Markov 過程入門 Ver.1.1

平井祐紀

2021 年 4 月 2 日

編集履歴

2018/09/30 ひとまず完成

2021/04/02 誤植を訂正．定理 5.1 の証明を少し修正．

概要

Markov 過程の基礎事項を，特に Feller 過程に重点をおいてまとめた．マルチンゲール理論と確率解析の基礎的な知識を仮定する．

目次

目次 1

0 記号・用語 2

1 推移関数と Markov 過程 3

2 Feller 過程 13

3 Feller 過程のパスの性質 20

4 フィルトレーションの完備化 24

5 強 Markov 性 31

6 準左連続性と Hunt 過程 34

A 数学的な補足 39

A.1 測度の正則性 . . . 39

A.2 Kolmogorov の拡張定理 . . . 42

A.3 位相空間と可測性についての補足 . . . 44

B 文献紹介 50

References 52

索引 54

0　記号・用語

いくつか記号を用意する．

- 測度空間 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 上の可測関数 f の積分を
$$\int_X f(x)\mu(dx), \quad \int_X \mu(dx)f(x), \quad \int_X f d\mu, \quad \int_X d\mu f, \quad \mu(f), \quad \langle \mu, f \rangle$$
などで表す．
- $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ が確率空間の時は，可測関数 $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ の積分（期待値）を特に $E[X]$ や $E_P[X]$ などで表す．
- $(\Omega, \mathscr{F})$ 上の確率測度全体の空間を $\mathscr{P}(\Omega, \mathscr{F})$ や $\mathscr{P}(\mathscr{F})$ で表す．
- 測度空間 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ と可測空間 $(E, \mathscr{E})$ と可測関数 $f\colon X \to E$ 与えられたとき，f によって誘導される測度 $\mathscr{E} \ni B \mapsto \mu(f^{-1}(E))$ を $f_*\mu$ で表す．この測度を f の像測度や分布という．この対応により写像 $f_*\colon \mathscr{P}(X, \mathscr{A}) \to \mathscr{P}(E, \mathscr{E})$ が定まる．
- 確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の確率過程 X によって生成されるフィルトレーション $(\sigma(X_s; 0 \leq s \leq t))_{t \in [0,\infty[}$ を $\mathbb{F}(X) = (\mathscr{F}_t(X))_{t \in [0,\infty[}$ で表す．
- 確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ と部分 σ-代数 $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ に対して，$\mathscr{G}$ の $(\mathscr{F}, P)$-完備化を
$$\begin{aligned} \mathscr{G}^{(\mathscr{F},P)} &= \mathscr{G} \vee \{A \subset X \mid \exists N \in \mathscr{F},\ A \subset N \text{ and } P(N) = 0\} \\ &= \{A \subset X \mid \exists B \in \mathscr{G},\ \exists N \in \mathscr{F},\ A \triangle B \subset N \text{ and } P(N) = 0\} \end{aligned}$$
によって定める．$\mathscr{F}$ の $(\mathscr{F}, P)$-完備化は $\mathscr{F}$ の P による完備化でありこれを $\mathscr{F}^P$ で表す．明らかに $\mathscr{G}^P \subset \mathscr{G}^{(\mathscr{F},P)}$ である．
- $\mathscr{F}$ 上の確率測度の族 $\mathscr{Q}$ が与えられたとき，$\mathscr{G}$ の $(\mathscr{F}, \mathscr{Q})$-完備化を以下で定める．
$$\mathscr{G}^{(\mathscr{F},\mathscr{Q})} = \bigcap_{P \in \mathscr{Q}} \mathscr{G}^{(\mathscr{F},P)}$$
$\mathscr{Q} = \mathscr{P}(\Omega, \mathscr{F})$ の時は特に単に $\mathscr{G}^{\mathscr{P}(\mathscr{F})}$ と書き，これを $\mathscr{G}$ の普遍完備化という．
- フィルトレーション $\mathbb{F}$ の右連続化を $\mathbb{F}_+$ で表す．
- フィルトレーション $\mathbb{F}$ の $(\mathscr{F}, P)$ 完備化を $\mathbb{F}^{(\mathscr{F},P)} := \left(\mathscr{F}_t^{(\mathscr{F},P)}\right)_{t \in [0,\infty[}$ で表す．
- ノルム空間 E から F への連続線形写像全体を $\mathscr{L}(E, F)$ で表す．$E = F$ のときは，特に $\mathscr{L}(E)$ と書く．
- 可測空間 $(X, \mathscr{A})$ と $(Y, \mathscr{B})$ が与えられたとき，可測関数 $X \to Y$ 全体の集合を $\mathscr{L}^0(X, Y)$ で表す．連続線形写像の空間と紛らわしいの注意されたい．
- 位相空間 E 上の Borel 確率測度全体を $\mathscr{P}(E)$ で表す．

1　推移関数と Markov 過程

まずは，Markov 過程を構成する際に重要な推移関数の概念を導入する．

定義 1.1. $(E,\mathscr{E})$ を可測空間とする．写像 $N\colon E\times\mathscr{E}\to[0,\infty]$ が次の条件を満たすとき，N を E 上の核 (kernel) という．

(i) 任意の $x\in E$ に対して，$A\mapsto N(x,E)$ は $\mathscr{E}$ 上の測度である．
(ii) 任意の $A\in\mathscr{E}$ に対して，$x\mapsto N(x,E)$ は $\mathscr{E}$-可測である．

E 上の核 π が任意の x で $\pi(x,E)=1$ を満たすとき，π は特に推移確率 (transition probability) とよばれる．

N を $(E,\mathscr{E})$ 上の核とする．$f\in\mathscr{E}_+=\{f\colon E\to\mathbb{R}\mid f\geq 0\}$ に対して，

$$(Nf)(x):=\int_E N(x,dy)(f(y))$$

と定義すれば，これは写像 $\mathscr{E}_+\ni f\mapsto Nf\in\mathscr{E}_+$ を定める．M, N が E 上の核であるとき，

$$MN(x,A):=\int_E M(dy,x)N(y,A)=(MN(\cdot,A))(x)$$

と定義すれば，MN はまた E 上の核となる*1．

ここからは，Markov 過程の満たすべき条件を明らかにし，Markov 過程を定義することを試みよう．適当な確率空間 $(\Omega,\mathscr{F}.P)$ 上の確率過程 X と，それに付随する推移確率族 $(P_{s,t};0\leq s<t)$ で，次の条件を満たすものを考える．

$$P[\,X_t\in A\mid\mathscr{F}_s(X)\,]=P_{s,t}(X_s,A)\quad P\text{-a.s.}$$

唐突に出てきたこの条件だが，これの意味を考えてみよう．左辺の表しているものは，（気持ちは）パス ω の s までの挙動が与えられてもとでの，X_t が A にいる条件付き確率である*2．一方，右辺の表しているものは X_s から出発した確率過程が時刻 t で A にいる確率である．左辺と右辺が等しいということは，s までのパス全体によるはずのものが，実は時刻 s での位置にしかよらないということで，この条件を Markov 性という．Markov 性とは，大雑把に言えば大変忘れっぽいというような意味である．この条件のもの（正則）条件付き確率による積分と，核による非負可測関数への作用を考えることにより

$$E[f(X_t)|\mathscr{F}_s(X)]=(P_{s,t}f)(X_s)=\int_\Omega P_{s,t}(x,dy)f(y)\Big|_{x=X_s}$$

なる関係式が得られる．さらに $s<t<u$ が与えられたとき，

$$\begin{aligned}P_{s,u}(X_s,A)&=P\left[X_u\in A\mid\mathscr{F}_s(X)\right]\\&=E\left[E\left[1_{\{X_u\in A\}}\mid\mathscr{F}_t(X)\right]\mid\mathscr{F}_s(X)\right]\\&=E\left[P_{t,u}(X_t,A)\mid\mathscr{F}_s(X)\right]\\&=\int_\Omega P_{s,t}(x,dy)(P_{t,u}(y,A))\Big|_{x=X_s}\\&=(P_{s,t}P_{t,u})(X_s,A)\end{aligned}$$

*1 ここで積分を $\int d\mu f$ のように書いているのは，このほうが核 N を作用素と見るとこのほうが自然だからである．
*2 「気持ちは」といったのは，もちろん左辺の条件付き確率は pathwise に定義されるものではないからである．

となる．これより，このような確率過程に付随する推移関数族は $P_{s,u}=P_{s,t}P_{t,u}$ を満たすと考えられる．逆に，このような推移関数が与えられたときにそこに付随する Markov 過程を考えることが出来るかについて考えるのが，本節の主な目的である．

定義 1.2. $(E,\mathscr{E})$ を可測空間とし，$(P_{s,t};0\leq s<t)$ を E 上の推移確率の族とする．任意の $0\leq s<t<u$ に対して

$$P_{s,u}(x,A)=(P_{s,t}P_{t,u})(x,A):=\int_E P_{s,t}(x,dy)P_{t,u}(y,A)\quad \forall x\in E,\ \forall A\in\mathscr{E}$$

が成り立つとき, $(P_{s,t})$ を $(E,\mathscr{E})$ 上の推移関数 (transition function) という．この関係式のことを, Chapman-Kolmogorov の等式 (Chapman-Kolmogorov equation) という．

推移関数が任意の $s<t$ に対して $P_{s,t}=P_{0,t-s}$ を満たすとき（時間）斉次的 (homogeneous) であるという．推移関数が時間斉次的であるときは，特に $P_t:=P_{0,t}$ と表記する．このときは Chapman-Kolmogorov の等式は

$$P_{s+t}(x,A)=(P_sP_t)(x,A):=\int_E P_s(x,dy)P_t(y,A)\quad \forall x\in E,\ \forall A\in\mathscr{E}$$

となる．

Chapman-Kolmogorov の等式は，作用素の言葉で言えば次のようになる

$$P_{s,u}f(x)=P_{s,t}P_{t,u}f(x)$$

推移関数の概念を用いて，Markov 過程の最初の定義を行う[*3]．

定義 1.3. $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{G}_t)_{t\in[0,\infty[},Q)$ をフィルター付き確率空間，X を E 値適合過程とする．X に付随する推移関数族 $(P_{s,t};0\leq s<t)$ が与えられていて，任意の $f\in\mathscr{E}_+$ と任意の $0\leq s<t$ に対して

$$E_Q\left[f(X_t)|\mathscr{G}_s\right]=(P_{s,t}f)(X_s),\quad Q\text{-a.s.} \tag{1.1}$$

なる関係式が成り立っているとしよう．このとき X は推移関数 $(P_{s,t})$ をもつ $(\mathscr{G}_t)$ に関する Markov 過程 (Markov process) であるという．X_0 の像測度 $(X_0)_*Q$ を X の初期分布 (initial distribution) という．

推移関数が時間斉次的である場合には，Markov 過程の満たすべき条件式は

$$E_Q\left[f(X_t)|\mathscr{G}_s\right]=(P_{t-s}f)(X_s),\quad Q\text{-a.s.}$$

となる．X がフィルトレーション $(\mathscr{G}_t)$ について Markov 過程ならば，それは $(\mathscr{F}_t(X))$ についても Markov 過程である．実際，(1.1) において両辺を $\mathscr{F}_s(X)$ で条件づければわかる．

推移関数が存在したときにそれにともなう Markov 過程が存在するのはいかなる場合であろうか？それを調べるために，確率過程にともなう推移関数について条件 (1.1) と同値な条件を与えよう．

命題 1.4. $(\Omega,\mathscr{F},P)$ を確率空間，$(E,\mathscr{E})$ を可測空間とし，E 値確率過程 $X=(X_t)$ と E 上の推移関数族 $(P_{s,t})$ が与えられているとする．X が推移関数 $(P_{s,t})$ と初期分布 ν を伴った，$(\mathscr{F}_t(X))$ に関する Markov 過

[*3] 最初のということは，あとで違うバージョンも出てくるということである．

程であるための必要十分条件は，任意の $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ と $f_0, \ldots, f_n \in \mathscr{E}_+$ に対して

$$E\left[\prod_{1\le i\le n} f_i(X_{t_i})\right] = \int_E \nu(dx_0) f_0(x_0) \int_E P_{t_0,t_1}(x_0, dx_1) f_1(x_1) \cdots \int_E P_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1}, dx_n) f_n(x_n) \tag{1.2}$$

が成り立つことである．

証明．**必要性の証明．** X は推移関数 $(P_{s,t})$ と初期分布 ν をもつ Markov 過程であるとする．このとき

$$\begin{aligned}
&E\left[\prod_{1\le i\le n} f_i(X_{t_i})\right] \\
&= E\left[E\left[\prod_{1\le i\le n} f_i(X_{t_i})\middle|\mathscr{F}_{t_{n-1}}(X)\right]\right] \\
&= E\left[\prod_{1\le i\le n-1} f_i(X_{t_i}) E\left[f_n(X_{t_n})\middle|\mathscr{F}_{t_{n-1}}(X)\right]\right] \\
&= E\left[\prod_{1\le i\le n-1} f_i(X_{t_i}) P_{t_{n-1},t_n} f_n(X_{t_{n-1}})\right] \\
&= E\left[\prod_{1\le i\le n-2} f_i(X_{t_i}) E\left[f_{n-1}(X_{t_{n-1}}) P_{t_{n-1},t_n} f_n(X_{t_{n-1}})\middle|\mathscr{F}_{t_{n-2}}(X)\right]\right] \\
&= E\left[\prod_{1\le i\le n-2} f_i(X_{t_i}) P_{t_{n-2},t_{n-1}}\left(f_{n-1} P_{t_{n-1},t_n} f_n\right)(X_{t_{n-2}})\right] \\
&= \cdots \\
&= E\left[f(X_0) P_{t_0,t_1}(f_1 P_{t_1,t_2} f_2 \ldots P_{t_{n-1},t_n} f_n)(X_0)\right] \\
&= \int_E \nu(dx_0) f(x_0) P_{t_0,t_1}(f_1 P_{t_1,t_2} f_2 \ldots P_{t_{n-1},t_n} f_n)(x_0) \\
&= \int_E \nu(dx_0) f_0(x_0) \int_E P_{t_0,t_1}(x_0, dx_1) f_1(x_1) \cdots \int_E P_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1}, dx_n) f_n(x_n)
\end{aligned}$$

となり，(1.2) が成り立つ．

十分性の証明． X と推移関数は (1.2) を満たすと仮定する．$t > s \ge 0$ とする．$s = 0$ のとき，過程より任意の $A \in \mathscr{E}$ と $f \in \mathscr{E}_+$ に対して

$$\begin{aligned}
E[1_A(X_0) f(X_t)] &= \int_E \nu(dx_0) 1_A(x_0) \int_E P_{0,t}(x_0, dy) f(y) \\
&= \int_E \nu(dx_0) 1_A(x_0) P_{0,t} f(x_0) \\
&= E[1_A(X_0) P_{0,t} f(X_0)]
\end{aligned}$$

が成り立つ．これは

$$E[f(X_t)|\mathscr{F}_0(X)] = E[f(X_t)|X_0] = P_{0,t} f(X_0), \quad P\text{-a.s.}$$

が成り立つということに他ならない．

次に $0 < s < t$ の場合を考える．このとき，仮定より任意の $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = s < t$ と $f_0, \ldots, f_n, g \in \mathscr{E}_+$ に対して

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left(\prod_{0\le i\le n} f_i(X_{t_i})\right) g(X_t)\right] \\
&= \int_E \nu(dx_0) f_0(x_0) \int_E P_{t_0,t_1}(x_0, dx_1) f_1(x_1) \cdots \int_E P_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1}, dx_n) f_n(x_n) \int_E P_{t_n,t}(x_n, dy) g(y) \\
&= \int_E \nu(dx_0) f_0(x_0) \int_E P_{t_0,t_1}(x_0, dx_1) f_1(x_1) \cdots \int_E P_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1}, dx_n) f_n(x_n) (P_{t_n,t} g)(x_n) \\
&= E\left[\left(\prod_{0\le i\le n-1} f_i(X_{t_i})\right) \{f_n(X_{t_n}) P_{t_n,t} g(X_{t_n})\}\right] \\
&= E\left[\left(\prod_{0\le i\le n} f_i(X_{t_i})\right) P_{s,t} g(X_s)\right]
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで π-λ 定理を用いれば，任意の $A \in \sigma(X_{t_0,\ldots,X_{t_n}})$ に対して

$$E\left[1_A g(X_t)\right] = E\left[1_A P_{s,t} g(X_s)\right]$$

となる．ここで

$$\mathscr{C} = \bigcup_{\substack{n\ge 1 \\ 0=t_0<\cdots<t_n=s}} \sigma(X_{t_0}, \ldots, X_{t_n})$$

とおけば，ここまでの議論により任意の $A \in \mathscr{C}$ に対して

$$E\left[1_A g(X_t)\right] = E\left[1_A P_{s,t} g(X_s)\right]$$

が成立することまでわかる．$\mathscr{F}_s$ は π 系 $\mathscr{C}$ によって生成されるから，π-λ 定理により

$$E\left[1_A g(X_t)\right] = E\left[1_A P_{s,t} g(X_s)\right], \quad A \in \mathscr{F}_s$$

が分かる．すなわち

$$E[g(X_t) | \mathscr{F}_s] = P_{s,t}(X_s), \quad P\text{-a.s.}$$

が成立する．以上の議論により X は推移確率 $P_{s,t}$ をもつ Markov 過程であることが確かめられた．

あとは X の初期分布 $(X_0)_* P$ が ν であることを示せばよいが，これは適当に選んだ $t > 0$ と $f = 1$（定数関数）をとれば，$A \in \mathscr{E}$ に対して

$$(X_0)_* P(A) = E[1_A(X_0) f(X_t)] = \int_E \nu(dx) 1_A(x) \int_E P(x, dy) f(y) = \int_E \nu(dx) 1_A(x) = \nu(A)$$

となることからわかる． □

Markov 性の特徴づけを与えたところで，Markov 過程の構成問題を考えよう．構成の方針は推移関数族と初期分布によって有限次元分布を定め，Kolmogorov の拡張定理によってパス空間上に測度を誘導するということである．そのためには状態空間 $(E, \mathscr{E})$ を任意の可測空間とするわけにはいかず，一定の条件を課す必要がある．

定理 1.5. E をポーランド空間，$\mathscr{E} = \mathscr{B}(E)$ とし，$(E, \mathscr{E})$ 上の推移関数 $(P_{s,t}; 0 \le s < t)$ が与えられているとする．X_t を座標関数 $E^{[0,\infty[} \ni \omega \to \omega(t) \in E$ とし，$(E, \mathscr{E})$ 上の任意の確率測度 ν とする．このとき $(E^{[0,\infty[}, \mathscr{E}^{\otimes[0,\infty[})$ 上の確率測度 P_ν で，X が推移関数 $P_{s,t}$ と初期分布 ν をもつ，$(\mathscr{F}_t(X))_{t\in[0,\infty[}$ に関する Markov 過程となるようなものが，ただ一つ存在する．

証明. $\Lambda \subset [0, \infty[$ を有限集合とする．$0 \in \Lambda$ のときは Λ の元を $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ と並べて，$A \in \mathscr{E}^{\otimes n+1}$

$$P_\Lambda(A) = \int_E \nu(dx_0) \int_E P_{0,t_1}(x_0, dx_1) \cdots \int_E P_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1}, dx_n) 1_A(x_0, \dots, x_n)$$

とする．Λ が 0 を含まないときは，$A \in \mathscr{E}^{\otimes\Lambda}$ に対して $P_\Lambda(A) = P_{\{0\}\cup\Lambda}(E \times A)$ と定める．また，これによって確率空間の族 $(E^\Lambda, \mathscr{E}^{\otimes\Lambda}, P_\Lambda)$ が定まる．この族が，Kolmogrov の拡張定理の意味での整合性条件を満たすことを確かめよう．有限集合 $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset [0, \infty[$ に対して，$\pi_{\Lambda_1,\Lambda_2}$ で標準射影 $E^{\Lambda_2} \to E^{\Lambda_1}$ を表すことにする[*4]．P_Λ の定義より，Λ_1, Λ_2 はともに 0 を含むとして示せば十分である．

まずは $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ が 1 点集合である場合を考える．Λ_2 の元を $t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1}$ と表し，$\{t_i\} = \Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ であるとする．このとき，Chapman-Kolmogorov の等式より

$$\begin{aligned}
&P_{\Lambda_2}(A_0 \times \cdots \times A_{i-1} \times E \times A_{i+1} \times \cdots \times A_{n+1}) \\
&= \int_E \nu(dx_0) \int_E P_{0,t_1}(x_0, dx_1) \cdots \int_E P_{t_n,t_{n+1}}(x_n, dx_{n+1}) 1_{A_0 \times \cdots \times A_{i-1} \times E \times A_{i+1} \times \cdots \times A_{n+1}}(x_0, \dots, x_{n+1}) \\
&= \int_{A_0} \nu(dx_0) \cdots \int_{A_{i-1}} P_{t_{i-2},t_{i-1}}(x_{i-2}, dx_{i-1}) \int_E P_{t_{i-1},t_{i-1}}(x_{i-1}, dx_i) \int_{A_{i+1}} P_{t_i,t_{i+1}}(x_i, dx_{i+1}) \\
&\qquad \cdots \int_{A_{n+1}} P_{t_n,t_{n+1}}(x_n, dx_{n+1}) \\
&= \int_{A_0} \nu(dx_0) \dots P_{0,t_1} 1_{A_1} \dots 1_{A_{i-1}} \underbrace{P_{t_{i-1},t_i} 1_E P_{t_i,t_{i+1}}}_{\substack{= P_{t_{i-1},t_i} P_{t_i,t_{i+1}} \\ = P_{t_{i-1},t_{i+1}}}} 1_{A_{t_{i+1}}} \dots 1_{A_n} P_{t_n,t_{n+1}} 1_{A_{n+1}}(x_0) \\
&= \int_{A_0} \nu(dx_0) \dots P_{0,t_1} 1_{A_1} \dots 1_{A_{i-1}} P_{t_{i-1},t_{i+1}} 1_{A_{t_{i+1}}} \dots 1_{A_n} P_{t_n,t_{n+1}} 1_{A_{n+1}}(x_0) \\
&= \int_{A_0} \nu(dx_0) \cdots \int_{A_{i-1}} P_{t_{i-2},t_{i-1}}(x_{i-2}, dx_{i-1}) \int_{A_{i+1}} P_{t_i,t_{i+1}}(x_i, dx_{i+1}) \cdots \int_{A_{n+1}} P_{t_n,t_{n+1}}(x_n, dx_{n+1}) \\
&= P_{\Lambda_1}(A_0 \times \cdots \times A_{i-1} \times A_{i+1} \times \cdots \times A_{n+1})
\end{aligned}$$

が成り立つ．これはすなわち，任意の $B_0, \dots, B_n \in \mathscr{E}$ に対して

$$P_{\Lambda_2}\left(\pi^{-1}_{\Lambda_1,\Lambda_2}(B_0 \times \cdots \times B_n)\right) = P_{\Lambda_1}(B_0 \times \cdots \times B_n)$$

が成り立つということである．このような形の集合全体は $\mathscr{E}^{\Lambda_1}$ を生成する π-系となるので，

$$P_{\Lambda_2}\left(\pi^{-1}_{\Lambda_1,\Lambda_2}(A)\right) = P_{\Lambda_1}(A), \quad \forall A \in \mathscr{E}^{\otimes\Lambda_1} \tag{1.3}$$

