関数解析Ｉ　期末レポート
問題番号 [3],[4],[5],[7],[8],[9],[11],[12]

基礎工学研究科修士課程 1 年
29C14071
平井祐紀

2014 年 8 月 1 日

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, \}$ および $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots, \}$ と書くことにする．また，連続関数の空間 $C(X, \mathbb{C}) = C(X)$ において特に $X = [a, b]$ のような場合には，$C([a, b]) = C[a, b]$ と略記することにする．

問題 ([3])**.** 写像:$X \longrightarrow \mathbb{C}$ 全体からなる線形空間を $F(X)$ とし，$F_b(X) = \{f \in F(X) \mid f \text{ は有界.}\}$ とおく．

(1) $F_b(X)$ は $F(X)$ の部分空間であり，$\|f\| := \sup_{x \in X}$ をノルムとして Banach 空間である．
(2) X が位相空間なら $C_b(X) = \{f \in C(X) \mid f \text{ は有界.}\}$ は $F_b(X)$ の閉部分空間である．

Proof. $f \in F_b(X) \iff \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty$ であることに注意しておく．

(1) **ステップ 1：$F_b(X)$ が部分空間であることの証明．** $f, g \in F_b(X)$ とすれば，任意の $x \in X$ に対して

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)| + \sup_{x \in X} |g(x)| < \infty \tag{1}$$

である．式（1）において x に関して上限をとることにより

$$\sup_{x \in X} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)| + \sup_{x \in X} |g(x)| < \infty \tag{2}$$

を得る．したがって $f + g$ はまた有界であり，$f + g \in F_b(X)$ である．また，任意の複素数 λ と任意の $f \in F_b(X)$ に対して

$$|\lambda f(x)| = |\lambda| \, |f(x)| \leq |\lambda| \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty \tag{3}$$

がなりたつから式（3）で上限をとることにより

$$\sup_{x \in X} |\lambda f(x)| \leq |\lambda| \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty \tag{4}$$

となるから，λf はまた有界であり $F_b(X)$ の元であることがわかる．よって，$F_b(X)$ は $F(X)$ の線形部分空間である．

ステップ 2：F_b がノルム空間であることの証明． $\| \quad \|$ が $F_b(X)$ 上のノルムであることを示す．定義より明らかに $\|f\| \geq 0 \; (f \in F_b(X))$ である．また，

$$\begin{aligned}
\|f\| = 0 &\iff \sup_{x \in X} |f(x)| = 0 \\
&\iff \forall x \in X \quad |f(x)| = 0 \\
&\iff \forall x \in X \quad f(x) = 0 \\
&\iff f = 0
\end{aligned}$$

もなりたつ．式（2）は三角不等式

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \tag{5}$$

を表している．さらに，$|\lambda| \sup_{x \in X} |f(x)| = \sup_{x \in X} |\lambda| \, |f(x)| = \sup_{x \in X} |\lambda f(x)|$ であることに注意すれば，$|\lambda| \, \|f(x)\| = \|\lambda f(x)\|$ も分かる．したがって $\| \quad \|$ はノルムの性質を満たし，ステップ 1 の結果と合わせて $(F_b(X), \| \quad \|)$ はノルム空間であることが確かめられた．

ステップ 3：完備性の証明． $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を $F_b(X)$ の Cauchy 列とする．このとき，

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| = \|f_n - f_m\| \quad (x \in X)$$

より，各点 $x \in X$ に対して $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ は $\mathbb{C}$ の Cauchy 列である．$\mathbb{C}$ の完備性より Cauchy 列には極限が存在するから，$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ とおくことにより写像 $f \in F(X)$ が定まる．したがって，$f \in F_b(X)$ お

よび $\|f_n - f\| \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$ を示せば証明が完了する．(f_n) は $F_b(X)$ の Cauchy 列であったから，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $n_0 = n_0(\varepsilon)$ が存在して任意の $n, m \geq n_0$ について

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| < \varepsilon \quad (x \in X)$$

がなりたつ．この式で極限をとることにより，

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \limsup_{m \to \infty} \|f_n - f_m\| \leq \varepsilon \quad (x \in X).$$

x に関して上限をとれば，

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

を得るが，これより任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $n_0 = n_0(\varepsilon)$ が存在して，任意の $n \geq n_0$ に対して

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

となる．言い換えれば

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0 \tag{6}$$

が成立するということである．さらに，十分大きい n をとれば式（6）と三角不等式により

$$\sup_{x \in X} |f(x)| \leq \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x \in X} |f_n(x)| \leq 1 + \|f_n\| < \infty$$

であるから，$f \in F_b(X)$ も分かる．以上の議論により $(F_b(X), \| \quad \|)$ が Banach 空間であることが示された．

(2) **ステップ 1：部分空間であることの証明．** $C_b(X)$ の定義より $C_b(X) = C(X) \cap F_b(X) \subset F_b(X)$ である．（1）の主張により $F_b(X)$ は $F(X)$ の線形部分空間である．初等的な微積分学の結果により連続関数の和とスカラー倍はまた連続関数になるから，$C(X)$ もまた $F(X)$ の線形部分空間である．二つの線形部分空間の共通部分はまた線形部分空間になるから，$C_b(X)$ は $F(X)$ の線形部分空間である．$C_b(X) \subset F_b(X)$ であるから，$F_b(X)$ を新たに全空間と思えばよい．

ステップ 2：閉であることの証明． $F_b(X)$ はノルム $\| \quad \| : F_b(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ により距離空間となっているから，$C_b(X)$ の任意の収束列の極限がまた $C_b(X)$ の元であることを示せば十分である．$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を $C_b(X)$ の元の列とし，$f_n \longrightarrow f \in F_b(X)$ がなりたつとする．このとき，ステップ 1 の議論と合わせれば $f \in C(X)$ を示せばよいのであった．任意の $x_0 \in X$ を固定すれば，任意の $y \in X$ に対して

$$\begin{aligned} |f(x_0) - f(y)| &\leq |f(x_0) - f_n(x)| + |f_n(x_0) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\leq |f_n(x_0) - f_n(y)| + 2\,\|f_n - f\| \end{aligned}$$

なることに注意しておく．仮定より $\|f_n - f\| \longrightarrow 0\,(n \longrightarrow \infty)$ であったから，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $n_0 = n_0(\varepsilon)$ が存在して

$$\|f_{n_0} - f\| < \frac{\varepsilon}{4}$$

とすることができる．このとき，f_{n_0} の連続性より，ある x_0 の開近傍 $U_0 \subset X$ で任意の $y \in U_0$ に対して $|f_{n_0}(x_0) - f_{n_0}(y)| < \varepsilon/2$ となるようなものをとれる．このとき，任意の $y \in U_0$ に対して

$$|f(x_0) - f(y)| \leq |f_{n_0}(x_0) - f_{n_0}(y)| + 2\,\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

がなりたつ．すなわち，f は x_0 で連続である．x_0 は任意に選んだものだったから f は X の各点で連続であり，$f \in C(X)$ である．したがって $f \in C(X) \cap F_b(X) = C_b(X)$ となる． □

