# 有界閉区間上での畳み込みに関する注意 Ver.1.1

大阪大学大学院基礎工学研究科
平井祐紀

2020 年 4 月 21 日

更新履歴
2020.4.20 作成
2020.4.21 間違いや誤植をいくつか訂正

## 0　記号・用語

本ノートで使う記号や用語をいくつか用意する．

- $\lambda$ : $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度や，その Borel 集合上への制限.
- $\mathscr{L}^0(E)$ : 可測空間 $(E, \mathscr{E})$ 上の実数値可測関数全体の集合.

## 1　有界閉区間 $[a, b]$ 上の関数の畳み込みの定義

まずは，$\mathbb{R}$ 上の関数の畳み込みを定義する．可測関数 $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して，積分

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\lambda(dt)$$

が定義できるとき，写像 $x \mapsto f * g(x)$ を $f$ と $g$ の畳み込みといい，$f * g$ で定める．

一般に畳み込みは $\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^n$ 全体で定義されるが，和について閉じていない有界区間 $[a, b]$ にも適用できるように，畳み込みの定義を拡張しよう．可測関数 $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ に対して，その $\mathbb{R}$ 上への拡張 $\overline{f}$ を

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$

と定義する．このとき $\overline{f}$ は $\mathbb{R}$ 上の可測関数であり，$f \in L^1[a, b]$ と $\overline{f} \in L^1(\mathbb{R})$ は同値となる．また，平行移動作用素 $\tau_h\colon \mathscr{L}^0(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}^0(\mathbb{R})$ を $\tau_h f(x) = f(x+h)$ によって定める．これらの準備の下，可測関数 $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ に対して $f * g = (\tau_a \overline{f}) * \overline{g}|_{[a,b]}$ と定義し，$f * g$ を $f$ と $g$ の畳み込みと呼ぶことにする．

## 2　基本的な性質

よく知られているように．$\mathbb{R}$ 上の関数の畳み込みでは適当な可積分性のもと $f * g = g * f$ が成り立つ．これは変数変換による計算で確かめることがわかる．同様にして，$[a, b]$ 上の関数についても $f * g = g * f$ が成

り立つことに注意しておく．

**命題 2.1.** $1 \leq p \leq \infty$ とする．$f \in L^p(\mathbb{R})$ かつ $g \in L^1(\mathbb{R})$ とすれば $f * g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は well-defined で，$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$ が成り立つ．特に，$f * g \in L^p(\mathbb{R})$ である．

証明．**Step 1 :** $p < \infty$ **の場合．** $f \in L^p(\mathbb{R})$ かつ $g \in L^1(\mathbb{R})$ が成り立っていると仮定する．$\|g\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0$ ならば命題の主張は明らかなので，$\|g\|_{L^1(\mathbb{R})} > 0$ であるとして示す．$A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$\mu(A) = \int_A \frac{|g(t)|}{\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}} \lambda(dt)$$

と定義すれば，$\mu$ は $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 上の確率測度である．したがって，Jensen の不等式より，

$$\begin{aligned}
\left( \int_{\mathbb{R}} \left| \tau_a f(x-t) \frac{|g(t)|}{\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}} \right| \lambda(dt) \right)^p &= \left( \int_{\mathbb{R}} |\tau_a f(x-t) \mu(dt)| \right)^p \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |\tau_a f(x-t)|^p \mu(dt) \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\tau_a f(x-t)|^p \frac{|g(t)|}{\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}} \lambda(dt)
\end{aligned}$$

が成り立つ．これより，

$$\left( \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)g(t)| \lambda(dt) \right)^p \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}^{p-1} \int_{\mathbb{R}} |\tau_a f(x-t)|^p |g(t)| \lambda(dt) \tag{1}$$

となるので，右辺の積分を調べれば良いことがわかる．いま

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|^p |g(t)| \lambda(dx) \right) \lambda(dt) = \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty$$

であるから，Tonelli の定理により

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|^p |g(t)| \lambda(dt) \right) \lambda(dx) < \infty$$

がわかる．このことと (1) の評価を用いれば，

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)g(t)| \lambda(dt) \right)^p &\leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}^{p-1} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|^p |g(t)| \lambda(dt) \right) \lambda(dx) \\
&= \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}^p \\
&< \infty
\end{aligned}$$

