1　確率変数列の収束

1.1　定義

1.2　確率収束の性質

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，(X_n) を $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の実数値確率変数列とする．

今後の記法の利便性のために，以下の空間を用意する．ただし，確率変数間の同値関係 $\sim$ を $X \sim Y :\Leftrightarrow X = Y$ a.e. で定義することにする．

$$\mathscr{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P) = \{X : \Omega \to \mathbb{R} \mid X \text{ は } \mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{R}) \text{ -可測．} \}$$
$$L^0(\Omega, \mathscr{F}, P) = \mathscr{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P)/\sim$$

この小節の証明中で使うので，とりあえずはじめに概収束にも言及しておく．期待値の収束の部分ですでに述べただろうが，ある確率 1 の可測集合 Ω_0 上で確率変数列 (X_n) は確率変数 X も各点収束するとする．このとき，(X_n) は X に概収束するという．

定義 1.2.1 (確率収束)**.** (X_n) が実数値確率変数 X に確率収束するとは，次の条件がなりたつことをいう[*1]．任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$P(\{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

X_n が X に確率収束するとき，$X_n \to X$ in Prob. などと書く．$P - \lim_{n\to\infty} X_n = X$ などと表記する流儀もある．

注意 1.2.2 (極限の一意性)**.** 確率収束の極限について，P-a.e. の意味で一意性が成り立つ．実際

$$X_n \to X \text{ in Prob.} \quad \text{かつ} \quad X_n \to \tilde{X} \text{ in Prob.}$$

とすれば，任意の $p > 0$ に対して，

$$P\left(|X - \tilde{X}| > \frac{1}{p}\right) \leq P\left(|X_n - X| > \frac{1}{2p}\right) + P\left(|X_n - \tilde{X}| > \frac{1}{2p}\right) \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

がなりたつから，さらに $p \to \infty$ として

$$\begin{aligned} P(|X - \tilde{X}| > 0) &= P\left(\bigcup_{p=1}^{\infty} \left\{|X - \tilde{X}| > \frac{1}{p}\right\}\right) \\ &= \lim_{p\to\infty} P\left(|X - \tilde{X}| > \frac{1}{p}\right) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

を得る．

補題 1.2.3. $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とする．確率変数列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して以下は同値．

[*1] X_n および X の可測性より，$\{|X_n - X| > \varepsilon\}$ は任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して可測となることに注意．

(i) (X_n) はある確率変数に確率収束する．

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $\delta > 0$ に対してある $N(\varepsilon, \delta) \in \mathbb{N}$ が存在して，

$$n, m \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow P\left[|X_n - X_m| > \varepsilon\right] < \delta$$

がなりたつ．

Proof. **Step1 : (i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明．** $\varepsilon > 0$ とする．(i) を仮定し，その極限を X とおくことにする．このとき任意の $\delta > 0$ に対してある $N = N(\varepsilon, \delta)$ が存在して，任意の $n \geq N(\varepsilon, \delta)$ に対して

$$P\left[|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right] < \frac{\delta}{2}$$

が成り立つ．したがって，$n, m \geq N(\varepsilon)$ とすれば

$$\begin{aligned} P\left[|X_n - X_m > \varepsilon| > \varepsilon\right] &\leq P\left[|X_n - X| + |X - X_m| > \varepsilon\right] \\ &\leq P\left(\left\{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{|X_m - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) \\ &\leq P\left[\,|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\,\right] + P\left[\,|X_m - X| > \frac{\varepsilon}{2}\,\right] \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \end{aligned}$$

となる．すなわち (ii) が成立．

Step2 : (ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． (ii) を仮定すれば，次の条件を満たす (X_n) の部分列 (X_{n_k}) がとれる．

$$P\left[|X_{n_k+1} - X_{n_k}| > \frac{1}{2^k}\right] < \frac{1}{2^k}.$$

$A_k = \{|X_{n_k+1} - X_{n_k}| > 2^{-k}\}$ とおけば

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty$$

となるから，Borel-Cantelli の第一補題により

$$P\left(\limsup_{k\to\infty} A_k\right) = P\left(\bigcap_{m\geq 0} \bigcup_{k\geq m} A_k\right) = 0$$

が成立．すなわち

$$P\left[\exists m \geq 0 \ \forall k \geq m \ |X_{n_{k+1}} - X_{n_k}| \leq \frac{1}{2^k}\right] = 1$$

