Ornstein–Uhlenbeck 半群　Ver.1.0

平井祐紀

2021 年 9 月 6 日

概要

Nualart [3] にしたがって Ornstein–Uhlenbeck 半群を導入し，その基本的な性質を調べる．

更新履歴

2021.9.6. §4 まで書いたので，とりあえず ver.1.0 と名づける．

目次

1　準備

$(\Omega, \mathscr{F}^0, P)$ を確率空間とし，H を可分 Hilbert 空間とする．また $W\colon H \to L^2(\Omega, \mathscr{F}^0, P)$ を等正規 Gauss 過程 (isonormal Gaussian process) とし，$\mathscr{F}$ を $\sigma(W) = \sigma(W(h); h \in H)$ の完備化とする．この σ 代数を用いて，W を等正規 Gauss 過程 $W\colon H \to L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ と考える．以下では特に断りのない限り，上記の σ 代数 $\mathscr{F}$ を用いて定義された確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を扱うことにする．$\mathscr{F}$ が W から生成されているという仮定は重要である．

$n \in \mathbb{N}$ に対して，H_n を n 次の Hermite 多項式，すなわち以下を満たす関数とする．

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

H_n は以下の Taylor 展開における係数として定めることもできる．

$$e^{tx - \frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) t^n \tag{1.1}$$

γ を 1 次元の標準 Gauss 測度とすれば，$(\sqrt{n!}H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $L^2(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}),\gamma)$ の正規直交基底となっている．

Hermite 多項式と等正規 Gauss 過程を用いて，

$$\mathscr{H}_n = \mathrm{Cl}_{L^2(P)}\,\mathrm{span}\{H_n(W(h)) \mid h\in H,\ \|h\|=1\}$$

と定義し，$\mathscr{H}_n$ を n 次の Wiener カオスと呼ぶ．また閉部分空間 $\mathscr{H}_n$ への直交射影を $J_n\colon L^2(\Omega)\to\mathscr{H}_n$ で表すことにする．このとき，$L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$ は以下のように Hilbert 空間の l^2 直和として分解される．

$$L^2(\Omega,\mathscr{F},P)=\bigoplus_{n\geq 0}\mathscr{H}_n.$$

これを伊藤–Wiener 展開と呼ぶのであった．

2 Ornstein–Uhlenbeck 半群

定義 2.1.
$F\in L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$ に対して，

$$T_tF=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nt}J_nF$$

と定義し，作用素族 $(T_t)_{t\geq 0}$ を Ornstein–Uhlenbeck 半群と呼ぶ．

まずは，定義 2.1 の和が well-defined であることを確かめよう．$t=0$ のときは伊藤–Wiener 展開より

$$F=\sum_{n=0}^{\infty}J_nF$$

となるので，$T_0=I$（恒等作用素）である．$t\geq 0$ のとき，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|e^{-nt}J_nF\|^2=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2nt}\|J_nF\|^2\leq\sum_{n=0}^{\infty}\|J_nF\|^2<\infty$$

となるので，直交性に注意すれば級数 $\sum e^{-nt}J_nF$ が $L^2(P)$ で収束することがわかる．各々の射影 J_n は線形写像であるから，T_t も線形写像である．

定義 2.1 で定めた作用素族 (T_t) は，L^2 上の強連続縮小半群となる．

命題 2.2.
(T_t) を定義 2.1 における作用素族とする．このとき，以下の性質が成り立つ．

(i) 全ての $F\in L^2$ と $s,t\geq 0$ について，$T_tT_sF=T_{t+s}F$ が成り立つ．（半群性）
(ii) 全ての $F\in L^2$ について，$\lim_{t\to 0}T_tF=F$ が成り立つ．（強連続性）
(iii) 全ての $F\in L^2$ について，$\|T_tF\|_{L^2}\leq\|F\|_{L^2}$ が成り立つ．（縮小性）

(iv) $F \geq 0$ なら，$T_t F \geq 0$ が成り立つ．（正値性）

すなわち，$(T_t)_{t\geq 0}$ は $L^2(\Omega)$ 上の正値強連続縮小半群である．

証明. (iii) 直交性に注意して先ほどと同様の評価を行えば,

$$\|T_t F\|_{L^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|e^{-nt} J_n F\|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|J_n F\|^2 = \|F\|_{L^2} < \infty$$

となり，縮小性がわかる．

(i) $t, s \geq 0$ とすれば，定義にしたがって計算することで

$$\begin{aligned} T_t(T_s F) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} J_n T_s F \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} J_n \left(\sum_{m=0}^{\infty} e^{-ms} J_m F \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} e^{-ns} J_n J_n F \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(t+s)} J_n F \\ &= T_{t+s} F \end{aligned}$$