となることが分かる．

[*4] 整合性条件とは，任意の有限部分集合 $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset [0, \infty[$ について

$$P_{\Lambda_2}\left(\pi^{-1}_{\Lambda_1,\Lambda_2}(A)\right) = P_{\Lambda_1}(A), \quad \forall A \in \mathscr{B}(E)^{\otimes\Lambda_1}$$

が成り立つというものであった．

$\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ が m 元集合の場合は，丁度 1 点ずつ増える列 $\Lambda_1 \subset \Lambda_1' \subset \cdots \subset \Lambda_{m-1}' \subset \Lambda_2$ を考える．このとき射影の性質と先ほどの結果より

$$
\begin{aligned}
P_{\Lambda_2}\left(\pi_{\Lambda_1,\Lambda_2}^{-1}(A)\right) &= P_{\Lambda_2}\left(\pi_{\Lambda_{m-1}',\Lambda_2}^{-1}\cdots\pi_{\Lambda_1,\Lambda_1'}^{-1}(A)\right) \\
&= P_{\Lambda_{m-1}'}\left(\pi_{\Lambda_{m-2}',\Lambda_{m-1}}^{-1}\cdots\pi_{\Lambda_1,\Lambda_1'}^{-1}(A)\right) \\
&= \cdots \\
&= P_{\Lambda_1'}\left(\pi_{\Lambda_1,\Lambda_1'}^{-1}(A)\right) \\
&= P_{\Lambda_1}(A)
\end{aligned}
$$

となるから，やはり (1.3) が成り立つ．以上の議論により任意の有限集合 $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset [0,\infty[$ について (1.3) が成り立つことが分かった．

したがって，Kolmogorov の拡張定理により，

$$
P_\nu\left(\pi_\Lambda^{-1}(A)\right) = P_\Lambda(A), \quad \forall\,\text{有限集合}\Lambda \subset [0,\infty[, \quad \forall A \in \mathscr{E}^{\otimes\Lambda}
$$

を満たす[*5] $(E^{[0,\infty[}, \mathscr{E}^{\otimes[0,\infty[})$ 上の測度 P_ν がただ一つ存在する．

この P_ν のもと，X が Markov 過程であることを示そう．命題 1.4 より，特に任意の $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ と $f_0, \ldots, f_n \in \mathscr{E}_+$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\int_{E^\Lambda} \prod_{1\le i\le n} f_i(X_{t_i}(\omega)) P_\nu(d\omega) \\
&= \int_E \nu(dx_0) f_0(x_0) \int_E P_{t_0,t_1}(x_0, dx_1) f_1(x_1) \cdots \int_E P_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1}, dx_n) f_n(x_n)
\end{aligned}
$$

が成り立つことを示せば十分である．いま可測関数 $(X_{t_0}, \ldots, X_{t_n})$ は射影 $\pi_{\{t_0,\ldots,t_n\}}$ に他ならないので，像測度による積分を考えれば

$$
\begin{aligned}
&\int_{E^{[0,\infty[}} \prod_{1\le i\le n} f_i(X_{t_i}(\omega)) P_\nu(d\omega) \\
&= \int_{E^\Lambda} \prod_{1\le i\le n} f_i(x_i(\omega)) (\pi_\Lambda)_* P_\nu(d(x_0, \ldots, x_n)) \\
&= \int_{E^\Lambda} \prod_{1\le i\le n} f_i(x_i(\omega)) P_\Lambda(d(x_0, \ldots, x_n)) \\
&= \int_E \nu(dx_0) f_0(x_0) \int_E P_{t_0,t_1}(x_0, dx_1) f_1(x_1) \cdots \int_E P_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1}, dx_n) f_n(x_n)
\end{aligned}
$$

となり，この関係式は満たされる．これより，X は推移関数 $P_{s,t}$ と初期分布 ν をもつ，$(\mathscr{F}_t(X))$ に関する Markov 過程である． □

この小節ではこれ以降，定理 1.5 の設定を引き継ぐことにする．すなわち，E はポーランド空間とし，$\mathscr{E} = \mathscr{B}(E)$ とする．X_t は座標関数 $\omega \mapsto \omega(t)$ である．さらに，以後推移関数は常に時間斉次的であるとして話を進める．上の定理では初期分布として一般の確率測度 ν を考えたが，そのうちでもとりわけ重要なものは

[*5] ただし，π_Λ は標準射影 $E^{[0,\infty[} \to E^\Lambda$ である．

Dirac 測度 δ_x である．P_{δ_x} を特に P_x と書くことにする．測度 P_x および P_ν に関する積分をそれぞれ $E_x[\cdot]$, $E_\nu[\cdot]$ で表す．これらの記法のもと，任意の x, t, A に対して

$$P_x(X_t \in A) = P_x(\pi_t^{-1}(A)) = \int_E \delta_x(dx_0) \int_A P_t(x_0, dx_1) = P_t(x, A)$$

が成り立つ．これより，特に $x \mapsto P_x(X_t \in A)$ は $\mathscr{B}(E)$ 可測となる．

命題 1.6. Z は $\mathscr{E}^{\otimes[0,\infty[}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 可測な非負または有界関数とする．このとき $x \mapsto E_x[Z]$ は $\mathscr{E}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 可測であり，

$$E_\nu[Z] = \int_E \nu(dx) E_x[Z]$$

が成り立つ．

証明. 集合族 $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ を

$$\mathscr{C} = \left\{ A \in \mathscr{E}^{\otimes[0,\infty[} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ある } n \geq 1 \text{ と } 0 = t_0 < \cdots < t_n,\ A_0, \ldots, A_n \text{ によって} \\ A = \bigcap_{0 \leq i \leq n} X_{t_i}^{-1}(A_i) \text{ と表現される．} \end{array} \right\}$$

$$\mathscr{D} = \left\{ A \in \mathscr{E}^{\otimes[0,\infty[} \;\middle|\; \begin{array}{l} x \mapsto E_x[1_A] \text{ は } \mathscr{E} \text{ 可測で，} \\ E_\nu[1_A] = \int_E \nu(dx) P_x[1_A] \text{ を満たす．} \end{array} \right\}$$

と定義する．このとき $\mathscr{D}$ が $\mathscr{C}$ を含む λ-系であることを示す．

まずは $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$ を示そう．$A \in \mathscr{C}$ は

$$A = \bigcap_{0 \leq i \leq n} X_{t_i}^{-1}(A_i) = \pi_{\{t_0, \ldots, t_n\}}^{-1}(A_0 \times \cdots \times A_n)$$

の表現をもつとする．このとき

$$\begin{aligned}
P_x(A) &= (\pi_{\{t_0,\ldots,t_n\}})_* P_x(A_0 \times \cdots \times A_n) \\
&= \int_{A_0} \delta_x(dx_0) \int_{A_1} P_{0,t_1}(x_0, dx_1) \cdots \int_{A_n} P_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1}, dx_n) \\
&= \begin{cases} \displaystyle\int_{A_1} P_{0,t_1}(x, dx_1) \cdots \int_{A_n} P_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1}, dx_n) & \text{if } x \in A_0 \\ 0 & \text{if } x \notin A_0 \end{cases}
\end{aligned}$$

となるから，写像 $x \mapsto P_x(A)$ は $\mathscr{E}$-可測である．また

$$\begin{aligned}
P_\nu(A) &= (\pi_{\{t_0,\ldots,t_n\}})_* P_\nu(A_0 \times \cdots \times A_n) \\
&= \int_{A_0} \nu(dx_0) \int_{A_1} P_{0,t_1}(x_0, dx_1) \cdots \int_{A_n} P_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1}, dx_n) \\
&= \int_E \nu(dx_0) 1_{A_0}(x_0) \int_{A_1} P_{0,t_1}(x_0, dx_1) \cdots \int_{A_n} P_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1}, dx_n) \\
&= \int_E \nu(dx_0) P_{x_0}(A)
\end{aligned}$$

も成り立つから，$A \in \mathscr{D}$ である．これより $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$ が分かる．

次に $\mathscr{D}$ が λ-系であることを示そう．$X \in \mathscr{D}$ は明らかである．$A, B \in \mathscr{D}$ かつ $A \subset B$ が成り立つとする．このとき，任意の $x \in E$ に対して

$$P_x(B \setminus A) = P_x(B) - P_x(A)$$

が成り立つ．$A, B \in \mathscr{D}$ よりこの式の右辺は x に関して可測なので，$x \mapsto P_x(B \setminus A)$ の可測性が従う．また，$A, B \in \mathscr{D}$ より

$$
\begin{aligned}
P_\nu(B \setminus A) = P_\nu(B) - P_\nu(A) &= \int_E \nu(dx) P_x(B) - \int_E \nu(dx) P_x(A) \\
&= \int_E \nu(dx) \left(P_x(B) - P_x(A) \right) = \int_E \nu(dx) P_x(B \setminus A)
\end{aligned}
$$

も成立するので $B \setminus A \in \mathscr{D}$ である．$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathscr{D}$ の元の増大列とする．$x \in E$ とすれば，測度の可算加法性より

$$
P_x\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P_x(A_n)
$$

が成り立つ．これより $x \mapsto P_x\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$ 非負可測関数の（各点ごとの意味での）可算和になっており，可測である．さらに単調収束定理により

$$
\begin{aligned}
P_\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} P_\nu(A_n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_E \nu(dx) P_x(A_n) \\
&= \int_E \nu(dx) \sum_{n\in\mathbb{N}} P_x(A_n) \\
&= \int_E \nu(dx) P_x\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right)
\end{aligned}
$$

が成り立ち，$\bigcup_n A_n \in \mathscr{D}$ となる．

以上の議論より $\mathscr{D}$ は π 系 $\mathscr{C}$ を含む λ 系であることが分かるので，$\mathscr{E}^{\otimes[0,\infty[} \subset \sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}$ が従う．$\mathscr{D}$ の定義より $\mathscr{D} \subset \mathscr{E}^{\otimes[0,\infty[}$ であり，$\mathscr{D} = \mathscr{E}^{\otimes[0,\infty[}$ が示された．Z が一般の有界または非負 $\mathscr{E}^{\otimes[0,\infty[}$ 可測関数の場合は，単関数による近似を用いればよい． □

推移関数を伴う Markov 過程の Markov 性を証明する．Markov 過程が Markov 性を持つとは変な感じだが，本来は次の定理の意味での Markov 性をもつような過程を Markov 過程といい，推移関数との間に“よい関係式”を満たす確率過程は Markov 性をもつということを主張したいのである．

定理の主張を述べるために，シフト作用素 (shift operator) の概念を導入しよう．$s \in [0,\infty[$ として，s をパラメータに持つ関数 $\theta_s\colon E^{[0,\infty[} \to E^{[0,\infty[}$ を

$$
(\theta_s(\omega))(t) = \omega(s+t)
$$

で定める．このとき，関数 θ_s は $\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s}$ を満たす．さらに $\theta_s\colon E^{[0,\infty[} \to E^{[0,\infty[}$ は可測関数である．このことを確かめるには，任意の第 t 射影 $\pi_t\colon E^{[0,\infty[} \to E$ に対して $\pi_t \circ \theta_s$ が可測になることを示せばよい．実際，$\omega \to (\pi_t \circ \theta_s)(\omega)$ は座標関数 X_{t+s} に他ならないので，$\mathscr{E}^{\otimes[0,\infty[}$ 可測である．

定理 1.7 (Markov 性 (Markov property))**．** $E, \mathscr{E}, X, P_{s,t}, P_\nu$ などは定理 1.5 と同様のものとし，θ は上で導入したシフト作用素とする．このとき，任意の非負（または有界）$\mathscr{E}^{\otimes[0,\infty[}$ 可測関数 Z と任意の $t \in [0,\infty[$ に対して

$$
E_\nu[Z \circ \theta_t | \mathscr{F}_t(X)] = E_{X_t}[Z], \quad P_\nu\text{-a.s.}
$$

が成り立つ．ただし，この式の右辺は関数 X_t と $x \mapsto E_x[Z]$ の合成を表す．

証明. 非負の場合に示す．$0 = t_0 < \cdots < t_n = t$ および $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m$ とし，$f_0, \ldots, f_n, g_0, \ldots, g_m \in \mathscr{E}_+$ とする．このとき，命題 1.4 より

$$
\begin{aligned}
&E_\nu\left[\left\{\left(\prod_{0\le j\le m} g_j(X_{s_j})\right)\circ\theta_t\right\}\left(\prod_{0\le i\le n} f_i(X_{t_n})\right)\right] \\
&= E_\nu\left[\left(\prod_{0\le j\le m} g_j(X_{s_j+t})\right)\left(\prod_{0\le i\le n} f_i(X_{t_n})\right)\right] \\
&= \int_E \nu(dx_0)f_0(x_0)\int_E P_{t_0,t_1}(x_0,dx_1)f_1(x_1)\cdots\int_E P_{t_{n-1},t}(x_{n-1},dx)f_n(x)g_0(x) \\
&\qquad \int_E P_{t,t+s_1}(x,dy_1)g_1(y_1)\cdots\int_E P_{t+s_{m-1},t+s_m}(y_{m-1},dy_m)g_m(y_m) \\
&= \int_E \nu(dx_0)f_0(x_0)\int_E P_{t_0,t_1}(x_0,dx_1)f_1(x_1)\cdots\int_E P_{t_{n-1},t}(x_{n-1},dx)f_n(x) \\
&\qquad \int_E \delta_x(dy_0)g_0(y_0)\int_E P_{t,t+s_1}(y_0,dy_1)g_1(y_1)\cdots\int_E P_{t+s_{m-1},t+s_m}(y_{m-1},dy_m)g_m(y_m) \\
&= \int_E \nu(dx_0)f_0(x_0)\int_E P_{t_0,t_1}(x_0,dx_1)f_1(x_1)\cdots\int_E P_{t_{n-1},t}(x_{n-1},dx)\left(f_n(x)E_x\left[\prod_{0\le j\le m} g_j(X_{s_j})\right]\right) \\
&= E_\nu\left[\left(\prod_{0\le i\le n-1} f_i(X_{t_i})\right)f_n(X_t)E_{X_t}\left[\prod_{0\le j\le m} g_j(X_{s_j})\right]\right] \\
&= E_\nu\left[\left(\prod_{0\le i\le n} f_i(X_{t_i})\right)E_{X_t}\left[\prod_{0\le j\le m} g_j(X_{s_j})\right]\right]
\end{aligned}
$$

が成り立つ．$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ と $f_0, \ldots, f_n$ は任意に選んでいるから，単調族定理により任意の $Y \in (\mathscr{F}_t)_+$ に対して

$$
E_\nu\left[\left\{\left(\prod_{0\le j\le m} g_j(X_{s_j})\right)\circ\theta_t\right\}Y\right] = E_\nu\left[E_{X_t}\left[\prod_{0\le j\le m} g_j(X_{s_j})\right]Y\right]
$$

となることが分かる．また，$0 = s_0 < \cdots < s_m$ および $g_0, \ldots, g_m$ の選び方も任意なので，再び単調族定理により任意の $Z \in (\mathscr{E}^{\otimes[0,\infty[})_+$ と $Y \in (\mathscr{F}_t)_+$ に対して

$$
E_\nu\left[(Z\circ\theta_t)Y\right] = E_\nu\left[E_{X_t}\left[Z\right]Y\right]
$$

が示される．これは任意の $Z \in (\mathscr{E}^{\otimes[0,\infty[})_+$ について $E_\nu[Z\circ\theta_t|\mathscr{F}_t(X)] = E_{X_t}[Z]$ P_ν-a.e. が成り立つということに他ならない． □

最後に，Markov 過程の定義を少し広げておこう．どのように拡張するかというと，Markov 過程 X は常に状態空間 E に滞在している必要はない，ということにするのである．一見意味不明な拡張だが，Markov 過程が有限時刻で無限の彼方に飛んでいってしまうような場合を想定している．数学的には，推移関数の条件を $P_t(x, E) \le 1$ の様に変えることになる．我々が最初に想定していた常に $P_t(x, E) = 1$ が成り立つような場合

は推移関数は Markov 的 (Markovian) であるといい，$P(x,E) \le 1$ の場合は劣 Markov 的 (sub-Markovian) であるという．

劣 Markov 的な推移関数に対しては，状態空間を次のように拡張する．Δ は E に属さない点とし，$E_\Delta = E \cup \{\Delta\}$ とおく．位相的には，E_Δ は 2 つのパターンがあって，E が局所コンパクト Hausdorff 空間の場合は E_Δ はその 1 点コンパクト化とし，それ以外の場合は Δ は孤立点とする場合が多い．孤立点 Δ のことは cemetery（墓地）などと呼ぶ．E_Δ 上の Borel-σ-代数は $\mathscr{E}_\Delta$ で表す．この設定下で，劣 Markov 的な推移関数 $(P_t)_t$ は，以下のようにして E_Δ 上の Markov 的な推移関数 $\widetilde{P}_t$ に拡張される．

$$\widetilde{P}_t(x,A) = P(x,A), \quad \text{if } A \subset E$$
$$\widetilde{P}_t(x,\{\Delta\}) = 1 - P_t(x,E)$$
$$\widetilde{P}_t(\Delta,\{\Delta\}) = 1$$

3 つ目の条件は Δ が absorbing （吸収的）であるとか，Δ は trap（罠）であるとかといわれる条件であり，Δ から出発した過程は Δ から出ることが出来ないという意味である．f 上の関数は $f(\Delta) = 0$ によって自動的に E_Δ 上に拡張されるものと考える[*6]．この設定下では，Markov 性を表す式は以下のようなものとなる．

$$E_\nu[Z \circ \theta_t | \mathscr{F}_t(X)] 1_{\{X_t \neq \Delta\}} = E_{X_t}[Z] 1_{\{X_t \neq \Delta\}}, \quad P_\nu\text{-a.s.}$$

まとめ

- 二変数関数 $P(x,A)$ で，一方の変数については可測関数，もう一方の変数については確率測度となるようなものを推移確率という．
- 推移確率族 $(P_{s,t}; 0 \le s < t)$ は $P_{s,t}P_{t,u} = P_{s,u}$ を満たすとき推移関数という．$P_{s,t}$ が時間 $t-s$ にだけ依存するような場合，推移関数は時間斉次的であるといい $(P_t)_{t>0}$ で表す．
- $E[f(X_t)|\mathscr{G}_s] = P_{s,t} f(X_s)$ を満たすような $(\mathscr{G}_t)$ 適合過程を，推移関数を伴う Markov 過程という．
- ポーランド空間上の推移関数と初期分布が与えられれば，それに対応する Markov 過程が存在する．
- その様に導入された Markov 過程が時間斉次的なら Markov 性 $E_\nu[Z \circ \theta_t | \mathscr{F}_t(X)] = E_{X_t}[Z]$ を満たす．
- 状態空間に 1 点 Δ を付け加えた設定を考えることで，より一般的な設定下で Markov 過程を考えることが出来る．

[*6] テクニカルな仮定である．

2 Feller 過程

第 1 節で考察した Markov 過程は非常に一般的なものであり，定義だけから詳しい性質を調べることは難しい．本節ではもっと「良い」Markov 過程に限定して，もう少し詳細な性質を調べることにしよう．これ以降は，時間斉次的な推移関数のみを考えることにする．また，推移関数 $(P_t)_{t>0}$ を $P_0(x,A)=\delta_x(A)=1_A(x)$ によって $t=0$ の場合に拡張しておく．

まずは，Markov 過程に付随する半群の概念を導入する．E を局所コンパクト第 2 可算な Hausdorff 空間とする．（以下，LCCB 空間と略す．）$C_0(E)$ を E 上の実数値連続関数で，無限遠点で 0 に消える[*7]ようなもの全体の空間とする．これはノルム $\|f\|_{C_0(E)}=\sup_{x\in E}|f(x)|$ について Banach 空間となる．なお，$C_0(E)$ はこのノルムに関する $C_c(E)$ の閉包であることに注意しておく．

定義 2.1. $\mathscr{L}(C_0(E))$ の元の族 $(T_t)_{t\geq 0}$ が次の条件を満たすとき，(T_t) を Feller 半群（Feller semigroup）という．

(i) $T_0=I_{C_0(E)}$.
(ii) $f\geq 0$ なら，$T_tf\geq 0$.
(iii) 任意の $t\geq 0$ について $\|T_t\|\leq 1$.（ノルムは作用素ノルム）
(iv) 任意の $s,t\geq 0$ に対して $T_tT_s=T_{t+s}$ が成り立つ．
(v) 任意の $f\in C_0(E)$ に対して $\lim_{t\downarrow 0}\|T_tf-f\|_{C_0(E)}=0$.

