関数解析ノート III：Banach 空間における微積分 Ver. 2.0

平井祐紀

2022 年 11 月 26 日

概要

本ノートでは，Banach 空間における微分と Riemann 積分について学ぶ．

編集履歴

2019/8/1 命題 5.4 の証明を少し修正．Ver. 1.0.

2020/4/15 誤植をいくつか訂正．Ver. 1.1.

2020/11/5 誤植を訂正．Ver. 1.3.

2021/11/24 文書クラスを変更．記法を変更．間違いをいくつか訂正．Ver. 1.4.

2022/11/26 全面的に修正．Ver. 2.0.

目次

1 Riemann 積分

本ノートでは，Banach 空間の係数体は $\mathbb{R}$ とする．Banach 空間 X と Y が与えられたとき，$L(X,Y)$ で X から Y への有界線形写像全体の空間を表すことにする．$T \in L(X,Y)$ の作用素ノルムは

$$\|T\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

と定義されるのであった．よく知られているように，$L(X,Y)$ は作用素ノルムによって Banach 空間となる．どのノルムを考えているか紛らわしいときには，上記の作用素ノルムを $\|T\|_{L(X,Y)}$，

$\|T\|_{\mathrm{op}}$，$\|T\|_{X\to Y}$ などのように表すこともある．

本節では，Banach 空間値関数の Riemann 積分について考えよう．$a,b\in\mathbb{R}$ が $a<b$ を満たすとき，$\mathrm{Par}[a,b]$ で $[a,b]$ の区間による有限分割全体の集合を表すことにする．すなわち，$\mathrm{Par}[a,b]$ の元 π は $[a,b]$ の部分区間の有限族 $(I_i)_{0\le i\le n}$ で，

$$\bigcup_{0\le i\le n} I_i=[a,b],\qquad i\ne j \implies I_i\cap I_j=\emptyset$$

を満たすようなものである．ここでは $[t,t]=\{t\}$ のような 1 点集合も区間と見なすことにする．例えば，

$$\{[0,1/3]\,,]1/3,2/3[\,,\{2/3\},]2/3,1]\}$$

は単位区間 $[0,1]$ の分割である（図 1）．

図 1　分割の例

$\mathbb{R}$ の有界区間 I に対して，区間の長さを $|I|=|\sup I-\inf I|$ で定義する．$]s,t]$，$[s,t]$，$[s,t[$，$]s,t[$ の長さはどれも $|t-s|$ であり，1 点区間 $[t,t]$ の長さはもちろん 0 である．区間の長さを定める関数 $|\cdot|$ は加法性をもつ．すなわち，$I=I'\cup I''$ かつ $I'\cap I''=\emptyset$ ならば $|I|=|I'|+|I''|$ が成り立つ．これは積分を定義する上で重要な性質である．

X を Banach 空間とする．$\pi\in\mathrm{Par}[a,b]$ の時，π に沿った X 値の階段関数 f とは

$$f=\sum_{I\in\pi} x_I 1_I$$

と表現されるような関数である．ここで，$1_I\colon [a,b]\to\{0,1\}$ は区間 I の特性関数を表す．すなわち，次の式で定義される関数である．

$$1_I(t)=\begin{cases}1 & t\in I\\ 0 & t\in[a,b]\setminus I\end{cases}$$

また，各 x_I は X の元である．階段関数の表示は一意とは限らない．簡単な例をあげると，$[0,1]$ 上の定数関数 1 は

$$1_{[0,1]}=1_{[0,1/2]}+1_{]1/2,1]}$$

という複数の表現を持つ．図 1 における分割に沿った階段関数の例として図 2 を挙げておく． 分割 π に沿った X 値階段関数全体の集合を $SF(\pi;X)$ で表し，$SF([a,b];X)=\bigcup_{\pi\in\mathrm{Par}[a,b]}SF(\pi;X)$ と定義する．

$B([a,b];X)$ を $[a,b]$ 上の X 値有界関数全体の集合とする．$f\in B([a,b];X)$ に対して

$$\|f\|_\infty=\sup_{t\in[a,b]}\|f(t)\|_X$$

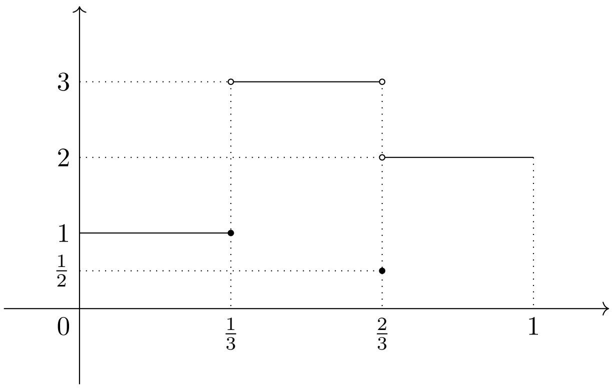

図 2　階段関数の例

と定義する．よく知られているように，$B([a,b];X)$ はノルム $\|\ \|_\infty$ により Banach 空間となる．また，$C([a,b];X)$ を $[a,b]$ 上の X 値連続関数全体の集合とする．このとき $C([a,b];X)$ は $B([a,b];X)$ の閉部分空間となっている．先ほど導入した階段関数の空間 $SF([a,b];X)$ も $B([a,b];X)$ の線形部分空間である．$SF([a,b];X)$ がスカラー倍について閉じていることは容易にわかる．$f = \sum_\pi x_I 1_I$ および $g = \sum_{\pi'} y_I 1_I$ に対して

$$f + g = \sum_{I\in\pi, J\in\pi'} (x_I + y_J) 1_{I\cap J}$$

が成り立つから，$SF([a,b];X)$ が和について閉じていることも確かめられる．積分について考える時は，$SF([a,b];X)$ を $B([a,b];X)$ の部分ノルム空間と見なすことにする．

$f = \sum x_J 1_J \in SF(\pi;X)$ に対して，その積分 $I(f)$ を

$$I(f) = \sum_{J\in\pi} x_J |J|$$

で定義する．この「積分作用素」は階段関数 f の表現によらない．実際，$f = \sum_\pi x_J 1_J = \sum_{\pi'} x'_{J'} 1_{J'}$ なら，

$$\sum_{J\in\pi} x_I |I| = \sum_{J\in\pi, J'\in\pi'} x_J |J\cap J'|$$
$$\sum_{J\in\pi'} x'_J |J| = \sum_{J\in\pi, J\in\pi'} x'_J |J\cap J'|$$

が成り立つ．$J\cap J' \neq \emptyset$ なら $x \in J\cap J'$ に対して $x_J = f(x) = x'_{J'}$ となるので，積分値は f の表現によらないことがわかる．したがって，積分作用素 $I\colon SF(\pi;X) \to X$ を貼り合わせて写像 $I\colon SF([a,b];X) \to X$ を作ることができる．

命題 1.1　$I\colon SF([a,b];X) \to X$ は連続な線形作用素である．

証明　$f, g \in SF([a,b];X)$ とする．先ほどの階段関数の和に関する注意より，f, g はある共通の $SF(\pi;X)$ に属するとしてよい．$f = \sum_\pi x_J 1_J$ かつ $g = \sum_\pi y_J 1_J$ という表現をもつとし，$\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

とする．このとき $\alpha f+\beta g=\sum_\pi(\alpha x_J+\beta y_J)1_J$ であるから，

$$I(f+g)=\sum_{J\in\pi}(\alpha x_J+\beta y_J)|J|=\alpha\sum_{J\in\pi}x_J|J|+\beta\sum_{I\in\pi}y_I|I|=\alpha I(f)+\beta I(g)$$

が成り立つ．よって I は線形である．また

$$\|I(f)\|_X\le\sum_{J\in\pi}\|x_J\|_X|J|\le\sup_{s\in[a,b]}\|f(s)\|\sum_{J\in\pi}|J|=\|f\|_\infty\,|b-a|$$

であるから，I が有界作用素であることもわかる．□

注意 1.2　命題 1.2 の証明よりわかるように，積分写像 $I\colon SF([a,b];X)\to X$ の作用素ノルムは $|b-a|$ 以下である．特に定数関数の積分を考えれば，作用素ノルムは $|b-a|$ に等しいことがわかる．

定義 1.3　命題 1.1 より $I\colon SF([a,b];X)\to X$ は Banach 空間 X への連続線形作用素であるから，閉包 $\overline{SF([a,b];X)}$ 上の連続作用素の一意的に拡張される．$\overline{SF([a,b];X)}$ とおき，I の $\overline{SF([a,b];X)}$ への拡張を $\int_a^b\colon\overline{SF([a,b];X)}\to X$ で表す．$f\in\overline{SF([a,b];X)}$ に対してその値 $\int_a^b f$ を f の $[a,b]$ 上での Riemann 積分という．

被積分関数 f の引数を明示したい場合には，積分を

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,\qquad\int_a^b\mathrm{d}t\,f(t)$$

などと書くこともある．$a>b$ のときは，

$$\int_a^b f=-\int_b^a f \tag{1.1}$$

と書くことにする．この記法を用いれば，a と b の大小関係がわからない場合にも

$$\left\|\int_a^b f\right\|_X\le\|f\|_\infty|b-a| \tag{1.2}$$

という評価を得ることができる．

$\overline{SF([a,b];X)}$ 上の作用素として積分を定義したが，$\overline{SF([a,b];X)}$ が僅かな関数しか含んでいなければこの積分が有用だとは言い難い．幸いにして，全ての連続関数は我々の考える積分の定義域に含まれている．このことを確かめてみよう．$n\in\mathbb{N}_{\ge1}$ と $i\in\{0,\dots,n\}$ に対して，$t_i^n=a+i(b-a)/n$ と定義し，分割 π_n を $\pi_n=\left\{\{a\},]t_i^n,t_{i+1}^n]\mid 0\le i\le n-1\right\}$ と定める．すなわち，π_n は定義域 $[a,b]$ をちょうど n 等分して得られる分割である．$f\in C([a,b];X)$ の π_n に沿った離散化を

$$f_{\pi_n}=f(a)1_{\{a\}}+\sum_{0\le i\le n-1}f\left(t_i^n\right)1_{]t_i^n,t_{i+1}^n]}$$

と定義すれば，$f_{\pi_n} \in SF([a,b];X)$ である．定義域 $[a,b]$ はコンパクトなので f は一様連続であり，$f_{\pi_n} \to f$ が $\| \ \|_\infty$ の意味で成り立つことが確かめられる．ゆえに $f \in \overline{SF([a,b];X)}$ である．

命題 1.4　$f \in \overline{SF([a,b];X)}$ なら，$t \mapsto \|f(t)\|_X$ は実数値の関数として Riemann 積分可能であり，

$$\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\|_X \le \int_a^b \|f(t)\|_X \mathrm{d}t$$

が成り立つ．

証明　$f = \sum x_I 1_I \in SF(\pi;X)$ の場合には，

$$\|f(t)\|_X = \sum_{I\in\pi} \|x_I\|_X 1_I(t)$$

なので，$t \mapsto \|f(t)\|_X$ はまた階段関数であり Riemann 積分可能である．このとき

$$\begin{aligned}\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\|_X &= \left\| \sum_{I\in\pi} x_I |I| \right\|_X \\ &\le \sum_{I\in\pi} \|x_I\|_X\,|I| \\ &= \int_a^b \|f(t)\|_X \mathrm{d}t\end{aligned}$$