を得る．ただし，3 つ目の等号では直交性を，4 つ目の等号では冪等性を用いた．

(ii) $F \in L^2$ とすれば,

$$\|T_t F - F\|_{L^2}^2 = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-nt} - 1) J_n F \right\|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |e^{-nt} - 1|^2 \|J_n F\|^2$$

が成り立つ．$|e^{-nt} - 1| \leq 1$ かつ $e^{-nt} \to 1$ $(t \to 0)$ であるから，優収束定理により

$$\|T_t F - F\|_{L^2}^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |e^{-nt} - 1|^2 \|J_n F\|^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

がしたがう．

(iv) T_t の定義より，各射影 J_n が正値性を満たすことを示せば良い．L^2 空間の直交射影は条件付き期待値作用素だから，正値性を満たす． □

3 Mehler の公式と Ornstein–Uhlenbeck 半群の拡張

前節では Ornstein–Uhlenbeck 半群を L^2 の枠組みで導入したが，実際には任意の $p \geq 1$ に対して強連続縮小半群となるように拡張することができる．まずは，そのために用いる Mehler の公式を紹介しよう．Mehler の公式は後に超縮小性を証明するためにも有用である．

$W'\colon H\to L^2(\Omega',\mathscr{F}',P')$ を W とは別の等正規 Gauss 過程とする．ここでも $\mathscr{F}'$ は $\sigma(W')$ の完備化であると仮定する．$\pi\colon\Omega\times\Omega'\to\Omega$ と $\pi'\colon\Omega\times\Omega'\to\Omega'$ を射影とし，$\widetilde{W}=W\circ\pi$ および $\widetilde{W}'=W'\circ\pi'$ と定義する．このとき，$\widetilde{W}$ と $\widetilde{W}'$ は共に $(\Omega\times\Omega',\mathscr{F}\otimes\mathscr{F}',P\otimes P')$ 上の独立な等正規 Gauss 過程となる．

定理 3.1.
$F\in L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$ に対して，$\Psi_F\colon\mathbb{R}^H\to\mathbb{R}$ を $\Psi_F\circ W=F$ となるように選ぶ．このとき上の仮定の下で，

$$T_tF=\int_{\Omega'}\Psi_F\left(e^{-t}\widetilde{W}+\sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W}'\right)\mathrm{d}P'\qquad P\text{-a.s.}\tag{3.1}$$

が成り立つ．

証明．Step 1：$e^{-t}\widetilde{W}+\sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W}'$ の分布． まずは，$e^{-t}\widetilde{W}+\sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W}'$ が $(\Omega\times\Omega',\mathscr{F}\otimes\mathscr{F}',P\otimes P')$ 上の等正規 Gauss 過程となることを示す．W と W' の独立性より，各 $h\in H$ について $e^{-t}\widetilde{W}(h)+\sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W}'(h)$ は中心化された Gauss 型確率変数となる．また，$h,k\in H$ とすれば，$\widetilde{W}$ と $\widetilde{W}'$ が独立な等正規 Gauss 過程であることから

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega\times\Omega'}\left(e^{-t}\widetilde{W}(h)+\sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W}'(h)\right)\left(e^{-t}\widetilde{W}(k)+\sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W}'(k)\right)\mathrm{d}P\otimes P'\\
&=\int_{\Omega\times\Omega'}e^{-t}\widetilde{W}(h)e^{-t}\widetilde{W}(k)\mathrm{d}P\otimes P'\\
&\quad+\int_{\Omega\times\Omega'}e^{-t}\widetilde{W}(h)\sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W}'(k)\mathrm{d}P\otimes P'\\
&\quad+\int_{\Omega\times\Omega'}\sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W}'(h)e^{-t}\widetilde{W}(k)\mathrm{d}P\otimes P'\\
&\quad+\int_{\Omega\times\Omega'}\sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W}'(h)\sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W}'(k)\mathrm{d}P\otimes P'\\
&=e^{-2t}\left(\int_{\Omega\times\Omega'}\widetilde{W}(h)\widetilde{W}(k)\mathrm{d}P\otimes P'\right)\\
&\quad+e^{-t}\sqrt{1-e^{-2t}}\left(\int_{\Omega\times\Omega'}\widetilde{W}(h)\mathrm{d}P\otimes P'\right)\left(\int_{\Omega\times\Omega'}\widetilde{W}'(k)\mathrm{d}P\otimes P'\right)\\
&\quad+e^{-t}\sqrt{1-e^{-2t}}\left(\int_{\Omega\times\Omega'}\widetilde{W}(h)\mathrm{d}P\otimes P'\right)\left(\int_{\Omega\times\Omega'}\widetilde{W}'(k)\mathrm{d}P\otimes P'\right)\\
&\quad+(1-e^{-2t})\left(\int_{\Omega\times\Omega'}\widetilde{W}'(h)\widetilde{W}'(k)\mathrm{d}P\otimes P'\right)\\
&=e^{-2t}\langle h,k\rangle_H+(1-e^{-2t})\langle h,k\rangle_H\\
&=\langle h,k\rangle_H
\end{aligned}$$

