関数解析ノート II
Banach 空間のテンソル積 Ver. 1.2

平井祐紀

2020 年 12 月 1 日

編集履歴
2018/9/24 ひとまず完成．Ver. 1.0
2020/4/15 誤植を訂正．Ver. 1.1
2020/12/1 誤植を訂正．Ver. 1.2.

目次

1 導入

本ノートでは，Banach 空間のテンソル積に関する，ごくごく基礎的な事項を解説する．X と Y を Banach 空間としたとき，その代数的テンソル積 $X \otimes Y$ は次の意味での普遍性を持つ線形空間であった．

> V を線形空間とする．任意の双線形写像 $b\colon X \times Y \to V$ に対して，線形写像 $T\colon X \otimes Y \to V$ で，全ての $x, y \in (X, Y)$ に対して $T(x \otimes y) = b(x, y)$ を満たすものが存在する．

X と Y が有限次元なら，$\dim(X \otimes Y) = \dim X \cdot \dim Y$ となるので，テンソル積は線形空間の「掛け算」のようなものだと考えることができる．

X と Y が Banach 空間なら，その直和空間 $X \oplus Y$ には自然なノルム $\|(x,y)\|_{X\oplus Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$ が定まるのであった．では，$X \otimes Y$ にはどのような方法で自然なノルムを考えることができるだろうか？安直な考えであるが，$\|x \otimes y\| = \|x\|_X \|y\|_Y$ を満たすようなノルムというのは誰でも思いつきそうである．これは実にいい考えだが，このような条件を満たすノルムは $X \otimes Y$ 上に一意に定まるわけではない．先ほどの条件を満たすノルムとしてクロスノルムと呼ばれるものがあるが，クロスノルムは無数に存在しうる．そのうち特に重要なのは，クロスノルムのうち最大のもの（射影的ノルム）と最小のもの（単射的ノルム）である．本ノートでは，主にこれらのノルムと，$X \otimes Y$ をそれらのクロスノルムで完備化した空間について考えていくことにする．

以下，本ノートで使う記号をいくつか準備する．係数体 $\mathbb{K}$ は，常に $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ のどちらかを表すものとする．$\mathrm{Hom}(V,W)$ は $\mathbb{K}$ 線形空間 V から W への線形写像全体を，$\mathrm{Hom}^{(2)}(V,W;U)$ は $V \times W$ から $\mathbb{K}$-線形空間 U への双線形写像全体の空間を表すものとする．V の代数的双対空間は $V^\sharp$ で表現する．

X,Y が Banach 空間の時は，$L(X,Y)$ で X から Y への有界線形写像全体を表すことにする．同様にして，さらに Z も Banach 空間の時，$L^{(2)}(X,Y;Z)$ で $X \times Y$ から Z への有界双線形写像全体の空間を表すこととする．X の（位相的）双対空間は X^* で表す．

2 線形空間の代数的テンソル積

Banach 空間のテンソル積を考える前に，まずは線形空間のテンソル積の定義と基本性質を復習しよう．

テンソル積を扱う前に，線形空間の直和について復習しておく．$\mathbb{K}$-線形空間の族 $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとき，その直和は次のように定義される線形空間であった．

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda = \left\{ (x_\lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \;\middle|\; x_\lambda \neq 0 \text{ となる } \lambda \text{ は有限個} \right\}$$

写像 $j_\lambda : V_\lambda \to \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ を次のように与える：$x_\lambda \in V_\lambda$ に対して $y = (y_\lambda) = j_\lambda(x_\lambda)$ は

$$y_\kappa = \begin{cases} x_\lambda & \kappa = \lambda \\ 0 & \kappa \neq \lambda \end{cases}$$

を満たすものとする．この写像 $j_\lambda : V_\lambda \to \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ を V_λ から $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ への標準的な単射とよぶ．これは明らかに線形写像である．$j_\lambda(V_\lambda)$ を考えることにより V_λ は $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ に埋め込まれる．また，$x \in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ に対して

$$x = \sum_{\lambda\in\Lambda} j_\lambda(\mathrm{pr}_\lambda x)$$

がなりたつ．（ただし pr_λ は射影 $\prod V_\lambda \to V_\lambda$ である．）このような記法の下で，線形空間の直和は次の意味での普遍性をもつ：線形写像の族 $(f_\lambda : V_\lambda \to W)$ が与えられたとき，線形写像 $g : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \to W$ で，全ての

$\lambda \in \Lambda$ について次の図式を可換にするものがただひとつ存在する．

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \arrow[r, "g"] & W \\ V_\lambda \arrow[u, "j_\lambda"] \arrow[ur, "f_\lambda"'] & \end{tikzcd}.$$

全ての $\lambda \in \Lambda$ について $V_\lambda = V$ が成り立つときは，$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ を特に $V^{\oplus \Lambda}$ と表すことにする．

テンソル積を導入する前に，一つ有用な補題を用意しておこう．X を集合とし，$g \in V^X = \mathrm{Map}(X, V)$ とする．g の形式的一次結合を $a \in \mathbb{K}^{\oplus X}$ に対して

$$\sum_{x \in X} a(x)g(x) := \sum_{x \in X, a(x) \neq 0} a(x)g(x)$$

と定める．特に $V = \mathbb{K}$ のとき, $g = 1 \in \mathbb{K}^X$ とすれば, g の形式的無限和は族 $a = (a(x))_{x \in X}$ の和 $\sum_{x \in X} a(x)$ を与える．

$x \in X$ に対し，$e_x \in \mathbb{K}^{\oplus X}$ を

$$e_x(y) = \begin{cases} 1 & y = x \\ 0 & y \neq x \end{cases}$$

と定めることにしよう．この記法のもと，任意の $a \in \mathbb{K}^{\oplus X}$ に対し $a = \sum_{x \in X} a(x)e_x$ が成り立つことに注意しておく．

補題 2.1. V を $\mathbb{K}$ 線形空間とする．写像 $F : \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^{\oplus X}, V) \to V^X$ を $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^{\oplus X}, V)$ に対して写像 $X \ni x \mapsto f(e_x) \in V$ を対応させることで定める．このとき F は可逆である．

証明. F の逆写像 $G : V^X \to \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^{\oplus X}, V)$ を実際に構成する．$g \in V^X$ に対して $G(g) \colon \mathbb{K}^{\oplus X} \to V$ を $G(g)(a) = \sum_{x \in X} a(x)g(x) \in V$ で定めることにする．この G が F の逆写像であることを示せばよい．$f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^{\oplus X}, V)$ とすれば任意の $a \in \mathbb{K}^{\oplus X}$ について

$$\begin{aligned} ((G \circ F)(f))(a) &= G(F(f(a))) \\ &= \sum_{x \in X} a(x)F(f)(x) \quad (\because G \text{ の定義}) \\ &= \sum_{x \in X} a(x)f(e_x) \quad (\because F \text{ の定義}) \\ &= f\left(\sum_{x \in X} a(x)e_x\right) \quad (\because f \text{ の線形性}) \\ &= f(a) \end{aligned}$$

が成り立つ．すなわち任意の $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^{\oplus X}, V)$ について $(G \circ F)(f) = f$ であり，$G \circ F = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^{\oplus X}, V)}$ がわかる．同様にして任意の $g \in V^X$ について

$$((F \circ G)(g))(x) = G(g)(e_x) = \sum_{x \in X} e_x g(x) = g(x)$$

が成り立つこともわかるので，$F \circ G = \mathrm{id}_{V^X}$ となる．したがって G は F の逆写像である． □

準備が出来たところで、いよいよ線形空間のテンソル積を構成しよう．[*1]$\mathbb{K}$ を体とし，V, W を $\mathbb{K}$ 線形空間とする．先ほどの記号を用いて $e_{x,y} = e_{(x,y)} \in \mathbb{K}^{\oplus V\times W}$ と定義することにする．$\mathbb{K}^{\oplus V\times W}$ の部分空間 R_1, R_2, R_3 を以下のようにおく．

$$\begin{aligned} R_1 &= \mathrm{Span}(\{e_{x+x',y} - e_{x,y} - e_{x',y} \mid x, x' \in V, y \in W\}) \\ R_2 &= \mathrm{Span}(\{e_{x,y+y'} - e_{x,y} - e_{x,y'} \mid x \in V, y, y' \in W\}) \\ R_3 &= \mathrm{Span}(\{e_{\lambda x,y} - \lambda e_{x,y}, e_{x,\lambda y} - \lambda e_{x,y} \mid x, x' \in V, y \in W\}) \end{aligned}$$

部分空間 $R = R_1 + R_2 + R_3$ に対して $V \otimes W = \mathbb{K}^{\oplus V\times W}/R$ と定義し，これを V と W のテンソル積 (tensor product) という．さらに $x \otimes y = [e_{x,y}] \in V \otimes W$ と定義し[*2]，これを x と y のテンソル積と呼ぶことにする．

命題 2.2. 写像 $\otimes : V \times W \ni (x, y) \mapsto x \otimes y \in V \otimes W$ は双線形写像である．さらに，$V \times W$ は次の意味での普遍性を持つ：任意の $\mathbb{K}$ 線形空間 U と任意の双線形写像 $g : V \times W \to U$ に対して，以下の図式を可換にする $f \in \mathrm{Hom}(V \otimes W, U)$ が唯一つ存在する．

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\otimes"'] & U \\ V \otimes W \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

証明. 任意の線形空間 U に対して可逆写像：$\mathrm{Hom}(V \otimes W, U) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{(2)}(V, W; U)$ を実際に構成しよう．$F : \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^{\oplus V\times W}, U) \to U^{V\times W}$ を補題 2.1 における可逆写像とする．$p : \mathbb{K}^{\oplus V\times W} \to V \otimes W$ を商集合への標準全射とし，p^* を

$$\begin{aligned} p^* : \mathrm{Hom}(V \otimes W, U) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^{\oplus V\times W}, U) \\ f &\longmapsto f \circ p \end{aligned}$$

