関数解析ノート III：Banach 空間における微積分 Ver. 1.4

平井祐紀

2021 年 11 月 24 日

概要

本ノートでは，Banach 空間における微分と Riemann 積分について学ぶ．

編集履歴

2019/8/1 命題 5.4 の証明を少し修正．Ver. 1.0.

2020/4/15 誤植をいくつか訂正．Ver. 1.1.

2020/11/5 誤植を訂正．Ver. 1.3.

2021/11/24 文書クラスを変更．記法を変更．間違いをいくつか訂正．Ver. 1.4.

目次

1 Riemann 積分

本ノートでは，係数体 $\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ を表すものとする．

本節では，Banach 空間値関数の Riemann 積分について考えよう．$a, b \in \mathbb{R}$ を $a \leq b$ なる実数とし，$\mathrm{Par}[a,b]$ で $[a,b]$ の区間による有限分割を表す．すなわち，$\mathrm{Par}[a,b]$ の元 π は $[a,b]$ の部分区間の有限族 $(I_i)_{0\leq i\leq n}$ で，

$$\bigcup_{0\leq i\leq n} I_i = [a,b], \qquad i \neq j \implies I_i \cap I_j = \emptyset$$

を満たすようなものである．ここでは $[t,t] = \{t\}$ のような 1 点集合も区間と見なすことにする．$\mathbb{R}$ の有界区間 I に対して，区間の長さを $|I| = |\sup I - \inf I|$ で定義する．$]s,t]$，$[s,t]$，$[s,t[$，$]s,t[$ の長さはどれも $|t-s|$ であり，1 点区間 $[t,t]$ の長さはもちろん 0 である．

X を Banach 空間とする．$\pi \in \mathrm{Par}[a,b]$ の時，π に沿った X 値の階段関数 f とは

$$f = \sum_{I\in\pi} x_I 1_I$$

と表現されるような関数である．ただし，1_I は区間 I の特性関数 $[a,b] \to 2 = \{0,1\}$ であり，各 x_I は X の元である．分割 π に沿った X 階段関数全体の集合を $SF(\pi;X)$ で表し，$SF([a,b];X) = \bigcup_{\pi\in\mathrm{Par}[a,b]} SF(\pi;X)$ と定義する．

$B([a,b];X)$，$C([a,b];X)$ をそれぞれ $[a,b]$ 上の X 値の有界関数，連続全体の集合とする．よく知られているように，$B([a,b];X)$ は sup ノルムにより Banach 空間となる．このとき $SF([a,b];X)$ と $C([a,b];X)$ は $B([a,b];X)$ の線形部分空間である．$SF([a,b];X)$ がスカラー倍について閉じていることは容易にわかる．$f = \sum_\pi x_I 1_I$ および $g = \sum_{\pi'} y_I 1_I$ に対して

$$f + g = \sum_{I\in\pi, J\in\pi'} (x_I + y_J) 1_{I\cap J}$$

が成り立つから，$SF([a,b];X)$ が和について閉じていることも確かめられる．さらに，

$$fg = \sum_{I\in\pi, J\in\pi'} (x_I y_J) 1_{I\cap J}$$

であるから，$SF([a,b];X)$ は各点ごとの和についても閉じていることが分かる．今後は，$SF([a,b];X)$ と $C([a,b];X)$ は $B([a,b];X)$ の部分ノルム空間と見なすことにする．

$f = \sum x_I 1_I \in SF(\pi;X)$ に対して，その積分 $I(f)$ を

$$I(f) = \sum_{I\in\pi} x_I |I|$$

で定義する．この「積分作用素」I は階段関数 f の表現によらない．実際，$f = \sum_\pi x_I 1_I = \sum_{\pi'} x'_I 1_I$ なら，

$$\sum_{I\in\pi} x_I |I| = \sum_{I\in\pi, J\in\pi'} x_I |I\cap J| \tag{1.1}$$

$$\sum_{J\in\pi'} x'_J |J| = \sum_{I\in\pi, J\in\pi'} x'_J |I\cap J| \tag{1.2}$$

が成り立つ．$I\cap J \neq \emptyset$ なら $x \in I\cap J$ に対して $x_I = f(x) = x'_J$ となるので，この積分作用素は f の表現によらないことがわかる．したがってこの I を貼り合わせて写像 $I\colon SF([a,b];X) \to X$ を作ることができる．

命題 1.1 $I\colon SF([a,b];X) \to X$ は連続な線形作用素である．

証明 $f,g \in SF([a,b];X)$ とする．先ほどの階段関数の和に関する注意より，f,g はある共通の $SF(\pi;X)$ に属するとしてよい．$f = \sum_\pi x_I 1_I$ かつ $g = \sum_\pi y_I 1_I$ という表現をもつとし，$\alpha,\beta \in \mathbb{K}$

とする．このとき $\alpha f+\beta g=\sum_\pi(\alpha x_I+\beta y_I)1_I$ であるから，

$$I(f+g)=\sum_{I\in\pi}(\alpha x_I+\beta y_I)|I|=\alpha\sum_{I\in\pi}\alpha x_I|I|+\beta\sum_{I\in\pi}\beta y_I|I|=\alpha I(f)+\beta I(g)$$

が成り立つ．よって I は線形である．また

$$\|I(f)\|_X\leq\sum_{I\in\pi}\|x_I\|_X|I|\leq\sup_{s\in[a,b]}\|f(s)\||b-a|=\|f\|\,|b-a|$$

であるから，I が連続作用素であることもわかる． □

注意 1.2 命題 1.2 の証明よりわかるように，積分写像 $I\colon SF([a,b];X)\to X$ の作用素ノルムは $|b-a|$ 以下である．特に定数関数の積分を考えれば，作用素ノルムは $|b-a|$ に等しいことがわかる．

定義 1.3 命題 1.1 より $I\colon SF([a,b];X)\to X$ は Banach 空間 X への連続線形作用素であるから，閉包 $\overline{SF([a,b];X)}$ 上の連続作用素の一意的に拡張される．$\overline{SF([a,b];X)}$ とおき，I の $\overline{SF([a,b];X)}$ への拡張を $\int_a^b\colon\overline{SF([a,b];X)}\to X$ または $\int_{[a,b]}$ で表す．$f\in\overline{SF([a,b];X)}$ に対してその値 $\int_a^b f$ を f の $[a,b]$ 上での Riemann 積分という．

被積分関数 f の引数を明示したい場合には，積分を

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,\qquad\int_a^b\mathrm{d}t\,f(t)$$