がわかる．

Step 2：可積分性． $\Psi_F(e^{-t}\widetilde{W}+\sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W}')$ の可積分性を示そう．μ を $(\mathbb{R}^H,\mathscr{B}(\mathbb{R})^H)$ 上に誘導された等正規 Gauss 過程の分布とする．Step 1 で示したように $e^{-t}\widetilde{W}+\sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W}'$ は等正規

Gauss 過程だから，

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\Omega'}\left|\Psi_F\left(e^{-t}\widetilde{W}+\sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W'}\right)\right|^2 \mathrm{d}P\otimes P' &= \int_{\mathbb{R}^H}|\Psi_F(x)|^2\,\mu(\mathrm{d}x)\\ &= \int_\Omega|\Psi_F\circ W|^2\,\mathrm{d}P\\ &= \int_\Omega |F|^2\,\mathrm{d}P\\ &< \infty\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって Fubini の定理を用いれば

$$\int_{\Omega'}\left|\Psi_F\left(e^{-t}\widetilde{W}+\sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W'}\right)\right|^2 \mathrm{d}P' < \infty \qquad P\text{-a.s.}$$

がわかる．P' は確率測度だから，二乗可積分から可積分性がしたがう．

Step 3：(3.1) **の証明．** $t\geq 0$ に対して，

$$S_tF = \int_{\Omega'}\Psi_F\left(e^{-t}\widetilde{W}+\sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W'}\right)\mathrm{d}P'$$

と定める．右辺の積分が well-defined であることは，step 2 での議論からわかる．S_t の値が Ψ_F の選び方によらないことを示そう．Ψ と Φ は

$$\Psi\circ W = \Phi\circ W = F$$

を満たしているとする．このとき

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\left|\int_{\Omega'}\Psi\left(e^{-t}\widetilde{W}+\sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W'}\right)\mathrm{d}P' - \int_{\Omega'}\Phi\left(e^{-t}\widetilde{W}+\sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W'}\right)\mathrm{d}P'\right|\mathrm{d}P\\ &\quad\leq \int_{\Omega\times\Omega'}\left|\Psi\left(e^{-t}\widetilde{W}+\sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W'}\right)-\Phi\left(e^{-t}\widetilde{W}+\sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W'}\right)\right|\mathrm{d}P\otimes P'\\ &\quad= \int_\Omega|\Psi(W)-\Phi(W)|\,\mathrm{d}P\\ &\quad= \int_\Omega|F-F|\,\mathrm{d}P\\ &\quad= 0\end{aligned}$$

となるから，S_t が表現によらず well-defined であることが確かめられた．

Step 3-1：$F = e^{W(h)-\frac{1}{2}\|h\|}$ **の場合．** $F = e^{W(h)-\frac{1}{2}\|h\|}$ の場合に (3.1) が成り立つことを示そう．関数 $\varphi\colon \mathbb{R}^H\to\mathbb{R}$ を $x\mapsto x(h)-\frac{1}{2}\|h\|^2$ によって定義すれば，$F=\exp\circ\varphi\circ W$ が成り立つ．これよ

り，$\Psi_F = \exp \circ \varphi$ とすることができる．定義にしたがって S_tF の値を計算すれば,

$$
\begin{aligned}
S_tF &= \int_{\Omega'} \Psi_F\left(e^{-t}\widetilde{W} + \sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W}'\right) \mathrm{d}P' \\
&= \int_{\Omega'} \exp\left(e^{-t}\widetilde{W}(h) + \sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W}'(h) - \frac{1}{2}\|h\|^2\right) \mathrm{d}P' \\
&= \exp\left(e^{-t}W(h) - \frac{1}{2}\|h\|^2\right) \int_{\Omega'} \exp\left(\sqrt{1-e^{-2t}}W'(h)\right) \mathrm{d}P' \\
&= \exp\left(e^{-t}W(h) - \frac{1}{2}\|h\|^2\right) \exp\left(\frac{\|h\|^2}{2}(1-e^{-2t})\right) \\
&= \exp\left(e^{-t}W(h) - \frac{e^{-2t}}{2}\|h\|^2\right) \\
&= \exp\left(e^{-t}\|h\|W\left(\frac{h}{\|h\|}\right) - \frac{e^{-2t}}{2}\|h\|^2\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(e^{-t}\|h\|)^n H_n\left(W\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt}\|h\|^n H_n\left(W\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\right)
\end{aligned}
$$