となり，期待する不等式は成り立っている．一般の $f \in \overline{SF([a,b];X)}$ に対しては，f を近似する $SF([a,b];X)$ の列 (f_n) を選ぶ．このとき

$$\sup_{t\in[a,b]} |\|f(t)\| - \|f_n(t)\|| \le \sup_{t\in[a,b]} \|f(t) - f_n(t)\|_X$$

であるから，関数列 $(\|f_n(\cdot)\|)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\|f(\cdot)\|$ に一様収束している．各 f_n については

$$\left\| \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \right\|_X \le \int_a^b \|f_n(t)\|_X\,\mathrm{d}t$$

が成り立っているから，積分作用素の連続性に注意して極限をとれば

$$\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\|_X \le \int_a^b \|f(t)\|_X\,\mathrm{d}t$$

がわかる．　□

$f \in \overline{SF([a,b];X)}$ なら，$I \subset [a,b]$ なるコンパクト区間に対して $f1_I \in \overline{SF([a,b];X)}$ が成り立つ．実際，f を近似する列 $(f_n) \in SF([a,b];X)$ をとれば，$f_n 1_I \in SF([a,b];X)$ かつ

$$\|f_n 1_I - f 1_I\| \le \|f_n - f\| \to 0$$

となるからである．

積分の基本的な性質である区間加法性について考えよう．$a \leq b < c \leq d$ なる区間が与えられているとする．包含写像 $i\colon [b,c] \to [a,d]$ を用いて制限写像を $i^*\colon B([a,d];X) \ni f \mapsto f \circ i \in B([b,c];X)$ と定めれば，これは連続な線形写像となる．なお，連続性は

$$\sup_{t \in [b,c]} \|f(t)\| \leq \sup_{t \in [a,d]} \|f(t)\|$$

という評価よりわかる．$\pi \in \mathrm{Par}[a,d]$ に対して $\pi \cap [b,c] = \{J \cap [b,c]\,;\, J \in \pi\}$ と定義すれば，$\pi \cap [b,c] \in \mathrm{Par}[b,c]$ である．さらに $f = \sum x_J 1_J \in SF(\pi;X)$ について $i^*(f) = \sum_{I \in \pi} x_I 1_{I \cap [b,c]}$ が成り立つから，$i^*(f) \in SF(\pi \cap [b,c];X)$ がわかる．したがって連続写像 $i^*\colon SF([a,d];X) \to SF([b,c];X)$ が定まり，これより $i^*(\overline{SF([a,d];X)}) \subset \overline{SF([b,c];X)}$ がわかる．すなわち，Riemann 積分可能な関数の制限は，また Riemann 積分可能である．

命題 1.5　(i) $a \leq b \leq c \leq d$ かつ $f \in \overline{SF([a,d];X)}$ なら，

$$\int_b^c f|_{[b,c]} = \int_a^d f 1_{[b,c]}$$

が成り立つ．

(ii) $a \leq b \leq c$ かつ $f \in \overline{SF([a,c];X)}$ なら，

$$\int_a^c f = \int_a^b f|_{[a,b]} + \int_b^c f|_{[b,c]}$$

が成り立つ．

証明　(i) $f \in SF([a,b];X)$ の時は定義に従って計算すればわかる．一般の場合は $SF([a,b];X)$ の点列で近似すればよい．

(ii) (i) と積分の線形性より分かる．　□

命題 1.6　$f \in \overline{SF([a,b;X])}$ なら，関数 $[a,b] \ni t \mapsto \int_a^t f|_{[a,t]} \in X$ は Lipschitz 連続である．

証明　$s,t \in [a,b]$ とすれば，命題 1.5 より

$$\begin{aligned}
\left\| \int_a^t f|_{[a,t]}(u)\mathrm{d}u - \int_a^s f|_{[a,s]}(u)\mathrm{d}u \right\|_X &= \left\| \int_a^b f(u)1_{[a,t]}(u)\mathrm{d}u - \int_a^b f(u)1_{[a,s]}(u)\mathrm{d}u \right\|_X \\
&= \left\| \int_a^b f(u)\{1_{[a,t]}(u) - 1_{[a,s]}(u)\}\mathrm{d}u \right\|_X \\
&\leq \int_a^b \|f(u)\|_X |1_{[a,t]}(u) - 1_{[a,s]}(u)|\mathrm{d}u \\
&\leq \|f\|_\infty \int_a^b |1_{[a,t]}(u) - 1_{[a,s]}(u)|\mathrm{d}u \\
&= \|f\|_\infty |t-s|
\end{aligned}$$

が成り立つ． □

命題 1.7　X と Y を Banach 空間とし，$T\colon X \to Y$ を有界線形写像とする．このとき全ての $f \in \overline{SF([a,b];X)}$ について $T \circ f \in \overline{SF([a,b];Y)}$ であり，

$$T\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b T \circ f$$

が成り立つ．

証明　$f \in B([a,b];X)$ に対して $T_*(f) = T \circ f$ と定義する．このとき，任意の $s \in [a,b]$ について

$$\|T_*(f)(s)\|_Y = \|T(f(s))\|_Y \leq \|T\|_{L(X,Y)}\|f(s)\|_X \leq \|T\|_{L(X,Y)}\|f\|_\infty$$

が成り立つから，T_* は $B([a,b];X)$ から $B([a,b];Y)$ への有界線形写像を定める．π を $[a,b]$ の分割とする．$f = \sum x_I 1_I \in SF(\pi;X)$ なら

$$T_*(f) = \sum T(x_I)1_I$$

であるから，$T_*(SF([a,b];X)) \subset SF([a,b];Y)$ がわかる．また，積分の定義より

$$\int_a^b T_*(f) = \sum_{I\in\pi} T(x_I)|I| = T\left(\sum_{I\in\pi} x_I|I|\right) = T\left(\int_a^b f\right)$$

が成り立つ．いま T_* は連続だから，これより $T_*(\overline{SF([a,b];X)}) \subset \overline{SF([a,b];Y)}$ がわかる．また連続写像 $\int_a^b \circ T_*$ と $T \circ \int_a^b$ は $SF([a,b];X)$ 上で一致するから，その閉包 $\overline{SF([a,b];X)}$ 上でも一致する．
□

2　Banach 空間上の関数の微分

本節では，Banach 空間上で定義された関数の微分について考える．まずは，全微分に相当する概念である Fréchet 微分を導入しよう．Banach 空間 X において，中心 $x \in X$ で半径 $\varepsilon > 0$ の開球を

$$U_\varepsilon(x) = \{x' \in X \mid \|x' - x\| < \varepsilon\}$$

によって定義する．

定義 2.1　X と Y を Banach 空間とする．U を X の開集合とし，U 上定義された関数 $f\colon U \to Y$ を考える．

(i) $x \in U$ および $L \in L(X,Y)$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ で，$U_\delta(x) \subset U$ かつ

$$\forall u \in U_\delta(0),\ \|f(x+u) - f(x) - L(u)\|_Y < \varepsilon\|u\|_X$$

を満たすものが存在するとする．このとき L を f の x における Fréchet 微分と呼ぶ．x における Fréchet 微分が存在するとき，f は x で Fréchet 微分可能であるという．また，f の x における Fréchet 微分を $Df(x)$ で表す．

(ii) $f\colon U \to V$ が U の全ての点で Fréchet 微分可能であるとき，f は Fréchet 微分可能であるという．f が Fréchet 微分可能であるとき，写像 $U \ni x \mapsto Df(x) \in L(X, Y)$ を Df で表し，これを f の Fréchet 導関数と呼ぶ．

f が x で微分可能とは f が x の近傍上では線形写像で良く近似できるということである．これは全微分の考え方である．なお，Landau の記号を用いれば，L が x における fFréchet 微分であることを

$$f(x+u) - f(x) - Df(x)(u) = o(\|u\|),$$

とも表現できる．この記号の意味は，

$$\lim_{u \to 0, u \neq 0} \frac{\|f(x+u) - f(x) - Df(x)(u)\|}{\|u\|} = 0$$

が成り立つということである．後で確かめるように Fréchet 微分は存在すれば一意的なので，このとき Fréchet 導関数 Df は well-defined であることがわかる．

有界線形写像 $f\colon X \to Y$ は Fréchet 微分可能であり，その $x \in X$ における微分は f 自身である．すなわち $Df(x) = f$ であり，$Df\colon X \to L(X, Y)$ は f に値をとる定数関数となる．また，Y に値をとる定数関数は Fréchet 微分可能であり，その微分は 0 となる．

方向微分に対応する Gâteaux 微分の概念も重要である．

定義 2.2 定義 2.1 の設定を引き継ぐ．

(i) $x \in U$ および $L \in L(X, Y)$ とする．全ての $h \in L(X, Y)$ について

$$\lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = Lh$$

が成り立つとき，L を f の x における Gâteaux 微分とよぶ．x における Gâteaux 微分が存在するとき，f は x で Gâteaux 微分可能であるといい，その Gâteaux 微分を $Df(x)$ で表す．

(ii) $f\colon U \to V$ が U の全ての点で Fréchet 微分可能であるとき，f は Gâteaux 微分可能であるという．f が Gâteaux 微分可能であるとき，写像 $U \ni x \mapsto Df(x) \in L(X, Y)$ を Df で表し，これを f の Gâteaux 導関数と呼ぶ．

Gâteaux 微分の定義に出てきた極限

$$\lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

を，f の x における h 方向微分と呼ぶ．全ての $t \in \mathbb{R}$ について $th \in U$ が成り立つとは限らないが，U は開集合なので 0 の適当な近傍上で $t \mapsto f(x+th)$ が定義できることに注意しておく．方向微分

とは，0 の近傍上で定義された関数 $t \mapsto f(x+th)$ の 0 における微分に他ならない．Gâteaux 微分の定義としては，各方向への方向微分の存在することのみを仮定する場合もあるので，注意が必要である[1)]．f が x において（本ノートの意味で）Gâteaux 微分可能であるとき，x における h 方向微分は $Df(x)h$ に等しい．

Gâteaux 微分と Fréchet 微分を同じ記号で表すことは行儀が悪く思われるが，後で見るように Fréchet 微分可能な関数は Gâteaux 微分可能でもあり，それらの導関数は一致する．したがって，関数の微分可能性の意味について言及さえしておけば，同じ記号を用いても誤解の余地はない．

補題 2.3　X および Y を Banach 空間とし，$f\colon U \to Y$ を X の開集合上で定義された関数とする．f が $x \in U$ で Gâteaux 微分可能ならば，その Gâteaux 微分は一意的である．