となり，畳み込みが well-defined であることと目的の不等式を得る．

**Step 2 :** $p = \infty$ **の場合．** この場合は，より素朴な評価

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)g(t)| \lambda(dt) \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad \text{for a.a.} x \in \mathbb{R}$$

を用いればよい． □

**系 2.2** ($[a,b]$ 上での Young の不等式)**.** $1 \leq p \leq \infty$ とする．$f \in L^p[a,b]$ かつ $g \in L^1[a,b]$ なら $f * g \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ は well-defined で，$\|f * g\|_{L^p[a,b]} \leq \|f\|_{L^p[a,b]}\|g\|_{L^1[a,b]}$ が成り立つ．特に，$f * g \in L^p[a,b]$ である．

証明．命題 2.1 と $[a,b]$ 上の関数に関する畳み込みの定義より，

$$\|f*g\|_{L^p[a,b]} = \|(\tau_a\overline{f})*\overline{g}\|_{L^p(\mathbb{R})} \le \|\tau_a\overline{f}\|_{L^p(\mathbb{R})}\|\overline{g}\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^p[a,b]}\|g\|_{L^1[a,b]}$$

が成り立つ． □

畳み込みの関数の一方が連続であるような場合に，畳み込みがどうなるかを見てみよう．

**命題 2.3.** $f \in C[a,b]$ かつ $g \in L^1[a,b]$ であるとする．このとき，$f*g \in C[a,b]$ が成り立つ．

証明．$\|f\|_{C[a,b]} > 0$ かつ $\|g\|_{L^1} > 0$ であるとして示せば十分である．始めに，$g \in L^1[a,b]$ かつ $f \in C[a,b]$ なら全ての $x \in [a,b]$ について

$$|(f*g)(x)| \le \|g\|_{L^1[a,b]}\|f\|_{C[a,b]}$$

が成り立つことに注意しておく．$x \in [a,b]$ を固定する．このとき $x+h \in [a,b]$ を満たす任意の $h$ に対して，

$$(f*g)(x+h)-(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \left\{\overline{f}(x+h-t)-\overline{f}(x-t)\right\}\tau_a\overline{g}(t)\,dt \tag{2}$$

が成り立つ．積分区間を分割することで，(2) 右辺の積分を評価してみよう．

$\varepsilon \in ]0,1]$ を任意に固定する．$f$ は $[a,b]$ 上一様連続だから，$\delta_1 > 0$ を以下の条件を満たすように選ぶことができる．

$$y,z \in [a,b] \wedge |y-z| < \delta_1 \implies |f(y)-f(z)| < \frac{\varepsilon}{2\|g\|_{L^1[a,b]}}.$$

また，$g$ の可積分性に注意して，$\delta_2$ を以下の条件を満たすように選ぶ．

$$E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \wedge \lambda(E) < \delta_2 \implies \int_E |\overline{g}|\,d\lambda < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_{C[a,b]}}$$

以下，$h$ は $|h| < \delta_1 \wedge \delta_2$ を満たすものと仮定しよう．

**Case 1**：$x+h-t, x-t \in [a,b]$ **の場合．** この場合は $f$ が良い評価を持つので，それを用いる．$h$ の選び方より

$$\int_{\mathbb{R}} 1_{[x-b,x-a]\cap[x+h-b,x+h-a]}(t)\left\{\overline{f}(x+h-t)-\overline{f}(x-t)\right\}\tau_a\overline{g}(t)\,dt \le \frac{\varepsilon}{2\|g\|_{L^1[a,b]}}\|\overline{g}\|_{L^1(\mathbb{R})} = \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．

**Case 2**：$x+h-t, x-t \notin [a,b]$ **の場合．** この場合はそもそも $\overline{f}$ は $0$ なので，ややこしいことは何も起こらない．関数 $f$ の拡張方法より，

$$\int_{\mathbb{R}} 1_{[x-b,x-a]^c\cap[x+h-b,x+h-a]^c}(t)\left\{\overline{f}(x+h-t)-\overline{f}(x-t)\right\}\tau_a\overline{g}(t)\,dt = 0$$