となる．ただし，4 つ目の等号は $W'(h) \sim N(0, \|h\|^2)$ であることと，正規分布の Laplace 変換の公式から導かれる．また，7 つ目の等号は (1.1) よりしたがう．

後は,

$$
\|h\|^n H_n\left(W\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\right) = J_nF \qquad P\text{-a.s.}
$$

が成り立つことを示せば良い．再び (1.1) を用いれば

$$
\begin{aligned}
F &= \exp\left(W(h) - \frac{1}{2}\|h\|^2\right) \\
&= \exp\left(\|h\|W\left(\frac{h}{\|h\|}\right) - \frac{1}{2}\|h\|^2\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\|h\|^n H_n\left(W\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\right)
\end{aligned}
$$

となる．$\|h\|^n H_n\left(W\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\right) \in \mathscr{H}_n$ であるから，伊藤–Wiener 展開の一意性より

$$
\|h\|^n H_n\left(W\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\right) = J_n(F) \qquad P\text{-a.s.}
$$

がわかる．

Step 3-2：一般の場合． $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ の部分集合 A を

$$
A = \left\{ e^{W(h)} - \frac{1}{2}\|h\|^2 \;\middle|\; h \in H \right\}
$$

によって定義する．Step 3-1 での議論により，S_t と T_t は A 上では一致する．部分空間 $\operatorname{span} A$ は $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ において稠密だから，S_t が有界線形写像であることを示せば $S_t = T_t$ が得られる．

$F, G \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ および $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とすれば，

$$(\alpha\Psi_F + \beta\Psi_G) \circ W = \alpha(\Psi_F \circ W) + \beta(\Psi_F \circ W) = \alpha F + \beta G$$

が成り立つ．この等式と積分の線形性より，S_t の線形性がわかる．さらに Step 2 の不等式評価と Fubini の定理を用いれば，

$$\|S_t F\|_{L^2(P)}^2 \le \int_{\Omega\times\Omega'} \left|\Psi_F\left(e^{-t}\widetilde{W} + \sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W'}\right)\right|^2 \mathrm{d}P \otimes P' \le \|F\|_{L^2(P)}$$

となるので，S_t の有界性もわかる． □

定理 3.2.
定理 3.1 の表現により，L^2上のOrnstein–Uhlenbeck 半群 (T_t) は任意の $p \ge 1$ について L^p 上の強連続縮小半群に拡張される．

証明. $p \ge 1$ とする．このとき，命題 3.1 の証明と同様にして，全ての $F \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, P)$ について

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left|\int_{\Omega'} \Psi_F\left(e^{-t}\widetilde{W} + \sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W'}\right)\mathrm{d}P'\right|^p \mathrm{d}P \\
&\le \int_\Omega \left(\int_{\Omega'} \left|\Psi_F\left(e^{-t}\widetilde{W} + \sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W'}\right)\right|^p \mathrm{d}P'\right)\mathrm{d}P \\
&= \int_{\Omega\times\Omega'} \left|\Psi_F\left(e^{-t}\widetilde{W} + \sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W'}\right)\right|^p \mathrm{d}P \otimes P' \\
&= \int_\Omega |\Psi_F \circ W|^p \,\mathrm{d}P \\
&= \int_\Omega |F|^p \,\mathrm{d}P
\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる．ただし，最初の不等号は Jensen の不等式により，最初の等号では Fubini の定理を用いた．この評価より定理の主張がしたがう． □

4 Ornstein–Uhlenbeck 半群の超縮小性

本節では，Ornstein–Uhlenbeck 半群の超縮小性と呼ばれる性質を証明する．

定理 4.1 (超縮小性).
$p > 1$ かつ $t > 0$ とし，$q(t) = e^{2t}(p-1)+1$ と定める[a]．このとき，

$$\|T_t F\|_{q(t)} \le \|F\|_p \qquad \forall F \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, P) \tag{4.1}$$