証明　L_1 と L_2 を f の x における Gâteaux 微分とし，微分の方向 $u \in X \setminus \{0\}$ を任意に固定する．このとき $L_1(u) = L_2(u)$ が成り立つことを示せばよい．任意に選んだ $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta_1 > 0$ および $\delta_2 > 0$ を

$$
\begin{aligned}
0 < |t| < \delta_1 &\implies \left\| \frac{f(x+tu)-f(x)}{t} - L_1(u) \right\|_Y < \varepsilon \\
0 < |t| < \delta_2 &\implies \left\| \frac{f(x+tu)-f(x)}{t} - L_2(u) \right\|_Y < \varepsilon
\end{aligned}
$$

を満たすようにとる．ここで $\delta = \delta_1 \wedge \delta_2$ と定めれば，$0 < |t| < \delta$ なる全ての t について

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{f(x+tu)-f(x)}{t} - L_1(u) \right\|_Y &< \varepsilon \\
\left\| \frac{f(x+tu)-f(x)}{t} - L_2(u) \right\|_Y &< \varepsilon
\end{aligned}
$$

が成り立つ．したがって，$0 < |t| < \delta$ なら

$$
\|L_1(u) - L_2(u)\|_Y < 2\varepsilon
$$

である．いま $\varepsilon > 0$ は任意に選んでいたから，これより $\|L_1(u) - L_2(u)\|_Y = 0$ がわかる．　□

次の命題から分かるように，Fréchet 微分可能性は Gâteaux 微分可能性よりも強い条件である．X が 1 次元の場合には 2 つの微分可能性は同じものだが，多次元の場合にはこれらは真に異なる概念である．すなわち，Gâteaux 微分可能だが Fréchet 微分可能でない関数が存在する．

命題 2.4　X および Y を Banach 空間とし，$f\colon U \to Y$ を X の開集合上で定義された関数とする．f が $x \in U$ で Fréchet 微分可能ならば x で Gâteaux 微分可能でもあり，これら二つの微分は一致する．

1）　定義 2.2 は，方向微分が方向 h に線形かつ連続に依存することを課している．極限としての方向微分が存在したからと言って，それが h について線形に変化するとは限らない．

証明 $x \in U$ とし，L を f の x における Fréchet 微分とする．このとき L が Gâteaux 微分にもなっていることを示せば，Gâteaux 微分の一意性（補題 2.3）より両者は一致することがわかる．

方向ベクトル $h \in X \setminus \{0\}$ を任意に一つ固定し，L が h 方向微分であることを示す．$\varepsilon > 0$ とし，$\delta > 0$ を $U_\delta(x) \subset U$ かつ

$$u \in U_\delta(x) \implies \|f(x+u) - f(x) - Lu\| \leq \frac{\varepsilon}{\|h\|}\|u\|$$

を満たすように選ぶ．さらに，$\delta' = \delta\|h\|^{-1}$ とおく．このとき，$0 < |t| < \delta'$ ならば

$$\|f(x+th) - f(x) - L(th)\| \leq \frac{\varepsilon}{\|h\|}\|th\| = |t|\varepsilon$$

が成り立つ．両辺を $|t|$ で割れば，

$$\left\| \frac{f(x+th) - f(x)}{t} - L(h) \right\| \leq \varepsilon$$

を得る．したがって

$$\lim_{t\to 0, t\neq 0} \left\| \frac{f(x+th) - f(x)}{t} - L(h) \right\| = 0$$

である．方向ベクトル h は任意に選んだものだったから，L は f の Gâteaux 微分であることが示された． □

命題 2.4 の逆は成り立たないが，方向微分を用いて Fréchet 微分可能性を調べることはできる．

命題 2.5 関数 $f\colon U \to Y$ は $x \in U$ で Gâteaux 微分可能であるとする．このとき，f が x で Fréchet 微分可能であるための必要十分条件は，

$$\lim_{t\to 0, t\neq 0} \sup_{\|h\|\leq 1} \left\| \frac{f(x+th) - f(x)}{t} - Df(x)h \right\| = 0 \tag{2.1}$$

が成り立つことである．

証明 **必要性．**証明の方法は命題 2.4 とほぼ同じある．f は x で Fréchet 微分可能であると仮定する．任意に選んだ $\varepsilon > 0$ に応じて，$\delta > 0$ を $U_\delta(x) \subset U$ かつ

$$u \in U_\delta(x) \implies \|f(x+u) - f(x) - Lu\| \leq \varepsilon\|u\|$$

を満たすように選ぶ．特に，$0 < |t| < \delta$ かつ $\|h\| \leq 1$ なら

$$\|f(x+th) - f(x) - Lth\| \leq \varepsilon|t|$$

であるから，

$$\sup_{\|h\|\leq 1} \left\| \frac{f(x+th) - f(x)}{t} - Df(x)h \right\| \leq \varepsilon$$

を得る．ゆえに (2.1) が成り立つ．

十分性．(2.1) が成り立つと仮定する．$\varepsilon > 0$ に応じて，$\delta > 0$ を $B_\delta(x) \subset U$ かつ

$$0 < |t| < \delta \implies \sup_{\|h\| \le 1} \left\| \frac{f(x+th) - f(x)}{t} - Df(x)h \right\| < \varepsilon$$

を満たすように選ぶ．この式を変形すれば，$0 < |t| < \delta$ なら

$$\sup_{\|h\| \le 1} \|f(x+th) - f(x) - Df(x)th\| < \varepsilon|t|$$

となる．$u \in B_\delta(0) \setminus \{0\}$ を任意に選べば，先ほどの評価より

$$\begin{aligned} \|f(x+u) - f(x) - Df(x)u\| &= \left\| f\left(x + \|u\| \frac{u}{\|u\|}\right) - f(x) - Df(x)\left(\|u\| \frac{u}{\|u\|}\right) \right\| \\ &\le \sup_{\|h\| \le 1} \|f(x + \|u\|h) - f(x) - Df(x)\|u\|h\| \\ &< \varepsilon\|u\| \end{aligned}$$

が成り立つ．これは $Df(x)$ が f の Fréchet 微分であることを表している．　□

ユークリッド空間上の微分可能な関数は連続であったように，Banach 空間上の Fréchet 微分可能な関数も連続となる．

命題 2.6　(i) $f\colon U \to Y$ が $x \in U$ で Fréchet 微分可能なら，f は x で連続である．

(ii) $f\colon U \to Y$ は $x \in U$ で Gâteaux 微分可能であるとする．$u \in X$ とし，$\delta > 0$ を $t \in]-\delta, \delta[$ ならば $tu \in U$ となるように選ぶ．このとき，写像 $]-\delta, \delta[\ni t \mapsto f(x+tu) \in Y$ は 0 で連続である．

f が x で Gâteaux 微分可能であっても，そこで連続になるとは限らないことに注意しておく．

証明　(i) 微分可能性の定義より，x の適当な近傍 $U_{\delta_1}(x)$ 上で

$$\|f(u) - f(x) - Df(x)(u-x)\| < \|u - x\|$$

が成り立つ．この式を変形すれば，

$$\|f(u) - f(x)\|_Y \le \|u-x\|_X + \|Df(x)(u-x)\|_X \le (1 + \|Df(x)\|_{L(X,Y)})\|u-x\|_X$$

となる．$\varepsilon > 0$ に対して $\delta_2 = \varepsilon/(1 + \|Df(x)\|)$ と定め，さらに $\delta_0 = \delta_1 \wedge \delta_2$ とおく．このとき，$u \in B_\delta(x)$ ならば

$$\|f(u) - f(x)\|_Y \le (1 + \|Df(x)\|)\|u - x\|_X \le \varepsilon$$

が成り立つ．ゆえに f は x で連続である．

(ii) の証明は (i) とほぼ同じである．Gâteaux 微分の定義より，十分小さな $\delta > 0$ をとれば，全ての $t \in]-\delta, \delta[$ について

$$\|f(x+th) - f(x) - tDf(x)h\| < t$$

が成り立つ．これより

$$|f(x+th)-f(x)| \le |t|(1+\|Df(x)h\|)$$

となるので，$t \to 0$ の極限をとれば結論を得る． □

微分の基本的な性質を調べていこう．まずは微分の線形性を証明する．

命題 2.7 X および Y を Banach 空間とし，f と g は X の開集合 U 上で定義された Y 値関数とする．

(i) f と g が x で Gâteaux 微分可能なら，その線形結合 $\alpha f+\beta g$ も x で Gâteaux 微分可能であり，

$$D(\alpha f+\beta g)(x) = \alpha Df(x)+\beta Dg(x) \tag{2.2}$$

が成り立つ．

(ii) f と g が x で Fréchet 微分可能なら，その線形結合 $\alpha f+\beta g$ も x で Fréchet 微分可能であり，(2.2) が成り立つ．

証明 (ii) のみ証明する．$\alpha=\beta=0$ の場合は明らかなので，どちらも 0 でないとして示せばよい．始めに，$\alpha Df(x)+\beta Dg(x)$ は有界線形写像の線形結合なので有界線形写像であることに注意しておく．任意に選んだ $\varepsilon>0$ に応じて，$\delta_1>0$ および $\delta_2>0$ を $U_{\delta_1}(x)\cup U_{\delta_2}(x)\subset U$ および次の条件を満たすように選ぶ．

$$\begin{aligned}
v\in U_{\delta_1}(0) &\implies |\alpha|\,\|f(x+v)-f(x)-Df(x)v\|_Y < \frac{\varepsilon}{2(|\alpha|\vee|\beta|)}\|v\|_X\\
v\in U_{\delta_2}(0) &\implies |\beta|\,\|g(x+v)-g(x)-Dg(x)v\|_Y < \frac{\varepsilon}{2(|\alpha|\vee|\beta|)}\|v\|_X
\end{aligned}$$

$\delta=\delta_1\wedge\delta_2$ とすれば，任意の $v\in U_\delta(x)$ について

$$\begin{aligned}
&\|(\alpha f+\beta g)(x+v)-(\alpha f+\beta g)(x)-(\alpha Df(x)+\beta Dg(x))v\|_Y\\
&\quad\le |\alpha|\,\|f(x+v)-f(x)-Df(x)v\|_Y+|\beta|\,\|g(x+v)-g(x)-Dg(x)(v)\|_Y\\
&\quad< \frac{\varepsilon}{2}\|v\|_X+\frac{\varepsilon}{2}\|v\|_X=\varepsilon\|v\|_X
\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって $\alpha f+\beta g$ は x で微分可能であり，$D(\alpha f+\beta g)(x)=\alpha Df(x)+\beta Dg(x)$ が成り立つ． □

次に Leibniz の法則を証明しよう．一般の Banach 空間では標準的な積が存在するとは限らないので，Leibniz の法則は双線形写像に関する微分の公式として述べられる．Banach 空間の間の双線形写像 $B\colon X\times Y\to Z$ が有界であるとは，

$$\|B\| = \sup_{x\in X\setminus\{0\},y\in Y\setminus\{0\}}\frac{\|B(x,y)\|}{\|x\|\|y\|}<\infty$$

が成り立つということであった．有界双線形写像全体の空間を $L^{(2)}(X,Y;Z)$ で表せば，これは上で定めたノルムによって Banach 空間となる．

命題 2.8　X, Y_1, Y_2, Z を Banach 空間とし，$U \subset X$ を開部分集合，$B\colon Y_1 \times Y_2 \to Z$ を有界双線形写像とする．