で定まる単射とする．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^{\oplus V\times W}, U) \arrow[r, "F"] & U^{V\times W} \\ \mathrm{Hom}(V \otimes W, U) \arrow[u, "p^*"] & \mathrm{Hom}^{(2)}(V, W; U) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

ここで，$\mathrm{Im}\, p^*$ への F の制限が可逆写像：$\mathrm{Im}\, p^* \to \mathrm{Hom}^{(2)}(V, W; U)$ を定めることを示そう．

> $h \in \mathrm{Im}\, p^*$ と $h(R) = 0$ が同値であることを示そう．$h \in \mathrm{Im}\, p^*$ とすればある f によって $h = f \circ p$ とかけるから，$h(R) = f(p(R)) = f([0]) = 0$ である．逆に，$h(R) = 0$ のとき $f([x]) = h(x)$ とすれば $h(R) = 0$ よりこの写像 f は well-defined で，$h(x) = f([x]) = f(p(x))$ となる．

$h \in \mathrm{Im}\, p^*$ と $g = F(h) : V \times W \to U$ が双線形写像であることが同値であることを示せばよろしい．$h(R) = 0$ と $h(R_1) = h(R_2) = h(R_3) = 0$ は同値だが

$$\begin{aligned} g(x + x', y) - g(x, y) - g(x', y) &= h(e_{x+x',y}) - h(e_{x,y}) - h(e_{x',y}) \\ &= h(e_{x+x',y} - e_{x,y} - e_{x',y}) \end{aligned}$$

[*1] テンソル積の構成法はここに述べたものが全てではないし，重要なのは構成法ではなくその性質であることに注意しておく．
[*2] ここでの $[u]$ は u の同値類を表す．

より，

$$g(x+x',y)=g(x,y)+g(x',y)\quad (x,x'\in V, y\in W)$$

と $h(R_1)=0$ は同値である．R_2,R_3 についても同様の議論を行えば g が双線形であることと $h(R)=0$ であることは同値であることが示される．したがって

$$F|_{\operatorname{Im}p^*}:\operatorname{Im}p^*\to\operatorname{Hom}^{(2)}(V,W;U)$$

可逆である．さらに $p^*:\operatorname{Hom}(V\otimes W,U)\to\operatorname{Im}p^*$ は可逆だから $F\circ p^*:\operatorname{Hom}(V\otimes W,U)\to\operatorname{Hom}^{(2)}(V,W;U)$ も可逆である．

以上の結果より $g:V\times W\to U$ を双線形写像とすれば，$f\in\operatorname{Hom}(V\otimes W,U)$ で $g=(F\circ p^*)(f)$ を満たすものがただひとつ存在する．これはすなわち

$$g(x,y)=(F(p^*(f)))(x,y)=F(f\circ p(e_{x,y}))=f([e_{x,y}])=f(x\otimes y)$$

ということである．

特に $U=V\otimes W$ および $f=\mathrm{Id}_{V\otimes W}$ とおけば $\mathrm{Id}_{V\otimes W}\circ\otimes=\otimes:V\times W\to V\otimes W$ は双線形である． □

$\mathbb{K}$ 双線形写像 $\otimes:V\times W\to V\otimes W$ を普遍双線形写像などと呼ぶ．普遍双線形写像 $\otimes$ は一般には全射ではなく，構成法からは $V\otimes W$ の元がどのような形をしているかは分からない．しかし，命題 2.2 の意味での普遍性により $V\otimes W$ 上の線形写像は $\otimes:V\times W\to V\otimes W$ の像の上で決まれば一意に定まることがわかる．その意味では，$x\otimes y$ の形の元は $V\otimes W$ の中で十分にたくさんあると言える．

線形写像 $f:V\to V'$ と $g:W\to W'$ が与えられたとき，それらのテンソル積を考えることが出来る．f と g に対して，双線形写像 $b:V\times W\to V'\otimes X'$ を $b(x,y)=f(x)\otimes g(y)$ と定義する．このとき普遍性より図式

$$\begin{tikzcd}
V\times W \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\otimes"'] & V'\otimes W' \\
V\otimes W \arrow[ur, "f\otimes g"'] &
\end{tikzcd}$$

を可換にする線形写像 $f\otimes g\colon V\otimes W\to V'\otimes W'$ が唯一つ存在するので，それを f と g のテンソル積と呼ぶ．

次の命題の系により $V\otimes W$ の元は，実は $x\otimes y$ なる形の元の有限和で表現できることが明らかになる．

命題 2.3. $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と $(W_\kappa)_{\kappa\in K}$ を線形空間の族とし，$V=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda$，$W=\bigoplus_{\kappa\in K}W_\kappa$ とおく．[*3]線形写像 $g:V\otimes W\to\bigoplus_{\lambda,\kappa}V_\lambda\otimes W_\kappa$ を $g(x\otimes y)\to(x_\lambda\otimes y_\kappa)_{\lambda,\kappa}$ で定める[*4]．このとき g は同型写像である．

証明. g の逆写像 h を次の手順で構成する：標準単射 $i_\lambda:V_\lambda\to V$, $j_\kappa:W_\kappa\to W$ に対して $h_{\lambda\kappa}=i_\lambda\otimes j_\kappa:V_\lambda\otimes W_\kappa\to V\times W$ と定義し，この族 $(h_{\lambda\kappa})$ に対応する線形写像：$\bigoplus V_\lambda\otimes W_\kappa\to V\otimes W$ を h とする．（直和の普遍性.）

(1)
$$\begin{tikzcd}
\bigoplus V_\lambda\otimes W_\kappa \arrow[r, "h"] & V\otimes W \\
V_\lambda\otimes W_\kappa \arrow[u, "l_{\lambda\kappa}"] \arrow[ur, "h_{\lambda\kappa}=i_\lambda\otimes j_\kappa"'] &
\end{tikzcd}$$

[*3] 一般に $(V_i)_{i\in I}$ の直和を $\bigoplus_{i\in I}V_i:=\{(x_i)_{i\in I}\mid x_i\neq 0$ となる i は有限個 $\}$ と定める．

[*4] 先ほどの議論よりこれだけで線形写像 g は一意に定まる．

この h が実際に g の逆写像になっていることを示せばよい．標準単射：$V_\lambda \otimes W_\kappa \to \bigoplus V_\lambda \otimes W_\kappa$ を $l_{\lambda\kappa}$ で表せば，

$$\begin{aligned} h(g(x \otimes y)) &= h((x_\lambda \otimes y_\kappa)_{\lambda\kappa}) \\ &= h\left(\sum_{\lambda,\kappa} l_{\lambda\kappa}(x_\lambda \otimes y_\kappa)\right) \\ &= \sum_{\lambda,\kappa} h(l_{\lambda,\kappa}(x_\lambda \otimes y_\kappa)) \qquad (\because h \text{ の線形性}) \\ &= \sum_{\lambda,\kappa} h_{\lambda\kappa}(x_\lambda \otimes y_\kappa) \qquad (\because (1)) \\ &= \sum_{\lambda,\kappa} i_\lambda \otimes j_\kappa(x_\lambda \otimes y_\kappa) \\ &= \sum_{\lambda,\kappa} i_\lambda(x_\lambda) \otimes j_\kappa(y_\kappa) \\ &= \left(\sum_\lambda i_\lambda(x_\lambda)\right) \otimes \left(\sum_\kappa j_\kappa(y_\kappa)\right) \\ &= x \otimes y \qquad (\because \otimes \text{ の双線形性}) \end{aligned}$$

線形写像 $h \circ g$ は $\mathrm{Span}\{x \otimes y; (x, y) \in V \times W\}$ 上で恒等写像[*5]と一致．よって $h \circ g = \mathrm{Id}_{V \otimes W}$ である．

次に $g \circ h$ が恒等写像：$\bigoplus V_\lambda \otimes W_\kappa \to \bigoplus V_\lambda \otimes W_\kappa$ であることを示そう．任意の λ, κ で $(g \circ h) \circ l_{\lambda\kappa} = l_{\lambda\kappa}$ となることを示せば，直和の普遍性より $g \circ h = \mathrm{id}$ が分かる．

$$\begin{tikzcd} \bigoplus V_\lambda \otimes W_\kappa \arrow[r, "g \circ h"] & \bigoplus V_\lambda \otimes W_\kappa \\ V_\lambda \otimes W_\kappa \arrow[u, "l_{\lambda\kappa}"] \arrow[ur, "l_{\lambda\kappa}"'] & \end{tikzcd}$$

任意の $(x_\lambda, y_\kappa) \in V_\lambda \times W_\kappa$ に対して

$$g(h(l_{\lambda\kappa} x_\lambda \otimes y_\kappa)) = g(i_\lambda(x_\lambda) \otimes j_\kappa(y_\kappa)) = l_{\lambda\kappa}(x_\lambda \otimes y\kappa)$$

である．線形写像 $l_{\lambda\kappa}$ と $(g \circ h) \circ l_{\lambda\kappa}$ は $x_\lambda \otimes y_\kappa$ なる形の元では一致するから，全体でも一致する． □

系 2.4. V, W を $\mathbb{K}$ ‐線形空間として，$(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, (b_\kappa)_{\kappa \in K}$ をそれぞれ V, W の基底とする．このとき $(a_\lambda \otimes b_\kappa)_{\lambda,\kappa}$ は $V \otimes W$ の基底である．

証明．同型：$\bigoplus_\lambda \mathbb{K} a_\lambda \xrightarrow{\simeq} V$ および $\bigoplus_\kappa \mathbb{K} b_\kappa \xrightarrow{\simeq} W$ を考えれば命題 2.3 より分かる． □

系 2.4 より全ての $z \in V \otimes W$ は $z = \sum_{\text{有限和}} x_i \otimes y_i$ の様な表現を持つことがわかるが，この表示は一意的ではない．実際，$x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ とすれば，$0 = x \otimes y + (-x) \otimes y$ となり，異なる 2 通りの表現を得る．

