測度論ノート I
被覆定理と測度の微分 Ver.2.3

平井祐紀

2020 年 12 月 1 日

更新履歴

バージョン	更新日	コメント
1.0	2018.9.23	ひとまず完成.
2.0	2020.5.2	§§6–7 が完成.
2.1	2020.5.6	誤植を訂正. 証明をいくつか修正. 索引を作成.
2.2	2020.5.7	誤植を訂正. 参考文献をいくつか追加.
2.3	2020.12.1	誤植を訂正. 証明の間違いをいくつか証明. ヘッダーを編集.

概要

本ノートでは, $\mathbb{R}^d$ 上の被覆定理と Radon 測度の微分についてまとめる.

目次

1 導入

よく知られていることであるが，f が連続関数なら微積分学の基本定理より

$$f(x) = \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)dy$$

が成り立つ．これを少し書き直せば，

$$f(x) = \lim_{h\downarrow\downarrow 0} \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(y)dy \tag{1.1}$$

となることはすぐにわかる．この式を測度論的な観点から眺めてみよう．測度論的に考えると，(1.1) の右辺は f が連続でなくても，局所可積分な可測関数ならば考えることが可能である．そこで，(1.1) における f に関する仮定を緩めるという一般化がすぐに考え付くだろう．

$\mathscr{L}$ で一次元 Lebesgue 測度を表すことにすれば，(1.1) は

$$f(x) = \lim_{r\downarrow\downarrow 0} \frac{1}{\mathscr{L}(B(x;r))}\int_{B(x;r)} f(y)\mathscr{L}(dy) \tag{1.2}$$

と書き直すことができる．ただし，$B(x;r)$ は中心 x で半径 r の一次元開球[*1]を表している．この表記をすれば，(1.2) は $\mathbb{R}^d$ においても意味を成すことがすぐにわかる．微積分学の基本定理の多次元化である．このような一般化は可能だろうか？

(1.2) は次のような観点でも眺めることができる．f^+ あるいは f^- が可積分となるような局所可積分関数 f が与えられたとき，

$$(f\bullet\mathscr{L}^d)(A) = \int_A f(x)\,\mathscr{L}^d(dx)$$

により $\mathbb{R}^d$ 上の Radon 測度が定まる．これは $\mathscr{L}^d$ に対して絶対連続な測度であり，その Radon-Nikodym 導関数 $\frac{d(f\bullet\mathscr{L}^d)}{d\mathscr{L}^d}$ は f となる．このような記号を用いれば，(1.2) は

$$\frac{d(f\bullet\mathscr{L}^d)}{d\mathscr{L}^d}(x) = \lim_{r\downarrow\downarrow 0}\frac{(f\bullet\mathscr{L}^d)(B(x;r))}{\mathscr{L}^d(B(x;r))}$$

と書き換えることが出来る．Radon-Nikodym 導関数は測度論的な方法で抽象的に構成されたものであったが，(1.2) はそれが具体的な極限操作によって求められる可能性を示唆している．Radon-Nikodym の定理は Lebesgue 測度よりもはるかに一般の測度についても成り立つものであったから，我々は次のような問いを立てることができる：$\mathbb{R}^d$ 上の Radon 測度 μ と $\nu \ll \mu$ なる Radon 測度 ν に対して，何らかの意味で

$$\frac{d\nu}{d\mu}(x) = \lim_{r\downarrow\downarrow 0}\frac{\nu(B(x;r))}{\mu(B(x;r))}$$

が成り立つと言えるか？微積分学の基本定理の，Radon 測度への一般化である．

本ノートの目標は，上記の問いに答えを与えることである．結論から言うとこのような一般化は可能なのだが，そのためには $\mathbb{R}^d$ の位相的な，あるいは $\mathbb{R}^d$ 上の測度の性質を詳しく調べることが必要となる．その中心となるのが，これから本ノートで扱ういくつかの被覆定理である．

以下，本ノートで用いる記号を列挙しよう．

[*1] 要するに区間 $]x-r, x+r[$ である．

- d：Euclid 空間 $\mathbb{R}^d$ の次元.
- $\mathscr{L}^d$：d-次元 Lebesgue 測度.
- μ^*：測度 μ から構成される外測度.
- $B(x;r) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid |x-y| < r\}$：中心 x で半径 r の開球.
- $\overline{B}(x;r) = \overline{B(x;r)} = \{y \in \mathbb{R}^d \mid |x-y| \leq r\}$：$x$ で半径 r の閉球.
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, \}$.
- $A \subset \mathbb{R}$ に対して,

$$A_{\geq a} := \{x \in A \mid x \geq a\}, \qquad A_{>a} := \{x \in A \mid x > a\},$$
$$A_{\leq a} := \{x \in A \mid x \leq a\}, \qquad A_{<a} := \{x \in A \mid x < a\}.$$

- 測度空間 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 上で積分 $\int_X f d\mu$ が well-defined であるとき，測度 $f \bullet \mu \colon \mathscr{A} \to [-\infty, +\infty]$ を

$$f \bullet \mu(A) = \int_A f(x)\, \mu(dx)$$

で定義する.

2 Wiener の被覆定理

まずは, 基本的な Wiener の被覆補題を証明しよう．以下の命題 2.1 を Vitali の被覆補題と呼ぶこともある.

命題 2.1 (Wiener の被覆補題).
$K \subset \mathbb{R}^d$ をコンパクト集合とし，$(B(x_i;r_i))_{i \in I}$ をその被覆とする．このとき，有限集合 $I_0 \subset I$ で

$$K \subset \bigcup_{i \in I_0} B(x_i; 3r_i)$$

を満たし，かつ $i, j \in I_0$ が相異なるなら $B(x_i;r_i) \cap B(x_j;r_j) = \emptyset$ となるようなものが存在する.

証明. K はコンパクトであるから，初めから I は有限集合であるとしてよい.

有限集合 I_0 を，次のように再帰的に定義する．まずは i_0 を，r_{i_0} が $\{r_i \,;\, i \in I\}$ の最大元となるように選ぶ．次に，$i_0, \dots, i_n$ で $(B(x_{i_k}; r_{i_k}))_{0 \leq k \leq n}$ が互いに素になるようなものが与えられたとする.

$$I_{n+1} = \{i \in I \mid \forall k \in \{1, \dots, n\},\ B(x_{i_k}; r_{i_k}) \cap B(x_i; r_i)\}$$

と定義して，I_{n+1} の元 i のうち r_i が最大となるようなものを，i_{n+1} と定める．いかなる $i \in I \setminus \{i_1, \dots, i_n\}$ もいずれかの i_k（$0 \leq k \leq n$）と交わってしまうとき，そこでこの作業を止める．このようにして得られた i_k 全体の集合を I_0 と書くことにする．I_0 の定義より $i, j \in I_0$ かつ $i < j$ なら $r_i \geq r_j$ が成り立っていることに注意しておく.

上の手続きで構成された I_0 が命題の条件を満たすことを確かめよう．いま $(B(x_i;r_i))_{i \in I}$ は K の被覆であるから，任意に固定した $i \in I$ について $B(x_i;r_i) \subset \bigcup_{i \in I_0} B(x_i; 3r_i)$ が成り立つことを示せばよい．$i \in I_0$ の場合にはこの包含関係は明らかである．$i \in I \setminus I_0$ の場合を考えよう.

$$J_i = \{j \in I_0 \mid B(x_i;r_i) \cap B(x_j;r_i) \neq \emptyset\}$$

と定義すれば，$i \in I \setminus I_0$ との仮定より J_i は空ではない．そこで，J_i の最小元を j_i と書くことにする．J_i の定義より $k \in I_0$ が $k < j_i$ を満たせば，$B(x_i; r_i) \cap B(x_k; r_k) = \emptyset$ である．この性質および I_0 の構成方法より，$r_i \leq r_{j_i}$ となっていることがわかる．したがって i, j_i は $r_i \leq r_{j_i}$ かつ $B(x_i; r_i) \cap B(x_{j_i}; r_{j_i}) \neq \emptyset$ を満たしており，$B(x_i; r_i) \subset B(x_{j_i}; 3r_{j_i})$ がしたがう． □

3 Vitali の被覆定理

Wiener の被覆定理を用いて，$\mathbb{R}^d$ 上の Lebesgue 測度の性質を調べよう．まずは，被覆に関する用語を導入する．

定義 3.1.
$A \subset \mathbb{R}^d$ とし，$\mathscr{F}$ を A の被覆とする．任意の $x \in A$ に対して，ある $\mathscr{F}_x \subset \mathscr{F}$ で $x \in \bigcap \mathscr{F}_x$ かつ

$$\inf\{\operatorname{diam} F\,;\, F \in \mathscr{F}_x\} = 0$$

を満たすものが存在するとき，$\mathscr{F}$ は A の細被覆 (fine cover) であるという．

命題 3.2 (Vitali の被覆定理).
$A \subset \mathbb{R}^d$ を Lebesgue 可測集合とし，$\mathscr{U}$ を開球からなる A の細被覆とする．このとき，互いに素な開球の可算族 $\mathscr{U}' \subset \mathscr{U}$ で，$A \setminus \bigcup \mathscr{U}'$ が $\mathscr{L}^d$-零集合となるようなものが存在する．

注意 3.3. Vitali の被覆定理に Lebesgue 可測性は必要ない[*2]．Wiener の被覆定理を直接用いた証明をするために，ここでは可測性を仮定した．本ノートでの命題 3.2 の証明は，Krantz and Parks [8] を参考にしたが，[8] における証明が正しいのかわからない．有界集合 A の開被覆が $\overline{A}$ の開被覆にもなると思って Wiener の被覆定理を適用しているが，それは一般には成り立たないはずである． ■

証明. まずは A が有界であるとして示す．$\mathscr{U} = (B(x_i; r_i))_{i \in I}$ という添え字付けをしておこう．

Lebesgue 測度の外正則性より，A の開近傍 V_0 を

$$\mathscr{L}^d(V_0) < \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 5^d}\right) \mathscr{L}^d(A)$$

となるように選ぶことができる．$\mathscr{F}$ は A の細被覆であるから，初めから $\bigcup \mathscr{U} \subset V_0$ が成り立っていると仮定してよい．

A の可測性と Lebesgue 測度の内正則性に注意し，コンパクト集合 A_0 を $A_0 \subset A$

$$\left(1 - \frac{3^d}{2 \cdot 5^d}\right) \mathscr{L}^d(A) \leq \mathscr{L}^d(A_0)$$

となるように選ぼう．ここで Wiener の被覆補題（命題 2.1）を用いれば，有限族 $I_0 \subset I$ を

$$A_0 \subset \bigcup_{i \in I_0} B(x_i; 3r_i) \subset V_0$$

---

*2 例えば，Bogachev [2, 5.5.2 Theorem] を見よ．

かつ $(B(x_i;r_i))_{i\in I_0}$ が互いに素な族となるように取ることができる．測度に関する劣加法性から

$$\mathscr{L}^d(A_0) \le \sum_{i\in I_0} \mathscr{L}^d(B(x_i;3r_i)) = 3^d \sum_{i\in I_0} \mathscr{L}^d(B(x_i;r_i))$$

となるので，

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^d\left(A \setminus \bigcup_{i\in I_0} \overline{B(x_i;r_i)}\right) &\le \mathscr{L}^d\left(V_0 \setminus \bigcup_{i\in I_0} \overline{B(x_i;r_i)}\right) \\
&\le \mathscr{L}^d(V_0) - \sum_{i\in I_0} \mathscr{L}^d(B(x_i;r_i)) \\
&\le \left(1 + \frac{1}{2\cdot 5^d}\right)\mathscr{L}^d(A) - \frac{1}{3^d}\mathscr{L}^d(A_0) \\
&\le \left(1 + \frac{1}{2\cdot 5^d}\right)\mathscr{L}^d(A) - \frac{1}{3^d}\left(1 - \frac{3^d}{2\cdot 5^d}\right)\mathscr{L}^d(A) \\
&= \left(1 + \frac{1}{5^d} - \frac{1}{3^d}\right)\mathscr{L}^d(A) \\
&=: C\mathscr{L}^d(A)
\end{aligned}$$