問題 ([4])．$k \in \mathbb{N}_0, I = [a,b]$ $(a < b)$ とする．$C^k(I)$ は $|f|_k = \sum_{j=0}^k \sup_{x\in I} \left|f^{(j)}(x)\right|$ をノルムとして Banach 空間である．

Proof. 端点 a, b では片側微分により微分可能性を考えているものとする．微積分学の基本的な結果により，$C^k(I)$ が線形空間であることは明らかである．

ステップ 1：ノルム空間となることの証明． 区間 I のコンパクト性より，$C_b(I) = C(I)$ となることに注意する．[3] と同様のノルムを $C(I)$ にいれて，それを $\| \quad \|_{C(I)}$ と表記することにする．$f \in C^k(I)$ とすれば，各 $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$ に対して $f^{(j)} \in C(I)$ である．この記法を用いれば，

$$|f|_k = \sum_{j=0}^k \left\|f^{(j)}\right\|_{C(I)}$$

となる．$\| \quad \|_{C(I)}$ に対して [3] の結果を用いることで，$| \quad |_k$ が C^k 上のノルムであることを示す．定義より $|f|_k \geq 0$ は明らかである．$f \in C^k(I)$ とすれば，[3] の結果により

$$\begin{aligned}
|f|_k = 0 &\iff \sum_{j=0}^k \left\|f^{(j)}\right\|_{C(I)} \\
&\iff \forall j \in \{0,1,\ldots,k\} \quad \left\|f^{(j)}\right\|_{C(I)} = 0 \\
&\iff \forall j \in \{0,1,\ldots,k\} \ \forall x \in I \quad f^{(j)}(x) = 0 \\
&\iff \forall x \in I \quad f(x) = 0
\end{aligned}$$

がなりたつ．ただし，最後の行の同値性では，微分可能関数が定数なら導関数は 0 になるという性質を使った．任意の複素数 λ と $f \in C^k(I)$ に対して，

$$\begin{aligned}
|\lambda f|_k &= \sum_{j=0}^k \left\|\lambda f^{(j)}\right\| \\
&= \sum_{j=0}^k |\lambda| \left\|f^{(j)}\right\| \\
&= |\lambda| \sum_{j=0}^k \left\|f^{(j)}\right\| \\
&= |\lambda| \, |f|_k
\end{aligned}$$

より $|\lambda f|_k = |\lambda|\,|f|_k$ がなりたつ．さらに，任意の $f, g \in C^k(I)$ に対して

$$
\begin{aligned}
|f+g|_k &= \sum_{j=0}^{k} \left\| (f+g)^{(j)} \right\|_{C(I)} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \left\| f^{(j)} + g^{(j)} \right\|_{C(I)} \\
&\leq \sum_{j=0}^{k} \left(\left\| f^{(j)} \right\|_{C(I)} + \left\| g^{(j)} \right\|_{C(I)} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \left\| f^{(j)} \right\|_{C(I)} + \sum_{j=0}^{k} \left\| g^{(j)} \right\|_{C(I)} \\
&= |f|_k + |g|_k .
\end{aligned}
$$

よって三角不等式がなりたつことも分かったから，$|\quad|_k$ は $C^k(I)$ のノルムである．

ステップ 2：完備性証明のための準備． 次の主張を証明する．

> $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $C^1(I)$ の元の列とする．(u_n) がある $v_0 \in C(I)$ に，(u_n') がある $v_1 \in C(I)$ に一様収束すれば，$v_0 \in C^1(I)$ で $v_0' = v_1$ がなりたつ．

各 n に対して $u_n(a) = 0$ の場合に示せば十分である．微積分学の基本定理より

$$
u_n(x) = \int_a^x u_n'(s)ds \quad (x \in I)
$$

と表現できる．$u_n' \longrightarrow v_1$ は一様収束であったから，I 上で

$$
\begin{aligned}
v_0(x) &= \lim_{n\to\infty} u_n(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_a^x u_n'(s)ds \\
&= \int_a^x v_1(s)ds
\end{aligned}
$$

がなりたつ．この表現と v_1 の連続性により $v_0 \in C^1(I)$ かつ

$$
\frac{d}{dx} v_0(x) = v_1(x)
$$

がわかる．

ステップ 3：完備性の証明． $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $(C^k(I), |\quad|_k)$ の Cauchy 列とする．任意の $u \in C^k(I)$ に対して

$$
\left\| u^{(j)} \right\|_{C(I)} \leq \sum_{i=0}^{k} \left\| u^{(i)} \right\|_{C(I)} = |u|_k \quad (j \in \{0, 1, \ldots, k\})
$$

であるから，各 $(f_n^{(j)})$ は $C(I)$ の Cauchy 列とみなせる．$(f_n^{(j)})$ の $C(I)$ での極限を g_j とおけば，ステップ 2 の結果により $j \in \{0, \ldots, k\}$ に関して $g_j \in C^{k-j}(I)$ であり，

$$
\frac{d^j}{dx^j} g_0 = g_j
$$

が成立する．ここで新たに $f = g_0 \in C^k(I)$ とおけば，$f^{(j)} = g_j$ である．あとは，(f_n) が $C^k(I)$ のノルムで f に収束することを示せばよい．f の定義より

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f_n^{(j)} - f^{(j)} \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| f_n^{(j)} - g_j \right\| = 0$$

であるから，

$$|f_n - f|_k = \sum_{j=0}^{k} \left\| f_n^{(j)} - f^{(j)} \right\|_{C(I)}$$

の両辺で極限をとることにより

$$\lim_{n\to\infty} |f_n - f|_k = 0.$$

$f \in C^k(I)$ と合わせて，$C^k(I)$ の完備性が示された． □

問題 ([5])．$X = C[0,1]$ を一様ノルムによる Banach 空間とし，$0 < a < 1, Y = \{f \in X \mid [0,a] \text{ 上 } f(t) = 0\}$ とおく．このとき，次の主張が成り立つ．

(1) Y は X の閉部分空間である．

(2) X/Y は C[0,a] と等長同型である．

Proof. $f \in X = C[0,1]$ の $[0,a]$ への制限を $f|_{[0,a]}$ と書くことにする．また，X のノルムを $\| \quad \|_X$ と表記し，ほかのノルム空間についても同様に書くことにする．

(1) **ステップ 1：線形部分空間であることの証明．** $f, g \in Y$ とすれば，明らかに $[0,a]$ 上で

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) = 0$$

であるから $f + g \in Y$ である．同様に任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ と $f \in Y$ に対して

$$(\lambda f)(t) = \lambda(f(t)) = 0 \quad (x \in [0,a])$$

となるから，$\lambda f \in Y$ であり，Y が X の線形部分空間であることが確かめられた．

ステップ 2：閉集合であることの証明． X の収束列で Y の元からなるようなものを任意に持ってきたとき，その極限も Y の元となることを示す．$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を Y の元の列で，X において f に収束するものとする．

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,a]} |f(t)| &\le \sup_{t\in[0,a]} |f(t) - f_n(t)| + \sup_{t\in[0,a]} |f_n(t)| \\ &\le \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - f_n(t)| + \sup_{t\in[0,a]} |f_n(t)| \\ &= \|f - f_n\|_X + \sup_{t\in[0,a]} |f_n(t)|\end{aligned}$$

