Normal Approximations with Malliavin Calculus: From Stein's Method to Universality の勉強ノート

大阪大学大学院基礎工学研究科
平井祐紀

2018 年 8 月 5 日

目次

1　1 次元の Malliavin 作用素

1.1　微分作用素

可測空間 $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度 γ を

$$\gamma(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$$

によって定義する．このような γ を標準 Gauss 型確率測度 (standard Gaussian probability measure) とよぶことにする．確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の確率変数 N が分布 γ をもつとき，N は標準 Gauss 型 (standard Gaussian) の確率変数であるといい，$N \sim \mathscr{N}(0,1)$ などと表記することにする．

本節での我々の目標は，この確率空間上の関数について（古典的な意味よりも）拡張された微分概念を定式化し，$(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \gamma)$ 上の Sobolev 空間を導入することである．

まずは，準備として基本的な部分積分公式を用意しよう．

補題 1.1.1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は絶対連続関数で $f' \in L^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \gamma)$ を満たすものとする[*1]．このとき関数 $x \mapsto xf(x)$ は $L^1(\gamma)$ の元であり，

$$\int_{\mathbb{R}} xf(x)\gamma(dx) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\gamma(dx) \tag{1.1.1}$$

がなりたつ．

証明. γ は標準 Gauss 分布であるから $\int_{\mathbb{R}} |x|\gamma(dx) < \infty$ となることに注意すれば，$f(0) = 0$ としても一般性を失わない[*2]．はじめに，関数 $x \mapsto xf(x)$ が γ によって可積分であることを示す．絶対連続関数についての微積分学の基本定理より，

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} |f(x)||x|\gamma(dx) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_0^x f'(y)dy \right| |x| e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{]-\infty,0]} \left| \int_0^x f'(y)dy \right| |x| e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[0,\infty[} \left| \int_x^0 f'(y)dy \right| |x| e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{]-\infty,0]} \left(\int_x^0 |f'(y)|dy \right) (-x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[0,\infty[} \left(\int_0^x |f'(y)|dy \right) x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{]-\infty,0]} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_{\{x \le y \le 0\}}(x,y)|f'(y)|dy \right) (-x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&\qquad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[0,\infty[} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_{\{0 \le y \le x\}}(x,y)|f'(y)|dy \right) x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{]-\infty,0]} 1_{]-\infty, y\wedge 0]}(x)(-x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) |f'(y)|dy \\
&\qquad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{[0,\infty[} 1_{[y\vee 0, \infty[}(x) x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) |f'(y)|dy
\end{aligned}$$

[*1] f' は f の（弱）導関数．

[*2] $f(x) - f(0)$ を新たに f と思えば良い．

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{]-\infty,0]} e^{-\frac{y^2}{2}} |f'(y)|dy + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[0,\infty[} e^{-\frac{y^2}{2}} |f'(y)|dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}} |f'(y)|\gamma(dy) < \infty$$

が成り立つ.（途中で積分の順序交換をした際には，非負可測関数に対する Fubini の定理を用いた.）よって $x \mapsto xf(x)$ は可積分であることが分かった．次に (1.1.1) を示そう．可積分関数に関する Fubini の定理を用いれば先ほどと同様の議論により

$$\int_{\mathbb{R}} xf(x)\gamma(dx)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{]-\infty,0]} \left(\int_x^0 f'(y)dy \right) (-x)e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[0,\infty[} \left(\int_0^x f'(y)dy \right) xe^{-\frac{x^2}{2}} dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f'(y)\gamma(dy)$$

がわかる． □

注意 1.1.2. 補題 1.1.1 では緩やかな仮定しか要求していないので，証明には Fubini の定理を多用することになっている．もっと強い仮定，たとえば $f \in C_b^1$ などをおけば部分積分公式により（少々荒っぽい書き方ではあるが）

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\gamma(dx) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(-e^{-\frac{x^2}{2}} \right)' dx \\ &= \left[-f(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-1)f'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \gamma(dx)\end{aligned}$$

となることが分かる．この主張において「絶対連続」という仮定は外せない．実際，$f = 1_{[0,\infty[}$ なる関数を考えれば[*3]，

$$\int_{\mathbb{R}} xf(x)\gamma(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\gamma(dx)$$

である．

補題 1.1.1 の結果を用いて，γ のモーメントを計算してみよう．

$$m_n(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} x^n \gamma(dx)$$

と書くことにする．

系 1.1.3. $(m_n(\gamma))_{n\geq 0}$ は以下の関係を満たす．

$$m_{n+1} = n \times m_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

特に，n が奇数ならば $m_n(\gamma) = 0$ であり，n が偶数ならば

$$m_n(\gamma) = \frac{n!}{2^{n/2}(n/2)!} = (n-1)!! = 1 \cdot 3 \ldots (n-1)$$

である．

[*3] これはもちろん殆ど至る所微分可能

証明．(1.1.1) において $f(x)=x^n$ とおけば

$$m_{n+1}(\gamma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} x\times(x^n)e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_{\mathbb{R}} nx^{n-1}\gamma(dx)=n\times m_{n-1}(\gamma)$$

である．特に $n=1$ のときは $m_1(\gamma)$ は標準正規分布の平均であり 0 に等しい．$n=0$ のときは密度関数を積分しただけなので，$m_0(\gamma)=1$ であるから，後半の主張も分かる． □

我々の目標は，確率空間 $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}),\gamma)$ 上の確率変数に対して，適当な微分概念を定義することである．もちろん，$\mathbb{R}$ 上の十分滑らかな関数には古典的な意味での微分が定義されている．それをもう少し拡張するためには，超関数微分あるいは弱微分と呼ばれる概念が存在する．我々がこれから定義する微分は，超関数微分の変種である．通常の超関数微分と異なるのは，通常の超関数微分は Lebesgue 測度を用いた定式化がされるが，我々の扱う微分は Gauss 測度を用いるという点である．

まずは，テスト関数の空間を導入しよう．C^∞ 級関数 f で，f およびその導関数がどれも高々多項式の増大度しかもたないもの全体の空間を $\mathscr{S}$ で表すこととし，$\mathscr{S}$ の元を滑らかな関数と呼ぶことにする．$\mathscr{S}$ の元に対する微分が定める作用素を，適当な方法で拡張することを当面の目標としよう．

通常の超関数論では，テスト関数の空間は $C_c^\infty(\mathbb{R})$ [*4]や急減少関数空間であることが多いのであった．どちらも遠方で非常に早く減衰する関数であるが，その条件が要請されるのは $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度の下で強い可積分性をもつためである．ところが我々の考えている Gauss 測度はそれ自体が遠方で急激に小さくなるため，被積分関数に多項式程度の増大を許すのである．

$\mathscr{S}$ を考える理由は上のようなものであるが，これに関して教科書の注意書きを（ぎこちなく）訳したものを一応以下に載せておく．

注意 1.1.4. 上に出てきた滑らかな関数の定義は，ともすると幾分不自然なものに思われるかもしれない．しかし，以下で定義される作用素の定義域が（適切なノルムのもとで）$\mathscr{S}$ の閉包をとったものであることが明らかになれば，その妥当性が理解されるであろう．次の章では，ここでの滑らかな関数と似たような役割を果たすものとして general Gaussian field 上の滑らかな汎関数の概念が用いられる．一次元の場合に，こういった近似が上手くいくことは以下の命題によって保証される．

我々はできるだけ多くの確率変数に対して適切に微分を定義したいのであるが，そのためには $\mathscr{S}$ がテスト関数の空間として十分に大きい必要がある．そのことを保証するのが以下の命題である．

命題 1.1.5. 単項式関数全体 $\{x^n; n\in\mathbb{N}\}$ の生成する部分空間は任意の $q\in[1,\infty[$ に対して $L^q(\gamma)$ の稠密部分集合となる．特に，任意の $q\in[1,\infty[$ に対して $\mathscr{S}$ は $L^q(\gamma)$ の稠密部分集合である．

証明．**Step1: $\mathscr{S}\subset L^q(\gamma)$ であること．** $q\in[1,\infty[$ を固定する．$f\in\mathscr{S}$ とすれば，ある定数 C とある自然数 $n\in\mathbb{N}$ が存在して，$|f(x)|\le C(1+|x|^n)$ がなりたつ．（多項式増大の定義．）よって

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^q\gamma(dx)&\le\int_{\mathbb{R}}C^q(1+|x|^n)^q\gamma(dx)\\&\le\int_{\mathbb{R}}C^q2^{q-1}(1^q+|x|^{nq})\gamma(dx)\\&=C^q2^{q-1}+C^q2^{q-1}\int_{\mathbb{R}}|x|^{nq}\gamma(dx)<\infty\end{aligned}$$

[*4] コンパクト台を持つ C^∞ 級関数全体の空間

であるから，$f \in L^q(\gamma)$ がわかる．

Step2：稠密性の証明． 単項式関数全体から生成される部分空間を $V(\subset \mathscr{S})$ で表記することにする．$q \in [1,\infty[$ を固定する．Hahn-Banach の定理の応用により，V が $L^q(\gamma)$ で稠密になることの必要十分条件は，$T \in (L^q)^*$ に対して $T = 0 \iff T|_V = 0$ がなりたつことである．いま，$(L^q)^* \cong L^\eta$（ただし，$\eta \in]1,\infty]$ は $q^{-1} + \eta^{-1} = 1$ をみたすもの．）であることに注意すれば，特に任意の $g \in L^\eta(\gamma)$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) x^n \gamma(dx) = 0 \ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \Longrightarrow \quad g = 0$$

を示せばよいことになる．いま，$g \in L^\eta(\gamma)$ とし，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) x^n \gamma(dx) = 0$$

がなりたっていると仮定する．このとき，$g \cdot d\gamma$ が零測度になっていることを示せば十分なので，その特性関数を調べることにしよう．

$$\begin{aligned}
\left| g(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(i\xi x)^k}{k!} \right| &\le |g(x)| e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^{n} \frac{|i\xi x|^k}{k!} \\
&= |g(x)| e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^{n} \frac{|\xi x|^k}{k!} \\
&\le |g(x)| e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\xi x|^k}{k!} \\
&= |g(x)| e^{-\frac{x^2}{2}} e^{|\xi x|}
\end{aligned}$$

という評価が成り立つ．Hölder の不等式より

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |g(x)| e^{-\frac{x^2}{2}} e^{|\xi x|} dx \sqrt{2\pi} &\int_{\mathbb{R}} |g(x)| e^{|\xi x|} \gamma(dx) \\
&\le \sqrt{2\pi} \|g\|_{L^\eta(\gamma)} \|e^{|\xi \cdot|}\|_{L^q(\gamma)} < \infty
\end{aligned}$$

となることに注意すれば，ルベーグの収束定理により

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} g(x) \gamma(dx) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\xi x)^k}{k!} \right) g(x) \gamma(dx) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_{\mathbb{R}} x^k g(x) \gamma(x) = 0
\end{aligned}$$

よって $g \cdot d\gamma$ の特性関数は 0 となり，これは零測度であることが示された．したがって，V は $L^q(\gamma)$ で稠密である．

Step3. $V \subset \mathscr{S} \subset L^q(\gamma)$ に注意すれば，ここまでの結果により $\overline{V} = \overline{\mathscr{S}} = L^q(\gamma)$ がわかる．すなわち $\mathscr{S}$ は $L^q(\gamma)$ で稠密である．　□

$f \in \mathscr{S}$ および $p \ge 1$ に対して，$f^{(p)}$ や $D^p f$ で f の p 階微分を表すことにする． このとき $f \mapsto D^p f$ によって線形作用素 $D^p : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ が定まることに注意されたい．次の命題では，この作用素が可閉であることを証明する．

補題 1.1.6. $q \in [0,\infty[$ と $p \geq 1$ に対して，$L^q(\gamma)$ 上からそれ自身への線形作用素 D^p を $\mathrm{Dom}\, D^p = \mathscr{S} \ni f \mapsto f^{(p)} \in L^q(\gamma)$ によって定めれば，D^p は可閉である．

証明．**Step1: $q > 1$ の場合．** $\mathscr{S}$ の元の列 (f_n) は $f_n \to 0$ in $L^q(\gamma)$ かつある $\eta \in L^q(\gamma)$ に対して $D^p f_n \to \eta$ in $L^q(\gamma)$ を満たすものとする．このとき，$\eta = 0$ であることを示せばよいのであった．ここでは特に，任意の $T \in (L^q)^*$ に対して $T\eta = 0$ なることを示すことにする*5．

$g \in \mathscr{S}$ に対して $\delta^p g$ を以下のように定義する．

$$\begin{cases} \delta^1 g(x) = \delta g(x) := xg(x) - g'(x) \\ \delta^r = \delta(\delta^{r-1} g(x)) \quad (r \in \{2, \dots, p\}) \end{cases}$$

このとき，補題 1.1.1 により任意の $g \in \mathscr{S} \subset L^{q'}(\gamma)$ (ただし，$q' \in]0,\infty[$ は $1/q + 1/q' = 1$ を満たす実数．) に対して

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} g(x)\eta(x)\gamma(dx) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g(x)(D^p f_n)\gamma(dx) \quad (\because g \in L^{q'} \cong (L^q)^*) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (D^{p-1} f_n)(xg(x) - g'(x))\gamma(dx) \quad (gD^{p-1}f \text{ に補題 1.1.1 を使う}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (D^{p-1} f_n)(\delta g(x))\gamma(dx) \\ &= \cdots \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(\delta^p g(x))\gamma(dx) \\ &= 0 \quad (\because f_n \to 0 \text{ in } L^q(\gamma) \text{ and the map } f \to \int gf d\gamma \text{ belongs to } (L^q)^*.) \end{aligned}$$

がなりたつ．

$q > 1$ の場合，命題 1.1.5 より $\mathscr{S}$ は $L^{q'}(\gamma)$ で稠密だったから，これより任意の $g \in L^{q'}$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\eta(x)\gamma(dx) = 0$$

となることがわかる*6)．したがって $\eta = 0$ である．

より一般に $q \geq 1$ の場合は，次のように考えればよい．いま $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}$ であることに注意すれば，先ほどの議論により任意の $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\eta(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0$$

が成り立つ．これより $\eta(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ は (Lebesgue-) a.e. で 0 であり*7，$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ の正値性より $\eta = 0$ γ-a.e. がわかる． □

---

*5 Hahn-Banach の定理の応用により，$x \in X$（ノルム空間）が任意の $T \in X^*$ に対して $Tx = 0$ を満たすならば $x = 0$ なることが分かる．

*6 ここの議論は $q > 1$ だから成り立つことに注意！

*7 証明は例えば，Brezis [6, Corollary 4.24]

以上の準備の下，$(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}),\gamma)$ 上の Sobolev 空間 $\mathbb{D}^{p,q}$ を導入しよう．$q\in[1,\infty[$ と $p\in\mathbb{N}_{\geq 1}$ を固定する．$f\in\mathscr{S}$ に対してノルム

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathbb{D}^{p,q}} &= \left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^q\gamma(dx)+\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^q\gamma(dx)+\cdots+\int_{\mathbb{R}}|f^{(p)}(x)|^q\gamma(dx)\right)^{1/q}\\ &= \left(\|f\|_{L^q}^q+\|f'\|_{L^q}^q+\cdots+\|f^{(p)}\|_{L^q}^q\right)^{1/q}\end{aligned}$$

を考える．これが実際にノルムになっていることは，積分論においてよく知られた不等式からわかる．このノルム $\|\ \ \|_{\mathbb{D}^{p,q}}$ に関して $\mathscr{S}\subset L^q(\gamma)$ の閉包をとったものを $\mathbb{D}^{p,q}$ とおくことにする．すなわち，$f\in\mathbb{D}^{p,q}$ となるための必要十分条件は，$\mathscr{S}$ の元の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で以下の条件を満たすものが存在することである．

(i) $f_n\to f$ in $L^q(\gamma)$.
(ii) 各 $j\in\{1,\dots,p\}$ に対して $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ は $L^q(\gamma)$ の Cauchy 列になっている．

このような f および $j\in\{1,\dots,p\}$ に対して

$$f^{(j)}=D^jf:=\lim_{n\to\infty}D^jf_n \tag{1.1.2}$$

と定義することにしよう．（ただし，lim は無論 $L^q(\gamma)$ の意味である．）いま，任意の $m\geq 0$ と $\varepsilon\geq 0$ に対して

$$\mathbb{D}^{p+m,q+\varepsilon}\subset\mathbb{D}^{p,q}$$

なる関係がなりたつことに注意しておく[*8][*9]．実際，$f\in\mathscr{S}$ に対して

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathbb{D}^{p,q}} &= \left(\sum_{k=0}^{p}\|f^{(k)}\|_{L^q}^q\right)^{1/q}\\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{p+m}\|f^{(k)}\|_{L^q}^q\right)^{1/q}\\ &\leq C\left(\sum_{k=0}^{p+m}\|f^{(k)}\|_{L^q}^{q+\varepsilon}\right)^{1/(q+\varepsilon)}\\ &\leq C\left(\sum_{k=0}^{p+m}\|f^{(k)}\|_{L^{q+\varepsilon}}^{q+\varepsilon}\right)^{1/(q+\varepsilon)}\\ &= C\|f\|_{\mathbb{D}^{p+m,q+\varepsilon}}\end{aligned}$$

であることからわかる．（途中で二回ほど Hölder の不等式を用いた．）さらに，$\mathbb{D}^{\infty,q}:=\bigcap_{p\geq 1}\mathbb{D}^{p,q}$ と書くことにする．

注意 1.1.7. $\mathbb{D}^{p,q}$ は $L^q(\gamma)$ の元のうち，p 階までの超関数の意味での微分が $L^q(\gamma)$ に属するようなもの全体からなる Banach 空間になっている．証明は Meyers and Serrin (1964) などを参照．

[*8] 教科書は誤植か？
[*9] 通常の Sobolev 空間においては可積分性の指数に関する単調な包含関係は必ずしもないが，我々は確率空間 $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}),\gamma)$ 上の Sobolev 空間を考えているからこのような包含関係が成り立つ．

定義 1.1.8. $p = 1, 2, \ldots$ に対して，(1.1.2) で定義された写像

$$\begin{aligned} D^p : \mathbb{D}^{p,q} &\longrightarrow L^q(\gamma) \\ f &\longmapsto D^p f \end{aligned}$$

$(L^q(\gamma)$ ノルムに関する$)p$ 階の微分作用素と呼ばれる．任意の $q \neq q'$ に対して作用素:$D^p : \mathbb{D}^{p,q} \to L^q(\gamma)$ と作用素 $D^p : \mathbb{D}^{p,q'} \to L^{q'}$ は $\mathbb{D}^{p,q} \cap \mathbb{D}^{p,q'}$ 上では一致する．$q < q'$ と仮定すれば先ほどの主張より $\mathbb{D}^{p,q'} \subset \mathbb{D}^{p,q}$ であるから，$\mathbb{D}^{p,q'}$ 上で二つの作用素が一致することを示せばよい．$\mathscr{S}$ 上では単なる微分であるから明らかに一致する．一般の $f \in \mathbb{D}^{p,q'}$ に対しては，$\mathscr{S}$ の元からなる $\mathbb{D}^{p,q'}$ での近似列 (f_n) を考える．このとき，先ほどの議論により $\|f\|_{\mathbb{D}^{p,q}} \leq \|f\|_{\mathbb{D}^{p,q}}$ であるから，(f_n) は $\mathbb{D}^{p,q}$ の意味での近似にもなっている．したがって，一般の $f \in \mathbb{D}^{p,q'}$ に対しても（拡張された）p 階微分は一致する．$p = 1$ のときは D^1 の代わりに単に D と書くこともある．

L^p 空間の中でも，L^2 空間は Hilbert 空間の構造をもつから特に重要なのであった．同様にここでの Sobolev 空間 $\mathbb{D}^{p,q}$ についても，$q = 2$ のケースは非常に大切である．次の節では，$D^p : \mathbb{D}^p : \mathbb{D}^{p,2} \to L^2(\gamma)$ の共役作用素 δ^p を特徴づける．

1.2 発散作用素

微分作用素 D^p の，（Hilbert 空間論の意味での）共役作用素として，発散作用素 δ^p を導入しよう．

その前に，まずは Hilbert 空間上の（非有界）作用素の共役作用素の定義を思い出しておこう．H を Hilbert 空間とし，T を稠密な定義域をもつ線形作用素とする．$\operatorname{Dom} T^* \subset H$ を次のような条件を満たす $y \in H$ の全体として定める．

$$\exists z \in H \ \forall x \in \operatorname{Dom} T \quad \langle Tx, y\rangle_H = \langle x, z\rangle_H$$

いま $\operatorname{Dom} T$ は H で稠密だから，各 $y \in \operatorname{Dom} T^*$ に対して上の条件を満たす z はただ一つ定まる．このとき $\operatorname{Dom} T^*$ は H の線形部分空間であり，$y \mapsto z =: T^* y$ により線形作用素 $\operatorname{Dom} T^* \to H$ が定まる．この作用素 T^* を T の共役作用素と呼ぶのであった．T の共役作用素 T^* の定義域は，次のように特徴づけることもできる．

$$y \in \operatorname{Dom} T^* \iff \exists C > 0 \ \forall x \in \operatorname{Dom} T \quad |\langle Tx, y\rangle_H| \leq C\|x\|_H$$

この考察を元に，いよいよ δ^p を定義しよう．

定義 1.2.1. $\operatorname{Dom} \delta^p$ は $L^2(\gamma)$ の元で次の条件を満たすもの全体とする：$\exists C > 0 \ \forall f \in \mathscr{S}$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f^{(p)}(x) g(x) \gamma(dx) \right| \leq C \sqrt{\int_{\mathbb{R}} f^2(x) \gamma(dx)} \tag{1.2.1}$$

とおくことにする[*10]$g \in \operatorname{Dom}\, \delta^p$ を固定する．このとき，条件 (1.2.1) より線形作用素 $\mathscr{S} \ni f \mapsto \langle f^{(p)}, g\rangle \in \mathbb{R}$ は連続である．($\mathscr{S} \subset L^2(\gamma)$ と考える．) Riesz の表現定理より，$L^2(\gamma)$ の元 u で，任意の $f \in \mathscr{S}$ に対して $\langle f^{(p)}, g\rangle = \langle f, u\rangle$ を満たすものがただ一つ存在するので，それを $\delta^p g$ と書く．

定義 1.2.2. 整数 $p \geq 1$ を固定し，p 階の発散作用素 (divergenve operator) δ^p を次のように定める．$g \in \operatorname{Dom} \delta^p$ に対して，任意の $f \in \mathscr{S}$（$f \in \mathbb{D}^{p,2}$ としても同値．）について

$$\langle f^{(p)}, g\rangle_{L^2(\gamma)} = \langle f, u\rangle_{L^2(\gamma)} \tag{1.2.2}$$

[*10] 条件 (1.2.1) に関して，$f \in \mathscr{S}$ は $\mathbb{D}^{p,2}$ としても同じである．

を満たすただひとつの元 $u \in L^2(\gamma)$ によって $\delta^p g = u$ とおく

注意 1.2.3. (1.2.2) において特に f が定数の場合を考えれば，任意の $p \geq 1$ と任意の $g \in \mathrm{Dom}\,\delta^p$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} \delta^p g(x)\gamma(dx) = 0 \tag{1.2.3}$$

がなりたつことがわかる．δ^p は $L^2(\gamma)$ 上稠密に定義された作用素 D^p の共役作用素であるから，閉作用素である．また，任意の $g \in \mathrm{Dom}\,\delta^p$ に対して

$$\delta^p g = \delta(\delta^p g) = \delta^{p-1}(\delta g) \tag{1.2.4}$$

がなりたつことを確かめておく．(1.2.4) は $g \in \mathrm{Dom}\,\delta^p$ のとき $\delta^{p-1}g \in \mathrm{Dom}\,\delta$ となること，および $g \in \mathrm{Dom}\,\delta^p$ なら $\delta g \in \mathrm{Dom}\,\delta^{p-1}$ となることを示していると言える．

問題 1.2.4. (1.2.4) を証明せよ．

証明．$g \in \mathrm{Dom}\,\delta^p \cap \mathrm{Dom}\,\delta^p$ なら

$$\langle \delta^p g, f\rangle_{L^2} = \langle D^p f, g\rangle_{L^2} = \langle D^{p-1}Df, g\rangle_{L^2} = \langle Df, \delta^{p-1}g\rangle_{L^2}$$

より，任意の $f \in \mathscr{S}$ に対して

$$\langle Df, \delta^{p-1}g\rangle_{L^2} = \langle \delta^p g, f\rangle_{L^2}$$

が成り立つ．δ の定義より $\delta(\delta^{p-1}g) = \delta^p$ である．残りの等式も同様．

注：教科書の主張だと $g \in \mathrm{Dom}\,\delta^p$ なら $g \in \mathrm{Dom}\,\delta^{p-1}$ となるはずだが，これは正しいのか？ □

$f, g \in \mathscr{S}$ のとき，その積 $fg \in C^\infty(\mathbb{R})$ に対して 1.1.1 を適用すれば，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} x\{f(x)g(x)\}\gamma(dx) &= \int_{\mathbb{R}} \{f(x)g(x)\}'\gamma(dx)\\ &= \int_{\mathbb{R}} f'(x)g(x)\gamma(dx) + \int_{\mathbb{R}} f(x)g'(x)\gamma(dx)\end{aligned}$$

すなわち

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)g(x)\gamma(dx) = \int_{\mathbb{R}} x\{f(x)g(x)\}\gamma(dx) - \int_{\mathbb{R}} f(x)g'(x)\gamma(dx)$$

がなりたつ．これより，$g \in \mathrm{Dom}\,\delta$（よって $\mathscr{S} \subset \mathrm{Dom}\,\delta$）と $\delta g(x) = xg(x) - g'(x)$ が分かる．近似をすることにより，さらに $\mathbb{D}^{1,2} \subset \mathrm{Dom}\,\delta$ および $g \in \mathbb{D}^{1,2}$ に対しても $\delta g = G - Dg$ なる関係がなりたつことも分かる．（ただし，D は $(Dg)(x) = xg(x)$ で定まる作用素.）さらに一般的に，任意の $p \geq 1$ に対して $\mathbb{D}^{p,2} \subset \mathrm{Dom}\,\delta^p$ という関係を示すことが出来る．

1.3 Ornstein-Uhlenbeck 作用素

定義 1.3.1 (Ornstein-Uhlenbeck 半群)**.** $f \in \mathscr{S}$ および $t \geq 0$ に対し，

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)\gamma(dy), \quad x \in \mathbb{R}$$

と定義する．これによって定まる作用素 $P_t\colon \mathscr{S} \to \bigcap_{q\geq 1} L^q(\gamma)$ の族 (P_t) を，Ornstein-Uhlenbeck 半群という．

本節では，上で定義した Ornstein-Uhlenbeck 半群やその生成作用その性質を調べてゆく．それよりも何よりも，まずは定義 1.3.1 における $P_tf(x)$ なるものが well-defined であることを確かめなければいけない．f は高々多項式増大であるから，ある $C>0$ とある n が存在して

$$\begin{aligned}\left|f(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y)\right| &\leq C\left(1+\left|e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right|^n\right)\\ &\leq C\left\{1+2^{n-1}\left(\left|e^{-t}x\right|^n+\left|\sqrt{1-e^{-2t}}y\right|^n\right)\right\}\\ &\leq 2^{n-1}C(1+|x|^n+|y|^n)\end{aligned}$$

という評価が成り立つ．最後の行は y に関する多項式なので $\gamma(dy)$ によって可積分であり，ゆえに $P_tf(x)$ well-defined であることがわかる．これにより $\mathbb{R}$ 上の関数 $x\mapsto P_tf(x)$ が定まるが，この関数はどのような性質を持つであろうか？それを調べる前に，(P_t) のもつ性質を二つほど確認しておく．

$x\in\mathbb{R}$，$f\in\mathscr{S}$ とすれば，

$$\begin{aligned}P_0f(x)&=f(x)\\ \lim_{t\to\infty}P_tf(x)&=\int_{\mathbb{R}}f(x)\gamma(dx)\end{aligned}$$

が成り立つ．実際，

$$P_0f(x)=\int_{\mathbb{R}}f(x)\gamma(dy)=f(x)$$

より一つ目の主張が分かる．次に二つ目の主張について考えよう．先程用いた評価

$$\left|f(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y)\right|\leq 2^{n-1}C(1+|x|^n+|y|^n)$$

を思い出してみる．右辺は t によらない関数で $\gamma(dy)$ で可積分であるから，Lebesgue の収束定理により

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}P_tf(x)&=\lim_{t\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y)\gamma(dy)\\ &=\int_{\mathbb{R}}\lim_{t\to\infty}f(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y)\gamma(dy)\\ &=\int_{\mathbb{R}}f(y)\gamma(dy)\end{aligned}$$

となり，二つ目の主張も示された．

さて，いま我々が知りたいのは $x\mapsto P_tf(x)$ がどのような関数になるのかということである．定義 1.3.1 の中でこっそり先走って書いてしまったが，実は任意の $t\geq 0$ と $q\in[1,\infty)$ に対して $P_tf\in L^q(\gamma)$ $(f\in\mathscr{S})$ が成り立っている．このことを確かめよう．P_tf の可測性は Fubini の定理よりわかる．P_tf の可積分性を示すために，適当な確率空間 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上で定義された，標準正規分布に従う独立な二つの確率変数 N,N' を用

意する．$f \in \mathscr{S}$ とすれば，

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} |P_t f(x)|^q \gamma(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)\gamma(dy) \right|^q \gamma(dx) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y) \right|^q \gamma(dy)\gamma(dx) \quad (\because \text{Jensen's の不等式}) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y) \right|^q N_* P(dx) N'_* P(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left| f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y) \right|^q (N, N')_* P(d(x,y)) (\because \text{独立性}) \\
&= E \left| f(e^{-t}N + \sqrt{1-e^{-2t}}N') \right|^q
\end{aligned}$$

が成り立つ．いま N と N' は平均 0 で独立に正規分布に従うから，$e^{-t}N + \sqrt{1-e^{-2t}}N'$ もまた正規分布に従う．その分散は

$$E[\left(e^{-t}N + \sqrt{1-e^{-2t}}N'\right)^2] = e^{-2t}E[N^2] + 2e^{-t}\sqrt{1-e^{-2t}}E[NN'] + (1-e^{-2t})E[(N')^2] = 1$$

よって $e^{-t}N + \sqrt{1-e^{-2t}}N' \sim \mathscr{N}(0,1)$ であり，先ほどの評価をあわせて

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} |P_t f(x)|^q \gamma(dx) \\
&\qquad \leq E \left| f(e^{-t}N + \sqrt{1-e^{-2t}}N') \right|^q \\
&\qquad \leq E\left[|f(N)|^q\right] \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^q \gamma(dx)
\end{aligned} \tag{1.3.1}$$

を得る．これで $P_t f \in L^q(\gamma)$ が示された．以上の議論から，各 P_t は写像 $\mathscr{S} \to L^q(\gamma)$ を定めることが分かるが，実のところこの写像は $\mathscr{S}$ から $L^q(\gamma)$ への有界線形作用素になっている．積分の線形性より P_t の線形性は明らかであろう．(1.3.1) により

$$\|P_t f\|_{L^q(\gamma)} \leq \|f\|_{L^q}$$

となるので，$\|P_t\| \leq 1$ である[*11]．よって P_t は有界作用素であることがわかる．

$\mathscr{S}$ は $L^q(\gamma)$ で稠密なので[*12]，各 P_t は $L^q(\gamma)$ 上に作用素ノルムを保ったまま拡張できる．すなわち：

命題 1.3.2. 任意の $t \geq 0$，$q \in [1, \infty[$ に対し，P_t は $L^q(\gamma)$ 上の縮小的な線形作用素に（一意的に）拡張される．

(P_t) のことを Ornstein-Uhlenbeck 半群と呼んだが，これが「半群」と呼ばれる所以は次の性質にある．

命題 1.3.3. 任意の $s, t \geq 0$ に対し，$P_t P_s = P_{t+s}$ on $L^1(\gamma)$.