という不等式が導かれる．

I の有限部分 I_k が与えられているとする．今度は開集合 V_{k+1} とコンパクト集合 A_{k+1} を

$$A_{k+1} \subset A \setminus \bigcup_{i\in I_k} \overline{B(x_i;r_i)} \subset V_{k+1} \subset \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i\in I_0} \overline{B(x_i;r_i)}$$

$$\mathscr{L}^d(V_{k+1}) < \left(1 + \frac{1}{2\cdot 5^d}\right)\mathscr{L}^d\left(A \setminus \bigcup_{i\in I_k} \overline{B(x_i;r_i)}\right)$$

$$\left(1 - \frac{3^d}{2\cdot 5^d}\right)\mathscr{L}^d\left(A \setminus \bigcup_{i\in I_k} \overline{B(x_i;r_i)}\right) \le \mathscr{L}^d(A_{k+1})$$

を満たすように選ぼう．このとき，先ほどと同様にして $I'_{k+1} \subset I \setminus I_k$ を，$(B(x_i;r_i))_{i\in I'_{k+1}}$ は互いに素で

$$A_{k+1} \subset \bigcup_{i\in I'_{k+1}} B(x_i;3r_i), \qquad \bigcup_{i\in I'_{k+1}} B(x_i;r_i) \subset V_1 \subset \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i\in I_k} \overline{B(x_i;r_i)}$$

となるようにとることが出来る．先ほどと同様の計算で測度を評価すれば，

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^d\left(A \setminus \bigcup_{i\in I_k\cup I'_{k+1}} \overline{B(x_i;r_i)}\right) &= \mathscr{L}^d\left(\left(A \setminus \bigcup_{i\in I_k} \overline{B(x_i;r_i)}\right) \setminus \bigcup_{i\in I'_{k+1}} \overline{B(x_i;r_i)}\right) \\
&\le C\mathscr{L}^d\left(A \setminus \bigcup_{i\in I_k} \overline{B(x_i;r_i)}\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ．以上のことに注意し，$I_{k+1} = I_k \cup I'_{k+1}$ と定めよう．

このようにして再帰的に構成された (I_n) を用いて，$I_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ と定義する．このとき I_∞ は全ての $n \in \mathbb{N}$ について

$$\mathscr{L}^d\left(A \setminus \bigcup_{i\in I_\infty} B(x_i;r_i)\right) \le \mathscr{L}^d\left(A \setminus \bigcup_{i\in I_n} B(x_i;r_i)\right) \le C^{n+1}\mathscr{L}^d(A)$$

を満たしている．いま $C<1$ であることに注意すれば，

$$\mathscr{L}^d\left(A\setminus\bigcup_{i\in I_\infty}B(x_i;r_i)\right)=0$$

がわかる．

A が非有界な場合は，$\mathbb{R}^d$ を内点を共有しない閉単位立方体の族 $(Q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ で覆って，各 $A\cap Q_m$ に前半の結果を適用すればよい． □

4 Hardy-Littlewood の極大作用素

Wiener の被覆補題を用いると，Lebesgue 測度による微分定理を証明することができる．まずは，Hardy-Littlewood の極大作用素を導入しよう．$f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d,\mathscr{L}^d)$ に対して，

$$Mf(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{\mathscr{L}^d(B(x;r))}\int_{B(x;r)}|f(y)|\mathscr{L}^d(dy)$$

と定義する．Mf を f の Hardy-Littlewood 極大関数 (Hardy-Littlewood maximal function) という．f は局所可積分であるから，各 $r>0$ について積分

$$\frac{1}{\mathscr{L}^d(B(x;r))}\int_{B(x;r)}|f(y)|\mathscr{L}^d(dy)$$

は有限値となる．この積分は，$B(x;r)$ 上での $|f|$ の平均値を表している．f の局所可積分性を用いれば，優収束定理より写像

$$x\longmapsto\frac{1}{\mathscr{L}^d(B(x;r))}\int_{B(x;r)}|f(y)|\mathscr{L}^d(dy)$$

は連続関数となることがわかる．これより極大関数 $x\mapsto Mf(x)$ は連続関数族の上限であり，$[0,\infty]$-値の下半連続関数となる．したがって，$x\mapsto Mf(x)$ は Borel 可測である．極大関数によって定まる写像 $M\colon L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)\to L^0(\mathbb{R};[0,\infty])$ を Hardy-Littlewood の極大作用素 (Hardy-Littlewood maximal operator) と呼ぶ．

任意の $x\in\mathbb{R}$ について

$$\left|\frac{1}{\mathscr{L}^d(B(x;r))}\int_{B(x;r)}|f(y)|\mathscr{L}^d(dy)\right|\le\frac{1}{\mathscr{L}^d(B(x;r))}\int_{B(x;r)}\|f\|_{L^\infty}\mathscr{L}^d(dy)=\|f\|_{L^\infty}$$

が成り立つから，$\|Mf\|_{L^\infty}\le\|f\|_{L^\infty}$ である．特に $f\in L^\infty$ なら $\|Mf\|_{L^\infty}<\infty$ となるので，M は L^∞ 上の縮小作用素である．また，三角不等式と積分の線形性から，極大作用素 M は劣加法的であることもわかる．

命題 4.1.
Hardy-Littlewood の極大作用素は M は，弱 $(1,1)$ 型作用素である．また，$1<p<\infty$ なら M は強 (p,p) 型の作用素である．具体的には，次の不等式が成り立つ．

$$a\mathscr{L}^d(Mf>a)\le 3^d\|f\|_{L^1}\quad(a>0)\tag{4.1}$$

$$\|Mf\|_{L^p} \le 2\cdot 3^{d/p}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p}\|f\|_{L^p} \tag{4.2}$$

不等式 (4.2) の定数は $3^{d/p}\frac{p}{p-1}$ まで改善できることが知られている[*3]．二つ目の不等式が成り立つことを，Hardy-Littlewood の極大原理と呼ぶことがある．

証明．Step 1：(4.1) の証明． Mf は下半連続関数だから，任意の a について $\{x\in\mathbb{R}^d \mid Mf(x)>a\}$ は開集合となる．$\varepsilon>0$ を任意に選べば，Lebesgue 測度の内正則性より，コンパクト集合 $K\subset\{Mf(x)>a\}$ を $\mathscr{L}^d(K)+\varepsilon>\mathscr{L}^d(Mf>a)$ となるように取ることが出来る．$x\in K$ なら $Mf(x)>a$ なので，$r_x>0$ で

$$\frac{1}{\mathscr{L}^d(B(x,r_x))}\int_{B(x,r_x)}|f(y)|\,\mathscr{L}^d(dy)>a$$

を満たすものが存在する．このとき $(B(x;r_x))_{x\in K}$ は開球からなる K の被覆なので，このとき命題 2.1 より有限集合 K_0 で $K\subset\bigcup_{x\in K_0}B(x;3r_x)$ かつ $(B(x;r_x))_{x\in K_0}$ が互いに素となるようなものがとれる．これを用いて計算すれば，

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^d(Mf>a) &< \mathscr{L}^d(K)+\varepsilon\\
&\le \sum_{x\in K_0}\mathscr{L}^d(B(x;3r_x))+\varepsilon\\
&\le \sum_{x\in K_0}3^d\mathscr{L}^d(B(x;r_x))+\varepsilon\\
&< \sum_{x\in K_0}3^d\frac{1}{a}\int_{B(x,r_x)}|f(y)|\,\mathscr{L}^d(dy)+\varepsilon\\
&= 3^d\frac{1}{a}\int_{\bigcup_{x\in K_0}B(x,r_x)}|f(y)|\,\mathscr{L}^d(dy)+\varepsilon\\
&\le \frac{3^d}{a}\|f\|_{L^1}+\varepsilon
\end{aligned}$$

となる．いま $\varepsilon>0$ は任意に選んでいるから，

$$\mathscr{L}^d(Mf>a)\le\frac{3^d}{a}\|f\|_{L^1}$$

がわかる．

Step 2：(4.1) の変形． $0<\varepsilon<1$ を任意に固定して，$f_{a,\varepsilon}=f1_{\{|f|\ge(1-\varepsilon)a\}}$ と定義する．$|f|\le|f_{a,\varepsilon}|+(1-\varepsilon)a$ が成り立つから，極大作用素の劣加法性から $M(f)\le M(f_{a,\varepsilon})+(1-\varepsilon)a$ となることがわかる．すなわち

$$M(f)-a\le M(f_{a,\varepsilon})-\varepsilon a$$

が成り立つ．$M(f_{a,\varepsilon})$ に step 1 で得た評価を適用すれば，

$$\begin{aligned}
a\mathscr{L}^d(Mf>a) &\le a\mathscr{L}^d(M(f_{a,\varepsilon})>\varepsilon a)\\
&\le 3^d\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^d}|f_{a,\varepsilon}|d\mathscr{L}^d\\
&= \frac{3^d}{\varepsilon}\int_{\{|f|\ge(1-\varepsilon)a\}}|f|d\mathscr{L}^d
\end{aligned}$$

[*3] Grafakos [7, Theorem 2.1.6] などを見よ．

となる．

Step 3：(4.2) **の証明．** $1 < p < \infty$ とする．このとき命題 A.2 より，

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Mf(x)|^p \mathscr{L}^d(dx) = p\int_0^\infty t^{p-1}\mathscr{L}^d(Mf > t)\,dt$$

が成り立つ．Step 2 で得られた評価において $\varepsilon = 1/2$ とすれば，

$$\begin{aligned} p\int_0^\infty t^{p-1}\mathscr{L}^d(Mf > t)\,dt &\le 2p3^d \int_0^\infty t^{p-1}\left(\int_{\{|f|>t/2\}} \frac{1}{t}|f|d\mathscr{L}^d\right) dt \\ &= 2p3^d \int_0^\infty t^{p-2}\left(\int_{\{|f|>t/2\}} |f|d\mathscr{L}^d\right) dt \end{aligned}$$

がわかる．ここで $t/2 = s$ と変数変換すれば，

$$\begin{aligned} 2p3^d \int_0^\infty t^{p-2}\left(\int_{\{|f|>t/2\}} |f|d\mathscr{L}^d\right) dt &= 2p3^d \int_0^\infty (2s)^{p-2}\left(\int_{\{|f|>s\}} |f|d\mathscr{L}^d\right) 2\,ds \\ &= 2^p3^dp \int_0^\infty s^{p-2}\left(\int_{\{|f|>s\}} |f|d\mathscr{L}^d\right) ds \\ &= 2^p3^dp \int_0^\infty s^{p-2}(|f| \bullet \mathscr{L}^d)(|f| > s)ds \end{aligned}$$

となる．もう一度命題 A.2 を用いれば，

$$\begin{aligned} 2^p3^dp \int_0^\infty s^{p-2}(|f| \bullet \mathscr{L}^d)(|f| > s)ds &= 2^p3^d\frac{p}{p-1}\int_{\mathbb{R}^d} |f|^{p-1}d(|f| \bullet \mathscr{L}^d) \\ &= 2^p3^d\frac{p}{p-1}\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\mathscr{L}^d \\ &= 2^p3^d\frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p}^p \end{aligned}$$

となるから，結局

$$\|Mf\|_{L^p}^p \le 2^p3^d\frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p}^p$$

がわかる．最後にこの式の両辺を $1/p$ 乗すれば，(4.2) を得る． □

5 Lebesgue の微分定理

本節では，$\mathbb{R}^d$ 上の局所可積分関数 f について

$$f(x) = \lim_{r\downarrow\downarrow 0}\frac{1}{\mathscr{L}^d(B(x;r))}\int_{B(x;r)} f(y)\,\mathscr{L}^d(dy)$$