仮定より最後の辺の第二項は 0 であり，第一項は 0 に収束する．したがって，最初の辺も 0 であり，$f \in Y$ が分かる．ゆえに，Y は X の閉集合である．

(2) **ステップ 1：準備．** $i : [0,a] \longrightarrow [0,1]$ を包含写像とする．全射 $i^* : X \longrightarrow C[0,a]$ を $f \longmapsto f \circ i = f|_{[0,a]}$ によって定める．$C[0,a]$ は一様ノルム $\| \quad \|_{C[0,a]}$ によって距離空間と考える．さらに，標準全射 $q : X \longrightarrow X/Y$ を $f \longmapsto [f]$（$[f]$ は f の同値類）と定めることにする．このとき，X/Y は同値関係 $i^*(f) = i^*(g)$ が定

める商集合と同じものであることに注意されたい．いま，下の図式を可換にする可逆写像 $\bar{i}^*$ がただ一つ存在するから，この $\bar{i}^*$ が線形写像として同型であり，さらに等長写像となっていることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C[0,a] \\
X/Y \arrow[ur, "\bar{i}^*"'] &
\end{tikzcd}$$

ステップ 2：線形性の証明． 全射 i^* が線形写像であれば，線形代数学の基本的な結果により全単射 $\bar{i}^*$ は（線形写像として）同型となるので，i^* の線形性を示す．$f, g \in X$ とすれば，任意の $t \in [0,a]$ に対して

$$\begin{aligned}
i^*(f+g)(t) &= ((f+g)\circ i)(t) = (f+g)(i(t)) = f(i(t)) + g(i(t))) \\
&= (f\circ i)(t) + (g\circ i)(t) = i^*(f)(t) + i^*(g)(t) = (i^*(f) + i^*(g))(t)
\end{aligned}$$

である．したがって，$i^*(f+g) \in Y = C[0,a]$ と $i^*(f) + i^*(g) \in Y$ は写像として等しく，$i^*(f+g) = i^*(f) + i^*(g)$ である．同様にして，$\lambda \in \mathbb{C}$ とすれば任意の $t \in [0,a]$ に対して

$$i^*(\lambda f)(t) = (\lambda f)(i(t)) = \lambda f(i(t)) = (\lambda(i^*(f)))(t)$$

もなりたつから，$i^*(\lambda f) = \lambda i^*(f)$ である．よって i^* の線形性が示された．

ステップ 3：等長性の証明． $[f] \in X/Y$ に対して $i^*([f]) = f|_{[0,a]}$ と書けるから，任意の f に対して

$$\|[f]\|_{X/Y} = \left\|f|_{[0,a]}\right\|_{C[0,a]}$$

となることを示せばよい．商ノルムの定義は

$$\|[f]\|_{X/Y} = \inf_{g\in Y} \|f-g\|_X$$

であった．任意の $f \in X$ と任意の $g \in Y$ に対して

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,1]} |f(t)-g(t)| &= \left(\sup_{t\in[0,a]} |f(t)|\right) \vee \left(\sup_{t\in(a,1]} |f(t)-g(t)|\right) \\
&\geq \sup_{t\in[0,a]} |f(t)| = \sup_{t\in[0,a]} \left|f|_{[0,a]}(t)\right|
\end{aligned}$$

がなりたつから，

$$\|f-g\|_X \geq \left\|f|_{[0,a]}\right\|_{C[0,a]} \quad (\forall g \in Y).$$

$g \in Y$ について下限をとることにより

$$\|[f]\|_{X/Y} = \inf_{g\in Y} \|f-g\| \geq \left\|f|_{[0,a]}\right\|_{C[0,a]} \tag{7}$$

が分かる．次に逆向きの不等式を示す．

$$\sup_{t\in[0,1]} |f(t)-g(t)| = \left(\sup_{t\in[0,a]} |f(t)|\right) \vee \left(\sup_{t\in(a,1]} |f(t)-g(t)|\right)$$

において，もし $g \in Y$ として

$$\sup_{t\in[0,a]} |f(t)| \geq \sup_{t\in(a,1]} |f(t)-g(t)|$$

なるものがとれれば

$$\begin{aligned}\|f-g\|_X &= \sup_{t\in[0,1]} |f(t)-g(t)| \\ &= \left(\sup_{t\in[0,a]} |f(t)|\right) \vee \left(\sup_{t\in(a,1]} |f(t)-g(t)|\right) \\ &= \sup_{t\in[0,a]} |f(t)| \\ &= \left\|f|_{[0,a]}\right\|_{C[0,a]}\end{aligned}$$

となり，

$$\|[f]\|_{X/Y} = \inf_{g\in Y} \|f-g\| \leq \left\|f|_{[0,a]}\right\|_{C[0,a]}$$

が示される．そこで，多少天下り的にはなるが

$$g_0(t) = \begin{cases} 0 & t\in[0,a] \\ f(t)-f(a) & t\in(a,1] \end{cases}$$

と定義しよう．このとき $g_0 \in Y$ であって，

$$|f(t)-g_0(t)| = |f(a)| \leq \sup_{t\in[0,a]} |f(t)| \quad (t\in(a,1])$$

がなりたつ．したがって，先ほどの議論により

$$\|[f]\|_{X/Y} = \inf_{g\in Y} \|f-g\|_X \leq \|f-g_0\| = \left\|f|_{[0,a]}\right\|_{C[0,a]} \tag{8}$$

となる．式（7）と（8）をあわせれば，

$$\|[f]\|_{X/Y} = \left\|f|_{[0,a]}\right\|_{C[0,a]}.$$

すなわち，$\bar{i}^* : X/Y \longrightarrow C[0,a]$ は等長写像である． □

問題 ([7])**.** $I=[0,1], \Delta=\{(t,s) \mid 0\leq s\leq t\leq 1\}, K\in C(\Delta)$ とする．線形空間 $X=C(I)$ をノルム $\|u\|_X := \sup_{t\in I}|u(t)|$ により Banach 空間と考える．$u\in X$ に対して写像 $Tu : I\longrightarrow \mathbb{C}$ を以下のように定める．

$$Tu(t) = \int_0^t K(t,s)u(s)ds \quad (t\in I).$$

このとき，次の（1）から（3）がなりたつ．

(1) $u\in X$ なら $Tu\in X$.

(2) 写像 $T : X\ni u\longmapsto Tu\in X$ について，$T\in B(X)$ かつ

$$\|T^n\| \leq \frac{A^n}{n!} \quad (n\in\mathbb{N}_0). \tag{9}$$

ただし，$A := \sup_{(t,s)\in\Delta}|K(t,s)|$.