である．

**Case 3**：$x+h-t, x-t$ **のどちらかのみが** $[a,b]$ **に入っている場合．** この場合は，$f$ 自体にそこまでよい評価はないので，区間の大きさで評価する．集合 $[x-b,x-a]\setminus[x+h-b,x+h-a]$ および $[x+h-b,x+h-a]\setminus[x-b,x-a]$ はともに測度が $|h|$ で評価できることに注意しよう．このとき

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} 1_{[x-b,x-a]\setminus[x+h-b,x+h-a]\cup[x+h-b,x+h-a]\setminus[x-b,x-a]}(t)\left\{\overline{f}(x+h-t)-\overline{f}(x-t)\right\}\tau_a\overline{g}(t)\,dt \\
&\le \|f\|_{C[a,b]}\left(\int_{[x-b,x-a]\setminus[x+h-b,x+h-a]\cup[x+h-b,x+h-a]\setminus[x-b,x-a]} |g(t)|\,dt\right) \\
&\le \|f\|_{C[a,b]} 2\frac{\varepsilon}{4\|f\|_{C[a,b]}} = \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，一つ目の不等号は $\delta_1$ の選び方より，二つ目の不等号は $\delta_2$ の選び方よりわかる．

以上の議論をまとめれば，$x, x+h \in [a,b]$ かつ $|h| < \delta_1 \wedge \delta_2$ ならば

$$|(f*g)(x+h) - (f*g)(x)| \le \varepsilon$$

となることがわかる．したがって，$f*g$ は $[a,b]$ 上で連続である． □

## 3 Riemann-Liouville 積分作用素への応用

Riemann-Liouville 積分作用素を，畳み込みを用いて表現してみよう．Riemann-Liouville 積分作用素は，以下のように定義されるのであった．

$$J_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt. \quad x \in [a,b]$$

ただし，$\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ である．これを畳み込みで書くために，関数 $\varphi_\alpha \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ を以下のように定義する．

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} (x-a)^{\alpha-1} & x \in ]a,b] \\ 0 & x = a \end{cases}$$

よく知られているように，$\varphi_\alpha \in L^1[a,b]$ が成り立つ．この記法を用いれば，十分良い可積分性の下で

$$\begin{aligned} (\varphi_\alpha * f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \tau_a \overline{\varphi_\alpha}(x-t) \overline{f}(t)\, dt \\ &= \int_{[a,b]} \overline{\varphi_\alpha}(x+a-t) f(t)\, dt \\ &= \int_{[a,b]} 1_{[0,\infty[}(x-t) \varphi_\varphi(x+a-t) f(t)\, dt \\ &= \int_{[a,b]} 1_{[a,x]}(t)(x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \end{aligned}$$

計算できる．したがって，$J_a^\alpha f = \varphi_\alpha * f$ という表現が得られた．Riemann-Liouville 積分作用素が畳み込みで得られることがわかったから，これに前節の結果を適用することが可能となる．

**命題 3.1.** $f \in L^1[a,b]$ なら，$J_a^\alpha f \in L^1[a,b]$ となる．

証明．系 2.2 において $p = 1$ と置けばよい． □

**命題 3.2.** $f \in C[a,b]$ ならば，$J_a^\alpha f \in C[a,b]$ が成り立つ．

証明．命題 2.3 より直ちにしたがう． □

## References

[1] Donald L. Cohn. *Measure theory.* 2nd ed. Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher. Birkhäuser, 2013. DOI: 10.1007/978-1-4614-6956-8. URL: https://www.springer.com/la/book/9781461469551.

[2] Emmanuele DiBenedetto. *Real Analysis*. 2nd ed. Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher. Birkhäuser Basel, 2016. DOI: 10.1007/978-1-4939-4005-9. URL: http://www.springer.com/us/book/9781493940035.

[3] Kai Diethelm. *The Analysis of Fractional Differential Equations. An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*. Lecture Notes in Mathematics 2004. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. ISBN: 978-3-642-14574-2. DOI: 10.1007/978-3-642-14574-2.

[4] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2nd ed. John Wiley & Sons, 1999.