(i) $f_1\colon U \to Y_1$ と $f_2\colon U \to Y_2$ が $x \in U$ で Fréchet 微分可能なら $B \circ (f_1, f_2)\colon U \to Z$ も x で微分可能であり，

$$D[B \circ (f_1, f_2)](x)h = B(Df_1(x)h, f_2(x)) + B(f_1(x), Df_2(x)h) \tag{2.3}$$

が成り立つ．

(ii) $f_1\colon U \to Y_1$ と $f_2\colon U \to Y_2$ が $x \in U$ で Gâteaux 微分可能なら $B \circ (f_1, f_2)\colon U \to Z$ も x で微分可能であり，(2.3) が成り立つ．

証明　(i) まずは，B が有界双線形写像であることから，$h \mapsto B(Df_1(x)h, f_2(x)) + B(f_1(x), Df_2(x)h)$ は有界線形写像になることに注意しておく．$x + h \in U$ を満たすような h に対して，

$$\begin{aligned}
&\|B \circ (f_1, f_2)(x+h) - B \circ (f_1, f_2)(x) - B(Df_1(x)h, f_2(x)) - B(f_1(x), Df_2(x)h)\| \\
&\quad \le \|B(f_1(x+h), f_2(x+h)) - B(f_1(x), f_2(x+h)) - B(Df_1(x)h, f_2(x+h))\| \\
&\qquad + \|B(f_1(x), f_2(x+h)) - B(f_1(x), f_2(x)) - B(f_1(x), Df_2(x)h)\| \\
&\qquad + \|B(Df_1(x)h, f_2(x+h)) - B(Df_1(x)h, f_2(x))\| \\
&\quad = \|B(f_1(x+h) - f_1(x) - Df_1(x)h, f_2(x+h))\| \\
&\qquad + \|B(f_1(x), f_2(x+h) - f_2(x) - Df_2(x)h)\| \\
&\qquad + \|B(Df_1(x)h, f_2(x+h) - f_2(x))\| \\
&\quad \le \|B\|\, \|f_1(x+h) - f_1(x) - Df_1(x)h\|_{Y_1} \|f_2(x+h)\|_{Y_2} \\
&\qquad + \|B\|\, \|f_1(x)\|_{Y_1} \|f_2(x+h) - f_2(x) - Df_2(x)h\|_{Y_2} \\
&\qquad + \|B\| \|Df_1(x)h\|_{Y_1} \|f_2(x+h) - f_2(x)\|_{Y_2}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

という評価が成り立つ．ここで，定数 $C > 0$ を

$$C = \|B\|\,(\|f_1(x)\| + \|Df_1(x)\| + \|f_2(x)\| + 1)$$

と定義する．$\|B\| = 0$ の時は命題の主張は自明なので，$\|B\| > 0$ であると仮定してよい．$\varepsilon > 0$ を任意に選んで固定する．次に，$\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$ を $U_{\delta_1}(x) \cup U_{\delta_2}(x) \cup U_{\delta_3}(x) \subset U$ および以下の条件を満

たすようにとる．

$$
\begin{aligned}
h \in U_{\delta_1}(0) &\implies \|f_1(x+h) - f_1(x) - Df_1(x)h\| \leq \frac{\varepsilon}{3C}\|h\| \\
h \in U_{\delta_2}(0) &\implies \|f_2(x+h) - f_2(x) - Df_2(x)h\| \leq \frac{\varepsilon}{3C}\|h\| \\
h \in U_{\delta_3}(0) &\implies \|f_2(x+h) - f_2(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3C} \wedge 1
\end{aligned}
$$

このような δ_1 と δ_2 の存在は Fréchet 微分可能性の定義そのものであり，δ_3 の存在は f の x における連続性（命題 2.6）より従う．ここで $\delta = \delta_1 \wedge \delta_2 \wedge \delta_3$ と定義すれば，$h \in U_\delta(0)$ なら

$$
\begin{aligned}
&\|B \circ (f_1, f_2)(x+h) - B \circ (f_1, f_2)(x) - B(Df_1(x)h, f_2(x)) - B(f_1(x), Df_2(x)h)\| \\
&\leq \|B\| \left(\|f_2(x)\| + 1\right) \frac{\varepsilon\|h\|}{3C} + \|B\| \, \|f_1(x)\| \frac{\varepsilon\|h\|}{3C} + \|B\| \, \|Df_1(x)\| \|h\| \frac{\varepsilon}{3C} \leq \varepsilon\|h\|
\end{aligned}
$$

となる．すなわち，ゆえに，$B(Df_1(x)(\cdot), f_2(x)) + B(f_1(x), Df_2(x)(\cdot))$ は $B \circ (f_1, f_2)$ の x での Fréchet 微分である．

(ii) (i) の証明における不等式 (2.4) において $h = tu$ とおいて各辺を t で割れば，

$$
\begin{aligned}
&\left\| \frac{B \circ (f_1, f_2)(x+tu) - B \circ (f_1, f_2)(x)}{t} - B(Df_1(x)u, f_2(x)) - B(f_1(x), Df_2(x)u) \right\| \\
&\leq \|B\| \left\| \frac{f_1(x+tu) - f_1(x)}{t} - Df_1(x)u \|_{Y_1} \right| \|f_2(x+th)\| \\
&\quad + \|B\| \, \|f_1(x)\| \left\| \frac{f_2(x+tu) - f_2(x)}{t} - Df_2(x)u \right\| \\
&\quad + \|B\| \|Df_1(x)u\| \|f_2(x+tu) - f_2(x)\|_{Y_2}
\end{aligned}
$$

という評価を得る．Gâteaux 微分可能性と $t \mapsto f(x+tu)$ の連続性（命題 3.3）に注意して $t \to 0$ の極限を取れば，

$$
\left\| \frac{B \circ (f_1, f_2)(x+tu) - B \circ (f_1, f_2)(x)}{t} - B(Df_1(x)u, f_2(x)) - B(f_1(x), Df_2(x)u) \right\| = 0
$$

がわかる．　□

合成関数の微分公式（連鎖律）は Banach 空間においても成り立つ．

命題 2.9　X, Y, Z を Banach 空間とし，$U \subset X$ と $V \subset Y$ を開部分集合，$f\colon U \to V$ と $g\colon V \to Z$ を写像とする．

(i) f が $x \in U$ で，g が $f(x) \in V$ でそれぞれ Fréchet 微分可能なら，$g \circ f$ は x で Fréchet 微分可能であり，

$$
D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x) \tag{2.5}
$$

が成り立つ．

(ii) f は $x \in U$ で Gâteaux 微分可能で，g は $f(x)$ で Fréchet 微分可能であるとする．このとき合成関数 $g \circ f$ は x で Gâteaux 微分可能であり，(2.5) が成り立つ．

命題 2.9 の (ii) において g は Gâteaux 微分可能だけで良いのではないかと期待したくなるが，それは上手くいかない．$t \mapsto f(x + tu)$ が $f(x)$ に直線的に近づくとは限らないからである．

証明　(i) $Dg(f(x)) \circ Df(x)$ は有界線形写像の合成だから，有界線形写像となることに注意しておく．定数 $C > 0$ を

$$C = 1 + \|D(f(x))\|_{L(X,Y)} + \|Dg(f(x))\|_{L(Y,Z)}$$

と定義する．g は $f(x)$ で Fréchet 微分可能だから，$\varepsilon \in]0, 1[$ に対して十分小さい $\delta_1 > 0$ をとれば，$U_{\delta_1}(f(x)) \subset V$ であり，全ての $u \in U_\delta(0)$ について

$$\|g(f(x) + u) - g(f(x)) - Dg(f(x))u\|_Z < \frac{\varepsilon}{C}\|u\|_Y$$

が成り立つ．また，f は x で Fréchet 微分可能だから，ε に応じて十分小さい $\delta_2 > 0$ を選べば，$U_{\delta_2} \subset U$ かつ全ての $h \in U_{\delta_2}(0)$ について

$$\|f(x + h) - f(x) - Df(x)h\|_Y < \frac{\varepsilon}{C}\|h\|_X$$

が成り立つ．ここで

$$\delta_0 = \delta_2 \wedge \left(\frac{\delta_1}{\|Df(x)\|_{L(X,Y)} + 1}\right)$$

とすれば，$\|h\| < \delta_0$ ならば

$$\|f(x + h) - f(x)\| < (\|Df(x)\| + 1)\|h\| < \delta_1$$

である．ただし，一つ目の不等号では $\varepsilon \leq 1$ であることを用いた．したがって，$h \in U_{\delta_0}(0)$ なら

$$\begin{aligned}
&\|g(f(x + h)) - g(f(x)) - Dg(f(x))(Df(x)h)\|_Z \\
&\quad \leq \|g(f(x + h)) - g(f(x)) - Dg(f(x))(f(x + h) - f(x))\|_Z \\
&\qquad + \|Dg(f(x))(f(x + h) - f(x)) - Dg(f(x))(Df(x)h)\|_Z \\
&\quad \leq \frac{\varepsilon}{C}\|f(x + h) - f(x)\|_Y + \|Dg(f(x))\|_{L(Y,Z)}\|f(x + h) - f(x) - Df(x)h\|_Y \\
&\quad \leq \frac{\varepsilon}{C}(\|Df(x)\| + 1)\|h\| + \frac{\|Dg(f(x))\|\varepsilon}{C}\|h\| \\
&\quad = \varepsilon\|h\|\frac{1 + \|Df(x)\| + \|Dg(f(x))\|}{C} \\
&\quad = \varepsilon\|h\|
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって $Dg(f(x)) \circ Df(x)$ は x における $g \circ f$ の Fréchet 微分である．

(ii) も (i) と類似の議論で示される．　□

注意 2.10　命題 2.4 は命題 2.9 を用いて示すこともできる．$f\colon U \to Y$ は $x \in U$ で微分可能であるとする．$u \in X$ を固定し，$\varphi_u(t) = f(x+tu)$ を 0 の近傍で定義された関数とする．$t \mapsto x + tu$ は 0 において微分可能でその微分は $t \mapsto tu$ だから，命題 2.9 により

$$\varphi_u'(0) = Df(\varphi(0))u = Df(x)u$$

がわかる．$\varphi_u'(0)$ は f の x における u 方向微分に他ならないから，f は x で Gâteaux 微分可能でその Gâteaux 微分は $Df(x)$ となる．

命題 2.11　X と Y を Banach 空間とし，U を X の開凸集合とする．$f\colon U \to Y$ が微分可能で f の微分が U 上で 0 なら，f は定数関数である．

証明　対偶を示す．$x_1, x_2 \in U$ は $f(x_1) \neq f(x_2)$ を満たすとする．このとき，Hahn-Banach の定理よりある $T \in Y^*$ で $T(f(x_1)) \neq T(f(x_2))$ を満たすものが存在する．いま U は開凸集合だから，十分小さな $\varepsilon > 0$ を選べば

$$c\colon]-\varepsilon, 1+\varepsilon[\ni t \longmapsto x_1 + t(x_2 - x_1) \in U$$

は U 値の連続関数となる．さらに c は各点で微分可能で，その導関数は $Dc(t)h = h(x_2 - x_1)$ となる．そこで，$\varphi\colon]-\varepsilon, 1+\varepsilon[\to \mathbb{R}$ を

$$\varphi(t) = T(f(c(t)))$$

と定義する．合成関数の微分則により

$$D\varphi(t) = T(Df)(c(t))(x_2 - x_1)$$

が成り立つ．いま φ は $\varphi(0) \neq \varphi(1)$ を見たすから，定数関数ではない．φ は 1 変数のスカラー値関数であるから通常の微積分学の結果により $D\varphi$ は恒等的に 0 とはならず，いずれかの t において $D\varphi(t) \neq 0$ となる．このような t で $Df(c(t))(x_2 - x_1)$ は 0 でない値をとるので，$Df(x)$ は恒等的に 0 とはならない．　□

3　微積分学の基本定理と有限増分の定理

本節では，微分積分学の基本定理と平均値の定理，有限増分不等式などについて論じる．

命題 3.1（微積分学の基本定理 I）　X を Banach 空間，$[a,b]$ をコンパクトな区間とし，$f\colon [a,b] \to X$ を Riemann 可積分関数とする[2)]．f が $c \in]a,b[$ で連続なら $t \mapsto \int_a^t f$ は c で微分可能であり，

$$D\left(\int_a^{\cdot} f\right)(c) = f(c)$$

2）　Riemann 積分については第 1 節を参照.

