連続マルチンゲール

Ver. 3.0

大阪大学大学院基礎工学研究科
平井祐紀

2021 年 1 月 18 日

編集履歴

Ver.2.xx から大改造したので，ここから Ver.3.xx と称することにします.

目次

記号・用語

集合について

- $A \sqcup B$ および $\bigsqcup_i A_i$ は集合の直和，または無縁和を表す．どちらなのかは文脈に応じて判断すべし．
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
- $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$.
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
- $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \sqcup \{+\infty, -\infty\}$
- $\mathbb{Q}$：有理数全体の集合.
- $\mathbb{R}$：実数全体の集合.
- $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \sqcup \{+\infty, -\infty\}$.
- $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ に対して

$$
\begin{aligned}
A_{\geq a} &= \{x \in A \mid x \geq a\}, & A_{>a} &= \{x \in A \mid x > a\}, \\
A_{\leq a} &= \{x \in A \mid x \leq a\}, & A_{<a} &= \{x \in A \mid x < a\}.
\end{aligned}
$$

写像について

- 集合 X から Y への写像全体の空間を $\mathrm{Map}(X, Y)$ あるいは Y^X で表す．
- 実数値関数 f と g に対して，$f \vee g$ と $f \wedge g$ はそれぞれ関数 $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$ と $x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}$ を表す．特に $f^+ = f \vee 0$，$f^- = -(f \wedge 0)$ と書く．
- 実数値の関数族 (f_i) が与えられたとき，$\bigvee_i f_i$ および $\bigwedge_i f_i$ はそれぞれ $\overline{\mathbb{R}}$ 値関数 $x \mapsto \sup_i f_i(x)$ および $x \mapsto \inf_i f_i(x)$ を表す．
- σ-代数の族 $(\mathscr{A}_i)$ に対して $\bigvee_i \mathscr{A}_i$ で σ-代数 $\sigma(\bigcup_i \mathscr{A}_i)$ を表す．
- 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して，$s \to t$ かつ $s < t$ または $s \leq t$ なる s についての極限が存在すれば，それぞれ

  $$\lim_{s \uparrow\uparrow t} f(s), \quad \lim_{s \uparrow t} f(s)$$

  で表す．不等号を逆にして

  $$\lim_{s \downarrow\downarrow t} f(s), \quad \lim_{s \downarrow t} f(s)$$

  も定義する．
- 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全ての点で右連続，かつ左極限をもつとき，f は càdlàg であるという．

- $\mathbb{R}$ の部分集合上定義された関数 f は，$x \leq y$ なら $f(x) \leq f(y)$ を満たすとき，単調増加であるとか，増加的であるという．$x < y$ なら $f(x) < f(y)$ を満たすときは，狭義単調増加である，あるいは狭義に増加的であるという．

$\pm\infty$ に関する演算について

- $(\pm\infty)$ に関する演算が出てきたときは，次のように定義することにする：

$$\begin{array}{lll}
(+\infty) + a = a + (+\infty) = +\infty, & (-\infty) + a = a + (-\infty) = -\infty, & a \in \mathbb{R} \\
(+\infty) \times a = a \times (+\infty) = +\infty, & (-\infty) \times a = a \times (-\infty) = -\infty, & 0 < a < +\infty \\
(+\infty) \times (-a) = (-a) \times (+\infty) = -\infty, & (-\infty) \times (-a) = (-a) \times (-\infty) = +\infty, & 0 < a < +\infty \\
(+\infty) \times 0 = 0 \times (+\infty) = 0, & (-\infty) \times 0 = 0 \times (-\infty) = 0 &
\end{array}$$

測度と積分について

- 本ノートでは単に測度と言ったときは，$\overline{\mathbb{R}}$-値測度を表すことにする．それ以外のときは何らかの方法で測度の値域を明示することにする．たとえば非負測度とは $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ のことであるし，有限測度とは $\mathbb{R}$-値測度のことである．
- 測度空間 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ と可測空間 $(E, \mathscr{E})$，そして可測関数 $f\colon X \to E$ が与えられたとき，

$$\begin{aligned}
\mathscr{E} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\
A &\longmapsto \mu(f^{-1}(A))
\end{aligned}$$

  によって $(E, \mathscr{E})$ 上の測度が定まる．これを f の像測度，あるいは f による（測度 μ の）押し出し (push forward) といい，$f_*\mu$ で表す．
- 測度空間 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ が与えられたとき，μ による可測関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ の積分（が存在すればそれ）を

$$\int_X f(x)\mu(dx), \quad \int_X f d\mu, \quad \int_X \mu(dx) f(x), \quad \int_X d\mu\, f, \quad \mu(f), \quad \langle \mu, f \rangle$$

  などの記号で表す．
- 可測空間 $(X, \mathscr{A})$ 上の測度 μ と可測関数 f に対して

$$A \mapsto \int_A f(x)\mu(dx), \quad A \in \mathscr{A}$$

  で定まる測度を $f \bullet \mu$ で表す．
- 可測空間 $(X, \mathscr{A})$ から $(Y, \mathscr{B})$ への可測関数全体の集合を，$\mathscr{L}^0(X; Y)$ で表す．μ が $(X, \mathscr{A})$ の測度であるとき，μ-a.e. で等しいという関係による $\mathscr{L}^0(X; Y)$ の商空間を $\mathscr{L}^0(X; Y)/\mu$ や $L^0((X, \mathscr{A}, \mu); Y)$ で表す．
- 測度空間 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ に対し，p $(\in [1, \infty[)$ 乗可積分な可測関数全体の集合を $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ で表す．可測関数が μ-a.e. で等しいという同値関係による $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ の商空間を $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)/\mu$ または $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ で表す． $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ のノルムを $\|\ \|_{L^p}$ で表す．
- $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$ をは本質的に有界な実数値確率変数全体の空間とし，その μ による同値類を $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)/\mu$ または $L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$ で表す．$L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$ のノルムを $\|\ \|_{L^\infty}$ で表す．

確率空間について

- このノートでは $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ は常に確率空間を表すものとする．
- 確率変数 X に対してその期待値（P による積分）を $E[X]$ で表す．確率測度を明示する必要性があるときは，特に $E_P[X]$ などと書く．
- $\mathscr{F}$ の部分 σ-代数 $\mathscr{G}$ に対して，その条件付期待値の任意の変形 (version) を $E[X|\mathscr{G}]$ で表す．例えば，式 $E[X|\mathscr{G}] = Y$ a.s. の意味するところは，「条件付き期待値 $E[X|\mathscr{G}]$ の変形を任意に一つ選べば，それは Y と確率 1 で等しい」ということである．可積分でなくても，非負なる確率変数に対して条件付き期待値が定義できることに注意されたい．
- 確率過程の空間 $\mathscr{H}$ が与えられたとき，$\mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$ でその局所化を表す．$\mathscr{H}^{\mathrm{c}}$ は $\mathscr{H}$ の元のうち連続なパスをもつもの全体を，$\mathscr{H}_0$ は $\mathscr{H}$ の元のうちで 0 出発のもの全体を表すことにする．
- 可測空間 $(E, \mathscr{E})$ に値をとる確率変数 X と，可測空間 $(S, \mathscr{S})$ への可測関数 $f\colon E \to S$ が与えらえたとき，それらの合成 $f \circ X$ をしばしば $f(X)$ で表す．E 値確率過程 $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ が与えられたときは，$f(X)$ で確率過程 $(f(X_t))_{t\in\mathbb{T}}$ を表すことも多い．ただし，ここでの $f(X_t)$ は先ほど述べた確率変数 $f \circ X_t$ のことである．
- 本ノートでは，正の確率変数とは $[0, \infty[$ に値をとる確率変数のことを指す．$]0, \infty[$ に値をとる確率変数のことは，狭義に正であるという．確率過程についても同様の表現とする．

線形空間について

- $\mathbb{K}$-線形空間 X から Y への $\mathbb{K}$-線形写像全体の空間を $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ または $\mathrm{Hom}(X, Y)$ で表す．
- $\mathbb{K}$-Banach 空間 X から Y への有界線形写像全体の空間を，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}\text{-}\mathbf{Ban}}(X, Y)$ または $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ban}}(X, Y)$ で表す．

第 1 章

離散時間マルチンゲール

第 1 章のテーマは離散時間マルチンゲールである．本章は第 2 章以降への準備であり，離散マルチンゲールに多少の心得のある読者は読み飛ばしてもらって構わない．

折角なので「マルチンゲールとは何か」ということをドヤ顔で語ってみようかと思ったのだけれど，残念ながら私はマルチンゲールとは何かを語れるほどに豊富な人生経験を積んできた訳ではない．そういうのを知りたい人は，偉大なる David Williams 先生の本 [119] でも読んでもらえればよいだろう．ただ一言思いの丈を明かすと，マルチンゲールは金太郎飴みたいなものだというのが私の考えである．

1.1　離散時間確率過程と停止時刻

まずは，離散時間確率過程とその可測性についての基本的な用語を導入しよう．

定義 1.1.1.
$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間，$(E, \mathscr{E})$ を可測空間とする．

(i) 時刻の集合 $\mathbb{T} \subset \overline{\mathbb{Z}}$ によって添え字づけられた E-値確率変数族 $X = (X_n)_{n\in\mathbb{T}}$ を離散時間 E-値確率過程 (stochastic process) という．

(ii) $\mathbb{T}$ に添え字づけられた $\mathscr{F}$ の部分 σ-代数の族 $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{T}}$ を考える．$n < m$ なら $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_m$ が成り立つとき，$\mathbb{F}$ をフィルトレーション (filtration) という．このとき，四つ組 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間 (filtered probability space) や確率基底 (stochastic basis) という．

(iii) E-値確率過程 $(X_n)_{n\in\mathbb{T}}$ とフィルトレーション $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{T}}$ が与えられているとする．任意の $n \in \mathbb{T}$ について X_n が $\mathscr{F}_n$-可測であるとき，(X_n) は $(\mathscr{F}_n)$ に適合している (adapted) という．

(iv) $(\mathscr{F}_n)$-適合過程 (X_n) が，$n, n-1 \in \mathbb{T}$ なら X_n が $\mathscr{F}_{n-1}$-可測であるとする．このとき (X_n) は $(\mathscr{F}_n)$-可予測 (predictable) であるという．

確率過程論において特に重要なのは，状態空間 E が $\mathbb{R}$ や $\overline{\mathbb{R}}$，$\mathbb{R}^n$ などの場合である．確率過程の値 $X_n(\omega)$ をしばしば $X(n,\omega)$ などとも書くことにする．$\mathbb{T} \subset \overline{\mathbb{Z}}$ が有限集合の時は，$(X_n)_{n\in\mathbb{T}}$ は有限時間の確率過程であると言ったりする．フィルトレーション $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき，$\mathscr{F}_\infty = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_n$ と定義する．

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の確率過程 $X = (X_n)_{n\in\mathbb{T}}$ に対して，フィルトレーション $\mathbb{F}(X) = (\mathscr{F}_n(X))_{n\in\mathbb{T}}$ を次のように定義する．

$$\mathscr{F}_n(X) = \sigma(X_m; m \in \mathbb{T}, m \le n)$$

これは X が適合過程となるようなフィルトレーションのうち，包含関係について最小のものである．

フィルトレーションは，我々が観測出来る情報の数学的なモデル化である．$\mathscr{F}_n$ は時刻 n までに蓄積された観測可能な情報全体の集まりと考えられる．重要な点は，今現在より過去の情報は全て利用可能であるが，将来の情報は一般には観測できないということである．

次に，確率過程論において非常に重要な概念である停止時刻を導入しよう．

定義 1.1.2.
$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．確率変数 $T: \Omega \to \mathbb{T} \cup \{\infty\}$ が，任意の $n \in \mathbb{T}$ に対して

$$\{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \leq n\} \in \mathscr{F}_n$$

を満たすとき，T を $(\mathscr{F}_n)$-停止時刻（stopping time）という．

任意の停止時刻は確率変数であるのみならず，$\mathscr{F}_\infty$-可測であることが定義よりすぐにわかる．離散確率過程の場合，$T\colon \Omega \to \mathbb{T} \cup \{\infty\}$ が停止時刻であることは，次のように言い換えることが出来る．

$$\forall n \in \mathbb{T} \quad \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) = n\} \in \mathscr{F}_n.$$

これは実際，次の表現に注意すれば分かる．

$$\{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \leq n\} = \bigcup_{k \leq n} \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) = k\}$$
$$\{\omega \in \Omega \mid T(\omega) = n\} = \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \leq n\} \setminus \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \leq n-1\}$$

$n \in \mathbb{N}$ とすれば，

$$\{\omega \in \Omega \mid n \leq k\} = \begin{cases} \Omega \in \mathscr{F}_k & (n \leq k) \\ \emptyset \in \mathscr{F}_k & (n > k) \end{cases}$$

であるから，任意の自然数は停止時刻である．

停止時刻の定義を見ても，最初は何を言っているのか良く分からない．その意味を考えるために，次のような例を考えてみよう．あなたは，株式を売買して利益を出す投資家だとする．ここでは確率空間は将来的に起こりうるシナリオの全体であり，フィルトレーション $(\mathscr{F}_n)$ は各時刻であなたが使うことの出来る全ての情報を表していると考えられる．適合過程 (X_n) は株式の価格過程であるとする．(X_n) が $(\mathscr{F}_n)$ 適合であるということをラフに説明すると，時刻 n での X_n の価格の情報が n 時点で分かるということである．あなたは時刻 0 である量の株式を買っていて，それをいつ売るかの戦略を考えたい．もちろん，株価が最も上がったときに売りたいというのが本音であろう．株価の変化はシナリオ $\omega \in \Omega$ 毎に異なるはずなので，それを売る戦略も ω ごとに異なると考えるのが自然だ．そこで，株を売る戦略はある関数 $T\colon \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$ によって「シナリオ ω において株を時刻 $T(\omega)$ で売る」という形で表現されるべきだろうと考えられる．先ほども言ったように株が最も高くなった時に売りたいので，

$$T(\omega) = n \quad (k \mapsto X_k(\omega) \text{ が } n \text{ で最大値を取るとき})$$

とするのがいいだろう．いや，実は良くないのだ．既に述べたように，あなたは未来を予言出来ないので[*1]，あなたが現在の意思決定に使える情報は現在までにこの世界に蓄積された情報，（数学的に言えば $\mathscr{F}_n$）だけな

*1 ひょっとしたら読者の中に未来が見える人がいるかも知れないが，話が面倒くさくなるので，ここでは未来は分からないということにしていてほしい．

のである．株価がいつ最高値になるのかなんて，残念ながら投資家には分かるわけがない．停止時刻の定義に出てくる条件は，「投資家は現在までに蓄積された情報のみによって意思決定する」というような意味合いを持っているのである．

さて，この話を念頭に停止時刻の基本的な例をいくつか見てみよう．

例 1.1.3. $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F})_{n\in\mathbb{N}}, P)$ をフィルター付き確率空間とし，$N \in \mathbb{N}$ とする．$T(\omega) = N$ と定めれば，これは $(\mathscr{F}_n)$-停止時刻である． ■

例 1.1.3 は，「株価の変化に関係なく，1 か月後にかならず株を売る」という類の戦略である．これが賢い戦略かどうかはともかく，最初から売る時刻を決めているのだからこの戦略はもちろん未来の情報など必要としない．次に，もう少し高尚な（そして最も重要な）例をあげよう．

例 1.1.4. $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F})_{n\in\mathbb{N}}, P)$ をフィルター付き確率空間とし，(X_n) を確率過程とする．$a \in \mathbb{R}$ を定数とし，

$$T(\omega) = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n(\omega) \geq a\}$$

と定める．（inf とる集合が空の時は $T(\omega) = \infty$ である．）このとき T は $(\mathscr{F}_n)$-停止時刻である． ■

これは，「株価が最初に 1 万円を超えたらその瞬間に売る」というタイプの戦略である．ここで $\{T \leq n\}$ という事象は，「時刻 n までに株価が 1 万円を超える」というものなので，もちろん時刻 n までの情報で観測することが出来る．しかし，例えば次のような例は一般には停止時刻でない．

例 1.1.5. $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F})_{n\in\mathbb{N}}, P)$ をフィルター付き確率空間とし，(X_n) を確率過程とする．$a \in \mathbb{R}$ を定数とし，

$$T(\omega) = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid X_n(\omega) \geq a\}$$

と定める．（sup とる集合が空の時は $T(\omega) = 0$ とする．）この場合，T は一般には $(\mathscr{F}_n)$-停止時刻とはならない． ■

これは「株価が最後に 1 万円を超えた時に売る」というものである．株価が最後に 1 万円を超えているのがいつかなんて，地球が終わるまで，は言い過ぎだが，少なくともその会社が倒産して株式が売買されなくなるまで分かるわけがない．

次の命題で扱う停止時刻は例 1.1.4 における停止時刻の一般化である．

命題 1.1.6.
$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F})_{n\in\mathbb{N}}, P)$ をフィルター付き確率空間とし，$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $(E, \mathscr{E})$-値確率過程とする．$A \in \mathscr{E}$ に対して関数 $D_A^X \colon \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$ を

$$D_A^X(\omega) = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n(\omega) \in A\}$$

と定義する．このとき D_A^X は $(\mathscr{F}_n)$-停止時刻である．

証明. $n \in \mathbb{N}$ とすれば，

$$\{\omega \in \Omega \mid D_A^X(\omega) \in A\} = \bigcup_{0\leq k\leq n} \{\omega \in \Omega \mid X_k(\omega) \in A\} = \bigcup_{0\leq k\leq n} X_k^{-1}(A)$$

である．いま，各 X_k は $\mathscr{F}_k/\mathscr{B}(\mathbb{E})$-可測だから，$0 \leq k \leq n$ について

$$X_k^{-1}(A) \in \mathscr{F}_k \subset \mathscr{F}_n$$

が成立．よってその有限個の合併で表現されている $\{D_A^X \le n\}$ もまた $\mathscr{F}_n$ の元である． $\square$

命題 1.1.6 における停止時刻を，確率過程 $X = (X_n)$ の可測集合 A への到達時刻 (hitting time) やデビュー (debut) などと呼ぶ.

命題 1.1.7.
S, T を $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-停止時刻とすれば，$S+T$，$S\wedge T$，$S\vee T$ はいずれも $(\mathscr{F}_n)$-停止時刻である．

証明. $n\in\mathbb{N}$ とすれば,

$$\begin{aligned}\{S+T=n\} &= \bigcup_{k=0}^{n}(\{S=k\}\cap\{T=n-k\})\in\mathscr{F}_n\\ \{S\wedge T\le n\} &= \{S\le n\}\cup\{T\le n\}\in\mathscr{F}_n\\ \{S\vee T\le n\} &= \{S\le n\}\cap\{T\le n\}\in\mathscr{F}_n\end{aligned}$$

であるから，$S+T$，$S\vee T$，$S\wedge T$ は $(\mathscr{F}_n)$ - 停止時刻である． $\square$

確率過程 $X=(X_n)$ と停止時刻 T に対して新たな確率変数 $X_T 1_{\{T<\infty\}}$ を $X_{T(\omega)}(\omega)1_{\{T<\infty\}}(\omega)$ と定めることが出来る．

定義 1.1.8.
$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}},P)$ をフィルター付き確率空間とし，$T\colon\Omega\to\overline{\mathbb{N}}$ を停止時刻とする．

(i) 集合族 $\mathscr{F}_T\subset\mathscr{F}$ を以下で定義する．

$$\mathscr{F}_T=\{A\in\mathscr{F}_\infty \mid \forall n\in\mathbb{N}\ A\cap\{T\le n\}\in\mathscr{F}_n\}$$

(ii) 確率過程 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき，関数 $X_T 1_{\{T<\infty\}}\colon\Omega\to\mathbb{R}$ を次のように定める．

$$(X_T 1_{\{T<\infty\}})(\omega)=\begin{cases}X_{T(\omega)}(\omega) & T(\omega)<\infty\ \text{のとき},\\ 0 & \text{その他}.\end{cases}$$

(iii) 確率過程 $X=(X_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ に対して，関数 X_T を $X_T(\omega)=X(\omega,T(\omega))$ と定義する．

停止時刻 T が有限値の時は，$X_T 1_{\{T<\infty\}}$ と X_T は明らかに一致する．$X_T 1_{\{T<\infty\}}$ や X_T が実際に確率変数を定めることは，T の可測性と合成関数の可測性よりわかる．

注意 1.1.9. $\mathscr{F}_T$ の定義は文献によっては

$$\mathscr{F}_T=\{A\in\mathscr{F} \mid \forall n\in\mathbb{N}\ A\cap\{T\le n\}\in\mathscr{F}_n\}$$

となっていることもあるが，これは一見したところ定義 1.1.8 より小さい集合族を定めているように見える．今後の理論展開においては，定義 1.1.8 を採用しておいたほうが安全だろう． ■

命題 1.1.10.
$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}},P)$ をフィルター付き確率空間とし，$T\colon\Omega\to\overline{\mathbb{N}}$ を停止時刻とする．このとき $\mathscr{F}_T$ は σ-

代数であり，T は $\mathscr{F}_T$ 可測である．

証明. 明らかに $\Omega \in \mathscr{F}_T$ である．$A \in \mathscr{F}_T$ ならば，$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$A^c \cap \{T \leq n\} = (A \cap \{T \leq n\})^c \cap \{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n$$

だから，$A^c \in \mathscr{F}_T$．$(A_i) \in (\mathscr{F}_T)^{\mathbb{N}}$ なら，

$$\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \cap \{T \leq n\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cap \{T \leq n\}) \in \mathscr{F}_n.$$

よって $\mathscr{F}_T$ は σ-代数である．T の値域は $\overline{\mathbb{N}}$ であるから，T の可測性については $\{T = n\} \in \mathscr{F}_T$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ が分かれば十分である．$n \in \mathbb{N}$ を固定すれば，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\{T = n\} \cap \{T \leq k\} = \begin{cases} \{T = n\} \in \mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_k & \text{if } n \leq k, \\ \emptyset \in \mathscr{F}_k & \text{if } n > k. \end{cases}$$

となり，$\{T = n\} \in \mathscr{F}_T$ が分かった． □

停止時刻の定義より $T \equiv n$（定数）は明らかに停止時刻である．このとき，先ほど定義した停止時刻に関する σ-代数 $\mathscr{F}_T$ は $\mathscr{F}_T = \mathscr{F}_n$ を満たすだろうか？（満たさないと良い定義とは言えない．）これが正しいことを確かめてみよう．$A \in \mathscr{F}_T$ をとれば

$$A = A \cap \{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n$$

となるから，$\mathscr{F}_T \subset \mathscr{F}_n$ である．逆に $A \in \mathscr{F}_n$ とすれば，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$A \cap \{T \leq k\} = \begin{cases} A \in \mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_k & \text{if } n \leq k \\ \emptyset \in \mathscr{F}_k & \text{if } n > k \end{cases}$$

が成り立つ．よって $A \in \mathscr{F}_T$ であり，$\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_T$ も示された．したがって，停止時刻に関する σ-代数 $\mathscr{F}_T$ の定義は元のフィルトレーションの記法と整合的なものだったのである．いや，ちょっと待って．これだけでは足りない．我々はフィルトレーションが与えられたとき $\mathscr{F}_\infty = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{F}_n$ と書くことにしていたのだった．$S \equiv \infty$（定数）もまた停止時刻である．このとき $\mathscr{F}_S = \mathscr{F}_\infty$ は成り立つだろうか？ $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_\infty$ は定義より明らかである．$A \in \mathscr{F}_\infty$ とすれば，

$$A \cap \{S \leq n\} = \emptyset \in \mathscr{F}_n$$

が任意の n で成り立つ．よって $\mathscr{F}_\infty \subset \mathscr{F}_S$ もわかる．これで $S = \infty$ の場合にも $\mathscr{F}_S = \mathscr{F}_\infty$ が成り立つことが示された．

フィルトレーションは，（言うまでもなく）$n \leq m$ なら $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_m$ を満たす．つまり，より後の時刻のほうが豊富な情報を含むということである．この関係式は停止時刻によって定まる σ-代数についても同様に成り立つだろうか？つまり，二つの停止時刻 S, T が $S \leq T$ なる関係式を満たすとき，$\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$ は成り立つであろうか？これに答えるのが次の命題である．

命題 1.1.11.
$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．S, T を $(\mathscr{F}_n)$-停止時刻としたとき，次の性質が成り立つ．

(i) $S \le T$ が各点の意味で成り立つなら，$\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$ である．

(ii) $\mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T = \mathscr{F}_{S\wedge T}$ が成り立つ．

証明. (i) $S \le T$ のとき，$\{T \le n\} \subset \{S \le n\}$ であることに注意する．$A \in \mathscr{F}_S$ とすれば，任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$A \cap \{T \le n\} = \underbrace{(A \cap \{S \le n\})}_{\in \mathscr{F}_n} \cap \{T \le n\} \in \mathscr{F}_n.$$

が成り立つ．よって $A \in \mathscr{F}_T$ となり，$\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$ が成り立つ．

(ii) S と T は任意の停止時刻とする．このとき，(i) より $\mathscr{F}_{S\wedge T} \subset \mathscr{F}_S$ かつ $\mathscr{F}_{S\wedge T} \subset \mathscr{F}_T$ であるから，$\mathscr{F}_{S\wedge T} \subset \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$ が成り立つ．$A \in \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$ とすれば，

$$A \cap \{S \wedge T \le n\} = (A \cap \{S \le n\}) \cup (A \cap \{T \le n\}) \in \mathscr{F}_n$$

となるから，$A \in \mathscr{F}_{T_1 \wedge T_2}$ である．よって $\mathscr{F}_{S\wedge T} \supset \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$ も証明できた． □

命題 1.1.12.
$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, P)$ をフィルター付き確率空間とし，T を $(\mathscr{F}_n)$-停止時刻，X を適合過程とする．このとき任意の $\mathscr{F}_\infty$-可測な確率変数 ξ に対して，$X_T 1_{\{T<\infty\}} + \xi 1_{\{T=\infty\}}$ は $\mathscr{F}_T$-可測である．

証明. $X_T 1_{\{T<\infty\}}$ および $\xi 1_{\{T=\infty\}}$ がそれぞれ $\mathscr{F}_T$-可測であることを示せばよい．まずは $X_T 1_{\{T<\infty\}}$ が $\mathscr{F}_\infty$-可測であることを示さなければいけない．これは，$B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して以下の式が成り立つことからわかる．

$$\{X_T 1_{\{T<\infty\}} \in B\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [\{X_k \in B\} \cap \{T = k\}] \cup [\{0 \in B\} \cap \{T = \infty\}] \in \mathscr{F}_\infty$$

$B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ とすれば，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\{X_T 1_{\{T<\infty\}} \in B\} \cap \{T \le n\} = \bigcup_{k=1}^{n} (\{X_k \in B\} \cap \{T = k\}) \in \mathscr{F}_n$$

が成り立つ．よって $X_T 1_{\{T<\infty\}}$ は $\mathscr{F}_T$-可測である．

また，$B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ なら

$$\{\xi 1_{\{T=\infty\}} \in B\} \cap \{T \le n\} = \{0 \in B\} = \mathscr{F}_n$$

であるから，$\xi 1_{\{T=\infty\}}$ も $\mathscr{F}_T$-可測である． □

注意 1.1.13. 命題 1.1.12 より，任意の適合過程 $(X_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ に対して $X_T := X_T 1_{\{T<\infty\}} + X_\infty 1_{\{T=\infty\}}$ は $\mathscr{F}_T$-可測であることがわかる． ■

まとめ

- 離散時間確率過程とその可測性について定義をした．（1.1.1）
- 停止時刻の概念を導入し，その基本的な性質を証明した．（1.1.2–1.1.7）
- 停止時刻 T に対応する σ-代数 $\mathscr{F}_T$ は，もとのフィルトレーション $(\mathscr{F}_n)$ と同様ないくつかの性質を満たす．（1.1.8–1.1.13）

1.2 離散マルチンゲールの定義

定義 1.2.1.
$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{T}}, P)$ をフィルターつき確率空間とする．離散確率過程 $X = (X_n)_{n\in\mathbb{T}}$ が次の三条件を満たすとき，X は $(\mathscr{F}_n)$ 劣マルチンゲール（submartingale）であるという．

(i) (X_n) は $(\mathscr{F}_n)$-適合である．
(ii) 任意の $n \in \mathbb{T}$ に対して $E\left[|X_n|\right] < \infty$ が成り立つ．
(iii) 任意の $n, m \in \mathbb{T}$ が $n < m$ を満たすなら $E\left[X_m|\mathscr{F}_n\right] \geq X_n$ a.s. が成り立つ．

また，$(-X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が劣マルチンゲールになるような確率過程を優マルチンゲール (supermartingale) と呼ぶ．劣マルチンゲールかつ優マルチンゲールであるとき X は $(\mathscr{F}_n)$ - マルチンゲール (martingale) であるという．考えているフィルトレーション $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が明らかな時は，X を単に (劣, 優) マルチンゲールということもある．

$\mathbb{T} = \mathbb{N}$ のときは，条件 (iii) は明らかに次の条件 (iii)' と同値である．

(iii)' 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$E[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] = X_n$ がなりたつ．

マルチンゲールを考える時刻集合は基本的には $\mathbb{N}$ であるが，$\overline{\mathbb{N}}$ や $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ なども後に出てくる．

命題 1.2.2.
フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{T}}, P)$ 上の $(\mathscr{F}_n)$-適合過程 $X = (X_n)_{n\in\mathbb{T}}$ を考える．$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は凸関数で，任意の $n \in \mathbb{T}$ に対して $\varphi(X_n)$ が可積分となるようなものとする．

(i) X がマルチンゲールならば，$(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{T}}$ は劣マルチンゲールである．
(ii) X は劣マルチンゲールで φ は単調増加ならば，$(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{T}}$ も劣マルチンゲールとなる．

証明. まずは，$\mathbb{R}$ 上定義された凸関数 φ は連続なので，よって Borel 可測関数であることに注意しよう．$\varphi(X_n)$ は $\mathscr{B}(\mathbb{R})/\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 可測関数と $\mathscr{F}_n/\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 関数の合成なので，$\mathscr{F}_n$-可測である．ゆえに $(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{T}}$ は適合過程となる．

(i) X がマルチンゲールの場合を考える．条件付き期待値に関する Jensen の不等式を用いれば，$n < m$ のとき

$$E[\varphi(X_m)|\mathscr{F}_n] \leq \varphi\left(E[X_m|\mathscr{F}_n]\right) = \varphi(X_n)$$

が成り立つことがわかる．よって $(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{T}}$ は劣マルチンゲールである．

(ii) X は劣マルチンゲールで φ は単調増加であるとする．このとき，$n < m$ なら

$$E[\varphi(X_m)|\mathscr{F}_n] \leq \varphi\left(E[X_m|\mathscr{F}_n]\right) \leq \varphi(X_n)$$

となり，$(\varphi(X_n))$ の劣マルチンゲール性がわかる． □

系 1.2.3.

(i) $X = (X_n)$ がマルチンゲールならば $(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ は劣マルチンゲールである．

(ii) マルチンゲール $X = (X_n)$ が任意の $n \in \mathbb{N}$ について $E[|M_n|^p] < \infty$ を満たすならば，$(|M_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ は劣マルチンゲールである．

(iii) $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が劣マルチンゲールならば，(X_n^+) は劣マルチンゲールとなる．

(iv) $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は劣マルチンゲールで，任意の n について $X_n \log^+ X_n$ が可積分になるものとする．このとき，$(X_n \log^+ X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は劣マルチンゲールである．

系 1.2.3 に出てくる凸関数については，例 A.12.7–A.12.10 を見て欲しい．系 1.2.3 で構成された劣マルチンゲールはどれも大変重要なものであり，本ノートでもこれから何度も現れることになる．

確率過程 $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ および $H = (H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，新たな確率過程 $H \bullet X = ((H \bullet X)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を以下のように定義する．

$$(H \bullet X)_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \displaystyle\sum_{0\le k\le n-1} H_{k+1}(X_{k+1} - X_k) & n \in \mathbb{N}_{\ge 1}. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

このように定義された新たな確率過程 $H \bullet X$ を，H の X による離散確率積分 (discrete stochastic integral) とよぶ．次の命題で述べるように X がマルチンゲールの場合で H が有界の場合は $H \bullet X$ はマルチンゲールとなるので，$H \bullet X$ をマルチンゲール変換 (martingale transform) と呼ぶこともある．

命題 1.2.4.

(i) X を劣マルチンゲールとする．H が正の可予測過程で各 H_n が有界なら，$H \bullet X$ は劣マルチンゲールとなる．

(ii) X がマルチンゲールとする．H が可予測過程で各 H_n が有界なら，$H \bullet X$ はマルチンゲールとなる．

証明. (i) まずは可積分性を示そう．各 n に対して H_n の上界の一つを M_n とおけば，

$$E\left[|(H \bullet X)_n|\right] \le \sum_{k=1}^{n} M_k\, E\left[|X_k - X_{k-1}|\right].$$

という不等式が成り立つ．いま各 X_n は可積分であるから，全ての $n \in \mathbb{N}$ について $E|(H \bullet X)_n| < \infty$ が成り立つ．

次に，可測性を示す．定義より明らかに $(H \bullet X)_0$ は $\mathscr{F}_0$-可測である．$n \ge 1$ のとき，$(H \bullet X)_n$ は $\mathscr{F}_n$-可測関数の四則演算で表現されているから，これも $\mathscr{F}_n$-可測である．ゆえに $H \bullet X$ は適合過程であることがわかる．

最後に，条件付き期待値の満たす不等式を調べよう．$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} E[(H \bullet X)_{n+1}|\mathscr{F}_n] &= (H \bullet X)_n + E[H_{n+1}(X_{n+1} - X_n)|\mathscr{F}_n] \\ &= (H \bullet X)_n + H_{n+1}\, E[X_{n+1} - X_n|\mathscr{F}_n] \quad (\because H \text{ の可予測性}) \end{aligned}$$

が a.s. で成り立つことに注意する．いま X が劣マルチンゲールだからここで $E[X_{n+1} - X_n \mid \mathscr{F}_n] \ge 0$ a.s. であり，さらに (H_n) は正値だから

$$E[(H \bullet X)_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] = (H \bullet X)_n + H_{n+1}\, E[X_{n+1} - X_n|\mathscr{F}_n] \ge (H \bullet X)_n \quad \text{a.e.}$$

となることがわかる．以上の議論により，$H \bullet X$ が劣マルチンゲールであることが示された．

(ii) X がマルチンゲールのときは H の符号によらず

$$E[(H \bullet X)_{n+1} | \mathscr{F}_n] = (H \bullet X)_n + H_{n+1} E[X_{n+1} - X_n | \mathscr{F}_n] = (H \bullet X)_n \quad \text{a.e.}$$

が成り立つ．ただし，二つ目の等号は (X_n) のマルチンゲール性より従う．ゆえに $H \bullet X$ はマルチンゲールである． □

確率過程 $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ と停止時刻 T に対して新たな確率過程 $X^T = (X_n^T)$ を以下のように定義する．

$$X_n^T(\omega) = X_{T(\omega) \wedge n}(\omega).$$

この確率過程 X^T を X の T による停止過程という．これは本当に確率過程だろうか？つまり，各 X_n^T は本当に可測関数になっているだろうか？これは実際正しく，X_n^T が可測関数 $\omega \mapsto (T(\omega) \wedge n, \omega)$ と可測関数 $(n, \omega) \mapsto X_n(\omega)$ の合成であることから確かめられる[*2]．

定理 1.2.5.
$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を $(\mathscr{F}_n)$ - 劣マルチンゲール，T を $(\mathscr{F}_n)$ - 停止時刻とした時，X^T は劣マルチンゲールとなる．

証明. $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$E_n = \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \geq n\}, \qquad H_n(\omega) = 1_{E_n}(\omega)$$

と定義する．このとき H は明らかに正かつ有界な関数である．また T が停止時刻であることから $E_{n+1} \in \mathscr{F}_n$ となり，$H = (H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は可予測過程であることがわかる．いま

$$X_{T \wedge n} = X_0 + \sum_{k=1}^{n} H_k (X_k - X_{k-1}) = X_0 + (H \bullet X)_n$$

とかけるので，命題 1.2.4 より X^T は劣マルチンゲールである． □

まとめ

- 劣マルチンゲール，優マルチンゲール，マルチンゲールの定義をした．（定義 1.2.1）
- 劣マルチンゲールおよびマルチンゲールと凸関数の合成について調べた．（命題 1.2.2）
- 離散確率積分，あるいはマルチンゲール変換とよばれる確率過程 $H \bullet X$ を定義し，その性質を調べた．（命題 1.2.4）
- X が劣マルチンゲールなら，任意の停止時刻について停止過程 X^T はまた劣マルチンゲールとなる．（命題 1.2.5）

1.3 任意抽出定理その 1

1.1 節でみたように，T が停止時刻の時，T とそれに対応する σ-代数 $\mathscr{F}_T$ は，もとのフィルトレーションと同じような条件をいくつか満たすのであった．このような性質が，前節で導入したマルチンゲールに対しても成

[*2] $\mathbb{N}$ の σ-代数は $2^{\mathbb{N}}$ を考えればよい．

り立つのかどうかを考えるのが，本節での目的である．具体的には，次のような問いを考える：X はマルチンゲールで，S と T は $S \le T$ を満たす停止時刻とする．このとき，

$$E[X_T|\mathscr{F}_S] = X_S$$

は成り立つだろうか？安易な予想をすれば，これはいかにも成り立ちそうである．実はこの関係式はいつでも成立するわけではないことが知られている．しかし，本節や 1.6 節で扱うような適当な仮定の下では，この問いには肯定的な答えを与えることができる．これら結果は任意抽出定理 (optional sampling theorem) とか任意停止定理 (optional stopping theorem) などと呼ばれることが多い．

命題 1.3.1.
(X_n) を $(\mathscr{F}_n)$-劣マルチンゲール，T を有界な停止時刻とする．このとき X_T は可積分な確率変数であり，T の上界 $M \in \mathbb{N}$ に対して

$$E[X_0] \le E[X_T] \le E[X_M]$$

が成り立つ．

証明. はじめに

$$E\left[|X_T|\right] = \sum_{k=1}^{M} E\left[|X_k| 1_{\{T=k\}}\right] \le \sum_{k=1}^{M} E\left[|X_k|\right] < \infty$$

であるから，X_T は可積分であることを確かめておく．定理 1.2.5 より X^T は劣マルチンゲールなので

$$E[X_0] = E[X_{T\wedge 0}] \le E[X_{T\wedge M}] = E[X_T]$$

となり，一つ目の不等号が分かる．いま，確率過程 (K_n) を $n \ge 0$ に対して $K_n = 1_{\{T<n\}}$ と定める．定義より明らかに (K_n) は正値かつ有界（1 以下）であり，$\{T<n\} \in \mathscr{F}_{n-1}$ （$n \ge 1$）より (K_n) は可予測過程となる．$n \ge 1$ なら

$$(K \bullet X)_n = \sum_{0\le k\le n-1} 1_{\{T<k+1\}}(X_{k+1} - X_k)$$

が成り立つのであった．$T(\omega) \ge n$ なら，右辺の和は 0 になり，よって $(K \bullet X)_n(\omega) = 0$ である．$T(\omega) < n$ のとき，$T(\omega) = m$ なる $m < n$ を選べば，

$$\begin{aligned}
\sum_{0\le k\le n-1} 1_{\{T<k+1\}}(\omega)(X_{k+1}(\omega) - X_k(\omega)) &= \sum_{m\le k\le n-1} (X_{k+1}(\omega) - X_k(\omega)) && (1.3.1)\\
&= X_n(\omega) - X_m(\omega) && (1.3.2)\\
&= X_n(\omega) - X_T(\omega) && (1.3.3)
\end{aligned}$$

となる．したがって，いずれの場合でも

$$(K \bullet X)_n(\omega) = X_n(\omega) - X_{T\wedge n}(\omega)$$

となることがわかった．命題 1.2.4 より $(K \bullet X)$ は劣マルチンゲールとなるから，

$$E[X_M - X_{T\wedge M}] = E[(K \bullet X)_M] \ge E[(K \bullet X)_0] = 0$$

が成り立つ．これで二つ目の不等号が導かれた．□

命題 1.3.2.
$X=(X_n)$ を劣マルチンゲールとし，S，T を有界な停止時刻で，各点で $S\le T$ を満たすようなものとする．このとき，以下の不等式が成り立つ．

$$E[X_S]\le E[X_T]$$

証明. $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$H_n=1_{\{S<n\le T\}}$$

と定めれば，(H_n) は有界な可予測過程となる．$n\ge 1$ のとき，

$$(H\bullet X)_n(\omega)=\sum_{0\le k\le n-1}1_{\{S<k+1\le T\}}(\omega)\,(X_{k+1}(\omega)-X_k(\omega))$$

であったことを思い出そう．$n\le S(\omega)$ なら，この右辺は 0 である．$S(\omega)<n\le T(\omega)$ なら，

$$\sum_{0\le k\le n-1}1_{\{S<k+1\le T\}}(\omega)\,(X_{k+1}(\omega)-X_k(\omega))=\sum_{S(\omega)\le k\le n-1}(X_{k+1}(\omega)-X_k(\omega))=X_n(\omega)-X_S(\omega)$$

となる．さらに $n>T(\omega)$ なら

$$\sum_{0\le k\le n-1}1_{\{S<k+1\le T\}}(\omega)\,(X_{k+1}(\omega)-X_k(\omega))=\sum_{S(\omega)\le k\le T(\omega)}(X_{k+1}(\omega)-X_k(\omega))=X_T(\omega)-X_S(\omega)$$

となるので，結局

$$X_{T\wedge n}-X_{S\wedge n}=(H\bullet X)_n$$

がわかる．命題 1.2.4 より $(H\bullet X)$ は劣マルチンゲールとなるから，T の上界 M を一つ固定すれば，

$$E[X_T-X_S]=E[X_{T\wedge M}-X_{S\wedge M}]=E[(H\bullet X)_M]\ge E[(H\bullet X)_0]=0$$

を得る． □

定理 1.3.3 (任意抽出定理 I).
$X=(X_n)$ を劣マルチンゲールとし，S，T を有界な停止時刻で，各点で $S\le T$ を満たすようなものとする．このとき，P-a.s. で

$$E[X_T|\mathscr{F}_S]\ge X_S$$

が成り立つ．

証明. 任意の $A\in\mathscr{F}_S$ に対して

$$E[X_T1_A]\ge E[X_S1_A]$$

が成り立つことを示せばよい．M を T の上界とする．停止時刻 S と $A\in\mathscr{F}_S$ に対し確率変数 $S_A:\Omega\to\mathbb{N}$ を以下のように定める．

$$S_A(\omega)=\begin{cases}S(\omega) & \omega\in A\\ M & \omega\in\Omega\setminus A\end{cases}$$

このとき，S_A は有界な停止時刻となっていることを確かめよう．S_A は明らかに M 以下なので，有界である．$n<M$ なら，

$$\{S_A\le n\}=\{S\le n\}\cap A\in\mathscr{F}_n$$

であり[*3]，$n = M$ なら

$$\{S_A \leq n\} = \Omega \in \mathscr{F}_n$$

となる．よって S_A が実際に $(\mathscr{F}_n)$-停止時刻であることが確かめられた．T_A を同様に定めれば，T_A もまた有界な停止時刻であり，各点の意味で $S_A \leq T_A$ が成り立っている．したがって，命題 1.3.2 により

$$E[X_{T_A}] \geq E[X_{S_A}] \tag{1.3.4}$$

であることがわかる．いま

$$E[X_{S_A}] = E[X_S 1_A] + E[X_M 1_{\Omega\setminus A}]$$
$$E[X_{T_A}] = E[X_T 1_A] + E[X_M 1_{\Omega\setminus A}]$$

であることに注意すれば，(1.3.4) を変形することで

$$E[X_T 1_A] \geq E[X_S 1_A]$$

を得る． □

系 1.3.4.
$X = (X_n)$ をマルチンゲールとし，S，T を $S \leq T$ なる有界停止時刻とする．このとき，P-a.s. で

$$E[X_T|\mathscr{F}_S] = X_S$$

が成立する．

証明. X と $-X$ はともに劣マルチンゲールなので，定理 1.3.3 より P-a.s. で

$$E[X_T|\mathscr{F}_S] \geq X_S \qquad E[-X_T|\mathscr{F}_S] \geq -X_S$$

が成り立つ．これと条件付き期待値の線形性より P-a.s. で

$$E[X_T|\mathscr{F}_S] \geq X_S \qquad E[X_T|\mathscr{F}_S] \leq X_S$$

となり，$E[X_T|\mathscr{F}_S] = X_S$ がわかる． □

定理 1.3.5.
$X = (X_n)$ を $(\mathscr{F}_n)$ ‐劣マルチンゲール，(T_k) を有界停止時刻の増大列とする．$Y_n = X_{T_n}$ および $\mathscr{G}_n = \mathscr{F}_{T_n}$ とおけば，(Y_n) は $(\mathscr{G}_n)$ ‐劣マルチンゲールである．

証明. 命題 1.1.12 より X_{T_n} は $\mathscr{F}_{T_n}$ ‐可測なので，(Y_n) は $(\mathscr{G}_n)$ ‐適合である．また，定理 1.3.1 より $Y_n = X_{T_n}$ は可積分性もわかる．さらに定理 1.3.3 から

$$E[Y_{n+1}|\mathscr{G}_n] = E[X_{T_{n+1}}|\mathscr{F}_{T_n}] \geq X_{T_n} = Y_n \quad \text{a.s.}$$

となるので，(Y_n) は $(\mathscr{G}_n)$-劣マルチンゲールである． □

[*3] $\mathscr{F}_S$ の定義（定義 1.1.8）を思い出されたい．

まとめ

- X が劣マルチンゲール，$S \le T$ を有界停止時刻とすれば，$E[X_T|\mathscr{F}_S] \ge X_S$ a.s. が成り立つ．さらに X がマルチンゲールなら $E[X_T|\mathscr{F}_S] = X_S$ a.s. となる．
- 劣マルチンゲール X と有界停止時刻列 $T_0 \le T_1 \le \dots$ が与えられたとき，(X_{T_n}) は $(\mathscr{F}_{T_n})$-劣マルチンゲールとなる．

1.4　劣マルチンゲール不等式

この節では，Doob の不等式とよばれる 一連の不等式群を証明する．これらはマルチンゲール理論においてきわめて重要な不等式であり，これから先も何度も用いられる．大雑把な説明をすると，パス全体の情報が必要なはずの確率や期待値を，最終時刻だけの情報で評価できるという部分が重要な点である．

定理 1.4.1 (Doob の不等式).
$X = (X_n)$ を $(\mathscr{F}_n)$ - 劣マルチンゲールとすれば，$\lambda > 0$ に対して以下の不等式が成立する．

$$\lambda P\left[\sup_{0\le n\le N} X_n \ge \lambda\right] \le E\left[X_N 1_{\{\sup_{0\le n\le N} X_n \ge \lambda\}}\right] \le E\left[X_N^+\right] \tag{1.4.1}$$

$$\lambda P\left[\inf_{0\le n\le N} X_n \le -\lambda\right] \le E[X_N - X_0] - E\left[X_N 1_{\{\inf_{0\le n\le N} X_n \le -\lambda\}}\right] \le E\left[X_N^+\right] - E[X_0] \tag{1.4.2}$$

$$\lambda P\left[\sup_{0\le n\le N} |X_n| \ge \lambda\right] \le -E[X_0] + 2E[X_N^+] \tag{1.4.3}$$

この式を少しばかり鑑賞してみよう．(1.4.1) 左辺の確率に出てくる量 $\sup_{0\le n\le N} X_n$ を確定するためには，X_0 から X_N まで全ての情報が必要となるはずである．一方で，右辺の期待値中身を見ると，それが最終時点の情報 X_N だけで評価できるということを主張している．そういった視点で見ると，これは驚くべき結果であり，劣マルチンゲールの著しい性質であると言えるだろう．

証明．ステップ 1：(1.4.1) の証明．二つ目の不等号は明らかなので，一つ目のみ示せばよい．

$$T(\omega) = \inf\{n \ge 0 \mid X_n(\omega) \ge \lambda\}$$

と定義すれば，命題 A.1.5 より $T\colon \Omega \to [0,\infty]$ は停止時刻となる．このとき上限の定義より

$$\left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \sup_{0\le n\le N} X_n(\omega) \ge \lambda\right\} = \bigcup_{0\le n\le N} \{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \ge \lambda\} = \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \le N\} \tag{1.4.4}$$

であり，さらに $X_T 1_{\{T<\infty\}} \ge \lambda$ が成り立っていることに注意する．劣マルチンゲール (X_n) と定数 N および停止時刻 $T \wedge N$ に対して命題 1.3.1 を用いれば，

$$\begin{aligned}
E[X_N] &\ge E[X_{T\wedge N}] \\
&= E\left[X_{T\wedge N} 1_{\{T\le N\}}\right] + E\left[X_{T\wedge N} 1_{\{T>N\}}\right] \\
&= E\left[X_T 1_{\{T\le N\}}\right] + E\left[X_N 1_{\{T>N\}}\right] \\
&\ge E\left[\lambda 1_{\{T\le N\}}\right] + E\left[X_N 1_{\{T>N\}}\right] \\
&= \lambda P[T \le N] + E\left[X_N 1_{\{T>N\}}\right]
\end{aligned}$$

となる．この不等式と (1.4.4) を用いれば，ここから

$$\begin{aligned}\lambda P\left(\left\{\sup_{0\le n\le N} X_n \ge \lambda\right\}\right) &= \lambda P\left(\{T \le N\}\right)\\ &\le E[X_N 1_{\{T\le N\}}]\\ &= E\left[X_N 1_{\{\sup_{0\le n\le N} X_n \ge \lambda\}}\right]\end{aligned}$$

を導くことが出来る．よって (1.4.1) が示された．

ステップ 2：(1.4.2) の証明． 今度は停止時刻 $S\colon \Omega \to [0,\infty]$ を

$$S(\omega) = \inf\{n \ge 0 \mid X_n(\omega) \le -\lambda\}$$

と定義すれば，

$$\left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \inf_{0\le n\le N} X_n(\omega) \le -\lambda\right\} \bigcup_{0\le n\le N} X_n(\omega) = \{\omega \in \Omega \mid S(\omega) \le N\}$$

が成り立つ．先ほどと同様に命題 1.3.1 を用いれば，

$$\begin{aligned}E[X_0] &\le E[X_{S\wedge N}]\\ &= E\left[X_{S\wedge N} 1_{\{S\le N\}}\right] + E\left[X_{S\wedge N} 1_{\{S>N\}}\right]\\ &= E\left[X_S 1_{\{S\le N\}}\right] + E\left[X_N 1_{\{S>N\}}\right]\\ &\le E\left[-\lambda 1_{\{S\le N\}}\right] + E\left[X_N 1_{\{S>N\}}\right]\\ &= -\lambda P\left[S \le N\right] + E\left[X_N 1_{\{S>N\}}\right]\end{aligned}$$

となるが，これはすなわち

$$\lambda P\left[\inf_{0\le n\le N} X_n \le -\lambda\right] \le E[X_N - X_1] - E\left[X_N 1_{\{\inf_{0\le n\le N} X_n \le -\lambda\}}\right]$$

が成り立つということである．二つ目の不等号については，

$$E\left[X_N 1_{\{\inf_{0\le n\le N} X_n > -\lambda\}}\right] \le E\left[X_N^+ 1_{\{\inf_{0\le n\le N} X_n > -\lambda\}}\right] \le E\left[X_N^+\right]$$

という評価からわかる．

Step 3：(1.4.3) の証明． (1.4.1) と (1.4.2) を用いれば，

$$\begin{aligned}\lambda P\left[\sup_{0\le n\le N} |X_n| \ge \lambda\right] &\le \lambda P\left[\sup_{0\le n\le N} X_n \ge \lambda\right] + \lambda P\left[\inf_{0\le n\le N} X_n \le -\lambda\right]\\ &\le E[X_N^+] + E[X_N^+] - E[X_0]\\ &= -E[X_0] + 2E[X_N^+]\end{aligned}$$

と計算できる． □

系 1.4.2.

$p \ge 1$ とする．$X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はマルチンゲールかまたは正の劣マルチンゲールであるとし，任意の $n \in \mathbb{N}$ について $E[|X_n|^p] < \infty$ が成り立っているとする．このとき，任意の $\lambda > 0$ に対して以下の不等

式がなりたつ．

$$\lambda^p P\left[\sup_{0\le n\le N}|X_n|\ge\lambda\right]\le E\left[|X_N|^p\right] \tag{1.4.5}$$

証明． $X=(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が系の仮定を満たす確率過程なら，命題 1.2.2 により $(|X_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ は劣マルチンゲールになる．したがって，劣マルチンゲール $(|X_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ および $\lambda^p>0$ に対して (1.4.1) を用いればよい． □

定理 1.4.1 で得た不等式をモーメントの評価に関する式に書きかえる．次の不等式もまた Doob の不等式とよばれ，マルチンゲール理論においてきわめて重要な道具となっている．

定理 1.4.3.
$X=(X_n)$ をマルチンゲールかまたは正の劣マルチンゲールとする．このとき，任意の $p>1$ に対して

$$E\left[\sup_{0\le k\le n}|X_k|^p\right]\le\left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\left[|X_n|^p\right] \tag{1.4.6}$$

が成り立つ．また，次の評価も成り立つ．

$$E\left[\sup_{0\le k\le n}|X_k|\right]\le\frac{e}{e-1}\left(1+E[|X_n|\log^+|X_n|]\right) \tag{1.4.7}$$

証明．Step 1：準備． $X_n^*=\sup_{0\le k\le n}|X_k|$ とおくことにする．φ を右連続な増加関数で $\varphi(0)=0$ を満たすものとする．このとき命題 A.9.4 により

$$E[\varphi(X_n^*)]=\int_{[0,\infty[}P(X_n^*\ge t)d\varphi(t)=\int_{]0,\infty[}P(X_n^*\ge t)d\varphi(t)$$

が成り立つ．いま $X=(X_n)$ はマルチンゲールかまたは正の劣マルチンゲールなので，$(|X_n|)$ は劣マルチンゲールである．これに (1.4.1) を用いれば，任意の $t>0$ に対して

$$P(X_n^*\ge t)\le\frac{1}{t}E[|X_n|1_{\{X_n^*\ge t\}}]$$

となることがわかる．これと先ほどの式を合わせて，さらに Fubini の定理を用いて計算すれば，

$$\begin{aligned}E[\varphi(X_n^*)]&\le\int_{]0,\infty[}\frac{1}{t}E[|X_n|1_{\{X_n^*\ge t\}}]d\varphi(t)\\&=E\left[|X_n|\int_{]0,\infty[}\frac{1}{t}1_{\{X_n^*\ge t\}}d\varphi(t)\right]\\&=E\left[|X_n|\int_{]0,X_n^*]}\frac{1}{t}d\varphi(t)\right]\end{aligned}$$

なる不等式を得る．

Step 2：(1.4.6) の証明． Step 1 の評価において，$\varphi(t)=t^p$ とすれば，

$$\begin{aligned}E\left[(M_n^*)^p\right]&\le E\left[|X_n|\int_{]0,X_n^*]}\frac{1}{t}dt^p\right]\\&=E\left[|X_n|\int_{]0,X_n^*]}pt^{p-2}dt\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{p}{p-1} E\left[|X_n|(X^*)^{p-1}\right]$$

がわかる．ここで，Hölder の不等式を用いれば

$$E\left[|X_n|(X_n^*)^{p-1}\right] \leq E\left[|X_n|^p\right]^{\frac{1}{p}} E\left[(X_n^*)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

となるから，結局

$$E\left[(M_n^*)^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right) E\left[|M_n|^p\right]^{\frac{1}{p}} E\left[(M_n^*)^p\right]^{\frac{p-1}{p}} \tag{1.4.8}$$

なる式を得ることになる．$E\left[(M_n^*)^p\right] = 0$ のときは求める式 (1.4.6) は明らかなので，いま $E\left[(M_n^*)^p\right] > 0$ を仮定しても良い．(1.4.8) において両辺を $E[(M_n^*)^p]^{\frac{p-1}{p}}$ で割れば

$$\left(E\left[(M_n^*)^p\right]\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right) E\left[|M_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

となるので，これの両辺を p 乗すれば (1.4.6) を得る．

Step 3：(1.4.7) の証明． 今度は step 1 での評価において，$\varphi(t) = (t-1)^+$ とおく．このとき

$$\begin{aligned}
E[(X_n^* - 1)^+] &\leq E\left[|X_n| \int_{]0,X_n^*]} \frac{1}{t} d\varphi(t)\right] \\
&= E\left[|X_n| \int_{]0,X_n^*]} \frac{1}{t} 1_{]1,\infty[} dt\right] \\
&= E\left[|X_n| \log^+ X_n^*\right]
\end{aligned}$$

が成り立つ．全ての $x > 0$ に対して $\log x \geq x/e$ が成り立つことに注意すれば，$a, b \geq 1$ について

$$a \log \frac{b}{a} \leq a \frac{b}{a} \frac{1}{e} = \frac{b}{e}$$

となることがわかる．これより，$\log^+$ の定義に注意すれば全ての $a, b \geq 0$ について

$$a \log^+ b \leq a \log^+ a + \frac{b}{e}$$

が成り立つ．したがって

$$E\left[|X_n| \log^+ X_n^*\right] \leq E\left[|X_n| \log^+ |X_n|\right] + \frac{E[X_n^*]}{e}$$

となる．これと Step 3 最初の評価を合わせれば，

$$\begin{aligned}
E[(X_n^* - 1)] &\leq E[(X_n^* - 1)^+] \\
&\leq E\left[|X_n| \log^+ |X_n|\right] + \frac{E[X_n^*]}{e}
\end{aligned}$$

がわかる．これを変形すれば，

$$E[X_n^*] \leq \frac{e}{e-1}\left(1 + E\left[|X_n| \log^+ |X_n|\right]\right)$$

を得る． □

系 1.4.4.
$X = (X_n)$ をマルチンゲールかまたは正の劣マルチンゲールとする．このとき，次の評価が成り立つ．

$$E\left[\sup_{n\in\mathbb{N}}|X_n|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{n\in\mathbb{N}} E\left[|X_n|^p\right] \tag{1.4.9}$$

$$E\left[\sup_{n\in\mathbb{N}}|X_n|\right] \leq \frac{e}{e-1}\left(1 + \sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n|\log^+|X_n|]\right) \tag{1.4.10}$$

注意 1.4.5. Doob の不等式は，実解析における Hardy-Littlewood の極大不等式の類似物である．(1.4.1) は極大作用素 $f \mapsto Mf$ の弱 $(1,1)$-型の評価に，(1.4.6) は強 (p,p)-型の評価に対応する．有限時刻のマルチンゲール $(X_k)_{0\leq k\leq n}$ は最終時刻 X_n によって完全に決定するので，その可積分性に応じて L^p の元と同一視できる．したがって $X \in L^p$ に対して $\sup_{0\leq k\leq n}|E[X|\mathscr{F}_k]|^p$ を対応させる写像が，極大作用素に対応している．極大作用素の評価については，例えば Grafakos [52, Theorem 2.1.6] などを参照してもらいたい． ■

まとめ

- Doob の不等式と呼ばれる一連の不等式を証明した．（定理 1.4.1，系 1.4.2，定理 1.4.3，系 1.4.4．）
- Doob の不等式のうち特に重要なのは，$p = 2$ の場合のモーメント評価

$$E\left[\sup_{0\leq k\leq n}|X_k|^2\right] \leq 4E\left[|X_n|^2\right]$$

である．

1.5 収束定理

離散マルチンゲールは確率変数列であるから，その収束について考えることができる．本節では，マルチンゲールが時間に関する極限操作でどのような振る舞いを見せるのかを調べよう．本節における目標は，劣マルチンゲール収束定理 とか，マルチンゲール収束定理 とか呼ばれる一連の収束定理を証明することである．

実数 $a < b$ と $(\mathscr{F}_n)$-適合過程 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して確率変数 $U_n(a,b,X)$ を以下の手順で定める．このように定めた $U_n(a,b,X)$ のことを上向き横断数 (upcrossing number) とよぶ．再帰的に

$$\begin{aligned} N_0 &= -1 \\ N_{2k-1}(\omega) &= \inf\{m > N_{2k-2}(\omega) \mid X_m(\omega) < a\} \quad (k \geq 1) \\ N_{2k} &= \inf\{m > N_{2k-1}(\omega) \mid X_m(\omega) > b\} \quad (k \geq 1) \end{aligned}$$

と定め[*4]，このように構成した列 (N_k) に対して

$$U_n(a,b,X)(\omega) = \sup\{k \geq 0 \mid N_{2k}(\omega) \leq n\}$$

と定義する．また $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$H_n = 1_{\{N_{2k-1} < n \leq N_{2k} \text{ for some } k \geq 1\}}$$

と定める．

[*4] 離散時間の場合は $X_m \leq a$ などのように定義されることが多いが，連続マルチンゲールへの拡張の際にはこのように定義したほうが便利なので，こちらの定義を採用する．実際，確率解析の本ではこのように書いているものも多いと思う．

補題 1.5.1.
上で定めた N_k はどれも停止時刻であり，$U_n(a,b,X)$ は確率変数である．また，(H_n) は可予測過程である．

証明. まずは，(N_{2k-1}, N_{2k}) が停止時刻列を定めることを帰納法で示す．N_0 は明らかに停止時刻である．また

$$N_1(\omega) = \inf\{m > N_0(\omega) \mid X_m(\omega) < a\} = \inf\{m \geq 0 \mid X_m(\omega) < a\}$$

であるから，命題 1.1.6 により N_1 も停止時刻である．次に，$(N_{2k-1}, N_{2k})_{0\leq k\leq n}$ は停止時刻列であるとする．このとき，仮定より任意の m に対して

$$\{N_{2n+1} \leq m\} = \bigcup_{k\leq m} \{N_{2n-1} < k\} \cup \{X_k < a\} \in \mathscr{F}_m$$
$$\{N_{2n+2} \leq m\} = \bigcup_{k\leq m} \{N_{2n-1} < k\} \cup \{X_k < a\} \in \mathscr{F}_m$$

が成り立つ．よって (N_{2n+1}, N_{2n+2}) も停止時刻の組である．

$U_n(a,b,X)$ が確率変数であることは，任意の m について

$$\{U_n(a,b,X) \leq m\} = \bigcap_{k\leq m} \{N_{2k} \leq n\} \in \mathscr{F}$$

が成り立つことからわかる．

最後に，(H_n) が可予測過程であることを示そう．$n \geq 1$ とすれば

$$\{H_n = 1\} = \bigcup_{k\geq 1} \{N_{2k-1} < n\} \cap \{n \leq N_{2k}\}$$

が成り立つ．各 (N_k) は停止時刻であることから，この表現から $\{H_n = 1\} \in \mathscr{F}_{n-1}$ がわかる．また $H_0 = 0$ が明らかに $\mathscr{F}_0$-可測なので，したがって (H_n) は可予測過程となる． $\square$

定理 1.5.2 (上向き横断不等式).
確率過程 $X = (X_n)$ が劣マルチンゲールなら

$$(b-a)E[U_n(a,b,X)] \leq E\left[(X_n - a)^+\right] - E\left[(X_0 - a)^+\right] \leq E[X_n^+] + |a|$$

が成り立つ．

証明. 新たな確率過程 $Y = (Y_n)$ を $Y_n = a + (X_n - a)^+$ によって定めれば，系 1.2.3 より Y は劣マルチンゲールとなる．したがって命題 1.2.4 より $(H \bullet Y)$ も劣マルチンゲールとなる．H の定義を思い出せば，任意

の $\omega \in \Omega$ に対して

$$
\begin{aligned}
(b-a)U_n(a,b,X)(\omega) &= \sum_{N_{2k}(\omega)\le n} (b-a) \\
&\le \sum_{N_{2k}(\omega)\le n} (X_{N_{2k}}(\omega)-a) \\
&= \sum_{N_{2k}\le n} (X_{N_{2k}}(\omega)-a)^+ \\
&= \sum_{N_{2l}\le n} \sum_{N_{2l-1}<k\le N_{2l}} \left\{(X_k(\omega)-a)^+ - (X_{k-1}(\omega)-a)^+\right\} \\
&= \sum_{\substack{k\le n \\ \exists l\ge 1\ N_{2l-1}<k\le N_{2l}}} (Y_k(\omega)-Y_{k-1}(\omega)) \\
&= \sum_{k\le n} H_k(\omega)(Y_k(\omega)-Y_{k-1}(\omega)) \\
&= (H\bullet Y)_n(\omega)
\end{aligned}
$$

となることがわかる．ここで $K=1-H$ と定義すれば K もまた正値有界可予測過程であり，

$$(H\bullet Y)_n + (K\bullet Y)_n = (1\bullet Y)_n = Y_n - Y_0$$

が成り立つ．命題 1.2.4 より $(K\bullet Y)$ もまた劣マルチンゲールになるから，

$$E[(K\bullet Y)_n] \ge E[(K\bullet Y)_0] = 0$$

である．したがって

$$
\begin{aligned}
(b-a)E\left[U_n(a,b,X)\right] &\le E\left[(H\bullet Y)_n\right] \\
&\le E\left[(H\bullet Y)_n\right] + E\left[(K\bullet Y)_n\right] \\
&= E[Y_n - Y_0] \\
&= E\left[(X_n-a)^+\right] - E\left[(X_0-a)^+\right]
\end{aligned}
$$

となり，一つ目の不等号を得る．二つ目の不等号は

$$(X_n-a)^+ - (X_0-a)^+ \le (X_n-a)^+ \le X_n^+ + |a|$$

という評価から従う． □

定理 1.5.3.
$X=(X_n)$ を X^+ が L^1 - 有界であるような劣マルチンゲールとする．このとき，ある可積分な $\mathscr{F}_\infty$-可測関数 X_∞ が存在して $X_n \to X_\infty$ が概収束の意味で成り立つ．

証明. 定理 1.5.2 により，任意の実数 $a<b$ に対して

$$E\left[U_n(a,b,X)\right] \le \frac{E\left[X_n^+\right]+|a|}{b-a} \le \frac{\sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^+]+|a|}{b-a} < \infty$$

が成り立つ．ここで $U_n(a,b,X(\omega))$ が単調増加列であることに注意して，

$$U_\infty(a,b,X)(\omega) = \lim_{n\to\infty} U_n(a,b,X)(\omega)$$

と定義する．このとき単調収束定理と先ほどの不等式から，

$$E\left[U_\infty(a,b,X)\right] = \lim_{n\to\infty} E\left[U_n(a,b,X)\right] \le \frac{\sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^+] + |a|}{b-a} < \infty$$

となり，$U_\infty(a,b,X) < \infty$ P-a.s. がわかる．ところで，

$$\begin{aligned}\left\{\omega\in\Omega \,\middle|\, \varliminf_{n\to\infty} X_n(\omega) < \varlimsup_{n\to\infty} X_n(\omega)\right\} &\subset \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}} \left\{\omega\in\Omega \,\middle|\, \varliminf_{n\to\infty} X_n(\omega) < a < b < \varlimsup_{n\to\infty} X_n(\omega)\right\} \\ &\subset \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}} \{\omega\in\Omega \mid U_\infty(a,b,X(\omega)) = \infty\}\end{aligned}$$

であることに注意すれば，

$$P\left[\varliminf_{n\to\infty} X_n < \varlimsup_{n\to\infty} X_n\right] \le \sum_{a,b\in\mathbb{Q}} P\left[U_\infty(a,b,X) = \infty\right] = 0$$

となり，$(X_n(\omega)_{n\in\mathbb{N}}$ がほとんど確実に極限をもつことがわかる．ここで

$$X_\infty(\omega) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) & \omega \in \left\{\varliminf_{n\to\infty} X_n = \varlimsup_{n\to\infty} X_n\right\}, \\ 0 & \text{その他}, \end{cases}$$

と定義すれば，X_∞ は $\mathscr{F}_\infty$-可測であり，$X_n \to X_\infty$（$n\to\infty$）が確率 1 で成り立つ．したがって，後は X_∞ の可積分性を示せばよい．Fatou の補題により

$$E[X_\infty^+] \le \varliminf_{n\to\infty} E[X_n^+] \le \sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^+] < \infty$$

である．また，

$$E[X_n^-] \le E[X_n^+] - E[X_n] \le \sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^+] - E[X_0] \tag{1.5.1}$$

に注意すれば，再び Fatou の補題を用いて

$$E[X_\infty^-] \le \varliminf_{n\to\infty} E[X_n^-] \le \sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^+] - E[X_0] < \infty$$

が得られる．これにより，X_∞ の可積分性が示された． □

注意 1.5.4. 定理 1.5.3 証明中の不等式 (1.5.1) より，(X_n^-) も L^1-有界であることが分かる．すなわち，劣マルチンゲール (X_n) においては (X_n^+) の L^1-有界性が (X_n) の L^1-有界性を導くのである． ■

定理 1.5.5.
劣マルチンゲール $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，次の条件は同値である．

(i) X は一様可積分である．

(ii) X は L^1 収束する．

(iii) X はある可積分な $\mathscr{F}_\infty$-可測関数 X_∞ に概収束し，$(X_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ は $(\mathscr{F}_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ - 劣マルチンゲールとなる．さらに，$E[X_n] \to E[X_\infty]$ がなりたつ．

証明．ステップ 1：(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明． X が一様可積分ならば (X_n^+) は L^1 有界であるから，定理 1.5.3 よりある可積分な確率変数 X_∞ が存在して $X_n \to X_\infty$ P-a.s. となる．さらに (X_n) は一様可積分性であるから，定理 A.2.7 より (X_n) は X_∞ に L^1 収束することがわかる．

ステップ 2：(ii) $\Longrightarrow$ (iii) の証明． X の L^1 ‐極限を $\widetilde{X}_\infty$ とおく．X は L^1 収束するので L^1 ‐有界であり，よって (X_n^+) も L^1-有界となる．したがって，定理 1.5.3 により (X_n) はある $X_\infty \in L^1(\mathscr{F}_\infty)$ に概収束する．極限の一意性より $\widetilde{X}_\infty = X_\infty$ P-a.s. が成り立ち，また (X_n) が X_∞ に L^1 収束することから，任意の n について $(E[X_m|\mathscr{F}_n])_{m\in\mathbb{N}}$ も $E[X_\infty|\mathscr{F}_n]$ に L^1-収束する．特に適当な部分列 (n_k) をとれば概収束するので，

$$X_n \leq \lim_{k\to\infty, n_k \geq n} E[X_{n_k}|\mathscr{F}_n] = E[X_\infty|\mathscr{F}_n]$$

を得る．よって $(X_n; n \in \overline{\mathbb{N}})$ は $(\mathscr{F}_n; n \in \overline{\mathbb{N}})$ ‐劣マルチンゲールである．(X_n) は X_∞ に L^1-収束するのでその期待値 $(E[X_n])$ は $E[X_\infty]$ に収束することもわかる．

ステップ 3：(iii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． $X = (X_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ は劣マルチンゲールなので，命題 1.2.2 より $(X_n^+)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ もまた劣マルチンゲールであり，よって任意の $n \in \mathbb{N}$ と $\lambda > 0$ について

$$\int_{\{X_n^+ \geq \lambda\}} X_n^+ dP \leq \int_{\{X_n^+ \geq \lambda\}} X_\infty^+ dP \tag{1.5.2}$$

がなりたつ．いま，$(X_n^+)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ 劣マルチンゲール性から

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} P\left[X_n^+ \geq \lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda} \sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^+] \leq \frac{1}{\lambda} E[X_\infty^+]$$

であることがわかるから，(1.5.2) において $\lambda \to \infty$ とすれば，$X = (X_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ の一様可積分性がわかる．仮定より $X_n^+ \to X_\infty$ P-a.s. であったから，一様可積分性と合わせて定理 A.2.7 を用いれば，$E[X_n^+] \to E[X_\infty^+]$ となる．これと仮定の $E[X_n] \to E[X_\infty]$ を合わせれば $E[X_n^-] \to E[X_\infty^-]$ もわかる．(X_n) が X_∞ に概収束することから (X_n^-) も X_∞^- に概収束し，ゆえに命題 A.2.6 によって (X_n^-) は一様可積分性となる．したがって $X = X^+ - X^-$ も一様可積分である． □

命題 1.5.6.
$(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ‐マルチンゲール $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について，以下の条件は同値である．

(i) (X_n^+) は一様可積分である．
(ii) X は劣マルチンゲール $(X_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ に拡張できる．

命題 1.5.6 の条件を満たす劣マルチンゲールを，右可閉 (right-closable) 劣マルチンゲールなどと呼ぶことがある．

証明． (i) $\Longrightarrow$ (ii)．(i) を仮定すれば，命題 1.5.3 より (X_n) の概収束極限 $X_\infty \in L^1(\mathscr{F}_\infty)$ が存在し，定理 1.5.5 より $(X_n^+)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ は劣マルチンゲールとなる．$n, m \in \mathbb{N}$ かつ $A \in \mathscr{F}_n$ とすれば

$$\int_\Omega X_{n+m}^+ 1_A dP - \int_\Omega X_{n+m}^- 1_A dP = \int_\Omega X_{n+m} 1_A dP \geq \int_\Omega X_n 1_A dP$$

がなりたつ．いま $X_n^- \to X_\infty^-$ が概収束の意味で成立し，さらに定理 1.5.5 より $X_n^+ \to X_\infty^+$ は L^1 収束の意味

でも成り立っているから，先ほどの式で極限操作を行えば

$$\begin{aligned}\int_\Omega X_\infty 1_A dP &= \int_\Omega X_\infty^+ 1_A dP - \int_\Omega X_\infty^- 1_A dP \\ &\geq \varliminf_{m\to\infty} \int_\Omega X_{n+m}^+ 1_A dP - \varlimsup_{n\to\infty} \int_\Omega X_{n+m}^- 1_A dP \\ &\geq \int_\Omega X_n 1_A dP\end{aligned}$$

を得る．ゆえに $E[X_\infty \mathscr{F}_n] \geq X_n$ a.s. が成り立ち，$(X_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ は劣マルチンゲールである．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．$(X_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ が劣マルチンゲールならば，$(X_n^+)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ も劣マルチンゲールとなる．よって全ての $n\in\mathbb{N}$ について $X_n^+ \leq E[X_\infty^+|\mathscr{F}_n]$ が成り立つ．$(E[X_\infty^+|\mathscr{F}_n])_{n\in\mathbb{N}}$ は一様可積分だから（命題 A.2.5），この評価と非負性から $(X_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ の一様可積分性が従う（命題 A.2.2）． □

定理 1.5.7.
$X=(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - マルチンゲールとしたとき，以下の条件は同値である．

(i) X は一様可積分である．
(ii) X は L^1 収束する．
(iii) X はある可積分な $\mathscr{F}_\infty$-可測関数 X_∞ に概収束し，$(X_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ は $(\mathscr{F}_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ - マルチンゲールとなる．
(iv) ある可積分な確率変数 Y が存在して，$X_n = E[Y|\mathscr{F}_n]$ と書ける．

証明. (i) $\Longrightarrow$ (ii) は定理 1.5.5 よりわかる．(ii) $\Longrightarrow$ (i) は劣マルチンゲール X と $-X$ に定理 1.5.5 を用いればわかる．(iii) $\Longrightarrow$ (iv) は $Y=X_\infty$ とおけばよい．

(iv) $\Longrightarrow$ (i)．$X_n = E[Y|\mathscr{F}_n]$ という表示と命題 A.2.5 から (X_n) の一様可積分性がわかる． □

定理 1.5.8.
可積分確率関数 X を用いて，マルチンゲール $M=(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $M_n = E[X|\mathscr{F}_n]$ となるように定める．$M_n \to M_\infty := E[X|\mathscr{F}_\infty]$ が概収束と L^1 収束の意味で成立する．

証明. 定義より明らかに (M_n) は一様可積分マルチンゲールである．定理 1.5.7 より (M_n) はある $Z\in L^1(\mathscr{F}_\infty)$ に概収束かつ L^1 収束するから，$Z=M_\infty$ であることを示せばよい．任意の $A\in\mathscr{F}_n$ に対して

$$\int_A XdP = \int_A X_n dP$$

であるから，$X_n 1_A \to Z 1_A$ in L^1 に注意すれば

$$\int_A XdP = \int_A ZdP \tag{1.5.3}$$

となる．いま n と $A\in\mathscr{F}_n$ は任意に選んでいたから，これより (1.5.3) が全ての $A\in\bigcup_n \mathscr{F}_n$ について成り立つことがわかる．条件 (1.5.3) を満たすような $A\in\mathscr{F}$ の全体が $\bigcup_n \mathscr{F}_n$ を含む Dynkin 族をなすことは容易に示されるので，Dynkin 族定理より

$$\int_A XdP = \int_A ZdP \quad \forall A\in\mathscr{F}_\infty$$

となる．したがって，Z は X の条件付き期待値 $E[X|\mathscr{F}_\infty]$ のバージョンである． $\square$

定理 1.5.8 は次の形に一般化可能である．

命題 1.5.9.
確率変数列 (Y_n) が Y に概収束し，さらに $|Y_n| \le Z$ なる可積分確率変数 Z が存在するとき

$$E[Y_n|\mathscr{F}_n] \to E[Y|\mathscr{F}_\infty] \quad P\text{-a.s.}$$

が成り立つ．

この命題は，定理 1.5.8 と条件付き期待値に関する優収束定理を合体させたものと言えるだろう．

証明. まずは

$$|E[Y_n|\mathscr{F}_n] - E[Y|\mathscr{F}_\infty]| \le |E[Y_n|\mathscr{F}_n] - E[Y|\mathscr{F}_n]| + |E[Y|\mathscr{F}_n] - E[Y|\mathscr{F}_\infty]|$$

という評価を眺めてみよう．右辺第二項は定理 1.5.8 より 0 に概収束するから，右辺第一項の挙動を調べればよろしい．

$$W_N = \sup_{n,m\ge N} |Y_n - Y_m|$$

と定義すれば，$E[W_N] \le 2E[Z]$ より W_N は可積分である．W_N の定義より任意の $n \ge N$ に対して $|Y_n - Y| \le W_N$ がなりたつから，

$$E[|Y_n - Y||\mathscr{F}_n] \le E[W_N|\mathscr{F}_n] \quad P\text{-a.s.}, \ \forall n \ge N$$

となる．ここで $N \to \infty$ の極限をとれば，条件付き期待値の性質と定理 1.5.8 により

$$\begin{aligned}
\varlimsup_{n\to\infty} |E[Y_n|\mathscr{F}_n] - E[Y|\mathscr{F}_\infty]| &\le \varlimsup_{n\to\infty} E[|Y_n - Y|\,|\mathscr{F}_n] \\
&\le \varlimsup_{n\to\infty} E[W_N|\mathscr{F}_n] \\
&= E[W_N|\mathscr{F}_\infty] = W_N \quad \text{a.s.}
\end{aligned}$$

を得る[*5]．ところで，(Y_n) は概収束する列であったから W_N は $N \to \infty$ としたとき 0 に概収束する．したがって，上の式で $N \to \infty$ とすれば

$$\varlimsup_{n\to\infty} |E[Y_n|\mathscr{F}_n] - E[Y|\mathscr{F}_\infty]| = 0 \quad \text{a.s.}$$

が分かる． $\square$

いままでは $\mathbb{N}$ や $\overline{\mathbb{N}}$ を時刻集合にもつマルチンゲールを考えて来たが，（技術的な理由で）$\mathbb{Z}_{\le 0}$ という時刻集合を持つマルチンゲールを考えると便利なことも多い．これらは後々連続過程を扱う際に特に役に立つので，基本的な結果を紹介しておく．時刻集合 $\mathbb{T}$ が $\overline{\mathbb{Z}}_{\le 0}$ の部分集合であるとき，劣マルチンゲール $(X_n)_{n\in\mathbb{T}}$ を特に後ろ向き劣マルチンゲール (backward submartingale) と呼ぶことがある．同様にして $\mathbb{T} \subset \overline{\mathbb{Z}}_{\le 0}$ のときマルチンゲール $(X_n)_{n\in\mathbb{T}}$ 後ろ向きマルチンゲール (backward martingale) と呼ぶ．

[*5] 各 Y_n はどれも $\mathscr{F}_\infty$ ‐可測なので，それらの絶対値や sup をとったものである W_N も $\mathscr{F}_\infty$ ‐可測になっていることに注意．

補題 1.5.10.
$X=(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\le 0}}$ を劣マルチンゲールとする．$\lim_{n\to-\infty} E[X_n] > -\infty$ ならば，X は一様可積分である．

証明. はじめに (X_n^+) の一様可積分性を示す．Jensen の不等式により $(X_n^+)_{n\in\mathbb{Z}_{\le 0}}$ もまた劣マルチンゲールであるから，$\lambda > 0$ に対して

$$\int_{\{X_n^+>\lambda\}} X_n^+ dP \le \int_{\{X_n^+>\lambda\}} X_0^+ dP \le \int_{\{|X_n|>\lambda\}} X_0^+ dP \tag{1.5.4}$$

がなりたつ．補題の仮定及び劣マルチンゲール性より

$$\lambda P[|X_n|>\lambda] \le E[|X_n|] = 2E[X_n^+] - E[X_n] \le 2E[X_0^+] - \lim_{n\to-\infty} E[X_n] < \infty$$

となるから，$\lambda\to\infty$ とすれば $\sup_n P[|X_n|>\lambda]\to 0$ が従う．これより (1.5.4) において $\lambda\to+\infty$ とすれば $(X_n^+)_{n\in\mathbb{Z}_{\le 0}}$ の一様可積分性が分かる．

次に (X_n^-) の一様可積分性について調べる．仮定より $(E[X_n])$ は収束列であるから，任意の $\varepsilon>0$ に対してある $N\in\mathbb{Z}_{\le 0}$ が存在して，$m<n\le N$ なる任意の $n,m\in\mathbb{Z}_{\le 0}$ に対して $0\le E[X_m]-E[X_n]<\varepsilon/2$ がなりたつ．先ほどと同様に

$$P\left[X_n<-\lambda\right] \le P\left[|X_n|>\lambda\right] \le \sup_{n\in\mathbb{Z}_{\le 0}} P\left[|X_n|>\lambda\right] \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$$

となるから，X_N の可積分性より十分大きい λ について

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \sup_{n\le N} \int_{\{X_n<-\lambda\}} |X_N| dP < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall n\le N)$$

が成り立つ．これらの議論により，十分大きい $\lambda>0$ をとれば任意の $n\le N$ について

$$\begin{aligned}
0 \le \int_{\{X_n<-\lambda\}} X_n^- dP &= \int_{\{X_n<-\lambda\}} -X_n dP \\
&= E[-X_n] - \int_{\{X_n\ge-\lambda\}} -X_n dP \\
&= E[-X_n] + \int_{\{X_n\ge-\lambda\}} X_n dP \\
&\le E[-X_n] + \int_{\{X_n\ge-\lambda\}} X_N dP \\
&= E[X_N] - E[X_n] - \int_{\{X_n<-\lambda\}} X_N dP \\
&= E[X_N] - E[X_n] + \int_{\{X_n<-\lambda\}} |X_N| dP \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

となることがわかる．したがって $(X_n^-)_{n\le N}$ は一様可積分であり，$N<n\le 0$ なる有限個の確率変数列の可積分性と合わせれば，$(X_n^-)_{n\in\mathbb{Z}_{\le 0}}$ の一様可積分性が示される．

以上の議論により (X_n^+) と (X_n^-) はともに一様可積分となるので，$(X_n)=(X_n^+-X_n^-)$ も一様可積分であることがわかる． □

命題 1.5.11.
$X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\le 0}}$ を劣マルチンゲールで，$\lim_{n\to\infty} E[X_n] > -\infty$ を満たすものとする．このとき $\lim_{n\to-\infty} X_n(\omega)$ は確率 1 で存在し，しかもこれは (X_n) の L^1 の意味での極限にもなっている．

証明. $n\in\mathbb{N}$ を任意に固定し，$0\le k\le n$ に対して $Y_k^{(n)} = X_{k-n}$ および $\mathscr{G}_k^{(n)} = \mathscr{F}_{k-n}$ と定義する．このとき有限時刻の劣マルチンゲール $(Y_k^{(n)})_{0\le k\le n}$ に定理 1.5.2 を適用すれば，

$$(b-a)E\left[U_n(a,b,Y^{(n)})\right] \le E[X_0^+] + |a| < \infty$$

が成り立つ．いま $U_n(a,b,Y^{(n)})$ は単調増加列だから $\lim_{n\to\infty} U_n(a,b,Y^{(n)})$ が存在し，先ほどの評価式で極限をとれば

$$E\left[\lim_{n\to\infty} U_n(a,b,Y^{(n)})\right] < \infty$$

がわかる．これより定理 1.5.3 と同様にして

$$P\left(\varliminf_{n\to-\infty} X_n = \varlimsup_{n\to-\infty} X_n\right) = 1$$

であることが示される．したがって $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\le 0}}$ の概収束極限 X_∞ が存在する．補題 1.5.10 よりいま $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\le 0}}$ は一様可積分であるから，X_∞ は L^1 の意味での極限でもある． $\square$

定理 1.5.12.
Y を可積分確率変数とし，$(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\le 0}}$ をフィルトレーションとする．$\mathscr{F}_{-\infty} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_n$ と定義し，$Y_n = E[Y|\mathscr{F}_n]$（$n\in\overline{Z}_{\le 0}$）によってマルチンゲール $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\le 0}}$ を定める．このとき $Y_n\to Y_\infty$ が概収束かつ L^1 - 収束の意味でなりたつ．

証明. 定義より任意の $n\in\mathbb{Z}_{\le 0}$ に対して $E[Y_n] = E[Y]$ が成り立つから，命題 1.5.11 より概収束かつ L^1 収束の意味での (Y_n) の極限 $Z\in L^1(\mathscr{F}_{-\infty})$ が存在する．$A\in\mathscr{F}_{-\infty}\subset\mathscr{F}_n$ とすれば

$$\int_A Y dP = \int_A Y_n dP$$

であるから，$Y_n 1_A \to Z 1_A$ in L^1 により

$$\int_A Y dP = \int_A Z dP \quad \forall A\in\mathscr{F}_\infty$$

が分かる．したがって Z は $E[Y|\mathscr{F}_{-\infty}]$ の一つのバージョンである． $\square$

まとめ

- 劣マルチンゲールの上向き横断数に関する評価を用いることで，時刻に関する極限での振る舞いを調べることができる．
- 劣マルチンゲール X が $\sup_n E[X^+] < \infty$ を満たすなら，$X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \exists X_\infty \in L^1(\mathscr{F}_\infty)$ が成り立つ．さらに (X_n^+) が一様可積分なら，$(X^+_{n\in\overline{\mathbb{N}}})$ は劣マルチンゲールとなる．（定理 1.5.3，命題 1.5.6）
- 劣マルチンゲールが (X_n) について，(X_n) が一様可積分であることと，(X_n) が L^1 収束列であることとは同値である．（定理 1.5.5）
- マルチンゲール $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が一様可積分であること，(X_n) が L^1 収束することと，それがマルチンゲール $(X_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ に拡張できることはどれも同値である．（定理 1.5.7）
- フィルトレーション $(\mathscr{F}_n)_{n\in\overline{\mathbb{Z}}_{\le 0}}$ と可積分確率変数 Y が与えられたとき，後ろ向きマルチンゲール $E[Y|\mathscr{F}_n]$ は $E[Y|\mathscr{F}_\infty]$ に概収束かつ L^1-収束する．（定理 1.5.12）

1.6 任意抽出定理その２

本節では，有界とは限らない停止時刻に対する任意抽出定理を証明する．有界性がないと一般の劣マルチンゲールに対して任意抽出定理は成り立たないが，一様可積分性があれば同様の結果が成り立つ．

補題 1.6.1.
$X = (X_n)$ を一様可積分な劣マルチンゲールする．このとき任意の停止時刻 T に対して X^T は一様可積分劣マルチンゲールとなる．

証明. X^T が劣マルチンゲールになることは 1.2.5 よりわかるので，一様可積分性を示せばよい．

まずは X_T がの可積分性を示そう．定理 1.5.3 により X はある $X_\infty \in L^1(\mathscr{F}_\infty)$ に概収束かつ L^1 の意味で収束する．このとき X_T は Ω 上で well-defined であることに注意されたい．劣マルチンゲール X^+ と有界停止時刻 $T \wedge n$ に定理 1.3.1 を適用すれば，

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E\left[X^+_{T\wedge n}\right] \le \sup_{n\in\mathbb{N}} E\left[X^+_n\right] < \infty$$

となることがわかる．したがって X^T は $(X^T_n)^+$ が L^1-有界であるような劣マルチンゲールであり，定理 1.5.3 により可積分な確率変数に概収束する．$\omega \in \{T < \infty\}$ なら十分大きな n に対して

$$|X_{T\wedge n}(\omega) - X_T(\omega)| = |X_T - X_T| = 0$$

が成り立つので，(X^T_n) は $\{T < \infty\}$ 上で X_T に各点収束する．また，$\{T = \infty\}$ 上では X_∞ の定義より

$$X_n(\omega) \to X_\infty(\omega) = X_T(\omega) \quad \text{for a.e. } \omega \in \{T = \infty\}$$

が成り立つ．これらの議論により特に $X_{T\wedge n} \to X_T$ が概収束の意味で成り立つことがわかるので，極限の一意性より (X^T_n) の概収束極限 X_T は可積分性となる．任意の $a > 0$ について

$$\begin{aligned} E[|X_{T\wedge n}|\,;\,|X_{T\wedge n}| > a] &= E[|X_T|\,;\,|X_T| > a, T \le n] + E[|X_n|\,;\,|X_n| > a, T > n] \\ &\le E[|X_T|\,;\,|X_T| > a] + E[|X_n|\,;\,|X_n| > a] \\ &\le E[|X_T|\,;\,|X_T| > a] + \sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n|\,;\,|X_n| > a] \end{aligned}$$

という不等式が成り立つから，左辺で n に関して上限をとって，両辺において $a \to \infty$ とすれば，X^T の一様可積分性がわかる． □

命題 1.6.2.
(X_n) を $(\mathscr{F}_n)$-適合な確率過程，T を $(\mathscr{F}_n)$ - 停止時刻で X_T が Ω 上で定義されているものとする．X_T が可積分で $X_n 1_{\{T>n\}}$ が一様可積分ならば $X^T = (X_{T\wedge n})$ も一様可積分である．

証明. 定理 1.6.1 の証明と同様である． □

定理 1.6.3.
$X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を一様可積分な劣マルチンゲールとし，T を任意の停止時刻とすれば，

$$E[X_0] \leq E[X_T] \leq E[X_\infty].$$

証明. 命題 1.6.1 により X^T は一様可積分劣マルチンゲールであり，$X_n^T \to X_T$ が概収束の意味で成り立つから命題 A.2.6 によって

$$E[X_{T\wedge n}] \xrightarrow[n\to\infty]{} E[X_T]$$

となる．これと X^T の劣マルチンゲール性から

$$E[X_0] = E[X_{T\wedge 0}] \leq E[X_{T\wedge n}] \xrightarrow[n\to\infty]{} E[X_T]$$

となり，一つ目の不等号がわかる．次に定理 1.3.1 を有界停止時刻 $T\wedge n$ に適用すれば

$$E[X_{T\wedge n}] \leq \ E[X_n]$$

を得る．定理 1.5.5 より (X_n) は X_∞ に L^1 収束しているから，上の不等式の両辺で $n\to\infty$ の極限をとれば

$$E[X_T] \leq E[X_\infty]$$

を得る． □

定理 1.6.4.
S, T を $S \leq T$ を満たす任意の停止時刻とし，$X = (X_n)$ を一様可積分な劣マルチンゲールとする．このとき

$$E[X_T|\mathscr{F}_S] \geq X_S \quad \text{a.s.}$$

が成り立つ．

証明. 一様可積分劣マルチンゲール X^T に定理 1.6.3 を適用すれば，

$$E[X_S] = E[X_S^T] \leq E[X_\infty^T] = E[X_T]$$

を得る．$A \in \mathscr{F}$ に対して確率変数 S_A を

$$S_A = \begin{cases} S(\omega) & \omega \in A \\ T(\omega) & \omega \in \Omega \setminus A \end{cases}$$

と定めれば，S_A は $S_A \le T$ を満たす停止時刻となる．前半の結果により

$$\begin{aligned} E[X_S; A] + E[X_T; \Omega \setminus A] &= E[X_{S_A}; A] + E[X_{S_A}; A^c] \\ &= E[X_{S_A}] \\ &\le E[X_T] \\ &= E[X_T; A] + E[X_T; \Omega \setminus A] \end{aligned}$$

となり，これを変形すれば

$$E[X_S 1_A] \le E[X_T 1_A]$$

を得る．いま $A \in \mathscr{F}_S$ は任意に選んでいるから，この式は $E[X_T|\mathscr{F}_S] \ge X_S$ が P-a.s. の意味で成り立つことを表している． □

まとめ

- X が一様可積分劣マルチンゲールなら，任意の停止時刻 $S \le T$ について $E[X_T|\mathscr{F}_S] \ge X_S$ a.s. が成り立つ．さらに X がマルチンゲールでもあるなら，$E[X_T|\mathscr{F}_S] = X_S$ a.s. となる．（定理 1.6.4）

1.7 分解定理

本節では，劣マルチンゲールに関係するいくつかの分解定理を紹介する．離散時間確率過程はマルチンゲールと可予測過程に分解できるという定理を証明する．

始めに紹介するのは，劣マルチンゲールの Doob 分解である．

定義 1.7.1 (増加過程).
以下の条件を満たす確率過程 $A = (A_n)$ を増加過程 (increasing process) と呼ぶ．

(i) $A_0 = 0$.
(ii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n \le A_{n+1}$.

ただし，上の等号と不等号はどれも各点の意味である．

命題 1.7.2.
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $(\mathscr{F}_n)$ - 適合過程で，各 X_n が可積分あるようなものとする．このとき $X_n = M_n + A_n$ を満たすような $(\mathscr{F}_n)$ - マルチンゲール $M = (M_n)$ と可予測過程 $A = (A_n)$ が存在する．この分解は a.s. の意味で一意的である．

証明．ステップ 1：分解の構成． $Y_0 = 0$ とし，$n \ge 1$ に対して Y_n を $E[X_n - X_{n-1}|\mathscr{F}_{n-1}]$ の任意のバージョンとする．

$$A_n = \sum_{0\le k\le n} Y_k \quad n \in \mathbb{N}$$

と定めれば，$A = (A_n)$ は可予測過程である．さらに

$$M_n = X_n - A_n$$

とおけば，(M_n) も適合過程となる．X の可積分性より，各 M_n は可積分となる．$n \geq 1$ とすれば

$$\begin{aligned} M_n &= X_n - \sum_{0 \leq k \leq n} Y_k \\ &= X_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} Y_k + (X_n - X_{n-1}) - E[X_n - X_{n-1} | \mathscr{F}_{n-1}] \\ &= M_{n-1} + X_n - E[X_n | \mathscr{F}_{n-1}] \quad \text{a.s.} \end{aligned}$$

が成り立つから，この式の各項の条件付き期待値をとれば M のマルチンゲール性がわかる．

ステップ 2：一意性 $X = M + A = M' + A'$ という分解が得られたとする．$Z = A - A' = M' - M$ とおけば，Z は可予測なマルチンゲールになる．可予測性およびマルチンゲール性より

$$Z_n = Z_{n-1} = \cdots = Z_0 = 0 \quad P\text{-a.s.}$$

となるので，分解は一意的である． □

(X_n) が劣マルチンゲールの場合は，定理 1.7.2 の分解は A が増加過程となるように取ることができる．これを劣マルチンゲールの Doob 分解と呼ぶ．劣マルチンゲールは全体として増加的な傾向があるから，そこから平均的に振動する部分（マルチンゲールと）増加的なパスをもつ部分（増加過程に）をそれぞれ取り出してやろうというのが Doob 分解である．

定理 1.7.3 (Doob 分解).

(i) (X_n) が $(\mathscr{F}_n)$ - 劣マルチンゲールならば，X はマルチンゲール M と増加過程 A を用いて $X = M + A$ と分解される．さらに A は可予測過程としてとれて，そのような分解は a.s. の意味で一意的である．

(ii) (X_n) が $(\mathscr{F}_n)$ - 優マルチンゲールならば，X はマルチンゲール M と増加過程 A を用いて $X = M - A$ と分解される．さらに A は可予測過程としてとれて，そのような分解は a.s. の意味で一意的である．

証明. (i) 1.7.2 で得られた分解で，A が増加過程になるようにとれることを示す．X の劣マルチンゲール性より

$$A_n - A_{n-1} = E[X_n | \mathscr{F}_{n-1}] - X_{n-1} \geq 0$$

となるので，任意の $n \geq 1$ について $A_n \geq A_{n-1}$ が成り立つ．ここで

$$A'_n = \sup_{k \leq n} A_n$$

と定義すれば，(A'_n) は $A'_0 = 0$ を満たす可予測増加過程である．したがって，後は $A'_n = A_n$ a.s. が成り立つことを示せばよい．定義より $A'_n \geq A_n$ は明らかに停止時刻である．また (A_n) が a.s. で増加的であることから，

$$E[A'_n] = \sup_{k \leq n} E[A_k] = E[A_n]$$

となるので，$A'_n = A_n$ となることがわかる．

(ii) 劣マルチンゲール $-X$ に (i) の結果を適用すればよい． □

次は，Riesz 分解という種類の分解を扱おう．

定義 1.7.4.

(i) 正の $(\mathscr{F}_n)$-優マルチンゲール (Z_n) で $\lim_{n\to\infty} E[Z_n]=0$ を満たすものをポテンシャル (potential) という.

(ii) 適合過程 X がマルチンゲール M とポテンシャル Z によって $X=M+Z$ と表現できるとき，この分解を X の Riesz 分解 (Riesz decomposition) という.

ポテンシャルとは，無限遠点で消滅するような摂動項のことである．したがって，Riesz 分解をもつ過程の無限遠点での振る舞いは，マルチンゲールのそれとほとんど同じものになるはずである.