3 Banach 空間の代数的テンソル積

いよいよ Banach 空間 X, Y のテンソル積を考えるのだが，まずは $X \otimes Y$ にノルムを入れる前に，$X \otimes Y$ がどのような線形空間になるかを確かめておこう．これはなかなか難しい問いだが，次のような答えが知られ

[*5] これはもちろん線形．

ている．Banach 空間 X，Y に対して，

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}(X,Y) &= \{T \in \mathrm{Hom}(X,Y) \mid \dim T(X) < \infty\} \\
\mathscr{F}_{w^*}(X^*,Y) &= \{T \in \mathscr{F}(X^*,Y) \mid T \text{ は } \sigma(X^*,X) \text{ と } Y \text{ のノルム位相に関して連続 }\}
\end{aligned}
$$

と定義する．

命題 3.1. $X \otimes Y$ は $\mathscr{F}_{w^*}(X^*,Y)$ と（線形空間として）同型である．

命題 3.1 を証明するために一つ補題を用意しよう．

補題 3.2. X と Y を Banach 空間すれば，

$$\{a \otimes b \in (X \otimes Y)^\sharp \mid a \in X^* \ b \in Y^*\}$$

は $X \otimes Y$ の点を分離する．

証明． $(x_i)_{i\in I}$ と $(y_j)_{j\in J}$ をそれぞれ X と Y の（代数的な意味での）基底とする．このとき，$(x_i \otimes y_j)_{(i,j)\in I\times J}$ は $X \otimes Y$ の基底となるのであった[*6]．異なる 2 点 z，$z' \in X \otimes Y$ をとり，基底を用いて

$$z = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} x_i \otimes y_j, \qquad w = \sum_{(i,j)\in I\times J} b_{ij} x_i \otimes y_j$$

と表示しておく．上の式に出てくる和は有限個の項を除いて 0 だから，特にある有限集合 $I_0 \times J_0 \subset I \times J$ が存在して[*7]，

$$z = \sum_{(i,j)\in I_0\times J_0} a_{ij} x_i \otimes y_j, \qquad w = \sum_{(i,j)\in I_0\times J_0} b_{ij} x_i \otimes y_j$$

が成り立つとしてよい．$z \neq z'$ だから，(i_0, j_0) を $a_{i_0j_0} \neq b_{i_0j_0}$ を満たすように選ぶことができる．ここで $x^* \in X^*$ を，$x^*(x_{i_0}) \neq 0$ かつ $\bigoplus_{i\in I_0\setminus\{i_0\}} \mathbb{K}x_i$ 上で 0 となるように選ぶ[*8]．同様に $y^* \in Y^*$ を $y^*(y_{j_0}) \neq 0$ かつ $\bigoplus_{j\in J_0\setminus\{j_0\}} \mathbb{K}y_j$ 上で 0 となるようにとる．このとき，

$$
\begin{aligned}
x^* \otimes y^*(z) &= x^* \otimes y^* \left(\sum_{i,j} a_{ij} x_i \otimes y_j \right) \\
&= \sum_{i,j} a_{ij} x^* \otimes y^*(x_i \otimes y_j) \\
&= \sum_{i,j} a_{ij} x^*(x_i) y^*(y_j) \\
&= a_{i_0j_0} x^*(x_{i_0}) y^*(y_{j_0}) \\
&\neq b_{i_0j_0} x^*(x_{i_0}) y^*(y_{j_0}) \\
&= \sum_{i,j} b_{ij} x^*(x_i) y^*(y_j) \\
&= x^* \otimes y^*(z')
\end{aligned}
$$

となり，$x^* \otimes y^*(z) \neq x^* \otimes y^*(z')$ である．よって補題の主張が示された． □

*6 系 2.4．
*7 この有限集合の取り方はもちろん z と w に依存する．
*8 命題 A.2 を見よ．

命題 *3.1* の証明．**Step 1：同型写像の構成．** 写像 $T\colon X\times Y\to \mathrm{Hom}(X^*,Y)$ を $T(x,y)(x^*)=\langle x^*,x\rangle y$ と定義する．このとき T は $X\times Y$ から $\mathrm{Hom}(X^*,Y)$ への双線形写像なので，$X\times Y$ 上の線形写像 i で以下の図式を可換にするものがただ一つ存在する．

$$\begin{tikzcd} X\times Y \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\otimes"'] & \mathrm{Hom}(X^*,Y) \\ X\otimes Y \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

これが $\mathscr{F}_{w^*}(X^*,Y)$ への同型写像になっていることを示そう．

Step 2：$i(x\otimes y)$ の連続性の証明． 全ての $(x,y)\in X\times Y$ に対して写像 $i(x\otimes y)\colon X^*\to Y$ が $\sigma(X^*,X)$ と Y のノルム位相に関して連続であることを示そう．$(x^*_\lambda)_\lambda$ は w^*-位相の意味で $x^*_\lambda\to x^*$ を満たす有向族とする．このとき，

$$\|i(x\otimes y)(x^*_\lambda)-i(x\otimes y)(x^*)\|_Y\le|\langle x^*_\lambda,x\rangle-\langle x^*,x\rangle|\|y\|_Y\to 0$$

が成立．したがって $i(x\otimes y)$ は求める連続性を持つ．一般の $i(z)$ はこのような形の写像の有限和で表せるから，やはり同等の連続性を持つ．

Step 3：$i(X\otimes Y)$ の元が有限階作用素であることの証明． $z\in X\otimes Y$ を $z=\sum_{1\le i\le n}x_i\otimes y_i$ と表示すれば，$\mathrm{Im}\,i(z)\subset\bigoplus_{1\le i\le n}\mathbb{K}y_i$ なので，$\dim\mathrm{Im}\,i(z)\le n<\infty$ がわかる．

Step 4：i の単射性の証明． まずは，$z\in X\otimes Y$ と $(x^*,y^*)\in X^*\otimes Y^*$ に対して，$x^*\otimes y^*(z)=\langle y^*,i(v)(x^*)\rangle$ が成り立つことに注意する．これは実際，$z=x\otimes y$ の時には

$$x^*\otimes y^*(x\otimes y)=\langle x^*,x\rangle\langle y^*,y\rangle=\langle y^*,\langle x^*,x\rangle y\rangle=\langle y^*,i(x\otimes y)(x^*)\rangle$$

という計算で確かめられる．一般の場合は，テンソル積の普遍性からわかる．i が単射であることを示すということは，$i(z)=i(w)$ なら $z=w$ が成り立つことを示すということである．補題 3.2 より，そのためには $i(z)=i(w)$ なら全ての $x^*\in X^*$ と $y^*\in Y^*$ に対して $x^*\otimes y^*(z)=x^*\otimes y^*(w)$ となることを示せばよい．先ほどの表現より，$i(z)=i(w)$ なら

$$x^*\otimes y^*(z)=\langle y^*,i(z)(x^*)\rangle=\langle y^*,i(w)(x^*)\rangle=x^*\otimes y^*(w)$$

となり，実際に求める関係式は成り立っている．

Step 5：全射性の証明． Step 4 までの議論で i が $X\times Y$ から $\mathscr{F}_{w^*}(X^*,Y)$ への単射であることはわかったから，あとは全射性を示せばよい．$\varphi\in\mathscr{F}_{w^*}(X^*,Y)$ に対して，$\mathrm{Im}\,\varphi$ の基底 $(y_i)_{1\le i\le n}$ を一つ固定する．$(y_i)_{1\le i\le n}$ が基底であることから，x^* に対してある $\alpha_1(x^*),\dots,\alpha_n(x^*)$ の組で，

$$\varphi(x^*)=\sum_{1\le i\le n}\alpha_i(x^*)y_i$$

を満たすものがただ一つ存在する．このとき，写像 $\alpha_i\colon X^*\ni x^*\mapsto\in\mathbb{K}$ がある $x_i\in X$ によって $\varphi_i(x^*)=\langle x_i,x^*\rangle$ と表現されることを示そう．

まずは各 α_i が線形であることを示す．$\lambda, \nu \in \mathbb{K}$ かつ $x^*, u^* \in X^*$ なら，

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i\le n} \alpha_i(\lambda x^{*+\mu u^*})y_i &= \varphi(\lambda x^* + \mu u^*) \\ &= \lambda\varphi(x^*) + \mu\varphi(u^*) \\ &= \lambda \sum_{1\le i\le n} \alpha_i(x^*)y_i + \mu \sum_{1\le i\le n} \alpha_i(u^*)y_i \\ &= \sum_{1\le i\le n} (\lambda\alpha_i(x^*) + \mu\alpha_i(u^*))y_i\end{aligned}$$

が成り立つ．基底による表現の一意性より，これより $\alpha_i(\lambda x^* + \mu u^*) = \lambda\alpha_i(x^*) + \mu\alpha_i(u^*)$（$1 \le i \le n$）がわかる．すなわち，$\alpha_i$ は線形である．

次に，各 α_i がしかるべき連続性をもつことを示そう．φ の連続性より，$x^*_\lambda \to x^*$（weak*）が成り立つなら，$\varphi(x^*_\lambda) \to \varphi(x^*)$ が Y のノルム収束の意味で成り立つ．したがってこれは $\sigma(Y, Y^*)$ の意味でも成り立っていることに注意する．y^*_i を $y^*_i(y_i) \neq 0$ かつ $y^*_i|_{\bigoplus_{j\neq i}\mathbb{K}y_j} = 0$ となるように選べば[*9]，

$$\alpha_i(x^*_\lambda)\langle y^*_i, y_i\rangle = \left\langle y^*_i, \sum_{1\le j\le i} \alpha_j(x^*_\lambda)y_j \right\rangle = \langle y^*_i, \varphi(x^*_\lambda)\rangle \underset{\lambda}{\to} \langle y^*_i, \varphi(x^*)\rangle = \alpha_i(x^*)\langle y^*_i, y_i\rangle$$