である．したがって，任意の $\omega \in \liminf_{k\to\infty} \Omega \setminus A_k$ に対して $(X_{n_k}(\omega))_{k\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}$ の Cauchy 列を成しており，ある実数に収束することがわかる．ここで

$$X(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} X_{n_k}(\omega) & \omega \in \limsup\limits_{k\to\infty} A_k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義する．このとき明らかに (X_{n_k}) は X に概収束している．あとは (X_n) が X に確率収束していることを示せばよい．$\varepsilon > 0$ および $\delta > 0$ としよう．条件 (ii) より十分大きな $N(\delta, \varepsilon)$ をとれば

$$n, m \geq N_1(\varepsilon) \Longrightarrow P\left[|X_n - X_m| > \frac{\varepsilon}{2}\right] < \delta$$

がなりたつ．したがって，$n \geq N(\delta, \varepsilon)$ とすれば，$k \geq N$ を用いて

$$
\begin{aligned}
&P\,[\,|X_n - X| > \varepsilon\,] \\
&\leq P\,[|X_n - X_{n_k}| + |X_{n_k} - X| > \varepsilon] \\
&\leq P\left[|X_n - X_{n_k}| > \frac{\varepsilon}{2}\right] + P\left[|X_{n_k} - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right] \\
&= P\left[|X_n - X_{n_k}| > \frac{\varepsilon}{2}\right] + P\left[|X_{n_k} - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right] \\
&< \delta + +P\left[|X_{n_k} - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right]
\end{aligned}
$$

がわかる[*2]．$(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ は X に概収束しているから，命題**??**より確率収束もしている[*3]．ここで $k \to \infty$ とすれば

$$P\,[\,|X_n - X| > \varepsilon\,] \leq \delta$$

を得るが，これは $X_n \to X$ in Prob. ということに他ならない． □

確率収束を実現する $L^0(\Omega, \mathscr{F}, P)$ の位相はどのようなものが考えられるであろうか．実は $L^0(\Omega, \mathscr{F}, P)$ に適当な距離を定めれば，その距離空間としての収束は確率収束と同等になることが知られている．しかも，その距離により $L^0(\Omega)$ は完備になっていることまで示される．

確率変数 X, Y に対して

$$d_0(X, Y) = E[|X - Y| \wedge 1]$$

と定めることにする．このとき，d_0 に関して次の命題が成立する．

命題 1.2.4. $d_0 : L^0(\Omega) \times L^0(\Omega) \to \mathbb{R}$ に関して次が成立．

(i) d_0 は $L^0(\Omega)$ 上の距離を定める．

(ii) $(L^0(\Omega), d_0)$ は完備距離空間である．

(iii) $X_n \to X$（確率収束）と $d_0(X_n, X) \to 0$ は同値．

Proof. **(i) の証明．** 非負性および

$$
\begin{aligned}
d_0(X, X) &= E[|X - X| \wedge 1] = 0 \\
d_0(X, Y) &= E[|X - Y| \wedge 1] = E[|Y - X| \wedge 1] = d_0(Y, X)
\end{aligned}
$$

は明らかである．$|X + Y| \wedge 1 \leq |X| \wedge 1 + |Y| \wedge 1$ に注意すれば[*4]

$$
\begin{aligned}
d_0(X, Z) &= E[|X - Y| \wedge 1] \\
&\leq E[|X - Y| \wedge 1] + E[|Y - Z| \wedge 1] \\
&= d_0(X, Y) + d_0(Y, Z)
\end{aligned}
$$

となり三角不等式も分かる．また，$d_0(X, Y) = 0$ とすれば $|X - Y| \wedge 1 = 0$ より $X(\omega) - Y(\omega) = 0$ a.s. となるから，X と Y は $L^0(\Omega)$ の元として等しい．よって d_0 は $L^0(\Omega)$ 上の距離である．

[*2] $n_k \geq k \geq N(\delta, \varepsilon)$ に注意．

[*3] 後の章の命題をもってくるのはあまり行儀がよろしくないが，**??**の証明にはこの命題の結果は使っておらず，循環論法の心配はない．

[*4] 場合分けして考えれば容易．

(ii) の証明[*5]．$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $(L^0(\Omega), d_0)$ の Cauchy 列とする．このとき，適当な部分列をとって

$$d_0(X_{n(k+1)}, X_{n(k)}) < \frac{1}{2^k}$$

とすることが出来る．単調収束定理より

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{k=0}^{\infty} |X_{n(k+1)} - X_{n(k)}| \wedge 1\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} E[|X_{n(k+1)} - X_{n(k)}| \wedge 1] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} d_0(X_{n(k+1)}, X_{n(k)}) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty \end{aligned}$$