などと書くこともある．$a>b$ のときは，

$$\int_a^b f=-\int_b^a f$$

と書くことにする．この記法を用いれば，a と b の大小関係がわからない場合にも

$$\left\|\int_a^b f\right\|\leq\|f\||b-a|$$

という評価を得ることができる．

$C([a,b];X)\subset\overline{SF([a,b];X)}$ であることを確かめよう．

$$\pi_n=\left\{\{a\},\left]a+\frac{(b-a)i}{n},a+\frac{(b-a)(i+1)}{n}\right]\;;0\leq i\leq n-1\right\}$$

とおいて，

$$f_{\pi_n}=f(a)1_{[a]}+\sum_{0\leq i\leq n-1}f\left(a+\frac{(b-a)i}{n}\right)1_{]a+\frac{(b-a)i}{n},a+\frac{(b-a)(i+1)}{n}]}$$

と定義する．$f\in C([a,b];X)$ なら f は一様連続なので，$f_{\pi_n}\to f$ が $B([a,b];X)$ のノルムの意味で成り立つ．

命題 1.4 $f \in \overline{SF([a,b];X)}$ なら，$t \mapsto \|f(t)\|_X$ は実数値の関数として Riemann 積分可能であり，

$$\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\|_X \le \int_a^b \|f(t)\|_X \mathrm{d}t$$

が成り立つ．

証明 $f = \sum x_I 1_I \in SF(\pi;X)$ の場合には，

$$\|f(t)\|_X = \sum_{I\in\pi} \|x_I\|_X 1_I(t)$$

なので，$t \mapsto \|f(t)\|_X$ はまた階段関数であり Riemann 積分可能である．このとき

$$\begin{aligned}\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\|_X &= \left\| \sum_{I\in\pi} x_I \right\| |I| \\ &\le \sum_{I\in\pi} \|x_I\|\,|I| \\ &= \int_a^b \|f(t)\|_X \mathrm{d}t\end{aligned}$$

となり，期待する不等式は成り立っている．一般の $f \in \overline{SF([a,b];X)}$ に対しては，f を近似する $SF([a,b];X)$ の列 (f_n) を選ぶ．このとき

$$\sup_{t\in[a,b]} |\|f(t)\| - \|f_n(t)\|| \le \sup_{t\in[a,b]} \|f(t) - f_n(t)\|$$

であるから，関数列 $(\| \quad \| \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は f に $B([a,b];\mathbb{R})$ のノルムで収束している．各 f_n については

$$\left\| \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \right\|_X \le \int_a^b \|f_n(t)\|_X \,\mathrm{d}t$$

が成り立っているから，積分作用素の連続性に注意して極限をとれば

$$\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\|_X \le \int_a^b \|f(t)\|_X \,\mathrm{d}t$$

がわかる． □

$f \in \overline{SF([a,b;X])}$ なら，$I \subset [a,b]$ なるコンパクト区間に対して $f1_I \in \overline{SF([a,b;X])}$ が成り立つ．実際，f を近似する列 $(f_n) \in SF([a,b;X])$ をとれば，$f_n 1_I \in SF([a,b;X])$ かつ

$$\|f_n 1_I - f 1_I\| \le \|f_n - f\| |I| \to 0$$

となるからである．

積分の基本的な性質である区間加法性について考えよう．$a \le b < c \le d$ なる区間が与えられているとする．包含写像 $i\colon [b,c] \to [a,d]$ を用いて制限写像を $i^*\colon B([a,d];X) \ni f \mapsto f \circ i \in B([b,c];X)$

と定めれば，これは連続な線形写像となる．$\pi \in \mathrm{Par}[a,d]$ に対して $\pi \cap [b,c] = \{I \cap [b,c]\,;\, I \in \pi\}$ と定義すれば，$\pi \cap [b,c] \in \mathrm{Par}[b,c]$ である．さらに $f = \sum x_I 1_I \in SF(\pi;X)$ について $i^*(f) = \sum_{I\in\pi} x_I 1_{I\cap[b,c]}$ が成り立つから，$i^*(f) \in SF(\pi \cap [b,c];X)$ がわかる．したがって連続写像 $i^*\colon SF([a,d];X) \to SF([b,c];X)$ が定まり，これより $i^*(\overline{SF([a,d];X)}) \subset \overline{SF([b,c];X)}$ がわかる．すなわち，Riemann 積分可能な関数の制限は，また Riemann 積分可能である．

命題 1.5 (i) $a \le b \le c \le d$ かつ $f \in \overline{SF([a,d];X)}$ なら，

$$\int_b^c f|_{[b,c]} = \int_a^d f 1_{[b,c]}$$

が成り立つ．

(ii) $a \le b \le c$ かつ $f \in \overline{SF([a,c];X)}$ なら，

$$\int_a^c f = \int_a^b f|_{[a,b]} + \int_b^c f|_{[b,c]}$$

が成り立つ．

証明 (i) $f \in SF([a,b];E)$ の時は定義に従って計算すればわかる．一般の場合は $SF([a,b];E)$ の列で近似すればよい．

(ii) (i) と積分の線形性より分かる． □

命題 1.6 $f \in \overline{SF([a,b;X])}$ に対して，$[a,b] \ni t \mapsto \int_a^t f|_{[a,t]} \in X$ は連続写像となる．

証明 $s,t \in [a,b]$ について

$$\left\| \int_a^t f|_{[a,t]} - \int_a^s f|_{[a,s]} \right\|_X = \left\| \int_a^b f 1_{[a,t]} - \int_a^b f 1_{[a,s]} \right\|_X \le \|f\|_{B([a,b];X)} |t-s|$$

が成り立つことからわかる． □

命題 1.7 X と Y を Banach 空間とし，$T\colon X \to Y$ を有界線形写像とする．このとき全ての $f \in \overline{SF([a,b];X)}$ について $T \circ f \in \overline{SF([a,b];Y)}$ と

$$T\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b T \circ f$$

が成り立つ．

証明 $f \in B([a,b];X)$ と $x \in s \in [a,b]$ に対して，$T_*(f) = T \circ f$ と定義する．このとき $s \in [a,b]$ に対して

$$\|T_*(f)(s)\|_Y = \|T(f(s))\|_Y \le \|T\|\|f(s)\|_X \le \|T\|\|f\|$$

が成り立つから，T_* が $B([a,b];X)$ から $B([a,b];Y)$ への有界線形写像を定めることが分かる．$f=\sum x_I 1_I \in SF(\pi;X)$ なら

$$T_*(f)=\sum T(x_I)1_I$$

となるから $T_*(SF([a,b];X)) \subset SF([a,b];Y)$ であり，さらに

$$\int_a^b T_*(f)=\sum_{I\in\pi} T(x_I)\|I\| = T\left(\sum_{I\in\pi} x_I\|I\|\right) = T\left(\int_a^b f\right)$$