命題 1.3.3 の性質 $P_t P_s = P_{t+s}$ を (P_t) の半群性と呼ぶ．半群性とは，写像 $[0, \infty[\to \mathscr{L}(L^q(\gamma))$ が[*13]半群準同型であるということである．いま γ は確率測度なので，L^1 上で半群性が成り立つということは，もちろん任意の L^q 上で半群性を満たしているということになる．

---

*11 ただし $\|P_t\|$ は作用素ノルムの意味である．

*12 1.1.5 を見よ．

*13 $\mathscr{L}(E)$ は Banach 空間 E から E への有界線形作用素全体の空間.

証明．$f \in \mathscr{S}$ とすれば，

$$
\begin{aligned}
P_tP_sf(x) &= \int_{\mathbb{R}} P_sf(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}z)\gamma(dz) \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f\left(e^{-s}\left\{e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}z\right\} + \sqrt{1-e^{-2s}}y\right)\gamma(dy)\gamma(dz) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} f(e^{-s-t}x + e^{-s}\sqrt{1-e^{-2t}}z + \sqrt{1-e^{-2s}}y)\gamma\otimes\gamma(d(y,z))
\end{aligned}
$$

ここで，適当な確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上定義された独立な確率変数 $N, N' \sim \mathscr{N}(0,1)$ を用意する．いま N と N' の独立性より $e^{-s}\sqrt{1-e^{-2t}}N + \sqrt{1-e^{-2s}}N'$ はまた平均 0 の正規分布に従い，その分散は

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left(e^{-s}\sqrt{1-e^{-2t}}N + \sqrt{1-e^{-2s}}N'\right)^2\right] \\
&= e^{-2s}(1-e^{-2t})E[N^2] + e^{-s}\sqrt{1-e^{-2t}}\sqrt{1-e^{-2s}}E[NN'] + (1-e^{-2s})E[(N')^2] \\
&= 1 - e^{-2(s+t)}
\end{aligned}
$$

である．したがって，さらに計算すれば

$$
\begin{aligned}
P_tP_sf(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(e^{-s-t}x + e^{-s}\sqrt{1-e^{-2t}}z + \sqrt{1-e^{-2s}}y)\gamma\otimes\gamma(d(y,z)) \\
&= \int_{\Omega} f(e^{-s-t}x + e^{-s}\sqrt{1-e^{-2t}}N + \sqrt{1-e^{-2s}}N')dP \\
&= \int_{\Omega} f(e^{-s-t}x + \sqrt{1-e^{-2(s+t)}}N)dP \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(e^{-s-t}x + \sqrt{1-e^{-2(s+t)}}y)\gamma(dy) \\
&= P_{s+t}f(x)
\end{aligned}
$$

となる．これより $f \in \mathscr{S}$ に対して $P_tP_sf = P_{t+s}f$ が成り立つことがわかった．$\mathscr{S}$ は $L^1(\gamma)$ で稠密なので，この関係式は $L^1(\gamma)$ 全体でも成り立つ． □

P_t は $L^q(\gamma)$ から $L^q(\gamma)$ への作用素であったから，Sobolev 空間 $\mathbb{D}^{p,q}$ の元に対して作用させることができる．特に $P_t\colon \mathbb{D}^{1,2} \to L^2(\gamma)$ について次が成り立つ．

命題 1.3.4. $f \in \mathbb{D}^{1,2}$ かつ $t \geq 0$ なら $P_tf \in \mathbb{D}^{1,2}$ であり，$DP_tf = e^{-t}P_tDf$ が成り立つ．

証明．**Step1：$f \in \mathscr{S}$ の場合．** $t \geq 0$ とする．まず P_tf の，x に関する微分可能性を調べよう．

$$
P_tf(x) = \int_{\mathbb{R}} f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)\,\gamma(dy) \quad (x \in \mathbb{R})
$$

被積分関数を微分すると $e^{-t}f'(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}})$ となる．これが x によらない可積分関数で評価できればよい[*14]が，それは f' が高々多項式増大であることから分かる．よって

$$
\begin{aligned}
DP_tf(x) &= \int_{\mathbb{R}} Df(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)\,\gamma(dy) \\
&= e^{-t}\int_{\mathbb{R}} f'(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)\,\gamma(dy) \\
&= e^{-t}P_tDf(x)
\end{aligned}
$$

[*14] x は適当な有界閉区間に属しているとしてよい．

また，これより $P_t f \in \mathscr{S} \subset \mathbb{D}^{1,2}$ も分かる．実際，$Df \in \mathscr{S}$ に注意すれば

$$D(DP_t f) = D(e^{-t}P_t Df) = e^{-t}D(P_t Df) = e^{-t}\{e^{-t}P_t D(Df)\} = e^{-2t}P_t(D^2 f)$$

という作業を繰り返すことにより P_t は何回でも微分可能である[*15]ことがわかる．また，$f \in \mathscr{S}$ より，適当に $C > 0$ と $k \geq 1$ を選べば

$$|f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)| \leq C(1 + |x|^k + |y|^k)$$

なる評価がなりたつ．よって

$$\begin{aligned}
|P_t f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)|\gamma(dy) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} C(1 + |x|^k + |y|^k)\gamma(dy) \\
&= C + C\|(\cdot)^k\|_{L^1(\gamma)} + C'|x|^k
\end{aligned}$$

となり，$P_t f$ もまた高々多項式増大であることがわかった．すなわち $P_t f \in \mathscr{S}$ である．

Step 2： $f \in \mathbb{D}^{1,2}$ **の場合．** $\|f_n - f\|_{\mathbb{D}^{1,2}} \to 0$ $(n \to \infty)$ となる $f_n \in \mathscr{S}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ をとる．各 f_n は $(*)$ を満たすので

$$DP_t f_n = e^{-t}P_t Df_n$$

がなりたつ．仮定より $Df_n \to Df$ in $L^2(\gamma)$ であるから，P_t の連続性によって

$$\lim_{n\to\infty} e^{-t}P_t Df_n(x) = e^{-t}P_t Df \quad \text{in } L^2(\gamma).$$

である．これより $(**)$ の左辺も L^2 で収束することに注意されたい．いま $P_t f_n \to P_t f$ in L^2 かつ[*16]$DP_t f_n(x) = e^{-t}P_t Df_n(x) \to e^{-t}P_t Df$ in L^2 であることがわかったから，D が可閉作用素であった[*17]こととあわせて

$$DP_t f = e^{-t}P_t Df$$

を得る．[*18] $\square$

いま，半群 (P_t) の無限小生成作用素 (infinitesimal generator) L を以下のように定義することにする[*19]．

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dom}\, L &= \left\{ f \in L^2(\gamma) \;\middle|\; {}^{\exists}\lim_{h\to 0} \frac{P_h f - f}{h} \text{ in } L^2(\gamma) \right\} \\
Lf &= \lim_{h\to 0} \frac{P_h f - f}{h}
\end{aligned}$$

注意 1.3.5. Dom$L$ についての注意.

---

*15 ここでの D は通常の（というより古典的な？）意味での微分になっていることに注意.

*16 作用素 P_t の連続性

*17 補題 1.1.6

*18 閉作用素の条件付けを思い出せ．より正確には，D の閉包 $\overline{D}$ に関して極限操作を施したと考えるべきか.

*19 Lf を定義する lim も無論 L^2 の意味である.

L の具体的な表示を求めてみよう．$f \in \mathscr{S}, x \in \mathbb{R}$ とすると，積分記号化での微分を行うことにより

$$\frac{d}{dt}P_t f(x) = -xe^{-t}\int_{\mathbb{R}} f'(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)\,\gamma(dy) + \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}\int_{\mathbb{R}} f'(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)\,y\,\gamma(dy)$$

が $t > 0$ でなりたつ[20]．したがって，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $t \mapsto P_t f(x)$ は $[0,\infty[$ 上連続かつ $]0,\infty[$ 上微分可能であることが分かる．ここで $f'(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)y = f'(T(y))y$ および $T(y) = e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y$ として第 2 項に補題 1.1.1 を用いれば，

$$\frac{d}{dt}P_t f(x) = -xe^{-t}\int_{\mathbb{R}} f'(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)\,\gamma(dy) + e^{-2t}\int_{\mathbb{R}} f''(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)\,\gamma(dy)$$

という等式を得る．$t \to 0$ とすれば

$$\lim_{t\to 0+}\frac{d}{dt}P_t f(x) = -xf'(x) + f''(x)$$

が分かるので，命題 A.1.1 により任意の $x \in \mathbb{R}$ で

$$\frac{d}{dt}P_t f(x)|_{t=0} = \lim_{h\to 0+}\frac{P_h f(x) - f(x)}{h} = -xf'(x) + f''(x)$$

が成り立つ．ところが，Lebesgue の収束定理を用いればこの等式は L^2 収束の意味でもなりたつことが示される．よって，$\mathscr{S} \subset \operatorname{Dom} L$ かつ

$$Lf(x) = -xf'(x) + f''(x) \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R} \tag{1.3.6}$$

である．このことは以下のように述べることもできる．

命題 1.3.6. 任意の $f \in \mathscr{S}$ に対し，$Lf = -\delta Df$.

証明．(1.3) を認める．示すべきことは, 任意の $h \in \mathscr{S}$ に対し，

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)(-Lf(x))\,\gamma(dx) = \int_{\mathbb{R}} h(x)\delta Df(x)\gamma(dx)$$

がなりたつことである．

$$\begin{aligned}
\int h(x)(-Lf(x))\gamma(dx) &= \int h(x)(xf'(x) - f''(x))\gamma(dx) \\
&= \int xh(x)f'(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx - \int h(x)f''(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \\
&= -\int f(x)\left(xh(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)'dx + \int f'(x)\left(h(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)'dx \\
&= \int h'(x)Df(x)\gamma(dx) \\
&= \int h(x)\delta Df(x)\gamma(dx)
\end{aligned}$$

□

[20] ここでの $\frac{d}{dt}$ は言うまでもなく，古典的な意味での微分である．

Note 1. $\mathscr{S}$ 上で $\dfrac{d}{dt}P_t = LP_t = P_tL,\, t \geq 0$ が成り立つ実際，$f \in \mathscr{S}$，$t \geq 0$ とすると

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}P_tf &= \lim_{h\to 0}\frac{P_{t+h}f - P_tf}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}P_t\frac{P_hf - f}{h} \quad (\because \text{Theorem } 1.3.3) \\
&= P_t\lim_{h\to 0}\frac{P_hf - f}{h} \quad (\because \text{Continuity of } P_t) \\
&= P_tLf
\end{aligned}$$

である．同様にして

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}P_tf &= \lim_{h\to 0}\frac{P_{t+h}f - P_tf}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{P_hP_tf - P_tf}{h} \\
&= LP_tf \quad (\because P_tf \in \mathscr{S} \subset \operatorname{Dom} L)
\end{aligned}$$

も分かるので，結論が従う．

以上の結果を使って次が証明できる：

命題 1.3.7 (Poincaré の不等式)**.** $N \sim \mathscr{N}(0,1),\, f \in \mathbb{D}^{1,2}$ とすると

$$\operatorname{Var}[f(N)] \leq E[f'(N)^2]$$

証明．**Step1**：$f \in \mathscr{S}$ **のとき．**

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Var}[f(N)] \\
&= E[f(N)^2 - f(N)E[f(N)]\,] \\
&= E\left[f(N)P_0f(N) - f(N)P_\infty f(N)\right] \quad \left(\because f \in \mathscr{S},\ P_0f(x) = f(x),\ \lim_{t\to\infty}P_tf(x) = \int_{\mathbb{R}}f(y)\gamma(dy)\right) \\
&= -E[f(N)(P_\infty f(N) - P_0f(N))] \\
&= -E\left[f(N)\lim_{R\to\infty}\int_0^R\frac{d}{dt}P_tf(N)dt\right] \\
&= -\lim_{R\to\infty}E\left[f(N)\int_0^R\frac{d}{dt}P_tf(N)dt\right] \\
&= -\lim_{R\to\infty}\int_0^R E\left[f(N)\frac{d}{dt}P_tf(N)\right]dt \quad (\because \text{Fubini}) \\
&= -\int_0^\infty E\left[f(N)\frac{d}{dt}P_tf(N)\right]dt \\
&= -\int_0^\infty E\left[f(N)LP_tf(N)\right]dt \\
&= \int_0^\infty E[f(N)\delta DP_tf(N)]dt \quad (\because \text{Proposition}1.3.6) \\
&= \int_0^\infty E[f'(N)DP_tf(N)]dt \\
&= \int_0^\infty e^{-t}E[f'(N)P_tf'(N)]dt \quad (\because \text{Proposition}1.3.4)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_0^\infty e^{-t}\left(E[f'(N)^2]\right)^{1/2}\left(E[(P_tf')(N)^2]\right)^{1/2}dt \quad (\because \text{Schwarz inequality})\\
&\leq E[f'(N)^2]\int_0^\infty e^{-t}dt \quad (\because \text{Proposition}1.3.2)\\
&= E[f'(N)^2]
\end{aligned}
$$

である．

Step2：$f \in \mathbb{D}^{1,2}$ **のとき．** $f_n \to f$, $f_n^{(1)} \to f^{(1)} \in L^2(\gamma)$ なる $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathscr{S}$ がとれる．Step1 より

$$
\mathrm{Var}[f_n(N)] \leq E[f_n'(N)^2]
$$

なので，$n \to \infty$ として結論を得る． □

Note 2. Poincaré の不等式とは，

$$
\|u\|_{L^p} \leq C\|\nabla u\|_{L^p}
$$

という類の不等式である．詳しいことは，Adams and Fournier [1, Chapter 4] や Leoni [14, § 12.2] などを参照されたい．

命題 1.3.8. 任意の $f \in \mathscr{S}$ に対し，$(D\delta - \delta D)f = f$ がなりたつ．[*21]．

証明．

$$
\begin{aligned}
(D\delta - \delta D)f &= D(\delta f) - \delta(Df)\\
&= D(xf - f') - \delta f'\\
&= f + xf' - f'' - (xf' - f'')\\
&= f
\end{aligned}
$$

□

問題 1.3.9. 命題 を用いて，任意の $p \geq 2$ に対して

$$
(D\delta^p - \delta^p D)f = p\delta^{p-1}f \quad \text{for all } f \in \mathscr{S}.
$$

証明．p に関する帰納法で証明する．$p = 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
(D\delta^2 - \delta^2 D)f &= D\delta(\delta f) - \delta^2 Df\\
&= \delta D(\delta f) + \delta f - \delta^2 Df\\
&= \delta D(\delta f) + \delta f - \delta(\delta Df)\\
&= \delta D(\delta f) + \delta f - \delta(D\delta f - f)\\
&= 2\delta f
\end{aligned}
$$

がなりたつ．

[*21] ハイゼンベルグの交換関係（？）と呼ばれる．

$n \geq 3$ として，$p = n-1$ のとき成り立つと仮定する．

$$
\begin{aligned}
(D\delta^n - \delta^n D)f &= D\delta(\delta^{n-1}f) - \delta^n Df \\
&= \delta D\delta^{n-1}f + \delta^{n-1}f - \delta^n Df \\
&= \delta D\delta^{n-1}f + \delta^{n-1}f - \delta(\delta^{n-1}Df) \\
&= \delta D\delta^{n-1}f + \delta^{n-1}f - \delta(D\delta^{n-1}f - (n-1)\delta^{n-2}f) \\
&= \delta^{n-1}f + (n-1)\delta^{n-1}f \\
&= n\delta^{n-1}f
\end{aligned}
$$

□

1.4 応用 1：Hermite 多項式

定義 1.4.1 (Hermite 多項式)**.** $p \geq 0$ を整数とする．p 次の Hermite 多項式 (Hermite polynomial) を次のように定義する．

$$
\begin{cases} H_0 = 1 \\ H_p = \delta^p 1 \quad (p \geq 1) \end{cases}
$$

ここで，1 は 1 に値をとる定数関数である[*22]．これを具体的に書けば，$H_1(x) = x$, $H_2(x) = x^2 - 1$, $H_3(x) = x^3 - 3x$ などとなる．また，$H_{-1}(x) = 0$ とおくと便利なのでそのように約束することにする．

Hermite 多項式の主な性質としては次のようなものがある．

命題 1.4.2. Hermite 多項式に関して，次の主張がなりたつ．

(i) 任意の $p \geq 0$ に対して $H_p' = pH_{p-1}$, $LH_p = -pH_p$ および $P_tH_p = e^{-pt}H_p$ が任意の $t \geq 0$ についてなりたつ．

(ii) 任意の $p \geq 0$ に対して $H_{p+1}(x) = xH_p(x) - pH_{p-1}(x)$

(iii) 任意の $p, q \geq 0$ に対して

$$
\int_{\mathbb{R}} H_p(x)H_q(x)\gamma(dx) = \begin{cases} p! & p = q, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}
$$

(iv) $\{\frac{1}{\sqrt{p!}}H_p;\, p \geq 0\}$ は $L^2(\gamma)$ の正規直交基底である．

(v) $f \in \mathbb{D}^{\infty,2}$ ならば，

$$
f = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}\left(\int_{\mathbb{R}} f^{(p)}(x)\gamma(dx)\right) H_p \in L^2(\gamma).
$$

(vi) 任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して

$$
e^{cx - \frac{c^2}{2}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^p}{p!} H_p(x)
$$

は $L^2(\gamma)$ の元である．

(vii) (Rodrigues の公式) 任意の $p \geq 1$ に対して

$$
H_p(x) = (-1)^p e^{x^2/2} \frac{d^p}{dx^p} e^{-x^2/2}.
$$

[*22] 言うまでもなく，任意の p に対して $1 \in \mathscr{S} \subset \delta^p$ である．

(viii) 任意の $p \geq 0$ と任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $H_p(-x) = (-1)^p H_p(x)$ がなりたつ．

証明．(i)．1.3.9 により

$$H_p'(x) = D\delta^p 1 = p\delta^{p-1}1 + \delta^p D1 = pH_{p-1}$$

である．$1 \in \mathscr{S}$ に対して $H_p = \delta^p 1 \in \mathscr{S}$ であることに注意すれば，命題 1.3.6 と最初の結果より

$$LH_p = -\delta DH_p = -\delta(pH_{p-1}) = -p\delta H_{p-1} = -pH_p$$

がなりたつ[*23]．$x \in \mathbb{R}$ を固定して，$y_x : \mathbb{R}_+ \ni t \mapsto P_t H_p(x) \in \mathbb{R}$ と定める．このとき $y_x(0) = P_0 H_p(x) = H_p(x)$ であり，$t > 0$ に対しては

$$\begin{aligned}
y_x'(t) &= \frac{d}{dt} P_t H_p(x) \\
&= P_t L H_p(x) \quad (\because \text{Note}1) \\
&= P_t\left(-pH_p(x)\right) \quad (\because \text{(i) の 2 つ目の結果}) \\
&= -pP_t H_p(x) \\
&= -py_x(t)
\end{aligned}$$

が成立．得られた微分方程式を解けば，$y_x(t) = e^{-pt} H_p(x)$ となる．したがって，$P_t H_p = e^{-pt} H_p$．

(ii)．$p = 0$ の時は明らか．

$$1 \in \mathscr{S} \subset \bigcap_{1 \leq k \leq p+1} \mathrm{Dom}\, \delta^k$$

に注意すれば，1.2.4 より

$$H_{p+1}(x) = \delta^{p+1} 1 = \delta(\delta^p 1) = \delta H_p(x)$$

である．$H_p = \delta^p 1 \in \mathscr{S}$ なので，

$$\delta H_p(x) = xH_p(x) - H_p'(x)$$

がなりたつ．(i) より $H_p' = pH_{p-1}$ であったから，

$$H_{p+1}(x) = xH_p(x) - pH_{p-1}(x)$$

となる．

(iii)．$p = q = 0$ のときは明らかであり，$p > q = 0$ なら (1.2.3) より分かる．$p \geq q \geq 1$ とすれば

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} H_p H_q d\gamma &= \int_{\mathbb{R}} \delta^p 1 \cdot \delta^q 1 d\gamma \\
&= \int_{\mathbb{R}} D\delta^p 1 \cdot \delta^{q-1} 1 d\gamma \quad (\because \delta \text{ is the adjoint of } D) \\
&= \int_{\mathbb{R}} DH_p\, H_{q-1} d\gamma \\
&= \int_{\mathbb{R}} pH_{p-1} H_{q-1} d\gamma \quad (\because \text{(i)}) \\
&= p \int_{\mathbb{R}} H_{p-1} H_{q-1} d\gamma
\end{aligned}$$

[*23] $1 \in \mathscr{S} \subset \mathrm{Dom}\delta^p \cap \mathrm{Dom}\delta^{p-1}$ より (1.2.4) が使える．

がなりたつ．$p>q$ ならば，$q-k=0$ となるまで帰納的に作業を繰り返せば

$$\int_{\mathbb{R}} H_p H_q d\gamma = p(p-1)\cdots(p-k+1)\int_{\mathbb{R}} H_{p-k}H_{q-k}d\gamma = p(p-1)\cdots(p-k+1)\int_{\mathbb{R}} H_{p-k}d\gamma = 0$$

となることが (1.2.3) より分かる．$p=q$ であれば，

$$\int_{\mathbb{R}} H_p H_q d\gamma = p!\int_{\mathbb{R}} H_0 H_0 d\gamma = p!$$

が分かる．

(iv)．(iii) の結果により $\{\frac{1}{\sqrt{p!}}H_p;\, p\geq 0\}$ が $L^2(\gamma)$ の正規直交系になっていることはすぐに分かるから，完全性を示せばよい．

$$V = \mathrm{Span}\left(\{H_p;\, p\geq 0\}\right)$$

とおいたとき[*24]，$\overline{V} = L^2(\gamma)$ を示せばよい．命題 1.1.5 により，V が単項式関数全体の空間を含むことを示せば十分である．単項式の次数 p に関する帰納法で示す．

$p=0$ のときは $1=H_0\in V$ である．$x^p\in V$ が成り立つ[*25]と仮定する．このとき，ある $a_0,\ldots,a_p\in\mathbb{R}$ に対して

$$x^p = a_pH_p(x) + a_{p-1}H_{p-1}(x) + \cdots + a_0H_0(x)$$

がなりたつ．よって

$$\begin{aligned}
&x^{p+1} = x(x^p)\\
&= x(a_pH_p(x) + a_{p-1}H_{p-1}(x) + \cdots + a_0H_0(x))\\
&= a_pxH_p(x) + a_{p-1}xH_{p-1}(x) + \cdots + a_0xH_0(x)\\
&= a_p\{H_{p+1}(x) + pH_{p-1}(x)\} + a_{p-1}\{H_p(x) + (p-1)H_{p-2}(x)\} + \cdots + a_0\{H_1(x) + 0\cdot H_{-1}(x)\}
\end{aligned}$$

となり，$x^{p+1}\in V$ も分かる．ただし，最後の等号は (ii) の結果を用いた．

(v).(iv) の結果より $\{\frac{1}{\sqrt{p!}}H_p;\, p\geq 0\}$ は Hilbert 空間 $L^2(\gamma)$ の完全正規直交系になっているので，任意の $f\in L^2(\gamma)$ に対して

$$f = \sum_{p=0}^{\infty}\left\langle f, \frac{1}{\sqrt{p!}}H_p\right\rangle\cdot\frac{1}{\sqrt{p!}}H_p$$

が（L^2 の意味で）なりたつ．特に $f\in\mathbb{D}^{\infty,2}$ のとき，任意の $p\geq 0$ に対して

$$\begin{aligned}
\left\langle f, \frac{1}{\sqrt{p!}}H_p\right\rangle &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{1}{\sqrt{p!}}H_p(x)\gamma(dx)\\
&= \frac{1}{\sqrt{p!}}\int_{\mathbb{R}} f\cdot\delta^p 1\,\gamma(dx)\\
&= \frac{1}{\sqrt{p!}}\int_{\mathbb{R}} D^pf\cdot 1\,\gamma(dx)\\
&= \frac{1}{\sqrt{p!}}\int_{\mathbb{R}} f^{(p)}\,\gamma(dx)
\end{aligned}$$

[*24] 線形空間 V の部分集合 A に対して，$\mathrm{Span}(A)$ で A によって生成される V の線形部分空間を表す．

[*25] 単項式 x^k と関数 $x\mapsto x^k$ を同一視している．

となるから，[*26]

$$f=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{p!}}\left(\int_{\mathbb{R}}f^{(p)}\,\gamma(dx)\right)H_p$$

$L^2(\gamma)$ の意味で成立．

(vi).(v) において $f(x)=e^{cx}$ とおけば，

$$\begin{aligned}
e^{cx}&=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\left(\int_{\mathbb{R}}D^pf\gamma(dx)\right)H_p(x)\\
&=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{c^p}{p!}\left(\int_{\mathbb{R}}e^{cx}\gamma(dx)\right)H_p(x)\\
&=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{c^p}{p!}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{cx-\frac{x^2}{2}}dx\right)H_p(x)\\
&=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{c^p}{p!}e^{\frac{c^2}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{(x-c)^2}{2}}\gamma(dx)\right)H_p(x)\\
&=e^{\frac{c^2}{2}}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{c^p}{p!}e^{\frac{c^2}{2}}H_p(x)
\end{aligned}$$

