抽象 Wiener 空間の基礎事項

大阪大学大学院基礎工学研究科
平井祐紀

2018 年 8 月 29 日

1　抽象 Wiener 空間

抽象 Wiener 空間の基礎事項について簡単にまとめる．一般的な設定で書いてあるわけではないし，一部不必要な仮定もおいてるが，議論を簡潔にするためと思ってご容赦いただきたい．以下，本ノートを通して B は可分 Banach 空間を表すものとする．

定義 1. μ を $(B, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度で，

$$\int \|x\|^2 \mu(dx) < \infty$$

を満たすものとする[*1]．任意の $\varphi \in B^*$ に対して像測度 $\varphi_* \mu$ が $\mathbb{R}$ 上の Gauss 分布となるとき，μ を B 上の Gauss 測度という．

μ が Gauss 測度であるとは，言い換えれば B^* が $(B, \mathscr{B}(B), \mu)$ 上の Gauss 系になるということである．B^* が Gauss 系であるとは，任意の一次結合 $a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n$ がまた Gauss 分布をもつということであった．いま B^* は線形空間なので，この性質は明らかに満たされている．

Gauss 系はその平均と共分散で分布が一意に決定するから，ここでも平均と共分散を調べることが大切になる．φ の平均 $m(\varphi)$，φ と ψ の共分散 $V(\varphi, \psi)$ は以下のように定義されるのであった．

$$m(\varphi) = \int_B \langle \varphi, x \rangle \mu(dx)$$
$$V(\varphi, \psi) = \int_B \langle x - m, \varphi \rangle \langle x - m, \psi \rangle \mu(dx)$$

これらの積分が well-defined であることは，仮定と以下の評価からわかる．

$$\int_B |\langle \varphi, m \rangle| \mu(dx) \le \|\varphi\| \int_B \|x\| \mu(dx) < \infty,$$
$$\int_B |\langle x - m, \varphi \rangle \langle x - m, \psi \rangle| \mu(dx) \le \|\varphi\| \|\psi\| \int_B \|x - m\|^2 \mu(dx) < \infty.$$

このとき V が正値対称形式 $B^* \times B^* \to \mathbb{R}$ を定めることは容易にわかる．また，$\varphi \mapsto m(\varphi)$ は線形写像 $: B^* \to \mathbb{R}$ を定めるが，この写像はある $m \in B$ により表現される．実際

$$m = \int_B x \mu(dx)$$

[*1] この仮定は落とせるが，平均や分散ベクトルに関する議論を簡単にするために導入した．

と定めれば，Bochner 積分の性質からそれは

$$\langle \varphi, m\rangle = \left\langle \varphi, \int_B x\mu(dx)\right\rangle = \int_B \langle \varphi, x\rangle \mu(dx)$$

という関係式を満たす．したがって m から定まる B^{**} の元は線形写像 $\varphi \mapsto m(\varphi)$ と一致する．$\mathbb{R}^n$ 上の Gauss 測度が特性関数の形により特徴づけられたように，B 上の Gauss 測度も特性汎関数の形で特徴づけることが可能である．

命題 2. μ を $(B, \mathscr{B}(B))$ 上の確率測度で，

$$\int \|x\|^2 \mu(dx) < \infty$$

を満たすものとする．このとき，次の 2 条件は同値である．

(i) μ は Gauss 測度である．

(ii) $m \in B$ と正値対称形式 V によって，特性汎関数が

$$\widehat{\mu}(\varphi) = \int_B e^{i\langle \varphi, x\rangle}\mu(dx) = \exp\left(i\langle \varphi, m\rangle - \frac{1}{2}V(\varphi, \varphi)\right), \quad \varphi \in B^*$$

