^* \in X^* \quad \langle x^*, x(t)\rangle = 0$$

が成り立つ．したがって，任意に固定した $t \in [0,T]$ について $x(t) = 0$ となり，ゆえに $x = 0$ が従う．□

E　文献について

C_0-半群について書いてあるテキストを簡単に紹介する．筆者はその方面は完全なる素人であるので，全くもって網羅的なリストにはなっていないし，標準的なリストに近いかもわからないが悪しからず．

Yosida [19] と Hille and Phillips [12] 作用素半群における古典である．C_0-半群の（おそらく）もっとも標準的な教科書は Pazy [16] だろう．もっと現代的なところだと，Arendt et al. [2], Altomare et al. [1], Banasiak and Arlotti [3] などがある．他にも Reed and Simon [17] や Brezis [5] なども参考になる．和書では宮寺 [21] が作用素半群に詳しい．C_0-半群と Markov 過程の関係については Blumenthal and Getoor [4]，Ethier and Kurtz [9], Ma and Röckner [13] などを参考にされたい．

位相線形空間については，Rudin [18] や Narici and Beckenstein [15] を参考にした．また，Bochner 積分については Arendt et at. [2]，Diestel and Uhl [6]，そして Dinculeanu [7] を参照した．さらに，一部の用語については岩波数学辞典 [20] に従った．

References

[1] Francesco Altomare et al. *Markov Operators, Positive Semigroups and Approximation Processes.* De Gruyter Studies in Mathematics 61. De Gruyter, Berlin, 2014. xii+313 pp. ISBN: 978-3-11-037274-8; 978-3-11-036697-6; 978-3-11-038641-7.

16)　ここに連続性を用いる．単なる可積分関数では「すべての t について」までは出てこない．

[2] Wolfgang Arendt et al. *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*. 2nd ed. Monographs in Mathematics 96. Birkhäuser Basel, 2011. xii+540. ISBN: 978-3-0348-0087-7. DOI: 10.1007/978-3-0348-0087-7. URL: https://www.springer.com/gp/book/9783034800860.

[3] Jacek Banasiak and Luisa Arlotti. *Perturbations of Positive Semigroups with Applications*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag London, 2006. DOI: 10.1007/1-84628-153-9.

[4] R. M. Blumenthal and R. K. Getoor. *Markov Processes and Potential Theory*. Academic Press, 1968.

[5] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential EquationsEquations*. Universitext. Springer-Verlag New York, 2011. DOI: 10.1007/978-0-387-70914-7. URL: http://www.springer.com/la/book/9780387709130.

[6] J. Diestel and J. J. Uhl Jr. *Vector measures*. Mathematical Surveys and Monographs 15. Providence, R. I.: American Mathematical Society, 1977. xiii+322.

[7] Nicolae Dinculeanu. *Vector Integration and Stochastic Integration in Banach Spaces*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs, and Tracts. John Wiley & Sons, 2000. DOI: 10.1002/9781118033012. URL: http://as.wiley.com/WileyCDA/WileyTitle/productCd-0471377384.html.

[8] Ryszard Engelking. *General topology*. Revised and completed edition. Sigma Series in Pure Mathematics 6. Translated from the Polish by the author. Heldermann Verlag, Berlin, 1989, pp. viii+529. ISBN: 3-88538-006-4.

[9] Stewart N. Ethier and Thomas G. Kurtz. *Markov processes. Characterization and convergence*. Wiley Series in Probability and Statistics. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1986. DOI: 10.1002/9780470316658.

[10] Klaas Pieter Hart, Jun-iti Nagata, and Jerry E. Vaughan, eds. *Encyclopedia of General Topology*. Elsevier Science, 2004, pp. x+526. ISBN: 0-444-50355-2. URL: https://www.elsevier.com/books/encyclopedia-of-general-topology/hart/978-0-444-50355-8.

[11] 日合 文雄 and 柳 研二郎. **ヒルベルト空間と線形作用素**. 牧野書店, 1995.

[12] Einar Hille and Ralph S. Phillips. *Functional analysis and semi-groups*. Revised edition. American Mathematical Society Colloquium Publications 31. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1957. xii+808.

[13] Zhi-Ming Ma and Michael Röckner. *Introduction to the Theory of (Non-Symmetric) Dirichlet Forms*. Universitext. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992. DOI: 10.1007/978-3-642-77739-4. URL: http://www.springer.com/la/book/9783540558484.

[14] 宮島 静雄. **関数解析**. 横浜図書, 2014.

[15] Lawrence Narici and Edward Beckenstein. *Topological vector spaces*. 2nd ed. Vol. 296. Pure and Applied Mathematics. Boca Raton, FL: CRC Press, 2011. xviii+610. ISBN: 978-1-58488-866-6.

[16] Amnon Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences 44. Springer-Verlag New York, 1983. DOI: 10.1007/978-1-4612-5561-1. URL: https://www.springer.com/jp/book/9780387908458.

[17] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*. Academic Press, 1975.

[18] Walter Rudin. *Functional Analysis*. 2nd ed. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, 1991.

[19] Kosaku Yosida. *Functional Analysis*. 6th ed. Classics in Mathematics. Reprint of the 1980 Edition (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 123). Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995. XVI+504. DOI: 10.1007/978-3-642-61859-8. URL: https://www.springer.com/gp/book/9783540586548.

[20] 日本数学会, ed. **岩波数学辞典**. 第 4 版. 岩波書店, 2007.

[21] 宮寺 功. **関数解析**. 第 2 版. 東京: 理工学社, 1996. ISBN: 9784844501237.

索引