が成り立つ．いま T_* は連続だから，$T_*(\overline{SF([a,b];X)}) \subset \overline{SF([a,b];Y)}$ がわかる．また連続写像 $\int_a^b \circ T_*$ と $T\circ\int_a^b$ は $SF([a,b];X)$ 上で一致するから，その閉包 $\overline{SF([a,b];X)}$ 上でも一致する． □

実数値や複素数値関数の Riemann 積分で広義積分を考えることができたのと同じように，Banach 空間値 Riemann 積分でも広義積分を定義することができる．J を実数の（非有界かも知れない）区間とする．$\mathrm{CI}(J)$ で J に含まれる有界閉空間全体の集合を表すこととし，$\mathrm{CI}(J)$ を集合の包含関係により有向集合と見なす．

定義 1.8 $f\in\bigcap_{I\in\mathrm{CI}(J)}\overline{SF(I;X)}$ とする．有向族 $\mathrm{CI}(J)\ni I\to\int_I f\in X$ が X のノルムで収束するとき，f は J 上で広義 Riemann 積分可能であると言い，その極限を $\int_J f$ で表す．

J 上で広義 Riemann 積分可能な関数全体の集合を $\mathrm{Dom}\left(\int_J;X\right)$ で表すことにする．広義積分の定義の仕方より $\mathrm{Dom}\left(\int_J;X\right)$ が線形空間であることと，$\int_J\colon \mathrm{Dom}\left(\int_J;X\right)\to X$ が線形作用素であることはすぐにわかる．

2 微分

X,Y を Banach 空間とし，U を X の開集合，V を Y の部分集合とする．写像 $f\colon U\to V$ の微分可能性を考えよう．

定義 2.1 (i) $x\in U$, $L\in L(X,Y)$ とする．任意の $\varepsilon>0$ に対してある $\delta>0$ で，$U_\delta(x)\subset U$ かつ

$$\forall u\in U_\delta(0),\ \ \|f(x+u)-f(x)-L(u)\|_Y<\varepsilon\|u\|_X$$

を満たすものが存在するとき，f は x で微分可能であるといい，L を f の x における微分と呼ぶ．f が x で微分可能であるとき，その微分を $Df(x)$ で表す．

(ii) $f\colon U\to V$ が U の全ての点で微分可能であるとき，f は微分可能であるという．f が微分可能であるとき，写像 $U\ni x\mapsto Df(x)\in L(X,Y)$ を Df で表し，f の微分と呼ぶ．

定義 2.1 の意味で微分可能であることを，Fréchet 微分可能であるということもある．f が x で微分可能とは f が x の近傍上では線形写像で良く近似できるということであり，これは全微分の考え

方である．なお，微分可能性の定義をラフに書けば，

$$f(x+u)-f(x)-Df(x)(u)=o(\|u\|),$$

が成り立つということである[1)]．

有界線形写像 $f\colon X\to Y$ は微分可能であり，その $x\in X$ における微分は f 自身である．すなわち $Df(x)=f$ であり，$Df\colon X\to L(X,Y)$ は f に値をとる定数関数となる．また，Y に値をとる定数関数は微分可能であり，その微分は 0 となる．

$f\colon U\to V$ が x で微分可能なら，その x での微分は一意的に定まることを確かめよう．L_1 と L_2 を f の x における微分とし，$u\in X\setminus\{0\}$ を任意に固定する．このとき $L_1(u)=L_2(u)$ が成り立つことを示せばよい．任意に選んだ $\varepsilon>0$ に対して，$\delta_1>0$，$\delta_2>0$ を

$$\begin{aligned}
&\forall v\in U_{\delta_1}(0), \qquad \|f(x+v)-f(x)-L_1(v)\|_Y<\varepsilon\|v\|_X\\
&\forall v\in U_{\delta_2}(0), \qquad \|f(x+v)-f(x)-L_2(v)\|_Y<\varepsilon\|v\|_X
\end{aligned}$$

を満たすようにとる．ここで $\delta=\|u\|^{-1}\delta_1\wedge\delta_2$ と定めれば，$0<|t|<\delta$ なる全ての t について

$$\begin{aligned}
&\|f(x+tu)-f(x)-L_1(tu)\|_Y<\varepsilon\|tu\|_X\\
&\|f(x+tu)-f(x)-L_2(tu)\|_Y<\varepsilon\|tu\|_X
\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，$0<t<\delta$ なら

$$\begin{aligned}
\|L_1(u)-L_2(u)\|_Y&=\frac{1}{t}\|L_1(tu)-L_2(tu)\|_Y\\
&\le\frac{1}{t}\|f(x+tu)-f(x)-L_1(tu)\|_Y+\frac{1}{t}\|f(x+tu)-f(x)-L_2(tu)\|_Y\\
&\le\frac{1}{t}\varepsilon\|tu\|_X+\frac{1}{t}\varepsilon\|tu\|_X\\
&=2\varepsilon\|u\|_X
\end{aligned}$$

である．いま $\varepsilon>0$ は任意に選んでいたから，これより $\|L_1(u)-L_2(u)\|_Y=0$ となり，$L_1(u)=L_2(u)$ がわかる．

f が x で微分可能であるとき，$h\in X$ に対して $Df(x)h$ を f の x における h 方向微分という．$\varepsilon>0$ とすれば，先ほどの議論と同じようにして十分小さな $t\neq0$ について

$$\|f(x+th)-f(x)-Df(x)th\|_Y<\varepsilon\|th\|_X$$

が成り立つことがわかる．ここで両辺に t^{-1} を掛ければ

$$\left\|\frac{1}{t}\{f(x+th)-f(x)\}-Df(x)h\right\|_Y<\varepsilon\|h\|_X$$

となる．これは

$$Df(x)h=\lim_{\substack{t\to0\\t\neq0}}\frac{1}{t}\{f(x+th)-f(x)\}$$

1） o は Landau の記号で，$o(\|u\|)/\|u\|\to0$（$\|u\|\to0$）が成り立つという意味．

が成り立つということであり，$Df(x)h$ 直観的な意味での方向微分と一致する概念だとわかる．

命題 2.2 $f\colon U \to V$ が $x \in U$ で微分可能なら，f は x で連続である．

証明 微分可能性の定義より，x の適当な近傍 $U_\delta(x)$ 上で

$$\|f(u) - f(x)\|_Y \leq \|u - x\|_X + \|L(u - x)\|_X \leq (1 + \|L\|_{L(X,Y)})\|u - x\|_X$$

という評価が成り立つ．よって f は x で連続である． □

微分の基本的な性質を調べていこう．まずは，微分の線形性を証明する．

命題 2.3 $f, g\colon U \to V$ が x で微分可能なら，その線形結合 $\alpha f + \beta g$ も x で微分可能であり，

$$D(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha Df(x) + \beta Dg(x)$$