と表現される．

以上の条件が成り立つとき，(ii) における m と V は Gauss 分布 μ の平均，共分散と一致する．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii)．μ を Gauss 測度とし，$m \in B$ を平均，$V\colon B^* \times B^* \to \mathbb{R}$ を共分散とする．$\varphi \in B^*$ に対して Gauss 測度 $\varphi_*\mu$ の平均を m_φ，分散を V_φ と表せば，

$$m_\varphi = \int_{\mathbb{R}} y\varphi_*\mu(dy) = \int_B \varphi(x)\mu(dx) = \langle \varphi, m\rangle$$
$$V_\varphi = \int_{\mathbb{R}} (y - m_\varphi)^2 \varphi_*\mu(dy) = \int_{\mathbb{R}} |\langle \varphi, x - m\rangle|^2 \mu(dx) = V(\varphi, \varphi)$$

が成り立つ．一次元 Gauss 分布 $\varphi_*\mu$ の特性関数は

$$\widehat{\varphi_*\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi y}\varphi_*\mu(dy) = \exp\left(i\xi m_\varphi - \frac{1}{2}\xi^2 V_\varphi\right)$$

と具体的に表現されるから，任意の φ に対して

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}(\varphi) &= \int_B e^{i\langle \varphi, x\rangle}\mu(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{iy}\varphi_*\mu(dy) \\
&= \widehat{\varphi_*\mu}(1) \\
&= \exp\left(im_\varphi - \frac{1}{2}V_\varphi\right) \\
&= \exp\left(i\langle \varphi, m\rangle - \frac{1}{2}V(\varphi, \varphi)\right)
\end{aligned}$$

となる．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．$\varphi \in B^*$ とすれば，

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi_*\mu}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi y} \varphi_*\mu(dy) \\
&= \int_B e^{i\xi\langle\varphi,x\rangle} \mu(dx) \\
&= \int_B e^{i\langle\xi\varphi,x\rangle} \mu(dx) \\
&= \widehat{\mu}(\xi\varphi) \\
&= \exp\left(i\langle\xi\varphi, m\rangle - \frac{1}{2} V(\xi\varphi, \xi\varphi) \right) \\
&= \exp\left(i\xi\langle\varphi, m\rangle - \frac{1}{2} \xi^2 V(\varphi, \varphi) \right)
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって $\varphi_*\mu$ は平均 $\langle\varphi, m\rangle$，分散 $V(\varphi,\varphi)$ の一次元 Gauss 分布である．$\varphi_*\mu$ の平均，分散を具体的に計算すると

$$\begin{aligned}
\langle\varphi, m\rangle &= \int_{\mathbb{R}} y\varphi_*\mu(dy) = \int_{\mathbb{R}} \langle\varphi, x\rangle\mu(dx), \\
V(\varphi,\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} (y - \langle\varphi, m\rangle)^2 \varphi_*\mu(dy) = \int_{\mathbb{R}} |\langle\varphi, x - m\rangle|^2 \mu(dx)
\end{aligned}$$

二つ目の式を見れば V が実際に μ の共分散であることがわかる．また，Bochner 積分の特徴付けを思い出せば，一つ目の式から m が μ の平均ベクトルであることもわかる．□

抽象 Wiener 空間は，Gauss 測度をもつ確率空間 $(B, \mathscr{B}(B), \mu)$ に少しばかりの付加構造を与えた空間である．

定義 3. B を可分 Banach 空間，μ をその上の Gauss 測度とする．さらにある可分 Hilert 空間 H が B に連続に埋め込まれていて，H は B の位相で B 内で稠密であるとする．任意の $\varphi \in B^*$ に対して

$$\widehat{\mu}(\varphi) = \int_B e^{i\langle\varphi,x\rangle}\mu(dx) = \exp\left(-\frac{1}{2}\|\varphi\|_{H^*}^2\right) \tag{1}$$

が成り立つとき，(B, H, μ) を抽象 Wiener 空間という．

定義 3 における Hilbert 空間 H は，Cameron-Martin 部分空間や再生核 Hilbert 空間などと呼ばれることがある．(1) を見てわかることは，μ は平均が 0 の Gauss 測度であることと，さらに分散 $V(\varphi,\varphi)$ が H^* のノルムよって表現されているということである．(1) の表現が意味をもつためには $\varphi \in B^*$ を何らかの意味で H^* の元と見なせなければならない．このことを証明しよう．