が成り立つ．

[a] このとき $q(t) > p$ となっていることに注意する．

定理の証明のために補題を用意する．

補題 4.2.
$p > 1$ と $t > 0$ および $q = q(t)$ を定理 4.1 のものとし，q' を q の共役指数とする．また $B^1 = (B^1_s)_{s\in[0,1]}$ と $B^2 = (B^2_s)_{s\in[0,1]}$ を確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の独立な Brown 運動とする．これらを用いて，Brown 運動 B^3 を

$$B^3 = e^{-t}B^1 + \sqrt{1-e^{-2t}}B^2$$

と定義する．σ 代数 $\mathscr{G}^3$ と $\mathscr{G}^1$ は，それぞれ B^3 と B^1 によって生成される σ 代数の $(\mathscr{F}, P)$-完備化であるとする．このとき，全ての非負 $\mathscr{G}^3$ 可測関数 X と非負 $\mathscr{G}^1$ 可測関数 Y について

$$E[|XY|] \le \|X\|_{L^p}\|Y\|_{L^{q'}}$$

が成り立つ．

証明. フィルトレーション $\mathbb{G}^1 = (\mathscr{G}^1_s)_{s\in[0,1]}$ と $\mathbb{G}^3 = (\mathscr{G}_s)_{s\in[0,1]}$ を，それぞれ B^1 と B^3 から生成されたフィルトレーションを完備右連続化したものとする．

Step 1：$0 < a \le X, Y \le b$ の場合． まずは，正の数 $0 < a < b$ で $a \le X, Y \le b$ を満たすものが存在すると仮定する．このとき，マルチンゲール表現定理より，$\mathbb{G}^3$ 可予測過程 H と $\mathbb{G}^1$ 可予測過程 K で

$$X^p = E[X^p] + \int_0^1 H_u \mathrm{d}B^3_u, \qquad Y^q = E[Y^q] + \int_0^1 K_u \mathrm{d}B^1_u$$

を満たすものが存在する．これを用いて，有界連続マルチンゲール M と N を

$$M_s = \int_0^s H_u \mathrm{d}B^3_u, \qquad N_s = \int_0^s K_u \mathrm{d}B^1_u$$

を満たすように選ぶ．特に M と N は $a \le M, N \le b$ を満たすように選ぶことができる．実際，

$$M_s = E[X^p|\mathscr{G}^3_s], \quad N_s = E[Y^q|\mathscr{G}^1_s], \quad P\text{-a.s.}$$

だから，このような修正の存在がわかる．

ここで，フィルトレーション $\mathbb{G} = (\mathscr{G}_s)_{s\in[0,1]}$ を，(B^1, B^2) から生成されたフィルトレーションの完備右連続化として定めれば，独立性より B^1, B^2, B^3 はどれも $\mathbb{G}$-Brown 運動となっている．ここで

$$\alpha = \frac{1}{p} \in]0,1[, \qquad \beta = \frac{1}{q'} \in]0,1[$$

とし，関数 $f\colon]0,\infty[\times]0,\infty[\to \mathbb{R}$ を $f(x,y) = x^\alpha y^\beta$ によって定義する．f と M, N に伊藤の公式を

適用すれば,

$$
\begin{aligned}
XY &= f(X^p, Y^p) \\
&= f(E[X^p], E[Y^q]) + \alpha \int_0^1 M_u^{\alpha-1} N_u^{\beta} \mathrm{d}M_u + \beta \int_0^t M_u^{\alpha} N_u^{\beta-1} \mathrm{d}N_u \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^1 \alpha(\alpha-1) M_u^{\alpha-2} N_u^{\beta} \mathrm{d}\langle M, M\rangle_u + \frac{1}{2}\int_0^1 \beta(\beta-1) M_u^{\alpha} N_u^{\beta-2} \mathrm{d}\langle N, N\rangle_u \\
&\quad + \int_0^1 \alpha\beta M_u^{\alpha-1} N_u^{\beta-1} \mathrm{d}\langle M, N\rangle_u
\end{aligned}
$$

を得る．M と N の積分表示にしたがって 2 次変分を計算すれば,

$$
\begin{aligned}
\langle M, M\rangle_s &= \int_0^s H_u^2 \mathrm{d}u, \\
\langle N, N\rangle_s &= \int_0^s K_u^2 \mathrm{d}u, \\
\langle M, N\rangle_s &= e^{-t}\int_0^s H_u K_u \mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

となることに注意する．ただし，2 次共変分の計算には B^1 と B^2 が独立ゆえそれらの 2 次共変分が 0 になることを用いた．このことから,

$$
\begin{aligned}
XY &= \|X\|_{L^p}\|Y\|_{L^q} + \alpha \int_0^1 M_u^{\alpha-1} N_u^{\beta} \mathrm{d}M_u + \beta \int_0^t M^{\alpha} N_u^{\beta-1} \mathrm{d}N_u \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^1 \alpha(\alpha-1) M_u^{\alpha-2} N_u^{\beta} H_u^2 \mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_0^1 \beta(\beta-1) M_u^{\alpha} N_u^{\beta-2} K_u^2 \mathrm{d}u \\
&\quad + \int_0^1 \alpha\beta M_u^{\alpha-1} N_u^{\beta-1} e^{-t} H_u K_u \mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