(3) $I-T$ は単射で，$(I-T)^{-1}\in B(X)$．ただし，$I : X\longrightarrow X$ は恒等写像である．

Proof. (1)$u \in X = C(I)$ とする．Δ と I はコンパクトなので，$K \in C(\Delta)$ は Δ 上で，u は I 上でそれぞれ有界である．(2) の記号を先に使って $A := \sup_{(t,s)\in\Delta} |K(t,s)|$ と表す．さらに，ここだけの記号として $M := \sup_{t\in I} |u(t)|$ を用いる．このとき任意の $s, t \in I$ に対して

$$\begin{aligned}
|Tu(t) - Tu(s)| &= \left| \int_0^t K(t,r)u(r)dr - \int_0^s K(s,r)u(r)dr \right| \\
&\leq \left| \int_0^s K(t,r)u(r)dr - \int_0^s K(s,r)u(r)dr \right| + \left| \int_s^t K(t,r)u(r)dr \right| \\
&= \left| \int_0^s (K(t,r) - K(s,r))u(r)dr \right| + \left| \int_s^t K(t,r)u(r)dr \right| \\
&\leq \int_0^s |(K(t,r) - K(s,r))u(r)|\, dr + \mathrm{sgn}(t-s) \int_s^t |K(t,r)u(r)|\, dr \\
&\leq \sup_{r\in I} |u(r)| \cdot \int_0^s |K(t,r) - K(s,r)|\, dr + A \cdot \sup_{r\in I} |u(r)| \cdot \mathrm{sgn}(t-s) \int_s^t dr \\
&= M \int_0^s |K(t,r) - K(s,r)|\, dr + AM\, |t-s| \qquad (10)
\end{aligned}$$

が成り立つ．いま，$t_0 \in I$ を任意に選んで固定すれば，u が t_0 で連続となることを示す．$\varepsilon > 0$ とする．K は Δ 上で一様連続であったから，ある $\delta_1 > 0$ が存在して

$$s \in I,\ |t_0 - s| < \delta_1,\ 0 \leq r \leq \min\{s, t_0\} \implies |K(t_0, r) - K(s,r)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

となる．また，$\delta_2 > 0$ を $2AM\delta_2 < \varepsilon$ なる数とし，$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくことにする．このとき $|t_0 - s| < \delta$ となるような任意の $s \in I$ に対して

$$\begin{aligned}
|Tu(t) - Tu(s)| &\leq M \int_0^s |K(t_0, r) - K(s,r)|\, dr + AM\, |t_0 - s| \\
&< M \cdot \int_0^s \frac{\varepsilon}{2M} dr + AM \cdot \frac{\varepsilon}{2AM} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} \cdot s + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

すなわち，Tu は $t_0 \in I$ で連続である．t_0 は任意に選んだものだったから，Tu は I で連続（*i.e.* $Tu \in X$）であることが分かった．

(2) **ステップ 1 : T が線形であることの証明．** $u, v \in X = C(I)$ とすれば，任意の $t \in I$ に対して

$$\begin{aligned}
(T(u+v))(t) &= \int_0^t K(t,s)(u(s) + v(s))ds \\
&= \int_0^t \{K(t,s)u(s) + K(t,s)v(s)\}ds \\
&= \int_0^t K(t,s)u(s)ds + \int_0^t K(t,s)v(s)ds \\
&= Tu(t) + Tv(t) = (Tu + Tv)(t)
\end{aligned}$$

したがって，$T(u+v)$ と $Tu + Tv$ は $X = C(I)$ の元として等しい．同様に，$u \in X, \lambda \in \mathbb{C}$ とすれば，任意

の $t \in I$ に対して

$$\begin{aligned}(T(\lambda u))(t) &= \int_0^t K(t,s)(\lambda u(s))ds \\ &= \lambda \int_0^t K(t,s)u(s)ds = \lambda((Tu)(t)) = (\lambda Tu)(t)\end{aligned}$$

であるから，$T(\lambda u) = \lambda(Tu)$ となる．したがって，$T : X \longrightarrow X$ は線形写像である．

ステップ 2：T が有界であることの証明． 任意の $u \in X$ と任意の $t \in I$ に対して

$$\begin{aligned}|Tu(t)| &= \left|\int_0^t K(t,s)u(s)ds\right| \\ &\leq \int_0^t |K(t,s)u(s)|\, ds \\ &\leq \int_0^t A\,|u(s)|\, ds \\ &\leq A \sup_{s\in I} |u(s)| \int_0^t ds \\ &= A\,\|u\|_X \cdot t \leq A\,\|u\|_X \cdot 1 = A\,\|u\|_X\end{aligned}$$

がなりたつから，

$$\|Tu\|_X = \sup_{t\in I} |Tu(t)| \leq A\,\|u\|_X \quad (u \in X).$$

よって T は有界であり，ステップ 1 と合わせて $T \in B(X)$ を得る．

ステップ 3：不等式（9）の証明． 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して以下の不等式がなりたつことを n に関する帰納法で示す．

$$|T^n u(t)| \leq \frac{A^n}{n!}\,\|u\|_X \cdot t^n \quad (u \in X, t \in I = [0,1]) \tag{11}$$

$n = 1$ のとき，$|Tu(t)| \leq A\,\|u\|_X \cdot t$ となることはステップ 2 においてすでに示した．n で（11）がなりたつと仮定すると，

$$\begin{aligned}\left|T^{n+1}u(t)\right| &= |T(T^n u(t))| \\ &= \left|\int_0^t K(t,s)T^n u(s)ds\right| \\ &\leq \int_0^t |K(t,s)T^n u(s)|\, ds \\ &\leq A\int_0^t |T^n u(s)|\, ds \\ &\leq A\int_0^t \frac{A^n}{n!}\,\|u\|_X\, s^n ds \\ &= \frac{A^{n+1}}{n!}\,\|u\|_X \int_0^t s_n ds \\ &= \frac{A^{n+1}}{n!}\,\|u_X\| \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1!} \\ &= \frac{A^{n+1}}{n+1!}\,\|u_X\| \cdot t^{n+1} \quad (t \in [0,1])\end{aligned}$$

より $n+1$ でもなりたつ．したがって，帰納法により（11）が任意の n に対してなりたつことが示された．$0 \leq t \leq 1$ に注意すれば，以下の式が導かれる．

$$|T^n u(t)| \leq \frac{A^n}{n!} \|u\|_X \quad (t \in [0,1]).$$

t にかんして上限をとれば，任意の $u \in X$ に対して

$$\|T^n u\|_X \leq \frac{A^n}{n!} \|u\|_X$$

となることが分かるので，任意の $n \leq 1$ に対して

$$\|T^n\| \leq \frac{A^n}{n!}$$

である．また，$n=0$ のときは $0! = 1$ および $T^0 = I$（恒等写像）と考えることにより，

$$\|I\| = 1 = \frac{A^0}{0!}$$

となる．以上の結果より（9）がなりたつことが示された．

(3) **ステップ 1：$\sum T^n$ の収束．** X は Banach 空間であるから，$B(X) = B(X,X)$ も Banach 空間となることに注意しておく．(2) の結果により，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $T_n \in B(X)$ である．$P_n \in B(X)$ を

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} T^k$$

により定めることにする．(2) の結果により，任意の $n \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$\|T^n\| \leq \frac{A^n}{n!}$$

である．

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = e^A < \infty$$

より，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| < \infty.$$

このとき，$n < m$ とすれば

$$\|P_m - P_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} T^k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|T^k\|$$