が成り立つ．いま $\langle y^*_i, y_i\rangle$ は 0 でないから，これより $\alpha_i(x^*_\lambda) \to \alpha_i(x^*)$ が従う．ゆえに，各 α_i は $\sigma(X^*, X)$ について連続である．したがって，ある $x_i \in X$ で $\alpha_i(x^*) = \langle x^*, x_i\rangle$ を満たすものが存在する[*10]．

$z = \sum_{1\le i\le n} x_i \otimes y_i$ と定義すれば，

$$i(z)(x^*) = \sum_{1\le i\le n} i(x_i \otimes y_i)(x^*) = \sum_{1\le i\le n} \langle x^*, x_i\rangle y_i = \sum_{1\le i\le n} \alpha_i(x^*)y_i = \varphi(x^*)$$

が成り立つ．ゆえに $i(z) = \varphi$ であり，$i\colon X \otimes Y \to \mathscr{F}_{w^*}(X^*, Y)$ は全射であることが確かめられた． □

注意 3.3. 命題 3.1 より，Banach 空間 X と Y に関連して以下の線形空間としての同型があることがわかる．

$$\mathscr{F}_{w^*}(X^*, Y) \simeq X \otimes Y \simeq Y \otimes X \simeq \mathscr{F}_{w^*}(Y^*, X).$$

4 クロスノルム

1 節で予告したように，$X \otimes Y$ に入れるノルムとして我々はクロスノルムというものを考えたい．早速クロスノルムの定義をしよう．

定義 4.1. X と Y を Banach 空間とし，$\alpha\colon X \otimes Y \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ をノルムとする．α について，以下の条件を考える．

(i) 全ての $(x, y) \in X \times Y$ について，$\alpha(x \otimes y) \le \|x\|_X\|y\|_Y$ が成り立つ．

(ii) 全ての $(x^*, y^*) \in X^* \times Y^*$ について，$\|x^* \otimes y^*\|_{(X\otimes Y)^*,\alpha} \le \|x^*\|_{X^*}\|y^*\|_{Y^*}$ が成り立つ．ただし，$\|\ \|_{(X\otimes Y)^*,\alpha}$ は $(X \otimes Y, \alpha)$ から $\mathbb{K}$ への写像としての作用素ノルムで，$\|\ \|_{X^*}$ と $\|\ \|_{Y^*}$ は通常の作用素ノルムである．

*9 補題 A.2
*10 証明は，例えば Brezis [2, Proposition 3.14]

α が上記の 2 条件を満たすとき，α を $X \otimes Y$ 上のクロスノルムと呼ぶ．$X \times Y$ をクロスノルム α によりノルム空間と考えたものを $X \otimes_\alpha Y$ と表し，その完備化 Banach 空間を $X \widehat{\otimes}_\alpha Y$ で表す．

条件 (ii) よりすぐにわかることとして，線形写像のテンソル積 $z \mapsto x^* \otimes y^*(z)$ はクロスノルム α に関して有界であるということを述べておこう．

クロスノルムが実際に存在するかどうかはさておき，クロスノルムなるものがあったとして，それの満たす基本的な性質を述べよう．

命題 4.2. X と Y を Banach 空間とし，$\alpha\colon X \otimes Y \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ をクロスノルムとする．

(i) 全ての $(x, y) \in X \times Y$ について，$\alpha(x \otimes y) = \|x\|_X \|y\|_Y$ が成り立つ．

(ii) 全ての $(x^*, y^*) \in X^* \otimes Y^*$ について，$\|x^* \otimes y^*\|_{(X \otimes Y)^*, \alpha} = \|x^*\|_{X^*} \|y^*\|_{Y^*}$ が成り立つ．

つまり，クロスノルムの定義に出てきた不等号は，実は等号で良かったのである．

証明．(i) $(x, y) \in X \times Y$ とすれば,

$$\begin{aligned}
\|x\|\|y\| &= \sup_{\|x^*\| \leq 1} |\langle x^*, x\rangle| \sup_{\|y^*\| \leq 1} |\langle y^*, y\rangle| \\
&= \sup_{\|x^*\|, \|y^*\| \leq 1} |x^* \otimes y^*(x \otimes y)| \\
&\leq \sup_{\|x^*\|, \|y^*\| \leq 1} \|x^* \otimes y^*\|_{(X \otimes Y)^*, \alpha}\, \alpha(x \otimes y) \\
&\leq \sup_{\|x^*\|, \|y^*\| \leq 1} \|x^*\|\|y^*\| \alpha(x \otimes y) \\
&\leq \alpha(x \otimes y)
\end{aligned}$$

が成り立つ．これをクロスノルムの定義とあわせれば $\|x\|\|y\| = \alpha(x \otimes y)$ を得る．

(ii) $x^* \in X$ かつ $y^* \in Y$ とすれば,

$$\begin{aligned}
\|x^*\|\|y^*\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x^*, x\rangle| \sup_{\|y\| \leq 1} |\langle y^*, y\rangle| \\
&= \sup_{\|x\|, \|y\| \leq 1} |x^* \otimes y^*(x \otimes y)| \\
&\leq \sup_{\alpha(x \otimes y) \leq 1} |x^* \otimes y^*(x \otimes y)| \\
&\leq \sup_{\alpha(z) \leq 1} |x^* \otimes y^*(z)| \\
&= \|x^* \otimes y^*\|_{(X \otimes Y)^*, \alpha}
\end{aligned}$$

が成立．クロスノルムの定義より逆向きの不等号が成り立つので，$\|x^*\|\|y^*\| = \|x^* \otimes y^*\|_{(X \otimes Y)^*, \alpha}$ がわかる． □

5 射影的ノルム

前節でクロスノルムをとりあえず定義したけれども，$X \otimes Y$ 上にクロスノルムなるものが本当に存在するのかわからない．本節では，クロスノルムのうち射影的ノルムと呼ばれるものを実際に構成し，その性質を調べる．

テンソル積上のノルムを考えるときには，そのノルムはどのような性質を満たすべきだろうか？代数的テンソル積については同型 $\mathrm{Hom}(X \otimes Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}^{(2)}(X, Y; X)$ という同型があったことを思い出せば，Banach 空間のテンソル積についても $L(X \otimes Y, Z) \simeq L^{(2)}(X, Y; Z)$ という等長同型があることが望ましいという気がする．特に $Z = \mathbb{K}$ の場合は，$(X \otimes Y)^* \simeq L^{(2)}(X, Y; \mathbb{K})$ が成り立って欲しいわけである．Banach 空間のノルムは双対を使って特徴づけることができたから，適切なノルムの下で $\|x \otimes y\| = \sup_{\|T\| \leq 1} |T(x \otimes y)|$ が成立するはずである．さらに，もし等長同型 $(X \otimes Y)^* \simeq L^{(2)}(X, Y; \mathbb{K})$ があったとすれば，そのノルムの下で $\|x \otimes y\| = \sup_{\|b\| \leq 1} |b(x, y)|$ が成り立つに違いない．いや，これをノルムの定義にしてしまおう．幸いなことに，$\|x\| \|y\| = \sup_{\|b\| \leq 1} |b(x, y)|$ が成り立っていたから，このノルムはクロスノルムになりそうである．以上のような考察から，以下のような射影的ノルムの定義を得る．

定義 5.1. X と Y を Banach 空間とする．$\Phi\colon \mathrm{Hom}^{(2)}(X, Y; \mathbb{K}) \to (X \otimes Y)^\sharp$ を標準的な同型写像とし，$z \in X \otimes Y$ に対して

$$\pi(z) = \sup\{|\Phi(b)(z)| \mid b \in L^{(2)}(X, Y; \mathbb{K}),\ \|b\| \leq 1\}$$

と定義する．このとき π は $X \times Y$ 上のクロスノルムであり，Banach 空間 $X \widehat{\otimes}_\pi Y$ を X と Y の射影的テンソル積と呼ぶ．

注意 5.2. $(x, y) \in X \times Y$ と $b \in L^{(2)}(X, Y; \mathbb{K})$ に対して $\Psi(x, y)(b) = b(x, y)$ とおけば，$|\Psi(x, y)(b)| \leq \|b\| \|x\| \|y\|$ であるから，Ψ は $X \times Y$ から $L(L^{(2)}(X, Y; \mathbb{K}), \mathbb{K})$ への双線形写像を定める．このときテンソル積の普遍性により

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\otimes"'] & L(L^{(2)}(X, Y; \mathbb{K}), \mathbb{K}) \\
X \otimes Y \arrow[ur, "\widetilde{\Psi}"'] &
\end{tikzcd}$$

を可換にする線形写像 $\widetilde{\Psi}$ がただ一つ存在するのであった．補題 3.2 より，この $\widetilde{\Psi}$ は特に単射であることがわかる．$z \in X \otimes Y$ の射影的ノルム $\pi(z)$ は，この Ψ によって誘導されるノルムである．つまり，$\pi(z) = \|\widetilde{\Psi}(z)\|$ によって $X \times Y$ のノルムを定義しているということである．

命題 5.3. π は最大のクロスノルムである．

証明．**Step 1：π がクロスノルムであることの証明．** π がノルムであることは，注意 5.2 よりすぐにわかる．$(x, y) \in X \otimes Y$ なら

$$|\Phi(b)(x \otimes y)| = |b(x, y)| \leq \|b\| \|x\| \|y\|$$

であるから，$\pi(z) \leq \|x\| \|y|$ が成り立つことは分かる．$(x^*, y^*) \in X^* \times Y^*$ に対して $b(x, y) = x^*(x) y^*(y)$ と定義する．このとき

$$|b(x, y)| = |x^*(x)| |y^*(y)| \leq \|x^*\| \|y^*\| \|x\| \|y\|$$

であることから $\|b\| \leq |x^*| |y^*|$ がわかる．いま $\Phi(b) = x^* \otimes y^*$ であるから，

$$|x^* \otimes y^*(z)| = |\Phi(b)(z)| \leq \|b\| \pi(z) \leq \|x^*\| \|y^*\| \pi(z)$$