Z がポテンシャルなら劣マルチンゲール $(-Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 に L^1 収束するので，定理 1.5.5 より一様可積分となる．X が Riesz 分解 $X=M+Z$ を持つなら任意の $n\geq 1$ について

$$E[X_n|\mathscr{F}_{n-1}]=E[M_n|\mathscr{F}_{n-1}]+E[Z_n|\mathscr{F}_{n-1}]\leq M_{n-1}+Z_{n-1}\quad \text{a.s.}$$

が成り立つから，X は優マルチンゲールとなる．優マルチンゲール X の Riesz 分解が存在したとしたら，それは一意的である．実際，$X=M+Z=M'+Z'$ を Riesz 分解とすれば，マルチンゲール $M-M'=Z'-Z$ は 0 に L^1 収束する．このとき定理 1.5.7 より任意の $n\in\mathbb{N}$ について $M_n-M'_n=[0|\mathscr{F}_n]=0$ a.s. となるので，分解の一意性がわかる.

命題 1.7.5.
優マルチンゲール X は Riesz 分解 $X=M+Z$（Z がポテンシャル）を持つとする．このとき，M は $M\leq X$ なる劣マルチンゲールのうち最大のものである.

証明. Y を $Y\leq X$ を満たす劣マルチンゲールとする．このとき，任意の n と k について

$$Y_n\leq E[Y_{n+m}|\mathscr{F}_n]\leq E[X_{n+m}|\mathscr{F}_n]=M_n+E[Z_{n+m}|\mathscr{F}_n]$$

が成り立つ．Z がポテンシャルであることに注意して $m\to\infty$ とすれば，$Y_n\leq M_n$ がわかる. □

Riesz 分解を持つ優マルチンゲールはどのようなものだろうか？その疑問には次のような回答が得られている.

命題 1.7.6.
優マルチンゲール X が Riesz 分解を持つための必要十分条件は，$\lim_{n\to\infty} E[X_n]>-\infty$ が成り立つことである.

証明. X が Riesz 分解 $X=M+Z$ （M はマルチンゲールで Z はポテンシャル）を持つとすれば,

$$E[X_n]=E[M_n]+E[Z_n]\xrightarrow[n\to\infty]{} E[M_0]>\infty$$

となる.

逆に，X は $\lim_{n\to\infty} E[X_n]>-\infty$ を満たす優マルチンゲールであるとしよう．$-X=M+A$ を劣マルチンゲールの Doob 分解（M はマルチンゲールで A は増加過程）とすれば,

$$E[-X_n]=E[M_n]+E[A_n]=E[M_0]+E[A_n]$$

が成り立つ．このとき仮定と単調収束定理より

$$E\left[\lim_{n\to\infty} A_n\right] = \lim_{n\to\infty} E[A_n] = E[M_0] - \lim_{n\to\infty} E[X_n] < \infty$$

となるので，$A_\infty := \lim_{n\to\infty} A_n$ は可積分である．ここで

$$Z_n = E[A_\infty|\mathscr{F}_n] - A_n$$

と定義すれば，(A_n) が増加過程となることから Z は正の確率過程となる．また

$$\begin{aligned} E[Z_{n+1}|\mathscr{F}_n] &= E[E[A_\infty|\mathscr{F}_{n+1}]|\mathscr{F}_n] - E[A_{n+1}|\mathscr{F}_n] \\ &\leq E[A_\infty|\mathscr{F}_n] - A_n \\ &= E[Z_n] \end{aligned}$$

となるから，Z は優マルチンゲールである．さらに単調収束定理から

$$E[Z_n] = E[A_\infty] - E[A_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

となるので，Z がポテンシャルであることがわかる．このとき

$$X_n - Z_n = -M_n - A_n - E[A_\infty|\mathscr{F}_n] + A_n = -M_n - E[A_\infty|\mathscr{F}_n]$$

が成り立つから，$X_n - Z_n$ はマルチンゲールである．ゆえに $X = (X - Z) + Z$ は X の Riesz 分解であることが示された． □

Riesz 分解をもつ優マルチンゲールの重要な例は次のものである．

系 1.7.7.

(i) X が正の優マルチンゲールなら X は Riesz 分解 $X = M + A$ を持ち，このときそのマルチンゲール部分 M は正のマルチンゲールとなる．

(ii) X が一様可積分優マルチンゲールなら，その Riesz 分解 $X = M + Z$ は以下で与えられる．

$$M_n = E[X_\infty|\mathscr{F}_n], \qquad Z_n = X_n - M_n$$

証明． (i) Riesz 分解の存在は命題 1.7.6 よりわかる．命題 1.7.6 の証明より，そのポテンシャル部分は Doob 分解 $-X = N + A$ を用いて

$$Z_n = E[A_\infty|\mathscr{F}_n] - A_n$$

と表されるのであった．このとき

$$\begin{aligned} M_n &= X_n - Z_n \\ &= -N_n - A_n - E[A_\infty|\mathscr{F}_n] + A_n \\ &= -N_n - E[A_\infty|\mathscr{F}_n] \\ &\geq E[-N_{n+1} - A_{n+1}|\mathscr{F}_n] \\ &= E[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

が a.s. の意味で成り立つ．

(ii) X が一様可積分優マルチンゲールなら，その Riesz 分解 $X = M + Z$ において M 一様可積分となり，定理 1.4.4，1.4.5 により (X_n) と (M_n) はそれぞれ X_∞ と M_∞ に概収束かつ一様収束する．これより

$$\begin{aligned} M_n &= E[M_\infty|\mathscr{F}_n] \\ &= \lim_{k\to\infty} E[M_{n+k}|\mathscr{F}_\infty] \\ &= \lim_{k\to\infty} E[X_{n+k} - Z_{n+k}|\mathscr{F}_\infty] \\ &= \lim_{k\to\infty} E[X_{n+k}|\mathscr{F}_n] - \lim_{n\to\infty} E[Z_{n+k}|\mathscr{F}_\infty] \\ &= \lim_{k\to\infty} E[X_{n+k}|\mathscr{F}_n] \\ &= E[X_\infty|\mathscr{F}_n] \end{aligned}$$

が L^1 収束の意味で成り立つ．これより $M_n = E[X_\infty|\mathscr{F}_n]$ a.s. がわかる． □

本節の最後に，Krickeberg 分解と呼ばれる分解定理を紹介しよう．

命題 1.7.8.

(i) 優マルチンゲールについて，次の条件は同値である．

(a) $\sup_n E[X_n^-] < \infty$ が成り立つ．

(b) 正の優マルチンゲール Y と正のマルチンゲール Z で，$X = Y - Z$ を満たすものが存在する．

X が上の同値条件を満たすとき，その分解は次のような意味で最小性を持つように選ぶことができる：$X = Y' - Z'$ を同様の分解とすれば，$Y \le Y'$ かつ $Z \le Z'$ が成り立つ．さらに，このとき Z は $-X \le Z$ を満たす優マルチンゲールのうちで最小のものである．

(ii) マルチンゲール $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について，次の条件は同値である．

(a) (X_n) は L^1-有界である．

(b) 正のマルチンゲール Y と Z で，$X = Y - Z$ を満たすものが存在する．

X が上の同値条件を満たすとき，その分解として Y は X より大きい正のマルチンゲールのうち最小のものであり，Z は $-X$ より大きい正のマルチンゲールのうちで最小のものであるようなものが選べる．そのような分解は一意的である．

命題 1.7.8 における分解を，Krickeberg 分解 (Krickeberg decomposition) と呼ぶ．

証明. (i)．(b) $\Longrightarrow$ (a)．正の優マルチンゲール Y と正のマルチンゲール Z はともに L^1 有界なので（注意 1.5.4），$X = Y - Z$ ならば X も L^1 有界である．

(a) $\Longrightarrow$ (b)．X が優マルチンゲールならば $-X^- = (-X_n^-)$ は優マルチンゲールであり，仮定より

$$\lim_{n\to\infty} E[-X_n^-] = \inf_n E[-X_n^-] > -\infty$$

となるから Riesz 分解 $-X^- = M + L$ を持つ．（M がマルチンゲールで L がポテンシャル．）ここで $Z = -M$ および $Y = X - M$ と定義する．このとき $Z = X^- + L$ および $Y = X^+ + L$ が成り立つので，X と Z はともに正値である．また定義より明らかに Z はマルチンゲールであり，Y は優マルチンゲールとマルチンゲールの差なので優マルチンゲールである．

上で構成した分解が命題の主張の意味での最小性を満たすことを示そう．命題 1.7.5 より，$-Z = M$ は $-Z \le -X^-$ を満たす劣マルチンゲールのうちで最大のものであることに注意する．U が $-X \le U$ を満たす正の優マルチンゲールならば $X^- = (-X)^+ \le U$ が成り立つ．よって $-U$ は $-U \le -X^-$ を満たす劣マルチ

ンゲールとなり，$-Z$ の最大性より $-U \le -Z$ となる．すなわち $Z \le U$ が成り立ち，Z は $-X \le U$ を満たす正の優マルチンゲール U のうちで最小のものである．

さて，$X = Y' - Z'$ を同様の分解とする．このとき $-X = -Y' + Z' \le Z'$ であるから，先ほどの議論により $Z \le Z'$ となる．よって $Y' = X + Z' \ge X + Z = Y$ となり，$Y \le Y'$ も示された．

(ii)．X を L^1 有界なマルチンゲールとすれば，それは (i) の条件を満たす優マルチンゲールでもあるから，(i) の Krickeberg 分解 $X = Y - Z$ が存在する．（Y は正の優マルチンゲールで，Z は正のマルチンゲール．）このとき X と Z はともにマルチンゲールであるから，$Y = X + Z$ もマルチンゲールである．Z の最小性は，すでに (i) で示されている．また (i) での分解の構成法より $-X^+ = Y + L$ であり，いま Y もマルチンゲールであることから，この表現は $-X^+$ の Riesz 分解を与えている．（L がポテンシャル部分．）したがって Z の最小性と同じ議論で Y の最小性も示される． □

まとめ

- 劣マルチンゲール X はマルチンゲール M と増加過程 A によって $X = M + A$ と表現される．これを Doob 分解という．優マルチンゲールの Doob 分解は $Y = N - A$（N がマルチンゲールで A が増加過程）の形になる．
- 優マルチンゲール X がマルチンゲール M とポテンシャル Z によって $X = M + A$ と表現できるとき，これを Riesz 分解という．優マルチンゲール X が Riesz 分解を持つための必要十分条件は，$\lim_n E[X_n] > -\infty$ が成り立つことである．

1.8 ノート

まずは，本節で現れた優マルチンゲールのクラスを図式にまとめておこう．$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が優マルチンゲールならば，$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について次の関係が成り立つ．

$$
\begin{array}{ccc}
\text{一様可積分} & \Longleftrightarrow & X_n \to X_\infty \text{ in } L^1 \text{ かつ a.s.} \\
\Big\Downarrow & & \\
(X^-) \text{ が一様可積分} & \Longleftrightarrow & (X_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}} \text{ が優マルチンゲール} \\
\Big\Downarrow & & \\
\sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^-] < \infty & \Longleftrightarrow & \text{Krickberg 分解をもつ} \\
\Big\Downarrow & & \\
\lim_{n\to\infty} E[X_n] > \infty & \Longleftrightarrow & \text{Riesz 分解を持つ}
\end{array}
$$

この図式は He, Wang, and Yan [53, p.50] を参考にした．

本節の内容は，マルチンゲール理論においてどれも基本的なものである．特に 1.1-1.6 節の内容は多くの入門書に書かれている．本ノートを作成する際には，特に舟木 [47]，Williams [119]，Durrett [39] などを参考にした．Revuz and Yor [94, Chapter II] も重要な内容が簡潔にまとめられている．

さらに進んだ内容については，Dellacherie and Meyer [25, Chapter V]，He, Wang, and Yan [53, Chapter II]，Rogerts and Williams [96, Chapter II. 4]，Chow and Teicher [15]，Chung [17] などが参考になる．

Doob の不等式やマルチンゲール収束定理，任意抽出定理といった離散マルチンゲール理論の根幹は，

Joseph L. Doob によるところが大きい．マルチンゲール理論の歴史的な背景については，Doob [34, Appendix, pp.629–624]，Dellacherie and Meyer [25, Comments, pp.427–428] などが詳しい．

■§1.1　停止時刻 (stopping time) には optional time, Markov time など様々な呼び方があるので，他所や特に古い文献を読む際には注意されたい．Doob [34] を眺めてみても，停止時刻やフィルトレーションといった言葉はまだ出てきてないように思う．

■§1.2　劣マルチンゲールや優マルチンゲールの定義には可積分性を課さない場合もある．（Revuz and Yor [94, Chapter II (1.1) Definition]）

■§1.3　任意抽出定理は Doob [34, Chapter VII §2] に起源をもつようである．

■§1.4　定理 1.4.1 が最初に明示的に表れたのは Doob [33] であるが，その発想はすでに Lévy や Ville の仕事に見られるらしい．定理 1.4.3 は Doob [34, Chapter VII §3] による．定理 1.4.3 の証明は He, Wang, and Yan [53, 2.15 Theorem] を参考にした．

■§1.5　マルチンゲール収束定理も Doob [33] によるものだが，横断数の評価（定理 1.5.2）は Doob [34, Chapter VII §3] であり，[33] は少し異なるテクニックを使って証明しているようである．後ろ向き列マルチンゲールに関しては，添え字集合は $\mathbb{N}$ のままで減少的な列 $\mathscr{F}_0 \supset \cdots \supset \mathscr{F}_n \supset \mathscr{F}_{n+1} \supset \dots$ を考えるという流儀もあるので（例えば Karatzas and Shreve [68] など），他書を読む際には注意されたい．

■§1.7　定理 1.7.2 は Rogers and Williams [96, (54.1) Theorem] から取った．定理 1.7.2 における分解 $X = M + A$ の可予測過程 A は，局所可積分過程の双対可予測射影の離散版であると考えられる．離散時間の増加過程の定義は「$A_n \leq A_{n+1}$ が a.s. で成り立つ」とする文献もある．離散時間においてはここから増加的なパスをもつ過程が構成できるが，連続時間においては明確に異なる概念である．本ノートの中心は連続時間モデルなので，やや強い定義を採用した．Riesz 分解はポテンシャル論における同名の結果[*6]のアナロジーのようである．ポテンシャル論については，例えば Armitage and Gardiner [4] などが参考になりそうである．（筆者はポテンシャル論を何一つ知らないので悪しからず．）ポテンシャル論とマルチンゲール理論の関連については，Doob [32] や Dellacherie and Meyer [25, 26] を見よ．Krickberg 分解については，He, Wang, and Yan [53, 2.32 Theorem] と Dellacherie and Meyer [25, Chapter V.38] を参考にした．

*6 雑に言うと，優調和関数を調和関数とポテンシャルの和で表現するという感じの分解．

第 2 章

連続時間確率過程

2.1　確率過程

はじめに，基礎的な用語の導入をする．

定義 2.1.1.
$(\Omega,\mathscr{F})$，$(E,\mathscr{E})$ を可測空間とし，$\mathbb{T}\subset\overline{\mathbb{R}}$ とする．関数 $\mathbb{T}\to\mathscr{L}^0(\Omega;E)$ を時刻集合 $\mathbb{T}$ をもつ E 値確率過程 (stochastic process) と呼ぶ．

定義 2.1.1 によれば，確率過程とは添え字集合 $\mathbb{T}$ を持つ E 値確率変数の族 $X=(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ のことである．確率過程が値をとる空間 E のことを状態空間などと呼ぶ．$\mathbb{T}$ が $\overline{\mathbb{R}}$ の区間であるときに，特に $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ を連続時間確率過程ということが多いようである．

関数空間においては $\mathrm{Map}(A,C^B)\cong\mathrm{Map}(A\times B,C)\cong\mathrm{Map}(B,C^A)$ が成り立つから，確率過程 $X\colon\mathbb{T}\to\mathscr{L}^0(X;E)$ は写像 $\Omega\times\mathbb{T}\to E$ と見なすことも，写像 $\Omega\to E^{\mathbb{T}}$ と見なすこともできる．このような観点を持つと，確率過程は以下のように特徴づけることができる．

補題 2.1.2.
$(\Omega,\mathscr{F})$，$(E,\mathscr{E})$ を可測空間とし，A を集合とする．このとき，写像 $X\colon\Omega\times A\to E$ について次の条件は同値である．

(i) 任意の $\alpha\in A$ について，X から定まる写像 $X_\alpha\colon\Omega\to E$ は $\mathscr{F}/\mathscr{E}$-可測である．
(ii) X から定まる写像 $X\colon\Omega\to E^A$ は $\mathscr{F}/\mathscr{E}^{\otimes A}$ 可測である．

証明. 直積 σ-代数 $\mathscr{E}^{\otimes A}$ の定義より，$\omega\mapsto X.(\omega)$ が $\mathscr{F}/\mathscr{E}^{\otimes A}$ 可測になることは，任意の $\alpha\in A$ について評価写像 $\mathrm{ev}_\alpha\colon E^A\to A$ との合成 $\mathrm{ev}_\alpha\circ X\colon\Omega\to E$ が $\mathscr{F}/\mathscr{E}$-可測になることと同値である．$\mathrm{ev}_\alpha\circ X$ は $X_\alpha\colon\Omega\to E$ に他ならないから，これは (i) とも同値である．$\square$

補題 2.1.2 より，確率過程 $X=(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ は可測関数 $\Omega\ni\omega\to X.(\omega)\in E^{\mathbb{T}}$ と同じものである．各 $\omega\in\Omega$ に対してその像 $X.(\omega)$ を確率過程 X のパス (path) と呼ぶ．すなわち，パスとは ω を固定する度に定まる関数 $t\mapsto X_t(\omega)$ のことである．パスのことを道とか，経路 (trajectory) などということもある．

補題 2.1.2 より確率過程は可測関数 $\Omega\to E^{\mathbb{T}}$ であったから，その分布を考えることが出来る．

定義 2.1.3.
$(\Omega,\mathscr{F},P)$ を確率空間とし，$X=(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ を可測空間 $(E,\mathscr{E})$ に値をとる確率過程とする．X を可測関数 $X\colon\Omega\to E^{\mathbb{T}}$ と見たときの分布 X_*P を，確率過程 X の分布 (distribution) と呼ぶ．

確率過程の分布 X_*P は確率測度であり，また $\mathscr{E}^{\otimes\mathbb{T}}$ は π-系

$$\mathscr{C}=\bigcup\left\{\bigcap_{t\in F}\mathrm{ev}_t^{-1}(B_t)\,;\,F\subset\mathbb{T}\text{ は有限集合で，}B_t\in\mathscr{E}\right\}$$

によって生成される σ-代数であるから，二つの確率過程の分布は $\mathscr{C}$ 上で一致すれば $\mathscr{E}^{\otimes\mathbb{T}}$ 全体でも一致する．（命題 A.1.7）なお，ここで用意した π-系 $\mathscr{C}$ の元をシリンダー集合 (cylindrical set) と呼ぶことがある．そこで，二つの確率過程 X と Y の分布が一致するかどうかを調べるためには，任意の有限集合 $S\subset\mathbb{T}$ と E^S への標準的な射影 $\mathrm{pr}_S\colon E^{\mathbb{T}}\to E^S$ について，二つの分布 $\mathrm{pr}_S\circ X$ と $\mathrm{pr}_S\circ Y$ が一致するかどうかを調べればよいことがわかる．$(\Omega,\mathscr{A},P)$ 上の確率過程 X に対して，有限集合 $S\subset\mathbb{T}$ を自由に動かして得られる族 $\{(\mathrm{pr}_S\circ X)_*P\,;\,S\}$ を X の有限次元分布 (finite dimensional distribution) と呼ぶ．以上の議論から，二つの確率過程の分布について次が成り立つことがわかった．

命題 2.1.4.
$(E,\mathscr{E})$ を可測空間とし，X と Y をそれぞれ確率空間 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ と $(\Omega',\mathscr{F}',P')$ 上で定義された確率過程とする．このとき，X と Y の分布が一致するための必要十分条件は，X と Y の有限次元分布が一致することである．

X と Y の有限次元分布が一致するとは，つまるところ $t_1,\dots,t_n$ と $B_1,\dots,B_n\in\mathscr{E}$ を任意に選んだ時，

$$P(X_{t_1}\in B_1,\dots,X_{t_n}\in B_n)=P'(Y_{t_1}\in B_1,\dots,Y_{t_n}\in B_n)$$

が成り立つということである．

これまで見てきたように，写像 $X\colon\Omega\times\mathbb{T}\to E$ が与えられたときにそれが確率過程になるかどうかは，X を写像 $\mathbb{T}\to E^{\Omega}$ と見ても $\Omega\to E^{\mathbb{T}}$ と見ても変わりがないのであった．（補題 2.1.2）しかし，二つの確率過程が可測関数として等しいということの定義に当たっては，どちらの関数として見るかで違いが出てくる．というのも，我々は Ω と $\mathbb{T}$ のうち Ω だけに測度空間という構造を考えていて，今のところ $\mathbb{T}$ は集合としてしか見ていないからである．確率過程のそれぞれの解釈に応じて，次のように 2 種類の相等性が定義される．

定義 2.1.5.
$(\Omega,\mathscr{F},P)$ を確率空間とし，X と Y を可測空間 $(E,\mathscr{E})$ に値をとる確率過程とする．

(i) X と Y が $L^0(\Omega,E,P)$ に値をとる関数 $t\mapsto X_t$ として等しい時，X は Y の修正 (modification) である，あるいは同じことだが，Y は X の修正であるという．
(ii) X と Y が可測関数 $\Omega\to E^{\mathbb{T}}$ として P-a.s. で等しい時，X と Y は区別不能 (indistinguishable) であるという．

Y が X の修正であることを，Y は X の変形 (version)，あるいはカタカナ語でそのままバージョンであるということもある．X が Y の修正であるということは，

$$\forall t\in\mathbb{T}\quad P(X_t=Y_t)=1$$

が成り立つということである．また，X と Y が区別不能であるとは，ラフに言うと

$$P(\forall t\in\mathbb{T}\ X_t=Y_t)=1$$

が成り立つということである．形式的に言えば，$\forall t\in\mathbb{T}$ という部分が中に入るか外に入るかの違いである．しかし，一般に $\mathbb{T}$ は可算集合とは限らないので，これは測度論的には大変大きな違いである．この表記を見れば，「区別不能 $\implies$ 修正」が成り立つことはすぐにわかる．「区別不能」の説明でわざわざ「ラフに言うと」という接頭語を付けたのは，一般には集合

$$\{\omega\in\Omega\mid\forall t\in\mathbb{T}\ X_t(\omega)=Y_t(\omega)\}=\bigcap_{t\in\mathbb{T}}\{\omega\in\Omega\mid X_t(\omega)=Y_t(\omega)\}$$

が $\mathscr{F}$ 可測になるかどうかわからないからである．先ほども述べたように $\mathbb{T}$ は可算集合とは限らないので，各 $\{X_t=Y_t\}$ が可測であってもそれらの共通部分が可測となるかはわからない．X と Y が区別不能であるとは $\{\forall t\in\mathbb{T}\ X_t(\omega)=Y_t(\omega)\}$ の補集合（すなわち Ω への第一射影 $\mathrm{pr}_1(X\neq Y)\subset\Omega$）が P から定まる外測度 P^* で測ればゼロ，言い換えれば P-零集合であるということであり，その仮定があるから P の $\mathscr{F}^P$ への拡張によって $\{\forall t\in\mathbb{T}\ X_t(\omega)=Y_t(\omega)\}$ の確率を測ることが可能になる．とはいっても本ノートではもっぱら右連続や連続な過程ばかりを扱うわけであり，次節で述べるようにそういった過程については $\{\forall t\in\mathbb{T}\ X_t(\omega)=Y_t(\omega)\}$ は必ず $\mathscr{F}$-可測となっている．

まとめ

- 時刻集合を添え字にもつ $(E,\mathscr{E})$ 値確率変数族 $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ を確率過程という．
- 確率過程は，$(E^{\mathbb{T}},\mathscr{E}^{\otimes\mathbb{T}})$ に値をとる確率変数とみることもできる．このとき，関数 $X_\cdot(\omega)\in E^{\mathbb{T}}$ を X のパスと呼ぶ．
- 全ての t で $X_t=Y_t$ a.s. が成り立つときに X は Y の修正であるといい，X と Y のパスが確率 1 で等しいとき，X と Y は区別不能であるという．

2.2 可測過程，連続過程，右連続過程，etc.

2.1 節では $\mathbb{T}$ を単なる集合として確率過程を考えたけれども，実際のところ $\mathbb{T}$ に何の構造も仮定しなければ確率過程についてわかることはあまりない．本節では，$\mathbb{T}\subset\overline{\mathbb{R}}$ に $\overline{\mathbb{R}}$ の部分空間としての構造を入れたときの，確率過程の性質について考えてみる．

定義 2.2.1.
時刻集合 $\mathbb{T}$ を $\overline{\mathbb{R}}$ の部分位相空間と考える．$(X,\mathscr{F})$ 上の $(E,\mathscr{E})$ 値確率過程 X が $\Omega\times\mathbb{T}\to E$ として $\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{T})/\mathscr{E}$ 可測になるとき，確率過程 X は結合的可測 (jointly measurable)，あるいは単に可測 (measurable) であるという．

X が可測な過程ならば，Fubini の定理により（適当な可積分性の下で）$t\mapsto E[X_t]$ や $\omega\mapsto\int X_s(\omega)ds$ が可測になるので，測度論的な議論が可能になる．とはいっても我々の目標は確率積分 $\int H_s dX_s$ を考えることなので，Stieltjes 積分からのアナロジーによれば X のパスはもうすこしマシな regularity を持つと仮定しても良いだろう．

$\mathbb{T}\subset\overline{\mathbb{R}}$ を部分位相空間と考えたとき，$\mathbb{T}$ から位相空間 E への連続関数全体の集合を $C(\mathbb{T},E)$ で表す．

定義 2.2.2.
$\mathbb{T}$ を $\overline{\mathbb{R}}$ の区間とし，$f\colon \mathbb{T} \to E$ を位相空間 E への写像とする．$\mathbb{T}$ の右端点ではない任意の $t \in \mathbb{T}$ について $\lim_{s\downarrow\downarrow t} f_s$ が存在するとき f は任意の点で右極限をもつあるいは làd であるといい，さらに $\lim_{s\downarrow t} f_s = f(t)$ が成り立つとき f は右連続 (right-continuous) である，または càd であるという．また，$\mathbb{T}$ の左端点ではない任意の t について $\lim_{s\uparrow\uparrow t} f_s$ が存在するとき f は任意の点で左極限をもつあるいは làg であるといい，さらに $\lim_{s\uparrow t} f_s = f(t)$ が成り立つとき左連続 (left-continuous) である，または càg であるという．càd かつ làg である関数は càdlàg であるといい，càg かつ làd である関数は càglàd であるという．$\mathbb{T}$ 上の E 値 càdlàg 関数全体の空間を，$D(\mathbb{T}, E)$ で表す．

càdlàg はフランス語の *continue à droite avecdes limites à gauche*（右連続で，かつ左極限があるという意味）という言葉の略である．càdlàg のことを RCLL （right continuos, left limt の頭文字）といい，càglàd のことを LCRL ということもある．

定義 2.2.3.
$\mathbb{T}$ を $\overline{\mathbb{R}}$ の区間とし，$X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ を確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の確率過程で，位相空間 E に値をとるものとする．

(i) 全ての $\omega \in \Omega$ についてパス $X_\cdot(\omega)$ が連続（右連続，左連続，càdlàg，càglàd）となるとき，それぞれ X は連続 （右連続，左連続，càdlàg，càglàd）であるという．
(ii) X のパスが連続（右連続，etc.）ではないような ω 全体の集合が P-零集合であるとき，X は確率 1 で，または a.s. で連続（右連続，etc.）であるという．

定義の条件 (ii) を満たす仮定を連続過程（右連続過程，etc.）と呼ぶことも多いので注意が必要である．

同様にして，パスの右連続性や左連続性をもって右連続過程，左連続仮定を定義する．パスが各点で右連続かつ左極限をもつとき，確率過程は càdlàg なパスをもつという．

命題 2.2.4.
X と Y がともに右連続あるいは左連続であるとする．このとき X と Y が区別不能であるための必要十分条件は，X が Y の修正であることである．

証明. 区別不能ならば修正であることは明らかである．X と Y はともに右連続で，X は Y の修正であるとしよう．$\mathbb{T}$ が開区間あるいは端点を含まない場合は，

$$\{\omega \in \Omega \mid \forall t \in \mathbb{T}\ X_t(\omega) = Y_t(\omega)\} = \{\omega \in \Omega \mid \forall t \in \mathbb{T} \cap \mathbb{Q}\ X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}$$

が成り立つので，その補集合は P-零集合である．$\mathbb{T}$ が端点を含む場合も，上の式の右辺の集合にその端点の部分を足せばやはり等号が成り立ち，同様の証明が走る．左連続の場合も同様である． □

X と Y の一方が右連続なだけでは，命題 2.2.4 の主張は成り立たない．例えば，Karatzas and Shreve [68, Example1.4, p.2] を見よ．

命題 2.2.5.
状態空間 E は距離空間であるとする．このとき右連続，あるいは左連続な確率過程は可測である．

証明. $\mathbb{T} = \mathbb{R}_{\geq 0}$ として示す．$X\colon \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to E$ を右連続な確率過程としよう．

$$X_s^{(n)}(\omega) = \begin{cases} X_0(\omega) & s = 0 \\ X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) & s \in \left]\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right] \ k \geq 1 \end{cases}$$

と定義すれば，X の右連続性により $X^{(n)}$ は X に各点収束する．$B \in \mathscr{B}(E)$ とすれば，

$$(X^{(n)})^{-1}(B) = \left(\{0\} \times X_0^{-1}(B)\right) \cup \bigcup_{k\geq 1} \left]\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right] \times X_{\frac{k}{2^n}}^{-1}(B)$$

が成り立つ．直積 σ-代数の定義より右辺の和に現れる各集合は $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})$-可測なので，その可算和である $(X^{(n)})^{-1}(B)$ も $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})$-可測である．$X$ は距離空間に値をとる可測関数列の各点収束極限なので，これもまた可測となる． □

これまでの議論により連続確率過程 $X\colon \Omega \to C(\mathbb{T}; E)$ は $\mathscr{B}(E)^{\otimes \mathbb{T}}$ の制限について可測となることはわかっている[*1]．位相空間論によれば $C(\mathbb{T}; E)$ 自体がまたいくつかの方法で位相空間と見なせるのであったから，それぞれの位相に応じて $C(\mathbb{T}; E)$ 上の Borel σ-代数も定義される．連続過程はそういった σ-代数についても可測となるだろうか？残念ながら積位相については $\mathscr{B}(E)^{\otimes \mathbb{T}} \subsetneq \mathscr{B}(E^{\mathbb{T}})$ となってしまう場合があるので，$C(\mathbb{T}; E)$ の各点収束位相関する X の可測性は望めなそうである．次に代表的な $C(\mathbb{T}; E)$ の位相としては，コンパクト開位相がある．一般のコンパクト開位相はややこしいので，E が特に大変良い空間の場合を考えよう．

命題 2.2.6.
$C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d)$ をコンパクト一様収束位相により位相空間と考える．このとき $\mathscr{B}(C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d)) = [\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)]^{\otimes \mathbb{R}_{\geq 0}} \cap C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d)$ が成り立つ．

証明. 記号の簡略化のため，

$$\mathscr{A} = [\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)]^{\otimes \mathbb{R}_{\geq 0}} \cap C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d)$$

と書くことにする．$f, g \in C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d)$ に対して

$$d(f, g) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \left(1 \wedge \sup_{t\in[0,n]} \|f(t) - g(t)\|_{\mathbb{R}^d}\right)$$

と定義すれば，$C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d)$ はこの距離 d により可分距離空間となる．(可分性については系 A.7.6 を参照.) t を固定して得られる評価写像 $\mathrm{ev}_t\colon f \mapsto f(t)$ はどれも d に関して $C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d)$ 上連続であることから，$\mathscr{B}(C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d))$ 可測となる．よって $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d))$ がわかる．次に逆向きの包含関係を示そう．$C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d)$ の開集合はどれも開球の可算和として表現されるから，$C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d)$ の開球がどれも $\mathscr{A}$ 可測となることを示せばよい．そのためには，さらに任意の $g \in C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d)$ について距離関数 $f \mapsto d(g, f)$ が $\mathscr{A}$ 可

[*1] この σ-代数を $C(\mathbb{T}; E)$ 上のシリンダー σ-代数 (cylindrical σ-algebra) と呼んだりする．

測となることを示せば十分である．$f \mapsto \|f(t)\|_{\mathbb{R}^d}$ はどれも $\mathscr{A}$-可測であり，連続性より

$$\sup_{t\in[0,n]} \|f(t)\|_{\mathbb{R}^d} = \sup_{t\in[0,n]\cap\mathbb{Q}} \|f(t)\|_{\mathbb{R}^d}$$

が成り立つので $f \mapsto \sup_{t\in[0,n]}\|f(t)\|_{\mathbb{R}^d}$ も $\mathscr{A}$ 可測である．さらに $x \mapsto 1 \wedge x$ は連続関数だから $f \mapsto 1 \wedge \sup_{t\in[0,n]}\|f(t)\|_{\mathbb{R}^d}$ も $\mathscr{A}$ 可測であり，それらの可算和で表される $f \mapsto d(0,f)$ も $\mathscr{A}$-可測となる．最後に $d(g,f) = d(0,f-g)$ に注意すれば，距離関数 $f \mapsto d(g,f)$ の $\mathscr{A}$-可測性がわかる． □

命題 2.2.6 を用いれば，我々が求めていた以下の結果がすぐに得られる．

命題 2.2.7.
$X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ を $(\Omega, \mathscr{F})$ 上の $\mathbb{R}^d$ 値連続確率過程とする．このとき，写像 $\omega \mapsto X_\cdot(\omega)$ は $\mathscr{F}/\mathscr{B}(C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d))$-可測である．

$C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d)$ はポーランド空間なので，非常によい位相的性質をもつ．特にポーランド空間上の確率測度についてはかなりいろいろなことがわかるので，連続過程の分布はそれなりに調べやすい．

まとめ

- 連続なパスをもつ確率過程を連続過程といい，パスが右連続かつ左極限をもつような確率過程を càdlàg 過程という．
- 右連続あるいは左連続な仮定は可測である．
- $\mathbb{R}^d$-値連続過程は，位相空間 $C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d)$ に値をとる確率変数とみなせる．

2.3 フィルトレーションと可測性

本節では，フィルトレーションとそれに応じたさらに細かい可測性の概念を導入しよう．

定義 2.3.1.
$(\Omega, \mathscr{F})$ を可測空間とし，$\mathbb{T} \subset \overline{\mathbb{R}}$ を時刻集合とする．$\mathscr{F}$ の部分 σ - 代数の族 $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ で包含関係について増大的であるようなものをフィルトレーション (filtration) という．また，三つ組 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F})$ をフィルター付き可測空間と呼ぶ．$\mathscr{F}$ 上に確率測度 P が定義されているときは，四つ組 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間 (filtered probability space) あるいは確率基底 (stochastic basis) と呼ぶ．

$\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ がフィルトレーションであるとは，各 $t \in \mathbb{T}$ について $\mathscr{F}_t$ は $\mathscr{F}$ の部分 σ-代数であり，$s \leq t$ なら $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$ が成り立つということである．フィルトレーションは各時刻までに蓄積された情報全体の集まりを表している．フィルトレーションが増大的であるということは，得られる情報はたまる一方で，減ることはないということである．何とも記憶力が良い人である．フィルトレーションのわかりやすい例は，$\mathscr{F}_t = \mathscr{F}$ $(\forall t \in \mathbb{T})$ や，$\mathscr{F}_t = \{\emptyset, \Omega\}$ $(\forall t \in \mathbb{T})$ などであろう．しかし，これらはさすがにつまらない．もっと面白く，そしてもっとも重要なフィルトレーションの例はもう少し後で紹介する．

時刻集合 $\mathbb{T}$ が $\overline{\mathbb{R}}$ の区間である場合を考えよう．フィルトレーション $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ が与えられたとき，$\mathbb{T}$ の右端点ではない t に対して

$$\mathscr{F}_{t+} = \bigwedge_{s>t} \mathscr{F}_s = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s$$

と定義する．これは時刻 t の「直後」に観察できる情報全体を表す．$\mathbb{T}$ が右端点 t^* を持つ場合には, $\mathscr{F}_{t^*+} = \mathscr{F}_{t^*}$ と定義する．このとき，$(\mathscr{F}_{t+})_{t\in\mathbb{T}}$ はまたフィルトレーションとなるので，それを $\mathbb{F}_+$ で表す．また，$\mathbb{T}$ の左端点ではない t に対して

$$\mathscr{F}_{t-} = \bigvee_{s<t} \mathscr{F}_s = \sigma\left(\bigcup_{s<t} \mathscr{F}_s\right)$$

と定義する．これは，時刻 t の「直前」までに観察できる情報の全体と解釈できる．$\mathbb{T}$ が左端点 t_* を持つ場合には $\mathscr{F}_{t_*-} = \mathscr{F}_{t_*}$ と定めれば，$(\mathscr{F}_{t-})_{t\in\mathbb{T}}$ は新たなフィルトレーションを成す．これを $\mathbb{F}_-$ で表す．と定義はしてみたものの，本ノートでは $\mathbb{F}_-$ はあまり出てこない．

定義 2.3.2.
$\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ を可測空間 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上のフィルトレーションとする．$\mathbb{F}_+ = \mathbb{F}$ が成り立つとき $\mathbb{F}$ は右連続 (right-continuous) であるといい，$\mathbb{F}_- = \mathbb{F}$ が成り立つとき $\mathbb{F}$ は左連続 (left-continuous) であるという．フィルトレーションが右連続あるいは左連続であるとき，対応するフィルターつき可測空間やフィルターつき確率空間もそれぞれ右連続や左連続であるということにする．

時刻集合 $\mathbb{T} \subset \overline{\mathbb{R}}$ が右端点や左端点を持たない場合も，確率過程の極限的な振る舞いを調べるためには，$\mathscr{F}_{\bigvee\mathbb{T}-} := \bigvee_{s\in\mathbb{T}} \mathscr{F}_s$ および $\mathscr{F}_{\bigwedge\mathbb{T}+} = \bigwedge_{s\in\mathbb{T}} \mathscr{F}_s$ を考えると便利である．$\mathbb{T}$ が右端点を含まない場合にはの場合には $\mathscr{F}_{\bigvee\mathbb{T}} := \mathscr{F}_{\bigvee\mathbb{T}-}$ によって，そして左端点を含まない場合には $\mathscr{F}_{\bigwedge\mathbb{T}} := \mathscr{F}_{\bigwedge\mathbb{T}+}$ によって，フィルトレーションを端点上まで拡張することにする．

次にフィルトレーションの完備性の概念を導入しよう．$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，

$$\mathscr{N} = \mathscr{N}(\mathscr{F}, P) = \{A \subset \Omega \mid \exists N \in \mathscr{F},\ A \subset N,\ P(N) = 0\}$$

と定義する．部分 σ-代数 $\mathscr{G}$ に対して，その $(\mathscr{F}, P)$-完備化を

$$\mathscr{G}^{(\mathscr{F},P)} = \mathscr{G} \vee \mathscr{N}(\mathscr{F}, P)$$

によって定義する．$\mathscr{F}^{(\mathscr{F},P)}$ は通常の $\mathscr{F}$ の完備化 $\mathscr{F}^P$ と同じものである．

定義 2.3.3.
$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, P)$ をフィルターつき可測空間とする．全ての $t \in \mathbb{T}$ について $\mathscr{N}(\mathscr{F}, P) \subset \mathscr{F}_t$ が成り立つとき，フィルター付き確率空間は完備 (complete) であるという．

フィルターつき確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ が与えられたとき，

$$\mathbb{F}^{(\mathscr{F},P)} = \left(\mathscr{F}_t^{(\mathscr{F},P)}\right)_{t\in\mathbb{T}}$$

と定義する．このとき $(\Omega, \mathscr{F}^P, \mathbb{F}^{(\mathscr{F},P)}, P)$ は完備なフィルターつき確率空間となる．これを $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ の完備化という．

フィルターつき確率空間の完備性は，各 $t \in \mathbb{R}_+$ について確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}_t, P|_{\mathscr{F}_t})$ が完備であるという条件より強いものであることに注意されたい．$\mathscr{F}_t$ が $\mathscr{F}$ の部分 σ-代数であるという要請から，フィルターつき確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ が完備ならば基礎の確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ も完備となることに注意されたい．

定義 2.3.4.
フィルターつき確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ が完備かつ右連続あるとき，$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ は通常の条件 (usual condition) を満たすという．

フィルター付き確率空間が与えられると，それを適当に拡張して通常の条件を満たすようにすることができる．

命題 2.3.5.
$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．このとき，$(\mathbb{F}_+)^{(\mathscr{F},P)} = (\mathbb{F}^{(\mathscr{F},P)})_+$ が成立する．このフィルトレーションは，$\mathbb{F}$ を含む $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上のフィルトレーションで右連続かつ完備であるようなもののうち，包含関係について最小のものである．

証明．Step 1：$(\mathbb{F}_+)^{(\mathscr{F},P)} \subset (\mathbb{F}^{(\mathscr{F},P)})_+$ の証明． $t \in \mathbb{R}_+$ とする．$s > t$ とすれば，定義より明らかに

$$\mathscr{F}_{t+} \vee \mathscr{N}(\mathscr{F}, P) \subset \mathscr{F}_s \vee \mathscr{N}(\mathscr{F}, P)$$

が成立．これより

$$\mathscr{F}_{t+} \vee \mathscr{N}(\mathscr{F}, P) \subset \bigcap_{s>t} (\mathscr{F}_s \vee \mathscr{N}(\mathscr{F}, P))$$

となり $(\mathbb{F}_+)^{(\mathscr{F},P)} \subset (\mathbb{F}^{(\mathscr{F},P)})_+$ が分かる．

Step 2：$(\mathbb{F}_+)^{(\mathscr{F},P)} \supset (\mathbb{F}^{(\mathscr{F},P)})_+$ の証明．

$$\mathscr{F}_t \vee \mathscr{N}(\mathscr{F}, P) = \{A \in \mathscr{F}^P \mid \exists B \in \mathscr{F}_t,\ A \triangle B \in \mathscr{N}(\mathscr{F}, P)\}$$

と書けることに注意する．

$$A \in \bigcap_{s>t} (\mathscr{F}_s \vee \mathscr{N}(\mathscr{F}, P))$$

とすれば，任意の $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ に対して

$$A \in \mathscr{F}_{t+\frac{1}{n}} \vee \mathscr{N}^P$$

が成り立つ．各 n について，$A_n \in \mathscr{F}_{t+\frac{1}{n}}$ かつ $A_n \triangle A \in \mathscr{N}^P$ なる A_n を選ぶ．ここで

$$A' = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

と定義する．このとき，任意の $n \geq 1$ に対して

$$A' = \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{k\geq m} A_k = \bigcap_{m\geq n} \bigcup_{k\geq m} A_k \in \mathscr{F}_{t+\frac{1}{n}}$$

となり，よって $A' \in \mathscr{F}_{t+}$ である．さらに

$$\begin{aligned} A' \triangle A &= \left(\bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{k \geq m} A_k \right) \triangle A \\ &= \left[\bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{k \geq m} (A_k \setminus A) \right] \cup \left[\bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{k \geq m} (A \setminus A_k) \right] \\ &\subset \left[\bigcup_{k \geq 1} (A_k \setminus A) \right] \cup \left[\bigcup_{k \geq 1} (A \setminus A_k) \right] \\ &= \bigcup_{k \geq 1} (A_k \triangle A) \end{aligned}$$

であるから，$A' \triangle A$ はまた P 零集合である．これより $A \in \mathscr{F}_{t+} \vee \mathscr{N}(\mathscr{F}, P)$ となり，

$$\bigcap_{s > t} (\mathscr{F}_s \vee \mathscr{N}(\mathscr{F}, P)) \subset \mathscr{F}_{t+} \vee \mathscr{N}(\mathscr{F}, P)$$

が分かる．すなわち $(\mathbb{F}^{(\mathscr{F}, P)})_+ \subset (\mathbb{F}_+)^{(\mathscr{F}, P)}$ が成立する．

Step 3：最小性． $\mathbb{G} = (\mathscr{G}_t)$ は通常の条件満たす $(\Omega, \mathscr{F}^P, P)$ 上のフィルトレーションで $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$ なるものとする．$\mathscr{G}$ は完備なので，明らかに $\mathscr{F}_t \vee \mathscr{N}(\mathscr{F}, P) \subset \mathscr{G}_t$ である．これと $\mathbb{G}$ の右連続性より

$$\bigcap_{s > t} (\mathscr{F}_s \vee \mathscr{N}(\mathscr{F}, P)) \subset \bigcap_{s > t} \mathscr{G}_s = \mathscr{G}_{t+} = \mathscr{G}_t$$

となり，$\mathbb{G}$ は $(\mathbb{F}^{(\mathscr{F}, P)})_+$ を含む． □

命題 2.3.5 で扱った最小の右連続，完備かフィルトレーションを $\mathbb{F}$ の通常の拡大（usual augumentation）といい，$\mathbb{F}_+^{(\mathscr{F}, P)}$ で表す．

フィルトレーションが与えられると，それに対応して確率過程の可測性がいくつか定義される．本節では，そのうちで最も基本的な二種類の可測性を導入する．

定義 2.3.6.
$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t \in \mathbb{T}})$ をフィルター付き可測空間とし，X を $(E, \mathscr{E})$ に値をとる確率過程とする．

(i) 任意の $t \in \mathbb{T}$ に対して X_t が $\mathscr{F}_t / \mathscr{E}$-可測であるとき，$X$ は $\mathbb{F}$ ‐ 適合 (adapted) であるという．
(ii) 任意の $t \in \mathbb{T}$ について X の $\Omega \times \mathbb{T}_{\leq t}$ への制限が $\mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}(\mathbb{T}_{\leq t})$ 可測となるとき，X は $\mathbb{F}$ ‐ 発展的可測 (progressively measurable) であるという．

$(\Omega, \mathscr{F})$ 上の確率過程 $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ が与えられたときに，

$$\mathscr{F}_t(X) = \sigma(X_s \, ; \, s \leq t)$$

と定めれば $(\mathscr{F}_t(X))_{t \in \mathbb{T}}$ はフィルトレーションとなる．これを X から生成されるフィルトレーションといい，$\mathbb{F}(X)$ で表す．$\mathbb{F}(X)$ は X が適合過程となるようなフィルトレーションのうち，包含関係について最小のものである．

発展的可測過程は明らかに可測かつ適合である．発展的可測性は幾分技術的な過程であり，いまいち意味がつかみにくいが，大変重要な概念である．$A \subset \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ は，$1_A \colon \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ が発展的可測

過程になるときに発展的 (progressive) であるという．A が発展的可測になることは，任意の t について $(\Omega \times [0,t]) \cap A \in \mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}([0,t])$ が成り立つことと同値である．これより，$F \in \mathscr{F}_0$ かつ $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ なら，$F \times B$ は発展的集合となることがすぐにわかる．発展的集合全体から生成される σ-代数を発展的 σ-代数 (progressive σ-algebra) といい，$\mathrm{Prog}(\mathbb{F})$ で表す．

命題 2.3.7.
$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F})$ をフィルター付き可測空間とする．実数値確率過程 X について，次の 2 条件は同値である．

(i) X は発展的可測である．
(ii) X は $\mathrm{Prog}(\mathbb{F})$ 可測である．

証明. (i) $\Longrightarrow$ (ii). X を発展的可測過程とし，

$$A_k^n = \left\{ (\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \;\middle|\; X(\omega, t) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right[\right\}$$
$$X_t^{(n)}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{k}{2^n} 1_{A_k^n}$$

と定義する．このとき $X^{(n)}$ は X に各点収束する．したがって各 $X^{(n)}$ が $\mathrm{Prog}(\mathbb{F})$ 可測であることを示せばよい．$t \in \mathbb{R}_+$ を固定する．

$$(\Omega \times [0,t]) \cap A_k^n = \left\{ (\omega, s) \in \Omega \times [0,t] \;\middle|\; X(\omega, s) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right[\right\} \in \mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}([0,t])$$

だから，$1_{A_k^n}$ は発展的可測である．よってこれは $1_{A_k^n}$ は $\mathrm{Prog}(\mathbb{F})$ 可測で，その線形和たる $X^{(n)}$ も $\mathrm{Prog}(\mathbb{F})$ 可測となる．

(ii) $\Longrightarrow$ (i). 関数型の単調族定理（命題 A.1.8）を使って証明する．

$$\mathscr{C} = \{ A \subset \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid 1_A \text{ は発展的可測 } \}$$
$$\mathscr{H} = \{ X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \mid X \text{ は発展的可測 } \}$$

と定義する．$\mathscr{C}$ は π 系であるから，$\mathscr{H}$ が命題 A.1.8 の条件を満たすことを確かめればよい．定数関数 1 は明らかに発展的可測である．定義から $\mathscr{C}$ の元の指示関数は $\mathscr{H}$ に属する．可測性は各点収束で閉じているから，命題 A.1.8 の条件 (ii) も満たされる．これより，$\mathscr{H}$ は全ての $\sigma(\mathscr{C})$-可測関数を含む．すなわち，$\mathrm{Prog}(\mathbb{F})$-可測関数は発展的可測である． □

次の命題は，右連続な適合過程は発展的可測であるということを主張するものである．

命題 2.3.8.
距離空間に値をとる右連続（または左連続）適合過程は，発展的可測である．

証明. $\mathbb{T} = \mathbb{R}_{\geq 0}$ かつ X が右連続の場合に証明する．$t \geq 0$ を固定し，

$$X_s^{(n)}(\omega) = \begin{cases} X_0(\omega) & s = 0 \\ X_{\frac{kt}{2^n}}(\omega) & s \in \left] \frac{(k-1)t}{2^n}, \frac{kt}{2^n} \right], \ 1 \leq k \leq 2^n \end{cases}$$

と定義する．このとき X の右連続性により $X^{(n)}$ は $X|_{\Omega\times[0,t]}$ に各点収束する．$B \in \mathscr{B}(E)$ とすれば，

$$(X^{(n)})^{-1}(B) = \bigl(\{0\} \times X_0^{-1}(B)\bigr) \cup \bigcup_{1\le k\le 2^n} \left]\frac{(k-1)t}{2^n}, \frac{kt}{2^n}\right] \times X_{\frac{kt}{2^n}}^{-1}(B)$$

が成り立つ．右辺の和に現れる各集合は $\mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}([0,t])$-可測なので，有限個の合併で表される $(X^{(n)})^{-1}(B)$ も $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\ge 0})$-可測である．$X|_{\Omega\times[0,t]}$ は $X^{(n)}$ の各点収束極限なので，同様の可測性をもつ． □

まとめ

- $s \le t$ なら $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$ を満たす部分 σ-代数の族 $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ をフィルトレーションという．
- 右連続性と完備性を満たすフィルトレーションは，通常の条件を満たすという．
- 各 t で X_t が $\mathscr{F}_t$-可測となるような確率過程を，適合過程という．
- 確率過程 X は $\Omega \times [0,t]$ 上への制限がどれも $\mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}([0,t])$-可測になるとき，発展的可測であるという．
- 右連続あるいは左連続な適合過程は発展的可測である．

2.4 停止時刻

1 章で調べた停止時刻の概念を，連続時間過程の枠組みでも導入しよう．本節では，基本的に $\mathbb{T} = \mathbb{R}_{\ge 0}$ または $\mathbb{T} = \overline{\mathbb{R}}_{\ge 0}$ であるとする．

定義 2.4.1.
$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F})$ をフィルター付き可測空間とし, 確率変数 $T : \Omega \to [0,\infty]$ を確率変数とする．全ての $t \in [0,\infty[$ について

$$\{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \le t\} \in \mathscr{F}_t$$

が成り立つとき，T は $\mathbb{F}$ - 停止時刻 (stopping time) であるという．また，上の条件の代わりに全ての $t \in [0,\infty[$ について

$$\{\omega \in \Omega \mid T(\omega) < t\} \in \mathscr{F}_t$$

が成り立つとき，T は弱停止時刻 (weak stopping time) であるという．

離散時間モデルにおいては T が停止時刻であることは $\forall n \in \mathbb{N}\ \{T = n\} \in \mathscr{F}_n$ と同値であったけれども，連続時間モデルでは $\forall t \in \mathbb{R}_{\ge 0}\ \{T = t\} \in \mathscr{F}_t$ が成り立つからと言って，T が停止時刻になるとは限らない．

写像 $S, T \colon \Omega \to [0,\infty]$ に対して，確率区間 (stochastic interval) とよばれる集合を以下で定義する．

$$\begin{aligned}
[\![S,T]\!] &= \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_{\ge 0} \mid S(\omega) \le t \le T(\omega)\} \\
[\![S,T[\![&= \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_{\ge 0} \mid S(\omega) \le t < T(\omega)\} \\
]\!]S,T]\!] &= \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_{\ge 0} \mid S(\omega) < t \le T(\omega)\} \\
]\!]S,T[\![&= \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_{\ge 0} \mid S(\omega) < t < T(\omega)\}
\end{aligned}$$

と定義する[*2]．　特に $S=T$ のとき $[\![T,T]\!]=[\![T]\!]$ と書き，これを T のグラフと呼ぶ．[*3*4] $s,t\in[0,\infty]$ を定数関数 $\Omega\to[0,\infty]$ と見なせば，$[\![s,t]\!]=\Omega\times[s,t]$ が成り立つ．

確率区間の記法を用いれば，写像 $T\colon\Omega\to[0,\infty]$ が停止時刻であることは，$1_{[\![T,\infty[\![}$ が適合過程になることと同値となる．このとき $1_{[\![T,\infty[\![}$ は右連続な適合過程となるので，発展的可測である．また，T が弱停止時刻となることは $1_{]\!]T,\infty[\![}$ が適合過程となることと同値である．このとき $1_{]\!]T,\infty[\![}$ は左連続適合過程となるので，やはり発展的可測となる．

命題 2.4.2.
$(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F})$ をフィルターつき可測空間とする．

(i) 任意の定数 $t\in[0,\infty[$ は $\mathbb{F}$ - 停止時刻である．
(ii) 任意の停止時刻は弱停止時刻でもある．
(iii) フィルトレーション $\mathbb{F}$ が右連続ならば，弱停止時刻は停止時刻となる．
(iv) 非負確率変数 T が $\mathbb{F}$ - 弱停止時刻であるための必要十分条件は，T が $\mathbb{F}_+$ - 停止時刻になっていることである．

証明. (i) $t\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ を固定し，$T(\omega)=t$ と定義する．$s\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ とすれば

$$\{\omega\in\Omega\mid T(\omega)\leq s\}=\begin{cases}\Omega & \text{if } t\leq s\\ \emptyset & \text{if } t>s\end{cases}$$

となるので，いずれの場合も $\{T\leq s\}\in\mathscr{F}_s$ が成り立つ．よって $T\equiv t$ は停止時刻である．

(ii) $t>0$ とすれば，

$$\{\omega\in\Omega\mid T(\omega)<t\}=\bigcup_{n\geq 1}\left\{\omega\in\Omega\;\middle|\;T(\omega)\leq t-\frac{1}{n}\right\}$$

という表現が成り立つことに注意する．T が停止時刻なら，

$$\{T\leq t-1/n\}\in\mathscr{F}_{(t-\frac{1}{n})\vee 0}\subset\mathscr{F}_t$$

が成り立つので，$\{T<t\}\in\mathscr{F}_t$ がわかる．したがって T は弱停止時刻である．

(iii) S を右連続フィルトレーションに関する弱停止時刻とする．このとき

$$\{S\leq t\}=\bigcap_{n\geq 1}\left\{T<t+\frac{1}{n}\right\}\in\bigcap_{n\geq 1}\mathscr{F}_{t+\frac{1}{n}}=\mathscr{F}_{t+}=\mathscr{F}_t$$

よりこれは停止時刻である．

(iv) T を $\mathbb{F}$ - 弱停止時刻とすれば，これは $\mathbb{F}_+$ に関する弱停止時刻にもなっている．$\mathbb{F}_+$ の右連続性と (iii) より T は $\mathbb{F}_+$ - 停止時刻である．逆に T が $\mathbb{F}_+$ - 停止時刻であると仮定する．このとき

$$\{T<t\}=\bigcup_{n\geq 1}\left\{T\leq t-\frac{1}{n}\right\}$$

[*2] ここでは $S\leq T$ とは限らない場合についてもこれらの区間を定義することにする．
[*3] $[\![T]\!]$ は $\Omega\times[0,\infty[$ の部分集合であるから，厳密には写像 $T:\Omega\to[0,\infty]$ のグラフ

$$\{(\omega,t)\in\Omega\times[0,\infty]\mid T(\omega)=t\}$$

ではなく，その $\Omega\times[0,\infty[$ への制限となっている．
[*4] $T=+\infty$（定数）のとき，$[\![S,+\infty]\!]=[\![S,+\infty[\![$ および $]\!]S,+\infty]\!]=]\!]S,+\infty[\![$ が成り立つことに注意せよ．

と書けるが，各 n に対して $\{T \le t - 1/n\} \in \mathscr{F}_{(t-1/n)+} \subset \mathscr{F}_t$ だったから $\{T < t\} \in \mathscr{F}_t$ である． □

命題 2.4.3.
S，T，T_n（$n \in \mathbb{N}$）はどれも弱停止時刻であるとする．このとき，次が成り立つ．

(i) $S + T$ は弱停止時刻である．
(ii) $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} T_n$ と $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} T_n$ は弱停止時刻である．
(iii) $\overline{\lim}_{n\to\infty} T_n$ と $\underline{\lim}_{n\to\infty} T_n$ は弱停止時刻である．

証明． (i) S, T を停止時刻とすれば

$$\begin{aligned}\{S+T \ge t\} &= \{T = 0, S \ge t\} \cup \{T \ge t, S \ge 0\} \cup \{0 < T < t, S + T \ge t\} \\ &= \{T = 0, S \ge t\} \cup \{T \ge t, S \ge 0\} \cup \left[\bigcup_{r\in]0,t[\cap\mathbb{Q}} \{r \le T < t, S \ge t - r\}\right] \in \mathscr{F}_t\end{aligned}$$

より $S + T$ は弱停止時刻である．

(ii)

$$\left\{\bigvee_{n\in\mathbb{N}} T_n > t\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{T_n > t\} \in \mathscr{F}_{t+}$$

であるから，$\bigvee_n T_n$ は $(\mathscr{F}_{t+})$ - 停止時刻となる．よって命題 2.4.2 により $(\mathscr{F}_t)$ に関して弱停止時刻である．また

$$\left\{\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} T_n < t\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{T_n < t\} \in \mathscr{F}_t$$

から $\inf_n T_n$ はまた弱停止時刻である．

(iii) 定義より $\overline{\lim}_n T_n = \bigwedge_{n\ge0} \bigvee_{k\ge n} T_k$ および $\underline{\lim}_n T_n = \bigvee_{n\ge0} \bigwedge_{k\ge n} T_k$ であるから，(ii) によりこれらも弱停止時刻であることがわかる． □

命題 2.4.4.
S，T，T_n（$n \in \mathbb{N}$）はどれも停止時刻であるとする．

(i) $S + T$ は停止時刻である．
(ii) $S \wedge T$ と $S \vee T$ は停止時刻である．
(iii) $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} T_n$ は停止時刻である．
(iv) (S_n) は弱停止時刻の増大列とし，$\lim_n S_n = R$ と定義する．$\{R = 0\} \in \mathscr{F}_0$ かつ $\{0 < R < \infty\}$ 上で $R > S_n$ が成り立つなら，R は停止時刻である．

証明． (i)

$$\begin{aligned}&\{S + T > t\} \\ &= \{T = 0, S > t\} \cup \{0 < T < t, T + S > t\} \cup \{T > t, S = 0\} \cup \{T \ge t, S > 0\} \\ &= \{T = 0, S > t\} \cup \{0 < T < t, T + S > t\} \cup \left[\bigcup_{r\in]0,t[\cap\mathbb{Q}} \{t > T > r, S > t - r\}\right] \cup \{T \ge t, S > 0\}\end{aligned}$$

$\in \mathscr{F}_t$

より $S+T$ もまた停止時刻である．

(ii) $S \wedge T$ および $S \vee T$ がまた停止時刻となることの証明は弱停止時刻の場合と同様である．

(iii)

$$\left\{ \bigvee_{n\in\mathbb{N}} T_n > t \right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{T_n > t\} \in \mathscr{F}_t$$

より $\bigvee_n T_n$ も停止時刻である．

(iv) (S_n) と R が (iv) の仮定を満たすとき，

$$\begin{aligned}\{R \le t\} &= \{R = 0\} \cup \{0 < R \le t\} \\ &= \{R = 0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{S_n < t\}\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって $\{R \le t\} \in \mathscr{F}_t$ となり，R が停止時刻であることがわかる． □

確率過程 $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を考える．$T : \Omega \to [0,\infty]$ を停止時刻とすれば，$\{\omega \in \Omega \mid T(\omega) < \infty\}$ なる集合上で $X_{T(\omega)}(\omega)$ によって新たに「確率変数のようなもの」が定義できそうだというのは自然な考えであろう．実際，$\{T = \infty\}$ なる集合上での値を適当に決めればそれは確率変数となる．

命題 2.4.5.
$X : \Omega \times [0,\infty[\to \mathbb{R}$ を可測な確率過程，ξ を確率変数とする．このとき，

$$Y(\omega) := \begin{cases} X(\omega, T(\omega)) & \omega \in \{T < \infty\} \\ \xi(\omega) & \omega \in \{T = \infty\} \end{cases}$$

とおけば，Y は確率変数である．とくに $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega) 1_{\{T<\infty\}}(\omega)$ とおけば X_T は確率変数である．

証明. 写像 $\widetilde{X} : \Omega \times [0,\infty] \to \mathbb{R}$ を

$$\widetilde{X}(\omega, t) = \begin{cases} X(\omega, t) & (\omega, t) \in \{T < \infty\} \times \mathbb{R}_+ \\ \xi(\omega) & (\omega, t) \in \{T = \infty\} \times \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

によって定義すれば，$\widetilde{X}$ は $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ ‐可測関数である．$\mathscr{F}/\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ 可測写像 $(\mathrm{id}_\Omega, T) : \Omega \ni \omega \mapsto (\omega, T(\omega)) \in \Omega \times [0,\infty]$ を考えれば，上で定義された Y は写像 $\widetilde{X} \circ (\mathrm{id}, T) \colon \Omega \to \mathbb{R}$ で表されるから，$\mathscr{F}$ ‐可測，よって確率変数である． □

定義 2.4.6.
$(\mathscr{F}_t)$ 停止時刻 T に対して σ ‐代数 $\mathscr{F}_T$ を以下で定義する．

$$\mathscr{F}_T = \{A \in \mathscr{F}_\infty \mid \forall t \in [0,\infty[,\ A \cap \{T \le t\} \in \mathscr{F}_t\}$$

命題 2.4.7.
$(\mathscr{F}_t)$ - 停止時刻 T について以下が成り立つ.

(i) $\mathscr{F}_T$ は実際に σ - 代数である.
(ii) $T=t$（定数）なら $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_t$.
(iii) T は $\mathscr{F}_T$ - 可測である.
(iv) S,T が停止時刻ならば，任意の $A\in\mathscr{F}_S$ に対して $A\cap\{S\le T\}\in\mathscr{F}_T$.
(v) Ω 上で $S\le T$ なら $\mathscr{F}_S\subset\mathscr{F}_T$.
(vi) S,T が停止時刻ならば $\mathscr{F}_{S\wedge T}=\mathscr{F}_S\cap\mathscr{F}_T$.
(vii) 次の集合はどれも $\mathscr{F}_S\cap\mathscr{F}_T$ の元である.

$$\{T<S\},\quad \{S<T\},\quad \{T\le S\},\quad \{S\le T\},\quad \{T=S\}.$$

(viii) $A\in\mathscr{F}_T$ とし，停止時刻 T の A への制限 T_A を

$$T_A(\omega)=\begin{cases}T(\omega) & \omega\in A\\ \infty & \omega\in\Omega\setminus A\end{cases}$$

と定義する．このとき T_A はまた停止時刻である.

証明. (i). 明らかに $\Omega\in\mathscr{F}_T$ である．$A\in\mathscr{F}_T$ とすれば

$$(\Omega\setminus A)\cap\{T\le t\}=\{T\le t\}\cap[\Omega\setminus(A\cap\{T\le t\})]\in\mathscr{F}_T$$

より $\Omega\setminus\mathscr{F}_T$．さらに $(A_n)\in(\mathscr{F}_T)^{\mathbb{N}}$ なら

$$\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right]\cap\{T\le t\}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[A_n\cap\{T\le t\}]\in\mathscr{F}_T$$

より $\bigcup_n A_n\in\mathscr{F}_T$ となり，$\mathscr{F}_T$ が σ-代数であることが分かった.

(ii). 定数時刻 $T(\omega)=t$ を考える．$A\in\mathscr{F}_T$ なら,

$$A\cap\{T\le t\}=A\cap\Omega=A\in\mathscr{F}_t$$

である．よって $\mathscr{F}_T\subset\mathscr{F}_t$．逆に $A\in\mathscr{F}_t$ なら任意の $s\in[0,\infty[$ に対して

$$A\cap\{T\le s\}=A\cap\{t\le s\}=\begin{cases}A\in\mathscr{F}_t\subset\mathscr{F}_s & \text{if } t\le s,\\ \emptyset\in\mathscr{F}_s & \text{if } t>s\end{cases}$$

となるから $\mathscr{F}_t\subset\mathscr{F}_T$．したがって $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_t$ である.

(iii). 任意の $a\in[0,\infty[$ に対して $\{T\le a\}\in\mathscr{F}_T$ を示せば十分である.

$$\{T\le a\}\cap\{T\le t\}=\{T\le a\wedge t\}\in\mathscr{F}_{a\wedge t}\subset\mathscr{F}_t\quad (t\in[0,\infty[)$$

より $\{T\le a\}\in\mathscr{F}_T$ である.

(iv).S,T を $(\mathscr{F}_t)$ - 停止時刻とする．$T\wedge t$ および $S\wedge t$ が $\mathscr{F}_t$ 可測な確率変数であることは容易にわかるので[*5]$A\in\mathscr{F}_S$ とすれば

$$[A\cap\{S\le T\}]\cap\{T\le t\}=[A\cap\{S\le t\}]\cap\{T\le t\}\cap\{S\wedge t\le T\wedge t\}\in\mathscr{F}_t$$

[*5] 停止時刻の定義戻って $\{T\wedge t\le a\}\in\mathscr{F}_t$ $(a\in[0,\infty[)$ を示せばよい.

である．

(v) Ω 上 $S \leq T$ ならば (iv) より

$$A \cap \{S \leq T\} = A \in \mathscr{F}_T \quad \forall A \in \mathscr{F}_S$$

である．よって $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$.

(vi) $\mathscr{F}_{S\wedge T} \subset \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$ は (v) より明らか．$A \in \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$ とすれば

$$A \cap \{S \wedge T \leq t\} = [A \cap \{S \leq t\}] \cup [A \cap \{T \leq t\}] \in \mathscr{F}_t \quad \forall t \in [0, \infty[$$

であるから，$A \in \mathscr{F}_{S\wedge T}$ となる．よって $\mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T \subset \mathscr{F}_{S\wedge T}$ も成立.

(vii) (iv) および (vi) により $\{S \leq T\} = \{S \leq S \wedge T\} \in \mathscr{F}_{S\wedge T} = \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$ である．よって $\{S > T\} \in \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$ もいえる．S と T の役割を入れ替えれば $\{T \leq S\}, \{T > S\} \in \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$ も分かる．さらに $\{S = T\} = \{S \leq T\} \cap \{T \leq S\} \in \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$ である．

(viii) $\{T_A \leq t\} = \{T \leq t\} \cap A$ が成り立つから，T_A は停止時刻であることがわかる． □

命題 2.4.8.
$X = (X_t)$ を $(\mathscr{F}_t)$ ‐発展的可測な確率過程，ξ を $\mathscr{F}_\infty (= \bigvee_t \mathscr{F}_t)$ 可測な確率変数とする．このとき $X_T 1_{\{T<\infty\}}$ は $\mathscr{F}_T$ ‐可測である．また，確率過程 $X^T = (X_{t\wedge T})$ は $(\mathscr{F}_t)$ ‐発展的可測である．

証明. 二つ目の主張から証明する．X および X^T を $\Omega \times [0, \infty[$ から $\mathbb{R}$ への写像と考える．写像 $\phi_t : \Omega \times [0, t] \to \Omega \times [0, t]$ を $\phi_t(\omega, s) = (\omega, T(\omega) \wedge t)$ によって定めれば，これは明らかに $\mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}([0, t])$ ‐可測である．$X^T = X \circ \phi_t$ であるから，X の発展的可測性と合わせて X^T の発展的可測性がわかる．

これを用いて一つ目の主張を示す．発展的可測性より X^T は $(\mathscr{F}_t)$ ‐に適合しているので, 任意の $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$\{X_T \in B\} \cap \{T \leq t\} = \{X_{T\wedge t} \in B\} \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t \quad (\forall t \in [0, \infty[\,)$$

となるので，$\{X_T \in B\} \in \mathscr{F}_T$ である．すなわち，X_T は $\mathscr{F}_T$ ‐可測である． □

定義 2.4.9.
$(\mathscr{F}_t)$ に関する弱停止時刻 T に対して σ ‐代数 $\mathscr{F}_{T+}$ を以下で定義する.

$$\mathscr{F}_{T+} = \{A \in \mathscr{F}_\infty \mid \forall t \in [0, \infty[,\ A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_{t+}\}$$

命題 2.4.10.
$(\mathscr{F}_t)$ に関する弱停止時刻 T に関して以下が成り立つ.

(i) $\mathscr{F}_{T+}$ は実際に σ ‐代数である.
(ii) T は $\mathscr{F}_{T+}$ ‐可測である.
(iii) $A \in \mathscr{F}_{T+} \iff A \cap \{T < t\} \in \mathscr{F}_t, \forall t \in [0, \infty[$.
(iv) $T = t$（定数）なら $\mathscr{F}_{T+} = \mathscr{F}_{t+}$.
(v) S, T が弱停止時刻ならば，任意の $A \in \mathscr{F}_{S+}$ に対して $A \cap \{S \leq T\} \in \mathscr{F}_{T+}$.
(vi) Ω 上で $S \leq T$ なら $\mathscr{F}_{S+} \subset \mathscr{F}_{T+}$.

(vii) S, T が弱停止時刻ならば $\mathscr{F}_{(S\wedge T)+} = \mathscr{F}_{S+} \cap \mathscr{F}_{T+}$.

(viii) 次の集合はどれも $\mathscr{F}_{S+} \cap \mathscr{F}_{T+}$ の元である.

$$\{T < S\}, \{S < T\},\ \{T \leq S\},\ \{S \leq T\},\ \{T = S\}.$$

証明. (iii) のみ示す.（他は命題 2.4.7 と同様.）$A \in \mathscr{F}_{T+}$ とすれば，任意の $t \in \mathbb{R}_+$ に対して

$$A \cap \{T < t\} = A \cap \left[\bigcup_{n\geq 1}\left\{T \leq t - \frac{1}{n}\right\}\right] = \bigcup_{n\geq 1}\left[A \cap \left\{T \leq t - \frac{1}{n}\right\}\right] \in \mathscr{F}_t$$

である．逆に $A \cap \{T < t\} \in \mathscr{F}_t$ が任意の $t \geq 0$ に対してなりたつと仮定すれば,

$$A \cap \{T \leq t\} = A \cap \left[\bigcap_{n\geq 1}\left\{T \leq t + \frac{1}{n}\right\}\right] = \bigcap_{n\geq 1}\left[A \cap \left\{T \leq t + \frac{1}{n}\right\}\right] \in \mathscr{F}_{t+}$$

となり $A \in \mathscr{F}_{T+}$ である. □

命題 2.4.11.

$(\mathscr{F}_t)$ をフィルトレーションとしたとき，次がなりたつ.

(i) T が停止時刻なら $\mathscr{F}_T \subset \mathscr{F}_{T+}$.

(ii) S が弱停止時刻で T は停止時刻であるとする．Ω 上 $S \leq T$ かつ $\{S < \infty\}$ 上で $S < T$ なら, $\mathscr{F}_{S+} \subset \mathscr{F}_T$ である.

(iii) (T_n) を弱停止時刻の列とし，$T = \inf_n T_n$ とする．このとき $\mathscr{F}_{T+} = \bigcap_n \mathscr{F}_{T_n+}$.

(iv) (T_n) を停止時刻の列とし,，$T = \inf_n T_n$ とする．さらに Ω 上で $T \leq T_n$ かつ $\{T < \infty\}$ 上で $T < T_n$ であるとする．このとき $\mathscr{F}_{T+} = \bigcap_n \mathscr{F}_{T_n}$ がなりたつ.

証明. (i).T を停止時刻，$A \in \mathscr{F}_T$ とすれば

$$A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}_{t+} \quad \forall t \in [0, \infty[$$

となるから $A \in \mathscr{F}_{T+}$ である.

(ii).$A \in \mathscr{F}_{S+}$ とすれば,

$$\begin{aligned}
A \cap \{T \leq t\} &= A \cap \{T \leq t\} \cap \{S < T\} \\
&= A \cap \left[\bigcup_{r\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} \{S < r < T\}\right] \cap \{T \leq t\} \\
&= \bigcup_{r\in[0,t[\cap\mathbb{Q}} [A \cap \{S < r\} \cap \{r < T \leq t\}] \\
&\in \mathscr{F}_t \quad \forall t \in [0, \infty[
\end{aligned}$$

だから，$A \in \mathscr{F}_T$ である.

(iii).$T \leq T_n$ より $\mathscr{F}_{T+} \subset \mathscr{F}_{T_n+}$ が任意の n に対してなりたつ．よって $\mathscr{F}_{T+} \subset \bigcap_n \mathscr{F}_{T_n+}$ である．逆の包含

関係を示そう．$A \in \bigcap_n \mathscr{F}_{T_n+}$ とすれば

$$
\begin{aligned}
A \cap \{T < t\} &= A \cap \left\{ \inf_{n\in\mathbb{N}} T_n < t \right\} \\
&= A \cap \left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{T_n < t\} \right] \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [A \cap \{T_n < t\}] \in \mathscr{F}_t
\end{aligned}
$$

となるから，$A \in \mathscr{F}_{T+}$ である．（命題 2.4.10 の (iii) を使った．）

(iv).(T_n) が条件を満たす停止時刻の列のとき，(ii) より各 n について $\mathscr{F}_{T+} \subset \mathscr{F}_{T_n}$ である．よって $\mathscr{F}_{T+} \subset \bigcap_n \mathscr{F}_{T_n}$ が分かる．(i) および (iii) の結果より

$$
\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_{T_n} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_{T_n+} = \mathscr{F}_{T+}
$$

なので，逆の包含関係もなりたつ． □

ここまで停止時刻の基本的な性質について学んできたが, 次に停止時刻の重要な例をあげる．$A \subset \Omega \times [0,\infty]$ に対して，

$$
\begin{aligned}
D_A(\omega) &= \{t \in [0,\infty[\mid (\omega, t) \in A\} \\
\widetilde{D}_A(\omega) &= \{t \in]0,\infty[\mid (\omega, t) \in A\}
\end{aligned}
$$

と定義する．A^ω で A の ω-断面[*6]を表すことにすれば，$D_A(\omega) = \inf A^\omega$ かつ $\widetilde{D}_A(\omega) = \inf A^\omega \cap]0,\infty[$ が成り立つ．このように定めた写像 D_A を集合 A へのデビュー (debut) と呼ぶ．$\widetilde{D}_A$ は $A \cap]\!]0,\infty[\![$ へのデビューに他ならない．A が確率過程 X を用いて $A = X^{-1}(B)$ のように表現されているときは，$D_A = D_{X^{-1}(B)}$ を X の B への到達時刻 (hitting time) という．A が空集合ならば D_A は A の性質にかかわらず常に ∞ となり明らかに停止時刻である．

補題 2.4.12.
A が発展的集合であるとする．

(i) ある可算集合 $C \subset [0,\infty[$ で $D_A = D_{A\cap(\Omega\times C)}$ を満たすものが存在するなら，D_A は弱停止時刻である．

(ii) D_A は弱停止時刻になると仮定し，さらに任意の $\omega \in \Omega$ について $A^\omega \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ は閉集合になるとする．このとき D_A は停止時刻となる．

証明. (i) $t > 0$ とすれば，仮定より

$$
\begin{aligned}
\{D_A < t\} &= \{\omega \in \Omega \mid D_{A\cap(\Omega\times C)}(\omega) < t\} \\
&= \{\omega \in \Omega \mid \exists s \in [0,t[\cap C \ (\omega, s) \in A\} \\
&= \bigcap_{s\in[0,t[\cap C} \{\omega \in \Omega \mid 1_A(\omega, s) = 1\} \\
&= \bigcap_{s\in[0,t[\cap C} 1_A(\,\cdot\,, s)^{-1}(1)
\end{aligned}
$$

[*6] すなわち $A^\omega = \{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid (\omega, t) \in A\}$ である．

が成り立つ．A は発展的なので $1_A(\cdot,s)^{-1}(\{1\}) \in \mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$ であり，その可算和で表現される $\{D_A < t\}$ も $\mathscr{F}_t$ の元である．よって D_A は弱停止時刻であることがわかる．

(ii) A^ω が閉集合になるという仮定から D_A は A^ω の最小値であり，$[\![D_A]\!] \subset A$ が成り立つことに注意する．$t \geq 0$ とすれば，

$$
\begin{aligned}
\{D_A \leq t\} &= \{D_A < t\} \cup \{D_A = t\} \\
&= \{D_A < t\} \cup \left(\{\omega \in \Omega \mid (\omega, t) \in A\} \cap \bigcap_{s \in [0,t[} \{\omega \in \Omega \mid (\omega, s) \notin A\} \right) \\
&= \{D_A < t\} \cup \left(\{\omega \in \Omega \mid (\omega, t) \in A\} \cap \bigcap_{s \in [0,t[\cap \mathbb{Q}} \{\omega \in \Omega \mid (\omega, s) \notin A\} \right) \\
&= \{D_A < t\} \cup \left(1_A(\cdot,t)^{-1}(1) \cap \bigcap_{s \in [0,t[\cap \mathbb{Q}} 1_A(\cdot,s)^{-1}(0) \right)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ただし，3 つ目の等号に A^ω が閉集合であることを用いた．D_A が弱停止時刻であるという仮定と A が発展的であるという仮定から最後の辺の各項はどれも $\mathscr{F}_t$-可測であり，それらの和や共通部分をとった集合も $\mathscr{F}_t$-可測であることがわかる． □

命題 2.4.13.
E を位相空間，$X = (X_t)$ を右連続なパスをもつ E-値 $\mathbb{F}$-適合過程，$B \in \mathscr{B}(E)$ とする．

(i) B が空でない開集合ならば，到達時刻 $D_{X^{-1}(B)}$ は弱停止時刻である．
(ii) B が空でない開集合ならば，$\widetilde{D}_{X^{-1}(B)}$ は - 弱停止時刻である．
(iii) A が空でない閉集合で X のパスが連続ならば，$D_{X^{-1}(B)}$ は停止時刻である．
(iv) A が空でない閉集合で X のパスが連続ならば，$\widetilde{D}_{X^{-1}(B)}$ は弱停止時刻である．
(v) $E = \mathbb{R}$，X のパスが増加関数で，さらに $B = [a, \infty[$ の形であるとする．このとき到達時刻 $D_{X^{-1}(B)}$ は停止時刻である．

なお，B が開集合という設定下では $D_{X^{-1}(B)}$ と $\widetilde{D}_{X^{-1}(B)}$ 値は一致することに注意されたい．$D_{X^{-1}(B)}$ と $\widetilde{D}_{X^{-1}(B)}$ が異なるのは時刻 0 で B の端点から出発してすぐに $\mathbb{R}^d \setminus B$ へ突入してしまう場合である．

証明. (i) X はで B は空でない開集合だから，

$$
\begin{aligned}
D_{X^{-1}(A)} &= \inf\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid X_t \in A\} \\
&= \inf\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cap \mathbb{Q} \mid X_t \in A\} \\
&= D_{X^{-1}(A) \cap (\Omega \times \mathbb{Q})}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって補題 2.4.12(i) により $D_{X^{-1}(A)}$ は弱停止時刻となる．

(ii) (i) と同様に

$$
D_{X^{-1}(A)} = D_{X^{-1}(A) \cap]\!]0,\infty[\![} = D_{X^{-1}(A) \cap (\Omega \times \mathbb{Q}_{>0})}
$$

が成り立つことがわかるから，補題 2.4.12(i) により $D_{X^{-1}(A)}$ は弱停止時刻となる．

(iii) $d(x, B) := \inf\{d(x,y) \mid y \in B\}$ として，$n \geq 1$ に対して $B_n = \{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x,B) < 1/n\}$ と定めることにする．B_n は開集合であるから，(i) の結果により $D_n := D_{X^{-1}(B_n)}$ は弱停止時刻である．(D_n) は増大列

なので[*7]，その極限を $S = \lim_{n\to\infty} D_n \le D_{X^{-1}(B)}$ とおくことにする．このとき $S = D_{X^{-1}(B)}$ であることを示そう．定義より $S \le D_{X^{-1}(B)}$ であるから，逆向きの不等号 $D_{X^{-1}(B)} \le S$ を示そう．$S \le D_{X^{-1}(B)}$ がすでにわかっていることに注意すれば，特に $S(\omega) < \infty$ の場合を考えれば十分である．X の連続性と $S(\omega) < \infty$ より任意の n について $X_{D_n} \in \overline{B_n}$ であり，よって

$$X_S(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_{D_n}(\omega) \in \bigcap_{n\ge 1} \overline{B_n} = B$$

が従う．ただし, 最後の等号は B が閉集合であることによる．したがって inf の定義より $D_{X^{-1}(B)}(\omega) \le S(\omega)$ がわかる．

以上の議論により，$D_{X^{-1}(B)} = S = \lim_{n\to\infty} D_n$ が示された．このとき $D_{X^{-1}(B)} = \bigvee_n D_n$ でもあるから命題 2.4.3 により $D_{X^{-1}(B)}$ は弱停止時刻である．また $X^{-1}(B)$ の ω 断面は $X(\omega, \cdot)^{-1}(B)$ に等しく，B が閉であることと X の連続性よりこれは閉集合である．したがって補題 2.4.12(ii) により $D_{X^{-1}(B)}$ は停止時刻となる．

(iv) $T_\varepsilon = D_{X^{-1}(B)\cap[\![\varepsilon,\infty[\![}$ および $T_{n,\varepsilon} = D_{X^{-1}(B_n)\cap[\![\varepsilon,\infty[\![}$ と定義する．ただし B_n は (iii) と同じものである．このとき (ii) と同じ議論により $T_{n,\varepsilon}$ は弱停止時刻となる．また (iii) と同様の議論を行えば，$T_{n,\varepsilon} \uparrow T_\varepsilon$ が示される．よって命題 2.4.3 から T_ε は弱停止時刻となる．$\varepsilon_n \downarrow 0$ なる点列をとれば，$T_{\varepsilon_n} \downarrow \widetilde{D}_{X^{-1}(B)}$ が成り立つから，命題 2.4.3 により $\widetilde{D}_{X^{-1}(B)}$ は弱停止時刻であることがわかる．

(v) X が $\mathbb{R}$ 値の右連続増加過程なら，$X^{-1}([a,\infty[)$ は補題 2.4.12(i) と (ii) の両方の仮定を満たす．よって $D_{X^{-1}([a,\infty[)}$ は停止時刻となる． □

注意 2.4.14. フィルターつき確率空間が完備であれば，発展的集合 A へのデビューはどれも弱停止時刻となることが知られている．また，さらに $[\![D_A]\!] \subset A$ が成り立つなら，D_A は停止時刻となる．これらの結果について詳細は，He, Wang, and Yan [53, 4.30 Theorem] などを見てもらいたい． ■

停止時刻の列 (T_n) が与えられたとき，それを増加的な停止時刻列に並べ替えたいという状況にたびたび出会う．$\omega \in \Omega$ を固定するごとに $(T_n(\omega))$ が集積点を持たないなら，各数列 $(T_n(\omega))$ を増加的となるように並び替えることは可能である．しかし，停止時刻全体で見ると $T_n \le T_m$ あるいは $T_n \ge T_m$ が成り立っているとは限らないから，(T_n) で n の順序を入れ替えることで (T_n) を増加列に並び替えることはできない．しかし，$\bigcup_n [\![T_n]\!] = \bigcup_n [\![S_n]\!]$ を満たすような停止時刻の増加列 (S_n) は常に構成することができる．

命題 2.4.15.
(T_n) を停止時刻列で，各 $\omega \in \Omega$ について $(T_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ が集積点を持たないようなものとする．このとき，停止時刻の増加列 (S_n) で $\bigcup_n [\![T_n]\!] = \bigcup_n [\![S_n]\!]$ を満たすようなものが存在する．

命題 2.4.15 を停止時刻の増加的再配列 (increasing rearrangement) と呼ぶことにする．

証明. 確率過程 X を

$$X = \sum_{n\ge 0} 1_{[\![T_n,\infty[\![}$$

によって定義する．(T_n) に関する仮定より，このとき X は増加的なパスをもつ実数値の càdlàg パスとなる．

$$S_n = \inf\{t \ge 0 \mid X(t,\omega) \ge n+1\}$$

[*7] inf をとる集合が減少的であることに注意せよ．

と定義すれば，命題 2.4.13(v) より S_n は停止時刻となる．定義より明らかに (S_n) は増加的である．さらに，X の定義より $\{S_n(\omega)\,;\,n\in\mathbb{N}\}$ は $\{T_n(\omega)\,;\,n\in\mathbb{N}\}$ と一致することがわかる． □

まとめ

- 任意の t について $\{T\leq t\}\in\mathscr{F}_t$ を満たす $[0,\infty]$-値確率変数を停止時刻と，任意の t で $\{T<t\}\in\mathscr{F}_t$ を満たす $[0,\infty]$-値確率変数を（弱）停止時刻と呼ぶ．
- 停止時刻が与えられると，それに対応する σ-代数 $\mathscr{F}_T$ と $\mathscr{F}_{T+}$ が定義される．それらはもとのフィルトレーションに似た性質をいろいろもつ．
- 停止時刻のうち特に大切なのはデビュー D_A である．A が十分良い集合ならば，デビューは実際に停止時刻となる．

2.5 可予測性

本節では，より発展的な可測性の概念である可予測性を導入しよう．離散時間モデルの可予測過程とは X_n が $\mathscr{F}_{n-1}$ 可測となるような確率過程であったが，残念ながら連続時間モデルでは「t の一つ前の時刻」なるものは存在しないので，同じ定義はできない．もうすこし凝った導入方法が必要である．

本節でも，$\mathbb{T}$ は $\overline{\mathbb{R}}$ の区間であると仮定する．

定義 2.5.1.
$(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F})$ をフィルター付き可測空間とする．左連続な実数値 $\mathbb{F}$-適合過程全体によって生成される σ-代数を $\mathbb{F}$-可予測 σ-代数 (predictable σ-algebra) といい，$\mathscr{P}(\mathbb{F})$ で表す．$\mathscr{P}(\mathbb{F})$ 可測な確率過程を可予測過程 (predictable process)，$\mathscr{P}(\mathbb{F})$-可測な集合を可予測集合 (predictable set) と呼ぶ．

すでに証明したように左連続適合過程は発展的可測なので，$\mathscr{P}(\mathbb{F})\subset\mathrm{Prog}(\mathbb{F})$ が成り立つ．すなわち可予測過程は発展的可測である．

命題 2.5.2.
$(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F})$ をフィルター付き可測空間とする．

$$\mathscr{C}_1=\{A\times\{0\}\mid A\in\mathscr{F}_0\}\cup\{[\![0,T]\!]\mid T\text{ は停止時刻 }\}$$
$$\mathscr{C}_2=\{A\times\{0\}\mid A\in\mathscr{F}_0\}\cup\{A\times\,]s,t]\mid A\in\mathscr{F}_s,\ 0\leq s<t\}$$

とおけば，$\mathscr{P}(\mathbb{F})=\sigma(\mathscr{C}_1)=\sigma(\mathscr{C}_2)$ が成り立つ．

なお，集合 $A\times\{0\}$ は $[\![0_A]\!]$ とも表現できることに注意しておく．

証明. $1_{A\times\{0\}}$ は左連続，適合過程だから $A\times\{0\}\in\mathscr{P}$ である．T を $\mathbb{F}$-停止時刻とすれば $1_{[\![0,T]\!]}$ も左連続適合過程なので，$[\![0,T]\!]\in\mathscr{P}$ も分かる．これより $\mathscr{C}_1\subset\mathscr{P}$ であり，$\sigma(\mathscr{C}_1)\subset\mathscr{P}$ が成立．

$0\leq s<t$ かつ $A\in\mathscr{F}_s$ とすれば，

$$A\times\,]s,t]=\,]\!]s_A,t_A]\!]=[\![0,t_A]\!]\setminus[\![0,s_A]\!]\in\mathscr{C}_1$$

が成立．したがって $\mathscr{C}_2\subset\mathscr{C}_1$ であり，$\sigma(\mathscr{C}_2)\subset\sigma(\mathscr{C}_1)$ が成り立つ．

X を左連続適合過程とする．X の適合性より

$$X^{(n)} := X_0 1_{[\![0]\!]} + \sum_{k\in\mathbb{N}} X_{\frac{k}{2^n}} 1_{]\!]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]\!]}$$

は $\sigma(\mathscr{C}_2)$-可測である．X の左連続性より $X^{(n)} \to X$ が各点収束の意味で成り立つから，X も $\sigma(\mathscr{C}_2)$-可測である．ゆえに $\mathscr{P} \subset \sigma(\mathscr{C}_2)$ となる．

以上の議論により

$$\mathscr{P} \subset \sigma(\mathscr{C}_2) \subset \sigma(\mathscr{C}_1) \subset \mathscr{P}$$

となり，命題の主張が示された． □

注意 2.5.3. 命題 2.5.2 より $\mathscr{P}$ は任意の Borel 集合 $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ について $\Omega \times B \in \mathscr{P}$ が成り立つことがわかる．すなわち，決定論的な Borel 可測関数は，確率過程としてはどれも可予測である．これは少し奇妙な気がする．パスがどんなに複雑な挙動を見せようともシナリオが一つしかなければ，それは確率論的な意味では全て見えているということになる． ■

X が左連続ならば X_t は $\mathscr{F}_{t-}$-可測となるので，X_t は t の直前で見えていると言える．可予測性は，そういった概念の抽象化である．X が càdlàg 適合過程なら $(X_{t-})_{t\geq 0}$ は左連続適合過程なので，可予測である．(ただし，$X_{0-} = X_0$ と定める．) $\mathscr{F}_t$ の拡張として $\mathscr{F}_T$ が定義されたように，$\mathscr{F}_{t-}$ の拡張として $\mathscr{F}_{T-}$ という σ-代数が定義される．発展的可測過程に対して $X_T 1_{\{T<\infty\}}$ は $\mathscr{F}_T$-可測となったように，可予測過程に対しては $X_T 1_{\{T<\infty\}}$ は $\mathscr{F}_{T-}$-可測となる．

定義 2.5.4.
弱停止時刻 T に対して，σ-代数 $\mathscr{F}_{T-}$ を以下のように定義する．

$$\mathscr{F}_{T-} = \mathscr{F}_0 \vee \sigma(A \cap \{t < T\}\,;\, A \in \mathscr{F}_t,\ t \in \mathbb{R}_+)$$

$\mathscr{F}_{T-}$ は停止時刻 T の直前までに観察できる情報全体を表すと解釈できる．

命題 2.5.5.
$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，T を $\mathbb{F}$-停止時刻とする．このとき $\mathscr{F}_{T-} \subset \mathscr{F}_T \subset \mathscr{F}_{T+}$ で，T は $\mathscr{F}_{T-}$-可測である．さらに S を停止時刻，$A \in \mathscr{F}_S$ とすれば，$A \cap \{S < T\} \in \mathscr{F}_{T-}$ が成り立つ．

証明. $\mathscr{F}_T \subset \mathscr{F}_{T+}$ は既に示したから，$\mathscr{F}_{T-} \subset \mathscr{F}_T$ を示す．$\mathscr{F}_T$ が σ-代数であることに注意すれば，

$$\mathscr{F}_0 \cup \{A \cap \{t < T\} \mid A \in \mathscr{F}_t,\ t \in \mathbb{R}_+\} \subset \mathscr{F}_T$$

を示せばよいことがわかる．$A \in \mathscr{F}_0$ ならば，任意の $t \in \mathbb{R}_+$ に対して $A \in \mathscr{F}_t$ であり，T が停止時刻であることを用いれば $A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t$ となる．よって $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_T$．また，$A \in \mathscr{F}_t$ とすれば，$s > t$ のとき

$$\underbrace{[A \cap \{t < T\}]}_{\in \mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}_s} \cap \underbrace{\{T \leq s\}}_{\in \mathscr{F}_s} \in \mathscr{F}_s$$

であり，$s \leq t$ なら

$$[A \cap \{t < T\}] \cap \{T \leq s\} = A \cap \{t < T \leq s\} = \emptyset \in \mathscr{F}_s$$

となるので $A \cap \{t < T\} \in \mathscr{F}_T$ も分かる．したがって $\mathscr{F}_{T-} \subset \mathscr{F}_T$ が示された．

任意の $t\in[0,+\infty[$ に対して

$$\{T\le t\}=\Omega\setminus\underbrace{\{t<T\}}_{\in\mathscr{F}_{T-}}\in\mathscr{F}_{T-}$$

が成り立つから，T は $\mathscr{F}_{T-}$-可測である．

さらに $A\in\mathscr{F}_S$ なら $\mathscr{F}_{T-}$ の定義より

$$A\cap\{S<T\}=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\underbrace{A\cap\{S<r\}}_{\in\mathscr{F}_r}\cap\{r<T\}\in\mathscr{F}_{T-}$$

もわかる． □

命題 2.5.6.
$(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F})$ をフィルター付き可測空間とし，S,T を $S\le T$ なる停止時刻とする．ξ が $\mathscr{F}_S$-可測ならば，$\xi 1_{\rrbracket S,T\rrbracket}$ は可予測過程である．

証明. $\xi 1_{\rrbracket S,T\rrbracket}$ は左連続であるから，$\mathbb{F}$-適合であることを示せばよい．まずは $\xi=1_A$ の場合を考える．$t\ge 0$ とすれば，S,T が停止時刻であることと $A\in\mathscr{F}_S$ から

$$\begin{aligned}\{1_A 1_{\rrbracket S,T\rrbracket}(t)=1\}&=\{\omega\in\Omega\mid\omega\in A,\ S(\omega)<t\le T(\omega)\}\\&=A\cap\{S<t\}\cap\{t\le T\}\\&\in\mathscr{F}_t\end{aligned}$$

がわかる．よって $1_A 1_{\rrbracket S,T\rrbracket}(t)$ は $\mathscr{F}_t$-可測であり，$1_A 1_{\rrbracket S,T\rrbracket}(t)$ が適合過程であることがわかった．一般の ξ については，単関数近似を用いればよい． □

命題 2.5.7.
$(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F})$ をフィルター付き可測空間，X を実数値可予測過程，T を停止時刻とする．このとき $X_T 1_{\{T<+\infty\}}$ は $\mathscr{F}_{T-}$-可測である．

証明. 単調族定理で示す．$\mathscr{C}_1$ を命題 2.5.2 のものとし，

$$\mathscr{H}=\{X\colon\Omega\times\mathbb{R}_{\ge 0}\to\mathbb{R}\mid \text{任意の停止時刻 } T \text{ について } X_T 1_{\{T<\infty\}} \text{ は } \mathscr{F}_{T-} \text{ 可測となる}\ \}$$

と定義する．$A\in\mathscr{F}_0$ とすれば，

$$\begin{aligned}\left\{1_{A\times\{0\}}(T)1_{\{T<\infty\}}=1\right\}&=\{\omega\in\Omega\mid 1_{A\times\{0\}}(\omega,T(\omega))=1,T(\omega)<\infty\}\\&=A\cap\{T=0\}\\&\in\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}_{T-}\end{aligned}$$

なので，$1_{A\times\{0\}}\in\mathscr{H}$ である．である．また，命題 2.5.5 より任意の停止時刻 S に対して

$$\left\{1_{\llbracket 0,S\rrbracket}(T)1_{\{T<\infty\}}=1\right\}=\{S\le T\}\cap\{T<\infty\}\in\mathscr{F}_{T-}$$

が成り立つから，$1_{\llbracket 0,S\rrbracket}\in\mathscr{H}$ もわかる．したがって $\mathscr{H}$ は $\mathscr{C}_1$ の元の指示関数をすべて含む．また $\mathscr{H}$ は明らかに積について閉じているから，$\mathscr{C}_1$ から生成される π-系の指示関数も $\mathscr{H}$ に属する．$\mathscr{H}$ は明らかに定数

関数を含むベクトル空間で単調収束について閉じているから，単調族定理（定理 A.1.8）により $\mathscr{H}$ は全ての $\sigma(\mathscr{C}_1) = \mathscr{P}$ 実数値可測関数を含む．すなわち，任意の実数値可予測過程 X について $X_T 1_{\{T<\infty\}}$ は $\mathscr{F}_{T-}$-可測となる． □

次に，可予測過程の解析に必要な停止時刻のクラスである可予測時刻を導入しよう．

定義 2.5.8.
T を停止時刻とする．停止時刻の増加列 (T_n) で

(i) $\lim_n T_n = T$ が成り立つ．
(ii) $\{T > 0\}$ 上で $T_n < T$ が成り立つ．

を満たすようなものが存在するとき，T は可予測時刻 (predictable time) であるという．また，このような停止時刻列 (T_n) を可予測時刻 T を予告 (foretell) するという．

(T_n) が可予測時刻 T の予告列で X が càdlàg 過程なら，$\lim_n X_{T_n} 1_{\{T<\infty\}} = X_{T-} 1_{\{T<\infty\}}$ が成り立つ．つまり，可予測時刻はこのような近似を可能にするような停止時刻である．

命題 2.5.9.
T を予告列 (T_n) をもつ可予測時刻とする．このとき $\mathscr{F}_{T-} = \bigvee_n \mathscr{F}_{T_n}$ が成り立つ．

証明． $A \in \mathscr{F}_t$ なら

$$A \cap \{t < T\} = A \cap \bigcup_n \{t < T_n\} = \bigcup_n A \cap \{t < T_n\} \in \bigcup_n \mathscr{F}_{T_n -}$$

となるので，命題 2.5.5 より $A \cap \{t < T\} \in \bigvee \mathscr{F}_{T_n}$ がわかる．$\mathscr{F}_{T-}$ はこのような集合全体と $\mathscr{F}_0$ によって生成されるから，これより $\mathscr{F}_{T-} \subset \bigvee \mathscr{F}_{T_n}$ となる．逆に $A \in \mathscr{F}_{T_n}$ とすれば，

$$A = \big(A \cap \{0 < T\}\big) \cup \big(A \cap \{T = 0\}\big) = \big(A \cap \{T_n < T\}\big) \cup \big(A \cap \{T = 0\}\big)$$

が成り立つ．命題 2.5.5 より最後の辺は $\mathscr{F}_{T-}$ に属することがわかるので，$\mathscr{F}_{T_n} \subset \mathscr{F}_{T-}$ となる．これより包含関係 $\bigvee \mathscr{F}_{T_n} \subset \mathscr{F}_{T-}$ も示された． □

次の定理は可予測断面定理と呼ばれ，確率過程の一般論におけるもっとも深遠な結果の一つである．証明に興味のある読者は Dellacherie and Meyer [24, Chapter IV. 85 Theorem]，He, Wang, and Yan [53, 4.8 Theorem]，Dellacherie [23, Chaptre IV. T10. Théorème] などを参考にして欲しい．

定理 2.5.10 (可予測断面定理).
A を可予測集合とすれば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある可予測時刻 T で次のような条件を満たすものが存在する．

(i) $[\![T]\!] \subset A$.
(ii) $P(\mathrm{pr}_1([\![T]\!]) \geq P(\mathrm{pr}_1(A)) - \varepsilon$.