定義 2.1 の条件にはそれぞれ名前がついている．(ii) は作用素の正値性，(iii) は縮小性，(iv) は半群性，(v) は強連続性という．すなわち，定義 2.1 の言っていることは，$C_0(E)$ 上の正値線形作用素の強連続縮小半群 (strongly continuous contraction semigroup) を Feller 半群という，ということである．条件 (i) と (ii) より，$(T_t)\colon [0,\infty[\ \ni t\mapsto T_t\in\mathscr{L}(C_0(E))$ は半群準同型であることが分かる．また半群性と縮小性より

$$\|T_{t+h}f-T_tf\|=\|T_t(T_hf-f)\leq\|T_hf-f\|$$
$$\|T_{t-h}f-T_tf\|=\|T_{t-h}(f-T_hf)\leq\|T_hf-f\|$$

となるので，強連続性から

$$\lim_{s\to t}\|T_sf-T_tf\|_{C_0(E)}=0,\quad \forall f\in C_0(E)$$

が成り立つ．

なぜここで作用素の半群を導入したかというと，それは推移関数と密接な関係をもつからである．

命題 2.2. LCCB 空間 E 上の Feller 半群 $(T_t)_{\geq 0}$ が与えられているとする．このとき $(E,\mathscr{B}(E))$ 上の時間斉次的な推移関数 $(P_t)_{t\geq 0}$ で，任意の $f\in C_0(E)$ に対して $T_tf=P_tf$ を満たすものがただ一つ存在する．

証明. $t>0$ および $x\in E$ を固定すると，$f\mapsto T_tf(x)$ は $C_0(E)$ 上の連続な線形形式である．Riesz の表現定理により，$(E,\mathscr{B}(E))$ 上の（有限）Radon 測度 $P_t(x,\cdot)$ で

$$T_tf(x)=\int_E P_t(x,dy)f(y)$$

[*7] 任意の $\varepsilon>0$ に対して，あるコンパクト集合 K が存在して $f(E\setminus K)\subset[0,\varepsilon[$ を満たすということ．E の 1 点コンパクト化 $E\sqcup\{\infty\}$ 上への $f(\infty)=0$ なる拡張が連続になるといってもよい．

を満たすものがただ一つとれる．この P_t が推移関数であることを示そう．まずは，各々の P_t が推移確率であることを示す．

$$\mathscr{D} = \left\{ f \in \mathscr{L}^0(E, \mathbb{R}) \,\middle|\, f \text{ は有界で } x \mapsto \int_E P_t(x, dy) f(d) \text{ は } \mathscr{B}(E) \text{ 可測} \right\}$$

とすれば，$\mathscr{D}$ は 1 含む線形空間で，有界な単調収束について閉じていている．$T_t f = P_t f \in C_0(E)$ より，$C_0(E) \subset \mathscr{D}$ である．さらに $C_0(E)$ は各点ごとの積について閉じていて $\sigma(C_0(E)) = \mathscr{B}(E)$ となるから，可測関数についての単調族定理により $\mathscr{D}$ は有界 $\mathscr{B}(E)$ 可測関数をすべて含む．特に，任意の $A \in \mathscr{B}(E)$ について $x \mapsto P_t(x, A)$ は $\mathscr{B}(E)$ 可測である．すなわち P_t は E 上の推移確率である．

あとは P_t が Chapman-Kolmogorov の等式を満たすことを示せばよろしい．$f \in C_0(E)$ のときは，P_t の定義より明らかに

$$P_{t+s} f(x) = T_{t+s} f(x) = T_t T_s f(x) = P_t P_s f(x), \quad \forall x \in E$$

が成り立つ．先ほどと同様に単調族定理を用いれば，f が有界可測の場合にも $P_{t+s} f(x) = P_t P_s f(x)$ となることが分かる．特に $f = 1_A$ とすれば確率核に関する Chapman-Kolmogorov の等式

$$P_{t+s}(x, A) = P_{t+s} 1_A(x) = P_t P_s 1_A(x) = \int_E P_t(x, dy) P_s(y, A)$$

が従う． □

注意 2.3. 命題 2.2 で構成された推移関数は一般には劣 Markov 的であり，これが Markov 的になるためには $\|T_t\| = 1$ でなければならない．実際，Riesz の表現定理より $f \mapsto T_t f(x)$ の作用素ノルムは測度 $P_t(x, \cdot)$ の全変動ノルムと一致するが，これは全測度 $P_t(x, E)$ に他ならない．よって $P_t(x, E) \leq \|T_t\| \leq 1$ が分かる．もし推移関数が Markov 的なら，$1 = P(x, E) \leq \|T_t\| \leq 1$ となり，$\|T_t\| = 1$ である．

定義 2.4. Feller 半群に対応する推移関数を Feller 推移関数 (Feller transition function) という．Feller 推移関数をともなう Markov 過程を Feller 過程という．

推移関数が Feller であるための必要十分条件を考える．その前に，半群に付随するレゾルベントを導入してその性質を調べよう．

補題 2.5. E 上の推移関数 P_t は $P_t C_0(E) \subset C_0(E)$ および

$$\forall f \in C_0(E),\ \forall x \in E, \quad \lim_{t \downarrow 0} P_t f(x) = f(x)$$

を満たすと仮定する．$\alpha > 0$ に対して，(P_t) の α 次レゾルベント (resolvent) を

$$G_\alpha f(x) = \int_{[0,\infty[} e^{-\alpha t} P_t f(x) dt, \quad f \in C_0(E),\ x \in E$$

このとき，$(G_\alpha)_{\alpha > 0}$ は次の性質を満たす．

(i) G_α は $C_0(E)$ から $C_0(E)$ への線形作用素を定める．
(ii) $\forall \alpha > 0$, $\|\alpha G_\alpha\| \leq 1$．（縮小性）
(iii) $\forall f \in C_0(E)$, $\forall x \in E$, $\lim_{\alpha \to \infty} \alpha G_\alpha f(x) = f(x)$.

(iv) $\forall\alpha,\beta>0$, $G_\alpha - G_\beta = (\beta-\alpha)G_\alpha G_\beta = (\beta-\alpha)G_\beta G_\alpha$.（レゾルベント方程式）[*8]

証明．**Well-definedness.** まずはレゾルベントが well-defined であることを示そう．推移関数の定義と条件 (ii) から

$$\lim_{s\downarrow 0} P_{t+s}f(x) = P_t f(x), \quad \forall f\in C_0(E),\ \forall x\in E$$

が成り立つ．よって関数 $(t,x)\mapsto P_tf(x)$ は x について連続，t については右連続であり，特に 2 変数関数として $\mathscr{B}([0,\infty[)\otimes\mathscr{B}(E)$ 可測である．積分

$$G_\alpha f(x) = \int_{[0,\infty[} e^{-\alpha t}P_tf(x)dt, \quad f\in C_0(E),\ x\in E$$

が有限値になることは

$$\int_{[0,\infty[} |e^{-\alpha t}P_tf(x)|dt \le \int_{[0,\infty[} e^{-\alpha t}\left(\int_E |f(y)|P_t(x,dy)\right)dt \le \|f\|_{C_0(E)}\int_{[0,\infty[} e^{-\alpha t}dt < \infty$$

という評価からわかる．Fubini の定理より $x\mapsto G_\alpha f(x)$ は可測になるから，G_α によって線形作用素 $C_0(E)\to\mathscr{L}^0(E,\mathbb{R})$ が定まる．

(i) の証明． $x\mapsto P_tf(x)$ の連続性と

$$|G_\alpha f(x) - G_\beta f(y)| \le \int_{[0,\infty[} e^{-\alpha t}|P_tf(x) - P_tf(y))|dt$$
$$e^{-\alpha t}|P_tf(x)-P_tf(y)| \le 2\|f\|_{C_0(E)}e^{-\alpha t}$$

という評価と優収束定理を用いれば $x\mapsto G_\alpha f(x)$ の連続性が示される．

$$|G_\alpha f(x)| \le \int_{[0,\infty[} e^{-\alpha t}|P_tf(x)|dt$$
$$e^{-\alpha t}|P_tf(x)| \le \|f\|_{C_0(E)}e^{-\alpha t}, \quad \forall t\in[0,\infty[$$

と優収束定理を組み合わせれば，$\lim_{|x|\to\infty} G_\alpha f(x) = 0$ も分かる．これより $G_\alpha C_0(E)\subset C_0(E)$ である．

(ii) の証明． レゾルベント G_α の定義より，

$$|\alpha G_\alpha f(x)| \le \|f\|_{C_0(E)}\alpha\int_{[0,\infty[} e^{-\alpha t}dt = \|f\|_{C_0(E)}$$

が成立．よって $\|\alpha G_\alpha\|\le 1$ である．

(iii) の証明． $\alpha t = s$ と変数変換を行えば，レゾルベントは

$$G_\alpha f(x) = \frac{1}{\alpha}\int_{[0,\infty[} e^{-s}P_{s/\alpha}f(x)ds$$

とも表現されることに注意する．いま

$$|\alpha G_\alpha f(x) - f(x)| = \int_{[0,\infty[} e^{-s}|P_{s/\alpha}f(x) - f(x)|ds$$
$$\lim_{\alpha\to\infty}|P_{s/\alpha}f(x) - f(x)| = 0, \quad \forall s\in[0,\infty[$$
$$e^{-s}|P_{s/\alpha}f(x)-f(x)| \le 2\|f\|e^{-s}, \quad \forall s\in[0,\infty[$$

[*8] レゾルベント方程式を満たす作用素族 (G_α) は擬レゾルベントと呼ばれることがある．

であるから，優秀収束定理により

$$\lim_{\alpha\to\infty}\alpha G_\alpha f(x)=f(x),\quad \forall f\in C_0(E),\ x\in E$$

が従う．

(iv) の証明． $\alpha,\beta>0$ とする．$\alpha=\beta$ のときは等式は明らかである．$\alpha\neq\beta$ のときは，Fubini の定理と推移関数の性質より

$$\begin{aligned}
G_\alpha G_\beta f(x) &= \int_{[0,\infty[} e^{-\alpha t}P_tG_\beta f(x)dt\\
&= \int_{[0,\infty[} e^{-\alpha t}\left(\int_E G_\beta f(y)P_t(x,dy)\right)dt\\
&= \int_{[0,\infty[} e^{-\alpha t}\left(\int_E \left[\int_{[0,\infty[} e^{-\beta s}P_sf(y)ds\right]P_t(x,dy)\right)dt\\
&= \int_{[0,\infty[}\int_{[0,\infty[} e^{-\alpha t-\beta s}\left(\int_E P_sf(y)P_t(x,dy)\right)dtds\\
&= \int_{[0,\infty[}\int_{[0,\infty[} e^{-\alpha t-\beta s}P_{t+s}f(x)dtds
\end{aligned}$$

（$u=s+t$ と変数変換）

$$\begin{aligned}
&= \int_{[0,\infty[}\int_{[s,\infty[} e^{-\alpha(u-s)-\beta s}P_uf(x)duds\\
&= \int_{[0,\infty[}\int_{[0,\infty[} 1_{[s,\infty[}(u)e^{-\alpha u+(\alpha-\beta)s}P_uf(x)duds\\
&= \int_{[0,\infty[}\int_{[0,\infty[} 1_{[0,u]}(s)e^{-\alpha u+(\alpha-\beta)s}P_uf(x)dsdu\\
&= \int_{[0,\infty[}\left(\int_{[0,\infty[} 1_{[0,u]}(s)e^{(\alpha-\beta)s}ds\right)e^{-\alpha u}P_uf(x)du\\
&= \int_{[0,\infty[}\frac{e^{(\alpha-\beta)u}-1}{\alpha-\beta}e^{-\alpha u}P_uf(x)du\\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\int_{[0,\infty[}\left(e^{-\beta u}-e^{-\alpha u}\right)P_uf(x)du\\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\int_{[0,\infty[}e^{-\beta u}P_uf(x)du-\int_{[0,\infty[}e^{-\alpha u}P_uf(x)du\right)\\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(G_\beta f(x)-G_\alpha f(x)\right)
\end{aligned}$$

となる．また，この式変形において変数変換のところを $u=s+t$ かつ t をそのままとすれば，

$$\begin{aligned}
G_\alpha G_\beta f(x) &= \int_{[0,\infty[}\int_{[0,\infty[} 1_{[t,\infty[}e^{-\alpha t-\beta(u-t)}P_uf(x)dudt\\
&= \int_{[0,\infty[}\left(\int_{[0,\infty[} 1_{[0,u]}(t)e^{(\beta-\alpha)t}dt\right)e^{-\beta u}P_uf(x)du\\
&= \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{[0,\infty[}\left(e^{-\alpha u}-e^{-\beta u}\right)P_uf(x)du\\
&= \frac{1}{\beta-\alpha}\left(G_\alpha f(x)-G_\beta f(x)\right)
\end{aligned}$$

を得る．したがって，任意の $\alpha, \beta > 0$ に対して

$$
\begin{aligned}
(\beta-\alpha)G_\alpha G_\beta &= G_\alpha - G_\beta \\
(\alpha-\beta)G_\alpha G_\beta &= G_\beta - G_\alpha
\end{aligned}
$$

が成り立つ．二つ目の式で α と β を入れ替えれば

$$
(\beta-\alpha)G_\beta G_\alpha = G_\alpha - G_\beta
$$

となるから，

$$
(\beta-\alpha)G_\alpha G_\beta = G_\alpha - G_\beta = (\beta-\alpha)G_\beta G_\alpha
$$

が成り立つことが示された． □

ここで導入されたレゾルベントは，見てのとおり $t \mapsto T_t f(x)$ の Laplace 変換である．$C_0(E)$ の世界ではパラメータを固定した積分として定義したが，一般の Banach 空間などでも Bochner 積分

$$
G_\alpha f = \int_{[0,\infty[} e^{-\alpha t} T_t f dt
$$

によって強連続縮小半群のレゾルベントを定義することが出来る．

命題 2.6. 推移関数 $(P_t)_{t\geq 0}$ が Feller であるための必要十分条件は，以下の 2 条件が成り立つことである．

(i) $P_t C_0(E) \subset C_0(E)$.
(ii) $\forall f \in C_0(E)$, $\forall x \in E$, $\lim_{t\downarrow 0} P_t f(x) = f(x)$.

Feller 推移関数が条件 (i) と (ii) を満たすということはほぼ明らかである．この命題の驚くべき点は，$P_t f$ の各点での収束から一様収束が導かれるということにある．

証明．*Step 1*：**必要性．** P_t は Feller 推移関数であるとし，対応する Feller 半群を (T_t) とする．P_t によって定まる作用素 $f \mapsto P_t f$ は $C_0(E)$ 上では T_t と一致するから，$P_t C_0(E) = T_t C_0(E) \subset C_0(E)$ が成り立つ．また $f \in C_0(E)$ とすれば，任意の $x \in E$ について

$$
|P_t f(x) - f(x)| = |T_t f(x) - f(x)| \leq \|T_t f - f\|_{C_0(E)}
$$

となるから，Feller 半群の強連続性より条件 (ii) も成り立つ．

Step 2：**十分性．** $(P_t)_{t\geq 0}$ は条件 (i) と (ii) を満たす推移関数としたとき，$f \mapsto P_t f$ の $C_0(E)$ 上への制限（これを (T_t) で表すことにする）が Feller 半群となっていることを示す．核による積分の定義と条件 (i) より $T_t \in \mathscr{L}(C_0(E))$ であり，また T_t の正値性と半群性は推移関数の定義より明らかである．

$$
T_0 f(x) = \int_E P_0(x, dy) f(y) = \int_E \delta_x(dy) f(y) = f(x)
$$

なので，$T_0 = I_{C_0(E)}$ となる．$f \in C_0(E)$ および $x \in E$ とすれば，

$$
|T_t f(x)| = \left| \int_E P_t(x, dy) f(y) \right| \leq \|f\|_{C_0(E)} P_t(x, E) = \|f\|_{C_0(E)}
$$

が成り立つ．これより $\|T_t f\|_{C_0(E)} \leq \|f\|_{C_0(E)}$ となり，作用素 T_t は縮小性を満たす．

後は強連続性を示せばよいが，そのために補題 2.5 を用いる．補題 2.5 と同様にレゾルベント $(G_\alpha)_{\alpha>0}$ を定めれば，これは補題 2.5 の条件 (i)–(iv) を満たす．レゾルベント方程式より，$\alpha, \beta > 0$ に対して

$$G_\alpha = G_\beta + (\alpha-\beta)G_\beta G_\alpha = G_\beta(I_{C_0(E)} - (\alpha-\beta)G_\alpha)$$

が成り立つので，$G_\alpha C_0(E) \subset G_\beta C_0(E)$ が分かる．$\beta > 0$ について共通部分をとれば $G_\alpha C_0(E) \subset \bigcap_{\beta>0} G_\beta C_0(E)$ となるが，逆向きの包含関係は明らかなので，結局 $G_\alpha C_0(E) = \bigcap_{\beta>0} G_\beta C_0(E)$ が任意の $\alpha > 0$ について成立．これよりレゾルベント G_α の値域は α によらず一定の集合となる．

全てのレゾルベント G_α に共通な値域を D で表すことにして，D が $C_0(E)$ で稠密なことを示そう．Hahn-Banach の定理から導かれる結果として，D が $C_0(E)$ で稠密であることの必要十分条件は，任意の $A \in C_0(E)^*$ について $A|_D = 0 \implies A = 0$ が成り立つことであった．$A \in C_0(E)^*$ は $A|_D$ を満たすと仮定し，A 表現する有限 Radon 測度を μ_A と書くことにする．$f \in C_0(E)$ とすれば，レゾルベントの性質より $\alpha G_\alpha f \to f$（各点収束）が成り立つ．さらに αG_α の縮小性より，$|\alpha G_\alpha f(x)| \le \|f\|_{C_0(E)}$ となるので，優収束定理と $A|_D = 0$ より

$$\int_E f(x)\mu_A(dx) = \lim_{\alpha\to\infty}\int_E \alpha G_\alpha \mu_A(dx) = \lim_{\alpha\to\infty} \alpha A(G_\alpha f) = 0$$

を得る．これより任意の f について $A(f) = 0$ となり，$A = 0$ である．以上の議論により D が $C_0(E)$ において稠密であることが示された．

Fubini の定理により

$$\begin{aligned}
T_t G_\alpha f(x) &= \int_E P_t(x,dy)\int_{[0,\infty[} ds\left(e^{-\alpha s}P_s f(y)\right) \\
&= \int_{[0,\infty[} ds\, e^{-\alpha s}P_t P_s f(x) \\
&= \int_{[0,\infty[} ds\, e^{\alpha t}e^{-\alpha(s+t)}P_{t+s} f(x) \\
&= e^{\alpha t}\int_{[0,\infty[} du\, 1_{[t,\infty[}(u)e^{-\alpha u}P_u f(x) \quad (\text{変数変換 } t+s=u)
\end{aligned}$$

が成り立つから[*9]，

$$\begin{aligned}
&|T_t G_\alpha f(x) - G_\alpha f(x)| \\
&= \left| e^{\alpha t}\int_{[0,\infty[} ds\, 1_{[t,\infty[}(u)e^{-\alpha s}P_s f(x) - \int_{[0,\infty[} ds\, e^{-\alpha s}P_s f(x)\right| \\
&\le \left| e^{\alpha t}\int_{[0,\infty[} ds\, 1_{[t,\infty[}(u)e^{-\alpha s}P_s f(x) - \int_{[0,\infty[} ds\, 1_{[t,\infty[}(u)e^{-\alpha s}P_s f(x)\right| \\
&\quad + \left|\int_{[0,\infty[} ds\, 1_{[0,t[}(s)e^{-\alpha s}P_s f(x)\right| \\
&\le (e^{pt}-1)|G_\alpha f(x)| + \sup_{s\le t}\|T_s f\|_{C_0(E)} t \\
&\le (e^{pt}-1)\|G_\alpha f\|_{C_0(E)} + t\|f\|_{C_0(E)}
\end{aligned}$$

*9 レゾルベント方程式の証明でも同じ式変形をしたが．

これより

$$\|T_tG_\alpha f-G_\alpha f\|_{C_0(E)}\le(e^{pt}-1)\|G_\alpha f\|_{C_0(E)}+t\|f\|_{C_0(E)}\xrightarrow[t\downarrow 0]{}0$$

となるから，$f\in D$ については

$$\lim_{t\downarrow 0}\|T_tf-f\|_{C_0(E)}=0$$

が成り立つ．一般の $f\in C_0(E)$ については，f の近似列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ をとる．このとき

$$\begin{aligned}\|T_tf-f\|_{C_0(E)}&\le\|T_tf-T_tf_n\|_{C_0(E)}+\|T_tf_n-f_n\|_{C_0(E)}+\|f_n-f\|_{C_0(E)}\\&\le 2\|f_n-f\|_{C_0(E)}+\|T_tf_n-f_n\|_{C_0(E)}\end{aligned}$$

なる評価から，任意の n で

$$\limsup_{t\downarrow 0}\|T_tf-f\|_{C_0(E)}\le 2\|f_n-f\|_{C_0(E)}$$

が成り立つ．さらに $n\to\infty$ とすれば，この右辺は 0 に収束するので

$$\lim_{t\downarrow 0}\|T_tf-f\|_{C_0(E)}=0$$

となる．以上の議論により半群 (T_t) の強連続性が示された． □

まとめ

- $C_0(E)$ 上の正値線形作用素の強連続縮小半群を Feller 半群という．
- Feller 半群に付随する推移関数を Feller 推移関数という．
- Feller 推移関数を伴う Markov 過程を Feller 過程という．
- Feller 推移関数が与えられると，それに伴う正値強連続縮小レゾルベントが得られる．

3 Feller 過程のパスの性質

Feller 半群または Feller 推移関数が与えられれば，定理 1.5 よりそれに対応する Markov 過程が存在する．しかし，推移関数をともなう Markov 過程自体は非常に一般的な確率過程であり，その細かい性質を調べることは難しい．マルチンゲール理論では右連続性などのパスの性質から多くの定理が導かれたように，Markov 過程についてもある程度のパスの regularity があるほうが望ましいだろう．推移関数が Feller ならば，実は対応する Markov 過程には càdlàg な修正が存在する．そのためにまずは補題をひとつ証明しよう．

Markov 過程の話に戻るために，第 1 節における $(E^{[0,\infty[}, \mathscr{E}^{\otimes [0,\infty[})$ 上での設定を引き継ごう．1 節では E は一般のポーランド空間であったが，ここでは Feller 過程の話をするため LCCB 空間に限定して考える[*10]．

命題 3.1. X を Feller 推移関数 P_t をともなう Feller 過程とする．このとき，任意の $f \in C_0(E)^+$ と[*11]$\alpha > 0$ に対して，確率過程 $e^{-\alpha t} G_\alpha f(X_t)$ は非負の $(\mathscr{F}_t(X), P_\nu)$- 優マルチンゲールである．

証明. $x \mapsto G_\alpha f(x)$ は非負（そして有界）なる $\mathscr{E}$ 可測関数なので，定理 1.7 の Markov 性により，$s < t$ なら

$$\begin{aligned} E_\nu \left[e^{-\alpha t} G_\alpha f(X_t) | \mathscr{F}_s(X) \right] &= e^{-\alpha t} E_\nu \left[G_\alpha f(X_t) | \mathscr{F}_s(X) \right] \\ &= e^{-\alpha t} E_\nu \left[G_\alpha f(X_{t-s} \circ \theta_s) | \mathscr{F}_s(X) \right] \\ &= e^{-\alpha t} E_{X_s} \left[G_\alpha f(X_{t-s}) \right] \\ &= e^{-\alpha t} P_{t-s} G_\alpha f(X_s) \end{aligned}$$

が P_ν-a.e. で成り立つ．命題 2.6 の証明での変形と f と f, P_t の非負性より

$$P_{t-s} G_\alpha f(x) = e^{\alpha(t-s)} \int_{[0,\infty[} 1_{[t-s,\infty[}(u) e^{-\alpha u} P_u f(x) du \leq e^{\alpha(t-s)} G_\alpha f(x)$$

となるので，

$$e^{-\alpha t} P_{t-s} G_\alpha f(x) \leq e^{-\alpha s} G_\alpha f(x), \quad \forall x \in E$$

である．これより

$$E_\nu \left[e^{-\alpha t} G_\alpha f(X_t) | \mathscr{F}_s(X) \right] = e^{-\alpha t} P_{t-s} G_\alpha f(X_s) \leq e^{-\alpha s} G_\alpha f(X_s)$$

が P_ν-a.s. の意味で成立し，$e^{-\alpha t} G_\alpha f(X_t)$ は優マルチンゲールとなる． □

これ以降は，E_Δ は LCCB 空間 E の 1 点コンパクト化を表すものとする．目下我々の目指すべきは，Feller 過程が càdlàg な修正をもつという定理を証明することである．その前にまたまた補題の証明が必要だ．重要な定理を証明するってのはなかなか大変なものなのだよ．

補題 3.2. $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，X, Y を LCCB 空間 E に値をとる確率変数とする．このとき，$X = Y$ P-a.s. が成り立つための必要十分条件は，

$$E[f(X)g(Y)] = E[f(X)g(X)], \quad \forall f, g \in C_c(E, \mathbb{R})$$

が成り立つことである．

---

*10 LCCB 空間はポーランド空間である．

*11 $C_0(E)$ の元で非負たる物の成す空間．

証明．必要性は明らかなので，十分性を示す．$\mathscr{B}(E)\otimes\mathscr{B}(E)$ は $(x,y)\mapsto f(x)g(y)$ $(f,g\in C_c(E,\mathbb{R})$ で生成される[*12]ので，単調族定理により任意の有界 $\mathscr{B}(E)\otimes\mathscr{B}(E)$-可測関数 f について $E[f(X,Y)]=E[f(X,X)]$ が成り立つ．いま E は LCCB 空間なので Δ_E は $E\times E$ 可測集合であり[*13]，特に

$$P(X=Y)=E[1_{\Delta_E}(X,Y)]=E[1_{\Delta_E}(X,X)]=P(X=X)=1$$

が成立する． □

定理 3.3. $(E_\Delta^{[0,\infty[},\mathscr{E}_\Delta^{\otimes[0,\infty[},X,(\theta_t)_{t\geq0},(P_\nu)_{\nu\in\mathscr{P}(E_\Delta)},(P_t)_{t\geq0})$ を定理 1.5 で構成された Markov 過程で，特に Feller 過程であるとする．このとき，(X_t) は càdlàg な修正をもつ．ただし，ここで $\widetilde{X}$ が X の修正であるとは

$$P_\nu(X_t=\widetilde{X}_t)=1,\quad \forall t\in[0,\infty[,\ \forall\nu\in\mathscr{P}(E_\Delta)$$