が成り立つ．

証明 始めに，$\alpha Df(x) + \beta Dg(x)$ は有界線形写像の線形結合なので有界線形写像であることに注意しておく．任意に選んだ $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta_1 > 0$，$\delta_2 > 0$ を

$$\begin{aligned} &\forall v \in U_{\delta_1}(x), \qquad |\alpha| \, \|f(x+v) - f(x) - Df(x)v\|_Y < \frac{\varepsilon}{2}\|v\|_X \\ &\forall v \in U_{\delta_2}(x), \qquad |\beta| \, \|g(x+v) - g(x) - Dg(x)(v)\|_Y < \frac{\varepsilon}{2}\|v\|_X \end{aligned}$$

を満たすようにとる．$\delta = \delta_1 \wedge \delta_2$ とすれば，任意の $v \in U_\delta(x)$ について

$$\begin{aligned} &\|(\alpha f + \beta g)(x+v) - (\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha Df(x) + \beta Dg(x))v\|_Y \\ &\qquad \leq |\alpha| \, \|f(x+v) - f(x) - Df(x)v\|_Y + |\beta| \, \|g(x+v) - g(x) - Dg(x)(v)\|_Y \\ &\qquad < \frac{\varepsilon}{2}\|v\|_X + \frac{\varepsilon}{2}\|v\|_X = \varepsilon\|v\|_X \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって $\alpha f + \beta g$ は x で微分可能であり，$D(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha Df(x) + \beta Dg(x)$ が成り立つ． □

次に Leibniz の法則を証明しよう．

命題 2.4 X, Y_1, Y_2, Z を Banach 空間とし，$U \subset X$ を開部分集合，$b\colon Y_1 \times Y_2 \to Z$ を有界双線形写像とする．$f_1\colon U \to Y_1$ と $f_2\colon U \to Y_2$ が $x \in U$ で微分可能なら $b \circ (f_1, f_2)\colon U \to Z$ も x で微分可能であり，$D[b \circ (f_1, f_2)](x)h = b(Df_1(x)h, f_2(x)) + b(f_1(x), Df_2(x)h)$ が成り立つ．

証明 まずは，b が有界双線形写像であることから，$h \mapsto b(Df_1(x)h, f_2(x)) + b(f_1(x), Df_2(x)h)$ は

有界線形写像になることに注意しておく．x の周りで

$$
\begin{aligned}
&\|b\circ(f_1,f_2)(x+h)-b\circ(f_1,f_2)(x)-b(Df_1(x)h,f_2(x))-b(f_1(x),Df_2(x)h)\|\\
&\quad\le\|b(f_1(x+h),f_2(x+h))-b(f_1(x),f_2(x+h))-b(Df_1(x)h,f_2(x+h))\|\\
&\qquad+\|b(f_1(x),f_2(x+h))-b(f_1(x),f_2(x))-b(f_1(x),Df_2(x)h)\|\\
&\qquad+\|b(Df_1(x)h,f_2(x+h))-b(Df_1(x)h,f_2(x))\|\\
&\quad=\|b(f_1(x+h)-f_1(x)-Df_1(x)h,f_2(x+h))\|\\
&\qquad+\|b(f_1(x),f_2(x+h)-f_2(x)-Df_2(x)h)\|\\
&\qquad+\|b(Df_1(x)h,f_2(x+h)-f_2(x))\|\\
&\quad\le\|b\|\,\|f_1(x+h)-f_1(x)-Df_1(x)h\|_{Y_1}\|f_2(x+h)\|_{Y_2}\\
&\qquad+\|b\|\,\|f_1(x)\|_{Y_1}\|f_2(x+h)-f_2(x)-Df_2(x)h\|_{Y_2}\\
&\qquad+\|b\|\|Df_1(x)h\|_{Y_1}\|f_2(x+h)-f_2(x)\|_{Y_2}\\
&\quad=o(\|h\|)
\end{aligned}
$$

という評価が成り立つことに注意すれば結論が従う．最後の辺が $o(\|h\|)$ であるということは，f_1 と f_2 の x での微分可能性と，f_2 の x での連続性[2)]，および $h\mapsto D_1f(x)h$ の有界性よりわかる． □

合成関数の微分公式（連鎖律）は Banach 空間においても成り立つ．

命題 2.5 X,Y,Z を Banach 空間とし，$U\subset X$ と $V\subset Y$ を開部分集合，$f\colon U\to V$ と $g\colon V\to Z$ を写像とする．f が $x\in U$ で，g が $f(x)\in V$ で微分可能なら，$g\circ f$ は x で微分可能であり，$D(g\circ f)(x)=Dg(f(x))\circ Df(x)$ が成り立つ．

証明 $Dg(f(x))\circ Df(x)$ は有界線形写像の合成であるから，有界線形写像であることに注意しておく．g は $f(x)$ で微分可能だから，$\varepsilon>0$ に対して十分小さい $\delta\in\,]0,1[$ をとれば，全ての $u\in U_\delta(0)$ について

$$\|g(f(x)+u)-g(f(x))-Dg(f(x))u\|_Z<\frac{\varepsilon}{1+\|D(f(x))\|_{L(X,Y)}+\|Dg(f(x))\|_{L(Y,Z)}}\|u\|_Y$$

という評価が成り立つ．また，f は x で微分可能だから，この δ に対して適当な $\gamma>0$ を選べば

$$\forall h\in U_\gamma(0),\qquad \|f(x+h)-f(x)-Df(x)h\|_Y<\delta\|h\|_X$$

が成り立つ．ここで

$$\beta=\gamma\wedge\left(\frac{\delta}{\|Df(x)\|_{L(X,Y)}+\delta}\right)$$

2） よって x の適当な近傍で有界であること．

とすれば，$\|h\| < \beta$ ならば

$$\|f(x+h) - f(x) - Df(x)h\|_Y < \delta\|h\|_X$$
$$\|f(x+h) - f(x)\| < (\|Df(x)\| + \delta)\|h\| < \frac{\delta}{\beta}\|h\| < \delta$$