が $L^2(\gamma)$ の意味で成立．これより結論が従う．

(vii). テイラー展開により

$$\begin{aligned}
e^{cx-\frac{c^2}{2}}&=e^{\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{(x-c)^2}{2}}\\
&=e^{\frac{x^2}{2}}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{c^p}{p!}\left(\frac{d^p}{dc^p}e^{-\frac{(x-c)^2}{2}}\bigg|_{c=0}\right)\\
&=e^{\frac{x^2}{2}}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^pc^p}{p!}\cdot\frac{d^p}{dx^p}e^{-\frac{x^2}{2}}
\end{aligned}$$

である．(vi) の結果により

$$e^{cx-\frac{c^2}{2}}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{c^p}{p!}e^{\frac{c^2}{2}}H_p(x)$$

であったから，両者の係数を比較すればよい．

(viii).$H_0(x)=1$ および $H_1(x)=x$ より，$p=0,1$ のときは明らかである．$p\geq 1$ として $p,p-1$ に対して主張が成り立つと仮定する．(ii) の結果を用いれば

$$\begin{aligned}
H_{p+1}(-x)&=(-x)H_p(-x)-pH_{p-1}(-x)\\
&=(-x)(-1)^pH_p(x)-p(-1)^{p-1}H_{p-1}(x)\\
&=(-1)^{p+1}\{xH_p(x)-pH_{p-1}(x)\}\\
&=(-1)^{p+1}H_{p+1}
\end{aligned}$$

となるから，$p+1$ でも成立．したがって帰納法により命題の主張が成り立つことが分かる． □

[*26] $f\in\mathbb{D}^{\infty,2}\subset\mathbb{D}^{p,2}$ $(\forall p\in\mathbb{N})$ および $1\in\mathrm{Dom}\,\delta^p$ $(\forall p\in\mathbb{N})$ に注意．

Note 3. 命題 1.4.2 の (ii) から Hermite 多項式 H_p は p 次の多項式であることがわかる．さらに，命題 1.4.2 (ii) を用いると，任意の単項式 x^p は Hermite 多項式の線形結合で表されることも証明できる．このことを p に関する帰納法で示そう．$p=1$ のときは $x=H_1(x)$ である．x^p が Hermite 多項式の線形結合で

$$x^p = a_pH_p(x)+\cdots+a_0H_0(x)$$

と表現されるとする．このとき

$$x^{p+1}=x\sum_{0\le k\le p}a_kH_k(x)=\sum_{0\le k\le p}a_kxH_k(x)=\sum_{0\le k\le p}a_k\{H_{k+1}(x)+kH_{k-1}(x)\}$$

となり，やはりこれは Hermite 多項式の線形結合で表されている．ゆえに，任意の $p\in\mathbb{N}$ について x^p は Hermite 多項式の線形結合で表現されることが示された．

1.5 応用 2：分散の級数展開

N を標準 Gauss 型確率変数とする．$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が十分よい関数であるときに，$f(N)$ の分散の級数展開を考えよう．

命題 1.5.1. $N\sim\mathscr{N}(0,1)$ および $f\in\mathbb{D}^{\infty,2}$ とすれば，

$$\mathrm{Var}[f(N)]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}E[f^{(n)}(N)]^2 \tag{1.5.1}$$

がなりたつ．さらに $f\in\mathscr{S}$ かつ

$$\frac{E[f^{(n)}(N)^2]}{n!}\longrightarrow 0\quad(n\longrightarrow\infty)$$

となるときは

$$\mathrm{Var}[f(N)]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}E[f^{(n)}(N)^2] \tag{1.5.2}$$

が成立する．（各々の級数が収束することも結論に含まれる．）

証明．**Step1：前半の主張について．** まずは $E[f(N)]=0$ の場合に示す．命題 1.4.2 の (v) より

$$f=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}E[f^{(p)}(N)]H_p=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p!}E[f^{(p)}(N)]H_p$$

が $L^2(\gamma)$ の意味で成り立つ．すなわち

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!}E[f^{(p)}(N)]H_p\longrightarrow f\quad\text{in } L^2(\gamma)\text{ as } n\longrightarrow\infty.$$

である．ノルムの連続性より

$$\left\|\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}E[f^{(p)}(N)]H_p\right\|_{L^2(\gamma)}^2\longrightarrow\|f\|_{L^2(\gamma)}^2$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}E[f^{(p)}(N)]H_p\right\|_{L^2(\gamma)}^2 &= \int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!}E[f^{(p)}(N)]H_p(x)\right)^2\gamma(dx)\\ &= \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{p!q!}E[f^{(p)}(N)]E[f^{(q)}(N)]\int_{\mathbb{R}}H_p(x)H_q(x)\gamma(dx)\\ &= \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!}E[f^{(p)}(N)]^2 \quad (\because \text{1.4.2 の (iv).})\end{aligned}$$

$n \longrightarrow \infty$ とすれば

$$\mathrm{Var}[f(N)] = E[f(N)^2] = \|f\|_{L^2(\gamma)}^2 = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p!}E[f^{(p)}(N)]^2$$

一般の場合は $g(x) = f(x) - E[f(N)]$ とおくことで $E[g(N)] = 0$ となるので，ここまでの議論を用いて

$$\mathrm{Var}[f(N)] = E[g(N)^2] = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p!}E[g^{(p)}(N)]^2 = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p!}E[f^{(p)}(N)]^2$$

となる[*27]．

Step2：後半の主張について．以下の関数 g を考える．

$$\begin{aligned} g :]0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}\\ t &\longmapsto E\left[\left(P_{\log(1/\sqrt{t})}f(N)\right)^2\right]\end{aligned}$$

命題 1.3.4 の証明より $f \in \mathscr{S}$ に対して $P_t f \in \mathscr{S}$ であることを思い出そう．$P_0 f(x) = f(x)$ だったから

$$g(1) = E\left[\{P_{\log 1}f(N)\}^2\right] = E\left[\{P_0 f(N)\}^2\right] = E\left[f(N)^2\right]$$

となる．ここで

$$g(0) = E[f(N)]^2$$

とおくことで g は $[0,1]$ 上の連続関数に拡張される．実際

$$\lim_{t\to 0}g(t) = E\left[\lim_{s\to\infty}\left(P_{\log s}f(N)\right)^2\right] = E[E[f(N)]^2] = E[f(N)]^2$$

となることから連続性が分かる[*28]．ここで，g の $[0,1]$ への拡張をあらためて g と書くことにする．このとき

$$\mathrm{Var}[f(N)] = E[f(N)^2] - E[f(N)]^2 = g(1) - g(0)$$

が成り立つことに注意されたい．ここから，Taylor 展開をもちいて分散の級数表示を求めることが目標であ

[*27] g は f を平行移動しただけなので，導関数はどれも等しいことに注意．
[*28] 積分と lim の交換については命題 1.3.4 の証明を参照．

る．$t \in]0,1[$ に対して $g'(t)$ を計算したい．とりあえず被積分関数を微分してみると

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(P_{\log(1/\sqrt{t})}f(N)\right)^2 \\
&= 2\left(P_{\log(1/\sqrt{t})}f(N)\right)\left(\frac{d}{dt}P_{\log(1/\sqrt{t})}f(N)\right) \\
&= 2\left(P_{\log(1/\sqrt{t})}f(N)\right)\left(LP_{\log(1/\sqrt{t})}f(N)\right)\left(\frac{d}{dt}\log\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \quad (\because \text{Note } 1) \\
&= 2\left(P_{\log(1/\sqrt{t})}f(N)\right)\left(LP_{\log(1/\sqrt{t})}f(N)\right)\sqrt{t}(-\frac{1}{2})t^{-\frac{3}{2}} \\
&= -\frac{1}{t}\left(P_{\log(1/\sqrt{t})}f(N)\right)\left(LP_{\log(1/\sqrt{t})}f(N)\right)
\end{aligned}
$$

となる．いま $f \in \mathscr{S}$ であったから，命題 1.3.4 の証明における評価と命題 1.3.6 より微分と期待値の交換が可能である．したがって

$$
\begin{aligned}
g'(t) &= -\frac{1}{t}E\left[\left(P_{\log(1/\sqrt{t})}f(N)\right)\left(LP_{\log(1/\sqrt{t})}f(N)\right)\right] \\
&= \frac{1}{t}E\left[\left(P_{\log(1/\sqrt{t})}f(N)\right)\left(\delta DP_{\log(1/\sqrt{t})}f(N)\right)\right] \quad (\because \text{proposition } 1.3.6) \\
&= \frac{1}{t}E\left[\left(DP_{\log(1/\sqrt{t})}f(N)\right)^2\right] \quad (\because \text{duality}) \\
&= \frac{1}{t}E\left[\left(e^{-\log(1/\sqrt{t})}P_{\log(1/\sqrt{t})}f'(N)\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(P_{\log(1/\sqrt{t})}f'(N)\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

これを用いれば，帰納法により $n \geq 1$ と $t \in]0,1[$ に対して

$$
g^{(n)}(t) = E\left[\left(P_{\log(1/\sqrt{t})}f^{(n)}(N)\right)^2\right]
$$

となることが示される．ここで

$$
\begin{aligned}
g^{(n)}(0) &= (E[f^{(n)}(N)])^2 \\
g^{(n)}(1) &= E[f^{(n)}(N)^2]
\end{aligned}
$$

とおくことにしよう．命題 A.1.2 にしたがって 1 の周りで g を展開すれば

$$
\left|g(0) - g(1) + \sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{(n+1)}}{n!}g^{(n)}(1)\right| = \frac{1}{m!}\int_0^1 g^{(m+1)}(t)t^m dt
$$

となる．命題 1.3.2 により $\forall t \in]0,1[$ に対して

$$
\begin{aligned}
0 &\leq g^{(m+1)}(t) = E\left[\left(P_{\log(1/\sqrt{t})}f^{(m+1)}(N)\right)^2\right] = \|P_{\log(1/\sqrt{t})}f^{(m+1)}\|^2_{L^2(\gamma)} \\
&\leq \|f^{(m+1)}\|^2_{L^2(\gamma)} = E[\{f^{(m+1)}(N)\}^2]
\end{aligned}
$$

が分かるので，

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{m!}\int_0^t g^{(m+1)}(t)t^m dt \\
&\leq \frac{1}{m!}\int_0^t E[\{f^{(m+1)}(N)\}^2]t^m \\
&= \frac{1}{m!}E[\{f^{(m+1)}(N)\}^2]\int_0^t t^m dt \\
&= \frac{1}{m+1}E[\{f^{(m+1)}(N)\}^2]
\end{aligned}
$$

となる．ここで $m \to \infty$ とすれば (1.5.2) が示される．最後に，

$$
g(1) = g(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}g^{(n)}(0)
$$

という展開からも (1.5.1) が導かれることにも注意しておく[*29]． □

1.6 応用 3：2 階の Poincaré 不等式

F, N は確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上定義された可積分なる確率変数とする．F と N の分布間の距離として以下の Wasserstein 距離：

$$
d_W(F,N) = \sup_{h\in \mathrm{Lip}(1)} |E[h(F)] - E[h(N)]|
$$

を導入する．（ただし，$\mathrm{Lip}(K)$ は $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ で，ある $K>0$ に対して

$$
|h(x)-h(y)| \leq K|x-y| \quad (\forall x,y\in\mathbb{R})
$$

を満たすようなもの全体のなす集合である．）$N \sim \mathscr{N}(0,1)$ の場合には，Stein による次の評価が知られている：

$$
d_W(F,N) \leq \sup_{h\in\mathscr{C}^1\cap \mathrm{Lip}(\sqrt{2/\pi})} |E[F\phi(F)] - E[\phi'(F)]| \tag{1.6.1}
$$

ここでは，特に $N\sim\mathscr{N}$ と十分良い $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ によって $F=f(N)$ と表される場合を考えよう．以下では 2 階の Poincaré 不等式と呼ばれる不等式の証明を行う．

命題 1.6.1 (Seoncd-order Poincaré inequality)**.** $N \sim \mathscr{N}(0,1)$ および $f\in\mathbb{D}^{2,4}$ を仮定する．さらに $E[f(N)]=0$ かつ $E[f(N)^2]=1$ が成り立っているとしよう．このとき，以下の不等式が成立．

$$
d_W(f(N),N) \leq \frac{3}{\sqrt{2\pi}}\left(E\left[f''(N)^4\right]\right)^{1/4}\left(E\left[f'(N)^4\right]\right)^{1/4}.
$$

[*29] この級数表現は g が絶対単調関数であることから正当化される．とのことであるが，絶対単調関数についてよく知らないので，調べたら加筆することにします．

証明．命題 1.3.7 と同様の手法により，$\mathscr{C}^1$ 級関数で有界な導関数を持つものに対して

$$
\begin{aligned}
E[f(N)\phi(f(N))] &= E[\{P_0 f(N) - P_\infty f(N)\}\phi(f(N))] \\
&= -\int_0^\infty E\left[\{\frac{d}{dt}P_t f(N)\}\phi(f(N))\right] \\
&= \int_0^\infty E\left[\{\delta D P_t f(N)\}\phi(f(N))\right] \\
&= \int_0^\infty E\left[\{D P_t f(N)\}\{D\phi(f(N))\}\right] \\
&= \int_0^\infty e^{-t} E[\{P_t f'(N)\}\phi'(f(N))f'(N)] \\
&= E\left[\phi'(f(N))f'(N)\int_0^\infty e^{-t}P_t f'(N)dt\right]
\end{aligned}
$$

が成り立つ．特に $\phi(x) = x$ とおくことにより

$$
1 = E[f(N)^2] = E\left[f'(N)\int_0^\infty e^{-t}P_t f'(N)dt\right]
$$

となる．よって，任意の $\phi \in \mathscr{C}^1 \cap \mathrm{Lip}(\sqrt{2/\pi})$ および $f \in \mathscr{S}$ に対して

$$
\begin{aligned}
&|E[f(N)\phi(f(N))] - E[\phi'(f(N))]| \\
&= \left|E\left[\phi'(f(N))f'(N)\int_0^\infty e^{-t}P_t f'(N)dt\right] - E[\phi'(f(N))]\right| \\
&= \left|E\left[\phi'(f(N))\left\{f'(N)\int_0^\infty e^{-t}P_t f'(N)dt - 1\right\}\right]\right| \\
&\le E\left[\left|\phi'(f(N))\left\{f'(N)\int_0^\infty e^{-t}P_t f'(N)dt - 1\right\}\right|\right] \\
&\le \sqrt{\frac{2}{\pi}}E\left[\left|f'(N)\int_0^\infty e^{-t}P_t f'(N)dt - 1\right|\right] \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}E\left[\left|f'(N)\int_0^\infty e^{-t}P_t f'(N)dt - E\left[f'(N)\int_0^\infty e^{-t}P_t f'(N)dt\right]\right|\right] \\
&\le \sqrt{\frac{2}{\pi}}E\left[\left|f'(N)\int_0^\infty e^{-t}P_t f'(N)dt - E\left[f'(N)\int_0^\infty e^{-t}P_t f'(N)dt\right]\right|^2\right]^{1/2} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\mathrm{Var}\left(f'(N)\int_0^\infty e^{-t}P_t f'(N)dt\right)} \qquad (1.6.2)
\end{aligned}
$$

が成立[*30]．さらに Poincaré 不等式 (??) により

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\mathrm{Var}\left[f'(N)\int_0^\infty e^{-t}P_t f'(N)dt\right]} \\
&\le \sqrt{E\left[\{D\left(f'(N)\int_0^\infty e^{-t}P_t f'(N)dt\right)\}^2\right]} \\
&\le \sqrt{E\left[f''(N)^2\left(\int_0^\infty e^{-t}P_t f'(N)dt\right)^2\right]} + \sqrt{E\left[f'(N)^2\left(\int_0^\infty e^{-2t}P_t f''(N)dt\right)^2\right]} \qquad (1.6.3)
\end{aligned}
$$

[*30] $\phi \in \mathscr{C}^1 \cap \mathrm{Lip}(\sqrt{2/\pi})$ より $|\phi'(x)| \le \sqrt{2/\pi}$ となる点に注意．

となることが分かる．これの各項を評価しよう．

$$
\begin{aligned}
&E\left[f''(N)^2\left(\int_0^\infty e^{-t}P_tf'(N)dt\right)^2\right]\\
&\leq \sqrt{E\left[f''(N)^4\right]}\sqrt{E\left[\left(\int_0^\infty e^{-t}P_tf'(N)dt\right)^4\right]} \quad (\because \text{Schwarz inequality})\\
&\leq \sqrt{E\left[f''(N)^4\right]}\sqrt{E\left[\int_0^\infty \left(e^{-t}P_tf'(N)\right)^4 dt\right]} \quad (\because \text{Jensen inequality})\\
&= \sqrt{E\left[f''(N)^4\right]}\sqrt{E\left[\int_0^\infty e^{-4t}\left(P_tf'(N)\right)^4 dt\right]}\\
&= \sqrt{E\left[f''(N)^4\right]}\sqrt{\int_0^\infty e^{-4t}E[(P_tf'(N))^4]dt} \quad (\because \text{Fubini})\\
&= \sqrt{E\left[f''(N)^4\right]}\sqrt{\int_0^\infty e^{-4t}\|P_tf'\|^2_{L^4(\gamma)}dt}\\
&\leq \sqrt{E\left[f''(N)^4\right]}\sqrt{\int_0^\infty e^{-4t}\|f'\|^2_{L^4(\gamma)}dt} \quad (\because \text{contraction property, see proposition1.3.2})\\
&= \sqrt{E\left[f''(N)^4\right]}\sqrt{E[f'(N)^4]\int_0^\infty e^{-4t}dt}\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{E\left[f''(N)^4\right]}\sqrt{E[f'(N)^4]}\\
&\leq \sqrt{E\left[f''(N)^4\right]}\sqrt{E[f'(N)^4]}
\end{aligned}
$$

という評価が成り立つ[*31]．同様にして

$$
\begin{aligned}
E\left[f'(N)^2\left(\int_0^\infty e^{-2t}P_tf''(N)dt\right)^2\right] &\leq \sqrt{E\left[f'(N)^4\right]}\sqrt{E\left[\left(\int_0^\infty e^{-2t}P_tf''(N)dt\right)^4\right]}\\
&\leq \sqrt{E\left[f'(N)^4\right]}\sqrt{E\left[\int_0^\infty e^{-8t}(P_tf''(N))^4dt\right]}\\
&\leq \sqrt{\frac{1}{8}}\sqrt{E\left[f''(N)^4\right]}\sqrt{E[f'(N)^4]}\\
&\leq \frac{1}{4}\sqrt{E\left[f''(N)^4\right]}\sqrt{E[f'(N)^4]}
\end{aligned}
$$

も示される．これらの評価を (1.6.2) および (1.6.3) と合わせて

$$
\begin{aligned}
&|E[f(N)\phi(f(N))] - E[\phi'(f(N))]|\\
&\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\mathrm{Var}\left(f'(N)\int_0^\infty e^{-t}P_tf'(N)dt\right)}\\
&\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\sqrt{E\left[f''(N)^2\left(\int_0^\infty e^{-t}P_tf'(N)dt\right)^2\right]} + \sqrt{E\left[f'(N)^2\left(\int_0^\infty e^{-2t}P_tf''(N)dt\right)^2\right]}\right\}
\end{aligned}
$$

[*31] 途中で教科書よりもよい評価が出ているが，，，

$$
\begin{aligned}
&\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\sqrt{\sqrt{E\left[f''(N)^4\right]}\sqrt{E[f'(N)^4]}}+\sqrt{\frac{1}{4}\sqrt{E\left[f''(N)^4\right]}\sqrt{E[f'(N)^4]}}\right\}\\
&= \frac{3}{\sqrt{2\pi}}E[f''(N)^4]^{1/4}E[f'(N)^4]^{1/4}
\end{aligned}
$$

が任意の $\phi \in \mathscr{C}^1 \cap \mathrm{Lip}(\sqrt{2/\pi})$ と任意の $f \in \mathscr{S}$ に対して成り立つ．$\| \quad \|_{\mathbb{D}^{2,4}}$ ノルムでの近似により，$f \in \mathbb{D}^{2,4}$ でも

$$
|E[f(N)\phi(f(N))] - E[\phi'(f(N))]| \leq \frac{3}{\sqrt{2\pi}}E[f''(N)^4]^{1/4}E[f'(N)^4]^{1/4}
$$

は成立する．ここで $\phi \in \mathscr{C}^1 \cap \mathrm{Lip}(\sqrt{2/\pi})$ について sup をとれば，(1.6.1) より

$$
d_W(f(N), N) \leq \frac{3}{\sqrt{2\pi}}E[f''(N)^4]^{1/4}E[f'(N)^4]^{1/4}
$$

が分かる．[*32] □

[*32] この証明を見る限り，定数 $\frac{3}{\sqrt{2\pi}}$ はリプシッツ係数によって変わるので，何か意味のある量には見えないのだが,,,

2　Malliavin 作用素と等正規 Gauss 過程

2.1　等正規 Gauss 過程

$\mathfrak{H}$ を可分な実ヒルベルト空間とし[*33]，$\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{H}}$ をその内積，$\|\ \|_{\mathfrak{H}} = \sqrt{\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{H}}}$ をノルムとする．確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を考える．$X = \{X(h) : h \in \mathfrak{H}\}$ で $\mathfrak{H}$ 上の等正規ガウス過程 (isonormal Gaussian process [*34]) を表すことにする．すなわち，X は平均 0 のガウス系で，任意の $g, h \in \mathfrak{H}$ に対して $E[X(g)X(h)] = \langle g, h\rangle_{\mathfrak{H}}$ を満たすものである．X' がまた $\mathfrak{H}$ の等正規 Gauss 過程であるならば，X と X' の分布は一致する[*35]．

我々はこれ以降，$\mathscr{F}$ は X によって生成される σ-加法族であると仮定する．表記の簡略化のため，$L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を単に $L^2(\Omega)$ などとも書くことにする．

命題 2.1.1. 可分な実 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ が与えられたとき，$\mathfrak{H}$ の上の等正規 Gauss 過程が存在する．

証明. $\mathfrak{H}$ を可分な実 Hilbert 空間とし，$(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ を $\mathfrak{H}$ の完全正規直交系（CONS）とする．また，$(Z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ をそれぞれ独立に $\mathscr{N}(0,1)$ にしたがう確率変数族としよう[*36]．このとき，任意の $h \in \mathfrak{H}$ に対して

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \langle h, e_j\rangle_{\mathfrak{H}}^2 = \|h\|_{\mathfrak{H}}^2 < \infty$$

がなりたつ．

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=m}^{n} \langle h, e_j\rangle_{\mathfrak{H}} Z_j \right\|_{L^2(\Omega)} &= E\left[\left(\sum_{j=m}^{n} \langle h, e_j\rangle_{\mathfrak{H}} Z_j \right)^2 \right] \\
&= E\left[\sum_{j=m}^{n} \langle h, e_j\rangle_{\mathfrak{H}}^2 Z_j^2 \right] \qquad (\because (Z_j) \text{ の独立性}) \\
&= \sum_{j=m}^{n} \langle h, e_j\rangle_{\mathfrak{H}}^2 E[Z_j^2] \\
&= \sum_{j=m}^{n} \langle h, e_j\rangle_{\mathfrak{H}}^2
\end{aligned}$$

との評価より，$(\sum_{j=0}^{n} \langle h, e_j\rangle_{\mathfrak{H}} Z_j)_{n\in\mathbb{N}}$ が $L^2(\Omega)$ の Cauchy 列であることが分かった．$L^2(\Omega)$ の完備性より，極限が存在するので

$$X(h) := \sum_{j=0}^{\infty} \langle h, e_j\rangle_{\mathfrak{H}} Z_j$$

とおくことにする．また，記号の利便性を求め

$$X^{(n)}(h) = \sum_{j=0}^{n} \langle h, e_j\rangle_{\mathfrak{H}} Z_j$$

[*33] $\mathfrak{H}$ はドイツ文字の大文字 H である．（念のため）

[*34] isonormal の標準的な訳語が不明なので，とりあえず「等正規」とすることにした．

[*35] Gauss 系の分布は平均と分散によって一意に決定するから．補足を参照.

[*36] 某かの確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ の上で定義された，ということ．このような確率変数族の存在は Kolmogorov の拡張定理より示される．

と書くことにしよう．定義より $X^{(n)}(h) \to X(h)$ が L^2-収束の意味で成り立つが，実はさらにこれは概収束の意味でも成立することがわかる．[*37]

このように構成された族 $\{X(h); h \in \mathfrak{H}\}$ が $\mathfrak{H}$ に関する等正規 Gauss 過程であることを示そう．いま，$\{X(h); h \in \mathfrak{H}\}$ は $\{Z_j; j \in \mathbb{N}\}$ が生成する $L^2(\Omega)$ の部分空間の閉包に含まれるから，それ自身が Gauss 系であることが容易に分かる．$X(h)$ は $X^{(n)}(h)$ の L^1 極限にもなっていることに注意すれば

$$E[X(h)] = \lim_{n\to\infty} E[X^{(n)}(h)] = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \langle h, e_j \rangle_{\mathfrak{H}} E[Z_j] = 0$$

であることもわかる．最後に，$E[X(h)X(h')] = \langle h, h' \rangle_{\mathfrak{H}}$ であることを示そう．いま，

$$\begin{aligned}
&E[|X^{(n)}(h)X^{(n)}(h') - X(h)X(h')|] \\
&\leq E[|X^{(n)}(h) - X(h)||X^{(n)}(h')|] + E[|X^{(n)}(h') - X(h')||X(h)|] \\
&\leq E[|X^{(n)}(h) - X(h)|^2]E[|X^{(n)}(h')|^2] + E[|X^{(n)}(h') - X(h')|^2]E[|X(h)|^2] \\
&\leq E[|X^{(n)}(h) - X(h)|^2] \sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X^{(n)}(h')|^2] + E[|X^{(n)}(h') - X(h')|^2]E[|X(h)|^2] \\
&\longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

であるから，

$$E[X(h)X(h')] = \lim_{n\to\infty} E[X^{(n)}(h)X^{(n)}(h')]$$

がなりたつ．一方，

$$\begin{aligned}
&E[X^{(n)}(h)X^{(n)}(h')] \\
&= E\left[\left(\sum_{j=0}^{n} \langle h, e_j \rangle_{\mathfrak{H}} Z_j\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \langle h', e_j \rangle_{\mathfrak{H}} Z_j\right)\right] \\
&= E\left[\sum_{j=0}^{n} \langle h, e_j \rangle_{\mathfrak{H}} \langle h', e_j \rangle_{\mathfrak{H}} Z_j^2\right] \quad (\because \text{independence}) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \langle h, e_j \rangle_{\mathfrak{H}} \langle e_j, h' \rangle_{\mathfrak{H}} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \langle h, h' \rangle_{\mathfrak{H}} \quad (\because \text{Parceval equation})
\end{aligned}$$

となることもわかるから，

$$E[X(h)X(h')] = \langle h, h' \rangle_{\mathfrak{H}}$$

である． □

注意 2.1.2. 前の証明において，

$$\sum_{j=0}^{\infty} \langle h, e_j \rangle_{\mathfrak{H}}$$

が概収束の意味でも成立すると述べたが，それは ‘Lévy equivalence theorem’ と呼ばれる事実による．その主張は次の通り：独立確率変数列の和 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に関して，以下の 3 条件は同値．

[*37] 注意**??**を参照のこと．しかし，この事実はどこで使った？

(i) $\sum_{j=0}^{\infty} X_j$ は概収束する．
(ii) $\sum_{j=0}^{\infty} X_j$ は確率収束する．
(iii) $\sum_{j=0}^{\infty} X_j$ は法則収束する．

等正規 Gauss 過程の例をいくつかあげる．

例 2.1.3 (ユークリッド空間)**.** 整数 $d \geq 1$ を固定し，$\mathfrak{H} = \mathbb{R}^d$ とする．（内積は $\mathbb{R}^d$ の標準内積を考える．）$(e_1, \ldots, e_d)$ を $\mathbb{R}^d$ の標準基底とする．$(Z_1, \ldots, Z_d)$ を独立に $\mathscr{N}(0,1)$ に従う確率変数の有限族とする．任意の $h = \sum_{j=1}^{d} c_j e_j$ に対して

$$X(h) = \sum_{j=1}^{d} c_j Z_j$$

と定義すれば，$X = \{X(h); h \in \mathbb{R}^d\}$ は $\mathbb{R}^d$ に関する等正規 Gauss 過程である．

例 2.1.4 (Gaussian 測度)**.** 測度空間 $(A, \mathscr{A}, \mu)$ を考える．A をポーランド空間（i.e. 可分完備な距離空間[*38]）とし，$\mathscr{A}$ を Borel σ-加法族とする．また μ は非負かつ σ-有限で，atom を持たないものとする[*39]．このとき，$L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ は可分 Hilbert 空間となる．コントロール μ をもつ $(A, \mathscr{A})$ に関する (real) Gaussian random measure を以下のように定義しよう．

$$G = \{G(B) \mid B \in \mathscr{A},\ \mu(B) < \infty\}$$

は平均 0 の Gauss 系で，任意の測度有限な $B, C \in \mathscr{A}$ に対して $E[G(B)G(C)] = \mu(B \cap C)$ を満たすものである．