という意味である．

証明．(f_n) は $C_0(E)^+$ の列で，E_Δ の任意の点を分離する[*14]ものとする[*15]．(G_α) を Feller 半群（あるいは推移関数）のレゾルベントとすれば，これは次の意味での強連続性を満たすことに注意しておく．

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\alpha G_\alpha f=f,\quad \text{in } C_0$$

これは実際

$$\begin{aligned}\|\alpha G_\alpha f-f\|_{C_0}&\leq\sup_x\int_{[0,\infty[}\alpha e^{-\alpha t}|P_tf(x)-f(x)\|dt\\&\leq\int_{[0,\infty[}e^{-s}\|P_{s/p}f-f\|_{C_0}\end{aligned}$$

という評価と優収束定理より分かる．さて，ここで $\mathscr{H}=\{G_\alpha f_n;\alpha,n\in\mathbb{N}\}$ とすれば，これがまた可算集合であることは明らかだろう．しかも，この関数族は E_Δ の異なる 2 点を分離している．そのことは次のようにして確かめられる．$x\neq y$ なる E_Δ に対して，$f_n(x)\neq f_n(y)$ を満たすような f_n を選ぶ．このとき，$\alpha G_\alpha f_n\to f_n$ in C_0 より十分大きな α について $\alpha G_\alpha f_n(x)\neq\alpha G_\alpha f_n(y)$，特に $G_\alpha f_n(x)\neq G_\alpha f_n(y)$ が成立する．

$S\subset[0,\infty[$ を可算な稠密部分集合とする．命題 3.1 より任意の初期分布 ν と $n,\alpha\in\mathbb{N}$ に対して $e^{-\alpha t}G_\alpha f_n(X_t)$ は優マルチンゲールとなることに注意する．これより，$h\in\mathscr{H}$ に対して，以下を満たすような $\Omega_h\in\mathscr{F}_\infty(X)$ が存在する[*16]．

- 任意の初期分布 $\nu\in\mathscr{P}(E_\Delta)$ に対して，$P_\nu(\Omega_h)=1$．

---

*12 LCCB 空間 E は距離化可能なので，$\sigma(C_b(E,\mathbb{R}))=\mathscr{B}(E)$ が成り立つ．さらに $C_b(E,\mathbb{R})$ の元はコンパクト台を持つ連続関数で各点近似できるから，$\sigma(C_c(E,\mathbb{R}))=\sigma(C_b(E,\mathbb{R}))$ もわかる．

*13 Δ_E は対角集合．E は Haudorff 空間なので Δ_E は $E\times E$ の閉集合であり，E は第 2 可算なので $\mathscr{B}(E)\otimes\mathscr{B}(E)=\mathscr{B}(E\times E)$ となる．

*14 すなわち，任意の相異なる $x,y\in E_\Delta$ に対してある n が存在して $f_n(x)\neq f_n(y)$ を満たすということ．

*15 E_Δ は LCCB 空間なので，補題 A.21 によりこのようなものが取れる．

*16 ここで全ての測度 P_ν に対して共通な Ω_f が取れるということは不思議に思えるかも知れないが，それについては次のような仕組みになっているので問題がない．

(i) Ω_f 上でパスが有限右極限，左極限をもつような Ω_f を，横断数の言葉を使って定義する．（測度によらない！）

(ii) P_ν の下で $e^{-\alpha t}G_\alpha f(X_t)$ は優マルチンゲールなので，Ω_f は P_ν で測ると確率 1．（横断数に関する不等式から．）

具体的な構成法については，例えば He, Wang, and Yan [16, 2.43 Theorem] などを見よ．

- 任意の $\omega \in \Omega_h$ に対して，以下の極限が存在する．（ただし，左極限は $t > 0$ とする．）

$$\lim_{\substack{s \uparrow\uparrow t \\ s \in S}} h(X_s), \quad \lim_{\substack{s \downarrow\downarrow t \\ s \in S}} h(X_s)$$

いま分かっているのは $h(X_t)$ のパスの挙動だけなので，これを用いて X_t 自身のパスを調べる必要がある．ここで $\Omega_* = \bigcap_{h \in \mathscr{H}} \Omega_h$ と定義すれば，$\mathscr{H}$ は可算集合なので Ω_* はまた確率 1 の可測集合である．我々が示したいのは次の主張である．

主張 1

任意の $\omega \in \Omega_*$ に対して，次の極限が存在する．（ただし，左極限は $t > 0$ とする．）

$$\lim_{\substack{s \uparrow\uparrow t \\ s \in S}} X_s, \quad \lim_{\substack{s \downarrow\downarrow t \\ s \in S}} X_s.$$

$\omega \in \Omega$ を $X_\cdot(\omega)$ はある $t \in [0, \infty[$ で S に沿った右極限を持たないと仮定しよう．このとき $\omega \notin \Omega_*$ を示せばよい．$X_\cdot(\omega)$ は t で S に沿った右極限を持たないから，次の条件を満たす点列 (s_n), (s'_n) が存在する[*17]．

- $s_n, s'_n \in S$ かつ $s_n, s'_n > t$ で，$s_n, s'_n \to t$.
- $X_{s_n}(\omega)$ と $X_{s'_n}(\omega)$ はともに収束．
- $\lim\limits_{n \to \infty} X_{s_n}(\omega) \neq \lim\limits_{n \to \infty} X_{s'_n}(\omega)$.

このとき，ある $h \in \mathscr{H}$ が存在して，

$$h\left(\lim_{n \to \infty} X_{s_n}(\omega)\right) \neq h\left(\lim_{n \to \infty} X_{s'_n}(\omega)\right)$$

が成り立つ．いま h は連続なので，さらに

$$\lim_{n \to \infty} h\left(X_{s_n}(\omega)\right) \neq \lim_{n \to \infty} h\left(X_{s'_n}(\omega)\right)$$

も成立．これより $s \mapsto h(X_s(\omega))$ は t で S に沿った右極限を持たず，ω は Ω_* の元ではない．よって主張 1 が示された．

さて，ここで X の修正となるべき確率過程を定義しよう．$x \in E$ を任意に選んで，

$$\widetilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{s \downarrow\downarrow t,\ s \in S} X_t(\omega) & \omega \in \Omega_*, \\ x & \text{otherwise}, \end{cases}$$

とする．このとき $\widetilde{X}$ は càdlàg なパスをもつ確率過程である．これが実際に X の修正になっていることを示そう．初期分布 ν と時刻 t を固定する．このとき任意の $f, g \in C_{\mathrm{b}}(E_\Delta) = C(E_\Delta)$ に対して

$$\begin{aligned} E_\nu\left[f(X_t) g(\widetilde{X}_t)\right] &= \lim_{\substack{s \downarrow\downarrow t \\ s \in S}} E_\nu\left[f(X_t) g(X_s)\right] \quad (\because \text{DCoT}) \\ &= \lim_{\substack{s \downarrow\downarrow t \\ s \in S}} E_\nu\left[f(X_t) E\left[g(X_s) | \mathscr{F}_t\right]\right] \\ &= \lim_{\substack{s \downarrow\downarrow t \\ s \in S}} E_\nu\left[f(X_t) P_{s-t} g(X_t)\right] \quad (\because \text{Markov 性}) \\ &= E_\nu\left[f(X_t) g(X_t)\right] \quad (\because \text{強連続性}) \end{aligned}$$

[*17] $X_\cdot(\omega)$ が t で S に沿った右極限を持たないので，$t_n \downarrow t$ かつ $X_{t_n}(\omega)$ が収束しないような列がとれる．状態空間 E_Δ はコンパクト距離離化可能なので，収束しない列は二つ以上の cluster point を持つ．それぞれに収束するような部分列をとればよい．

が成り立つ．したがって，補題 3.2 により $\widetilde{X}$ は X の修正となっていることがわかる． □

注意 3.4. 定理 3.3 における修正 $\widetilde{X}$ は，$\mathbb{F}(X)$ に対して Markov 過程であるとは限らない．しかし，$\mathbb{F}(\widetilde{X})$ については Markov 過程になっている．

命題 3.5. フィルトレーションは普遍完備化されていると仮定する．Càdlàg な Feller 過程に対して，

$$\zeta(\omega) = \inf\{t \geq 0 \mid X_{t-} = \Delta \text{ or } X_t(\omega) = \Delta\}$$

と定める．このときほとんど全ての ω に対して $[\zeta(\omega), \infty[$ 上で $X_\cdot(\omega) = \Delta$ が成り立つ．

証明. φ を $C_0(E)$ の E_Δ 上への拡張で，E 上狭義に正の値をとるものとする[*18]．$g = G_1\varphi$ と定めれば，g もまた E 上狭義に正の値をとる[*19]連続関数である．ここで $Z_t = e^{-t}g(X_t)$ と定義すれば，

$$\begin{aligned} X_t = \Delta &\iff Z_t = 0, \\ X_{t-} = \Delta &\iff Z_{t-} = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに

$$\zeta(\omega) = \inf\{t \geq 0 \mid Z_{t-}(\omega) = 0 \text{ or } Z_t(\omega) = 0\}$$

である．この命題を証明するためには，次の主張を示せばよいことがわかる．

主張 1

Y を正の右連続優マルチンゲールとし，停止時刻 T を

$$T(\omega) = \inf\{t \geq 0 \mid Y_t(\omega) = 0 \text{ or } Y_{t-}(\omega)\}$$

と定義する．このとき，ほとんどすべての ω に対して，$[T(\omega), \infty[$ 上 $Y_\cdot(\omega) = 0$ が成り立つ．

T_n を $[0, 1/n]$ への Y の到達時刻とすれば，これは停止時刻の増加列を定める．$\bigcup_n \{T_n = \infty\}$ 上では明らかに $T = \infty$ なので，主張は自明である．$\{T_n < \infty\}$ 上では，$X_{T_n} \leq 1/n$ であることに注意する．$q \in \mathbb{Q}_{>0}$ とすれば，$T + q$ は $T_n < T + q$ を満たす停止時刻である．任意抽出定理を用いれば，

$$E\left[Y_{T+q} 1_{\{T_n < \infty\}}\right] \leq E\left[Y_{T_n} 1_{\{T_n < \infty\}}\right] \leq 1/n$$

が成立．極限を考えれば，単調収束定理により

$$E\left[Y_{T+q} 1_{\bigcap_n \{T_n < \infty\}}\right] = \lim_{n\to\infty} E\left[Y_{T+q} 1_{\{T_n < \infty\}}\right] = 0$$

を得る．$\{T < \infty\} \subset \bigcap_n \{T_n < \infty\}$ と X が正であることから，$\{T < \infty\}$ 上 a.s. で $Y_{T+q} = 0$ となることがわかる．あとは Y のパスの右連続性から主張 1 が従う． □

まとめ

- Feller 過程は càdlàg な修正をもつ．
- 右連続 Feller 過程が墓地 Δ に到達したら，その後は Δ に張り付いたままとなる．

[*18] たとえば，E_Δ 上の距離 d をとって $\varphi(x) = d(x, \Delta)$ とでもする．

[*19] レゾルベント G_α の定義を見よ．

4　フィルトレーションの完備化

ここまでは Markov 過程について，フィルトレーションとしては主に $\mathbb{F}(X)$ を考えてきた．しかし，停止時刻や確率解析についての議論をするときには，通常の条件を満たすフィルトレーションを扱うことが多いのであった．したがって，Markov 過程についてもフィルトレーションの通常拡大を考える必要がある．

Markov 過程の初期分布 ν に対してフィルトレーション $\mathbb{F}^\nu(X) = (\mathscr{F}_t^\nu(X))_{t\geq 0}$ および $\mathbb{F}^*(X) = (\mathscr{F}_t^*(X))_{\geq 0}$ を

$$\mathscr{F}_t^\nu(X) = \mathscr{F}_t(X)^{(\mathscr{F}_\infty(X), P_\nu)}, \quad \mathscr{F}_t^*(X) = \bigcap_{\nu \in \mathscr{P}(E_\Delta)} \mathscr{F}_t^\nu(X)$$

と定める． $\mathscr{F}_t^\nu(X)$ という記法は最初に定めた完備化の記号 $\mathscr{F}_t(X)^{P_\nu} = \mathscr{F}_t(X)^{(\mathscr{F}_t(X), P_\nu)}$ と紛らわしいので注意されたい，

命題 4.1. X を Feller 過程とし，ν を任意の初期分布とする．このとき X は P_ν のもと，$\mathbb{F}^\nu(X)$ と $\mathbb{F}^*(X)$ に対しても同じ推移関数をもつ Markov 過程である．

証明. $(P_t)_{t\geq 0}$ を X の Feller 推移関数とし，初期分布 ν と $0 \leq s < t$ を固定する．X は P_ν のと $\mathbb{F}(X)$ に関しては Markov 過程なので，任意の有界可測関数 f に対して

$$E_\nu[f(X_t)|\mathscr{F}_s(X)] = P_{t-s}f(X_s), \quad P_\nu\text{-a.s.}$$

が成り立つ．$A \in \mathscr{F}_s^\nu(X)$ とすれば，$A' \in \mathscr{F}_s(X)$ と $N \in \mathscr{F}_\infty(X)$ で $A \triangle A' \subset N$ かつ $P_\nu(N) = 0$ を満たすものが存在する．このとき

$$\begin{aligned} E_\nu[f(X_t)1_A] &= E_\nu[f(X_t)1_{A'}] \\ &= E_\nu[P_{t-s}f(X_s)1_{A'}] \\ &= E_\nu[P_{t-s}f(X_s)1_A] \end{aligned}$$

が成り立つ．よって

$$E[f(X_t)|\mathscr{F}_s^\nu(X)] = P_{t-s}f(X_s), \quad P_\nu\text{-a.s.}$$

がわかる．よって X は $\mathbb{F}^\nu(X)$ と (P_t) について Markov 過程になっている．この式の右辺が $\mathscr{F}_s^*(X)$-可測であることに注意して条件付き期待値をとれば，

$$E[f(X_t)|\mathscr{F}_s^*(X)] = P_{t-s}f(X_s), \quad P_\nu\text{-a.s.}$$

もわかる．　□

一般のフィルトレーションにおいて右連続化と完備化は全く別の概念であるが，実は Feller 過程から生成されるフィルトレーションにおいてはこれらの概念を密接な関係をもつ．

命題 4.2. 右連続 Feller 過程 X が与えられたとき，そのフィルトレーション $\mathbb{F}^\nu(X)$ と $\mathbb{F}^*(X)$ は右連続である．

証明．まずは，各 $\mathbb{F}^\nu(X)$ が右連続であることを示そう．$\mathbb{F}^\nu(X)$ と $\mathbb{F}^\nu_+(X)$ はともに右連続であるから，全ての t と全ての有界 $\mathscr{F}_\infty(X)$ 可測関数 Z に対して

$$E_\nu[Z|\mathscr{F}_t^{\nu}(X)] = E_\nu[Z|\mathscr{F}_{t+}^\nu], \quad P^\nu\text{-a.s.} \tag{4.1}$$

が成り立つことを示せばよい．実際，特に $Z = 1_A$ $(A \in \mathscr{F}^\nu_{t+})$ とすれば $1_A = E_\nu[1_A|\mathscr{F}_t^{\nu}(X)]$, $P^\nu_t(X)$-a.s. となり，完備性から A は $\mathscr{F}_t^{\nu}(X)$-可測となることがわかる．

(4.1) を示す前に，まずは全ての有界 $\mathscr{F}_\infty(X)$ 可測関数 Z に対して

$$E_\nu[Z|\mathscr{F}_t^{\nu}(X)] = E_\nu[Z|\mathscr{F}_t(X)], \quad P^\nu\text{-a.s.} \tag{4.2}$$

が成り立つことに注意しよう．$A \in \mathscr{F}_t^{\nu}(X)$ に対して $A' \in \mathscr{F}_t(X)$ かつ $P_\nu(A \triangle A') = 0$ なる A' をとれば，

$$E_\nu[Z1_A] = E_\nu[Z1_{A'}] = E_\nu[E_\nu[Z|\mathscr{F}_t^{\nu}]1_{A'}] = E_\nu[E_\nu[Z|\mathscr{F}_t^{\nu}]1_A]$$

となり，実際に (4.2) が成り立つことが確かめられた．

(4.1) を示したいわけだが，そのためには Z が $f_1, \dots, f_n \in C_0(E)$ と $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ によって $Z = \prod_{i=1}^n f_i(X_{t_i})$ と表現されている場合に示せば十分である．というのも，この場合に示せれば，一般の場合は単調族定理からすぐにわかるからである[20]．$t \geq t_n$ の場合，Z は $\mathscr{F}_t^{\nu}(X)$-可測かつ $\mathscr{F}^\nu_{t+}(X)$ 可測なので (4.1) は明らかである．ある $k \in \{1, \dots, n\}$ に対して $t_{k-1} \leq t < t_k$ となる場合を考えよう．($t_0 = 0$ と考える．) $h > 0$ を $t + h < t_k$ となるように選べば，

$$E_\nu\left[Z \,\middle|\, \mathscr{F}^\nu_{t+h}\right] = E_\nu\left[\prod_{i=1}^n f_i(X_{t_i}) \,\middle|\, \mathscr{F}^\nu_{t+h}\right] = \left(\prod_{i=1}^{k-1} f_i(X_{t_i})\right) E_\nu\left[\prod_{i=k}^n f_i(X_{t_i}) \,\middle|\, \mathscr{F}^\nu_{t+h}\right]$$

が P_ν-a.s. の意味で成り立つ．(4.2) と Markov 性より

$$\begin{aligned}
E_\nu\left[\prod_{i=k}^n f_i(X_{t_i}) \,\middle|\, \mathscr{F}^\nu_{t+h}\right] &= E_\nu\left[\prod_{i=k}^{n-1} f_i(X_{t_i}) E_\nu\left[f_n(X_{t_n}) \,\middle|\, \mathscr{F}^\nu_{t_{n-1}}(X)\right] \,\middle|\, \mathscr{F}^\nu_{t+h}\right] \\
&= E_\nu\left[\prod_{i=k}^{n-1} f_i(X_{t_i}) E_\nu\left[f_n(X_{t_n}) \,\middle|\, \mathscr{F}^\nu_{t_{n-1}}(X)\right] \,\middle|\, \mathscr{F}^\nu_{t+h}(X)\right] \\
&= E_\nu\left[\prod_{i=k}^{n-1} f_i(X_{t_i}) E_\nu\left[f_n(X_{t_n}) \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_{n-1}}(X)\right] \,\middle|\, \mathscr{F}^\nu_{t+h}(X)\right] \\
&= E_\nu\left[\prod_{i=k}^{n-1} f_i(X_{t_i}) P_{t^n - t^{n-1}} f_n(X_{t_{n-1}}) \,\middle|\, \mathscr{F}^\nu_{t+h}(X)\right] \\
&= \cdots \\
&= P_{t_k - t - h} f_k P_{t_{k+1} - t_k} \dots P_{t_n - t_{n-1}} f_n(x)|_{x = X_{t+h}}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

と計算できる．したがって，

$$E_\nu\left[Z \,\middle|\, \mathscr{F}^\nu_{t+h}\right] = \left(\prod_{i=1}^{k-1} f_i(X_{t_i})\right) P_{t_k - t - h} f_k P_{t_{k+1} - P_{t_k}} \dots P_{t_n - t_{n-1}} f_n(x)|_{x = X_{t+h}}$$

となる．Feller 半群の強連続性より

$$P_{t_k - t - h} f_k P_{t_{k+1} - P_{t_k}} \dots P_{t_n - t_{n-1}} f_n(x) \xrightarrow[h \downarrow\downarrow 0]{\text{uniformly in } x \in E} P_{t_k - t} f_k P_{t_{k+1} - P_{t_k}} \dots P_{t_n - t_{n-1}} f_n(x)$$

[20] いま E は LCCB 空間なので，$\mathscr{B}(E)$ は $C_c(E)$ から生成されることに注意されたい．

となり，さらに X の右連続性より $\lim_{h\downarrow\downarrow 0} X_{t+h} \to X_t$ も成り立つ．したがって

$$\lim_{h\downarrow\downarrow 0} P_{t_k-t-h} f_k P_{t_{k+1}-t_k} \dots P_{t_n-t_{n-1}} f_n(X_{t+h}) = P_{t_k-t} f_k P_{t_{k+1}-t_k} \dots P_{t_n-t_{n-1}} f_n(X_t)$$

である．これと後ろ向きマルチンゲールの収束定理を用いれば

$$\begin{aligned} E_\nu[Z|\mathscr{F}^\nu_{t+}(X)] &= \lim_{h\downarrow\downarrow 0} E_\nu[Z|\mathscr{F}^\nu_{t+h}(X)] \\ &= \left(\prod_{i=1}^{k-1} f_i(X_{t_i})\right) P_{t_k-t} f_k P_{t_{k+1}-t_k} \dots P_{t_n-t_{n-1}} f_n(X_t) \\ &= E_\nu[Z|\mathscr{F}^\nu_t(X)] \end{aligned}$$

P^ν-a.s. がわかる．ただし，最後の等号は (4.3) と同様にして示される．これで $Z = \prod_{i=1}^n f_i(X_{t_i})$ の場合に (4.1) が成り立つことが示された．先ほどの述べたように，一般の場合は単調収束定理を用いればよい．

次に $\mathbb{F}^*(X)$ の右連続性を調べよう．既に明らかになったように $\mathbb{F}^\nu(X)$ は右連続であったから，

$$\mathscr{F}^*_{t+}(X) = \bigcap_{h>0} \bigcap_{\nu\in\mathscr{P}(E_\Delta)} \mathscr{F}^\nu_{t+h}(X) = \bigcap_{\nu\in\mathscr{P}(E_\Delta)} \bigcap_{h>0} \mathscr{F}^\nu_{t+h}(X) = \bigcap_{\nu\in\mathscr{P}(E_\Delta)} \mathscr{F}^\nu_t(X) = \mathscr{F}^*_t(X)$$

となり，$\mathbb{F}^\nu(X)$ も右連続である， □

命題 4.2 より，X のフィルトレーション $\mathbb{F}(X)$ においては，完備化 $\mathbb{F}^\nu(X)$ が通常の条件を満たすことがわかる．

注意 4.3. 命題 4.2 の証明では半群の Feller 性を用いたが，命題 4.2 と同様の主張はもっと一般の右過程[*21]とよばれるクラス Markov 過程についても成立することが知られている．（例えば，福島・竹田 [15, 定理 1.4.1]）

