関数解析ノート：ノルム空間上の有界双線形写像

大阪大学大学院基礎工学研究科
平井祐紀

2018 年 8 月 29 日

概要

ノルム空間上の双線形写像について，ごく基本的な性質をいくつか調べる．これらは関数解析においてしばしば常識のように扱われるが，意外と明記してある文献が少ないので，きちんと証明を与える．

1　双線形写像

$\mathbb{K}$ を体とする．

定義 1.1. X, Y, Z を $\mathbb{K}$-線形空間とする．写像 $b\colon X \times Y \to Z$ で

(i) 任意の $y \in Y$ について，写像 $X \ni x \mapsto b(x,y) \in Z$ は線形写像である．
(ii) 任意の $x \in X$ について，写像 $Y \ni y \mapsto b(x,y) \in Z$ は線形写像である．

を満たすものを，双線形写像という．双線形写像 $X \times Y \to Z$ 全体の集合を $\mathrm{Hom}^{(2)}_{\mathbb{K}}(X,Y;Z)$ であらわす．

$\mathrm{Hom}^{(2)}_{\mathbb{K}}(X,Y;Z)$ は各点ごとの和とスカラー倍により線形空間となる．

命題 1.2. (i) $b\colon X \times Y \to Z$ が双線形写像で $f\colon Z \to W$ が線形写像ならば，$f \circ b\colon X \times Y \to W$ は双線形写像である．
(ii) $f\colon X_1 \times X_2$ と $g\colon Y_1 \times Y_2$ が線形写像で $b\colon X_2 \times Y_2 \to Z$ が双線形写像ならば，$b \circ (f \times g)$ は双線形写像である．

証明. 定義に従って計算すればわかる．□

双線形写像は，線形写像の空間への線形写像とみなすことができる．

命題 1.3. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(Y,Z)) \simeq \mathrm{Hom}^{(2)}_{\mathbb{K}}(X,Y;Z)$.

証明. $b \in \mathrm{Hom}^{(2)}_{\mathbb{K}}(X,Y;Z)$ と $x \in X$ に対して，線形写像 $\Phi(b)(x)$ を $y \mapsto b(x,y)$ によって定義すれば，これは線形写像

$$\begin{aligned} \Phi\colon\ \mathrm{Hom}^{(2)}_{\mathbb{K}}(X,Y;Z) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(Y,Z)) \\ b &\longmapsto \Phi(b) \end{aligned}$$

を定める．また，$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(Y,Z))$ と $(x,y) \in X \times Y$ に対して $\Psi(f)(x,y) = (f(x))(y)$ と定義す

れば，$\Psi(f)$ は双線形写像 $X \times Y \to Z$ を定める．これより定まる線形写像

$$\begin{aligned}\Psi\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(X, \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(Y, Z)) &\longrightarrow \operatorname{Hom}^{(2)}_{\mathbb{K}}(X, Y; Z)\\ f &\longmapsto \Psi(f)\end{aligned}$$

は，Φ の逆写像となっている．ゆえに，$\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(X, \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(Y, Z)) \simeq \operatorname{Hom}^{(2)}_{\mathbb{K}}(X, Y; Z)$ が成り立つ． □

2　ノルム空間上の有界双線形写像

これ以降，$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ とする．ノルム空間 X が与えられたとき，そのノルムを $\|\ \|_X$ などと表すことにする．

定義 2.1. X, Y および Z をノルム空間，$b\colon X \times Y \to Z$ を双線形写像とする．ある定数 $C > 0$ で

$$\forall (x, y) \in X \times Y \quad \|b(x, y)\|_Z \leq C\|x\|_X\|y\|_Y$$

を満たすものが存在するとき，b は有界であるという．有界双線形写像全体の空間を $L^{(2)}(X, Y; Z)$ で表す．

双線形写像の連続性と有界性について，線形写像と似たような性質が成り立つ．

命題 2.2. X, Y および Z をノルム空間，$b\colon X \times Y \to Z$ を双線形写像とする．このとき，以下の 3 条件は同値である．