ただし，$\mathrm{pr}_1 \colon \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \Omega$ は標準的な射影である．

写像 $s\colon A \to \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ で $\mathrm{pr}_1 \circ s = \mathrm{id}_A$ を満たすものを，A の断面あるいは切断 (section) と呼ぶ．可予測断面定理の主張していることは，A が可予測だからといってその可予測切断が存在するとは限らないけれども，切断に「非常に近い」可予測時刻 T を選ぶことができるということである．一見 A が可予測ならばデビュー D_A が可予測な切断になりそうにも思えるが，一般に D_A は可予測時刻になるとは限らないし，また $[\![D_A]\!] \subset A$ が成り立つとも限らない．

可予測断面定理などというたいそう難しい定理が重要なのは，それが以下の系を導くからである．

系 2.5.11.
X と Y をクラス (D) の可予測過程とする．任意の可予測時刻 T について $E[X_T 1_{\{T<\infty\}}] = E[Y_T 1_{\{T<\infty\}}]$ が成り立つならば，X と Y は区別不能である．

証明. $A = \{X > Y\}$ とすればこれは可予測集合であり，仮定より任意の可予測時刻 T に対して

$$P(\mathrm{pr}_1(A \cap [\![T]\!])) = E[1_{\{X_T > Y_T\}} 1_{\{T<\infty\}}] = 0$$

が成り立つ．したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して可予測時刻 T_ε を

$$P(\mathrm{pr}_1(A \cap [\![T_\varepsilon]\!])) = P(T_\varepsilon < \infty) > P(\mathrm{pr}_1(A)) - \varepsilon$$

となるように取れる．仮定より $P(T_\varepsilon < \infty) = 0$ であり，また $\varepsilon > 0$ は任意に選んでいるから $P(\mathrm{pr}_1(X > Y)) = 0$ がわかる．同様にして $P(\mathrm{pr}_1(X < Y)) = 0$ もわかるので，$P(\mathrm{pr}_1(X \neq Y)) = 0$ となる．すなわち X と Y は区別不能である． □

2.6 確率過程の局所化

本節では，確率過程の局所化という概念を導入しよう．

定義 2.6.1.
$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F})$ をフィルターつき可測空間とし，$\mathscr{C}$ を確率過程の集合とする．

(i) 確率過程 X に対して停止時刻列 (T_n) で
　(a) $T_0 \leq T_1 \leq \cdots \to \infty$.
　(b) 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $X^{T_n} \in \mathscr{C}$ が成り立つ.
　を満たすものが存在するとき，$X \in \mathscr{C}_{\mathrm{loc}}$ と書き，X は局所的に $\mathscr{C}$ に属するという．上の条件を満たす停止時刻列を，X の $\mathscr{C}$ に関する局所化列 (localizing sequence) と呼ぶ．また，$\mathscr{C}_{\mathrm{loc}}$ を $\mathscr{C}$ の局所化 (localization) という．

(ii) 任意の $X \in \mathscr{C}$ と任意の停止時刻 T について $X^T \in \mathscr{C}$ が成り立つとき，$\mathscr{C}$ は停止の下で安定 (stable under stopping) であるという．

確率過程の局所化について，次の主張が成り立つ．

命題 2.6.2.
$\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ を確率過程の集合で，停止について安定なものとする．

(i) $\mathscr{C}_{\mathrm{loc}}$ は停止について安定である．

(ii) (T_n) は X の $\mathscr{C}$ に関する局所化列であるとし，(S_n) は停止時刻の増加列で $\sup_n S_n = \infty$ を満たすものとする．このとき，$(T_n \wedge S_n)$ はまた X の $\mathscr{C}$ に関する局所化列である．

(iii) $(\mathscr{C} \cap \mathscr{C}')_{\mathrm{loc}} = \mathscr{C}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{C}'_{\mathrm{loc}}$ が成り立つ．

(iv) $\mathscr{C}$ が線形空間なら，$(\mathscr{C}_{\mathrm{loc}})_{\mathrm{loc}} = \mathscr{C}_{\mathrm{loc}}$ が成り立つ．

証明. (i) $X \in \mathscr{C}_{\mathrm{loc}}$ とし，$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X の局所化列とする．T を任意の停止時刻とすれば，$\mathscr{C}$ は安定だから

$$(X^T)^{T_n} = X^{T\wedge T_n} = (X^{T_n})^T \in \mathscr{C}$$

が成立．したがって (T_n) は X^T の局所化列であり，$X^T \in \mathscr{C}_{\mathrm{loc}}$ が分かる．

(ii) 仮定より $(T_n \wedge S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はまた停止時刻の増加列であって，$\sup_n T_n \wedge S_n = \infty$ を満たしている．$\mathscr{C}$ が停止について安定であるという仮定から $X^{T_n\wedge S_n} = (X^{T_n})^{S_n} \in \mathscr{C}$ となるので，$(T_n \wedge S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が X の $\mathscr{C}$ に関する局所化列であることがわかる．

(iii) $X \in (\mathscr{C} \cap \mathscr{C}')_{\mathrm{loc}}$ とし，(T_n) を X の $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}$ に関する局所化列とする．このとき，(T_n) は X の $\mathscr{C}$ に関する局所化列でもあり，また $\mathscr{C}'$ に関する局所化列でもある．よって $X \in \mathscr{C}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{C}'_{\mathrm{loc}}$ がわかる．すなわち $(\mathscr{C} \cap \mathscr{C}')_{\mathrm{loc}} \subset \mathscr{C}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{C}'_{\mathrm{loc}}$ である．

逆向きの包含関係を示そう．$X \in \mathscr{C}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{C}'_{\mathrm{loc}}$ とし，(T_n) を $\mathscr{C}$ に関する局所化列，(T'_n) を $\mathscr{C}'$ に関する局所化列とする．$S_n = T_n \wedge T'_n$ と定義すれば，このとき (ii) より (S_n) は $\mathscr{C}$ と $\mathscr{C}'$ に共通の局所化列になっている．よって $X \in (\mathscr{C} \cap \mathscr{C}')_{\mathrm{loc}}$ であり，逆向きの包含関係も示された．

(iv) $X \in (\mathscr{C}_{\mathrm{loc}})_{\mathrm{loc}}$ とし，X の $\mathscr{C}_{\mathrm{loc}}$ に関する局所化列 (T_n) を一つ固定する．このとき $X^{T_n} \in \mathscr{C}_{\mathrm{loc}}$ だから，さらに各 n について X^{T_n} の局所化列 $(S_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ が存在する．停止時刻列 $(S_{n,k} \wedge T_n)_{n,k}$ に適当に番号をつけなおして (S_n) と名付けよう．このとき，任意の n について $X^{S_n} \in \mathscr{C}$ が成り立っている．さて，任意の停止時刻 S, T について

$$X^{S\vee T} = X^T + X^S - X^{S\wedge T}$$

が成り立つことに注意しよう．この表現と $\mathscr{C}$ が停止について安定な線形空間であることから，任意の $n \in \mathbb{N}$ について $X^{S_1\vee\cdots\vee S_n} \in \mathscr{C}$ が成り立つことがわかる．$R_n = S_1 \vee \cdots \vee S_n$ とすれば (R_n) は停止時刻の増加列で $\sup_n R_n = \infty$ を満たすので，これは X の $\mathscr{C}$ に関する局所化列である． □

定義 2.6.3.
$\mathscr{C}$ が確率過程の集合で，位相を備えたものとしよう．(X_n) を $\mathscr{C}_{\mathrm{loc}}$ の点列とし，$X \in \mathscr{C}_{\mathrm{loc}}$ とする．X と (X_n) の全ての共通な局所化列 (T_k) で，任意の $k \in \mathbb{N}$ について $X_n^{T_k} \to X^{T_k}$ in $\mathscr{C}$ を満たすようなものが存在するとき，(X_n) は X に $\mathscr{C}$ において局所的に収束する (converges locally in $\mathscr{C}$) という．

2.7 確率過程の収束と可積分性

本節では，càdlàg 適合過程の可積分性と収束について考えよう．$\mathscr{D}^0$ で càdlàg な 適合過程全体の空間を，$\mathscr{D}^{0,\mathrm{c}}$ で連続適合過程全体がなす $\mathscr{D}^0$ の部分空間を表すことにする[*8]．また，$\mathscr{D}^0$ あるいは $\mathscr{D}^{0,\mathrm{c}}$ の元で $X_0 = 0$ を満たすようなもの全体の集合を，それぞれ $\mathscr{D}^0_0$ と $\mathscr{D}^{0,\mathrm{c}}_0$ で表す．

[*8] $\mathscr{C}^0$ と書くと連続関数空間と多少紛らわしいのでこう書くことにした．一般的な記法ではない．

$\mathscr{D}^0$ に位相を入れることを考えよう．càdlàg 適合過程 X に対して，

$$X_t^* = \sup_{s\in[0,t]} |X_s|, \qquad X_\infty^* = \sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} |X_t| = \lim_{t\to\infty} X_t^*$$

と定義することにする． X は càdlàg 適合過程であるから，このとき X^* は $[0,\infty]$-値の càdlàg 適合過程となる．なお，可測性は右連続性から

$$X_t^* = \sup_{s\in[0,t]} |X_s| = \sup_{s\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} |X_s|$$

という表現が成り立つことに注意すれば分かる．

命題 2.7.1.
フィルターつき確率空間は完備であると仮定する．$X, Y \in \mathscr{D}^0$ に対して，

$$d_{\mathrm{up}}(X,Y) = E[1\wedge (X-Y)_\infty^*]$$
$$d_{\mathrm{ucp}}(X,Y) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} E[1\wedge (X-Y)_n^*]$$

と定義する．このとき，d_{up} と d_{ucp} はともに $\mathscr{D}^0$ 上の完備擬距離となる．$\mathscr{D}^{0,c}$ はどちらの距離についても $\mathscr{D}^0$ の完備な部分空間となる．「X と Y が区別不能である」という同値関係についての商空間を $\mathscr{D}^0/P$ で表せば，d_{up} と d_{ucp} から $\mathscr{D}^0/P$ 上に誘導される擬距離はともに距離となる．

注意 2.7.2. 本節では適合過程の空間を考えているので完備性の仮定を要するが，単に càdlàg 可測過程の空間を考えるのあればフィルトレーションの完備性は必要ない． ■

証明. 証明は命題 B.1.1 と類似の議論で行われる．（いま X を D 空間への可測関数と思えるかはわからないので，命題 B.1.1 を直接適用することはできない．連続過程のみを考えるのであれば，完備性の証明は命題 B.1.1 に帰着できる．）

$E[1\wedge(X-Y)_n^*]$ が $\mathscr{D}^0$ 上の有界擬距離を定めることは容易にわかる．完備性を示そう．命題 B.1.1 よりわかる．$n\to\infty$ とすれば有界収束定理よりこれは $d_{\mathrm{up}}(X,Y)$ に収束するから，d_{up} が擬距離になることもわかる．

(X^n) を d_{ucp}-Cauchy 列とし，

$$\sum_{k\geq 0} d_{\mathrm{ucp}}(X^{n_k}, X^{n_{k+1}}) < \infty$$

となるようなその部分列を選ぶ．このとき Borel-Cantelli の補題より，ほとんど全てのパスは $D(\mathbb{R}_{\geq 0},\mathbb{R})$ のコンパクト一様収束の距離について Cauchy 列となることがわかり，極限の過程 X^∞ を構成することができる．(X_{n_k}) の パスは a.s. でコンパクト一様収束しているから，フィルトレーションの完備性よりその極限 X^∞ はまた càdlàg 適合過程となるように選ぶことができる．これは元の Cauhcy 列 (X^n) の d_{ucp}-極限にもなっている．d_{up} の場合は「コンパクト一様収束」の部分を一様収束で置き換えればよい．

$\mathscr{D}^{0,c}$ の完備性は，$C(\mathbb{R}_{\geq 0},\mathbb{R})$ が $D(\mathbb{R}_{\geq 0},\mathbb{R})$ のコンパクト一様収束及び一様収束の距離について閉部分空間となっていることからわかる．

最後の主張は，$d_{\mathrm{ucp}}(X,Y)=0$ が X と Y が区別不能であることと同値であることからわかる． □

定義 2.7.3.
命題 2.7.2 における擬距離 d_{ucp} と d_{up} から定まる $\mathscr{D}^0$ の位相を，それぞれコンパクト一様確率収束の位相 (topology of uniform convergence on compacta in probability)，一様確率収束の位相 (topology of uniform convergence in probability) という．また，それぞれ頭文字をとって up-位相 (up-topology), ucp-位相 (ucp-topology) と呼ぶことにする．

特に ucp-位相は確率過程の収束としてよく出てくる重要なものである．セミマルチンゲールによる確率積分の収束などは ucp-位相の意味で解釈することも多い．定義より明らかに $d_{\mathrm{ucp}} \leq d_{\mathrm{up}}$ となるから，up-位相は ucp 位相よりも細かい．

次に，up-位相よりももっと細かい位相を導入しよう．といっても，これから考える位相は $\mathscr{D}^0$ 全体ではなくてその部分空間上に入るものである．$X \in \mathscr{D}^0$ と $p \in [1,\infty]$ に対して，

$$\|X\|_{\mathscr{D}^p} = \|X^*_\infty\|_{L^p} = \left(E\left[\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} |X_t|^p\right]\right)^{1/p}$$

と定め，$\|X\|_{\mathscr{D}^p} < \infty$ を満たす過程からなる $\mathscr{D}^0$ の部分空間を $\mathscr{D}^p$ で表すことにする．また $\mathscr{D}^{p,\mathrm{c}} = \mathscr{D}^p \cap \mathscr{D}^{\mathrm{c}}$ と定義する． 確率空間においては L^p 空間の間に包含関係があったから，$\mathscr{D}^p$ 空間においても $p \leq p'$ ならば $\mathscr{D}^{p'} \subset \mathscr{D}^p$ という包含関係が成り立っている．

命題 2.7.4.
$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ は完備であると仮定する．任意の $1 \leq p \leq \infty$ について，$\mathscr{D}^p$ と $\mathscr{D}^{p,\mathrm{c}}$ はセミノルム $\| \ \|_{\mathscr{D}^p}$ に関して完備である．特にその商空間 $\mathscr{D}^p/P$ は Banach 空間となる．

証明. $\| \ \|_{\mathscr{D}^p}$ がセミノルムになることは L^p ノルムの性質と $\| \ \|_{\mathscr{D}^p}$ の定義からすぐにわかる．よって完備性のみ示すことにする．(X^n) を $\mathscr{D}^p$-Cauchy 列とし，

$$\sum_{k\geq 0} \|X^{n_k} - X^{n_{k+1}}\|_{\mathscr{D}^p}$$

を満たすようなその部分列を選ぶ．このとき，いつものように Borel-Cantelli の補題から X のほとんど全てのパスは $\mathbb{R}_{\geq 0}$ の sup ノルムについて一様収束することがわかる．完備性より，その極限 X^∞ がまた càdlàg 適合過程となるように選ぶことができる．これが $\| \ \|_{\mathscr{D}^p}$ についても (X^{n_k}) の極限となっていることを示そう．$\varepsilon > 0$ に対して，$k_0 \in \mathbb{N}$ を $k, l \geq k_0$ ならば

$$\|X^{n_k} - X^{n_l}\|_{\mathscr{D}^p} < \varepsilon$$

となるように選ぶ．$1 \leq p < \infty$ のときは，Fatou の補題を用いることで任意の $k \geq k_0$ について

$$\|X^{n_k} - X^\infty\|_{\mathscr{D}^p} \leq \liminf_{l\to\infty} \int_\Omega \{(X^{n_k} - X^{n_l})^*_\infty\}^p \leq \varepsilon^p$$

となることがわかる．したがって (X^{n_k}) は $\| \ \|_{\mathscr{D}^p}$ について X^∞ に収束する．$p = \infty$ の場合は，$n, k \geq k_0$ ならほとんど全ての ω について

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} |X^{n_k}_t(\omega) - X^{n_l}_t(\omega)| \leq \|X^{n_k} - X^{n_l}\|_{\mathscr{D}^p} < \varepsilon$$

が成り立つ．ほとんど全てのパスは X^∞ のパスに一様収束しているから，そのようなパスについて極限をとることで

$$\forall k \geq k_0 \text{ for a.e. } \omega \in \Omega \quad \sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} |X^{n_k}_t(\omega) - X^\infty_t(\omega)| \leq \|X^{n_k} - X^{n_l}\|_{\mathscr{D}^p} \leq \varepsilon$$

が成り立つことがわかる．これより，

$$\forall k \geq k_0 \quad \|X^{n_k} - X^\infty\|_{\mathscr{D}^p} = \|(X^{n_k} - X^\infty)^*_\infty\|_{L^\infty} \leq \|X^{n_k} - X^{n_l}\|_{\mathscr{D}^p} \leq \varepsilon$$

を得る．ゆえに (X^{n_k}) は $\| \ \|_{\mathscr{D}^\infty}$ で X^∞ に収束する． □

前節で導入した局所化の概念を $\mathscr{D}^p$ について考えてみよう．

命題 2.7.5.

(i) $\mathscr{D}^0_{\mathrm{loc}} = \mathscr{D}^0$ が成り立つ．

(ii) $\mathscr{D}^{0,\mathrm{c}}_0 \subset \bigcap_{1\leq p\leq\infty} \mathscr{D}^p_{\mathrm{loc}}$ が成り立つ．

証明. (i) は明らかである．

(ii) $X \in \mathscr{D}^{0,\mathrm{c}}_0$ に対して，

$$T_n(\omega) = \inf\{t \geq 0 \mid |X_t(\omega)| \geq n\}$$

と定義すれば，命題 2.4.13 より T_n は停止時刻となる．定義より明らかに (T_n) は増大列であり，また X のパスはどれも局所有界であるから $T_n \to \infty$ が成り立つ．さらにパスの連続性と $X_0 = 0$ より $X^*_{T_n} \leq n$ が成り立つので，$X^{T_n} \in \mathscr{D}^\infty$ となる．ゆえに $\mathscr{D}^{0,\mathrm{c}}_0 \subset \mathscr{D}^\infty$ という包含関係がわかる．$p \in [1,\infty]$ なら $\mathscr{D}^\infty \subset \mathscr{D}^p$ であることに注意すれば，求めていた包含関係を得る． □

$\mathscr{D}^p$ 収束の局所化については，以下の主張が成り立つ．

命題 2.7.6.

(i) (X_n) が X に ucp 収束することは，(X_n) が定義 2.6.3 の意味で X に局所的に up 収束することと同値である．

(ii) (X_n) が X に ucp 収束することは，局所的に ucp 収束することと同値である．

(iii) (X_n) が X に局所 $\mathscr{D}^p$-収束すれば，ucp 収束する．

(iv) 局所化列 (T_m) で，任意の m について $(X^{T_m}_n 1_{\{T_m>0\}})_n$ が $X^{T_m} 1_{\{T_m>0\}}$ に ucp 収束するようなものが存在するとする．このとき (X_n) は X に ucp 収束する．

証明. (i) (X_n) が X に ucp 収束すれば，停止時刻列 $T_k \equiv k$ について，(X_n) は X に局所的に up 収束している．逆は (ii) よりしたがう．

(ii) (X_n) が X に ucp 収束すれば，停止時刻列 $T_k \equiv k$ について，(X_n) は X に局所的に ucp 収束している．逆に (X_n) はとある局所化列 (T_k) に関して X に局所的に ucp 収束しているとする．このとき任意の $\varepsilon > 0$ と

$t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，そして $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}
&P\left(\sup_{s\in[0,t]} |X_n(s) - X(s)| > \varepsilon\right) \\
&= P\left(\sup_{s\in[0,t]} |X_n(s) - X(s)| > \varepsilon,\ T_k \geq t\right) + P\left(\sup_{s\in[0,t]} |X_n(s) - X(s)| > \varepsilon,\ T_k < t\right) \\
&= P\left(\sup_{s\in[0,t]} |X_n^{T_k}(s) - X^{T_k}(s)| > \varepsilon,\ T_k \geq t\right) + P\left(\sup_{s\in[0,t]} |X_n(s) - X(s)| > \varepsilon,\ T_k < t\right) \\
&\leq P\left(\sup_{s\in[0,t]} |X_n^{T_k}(s) - X^{T_k}(s)| > \varepsilon\right) + P(T_k < t)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで $n \to \infty$ とすれば，仮定より

$$
\limsup_{n\to\infty} P\left(\sup_{s\in[0,t]} |X_n(s) - X(s)| > \varepsilon\right) \leq P(T_k < t)
$$

となる．いま (T_k) は $T_k \to \infty$ を満たしているから，ここでさらに $k \to \infty$ とすれば

$$
\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{s\in[0,t]} |X_n(s) - X(s)| > \varepsilon\right) = 0
$$

がわかる．いま t は任意に選んでいるから，これより (X_n) は X に ucp 収束する．

(iii) L^p 収束は確率収束を導くことに注意すれば，(i) からわかる．

(iv) まずは $1_{\{T_m>0\}}$ は $\mathscr{F}_0$ 可測なので，$X_n^{T_m}1_{\{T_m>0\}}, X^{T_m}1_{\{T_m>0\}} \in \mathscr{D}^0$ であることに注意する．

$$
\begin{aligned}
&P\left(\sup_{s\leq t} |X_n(s) - X(s)| > \varepsilon\right) \\
&\leq P\left(\sup_{s\leq t} |X_n(s) - X(s)| > \varepsilon,\ T_m > t\right) + P\left(\sup_{s\leq t} |X_n(s) - X(s)| > \varepsilon,\ T_m \leq t\right) \\
&= P\left(\sup_{s\leq t} \left|X_n^{T_m}(s)1_{\{T_m>0\}} - X^{T_m}(s)1_{\{T_m>0\}}\right| > \varepsilon,\ T_m > t\right) + P\left(T_m \leq t\right) \\
&\leq P\left(\sup_{s\leq t} \left|X_n^{T_m}(s)1_{\{T_m>0\}} - X^{T_m}(s)1_{\{T_m>0\}}\right| > \varepsilon\right) + P\left(T_m \leq t\right)
\end{aligned}
$$

という評価に注意すれば，(ii) と同様にしてわかる． □

$\mathbb{F}$-停止時刻全体の集合を $\mathscr{T}(\mathbb{F})$ や $\mathscr{T}$ で，また停止時刻 T で $T \leq a$ を満たすようなもの全体の集合を $\mathscr{T}_{\leq a}$ で表すことにする．

定義 2.7.7.
$(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を発展的可測過程とする．確率変数族 $(X_T 1_{\{T<\infty\}})_{T\in\mathscr{T}}$ が一様可積分となるとき，(X_t) はクラス (D) に属するという．また，任意の $a > 0$ に対して $(X_T)_{T\in\mathscr{T}_{\leq a}}$ が一様可積分な族となるとき，X はクラス (DL) に属するという．

任意の停止時刻について

$$|X_T|1_{\{T<\infty\}} \le \sup_{t\in\mathbb{R}_{\ge 0}} |X_t| = X^*_\infty$$

が成り立つから，$X \in \mathscr{D}^1$ なら X はクラス (DL) に属する．同様に，任意の $t \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ について $X^*_t \in L^1$ が成り立つなら，X はクラス (DL) に属することがわかる．したがって，càdlàg 過程については

$$X \in \mathscr{D}^1 \implies \text{クラス (D)} \implies (X_t)_{t\in\mathbb{R}_{\ge 0}} \text{ が一様可積分}$$

という関係性が成り立つことがわかる．

2.8 時間変更の一般論

2.9 ノート

本節の内容は，「確率過程の一般論」(general theory of stochastic processes) と呼ばれる広大な理論のごく一部である．本ノートのレベルではそれらの全貌を紹介することはできないし，また連続セミマルチンゲールによる確率積分のみを考える場合は，必要なものでもない．確率過程の一般論に興味のある読者は，Dellacherie and Meyer [24]，He, Wang, and Yan [53]，Jacod and Shiryaev [62]，Cohen and Elliott [19] などを参考にして欲しい．概要を知るためには Nikeghbali のサーヴェイ論文 [86] も適している．他に Bass [6]，Chung and Williams [18]，Kallenberg [66] も参考になる．

連続マルチンゲール理論への応用と考える範囲であれば，Revuz and Yor [94] や Karatzas and Shreve [68] に書いているレベルの内容で十分である．

■§2.3　文献によってはフィルトレーションに常に usual condition を仮定する場合もあるが，それだと反って usual condition の重要性が不明瞭になりやすい．本ノートでは usual condition を必要とする場合は基本的にはそのたびに断って使うことにした．Usual condition の代わりに「$(\Omega, \mathscr{F}_t, P|_{\mathscr{F}_t})$ がどれも完備である」という条件を考える流儀もある．この意味でのフィルトレーションの完備化かつ右連続化を Bichteler [9] は自然な拡大 (natural enlargement) と呼び，自然に拡大されたフィルトレーションは自然条件 (natural condition) を満たすといっている．

■§2.4　停止時刻は optional time と呼ばれることもある．弱停止時刻という用語は Medvegyev [78] にしたがった．Dellacherie and Meyer [24] や He, Wang, and Yan [53] では広義停止時刻 (wide sense stopping time) と呼んでいる．Karatzas and Shreve では弱停止時刻を optional time と名づけ停止時刻と呼び分けているが，恐らくこれはあまり一般的な用語法ではない．停止時刻と関連した確率過程の可測性の概念としては良可測性 (optional, well-measurable) と呼ばれる概念も重要である．しかし，連続過程のみを扱うなら必須とも言えないので，本ノートでは紹介しなかった．

■§2.5　可予測時刻の定義は「$[\![T,\infty[\![\in \mathscr{P}(\mathbb{F})$ を満たす停止時刻」とする流儀もある．完備性の下ではこれは本ノートでの定義と同値になる．(He, Wang, and Yan [53, 4.34. Theorem])

■§2.6　局所化の定義は，$M^{T_n} \in \mathscr{C}$ ではなくて $M^{T_n}1_{\{T_n>0\}} \in \mathscr{C}$ や $M^{T_n} - M_0 \in \mathscr{C}$ を要求する流儀もあるので，他の文献を読む際には多少の注意が必要である．しかし，どの定義を採用しようともそれによって展開される局所マルチンゲール理論の自由度が制限されることにはならない．命題 2.6.2 (iii) は He, Wang, and Yan [53, 7.3 Theorem] からとった．

第 3 章

連続時間マルチンゲールの基礎理論

本節では，連続時間マルチンゲールの基礎理論を解説する．具体的言うと，離散時間マルチンゲールで扱った Doob の不等式，マルチンゲール収束定理，任意抽出定理を連続時間の設定へと拡張することが目標である．さらに，連続時間の劣マルチンゲールがいつ càdlàg なパスを持つのかという問題も調べる．

3.1 定義と基本的な不等式

この節では特に断りのないかぎりフィルターつき確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を固定して考えることにする．

定義 3.1.1.
実数値の $\mathbb{F}$ ‐適合過程 $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ が以下の条件を満たすとき，X を $\mathbb{F}$- 劣マルチンゲール (submartingale) という．

(i) 任意の $t \in \mathbb{T}$ に対して $E[|X_t|] < \infty$ が成り立つ，
(ii) $s \leq t$ なる任意の $s, t \in \mathbb{T}$ に対して $E[X_t|\mathscr{F}_s] \geq X_s$ P-a.s. が成り立つ．

$-X$ が劣マルチンゲールになるとき，X を優マルチンゲール (supermartingale) という．劣マルチンゲールかつ優マルチンゲールのとき，X をマルチンゲール (martingale) とよぶ．$\mathbb{R}^d$-値の確率過程 $X = (X^1, \dots, X^d)$ は，各成分 X^i がマルチンゲールであるときに，それぞれマルチンゲールであるという．X が複素数値過程の時は，実部と虚部がともにマルチンゲールであるときに，X はマルチンゲールであるという．

$\mathbb{R}^d$-値や複素数値のマルチンゲールを定義はしてみたが，これらが本格的に出てくるのはもっと後になる．ここからしばらくは，もっぱら実数値の（劣）マルチンゲールについて調べていくことにする．

まずは，マルチンゲールや劣マルチンゲールがいくつか与えられたとき，それに関する演算でまたマルチンゲールや劣マルチンゲールが得られることを確認しよう．なお，次の結果は直ちに $\mathbb{R}^d$-値や複素数値の（劣）マルチンゲールにも拡張可能である．

命題 3.1.2.
X と Y を $\mathbb{F}$-適合過程とする．

(i) X が劣マルチンゲールで $Z \in \mathscr{L}^\infty(\mathscr{F}_{\bigwedge\mathbb{T}}, P)$ かつ Z が非負ならば，$ZX = (ZX_t)_{t\in\mathbb{T}}$ も劣マルチ

ンゲールである．

(ii) X, Y が劣マルチンゲールならば $X+Y=(X_t+Y_t)$ も劣マルチンゲールである．

(iii) X がマルチンゲールで $Z \in \mathscr{L}^\infty(\mathscr{F}_{\bigwedge \mathbb{T}}, P)$ ならば，ZX もマルチンゲールである．

(iv) X, Y がマルチンゲールならば $X+Y$ もマルチンゲールである．

(v) $\mathbb{F}$ - マルチンゲール全体のなす空間は線形空間である．

証明. (i) $Z \in \mathscr{L}^\infty(P)$ との仮定より，ZX_t はどれも可積分となる．$0 \leq s \leq t$ とすれば，Z の非負性[*1]と可測性より

$$E[ZX_t|\mathscr{F}_s] = ZE[X_t|\mathscr{F}_s] \geq ZX_s$$

が成り立つ．よって ZX は劣マルチンゲールである．

(ii) 各 t について $X_t + Y_t$ が $\mathscr{F}_t$-可測かつ可積分になることは，測度論の一般論よりわかる．$0 \leq s \leq t$ とすれば条件付き期待値の線形性より

$$E[X_t + Y_t|\mathscr{F}_s] = E[X_t|\mathscr{F}_s] + E[Y_t|\mathscr{F}_s] \geq X_s + Y_s$$

が成り立つ．

(iii). (i) と同じだが，等号なので非負性は不要である．

(iv). (ii) と同様.

(v). (iii) と (iv) よりすぐにわかる． □

命題 3.1.2 より，マルチンゲール全体の空間は $\mathscr{L}^\infty(\mathscr{F}_{\bigwedge \mathbb{T}}, P)$- 加群になっていることがわかる．

次は，Doob の不等式の連続時間への拡張を行う．

定理 3.1.3.

$X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ を右連続なパスをもつ劣マルチンゲールとし，$s < t$ なる $s, t \in \mathbb{R}_+$ と $\lambda > 0$ を考える．

(i) 以下の劣マルチンゲール不等式が成立する．

$$\lambda P\left[\sup_{s \leq u \leq t} X_u \geq \lambda\right] \leq E\left[X_t 1_{\{\sup_{s \leq u \leq t} X_u \geq \lambda\}}\right] \leq E[X_t^+] \tag{3.1.1}$$

$$\lambda P\left[\inf_{s \leq u \leq t} X_u \leq -\lambda\right] \leq E[X_t - X_s] - \left[X_t 1_{\{\inf_{s \leq u \leq t} X_u \leq -\lambda\}}\right] \leq E[X_t^+] - E[X_s] \tag{3.1.2}$$

(ii) $p \geq 1$ とする．X が非負またはマルチンゲールであり，さらに全ての $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ について $X_t \in L^p$ が成り立っているとする．このとき，次の不等式が成り立つ．

$$\lambda^p P\left[\sup_{s \leq u \leq t} |X_u| \geq \lambda\right] \leq E\left[|X_t|^p\right] \tag{3.1.3}$$

(iii) $p > 1$ とする．X が非負かまたはマルチンゲールであるとき，以下の不等式が成立．

$$E\left[\sup_{s \leq u \leq t} |X_u|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\left[|X_t|^p\right] \tag{3.1.4}$$

[*1] 不等号を保つために非負性を用いる．

$$E\left[\sup_{s\le u\le t}|X_u|\right] \le \left(\frac{e}{e-1}\right)^p E\left[|X_t|\log^+|X_t|\right] \tag{3.1.5}$$

定理の証明を見れば明らかだが，sup や inf をとる集合が可算集合ならばこれらの不等式は常に成立する．ここでの右連続性は次の事実を保証するために必要である：

- $\left\{\sup_{s\le u\le t} X_u \ge \lambda\right\}$ などの集合が $\mathscr{F}$ - 可測になること．
- 稠密な稠密な可算部分集合上での結果を $[s,t]$ という非可算集合の場合にも拡張できること．

証明．(3.1.1) **の証明．**$F \subset [s,t]$ が有限集合のときは，離散時間の結果より $\mu > 0$ に対して以下の不等式が成立[*2]．

$$\mu P\left[\sup_{u\in F} X_u > \mu\right] \le E\left[X_t;\ \sup_{u\in F} X_u > \mu\right] \tag{3.1.6}$$

ここで $F_n \uparrow ([s,t]\cap\mathbb{Q})\cup\{s,t\}(=: D)$ なる有限集合の列を考える．

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P\left[\sup_{u\in F_n} X_u > \mu\right] &= P\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\sup_{u\in F_n} X_u > \mu\right\}\right] = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{u\in F_n}\{X_u > \mu\}\right)\\ &= P\left(\bigcup_{u\in D}\{X_u > \mu\}\right) = P\left[\sup_{u\in D} X_u > \mu\right]\end{aligned}$$

に注意して[*3](3.1.6) で極限をとれば，

$$\mu P\left[\sup_{u\in D} X_u > \mu\right] \le E\left[X_t;\ \sup_{u\in D} X_u > \mu\right] \tag{3.1.7}$$

が成立する．（右辺は優収束定理を用いた．）ところで X が右連続であったことを思い出せば[*4]，(3.1.7) より以下の不等式が分かる．

$$\mu P\left[\sup_{u\in[s,t]} X_u > \mu\right] \le E\left[X_t;\ \sup_{u\in[s,t]} X_u > \mu\right]$$

$\mu \uparrow \lambda$ とすれば，求める不等式

$$\lambda P\left[\sup_{u\in[s,t]} X_u \ge \lambda\right] \le E\left[X_t;\ \sup_{u\in[s,t]} X_u \ge \lambda\right]$$

を得る．

(3.1.2) **の証明．**(3.1.1) と同様である．

(3.1.3) **の証明．**$|X|^p$ が右連続な劣マルチンゲールになっていることに注意すれば (3.1.1) より分かる．

(3.1.4) **と** (3.1.5) **の証明．**(3.1.1) の証明と同様に有限集合の増加列 $F_n \uparrow D$ を特に各 F_n が最終時刻 t を含むようにとって，離散時間の結果において極限をとればよい． □

Doob の不等式のモーメント型の評価で極限操作をすれば，次の系を得る．

[*2] 不等号 $\ge$ が $>$ に代わっていることに注意．α に対して離散時間の結果を用いてから $\alpha \downarrow \mu$ などとすればよい．

[*3] $\{\sup_u X_u > \mu\} = \bigcup_u \{X_u > \mu\}$ という変形を正当化するために (3.1.6) で不等号 $\ge$ を $>$ に書き換える必要があったのである．

[*4] 右連続関数が稠密部分集合上で一意に決まってしまうことを用いている．D には端点 t をちゃんと含んでいるので，$\sup_{u\in D} X_u = \sup_{u\in[s,t]} X_u$ となる．

系 3.1.4.
X が右連続な非負劣マルチンゲールであるからまたはマルチンゲールであるとき，以下の不等式が成り立つ.

$$E\left[\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}|X_t|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} E\left[|X_t|^p\right] \tag{3.1.8}$$

$$E\left[\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}|X_t|\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} E\left[|X_t|\log^+|X_t|\right] \tag{3.1.9}$$

次に，上向き横断数に関する結果を連続時間の場合に拡張しよう．実数 a, b は $a < b$ を満たすものとする．有限集合 $F = \{t_0, \dots, t_n\} \subset [0,\infty[$ に対して，上向き横断数 $U_F(a,b,X(\omega))$ を $k = t_k$ と思って離散時間の場合と同様に定義する．さらに，一般の部分集合 $S \subset [0,\infty[$ に対して

$$U_S(a,b,X)(\omega) := \sup\{U_F(a,b,X)(\omega); F \subset S \text{ は有限集合.}\}$$

とおいて，$S \subset [0,\infty[$ における上向き横断数 (upcrossing number) $U_S(a,b,X)(\omega)$ を定義する.

一般の $S \subset [0,\infty[$ において，その有限部分集合 F の選び方は可算種類に留まらないから，先の定義から関数 $U_S(a,b,X)(\omega)$ の可測性は明らかではない．S が可算集合なら，$\omega \mapsto U_S(a,b,X)(\omega)$ は $\mathscr{F}$-可測となる.

定理 3.1.5 (上向き横断不等式).

(i) $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ は劣マルチンゲールで，$S \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ は可算な有界集合であるとする．このとき以下の不等式が成り立つ.

$$E\left[U_S(a,b,X)\right] \leq \frac{E\left[X^+_{\sup S}\right] + |a|}{b-a}$$

(ii) $X = (X_t)_{t\in[0,\infty[}$ は右連続な劣マルチンゲールであるとする．このとき，$s < t$ を満たす任意の $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ について

$$E\left[U_{[s,t]}(a,b,X)\right] \leq \frac{E\left[X^+_t\right] + |a|}{b-a}$$

が成り立つ.

証明. (i) の証明. $S \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ を可算な有界集合とする．まずは $\sup S \in S$ が成り立っていると仮定しよう．S の有限部分集合列 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を，$F_n \uparrow S$ かつ $\sup S \in F_n$ を満たすように選ぶ．このとき，定理 1.5.2 より

$$E\left[U_{F_n}(a,b,X)\right] \leq \frac{E\left[X^+_{\sup S}\right] + |a|}{b-a}$$

が各 F_n に対してなりたつ．$U_{F_n}(a,b,X(\omega))$ は n について増加的だから，単調収束定理より

$$\lim_{n\to\infty} E\left[U_{F_n}(a,b,X)\right] = E\left[\lim_{n\to\infty} U_{F_n}(a,b,X)\right] \leq \frac{E\left[X^+_t\right] + |a|}{b-a}$$

となる.

後は,

$$\lim_{n\to\infty} U_{F_n}(a,b,X(\omega)) = U_S(a,b,X(\omega))$$

であることを示せばよい．U_S の定義より明らかに

$$\lim_{n\to\infty} U_{F_n}(a,b,X(\omega)) \le U_S(a,b,X(\omega))$$

である．$F \subset S$ を任意の有限部分集合としよう．このとき $F \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ であるから，十分大きな n について $F \subset F_n$ が成り立つ[*5]．そのような n については

$$U_{F_n}(a,b,X(\omega)) \ge U_F(a,b,X(\omega))$$

が成り立っているから，

$$\lim_{n\to\infty} U_{F_n}(a,b,X(\omega)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} U_{F_n}(a,b,X(\omega)) \ge U_F(a,b,X(\omega))$$

となる．いま F の選びからは任意であったから，これより

$$\lim_{n\to\infty} U_{F_n}(a,b,X(\omega)) \ge U_S(a,b,X(\omega)) = \sup\{U_F(a,b,X)(\omega); F \subset S \text{ は有限集合.}\}$$

を得る．

$\sup S \in S$ でないときは，$S' = S \cup \{\sup S\}$ とおくことで，これまでの議論により

$$E\left[U_{S'}(a,b,X)\right] \le \frac{E\left[X^+_{\sup S'}\right] + |a|}{b-a} = \frac{E\left[X^+_{\sup S}\right] + |a|}{b-a}$$

となることがわかる．$S \subset S'$ より $U_S(a,b,X) \le U_{S'}(a,b,X)$ であることに注意すれば，

$$E\left[U_S(a,b,X)\right] \le \frac{E\left[X^+_{\sup S}\right] + |a|}{b-a}$$

を得る．

(ii) の証明． $D = ([s,t] \cap \mathbb{Q}) \cup \{s,t\}$ と定義すれば，(i) より

$$E\left[U_D(a,b,X)\right] \le \frac{E\left[X^+_t\right] + |a|}{b-a}$$

が成り立つ．X の右連続性より $U_D(a,b,X(\omega)) = U_{[s,t]}(a,b,X(\omega))$ であるから[*6]，求める不等式

$$E\left[U_{[s,t]}(a,b,X)\right] \le \frac{E\left[X^+_t\right] + |a|}{b-a}$$

を得る． □

3.2 パスの正則化定理

3.1 節で述べた結果は右連続な劣マルチンゲールについて成立するが，それでは劣マルチンゲールのパスが右連続となるのはどのような場合だろうか．本節ではこの問題について議論しよう．

[*5] (F_n) は増大列であるとしていたのであった．

[*6] 右連続性より $X_u(\omega) < a$ なる $u \in [s,t]$ の十分近くに有理数 u' で $X_{u'}(\omega) < a$ なるものがとれることに注意．upcrossing number の定義の際に $X_u(\omega) < a$ のように狭義の不等号で意義したことがここで効いている．不等号 $\le, \ge$ で定義した場合は，a, b に無理点のみでヒットしてそのまま超えずに戻ってきた場合はカウントできない．

補題 3.2.1.
$X=(X_t)$ を（右連続とは限らない）$(\mathscr{F}_t)$ - 劣マルチンゲールとする．このとき，確率１の集合 $\Omega^* \in \mathscr{F}$ で以下を満たすようなものが存在する．

(i) $\omega \in \Omega^*$ とすれば，任意の $t \in [0,\infty[$ 対して極限

$$X_{t+}(\omega) := \lim_{\substack{s \downarrow\downarrow t \\ s \in \mathbb{Q}}} X_s(\omega)$$

が存在する．

(ii) $\omega \in \Omega^*$ とすれば，任意の $t \in]0,\infty[$ 対して極限

$$X_{t-}(\omega) := \lim_{\substack{s \uparrow\uparrow t \\ s \in \mathbb{Q}}} X_s(\omega)$$

が存在する．

証明. $D_n = [0,n] \cap \mathbb{Q}$ とし，

$$A^n_{a,b} := \{\omega \in \Omega \mid U_{D_n}(a,b,X(\omega)) = \infty\}$$

とおく．定理 3.1.5 の証明により

$$E\left[U_{D_n}(a,b,X)\right] \leq \frac{E\left[X_n^+\right]+|a|}{b-a} < \infty$$

がなりたつから，$U_{D_n}(a,b,X(\omega)) < \infty$ P-a.s. である．よって $P(A^n_{a,b}) = 0$．零集合の可算和は零集合だから，

$$P\left(\bigcup_{a,b\in\mathbb{Q},\ a<b} A^n_{a,b}\right) = 0$$

である．ところで，

$$\left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \varliminf_{\substack{s \downarrow\downarrow t \\ s \in \mathbb{Q}}} X_s(\omega) < \varlimsup_{\substack{s \downarrow\downarrow t \\ s \in \mathbb{Q}}} X_s(\omega) \text{ for some } t \in [0,n[\right\} \subset \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q},\ a<b} A^n_{a,b}$$

であるから，

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \varliminf_{\substack{s \downarrow\downarrow t \\ s \in \mathbb{Q}}} X_s(\omega) = \varlimsup_{\substack{s \downarrow\downarrow t \\ s \in \mathbb{Q}}} X_s(\omega) \text{ for all } t \in [0,n[\right\}\right) = 1$$

となる．同様にして

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \varliminf_{\substack{s \uparrow\uparrow t \\ s \in \mathbb{Q}}} X_s(\omega) = \varlimsup_{\substack{s \uparrow\uparrow t \\ s \in \mathbb{Q}}} X_s(\omega) \text{ for all } t \in]0,n]\right\}\right) = 1$$

も分かる．さらに n について和をとれば

$$
\begin{aligned}
&P\left(\left\{\omega\in\Omega \,\middle|\, \varliminf_{\substack{s\downarrow\downarrow t\\ s\in\mathbb{Q}}} X_s(\omega)=\varlimsup_{\substack{s\downarrow\downarrow t\\ s\in\mathbb{Q}}} X_s(\omega) \text{ for all } t\in[0,\infty[\right\}\right)\\
&=P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\omega\in\Omega \,\middle|\, \varliminf_{\substack{s\downarrow\downarrow t\\ s\in\mathbb{Q}}} X_s(\omega)=\varlimsup_{\substack{s\downarrow\downarrow t\\ s\in\mathbb{Q}}} X_s(\omega) \text{ for all } t\in[0,n[\right\}\right)=1.\\
&P\left(\left\{\omega\in\Omega \,\middle|\, \varliminf_{\substack{s\uparrow\uparrow t\\ s\in\mathbb{Q}}} X_s(\omega)=\varlimsup_{\substack{s\uparrow\uparrow t\\ s\in\mathbb{Q}}} X_s(\omega) \text{ for all } t\in]0,\infty[\right\}\right)\\
&=P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\omega\in\Omega \,\middle|\, \varliminf_{\substack{s\uparrow\uparrow t\\ s\in\mathbb{Q}}} X_s(\omega)=\varlimsup_{\substack{s\uparrow\uparrow t\\ s\in\mathbb{Q}}} X_s(\omega) \text{ for all } t\in]0,n]\right\}\right)=1.
\end{aligned}
$$

よって X_{t+}, X_{t-} の存在が示された． □

命題 3.2.2.
$X=(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を劣マルチンゲールとし，X_{t+}, X_{t-} を補題 3.2.1 で定義したものとする．

(i) 全ての $t\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ について，

$$
\begin{aligned}
E\left[X_{t+}|\mathscr{F}_t\right] &\geq X_t \quad P\text{-a.s.}, &(3.2.1)\\
E\left[X_t|\mathscr{F}_{t-}\right] &\geq X_{t-} \quad P\text{-a.s.}. &(3.2.2)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

(ii) $(\mathscr{F}_t)$ は完備であるとする．このとき $(X_{t+})_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ は $(\mathscr{F}_{t+})$ - 劣マルチンゲールであって，確率 1 で càdlàg なパスをもつ．

証明．(i) の証明． $t\in[0,\infty[$ とし，有理数列 $(t_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\leq 0}}$ を $t_n>t$ かつ $t_n\downarrow t$（$n\to-\infty$）を満たすようにとる．$(X_{t_n})_{n\in\mathbb{Z}_{\leq 0}}$ は補題 1.5.10 の意味での後ろ向き劣マルチンゲールであり，さらに条件 $\lim_{n\to-\infty}E[X_{t_n}]\geq E[X_t]>-\infty$ を満たすから補題 1.5.10 より一様可積分である．$X=(X_t)$ の劣マルチンゲール性より

$$
\int_A X_t dP \leq \int_A X_{t_n} dP \quad A\in\mathscr{F}_t
$$

であるが，ここで極限をとれば $(X_{t_n})_{n\in\mathbb{Z}_{\leq 0}}$ の一様可積分性より

$$
\int_A X_t dP \leq \lim_{n\to-\infty}\int_A X_{t_n} dP = \int_A \lim_{n\to-\infty} X_{t_n} dP = \int_A \lim_{n\to-\infty} X_{t+} dP \quad A\in\mathscr{F}_t
$$

を得る．すなわち，(3.2.1) がなりたつ．

今度は有理数列 $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $t_n<t$ かつ $t_n\uparrow t$ となるようにとる．劣マルチンゲール性より

$$
E[X_t|\mathscr{F}_{t_n}]\geq X_{t_n} \quad P\text{-a.s.}
$$

であるから，ここで $n\to+\infty$ とすれば定理 1.5.8 により

$$
E\left[X_t \mid \mathscr{F}_{t-}\right]\geq X_{t-}
$$

となる．よって (3.2.2) も成り立つ．

(ii) の証明．

ステップ 1：劣マルチンゲール性の証明． X_{t+} の可積分性は，(i) の証明の際に出てきた後ろ向き劣マルチンゲールの一様可積分性よりわかる．いま $(\mathscr{F}_t)$ は完備であると仮定しているから，$\Omega^* \in \mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}_t$ である．このことと X_{t+} の定義より，X_{t+} は $\mathscr{F}_{t+}$-可測であることがわかる．

$0 \le s < t$ として，$t > s_n > s$ かつ $s_n \downarrow s$ となるような有理数列 $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\le 0}}$ をとる．(3.2.1) により

$$E[X_{t+}|\mathscr{F}_{s_n}] = E[E[X_{t+}|\mathscr{F}_t]\,|\mathscr{F}_{s_n}] \ge E[X_t|\mathscr{F}_{s_n}] \ge X_{s_n}$$

であるから，定理 1.5.12 により

$$\lim_{n\to-\infty} E[X_{t+}|\mathscr{F}_{s_n}] = E[X_{t+} \mid \mathscr{F}_{s+}] \ge X_{s+}$$

となり劣マルチンゲール性が分かった．

ステップ 2：右連続性の証明． 実は右連続性だけでなく，càdlàg なパスをもつことまで示すことができる．少々面倒くさいが，$\varepsilon - \delta$ に戻って証明しよう．Ω^* は補題 3.2.1 で定義したものとする．

まずは右連続性を示す．$\omega \in \Omega^*$ とし，$t \in [0,\infty[$ を任意に固定する．また $\varepsilon > 0$ とする．このとき X_{t+} の定義より，$\delta_1 > 0$ を以下の条件を満たすようにとることができる．

$$\forall r \in \mathbb{Q},\ t < r < t+\delta_1 \implies |X_{t+} - X_r| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ここで，$s \in]t, t+\delta_1[$ とし，δ_2 を $s+\delta_2 < t+\delta_1$ および以下の条件を満たすように選ぶ．

$$\forall r \in \mathbb{Q},\ s < r < s+\delta_2 \implies |X_{s+} - X_r| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

いま有理数 r を $s < r < s+\delta_2$ となるようにとれば，$t < r < t+\delta_1$ でもあるから，

$$|X_{t+}(\omega) - X_{s+}(\omega)| \le |X_{t+}(\omega) - X_r(\omega)| + |X_r(\omega) - X_{s+}(\omega)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となる．ゆえに

$$|X_{t+}(\omega) - X_{s+}(\omega)| < \varepsilon$$

である．いま s は $t < s < t+\delta_1$ を満たすような任意の実数であったから，$r \mapsto X_{r+}(\omega)$ は t で右連続であることがわかる．

次に左極限が存在することを示そう．特に $X_{s+} \to X_{t-}$ $(s \uparrow t, s < t)$ が成り立っていることを示す．$t \in]0,\infty[$ および $\varepsilon > 0$ を任意にとって固定する．このとき X_{t-} の定義より $\gamma_1 > 0$ を以下の条件を満たすように選ぶことができる．

$$\forall r \in \mathbb{Q},\ t-\gamma_1 < r < t \implies |X_{t-}(\omega) - X_r(\omega)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

さらに $s \in]t-\gamma_1, t[$ を任意にとって，γ_2 を $s+\gamma_2 < t$ かつ以下の条件を満たすように選ぶ．

$$\forall r \in \mathbb{Q},\ s < r < s+\gamma_2 \implies |X_{s+}(\omega) - X_r(\omega)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

有理数 r を $t-\gamma_1 < s < r < s+\gamma_2 < t$ となるようにとれば，

$$|X_{s+}(\omega) - X_{t-}(\omega)| \le |Xs+(\omega) - X_r(\omega)| + |X_r(\omega) - X_{t-}(\omega)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

が成り立つ．いま s は $t-\gamma_1 < s < t$ を満たすような任意の実数であったから，

$$X_{s+}(\omega) \xrightarrow[s\to t, s<t]{} X_{t-}(\omega)$$

がしたがう． □

定理 3.2.3.
$(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,\infty[}$ を通常の条件を満たすフィルトレーションとし，$X=(X_t)_{t\in[0,\infty[}$ を $(\mathscr{F}_t)$ - 劣マルチンゲールとする．このとき，以下の条件は同値である．

(i) X の修正として右連続なパスをもつものがとれる．
(ii) 関数 $[0,\infty[\ni t\mapsto E[X_t]\in\mathbb{R}$ は右連続である．

この条件がなりたつとき，X の修正として特に càdlàg なパスをもつ劣マルチンゲールであるようなものがとれる．

証明. (i) $\Longrightarrow$ (ii) **の証明．** $\widetilde{X}$ を右連続なパスを持つ X の修正とする．$(t_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\leq 0}}$ を $t_n\downarrow t$ なる任意の実数列とする．$\widetilde{X}$ は X の修正だったから，$P\left[X_t=\widetilde{X}_t,\ X_{t_n}=\widetilde{X}_{t_n};\ n\in\mathbb{Z}_-\right]=1$ がなりたつ．したがって，

$$\lim_{n\to-\infty}X_{t_n}=\lim_{n\to-\infty}\widetilde{X}_{t_n}=\widetilde{X}_t=X_t\quad P\text{-a.s.}$$

である*7．補題 1.5.10 より $(X_{t_n})_{n\in\mathbb{Z}_{\leq 0}}$ は一様可積分なので

$$\lim_{n\to-\infty}E[X_{t_n}]=E[X_t]$$

となる．これより，関数:$[0,\infty[\ni t\mapsto E[X_t]\in\mathbb{R}$ の右連続性が分かる．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) **の証明．** $t\mapsto E[X_t]$ 右連続であると仮定する．フィルトレーションが右連続であることに注意すれば，命題 3.2.2 により (X_{t+}) は Ω^* 上で càdlàg なパスをもつ $(\mathscr{F}_t)$ - 劣マルチンゲールである．このとき，(X_{t+}) が $X=(X_t)$ の修正になっていることを示そう．$(t_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\leq 0}}$ を有理数の列で $t_n>t$ かつ $t_n\downarrow t$ なるものとしてとれば，補題 1.5.10 より (X_{t_n}) は一様可積分な後ろ向き劣マルチンゲールとなる．一様可積分性より $\lim_{n\to-\infty}E[X_{t_n}]=E[X_{t+}]$ であり，仮定より $\lim_{n\to-\infty}E[X_{t_n}]=E[X_t]$ である．したがって $E[X_{t+}-X_t]=0$ となるが，(3.2.1) とフィルトレーションの右連続性より

$$X_{t+}-X_t=E[X_{t+}|\mathscr{F}_t]-X_t\geq 0$$

が成り立つので，$X_{t+}-X_t=0$ a.s. を得る．よって (X_{t+}) は X の修正である．さらに，$\widetilde{X}_t=X_{t+}1_{\Omega^*}$ と定義すれば，$\widetilde{X}=(\widetilde{X}_t)$ は (X_{t+}) の修正であり，ゆえに X の修正でもある．いま Ω^* は確率 1 の集合だから，フィルター付き可測空間の完備性より $(\widetilde{X}_t)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ は càdlàg なパスをもつ劣マルチンゲールとなり，これが求める X の càdlàg 修正である． □

3.3 収束定理

本節では，連続時間（劣）マルチンゲールに対する（劣）マルチンゲール収束定理を証明しよう．以下ではフィルター付き確率空間 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}},P)$ を固定して考える．

*7 この条件を (X_t) の右連続と混同しないように注意する必要がある．ここでの確率 1 の集合は列 (t_n) のとり方に依存している．列のとり方は可算種類ではとどまらない．パスが確率 1 で連続というのは，ある確率 1 の集合 $\widetilde{\Omega}$ が存在して，$\omega\in\widetilde{\Omega}$ をとればどのような列 (t_n) をとっても $X_{t_n}(\omega)\to X_t(\omega)$ となるという意味であった．

定理 3.3.1.
$X=(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ は右連続なパスを持つ $\mathbb{F}$ - 劣マルチンゲールとする．(X_t^+) が L^1 - 有界ならば，ある可積分確率変数 X_∞ が存在して，$X_t \xrightarrow[t\to\infty]{} X_\infty$ P-a.s. がなりたつ．

証明. 証明は離散時間において上向き横断不等式から劣マルチンゲール収束定理を導くプロセスとほとんど同じであるが，念のために書いておく．

定理 3.1.5 により，任意の実数 $a<b$ に対して

$$E[U_{[0,n]}(a,b,X)] \leq \frac{E[X_n^+]+|a|}{b-a} \leq \frac{1}{b-a}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} E[X_t^+]+|a|\right) < \infty$$

が成り立つ．$n\to\infty$ とすれば，単調収束定理により

$$E\left[U_{[0,\infty[}(a,b,X)\right] \leq \frac{1}{b-a}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} E[X_t^+]+|a|\right) < \infty$$

となり，これより $U_{[0,\infty[}(a,b,X)<\infty$ P-a.s. がわかる．ところで，

$$\begin{aligned}
\left\{\varliminf_{t\to\infty} X_t < \varlimsup_{t\to\infty} X_t\right\} &= \left\{\sup_{t\in\mathbb{Q}} \inf_{\substack{s\geq t\\ s\in\mathbb{Q}}} X_t < \inf_{t\in\mathbb{Q}} \sup_{\substack{s\geq t\\ s\in\mathbb{Q}}} X_t X_t\right\} \\
&\subset \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}} \left\{\varliminf_{t\to\infty} X_t < a < b < \varlimsup_{t\to\infty} X_t\right\} \\
&\subset \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}} \{U_{[0,\infty[}(a,b,X)=\infty\}
\end{aligned}$$

に注意すれば

$$P\left[\varliminf_{t\to\infty} X_t < \varlimsup_{t\to\infty} X_t\right] \leq \sum_{a,b\in\mathbb{Q}} P[U_{[0,\infty[}(a,b,X)=\infty]=0$$

となり，確率 1 で $\lim_{t\to\infty} X_t$ が存在することがわかった．ここで

$$X_\infty(\omega) = \begin{cases} \lim_{t\to\infty} X_t(\omega) & \text{if } \varliminf_{t\to\infty} X_t = \varlimsup_{t\to\infty} X_t \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

と定義する．X の右連続性より

$$\left\{\varliminf_{t\to\infty} X_t < \varlimsup_{t\to\infty} X_t\right\} = \left\{\sup_{t\in\mathbb{Q}} \inf_{\substack{s\geq t\\ s\in\mathbb{Q}}} X_t < \inf_{t\in\mathbb{Q}} \sup_{\substack{s\geq t\\ s\in\mathbb{Q}}} X_t X_t\right\}$$

という表現が成り立ち，またこの集合上で $\lim_{t\to\infty} X_t = \lim_{n\to\infty} X_n$ が成り立つことから，X_∞ は $\mathscr{F}_\infty$-可測な $[-\infty,\infty]$-値確率変数となる．後は X_∞ の可積分性を示せばよい．Fatou の補題により

$$E[X_\infty^+] \leq \varliminf_{n\to\infty} E[X_n^+] \leq \sup_{t\in[0,\infty[} E[X_t^+] < \infty$$

である．また，

$$E[X_t^-] \leq E[X_t^+] - E[X_t] \leq \sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} E[X_t^+] - E[X_0]$$

に注意すれば，再び Fatou の補題を用いて

$$E[X_\infty^-] \leq \varliminf_{n\to\infty} E[X_n^-] \leq \sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} E[X_t^+] - E[X_0] < \infty$$

が成り立つ．これにより，X_∞ の可積分性が示された．□

定理 3.3.2.
劣マルチンゲール $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ に対して，次の条件は同値である．

(i) X は一様可積分である．
(ii) X は L^1 収束する．
(iii) X はある $X_\infty \in L^1(\mathscr{F}_\infty)$ に概収束し，$(X_t)_{t\in[0,\infty]}$ は $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$ - 劣マルチンゲールとなる．さらに，$E[X_t] \to E[X_\infty]$ $(t\to\infty)$ がなりたつ．

証明. 離散時間の場合とほとんど同じである．□

定理 3.3.3.
$X = (X_t)_{t\in[0,\infty[}$ を $(\mathscr{F}_t)$ - マルチンゲールとしたとき，以下の条件は同値である．

(i) X は一様可積分である．
(ii) X は L^1 収束する．
(iii) X はある $X_\infty \in L^1(\mathscr{F}_\infty)$ に概収束し，$(X_t)_{t\in[0,\infty]}$ は $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$ - マルチンゲールとなる．
(iv) ある可積分な確率変数 Y が存在して，全ての $t\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ について $X_t = E[Y|\mathscr{F}_t]$ a.s. が成り立つ．

証明. 離散時間の場合と同様.□

càdlàg なパスをもつ一様可積分マルチンゲール全体の空間を $\mathscr{M}$ で表す．定理 3.3.3 より，$\mathscr{M}$ と $L^1(\mathscr{F}_\infty)$ の元には（a.s. の意味で）1 対 1 の対応関係がある．一様可積分マルチンゲールは，ある意味では一般のマルチンゲールよりも重要である．

3.4 任意抽出定理

本節では，連続時間（劣）マルチンゲールに対する任意抽出定理を証明する．

定理 3.4.1.
X を右連続なパスを持つ一様可積分劣マルチンゲールとし，S, T を $S \leq T$ を各点の意味で満たす停止時刻とする．このとき

$$E[X_T|\mathscr{F}_S] \geq X_S \quad P\text{-a.s.}$$

がなりたつ．

証明. S に対して停止時刻の列 S_n を

$$S_{-n}(\omega) = \begin{cases} S(\omega) & S(\omega) = \infty \\ \dfrac{k}{2^n} & \dfrac{k-1}{2^n} \leq S(\omega) < \dfrac{k}{2^n} \end{cases} \tag{3.4.1}$$

とおけば，$(S_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\leq 0}}$ は停止時刻の減少列であって $S_n \downarrow S$ を満たす．さらに，これは命題 2.4.11 の (iii) の仮定を満たすものであることに注意されたい．離散時間の任意抽出定理と補題 1.5.10 より $(X_{S_n})_{n\in\mathbb{Z}_{\leq 0}}$ は一様可積分な後ろ向き劣マルチンゲールである[*8]．T についても同様に (T_n) を定義すれば，$(X_{T_n})_{n\in\mathbb{Z}_{\leq 0}}$ も一様可積分な後ろ向き劣マルチンゲールである．離散時間の任意抽出定理により任意の $A \in \mathscr{F}_{S_n}$ に対して

$$\int_A X_{S_n} dP \leq \int_A X_{T_n} dP \tag{3.4.2}$$

である．特に $A \in \mathscr{F}_{S+} = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}_-} \mathscr{F}_{S_n}$ に対しても (3.4.2) はなりたつので，ここで $n \to -\infty$ とすれば一様可積分性とパスの右連続性により．

$$\int_A X_S dP \leq \int_A X_T dP$$

となる．よって $E[X_T|\mathscr{F}_{S+}] \geq X_S$ が Ω 上殆ど至る所成り立つ．いま，発展的可測性より X_S は $\mathscr{F}_S$ ‐可測なので，特に両辺で $\mathscr{F}_S$ に関する条件付き期待値をとれば[*9]$E[X_T|\mathscr{F}_S] \geq X_S$ P-a.s. となる． □

X が一様可積分マルチンゲールの場合は，一様可積分劣マルチンゲール X と $-X$ に定理 3.4.1 を適用することで，次の系を得る．

系 3.4.2.
$X = (X_t)_{t\in[0,\infty[}$ は右連続なパスを持つ一様可積分劣マルチンゲールとし，S, T を $S \leq T$ を満たす停止時刻とする．このとき

$$E[X_T|\mathscr{F}_S] = X_S \quad P\text{-a.s.}$$

がなりたつ．

任意抽出定理を用いれば，一様可積分マルチンゲールは通常の一様可積分性よりもさらに強い一様可積分性を持つことがわかる．

系 3.4.3.
一様可積分マルチンゲールは，クラス (D) に属する．

証明. X が一様可積分マルチンゲールならば，系 3.4.2 より任意の停止時刻 T について $E[X_\infty|\mathscr{F}_T] = X_T$ a.s. が成り立つ．したがって $(X_T)_{T\in\mathscr{T}}$ は一様可積分であり（命題 A.2.5），特に X はクラス (D) に属する．（クラス (D) の定義は定義 2.7.7 を参照．） □

正値の劣マルチンゲールに対しては，系 3.4.3 と類似の結果が成り立つ．

[*8] X の一様可積分性より極限 X_∞ が存在する（命題 3.3.2）ので，X_{S_n} および X_S は任意の点で定義されていることに注意．
[*9] 命題 2.4.11(i) より $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_{S+}$ であることに注意．

系 3.4.4.
正の一様可積分劣マルチンゲールは，クラス (D) に属する．

証明. X は正の一様可積分劣マルチンゲールであるとする．このとき $(E[X_\infty|\mathscr{F}_T])_{T\in\mathscr{T}}$ は一様可積分である．X が正値であることから

$$|X_T| = X_T \leq E[X_\infty|\mathscr{F}_T] = E[|X_\infty||\mathscr{F}_T]$$

が成り立つので，$(X_T)_{T\in\mathscr{T}}$ も一様可積分である． □

今度は，有界停止時刻に対する任意抽出定理を紹介しよう．

定理 3.4.5.
$X = (X_t)_{t\in[0,\infty[}$ 右連続なパスを持つ劣マルチンゲールとし，S, T を $S \leq T$ を満たす有界停止時刻とする．このとき

$$E[X_T|\mathscr{F}_S] \geq X_S \quad P\text{-a.s.}$$

がなりたつ．

証明. K を T の上界とする．$X = (X_t)_{t\in[0,K]}$ は一様可積分なので，前の定理の証明を応用すればよい． □

系 3.4.6.
X 右連続マルチンゲールとし，S, T を $S \leq T$ を満たす有界停止時刻とする．このとき

$$E[X_T|\mathscr{F}_S] = X_S \quad P\text{-a.s.}$$

がなりたつ．

系 3.4.7.
任意のマルチンゲールはクラス (DL) に属する．

証明. X がマルチンゲールならば，系 3.4.6 より任意の停止時刻 $T \in \mathscr{T}_{\leq a}$ について $E[X_a|\mathscr{F}_T] = X_T$ a.s. が成り立つ．したがって $(X_T)_{T\in\mathscr{T}_{\leq a}}$ は一様可積分であり（命題 A.2.5），X はクラス (DL) に属する． □

X が劣マルチンゲールならば，任意抽出定理より X^T が $(\mathscr{F}_{t\wedge T})_{t\in\mathbb{R}_+}$ ‐劣マルチンゲールになっていることがわかる．実は，フィルトレーションを $(\mathscr{F}_t)$ に取り換えても X^T は劣マルチンゲールとなっている．

系 3.4.8.
X を右連続な劣マルチンゲールとし，T を $(\mathscr{F}_t)$ ‐停止時刻とする．このとき X^T は可積分劣マルチンゲールである．さらに X が一様可積分ならば，X^T も一様可積分となる．

証明. 適合性は停止過程の定義よりすぐにわかり，$X_{T\wedge t}$ の可積分性は定理 3.4.5 より分かる．$s < t$ および

$A \in \mathscr{F}_s$ に対して

$$\begin{aligned}
&\int_A (X_{T\wedge t} - X_{T\wedge s}) dP \\
&= \int_\Omega 1_{A\cap\{T\le s\}}(X_{T\wedge t} - X_{T\wedge s}) dP + \int_\Omega 1_{A\cap\{T>s\}}(X_{T\wedge t} - X_{T\wedge s}) dP \\
&= \int_\Omega 1_{A\cap\{T\le s\}}(X_T - X_T) dP + \int_\Omega 1_{A\cap\{T>s\}}(X_{T\wedge t} - X_s) dP \\
&\ge 0
\end{aligned}$$

となる．（ただし, 最後の不等号は $A\cap\{T>s\}\in\mathscr{F}_s$ と定理 3.4.5 を用いた.）したがって $E[X_{T\wedge t} \mid \mathscr{F}_s] \ge X_{T\wedge s}$ が a.s. でなりたち，X は劣マルチンゲールとなる．

$$X^T = X 1_{[\![0,T]\!]} + X_T 1_{]\!]T,\infty[\![}$$

という表現に注意すれば，X が一様可積分なとき X^T が一様可積分になることもわかる． □

系 3.4.8 をマルチンゲールに適用すれば，マルチンゲール全体の空間や一様可積分マルチンゲール全体の空間は，停止について安定な線形空間であることがわかる．

任意抽出定理を用いると，一様可積分マルチンゲールやマルチンゲールの特徴付けが得られる．

命題 3.4.9.

$X = (X_t)_{t\in[0,\infty]}$ を右連続適合過程とする．このとき X が一様可積分マルチンゲールとなるための必要十分条件は，任意の停止時刻 T に対して以下の 2 条件が成り立つことである．

(i) $X_T \in L^1(P)$.

(ii) $E[X_T] = E[X_0]$.

証明. X が一様可積分マルチンゲールならば (i), (ii) が成り立つことは任意抽出定理より分かる．

逆を示そう．$T = \infty$ とすれば，(i) より X_∞ の可積分性が分かる．$t\in\mathbb{R}_{\ge 0}$ および $A\in\mathscr{A}$ を任意に選んで，$T = t_A$ と定義する．このとき (ii) より

$$E[X_\infty] = E[X_0] = E[X_T] = E[X_t 1_A] + E[X_\infty 1_{\Omega\setminus A}]$$

がなりたつ．この式を変形すれば，

$$E[X_\infty 1_A] = E[X_t 1_A]$$

が分かる．これより $X = (X_{t\in[0,\infty]})$ はマルチンゲールであり，定理 3.3.3 より一様可積分となる． □

系 3.4.10.

X を右連続適合過程とする．X がマルチンゲールであるための必要十分条件は，任意の有界 $\mathbb{F}$-停止時刻 T に対して以下の (i), (ii) が成り立つことである．

(i) $X_T \in L^1(P)$.

(ii) $E[X_T] = E[X_0]$.

証明. X がマルチンゲールならば (i) と (ii) が成り立つことは，任意抽出定理よりわかる．逆の証明は，定数停止時刻 t で止めた停止過程 X^t に命題 3.4.9 を適用すればよい． □

3.5 ノート

本節の内容は Karatzas and Shreve [68] や Revuz and Yor [94] などに見られる標準的なものである．連続時間マルチンゲールについてより詳しくは，Dellacherie and Meyer [25]，He, Wang, and Yan [53] などを参考にされたい．

劣マルチンゲールや優マルチンゲールの定義には可積分性を仮定しない流儀もある．（Revuz and Yor [94] や Medvegyev [78] など．）

定理 3.2.3 には実は完備性の仮定は必要ないことが知られている．これは Föllmer [43] による結果であるが，Dellacherie and Meyer [25, Chapter VI, 5 Remarks] や He, Wang, and Yan [53, 2.44 Theorem–2.48 Corollary] が参考になる．

第 4 章

連続マルチンゲール理論（発展）

第 4 章では，確率積分論へとつながるマルチンゲール理論の発展的内容を扱う．中心となるのは劣マルチンゲールの Doob-Meyer 分解と，二次変分を用いた二乗可積分マルチンゲール理論の展開である．

4.1 増加過程と Stieltjes 確率積分

本節を通して，フィルターつき確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, P)$ を一つ固定して議論を進める．

定義 4.1.1.
実数値確率過程 A が

(i) $A_0 = 0$.
(ii) A のパスは右連続な増加関数.

を満たすとき，A は増加過程 (increasing process) であるという．適合増加過程全体の空間を $\mathscr{V}^+$ で表し，$\mathscr{V}^+ \cap \mathscr{D}^1 = \mathscr{A}^+$ と定義する．$A \in \mathscr{V}^+$ が $\mathscr{A}^+$ にも属するとき，A は可積分であるという．二つの適合増加過程の差で表される確率過程全体の空間を $\mathscr{V}$ で表し，その元を局所有限変動過程と呼ぶ．さらに $\mathscr{A}$ で二つの可積分適合増加過程の差で表現される確率過程全体の空間を表し，$\mathscr{A}$ の元を適合可積分変動過程と呼ぶ.

$\mathscr{V}^+$，$\mathscr{V}$，$\mathscr{A}^+$，$\mathscr{A}$ の元で連続なパスをもつもの全体からなる集合を，それぞれ $\mathscr{V}^{+,\mathrm{c}}$，$\mathscr{V}^{\mathrm{c}}$，$\mathscr{A}^{+,\mathrm{c}}$，$\mathscr{A}^{\mathrm{c}}$ で表すことにする．

$A \in \mathscr{V}^+$ なら単調収束定理より

$$E\left[\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} A_t\right] = E\left[\lim_{t\to\infty} A_t\right] = \lim_{t\to\infty} E\left[A_t\right] = \sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} E[A_t]$$

が成り立つから，A が可積分であることは上の式の何れかの量が有限となることと同値である．

命題 4.1.2.
A を $A_0 = 0$ を満たす適合過程とする．このとき $A \in \mathscr{V}$ は，A のパスが右連続な局所有限変動関数となることと同値である．パス $A_\cdot(\omega)$ の全変動を $V(A)_\cdot(\omega)$ で表せば，$V(A)$ はまた適合増加過程となる．また，$A \in \mathscr{A}$ は $V(A) \in \mathscr{A}^+$ と同値である．さらに A が連続であることは，$V(A)$ が連続となることと同

値である．

証明. A は $A_0 = 0$ かつ右連続局所有限変動なパスをもつ適合過程とする．(π_n) を $[0,t]$ の分割列で $|\pi_n| \to 0$ を満たすものとする．各 ω について $A_\cdot(\omega)$ は $[0,t]$ 上右連続な有界変動関数だから，命題 A.8.5 により

$$\sum_{\pi_n} |A_{t_i}(\omega) - A_{t_{i+1}}(\omega)| \xrightarrow[n\to\infty]{} V(A)_t(\omega)$$

が成り立つ．各 A_{t_i} は $\mathscr{F}_t$-可測なので，それらの線形結合と絶対値をとったものの極限である $V(A)_t$ もまた $\mathscr{F}_t$-可測である．$V(A)$ が増加過程になることは命題 A.8.3 よりわかる．ここで

$$A_1 = \frac{V(A) + A}{2}, \qquad A_2 = \frac{V(A) - A}{2}$$

と定義すれば，命題 A.8.3 より A_1, A_2 はともに $\mathscr{V}^+$ の元となり，$A = A_1 - A_2$ を満たしている．よって $A \in \mathscr{V}$ が成り立つ．

逆に $A \in \mathscr{V}$ とし，$B_1, B_2 \in \mathscr{V}^+$ を $A = B_1 - B_2$ となるように選ぶ．このとき命題 A.8.2 と命題 A.8.3 より各 ω について

$$V(A)_t(\omega) \le V(B_1)_t(\omega) + V(B_2)_t(\omega) = B_1(t,\omega) + B_2(t,\omega)$$

となることがわかるので，A のパスはどれも局所有界変動を持つ．

先ほど定めた A_1, A_2 を用いれば $V(A) = A_1 + A_2$ と表現できるので，$A \in \mathscr{A}$ は $\mathscr{V}(A) \in \mathscr{A}^+$ と同値であることもわかる．

最後の主張は命題 A.8.7 よりわかる． □

局所有限変動過程からなる空間の局所化を考えよう．

命題 4.1.3.

(i) $\mathscr{V}_{\mathrm{loc}} = \mathscr{V}$ である．

(ii) $\mathscr{V}^{\mathrm{c}} \subset \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ が成り立つ．

証明. (i) は明らかである．

(ii) $A \in \mathscr{V}^{\mathrm{c}}$ とし，

$$T_n(\omega) = \inf\{t \ge 0 \mid V(A)_t \ge n\}$$

と定義する．このとき命題 2.4.13 より T_n は停止時刻となる．定義より明らかに $T_1 \le T_2 \le \cdots \to \infty$ がであり，また A の連続性より $V(A)$ も連続となるので，$V(A)^{T_n}_\infty = V(A)_{T_n} \le n$ が成り立つ．さらに $V(A^{T_n}) = V(A)^{T_n}$ であることに注意すれば，(T_n) が A の $\mathscr{A}$ に関する局所化列になっていることがわかる． □

$A \in \mathscr{V}$ ならば，パスごとの Stieltjes 積分を考えることが出来る．これも確率積分の一種である．

命題 4.1.4.
$A \in \mathscr{V}$ とし，H を可測な確率過程とする．$\omega \in \Omega$ と $t \in \mathbb{R}_+$ に対して $H(\omega)$ が $[0,t]$ 上 $A(\omega)$ によって Stieltjes 積分可能であるとき，

$$(H \bullet A)_t(\omega) = \int_{]0,t]} H_s(\omega)\, dA_s(\omega)$$

と定義する．

(i) 任意の ω と t について $(H \bullet A)_t(\omega)$ が well-defined ならば，$(H \bullet A)_t$ はどれも確率変数となる．

(ii) H が発展的可測で $H \bullet A$ が well-defined ならば，$H \bullet A \in \mathscr{V}$ が成り立つ．

証明. (ii) のみ示す．**Step 1：$H = 1_{B\times]a,b]}$ の場合．** $t > 0$ を固定する．$0 \leq a \leq b \leq t$ かつ $B \in \mathscr{F}_t$ とし，$H = 1_{B\times]a,b]}$ と定義する．このとき $(\omega, s) \in \Omega \times [0,t]$ に対して

$$(1_{B\times]a,b]} \bullet A)_s(\omega) = \int_{]0,t]} 1_{B\times]a,b]}(\omega,t) dA_s(\omega) = 1_B(\omega)(A_{b\wedge s}(\omega) - A_{a\wedge s}(\omega))$$

が成り立つ．$(\omega,s) \mapsto A_{b\wedge s}(\omega)$ と $(\omega,s) \mapsto A_{a\wedge s}(\omega)$ はともに右連続適合過程だから $\mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}([0,t])$-可測であり，ゆえに $(1_{B\times]a,b]} \bullet A)|_{\Omega\times[0,t]}$ も $\mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}([0,t])$-可測となる．

Step 2：$H = 1_E$ の場合．

$$\mathscr{C}_t = \{B \times]a,b] \mid B \in \mathscr{F}_t, 0 \leq a \leq b \leq t\}$$
$$\mathscr{D}_t = \{E \in \mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}([0,t]) \mid (1_E \bullet A)|_{\Omega\times[0,t]} \text{ は } \mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}([0,t])\text{-可測 }\}$$

と定義すれば，先ほどの議論より $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$ である．$\mathscr{C}$ は π 系であるから，$\mathscr{D}$ が λ-系であることを示せば $\mathscr{D}_t$ は $\mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}([0,t])$ と一致することがわかる．

$$(1_{\Omega\times[0,\infty[} \bullet A)_t = A_t$$

より $\Omega \times [0,\infty[\in \mathscr{D}$ である．$E, F \in \mathscr{D}$ かつ $E \subset F$ とすれば

$$(1_{F\setminus E} \bullet A)_t = (1_F \bullet A)_t - (1_E \bullet A)_t$$

だから $F \setminus E \in \mathscr{D}$ も分かる．(E_n) が $\mathscr{D}$ の単調増大列で $\bigcup_n E_n = E$ なら，各 ω について優収束定理を用いることにより

$$\begin{aligned}(1_E \bullet A)_t(\omega) &= \int_{]0,t]} 1_{\bigcup E_n}(\omega,t) dA_s(\omega) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{]0,t]} 1_{E_n}(\omega,s) dA_s(\omega) \\ &= \lim_{n\to\infty} (1_{E_n} \bullet A)_t(\omega)\end{aligned}$$

がわかる．$(1_E \bullet A)_t$ は $\mathscr{F}$-可測関数列 $((1_{E_n} \bullet A)_t)_{n\in\mathbb{N}}$ 各点収束極限なので，$\mathscr{F}$-可測である．よって $E = \bigcup_n E_n \in \mathscr{D}$ が示された．以上の議論より Dynkin 族定理が適用できるので，$\mathscr{D} = \mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}([0,t])$ となる．

Step 3：一般の場合． H が有界発展的可測過程ならば，$H|_{\Omega[0,t]}$ は有界な $\mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}([0,t])$-可測関数である．このとき $H|_{\Omega\times[0,t]}$ は $\mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}([0,t])$-可測な単関数列で近似でき，また任意の $s \in [0,t]$ に対して

$$\int_{]0,s]} H(\omega,u) dA_u(\omega) = \int_{]0,s]} H|_{\Omega\times[0,t]}(\omega,u) dA_u(\omega)$$

が成り立つ（これらは well-defined である）から，step 2 の結果より $H \bullet A$ は発展的可測であることがわかる．H が一般の発展的可測関数で，各点で $(|H| \bullet V(A))(\omega,t) < \infty$ を満たすようなものとする．このとき $H^{(n)} = (-n) \vee (H \wedge n)$ と定義すれば各 $H^{(n)}$ は有界発展的可測過程であり，$\|H^{(n)}\| \leq |H\|$ かつ $H^{(n)} \to H$ を各点の意味で満たしている．したがって優収束定理により

$$(H \bullet A)_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} (H^{(n)} \bullet A)_t(\omega)$$

が成り立つ．各 $H^{(n)} \bullet A$ は発展的可測であるから，その各点収束極限である $H \bullet A$ も発展的可測である．□

命題 4.1.4 の確率過程 $H \bullet A$ を，発展的可測過程 H の局所有限変動過程 A による確率積分 (stochastic integral) という．後の章で出てくる局所マルチンゲールによる確率積分と区別したいときには，これを特に Stiletjes 確率積分 (Stieltjes stochastic integral) と呼ぶことにする．$|H| \bullet V(A) \in \mathscr{A}$ となるような発展的可測過程 H 全体の集合を $L^1(A)$ で，可予測過程からなるその部分空間を $L^1(\mathscr{P}, A)$ で表すことにする．命題 4.1.3 より，特に A が連続な場合は $L^1(A)_{\mathrm{loc}}$ は $|H| \bullet V(A) \in \mathscr{V}^+$ となる[*1]ような発展的可測 H 全体の空間と一致する．

命題 4.1.5.
H を可測過程，$A \in \mathscr{V}$ とし，任意の t に対して $(|H| \bullet V(A))_t$ は有限値になると仮定する．このとき，任意の $\mathscr{F}$ - 可測関数 $T\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ に関して

$$(H \bullet A)^T = H 1_{[\![0,T]\!]} \bullet A = H^T \bullet A^T = H \bullet A^T$$

が成り立つ．

証明． 最初の等号

$$(H \bullet A)^T = H 1_{[\![0,T]\!]} \bullet A$$

は Lebesgue-Stieltjes 積分の定義よりすぐにわかる．$(H \bullet A)^T = H \bullet A^T$ を示そう．X は非負，$A \in \mathscr{V}^+$ であるとする．$\omega \in \Omega$ を固定して，$u(s) = T(\omega) \wedge s$ とおけば，命題 A.9.8 により

$$\begin{aligned}
\int_{[0,T(\omega)\wedge t]} H_s(\omega) dA_s(\omega) &= \int_{[0,t]} H_{u(s)} dA_{u(s)} \\
&= \int_{[0,t]} H_{s\wedge T(\omega)}(\omega) dA_{s\wedge T(\omega)}(\omega) \\
&= \int_{[0,t]} H^T_s(\omega) dA^T_s(\omega)
\end{aligned}$$

がなりたつ．これは $(H \bullet A)^T = H^T \bullet A^T$ に他ならない．ω を固定したとき $\operatorname{supp} dA^T(\omega) \subset [0, T(\omega)]$ となる[*2]ことに注意すれば

$$\begin{aligned}
\int_{[0,t]} H_s(\omega) dA^T_s(\omega) &= \int_{[0,T(\omega)\wedge t]} H_s(\omega) dA^T_s(\omega) + \int_{]t\wedge T(\omega),t]} H_s(\omega) dA^T_s(\omega) \\
&= \int_{[0,T(\omega)\wedge t]} H_s(\omega) dA^T_s(\omega) \\
&= \int_{[0,t]} H^T_s(\omega) dA^T_s(\omega)
\end{aligned}$$

となり $H^T \bullet A^T = H \bullet A^T$ も分かる．H が非負でない時は H^+ と H^- を考えればよい．$A \in \mathscr{V}$ のときは A を二つの増加関数に分解すればよい．□

[*1] つまり $|H| \bullet V(A)$ が有限値となる
[*2] $T(\omega) < \infty$ の場合．$T(\omega) = \infty$ のときは明らかである

定義 4.1.6.
$A \in \mathscr{A}$ とする．任意の有界 càdlàg マルチンゲール M に対して

$$E\left[\int_{[0,\infty[} M_s dA_s\right] = E\left[\int_{[0,\infty[} M_{s-} dA_s\right]$$

が成り立つとき，A は自然 (natural) であるという．$A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ の時は，A の $\mathscr{A}$ に関する局所化列 (T_n) で A^{T_n} がどれも自然となるようなものが存在するとき，A は自然であるという．

増加過程が自然であるというのは，何とも不自然な定義である．しかし，完備性の下では実はこれは可予測性と同じ概念となる．つまり，自然性は可測性に関する概念なのである．この事実は本ノートで必ずしも必要なものではないが，次節でこれについて少し解説する．$A \in \mathscr{A}^c$ なら，A は自然である．というのも，A が連続なら各 ω について

$$\int_{[0,\infty[} M_s(\omega) dA_s(\omega) = \int_{[0,\infty[} M_{s-}(\omega) dA_s(\omega)$$

が成り立つからである．

次の命題では，自然な増加過程の特徴付けを与えよう．

命題 4.1.7.
$A \in \mathscr{A}$ が自然であることは，任意の有界 càdlàg マルチンゲールについて

$$E[M_\infty A_\infty] = E\left[\int_{[0,\infty[} M_{s-} dA_s\right]$$

が成り立つことと同値である．

証明. $A \in \mathscr{A}^+$ として示せばよい．

$$C_t(\omega) = \inf\{s \in \mathbb{R}_+ \mid A_s \geq t\}$$

とすれば，命題 2.4.13 より C_t は停止時刻となる．このとき，命題 A.9.7 より任意の有界可測過程 H に対して

$$\int_{[0,\infty[} H_s(\omega) dA_s(\omega) = \int_{[0,\infty[} H_{C_s}(\omega) 1_{\{C_s(\omega)<\infty\}} ds \tag{4.1.1}$$

が成り立つ．これより

$$\begin{aligned}
E[M_\infty A_\infty] &= E\left[\int_{[0,\infty[} M_\infty dA_s\right] \\
&= E\left[\int_{[0,\infty[} M_\infty 1_{[\![0,\infty[\![}(C_s) 1_{\{C_s<\infty\}} ds\right] && (\because \text{式 (4.1.1)}) \\
&= \int_{[0,\infty[} E\left[M_\infty 1_{[\![0,\infty[\![}(C_s) 1_{\{C_s<\infty\}}\right] ds && (\because \text{Fubini の定理}) \\
&= \int_{[0,\infty[} E\left[M_{C_s} 1_{[\![0,\infty]\!]}(C_s) 1_{\{C_s<\infty\}}\right] ds && (\because \text{任意抽出定理}) \\
&= E\left[\int_{[0,\infty[} M_{C_s} 1_{[\![0,T]\!]}(C_s) 1_{\{C_s<\infty\}} ds\right] && (\because \text{Fubini の定理})
\end{aligned}$$

$$= E\left[\int_{[0,\infty[} M_s dA_s\right] \qquad (\because \text{式 (4.1.1)})$$

となる．よって任意の有界マルチンゲール M に対して

$$E[M_\infty A_\infty] = E\left[\int_{[0,\infty[} M_s dA_s\right]$$

が成り立つ．したがって A が自然であることは任意の有界マルチンゲール M に対して

$$E[M_\infty A_\infty] = E\left[\int_{[0,\infty[} M_{s-} dA_s\right]$$

が成り立つことと同値である． □

本節の最後に，有界変動なパスをもつマルチンゲールについて調べる．

命題 4.1.8.
$M \in \mathscr{M} \cap \mathscr{A}$ が自然ならば，M は 0 と区別不能である．

証明. $M \in \mathscr{M} \cap \mathscr{A}$ は自然であるとする．このとき命題 4.1.7 より任意の有界 càdlàg マルチンゲール N に対して

$$E[N_\infty M_\infty] = E\left[\int_{[0,\infty[} N_{s-} dM_s\right]$$

がなりたつ．また

$$N^{(n)} = \sum_{i \geq 0} N_{\frac{i}{n}} 1_{]\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]}$$

とすればマルチンゲール性より

$$E\left[\int_{[0,\infty[} N_s^{(n)} M_s\right] = \sum_{i \geq 0} E\left[N_{t_i}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})\right] = 0$$

が成り立つ．$n \to \infty$ とすれば，優収束定理により

$$0 = E\left[\int_{[0,\infty[} N_s^{(n)} M_s\right] \to E\left[\int_{[0,\infty[} N_{s-} dM_s\right]$$

が成り立つ．これと最初の式より，

$$E[N_\infty M_\infty] = 0$$

がわかる．任意の $A \in \mathscr{F}_\infty$ に対して，マルチンゲール N を $N_\infty = 1_A$ となるように選ぶことができるから，これより

$$\forall A \in \mathscr{F}_\infty \quad E[1_A M_\infty] = 0$$

を得る．したがって $M_\infty = 0$ a.s. が成り立つ．M は一様可積分だから $M_t = E[M_\infty | \mathscr{F}_t]$ a.s. となっており，よって M は 0 の修正であることが分かる．M は右連続であるから，ゆえに M は 0 と区別不能となる． □

4.2 可予測性（発展）

本節では，可予測性についてさらに進んだ内容を扱う．本ノートの水準では完全な証明を与えるのは難しい部分もあるので，一部の結果については他の文献を引用したり証明は概略を述べるに留める．

本節では，完備なフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を一つ固定して議論を進める．

定義 4.2.1.
X を可測過程で，任意の可予測時刻 T に対して $X_T 1_{\{T<\infty\}}$ が可積分になるようなものとする．可予測過程 Y が任意の可予測時刻 T に対して

$$E[X_T 1_{\{T<\infty\}} | \mathscr{F}_{T-}] = Y_T 1_{\{T<\infty\}} \quad P\text{-a.s.}$$

を満たすとき，Y は X の可予測射影 (predictable projection) であるという．

系 2.5.11 より，X の可予測射影は存在したとしたら区別不能の意味で一意的である．X の可予測射影を ${}^{\mathfrak{p}}X$ で表す．

本ノートで用いる可予測射影の基本的な性質としては，次のようなものがある．

命題 4.2.2 (可予測射影の性質).
可予測射影は以下の性質を持つ．以下の条件において確率過程の相等は常に区別不能の意味で解釈する．

(i) Y は $\mathbb{F}$-可予測過程で，任意の可予測時刻 T について，$Y_T 1_{\{T<\infty\}}$ が可積分になるようなものとする．このとき Y 自身は Y の可予測射影である．

(ii) Y は有界可予測過程で，X は可予測射影 ${}^{\mathfrak{p}}X$ を持つ可測過程とする．このとき，$Y({}^{\mathfrak{p}}X)$ は XY の可予測射影である．

(iii) X, Y はともに可予測射影を持つとする．このとき，${}^{\mathfrak{p}}X + {}^{\mathfrak{p}}Y$ は $X+Y$ の可予測射影である．

(iv) $0 \le X \le Y$ がともに可予測射影をもつならば，$0 \le {}^{\mathfrak{p}}X \le {}^{\mathfrak{p}}Y$ が成立．(i.e. $X \mapsto {}^{\mathfrak{p}}X$ は増加的である．)

(v) 可予測射影についての単調収束定理が成り立つ：非負かつ単調増大な (X_n) は $X_n \to X$ (pointwise) を満たし，各 X_n は可予測射影を持つとする．このとき，X もまた可予測射影を持ち，${}^{\mathfrak{p}}X_n \uparrow {}^{\mathfrak{p}}X$ が確率 1 で全ての t に対して成立．

(vi) X は可予測射影をもつ可測過程とする．このとき任意の停止時刻 T について X^T はまた可予測射影を持ち，

$${}^{\mathfrak{p}}(X^T) = ({}^{\mathfrak{p}}X) 1_{[\![0,T]\!]} + ({}^{\mathfrak{p}}X_T) 1_{]\!]T,+\infty[\![}$$

が a.s. で成立．特に ${}^{\mathfrak{p}}(X^T) 1_{[\![0,T]\!]} = ({}^{\mathfrak{p}}X)^T 1_{[\![0,T]\!]}$ が成立する．

証明. (i) Y が可予測ならば，任意の可予測時刻に対して $Y_T 1_{\{T<+\infty\}}$ は $\mathscr{F}_{T-}$ 可測である．（命題 2.5.7）よって，可予測射影の定義に戻れば，Y 自身が Y の可予測射影となることがわかる．

(ii) X は可予測射影を持つから，任意の可予測時刻 T に対して

$${}^{\mathfrak{p}}X_T 1_{\{T<+\infty\}} = E[X_T 1_{\{T<+\infty\}} | \mathscr{F}_{T-}]$$

である．Y は可予測過程だから $Y_T 1_{\{T<+\infty\}}$ は $\mathscr{F}_{T-}$-可測であり，条件付き期待値の性質から

$$Y_T({}^{\mathfrak{p}}X_T)1_{\{T<+\infty\}} = (Y_T 1_{\{T<+\infty\}})E[X_T 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}] = E[Y_T X_T 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}]$$

が成り立つ．Y は可予測だから $Y({}^{\mathfrak{p}}X)$ も可予測であり，上の式より $Y({}^{\mathfrak{p}}X)$ が X の可予測射影であることがわかる．

(iii) X, Y が可予測射影を持つという仮定から，任意の可予測時刻に対して

$${}^{\mathfrak{p}}X_T 1_{\{T<+\infty\}} = E[X_T 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}], \quad {}^{\mathfrak{p}}Y_T 1_{\{T<+\infty\}} = E[Y_T 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}]$$

が成り立つ．条件付き期待値の線形性より

$$\begin{aligned}({}^{\mathfrak{p}}X_T + {}^{\mathfrak{p}}Y_T)1_{\{T<+\infty\}} &= {}^{\mathfrak{p}}X_T 1_{\{T<+\infty\}} + {}^{\mathfrak{p}}Y_T 1_{\{T<+\infty\}} \\ &= E[X_T 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}] + E[Y_T 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}] \\ &= E[X_T 1_{\{T<+\infty\}} + Y_T 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}] \\ &= E[(X_T + Y_T)1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}]\end{aligned}$$

となるので，${}^{\mathfrak{p}}X + {}^{\mathfrak{p}}Y$ は $X + Y$ の可予測射影であることがわかる．

(v) 非負性より，通常の条件付き期待値で話を進めればよい．$(X^{(n)})$ は仮定を満たす確率過程列とする．非負で可予測射影を持つから，任意の n と任意の可予測時刻 T に対して

$${}^{\mathfrak{p}}X_T^{(n)} 1_{\{T<+\infty\}} = E[X_T^{(n)} 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}]$$

である．$(X^{(n)})$ は可予測時刻列なので，各点の意味での極限 $Z := \liminf_n {}^{\mathfrak{p}}X^{(n)}$ も可予測である[*3]．可予測射影の単調性より，

$${}^{\mathfrak{p}}X_T^{(0)} 1_{\{T<+\infty\}} \leq {}^{\mathfrak{p}}X_T^{(1)} 1_{\{T<+\infty\}} \leq {}^{\mathfrak{p}}X_T^{(2)} 1_{\{T<+\infty\}} \leq \cdots$$

が a.s. の意味で成立するから，${}^{\mathfrak{p}}X_T^{(n)} 1_{\{T<+\infty\}} \to Z_T 1_{\{T<+\infty\}}$ も a.s. の意味で成立する[*4]．一方，条件付き期待値に関する単調収束定理を用いれば

$$\lim_{n\to\infty} E[X_T^{(n)} 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}] = E[X_T 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}], \quad P\text{-a.s.}$$

も成立．したがって $E[X_T 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}] = Z_T 1_{\{T<+\infty\}}$ となり，Z は X の可予測射影である．