が成り立つか？という問いに答えることにしよう．上の式を $\mathscr{L}^d$-a.e. の意味で捉える限り，この予想は正しい．その証明のためには，前節で導入した Hardy-Littlewood の極大作用素が役に立つ．

$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ とする．

$$\lim_{r\downarrow\downarrow 0}\frac{1}{\mathscr{L}^d(B(x;r))}\int_{B(x;r)} |f(y) - f(x)|\,\mathscr{L}^d(dy) = 0$$

が成り立つような $x \in \mathbb{R}^d$ を，関数 f の Lebesgue 点という．

定理 5.1.
$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ なら，$\mathbb{R}^d$ の（$\mathscr{L}^d$ に関する）ほとんど全ての点は，f の Lebesgue 点である．

証明．Step 1：f が連続な場合． f が連続な場合は全ての $x \in \mathbb{R}^d$ について

$$\frac{1}{\mathscr{L}^d(B(x;r))}\int_{B(x;r)} |f(y)-f(x)|\,\mathscr{L}^d(dy) \leq \sup_{y\in B(x;r)} |f(y)-f(x)| \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

が成り立つ．よって全ての点は f の Lebesgue 点である．

Step 2：$f \in L^1$ の場合． $r > 0$ に対して，

$$T_r f(x) = \frac{1}{\mathscr{L}^d(B(x;r))}\int_{B(x;r)} |f(y)-f(x)|\,\mathscr{L}^d(dy)$$

と定義し，

$$Tf(x) = \limsup_{r\downarrow\downarrow 0} T_r f(x)$$

とする．このとき $Tf = 0$ が $\mathscr{L}^d$-a.e. の意味で成り立つことを示せばよい．連続関数 φ を $\|f-\varphi\|_{L^1} < \varepsilon$ となるように選ぶ．T の劣加法性と φ の連続性に注意すれば，

$$Tf \leq T(f-\varphi) + T\varphi \leq M(f-\varphi) + |f-\varphi|$$

が成り立つことがわかる．これより任意の n について

$$\left\{Tf > \frac{1}{n}\right\} \subset \left\{M(f-\varphi) > \frac{1}{2n}\right\} \cup \left\{|f-\varphi| > \frac{1}{2n}\right\}$$

となるので，右辺の測度を評価すればよい．命題 4.1 より，

$$\mathscr{L}^d\left(\left\{M(f-\varphi) > \frac{1}{2n}\right\}\right) \leq 2n3^d\|f-\varphi\|_{L^1} \leq 2n3^d\varepsilon$$

が成り立つ．また Chebyshev の不等式より

$$\mathscr{L}^d\left(\left\{|f-\varphi| > \frac{1}{2n}\right\}\right) \leq 2n\|f-\varphi\|_{L^1} < 2n\varepsilon$$

も成り立つので，

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^d\left(\left\{Tf > \frac{1}{n}\right\}\right) &\leq \mathscr{L}^d\left(\left\{M(f-\varphi) > \frac{1}{2n}\right\}\right) + \mathscr{L}^d\left(\left\{|f-\varphi| > \frac{1}{2n}\right\}\right)\\ &\leq 2n3^d\varepsilon + 2n\varepsilon = 2n(3^d+1)\varepsilon\end{aligned}$$

となることがわかる．いま $\varepsilon > 0$ に任意に選んでいるから，これより

$$\mathscr{L}^d\left(\left\{Tf > \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$$

が従う．さらに n も任意に選んでいたから，

$$\mathscr{L}^d(\{Tf > 0\}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{L}^d\left(\left\{Tf > \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$$

となる．すなわちほとんど全ての点は f の Lebesgue 点である．

Step 3：$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ の場合． $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ で $\varphi(B(0;1)) \subset \{1\}$ を満たすものをとる．このとき $y \mapsto f(y)\varphi(y-x)$ は可積分であり，$B(x;1)$ 上では f と一致する．Step 2 の結果をこの関数に適用すれば，$B(x;1)$ 上のほとんど全ての点は f の Lebesgue 点であることがわかる．$\mathbb{R}^d$ は可算無限個の開球で覆うことが出来るから，$\mathbb{R}^d$ のほとんど全ての点は f の Lebesgue 点であることがわかる． □

系 5.2 (Lebesgue の微分定理).
$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d, \mathscr{L}^d)$ なら，ほとんど全ての $x \in \mathbb{R}^d$ について

$$f(x) = \lim_{r \downarrow\downarrow 0} \frac{1}{\mathscr{L}^d(B(x;r))} \int_{B(x;r)} f(y)\, \mathscr{L}^d(dy)$$

が成り立つ．

証明. $x \in \mathbb{R}^d$ および $r > 0$ とすれば，

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \frac{1}{\mathscr{L}^d(B(x;r))} \int_{B(x;r)} f(y)\, \mathscr{L}^d(dy) \right| \\
&= \left| \frac{1}{\mathscr{L}^d(B(x;r))} \int_{B(x;r)} f(x) - \frac{1}{\mathscr{L}^d(B(x;r))} \int_{B(x;r)} f(y)\, \mathscr{L}^d(dy) \right| \\
&\leq \frac{1}{\mathscr{L}^d(B(x;r))} \int_{B(x;r)} |f(x) - f(y)|\, \mathscr{L}^d(dy)
\end{aligned}$$

であるから，定理 5.1 を適用すればよい． □

6 Besicovitch の被覆定理

本節では，Lebesgue の微分定理の対象をより一般の Radon 測度にまで拡張するために，Wiener の被覆補題よりも精密な被覆定理を証明する．

まずは，Besicovitch の被覆定理の主張を紹介しよう．

定理 6.1 (Besicovitch の被覆定理).
空間の次元 d のみに依存する定数 N_d で，次の条件を満たすものが存在する：
$\mathscr{F}$ は非退化な閉球の族で

$$\sup\{\operatorname{diam} B \mid B \in \mathscr{F}\} < \infty$$

を満たすようなものとし，A は $\mathscr{F}$ の元の中心全体の集合を表すとする．このとき，$\mathscr{F}$ の部分族の族 $(\mathscr{G}_i)_{1 \leq i \leq N_d}$ で，各 $\mathscr{G}_i$ の元はどれも共通部分を持たず，

$$A \subset \bigcup_{1 \leq i \leq N_d} \bigcup \mathscr{G}_i$$

を満たすものが存在する．

この定理の証明は非常に長いので，一気に行うのは大変である．そこで，定理の証明に必要な Euclid 空間の幾何的な性質をいくつか先に証明しておこう．

補題 6.2.
Euclid 空間 $\mathbb{R}^d$ を考える．$0 < \theta_0 \leq \pi$ とすれば，次元 d と θ_0 のみに依存する定数 $N(d, \theta_0)$ で，次の条件を満たすようなものが存在する：

$E \subset \partial \overline{B}(0, 1)$ は，相異なる $x, y \in E$ について x と y の成す角が θ_0 以上となるような集合とする．このとき，$\operatorname{Card} E \leq N(d, \theta_0)$ が成り立つ．

証明. $x, y \in E$ の成す角を ξ とすれば，余弦定理より

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\| \cos \xi = 2 - 2 \cos \xi$$

が成り立つ．ここで，

$$r = \sqrt{2 - 2 \cos \theta_0} > 0$$

と書けば，先ほどの式より $\xi \geq \theta_0$ は $\|x - y\| \geq r$ と同値であることがわかる．

いま $\mathscr{B} = \{B(u; r/2); \|u\| = 1\}$ とし，

$$\mathscr{A} = \{\mathscr{F} \subset \mathscr{B} \mid \operatorname{Card} \mathscr{F} < \infty, \text{かつ } \mathscr{F} \text{ の元は互いに素}\}$$

と定義する．このとき, $\mathscr{A}$ の元の濃度を評価してみよう．$\mathscr{F} \in \mathscr{A}$ とすれば, $\mathscr{F}$ の元はどれも開球 $B(0; 1+r/2)$ に含まれている．球の体積を比較すれば

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2+r}{2}\right)^d \mathscr{L}^d(B(0;1)) &= \mathscr{L}^d\left(B\left(0; \frac{2+r}{2}\right)\right) \\
&\geq \mathscr{L}^d\left(\bigcup \mathscr{F}\right) \\
&= \sum_{B \in \mathscr{F}} \mathscr{L}^d(B) \\
&= \sum_{B \in \mathscr{F}} \left(\frac{r}{2}\right)^d \mathscr{L}^d(B(0;1)) \\
&= (\operatorname{Card} \mathscr{F}) \left(\frac{r}{2}\right)^d \mathscr{L}^d(B(0;1))
\end{aligned}$$

なる不等式を得る．これを変形すれば,

$$\operatorname{Card} \mathscr{F} \leq \frac{\left(\frac{2+r}{2}\right)^d \mathscr{L}^d(B(0;1))}{\left(\frac{r}{2}\right)^d \mathscr{L}^d(B(0;1))} = \left(\frac{2+r}{r}\right)^d$$

がわかる．

さて，$E \subset \partial B(0; 1)$ は補題の条件を満たすような集合とする．このとき $(B(x; r/2))_{x \in E}$ は $\mathscr{A}$ に属するから，先ほどの議論により

$$\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} \mathscr{F} \leq \left(\frac{2+r}{r}\right)^d$$

となる．
　したがって，

$$N(d,\theta_0) = \left(\frac{2+r}{r}\right)^d, \quad r = \sqrt{2-2\cos\theta_0}$$

と定めればよい． □

定義 6.3.
$\varepsilon \in]0,1]$ とし，$\mathscr{B} = (\overline{B}(x,r))_{(x,r)\in\Lambda}$ を非退化な閉球の族とする．相異なる $(x,r),(y,s)\in\Lambda$ について，以下の 2 条件のうちどちらかが成り立つものとする．

$$\|x-y\| > r \geq \varepsilon s$$
$$\|x-y\| > s \geq \varepsilon r$$

このとき，$\mathscr{B}$ は ε-制御されているという．

　$\mathscr{B} = (\overline{B}(x,r))_{(x,r)\in\Lambda}$ が ε-制御されているとき，$(x,r),(y,s)\in\Lambda$ が $(x,r)\neq(y,s)$ を満たすなら，$x\neq y$ が成り立つ．すなわち，ε-制御された閉球族の相異なる元は，同じ中心をもつことはない．また，$(\overline{B}(x,r))_{(x,r)\in\Lambda}$ が ε-制御されているなら，$(\overline{B}(x,\varepsilon r/2))_{(x,r)\in\Lambda}$ は互いに素な閉球族となっていることに注意しておく．

補題 6.4.
$\varepsilon \in]0,1]$ とし，$\mathscr{B} = (\overline{B}(x,r))_{(x,r)\in\Lambda}$ を ε-制御された閉球族とする．また $(x,r),(y,s)\in\Lambda$ は

$$r \leq \|x\| \leq r+1, \quad s \leq \|y\| \leq s+1 \tag{6.1}$$

を満たすとする．このとき x と y の成す角を θ で表せば，

$$\cos\theta \leq \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{r\wedge s}$$

が成り立つ．

証明. 余弦定理より

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|\cos\theta$$

であるから，

$$\cos\theta = \frac{\|x\|^2+\|y\|^2-\|x-y\|^2}{2\|x\|\|y\|}$$

が成り立つ．この表記を基に，$\cos\theta$ の値を評価してみよう．
　一般性を失わずに $\|x-y\| > r \geq \varepsilon s$ と仮定して良い．条件 (6.6) を用いれば，