である．したがって，$h \in U_\beta(0)$ なら

$$\begin{aligned}
&\|g(f(x+h)) - g(f(x)) - Dg(f(x))(Df(x)h)\|_Z \\
&\quad\leq \|g(f(x+h)) - g(f(x)) - Dg(f(x))(f(x+h) - f(x))\|_Z \\
&\qquad + \|Dg(f(x))(f(x+h) - f(x)) - Dg(f(x))(Df(x)h)\| \\
&\quad\leq \varepsilon\|f(x+h) - f(x)\|_Y \\
&\qquad + \|Dg(f(x))\|_{L(Y,Z)}\|f(x+h) - f(x) - Df(x)h\|_Y \\
&\quad\leq \varepsilon\{\|D(f(x))\|_{L(X,Y)} + \delta\}\|h\|_X + \|Dg(f(x))\|_{L(Y,Z)}\delta\|h\|_X \\
&\quad= \varepsilon\{\|D(f(x))\|_{L(X,Y)} + \delta + \|Dg(f(x))\|_{L(Y,Z)}\delta\}\|h\|_X \\
&\quad\leq \varepsilon\|h\|_X
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって $D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x)$ がわかった． □

命題 2.6 X と Y を Banach 空間とし，U を X の開凸集合とする．$f\colon U \to Y$ が微分可能で f の微分が U 上で 0 なら，f は定数関数である．

証明 対偶を示す．$x_1, x_2 \in U$ は $f(x_1) \neq f(x_2)$ を満たすとする．このとき，Hahn-Banach の定理よりある $T \in Y^*$ で $T(f(x_1)) \neq T(f(x_2))$ を満たすものが存在する．いま U は開凸集合だから，適当な $\varepsilon > 0$ を選べば

$$c\colon]-\varepsilon, 1+\varepsilon[\ni t \longmapsto x_1 + t(x_2 - x_1)$$

は U に値をとる関数となる．c は各点で微分可能でその導関数は $Dc(t)h = h(x_2 - x_1)$ だから，合成関数の微分則により

$$D(T \circ f \circ c)(t) = TDf(c(t))(x_2 - x_1)$$

が成り立つ．いま $T \circ f \circ c$ は $(T \circ f \circ c)(0) \neq (T \circ f \circ c)(1)$ を見たすから，定数関数ではない．したがって $Df(c(t))(x_2 - x_1)$ もいずれかの t について 0 ではなく，$Df(x)$ は恒等的に 0 とはならない． □

3 微積分学の基本定理と有限増分の定理

まずは，Banach 空間値関数に対する微積分学の基本定理を紹介しよう．

命題 3.1 X を Banach 空間，$[a,b]$ をコンパクトな区間とし，$f \in \overline{SF([a,b];X)}$ とする．f が $c \in]a,b[$ で連続なら $t \mapsto \int_a^t f$ は s で微分可能であり，

$$D\left(\int_a^{\cdot} f\right)(c) = f(c)$$

が成り立つ．

証明 写像 $F\colon [a,b] \to X$ を

$$F(t) = \int_a^t f$$

と定義する．このとき，積分の区間加法性より c の適当な近傍で

$$\begin{aligned}\|F(c+h) - F(c) - f(c)h\|_X &\le \left\|\int_t^{t+h} f - \int_t^{t+h} f(c)\right\| \\ &\le \sup_{|s|<h} \|f(c+h) - f(c)\| \, \|h\|\end{aligned}$$

が成り立つ．いま f は c で連続だから，h を小さくすることで $\sup_{|s|<h}\|f(c+h) - f(c)\|$ は任意の水準まで小さくできる．したがって F は c で微分可能であり，$DF(c) = f(c)$ が成り立つ． □

注意 3.2 我々の立場では $F\colon]a,b[\to X$ の微分 $DF(t)$ は線形写像 $\mathbb{R} \to X$ であったから，命題 3.1 の主張をより正確に言えば「$D\left(\int_a^{\cdot} f\right)(c)$ は写像 $h \mapsto f(c)h$ に等しい」ということになるだろう．$f(c) \in X$ を写像 $[a,b] \to X$ と同一視しているわけである．今後はこの同一視を特に断りなく用いる．

定義 3.3 X と Y を Banach 空間，$U \subset X$ をその開部分集合，$V \subset Y$ を部分集合とする．$f\colon U \to V$ は U 上で微分可能で，さらに $Df\colon U \to L(X,Y)$ が連続となるとき，f は C^1 級であるという．U から V への C^1 級関数全体の集合を $C^1(U,V)$ で表す．

微分の線形性より，$C^1(U,Y)$ は各点ごとの和とスカラー倍により線形空間となり，微分作用素 $D\colon C^1(U,Y) \to C(U, L(X,Y))$ は線形写像となる．

命題 3.4 連続関数 $f\colon [a,b] \to X$ が $]a,b[$ 上で C^1 級なら，$a \le s \le t \le b$ なる任意の s,t に対して

$$f(t) - f(s) = \int_s^t Df$$

が成り立つ．

証明 等式が $[a,b]$ の内部で成り立つことは命題 3.1 よりすぐにわかる．f と $t \mapsto \int_a^t Df$ はともに連続だから，この等式は端点でも成り立つ． □

一般の Banach 空間の場合の微積分学の基本定理は以下のようになる．

命題 3.5 U を Banach 空間 X の開凸集合とし，Y を Banach 空間とする．$f\colon U \to Y$ が C^1 級なら，

$$f(x+u)-f(x)=\int_0^1 Df(x+tu)u\,\mathrm{d}t=\left(\int_0^1 Df(x+tu)\,\mathrm{d}t\right)u$$

命題 3.5 の主張において，一つ目の積分は写像 $[0,1]\ni t\mapsto Df(x+u)u\in Y$ の積分であり，二つ目の積分は写像 $[0,1]\ni t\mapsto Df(x+tu)\in L(X,Y)$ の積分であることに注意されたい．また，証明を見ればわかることだが，U が凸でなくても x と y を結ぶ線分が U に含まれれば同様の主張が成り立つことを述べておく．

証明 始めに，U が凸集合であるとの仮定より，$[0,1]\ni t\mapsto x+tu$ は U に値をとる写像として well-defined であることに注意しておく．$t\mapsto x+tu$ は $]0,1[$ 上で C^1 級でその導関数は $t\mapsto tu$ である．合成写像 $t\mapsto f(x+tu)$ も C^1 級であるから，微分の連鎖律と命題 3.4 により

$$f(x+u)-f(x)=f(x+1u)-f(x+0u)=\int_0^1 Df(x+tu)u\,\mathrm{d}t$$

がわかる．二つ目の等号については，写像 $L(X,Y)\mapsto T\mapsto T(u)\in Y$ が連続線形写像であることと，命題 1.7 よりわかる．□

命題 3.5 において積分を被積分関数のノルムで評価すれば，以下の不等式を得る．

系 3.6 命題 3.5 と同じ仮定の下，$x,y\in U$ について

$$\|f(y)-f(x)\|\le\|y-x\|\sup_{t\in[0,1]}\|Df(x+t(y-x))\|$$

が成り立つ．

注意 3.7 X が有限次元なら局所コンパクトなので，命題 3.6 より f は局所 Lipschitz 関数であることがわかる．また，写像 $Df\colon U\to L(X,Y)$ が有界なら，命題 3.6 の評価から f は大域的に Lipschitz 連続となる．