となることがわかる．ここで

$$
A_s = \alpha(\alpha-1) M_u^{-2} H_s^2 + \beta(\beta-1) N_u^{-2} K_s^2 + 2\alpha\beta e^{-t} M_s^{-1} N_s^{-1} H_s K_s
$$

と定義すれば,

$$
XY = \|X\|_{L^p}\|Y\|_{L^q} + (\text{マルチンゲール}) + \frac{1}{2}\int_0^1 M_u^{\alpha} N_u^{\beta} A_u \mathrm{d}u
$$

と表現できる．さらにマルチンゲール性に注意しつつ期待値をとって Fubini の定理を用いれば,

$$
E[XY] = \|X\|_{L^p}\|Y\|_{L^q} + \frac{1}{2}\int_0^1 E[M_u^{\alpha} N_u^{\beta} A_u] \mathrm{d}u
$$

を得る．

以上の議論の結果から,

$$
E[M_u^{\alpha} N_u^{\beta} A_u] \le 0 \qquad \text{for a.e. } u
$$

を示せば補題の主張が証明されたことになる．いま M と N は共に正の値をとるから，P-a.s. で $A_u \le 0$ が成り立つことを示せば良い．p, t, q に関する仮定から，この条件が導かれることを確かめ

よう．実数 (x,y) に対して

$$P(x,y)=\alpha(\alpha-1)x^2+2\alpha\beta e^{-t}xy+\beta(\beta-1)y^2$$

と定義する．A の定義より

$$A_s=P\left(\frac{H_s}{M_s},\frac{K_s}{N_s}\right)$$

であるから，もし全ての x,y について $P(x,y)\ \le\ 0$ が成り立つなら，所望の不等式が得られることになる．$P(x,y)$ を x に関する 2 次式と考えよう．$\alpha(\alpha-1)<0$ であることに注意すれば，

$$(\alpha\beta e^{-t}y)^2-\alpha(\alpha-1)\beta(\beta-1)y^2\le 0$$

が成り立つことが，全ての x について $P(x,y)\ \le\ 0$ が成り立つための必要十分条件だとわかる．$y=0$ のとき，この不等号は明らかである．$y\neq 0$ のときは，この不等号は

$$\alpha^2\beta^2e^{-2t}-\alpha(\alpha-1)\beta(\beta-1)\le 0$$

と同値である．$\alpha,\beta>0$ であるから，これはさらに

$$\alpha\beta e^{-2t}-(\alpha-1)(\beta-1)\le 0$$

とも同値である．上の不等号の左辺を計算してみると，

$$\begin{aligned}\alpha\beta e^{-2t}-(\alpha-1)(\beta-1)&=\frac{1}{p}\frac{1}{q'}e^{-2t}-\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q'}\right)\\&=\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{q}\right)e^{-2t}-\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{1}{q}\\&=\frac{1}{p}\frac{(q-1)(e^{-2t})}{q}-\frac{p-1}{p}\frac{1}{q}\\&=\frac{1}{p}\frac{p-1}{q}-\frac{p-1}{p}\frac{1}{q}\\&=0\end{aligned}$$

となる．よって期待された不等式は実際に成り立っている．

Step 2：一般の場合． X と Y は非負かつ補題の可測性を満たすとする．可積分性がない場合には証明すべき不等式は明らかなので，$X\in L^p$ かつ $Y\in L^{q'}$ であると仮定して示せば良い．$n\in\mathbb{N}_{\ge 1}$ に対して

$$X^{(n)}=(X\wedge n)\vee\frac{1}{n},\qquad Y^{(n)}=(Y\wedge n)\vee\frac{1}{n}$$

と定めれば，step 1 の結果より任意の n について

$$E[X^{(n)}Y^{(n)}]\le\|X^{(n)}\|_{L^p}\|Y^{(n)}\|_{L^{q'}}$$

が成り立つ．この不等式において $n\to\infty$ とすれば，優収束定理により

$$E[XY]\le\|X\|_{L^p}\|Y\|_{L^{q'}}$$

が得られる． □

証明 (定理 4.1)．Step 1：W がホワイトノイズの場合．

Step 1-1：準備． $([0,1], \mathscr{B}[0,1], \lambda)$ を Lebesgue 測度空間とし，$W\colon L^2([0,1],\lambda) \to L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$ はホワイトノイズであると仮定する．このとき，W は $t \mapsto W(1_{[0,t]})$ の連続修正として定めた Brown 運動 B による Wiener 積分で，

$$W(h) = \int_0^1 h(s)\,\mathrm{d}B_s$$

と表現することができる．また，このとき $\mathscr{F}$ は B が生成する σ-代数の完備化であることに注意する．また，Mehler の公式で用いる W' も，確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}', P)$ 上の Brown 運動 B' によって定まっているとする．さらに，$(\Omega\times\Omega', \mathscr{F}\otimes\mathscr{F}', P\otimes P')$ 上の Brown 運動 B'' を $B'' = e^{-t}B + \sqrt{1-e^{-2t}}B'$ によって定める．B と B' は自然にこの空間上の独立な Brown 運動と見なす．