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\|x\|^2}{2\|x\|\|y\|} + \frac{\|y\|^2}{2\|x\|\|y\|} + \frac{-\|x-y\|^2}{2\|x\|\|y\|} \\ &= \frac{\|x\|}{2\|y\|} + \frac{\|y\|}{2\|x\|} + \frac{-\|x-y\|^2}{2\|x\|\|y\|}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{r+1}{2s} + \frac{s+1}{2r} + \frac{-r^2}{2rs} \\
&= \frac{r^2+r+s^2+s-r^2}{2rs} \\
&= \frac{s^2+r+s}{2rs} \\
&= \frac{s}{2r} + \frac{r+s}{2(r\wedge s)(r\vee s)} \\
&\leq \frac{s}{2r} + \frac{2(r\vee s)}{2(r\wedge s)(r\vee s)} \\
&= \frac{s}{2r} + \frac{1}{r\wedge s}
\end{aligned}
$$

となることがわかる．いま，仮定 $r \geq \varepsilon s$ より

$$
\frac{s}{r} \leq \frac{1}{\varepsilon}
$$

が成り立つので，求める不等式

$$
\cos\theta \leq \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{r\wedge s}
$$

を得る． □

$\mathbb{R}^d$ の幾何的な性質に関連して，次のような問いを立ててみよう．「$\mathbb{R}^d$ の閉球と，閉球からなるその被覆を用意する．（覆いたい閉球と交わらないようなものは含まないとする．）この被覆から，『重なりのあまり大きくない』ような部分族を選び出すとき，その数は最大でどのくらいか？」被覆となる閉球族の半径がどれも十分な大きさを持つ場合には，実は上の問いにおける最大数は次元 d のみによる定数で評価できる．次の補題の持つ意味合いはそういったものである．

補題 6.5.
$\varepsilon \in]1/2, 1]$ とし，Euclid 空間 $\mathbb{R}^d$ を考える．このとき，ε と次元 d にしか依存しない定数 $M \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ で，次のような条件を満たすものが存在する：$\mathscr{B} = (\overline{B}(x_i; r_i))_{0\leq i\leq n}$ は次の 3 条件を満たす閉球族とする．

(i) 全ての $i \in \{0,\dots,n\}$ について，$\overline{B}(x_0; r_0) \cap \overline{B}(x_i; r_i) \neq \emptyset$ が成り立つ．
(ii) 全ての $i \in \{0,\dots,n\}$ について，$r_i \geq \varepsilon r_0$ が成り立つ．
(iii) $\mathscr{B}$ は ε-制御されている．

このとき，$n \leq M$ が成立する．

証明．Step 0：準備． 適当に平行移動とスカラー倍を行うことで変換可能であるから，$\overline{B}(x_0; r_0) = \overline{B}(0, 1)$ として示せばよい．正の実数 δ を，

$$
\frac{1}{2\varepsilon} < \delta < 1
$$

となるように取って固定しておく．

Step 1：$\mathscr{B}$ の分割． $\mathscr{B}$ を二つに分割する．与えられた $\mathscr{B} = (\overline{B}(x_i; r_i))_{0\leq i\leq n}$ に対して，

$$
I_1 = \left\{ i \in \{1,\dots,n\} \,\middle|\, 1 \leq i \leq n,\ \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon\delta - 1} < r_i \leq \|x_i\| \leq r_i + 1 \right\}
$$

と定義する．$I_2 = \{1,\ldots,n\} \setminus I_1$ とし，

$$\mathscr{B}_1 = (\overline{B}(x_i;r_i))_{i\in I_1}, \quad \mathscr{B}_2 = (\overline{B}(x_i;r_i))_{i\in I_2}$$

と書くことにしよう．このとき，$\mathrm{Card}\, I_1$ と $\mathrm{Card}\, I_2$ をそれぞれ評価すればよい．

Step 2：$\mathrm{Card}\, I_1$ の評価． まずは $\mathrm{Card}\, I_1$ の評価を行おう．$i,j \in I_1$ に対して，θ_{ij} で x_i と x_j の成す角を表すことにする．I_1 の定義と補題 6.5 より，相異なる $i,j \in I_1$ について

$$\begin{aligned}\cos\theta_{ij} &\le \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{r_i \wedge r_j} \\ &\le \frac{1}{2\varepsilon} + \bigvee_{i\in I_1} \frac{1}{r_i} \\ &< \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{2\varepsilon\delta - 1}{2\varepsilon} \\ &= \delta < 1\end{aligned}$$

が成り立つ．これより全ての $i,j \in I_1$ について $\theta_{ij} \ge \theta_0 := \cos^{-1}\delta$ となる．このとき補題 6.2 の定数 $N(d,\theta_0)$ を用いれば，$\mathrm{Card}\, I_1 \le N(d,\theta_0)$ と評価することができる．なお，補題 6.2 の証明より

$$N(d,\theta_0) = \left(\frac{2+\sqrt{2-2\cos\theta_0}}{\sqrt{2-2\cos\theta_0}}\right)^d = \left(\frac{2+\sqrt{2-2\delta}}{\sqrt{2-2\delta}}\right)^d$$

とできることがわかる．

Step 3：$\mathrm{Card}\, I_2$ の評価． 次に $\mathrm{Card}\, I_2$ について考える．仮定の条件 (i) と $\overline{B}(x_0;r_0) = \overline{B}(0,1)$ より，全ての $i \in \{1,\ldots,n\}$ について $\|x_i\| \le r_i + 1$ が成り立つ．したがって，いま

$$I_2 = \left\{ i \in \{1,\ldots,n\} \,\middle|\, r_i \le \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon\delta - 1} \text{ or } \|x_i\| < r_i \right\}$$

と表現することができる．

$i \in I_2$ が $r_i \le \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon\delta-1}$ を満たす場合を考えよう．このときは

$$\begin{aligned}\|x_i\| + r_i &\le (r_i+1) + r_i \\ &= 2r_i + 1 \\ &\le \frac{2\cdot 2\varepsilon}{2\varepsilon\delta - 1} + 1 \\ &= \frac{4\varepsilon + 2\varepsilon\delta - 1}{2\varepsilon\delta - 1}\end{aligned}$$

が成り立つ．

次に $i \in I_2$ が $\|x_i\| < r_i$ を満たす場合は，$\mathscr{B}$ が ε-制御されていることより $r_i > 1$ および

$$\|x_i\| > 1 \ge \varepsilon r_i$$

がわかる．この場合は

$$\|x_i\| + r_i \le 2r_i \le \frac{2}{\varepsilon}$$

となる．

さて，いま

$$\frac{4\varepsilon+2\varepsilon\delta-1}{2\varepsilon\delta-1}-\frac{2}{\varepsilon}=\frac{(4\varepsilon+2\varepsilon\delta-1)\varepsilon-2(2\varepsilon\delta-1)}{(2\varepsilon\delta-1)\varepsilon}=\frac{2\varepsilon(\varepsilon-2)\delta+(4\varepsilon^2-\varepsilon+2)}{(2\varepsilon\delta-1)\varepsilon}$$

であるから，この数の符号を調べるには分子の符号を調べれば良いことになる．$\delta<1$ と $2\varepsilon(\varepsilon-2)<0$ に注意すれば,

$$\begin{aligned}2\varepsilon(\varepsilon-2)\delta+(4\varepsilon^2-\varepsilon+2)&\geq 2\varepsilon(\varepsilon-2)+(4\varepsilon^2-\varepsilon+2)\\&=2\varepsilon^2-4\varepsilon+4\varepsilon^2-\varepsilon+2\\&=6\varepsilon^2-5\varepsilon+2\\&\geq 0\end{aligned}$$

がわかる．よって

$$\frac{4\varepsilon+2\varepsilon\delta-1}{2\varepsilon\delta-1}\geq\frac{2}{\varepsilon}$$

である．

以上の議論により，全ての $i\in I_2$ について

$$\|x_i\|+r_i\leq\frac{4\varepsilon+2\varepsilon\delta-1}{2\varepsilon\delta-1}$$

が成り立っていることがわかった．ここで

$$\widetilde{r}=\frac{4\varepsilon+2\varepsilon\delta-1}{2\varepsilon\delta-1}$$

と定めよう．このとき

$$\bigcup_{i\in I_2}\overline{B}\left(x_i;\frac{\varepsilon r_i}{2}\right)\subset\bigcup_{i\in I_2}\overline{B}\left(x_i;r_i\right)\subset\overline{B}(0;\widetilde{r})$$

が成り立つ．さらに $(\overline{B}(x_i;\varepsilon r_i/2))_{i\in I_2}$ は互いに素な族だから，体積の評価により

$$\begin{aligned}\widetilde{r}^d\mathscr{L}^d(\overline{B}(0;1))&=\mathscr{L}^d\left(\overline{B}(0;\widetilde{r})\right)\\&\geq\mathscr{L}^d\left(\bigcup_{i\in I_2}\overline{B}\left(x_i;\frac{\varepsilon r_i}{2}\right)\right)\\&=\sum_{i\in I_2}\mathscr{L}^d\left(\overline{B}\left(x_i;\frac{\varepsilon r_i}{2}\right)\right)\\&\geq\sum_{i\in I_2}\mathscr{L}^d\left(\overline{B}\left(x_i;\frac{\varepsilon^2 r_0}{2}\right)\right)\\&=\sum_{i\in I_2}\left(\frac{\varepsilon^2}{2}\right)^d\mathscr{L}^d\left(\overline{B}\left(x_i;1\right)\right)\\&=\operatorname{Card}I_2\left(\frac{\varepsilon^2}{2}\right)^d\mathscr{L}^d\left(\overline{B}\left(0;1\right)\right)\end{aligned}$$

となることがわかる．ただし，途中の不等号では仮定の条件 (ii) と $r_0=1$ を用いた．これより $\operatorname{Card}I_2$ は

$$\operatorname{Card}I_2\leq\frac{\widetilde{r}^d}{\left(\frac{\varepsilon^2}{2}\right)^d}=\left(\frac{4\varepsilon+2\varepsilon\delta-1}{2\varepsilon\delta-1}\right)^d\left(\frac{2}{\varepsilon^2}\right)^d$$

と評価することができる．

Step 4：n の評価． Step 3 までの議論をまとめれば，

$$\begin{aligned} n &= \mathrm{Card}\, I_1 + \mathrm{Card}\, I_2 \\ &\le \left(\frac{2+\sqrt{2-2\delta}}{\sqrt{2-2\delta}}\right)^d + \left(\frac{4\varepsilon+2\varepsilon\delta-1}{2\varepsilon\delta-1}\right)^d \left(\frac{2}{\varepsilon^2}\right)^d \end{aligned}$$

なる不等式を得る．この不等式は $\frac{1}{2\varepsilon} < \delta < 1$ なる全ての δ について成り立つから，

$$M(d,\varepsilon) = \left\lceil \inf_{\delta \in \left]\frac{1}{2\varepsilon}, 1\right[} \left\{ \left(\frac{2+\sqrt{2-2\delta}}{\sqrt{2-2\delta}}\right)^d + \left(\frac{4\varepsilon+2\varepsilon\delta-1}{2\varepsilon\delta-1}\right)^d \left(\frac{2}{\varepsilon^2}\right)^d \right\} \right\rceil$$

とおけばよいことがわかる．ただし，$\lceil K \rceil$ は K 以上の自然数の内最小のものを表す． □

ここまで準備した補題を用いて，Besicobitch の被覆定理を証明しよう．まずは，定理の主張を復習しておく．

主張．
空間の次元 d のみに依存する定数 N_d で，次の条件を満たすものが存在する：
$\mathscr{F}$ は非退化な閉球の族で

$$\sup\{\mathrm{diam}\, B \mid B \in \mathscr{F}\} < \infty$$

を満たすようなものとし，A は $\mathscr{F}$ の元の中心全体の集合を表すとする．このとき，$\mathscr{F}$ の部分族の族 $(\mathscr{G}_i)_{1\le i\le N_d}$ で，各 $\mathscr{G}_i$ の元はどれも共通部分を持たず，

$$A \subset \bigcup_{1\le i\le N_d} \bigcup \mathscr{G}_i$$

を満たすものが存在する．

証明．Step 1：A が有界な場合．

Step 1-1：$\mathscr{F}$ の可算部分族 $\mathscr{B}$ の構成． $\mathscr{F}$ の可算部分族 $\mathscr{B}$ を再帰的に構成しよう．