系 3.8 命題 3.5 と同じ仮定の下，$x,y,a\in X$ について

$$\|f(y)-f(x)-Df(a)(y-x)\|\le\|y-x\|\sup_{t\in[0,1]}\|Df(x+t(y-x))-Df(a)\|$$

が成り立つ．

証明　命題 3.5 より，$x, y, a \in X$ なら

$$
\begin{aligned}
f(y) - f(x) - Df(a)(y-x) &= \int_0^1 Df(x + t(y-x))\,\mathrm{d}t\,(y-x) - Df(a)(y-x) \\
&= \int_0^1 \{Df(x+t(y-x)) - Df(a)\}\,\mathrm{d}t\,(y-x)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．この式の積分項を評価すれば，

$$
\begin{aligned}
&\left\| \int_0^1 \{Df(x+t(y-x)) - Df(a)\}\,\mathrm{d}t\,(y-x) \right\|_Y \\
&\quad \le \left\| \int_0^1 \{Df(x+t(y-x)) - Df(a)\}\,\mathrm{d}t \right\|_{L(X,Y)} \|y-x\|_X \\
&\quad \le \sup_{t\in[0,1]} \|Df(x+t(y-x)) - Df(a)\|_{L(X,Y)} \|y-x\|_X
\end{aligned}
$$

となるから，求める不等式を得る． □

4　偏微分

本節では，Banach 空間上の関数の偏微分に対応するものを考えてみよう．Banach 空間 X が $X_1 \times \cdots \times X_n$ という形をしているとする．このとき，$f\colon U \to Y$ の第 i 成分に関する偏微分を考えてみよう．$1 \le i \le n$ とする．記法の簡略化のため，以下 $x_{\hat{i}} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ と表記することにする．また，$X_1 \times \cdots \times X_n$ は積の順序を入れ替えても等長同型なので，$X_1 \times \cdots \times X_n$ の元と $(x_i, x_{\hat{i}})$ を同一視することにする．$x_{\hat{i}}$ を固定して写像 $x_i \mapsto f(x_i, x_{\hat{i}})$ が x_i で微分可能であるとき，f は $(x_i, x_{\hat{i}})$ で第 i 成分について偏微分可能であるといい，そのにおける微分を $D_i f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)\colon X_i \to Y$ で表す．f が全ての点で第 i 成分について偏微分可能であるとき，f は第 i 成分について偏微分可能であるという．f が全ての成分について U 上で偏微分可能であるとき，単に f は偏微分可能であるという．

命題 4.1　$f\colon U \to Y$ が x で微分可能なら，全ての $i \in \{1, \dots, n\}$ について x で微分可能である．

証明　i を一つ固定し，$j_i\colon X_i \to X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ を直和 Banach 空間への自然な埋め込みとする．このとき，$Df(x) \circ j_i$ が偏微分 $D_i f$ であることを示そう．$\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ を

$$
\forall u \in U_\delta(0), \qquad \|f(x+u) - f(x) - Df(x)u\|_Y < \varepsilon \|u\|_X
$$

が成り立つように選ぶ．$h \in X_i$ を $\|h\| < \delta$ かつ $(x_i + h, x_{\hat{i}}) \in U$ となるように選べば,

$$\begin{aligned}
&\|f(x_i + h, x_{\hat{i}}) - f(x_i, x_{\hat{i}}) - (Df(x) \circ j_i)h\| \\
&\quad = \|f(x_i + h, x_{\hat{i}}) - f(x_i, x_{\hat{i}}) - Df(x)[(x_i + h, x_{\hat{i}}) - (x_i, x_{\hat{i}})]\| \\
&\quad \le \varepsilon\|(x_i + h, x_{\hat{i}}) - (x_i, x_{\hat{i}})\|_X \\
&\quad = \varepsilon\|h\|_{X_i}
\end{aligned}$$

が成り立つ．これより f は $(x_i, x_{\hat{i}})$ において第 i 成分で偏微分可能であり，$D_i f(x) = (Df(x) \circ j_i)$ となることがわかる． □

命題 4.2 $f\colon U \to Y$ が全ての i で偏微分可能で，かつ $D_i f\colon U \to L(X_i, Y)$ がどれも連続ならば，f は C^1 級である．

証明 直和 $\bigoplus_i D_i f(x)\colon \bigoplus_i X_i \to Y$ が f の微分であることを示そう．$x \mapsto \bigoplus_i D_i f(x)$ の連続性は，直和の普遍性よりわかる．命題 3.8 を用いて近似誤差を評価すれば,

$$\begin{aligned}
&\left\| f(x+h) - f(x) - \sum_{1\le i\le n} D_i f(x) h_i \right\|_Y \\
&\le \|f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) - D_1 f(x) h_1\|_Y \\
&\quad + \|f(x_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2, x_3 + h_3, \dots, x_n + h_n) - D_2 f(x) h_2\|_Y \\
&\quad + \dots \\
&\quad + \|f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + h_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) - D_n f(x) h_n\|_Y \\
&\le \|h_1\| \sup_{t\in[0,1]} \|D_1 f(x_1 + t h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) - D_1 f(x)\| \\
&\quad + \|h_2\| \sup_{t\in[0,1]} \|D_2 f(x_1, x_2 + t h_2, x_3 + h_3, \dots, x_n + h_n) - D_2 f(x)\| \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \|h_n\| \sup_{t\in[0,1]} \|D_n f(x_1, \dots, x_{n-1} x_n + t h_n) - D_n f(x)\| \\
&\le \|h\| \left(\sum_{1\le i\le n} \sup_{\|u\|<\|h\|} \|D_i f(x+u) - D_i f(x)\|_{L(X_i, Y)} \right) \\
&= o(\|h\|)
\end{aligned}$$

となるから $\bigoplus_i D_i f(x)$ が f の微分であることがわかる．ただし，最後の項が $o(\|h\|)$ になることは，$D_i f(x)$ の連続性より従う． □

5 高階微分と Taylor の定理

これまで見てきたように，$f\colon U\to Y$ が微分可能ならば，Df は写像 $U\to L(X,Y)$ を定める．この写像がまた微分可能であるとき，$D^2f:=D(Df)$ を考えることができるだろう．同じように D^2f の微分 D^3f，D^3f の微分 $D^4f,\dots$ と，f が十分滑らかであれば何度でもその微分を考えることができる．