がなりたつから，$\sum_k |X_{n(k+1)} - X_{n(k)}| \wedge 1 < \infty$ a.e. である．これより $(X_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ が確率 1 で Cauchy 列になっており，概収束極限 X が存在する．あとは，(X_n) が d_0 に関して X に収束していることを示せばよろしい．十分大きい n と k をとれば

$$\begin{aligned} d_0(X_n, X) &\leq d_0(X_n, X_{n_k}) + d_0(X_{n_k}, X) \\ &< \varepsilon + E[|X_{n_k} - X| \wedge 1] \end{aligned}$$

となるが，ここで $k \to \infty$ とすれば有界収束定理より $E[|X_{n_k} - X| \wedge 1]$ の項は 0 に収束する．よって確率収束が示された．すなわち，(L^0, d_0) は完備距離空間である．

(iii) の証明．

$$\begin{aligned} E[|X-Y| \wedge 1] &\geq E\left[(|X-Y| \wedge 1) 1_{\{|X-Y|>\varepsilon\}}\right] \\ &\geq E\left[\varepsilon 1_{\{|X-Y|>\varepsilon\}}\right] \\ &= \varepsilon P\left[\,|X-Y| > \varepsilon\,\right] \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} E[|X-Y| \wedge 1] &= E\left[(|X-Y| \wedge 1) 1_{\{|X-Y|>\varepsilon\}}\right] + E\left[(|X-Y| \wedge 1) 1_{\{|X-Y|\leq\varepsilon\}}\right] \\ &\leq E\left[1 \times 1_{\{|X-Y|>\varepsilon\}}\right] + E\left[\varepsilon\, 1_{\{|X-Y|\leq\varepsilon\}}\right] \\ &\leq P\left[\,|X-Y| > \varepsilon\,\right] + \varepsilon \end{aligned}$$

という評価より

$$\varepsilon P\left[\,|X-Y| > \varepsilon\,\right] \leq d_0(X,Y) \leq P\left[\,|X-Y| > \varepsilon\,\right] + \varepsilon$$

なる関係を得る．これより同値性がわかる． □

注意 1.2.5. 確率収束を定める距離としては他にも

$$\begin{aligned} d_0'(X,Y) &= E\left[\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right] \\ d_0''(X,Y) &= E[\,\arctan(X-Y)\,] \end{aligned}$$

などが知られている．

[*5] 命題**??**の証明とほぼ同じだが，念のため．

1.3 概収束の性質

ここでは，もっとも素朴な収束概念である概収束を扱う．概収束は各点収束と類似の概念であり，「ある確率 1 の集合上で収束する」というものである．

以下，$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とする．

定義 1.3.1 (概収束)**.** (X_n) を実数値確率変数列とし，X を実数値確率変数とする．

$$P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$$

がなりたつとき，(X_n) は X に概収束 (almost sure convergence) するという[*6]．(X_n) が X に概収束するとき，$X_n \to X$ a.e. や $X_n \to X$ a.s. などと書く[*7]．

注意 1.3.2. $\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\}$ という集合の意味を定義に戻って ε-δ 論法で書き直してみると，以下のようになるであろう．

$$\begin{aligned}
&\left\{ \omega \in \Omega \,\middle|\, \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \bigl|X(\omega) - X_n(\omega)\bigr| < \varepsilon \right\} \\
&= \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{N \geq 0} \bigcap_{n \geq N} \left\{ \omega \in \Omega \,\middle|\, |X(\omega) - X_n(\omega)| < \varepsilon \right\} \\
&= \bigcap_{p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} \left\{ \omega \in \Omega \,\middle|\, |X(\omega) - X_n(\omega)| < \frac{1}{p} \right\}
\end{aligned}$$

X_n と X より $\bigcap$ や $\bigcup$ を取る前の集合は明らかに可測であるが，その可算個の和や共通部分を取っただけなので，この集合は明らかに可測である．[*8]

注意 1.3.3 (極限の一意性)**.**

$$\begin{aligned}
&P(\{\, \omega \in \Omega \mid X(\omega) = \tilde{X}(\omega) \,\}) \\
&\geq P(\{\, \omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \to X(\omega) \,\} \cap \{\, \omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \to \tilde{X}(\omega) \,\}) \\
&= 1
\end{aligned}$$

より，概収束の極限に関しても一意性がなりたつ．

命題 1.3.4. (X_n) がある確率変数に概収束するための必要十分条件は

$$P\left(\bigcap_{p \geq 1} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{m,n \geq N} \left\{ \omega \in \Omega \,\middle|\, \bigl|X_m(\omega) - X_n(\omega)\bigr| < \frac{1}{p} \right\} \right) = 1 \tag{1.3.1}$$