であるから，(P_n) は $B(X)$ の Cauchy 列であることが分かる．$B(X)$ の完備性より極限が存在するから，

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} T^n = \lim_{n \to \infty} P_n$$

とおけば $P \in B(X)$ である．

ステップ 2：P が $I - T$ の逆写像であることの証明． はじめに $P(I-T) = I$（恒等写像）であることを示す．

$$\begin{aligned} \|P(I-T) - P_n(I-T)\| &= \|(P-P_n)(I-T)\| \\ &\leq \|P-P_n\| \, \|I-T\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

より，

$$\lim_{n\to\infty}\|P(I-T)-P_n(I-T)\|=0 \tag{12}$$

がなりたつ．また，

$$\begin{aligned}P_n(I-T) &= \left(\sum_{k=0}^{n}T^k\right)(I-T)\\ &= \sum_{k=0}^{n}T^k(I-T)\\ &= \sum_{k=0}^{n}(T^k-T^{k+1}) = I-T^{n+1}\end{aligned}$$

であるから，

$$\|P_n(I-T)-I\| = \|(I-T_{n+1})-I\| = \|T_{n+1}\| \longrightarrow 0 \quad (n\longrightarrow\infty).$$

したがって，

$$\lim_{n\to\infty}\|P_n(I-T)-I\|=0. \tag{13}$$

三角不等式より

$$\|P(I-T)-I\| \leq \|P(I-T)-P_n(I-T)\| + \|P_n(I-T)-I\|$$

であるから，右辺で n について極限をとれば式（12）および（13）によって $\|P(I-T)-I\|=0$ を得る．これより，$P(I-T)=I$ である．

次に $(I-T)P=I$ を示す．先ほどと同様にして，

$$\begin{aligned}\|(I-T)P-(I-T)P_n\| &= \|(I-T)(P-P_n)\|\\ &\leq \|I-T\|\,\|P-P_n\| \longrightarrow 0 \quad (n\longrightarrow\infty)\end{aligned}$$

より $\lim_{n\to\infty}\|(I-T)P-(I-T)P_n\|=0$ である．また

$$\begin{aligned}(I-T)P_n &= (I-T)\left(\sum_{k=0}^{n}T^k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}(I-T)T^k\\ &= \sum_{k=0}^{n}(T^k-T^{k+1}) = I-T^{n+1}\end{aligned}$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\|(I-T)P_n-I\| = \left\|T^{n+1}\right\| = 0$$

がなりたつ．したがって

$$0 \leq \|(I-T)P-I\| \leq \lim_{n\to\infty}\|(I-T)P-(I-T)P_n\| + \lim_{n\to\infty}\|(I-T)P_n-I\| = 0.$$

すなわち $\|(I-T)P-I\|=0$ であり，$(I-T)P=I$ が示された．以上の議論をまとめれば，ある $P\in B(X)$ が存在して $P(I-T)=P(I-T)=I$ となることがわかった．これは写像 $I-T\in B(X)$ が可逆で，その逆写像は $(I-T)^{-1}=P\in B(X)$ であることを示している．写像が可逆であることと全単射であることは同値であったから $I-T$ は単射でもある． □

問題 ([8])．$(S, \mathfrak{M}, \mu)$ を σ -有限な測度空間，　$X = L^2(S, \mathfrak{M}, \mu) = L^2(\mu)$ とする．可測関数 $a : S \longrightarrow \mathbb{C}$ に対して，X 上の掛け算作用素 M_a を次で定める：

$$D(M_a) = \{u \in X \mid au \in X\}, \quad (M_a u)(x) = a(x)u(x) \quad (x \in S).$$

(1) $a \in L^\infty(S, \mathfrak{M}, \mu)$ ならば $M_a \in B(X)$ である，$\|M_a\| = \|a\|_{L^\infty}$ がなりたつ．

(2) 逆に $M_a \in B(X)$ ならば $a \in L^\infty(S, \mathfrak{M}, \mu)$ である．

Proof. (1) **ステップ 1：$a \in L^\infty$ なら $M_a \in B(X)$ であることの証明．** $a \in L^\infty(S, \mathfrak{M}, \mu)$ とすれば，任意の $u \in X$ に対して

$$\begin{aligned}\int_X |a(x)u(x)|^2 \mu(dx) &\le \int_X \|a\|_{L^\infty(\mu)}^2 |u(x)|^2 \mu(dx) \\ &= \|a\|_{L^\infty(\mu)}^2 \int_X |u(x)|^2 \mu(dx) < \infty \end{aligned} \tag{14}$$

がなりたつ．これより任意の $u \in X$ に対して $au \in X = L^2(\mu)$，すなわち $D(M_a) = X$ がわかる．任意の $u, v \in D(M_a)$ および任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} &M_a(\alpha u + \beta v)(x) = a(x)\{(\alpha u + \beta v)(x)\} = a(x)(\alpha u(x) + \beta v(x)) \\ &= \alpha a(x)u(x) + \beta a(x)v(x) = \alpha M_a u(x) + \beta M_a v(x) = (\alpha M_a u + L\beta M_a v)(x) \quad (x \in S)\end{aligned}$$

であるから，$M_a(\alpha u + \beta v) = \alpha M_a u + \beta M_a v$，すなわち M_a は線形写像である．また，式（14）より

$$\begin{aligned}\|M_a u\|_X &= \sqrt{\int_X |a(x)u(x)|^2 \mu(dx)} \\ &\le \sqrt{\|a\|_{L^\infty(\mu)}^2 \int_X |u(x)|^2 \mu(dx)} \\ &= \|a\|_{L^\infty(\mu)} \|u\|_X\end{aligned}$$

となるから $M_a : X \longrightarrow X$ の有界性もわかるので $M_a \in B(X)$ である．

ステップ 2：$\|M_a\| = \|a\|_{L^\infty(\mu)}$ の証明． ステップ 1 により任意の $u \in X = D(M_a)$ に対して

$$\|M_a u\|_X \le \|a\|_{L^\infty(\mu)} \|u\|_X$$

がなりたつから，$\|M_a\| \le \|a\|_{L^\infty}$ である．

逆向きの不等号を示す．$a \in L^\infty(\mu)$ とする．$a = 0$ なら明らかに $\|M_a\| \ge 0 = \|a\|_{L^\infty(\mu)}$ なので $a \ne 0$ について示せばよい．また，$\mu(S) = 0$ のときは両辺共に 0 で明らかに成立するので，$\mu(S) > 0$ としよう．$(S, \mathfrak{M}, \mu)$ は σ -有限であるから，　$E_\varepsilon \in \mathfrak{M}$ を

$$E_\varepsilon \subset \{x \in S \mid |a(x)| > \|a\|_{L^\infty(\mu)} - \varepsilon\}$$

かつ $0 < \mu(E_\varepsilon) < \infty$ となるようにとることが出来る．さらに写像 $u_\varepsilon : S \longrightarrow \mathbb{C}$ を $u_\varepsilon = 1_{E_\varepsilon}$ で定めると

$$\int_X |u_\varepsilon(x)|^2 \mu(dx) = \int_X 1_{E_\varepsilon}(x) \mu(dx) = \mu(E_\varepsilon)$$

