Kolmogorov の拡張定理の証明

関根・深澤研究室
平井祐紀

2016 年 6 月 1 日

T を任意の集合とし，$(X_t)_{t\in T}$ を位相空間としたとき，積空間 $\prod_{t\in T} X_t$ 上に確率測度を構成する方法を考えよう．$\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset T$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}_{\Lambda_1,\Lambda_2} : \prod_{t\in\Lambda_2} X_t &\longrightarrow \prod_{t\in\Lambda_1} X_t \\ \omega &\longmapsto \omega|_{\Lambda_1}\end{aligned}$$

と定義する．（すなわち，pr は射影である．）特に $\mathrm{pr}_{\Lambda,T} = \mathrm{pr}_\Lambda$ と書くことにする．このとき明らかに $\mathrm{pr}_{\Lambda_1} = \mathrm{pr}_{\Lambda_1,\Lambda_2} \circ \mathrm{pr}_{\Lambda_2}$ である．可測空間の族 $(X_t, \mathscr{A}_t)_{t\in T}$ が与えられたとき，射影 $\mathrm{pr}_t\colon \prod_{t\in T} X_t \to X_t$ の族に対して $\bigotimes_{t\in T} \mathscr{A}_t := \sigma(\mathrm{pr}_t; t\in T)$ と定義する．特に $X_t = \mathbb{R}^d$ かつ $T = [0,\infty[$ としたとき，これは確率過程論に出てくる cylindrical σ-algebra と同様のものである．

定理 1 (Kolmogorov の拡張定理)**.** T を任意の集合とし，$(X_t)_{t\in T}$ を Polish 空間の族とする．任意の有限集合 $\Lambda \subset T$ に対して $\left(\prod_{t\in\Lambda} X_t, \bigotimes_{t\in\Lambda} \mathscr{B}(X_t)\right)$ 上の確率測度 μ_Λ が与えられており，それらは両立条件を満たすとする．(i.e. $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset T$ を満たす任意の有限集合に対して

$$\mu_{\Lambda_1}(A) = \mu_{\Lambda_2}\left(\mathrm{pr}^{-1}_{\Lambda_2,\Lambda_1}(A)\right), \quad A \in \bigotimes_{t\in\Lambda_1} \mathscr{B}(X_t)$$

が成り立つ.）このとき，$(\prod_{t\in T} X_t, \bigotimes_{t\in T} \mathscr{B}(X_t))$ 上の確率測度 μ で任意の有限集合 $\Lambda \subset T$ に対して

$$\mu(\mathrm{pr}_\Lambda^{-1}(E)) = \mu_\Lambda(E), \quad \forall E \in \bigotimes_{t\in\Lambda} \mathscr{B}(X_t)$$

を満たすものがただ一つ存在する．

定理の証明に入る前に，以下の有用な補題を証明しておく．

補題 2. $(X_t)_{t\in T}$ を Hausdorff 空間の族とする[*1]．$\Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \cdots$ を T の有限部分集合列とする．空でないコンパクト集合列 $(K_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{P}\left(\prod_{t\in\Lambda_n} X_t\right)$ に対して $C_n = \mathrm{pr}^{-1}_{\Lambda_n}(K_n) \subset \prod_{t\in T} X_t$ とおく．このとき，

$$C_0 \supset C_1 \supset \cdots \Longrightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$$

が成り立つ．

[*1] T_1 空間でもよいと思われる．

証明．$\Lambda = \bigcup_n \Lambda_n$ と書くことにする．射影 pr_{Λ_n} は全射だから，$K_n = \mathrm{pr}_{\Lambda_n}\mathrm{pr}_{\Lambda_n}^{-1}(K_n) = \mathrm{pr}_{\Lambda_n}(C_n)$ となることに注意しておく．仮定より

$$K_n = \mathrm{pr}_{\Lambda_n}(C_n) \supset \mathrm{pr}_{\Lambda_n}(C_{n+1}) = \mathrm{pr}_{\Lambda_n,\Lambda_{n+1}}\mathrm{pr}_{\Lambda_{n+1}}(C_{n+1}) = \mathrm{pr}_{\Lambda_n,\Lambda_{n+1}}(K_{n+1})$$

が成り立つ．

$$F_n^{(0)} = \mathrm{pr}_{\Lambda_0,\Lambda_n}(K_n) \subset \prod_{t\in\Lambda_n} X_t$$

とおけば，これはコンパクト集合である．$(F_n^{(0)})$ は有限交叉性を持つので，$F_1^{(0)}$ のコンパクト性より $\bigcap_n F_n^{(0)} \neq \emptyset$ となる．$x_0 \in \bigcap_n F_n^{(0)}$ を一つ選んで

$$F_n^{(1)} = \mathrm{pr}_{\Lambda_1,\Lambda_n}(K_n) \cap \mathrm{pr}_{\Lambda_0,\Lambda_1}^{-1}(x_0) \quad (n \geq 1)$$