がなりたつことである[*9]．

---

*6 ここでは X を実数値としているので，$+\infty$ や $-\infty$ に発散する場合は含まれていないことに注意．

*7 正確には P-a.e. や P-a.e. などと書くべきだと思われるが，確率空間が明らかならば省略することも多い．

*8 実際一番大切なのは最後の書き換えであり，これは $\mathbb{R}$ が距離空間であることに由来するものであった．したがって，距離空間に値をとる確率変数に対しても概収束が定義可能であることが予想される．（自分はよく知らない．）

*9 この条件はつまり，$(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathbb{R}$ の Cauchy 列なっているような ω 全体の集合の確率は 1，ということである．

Proof. 概収束すれば $\{\lim X_n = X\}$ 上では $(X_n(\omega))$ は Cauchy 列なので，明らかに (??) は成り立つ．(??) を仮定して

$$A = \bigcap_{p\geq 1}\bigcup_{N\in\mathbb{N}}\bigcap_{m,n\geq N}\left\{\omega\in\Omega \;\middle|\; \left|X_m(\omega)-X_n(\omega)\right| < \frac{1}{p}\right\}$$

とおくことにする．A 上では $(X_n(\omega))$ は Cauchy 列であるから，極限が存在する．ここで，

$$X(\omega) = \begin{cases}\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) & \text{on } A,\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

とおけば X もまた確率変数で[*10] $X_n \to X$ a.s. となる． □

命題 1.3.5. 実数値確率変数列 (X_n) と実数値確率変数 X に関して，以下の 2 条件は同値．

(i) X_n は X に概収束する．

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\bigcap_{n\geq N}\{\,\omega\in\Omega \mid |X(\omega)-X_n(\omega)|<\varepsilon\,\}\right) = 1$$

が成立．

Proof.

$$A_{\varepsilon,n} = \{\,\omega\in\Omega \mid |X(\omega)-X_n(\omega)|<\varepsilon\,\}$$

と表記することにする．この記法を用いれば，(i) は

$$P\left(\bigcap_{p\geq 1}\bigcup_{N\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geq N} A_{\frac{1}{p},n}\right)$$

と同値であることに注意しておく．

Step1 : (i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明． (X_n) が X 概収束するとしよう．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $1/p < \varepsilon$ となる自然数 $p = p(\varepsilon)$ がとれて, 以下の包含関係がなりたつ．

$$\bigcap_{q\geq 1}\bigcup_{N\geq 1}\bigcap_{n\geq N} A_{\frac{1}{q},n} \subset \bigcup_{N\geq 1}\bigcap_{n\geq N} A_{\frac{1}{p},n} \subset \bigcup_{N\geq 1}\bigcap_{n\geq N} A_{\varepsilon,n}.$$

集合列 $(\bigcap_{m,n\geq N} A_{\varepsilon,m,n})_N$ が $N\to\infty$ としたとき単調に増大していくことに注意すれば，

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} P\left(\bigcap_{n\geq N} A_{\varepsilon,n}\right) &= P\left(\bigcup_{N\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geq N} A_{\varepsilon,n}\right)\\ &\geq P\left(\bigcap_{q\geq 1}\bigcup_{N\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geq N} A_{\frac{1}{q},n}\right)\\ &= 1.\end{aligned}$$

よって (ii) が成立．

[*10] A は $\mathscr{F}$ の元である．

Step2 : (ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明. 仮定より，任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して

$$P\left(\bigcup_{N\geq 1}\bigcap_{m,n\geq N} A_{\frac{1}{p},m,n}\right) = \lim_{N\to\infty} P\left(\bigcap_{m,n\geq N} A_{\frac{1}{p},m,n}\right) = 1.$$

集合列 $\left(\bigcup_{N\in\mathbb{N}}\bigcap_{m,n\geq N} A_{\frac{1}{p},m,n}\right)_p$ は p に関して減少列なので

$$P\left(\bigcap_{p\geq 1}\bigcup_{N\geq 1}\bigcap_{m,n\geq N} A_{\frac{1}{p},m,n}\right) = \lim_{p\to\infty} P\left(\bigcup_{N\in\mathbb{N}}\bigcap_{m,n\geq N} A_{\frac{1}{p},m,n}\right) = 1.$$

よって (X_n) は概収束する． □

この特徴づけを用いて，概収束と確率収束の関係を調べよう．

命題 1.3.6. X_n が X に概収束するならば，確率収束する．

Proof. $A_{\varepsilon,n}$ を前の定理の証明と同様に定める．このとき，$X_n \to X$ in Prob. は

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P(A_{\varepsilon,n}) = 1$$

と書きかえられることに注意しておく．$X_n \to X$ a.e. を仮定すれば，定理**??**より任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P\left(A_{\varepsilon,n}\right) \geq \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_{\varepsilon,k}\right) = 1$$