が成り立つ．この式で $\|\pi(z)\| \leq 1$ について sup をとれば，$\|x^* \otimes y^*\|_{(X\otimes Y)^*,\pi} \leq \|x^*\|\,\|y^*\|$ を得る．したがって π はクロスノルムである．

Step 2：π の最大性の証明． α を $X \times Y$ 上のクロスノルムとする．$z \in X \otimes Y$ を一つ固定すれば，Hahn-Banach の定理によりある $\varphi \in (X \otimes_\pi Y)^*$ で $\varphi(z) = \alpha(z)$ かつ $\|\varphi\|_{(X\otimes_\pi Y)^*}$ を満たすものが存在する．このとき

$$|(\varphi \circ \otimes)(x, y)| = |\varphi(x \otimes y)| \leq \|\varphi\|\pi(x \otimes y) \leq \pi(x \otimes y) \leq \|x\|\,\|y\|$$

であるから，$\|\varphi \circ \otimes\|_{L^{(2)}(X,Y;\mathbb{K})} \leq 1$ が成り立つ．したがって，π の定義により

$$\alpha(z) = |\varphi(z)| = |\Phi(\varphi \circ \otimes)(z)| \leq \|\varphi \circ \otimes\|\pi(z) \leq \pi(z)$$

を得る．いま z は任意に選んで固定したものだったから，$\alpha \leq \pi$ が成り立つ． □

射影的ノルム π には，次の命題のような別表現もある．

命題 5.4. X と Y を Banach 空間とする．このとき，全ての $z \in X \otimes Y$ について

$$\pi(z) = \inf\left\{ \sum_i \|x_i\|\|y_i\| \;\middle|\; z = \sum_{\text{有限和}} x_i \otimes y_i \right\}$$

が成り立つ．

証明．$z \in X \otimes Y$ に対して，

$$\lambda(z) = \inf\left\{ \sum_i \|x_i\|\|y_i\| \;\middle|\; z = \sum_{\text{有限和}} x_i \otimes y_i \right\}$$

と定義する．

Step 1：$\pi \leq \lambda$ の証明． Step 1 より λ はクロスノルムであるから，π の最大性により $\lambda \leq \pi$ がわかる．逆向きの不等号を示そう．$z = \sum_{\text{有限和}} x_i \otimes y_i$ という表現を一つ固定すれば，$b \in L^{(2)}(X, Y; \mathbb{K})$ に対して

$$|\Phi(b)(z)| = \left|\sum \Phi(b)(x_i \otimes y_i)\right| \leq \sum |b(x_i, y_i)| \leq \|b\| \sum \|x_i\|\,\|y_i\|$$

が成り立つ．特に $\|b\| \leq 1$ なら $|\Phi(b)(z)| \leq \sum \|x_i\|\,\|y_i$ であり，$\|b\| \leq 1$ について sup をとれば $\pi(z) \leq \sum \|x_i\|\,\|y_i\|$ となる．さらにこのような分解について inf をとれば，$\pi(z) \leq \lambda(z)$ を得る．

Step 2：$\lambda \leq \pi$ の証明． $\lambda \leq \pi$ を示すためには，射影的ノルムの最大性を利用しよう．つまり，λ がクロスノルムであることを示せば十分である．

まずは λ がノルムであることを示そう．$z = 0$ の時は $z = 0 \otimes 0$ という分解が存在するから，$\lambda(z) = 0$ となる．$\lambda(z) = 0$ なら step 1 での評価より $\pi(z) = 0$ となり，π がノルムであることから $z = 0$ が従う．$z = \sum x_i \otimes y_i$ 分解をとれば $\alpha z = \sum (\alpha x_i) \otimes y_i$ という分解が得られるので，

$$\lambda(\alpha z) \leq \sum \|\alpha x_i\|\|y_i\| = |\alpha| \sum \|x_i\|\|y_i\|$$

となる．z の分解について inf をとれば，$\lambda(\alpha z) \leq |\alpha|\lambda(z)$ がわかる．この式より $\alpha \neq 0$ なら $\lambda(z) \leq |\alpha|^{-1}\lambda(\alpha z)$ となるので，$|\alpha|\lambda(z) \leq \lambda(\alpha z)$ もわかる．したがって $\lambda(\alpha z) = |\alpha|\lambda(z)$ である．$z = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \otimes$

y_i，$w = \sum_{1\le j\le m} x_{n+j} \otimes y_{n+j}$ という分解を任意に選べば，これは $z + w = \sum_{1\le i\le n+m} x_i \otimes y_i$ という分解を与える．このとき

$$\lambda(z+w) \le \sum_{1\le i\le n+m} \|x_i\|\,\|y_i\| = \left(\sum_{1\le i\le n} \|x_i\|\,\|y_i\|\right) + \left(\sum_{1\le j\le m} \|x_{n+j}\|\,\|y_{n+j}\|\right)$$

となるから，z と w の分解でそれぞれ inf をとれば $\lambda(z+w) \le \lambda(z) + \lambda(w)$ がわかる．以上の議論で，λ が実際にノルムであることが確かめられた．

次に，λ がクロスノルムであることを示そう．$z = x \otimes y$ なら，定義よりただちに $\lambda(z) \le \|x\|\,\|y\|$ がわかる．$x^* \in X^*$ かつ $y^* \in Y^*$ とし，$z \in X \otimes Y$ に対して $z = \sum x_i \otimes y_i$ という分解を一つ選べば，

$$|x^* \otimes y^*(z)| \le \sum |x^*(x_i)|\,|y^*(y_i)| \le \|x^*\|\,\|y^*\| \sum \|x_i\|\,\|y_i\|$$

が成り立つ．この式で z の分解について inf をとれば，$|x^* \otimes y^*(z)| \le \|x^*\|\,\|y^*\|\lambda(z)$ を得る．これより $\|x^* \otimes y^*\|_{(X\otimes Y,\lambda)^*} \le \|x^*\|\,\|y^*\|$ となるので，λ がクロスノルムであることが確かめられた． □

射影的にノルムを入れた Banach 空間においては，期待していたような同型が存在する．

命題 5.5. X, Y, Z を Banach 空間とする．任意の $b \in L^{(2)}(X, Y; Z)$ に対して，$\widetilde{b} \in L(X \widehat{\otimes}_\pi Y, Z)$ で以下の図式を可換にするものがただ一つ存在する．

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\otimes"'] & Z \\ X \widehat{\otimes}_\pi Y \arrow[ur, "\widetilde{b}"'] & \end{tikzcd}$$

さらに，この対応 $b \mapsto \widetilde{b}$ は $L^{(2)}(X, Y; Z)$ から $L(X \widehat{\otimes}_\pi Y, Z)$ への等長同型を定める．

証明. $b \in L^{(2)}(X, Y; Z)$ とすれば，テンソル積の普遍性より

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\otimes"'] & Z \\ X \otimes Y \arrow[ur, "b'"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にする $b' \in \mathrm{Hom}(X \otimes Y; Z)$ がただ一つ得られる．この対応 $b \mapsto b'$ を $\Theta\colon L^{(2)}(X, Y; Z) \to \mathrm{Hom}(X \otimes Y; Z)$ で表すことにする．

全ての $b \in L^{(2)}(X, Y; Z)$ について $\Theta(b) \in L(X \otimes_\pi Y; Z)$ が成り立つことを示そう．$\Phi\colon \mathrm{Hom}^{(2)}(X, Y; \mathbb{K}) \to (X \otimes Y)^\sharp$ を先ほどから用いている標準的な同型写像とすれば，任意の $z^* \in Z$ について $\Phi(z^* \circ b) = z^* \circ \Theta(b)$ が成り立つ．実際，これは $x \otimes y \in X \times Y$ なら

$$\Phi(z^* \circ b)(x \otimes y) = z^*(b(x, y)) = z^*(\Theta(b)(x \otimes y))$$

が成り立つことで確かめられる．このことから，$u \in X \otimes Y$ に対して

$$\begin{aligned}
\|\Theta(b)(u)\|_Z &= \sup_{\|z^*\|\le 1} |z^* \circ \Theta(b)(u)| \\
&= \sup_{\|z^*\|\le 1} |\Phi(z^* \circ b)(u)| \\
&\le \sup_{\|z^*\|\le 1} \pi(u)\|z^* \circ b\| \\
&\le \sup_{\|z^*\|\le 1} \pi(u)\|z^*\|_{Z^*}\|b\|_{L^{(2)}(X,Y;Z)} \\
&\le \pi(u)\|b\|
\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって $\|\Theta(b)\|_{L(X\otimes_\pi,Y;Z)} \le \|b\| < \infty$ であり，$\Theta(b) \in L(X\otimes_\pi, Y; Z)$ がわかる．

次に，$\Theta\colon L^{(2)}(X,Y;Z) \to L(X\otimes_\pi, Y; Z)$ が等長であることを示そう．先ほど示した評価により $\|\Theta(b)\|_{L(X\otimes_\pi,Y;Z)} \le \|b\|$ であったから，逆向きの不等号を示せばよい．

$$\begin{aligned}
\|b\|_{L^{(2)}(X,Y;Z)} &= \sup_{\|x\|,\|y\|\le 1} \|b(x,y)\|_Z \\
&= \sup_{\|x\|,\|y\|\le 1} \|\Theta(b)(x\otimes y)\|_Z \\
&\le \sup_{\|x\|,\|y\|\le 1} \|\Theta(b)\|\pi(x\otimes y) \\
&\le \sup_{\|x\|,\|y\|\le 1} \|\Theta(b)\|\|x\|\,\|y\| \\
&\le \|\Theta(b)\|
\end{aligned}$$