(vi) T を任意の停止時刻としたとき，一般に

$$X^T = X 1_{[\![0,T]\!]} + X_T 1_{]\!]T,+\infty[\![}$$

と表現できることに注意する．$1_{[\![0,T]\!]}$ は可予測過程であるから，(iii) により $X 1_{[\![0,T]\!]}$ はまた可予測射影を持ち $1_{[\![0,T]\!]}({}^{\mathfrak{p}}X) = {}^{\mathfrak{p}}(1_{[\![0,T]\!]}X)$ が成立．

$$\begin{aligned}Y &= X_T 1_{]\!]T,+\infty[\![} = X_T 1_{\{T<+\infty\}} 1_{]\!]T,+\infty[\![} \\ Z &= {}^{\mathfrak{p}}X_T 1_{]\!]T,+\infty[\![} = {}^{\mathfrak{p}}X_T 1_{\{T<+\infty\}} 1_{]\!]T,+\infty[\![}\end{aligned}$$

[*3] 可予測射影をとると単調性は a.e. でしかないので，各点の意味での極限が存在するかは不明である．

[*4] 各点で収束するかは不明だが，a.s. の単調性より a.s. での収束は分かる．

と定義する．S を任意の可予測時刻とすれば，

$$\begin{aligned}
E[Y_S 1_{\{S<+\infty\}}|\mathscr{F}_{S-}] &= E[X_T 1_{\{T<S\}} 1_{\{S<+\infty\}}|\mathscr{F}_{S-}] \\
&= E[X_T 1_{\{T<+\infty\}} 1_{\{T<S\}} 1_{\{S<+\infty\}}|\mathscr{F}_{S-}] \\
&= 1_{\{T<S\}} 1_{\{S<+\infty\}} E[X_T 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{S-}] \\
&= 1_{\{T<S\}} 1_{\{S<+\infty\}} {}^{\mathfrak{p}}X_T 1_{\{T<+\infty\}} \\
&= Z_S 1_{\{S<+\infty\}}
\end{aligned}$$

となる．Z は可予測だから，これは Y の可予測射影である．さらに (iii) より

$$^{\mathfrak{p}}(X^T) = {}^{\mathfrak{p}}(X 1_{[\![0,T]\!]}) + {}^{\mathfrak{p}}(X_T 1_{]\!]T,+\infty[\![}) = ({}^{\mathfrak{p}}X) 1_{[\![0,T]\!]} + {}^{\mathfrak{p}}X_T 1_{]\!]T,+\infty[\![}$$

となることがわかる．後半の主張は前半の主張より明らかである． □

どのような確率過程が可予測射影を持つか調べるためには，まずはマルチンゲールを調べることが有用である．そのために，任意抽出定理の特殊なバージョンである可予測任意抽出定理 (predictable optional sampling theorem) を証明しよう．

命題 4.2.3 (可予測任意抽出定理).
$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，X を càdlàg な一様可積分 $\mathbb{F}$-マルチンゲールとする．このとき，任意の可予測時刻に対して

$$E[X_\infty|\mathscr{F}_{T-}] = E[X_T|\mathscr{F}_{T-}] = X_{T-} \tag{4.2.1}$$

が P-a.s. で成立する．

証明. T を可予測時刻とし，(T_n) を T の予告列とする．Ω 上 $S_n \le T \le +\infty$ だから，任意抽出定理により

$$E[X_\infty|\mathscr{F}_{T_n}] = E[X_T|\mathscr{F}_{T_n}] = X_{T_n} \tag{4.2.2}$$

が成り立つ．(T_n) は T の予告列であるから，$X_{T_n} 1_{\{T<\infty\}} \to X_{T-} 1_{\{T<\infty\}}$ が各点の意味で成り立つ．また $(X_{T_n})_{n\in\mathbb{N}}$ は一様可積分マルチンゲールであるから，$X_{T_n} 1_{\{T=\infty\}} \to X_\infty 1_{\{T=\infty\}}$ が概収束の意味で成り立つ．さらに命題 2.5.9 により $\bigvee_n \mathscr{F}_{S_n} = \mathscr{F}_{T-}$ が成り立つから，定理 1.5.8 により

$$\begin{aligned}
E[X_T|\mathscr{F}_{S_n}] &\to E[X_T|\mathscr{F}_{T-}] \\
E[X_\infty|\mathscr{F}_{S_n}] &\to E[X_\infty|\mathscr{F}_{T-}]
\end{aligned}$$

が a.s. かつ L^1 の意味で成り立つ．以上の議論により，(4.2.2) で極限操作をすることで

$$E[X_\infty|\mathscr{F}_{T-}] = E[X_T|\mathscr{F}_{T-}] = X_{T-}, \quad P\text{-a.s.}$$

がわかる． □

可予測任意抽出定理を用いると，一様可積分マルチンゲールの可予測射影を求めることができる．

命題 4.2.4.
一様可積分マルチンゲール X は可予測射影 ${}^{\mathfrak{p}}X = X_-$ を持つ．

証明. 命題 4.2.3 より，一様可積分マルチンゲールは任意の可予測時刻 T に対して

$$E[X_T|\mathscr{F}_{T-}] = X_{T-}$$

を満たす．これより，$A \in \mathscr{F}_{T-}$ なら

$$\begin{aligned} E[X_T 1_{\{T<\infty\}} 1_A] &= E[X_T 1_A] - E[X_\infty 1_{\{T=\infty\}} 1_A] \\ &= E[X_{T-} 1_A] - E[X_\infty 1_{\{T=\infty\}} 1_A] \\ &= E[X_{T-} 1_{\{T<\infty\}} 1_A] \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって

$$E[X_T 1_{\{T<\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}] = X_{T-} 1_{\{T<\infty\}}$$

である．X_- は可予測過程であるから，これは X の可予測射影であることがわかる． □

系 4.2.5.
可予測な一様可積分マルチンゲールは，確率 1 で連続である．

証明. X が可予測な一様可積分マルチンゲールならば X と X_- はともに X の可予測射影なので，可予測射影の一意性よりこれらは区別不能である． □

命題 4.2.6.
$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ は通常の条件を満たすとする．ξ を可積分確率変数とし，$B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ とする．$X(\omega, t) = \xi(\omega) 1_B(t)$ と定義する．M を $M_t = E[\xi|\mathscr{F}_t]$ a.s. を満たす càdlàg マルチンゲールとすれば，${}^{\mathfrak{p}}X = 1_B M_-$ が成り立つ．

証明. はじめに，$M_t = E[\xi|\mathscr{F}_t]$ a.s. を満たす càdlàg マルチンゲールが存在することに通常の条件を用いることに注意しておく．(定理 3.2.3) 1_B が可予測過程であることに注意すれば，命題 2.5.7 と定理 4.2.3，命題 4.2.4 から任意の可予測時刻 T に対して

$$\begin{aligned} E[X_T 1_{\{T<\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}] &= 1_{\{T<\infty\}} 1_B(T) E[\xi|\mathscr{F}_{T-}] \\ &= 1_{\{T<\infty\}} 1_B(T) E[M_\infty \mathscr{F}_{T-}] \\ &= 1_{\{T<\infty\}} 1_B(T) E[M_T 1_{\{T<\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}] \\ &= 1_B(T) M_{T-} 1_{\{T<\infty\}} \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって $1_B M_-$ は X の可予測射影である． □

以上の結果を用いると，有界可測過程に関する可予測射影の存在定理を証明できる．

定理 4.2.7.
任意の有界可測過程は，可予測射影を持つ．

証明 (概略). 命題 4.2.6 より，$X = 1_B \xi$ と表現される有界可測関数は可予測射影を持つ．条件付き期待値に関する非負性と単調収束定理を用いれば，可予測射影をもつ有界可測過程全体の空間が有界な単調収束につい

て閉じたベクトル空間で，定数関数全体を含むものであることが分かる．したがって関数型の単調族定理（定理 A.1.8）により，全ての有界可測過程は可予測射影を持つことが示される． □

可予測射影を用いて自然な増加過程の特徴付けを行おう．

定理 4.2.8.
フィルターつき確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ は通常の条件を満たすと仮定する．このとき，$A \in \mathscr{A}^+$ について次の条件は同値である．

(i) A は自然である．

(ii) 任意の有界可測過程 X に対して，

$$E\left[\int_{[0,\infty[} X_s dA_s\right] = E\left[\int_{[0,\infty[} {}^{\mathfrak{p}}X_s dA_s\right]$$

が成り立つ．

証明. (ii) $\Longrightarrow$ (i)．X を有界 càdlàg マルチンゲールとすれば $\mathfrak{p}X = X_-$ が成り立つことからわかる．

(i) $\Longrightarrow$ (ii)．まずは $X = \xi 1_{]s,t]}$（ξ は有界確率変数）の場合を考える．M を $M_t = E[\xi|\mathscr{F}_t]$ となるような càdlàg マルチンゲールとすれば，命題 4.2.6 より ${}^{\mathfrak{p}}X = M_- 1_{]s,t]}$ となる．A は自然であるから，このとき

$$\begin{aligned}
E\left[\int_{[0,\infty[} {}^{\mathfrak{p}}X_u dA_u\right] &= E\left[\int_{[0,\infty[} M_{u-} 1_{]s,t]}(u) dA_u\right] \\
&= E\left[\int_{[0,\infty[} M^t_{u-} dA_u\right] - E\left[\int_{[0,\infty[} M^s_{u-} dA_u\right] \\
&= E\left[\int_{[0,\infty[} M^t_u dA_u\right] - E\left[\int_{[0,\infty[} M^s_u dA_u\right] \\
&= E\left[\int_{]s,t]} M_u dA_u\right]
\end{aligned}$$

が成り立つ．

ここで，$\pi = (t_i)$ を $]s,t]$ の有限分割とする．このとき M の定義より

$$E\left[\sum_\pi M_{t_i}(A_{t_i} - A_{t_{i-1}})\right] = E\left[\sum_\pi \xi(A_{t_i} - A_{t_{i-1}})\right] = E\left[\xi(A_t - A_s)\right] = E\left[\int_{[0,\infty[} X_u dA_u\right]$$

が成り立つ．いま M の右連続性より

$$\sum_\pi M_{t_i} 1_{]t_{i-1},t_i]} \xrightarrow[|\pi|\to 0]{} M$$

が $\Omega \times]s,t]$ 上で成り立つから，有界収束定理により

$$\lim_{|\pi|\to 0} E\left[\sum_\pi M_{t_i}(A_{t_i} - A_{t_{i-1}})\right] = E\left[\int_{]s,t]} M_u dA_u\right]$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}E\left[\int_{[0,\infty[}{}^{\mathfrak{p}}X_u dA_u\right] &= E\left[\int_{]s,t]} M_u dA_u\right] \\ &= \lim_{|\pi|\to 0} E\left[\sum_{\pi} M_{t_i}(A_{t_i} - A_{t_{i-1}})\right] \\ &= E\left[\int_{[0,\infty[} X_u dA_u\right]\end{aligned}$$

を得る．これより，$X = \xi 1_{]s,t]}$ の時は主張が成り立つことが示された．単調族定理を用いれば，一般の有界可測過程についても同じ式が成り立つことが証明できる． □

定理 4.2.9.
フィルターつき確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ は通常の条件を満たすと仮定する．このとき，$A \in \mathscr{A}^+$ について次の条件は同値である．

(i) A は自然である．

(ii) 任意の有界可測過程 X に対して，

$$E\left[\int_{[0,\infty[} X_s dA_s\right] = E\left[\int_{[0,\infty[}{}^{\mathfrak{p}}X_s dA_s\right]$$

が成り立つ．

(iii) A は可予測である．

定理 4.2.9 の証明は，例えば Medvegyev [78, §5.1.2] などを参考にして欲しい．特に (ii) $\Longrightarrow$ (iii) の証明は概略だけでも本ノートのレベルで説明するのは難しいので，Medvegyev [78] や He, Wang, and Yan [53, 5.13 Theorem] などを見て欲しい．

証明（概略）. (i) と (ii) の同値性は定理 4.2.8 による．(iii) $\Longrightarrow$ (ii)．A は可予測であると仮定する．

$$C_t(\omega) = \inf\{s \in \mathbb{R}_+ \mid A_s \geq t\}$$

とすれば，C_t は可予測時刻となる[*5]．このとき，非負の有界可測過程 X に対して

$$\begin{aligned}E\left[\int_{[0,\infty[} X_s dA_s\right] &= E\left[\int_{[0,\infty[} X_{C_s} 1_{\{C_s<\infty\}} ds\right] \quad (\because \text{命題 A.9.7}) \\ &= \int_{[0,\infty[} E\left[X_{C_s} 1_{\{C_s<\infty\}}\right] ds \quad (\because \text{Fubini の定理}) \\ &= \int_{[0,\infty[} E\left[{}^{\mathfrak{p}}X_{C_s} 1_{\{C_s<\infty\}}\right] ds \quad (\because \text{可予測射影の定義，} \{C_s < \infty\} \in \mathscr{F}_{C_s-} \text{ に注意}) \\ &= E\left[\int_{[0,\infty[}{}^{\mathfrak{p}}X_{C_s} 1_{\{C_s<\infty\}} ds\right] \quad (\because \text{Fubini の定理})\end{aligned}$$

[*5] 停止時刻 T が可予測である $\Longleftrightarrow$ $[\![T]\!] \in \mathscr{P}$ という特徴付けを用いる．これの証明が難しい．

$$= E\left[\int_{[0,\infty[} {}^{\mathfrak{p}}X_s dA_s\right] \qquad (\because \text{命題 A.9.7})$$

となる．よって (iii) が成り立つ． □

4.3 Doob-Meyer 分解

本節では，劣マルチンゲールの Doob 分解の連続時間版である Doob-Meyer 分解を扱う．Doob-Meyer 分解は，劣マルチンゲールがマルチンゲールと増加過程に分解できることを主張する．大ざっぱな言い方をすれば劣マルチンゲールは全体として増加的な傾向があるので，その増加部分を抜き出してやろうというような話である．Doob-Meyer 分解は，二乗可積分マルチンゲールの解析や，それを用いた確率積分論の展開において決定的な役割を果たす，きわめて重要な定理である．

4.3.1 ポテンシャルについての Doob-Meyer 分解

定義 4.3.1.
正値の右連続優マルチンゲール (Z_t) で $\lim_{t\to\infty} E[Z_t] = 0$ を満たすようなものをポテンシャル (potential) という．

ポテンシャルとは，無限遠点で消え去る摂動項のようなものである．Z がポテンシャルなら $Z_t \to 0$ が L^1 収束の意味で成り立つので，Z は一様可積分でこの収束は a.s. の意味でも成り立っている．（定理 3.3.2）

これからは順を追って Doob-Meyer 分解の証明を行っていく．いきなり一般の場合に示すの難しいので，まずはポテンシャルに対する Doob-Meyer 分解の存在と一意性を証明しよう．これ以降，通常の条件を満たすフィルターつき $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ が一つ与えられているとして，その上で話を進めていく．

定理 4.3.2 (Doob-Meyer 分解).
Z をクラス (D) に属する càdlàg ポテンシャルとする．このとき，一様可積分マルチンゲール M と可積分な適合増加過程 A で $Z = M - A$ を満たすものが存在する．特に A は自然であるように取れて，A が自然であるような分解は区別不能の意味で一意的である．

この証明の発想は過程を離散化して Doob 分解を作り，その極限をとるということによって求める自然な増加過程 A を得るということである．

証明．Step 1：一意性の証明． $Z = M - A = M' - A'$ は $M, M' \in \mathscr{M}$ かつ $A, A' \in \mathscr{A}$ を満たす分解とする．このとき $M - M' = A - A' \in \mathscr{M} \cap \mathscr{A}$ が成り立つから，命題 4.1.8 により $M - M'$ は 0 と区別不能となる．したがって M と M' は区別不能であり，A と A' は区別不能である．

Step 2：離散化と Doob 分解． 以降のステップでは分解の存在を証明する．

$n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$Z_i^{(n)} = Z_{\frac{i}{2^n}}, \qquad \mathscr{F}_i^{(n)} = \mathscr{F}_{\frac{i}{2^n}}$$

と定義する．このとき $(Z_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}}$ は $(\mathscr{F}_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}}$ に関する離散時間のポテンシャルであり，Doob 分解 $Z^{(n)} = M^{(n)} - A^{(n)}$ を持つ．ただし，$A^{(n)}$ が可予測増加過程である．（定理 1.7.3）Z はポテンシャルであることか

ら，$M^{(n)}$ は一様可積分マルチンゲールであり，

$$Z_i^{(n)} = E[A_\infty^{(n)} | \mathscr{F}_i^{(n)}] - A_i^{(n)} \quad \text{a.s.} \tag{4.3.1}$$

が成り立っていることに注意する．

Step 3：増加過程 A の構成． 上で定義した $(A_\infty^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ は一様可積分な確率変数列である．見通しをよくするために，一様可積分性の証明はいったん認めて，最後のステップに回すことにする．

Dunford-Pettis の定理（定理 A.5.1）により $(A_\infty^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ は $L^1(\Omega, \mathscr{F}_\infty, P)$ の弱位相に関して収束する部分列をもつ．その極限を A_∞ と書くことにしよう．一様可積分マルチンゲール M を $(E[A_\infty|\mathscr{F}_t])_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ の càdlàg 修正とする．（ここで「通常の条件」を用いる．）さらに $A = (M - M_0) - (Z - Z_0)$ と定義する．このとき $A_0 = 0$ であることは明らかだろう．ここで $D = \{i/2^n\,;\, i, n \in \mathbb{N}\}$ と定義する．$t \in D$ とすれば，命題 A.5.2 と (4.3.1) から

$$A_t^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{weakly in } L^1(\mathscr{F}_\infty)} A_t$$

がなりたつ．したがって，$s, t \in D$ を $0 \leq s < t$ なるようにとれば $A^{(n)}$ が増加過程であったことにより

$$E[\xi(A_t - A_s)] = \lim_{n\to\infty} E[\xi(A_t^{(n)} - A_s^{(n)})] \geq 0$$

となる．$\xi \in L^\infty(\mathscr{F}_\infty)$ は任意に選んでいるから，これより $A_t \geq A_s$ a.s. がわかる．A は càdlàg なパスを持つように定めているから，

$$\bigcap_{\substack{s,t\in\mathbb{R}_{\geq 0}\\ s\leq t}} \{A_s \leq A_t\} = \bigcap_{\substack{s,t\in\mathbb{R}_{\geq 0}\cap D\\ s\leq t}} \{A_s \leq A_t\}$$

が成り立つ．D は可算集合であるから右辺の集合は確率 1 であり，よって A は確率 1 で増加的なパスをもつ．いまフィルトレーションは完備であるから，これより A は càdlàg なパスを持つとしてよい．

Step 4：A が自然であることの証明． Step 3 までで構成した A が自然であることを示そう．N を有界 càdlàg マルチンゲールとすれば，$A^{(n)}$ の可予測性と (4.3.1) から

$$\begin{aligned}
E[N_\infty A_\infty^{(n)}] &= \sum_{i\geq 0} E\left[N_{\frac{i}{2^n}}\left(A_{i+1}^{(n)} - A_i^{(n)}\right)\right] \\
&= \sum_{i\geq 0} E\left[N_{\frac{i}{2^n}}\left(E[A_\infty^{(n)}|\mathscr{F}_{i+1}] - Z_{i+1}^{(n)} - E[A_\infty^{(n)}|\mathscr{F}_i] + Z_i^{(n)}\right)\right] \\
&= \sum_{i\geq 0} E\left[N_{\frac{i}{2^n}}\left(-Z_{i+1}^{(n)} + Z_i^{(n)}\right)\right] \\
&= \sum_{i\geq 0} E\left[N_{\frac{i}{2^n}}\left(-Z_{\frac{i+1}{2^n}} + Z_{\frac{i}{2^n}}\right)\right] \\
&= \sum_{i\geq 0} E\left[N_{\frac{i}{2^n}}\left(E\left[A_\infty \,\middle|\, \mathscr{F}_{\frac{i+1}{2^n}}\right] - Z_{\frac{i+1}{2^n}} - E\left[A_\infty \,\middle|\, \mathscr{F}_{\frac{i}{2^n}}\right] + Z_{\frac{i}{2^n}}\right)\right] \\
&= E\left[\sum_{i\geq 0} N_{\frac{i}{2^n}}\left(A_{\frac{i+1}{2^n}} - A_{\frac{i}{2^n}}\right)\right]
\end{aligned}$$

となることがわかる．$n \to \infty$ とすれば，優収束定理より最後の辺は

$$E\left[\sum_{i\geq 0} N_{\frac{i}{2^n}}\left(A_{\frac{i+1}{2^n}} - A_{\frac{i}{2^n}}\right)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} E\left[\int_{[0,\infty[} N_{s-}\,dA_s\right]$$

を満たす．また A_∞ の定義より最初の辺は

$$E[N_\infty A^{(n)}_\infty] \xrightarrow[n\to\infty]{} E[N_\infty A_\infty]$$

となる．したがって任意の有界 càdlàg マルチンゲール N に対して

$$E[N_\infty A_\infty] = E\left[\int_{[0,\infty[} N_{s-} dA_s\right]$$

が成り立っており，命題 4.1.7 より A は自然であることがわかる．

Step 5：$(A^{(n)}_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ の一様可積分性の証明． 最後に，後回しにしていた (A^n_∞) の一様可積分性を証明をしよう．確率変数 $T^{(n)}_\lambda$ を

$$T^{(n)}_\lambda(\omega) = \inf\left\{\frac{j}{2^n}\,\middle|\, A^{(n)}_{j+1}(\omega) > \lambda\right\} = \frac{1}{2^n}\inf\left\{j\in\mathbb{N}\,\middle|\, A^{(n)}_{j+1}(\omega) > \lambda\right\}$$

と定義する．$A^{(n)}$ は可予測だから $(A^{(n)}_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$ は $(\mathscr{F}^{(n)}_i)_{i\in\mathbb{N}}$-適合であり，ゆえに命題 1.1.6 より $2^nT^{(n)}_\lambda$ は $(\mathscr{F}^n_j)_{j\in\mathbb{N}}$-停止時刻となる．したがって $T^{(n)}_\lambda$ は $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻となっている．また $A^{(n)}$ が増加過程であることから

$$\left\{T^{(n)}_\lambda < \infty\right\} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}}\left\{A^{(n)}_j > \lambda\right\} = \left\{A^{(n)}_\infty > \lambda\right\}$$

が成り立つことに注意しておく．(4.3.1) と離散時間の任意抽出定理より，

$$Z(T^{(n)}_\lambda)1_{\{T^{(n)}_\lambda<\infty\}} = E\left[A^{(n)}_\infty\,\middle|\,\mathscr{F}_{T^{(n)}_\lambda}\right]1_{\{T^{(n)}_\lambda<\infty\}} - A^{(n)}(T^{(n)}_\lambda)1_{\{T^{(n)}_\lambda<\infty\}} \tag{4.3.2}$$

が成り立つから，

$$\begin{aligned}\int_{\left\{A^{(n)}_\infty>\lambda\right\}} A^{(n)}_\infty dP &= \int_{\left\{A^{(n)}_\infty>\lambda\right\}} E\left[A^{(n)}_\infty\,\middle|\,\mathscr{F}_{T^{(n)}_\lambda}\right]dP\\ &\le \int_{\left\{T^{(n)}_\lambda<\infty\right\}} Z(T^{(n)}_\lambda) + \int_{\left\{A^{(n)}_\infty>\lambda\right\}} A^{(n)}(T^{(n)}_\lambda)dP\\ &\le \int_{\left\{T^{(n)}_\lambda<\infty\right\}} Z(T^{(n)}_\lambda) + \lambda P\left(\left\{A^{(n)}_\infty>\lambda\right\}\right)\end{aligned}$$

となる．また，式 (4.3.2) より

$$\begin{aligned}\int_{\left\{T^{(n)}_{\lambda/2}<\infty\right\}} Z\left(T^{(n)}_{\lambda/2}\right)dP &= \int_{\left\{T^{(n)}_{\lambda/2}<\infty\right\}} \left(A^{(n)}_\infty - A^{(n)}\left(T^{(n)}_{\lambda/2}\right)\right)dP\\ &\ge \int_{\left\{T^{(n)}_\lambda<\infty\right\}} \left(A^{(n)}_\infty - A^{(n)}(T^{(n)}_{\lambda/2})\right)dP\\ &\ge \int_{\left\{T^{(n)}_\lambda<\infty\right\}} \left(\lambda - \frac{\lambda}{2}\right)dP\\ &= \frac{\lambda}{2}P\left(T^{(n)}_\lambda<\infty\right)\end{aligned}$$

が成り立つ．これを先ほどの評価と合わせれば，

$$\int_{\left\{A^{(n)}_\infty>\lambda\right\}} A^{(n)}_\infty dP \le \int_{\left\{T^{(n)}_\lambda<\infty\right\}} Z(T^{(n)}_\lambda) + 2\int_{\left\{T^{(n)}_{\lambda/2}<\infty\right\}} Z\left(T^{(n)}_{\lambda/2}\right)dP \tag{4.3.3}$$

なる評価を得る．後は，$\lambda \to \infty$ としたとき (4.3.3) の右辺 n について一様に 0 に収束することを示せば $(A_a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ の一様可積分性が分かる．仮定より Z はクラス (D) なので $\left(Z(T_\lambda^{(n)})1_{\{T_\lambda^{(n)}<\infty\}}\right)_{\lambda>0}$ は一様可積分であり，特に一様に絶対連続である．Chebyshev の不等式より

$$P\left(T_\lambda^{(n)} < \infty\right) = P\left(A_\infty^{(n)} > \lambda\right) \le \frac{E[A_\infty^{(n)}]}{\lambda} = \frac{E[M_\infty^{(n)}]}{\lambda} = \frac{E[Z_0]}{\lambda}$$

であるから，

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} P\left(T_\lambda^{(n)} < \infty\right) \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0$$

が成り立つ．このことと $\left(Z(T_\lambda^{(n)})1_{\{T_\lambda^{(n)}<\infty\}}\right)_{\lambda>0}$ の一様可積分性より，(4.3.3) 右辺は $\lambda \to \infty$ で n について一様に 0 に収束することがわかった． □

Doob-Meyer 分解を用いると，クラス (D) のポテンシャルの特徴付けを行うことができる．

系 4.3.3.
Z を càdlàg 適合過程とする．このとき，Z がクラス (D) のポテンシャルであるための必要十分条件は，Z が $(E[A_\infty - A_t|\mathscr{F}_t])_{t\ge 0}$ の修正となるような $A \in \mathscr{A}$ が存在することである．

証明. 十分性は Doob-Meyer 分解よりわかるので，必要性を示そう．M を $(E[A_\infty|\mathscr{F}_t])_{t\ge 0}$ の càdlàg 修正とすれば，$Z = M - A$ が区別不能の意味で成り立つ．A が増加過程であることから $Z \ge 0$ がわかる．また M はマルチンゲールで A が劣マルチンゲールであることから，$Z = M - A$ は優マルチンゲールであることもわかる．さらに A の可積分性より A はクラス (D) であり，また任意抽出定理より M もクラス (D) となる．ゆえに Z もクラス (D) である． □

4.3.2 Riesz 分解とクラス (D) 劣マルチンゲールの Doob-Meyer 分解

Doob-Meyer 分解をクラス (D) の劣マルチンゲールに拡張するために，連続時間の Riesz 分解を導入しよう．

定義 4.3.4.
確率過程 X がマルチンゲール M とポテンシャル Z によって $X = M + A$ を表現できるとき，この表現を X の Riesz 分解 (Riesz decomposition) という．

X が Riesz 分解可能ならば，X は優マルチンゲールとなる．クラス (D) の優マルチンゲールは Riesz 分解を持つ．

命題 4.3.5.
X をクラス (D) の càdlàg 優マルチンゲールとする．このときクラス (D) のポテンシャル Z と一様可積分マルチンゲール M で，$X = M + Z$ を満たすものが存在する．この分解は区別不能の意味で一意である．

証明. Step 1：分解の存在. X はクラス (D) の優マルチンゲールだから一様可積分であり，劣マルチンゲール収束定理（定理 3.3.2）によって $X_t \to {}^\exists X_\infty \in L_1$ が L^1 収束かつ概収束の意味で成り立つ．$M \in \mathscr{M}$ を

$E[X_\infty|\mathscr{F}_t]$ の càdlàg バージョンとして定義する[*6]．このとき $Z := X - M$ がクラス (D) のポテンシャルであることを示そう．X と M はともにクラス (D) だから，Z もクラス (D) である．$s < t$ とすれば

$$Z_s = M_s - X_s \geq E[M_t|\mathscr{F}_s] - E[X_t|\mathscr{F}_s] = E[M_t - X_t|\mathscr{F}_s] \quad \text{a.s.}$$

が成立．一様可積分性より $M_t \to M_\infty = X_\infty$ かつ $X_t \to X_\infty$ が L^1 収束の意味で成り立ち，これより $Z_s \geq 0$, a.s. が分かる．また，L^1 収束より

$$E[X_t] = E[M_t - X_t] \xrightarrow[t\to\infty]{} E[X_\infty - X_\infty] = 0$$

となるから，Z はポテンシャルである．

Step 2：一意性． $X = M_1 - Z_1 = M_2 - Z_2$ を 2 種類の分解とする．Z_1, Z_2 はクラス (D) のポテンシャルだから，$Z_i \to 0$ が L_1 かつ a.s. の意味で成立．したがって

$$0 = \lim_{t\to\infty}(Z_1 - Z_2)(t) = \lim_{t\to\infty} E[M_1(\infty) - M_2(\infty)|\mathscr{F}_t] = M_1(\infty) - M_2(\infty), \quad \text{a.s.}$$

となる．これより M_1 と M_2 は修正であり，右連続性より区別不能である．したがって Z_1 と Z_2 も区別不能である． □

Riesz 分解を利用すると，クラス (DL) の劣マルチンゲールに対する Doob-Meyer 分解が証明できる．

定理 4.3.6 (Doob-Meyer 分解).
X をクラス (D) の càdlàg 劣マルチンゲールとする．このとき，$M \in \mathscr{M}$ と $A \in \mathscr{A}^+$ で，$X = M + A$ を満たすものが存在する．さらに A は自然であるようにとれて，A が自然となるような分解は区別不能の意味で一意的である．

証明. $-X = M + Z$ を Riesz 分解とする．（命題 4.3.5.）Z はクラス (D) のポテンシャルだから，定理 4.3.2 より Doob-Meyer 分解 $Z = N - A$ が存在する．このとき $X = (-M - N) + A$ が求める分解である．

次に，分解の一意性を証明する．$X = M_1 + A_1 = M_2 + A_2$ を 2 種類の Doob-Meyer 分解とする．このとき，$A_1 - A_2 = M_2 - M_1 \in \mathscr{M} \cap \mathscr{A}$ は Y は自然である．したがって命題 4.1.8 により $A_1 - A_2 = 0$ が区別不能の意味で成り立つ． □

系 4.3.7.
X がクラス (D) の càdlàg 劣マルチンゲールであるための必要十分条件は，$X = M + A$（$M \in \mathscr{M}$, $A \in \mathscr{A}^+$）という分解をもつことである．

証明. 必要性は，定理 4.3.6 よりしたがう．十分性を示そう．$X = M + A$ なる分解が与えられたとする．M はマルチンゲールで A は劣マルチンゲールだから，このとき X も劣マルチンゲールである．また M は一様可積分性マルチンゲールなのでクラス (D) であり，また $A \in \mathscr{A}^+ = \mathscr{V}^+ \cap \mathscr{D}^1$ だから A もクラス (D) に属する．ゆえにそれらの和で表現される X もクラス (D) に属する． □

[*6] フィルトレーションが通常の条件を満たすことから可能である．

4.3.3 クラス (DL) 劣マルチンゲールの Doob-Meyer 分解

Doob-Meyer 分解をクラス (DL) の劣マルチンゲールに拡張しよう．

定理 4.3.8 (Doob-Meyer 分解).
X をクラス (DL) に属する càdlàg 劣マルチンゲールとする．このとき，マルチンゲール M と $A \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ で $X = M + A$ を満たすものが存在する．このとき A は自然であるようにとれて，A が自然となるような分解は一意的である．

証明. $T_n \equiv n \in \mathbb{N}$ と定義すれば，停止過程 X^{T_n} はクラス (D) の劣マルチンゲールである．したがって定理 4.3.6 により $M^{(n)} \in \mathscr{M}$ と自然な $A^{(n)} \in \mathscr{A}^+$ で $X^{T_n} = M^{(n)} + A^{(n)}$ を満たすものが存在する．（$M^{(n)}$ と $A^{(n)}$ の右肩の (n) は停止過程の意味ではなくて添え字.）定理 4.3.6 における一意性より，このとき任意の n に対して $(M^{(n+1)})^{T_n} = M^{(n)}$ および $(A^{(n+1)})^{T_n} = A^{(n)}$ が区別不能の意味で成り立つ．したがってマルチンゲール M と自然な $A \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ で，任意の n について $M^{T_n} = M^{(n)}$ かつ $A^{T_n} = A^{(n)}$ を区別不能の意味で満たすものが存在する．いま $X = M + A$ が成り立っているから，これが求める分解である．一意性は，X^{T_n} に対する Doob-Meyer 分解の一意性（A が自然な場合）よりわかる． □

系 4.3.9.
càdlàg 適合過程 X がクラス (DL) の càdlàg 劣マルチンゲールとなるための必要十分条件は，その分解 $X = M + A$ で (i) M は càdlàg マルチンゲールである，(ii) $A \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ は $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ を局所化列として持つ，を満たすものが存在することである．

証明. X がクラス (DL) の劣マルチンゲールならばそのような分解が存在することは，定理 4.3.8 よりわかる．

逆に，$X = M + A$ は条件 (i)，(ii) を満たす分解であると仮定する．X はマルチンゲールと $A_t \in L^1$（$\forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$）なる適合増加過程（よって A は劣マルチンゲール）の和で表されているから，劣マルチンゲールである．M はマルチンゲールだから，系 3.4.7 によりクラス (DL) に属する．また A は増加過程だから任意の $a \geq 0$ と $T \in \mathscr{T}_{\leq a}$ について $0 \leq A_T \leq A_a \in L^1(P)$ となり，$(A_T)_{T\in\mathscr{T}_{\leq a}}$ も一様可積分である．ゆえに A もクラス (DL) に属する．したがってそれらの和で表される X もクラス (DL) に属する． □

4.3.4 Doob-Meyer 分解における増加過程の連続性

この節の残りの部分では，Doob-Meyer 分解における増加過程が連続なパスをもつための必要十分条件を調べる．はじめに，必要な概念の定義をしよう．

定義 4.3.10.
X を càdlàg な一様可積分劣マルチンゲールとする．任意の可予測時刻 T に対して $E[X_T] = E[X_{T-}]$ が成り立つとき，X は正則（regular）であるという．

正則性を用いると，Doob-Meyer 分解における増加過程が連続なものがとれるのはどのような場合か特徴づけることができる．

定理 4.3.11.
X をクラス (D) の劣マルチンゲールとする．このとき Doob-Meyer 分解 $X = M + A$ の自然な増加過程 $A \in \mathscr{A}^+$ として連続なものがとれるための必要十分条件は，X が正則であることである．

証明．ステップ 1：（A が連続） $\Longrightarrow$ （X は正則）の証明． A は連続であると仮定すれば，任意の可予測時刻 T について $E[A_T] = E[A_{T-}]$ が成り立つ．また可予測任意抽出定理より，$E[M_T] = E[M_{T-}]$ となるので，任意の可予測時刻ついて

$$E[X_T] = E[M_T] + E[A_T] = E[M_{T-}] + E[A_{T-}] = E[X_{T-}]$$

が成り立つ．ゆえに X は正則である．

ステップ 2：（X が正則） $\Longrightarrow$ （A が連続）の証明．ステップ 2-1：方針． 最初に，パス $A_{\cdot}(\omega)$ が連続であることは

$$\sum_{t \geq 0} (A_t(\omega) - A_{t-}(\omega))^2 = 0$$

が成り立つことと同値であることに注意しておく．命題 A.9.2 よりパスごとに

$$\int_{[0,\infty[} (A_s(\omega) - A_{s-}(\omega)) dA_s(\omega) = \sum_{t \geq 0} (A_t(\omega) - A_{t-}(\omega))^2$$

が成り立つから，A が確率 1 で連続なパスを持つことを示すためには，

$$E\left[\int_{[0,\infty[} (A_s - A_{s-}) dA_s\right] = 0$$

を示せばよいことがわかる．単調収束定理より，そのためには任意の $K > 0$ について

$$E\left[\int_{[0,\infty[} (K \wedge A_s)\, dA_s\right] = E\left[\int_{[0,\infty[} (K \wedge A_{s-})\, dA_s\right] \tag{4.3.4}$$

が成り立つことを示せばよいとわかる．

いま A は自然であることから，定理 4.2.8(i) $\Longrightarrow$ (ii) により

$$E\left[\int_{[0,\infty[} (K \wedge A_s)\, dA_s\right] = E\left[\int_{[0,\infty[} {}^{\mathfrak{p}}(K \wedge A)(s) dA_s\right]$$

が成り立っている．また仮定より X は正則なので，任意の可予測時刻 T に対して $E[K \wedge A_T] = E[K \wedge A_{T-}]$ が成り立つ．A が増加過程であることから，$E[K \wedge A_T | \mathscr{F}_{T-}] \geq E[A_{T-}]$ が成り立つので，これより $E[K \wedge A_T | \mathscr{F}_{T-}] = K \wedge A_{T-}$ となる．したがって $K \wedge A_-$ は $K \wedge A$ の可予測射影となることがわかる．ゆえに

$$E\left[\int_{[0,\infty[} (K \wedge A_s)\, dA_s\right] = E\left[\int_{[0,\infty[} (K \wedge A_{s-})\, dA_s\right]$$

となり，実際に (4.3.4) が成り立つことが確かめられた． □

4.4 二乗可積分マルチンゲール

本節では，積分論において中心的な役割を果たす二乗可積分なマルチンゲールとその二次変分についての基礎事項を解説する．これから後の節においては通常の条件を満たすフィルターつき確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を一つ固定した上で議論を進める．

4.4.1 マルチンゲール空間 $\mathcal{M}^2$

定義 4.4.1.
マルチンゲール M は $\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} E[M_t^2] < \infty$ を満たすとき，二乗可積分 (square integrable) であるという．

二乗可積分マルチンゲールに関する空間をいくつか用意する．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}^2 &= \{M = (M_t)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} \mid M \text{ は càdlàg な二乗可積分マルチンゲール.}\} \\
\mathcal{M}^2_0 &= \{M \in \mathcal{M}^2 \mid M_0 = 0\} \\
\mathcal{M}^{2,\mathrm{c}} &= \{M \in \mathcal{M}_2 \mid M \text{ は連続なパスをもつ.}\} \\
\mathcal{M}^{2,\mathrm{c}}_0 &= \mathcal{M}^{2,\mathrm{c}} \cap \mathcal{M}^2_0
\end{aligned}
$$

これらはより正確には $\mathcal{M}^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ などと書くべき空間であり，必要な時にはそのような表記を行うこともある．定義よりすぐにわかるように，$\mathcal{M}^2$ は停止について安定な線形空間である．これらの空間が重要なのは，$\mathcal{M}^2$（の商空間）が適切な内積について Hilbert 空間となるからである．そのことにより，Hilbert 空間論の諸結果を使って二乗可積分マルチンゲールによる確率積分の理論を展開することができるようになる．

命題 4.4.2.
$\mathcal{M}^2 = \mathcal{M} \cap \mathscr{D}^2$ が成り立つ．さらに $\mathcal{M}^2$ は $\mathscr{D}^2$ の位相について閉部分空間であり，特にそのセミノルム $\| \ \|_{\mathscr{D}^2}$ の制限により完備な擬距離空間となる．したがって商空間 $\mathcal{M}^2/P$ は Banach 空間である．また $\mathcal{M}^{2,\mathrm{c}}/P$，$\mathcal{M}^2_0/P$，$\mathcal{M}^{2,\mathrm{c}}_0/P$ はどれもその閉部分空間である．

証明. $M \in \mathcal{M}^2$ なら定義より $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ は L^2 有界な族なので，一様可積分である．また L^2 有界性と系 3.1.4 から $M \in \mathscr{D}^2$ となることもわかる．よって $\mathcal{M}^2 \subset \mathcal{M} \cap \mathscr{D}^2$ である．逆に $M \in \mathcal{M} \cap \mathscr{D}^2$ なら M は

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} E\left[M_t^2\right] \leq E\left[\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} |M_t|^2\right] < \infty$$

を満たすマルチンゲールなので，$M \in \mathcal{M}^2$ となる．ゆえに $\mathcal{M} \cap \mathscr{D}^2 \subset \mathcal{M}^2$ も成り立つので，$\mathcal{M}^2 = \mathcal{M} \cap \mathscr{D}^2$ である．

$\mathcal{M}^2$ が $\mathscr{D}^2$ の閉部分空間であることを示そう．$M^{(n)} \to X$ が $\mathscr{D}^2$ の意味で成り立つとき，X がマルチンゲールになることを示せばよい．$\mathscr{D}^2$ のノルムの定義より，このとき任意の $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ について $M_t^{(n)}$ は X_t に L^2 収束している．$0 \leq s \leq t$ なる s, t を任意に選べば，各 $X^{(n)}$ のマルチンゲール性により任意の $A \in \mathscr{F}_s$ に対して

$$E\left[M_t^{(n)} 1_A\right] = E\left[M_s^{(n)} 1_A\right]$$

が成り立つ．この式において $n \to \infty$ の極限をとれば，

$$E[X_t 1_A] = E[X_s 1_A]$$

となり，X のマルチンゲール性がわかる．

最後の主張は $\mathcal{M}^{2,\mathrm{c}} = \mathscr{D}^{2,\mathrm{c}} \cap \mathcal{M}^2$ と一つ前の主張，命題 2.7.4 から従う． $\square$

命題 4.4.2 より $M \in \mathscr{M}^2$ なら M は一様可積分となるので，マルチンゲール収束定理から (M_t) は $M_\infty \in L^1$ に概収束かつ L^1 収束する．また $M \in \mathscr{D}^2$ であることから，$(|M_t|^2)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ は一様可積分な族となることがわかる．($\sup_t |M_t|^2 \in L^1$ が優関数となる．) したがって，(M_t) は L^2 ノルムの意味でも M_∞ に収束しており (定理 A.2.8)，$(|M_t|^2)_{t\in[0,\infty]}$ は劣マルチンゲールとなっている．以上の考察から，

$$E[M_\infty^2] \leq E\left[\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} |M_t|\right] \leq 4 \sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} E[M_t^2] \leq 4E[M_\infty^2]$$

となり，上の 3 つの量はどれも $\mathscr{M}^2$ における同値な（セミ）ノルムを与えることがわかる．この中でも

$$\langle M, N\rangle_{\mathscr{M}^2} = E[M_\infty N_\infty]$$

とすればこれは正値双線形形式であるから，商空間 $\mathscr{M}^2/P$ はこれから誘導される内積により Hilbert 空間となる．したがって，常用する（セミ）ノルムとしては $E[M_\infty^2]$ がもっとも都合が良いものになるだろう．これ以降，測度論や確率解析の慣例に従って，$\mathscr{M}^2$ とその商空間 $\mathscr{M}^2/P$ を特に断りなく同一視することにする．

以下の命題における式変形は，今後の議論で頻繁に用いられる．

命題 4.4.3.
$M \in \mathscr{M}^2$ かつ任意の $0 \leq s \leq t \leq u \leq \infty$ について

$$E[(M_u - M_t)^2|\mathscr{F}_s] = E[M_u^2 - M_t^2|\mathscr{F}_s]$$

が成り立つ．

証明. $0 \leq s \leq t \leq u \leq \infty$ なら，

$$\begin{aligned} E[(M_u - M_t)^2|\mathscr{F}_s] &= E[M_u^2 - 2M_uM_t + M_t^2|\mathscr{F}_s] \\ &= E[M_u^2|\mathscr{F}_s] - 2E[E[M_uM_t|\mathscr{F}_t] \mid \mathscr{F}_s] + E[M_t^2|\mathscr{F}_s] \\ &= E[M_u^2|\mathscr{F}_s] - 2E[M_tE[M_u|\mathscr{F}_t] \mid \mathscr{F}_s] + E[M_t^2|\mathscr{F}_s] \\ &= E[M_u^2|\mathscr{F}_s] - 2E[M_t^2|\mathscr{F}_s] + E[M_t^2|\mathscr{F}_s] \\ &= E[M_u^2 - M_t^2|\mathscr{F}_s] \end{aligned}$$

と計算すればよい． □

4.4.2 二次変分

4.4.1 節での議論と系 3.4.4 から，次の命題が導かれる．

命題 4.4.4.
$M \in \mathscr{M}^2$ なら，$(|M_t|^2)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ はクラス (D) の劣マルチンゲールである．

したがって，M^2 はある $N \in \mathscr{M}$ と自然な $A \in \mathscr{A}^+$ を用いて $M = N + A$ と（区別不能の意味で）一意的に表現することができる．さらに $M \in \mathscr{M}^{2,c}$ なら M は正則なので，この増加過程 A として連続なものがとれる．

定義 4.4.5.
$M \in \mathscr{M}^2$ とし，$M^2 = N + A$ をその Doob-Meyer 分解（$N \in \mathscr{M}$ かつ $A \in \mathscr{A}^{+,\mathrm{c}}$）とする．このとき，$A \in \mathscr{A}^{+,\mathrm{c}}$ を $\langle M, M\rangle$ で表し，二乗可積分マルチンゲール M の (quadratic variation) とよぶ．

$\langle M, M\rangle$ のことを単に $\langle M\rangle$ と書くことも多い．Doob-Meyer 分解の一意性より，$\langle M\rangle$ は 0 出発の自然な増加過程であって $M^2 - \langle M, M\rangle$ が一様可積分マルチンゲールとなるような唯一のものである．

命題 4.4.6.
$M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ が $E[\langle M, M\rangle_\infty] = 0$ を満たせば，M は M_0 と区別不能である．

証明. $\langle M\rangle$ は増加過程なので，$\langle M\rangle_\infty = 0$ なら $\langle M\rangle$ は 0 と区別不能となる．このとき M^2 は一様可積分マルチンゲールであるから，命題 4.4.3 により任意の $t \in [0,\infty]$ について

$$E[(M_t - M_0)^2] = E[M_t^2] - E[M_0^2] = 0$$

が成り立つ．よって M は仮定 $X \equiv M_0$ の修正であり，連続性よりこれらは区別不能である． □

命題 4.4.6 よりわかることは，$\langle M\rangle$ は二乗可積分マルチンゲールの変動をコントロールする量だということである．二次変分のこういった側面は，4.8 節で詳しく調べる．

命題 4.4.7.
$M \in \mathscr{M}^2$ とすれば，任意の停止時刻 T について

$$\langle M^T, M^T\rangle = \langle M, M\rangle^T$$

が成り立つ．

証明. 一意性より，$(M^T)^2 - \langle M, M\rangle^T$ が一様可積分マルチンゲールになることを示せば十分である．実際，これは系 3.4.8 より直ちにしたがう． □

$\mathscr{M}^2$ は線形空間であったから，$M, N \in \mathscr{M}^2$ とすれば $M+N, M-N \in \mathscr{M}^2$ である．このとき簡単な計算により

$$\begin{aligned}&(M+N)^2 - \langle M+N, M+N\rangle - (M-N)^2 - \langle M-N, M-N\rangle \\ &= 4MN - (\langle M+N, M+N\rangle - \langle M-N, M-N\rangle)\end{aligned}$$

ことがわかる．$(M+N)^2 - \langle M+N\rangle$ および $(M-N)^2 - \langle M-N\rangle$ が一様可積分マルチンゲールであることに注意すれば，

$$MN - \frac{1}{4}(\langle M+N, M+N\rangle - \langle M-N, M-N\rangle)$$

もまた一様可積分マルチンゲールであることが確認できる．

定義 4.4.8.
$M, N \in \mathscr{M}^2$ に対して確率過程 $\langle M, N\rangle = (\langle M, N\rangle_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を

$$\langle M, N\rangle_t = \frac{1}{4}(\langle M+N, M+N\rangle_t - \langle M-N, M-N\rangle_t)$$

と定義し，$\langle M, N\rangle$ を M と N の二次共変分 (quadratic covariation) あるいは交叉変分 (cross variation) とよぶ．

$\langle M, N\rangle$ M と N の (angular-, sharp-) ブラケット (bracket) ということもある．$M = N$ とすれば，二次共変分 $\langle M, M\rangle$ と二次変分 $\langle M, M\rangle$ は明らかに一致するので，これは先ほどの二次変分の定義と整合性のとれた記法である．

定義 4.4.8 におけるブラケットは（二次変分の存在を認める限りは）構成的な定義だったが，マルチンゲール理論的な方法で以下のように特徴づけることができる．

命題 4.4.9.
$M, N \in \mathscr{M}^{2,c}$ とする．$MN - A$ が一様可積分マルチンゲールかつ $A \in \mathscr{A}^c$ が成り立つなら，$\langle M, N\rangle = A$ が区別不能の意味で成り立つ．

証明. $MN - A$ がマルチンゲールとなるような $A \in \mathscr{A}^c$ が存在したとする．このとき

$$MN - \langle M, N\rangle - (MN - A) = A - \langle M, N\rangle \in \mathscr{A}^+ \cap \mathscr{M}$$

が成り立つ．さらにこの過程は連続（ゆえに自然）であるから，命題 4.1.8 により $A = \langle M, N\rangle$ がわかる．□

系 4.4.10.
$M, N \in \mathscr{M}^2$ なら，

$$\langle M, N\rangle_{\mathscr{M}^2} = E[M_\infty N_\infty] = E[M_0 N_0 + \langle M, N\rangle_\infty]$$

が成り立つ．

証明. 一つ目の等号は定義である．$MN - \langle M, N\rangle$ は一様可積分マルチンゲールであるから，

$$E[M_\infty N_\infty - \langle M, N\rangle_\infty] = E[M_0 N_0]$$

が成り立つ．これを変形すれば，二つ目の等号を得る．□

命題 4.4.11.
$M, N \in \mathscr{M}^{2,c}$ とする．このとき任意の停止時刻 T に対して

$$\langle M^T, N^T\rangle = \langle M^T, N\rangle = \langle M, N^T\rangle = \langle M, N\rangle^T$$

がなりたつ．

証明. $(MN)^T = M^T N^T$ であることから $M^T N^T - \langle M, N\rangle^T$ は一様可積分マルチンゲールとなる．したがって命題 4.4.9 の一意性より $\langle M^T, N^T\rangle = \langle M, N\rangle^T$ が分かる．

S を任意の停止時刻とすれば，$M_S^T(N-N^T)_S = M^{T\wedge S}(N_S - N_{S\wedge T})$ は可積分であり，任意抽出定理より

$$E[M_{T\wedge S}(N_S - N_{S\wedge T})] = E[M_{T\wedge S}E[N_S - N_{S\wedge T}|\mathscr{F}_{S\wedge T}]] = 0 = E[M_0^T(N_0 - N_0^T)]$$

が成り立つ．したがって命題 3.4.9 により $M^T(N-N^T)$ は一様可積分マルチンゲールとなる．これと一様可積分マルチンゲール $M^TN^T - \langle M,N\rangle^T$ との和をとることで，$M^TN - \langle M,N\rangle^T$ も一様可積分マルチンゲールになることがわかる．これより再び命題 4.4.9 の一意性を用いれば，$\langle M,N\rangle^T = \langle M^T,N\rangle$ がしたがう．後の一つはこれと二次共変分の対称性よりわかる． □

次はブラケットの代数的な性質を調べよう．

命題 4.4.12.
二次共変分 $\langle\ ,\ \rangle$ は，対称双線形写像 $\langle\ ,\ \rangle\colon \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}} \times \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}} \to \mathscr{A}^{\mathrm{c}}$ を定める．

証明. 対称性は命題 4.4.9 よりすぐにわかる．よって第一成分についての線形性を示せばよい．$M, M', N \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ とする．

$$(M+M')N - (\langle M,N\rangle + \langle M',N\rangle) = MN - \langle M,N\rangle + M'N - \langle M',N\rangle$$

は一様可積分マルチンゲールで $\langle M,N\rangle + \langle M',N\rangle \in \mathscr{A}^c$ であるから，命題 4.4.9 により

$$\langle M+M',N\rangle = \langle M,N\rangle + \langle M',N\rangle$$

が区別不能の意味で成り立つ．また，$M,N \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ および $\alpha \in \mathbb{R}$ とすれば

$$(\alpha M)N - \alpha\langle M,N\rangle = \alpha(MN - \langle M,N\rangle)$$

は一様可積分マルチンゲールであるから，やはり命題 4.4.9 により

$$\langle \alpha M,N\rangle = \alpha\langle M,N\rangle$$

が区別不能の意味で成り立つこともわかる． □

実は線形性よりもう少し強く，次のことが成り立つ．

命題 4.4.13.
$M,N \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ かつ $Z \in L^\infty(\mathscr{F}_0)$ なら，

$$Z\langle M,N\rangle = \langle ZM,N\rangle = \langle M,ZN\rangle$$

が成り立つ．

証明. 一つ目の等号を示す．まずは $M,N \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ かつ $Z \in L^\infty(\mathscr{F}_0)$ なら $ZM \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ となることに注意しておく．したがって命題 4.4.9 より，$(ZM)N - Z\langle M,N\rangle$ が一様可積分マルチンゲールになっていることを示せば十分であるが，これは

$$(ZM)N - Z\langle M,N\rangle = Z(MN - \langle M,N\rangle)$$

という簡単な書き換えに注意すればわかる．二つ目の等号も同様に示される． □

命題 4.4.12 と 4.4.13 をまとめると，ブラケットは可換環 $L^\infty(\mathscr{F}_0)$ 上の加群 $\mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ における双線形写像を定めるということになる．

4.4.3 國田・渡辺の不等式

本節では，國田・渡辺の不等式と呼ばれる Stieltjes 確率積分に関する結果を紹介しよう．まずはパスレベルでの國田・渡辺の不等式を証明し，その後それを確率過程のレベルに応用するという方針で行く．

補題 4.4.14.
$a,b,c \in BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ は右連続で，$|c(0)| \leq \sqrt{|a(0)|}\sqrt{|a(0)|}$ を満たし，さらに任意の $s \leq t$ に対して

$$|c(t)-c(s)| \leq \sqrt{|V(a)(t)-V(a)(s)|}\sqrt{|V(b)(t)-V(b)(s)|}$$

が成り立っているとする．このとき，任意の Borel 可測関数 f,g に対して，

$$\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} |f(s)g(s)|dV(c)(s) \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} |f(s)|^2 dV(a)(s)}\sqrt{\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} |g(s)|^2 dV(b)(s)}$$

が成立する．ただし，$V(a)$，$V(b)$，$V(c)$ はそれぞれ a,b,c の全変動関数を表す．

証明. まずは，二次不等式に関するよく知られた事実を復習しておこう：

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \alpha x^2 + 2\beta x + \gamma \geq 0$$

が成り立つための必要十分条件は，

$$\alpha \geq 0, \quad |\beta| \leq \sqrt{|\alpha\gamma|}$$

が成り立つことである．

右連続増加関数 φ を

$$\varphi(t) = V(a)(t) + V(b)(t) + V(c)(t)$$

と定義する．このとき $V(a), V(b), c$ はどれも φ に対して絶対連続なので，その Radon-Nikodym 導関数をそれぞれ

$$\frac{dV(a)}{d\varphi} = a', \quad \frac{dV(b)}{d\varphi} = b', \quad \frac{dc}{d\varphi} = c'$$

と表すことにする．

ここで $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\psi_\lambda(t) = \lambda^2 V(a)(t) + 2\lambda c(t) + V(b)(t)$$

と定義する．

$$\psi_\lambda(t) - \psi_\lambda(s) = \lambda^2 \{V(a)(t) - V(a)(s)\} + 2\lambda \{c(t) - c(s)\} + \{V(b)(t) - V(b)(s)\}$$

であるから，仮定と最初の考察により，

$$\forall s \leq \forall t \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \psi_\lambda(t) - \psi_\lambda(s) \geq 0$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \psi_\lambda(0) \geq 0$$

が成り立つことがわかる．

いま ψ_λ はどれも φ に絶対連続な正値の増加関数なので，

$$d\varphi\text{-a.e.}\quad \frac{d\psi_\lambda}{d\varphi} = \lambda^2 a' + 2\lambda c' + b' \geq 0$$

が成り立つ．特に λ が $\mathbb{Q}$ 上を走る場合を考えれば，これより

$$d\varphi\text{-a.e.}\quad \forall\lambda \in \mathbb{Q},\quad \lambda^2 a' + 2\lambda c' + b' \geq 0$$

を得る．この不等式の左辺は λ について連続関数なので，ここから結局

$$d\varphi\text{-a.e.}\quad \forall\lambda \in \mathbb{R}\quad \lambda^2 a' + 2\lambda c' + b' \geq 0$$

とできることがわかる．また最初の考察に戻れば，この不等式より

$$d\varphi\text{-a.e.}\quad |c'| \leq \sqrt{|a'b'|}$$

なる関係が示される．

後は Schwarz の不等式を用いて計算するだけである．f, g を $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上の Borel 可測関数とすれば，

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\infty[} |fg| dV(c) &= \int_{[0,\infty[} |fg||c'| d\varphi \\
&\leq \int_{[0,\infty[} |f|\sqrt{|a'|}|g|\sqrt{|b'|} d\varphi \\
&\leq \sqrt{\int_{[0,\infty[} |f|^2 |a'| d\varphi}\sqrt{\int_{[0,\infty[} |g|^2 |b'| d\varphi} \\
&= \sqrt{\int_{[0,\infty[} |f|^2 dV(a)}\sqrt{\int_{[0,\infty[} |g|^2 dV(b)}
\end{aligned}$$

となり，求めていた不等式を得る．□

補題 4.4.14 を二次共変分による Stieltjes 確率積分に適用するために，二次共変分が確率 1 で補題 4.4.14 の仮定を満たすことを示そう．

補題 4.4.15.
$M, N \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ とすれば，ほとんど全てのパスについて

$$\forall s \leq \forall t,\quad |\langle M, N\rangle_t(\omega) - \langle M, N\rangle_s(\omega)| \leq \sqrt{\langle M\rangle_t(\omega) - \langle M\rangle_s(\omega)}\sqrt{\langle N\rangle_t(\omega) - \langle N\rangle_s(\omega)}$$

が成り立つ．

証明. $\lambda \in \mathbb{R}$ とすれば，ブラケットの線形性により

$$\langle M\rangle + 2\lambda\langle M, N\rangle + \lambda^2\langle N\rangle\langle M + \lambda N\rangle \geq 0 \tag{4.4.1}$$

が区別不能の意味で成り立つ．これより

$$\text{for a.e. } \omega \in \Omega, \forall\lambda \in \mathbb{Q}, \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\quad \langle M\rangle_t(\omega) + 2\lambda\langle M, N\rangle_t(\omega) + \lambda^2\langle N\rangle_t(\omega) \geq 0$$

が成り立つこともわかる．上の不等式の左辺の量は λ について連続なので，結局これは

$$\text{for a.e. } \omega \in \Omega, \forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\quad \langle M\rangle_t(\omega) + 2\lambda\langle M, N\rangle_t(\omega) + \lambda^2\langle N\rangle_t(\omega) \geq 0$$

という主張に強めることができる．補題 4.4.14 と同様の議論をすれば，これにより

$$\begin{aligned}\text{for a.e. } \omega\in\Omega,\ \forall t\geq\forall s\geq 0\quad &|\langle M,N\rangle_t(\omega)-\langle M,N\rangle_t(\omega)|\\ &\leq\sqrt{\langle M\rangle_t(\omega)-\langle M\rangle_s(\omega)}\sqrt{\langle N\rangle_t(\omega)-\langle N\rangle_s(\omega)}\end{aligned}$$

なる評価が得られる． □

上の二つの補題を組み合わせれば，以下の國田・渡辺の不等式を得る．

定理 4.4.16 (國田・渡辺の不等式).
H,K を可測な確率過程とし，$M,N\in\mathscr{M}^{2,c}$ とする．このとき，確率 1 で以下の不等式が成立する．

$$\int_0^\infty |H_s||K_s|dV(\langle M,N\rangle)_s\leq\sqrt{\int_0^\infty H_s^2 d\langle M,M\rangle_s}\sqrt{\int_0^\infty K_s^2 d\langle N,N\rangle_s}. \tag{4.4.2}$$

証明. 補題 4.4.15 より，ほとんど全ての ω についてパスごとに補題 4.4.14 を適用することができる． □

(4.4.2) の両辺で期待値をとったのち Hölder の不等式を用いて右辺を評価すれば，L^p-型の國田・渡辺の不等式を得る．

系 4.4.17 (國田・渡辺の不等式).
$p,q\geq 1$ は $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ を満たしているとする．このとき，任意の可測過程 H,K に対して以下の不等式が成立する．

$$E\left[\int_0^\infty |H_s|\,|K_s|\,|d\langle M,N\rangle_s|\right]\leq\left\|\left(\int_0^t H_s^2 d\langle M,M\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\Omega)}\left\|\left(\int_0^t K_s^2 d\langle N,N\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^q(\Omega)} \tag{4.4.3}$$

系 4.4.18.
$M,N\in\mathscr{M}^{2,c}$ の二次変分について，以下の不等式が区別不能の意味で成り立つ．

(i) $|\langle M,N\rangle|\leq\sqrt{\langle M,M\rangle}\sqrt{\langle N,N\rangle}$
(ii) $\langle M+N,M+N\rangle^{1/2}\leq\langle M,M\rangle^{1/2}+\langle N,N\rangle^{1/2}$
(iii) $\langle M+N,M+N\rangle\leq 2(\langle M,M\rangle+\langle N,N\rangle)$

が成り立つ．

補題 4.4.18 は，いわばブラケット版 Schwarz の不等式，三角不等式である．

証明. (i) 補題 4.4.15 で既に示されている．
(ii) ブラケットの双線形性および対称性と (i) より

$$\begin{aligned}\langle M+N,M+N\rangle&=\langle M,M\rangle+2\langle M,N\rangle+\langle N,N\rangle\\ &\leq\langle M,M\rangle+2\sqrt{\langle M,M\rangle}\sqrt{\langle N,N\rangle}+\langle N,N\rangle\\ &=(\langle M,M\rangle^{1/2}+\langle N,N\rangle^{1/2})^2\end{aligned}$$

となることからわかる.

(iii) ブラケットの双線形性より,

$$\begin{aligned}\langle M+N, M+N\rangle &= \langle M,M\rangle + 2\langle M,N\rangle + \langle N,N\rangle \\ \langle M-N, M-N\rangle &= \langle M,M\rangle - 2\langle M,N\rangle + \langle N,N\rangle\end{aligned}$$

が成り立つ. $\langle M-N, M-N\rangle \geq 0$ より

$$2\langle M,N\rangle \leq \langle M,M\rangle + \langle N,N\rangle$$

であるから, 最初の式と合わせれば

$$\begin{aligned}\langle M+N, M+N\rangle &= \langle M,M\rangle + \langle N,N\rangle + 2\langle M,N\rangle \\ &\leq \langle M,M\rangle + \langle N,N\rangle + \langle M,M\rangle + \langle N,N\rangle \\ &= 2\left\{\langle M,M\rangle + \langle N,N\rangle\right\}\end{aligned}$$

となり, 求める評価を得る. □

4.4.4 二乗可積分マルチンゲールの直交性

本節の最後に $\mathscr{M}^2$ の Hilbert 空間的側面と, $\langle\ ,\ \rangle$ のより幾何的な解釈について調べよう.

定義 4.4.19.

(i) $M, N \in \mathscr{M}^2$ が $MN \in \mathscr{M}_0$ を満たすとき, M と N は強い意味で直交する (strongly orthogonal), あるいは単に直交する (orthogonal) という. M と N が強い意味で直交するとき, $M \perp\!\!\!\perp N$ と書くことにする.

(ii) $\mathscr{H}, \mathscr{K} \subset \mathscr{M}^2$ とする. 任意の $M \in \mathscr{H}$ と $N \in \mathscr{K}$ について $M \perp\!\!\!\perp N$ が成り立つとき, $\mathscr{H}$ と $\mathscr{K}$ は (強い意味で) 直交するといい, $\mathscr{H} \perp\!\!\!\perp \mathscr{K}$ で表す.

(iii) $M, N \in \mathscr{M}^2$ が Hilbert 空間 $\mathscr{M}^2$ の元として直交するとき, これらは弱い意味で直交する (weakly orthogonal) という. 弱い意味での直交性は通常の Hilbert 空間における記法 $M \perp N$ を用いる.

$M, N \in \mathscr{M}^2$ が強い意味で直交すれば

$$\langle M,N\rangle_{\mathscr{M}^2} = E[M_\infty N_\infty] = E[M_0 N_0] = 0$$

となるから, M と N は弱い意味でも直交する. $(\mathscr{M}^{2,\mathrm{c}})^\perp = \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ と書き, $\mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ の元は純不連続 (purely discontinuous) であるという. $\mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ は Hilbert 空間 $\mathscr{M}^2$ における $\mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ の直交補空間であるから, 任意の $M \in \mathscr{M}^2$ はある $M^\mathrm{c} \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ と $M^\mathrm{d} \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ によって $M = M^\mathrm{c} + M^\mathrm{d}$ と表現でき, さらにこの分解は一意的である. この分解において M^c を M の連続部分 (continuous part), M^d を M の純不連続部分 (purely discontinuous part) と呼ぶ.

一般の $M \in \mathscr{M}^2$ に対して,

$$[M,M]_t = [M]_t = \langle M^\mathrm{c}, M^\mathrm{c}\rangle_t + \sum_{0<s\leq t} (\Delta M_s)^2$$

と定義し, 確率過程 $[M,M]$ を M の二次変分 (quadratic variation) と呼ぶ. 右辺の和 $\sum_{0<s\leq t}(\Delta M_s)^2$ の可測性や収束性は明らかではないが, ここでは詳細は説明しない. $M \in \mathscr{M}^2$ なら, M^2 はクラス (D) の劣マル

チンゲールであるから，$M^2 - A \in \mathscr{M}$ を満たす自然な $A \in \mathscr{A}^+$ がただ一つ存在する．この A を $\langle M, M\rangle$ 表し，M の可予測二次変分と呼ぶ．$M \in \mathscr{M}^2$ なら $[M] \in \mathscr{A}^+$ が成り立つので，$[M]$ も Doob-Meyer 分解を持つ．このとき $[M]$ の Doob-Meyer 分解は $([M] - \langle M\rangle) + \langle M\rangle$ で与えられる．

$\mathscr{M}^2$ は Hilbert 空間であるから上で述べたように「直交性」に基づく諸結果が成り立つが，確率論における応用上は $\mathscr{M}^2$ は空間としては狭すぎる．$\mathscr{M}^2$ における直交性の概念をより広いマルチンゲール空間に拡張するために用いられるのが定義 4.4.19 における強い意味での直交概念である．文字通り強い意味での直交性は弱い意味での直交性よりも強いが，「良い」部分集合 $\mathscr{H} \subset \mathscr{M}$ については $\perp$ と $\perp\!\!\!\perp$ に関する直交補空間の概念は一致する．これの示唆するところは，マルチンゲールの純不連続性は $\mathscr{M}^2$ からより一般のマルチンゲール空間に一般化できるということである．

命題 4.4.20.
$M, N \in \mathscr{M}^2$ について次の条件は同値である．

(i) $M \perp\!\!\!\perp N$ が成り立つ．
(ii) $M_0N_0 + \langle M, N\rangle = 0$ が成り立つ．
(iii) $M_0N_0 = 0$ かつ任意の停止時刻 T に対して $E[M_TN_T] = 0$ がなりたつ．
(iv) $M_0N_0 = 0$ かつ任意の停止時刻 T について $M^T \perp N$ が成り立つ．

証明. (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) 直交性と（可予測）二次変分の定義よりわかる．

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) 直交性の定義と命題 3.4.9 よりわかる．

(i) $\Longleftrightarrow$ (iv) M と N が直交するなら，任意の停止時刻 T に対して

$$\langle M^T, N\rangle_{\mathscr{M}^2} = E[M_TN_\infty] = E[M_TE[N_\infty|\mathscr{F}_T]] = E[M_TN_T] = E[M_0N_0] = 0$$

となるので，$M^T \perp N$ が成り立つ．逆に (iv) が成り立っていると仮定しよう．このとき任意の停止時刻 T に対して

$$E[M_TN_T] = E[M_TE[N_\infty|\mathscr{F}_T]] = E[M_TN_\infty] = E[M^T_\infty N_\infty] = \langle M^T, N\rangle_{\mathscr{M}^2} = 0 = E[M_0N_0]$$

が成立．ゆえに $MN \in \mathscr{M}_0$ となり，M と N は強い意味で直交している． □

系 4.4.21.
$M, N \in \mathscr{M}^{2,c}$ とする．このとき $S \leq T$ を満たす任意の停止時刻について，$M - M^T \perp\!\!\!\perp N^S$ が成り立つ．

証明. 二次共変分の性質と $S \leq T$ より

$$\langle M - M^T, N^S\rangle = \langle M, N\rangle^S - \langle M, N\rangle^{T\wedge S} = 0$$

が成り立つ．したがって命題 4.4.20 により $M - M^T \perp\!\!\!\perp N^S$ となる． □

命題 4.4.20 より，特に $M, N \in \mathscr{M}_0^{2,c}$ においては $M \perp\!\!\!\perp N$ と $\langle M, N\rangle = 0$ は同値である．すなわち，内積 $E[M_\infty N_\infty]$ の代わりに二次共変分 $\langle M, N\rangle$ を用いて「直交性」を定めているのと同じである．

命題 4.4.22.
$\mathscr{H} \subset \mathscr{M}^2$ は停止について安定な部分集合で $L^\infty(\mathscr{F}_0)\mathscr{H} \subset \mathscr{H}$，を満たすものとする．このとき Hilbert 空間として直交補空間 $\mathscr{H}^\perp$ は停止について安定な $L^\infty(\mathscr{F}_0)$-部分加群で，$\mathscr{M}^2$ の位相について閉じている．さらに $\mathscr{K}$ を $\mathscr{H}$ によって生成される閉部分空間とすれば，$\mathscr{H}^\perp \perp\!\!\!\perp \mathscr{K}$ が成り立つ．

命題 4.4.22 の条件 $L^\infty(\mathscr{F}_0)\mathscr{H} \subset \mathscr{H}$ は，任意の $Z \in L^\infty(\mathscr{F}_0)$ と $M \in \mathscr{H}$ に対して $ZM \in \mathscr{H}$ が成り立つという意味である．また，$\mathscr{K}$ は具体的には

$$\mathscr{K} = \mathrm{Cl}_{\mathscr{M}^2} \sum_{M \in \mathscr{H}} \mathbb{R}M$$

と表現できることに注意されたい．（上の式の $\sum$ は線形空間としての和.）

証明. $\mathscr{H}^\perp$ が $\mathscr{M}^2$ の閉部分空間であることは Hilbert 空間の一般論よりわかる．$\mathscr{H}^\perp$ が $L^\infty(\mathscr{F}_0)$-倍について閉じていることと，停止について安定であることを示そう．$M \in \mathscr{H}$ と $N \in \mathscr{H}^\perp$ を任意に選ぶ．このとき任意の停止時刻 T について

$$\langle M, N^T \rangle_{\mathscr{M}^2} = E[M_\infty N^T_\infty] = E[E[M_\infty|\mathscr{F}_T]N_T] = E[M_T N_T] = E[M_0 N_0] = 0$$

が成り立つ．よって $M \perp N^T$ が成立．M は任意に選んでいるから $N^T \in \mathscr{H}^\perp$ がわかる．次に $Z \in L^\infty(\mathscr{F}_0)$ とすれば，

$$\langle M, ZN \rangle_{\mathscr{M}^2} = E[M_\infty(ZN_\infty)] = E[(ZM_\infty)N_\infty] = \langle ZM, N \rangle_{\mathscr{M}^2} = 0$$

となる．ただし，最後の等号は仮定 $L^\infty(\mathscr{F}_0)\mathscr{H} \subset \mathscr{H}$ より $ZM \in \mathscr{H}$ が成り立つことからわかる．これで前半の主張が証明された．

後半の主張を示す，まずは $\mathscr{H} \perp\!\!\!\perp \mathscr{H}^\perp$ を証明する．$M \in \mathscr{H}$ および $N \in \mathscr{H}^\perp$ とすれば，$\mathscr{H}^\perp$ が停止について安定であることから，任意の停止時刻 T に対して $M \perp N^T$ が成り立つ．特に $T \equiv 0$ とすれば $\mathscr{H}$ が $L^\infty(\mathscr{F}_0)$-倍について閉じていることから，任意の $A \in \mathscr{F}_0$ に対して

$$E[1_A M_0 N_0] = \langle 1_A M, N^0 \rangle = 0$$

が成立．ゆえに $M_0 N_0 = 0$ a.s. となり，命題 4.4.20 より $M \perp\!\!\!\perp N$ がわかる．したがって $\mathscr{H} \perp\!\!\!\perp \mathscr{H}^\perp$ となる．

一般の $M \in \mathscr{K}$ に対しては，$\mathscr{H}$ の生成する部分空間の点列 $(M^{(n)})$ で $M^{(n)} \to M$ in $\mathscr{M}^2$ を満たすようなものを選ぶ．各 $M^{(n)}$ は $\mathscr{H}$ の元の線形和で表現できるから，$\mathscr{H} \perp \mathscr{H}^\perp$ より $M^{(n)}N \in \mathscr{M}_0$ がしたがう．T を任意の停止時刻とすれば，これより

$$\begin{aligned}
|E[M_T N_T]| &\le |E[(M_T^{(n)} - M_T)N_T]| + |E[M_T^{(n)} N_T]| \\
&= E\left[\left|(M_T^{(n)} - M_T)N_T\right|\right] \\
&\le \sqrt{E[(M^{(n)} - M)_T^2]}\sqrt{E[N_T^2]} \\
&\le \|M^{(n)} - M\|_{\mathscr{M}^2}\|N\|_{\mathscr{M}^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

となり，$E[M_T N_T] = 0$ がわかる．また，上の評価の 2 行目から 4 行目により $0 = M_0^{(n)} N_0 \to M_0 N_0$ in L^1 となるので，$M_0 N_0 = 0$ もわかる．したがって $MN \in \mathscr{M}_0$ であり，$M \perp\!\!\!\perp N$ であることが示された． □

$\mathcal{M}^{2,\mathrm{c}}$ は停止について安定な $\mathcal{M}^2$ の閉 $L^\infty(\mathcal{F}_0)$-部分加群であるから，命題 4.4.22 より $\mathcal{M}^{2,\mathrm{c}} \perp\!\!\!\perp \mathcal{M}^{2,\mathrm{d}}$ が成り立っている．この式の意味するところは，$\mathcal{M}^{2,\mathrm{c}}$ の $\perp\!\!\!\perp$ に関する「直交補空間」は $\mathcal{M}^{2,\mathrm{d}}$ に一致するということである．すなわち，

$$\mathcal{M}^{2,\mathrm{d}} = \{M \in \mathcal{M}^2 \mid \forall N \in \mathcal{M}^{2,\mathrm{c}},\ M \perp\!\!\!\perp N\}$$

が成り立つ．この結果のアナロジーにより，強い意味での直交性 $\perp\!\!\!\perp$ はより一般のマルチンゲールに対しても定義するとができるようになる．

4.5 局所マルチンゲール

4.5.1 局所マルチンゲールの基本性質

定義 4.5.1 (局所マルチンゲール).
$\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$ の元を，càdlàg 局所マルチンゲール (local martingale) と呼ぶ.

二乗可積分マルチンゲールの場合と同じように局所マルチンゲールの空間をいくつか用意しておく．

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{0,\mathrm{loc}} &= \{M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}} \mid M_0 = 0\} \\
\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}} &= \{M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}} \mid M \text{ は連続なパスを持つ }\} \\
\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{0,\mathrm{loc}} &= \mathcal{M}_{0,\mathrm{loc}} \cap \mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}
\end{aligned}$$

ちょっと待ってほしい．定義 4.5.1 には少し違和感がある．我々の定義では $\mathcal{M}$ は càdlàg 一様可積分マルチンゲールの空間であるから，$\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$ は局所マルチンゲールというより局所一様可積分マルチンゲールと呼ぶべきではなかろうか？実は次の命題で見るように，「局所マルチンゲール」と「局所一様可積分マルチンゲール」は同じものなので，この用語法に特に問題はないのである．

命題 4.5.2.
$M \in \mathcal{D}^0$ について次の 2 条件は同値である．

(i) $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$.
(ii) 各 M^{T_n} がマルチンゲールとなるような局所化列 (T_n) が存在する．

特に，任意のマルチンゲールは局所マルチンゲールである．

証明. (i) $\Longrightarrow$ (ii) は明らかなので，(ii) $\Longrightarrow$ (i) を示せばよい．マルチンゲール全体の空間を $\mathcal{M}'$ で表すことにする．$\mathcal{M}$ は停止について安定な線形空間なので，$(\mathcal{M}_{\mathrm{loc}})_{\mathrm{loc}} = \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$ が成り立つ．（命題 2.6.2）これより，$\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$ を示せば求める結論を得ることがわかる．$M \in \mathcal{M}'$ なら $n \in \mathbb{N}$ に対して停止過程 M^n は一様可積分マルチンゲールとなるので，$(n)_{n\in\mathbb{N}}$ は M の $\mathcal{M}$ に関する局所化列である． □

M が局所マルチンゲールならば，M_0 は可積分である．しかし，$t > 0$ については M_t が可積分になるかはわからない．局所マルチンゲール M が $M_t \in L^1$ を満たすからと言って，M がマルチンゲールになるとは限らない．さらに一様可積分な局所マルチンゲールであっても，マルチンゲールでないようなものが存在する[*7]

次の命題では，定義よりすぐに分かる局所マルチンゲールの基本的な性質を述べる．

[*7] 例えば，Karatzas and Shreve [68, p.168, Excercise3.36, 3.37] 等を参照.

命題 4.5.3.

(i) $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ は線形空間である．

(ii) $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ かつ $Z \in L^\infty(\mathscr{F}_0)$ なら，$ZM \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ である．

(iii) 非負の局所マルチンゲールは優マルチンゲールである．

証明. (i) $(T_n), (S_n)$ をそれぞれ M, N の局所化列とすれば，$(S_n \wedge T_n)$ は $M+N$ の局所化列である．

(ii) (T_n) を $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ の局所化列とすれば，$(ZM)^{T_n} = Z(M^{T_n})$ はどれも一様可積分マルチンゲールである．

(iii) M を正値局所マルチンゲールとし，(T_n) を M の $\mathscr{M}$ に関する局所化列とする．$0 \le s \le t$ および $A \in \mathscr{F}_s$ とすれば，

$$E[1_A M_{T_n \wedge t}] = E[1_A M_{T_n \wedge s}] = E[1_A M_0]$$

が成立．M の正値性より Fatou の補題が使えて，

$$0 \le E[M_t] = E\left[\liminf_{n\to\infty} M_{T_n \wedge t}\right] \le \liminf_{n\to\infty} E[M_{T_n \wedge t}] = \liminf_{n\to\infty} E[M_0] < \infty$$

となり，M_t はどれも可積分である．さらに条件付き Fatou の補題を使えば，

$$E[M_t|\mathscr{F}_s] = E\left[\liminf_{n\to\infty} M_{T_n\wedge t} \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right] \le \liminf_{n\to\infty} E\left[M_{T_n\wedge t}|\mathscr{F}_s\right] = \liminf_{n\to\infty} M_{T_n \wedge s} = M_s$$

となり，M が優マルチンゲールであることが分かった． □

既に述べたように $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ が全ての t で $M_t \in L^1$ を満たすからといって，M がマルチンゲールになるとは限らない．マルチンゲール性はそういった単純な可積分性ではなく，もうすこし複雑な可積分性の帰結である．

命題 4.5.4.

(i) 局所マルチンゲールがマルチンゲールとなるための必要十分条件は，それがクラス (DL) に属することである．

(ii) 局所マルチンゲールが一様可積分マルチンゲールとなるための必要十分条件は，それがクラス (D) に属することである．

証明. (i) マルチンゲールがクラス (DL) の局所マルチンゲールであることは，系 3.4.7 と命題 4.5.2 よりわかる．

逆を示そう．M をクラス (DL) の - 局所マルチンゲールとし，(T_n) を M の局所化列とする．このとき，$M_{T_n\wedge t} \to M_t$ が概収束の意味で成り立つが，M がクラス (DL) に属することからこの収束 $M_{T_n \wedge t} \to M_t$ は L^1 の意味でもなりたつ．（命題 A.2.6）これより M_t は可積分であり，さらに $s \le t$ とすれば

$$E[M_s 1_A] = \lim_{n\to\infty} E[M_{T_n\wedge s} 1_A] = \lim_{n\to\infty} E[M_{T_n \wedge t} 1_A] = E[M_t 1_A] \quad (\forall A \in \mathscr{F}_s)$$

も成立する．したがって，M はマルチンゲールである．

(ii) 一様可積分マルチンゲールがクラス (D) のマルチンゲールであることは，系 3.4.3 と命題 4.5.2 からわかる．局所マルチンゲールがクラス (D) に属すれば，(i) よりそれはマルチンゲールとなる．定数停止時刻を考えれば，クラス (D) であることから $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_{\ge 0}}$ が一様可積分であることが導かれる． □

4.5.2 局所マルチンゲールの二次変分

連続局所マルチンゲールに関しても二次変分や二次共変分といった概念が定義でき，それらは局所マルチンゲールの解析に重要な役割を果たす．本小節では，フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ は通常の条件を満たすと仮定する．

補題 4.5.5.
$\mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{0,\mathrm{loc}} \subset \mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}$ が成り立つ．

証明. 命題 2.7.5 よりわかる． □

補題 4.5.6.
$M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ が自然ならば，$M = 0$ が区別不能の意味で成り立つ．

証明. (T_n) を M の $\mathscr{M} \cap \mathscr{A}$ に関する局所化列とする．（命題 2.6.2）このとき命題 4.1.8 より任意の $n \in \mathbb{N}$ については M^{T_n} は 0 と区別不能となる．よって M も 0 と区別不能である． □

補題 4.5.5 と補題 4.5.6 を用いると，局所化の作業を経由して $M \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ の二次変分を定義することができる．

定理 4.5.7.
M を連続な局所マルチンゲールとする．このとき，$A \in \mathscr{A}^{+,\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ で $(M - M_0)^2 - A$ が局所マルチンゲールとなるようなものが（区別不能の意味で）唯一つ存在する．

定理 4.5.7 の主張で $A \in \mathscr{A}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ と書いたが，命題 4.1.3 より $\mathscr{V}^{+,\mathrm{c}} = \mathscr{A}^{+,\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ が成り立つので，これは $A \in \mathscr{V}^{+,\mathrm{c}}$ と書いても同じことである．

証明. $M = 0$ として示せばよい．

Step 1：存在の証明． $M \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ とし，(T_n) を M の $\mathscr{M}^2$ に関する局所化列とする．（補題 4.5.5）この局所化列を用いて，各 n に対して

$$A^{(n)} = \langle M^{T_n}, M^{T_n} \rangle$$

と定義しよう．$n \leq m$ なら，命題 4.4.7 より

$$\langle M^{T_m} \rangle^{T_n} = \langle M^{T_m \wedge T_n} \rangle = \langle M^{T_n} \rangle$$

が成り立つので，$A^{(n)}$ と $A^{(m)}$ は $[\![0, T_n]\!]$ 上では（区別不能の意味で）一致する．したがって

$$A(\omega, t) = A^{(n)}(\omega, t) \quad \text{if } (\omega, t) \in [\![0, T_n]\!]$$

によって $A \in \mathscr{V}$ を定義することができる．A が実際に適合過程であることは，

$$A = \sum_{n \geq 0} A^{(n+1)} \left(1_{[\![0, T_{n+1}]\!]} - 1_{[\![0, T_n]\!]} \right)$$

という表現から確かめられる．A の定義より $(M^2)^{T_n} - A^{T_n} = (M^{T_n})^2 - \langle M^{T_n} \rangle \in \mathscr{M}$ が成り立つから，(T_n) は $M^2 - A$ の $\mathscr{M}$ に関する局所化列であり，ゆえに $M^2 - A$ は局所マルチンゲールとなる．

Step 2：**一意性の証明．** $A, B \in \mathscr{A}^{+,\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ は $MN - A$ および $MN - B$ が局所マルチンゲールになるような過程とする．$X := (MN - A) - (MN - B) = B - A$ と定めれば $X \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{A}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ なので，補題 4.5.6 により $X = 0$ が区別不能の意味で成り立つ．したがって A と B は区別不能である． □

定義 4.5.8.
定理 4.5.7 における $A \in \mathscr{V}^{\mathrm{c}}$ を連続局所マルチンゲール M の二次変分 (quadratic variation) といい，$\langle M, M \rangle$ または $\langle M \rangle$ で表す．

M が連続局所マルチンゲールならば，$\langle M \rangle = \langle M - M_0 \rangle$ が成り立つことに注意しておく．$M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ なら，定理 4.5.7 における一意性より M の $\mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ の元としての二次変分と，$\mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ の元としての二次変分は一致している．よって二次変分という言葉や $\langle\ ,\ \rangle$ という記法は 4.4 節のものと整合的である．

二乗可積分マルチンゲールと同じように，局所マルチンゲールの場合も二次共変分 $\langle M, N \rangle$ を定義することができる．

系 4.5.9.
$M, N \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ とすれば $MN - A$ が局所マルチンゲールとなるような $A \in \mathscr{A}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ がただ一つ存在する．

証明． 二次変分を用いて
$$A = \frac{1}{4}\{\langle M+N, M+N \rangle - \langle M-N, M-N \rangle\}$$
とおけば，この A が求めるものである．一意性は補題 4.5.6 よりわかる． □

定義 4.5.10.
系 4.5.9 における $A \in \mathscr{A}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ を $\langle M, N \rangle$ と書き，連続局所マルチンゲール M と N の二次共変分 (quadratic covariation) あるいは交叉変分 (cross variation) とよぶ．

二乗可積分マルチンゲールの二次変分の場合と同じように，二次変分 $\langle M \rangle$ は二次共変分 $\langle M, M \rangle$ と一致する．二次共変分の定義より，連続局所マルチンゲールの積 MN が局所マルチンゲールになることは，$\langle M, N \rangle = 0$ が成り立つことと同値である．

連続局所マルチンゲールの二次変分は，連続二乗可積分マルチンゲールの二次変分の多くの性質を継承する．

命題 4.5.11.
$M, N \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ なら，任意の停止時刻 T に対して
$$\langle M^T, N^T \rangle = \langle M^T, N \rangle = \langle M, N^T \rangle = \langle M, N \rangle^T$$
が区別不能の意味で成り立つ．

証明． $M_0 = 0$ かつ $N_0 = 0$ として示せばよい．$\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ は停止について安定だから，$M^T N^T - \langle M, N \rangle^T$ はまた

局所マルチンゲールとなる．系 4.5.9 から $\langle M^N, N^T\rangle = \langle M, N\rangle^T$ が成り立つ．

(T_n) を $\mathscr{M}^{2,c}$ に関する M, N に共通の局所化列とする．このとき命題 4.4.11 の証明より $\{M^T(N-N^T)\}^{T_n}$ は一様可積分マルチンゲールとなるので，(T_n) は $M^T(N-N^T)$ の $\mathscr{M}$ に関する局所化列となる．すなわち $M^T(N-N^T)$ 局所マルチンゲールであり，これと $M^TN^T - \langle M^T, N^T\rangle$ の和 $M^TN - \langle M^T, N^T\rangle$ も局所マルチンゲールとなる．ゆえに系 4.5.9 から $\langle M^N, N^T\rangle = \langle M^T, N\rangle$ となる．M と N の役割を入れ替えれば $\langle M^N, N^T\rangle = \langle M, N^T\rangle$ もわかる． □

命題 4.5.12.

(i) 二次共変分は対称双線形写像 $\langle\ ,\ \rangle\colon \mathscr{M}^c_{\mathrm{loc}} \times \mathscr{M}^c_{\mathrm{loc}} \to \mathscr{A}^c_{\mathrm{loc}}$ を定める．

(ii) $Z \in L^\infty(\mathscr{F}_0)$ かつ $M, N \in \mathscr{M}^c_{\mathrm{loc}}$ なら，$\langle ZM, N\rangle = Z\langle M, N\rangle$ が成り立つ．

証明. 局所化を行えば，命題 4.4.12 と命題 4.4.13，命題 4.5.11 からわかる． □

命題 4.5.13.

$M \in \mathscr{M}^c_{\mathrm{loc}}$ とする．このとき $\langle M\rangle_\infty = 0$ が成り立つことは，M が M_0 と区別不能であることと同値である．

証明. 局所化の作業により命題 4.4.6 と命題 4.5.11 からわかる． □

命題 4.5.13 は連続局所マルチンゲールの二次変分がそのパスの挙動を制御する量であることを示唆している．命題 4.5.13 の主張はパス全体を見ているという意味で大域的な主張であるが，実はもっと局所的な意味でも二次変分は連続局所マルチンゲールのパスの変動を支配している．

命題 4.5.14.

$M \in \mathscr{M}^c_{\mathrm{loc}}$ とする．このとき，ほとんど全ての ω と任意の実数 $a \le b$ について，次の条件は同値である．

(i) $[a, b]$ 上 $M_t(\omega) = M_a(\omega)$ がなりたつ．

(ii) $\langle M, M\rangle_a(\omega) = \langle M, M\rangle_b(\omega)$ がなりたつ．

証明. $q \in \mathbb{Q}_{\ge 0}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
T_q &= \inf\{t > q \mid \langle M\rangle_t > \langle M\rangle_q\} \\
S_q &= \inf\{t > q \mid M_q \ne \langle M\rangle_q\}
\end{aligned}
$$

と定義する．このとき

$$
\begin{aligned}
T_q &= \inf\{t \ge 0 \mid (\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_q)1_{\rrbracket q,\infty\llbracket} > 0\} \\
S_q &= \inf\{t \ge 0 \mid (M_t - M_q)1_{\rrbracket q,\infty\llbracket} \ne 0\}
\end{aligned}
$$

であるから，T_q と S_q はそれぞれ連続適合過程 $(\langle M\rangle - \langle M\rangle_q)1_{\rrbracket q,\infty\llbracket}$ と $(M - M_q)1_{\rrbracket q,\infty\llbracket}$ の開集合への到達時刻であり，ゆえに $\mathbb{F}$-弱停止時刻である．（命題 2.4.13）フィルトレーションの右連続性より，これは特に停止時刻となる．したがって $M^{T_q} - M^q$ は局所マルチンゲールであり，二次変分の双線形性と $\langle M\rangle$ の連続性，そして命題 4.5.11 より

$$
\langle M^{T_q} - M^q\rangle = \langle M\rangle^{T_q} - \langle M\rangle^q = 0
$$

が成り立つ．このことと命題 4.5.13 から，$M^{T_q} - M^q$ は 0 と区別不能だとわかる．したがって $T_q \leq S_q$ a.s. が成り立つ．逆に $M^{S_q} - M_q$ は 0 の区別不能な局所マルチンゲールなので，命題 4.5.11 よりその二次変分は

$$\langle M \rangle^{S_q} - \langle M \rangle^q = \langle M^{S_q} - M^q \rangle = 0$$

を満たしている．ゆえに $T_q \leq S_q$ a.s. も成り立つ．これより q が $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ 上を走れば，零集合 $N \subset \Omega$ で $\Omega \setminus N$ 上で任意の $q \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ について $T_q(\omega) = S_q(\omega)$ を満たすようなものがとれる．$\mathbb{Q}_{\geq 0}$ は $\mathbb{R}_{\geq 0}$ で稠密だから，$\omega \in \Omega \setminus N$ と $a \leq b$ なる実数 a, b に対して条件 (i) と (ii) は同値である． □

國田・渡辺の不等式は局所マルチンゲールの二次変分についても成立する．

定理 4.5.15 (國田・渡辺の不等式).
H, K を可測な確率過程とし，$M, N \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ とする．このとき以下の不等式が確率 1 で成立する．

$$\int_0^\infty |H_s||K_s| dV(\langle M, N \rangle)_s \leq \sqrt{\int_0^\infty H_s^2 d\langle M, M \rangle_s} \sqrt{\int_0^\infty K_s^2 d\langle N, N \rangle_s} \tag{4.5.1}$$

さらに，$p, q \in [1, \infty]$ が $1/p + 1/q = 1$ を満たすならば，以下の不等式が成り立つ．

$$E\left[\int_0^\infty |H_s|\,|K_s| dV(\langle M, N \rangle)_s\right] \leq \left\| \left(\int_0^t H_s^2 d\langle M, M \rangle_s\right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(P)} \left\| \left(\int_0^t K_s^2 d\langle N, N \rangle_s\right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^q(P)} \tag{4.5.2}$$

証明. (T_n) を $\mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ に関する，M と N に共通の局所化列とする．このとき命題 4.4.16 と命題 4.5.11，命題 4.1.5 から，任意の n について

$$\begin{aligned}
\int_0^{T_n} |H_s||K_s| dV(\langle M, N \rangle)_s &= \int_0^\infty |H_s||K_s| dV(\langle M^{T_n}, N^{T_n} \rangle)_s \\
&\leq \sqrt{\int_0^\infty H_s^2 d\langle M^{T_n}, M^{T_n} \rangle_s} \sqrt{\int_0^\infty K_s^2 d\langle N^{T_n}, N^{T_n} \rangle_s} \\
&= \sqrt{\int_0^{T_n} H_s^2 d\langle M, M \rangle_s} \sqrt{\int_0^{T_n} K_s^2 d\langle N, N \rangle_s}
\end{aligned}$$

が成り立つ．この式で $n \to \infty$ とすれば (4.5.1) を得る．さらに (4.5.1) で期待値をとって Hölder の不等式で右辺を評価すれば，(4.5.2) がわかる． □

系 4.5.16.
$M, N \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ の二次共変分について，以下が成り立つ．

(i) $|\langle M, N \rangle| \leq \sqrt{\langle M, M \rangle} \sqrt{\langle N, N \rangle}$.
(ii) $\langle M + N, M + N \rangle^{1/2} \leq \langle M, M \rangle^{1/2} + \langle N, N \rangle^{1/2}$.
(iii) $\langle M + N, M + N \rangle \leq 2(\langle M, M \rangle + \langle N, N \rangle)$.