である． □

定理 1.3.7. $X_n \to X$ in Prob. ならば，X に概収束するような (X_n) の部分列がとれる．

Proof. $X_n \to X$ in Prob. を仮定すれば，

$$P\left(|X_{n(k)} - X| > \frac{1}{2^k}\right) < \frac{1}{2^k}$$

を満たす増加的な自然数列 $k \longmapsto n(k)$ をとることができる．

$$A_k = \left\{\omega \in \Omega \;\middle|\; |X_{n(k)}(\omega) - X(\omega)| > \frac{1}{2^k}\right\}$$

とおけば，

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty$$

であるから，Borel-Cantelli の補題より

$$P\left(\limsup_{k\to\infty} A_k\right) = 0.$$

すなわち

$$P\left(\liminf_{k\to\infty} \Omega \setminus A_k\right) = 1.$$

$\liminf_{k\to\infty}(\Omega \setminus A_k)$ 上で，$(X_{n(k)})$ は X に各点収束する．ゆえに，$X_{n(k)} \to X$ a.e. である． □

命題 1.3.8. $X_n \to X$ in Prob であるための必要十分条件は，(X_n) の任意の部分列が X に概収束する部分列を持つことである．

Proof. 必要性を示す．$X_n \to X$ in Prob. ならば，その任意の部分列もまた X に確率収束する．定理**??**によって，その部分列はさらに X に概収束する部分列を持つ．

十分性については，対偶を証明する．(X_n) は X に確率収束しないものとしよう．このとき，(X_n) の部分列 $(X_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ として

$$\exists\delta > 0\ \forall k \geq 1 \quad P(|X_{n(k)} - X| > \delta) > \delta$$

をみたすものがとれる．この $(X_{n(k)})$ はいかなる部分列をとっても，X に概収束することはない． □

命題**??**証明で用い記号を用いれば，概収束および確率収束はそれぞれ

$$X_n \to X \text{ a.e.} \iff \lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_{\varepsilon,n}) = 1$$
$$X_n \to X \text{ in probability} \iff \lim_{n\to\infty} P(A_{\varepsilon,n}) = 1$$

ということである．確率収束は単に $A_{\varepsilon,n}$ の Ω に占める「割合」が 1 に近づくということを述べているのであって，それらは各 n ごとに大きく「ずれて」いてもいいということになる．しかし，概収束ではその「ずれ」の部分がほとんどなくなることを要請しているのである．次の例はこのことをよく表しているといえよう．

例 1.3.9. 確率収束するが概収束しない確率変数列

$(\Omega, \mathscr{F}, P) = (\,]0,1], \mathscr{B}(\,]0,1]), \mu)$ を確率空間とする．（ただし，μ は $]0,1]$ 上の Lebesgue 測度と定める．）

$$\xi_{n,k}(\omega) := 1_{\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]}(\omega) \quad (\, n \in \mathbb{N},\ k \in \{1, 2, \dots, 2^n\}\,)$$

とおき，確率変数列 (X_n) を

$$(X_1, X_2, \dots) = (\xi_{1,1}, \xi_{1,2}, \xi_{2,1}, \xi_{2,2}, \dots) \quad (\,(\xi_{n,k}) \text{ を辞書式順序で並べたもの}\,)$$

と定める．$\varepsilon > 0$ に対して，$X_l = \xi_{n,k}$ のとき

$$P(|X_l| \geq \varepsilon) = P(X_l = 1) = \mu\left(\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]\right) = \frac{1}{2^n}.$$

$l \to \infty$ とすれば $n \to \infty$ だから，$X_l \to 0$ in probability である．しかし，$\omega \in (0,1]$ に対して $\omega \in \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$ を満たす (n,k) の組み合わせは無数に存在するので，各 ω において $(X_l(\omega))_{l\in\mathbb{N}}$ は無限回 $X_l(\omega) = 1$ となる．したがって，(X_l) は 0 に概収束しない．(X_l) の部分列を $(\xi_{n,1})$ ととれば，これは $(0,1]$ 上 0 に各点収束する．