$D = \sup\{\mathrm{diam}\, B \mid B \in \mathscr{F}\}$ とおき，$\mathscr{F}$ を $\mathscr{F} = (\overline{B}(x,r))_{(x,r)\in\Lambda}$ [*4] と添え字づけて表現しておく．

まずは $\overline{B}(x_1, r_1)$ を $r_1 \ge \frac{3}{4}\frac{D}{2}$ となるように選ぶ．

次に $(x_i, r_i)_{1\le i\le k}$ が与えられたとしよう．$A_{k+1} := A \setminus \bigcup_{1\le i\le k} \overline{B}(x_i; r_i) = \emptyset$ ならば，$J = \{1, \dots, k\}$ と定義する．$A_{k+1} \ne \emptyset$ なら，$(x_{k+1}, r_{k+1}) \in \Lambda$ を $x_{k+1} \in A_{k+1}$ かつ

$$r_{k+1} \ge \frac{3}{4} \sup\{r \mid (x,r) \in \Lambda,\ x \in A_{k+1}\}$$

となるように選ぶ．

さて，もし全ての k について $A_k \ne \emptyset$ であるならば，$J = \mathbb{N}_{\ge 1}$ と定めよう．これにより，$\mathscr{F}$ の可算部分族 $J \to \mathscr{F}$ が定まる．いま $B_j = \overline{B}(x_j, r_j)$ のように表記し，$\mathscr{B} = (B_j)_{j\in J}$ と定めよう．

Step 1-2：$\mathscr{B}$ が 3/4-制御されていることの証明． Step 1-1 で構成した閉球族 $\mathscr{B}$ が 3/4-制御された閉球列

[*4] このとき $\Lambda \subset A \times]0, D]$ である．

であることを示そう．$i<j$ のとき $x_j \in A_j \subset A_i$ であるから，

$$r_i \geq \frac{3}{4}\sup\{r \mid (x,r) \in \Lambda,\ x \in A_i\} \geq \frac{3}{4} r_j$$

が成り立つ．また $i<j$ なら $x_j \in A_j = A \setminus \bigcup_{k \leq j-1} B_k$ なので，$x_j \notin B_i = \overline{B}(x_i, r_i)$ である．よって

$$\|x_j - x_i\| > r_i$$

が成り立つ．したがって $i<j$ なら

$$\|x_j - x_i\| > r_i \geq \frac{3}{4} r_j$$

であり，$\mathscr{B}$ は $\frac{3}{4}$-制御されていることがわかった．

Step 1-3：$\mathscr{B}$ が A の被覆であることの証明．

Case 1-3-1：J が有限集合の時． $J=\{1,\dots,k\}$ となるのは，$A \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq k} B_i = \emptyset$ が成り立つ時なのであった．ゆえに $\mathscr{B}$ は A の被覆である．

Case 1-3-2：J が無限集合の時． いま $\mathscr{B}$ は $\frac{3}{4}$-制御されているから，$(\overline{B}(x_j, 3r_j/8))_{j \in J}$ は互いに素な族である．このことと，$B(a_j, r_j/3)$ はどれも $\overline{B}(0; (\operatorname{diam} A + D)/2)$ に含まれることを用いれば，

$$\sum_{j \in J} \mathscr{L}^d\left(\overline{B}(x_j, r_j/3)\right) = \mathscr{L}^d\left(\bigcup_{j \in J} \overline{B}(x_j, r_j/3)\right) \leq \mathscr{L}^d\left(\overline{B}\left(0; \frac{\operatorname{diam} A + D}{2}\right)\right) < \infty$$

がわかる．ゆえに J が無限集合なら $r_j \to 0\ (j \to \infty)$ が成り立つ．

$a \in A$ とし，$(a,r) \in \Lambda$ であるような r を適当に選ぶ．このとき，先ほどの議論により $r_j < \frac{3}{4} r$ を満たすような r_j が存在する．r_j の定義より

$$r > r_j \geq \frac{3}{4}\sup\{s \mid (x,s) \in \Lambda,\ x \in A_j\}$$

となるから，$a \notin A_j$ がわかる．したがって，

$$a \in A \setminus A_j = \bigcup_{1 \leq i \leq j} B_i \subset \bigcup_{i \in J} B_i$$

である．いま a は任意に選んでいたから，これより $A \subset \bigcup_{j \in J} B_j$ がしたがう．

したがって，$\mathscr{B} = (B_i)_{i \in J}$ は A の被覆である．

Step 1-4：濃度の評価． $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ に対して，

$$I_n = \{j \in J \mid 1 \leq j < n,\ B_j \cap B_n \neq \emptyset\}$$

と定義する．このとき $\mathscr{B}$ は補題 6.5 の仮定を満たすから，補題 6.5 の定数 $M_d = M(d, 3/4)$ を用いて $\operatorname{Card} I_n \leq M_d$ と評価することができる[*5]．

Step 1-4：$(\mathscr{G}_i)$ の構成． $N_d = M_d + 1$ と定めよう．このとき，N_d が定理の主張を満たす定数となっていることを示す．

$\mathscr{B}$ を適当に分割し，$(\mathscr{G}_i)_{1 \leq i \leq N_d}$ を構成しよう．$\mathscr{B}$ を $(\mathscr{G}_i)_{1 \leq i \leq M_d}$ に分割するということは，写像 $J \to \{1,\dots,M_d\}$ を作るということである．

[*5] いま M_d は次元 d のみに依存するから，これは n によらない評価である．

写像 $\varphi\colon \mathbb{N}_{\geq 1} \to \{1, \dots, N_d\}$ を再帰的に定義する．

$i \in \{1, \dots, N_d\}$ のときは，$\varphi(i) = i$ とする．

$k \geq N_d$ とし，$\varphi_k\colon \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, N_d\}$ が与えられているとしよう．Step 1-3 で示したように $\operatorname{Card} I_{k+1} \leq M_d < N_d$ であるから，$\{1, \dots, N_d\} \setminus \varphi_k(I_{k+1})$ は空ではない．そこで，写像 $\{k+1\} \to \{1, \dots, N_d\} \setminus \varphi_k(I_{k+1})$ を一つ固定し，φ_{k+1} を以下の可換図式によって定める．

$$\begin{tikzcd}
\{1, \dots, k\} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi_k"'] & \{1, \dots, k\} \sqcup \{k+1\} \arrow[d, "\varphi_{k+1}"] & \{k\} \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\
\{1, \dots, N_d\} \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \{1, \dots, N_d\} & \{1, \dots, N_d\} \setminus \varphi_k(I_{k+1}) \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

いま $\varphi_{k+1}(k+1) \in \{1, \dots, N_d\} \setminus \varphi_k(I_{k+1})$ であるから，全ての $j \in \varphi_{k+1}^{-1}(\varphi_{k+1}(k+1))$ について $B_{k+1} \cap B_j = \emptyset$ が成り立っている．

以上の手続きで再帰的に定義された $\varphi\colon \mathbb{N}_{\geq 1} \to \{1, \dots, N_d\}$ を用いて $J_i = \varphi^{-1}(i)$（$i \in \{1, \dots, N_d\}$）と定義し，$\mathscr{G}_i = (B_j)_{j \in J_i}$ とする．このとき，φ の定義より各 $\mathscr{G}_i$ はどれも互いに素な $\mathscr{F}$ の閉球族である．さらに φ が全射であることと step 1-3 の結果より，

$$A \subset \bigcup \mathscr{B} = \bigcup_{1 \leq i \leq N_d} \bigcup \mathscr{G}_i$$

となることがわかる．

これで，A が有界な場合の証明が完了した．

Step 2：A が非有界の場合． 今度は A が非有界であるような場合を考える．Step 1 と同様に $D = \sup\{\operatorname{diam} B \mid B \in \mathscr{F}\}$ とおき，$k \geq 1$ に対して

$$A_k = \{a \in A \mid 3D(k-1) \leq \|a\| < 3Dk\}$$

と定義する．このとき $(A_k)_{k \geq 1}$ は A の分割となっている．

各 A_k は有界であるから，step 1 の結果により，互いに素な閉球族 $(\mathscr{G}_j^k)_{1 \leq j \leq N_d}$ で $\bigcup_{1 \leq j \leq N_d} \mathscr{G}_j^k$ が A_k の被覆になっているようなものが選べる．ここで，$j \in \{1, \dots, N_d\}$ に対して

$$\mathscr{G}_{2i-1} = \bigcup_{k \geq 1} \mathscr{G}_i^{2k-1}$$
$$\mathscr{G}_{2i} = \bigcup_{k \geq 1} \mathscr{G}_i^{2k}$$

と定義する．このとき，A_k の定義より各 $\mathscr{G}_i$ は互いに素な閉球族であることがわかる[*6]．また

$$A = \bigcup_{k \geq 1} A_k \subset \bigcup_{k \geq 1} \bigcup_{1 \leq j \leq N_d} \bigcup \mathscr{G}_j^k \subset \bigcup_{1 \leq j \leq N_d} \bigcup_{k \geq 1} \mathscr{G}_j^k = \bigcup_{1 \leq j \leq 2N_d} \bigcup \mathscr{G}_j$$

であるから，$(\mathscr{G}_i)_{1 \leq i \leq 2N_d}$ は A の被覆であることがわかる．

したがって，$\widetilde{N}_d = 2N_d$ とすれば $\widetilde{N}_d$ は定理の主張を満たす定数となることがわかる．

以上で A が非有界な場合の証明も達成された． □

Besicovitch の被覆定理は完全に幾何学的な主張であった．この定理を用いれば，Lebesgue 測度に対する定理 3.2 と類似の主張を，任意の Radon 測度に対して証明することができる．

[*6] ドーナツ A_k を幅 $3D$ で取っていたことがここに効いている．

定理 6.6 (Vitali-Besicovitch の被覆定理).
$A \subset \mathbb{R}^d$ とする．$\mathscr{F}$ を閉球からなる A の被覆で，全ての $a \in A$ について

$$\inf\{r \mid \overline{B}(a,r) \in \mathscr{F}\} = 0$$

を満たすようなものとする．

$U \subset \mathbb{R}^d$ を任意の開集合とし，μ を任意の Radon 測度とする．このとき，部分族 $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$ で以下の条件を満たすようなものが存在する．

(i) $\mathscr{B}$ は互いに素な閉球からなる可算族である．
(ii) $\bigcup \mathscr{B} \subset U$ が成り立つ．
(iii) $(A \cap U) \setminus \bigcup \mathscr{B}$ は μ-零集合となる．

証明. Radon 測度 μ に対応する外測度を μ^* で表すことにする．

Step 1：$\mu^*(A) < \infty$ の場合． N_d を定理 6.1 における定数とし，$1 - 1/N_d < \varepsilon < 1$ なる ε を一つ選んで固定しておく．

Step 1-1：有限族 $\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{F}$ の構成． $\mathscr{F}$ の有限部分族 $\mathscr{B}_1$ で，$\mathscr{B}_1$ は互いに素な閉球族で，

$$\mu^*\left((A \cap U) \setminus \bigcup \mathscr{B}_1\right) \le \varepsilon \mu^*(A \cap U)$$

を満たしているようなものを構成しよう．

$\mathscr{F}$ の部分族 $\mathscr{F}_1$ を

$$\mathscr{F}_1 = \{B \in \mathscr{F} \mid \operatorname{diam} B \le 1, B \subset U\}$$