となるから，逆向きの不等号もわかった．したがって $\Theta\colon L^{(2)}(X,Y;Z) \to L(X\otimes_\pi, Y; Z)$ は等長である．

Θ が等長同型であることを示すために，Θ が全射であることを確かめよう．$T \in L(X\otimes_\pi, Y; Z)$ とすれば，

$$\|T \circ \otimes(x,y)\|_Z = \|T(x\otimes y)\| \le \|T\|_{L(X\otimes_\pi,Y;Z)}\pi(x\otimes y) \le \|T\|_{L(X\otimes_\pi,Y;Z)}\|x\|_X\,\|y\|_Y$$

が成り立つから，$T \circ \otimes \in L^{(2)}(X,Y;Z)$ である．Θ の定義より $\Theta(T\circ\otimes) = T$ なので，Θ は全射であることがわかった．したがって，$\Theta\colon L^{(2)}(X,Y;Z) \to L(X\otimes_\pi, Y; Z)$ は等長同型である．

Banach 空間 $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ はノルム空間 $X \otimes_\pi Y$ の完備化だから $X \otimes_\pi Y$ は $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ で稠密であり，$b' \in L(X\otimes_\pi, Y; Z)$ は $\widehat{b} \in L(X\widehat{\otimes}_\pi, Y; Z)$ に一意的に拡張される．この対応 $b' \mapsto \widetilde{b}$ を Ξ で表せば，$\Xi\colon L(X\otimes_\pi, Y; Z) \to L(X\widehat{\otimes}_\pi, Y; Z)$ は等長同型である．このとき $\Xi\circ\Theta\colon L^{(2)}(X,Y;Z) \to L(X\widehat{\otimes}_\pi, Y; Z)$ はまた等長同型である．$\Xi(\Theta(b))$ は $\Theta(b)$ の拡張だから，全ての $(x,y) \in X \times Y$ について $\Xi(\Theta(b))(x\otimes y) = \Theta(b)(x\otimes y) = b(x,y)$ を満たす．すなわち，$\Xi(\Theta(b))$ は図式

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\otimes"'] & Z \\
X\widehat{\otimes}_\pi Y \arrow[ur, "\Xi(\Theta(b))"']
\end{tikzcd}$$

を可換にする連続線形写像である．このような図式を可換にする連続線形写像の一意性は，

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\otimes"'] & Z \\
X \otimes Y \arrow[ur, "b'"']
\end{tikzcd}$$

を可換にする b' の一意性と $b' = \Theta(b)$ の連続性，そして $X \otimes_\pi Y$ の $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ における稠密性より従う． □

6　単射的ノルム

前節で扱った射影的ノルム π は最大のクロスノルムであった．最大のクロスノルムがあるのならば，最小のクロスノルムもあるのではないか？というのは自然な問であろう．本節で扱うので，その最小のクロスノルムである単射的ノルムである．

3 節で調べたように $X \times Y$ は $\mathscr{F}_{w^*}(X^*, Y) \subset L(X^*, Y)$ と同型であるから，$L(X^*, Y)$ の部分空間としてのノルムを考えることができる．そのノルムを単射的ノルムと呼び，ε で表す．

命題 6.1. X と Y を Banach 空間とし，$i\colon X \otimes Y \to \mathscr{F}_{w^*}(X^*, Y) \subset L(X^*, Y)$ を同型写像とする．$z \in X \otimes Y$ に対して，

$$\varepsilon(z) = \|i(z)\|_{L(X^*,Y)} = \sup_{\|x^*\| \le 1} \|i(z)(x^*)\|_Y$$

と定義する．ε を $X \otimes Y$ 上の単射的ノルムといい，Banach 空間 $X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ を X と Y の単射的テンソル積と呼ぶ．

注意 6.2. Y のノルムの双対空間を用いた特徴付けから，ε ノルムについて

$$\varepsilon(z) = \sup_{\|x^*\| \le 1} \sup_{\|y^*\| \le 1} |\langle y^*, i(z)(x^*) \rangle|_Y = \sup_{\|x^*\|, \|y^*\| \le 1} |x^* \otimes y^*(z)|$$

が成り立つ．したがって，ε は $z \in X \otimes Y$ を $X^* \otimes Y^*$ 上の双線形形式と見たときのノルムとも一致している．

命題 6.3. 単射的ノルムは最小のクロスノルムである．

証明．**Step 1：ε がクロスノルムであることの証明．** X と Y を Banach 空間とする．注意 5.2 における単射的ノルムの特徴付けを思い出せば，任意の $x \in X$ と $y \in Y$ について

$$\varepsilon(x \otimes y) = \sup_{\|x^*\|, \|y^*\| \le 1} |x^* \otimes y^*(x \otimes y)| = \sup_{\|x^*\| \le 1} |x^*(x)| \sup_{\|y^*\| \le 1} y^*(y)| = \|x\| \|y\|$$

が成り立つ．また $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ かつ $y^* \in Y^* \setminus \{0\}$ なら，

$$|x^* \otimes y^*(z)| = \|x^*\| \|y^*\| \left[\left(\frac{1}{\|x^*\|} x^* \right) \otimes \left(\frac{1}{\|y^*\|} y^* \right) \right] (z) \le \|x^*\| \|y^*\| \varepsilon(z)$$

が成り立つから，$\|x^* \otimes y^*\|_{(X \otimes Y)^*, \varepsilon} \le \|x^*\|_{X^*} \|y^*\|_{Y^*}$ もわかる．

Step 2：最小性の証明． α を $X \otimes Y$ 上の任意のクロスノルムとすれば，

$$|x^* \otimes y^*(z)| \le \|x^*\| \, \|y^*\| \alpha(z)$$

が成り立つ．この式で $\|x^*\|, \|y^*\| \le 1$ の sup をとれば，$\varepsilon(z) \le \alpha(z)$ がわかる．したがって ε は最小のクロスノルムである．　□

ここまで調べてきたように π は最大のクロスノルムで ε は最小のクロスノルムなので，任意のクロスノルム α は $\varepsilon \le \alpha \le \pi$ を満たす．逆に，$\varepsilon \le \alpha \le \pi$ を満たすノルム α があればそれはクロスノルムとなっている．

命題 6.4. X と Y を Banach 空間とし，$\alpha\colon X \otimes Y \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ をノルムとする．このとき，次の条件は同値である．

(i) α はクロスノルムである．
(ii) 全ての $z \in X \otimes Y$ について，$\varepsilon(z) \le \alpha(z) \le \pi(z)$ が成り立つ．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii) は π が最大のクロスノルムであることと，ε が最小のクロスノルムであることから従う．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．(ii) を仮定すれば，全ての $(x, y) \in X \times Y$ に対して

$$\alpha(x \otimes y) \le \pi(x \otimes y) \le \|x\| \, \|y\|$$

が成り立つ．また，$x^* \in X^*$ かつ $y^* \in Y^*$ とすれば，任意の $z \in X \otimes Y$ について

$$\|x^* \otimes y^*(z)\| \le \|x^* \otimes y^*\|_{(X \otimes_\varepsilon Y)^*} \, \varepsilon(z) \le \|x^*\| \, \|y^*\| \, \alpha(z)$$

が成り立つ．したがって $\|x^* \otimes y^*\|_{(X \otimes_\alpha Y)^*} \le \|x^*\| \, \|y^*\|$ となり，α がクロスノルムであることがわかった． □

7 射影的テンソル積 $L^1(\mu)\widehat{\otimes}_\pi X$

本節では，Banach 空間 $L^1(\mu)\widehat{\otimes}_\pi X$ について調べよう．$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ を測度空間とし，X 値の μ-Bochner 可積分関数の空間を $L^1(\mu; X)$ で表すことにする．すなわち，$f \in L^1(\mu; X)$ とは，f は X 値の強可測関数[*11]で，

$$\int_\Omega \|f(\omega)\|_X \mu(d\omega)$$

が成り立つようなものである．

補題 7.1. $\sum_{1 \le i \le n} 1_{A_i} \otimes x_i$ の形の関数からなる部分空間は，$L^1(\mu)\widehat{\otimes}_\pi X$ で稠密である．

証明．$L^1(\mu) \otimes_\pi X$ が $L^1(\mu)\widehat{\otimes}_\pi X$ で稠密であることと，$L^1(\mu) \otimes_\pi X$ の元は $f \otimes x$ の形の元の有限和で書けることからに注意すれば，$f \otimes x$ が $\sum_{1 \le i \le n} 1_{A_i} \otimes x_i$ の形の関数で近似できることを示せばよい．$s_n = \sum_{1 \le i \le k_n} a_i^n 1_{A_i^n}$ を $s_n \to f$ in L^1 となるように選ぶ．このとき

$$s_n \otimes x = \left(\sum_{1 \le i \le k_n} a_i^n 1_{A_i^n} \right) \otimes x = \sum_{1 \le i \le k_n} 1_{A_i^n} \otimes (a_i^n x)$$

が成り立つから，$s_n \otimes x$ は $\sum_{1 \le i \le n} 1_{A_i} \otimes x_i$ の形をしている．また，このとき

$$\pi(f \otimes x - s_n \otimes x) \le \|f - s_n\|_{L^1(\mu)} \|x\| \to 0$$

なので，$(s_n \otimes x)$ は射影的ノルムで $f \otimes x$ を近似する列である． □

命題 7.2. $L^1(\mu)\widehat{\otimes}_\pi X$ と $L^1(\mu; X)$ は等長同型である．

証明．$(f, x) \in L^1(\mu) \times X$ に対して $b(f, x)(\omega) = f(\omega) x$ と定義する．このとき

$$\|b(f, x)\|_{L^1(\mu; X)} = \int_\Omega |f(\omega)| \, \|x\| \; \mu(d\omega) = \|f\|_{L^1(\mu)} \|x\|$$