より，$u_\varepsilon \in X = L^2(\mu)$ かつ $\|u_\varepsilon\|_X^2 = \mu(E_\varepsilon) \in (0, \infty)$ がなりたつ．

$$\begin{aligned}
\int_X |M_a u_\varepsilon|^2 \mu(dx) &= \int_X |a(x)u_\varepsilon(x)|^2 \mu(dx) \\
&= \int_X |a(x)|^2 1_{E_\varepsilon}(x)\mu(dx) \\
&\geq \int_X (\|a\|_{L^\infty(\mu)} - \varepsilon)^2 1_{E_\varepsilon}(x)\mu(dx) \\
&= (\|a\|_{L^\infty(\mu)} - \varepsilon)^2 \mu(E_\varepsilon) \\
&= (\|a\|_{L^\infty(\mu)} - \varepsilon)^2 \|u_\varepsilon\|_X^2
\end{aligned}$$

から，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\|M_a u_\varepsilon\|_X \geq (\|a\|_{L^\infty(\mu)} - \varepsilon)\|u_\varepsilon\|_X$ である．すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\|M_a\| \geq \frac{\|M_a u_\varepsilon\|_X}{\|u_\varepsilon\|_X} \geq \|a\|_{L^\infty(\mu)} - \varepsilon$$

となることが分かるので，$\|M_a\| \geq \|a\|_{L^\infty(\mu)}$ が示された．以上の議論をまとめれば，$\|M_a\| = \|a\|_{L^\infty(\mu)}$ となる．

(2) 自然数 n に対して集合 F_n を $F_n = \{x \in S \mid |a(x)| \leq n\}$ とし，写像 $a_n : S \longrightarrow \mathbb{C}$ を $a_n = a1_{F_n}$ と定めることにする．a は複素数値なので（つまり，$|a(x)|$ は無限大にはならないので)，$S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ となることに注意しておく．$a_n \in L^\infty(\mu)$ であるから (1) の結果により掛け算作用素 M_{a_n} は $M_{a_n} \in B(X)$ かつ $\|M_{a_n}\| = \|a_n\|_{L^\infty(\mu)}$ をみたす．a_n の定義より $|a_n(x)| \leq |a(x)|$ $(x \in S)$ であり，$D(M_a) = X$ の仮定と合わせれば

$$\int_X |a_n(x)u(x)|^2 \mu(dx) \leq \int_X |a(x)u(x)|^2 \mu(dx) < \infty \quad (\forall u \in X,\ \forall n \in \mathbb{N}).$$

すなわち，任意の $n \in \mathbb{N}$ と $u \in X$ に対して

$$\|M_{a_n}u\|_X \leq \|M_a u\| \tag{15}$$

である．また，$M_a \in B(X)$ よりある実数 $C > 0$ が存在して，任意の $u \in X$ に対して

$$\|M_a u\|_X \leq C\|u\|_X \tag{16}$$

が成り立つ．式（15）（16）をあわせれば，任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $u \in X$ に対して

$$\|M_{a_n}u\|_X \leq C\|u\|_X$$

であるから，上限をとることにより

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|M_{a_n}u\|_X \leq C\|u\|_X < \infty \tag{17}$$

を得る．ここで，一様有界性の原理を用いることで（17）から

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|M_{a_n}\| < \infty$$

が導かれる．(1) の結果により $\|M_{a_n}\| = \|a_n\|_{L^\infty(\mu)}$ であったから，

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\|_{L^\infty(\mu)} < \infty. \tag{18}$$

ここで，証明の完成させるために以下の等式を示す．なお，ess sup で本質的上限を表すことにする．

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in S} |a_n(x)| = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in S} |a(x)| . \tag{19}$$

a_n の定義より

$$\begin{aligned}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in S} |a_n(x)| &= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in S} \left|a(x)1_{F_n(x)}\right| \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in F_n} |a(x)| \end{aligned}\tag{20}$$

となることに注意しておく．本質的上限の性質により

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in F_n} |a(x)| \le \operatorname*{ess\,sup}_{x\in S} |a(x)| \quad (n\in\mathbb{N}).$$

が成り立つから，左辺で n ついて上限をとれば

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in F_n} |a(x)| \le \operatorname*{ess\,sup}_{x\in S} |a(x)| \tag{21}$$

である．次に逆向きの不等式を示す．明らかに

$$|a(x)| \le \operatorname*{ess\,sup}_{x\in F_n} |a(x)| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in F_n} |a(x)| \quad (\text{a.e.} x \in F_n)$$

がなりたつ．F_n の作り方から $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ であったから，これよりほとんど全ての $x\in S$ に対して

$$|a(x)| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in F_n} |a(x)|$$

がなりたつ．したがって

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in S} |a(x)| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in F_n} |a(x)| . \tag{22}$$

（21）と（22）を合わせれば

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in S} |a(x)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in F_n} |a(x)| .$$

さらに，（20）を用いることにより

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in S} |a_n(x)| = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in S} |a(x)| .$$

となる．$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in S} |a(x)| = \|a\|_{L^\infty(\mu)}$ だったから，結局

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\|_{L^\infty(\mu)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in S} |a(x)|$$

である．これと式（18）により

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in S} |a(x)| < \infty$$

すなわち $a\in L^\infty(\mu)$ を得る． □

問題 ([9])．[8] と同様の設定のもと，$A\in B(X)$ が任意の $a\in L^\infty(\mu)$ に対して $AM_a = M_aA$ をみたすならば，A もまた掛け算作用素となる．

Proof. ステップ 1：$(S, \mathfrak{M}, \mu)$ が有限測度空間の場合．

$$\mathscr{M} := \{A \in B(X) \mid \exists a \in L^\infty(\mu) \quad A = M_a.\}$$
$$\tilde{\mathscr{M}} := \{A \in B(X) \mid \forall M \in \mathscr{M} \quad AM = MA.\}$$

としたとき，$\mathscr{M} = \tilde{\mathscr{M}}$ を示せばよい．掛け算作用素の定義より $\mathscr{M} \subset \tilde{\mathscr{M}}$ は明らかなので，以下では逆向きの包含関係を示す．$A \in \tilde{\mathscr{M}}$ とする．このとき，定値写像 $1 \in L^\infty(\mu) \subset L^2(\mu)$ にたいして，$a = A(1)$ と定める．A が a による掛け算作用素であることを示したい．任意の $f \in L^\infty(\mu)$ に対して，

$$Af = AM_f(1) = M_f A(1) = fA(1) = M_a f$$

がなりたつことは直ちにわかる．$E = \{x \in S \mid |a(x)| > \|A\| + 1\}$ および $f = 1_E \in L^\infty(\mu)$ と定めたとき，もし $\mu(E) > 0$ なら

$$\begin{aligned}
\|Af\|_X^2 &= \|M_a f\|_X^2 \\
&= \int_X |a(x)1_E(x)|^2 \mu(dx) \\
&> \|A\|^2 \int_X 1_E(x)\mu(dx) \\
&= \|A\|^2 \mu(E)
\end{aligned}$$