以上の仮定の下で，超縮小性の証明を行おう．q' を $q(t) = e^{2t}(p-1)+1$ の共役指数とする．このとき，双対性より全ての $G \in L^{q'}$ について

$$|E[(T_tF)G]| \le \|F\|_{L^p}\|G\|_{L^{q'}} \tag{4.2}$$

が成り立つことを示せば良い．Ornstein–Uhlenbeck 半群の正値性より

$$|T_tF| \le T_t|F|$$

が成り立つから，F と G が非負の場合に示せば十分である．さらに極限操作を考えることにより F と G は有界であるとしてよい．

Step 1-2：$F = f(W(h_1),\dots,W(h_n))$ かつ $G = g(W(h_1),\dots,W(h_n))$ の場合． F と G が有限個の $h_1,\dots,h_n \in L^2([0,1])$ と非負有界可測関数 $f,g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ により，$F = f(W(h_1),\dots,W(h_n))$ および $G = g(W(h_1),\dots,W(h_n))$ と表現されている場合を考える．いま W は Wiener 積分であるから，各 i について

$$W(h_i) = \int_0^1 h_i(s)\,\mathrm{d}B_s$$

が成り立つ．また，確率積分の線形性より

$$e^{-t}W(h_i) + \sqrt{1-e^{-2t}}W'(h_i) = \int_0^1 h_i(s)\,\mathrm{d}B''_s$$

となることに注意しておく．以上の注意と Mehler の公式，そして Fubini の定理により，

$$\begin{aligned}
E[(T_tF)G] &= \int_\Omega \left(\int_{\Omega'} f\left(\int_0^1 h_1(s)\,\mathrm{d}B''_s, \dots, \int_0^1 h_n(s)\,\mathrm{d}B''_s \right) \mathrm{d}P' \right) \\
&\quad \times g\left(\int_0^1 h_1(s)\,\mathrm{d}B_s, \dots, \int_0^1 h_n(s)\,\mathrm{d}B_s \right) \mathrm{d}P \\
&= \int_{\Omega\times\Omega'} f\left(\int_0^1 h_1(s)\,\mathrm{d}B''_s, \dots, \int_0^1 h_n(s)\,\mathrm{d}B''_s \right) \\
&\quad \times g\left(\int_0^1 h_1(s)\,\mathrm{d}B_s, \dots, \int_0^1 h_n(s)\,\mathrm{d}B_s \right) \mathrm{d}P\otimes P'
\end{aligned}$$

が成り立つ．最後の辺の積分には補題 4.2 が適用できるから，縮小性と併せて

$$E[(T_tF)] \le \|T_tF\|_{L^p}\|G\|_{L^{q'}} \le \|F\|_{L^p}\|G\|_{L^{q'}}$$

を得る．

Step 1-3：一般の F と G の場合．次に，一般の有界な F, G について考える．まずは，有界可測関数の空間 $\mathscr{K}$ を

$$\mathscr{K} = \{G \mid G = g(W(h_1), \dots, W(h_n)) \text{ という表現を持つ}\}$$

と定義する．ただし，G の表現に現れる g は有界 Borel 可測関数とする．このとき，$\mathscr{K}$ は $L^{q'}(\mathscr{F})$ の稠密な部分空間だから，$G \in L^{q'}(\mathscr{F})$ と $F = f(W(h_1), \dots, W(h_n))$ という形の F について

$$|E[(T_tF)G]| \le \|F\|_{L^p}\|G\|_{L^{q'}}$$

となることがわかる．これより，$F = f(W(h_1), \dots, W(h_n))$ という形の F については，不等式

$$\|T_tF\|_q \le \|F\|_p$$

がしたがう．一般の場合は，再び稠密性を用いればよい．

Step 2：一般の等正規 Gauss 過程の場合．最後に，一般の等正規 Gauss 過程 $W\colon H \to L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ の場合を考える．$\Theta\colon L^2([0,1], \lambda) \to H$ を Hilbert 空間としての等長同型写像とし，$\widehat{W} = W \circ \Theta$ と定義する．このとき $\widehat{W}\colon L^2([0,1], \lambda) \to L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ はホワイトノイズである．さらに Θ は全単射だから，$\mathscr{F}$ は $\sigma(\widehat{W})$ の完備化にも等しい．$\widehat{W}$ の場合の超縮小性は既に示されているから，W に関する超縮小性を $\widehat{W}$ に関する議論に帰着させればよい．