概収束の距離づけ可能性についての命題を紹介する．

命題 1.3.10. 概収束は距離づけ可能ではない．

Proof. 背理法で示す．概収束は距離づけ可能と仮定し，d_1 をそのような（L^0 上の）距離の一つとする．このとき，

$$(X_n) \text{ が概収束} \iff (X_n) \text{ の任意の部分列は概収束する部分列をもつ} \tag{1.3.2}$$

がなりたつ．実際 $(\Longrightarrow)$ は明らかである．また，(X_n) が概収束しないならばある $\delta > 0$ が存在して

$$d_1(X_{n_{k+1}}, X_{n_k}) > \delta$$

と出来るが，この部分列は明らかに収束しない．したがって ($\Longleftarrow$) の対偶も示され，(??) が成立する．

このとき，命題??により概収束と確率収束は同値になる．しかし，例??よりこれは矛盾である． $\square$

1.4　L^p -収束

本小節を通して
$$E[X;F] = \int_F X(\omega)P(d\omega)$$
という記法を用いることにする．

定義 1.4.1 (L^p 収束)**.** $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を確率変数列，X を確率変数とする．$p > 0$ に対して，
$$E[|X_n - X|^p] \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$
となるとき，(X_n) は X に L^p 収束する，または p 次平均収束するなどという．このとき，$X_n \to X$ in L^p などと表記する．

定理 1.4.2. $X_n \to X$ in L^p ならば $X_n \to X$ in Prob.

Proof. Chebyshev の不等式より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して
$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \frac{E[|X_n - X|^p]}{\varepsilon^p}$$
がなりたつから，両辺において $n \longrightarrow \infty$ とすればよい． $\square$

例 1.4.3. ルベーグ測度による確率空間 $((0,1], \mathscr{B}(0,1], \mu)$ の確率変数列 (X_n) を
$$X_n(\omega) = n1_{\left(0,\frac{1}{n}\right]}(\omega)$$
と定めれば，$]0,1]$ 上で (X_n) は 0 に各点収束するので，0 に概収束する．（当然確率収束もしている．）しかし，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $E[X_n] = 1$ であり，0 に L^1 収束しない．

例 2 は概収束するが L^1 収束しないものの例である．一方，例 1 で扱った確率変数列は 0 に確率収束するだけでなく，実のところ L^p 収束もしている．これらの例を考える限りでは概収束と平均収束には特筆すべき関係性はないようにも思われる．概収束と L^p 収束の関係性をもう少し深く考察するためには，これから導入する一様可積分性の概念が必要になる．

定義 1.4.4. 確率変数列 (X_n) が一様可積分であるとは，
$$\lim_{K\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n|; |X_n| > K] = 0$$
がなりたつことである．言いかえれば，$E[|X_n|\,; |X_n| > K]$ は $K \to \infty$ としたとき n に関して一様に 0 に収束するということである．

補題 1.4.5. 確率変数 X が可積分ならば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して以下の条件を満たす $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在する．
$$\forall \Lambda \in \mathscr{F} \quad P(\Lambda) < \delta \Longrightarrow E[|X|\,; \Lambda] < \varepsilon.$$

特に，次が成り立つ．

$$\lim_{K\to\infty} E[|X|\,;|X|>K]=0.$$

Proof. 背理法で示そう．補題の主張の否定を仮定すれば，ある $\varepsilon_0>0$ が存在して，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$P(\Lambda_n)<\frac{1}{2^n}\quad \text{かつ}\quad E[|X|\,;\Lambda_n]>\varepsilon_0$$

をみたす集合列 $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がとれる．Borel-Cantelli の第一補題により，$\limsup_{n\to\infty}\Lambda_n$ は零集合である．Fatou の補題より

$$E[\liminf_{n\to\infty}(|X|-|X|1_{\Lambda_n})]\le \liminf_{n\to\infty} E[|X|-|X|1_{\Lambda_n}].$$

よって，

$$E[|X|;\limsup_{n\to\infty}\Lambda_n]\ge \limsup_{n\to\infty} E[|X|1_{\Lambda_n}]\ge\varepsilon_0.$$

$\limsup_{n\to\infty}\Lambda_n$ は零集合だったから矛盾である．後半の主張に関しては，Chebyshev の不等式より $P(|X|>K)<K^{-1}E[|X|]<\delta$ なる K がとれることから分かる． □

命題 1.4.6. 確率変数列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が次のいずれかの条件を満たすならば，それは一様可積分である．

(i) ある可積分関数 Y で，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $|X_n(\omega)|\le Y(\omega)$ a.e. をみたすものが存在する．

(ii) ある $p>1$ について $\sup_{n\in\mathbb{N}}E[|X_n|^p]<\infty$ がなりたつ．なお，この条件がなりたつとき，(X_n) は L^p 有界であるということがある．

Proof. (i) 仮定より，任意の $K>0$ および任意の自然数 n に対して

$$\begin{aligned}E[|X_n|;|X_n|>K]&\le E[|X_n|;|Y|>K]\\&\le E[|Y|;|Y|>K]\end{aligned}\tag{1.4.1}$$

がなりたつ．補題**??**より，式 (**??**) の右辺は $K\to\infty$ としたとき 0 に収束するので，(X_n) の一様可積分性がわかった．