がなりたつ．いま $f = 1_E$ より $\|f\|_X^2 = \mu(E)$ となるから，$\|Af\|_X^2 > \|A\|^2 \|f\|_X^2$ が導かれるがこれは作用素ノルムの定義に矛盾している．よって $\mu(E) = 0$, すなわち $a \leq \|A\|+1$ $\mu-$a.e. が分かる．以上の議論により，A は $L^\infty(\mu)$ 上では $a \in L^\infty(\mu)$ による掛け算作用素 M_a と一致している．言い換えれば $A|_{L^\infty(\mu)} = M_a|_{L^\infty(\mu)}$ である．いま，A と M_a はノルム空間に値をとる連続写像なので，定義域の稠密な部分集合上で一致すれば全体でも一致する．（証明は問題 [12] の (2) と同様．）$L^\infty\mu$ は $L^2(\mu)$ で稠密なので $A = M_a$ である．これにより，$A \in \mathscr{M}$ が示された．

ステップ 2：$(S, \mathfrak{M}, \mu)$ が σ -有限の場合．　ステップ 1 と同様に $\mathscr{M}, \tilde{\mathscr{M}}$ を定義し，$A \in \tilde{M}$ なら $A \in \mathscr{M}$ を示す．$(S, \mathfrak{M}, \mu)$ は σ -有限であるから，　$S = \coprod_{n\in\mathbb{N}} E_n$，$\mu(E_n) < \infty$ となる $\mathfrak{M}$ の列 (E_n) が存在する．$1_{E_n} \in L^\infty(\mu) \cap L^2(\mu)$ に対して $a_n = A(1_{E_n})$ とし

$$a(x) = \sum_{n=1}^\infty a_n(x) 1_{E_n}(x)$$

と定める．右辺は形式上無限和だが，各 $x \in S$ に対して $x \in E_n$ なる n が唯一つ存在するから必ず収束する．よってこの定義は写像 $a : S \longrightarrow \mathbb{C}$ を定めている．このとき，$A = M_a$ を示すのが目標である．$f \in L^\infty(\mu) \cap L^2(\mu)$ に対して $f_n := f1_{E_n} \in L^2(\mu) \cap L^\infty(\mu)$ を考える．

$$M_{f_n}(1_{E_n}) = f_n 1_{E_n} = f1_{E_n}1_{E_n} = f1_{E_n} = f_n$$

であるから，ステップ 1 と同様に

$$Af_n = AM_{f_n}(1_{E_n}) = M_{f_n}A(1_{E_n}) = a_n f_n \tag{23}$$

である．A は連続線形写像なので，$f \in L^\infty(\mu) \cap L^2(\mu)$ に対して

$$Af = A(\sum_{n=1}^\infty f_n) = \sum_{n=1}^\infty Af_n \tag{24}$$

がなりたつ．また

$$Af_n = M_{a_n} f_n = a_n 1_{E_n} f$$

であり，和をとることにより

$$\sum_{n=1}^{\infty} Af_n = af$$

となる．式（24）とあわせて

$$Af = af \quad (f \in L^\infty(\mu) \cap L^2(\mu)). \tag{25}$$

を得る．次に，$a \in L^\infty(\mu)$ を示す．$F := \{x \in S \mid |a(x)| > \|A\| + 1\}$ とおく．a の可測性より $F \in \mathfrak{M}$ であることに注意されたい．このとき，$\mu(F) = 0$ を示せば a の有界性が分かる．$F_n = F \cap E_n$ とおけば

$$F = \coprod_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

であるから，すべての n に対して $\mu(F_n) = 0$ を示せばよい．$\mu(F_n) > 0$ と仮定する．$1_{F_n} = 1_{F_n \cap E_n} \in L^\infty(\mu) \cap L^2(\mu)$ と式（23）により

$$\begin{aligned}
\|A(1_{F_n})\|_X^2 &= \|a_n 1_{F_n}\|_X^2 \\
&= \int_X |a_n(x) 1_{F_n}(x)|^2 \mu(dx) \\
&> \|A\|^2 \mu(F_n) = \|A\|^2 \|1_{F_n}\|_X^2
\end{aligned}$$

となり矛盾なので，ステップ 1 と同様にして $\mu(F_n) = 0$ が導かれた．ゆえに $a \in L^\infty(\mu)$ である．問題 [8](1) により $M_a \in B(X)$ であり，式（25）から $A|_{L^\infty(\mu) \cap L^2(\mu)} = M_a|_{L^\infty(\mu) \cap L^2(\mu)}$ がわかる．$L^\infty(\mu) \cap L^2(\mu)$ は $L^2(\mu)$ で稠密なので，$A = M_a$ が示される． □

問題 ([11])**.** X, Y を Banach 空間とする．$T_n, T \in B(X, Y)$ $(n \in \mathbb{N})$ は任意の $x \in X$ において $Tx = \lim_{n \to \infty} T_n x$ をみたす（Y のノルムでの収束）とする．このとき，X における任意のコンパクト集合 K に対して

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in K} \|Tx - T_n x\|_Y = 0.$$

が成立する．

Proof. **ステップ 1：X の任意の収束列 (x_n) に対して $\|T_n x_n - Tx\|_X \longrightarrow 0$ となることの証明．** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を X の収束列とし，$x \in X$ をその極限とする．

$$\begin{aligned}
\|T_n x_n - Tx\|_Y &\leq \|T_n x_n - T_n x\|_Y + \|T_n x - Tx\|_Y \\
&= \|T_n(x_n - x)\|_Y + \|T_n x - Tx\|_Y \\
&\leq \|T_n\| \|x_n - x\|_X + \|T_n x - Tx\|_Y \\
&\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| \|x_n - x\|_X + \|T_n x - Tx\|_Y \qquad (26)
\end{aligned}$$

である．仮定より，各 $x \in X$ に対して $\|T_n(x)\|_Y$ は収束列なので有界列である．$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n(x)\| < \infty$ がなりたつから，一様有界性の定理より $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$ となる．仮定より

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\|_X = 0,$$
$$\lim_{n \to \infty} \|T_n x - Tx\|_Y = 0.$$

であるから，式（26）において極限をとれば

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n x_n - Tx\|_Y = 0.$$

ステップ 2：問題の主張の証明． $\|T_n x\|_Y \longrightarrow 0\ (\forall x \in X)$ のときに示せば十分である．実際，$T_n - T = T'_n$ とおくことにより一般の場合もこれに帰着できるからである．証明は背理法で行う．主張を正確に述べると，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $n_0 = n_0(\varepsilon)$ が存在して，任意の $n \geq n_0$ と任意の $x \in X$ に対して

$$\|T_n x - Tx\| < \varepsilon$$

がなりたつ，ということであった．これを否定すればある ε_0 が存在して，部分列 (T_{n_k}) と K の列 (x_k) を

$$\|T_{n_k} x_k\|_Y \geq \varepsilon_0 \quad (\forall k \in \mathbb{N}) \tag{27}$$