$F \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, P)$ とし，Ψ_F と $\widehat{\Phi}_F$ を以下の図式を可換にするように選ぶ．

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "W"] \arrow[dr, "F"'] & \mathbb{R}^H \arrow[r, "\Theta^*"] \arrow[d, "\Psi_F"] & \mathbb{R}^{L^2([0,1],\lambda)} \arrow[dl, "\widehat{\Psi}_F"] \\
& \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

ただし，Θ^* は $\Theta(x) = x \circ \Theta$ で定まる写像である．$\widehat{W}$ に関する Ornstein–Uhlenbeck 半群を $\widehat{T}$ で表すことにする．すなわち，$\widehat{W'} = W' \circ \Theta$ とすれば

$$\widehat{T}_tF = \int_{\Omega'} \widehat{\Psi}_F(e^{-t}\widehat{W} + \sqrt{1 - e^{-2t}}\widehat{W'})\,\mathrm{d}P'$$

である．このとき，$\widehat{\Psi}$ の定義より

$$\begin{aligned}
\widehat{T}_tF &= \int_{\Omega'} \widehat{\Psi}_F(e^{-t}\widehat{W} + \sqrt{1 - e^{-2t}}\widehat{W'})\,\mathrm{d}P' \\
&= \int_{\Omega'} \widehat{\Psi}_F \circ \Theta(e^{-t}W + \sqrt{1 - e^{-2t}}W')\,\mathrm{d}P' \\
&= \int_{\Omega'} \Psi_F(e^{-t}W + \sqrt{1 - e^{-2t}}W')\,\mathrm{d}P' \\
&= T_tF
\end{aligned}$$

となる．したがって，$\widehat{T}_t$ の超縮小性より T_t の超縮小性がわかる． □

5 Ornstein–Uhlenbeck 半群の生成作用素

A L^p 空間における稠密性

命題 A.1.
$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を任意の確率空間とし，$X = (X_i)_{i \in I}$ を確率変数族とする．$\mathscr{F}$ の部分 σ 代数 $\mathscr{G}$ を $\mathscr{G} = \sigma(X)$ によって定義する．また，有限集合 $J \subset I$ と有界可測関数 $f \colon \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}$ によって $F = f \circ (X_i)_{i \in J}$ と表現されるような有界確率変数全体の空間を $\mathscr{H}$ で表す．このとき，任意の $p \geq 1$ について $\mathscr{H}$ は $L^p(\Omega, \mathscr{G}, P)$ で稠密である．

証明. q を p の共役指数とする．双対性より，全ての $g \in L^q(P, \mathscr{G}, P)$ について

$$\forall f \in \mathscr{H} \quad (E[gf] = 0 \implies g = 0)$$

が成り立つことを示せばよい．

$g = g^+ - g^-$ という分解を考える．$g \in L^q(\mathscr{G}) \subset L^1(\mathscr{G})$ だから，$g^+, g^- \in L^1(\mathscr{G})$ である．そこで，有限測度 Q_1 と Q_2 をそれぞれ

$$Q_1(A) = E[1_A g^+], \qquad Q_2(A) = E[1_A g^-]$$

によって定義する．仮定より $A = \bigcap_{i \in J} X_i^{-1}(B_i)$ という形の集合については $E[1_A g^+] = E[1_A g^-]$ が成り立つ．このような集合全体は $\mathscr{G}$ を生成する π 系だから，Q_1 と Q_2 は $\mathscr{G}$ 上で一致する．ゆえに $g^+ = g^-$ a.s. となり，$g = 0$ がしたがう． □

References

[1] Vladimir I. Bogachev. *Gaussian Measures*. Mathematical Surveys and Monographs 62. American Mathematical Society, 1998. xii+433 pp. ISBN: 0-8218-1054-5. DOI: 10.1090/surv/062. URL: http://bookstore.ams.org/surv-62/.

[2] Ivan Nourdin and Giovanni Peccati. *Normal Approximations with Malliavin Calculus. From Stein's Method to Universality*. Cambridge Tracts in Mathematics 192. Cambridge University Press, 2012. DOI: 10.1017/CBO9781139084659.

[3] David Nualart. *The Malliavin Calculus And Related Topics*. 2nd ed. Springer-Verlag, 2006.