と定義する[*7]．このとき $A \cap U$ は $\mathscr{F}_1$ の元の中心全体の集合に含まれるから，Besicovitch の被覆定理（定理 6.1）により，互いに素な閉球族の族 $(\mathscr{G}_i^1)_{1 \le i \le N_d}$ を

$$A \cap U \subset \bigcup_{1 \le i \le N_d} \bigcup \mathscr{G}_i^1$$

となるように選ぶことができる．外測度の劣加法性を用いれば，

$$\mu^*(A \cap U) \le \sum_{1 \le i \le N_d} \mu^*\left(A \cap U \cap \bigcup \mathscr{G}_i^1\right)$$

となる．ここで $i_0 \in \{1, \dots, N_d\}$ を

$$\mu^*\left(A \cap U \cap \bigcup \mathscr{G}_{i_0}^1\right) = \max_{1 \le i \le N_d} \mu^*\left(A \cap U \cap \bigcup \mathscr{G}_{i_0}^1\right)$$

となるように選べば，先ほどの不等式と併せて

$$\mu^*(A \cap U) \le N_d \mu^*\left(A \cap U \cap \bigcup \mathscr{G}_{i_0}^1\right)$$

なる評価を得る．いま，仮定より $1 - \varepsilon < 1/N_d$ であるから，外測度の下からの連続性により，有限族 $\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{G}_{i_0}^1$

[*7] $\inf\{r \mid \overline{B}(a,r) \in \mathscr{F}\} = 0$ という条件に注意．

を

$$\mu^* \left(A \cap U \cap \bigcup \mathscr{B}_1 \right) > (1-\varepsilon)\mu^*(A \cap U)$$

を満たすようにとることができる．いま $\bigcup \mathscr{B}_1$ は μ-可測であるから，

$$\mu^*(A \cap U) = \mu^* \left(A \cap U \cap \bigcup \mathscr{B}_1 \right) + \mu^* \left((A \cap U) \setminus \bigcup \mathscr{B}_1 \right)$$

したがって，外測度有限性に注意すれば

$$\begin{aligned} \mu^* \left((A \cap U) \setminus \bigcup \mathscr{B}_1 \right) &= \mu^*(A \cap U) - \mu^* \left(A \cap U \cap \bigcup \mathscr{B}_1 \right) \\ &< \mu^*(A \cap U) - (1-\varepsilon)\mu^*(A \cap U) \\ &= \varepsilon \mu^*(A \cap U) \end{aligned}$$

となり，求める不等式を得た．

Step 1-2：再帰による $(\mathscr{B}_i)_{i \geq 1}$ の構成． $\mathscr{F}$ の部分族の族 $(\mathscr{B}_i)_{1 \leq i \leq k}$ で，次のような条件を満たしているものが与えられたとする．

(a) 各 $\mathscr{B}_i$ は互いに素な閉球からなる族である．
(b) $i \leq j \leq k$ なら $\mathscr{B}_i \subset \mathscr{B}_j$ が成り立つ．
(c) $2 \leq i \leq k$ なら $\bigcup \mathscr{B}_i \subset U \setminus \bigcup \mathscr{B}_{i-1}$ が成り立つ．
(d) 全ての $i \in \{1, \dots, k\}$ について以下の不等式が成り立つ．

$$\mu^* \left((A \cap U) \setminus \bigcup \mathscr{B}_i \right) \leq \varepsilon^i \mu^*(A \cap U)$$

いま $U_{k+1} = U \setminus \bigcup \mathscr{B}_k$ とし，

$$\mathscr{F}_{k+1} = \{ B \in \mathscr{F} \mid \operatorname{diam} B \leq 1, B \subset U_{k+1} \}$$

と定義する．$A \cap U_{k+1}$ と $\mathscr{F}_{k+1}$ に対して step 1-1 と同様の議論を行うことで，$\mathscr{B}'_{k+1} \subset \mathscr{F}_{k+1}$ を

1. $\mathscr{B}'_{k+1}$ は互いに素な閉球の族.
2. $\mu \left((A \cap U_{k+1}) \setminus \bigcup \mathscr{B}'_{k+1} \right) \leq \varepsilon \mu(A \cap U_{k+1})$ が成り立つ.

を見たすように選ぶことができる．ここで $\mathscr{B}_{k+1} = \mathscr{B}'_{k+1} \cup \mathscr{B}_k$ と定めれば，仮定より

$$\begin{aligned} \mu^* \left((A \cap U) \setminus \bigcup \mathscr{B}_{k+1} \right) &= \mu^* \left((A \cap U_{k+1}) \setminus \bigcup \mathscr{B}'_{k+1} \right) \\ &\leq \varepsilon \mu^*(A \cap U_{k+1}) \\ &= \varepsilon \mu^* \left((A \cap U) \setminus \bigcup \mathscr{B}_k \right) \\ &\leq \varepsilon^{k+1} \mu^*(A \cap U) \end{aligned}$$

が成り立つ．さらに，$\bigcup \mathscr{B}'_{k+1} \subset U_{k+1}$ であることより，$\mathscr{B}_{k+1}$ もまた互いに素な閉球族であることがわかる．ゆえに，族 $(\mathscr{B}_i)_{1 \leq i \leq k+1}$ もまた条件 (a)–(d) を満たしている．

以上の議論から，再帰により

(A) 全ての $k \geq 1$ について，$\mathscr{B}_k$ は互いに素な閉球からなる族である．
(B) $1 \leq k \leq l$ なら $\mathscr{B}_k \subset \mathscr{B}_l$ が成り立つ．

(C) $2 \leq k$ なら $\bigcup \mathscr{B}_k \subset U \setminus \bigcup \mathscr{B}_{k-1}$ が成り立つ．

(D) 全ての $k \geq 1$ について以下の不等式が成り立つ．

$$\mu^* \left((A \cap U) \setminus \bigcup \mathscr{B}_k \right) \leq \varepsilon^k \mu^*(A \cap U)$$

を満たす $\mathscr{F}$ 部分族の族 $(\mathscr{B}_k)_{k \geq 1}$ が構成される．ここで，$\mathscr{B} = \bigcup_{k \geq 1} \mathscr{B}_k$ と定義しよう．最後に不等式

$$\mu^* \left((A \cap U) \setminus \bigcup \mathscr{B}_k \right) \leq \varepsilon^k \mu^*(A \cap U)$$

において $k \to \infty$ とすれば，

$$\begin{aligned} \mu^* \left((A \cap U) \setminus \bigcup \mathscr{B} \right) &\leq \lim_{k \to \infty} \mu^* \left((A \cap U) \setminus \bigcup \mathscr{B}_k \right) \\ &\leq \lim_{k \to \infty} \varepsilon^k \mu^*(A \cap U) \\ &= 0 \end{aligned}$$

がわかる．

これで $\mu^*(A) < \infty$ の場合の証明が終わった．

Step 2：一般の場合． Radon 測度 μ は σ-有限であるから，任意の $M > 0$ に対して，ある $r \geq M$ で $\mu(\partial B(0; r)) = 0$ を満たすものが存在する．正の実数列 $(r_n)_{n \geq 1}$ を $\mu(\partial B(0; r_n)) = 0$ かつ $r_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ を満たすように選ぼう．そして

$$A_0 = A \cap B(0; r_1), \quad A_n = A \cap \left(B(0; r_{n+1}) \setminus \overline{B}(0; r_n) \right) \text{ for } n \geq 1$$

と定義する．

$U \subset \mathbb{R}^d$ を開集合としよう．各 A_n は有界集合なので測度有限であり，step 1 の結果より以下の条件を満たすような可算族 $\mathscr{B}_n \subset \mathscr{F}$ を選び出すことができる．

(i) $\mathscr{B}_n$ は互いに素な閉球からなる可算族である．

(ii) $\bigcup \mathscr{B}_n \subset U \cap B(0; r_{n+1}) \setminus \overline{B}(0; r_n)$ が成り立つ．

(iii) $(A_n \cap U) \setminus \bigcup \mathscr{B}_n$ は μ-零集合となる．

ただし，$\mathscr{B}_0$ については条件 (ii) は $U \cap B(0; r_{n+1})$ でおきかえる．条件 (i) と (ii) より，$\mathscr{B} := \bigcup_{n \geq 0} \mathscr{B}_n$ はまた互いに素な閉球からなる可算族であることがわかる．また，条件 (iii) と $\mu(\partial B(0; r_n)) = 0$ $(\forall n \geq 0)$，そして外測度の劣加法性より

$$\begin{aligned} \mu^* \left((A \cap U) \setminus \bigcup \mathscr{B} \right) &\leq \sum_{n \geq 0} \mu^* \left((A_n \cap U) \setminus \bigcup \mathscr{B}_n \right) + \sum_{n \geq 1} \mu^*(\partial B(0; r_n)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに $\mathscr{B}$ は求めるべき $\mathscr{F}$ の部分族となっている． □

7 Radon 測度による微分

§6 で証明した被覆定理を用いて，Lebesgue の微分定理に相当する結果はより一般の Radon 測度についても成り立つことを確かめていこう．

定義 7.1.

$\mu, \nu \colon \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$ を Radon 測度とする．$x \in \mathbb{R}^d$ における，ν の μ に関する上側微分 (upper derivative) を

$$\overline{D}_\mu \nu(x) = \begin{cases} \limsup_{r \downarrow \downarrow 0} \dfrac{\nu(\overline{B}(x;r))}{\mu(\overline{B}(x;r))} & \text{if } \mu(\overline{B}(x;r)) > 0 \text{ for all } r > 0, \\ +\infty & \text{if } \mu(\overline{B}(x;r)) = 0 \text{ for some } r > 0. \end{cases}$$

と定義する．また，$x \in \mathbb{R}^d$ における，ν の μ に関する下側微分 (lower derivative) を

$$\underline{D}_\mu \nu(x) = \begin{cases} \liminf_{r \downarrow \downarrow 0} \dfrac{\nu(\overline{B}(x;r))}{\mu(\overline{B}(x;r))} & \text{if } \mu(\overline{B}(x;r)) > 0 \text{ for all } r > 0, \\ +\infty & \text{if } \mu(\overline{B}(x;r)) = 0 \text{ for some } r > 0. \end{cases}$$

と定める．

$x \in \mathbb{R}^d$ において $\underline{D}_\mu \nu(x) = \overline{D}_\mu \nu(x) < \infty$ が成り立つとき，x において ν は μ によって微分可能であるといい，その値 $\overline{D}_\mu \nu(x)$ を x における ν の μ に関する微分と呼ぶ.

定義 7.1 では上側微分や下側微分は x ごとに定義していたから，少なくとも x に対応する $[0, \infty]$ の元としては well-defined である．しかし，我々は関数 $x \mapsto \overline{D}_\mu \nu(x)$ や $x \mapsto \underline{D}_\mu \nu(x)$ としての性質も知りたいので，これらを積分論の土俵に載せるためにまずは可測性などを調べておく必要がある.

命題 7.2.

$\mu, \nu \colon \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$ を Radon 測度とする.

(i) $\overline{D}_\mu \nu, \underline{D}_\mu \nu \colon \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ は Borel 可測である.

(ii) 各点の意味で $\underline{D}_\mu \nu \leq \overline{D}_\mu \nu$ が成り立つ.

証明. (i) 集合 $B \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times]0, \infty[$ を

$$B = \{(y, x, r) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times]0, \infty[\mid \|y - x\| \leq r\}$$

と定義する．集合 B は連続関数 $(y, x, r) \mapsto \|y - x\| - r$ による $]-\infty, 0]$ の逆像だから，$\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathscr{B}(]0, \infty[)$ 可測である．また閉球 $\overline{B}(x;r)$ は B の (x, r) 断面であるから，可測集合に関する Fubini の定理より $(x, r) \mapsto \mu(\overline{B}(x;r))$ および $(x, r) \mapsto \nu(\overline{B}(x;r))$ は $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathscr{B}(]0, \infty[)$ 可測となる．したがって

$$f_r(x) = \begin{cases} \dfrac{\nu(\overline{B}(x;r))}{\mu(\overline{B}(x;r))} & \text{if } \mu(\overline{B}(x;r)) > 0 \text{ for all } r > 0, \\ +\infty & \text{if } \mu(\overline{B}(x;r)) = 0 \text{ for some } r > 0. \end{cases}$$

と定義すれば，f_r も Borel 可測となる.