(i) b は連続である．
(ii) b は 0 で連続である．
(iii) b は有界である．

ただし，$X \times Y$ は直積位相空間と考える．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii)．明らか．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)．b は 0 で連続だから，十分小さい $\varepsilon, \delta > 0$ をとれば

$$\|x\|_X \leq \varepsilon,\ \|y\|_Y \leq \delta \implies \|b(x, y)\|_Z \leq 1$$

が成り立つ．このとき，0 でない任意の $x \in X$ と $y \in Y$ に対して

$$\frac{\varepsilon\delta}{\|x\|_X\|y\|_Y}\|b(x, y)\|_Z \left\| b\left(\varepsilon\frac{x}{\|x\|}, \delta\frac{y}{\|y\|}\right)\right\|_Z \leq 1$$

である．これより，全ての $(x, y) \in X \times Y$ に対して

$$\|b(x, y)\|_Z \leq \frac{1}{\varepsilon\delta}\|x\|_X\|y\|_Y$$

となり，b は有界である．

(iii) $\Longrightarrow$ (i)．b が $(x_0, y_0) \in X \times Y$ を任意の選び, b が (x_0, y_0) で連続であることを示そう．$(x, y) \in X \times Y$ を (x_0, y_0) 中心の単位球からとれば，

$$\begin{aligned}\|b(x_0, y_0) - b(x, y)\|_Z &\leq \|b(x_0, y_0) - b(x_0, y)\|_Z + \|b(x_0, y) - b(x, y)\|_Z\\ &\leq C\|x_0\|_X\|y_0 - y\|_Y + C\|x_0 - x\|_X\|y\|_Y\\ &\leq C\left(\|x_0\|_X + \|y_0\|_Y + 1\right)\left(\|y_0 - y\|_Y + \|x_0 - x\|_X\right)\end{aligned}$$

が成立．これより b の (x_0, y_0) での連続性がわかる． $\square$

命題 2.2 によれば，$L^{(2)}(X,Y;Z)$ とは連続双線形写像の空間に他ならない．$b \in L^{(2)}(X,Y;Z)$ に対して，

$$\|b\| = \inf\{C > 0 \mid \forall(x,y) \in X \times Y \ \|b(x,y)\|_Z \leq C\|x\|_X\|y\|_Y\}$$

と定義する．この定義の右辺では inf となっているが，これは実際 min であり，

$$\|b(x,y)\|_Z \leq \|b\|\|x\|_X\|y\|_Y$$

が成り立っている．

命題 2.3. $b \in L^{(2)}(X,Y;Z)$ に対して，

$$\|b\| = \sup_{\|x\|=1, \|y\|=1} \|b(x,y)\| = \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} \|b(x,y)\| = \sup_{\|x\|, \|y\| \neq 0} \frac{\|b(x,y)\|}{\|x\|\|y\|}$$

が成り立つ．

証明．**Step 1：一つ目の等号．** $x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ なら，

$$\|b(x,y)\| = \|x\|_X\|y\|_Y \left\| b\left(\frac{x}{\|x\|_X}, \frac{y}{\|y\|_Y}\right)\right\|_Z \leq \sup_{\|x\|=1, \|y\|=1} \|b(x,y)\|_Z \|x\|_X\|y\|_Y$$

が成り立つので，

$$\|b\| \leq \sup_{\|x\|=1, \|y\|=1} \|b(x,y)\|$$

である．$\|x\|_X = \|y\|_Y = 1$ なら

$$\|b(x,y)\|_Z \leq \|b\|\|x\|_X\|y\|_Y = \|b\|$$

が成り立つ．このような x, y について sup をとれば

$$\sup_{\|x\|=1, \|y\|=1} \|b(x,y)\| \leq \|b\|$$

もわかる．

Step 2：二つ目の等号．

$$\sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} \|b(x,y)\| \geq \sup_{\|x\|=1, \|y\|=1} \|b(x,y)\|$$