補題 4. B を可分 Banach 空間とし，可分 Hilert 空間 H は連続かつ稠密に B に連続に埋め込まれているとする．このとき，連続かつ稠密な埋め込み $B^* \to H^*$ が存在する．

証明．まずは，埋め込み写像 $B^* \hookrightarrow H^*$ を構成しよう．$\iota\colon H \hookrightarrow B$ でもとの埋め込みを表せば，それにより写像

$$\begin{aligned}
\iota^*\colon B^* &\longrightarrow H^* \\
\varphi &\longmapsto \varphi \circ \iota
\end{aligned}$$

が定まる．この写像が連続線形写像であることはノルム空間の一般論からわかる．$\iota^*\varphi = \iota^*\psi$ と仮定すれば $\varphi|_{\iota H} = \psi|_{\iota H}$ なので，$\iota(H)$ の稠密性より $\varphi = \psi$ がわかる[*2]．よって ι^* は単射であり，連続な埋め込みでることがわかった．最後に $\iota^* B^*$ の H^* における稠密性を示そう．H^* の Hilbert 空間としての構造に注目すれば，$i^* B^*$ の H^* における直交補空間が $\{0\}$ であることを示せばよい．$j\colon H \to H^*$ を Riesz の表現定理で現れる標準的な等長同型写像とする．$f \in H^*$ は，任意の $h \in \iota B^*$ に対して $\langle f, h\rangle_{H^*}$ を満たすと仮定する．このとき，$j^{-1}f \in H \hookrightarrow B$ が B の元として 0 であることを示せばよい．より具体的には，すべての $\varphi \in B^*$ に対して $\varphi(\iota j^{-1} f) = 0$ が成り立つことを確かめればよい．$\varphi \in B^*$ とすれば，

$$\varphi(\iota j^{-1} f) = (\varphi \circ \iota)(j^{-1} f) = \langle j^{-1}(\varphi \circ \iota), j^{-1} f\rangle_H = \langle \varphi \circ \iota, f\rangle_{H^*} = 0$$

が成立．よって $\iota j^{-1} f \in B$ は 0 であり，$j^{-1} f \in H$ も 0 である．□

余談だが，このノートを書いた主な目的は補題 4 の証明である．重川先生の本を眺めていた時に自明なことのように書いていたが，正直自分にはよくわからなかったので証明をきちんと与えることにした．

これ以降，ιH や $\iota^* B^*$ を H や B^* と完全に同一視し，同じ記号を用いて表すことにする．1 次の Wiener 積分の概念を導入しよう．$\varphi \in B^*$ は

$$\int_B |\varphi(x)|^2 \mu(dx) \le \|\varphi\|_{B^*}^2 \int_B \|x\|_B^2 \mu(dx) \tag{2}$$

を見たすから，$\varphi \in L^2(\mu)$ である．この包含写像を $I_1\colon B^* \to L^2(\mu)$ で表す．(2) より，I_1 は B^* のノルムに関して連続な埋め込みになっていることがわかる．補題 4 より B^* は H^* の部分空間と思えたから，この写像 I_1 の H^* のノルムに関する連続性を調べよう．抽象 Wiener 空間の定義と Gauss 測度の特徴づけより，

$$\int_B |\varphi(x)|^2 \mu(dx) = V(\varphi, \varphi) = \|\varphi\|_{H^*}^2$$

が成り立つ．この式の意味するところは，$I_1\colon B^* \to L^2(\mu)$ はノルム $\|\ \ \|_{H^*}$ に関して等長写像であるということである．したがって，B^* は H^* に稠密に埋め込まれていたから，I_1 は H^* 上に一意的に拡張できる．この $I_1\colon H^* \to L^2(\mu)$ を一次の Wiener 積分と呼ぶ．ここで重要なのは，$h \in H^*$ は H 上の連続線形写像ではあるが，あくまで H のノルムに関して連続なだけで，それ自体を自然に B 上の可測関数拡張できるかはわからないということである．したがって h の積分は一般には定義できない．ところが，この I_1 を通すことで h を $L^2(\mu)$ の元と対応させることができるのである．