いま，Hilbert 空間 $\mathfrak{H} = L^2(A, \mathscr{A}, \mu)$ を考えよう．もちろんその内積は

$$\langle g, h \rangle_{\mathfrak{H}} = \int_A g(a)h(a)\mu(da)$$

で表される．任意の $h \in \mathfrak{H}$ に対して

$$X(h) = \int_A h(a)G(da)$$

と定義する．ただし，右辺は G に関する Wiener-Itô 積分である．このとき，$X = \{X(h) \mid h \in L^2(A\mathscr{A}, \mu)\}$ は平均 0 で共分散 $E[X(h)X(g)] = \langle h, g \rangle_{\mathfrak{H}}$ をもつ Gauss 系であり，よって $L^2(A, \mathscr{A}, \mu)$ に関する等正規 Gauss 過程となっている．例えば，$A = [0, \infty[$ とおいて μ をルベーグ測度とすれば，$W_t = G([0, t[)$ $(t \geq 0)$ は 0 出発の標準 Brown 運動である．（もちろん，正確には W として連続なバージョンをとるということである．）そして，このとき X は W よって生成される $L^2(\Omega)$ の閉線形 Gauss 空間[*40]になっている．

Note 4 (Wiener-Itô 積分の定義)**.** $\mathscr{E}$ を A 上の単関数の空間, すなわち $h = \sum_{j=1}^{n} a_j 1_{A_j}$ (ただし, $\mu(A_j) < \infty$ なるもの）という表現をもつ関数全体とする．この h に対して

$$\int_A h(a)G(da) = \sum_{j=1}^{n} a_j G(A_j) \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$$

[*38] Polish space の定義は separable completely ‘metrizable’ とすることが多いようだが...
[*39] $E \in \mathscr{A}$ とする．$F \in \mathscr{A}$ で $F \subset E$ かつ $0 < \mu(F) < \mu(E)$ なるものが存在しないとき，E は μ の atom であるという．
[*40] って何だ？

と定義する．一般の $h \in L^2(A, \mathscr{A}, \mu)$ に対しては，$\mathscr{E}$ の列 (h_n) で $h_n \to h$ in $L^2(\mu)$ となるものをとって

$$\int_A h(a)G(da) := \lim_{n\to\infty} \int_A h_n(a)G(da)$$

と定義する．ただし，極限は $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ の意味である．極限の存在は $L^2(\Omega)$ の完備性より分かる．

例 2.1.5 (Isonormal process derived from covariance)**.** $\{Y_t; t \geq 0\}$ を平均 0 の実数値 Gauss 過程とし，$R(s,t) = E[Y_s Y_t]$ を Y の共分散関数とする．Y は次のようにしてある等正規 Gauss 過程に埋め込むことが可能である：

(i)$1_{[0,t]}$ $t \geq 0$ の形の指示関数全体が生成する線形空間を $\mathscr{E}$ とする．

(ii) 次で定義される内積について $\mathscr{E}$ の閉包をとって得られる Hilbert 空間を $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_R$ とする．

$$\langle f, h \rangle_R = \sum_{i,j} a_i c_j R(s_i, t_j)$$

ただし，$f, h \in \mathscr{E}$ で

$$f = \sum_i a_i 1_{[0,s_i]}$$
$$h = \sum_j c_j 1_{[0,t_j]}$$

(iii)$h = \sum_j a_j 1_{[0,t_j]} \in \mathscr{E}$ に対して $X(h) = \sum_j a_j Y_{t_j}$ と定める．

(iv)$h \in \mathfrak{H}_R$ とする．$(h_n) \in \mathscr{E}^{\mathbb{N}}$ が h を近似するとき，$X(h)$ を $X(h_n)$ の $L^2(\Omega)$ 極限として定義する．このような列は実際に存在するが一意とは限らないこと，そして $X(h)$ は近似列のとりかたによらず定めることに注意しておく．

このとき，構成の仕方より $\{X(h); h \in \mathfrak{H}_R\}$ は等正規 Gauss 過程となる．

例 2.1.6 (偶関数と対称測度)**.** β を $(-\pi, \pi]$ 上の対称測度[*41]でアトムを持たないものとし，

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{E,\beta} = L^2((-\pi, \pi], d\beta)$$

とおく．ただし，$L^2_E((-\pi, \pi], d\beta)$ は $(-\pi, \pi]$ 上の β -二乗可積分な複素数値偶関数 [*42]のなす，$\mathbb{R}$ -線形空間とする．$\mathfrak{H}_{E,\beta}$ は以下の内積により Hilbert 空間となる．

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_\beta = \int_{-\pi}^{\pi} \psi_1(x)\psi_2(-x)\, d\beta \ \in \mathbb{R}$$

このとき，

$$X_\beta = \{X_\beta(\psi); \mathfrak{H}_{E,\beta}\}$$

という形の等正規 Gauss 過程が考えられる．これは，時系列のスペクトル理論で用いられるものである．

例 2.1.7 (Gauss 自由場)**.** $d \geq 2$ として，$\mathbb{R}^d$ の部分集合 D を定義域として設定する．$H_s(D)$ で $\mathbb{R}^d$ 上の実数値 C^1 級関数でその台が D のコンパクト集合になっているようなもの全体とする．

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \nabla f \cdot \nabla g \, dx$$

[*41] $d\beta(x) = d\beta(-x)$

[*42] 複素数値の偶関数とは，$\psi(-x) = \overline{\psi(x)}$ をみたすということ．

を内積として $H_s(D)$ の閉包をとったものを $H(D)$ とおくことにする．$\{X(h);\, h \in H(D)\}$ というタイプの等正規 Gauss 分布は Gauss 自由場 (Gaussian free field, GFF) と呼ばれる．

注意 2.1.8. $X = \{X(h) \mid h \in \mathfrak{H}\}$ が等正規 Gauss 過程ならば，$h \mapsto X(h)$ は線形である．実際，任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ および任意の $h, g \in \mathfrak{H}$ に対して

$$
\begin{aligned}
&E\left[(X(\lambda h + \mu g) - \lambda X(h) - \mu X(g))^2\right] \\
&= E[X(\lambda h + \mu g)^2] + \lambda^2 E[X(h)^2] + \mu^2 E[X(g)^2] \\
&\qquad - 2\lambda E[X(\lambda h + \mu g)X(h)] - 2\mu E[X(\lambda h + \mu g)X(g)] + 2\lambda\mu E[X(h)X(g)] \\
&= \|\lambda h + \mu g\|_{\mathfrak{H}}^2 + \lambda^2 \|h\|_{\mathfrak{H}}^2 + \mu^2 \|g\|_{\mathfrak{H}}^2 \\
&\qquad - 2\lambda \langle \lambda h + \mu g, h\rangle_{\mathfrak{H}} - 2\mu \langle \lambda h + \mu g, g\rangle_{\mathfrak{H}} + 2\lambda\mu \langle h, g\rangle_{\mathfrak{H}} \\
&= (\lambda^2 \|h\|_{\mathfrak{H}}^2 + \mu^2 \|g\|_{\mathfrak{H}}^2 + 2\lambda\mu \langle h, g\rangle_{\mathfrak{H}}) - \|\lambda h + \mu g\|_{\mathfrak{H}}^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

である．すなわち $X(\lambda h + \mu g)$ と $\lambda X(h) + \mu X(g)$ は $L^2(\Omega)$ の元として（よって a.e. で）等しい．

注意 2.1.9. 等正規 Gauss 過程は中心 0 の $L^2(\Omega)$ -閉線形　Gauss 空間[*43]と $\mathfrak{H}$ の間の（Hilbert 空間としての）同型写像になっている．線形空間としての同型になっていることは注意 2.1.8 よりわかり，内積に関する条件

$$E[X(h)X(g)] = \langle h, g\rangle_{\mathfrak{H}}$$

より特に等長同型であることまで示される．

$L^2(\Omega)$ の Gauss 系で閉線形部分空間になっているもの $\mathscr{G}$ を考える．このとき，$\mathscr{G}$ 自身も明らかに可分 Hilbert 空間である．$\mathfrak{H} = \mathscr{G}$ とおくことにより[*44]，$\mathscr{G}$ は等正規 Gauss 過程となるから，重要なのはその場合に適した同型を選択することである．

以下の章では，等正規 Gauss 過程 $X = \{X(h);\ h \in \mathfrak{H}\}$ を固定して議論を進める．

2.2 Wiener カオス

命題 2.2.1. $Z, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ はその結合分布がまた Gauss 分布であるとする[*45]とすると次が成り立つ: $\forall n, m \geq 0$ に対し,

$$E[H_n(Z)H_m(Y)] = \begin{cases} n!(E[ZY])^n & \text{if } n = m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

注意 2.2.2. 命題 2.1 において $0^0 = 1$ と解釈する[*46]．したがって $E[ZY] = 0, n = m = 0$ のとき $E[H_n(Z)H_m(Y)] = 0$ である．

証明. $\rho = E[ZY](= \mathrm{Cov}(Z,Y))$ とおく．$N, \widetilde{N}$ を独立に正規分布 $\mathcal{N}(0,1)$ に従う確率変数とすると, 2 次元確率ベクトル (Z, Y) と $(N, \rho N + \sqrt{1-\rho^2}\widetilde{N})$ は同じ分布を持っている．これを確かめるためにその特性関数

[*43] って何だ？ Gaussian space はとりあえず Gauss 系の意味で解釈しておく．
[*44] X としては恒等写像となる．
[*45] すなわち, 2 次元確率ベクトル (Z, Y) は正規分布に従う.$\{Z, Y\}$ が Gauss 系であるといっても同じである．
[*46] というより, こうしておくとで整合性がとれる．$E[H_0(Z)] = E[H_0 Y] = 1$ なので

を計算してみよう．$(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2$ とすれば，

$$
\begin{aligned}
&E\left[\exp\left\{i\xi N+i\eta(\rho N+\sqrt{1-\rho^2}\widetilde{N})\right\}\right]\\
&=E\left[\exp\{i(\xi+\eta\rho)N\}\exp\left\{i\eta\sqrt{1-\rho^2}\widetilde{N}\right\}\right]\\
&=E\left[\exp\{i(\xi+\eta\rho)N\}\right]E\left[\exp\left\{i\eta\sqrt{1-\rho^2}\widetilde{N}\right\}\right]\quad(\because \text{独立性})\\
&=\exp\left\{-\frac{1}{2}(\xi+\eta\rho)^2\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\eta\sqrt{1-\rho^2})^2\right\}\\
&=\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\xi^2+2\rho\xi\eta+\eta^2\right)\right\}\\
&=\exp\left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\xi & \eta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．最後の項は Gauss 分布 (Z,Y) の特性関数と等しいから，これらの分布は一致する．したがって，(Z,Y) の分布の計算は $(N,\rho N+\sqrt{1-\rho^2}\widetilde{N})$ を用いて行うことができるのである．以下，ρ の値に応じて場合分けして求めたい等式が実際に成立していることを確かめよう．

Case 1：$\rho>0$ のとき．

$$
\begin{aligned}
&E[H_n(Z)H_m(Y)]\\
&=E[H_n(N)H_m(\rho N+\sqrt{1-\rho^2}\widetilde{N}))]\\
&=\int_{\mathbb{R}^2}H_n(x)H_m(\rho x+\sqrt{1-\rho^2}y)(N,\widetilde{N})_*P(dxdy)\\
&=\int_{\mathbb{R}}H_n(x)\left[\int_{\mathbb{R}}H_m(\rho x+\sqrt{1-\rho^2}y)\widetilde{N}_*P(dy)\right]N_*P(dx)\quad(\because \text{独立性})\\
&=\int_{\mathbb{R}}H_n(x)\left[\int_{\mathbb{R}}H_m(\rho x+\sqrt{1-\rho^2}y)\gamma(dy)\right]\gamma(dx)\\
&=\int_{\mathbb{R}}H_n(x)P_{\log(1/\rho)}H_m(x)\gamma(dx)\quad(\because \text{Ornstein-Uhlenbeck 半群の定義})\\
&=\int_{\mathbb{R}}H_n(x)e^{-m\log(1/\rho)}H_m(x)\gamma(dx)\quad(\because \text{命題 1.4.2 の (i)})\\
&=e^{-m\log(1/\rho)}\int_{\mathbb{R}}H_n(x)H_m(x)\gamma(dx)\\
&=\rho^m\int_{\mathbb{R}}H_n(x)H_m(x)\gamma(dx)\\
&=\begin{cases}\rho^n\, n! & n=m\text{ のとき，}\\ 0 & \text{その他}\end{cases}\quad(\because \text{命題 1.4.2 の (iii)})
\end{aligned}
$$

Case 2：$\rho=0$ のとき．(Z,Y) は Gaussian 分布をもつから，条件 $0=E[ZY]=\mathrm{Cov}(Z,Y)$ は Z と Y が独立であることを意味する．よって $H_n(Z)$ と $H_m(Y)$ は独立であり，

$$
\begin{aligned}
E[H_n(Z)H_m(Y)]&=E[H_n(Z)]E[H_m(Y)]\\
&=E[H_n(Z)H_0(Z)]E[H_m(Y)H_0(Y)]\\
&=\begin{cases}1 & n=m=0\text{ のとき}\\ 0 & \text{その他}\end{cases}\quad(\text{命題 1.4.2 の (iii)})
\end{aligned}
$$

となる．

Case 3：$\rho < 0$ のとき．標準正規分布の対称性に注意すれば，case 1 での結果より

$$\begin{aligned}
&E[H_n(Z)H_m(Y)] \\
&= E\left[H_n(N)H_m\left(\rho N + \sqrt{1-\rho^2}\widetilde{N}\right)\right] \\
&= (-1)^n E\left[H_n(-N)H_m\left(|\rho|(-N) + \sqrt{1-\rho^2}\widetilde{N}\right)\right] \quad (\because \text{命題 1.4.2 の (viii)}) \\
&= \begin{cases} (-1)^n|\rho|^n n! & n = m \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \rho^n n! & n = m \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}
\end{aligned}$$

と計算できる． □

H_n は多項式であるから，命題 2.2.1 における $H_n(Z)$, $H_m(Y)$ は任意の次数の可積分性をもつ．特に $H_n(Z), H_m(Y) \in L^2(\Omega)$ であるから，命題 2.2.1 より $n \neq m$ なら $H_n(Z)$ と $H_m(Y)$ は $L^2(\Omega)$ の元として直交することがわかる．

定義 2.2.3. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$\mathscr{H}_n$ で $\{H_n(X(h)) \mid h \in \mathfrak{H}, \|h\|_{\mathfrak{H}} = 1\}$ によって生成される $L^2(\Omega)$ の閉部分空間を表し, X の n 階の Wiener カオス (Wiener chaos) と呼ぶ.

Hermite 多項式の定義を思い出せば，$H_0 = 1$（定数関数）であった．よって $\mathscr{H}_0 = \mathbb{R}$ である．また $H_1(x) = x$ であったから，$\mathscr{H}_1 = \{X(h) \mid h \in \mathfrak{H}\}$ となっている[*47]．命題 2.2.1 から $n \neq m$ ならば $\mathscr{H}_n$ と $\mathscr{H}_m$ は ($L^2(\Omega)$ の内積に関して) 直交していることが分かるので, $L^2(\Omega)$ の部分空間として直和 Hilbert 空間 $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{H}_n$ が定義される．この空間が実は $L^2(\Omega)$ 全体になっていることを主張するのが次の定理である．この結果は Wiener-伊藤カオス展開などと呼ばれている．

定理 2.2.4. (i) $\{H_n(X(h)) \mid n \geq 0, h \in \mathfrak{H}, \|h\| = 1\}$ によって生成される線形空間は任意の $q \in [1, \infty[$ に対し, $L^q(\Omega)$ の稠密部分空間をなす.

(ii) $L^2(\Omega) = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{H}_n$ が成り立つ.

定理 2.2.4 より，任意の $F \in L^2(\Omega)$ は $F = E[F] + \sum_{n\geq 1} F_n$（$F_n \in \mathscr{H}_n$）という形に一意に級数展開される．

注意 2.2.5. $F \in L^2(\Omega)$ への $\mathscr{H}_n$ 直交射影 F_n を $\mathrm{Proj}(F|\mathscr{H}_n)$ や $J_n(F)$ などで表す．

例 2.2.6 (Wiener-Ito カオス分解の例)．Chaos 分解を用いた級数展開の例を見てみよう．とある $\varphi \in L^2(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \gamma)$ とノルムが 1 の $h \in \mathfrak{H}$ を用いて $F = \varphi(X(h))$ と表現される確率変数を考えてみる．命題 1.4.2 (iv) から，φ は $L^2(\gamma)$ において

$$\varphi = \sum_{n\geq 0} \left\langle \varphi, \frac{1}{\sqrt{n!}} H_n \right\rangle \frac{1}{\sqrt{n!}} H_n = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi H_n \, d\gamma \right) H_n$$

[*47] 注意 2.1.8 および 2.1.9 からわかる．

と級数展開される．いま $X(h)$ が γ に関して絶対連続な分布をもつことに注意すれば，

$$\begin{aligned}\varphi(X(h)) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)H_n(x)\gamma(dx)\right)H_n(X(h))\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varphi(x)H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)H_n(X(h))\end{aligned}$$

が a.e. の意味で成り立つことがわかる．

証明．**(i) の証明．** $q\in[1,\infty[$ を固定し，η を q の共役指数とする．Hahn-Banach の定理の応用より，任意の $F\in L^{\eta}(\Omega)$ が

$$\forall n\geq 0,\ \forall h\in\mathfrak{H},\ \|h\|_{\mathfrak{H}}=1,\ E[FH_n(X(h))]=0 \implies F=0 \tag{2.2.1}$$

を満たすことを示せばよい．$F\in L^{\eta}(\Omega)$ は (2.2.1) の仮定を満たすとする．任意の単項式が Hermite 多項式の線形結合で表現できる[*48]ことに注意すれば，このとき任意の $n\geq 0$ と $\|h\|=1$ なる $h\in\mathfrak{H}$ に対して，$E[FX(h)^n]=0$ が成り立つ．ここで，

$$\left|F\sum_{0\leq k\leq n}\frac{(i\xi X(h))^k}{k!}\right|\leq |F|e^{|\xi X(h)|}$$

であることと，$X(h)$ は Gauss 分布をもつから右辺の関数は可積分であることに注意して Lebesgue の収束定理を用いれば，

$$E[Fe^{i\xi X(h)}]=\sum_{n\to\infty}\sum_{0\leq k\leq n}(i\xi)^kE[FX(h)^k]=0\quad\forall\xi\in\mathbb{R}$$

がわかる．$h\mapsto X(h)$ の線形性を用いれば，さらに任意の $h\in\mathfrak{H}$ に対して $E[Fe^{iX(h)}]$ が成り立つことも示される．

さて，ここで $(\Omega,\mathscr{F})$ 上の（符号付）測度 Q を

$$Q(A)=\int_A FdP$$

によって定義する．このとき写像 $\mathfrak{H}\ni h\mapsto X(h)\in L^2(\Omega)$ の線形性と先ほどの議論より，任意の $m\geq 1$ と $\xi_1,\dots,\xi_m\in\mathbb{R}$ および $h_1,\dots,h_m\in\mathfrak{H}$ に対して，

$$\int_{\Omega}\exp\left(i\sum_{1\leq i\leq m}\xi_iX(h_i)\right)dQ=0 \tag{2.2.2}$$

が成り立つ．(2.2.2) は像測度 $(X(h_1),\dots,X(h_m))_*Q\colon\mathscr{B}(\mathbb{R}^m)\to\mathbb{R}$ の Fourier 変換が 0 であるということであり，よって $(X(h_1),\dots,X(h_m))_*Q$ は零測度である．これより $\sigma(X(h_1),\dots,X(h_m))$ 上で Q は 0 となる．$\mathscr{F}$ は π 系

$$\bigcup\{\sigma(X(h_1),\dots,X(h_m))\mid m\geq 1,\ h_1,\dots,h_m\in\mathfrak{H}\}$$

によって生成されるので，Q は $\mathscr{F}$ 上で 0 であることがわかる．

(ii) の証明． $\{H_n(X(h))\mid n\geq 0,\ h\in\mathfrak{H},\ \|h\|=1\}$ によって生成される部分空間を V とおけば，(i) での結果より $\mathrm{Cl}_{L^2(\Omega)}V=L^2(\Omega)$ である．定義より明らかに $V\subset\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{H}_m$ であり，$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{H}_m$ は $L^2(\Omega)$ の閉部分空間だから $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{H}_m=L^2(\Omega)$ がわかる． □

[*48] Note 3

2.3 微分作用素

本節では，Malliavin 微分とそれに関する Sobolev 空間の概念を導入する．

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間，$\mathfrak{H}$ を可分 Hilbert 空間，$X = \{X(h); h \in \mathfrak{H}\}$ を等正規 Gauss 過程とする．$\mathscr{S}$ で以下のような表現をもつ確率変数全体の空間を表すことにする：

$$f(X(\phi_1), \dots, X(\phi_m)), \tag{2.3.1}$$

ただし $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，$f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ は f およびその全ての導関数が高々多項式増大であるもの，$\phi_i \in \mathfrak{H}$ $(i = 1, \dots, m)$ である．$\mathscr{S}$ に属する確率変数は滑らかであるということにする．$\mathscr{S}$ に多項式増大条件を課しているのは，1 章で述べたのと同じように我々の考察の中心となるのは Gauss 分布だからである．Malliavin 微分の導入に際しては，まずはこの $\mathscr{S}$ 上に微分を定義し，それを（一次元の場合を同じように）拡張するという方針で議論を展開していく．そのためには，1 章における $\mathscr{S}$ と同じように，$\mathscr{S}$ が十分大きい空間であることが望ましいだろう．それを保証するのが以下の補題である．

補題 2.3.1. 任意の $q \in [1, \infty[$ に対して $\mathscr{S}$ は $L^q(\Omega)$ で稠密である．

証明．H_n はそれ自身多項式であるから，

$$\{H_n(X(h)) \mid n \geq 0,\ h \in \mathfrak{H},\ \|h\|_{\mathfrak{H}} = 1\} \subset \mathscr{S}$$

が成り立つ．したがって，定理 2.2.4 (i) より補題の主張が従う． □

定義 2.3.2. $F \in \mathscr{S}$ は (2.3.1) の表現を持つものとし，$p \geq 1$ を整数とする．F の p 階 Malliavin 微分 (Malliavin derivative) を以下で定義する．

$$D^p F = \sum_{i_1, \dots, i_p = 1}^{m} \frac{\partial^p}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_p}} f(X(\phi_1), \dots, X(\phi_m)) \phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_p}.$$

$p = 1$ のときには単に Malliavin 微分と呼び，$D^1 = D$ などとも書く．

$F \in \mathscr{S}$ なら，その Malliavin 微分は任意の $q \geq 1$ について $L^q(\Omega, \mathfrak{H}^{\odot p})$ の元となる[*49]．このことを確かめよう．F は (2.3.1) の表現を持つとすると，その Malliavin 微分は定義より

$$D^p F = \sum_{i_1, \dots, i_p = 1}^{m} \frac{\partial^p}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_p}} f(X(\phi_1), \dots, X(\phi_m)) \phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_p}$$

となるのであった．これより右辺の和の各項の可積分性を調べればよい．いま f の微分は高々多項式増大であり，m 次元の確率変数 $(X(\phi_1), \dots, X(\phi_m))$ の分布は Gauss 分布であることに注意すれば，

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left\| \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_p}} (X(\phi_1), \dots, X(\phi_m)) \phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_p} \right\|_{\mathfrak{H}^{\otimes p}}^q dP \\
&\leq \prod_{1 \leq k \leq p} \|\phi_{i_k}\|_{\mathfrak{H}}^q \int_\Omega \left| \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_p}} (x_1, \dots, x_m) \right|^q (X(\phi_1), \dots, X(\phi_m))_* P(dx_1 \dots dx_m) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

がわかる．

[*49] 対称性については以下の注意 2.3.3

注意 2.3.3. (i) D^pF の定義に現れるテンソル積 $\phi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\phi_{i_p}$ は一般に対称ではない．しかし Malliavin 微分の定義においては和をとることにより対称化されているため，その微分は対称テンソル積 $\mathfrak{H}^{\odot p}$ 値の関数となる．

(ii) Malliavin 微分は次のような意味で方向微分ととらえることができる．$h\in\mathfrak{H}$ および (2.3.1) の表現をもつ $F\in\mathscr{S}$ に対して，a.e. で

$$\begin{aligned}\langle DF,h\rangle_{\mathfrak{H}} &= \left\langle \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} f(X(\phi_1),\ldots,X(\phi_m))\phi_i, h\right\rangle_{\mathfrak{H}}\\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} f(X(\phi_1),\ldots,X(\phi_m))\langle\phi_i,h\rangle_{\mathfrak{H}}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\{f(X(\phi_1)+\varepsilon\langle\phi_1,h\rangle_{\mathfrak{H}},\ldots,X(\phi_m)+\varepsilon\langle\phi_m,h\rangle_{\mathfrak{H}})-F\}\end{aligned}$$

が成り立つ．つまり，F の h 方向微分 $\langle DF,h\rangle$ は f の $(X(\phi_1),\ldots,X(\phi_m))$ における，$(\langle\phi_1,h\rangle_{\mathfrak{H}},\ldots,\langle\phi_m,h\rangle_{\mathfrak{H}})$ 方向への方向微分である．

Milliavin 微分の定義と関連して，Banach 空間における微分概念の復習をしよう．

Note 5. Banach 空間における（古典的な）微分の概念として基本的なものに Fréchet 微分と Gâteaux 微分がある．E, F を Banach 空間とし，E の開集合 U 上の関数 $f\colon U\to F$ を考えよう．

$x\in U$ とする．ある線形写像 $L_x\in\mathscr{L}(E,F)$ で[*50]

$$f(x+u)-f(x)-L_x(u)=o(\|u\|),\quad (x+u\in U)$$

を満たすものが存在するとき[*51]，f は x で Fréchet 微分可能であるという．f が x で Fréchet 微分可能とは f が x の近傍上では線形写像で良く近似できるということであり，これは全微分の考え方である．なお，Fréchet 微分可能性の定義をより厳密に書くと，例えば次のように表現できるだろう：$x\in U$, $L_x\in\mathscr{L}(E,F)$ とする．任意の $\varepsilon>0$ に対してある $\delta>0$ で，$u\in U_\delta(0)\cap U-x$ となる任意の u に対して

$$\|f(x+u)-f(x)-L_x(u)\|_F<\varepsilon\|u\|_E$$

を満たすものが存在するとき，f は x で Fréchet 微分可能であるといい，L_x を f の x における Fréchet 微分という．

以上の全微分の概念と異なる微分概念として，方向微分の概念である Gâteaux 微分がある．先ほどと同様に $f\colon U\to F$ および $x\in U$ を考える．$\widetilde{L}_x\in\mathscr{L}(E,F)$ で，全ての $h\in E$ に対して

$$\left\|\frac{f(x+th)-f(x)}{t}-\widetilde{L}_x(h)\right\|\xrightarrow[t\to\infty,t\neq 0]{}0$$