[*11] 単関数の極限となっているような関数．

であるから，$b\colon L^1(\mu)\times X \to L^1(\mu;X)$ は作用素ノルム 1 の有界双線形写像である．射影的テンソル積の普遍性により，これより有界線形写像 $J\colon L^1(\mu)\widehat{\otimes}_\pi X \to L^1(\mu;X)$ で作用素ノルムが 1 かつ $J\circ\otimes = b$ を満たすものがただ一つ存在する．この J が等長同型であることを示そう．J は作用素ノルム 1 であり $\|J(z)\|_{L^1(\mu;X)} \le \pi(z)$ となることは既にわかっているから，逆向きの不等号を示そう．J の構成法より，$f\otimes x \in L^1(\mu)\otimes_\pi X$ に対しては

$$\|J(f\otimes x)\|_{L^1(\mu;X)} = \|b(f,x)\|_{L^1(\mu;X)} = \|f\|_{L^1(\mu)}\|x\| = \pi(f\otimes x)$$

が成り立つことはわかる．次に，$z=\sum_{1\le i\le n} 1_{A_i}\otimes x_i$ という形の単関数の場合を考える．ただし，(A_i) は互いに素な族であるとする．このとき，

$$\begin{aligned}
\pi\left(\sum_{1\le i\le n} 1_{A_i}\otimes x_i\right) &\le \sum_{1\le i\le n}\pi(1_{A_i}\otimes x_i)\\
&= \sum_{1\le i\le n}\|1_{A_i}\|_{L^1(\mu)}\|x_i\|\\
&= \sum_{1\le i\le n}\|x_i\|\mu(A_i)\\
&= \sum_{1\le i\le n}\int_\Omega \|x_i\|1_{A_i}d\mu\\
&= \left\|\sum_{1\le i\le n} 1_{A_i}x_i\right\|_{L^1(\mu;X)}\\
&= \left\|\sum_{1\le i\le n} J(1_{A_i}\otimes x_i)\right\|_{L^1(\mu;X)}\\
&= \left\|J\left(\sum_{1\le i\le n} 1_{A_i}\otimes x_i\right)\right\|_{L^1(\mu;X)}
\end{aligned}$$

が成り立つ．補題 7.1 よりこのような形の関数は $L^1(\mu)\widehat{\otimes}_\pi X$ で稠密だから，$L^1(\mu)\widehat{\otimes}_\pi X$ 全体で

$$\pi(z) \le \|J(z)\|_{L^1(\mu;X)}$$

となっていることがわかる．したがって J は等長写像である．後は J が全射であることを示せばよい．$z=\sum_{1\le i\le n} 1_{A_i}\otimes x_i$ のときは

$$J(z) = \sum_{1\le i\le n} J(1_{A_i}\otimes x_i) = \sum_{1\le i\le n} 1_{A_i}x_i$$

が成り立つから，J は $\sum_{1\le i\le n} 1_{A_i}\otimes x_i$ を X 値の単関数に送る．J の連続性と $\sum_{1\le i\le n} 1_{A_i}\otimes x_i$ の $L^1(\mu)\widehat{\otimes}_\pi X$ における稠密性，単関数の $L^1(\mu;X)$ における稠密性を用いれば，これより J が全射であることがわかる． □

系 7.3. $(\Omega_1,\mathscr{A}_1,\mu_1)$ と $(\Omega_2,\mathscr{A}_2,\mu_2)$ が測度空間なら，以下の等長同型が存在する．

$$L^1(\mu_1;L^1(\mu_2)) \simeq L^1(\mu_1)\widehat{\otimes}_\pi L^1(\mu_2) \simeq L^1(\mu_2)\widehat{\otimes}_\pi L^1(\mu_1) \simeq L^1(\mu_2;L^1(\mu_1)).$$

射影的テンソル積 $L^1(\mu)\widehat{\otimes}_\pi X$ において，特に Banach 空間 X が別の L^1 空間 $L^1(\nu)$ である場合を考えよう．

命題 7.4. $(\Omega_1,\mathscr{A}_1,\mu_1)$ と $(\Omega_2,\mathscr{A}_2,\mu_2)$ を σ-有限測度空間とする．このとき，$L^1(\mu_1)\widehat{\otimes}_\pi L^1(\mu_2)$ は $L^1(\mu_1\otimes\mu_2)$ と等長同型である．

証明．まずは，有限測度空間の場合を考えよう．写像 $J\colon L^1(\mu_1)\otimes L^1(\mu_2)\to L^1(\mu_1\otimes\mu_2)$ を $J(f_1\otimes f_2)=f_1f_2$ と定義する．このとき，Fubini の定理より

$$\begin{aligned}\|J(f_1\otimes f_2)\|_{L^1(\mu_1\otimes\mu_2)}&=\int_{\Omega_1\times\Omega_2}|f_1||f_2|d(\mu_1\otimes\mu_2)\\&=\int_{\Omega_1}|f_1|d\mu_1\int_{\Omega_2}|f_2|d\mu_2\\&=\|f_1\|\,\|f_2\|=\pi(f_1\otimes f_2)\end{aligned}$$

が成り立つ．命題 7.2 の証明と同じ論理で，これより J は作用素ノルム 1 の有界線形作用素であることがわかる．また，命題 7.2 の証明と同じように $\sum_{1\le i\le n}1_{A_i}\otimes g_i$（$A_i$ は互いに素）という形の元については，

$$\begin{aligned}\pi\left(\sum_{1\le i\le n}1_{A_i}\otimes g_i\right)&\le\sum_{1\le i\le n}\pi(1_{A_i}\otimes g_i)\\&=\sum_{1\le i\le n}\int_{\Omega_1\otimes\Omega_2}1_{A_i}|g_i|d\mu_1\otimes\mu_2\\&=\int_{\Omega_1\otimes\Omega_2}\left|\sum_{1\le i\le n}1_{A_i}g_i\right|d\mu_1\otimes\mu_2\\&=\left\|J\left(\sum_{1\le i\le n}1_{A_i}\otimes g_i\right)\right\|_{L^1(\mu_1\otimes\mu_2)}\end{aligned}$$

が成り立つ．このような形の関数は $L^1(\mu_1)\widehat{\otimes}_\pi L^1(\mu_2)$ で稠密だから，これより全ての $z\in L^1(\mu_1)\widehat{\otimes}_\pi L^1(\mu_2)$ について

$$\pi(z)\le\|J(z)\|_{L^2(\mu_1\otimes\mu_2)}$$

となることがわかる．最後に J の全射性を示そう．$J(L^1(\mu_1)\widehat{\otimes}_\pi L^1(\mu_2))$ は明らかに線形空間であり，定数関数を含み，$1_{A_1\times A_2}$（$A\in\mathscr{A}_1$ かつ $A_2\in\mathscr{A}_2$）の形の関数をすべて含む．(z_n) は $0\le J(z_n)\uparrow f$ かつ f が有界であるようなものとする．このとき $\|f-J(z_n)\|\le f\in L^1(\mu_1\otimes\mu_2)$ であるから優収束定理により，$J(z_n)\to f$ が $L^1(\mu_1\otimes\mu_2)$ の意味で成り立つ．J の等長性から $f\in\overline{J(L^1(\mu_1)\widehat{\otimes}_\pi L^1(\mu_2))}=J(L^1(\mu_1)\widehat{\otimes}_\pi L^1(\mu_2))$ となり，$J(L^1(\mu_1)\widehat{\otimes}_\pi L^1(\mu_2))$ は有界な単調収束についても閉じていることがわかる．したがって単調族定理により $J(L^1(\mu_1)\widehat{\otimes}_\pi L^1(\mu_2))$ は全ての有界 $\mathscr{A}_1\otimes\mathscr{A}_2$-可測関数を含む．一般の $f\in L^1(\mu_1\otimes\mu_2)$ については，$f_n=(-n\vee f)\wedge n$ とすれば $|f_n|\le|f|$ となるので，再び単調収束定理により $f_n\to f$ in $L^1(\mu_1\otimes\mu_2)$ が成り立つ．各 n については $f_n\in J(L^1(\mu_1)\widehat{\otimes}_\pi L^1(\mu_2))$ が成り立つから，$f\in J(L^1(\mu_1)\widehat{\otimes}_\pi L^1(\mu_2))$ もわかる．

次に，一般の σ-有限測度の場合を考えよう．Ω_1 の可測分割 $(\Omega_1^i)_{i\in\mathbb{N}}$ を $\mu(\Omega_i)<\infty$ となるように選び，$\mathscr{A}_1^i=\mathscr{A}\cap\Omega_1^i$ および $\mu_1^i(\cdot)=\mu(\cdot\cap A_1^i)$ と定義する．このとき，命題 B.3 より $\bigoplus_{i\in I}^1L^1(\mu_1^i)$ と $L^1(\mu_1)$ は等長同型になるのであった．同様に $(\Omega_2^j,\mathscr{A}_2^j,\mu_2^j)_{j\in\mathbb{N}}$ を定めれば，やはり $\bigoplus_{i\in I}^1L^1(\mu_2^i)$ と $L^1(\mu_2)$ は等長同型に

なる．したがって，有限測度空間に対する結果と命題 7.2，命題 B.3 を用いれば，等長同型

$$
\begin{aligned}
L^1(\mu_1 \otimes \mu_2) &\simeq \bigoplus_{i\in\mathbb{N}}^{1} \bigoplus_{j\in\mathbb{N}}^{1} L^1(\mu_1^i \otimes \mu_2^j) \\
&\simeq \bigoplus_{j\in\mathbb{N}}^{1} \bigoplus_{i\in\mathbb{N}}^{1} L^1(\mu_1^i; L^1(\mu_2^j)) \\
&\simeq \bigoplus_{j\in\mathbb{N}}^{1} L^1(\mu_1; L^1(\mu_2^j)) \\
&\simeq \bigoplus_{j\in\mathbb{N}}^{1} L^1(\mu_2^j; L^1(\mu_1)) \\
&\simeq L^1(\mu_2; L^1(\mu_1)) \\
&\simeq L^1(\mu_1)\widehat{\otimes}_\pi L^1(\mu_2)
\end{aligned}
$$