証明. 系 4.4.18 の証明と同じである． □

二次変分を用いると，局所マルチンゲールが二乗可積分マルチンゲールとなるための必要十分条件を求めることができる．

定理 4.5.17.
$M \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ とする．

(i) M について次の 2 条件は同値である．
  (a) $M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$.
  (b) $E[M_0^2] < \infty$ かつ $E[\langle M, M\rangle_\infty] < \infty$ が成り立つ．
  特に $M \in \mathscr{M}_0^{2,\mathrm{c}}$ のときは，$E[M_\infty^2] = E[\langle M, M\rangle_\infty]$ が成立する．

(ii) M について次の 2 条件は同値である．
  (a) M はマルチンゲールで，全ての $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ について $E[M_t^2] < \infty$ が成り立つ．
  (b) $E[M_0^2] < \infty$ かつ，全ての $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ について $E[\langle M, M\rangle_t] < \infty$ が成り立つ．
  特に $M_0 = 0$ のときは $E[M_t^2] = E[\langle M, M\rangle_t]$ が成立する．

証明. (i) (a) $\Longrightarrow$ (b) は二乗可積分マルチンゲールの二次変分に関する議論で既に示されている．

(b) $\Longrightarrow$ (a) (T_n) を $M - M_0$ の $\mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ に関する局所化列とする．このとき $E[M_0^2] < \infty$ という仮定より，$M^{T_n} \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ が成り立つ．このとき任意の停止時刻 T に対して

$$E[(M_T^{T_n} 1_{\{T<\infty\}})^2] \leq E[(M_\infty^{T_n \wedge T})^2] = E[M_0^2] + E[\langle M^{T_n\wedge T}, M^{T_n \wedge T}\rangle_\infty] \leq E[M_0^2] + E[\langle M, M\rangle_\infty] < \infty$$

が成り立つから，さらに Fatou の補題を用いれば

$$E[(M_T 1_{\{T<\infty\}})^2] \leq \liminf_{n\to\infty} E[(M_T^{T_n} 1_{\{T<\infty\}})^2] \leq E[M_0^2] + E[\langle M, M\rangle_\infty] < \infty$$

がわかる．したがって $(M_T 1_{\{T\}})_{T\in\mathscr{T}}$ は L^2-有界であり，特に一様可積分である．命題 4.5.4 を用いれば，これより M は一様可積分マルチンゲールであることがわかる．特に定数停止時刻を考えれば $M = (M_t)$ は L^2-有界であり，$M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ が従う．

最後の主張は $M^2 - \langle M\rangle$ が一様可積分マルチンゲールになることからわかる．

(ii) 停止過程 M^t に対して (i) の結果を用いればよい． □

4.6 セミマルチンゲール

本節では，確率積分論の中心となる確率過程であるセミマルチンゲールとその二次変分を導入しよう．

定義 4.6.1.
$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルターつき確率空間とする．実数値の càdlàg 適合過程 X がある $M \in \mathscr{M}_{0,\mathrm{loc}}$ と $A \in \mathscr{V}$ によって $X = X_0 + M + A$ と分解されるとき，X はセミマルチンゲール (semimartingale) であるという．

セミマルチンゲール全体の空間を $\mathscr{SM}$ で，連続なセミマルチンゲール全体の空間を $\mathscr{SM}^{\mathrm{c}}$ で表すことにする．また，それらのうちで 0 出発なるもの全体の空間は，それぞれ $\mathscr{SM}_0$，$\mathscr{SM}_0^{\mathrm{c}}$ と書く． この辺の記法はあまり統一されていないので，注意が必要である．定義より $\mathscr{SM}_0 = \mathscr{M}_{0,\mathrm{loc}} + \mathscr{V}$ が成り立っている．（線形空間

としての和.）しかし，これは一般に直和ではない．つまり，$X = X_0 + M + A$，$M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$，$A \in \mathscr{V}$ なる分解は一意とは限らない．定義より明らかに局所マルチンゲールはセミマルチンゲールであり，また適合局所有限変動過程もセミマルチンゲールである．

もう少し非自明なセミマルチンゲールの例は，Doob-Meyer 分解によって与えられる．本節ではこれ以降，Doob-Meyer 分解に依存する結果を用いるので，基礎となるフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ は常に通常の条件を満たすと仮定する．

例 4.6.2. クラス (DL) の劣マルチンゲールや優マルチンゲールは，セミマルチンゲールである．これは Doob-Meyer 分解定理の直接の帰結である． ■

例 4.6.2 は $X = X_0 + M + A$ という分解の $A \in \mathscr{V}$ が可予測であるようにとれるので，セミマルチンゲールのうちでも特に特殊セミマルチンゲール (special semimartingale) と呼ばれるクラスに属する過程の例となっている．特殊セミマルチンゲールは不連続なセミマルチンゲールを考える際には大変重要なクラスであるが，本ノートでは今後特に登場することはない．

例 4.6.2 からわかるように，Doob-Meyer 分解はとある確率過程がセミマルチンゲールかどうか判断するのにも有用である．そこで，Doob-Meyer 分解をもう少し一般化することができれば便利であろう．まずは，一般の劣マルチンゲールに Doob-Meyer 分解を拡張する．本小節のここから先の部分では，$A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ に対する可予測性 $\iff$ 自然性という特徴付けは認めて話を進めることにしよう．確率過程のクラス $\mathscr{C}$ に対して，$\mathscr{C}^{\mathrm{pred}}$ でその元のうち特に可予測なもの全体からなる部分空間を表すことにする．

まずは，証明抜きで次の補題を引用しておく．

補題 4.6.3.
$\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^{\mathrm{pred}} = \mathscr{V}^{\mathrm{pred}}$ が成り立つ．

補題 4.6.3 の証明は，例えば He, Wang, and Yan [53, 5.19 Theorem] や Jacod and Shiryaev [62, 3.10 Lemma] を参考にして欲しい．

補題 4.6.4.
$M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{V}^{\mathrm{pred}}$ なら，M は 0 と区別不能である．

証明. 定理 4.2.9 より，補題 4.5.6 の言い換えにすぎないことがわかる． □

命題 4.6.5.
X が劣マルチンゲールならば，$M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ と $A \in \mathscr{V}^+$ で $X = M + A$ を満たすものが存在する．特に A は可予測であるようにとれて，A が可予測となるような分解は一意的である．

証明. 一意性は補題 4.6.4 よりわかる．

X を劣マルチンゲールとし，停止時刻列 (T_n) を

$$T_n = \inf\{t \geq 0 \mid |X_t| \geq n\}$$

と定義する．さらに $S_n = T_n \wedge n$ とすれば S_n は有界停止時刻で，任意の停止時刻 T に対して

$$|X_T^{S_n} 1_{\{T<\infty\}}| \leq |X_{S_n \wedge T}| \leq n + |X_{S_n}|$$

を満たす．任意抽出定理より X_{S_n} は可積分となるので，この評価より X^{S_n} がクラス (D) の劣マルチンゲールとなることがわかる．したがって，各 n に対して $M^{(n)} \in \mathscr{M}$ と $A^{(n)} \in \mathscr{A}^{+,\mathrm{pred}}$ で $X^{S_n} = M^{(n)} + A^{(n)}$ を満たすような組がただ一つ存在する．$(X^{S_{n+1}})^{S_n} = X^{S_n}$ だから，Doob-Meyer 分解の一意性により $A^{(n)} = (A^{(n+1)})^{S_n}$ が区別不能の意味で成り立っている．したがって，任意の n について $A^{S_n} = A^{(n)}$ を満たす $A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^{+,\mathrm{pred}}$ が（区別不能の意味で）ただ一つ存在する．$M = X - A$ とすれば各 n について $M^{S_n} \in \mathscr{M}$ が成り立っているから，$M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ である． □

命題 4.6.5 により我々が知っているセミマルチンゲールの例は拡張される．

系 4.6.6.
劣マルチンゲールや優マルチンゲールは（特殊）セミマルチンゲールである．

今度は $A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ に対して Doob-Meyer 分解を一般化しよう．$\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ の元は一般に劣マルチンゲールではないが，$\mathscr{A}$ の元は劣マルチンゲールなので Doob-Meyer 分解を適用することができる．

命題 4.6.7.
$A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ なら，$A' \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^{\mathrm{pred}}$ で $A - A' \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ を満たすものがただ一つ存在する．

証明. 一意性は補題 4.6.4 よりわかる．$A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ とし，(T_n) をその局所化列とする．このとき $A^{T_n} \in \mathscr{A}$ はクラス (D) の劣マルチンゲールなので，$B^{(n)} \in \mathscr{A}^{\mathrm{pred}}$ で $A^{T_n} - B^{(n)}$ が一様可積分マルチンゲールになるようなものがただ一つ存在する．Doob-Meyer 分解における一意性より，任意の n について $(B^{(n+1)})^{T_n} = B^{(n)}$ が区別不能の意味で成り立つ．したがって任意の n について $(A')^{T_n} = B^{(n)}$ を満たす $A' \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^{\mathrm{pred}}$ が区別不能の意味でただ一つ存在する．このとき $A - A'$ は (T_n) を局所化列に持つ局所マルチンゲールである． □

系 4.6.8.
$A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ はセミマルチンゲールである．

命題 4.6.7 における $A' \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^{\mathrm{pred}}$ を $A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ の双対可予測射影 (dual predictable projection) または可予測補償子 (predictable compensator) と呼び，$A^{\mathfrak{p}}$ や $\widetilde{A}$ などで表す．双対可予測射影は不連続な局所マルチンゲールのジャンプの構造を調べるのに不可欠な道具である．しかし本ノートではこれ以降ほとんど不連続な局所マルチンゲールは出てこないので，双対可予測射影も特に出てこない．

一般にセミマルチンゲールの分解 $X = X_0 + M + A$ は一意ではないが，連続なセミマルチンゲールにおいては M と A がともに連続になるような分解が一意的に定まる．したがって本ノートで扱う範囲内では，セミマルチンゲールの分解の非一意性に悩まされることはない．

補題 4.6.9.
可予測局所マルチンゲールは，確率 1 で連続である．

証明. 局所化の議論を行うことにより，系 4.2.5 からわかる． □

補題 4.6.10.
$\mathscr{M}_{\mathrm{loc}} \subset \mathscr{D}^1_{\mathrm{loc}}$ が成り立つ．

証明. $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ とし，(T_n) をその $\mathscr{M}$ に関する局所化列とする．

$$S_n = \inf\{t \geq 0 \mid |M_t| \geq n\}$$

とし，$R_n = T_n \wedge S_n$ と定める．このとき (R_n) も M の局所化列であり，定義より

$$(M^{R_n})^*_\infty = M^*_{R_n} \leq n + |M_{R_n}|$$

が成り立つ．M^{T_n} は一様可積分マルチンゲールだから $M^{R_n} = M^{T_n}_{S_n}$ は可積分であり，ゆえに $(M^{R_n})^*_\infty$ も可積分である．したがって $M^{R_n} \in \mathscr{D}^1$ であり，M は $\mathscr{D}^1$ に関する局所化列 (R_n) をもつ． □

命題 4.6.11.
X が連続なセミマルチンゲールならば，$M \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{0,\mathrm{loc}}$ と $A \in \mathscr{A}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ で $X = X_0 + M + A$ を満たすものがただ一つ存在する．

証明. X を連続なセミマルチンゲールとし，$X = X_0 + N + B$ を $N \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ かつ $B \in \mathscr{V}$ となるように選ぶ．命題 2.7.5 と補題 4.6.10 より $X - X_0 - N = B \in \mathscr{D}^1_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{V} = \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ となるので，命題 4.6.7 より $A \in \mathscr{A}^{\mathrm{pred}}_{\mathrm{loc}}$ で $B - A \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ を満たすものが存在する．このとき $N + B - A = X - X_0 - A$ は可予測な局所マルチンゲールなので，補題 4.6.9 より確率 1 で連続である．$M = N + B - A$ と定めれば $X - X_0 - M = A$ も連続であり，これが求める分解である．一意性は補題 4.6.4 よりしたがう． □

命題 4.6.11 における分解 $X = X_0 + M + A$ を連続セミマルチンゲールの標準分解 (canonical decomposition) と呼ぶ.

定義 4.6.12.
連続セミマルチンゲール X, Y は標準分解

$$X = M + A, \qquad Y = N + B$$

を持つとする．連続適合過程 $\langle X, Y\rangle$ を

$$\langle X, Y\rangle = \langle M, N\rangle$$

と定義し, X, Y の二次共変分 (quadratic covariation) と呼ぶ．特に $\langle X, X\rangle$ を X の二次変分 (quadratic variation) といい，$\langle X\rangle$ とも書く．

4.7 二次変分の収束

4.4 節では二次変分を Doob-Meyer 分解によって定義したが，実際の所二次変分にはもう少し直感的に重要な意味がある．$M \in \mathscr{M}^2$ パスの $[0,t]$ での挙動を考えたときに，微小区間での変動の二乗和を考える．$[0,t]$ の分割 $\pi\colon 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ に対して

$$\sum_{j=1}^{2^n} \left| M_{t_j}(\omega) - M_{t_{j-1}}(\omega) \right|^2$$

という量の $|\pi| \to \infty$ のときの極限のふるまいを調べたい．その極限が $\langle M \rangle_t(\omega)$ になるのではないかというのが，我々の主張したいことである．実際，収束の意味を適切に解釈することで，この主張は正当化される．これを証明するのが本節での目標である．

$[0,\infty[$ の分割 π を

$$\pi = (t_i)_{i\in\mathbb{N}}\colon 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots \to \infty, \qquad |\pi| = \sup_{i\in\mathbb{N}} |t_i - t_{i-1}| < \infty \tag{4.7.1}$$

を満たすようにとる．π と確率過程 X，$t \in [0,\infty]$ に対して，確率変数 $V_t^{(p)}(X;\pi)$ を以下のように定義する．

$$V_t^{(p)}(X;\pi) := \sum_{k=1}^{\infty} |X_{t\wedge t_k} - X_{t\wedge t_{k-1}}|^p.$$

ここで定義した $V_t^{(p)}(X;\pi)(\omega)$ はパス $X(\omega)$ の分割 π に沿った p 次変分と呼ばれる量である．$t_n \to \infty$ と仮定しているから，$t < \infty$ なら $V_t^p(X;\pi)$ の定義における和は実際は実質的に有限和であることに注意しておく．

$V_t^{(p)}(X;\pi)$ の $|\pi| \to 0$ とした極限は X のパスの正則性の指標となる量である．$X \in \mathscr{V}$ なら $V_t^{(1)}(X;\pi)$ は各 ω において $V(X)_t$ に収束する．大雑把な言い方をすると，X のパスの局所的な変動がより大きければ大きいほど，より大きい p でないと $V_t(X;\pi)$ は $|\pi| \to 0$ の極限をもたないという具合である．本節でこれ以降考える分割 π は，常に (4.7.1) の条件を満たしていると仮定する．

補題 4.7.1.
M を有界マルチンゲールとし，K をその上界とする．このとき (4.7.1) を満たす任意の分割 π に対して $\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} E\left[\left\{V_t^{(2)}(M;\pi)\right\}^2\right] \leq 6K^4$ がなりたつ．

証明. $\left\{V_t^{(2)}(X;\pi)\right\}^2$ を展開して期待値をとれば，

$$\begin{aligned}
&E\left[\left\{V_t^{(2)}(M;\pi)\right\}^2\right] \\
&= E\left[\left(\sum_k (M_{t\wedge t_k} - M_{t\wedge t_{k-1}})^2\right)^2\right] \\
&= \sum_{k\geq 1} E\left[(M_{t\wedge t_k} - M_{t\wedge t_{k-1}})^4\right] + 2\sum_{k\geq 1}\sum_{l>k} E\left[(M_{t\wedge t_k} - M_{t\wedge t_{k-1}})^2 (M_{t\wedge t_l} - M_{t\wedge t_{l-1}})^2\right]
\end{aligned} \tag{4.7.2}$$

となる．まずは (4.7.2) の第二項について考えよう．$k \geq 1$ に対して命題 4.4.3 より

$$\begin{aligned}\sum_{l>k} E\left[(M_{t_l} - M_{t_{l-1}})^2 \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_k}\right] &= \sum_{l>k} E\left[M_{t_l}^2 - M_{t_{l-1}}^2 \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_k}\right] \\ &= E\left[M_t^2 - M_{t\wedge t_k}^2 | \mathscr{F}_{t_k}\right] \\ &\leq E[M_t^2 | \mathscr{F}_{t_k}] \leq K^2\end{aligned}$$

がなりたつ．したがって，命題 4.4.3 を再び用いれば

$$\begin{aligned}&\sum_{k\geq 1}\sum_{l>k} E\left[(M_{t\wedge t_k} - M_{t\wedge t_{k-1}})^2 (M_{t\wedge t_l} - M_{t\wedge t_{l-1}})^2\right] \\ &= \sum_{k\geq 1}\sum_{l>k} E\left[(M_{t\wedge t_k} - M_{t\wedge t_{k-1}})^2 E\left[(M_{t\wedge t_l} - M_{t\wedge t_{l-1}})^2 \,\middle|\, \mathscr{F}_{t\wedge t_k}\right]\right] \\ &\leq \sum_{k\geq 1} E\left[K^2 (M_{t\wedge t_k} - M_{t\wedge t_{k-1}})^2\right] \\ &= K^2 \sum_{k\geq 1} E\left[M_{t\wedge t_k}^2 - M_{t\wedge t_{k-1}}^2\right] \\ &= K^2 E\left[M_t^2 - M_{t_0}^2\right] \\ &\leq K^2 E\left[M_t^2\right] \leq K^4\end{aligned} \tag{4.7.3}$$

となる．また (4.7.2) の第一項は以下のように評価できる．

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 1} E\left[(M_{t\wedge t_k} - M_{t\wedge t_{k-1}})^4\right] &\leq \sum_{k\geq 1} E\left[(2K)^2 (M_{t\wedge t_k} - M_{t\wedge t_{k-1}})^2\right] \\ &= 4K^2 \sum_{k\geq 1} E\left[M_{t\wedge t_k}^2 - M_{t\wedge t_{k-1}}^2\right] \\ &\leq 4K^2 E\left[M_t^2\right] \\ &\leq 4K^4\end{aligned} \tag{4.7.4}$$

(4.7.2)，(4.7.3) および (4.7.4) により任意の $t \in [0, \infty]$ に対して

$$E\left[\left\{V_t^{(2)}(M;\pi)\right\}^2\right] \leq 4K^4 + 2K^4 = 6K^4$$

となり，求める不等式が得られた． □

次に，有界なマルチンゲールの 4 次変分は 0 になるということを証明しよう．その前に証明中で用いる記法を用意しよう．$t \in [0, \infty]$ とする．分割 π に対して，確率過程 X の π に沿った $[0, t]$ 上の振動を

$$\operatorname{osc}_t(X;\pi)(\omega) = \sup_{t_i, t_{i+1} \in \pi} \sup_{s,u \in [t_i, t_i+1]} |X_{u\wedge t}(\omega) - X_{t\wedge s}(\omega)|$$

によって定義する．X が càdlàg なら sup は有理数上で決定されるから，$\operatorname{osc}_t(X;\pi)$ は確率変数となる．

補題 4.7.2.
M を有界かつ連続なマルチンゲールとすれば，任意の $t \in [0, \infty[$ に対して

$$\lim_{|\pi| \to 0} E\left[V_t^{(4)}(M; \pi)\right] = 0$$

がなりたつ．

証明. まずは $[0, \infty[$ の任意の分割 $\pi = (t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ に対して

$$\begin{aligned} V_t^{(4)}(M; \pi) &= \sum_k (M_{t \wedge t_k} - M_{t \wedge t_{k-1}})^4 \\ &\leq \{\mathrm{osc}_t(M; \pi)\}^2 \sum_k (M_{t \wedge t_k} - M_{t \wedge t_{k-1}})^2 \\ &= \{\mathrm{osc}_t(M; \pi)\}^2 \, V_t^{(2)}(M; \pi) \end{aligned}$$

がなりたつことに注意しておく．上の式において各辺の期待値をとって，さらに Schwarz の不等式と補題 4.7.1 を用いて評価すれば

$$\begin{aligned} E\left[V_t^{(4)}(M; \pi)\right] &\leq E\left[\{\mathrm{osc}_t(M; \pi)\}^2 \, V_t^{(2)}(M; \pi)\right] \\ &\leq \sqrt{E\left[\{\mathrm{osc}_t(M; \pi)\}^4\right]} \sqrt{E\left[\left\{V_t^{(2)}(M; \pi)\right\}^2\right]} \\ &\leq \sqrt{6K^4} \sqrt{E\left[\{\mathrm{osc}_t(M; \pi)\}^4\right]} \end{aligned} \tag{4.7.5}$$

となる．いま M のパスは連続なので有界区間 $[0, t]$ 上一様連続であり，ゆえに $\mathrm{osc}_t(X; \pi)$ は 0 に各点収束する．また M の有界性より $\{\mathrm{osc}_t(X; \pi)\}^4 \leq (2K)^4$ が成り立つから，有界収束定理により

$$\lim_{|\pi| \to 0} E\left[\{\mathrm{osc}_t(X; \pi)\}^4\right] = 0$$

となる．したがって，(4.7.5) で極限をとることにより

$$\lim_{|\pi| \to 0} E\left[V_t^{(4)}(X; \pi)\right] = 0$$

を得る． □

定理 4.7.3.
M を有界マルチンゲールで，さらに $\langle M \rangle$ が有界であるようなものとする．このとき任意の $t \in [0, \infty[$ に対して $V^{(2)}(M^t; \pi)$ は $|\pi| \to 0$ で $\langle M, M \rangle^t$ に $\mathscr{D}^2$ の意味で収束する．ただし，M^t は停止過程 $(M_{t \wedge s})_{s \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ を表す．

証明. K を M の上界とし，$\pi = (t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ を (4.7.1) を満たす $[0, \infty[$ の分割とする．$s \in [t_i, t_{i+1}]$ なら

$$E[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 | \mathscr{F}_s] = E[(M_{t_{i+1}} - M_s)^2 | \mathscr{F}_s] + (M_s - M_{t_i})^2$$

となることに注意すれば,

$$
\begin{aligned}
E\left[V_t^{(2)}(M;\pi)-V_s^{(2)}(M;\pi)\,\middle|\,\mathscr{F}_s\right] &= \sum_{i\geq 0} E\left[\left(M_{(t_{i+1}\wedge t)\vee s}-M_{(t_i\wedge t)\vee s}\right)^2\,\middle|\,\mathscr{F}_s\right] \\
&= \sum_{i\geq 0} E\left[M^2_{(t_{i+1}\wedge t)\vee s}-M^2_{(t_i\wedge t)\vee s}\,\middle|\,\mathscr{F}_s\right] \\
&= E\left[M_t^2-M_s^2\,\middle|\,\mathscr{F}_s\right] \\
&= E\left[\langle M,M\rangle_t-\langle M,M\rangle_s\,\middle|\,\mathscr{F}_s\right]
\end{aligned}
$$

がわかる．したがって $V^{(2)}(M;\pi)-\langle M\rangle$ はマルチンゲールであり，補題 4.7.1 と $\langle M\rangle$ の有界性より特に $V^{(2)}(M;\pi)-\langle M\rangle\in\mathscr{M}^2$ となる．

いま

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left(V_t^{(2)}(M;\pi)-\langle M\rangle_t\right)^2\right] \\
&= E\left[\left\{\sum_{k\geq 1}\left|M_{t\wedge t_k}-M_{t\wedge t_{k-1}}\right|^2-\left(\langle M\rangle_{t\wedge t_k}-\langle M\rangle_{t\wedge t_{k-1}}\right)\right\}^2\right] \\
&= \sum_{k\geq 0}\sum_{l\geq 0} E\left[\left\{\left|M_{t\wedge t_k}-M_{t\wedge t_{k-1}}\right|^2-\left(\langle M\rangle_{t\wedge t_k}-\langle M\rangle_{t\wedge t_{k-1}}\right)\right\}\right. \\
&\quad\left.\times\left\{\left|M_{t\wedge t_l}-M_{t\wedge t_{l-1}}\right|^2-\left(\langle M\rangle_{t\wedge t_l}-\langle M\rangle_{t\wedge t_{l-1}}\right)\right\}\right] \\
&= \sum_{k\geq 0} E\left[\left\{\left|M_{t\wedge t_k}-M_{t\wedge t_{k-1}}\right|^2-\left(\langle M\rangle_{t\wedge t_k}-\langle M\rangle_{t\wedge t_{k-1}}\right)\right\}^2\right] \\
&\leq \sum_{k\geq 1}^{n} 2E\left[\left|M_{t\wedge t_k}-M_{t\wedge t_{k-1}}\right|^4\right]+\sum_{k\geq 1} 2E\left[\left(\langle M\rangle_{t_j}-\langle M\rangle_{t_{j-1}}\right)^2\right] \\
&= 2E\left[\sum_{j=1}^{n}\left|M_{t_j}-M_{t_{j-1}}\right|^4\right]+2E\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\langle M\rangle_{t_j}-\langle M\rangle_{t_{j-1}}\right)^2\right] \\
&\leq 2E\left[V_t^{(4)}(M;\pi)\right]+2E\left[\mathrm{osc}_t(\langle M\rangle;\pi)\sum_{k\geq 1}\left(\langle M\rangle_{t\wedge t_k}-\langle M\rangle_{t\wedge t_{k-1}}\right)\right] \\
&= 2E\left[V_t^{(4)}(M;\pi)\right]+2E\left[\mathrm{osc}_t(\langle M\rangle;\pi)\langle M\rangle_t\right]
\end{aligned}
$$

という評価が得られる．（三つ目の等号はマルチンゲール性による．）$\lim_{|\pi|\to 0}\mathrm{osc}_t(\langle M\rangle;\pi)=0$ が成り立つことに注意すれば，優収束定理と補題 4.7.2 から

$$
\lim_{|\pi|\to 0} E\left[V_t^{(4)}(M;\pi)\right]+\lim_{|\pi|\to 0} E\left[\mathrm{osc}_t(\langle M\rangle;\pi)\langle M\rangle_t\right]
$$

となる．したがって

$$
\lim_{|\pi|\to 0} E\left[\left(V_t^{(2)}(M;\pi)-\langle M\rangle_t\right)^2\right]
$$

がわかる．はじめに注意したように $V_\cdot(M;\pi)-\langle M,M\rangle$ は二乗可積分マルチンゲールなので，Doob の不等式より

$$
E\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|V_s^{(2)}(\Pi)-\langle M,M\rangle_s\right|^2\right]\leq 4E\left[\left(V_t^{(2)}(\Pi)-\langle M\rangle_t\right)^2\right]
$$

が成り立つ．したがって

$$\lim_{|\pi|\to 0} E\left[\sup_{0\le s\le t}\left|V_s^{(2)}(M;\pi)-\langle M,M\rangle_s\right|^2\right]=0$$

となり，$(V_s^{(2)}(M^t;\pi))_{s\ge 0}=(V_{s\wedge t}^{(2)}(M;\pi))_{s\ge 0}$ は $\mathscr{D}^2$ の意味で $\langle M^t\rangle$ に収束することがわかった． □

注意 4.7.4. $V^{(2)}(M;\pi)$ の $\mathscr{D}^2$ 収束は定理 4.7.3 よりも弱い仮定の下で成り立つ．その証明には BDG 不等式が有用なので，これについては第 7 章で扱う． ■

系 4.7.5.
M,N を有界マルチンゲールで，さらに $\langle M\rangle$ と $\langle N\rangle$ が有界であるようなものとする．このとき

$$\sup_{0\le s\le t}\left|\sum_{j\ge 1}\left(M_{s\wedge t_j}-M_{s\wedge t_{j-1}}\right)\left(N_{s\wedge t_j}-N_{s\wedge t_{j-1}}\right)-\langle M,N\rangle_s\right|\xrightarrow[|\pi|\to 0]{\text{in } L^2}0$$

がなりたつ．

証明. 直接的な計算により

$$\begin{aligned}&\sum_{j\ge 1}\left\{(M_{t_j}+N_{t_j})-(M_{t_{j-1}}+N_{t_{j-1}})\right\}^2\\&=\sum_{j\ge 1}\left\{(M_{t_j}-M_{t_{j-1}})^2+(N_{t_j}-N_{t_{j-1}})^2+2(M_{t_j}-M_{t_{j-1}})(N_{t_j}-N_{t_{j-1}})\right\}\end{aligned}\tag{4.7.6}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{j\ge 1}\left\{(M_{t_j}-N_{t_j})-(M_{t_{j-1}}-N_{t_{j-1}})\right\}^2\\&=\sum_{j\ge 1}\left\{(M_{t_j}-M_{t_{j-1}})^2+(N_{t_j}-N_{t_{j-1}})^2-2(M_{t_j}-M_{t_{j-1}})(N_{t_j}-N_{t_{j-1}})\right\}\end{aligned}\tag{4.7.7}$$

となるから，(4.7.6) − (4.7.7) を計算して極限をとれば，二次共変分の定義と定理 4.7.3 より系の主張が従う． □

一般の局所マルチンゲールの二次変分についても，二乗可積分マルチンゲールの場合と同様に直感的な意味づけが与えられる．ただし，有界マルチンゲールの場合と異なり収束の意味はもっと弱まる．

定理 4.7.6.
$M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{\mathrm{c}}$ とすれば，$V^{(2)}(M;\pi)$ は $\langle M\rangle$ に ucp 収束する．

証明. 2.7.6 $M=0$ として示せば十分である．

$$T_n:=\{t\ge 0\mid |M_t|\vee\langle M\rangle_t\ge n\}$$

とすれば，(T_n) は M^{T_n} と $\langle M\rangle$ が有界となるような局所化列である．このとき定理 4.7.3 より $V(M^{T_n};\pi)$ は $|\pi|\to 0$ で $\langle M^{T_n}\rangle$ に $\mathscr{D}^2$ 収束する．したがって $V(M;\pi)$ は $\langle M\rangle$ に局所 $\mathscr{D}^2$ 収束し，命題 2.7.6 より ucp 収束する． □

系 4.7.7.
$M, N \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ とすれば,

$$\sup_{0\le s\le t}\left|\sum_{j\ge 1}(M_{s\wedge t_j}-M_{s\wedge t_{j-1}})(N_{s\wedge t_j}-N_{s\wedge t_{j-1}})-\langle M,N\rangle_s\right| \xrightarrow[|\Pi|\to 0]{\text{in probability}} 0$$

がなりたつ.

証明. 定理 4.7.3 から系 4.7.5 を導くのと同様の作業で，定理 4.7.6 から導かれる. □

定理 4.7.8.
X を連続セミマルチンゲールとすれば，$V(X;\pi)$ は $\langle X,X\rangle$ に ucp 収束する.

証明. $X=X_0+M+A$ を X の標準分解とする．$V^{(2)}(X;\pi)$ の定義より

$$V^{(2)}_t(X;\pi)=V^{(2)}_t(M;\pi)+V^{(2)}_t(A;\pi)+2\sum_{j\ge 0}(M_{t\wedge t_j}-M_{t\wedge t_{j-1}})(A_{t\wedge t_j}-A_{t\wedge t_{j-1}})$$

が成り立つから，これの各項の振る舞いを調べればよい．定理 4.7.6 より $V^{(2)}(M;\pi)$ は $\langle M\rangle=\langle X\rangle$ に ucp 収束する．また

$$\begin{aligned}
&\sup_{s\le t}\left|\sum_{j\ge 1}(M_{s\wedge t_j}-M_{s\wedge t_{j-1}})(A_{s\wedge t_j}-A_{s\wedge t_{j-1}})\right|\\
&\le \sup_{s\le t}\sum_{j\ge 1}\left|(M_{s\wedge t_j}-M_{s\wedge t_{j-1}})(A_{s\wedge t_j}-A_{s\wedge t_{j-1}})\right|\\
&\le \mathrm{osc}_t(M;\pi)\sum_{j\ge 1}\left|A_{t\wedge t_j}-A_{t\wedge t_{j-1}}\right|\\
&\le \mathrm{osc}_t(M;\pi)V(A)_t
\end{aligned}$$

がパスごとに成り立つ．この式の最後の辺は $|\pi|\to 0$ のとき 0 に概収束するから，特に確率収束する．同様にして,

$$\sup_{s\le t}\sum_{j\ge 1}(A_{s\wedge t_j}-A_{s\wedge t_{j-1}})^2\le \mathrm{osc}_t(A;\pi)V(A)_t \xrightarrow[\|\pi\|\to\infty]{P\text{-a.s.}} 0$$

も成り立つから，求める収束を得る. □

系 4.7.9.
X, Y を連続セミマルチンゲールとすれば,

$$\sup_{0\le s\le t}\left|\sum_{j=1}^{n}(X_{s\wedge t_j}-X_{s\wedge t_{j-1}})(Y_{s\wedge t_j}-Y_{s\wedge t_{j-1}})-\langle M,N\rangle_s\right| \xrightarrow[|\pi|\to 0]{\text{in probability}} 0$$

が成り立つ.

4.8 条件付き変動と準マルチンゲール

4.9 多次元のセミマルチンゲール理論

本節では，有限次元線形空間に値をとるマルチンゲールについて調べよう．

4.9.1 多次元の局所有限変動過程

$(E, \|\ \ \|_E)$ を有限次元の Banach 空間とする．E に値をとる確率過程でパスが局所有限変動を持つもの全体の空間を $\mathscr{V}(E)$ で表すことにする．$A \in \mathscr{V}(E)$ の全変動過程を $V(A)$ で表し，$E[\|V(A)_\infty\|_E] < \infty$ を満たす A 全体の空間を $\mathscr{A}(E)$ と書く．

4.9.2 多次元の二乗可積分マルチンゲールと二次変分

$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルターつき確率空間とする．$\mathbb{R}^d$ に値をとる確率過程 $M = (M^1, \dots, M^d)$ は各成分 M^i がマルチンゲールであるときに，マルチンゲールであるというのであった．任意の線形形式 $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ はある $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ によって $x \mapsto \langle a, x \rangle_{\mathbb{R}^d}$ と表現できるから，$M = (M^1, \dots, M^d)$ がマルチンゲールであることは，任意の $T \in (\mathbb{R}^d)^*$ について $T \circ M$ がマルチンゲールになることと同値である．これより，一般の有限次元線形空間に値をとるマルチンゲールを以下のように定義しよう．

定義 4.9.1.

(i) M を有限次元線形空間 E に値をとる確率過程とする．任意の $T \in E^*$ に対して $T \circ M$ が実数値マルチンゲールとなるとき，M はマルチンゲールであるという．

(ii) E は内積 $\langle\ ,\ \rangle_E$ を備えた有限次元の Hilbert 空間であるとする．E 値マルチンゲール M が

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} E\left[\|M_t\|_E^2\right] < \infty$$

を満たすとき，M は二乗可積分であるという．càdlàg な E 値の二乗可積分マルチンゲール全体の空間を $\mathscr{M}^2(E)$ で表す．また $\mathscr{M}^2(E)$ の元のうち連続なもの全体のなす部分空間を $\mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}(E)$ で表す．

我々は本小節で $M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}(E)$ の二次変分を考えたい．$M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ の場合，その二次変分 $\langle M, M \rangle$ は $M^2 - \langle M, M \rangle \in \mathscr{M}$ を満たすような唯一の $\langle M, M \rangle \in \mathscr{A}^\mathrm{c}$ なのであった．$M \in (\mathscr{M}^{2,\mathrm{c}})^d$ に対しても同様の定義をしたいのだが，多次元の場合には M^2 に対応する確率過程はどのようなものとなるだろうか？ $\mathbb{R}$ の場合とは異なり E には標準的な積がただ一つ定まるわけではないので，少し工夫が必要である．

定理 4.9.2.
E, F, G を有限次元の Hilbert 空間とし，$b\colon E \times F \to G$ を双線形写像とする．このとき，任意の $(M, N) \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}(E \times F)$ に対してある $Q_b(M, N) \in \mathscr{A}^\mathrm{c}(G)$ で，$b(M, N) - Q_b(M, N)$ が G 値マルチンゲールとなるようなものがただ一つ存在する．

証明．Step 1：$G = \mathbb{R}$ の場合． まずは一意性を示す．$b(M, N) - Q_b(M, N)$ が実数値の連続マルチンゲール

ならば $b(M,N)$ は

$$b(M,N) = b(M_0,N_0) + \{b(M,N) - b(M_0,N_0) - Q_b(M,N)\} + Q_b(M,N)$$

を標準分解とする連続セミマルチンゲールとなる．したがってこのような分解は一意的である．

次は Q_b を実際に構成しよう．E, F はそれぞれ n 次元と m 次元であるとし，同型 $\varphi\colon E \to \mathbb{R}^n$ と $\psi\colon F \to \mathbb{R}^m$ を固定する．これらの同型から定まる b の表現行列を $B = (b_{ij})$ で表すことにする．すなわち，$B \in M_{nm}(\mathbb{R})$ は任意の $(x,y) \in E \times F$ に対して $b(x,y) = \langle \varphi(x), B\psi(y)\rangle_{\mathbb{R}^n}$ を満たすような行列である．成分表示を用いれば，

$$b(x,y) = \sum_{1\le i\le n}\sum_{1\le j\le m} b_{ij}x_iy_j$$

となるから，

$$b(M,N) = \sum_{1\le i\le n}\sum_{1\le j\le m} b_{ij}\varphi(M)_i\psi(N)_j$$

が成り立つ．ここで

$$Q_b(M,N) = \sum_{1\le i\le n}\sum_{1\le j\le m} b_{ij}\langle\varphi(M)_i, \psi(N)_j\rangle$$

と定義する．$\varphi(M)_i$ と $\psi(N)_j$ はどれも連続な二乗可積分マルチンゲールであることと

$$b(M,N) - Q_b(M,N) = \sum_{1\le i\le n}\sum_{1\le j\le m} b_{ij}\left(\langle\varphi(M)_i, \psi(N)_j\rangle\right)$$

という表示から，$b(M,N) - Q_b(M,N)$ は実際に一様可積分マルチンゲールとなることがわかる．

最後に, $Q_b(M,N)$ が同型 φ, ψ の選び方に依存しないことを, 具体的な計算で確認しておこう．$\varphi'\colon E \to \mathbb{R}^n$ と $\psi'\colon F \to \mathbb{R}^m$ をそれぞれ同型とし，$B' = (b'_{ij})$ を b の (φ', ψ') に関する表現行列とする．また，P と Q をそれぞれ φ, φ' と ψ, ψ' に関する基底の変換行列とする．すなわち，P と Q はそれぞれ以下の図式を可換にする行列である．

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\varphi'"] & \\ \mathbb{R}^n \arrow[rr, "x\mapsto Px"'] & & \mathbb{R}^n \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & F \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\psi'"] & \\ \mathbb{R}^m \arrow[rr, "x\mapsto Qx"'] & & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

B と B' がそれぞれ表現行列であることから，任意の $(x,y) \in E \times F$ に対して

$$b(x,y) = \langle \varphi'(x), B'\psi'(y)\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle P\varphi(x), B'Q\psi(y)\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle \varphi(x), {}^tPB'Q\psi(y)\rangle_{\mathbb{R}^n}$$

が成り立ち，これより $B = {}^tPB'Q$ がわかる．したがって

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i\le n}\sum_{1\le j\le m} b_{ij}\langle\varphi(M)_i, \psi(N)_j\rangle &= \sum_{1\le i\le n}\sum_{1\le j\le m}\sum_{1\le k\le n}\sum_{1\le l\le m} p_{ki}b'_{kl}q_{lj}\,\langle\varphi(M)_i, \psi(N)_j\rangle \\
&= \sum_{1\le k\le n}\sum_{1\le l\le m} b'_{kl}\left\langle \sum_{1\le i\le n} p_{ki}\varphi(M)_i, \sum_{1\le j\le m} q_{lj}\psi(N)_j \right\rangle \\
&= \sum_{1\le k\le n}\sum_{1\le l\le m} b'_{kl}\,\langle (P\varphi(M))_k, (Q\psi(N))_l\rangle \\
&= \sum_{1\le k\le n}\sum_{1\le l\le m} b'_{kl}\,\langle \varphi'(M)_k, \psi(N)_l\rangle
\end{aligned}$$

となり，$Q_b(M,N)$ の定義は同型 (φ,ψ) の選び方によらないことがわかった．

Step 2：一般の場合． G が一般の有限次元空間の場合を考えよう．G は d 次元であるとし，同型 $\Phi\colon G\to\mathbb{R}^d$ を一つ固定し，$\mathrm{pr}_i\colon\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ を第 i 成分への標準射影とする．このとき $b_i:=\mathrm{pr}_i\circ\Phi\circ b\colon E\times F\to\mathbb{R}$ は双線形写像であるから，step 1 における $Q_{b_i}(M,N)$ は $b_i(M,N)-Q_{b_i}(M,N)$ がマルチンゲールとなるような $\mathscr{A}^{\mathrm{c}}$ の元である．

$$Q_b(M,N):=\Phi^{-1}\circ(Q_{b_1}(M,N),\dots,Q_{b_n}(M,N))$$

と定めれば，これが求める条件を満たす過程である．このような過程の一意性は，step 1 における一意性より従う．　□

定理 4.9.2 における確率過程 $Q_b(M,N)$ を，二乗可積分マルチンゲール M と N の，b に関する二次共変分と呼ぶことにする．

定義 4.9.3.
M,N を有限次元 Hilbert 空間 E に値をとる二乗可積分マルチンゲールとする．双線形写像 $\otimes\colon E\times E\to E\otimes E$ に関する二次共変分 $Q_\otimes(M,N)$ をテンソル二次共変分と呼ぶ．また，内積 $\langle\ ,\ \rangle\colon E\times E\to\mathbb{R}$ に関する二次共変分 $Q_{\langle\ ,\ \rangle}(M,N)$ をスカラー二次共変分といい，$\langle M,N\rangle$ で表す．

$M=(M^1,\dots,M^d)$ が $\mathbb{R}^d$ 値の二乗可積分マルチンゲールの場合，スカラー二次変分とテンソル二次変分はそれぞれ

$$\langle M,M\rangle=\sum_{1\le i\le d}\langle M^i,M^i\rangle$$
$$Q_\otimes(M,M)=\begin{pmatrix}\langle M^1,M^1\rangle & \dots & \langle M^d,M^d\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle M^d,M^1\rangle & \dots & \langle M^d,M^d\rangle\end{pmatrix}$$

という表現を持つ．つまり，この場合は $\langle M,M\rangle$ は $Q_\otimes(M,M)$ のトレースをとったものになる．

4.9.3 多次元の局所マルチンゲールと連続セミマルチンゲール

定義 4.9.4.
E を有限次元のノルム空間とする．

(i) E-値の可測関数族として一様可積分であるとき，マルチンゲール M は一様可積分であるという．一様可積分な E-値マルチンゲール全体の空間を $\mathscr{M}(E)$ で表す．さらに，$\mathscr{M}(E)$ の元のうち連続なもの全体のなす部分空間を $\mathscr{M}^{\mathrm{c}}(E)$ で表す．

(ii) $\mathscr{M}(E)_{\mathrm{loc}}$ の元を，E 値の局所マルチンゲールと呼ぶ．

(iii) $X=(X_t)_{t\in\mathbb{R}_{\ge0}}$ を E 値の確率過程とする．

4.9.4 複素数値のマルチンゲールと連続セミマルチンゲール

定義 4.9.5.
複素数値の確率過程 $M = M_1 + \sqrt{-1}M_2$ は，M_1 と M_2 がともに実数値の局所マルチンゲールであるとき，局所マルチンゲールであるという．

4.10 ノート

■§4.3　連続時間における Doob-Meyer 分解は Meyer [80, 81, 82] による．離散的な Doob 分解の極限として Doob-Meyer 分解を構成するという証明方法は Rao [91] から始まるものである．より現代的な（といっても現在では既に古典的であるが）証明は Doleans-Dade [31] によって与えられた．本ノートの証明も Rao [91] に従っている．本ノートでの定理 4.3.11 の証明は本質的には Rao [91] によるものと変わらないが，可予測射影を使ってもう少しモダンな言葉に書き直した．Doob-Meyer 分解の証明には他にも様々なものが知られており，そのうちいくつかの関連文献を挙げておく：Bass [7, 6]，Beiglböck, et.al. [8]，Dellacherie [25, Chapter VII.§1]，Jakubowski [63]，Protter [90, Chapter III.§3].

■§4.4　二次変分の導入は，Doob-Meyer 分解における自然な増加過程で定義する方法を用いた．一般の $M \in \mathscr{M}^2$ に対しても同様の方法で二次変分 $\langle M, M\rangle$ を定義することができて，これは M の可予測二次変分とか，sharp-bracket とか angular-bracket とか呼ばれている．しかし，M が不連続な場合は二次変分 $\langle M, M\rangle$ はそこまで良い性質を持つものではない．そこで，不連続なマルチンゲールに対しては $\langle M, M\rangle$ の代わりに $[M, M]$ で表される別の二次変分を用いる.（連続な場合は二つの二次変分は一致する.）

補題 4.4.14 の証明は He, Wang, and Yan [53, 1.40 Theorem] を参考にした．

第 5 章

確率積分

この章を通して，通常の条件を満たすフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を一つ固定して議論を進める．

5.1　二乗可積分マルチンゲールによる確率積分

$M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ とすれば $\langle M, M \rangle \in \mathscr{A}^+$ であるから，

$$\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \ni \Gamma \mapsto E\left[\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} 1_\Gamma(s) d\langle M, M \rangle_s\right] \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

は $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ 上の有限測度を定める．この測度を $P \circledast \langle M \rangle$ で表すことにする．まずは，測度論における基本的な結果を引用しておこう．

補題 5.1.1.
$L^2(\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}), P \circledast \langle M \rangle)$，$L^2(\mathrm{Prog}, P \circledast \langle M \rangle)$，$L^2(\mathscr{P}, P \circledast \langle M \rangle)$ はどれも内積

$$\langle H, K \rangle_{L^2} = \int_{\Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0}} H(\omega, s) K(\omega, s) P \circledast \langle M \rangle (d(\omega, s)) = E\left[\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} H_s K_s d\langle M, M \rangle_s\right]$$

により Hilbert 空間となる．

補題 5.1.1 に出てきた空間は我々がこれから導入する確率積分の被積分関数となる確率過程の空間である．今後，$L^2(\mathrm{Prog}, P \circledast \langle M \rangle)$，$L^2(\mathscr{P}, P \circledast \langle M \rangle)$ をそれぞれ $L^2(\langle M \rangle)$，$L^2(\mathscr{P}, \langle M \rangle)$ で表すことにする． 以下の定理によって，$L^2(\langle M \rangle)$ を被積分関数とする確率積分を定めることが可能になる．そのため定理 5.1.2 は確率積分論においてもっとも重要な結果であると言ってよいだろう．

定理 5.1.2.
$M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ とする．このとき任意の $H \in L^2(\langle M \rangle)$ に対して，ある $L \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}_0$ で任意の $N \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ について

$$\langle L, N \rangle = H \bullet \langle M, N \rangle. \tag{5.1.1}$$

を満たすものがただ一つ存在する．ただし，(5.1.1) の等号は区別不能の意味である．

証明．Step1：一意性の証明． $H \in L^2(\langle M \rangle)$ とする．$L, L' \in \mathscr{M}_0^{2c}$ は任意の $M \in \mathscr{M}^{2,c}$ に対して

$$\langle L, N \rangle = \langle L', N \rangle = H \bullet \langle M, N \rangle$$

を満たすとしよう．このときブラケットの線形性より（命題 4.4.12）

$$\forall N \in \mathscr{M}^{2,c} \quad \langle L - L', N \rangle = 0$$

が成り立つから，特に $N = L - L' \in \mathscr{M}^{2,c}$ とおけば

$$\langle L - L', L - L' \rangle = 0$$

となる．したがって命題 4.4.6 により $L - L'$ は 0 と区別不能であることがわかる．

Step2：存在の証明． まずは $M \in \mathscr{M}_0^{2,c}$ として示す．$H \in L^2(\langle M \rangle)$ とすれば，國田・渡辺の不等式（系 4.4.17）より任意の $N \in \mathscr{M}_0^{2,c}$ について

$$\begin{aligned}
&\left| E\left[\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} H_s d\langle M, N \rangle_s \right] \right| \\
&\leq E\left[\int_0^\infty |H_s| \cdot 1 dV(\langle M, N \rangle)_s \right] \\
&\leq \left\| \left(\int_0^\infty H_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(P)} \left\| \left(\int_0^\infty 1^2 d\langle N, N \rangle_s \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(P)} \\
&= E\left[\int_0^\infty H_s^2 \, d\langle M, M \rangle_s \right]^{\frac{1}{2}} E\left[\int_0^\infty 1 \, d\langle N, N \rangle_s \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \|H\|_{L^2(\langle M \rangle)} \, E[\langle N, N \rangle_\infty] \\
&= \|H\|_{L^2(\langle M \rangle)} \, \|N\|_{\mathscr{M}^2}
\end{aligned}$$

が成り立つ．（最後の等号で $N_0 = 0$ であることを用いた．）これより

$$|E[(H \bullet \langle M, N \rangle)_\infty]| \leq \|H\|_{L^2(\langle M \rangle)} \, \|N\|_{\mathscr{M}^2} \tag{5.1.2}$$

となり，写像 $\mathscr{M}_0^{2,c} \ni N \mapsto E[(H \bullet \langle M, N \rangle)_\infty] \in \mathbb{R}$ は有界な線形形式であることがわかる．したがって Riesz の表現定理によって，ある $L \in \mathscr{M}_0^{2,c}$ で

$$\forall N \in \mathscr{M}_0^{2,c} \quad E[(H \bullet \langle M, N \rangle)_\infty] = \langle L, N \rangle_{\mathscr{M}^2} = E[L_\infty N_\infty] \tag{5.1.3}$$

を満たすものがただひとつ存在する．

この L が条件 (5.1.1) を満たすことを示そう．二次共変分の定義を思い出せば，これは $LN - H \bullet \langle M, N \rangle$ が一様可積分マルチンゲールになっていることを示すということである．$N \in \mathscr{M}_0^{2,c}$ とし，T を任意の停止時刻としよう．(5.1.2) より $H \bullet \langle M, N \rangle \in \mathscr{A}$ であることがわかるから，$L_T N_T - (H \bullet \langle M, N \rangle)_T$ は可積分な確率変数である．さらに

$$\begin{aligned}
&E[L_T N_T] \\
&= E[E[L_\infty | \mathscr{F}_T] N_T] && (\because \text{任意抽出定理}) \\
&= E[L_\infty N_T] \\
&= E[L_\infty N_\infty^T] \\
&= E[(H \bullet \langle M, N^T \rangle)_\infty] && (\because N^T \in \mathscr{M}_0^{2,c} \text{ と } (5.1.2) \text{ から}) \\
&= E[(H \bullet \langle M, N \rangle^T)_\infty] && (\because \text{命題 } 4.5.11) \\
&= E[(K \bullet \langle M, N \rangle)_T]
\end{aligned}$$

が成り立つから，

$$E[L_T N_T - (H \bullet \langle M, N\rangle)_T] = 0 = E[L_0 N_0 - (H \bullet \langle M, N\rangle)_0]$$

がわかる．したがって命題 3.4.9 により $LN - H \bullet \langle M, N\rangle$ はマルチンゲールとなり，$\langle L, N\rangle = H \bullet \langle M, N\rangle$ が成立する．

$N \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ の場合は

$$\langle L, N\rangle = \langle L, N - N_0\rangle = H \bullet \langle M, N - N_0\rangle = H \bullet \langle M, N\rangle$$

となるから，やはり (5.1.1) が成り立つ．

最後に一般の $M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ を考えよう．$M - M_0 \in \mathscr{M}_0^{2,\mathrm{c}}$ であるから，ここまでの議論によりある $L \in \mathscr{M}_0^{2,\mathrm{c}}$ で任意の $N \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ を満たすものがただ一つ存在する．このとき

$$\langle L, N\rangle = H \bullet \langle M - M_0, N\rangle = H \bullet \langle M, N\rangle$$

であるから，この L が求めていたものである． □

定義 5.1.3.
$M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ および $H \in L^2(\langle M\rangle)$ とする．定理 5.1.2 における確率過程 L を H の M による確率積分 (stochastic integral) といい，$H \bullet M$ で表す．$0 \leq u \leq t$ のとき

$$\int_{]u,t]} H_s dM_s = \int_u^t H_s dM_s = (H \bullet M)_t - (H \bullet M)_u$$

と書き，さらに

$$\int_{[0,t]} H_u dM_u = H_0 M_0 + (H \bullet M)_t$$

と定める．

確率積分にはいくつか種類があるので，$H \bullet M$ のことを特に伊藤積分 (Itô integral) と呼ぶことも多い．一般に $M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ のパスは有界変動ではないから，$H \bullet M$ を Stieltjes 確率積分と解釈することは出来ない．しかし，これから見ていくように伊藤確率積分 $H \bullet M$ は Stieltjes 確率積分と類似した性質を数多く持っている．

命題 5.1.4.
$H \in L^2(\langle M\rangle)$ なら，$\langle H \bullet M\rangle = H^2 \bullet \langle M\rangle$ が成り立つ．

証明． (5.1.1) とブラケットの対称性より

$$\begin{aligned}
\langle H \bullet M, H \bullet M\rangle &= H \bullet \langle M, H \bullet M\rangle \\
&= H \bullet \langle H \bullet M, M\rangle \\
&= H \bullet (H \bullet \langle M, M\rangle) \\
&= H^2 \bullet \langle M, M\rangle
\end{aligned}$$

となる． □

系 5.1.5 (伊藤の等長性).
$M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ とすれば，写像 $L^2(\langle M\rangle) \ni H \mapsto H \bullet M \in \mathscr{M}_0^{2,\mathrm{c}}$ は等長写像である．

証明. $H \in L^2(\langle M\rangle)$ なら，命題 5.1.4 により

$$\|H \bullet M\|_{\mathscr{M}^2}^2 = E[\langle H \bullet M\rangle_\infty] = E[(H^2 \bullet \langle M, M\rangle)_\infty] = \|H\|_{L^2(\langle M\rangle)}^2$$

となる． □

系 5.1.5 により，写像 $H \mapsto H \bullet M$ は適当な同一視の下で単射となる．ただし，$\mathscr{M}^2$ の元は区別不能なものを同一視するが，$L^2(\langle M\rangle)$ の元の同一視は $P \circledast \langle M\rangle$-a.e. によるものであり，それらは異なる意味であることに注意されたい．

次は確率積分の代数的な性質を調べよう．

命題 5.1.6.

(i) $M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ なら，写像 $L^2(\langle M\rangle) \ni H \mapsto H \bullet M \in \mathscr{M}_0^{2,\mathrm{c}}$ は線形写像である．

(ii) $M, N \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ かつ $H \in L^2(\langle M\rangle) \cap L^2(N)$ なら，任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $H \in L^2(aM + bN)$ であり，

$$H \bullet (aM + bN) = a(H \bullet M) + b(H \bullet N)$$

が成り立つ．

(iii) $M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ かつ $H \in L^2(\langle M\rangle)$ とする．Z が有界 $\mathscr{F}_0$ - 可測関数ならば $ZH \in L^2(\langle M\rangle)$ かつ $H \in L^2(\langle ZM\rangle)$ であり，

$$(ZH) \bullet M = Z(H \bullet M) = H \bullet (ZM)$$

が成り立つ．

(iv) $M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ とする．$K \in L^2_\infty(M)$ かつ $H \in L^2(K \bullet M)$ ならば，$HK \in L^2(\langle M\rangle)$ であり

$$(HK) \bullet M = H \bullet (K \bullet M)$$

が成立．

(iv) の性質を伊藤積分の結合律 (associativity) と呼ぶ．

証明. (i) a, b を任意の実数，$H, K \in L^2(\langle M\rangle)$ とすれば，Stieltjes 積分の線形性とブラケットの双線形性により

$$\begin{aligned}(aH + bK) \bullet \langle M, N\rangle &= a(H \bullet \langle M, N\rangle) + b(K \bullet \langle M, N\rangle) \\ &= a\langle H \bullet M, N\rangle + b\langle K \bullet M, N\rangle \\ &= \langle a(H \bullet M) + b(K \bullet M), N\rangle\end{aligned}$$

が任意の $N \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ について成り立つ．したがって定理 5.1.2 の一意性から

$$(aH + bK) \bullet M = a(H \bullet M) + b(K \bullet M)$$

がわかる．

(ii) $H \in L^2(\langle M \rangle) \cap L^2(N)$ ならば，系 4.4.18 の証明と同様にして

$$\begin{aligned}
(H^2 \bullet \langle M+N \rangle)_\infty &= (H^2 \bullet \langle M \rangle)_\infty + (H^2 \bullet \langle N \rangle)_\infty + 2(H^2 \bullet \langle M, N \rangle)_\infty \\
&\leq (H^2 \bullet \langle M \rangle)_\infty + (H^2 \bullet \langle N \rangle)_\infty + \left\{H^2 \bullet \langle M \rangle_\infty + H^2 \bullet \langle N \rangle_\infty\right\} \\
&= 2\left\{H^2 \bullet \langle M \rangle_\infty + H^2 \bullet \langle N \rangle_\infty\right\}
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって

$$E\left[\int_0^\infty H_s^2 d\langle M+N \rangle_s\right] \leq 2\left(E\left[\int_0^\infty H_s^2 d\langle M, M \rangle_s\right] + E\left[\int_0^\infty H_s^2 d\langle N, N \rangle_s\right]\right) < \infty$$

となり，$H \in L^2_\infty(aM+bN)$ がわかる．このとき任意の $L \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ に対して

$$\begin{aligned}
H \bullet \langle aM+bN, L \rangle &= H \bullet (a\langle M, L \rangle + b\langle N, L \rangle) \\
&= a(H \bullet \langle M, L \rangle) + b(H \bullet \langle N, L \rangle) \\
&= a\langle H \bullet M, L \rangle + b\langle H \bullet N, L \rangle \\
&= \langle a(H \bullet M) + b(H \bullet N), L \rangle
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって

$$K \bullet (aM+bN) = a(K \bullet M) + b(K \bullet N)$$

である．

(iii)

$$E\left[\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} (ZH_s)^2 d\langle M \rangle_s\right] \leq \|Z\|_{L^\infty} E\left[\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} H_s^2 d\langle M \rangle_s\right] < \infty$$

より $ZH \in L^2(\langle M \rangle)$ である．命題 4.4.13 と (5.1.1) より，任意の $N \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle (ZH) \bullet M, N \rangle &= (ZH) \bullet \langle M, N \rangle = Z(H \bullet \langle M, N \rangle) \\
&= Z\langle H \bullet M, N \rangle = \langle Z(H \bullet M), N \rangle
\end{aligned}$$

となるから $(ZH) \bullet M = Z(H \bullet M)$ がわかる．また

$$E\left[\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} H_s^2 d\langle ZM \rangle_s\right] = E\left[\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} H_s^2 Z^2 d\langle M \rangle_s\right] \leq \|Z\|_{L^\infty} E\left[\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} H_s^2 d\langle M \rangle_s\right] < \infty$$

であるから $H \in L^2(\langle ZM \rangle)$ も成り立つ．したがって命題 4.4.13 より任意の $N \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ に対して

$$\langle H \bullet ZM, N \rangle = H \bullet \langle M, ZN \rangle = Z\langle H \bullet M, N \rangle = \langle Z(H \bullet M), N \rangle$$

となる．ゆえに $H \bullet ZM = Z(H \bullet M)$ が成立する．

(iv) $\langle K \bullet M \rangle = K^2 \bullet \langle M \rangle$ であることに注意すれば，仮定より

$$E\left[\int_0^\infty H_s^2 K_s^2 d\langle M \rangle_s\right] = E\left[\int_0^\infty H_s^2 d\langle K \bullet M \rangle_s\right] < \infty$$

となり $HK \in L^2(\langle M \rangle)$ がしたがう．このとき (5.1.1) より任意の $N \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ に対して

$$\langle (HK) \bullet M, N \rangle = (HK) \bullet \langle M, N \rangle = H \bullet (K \bullet \langle M, N \rangle) = H \bullet \langle K \bullet M, N \rangle$$

が成り立つ．したがって定理 5.1.2 の一意性より $(HK) \bullet M = H \bullet (K \bullet M)$ がわかる． □

Stieltjes 確率積分における命題 4.1.5 と同様の性質が伊藤積分においても成立する．

命題 5.1.7.
$M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ かつ $H \in L^2(\langle M\rangle)$ とすれば，任意の停止時刻 T に対して

$$K \bullet M^T = K1_{[\![0,T]\!]} \bullet M = (K \bullet M)^T = K^T \bullet M^T$$

が成り立つ．[a]

[a] ただし，

$$[\![0,T]\!] = \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \mid 0 \leq t \leq T(\omega)\}$$

である．

証明． T を停止時刻とすれば

$$E\left[\int_0^\infty 1_{[\![0,T]\!]}(s,\omega)d\langle M,M\rangle_s\right] = E[\langle M,M\rangle_T] < \infty$$

より $1_{[\![0,T]\!]} \in L^2_\infty(M)$ である[*1]．このとき任意の $N \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ に対して

$$\langle M^T, N\rangle = \langle M,N\rangle^T = 1_{[\![0,T]\!]} \bullet \langle M,N\rangle = \langle 1_{[\![0,T]\!]} \bullet M, N\rangle$$

がなりたつから，

$$M^T = 1_{[\![0,T]\!]} \bullet M \tag{5.1.4}$$

が分かる．(5.1.4) と結合律から

$$K \bullet M^T = K \bullet (1_{[\![0,T]\!]} \bullet M) = K1_{[\![0,T]\!]} \bullet M$$

となる．一方

$$(K \bullet M)^T = 1_{[\![0,T]\!]} \bullet (K \bullet M) = 1_{[\![0,T]\!]}K \bullet M$$

でもあるから，はじめの二つの等号が示された．同様にして

$$K^T \bullet M^T = K^T \bullet (1_{[\![0,T]\!]} \bullet M) = K^T 1_{[\![0,T]\!]} \bullet M = K1_{[\![0,T]\!]} \bullet M$$

もわかるので，最後の等号も成り立つ． □

ここまでは $M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ による確率積分の被積分関数の空間を発展的可測なものとしていた．もちろん発展的可測性という広い範疇で確率積分論を展開できればそれは便利であるが，左側 Riemann 和の L^2 極限として確率積分をとらえる場合には被積分関数を（より狭いクラスである）可予測過程の枠組みで考えるほうが自然であるとも言える．そこで，本節の残りの部分では $L^2(\langle M\rangle)$ と $L^2(\mathscr{P}, \langle M\rangle)$ の関係について考えてみよう．

命題 5.1.8.
$M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ とする．このとき任意の $H \in L^2(\langle M\rangle)$ に対して，ある $K \in L^2(\mathscr{P}, \langle M\rangle)$ で $K \bullet M = H \bullet M$ を満たすものがただ一つ存在する．ただし，一意性は $P \circledast \langle M\rangle$-a.e. の意味である．

証明．Step 1：K の構成． $H \in L^2(\langle M\rangle)$ なら國田・渡辺の不等式より

$$P \circledast \langle M\rangle(|H|) \leq \sqrt{P \circledast \langle M\rangle(H^2)}\sqrt{E[\langle M\rangle_\infty]} < \infty$$

[*1] $1_{[\![0,T]\!]}$ は発展的可測であることに注意せよ．

となるので，$H \in L^1(P \circledast \langle M\rangle)$ となることに注意しておく．$K = E_{P\circledast\langle M\rangle}[H|\mathscr{P}]$ と定義したとき，この K が求める可予測過程であることを示そう．条件付き期待値に関する Jensen の不等式より[*2] $K^2 \le E[|H|^2|\mathscr{P}]$ となるので，$K \in L^2(\mathscr{P}, \langle M\rangle)$ がわかる．

Step 2：$K \bullet M = H \bullet M$ の証明． まずは，H が有界な場合は ${}^{\mathfrak{p}}H = K$ が $P \circledast \langle M\rangle$-a.e. の意味で成り立っていることを確かめよう．$\Gamma \in \mathscr{P}$ とすれば，

$$
\begin{aligned}
&= P \circledast \langle M\rangle(K1_\Gamma) = P \circledast \langle M\rangle(H1_\Gamma) = E\left[\int_{\mathbb{R}_{\ge 0}} H1_\Gamma d\langle M\rangle\right] \\
&= E\left[\int_{\mathbb{R}_{\ge 0}} {}^{\mathfrak{p}}H1_\Gamma d\langle M\rangle\right] = E\left[\int_{\mathbb{R}_{\ge 0}} {}^{\mathfrak{p}}H1_\Gamma d\langle M\rangle\right] = P \circledast \langle M\rangle({}^{\mathfrak{p}}H1_\Gamma)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって ${}^{\mathfrak{p}}H = K$ である．したがって，H が有界なら確率積分の定義と可予測射影の性質により任意の $N \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ に対して

$$
E[\langle H \bullet M, N\rangle_\infty] = E[H \bullet \langle M, N\rangle_\infty] = E[K \bullet \langle M, N\rangle_\infty] = E[\langle K \bullet M, N\rangle_\infty]
$$

となる．これより $K \bullet M = H \bullet M$ がわかる．

一般の $H \in L^2(\langle M\rangle)$ に対しては，$H^{(n)} = H1_{\{|H|\le n\}}$ および $K^{(n)} = E[H^{(n)}|\mathscr{P}]$ と定義する．このとき優収束定理と条件付き期待値に関する優収束定理より $H^{(n)} \to H$ と $K^{(n)} \to K$ が $L^2(\langle M\rangle)$ の意味で成り立つので，確率積分の等長性により $H^{(n)} \bullet M \to H \bullet M$ および $K^{(n)} \bullet M \to K \bullet M$ が $\mathscr{M}^2$ の意味で成り立つ．ゆえに $H \bullet M = K \bullet M$ となる． □

5.2 連続局所マルチンゲールによる確率積分

本節では，前節で構成された確率積分 $H \bullet M$ の対象となる確率過程を拡張していく．$M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ は $\mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ に，$H \in L^2(\langle M\rangle)$ は $L^2(\langle M\rangle)_{\mathrm{loc}}$ まで拡張することが出来る．しかし，拡張後の確率積分は L^2 の理論を直接用いることはできず，局所化の作業を通して前節の結果に帰着するという手順の議論を繰り返していく．

$M \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ に対して $\mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ の場合と同じように空間 $L^2(\langle M\rangle)$ と $L^2(\mathscr{P}, \langle M\rangle)$ を定義する．すなわち，

$$
L^2(\langle M\rangle) = \left\{H\colon \Omega \times \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R} \mid H \text{ は発展的可測で } E[(H^2 \bullet \langle M\rangle)_\infty] < \infty\right\}
$$
$$
L^2(\mathscr{P}, \langle M\rangle) = \left\{H \in L^2(\langle M\rangle) \mid H \text{ は可予測}\right\}
$$

ということである．先ほどと同様に

$$
P \circledast \langle M\rangle(\Gamma) = E\left[\int_{\mathbb{R}_{\ge 0}} 1_\Gamma d\langle M\rangle\right]
$$

と定めれば，$L^2(\langle M\rangle)$ と $L^2(\mathscr{P}, \langle M\rangle)$ は測度 $P \circledast \langle M\rangle$ による L^2-空間である．いま M は連続な局所マルチンゲールであるから，$P \circledast \langle M\rangle$ は有限測度ではなくて σ-有限測度測度になっていることに注意されたい[*3]．

[*2] 条件付き期待値に関する Jensen の不等式は有限測度について成立する．これは実際，有限測度 μ に対して確率測度 ν を $\nu = \mu/\|\mu\|$ によって定義すれば，$E_\nu[X|\mathscr{G}] = E_\mu[X|\mathscr{G}]$ が成り立っていることからわかる．

[*3] $\langle M\rangle$ は連続なので，$P \circledast \langle M\rangle$ は特に $\mathscr{P}$-σ-有限である．

注意 5.2.1. 実数値の発展的可測過程 H に対して，$H \in L^2(\langle M\rangle)_{\mathrm{loc}}$ は任意の t について

$$\int_0^t H_s^2 d\langle M\rangle_s < \infty \quad P\text{-a.s.}$$

が成り立つことと同値である．というのも上の条件が成り立つとは $H^2 \bullet \langle M\rangle \in \mathscr{V}^+$ が成り立つということに他ならないからである．命題 4.1.3より $\mathscr{V}^{\mathrm{c}} = \mathscr{A}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ となることを思い出してもらいたい． ■

局所化の操作を通して，$M \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ と $H \in L^2(\langle M\rangle)$ に対しても確率積分 $H \bullet M$ を定義しよう．

定理 5.2.2.
$M \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ および $H \in L^2(\langle M\rangle)_{\mathrm{loc}}$ とする．このとき，$L \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{0,\mathrm{loc}}$ で，任意の $N \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ に対して

$$\langle H \bullet M, N\rangle = H \bullet \langle M, N\rangle \tag{5.2.1}$$

を満たすようなものがただ一つ存在する．

証明．Step 1：一意性の証明． $L, L' \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ がともに (5.2.1) を満たすとすれば $\langle L - L'\rangle = 0$ が成り立つ．したがって命題 4.5.13 により L と L' は区別不能となる．

Step 2：存在の証明． 國田・渡辺不等式（定理 4.5.15）より任意の $N \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ について

$$E[|H| \bullet V(\langle M, N\rangle)_\infty] \le \sqrt{E[H^2 \bullet \langle M\rangle_\infty]}\sqrt{E[\langle N\rangle_\infty]}$$

が成り立ち，ゆえに $H \bullet \langle M, N\rangle$ は well-defined で $H \bullet \langle M, N\rangle \in \mathscr{A}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ となることに注意しておく．まずは $M \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{0,\mathrm{loc}}$ の場合を考える．(T_n) を M の $\mathscr{M}^2$ に関する局所化列とし，

$$S_n(\omega) = \inf\left\{ t \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; \int_0^t H_s^2(\omega) d\langle M, M\rangle_s(\omega) \ge n \right\}$$

と定義する．$R_n = T_n \wedge S_n$ とすれば $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はまた M の $\mathscr{M}^2$ に関する局所化列であり，さらに

$$(H^{R_n})^2 \bullet \langle M^{R_n}\rangle_\infty = (H^2 \bullet \langle M\rangle)_{R_n} \le n$$

が成り立つ．このとき $H^{R_n} \in L^2(\langle M^{R_n}\rangle)$ となっているから確率積分 $X^{(n)} := H^{R_n} \bullet M^{R_n} \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}_0$ が定義できる．命題 5.1.7 より任意の n について

$$(X^{(n+1)})^{R_n} = (H^{R_{n+1}\wedge R_n} \bullet M^{R_{n+1}\wedge R_n}) = (H^{R_n} \bullet M^{R_n}) = X^{(n)}$$

が成り立つから，

$$L(\omega, t) = X^{(n)}_t(\omega) = (H^{R_n} \bullet M^{R_n})_t(\omega) \quad \text{if } (t, \omega) \in [\![0, R_n]\!]$$

によって確率過程 L を定めることができる．定義より明らかに $L_0 = 0$ であり，$L^{R_n} \in \mathscr{M}^2 \subset \mathscr{M}$ だから L は (R_n) を $\mathscr{M}$ に関する局所化列としてもつ．後はこの L が (5.2.1) を満たすことを示せばよい．$N \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{0,\mathrm{loc}}$ とし，(τ_n) を N の $\mathscr{M}^2$ に関する局所化列とする．$\sigma_n = R_n \wedge \tau_n$ と定めれば $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は L と N に共通の $\mathscr{M}^2$ に関する局所化列であり，

$$\begin{aligned}
\langle L, N\rangle^{\sigma_n} &= \langle L^{\sigma_n}, N^{\sigma_n}\rangle && (\because \text{命題 } 4.5.11)\\
&= \langle H^{\sigma_n} \bullet M^{\sigma_n}, N^{\sigma_n}\rangle && (\because \text{命題 } 5.1.7)\\
&= H^{\sigma_n} \bullet \langle M^{\sigma_n}, N^{\sigma_n}\rangle && (\because \text{確率積分の定義})\\
&= H^{\sigma_n} \bullet \langle M, N\rangle^{\sigma_n} && (\because \text{命題 } 4.5.11)\\
&= (H \bullet \langle M, N\rangle)^{\sigma_n} && (\because \text{命題 } 4.1.5)
\end{aligned}$$

となる．なお，最後の行における $H \bullet \langle M, N\rangle$ が well-defined であることは最初の注意で述べたとおりである．$\sigma_n \to \infty$ であったから，これより

$$\langle H \bullet M, N\rangle = H \bullet \langle M, N\rangle$$

となることがわかる．一般の $M \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ に対しては

$$H \bullet M = H \bullet (M - M_0)$$

と定義すればよい． □

定義 5.2.3.
命題 5.2.2 における $L \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{0,\mathrm{loc}}$ を H の M に関する確率積分 (stochastic integral) あるいは伊藤積分 (Itô integral) といい，$H \bullet M$ で表す．$0 \leq u \leq t$ に対して，

$$\int_u^t H_s dM_s = \int_{]u,t]} H_s dM_s = (K \bullet M)_t - (K \bullet M)_u$$

と定める．さらに $t \geq 0$ に対して

$$\int_{[0,t]} H_s dM_s = H_0 M_0 + (H \bullet M)_t$$

と定義する．

連続局所マルチンゲールによる確率積分 $H \bullet M$ も $M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ の場合と同じような性質を数多く持っている．

命題 5.2.4.

(i) $M \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$，$H \in L^2(\langle M\rangle)_{\mathrm{loc}}$ とすれば

$$\langle H \bullet M, H \bullet M\rangle = H^2 \bullet \langle M, M\rangle.$$

(ii) $M \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ とすれば，$L^2(\langle M\rangle)_{\mathrm{loc}} \ni H \mapsto H \bullet M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}_0$ は線形写像である．

(iii) $M, N \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ とする．$H \in L^2(\langle M\rangle)_{\mathrm{loc}} \cap L^2(\langle N\rangle)_{\mathrm{loc}}$ かつ $a, b \in \mathbb{R}$ なら $H \in L^2(\langle aM + bN\rangle)_{\mathrm{loc}}$ であり，

$$H \bullet (aM + bN) = a(H \bullet M) + b(H \bullet N)$$

が成り立つ．

(iv) $M \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ とする．$K \in L^2(\langle M\rangle)_{\mathrm{loc}}$ かつ $H \in L^2(H \bullet M)_{\mathrm{loc}}$ なら $HK \in L^2(\langle M\rangle)_{\mathrm{loc}}$ であり，

$$(HK) \bullet M = H \bullet (K \bullet M)$$

が成り立つ．

(v) $M \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ かつ $H \in L^2(\langle M\rangle)_{\mathrm{loc}}$ なら，任意の停止時刻 T に対して

$$H \bullet M^T = H 1_{[\![0,T]\!]} \bullet M = (H \bullet M)^T = H^T \bullet M^T$$

が成り立つ．

(vi) $M \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ かつ $H \in L^2(\langle M \rangle)_{\mathrm{loc}}$ とする．Z が有界 $\mathscr{F}_0$ - 可測関数ならば $ZH \in L^2(\langle M \rangle)_{\mathrm{loc}}$ かつ $H \in L^2(\langle ZM \rangle)_{\mathrm{loc}}$ であり，

$$(ZH) \bullet M = Z(H \bullet M) = H \bullet (ZM)$$

が成り立つ．

証明. どれも $M, N \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{0,\mathrm{loc}}$ として示せば十分である．

(i) 局所化列 (T_n) を $M^{T_n} - M_0 \in \mathscr{M}^2$ かつ $H^{T_n} \in L^2(\langle M^{T_n} \rangle)$ となるように選ぶ．このとき，命題 5.1.4 と命題 4.5.11 より

$$\langle H \bullet M \rangle^{T_n} = \langle H^{T_n} \bullet M^{T_n} \rangle = (H^{T_n})^2 \bullet \langle M^{T_n} \rangle = (H^2 \bullet \langle M \rangle)^{T_n}$$

が成り立つ．$T_n \to \infty$ だから，これより $\langle H \bullet M \rangle = H^2 \bullet \langle M \rangle$ がしたがう．

(ii) (i) と同様の局所化列 (T_n) を用いれば，命題 5.1.6 よりわかる．

(iii) $H \in L^2(\langle aM + bN \rangle)$ であることは，命題 5.1.6(ii) と同様の主張で示される．後半の主張は局所化を行い命題 5.1.6 に帰着させればよい．

(iv) 局所化を用いて命題 5.1.6(iv) に帰着させる．

(v) 局所化を行えば，命題 5.1.7 よりわかる．

(vi) 局所化を行い命題 5.1.6(iii) を用いればよい． □

命題 5.2.5.
$M \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ かつ $H \in L^2(\langle M \rangle)_{\mathrm{loc}}$ とする．

(i) $H \bullet M \in \mathscr{M}^2$ は $H \in L^2(\langle M \rangle)$ と同値であり，このとき $H \mapsto H \bullet M$ は等長写像となる．

(ii) $H \bullet M$ が任意の t について $E[(H \bullet M)_t^2] < \infty$ を満たすマルチンゲールであることは，

$$\forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad E\left[\int_{[0,t]} K_s^2 d\langle M, M \rangle_s\right] < \infty$$

が成り立つことと同値である．このとき，

$$\forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad E\left[\int_{[0,t]} H_s^2 d\langle M, M \rangle_s\right] = E\left[(H \bullet M)_t^2\right]$$

が成り立つ．

証明. 命題 5.2.4(i) と命題 4.5.17 より分かる． □

5.3 連続セミマルチンゲールによる確率積分

本節では，確率積分の integrator となる確率過程のクラスを連続局所マルチンゲールから連続セミマルチンゲールにまで拡張しよう．$X = X_0 + M + A$ を連続セミマルチンゲールの標準分解とすれば，A による Stiletjes 確率積分 $H \bullet A$ と M による伊藤確率積分 $H \bullet M$ をそれぞれ考えることができる．そこで，両者が存在するときは X による確率積分を $H \bullet X = H \bullet A + H \bullet M$ と定義するのが自然であろう．

定義 5.3.1.
X を連続セミマルチンゲールとし，$X = X_0 + M + A$ をその標準分解とする．$L(X) = L^2(\langle M \rangle)_{\mathrm{loc}} \cap L^1(A)_{\mathrm{loc}}$ と定義し，$H \in L(X)$ の H による確率積分 (stochastic integral) を

$$H \bullet X = H \bullet M + H \bullet A$$

によって定める．$0 \leq u \leq t$ のとき，

$$\int_{]u,t]} H_s dX_s = \int_u^t H_s dX_s = (H \bullet X)_t - (H \bullet X)_u$$
$$\int_{[0,t]} H_s dX_s = H_0 X_0 + (H \bullet X)_t$$

と定義する．これらは H の X による伊藤積分 (Itô integral) とも呼ばれる．

$L(X)$ の定義と命題 2.6.2 より

$$L(X)_{\mathrm{loc}} = \left(L^2(\langle M \rangle)_{\mathrm{loc}} \cap L^1(A)_{\mathrm{loc}}\right)_{\mathrm{loc}} = L^2(\langle M \rangle)_{\mathrm{loc}} \cap L^1(A)_{\mathrm{loc}}$$

が成り立つから，$H \in L(X)$ は H が局所的に $L(X)$ に属することと同値である．$L(X)$ のうち特に可予測なもの全体からなる部分空間を $L(\mathscr{P}, X)$ で表すことにする．$L(X)$ の元として重要なのは次の命題に現れるクラスの過程である．

命題 5.3.2.
X を連続セミマルチンゲールとし，H を発展的可測過程とする．$H - H_0$ が局所有界ならば，$H \in L(X)$ である．特に，任意の càglàd 適合過程は $L(X)$ に属する．

証明. (T_n) を $M^{T_n} \in \mathscr{M}^2$，$A^{T_n} \in \mathscr{A}$ かつ $(H - H_0)^{T_n}$ が有界となるような局所化列とする．$S_n = 0_{\{|H_0|>n\}}$ と定義すれば，(S_n) はまた $S_n \to \infty$ を満たす停止時刻の増加列である．ここで $R_n = T_n \wedge S_n$ と定義しよう．このとき

$$\begin{aligned}
&E[|H^{R_n}|^2 \bullet \langle M^{R_n} \rangle_\infty] + E[|H^{R_n}| \bullet V(A^{R_n})_\infty] \\
&\leq 2E[|H^{R_n} - H_0|^2 \bullet \langle M^{R_n} \rangle_\infty] + E[|H^{R_n} - H_0| \bullet V(A^{R_n})_\infty] \\
&\quad + 2E[|H_0|^2 \bullet \langle M^{R_n} \rangle_\infty] + E[|H_0| \bullet V(A^{R_n})_\infty] \\
&\leq 2E[|H^{R_n} - H_0|^2 \bullet \langle M^{R_n} \rangle_\infty] + E[|H^{R_n} - H_0| \bullet V(A^{R_n})_\infty] \\
&\quad + 2E[|H_0|^2 \langle M^{T_n} \rangle_{S_n}] + E[|H_0| V(A^{T_n})_{S_n}] \\
&\leq 2E[|H^{R_n} - H_0|^2 \bullet \langle M^{R_n} \rangle_\infty] + E[|H^{R_n} - H_0| \bullet V(A^{R_n})_\infty] \\
&\quad + 2n^2 E[\langle M^{T_n} \rangle_\infty] + nE[V(A^{T_n})_\infty] \\
&< \infty
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって (R_n) は H の $L^2(\langle M \rangle)$ と $L^1(A)$ に関する局所化列となり，$H \in L(X)$ であることがわかった．□

連続セミマルチンゲールによる伊藤確率積分は連続局所マルチンゲールによる伊藤確率積分と Stieltjes 確率積分の和で定義されるから，それらに共通の性質は当然セミマルチンゲールによる伊藤積分にも継承される．

命題 5.3.3.
セミマルチンゲールによる確率積分について，以下の性質が成り立つ．

(i) X を連続セミマルチンゲールとすれば，$a,b\in\mathbb{R}$ と $H,K\in L(X)$ に対して
$$(aH+bK)\bullet X=a(H\bullet X)+b(K\bullet X)$$
が成り立つ．

(ii) X と Y を連続セミマルチンゲールとする．$H\in L(X)\cap L(Y)$ なら，任意の $a,b\in\mathbb{R}$ に対して
$$H\bullet(aX+bY)=a(H\bullet X)+b(H\bullet Y)$$
が成り立つ．

(iii) X を連続セミマルチンゲールとする．$H,K\in L(X)$ なら，
$$(HK)\bullet X=H\bullet(K\bullet X)$$
が成り立つ．

(iv) X を連続セミマルチンゲールとする．$H\in L(X)$ なら任意の停止時刻 T に対して
$$K\bullet M^T=K1_{[\![0,T]\!]}\bullet M=(K\bullet M)^T=K^T\bullet M^T$$
が成り立つ．

(v) $X=X_0+M+A$ が X の標準分解とし，$H\in L(X)$ とする．このとき $H\bullet M\in\mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ かつ $H\bullet A\in\mathscr{V}^{\mathrm{c}}$ が成り立つ．特に，$H\bullet X=H\bullet M+H\bullet A$ は $H\bullet X$ の標準分解である．

(vi) $H\in L(X)$ なら，$\langle H\bullet X\rangle=H^2\bullet\langle X\rangle$ が成り立つ．

証明. 連続マルチンゲールの標準分解 $X=X_0+M+A$ を考え，M による伊藤確率積分と A による Sieltjes 確率積分をそれぞれ調べればわかる． □

測度による積分に関する優収束定理と類似の主張は，確率積分についても成立する．

定理 5.3.4 (優収束定理).
X を連続セミマルチンゲールとし，$(H^{(n)})$ を $L(X)$ の点列で，H に各点収束するものとする．ある $K\in L(X)$ が存在して任意の任意の n に対して $|H^{(n)}|\le K$ が成り立つならば，$(H^{(n)}\bullet X)_{n\in\mathbb{N}}$ は $H\bullet X$ に ucp 収束する．

証明. $X=X_0+M+A$ を X の標準分解とする．定義より $H^{(n)}\bullet X=H^{(n)}\bullet M+H^{(n)}\bullet A$ であるから，$(H^{(n)}\bullet M)_{n\in\mathbb{N}}$ と $H^{(n)}\bullet A$ の収束をそれぞれ考えればよい．

A に関する積分の収束を調べよう．局所化列 $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ を $M^{T_m}\in\mathscr{M}^2$，$A^{T_m}\in\mathscr{A}$，かつ $K^{T_m}\in L^2(\langle M\rangle)\cap L^1(A)$ を満たすように選ぶ．パスごとの優収束定理を用いれば，任意の m に対して，
$$\begin{aligned}&\sup_{0\le s\le t}\left|\int_{]0,s]}(H^{(n)}_s)^{T_m}(\omega)dA_s(\omega)-\int_{]0,s]}H^{T_m}_s(\omega)dA^{T_m}_s(\omega)\right|\\&\le\int_{]0,t]}\left|(H^{(n)}_s)^{T_m}(\omega)-H^{T_m}\right|dV(A^{T_m})_s(\omega)\xrightarrow[n\to\infty]{}0\quad\text{a.s.}\end{aligned}$$

が成立．ゆえに $(H^{(n)})^{T_m} \bullet A^{T_m} \to H^{T_m} \bullet A^{T_m}$ が ucp 収束の意味で成り立つ．さらに命題 2.7.6(ii) を用いれば，$H^{(n)} \bullet A \to H \bullet A$ が ucp 収束の意味で成立することがわかる．

次に M に関する積分の収束を調べる．優収束定理より $(H^{(n)})^{T_m} \to H^{T_m}$ が $L^2(\langle M^{T_m} \rangle)$ の意味で成り立つので，伊藤積分の等長性より $(H^{(n)})^{T_m} \bullet M^{T_m} \to H^{T_m} \bullet M^{T_m}$ が $\mathscr{M}^2$ の意味で成立する．したがって命題 2.7.6(iii) から，$H^{(n)} \bullet M \to H \bullet M$ が ucp の意味で成り立つことがわかる．□

5.4 Riemann 和と確率積分

本節では，これまでとは異なる側面から確率積分を眺めてみよう．Hilbert 空間論を用いた本ノートの方法は洗練されたものではあり，また被積分関数のパスが（左）連続性を持たないような場合の確率積分の導入が容易であるという利点がある．一方で，確率積分 $H \bullet M$ のもつ直観的な意味はわかりにくい．本節で扱うのは，より直観的な—そして初等的な— 方法である Riemann 和に基づくアプローチを考える．被積分関数が単純可予測過程と呼ばれるクラスのときは，確率積分はパスごとに左側 Riemann 和をとったものと一致する．一般のケースでは必ずしも明示的な表現は得られないが，何らかの意味では Riemann 和の極限になっていることが分かる．

$0 = T_0 \le T_1 \le \cdots \le T_n \cdots \to \infty$ という停止時刻の列と $\mathscr{F}_{T_{i-1}}$ 可測な確率変数 ξ_i によって

$$H = \xi_0 1_{[\![0]\!]} + \sum_{i \ge 1} \xi_i 1_{]\!]T_{i-1}, T_i]\!]} \tag{5.4.1}$$

と表現される有界な確率過程を，可予測単純過程 (predictable simple process) と呼ぶ．命題 2.5.6 より，この過程は実際に可予測であることがわかる．H が有界であるとの仮定より，各 ξ_i は有界な確率変数となっている．単純化予測過程全体の空間を $PS(\mathbb{F})$ または PS で表すことにする．PS の元は有界可予測過程なので，任意のセミマルチンゲール X に対して $PS \subset L(X)$ が成り立っている．

補題 5.4.1.
PS は積について閉じた線形空間である．

証明. PS がスカラー倍について閉じていることは明らかである．$H, K \in PS$ は

$$H = \xi_0 1_{[\![0]\!]} + \sum_{i \ge 1} \xi_i 1_{]\!]T_{i-1}, T_i]\!]},$$
$$K = \eta_0 1_{[\![0]\!]} + \sum_{j \ge 1} \eta_i 1_{]\!]S_{j-1}, S_j]\!]}$$

という表現を持つとする．停止時刻列 (R_n) を $(T_n, S_m)_{n,m}$ の増加的再配列（命題 2.4.15）とすれば，H，K はそれぞれ

$$H = H_0 1_{[\![0]\!]} + \sum_{i \ge 1} H_{R_i} 1_{]\!]R_{i-1}, R_i]\!]},$$
$$K = K_0 1_{[\![0]\!]} + \sum_{i \ge 1} K_{R_i} 1_{]\!]R_{i-1}, R_i]\!]}$$

と表現することができる．定義より $R_n \le T_n$ だから，

$$H_{R_n} = \sum_{1 \le i \le n} \xi_i 1_{\{T_{i-1} < R_n \le T_i\}} = \sum_{1 \le i \le n} \xi_i 1_{\{T_{i-1} \le R_{n-1} < T_i\}}$$

が成り立つ．この表示より H_{R_n} は $\mathscr{F}_{R_{i-1}}$-可測であることがわかる．同様にして K_{R_n} が $\mathscr{F}_{R_{i-1}}$-可測であることもわかるので，

$$H+K=(H_0+K_0)1_{[\![0]\!]}+\sum_{i\geq 1}(H_{R_i}+K_{R_i})1_{]\!]R_{i-1},R_i]\!]},$$
$$HK=(H_0+K_0)1_{[\![0]\!]}+\sum_{i\geq 1}(H_{R_i}K_{R_i})1_{]\!]R_{i-1},R_i]\!]}$$

も可予測単純過程である． □

本節での最初の目標は，$H\in PS$ に対する確率積分 $H\bullet X$ の具体的な形を明らかにすることである．$X\in\mathscr{V}$ なら，(5.4.1) の単純可予測過程の Stieltjes 確率積分 $H\bullet X$ は

$$(H\bullet X)_t=\sum_{i\geq 1}\xi_i(X_{T_i\wedge t}-X_{T_{i-1}\wedge t}) \tag{5.4.2}$$

という表現を持つ．$X\in\mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ の場合は $H\bullet X$ はどのような過程になるであろうか？ $H\bullet X$ を「積分」と呼ぶためには，これも Stieltjes 確率積分の場合と同様に (5.4.2) を満たしていて欲しい．この予想は実際正しい．まずはそのことを実際に確かめていこう．

補題 5.4.2.
T を停止時刻とし，ξ を $\mathscr{F}_T$ 可測な有界確率変数とする．

(i) $M\in\mathscr{M}$ なら，$\xi(M-M^T)\in\mathscr{M}_0$ が成り立つ．
(ii) $M\in\mathscr{M}^2$ なら，$\xi(M-M^T)\in\mathscr{M}^2_0$ が成り立つ．
(iii) $M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ なら，$\xi(M-M^T)\in\mathscr{M}_{0,\mathrm{loc}}$ が成り立つ．
(iv) $M\in\mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}$ なら，$\xi(M-M^T)\in\mathscr{M}^2_{0,\mathrm{loc}}$ が成り立つ．

証明． $N=\xi(M-M^T)$ と定義する．

(i) $N_0=0$ は定義より明らかである．M が一様可積分マルチンゲールであることから，

$$\begin{aligned}E[N_\infty|\mathscr{F}_t]&=E[\xi(M_\infty-M_T)|\mathscr{F}_t]\\&=E[E[\xi(M_\infty-M_T)|\mathscr{F}_{T\vee t}|\mathscr{F}_t]\\&=E[\xi E[(M_\infty-M_T)|\mathscr{F}_{T\vee t}|\mathscr{F}_t]\\&=E[\xi(M_{T\vee t}-M_T)|\mathscr{F}_t]\\&=E[\xi(M_{T\vee t}-M_T)1_{\{T\leq t\}}|\mathscr{F}_t]\\&=E[\xi 1_{\{T\leq t\}}(M_t-M_{T\wedge t})|\mathscr{F}_t]\\&=\xi 1_{\{T\leq t\}}(M_t-M_{T\wedge t})\\&=\xi(M_t-M_{T\wedge t})\\&=N_t\end{aligned}$$

が成り立つ．よって N は一様可積分マルチンゲールである．

(ii) $M\in\mathscr{M}^2$ であることと ξ の有界性より

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}E[|N_t|^2]\leq 4\|\xi\|_{L^\infty}E[(M^*_\infty)^2]<\infty$$

が成り立つから，$N\in\mathscr{M}^2$ がわかる．

(iii) と (iv) は，局所化によりそれぞれ (i) と (ii) よりわかる． □

命題 5.4.3.
$M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ とし，$H \in PS$ は (5.4.1) の表現を持つとする．このとき，

$$(H \bullet M)_t = \sum_{i \geq 1} \xi_i (M_{T_i \wedge t} - M_{T_{i-1} \wedge t}) \tag{5.4.3}$$

が成り立つ．

証明. $M_0 = 0$ として示せば十分である．$C > 0$ を H の上界とする．
(5.4.3) 右辺の確率過程を L と書くことにする．このとき

(i) $L \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$.
(ii) $\forall N \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ $\langle L, N \rangle = H \bullet \langle M, N \rangle$.