今後は，この完備化したフィルトレーション $\mathbb{F}^*(X)$ の下で Feller 過程 X の性質を調べることにしよう．われわれは càdlàg な Feller 過程を考えるわけだが，これは 3.3 の意味でのバージョンをとったものだと思えるが，しかしこの場合 X はもはや E_Δ 上の座標関数ではなく，シフト作用素などの議論を直接用いることは出来なそうである．そこで，Feller 過程を新たに càdlàg パスの空間に持ち上げるという操作をしよう．$D([0,\infty[, E_\Delta)$ を，càdlàg 関数 $\omega\colon [0,\infty[\to E_\Delta$ で $\omega(t) = \Delta$ または $\omega(t-) = \Delta$ ならば $\omega(s) = \Delta$ $(s > t)$ を満たすようなもの全体の集合とする．Feller 過程 X が（確率 1 で）càdlàg であるとき，その分布（これは本来 $(E_\Delta^{[0,\infty[}, \mathscr{E}_\Delta^{\otimes[0,\infty[})$ 上の確率測度である）は

$$\left(D([0,\infty[, E_\Delta), \mathscr{E}_\Delta^{\otimes[0,\infty[} \cap D([0,\infty[, E_\Delta)\right)$$

上の確率測度と思える．このとき $D([0,\infty[, E_\Delta)$ 上の座標関数はもとの X と同分布の Feller 過程となる．これを Feller 半群 (P_t) の標準的 càdlàg 実現 (canonical càdlàg realization) と呼ぶ．この空間上で，シフト作用素 $E_\Delta^{[0,\infty[} \to E_\Delta^{[0,\infty[}$ の制限 $\theta|_{D([0,\infty[, E_\Delta)}$ を同じ記号で表し，$D([0,\infty[)$ 上のシフト作用素という．Càdlàg な Feller 過程を考えるときは，これからは基本的に $\Omega = D([0,\infty[)$ として議論を進めることにする．

まずは命題 1.6 の完備化バージョンを証明しよう．

命題 4.4. Z が $\mathscr{F}^*_\infty$-可測な有界関数なら，$x \mapsto E_x[Z]$ は $\mathscr{E}_\Delta^{\mathscr{P}(\mathscr{E}_\Delta)}$ -可測であって

$$E_\nu[Z] = \int_E E_x[Z]\nu(dx)$$

[*21] 大雑把に言えば，右連続な強 Markov 過程

が成り立つ．

証明. $\nu \in \mathscr{P}(E_\Delta)$ とする．単関数近似を考えればよいから，$Z = 1_A$ の場合に示せば十分である．$A \in \mathscr{F}_\infty^*$ とすれば，$A_1, A_2 \in \mathscr{F}_\infty$ で $A_1 \subset A \subset A_2$ かつ $P_\nu(A_2 \setminus A_1) = 0$ を満たすものが存在する．このとき $x \mapsto P_x(A_1)$ と $x \mapsto P_x(A_2)$ は $\mathscr{E}$-可測で

$$\int_E \{P_x(A_2) - P_x(A_1)\}\, \nu(dx) = P_\nu(A_2 \setminus A_1) = 0$$

が成立．よって

$$P_x(A_1) = P_x(A_2), \quad \nu\text{-a.s.} \tag{4.4}$$

となる．明らかに全ての x に対して

$$P_x(A_1) \leq P_x(A) \leq P_x(A_2)$$

が成り立つから，(4.4) から

$$P_x(A_1) = P_x(A) = P_x(A_2), \quad \nu\text{-a.s.} \tag{4.5}$$

がわかる．よって $x \mapsto P_x(A)$ は $\mathscr{E}_\Delta^\nu$-可測である．いま ν は任意に選んでいるから，$x \mapsto P_x(A)$ は $\mathscr{E}_\Delta^{\mathscr{P}(\mathscr{E}_\Delta)}$ -可測である．また (4.5) と A_1 の選び方より

$$\int_E P_x(A)\nu(dx) = \int_E P_x(A_1)\nu(dx) = P_\nu(A_1) = P_\nu(A)$$

もわかる． □

我々は $\mathbb{F}^*(X)$ のもとで Markov 性

$$E_\nu[Z \circ \theta_t | \mathscr{F}_t^*(X)] = E_{X_t}[Z], \quad P_\nu\text{-a.s.}$$

が成り立つことを示したいわけだが，残念ながら $x \mapsto E_x[Z]$ は $\mathscr{E}_\Delta^{\mathscr{P}(\mathscr{E}_\Delta)}$ 程度の可測性しかないのであった．よって $E_{X_t(\cdot)}[Z]$ が十分な可測性をもつか明らかではない．しかし，実際は $E_{X_t(\cdot)}[Z]$ が $\mathscr{F}_t^*(X)$-可測になることを保証するのが次の補題である．

補題 4.5. $(S, \mathscr{S})$ と $(T, \mathscr{T})$ を可測空間とし，$\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ をそれぞれ $(S, \mathscr{S})$ と $(T, \mathscr{T})$ 上の確率測度の集合とする．さらに，$\mathscr{S}' \subset \mathscr{S}$ と $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$ をその部分 σ-代数とする．$f\colon S \to T$ は $\mathscr{S}/\mathscr{T}$-可測かつ $\mathscr{S}'/\mathscr{T}'$-可測関数で，$f_*(\mathscr{M}) \subset \mathscr{N}$ が成り立っているとする．このとき $f\colon S \to T$ は $\mathscr{S}'^{(\mathscr{S},\mathscr{M})}/\mathscr{T}'^{(\mathscr{T},\mathscr{N})}$-可測となる．

証明. $A \in \mathscr{T}'^{(\mathscr{T},\mathscr{N})}$ と $\mu \in \mathscr{M}$ を任意に選ぶ．仮定より $f_*\mu \in \mathscr{N}$ であるから，ある $A' \in \mathscr{T}'$ と $N \in \mathscr{T}$ で $A \triangle A' \subset N$ かつ $f_*\mu(N) = 0$ を満たすものが存在する．f の可測性より $f^{-1}(A') \in \mathscr{S}'$，$f^{-1}(N) \in \mathscr{S}$ が成り立つ．さらに $f^{-1}(A) \triangle f^{-1}(A') \subset N$ および $\mu(f^{-1}(N)) = 0$ も成り立っている．したがって $f^{-1}(A) \in \mathscr{S}'^{(\mathscr{S},\mu)}$ である．いま μ は任意に選んでいたから，

$$f^{-1}(A) \in \bigcap_{\mu \in \mathscr{M}} \mathscr{S}'^{(\mathscr{S},\mu)}$$

がわかる．よって f は $\mathscr{S}'^{(\mathscr{S},\mathscr{M})}/\mathscr{T}'^{(\mathscr{T},\mathscr{N})}$ -可測である． □

補題 4.6. 全ての $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して $X_t\colon \Omega \to E_\Delta$ は $\mathscr{F}_t^*(X)/\mathscr{E}_\Delta^{\mathscr{P}(\mathscr{E}_\Delta)}$ -可測である．

証明．$\nu \in \mathscr{P}(E_\Delta)$ なら $(X_t)_* P_\nu \in \mathscr{P}(E_\Delta)$ であることに注意すれば，補題 4.5 よりわかる． □

シフト作用素を用いた Markov 性の表現式を示すためには，$Z \circ \theta_t$ の可測性も調べる必要もある．そのためには以下の補題が有用である．

補題 4.7. 全ての $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ と $h > 0$ に対して，$\theta\colon \Omega \to \Omega$ は $\mathscr{F}^*_{t+h}(X)/\mathscr{F}^*_t(X)$-可測である．

証明．これも補題 4.5 を用いて示す．そのためには，まずは θ が $\mathscr{F}_\infty(X)/\mathscr{F}_\infty(X)$-可測かつ $\mathscr{F}_{t+h}(X)/\mathscr{F}_t(X)$-可測であることを示す必要がある．一つ目の可測性はシフト作用素の定義の際に既に説明した．二つ目については，任意の $s \leq t$ に対して $\pi_s \circ \theta_h$ が $\mathscr{F}_{t+h}(X)$-可測になることを示せばよい．このことは，$A \in \mathscr{E}_\Delta$ に対して

$$(\pi_s \circ \theta_h)^{-1}(A) = \theta_h^{-1}\pi_s^{-1}(A) = \{\omega(s+h) \in A\} \in \mathscr{F}_{t+h}$$

が成り立つことからわかる．補題 4.5 を使うためには，あとは任意の $\nu \in \mathscr{P}(E_\Delta)$ に対して，ある $\mu \in \mathscr{P}(E_\Delta)$ で $(\theta_h)_* P_\nu = P_\mu$ を満たすものが存在することを確かめればよい．そのためには実際 $\mu = (X_h)_* P_\nu$ と定めればよい．実際，$A \in \mathscr{F}_\infty(X)$ とすれば

$$\begin{aligned}
P_\nu[A] &= \int P_x(A)\mu(dx) \\
&= \int P_x(A)(X_h)_* P_\nu(dx) \\
&= \int P_{X_h(\omega)}(A) dP_\nu(d\omega) \\
&= E_\nu[E_{X_h}[1_A]] \\
&= E_\nu[E_x[1_A \circ \theta_h | \mathscr{F}_h(X)]] \quad (\because \text{Markov 性}) \\
&= E_\nu[1_A \circ \theta_h] \\
&= P_\nu(\theta^{-1}(A))
\end{aligned}$$

となる． □

定理 4.8 ($\mathbb{F}^*(X)$ に対する Markov 性)**.** Z が有界 $\mathscr{F}^*_\infty(X)$-可測関数なら，任意の初期分布 ν と任意の t に対して

$$E_\nu[Z \circ \theta_t | \mathscr{F}^*_t(X)] = E_{X_t}[Z], \quad P_\nu\text{-a.s.} \tag{4.6}$$

が成り立つ．

証明．補題 4.4 と 4.6 より写像 $\omega \mapsto E_{X_t(\omega)}[Z]$ は $\mathscr{F}^*_t(X)$-可測なので，任意の $A \in \mathscr{F}^*_t(X)$ に対して

$$E_\nu[1_A Z \circ \theta_t] = E_\nu[1_A E_{X_t}[Z]]$$

が成り立つことを示せばよい．$A \in \mathscr{F}^*_t(X)$ だから，$A' \in \mathscr{F}_t$ と $N \in \mathscr{F}_\infty(X)$ で $A' \triangle A \subset N$ かつ $P_\nu(N) = 0$ を満たすものが存在する．ここで $\mu = (X_t)_* P_\nu$ と定めよう．このとき補題 4.7 の証明より $P_\mu = (\theta_t)_* P_\nu$ が成り立つことに注意する．有界 $\mathscr{F}_\infty(X)$-可測関数 Z' と $\Lambda \in \mathscr{F}_\infty)(X)$ $\{Z \neq Z'\} \subset \Lambda$ かつ $P_\mu(\Lambda)$ を満たすものが存在する．X の $\mathbb{F}(X)$ に対する Markov 性より，

$$E_\nu[1_{A'} Z' \circ \theta_t] = E_\nu[1_{A'} E_{X_t}[Z']]$$

が成り立つ．したがって，

$$E_\nu[1_A Z\circ\theta_t]=E_\nu[1_{A'}Z'\circ\theta_t],\quad E_\nu[1_A E_{X_t}[Z]]=E_\nu[1_{A'}E_{X_t}[Z']]$$

が成り立つことを示せばよい．A' と Z' の選び方より，

$$\begin{aligned}
&|E_\nu[1_A Z\circ\theta_t]-E_\nu[1_{A'}Z'\circ\theta_t]|\\
&\le E_\nu\left[|1_A-1_{A'}||Z\circ\theta_t|\right]+E_\nu[1_{A'}\,|Z\circ\theta_t-Z'\circ\theta_t|]\\
&\le E_\nu\left[1_N|Z\circ\theta_t|\right]+E_\nu[|Z\circ\theta_t-Z'\circ\theta_t|]\\
&=E_\nu\left[1_N|Z\circ\theta_t|\right]+E_\mu[|Z-Z'|]\\
&=0
\end{aligned}$$

である．また，

$$\begin{aligned}
&|E_\nu[1_A E_{X_t}[Z]]-E_\nu[1_{A'}E_{X_t}[Z']]|\\
&\le|E_\nu[1_A E_{X_t}[Z]]-E_\nu[1_{A'}E_{X_t}[Z]]|+|E_\nu[1_{A'}E_{X_t}[Z]]-E_\nu[1_{A'}E_{X_t}[Z']]|\\
&\le E_\nu\left[1_{A\triangle A'}\,|E_{X_t}[Z]|\right]+E_\nu\left[1_{A'}\,|E_{X_t}[Z]-E_{X_t}[Z']|\right]\\
&\le E_\nu\left[1_N E_{X_t}\left[|Z|\right]\right]+E_\nu\left[E_{X_t}\left[|Z-Z'|\right]\right]\\
&=E_\nu\left[1_N E_{X_t}\left[|Z|\right]\right]+\int E_x\left[|Z-Z'|\right]\mu(dx)\\
&=E_\nu\left[1_N E_{X_t}\left[|Z|\right]\right]+E_\mu\left[|Z-Z'|\right]\\
&=0
\end{aligned}$$

以上の議論により，

$$E_\nu[1_A Z\circ\theta_t]=E_\nu[1_{A'}Z'\circ\theta_t]=E_\nu[1_{A'}E_{X_t}[Z']]=E_\nu[1_A E_{X_t}[Z]]$$

がわかった． □

完備化したフィルトレーションに対して，次の Blumenthal の 0-1 法則 (Blumenthal's 0-1 law) と呼ばれる性質が成り立つ．

命題 4.9. 任意の $x\in E$ と任意の $\Lambda\in\mathscr{F}_0(X)^{\delta_x}$ に対して，$P_x(\Lambda)=1$ または $P_x(\Lambda)=0$ が成り立つ．

証明. まずは $\Lambda\in\sigma(X_0)$ の場合を考える．このとき，ある Borel 集合 B を用いて $\Lambda=X_0^{-1}(B)$ と表現できる．$x\in B$ なら，

$$1=P_x(X_0=x)\le P_x(X_0\in B)=P_x(\Lambda)$$

である．一方 $x\notin B$ なら

$$0=P_x(X_0\ne 0)\ge P_x(X_0\in B)=P_x(\Lambda)$$

となる．よって $P_x(\Lambda)=1$ または $P_x(\Lambda)=0$ が成り立つ．次に $\Lambda\in\mathscr{F}_0(X)^{\delta_x}$ の場合を考える．このとき，$\Lambda'\in\mathscr{F}_0(X)=\sigma(X_0)$ で $\Lambda'\triangle\Lambda$ が P_x-零集合となるようなものがとれる．前半の議論より $P_x(\Lambda')=0$ または $P_x(\Lambda')=1$ が成り立つ．$P_x(\Lambda')=0$ のときは $P_x(\Lambda)=0$ であり，$P_x(\Lambda')=1$ のときは $P_x(\Lambda)=1$ が成り立つ．したがって $P_x(\Lambda)=1$ または $P_x(\Lambda)=0$ となる． □

次の系の証明は明らかであろう．

系 4.10. T が $\mathbb{F}^{\delta_x}(X)$-停止時刻なら，$P_x[T=0]=1$ または $P_x[T>0]=1$ が成り立つ．

まとめ

- Feller 過程 X は，$\mathbb{F}^{\nu}(X)$ と $\mathbb{F}^{*}(X)$ に対しても同じ推移関数をもつ Markov 過程である．
- 右連続 Feller 過程 X について，フィルトレーションの完備化 $\mathbb{F}^{\nu}(X)$ と普遍完備化 $\mathbb{F}^{*}(X)$ はともに右連続である．
- 右連続 Feller 過程 X は $\mathbb{F}^{*}(X)$ に対しても Markov 性 (4.6) をもつ．
- フィルトレーションの完備化に対して，Blumenthal の 0-1 法則が成り立つ．

5　強 Markov 性

M を右連続マルチンゲールとすれば，$S \le T$ を満たす任意の有界停止時刻 S, T に対して

$$E[M_T | \mathscr{F}_S] = M_S$$

が成り立つのであった．（任意抽出定理）この結果はマルチンゲール理論において大変有用なものである．そこで，Markov 過程においても Markov 性を表す式

$$E_\nu[Z \circ \theta_t | \mathscr{F}_t] = E_{X_t}[Z], \quad P_\nu\text{-a.s.}$$

で t を停止時刻 T におきかえたもの

$$E_\nu[Z \circ \theta_T | \mathscr{F}_T] = E_{X_T}[Z], \quad P_\nu\text{-a.s.}$$

が成立すれば便利であろう．このような性質を強 Markov 性 (strong Markov property) という． 本節の目標は，Feller 過程が強 Markov 性をもつことの証明である．しかし，そもそも θ_T がまだ定義されていないので，少しばかり設定を述べなければいけない．

$\mathbb{F}^*(X)$-停止時刻 T に対して

$$X_T(\omega) = \begin{cases} X_{T(\omega)}(\omega) & T(\omega) < \infty \\ \Delta & T(\omega) = \infty \end{cases}$$

と定義する．このとき X_T は $\mathscr{F}_T$-可測関数となっている．さらに，

$$\theta_T(\omega) = \begin{cases} \theta_{T(\omega)}(\omega) & T(\omega) < \infty \\ \Delta & T(\omega) = \infty \end{cases}$$

と定める．ただし，上の式において Δ は Δ に値をとる定数関数を表す．このように定義した $\theta_T\colon \Omega \to \Omega$ は $\mathscr{F}_\infty(X)/\mathscr{F}_\infty(X)$-可測関数となるだろうか？そのためには，全ての射影 $\pi_t\colon \Omega \to E_\Delta$ に対して $\pi_t \circ \theta_T$ が $\mathscr{F}_\infty(X)/\mathscr{F}_\infty(X)$ 可測となることを示せばよいのであった．定義より，

$$\pi_t \circ \theta_T(\omega) = \begin{cases} \omega(t + T(\omega)) & T(\omega) < \infty \\ \Delta & T(\omega) = 0 \end{cases}$$

である．したがって，これは座標過程 X と停止時刻 $T + t$ から作られる確率変数 X_{T+t} に他ならない．これは $\mathscr{F}_{T+t}(X)$-可測なのであった．任意の $t \ge 0$ に対して $\mathscr{F}_{T+t}(X) \subset \mathscr{F}_\infty(X)$ が成り立つのであったから，θ_T は $\mathscr{F}_\infty(X)/\mathscr{F}_\infty(X)$-可測である．

定理 5.1 (Feller 過程の強 Markov 性)**.** Z が有界（または非負）$\mathscr{F}^*_\infty(X)$-可測関数で T が $\mathbb{F}^*(X)$-停止時刻なら，任意の初期分布 ν に対して

$$E_\nu[Z \circ \theta_T | \mathscr{F}^*_T] = E_{X_T}[Z], \quad P_\nu\text{-a.s.} \tag{5.1}$$

が成り立つ．

証明. 例のごとく，まずは Z が $C_0(E)$ の元の有限列によって $Z = \prod_{1\le i\le m} f_i(X_{t_i})$ と表現されている場合を考える．さらに，まずは T がある可算集合 $D \subset [0,\infty]$ に値をとる場合を考える．このとき優収束定理により，任意の $A \in \mathscr{F}_T^*(X)$ に対して

$$\begin{aligned}
E_\nu[Z\circ\theta_T 1_A] &= \sum_{t\in D} E_\nu\left[Z\circ\theta_T 1_A 1_{\{T=t\}}\right] \\
&= \sum_{t\in D} E_\nu\left[Z\circ\theta_t 1_A 1_{\{T=t\}}\right] \\
&= \sum_{t\in D} E_\nu\left[E_{X_t}[Z] 1_A 1_{\{T=t\}}\right] \quad (\because A\cap\{T=t\}\in\mathscr{F}_t^*) \\
&= E_\nu[E_{X_T}[Z]1_A]
\end{aligned}$$

が成り立つ．よってこの場合は (5.1) が成り立つ．ただし，4 行目の等号では X の $\mathbb{F}^*(X)$ に関する Markov 性（定理 4.8）を用いた．（$t=\infty$ のときは $X_\infty = \Delta$ だったことを思い出そう．）次に，一般の停止時刻の場合を考える．前半での議論を用いるために，停止時刻 T を離散近似しよう．

$$T_n(\omega) = \frac{\lfloor 2^n T(\omega)\rfloor + 1}{2^n} = \sum_{k\ge 0}\frac{k+1}{2^n} 1_{\left\{\frac{k}{2^n}\le T<\frac{k+1}{2^n}\right\}}(\omega) + \infty 1_{\{T=\infty\}}(\omega)$$

と定めれば，(T_n) は停止時刻の減少列で T に各点収束する．さらに $\{T<\infty\}$ 上では $T<T_n$ となっているから，$\mathscr{F}_{T+} = \bigcap \mathscr{F}_{T_n}$ が成り立つ．f_i の連続性と有界性に注意して極限操作をすれば，

$$\begin{aligned}
E_\nu\left[\left(\prod_{1\le i\le m} f_i(X_{t_i})\right)\circ\theta_T 1_A\right] &= E_\nu\left[\left(\prod_{1\le i\le m} f_i(X_{t_i+T})\right)1_A\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} E_\nu\left[\left(\prod_{1\le i\le m} f_i(X_{t_i+T_n})\right)1_A\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} E_\nu\left[E_{X_{T_n}}\left[\prod_{1\le i\le m} f_i(X_{t_i})\right]1_A\right] \\
&= E_\nu\left[E_{X_T}\left[\prod_{1\le i\le m} f_i(X_{t_i})\right]1_A\right]
\end{aligned}$$

を得る．ただし，最後の等号には Feller 推移関数の性質（$x\mapsto P_t f(x)$ の連続性）を用いた．したがって，Z が $\prod_{1\le i\le n} f_i(X_{t_i})$ の形の時には，任意の停止時刻について (5.1) が成り立つ．単調族定理を用いれば，任意の $Z\in\mathscr{F}_\infty(X)$ について (5.1) が成り立つことがわかった．言い換えれば，X は $\mathbb{F}(X)$ に対して強 Markov 性を持つ．

次に，X が $\mathbb{F}^*(X)$ に対して強 Markov 性を持つことを示そう．$\mu = (X_T)_* P_\nu$ と定義する．（これは E_Δ 上の確率測度である．）$Z\in\mathscr{F}_\infty^*(X)$ を非負の関数とし，Z' と Z'' を $Z'\le Z\le Z''$ かつ $P_\mu(Z''-Z'>0)=0$ となるように選ぶ．このとき，仮定と前半の議論より

$$\begin{aligned}
P_\nu(Z''\circ\theta_T - Z'\circ\theta_T > 0) &= P_\nu((Z''-Z')\circ\theta_T>0) \\
&= E_\nu\left[1_{]0,\infty[}(Z''-Z')\circ\theta_T\right] \\
&= E_\nu\left[E_{X_T}[1_{]0,\infty[}(Z''-Z')]\right] \\
&= \int_{E_\Delta} P_x(Z''-Z>0)d\mu
\end{aligned}$$

$$= P_\mu(Z'' - Z > 0) = 0$$

が成り立つ．よって Z は $\mathscr{F}^\nu_\infty(X)$-可測であることがわかる．さらに条件付き期待値の単調性と前半の議論より，

$$E_{X_T}[Z'] = E[Z' \circ \theta_T | \mathscr{F}^*_T] \leq E[Z \circ \theta_T | \mathscr{F}^*_T] \leq E[Z'' \circ \theta_T | \mathscr{F}^*_T] = E_{X_T}[Z'']$$