が成り立つ．

証明　写像 $F\colon [a,b] \to X$ を

$$F(t) = \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s$$

と定義する．$\varepsilon > 0$ を任意にとり，$\delta > 0$ を $]c-\delta, c+\delta[\subset]a,b[$ および全ての $h \in]c-\delta, c+\delta[$ について

$$\|f(c+h) - f(c)\| < \varepsilon$$

を満たすように選ぶ．このとき，積分の区間加法性より，$|h-c| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned}\|F(c+h) - F(c) - f(c)h\|_X &= \left\| \int_c^{c+h} f(s)\,\mathrm{d}s - \int_c^{c+h} f(c)\mathrm{d}s \right\| \\ &= \left\| \int_c^{c+h} \{f(s) - f(c)\}\mathrm{d}s \right\| \\ &\le \varepsilon |h|\end{aligned}$$

となる[3)]．したがって F は c で微分可能であり，$DF(c) = f(c)$ が成り立つ．　□

注意 3.2　我々の立場では $F\colon]a,b[\to X$ の微分 $DF(t)$ は線形写像 $\mathbb{R} \to X$ であったから，命題 3.1 の主張をより正確に言えば「$D\left(\int_a^{\cdot} f\right)(c)$ は写像 $h \mapsto f(c)h$ に等しい」ということになるだろう．$f(c) \in X$ を写像 $[a,b] \to X$ と同一視しているわけである．今後はこの同一視を特に断りなく用いる．

平均値の定理の逆向きを述べるために用いる関数のクラスを導入しよう．

定義 3.3　X と Y を Banach 空間とし，$U \subset X$ を開集合とする．$f\colon U \to Y$ は U 上で Fréchet 微分可能で，さらに $Df\colon U \to L(X,Y)$ が連続となるとき，f は C^1 級であるという．U から Y への C^1 級関数全体の集合を $C^1(U,Y)$ で表す．一般の $A \subset X$ に対しては，$A \subset U$ を満たす開集合 U と f の U 上への C^1 級拡張が存在するときに，

微分の線形性より，$C^1(U,Y)$ は各点ごとの和とスカラー倍により線形空間となり，微分作用素 $D\colon C^1(U,Y) \to C(U, L(X,Y))$ は線形写像となる．

命題 3.4　連続関数 $f\colon [a,b] \to X$ は $]a,b[$ 上で C^1 級で，Df は $[a,b]$ 上へ連続に拡張可能であると

3）　$h < c$ の場合の記法とその評価については (1.1) および (1.2) を参照．

する[4]．このとき，$a \le s \le t \le b$ なる任意の s, t に対して

$$f(t) - f(s) = \int_s^t Df$$

が成り立つ．

証明　命題 3.1 と同じように

$$F(t) = \int_a^t Df(s)\,\mathrm{d}s$$

と定義すれば，命題 (3.1) より全ての $t \in]a,b[$ で $F'(t) = Df(t)$ が成り立つ．したがって $D(f-F) = 0$ となり，命題 2.11 より $f - F$ は $]a,b[$ 上で定数関数となる．すなわち，全ての $s, t \in]a,b[$ について

$$f(t) - F(t) = f(s) - F(s)$$

が成り立つ．この式を変形すれば，

$$f(t) - f(s) = F(t) - F(s) = \int_s^t Df(u)\,\mathrm{d}u$$

を得る．f と $t \mapsto \int_a^t Df$ は $[a,b]$ 上で連続だから，この関係式は端点でも成り立つ．　□

定義域が一般の Banach 空間の開集合の場合，命題 3.4 は以下の様に拡張される．

命題 3.5　U を Banach 空間 X の開凸集合とし，Y を Banach 空間とする．$f\colon U \to Y$ は Gâteaux 微分可能であるとし，$x \in U$ および $u \in X$ は $x+u \in U$ を満たすとする．$[0,1] \ni t \mapsto Df(x+tu)u \in Y$ が連続なら，

$$f(x+u) - f(x) = \int_0^1 Df(x+tu)u\,\mathrm{d}t \tag{3.1}$$

が成り立つ．さらに $t \mapsto Df(x+tu)$ が $L(X,Y)$ のノルムについて連続なら，

$$f(x+u) - f(x) = \left(\int_0^1 Df(x+tu)\,\mathrm{d}t\right)u \tag{3.2}$$

も成り立つ．

(3.1) 右辺の積分は関数 $[0,1] \ni t \mapsto Df(x+tu)u \in Y$ の積分であり，(3.2) の積分は関数 $[0,1] \ni t \mapsto Df(x+tu) \in L(X,Y)$ の積分である．命題 3.5 における導関数の連続性の仮定は，それぞれの Riemann 積分の存在を保証するための自然な条件である．特に f が C^1 級なら後半の仮定が満たされる．

証明を見ればわかるが，U が凸でなくても x と y を結ぶ線分が U に含まれれば同様の主張が成り立つ．

---

4)　すなわち，極限 $\displaystyle\lim_{x \to a, x \in]a,b[} Df(x)$ および $\displaystyle\lim_{x \to b, x \in]a,b[} Df(x)$ が存在すると仮定する．

証明　始めに，U が凸集合であるとの仮定より，$[0,1] \ni t \mapsto x+tu$ は U に値をとる写像として well-defined であることに注意しておく．$t \mapsto x+tu$ は $]0,1[$ 上で C^1 級でその導関数は $t \mapsto tu$ である．合成写像 $t \mapsto f(x+tu)$ も C^1 級であるから，微分の連鎖律と命題 3.4 により

$$f(x+u)-f(x) = f(x+1u)-f(x+0u) = \int_0^1 Df(x+tu)u\,\mathrm{d}t$$

がわかる．すなわち (3.1) が成り立つ．

さらに $Df\colon U \to L(X,Y)$ が連続であると仮定すれば，写像 $L(X,Y) \ni T \mapsto T(u) \in Y$ に命題 1.7 を適用することで

$$\int_0^1 Df(x+tu)u\,\mathrm{d}t = \left(\int_0^1 Df(x+tu)u\,\mathrm{d}t\right)u$$

を得る．これと (3.1) から (3.2) が従う．□

次の系は有限増分の定理と呼ばれ，スカラー値関数に関する平均値の定理から導かれる不等式評価の一般化である．これ自体を平均値の定理と呼ぶ場合もある．

系 3.6（有限増分の定理，平均値の定理）　U を Banach 空間 X の開凸集合とし，Y を Banach 空間とする．$f\colon U \to Y$ は Gâteaux 微分可能であるとし，全ての $x, y \in U$ について関数

$$[0,1] \ni t \mapsto Df(x+t(y-x))(y-x) \in Y$$

は連続になるとする．このとき，全ての $x, y \in U$ について

$$\|f(y)-f(x)\| \le \|y-x\| \sup_{t\in[0,1]} \|Df(x+t(y-x))\| \tag{3.3}$$

が成り立つ．

(3.3) は系 3.6 の仮定の下で成り立つ不等式だが，$\sup_{t\in[0,1]}\|Df(x+t(y-x))\| = \infty$ の場合にはこれは意味のある不等式ではない．この sup が有限となることを保証するためには付加的な仮定が必要である．

証明　命題 3.5 および Riemann 積分の性質より，

$$\|f(y)-f(x)\| \le \sup_{t\in[0,1]} \|Df(x+t(y-x))(y-x)\| \le \sup_{t\in[0,1]} \|Df(x+t(y-x))\|\|y-x\|$$

が成り立つ．□

特に命題 3.5 の後半の仮定が成り立つとき，(3.3) 右辺の sup は有限なので，「f の差分 $\Delta f(x)$」を「x の差分 Δx」で不等式評価できたことになる．ただし，系 3.3 だけではあくまで中心点 x との距離を評価できたに過ぎず，Lipschitz 型の連続性が得られたことにはならない．補題 3.6 から Lipschitz 評価を導くためには，Df の連続性や有界性について追加的な仮定が必要である．

系 3.7 U を Banach 空間の開凸集合とし，Y を Banach 空間とする．$f\colon U \to Y$ は C^1 級で，Df は任意の有界集合上で有界な値域を持つとする．このとき，f は U に含まれる有界閉凸集合上で Lipschitz 連続である．

系 3.7 より，その仮定を満たす C^1 級関数は局所 Lipschitz 連続[5] だということなる．X が有限次元なら局所コンパクトなので，任意の C^1 級関数は系 (3.7) の仮定を満たす．

証明 C を U に含まれる閉凸集合とする．このとき，系 3.6 より全ての $x, y \in C$ について

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \sup_{t\in[0,1]} \|Df(x + t(y - x))\| \, \|x - y\| \leq \sup_{z\in C} \|DF(z)\| \, \|x - y\|$$

が成り立つ．すなわち，f は C 上で Lipschitz 定数 $\sup_{z\in C}\|DF(z)\|$ を持つ Lipschitz 連続関数である． □

導関数が大域的に有界な C^1 級関数は，大域的に Lipschitz 連続となる．証明は，系 3.7 における Lipschitz 定数 $\sup_{z\in C}\|Df(z)\|$ を $\sup_{z\in X}\|Df(z)\|$ で置き換えればよい．

系 3.8 $f\colon X \to Y$ は C^1 級関数で，導関数 $Df\colon X \to L(X, Y)$ は有界な値域を持つとする．このとき，f は X 上で Lipschitz 連続である．

系 3.6 では f 自体の差分を評価したが，f の線形近似誤差は次のように評価できる．

系 3.9 系 3.6 前半と同じ仮定の下で，任意の $x, y, a \in U$ について

$$\|f(y) - f(x) - Df(a)(y - x)\| \leq \|y - x\| \sup_{t\in[0,1]} \|Df(x + t(y - x)) - Df(a)\| \tag{3.4}$$