は明らか．$0 < \|x\|_X, \|y\|_Y \leq 1$ ならば，

$$\|b(x,y)\|_Z = \|x\|_X\|y\|_Y \left\| b\left(\frac{x}{\|x\|_X}, \frac{y}{\|y\|_Y}\right)\right\|_Z \leq \left\| b\left(\frac{x}{\|x\|_X}, \frac{y}{\|y\|_Y}\right)\right\|_Z \leq \sup_{\|x\|=1, \|y\|=1} \|b(x,y)\|$$

となり，

$$\sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} \|b(x,y)\| \leq \sup_{\|x\|=1, \|y\|=1} \|b(x,y)\|$$

もわかる．

Step 3：二つ目の等号． $x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ なら，

$$\frac{\|b(x,y)\|}{\|x\|\|y\|} = \left\| b\left(\frac{x}{\|x\|_X}, \frac{y}{\|y\|_Y}\right)\right\|_Z \leq \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} \|b(x,y)\|$$

なので，左辺で sup をとれば

$$\sup_{\|x\|,\|y\|\neq 0} \frac{\|b(x,y)\|}{\|x\|\|y\|} \leq \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} \|b(x,y)\|$$

がわかる．一方，$0 < \|x\|_X, \|y\|_Y \leq 1$ ならば

$$\|b(x,y)\| = \|x\|\|y\| \frac{\|b(x,y)\|}{\|x\|\|y\|} \leq \frac{\|b(x,y)\|}{\|x\|\|y\|} \leq \sup_{\|x\|,\|y\|\neq 0} \frac{\|b(x,y)\|}{\|x\|\|y\|}$$

となるから，sup をとれば

$$\sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} \|b(x,y)\| \leq \sup_{\|x\|,\|y\|\neq 0} \frac{\|b(x,y)\|}{\|x\|\|y\|}$$

を得る． □

命題 2.3 と双対的に，次の命題が成り立つ．

命題 2.4. X と Y をノルム空間とすれば，全ての $(x,y) \in X \times Y$ について

$$\|x\|\|y\| = \sup\{|b(x,y)| \mid b \in L^{(2)}(X,Y;\mathbb{K}),\ \|b\| \leq 1\}$$

が成り立つ．

証明．b のノルムの定義より，$b \in L^{(2)}(X,Y;\mathbb{K})$ かつ $\|b\| \leq 1$ なら

$$|b(x,y)| \leq \|b\|\|x\|\|y\| \leq \|x\|\|y\|$$

が成り立つ．よって $\sup\{|b(x,y)| \mid b \in L^{(2)}(X,Y;\mathbb{K}),\ \|b\| \leq 1\} \leq \|x\|\|y\|$ である．

$(x,y) \in X \times Y$ に対して $x^* \in X^*$ と $y^* \in Y^*$ を $|x^*(x)| = \|x\|$ かつ $|y^*(y)| = \|y\|$ となるように選ぶ．$b(x,y) = x^*(x)y^*(y)$ と定義すれば，

$$|b(x,y)| = |x^*(x)||y^*(y)| = \|x\|\|y\|$$

が成り立つので，$\sup\{|b(x,y)| \mid b \in L^{(2)}(X,Y;\mathbb{K}),\ \|b\| \leq 1\} \geq \|x\|\|y\|$ もわかる． □

ノルム空間においては，命題 1.3 において連続性を課した空間の同型も成り立つ．ノルム空間 E から F への有界線形写像全体の空間を $L(E,F)$ と書き，これを通常の作用素ノルムによりノルム空間と考える．

命題 2.5. $L^{(2)}(X,Y;Z)$ と $L(X, L(Y,Z))$ は等長同型である．

証明．φ を命題 1.3 の証明における写像 Φ の $L^{(2)}(X,Y;Z)$ への制限，ψ を Ψ の $L(X, L(Y,Z))$ への制限とする．$b \in L^{(2)}(X,Y;Z)$ とすれば，

$$\|\varphi(b)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|\varphi(b)(x)\|_{L(Y,Z)} = \sup_{\|x\|\leq 1}\sup_{\|y\|\leq 1} \|\varphi(b)(x)(y)\|_Z = \sup_{\|x\|\leq 1}\sup_{\|y\|\leq 1} \|b(x,y)\|_Z = \|b\|$$