定義 5.1 X と Y を Banach 空間，$U\subset X$ を開部分集合とする．f が C^1 級で Df がまた微分可能であるとき，f は二回微分可能であるという．このとき $D(Df)=D^2f$ と表し，D^2f を x の二階微分と呼ぶ．さらに D^2f が連続であるとき，f は C^2 級であるという．再帰的に，C^n 級関数 f の n 階微分がまた微分可能であるとき，f は $n+1$ 回微分可能であるといい，D^nf の微分を $D^{n+1}f$ で表す．$D^{n+1}f$ が連続であるとき，f は C^{n+1} 級であるという．

$f\colon U\to Y$ が二回微分可能ならば，$Df(x)$ は $L(X,L(X,Y))$ の元となる．この空間は $L^{(2)}(X,X;Y)$ と同型なので[3)]，$Df(x)$ は有界な双線形写像と見ることもできる．さらに Banach 空間の（射影的）テンソル積の性質から，$L(X\widehat{\otimes}_\pi X,Y)\simeq L^{(2)}(X,X;Y)$ が成り立つので，D^2f は $L(X\widehat{\otimes}_\pi X,Y)$ に値をとる関数とも考えられる．同様にして，f の n 階微分 D^nf は $L(X,\dots,L(X,L(X,Y)\dots))\simeq L^{(n)}(X,\dots,X;Y)\simeq L(X^{\widehat{\otimes}_\pi n};Y)$ に値をとる関数である．今後は上記の同一視を特に断りなく使うことにする．

命題 5.2（Taylor の定理） $f\colon U\to Y$ が C^n 級なら，

$$f(x+u)-f(x)=\sum_{1\le k\le n-1}\frac{1}{k!}D^kf(x)(u^{\otimes k})+\int_0^1\frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}D^nf(x+tu)u^{\otimes n}\mathrm{d}t$$

が成り立つ．

証明 n に関する帰納法で示す．$n=1$ なら，これは命題 3.5 の主張である．n に対して主張が成り立っているとしよう．f が C^{n+1} なら，

$$[0,1]\ni t\longmapsto\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}D^nf(x+tu)u^{\otimes n}\in Y$$

は $]0,1[$ で C^1 級であり，命題 2.4 より

$$D\left(\frac{(1-t)^n}{n!}D^nf(x+tu)u^{\otimes n}\right)=-\frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}D^nf(x+tu)u^{\otimes n}+\frac{(1-t)^n}{n!}D^{n+1}f(x+tu)u^{\otimes n+1}$$

3） $L^{(n)}(X_1,\dots,X_n;Y)$ は有界な n 重線形写像 $X_1\times\dots X_n\to Y$ 全体の空間を表す．

が成り立つ．その各項を Riemann 積分すれば，命題 3.5 より

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{n!}D^n f(x)u^{\otimes n} \\
&= \int_0^1 D\left(\frac{(1-t)^n}{n!}D^n f(x+tu)u^{\otimes n}\right)\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}D^n f(x+tu)u^{\otimes n}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}D^{n+1} f(x+tu)u^{\otimes n+1}\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

を得る．いま帰納法の仮定より

$$
f(x+u)-f(x) = \sum_{1\le k\le n-1}\frac{1}{k!}D^k f(x)u^{\otimes k} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}D^n f(x+tu)u^{\otimes n}\mathrm{d}t
\tag{5.2}
$$

が成り立っているから，(5.1) と (5.2) をあわせれば

$$
f(x+u)-f(x) = \sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k!}D^k f(x)u^{\otimes k} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}D^{n+1} f(x+tu)u^{\otimes n+1}\mathrm{d}t
$$

がわかる．すなわち，$n+1$ でも命題の主張が成り立つ． □

系 5.3 $f\colon U\to Y$ は C^n 級であるとする．

$$
R^{(n)}(x;u) = f(x+u)-f(x)-\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k!}D^k f(x)u^{\otimes k}
$$

と定義すれば，

$$
\|R^{(n)}(x;u)\| \le \frac{1}{n!}\|u\|^n \sup_{t\in[0,1]}\|D^n f(x+tu)-D^n f(x)\|_{L^{(n)}(X^n;Y)}
$$

が成り立つ．

証明 Taylor の定理より

$$
\begin{aligned}
R^{(n)}(x;u) &= f(x+u)-f(x)-\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k!}D^k f(x)u^{\otimes k} \\
&= \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}D^n f(x+tu)u^{\otimes n}\mathrm{d}t - \frac{1}{n!}D^n f(x)u^{\otimes n} \\
&= \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}D^n f(x+tu)u^{\otimes n}\mathrm{d}t - \int_0^1 n(1-t)^n\frac{1}{n!}D^n f(x)u^{\otimes n}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1}{n!}n(1-t)^{n-1}\left(D^n f(x+tu)u^{\otimes n} - D^n f(x)u^{\otimes n}\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

が成り立つ．これより

$$\begin{aligned}
\|R^{(n)}(x;u)\|_Y &\leq \int_0^1 \frac{1}{n!} n(1-t)^{n-1} \left\| D^n f(x+tu)u^{\otimes n} - D^n f(x) u^{\otimes n} \right\| \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 \frac{1}{n!} n(1-t)^{n-1} \|D^n f(x+tu) - D^n f(x)\|_{L^{(n)}(X^n;Y)} \|u\|_X^n \,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{1}{n!} \|u\|^n \sup_{t\in[0,1]} \|D^n f(x+tu) - D^n f(x)\| \, n \int_0^1 (1-t)^{n-1} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n!} \|u\|^n \sup_{t\in[0,1]} \|D^n f(x+tu) - D^n f(x)\|
\end{aligned}$$

となり，期待する評価が得られた． □

命題 5.4　$f\colon U \to Y$ が C^n 級なら，$D^n f(x)$ は対称な n-重線形写像である．

証明　Step 1：$n=2$ の場合． $x \in U$ を任意に固定し，全ての $(u,v) \in X$ について $D^2 f(x)(u,v) = D^2 f(x)(v,u)$ が成り立つことを示す．まずは，$U_r(x) \in U$ なる r を一つ固定して $\|u\|, \|v\| \leq r/2$ を満たすような u,v について考えよう．

関数 $\varphi\colon [0,1] \to Y$ を

$$\varphi(t) = f(x+tu+v) - f(x+tu)$$

によって定義する．このとき φ は $]0,1[$ 上で C^1 級であり，微分演算の線形性と合成関数の微分法則より

$$\begin{aligned}
D\varphi(t) &= (Df(x+tu+v) - Df(x+tu))u \\
&= (Df(x+tu+v) - Df(x))u - (Df(x+tu) - Df(x))u
\end{aligned}$$