と定めれば，$F_n^{(1)}$ は空でないコンパクト集合となる．実際 $\prod_{t\in T} X_t$ はまた Hausdorff 空間なので，$\{x_0\}$ は閉集合である．これより $F_n^{(1)}$ はコンパクト集合と閉集合の共通部分であるから，コンパクト集合である．空でないことについては

$$x_0 \in \mathrm{pr}_{\Lambda_0,\Lambda_n}(K_n) = \mathrm{pr}_{\Lambda_0,\Lambda_1}\mathrm{pr}_{\Lambda_1,\Lambda_n}(K_n)$$

であることに注意すれば分かる[*2]．このとき $\bigcap_n F_n^{(1)}$ が空でないことが分かるので，同様の作業を繰り返して

$$x_k \in \bigcap_{n\geq k} \mathrm{pr}_{\Lambda_k,\Lambda_n}(K_n) \cap \mathrm{pr}_{\Lambda_k,\Lambda_{k+1}}^{-1}(x_k) \subset K_k$$

を満たす列 $(x_k) \in \prod_{t\in\Lambda} X_t$ を得る．この列はその構成法より両立条件

$$\mathrm{pr}_{\Lambda_k,\Lambda_{k+1}}(x_{k+1}) = x_k, \quad k \in \mathbb{N}$$

を満たす．$\omega \in \prod_{t\in T} X_t$ を $\mathrm{pr}_\Lambda^{-1}((x_k))$ から一つ選べば，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\omega \in \mathrm{pr}_{\Lambda_n}^{-1}(K_n) = C_n$ となり $\omega \in \bigcap_n C_n$ が成立. □

Proof of theorem 1.

$$\mathscr{C} = \left\{ \mathrm{pr}_\Lambda^{-1}(B) \;\middle|\; \Lambda \subset T \text{ は有限集合かつ } B \in \mathscr{B}\left(\prod_{t\in\Lambda} X_t\right) \right\}$$

とおけば $\mathscr{C}$ は集合半代数であり，$\sigma(\mathscr{C}) = \bigotimes_{t\in T}\mathscr{B}(X_t)$ が成り立つ．$\mathscr{C}$ 上の有限加法的（確率）測度 μ を

$$\mu(\mathrm{pr}_\Lambda^{-1}(E)) = \mu_\Lambda(E), \quad \Lambda \subset T \text{ は有限集合}, \quad B \in \mathscr{B}\left(\prod_{t\in\Lambda} X_t\right)$$

で定める．Carathéodory の拡張定理より，μ が $\mathscr{C}$ 上可算加法的であること[*3]，特に $\emptyset$ において連続であることを示せばよい[*4]．ここではその対偶を示すことにしよう．$A_0 \supset A_1 \supset \cdots$ なる $\mathscr{C}$ の元の列に対して，

$$\mu(A_n) \to \alpha > 0$$

[*2] 一般に，写像 $f\colon X \to Y$ と $A \subset X$ について，$y \in f(A)$ は $A \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$ と同値なのであった．
[*3] Bogachev [1, 1.3.10 Proposition]
[*4] Bogachev [1, 1.3.3. Proposition]

が成り立つと仮定したとき，$\bigcap_n A_n \neq \emptyset$ であることを言えばよい．これらが $\Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \cdots$ なる T の有限部分集合によって $A_n = \mathrm{pr}_{\Lambda_n}^{-1}(E_n)$ と表現されているとしても一般性を失わない．Polish 空間上の有限測度は Radon 測度であるから[*5]，適当なコンパクト集合 $K_n \in \mathscr{B}\left(\prod_{t\in\Lambda_n} X_t\right)$ をとれば

$$\mu_{\Lambda_n}(E_n \setminus K_n) < \frac{\alpha}{2^{n+1}}$$

が成立する．$B_n = \mathrm{pr}_{\Lambda_n}^{-1}(K_n) \in \mathscr{C}$ とおけば,

$$B_n \subset A_n, \quad \mu(A_n \setminus B_n) = \mu_{\Lambda_n}(E_n \setminus K_n) < \frac{\alpha}{2^{n+1}}$$

となる．ここで $C_n = \bigcap_{k=0}^n B_k$ とおけば

$$\begin{aligned}\mu(C_n) &= \mu(A_n) - \mu(A_n \setminus C_n) \geq \mu(A_n) - \mu\left(\bigcup_{k=0}^n A_k \setminus B_k\right)\\ &\geq \mu(A_n) - \sum_{k=0}^n \mu\left(A_k \setminus B_k\right) \geq \frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