の 2 条件が成り立つことを確かめればよい．
まずは条件 (i) が成り立つことを示そう．各 $\xi_i (M^{T_i} - M^{T_{i-1}})$ が $\mathscr{M}^2$ の元であることは，補題 5.4.2 よりわかる．$L \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ を示すためには，

$$\sum_{i \geq 1} \xi_i (M^{T_i} - M^{T_{i-1}})$$

が $\mathscr{M}^2$ で収束することを確かめればよい．$i < j$ なら系 4.4.21 より $M^{T_i} - M^{T_{i-1}}$ と $M^{T_j} - M^{T_{j-1}}$ は強い意味で直交し，ゆえに弱い意味でも直交する．（定義 4.4.19）よって任意の n について

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i \leq n} \|\xi_i (M^{T_i} - M^{T_{i-1}})\|_{\mathscr{M}^2}^2 &\leq C^2 \sum_{1 \leq i \leq n} \|M^{T_i} - M^{T_{i-1}}\|_{\mathscr{M}^2}^2 \\
&= C^2 \left\| \sum_{1 \leq i \leq n} \left(M^{T_i} - M^{T_{i-1}} \right) \right\|_{\mathscr{M}^2}^2 \\
&= C^2 \left\| M^{T_n} \right\|_{\mathscr{M}^2}^2 \\
&\leq C^2 \|M\|_{\mathscr{M}^2}^2 = E[M_\infty^2] < \infty
\end{aligned}$$

が成り立っている．ただし，2 行目の等号は直交性を用いた．したがって $\mathscr{M}^2$ の完備性より，$\mathscr{M}^2$ ノルムの意味でも収束する．ゆえに $L \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ となることがわかった．
次に条件 (ii) が成り立つことを示そう．

$$L^{(n)} = \sum_{1 \leq i \leq n} \xi_i (M^{T_i} - M^{T_{i-1}})$$

とすれば，先ほどの結果により $L^{(n)}$ は $\mathscr{M}^2$ のノルムで L に収束する．$N \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ とすれば，

$$\begin{aligned}
&L^{(n)} N - H \bullet \langle M^{T_n}, N \rangle \\
&= L^{(n)} N - (H \bullet \langle M, N \rangle)^{T_n} \\
&= L^{(n)} N - \sum_{1 \leq i \leq n} \xi_i \left(\langle M, N \rangle^{T_i} - \langle M, N \rangle^{T_{i-1}} \right) \\
&= \sum_{1 \leq i \leq n} \xi_i \left\{ \left(M^{T_i} N - \langle M, N \rangle^{T_i} \right) - \left(M^{T_{i-1}} N - \langle M, N \rangle^{T_{i-1}} \right) \right\} \\
&= \sum_{1 \leq i \leq n} \xi_i \left\{ \left(M^{T_i} N - \langle M^{T_i}, N \rangle \right) - \left(M^{T_i} N - \langle M^{T_i}, N \rangle \right)^{T_{i-1}} \right\}
\end{aligned}$$

という表示と補題 5.4.2 より $L^{(n)}N - H \bullet \langle M^{T_n}, N\rangle \in \mathscr{M}^c$ がわかる．したがって確率積分の定義より $L^{(n)} = H \bullet M^{T_n}$ となる．伊藤積分の等長性と，國田・渡辺の不等式，そして H の有界性より

$$\begin{aligned}
\|H \bullet M^{T_n} - H \bullet M\|_{\mathscr{M}^2}^2 &= E[H^2 \bullet \langle M^{T_n} - M\rangle] \\
&\leq E[H^2 \bullet \langle M^{T_n} - M\rangle_\infty] E[\langle M^{T_n} - M\rangle_\infty] \\
&\leq C^2 E[\langle M^{T_n} - M\rangle_\infty] \\
&= C^2 E[(M_{T_n} - M_\infty)^2] \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに $H \bullet M^{T_n} \to H \bullet M$ in $\mathscr{M}^2$ となる．このことと $L^{(n)} \to L$ in $\mathscr{M}^2$ から，$L = H \bullet M$ がわかる． □

命題 5.4.4.
H を (5.4.1) の表現を持つ可予測単純過程とし，X を連続セミマルチンゲールとする．このとき

$$(H \bullet X)_t = \sum_{i\geq 1} \xi_i (X_{T_i \wedge t} - X_{T_{i-1}\wedge t})$$

が成り立つ．

証明. $X = X_0 + M + A$ を連続セミマルチンゲール X の標準分解とする．Stieltjes 確率積分が

$$(H \bullet A)_t = \sum_{i\geq 1} \xi_i (A_{T_i \wedge t} - A_{T_{i-1}\wedge t})$$

を満たすことは Stieltjes 積分の定義よりすぐにわかる．(S_n) を M の $\mathscr{M}^2$ に関する局所化列とする．このとき，命題 5.4.3 より任意の n について

$$(H \bullet M)^{S_n} = H \bullet M^{S_n} = \sum_{i\geq 1} \xi_i (M^{S_n \wedge T_i} - M^{S_n \wedge T_{i-1}}) = \left(\sum_{i\geq 1} \xi_i (M^{T_i} - M^{T_{i-1}}) \right)^{S_n}$$

が成り立つ．$S_n \to \infty$ だからこれより

$$(H \bullet M)_t = \sum_{i\geq 1} \xi_i (M_{T_i \wedge t} - M_{T_{i-1}\wedge t})$$

がわかる． □

命題 5.4.4 を用いれば，伊藤積分の左側 Riemann 和の極限としての意味合いが明らかになる．

命題 5.4.5.
X を連続セミマルチンゲールとし，H を左連続適合過程とする．(π_n) を (4.7.1) を満たす分割の列で，$|\pi_n| \to 0$ を満たすものとする．このとき，確率過程

$$(\omega, t) \longmapsto \sum_{t_i \in \pi_n} H_{t_i}(\omega) \left(X_{t_{i+1}\wedge t}(\omega) - X_{t_i \wedge t}(\omega) \right) \tag{5.4.4}$$

は $n \to \infty$ で $H \bullet X$ に ucp 収束する．

証明． まずは H が有界な場合を考える．$n,k \in \mathbb{N}$ に対して

$$H^{(n,k)} = \sum_{t_i \in \pi_n} \{-k \vee (H_{t_i} \wedge k)\} 1_{]t_i, t_{i+1}]}$$
$$H^{(n)} = \sum_{t_i \in \pi_n} H_{t_i} 1_{]t_i, t_{i+1}]}$$

と定義すれば $H^{(n,k)} \in PS$ であり，$H^{(n,k)} \to H^{(n)}$ が各点収束の意味で成り立つ．定義より明らかに $|H^{(n,k)}| \leq |H|$ であるから，確率積分に関する優収束定理により $H^{(n,k)} \bullet X \to H^{(n)} \bullet X$ が ucp の意味で成り立つ．命題 5.4.4 より各 (n,k) について

$$(H^{(n,k)} \bullet X)_t = \sum_{t_i \in \pi_n} \{-k \vee (H_{t_i} \wedge k)\} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$$

となっており，この式の右辺の過程は任意の t で (5.4.4) の過程に概収束する．したがって (5.4.4) の過程は $H^{(n)} \bullet X$ の修正であり，パスの連続性よりこれらは区別不能である．すなわち

$$(H \bullet X)(\omega, t) = \sum_{t_i \in \pi_n} H_{t_i}(\omega) \left(X_{t_{i+1} \wedge t}(\omega) - X_{t_i \wedge t}(\omega)\right)$$

が区別不能の意味で成り立つ．H のパスは左連続だから，$H^{(n)} \to H$ が各点収束の意味で成り立つ．また定義より $|H^{(n)}| \leq |H|$ であるから，確率積分に関する優収束定理により $H^{(n)} \bullet X \to H \bullet X$ が ucp の意味で成り立つ． □

命題 5.4.5 は，左連続適合過程 H の確率積分 $H \bullet X$ が Riemann 和の ucp 極限として定義できることを表している．では，より一般の $H \in L(X)$ についてはどうだろうか？ PS が $L^2(\langle M \rangle)_{\mathrm{loc}}$ で稠密であることが示せれば，$H \bullet X$ を可予測単純過程の確率積分

$$\sum_{i \geq 1} \xi_i (X_{T_i \wedge t} - X_{T_{i-1} \wedge t})$$

の極限として構成することが可能になる．本節の残りの部分ではこの事実の証明を目標としよう．

命題 5.4.6.
M を連続局所マルチンゲールとする．このとき PS は $L^2(\mathscr{P}, \langle M \rangle)$ で稠密である．

証明． $\mathscr{H}$ で PS の $L^2(\mathscr{P}, \langle M \rangle)$ 閉包を表すことにする．補題 5.4.1 より PS は定数関数全体を含む線形空間で，各点ごとの積について閉じていることがわかる．よって $\mathscr{H}$ は定数関数全体と PS を含む線形空間である．優収束定理より $\mathscr{H}$ は一様有界な単調収束について閉じていることがわかるので，単調族定理により $\mathscr{H}$ は全ての全ての $\sigma(PS) = \mathscr{P}$-可測な有界関数を含む．$\mathscr{P}$-可測有界関数全体の集合は $L^2(\mathscr{P}, \langle M \rangle)$ で稠密だから，$\mathscr{H} = L^2(\mathscr{P}, \langle M \rangle)$ がわかる． □

このように，単純化可予測過程から出発すれば容易に，そしてより直観的な方法で $M \in \mathscr{M}^2$ による確率積分を構成することができる．一方で，この方法で被積分関数を $L^2(\langle M \rangle)$ に拡張するためにはもっとテクニカルな議論が必要となる．

5.5 Stratonovich 積分

本節では，伊藤積分とは異なる確率積分の概念である Stratonovich 積分を導入しよう．前節でみたように，伊藤積分は分割の左側端点をとった Riemann 和

$$\sum_{t_i \in \pi_n} H_{t_i}(\omega)\left(X_{t_{i+1}\wedge t}(\omega) - X_{t_i \wedge t}(\omega)\right)$$

の極限としての意味合いがある．Stratonovich 積分は伊藤積分とは異なり，分割の中点を取った Riemann 和の極限に対応するものである．被積分関数が連続で $X \in \mathscr{V}^c$ なら分割の中点をとろうが左端点をとろうがその値は変わらない．しかし一般の連続セミマルチンゲール X による確率積分については分割のどの点を取るかによって得られる確率積分が異なるものになってしまうのである．

定義 5.5.1.
X，Y を連続セミマルチンゲールとする． Y の X による Stratonovich 積分 (Stratonovich integral) を

$$\int_0^t Y_s \circ dX_s = \int_0^t Y_s dX_s + \frac{1}{2}\langle Y, X\rangle$$

によって定義する．

5.6 被積分関数の拡張

5.7 確率積分についての Fubini の定理

この節では，確率積分に関する Fubini の定理を扱う．$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を通常の条件を満たすフィルター付き確率空間とし，$(A, \mathscr{A}, \mu)$ を任意の有限測度空間とする．H を $A \times \Omega \times \mathbb{R}_+$ 上の適当な可測関数としたとき，次のような関係式が成り立つかを知りたい：

$$\int_A \left(\int_0^t H(a,\omega,s)dX_s\right)\mu(da) = \int_0^t \left(\int_A H(a,\omega,s)\mu(da)\right)dX_s. \tag{5.7.1}$$

数学的な厳密性は忘れて，とりあえず式 (5.7.1) について大雑把な考察をしよう。端的に言えば，(5.7.1) は測度 μ による積分とセミマルチンゲール X による確率積分の順序が交換可能であるということを主張している．二つの測度による積分の可換性の問題は（測度論における）Fubini の定理によって正当化されるが，我々の考えている確率積分は測度論の意味での積分ではない．したがって Fubini の定理を適用することはできないのである．

話を簡単にするために，H が有界な場合に限って考えてみよう．(5.7.1) の右辺については意味づけが出来そうだ．実際，有界関数を有限測度 μ で積分したのだから，

$$\int_A H(a,\omega,s)\mu(da)$$

はまた有界で，さらに可測性を保存するはずである[*4]．したがって，この関数の X による確率積分を考えることは難しくない．ところが，(5.7.1) の左辺は話が違う．H が有界だからと言って，$H \bullet X$ が有界になるか

[*4] 通常の意味での Fubini の定理による．

はよく分からない．そもそも，パラメータ $a \in A$ をもつ関数の確率積分によって可測性が保存されるかどうかさえ定かではない．

このような簡単な考察により，二つの「積分」の順序交換が可能かどうかはそう簡単な問題ではなさそうなことが分かるだろう．実際のところ，適当な条件のもと順序交換は正当化される．その定理を証明するのが本節の目標である．まずは，可測性の問題に関する補題から始めることにする．

補題 5.7.1.
$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$ をフィルター付き確率空間とし，$(A, \mathscr{A})$ を任意の可測空間とする．$\mathscr{A} \otimes \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-可測関数の列 $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で，任意の (a,ω) に対して $t \mapsto Z(a,\omega,t)$ が連続関数であるようなものを考える．任意の $a \in A$ に対して確率過程の列 $(Z_n(a))$ は ucp で収束しているものと仮定しよう．このとき，$A \times \Omega \times \mathbb{R}_+$ 上の実数値関数 Z で以下の条件を満たすものが存在する[a]．

(i) Z は $\mathscr{A} \otimes \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-可測．
(ii) 任意の $a \in A$ に対して，$Z(a)$ は確率 1 で連続なパスを持つ．
(iii) 任意の $a \in A$ に対して $Z_n(a) \xrightarrow{ucp} Z(a)$ が成立．

[a] $Z_n(a)$ は ucp で収束する言っているのだから (ii),, (iii) を満たす関数が存在するのは明らかであり，それが (i) の意味で可測となるようにとれるのかということが問題なのである．

証明. $C[0,\infty[$ を広義一様収束位相により位相空間とみなす．

$$d_t(f,g) = \sup_{s\in[0,t]} |f(s) - g(s)|$$
$$d(f,g) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(f,g)}{1 + d_n(f,g)}$$

と定義すれば，d は $C[0,\infty[$ の位相と整合的な距離である．このとき，任意の $i,j \in \mathbb{N}$ に対して写像：$(a,\omega) \mapsto d(Z_i(a,\omega), Z_j(a,\omega))$ は $\mathscr{A} \otimes \mathscr{F}$-可測である[*5]．ここで，$\mathbb{N}$-値 $\mathscr{A}/2^{\mathbb{N}}$-可測関数の列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ を次のように定めよう：

$$\begin{aligned} &n_0(a) = 1, \quad a \in A, \\ &n_k(a) = \inf\left\{ m > n_{k-1}(a) \;\middle|\; P\left(\sup_{i,j\geq m} d(Z_i(a), Z_j(a)) > \frac{1}{2^k} \right) < \frac{1}{2^k} \right\}, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

このとき

$$Y_k(a,\omega,t) = Z_{n_k(a)}(a,\omega,t)$$

と定めれば Y_k は $\mathscr{A} \otimes \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-可測である．実際，$B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$\begin{aligned} &\{(a,\omega,t) \in \mathscr{A} \otimes \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid Y_k(a,\omega,t) \in B\} \\ &= \{(a,\omega,t) \in \mathscr{A} \otimes \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid Z_{n_k(a)}(a,\omega,t) \in B\} \\ &= \bigcup_{m\geq 1} \{(a,\omega,t) \in A \otimes \Omega \otimes \mathbb{R}_+ \mid n_k(a) = m,\ Z_m(a,\omega,t) \in B\} \\ &\in \mathscr{A} \otimes \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \end{aligned}$$

[*5] d は連続関数である．$C[0,\infty[$ の位相の入れ方より $(a,\omega) \mapsto Z_i(a,\omega)$ は $\mathscr{A} \otimes \mathscr{F}/\mathscr{B}(C[0,\infty[)$-可測関数とと見做せるのであったから，連続関数と可測関数の合成も可測関数である．

となることから可測性が分かる．このとき，定義より

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}} P\left[\sup_{i,j\geq k} d(Y_i(a),Y_j(a)) > \frac{1}{2^k}\right] &= \sum_{k\in\mathbb{N}} P\left[\sup_{l,m\geq n_k(a)} d(Z_l(a),Z_m(a)) > \frac{1}{2^k}\right] \\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k} < \infty\end{aligned}$$

特に，

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} P\left[d(Y_k(a),Y_{k+1}(a)) > \frac{1}{2^k}\right] < +\infty \tag{5.7.2}$$

が成立．Borel-Cantelli の補題により

$$P\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq m}\left\{\omega\in\Omega \,\middle|\, d(Y_k(a),Y_{k+1}(a)) > \frac{1}{2^k}\right\}\right) = 0 \tag{5.7.3}$$

となる．ここで，

$$N(a) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq m}\left\{\omega\in\Omega \,\middle|\, d(Y_k(a),Y_{k+1}(a)) > \frac{1}{2^k}\right\} \tag{5.7.4}$$

とする．$\omega\in\Omega\setminus N(a)$ とすれば，$N(a)$ の定義よりある $m_1 = m_1(\omega)\in\mathbb{N}$ が存在して

$$d(Y_k(\omega,a),Y_{k+1}(\omega,a)) \leq \frac{1}{2^k}, \quad k\geq m_1 \tag{5.7.5}$$

が成り立つ．任意の $\varepsilon > 0$ に対して $1/2^{m_2} < \varepsilon$ なる $m_2 = m_2(\omega,\varepsilon)$ を取れば，任意の $i,j\geq m_1\vee m_2$ に対して

$$d(Y_i(\omega,a),Y_j(\omega,a)) \leq \sum_{k\geq m_1\vee m_2+1} d(Y_k(\omega,a),Y_{k+1}(\omega,a)) \leq \sum_{k\geq m_1\vee m_2+1}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m_1\vee m_2}} \leq \frac{1}{2^{m_2}} < \varepsilon \tag{5.7.6}$$

が成立．すなわち，任意の a と $\omega\in n(a)$ に対して $(Y_i(\omega,a))_{i\in\mathbb{N}}$ は $(C[0,\infty[\,,d)$ の Cauchy 列であることが分かる．いま，

$$Z(a,\omega,t) = \begin{cases}\lim_{k\to\infty} Y_k(a,\omega,t) & a\in A, \omega\in N(a), t\in\mathbb{R}_+ \\ 0 & \text{その他.}\end{cases}$$

と定めれば，任意の $a\in A$ に対して $Y_i(a) \xrightarrow{ucp} Z(a)$ が成立する．定義より Z は明らかに (i) から (iii) を満たす． □

命題 5.7.2 (パラメータつき確率積分の可測性).
$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$ を通常の条件を満たすフィルターつき確率空間とし，$(A,\mathscr{A})$ を可測空間とする．また，X を連続セミマルチンゲールとし，$H: A\times\Omega\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ は $\mathscr{A}\otimes$ Prog-可測関数であるものとする．任意の $a\in A$ に対して確率積分 $H(a)\bullet X$ が存在するならば，関数 $H\bullet X: A\times\Omega\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ で次の条件を満たすものが存在する：

(i) $H\bullet X$ は $\mathscr{A}\otimes\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-可測.
(ii) 各 $a\in A$ に対して $(H\bullet X)(a): \Omega\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ は確率 1 で連続な適合過程.

(iii) 各 $a \in A$ に対して $(\omega, t) \mapsto (H(a) \bullet X)_t(\omega)$ と $(\omega, t) \mapsto (H \bullet X)(a, \omega, t)$ は indistinguishable.

証明．Step 1：H が有界な場合． $\mathscr{D}$ を命題の主張を満たすような有界 $\mathscr{A} \otimes \mathrm{Prog}(\mathscr{F}_t)$-可測関数の全体とする．$\mathscr{A}$-可測な単関数 H_1 と[*6]有界な $H_2 \in \mathrm{Prog}(\mathscr{F}_t)$ に対して $H = H_1 H_2$ と表現される関数の全体を $\mathscr{C}$ で表す．単調族定理を用いるために，以下のことを示せばよい[*7]：

(a) $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$.

(b) $\mathscr{C}$ は（各点ごとの）積について閉じている．

(c) $\mathscr{D}$ は線形空間.

(d) $\mathscr{D}$ は一様有界な単調収束について閉じている．

(a) $H_1 = \sum_i a_i 1_{A_i}$, $H = H_1 H_2 \in \mathscr{C}$ とし，

$$Z(a, \omega, t) := H_1(a)(H_2 \bullet X)(\omega, t)$$

と定義する．Z は $\mathscr{A}$-可測関数と $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-可測関数の積なので，$\mathscr{A} \otimes \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-可測である．$a$ を固定すれば Z は確率積分の $H_2 \bullet X$ の定数倍なので，連続性および適合性も分かる．さらに確率積分の線形性より，任意の $a \in A$ に対して

$$Z(a) = \sum_i a_i 1_{A_i}(a)(H_2 \bullet X) = \left(\sum_i a_i 1_{A_i}(a) H_2 \right) \bullet X = H(a) \bullet X$$

が indistinguishable の意味で成り立つことが分かる．これより $Z = H_1 H_2 \in \mathscr{D}$ である．すなわち，$\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$ となり (a) が分かる．

(b) $H = H_1 H_2$, $H' = H_1' H_2' \in \mathscr{C}$ とする．$H_1 H_1'$ は単関数，$H_2 H_2'$ は有界 $\mathscr{F} \otimes \mathrm{Prog}(\mathscr{F}_t)$-可測関数なので，$HH' = (H_1 H_1')(H_2 H_2')$ はまた $\mathscr{C}$ の元である．よって (b) が成立.

(c) $H, K \in \mathscr{D}$ および $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$(\alpha H + \beta K) \bullet X := \alpha (H \bullet X) + \beta (K \bullet X)$$

と定義する．このとき $(\alpha H + \beta K) \bullet X$ は条件 (i)–(ii) を満たす．したがって $\mathscr{D}$ は線形空間である．

(d) $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を $\mathscr{D}$ の元で，単調増大かつ一様有界なるもの，H を (H_n) の（各点収束の意味での）極限とする．このとき，$H \in \mathscr{D}$ を示せばよい．定理 5.3.4（確率積分に関する優収束定理）より $(H_n(a) \bullet X)_{n \in \mathbb{N}}$ は $H(a) \bullet X$ に ucp の意味で収束するから，$((H_n \bullet X)(a))_{n \in \mathbb{N}}$ もまた ucp の意味で $H(a) \bullet X$ に収束する．したがって，補題 5.7.1 により $H(a) \bullet X$ のバージョン $H \bullet X$ で (i) と (ii) 満たすものが存在する．$H(a) \bullet X$ と $(H \bullet X)(a)$ はともに ucp の意味での $((H_n \bullet X)(a))_{n \in \mathbb{N}}$ の極限であるから，indistinguishable の意味での一意性がなりたつ．すなわち (iii) も成立．ゆえに $H \in \mathscr{D}$ であることが分かった．

$\mathscr{C}$ および $\mathscr{D}$ は条件 (a)–(d) を満たすから，単調収束定理により $\mathscr{D}$ は全ての $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{A} \otimes \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ 可測有界関数を含む.

Step 2：**一般の場合．** H が有界とは限らないとき，$H^{(n)} = H 1_{\{|H| \leq n\}}$ とおけば，書く n に対して $(H^{(n)}(a) \bullet X)_{a \in A}$ のバージョン $H^{(n)} \bullet X$ で (i)–(iii) を満たすものが存在する．確率積分に関する優収束定理より任意の a について $((H^{(n)} \bullet X)(a))_{n \in \mathbb{N}}$ は ucp の意味で $H(a) \bullet X$ に収束するから，先ほどと同様に命題の条件を満たすバージョン $H \bullet X$ が取れる． $\square$

[*6] このノートでは“単関数”は有界なるもの（i.e. 有限和で書かれているもの）に限って使っている．

[*7] 単調族定理の条件としては $1 \in \mathscr{D}$ というのもあるが，$1 \in \mathscr{C}$ なので (a) を示せば十分.

定理 5.7.3 (確率積分に関する Fubini の定理).
$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$ を通常の条件を満たすフィルターつき確率空間，$(A, \mathscr{A}, \mu)$ を任意の有限測度空間，X を連続セミマルチンゲールとする．$H : A \times \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ を有界なる $\mathscr{A} \otimes \mathrm{Prog}(\mathscr{F}_t)$-可測関数とし，$H \bullet X$ で $(H(a) \bullet X)_{a \in A}$ の可測なバージョンを表すことにする．このとき，以下の等式が indistinguishable の意味で成立する：

$$\int_A (H \bullet X)(a)\mu(da) = \left(\int_A H(a)\mu(da)\right) \bullet X \tag{5.7.7}$$

ただし，(5.7.7) の左辺は確率過程 $(\omega, t) \mapsto \int_A (H \bullet X)\mu(da)$ を表す．

証明．Step 1：$X \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ の場合． 単調族定理によって証明する．$\mathscr{D}$ を有界 $\mathscr{A} \otimes \mathrm{Prog}(\mathscr{F}_t)$-可測関数で，(5.7.7) を満たすもの全体のなす集合，$\mathscr{C}$ を $H = H_1 H_2$（$H_1 = \sum_i a_i 1_{A_i}$ は $\mathscr{A}$-可測単関数，H_2 は有界な $\mathrm{Prog}(\mathscr{F}_t)$-可測関数）と表現される H 全体の作る集合とする．このとき，以下の事項を示せば良いのであった[*8]．

(a) $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$.
(b) $\mathscr{C}$ は（各点ごとの）積について閉じている．
(c) $\mathscr{D}$ は線形空間．
(d) $\mathscr{D}$ は一様有界な単調収束について閉じている．

(a) $H = H_1 H_2 \in \mathscr{C}$ とおけば，

$$\int_A (H \bullet X)(a)\mu(da) = \int_A \left(\sum_i a_i 1_{A_i}\right)(H_2 \bullet X)\mu(da)$$

が成立する．よって $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$ である．

(b) 明らか．

(c) $H, K \in \mathscr{D}$ および $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_A ((\alpha H + \beta K) \bullet X)(a)\mu(da) &= \int_A \alpha\big[(H \bullet X)(a) + \beta(K \bullet X)(a)\big]\mu(da) \\
&= \alpha \int_A (H \bullet X)(a)\mu(da) + \beta \int_A (K \bullet X)(a)\mu(da) \\
&= \alpha\left(\int_A H(a)\mu(da)\right) \bullet X + \beta\left(\int_A K(a)\mu(da)\right) \bullet X \\
&= \left(\alpha \int_A H(a)\mu(da) + \beta \int_A K(a)\mu(da)\right) \bullet X \\
&= \left(\int_A (\alpha H + \beta K)(a)\mu(da)\right) \bullet X.
\end{aligned}$$

よって $\alpha H + \beta K \in \mathscr{D}$ である．すなわち，$\mathscr{D}$ は線形空間である．

(d) 非負の関数列 $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は $\mathscr{D}$ の列で，単調増大に有界関数 H に各点収束するとする．仮定より

$$\int_A (H_n \bullet X)(a)\mu(da) = \left(\int_A H_n(a)\mu(da)\right) \bullet X \tag{5.7.8}$$

[*8] 単調族定理の条件としては $1 \in \mathscr{D}$ というのもあるが，いま $1 \in \mathscr{C}$ なので (a) を示せば十分である．

だから，この式における極限操作を正当化するのが目標である．(5.7.8) の右辺については確率積分に優収束定理より，

$$\left(\int_A H_n(a)\mu(da)\right)\bullet X \xrightarrow[n\to\infty]{ucp} \left(\int_A H(a)\mu(da)\right)\bullet X$$

が成立する．

次に，(5.7.8) 左辺の挙動を調べよう．初めに，そもそも (5.7.8) の左辺が well-defined かを調べよう．$Z_n = H_n \bullet X$ および $Z = H\bullet X$ と定義する．このとき，

$$\begin{aligned}
&E\left[\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\int_A |Z_n(a,\cdot,t)|\,\mu(da)\right]\\
&\leq E\left[\int_A \sup_{t\in\mathbb{R}_+}|Z_n(a,\cdot,t)|\,\mu(da)\right]\\
&\leq \sqrt{\mu(A)}\sqrt{E\left[\int_A\left(\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|Z_n(a,\cdot,t)|\right)^2\mu(da)\right]} \quad (\because \text{Schwarz})\\
&= \sqrt{\mu(A)}\sqrt{\int_A E\left[\left(\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|Z_n(a,\cdot,t)|\right)^2\right]\mu(da)} \quad (\because \text{Fubini})\\
&\leq \sqrt{\mu(A)}\sqrt{\int_A 4E\left[(Z_n(a,\cdot,\infty))^2\right]\mu(da)} \quad (\because \text{Doob；仮定より } Z_n\in\mathscr{M}^{2,\mathrm{c}} \text{ であることに注意.})\\
&= \sqrt{\mu(A)}\sqrt{\int_A 4E\left[\int_{[0,\infty[}(H_n(a,\cdot,s))^2 d\langle X,X\rangle_s\right]\mu(da)} \quad (\because \text{Itô isometry})\\
&< \infty
\end{aligned}$$

これより P-a.s. で，任意の $t\in\mathbb{R}_+$ に対して

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\int_A |Z_n(a,\omega,t)|\,\mu(da) < \infty$$

が成立する．同様にして $\int_A Z(a)\mu(da)$ が well-defined であることも分かる．ここで

$$\delta_n(\omega) = \sup_{t\in\mathbb{R}_+}\left|\int_A Z_n(a,\omega,t)\mu(da) - \int_A Z(a,\omega,t)\mu(da)\right|$$

とおいたとき，δ_n が確率収束することを示したい．先ほどと同様にして

$$\begin{aligned}
&E[\delta_n]\\
&\leq E\left[\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\int_A |Z_n(a,\cdot,t)-Z(a,\cdot,t)|\,\mu(da)\right]\\
&\leq E\left[\int_A \sup_{t\in\mathbb{R}_+}|Z_n(a,\cdot,t)-Z(a,\cdot,t)|\,\mu(da)\right]\\
&\leq \sqrt{\mu(A)}\sqrt{E\left[\int_A\left(\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|Z_n(a,\cdot,t)-Z(a,\cdot,t)|\right)^2\mu(da)\right]} \quad (\because \text{Schwarz})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\mu(A)}\sqrt{\int_A E\left[\left(\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|Z_n(a,\cdot,t)-Z(a,\cdot,t)|\right)^2\right]\mu(da)} \quad (\because \text{Fubini})\\
&\le \sqrt{\mu(A)}\sqrt{\int_A 4E\left[(Z_n(a,\cdot,t)-Z(a,\cdot,t))^2\right]\mu(da)} \quad (\because \text{Doob})\\
&= \sqrt{\mu(A)}\sqrt{\int_A 4E\left[\int_{[0,\infty[}(H_n(a,\cdot,s)-H(a,\cdot,s))^2 d\langle X,X\rangle_s\right]\mu(da)} \quad (\because \text{Itô isometry})
\end{aligned}
$$

という評価が成り立つから[*9]，ここで $n\to\infty$ とすれば有界収束定理により最終辺は 0 に収束する．したがって $E[\delta_n]\to 0$ が成立し，特に

$$
\int_A (H_n \bullet X)(a)\mu(da) \xrightarrow[n\to\infty]{ucp} \int_A (H\bullet X)(a)\mu(da)
$$

も分かる．(5.7.8) の両辺はともに ucp で収束するから，その極限 $\left(\int_A H(a)\mu(da)\right)\bullet X$ と $\int_A (H\bullet X)(a)\mu(da)$ は indistinguishale の意味で一致する．

Step 2：X が連続局所マルチンゲールの場合． $X_0=0$ として示せばよい．X の局所化列 (T_n) を $X^{T_n}\in\mathscr{M}^{2,c}$ となるように選ぶ．このとき，step 1 の結果より

$$
\int_A (H\bullet X^{T_n})(a)\mu(da) = \left(\int_A H(a)\mu(da)\right)\bullet X^{T_n}
$$

が成立．この式は n ごとに indistinguishable の意味で成り立つから，対応する確率 1 の集合を Ω_n とする．さらに Ω' 上で $\lim_n T_n = T$ が成り立つような確率 1 の集合をとり，$\widetilde{\Omega}=\Omega'\cap\bigcap_n \Omega_n$ とおけば，これはまた確率 1 をもつ．$\omega\in\widetilde{\Omega}$ とすれば，任意の t に対して十分大きな $n=n(t)$ をとれば

$$
\begin{aligned}
\int_A (H\bullet X)(a,\omega,t)\mu(da) &= \int_A (H\bullet X^{T_n})(a,\omega,t)\mu(da)\\
&= \left(\int_A H(a)\mu(da)\right)\bullet X^{T_n}\\
&= \left(\left(\int_A H(a)\mu(da)\right)\bullet X\right)(\omega,t)
\end{aligned}
$$

したがって，$\omega\in\widetilde{\Omega}$ に対して二つのパスは一致する．すなわち二つの過程は区別不能である． □

5.8　ノート

確率積分の定義は Revuz and Yor [94] に従い，Riesz の表現定理を用いる抽象的な方法で導入した．3 節で紹介した，初等過程に関する Stieltjes 積分の L^2 極限を確率積分の定義とする文献も多い．被積分関数の近似に関しては Karatzas and Shreve [68] が詳しい．可予測な被積分過程の近似は Ikeda & Watanabe [59] に見られる．

パラメータ付き確率積分について，被積分関数が有界でない場合にも，適当な仮定の下 Fubuni の定理が成り立つことが知られている．証明は Medvegyev [78] を見よ．

[*9] $X\in\mathscr{M}^{2,c}$ と被積分関数の有界性より Doob の不等式が使える．

第 6 章

伊藤の公式とその応用

6.1 伊藤の公式

この節では，確率積分版の「微積分学の基本定理」とも言える伊藤の公式の証明を行う．

定理 6.1.1 (伊藤の公式).
$X = (X^1, \ldots, X^d)$ を $\mathbb{R}^d$-値の連続セミマルチンゲールとする．このとき任意の $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ について $f \circ X = (f(X_t))_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ はまた連続セミマルチンゲールであり，以下の表現をもつ．

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{1 \leq j \leq d} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_s) dX_s^j + \sum_{1 \leq i,j \leq d} \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s \tag{6.1.1}$$

特に $X^i = X_0^i + B^i + M^i$ を X^i の標準分解とすれば，$f \circ X$ の連続マルチンゲール部分は

$$\sum_{1 \leq j \leq d} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_s) dM_s^j \tag{6.1.2}$$

である．

(6.1.1) は伊藤の公式 (Itô formula) と呼ばれている．確率積分を $H \bullet X$ と書く表記法を用いれば，伊藤の公式は

$$f(X) = f(X_0) + \sum_{1 \leq j \leq d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(X) \bullet X^j + \sum_{1 \leq i,j \leq d} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X) \bullet \langle X^i, X^j \rangle$$

となる．伊藤の公式と確率積分の結合律を用いれば，$H \bullet f(X)$ のような形の確率積分を容易に計算することができる．伊藤の公式はしばしば「微分形」で

$$df(X_t) = \sum_{1 \leq i \leq d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_s) dX_s^j + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s \tag{6.1.3}$$

とも表現される．現時点の我々の立場では dX_t という概念を公式に導入してはいないので，(6.1.3) はあくまでも (6.1.1) の略記と考えるべきである．

注意 6.1.2. $\mathbb{R}^d$ 値の連続セミマルチンゲール X がある開集合 U に値を取る場合，伊藤の公式は U 上定義された C^2 級関数 $f \colon U \to \mathbb{R}$ についても成立する．例えば，狭義に正の値をとる連続セミマルチンゲール X が与えられたとき，$\log X_t$ や $1/X_t$ に対して伊藤の公式を適用することが可能である． ■

伊藤の公式については単なる計算規則であるということよりも，

(i) 連続セミマルチンゲールは C^2 級の変換 $X \mapsto f \circ X$ について不変な概念である．

(ii) $f \circ X$ の標準分解は (6.1.1)，(6.1.1) によって具体的に求めることができる．

という点が重要である．二次変分の定義で用いた定理 4.5.7 より，我々は $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{\mathrm{c}}$ に対して M^2 が連続セミマルチンゲールとなることを知っているけれども，さらに伊藤の公式を用いればその標準分解は確率積分を用いて

$$M^2 = M_0^2 + 2M \bullet M + \langle M, M \rangle$$

と表現できることがわかる．

伊藤の公式において $f(x,y) = xy$ とおけば，以下の部分積分公式 (integration by parts formula) が得られる．

$$XY = X_0 Y_0 + X \bullet Y + Y \bullet X + \langle X, Y \rangle \tag{6.1.4}$$

これを見ると，セミマルチンゲールの二次共変分は確率積分と 1 対 1 の対応関係を持つことがわかる．したがってセミマルチンゲールの二次変分を定義として標準分解を用いるのではなく，部分積分公式 (6.1.4) そのものを二次変分や二次共変分の定義とすることができる．(6.1.4) において時刻 t を固定して，Y として $\operatorname{supp}\varphi \in]0,t[$ を満たす $\varphi \subset C_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ をとってみよう．すると

$$\int_0^t \varphi(s) dX_s = -\int_0^t X_s d\varphi(s) = -\int_0^t X_s \varphi'(s) ds$$

が成り立っていることがわかる．これは確率積分 $\varphi \mapsto \int_0^t \varphi(s) dX_s$ が（ほとんど全てのパスについて）連続関数 $s \mapsto X_s(\omega)$ の超関数微分と見なせることを示している．

伊藤の公式は Stratonovich 積分を用いるともっとシンプルな形で表現できる．

命題 6.1.3.
X を $\mathbb{R}^d$ 値の連続セミマルチンゲールとし，$f \in C^3(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ とする．このとき

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{1 \leq i \leq d} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) \circ dX_s^i$$

が成り立つ．

命題 6.1.3 は通常の Stiletjes 積分に関する変数変換公式（命題 A.9.3）と同じ形をしており馴染みやすい．しかし我々が採用している Storatnovich 積分の導入方法において $\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) \circ dX_s^i$ が定義されるためには f には C^3 ほどの滑らかさが必要[*1]であり，その意味では定理 6.1.1 より適用できる関数のクラスは狭い．したがってどちらの主張も一長一短と言ったところである．

ひとまず定理 6.1.1 は認めて，それを用いて命題 6.1.3 を証明しよう．

証明． 定理 6.1.1 より各 $i \in \{1, \ldots, d\}$ について $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X)$ はまた連続セミマルチンゲールであるから，

[*1] このとき $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ はどれも C^2 級なので，定理 6.1.1 より $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X)$ は連続セミマルチンゲールとなる．

Storatonovich 積分 $\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) \circ dX_s^i$ が well-defined であることに注意しておく．伊藤の公式より

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_t) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) + \sum_{1 \le j \le d} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X_s) dX_s^j + \frac{1}{2} \sum_{1 \le j,k \le d} \int_0^t \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_k \partial x_i}(X_s) d\langle X^j, X^k \rangle_s$$

が成り立つから，

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) \circ dX_s^i &= \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}(X), X^i \right\rangle_s \\ &= \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{1 \le j \le d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X_s) d \left\langle X^i, X^j \right\rangle_s \end{aligned}$$

となる．したがって $f(X)$ に伊藤の公式を適用すれば，

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \sum_{1 \le j \le d} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_s) dX_s^j + \sum_{1 \le i,j \le d} \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) \circ dX_s^i \end{aligned}$$

となることがわかる． □

伊藤の公式における関数の可微分性は，以下のような形に緩めることが可能である．

定理 6.1.4 (伊藤の公式).
$X = (X^1, \dots, X^d)$ を $\mathbb{R}^d$-値の連続セミマルチンゲール，$A = (A^1, \dots, A^n) \in (\mathscr{V}^c)^n$ とする．このとき任意の $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d)$ について $f \circ (A, X)$ はまた連続セミマルチンゲールであり，以下の等式を満たす．

$$\begin{aligned} f(A, X) = f(A_0, X_0) &+ \sum_{1 \le i \le n} \frac{\partial f}{\partial a_i}(A, X) \bullet A^i + \sum_{1 \le j \le d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_s) \bullet X^j \\ &+ \sum_{1 \le i,j \le d} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A, X) \bullet \langle X^i, X^j \rangle. \end{aligned} \tag{6.1.5}$$

特に $X^i = X_0^i + B^i + M^i$ を X^i の標準分解とすれば，$f \circ (A, X)$ の連続マルチンゲール部分は

$$\sum_{1 \le j \le d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(A, X) \bullet M^j$$

である．

本ノートではこれ以降の小節で，伊藤の公式の証明をいくつか紹介していく．

6.1.1 伊藤の公式：証明その 1—部分積分公式からのアプローチ

第一の証明法として，先に部分積分公式を証明してしまう方法を紹介しよう．部分積分公式が証明できれば帰納的に多項式関数に対して伊藤の公式を証明でき，一般の f に対しては多項式近似を行うことで定理の証明を行うという戦略である．

命題 6.1.5 (部分積分公式).
X，Y を連続セミマルチンゲールとすれば，

$$XY = X_0Y_0 + X \bullet Y + Y \bullet X + \langle X, Y\rangle$$

が成り立つ．

証明. $|\pi_n| \to 0$ を満たす $\mathbb{R}_{\geq 0}$ の分割列 $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}} = (t_i^n)_{n,i}$ を任意に選ぶ．このとき

$$\sum_i \left(X_{t_i^n\wedge t} - X_{t\wedge t_{i-1}^n}\right)^2 = X_t^2 - X_0^2 - 2\sum_t X_{t_{i-1}^n}\left(X_{t\wedge t_i^n} - X_{t\wedge t_{i-1}^n}\right)$$

が成り立つ．$n\to\infty$ とすれば命題 4.7.8 と命題 5.4.5 より左辺は $\langle X, X\rangle$ に，右辺は $X^2 - X_0^2 - 2X \bullet X$ にそれぞれ ucp 収束する．よって

$$\langle X, X\rangle = X^2 - X_0^2 - 2X \bullet X \tag{6.1.6}$$

が成り立つ．これを連続セミマルチンゲール Y と $X+Y$ に適用すれば，

$$\langle Y, Y\rangle = Y^2 - Y_0^2 - 2Y \bullet Y, \tag{6.1.7}$$
$$\langle X+Y, X+Y\rangle = (X+Y)^2 - (X_0+Y_0)^2 - 2(X+Y)\bullet(X+Y) \tag{6.1.8}$$

が成り立つ．(6.1.8)−(6.1.6)−(6.1.7) を計算すれば

$$2\langle X, Y\rangle = 2XY - 2X \bullet Y - 2Y \bullet X$$

となり，これを整理すれば部分積分公式を得る． □

証明 (定理 6.1.1). Step1：多項式関数に対する伊藤の公式の証明. X を d 次元の連続セミマルチンゲールとし，$f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は (6.1.5) を満たすような C^2 級関数とする．すなわち

$$f(X) = f(X_0) + \sum_{1\leq i\leq d}\frac{\partial f}{\partial x_i}(X)\bullet X^i + \frac{1}{2}\sum_{1\leq i,j\leq d}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(X)\bullet\langle X^i, X^j\rangle$$

が成り立っているとする．$F_i = x_i f(x)$ と定義すれば，

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \begin{cases} x_i\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) & i\neq j \\ f(x) + x_i\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) & i = j\end{cases}$$

および

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j\partial x_k} = \begin{cases} x_i\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}(x) & j,k\neq i \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) + x_i\dfrac{\partial f}{\partial x_i\partial x_j}(x) & k = i\neq j\end{cases}$$

が成り立つ．したがって部分積分公式より

$$\begin{aligned}
&F_i(X) = X^i f(X) \\
&= X_0^i f(X_0) + X^i \bullet f(X) + f(X) \bullet X^i + \langle X^i, f(X) \rangle \\
&= X_0^i f(X_0) + \sum_{1 \le j \le d} \left(X^i \frac{\partial f}{\partial x_j}(X) \right) \bullet X^j + \frac{1}{2} \sum_{1 \le j,k \le d} \left(X^i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(X) \right) \bullet \langle X^j, X^k \rangle \\
&\quad + f(X) \bullet X^i + \sum_{1 \le j \le d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(X) \bullet \langle X^i, X^j \rangle \\
&= F_i(X_0) + \sum_{1 \le j \le d} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(X) \bullet X^j + \frac{1}{2} \sum_{1 \le j,k \le d} \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial x_j}(X) \bullet \langle X^i, X^j \rangle
\end{aligned}$$

となり，F_i はまた伊藤の公式 (6.1.5) を満たす．したがって，任意の多項式関数に対して伊藤の公式 (6.1.5) が成り立つことがわかる．

Step 2：X が有界な場合． $f \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ としよう．まずは X が有界であるとして示す．コンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^d$ を $X_t(\omega)$ が常に K に値を取るように選ぶ．このとき多項式関数列 (f_n) で，2 階までの全ての偏導関数を含めて f を K 上で一様に近似するようなものが存在する．（系 A.7.3）各 f_n は多項式関数なので，伊藤の公式

$$f_n(X) = f_n(X_0) + \sum_{1 \le i \le d} \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(X) \bullet X^i + \frac{1}{2} \sum_{1 \le i,j \le d} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_i \partial x_j}(X) \bullet \langle X^i, X^j \rangle \tag{6.1.9}$$

を満たしている．f_n は K 上で f に一様収束するから，

$$f_n(X(\omega, t)) \xrightarrow[n \to \infty]{\text{uniformly}} f(X(\omega, t))$$

が成り立つ．また $\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_i} \right)$ は K 上 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ に一様収束するから，$\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_i}(X) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ は一様に有界かつ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X)$ に各点収束する．したがって確率積分に関する優収束定理（定理 5.3.4）により

$$\sum_{1 \le i \le d} \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(X) \bullet X^i \xrightarrow[n \to \infty]{\text{ucp}} \sum_{1 \le i \le d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) \bullet X^i$$

となる．同様にして

$$\frac{1}{2} \sum_{1 \le i,j \le d} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_i \partial x_j}(X) \bullet \langle X^i, X^j \rangle \xrightarrow[n \to \infty]{\text{ucp}} \frac{1}{2} \sum_{1 \le i,j \le d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X) \bullet \langle X^i, X^j \rangle$$

もわかるので，(6.1.9) において ucp の意味での極限をとれば

$$f(X) = f(X_0) + \sum_{1 \le i \le d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) \bullet X^i + \frac{1}{2} \sum_{1 \le i,j \le d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X) \bullet \langle X^i, X^j \rangle$$

を得る．

Step 3：一般の場合． このステップでは X が一般の連続セミマルチンゲールの場合を考える．

$$T_n = \inf\{t \ge 0 \mid \|X_t\| \ge n\}$$

と定めれば，$X^{T_n}1_{\{T_n>0\}}$ は有界なセミマルチンゲールである．($1_{\{T_n>0\}}$ は有界な $\mathscr{F}_0$-可測関数であることに注意されたい．）したがって step 2 での議論により，C^2 級関数 f に対して伊藤の公式

$$\begin{aligned}
f(X^{T_n}1_{\{T_n>0\}}) &= f(X_0 1_{\{T_n>0\}}) + \sum_{1\le i\le d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X^{T_n}1_{\{T_n>0\}}) \bullet \big((X^i)^{T_n}1_{\{T_n>0\}}\big) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X^{T_n}1_{\{T_n>0\}}) \bullet \big\langle (X^i)^{T_n}1_{\{T_n>0\}}, (X^j)^{T_n}1_{\{T_n>0\}} \big\rangle \\
&= f(X_0 1_{\{T_n>0\}}) + \sum_{1\le i\le d} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(X^{T_n}1_{\{T_n>0\}}) 1_{\{T_n>0\}} 1_{[\![0,T_n]\!]} \right) \bullet X^i \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le d} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X^{T_n}1_{\{T_n>0\}}) 1_{\{T_n>0\}} 1_{[\![0,T_n]\!]} \right) \bullet \big\langle X^i, X^j \big\rangle
\end{aligned} \tag{6.1.10}$$

が成り立つ．いま

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i}(X^{T_n}1_{\{T_n>0\}}) 1_{\{T_n>0\}} 1_{[\![0,T_n]\!]} &\xrightarrow[n\to\infty]{\text{pointwise}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X^{T_n}1_{\{T_n>0\}}) 1_{\{T_n>0\}} 1_{[\![0,T_n]\!]} &\xrightarrow[n\to\infty]{\text{pointwise}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X)
\end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(X^{T_n}1_{\{T_n>0\}}) 1_{\{T_n>0\}} 1_{[\![0,T_n]\!]} \right| &\le \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) \right| \\
\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X^{T_n}1_{\{T_n>0\}}) 1_{\{T_n>0\}} 1_{[\![0,T_n]\!]} \right| &\le \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X) \right|
\end{aligned}$$

であるから，(6.1.10) において確率積分に関する優収束定理を用いれば

$$f(X) = f(X_0) + \sum_{1\le i\le d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) \bullet X^i + \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X) \bullet \langle X^i, X^j \rangle$$

を得る． □

次に，定理 6.1.1 を用いてより一般的な定理 6.1.4 を証明しよう．

証明 (定理 6.1.4). $A \in (\mathscr{V}^c)^n$ とし，X を d-次元の連続セミマルチンゲールとする．定理 6.1.1 の証明と同様に停止過程を考えることにより，A と X はコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^{n+d}$ に値を取るとして示せばよい．$f \in C^2(\mathbb{R}^{n+d}, \mathbb{R})$ ならば，定理 6.1.1 より

$$\begin{aligned}
f(A,X) &= f(A_0, X_0) + \sum_{1\le i\le n} \frac{\partial f}{\partial a_i}(A,X) \bullet A^i + \sum_{1\le i,j\le n} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial a_i \partial a_j}(A,X) \bullet \langle A^i, A^j \rangle \\
&\quad + \sum_{1\le k\le d} \frac{\partial f}{\partial x_k}(X_s) \bullet X^k + \sum_{1\le k,l\le d} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(A,X) \bullet \langle X^k, X^l \rangle \\
&\quad + \sum_{1\le i\le n}\sum_{1\le k\le d} \frac{\partial^2 f}{\partial a_i \partial x_k}(A,X) \bullet \langle A^i, X^k \rangle
\end{aligned}$$

が成り立つ．各 i, j, k について $\langle A^i, A^j \rangle = 0$ および $\langle A^i, X^k \rangle$ が成り立つから，上の式は

$$f(A, X) = f(A_0, X_0) + \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial f}{\partial a_i}(A, X) \bullet A^i + \sum_{1 \leq j \leq d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_s) \bullet X^j$$
$$+ \sum_{1 \leq i, j \leq d} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A, X) \bullet \langle X^i, X^j \rangle$$

と同じである．特に任意の $n + d$ 変数多項式関数 f に対してこの式は成り立つ．

一般の $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ に対しては，多項式関数列 (f_n) で K 上 f のすべての偏導関数を一様近似するものが存在する．（系 A.7.3）各 (f_n) については伊藤の公式 (6.1.5) が成立するから，n について極限をとれば確率積分に関する優収束定理により f についても (6.1.5) が成り立つことがわかる． □

6.1.2 伊藤の公式：証明その 2—Taylor 展開を用いた古典的アプローチ

本小節では，Taylor 展開を用いた伊藤の公式の証明を紹介する．こちらの方がより直観的意味の分かりやすいというメリットがあるが，一方で特に多次元の場合には記号は非常に煩雑となり読みにくくなるというデメリットもある．一般の場合は既に前小節で証明したので，本小節では 1 次元の連続セミマルチンゲールの場合に限定して証明をしよう．

まずは二次変分の収束に関する結果（定理 4.7.8）の一般化である次の補題を証明する．

補題 6.1.6.
X を連続セミマルチンゲールとし，H を連続適合過程とする．$(\pi_n)_n = (t_i^n)_{n,i}$ を $|\pi_n| \to 0$ を満たす分割列としたとき，

$$\sum_i H_{t_i^n} \left(X_{t_i^n \wedge t} - X_{t_{i-1}^n \wedge t} \right)^2 \xrightarrow[n \to \infty]{\text{ucp}} \int_0^t H_s d\langle X, X \rangle_s$$

が成り立つ．

証明. $X = X_0 + M + A$ を連続セミマルチンゲール X の標準分解とする．

Step 1：$H, M, \langle M \rangle, V(A)$ がどれも有界な場合． $C > 0$ を $H, M, \langle M \rangle, V(A)$ に共通の上界とする．確率過程 Y, Z に対して，新たな確率過程 $S^{(n)}(Y, Z)$ を

$$S_t^{(n)}(Y, Z) = \sum_i H_{t_i^n} \left(Y_{t_i^n \wedge t} - Y_{t_{i-1}^n \wedge t} \right) \left(Z_{t_i^n \wedge t} - Z_{t_{i-1}^n \wedge t} \right)$$

と定義しよう．$X = X_0 + M + A$ を連続セミマルチンゲール X の標準分解とすれば

$$S^{(n)}(X, X) = S^{(n)}(M, M) + S^{(n)}(A, A) + 2S^{(n)}(M, A)$$

が成り立つから，右辺各項の $n \to \infty$ での振る舞いを調べればよい．

$$\begin{aligned}
\left| S_t^{(n)}(A, A) \right| &\leq \sum_i \left| H_{t_{i-1}^n} (A_{t \wedge t_i^n} - A_{t_{i-1}^n})^2 \right| \\
&\leq C \sum_i \left| (A_{t \wedge t_i^n} - A_{t_{i-1}^n})^2 \right| \\
&\leq C \operatorname{osc}_t(A; \pi_n) \max_i \left| A_{t \wedge t_i^n} - A_{t_{i-1}^n} \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \operatorname{osc}_t(A;\pi_n) V(A)_t \\
&\leq C^2 \operatorname{osc}_t(A;\pi_n) \qquad (6.1.11)
\end{aligned}$$

である．A のパスは $[0,t]$ 上一様連続だから，$\operatorname{osc}_t(A;\pi_n)$ は $n \to \infty$ で 0 に概収束する．仮定より $\operatorname{osc}_t(A;\pi_n) \leq 2C$ であるから，(6.1.11) と優収束定理により

$$\sup_{s\leq t}\left|S_s^{(n)}(A,A)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{\text{in } L^1} 0$$

が成り立つ．同様に，

$$\left|S_t^{(n)}(A,M)\right| \leq C^2 \operatorname{osc}_t(M;\pi_n)$$

も成り立つから，

$$\sup_{s\leq t}\left|S_s^{(n)}(A,M)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{\text{in } L^1} 0$$

もわかる．

今度は $S^{(n)}(M,M)$ の極限を調べよう．目標は

$$\sup_{0\leq s\leq t}|S_s^{(n)}(M,M) - H \bullet \langle M\rangle_s| \xrightarrow[n\to\infty]{\text{in } L^1} 0$$

を示すことである．

$$H_t^{(n)} = \sum_i H_{t_{i-1}^n} 1_{\rrbracket t_{i-1}^n, t_i^n \rrbracket}$$

と定義すれば，

$$\left|H^{(n)} \bullet \langle M\rangle_t - H \bullet \langle M\rangle_t\right| \leq |H_t^{(n)} - H_t|\langle M\rangle_t \leq \operatorname{osc}_t(H;\pi_n)\langle M\rangle_t$$

であるから，H の有界性と連続性，$\langle M\rangle \in \mathscr{A}$，そして優収束定理から

$$\sup_{s\leq t}\left|H^{(n)} \bullet \langle M\rangle_s - H \bullet \langle M\rangle_s\right| \xrightarrow[n\to\infty]{\text{in } L^1} 0$$

となる．したがって，後は何らかの意味で

$$\sup_{s\leq t}\left|H^{(n)} \bullet \langle M\rangle_s - S_s^{(n)}(M,M)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

が成り立つことを示せばよい．$s \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$ なら

$$\begin{aligned}
E[H_{t_{i-1}^n}(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2|\mathscr{F}_s] &= H_{t_{i-1}^n} E[(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2|\mathscr{F}_s] \\
&= H_{t_{i-1}^n}\left\{E[(M_{t_i^n} - M_s)^2|\mathscr{F}_s] + (M_s - M_{t_{i-1}^n})^2\right\} \\
&= E[H_{t_{i-1}^n}(M_{t_i^n} - M_s)^2|\mathscr{F}_s] + H_{t_{i-1}^n}(M_s - M_{t_{i-1}^n})^2
\end{aligned}$$

となることに注意すれば，

$$\begin{aligned}
E\left[S_t^{(n)}(M,M) - S_s^{(n)}(M,M) \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right] &= \sum_i E\left[H_{t_{i-1}^n \vee s}\left(M_{(t_i\wedge t)\vee s} - M_{(t_{i-1}\wedge t)\vee s}\right)^2 \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right] \\
&= \sum_i E\left[H_{(t\wedge t_{i-1}^n)\vee s}\left(M^2_{(t_{i+1}\wedge t)\vee s} - M^2_{(t_i\wedge t)\vee s}\right) \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right] \\
&= \sum_i E\left[H_{(t\wedge t_{i-1}^n)\vee s}\left(\langle M\rangle^2_{(t_{i+1}\wedge t)\vee s} - \langle M\rangle^2_{(t_i\wedge t)\vee s}\right) \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right] \\
&= E\left[H^{(n)} \bullet \langle M\rangle_t - H^{(n)} \bullet \langle M\rangle_s \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right]
\end{aligned}$$

がわかる．したがって $S^{(n)}(M,M) - H^{(n)} \bullet \langle M\rangle$ はマルチンゲールであり，H の有界性と補題 4.7.1，そして $\langle M\rangle$ の有界性より特に $V^{(2)}(M;\pi) - \langle M\rangle \in \mathscr{M}^2$ となる．したがって定理 4.7.3 の証明と同様にして，

$$
\begin{aligned}
&E\left[\sup_{s\le t}\left|H^{(n)}\bullet\langle M\rangle_s - S^{(n)}_s(M,M)\right|^2\right]\\
&\le 4E\left[\left|H^{(n)}\bullet\langle M\rangle_t - S^{(n)}_t(M,M)\right|^2\right]\\
&= 4E\left[\left|\sum_i H_{t_{i-1}}\left\{\left(M_{t\wedge t_i^n} - M_{t\wedge t_{i-1}^n}\right)^2 - \left(\langle M,M\rangle_{t\wedge t_i^n} - \langle M,M\rangle_{t\wedge t_{i-1}^n}\right)\right\}\right|^2\right]\\
&= 4\sum_i E\left[\left(H_{t_{i-1}^n}\right)^2\left\{\left(M_{t\wedge t_i^n} - M_{t\wedge t_{i-1}^n}\right)^2 - \left(\langle M,M\rangle_{t\wedge t_i^n} - \langle M,M\rangle_{t\wedge t_{i-1}^n}\right)\right\}^2\right]\\
&\le 4C^2\sum_i E\left[\left\{\left(M_{t\wedge t_i^n} - M_{t\wedge t_{i-1}^n}\right)^2 - \left(\langle X,X\rangle_{t\wedge t_i^n} - \langle X,X\rangle_{t\wedge t_{i-1}^n}\right)\right\}^2\right]\\
&\le 8C^2\left(E[V_t^{(4)}(M;\pi)] + E[\mathrm{osc}_t(\langle M\rangle;\pi)\langle M\rangle_t]\right) \qquad (6.1.12)
\end{aligned}
$$

がわかる．これより定理 4.7.3 の証明と同じ議論で

$$
\lim_{n\to\infty} E\left[\sup_{0\le s\le t}\left|H^{(n)}\bullet\langle M\rangle_s - S^{(n)}_s(M,M)\right|^2\right] = 0
$$

が示される．

Step 2：一般の場合． $m\in\mathbb{N}$ に対して，

$$
T_m = \inf t\ge 0 \mid |H_t|\vee V(A)_t\vee|M_t|\vee\langle M\rangle_t \ge m\}
$$

と定義する．このとき $H^{T_m}1_{\{T_m>0\}}, M^{T_m}, \langle M\rangle^{T_m}, V(A)^{T_m}$ はどれも有界だから，step 1 での議論により

$$
\begin{aligned}
1_{\{T_m>0\}}S^{(n)}(X,X)^{T_m} &= \sum_i H^{T_m}1_{\{T_m>0\}}\left(X^{T_m\wedge t_i^n} - X^{T_m\wedge t_{i-1}^n}\right)^2\\
&\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{ucp}} \left(H^{T_m}1_{\{T_m>0\}}\right)\bullet\langle X^{T_m}, X^{T_m}\rangle\\
&= 1_{\{T_m>0\}}\left(H\bullet\langle X,X\rangle\right)^{T_m}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．したがって命題 2.7.6 (iv) により $S^{(n)}(X,X)$ は $H\bullet\langle X,X\rangle$ に ucp 収束する． □

証明 (定理 6.1.1). $X = X_0 + M + A$ を X の標準分解とする．前小節と同様の議論により，$X, M, \langle M\rangle, A$ がどれも有界であると仮定して示せばよい．特にこれらは $[-K,K]$ に値をとるとしよう．このとき f, f', f'' はどれもコンパクト台をもつとしてよい．

$t>0$ を固定し，$(\pi_n) = (t_k^n)$ を $\mathbb{R}_{\ge 0}$ の分割列で $|\pi_n|\to 0$ を満たすものとする．このとき Taylor の定理より

$$
\begin{aligned}
&f(X_{t\wedge t_k^n}) - f(X_{t\wedge t_{k-1}^n})\\
&= f'(X_{t_{k-1}^n})\left\{X_{t\wedge t_k^n} - X_{t\wedge t_{k-1}^n}\right\} + \frac{1}{2}f''(X_{t_{k-1}^n})\left\{X_{t\wedge t_k^n} - X_{t\wedge t_{k-1}^n}\right\}^2\\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^1\left\{f''\left(X_{t\wedge t_{k-1}^n} + \alpha\left(X_{t\wedge t_k^n} - X_{t\wedge t_{k-1}^n}\right)\right) - f''(X_{t\wedge t_{k-1}^n})\right\}d\alpha\left\{X_{t\wedge t_k^n} - X_{t\wedge t_{k-1}^n}\right\}^2
\end{aligned}
$$

が成り立つ．この式で k について和をとれば，

$$
\begin{aligned}
&f(X_t) - f(X_0) \\
&= \sum_k f'(X_{t^n_{k-1}})(X_{t\wedge t^n_k} - X_{t\wedge t^n_{k-1}}) + \frac{1}{2}\sum_k f''(X_{t^n_{k-1}})\left\{X_{t\wedge t^n_k} - X_{t\wedge t^n_{k-1}}\right\}^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_k \int_0^1 \left\{f''\left(X_{t\wedge t^n_{k-1}} + \alpha\left(X_{t\wedge t^n_k} - X_{t\wedge t^n_{k-1}}\right)\right) - f''(X_{t\wedge t^n_{k-1}})\right\} d\alpha \left\{X_{t\wedge t^n_k} - X_{t\wedge t^n_{k-1}}\right\}^2
\end{aligned}
\tag{6.1.13}
$$

を得る．(6.1.13) において $n\to\infty$ とすることで (6.1.1) を示すことが目標である．

命題 5.4.5 より (6.1.13) 右辺第 1 項の確率過程は $f'(X)\bullet X$ に ucp 収束する．また補題 6.1.6 より (6.1.13) 右辺第 2 項の確率過程は $\frac{1}{2}f''(X)\bullet\langle X,X\rangle$ に ucp 収束する．さらに

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_k \int_0^1 \left\{f''\left(X_{t\wedge t^n_{k-1}} + \alpha\left(X_{t\wedge t^n_k} - X_{t\wedge t^n_{k-1}}\right)\right) - f''(X_{t\wedge t^n_{k-1}})\right\} d\alpha \left\{X_{t\wedge t^n_k} - X_{t\wedge t^n_{k-1}}\right\}^2\right\| \\
&\leq \mathrm{osc}_t(f(X);\pi_n)\sum_k \left(X_{t\wedge t^n_k} - X_{t\wedge t^n_{k-1}}\right)^2 = \mathrm{osc}_t(f(X);\pi_n)V^{(2)}_t(X;\pi)
\end{aligned}
$$

という評価より，これは 0 に ucp 収束する．これより (6.1.13) 右辺は $n\to\infty$ で

$$
f'(X)\bullet X + \frac{1}{2}f''(X)\bullet\langle X,X\rangle
$$

に ucp 収束することがわかるので，(6.1.13) において極限をとれば

$$
f(X) = f(X_0) + \sum_{1\leq j\leq d}\frac{\partial f}{\partial x_j}(X)\bullet X^j + \sum_{1\leq i,j\leq d}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(X)\bullet\langle X^i, X^j\rangle
$$

を得る． □

6.2 Burkholder-Davis-Gundy の不等式

$M\in\mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}_0$ なら，Doob の不等式と二次変分の定義より

$$
E[\langle M\rangle_\infty] = E[M^2_\infty] \leq E[(M^*_\infty)] \leq 4\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} E[(M_t)^2] = 4E[\langle M\rangle_\infty]
$$

が成り立つ．このような関係性がより一般の $M\in\mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ やより一般の指数 p についても拡張できるだろうか？そういった疑問に答えるのが本節における目標である．最初に目標とする定理の主張を述べよう．

定理 6.2.1 (Burkholder-Davis-Gundy の不等式).
$p\in\,]0,\infty[$ とする．このときある定数 $c_p, C_p > 0$ が存在して，任意の $M\in\mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{0,\mathrm{loc}}$ に対して

$$
c_p E\left[\langle M,M\rangle^{p/2}_\infty\right] \leq E\left[(M^*_\infty)^p\right] \leq C_p E\left[\langle M,M\rangle^{p/2}_\infty\right] \tag{6.2.1}
$$

が成り立つ．

定理 6.2.1 において停止過程 M^T を考えれば，直ちに次の系を得る．

系 6.2.2.
$p \in]0,\infty[$ とし，$c_p, C_p > 0$ を定理 6.2.1 のものとする．このとき任意の $M \in \mathscr{M}^c_{0,\mathrm{loc}}$ と任意の停止時刻 T に対して

$$c_p E\left[\langle M, M\rangle_T^{p/2}\right] \leq E\left[(M_T^*)^p\right] \leq C_p E\left[\langle M, M\rangle_T^{p/2}\right] \tag{6.2.2}$$

が成り立つ．

不等式 (6.2.1) および (6.2.2) を Burkholder-Davis-Gundy の不等式と呼ぶ．頭文字をとって BDG 不等式 (BDG inequality) ということもある．BDG 不等式の核となっているのは，二乗可積分マルチンゲールに対する Doob の不等式である．しかし，一般の BDG 不等式を示すためには数多くのテクニカルな議論を行う必要がある．

6.2.1 上からの評価—$p \geq 2$ の場合

命題 6.2.3.
$p \geq 2$ とする．このときある定数 $C_p > 0$ が存在して，任意の $M \in \mathscr{M}^c_{0,\mathrm{loc}}$ に対して

$$E\left[(M_\infty^*)^p\right] \leq C_p E\left[\langle M, M\rangle_\infty^{p/2}\right] \tag{6.2.3}$$

が成り立つ．

証明．Step1：M が有界な場合．

Step1-1：$p > 2$ の場合．

$p \geq 2$ より関数 $x \mapsto |x|^p$ は C^2 級なので，伊藤の公式より

$$|M|^p = |M_0|^p + p\left(|M|^{p-1}\operatorname{sgn} M\right) \bullet M + \frac{1}{2}p(p-1)|M|^{p-2} \bullet \langle M, M\rangle$$

が成り立つ．M は有界であると仮定しているから，劣マルチンゲール収束定理により $M_t \to \exists M_\infty$ が概収束かつ L^p 収束の意味で成立．さらに $|M|^{p-2} \bullet \langle M, M\rangle \in \mathscr{A}^+$ であるから，

$$|M_\infty|^p = |M_0|^p + \int_0^\infty p|M_s|^{p-1}(\operatorname{sgn} M_s)\, dM_s + \frac{1}{2}\int_0^\infty p(p-1)|M_s|^{p-2} d\langle M, M\rangle_s$$

がわかる．$\left(|M|^{p-1}\operatorname{sgn} M\right) \bullet M$ が一様可積分マルチンゲールであることに注意して上の式で期待値をとれば，

$$\begin{aligned}
&E\left[|M_\infty|^p\right] \\
&= \frac{p(p-1)}{2} E\left[\int_0^\infty |M_s|^{p-2} d\langle M, M\rangle_s\right] \\
&\leq \frac{p(p-1)}{2} E\left[(M_\infty^*)^{p-2}\langle M, M\rangle_\infty\right] \\
&\leq \frac{p(p-1)}{2}\left(E\left[(M_\infty^*)^p\right]\right)^{(p-2)/p}\left(E\left[\langle M, M\rangle_\infty^{p/2}\right]\right)^{2/p} \qquad (\because \text{Hölder の不等式})
\end{aligned}$$

となる．Doob の不等式より

$$E[(M_\infty^*)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|M_\infty|^p]$$

であったから，これと先ほどの不等式を合わせれば

$$E[(M_\infty^*)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \frac{p(p-1)}{2} \left(E\left[(M_\infty^*)^p\right]\right)^{(p-2)/p} \left(E\left[\langle M,M\rangle_\infty^{p/2}\right]\right)^{2/p}$$

がわかる．これを整理すれば

$$E[(M_\infty^*)^p]^{2/p} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \frac{p(p-1)}{2} \left(E\left[\langle M,M\rangle_\infty^{p/2}\right]\right)^{2/p}.$$

となるので，両辺を $p/2$ 乗すれば求める不等式を得る．

Step1-2：$p=2$ の場合．

$p=2$ の場合は Hölder の不等式を使わずとも

$$\begin{aligned} E\left[|M_\infty|^p\right] &\leq \frac{p(p-1)}{2} E\left[\int_0^\infty |M_s|^{p-2} d\langle M,M\rangle_s\right] \\ &= \frac{p(p-1)}{2} E[\langle M,M\rangle_\infty] \end{aligned}$$

という評価を得るので，後は step 1-1 と同様の議論を行えばよい．

Step2：一般の $\mathscr{M}_{0,\mathrm{loc}}^{\mathrm{c}}$ の場合．

$M \in \mathscr{M}_{0,\mathrm{loc}}^{\mathrm{c}}$ の局所化列 (T_n) を M^{T_n} が有界となるようにとれば，Step1 における定数 $C_p > 0$ に対して

$$E\left[\left\{\left(M_\infty^{T_n}\right)^*\right\}^p\right] \leq C_p E\left[\left(\langle M,M\rangle_\infty^{T_n}\right)^{p/2}\right]$$

が成立する．$n \to \infty$ とすれば単調収束定理より (6.2.3) が従う． □

6.2.2 下からの評価—$p \geq 4$ の場合

命題 6.2.4.

$p \geq 4$ とすれば，ある c_p が存在して任意の $M \in \mathscr{M}_{0,\mathrm{loc}}^{\mathrm{c}}$ に対して

$$c_p E[\langle M,M\rangle_\infty] \leq E[(M_\infty^*)^p] \tag{6.2.4}$$

が成り立つ．

証明. $p \geq 4$ とする．はじめに，任意の実数 x, y と $q > 0$ に対して

$$|x+y|^q \leq (|x|+|y|)^q \leq 2^q(|x| \vee |y|)^q = 2^q(|x|^q + |y|^q) \tag{6.2.5}$$

が成り立つことに注意しておく．

$\langle M,M\rangle$ が有界な場合に示す．伊藤の公式より $M \in \mathscr{M}_0^{c,loc}$ に対して

$$M_t^2 = 2\int_0^t M_s dM_s + \langle M,M\rangle_t$$

となるので，(6.2.5) を用いれば

$$\begin{aligned}\langle M,M\rangle_t^{p/2} &= \left|M_t^2 - 2\int_0^t M_s dM_s\right|^{p/2}\\ &\le 2^{p/2}\left(\left|M_t^2\right|^{p/2} + \left|2\int_0^t M_s dM_s\right|^{p/2}\right)\\ &= 2^{p/2}\left(|M_t|^p + \left|2\int_0^t M_s dM_s\right|^{p/2}\right)\\ &\le 2^{(p+2)/2}\left(|M_t|^p + \left|\int_0^t M_s dM_s\right|^{p/2}\right)\end{aligned}$$

が分かる．$t\to\infty$ として期待値を取れば,

$$\begin{aligned}&E[\langle M,M\rangle_\infty^{p/2}]\\ &\le 2^{(p+2)/2}\left(E\left[|M_\infty|^p\right] + E\left[\left|\int_0^\infty M_s dM_s\right|^{p/2}\right]\right)\\ &\le 2^{(p+2)/2}\left(E\left[(M_\infty^*)^p\right] + E\left[\sup_{t\ge 0}\left|\int_0^t M_s dM_s\right|^{p/2}\right]\right)\\ &= 2^{(p+2)/2}\left(E\left[(M_\infty^*)^p\right] + E\left[\{(M\bullet M)^*\}^{p/2}\right]\right)\\ &\le 2^{(p+2)/2}\left(E\left[(M_\infty^*)^p\right] + C^p E\left[\langle M\bullet M\rangle_\infty^{p/4}\right]\right) \quad (\because \text{命題 6.2.3})\\ &\le 2^{(p+2)/2}(1\vee C^p)\left(E\left[(M_\infty^*)^p\right] + E\left[\langle M\bullet M\rangle_\infty^{p/4}\right]\right)\\ &= 2^{(p+2)/2}(1\vee C^p)\left(E\left[(M_\infty^*)^p\right] + E\left[\left(\int_0^\infty M_s^2 d\langle M,M\rangle_s\right)^{p/4}\right]\right)\\ &\le 2^{(p+2)/2}(1\vee C^p)\left(E\left[(M_\infty^*)^p\right] + E\left[(M_\infty^*)^{p/2}\langle M,M\rangle_\infty^{p/4}\right]\right)\\ &\le 2^{(p+2)/2}(1\vee C^p)\left(E\left[(M_\infty^*)^p\right] + E\left[(M_\infty^*)^p\right]^{1/2} E\left[\langle M,M\rangle_\infty^{p/2}\right]^{1/2}\right) \quad (\because \text{Höllder の不等式})\end{aligned}$$

ゆえに

$$E[\langle M,M\rangle_\infty^{p/2}] \le 2^{(p+2)/2}(1\vee C^p)\left(E\left[(M_\infty^*)^p\right] + E\left[(M_\infty^*)^p\right]^{1/2} E\left[\langle M,M\rangle_\infty^{p/2}\right]^{1/2}\right) \tag{6.2.6}$$

ここで

$$\begin{aligned}x &= E[\langle M,M\rangle_\infty^{p/2}]^{1/2}\\ y &= E\left[(M_\infty^*)^p\right]^{1/2}\\ a_p &= 2^{(p+2)/2}(1\vee C^p)\end{aligned}$$

とおけば，(6.2.6) より x,y は

$$\begin{cases} x^2 - a_p xy - a_p y^2 \le 0\\ x,y\ge 0\end{cases} \tag{6.2.7}$$

を満たす．二次方程式

$$z^2 - a_p zy - a_p y^2 = 0$$

を解けば,

$$z = \frac{a_p y \pm \sqrt{a_p^2 y^2 + 4a_p y^2}}{2} = \frac{a_p \pm \sqrt{a_p^2 + 4a_p}}{2} y.$$

これより,(6.2.7) との条件を満たす x は

$$x \le \frac{a_p + \sqrt{a_p^2 + 4a_p}}{2} y$$

を満たすことが分かる.これより

$$E[\langle M, M\rangle_\infty^{p/2}]^{1/2} \le \frac{a_p + \sqrt{a_p^2 + 4a_p}}{2} E\left[(M_\infty^*)^p\right]^{1/2}$$

となるから,

$$c_p = \frac{a_p + \sqrt{a_p^2 + 4a_p}}{2}$$

とおけばよい.

一般の場合には $M \in \mathscr{M}_0^{c,loc}$ を局所化する列 (T_n) で,特に M^{T_n} が有界となるようなものをとって $n \to \infty$ とすればよい. □

6.2.3 Lenglart の不等式

定理の証明に入る前に,いくつか補題を用意する.

定義 6.2.5.
非負なる右連続適合過程 X と,$A - A_0 \in \mathscr{A}_+$ なる適合過程 A を考える.任意の有界停止時刻 T に対して

$$E[X_T] \le E[A_T]$$

が成り立つとき,X は A によって支配 (dominate) されるという.

補題 6.2.6.
X は A によって支配され,さらに A は連続であるとする.このとき,$x, y > 0$ に対して

$$P[X_\infty^* > x, A_\infty \le y] \le \frac{1}{x} E[A_\infty \wedge y] \tag{6.2.8}$$

が成立する.

証明. $P[A_0 \le y] > 0$ なる場合に (6.2.8) を示せば十分である.実際,$P[A_0 \le y] > 0$ なら A の増加性より

$$P[A_\infty \le y] \le P[A_0 \le y] = 0$$

となり,(6.2.8) の右辺は 0 なので不等式は明らか.

Step1：$P[A_0 \le y] = 1$ なる場合． 停止時刻 S, T を

$$S(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid X_t(\omega) > x\}$$
$$T(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid A_t(\omega) > y\}$$

と定めれば，フィルトレーションの右連続性よりこれは停止時刻である*2．A の連続性より

$$\{A_n \le y\} = \{T \wedge n = n\}$$

となることに注意しておく．これより

$$\begin{aligned}
P[X_n^* > x, A_n \le y] &= P[X_n^* > x, T \wedge n = n] \\
&\le P[X_S \ge x, S < n, T \wedge n = n] \\
&\le P[X_{S \wedge T \wedge n}] \\
&\le \frac{1}{x} E[X_{S \wedge R \wedge n}] \quad (\because \text{Chebyshev inequality}) \\
&\le \frac{1}{x} E[A_{S \wedge R \wedge n}] \quad (\because X \text{ is dominated by A}) \\
&\le \frac{1}{x} E[A_\infty \wedge y]
\end{aligned}$$

が成り立つ*3．Fatou の補題を用いれば

$$E\left[\liminf_{n\to\infty} 1_{\{X_n^* > x\} \cap \{A_n \le y\}}\right] \le \liminf_{n\to\infty} E[1_{\{X_n^* > x\} \cap \{A_n \le y\}}] \le \frac{1}{x} E[A_\infty \wedge y]$$

であるが，いま

$$\begin{aligned}
E\left[\liminf_{n\to\infty} 1_{\{X_n^* > x\} \cap \{A_n \le y\}}\right] &= E\left[1_{\liminf\{X_n^* > x\} \cap \{A_n \le y\}}\right] \\
&= P\left(\bigcup_{n \ge 1}\left[\bigcap_{k \ge n} \{X_k^* > x\} \cap \{A_k \le y\}\right]\right) \\
&= P\left(\bigcup_{n \ge 1} [\{X_n^* > x\} \cap \{A_\infty \le y\}]\right) \\
&= P\left[X_\infty^* > x, A_\infty \le y\right]
\end{aligned}$$

となるから (6.2.8) が成立．

Step2：$P[A_0 \le y] \in]0,1[$ なる場合． $P'(\cdot) = P\left(\cdot \mid \{A_0 \le y\}\right)$ とおけば*4 P' は $(\Omega, \mathscr{F})$ 上の確率測度を定め，しかも $A_0 \le y$, P'-a.s. が成り立つ．Step1 の結果より

$$P'[X_\infty^* > x, A_\infty \le y] \le \frac{1}{x} \int_\Omega A_\infty \wedge y \, dP'$$

となるから，両辺に $P(Y_0 \le y)$ を掛ければ (6.2.8) を得る． □

---

*2 命題 2.4.2 および命題 2.4.13 を見よ．

*3 最後の不等号は仮定：$A_0 \le y$ a.s. から $A_{S \wedge T \wedge n} \le A_\infty \wedge y$ a.s. が成り立つことを用いる．

*4 $P(B) \neq 0$ のとき $P(A|B) := P(A \cap B)/P(B)$ と定める．

補題 6.2.7.

補題 6.2.6 と同様の仮定の下，任意の $k \in]0,1[$ に対して

$$E\left[(X_\infty^*)^k\right] \le \frac{2-k}{1-k} E\left[A_\infty^k\right]$$

が成立．

証明． $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ を連続な増加関数で $F(0) = 0$ なるものとすれば，

$$\begin{aligned}
E[F(X_\infty^*)] &= E[F(X_\infty^*) - F(0)] \\
&= E\left[\int_0^\infty 1_{[0,X_\infty^*]}(x) dF(x)\right] \\
&= E\left[\int_0^\infty 1_{[0,X_\infty^*[}(x) dF(x)\right] \quad (\because F \text{ の連続性}) \\
&= \int_0^\infty E\left[1_{]x,\infty]}(X_\infty^*)\right] dF(x) \quad (\because \text{Fubini の定理}) \\
&= \int_0^\infty P\left[X_\infty^* > x\right] dF(x) \\
&= \int_0^\infty \left(P\left[X_\infty^* > x, A_\infty \le x\right] + P\left[X_\infty^* > x, A_\infty > x\right]\right) dF(x) \\
&\le \int_0^\infty \left(P\left[X_\infty^* > x, A_\infty \le x\right] + P\left[A_\infty > x\right]\right) dF(x) \\
&\le \int_0^\infty \left(\frac{1}{x} E[A_\infty \wedge x] + P\left[A_\infty > x\right]\right) dF(x) \quad (\because \text{補題 6.2.6}) \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{1}{x} E[A_\infty \wedge x, A_\infty > x] + \frac{1}{x} E[A_\infty \wedge x, A_\infty \le x] + P\left[A_\infty > x\right]\right) dF(x) \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{1}{x} E[x, A_\infty > x] + \frac{1}{x} E[A_\infty, A_\infty \le x] + P\left[A_\infty > x\right]\right) dF(x) \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{1}{x} E[A_\infty 1_{\{A_\infty \le x\}}] + 2P\left[A_\infty > x\right]\right) dF(x) \\
&= E\left[A_\infty \int_0^\infty 1_{\{A_\infty \le x\}} \frac{1}{x} dF(x)\right] + 2\int_0^\infty P[A_\infty > x] dF(x) \quad (\because \text{Fubini}) \\
&= E\left[A_\infty \int_{A_\infty}^\infty \frac{1}{x} dF(x)\right] + 2E[F(A_\infty)]
\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\widetilde{F}(x) = 2F(x) + x\int_x^\infty \frac{dF(t)}{t}$$

とおけば

$$E[F(X_\infty^*)] \le E\left[\widetilde{F}(A_\infty)\right]$$

である．いま $F(x) = x^k$ の場合を考えれば

$$\widetilde{F}(x) = 2x^k + x\int_x^\infty \frac{1}{t} k t^{k-1} dt = 2x^k + \frac{k}{k-1} x \lim_{R\to\infty} (R^{k-1} - x^{k-1}) = \frac{2-k}{1-k} x^k$$

となるから，

$$E[F(X_\infty^*)] \le E\left[\widetilde{F}(A_\infty)\right] = \frac{2-k}{1-k} E\left[A_\infty^k\right]$$

を得る． $\square$

6.2.4　Burkholder-Davis-Gundy の不等式の証明—一般の場合

証明 (定理 6.2.1 の証明). $X=(M^*)^2$ および $A=C_2\langle M,M\rangle$ とおけば，(6.2.3) より任意の有界停止時刻 T に対して

$$E[X_T]=E[\{(M^T_\infty)^*\}^2]\le C_2E[\langle M^T,M^T\rangle_\infty]=C_2E[\langle M,M\rangle_T]$$

より定義 6.2.5 の意味での支配関係を満たす．これに補題 (6.2.7) を適用すれば，$k\in]0,1[$ に対して

$$E\left[(M^*_\infty)^{2k}\right]=E\left[(X^*_\infty)^k\right]\le\frac{2-k}{1-k}E[A^k_\infty]=\frac{2-k}{1-k}E[C_2\langle M,M\rangle^k_\infty].$$

$p\in]0,2[$ のときは

$$C_p=\frac{2-p/2}{1-p/2}C_2$$

とおくことで BDG-不等式 (6.2.1) の 2 つ目の不等号を得る．$p\ge 2$ のときは既に命題 6.2.3 において示されている．

　また，$X=\langle M,M\rangle^2$ および $A=c_4^{-1}(M^*)^4$ とおけば，(6.2.4) より任意の有界停止時刻 T に対して

$$c_4E[X_T]=c_4E[\langle M^T,M^T\rangle^2_\infty]\le E[\{(M^T_\infty)^*\}^4]=E[A_T]$$

となり，定義 6.2.5 の意味での支配関係を満たす．したがって補題 (6.2.7) によって任意の $k\in]0,1[$ に対して

$$c_4E\left[\langle M,M\rangle^{2k}_\infty\right]=c_4E\left[(X^*_\infty)^k\right]\le\frac{2-k}{1-k}E[A^k_\infty]=\frac{2-k}{1-k}E[(M^*)^{4k}]$$

が成立．$p\in]0,4[$ に対しては

$$c_p=c_4\frac{2-p/4}{1-p/4}$$

とおけば (6.2.1) が示される．$p\ge 4$ に対しては既に分かっていたから，これで定理 6.2.1 の証明が完了した． $\square$

6.3　指数セミマルチンゲール

　よく知られているように，指数関数 e^x は微分方程式

$$\begin{cases}\dfrac{df}{dx}=f\\ f(0)=1\end{cases}$$

の一意解として特徴づけることが出来るのであった．これを積分方程式に書き直すと

$$f(x)=1+\int_0^x f(y)dy$$

となる．次に滑らかなパス $x\colon\mathbb{R}_{\ge0}\to\mathbb{R}$ で $x(0)=0$ を満たすようなものを考えよう．このとき先ほどと同様にして，パス $t\mapsto e^{x(t)}$ は積分方程式

$$y(t)=1+\int_0^t y(s)dx(s)$$

の一意解となっている．これはパス x の指数関数と呼ぶべきものである．では，連続セミマルチンゲールに関する確率積分方程式

$$Y_t = 1 + \int_0^t Y_s dX_s \tag{6.3.1}$$

の解はどのような確率過程となるだろうか？もしこの積分方程式が一意解をもつなら，それを X の指数関数と呼んでも良さそうである．本節ではこのことについて調べよう．

定義 6.3.1.
実数値の連続セミマルチンゲール X に対して，

$$\mathscr{E}(X)_t = \exp\left(X_t - X_0 - \frac{1}{2}\langle X, X\rangle_t\right)$$

と定義する．この確率過程を指数セミマルチンゲール (exponential semimartingale) や確率指数 (stochastic exponential)，あるいは Doleans-Dade 指数 (Doleans-Dade exponential) などと呼ぶ．

次の定理より，$\mathscr{E}(X)$ は確率積分方程式 (6.3.1) を満たすようなただ一つの発展的可測過程であることがわかる．

定理 6.3.2.
X を連続セミマルチンゲールとする．このとき $Y \in L(X)$ で

$$Y = 1 + Y \bullet X \tag{6.3.2}$$

を満たすものがただ一つ存在し，それは $\mathscr{E}(X)$ に等しい．特に $\mathscr{E}(X)$ は連続セミマルチンゲールであり，X が連続局所マルチンゲールならば $\mathscr{E}(X)$ も連続局所マルチンゲールとなる．

証明. $Z = X - X_0 - \frac{1}{2}\langle X, X\rangle$ と定めれば Z はまた連続セミマルチンゲールであり，$\langle Z, Z\rangle = \langle X, X\rangle$ が成り立つ．指数関数 $x \mapsto e^x$ と Z に対して伊藤の公式を適用すれば，

$$\begin{aligned} e^Z &= e^{Z_0} + e^Z \bullet Z + \frac{1}{2} e^Z \bullet \langle Z, Z\rangle \\ &= e^{Z_0} + e^Z \bullet X - \frac{1}{2} e^Z \bullet \langle X, X\rangle + \frac{1}{2} e^Z \bullet \langle X, X\rangle \\ &= 1 + e^Z \bullet X \end{aligned}$$

が成り立つ．$e^Z = \mathscr{E}(X)$ であるから，これより $\mathscr{E}(X)$ は (6.3.2) を満たすことがわかる．

次に Y は (6.3.2) を満たす $L(X)$ の元としよう．(6.3.2) 右辺の過程は連続セミマルチンゲールであるから，Y もまた連続セミマルチンゲールである．このとき $Y = \mathscr{E}(X)$ が成り立つことを示したいのだが，そのためには $Y\mathscr{E}(X)^{-1}$ を計算する必要がある．伊藤の公式を $x \mapsto x^{-1}$ と連続セミマルチンゲール $\mathscr{E}(X)$ に対して適用すれば（注意 6.1.2），

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathscr{E}(X)} &= 1 - \left(\frac{1}{\mathscr{E}(X)}\right)^2 \bullet \mathscr{E}(X) + \left(\frac{1}{\mathscr{E}(X)}\right)^3 \bullet \langle \mathscr{E}(X), \mathscr{E}(X)\rangle \\ &= 1 - \frac{1}{\mathscr{E}(X)} \bullet X + \frac{1}{\mathscr{E}(X)} \bullet \langle X, X\rangle \end{aligned}$$

となる．したがって Y と $1/\mathscr{E}(X)$ に部分積分公式を用いれば

$$
\begin{aligned}
\frac{Y}{\mathscr{E}(X)} &= 1 + Y \bullet \left(\frac{1}{\mathscr{E}(X)}\right) + \frac{1}{\mathscr{E}(X)} \bullet Y + \left\langle Y, \frac{1}{\mathscr{E}(X)} \right\rangle \\
&= 1 - \frac{Y}{\mathscr{E}(X)} \bullet X + \frac{Y}{\mathscr{E}(X)} \bullet \langle X, X\rangle \\
&\quad + \frac{Y}{\mathscr{E}(X)} \bullet X - \frac{Y}{\mathscr{E}(X)} \bullet \langle X, X\rangle \\
&= 1
\end{aligned}
$$

を得る．すなわち $Y = \mathscr{E}(X)$ が成り立つ． □

命題 6.3.3.
$f \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ は条件

$$
\frac{\partial}{\partial y} f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f = 0
$$

を満たすとする．このとき，連続局所マルチンゲール $M = (M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ に対して $f(M, \langle M, M\rangle)$ はまた連続な局所マルチンゲールとなる．特に，任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$
\mathscr{E}^\lambda(M)_t = \exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2}\langle M, M\rangle_t\right)
$$

によって定まる確率過程 $\mathscr{E}^\lambda(M)$ は連続な局所マルチンゲールである．

証明． f が実数値のときは (**??**) により

$$
\begin{aligned}
f(M_t, \langle M, M\rangle_t) &= f(M_0, 0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial y} f(M_s, \langle M, M\rangle_s) d\langle M, M\rangle_s \\
&\quad + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(X_s, \langle M, M\rangle_s) dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(M_s, \langle M, M\rangle_s) d\langle M, M\rangle_s \\
&= f(M_0, 0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(X_s, \langle M, M\rangle_s) dM_s \\
&\quad + \int_0^t \frac{\partial}{\partial y}\left\{ f(M_s, \langle M, M\rangle_s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(M_s, \langle M, M\rangle_s)\right\} d\langle M, M\rangle_s \\
&= f(M_0, 0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(X_s, \langle M, M\rangle_s) dM_s
\end{aligned}
$$

□

となるが，これは明らかに連続な局所マルチンゲールである．f が複素数値の場合は $f = u + iv$ のように分解すればよい．特に $f(x, y) = e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2} y}$ と定めれば

$$
\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = -\frac{\lambda^2}{2} f(x, y) + \frac{1}{2}\{\lambda^2 f(x, y)\} = 0
$$

となるので，前半の結果より $\mathscr{E}^\lambda(M)$ は局所マルチンゲールである．

定理 6.3.4 (P. Lévy).
$X = (X^1, \ldots, X^d)$ は d 次元 $(\mathscr{F}_t)$ - 適合過程で $X_0 = 0$ を満たすものとする．このとき，以下の条件は同値である．

(i) X は d 次元 $(\mathscr{F}_t)$ - ブラウン運動である．
(ii) X は連続局所マルチンゲールで，$\langle X^i, X^j \rangle_t = \delta_{ij} t$ を満たす．（ただし δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．）
(iii) X は連続局所マルチンゲールで，任意の $f = (f_1, \ldots, f_d) \in [L^2(\mathbb{R}_+)]^d$ に対して

$$\mathscr{E}_t^{if} = \exp\left(i \sum_{k=1}^{d} \int_0^t f_k(s) dX_s^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{d} \int_0^t f_k^2(s) ds \right)$$

は複素マルチンゲールとなる．

証明. (i)$\Longrightarrow$(ii) は明らか．

(ii)$\Longrightarrow$(iii).

$$M_t = \sum_{k=1}^{d} \int_0^t f_k(s) dX_s^k$$

とおけば，ブラケットおよび確率積分の性質により

$$\begin{aligned}
\langle M, M \rangle_t &= \left\langle \sum_{k=1}^{d} f_k \bullet X^k, \sum_{k=1}^{d} f_k \bullet X^k \right\rangle_t \\
&= \sum_{k=1}^{d} \left\langle f_k \bullet X^k, f_k \bullet X^k \right\rangle_t + \sum_{k=1}^{d} \sum_{l=1}^{d} \left\langle f_k \bullet X^k, f_l \bullet X^l \right\rangle_t \\
&= \sum_{k=1}^{d} f_k^2 \bullet \left\langle X^k, X^k \right\rangle_t + \sum_{k=1}^{d} \sum_{l=1}^{d} f_k f_l \bullet \left\langle X^k, X^l \right\rangle_t \\
&= \sum_{k=1}^{d} \int_0^t f_k^2(s) ds
\end{aligned}$$

となる．6.3.3 において $\lambda = i$ とおけば，

$$\exp\left(iM_t + \frac{1}{2} \langle M, M \rangle_t \right) = \exp\left(i \sum_{k=1}^{d} \int_0^t f_k(s) dX_s^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{d} \int_0^t f_k^2(s) ds \right) = \mathscr{E}_t^{if}$$

より $\mathscr{E}^{if}$ は複素局所マルチンゲールである．特に $f_k \in L^2(\mathbb{R}_+)$ との仮定より，

$$\left| \mathscr{E}_t^{if} \right| = \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{d} \int_0^t f_k^2(s) ds \right) \leq \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{d} \int_0^\infty f_k^2(s) ds \right) < \infty.$$

よって $\mathscr{E}^{if}$ は有界なので，複素マルチンゲールである．

(iii)$\Longrightarrow$(i). $0 < T$ を任意に選んで，任意の $\xi \in \mathbb{R}^d$ に対して $f = \xi 1_{[0,T]}$ とおく．このとき $f_k = \xi_k 1_{[0,T]} \in L^2(\mathbb{R}_+)$ であるから，(iii) により

$$\mathscr{E}_t^{if} = \exp\left(i(\xi, X_{t \wedge T}) + \frac{1}{2} |\xi|^2 (t \wedge T) \right)$$

は複素マルチンゲールである．（ただし，(x,y) は $\mathbb{R}^d$ の内積である．）マルチンゲール性と条件付き期待値の性質より任意の $0 \le s < t$ と $A \in \mathscr{F}_s$ に対して

$$\begin{aligned} E\left[1_A e^{i(\xi, X_t - X_s)+|\xi|^2(t-s)}\right] & E\left[\left(1_A e^{-i(\xi,X_s)-|\xi|^2 s}\right) e^{i(\xi,X_t)+|\xi|^2 t}\right] \\ &= E\left[\left(1_A e^{-i(\xi,X_s)-|\xi|^2 s}\right) E[e^{i(\xi,X_t)+|\xi|^2 t} \mid \mathscr{F}_s]\right] \\ &= E\left[\left(1_A e^{-i(\xi,X_s)-|\xi|^2 s}\right) e^{i(\xi,X_s)+|\xi|^2 s}\right] \\ &= P(A) \end{aligned}$$

□

がなりたつ[*5]．これを整理すれば

$$E\left[1_A e^{i(\xi,X_t-X_s)}\right] = P(A)e^{|\xi|^2(t-s)} = E[1_A e^{|\xi|^2(t-s)}].$$

すなわち

$$E\left[e^{i(\xi,X_t-X_s)} \mid \mathscr{F}_s\right] = e^{|\xi|^2(t-s)}$$

が分かる．これは $X_t - X_s$ が $\mathscr{F}_s$ と独立で $X_t - X_s \sim N(0, t-s)$ を示している．T, t, s は任意に選んだものだったから，X はブラウン運動であることが示される．

6.4 伊藤の公式の拡張と局所時間

はじめに，伊藤の公式の凸関数への拡張を行う．

定理 6.4.1.
X を連続セミマルチンゲールとし，f を凸関数とする．このとき，以下の等式を満たすような連続増加過程 A^f が存在する：

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'_-(X_s)dX_s + \frac{1}{2}A^f_t.$$

ただし，f'_- は f の左微分を表す．

証明. はじめに，f は凸関数なので任意の点で右微分および左微分を持ち，かつ（Lebsugue 測度に関して）殆どいたるところ微分可能であることに注意しておく．f が C^2 級ならば,

$$A^f_t = \int_0^t f''(X_s)d\langle X, X\rangle_s$$

とおけばよい．実際，f は凸なので二階微分は常に正である．

f が一般の凸関数の場合の証明は，mollifier（のようなもの？）を作用させて滑らかな場合に帰着させることで示す．ρ は以下の条件を満たす関数とする：

- $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ かつ $\rho \ge 0$.
- $\displaystyle\int_{]-\infty,0]} \rho(x)dx = 1.$
- $\operatorname{supp}\rho \subset]-\infty, 0].$

[*5] $1_A e^{-i(\xi,X_s)-|\xi|^2 s}$ は非負かつ有界な $\mathscr{F}_s$ - 可測関数であることに注意

この ρ に対して，$\rho_n(x) = n\rho(nx)$ と定める．ここで

$$f_n(x) = \int_{]-\infty,0]} f(x+y)\rho_n(y)dy$$

とおけば $f_n \in C^\infty$ であって $f_n \to f$ (pointwise) が成立．さらに，$f_n' \uparrow f_-'$ である．

$\because$ f が well-defined であることは，f の局所有界性より分かる[*6]．f が凸より連続なので，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta = \delta(\varepsilon)$ が存在して

$$|y| < \delta \Longrightarrow |f(x+y) - f(x)| < \varepsilon$$

が成立．いま，十分大きな n をとれば $\operatorname{supp} \rho \subset]-\delta, 0]$ と出来るから，

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{]-\infty,0]} f(x+y)\rho_n(y)dy - f(x) \right| \\
&= \left| \int_{]-\infty,0]} f(x+y)\rho_n(y)dy - \int_{-\infty,0]} f(x)\rho_n(y)dy \right| \\
&\leq \int_{]-\infty,0]} |f(x+y) - f(x)|\rho_n(y)dy \\
&= \int_{]-\delta,0]} |f(x+y) - f(x)|\rho_n(y)dy \\
&\leq \varepsilon \int_{]-\delta,0]} \rho_n(y)dy \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

より各点収束が分かる．f_n が C^∞ であることは，与えられた条件より微分と積分の交換が正当化され

$$\frac{d}{dx}\int_{]-\infty,0]} f(x+y)\rho_n(y)dy = \frac{d}{dx}\int_{]-\infty,0]} f(y)\rho_n(z-x)dz = \int_{]-\infty,0]} f(y)\frac{\partial \rho_n}{\partial x}(z-x)dz$$

となることより分かる．また f は凸より f_-' は左連続な増加関数であるから，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f_n(x) &= \frac{d}{dx}\int_{]-\infty,0]} f\left(x + \frac{z}{n}\right)\rho(z)dz \\
&= \int_{]-\infty,0]} f_-'\left(x + \frac{z}{n}\right)\rho(z)dz \\
&\leq \int_{]-\infty,0]} f_-'\left(x + \frac{z}{n+1}\right)\rho(z)dz = Df_{n+1}(x) \\
&\leq \int_{]-\infty,0]} f_-'(x)\,\rho(z)dz = f_-'(x)
\end{aligned}$$

となって $f_1' \leq f_2' \leq \cdots \leq f_-'$ であり，特に単調収束定理より[*7]

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \int_{]-\infty,0]} \lim_{n\to\infty}\left\{f_-'\left(x + \frac{z}{n}\right)\right\}\rho(z)dz = \int_{]-\infty,0]} f_-'(x)\rho(z)dz = f_-'(x)$$

が任意の x で成立． $\square$

ここで，各 n については伊藤の公式より

$$f_n(X_t) = f_n(X_0) + \int_{]0,t]} f_n'(X_s)dX_s + A_t^{f_n}$$

[*6] 凸関数は連続．

[*7] この列は必ずしも非負ではないが，$f_-'(x+z)$ の可積分性より単調収束定理の適用が可能．

が成立．$n \to \infty$ とすれば，確率積分に関する優収束定理より

$$f_n(X_t) - f_n(X_0) - \int_0^t f_n'(X_s)dX_s \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ucp.}} f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t f_-'(X_s)dX_s$$

となる．これより A^{f_n} の極限たる増加過程 A^f が存在する．特に A のバージョンとして連続なものをとればよい．

以下では，$\mathrm{sgn}(x) = 1_{]a,\infty[} - 1_{]-\infty,a]}$ とおくことにする．

定理 6.4.2 (田中の公式).
$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$ を通常の条件を満たすフィルターつき確率空間，X をセミマルチンゲールとする．このとき，$a \in \mathbb{R}$ に対して $(X-a)^+$，$(X-a)^-$，$|X-a|$ はどれもセミマルチンゲールである．各 a に対して連続増加過程 L^a が存在し，それぞれのセミマルチンゲール表現は以下のようになる：

$$\begin{aligned}
|X_t - a| &= |X_0 - a| + \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s - a)dX_s + L_t^a \\
(X_t - a)^+ &= (X_0 - a)^+ + \int_0^t 1_{]a,\infty[}(X_s)dX_s + \frac{1}{2}L_t^a \\
(X_t - a)^- &= (X_0 - a)^- + \int_0^t 1_{]-\infty,a]}(X_s)dX_s + \frac{1}{2}L_t^a
\end{aligned}$$

証明. 凸関数 $x \mapsto x^+$ および $x \mapsto x^-$ にそれぞれ伊藤の公式を適用すれば，

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t 1_{]a,\infty[}(X_s)dX_s + \frac{1}{2}A_t^+ \tag{6.4.1}$$

$$(X_t - a)^- = (X_0 - a)^- - \int_0^t 1_{]-\infty,a]}(X_s)dX_s + \frac{1}{2}A_t^- \tag{6.4.2}$$

なる表現を得る．(6.4.1)−(6.4.2) を計算すれば，

$$\begin{aligned}
X_t - a &= X_0 - a + \int_0^t dX_s + \frac{1}{2}(A_t^+ - A_t^-) \\
&= X_0 - a + X_t - X_0 + \frac{1}{2}(A_t^+ - A_t^-)
\end{aligned}$$ □

となるから，$A^+ = A^-$ が分かる．よって $A^+ = L_t^a$ とおけば $(X-a)^+$ と $(X-a)^-$ の表現を得る．さらに (6.4.1)+(6.4.2) により

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s - a)dX_s + L_t^a$$

も分かり，定理の主張が示された．

定義 6.4.3.
命題 6.4.2 で存在の示された確率過程 $L^a = L^a(X)$ を，連続セミマルチンゲール X の a における局所時間 (local time) という．

補題 6.4.4.
Stieltjes 測度 $dL^a(\omega)$ は P-a.s. で $\operatorname{supp} dL^a(\omega) \subset \{X_t = a\}$ を満たす.

証明. セミマルチンゲール $|X-a|$ と C^∞ 級関数 x^2 に伊藤の公式を用いれば,

$$(X_t - a)^2 = (X_0 - a)^2 + \int_0^t 2|X_s - a| d|X-a|_s + \langle |X-a|, |X-a| \rangle_t \tag{6.4.3}$$

が成り立つ. 田中の公式より $|X-a|$ のセミマルチンゲール表現は

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s + L_t^a$$

となるから, (6.4.3) はさらに

$$\begin{aligned}
&(X_t-a)^2 \\
&= |X_0 - a|^2 + \int_0^t 2|X_s - a| \left(\operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s + dL_s^a\right) + \{\operatorname{sgn}(X_s - a)\}^2 \langle X, X \rangle_t \\
&= |X_0 - a|^2 + 2\int_0^t (X_s - a) dX_s + 2\int_0^t |X_s - a| dL_s^a + \langle X, X \rangle_t
\end{aligned}$$

□

と書き換えられる. 一方, セミマルチンゲール $X-a$ に伊藤の公式を適用すれば

$$(X_t - a)^2 = (X_0 - a)^2 + 2\int_0^t (|X_s - a) dX_s + \langle X, X \rangle_t$$

が得られるから, 先ほどの式と比較すれば

$$\int_0^t |X_s - a| dL_s^a = 0 \quad P\text{-a.s.}$$

を得る.

局所時間 L^a は a を固定するごとに定義されていたから. (ω, t) に加えて a の関数とも見たとき, 一般に可測性は保証されない. しかし, 4 章でのパラメータつき確率積分に関する考察から可測なバージョンをとれることが分かる.

補題 6.4.5.
局所時間 L^a に対して, 以下の条件を満たす関数 $\widetilde{L} : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ が存在する:

(i) $\widetilde{L}$ は $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-可測.
(ii) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して, 確率過程 $(\omega, t) \mapsto \widetilde{L}(a, \omega, t)$ と L^a は区別不能.

証明. $H(a, \omega, t) = 1_{\{X_t > a\}}(a, \omega, t)$ と定義し, 命題 5.7.2 によって存在の保証される $(H(a) \bullet X)_{a \in \mathbb{R}}$ の可測なバージョンを $H \bullet X$ と表すことにする. $\widetilde{L}$ を

$$\widetilde{L}(a, \omega, t) = 2(X_t - a)^+ - 2(X_0 - a)^+ - 2(H \bullet X)(a, \omega, t)$$

と定義すれば, 定理 6.4.2 より $\widetilde{L}(a, \cdot, \cdot)$ は L^a と区別不能である.