および

$$D^2\varphi(t) = \{D^2 f(x+tu+v) - D^2 f(x+tu)\}(u)(u)$$

が成り立つ．したがって系 5.3 より

$$\begin{aligned}
&\|\varphi(1) - \varphi(0) - D\varphi(0) - D^2\varphi(0)\|_Y \\
&\quad\leq \frac{1}{2} \sup_{t\in[0,1]} \|D^2\varphi(t) - D^2\varphi(0)\|_Y \\
&\quad= \frac{1}{2} \sup_{t\in[0,1]} \|D^2 f(x+tu+v)uu - D^2 f(x+tu)uu - D^2 f(x+v)uu + D^2 f(x)uu\|_Y \\
&\quad\leq \frac{3}{2} \|u\|^2 \sup_{\|z\|<r} \|D^2 f(x+z) - D^2 f(x)\|_{L(X,L(X,Y))}
\end{aligned}$$

が成り立つ．さらに，

$$
\begin{aligned}
&\|D\varphi(0)+D^2\varphi(0)-D^2f(x)vu\| \\
&\quad = \bigl\|\{Df(x+v)-Df(x)-D^2f(x)v\}u+\{D^2f(x+v)-D^2f(x)\}uu\bigr\| \\
&\quad \le \|u\|\,\|v\| \sup_{t\in[0,1]}\|D^2f(x+tv)-D^2f(x)\|+\|u\|^2\,\|D^2f(x+v)-D^2f(x)\| \\
&\quad \le \|u\|(\|u\|+\|v\|)\sup_{\|z\|<r}\|D^2f(x+z)-D^2f(x)\|
\end{aligned}
$$

も成り立つ．

またψ: $[0,1]\to Y$ を

$$\psi(t)=f(x+u+tv)-f(x+tv)$$

と定義すれば，先ほどと対称に

$$\|\psi(1)-\psi(0)-D\psi(0)-D^2\psi(0)\|\le\frac{3}{2}\|v\|^2\sup_{\|z\|<r}\|D^2f(x+z)-D^2f(x)\|$$

および

$$\|D\psi(0)+D^2\psi(0)-D^2f(x)uv\|\le\|v\|(\|u\|+\|v\|)\sup_{\|z\|<r}\|D^2f(x+z)-D^2f(x)\|$$

も成り立つ．

いま $\varphi(1)-\varphi(0)=\psi(1)-\psi(0)$ であることに注意すれば，これまでの評価より

$$
\begin{aligned}
&\|D^2f(x)(u)(v)-D^2f(x)(v)(u)\| \\
&\quad \le \|D\varphi(0)+D^2\varphi(0)-D^2f(x)vu\| \\
&\qquad +\|\varphi(1)-\varphi(0)-D\varphi(0)-D^2\varphi(0)\|_Y \\
&\qquad +\|\psi(1)-\psi(0)-D\psi(0)-D^2\psi(0)\| \\
&\qquad +\|D\psi(0)+D^2\psi(0)-D^2f(x)uv\| \\
&\quad \le \sup_{\|z\|<r}\|D^2f(x+z)-D^2f(x)\|\left\{\frac{3}{2}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)+(\|u\|+\|v\|)^2\right\} \\
&\quad \le 2r^2\sup_{\|z\|<r}\|D^2f(x+z)-D^2f(x)\|
\end{aligned}
$$

となることがわかる．

さて，一般の $u,v\neq 0$ に対しては $u'=(r/2\|u\|)u$ と $v'=(r/2\|u\|)u$ とおけば $\|u'\|,\|v'\|\le r/2$ となるので，先ほどの評価より

$$\|D^2f(x)(u')(v')-D^2f(x)(v')(u')\|\le 2r^2\sup_{\|z\|<r}\|D^2f(x+z)-D^2f(x)\|$$

なる不等式を得る．これの各辺に $4\|u\|\|v\|/r^2$ を掛けることで，全ての $u,v\in X\setminus\{0\}$ について

$$\|D^2f(x)(u)(v)-D^2f(x)(v)(u)\|\le 8\|u\|\|v\|\sup_{\|z\|<r}\|D^2f(x+z)-D^2f(x)\|$$

が成り立つことがわかる．また，u, v の何れかが 0 の時にもこの不等式は自明に成り立つ．この不等式において $r \to 0$ とすれば，$D^2 f$ の連続性より右辺は 0 に収束し，$D^2 f(x)uv = D^2 f(x)vu$ であることがわかる．

Step 2：一般の場合． n に関する帰納法で示す．$n = 2$ の場合には既に示した．$n \geq 2$ とし，任意の $x \in U$ と $k \leq n$ について $D^n f(x)$ は対称であるとしよう．このとき Step 1 より

$$\begin{aligned} D^{n+1} f(x)(v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n+1}) &= D^2 D^{n-2} f(x)(v_1, v_2)(v_3, \dots, v_{n+1}) \\ &= D^2 D^{n-2} f(x)(v_2, v_1)(v_3, \dots, v_{n+1}) \\ &= D^{n+1} f(x)(v_2, v_1, v_3, \dots, v_{n+1}) \end{aligned}$$

が成り立つ．また $\sigma\colon \{2, \dots, n+1\} \to \{2, \dots, n+1\}$ を置換とすれば，帰納法の仮定より

$$D^n f(x)(v_2, \dots, v_{n+1}) = D^n f(x)(v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(n+1)})$$

となる．これより

$$\begin{aligned} D^{n+1} f(x)(v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n+1}) &= DD^n f(x)(v_1)(v_2, v_3, \dots, v_{n+1}) \\ &= DD^n f(x)(v_1)(v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(n+1)}) \\ &= D^{n+1} f(x)(v_1, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(n+1)}) \end{aligned}$$

がわかる．任意の置換 $\{1, \dots, n+1\} \to \{1, \dots, n+1\}$ は上で扱った置換の合成によって表現されるから，これにより $n+1$ でも主張が成り立つと結論づけられる． □

References

[1] J. Dieudonné. *Foundations of Modern Analysis*. Enlarged and Corrected Printing. Academic Press, 1969.

[2] R. M. Dudley and R. Norvaiša. *Concrete Functional Calculus*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag New York, 2011. xii+671 pp. ISBN: 978-1-4419-6950-7. DOI: 10.1007/978-1-4419-6950-7. URL: https://www.springer.com/gp/book/9781441969491.

[3] Marián Fabian et al. *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*. CMS Books in Mathematics. Springer-Verlag New York, 2011. DOI: 10.1007/978-1-4419-7515-7.

[4] Jürgen Jost. *Postmodern Analysis*. 3rd ed. Universitext. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. DOI: 10.1007/3-540-28890-2.

[5] Serge Lang. *Real and Functional Analysis*. 3rd ed. Graduate Texts in Mathematics 142. Springer-Verlag New York, 1993. DOI: 10.1007/978-1-4612-0897-6.