が成り立つ．

系 3.6 の場合と同じように，(3.4) 右辺の $\sup_{t\in[0,1]}\|Df(x + t(y - x)) - Df(a)\|$ が有限値となるためには付加的な仮定が必要である．

証明 命題 3.5 より，$x, y, a \in X$ なら

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) - Df(a)(y - x) &= \int_0^1 Df(x + t(y - x))(y - x)\,\mathrm{d}t - Df(a)(y - x) \\ &= \int_0^1 \{Df(x + t(y - x)) - Df(a)\}\,(y - x)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

5） X が無限次元の場合は局所コンパクトでないので，局所 Lipschitz 連続であるとは U の各点は f が Lipschitz 連続となるような近傍を持つということになる．（c.f. コンパクト集合への制限が Lipschitz 連続．）

が成り立つ．この式の積分を評価すれば，

$$
\begin{aligned}
&\left\| \int_0^1 \{Df(x+t(y-x)) - Df(a)\}(y-x)\,\mathrm{d}t \right\|_Y \\
&\qquad \le \int_0^1 \|\{Df(x+t(y-x)) - Df(a)\}(y-x)\|_Y\,\mathrm{d}t \\
&\qquad \le \sup_{t\in[0,1]} \|Df(x+t(y-x)) - Df(a)\|_{L(X,Y)} \|y-x\|_X
\end{aligned}
$$

となるから，求める不等式を得る． □

C^1 級関数の定義は Fréchet 微分可能性を課したが，導関数の連続性と Gâteaux 微分可能性から Fréchet 微分可能性を導くことが可能である．

系 3.10 Banach 空間 X の開凸集合上定義された関数 $f\colon U \to Y$ は Gâteaux 微分可能で，導関数 $Df\colon U \to L(X,Y)$ は連続であるとする．このとき f は Fréchet 微分可能であり，ゆえに C^1 級となる．

証明 $x \in U$ を固定し，$\delta_1 > 0$ を $U_{\delta_1}(x) \subset U$ となるように選ぶ．$\varepsilon > 0$ を任意にとり，Df の連続性に注意して δ_2 を $h \in U_{\delta_2}(0)$ ならば

$$
\|Df(x+h) - Df(x)\| < \varepsilon
$$

が成り立つように選ぶ．ここで $\delta = \delta_1 \wedge \delta_2$ と定める．任意の $h \in U_\delta(0)$ に対して，$y = x+h$ および $a = x$ として系 (3.9) を適用すれば，

$$
\begin{aligned}
\|f(x+h) - f(x) - Df(x)h\| &\le \sup_{t\in[0,1]} \|Df(x+th) - D(x)\|\,\|h\| \\
&\le \sup_{u\in U_\delta(0)} \|Df(x+u) - D(x)\|\,\|h\| \\
&\le \varepsilon\,\|h\|
\end{aligned}
$$

となることがわかる．これは $Df(x)$ が x における f の Fréchet 微分であることを意味している． □

4 偏微分

本節では，Banach 空間上の関数の偏微分に対応するものを考えてみよう．n 個の Banach 空間 $X_1, \dots, X_n$ が与えられたとき，その直和 Banach 空間を

$$
\bigoplus_{i=1}^n X_i = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n \coloneqq X_1 \times \cdots \times X_n
$$

$$
\|(x_1, \dots, x_n)\| \coloneqq \|x_1\| + \cdots + \|x_n\|
$$

と定義する[6]．直和 Banach 空間 $X = \bigoplus_{i=1}^{n} X_i$ の開集合 U 上で定義された関数 $f\colon U \to Y$ を考える．このとき，第 i 成分に関する偏微分を定義したい．$1 \leq i \leq n$ のとき，$x = (x_k)_{k=1}^{n} \in X$ から第 i 成分を除いて得られる $\bigoplus_{j \neq i} X_j$ の元を $x_{\hat{\imath}}$ と表すことにする．$\bigoplus_{k=1}^{n} X_k$ と $X_i \oplus \bigoplus_{k \neq i} X_k$ は等長同型な Banach 空間なので，これらの空間を同一視する．この同一視によれば $(x_k)_{k=1}^{n} = (x_i, x_{\hat{\imath}})$ となる．$x' \in \bigoplus_{k \neq i} X_k$ に対して，集合 U の x' 断面を

$$U_{x'} = \{x_i \in X_i \mid (x_i, x') \in U\}$$

と定義する．このとき，各 $x' \in \bigoplus_{k \neq i} X_k$ に対して，$U_{x'}$ から Y への写像 $x_i \mapsto f(x_i, x')$ が定まる．f が $x \in X$ で第 i 成分について偏微分可能であることを，写像 $x'_i \mapsto f(x'_i, x_{\hat{\imath}})$ が x_i で Fréchet 微分可能であることにより定義する．このとき，その微分を $D_i f(x)\colon X_i \to Y$ で表す．f が全ての点で第 i 成分について偏微分可能であるとき，f は第 i 成分について偏微分可能であるという．f が全ての成分について U 上で偏微分可能であるとき，単に f は偏微分可能であるという．

命題 4.1　$f\colon U \to Y$ が x で微分可能なら，全ての $i \in \{1, \ldots, n\}$ について x で偏微分可能である．

証明　i を一つ固定し，$j_i\colon X_i \to X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ を直和 Banach 空間への自然な埋め込みとする[7]．このとき，$Df(x) \circ j_i$ が偏微分 $D_i f(x)$ であることを示そう．

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, "j_i"] \arrow[dr, "D_i f(x)"'] & \bigoplus_{k=1}^{n} X_k \arrow[d, "Df(x)"] \\
 & Y
\end{tikzcd}$$

$\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ を $U_\delta(x) \subset U$ かつ全ての $u \in U_\delta(0)$ について

$$\|f(x+u) - f(x) - Df(x)u\|_Y < \varepsilon \|u\|_X$$

が成り立つように選ぶ．$h \in X_i$ が $\|h\| < \delta$ を満たせば

$$\|(x_i + h, x_{\hat{\imath}}) - x\|_X = \|h\|_{X_i} < \delta$$

なので，δ の選び方より

$$\begin{aligned}
&\|f(x_i + h, x_{\hat{\imath}}) - f(x_i, x_{\hat{\imath}}) - (Df(x) \circ j_i)h\| \\
&\quad = \|f(x_i + h, x_{\hat{\imath}}) - f(x_i, x_{\hat{\imath}}) - Df(x)[(x_i + h, x_{\hat{\imath}}) - (x_i, x_{\hat{\imath}})]\| \\
&\quad \leq \varepsilon \|(x_i + h, x_{\hat{\imath}}) - (x_i, x_{\hat{\imath}})\|_X \\
&\quad = \varepsilon \|h\|_{X_i}
\end{aligned}$$

6)　これは ℓ^1 の意味での直和であるが，$1 < p \leq \infty$ を満たす p に関する ℓ^p ノルムを考えることもできる．

7)　$j_i(x_i)$ は第 i 成分が x_i で残りの成分が 0 であるようなベクトルである．

が成り立つ．これより f は (x_i, x_i) において第 i 成分で偏微分可能であり，$D_i f(x) = (Df(x) \circ j_i)$ となることがわかる． □

命題 4.2　$f\colon U \to Y$ が全ての i で偏微分可能で，かつ $D_i f\colon U \to L(X_i, Y)$ がどれも連続ならば，f は C^1 級である．

証明　線形写像 $F_x\colon \bigoplus_{i=1}^n X_i \to Y$ を

$$F_x(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i=1}^n D_i f(x) h_i$$

によって定義する．このとき F_x が f の微分であることを示そう．三角不等式と X のノルムの定義より

$$\|F_x(h_1, \ldots, h_n)\| \le \sum_{i=1}^n \|D_i f(x)\|_{L(X_i,Y)} \|h_i\|_{X_i} \le \left(\sum_{i=1}^n \|D_i f(x)\|_{L(X_i,Y)} \right) \|(h_1, \ldots, h_n)\|_X$$

となるから，F_x は有界である．命題 3.9 を用いて近似誤差を評価すれば，

$$\begin{aligned}
&\|f(x+h) - f(x) - F_x(h_1, \ldots, h_n)\|_Y \\
&\quad \le \|f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n) - D_1 f(x) h_1\|_Y \\
&\qquad + \|f(x_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2, x_3 + h_3, \ldots, x_n + h_n) - D_2 f(x) h_2\|_Y \\
&\qquad + \cdots \\
&\qquad + \|f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + h_n) - f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) - D_n f(x) h_n\|_Y \\
&\quad \le \|h_1\|_{X_1} \sup_{t \in [0,1]} \|D_1 f(x_1 + t h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n) - D_1 f(x)\|_{L(X_1,Y)} \\
&\qquad + \|h_2\|_{X_2} \sup_{t \in [0,1]} \|D_2 f(x_1, x_2 + t h_2, x_3 + h_3, \ldots, x_n + h_n) - D_2 f(x)\|_{L(X_2,Y)} \\
&\qquad + \cdots \\
&\qquad + \|h_n\|_{X_n} \sup_{t \in [0,1]} \|D_n f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + t h_n) - D_n f(x)\|_{L(X_n,Y)} \\
&\quad \le \|h\| \left(\sum_{1 \le i \le n} \sup_{\|u\| < \|h\|} \|D_i f(x+u) - D_i f(x)\|_{L(X_i,Y)} \right)
\end{aligned}$$

が成り立つ．各 $D_i f(x)$ が x で連続であることに注意すれば，この評価より

$$\|f(x+h) - f(x) - F_x(h_1, \ldots, h_n)\|_Y = o(\|h\|)$$

がわかる．すなわち，F_x は f の x における Fréchet 微分である．

後は $x \mapsto F_x$ の連続性を示せば良い．証明冒頭の F_x のノルムの評価と同様にして

$$\|F_x - F_{x'}\|_{L(X,Y)} \le \sum_{i=1}^n \|D_i f(x) - D_i f(x')\|_{L(X_i,Y)}$$

であることがわかる．仮定より各 $D_i f$ は連続だから，この不等式より $x \mapsto F_x$ の連続性が従う．

□

5　高階微分と Taylor の定理

これまで見てきたように，$f\colon U \to Y$ が微分可能ならば，Df は写像 $U \to L(X,Y)$ を定める．この写像がまた微分可能であるとき，$D^2 f \coloneqq D(Df)$ を考えることができるだろう．同じように $D^2 f$ の微分 $D^3 f$，$D^3 f$ の微分 $D^4 f, \ldots$ と，f が十分滑らかであれば何度でもその微分を考えることができる．

定義 5.1　X と Y を Banach 空間，$U \subset X$ を開部分集合とする．

(i) $f\colon U \to Y$ を Gâteaux 微分可能な関数とする．$Df\colon U \to L(X,Y)$ がまた Gâteaux 微分可能であるとき，f は 2 回 Gâteaux 微分可能であるという．このとき $D(Df) = D^2 f$ と表し，$D^2 f$ を x の 2 階 Gâ 微分と呼ぶ．再帰的に，n 階 Gâteaux 微分可能関数の n 階微分 $D^n f$ が Gâteaux 微分可能であるとき，f は $n+1$ 回 Gâteaux 微分可能であるといい，$D^n f$ の微分を $D^{n+1} f$ で表す．