が P_ν-a.e. の意味で成り立つ．Z' と Z'' の定義より $E_{X_T}[Z'] = E_{X_T}[Z'']$ P_ν-a.e. が成り立つので，求める等式 (5.1) を得る． □

まとめ

- Feller 過程 X は $\mathbb{F}^*(X)$ に関して強 Markov 性を持つ．

6 準左連続性と Hunt 過程

本節では，Feller 過程の準左連続性をテーマに扱う．まずは Feller 過程の確率連続性を証明しよう．確率過程が確率連続 (stochastically continuous) であるとは，$t \mapsto X_t \in \mathscr{L}^0(\Omega; E)$ が確率収束の位相に関して連続となるということであった．これまでの節と同じように，X は E_Δ に値をとる Feller 過程とする．

命題 6.1. (càdlàg) とは限らない Feller 過程は確率連続である．

証明．f と g を有界連続関数とし，$t, \delta > 0$ とする．このとき X の Markov 性より

$$E[f(X_t)g(X_{t+\delta})] = E[E[g(X_{t+\delta})|\mathscr{F}_t]f(X_t)] = E[E_{X_t}[g(X_\delta)]f(X_t)] = E[P_\delta g(X_t)f(X_t)]$$

が成り立つ．Feller 推移関数の強連続性に注意して極限操作をすれば，

$$\lim_{\delta\downarrow\downarrow 0} E[f(X_t)g(X_{t+\delta})] = E\left[\lim_{\delta\downarrow\downarrow 0} P_\delta g(X_t)f(X_t)\right] = E[g(X_t)f(X_t)]$$

となる．$h\colon E_\Delta \times E_\Delta \to \mathbb{R}$ を連続関数とすれば，Stone-Weierstrass の定理より $h_n(x, y) = \sum f_{n,i}(x)g_{n,j}$ ($f_{n,i}, g_{n,j} \in C(E_{\Delta,\mathbb{R}})$）という形の関数列で，$h$ に一様収束するものが存在する．先ほどの結果と一様収束性に注意して極限操作を行えば，

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\downarrow\downarrow 0} E[h(X_t, X_{t+\delta})] &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i,j}\lim_{\delta\downarrow\downarrow 0} E[f_{n,i}(X_t)g_{n,j}(X_{t+\delta})] \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i,j} E[f_{n,i}(X_t)g_{n,j}(X_t)] \\ &= E[h(X_t, X_t)]\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる．特に h を E_Δ の位相と整合的な（有界）距離としてとれば，$E[h(X, Y)]$ は $\mathscr{L}^0(\Omega, E_\Delta)$ に確率収束の位相を定めるから，これより $X_{t+\delta} \to X_t$ が確率収束の意味で成り立つ．

次に，$X_{t-\delta} \to X_t$ が確率収束の意味で成り立つことを示そう．先ほどと同じように f, g を連続関数，$t > 0$ とし，$\delta > 0$ を $t - \delta > 0$ となるように選ぶ．このとき，Markov 性より全ての $x \in E_\Delta$ について

$$\begin{aligned}E_x[f(X_{t-\delta})g(X_t)] &= E_x[f(X_{t-\delta})E_x[g(X_t)|\mathscr{F}_\delta]] \\ &= E_x[f(X_{t-\delta})E_{X_{t-\delta}}[g(X_\delta)]] \\ &= E_x[f(X_{t-\delta})P_\delta g(X_{t-\delta})]] \\ &= P_{t-\delta}(fP_\delta g)(x)\end{aligned}$$

が成り立つ．いま Feller 推移関数の強連続性と縮小性に注意すれば，

$$\begin{aligned}|P_{t-\delta}(fP_\delta g)(x) - P_t(fg)(x)| &\le |P_{t-\delta}(fP_\delta g)(x) - P_{t-\delta}(fg)(x)| + |P_{t-\delta}(fg)(x) - P_t(fg)(x)| \\ &\le \|f\||(P_\delta g)(x) - g(x)| + |P_{t-\delta}(fg)(x) - P_t(fg)(x)| \\ &\xrightarrow[\delta\to 0]{} 0\end{aligned}$$

となることがわかる．したがって

$$E_x[f(X_{t-\delta})g(X_t)] = P_{t-\delta}(fP_\delta g)(x) \xrightarrow[\delta\downarrow\downarrow 0]{} P_t(fg)(x) = E_x[f(X_t)g(X_t)]$$

が全ての x について成り立つ．これより，先ほどと同様に議論で任意の連続関数 $h\colon E_\Delta \times E_\Delta \to \mathbb{R}$ と任意の $x \in E_\Delta$ について

$$\lim_{\delta \downarrow\downarrow 0} E_x[h(X_{t-\delta}, X_t)] = E_x[h(X_t, X_t)]$$

が成り立つことがわかる．h の有界性に注意して有界収束定理を用いれば，

$$\begin{aligned} E[h(X_{t-\delta}, X_t)] &= E[E[h(X_{t-\delta}, X_t)|\mathscr{F}_0]] \\ &= E[E_{X_0}[h(X_{t-\delta}, X_t)]] \\ &\xrightarrow[\delta\downarrow\downarrow 0]{} E[E_{X_0}[h(X_t, X_t)]] \\ &= E[h(X_t, X_t)] \end{aligned}$$

を得る．特に h を先ほどと同様に距離としてとれば，$X_{t-\delta} \to X_t$ が確率収束の意味で成り立つことがわかる． □

確率連続性を用いれば，càdlàg な Feller 過程が各時刻 t で Feller 過程がジャンプする確率は 0 であることがわかる．このような性質を持つ càdlàg 過程は，「固定された不連続点を持たない」(have no fixed time of discontinuity) という．

命題 6.2. X を càdlàg な Feller 過程とする．このとき，任意の t について $P(X_t = X_{t-}) = 1$ が成り立つ．

証明. (s_n) と (t_n) を，$s_n < t$ かつ $X_{s_n} \to X_t$ a.s. を満たすように選ぶ．（確率連続性よりこのような列が選べる．）X は càdlàg だから，$\lim_n X_{s_n} = X_{t-}$ が成り立っており，極限の一意性に注意すれば $X_{t-} = X_t$ a.s. がわかる． □

$T_1 \le T_2 \le \cdots \le T_n \uparrow T$ なる停止時刻列で $\{T > 0\}$ 上 $T_n < T$ を満たすようなものが存在するとき，T は可予測時刻 (predictable time) であるというのであった．また，可予測時刻 T に対して上の条件を満たすような停止時刻列は，T を予告する (announce) という．càdlàg 過程 X が任意の可予測時刻 T に対して $\Delta X_T 1_{\{T<\infty\}} = 0$ を満たすとき，X は準左連続 (quasi-left continuous) であるという．

本節の目標は，càdlàg Feller 過程の準左連続性を示すことである．

命題 6.3. X を Feller 過程とすれば，任意の可予測時刻 T と $f \in C(E_\Delta, \mathbb{R})$，そして任意の初期分布 ν に対して

$$E_\nu[f(X_{T+u})1_{\{T<\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}] = P_u f(X_{T-})1_{\{T<\infty\}} \quad P_\nu\text{-a.s.}$$

が成り立つ．

命題 6.3 を標語的に言えば，「$f(X_{u+\cdot})$ の P_ν-可予測射影は $P_u(X_-)$ である」ということになる．

証明. (T_n) を T の予告列とすれば，強マルコフ性より

$$E_\nu[f(X_{T_n+u})|\mathscr{F}_{T_n}] = E_{X_{T_n}}[f(X_u)] = P_u(X_{T_n})$$

が成り立つ．M を正の数として両辺に $1_{\{T_n \le M\}}$ を掛ければ

$$E_\nu[f(X_{T_n+u})1_{\{T_n\le M\}}|\mathscr{F}_{T_n}] = E_{X_{T_n}}[f(X_u)] = P_u(X_{T_n})1_{\{T_n\le M\}} \tag{6.1}$$

となる．いま T_n の選び方と f の連続性より，

$$\lim_{n\to\infty} f(X_{T_n+u}) = \begin{cases} f(X_u) & \text{on } \{T=0\} \\ f(X_{(T+u)-}) & \text{on } \{T>0\} \end{cases}$$

が成り立つ．さらに命題 6.2 より $X_u = X_{u-}$ a.s. が成り立つので，結局

$$\lim_{n\to\infty} f(X_{T_n+u})f(X_{(T+u)-}) \quad \text{a.s.}$$

となることがわかる．したがって f の有界性に注意して極限操作をすれば，

$$\lim_{n\to\infty} E_\nu[f(X_{T_n+u})1_{\{T_n\leq M\}}|\mathscr{F}_{T_n}] = E_\nu[f(X_{(T+u)-})1_{\{T\leq M\}}|\mathscr{F}_{T-}]$$

が（L^1 かつ概収束の意味で）成り立つ[*22]．同様の議論により

$$\lim_{n\to\infty} P_u(X_{T_n})1_{\{T_n\leq M\}} = P_u(X_{T-})1_{\{T\leq M\}}$$

もわかるから，(6.1) において極限操作をすれば

$$E_\nu[f(X_{(T+u)-})1_{\{T\leq M\}}|\mathscr{F}_{T-}] = P_u(X_{T-})1_{\{T\leq M\}} \quad P_\nu\text{-a.s.}$$

を得る．さらに $M\to\infty$ とすれば条件付き期待値に関する優収束定理より，

$$E_\nu[f(X_{(T+u)-})1_{\{T<\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}] = P_uf(X_{T-})1_{\{T<\infty\}} \quad P_\nu\text{-a.s.} \tag{6.2}$$

となる．

(6.2) 左辺の $(T+u)-$ の部分は $T+u$ になって欲しいから，求める結果を得るためにはもう少し議論が必要である．(6.2) において $u\downarrow\downarrow 0$ とすれば，条件付き期待値に関する優収束定理と $f(X_{(T+u)-})\to f(X_T)$ a.s.，そして Feller 推移関数の強連続性より，

$$E_\nu[f(X_T)1_{\{T<\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}] = f(X_{T-})1_{\{T<\infty\}} \quad P_\nu\text{-a.s.}$$

となる．$f(X_-)$ は可予測だから $f(X_{T-})1_{\{T<\infty\}}\in\mathscr{F}_{T<\infty}$ であり，先ほどの式より

$$E_\nu[f(X_T)1_{\{T<\infty\}}g(X_{T-})] = E_\nu[f(X_{T-})1_{\{T<\infty\}}g(X_{T-})] \quad \forall f,g\in C_0(E_\Delta,\mathbb{R})$$

が成り立つ．ここで，

$$Y = \begin{cases} X_{T-} & \text{on } \{T<\infty\} \\ \Delta & \text{on } \{T=\infty\} \end{cases}$$

と定義すれば，先ほどの式より任意の $f,g\in C_0(E_\Delta,\mathbb{R})$ に対して

$$\begin{aligned} E_\nu[f(Y)g(Y)] &= E_\nu[f(X_{T-})g(X_{T-})1_{\{T<\infty\}}] + E_\nu[f(\Delta)g(\Delta)1_{\{T=\infty\}}] \\ &= E_\nu[f(X_T)g(X_{T-})1_{\{T<\infty\}}] + E_\nu[f(X_T)g(\Delta)1_{\{T=\infty\}}] \\ &= E_\nu[f(X_T)g(Y)] \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって補題 3.2 から $X_T = Y$ P_ν-a.s. となり，Y の定義より

$$X_T1_{\{T<\infty\}} = X_{T-}1_{\{T<\infty\}} \quad P_\nu\text{-a.s.}$$

がわかる．（T は任意の可予測時刻なので，これは Feller 過程 X の左連続性を表している．）

さて，任意の停止時刻 S に対して $S+t$ は可予測時刻となることを思い出せば，先ほどまでの議論により特に任意の可予測時刻 T に対して $X_{(T+u)-} = X_{T+u}$ P_ν-a.s. が成り立つことがわかる．これと (6.2) を合わせれば，求める等式

$$E_\nu[f(X_{T+u})1_{T<\infty}|\mathscr{F}_{T-}] = P_u(X_{T-})1_{\{T<\infty\}} \quad P_\nu\text{-a.s.}$$

を得る．□

[*22] Revuz and Yor [20, Chapter II. (2.4) Corollary] などを見よ．該当の系では概収束しか書いていないが，一様可積分性に注意すれば L^1 収束もわかる．（ここでは必要ないけど．）

何と命題 6.3 証明の過程で，目標としていた càdlàg Feller 過程の準左連続性が導けてしまった．しかしここでは終わらない．càdlàg Feller 過程は準左連続性よりもう少し強い regularity を持つのである．

命題 6.4. X を càdlàg な Feller 過程とすれば，停止時刻の任意の増加列と任意の初期分布に対して

$$\lim_{n\to\infty} X_{T_n} = X_{\bigvee T_n} \quad P_\nu\text{-a.s. on } \left\{\bigvee T_n < \infty\right\}$$

が成り立つ．

なお，命題 6.4 の性質を確率過程の準左連続性と呼ぶ文献もあるので注意が必要である．（Chung and Walsh [6, p.70] など．）

証明．停止時刻の増加列 (T_n) に対して $T = \bigvee_n T_n$ と定義する．また，(T_n) を以下のように修正した列 (T_n') を用意する．

$$A = \bigcap_n \{T_n < T\}, \qquad T_n' = (T_n)_{\{T_n<T\}}, \qquad T' = T_A$$

ただし，T_A などは停止時刻の A 上への制限[*23]を表す．このとき T_n'，T' はどれも停止時刻になることに注意されたい[*24]．(T_n') は停止時刻の増加列で，A 上では $T_n' < T'$ かつ $T_n' = T_n \to T = T'$ を満たす．さらに $T_n'' = T_n' \wedge n$ と定義すれば，(T_n'') も停止時刻の増加列で，$T_n'' \to T'$ かつ $T > 0$ 上で $T_n'' < T'$ を満たしている．すなわち (T_n'') は T' の予告列であり，T' は可予測時刻であることがわかる．したがって命題 6.3 より

$$X_{T'} = X_{T'-} \quad \text{a.s. on } \{T' < \infty\}$$

が成り立つ．$\{T' < \infty\}$ では $T' = T$ だから，これより

$$\lim_{n\to\infty} X_{T_n''} = X_{T'-} = X_{T-} = X_T \quad \text{a.s. on } \{T' < \infty\}$$

がわかる．$\{T < \infty\} \subset \{T' < \infty\} \cup \Omega \setminus A$ であることに注意すれば，後は $\Omega \setminus A$ 上で $X_T = \lim_n X_{T_n}$ a.s. が成り立つことを示せばよいことになる．ところが $\omega \in \Omega \setminus A$ なら $(T_n(\omega))$ はある n より先では定数列となるから，この関係式は明らかである．以上の議論で命題の主張が示された．$\square$

準左連続性の概念を用意したところで，Hunt 過程の定義を紹介しよう．

定義 6.5. $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0})$ をフィルターつき可測空間とし，E を LCCB 空間，E_Δ を E に墓地を付したものとする．$(P_x)_{x\in\mathbb{E}_\Delta}$ を確率核とし，E_Δ 値確率過程 X について次の条件が成り立っているとする．

(i) $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ は $(\mathscr{F}, (P_x)_{x\in\mathbb{E}_\Delta})$-完備かつ右連続である．
(ii) X は càdlàg なパスをもつ．
(iii) 任意の $x \in E_\Delta$ について，X は P_x-準左連続である．
(iv) $X_s(\omega) = \Delta$ ならば，$[s, \infty]$ 上で $X_t(\omega) = \Delta$ が成り立つ．
(v) X は $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ に対して強 Markov である．i.e. 任意の停止時刻 T と任意の有界連続関数 f，そして任意の $x \in E_\Delta$ に対して以下が成り立つ．

$$E_x[f(X_{T+t})|\mathscr{F}_T] = E_{X_T}[f(X_t)] \quad P_x\text{-a.s.}$$

[*23] 定義は $T_A = T1_A + \infty 1_{\Omega\setminus A}$ である．
[*24] He, Wang, and Yan [16, 3.9 Theorem] などを見よ．

(vi) 任意の $x \in E_\Delta$ に対して $P_x(X_0 = x) = 1$ が成り立つ.

以上の条件を満たす Markov 過程を Hunt 過程 (Hunt process) と呼ぶ.

X がとある停止時刻 ζ の直前 $[\![0, \zeta[\![$ 上でのみ準左連続性を持つ場合は，X を標準過程と呼んだりする.

本ノートでこれまで扱ってきた内容を総合すると，我々は以下の定理を得たことがわかる.

定理 6.6. Feller 推移関数が与えられると，それを推移関数として持つ Hunt 過程が存在する.

まとめ

- càdlàg な Feller 過程は準左連続である.
- Feller 半群が与えられると，それに対応する Hunt 過程が定まる.

A　数学的な補足

A.1　測度の正則性

定義 A.1. X を Haudorff 空間とし，$\mu\colon \mathscr{B}(X) \to [0, \infty]$ を測度とする．μ は次の条件を満たすとき，Radon 測度であるという．

(i) 任意のコンパクト集合 $K \subset X$ について $\mu(K) < \infty$ が成り立つ．（局所有限性）

(ii) 任意の $B \in \mathscr{B}(X)$ に対して

$$\mu(B) = \inf\{\mu(G) \mid G \text{ は開集合で } G \supset B\}$$

が成り立つ．（外正則性）

(iii) 任意の開集合 $G \subset X$ に対して

$$\mu(B) = \inf\{\mu(K) \mid K \text{ はコンパクト集合で } K \subset G\}$$

が成り立つ．（開集合の内正則性）

ポーランド空間上[*25]の任意の非負有限測度は Radon 測度になるという重要な結果を証明する．

命題 A.2. X をポーランド空間とする．$(X, \mathscr{B}(X))$ 上の非負有限測度は Radon 測度である．

証明. $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ は (X, d) の位相と整合的で，(X, d) が完備となるような距離関数とする．μ は有限測度だから局所有限性は明らかであり，内正則性，外正則性のみを示せばよい．そのために，より強く Borel 集合の内正則性を示すことにする．Borel 集合が μ-内正則であれば明らかに開集合は μ-内正則であり，さらに補集合を考えることで Borel 集合の μ-外正則性もわかるからである．

Step1：**任意の $A \in \mathscr{B}(X)$ が開集合で外側から，閉集合で内側から近似できることの証明．** まずは，μ が次の条件を満たすことを証明する[*26]．

主張 1

任意の $B \in \mathscr{B}(X)$ と任意の ε に対して，閉集合 F_ε と開集合 U_ε で $F_\varepsilon \subset B \subset U_\varepsilon$

$$\mu(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$$

を満たすものが存在する．

$$\mathscr{A} = \{A \in \mathscr{B}(X) \mid A \text{ は主張 1 の条件を満たす }\}$$

と定義する．このとき，$\mathscr{A}$ が閉集合全体を含む σ-加法族であることを示す．$A \in \mathscr{B}(X)$ が閉集合なら，$F_\varepsilon = A$ とすればよい．さらに

$$U^n = \left\{ x \in X \;\middle|\; d(x, A) < \frac{1}{n} \right\}$$

[*25] $(X, \mathscr{O}_X)$ を位相空間とする．X 上の距離 d で (i)X は d について完備距離空間となり，(ii) しかも $\mathscr{O}_X$ が d から定まる位相と一致する，を満たすようなものが存在するとき，X をポーランド空間という．

[*26] 主張 1 の証明には，X が距離空間であることしか用いていない点に注意．

とおけば，$\bigcap_n U_n = A$ であり[27]，μ は有限測度だから

$$\mu(U^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(A)$$

となる．

$$\mu(U^n \setminus A) < \varepsilon$$

なる U^n を U_ε としてとれば，

$$\mu(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) = \mu(U_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$$

が成り立つ．すなわち，任意の閉集合は $\mathscr{A}$ の元である．

次に，$\mathscr{A}$ が σ-加法族であることを示す．$A \in \mathscr{A}$ に対して主張 1 の条件を満たす U_ε, F_ε を選ぶ．このとき $X \setminus F_\varepsilon \subset X \setminus A \subset X \setminus U_\varepsilon$ かつ

$$\mu([X \setminus U_\varepsilon] \setminus [X \setminus F_\varepsilon]) = \mu(F_\varepsilon \setminus U_\varepsilon) < \varepsilon$$

が成立．$X \setminus F_\varepsilon$ は開集合，$X \setminus U_\varepsilon$ は閉集合なので，$X \setminus A \in \mathscr{A}$ が分かる．X 自身は X の開集合なので，先ほどの議論より $X \in \mathscr{A}$ である．あとは $\mathscr{A}$ が可算個の合併をとる操作について閉じていることを示せばよい．$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathscr{A}$ の元の族，$\varepsilon > 0$ とする．各 $n \in \mathbb{N}$ について，$F_n \subset A_n \subset U_n$ かつ

$$\mu(U_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

を満たす開集合 U_n と閉集合 F_n を選ぶ．ここで $U = \bigcup_n U_n$ と定義すれば，U は $\bigcup_n A_n \subset U$ を満たす開集合である．また $C_k = \bigcup_{n=0}^k F_n$ と定めると，各 C_k は閉集合であって $C_k \subset \bigcup_n A_n$ となる．いま C_k は増大列だから

$$\lim_{k\to\infty} \mu(C_k) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k\right)$$

が成り立つ．さらに μ の有限性に注目すれば

$$\lim_{k\to\infty} \mu(U \setminus C_k) = \mu(U) - \lim_{k\to\infty} \mu(C_k) = \mu(U) - \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k\right) = \mu\left(U \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k\right) \tag{A.1}$$

U_n, F_n の選び方より

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [U_n \setminus F_n]\right) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(U_n \setminus F_n) < \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon$$

であるから，$U \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [U_n \setminus F_n]$ に注意すれば

$$\mu\left(U \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k\right) \le \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [U_n \setminus F_n]\right) < \varepsilon \tag{A.2}$$

を得る．(A.1) と (A.2) から，十分大きな n について

$$\mu(U \setminus C_n) < \varepsilon$$

[27] A は閉集合である．

となることが分かる．そこで開集合 U_ε および閉集合 F_ε を $U = U_\varepsilon, C_n = F_\varepsilon$ と定義すれば $F_\varepsilon \subset \bigcup_n A \subset U_\varepsilon$ かつ

$$\mu(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$$

が成立．よって $\bigcup_n A_n \in \mathscr{A}$ も示された．

以上の議論により，$\mathscr{A} = \mathscr{B}(X)$ の証明が完了した．これはすなわち，主張 1 が成り立つということに他ならない．

Step2：**μ が緊密であることの証明．** このステップでは，次の主張を証明する．

主張 2

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，あるコンパクト集合 K_ε で

$$\mu(X \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$$

を満たすものが存在する．

$\varepsilon > 0$ を任意の固定する．$(U_j^n)_{j\in\mathbb{N}}$ を半径 $\varepsilon/2^n$ の開級の族で，X の被覆となっているようなものとする[*28]．μ の可算加法性より

$$\lim_{j\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{j} U_k^n\right) = \mu(X)$$