となるから，$C_n \neq \emptyset$ で (C_n) は減少列である．先ほどの補題を用いれば $\bigcap_n A_n \supset \bigcap_n C_n \neq \emptyset$ が示される． □

最後に，定理の証明中で用いた「Polish 空間上の任意の確率測度は Radon 測度である」という事実を証明する．念のため，Radon 測度の定義の復習から始める．

定義 3. X を Haudorff 空間とし，$\mu\colon \mathscr{B}(X) \to [0,\infty]$ を測度とする．μ は次の条件を満たすとき，Radon 測度であるという．

(i) 任意のコンパクト集合 $K \subset X$ について $\mu(K) < \infty$ が成り立つ．(局所有限性)

(ii) 任意の $B \in \mathscr{B}(X)$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，あるコンパクト集合 K で $\mu(B \setminus K) < \varepsilon$ を満たすものが存在する．(内正則性)

命題 4. X を Polish 空間とする．$(X, \mathscr{B}(X))$ 上の非負有限測度は Radon 測度である．

証明．$d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ は (X,d) の位相と整合的で，(X,d) が完備となるような距離関数とする．μ は有限測度だから局所有限性は明らかであり，内正則性のみを示せばよい．

Step1 : **任意の $A \in \mathscr{B}(X)$ が開集合で外側から，閉集合で内側から近似できることの証明**．まずは，μ が次の条件を満たすことを証明する[*6]．

[*5] X において $(X, \mathscr{B}(X))$ 上の非負測度 μ は次の条件を満たすとき，μ を非負 Radon 測度と呼ぶ : (i) 任意の $B \in \mathscr{B}(X)$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，あるコンパクト集合 K で $\mu(B \setminus K) < \varepsilon$ を満たすものが存在する，(ii) 任意のコンパクト集合 K で $\mu(K) < \infty$ が成り立つ．

[*6] 主張 1 の証明には，X が距離空間であることしか用いていない点に注意．

主張 1

任意の $B \in \mathscr{B}(X)$ と任意の ε に対して，閉集合 F_ε と開集合 U_ε で $F_\varepsilon \subset B \subset U_\varepsilon$

$$\mu(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$$

を満たすものが存在する．

$$\mathscr{A} = \{A \in \mathscr{B}(X) \mid A \text{ は主張 1 の条件を満たす}\}$$

と定義する．このとき，$\mathscr{A}$ が閉集合全体を含む σ-加法族であることを示す．$A \in \mathscr{B}(X)$ が閉集合なら，$F_\varepsilon = A$ とすればよい．さらに

$$U^n = \left\{ x \in X \;\middle|\; d(x, A) < \frac{1}{n} \right\}$$

とおけば，$\bigcap_n U_n = A$ であり[*7]，μ は有限測度だから

$$\mu(U^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(A)$$

となる．

$$\mu(U^n \setminus A) < \varepsilon$$

なる U^n を U_ε としてとれば，

$$\mu(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) = \mu(U_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$$

が成り立つ．すなわち，任意の閉集合は $\mathscr{A}$ の元である．

次に，$\mathscr{A}$ が σ-加法族であることを示す．$A \in \mathscr{A}$ に対して主張 1 の条件を満たす U_ε, F_ε を選ぶ．このとき $X \setminus F_\varepsilon \subset X \setminus A \subset X \setminus U_\varepsilon$ かつ

$$\mu([X \setminus U_\varepsilon] \setminus [X \setminus F_\varepsilon]) = \mu(F_\varepsilon \setminus U_\varepsilon) < \varepsilon$$

が成立．$X \setminus F_\varepsilon$ は開集合，$X \setminus U_\varepsilon$ は閉集合なので，$X \setminus A \in \mathscr{A}$ が分かる．X 自身は X の開集合なので，先ほどの議論より $X \in \mathscr{A}$ である．あとは $\mathscr{A}$ が可算個の合併をとる操作について閉じていることを示せばよい．$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathscr{A}$ の元の族，$\varepsilon > 0$ とする．各 $n \in \mathbb{N}$ について，$F_n \subset A_n \subset U_n$ かつ

$$\mu(U_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

を満たす開集合 U_n と閉集合 F_n を選ぶ．ここで $U = \bigcup_n U_n$ と定義すれば，U は $\bigcup_n A_n \subset U$ を満たす開集合である．また $C_k = \bigcup_{n=0}^{k} F_n$ と定めると，各 C_k は閉集合であって $C_k \subset \bigcup_n A_n$ となる．いま C_k は増大列だから

$$\lim_{k\to\infty} \mu(C_k) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k\right)$$