(ii) (i) において Gâteaux 微分を Fréchet 微分で置き換えることで，n 回 Fréchet 微分可能性と n 階 Fréchet 微分 $D^n f$ を定義する．

(iii) n 階 Fréchet 微分可能関数 f の n 階微分 Df が連続であるとき，f は C^n 級の関数となる．

Fréchet 微分可能関数は連続だから，$n+1$ 回 Fréchet 微分可能な関数は C^n 級となる．

$f\colon U \to Y$ が 2 回 Fréchet 微分可能ならば，$Df(x)$ は $L(X, L(X,Y))$ の元となる．この空間は $L^{(2)}(X,X;Y)$ と同型なので[8]，$Df(x)$ は有界な双線形写像と見ることもできる．さらに Banach 空間の射影的テンソル積[9]の性質から，$L(X \widehat{\otimes}_\pi X, Y) \simeq L^{(2)}(X,X;Y)$ が成り立つので，$D^2 f$ は $L(X\widehat{\otimes}_\pi X, Y)$ に値をとる関数とも考えられる．同様にして，f の n 階微分 $D^n f$ は $L(X, \ldots, L(X, L(X,Y)\ldots)) \simeq L^{(n)}(X,\ldots,X;Y) \simeq L(X^{\widehat{\otimes}_\pi n};Y)$ に値をとる関数である．今後は上記の同一視を特に断りなく使うことにする．

命題 3.5 は以下のような形で高階微分へと拡張される．

命題 5.2（Taylor の定理）　X と Y を Banach 空間とし，$f\colon U \to Y$ を X の開凸集合上で定義された n 回 Gâteaux 微分可能関数とする．$x \in U$ と $u \in X$ は $x+u \in U$ を満たし，関数 $t \mapsto Df(x+tu)u$ は $[0,1]$ 上連続であるとする．このとき，

$$f(x+u) - f(x) = \sum_{1 \le k \le n-1} \frac{1}{k!} D^k f(x)(u^{\otimes k}) + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} D^n f(x+tu) u^{\otimes n} \mathrm{d}t$$

8）$L^{(n)}(X_1,\ldots,X_n;Y)$ は有界な n 重線形写像 $X_1 \times \ldots X_n \to Y$ 全体の空間を表す．

9）Banach 空間のテンソル積については Ryan [9] や Fabian et al. [6] などを参照されたい．

が成り立つ．さらに，$t \mapsto D^n f(x+tu)$ が $\mathscr{L}(X^{\widehat{\otimes}_\pi n}, Y)$ のノルムについて連続なら，

$$f(x+u)-f(x) = \sum_{1\leq k\leq n-1} \frac{1}{k!} D^k f(x)(h^{\otimes k}) + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} D^n f(x+tu) \mathrm{d}t\, u^{\otimes n}$$

も成り立つ．

証明　前半の主張から後半の主張を導く議論は命題 3.5 と同じなので，前半の主張のみ示せば良い．

n に関する帰納法で示す．$n=1$ のとき，本命題の主張は命題 3.5 に他ならない．n に対して主張が成り立っているとしよう．f は $n+1$ 回 Gâteaux 微分可能で，$t \mapsto D^{n+1} f(x+tu) u^{\otimes n+1}$ は連続であるとする．$D^n f$ が Gâteaux 微分可能だから，関数 $t \mapsto D^n f(x+tu)$ は微分可能である．この関数と有界線形写像

$$\mathscr{L}(X^{\widehat{\otimes}_\pi n}, Y) \ni T \longmapsto T(u^{\otimes n}) \in Y$$

の合成も微分可能であり，合成関数の微分則より

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(D^n f(x+tu) u^{\otimes n}\right) = D^{n+1} f(x+tu)(u) u^{\otimes n} = D^{n+1} f(x+tu) u^{\otimes n+1}$$

が成り立つ．ただし，二つ目の等号は $\mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X^{\widehat{\otimes}_\pi n}, Y)) \cong \mathscr{L}(X^{\widehat{\otimes}_\pi n+1}, Y)$ という同一視に基づく．以上のことに注意すれば，命題 (2.8) より関数

$$[0,1] \ni t \longmapsto \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} D^n f(x+tu) u^{\otimes n} \in Y$$

は $]0,1[$ で C^1 級であり，その微分は

$$D\left(\frac{(1-t)^n}{n!} D^n f(x+tu) u^{\otimes n}\right) = -\frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} D^n f(x+tu) u^{\otimes n} + \frac{(1-t)^n}{n!} D^{n+1} f(x+tu) u^{\otimes n+1}$$

で与えられることがわかる．この式の各項を Riemann 積分すれば，命題 3.5 より

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{n!} D^n f(x) u^{\otimes n} \\ &\quad= \int_0^1 D\left(\frac{(1-t)^n}{n!} D^n f(x+tu) u^{\otimes n}\right) \mathrm{d}t \\ &\quad= -\int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} D^n f(x+tu) u^{\otimes n} \mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} D^{n+1} f(x+tu) u^{\otimes n+1} \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{5.1}$$

を得る[10]．いま帰納法の仮定より

$$f(x+u)-f(x) = \sum_{1\leq k\leq n-1} \frac{1}{k!} D^k f(x) u^{\otimes k} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} D^n f(x+tu) u^{\otimes n} \mathrm{d}t \tag{5.2}$$

10)　ここで $t \mapsto D^{n+1} f(x+tu) u^{\otimes n+1}$ が連続であるとの仮定を用いた．

が成り立っているから，(5.1) と (5.2) をあわせれば

$$f(x+u)-f(x)=\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k!}D^kf(x)u^{\otimes k}+\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}D^{n+1}f(x+tu)u^{\otimes n+1}\mathrm{d}t$$

がわかる．すなわち，$n+1$ でも命題の主張が成り立つ． □

系 3.9 の高階微分への一般化は以下のようなものになる．

系 5.3 X と Y を Banach 空間とし，$f\colon U\to Y$ を X の開凸集合上で定義された n 回 Gâteaux 微分可能関数とする．また，$x+u\in U$ を満たす任意の $x\in U$ と $u\in X$ について関数 $t\mapsto Df(x+tu)u$ は $[0,1]$ 上連続であるとする．このような x と h に対して

$$R^{(n)}(x;u)=f(x+u)-f(x)-\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k!}D^kf(x)u^{\otimes k}$$

と定義すれば，

$$\|R^{(n)}(x;u)\|\le\frac{1}{n!}\|u\|^n\sup_{t\in[0,1]}\|D^nf(x+tu)-D^nf(x)\|_{L^{(n)}(X^n;Y)} \tag{5.3}$$

が成り立つ．

命題 5.2 後半の仮定のように $t\mapsto D^nf(x+tu)$ が連続なら，(5.3) 右辺の sup は有限となり，(5.3) は x 周りでの n 次の評価を与える．特に f が C^n 級ならばこの条件は満たされる．これより，C^n 級関数は各点の周りで「n 次多項式」によって良く近似されるということがわかる．

証明 Taylor の定理より

$$\begin{aligned}
R^{(n)}(x;u)&=f(x+u)-f(x)-\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k!}D^kf(x)u^{\otimes k}\\
&=\int_0^1\frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}D^nf(x+tu)u^{\otimes n}\mathrm{d}t-\frac{1}{n!}D^nf(x)u^{\otimes n}\\
&=\int_0^1\frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}D^nf(x+tu)u^{\otimes n}\mathrm{d}t-\int_0^1 n(1-t)^{n-1}\frac{1}{n!}D^nf(x)u^{\otimes n}\mathrm{d}t\\
&=\int_0^1\frac{1}{n!}n(1-t)^{n-1}\left(D^nf(x+tu)u^{\otimes n}-D^nf(x)u^{\otimes n}\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

が成り立つ．これより

$$\begin{aligned}
\|R^{(n)}(x;u)\|_Y&\le\int_0^1\frac{1}{n!}n(1-t)^{n-1}\left\|D^nf(x+tu)u^{\otimes n}-D^nf(x)u^{\otimes n}\right\|\mathrm{d}t\\
&\le\int_0^1\frac{1}{n!}n(1-t)^{n-1}\|D^nf(x+tu)-D^nf(x)\|_{L^{(n)}(X^n;Y)}\|u\|_X^n\,\mathrm{d}t\\
&\le\frac{1}{n!}\|u\|^n\sup_{t\in[0,1]}\|D^nf(x+tu)-D^nf(x)\|\,n\int_0^1(1-t)^{n-1}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{n!}\|u\|^n\sup_{t\in[0,1]}\|D^nf(x+tu)-D^nf(x)\|
\end{aligned}$$

となり，期待する評価が得られた． □

関数 $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ が C^n 級なら，高階の偏微分は順序に依らずに同じになることが知られている．例えば，$n = 2$ の場合は全ての $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f$$

が成り立つということ．これは $D^n f(x)\colon (\mathbb{R}^d)^{\otimes n} \to \mathbb{R}$ が対称な n 重線形形式であることを意味する．Banach 空間における微分についても同様の結果が成り立つ．

命題 5.4　$f\colon U \to Y$ が C^n 級なら，$D^n f(x)$ は対称な n 重線形写像である．

証明　Step 1：$n = 2$ の場合． $x \in U$ を任意に固定し，全ての $(u, v) \in X$ について $D^2 f(x)(u, v) = D^2 f(x)(v, u)$ が成り立つことを示す．まずは，$U_r(x) \in U$ なる r を一つ固定して $\|u\|, \|v\| \le r/2$ を満たすような u, v について考えよう．

関数 $\varphi\colon [0, 1] \to Y$ を

$$\varphi(t) = f(x + tu + v) - f(x + tu)$$

によって定義する．このとき φ は $]0, 1[$ 上で C^1 級であり，微分演算の線形性と合成関数の微分法則より

$$\begin{aligned} D\varphi(t) &= (Df(x + tu + v) - Df(x + tu))u \\ &= (Df(x + tu + v) - Df(x))u - (Df(x + tu) - Df(x))u \end{aligned}$$

および

$$D^2\varphi(t) = \{D^2 f(x + tu + v) - D^2 f(x + tu)\}(u)(u)$$

が成り立つ．したがって系 5.3 より

$$\begin{aligned} &\|\varphi(1) - \varphi(0) - D\varphi(0) - D^2\varphi(0)\|_Y \\ &\quad \le \frac{1}{2} \sup_{t \in [0,1]} \|D^2\varphi(t) - D^2\varphi(0)\|_Y \\ &\quad = \frac{1}{2} \sup_{t \in [0,1]} \|D^2 f(x + tu + v)uu - D^2 f(x + tu)uu - D^2 f(x + v)uu + D^2 f(x)uu\|_Y \\ &\quad \le \frac{3}{2} \|u\|^2 \sup_{\|z\| < r} \|D^2 f(x + z) - D^2 f(x)\|_{L(X, L(X, Y))} \end{aligned}$$