を得る． □

系 7.5. $(\Omega_1, \mathscr{A}_1, \mu_1)$ と $(\Omega_2, \mathscr{A}_2, \mu_2)$ が σ-有限測度空間なら，以下の等長同型がある．

$$
L^1(\mu_1 \otimes \mu_2) \simeq L^1(\mu_1; L^1(\mu_2)) \simeq L^1(\mu_2; L^1(\mu_1)).
$$

系 7.5 はあくまで Banach 空間としての同型があると言っているだけで，$L^1(\mu_1; L^1(\mu_2))$ の元に対して二変数の可測（可積分）関数を対応させる上手い規則があるかという話とは別問題である．そういうことをするためには，可測空間に付加的な可算性の条件が要ると思う．

付録 A　Hahn-Banach の定理の応用

補題 A.1. X を Banach 空間とし，$X_1, X_2, Z \subset X$ をその閉部分空間とする．$Z = X_1 \oplus X_2$ が成り立つとし，$X_1 \oplus X_2$ を直和ノルム $\| \ \|_{X_1} + \| \ \|_{X_2}$ により Banach 空間と見なす．このとき $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2 \in X$ は部分空間への（Banach 空間として同型な）埋め込みである．

証明．三角不等式より $\|x_1 + x_2\|_X \le \|(x_1, x_2)\|_{X_1 \oplus X_2}$ となるので，全単射 $X_1 \oplus X_2 \ni (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2 \in Z$ は連続である．したがって，開写像定理によりこれは Banach 空間としての同型写像となる． □

命題 A.2. X を Banach 空間とし，$x_0 \in X$ と有限次元部分空間 $X_1 \subset X$ は $\mathbb{K}x_0 \cap X_1 = \{0\}$ を満たすとする．このとき，$T \in X^*$ で $T(x_0) \neq 0$ かつ $T|_{X_1} = 0$ を満たすものが存在する．

証明．$T_0 \colon \mathbb{K}x_0 \oplus X_1 \to \mathbb{K}$ を，$\lambda \in \mathbb{K}$ と $y \in X_1$ に対して $T_0(\lambda x_0 + y) = \lambda\|x_0\|$ と定義する．$T_0(\lambda x_0 + y) \le \|\lambda x_0\| + \|y\|$ だから，補題 A.1 によりこれは連続である．したがって，Hahn-Banach の定理により T_0 は X 全体への連続かつ線形な拡張を持つ． □

付録 B　Banach 空間の L^p 和

Banach 空間の族 $(X_i)_{i\in I}$ が与えられたとき，その代数的な直和 $\bigoplus_{i\in I} X_i$ は一般に Banach 空間とはならない．Banach 空間の族の「直和」のような空間で，それがまた Banach 空間となるようなものを構成しよう．

$1 \leq p < \infty$ と Banach 空間の族 $(X_i)_{i\in I}$ に対して，

$$\bigoplus_{i\in I}^{p} X_i = \left\{ (x_i) \in \prod_{i\in I} X_i \,\middle|\, \sum_{i\in I} \|x_i\|_{X_i}^p < \infty \right\}$$

と定義する．また，$p = \infty$ については

$$\bigoplus_{i\in I}^{\infty} X_i = \left\{ (x_i) \in \prod_{i\in I} X_i \,\middle|\, \sup_{i\in I} \|x_i\|_{X_i} < \infty \right\}$$

と定義する．

命題 B.1. $\bigoplus_{i\in I}^p X_i$ は $\|(x_i)\|_p = \left(\sum_{i\in I} \|x_i\|_{X_i}^p\right)^{1/p}$ により Banach 空間となる．また，$\bigoplus_{i\in I}^\infty X_i$ は $\|(x_i)\|_\infty = \sup_{i\in I} \|x_i\|_{X_i}$ により Banach 空間となる．

証明. 完備性以外は容易なので，完備性のみ示すことにする．$x^{(k)} = (x_i^{(k)})$ を $\bigoplus_{i\in I}^p X_i$ における Cauchy 列とする．このとき

$$\left\| x_i^{(k)} - x_i^{(l)} \right\|_{X_i}^p \leq \left\| x^{(k)} - x^{(l)} \right\|^p$$

という評価より各 $(x_i^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ が X_i における Cauchy 列であることがわかる．その X_i における極限を x_i とする．このとき $x = (x_i)_{i\in I}$ が $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ の極限であることを示そう．$\varepsilon > 0$ とし，k_0 を $k, l \geq k_0$ ならば $\|x^{(k)} - x^{(l)}\| < \varepsilon$ となるように選ぶ．このとき任意の $k, l \geq k_0$ と任意の有限集合 $F \subset I$ に対して

$$\left(\sum_{i\in F} \left\| x_i^{(k)} - x_i^{(l)} \right\|_{X_i}^p \right)^{1/p} < \varepsilon$$

が成り立つ．ここで $l \to \infty$ とすれば

$$\left(\sum_{i\in F} \left\| x_i^{(k)} - x_i \right\|_{X_i}^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon$$

となり，さらに $F \subset I$ に関する極限をとれば

$$\left\| x^{(k)} - x \right\| = \left(\sum_{i\in I} \left\| x_i^{(k)} - x_i \right\|_{X_i}^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon$$

を得る．この評価より $\|x^{(k)} - x\| \to 0$ と $x \in \bigoplus_{i\in I}^p X_i$ がわかる．

$p = \infty$ の場合も和の議論を sup に置き換えることで同様に示される． □

この Banach 空間 $\bigoplus_{i\in I}^p X_i$ を Banach 空間の L^p 和という．写像 $\Phi\colon \prod_{i\in I} X_i \to \mathbb{R}^I$ を $(x_i)_{i\in I} \mapsto (\|x_i\|)_{i\in I}$ と定義しよう．このとき $\bigoplus_{i\in I}^p X_i = \Phi^{-1}(l^p(I))$ であり，$x \in \bigoplus_{i\in I}^p X_i$ のノルムは $\Phi(x)$ の L^p ノルムと一致する．

命題 B.2. $(X_i)_{i\in I}$ と $(Y_i)_{i\in I}$ を Banach 空間の族とし，$(T_i\colon X_i \to Y_i)$ を有界線形写像の族とする．$p, q, r \in [1, \infty]$ は $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1}$ を満たすとする．$(T_i) \in \bigoplus_{i\in I}^q L(X_i, Y_i)$ なら，$\prod_{i\in I} T_i$ の $\bigoplus_{i\in I}^p X_i$ への制限は有界線形写像 $\bigoplus_{i\in I}^p X_i \to \bigoplus_{i\in I}^r Y_i$ を定める．特に，各 T_i が等長同型なら $\bigoplus_{i\in I}^p X_i$ と $\bigoplus_{i\in I}^p Y_i$ は等長同型である．

証明．l^p 空間における Hölder の不等式よりわかる． □

Banach 空間の L^p 和を測度論の問題に応用しよう．

命題 B.3. $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ を σ-有限測度空間とする．X の可測分割 $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を $\mu(A_i) < \infty$ となるように選び，$\mathscr{A}_i = \mathscr{A} \cap A_i$ および $\mu_i(\cdot) = \mu(\cdot \cap A_i)$ と定義する．このとき，$L^p(X, \mathscr{A}, \mu; X)$ と $\bigoplus^p_{i\in\mathbb{N}} L^p(A_i, \mathscr{A}_i, \mu_i; X)$ は等長同型である．

証明．(A_i) が分割であることから，$\|f\|^p = \sum_{i\in\mathbb{N}} \|f\|^p 1_{A_i}$ であり，単調収束定理により

$$\int_X \|f\|^p d\mu = \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_X \|f\|^p 1_{A_i} d\mu = \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{A_i} \|f|_{A_i}\|^p d\mu_i$$

が成り立つ．したがって，$f \mapsto (f|_{A_i})_{i\in I}$ によって定義される写像は等長同型である[*12]． □

References

[1] N. Bourbaki. *Algebra I. Chapters 1-3.* Elements of Mathematics. Original French edition published by MASSON, Paris, 1970. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1989. ISBN: 978-3-540-64243-5.

[2] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential EquationsEquations.* Universitext. Springer-Verlag New York, 2011. DOI: 10.1007/978-0-387-70914-7. URL: http://www.springer.com/la/book/9780387709130.

[3] J. Diestel and J. J. Uhl Jr. *Vector measures.* Mathematical Surveys and Monographs 15. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977, pp. xiii+322.

[4] Nicolae Dinculeanu. *Vector Integration and Stochastic Integration in Banach Spaces.* Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs, and Tracts. John Wiley & Sons, 2000. DOI: 10.1002/9781118033012. URL: http://as.wiley.com/WileyCDA/WileyTitle/productCd-0471377384.html.

[5] Marián Fabian et al. *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis.* CMS Books in Mathematics. Springer-Verlag New York, 2011. DOI: 10.1007/978-1-4419-7515-7.

[6] Serge Lang. *Algebra.* Revised third edition. Graduate Texts in Mathematics 211. Springer-Verlag New York, 2002. ISBN: 9780387953854. DOI: 10.1007/978-1-4613-0041-0. URL: https://www.springer.com/us/book/9780387953854.

[7] Raymond A. Ryan. *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag London, 2002. ISBN: 978-1-85233-437-6. DOI: 10.1007/978-1-4471-3903-4. URL: https://www.springer.com/gp/book/9781852334376.

[8] 斎藤毅. **線形代数の世界. 抽象数学の入り口**. 大学数学の入門 7. 東京大学出版会, 2007.

[9] 生西明夫 and 中神祥臣. **作用素環入門** *I.* **関数解析とフォン・ノイマン環**. 岩波書店, 2007.

[*12] 各 A_i で局所的に定義された強可測関数は全体に拡張できる．（$f = \sum_i f_i 1_{A_i}$ は可分値なので．）