いま $r \mapsto f_r(x)$ は各点で右連続かつ左極限を持つような $[0, \infty]$ 値関数だから，

$$\overline{D}_\mu \nu(x) = \limsup_{r \to 0, r \in \mathbb{R}_{>0}} f_r(x) = \limsup_{r \to 0, r \in \mathbb{Q}_{>0}} f_r(x),$$
$$\underline{D}_\mu \nu(x) = \liminf_{r \to 0, r \in \mathbb{R}_{>0}} f_r(x) = \limsup_{r \to 0, r \in \mathbb{Q}_{>0}} f_r(x)$$

が成り立つ．これより $\overline{D}_\mu\nu$ と $\underline{D}_\mu\nu$ はともに Borel 可測であることがわかる．

(ii) $\liminf$ と $\limsup$ の定義よりすぐにわかる． $\square$

微分定理を証明するための準備として，以下の補題を用意する．Vitali-Besicovitch の被覆定理はこの補題の証明に用いられる．

補題 7.3.
$\mu, \nu\colon \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty]$ を Radon 測度とする．このとき，$\alpha \in]0,\infty[$ および $A \subset \mathbb{R}^d$ に対して次の主張が成り立つ．

(i) $\underline{D}_\mu\nu|_A \le \alpha$ なら，$\nu^*(A) \le \alpha\mu^*(A)$ である．
(ii) $\overline{D}_\mu\nu|_A \ge \alpha$ なら，$\nu^*(A) \ge \alpha\mu^*(A)$ である．

ただし，μ^* と ν^* はそれぞれ μ と ν より定まる外測度である．

証明. (i) 集合 $A \subset \mathbb{R}^d$ は (i) の仮定を満たすとする．$\varepsilon > 0$ を任意に固定すれば，μ^* は Radon 外測度だから，開集合 $U \subset \mathbb{R}^d$ を $A \subset U$ かつ $\mu^*(U) \le \mu^*(A) + \varepsilon$ を満たすように選ぶことができる．

$$\mathscr{F} = \{\overline{B}(x;r) \mid x \in A,\, \overline{B}(x;r) \subset U,\, \nu(\overline{B}(x;r)) \le (\alpha+\varepsilon)\mu(\overline{B}(x;r))\}$$

このとき $\mathscr{F}$ は Vitali-Besicovitch の被覆定理（定理 6.6）の仮定を満たすから，互いに素な閉球からなる部分族 $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$ で

$$\nu^*\left(A \setminus \bigcup \mathscr{B}\right) = 0$$

を満たすようなものがとれる．外測度の劣加法性および単調性に注意すれば，このとき

$$\begin{aligned}
\nu^*(A) &\le \nu^*\left(A \setminus \bigcup \mathscr{B}\right) + \nu^*\left(A \cap \bigcup \mathscr{B}\right) \\
&\le \nu^*\left(\bigcup \mathscr{B}\right) \\
&\le \sum_{B \in \mathscr{B}} \nu(B)
\end{aligned}$$

がわかる．いま $B \in \mathscr{B} \subset \mathscr{F}$ なら

$$\nu(B) \le (\alpha+\varepsilon)\mu(B)$$

が成り立つから，先ほどの不等式より

$$\begin{aligned}
\nu^*(A) &\le \sum_{B \in \mathscr{B}} \nu(B) \\
&\le (\alpha+\varepsilon) \sum_{B \in \mathscr{B}} \mu(B) \\
&= (\alpha+\varepsilon)\mu\left(\bigcup \mathscr{B}\right) \\
&\le (\alpha+\varepsilon)\mu(U) \\
&\le (\alpha+\varepsilon)(\mu^*(A)+\varepsilon)
\end{aligned}$$

という評価を導くことができる．いま $\varepsilon > 0$ は任意に固定したものだったから，これより

$$\nu^*(A) \leq \alpha\mu^*(A)$$

がしたがう．

(ii) 集合 $A \subset \mathbb{R}^d$ は (ii) の仮定を満たすとし，$\varepsilon \in]0, \alpha[$ を任意に固定する．ν^* は Radon 外測度であることに注意して，開集合 $U \subset \mathbb{R}^d$ を $A \subset U$ かつ $\nu^*(U) \leq \nu^*(A) + \varepsilon$ が成り立つことに選ぼう．

$$\mathscr{E} = \{\overline{B}(x;r) \mid x \in A, \overline{B}(x;r) \subset U, \nu(\overline{B}(x;r)) \geq (\alpha - \varepsilon)\mu(\overline{B}(x;r))\}$$

とすれば，Vitali-Besicovitch の被覆定理（定理 6.6）より，互いに素な閉球からなる部分族 $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$ で

$$\mu^*\left(A \setminus \bigcup \mathscr{C}\right) = 0$$

を満たすようなものがとれる．このとき (i) の場合と同様の議論により

$$\begin{aligned}
(\alpha - \varepsilon)\mu^*(A) &\leq (\alpha - \varepsilon) \sum_{B \in \mathscr{C}} \mu(B) \\
&\leq \sum_{B \in \mathscr{C}} \nu(B) \\
&= \nu\left(\bigcup \mathscr{C}\right) \\
&\leq \nu(U) \\
&\leq (\nu^*(A) + \varepsilon)
\end{aligned}$$

という評価を得る．いま $\varepsilon > 0$ は任意に固定したものだったから，これより

$$\alpha\mu^*(A) \leq \nu^*(A)$$

がわかる． □

定理 7.4.
$\mu, \nu \colon \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$ を Radon 測度とする．

(i) μ-a.e. で $\underline{D}_\mu \nu(x) = \overline{D}_\mu \nu(x)$ が成り立つ．
(ii) μ-a.e. で $\overline{D}_\mu \nu(x) < \infty$ が成り立つ．
(iii) 全ての $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ について

$$\int_B (\overline{D}_\mu \nu) d\mu \leq \nu(B) \tag{7.1}$$

が成り立つ．
(iv) $\nu \ll \mu$ なら $(\overline{D}_\mu \nu) \bullet \mu = \nu$ が成り立つ．
(v) $\nu \ll \mu$ が成り立つための必要十分条件は，$\underline{D}_\mu \nu$ が ν-a.e. で有限値をとることである．

証明．(i) の証明． $0 < \alpha < \beta < \infty$ および $r > 0$ に対して，

$$E(\alpha, \beta; r) = \left\{x \in \overline{B}(0;r) \,\middle|\, \underline{D}_\mu \nu(x) < \alpha < \beta < \overline{D}_\mu \nu(x)\right\}$$

と定義する．このとき，補題 7.3 より

$$\nu(E(\alpha,\beta;r)) \leq \alpha\mu(E(\alpha,\beta;r)) \leq \beta\mu(E(\alpha,\beta;r)) \leq \nu(E(\alpha,\beta;r))$$

が成り立つ[*8]．これより

$$\alpha\mu(E(\alpha,\beta;r)) = \beta\mu(E(\alpha,\beta;r))$$

となり，$\alpha < \beta$ という仮定から $\mu(E(\alpha,\beta;r)) = 0$ がわかる．ここで

$$F = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}_{>0}} \bigcup_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{Q}_{>0} \\ \alpha<\beta}} E(\alpha,\beta;r)$$

と定義すれば，E は可算個の零集合の合併なので，E 自身がまた零集合となる．$\mathbb{R}^d \setminus E$ 上では $\overline{D}_\mu\nu = \underline{D}_\mu\nu$ が成り立つので，$\overline{D}_\mu\nu = \underline{D}_\mu\nu$ は μ-a.e. の意味で成立していることがわかった．

(ii) の証明． $r > 0$ および $\alpha > 0$ に対して，

$$F(\alpha;r) = \left\{x \in \overline{B}(0;r) \,\middle|\, \overline{D}_\mu\nu(x) \geq \alpha\right\}$$

と定義する．このとき補題 7.3 と測度の単調性により

$$\alpha\mu(F(\alpha;r)) \leq \nu(F(\alpha;r)) \leq \nu(\overline{B}(0;r)) < \infty$$

が成り立つ．これより得られる

$$\mu(F(\alpha;r)) \leq \frac{\nu(\overline{B}(0;r))}{\alpha}$$

という評価と $\alpha \mapsto F(\alpha;r)$ の単調性に注意すれば，

$$\mu\left(\bigcap_{\alpha>0} F(\alpha;r)\right) = \lim_{\substack{\alpha\to 0 \\ \alpha>0}} \mu(F(\alpha;r)) = 0$$

となることがわかる．

$$F = \bigcup_{r>0}\bigcap_{\alpha>0} F(\alpha;r)$$

とおけば F はまた μ-零集合であり，$\mathbb{R}^d \setminus F$ 上では $\overline{D}_\mu\nu < \infty$ が成り立っている．

(iii) の証明． $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ とし，$\varepsilon > 0$ を任意に固定する．$p \in \mathbb{Z}$ に対して

$$B_p = \left\{x \in B \,\middle|\, (1+\varepsilon)^p \leq \overline{D}_\mu\nu(x) < (1+\varepsilon)^{p+1}\right\}$$

と定義すれば $(B_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ は互いに素な Borel 集合の族であり

$$\left(\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} B_p\right) \cup (\overline{D}_\mu\nu)^{-1}(0) \cup (\overline{D}_\mu\nu)^{-1}(+\infty) = \mathbb{R}^d$$

を満たす．各 B_p 上の積分については，B_p の定義と補題 7.3 により

$$\int_{B_p} (\overline{D}_\mu\nu)d\mu \leq (1+\varepsilon)^{p+1}\mu(B_p) \leq (1+\varepsilon)\nu(B_p)$$

[*8] いま $E(\alpha,\beta;r)$ は Borel 可測であることを注意しておく．

が成り立つ．(i) より $(\overline{D}_\mu\nu)^{-1}(+\infty)$ が零集合になることに注意し，先ほどの積分に関する不等式を足し合わせれば

$$\begin{aligned}\int_B(\overline{D}_\mu\nu)d\mu &= \sum_{p\in\mathbb{Z}}\int_{B_p}(\overline{D}_\mu\nu)d\mu + \int_{\{\overline{D}_\mu\nu=0\}}(\overline{D}_\mu\nu)d\mu \\ &= \sum_{p\in\mathbb{Z}}\int_{B_p}(\overline{D}_\mu\nu)d\mu \\ &\leq (1+\varepsilon)\sum_{p\in\mathbb{Z}}\nu(B_p) \\ &\leq (1+\varepsilon)\nu(B)\end{aligned}$$

となる．いま $\varepsilon>0$ は任意に選んでいたから，(7.1) がしたがう．

(iv) の証明． まずは,

$$\nu\left((\underline{D}_\mu\nu)^{-1}(0)\right)=0$$

が成り立つこと示そう．$\delta>0$ および $r>0$ とすれば，Radon 測度の局所有限性と補題 7.3 により

$$\begin{aligned}\nu\left(B(0;r)\cap\left\{x\in\mathbb{R}^d \,\middle|\, \underline{D}_\mu\nu(x)\leq\delta\right\}\right) &\leq \delta\mu(B(0;r)\cap\left\{x\in\mathbb{R}^d \,\middle|\, \underline{D}_\mu\nu(x)\leq\delta\right\}) \\ &\leq \delta\mu(B(0;r))<\infty\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで δ に関する単調性に注意して極限を考えれば,

$$\nu\left(B(0;r)\cap\left\{x\in\mathbb{R}^d \,\middle|\, \underline{D}_\mu\nu(x)=0\right\}\right)=0$$

がわかる．さらに $r\in\mathbb{N}$ に関する合併をとれば,

$$\nu\left(\underline{D}_\mu\nu)^{-1}(0)\right)\leq\lim_{n\to\infty}\nu\left(B(0;n)\cap\underline{D}_\mu\nu)^{-1}(0)\right)=0$$