を満たすものが存在するとき，f は x で Gâtaux 微分可能であるという[*52]．Gâtaux 微分の定義に現れる

$$\lim_{h\to\infty}\frac{f(x+th)-f(x)}{t}$$

[*50] $\mathscr{L}(E,F)$ は E から F への有界線形作用素全体の空間．

[*51] o は Landau の記号で，$o(\|u\|)/\|u\|\to 0$（$\|u\|\to 0$）が成り立つという意味．

[*52] Gâteaux 微分の定義に $\widetilde{L}_x$ の線形性，連続性を課さない場合もある．

は f の x における h 方向への方向微分であり，Gâtaux 微分可能性は f があらゆる方向について方向微分可能であること（と，$h \mapsto L_x h$ が連続線形写像となること）を示している．

f が Fréchet 微分可能なら，それは Gâtaux 微分可能でもある．f が x で Fréchet 微分可能なら，その x における h 方向微分は $L_x h$ となる．関数 f の x における微分を $Df(x)$ で表すことにすれば，Df は写像 $U \to \mathscr{L}(E, F)$ を定める．したがってこの写像がまた微分可能であるとき，$D^2 f := D(Df)$ は $\mathscr{L}(E, \mathscr{L}(E, F)) \simeq \mathscr{L}^{(2)}(E, E; F)$ の元となる[*53]．さらに Banach 空間の（射影的）テンソル積の性質から，これは $\mathscr{L}(E \widehat{\otimes}_\pi E, F) \simeq \mathscr{L}^{(2)}(E, E; F)$ に値をとる関数とも考えられる．したがって，Banach 空間上の関数の高階微分を考える際には，自然にテンソル積の概念が出現するのである．

命題 2.3.4. $q \in [1, \infty[$ および $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ とする．このとき $D^p : \mathscr{S} \to L^q(\Omega, \mathfrak{H}^{\odot p})$ は可閉作用素である．

証明．$q > 1$ の場合に示す．

$F, G \in \mathscr{S}$ とし，$\|h\|_{\mathfrak{H}} = 1$ なる $h \in \mathfrak{H}$ を考える．このとき明らかに $FG \in \mathscr{S}$ であり，

$$FG = f(X(\phi_1), \ldots, X(\phi_m))$$

で $\phi_1 = h$ および $(\phi_1, \ldots, \phi_m)$ は正規直交系であると仮定しても一般性を失わない．

$\because$ はじめに $FG = g(X(\psi_1), X(\psi_2), \ldots, X(\psi_n))$ という表現をもつとしよう．$\mathrm{Span}(h, \psi_1, \ldots, \psi_n)$ の正規直交基底 $(\phi_1, \ldots, \phi_m)$ を $h = \phi_1$ を満たすようにとる．（こういったものがとれることは線形代数の基本的な結果である．当然 $m \leq n$ となっている．）

$$\psi_i = a^i_1 \phi_1 + a^i_2 \phi_2 + \cdots + a^i_m \phi_m$$

のように書けるから，

$$\begin{aligned}
FG &= g\left[X(\psi_1), \ldots, X(\psi_n)\right] \\
&= g\left[X(a^1_1 \phi_1 + \cdots + a^1_m \phi_m), \ldots, X(a^n_1 \phi_1 + \cdots + a^n_m \phi_m)\right] \\
&= g\left[a^1_1 X(\phi_1) + \cdots + a^1_m X(\phi_m), \ldots, a^n_1 X(\phi_1) + \cdots + a^n_m X(\phi_m)\right] \\
&= f[X(\phi_1), \ldots, X(\phi_m)]
\end{aligned}$$

とおく．このとき，f は $g \in \mathscr{S}$ と線形変換

$$\mathbb{R}^m \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a^1_1 & \ldots & a^1_m \\ \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & \ldots & a^n_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

の合成なので $f \in \mathscr{S}$ である．

$x = (x_1, \ldots, x_m)$ とおけば，

$$\begin{aligned}
&E[\langle D(FG), h \rangle_{\mathfrak{H}}] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} \left\langle \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_m) \phi_i, h \right\rangle_{\mathfrak{H}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx_1 \ldots dx_m \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_m) \langle \phi_i, h \rangle_{\mathfrak{H}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx_1 \ldots dx_m \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_m) e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx_1 \ldots dx_m \quad (\because (h, \phi_2, \ldots, \phi_m) \text{ は正規直交系}) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} x_1 f(x_1, \ldots, x_m) e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx_1 \ldots dx_m \quad (\because \text{部分積分}) \\
&= E[X(h) FG]
\end{aligned}$$

*53 $\mathscr{L}^{(n)}(E_1, \ldots, E_n; F)$ は有界な n 重線形写像 $E_1 \times \ldots E_n \to F$ 全体の空間．

ここで D の定義より $D(FG) = FDG + GDF$ であることに注意すれば，

$$E[G\langle DF, h\rangle_{\mathfrak{H}}] = -E[F\langle DG, h\rangle_{\mathfrak{H}}] + E[X(h)FG] \tag{2.3.2}$$

が成立する[*54]．

$\because$

$$F = f_1(X(\psi_1), \ldots, X(\psi_k)), \quad G = f_2(X(\psi_1), \ldots, X(\psi_k))$$

と表現されているとすれば

$$\begin{aligned}
&D(FG)\\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial(f_1 f_2)}{\partial x_i}(X(\psi_1), \ldots, X(\psi_k))\psi_i\\
&= \sum_{i=1}^{k} f_1((X(\psi_1), \ldots, X(\psi_k))\frac{\partial f_2}{\partial x_i}(X(\psi_1), \ldots, X(\psi_k))\psi_i + \sum_{i=1}^{k} f_2(X(\psi_1), \ldots, X(\psi_k))\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(X(\psi_1), \ldots, X(\psi_k))\psi_i\\
&= f_1((X(\psi_1), \ldots, X(\psi_k))\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(X(\psi_1), \ldots, X(\psi_k))\psi_i + f_2(X(\psi_1), \ldots, X(\psi_k))\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(X(\psi_1), \ldots, X(\psi_k))\psi_i\\
&= F(DG) + G(DF)
\end{aligned}$$

が分かる．$h/\|h\|_{\mathfrak{H}}$ を考えれば (2.3.2) は任意の $h \in \mathfrak{H}$ に対して成り立つ[*55]．

D が可閉作用素であることを示そう．$\mathscr{S}$ の元の列 (F_n) で

(i) $F_n \to 0$ in $L^q(\Omega)$

(ii) $DF_n \to {}^{\exists}\eta \in L^q(\Omega, \mathfrak{H})$

を満たすようなものに対して $\eta = 0$ が成り立つことを言えば良いのであった．$q' > 1$ を $1/q + 1/q' = 1$ を満たすものとする．このとき

$$\begin{aligned}
&|E[G\langle DF_n, h\rangle_{\mathfrak{H}}]|\\
&= |-E[F_n\langle DG, h\rangle_{\mathfrak{H}}] + E[X(h)F_nG]| \quad (\because (2.3.2))\\
&\leq |E[F_n\langle DG, h\rangle_{\mathfrak{H}}]| + |E[X(h)F_nG]|\\
&\leq E\left[|F_n\langle DG, h\rangle_{\mathfrak{H}}|\right] + E\left[|X(h)F_nG|\right]\\
&\leq E[|F_n|^q]^{1/q}E[|\langle DG, h\rangle_{\mathfrak{H}}|^{q'}]^{1/q'} + E[|F_n|^q]^{1/q}E[|X(h)G|^{q'}]^{1/q'} \quad (\because \text{H\'older の不等式})\\
&\leq E[|F_n|^q]^{1/q}E[\|DG\|_{\mathfrak{H}}^{q'}\|h\|_{\mathfrak{H}}^{q'}] + E[|F_n|^q]^{1/q}E[|X(h)G|^{q'}]^{1/q'} \quad (\because \text{Schwarz の不等式})\\
&\longrightarrow 0 \quad (\because F_n \to 0 \text{ in } L^q(\Omega),\ X(h)G \in \mathscr{S} \subset L^{q'}(\Omega) \text{ および } DG \in L^{q'}(\Omega, \mathfrak{H}) \text{ による})
\end{aligned}$$

がなりたつから

$$E[G\langle \eta, h\rangle_{\mathfrak{H}}] = \lim_{n\to\infty} E[G\langle DF_n, h\rangle_{\mathfrak{H}}] = 0$$

となる．すなわち，確率変数 $\langle \eta, h\rangle_{\mathfrak{H}} \in L^q(\Omega)$ は[*56]任意の $G \in \mathscr{S}$ に対して $E[G\langle \eta, h\rangle_{\mathfrak{H}}] = 0$ を満たす．$\mathscr{S} \subset L^{q'}(\Omega)$ の稠密性と $L^q/L^{q'}$ の双対性より $\langle \eta, h\rangle_{\mathfrak{H}} = 0$ in $L^q(\Omega)$ が分かる．よって，任意の $h \in \mathfrak{H}$ に対して $\langle \eta, h\rangle_{\mathfrak{H}} = 0$ P-a.s. である．特に $\mathfrak{H}$ の CONS $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ に対して

$$P[\forall j \in \mathbb{N}\ \langle \eta, e_j\rangle_{\mathfrak{H}} = 0] = 1$$

[*54] $\omega \in \Omega$ を固定するごとに $\langle F(\omega)\langle DG(\omega), h\rangle_{\mathfrak{H}} = F(\omega)\langle DG(\omega), h\rangle_{\mathfrak{H}}$ が成り立つ点に注意．

[*55] $h = 0$ のときは明らかである．

[*56] $\eta \in L^q(\Omega, \mathfrak{H})$ と

$$E[|\langle \eta, h\rangle_{\mathfrak{H}}|^q] \leq E[\|\eta\|_{\mathfrak{H}}^q]\,\|h\|_{\mathfrak{H}} < \infty$$

より $\langle \eta, h\rangle_{\mathfrak{H}} \in L^q(\Omega)$ が分かる．

である[*57]．したがって $P(\eta=0)=1$ □

$q\in[1,\infty[$ と $p\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ を固定して，

$$\|F\|_{\mathbb{D}^{p,q}}=\left(E[|F|^q]+E\left[\|DF\|_{\mathfrak{H}}^q\right]+\cdots E\left[\|D^pF\|_{\mathfrak{H}^{\otimes p}}^q\right]\right)^{1/q}$$

という量を考えよう．これがノルムの条件を満たすことは容易に確かめられる．このノルムについて $\mathscr{S}$ を完備化した空間を $\mathbb{D}^{p,q}$[*58]と表記することにする．$\mathbb{D}^{p,q}$ のことを $L^q(\Omega)$ における D^p の定義域 (domain) などと呼ぶ．さらに $\mathbb{D}^{\infty,q}=\bigcap_p\mathbb{D}^{p,q}$ と定めることにする．定義より明らかに

$$\mathbb{D}^{p+m,q+\varepsilon}\subset\mathbb{D}^{p,q}\quad\forall m\in\mathbb{N},\ \forall\varepsilon\in[0,\infty[$$

が成り立つ[*59]．また，$q\neq q'$ のとき $\mathbb{D}^{p,q}\cap\mathbb{D}^{p,q'}$ においては拡張された意味での Malliavin 微分 D^p は一致することに注意しておく．

問題 2.3.5. 写像 $D^p:\mathbb{D}^{p,q}\to L^q(\Omega,\mathfrak{H}^{\odot p})$ と $D^p:\mathbb{D}^{p,q'}\to L^{q'}(\Omega,\mathfrak{H}^{\odot p})$ は $\mathbb{D}^{p,q}\cap\mathbb{D}^{p,q'}$ 上では一致することを示せ．

証明．1.1 での議論と同様である． □

注意 2.3.6. 任意の整数 $p\geq 1$ に対して，$\mathbb{D}^{p,2}$ は以下の内積により Hilbert 空間となる．

$$\langle F,G\rangle_{\mathbb{D}^{p,q}}=E[FG]+\sum_{k=1}^{p}E[\langle D^kF,D^kG\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes k}}]$$

次に，Malliavin 微分に関する連鎖律を証明する．

命題 2.3.7. $\varphi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ は C^1 -級で，有界な偏導関数を持つものとする． $F=(F_1,\dots,F_m)\in(\mathbb{D}^{1,q})^m$ を満たす F に対して，$\varphi(F)\in\mathbb{D}^{1,q}$ かつ

$$D\varphi(F)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(F)DF_i \tag{2.3.3}$$

がなりたつ．

証明．**Step1：$F\in\mathscr{S}^m$ かつ φ が C^∞〜云々のとき．** はじめに，$\varphi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ は C^∞ で，φ 自身および全ての偏導関数が多項式増大の場合を考える．$f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $(1\leq i\leq n)$ と $\psi_1,\dots,\psi_n$ によって

$$F_i=f_i(X(\psi_1),\dots,X(\psi_n))$$

と表現されているとしてよい．$f=(f_1,\dots,f_m):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ とすれば，$\varphi\circ f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ は C^∞ かつそれ自身と全ての偏導関数は高々多項式増大であり，$\varphi(F)=\varphi\circ f(X(\psi_1),\dots,X(\psi_n))\in\mathscr{S}$ となる．Malliavin 微

[*57] 可分 Hilbert 空間であるから，可算個の元よりなる CONS が取れるという点がポイントである．
[*58] $\mathbb{D}^{p,q}$
[*59] 1.1 での議論と全く同様にして示される．

分の定義より

$$
\begin{aligned}
D\varphi(F) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi\circ f)(X(\psi_1),\dots,X(\psi_n))\psi_j \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial y_i}\varphi(f(X(\psi_1),\dots,X(\psi_n)))\frac{\partial}{\partial x_j}f_i(X(\psi_1),\dots,X(\psi_n))\psi_j \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial y_i}\varphi(f(X(\psi_1),\dots,X(\psi_n)))\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}f_i(X(\psi_1),\dots,X(\psi_n))\psi_j \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial y_i}\varphi(f(X(\psi_1),\dots,X(\psi_n)))Df_i(X(\psi_1),\dots,X(\psi_n)) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial y_i}\varphi(F)DF_i
\end{aligned}
$$

が成立．

Step2：$F\in\mathscr{S}^m$ で，φ が C^1 級かつ有界な偏導関数を持つ場合． $q\in\,]1,\infty[$ として示す[*60]．軟化子を用いて φ の近似を行う．

初めに, φ が命題の過程を満たすとき φ 自身は多項式の増大度を持つことに注意しておく．実際 $x\in\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$ とすれば（多変数関数の）Taylor の定理よりある $\theta\in[0,1]$ によって

$$
|\varphi(x)| = \left|\varphi(0)+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(\theta x)x_1\cdots x_m\right| \le |\varphi(0)|+C|x_1\cdots x_m|
$$

となることから分かる．（ただし，C は偏導関数の上界である．）また φ は有界な偏導関数関数を持つから，Lipschitz 連続である[*61]．

$(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ を $\mathbb{R}^m$ 上の Friedrichs の軟化子としたとき，$(\rho_\varepsilon*\varphi)(F)\to\varphi$ in $\mathbb{D}^{1,q}$ を示せばよい．命題 B.7.3 と同様の評価を行えば，

$$
\|(\rho_\varepsilon*\varphi)(F)-\varphi(F)\|_{L^q(\Omega)} \le \sup_{|y|\le\varepsilon}\|\tau_y\varphi(F)-\varphi(F)\|
$$

が成立するが，φ の一様連続性より $\varepsilon\to 0$ で右辺は 0 に収束[*62]．したがって $\|\rho_\varepsilon*\varphi-\varphi\|_{L^q(\Omega)}\to 0$ である．

次に，$D(\rho_\varepsilon*\varphi)$ が $L^q(\Omega,\mathfrak{H})$ -ノルムで　(2.3.3) の右辺に収束することを示そう．すでに確かめたように φ 自身は多項式増大であるから，適当な定数 C,C' および適当な $n\in\mathbb{N}$ をとれば

$$
\begin{aligned}
|(\rho_\varepsilon*\varphi)(x)| &\le \int_{\mathbb{R}^m}\rho_\varepsilon(y)|\varphi(x-y)|dy \\
&= \int_{\{|y|\le\varepsilon\}}\rho_\varepsilon(y)|\varphi(x-y)|dy \\
&\le \int_{\{|y|\le\varepsilon\}}C(1+|x|^n+|y|^n)\rho_\varepsilon(y)dy \\
&\le C'(1+|x|^n)
\end{aligned}
$$

[*60] $q=1$ の場合も評価の方法が少し異なるだけで，本質は変わらない．

[*61] 例えば杉浦 [25] の「有限増分の定理」において $|f'(x)|$ の部分を適当な定数で上から押さえればよろしい．

[*62] 先ほども述べたように章末補足資料の命題 B.7.3.(ii) の議論がそのまま成り立つかは不明であるが，今は φ の一様連続性という非常に良い性質があるので問題ない．

という評価が得られる．よって $\rho_\varepsilon * \varphi$ もまた高々多項式増大である．したがって $(\rho_\varepsilon * \varphi)(F) \in \mathscr{S}$ となり，Step1 の結果を適用すれば

$$D(\rho_\varepsilon * \varphi)(F) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_\varepsilon * \varphi)(F) DF_i = \sum_{i=1}^m \left(\rho_\varepsilon * \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right)(F) DF_i$$

が分かる．

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(F) DF_i - \sum_{i=1}^m \left(\rho_\varepsilon * \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right)(F) DF_i \right\|_{L^q(\Omega,\mathfrak{H})} \\
&\leq \sum_{i=1}^m \left\| \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(F) - \left(\rho_\varepsilon * \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right)(F) \right\} DF_i \right\|_{L^q(\Omega,\mathfrak{H})} \qquad (\because \text{三角不等式}) \\
&= \sum_{j=1}^m E\left[\left| \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(F) - \left(\rho_\varepsilon * \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right)(F) \right|^q \|DF_i\|_{\mathfrak{H}}^q \right]^{1/q} \\
&\leq \sum_{j=1}^m \left\| \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(F) - \left(\rho_\varepsilon * \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right)(F) \right\|_{L^{2q}(\Omega)} \|DF_i\|_{L^{2q}(\Omega,\mathfrak{H})} \quad (\because \text{Hölder の不等式})
\end{aligned}$$

という評価と $DF_i \in L^{2q}(\Omega,\mathfrak{H})$ に注意すれば[*63]，各 i に対して

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(F) - \left(\rho_\varepsilon * \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right)(F) \right\|_{L^{2q}(\Omega)} \longrightarrow 0$$

を確かめればよいが，命題 B.7.5 の議論により $\left(\rho_\varepsilon * \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right)(F)$ は有界で $\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(F)$ に各点収束するから，有界収束定理により結論が従う．

Step3 : φ **は** C^1 **かつ有界な導関数をもち，**$F_i \in \mathbb{D}^{1,q}$ **の場合．** 各 F_i を $\mathbb{D}^{1,q}$ で近似する $\mathscr{S}$ の列 $(F_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ を考えれば，Step2 までの結果により

$$D\varphi(F^{(n)}) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(F^{(n)}) DF_i^{(n)}$$

が成立．このとき

(i) $\varphi(F^{(n)}) \longrightarrow \varphi(F)$ in $L^q(\Omega)$

(ii) $D\varphi(F^{(n)}) \longrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(F) DF_i$ in $L^q(\Omega,\mathfrak{H})$

を示せばよい．(i) については，φ の一様連続性より[*64]

$$E[|\varphi(F^{(n)}) - \varphi(F)|] \leq (\text{const.}) E[\|F^{(n)} - F\|_{\mathbb{R}^m}] \leq (\text{const.}) \sum_{i=1}^m E[|F_i^{(n)} - F_i|] \xrightarrow{n\to\infty}$$

[*63] $F_i \in \mathscr{S}$ より，DF_i は任意の r に対して $L^r(\Omega,\mathfrak{H})$ の元となるのであった．

[*64] Step2 を参照．

となることから分かる．

$$
\begin{aligned}
&\left\| \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(F)DF_i - \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(F^{(n)})DF_i^{(n)} \right\|_{L^q(\Omega,\mathfrak{H})} \\
&\le \sum_{i=1}^m \left\| \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(F)DF_i - \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(F^{(n)})DF_i^{(n)} \right\|_{L^q(\Omega,\mathfrak{H})} \\
&= \sum_{j=1}^m \left\{ \left\| \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(F)DF_i - \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(F^{(n)})DF_i \right\|_{L^q(\Omega,\mathfrak{H})} + \left\| \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(F^{(n)})DF_i - \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(F^{(n)})DF_i^{(n)} \right\|_{L^q(\Omega,\mathfrak{H})} \right\} \\
&\le \sum_{j=1}^m \left\{ \left\| \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(F) - \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(F^{(n)}) \right\|_{L^{2q}(\Omega)} \|DF_i\|_{L^{2q}(\Omega,\mathfrak{H})} + \left\| \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(F^{(n)}) \right\|_{L^q(\Omega)} \|DF_i - DF_i^{(n)}\|_{L^{2q}(\Omega,\mathfrak{H})} \right\}
\end{aligned}
$$

という評価より最後の辺は $n \to \infty$ で 0 に収束する[*65]．以上の議論により (2.3.3) が分かる． □

命題 2.3.8. $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ は Lipschitz 関数とし，ある $q > 0$ に対して $F = (F_1, \dots, F_m) \in (\mathbb{D}^{1,q})^m$ となる確率変数を考える．F の分布が $\mathbb{R}^m$ 上の Lebesgue 測度について絶対連続ならば $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,q}$ であり，連鎖律 (2.3.3) が成り立つ[*66]．

2.4 Hilbert 空間における Malliavin 微分

可分実 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ および等正規 Gauss 過程 X を考える．(ただし，$\mathscr{F} = \sigma(X)$ である．) $\mathfrak{U}$ をまた可分実 Hilbert 空間とする[*67]．$q \ge 1$ に対して $L^q(\Omega, \mathfrak{U}) = L^q(\Omega, \mathscr{F}, P; \mathfrak{U})$ を考える．

$\mathscr{S}_{\mathfrak{U}}$ を次のような表現を持つ $F : \Omega \to \mathfrak{U}$

2.5 発散作用素

Malliavin 微分 $D^p : \mathbb{D}^{p,2} \to L^2(\Omega, \mathfrak{H}^{\odot p})$ の共役作用素として，発散作用素 δ^p を導入しよう．

定義 2.5.1. $p \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ とする．$\mathrm{Dom}\,\delta^p$ を $u \in \mathfrak{H}^{\otimes p}$ で以下の条件を満たすもの全体とする：ある定数 $C > 0$ が存在して，

$$|E[\langle D^p F, u\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes p}}]| \le C\sqrt{E[F^2]} \quad \forall F \in \mathscr{S}.$$

定義 2.5.1 において，D^pF と u はともに $L^2(\Omega, \mathfrak{H}^{\otimes p})$ の元だから，Schwartz の不等式により積分 $E[\langle D^pF, u\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes p}}]$ が well-defined であることに注意されたい．(**??**) の条件は $F \in \mathbb{D}^{p,2}$ としても同じである．$u \in \mathrm{Dom}\,\delta^p$ とすれば，写像 $\mathscr{S} \ni F \mapsto E[\langle D^pF, u\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes p}}] \in \mathbb{R}$ は $L^2(\Omega)$ のノルムに関して有界線形作用素となる．したがって，Riesz の表現定理により，ある $\delta^p(u) \in L^2(\Omega)$ で

$$E[F\delta^p u] = E[\langle D^pF, u\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes p}}] \quad F \in \mathscr{S}$$

を満たすものがただ一つ存在する．以上の手続きにより，D^p の共役作用素 δ^p が定義される．

[*65] $\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi$ の有界性に注意．
[*66] この場合偏微分 $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ は a.e. の意味で解釈する．
[*67] $\mathfrak{U}$ はドイツ文字の U である．

定義 2.5.2. $u \in \mathrm{Dom}\,\delta^p$ に対して，$\delta^p(u) \in L^2(\Omega)$ を，全ての $F \in \mathscr{S}$ に対して

$$E[F\delta^p(u)] = E[\langle D^p F, u\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes p}}] \tag{2.5.1}$$

を満たすように定める．（このような $\delta^p(u)$ はただ一つ存在する．）これによって定まる写像

$$\begin{aligned} \delta^p\colon\ \mathrm{Dom}\,\delta^p \subset L^2(\Omega, \mathfrak{H}^{\otimes p}) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ u &\longmapsto \delta^p(u) \end{aligned}$$

を多重発散作用素 (multiple divergence operator) と呼ぶ．$p = 1$ の時には単に発散作用素といい，$\delta^1 = \delta$ と書く．δ^0 は恒等写像であると定める．(2.5.1) は慣例的に部分積分公式 (integration by parts formula) と呼ばれている．

作用素 δ^p は稠密に定義された作用素の共役作用素であるから，閉作用素である．定数関数 $1 \in \mathscr{S}$ に (2.5.1) を適用すれば，任意の $u \in \mathrm{Dom}\,\delta^p$ に対して $E[\delta^p u] = 0$ が成り立つことがわかる．

注意 2.5.3. (2.3.2) より，$F, G \in \mathscr{S}$ なら $FG \in \mathscr{S}$ であり，

$$E[G\langle DF, h\rangle_{\mathfrak{H}}] = -E[F\langle DG, h\rangle_{\mathfrak{H}}] + E[X(h)FG]$$

が成り立つのであった．特に $G = 1$（定数関数）とすれば，全ての $F \in \mathscr{S}$ に対して

$$E[\langle DF, h\rangle_{\mathfrak{H}}] = E[X(h)F]$$

となることがわかる．したがって $\mathfrak{H} \subset \mathrm{Dom}\,\delta$ であり，$h \in \mathfrak{H}$ に対して $\delta(h) = X(h)$ が成り立つ．同様にして，$\mathfrak{H}^{\otimes p} \subset \mathrm{Dom}\,\delta^p$ であることも証明できる．

命題 2.5.4. $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ および $u \in \mathrm{Dom}\,\delta$ とし，$E[F^2\delta^2(u)^2]$，$E[F^2\|u\|_{\mathfrak{H}}^2]$，および $E[\langle DF, u\rangle_{\mathfrak{H}}^2]$ は有限値になると仮定する．このとき $Fu \in \mathrm{Dom}\,\delta$ であり，

$$\delta(Fu) = F\delta(u) - \langle DF, u\rangle_{\mathfrak{H}}$$

が成り立つ．

特に $F = X(h)$ および $g \in \mathfrak{H} \subset \mathrm{Dom}\,\delta$ とすれば，命題 2.5.4 より

$$\delta(X(h)g) = X(h)\delta(g) - \langle DX(h), g\rangle_{\mathfrak{H}} = X(h)X(g) - \langle h, g\rangle_{\mathfrak{H}}$$

が成り立つことがわかる．

2.6 Hilbert 空間値の発散作用素

2.7 多重積分

2.8 Ornstein-Uhlenbeck 半群

2.9 部分積分公式

2.10 多重積分の分布の絶対連続性

付録 A　微積分学に関する補足

A.1　（古典的な）微分についての諸結果

命題 A.1.1. 連続関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は $]a,b[$ で微分可能とする．$\lim_{x\to a} f'(x) = l$ なる実数 l が存在すれば，

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h)-f(x)}{h} = l$$

がなりたつ．

証明. 仮定より，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在して，$|x-a| < \delta$ ならば

$$|f'(x) - l| < \varepsilon$$

となる．また平均値の定理により，任意の $x \in]a, a+\delta[$ に対して

$$f(x) - f(a) = (x-a)f'(\xi)$$

を満たす $\xi = \xi_x \in]a,x[$ が存在する．したがって，$x \in]a, a+\delta[$ を任意に選べば

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - l\right| \leq \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(\xi_x)\right| + |f'(\xi_x) - l| = |f'(\xi_x) - l| < \varepsilon$$

となる．　□

命題 A.1.2 (Taylor の定理)**.** I を $I = [a,x]$ または $[x,a]$ なる区間とする．$f : I \to \mathbb{R}$ が I で C^m 級ならば

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{(m-1)!}\int_a^x f^{(m)}(t)(x-t)^{m-1}dt$$

が成り立つ．

A.2　絶対連続関数の微分

定義 A.2.1 (絶対連続関数)**.** 関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を考える．任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，任意の有限個の互いに重ならない区間 $([a_i, b_i[)_{i=1}^n$ に対して

$$\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta \Longrightarrow \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

がなりたつとき，f は $[a,b]$ 上絶対連続 (absolutely continuous) であるという．

命題 A.2.2. 絶対連続関数は殆ど至る所微分可能である．

証明. 省略.　□

付録 B　関数解析についての補足

B.1　Hahn-Banach の定理と応用

定理 B.1.1 (Hahn-Banach)**.**

命題 B.1.2. X をノルム空間，Y をその部分空間とするとき，以下は同値である．

(i) Y は X で稠密．

(ii) $f \in X^*$ で $f|_Y = 0$ なるものは $f = 0$ に限る．

B.2　閉作用素

E, F を Banach 空間とする．E の線形部分空間 $\operatorname{Dom} T$ 上で定義された線形写像 $T\colon \operatorname{Dom} T \to F$ を，E から F への線形作用素というのであった．線形作用素 T のグラフを $\operatorname{Graph}(T)$ で表す．すなわち，

$$\operatorname{Graph}(T) = \{(x, y) \in E \times F \mid x \in \operatorname{Dom} T,\ y = Tx\}$$