が成立．さらに μ の有限性より，

$$\lim_{j\to\infty} \mu\left(X \setminus \bigcup_{k=1}^{j} U_k^n\right) = \mu(X) - \lim_{j\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{j} U_k^n\right) = 0$$

となる．これより，十分大きな m_n をとれば

$$\mu\left(X \setminus \bigcup_{k=1}^{m_n} U_k^n\right) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

が成り立つ．ここで $W_n = \bigcup_{k=1}^{m_n} U_k^n$ および $W = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n$ と定義する．このとき，W が全有界[*29]であることを示す．$\delta > 0$ に対して，$\varepsilon/2^{k_\delta} < \delta$ となるような $k = k(\delta)$ をとる．このとき，$W \subset W_k = \bigcup_{j=1}^{m_k} U_j^m$ となり W は半径 $\varepsilon/2^k$ の開球で覆われる．すなわち，W は全有界である．X は完備距離空間だから，その閉包 $\overline{W} =: K$ はコンパクト集合である．また，W の定義より

$$\mu(X \setminus K) \le \mu(X \setminus W) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [X \setminus W_n]\right) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(X \setminus W_n) < \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon$$

となる．すなわち，主張 2 が成立する．

Step 3：**μ の内正則性の証明．** $B \in \mathscr{B}(X)$ および $\varepsilon > 0$ とする．このとき，step1 の議論から閉集合 $F \subset B$ で

$$\mu(B \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$$

[*28] 可分距離空間は Lindelöf 空間なので，このような族が取れる．

[*29] X を距離空間とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して有限個の $a_0, \ldots, a_n \in X$ で $X = \bigcup_{i=0}^{n} U_\varepsilon(a_i)$ を見たすものが存在するとき，X は全有界であるという．よく知られているように，距離空間 X がコンパクトであることは，完備かつ全有界であることと同値である．

を満たすものがとれる．また step2 の議論から，コンパクト集合 K で

$$\mu(X \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}$$

なるものがとれる．ここで $K' = F \cap K$ とすれば，K' は $K' \subset B$ なるコンパクト集合であり[*30]，さらに次の不等式を満たす．

$$\mu(B \setminus K') \leq \mu(B \setminus K) + \mu(B \setminus F) \leq \mu(X \setminus K) + \mu(B \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

これより，μ の内正則性が示された． □

A.2 Kolmogorov の拡張定理

T を任意の集合とし，$(X_t)_{t\in T}$ を位相空間としたとき，積空間 $\prod_{t\in T} X_t$ 上に確率測度を構成する方法を考えよう．$\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset T$ に対して，

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_{\Lambda_1,\Lambda_2} : \prod_{t\in\Lambda_2} X_t &\longrightarrow \prod_{t\in\Lambda_1} X_t \\ \omega &\longmapsto \omega|_{\Lambda_1} \end{aligned}$$

と定義する．（すなわち，pr は射影である．）特に $\mathrm{pr}_{\Lambda,T} = \mathrm{pr}_\Lambda$ と書くことにする．このとき明らかに $\mathrm{pr}_{\Lambda_1} = \mathrm{pr}_{\Lambda_1,\Lambda_2} \circ \mathrm{pr}_{\Lambda_2}$ である．可測空間の族 $(X_t, \mathscr{A}_t)_{t\in T}$ が与えられたとき，射影 pr_t: $\prod_{t\in T} X_t \to X_t$ の族に対して $\bigotimes_{t\in T} \mathscr{A}_t := \sigma(\mathrm{pr}_t; t \in T)$ と定義する．任意の t で $\mathscr{A}_t = \mathscr{A}$ の時は，この σ 代数を $\mathscr{A}^{\otimes T}$ で表す．特に $X_t = \mathbb{R}^d$ かつ $T = [0, \infty[$ としたとき，これは確率過程論に出てくる cylindrical σ-algebra と同様のものである．

定理 A.3 (Kolmogorov の拡張定理)**.** T を任意の集合とし，$(X_t)_{t\in T}$ をポーランド空間の族とする．任意の有限集合 $\Lambda \subset T$ に対して $\left(\prod_{t\in\Lambda} X_t, \bigotimes_{t\in\Lambda} \mathscr{B}(X_t)\right)$ 上の確率測度 μ_Λ が与えられており，それらは整合性条件を満たすとする．(i.e. $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset T$ を満たす任意の有限集合に対して

$$\mu_{\Lambda_1}(A) = \mu_{\Lambda_2}\left(\mathrm{pr}^{-1}_{\Lambda_1,\Lambda_2}(A)\right), \quad A \in \bigotimes_{t\in\Lambda_1} \mathscr{B}(X_t)$$

が成り立つ.）このとき，$(\prod_{t\in T} X_t, \bigotimes_{t\in T} \mathscr{B}(X_t))$ 上の確率測度 μ で任意の有限集合 $\Lambda \subset T$ に対して

$$\mu(\mathrm{pr}_\Lambda^{-1}(E)) = \mu_\Lambda(E), \quad \forall E \in \bigotimes_{t\in\Lambda} \mathscr{B}(X_t)$$

を満たすものがただ一つ存在する．

Kolmogorov の拡張定理によって構成される測度は，測度族 (μ_Λ) の射影極限，あるいは逆極限とよばれることがある．定理の証明に入る前に，以下の有用な補題を証明しておく．

補題 A.4. $(X_t)_{t\in T}$ を Hausdorff 空間の族とする[*31]．$\Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \cdots$ を T の有限部分集合列とする．空でないコンパクト集合列 $(K_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{P}\left(\prod_{t\in\Lambda_n} X_t\right)$ に対して $C_n = \mathrm{pr}^{-1}_{\Lambda_n}(K_n) \subset \prod_{t\in T} X_t$ とおく．このとき，

$$C_0 \supset C_1 \supset \cdots \Longrightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$$

[*30] コンパクト集合と閉集合の共通部分はコンパクト集合である．

[*31] T_1 空間でもよいと思われる．

が成り立つ．

証明．$\Lambda = \bigcup_n \Lambda_n$ と書くことにする．射影 pr_{Λ_n} は全射だから，$K_n = \mathrm{pr}_{\Lambda_n}\mathrm{pr}_{\Lambda_n}^{-1}(K_n) = \mathrm{pr}_{\Lambda_n}(C_n)$ となることに注意しておく．仮定より

$$K_n = \mathrm{pr}_{\Lambda_n}(C_n) \supset \mathrm{pr}_{\Lambda_n}(C_{n+1}) = \mathrm{pr}_{\Lambda_n,\Lambda_{n+1}}\mathrm{pr}_{\Lambda_{n+1}}(C_{n+1}) = \mathrm{pr}_{\Lambda_n,\Lambda_{n+1}}(K_{n+1})$$

が成り立つ．

$$F_n^{(0)} = \mathrm{pr}_{\Lambda_0,\Lambda_n}(K_n) \subset \prod_{t\in\Lambda_n} X_t$$

とおけば，これはコンパクト集合である．$(F_n^{(0)})$ は有限交叉性を持つので，$F_1^{(0)}$ のコンパクト性より $\bigcap_n F_n^{(0)} \neq \emptyset$ となる．$x_0 \in \bigcap_n F_n^{(0)}$ を一つ選んで

$$F_n^{(1)} = \mathrm{pr}_{\Lambda_1,\Lambda_n}(K_n) \cap \mathrm{pr}_{\Lambda_0,\Lambda_1}^{-1}(x_0) \quad (n \geq 1)$$

と定めれば，$F_n^{(1)}$ は空でないコンパクト集合となる．実際 $\prod_{t\in T} X_t$ はまた Hausdorff 空間なので，$\{x_0\}$ は閉集合である．これより $F_n^{(1)}$ はコンパクト集合と閉集合の共通部分であるから，コンパクト集合である．空でないことについては

$$x_0 \in \mathrm{pr}_{\Lambda_0,\Lambda_n}(K_n) = \mathrm{pr}_{\Lambda_0,\Lambda_1}\mathrm{pr}_{\Lambda_1,\Lambda_n}(K_n)$$

であることに注意すれば分かる[*32]．このとき $\bigcap_n F_n^{(1)}$ が空でないことが分かるので，同様の作業を繰り返して

$$x_k \in \bigcap_{n\geq k} \mathrm{pr}_{\Lambda_k,\Lambda_n}(K_n) \cap \mathrm{pr}_{\Lambda_k,\Lambda_{k+1}}^{-1}(x_k) \subset K_k$$

を満たす列 $(x_k) \in \prod_{t\in\Lambda} X_t$ を得る．この列はその構成法より両立条件

$$\mathrm{pr}_{\Lambda_k,\Lambda_{k+1}}(x_{k+1}) = x_k, \quad k \in \mathbb{N}$$

を満たす．$\omega \in \prod_{t\in T} X_t$ を $\mathrm{pr}_\Lambda^{-1}((x_k))$ から一つ選べば，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\omega \in \mathrm{pr}_{\Lambda_n}^{-1}(K_n) = C_n$ となり $\omega \in \bigcap_n C_n$ が成立． □

定理 *A.3* の証明．

$$\mathscr{C} = \left\{ \mathrm{pr}_\Lambda^{-1}(B) \;\middle|\; \Lambda \subset T \text{ は有限集合かつ } B \in \mathscr{B}\left(\prod_{t\in\Lambda} X_t\right) \right\}$$

とおけば $\mathscr{C}$ は集合半代数であり，$\sigma(\mathscr{C}) = \bigotimes_{t\in T} \mathscr{B}(X_t)$ が成り立つ．$\mathscr{C}$ 上の有限加法的（確率）測度 μ を

$$\mu(\mathrm{pr}_\Lambda^{-1}(E)) = \mu_\Lambda(E), \quad \Lambda \subset T \text{ は有限集合}, \quad B \in \mathscr{B}\left(\prod_{t\in\Lambda} X_t\right)$$

で定める．Carathéodory の拡張定理より，μ が $\mathscr{C}$ 上可算加法的であること[*33]，特に $\emptyset$ において連続であることを示せばよい[*34]．ここではその対偶を示すことにしよう．$A_0 \supset A_1 \supset \cdots$ なる $\mathscr{C}$ の元の列に対して，

$$\mu(A_n) \to \alpha > 0$$

[*32] 一般に，写像 $f\colon X \to Y$ と $A \subset X$ について，$y \in f(A)$ は $A \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$ と同値なのであった．
[*33] Bogachev [3, 1.3.10 Proposition]
[*34] Bogachev [3, 1.3.3. Proposition]

が成り立つと仮定したとき，$\bigcap_n A_n \neq \emptyset$ であることを言えばよい．これらが $\Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \cdots$ なる T の有限部分集合によって $A_n = \mathrm{pr}_{\Lambda_n}^{-1}(E_n)$ と表現されているとしても一般性を失わない．ポーランド空間上の有限測度は Radon 測度であるから[*35]，適当なコンパクト集合 $K_n \in \mathscr{B}\left(\prod_{t\in\Lambda_n} X_t\right)$ をとれば

$$\mu_{\Lambda_n}(E_n \setminus K_n) < \frac{\alpha}{2^{n+1}}$$

が成立する．$B_n = \mathrm{pr}_{\Lambda_n}^{-1}(K_n) \in \mathscr{C}$ とおけば，

$$B_n \subset A_n, \quad \mu(A_n \setminus B_n) = \mu_{\Lambda_n}(E_n \setminus K_n) < \frac{\alpha}{2^{n+1}}$$

となる．ここで $C_n = \bigcap_{k=0}^n B_k$ とおけば

$$\begin{aligned}\mu(C_n) &= \mu(A_n) - \mu(A_n \setminus C_n) \geq \mu(A_n) - \mu\left(\bigcup_{k=0}^n A_k \setminus B_k\right) \\ &\geq \mu(A_n) - \sum_{k=0}^n \mu\left(A_k \setminus B_k\right) \geq \frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

となるから，$C_n \neq \emptyset$ で (C_n) は減少列である．先ほどの補題を用いれば $\bigcap_n A_n \supset \bigcap_n C_n \neq \emptyset$ が示される． □

A.3 位相空間と可測性についての補足

A.3.1 距離空間について

定義 A.5. X を位相空間とする．X の任意の開被覆が可算部分被覆をもつとき，X は Lindelöf であるという．

Lindölef はコンパクト性を緩めた条件である．任意のコンパクト空間は明らかに Lindelöf であるし，任意の σ-コンパクト空間も Lindelöf となる．

補題 A.6. 位相空間 X が第 2 可算ならば，Lindelöf である．

証明. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X の開集合の基底とする．$(V_i)_{i\in I}$ を X の開被覆とし，

$$H = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists i \in I,\ U_n \subset V_i\}$$

と定義する．このとき $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は X の開被覆である．実際，$x \in X = \bigcup_i V_i$ に対して $x \in V_i$ なる i を選べば，(U_n) が開集合の基底であることから $x \in U_n \subset V_i$ なる $n \in \mathbb{N}$ がとれる．この n は明らかに H の元である．$\psi\colon H \to I$ を $n \in \mathbb{N}$ に対して $U_n \subset V_{\psi(n)}$ を満たすように選び，$J = \psi(H)$ と定める．ψ は可算集合から J への全射だから，J もまた高々可算である．また $X = \bigcup_n U_n \subset \bigcup_n V_{\psi(n)}$ より，$(V_i)_{i\in J}$ が X の開被覆になっていることも分かる．

任意にとった開被覆 $(V_i)_{i\in I}$ から可算部分被覆 $(V_i)_{i\in J}$ を選び出すことができたから，X は Lindelöf であることが分かった． □

[*35] X において $(X, \mathscr{B}(X))$ 上の非負測度 μ は次の条件を満たすとき，μ を非負 Radon 測度と呼ぶ：(i) 任意の $B \in \mathscr{B}(X)$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，あるコンパクト集合 K で $\mu(B \setminus K) < \varepsilon$ を満たすものが存在する，(ii) 任意のコンパクト集合 K で $\mu(K) < \infty$ が成り立つ．

補題 A.7. 位相空間 X の部分集合 A について，以下の 2 条件は同値.

(i) A は X で稠密.

(ii) 任意の空でない開集合 U について，$A \cap U \neq \emptyset$.

証明. **(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明.** U を空でない X の開集合とする．仮定より $U \subset \overline{A}$ なので，任意の $x \in U$ は A の触点である．U は x の開集合だから，$U \cap A \neq \emptyset$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明. $x \in X$ とすれば，条件 (ii) より x の任意の開近傍 U について $U \cap A \neq \emptyset$ である．これは x が A の触点であるという条件に他ならない．よって $X \subset \overline{A}$．すなわち A は X で稠密である． □

定理 A.8. (X, d) を距離空間とする．このとき，次の 3 条件は同値である．

(i) X は可分である．

(ii) X は第 2 可算である．

(iii) X は Lindelöf である．

証明. **(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明.** C を X の稠密部分集合とし，

$$\mathscr{B} = \{U_r(x) \mid x \in C,\ r \in \mathbb{Q}\}$$

と定める．このとき，可算集合 $\mathscr{B}$ が X の開集合の基底となっていることを示せばよい．U を空でない X の開集合とする．C の稠密性より $C \cap U$ は空ではない．$x \in C \cap U$ に対して，$A(x)$ で $U_r(x) \subset U$ なる $r \in \mathbb{Q}$ 全体の集合を表すことにする．このとき明らかに $U_r(x) \in \mathscr{B}$ $(x \in C \cap U,\ r \in A(x))$ だから，後は

$$U \subset \bigcup_{x \in C \cap U} \bigcup_{r \in A(x)} U_r(x)$$

となっていることを示せばよい.（逆向きの包含関係は明らか.）$u \in U$ に対して，$U_\varepsilon(u) \subset U$ を満たす $\varepsilon > 0$ をとる．このとき，C の稠密性より $C \cap U_{\varepsilon/3}(u)$ は空ではない．$x \in C \cap U_{\varepsilon/3}(u)$ および $\varepsilon/3 < r < \varepsilon/2$ を満たす有理数 r をとれば，$u \in U_r(x) \subset U_\varepsilon(u) \subset U$ となる．これより，任意の $u \in U$ に対してある $U_r(x) \in \mathscr{B}$ が存在して，$u \in U_r(x) \subset U$ を満たすことが分かった．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) の証明. 補題 A.6 より明らか.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) の証明. X は Lindelöf であるとする．

$$\mathscr{U}_n = \{U_{1/n}(x) \mid x \in X,\ n \geq 1\}$$

とすれば，$\mathscr{U}_n$ は X の開被覆である．Lindelöf 性より，各 n について $\mathscr{U}_n$ の可算部分被覆 $\mathscr{U}'_n$ がとれる．$C_n = \{x \in X \mid U_{1/n}(x) \in \mathscr{U}'_n\}$ とすれば，C_n は明らかに可算集合である．ここで $C = \bigcup_n C_n$ と定義すれば，C が X の稠密部分集合であることを示そう．U を X の空でない開集合とする．$x \in U$ を一つ選べば，$x \in U_r(x) \subset U$ なる $r > 0$ が選べる．ここで $1/n < r$ なる n を一つ選ぶと，$\mathscr{U}'_n$ が X の開被覆であることから $x \in U_{1/n}(x_n)$ なる $x_n \in C_n$ が選べる．このとき $x_n \in U_r(x) \subset U$ だから，$x_n \in U \cap C_n \subset U \cap C$．これより，任意の空でない開集合 U に対して $U \cap C \neq \emptyset$ となることが分かる．すなわち C は X の稠密部分集合である． □

系 A.9. 可分距離空間の任意の部分空間は可分である．

証明．X を可分距離空間，A をその部分空間とする．A は X の距離の制限によって距離空間となるから，定理 A.8 より A の第 2 可算性を示せばよい．$\mathscr{U}$ を X の可算開基とすれば，$\mathscr{U} \cap A = \{U \cap A \mid U \in \mathscr{U}\}$ は A の開基をなす．よって A は第 2 可算距離空間であり，よって可分である． □

定義 A.10. X を位相空間とする．X 上の距離関数 d で

(i) d によって定義される位相は，X の元の位相と一致する，
(ii) (X, d) が可分な完備距離空間となる，

を満たすものが存在するとき，X はポーランド空間であるという．

定理 A.8 より，ポーランド空間は第 2 可算である．

命題 A.11. ポーランド空間の任意の開部分空間はまたポーランド空間である．

証明．X をポーランド空間とし，d は X を完備距離空間とするような距離とする．$U \subset X$ に対して，写像 $f\colon U \to X \times \mathbb{R}$ を以下のように定める．

$$f(x) = \left(x, \frac{1}{d(x, X \setminus U)}\right), \quad x \in U$$

[*36]このとき f は $X \times \mathbb{R}$ への閉埋め込みとなっている[*37]ことを示そう．f が連続単射であることは明らかだろう．$\mathrm{pr}_1\colon X \times \mathbb{R} \to X$ を射影とすれば，$\mathrm{pr}_1|_{f(U)} \circ f = \mathrm{id}_U$ かつ $f \circ \mathrm{pr}_1|_{f(U)} = \mathrm{id}_{f(U)}$ が成り立つ．射影 pr_1 は連続だから，$f\colon U \to f(U)$ は同相写像である．後は $f(U)$ が $X \times \mathbb{R}$ の閉集合であることを示せばよい．$f(x_n) \to (x, y)$ なる点列を持ってきたとき，$(x, y) \in f(U)$ であることを示せばよい[*38]．$f(x_n) \to (x, y)$ は $x_n \to x$ かつ $1/d(x_n, X \setminus U) \to y$ という意味である．距離関数の連続性より $d(x_n, X \setminus U) \to d(x, X \setminus U)$ となるから，このとき $y = 1/(x, X \setminus U)$ となる．すなわち，$d(x, X \setminus U)$ は 0 でない正の値をとる．これは $x \in U$ という意味であり，$f(x) = (x, y) \in U$ がわかる．つまり $f(U)$ は完備距離付け可能空間 $X \times \mathbb{R}$ の閉集合であり，完備距離付け可能である[*39]．さらに，可分距離空間の任意の部分空間は可分なので，$f(U)$ はポーランド空間である．f は同相写像であるから，U もまたポーランド空間となることがわかった． □

定義 A.12. X を位相空間とする．連続関数族 $C(X, \mathbb{R})$ によって生成される σ-代数を Baire σ-代数といい，$\mathscr{B}a(X)$ で表す．

定義より明らかに $\mathscr{B}a(X) \subset \mathscr{B}(X)$ だが，これらが等しいかは一般には分からない．X が良い分離性を持つ空間であれば $\mathscr{B}a(X) = \mathscr{B}(X)$ となる．

命題 A.13. (X, d) を距離空間とすれば，$\mathscr{B}a(X) = \mathscr{B}(X)$ が成り立つ．

証明．閉集合 F に対して

$$f_n(x) = 1 - nd(x, F) \wedge 1$$

と定めれば，f は連続関数で $f_n \to 1_F$（各点収束）が成り立つ．これより 1_F は $\mathscr{B}a(X)$-可測である．よって

[*36] U は距離空間の開集合だから，$x \in U$ と $X \setminus U$ の距離は 0 にはならない．
[*37] f が閉埋め込みとは，$f\colon U \to f(U)$ は同相写像で $f(U)$ は $X \times \mathbb{R}$ の閉集合であるということ．斎藤 [21] による．
[*38] $X \times \mathbb{R}$ は距離付けられるので，点列の収束のみを考えればよい．
[*39] 完備距離空間の部分空間が完備であることと閉であることは同値である．

$\mathscr{B}a(X)$ は全ての閉集合を含む σ-代数であり，$\mathscr{B}(X) \subset \mathscr{B}a(X)$ を得る．既に述べたように逆向きの包含関係は明らかである． $\square$

注意 A.14. 命題 A.13 は X が完全正規空間と呼ばれるクラスの位相空間であれば成り立つことが知られている．

定義 A.15. $(X, \mathscr{A})$ を可測空間とする．可算集合 $\mathscr{C} \subset 2^X$ で $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{A}$ を満たすものが存在するとき，$\mathscr{A}$ は可算生成 (countably generated) であるという．

第 2 可算空間 X 上の Borel σ-代数は可算生成である．

命題 A.16. X, Y を位相空間とし，特に Y は第 2 可算であるとする．このとき $\mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y) = \mathscr{B}(X \times Y)$ が成り立つ．ただし，$X \times Y$ には積位相を入れるものとする．

証明. $\mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y) \subset \mathscr{B}(X \times Y)$ **の証明．** これは任意の位相空間について成り立つ結果である．

$$\mathscr{A} = \{U \in \mathscr{B}(X) \mid \text{任意の開集合 } V \subset Y \text{ に対して } U \times V \in \mathscr{B}(X \times Y)\}$$

と定義すれば，$\mathscr{A}_V$ は X の開集合を含む σ-代数である．よって $\mathscr{A} = \mathscr{B}(X)$ が成立．次に

$$\mathscr{C} = \{B \in \mathscr{B}(X) \mid \forall A \in \mathscr{B}(X),\ A \times B \in \mathscr{B}(X \times Y)\}$$

とすれば，先ほどの議論より $\mathscr{C}$ は Y の開集合を全て含む．これが σ-代数であることも分かるので，任意の $A \in \mathscr{B}(X)$ と $B \in \mathscr{B}(Y)$ に対して $A \times B \in \mathscr{B}(X \times Y)$ となる．ゆえに直積 σ 代数の定義より $\mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y) \subset \mathscr{B}(X \times Y)$ が成り立つ．