これ以降は，L^a は補題 6.4.5 の意味で可測なものとして考えることにする．L^a は a についての可測性をもつので，a についての Lebesgue 積分を考えることができ，以下の伊藤 - 田中の公式の表現を得る．

定理 6.4.6 (伊藤 - 田中の公式).
X を連続セミマルチンゲールとし，関数 f は二つの凸関数の差で表されるものする．このとき，$f(X)$ はまたセミマルチンゲールで，以下の表現を持つ：

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_-(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L_t^a f''(da)$$

証明. f が凸関数の時に示せば十分である．適当な局所化列をとることにより，X の値域はあるコンパクト集合に含まれるとしてよいから，f'' はコンパクト台を持つと仮定して示す[*8]．さらに，命題 A.12.6 より

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |x-a| f''(da)$$

として示せばよいことが分かる．田中の公式により，

$$\begin{aligned}
f(X_t) &= \alpha X_t + \beta + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |X_s - a| f''(da) \\
&= \alpha X_t + \beta + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(|X_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a)dX_s + L_t^a\right) f''(da) \\
&= f(X_0) + \alpha(X_t - X_0) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a)dX_s\right) f''(da) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L_t^a f''(da)
\end{aligned}$$

が成立する．確率積分に関する Fubini の定理より

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a)dX_s\right) f''(da) \\
&= \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(X_s - a) f''(da)\right) dX_s
\end{aligned}$$

が成り立つから，さらに命題 A.12.6 を用いることにより

$$\begin{aligned}
&\alpha(X_t - X_0) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a)dX_s\right) f''(da) \\
&= \int_0^t \left(\alpha + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(X_s - a) f''(da)\right) dX_s \\
&= \int_0^t f'_-(X_s)dX_s
\end{aligned}$$

□

これより

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_-(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L_t^a f''(da)$$

が分かる．

[*8] Borel 測度 μ の台 (support) とは

$$\operatorname{supp}\mu = \bigcap\{F; F \text{ は閉集合で，} \mu(F^c) = 0\}$$

で定義される閉集合である．

系 6.4.7 (滞在時間公式 (occupation times formula)).
P-零集合 N で，$\Omega \setminus N$ 上次の条件が成り立つようなものが存在する：任意の有界（または非負）Borel 関数 Φ と任意の t に対して

$$\int_0^t \Phi(X_s)d\langle X, X\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} \Phi(a)L_t^a da$$

証明. まずは，Φ を有界連続関数として示す．Φ^+ と Φ^- を 2 階微分にもつ凸関数をそれぞれ f_1, f_2 とおけば，$f = f_1 - f_2$ に対して伊藤の公式と伊藤 - 田中の公式より

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X, X\rangle_s$$
$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L_t^a f''(a)da \qquad \square$$

が成り立つ．よって $\int_0^t f''(X_s)d\langle X, X\rangle_s$ と $\int L_t^a f''(da)$ は区別不能である．すなわち，ある P-零集合 Γ_Φ が存在して，$\Omega \setminus \Gamma_\Phi$ 上で

$$\int_0^t \Phi(X_s)d\langle X, X\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} L_t^a f''(a)da = \int_{\mathbb{R}} L_t^a \Phi(a)da, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

が成立する．

$C_c(\mathbb{R})$ の可算稠密部分集合 D を考える．このとき，系の主張において，$N = \bigcup_{\Psi \in D} \Gamma_\Psi$ とすればよいことを示そう．$\Phi \in C_c(\mathbb{R})$ とすれば，D の列 (Φ_n) で Φ を（一様収束位相で）近似するものが存在する．$\bigcup_{\Psi \in D} \Gamma_\Psi$ の補集合上では，任意の n と任意の t に対して

$$\int_0^t \Phi_n(X_s)d\langle X, X\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} L_t^a \Phi_n(a)da$$

が成立する．$n \to \infty$ とすれば[*9]，

$$\int_0^t \Phi(X_s)d\langle X, X\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} L_t^a(a)\Phi(a)da$$

である．Φ が任意の有界 Borel 関数の場合は，単調族定理により示される．非負の場合は，$(\Phi \wedge n)_{n \in \mathbb{N}}$ の単調極限を考えればよい．

注意 6.4.8. 系 6.4.6 において，特に $X = B$（ブラウン運動），$\Phi = 1_A$ の場合を考えれば

$$\int_0^t 1_A(B_s)ds = \int_A L_t^a da$$

となる．左辺の量はブラウン運動 (B_s) が時刻 t までに集合 A に滞在する時間の合計と見ることが出来る．この式より，左辺を A に対して時間を対応させる「測度」としてみれば，局所時間はその「密度関数」を表している，という解釈が出来るであろう．

[*9] Φ_n は Φ に一様収束することに注意せよ．

定理 6.4.9.
X を連続セミマルチンゲールとする．このとき，確率過程 $(L_t^a(X))_{(a,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}$ の修正 $\widetilde{L}$ で，確率 1 で $(a,t)\mapsto \widetilde{L}(a,t)$ は t について連続，a について càdlàg となるようなものが存在する．さらに $X=M+A$ をセミマルチンゲールの分解とすれば，

$$\widetilde{L}(a,t)-\widetilde{L}(a-,t)=2\int_0^t 1_{\{X_s=a\}}dA_s=2\int_0^t 1_{\{X_s=a\}}dX_s$$

が成立する[a]．特に X が連続局所マルチンゲールなら，(L_t^a) の修正として (a,t) について連続であるようなものが取れる．

[a] 「〜な修正がある」というのが定理の主張なので，素朴に考えればこの等式も修正の意味で取るべきだろう．しかし，実際は両辺によい regularity があるので（2-パラメータ (a,t) に関して）区別不能の意味で用いても差し支えない．

証明. 田中の公式より局所時間は

$$L_t^a=2\left[(X_t-a)^+-(X_0-a)^+-\int_0^t 1_{]a,\infty[}(X_s)dM_s-\int_0^t 1_{]a,\infty[}(X_s)dA_s\right]$$

と表現されるのであったから，右辺の確率積分の項と Stieltjes 積分の項をそれぞれ考察すればよい．

まずは局所マルチンゲール部分において，連続な修正の存在を証明する．証明には定理 C.1.1（Kolmogorov の連続変形定理）を用いる．

$$\widehat{M}(a,t)=\int_0^t 1_{\{X_s>a\}}dM_s$$

と定義する．t と有界区間 I を任意に固定して，確率過程 $I\ni a\mapsto \widehat{M}(a,\cdot)\in C([0,t];\mathbb{R})$ の連続修正を取れることを示せば十分である[*10]．$a<b$ および $k>1$ とすれば，

$$\begin{aligned}
&E\left[\left\|\widehat{M}(a,\cdot)-\widehat{M}(b,\cdot)\right\|_{C[0,t]}^{2k}\right]\\
&=E\left[\sup_{s\in[0,t]}\left|\widehat{M}(a,s)-\widehat{M}(b,s)\right|^{2k}\right]\\
&=E\left[\sup_{s\in[0,t]}\left|\int_0^s 1_{]a,b]}(X_u)dM_u\right|^{2k}\right]\\
&\le C_{2k}E\left[\left(\int_0^t 1_{]a,b]}(X_s)d\langle M,M\rangle_s\right)^k\right] \qquad (\because \text{BDG-inequality})\\
&=C_{2k}E\left[\left(\int_{\mathbb{R}} 1_{]a,b]}(x)L_t^x dx\right)^k\right] \qquad (\because \text{系 } 6.4.7)\\
&=C_{2k}(b-a)^kE\left[\left(\int_{]a,b]} L_t^x\frac{dx}{b-a}\right)^k\right]\\
&\le C_{2k}(b-a)^kE\left[\int_{]a,b]} (L_t^x)^k\frac{dx}{b-a}\right] \qquad \left(\because \text{Jensen for the probability measure } \frac{dx}{b-a}\right)
\end{aligned}$$

[*10] 一般に連続関数 $g:I\to C([0,t];\mathbb{R})$ が与えられたとき，関数 $I\times[0,t]\ni(a,s)\mapsto g(x)(t)\in\mathbb{R}$ は連続になることに注意されたい．

$$
\begin{aligned}
&= C_{2k}(b-a)^k \frac{1}{b-a}\int_{]a,b]} E\left[(L_t^x)^k\right] dx \quad (\because \text{Fubini}) \\
&\leq C_{2k}(b-a)^k \sup_{x\in I} E\left[(L_t^x)^k\right]
\end{aligned}
$$

が成立する．ここで

$$
|(X_t - x)^+ - (X_0 - x)^+| \leq |X_t - X_0|
$$

に注意すれば

$$
\begin{aligned}
(L_t^x)^k &= 2^k \left| (X_t - x)^+ - (X_0 - x)^+ - \int_0^t 1_{]x,\infty[}(X_s) dM_s - \int_0^t 1_{]x,\infty[}(X_s) dA_s \right|^k \\
&\leq 2^k \left(|X_t - X_0| + \int_0^t |dA|_s + \left| \int_0^t 1_{]x,\infty[}(X_s) dM_s \right| \right)^k \\
&\leq 2^k 3^{k-1} \left[|X_t - X_0|^k + \left(\int_0^t |dA|_s \right)^k + \left| \int_0^t 1_{]x,\infty[}(X_s) dM_s \right|^k \right]
\end{aligned}
$$

が成立するから[*11],

$$
\begin{aligned}
E\left[(L_t^x)^k\right] &\leq 2^k 3^{k-1} E\left[|X_t - X_0|^k + \left(\int_0^t |dA|_s \right)^k + \left| \int_0^t 1_{]x,\infty[}(X_s) dM_s \right|^k \right] \\
&\leq 2^k 3^{k-1} E\left[|X_t - X_0|^k + \left(\int_0^t |dA|_s \right)^k + C_k \left(\int_0^t 1_{]x,\infty[}(X_s) d\langle M, M\rangle_s \right)^{k/2} \right] \\
&\leq 2^k 3^{k-1} E\left[|X_t - X_0|^k + \left(\int_0^t |dA|_s \right)^k + C_k \langle M, M\rangle_t^{k/2} \right] \\
&\leq 2^k 3^{k-1}(1 + C_k) E\left[|X_t - X_0|^k + \left(\int_0^t |dA|_s \right)^k + \langle M, M\rangle_t^{k/2} \right] \qquad \square
\end{aligned}
$$

となる．ここで，最後の辺はもはや x によらない量であることに注目しよう．ここで,

$$
T_n := \inf\left\{ t \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; \sup_{s\in[0,t]} |X_t - X_0|^k + \left(\int_0^t |dA|_s \right)^k + \langle M, M\rangle_t^{k/2} \geq n \right\}
$$

とおけば,

$$
\widetilde{C}(t,k,n) := C_{2k} 2^k 3^{k-1}(1 + C_k) E\left[|X_t^{T_n} - X_0|^k + \left(\int_0^{t\wedge T_n} |dA|_s \right)^k + (\langle M, M\rangle_t^{T_n})^{k/2} \right] < \infty
$$

が成り立つ．ここまでの議論により

$$
E\left[\left\| \widehat{M}(a,\cdot) - \widehat{M}(b,\cdot) \right\|_{C[0,t]}^{2k} \right] \leq \widetilde{C}(t,k,n)|b-a|^k
$$

が成立するから[*12]，Kolmogorov の連続変形定理により $a \mapsto \widehat{M}^{T_n}(a,\cdot)$ は I 上連続修正を持つ．これより $M(a,\cdot)$ もまた連続修正を持つ．なお，これより X 自身が連続局所マルチンゲールの場合は，(a,t) について連続な修正をとれることが分かる．

[*11] 一種の凸不等式で，Jensen の不等式から導かれる．

[*12] この評価自体は，a, b の走る区間 I にすらよらない．（念のため．）

次に，有界変動部分を考察しよう．

$$\widehat{A}(a,t)=\int_0^t 1_{\{X_s>a\}}dA_s$$

とおいたとき，$(a,t)\mapsto\widehat{A}(a,t)$ が a について càdlàg，t について連続であることを示すのが目的である．Lebesgue の収束定理により，

$$\widehat{A}(a-,t)=\lim_{b\uparrow\uparrow a}\int_0^t 1_{\{X_s>b\}}dA_s=\int_0^t 1_{\{X_s\geq a\}}dA_s$$

が成立．よって左極限が存在する．同様にして

$$\widehat{A}(a+,t)=\lim_{b\downarrow\downarrow a}\int_0^t 1_{\{X_s>b\}}dA_s=\int_0^t 1_{\{X_s>a\}}dA_s=\widetilde{A}(a,t)$$

となり，右連続性が分かる．

以上のことから，$(L_t^a(X))_{(a,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}$ は a について càdlàg，t について連続な修正（$\widetilde{L}$ で表す）を持つことが分かった．田中の公式の表現と局所マルチンゲール項の連続性より

$$\widetilde{L}(a,t)-\widetilde{L}(a-,t)=2\left(\widehat{A}(a-,t)-\widehat{A}(a,t)\right)=2\int_0^t 1_{\{X_s=a\}}dA_s$$

が成立する．さらに滞在時間公式より

$$\int_0^t 1_{\{X_s=a\}}d\langle M,M\rangle_s=\int_0^t 1_{\{X_s=a\}}d\langle X,X\rangle_s=\int_{\mathbb{R}} 1_{\{a\}}L_t^a(X)da=0$$

となるから，

$$\int_0^t 1_{\{X_s=a\}}dM_s=0$$

である[*13]．これにより

$$\widetilde{L}(a,t)-\widetilde{L}(a-,t)=2\int_0^t 1_{\{X_s=a\}}dA_s=2\int_0^t 1_{\{X_s=a\}}dX_s$$

が示される．

これ以降，局所時間は常に定理 6.4.9 で存在の保証されたバージョンを考えることとする．

系 6.4.10.

X を連続セミマルチンゲールとすれば，確率 1 で

$$L_t^a(X)=\lim_{\varepsilon\downarrow\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t 1_{[a,a+\varepsilon[}(X_s)d\langle X,X\rangle_s,\quad \forall(a,t)$$

が成立つ．特に，連続局所マルチンゲール M に対しては確率 1 で

$$L_t^a(M)=\lim_{\varepsilon\downarrow\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t 1_{]a-\varepsilon,a+\varepsilon[}(M_s)d\langle M,M\rangle_s,\quad \forall(a,t)$$

*13 二次変分が 0 の連続局所マルチンゲールは定数なのであった．（命題 4.5.13）

が成立する．

証明． 滞在時間公式より，ある零集合 N が存在して，$\Omega \setminus N$ 上で任意の t, a, ε に対して

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t 1_{[a,a+\varepsilon[}(X_s)d\langle X, X\rangle_s &= \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} 1_{[a,a+\varepsilon[}(x)L_t^x dx \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\int_a^{a+\varepsilon} L_t^x dx\end{aligned} \qquad \square$$

が成立．$\varepsilon \to 0$ の極限を考えれば，

$$L_t^a = \lim_{\varepsilon \downarrow\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t 1_{[a,a+\varepsilon[}(X_s)d\langle X, X\rangle_s$$

が（Lebesgue 測度について）殆ど全ての a で成立．さらに，右連続性より任意の a でも成立することが分かる．連続局所マルチンゲールの場合も同様である．

6.5 Notes

伊藤の公式の証明は Karatzas and Shreve [68] を参考にしたが，これはもとは國田・渡辺 [72] によるものである．これはより直感的な証明であって，他には Revuz and Yor に見られる証明タイプの証明もある．（元ネタは Dellacherie and Meyer [25] だろうか？）そちらの方が洗練されていると言えるかもしれない．

第 7 章

セミマルチンゲール空間

7.1　マルチンゲール $\mathscr{H}^1$ 空間と BMO

7.2　マルチンゲール $\mathscr{H}^p$ 空間

7.3　セミマルチンゲール $\mathscr{H}^p$ 空間

7.4　セミマルチンゲール位相

7.5　ノート

この章の内容は，Girsanov の定理の節を除いて Revuz & Yor [94] に従って書いた．Girsanov の定理は Karatzas & Shreve [68] による．

第 8 章

マルチンゲール表現

8.1　時間変更の一般論

8.2　時間変更による表現

8.3　積分表現

8.4　Browian フィルトレーションに適合した表現定理

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，$B = (B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を Brown 運動とする．この節を通して，フィルトレーション $(\mathscr{F}_t)$ は Brown 運動によって生成されるフィルトレーションの augumentation を考える．

$\mathscr{T}$ を

$$\mathscr{T} = \{f \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+), m) \mid f \text{ は（8.4.1）のような表現をもつ.}\}$$

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{]t_{i-1},t_i]}(t) \quad (0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty) \tag{8.4.1}$$

と定義する[*1]．ここで，$L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$ の元を確率変数族とみて $L^2_{loc}(B)$ の元を対応させることにより埋め込み $L^2(\mathbb{R}_+) \hookrightarrow L^2_{loc}(B)$ が定まり，これにより $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$ の元と $L^2_{loc}(B)$ の元を同一視することにする．ここで

$$\mathscr{E}^f := \mathscr{E}(f \bullet B) = \exp\left(\int_0^t f(s)dB_s - \int_{]0,t]} f^2(s)ds\right)$$

と定義することにする．

補題 8.4.1.
$\mathscr{W} = \{\mathscr{E}^f_\infty ; f \in \mathscr{T}\}$ とおけば[a] $\mathscr{W}$ は $L^2(\Omega, \mathscr{F}_\infty, P)$ で total[b]である．[c]

[a] f の可積分性より $\mathscr{E}^f$ は $\mathscr{M}^{2,c}$ の元となり，よって極限 $\mathscr{E}_\infty$ が存在することに注意すべし．
[b] total はその線形包が稠密であるという意味．（Schaefer [102] より．）適切な訳語は何であろうか．
[c] この命題は Revuz and Yor [94] による．証明の一部に，多変数解析関数論の初等的な結果が使われている．多変数複素関数については一松 [56] などを参考にされたい．

[*1] ただし，m は Lebesgue 測度を表す．

証明. $L^2(\Omega,\mathscr{F}_\infty,P)$ の Hilbert 構造に注目すれば，$\mathscr{W}^\perp=\{0\}$ を言えばよい．そのため，$Y\in\mathscr{W}^\perp$ なら $Y\cdot P$ が零測度になることを示す．さらに，実は $Y\cdot P$ が任意の $0=t_0<t_1<\ldots,<t_n\le T$ に対して $\sigma(B_{t_1},\ldots,B_{t_n})$ 上で 0 であることを示せば十分である[*2].

$$\varphi(z_1,\ldots,z_n)=E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^n z_i(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})\right)\cdot Y\right]$$

とおけば，φ は $\mathbb{C}^n$ で解析的である．[*3]ここで $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ に対して $f\in\mathscr{T}$ を

$$f(t)=\sum_{i=1}^n\lambda_i 1_{]t_{i-1},t_i]}(t) \tag{8.4.2}$$

と定義すれば，Y の選び方より

$$\begin{aligned}
&\varphi(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\\
&=E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})\right)\cdot Y\right]\\
&=\exp\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i(t_i-t_{i-1})\right)E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})-\sum_{i=1}^n\lambda_i(t_i-t_{i-1})\right)\cdot Y\right]\\
&=\exp\left(\int_0^\infty f(s)ds\right)E\left[\exp\left(\int_0^\infty f(s)dB_s-\int_0^\infty f(s)ds\right)\cdot Y\right]\\
&=\exp\left(\int_0^\infty f(s)ds\right)E\left[\mathscr{E}^f_\infty Y\right]\\
&=0.
\end{aligned}$$

が成り立つ．実解析関数 $\varphi(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ の $\mathbb{C}^n$ への拡張は一意的なので，φ は $\mathbb{C}^n$ 上 0 である．このことから，特に

$$\varphi(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=E\left[\exp\left(\sqrt{-1}\sum_{i=1}^n\lambda_i(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})\right)\cdot Y\right]=0$$

確率変数 $(B_{t_1}-B_{t_0},\ldots,B_{t_n}-B_{t_{n-1}})$ のフーリエ変換が 0 なので，その $Y\cdot P$ に関する像測度も 0 である．これより $Y\cdot P$ は $\sigma(B_{t_1}-B_{t_0},\ldots,B_{t_n}-B_{t_{n-1}})=\sigma(B_{t_1},\ldots,B_{t_n})$ 上 0 である．$\mathscr{F}_\infty$ がこういったもの全体[*4]によって生成されるもの[*5]であったから，$\mathscr{F}_\infty$ 上で $Y\cdot P=0$ となることが分かる． □

[*2] こういった σ-代数全体は，$\mathscr{F}_\infty$ を生成する π-系である．

[*3] 各変数に関して積分記号下での微分を行えば，その変数についての微分可能性が得られる（はず）．実は多変数複素関数においては，各変数について正則なら多変数複素関数として正則であることが導かれる．（Hartogs の正則性定理．）自分は詳しくないので，この辺りは割といい加減であるが...

[*4] これは π - 系をなす．

[*5] 正確には，その augumentation をとったものであるが，結局 P-零集合が付け加わったに過ぎないのでここでの結論には影響しない．

定理 8.4.2.
$F \in L^2(\mathscr{F}_\infty, P)$ に対してある $H \in L^2_\infty(B)$ が一意に存在して

$$F = E[F] + \int_0^\infty H_s dB_s, \quad P\text{-a.s.} \tag{8.4.3}$$

証明. $L^2(\mathscr{F}_\infty, P) \supset \mathscr{V}$ で上のような表現を持つ確率変数の全体を表すことにする．このとき $\mathscr{V}$ が $L^2(\mathscr{F}_\infty, P)$ の閉（線形）部分空間であることを示す．$\mathscr{V}$ が線形部分空間であることは明らかである．したがって，$\mathscr{V}$ の完備性を示せばよい．ここで，$F \in \mathscr{V}$ に対して，伊藤の等長性より以下の等式が成り立つことに注意しておく．

$$E[F^2] = (E[F])^2 + E\left[\int_0^\infty H_s^2 ds\right]. \tag{8.4.4}$$

(F_n) を $\mathscr{V}$ の Cauchy 列とし

$$F_n = E[F_n] + \int_0^\infty |H_s^{(n)}|^2 dBs$$

という表現を持つとする．このとき

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^\infty |H_s^{(n)} - H_s^{(m)}|^2 ds\right] &= E[(F_n - F_m)^2] - |E[F_n - F_m]|^2 \\ &\leq E[F_n - F_m]^2 = \|F_n - F_m\|^2_{L^2(\mathscr{F}_\infty, P)} \end{aligned}$$

より，$(H^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ は $L^2_\infty(B)$ の Cauchy 列である．$L^2_\infty(B)$ の完備性より $H^{(n)} \longrightarrow {}^\exists H \text{ in } L^2_\infty(B)$ であり，等長性から

$$F_n - E[F_n] = \int_0^\infty H_s^{(n)} dB_s \longrightarrow \int_0^\infty H_s dB_s \quad \text{in } L^2(\mathscr{F}_T, P).$$

が分かる．F_n は L^1 でも収束するから，適当な部分列を選んで極限をとれば

$$F = E[F] + \int_0^\infty H_s dB_s \quad \text{a.e. on } (\Omega, \mathscr{F}_\infty, P).$$

よって $F \in \mathscr{V}$ であり，$\mathscr{V}$ は完備である．補題 8.4.1 よりあとは $\mathscr{W} \subset \mathscr{V}$ を示せば，存在の証明が完了する．伊藤の公式により，任意の $t \in \mathbb{R}_+$ に対して

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_t^f &= \mathscr{E}_0^f + \int_0^t \mathscr{E}_s^f \left(f(s)dB_s - \frac{1}{2}f(s)^2 ds\right) + \frac{1}{2}\int_0^t f(s)^2 ds \\ &= 1 + \int_0^t \mathscr{E}_s^f f(s) dB_s. \end{aligned}$$

が成立．Fubini の定理より

$$\begin{aligned} E\int_0^t \left(\mathscr{E}_s^f f(s)\right)^2 ds &= \int_0^t f(s)^2 E\left[\left(\mathscr{E}_s^f\right)^2\right] ds \\ &= \int_0^t f(s)^2 E\left[\exp\left(2\int_0^s f(u)dB_u - \int_0^s f(u)^2 du\right)\right] ds \\ &= \int_0^t f(s)^2 \exp\left(-\int_0^s f(u)^2 du + 2\int_0^s f(u)^2 du\right) ds \\ &\leq \exp\left(\int_0^t f(u)^2 du\right) \int_0^t f(u)^2 du < \infty \end{aligned}$$

となり，$t \to \infty$ とすれば $\mathscr{E}^f \in L^2_\infty(B)$ を得る[*6]．したがって $\mathscr{W} \subset \mathscr{V}$ が従う．一意性は，$H, K \in L^2_\infty(B)$ が共に M を表現するとき，

$$
\begin{aligned}
E\left[\int_0^\infty (H_s - K_s)^2 ds\right] &= E\left[\left(\int_0^\infty (H_s - K_s) dB_s\right)^2\right] \\
&= 0
\end{aligned}
\qquad \square
$$

となることから分かる．

定理 8.4.3.
$M = (M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を連続な $(\mathscr{F}_t)$ - 局所マルチンゲールとする．このとき，ある定数 C と確率過程 $H \in L^2_{loc}(B)$ が存在して

$$
M_t = C + \int_0^t H_s dB_s \tag{8.4.5}
$$

がなりたつ．さらにこの表現は一意である．

証明. $M \in \mathscr{M}^{2,c}(\mathscr{F}_t)$ のとき．定理 8.4.2 より

$$
M_\infty = E[M_\infty] + \int_0^\infty H_s dB_s \tag{8.4.6}
$$

と一意に表現できる．両辺で $\mathscr{F}_t$ に関する条件付き期待値をとればよい．M が連続局所マルチンゲールの場合は，M の局所化列で特に M^{T_n} が[*7] $\mathscr{M}^{2,c}(\mathscr{F}_t)$ の元となるようなものを考える．このとき，各 n に対して

$$
M_t^{T_n} = C + \int_0^t H_s^{(n)} dB_s
$$

と一意的に表現される．[*8]ここで，$n < m$ とすれば，表現の一意性より $[\![0, T_n]\!]$ 上では $H^{(n)} = H^{(m)}$ が $P \otimes m$-a.s. の意味で成り立つ．そこで

$$
H_t(\omega) = \begin{cases} H_t^{(n)}(\omega) & (\omega, t) \in [\![0, T_n]\!] \\ 0 & (\omega) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \setminus \bigcup_n [\![0, T_n]\!] \end{cases} \tag{8.4.7}
$$

$\square$

と定める．このとき明らかに $H \in L^2_{loc}(B)$ かつ

$$
M_t = C + \int_0^t H_s dB_s
$$

であり，作り方から $P \otimes m$-a.e. の一意性もわかる．

注意 8.4.4. 定理 8.4.3 における連続性の仮定は落とすことが出来る．Revuz & Yor [94] などを参照せよ．

[*6] $\mathscr{T} \subset L^2_\infty(B)$ に注意せよ．

[*7] このノートでの局所マルチンゲールの定義は $M^{T_n} 1_{\{T_n > 0\}}$ が云々というものであったが，いま $(\mathscr{F}_t)$ の作り方から $\mathscr{F}_0$-可測関数は必然的に殆ど定数になることに注意．

[*8] 任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対して明らかに $E[M_{T_n}] = E[M_{T_m}]$ なので，その共通の値を C が取れる．

8.5　ノート

この章の内容は，Girsanov の定理の節を除いて Revuz & Yor [94] に従って書いた．Girsanov の定理は Karatzas & Shreve [68] による．

第 9 章

測度変換

9.1 局所絶対連続性

9.2 Girsanov の定理

9.3 Brown 運動の場合

$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, P)$ をフィルター付き確率空間とし，$B = (B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(d)})_{t\in\mathbb{R}_+}$ を d 次元 $(\mathscr{F}_t)$ - 標準ブラウン運動とする．

定理 9.3.1 (Girsanov).
$H^{(i)} \in L^2_{loc}(B)$ $(i = 1, \ldots, d)$ に対して

$$L_t = \exp\left(\sum_{i=1}^{d} \int_0^t H_s^{(i)} dB_s^{(i)} - \frac{1}{2}\int_0^t \|H_s\|^2 ds\right)$$

とおいたとき，(L_t) が $(\mathscr{F}_t)$ - マルチンゲールになっているものとする．このとき，$dP^{(L_t)} = L_t dP$ および

$$W_t^{(i)} = B_t^{(i)} - \int_0^t H_s^{(i)} ds$$

とおけば，任意の $T \in [0, \infty[$ に対して確率過程 $W = (W_t^{(1)}, \ldots, W_t^{(d)})_{t\in[0,T]}$ は確率測度 $P^{(L_T)}$ の下で d 次元 $(\mathscr{F}_t)$ - 標準ブラウン運動である．

証明のためにいくつか補題を用意する．

補題 9.3.2 (Bayse' rule).
定理 9.3.1 の条件のもと，$T \in [0, \infty[$ を固定して考える．$0 \le s \le t \le T$ および $P^{(L_T)}$ 可積分な $\mathscr{F}_t$ - 可測関数 Y に対して，次の等式が成立つ：

$$E^{(L_T)}[Z|\mathscr{F}_s] = \frac{1}{L_s} E[ZL_t|\mathscr{F}_s], \quad P \text{ and } P^{(L_T)}\text{-a.s.} \tag{9.3.1}$$

ただし，$E^{(L_T)}[\,\cdot \mid \cdot\,]$ は確率測度 $P^{(L_T)}$ の下での条件付き期待値を表す．

証明. はじめに $P^{(L_T)}$ が確率測度になっていることを確認する．$P^{(L_t)}$ が非負測度となっていることは測度と積分の一般論より分かる．マルチンゲール性より

$$P^{(L_t)}(\Omega) = \int_\Omega L_t(\omega)P(d\omega) = \int_\Omega L_0(\omega)P(d\omega) = 1$$

となり，$P^{(L_t)}$ は実際に確率測度であることがわかった．しかもこれは P と同値な測度になっていることに注意する．次に $\mathscr{F}_t$ 上 $P^{(L_T)} = P^{(L_t)}$ であることを示そう．$E \in \mathscr{F}_t$ とすれば，マルチンゲール性より

$$P^{(L_t)}(E) = \int_\Omega 1_E(\omega)L_tP(d\omega) = \int_\Omega 1_E(\omega)L_TP(d\omega) = P^{(L_T)}(E)$$

である．

Z を $P^{(L_T)}$ 可積分なる $\mathscr{F}_t$ - 可測関数とすれば，任意の $E \in \mathscr{F}_s$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_\Omega 1_E \frac{E[ZL_t|\mathscr{F}_s]}{L_s}dP^{(L_T)} &= \int_\Omega 1_E \frac{E[ZL_t|\mathscr{F}_s]}{L_s}dP^{(L_s)} \\
&= \int_\Omega 1_E \frac{E[ZL_t|\mathscr{F}_s]}{L_s}L_s dP \\
&= \int_\Omega 1_E E[ZL_t|\mathscr{F}_s]dP \\
&= \int_\Omega 1_E ZL_t dP \\
&= \int_\Omega 1_E Z dP^{(L_t)} \\
&= \int_\Omega 1_E Z dP^{(L_T)}
\end{aligned}$$

□

であるから

$$E^{(L_T)}[Z \mid \mathscr{F}_s] = \frac{E[ZL_t \mid \mathscr{F}_s]}{L_s}$$

がなりたつ．

以下の議論では $T \in [0,\infty[$ を固定し，表記の簡略化のため $P^{(L_T)} = \widetilde{P}$ および $E^{L_T}[\cdot \mid \cdot] = \widetilde{E}[\cdot \mid \cdot]$ と書くことにする．また，P および $\widetilde{P}$ に対応するブラケットをそれぞれ $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ で表す．

補題 9.3.3.
定理 9.3.1 の仮定の下で考える．$M, N \in \mathscr{M}_0^{c,loc}((\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$ に対して

$$\widetilde{M} = M - \sum_{i=1}^d H^{(i)} \bullet \langle M, B^{(i)} \rangle$$

$$\widetilde{N} = N - \sum_{i=1}^d H^{(i)} \bullet \langle N, B^{(i)} \rangle$$

と定めれば $\widetilde{M}, \widetilde{N} \in \mathscr{M}_0^{c,loc}((\mathscr{F}_t), \widetilde{P})$ であり，

$$\langle\!\langle \widetilde{M}, \widetilde{N} \rangle\!\rangle = \langle M, N \rangle, \quad P \text{ (and } \widetilde{P}\text{)-a.s.}$$

が成り立つ．

証明. 一般の場合は局所化を考えればよいから，M, N, $\langle M, M\rangle$, $\langle N, N\rangle$, (L_t), $H^{(i)} \bullet \langle B^{(i)}\rangle$ は有界として示せば十分である．國田・渡辺の不等式より

$$\begin{aligned}\left|(H^{(i)} \bullet \langle M, W^{(i)}\rangle)_t\right|^2 &\leq [\langle M, M\rangle_t]\left[(H^{(i)})^2 \bullet \langle B^{(i)}, B^{(i)}\rangle_t\right]\\ &= [\langle M, M\rangle_t]\left[\int_0^t (H_s^{(i)})^2 ds\right]\end{aligned}$$

となるから，このとき $\widetilde{M}, \widetilde{N}$ も有界である．確率過程 X を

$$X_t = \sum_{i=1}^d \int_0^t H^{(i)} dB_s^{(i)} - \frac{1}{2}\int_0^t \|H_s\|^2 ds$$

定めよう．（これは P の下では明らかにセミマルチンゲールである.）$L_t = e^{X_t}$ だったから，伊藤の公式により

$$\begin{aligned}L_t &= L_0 + \int_0^t L_s dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t L_s d\langle X, X\rangle_s\\ &= 1 + \sum_{i=1}^d \int_0^t L_s H_s^{(i)} dB_s^i \end{aligned} \tag{9.3.2}$$

となる．部分積分公式により

$$\begin{aligned}&L_t\widetilde{M}_t\\ &= \int_0^t L_s d\widetilde{M}_s + \int_0^t \widetilde{M}_s dL_s + \langle L, \widetilde{M}\rangle_t\\ &= \int_0^t L_s dM_s - \sum_{i=1}^d \int_0^t L_s H^{(i)} d\langle M, B^{(i)}\rangle + \sum_{i=1}^d \int_0^t \widetilde{M}_s H^{(i)} L_s dB_s^{(i)} + \sum_{i=1}^d \left(LH^{(i)} \bullet \langle B^{(i)}, M\rangle\right)_t\\ &= \int_0^t L_s dM_s + \sum_{i=1}^d \int_0^t \widetilde{M}_s H^{(i)} L_s dB_s^{(i)}\end{aligned}$$

が成立．これより $(\widetilde{M}_t L_t)$ は P のもと局所マルチンゲールとなるが，さらに有界性の仮定よりマルチンゲールとなる．したがって

$$\begin{aligned}\widetilde{E}[\widetilde{M}_t|\mathscr{F}_s] &= \frac{1}{L_s}E[\widetilde{M}_t L_t|\mathscr{F}_s] \quad (\because \text{Bayse' rule})\\ &= \frac{1}{L_s}\widetilde{M}_s L_s \quad (\because \text{martingale property})\\ &= \widetilde{M}_s\end{aligned}$$

となり，$\widetilde{M}$ は $(\mathscr{F}_t, \widetilde{P})$ - マルチンゲールである．同様にして $\widetilde{N}$ も $(\mathscr{F}_t, \widetilde{P})$ - マルチンゲールである．

部分積分公式を再び用いれば

$$\begin{aligned}
&\widetilde{M}_t\widetilde{N}_t - \langle M,N\rangle_t \\
&= \widetilde{M}_t\widetilde{N}_t - \langle \widetilde{M},\widetilde{N}\rangle_t \\
&= \int_0^t \widetilde{M}_s d\widetilde{N}_s + \int_0^t \widetilde{N}_s d\widetilde{M}_s + \langle \widetilde{M},\widetilde{N}\rangle_t \\
&= \int_0^t \widetilde{M}_s dN_s + \int_0^t \widetilde{N}_s dM_s - \sum_{i=1}^d \left[\int_0^t \widetilde{M}_s H_s^{(i)} d\langle M,B^i\rangle_s + \int_0^t \widetilde{N}_s H_s^{(i)} d\langle N,B^i\rangle_s\right]
\end{aligned}$$

となるから，さらに

$$\begin{aligned}
&L_t\left[\widetilde{M}_t\widetilde{N}_t - \langle M,N\rangle_t\right] \\
&= \int_0^t L_s d\left(\widetilde{M}\widetilde{N} - \langle M,N\rangle\right)_s + \int_0^t \left[\widetilde{M}_s\widetilde{N}_s - \langle M,N\rangle_s\right] dL_s + \left\langle L, \widetilde{M}\widetilde{N} - \langle M,N\rangle\right\rangle_t \\
&= \int_0^t L_s\widetilde{M}_s dN_s + \int_0^t L_s\widetilde{N}_s dM_s + \sum_{i=1}^d \int_0^t \left[\widetilde{M}_s\widetilde{N}_s - \langle M,N\rangle_s\right] H_s^{(i)} L_s dB_s^{(i)}
\end{aligned}$$

が分かる．この表現から $L_t\left[\widetilde{M}_t\widetilde{N}_t - \langle M,N\rangle_t\right]$ は $(\mathscr{F}_t, P)$ - マルチンゲールであることが分かり，(9.3.1) より

$$\begin{aligned}
\widetilde{E}[\widetilde{M}_t\widetilde{N}_t - \langle M,N\rangle_t|\mathscr{F}_s] &= \frac{1}{Z_s}E\left[L_t\left(\widetilde{M}_t\widetilde{N}_t - \langle M,N\rangle_t\right)|\mathscr{F}_s\right] \\
&= \frac{1}{Z_s}L_s\left(\widetilde{M}_s\widetilde{N}_s - \langle M,N\rangle_s\right)
\end{aligned}$$ □

となる．すなわち，$(\widetilde{M}_t\widetilde{N}_t - \langle M,N\rangle_t)$ は $\widetilde{P}$ のもとマルチンゲールである．ブラケットの一意性より $\langle\!\langle \widetilde{M},\widetilde{N}\rangle\!\rangle = \langle M,N\rangle$ が示される．

証明（定理 9.3.1 の証明）． 定理 6.3.4 により，W が $\widetilde{P}$ の下で連続局所マルチンゲールになっていることと，W の二次変分が $\widetilde{P}$ のもと

$$\langle\!\langle W^{(i)}, W^{(j)}\rangle\!\rangle_t = \delta_{ij}t$$

で与えられることを示せばよい．したがって示すべきは

$$\langle B^{(i)}, B^{(j)}\rangle = \langle\!\langle W^{(i)}, W^{(j)}\rangle\!\rangle, \quad 1 \le i \le d, \quad P\text{-a.s.}$$

である[*1]．補題 9.3.3 において $M = B^{(i)}$, $N = B^{(j)}$, $\widetilde{M} = W^{(i)}$, $\widetilde{N} = W^{(j)}$ とおけば

$$\langle\!\langle W^{(i)}, W^{(j)}\rangle\!\rangle_t(\omega) = \langle B^{(i)}, B^{(j)}\rangle_t(\omega), \quad t \in [0,T], \quad P\text{-a.s.}$$

が分かる．

9.4 ノート

この章の内容は，Girsanov の定理の節を除いて Revuz & Yor [94] に従って書いた．Girsanov の定理は Karatzas & Shreve [68] による．

[*1] 測度の同値性より $\widetilde{P}$-a.s. と言っても同じである

第 10 章

確率微分方程式 I—セミマルチンゲールによって駆動される SDE

付録 A

解析学と測度論についての補足

A.1　単調族定理

本節では，測度論において重要な道具である単調族定理 (monotone class theorem) と呼ばれるタイプの定理をいくつか証明する．

まずは，集合族に関する単調族定理を証明しよう．単調族定理は，測度論や確率論において，とある性質が任意の可測集合について成り立つことを証明するのに用いられることが多い．多少抽象的な表現方法にはなるが，単調族定理の類の使い方を紹介しよう．可測空間 $(\Omega, \mathscr{F})$ が与えられているとする．我々は何かしらの性質 P が，全ての可測集合に対して成立することを示したいとしよう．このとき，もちろん任意の $F \in \mathscr{F}$ に対して直接その性質 P を証明できれば望ましいが，多くの場合それは難しい相談である．例えば Ω が位相空間で $\mathscr{F}$ が Borel 集合全体のときを考えよう．性質 P を Borel 集合について証明するためには Borel 集合の性質がわかれば良いが，そもそも Borel 集合とは何であろうか？多くの Borel 集合の定義は，「全ての開集合を含む最小の σ-代数の元」という全くもって不親切なものであり，Borel 集合がどのような形をしているかとか，そういうことは全然わからない．ではどうやって性質 P が全ての $\mathscr{F}$ について成り立つことを証明すれば良いのだろうか？全く一般の場合は難しいので，$\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{C})$ となっている場合を考えよう．我々の方針はこうである．

$$\mathscr{E} = \{A \subset \Omega \mid A \text{ は性質 } P \text{ を満たす }\}$$

と定義する．このとき，全ての $\mathscr{F}$ について P が成り立つとは，$\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$ が成り立つということに他ならない．いまわれわれは $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{C})$ という情報を持っているから，もし $\mathscr{C} \subset \mathscr{E}$ かつ，$\mathscr{E}$ が σ-代数であることを証明できれば，$\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{F}$ の最小性から $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$ を結論付けることができる．$\mathscr{E}$ が σ-代数であることを示すためには，もちろん直接証明するのも良いだろう．だが，それを証明するための判定条件をいくつか持っていると，たいそう便利だろうという想像はつく．$\mathscr{E}$ が σ-代数であることを証明するための方法として，本節でこれから扱う単調族定理とか，π-λ 定理とか，そういうものが良く知られているのである．このような理由で，単調族定理は測度論において頻繁に用いられる道具となっている．

それは，さっそく単調族の概念を導入しよう．

定義 A.1.1.
Ω を集合とする．Ω の部分集合族 $\mathscr{C}$ は，次の条件を満たすとき単調族 (monotone class) であるという．

(i) $\mathscr{C}$ の任意の増大列 $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対して，$\bigcup_n C_n \in \mathscr{C}$．

(ii) $\mathscr{C}$ の任意の減少列 $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$\bigcap_n C_n \in \mathscr{C}$.

補題 A.1.2.
Ω 集合とし，$\mathscr{F}$ をその部分集合族とする．このとき，次の 2 条件は同値である．

(i) $\mathscr{F}$ は σ-代数である．

(ii) $\mathscr{F}$ は集合代数かつ単調族である．

証明. (i) ならば (ii) は明らかなので，逆を示す．(ii) を仮定したとき，$\mathscr{F}$ が任意の可算和について閉じていることを示せば十分である．任意の列 $(A_n) \in \mathscr{F}^{\mathbb{N}}$ に対して，

$$B_n = \bigcup_{0\leq k\leq n} A_k$$

と定義すれば，$\mathscr{F}$ は集合代数なので $B_n \in \mathscr{F}$ となり，さらに (B_n) は増加列である．$\mathscr{F}$ は単調族なので

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathscr{F}$$

がわかる． □

集合 Ω の部分集合族 $\mathscr{A}$ が与えられたとき，それを含む最小の単調族が存在するから，それを $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ と書くことにする．

定理 A.1.3 (単調族定理).
$\mathscr{A}$ を集合 Ω 上の集合代数とする．このとき $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{M}(\mathscr{A})$ が成立つ．

証明. σ-代数は明らかに単調族であるから，$\mathscr{M}(\mathscr{A}) \subset \sigma(\mathscr{A})$ が成り立つ．逆向きの包含関係を保証するためには，$\mathscr{M}(\mathscr{A})$ が σ-代数であることを示せばよいが，補題 A.1.2 より特に $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ が集合代数であることが分かれば十分である．明らかに $\Omega \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$ である．

$$\mathscr{M}_{\mathrm{c}} = \{A \in \mathscr{M}(\mathscr{A}) \mid \Omega \setminus A \in \mathscr{M}(\mathscr{A})\}$$

と定める．このとき，明らかに $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}_{\mathrm{c}}$ である．(A_n) を (B_n) をそれぞれ $\mathscr{M}_{\mathrm{c}}$ の増大列，減少列とすれば，$(\Omega \setminus A_n)$，$(\Omega \setminus B_n)$ はそれぞれ $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ の減少列，増大列となっているので

$$\Omega \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega \setminus A_n \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$$
$$\Omega \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega \setminus B_n \in \mathscr{M}(\mathscr{A}).$$

よって $\bigcup_n A_n, \bigcap_n B_n \in \mathscr{M}_{\mathrm{c}}$ となり，$\mathscr{M}_{\mathrm{c}}$ は単調族である．したがって $\mathscr{M}_{\mathrm{c}}$ は $\mathscr{A}$ を含む単調族で，$\mathscr{M}_{\mathrm{c}} = \mathscr{M}(\mathscr{A})$．すなわち，$\mathscr{M}(\mathscr{A})$ は補集合をとる操作について閉じている．

次に，$A \subset \Omega$ に対して

$$\mathscr{M}_A = \{B \in \mathscr{M}(\mathscr{A}) \mid A \cap B \in \mathscr{M}(\mathscr{A})\}\}$$

と定義する．(A_n) を (B_n) をそれぞれ $\mathscr{M}_A$ の増大列，減少列とすれば，$(A\cap A_n)$，$(A\cap B_n)$ はそれぞれ $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ の増大列，減少列となっているので

$$A\cap\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A\cap A_n\in\mathscr{M}(\mathscr{A}),$$
$$A\cap\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}B_n\right)=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A\cap B_n\in\mathscr{M}(\mathscr{A}).$$

よって $\mathscr{M}_A$ は単調族である．$A\in\mathscr{A}$ なら $\mathscr{A}\subset\mathscr{M}_A$ であるから，$\mathscr{M}_A=\mathscr{M}(\mathscr{A})$．すなわち $\bigcap_{A\in\mathscr{A}}\mathscr{M}_A=\mathscr{M}(\mathscr{A})$．ここで $B\in\mathscr{M}(\mathscr{A})$ とすれば，任意の $A\in\mathscr{A}$ に対して $A\cap B\in\mathscr{M}(\mathscr{A})$ なので，$\mathscr{A}\subset\mathscr{M}_B\subset\mathscr{M}(\mathscr{A})$ が分かる．$\mathscr{M}_B$ は単調族だったから特に $\mathscr{M}_B=\mathscr{M}(\mathscr{A})$ であり，$\bigcap_{A\in\mathscr{M}(\mathscr{A})}\mathscr{M}_A=\mathscr{M}(\mathscr{A})$ が成立．これは $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ が有限個の共通部分をとる操作について閉じているということに他ならない． □

次に，単調族定理と類似の命題で Dynkin 族定理とか，π-λ 定理とか呼ばれるものを紹介する．

定義 A.1.4.

(i) $\mathscr{I}$ を集合 Ω の部分集合族とする．全ての $A,B\in\mathscr{I}$ に対して $A\cap B\in\mathscr{I}$ が成り立つとき，$\mathscr{I}$ は π - 系 (π-system) であるという．

(ii) Ω の集合族 $\mathscr{D}$ が以下の条件を満たすとき, $\mathscr{D}$ は Dynkin 族 (Dynkin class), または λ-系 (λ-system) であるという．

(a) $\Omega\in\mathscr{D}$.

(b) $A,B\in\mathscr{D}$ かつ $A\subset B$ ならば，$B\setminus A\in\mathscr{D}$.

(c) $A_n\in\mathscr{D}$ $(n\in\mathbb{N})$ かつ $A_n\uparrow A$ ならば，$A\in\mathscr{D}$.

λ-系からなる族の共通部分はあきらかに λ 系であり，Ω の冪集合は明らかに λ 系である．そこで，集合 Ω の部分集合族 $\mathscr{F}$ に対して

$$\mathscr{D}(\mathscr{F})=\bigcap\{\mathscr{E}\mid\mathscr{E}\text{ は }\mathscr{F}\text{ を含む }\Omega\text{ 上の }\lambda\text{-系 }\}$$

と定義することにする．$\mathscr{D}(\mathscr{F})$ は $\mathscr{F}$ を含む λ 系のうち，包含関係について最小のものである．

命題 A.1.5.

Ω の部分集合族 $\mathscr{F}$ に対して，以下の 2 条件は同値である．

(i) $\mathscr{F}$ は σ - 代数である．

(ii) $\mathscr{F}$ は π 系かつ λ 系である．

証明. $\mathscr{F}$ が σ - 代数なら π - 系かつ λ-系であることは、σ-代数の定義よりすぐにわかる．逆に $\mathscr{F}$ は π - 系かつ λ-系であると仮定する．$A\in\mathscr{F}$ なら，$A\subset\Omega\in\mathscr{F}$ より $\Omega\setminus A\in\mathscr{F}$ である．$A,B\in\mathscr{F}$ なら $A\cup B=\Omega\setminus[(\Omega\setminus A)\cap(\Omega\setminus B)]\in\mathscr{F}$ より $\mathscr{F}$ は有限和についても閉じていることが分かる．さらに (A_n) を $\mathscr{F}$ の元の列とすれば，$B_n=\bigcup_{k=0}^n A_k$ とおくことで $B_n\uparrow\bigcup_n A_n$ となるので $\bigcup_n A_n\in\mathscr{F}$ も分かる．よって $\mathscr{F}$ は σ - 代数である． □

λ-系については，単調族定理と類似した次の主張が成り立つ．

定理 A.1.6 (π-λ 定理（または Dynkin 族定理）).
$\mathscr{F}$ が集合 Ω 上の π ‐系なら，$\sigma(\mathscr{F}) = \mathscr{D}(\mathscr{F})$ が成り立つ.

証明. 命題 A.1.5 より $\sigma(\mathscr{F})$ は $\mathscr{F}$ を含む λ-系なので，$\mathscr{D}(\mathscr{F})$ の最小性より $\mathscr{D}(\mathscr{F}) \subset \sigma(\mathscr{F})$ が成り立つ．逆向きの包含関係を示そう．$\sigma(\mathscr{F})$ の最小性より，そのためには $\mathscr{D}(\mathscr{F})$ が $\mathscr{F}$ を含む σ ‐代数であることを示せば十分である．命題 A.1.5 より，特に $\mathscr{D}(\mathscr{F})$ が π ‐系であることを示せばよい.

Step1. 集合族 $\mathscr{D}_1$ を
$$\mathscr{D}_1 = \{B \in \mathscr{D}(\mathscr{F}) \mid \forall A \in \mathscr{F}\ \ A \cap B \in \mathscr{D}(\mathscr{F})\}$$
によって定義する．このとき $\mathscr{D}(\mathscr{F}) = \mathscr{D}_1$ であることを示そう．定義より $\mathscr{D}_1 \subset \mathscr{D}(\mathscr{F})$ は明らかなので，逆向きの包含関係を示せばよい．仮定より $\mathscr{F}$ 自体は π ‐系なので, 任意の $A, B \in \mathscr{F}$ について $A \cap B \in \mathscr{F} \subset \mathscr{D}(\mathscr{F})$ が成り立つ．よって $\mathscr{F} \subset \mathscr{D}_1$ である．そこで, $\mathscr{D}_1$ が λ 系であることを示せば $\mathscr{D}(\mathscr{F})$ の最小性より $\mathscr{D}(\mathscr{F}) \subset \mathscr{D}_1$ がわかる.

任意の $A \in \mathscr{F}$ に対して
$$\Omega \cap A = A \in \mathscr{F} \subset \mathscr{D}(\mathscr{F})$$
が成り立つから，$\Omega \in \mathscr{D}_1$ である．また，$B, C \in \mathscr{D}_1$ かつ $B \subset C$ とすれば，任意の $A \in \mathscr{F}$ に対して
$$(C \setminus B) \cap A = (A \cap C) \setminus (A \cap B) \in \mathscr{D}(\mathscr{F})$$
も成り立つ．実際，$B, C \in \mathscr{D}_1$ より $A \cap B, A \cap C \in \mathscr{D}(\mathscr{F})$ であり，$A \cap B \subset A \cap C$ であることに注意すれば λ-系の定義より $(A \cap C) \setminus (A \cap B) \in \mathscr{D}(\mathscr{F})$ がわかる．さらに，$(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を $\mathscr{D}_1$ の単調増大列とする．$A \in \mathscr{F}$ とすれば,
$$A \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A \cap B_n$$
であるが，$B_n \in \mathscr{D}_1$ から $A \cap B_n \in \mathscr{D}(\mathscr{F})$ であり，$A \cap B_n \uparrow \bigcup (A \cap B_n)$ から $A \cap \bigcup B_n \in \mathscr{D}(\mathscr{F})$ が示される．以上の議論より $\mathscr{D}_1$ は λ-系であることがわかった.

Step2. 今度は集合族 $\mathscr{D}_2$ を
$$\mathscr{D}_2 = \{B \in \mathscr{D}(\mathscr{F}) \mid \forall A \in \mathscr{D}(\mathscr{F})\ A \cap B \in \mathscr{D}(\mathscr{F})\}$$
と定める．このとき $\mathscr{D}_2 = \mathscr{D}(\mathscr{F})$ を示せば $\mathscr{D}(\mathscr{F})$ が π-系であるということになり，定理の証明が完了する．$\mathscr{D}_2 \subset \mathscr{D}(\mathscr{F})$ は定義より明らかなので，逆向きの包含関係を示せばよい．Step1 より $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}(\mathscr{F})$ だったから，$\mathscr{F} \subset \mathscr{D}_2$ が成り立つ．後は $\mathscr{D}_2$ が λ-系であることを示せば，$\mathscr{D}(\mathscr{F}$ の最小性より $\mathscr{D}(\mathscr{F}) \subset \mathscr{D}_2$ がわかる．これは実際 Step1 と全く同じ議論により示される. □

π-λ 定理の代表的な応用例を紹介しよう.

命題 A.1.7.
$(X, \mathscr{A})$ を可測空間とし，$\mathscr{C}$ を $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{A}$ を満たす π-系とする．$\mathscr{A}$ 上の有限測度 μ と ν が $\mathscr{C}$ 上で一致し，かつ $\mu(X) = \nu(X)$ を満たすならば $\mathscr{A}$ 全体でも一致する.

証明. $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ を
$$\mathscr{B} = \{B \in \mathscr{A} \mid \mu(B) = \nu(B)\}$$

と定義する．仮定より $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}$ が成り立つので, $\mathscr{B}$ が λ-系であることを示せば定理 A.1.6 より $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{B}$ が従う．仮定より $\mu(X) = \nu(X)$ なので，$X \in \mathscr{B}$ である．$A, B \in \mathscr{B}$ かつ $A \subset B$ なら，

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) = \nu(B) - \nu(A) = \nu(B \setminus A)$$

となり，$B \setminus A \in \mathscr{B}$ が成り立つ．$\mathscr{B}$ の元の列 $(\mathscr{A}_n)$ が $\mathscr{A}_n \uparrow A$ を満たすならば，測度の連続性より

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \nu(A)$$

となり $A \in \mathscr{B}$ もわかる．これで期待通り $\mathscr{B}$ は λ-系であることが示された． □

π-λ 定理を用いると，単調族定理の関数版ともいえる主張が証明できる．可測関数に関する単調族定理も，集合族に関する単調族定理と同じように，可測関数についての何らかの性質を証明する際に用いるものである．

定理 A.1.8 (可測関数についての単調族定理 1).
$\mathscr{C}$ を集合 Ω 上の π-系とし，$\mathscr{H}$ を Ω 上の実数値（resp. 有界）関数からなる線形空間とする．$\mathscr{H}$ が条件

(i) $1 \in \mathscr{H}$.
(ii) $(f_n) \in \mathscr{H}^{\mathbb{N}}$ が正値の単調増大列で正値の実数値（resp. 有界）関数 f に各点収束するなら，$f \in \mathscr{H}$.
(iii) $A \in \mathscr{C}$ ならば $1_A \in \mathscr{H}$.

を満たすなら，$\mathscr{H}$ は $\sigma(\mathscr{C})$-可測な全ての関数を含む.

証明. Ω の部分集合族 $\mathscr{F}$ を

$$\mathscr{F} = \{A \subset \Omega \mid 1_A \in \mathscr{H}\}$$

と定めたとき，$\mathscr{F}$ が $\mathscr{C}$ を含む λ 系であることを示そう．条件 (iii) は $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$ を意味している．また条件 (i) は $\Omega \in \mathscr{F}$ ということである．(A_n) が $\mathscr{F}$ の増大列なら，(ii) より

$$0 \leq 1_{A_1} \leq 1_{A_2} \leq \cdots \to 1_{\bigcup_n A_n} \in \mathscr{H}$$

となるので，$\bigcup_n A_n \in \mathscr{F}$ も成り立つ．さらに，$A, B \in \mathscr{F}$ かつ $A \subset B$ なら，$\mathscr{H}$ がベクトル空間であることから

$$1_{B\setminus A} = 1_B - 1_A \in \mathscr{H}$$

となり，$\mathscr{F}$ が λ 系であることが分かった．

このとき定理 A.1.6 により $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{F}$ となるので，$\mathscr{H}$ は全ての $\sigma(\mathscr{C})$-可測指示関数を含む．ξ を $\sigma(\mathscr{C})$-可測な実数値関数として，

$$\xi_n^+ := \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} 1_{\left\{\frac{k}{2^n} \leq \xi < \frac{k+1}{2^n}\right\}} = \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} 1_{\xi^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\right)}$$

と定める．$\mathscr{H}$ は全ての $\sigma(\mathscr{C})$-可測指示関数を含むから，各 n と k に対して $1_{\xi^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\right)} \in \mathscr{H}$ が成り立つ．さらに $\mathscr{H}$ はベクトル空間なので，$\xi_n^+ \in \mathscr{H}$ である．定義より (ξ_n^+) は明らかに単調増大で，$[0, \infty[$-値関数 ξ^+ に各点収束する．したがって，条件 (ii) より $\xi^+ \in \mathscr{H}$ である．同様にして $\xi^- \in \mathscr{H}$ であることも分かる．$\mathscr{H}$ はベクトル空間だから

$$\xi = \xi^+ - \xi^- \in \mathscr{H}$$

が示された．有界関数の場合も同様である． □

定理 A.1.8 は十分に有用な定理だが，万能な定理でもない．Ω が位相空間である場合，しばしば定理 A.1.8 における条件 (iii) を示すのは難しいが，$\mathscr{H}$ が連続関数を含むことは証明できるという状況に出くわすことだろう．そういった場合には，連続関数に対してなら定理 A.1.8 より強い次の形の定理を用いる必要がある．

定理 A.1.9 (可測関数に対する単調族定理 2).
Ω を集合とし，$\mathscr{H}$ を実数値有界関数の集合で次の条件を満たすものとする：

(i) 定数関数は $\mathscr{H}$ の元である．
(ii) (h_n) は（広義の）単調増大列で $\lim_n h_n = h$ も有界なら $h \in \mathscr{H}$.
(iii) $\mathscr{H}$ は線形空間である．

$\mathscr{C} \subset \mathscr{H}$ が各点ごとの積に対して閉じているなら，$\mathscr{H}$ は $\sigma(\mathscr{C})$-可測有界関数全体を含む.

定理 A.1.9 を「定理 A.1.8 より強い」表現したのは，定理 A.1.9 から定理 A.1.8 の有界な場合を導くことが出来るからである．$\mathscr{C}$，$\mathscr{H}$ を定理 A.1.8 の仮定を満たすものとする．このとき $\mathscr{D} = \{1_A \mid A \in \mathscr{C}\}$ とすれば $\mathscr{D} \subset \mathscr{H}$ であり，$\mathscr{C}$ が π 系との仮定から $\mathscr{D}$ は積について閉じている．よって $\mathscr{H}$ は全ての有界 $\sigma(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{D})$ 可測関数を含むことがわかる．

本小節の残りの部分は，定理 A.1.9 の証明のために費やすことにしよう．定理 A.1.9 を証明するためには，いろいろと準備が必要である．

定義 A.1.10.
X を集合とし，$\mathscr{H}$ を X 上の実数値有界関数の集合とする．$\mathscr{H}$ が条件

(i) 定数関数は $\mathscr{H}$ の元である．
(ii) (h_n) は（広義の）単調増大列で $\lim_n h_n = h$ も有界なら $h \in \mathscr{H}$.
(iii) $\mathscr{H}$ はベクトル空間である．

を満たすとき，$\mathscr{H}$ は λ-系 (λ-system) であるという． また，Ω 上の実数値関数族 $\mathscr{C}$ が $f, g \in \mathscr{C}$ なら $fg \in \mathscr{C}$ を満たすとき[a]，$\mathscr{C}$ は π 系 (π-system) または乗法族 (multiplicative class) であるという．

[a] ただし fg は各点ごとの積で定まる関数である．

関数族の λ-系については，特に定着した呼称はないようである．Sharpe [103] には MVS [*1]とか書いてある．λ-系は Medvegyev [78] からとった用語である．

順序構造を持つ線形空間 V に順序 $\leq$ が定義されていて，

- $u \leq v$ なら，$u + z \leq v + z$ が成り立つ，
- $u \leq v$ かつ $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ なら，$\alpha u \leq \alpha v$ が成り立つ，

の 2 条件が満たされているとき，v を順序線形空間 (ordered vector space) というのであった[*2]．順序線形空間 V において任意の二元 $u, v \in V$ が下限 $u \wedge v \in V$ および上限 $u \vee v \in V$ を持つとき V はベクトル束 (vector lattice) であるという．

[*1] monotone vector space の略か？
[*2] 順序線形空間について詳しくは Aliprantis and Border [2] などを参照されたい．

X を任意の集合とする．V が $\mathrm{Map}(X,\mathbb{R})$ の部分空間であるとき，V が束であることは任意の $f\in V$ に対して $|f|\in V$ でが成り立つことと同値である．実際 V がベクトル束なら

$$|f|=(f\vee 0)-(f\wedge 0)\in V$$

である．逆に V が絶対値をとる操作について閉じているなら

$$f\vee g=\frac{1}{2}(f+g+|f-g|)\in V,\quad f\wedge g=\frac{1}{2}(f+g-|f-g|)\in V$$

となり V はベクトル束である．$\mathrm{Map}(X,\mathbb{R})$ の元のうち有界なるもの全体のなす部分空間を $B(X,\mathbb{R})$ で表すことにする．ベクトル束 $V\subset B(X,\mathbb{R})$ に関する次の条件を，Stone 条件 (Stone condition) と呼ぶことにする．

- $f\in V$ なら，$f\wedge 1\in V$ が成り立つ．

以上で必要となる概念の準備は終えて，ここから単調族定理の証明に向けていくつか補題を用意していくことにしよう．

補題 A.1.11.
X を集合とし，$\mathscr{H}$ は X 上の有界関数の集合とする．このとき，$\mathscr{H}$ を含む最小の λ 系 $\Lambda(\mathscr{H})$ が存在する．

証明. X 上の全ての実数値有界関数全体の集合 $B(X,\mathbb{R})$ は明らかに λ 系である．よって集合

$$\{\mathscr{E}\subset\mathrm{Map}(X,\mathbb{R})\mid\mathscr{H}\subset\mathscr{E}\text{ かつ }\mathscr{E}\text{ は }\lambda\text{ 系 }\}$$

は空ではないから

$$\Lambda(\mathscr{H})=\bigcap\{\mathscr{E}\subset\mathrm{Map}(X,\mathbb{R})\mid\mathscr{H}\subset\mathscr{E}\text{ かつ }\mathscr{E}\text{ は }\lambda\text{ 系 }\}$$

とすれば良い． □

補題 A.1.12.
X を集合とし，$\mathscr{C}\subset B(X,\mathbb{R})$ は π 系であるとする．このとき，$\Lambda(\mathscr{C})$ はまた π 系である．

証明. $f\in B(X,\mathbb{R})$ に対して

$$\Lambda_f=\{g\in\Lambda(\mathscr{C})\mid fg\in\Lambda(\mathscr{C})\}$$

と定めれば，任意の $f\in B(X,\mathbb{R})$ に対して Λ_f は λ 系である．$\mathscr{C}$ は π 系だから，$f\in\mathscr{C}$ なら明らかに $\mathscr{C}\subset\Lambda_f$ が成立．したがって $\Lambda(\mathscr{C})\subset\bigcap\{\Lambda_f;f\in\mathscr{C}\}$ となる．定義より逆向きの包含関係は明らかだから，$\Lambda(\mathscr{C})=\bigcap\{\Lambda_f;f\in\mathscr{C}\}$ が分かる．これは $\Lambda(\mathscr{C})$ が π 系であるということに他ならない． □

補題 A.1.13.
任意の $N>0$ に対して，多項式関数列 (p_n) で $[-N,N]$ 上 $0\le p_n(x)\uparrow|x|$ を満たすものが存在する．

証明. $N>0$ を固定し，求める多項式列を具体的に構成しよう．$p_0\equiv N$ とし，$n\in\mathbb{N}$ に対して再帰的に

$$p_{n+1}(x):=\frac{1}{2N}(p_n^2(x)+N^2-x^2)$$

と定める．このとき，多項式関数 $p_n(x)$ は明らかに $[-N,N]$ 上で $p_n(x) \geq 0$ を満たす．(p_n) が $[-N,N]$ 上で減少列であって，$N-|x|$ に収束することを示そう．まずは (p_n) が $[-N,N]$ 減少列であることを帰納法で示す．定義より

$$p_1(x) = \frac{1}{2N}(N^2+N^2-x^2) = N - \frac{x^2}{2N} \leq N = p_0(x)$$

である．$[-N,N]$ 上で $p_{n-1}(x) \geq p_n(x)$ が成り立つと仮定する．このとき

$$\begin{aligned} p_n(x) - p_{n+1}(x) &= \frac{1}{2N}\left\{(p_n^2(x)+N^2-x^2) - (p_{n-1}^2(x)+N^2-x^2)\right\} \\ &= \frac{1}{2N}\left\{p_n^2(x) - (p_{n-1}^2(x)\right\} \\ &= \frac{1}{2N}(p_n(x)-p_{n-1}(x))(p_n(x)+p_{n-1}(x)) \end{aligned}$$

が成立．仮定と p_n の定義より $[-N,N]$ 上 $(p_n(x)-p_{n-1}(x))(p_n(x)+p_{n-1}(x)) \geq 0$ となるから，$[-N,N]$ 上 $y_n(x) \geq y_{n+1}(x)$ が分かる．$[-N,N]$ 上で $(p_n(x))$ は下に有界な減少列であるから，極限が存在する．その極限を $p^*(x)$ $(x \in [-N,N])$ で表すことにしよう．(p_n) の定義を思い出せば

$$p^*(x) := \frac{1}{2N}[(p^*(x))^2+N^2-x^2], \quad x \in [-N,N]$$

が成り立つ．これより $[-N,N]$ 上で $x^2 = (p^*(x)-N)^2$ となり，

$$|x| = |p^*(x)-N| = N - p^*(x), \quad \forall x \in [-N,N]$$

が示される[*3]．$q_n(x) := N - p_n(x)$ とおけば，ここまでの議論により (q_n) が求める多項式の列であることが分かる． □

命題 A.1.14.
X を集合とし，$\mathscr{C} \subset B(X,\mathbb{R})$ を π 系とする．このとき，$\Lambda(\mathscr{C})$ は Stone 条件を満たすベクトル束である．

証明. 定義より明らかに $\Lambda(\mathscr{C})$ はベクトル空間である．任意の $f \in \Lambda(\mathscr{C})$ に対して $|f| \in \Lambda(\mathscr{C})$ が成り立つことを示そう．$f \in \Lambda(\mathscr{C})$ に対して，$|f(x)| \leq N$ $(\forall x \in X)$ なる N を取れば，補題 A.1.13 より $[-N,N]$ 上で $|y|$ を単調増大に近似する多項式列 (p_n) が存在する．補題 A.1.12 より $\Lambda(\mathscr{C})$ は積について閉じているから，$p_n(f) \in \Lambda(\mathscr{C})$ である．また p_n の選び方から任意の $x \in X$ に対して $0 \leq p_n(f(x)) \uparrow |f(x)|$ が成立．したがって λ 系の定義から $|f| \in \Lambda(\mathscr{C})$ であり，$\Lambda(\mathscr{C})$ はベクトル束である．さらに $\Lambda(\mathscr{C})$ は λ 系だから定数関数 1 を元に持ち，よって $f \wedge 1 \in \Lambda(\mathscr{C})$ となることわかる． □

命題 A.1.15.
X を集合とし，$\mathscr{H} \subset B(X,\mathbb{R})$ とする．$\mathscr{H}$ が λ 系かつ Stone 条件を満たすならば，$\mathscr{H}$ は $\sigma(\mathscr{H})$-可測有界関数全体の集合と一致する．

証明を見れば分かるが，この命題では関数の有界性はこれといって必要ではない．つまり，λ 系の定義から有界性を除いたものと，可測関数の集合から有界性の条件を取り除いたものに対しても同様の主張が成立する．

[*3] $[-N,N]$ 上で (p_n) は減少列なので，当然 $p^*(x) \leq N$ $(\forall x \in [-N,N])$ である．

証明. $\mathscr{H}$ の元が $\sigma(\mathscr{H})$-可測な有界関数であることは明らかなので，任意の $\sigma(\mathscr{H})$-可測な有界関数が $\mathscr{H}$ の元となることを示せばよい．

$$\mathscr{E} = \{A \subset X \mid 1_A \in \mathscr{H}\}$$

と定義する．このとき $\mathscr{E} = \sigma(\mathscr{H})$ を示すことが第一の目標である．$\mathscr{E} \subset \sigma(\mathscr{H})$ は明らかなので，逆向きの包含関係を示す．

$\mathscr{H}$ は束なので，$\mathscr{E}$ は合併，共通部分をとる操作について閉じている．また $1 \in \mathscr{H}$ と $\mathscr{H}$ がベクトル空間との仮定より，$\Omega \in \mathscr{E}$ および $\mathscr{E}$ が補集合を取る操作についても閉じていることが分かる．$\mathscr{H}$ が一様有界なる単調収束について閉じていることは，$\mathscr{E}$ が増大列の極限について閉じていることを保証する．したがって $\mathscr{E}$ は σ-代数となる．

$f \in \mathscr{H}$ とすれば，$\mathscr{H}$ が Stone 条件を満たすベクトル空間であることから，

$$f_n := 1 \wedge (n(f - 1 \wedge f)) \in \mathscr{H}$$

が成り立つ．明らかに $f_n \geq 0$ であり，しかも $f_n \uparrow 1_{\{f>1\}}$ である．$\mathscr{H}$ は λ 系だから $1_{\{f>0\}} \in \mathscr{H}$ となる．すなわち $\{f > 1\} \in \mathscr{E}$ が成り立つ．$\mathscr{H}$ はベクトル空間だから，これより任意の $\alpha > 0$ に対して $\{f > \alpha\} \in \mathscr{E}$ が分かる．したがって任意の $f \in \mathscr{H}$ に対して f^+ は $\mathscr{E}$-可測であり，同様にして f^- も $\mathscr{E}$-可測たることが示される．ゆえに $f = f^+ - f^-$ も $\mathscr{E}$-可測である．これより任意の $f \in \mathscr{H}$ は $\mathscr{E}$-可測であり，すなわち $\sigma(\mathscr{H}) \subset \mathscr{E}$ が成り立つ．

以上の議論により $\mathscr{E} = \sigma(\mathscr{H})$ が示された．これはすなわち，単関数が $\sigma(\mathscr{H})$-可測であることと $\mathscr{H}$ の元であることは同値であるということに他ならない．f を $\sigma(\mathscr{H})$-可測な有界関数とする．このとき，f は $\sigma(\mathscr{H})$ 可測な単関数によって単調に近似されるが，もちろんこれは $\mathscr{H}$ の元によって単調に近似されるということに他ならない[*4]．$\mathscr{H}$ は一様有界な単調収束について閉じていたから，$f \in \mathscr{H}$ が分かる． □

証明 (定理 A.1.9). 仮定より $\mathscr{H}$ は π 系 $\mathscr{C}$ を含む λ 系であるから，$\Lambda(\mathscr{C}) \subset \mathscr{H}$ である．命題 A.1.14 から $\Lambda(\mathscr{C})$ は Stone 条件を満たすベクトル束であることも分かるから，命題 A.1.15 より $\Lambda(\mathscr{C})$ は $\sigma(\Lambda(\mathscr{C}))$-可測な有界関数全体の集合と一致する．よって $\mathscr{H}$ は $\sigma(\Lambda(\mathscr{C}))$-可測な有界関数を全て含み，特に $\sigma(\mathscr{C})$-可測な有界関数を全て含む． □

A.2 一様可積分性

本節では，可測関数族の一様可積分性についての基本的な結果を紹介する．

定義 A.2.1.
$(X, \mathscr{A}, \mu)$ を有限測度空間とする．可測関数族 $\mathscr{H}$ が

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{f\in\mathscr{H}} \int_{|f|>a} |f|\, d\mu = 0$$

を満たすとき，$\mathscr{H}$ は一様可積分 (uniformly integrable) であるという．

$\mathscr{H}$ が一様可積分なら，各 $f \in \mathscr{H}$ は可積分である．逆に，可積分な関数の有限族は一様可積分である．$\mathscr{H}$ が

[*4] $\mathscr{H}$ はベクトル空間なのであった．

一様可積分であるとは，$\mathscr{H}$ の元がどれも同じくらい可積分になりやすいという意味である．有限測度空間において可積分性について悪さをするのは f の絶対値が大きい部分だけなので，それを一様に制御できるということが可積分になりやすさと直結するのである．

一様可積分性の十分条件としてよく用いられるものをいくつか紹介しよう．

命題 A.2.2.
$(X, \mathscr{A}, \mu)$ を有限測度空間とし，$\mathscr{H}$ を可測関数族とする．

(i) ある可積分関数 $g \geq 0$ が存在して，全ての $f \in \mathscr{H}$ について $|f| \leq g$ が成り立つなら，$\mathscr{H}$ は一様可積分である．

(ii) $\mathscr{K}$ を一様可積分な可測関数族とする．任意の $f \in \mathscr{H}$ に対して，ある $g \in \mathscr{K}$ で $|f| \leq |g|$ a.e. を満たすものが存在するとする．このとき $\mathscr{H}$ は一様可積分である．

(iii) $1 < p \leq \infty$ とする．$\sup_{f \in \mathscr{H}} \|f\|_{L^p} < \infty$ が成り立つなら，$\mathscr{H}$ は一様可積分である．

証明. (i) は (ii) に含まれるので，(ii) を示せばよい．仮定より任意の $f \in \mathscr{H}$ について

$$\int_{|f|>a} |f|\, d\mu \leq \sup_{g \in \mathscr{K}} \int_{|g|>a} |g|\, d\mu$$

が成り立つので，左辺で sup をとって $a \to \infty$ とすれば，$\mathscr{K}$ の一様可積分性より各辺は 0 に収束する．よって $\mathscr{H}$ も一様可積分である．

(iii) $p = \infty$ の場合は (i) に含まれる．$1 < p < \infty$ であると仮定すれば，任意の $f \in \mathscr{H}$ について

$$\int_{|f|>a} |f| d\mu \leq \int_{|f|>a} |f| \left(\frac{|f|}{a}\right)^{p-1} d\mu \tag{A.2.1}$$

$$= \frac{1}{a^{p-1}} \int_{|f|>a} |f|^p d\mu \tag{A.2.2}$$

$$\leq \frac{1}{a^{p-1}} \sup_{f \in \mathscr{H}} \int_X |f|^p d\mu \tag{A.2.3}$$

$$= \frac{1}{a^{p-1}} \left(\sup_{f \in \mathscr{H}} \|f\|_{L^p}\right)^p \tag{A.2.4}$$

が成り立つ．これより

$$\sup_{f \in \mathscr{H}} \int_{|f|>a} |f| d\mu \leq \frac{1}{a^{p-1}} \left(\sup_{f \in \mathscr{H}} \|f\|_{L^p}\right)^p \xrightarrow[a \to \infty]{} 0$$

となり，$\mathscr{H}$ が一様可積分であることがわかる． □

命題 A.2.3.
$(X, \mathscr{A}, \mu)$ を有限測度空間とする．可測関数族 $\mathscr{H}$ が一様可積分となるための必要十分条件は，以下の 2 条件が成立することである．

(i) $\sup_{f \in \mathscr{H}} \|f\|_{L^1(\mu)} < \infty$.

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ で，次の条件を満たすものが存在する：任意の $f \in \mathscr{H}$ および $\mu(A) < \delta$ を満たす任意の $A \in \mathscr{A}$ について $\mu(|f|1_A) < \varepsilon$ が成り立つ.

命題 A.2.3 の条件 (i) は L^1 有界性 (L^1-boundedness) と呼ばれる条件であり，文字通り $\mathscr{H}$ が $L^1(\mu)$ の有界集合であるという意味である．条件 (ii) は，測度族 $(|f| \bullet \mu;\, f \in \mathscr{H})$ がの，μ-に関する一様絶対連続性 (uniformly absolutely continuous) と呼ばれる条件である．

証明. $\mathscr{H}$ は一様可積分であると仮定する．まずは (i) を示そう．このとき十分大きい $a > 0$ をとれば，任意の $f \in \mathscr{H}$ に対して

$$\int_X |f|\, d\mu = \int_{\{|f|>a\}} |f|\, d\mu + \int_{\{|f|\le a\}} |f|\, d\mu < 1 + a < \infty$$

となる．よって (i) が成り立つ．次に (ii) が成り立つことを示す．$\varepsilon > 0$ を任意に固定する．このとき，一様可積分性より

$$\sup_{f\in\mathscr{H}} \int_{\{|f|>a\}} |f|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たす $a > 0$ がとれる．いま $0 < \delta < \varepsilon/2a$ となる δ をとれば，任意の $f \in \mathscr{H}$ と $\mu(A) < \delta$ なる任意の $A \in \mathscr{A}$ について

$$\begin{aligned}
\int_A |f|\, d\mu &= \int_{A\cap\{|f|>a\}} |f|\, d\mu + \int_{A\cap\{|f|\le a\}} |f|\, d\mu \\
&\le \int_{\{|f|>a\}} |f|\, d\mu + a\mu(A) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって (ii) が成立することもわかった．

逆を示すために，$\mathscr{H}$ は (i) と (ii) を満たすと仮定しよう．$\varepsilon > 0$ とする．(ii) のように $\delta = \delta(\varepsilon)$ を選び，さらに $a_0 > 0$ を

$$\sup_{f\in\mathscr{H}} \mu(|f| > a_0) \le \frac{1}{a_0} \sup_{f\in\mathscr{H}} \int_X |f| d\mu < \delta$$

となるようにとる．このような a_0 の存在は条件 (i) からわかる．また一つ目の不等号は Chebyshev の不等式である．このとき，$a > K_0$ なら

$$\int_{\{|f|>a\}} |f| d\mu < \varepsilon \quad (\forall f \in \mathscr{H})$$

である．したがって $\mathscr{H}$ は一様可積分であることが示された． □

命題 A.2.4.
$(X, \mathscr{A}, \mu)$ を有限測度空間とし，$\mathscr{H}, \mathscr{K}$ を実数値の可測関数族とする．$\mathscr{H}$ と $\mathscr{K}$ がともに一様可積分であるならば，

$$\mathscr{H} + \mathscr{K} = \{f + g \mid f \in \mathscr{H},\ g \in \mathscr{K}\}$$

も一様可積分である．

証明. $\mathscr{H} + \mathscr{K}$ が命題 1.2.4 の条件 (i) および (ii) を満たすことを示す．

任意の $f \in \mathscr{H}$ と $g \in \mathscr{K}$ について

$$\mu(|f+g|) \leq \sup_{f \in \mathscr{H}} \mu(|f|) + \sup_{g \in \mathscr{K}} \mu(|g|) < \infty$$

が成り立つから，$\mathscr{H} + \mathscr{K}$ は L^1-有界である．

$\varepsilon > 0$ を任意の固定し，δ_1, δ_2 はそれぞれ以下の条件を満たすとする．

$$\forall A \in \mathscr{A} \ \left(\mu(A) < \delta_1 \implies \sup_{f \in \mathscr{H}} \mu(|f| 1_A) < \varepsilon\right)$$
$$\forall A \in \mathscr{A} \ \left(\mu(A) < \delta_2 \implies \sup_{g \in \mathscr{K}} \mu(|g| 1_A) < \varepsilon\right)$$

また，$\delta_0 = \delta_1 \wedge \delta_2$ とし，$a_0 > 0$ を

$$a_0 > \frac{1}{\delta_0}\left(\sup_{f \in \mathscr{H}} \mu(|f|) + \sup_{g \in \mathscr{K}} \mu(|g|)\right)$$

を満たすように選ぶ．$a \geq a_0$ ならば

$$\sup_{f \in \mathscr{H}, g \in \mathscr{K}} \mu(|f+g| > a) \leq \frac{1}{a}\left(\sup_{f \in \mathscr{H}} \mu(|f|) + \sup_{g \in \mathscr{K}} \mu(|g|)\right) < \delta_0$$

であるから，δ_0 の選び方より

$$\begin{aligned}\int_{\{|f+g|>a\}} |f+g| \, d\mu &\leq \int_{\{|f+g|>a\}} |f| \, d\mu + \int_{\{|f+g|>a\}} |g| \, d\mu \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ．よって $\mathscr{H} + \mathscr{K}$ は一様に絶対連続である． □

命題 A.2.5.
$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，X を可積分な確率変数とする．確率変数族 $\mathscr{H}$ を

$$\mathscr{H} = \{Y \mid \text{ある部分} \sigma\text{-代数} \mathscr{G} \subset \mathscr{F} \text{ が存在して，} Y \text{ は } E[X|\mathscr{G}] \text{ のバージョンとなっている }\}$$

定義する．このとき $\mathscr{H}$ は一様可積分である．

証明. $Y = E[X|\mathscr{G}] \in \mathscr{H}$ とすれば，条件付き期待値に関する Jensen の不等式により

$$|Y| \leq E[|X| \,|\mathscr{G}] \quad P\text{-a.s.}$$

が成り立つ．両辺を $\{|Y| > a\} \in \mathscr{G}$ 上で積分すれば，条件付き期待値の定義より

$$\int_{\{|Y|>a\}} |Y| \, dP \leq \int_{\{|Y|>a\}} |X| \, dP \tag{A.2.5}$$

となる．いま Chebyshev の不等式により

$$\sup_{Y \in \mathscr{H}} P\left[\,|Y| > a\,\right] \leq \sup_{Y \in \mathscr{H}} \frac{E[\,|Y|\,]}{a} = \frac{E[\,|X|\,]}{a} \xrightarrow[a \to \infty]{} 0$$

が成り立つから，(A.2.5) において $a \to \infty$ とすれば，X の可積分性より右辺は Y について一様に 0 に収束する．したがって $\mathscr{H}$ は一様可積分である． □

命題 A.2.6.
$(X, \mathscr{A}, \mu)$ を有限測度空間とし，$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を可積分な可測関数の列で，可測関数 f に概収束するものとする．このとき，以下の 3 条件は同値である．

(i) (f_n) は一様可積分である．
(ii) $f_n \to f$ in L^1.
(iii) $E[\,|f_n|\,] \to E[\,|f|\,] < \infty$.

証明. $\mu(X)$ は 0 でないとして示せば十分である．

(i) $\Longrightarrow$ (ii)．(f_n) は一様可積分であると仮定する．命題 A.2.3 より (f_n) は L^1 ‐有界となるので，Fatou の補題より

$$\int_X |f| d\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int_X |f_n| d\mu \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n| d\mu < \infty$$

が成り立つ．よって f は可積分であり，積分 $\mu(f)$ は well-defined となる．また f の可積分性と (f_n) の可積分性，そして命題 A.2.2 から $(f_n - f)_{n\in\mathbb{N}}$ も一様可積分となることがわかる．$\varepsilon > 0$ を任意に固定しよう．$(f_n - f)$ の一様可積分性と命題 A.2.3 より，$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ を以下の条件を満たすように選ぶことができる．

$$\forall A \in \mathscr{A},\ \mu(A) < \delta \implies \int_A |f_n - f| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

さらに，仮定 $f_n \to f$ a.e. より (f_n) は f に測度収束するので，先ほど選んだ δ に対して，$N \in \mathbb{N}$ を以下の条件を満たすようにとることができる．

$$\forall n \ge N,\ \mu\left(|f_n - f| > \frac{\varepsilon}{2\mu(X)}\right) < \delta.$$

このような N について，$n \ge N$ ならば

$$\begin{aligned}\int_X |f_n - f| d\mu &\le \int_{|f_n - f| > \frac{\varepsilon}{2\mu(X)}} |f_n - f| d\mu + \int_{|f_n - f| \le \frac{\varepsilon}{2\mu(X)}} |f_n - f| d\mu \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2\mu(X)} \mu(X) = \varepsilon\end{aligned}$$

が成立．すなわち $f_n \to f$ が L^1 収束の意味で成り立つ．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)．条件 (ii) と三角不等式より

$$\left| \int_X |f_n| d\mu - \int_X |f_n| d\mu \right| \le \int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0$$

となるので，$\mu(|f_n|) \to \mu(|f|)$ がわかる．

(iii) $\Longrightarrow$ (i)．(f_n) が f に概収束することから，$f_*\mu(\{-a, a\}) = 0$ なる $a > 0$ に[*5]ついて $f_n 1_{\{|f_n| < a\}}$ は $f 1_{\{|f| < a\}}$ に概収束することに注意する．いま $|f_n| 1_{\{|f_n| < a\}} \le a$ であるから，有界収束定理により

$$\int_X |f_n| 1_{\{|f_n| < a\}} d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X |f| 1_{\{|f| < a\}} d\mu \tag{A.2.6}$$

[*5] このような a を f の分布の連続点という．

が成り立つ．また，

$$\begin{aligned}\int_{\{|f_n|\geq a\}}|f_n|d\mu &= \int_X|f_n|d\mu - \int_{\{|f_n|>a\}}|f_n|d\mu \\ &= \int_X|f_n|d\mu - \int_X|f_n|1_{\{|f_n|<a\}}d\mu\end{aligned}$$

であるから，条件 (iii) と (A.2.6) から

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{\{|f_n|\geq a\}}|f_n|d\mu &= \lim_{n\to\infty}\int_X|f_n|d\mu - \lim_{n\to\infty}\int_X|f_n|1_{\{|f_n|<a\}}d\mu \\ &= \int_X|f|d\mu - \int_X|f|1_{\{|f|<a\}}d\mu \\ &= \int_{\{|f|\geq a\}}|f|d\mu\end{aligned}$$

となることがわかる．さて，$\varepsilon>0$ を任意に固定しよう．このとき，f の可積分性より f の分布の連続点 a を十分大きくとれば，

$$\int_{\{|f|\geq a\}}|f|d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．このような a に対して，先ほどの議論より $N\in\mathbb{N}$ を

$$\left|\int_{\{|f_n|\geq a\}}|f_n|d\mu - \int_{\{|f|\geq a\}}|f|d\mu\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall n\geq N)$$

となるように選ぶことができる．したがって，$n\geq N$ ならば

$$\int_{\{|f_n|\geq a\}}|f_n|d\mu \leq \int_{\{|f|\geq a\}}|f|d\mu + \left|\int_{\{|f_n|\geq a\}}|f_n|d\mu - \int_{\{|f|\geq a\}}|f|d\mu\right| < \varepsilon$$

が成り立っている．また，各 $n\in\{1,2,\dots,N-1\}$ に対して

$$\int_{\{|f_n|\geq b_n\}}|f_n| < \varepsilon$$

を満たす b_n を選び，$K=\max\{a,b_1,b_2,\dots,b_{N-1}\}$ と定義する．このとき，$c>K$ なら

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{\{|f_n|\geq c\}}|f_n|d\mu \leq \varepsilon$$

が成り立つ．ゆえに，(f_n) は一様可積分である． □

一様可積分性を用いれば，優収束定理を少し改良することができる．

定理 A.2.7.
$(X,\mathscr{A},\mu)$ を有限測度空間とし，(f_n) を可積分関数の列，f を可測関数とする．このとき次の条件は同値である．

(i) (f_n) は f に L^1 収束する．
(ii) (f_n) は f に測度収束し，かつ (f_n) は一様可積分である．

証明. (i) $\Longrightarrow$ (ii) は命題 A.2.6 と Chebyshev の不等式からわかる．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．まずは

$$C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n - f|\, d\mu$$

と定めよう．仮定より $(f_n - f)$ は一様可積分となるので C は有限値となることに注意しておく．$\varepsilon > 0$ を任意に固定すれば，一様可積分性より，$\delta > 0$ を

$$\mu(A) < \delta \implies \int_A |f_n - f| < \varepsilon$$

となるように選ぶことができる．この $\delta > 0$ に対して，$N \in \mathbb{N}$ を

$$n \geq N \implies \mu(|f_n - f| > \varepsilon) < \delta$$

となるように選ぶ．このような N の存在は，(f_n) が f に確率収束するという仮定からわかる．このとき，

$$\begin{aligned}\int_X |f_n - f|\, d\mu &= \int_{\{|f_n - f| > \varepsilon\}} |f_n - f|\, d\mu + \int_{\{|f_n - f| \leq \varepsilon\}} |f_n - f|\, d\mu \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon C\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，任意の $n \geq N$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\int_X |f_n - f|\, d\mu \leq (1 + C)\varepsilon$$

となることがわかる．すなわち (f_n) は f に L^1-収束する． □

一様可積分性を概念を用いれば，さらに L^p 収束も次の定理のように特徴づけることができる．

定理 A.2.8.
$(X, \mathscr{A}, \mu)$ を有限測度空間とし，$1 \leq p < \infty$ とする．このとき $L^p(\mu)$ の点列 (f_n) と $f \in L^p(\mu)$ について，次の条件は同値である．

(i) (f_n) は f に L^p-収束する．

(ii) (f_n) は f に測度収束し，かつ $(|f_n|^p)$ は一様可積分である．

証明. はじめに，(f_n) が f に L^p 収束するとは，$(|f_n - f|^p)$ が 0 に L^1 収束するということと，同じであることに注意しておく．

(i) $\Longrightarrow$ (ii)．(f_n) が f に L^p 収束すると仮定すれば，(f_n) は f に確率収束する．またこのとき定理 A.2.7 より $(|f_n - f|^p)$ は一様可積分となるので，

$$|f_n|^p \leq 2^{p-1} \left(|f_n - f|^p + |f|^p\right)$$

という評価と命題 A.2.2 から $(|f_n|^p)$ が一様可積分になることがわかる．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．(f_n) は f に測度収束し，かつ $(|f_n|^p)$ は一様可積分であると仮定する．このとき $(|f_{-} f|^p)$ は 0 に測度収束することに注意する．

$$|f_n - f|^p \leq 2^{p-1} \left(|f_n|^p + |f|^p\right)$$

という評価と命題 A.2.2 から $(|f_n - f|^p)$ が一様可積分となることがわかるので，測度収束と合わせれば定理 A.2.7 より $(|f_n - f|^p)$ が 0 に L^1-収束することが示される． □

一様可積分性の概念を，ベクトル値関数にも定義しておこう．

定義 A.2.9.
$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ を有限測度空間とし，E を Banach 空間とする．$\mathscr{H} \subset L^1(\Omega; E)$ が以下の条件を満たすとき，$\mathscr{H}$ は一様可積分であるという．

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{f\in\mathscr{H}} \int_{\{\|f\|_E > a\}} \|f\|_E d\mu = 0.$$

$\mathscr{H} \subset L^1(\Omega; E)$ が一様可積分であるとは，すなわち $\{\|f\|_E; f \in \mathscr{H}\} \subset L^1(\Omega)$ が一様可積分だということである．

命題 A.2.10.
$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ を有限測度空間とする．また E, F を Banach 空間とし，$T\colon E \to F$ は可逆な有界線形であるとする．このとき，$\mathscr{H} \subset L^1(\Omega; E)$ について次の 2 条件は同値である．

(i) $\mathscr{H}$ は一様可積分である．
(ii) $T_*\mathscr{H}$ は一様可積分である．

ただし，$T_*\colon \mathscr{L}^0(\Omega; E) \to \mathscr{L}^0(\Omega; F)$ は $f \mapsto T \circ f$ で定まる写像である．

証明． 開写像定理から可逆な $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ban}}(E, F)$ の逆写像も有界となるので，全ての $f \in \mathscr{H}$ と全ての $\omega \in \Omega$ について以下の不等式が成り立つ．

$$\|T^{-1}\|\|f(\omega)\|_E \le \|Tf(\omega)\|_F \le \|T\| \le \|f(\omega)\|_E$$

この不等式と命題 A.2.2 より，$\mathscr{H}$ の一様可積分性と $T_*\mathscr{H}$ の一様可積分性は同値であることがわかる．□

命題 A.2.11.
$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ を有限測度空間とし，E を有限次元の Banach 空間とする．このとき，$\mathscr{H} \subset \mathscr{L}^1(\Omega; E)$ について以下の 2 条件は同値である．

(i) $\mathscr{H}$ は一様可積分である．
(ii) 全ての $T \in E^*$ について，$T_*\mathscr{H}$ は一様可積分となる．

ただし，T_* は写像 $\mathscr{L}^0(\Omega; E) \ni f \mapsto T \circ f \in \mathscr{L}^0(\Omega; \mathbb{R})$ である．

証明．Step 1：(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明． $|Tf(\omega)| \le \|T\|\|f(\omega)\|_E$ という評価に注意すれば，命題 A.2.2 よりわかる．

Step 2：(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明—Euclid 空間の場合． E が d-次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^d$ の場合に示す．$\mathscr{H}$ は (ii) を満たすと仮定する．第 i 射影 $\mathrm{pr}_i\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は有界線形写像だから，仮定より $(\mathrm{pr}_i)_*\mathscr{H}$ は一様可積分となる．Euclid ノルムの定義より，全ての $f \in \mathscr{H}$ と全ての $\omega \in \Omega$ について

$$\|f(\omega)\|_{\mathbb{R}^d} \le \sum_{1\le i\le d} |\mathrm{pr}_i(f(\omega))|$$

が成り立つ．この評価と，全ての i について $(\mathrm{pr}_i)_*\mathscr{H}$ が一様可積分であることを用いれば，命題 A.2.4 により

$\mathscr{H}$ は一様可積分であることがわかる．

Step 3：(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明––一般の場合． E はあ Euclid 空間と Banach 空間として同型だから，step 2 と命題 A.2.10 より結論が従う． □

A.3　Banach 空間の弱位相と汎弱位相ついて

本節では，Banach 空間論に関するいくつかの結果を紹介する．

定義 A.3.1.
X を Banach 空間とする．X から位相空間への写像の族 $\mathscr{F}$ が与えられたとき，その族によって生成される位相を $\sigma(X,\mathscr{F})$ で表す．$\sigma(X,X^*)$ を X の弱位相 (weak topology) といい，また，$\sigma(X^*,X)$ を X^* 上の汎弱位相 (weak* topology) という．

位相空間の一般論よりわかることだが，Banach 空間 X の点列 (x_n) が弱位相で $x\in X$ に収束するための必要十分条件は，全ての $T\in X^*$ について $T(x_n)$ が $T(x)$ に収束することである．

命題 A.3.2.
X を Banach 空間とする．このとき，X は $\sigma(X,X^*)$ により Hausdorff 局所凸線形位相空間となる．

証明. $(X,\sigma(X,X^*))$ が線形位相空間になるとは，和 $(x,y)\mapsto x+y$ とスカラー倍 $(\alpha,x)\mapsto\alpha x$ が $\sigma(X,X^*)$ について連続になるということであった．これを確かめるためには任意の $f\in X^*$ について $(x,y)\mapsto f(x+y)$ と $(\alpha,x)\mapsto f(\alpha x)$ が $\sigma(X,X^*)$-連続になることを確かめればよい．これは，$f\in X^*$ の線形性と $\mathbb{R}$ における和とスカラー倍の連続性よりわかる．$\sigma(X,X^*)$ が Hausdorff であることは，X^* が X の点を分離する[*6]ことからわかる．X^* が X の点を分離することは，Hahn-Banach の定理よりしたがう．$\sigma(X,X^*)$ が局所凸であることは，$\bigcap_{\text{有限}} f_i^{-1}(]a_i,b_i[])$ という形の凸集合が各点の基本近傍系を成すことからわかる． □

補題 A.3.3.
X を Banach 空間とし，Y をその部分空間とする．このとき弱位相 $\sigma(Y,Y^*)$ は $(X,\sigma(X,X^*))$ の 部分空間としての位相と一致する．

証明. $(X,\sigma(X,X^*))$ の部分空間としての位相は，写像の族 $\{f|_Y\,;\,f\in X^*\}$ によって生成される位相である．Hahn-Banach の定理より $\{f|_Y\,;\,f\in X^*\}$ は Y^* と一致することがわかるので，$\sigma(Y,Y^*)$ と $(X,\sigma(X,X^*))$ の部分空間としての Y の位相は一致する．

補題 A.3.4.
C を Banach 空間 X の凸集合とする．このとき，C が X のノルム位相について閉であることと，弱位相 $\sigma(X,X^*)$ について閉であることは同値である．

[*6] $x\neq y$ なら，ある $f\in X^*$ で $f(x)\neq f(y)$ を満たすものが存在するということ．

証明. ノルム位相は弱位相より細かいので，弱閉集合がノルム閉集合であることは明らかである．凸集合 C はノルム位相について閉集合であると仮定しよう．$x_0 \in X \setminus C$ とすれば，Hahn-Banach の定理の幾何的な表現により，ある $x^* \in X^*$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ で

$$\langle x^*, x\rangle < \alpha < \langle x^*, x_0\rangle \quad \forall x \in C$$

を満たすものが存在する．$U = \{x \in X \mid \langle x^*, x\rangle > \alpha\}$ と定義すれば U は $\sigma(X, X^*)$-開集合であり，$x_0 \in U$ かつ $C \cap U = \emptyset$ を満たす．よって x_0 は $X \setminus C$ の $\sigma(X, X^*)$ に関する内点であり，x_0 は任意に選んでいるから $X \setminus C$ は $\sigma(X, X^*)$-開集合であることがわかる． □

命題 A.3.5.
X を Banach 空間とし，(x_n) は x_∞ に弱収束する点列とする．このとき，$\|x_\infty\| \leq \liminf_n \|x_n\|$ が成り立つ．

証明. (x_n) は x_∞ に弱収束するから，任意の $x^* \in X^*$ について

$$|\langle x^*, x_\infty\rangle| = \lim_{n\to\infty} |\langle x^*, x_n\rangle| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \|x^*\|$$

が成り立つ．この式で $\|x^*\| \leq 1$ について sup をとれば，

$$\|x_\infty\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$$

がわかる． □

汎弱位相に関する最も重要な結果の一つである，Alaoglu の定理を証明しよう．

定理 A.3.6 (Alaoglu).
X を Banach 空間とする．このとき X^* の閉単位球は，汎弱位相 $\sigma(X^*, X)$ についてコンパクトである．

定理を証明するために，以下の補題を用意する．

補題 A.3.7.
X を線形空間とすれば，$\mathrm{Hom}(X, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^X$ は $\mathbb{R}^X$ の積位相について閉集合である．ただし，$\mathrm{Hom}(X, \mathbb{R})$ は X から $\mathbb{R}$ への線形写像 全体の空間である．

証明. $x \in X$ に対して，射影 $\mathrm{pr}_x \colon \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}$ を $\mathrm{pr}_x(f) = f(x)$ によって定義する．このとき，$\mathbb{R}^X$ の積位相とは写像の族 $(\mathrm{pr}_x)_{x \in X}$ によって生成される位相なのであった．線形写像の定義より，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}(X, \mathbb{R}) \\
&= \left\{ f \in \mathbb{R}^X \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall x, y \in X \ f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall x \in X \ f(\alpha x) = \alpha f(x) \end{array} \right\} \\
&= \bigcap_{x, y \in X} \{f \in \mathbb{R}^X \mid \mathrm{pr}_{x+y}(f) - \mathrm{pr}_x(f) - \mathrm{pr}_y(f) = 0\} \cap \bigcap_{\substack{\alpha \in \mathbb{R} \\ x \in X}} \{f \in \mathbb{R}^X \mid \mathrm{pr}_{\alpha x}(f) - \mathrm{pr}_x(\alpha f) = 0\}
\end{aligned}$$

が成り立っている．積位相の定義より上の式に出てくる $\mathrm{pr}_{x+y}, \mathrm{pr}_x, \mathrm{pr}_y, \mathrm{pr}_{\alpha x}$ はどれも連続写像であり，また積位相についてスカラー倍 $f \mapsto \alpha f$ は連続であることから，写像 $f \mapsto \mathrm{pr}_x(\alpha f)$ も連続となる． したがって，

$$\{f \in \mathbb{R}^X \mid \mathrm{pr}_{x+y}(f) - \mathrm{pr}_x(f) - \mathrm{pr}_y(f) = 0\}, \qquad \{f \in \mathbb{R}^X \mid \mathrm{pr}_{\alpha x}(f) - \mathrm{pr}_x(\alpha f) = 0\}$$ □

はどれも $\mathbb{R}^X$ の閉集合であり，それらの共通部分で表現される $\mathrm{Hom}(X,\mathbb{R})$ も閉集合となる．

証明 (定理 A.3.6). X を Banach 空間とし，B_{X^*} を X^* の閉単位球とする．すなわち，

$$B_{X^*} = \{f \in X^* \mid \|T\| \leq 1\} = \{f \in \mathrm{Hom}(X,\mathbb{R}) \mid \forall x \in X\ |f(x)| \leq \|x\|\}$$

と定義する．ただし，二つ目の等号は有界作用素と作用素ノルムの定義より従う．これにより

$$B_{X^*} = \mathrm{Hom}(X,\mathbb{R}) \cap \prod_{x\in X} [-\|x\|, \|x\|]$$

という表現が成り立つので，右辺の表現からコンパクト性を調べればよい．Tychonoff の定理より $\prod_{x\in X}[-\|x\|,\|x\|]$ は $\mathbb{R}^X$ の積位相についてコンパクトであり，補題 A.3.7 より $\mathrm{Hom}(X,\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^X$ の積位相について閉集合である．位相区間の一般論よりコンパクト集合と閉集合の共通部分はコンパクトになるので，B_{X^*} は $\mathbb{R}^X$ の積位相についてコンパクトである．ところが X^* の汎弱位相 $\sigma(X^*,X)$ は $\mathbb{R}^X$ の積位相の制限に他ならないから，X^* は $\sigma(X^*,X)$ についてもコンパクトである． □

Alaoglu の定理より B_{X^*} がコンパクトであることはわかったけれども，実はこれだけでは少々使い勝手が悪い．というのも，汎弱位相 $\sigma(X^*,X)$ が距離付け可能かどうかよくわからないので，コンパクト性が点列コンパクト性と同値になるからわからないからである．しかし，少なくとも有界集合に制限すれば汎弱位相 $\sigma(X^*,X)$ は距離付け可能となることが知られている．

定理 A.3.8.