である．

補題 B.2.1. $f\colon \operatorname{Dom} f \subset E \to F$ を写像とする．このとき，次の 2 条件は同値である．

(i) f は線形作用素である．

(ii) f のグラフ $\operatorname{Graph}(f)$ は $E \times F$ の線形部分空間である．

証明. (i) $\Longrightarrow$ (ii)．$\operatorname{Graph}(f)$ は線形写像 $(\mathrm{id}, f)\colon E \ni x \mapsto (x, f(x)) \in E \times F$ の像なので，$E \times F$ の線形部分空間である．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．(x_1, y_1)，$(x_2, y_2) \in \operatorname{Graph}(f)$ かつ α，$\beta \in \mathbb{R}$ とする．このとき，$(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2) \in \operatorname{Graph}(f)$ であるから，$\alpha x_1 + \beta x_2 \in \operatorname{Dom}(f)$ および

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

がわかる． □

定義 B.2.2. (i) 線形作用素 T のグラフ $\operatorname{Graph}(T)$ が直和 Banach 空間 $E \oplus F$ の閉集合となる時，T を閉作用素 (closed operator) という．

(ii) X から Y への線形作用素 $(\operatorname{Dom}(T), T)$ に対して，ある閉作用素 $(\operatorname{Dom}(S), S)$ で $\operatorname{Dom}(T) \subset \operatorname{Dom}(S)$ かつ $S|_{\operatorname{Dom}(T)} = T$ なるものが存在するとき，T は可閉 (closable) であるという．T が可閉作用素であるとき，上の条件を満たす閉作用素 S を T の閉拡張 (closed extension) という．可閉作用素 T の閉拡張のうち，その定義域が包含関係について最小のものを T の閉包 (closure) といい，$\overline{T}$ で表す．

有界作用素 $T\colon E \to F$ は閉作用素である．これは，T のグラフは連続写像 $T \times \mathrm{id}\colon E \times F \to F \times F$ による閉集合 Δ_F [*68]の逆像となっていることからわかる[*69]．一方で，T が閉作用素だからといって，それが

[*68] Δ_F は $F \times F$ の対角集合．

[*69] これは位相空間の一般論である．

$\mathrm{Dom}(T)$ 上で有界とは限らない．

E から F への線形作用素が閉作用素かどうかは，点列の収束の概念を用いると以下のように特徴づけられる．

命題 B.2.3. T を E から F への線形作用素とする．このとき，次の 2 条件は同値である．

(i) T は閉作用素である．

(ii) $x_n \to x$ かつ $Tx_n \to y$ ならば，$x \in \mathrm{Dom}\, T$ かつ $Tx = y$ が成り立つ．

証明．$E \oplus F$ の位相は直和ノルム

$$\|(x, y)\|_{E\oplus F} = \|x\|_E + \|y\|_F$$

によって距離付け可能だから，その部分集合が閉集合であることは，点列の収束について閉じていることと同値である．(ii) は後者の条件を $\mathrm{Graph}(T)$ について言い換えたにすぎない． □

線形作用素が可閉かどうかは，次の命題のようにして調べることができる．

命題 B.2.4. E から F への線形作用素 $(\mathrm{Dom}\, T, T)$ に関して次の 3 条件は同値である．

(i) T は可閉作用素である．

(ii) T のグラフの閉包 $\overline{\mathrm{Graph}(T)} \subset E \times F$ はある線形作用素のグラフになっている．

(iii) $\mathrm{Dom}(T)$ の元の列 (x_n) が $x_n \to 0$ かつ $Tx_n \to \exists y \in Y$ を満たすならば，$y = 0$ である．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (iii)．仮定より

$$(x_n, Sx_n) = (x_n, Tx_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{in } E\oplus F} (0, y)$$

だから，$\mathrm{Graph}(S)$ が閉集合であることに注意すれば $(0, y) \in \overline{\mathrm{Graph}(T)} = \mathrm{Graph}(S)$ がわかる．S は線形作用素だから，$y = S0 = 0$ である．

(iii) $\Longrightarrow$ (ii)．$\overline{\mathrm{Graph}(T)}$ は線形空間だから，これがある写像のグラフになっていることを示せば十分である[*70]．そのためには，(x, y)，$(x, z) \in \overline{\mathrm{Graph}(T)}$ なら $y = z$ であることを示せばよい．$\overline{\mathrm{Graph}(T)}$ の線形性より $(0, y - z) = (x, y) - (x, z) \in \overline{\mathrm{Graph}(T)}$ であるから，$\mathrm{Graph}(T)$ の元の列 (x_n, Tx_n) で $(x_n, Tx_n) \to (0, y - z)$ を満たすようなものがとれる．この点列は条件 (iii) の仮定を見たすから，$y = z$ となる．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．$\overline{\mathrm{Graph}(T)}$ をグラフにもつような線形作用素は，T の閉拡張となっている． □

線形作用素 S が T の拡張であることは $\mathrm{Graph}(T) \subset \mathrm{Graph}(S)$ と同値である．このことと命題 B.2.4 から，T が可閉なら

$$\overline{\mathrm{Graph}(T)} = \mathrm{Graph}(\overline{T})$$

であることがわかる．

B.3 共役作用素

本節では Hilbert 空間上の作用素の共役作用素を導入する．以下，$\mathfrak{H}$ は Hilbert 空間を表すものとする．$\mathfrak{H}$ から $\mathfrak{H}$ への線形作用素のことを，$\mathfrak{H}$ における線形作用素と呼ぶことにする．

[*70] 補題 B.2.1.

補題 B.3.1. T を $\mathfrak{H}$ における線形作用素で，稠密な定義域を持つものとする．このとき，$y \in \mathfrak{H}$ について次の 2 条件は同値である．

(i) $x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ は $\operatorname{Dom} T$ 上で連続となる．

(ii) ある $z \in \mathfrak{H}$ で，任意の $x \in \operatorname{Dom} T$ に対して

$$\langle x, z\rangle = \langle Tx, y\rangle \tag{B.3.1}$$

を満たすものが存在する．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii)．$\operatorname{Dom} T$ は $\mathfrak{H}$ で稠密だから，連続な線形形式 $x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ は $\mathfrak{H}$ 上に一意的に拡張される．このとき Riesz の表現定理より，(B.3.1) を満たす z がただ一つ存在することがわかる．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．Schwarz の不等式より

$$|\langle Tx, y\rangle| = |\langle x, z\rangle| \leq \|z\|\|x\|$$

となるから，$x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ は $\operatorname{Dom} T$ 上で連続である． □

定義 B.3.2. $\mathfrak{H}$ における線形作用素 T に対して，補題 B.3.1 の条件を見たす y 全体の集合を $\operatorname{Dom} T^*$ とし，(B.3.1) における z によって $T^*y = z$ と定義する． これによって定まる $\mathfrak{H}$ における作用素 T^* を，T の共役作用素 (adjoint operator) という．

稠密に定義された線形作用素の共役作用素は閉作用素となるが，それを示すために便利な作用素を用意しよう．$U\colon \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H} \to \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ を，$U(x, y) = (-y, x)$ と定義する．

補題 B.3.3. T が稠密に定義された $\mathfrak{H}$ における作用素なら，$\operatorname{Graph}(T^*) = [U(\operatorname{Graph}(T))]^{\perp}$ が成り立つ．

証明．T^* の定義より，$(y, z) \in \operatorname{Graph}(T^*)$ は全ての $x \in \operatorname{Dom} T$ に対して $\langle x, z\rangle = \langle Tx, y\rangle$ が成り立つことと同値である．これはさらに，全ての x に対して $\langle V \circ (\mathrm{id}, T)(x), (y, z)\rangle = 0$ が成り立つこととも同値である．$V \circ (\mathrm{id}, T) \operatorname{Dom} T = U(\operatorname{Graph}(T))$ であるから，補題の主張が従う． □

命題 B.3.4. $\mathfrak{H}$ において稠密に定義された線形作用素の共役作用素は，閉作用素である．

証明．線形部分空間の直交補空間は閉部分空間だから，$\operatorname{Graph}(T^*)$ は閉集合である．すなわち T^* は閉作用素である． □

B.4 直和 Hilbert 空間

Hilbert 空間の列 $(\mathfrak{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき，その代数的意味での直和 $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{H}_n$ は，以下の内積により内積空間となる．

$$\langle (x_n), (y_n)\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_n, y_n\rangle.$$

代数的直和の定義より右辺の和は実質有限和であり，よってこの内積は well-defined であることがわかる．これが本当に内積の条件を満たすことも，定義に従って考えればわかる．しかし，この空間は一般に Hilbert 空間ではない．この空間の完備化にあたる Hilbert 空間を得るにはどうすれば良いだろうか？所望の空間は以下

のように構成することができる．

$$\mathfrak{H} = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{H}_n \,\middle|\, \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2 < \infty \right\}$$

$\mathfrak{H}$ は $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{H}_n$ の線形部分空間である．

命題 B.4.1. $x = (x_n)$, $y = (y_n) \in \mathfrak{H}$ に対して

$$\langle x, y\rangle_{\mathfrak{H}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_n, y_n\rangle \tag{B.4.1}$$

と定義する．このとき $\mathfrak{H}$ はこの内積 $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{H}}$ によって Hilbert 空間となる．

証明．Schwarz の不等式より

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x_n, y_n\rangle| \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|\|y_n\| \le \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|y_n\|^2\right)^{1/2} < \infty$$

となるから，(B.4.1) の和は絶対収束する．$\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{H}}$ がノルムの条件を満たすことは，定義に従って示せばよい．完備性を証明しよう．$x^{(k)} = (x_n^{(k)})$ を $\mathfrak{H}$ における Cauchy 列とする．このとき

$$\|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}\|_{\mathfrak{H}_n}^2 \le \|x^{(k)} - x^{(l)}\|_{\mathfrak{H}}^2$$

という評価より各 $(x_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ が $\mathfrak{H}_n$ における Cauchy 列であることがわかる．その $\mathfrak{H}_n$ における極限を x_n とする．$\varepsilon > 0$ とし，k_0 を $k, l \ge k_0$ ならば $\|x^{(k)} - x^{(l)}\|_{\mathfrak{H}} < \varepsilon$ となるように選ぶ．このとき任意の $k, l \ge k_0$ と任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left(\sum_{0\le i\le n} \|x_i^{(k)} - x_i^{(l)}\|_{\mathfrak{H}_i}^2\right)^{1/2} < \varepsilon$$

が成り立つ．ここで $l \to \infty$ とすれば

$$\left(\sum_{0\le i\le n} \|x_i^{(k)} - x_i\|_{\mathfrak{H}_i}^2\right)^{1/2} \le \varepsilon$$

となり，さらに $n \to \infty$ とすれば

$$\|x^{(k)} - x\|_{\mathfrak{H}} = \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \|x_i^{(k)} - x_i\|_{\mathfrak{H}_i}^2\right)^{1/2} \le \varepsilon$$

を得る．この評価より $\|x^{(k)} - x\| \to 0$ と $x \in \mathfrak{H}$ がわかる．ゆえに $\mathfrak{H}$ は完備である． □

これ以降，命題??における Hilbert 空間をあらためて $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{H}_n$ と表すことにする．これまでは $(\mathfrak{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の直和を $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{H}_n$ の中に作ったが，これは本文内における設定とは少し異なる．線形空間 V の部分空間の族 $(V_i)_{i\in I}$ が $V_i \cap V_j = \{0\}$ を満たすならば，

$$V' := \left\{ \sum_i v_i \in V \,\middle|\, \forall i \in I\ v_i \in V_i \right\}$$

は代数的直和 $\bigoplus_{i\in I} V_i$ と同型になる．この V' もまた (V_i) の直和と呼び，同じ記号 $\bigoplus_i V_i$ で表すのであった．これと同様に，Hilbert 空間の直交する部分空間族が与えられたとき，その直和 Hilbert 空間を元の Hilbert 空間の中に実現することができる．

命題 B.4.2. $\mathfrak{H}$ を Hilbert 空間とし，$(\mathfrak{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ をその閉部分空間の列で $\mathfrak{H}_n \perp \mathfrak{H}_m$ $(n \neq m)$ を満たすものとする．このとき

$$\mathfrak{H}' := \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \mathfrak{H} \,\middle|\, (x_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{H}_n \ \ \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{\mathfrak{H}}^2 < \infty \right\}$$

と定義すれば，$\mathfrak{H}'$ は直和 Hilbert 空間 $\bigoplus_n \mathfrak{H}_n$ と等長同型である．

証明．線形写像 $\Phi\colon \bigoplus_n \mathfrak{H}_n \to \mathfrak{H}'$ を，$(x_n) \mapsto \sum_n x_n$ と定義する．まずは和 $\sum x_n$ が well-defined であることを確かめよう．$(\mathfrak{H}_n)$ の直交性に注意すれば，任意の $n > m$ に対して

$$\left\| \sum_{m\leq k\leq n} x_k \right\|^2 = \sum_{m\leq k\leq n} \|x_k\|^2 \tag{B.4.2}$$

が成り立つ．$\bigoplus_n \mathfrak{H}_n$ の定義より級数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{\mathfrak{H}}^2$ は収束するから，(B.4.2) 右辺の量は m を十分大きくとれば，任意の水準まで小さくできる．ゆえに $\left(\sum_{0\leq k\leq n} x_k\right)_n$ は Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ の Cauchy 列であり，級数 $\sum_n x_n$ は $\mathfrak{H}$ において収束する．Φ の線形性は，和と極限操作の線形性よりわかる．また Φ が $\mathfrak{H}'$ への全射であることは定義よりすぐにわかるので，Φ の等長性を示せばよい．$x = (x_n)$，$y = (y_n) \in \bigoplus_n \mathfrak{H}_n$ とする．いま $(\mathfrak{H}_n)$ の直交性から，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left\langle \sum_{k\leq n} x_k, \sum_{k\leq n} y_k \right\rangle = \sum_{k,l\leq n} \langle x_k, y_l \rangle = \sum_{k\leq n} \langle x_k, y_k \rangle$$

が成り立つ．内積の連続性に注意して極限操作を行えば，

$$\begin{aligned}
\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_{\mathfrak{H}} &= \left\langle \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k, \sum_{k\in\mathbb{N}} y_k \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{k\leq n} x_k, \sum_{k\leq n} y_k \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k\leq n} \langle x_k, y_k \rangle = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle x_k, y_k \rangle = \langle x, y \rangle_{\bigoplus_n \mathfrak{H}_n}
\end{aligned}$$

となり，Φ が等長であることが確かめられた．□

B.5 線形空間のテンソル積

この小節では線形空間のテンソル積の定義と基本性質を見ていく．導入方法は齋藤 [24] を参考にした．X を集合，$\mathbb{K}$ を体として

$$\mathbb{K}^{(X)} := \{ f : X \to \mathbb{K} \mid f(x) \neq 0 \text{ となる } x \text{ は有限個.} \}$$

と定義する．このとき $\mathbb{K}^{(X)} \subset \mathbb{K}^X = \mathrm{Map}(X, \mathbb{K})$ は各点ごとの和とスカラー倍により $\mathbb{K}^X$ の $\mathbb{K}$ -線形部分空間となる．V を任意の $\mathbb{K}$ 線形空間とし，$g \in V^X = \mathrm{Map}(X, V)$ とする．g の形式的一次結合を $a \in \mathbb{K}^{(X)}$ に対して

$$\sum_{x\in X} a(x)g(x) := \sum_{x\in X, a(x)\neq 0} a(x)g(x)$$

と定める．特に $V = \mathbb{K}$ のとき，$g = 1 \in \mathbb{K}^X$ とすれば，g の形式的無限和は族 $a = (a(x))_{x\in X}$ の和 $\sum_{x\in X} a(x)$ を与える．

$x \in X$ に対し，$e_x \in \mathbb{K}^{(X)}$ を

$$e_x(y) = \begin{cases} 1 & y = x \\ 0 & y \neq x \end{cases}$$

とおくことにしよう．

補題 B.5.1. V を $\mathbb{K}$ 線形空間とする．写像 $F : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{(X)}, V) \to V^X$ を $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{(X)}, V)$ に対して写像 $g : X \ni x \mapsto f(e_x) \in V$ を対応させることで定める．このとき F は可逆である．

証明．F の逆写像 $G : V^X \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{(X)}, V)$ を実際に構成する．$g \in V^X$ に対して $G(g) = f : \mathbb{K}^{(X)} \to V$ を $f(a) = \sum_{x \in X} a(x)g(x) \in V$ で定めることにする．この G が F の逆写像であることを示せばよい．$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{(X)}, V)$ とすれば任意の $a \in \mathbb{K}^{(X)}$ に対し $a = \sum_{x \in X} a(x)e_x$ であるから，

$$\begin{aligned}
((G \circ F)(f))(a) &= G(F(f(a))) \\
&= \sum_{x \in X} a(x)F(f)(x) \quad (\because G \text{ の定義}) \\
&= \sum_{x \in X} a(x)f(e_x) \quad (\because F \text{ の定義}) \\
&= f\left(\sum_{x \in X} a(x)e_x\right) \quad (\because f \text{ の線形性}) \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

が成立．すなわち $(G \circ F)(f) = f$ $(\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{(X)}, V))$ である．同様にして

$$((F \circ G)(g))(x) = G(g)(e_x) = \sum_{x \in X} e_x g(x) = g(x)$$

となり $(F \circ G)(g) = g$ $(\forall g \in V^X)$ もなりたつ.． □

テンソル積を扱う前に，線形空間の直和について復習しておく．$\mathbb{K}$-線形空間の族 $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が与えられたとき，その直和を次で定義する[*71]：

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda = \left\{ (x_\lambda) \in \prod_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \;\middle|\; x_\lambda \neq 0 \text{ となる } \lambda \text{ は有限個} \right\}$$

$V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ とおくことにする．写像 $j_\lambda : V_\lambda \to V$ を次のように与える：$x_\lambda \in V_\lambda$ に対して $y = (y_\lambda) = j_\lambda(x_\lambda)$ は

$$y_\kappa = \begin{cases} x_\lambda & \kappa = \lambda \\ 0 & \kappa \neq \lambda \end{cases}$$

を満たすものとする．この写像 $j_\lambda : V_\lambda \to V$ を V_λ から V への標準単射とよぶ．これは明らかに線形写像である．$j_\lambda(V_\lambda)$ を考えることにより V_λ は V に埋め込まれる．また，$x \in V$ に対して

$$x = \sum_{\lambda \in \Lambda} j_\lambda(\mathrm{pr}_\lambda x)$$

がなりたつ．（ただし pr_λ は射影 $\prod V_\lambda \to V_\lambda$ である．）

[*71] この直和のことを external direct sum（外直和？）と呼ぶこともある．

補題 B.5.2. $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は $\mathbb{K}$ -線形空間の族とし， $V=\bigoplus_\lambda V_\lambda$ とおく．標準単射 $j_\lambda : V_\lambda \to V$ の族を考える．線形写像 $f_\lambda : V_\lambda \to W$ が与えられたとき，線形写像 $g : V \to W$ で次の条件を満たすものがただひとつ存在する：

$$g \circ j_\lambda = f_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

証明．そのような g が存在したとき，

$$g(x) = g\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} j_\lambda(\mathrm{pr}_\lambda x)\right) = \sum_{\lambda\in\Lambda} g(j_\lambda(\mathrm{pr}_\lambda x)) = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(\mathrm{pr}_\lambda x)$$

となるから，g は一意的である．

逆に $g(x)=\sum_\lambda f_\lambda(\mathrm{pr}_\lambda x)$ と定義すれば

$$g(j_\lambda(x_\lambda)) = \sum_{\kappa\in\Lambda} f_\kappa(\mathrm{pr}_\kappa(j_\lambda x_\lambda)) = f_\lambda(x_\lambda)$$

となるから，$g \circ j_\lambda = f_\lambda$ $(\forall\lambda\in\Lambda)$ である．

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus V_\lambda \arrow[r, "g"] & W \\
V_\lambda \arrow[u, "j_\lambda"] \arrow[ur, "f_\lambda"'] &
\end{tikzcd}$$

□

準備が出来たところで、いよいよ線形空間のテンソル積を構成しよう．[*72]$\mathbb{K}$ を体とし，V, W を $\mathbb{K}$ 線形空間とする．先ほどの記号を用いて $e_{x,y}=e_{(x,y)} \in \mathbb{K}^{(V\times W)}$ と定義することにする．$\mathbb{K}^{(V\times W)}$ の部分空間 R_1, R_2, R_3 を以下のようにおく．

$$\begin{aligned}
R_1 &= \mathrm{Span}(\{e_{x+x',y}-e_{x,y}-e_{x',y} \mid x,x'\in V, y\in W\}) \\
R_2 &= \mathrm{Span}(\{e_{x,y+y'}-e_{x,y}-e_{x,y'} \mid x\in V, y,y'\in W\}) \\
R_3 &= \mathrm{Span}(\{e_{\lambda x,y}-\lambda e_{x,y}, e_{x,\lambda y}-\lambda e_{x,y} \mid x,x'\in V, y\in W\})
\end{aligned}$$

部分空間 $R=R_1+R_2+R_3$ に対して $V\otimes W=\mathbb{K}^{(V\times W)}/R$ と定義し，これを V と W のテンソル積 (tensor product) という．さらに $x\otimes y=[e_{x,y}]\in V\otimes W$ と定義し[*73]，これを x と y のテンソル積 (tensor product) と呼ぶことにする．

命題 B.5.3. 写像 $\otimes : V\times W \ni (x,y) \mapsto x\otimes y \in V\otimes W$ は双線形写像である．さらに，任意の $\mathbb{K}$ 線形空間 U と任意の双線形写像 $g : V\times W \to U$ に対して，以下の図式を可換にする $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V\otimes W, U)$ が唯一つ存在する．

$$\begin{tikzcd}
V\times W \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "g"] & \\
V\otimes W \arrow[r, "f"'] & U
\end{tikzcd}$$

[*72] テンソル積の構成法はここに述べたものが全てではないし，重要なのは構成法ではなくその性質であることに注意しておく．
[*73] ここでの $[u]$ は u の同値類を表す．

証明．任意の線形空間 U に対して

$$\text{可逆写像} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V\otimes W, U) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{(2)}_{\mathbb{K}}(V, W; U)$$

を構成することにしよう[*74]．$F : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{(V\times W)}, U) \to U^{V\times W}$ を補題 B.5.1 における可逆写像とする．$p : \mathbb{K}^{(V\times W)} \to V\otimes W$ を商集合への標準全射とし，p^* を

$$\begin{aligned} p^* : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V\otimes W, U) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^{(V\times W)}, U) \\ f &\longmapsto f\circ p \end{aligned}$$

で定まる単射とする．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{(V\times W)}, U) \arrow[r, "F"] & U^{V\times W} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V\otimes W, U) \arrow[u, "p^*"] & \mathrm{Hom}^{(2)}_{\mathbb{K}}(V, W; U) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

ここで，$\mathrm{Im}\, p^*$ への F の制限が可逆写像 : $\mathrm{Im}\, p^* \to \mathrm{Hom}^{(2)}_{\mathbb{K}}(V, W; U)$ を定めることを示そう．

> $h \in \mathrm{Im}\, p^*$ と $h(R) = 0$ が同値であることを示そう．$h \in \mathrm{Im}\, p^*$ とすればある f によって $h = f\circ p$ とかけるから，$h(R) = f(p(R)) = f([0]) = 0$ である．逆に，$h(R) = 0$ のとき $f([x]) = h(x)$ とすれば $h(R) = 0$ よりこの写像 f は well-defined で，$h(x) = f([x]) = f(p(x))$ となる．

$h \in \mathrm{Im}\, p^*$ と $g = F(h) : V\times W \to U$ が双線形写像であることが同値であることを示せばよろしい．$h(R) = 0$ と $h(R_1) = h(R_2) = h(R_3) = 0$ は同値だが

$$\begin{aligned} g(x+x', y) - g(x, y) - g(x', y) &= h(e_{x+x',y}) - h(e_{x,y}) - h(e_{x',y}) \\ &= h(e_{x+x',y} - e_{x,y} - e_{x',y}) \end{aligned}$$

より，

$$g(x+x', y) = g(x, y) + g(x', y) \quad (x, x' \in V, y \in W)$$

と $h(R_1) = 0$ は同値である．R_2, R_3 についても同様の議論を行えば g が双線形であることと $h(R) = 0$ であることは同値であることが示される．したがって

$$F|_{\mathrm{Im}\, p^*} : \mathrm{Im}\, p^* \to \mathrm{Hom}^{(2)}_{\mathbb{K}}(V, W; U)$$

可逆である．さらに $p^* : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V\otimes W, U) \to \mathrm{Im}\, p^*$ は可逆だから $F\circ p^* : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V\otimes W, U) \to \mathrm{Hom}^{(2)}_{\mathbb{K}}(V, W; U)$ も可逆である．

以上の結果より $g : V\times W \to U$ を双線形写像とすれば，$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V\otimes W, U)$ で $g = (F\circ p^*)(f)$ を満たすものがただひとつ存在する．これはすなわち

$$g(x, y) = (F(p^*(f)))(x, y) = F(f\circ p(e_{x,y})) = f([e_{x,y}]) = f(x\otimes y)$$

ということである．

特に $U = V\otimes W$ および $f = \mathrm{Id}_{V\otimes W}$ とおけば $\mathrm{Id}_{V\otimes W}\circ\otimes = \otimes : V\times W \to V\otimes W$ は双線形である． □

[*74] ただし，$\mathrm{Hom}^{(2)}_{\mathbb{K}}(V, W; U)$ は $V\times W$ から U への双線形写像全体のなす空間を表すこととする．

$\mathbb{K}$ 双線形写像 $\otimes : V \times W \to V \otimes W$ を普遍双線形写像などと呼ぶ．普遍双線形写像 $\otimes$ は一般には全射ではなく，構成法からは $V \otimes W$ の元がどのような形をしているかは分からない．

しかし，実は $V \otimes W$ 上の線形写像は $\otimes : V \times W \to V \otimes W$ の像の上で決まれば一意に定まることが示される．線形写像 $f, g : V \otimes W \to U$ が $f(x \otimes y) = g(x \otimes y)$ を満たしているとする．命題 B.5.3 より f, g に対応する双線形写像 $b_f, b_g : V \times W \to U$ がただ一つ定まり，$b_f(x, y) = f(x \otimes y) = g(x \otimes y) = b_g(x, y)$ が成り立つ．したがって $b_f = b_g$ となり，命題 B.5.3 より $f = g$ が分かる．

線形写像 $f : V \to V'$ と線形 $g : W \to W'$ が与えられたとき，それらのテンソル積を考えることが出来る．双線形写像 $b : V \times W \to V' \otimes X'$ を $b(x, y) = f(x) \otimes g(y)$ とする．この b に対応する線形写像 : $V \otimes W \to V' \otimes W'$ を $f \otimes g$ と定義するのである．

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "b"] & \\
V \otimes W \arrow[r, "f \otimes g"'] & V' \otimes W'
\end{tikzcd}$$

次の命題の系により $V \otimes W$ の元は $x \otimes y$ なる形の元の有限和で表現できることが明らかになる．

命題 B.5.4. $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ と $(W_\kappa)_{\kappa \in K}$ を線形空間の族とし，$V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$，$W = \bigoplus_{\kappa \in K} W_\kappa$ とおく．[*75]線形写像 $g : V \otimes W \to \bigoplus_{\lambda, \kappa} V_\lambda \otimes W_\kappa$ を $g(x \otimes y) \to (x_\lambda \otimes y_\kappa)_{\lambda, \kappa}$ で定める[*76]．このとき g は同型写像である．

証明．g の逆写像 h を次の手順で構成する：標準単射 $i_\lambda : V_\lambda \to V$, $j_\kappa : W_\kappa \to W$ に対して $h_{\lambda\kappa} = i_\lambda \otimes j_\kappa : V_\lambda \otimes W_\kappa \to V \times W$ と定義し，この族 $(h_{\lambda\kappa})$ に対応する線形写像：$\bigoplus V_\lambda \otimes W_\kappa \to V \otimes W$ を h とする．（補題 B.5.2 を参照.）

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus V_\lambda \otimes W_\kappa \arrow[r, "h"] & V \otimes W \\
V_\lambda \otimes W_\kappa \arrow[u, hook, "l_{\lambda\kappa}"] \arrow[ur, "h_{\lambda\kappa} = i_\lambda \otimes j_\kappa"'] &
\end{tikzcd} \tag{B.5.1}$$