$\mathscr{B}(X \times Y) \subset \mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y)$ **の証明．** $\{U_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ を X の開基，$\{V_n; n \in \mathbb{N}\}$ を Y の開基とする．このとき $\{U_\lambda \times V_n; (\lambda, n) \in \Lambda \times \mathbb{N}\}$ は $X \times Y$ の開基である．$U \subset X \times Y$ を任意の開集合とすれば，適当な $D \subset \Lambda \times \mathbb{N}$ によって $U = \bigcup_{(\lambda,n) \in D} U_\lambda \times V_n$ と表現される．ここで $W_n = \bigcup_{\lambda, (\lambda,n) \in D} U_\lambda$ と定義すれば W_n は X の開集合であり，

$$U = \bigcup_{(\lambda,n) \in D} U_\lambda \times V_n = \bigcup_{n \in \mathrm{pr}_2(D)} W_n \times V_n \in \mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y)$$

が成り立つ．よって $\mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y)$ は $X \times Y$ の開集合を全て含む．すなわち $\mathscr{B}(X \times Y) \subset \mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y)$ である． $\square$

A.3.2 局所コンパクト Hausdorff 空間について

Hausdorff 空間 X が局所コンパクトであるとは，任意の $x \in X$ に対して x の近傍 V でコンパクトなものが存在するということであった．

定理 A.17 (Alexandroff コンパクト化)**.** Hausdorff 空間 X について，以下の 3 条件は同値である．

(i) X は局所コンパクトである．
(ii) あるコンパクト Hausdorff 空間 Y への稠密な開埋め込み $f\colon X \to Y$ が[*40]存在する．（このとき，(f, Y) を X のコンパクト化という．）

[*40] f が開埋め込みとは $f\colon X \to f(X)$ は同相写像で $f(X)$ は Y の開集合である，ということ．斎藤 [21] による．

(iii) X のコンパクト化 $f\colon X \to Y$ で $Y \setminus f(X)$ が高々 1 点からなるようなものが存在する．

証明．X がコンパクトなときは $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ を考えればよいから，以下 X はコンパクトではないとして議論を進める．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． $f\colon X \to Y$ を X のコンパクト化とする．任意の $x \in X$ に対して，その近傍で相対コンパクトなものを見つければよい．閉集合 $Y \setminus f(X)$ は $\{f(x)\} \cap (Y \setminus f(X)) = \emptyset$ を満たす．コンパクト Hausdorff 空間は正規だから，Y の互いに素な開集合 U, V で $f(x) \in U$ かつ $Y \setminus f(X) \subset V$ を満たすものが存在する．$Y \setminus V$ はコンパクト空間 Y の閉集合だからコンパクトであり，定義より

$$f(x) \subset U \subset Y \setminus V \subset Y \setminus (Y \setminus f(X)) = f(X)$$

となる．よって $f(x)$ はコンパクトな近傍 $Y \setminus V$ をもつ．$f\colon X \to f(X)$ は同相写像で $Y \setminus V \subset f(X)$ だから，$X \setminus f^{-1}(V)$ は x のコンパクトな近傍である．これより，全ての $x \in X$ はコンパクトな近傍をもつ．

(i) $\Longrightarrow$ (iii) の証明． X を局所コンパクト空間とし，∞ を X に属さない点とする[*41]．$Y = X \sqcup \{\infty\}$ とし[*42]，Y の開集合系を以下で定める．

$$\mathscr{O}_Y = \mathscr{O}_X \cup \{V \sqcup \{\infty\} \mid V \in \mathscr{O}_X \text{ で } X \setminus V \text{ はコンパクト}\}$$

これが実際に Y の開集合系を定めることは容易に確かめられる．

包含写像 $i\colon X \to Y$ が X のコンパクト化になっていることを示そう．i が $Y \setminus i(X) = \{\infty\}$ を満たす開埋め込みであることは明らかである．まずは Y が Hausdorff であることを示そう．異なる 2 点 $x, y \in X$ を閉集合で分離できることは明らか．$x \in X$ と ∞ を分離できることを示す．X は局所コンパクトだから，$x \in U$ かつ $\overline{U}$ がコンパクトとなるような開集合 U が選べる．このとき U と $(X \setminus \overline{U}) \sqcup \{\infty\}$ が x と ∞ を分離する開集合である．次に Y がコンパクトであることを示す．$\mathscr{U}$ を Y の任意の開被覆とすれば，$\infty \in U_\infty$ なる $U_\infty \in \mathscr{U}$ が存在する．Y の開集合の定義より，これは $X \setminus V_\infty$ がコンパクトとなるような $V_\infty \in \mathscr{O}_X$ を用いて $U_\infty = V_\infty \sqcup \{\infty\}$ と表現される．$\mathscr{U}$ は明らかに $X \setminus V_\infty$ の被覆でもあるから，コンパクト性より有限部分被覆 $\{U_1, \ldots, U_n\}$ を選び出すことが出来る．このとき $X \setminus V_\infty \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} U_i$ かつ $V_\infty \sqcup \{\infty\} \subset U_\infty$ だから，$\{U_1, \ldots, U_n, U_\infty\}$ は $Y = (X \setminus V_\infty) \cup V_\infty \cup \{\infty\}$ の有限開被覆である．すなわち，Y の任意の開被覆には有限部分被覆が存在し，Y はコンパクトである．最後に X が Y で稠密なことを示す．X はコンパクトでないから，∞ の任意の開近傍は空でない X のある開集合によって $V \cap \{\infty\}$ と表現される．$X \cap V \cap \{\infty\}) \supset V \neq \emptyset$ だから，∞ は X の触点である．よって X は $Y = X \sqcup \{\infty\}$ で稠密となっている．

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) の証明． 明らか． □

定理 A.17 で特に X がコンパクトでないとき，(iii) における X のコンパクト化を Alexandroff コンパクト化または 1 点コンパクト化という．

以下では，局所コンパクト Hausdorff 空間のうち，特に第 2 可算なものを考える．これを locally compact space with countable base の略記で LCCB 空間と表すことにする．Hausdorff はどこに行ったという感じだが，位相空間には最初から Hausdorff 性を仮定していることも多いからたぶん LCCB で通じるのだろう．次の定理は LCCB 空間の距離付け可能性についてのもので，とても重要である．

定理 A.18. (i) 第 2 可算なコンパクト Hausdorff 空間はポーランド空間である．

[*41] たとえば X 自身．ZF の公理系では集合 X は X 自身を含まないのであった．
[*42] $A \sqcup B$ は $A \cap B = \emptyset$ となるような A と B の合併 $A \cup B$ を表す．

(ii) LCCB 空間はポーランド空間である．

定理の証明の前に補題を用意する．Hausdorff 空間 X の任意の互いに素な閉集合 F_1, F_2 に対して，ある開集合 U_1, U_2 で $F_1 \subset U_1$, $F_2 \subset U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ を満たすものが存在するとき，X を正規空間というのであった[*43]．

補題 A.19. コンパクト Hausdorff 空間は正規である．

証明．X をコンパクト Hausdorff 空間とし，閉集合 $A, B \subset X$ は $A \cap B = \emptyset$ を満たすとする．A, B はコンパクト空間の閉集合なのでコンパクトである．$(x, y) \in A \times B$ に対して，開集合の組 $U_{(x,y)}, V_{(x,y)}$ を

$$x \in U_{(x,y)}, \quad y \in V_{(x,y)}, \quad U_{(x,y)} \cap V_{(x,y)} = \emptyset$$

を満たすように選ぶ[*44]．いま $(V_{(x,y)})_{y \in B}$ は B の開被覆なので，コンパクト性より有限部分被覆 $(V_{(x,y_1)}, \dots, V_{(x,y_n)})$ を選べる．$U_x = \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_{(x,y_i)}$ および $V_x = \bigcup_{1 \leq i \leq n} V_{(x,y_i)}$ とすれば，U_x と V_x はともに X の開集合であって $x \in U_x$, $B \subset V_x$ かつ $U_x \cap V_x = \emptyset$ を満たす．さらに $(U_x)_{x \in A}$ は A の開被覆であるから，コンパクト性より有限部分被覆 $U_{x_1}, \dots, U_{x_m}$ が存在する．今度は $U = \bigcup_{1 \leq i \leq m} U_{x_i}$ および $V = \bigcap_{1 \leq i \leq m} V_{x_i}$ と開集合 U と V を定義すれば，$A \subset U$，$B \subset V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ となる．これより X は正規空間であることがわかった． □

補題 A.20. X をコンパクトでない LCCB 空間とする．$c\colon X \to Y$ を X の 1 点コンパクト化とすれば，Y も第 2 可算である．

証明．$Y \setminus c(X) = \{\infty\}$ と表すことにする．

ステップ 1：X が σ-コンパクト[*45]であることの証明． $\mathscr{U}$ を X の可算開基とし，

$$\mathscr{V} = \{U \in \mathscr{U} \mid \overline{U} \text{ はコンパクト }\}$$

と定める．このとき明らかに $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$ であり，$\mathscr{V}$ は可算集合である．X は局所コンパクトだから，任意の $x \in X$ は $U \in \mathscr{V}$ なる近傍をもつ．よって $\mathscr{V}$ は空ではなく[*46]，$\bigcup \mathscr{V} = X$ となっている．$\mathscr{K} = \{\overline{V} \subset X \mid V \in \overline{V}\}$ とすれば $\mathscr{K}$ は可算集合であり，$X = \bigcup \mathscr{V} \subset \bigcup \mathscr{K}$ が成り立つ．すなわち，X は σ-コンパクトである．

ステップ 2：無限遠点が可算な基本近傍系をもつことの証明． $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を $X = \bigcup_n X_n$ を満たすコンパクト集合列とする．Y はコンパクト Hausdorff 空間なので，補題 A.19 より正規である．これより，Y の開集合 U_n, V_n で $\infty \in U_n$，$X_n \subset V_n$ かつ $U_n \cap V_n = \emptyset$ を満たすものがとれる．W を ∞ の開近傍とすれば，X の開集合 W' で $X \setminus W'$ がコンパクトなるものによって $W = W' \sqcup \{\infty\}$ と表現される．$X \setminus W'$ はコンパクト集合なので，開被覆 $X \setminus W' \subset \bigcup_n V_n$ の中から有限部分被覆 $(V_{i_1}, \dots, V_{i_n})$ を選び出すことができる．このとき

$$U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_n} \subset (Y \setminus V_{i_1}) \cap \cdots \cap (Y \setminus V_{i_n}) \subset Y \setminus (X \setminus W') = W' \sqcup \{\infty\} = W$$

が成り立つから，$\{U_n; n \in \mathbb{N}\}$ の元の有限個の共通部分全体は ∞ の基本近傍系をなす．もちろんこれは可算である．

ステップ 3：Y は第 2 可算であることの証明． $\mathscr{U}$ を X の可算開基，$\mathscr{U}_\infty$ を ∞ の基本近傍系で可算であるようなものとする．このとき，$\mathscr{U} \cup \mathscr{U}_\infty$ が実際に Y の可算開基となっている． □

[*43] Hausdorff 性を仮定しない流儀もある．

[*44] X の Hausdorff 性より．

[*45] コンパクト集合列 (X_n) で $\bigcup_n X_n = X$ を満たすものがあるということ．

[*46] X はコンパクトでないとしているから，空ではない．

補題 A.21. X を第 2 可算正規空間とする．このとき，埋め込み $X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ が存在する[*47]．

証明. $\mathscr{U}$ を位相空間 $(X, \mathscr{O}_X)$ の可算開基とする．$I = \{(U,V) \in \mathscr{U} \times \mathscr{U} \mid \overline{U} \subset V\}$ と定めれば，これはまた可算集合である．$(U,V) \in I$ に対して, 連続写像 $f_{U,V} \colon X \to [0,1]$ を $f_{(U,V)}(\overline{U}) \subset \{0\}$ かつ $f_{(U,V)}(X \setminus V) \subset \{1\}$ を満たすように定める[*48]．さらに連続写像 $f \colon X \to [0,1]^I$ を $(f_{(U,V)})_{(U,V)\in I}$ の積として定義する．このとき，f が X の $[0,1]^I$ への埋め込みであることを示そう．積位相の定義より f は明らかに連続なので，f の単射性と X の位相が f による引き戻しであることを示せばよい．

X は正規だから，$x \neq y$ に対して $x \in U$, $y \in V$ かつ $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ を満たすものがとれる．このとき $(U, X \setminus \overline{V}) \in I$ であり，$f_{(U,X\setminus\overline{V})}(x) = 0 < 1 = f_{(U,X\setminus\overline{V})}(y)$ が成り立つ．よって $f(x) \neq f(y)$ であり，f は単射である．

$\mathscr{V} = \{f^{-1}_{(U,V)}([0,1[) \mid (U,V) \in I\}$ と定義したとき，$\mathscr{V}$ が X の位相の基底であることを示す．U を X の開集合とし，$x \in U$ とする．このとき，X の正規性より $x \in W \subset \overline{W} \subset U$ を満たす W がとれる．$(W,U) \in I$ であるから $x \in f^{-1}_{(W,U)}([0,1[) \subset U$ が成り立つ．これより $\mathscr{V}$ は X の開集合の基底であることがわかった．すなわち，$\mathscr{V}$ の含む最小の開集合系は $\mathscr{O}_X$ に等しい．したがって $\mathscr{V} \subset \mathscr{O}_X \subset \mathscr{O}'$ が成立．逆向きの包含関係 $\mathscr{O}' \subset \mathscr{O}_X$ は f の連続性より明らかなので，結局 $\mathscr{O}' = \mathscr{O}_X$ が成り立つ．以上の議論より，$f \colon X \to [0,1]^I$ は埋め込みである．$[0,1]^I$ と $[0,1]^{\mathbb{N}}$ は同相なので，埋め込み $X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ の存在がわかる． □

補題 A.21 の主張の一部を抜き出せば，X が第 2 可算正規空間なら連続単射 $f = (f_n) \colon X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ が存在するということがわかる．f が単射であるとは，任意の相異なる 2 点 x, y に対してある n が存在して $f_n(x) \neq f_n(y)$ が成り立つということである．すなわち，第 2 可算正規空間 X においては，ある連続関数族 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C(X,[0,1])^{\mathbb{N}}$ によって任意の異なる 2 点は分離されるということになる．

定理 *A.18* の証明. **(i) の証明．** X を第 2 可算なコンパクト Hausdorff 空間とする．補題 A.19 より，X は第 2 可算な正規空間である．補題 A.21 より埋め込み $X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ が存在するので，X は距離付け可能である．コンパクト性より X はその距離について完備なので，X はポーランド空間である．

(ii) の証明． X を LCCB 空間とする．X がコンパクトならば (i) の主張そのものなので，X はコンパクトでないとする．$c \colon X \to Y$ を X の 1 点コンパクト化とすれば，補題 A.20 より Y は第 2 可算コンパクト Hausdorff 空間である．(i) より Y はポーランド空間であり，命題 A.11 よりその開部分集合 $i(X)$ もポーランド空間となる． □

B 文献紹介

Markov 過程の一般論については，Blumenthal and Getoor [2]，Chung and Walsh [6]，Sharpe [22]，Dellacherie and Meyer [8]，Dellacherie, Maisonneuve, and Meyer [7] などが標準的である．本ノートは Chung and Walsh [6] や Revuz and Yor [20] を参考にして書いた．Feller 半群と並んで Hunt 過程の代表的構成法である Dirichlet 形式を用いた方法については，Fukushima, Oshima, and Takeda [14] を見よ．和書の Markov 過程の専門書は福島 [13] や福島・竹田 [15] がある．

[*47] 連続単射 $f \colon X \to Y$ が埋め込みとは，$f \colon X \to f(X)$ が同相写像ということである．言い換えれば，X の位相は f による Y の位相の引き戻しと等しいということである．

[*48] X は正規 Urysohn の補題より，

確率過程やマルチンゲールの一般論については，Dellacherie and Meyer [9, 10]，He, Wang, and Yan [16]，Revuz and Yor [20] などを見てもらいたい．

位相空間一般については Bourbaki [5, 4] やを，ポーランド空間の詳しい性質については Stivastave [23] や Kechris [17] を見よ．

Radon 測度については，Bogachev [3]，Fonseca and Leoni [12] や Schwartz [**Schwartz˙1974**] が詳しい．

C_0-半群（強連続半群のこと）の一般論については，Pazy [19]，Yosida [24]，Arendt, et. al. [1] などを参照されたい．

References

[1] Wolfgang Arendt et al. *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems.* 2nd ed. Monographs in Mathematics 96. Birkhäuser Basel, 2011. xii+540. ISBN: 978-3-0348-0087-7. DOI: 10.1007/978-3-0348-0087-7. URL: https://www.springer.com/gp/book/9783034800860.

[2] R. M. Blumenthal and R. K. Getoor. *Markov Processes and Potential Theory.* Academic Press, 1968.

[3] Vladimir I. Bogachev. *Measure Theory.* 2 vols. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. DOI: 10.1007/978-3-540-34514-5. URL: https://www.springer.com/gp/book/9783540345138.

[4] Nicolas Bourbaki. *General Topology Part 2.* Elements of Mathematics. Hermann, 1966.

[5] Nicolas Bourbaki. *General Topology Part I.* Elements of Mathematics. Hermann, 1966.

[6] Kai Lai Chung and John B. Walsh. *Markov Processes, Brownian Motion, and Time Symmetry.* 2nd ed. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 249. Springer-Verlag New York, 2005. DOI: 10.1007/0-387-28696-9. URL: http://www.springer.com/la/book/9780387220260.

[7] Claude Dellacherie, Bernard Maisonneuve, and Paul-André Meyer. *Probabilités et potentiel. Chapitres XVII à XXIV. Processus de Markov (fin). Compléments de calcul stochastique.* Paris: Hermann, 1992. 429 pp.

[8] Claude Dellacherie and Paul-André Meyer. *Probabilités et potentiel. Chapitres XII–XVI. Théorie du potentiel associée à une résolvante. Théorie des processus de Markov.* Second. Publications de l'Institut de Mathématiques de l'Université de Strasbourg XIX. Actualités Scientifiques et Industrielles, 1417. Hermann, Paris, 1987. xii+378. ISBN: 2-7056-1417-6.

[9] Claude Dellacherie and Paul-André Meyer. *Probabilities and Potential.* North-Holland Mathematics Studies 29. North-Holland, 1978. viii+189. ISBN: 0-7204-0701-X. URL: https://www.elsevier.com/books/probabilities-and-potential-a/dellacherie/978-0-7204-0701-3.

[10] Claude Dellacherie and Paul-André Meyer. *Probabilities and Potential B. Theory of Martingales.* Trans. by J. P. Wilson. North-Holland Mathematics Studies 72. North-Holland, 1982. xvii+463. ISBN: 0-444-86526-8. URL: https://www.elsevier.com/books/probabilities-and-potential-b/dellacherie/978-0-444-86526-7.

[11] Ryszard Engelking. *General topology.* Revised and completed edition. Sigma Series in Pure Mathematics 6. Translated from the Polish by the author. Heldermann Verlag, Berlin, 1989, pp. viii+529. ISBN: 3-88538-006-4.

[12] Irene Fonseca and Giovanni Leoni. *Modern Methods in the Calculus of Variations. L^p Spaces.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag New York, 2007. DOI: 10.1007/978-0-387-69006-3. URL: https://www.springer.com/gp/book/9780387357843.

[13] 福島 正俊. **ディリクレ形式とマルコフ過程**. 紀伊國屋数学叢書 5. 紀伊國屋書店, 1975.

[14] Masatoshi Fukushima, Yoichi Oshima, and Masayoshi Takeda. *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes.* Second and extended edition. De Gruyter Studies in Mathematics 19. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2011. x+489. ISBN: 978-3-11-021808-4.

[15] 福島 正俊 and 竹田 雅好. **マルコフ過程**. 確率論教程シリーズ 4. 培風館, 2008.

[16] Sheng-wu He, Jia-gang Wang, and Jia-an Yan. *Semimartingale Theory and Stochastic Calculus*. Science Press and CRC Press, 1992. xiv+546. URL: https://www.crcpress.com/Semimartingale-Theory-and-Stochastic-Calculus/eWangyan/p/book/9780849377150.

[17] Alexander S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*. Graduate Texts in Mathematics 156. Springer-Verlag New York, 1995. DOI: 10.1007/978-1-4612-4190-4. URL: https://www.springer.com/us/book/9780387943749.

[18] 小谷 眞一. **測度と確率**. 岩波書店, 2005.

[19] Amnon Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences 44. Springer-Verlag New York, 1983. DOI: 10.1007/978-1-4612-5561-1. URL: https://www.springer.com/jp/book/9780387908458.

[20] Daniel Revuz and Marc Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. 3rd ed. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 293. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999. DOI: 10.1007/978-3-662-06400-9. URL: http://www.springer.com/cn/book/9783540643258.

[21] 斎藤 毅. **集合と位相**. 大学数学の入門 8. 東京大学出版会, 2009.

[22] Michael Sharpe. *General Theory of Markov Processes*. Academic Press, 1988.

[23] S. M. Srivastava. *A Course on Borel Sets*. Graduate Texts in Mathematics 180. Springer-Verlag New York, 1998. DOI: 10.1007/b98956.

[24] Kosaku Yosida. *Functional Analysis*. 6th ed. Classics in Mathematics. Reprint of the 1980 Edition (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 123). Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995. XVI+504. DOI: 10.1007/978-3-642-61859-8. URL: https://www.springer.com/gp/book/9783540586548.

索引

$(P_{s,t}; 0 \leq s < t)$, 4
$(P_t)_{t \geq 0}$, 4
$\mathscr{F}_t^*(X)$, 24
$\mathscr{F}_t^\nu(X)$, 24
θ_s, 10
θ_T, 31
$D([0,\infty[, E_\Delta)$, 26
$E_\nu[\,\cdot\,]$, 9
$E_x[\,\cdot\,]$, 9
MN, 3
Nf, 3
P_ν, 7
P_x, 9

absorbing, 12
announce, 35

Blumenthal's 0-1 law, 29

cemetery, 12
Chapman-Kolmogorov equation, 4

Feller semigroup, 13
Feller transition function, 14

homogeneous, 4
Hunt process, 38

initial distribution, 4

kernel, 3

LCCB space, 13

Markov process, 4
Markov property, 10
Markovian, 12

predictable time, 35

quasi-left continuous, 35

resolvent, 14

shift operator, 10
stochastically continuous, 34
strong Markov property, 31
strongly continuous contraction semigroup, 13
sub-Markovian, 12

transition function, 4
transition probability, 3
trap, 12

LCCB 空間, 13

核, 3
確率連続, 34
可予測時刻, 35

吸収的, 12
強マルコフ性, 31
強連続縮小半群, 13

シフト作用素, 10
準左連続, 35
初期分布, 4

推移確率, 3
推移関数, 4

斉次的, 4

Chapman-Kolmogorov の等式, 4

Hunt 過程, 38

Feller 推移関数, 14
Feller 半群, 13
Blumenthal の 0-1 法則, 29

墓地, 12

Markov 過程, 4
Markov 性, 10
Markov 的, 12

予告, 35

レゾルベント, 14
劣マルコフ的, 12

罠, 12