が成り立つ．さらに，

$$
\begin{aligned}
&\|D\varphi(0) + D^2\varphi(0) - D^2 f(x)vu\| \\
&\quad = \big\|\{Df(x+v) - Df(x) - D^2 f(x)v\}u + \{D^2 f(x+v) - D^2 f(x)\}uu\big\| \\
&\quad \le \|u\|\,\|v\| \sup_{t\in[0,1]} \|D^2 f(x+tv) - D^2 f(x)\| + \|u\|^2\,\|D^2 f(x+v) - D^2 f(x)\| \\
&\quad \le \|u\|(\|u\| + \|v\|) \sup_{\|z\|<r} \|D^2 f(x+z) - D^2 f(x)\|
\end{aligned}
$$

も成り立つ．

また $\psi\colon [0,1] \to Y$ を

$$\psi(t) = f(x+u+tv) - f(x+tv)$$

と定義すれば，先ほどと対称に

$$\|\psi(1) - \psi(0) - D\psi(0) - D^2\psi(0)\| \le \frac{3}{2}\|v\|^2 \sup_{\|z\|<r} \|D^2 f(x+z) - D^2 f(x)\|$$

および

$$\|D\psi(0) + D^2\psi(0) - D^2 f(x)uv\| \le \|v\|(\|u\| + \|v\|) \sup_{\|z\|<r} \|D^2 f(x+z) - D^2 f(x)\|$$

も成り立つ．

いま $\varphi(1) - \varphi(0) = \psi(1) - \psi(0)$ であることに注意すれば，これまでの評価より

$$
\begin{aligned}
&\|D^2 f(x)(u)(v) - D^2 f(x)(v)(u)\| \\
&\quad \le \|D\varphi(0) + D^2\varphi(0) - D^2 f(x)vu\| \\
&\qquad + \|\varphi(1) - \varphi(0) - D\varphi(0) - D^2\varphi(0)\|_Y \\
&\qquad + \|\psi(1) - \psi(0) - D\psi(0) - D^2\psi(0)\| \\
&\qquad + \|D\psi(0) + D^2\psi(0) - D^2 f(x)uv\| \\
&\quad \le \sup_{\|z\|<r} \|D^2 f(x+z) - D^2 f(x)\| \left\{\frac{3}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right) + (\|u\| + \|v\|)^2\right\} \\
&\quad \le 2r^2 \sup_{\|z\|<r} \|D^2 f(x+z) - D^2 f(x)\|
\end{aligned}
$$

となることがわかる．

さて，一般の $u, v \ne 0$ に対しては $u' = (r/2\|u\|)u$ と $v' = (r/2\|u\|)u$ とおけば $\|u'\|, \|v'\| \le r/2$ となるので，先ほどの評価より

$$\|D^2 f(x)(u')(v') - D^2 f(x)(v')(u')\| \le 2r^2 \sup_{\|z\|<r} \|D^2 f(x+z) - D^2 f(x)\|$$

なる不等式を得る．これの各辺に $4\|u\|\|v\|/r^2$ を掛けることで，全ての $u, v \in X \setminus \{0\}$ について

$$\|D^2 f(x)(u)(v) - D^2 f(x)(v)(u)\| \le 8\|u\|\|v\| \sup_{\|z\|<r} \|D^2 f(x+z) - D^2 f(x)\|$$

が成り立つことがわかる．また，u, v の何れかが 0 の時にもこの不等式は自明に成り立つ．この不等式において $r \to 0$ とすれば，$D^2 f$ の連続性より右辺は 0 に収束し，$D^2 f(x)uv = D^2 f(x)vu$ であることがわかる．

Step 2：一般の場合． n に関する帰納法で示す．$n = 2$ の場合には既に示した．$n \geq 2$ とし，任意の $x \in U$ と $k \leq n$ について $D^n f(x)$ は対称であるとしよう．このとき Step 1 より

$$\begin{aligned} D^{n+1} f(x)(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n+1}) &= D^2 D^{n-2} f(x)(v_1, v_2)(v_3, \ldots, v_{n+1}) \\ &= D^2 D^{n-2} f(x)(v_2, v_1)(v_3, \ldots, v_{n+1}) \\ &= D^{n+1} f(x)(v_2, v_1, v_3, \ldots, v_{n+1}) \end{aligned}$$

が成り立つ．また $\sigma\colon \{2, \ldots, n+1\} \to \{2, \ldots, n+1\}$ を置換とすれば，帰納法の仮定より

$$D^n f(x)(v_2, \ldots, v_{n+1}) = D^n f(x)(v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(n+1)})$$

となる．これより

$$\begin{aligned} D^{n+1} f(x)(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n+1}) &= DD^n f(x)(v_1)(v_2, v_3, \ldots, v_{n+1}) \\ &= DD^n f(x)(v_1)(v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(n+1)}) \\ &= D^{n+1} f(x)(v_1, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(n+1)}) \end{aligned}$$

がわかる．任意の置換 $\{1, \ldots, n+1\} \to \{1, \ldots, n+1\}$ は上で扱った置換の合成によって表現されるから，これにより $n+1$ でも主張が成り立つと結論づけられる． □

A　平均値の定理（その 2）

第 3 節では C^1 級の場合の平均値の定理について述べたが，導関数の連続性がなくても類似の定理は成り立つ．

命題 A.1　a, b は $a < b$ を満たす実数であるとし，$f\colon [a, b] \to X$ を Banach 空間への連続関数とする．f は $]a, b[$ で微分可能で，全ての $t \in]a, b[$ で

$$\|f'(t)\|_X \leq M$$

を満たしているとする．このとき，

$$\|f(b) - f(a)\|_X \leq M(b - a)$$

が成り立つ．

証明　全ての $\varepsilon > 0$ について

$$\|f(b) - f(a)\|_X \leq (M + \varepsilon)(b - a)$$

が成り立っていることを示す．$\varepsilon > 0$ に対して，$J_\varepsilon \subset I$ を全ての $s \in [a,t]$ について

$$\|f(s) - f(a)\|_X \le (M+\varepsilon)(s-a) \tag{A.1}$$

が成り立つような t 全体の集合とする．このとき $J_\varepsilon = I$ であることを示せば良い．

明らかに $a \in J_\varepsilon$ だから，J_ε は空ではない．$t \in J_\varepsilon$ かつ $a \le t' \le t$ ならば $t' \in J_\varepsilon$ であることもすぐにわかるから，J_ε は a を左端点とする I の部分区間となっている．そこで，区間 J_ε の右端点を c とおく．このとき，J_ε の点列 (s_n) で c に収束するものが存在する．各 s_n に (A.1) を適用して $n \to \infty$ の極限をとれば，f の連続性より $s = c$ でも (A.1) が成り立つとわかる．したがって $c \in J_\varepsilon$ である．

後は $c = b$ であることを示せば良い．背理法で証明するために，$c < b$ であると仮定する．f は c で微分可能だから，適当な $\delta > 0$ を選べば，全ての $t \in [c, c+\delta]$ について

$$\|f(t) - f(c) - f'(c)(t-c)\| \le \varepsilon(t-c)$$

が成り立つ．このとき，$t \in [c, c+\delta]$ ならば

$$\|f(t) - f(c)\| \le \|f'(d)\|(t-c) + \varepsilon(t-c) \le (M+\varepsilon)(t-c)$$

が成り立つ[11)]．前段落で示したように $c \in J_\varepsilon$ であったから，任意の $t \in [a, c+\delta]$ について

$$\begin{aligned}\|f(t) - f(a)\| &\le \|f(c) - f(a)\| + \|f(t) - f(c)\| \\ &\le (M+\varepsilon)(c-a) + (M+\varepsilon)(t-c) \\ &= (M+\varepsilon)(t-a)\end{aligned}$$

となる．したがって $c+\delta \in J_\varepsilon$ となるが，これは c の定義に矛盾する．□

注意 A.2　命題 A.1 において，f が各点で微分可能で有限な上界 M を持つという条件は弱めることができるが，証明は煩雑になる．一般的な結果については Bourbaki [2, Theorem I.2.2] や Dieudonne [4, (8.5.1)] を参照されたい．

命題 A.1 を用いれば，系 3.6 における導関数の連続性の仮定は外すことが出来る．

系 A.3　U を Banach 空間 X の開凸集合とし，Y を Banach 空間とする．$f\colon U \to Y$ が Gâteaux 微分可能ならば，全ての $x, y \in U$ について

$$\|f(y) - f(x)\| \le \|y - x\| \sup_{t \in [0,1]} \|Df(x + t(y-x))\|$$

が成り立つ．

11)　ここで微分可能性と $f'(t)$ の上界に関する仮定を用いた．

証明　$x, y \in U$ を固定し，関数 $\varphi\colon [0,1] \to X$ を

$$\varphi(t) = f(x + t(y - x))$$

によって定義する．f は Gâteaux 微分可能だから φ も $]0,1[$ 上で微分可能で，

$$\varphi'(t) = Df(x + t(y - x))(y - x)$$

が成り立つ．

$$M = \sup_{t \in [0,1]} \|Df(x + t(y - x))(y - x)\|$$

として φ に命題 A.1 を適用すれば，求める不等式を得る．　□

References

[1] N. Bourbaki. *Fonctions d'une variable réelle. Théorie élémentaire*. Edition originale publiée par Hermann, Paris, 1976. Springer Berlin, Heidelberg, 2007. x+314. ISBN: 978-3-540-34036-2. DOI: 10.1007/978-3-540-34038-6.

[2] Nicolas Bourbaki. *Functions of a Real Variable. Elementary Theory*. Trans. by P. Spain. Elements of Mathematics. Original French edition published by Hermann, Paris, 1976 and Nicolas Bourbaki, 1982. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004. DOI: 10.1007/978-3-642-59315-4.

[3] Rodney Coleman. *Calculus on Normed Vector Spaces*. Universitext. Springer-Verlag New York, 2012. xi+249. ISBN: 978-1-4614-3894-6. DOI: 10.1007/978-1-4614-3894-6.

[4] J. Dieudonné. *Foundations of Modern Analysis*. Enlarged and Corrected Printing. Academic Press, 1969.

[5] R. M. Dudley and R. Norvaiša. *Concrete Functional Calculus*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag New York, 2011. xii+671. ISBN: 978-1-4419-6950-7. DOI: 10.1007/978-1-4419-6950-7.

[6] Marián Fabian et al. *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*. CMS Books in Mathematics. Springer-Verlag New York, 2011. DOI: 10.1007/978-1-4419-7515-7.

[7] Jürgen Jost. *Postmodern Analysis*. 3rd ed. Universitext. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. DOI: 10.1007/3-540-28890-2.

[8] Serge Lang. *Real and Functional Analysis*. 3rd ed. Graduate Texts in Mathematics 142. Springer-Verlag New York, 1993. DOI: 10.1007/978-1-4612-0897-6.

[9] Raymond A. Ryan. *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag London, 2002. ISBN: 978-1-85233-437-6. DOI: 10.1007/978-1-4471-3903-4. URL: https://www.springer.com/gp/book/9781852334376.