この h が実際に g の逆写像になっていることを示せばよい．標準単射：$V_\lambda \otimes W_\kappa \to \bigoplus V_\lambda \times W_\kappa$ を $l_{\lambda\kappa}$ で表せば，

$$\begin{aligned}
h(g(x \otimes y)) &= h((x_\lambda \otimes y_\kappa)_{\lambda\kappa}) \\
&= h\left(\sum_{\lambda,\kappa} l_{\lambda\kappa}(x_\lambda \otimes y_\kappa)\right) \\
&= \sum_{\lambda,\kappa} h(l_{\lambda,\kappa}(x_\lambda \otimes y_\kappa)) \qquad (\because \text{linearity of } h) \\
&= \sum_{\lambda,\kappa} h_{\lambda\kappa}(x_\lambda \otimes y_\kappa) \qquad (\because \text{(B.5.1)}) \\
&= \sum_{\lambda,\kappa} i_\lambda \otimes j_\kappa(x_\lambda \otimes y_\kappa) \\
&= \sum_{\lambda,\kappa} i_\lambda(x_\lambda) \otimes j_\kappa(y_\kappa)
\end{aligned}$$

[*75] 一般に $(V_i)_{i \in I}$ の直和を $\bigoplus_{i \in I} V_i := \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \neq 0$ となる i は有限個 $\}$ と定める．
[*76] 先ほどの議論よりこれだけで線形写像 g は一意に定まる．

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{\lambda} i_\lambda(x_\lambda)\right) \otimes \left(\sum_{\kappa} j_\kappa(y_\kappa)\right) \\
&= x \otimes y \qquad (\because \text{bilinearity of } \otimes)
\end{aligned}
$$

線形写像 $h \circ g$ は $\mathrm{Span}\{x \otimes y; (x, y) \in V \times W\}$ 上で恒等写像[*77]と一致．よって $h \circ g = \mathrm{Id}_{V \otimes W}$ である．

次に $g \circ h$ が恒等写像：$\bigoplus V_\lambda \otimes W_\kappa \to \bigoplus V_\lambda \otimes W_\kappa$ であることを示そう．任意の λ, κ で $(g \circ h) \circ l_{\lambda\kappa} = l_\lambda \kappa$ となることを示せば，補題 B.5.2 よりの一意性より $g \circ h = \mathrm{Id}$ が分かる．

$$
\begin{tikzcd}
\bigoplus V_\lambda \otimes W_\kappa \arrow[rr, "g \circ h"] & & \bigoplus V_\lambda \otimes W_\kappa \\
V_\lambda \otimes W_\kappa \arrow[u, "l_{\lambda\kappa}"] \arrow[urr, "l_{\lambda\kappa}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

任意の $(x_\lambda, y_\kappa) \in V_\lambda \times W_\kappa$ に対して

$$
g(h(l_{\lambda\kappa} x_\lambda \otimes y_\kappa)) = g(i_\lambda(x_\lambda) \otimes j_\kappa(y_\kappa)) = l_{\lambda\kappa}(x_\lambda \otimes y\kappa)
$$

である．線形写像 $l_{\lambda\kappa}$ と $(g \circ h) \circ l_{\lambda\kappa}$ は $x_\lambda \otimes y_\kappa$ なる形の元では一致するから，全体でも一致する． □

系 B.5.5. V, W を $\mathbb{K}$ -線形空間として， $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, (b_\kappa)_{\kappa \in K}$ をそれぞれ V, W の基底とする．このとき $(a_\lambda \otimes b_\kappa)_{\lambda,\kappa}$ は $V \otimes W$ の基底である．

証明．同型：$\bigoplus_\lambda \mathbb{K} a_\lambda \xrightarrow{\simeq} V$ および $\bigoplus_\kappa \mathbb{K} b_\kappa \xrightarrow{\simeq} W$ を考えれば命題 B.5.4 より分かる． □

B.6 Hilbert 空間のテンソル積

ここでは，Bourbaki [5] に従って Hilbert 空間のテンソル積を導入する．H_1, H_2 を実 Hilbert 空間とする．線形空間としてのテンソル積を $H_1 \otimes H_2$ と表記することにする．$x_1 \in H_1$ および $x_2 \in H_2$ を固定して，双線形形式：$(y_1, y_2) \mapsto \langle x_1, y_1 \rangle_{H_1} \langle x_2, y_2 \rangle_{H_2}$ を考える．

$$
\begin{tikzcd}
H_1 \times H_2 \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "\langle x_1, \cdot \rangle_{H_1} \langle x_2, \cdot \rangle_{H_2}"] & \\
H_1 \otimes H_2 \arrow[r, "\phi_{x_1, x_2}"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}
$$

このとき，上の図式を可換にする線形形式 ϕ_{x_1,x_2} がただ一つ存在するから，

$$
\phi_{x_1,x_2}(y_1 \otimes y_2) = \langle x_1, y_1 \rangle_{H_1} \langle x_2, y_2 \rangle_{H_2}
$$

が成立．一方，$z \in H_1 \otimes H_2$ を固定したとき，$(x_1, x_2) \mapsto \phi_{x_1,x_2}(z)$ もまた双線形形式になるので，同様にして

$$
\psi_z(x_1 \otimes x_2) = \phi_{x_1,x_2}(z) \quad (x_1 \in H_1, x_2 \in H_2)
$$

なる線形形式 ψ_z を得る．ここで $\Phi(z, w) = \psi_z(w)$ とおけば Φ は $H_1 \otimes H_2$ 上の双線形形式で，

$$
\Phi(x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2) = \langle x_1, y_1 \rangle_{H_1} \langle x_2, y_2 \rangle_{H_2}
$$

を満たす．

[*77] これはもちろん線形．

命題 B.6.1. 双線形形式 $\Phi : H_1 \otimes H_2$ は狭義の正定値かつ対称である．すなわち，Φ は $H_1 \otimes H_2$ 上に内積を定める．

証明．**Step1：対称性．** $z = x_1 \otimes x_2, w = y_1 \otimes y_2$ の形の時は，内積 $\langle\ \ ,\ \ \rangle_{H_1}$ および $\langle\ \ ,\ \ \rangle_{H_2}$ の対称性より

$$\Phi(z, w) = \langle x_1, y_1\rangle_{H_1}\langle x_2, y_2\rangle_{H_2} = \langle y_1, x_1\rangle_{H_1}\langle y_2, x_2\rangle_{H_2} = \Phi(w, z)$$

である．一般の時には $z = \sum_i x_1^i \otimes x_2^i$，$w = \sum_j y_1^j \otimes y_2^j$ と表現されるから，先ほどの結果と Φ の双線形性より

$$\Phi(z, w) = \sum_i \sum_j \Phi(x_1^i \otimes x_2^i, y_1^j \otimes y_2^j) = \sum_i \sum_j \Phi(y_1^i \otimes y_2^i, x_1^j \otimes x_2^j) = \Phi(w, z)$$

となる．

Step2：正定値性． 明らかに $\Phi(0, 0) = 0$ である．$z \neq 0$ のときは H_1 のある正規直交系 $e_1, \ldots, e_n$ と $0 \neq (f_1, \ldots, f_n) \in H_2^n$ によって $z = \sum_i e_i \otimes f_i$ と表現することが出来るから，

$$\Phi(0, 0) = \sum_{i,j} \Phi(e_i \otimes f_i, e_j \otimes f_j) = \sum_{i,j} \langle e_i, e_j\rangle_{H_1}\langle f_i, f_j\rangle_{H_2} = \sum_i \|e_i\|_{H_1}\|f_i\|_{H_2} = \sum_i \|f_i\| > 0$$

より狭義の正定値であることが分かる． □

この命題より Φ は $H_1 \otimes H_2$ 上の内積を定めるから，以降は

$$\langle z, w\rangle = \langle z, w\rangle_{H_1 \otimes H_2} := \Phi(z, w)$$

と書くことにする．定義より

$$\|x_1 \otimes x_2\|_{H_1 \otimes H_2} = \sqrt{\langle x_1, x_1\rangle_{H_1}\langle x_2, x_2\rangle_{H_2}} = \|x_1\|_{H_1}\|x_2\|_{H_2}$$

となるから，双線形写像 $(x_1, x_2) \mapsto x_1 \otimes x_2$ は連続である．

Hilbert 空間の族 $H_1, \ldots, H_n$ が与えられたとき，帰納的に

$$H_1 \otimes \cdots \otimes H_n := (H_1 \otimes \cdots \otimes H_{n-1}) \otimes H_n$$

と定義することにする．

定義 B.6.2. 内積空間 $(H_1 \otimes \cdots \otimes H_n, \langle\ \ ,\ \ \rangle)$ の完備化をテンソル積 Hilbert 空間と呼び，$H_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} H_n$ と書く．

命題 B.6.3. $H_1, \ldots, H_n$ を Hilbert 空間とする．$(e_{i_1}^k)_{i_1 \in I_1}$ を H_k の完全正規直交系とする．このとき，$(e_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{i_n}^n)$ は $H_1 \otimes \cdots \otimes H_n$ の完全正規直交系である．

証明．$(e_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{i_n}^n)$ が正規直交系であることは内積の定義より明らかなので，$H_1 \otimes \cdots \otimes H_n$ で total [*78] であることを示せばよい．さらに，多重線型写像 $(x_1, \ldots, x_n) \to x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ は連続であるから，

$$\{(e_{i_1}^1, \ldots, e_{i_n}^n) \mid (i_1, \ldots, i_n) \in I_1 \times \cdots \times I_n\}$$

[*78] 位相線形空間 E の部分集合 F が total であるとは，F の線型包が E で稠密だということである．

が $\prod H_k$ で total であることを示せば十分である．

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathrm{Span}\{(e^1_{i_1},\dots,e^n_{i_n}) \mid (i_1,\dots,i_n) \in I_1\times\cdots\times I_n\}} \\
&= \overline{\mathrm{Span}\{e^1_{i_1} \mid i_1 \in I_1\} \times \cdots \times \mathrm{Span}\{e^n_{i_n} \mid i_n \in I_n\}} \\
&= \overline{\mathrm{Span}\{e^1_{i_1} \mid i_1 \in I_1\}} \times \cdots \times \overline{\mathrm{Span}\{e^n_{i_n} \mid i_n \in I_n\}} \\
&= H_1 \times \cdots \times H_n
\end{aligned}$$

よりこれは成立している． □

$H_1 = \cdots = H_n = H$ のとき，代数的テンソル積 $H_1 \otimes \cdots \otimes H_n$ を $H^{\otimes n}$ と書き，その完備化を $H^{\hat{\otimes} n}$ と書くことにしよう．このテンソル積 Hilbert 空間を対称化することを考えよう．

$\mathfrak{S}_n$ で全単射 : $\{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ の全体を表すことにする[*79]．$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して，多重線形写像

$$(x_1,\dots,x_n) \mapsto x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma^{-1}(n)}$$

に対応する線形写像 : $H^{\hat{\otimes} n} \to H^{\hat{\otimes} n}$ を p_σ とおくことにする．これは明らかに Hilbert 空間としての（等長）同型写像である．$\Pi_n = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}$ とおいて，部分空間 $\Pi_n(H^{\otimes n})$ を $H^{\odot n}$ とかく[*80]．さらに，その完備化を $H^{\hat{\odot} n}$ と書くことにする．これを Hilbert 空間の対称テンソル積などと呼ぶ．

本文では $H_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} H_n$，$H^{\hat{\otimes} n}$，$H^{\hat{\odot} n}$ を改めて $H_1 \otimes \cdots \otimes H_n$，$H^{\otimes n}$，$H^{\odot n}$ と表記することにする．

B.7 滑らかな関数による近似

まずは関数の畳み込みについて復習する．Lebesgue 測度空間 $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), dx)$ を考える．可測関数 $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ に対して

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$$

て定義される関数（積分が存在すれば、ではあるが）を f, g の畳み込み (convolution) または合成積と呼ぶ．

命題 B.7.1. $1 \le p \le \infty$ とする．$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ と $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ に対して畳み込み

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)f(y)dt \tag{B.7.1}$$

はほとんど至るところ意味を持ち，$f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ かつ

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$$

が成り立つ．

証明. 定義より明らかに $(x, y) \mapsto f(x-y)g(y)$ は Borel 可測であり，適当な可積分性の下では Fubini の定理より $f * g$ も可測関数になることに注意しておく．(B.7.1) の二つ目の等号は $f * g = g * f$ を意味しているが，これは変数変換により容易に確められる．

以下では，p の値によって場合分けをしてそれぞれ可積分性を見ていく．

[*79] n 次対称群などと呼ぶ．

[*80] $H^{\otimes n}$ において対称なる元を同一視して商空間をとっても，これと（等長）同型な空間が定義できる．

Case1：$1 < p < \infty$ のとき．$q \in]1, \infty[$ を $1/p + 1/q = 1$ を満たす実数とする．Hölder の不等式より[*81]

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|dy &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|^p dy\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|dy\right)^{1/q} \\
&= \|f\|_1^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|^p dy\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

の定理よりが成り立つ．両辺を p 乗して x について積分すれば，Fubini

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|dy\right)^p dx &\leq \|f\|_1^{p/q} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|^p dy\right) dx \\
&= \|f\|_1^{p/q} \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|^p \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|dx\right) dy \\
&= \|f\|_1^{p/q} \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|^p dy \\
&= \|f\|_1^p \|g\|_p^p < \infty
\end{aligned}$$

となる．よって

$$(f * g)(x) \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|dy < \infty \quad \text{a.e.}$$

である．また，先ほどの評価より

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |(f*g)(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy\right|^p dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|dy\right)^p dx \\
&\leq \|f\|_1^p \|g\|_p^p < \infty
\end{aligned}$$

も分かるので $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$ も成り立つ．

Case2：$p = 1$ のとき．Fubini の定理により

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|dy\right) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|dx\right) dy \\
&= \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|dy \\
&= \|f\|_1 \|g\|_1
\end{aligned}$$

となるから，$f * g$ の存在と $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ が分かる．

Case3：$p = \infty$ のとき．

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|dy\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|dy \\
&\leq \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|dy \\
&= \|g\|_\infty \|f\|_1
\end{aligned}$$

である． □

[*81] $|f|$ を $|f|^{1/p}|f|^{1/q}$ と見る．

関数の近似を行うために強力な道具となる mollifier を導入しよう．次の条件を満たす $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ を考える[*82]．

(i) $\rho(x) \geq 0$ on $\mathbb{R}^d$.

(ii) $\rho(x) = 0$ if $|x| > 1$.

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)dx = 1$.

例 B.7.2. 上のような関数の例として，以下のようなものがある．

$$\varphi(x) \begin{cases} c\exp\left(-\dfrac{1}{1-|x|^2}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

c は全体の積分が 1 になるように適当に置いた定数である．この関数が非負でコンパクト台を持つことも明らかである．あとは，これが C^∞ であることを確かめればよい．

$$\psi(t) = \begin{cases} c\exp\left(-\dfrac{1}{t}\right) & t > 0 \\ 0 & t \leq 1 \end{cases}$$

とおけば，φ は ψ と C^∞ 級関数 $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto 1 - |x|^2 \in \mathbb{R}$ の合成だから，ψ の滑らかさを調べれば十分である．定義より $t \neq 0$ なる点では明らかに何回でも微分可能である．$t > 0$ で

$$\psi'(t) = c\exp\left(-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2} \xrightarrow{t\to 0} 0$$

となるから，命題??と同様の議論により ψ は $\mathbb{R}$ 上で微分可能である．高階の微分についても同様の議論をすれば[*83]，結局 ψ も C^∞ 級であることが分かる．

このような ρ に対して ρ_ε を $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d}\rho(x/\varepsilon)$ と定義することにする．この関数族 $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ を Friedrichs の軟化子 (mollifier) と呼ぶ．ρ_ε は明らかに次の性質を満たしている．

(i) $\rho_\varepsilon \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

(ii) $\rho_\varepsilon(x) \geq 0$ on $\mathbb{R}^d$.

(iii) $\rho_\varepsilon(x) = 0$ if $|x| > \varepsilon$.

(iv) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x)dx = 1$.

軟化子を上手く用いると，（必ずしも滑らかではない）適当なクラスの関数を滑らかな関数で近似することが出来る．

命題 B.7.3. $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ を $\mathbb{R}^d$ における Friedrichs の軟化子とし，$f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ (p は $[0, \infty[$ 上のある実数) とする．このとき，以下の主張が成立．

(i) $\rho_\varepsilon * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$ で，導関数は

$$\partial^\alpha(\rho_\varepsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\partial^\alpha \rho_\varepsilon(x-y)\right) f(y)dy$$

[*82] ただし，$C_c^\infty(X)$ は X 上の C^∞ 級関数でコンパクト台をもつもの全体のなす空間である．

[*83] 何回微分しようが，結局は $\exp(-1/t)$ に $1/t^n$ くらいのオーダーのものが掛かったものの極限を調べればよいので，どれも 0 に行くのである．

で与えられる．（多重指数の記法を用いている．）

(ii) $\rho_\varepsilon * f \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ $(\varepsilon \to 0)$ が成立．

証明．(i)．$\rho_\varepsilon * f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ は B.7.1 より分かる．また，ここでは $\rho_\varepsilon * f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ にもなっている．実際 ρ_ε はコンパクトな台を持つので，積分

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)f(y)dy$$

は実質的には点 $x \in \mathbb{R}^d$ の有界なる近傍上での積分になっているのである．測度有限な集合上では p 乗可積分性は可積分性を導くことを思い出されたい．また，ρ_ε の有界性より，Lebesgue の収束定理を用いれば $(\rho_\varepsilon * f)$ 連続性も容易に示される．あとは積分記号化での微分を正当化すればよいが，$\rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ から ρ_ε 偏導関数はどれも有界であることを用いればこれもすぐに分かる．

(ii)．τ_h を $\tau_h f(x) = f(x-h)$ で定めることにすれば，$f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ に対して $\|\tau_h f - f\|_{L^p} \to 0$ $(h \to 0)$ が成り立つ[*84]ことに注意しておく．

Case1：$p \in]1,\infty[$ **のとき**．$1/p + 1/q = 1$ なる q をとる．Hölder の不等式により

$$\begin{aligned}
|(\rho_\varepsilon * f)(x) - f(x)|^p &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(y)f(x-y)dy - f(x)\left(\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(y)dy\right) \right|^p \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(y)\{f(x-y) - f(x)\}dy \right|^p \\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(y)dy\right)^{p/q} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(y)\,|f(x-y) - f(x)|^p\,dy\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(y)\,|f(x-y) - f(x)|^p\,dy
\end{aligned}$$

なる評価を得る．これを積分すれば，Fubini の定理と $\mathrm{supp}\rho_\varepsilon \subset [-\varepsilon,\varepsilon]$ より

$$\begin{aligned}
\|\rho_\varepsilon * f - f\|_p^p &\le \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(y)\,|f(x-y) - f(x)|^p\,dy\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(y)\,\|\tau_y f(x) - f(x)\|_p^p\,dy \\
&= \int_{\{|y|\le\varepsilon\}} \rho_\varepsilon(y)\,\|\tau_y f - f\|_p^p\,dy \\
&= \sup_{|y|\le\varepsilon} \|\tau_y f - f\|_p^p \int_{\{|y|\le\varepsilon\}} \rho_\varepsilon(y)dy \\
&= \sup_{|y|\le\varepsilon} \|\tau_y f - f\|_p^p
\end{aligned}$$

が成立．$\varepsilon \to 0$ とすれば命題の主張を得る．

Case2：$p = 1$ **の場合**．Hölder の不等式を経由せずに，

$$|(\rho_\varepsilon * f)(x) - f(x)| \le \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(y)\,|f(x-y) - f(x)|\,dy$$

という素朴な評価を用いればよい，　□

命題 B.7.4. $f \in C(\mathbb{R}^d)$ ならば $\rho_\varepsilon * f$ は各 x で存在する．

[*84] この事実は認めることにする．証明は宮島の定理 6.11 [16, p.430] などを参照．

証明.

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(y)|f(x-y)|dy \\
&\leq \int_{\{|y|\leq\varepsilon\}} \rho_\varepsilon(y)|f(x-y)|dy \quad (\because \operatorname{supp}\rho_\varepsilon \subset [-\varepsilon,\varepsilon]) \\
&\leq \sup_{|y|\leq\varepsilon}|f(x-y)| \int_{\{|y|\leq\varepsilon\}} \rho_\varepsilon(y)dy \\
&= \sup_{|y|\leq\varepsilon}|f(x-y)| \\
&< \infty \quad (\because \text{連続関数 } f \text{ はコンパクト集合上有界.})
\end{aligned}
$$

より分かる. □

命題 B.7.5. $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap C(\mathbb{R}^d)$ ならば $\rho_\varepsilon * f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ で，$(\rho_\varepsilon * f)(x) \to f(x)$ for any $x \in \mathbb{R}^d$ が成立.

証明.

$$
|(\rho_\varepsilon * f)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(y)|f(x-y)|dy \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(y)dy = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}
$$

より有界性が分かる.

$$
\begin{aligned}
|(\rho_\varepsilon * f)(x) - f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(y)|f(x-y)-f(x)|dy \\
&= \int_{\{|y|\leq\delta\}} \rho_\varepsilon(y)|f(x-y)-f(x)|dy + \int_{\{|y|>\delta\}} \rho_\varepsilon(y)|f(x-y)-f(x)|dy
\end{aligned}
$$

という評価を考える．f は任意のコンパクト集合上一様連続なので，任意の $\zeta > 0$ に対して十分小さな $\delta = \delta(x,\zeta)$ をとれば

$$
\begin{aligned}
\int_{\{|y|\leq\delta(x,\zeta)\}} \rho_\varepsilon(y)|f(x-y)-f(x)|dy &\leq \sup_{|y|\leq\delta(x,\zeta)}|f(x-y)-f(y)| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(y)dy \\
&= \sup_{|y|\leq\delta(x,\zeta)}|f(x-y)-f(y)| < \zeta
\end{aligned}
$$

が成立．このとき，$\varepsilon < \delta(x,\zeta)$ なる任意の ε に対して

$$
\int_{\{|y|>\delta\}} \rho_\varepsilon(y)|f(x-y)-f(x)|dy = 0
$$

となるから[*85]，

$$
|(\rho_\varepsilon * f)(x) - f(x)| < \zeta \quad \forall\varepsilon < \delta(x,\zeta)
$$

が成立．これは $(\rho_\varepsilon * f)(x) \to f(x)$ $(\varepsilon \to 0)$ ということに他ならない. □

付録 C　確率論に関する補足

C.1　Gauss 系

$x, y \in \mathbb{R}^d$ に対してその標準内積を $\langle x, y\rangle$ と書くことにする.

[*85] $\operatorname{supp}\rho_\varepsilon \subset [-\varepsilon,\varepsilon]$ に注意.

定義 C.1.1 (d 次元 Gauss 型確率変数)**.** $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，$X = (X_1, \ldots, X_d)$ を d 次元確率変数とする．ある $m \in \mathbb{R}^d$ と d 次対称正定値行列 V によって

$$E[e^{i\langle \xi, X\rangle}] = \exp\left(i\langle m, \xi\rangle - \frac{1}{2}\langle V\xi, \xi\rangle\right) \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}^d)$$

と表されているとき，X を d 次元 Gauss 型確率変数という．

注意 C.1.2. V が狭義の正定値，すなわち V が退化していない場合には d 次元 Gauss 型確率変数の分布は密度関数

$$\frac{1}{(2\pi)^{-d/2}} \frac{1}{\sqrt{\det V}} \exp\left(-\frac{1}{2}\langle V^{-1}(x-m), x-m\rangle\right)$$

をもつ．密度関数による定義では V が退化している場合は扱えないので，定義 C.1.1 は密度関数による定義の一般化になっていることに注意されたい．

命題 C.1.3. 確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の確率変数の有限族 $X_1, d \ldots, X_d$ に対して以下は同値.

(i) $X = (X_1, \ldots, X_d)$ は d 次元 Gauss 型確率変数.

(ii) 任意の $a, \ldots, a_d$ に対して $a_1X_1 + \cdots + a_dX_d$ は 1 次元 Gauss 型確率変数.

証明. $a = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ に対して確率変数 $a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$ を $\langle a, X\rangle$ で表すことにする.

Step1 : (i) ならば (ii) の証明. $X = (X_1, \ldots, X_d)$ は d 次元 Gauss 分布とし，その特性関数は $m \in \mathbb{R}^d$ と d 次正方行列 V で表されているものとする．とおく．このとき，任意の $t \in \mathbb{R}$ と任意の $a \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\begin{aligned} E[e^{it\langle a, X\rangle}] &= E[e^{i\langle ta, X\rangle}] \\ &= \exp\left(i\langle ta, m\rangle - \frac{1}{2}\langle V(ta), ta\rangle\right) \\ &= \exp\left(it\langle a, m\rangle - \frac{1}{2}t^2\langle Va, a\rangle\right) \end{aligned}$$

となるから，確率変数 $\omega \mapsto \langle a, X(\omega)\rangle$ は平均 $\langle a, m\rangle$，分散 $\langle Va, a\rangle$ の Gauss 分布に従う.