例 5 (古典 Wiener 空間)**.** $C_0([0,T], \mathbb{R}^d)$ を連続関数の空間で，$w(0) = 0$ を満たすもの全体の集合とする．$B = C_0([0,T], \mathbb{R}^d)$ とおけば，これは sup ノルムにより可分 Banach 空間となる．μ を $C_0([0,T], \mathbb{R}^d)$ 上の Wiener 測度とし，

$$H = \{h \in B \mid h' \in L^2([0,T]; \mathbb{R}^d)\},$$
$$\langle h, k\rangle_H = \int_0^T \langle h'(s), k'(s)\rangle_{\mathbb{R}^d} ds.$$

と定義する．このとき $\langle\ ,\ \rangle_H$ は H 上の内積を定め[*3]，H は Hilbert 空間となる．これにより (B, H, μ) は抽象 Wiener 空間となる．

[*2] ここは位相空間的な問題であり，Hausdorff 空間への連続写像が稠密部分空間上で一致すれば，全体でも一致する，という事実からの帰結である．

[*3] $h(0) = 0$ なので，h はその微分だけで完全に決まる．

上の例おいて，$H \hookrightarrow B$ が連続な埋め込みであることは

$$\|h\|_B = \sup_{t\in[0,T]} \left\| \int_0^t h'(s)\,ds \right\|_{\mathbb{R}^d} \le \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t \|h'(s)\|_{\mathbb{R}^d}\,ds = \|h\|_H$$

という不等式からわかる．この設定で，一次 Wiener 積分がどのようなものになるか見てみよう．B^* は $C_0([0,T],\mathbb{R}^d)$ の双対空間なので，ベクトル値測度の空間と同一視される．$\varphi \in B^*$ に対応する測度を ν_φ で表し，F_φ をその分布関数とする．このとき，部分積分公式より

$$\int_0^T w(s)\nu_\varphi(ds) = \int_0^T \{F_\varphi(T) - F_\varphi(t)\}\,dw(t) = \int_0^T \nu_\varphi(]t,T])dw(t)$$

が成り立つ．ただし，右辺は Wiener 積分と解釈する．ここで

$$h_\varphi(t) = \int_0^t \nu_\varphi(]s,T])ds$$

と定義すれば $h_\varphi \in H$ であり，

$$I_1(\varphi)(w) = \langle \varphi, w \rangle = \int_0^T h'_\varphi(s)dw(s)$$

となる．したがって，$\varphi \in B^*$ は（伊藤の意味での）Wiener 積分と考えることができる．伊藤積分の等長性より

$$\int_B \langle \varphi, w \rangle^2 \mu(dw) = \|I_1(\varphi)\|_{L^2(\mu)} = \left(\int_0^T \|h'_\varphi(s)\|^2_{\mathbb{R}^d} ds \right)^{1/2} = \|h_\varphi\|_H$$

が成り立つ．これは抽象 Wiener 空間における分散の構造を表している式とも同じものなので，古典 Wiener 空間の枠組みにおいては (1) とは伊藤積分の等長性を表す式であったと考えることができる．いま I_1 は実際に Wiener 積分で表されることがわかっているから，$h \in H^* \simeq H$ の場合も a.s. に

$$I_1(h)(w) = \int_0^T h'(s)dw(s)$$

が成り立っている．

References

[1] Vladimir I Bogachev. *Gaussian Measures*. Mathematical Surveys and Monographs 62. American Mathematical Society, 1998. DOI: http://dx.doi.org.remote.library.osaka-u.ac.jp/10.1090/surv/062. URL: http://bookstore.ams.org/surv-62/.

[2] 日合 文雄 and 柳 研二郎. ヒルベルト空間と線形作用素. 牧野書店, 1995.

[3] Ichiro Shigekawa. *Stochastic Analysis*. Translations of Mathematical Monographs 224. American Mathematical Society, 2004.

[4] 渡辺 信三，重川 一郎, ed. 確率論ハンドブック. 丸善出版, 2012.