(ii) 任意の $K>0$ と $n\in\mathbb{N}$ に対して，

$$\begin{aligned}E[|X_n|;|X_n|>K]&\le E[K^{1-p}|X_n|^p;|X_n|>K]\\&\le K^{1-p}E[|X_n|^p]\\&\le K^{1-p}\sup_{n\in\mathbb{N}}E[|X_n|^p]<\infty.\end{aligned}\tag{1.4.2}$$

(**??**) において，$K\to\infty$ とすればよい． □

命題 1.4.7. 確率変数列 (X_n) が一様可積分であるとき，次の (i) から (iv) が成り立つ．

(i) $\sup_{n\in\mathbb{N}}E[|X_n|]<\infty$

(ii) 任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ が存在して，任意の自然数 n および $P(\Lambda)<\delta$ を満たす任意の $\Lambda\in\mathcal{F}$ について $E[|X_n|\,;\Lambda]<\varepsilon$ が成り立つ．

(iii) $X_n\to X$ a.e. ならば X も可積分である．

(iv) Y が可積分ならば $(X_n-Y)_{n\in\mathbb{N}}$ も一様可積分である．

Proof. (i) 十分大きい K をとれば，任意の自然数 n に対して

$$E[|X_n|] = E[|X_n|\,;|X_n| > K] + E[|X_n|\,;|X_n| \leq K] \leq 1 + K$$

がなりたつ．

(ii) 一様可積分性より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$E[|X_n|\,;|X_n| > K] < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たす $K > 0$ が n に関係なくとれる．$0 < \delta < \varepsilon/2K$ となる δ をとれば，任意の自然数 n と $P(\Lambda) < \delta$ なる任意の Λ について

$$\begin{aligned}E[|X_n|\,;\Lambda] &= E[|X_n|\,;\Lambda \cap \{|X_n| > K\}] + E[|X_n|\,;\Lambda \cap \{|X_n| \leq K\}] \\ &\leq E[|X_n|\,;\{|X_n| > K\}] + E[K\,;\Lambda] \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + KP(\Lambda) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

(iii)Fatou の補題と (i) より

$$E[|X|] = E[\liminf_{n\to\infty}|X_n|] \leq \liminf_{n\to\infty} E[|X_n|] \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n|] < \infty.$$

(iv)$E[|X_n - Y|] \leq \sup E[|X_n|] + E[|Y|] < \infty$ より $(X_n - Y)$ は可積分であることに注意する．補題**??**および (ii) より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分大きい $K_0 > 0$ をとれば，$K > K_0$ ならば

$$\begin{aligned}E[|X_n - Y|\,;|X_n - Y| > K] &=\leq E[|X_n|\,;|X_n - Y| > K] + E[|Y|\,;|X_n - Y| > K] \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

定理 1.4.8. (X_n) が一様可積分であるための必要十分条件は，命題**??**の (i) および (ii) がなりたつことである．

Proof. 必要性は命題**??**で示されているので，十分性のみを示す．命題**??**(ii) の $\delta = \delta(\varepsilon)$ に対して，

$$P(|X_n| > K_0) \leq \frac{E[|X_n|]}{K_0} \leq \frac{\sup E[|X_n|]}{K_0} < \delta$$

を満たす $K_0 > 0$ をとれば，任意の $K > K_0$ において

$$E[|X_n|\,;|X_n| > K] < \varepsilon \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

□

定理 1.4.9. (X_n) を可積分な確率変数列とし，$X_n \to X$ a.e. とする．このとき，以下の三条件は同値である．

(i) (X_n) は一様可積分である．
(ii) $X_n \to X$ in L^1.
(iii) $E[|X_n|] \to E[|X|] < \infty$.

Proof. (i) ⇒ (ii) 命題??(iii) より X は可積分であり，命題??(iv) より $(X_n - X)$ も一様可積分である．命題??(ii) より任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$P(\Lambda) < \delta \implies E[|X_n - X|\,;\Lambda] < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たす $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在する．$X_n \to X$ a.e. より $X_n \to X$ in probability であるから，

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ P(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}) < \delta$$

がなりたつ．したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n > N$ について

$$\begin{aligned} E[|X_n - X|] &\leq E[|X_n - X|\,;|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}] + E[|X_n - X|\,;|X_n - X| \leq \frac{\varepsilon}{2}] \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(ii) ⇒ (iii) $X_n \to X$ in L^1 より，十分大きい自然数 n に対して，$E[|X_n - X|] < \infty$ である．(X_n) の可積分性と合わせれば，十分大きい n に対して，

$$E[|X|] \leq E[|X_n|] + E[|X - X_n|] < \infty.$$

また，

$$|E[|X_n|] - E[|X|]| \leq E[|X_n - X|] \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