Step2 : (ii) ならば (i) の証明. 仮定より，任意の $\xi = (\xi_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ に対して $\langle \xi, X\rangle$ は正規分布に従う.

$$\begin{aligned} E[\langle \xi, X\rangle] &= \xi_1 E[X_1] + \cdots + \xi_d E[X_d] \\ \mathrm{Var}(\langle \xi, X\rangle) &= E\left[\left(\sum_{j=1}^d \xi_j (X_j - E[X_j])\right)\left(\sum_{j=1}^d \xi_j (X_j - E[X_j])\right)\right] \\ &= \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \xi_j \xi_k \mathrm{Cov}(X_j, X_k) \end{aligned}$$

であるから，

$$m = \begin{pmatrix} E[X_1] \\ \vdots \\ E[X_d] \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \mathrm{Cov}(X_1, X_1) & \ldots & \mathrm{Cov}(X_1, X_d) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_d, X_1) & \ldots & \mathrm{Cov}(X_d, X_d) \end{pmatrix}$$

とおけば[*86]

$$\begin{aligned} E[\langle \xi, X\rangle] &= \langle m, \xi\rangle \\ \mathrm{Var}(\langle \xi, X\rangle) &= \langle V\xi, \xi\rangle \end{aligned}$$

となる．よって $\langle \xi, X\rangle \sim \mathscr{N}(\langle m,\xi\rangle, \langle V\xi,\xi\rangle)$ であり

$$E[e^{it\langle \xi, X\rangle}] = \exp\left(it\langle m,\xi\rangle - \frac{1}{2}t^2\langle V\xi,\xi\rangle\right)$$

が任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ．特に $t=1$ とすれば

$$E[e^{i\langle \xi, X\rangle}] = \exp\left(i\langle m,\xi\rangle - \frac{1}{2}\langle V\xi,\xi\rangle\right)$$

となる．いま $\xi \in \mathbb{R}^d$ は任意に選んだものだったから，これは $X = (X_1, \dots, X_d)$ が d 次元 Gauss 型確率変数であることに他ならない． □

注意 C.1.4. いまの命題の証明よりわかるように，d 次正方行列 V は X の成分の分散，共分散を並べたものになっている．これより V を共分散行列などと呼ぶこともある．

命題 C.1.5. $X = (X_1, \dots, X_d)$ は d 次元 Gauss 分布であるとする．このとき，有限族 $X_1, \dots, X_d$ が独立であることと

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

は同値である．

証明. $X_a, \dots, X_d$ が独立なら $(*)$ が満たされることは明らかであるから，逆を示せばよい．$(*)$ がなりたつと仮定すれば，X の共分散行列は対角行列である．したがって

$$\begin{aligned} E[e^{i\langle \xi, X\rangle}] &= \exp\left(i\langle m,\xi\rangle - \frac{1}{2}\langle V\xi,\xi\rangle\right) \\ &= \exp\left(i\sum_{j=1}^d E[X_j]\xi_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \mathrm{Var}(X_j)\xi^2\right) \\ &= \prod_{j=1}^d \exp\left(iE[X_j]\xi_j - \frac{1}{2}\mathrm{Var}(X_j)\xi^2\right) \\ &= \prod_{j=1}^d E[e^{i\xi_j X_j}] \end{aligned}$$

となり，X の特性関数が X_j の特性関数の積に分解されることがわかる．よって $X_1, \dots, X_d$ は独立である． □

定義 C.1.6 (Gauss 系)**.** $\mathscr{X}$ を確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の空でない確率変数族とする．任意の $n \geq 1$ と $X_1, \dots, X_n \in \mathscr{X}$ に対して $X = (X_1, \dots, X_n)$ が n 次元 Gauss 型確率変数となるとき，$\mathscr{X}$ を Gauss 系 (Gaussian family)) とよぶ．

[*86] 任意の $\xi \in \mathbb{R}^d$ に対して $\langle V\xi, \xi\rangle = \mathrm{Var}(\langle \xi, X\rangle) \geq 0$ となるから V は非負定値行列になっていることに注意されたい．

注意 C.1.7. 補題 C.1.3 より，定義 C.1.6 での「X が d 次元 Gauss 型確率変数である」の部分は「任意の $a \in \mathbb{R}^n$ に対して $\langle a, X \rangle$ は 1 次元 Gauss 確率変数である」としても同値である．

命題 C.1.8. Gauss 系について次のことが成立する．

(i) $\mathscr{X} = \{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の Gauss 系とし，$\mathscr{Y} = \{Y_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $(\Omega', \mathscr{F}', P')$ 上の Gauss 系とする．$\mathscr{X}$ と $\mathscr{Y}$ の平均，共分散の全体が一致すれば，$\mathscr{X}$ と $\mathscr{Y}$ の有限次元分布は一致する．

(ii) Λ を任意の集合とし，$m : \Lambda \to \mathbb{R}$ と $C : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{R}$ を考える．C が正定値ならば適当な確率空間上に平均 $m(\lambda)$，分散 $C(\lambda, \kappa)$ をもつ Gauss 系 $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が存在する．

証明. (i) は明らか．(ii) は省略する．小谷の命題 10.4 [13, p.223] などを見よ．要はコルモゴロフの拡張定理を用いるということである． □

命題 C.1.9. $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間，$\mathscr{X}$ をその上の Gauss 系とする．$\mathrm{Span}(\mathscr{X}) \subset L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ で $\mathscr{X}$ によって生成される部分空間を表したとき，$L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ での閉包 $\overline{\mathrm{Span}(\mathscr{X})}$ はまたガウス系である．*87

証明. Gauss 系の定義より，$\mathrm{Span}(\mathscr{X})$ もまた Gauss 系となることに注意しておく．$X_n \longrightarrow X$（L^2 収束）なら X は Gauss 分布に従うことを示す．L^2 収束より明らかに

$$E[X_n] \longrightarrow E[X]$$
$$\mathrm{Var}(X_n) \longrightarrow \mathrm{Var}(X)$$

である．また，L^2 収束は分布収束を導くから，

$$E[e^{i\xi X_n}] \longrightarrow E[e^{i\xi X}]$$

である．以上の結果より

$$\begin{aligned} E[e^{i\xi X}] = \lim_{n\to\infty} E[e^{i\xi X_n}] &= \lim_{n\to\infty} \exp\left\{ i\xi E[X_n] - \frac{\xi^2}{2}\mathrm{Var}(X_n) \right\} \\ &= \exp\left\{ i\xi E[X] - \frac{\xi^2}{2}\mathrm{Var}(X) \right\} \end{aligned}$$

であり，特性関数の形から X が Gauss 分布に従うことが分かった．

さて，$X_k \in \overline{\mathrm{Span}(\mathscr{X})}$ $(k = 1, \ldots, n)$ とすれば各 k に対して $X_k^{(l)} \longrightarrow X_k$（$L^2$ -収束）を満たす $\mathrm{Span}(\mathscr{X})$ の元の列がとれる．$\mathrm{Span}(\mathscr{X})$ は Gauss 系だったから $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ に対して $a_1 X_1^{(l)} + \cdots + a_n X_n^{(l)}$ は Gauss 分布に従う．先ほどの結果よりその L^2 極限 $a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n$ も Gauss 分布に従う．よって $\overline{\mathrm{Span}(\mathscr{X})}$ は Gauss 系である． □

C.2 独立確率変数列の和について

補題 C.2.1 (確率収束の特徴づけ)**.** $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とする．確率変数列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して以下は同値．

(i) (X_n) はある確率変数に確率収束する．

*87 実はもっと強く，確率収束による閉包もまた Gauss 系になることが言える．小谷の補題 10.9 [13, p.226] などを参照のこと．

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $\delta > 0$ に対してある $N(\varepsilon, \delta) \in \mathbb{N}$ が存在して，

$$n, m \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow P\left[|X_n - X_m > \varepsilon|\right] < \delta$$

がなりたつ．

注意 C.2.2. 命題の条件 (ii) は Cauchy 列の定義とよく似ている．実際，確率変数全体の空間は確率収束の位相に関して完備距離空間となることが知られており，この条件は完備性と大いに関係している．（詳しくは伊藤 [12] の §3.7 などを参照されたい．）

C.2.1 の証明．**Step1 : (i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明．** $\varepsilon > 0$ とする．(i) を仮定し，その極限を X とおくことにする．このとき任意の $\delta > 0$ に対してある $N = N(\varepsilon, \delta)$ が存在して，任意の $n \geq N(\varepsilon, \delta)$ に対して

$$P\left[|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right] < \frac{\delta}{2}$$

が成り立つ．したがって，$n, m \geq N(\varepsilon)$ とすれば

$$\begin{aligned} P\left[|X_n - X_m > \varepsilon| > \varepsilon\right] &\leq P\left[|X_n - X| + |X - X_m| > \varepsilon\right] \\ &\leq P\left(\{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|X_m - X| > \frac{\varepsilon}{2}\}\right) \\ &\leq P\left[|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right] + P\left[|X_m - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right] \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \end{aligned}$$

となる．すなわち (ii) が成立．

Step2 : (ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． (ii) を仮定すれば，次の条件を満たす (X_n) の部分列 (X_{n_k}) がとれる．

$$P\left[|X_{n_k+1} - X_{n_k}| > \frac{1}{2^k}\right] < \frac{1}{2^k}.$$

$A_k = \{|X_{n_k+1} - X_{n_k}| > \frac{1}{2^k}\}$ とおけば

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty$$

となるから，Borel-Cantelli の第一補題により

$$P\left(\limsup_{k \to \infty} A_k\right) = P\left(\bigcap_{m \geq 0} \bigcup_{k \geq m} A_k\right) = 0$$

が成立．すなわち

$$P\left[\exists m \geq 0 \ \forall k \geq m \ |X_{n_{k+1}} - X_{n_k}| \leq \frac{1}{2^k}\right] = 1$$

である．したがって，任意の $\omega \in \liminf_{k \to \infty} \Omega \setminus A_k$ に対して $(X_{n_k}(\omega))_{k \in \mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}$ の Cauchy 列を成しており，(X_{n_k}) はある確率変数 X に概収束する．あとは (X_n) が X に確率収束していることを示せばよい．$\varepsilon > 0$ および $\delta > 0$ としよう．条件 (ii) より十分大きな $N(\delta, \varepsilon)$ をとれば

$$n, m \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow P\left[|X_n - X_m| > \frac{\varepsilon}{2}\right] < \delta$$

がなりたつ．$n \geq N(\delta, \varepsilon)$ とすれば，$k \geq N(\delta, \varepsilon)$ を用いて

$$\begin{aligned} P\left[|X_n - X| > \varepsilon\right] &\leq P\left[|X_n - X_{n_k}| + |X_{n_k} - X| > \varepsilon\right] \\ &\leq P\left[|X_n - X_{n_k}| > \frac{\varepsilon}{2}\right] + P\left[|X_{n_k} - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right] \\ &= P\left[|X_n - X_{n_k}| > \frac{\varepsilon}{2}\right] + P\left[|X_{n_k} - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right] \\ &< \delta + P\left[|X_{n_k} - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right] \end{aligned}$$

がわかる[*88]．ここで $k \to \infty$ とすれば

$$P\left[|X_n - X| > \varepsilon\right] \leq \delta$$

となるので[*89]．これは $X_n \to X$ in Prob. ということに他ならない． □

補題 C.2.3 (Ottaviani の不等式)．$X_1, \ldots, X_n$ を確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の独立確率変数列とする．

$$P[|X_{k+1} + X_{k+2} + \cdots + X_n| \leq \alpha] \geq \beta \quad k = 0, \ldots, n-1$$

ならば，以下の不等式が成立．

$$P\left[\max_{1 \leq k \leq n} |X_1 + \cdots + X_k| > 2\alpha\right] \leq \frac{1}{\beta} P\left[|X_1 + \cdots + X_n| > \alpha\right]$$

証明．

$$\begin{aligned} S_k &= X_1 + \cdots + X_k \\ T_k &= \max_{1 \leq j \leq k} |S_j| \\ A_k &= \{\omega \in \Omega \mid T_{k-1} \leq 2\alpha,\ |S_k| > 2\alpha\} \\ B_k &= \{\omega \in \Omega \mid |S_n - S_k| \leq \alpha\} \end{aligned}$$

とおくことにする．このとき，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ は互いに素で

$$\{T_n > 2\alpha\} = \{\exists k\ |S_k| > 2\alpha\} = \coprod_{k=1}^{n} A_k$$

となる．したがって

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) \leq \frac{1}{\beta} P\left[|S_n| > \alpha\right]$$

なる不等式が成り立てば命題の主張が示されたことになる．いま $A_1 \cap B_1, \ldots, A_n \cap B_n$ は互いに素で，$\omega \in A_k \cap B_k$ ならば $|S_k(\omega)| > 2\alpha$ かつ $|S_n - S_k| \leq \alpha$ なので，$|S_n(\omega)| > a$ とならなければいけないことに注意しておく．したがって

$$\coprod_{k=1}^{n} A_k \cap B_k \subset \{|S_n| > a\}$$

が成立する．定義より明らかに S_k, T_k は $\sigma(X_1, \ldots, X_k)$ であり，$S_n - S_k$ は $\sigma(X_{k+1}, \ldots, X_n)$ である．$X_1, \ldots, X_n$ 独立性だったから $\sigma(X_1, \ldots, X_k) \perp\!\!\!\perp \sigma(X_{k+1}, \ldots, X_n)$．よって

$$P(A_k \cap B_k) = P(A_k)P(B_k) \geq P(A_k)\beta$$

[*88] $n_k \geq k \geq N(\delta, \varepsilon)$ に注意．

[*89] (X_{n_k}) は X に概収束しているから，確率収束もしている．

となるから，

$$
\begin{aligned}
P\left[|S_n| > \alpha\right] &\geq P\left(\coprod_{k-1}^{n} A_k \cap B_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(A_k \cap B_k) \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} \beta P(A_k) \\
&= \beta P\left(\coprod_{k-1}^{n} A_k\right) \\
&= \beta P(T_n > 2\alpha)
\end{aligned}
$$

がわかる．これより求める不等式

$$
P(T_n > 2a) \leq \frac{1}{\beta} P(|S_n| > \alpha)
$$

が示された． □

補題 C.2.4 (一般化された部分積分公式)**.** $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ 上の任意の確率測度 μ と任意の C^1 級関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して

$$
\int_{]a,b]} f(x)\mu(dx) = f(b)F(b) - f(a)F(a) - \int_{]a,b]} f'(x)F(x)dx
$$

がなりたつ．ただし，F は μ の分布関数（*i.e.* $F(x) = \mu(\,]-\infty, x]\,)$）である．

証明.

$$
A = \{(x, y) \mid a < y \leq x \leq b\}
$$

とおくことにする．微積分学の基本定理により

$$
\int_{]a,x]} f'(x)dx = f(x) - f(a)
$$

となることに注意すれば，Fubini の定理により

$$
\begin{aligned}
\int_{]a,b]} f(x)\mu(dx) &= \int_{]a,b]} \left(\int_{]a,x]} f'(y)dy + f(a)\right)\mu(dx) \\
&= \int_{]a,b]\times]a,b]} 1_A(x, y)f'(y)\, dy \otimes \mu(dx) + \int_{]a,b]} f(a)\mu(dx) \\
&= \int_{]a,b]} \left(\int_{]a,b]} 1_A(x, y)\mu(dx)\right) f'(y)dy + f(a)\mu(]a, b]) \\
&= \int_{]a,b]} \left(\int_{[y,b]} \mu(dx)\right) f'(y)dy + f(a)(F(b) - F(a)) \\
&= \int_{]a,b]} (F(b) - F(y-))\, f'(y)dy + f(a)(F(b) - F(a)) \\
&= F(b)\int_{]a.b]} f'(y)dy - \int_{]a,b]} F(y-)f'(y)dy + f(a)(F(b) - F(a))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= F(b)(f(b)-f(a)) - \int_{]a,b]} F(y-)f'(y)dy + f(a)(F(b)-F(a)) \\
&= F(b)f(b) - F(a)f(a) - \int_{]a,b]} F(y-)f'(y)dy
\end{aligned}
$$

がなりたつ．ただし $F(y-) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} F(y-\varepsilon)$ である[*90]．分布関数の不連続点は高々可算個（よって不連続点全体は 0 集合）であったから，

$$
\int_{]a,b]} F(x-)f'(x)dx = \int_{]a,b]} F(x)f(x)dx
$$

となる．したがって

$$
\int_{]a,b]} f(x)\mu(dx) = F(b)f(b) - F(a)f(a) - \int_{]a,b]} f'(x)F(x)dy
$$

がわかる． □

補題 C.2.5. (μ_n) を $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度の列とし，φ_n を μ_n の特性関数とする．確率測度 μ とその特性関数 φ を考えるとき，μ_n が μ に弱収束するならば φ_n は φ に広義一様収束する[*91]．

証明. μ_n の分布関数を F_n とし，μ の分布関数を F とおくことにする．弱収束の仮定より，F のすべての連続点で

$$
F_n(x) \longrightarrow F(x) \quad \text{as } n \longrightarrow \infty
$$

となる．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，a を十分大きくとれば

$$
F(a) - F(a-) > 1-\varepsilon
$$

となるが[*92]，この $a, -a$ は特に F の連続点としてとることができる．このとき，ある $N_1(\varepsilon)$ が存在して，任意の $n \geq N(\varepsilon)$ に対して

$$
\mu_n(]-a,a]) = F_n(a) - F_n(-a) > 1-\varepsilon
$$

が成立．したがって $n >\geq N_1(\varepsilon)$ に対して

$$
\begin{aligned}
\left|\varphi_n(\xi) - \int_{]-a,a]} e^{i\xi x}\mu_n(dx)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}\setminus]-a,a]} e^{i\xi x}\mu_n(dx)\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}\setminus]-a,a]} |e^{i\xi x}|\mu_n(dx) \\
&= \mu(\mathbb{R}\setminus]-a,a]) \\
&= 1 - \mu_n(]-a,a]) < \varepsilon
\end{aligned}
$$

である．同様にして

$$
\left|\varphi(\xi) - \int_{]-a,a]} e^{i\xi x}\mu(dx)\right| < \varepsilon
$$

[*90] F は分布関数なので極限が必ず存在する点に注意．
[*91] 各点収束は明らかであるが，実はさらに強い主張が成立している点がポイントである．
[*92] $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ および $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ であるから．

も示される．ここで

$$I_n(\xi) = \int_{]-a,a]} e^{i\xi x}\mu_n(dx)$$
$$I(\xi) = \int_{]-a,a]} e^{i\xi x}\mu(dx)$$

とおけば，補題 C.2.4 により

$$I_n(\xi) = e^{i\xi a}F_n(a) - e^{-i\xi a}F_n(-a) - \int_{]-a,a]} i\xi e^{i\xi x}F_n(x)dx$$
$$I(\xi) = e^{i\xi a}F(a) - e^{-i\xi a}F(-a) - \int_{]-a,a]} i\xi e^{i\xi x}F(x)dx$$

がわかる．

$$\begin{aligned}&|I_n(\xi) - I(\xi)|\\ &\leq |F_n(a) - F(a)| + |F_n(a) - F(a)| + |\xi| \int_{]-a,a]} |F_n(x) - F(x)|\end{aligned}$$

という評価がなりたつが，右辺第 1 項と第 2 項は ξ に関して一様に 0 に収束する[*93]．$(*)$ の右辺第 3 項は有界収束定理より[*94]0 に収束するが，この収束は任意のコンパクト集合 $[-b,b]$ 上では ξ に関して一様である．つまり，十分大きな $N_2(\varepsilon)$ をとれば任意の $n \geq N_2(\varepsilon)$ に対して

$$|F_n(a) - F(a)| < \varepsilon$$
$$|F_n(a) - F(a)| < \varepsilon$$
$$|\xi| \int_{]-a,a]} |F_n(x) - F(x)| < \varepsilon \quad (\xi \in [-b,b])$$

いま，$\xi \in [-b,b]$ および $n \geq N(\varepsilon)$ とすれば

$$\begin{aligned}&|\varphi_n(\xi) - \varphi(\xi)|\\ &\leq \left|\varphi_n(\xi) - \int_{]-a,a]} e^{i\xi x}\mu_n(dx)\right| + \left|\varphi(\xi) - \int_{]-a,a]} e^{i\xi x}\mu(dx)\right| + |I_n(\xi) - I(\xi)|\\ &\leq 5\varepsilon\end{aligned}$$

が任意の $\xi \in [-b,b]$ に対してなりたつから，φ_n は $[-b,b]$ 上 φ に一様収束する． □

命題 C.2.6 (Lévy の 3 収束同等定理)．$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とする．$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を独立な実数値確率変数列，$S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$ とするとき，以下の 3 条件は同値である．

(i) (S_n) は概収束する．
(ii) (S_n) は確率収束する．
(iii) (S_n) は法則収束する．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) は明らかなので，(iii) $\Longrightarrow$ (ii) と (ii) $\Longrightarrow$ (i) を示せばよい．

[*93] $a, -a$ は分布の連続点であったことを思い出せ．
[*94] F_n, F の有界性と区間 $]-a,a]$ の有界性より．

Step1 : (iii) $\Longrightarrow$ (ii) の証明． 確率変数 Y の分布を P_Y のように表すことにする．表記を分かりやすくするため，以下の記号を用意する．

$$\varphi_n(\xi) = E[e^{i\xi X_n}] = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} P_{X_n}(dx) \quad \xi \in \mathbb{R}$$
$$S_{mn} = \sum_{k=m+1}^{n} X_k = S_n - S_m \quad (n > m)$$
$$\varphi_{mn}(\xi) = E[e^{i\xi S_{mn}}] = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} P_{S_{mn}}(dx) \quad \xi \in \mathbb{R}$$

仮定より (S_n) は法則収束するから，その極限の分布の特性関数 φ に対して $\varphi_{1n} \to \varphi$ が広義一様収束の意味でなりたつ．φ は測度の特性関数であるから，$b \in]0,1[$ に対してある $a > 0$ が存在して，

$$|\varphi_{1n}(\xi)| \geq \frac{b}{2} \quad (\|\xi\| \leq a)$$

がなりたつ[*95]．補題 C.2.5 より $|\xi| \leq a$ で $\varphi_n(z) \to \varphi(z)$（一様収束）がなりたつので，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N(\varepsilon)$ が存在して

$$m > n > N(\varepsilon) \Longrightarrow |\varphi_{1n}(\xi) - \varphi_{1m}(\xi)| < \frac{b}{2}\varepsilon \quad (|\xi| \leq a)$$

この $N(\varepsilon)$ は特に $(*)$ を満たすようなものとしてもよい．いま，独立性の仮定より $m > n$ に対して $\varphi_{1m}(\xi) = \varphi_{1n}(\xi)\varphi_{nm}(\xi)$ がなりたつから，

$$|\varphi_{1n}(\xi) - \varphi_{1m}(\xi)| = |\varphi_{1n}(\xi)|\,|1 - \varphi_{nm}| < \frac{b}{2}\varepsilon \quad (|\xi| \leq a)$$

となる．$(*)$ を思い出せば，$m > n > N(\varepsilon)$ に対して

$$|1 - \varphi_{nm}| = \left| \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\xi x}) P_{S_{nm}}(dx) \right| < \varepsilon \quad (|\xi| \leq a).$$

これより，

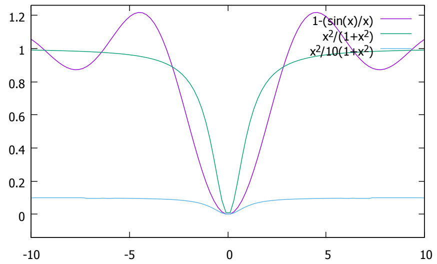
$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} \left(\int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\xi x}) P_{S_{nm}}(dx) \right) d\xi \right| &\leq \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} \left| \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\xi x}) P_{S_{nm}}(dx) \right| d\xi \\ &< \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} \varepsilon d\xi = \varepsilon \end{aligned}$$

がなりたち，したがって，Fubini の定理により[*96]

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} \left(\int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\xi x}) P_{S_{nm}}(dx) \right) d\xi \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-a}^{a} (1 - e^{i\xi x}) d\xi \right) P_{S_{nm}}(dx) \right| \quad (\because \text{Fubini theorem}) \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{\sin ax}{ax} \right) P_{S_{nm}}(dx) \right| \quad (\because \text{直接計算すればよい．}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{\sin ax}{ax} \right) P_{S_{nm}}(dx) \quad (\because \text{被積分関数の非負性}) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

*95 $\xi \mapsto \varphi(\xi)$ は連続で $\varphi(0) = 1$ であることに注意されたい．

*96 被積分関数の有界性と，測度の有限性より Fubini の定理が適用可能．



である．十分小さな $\beta > 0$ をとれば

$$\frac{\beta a^2x^2}{1+a^2x^2} \leq 1 - \frac{\sin ax}{ax}$$

がなりたつから[*97]（図を参照），

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{a^2x^2}{1+a^2x^2} P_{S_{nm}}(dx) \leq \frac{1}{\beta}\int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{\sin ax}{ax}\right) P_{S_{nm}}(dx) < \frac{\varepsilon}{\beta}$$

がわかる．したがって

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}\setminus[-\eta,\eta]} \frac{a^2\eta^2}{1+a^2\eta^2} P_{S_{nm}}(dx) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}\setminus[-\eta,\eta]} \frac{a^2x^2}{1+a^2x^2} P_{S_{nm}}(dx) \quad (\because \text{被積分関数は } x \geq 0 \text{ で単調増加，} x \leq 0 \text{ で単調減少}) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{a^2x^2}{1+a^2x^2} P_{S_{nm}}(dx) \\
&< \frac{\varepsilon}{\beta}
\end{aligned}$$

という評価を得る．すなわち

$$P_{S_{nm}}(\mathbb{R}\setminus[-\eta,\eta]) < \frac{1+a^2\eta^2}{\beta a^2\eta^2}\varepsilon$$

である．$P_{S_{nm}}$ が $S_m - S_n$ の分布であったことを思い出せば，

$$\begin{aligned}
P\left[|S_m - S_n| > \eta\right] &= P\left[S_m - S_n \in \mathbb{R}\setminus[-\eta,\eta]\right] \\
&= P_{S_{nm}}(\mathbb{R}\setminus[-\eta,\eta]) \\
&< \frac{1+a^2\eta^2}{\beta a^2\eta^2}\varepsilon
\end{aligned}$$

となるから，(S_n) の確率収束が分かる．

Step2 : (ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． (S_n) は確率収束するから，十分大きな n, m に対して

$$P\left[|S_n - S_m| > \varepsilon\right] < \frac{1}{2}$$

がなりたつ．Ottaivani の不等式により任意の $\varepsilon > 0$ に対してある N が存在して，任意の $m \in \mathbb{N}$ について

$$P\left[\max_{1\leq k\leq m} |S_{N+k} - S_N| > 2\varepsilon\right] \leq 2P\left[|S_{N+m} - S_N| > \varepsilon\right]$$

[*97] これはどう証明するのだ？

がなりたつ．これより

$$
\begin{aligned}
P\left[\max_{1\le k,l\le m}|S_{N+k}-S_{N+l}|>4\varepsilon\right] &\le P\left[\max_{1\le k\le m}|S_{N+k}-S_N|+\max_{1\le l\le m}|S_{N+l}-S_N|>4\varepsilon\right]\\
&= P\left[2\max_{1\le k\le m}|S_{N+k}-S_N|>4\varepsilon\right]\\
&= P\left[\max_{1\le k\le m}|S_{N+k}-S_N|>2\varepsilon\right]\\
&\le 2P\left[|S_{N+m}-S_N|>\varepsilon\right]\\
&\le 2\sup_m P\left[|S_{N+m}-S_N|>\varepsilon\right]
\end{aligned}
$$

である．ここで $m\to\infty$ とすれば[*98]

$$
P\left[\sup_{k,l\ge 1}|S_{N+k}-S_{N+l}|>4\varepsilon\right]\le 2\sup_m P\left[|S_{N+m}-S_N|>\varepsilon\right]
$$

今度は左辺の集合が N について単調減少であることに注意すれば

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}P\left[\sup_{k,l\ge 1}|S_{N+k}-S_{N+l}|>4\varepsilon\right] &= P\left[\lim_{N\to\infty}\sup_{k,l\ge 1}|S_{N+k}-S_{N+l}|>4\varepsilon\right]\\
&\le \lim_{N\to\infty}2\sup_m P\left[|S_{N+m}-S_N|>\varepsilon\right]\\
&=0
\end{aligned}
$$

最後の等号は (S_n) が確率収束することより従う．$\varepsilon>0$ は任意にとったものだったから，(S_n) は概収束することがわかる． □

[*98] 集合の単調性に注意．

References

[1] Robert A. Adams and John J. F. Fournier. *Sobolev spaces*. Pure and Applied Mathematics 140. Academic press, 2003. URL: https://www.elsevier.com/books/sobolev-spaces/adams/978-0-12-044143-3.

[2] Vladimir I Bogachev. *Gaussian Measures*. Mathematical Surveys and Monographs 62. American Mathematical Society, 1998. DOI: http://dx.doi.org.remote.library.osaka-u.ac.jp/10.1090/surv/062. URL: http://bookstore.ams.org/surv-62/.

[3] Nicolas Bourbaki. *Algebra Part I*. Elements of Mathematics. Hermann, 1974.

[4] Nicolas Bourbaki. *General Topology Part I*. Elements of Mathematics. Hermann, 1966.

[5] Nicolas Bourbaki. *Topological Vector Spaces*. Elements of Mathematics. Springer-Verlag, 1987.

[6] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential EquationsEquations*. Universitext. Springer-Verlag New York, 2011. DOI: 10.1007/978-0-387-70914-7. URL: http://www.springer.com/la/book/9780387709130.

[7] John B. Conway. *A Course in Functional Analysis*. 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics 96. Springer-Verlag New York, 1990.

[8] R. M. Dudley. *Real Analysis and Probability*. 2nd ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 74. Cambridge University Press, 2002. DOI: 10.1017/CBO9780511755347.

[9] R. M. Dudley and R. Norvaiša. *Concrete Functional Calculus*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag New York, 2011. DOI: 10.1007/978-1-4419-6950-7.

[10] Marián Fabian et al. *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*. CMS Books in Mathematics. Springer-Verlag New York, 2011. DOI: 10.1007/978-1-4419-7515-7.

[11] 日合 文雄 and 柳 研二郎. **ヒルベルト空間と線形作用素**. 牧野書店, 1995.

[12] 伊藤 清. **確率論**. 岩波書店, 1991.

[13] 小谷 眞一. **測度と確率**. 岩波書店, 2005.

[14] Giovanni Leoni. *A First Course in Sobolev Spaces*. Graduate Studies in Mathematics 105. American Mathematical Society, 2009.

[15] 宮島 静雄. **ソボレフ空間の基礎と応用**. 共立出版, 2006.

[16] 宮島 静雄. **関数解析**. 横浜図書, 2014.

[17] 盛田 健彦. **実解析と測度論の基礎**. 培風館, 2004.

[18] 西尾 眞喜子 and 樋口保成. **確率過程入門**. 確率論教程シリーズ 3. 培風館, 2006.

[19] Ivan Nourdin and Giovanni Peccati. *Normal Approximations with Malliavin Calculus. From Stein's Method to Universality*. Cambridge Tracts in Mathematics 192. Cambridge University Press, 2012. DOI: 10.1017/CBO9781139084659.

[20] David Nualart. *The Malliavin Calculus And Related Topics*. 2nd ed. Springer-Verlag, 2006.

[21] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis, Revised and Enlarged Edition*. Academic Press, 1980.

[22] H. L. Royden. *Real Analysis*. 3rd ed. Macmillan, 1988.

[23] Walter Rudin. *Functional Analysis.* 2nd ed. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, 1991.

[24] 斎藤 毅. 線形代数の世界. 抽象数学の入り口. 大学数学の入門 7. 東京大学出版会, 2007.

[25] 杉浦 光夫. 解析入門 *I.* 東京大学出版会, 1980.

[26] 杉浦 光夫，清水 英男，金子 晃，岡本 和夫. 解析演習. 東京大学出版会, 1989.

[27] 渡辺 信三，重川 一郎, ed. 確率論ハンドブック. 丸善出版, 2012.

索引