を満たすようにとれることになる．X が距離空間であることと K のコンパクト性より (x_k) には収束部分列が存在するので，それを $x_{k(m)} \longrightarrow x_0 \in K$ とおくことにする．仮定より任意の $x \in X$ に対して $\left\|T_{N_{k(m)}} x\right\| \longrightarrow 0$ となるので，ステップ 1 の結果により

$$\lim_{m\to\infty}\left\|T_{n_{k(m)}} x_{k(m)}\right\| = 0$$

である．ところがこれは（27）に矛盾するので，仮定が誤りであることが導かれる． □

問題 ([12])**.** X をノルム空間，X_0 をその部分空間とする．$i : X_0 \longrightarrow X$ を包含写像とする．$T : X^* \ni x^* \longrightarrow x^* \circ i \in X_0$ で線形写像を定める．このとき，以下が成り立つ．

(1) T は連続かつ全射である．

(2) X_0 が X で稠密ならば T はノルム空間としての等長同型写像である．

(3) X_0 が X で稠密でなければ，T は単射ではない．

Proof. (1)T は線形写像 $x^* \in X^*$ にその X_0 への制限 $x^*|_{X_0}$ を対応させる制限写像であることに注意する．$f \in X_0^*$ とすれば，Hahn-Banach の定理の系によりある $F \in X^*$ が存在して $F|_{X_0} = f$ かつ $\|X\|_{X^*} = \|f\|_{X_0^*}$ となる．したがって，T は全射である．また，作用素ノルムの基本的な性質により

$$\|Tx^*\| = \|x^* \circ i\| \leq \|x^*\|\,\|i\| = \|x^*\|$$

ただし，途中で埋め込み写像が等長写像であることを用いた．したがって，T は連続である．

(2)(1) の結果により T は全射なので，T が単射かつ等長であることを示せばよい．

ステップ 1：単射性の証明． $\operatorname{Ker} T = \{0\} \subset X^*$ を示せばよい．$u \in X^*$ とし，

$$N(u) = \{x \in X \mid u(x) = 0\} \subset X$$

とおく．$u \in \operatorname{Ker} T$，すなわち $u|_{X_0} = 0$ を仮定すれば $X_0 \subset N(u)$ である．いま，$N(u)$ は連続写像 u による $\mathbb{C}$ の閉集合 $\{0\}$ の逆像であるから，X の閉集合である．閉包の最小性より $X = \overline{X_0} \subset N(u)$ となるので $N(u) = X$ であり，$u = 0$ である．これより $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ が示された．すなわち，T は単射である．(1) とあわせて T は線形全単射となるので，線形空間としての同型写像となる．

ステップ 2：等長性の証明． $x^* \in X^*$ とする．作用素ノルムの定義に戻れば

$$\|Tx^*\| = \sup_{x\in X_0, x\neq 0} \frac{|x^*|_{X_0}(x)|}{\|x\|_{X_0}} = \sup_{x\in X_0, x\neq 0} \frac{|x^*(x)|}{\|x\|_X}$$

である．したがって，X_0 が X で稠密なとき

$$\sup_{x\in X_0, x\neq 0} \frac{|x^*(x)|}{\|x\|_X} = \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{|x^*(x)|}{\|x\|_X} = \|x^*\|$$

となることを示せばよい．上限の性質より，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $x^\varepsilon \in X \setminus \{0\}$ が存在して

$$\|x^*\| - \varepsilon < \frac{|x^*(x^\varepsilon)|}{\|x^\varepsilon\|_X}$$

とをみたす．ところで，x^* およびノルムの連続性と X_0 の稠密性に注目すれば，x^ε に十分近い $x_0^\varepsilon \in X_0 \setminus \{0\}$ をとって

$$\|x^*\| - \varepsilon < \frac{|x^*(x_0^\varepsilon)|}{\|x_0^\varepsilon\|_X}$$

とすることができる．

$$\|x^*\| - \varepsilon < \frac{|x^*(x_0^\varepsilon)|}{\|x_0^\varepsilon\|_X} \leq \|Tx^*\|$$

であるから，結局任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\|x^*\| - \varepsilon < \|Tx^*\|$$

となる．したがって $\|x^*\| \leq \|Tx^*\|$ である．逆向きの不等式は (1) で示してあるから，二つの不等式を合わせることにより $\|x^*\| = \|Tx^*\|$ を得る．

(3) 対偶を示す．T が単射である，すなわち $\operatorname{Ker} T = \{0\} \subset X^*$ であることを仮定する．以下の図式を考える．

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[r, "T"] & X_0^* \\ (X/\overline{X_0})^* \arrow[u, "q^*"] \arrow[ur, "\Phi = T\circ q^*"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft", shift left=3] & \end{tikzcd}$$

ただし，標準全射 $q : X \longrightarrow X/Y$ が定める単射：$(X/\overline{X_0})^* \ni f \longmapsto f \circ q \in X^*$ を q^* とおいた．このとき，$(X/\overline{X_0})^* = \{0\}$ になることを示す．はじめに，$(X/\overline{X_0})^*$ の零元は $[0] = \overline{X_0}$ であることを確かめておく．$f \in (X/\overline{X_0})^*$ とすれば，f は線形なので $f([0]) = f(\overline{X_0}) = 0$ である．したがって，任意の $x \in X_0$ に対して

$$\Phi(f)(x) = f(q(i(x))) = f(q(x)) = f([x]) = f(\overline{X_0}) = 0$$

となる．よって $\Phi(f) = 0 \in X_0^*$ である．ところで，T は線形全単射であったから $T^{-1}\Phi(f) = f \circ q \in \{0\}$ である．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f\circ q"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{C} \\ X/Y \arrow[ur, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft", shift left=3] & \end{tikzcd}$$

いま上の図式は明らかに可換であるが，q は全射であり先ほどの議論により $f \circ q = 0$ である．したがってこの図式を可換にする f は $f = 0$ でしかありえない．以上の議論をまとめれば $(X/\overline{X_0})^* \subset \{0\}$ となり，線形空

間 $(X/\overline{X_0})^*$ は零元を持つこととあわせて $(X/\overline{X_0})^* = \{0\}$ を得る．Hahn-Banach の定理の応用により 0 でないノルム空間の共役空間は 0 でない元をもつので，その対偶をとれば共役空間が 0 ならばもとの空間も 0 であることが分かる．いま $(X/\overline{X_0})^* = \{0\}$ であったから $X/\overline{X_0} = \{0\}$ である．$X/\overline{X_0} = \{0\}$ ということは任意の $x \in X$ に対して $d(x, \overline{X_0}) = \|[x]\| = 0$ ということであり，すなわち任意の $x \in X$ は $\overline{X_0}$ の元である．よって $\overline{X_0} \supset X$ となるが，これは X_0 が X で稠密であることに他ならない． $\square$

参考文献

[1] 黒田成俊，関数解析，共立出版，1980.

[2] Laurent W. Marcoux, An Introduction to Operator Algebras, 2005, (http://www.math.uwaterloo.ca/ lwmarcou/Preprints/PMath810Notes.pdf).

[3] 斎藤毅，線形代数の世界　抽象数学への入り口，東京大学出版会，2007.

[4] 斎藤毅，集合と位相，東京大学出版会，2009.

[5] 杉浦光夫，解析入門 I，東京大学出版会，1980.