が成立．ゆえに $\operatorname{Im}\varphi \subset L(X, L(Y, Z))$ であり，$\varphi\colon L^{(2)}(X, Y; Z) \to L(X, L(Y, Z))$ は等長写像である．逆に $f \in L(X, L(Y, Z))$ とすれば

$$\|\psi(f)\| = \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} \|\psi(f)(x, y)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \sup_{\|y\|\leq 1} \|f(x)(y)\| = \|f\|_{L(X, L(Y, Z))}$$

なので，$\operatorname{Im}\psi \subset L^{(2)}(X, Y; Z)$ もわかる．命題 1.3 の証明より φ と ψ は明らかに互いに逆写像になっており，先ほどの等式より特に等長である． □

系 2.6. $L^{(2)}(X, Y; \mathbb{R})$ と $L(X, Y^*)$ は等長同型である．

双線形写像の空間 $L^{(2)}(X, Y; Z)$ には行先の空間 Z の完備性が遺伝する．このことは有界線形作用素に関する結果と命題 2.5 からすぐに従うが，ここでは直接証明することにする．

補題 2.7. ノルム $\|\ \|\colon L^{(2)}(X, Y; Z) \to \mathbb{R}$ は $L^{(2)}(X, Y; Z)$ の各点収束位相について下半連続である．

証明．$(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $L^{(2)}(X, Y; Z)$ で各点収束する有向族とする．$\|x\|_X, \|y\|_Y \leq 1$ なら

$$\|b_\lambda(x, y)\|_Z \leq \|b_\lambda\|$$

が成り立つから，λ に関する上極限をとれば

$$\|b(x, y)\|_Z = \liminf_\lambda \|b_\lambda(x, y)\|_Z \leq \liminf_\lambda \|b_\lambda\|$$

を得る．（(b_λ) の各点収束性より．）これより

$$\|b\| \leq \liminf_\lambda \|b_\lambda\|$$

がわかる． □

命題 2.8. Z が Banach 空間ならば，$L^{(2)}(X, Y; Z)$ も Banach 空間である．

証明．(b_n) を $L^{(2)}(X, Y; Z)$ の Cauchy 列とする．$\|x\|_X, \|y\|_Y \leq 1$ なら

$$\|b_n(x, y) - b_m(x, y)\|_Z \leq \|b_n - b_m\|$$

となるので，このとき $(b_n(x, y))$ は Z の Cauchy 列である．Z の完備性より Cauchy 列は（ただ一つの）極限をもつので，それにより

$$b(x, y) := \lim_{n\to\infty} b_n(x, y)$$

と定義する．このとき $b\colon X \times Y \to Z$ が双線形写像であることは，和とスカラー倍の連続性よりわかる．したがって，あとは b が $L^{(2)}(X, Y; Z)$ のノルムの意味で (b_n) の極限であることを示せばよい．$\varepsilon > 0$ とし，$N \in \mathbb{N}$ を $n, m \geq N$ ならば

$$\|b_m - b_n\| < \varepsilon$$

が成り立つようにとる．いま b は (b_n) の各点収束極限であることに注意すれば，補題 2.7 より

$$\|b - b_n\| \leq \liminf_{m\to\infty} \|b_m - b_n\| \leq \varepsilon$$

がわかる．よって，(b_n) は $L^{(2)}(X, Y; Z)$ のノルムの意味でも b に収束している． □

References

[1] Serge Lang. *Real and Functional Analysis*. 3rd ed. Graduate Texts in Mathematics 142. Springer-Verlag New York, 1993. DOI: 10.1007/978-1-4612-0897-6.

[2] 宮島 静雄. 関数解析. 横浜図書, 2014.

[3] 斎藤 毅. 線形代数の世界. 抽象数学の入り口. 大学数学の入門 7. 東京大学出版会, 2007.