が成り立つ．さらに μ の有限性に注目すれば

$$\lim_{k\to\infty} \mu(U \setminus C_k) = \mu(U) - \lim_{k\to\infty} \mu(C_k) = \mu(U) - \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k\right) = \mu\left(U \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k\right) \tag{1}$$

[*7] A は閉集合である．

U_n, F_n の選び方より

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[U_n\setminus F_n]\right)\le\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(U_n\setminus F_n)<\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}=\varepsilon$$

であるから，$U\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{N}}C_k\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[U_n\setminus F_n]$ に注意すれば

$$\mu\left(U\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{N}}C_k\right)\le\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[U_n\setminus F_n]\right)<\varepsilon \tag{2}$$

を得る．(1) と (2) から，十分大きな n について

$$\mu(U\setminus C_n)<\varepsilon$$

となることが分かる．そこで開集合 U_ε および閉集合 F_ε を $U=U_\varepsilon, C_n=F_\varepsilon$ と定義すれば $F_\varepsilon\subset\bigcup_n A\subset U_\varepsilon$ かつ

$$\mu(U_\varepsilon\setminus F_\varepsilon)<\varepsilon$$

が成立．よって $\bigcup_n A_n\in\mathscr{A}$ も示された．

以上の議論により，$\mathscr{A}=\mathscr{B}(X)$ の証明が完了した．これはすなわち，主張 1 が成り立つということに他ならない．

Step2 : **μ が緊密であることの証明**．このステップでは，次の主張を証明する．

主張 2

任意の $\varepsilon>0$ に対して，あるコンパクト集合 K_ε で

$$\mu(X\setminus K_\varepsilon)<\varepsilon$$

を満たすものが存在する．

$\varepsilon>0$ を任意の固定する．$(U_j^n)_{j\in\mathbb{N}}$ を半径 $\varepsilon/2^n$ の開級の族で，X の被覆となっているようなものとする[*8]．μ の可算加法性より

$$\lim_{j\to\infty}\mu\left(\bigcup_{k=1}^{j}U_k^n\right)=\mu(X)$$

が成立．さらに μ の有限性より，

$$\lim_{j\to\infty}\mu\left(X\setminus\bigcup_{k=1}^{j}U_k^n\right)=\mu(X)-\lim_{j\to\infty}\mu\left(\bigcup_{k=1}^{j}U_k^n\right)=0$$

となる．これより，十分大きな m_n をとれば

$$\mu\left(X\setminus\bigcup_{k=1}^{m_n}U_k^n\right)<\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

が成り立つ．ここで $W_n=\bigcup_{k=1}^{m_n}U_k^n$ および $W=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}W_n$ と定義する．このとき，W が全有界[*9]であることを示す．$\delta>0$ に対して，$\varepsilon/2^{k_\delta}<\delta$ となるような $k=k(\delta)$ をとる．このとき，$W\subset W_k=\bigcup_{j=1}^{m_k}U_j^m$ と

[*8] 可分距離空間は Lindelöf 空間なので，このような族が取れる．

[*9] X を距離空間とする．任意の $\varepsilon>0$ に対して有限個の $a_0,\dots,a_n\in X$ で $X=\bigcup_{i=0}^{n}U_\varepsilon(a_i)$ を見たすものが存在するとき，X は全有界であるという．よく知られているように，距離空間 X がコンパクトであることは，完備かつ全有界であることと同値である．

なり W は半径 $\varepsilon/2^k$ の開球で覆われる．すなわち，W は全有界である．X は完備距離空間だから，その閉包 $\overline{W} =: K$ はコンパクト集合である．また，W の定義より

$$\mu(X \setminus K) \leq \mu(X \setminus W) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [X \setminus W_n]\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(X \setminus W_n) < \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon$$

となる．すなわち，主張 2 が成立する．

Step 3 : μ **の内正則性の証明**. $B \in \mathscr{B}(X)$ および $\varepsilon > 0$ とする．このとき，step1 の議論から閉集合 $F \subset B$ で

$$\mu(B \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たすものがとれる．また step2 の議論から，コンパクト集合 K で

$$\mu(X \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}$$

なるものがとれる．ここで $K' = F \cap K$ とすれば，K' は $K' \subset B$ なるコンパクト集合であり[*10]，さらに次の不等式を満たす.

$$\mu(B \setminus K') \leq \mu(B \setminus K) + \mu(B \setminus F) \leq \mu(X \setminus K) + \mu(B \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

これより，μ の内正則性が示された. □

参考文献

[1] Vladimir I. Bogachev. *Measure Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.

[2] 小谷眞一. 測度と確率. 岩波書店, 2005.

[3] Laurent Schwartz. *Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical Measures*. Tata Institute Monographs on Mathematics & Physics. Oxford University Press, 1974.

[*10] コンパクト集合と閉集合の共通部分はコンパクト集合である.