を得る．

次に $\underline{D}_\mu\nu<\infty$ が ν-a.e. の意味で成り立つことを確かめておく．定義より明らかに

$$\{x\in\mathbb{R}^d\mid\underline{D}_\mu\nu=\infty\}\subset\{x\in\mathbb{R}^d\mid\overline{D}_\mu\nu=\infty\}$$

であり，(ii) より $\{\overline{D}_\mu\nu=\infty\}$ は μ-零集合なので，$\{\underline{D}_\mu\nu=\infty\}$ も μ-零集合である．さらに，いま $\nu\ll\mu$ を仮定しているから，$\{\underline{D}_\mu\nu=\infty\}$ は ν-零集合であることもわかる．

さて，ここで $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ とし，$\varepsilon\in\,]0,1[$ を任意に固定する．

$$B^p=\left\{x\in\mathbb{R}^d \,\middle|\, (1-\varepsilon)^{p+1}\leq\underline{D}_\mu\nu(x)<(1-\varepsilon)^p\right\}$$

と定義すれば,

$$\left(\bigcup_{p\in\mathbb{Z}}B^p\right)\sqcup(B\cap\underline{D}_\mu\nu)^{-1}(0)\sqcup(B\cap\underline{D}_\mu\nu)^{-1}(+\infty)=\mathbb{R}^d \tag{7.2}$$

が成り立つ．補題 7.3 を用いれば，各 B^p 上の積分については

$$\int_{B^p}\underline{D}_\mu\nu d\mu\geq(1-\varepsilon)^{p+1}\mu(B^p)\geq(1-\varepsilon)\nu(B^p)$$

となっていることがわかる．これらを足し合わせれば，

$$\int_{\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} B^p} \underline{D}_\mu \nu d\mu \geq (1-\varepsilon)\nu\left(\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} B^p\right) \tag{7.3}$$

なる不等式を得る．ここで $(\underline{D}_\mu\nu)^{-1}(0)$ は ν-零集合であり，$(\underline{D}_\mu\nu)^{-1}(+\infty)$ は μ と ν 両方について零集合であったことを思い出そう．これに注意しつつ (7.3) の分解と (7.3) の不等式を用いれば，

$$\int_B \underline{D}_\mu \nu d\mu \geq (1-\varepsilon)\nu(B)$$

という不等式が導かれる．$\varepsilon \in]0,1[$ は任意に選んだものであったから，これより

$$\int_B \underline{D}_\mu \nu d\mu \geq \nu(B) \tag{7.4}$$

がわかる．

最後に (7.4) と (iii)，(i) の結果を合わせれば，全ての $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ について

$$\int_B \overline{D}_\mu \nu d\mu = \nu(B)$$

であることが示される．

(v) の証明． $\nu \ll \mu$ を仮定すれば，(i) と $\underline{D}_\mu\nu \leq \overline{D}_\mu\nu$ という関係から，$\underline{D}_\mu\nu$ ν-a.e. がわかる．

逆に，$\underline{D}_\mu\nu < \infty$ ν-a.e. が成り立っていると仮定しよう．$A \subset \mathbb{R}^d$ は，μ-零集合であるとする．このとき補題 7.3 より，

$$\begin{aligned}\nu^*\left(A \cap \left\{x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \underline{D}_\mu\nu(x) \leq K\right\}\right) &\leq K\mu^*\left(A \cap \left\{x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \underline{D}_\mu\nu(x) \leq K\right\}\right)\\ &\leq K\mu^*(A) = 0\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $K \to \infty$ とすれば

$$\nu^*\left(A \cap \left\{x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \underline{D}_\mu\nu(x) < \infty\right\}\right) = 0$$

がわかる．仮定より $\underline{D}_\mu\nu < \infty$ ν-a.e. であるから，これより

$$\nu^*(A) \leq \nu\left(A \cap \left\{x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \underline{D}_\mu\nu(x) < \infty\right\}\right) + \nu\left(A \cap \left\{x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \underline{D}_\mu\nu(x) = \infty\right\}\right) = 0$$

となり，A は ν-零集合であることが示された．

A は任意に選んだ μ-零集合であったから，以上の議論で $\nu \ll \mu$ の証明ができたことになる． □

定義 7.5.
定理 7.4 より，任意の正値 Radon 測度 μ, ν に対して $\underline{D}_\mu$ と $\overline{D}_\mu\nu$ は μ-a.e. で一致し，有限値をとることがわかる．そこで，Borel 可測関数 $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ で $\overline{D}_\mu\nu$ の μ-バージョンになっているものを $D_\mu\nu$ で表し，ν の μ による微分と呼ぶことにする．

全ての準備が整ったので，Lebesgue の微分定理の Radon 測度バージョンを証明しよう．

定理 7.6.
$\mu\colon \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty]$ を Radon 測度とし，$f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を局所 μ-可積分な μ-可測関数とする．このとき，μ-a.e. $x \in \mathbb{R}^d$ について

$$\lim_{r\to 0, r>0} \frac{1}{\mu(\overline{B}(x;r))} \int_{\overline{B}(x;r)} f\, d\mu = f(x) \tag{7.5}$$

が成り立つ．

証明. まずは $f \geq 0$ かつ f が Borel 可測である場合を考える．測度 $\nu := f \bullet \mu$ に対して定理 7.4 を適用すれば，全ての $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ について

$$\int_B (D_\nu \mu) d\mu = \nu(B) = \int_B f\, d\mu$$

が成り立つ．この等式と可測性より，$D_\nu\mu = f$ μ-a.e. がしたがう．これは (7.5) が成り立つということに他ならない．

f が正の μ-可測関数の場合には，Borel 可測な μ-バージョンをとればよい．f が正とは限らない場合は，f の局所可積分性に注意して $f = f^+ - f^-$ という分解を考えればよい． □

A 弱 L^p 空間

本節では，$(X, \mathscr{A}, \mu)$ を（非負）測度空間とする．測度空間上の可測関数の大きさを測る量としては，L^p ノルムがよく知られている．L^p ノルムは L^p 空間に距離を定め，それにより関数空間において位相の力を借りた解析が可能になる．可測関数の空間に位相を定める方法として，他にも測度収束の位相がある．測度収束の位相は可測関数全体の空間 $L^0(X)$ に位相を定めることが出来る．Chebyshev の不等式より任意の $p \in [0,\infty[$ について

$$t^p \mu(|f| > t) \leq \int_X |f|^p\, d\mu = \|f\|_{L^p}^p \tag{A.1}$$

が成り立つから，L^p 収束は測度収束を導くことがわかる．(A.1) において t について sup をとることで，任意の t について

$$t^p \mu(|f| > t) \leq \sup_{t>0} t^p \mu(|f| > t) \leq \int_X |f|^p\, d\mu = \|f\|_{L^p}^p$$

となることがわかる．したがって，$\sup_{t>0} t^p \mu(|f| > t)$ は可測関数の大きさを測る指標として，$\mu(|f| > t)$ と $\|f\|_{L^p}$ の中間的な性質を持っているだろうと考えられる．

定義 A.1.
可測関数 f に対して，

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{t>0} t \left[\mu(|f| > t)\right]^{1/p}$$

と定義する．$\|f\|_{L^{p,\infty}} < \infty$ なる可測関数全体の空間を $L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu)$ で表し，弱 L^p 空間 (weak L^p

space) という．$p = \infty$ の時は，$L^{\infty,\infty}(X,\mu) = L^{\infty}(X,\mu)$ と定める．

(A.1) より $\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq \|f\|_{L^p}$ であるから，$L^p(X,\mathscr{A},\mu) \subset L^{p,\infty}(X,\mathscr{A},\mu)$ が成り立ち，その包含写像は連続となる．弱 L^p 空間は Lorentz 空間と呼ばれるタイプの空間の特殊なバージョンになっている．弱 L^p 空間について詳しくは，Grafakos [7] や Ziemer [13] などを参照されたい．

$L^0(X)$ 上の作用素 T が $T(L^p(X)) \subset L^q(X)$ を満たすとき，T は強 (p,q)-型 (strong type (p,q)) であるといい，$T(L^p(X)) \subset L^{q,\infty}(X)$ が成り立つとき T は弱 (p,q)-型 (weak type (p,q)) であるという．

Hardy-Littlewood の極大定理を示すために有用な，L^p ノルムの表現を与えておこう．

命題 A.2.
$(X,\mathscr{A},\mu)$ を σ-有限測度空間とする．このとき，

$$\|f\|_{L^p}^p = p\int_0^\infty t^{p-1}\,\mu(|f|>t)\,dt$$

が成り立つ．

命題の仮定における σ-有限性は，Fubini の定理を使うために用いる．

証明. Fubini の定理を用いれば，

$$\begin{aligned}
p\int_0^\infty t^{p-1}\,\mu(|f|>t)\,dt &= p\int_0^\infty t^{p-1}\left(\int_X 1_{\{|f|>t\}}(x)\,\mu(dx)\right)dt \\
&= p\int_X \left(\int_0^\infty t^{p-1}1_{\{|f|>t\}}(x)\,dt\right)\mu(dx) \\
&= p\int_X \left(\int_0^{|f(x)|} t^{p-1}\,dt\right)\mu(dx) \\
&= \int_X |f(x)|^p \mu(dx)
\end{aligned}$$

と計算できる． □

References

[1] Luigi Ambrosio, Nicola Fusco, and Diego Pallara. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000. xviii+434. ISBN: 0-19-850245-1.

[2] Vladimir I. Bogachev. *Measure Theory*. 2 vols. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. DOI: 10.1007/978-3-540-34514-5. URL: http://www.springer.com/us/book/9783540345138.

[3] Lawrence Craig Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, 1992.

[4] Herbert Federer. *Geometric Measure Theory*. Classics in Mathematics. Originally published in 1969 as volume 153 in the series: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996. DOI: 10.1007/978-3-642-62010-2.

[5] Irene Fonseca and Giovanni Leoni. *Modern Methods in the Calculus of Variations. L^p Spaces*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag New York, 2007. DOI: 10.1007/978-0-387-69006-3. URL: http://www.springer.com/jp/book/9780387357843?wt_mc=ThirdParty.SpringerLink.3.EPR653.About_eBook.

[6] Zoltán Füredi and Peter A. Loeb. "On the best constant for the Besicovitch covering theorem". In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 121.4 (1994), pp. 1063–1073. ISSN: 0002-9939. DOI: 10.2307/2161215.

[7] Loukas Grafakos. *Classical Fourier Analysis*. 3rd ed. Graduate Texts in Mathematics 249. Springer-Verlag New York, 2014. DOI: 10.1007/978-1-4939-1194-3.

[8] Steven G. Krantz and Harold R. Parks. *Geometric Integration Theory*. Cornerstones. Birkhäuser Basel, 2008. ISBN: 978-0-8176-4679-0. DOI: 10.1007/978-0-8176-4679-0.

[9] Peter A. Loeb. "On the Besicovitch covering theorem". In: *SUT Journal of Mathematics* 25.1 (1989), pp. 51–55. ISSN: 0916-5746.

[10] Pertti Mattila. *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 44. Cambridge University Press, 1995. DOI: 10.1017/CBO9780511623813.

[11] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. 3rd ed. McGraw-Hill, 1987.

[12] Leon Simon. *Lectures on Geometric Measure Theory*. Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University 3. The Australian National University, Mathematical Sciences Institute, Centre for Mathematics & its Applications, Jan. 1983.

[13] William P. Ziemer. *Weakly Differentiable Functions. Sobolev Spaces and Functions of Bounded Variation*. Graduate Texts in Mathematics 120. Springer-Verlag New York, 1989. DOI: 10.1007/978-1-4612-1015-3. URL: https://www.springer.com/la/book/9780387970172.

索引