よって，$E[|X_n|] \to E[|X|] \quad (n \to \infty)$ がなりたつ．

(iii) ⇒ (i) 可測関数 f に対して可測関数 f^a を以下の様に定義する．

$$f^a(\omega) = \begin{cases} f(\omega) & (|f(\omega)| < a), \\ 0 & (otherwise). \end{cases}$$

このとき，$\{\omega \in \Omega \mid |X(\omega)| = a\}$ が零集合となる a(このような a を X の分布の連続点と呼ぶ) に対して，$X_n^a \to X^a$ a.e. がなりたち，したがって $|X_n^a| \to |X^a|$ a.e. である．有界収束定理により，

$$E[|X_n^a|] \longrightarrow E[|X|] \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が分かる．ゆえに，

$$\begin{aligned} E[|X_n|; |X_n| \geq a] &= E[|X_n|] - E[|X_n|; |X_n| < a] \\ &= E[|X_n|] - E[|X_n^a|]. \end{aligned}$$

両辺で n について極限をとれば

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} E[|X_n|; |X_n| \geq a] &= \lim_{n\to\infty} E[|X_n|] - \lim_{n\to\infty} E[|X_n^a|] \\ &= E[|X|] - E[|X^a|] \\ &= E[|X|] - E[|X|; |X| < a] \\ &= E[|X|; |X| \geq a]. \end{aligned}$$

X の可積分性より X の分布の連続点 a を十分大きくとれば，

$$E[|X|; |X| > a] < \frac{\varepsilon}{2}$$

であり，さらに任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \geq N$ に対して

$$E[|X_n|; |X_n| > a] < E[|X|; |X| > a] + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

各 $n \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$ に対して

$$E[|X_n|; |X_n| \geq b_n] < \varepsilon$$

を満たす b_n が存在するので，$c > \max\{a, b_1, b_2, \ldots, b_{N-1}\}$ なる c をとれば，任意の n について

$$E[|X_n|; |X_n| > c] < \varepsilon.$$

すなわち，(X_n) は一様可積分である． □

定理**??** (i) ⇒ (ii) の証明では，実際には (X_n) が X に確率収束することを用いていた．定理**??**の条件は確率収束まで緩められないかという問題が考えられる．実際，次の結果がなりたつことが分かる．

定理 1.4.10. (X_n) を可積分な確率変数列，X を可積分な確率変数とする．$X_n \to X$ in L^1 は次の二条件がなりたつことと同値である．

(i) $X_n \to X$ in probability
(ii) (X_n) は一様可積分．

Proof. (i) かつ (ii) ならば $X_n \to X$ in L^1 は定理**??**の証明と同様である．$X_n \to X$ in L^1 としよう．定理**??**より $X_n \to X$ in probability なので，一様可積分性のみを示せばよい．$\varepsilon > 0$ としよう．(X_n) が X に L^1 収束することより，

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ E[|X_n - X|] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

X の可積分性より，

$$\exists \delta_0 > 0\ P(\Lambda) < \delta_0 \Longrightarrow E[|X|; \Lambda] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

また，

$$\forall n \in \{1, 2, \ldots, N-1\}\ \exists \delta(n) > 0\ P(\Lambda) < \delta(n) \Longrightarrow E[|X_n|; \Lambda] < \varepsilon.$$

$E[|X_n|]$ は収束列なので有界列である．よって，十分大きな K をとれば，任意の n に対して

$$P(|X_n| > K) \leq \frac{E[|X_n|]}{K} \leq \frac{\sup_{n \in \mathbb{N}} E[|X_n|]}{K} < \min\{\delta_0, \delta(1), \ldots \delta(N-1)\}$$

となる．したがって，$n \geq N$ に対して

$$\begin{aligned}
E[|X_n|; |X_n| > K] &\leq E[|X_n - X|; |X_n| > K] + E[|X|; |X_n| > K] \\
&\leq E[|X_n - X|] + E[|X|; |X_n| > K] \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

$n \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$ についても

$$E[|X_n|; |X_n| > K] < \varepsilon.$$

よって，一様可積分性が示された． □

この結果を用いてルベーグの優収束定理が改良できる．

定理 1.4.11 (Dominated Convergence Theorem). (X_n) を可積分な確率変数列とする．$X_n \to X$ in probability かつ，ある可積分な確率変数 Y に対して $|X_n| \leq Y$ a.e. $(n \in \mathbb{N})$ ならば，$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[X]$

Proof. $X_{n(k)} \to X$ a.e. なる (X_n) の部分列がとれるから，命題**??**より X は可積分である．よって，定理**??**が適用できる． □