(i) X を可分 Banach 空間とする．このとき，X^* の閉単位球 B_{X^*} は汎弱位相 $\sigma(X^*,X)$ について距離付け可能である．

(ii) X を Banach 空間とし，X^* は可分であるとする．このとき X の閉単位球 B_X は弱位相 $\sigma(X,X^*)$ に関して距離付け可能である．

証明. 二つの証明はほとんど同じなので，(i) のみ示す．$X_0 = \{x_n\,;\,n \in \mathbb{N}\}$ を X の稠密部分空間で $x_0 = 0$ なるものとする．また，標準的な埋め込み $X \hookrightarrow X^{**}$ を J で表すことにする．$f, g \in X^*$ に対して

$$d(f,g) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}\frac{1}{\|x_n\|}|f(x_n) - g(x_n)|$$

と定義すれば，X_0 が X で稠密であることから，これは $\sigma(X^*,X_0)$ の位相を定める距離となる．したがって $\sigma(X^*,X_0)$ と $\sigma(X^*,X)$ の B_{X^*} への制限が一致することを示せばよい．定義より明らかに $\sigma(X^*,X_0) \subset \sigma(X^*,X)$ が成り立つ．逆を示すためには, 任意の $x \in X$ に対して $J(x)|_{B_{X^*}} \colon B_{X^*} \to \mathbb{R}$ が $\sigma(X^*,X_0)$ について連続であることを示せばよい．$f \in B_{X^*}$ を任意に固定し, $\varepsilon > 0$ を任意に選ぶ．このとき $J(x)^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))$ が B_{X^*} 上で $\sigma(X^*,X_0)$ に関する f の近傍であることを示せばよい．$n \geq 1$ を $\|x - x_n\| < \varepsilon/3$ となるように選ぶ．このとき $J(x_n)^{-1}(U_{\varepsilon/3\|x_n\|}(f(x_n)))$ は $\sigma(X^*,X_0)$ に関する f の開近傍であり $g \in B_{X^*} \cap$

$J(x_n)^{-1}(U_{\varepsilon/3\|x_n\|}(f(x_n)))$ とすれば

$$\begin{aligned}
|J(x)(g) - J(x)(f)| &= |g(x) - f(x)| \\
&\leq |g(x) - g(x_n)| + |g(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \\
&\leq \|g\|\|x - x_n\| + \|g - f\|\|x_n\| + \|f\|\|x_n - x\| \\
&\leq 2\|x_n - x\| + \|g - f\|\|x_n\| \\
&< \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

がなりたつ。よって $J(x)(g) \in U_\varepsilon(f(x))$ となり，

$$B_{X^*} \cap J(x_n)^{-1}(U_{\varepsilon/3\|x_n\|}(f(x_n))) \subset B_{X^*} \cap J(x)^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))$$

がわかる．ゆえに $B_{X^*} \cap J(x)^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))$ は $\sigma(X^*, X_0)$ に関する f の近傍である． □

距離空間についてはコンパクト性と点列コンパクト性が同値であることに注意すれば，定理 A.3.8 より次の系を得る．

系 A.3.9.

(i) X を可分 Banach 空間とする．X^* の有界集合 F について次の 2 条件は同値である．
  (a) F は汎弱位相についてコンパクトである．
  (b) F は汎弱位相について点列コンパクトである．

(ii) X を Banach 空間とし，X^* は可分であるとする．このとき X の有界集合 A について次の 2 条件は同値である．
  (a) A は弱位相についてコンパクトである．
  (b) A は弱位相について点列コンパクトである．

上記の結果は定理 A.3.8 よりすぐに得られるというだけで，(i) に可分性は必要ない．それが高名な Eberlein-Šmulian の定理である．本ノートでは特に Eberlein-Šmulian の定理を用いることはないので証明はしないが，参考のために主張だけを載せておこう．

定理 A.3.10 (Eberlein-Šmulian).
Banach 空間 X の部分集合 A に対して以下の条件は同値である．

(i) A は X の弱位相に関してコンパクトである．
(ii) A は X の弱位相に関して可算コンパクトである．
(iii) A は X の弱位相に関して点列コンパクトである．

また，上記の条件 (i)–(iii) のコンパクト，可算コンパクト，点列コンパクトをそれぞれ相対コンパクト，相対可算コンパクト，相対点列コンパクトでおきかえたものを (i)'–(iii)' と呼ぶことにする．このとき，(i)'–(iii)' も同値である．

Eberlein-Šmulian の定理について詳しくは，宮島 [83]，Fabian, et al. [41]，Albiac and Kalton [1] などを参照されたい．

標準的な埋め込み $J\colon X \to X^{**}$ が全射であるとき，Banach 空間 X は反射的 (reflexive) であるというので

あった．本節の残りの部分では，反射的 Banach 空間の性質を調べることにする．最終的な目標は，反射的 Banach 空間の有界列は弱収束する部分列を持つという事実の証明である．

命題 A.3.11.
Banach 空間 X が反射的であるための必要十分条件は，閉単位球 B_X が弱位相 $\sigma(X, X^*)$ に関してコンパクトであることである．

命題 A.3.11 を証明するために，少しばかり準備が必要である．

補題 A.3.12.
X を Banach 空間とし，$J\colon X \to X^{**}$ を標準的な埋め込みとする．このとき，$J(B_X)$ は $\sigma(X^{**}, X^*)$ に関して $B_{X^{**}}$ で稠密である．

証明. B を $J(B_X)$ の $\sigma(X^{**}, X^*)$ に関する閉包とする．J は等長埋め込みであるから，$B \subset B_{X^{**}}$ が成り立つ．$x^{**} \in B_{X^{**}} \setminus B$ であるとし，矛盾を導こう．B は $\sigma(X^{**}, X^*)$ について X^{**} の閉凸集合であるから，Hahn-Banach の定理の幾何的表現[*7]により，ある $x^* \in X^*$ と $\alpha \in \mathbb{R}$，$\varepsilon > 0$ で

$$\langle x^*, x \rangle < \alpha < \alpha + \varepsilon < \langle x^*, x^{**} \rangle \quad \forall x \in B_X$$

を満たすものが存在する．$0 \in B_X$ だから $\alpha > 0$ であり，先ほどの式の各辺を α で割ることで

$$\left\langle \frac{x^*}{\alpha}, x \right\rangle < 1 < 1 + \frac{\varepsilon}{\alpha} < \left\langle \frac{x^*}{\alpha}, x^{**} \right\rangle \quad \forall x \in B_X$$

を得る．一つ目の不等号より $x^*/\alpha \in B_{X^*}$ がわかるから，これと二つ目の不等号より

$$1 + \frac{\varepsilon}{\alpha} < \left| \left\langle \frac{x^*}{\alpha}, x^{**} \right\rangle \right| \leq \left\| \frac{x^*}{\alpha} \right\| \|x^{**}\| \leq 1$$

となる．これは矛盾である． □

証明 (命題 A.3.11). X が反射的であると仮定する．Alaoglu の定理より $B_{X^{**}}$ は $\sigma(X^{**}, X^*)$-コンパクトであるから，B_X も $\sigma(X, X^*)$-コンパクトである．

逆に B_X が $\sigma(X, X^*)$-コンパクトであると仮定しよう．このとき $J(B_X)$ は $\sigma(X^{**}, X^*)$-コンパクトであり，よって $\sigma(X^{**}, X^*)$-閉集合である．補題 A.3.12 より $J(B_X)$ は $\sigma(X^{**}, X^*)$ について $B_{X^{**}}$ で稠密なので，$J(B_X) = B_{X^{**}}$ がわかる．ゆえに X は反射的である． □

命題 A.3.13.
X を反射的 Banach 空間とし，$Y \subset X$ をその閉部分空間とする．このとき Y も反射的である．

証明. 命題 A.3.11 より，B_Y が弱位相 $\sigma(Y, Y^*)$ でコンパクトなことを示せばよい．X は反射的だから B_X は $\sigma(X, X^*)$-コンパクトであり（命題 A.3.11），Y は X の閉凸集合だから $\sigma(X, X^*)$-閉集合である．閉集合とコンパクト集合の共通部分はコンパクトなので，$B_Y = B_X \cap Y$ は $\sigma(X, X^*)$-コンパクトである．補題 A.3.3 より $\sigma(Y, Y^*)$ と $\sigma(X, X^*)$ の Y への制限は一致するから，B_Y は $\sigma(Y, Y^*)$-コンパクトであることがわかる． □

[*7] たとえば，Rudin [99, 3.4 Theorem]

命題 A.3.14.
Banach 空間 X が反射的であるための必要十分条件は，X^* が反射的であることである．

証明. X が反射的であるとし，$J\colon X \to X^{**}$ を標準的な埋め込み（X は反射的なので今は特に同型である）とする．$\varphi \in X^{***}$ が与えられたとしよう．このとき $x \mapsto \langle \varphi, J(x) \rangle$ は x 上の有界線形作用素となるので，それを f で表すことになる．このとき明らかに

$$\langle \varphi, J(x) \rangle = \langle f, x \rangle = \langle f, J(x) \rangle \quad \forall x \in X$$

が成り立つ．いま J は同型写像だから，これは φ が標準的な埋め込み $X^* \hookrightarrow X^{**}$ による f の像であることを表している．したがってこの埋め込みは全射であり，X^* は反射的である．

逆に X^* が反射的であると仮定する．このとき前半の議論より X^{**} は反射的であり，$J(X)$ は X^{**} のノルム位相に関する閉部分空間なので，命題 A.3.13 により反射的となる．ゆえに X も反射的である． □

もうそろそろ目標に定理にたどりつけそうなのだが，もう一つだけ可分性に関する主張を証明しなくてはならない．

命題 A.3.15.
X を Banach 空間とする．X^* が可分ならば，X も可分である．

証明. $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ を X^* の稠密部分集合とし，x_n を

$$\|x_n\| = 1, \qquad \langle x_n^{**}, x_n \rangle \geq \frac{1}{2}\|x_n^{**}\| \tag{A.3.1}$$

を満たすように選ぶ．X_0 を $\{x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ の元の $\mathbb{Q}$-線形結合全体の集合とすれば，これは可算集合である．このとき X_0 が X の稠密部分集合となっていることを示せばよい．そのためには，$f|_{X_0}= 0$ を満たす任意の $f \in X^*$ について $f = 0$ が成り立つことを示せばよい．$f|_{X_0}= 0$ であると仮定し，任意に選んだ $\varepsilon > 0$ に対して，x_N^* を $\|f - x_N^*\| < \varepsilon/3$ を満たすように取る．このとき

$$\begin{aligned}
\|f\| &\leq \|f - x_N^{**}\| + \|x_N^{**}\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + 2\langle x_n^{**}, x_n \rangle \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + 2\langle x_n^{**} - f, x_n \rangle \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + 2\|x_n^{**} - f\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ．いま $\varepsilon > 0$ は任意に選んでいるから，$\|f\| = 0$ となる．すなわち $f = 0$ である． □

系 A.3.16.
Banach 空間 X について，次の条件は同値である．

(i) X は可分かつ反射的である．
(ii) X^* は可分かつ反射的である．

証明. X は可分かつ反射的であると仮定する．X が反射的なので，命題 A.3.14 より X^* も反射的となる．また X が可分かつ反射的だから X^{**} も可分となるので，命題 A.3.15 より X^* は可分となる．

逆に X^* が可分かつ反射的であると仮定すれば，命題 A.3.14 より X は反射的であり，命題 A.3.15 より X は可分となる． □

定理 A.3.17.
反射的 Banach 空間の有界列は，弱収束する部分列を持つ．

証明. X を反射的 Banach 空間とし，(x_n) をその有界点列とする．X_0 を $\{x_n\,;\,n \in \mathbb{N}\}$ によって生成される部分空間とすれば，$Y = \overline{X_0}$（ノルム閉包）は X の可分な閉部分空間となる．命題 A.3.13 より Y は反射的 Banach 空間であり，系 A.3.16 より Y^* もまた可分な反射的 Banach 空間となる．したがって，命題 A.3.8 により Y の閉球は弱位相 $\sigma(Y, Y^*)$ について距離付け可能となる．Y は反射的なので閉球は $\sigma(Y, Y^*)$ についてコンパクトであり（命題 A.3.11），距離付け可能性と合わせればその点列が収束部分列を持つことがわかる．有界列 (x_n) は Y のとある閉球に含まれるので，Y の弱位相で収束する部分列 (x_{n_k}) を持つ．弱位相 $\sigma(Y, Y^*)$ と，X の弱位相 $\sigma(X, X^*)$ の Y への制限は一致する（補題 A.3.3）から，(x_{n_k}) の $\sigma(X, X^*)$ についても収束する． □

A.4 測度の空間と収束定理

本節では，有限測度の成す空間の位相的な性質を調べよう．本節での最終的な目標は，高名な Vitali-Hahn-Saks の定理を証明することである．

$(X, \mathscr{A})$ を可測空間とする．$(X, \mathscr{A})$ 上の実数値有限加法的測度 μ に対して

$$\|\mu\| = \sup\left\{ \sum_i |\mu(A_i)| \,\middle|\, (A_i) \text{ は } X \text{ の可測な有限分割} \right\}$$

と定義し，$\|\mu\|$ を μ の全変動 (total variation) と呼ぶ．$\|\mu\| < \infty$ であるとき，有限加法的測度 μ は有界であるという．全変動は Jordan 分解を用いて $\|\mu\| = \mu^+(X) + \mu^-(X)$ とも表現できる．（有限加法的）測度 $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ を μ の全変動測度と呼んだりもする．有界な実数値有限加法的測度全体の空間を $\mathrm{ba}(X, \mathscr{A})$ で表し，有界な実数値測度全体の空間を $\mathrm{ca}(X, \mathscr{A})$ で表す．よく知られているように，全変動 $\|\mu\|$ は $\mathrm{ba}(X, \mathscr{A})$ 上のノルムを定め，$\mathrm{ca}(X, \mathscr{A})$ は全変動ノルムについて $\mathrm{ba}(X, \mathscr{A})$ の閉部分空間となる．$f \bullet \mu$ の形の測度の全変動は，$|f| \bullet |\mu|$ となる．

というのはよく知られた話だが，本節では，全変動ノルムと同値な別のノルムを考えよう．$B(\mathscr{A}, \mathbb{R})$ で $\mathscr{A}$ 上の実数値有界関数全体を表すことにする．よく知られているように，$B(\mathscr{A}, \mathbb{R})$ はノルム

$$\|\varphi\|_{B(\mathscr{A}, \mathbb{R})} = \sup_{A \in \mathscr{A}} |\varphi(A)|$$

により Banach 空間となる．

補題 A.4.1.
$\mu \in \mathrm{ba}(X, \mathscr{A})$ なら，

$$\|\mu\|_{B(\mathscr{A},\mathbb{R})} \leq \|\mu\| \leq 2\|\mu\|_{B(\mathscr{A},\mathbb{R})}$$

が成り立つ．

証明. 三角不等式より $\|\mu\|_{B(\mathscr{A},\mathbb{R})} \leq \|\mu\|$ はわかる．$\|\mu\| \leq 2\|\mu\|_{B(\mathscr{A},\mathbb{R})}$ は（有限加法的）測度の Jordan 分解を用いればわかる． □

補題 A.4.1 より，$\| \ \|_{B(\mathscr{A},\mathbb{R})}$ は $\mathrm{ba}(X, \mathscr{A})$ 上の全変動ノルムと同値なノルムになることがわかる．
$(X, \mathscr{A})$ 上の有限測度 μ が与えられたときに，$\mathscr{A}$ は

$$d_\mu(A, B) = \mu(A \triangle B)$$

により擬距離空間となる．$\mathrm{ba}(X, \mathscr{A}, \mu)$ を，μ に対して絶対連続な有限加法的測度全体の集合とし，$\mathrm{ca}(X, \mathscr{A}, \mu) = \mathrm{ba}(X, \mathscr{A}, \mu) \cap \mathrm{ca}(X, \mathscr{A})$ と定義する．Radon-Nikodym の定理の言っていることは, $\mathrm{ca}(X, \mathscr{A}, \mu)$ が全変動ノルムについて $L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ と等長同型になるということである．

補題 A.4.2.
上記の距離 d_μ により $\mathscr{A}$ を擬距離空間と考えたとき，$\mathrm{ca}(X, \mathscr{A}, \mu) = \mathrm{ba}(X, \mathscr{A}) \cap BC((\mathscr{A}, d_\mu), \mathbb{R})$ が成り立つ．ただし，$BC((\mathscr{A}, d_\mu), \mathbb{R})$ は有界連続関数全体の空間である．

証明. $\nu \in \mathrm{ca}(X, \mathscr{A}, \mu)$ とする．任意の $A \in \mathscr{A}$ について $d_\mu(A, B) = d_\mu(\emptyset, A \triangle B)$ が成り立つから，ν の $\emptyset$ での連続性を調べればよい．ν は μ について絶対連続だから，$\mu(A) \to 0$ なら $\nu(A) \to 0$ が成り立つ．よって ν は d_μ について $\emptyset$ で連続である．

逆に，$\nu \in \mathrm{ba}(X, \mathscr{A}) \cap BC((\mathscr{A}, d_\mu), \mathbb{R})$ であると仮定する．このとき，$A_n \downarrow \emptyset$ ならば $d_\mu(\emptyset, A_n) \to 0$ となるので，ν の d_μ に関する連続性より $\nu(A_n) \to 0$ となる．よって ν は可算加法的である．また $\mu(A) = 0$ なら $d_\mu(0, A) = 0$ となり，ν の d_μ に関する連続性より $\nu(A) = \nu(\emptyset) = 0$ が成り立つ．よって ν は μ について絶対連続である． □

補題 A.4.2 より，測度の解析に位相空間論の知識を使うことが出来るようになる．$(X, \mathscr{A})$ 上の測度 μ が与えられたときに，

$$B_{\mu,\delta}(A) = \{B \in \mathscr{A} \mid d_\mu(A, B) \leq \delta\}$$

と定義する．すなわち，$B_{\mu,\delta}(A)$ とは擬距離空間 $\mathscr{A}$ における，A を中心とした半径 δ の閉球である．

命題 A.4.3.
$(X, \mathscr{A}, \mu)$ を有限測度空間とする．このとき，$\mathbb{R}$-値測度の列 (μ_n) について次の条件は同値である．

(i) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ と $N \in \mathbb{N}$ で次の式を満たすものが存在する．

$$\sup_{n,m \geq N} \|\mu_n - \mu_m\|_{B(B_{\mu,\delta}(\emptyset),\mathbb{R})} \leq \varepsilon.$$

(ii) (μ_n) は d_μ について，0 で同程度連続である．

(iii) (μ_n) は μ に対して一様に絶対連続である．

証明． (ii) と (iii) は同じ条件を測度の言葉と距離の言葉で言い換えたに過ぎない．これらは明らかに (i) より強い条件である．(i) $\Longrightarrow$ (iii) を示そう．$\varepsilon > 0$ に対して N を

$$\sup_{n,m\geq N} \sup\{|\mu_n(A) - \mu_m(A)| \mid A \in B_{\mu,\delta}(\emptyset)\} < \frac{\varepsilon}{2}$$

となるように選ぶ．μ_N は μ に対して絶対連続だから，$\alpha_N > 0$ を

$$\mu_N(A) < \alpha_N \implies |\nu(A)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となるようにとれる．さらに，$0 \leq n < N$ に対しては，α_n をそれぞれ

$$\mu(A) < \alpha_n \implies |\nu_n(A)| < \varepsilon$$

を満たすように選ぶ．このとき $\alpha = \delta \wedge \bigwedge_{0\leq n\leq N} \alpha_n$ と定義すれば，

$$\mu(A) < \alpha \implies \sup_{n\in\mathbb{N}} |\nu_n(A)| \leq \varepsilon$$

が成り立つ．ゆえに (μ_n) は μ に対して一様に絶対連続である． □

系 A.4.4.
(μ_n) が命題 A.4.3 の同値条件を満たし，さらに (μ_n) がある関数 ν に各点収束するなら，μ はまた ν に絶対連続な測度となる．

証明． $\varepsilon > 0$ を任意の固定する．命題 A.4.3 より (μ_n) は 0 で d_μ について同程度連続なので，$\delta > 0$ を

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall A \in B_{\mu,\delta}(\emptyset)\ |\mu_n(A)| \leq \varepsilon$$

を満たすように選ぶことができる．このとき $A \in B_{\mu,\delta}(\emptyset)$ なら

$$|\nu(A)| \leq \lim_{n\to\infty} |\mu_n(A)| \leq \varepsilon \tag{A.4.1}$$

が成立．したがって ν は 0 で d_μ-連続となり，補題 A.4.2 により μ-絶対連続な測度となることがわかる． □

有界作用素に関する一様有界性原理と類似した結果として，測度族に関する一様有界性原理が成り立つ．

定理 A.4.5 (測度に関する一様有界性原理).
$(X, \mathscr{A}, \nu)$ を有限測度空間とし，$\mathscr{M} \subset \mathrm{ca}(X, \mathscr{A}, \nu)$ とする． 全ての $A \in \mathscr{A}$ について

$$\sup_{\mu\in\mathscr{M}} |\mu(A)| < \infty$$

が成り立つなら，$\mathscr{M}$ は全変動ノルムについて有界である．

証明． 補題 A.4.1 より，$\sup_{\mu\in\mathscr{M}} \|\mu\|_{\mathscr{B}(\mathscr{A},\mathbb{R})} < \infty$ が成り立つことを示せばよい．

$$\mathscr{A}_n = \bigcap_{\mu\in\mathscr{M}} \{A \in \mathscr{A} \mid |\mu(A)| \leq n\}$$

と定義すれば，各 μ は d_ν-連続であることから，$\mathscr{A}_n$ は完備擬距離空間 $(\mathscr{A}, d_\nu)$ の閉集合である．仮定より $\bigcup_n \mathscr{A}_n = \mathscr{A}$ となるので，Baire のカテゴリー定理によって[*8]ある n と $A_0 \in \mathscr{A}$，そして $\delta > 0$ で $B_{\nu,\delta}(A_0) \subset \mathscr{A}_n$ を満たすものが存在する．このとき，$A \in B_{\nu,\delta}(A_0)$ なら $\sup_{\mu\in\mathscr{M}}|\mu(A)| \leq n$ である．

$(X, \mathscr{A}, \nu)$ は有限測度空間であるから，次の条件を満たすような X の有限分割 $(X_i)_{i\in I_0\cup I_1}$ が存在する[*9]：任意の $i \in I_0$ について $\nu(X_i) \leq \delta$ が成り立ち，また任意の $i \in I_1$ について X_i は測度 ν のアトムである．いま各 $\mu \in \mathscr{M}$ は ν に絶対連続なので，ν のアトムは μ のアトムでもある．したがって，$i \in I_1$ に対しては

$$\sup_{\mu\in\mathscr{M}} \sup_{A\subset X_i} |\mu(A)| = \sup_{\mu\in\mathscr{M}} |\mu(X_i)| < \infty$$

が成り立つ．ゆえに，ある $M > 0$ が存在して，

$$\sup_{i\in I_1} \sup_{\mu\in\mathscr{M}} \sup_{A\subset X_i} |\mu(A)| \leq M$$

となる．

さて，これまでの議論を用いて $\mathscr{M}$ の一様有界性を示そう．任意の $A \in \mathscr{A}$ について，

$$A \cap X_i = \big[A_0 \triangle (A \cap X_i)\big] \triangle A_0$$

が成り立つことに注意すれば，A_0 と δ，そして $(X_i)_{i\in I_0}$ の選び方より

$$|\mu(A \cap X_i)| \leq |\mu(A_0 \triangle (A \cap X_i)| + |\mu(A_0)| \leq 2n$$

が成り立つ．したがって，

$$\sup_{i\in I_0} \sup_{\mu\in\mathscr{M}} \sup_{A\in\mathscr{A}} |\mu(A \cap X_i)| \leq 2|I_0|n$$

となる．ただし，$|I_0|$ は有限集合 I_0 の濃度（すなわち元の個数）を表す．以上の議論をまとめれば，

$$\sup_{\mu\in\mathscr{M}} \sup_{A\in\mathscr{A}} |\mu(A)| \leq 2|I_0|n + |I_1|M$$

となることがわかるので，$\mathscr{M}$ の一様有界性が示された． □

いよいよ Vitali-Hahn-Saks の定理を証明しよう．

定理 A.4.6 (Vitali-Hahn-Saks).
ν を $(X, \mathscr{A})$ 上の $\mathbb{R}_{\geq 0}$-値測度とし，(μ_n) を $\mathrm{ca}(X, \mathscr{A}, \nu)$ の点列とする．任意の $A \in \mathscr{A}$ に対して $(\mu_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ がある実数に収束するなら，$\mu(A) := \lim_n \mu_n(A)$ は ν に関して絶対連続な有限測度を定める．さらに，このとき $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は一様有界かつ ν に関して一様に絶対連続となる．

証明． $\mu(A) = \lim_n \mu_n(A)$ と定義すれば，μ は $(X, \mathscr{A})$ 上の有限加法的測度を定める．したがって，補題 A.4.2，命題 A.4.3，系 A.4.4，そして定理 A.4.5 から，(μ_n) が命題 A.4.3 の条件 (i) を満たすことを示せば十分であることがわかる．

[*8] Baire のカテゴリー定理は完備「擬」距離空間に対しても適用可能である．（例えば，Kelley [69, Chapter6. 34 Theorem] を見よ．）さらに，擬距離空間は (T_3) 公理を満たすことにも注意せよ．擬距離空間を扱うのが嫌なら，商空間 $\mathscr{A}/\mu$ を考えればよい．$\mathscr{A}$ の μ-零集合全体は $\mathscr{A}$ のイデアルをなすので，商空間 $\mathscr{A}/\mu$ はまた σ-完備な Boole 代数となる．

[*9] 証明は，例えば Bogachev [12, 1.12.9.Theorem] などを見よ．一般の無限測度ではもちろんこのような分解は存在するはずもないが，任意の測度はアトムをもたない測度と purely atomic な測度に分解することができる（Fonseca and Leoni [44, Proposition 1.22]）ので，これはある意味 [12, 1.12.9.Theorem] の一般化と見なせるかもしれない．

$\varepsilon > 0$ を任意に固定し，

$$\mathscr{A}_n = \bigcap_{k,l \geq n} \{A \in \mathscr{A} \mid |\mu_k(A) - \mu_l(A)| \leq \varepsilon\}$$

と定義する．このとき各 μ_m は d_ν-連続関数だから，$\mathscr{A}_n$ はどれも d_ν-閉集合となる．仮定より $\bigcup_n \mathscr{A}_n = \mathscr{A}$ となるので，Baire のカテゴリー定理によってある $A_0 \in \mathscr{A}$ と $N \in \mathbb{N}$，そして $\delta > 0$ で，$B_{\nu,\delta}(A_0) \subset \mathscr{A}$ を満たすものが存在する．このとき，$k, l \geq N$ なら，

$$\sup_{A \in B_{\nu,\delta}(A_0)} |\mu_k(A) - \mu_l(A)| \leq \varepsilon$$

が成り立つ．したがって任意の $A \in B_{\nu,\delta}(\emptyset)$ および任意の $n, m \geq N$ に対して

$$|\mu_l(A) - \mu_k(A)| \leq |\mu_l(A_0 \triangle A) - \mu_k(A_0 \triangle A)| + |\mu_l(A_0) - \mu_k(A_0)| \leq 2\varepsilon$$

となることがわかる．つまり，(μ_n) は命題 A.4.3 の条件 (i) を満たす． □

系 A.4.7.
$(X, \mathscr{A}, \mu)$ を有限測度空間とする．(f_n) は可積分関数の列で，任意の $A \in \mathscr{A}$ について

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \int_A f_n d\mu$$

が $\mathbb{R}$ の中に存在するものとする．このとき (f_n) はある極限 $f \in L^1(\mu)$ に L^1 収束する．

証明． 定理 A.4.6 より (f_n) は一様可積分であり，また写像

$$A \mapsto \int_A f_n \, d\mu$$

は μ に絶対連続な測度となる．その Radon-Nikodym 導関数を f で表すことすれば，仮定より

$$\begin{aligned}
\mu(|f_n - f| > \varepsilon) &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\{|f_n - f| > \varepsilon\}} |f_n - f| \, d\mu \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\{f_n - f > \varepsilon\}} |f_n - f| \, d\mu + \int_{\{f_n - f < -\varepsilon\}} |f_n - f| \, d\mu \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\{f_n - f > \varepsilon\}} (f_n - f) \, d\mu + \int_{\{f_n - f < -\varepsilon\}} (f - f_n) \, d\mu \\
&\xrightarrow[n \to \infty]{} 0
\end{aligned}$$

となる．したがって (f_n) は f に測度収束する．定理 A.2.7 を用いれば，これより (f_n) が f に L^1-収束することがわかる． □

系 A.4.8.
$(X, \mathscr{A})$ を可測空間とする．

(i) μ が $\mathscr{A}$ 上の有限測度なら，$\mathrm{ca}(X, \mathscr{A}, \mu)$ は $B(\mathscr{A}, \mathbb{R})$ の各点収束位相について閉である．

(ii) $\mathrm{ca}(X, \mathscr{A})$ の点列が各点収束すれば，極限はまた $\mathrm{ca}(X, \mathscr{A})$ の元である．

系 A.4.8 の条件 (ii) は，$\mathrm{ca}(X,\mathscr{A})$ が $B(\mathscr{A},\mathbb{R})$ の各点収束位相について列的閉集合であるということを言っている．一方で各点収束位相は一般に距離付け可能ではない（というより列型空間とは限らない）ので，系 A.4.8 (ii) から $\mathrm{ca}(X,\mathscr{A})$ が $B(\mathscr{A},\mathbb{R})$ の各点収束位相に関する閉集合であると結論付けることは出来ない．

証明． (i) は定理 A.4.6 よりすぐにわかる．

(ii)．与えられた測度列 (μ_n) に対して

$$\nu(A)=\sum_n \frac{1}{2^n}\frac{1}{1+\|\mu_n\|}|\mu_n|(A)$$

と定義すれば，ν は $(X,\mathscr{A})$ 上の有限測度であり，全ての n について $\mu_n \ll \nu$ を満たしている．したがって，(μ_n) に定理 A.4.6 を適用することが可能となり，(ii) の主張が従う． □

A.5 Dunford-Pettis の定理

本節のテーマは，L^1 空間における弱位相と一様可積分性を結びつける Dunford-Pettis の定理を証明することである．

定理 A.5.1 (Dunford-Pettis).
$(X,\mathscr{A},\mu)$ を有限測度空間とし，$\mathscr{H}$ を $L^1(X,\mathscr{A},\mu)$ の部分集合とする．このとき，以下の条件は同値である．

(i) $\mathscr{H}$ は一様可積分である．

(ii) $\mathscr{H}$ は $L^1(X,\mathscr{A},\mu)$ の弱位相に関して相対点列コンパクトである．

なお Eberline-Šmlian の定理より，定理 A.5.1 の条件 (ii) は $L^1(X,\mathscr{A},\mu)$ 弱位相に関する相対コンパクト性とも同値となることに注意しておく．

証明． はじめに，$L^1(X,\mathscr{A},\mu)$ の双対空間は $L^\infty(X,\mathscr{A},\mu)$ であり，同型 $L^\infty \ni g \mapsto T_g \in (L^1)^*$ は以下で与えられることに注意しておく．

$$\begin{aligned} T_g : L^1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_X gf\,d\mu \end{aligned}$$

Step 1：(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明． $\mathscr{H}$ が一様可積分であると仮定する．このとき，$\mathscr{H}$ の任意の点列が L^1 の弱位相で収束する部分列をもつことを示せばよろしい．$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathscr{H}$ の点列とすれば，(f_n) も明らかに一様可積分である．ここで $f_{n,k}=f_n 1_{\{|f_n|\le k\}}$ と定義すれば，$(f_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ は明らかに $L^2(X,\mathscr{A},\mu)$ のノルム有界列になっている．($|f_{n,k}|\le k$ なので．）反射的バナッハ空間 $L^2(X,\mathscr{A},\mu)$ の有界点列は弱位相で収束する部分列をもつことを思い出そう．（定理 A.3.17）$(f_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}$ の L^2-弱収束部分列 $(f_{n_{1i},1})_{i\in\mathbb{N}}$ を一つ選び，その弱極限を g_1 と書く．また，L^2-弱収束列 $(f_{n_{ki},k})_{i\in\mathbb{N}}$ とその極限 g_k が与えられたとき，L^2-弱収束列 $(f_{n_{k+1i},k+1})_{i\in\mathbb{N}}$ を $(n_{k+1i})_i$ が $(n_{ki})_i$ の部分列となるように選ぶ．また，その弱極限を g_{k+1} と書く．上記の再帰的議論により，以下の条件を満たす L^2-関数列 $(f_{n_{ki},k})_{i,k}$ と (g_k) が構成される．

- 任意の k について，$(n_{k+1i})_{i\in\mathbb{N}}$ は $(n_{ki})_{i\in\mathbb{N}}$ の部分列となっている．

- 任意の k について，$f_{n_{ki},k} \to g_k \ (i \to \infty)$ が L^2-弱収束の意味で成り立つ．

このとき，対角線論法により，任意の $k \in \mathbb{N}$ について

$$f_{n_j,k} \xrightarrow[j\to\infty]{} g_k \quad \text{weakly in } L^2$$

を満たす部分列 $(f_{n_j,k})_j$ を選び出すことが出来る．$(X,\mathscr{A},\mu)$ は有限測度空間なので $L^2(X,\mathscr{A},\mu) \subset L^1(X,\mathscr{A},\mu)$ であり，g_k はどれも $L^1(X,\mathscr{A},\mu)$ の元であることに注意しておく．さらに $L^\infty(\mu) \subset L^2(\mu)$ であるから，$f_{n_j,k} \to g_k$ は L^1-弱収束の意味でも成り立っている．したがって，命題 A.3.5 を用いれば

$$\begin{aligned}
\|g_k - g_l\|_{L^1} &\leq \varliminf_{j\to\infty} \|f_{n_j,k} - f_{n_j,l}\|_{L^1} \\
&= \varliminf_{j\to\infty} \int_X \left| f_{n_j} 1_{\{|f_{n_j}|\leq k\}} - f_{n_j} 1_{\{|f_{n_j}|\leq l\}} \right| d\mu \\
&\leq \varliminf_{j\to\infty} \int_X \left| f_{n_j} \right| 1_{\{|f_{n_j}| > k\wedge l\}}\, d\mu \\
&\leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \int_X \left| f_{n_j} \right| 1_{\{|f_{n_j}| > k\wedge l\}} d\mu
\end{aligned}$$

がわかる．(f_n) は一様可積分性であったから，上の評価より (g_k) は L^1 の Cauchy 列となる．$L^1(X,\mathscr{A},\mu)$ は完備であるから，(g_k) はある $g \in L^1(X,\mathscr{A},\mu)$ に L^1 - ノルムで収束する．あとは，この g が $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ の弱収束極限になっていることを示せばよい．$h \in L^\infty(X,\mathscr{A},\mu)$ とすれば

$$\begin{aligned}
&\left| \int_X h\{f_{n_j} - g\} d\mu \right| \\
&\leq \int_X |h| \left| f_{n_j} - f_{n_j,k} \right| d\mu + \left| \int_X h\{f_{n_j,k} - g_k\} d\mu \right| + \int_X |h| \left| g_k - g \right| d\mu \\
&\leq \|h\|_{L^\infty} \int_{\{|f_{n_j}|>k\}} \left| f_{n_j} \right| d\mu + \left| \int_X h\{f_{n_j,k} - g_k\} d\mu \right| + \|h\|_{L^\infty} \int_X |g_k - g|\, d\mu \\
&\leq \|h\|_{L^\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|f_n|>k\}} |f_n|\, d\mu + \left| \int_X h\{f_{n_j,k} - g_k\} d\mu \right| + \|h\|_{L^\infty} \int_X |g_k - g|\, d\mu
\end{aligned}$$

という評価が得られる．既に述べたように $f_{n_j,k} \to g_k$ は L^1 - の弱位相の意味で成り立っているから，上の式で j に関する極限をとれば

$$\varlimsup_{j\to\infty} \left| \int_X h\{f_{n_j} - g\} d\mu \right| \leq \|h\|_{L^\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|f_n|>k\}} |f_n|\, d\mu + \|h\|_{L^\infty} \int_X |g_k - g|\, d\mu$$

となる．さらに $k \to \infty$ とすれば，(f_n) の一様可積分性と $g_k \to g$（L^1 収束）より

$$\varlimsup_{j\to\infty} \left| \int_X h\{f_n - g\} d\mu \right| = 0$$

がわかる．$h \in L^\infty$ は任意に選んでいたから，これより (f_{n_j}) は g に L^1-弱収束する．

Step 2：(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． 背理法で示す．$\mathscr{H}$ は弱位相で相対点列コンパクトであり，かつ一様可積分でないと仮定しよう．このとき，$\varepsilon_0 > 0$ と $\mathscr{H}$ の点列 (f_n) で，全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_{\{|f_n|>n\}} |f_n|\, d\mu \geq \varepsilon_0$$

を満たすものが存在する．$\mathscr{H}$ は弱位相について相対点列コンパクトなので，L^1 の弱位相で収束する (f_{n_k}) を選ぶことができる．その極限を f とおくことにする．Vitali-Hahn-Saks の定理より (f_{n_k}) は一様可積分となるので，十分大きい k をとればこのとき各 $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_{\{|f_k|>n_k\}} |f_{n_k}|\,d\mu \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \int_{\{|f_j|>n_k\}} |f_{n_j}|\,d\mu < \varepsilon$$

が成り立つ．これは矛盾である． □

命題 A.5.2.
$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，$L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$ の点列 (f_n) は弱位相で f に収束すると仮定する．このとき，任意の部分 σ - 代数 $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ について，$(E[f_n|\mathscr{G}])$ は弱位相で $E[f|\mathscr{G}]$ に収束する．

証明. $\xi \in L^\infty(\mathscr{F})$ とすれば，条件付き期待値の定義より

$$E[\xi\, E[f_n|\mathscr{G}]] = E[E[\xi|\mathscr{G}]\, E[f_n|\mathscr{G}]] = E[f_n\, E[\xi|\mathscr{G}]]$$

が成り立つ．$E[\xi|\mathscr{G}] \in L^\infty(\mathscr{F})$ であることと，(f_n) が f に弱収束することに注意して極限をとれば，

$$\lim_{n\to\infty} E[\xi\, E[f_n|\mathscr{G}]] = \lim_{n\to\infty} E[f_n\, E[\xi|\mathscr{G}]] = E[f\, E[\xi|\mathscr{G}]] = E[\xi\, E[f|\mathscr{G}]]$$

となる．いま $\xi \in L^\infty(\mathscr{F})$ は任意に選んでいたから，$(E[f_n|\mathscr{G}])$ は $E[f|\mathscr{G}]$ に弱収束することがわかる． □

A.6 合成積

A.7 Stone-Weierstrass の定理

本節では，Stone-Weierstrass の多項式近似定理を証明する．近似に使う多項式の構成を行おう．$Q(x;\delta)$ で 1 辺の長さ 2δ で中心が x の d 次元閉立方体を表すことにする．つまり，

$$Q(x;\delta) = \prod_{1\leq i\leq d} [\delta - x_i, x_i + \delta]$$

である．$n \in \mathbb{N}$ と $x = (x_i) \in \mathbb{R}^d$ に対して，

$$p_n(x) = \frac{1}{\alpha_n^d} \prod_{1\leq i\leq d} \left(1 - x_i^2\right)^n, \qquad \alpha_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt$$

と定義する．このとき p_n は $2dn$ 次の多項式関数で，$Q(0;1)$ 上正の値をとる．定義を眺めてみれば，この多項式は 0 の付近で大きく，そして 1 の付近ではとても小さいことがわかる．また

$$\begin{aligned}
\int_{Q(x;1)} p_n(x-y)dy &= \frac{1}{\alpha_n^d} \int_{Q(x;1)} \prod_{1\leq i\leq d} \left(1 - (x_i - y_i)^2\right)^n dy \\
&= \frac{1}{\alpha_n^d} \int_{Q(0;1)} \prod_{1\leq i\leq d} \left(1 - z_i^2\right)^n dz \\
&= \frac{1}{\alpha_n^d} \prod_{1\leq i\leq d} \left(\int_{-1}^{1} \left(1 - z_i^2\right)^n dz_i \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\alpha_n^d}\left(\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^n dt\right)^d \\
&= 1
\end{aligned}
$$

が成り立つ．$f \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ に対して，

$$
P_n(x) = f1_{Q(0;1)} * p_n(x) = \int_{Q(0;1)} f(y)p_n(x-y)dy
$$

と定義する．DiBenedetto [27] によれば，これを f に関する Stieltjes 多項式 (Stieltjes polynomial) と呼ぶらしい．

> **命題 A.7.1 (Weierstrass).**
> $f \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ とすれば，Stieltjes 多項式の列 $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $Q(0;1)$ 上 f に一様収束する．

証明. $x \in Q(0;1)$ かつ $0 < \delta < 1$ とする．

$$
\begin{aligned}
&|P_n(x) - f(x)| \\
&= \left|\int_{Q(0;1)} f(y)p_n(x-y)dy - \int_{Q(x;1)} f(x)p_n(x-y)dy\right| \\
&\leq \left|\int_{Q(x;\delta)} f(y)p_n(x-y)dy - \int_{Q(x;\delta)} f(x)p_n(x-y)dy\right| \\
&\quad + \left|\int_{Q(0;1)\setminus Q(x;\delta)} f(y)p_n(x-y)dy\right| + \left|\int_{Q(x;1)\setminus Q(x;\delta)} f(x)p_n(x-y)dy\right| \\
&\quad + \left|\int_{Q(x;\delta)\setminus Q(0;1)} f(y)p_n(x-y)dy\right| \\
&\leq \sup_{y\in Q(x;\delta)} |f(x)-f(y)| + \sup_{y\in Q(0;1)} |f(y)| \int_{Q(0;1)\setminus Q(x;\delta)} p_n(x-y)dy \\
&\quad + |f(x)| \int_{Q(x;1)\setminus Q(x;\delta)} p_n(x-y)dy + \sup_{y\in Q(x,\delta)} |f(y)| \int_{Q(x;\delta)} dy \\
&\leq \sup_{\substack{y,z\in Q(0;2) \\ |y-z|\leq\delta}} |f(z)-f(y)| + \sup_{y\in Q(0;1)} |f(y)| \int_{[Q(0;1)\cup Q(x;1)]\setminus Q(x;\delta)} p_n(x-y)dy \\
&\quad + \sup_{y\in Q(0;2)} |f(y)| \int_{Q(0;\delta)} dy
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

上の式の一つ目の積分項を評価しよう．$y \notin Q(x;\delta)$ ならば，ある $i \in \{1, \ldots, d\}$ で $|y_i - x_i| > \delta$ が存在する．このとき $1-(x_i-y_i)^2 \leq 1-\delta^2$ であり，

$$
p_n(x-y) = \frac{1}{\alpha_n^d}\prod_{1\leq i\leq d}\left(1-(x_i-y_i)^2\right)^n \leq \frac{1}{\alpha_n^d}(1-\delta^2)^n
$$

となる．また

$$
\alpha_n = 2\int_0^1 (1-t^2)^n dt \geq 2\int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{2}{n+1}
$$

が成り立っている．したがって

$$\begin{aligned}\int_{[Q(0;1)\cup Q(x;1)]\setminus Q(x;\delta)} p_n(x-y)dy &\le \left(\frac{n+1}{2}\right)^d (1-\delta^2)^n \int_{Q(0;1)\cup Q(x;1)} dy \\ &\le 2\left(\frac{n+1}{2}\right)^d (1-\delta^2)^n\end{aligned}$$

なる評価を得る．

以上の議論から，全ての $x \in Q(0;1)$ に対して

$$|P_n(x)-f(x)| \le \sup_{\substack{y,z\in Q(0;2)\\|y-z|\le\delta}} |f(z)-f(y)| + 2\left(\frac{n+1}{2}\right)^d (1-\delta^2)^n + \sup_{y\in Q(0;2)} |f(y)| \int_{Q(0;\delta)} dy$$

が成り立つ．右辺は x によらない量だから，

$$\sup_{x\in Q(0;1)} |P_n(x)-f(x)| \le \sup_{\substack{y,z\in Q(0;2)\\|y-z|\le\delta}} |f(z)-f(y)| + 2\left(\frac{n+1}{2}\right)^d (1-\delta^2)^n + \sup_{y\in Q(0;2)} |f(y)| \int_{Q(0;\delta)} dy$$

がわかる．ここで $n\to\infty$ の上極限をとると，$0<1-\delta^2<1$ より

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sup_{x\in Q(0;1)} |P_n(x)-f(x)| \le \sup_{\substack{y,z\in Q(0;2)\\|y-z|\le\delta}} |f(z)-f(y)| + \sup_{y\in Q(0;2)} |f(y)| \int_{Q(0;\delta)} dy$$

となる．さらに f が $Q(0;2)$ 上一様連続となることに注意して $\delta\to 0$ とすれば，

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sup_{x\in Q(0;1)} |P_n(x)-f(x)| = 0$$

となることがわかる． □

系 A.7.2.
$f \in C(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ とする．このとき任意の $k>0$ に対して，多項式関数列 (Q_n) で $Q(0;k)$ 上 f に一様収束するものが存在する．

証明. $f \in C(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ に対して，$f_k(x)=f(kx)$ と定義する．f_k はまた連続関数だから，命題 A.7.1 により $Q(0;1)$ 上 f_k に一様収束する多項式関数列 (P_n) が存在する．$Q_n(x)=P_n(kx)$ と定義すれば Q_n もまた多項式関数であり，

$$\sup_{x\in Q(0;k)} |f(x)-Q_n(x)| = \sup_{x\in Q(0;1)} |f_k(x)-P_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

が成り立つ． □

以下の系は伊藤の公式の証明に有用である．

系 A.7.3.
$f \in C^{n_1,n_2}(\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2},\mathbb{R})$ とする．このとき，任意の $k>0$ に対して，ある多項式関数列 (Q_n) で

$$\sup_{x\in Q(0;k)} |D_1^{\alpha_1} f(x) - D_1^{\alpha_1} Q_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall |\alpha_1| \le n_1$$

$$\sup_{x\in Q(0;k)} |D_2^{\alpha_2} f(x) - D_2^{\alpha_2} Q_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall |\alpha_2| \le n_2$$

を満たすものが存在する．ただし，$\alpha_1 = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1d_1})$ と $\alpha_2 = (\alpha_{21}, \dots, \alpha_{2d_2})$ は多重指数であり，微分作用素は

$$D_1^{\alpha_1} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_{11}} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_{d_1}}\right)^{\alpha_{1d_1}}, \quad D_2^{\alpha_2} = \left(\frac{\partial}{\partial x_{d_1+1}}\right)^{\alpha_{21}} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_{d_1+d_2}}\right)^{\alpha_{2d_2}}$$

によって定義する．

証明. $Q(0;1)$ として示せばよい．f に関する Stieltjes 多項式 (P_n) は合成積によって定義されているから，$x \in \operatorname{Int} Q(0;1)$ なら

$$D_1^{\alpha_1} P_n(x) = D_1^{\alpha_1}(f1_{Q(0;1)} * p_n)(x) = (D_1^{\alpha_1} f1_{Q(0;1)}) * p_n(x)$$
$$D_2^{\alpha_2} P_n(x) = D_2^{\alpha_2}(f1_{Q(0;1)} * p_n)(x) = (D_2^{\alpha_2} f1_{Q(0;1)}) * p_n(x)$$

となる．連続性よりこの式はさらに $Q(0;1)$ 全体に拡張できる．したがって命題 A.7.1 より結論が従う． □

次に，より一般の Stone-Weierstrass の定理を証明しよう．位相空間 X 上の実数値連続関数空間 $C(X,\mathbb{R})$ は通常の線形結合に加え，各点ごとの積により $\mathbb{R}$-可換代数の構造を持つのであった．$\mathscr{F} \subset C(X,\mathbb{R})$ は，任意の異なる 2 点 $x, y \in X$ に対してある $f \in \mathscr{F}$ で $f(x) \neq f(y)$ を満たすものが存在するとき，X の点を分離するという．まずは，コンパクト Hausdorff 空間についての Stone-Weierstrass の定理の主張を述べよう．

定理 A.7.4 (Stone-Weierstrass).
X をコンパクト Hausdorff 空間とし，$\mathscr{F}$ を $C(X,\mathbb{R})$ の部分代数とする．$\mathscr{F}$ は定数関数を含み，さらに X の点を分離するなら，$\mathscr{F}$ は $C(X,\mathbb{R})$ の一様収束位相について稠密である．

証明. まずは，$f \in \mathscr{F}$ なら $|f| \in \overline{\mathscr{F}}$ となることを確かめよう．f は $\mathbb{R}$ のコンパクト集合に値をとるので，$f(X) \subset [-K, K]$ を満たすような $K > 0$ を選ぶ．このとき Weierstrass の多項式近似定理（命題 A.7.1）により，$[-K, K]$ 上で絶対値関数 $x \mapsto |x|$ を一様近似する多項式関数列 (P_n) がとれる．$\mathscr{F}$ が定数関数を含む部分代数であることから $P_n \circ f \in \mathscr{F}$ であり，$P_n \circ f \to f$ in $C(X,\mathbb{R})$ となるから $f \in \overline{\mathscr{F}}$ であることがわかった．したがって $\overline{\mathscr{F}}$ はベクトル束にもなっている．（A.1 節での注意を参照されたい．）

$f \in C(X,\mathbb{R})$ と $\varepsilon > 0$ を任意に固定する．このとき，$g \in \mathscr{F}$ で $\|f - g\|_{C(X)} \le \varepsilon$ を満たすものが存在することを示せばよい．異なる 2 点 $x, y \in X$ に対して，関数 $h_{xy} \in \mathscr{F}$ を $h_{xy}(x) \neq h_{xy}(y)$ を満たすように選ぶ．さらに

$$g_{xy}(z) = \left(\frac{f(x) - f(y)}{h(x) - h(y)}\right) h(z) + f(x) - \frac{f(x) - f(y)}{h(x) - h(y)} h(x)$$

と定義する．このとき $g_{xy} \in \mathscr{F}$ であり，さらに $g_{xy}(x) = f(x)$ かつ $g_{xy}(y) = f(y)$ を満たしている．$f - g_{xy}$ は y で 0 となる連続関数だから，ある y の開近傍 V_y で

$$\forall z \in V_y \quad g_{xy}(z) > f(z) - \varepsilon$$

を満たすものが存在する．いま $(V_y)_{y\in X}$ はコンパクト空間 X の被覆だから，有限集合 $F_1 \subset X$ で $(V_y)_{y\in F}$ がまた X の被覆となるようなものがとれる．$g_x = \bigvee_{y\in F_1} g_{xy}$ と定めれば $g_x \in \mathscr{F}$ であり，

$$\forall x, z \in X \quad g_x(z) > f(z) - \varepsilon$$

が成り立つ．g_x はまた $f(x)-g_x(x)=0$ を満たす連続関数だから，x の開近傍 U_x で

$$\forall z \in U_x \quad g_x(z) < f(z)+\varepsilon$$

を満たすものがとれる．$(U_x)_{x\in X}$ は X の開被覆だから，有限集合 $F_2 \subset X$ で $(U_x)_{x\in F_2}$ が X の被覆となるようなものが存在する．ここで $g=\bigwedge_{x\in F_2} g_x$ と定めれば $g \in \mathscr{F}$ であり，g は

$$\forall z \in X \quad f(z)-\varepsilon < g(z) < f(z)+\varepsilon$$

を満たしている．これにより $\|f-g\|_{C(X)} \leq \varepsilon$ を満たす $g \in \mathscr{F}$ が構成された． □

系 A.7.5.
X を位相空間とし，$\mathscr{F} \subset C(X,\mathbb{R})$ は定数関数を含む部分代数で，X の点を分離するものとする．このとき，$\mathscr{F}$ はコンパクト一様収束位相について $C(X,\mathbb{R})$ で稠密である．

証明. $\mathscr{K}$ を X のコンパクト集合全体とし，$K \in \mathscr{K}$ に対して i_K^* で制限写像 $C(X,\mathbb{R}) \ni f \mapsto f|_K \in C(K,\mathbb{R})$ を表すことにする．このとき $C(X,\mathbb{R})$ のコンパクト一様収束位相は，$(i_K^*)_{K\in\mathscr{K}}$ によって生成される位相に等しい．$f \in C(X;\mathbb{R})$ を任意に固定する．いま $(i_K^*)^{-1}(U(f;\varepsilon))$ の形の集合全体は f の基本近傍系をなす[*10]ので，これがどれも空でないことを示せばよい．ところがこれは定理 A.7.4 より明らかである． □

系 A.7.6.
有理数係数の多項式関数全体は，$C(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ や $C(\mathbb{R}_{\geq 0},\mathbb{R})$ で稠密である．特に，これらはどれも可分な距離化可能空間となる．

証明. 有理数係数多項式関数全体の稠密性は，系 A.7.5 よりわかる．距離化可能性は，$\mathbb{R}^d$ や $\mathbb{R}_{\geq 0}$ が σ-コンパクトな局所コンパクト Hausdorff 空間なので，$\mathscr{K}$ の共終部分集合となる列 $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がとれることからわかる． □

A.8 有界変動関数

本節では，一変数の有界変動関数に関する基礎事項を調べる．

$I=[a,b]$ を $\mathbb{R}$ の閉区間とし，$\mathrm{Par}(I)$ で I の分割の全体を表す．$\pi : a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ に対して

$$|\pi| = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i - x_{i-1}|$$

定める．

定義 A.8.1.
E を $\mathbb{R}$ の部分集合とし，$I \subset E$ を有界閉区間とする．関数 $f : E \to \mathbb{R}$ と $\pi \in \mathrm{Par}(I)$ に対して

$$V(f,I,\pi) = \sum_{x_i,x_{i-1}\in\pi} |f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

[*10] $\mathscr{K}$ は包含関係により有向集合を成すことに注意せよ．

と定義する．族 $(V(f,I,\pi))_{\pi\in\mathrm{Par}(I)}$ が有界となるとき，f は I 上で有界変動 (bounded variation) または有限変動 (finite variation) であるといい，

$$V(f,I)=\sup_{\pi\in\mathrm{Par}(I)}V(f,I,\pi)$$

を f の I での全変動 (total variation) という．任意のコンパクト区間 $I\subset E$ 上で有界変動となるとき，f は局所有界変動 (locally bounded variation) であるという．

$$\sup\{V(f;I)\mid I\subset E\text{ はコンパクトな区間 }\}<+\infty$$

のとき，f は（E 上）有限変動であるという．f の E 上での全変動を $V(f,E)$ で表す．

$E\subset\mathbb{R}$ 上の実数値有界変動関数全体の空間を $BV(E)$ で，実数値局所有界変動関数全体の空間を $BV_{\mathrm{loc}}(E)$ で表すことにする．$I=[a,b]$ の時，$V(f,[a,b])$ を $V_a^b(f)$ とも書く．以下では主に有界閉区間 $[a,b]$ 上の有限変動関数について調べるが，これらの結果のほとんどは $[a,\infty[$ 上の局所有限変動関数についても成り立つことが容易に確かめられるだろう．

命題 A.8.2.
f,g を $[a,b]$ 上定義された実数値関数，$\alpha\in\mathbb{R}$ とすれば

$$V_a^b(f+g)\le V_a^b(f)+V_a^b(g),\quad V_a^b(\alpha f)=|\alpha|V_a^b(f)$$

が成り立つ．

命題 A.8.2 より，$f\mapsto V_a^b(f)$ は $BV([a,b])$ 上のセミノルムとなることがわかる．

証明. $\pi\in\mathrm{Par}([a,b])$ とすれば，三角不等式より

$$\begin{aligned}V(f+g,[a,b],\pi)&=\sum_\pi|f(x_i)+g(x_i)-\{f(x_{i-1})+g(x_{i-1})\}|\\&\le\sum_\pi\{|f(x_i)-f(x_{i-1})|+|g(x_i)-g(x_{i-1})|\}\\&=\sum_\pi|f(x_i)-f(x_{i-1})|+\sum_\pi|g(x_i)-g(x_{i-1})|\\&=V(f,[a,b],\pi)+V(g,[a,b],\pi)\end{aligned}$$

である．π について上限を取れば

$$V_a^b(f+g)\le V_a^b(f)+V_a^b(g)$$

が成立．また

$$V(\alpha f,I,\pi)=\sum_\pi|\alpha f(x_i)-\alpha f(x_{i-1})|=|\alpha|\sum_\pi|f(x_i)-f(x_{i-1})|=|\alpha|V(f,I,\pi)$$

で π についての上限を考えれば後半の主張も分かる．□

有界変動関数の基本的な性質を次の命題にまとめよう．

命題 A.8.3.
f を $[a,b]$ 上の有界変動関数とする．

(i) f が単調増加ならば $V(f,I)=f(b)-f(a)$，単調減少ならば $V(f,I)=f(a)-f(b)$.

(ii) $c\in]a,b[$ とすれば
$$V(f,[a,b])=V(f,[a,c])+V(f,[c,b]).$$

(iii) 関数 $[a,b]\ni x\mapsto V(f,[a,x])\in\mathbb{R}$，$x\mapsto V(f,[a,x])+f(x)$ および $x\mapsto V(f,[a,x])-f(x)$ は単調増加である．

(iv) 関数 $x\mapsto V(f,[a,x])$ が $x_0\in[a,b[$ で右連続（$x_0\in]a,b]$ で左連続）であることは f が x_0 で右連続（左連続）であることと同値である．

(v) f は二つの単調増加関数 f_1,f_2 によって $f=f_1-f_2$ と表現される．この時 f_1,f_2 は特に $V(f,[a,x])=f_1(x)+f_2(x)$ を満たすように取ることが出来て，この場合の分解は一意である．

(vi) 有界変動関数 f は任意の点で右極限と左極限を持つ．特に f が右連続なら càdlàg である．

証明. (i) f が単調なら，任意の分割 $\pi:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ に対して
$$V(f,I,\pi)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=\sum_{i=1}^{n}\{f(x_i)-f(x_{i-1})\}=f(x_n)-f(x_0)=f(b)-f(a)$$
であるから，sup をとっても $V(f,I)=f(b)-f(a)$ となる．f が単調減少の場合は $-f$ は単調増加なので，(i) により
$$V(f,I)=V(-f,I)=-f(b)-(-f(a))=f(a)-f(b)$$
が分かる．

(ii) $a<c<b$ とする．$\pi\in\mathrm{Par}([a,c])$ および $\pi'\in\mathrm{Par}([c,b])$ とすれば，$\pi\cup\pi'$ は $[a,b]$ の分割を定める．
$$\begin{aligned}V(f,[a,c],\pi)+V(f,[c,b],\pi')&=\sum_{\pi}|f(x_i)-f(x_{i-1})|+\sum_{\pi'}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\\&=\sum_{\pi\cup\pi'}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\\&=V(f,[a,b],\pi\cup\pi')\\&\le V(f,[a,b])\end{aligned}$$
$\pi\in\mathrm{Par}([a,c])$ と $\pi'\in\mathrm{Par}([c,b])$ それぞれについて上限を考えれば
$$V(f,[a,c])+V(f,[c,b])\le V(f,[a,b])$$
が成立．$\pi=\{x_i\}$ を $[a,b]$ の分割とすれば，$\pi_1=\{x_i\wedge c\}$ と $\pi_2=\{x_i\vee c\}$ はそれぞれ $[a,c]$ と $[c,b]$ の分割を定めるから，
$$\begin{aligned}V(f,[a,b],\pi)&=\sum_{\pi}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\\&=\sum_{\pi_1}|f(x_i)-f(x_{i-1})|+\sum_{\pi_2}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\\&\le V(f,[a,c])+V(f,[c,b])\end{aligned}$$

が成り立つ．$\pi \in \mathrm{Par}([a,b])$ に関する上限を取れば

$$V(f,[a,b]) \leq V(f,[a,c]) + V(f,[c,b])$$

も分かる．したがって

$$V(f,[a,b]) = V(f,[a,c]) + V(f,[c,b]).$$

(iii) $x < y$ とすれば (ii) より

$$V(f,[a,y]) - V(f,[a,x]) = V(f,[x,y]) \geq |f(y) - f(x)| \geq f(y) - f(x) \tag{A.8.1}$$

が成り立つから，

$$V(f,[a,y]) - V(f,[a,x]) \geq 0$$

と

$$V(f,[a,y]) - f(y) \geq V(f,[a,x]) - f(x)$$

が示される．(A.8.1) 最後の辺で符号を入れ替えれば

$$V(f,[a,y]) + f(y) \geq V(f,[a,x]) + f(x)$$

も分かる．

(iv) 右連続性の場合を示す．(A.8.1) より

$$V(x+\varepsilon) - V(x) \geq |f(x+\varepsilon) - f(x)|$$

であるから，V の右連続点が f の右連続点になっていることが直ぐに分かる．$x \in [a,b[$ で f が右連続であるとしよう．このとき，ある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在して $0 < h < \delta(\varepsilon)$ ならば $|f(x+h) - f(x)| \leq \varepsilon/2$ となる．全変動の定義より，適当な $\pi^\varepsilon \in \mathrm{Par}([x,b])$ をとれば

$$|V(f,[x,b]) - V(f,[x,b],\pi^\varepsilon)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成立．$0 < h < |\pi^\varepsilon|$ とすれば x と $x+h$ の間には π^ε の点はないから，$\widetilde{\pi}^{\varepsilon,h} := \pi^\varepsilon \cup \{x+h\} \setminus \{x\}$ は $[x+h,b]$ の分割を定める．$0 < h < |\pi^\varepsilon| \vee \delta(\varepsilon)$ とすれば

$$\begin{aligned}
&V(f,[a,x+h]) - V(f,[a,x]) \\
&= V(f,[x,x+h]) \\
&= V(f,[x,b]) - V(f,[x+h,b]) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + V(f,[x,b],\pi^\varepsilon) - V(f,[x+h,b]) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + |f(x+h) - f(x)| + V(f,[x+h,b],\widetilde{\pi}^{\varepsilon,h}) - V(f,[x+h,b]) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + |f(x+h) - f(x)| < \varepsilon
\end{aligned}$$

となる．したがって，V は x で右連続である．左連続の場合も同様に示される．

(v)

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) \tag{A.8.2}$$
$$V(f,[a,x]) = f_1(x) + f_2(x) \tag{A.8.3}$$

を満たすような f_1, f_2 があったとすれば，(A.8.2)+(A.8.3) および (A.8.2)−(A.8.3) により

$$f_1 = \frac{V(f,[a,x]) + f(x)}{2}, \quad f_2 = \frac{V(f,[a,x]) - f(x)}{2}$$

となる．(iii) よりこれらは実際に単調増加である．

(vi) (v) より $f = f_1 - f_2$ と表現でき，f_1, f_2 は単調増加だから各点で右極限，左極限を持つ．よって f も各点で右極限，左極限を持つ．後半の主張は明らか． □

命題 A.8.3.(v) において，$f = f_1 - f_2$ かつ f_1, f_2 が単調増加となるような分解自体は一意ではない．実際，$f_1(x) = V(f,[a,x])$ および $f_2 = V(f,[a,x]) - f(x)$ はその条件を満たしている．

補題 A.8.4.
(f_n) は $I = [a,b]$ 上の関数列とし，$f : I \to \mathbb{R}$ に各点収束するものとする．このとき，

$$V(f,I) \le \liminf_{n\to\infty} V(f_n, I)$$

が成立する．

補題 A.8.4 の言わんとしていることは，$f \mapsto V(f,I)$ が各点収束位相に関する下半連続性をもつということである．

証明. $\pi \in \mathrm{Par}(I)$ とすれば，

$$\begin{aligned} V(f,I,\pi) &= \sum_{\pi} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &\le \sum_{\pi} |f_n(x_i) - f_n(x_{i-1})| + 2\sum_{x_i\in\pi} |f(x_i) - f_n(x_i)| \\ &= V(f_n, I, \pi) + 2\sum_{x_i\in\pi} |f(x_i) - f_n(x_i)| \end{aligned}$$

なる評価が成り立つ．(f_n) は f に各点収束するから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分大きな $N(\pi,\varepsilon)$ を取れば

$$2\sum_{x_i\in\pi} |f(x_i) - f_n(x_i)| < \varepsilon \quad \text{for any } k \ge N(\pi,\varepsilon)$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned} V(f,I,\pi) &\le \inf_{n\ge N(\pi,\varepsilon)} V(f_n, I, \pi) + \varepsilon \\ &\le \liminf_{n\to\infty} V(f_n, I, \pi) + \varepsilon \\ &\le \liminf_{n\to\infty} V(f_n, I) + \varepsilon \end{aligned}$$

が任意の $\pi \in \mathrm{Par}(I)$ に対して成立．π について sup を取れば

$$V(f,I) \le \liminf_{n\to\infty} V(f_n, I) + \varepsilon$$

となるが，ε は任意の正の実数だったから

$$V(f,I) \le \liminf_{n\to\infty} V(f_n, I)$$

が分かる． □

命題 A.8.5.
f を $I=[a,b]$ 上の右連続な有限変動関数，(π_n) を $\mathrm{Par}(I)$ の列で $|\pi_n|\to 0$ なる列とする．このとき，

$$\sum_{\pi_n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| \xrightarrow[n\to\infty]{} V(f,I)$$

が成立．

証明.

$$f_n=\sum_{x_i,x_{i-1}\in\pi_n} f(x_i)1_{]x_{i-1},x_i]}$$

とすれば

$$V(f_n,I)=\sum_{x_i,x_{i-1}\in\pi_n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=V(f,I,\pi_n)$$

であり，f の右連続性より $f_n\to f$ が各点収束の意味で成立．したがって補題 A.8.4 により

$$V(f,I)\le\liminf_{n\to\infty}V(f_n,I)=\liminf_{n\to\infty}V(f,I,\pi_n)$$

が成り立つ．また全変動の定義より

$$\limsup_{n\to\infty}V(f,I,\pi_n)\le\sup_n V(f,I,\pi_n)\le\sup_{\pi\in\mathrm{Par}(I)}V(f,I,\pi)=V(f,I)$$

となるから，

$$V(f,I)\le\liminf_{n\to\infty}V(f,I,\pi_n)\le\limsup_{n\to\infty}V(f,I,\pi_n)\le V(f,I)$$

が成立．すなわち

$$\sum_{x_i,x_{i-1}\in\pi_n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| \xrightarrow[n\to\infty]{} V(f,I)$$

である． □

命題 A.8.6.
f を $[a,b]$ 上の càdlàg な有界変動関数とし，$V(x)=V(f;[a,x])$ と定める．

(i) 任意の $x\in[a,b]$ に対して

$$\sum_{a<t\le x}|\Delta f(t)|\le V(x)-V(a)$$

が成り立つ．特に，級数 $\sum_{a<t\le x}\Delta f(t)$ は絶対収束する．

(ii) $|\Delta f(x)|=\Delta V(x)$

証明. (i)

$$D^x=\{y\in\,]a,x]\mid y \text{ は } f \text{ の不連続点.}\}$$

$$D_n^x=\left\{y\in D^x\;\middle|\;|\Delta f(y)|>\frac{1}{n}\right\}$$

とおけば，$\bigcup_n D_n = D$ であり各 D_n は有限集合である．したがって，数列 $n \mapsto \sum_{D_n} |\Delta f(y)|$ が有界であることを示せばよろしい．f は単調増加であるとする．D_n の元を大きさの順に並び替えて $x_0^n, x_2^n, \dots, x_{k(n)}^n$ とすれば，

$$\sum_{x \in D_n} |\Delta f(x)| = \sum_{i=0}^{k(n)} f(x_i^n) - f(x_i^n -) \le \sum_{i=0}^{k(n)} f(x_i^n) - f(x_{i-1}^n) = f(x_{k(n)}^n) - f(x_0^n) \le f(x) - f(a)$$

が任意の n に対して成立．したがって

$$\sum_{x \in D} |\Delta f(x)| \le f(x) - f(a) < +\infty$$

が分かる．f が一般の有界変動関数の時は，増加関数による分解 $f = f_1 - f_2$ より

$$\sum_{x \in D} |\Delta f(x)| \le \sum_{x \in D} \Delta f_1(x) + \sum_{x \in D} \Delta f_2(x) \le f_1(x) - f_1(a) + f_2(x) - f_2(a) = V(x) - V(a)$$

であることから分かる．

(ii)

$$|\Delta f(x)| \le \Delta V(x)$$

は明らかである．命題 A.8.3 (iv) と同様の評価により，任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分小さい $\delta > 0$ をとれば

$$V(x) - V(x - \delta) = V(f; [x - \varepsilon, x]) \le |f(x) - f(x - \delta)| + \varepsilon$$

なる評価が成り立つ．$\delta \to 0$ とすれば

$$\Delta V(x) \le |\Delta f(x)| + \varepsilon$$

となり，ε は任意の正の実数だったから

$$\Delta V(x) \le |\Delta f(x)|$$

が分かる． □

$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ を càdlàg 有限変動関数とすれば，命題 A.8.6 より

$$f^{\mathrm{d}}(x) = \sum_{a < t \le t} \Delta f(t)$$

により関数 $f^{\mathrm{d}}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ が定まる．また，$f^{\mathrm{c}} = f - f(a) - f^{\mathrm{d}}$ と定義する．

命題 A.8.7.
$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ を càdlàg 有限変動関数とし，f^{d}, f^{c} を上で定義したものとする．このとき関数 f^{c} は連続であり，f^{d} は càdlàg で $\Delta f^{\mathrm{d}} = \Delta f$ を満たす．さらに f^{c} と f^{d} はともに有限変動であり，

$$V(f^{\mathrm{d}}; [a,x]) = \sum_{a < s \le x} |\Delta f(s)| \tag{A.8.4}$$

$$V(f; [a,x]) = V(f^{\mathrm{d}}; [a,x]) + V(f^{\mathrm{c}}; [a,x]) \tag{A.8.5}$$

が成り立つ．すなわち，$x \mapsto V(f; [a,x])$ の連続部分は $x \mapsto V(f^{\mathrm{c}}; [a,x])$ であり，純不連続部分は $x \mapsto V(f^{\mathrm{d}}; [a,x])$ である．

有限変動関数 f に対して定義された f^{c} を f の連続部分 (continuous part)，f^{d} を純不連続部分 (purely discontinuous part) と呼ぶ．$f^{\mathrm{c}}=0$ のとき，有限変動関数は純不連続 (purely discontinuous) であるという．

証明．ステップ 1：f が càdlàg 増加関数の場合． 任意の $t\in[a,b]$ で $\Delta f(t)\geq 0$ だから f^{d} は明らかに増加関数であり，

$$V(f^{\mathrm{d}};[a,x])=f^{\mathrm{d}}(x)-f^{\mathrm{d}}(a)=\sum_{a<s\leq x}\Delta f(s)$$

が成り立つ．また，$a\leq y\leq x\leq b$ なら

$$f^{\mathrm{c}}(x)-f^{\mathrm{c}}(y)=f(x)-f(y)-(f^{\mathrm{d}}(x)-f^{\mathrm{d}}(y))=f(x)-f(y)-\sum_{y<t\leq x}\Delta f(t)\geq 0$$

なので[*11]，f^{c} も増加関数である．$f, f^{\mathrm{c}}, f^{\mathrm{d}}$ はどれも増加関数であるから，等式

$$f^{\mathrm{c}}(x)-f^{\mathrm{c}}(a)+\sum_{a<t\leq x}\Delta f(t)=f(x)-f(a)$$

は

$$V(f;[a,x])=V(f^{\mathrm{d}};[a,x])+V(f^{\mathrm{c}};[a,x])$$

を表している．f^{d} は増加関数であるから，各点で右極限および左極限をもつ．これが右連続であることを示そう．$x\in[a,b]$ を固定すれば，命題 A.8.6 の (i) より任意の $x'\in[a,b]$ に対して

$$f^{\mathrm{d}}(x')-f^{\mathrm{d}}(x)=\sum_{a<t\leq x'}\Delta f(t)-\sum_{a<t\leq x}\Delta f(t)=\sum_{x<t\leq x'}\Delta f(t)\leq V(f;[a,x'])-V(f;[a,x])$$

が成り立つ．命題 A.8.3 より関数 $x'\mapsto V(f;[a,x'])$ は右連続なので，$x'\downarrow x$ とすることで f^{d} の右連続性がわかる．以上により f^{d} は càdlàg であり，よって $f^{\mathrm{c}}:=f-f^{\mathrm{d}}$ もまた càdlàg である．また，今度は $x\in\,]a,b]$ を固定して $x''\in[a,x[$ をとれば，

$$\Delta f(x)\leq\sum_{x''<t\leq x}\Delta f(x)=f^{\mathrm{d}}(x)-f^{\mathrm{d}}(x'')\leq V(f;[a,x])-V(f;[a,x''])$$

が成り立つ．この式において極限をとれば

$$\Delta f(x)\leq f^{\mathrm{d}}(x)-f^{\mathrm{d}}(x-)\leq V(f;[a,x])-\lim_{x''\uparrow\uparrow x}V(f;[a,x''])=\Delta f(x)$$

を得る[*12]．これより $\Delta f(x)=\Delta f^{\mathrm{d}}(x)$ であって，

$$f^{\mathrm{c}}(x)-f^{\mathrm{c}}(x-)=f(x)-f(x-)-(f^{\mathrm{d}}(x)-f^{\mathrm{d}}(x-))=\Delta f(x)-\Delta f(x)=0$$

となるから f^{c} の連続性もわかる．

ステップ 2：f が一般の càdlàg 有限変動関数の場合． $f=f_1-f_2$ という増加関数による標準的な分解を考えれば，f の分解 $f=f(a)+f^{\mathrm{c}}+f^{\mathrm{d}}$ に対して

$$f^{\mathrm{d}}=\sum_{a<t\leq\cdot}\Delta f(t)=\sum_{a<t\leq\cdot}(\Delta f_1(t)-\Delta f_2(t))=\sum_{a<t\leq\cdot}\Delta f_1(t)-\sum_{a<t\leq\cdot}\Delta f_2(t)=(f_1)^{\mathrm{d}}-(f_2)^{\mathrm{d}},$$
$$f^{\mathrm{c}}=f-f^{\mathrm{d}}=(f_1-f_2)-((f_1)^{\mathrm{d}}-(f_2)^{\mathrm{d}})=(f_1-(f_1)^{\mathrm{d}})-(f_2-(f_2)^{\mathrm{d}})=(f_1)^{\mathrm{c}}-(f_2)^{\mathrm{c}},$$

[*11] 最後の不等号は命題 A.8.6 よりわかる．
[*12] 最後の等号は命題 A.8.6 の (ii) より．

が成り立つ．ステップ 1 での議論により $(f_1)^{\mathrm{d}}$ と $(f_2)^{\mathrm{d}}$ は càdlàg 増加関数だから，$f^{\mathrm{d}} = (f_1)^{\mathrm{d}} - (f_2)^{\mathrm{d}}$ は càdlàg 有限変動関数であり，

$$\Delta f^{\mathrm{d}} = \Delta((f_1)^{\mathrm{d}} - (f_2)^{\mathrm{d}}) = \Delta(f_1)^{\mathrm{d}} - \Delta(f_2)^{\mathrm{d}} = \Delta f_1 - \Delta f_2 = \Delta(f_1 - f_2) = \Delta f$$

となる．さらにステップ 1 より $(f_1)^{\mathrm{c}}$ と $(f_2)^{\mathrm{c}}$ は連続増加関数だから，$f^{\mathrm{c}} = (f_1)^{\mathrm{c}} - (f_2)^{\mathrm{c}}$ は連続有限変動関数である．ここからは f^{d} と f^{c} の全変動の具体的な値を調べよう．命題 A.8.2，命題 A.8.6 (i) およびこの証明の前半での議論により

$$\begin{aligned}
V(f^{\mathrm{d}};[a,x]) &\le V((f_1)^{\mathrm{d}};[a,x]) + V((f_2)^{\mathrm{d}};[a,x]) \\
&= \sum_{a<t\le x} \Delta f_1(t) + \sum_{a<t\le x} \Delta f_2(t) \\
&= \sum_{a<t\le x} \Delta(f_1(t) + f_2(t)) \\
&= \sum_{a<t\le x} \Delta V(f;[a,x]) \\
&= \sum_{a<t\le x} |\Delta f(t)|
\end{aligned}$$

が成り立つ．また $((f_i)^{\mathrm{d}})^{\mathrm{d}} = (f_i)^{\mathrm{d}}$ $(i=1,2)$ および[*13]命題 A.8.6 (ii) より，

$$\sum_{a<t\le x} |\Delta f(t)| = \sum_{a<t\le x} |\Delta f^{\mathrm{d}}(t)| \le V(f^{\mathrm{d}};[a,x])$$

も成立するので，

$$V(f^{\mathrm{d}};[a,x]) = \sum_{a<t\le x} |\Delta f(t)| = (f_1)^{\mathrm{d}} + (f_2)^{\mathrm{d}}$$

となる．$(f_1)^{\mathrm{c}}$ と $(f_2)^{\mathrm{c}}$ は a で 0 をとる増加関数なので，

$$V(f^{\mathrm{c}};[a,x]) \le V((f_1)^{\mathrm{c}};[a,x]) + V((f_2)^{\mathrm{c}};[a,x]) = (f_1)^{\mathrm{c}}(x) + (f_2)^{\mathrm{c}}(x)$$

を満たす．これより

$$\begin{aligned}
V(f^{\mathrm{c}};[a,x]) + V(f^{\mathrm{d}};[a,x]) &\le (f_1)^{\mathrm{c}}(x) + (f_2)^{\mathrm{c}}(x) + (f_1)^{\mathrm{d}}(x) + (f_2)^{\mathrm{d}}(x) \\
&= f_1(x) + f_2(x) \\
&= V(f;[a,x])
\end{aligned}$$

が成り立つ．逆向きの不等号

$$V(f;[a,x]) \le V(f^{\mathrm{c}};[a,x]) + V(f^{\mathrm{d}};[a,x])$$

は命題 A.8.2 より明らかなので，

$$V(f;[a,x]) = V(f^{\mathrm{c}};[a,x]) + V(f^{\mathrm{d}};[a,x])$$

がわかる． □

[*13] この命題の証明の「ステップ 1」からわかる．

A.9 Stieltjes 積分

本節では，Lebesgue-Stieltjes 積分を扱う．

命題 A.9.1.
$F:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ は正かつ右連続な増加関数とする．このとき，$(\mathbb{R}_+,\mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$ 上の測度 μ で

$$F(t)=\mu([0,t]),\quad t\in\mathbb{R}_+$$

を満たすものが存在する．

証明. 証明は Bogachev [12, Theorem 1.8.1] などを見よ． □

命題 A.9.1 において存在の保証される測度を，F に対応する Lebesgue-Stieltjes 測度 (Lebesgue-Stieltjes measure) という．Lebesgue 測度は, 恒等写像 $x\mapsto x$ に対応する Lebesgue-Stieltjes 測度である．càdlàg な局所有界変動関数 $F\colon\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}$ が与えられたとき, 命題 A.9.1 より $F=F_1-F_2$ および $V(F)=V(F_1)+V(F_2)$ を満たす増加関数の組 F_1，F_2 がただ一つ存在する．（ただし，$V(F)$ は全変動関数 $x\mapsto V(F;[0,x])$ である．）F_1 と F_2 に対応する Lebesgue-Stieltjes 測度をそれぞれ μ_1 と μ_2 で表すことにする．Borel 可測関数 $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ が $A\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ 上 $\mu_1+\mu_2$ ‑可積分であるとき，g の F による (Lebesgue-)Stieltjes 積分を

$$\int_A g(s)dF(s):=\int_A g(s)\mu_1(ds)-\int_A g(s)\mu_2(ds)$$

と定義する．$]s,t]$ という形の区間上での積分は，特に

$$\int_{]s,t]} g(s)dF(s)=\int_s^t g(s)dF(s)$$

とも表記することにする．関数 $t\mapsto\int_{[0,t]} g\,dF$ を $g\bullet F$ と書くことにする．$g\bullet F$ はまた càdlàg な局所有界変動関数である．

命題 A.9.2 (部分積分公式).
F および G を càdlàg な局所有界変動関数とする．このとき，Stieltjes 積分に対して以下の等式が成り立つ．

$$\begin{aligned}F(t)G(t)-F(0)G(0)&=\int_{]0,t]}F(s)dG(s)+\int_{]0,t]}G(s-)dF(s)\\&=\int_{]0,t]}F(s-)dG(s)+\int_{]0,t]}G(s-)dF(s)+\sum_{0<s\leq t}\Delta F(s)\Delta G(s)\end{aligned}\tag{A.9.1}$$

証明. μ，ν をそれぞれ F と G が生成する Stieltjes 測度とし，$E=\{(s,u)\in[0,t]^2\mid 0\leq s\leq u\leq t\}$ と定める．このとき,

$$(\mu\otimes\nu)([0,t]^2)=\mu([0,t])\nu([0,t])=F(t)G(t)\tag{A.9.2}$$

が成立．一方

$$
\begin{aligned}
(\mu\otimes\nu)([0,t]^2) &= (\mu\otimes\nu)(E) + (\mu\otimes\nu)([0,t]^2\setminus E)\\
&= \int_{[0,t]} \mu([0,u])\nu(du) + \int_{]0,t]} \nu\left([0,s[\right)\mu(ds)\\
&= \int_{[0,t]} F(u)dG(u) + \int_{]0,t]} G(s-)dF(s)\\
&= F(0)G(0) + \int_{]0,t]} F(s)dG(s) + \int_{]0,t]} G(s-)dF(s) \qquad \text{(A.9.3)}
\end{aligned}
$$

であるから，(A.9.2)，(A.9.3) より

$$
F(t)G(t) = F(0)G(0) + \int_{]0,t]} F(s)dG(s) + \int_{]0,t]} G(s-)dF(s)
$$

となる．二つ目の等号は

$$
\int_{]0,t]} F(s)dG(s) = \int_{]0,t]} \left(F(s-) + \Delta F(s)\right) dG(s) = \int_{]0,t]} F(s-)dG(s) + \sum_{0<s\leq t} \Delta F(s)\Delta G(s)
$$

から分かる．最後に，和 $\sum_{0<s\leq t}\Delta F(s)\Delta G(s)$ が実際に収束していることを確かめておこう．F および G は有界変動なので，$]0,t]$ 上でのジャンプの和は収束する．（命題 A.8.6.）これよりジャンプの二乗和も収束する[*14]．したがって

$$
\sum_{0<s\leq t} |\Delta F(s)\Delta G(s)| \leq \left(\sum_{0<s\leq t} (\Delta F(s))^2\right)^{1/2} \left(\sum_{0<s\leq t} (\Delta G(s))^2\right)^{1/2} < \infty
$$

となり，$\sum_{0<s\leq t}\Delta F(s)\Delta G(s)$ の絶対収束が示された． □

Stieltjes 積分については以下の意味での「微積分学の基本定理」が成り立つ．A が滑らかなときは，これは $f\circ A$ に対する微積分学の基本的定理に過ぎない．

命題 A.9.3.
$f\in C^1(\mathbb{R})$ とし，$A:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ は càdlàg な有界変動関数とする．このとき $f\circ A:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ はまた有界変動関数であり，

$$
f(A_t) = f(A_0) + \int_{]0,t]} f'(A_{s-})dA_s + \sum_{0<s\leq t} \left(\Delta f(A_s) - f'(A_{s-})\Delta A_s\right) \qquad \text{(A.9.4)}
$$

が成り立つ．

証明．Step 1：多項式関数の場合． $f(x)=x$ のとき，定理の主張は明らかに成立つ．関数 f に対して (A.9.4)

*14 $l^1\subset l^2$ ということである．

が成り立つと仮定しよう[*15]．$F(x)=xf(x)$ とすれば，部分積分公式（命題 A.9.2）により

$$\begin{aligned}
&F(A_t)\\
&=A_tf(A_t)\\
&=A_0f(A_0)+\int_{]0,t]}f(A_{s-})dA_s+\int_{]0,t]}A_{s-}df(A_s)+\sum_{0<s\leq t}\Delta A_s\Delta f(A_s)\\
&=A_0f(A_0)+\int_{]0,t]}f(A_{s-})dA_s+\int_{]0,t]}A_{s-}f'(A_s)dA_s\\
&\quad+\sum_{0<s\leq t}A_{s-}\left(\Delta f(A_s)-f'(A_{s-})\Delta A_s\right)+\sum_{0<s\leq t}\Delta A_s\Delta f(A_s)\\
&=A_0f(A_0)+\int_{]0,t]}\left[f(A_{s-})+A_{s-}f'(A_{s-})\right]dA_s\\
&\quad+\sum_{0<s\leq t}\left[A_{s-}\Delta f(A_s)+f(A_{s-})\Delta A_s+\Delta A_s\Delta f(A_s)-\left(f(A_{s-}+A_{s-}f'(A_{s-}))\right)\Delta A_s\right]\\
&=F(A_0)+\int_{]0,t]}F'(A_{s-})dA_s+\sum_{0<s\leq t}\left[\Delta F(A_s)-F'(A_{s-})\Delta A_s\right]
\end{aligned}$$

となる．よって $F(x)=xf(x)$ に対しても (A.9.4) は成立．したがって，f が多項式関数の時には (A.9.4) が成り立つことが分かる．

Step 2：一般の C^1 級関数の場合． $f\in C^1$ とする．$t\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ を任意に固定し，$A[0,t]\subset K$ となるようなコンパクト集合 K を選ぶ．このとき K 上で f と f' を一様近似する多項式関数列 (f_n) が存在する．（系 A.7.3）このとき各 (f_n) については，step 1 より (A.9.4) が成り立つ．f_n は f を K 上一様に近似するから，

$$f_n(A_t)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(A_t),\qquad f_n(A_0)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(A_0)$$

となる．また，f_n' は f' を K 上で一様に近似するから，

$$\left|\int_{]0,t]}f_n'(A_{s-})dA_s-\int_{]0,t]}f'(A_{s-})dA_s\right|\leq\sup_{x\in K}|f_n'(x)-f(x)|\,V(A)_t\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

が成り立つ．さらに

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{0<s\leq t}\left[\Delta f_n(A_s)-f_n'(A_{s-})\Delta A_s\right]-\sum_{0<s\leq t}\left[\Delta f(A_s)-f'(A_{s-})\Delta A_s\right]\right|\\
&\leq\sum_{0<s\leq t}\left|\Delta(f_n-f)(A_s)-(f_n-f)'(A_{s-})\Delta A_s\right|\\
&\leq 2\sup_{x\in K}|(f_n-f)'(x)|\sum_{0<s\leq t}|\Delta A_s|\\
&\leq 2\sup_{x\in K}|(f_n-f)'(x)|\,V(A)_t\xrightarrow[n\to\infty]{}0
\end{aligned}$$

も成り立っている．以上の考察から，各 f_n に対する (A.9.4) 式で $n\to\infty$ とすれば，f についても (A.9.4) 式が得られることがわかる． □

Stieltjes 積分を用いれば，L^p ノルムを分布関数の積分によって書き換えることが出来る．

[*15] よって $f\circ A$ は càdlàg な有界変動関数である．

命題 A.9.4.
$(X, \mathscr{A}, \mu)$ を σ-有限な $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$-値測度空間とし，$f\colon X \to \mathbb{R}$ を可測関数とする．また，$\varphi\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を右連続な増加関数とする．このとき

$$\int_X \varphi(|f(x)|)\mu(dx) = \int_{[0,\infty[} \mu(|f| \geq t)d\varphi(t)$$

が成り立つ．

証明． Fubini の定理を用いれば，

$$\begin{aligned}\int_{[0,\infty[} \mu(|f| \geq t)d\varphi(t) &= \int_{[0,\infty[} \left(\int_X 1_{\{|f|\geq t\}}(x)\mu(dx)\right) d\varphi(t) \\ &= \int_X \left(\int_{[0,\infty[} 1_{[0,|f(x)|]}(t)d\varphi(t)\right) \mu(dx) \\ &= \int_X \varphi(|f(x)|)\mu(dx)\end{aligned}$$

と計算できる． □

ここからは，いわゆる時間変更に関するいくつかの事項を紹介しよう．もちろん確率過程の可測性を含んだ内容は確率過程論のレベルで議論しなくてはいけないが，Stieltjes 積分の性質にかかわるものは完全にパスレベルでの議論が可能である．

$A : \mathbb{R}_+ \to]-\infty, \infty]$ は右連続な増加関数とする．$s \in \mathbb{R}_+$ に対して

$$C(s) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid A(t) > s\} \tag{A.9.5}$$

と定める[*16]．

補題 A.9.5.
(A.9.5) によって定義される関数 $C : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ は右連続な増加関数で，$C_{s-} = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid A(t) \geq s\}$ が成立．さらに，$A(C(s)) \geq s$ であり，$A(t) = \inf\{s \in \mathbb{R}_+ \mid C(s) > t\}$ が成り立つ．

証明． C が増加関数であることは明らかである．$C(s)$ の定義より，$t_n \downarrow C_s$ かつ $A_{t_n} > s$ なるものが存在する．したがって

$$A(C_s) = \lim_{n\to\infty} A(t_n) \geq s$$

が分かる．

$\delta > 0$ とすれば

$$\{t \in \mathbb{R} \mid A(t) \geq s\} \subset \{t \in \mathbb{R}_+ \mid A(t) > s - \delta\}$$

であるから，$C(s - \delta) \leq \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid A(t) \geq s\}$ が成立．$\delta \downarrow\downarrow 0$ とすれば $C(s-) \leq \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid A(t) \geq s\}$ を得る．また $\delta > 0$ に対して $A(C(s-)) \geq A(C(s-\delta)) \geq s - \delta$ だから，$A(C(s-)) \geq s$ となる．したがって

$$\inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid A(t) \geq s\} \leq C(s-)$$

[*16] ただし $\inf \emptyset = +\infty$ と考える．

も成り立つ．

$$\begin{aligned}C(s) &= \inf\{t\in\mathbb{R}_+ \mid A_t > s\} = \inf\left(\bigcup_{\varepsilon>0}\{t\in\mathbb{R}_+ \mid A_t > s+\varepsilon\}\right) \\ &= \inf_{\varepsilon>0}\inf\{t\in\mathbb{R}_+ \mid A_t > s+\varepsilon\} = \inf_{\varepsilon>0} C_{s+\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} C(s+\varepsilon)\end{aligned}$$

となるから，C は右連続である．

$C(s) > t$ なら $t \notin \{u \mid A(u) > s\}$ だから，$A_t \leq s$ である．よって

$$A_t \leq \inf\{s\in\mathbb{R}_+ \mid C(s) > t\} \tag{A.9.6}$$

が成立．一方，A の増加性より

$$C(A_t) = \inf\{u\in\mathbb{R}_+ \mid A_u > A_t\} \geq t$$

なので，$\varepsilon > 0$ に対して $C(A(t+\varepsilon)) \geq t+\varepsilon > t$ である．これより

$$A(t+\varepsilon) \geq \inf\{s \mid C_s > t\}$$

となるが，$\varepsilon \to 0$ とすれば A の右連続性より

$$A(t) \geq \inf\{s \mid C_s > t\} \tag{A.9.7}$$

を得る．(A.9.6)，(A.9.7) より

$$A(t) = \inf\{s \mid C_s > t\}$$

が示される． □

注意 A.9.6. 命題??における A と C_- は $s \leq A(t) \iff C(s-) \leq t$ という関係性を満たしている．このような条件を満たす組 (C_-, A) は順序随伴とか，ガロア連結などと呼ばれる． ■

次の命題はある種の変数変換公式を与えている．

命題 A.9.7.
$A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ は càdlàg 増加関数，$f : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ は Borel 関数とする．このとき，(A.9.5) で C を定めれば

$$\int_{[0,\infty[} f(u)dA(u) = \int_{[0,\infty[} f(C(s))1_{\{C(s)<\infty\}}(s)m(ds) \tag{A.9.8}$$

$$\int_{[0,\infty[} f(u)dA(u) = \int_{[0,\infty[} f(C(s-))1_{\{C(s-)<\infty\}}(s)m(ds) \tag{A.9.9}$$

が成り立つ．

証明. $f = 1_{[0,v]}$ の時は

$$\int_{[0,\infty[} 1_{[0,v]}(u)dA(u) = A(v)$$

である．一方

$$\begin{aligned}\int_{[0,\infty[} 1_{[0,v]}(C(s))1_{\{C(s)<\infty\}}m(ds) &= \int_{[0,\infty[} 1_{\{C(s)\le v\}}m(ds) \\ &= m(\{s\in\mathbb{R}_+ \mid C(s)\le v\}) \\ &= \sup\{s\in\mathbb{R}_+ \mid C(s)\le v\} \\ &= \inf\{s\in\mathbb{R}_+ \mid C(s)> v\} \\ &= A(v)\end{aligned}$$

となるから，

$$\int_{[0,\infty[} 1_{[0,v]}(u)dA(u) = \int_{[0,\infty[} 1_{[0,v]}(C(s))1_{\{C(s)<\infty\}}m(ds) \tag{A.9.10}$$

が成立．これより $f = 1_{]u,v]} = 1_{[0,v]} - 1_{[0,u]}$（$u<v$）に対して

$$\int_{[0,\infty[} 1_{]u,v]}(t)dA(t) = \int_{[0,\infty[} 1_{]u,v]}(C(s))1_{\{C(s)<\infty\}}m(ds)$$

が成り立つことも分かる．同様にして $f = 1_{]v,[\infty} = 1_{[0,\infty[} - 1_{[0,v]}$ 場合も成立する．$\mathscr{A}$ をこれらの区間の生成する集合代数とする．$\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ だから，単調族定理を用いれば任意の正の Borel 関数に対して (A.9.8) が成り立つことが示される．$C(s)$ の不連続点は高々可算個だから $\{s \mid C(s)\neq C(s-)\}$ は m-零集合である．したがって (A.9.8) より (A.9.9) が導かれる．□

(A.9.8) の右辺は

$$\int_{[0,\infty[} f(C(s))1_{\{C(s)<\infty\}}m(ds) = \int_{[0,A_\infty[} f(C(s))m(ds) \tag{A.9.11}$$

と書き直せることに注意しよう．実際，「$C(s)<\infty$」という主張は「$t\in\mathbb{R}_+$ で $A(t)>s$ なるものが存在する」と同値であり，これはさらに「$A_\infty = \sup_t A_t > s$」とも同値であることから (A.9.11) が従う．

命題 A.9.8.
u を $[a,b]$ 上の連続な増加関数とし，f は $[u(a),u(b)]$ を含む集合上で定義された正の Borel 可測関数とする．このとき

$$\int_{]a,b]} f(u(s))dA_{u(s)} = \int_{]u(a),u(b)]} f(t)dA_t$$

が成立する．ただし，左辺の積分は右連続な増加関数 $s\mapsto A_{u(s)}$ に対応する測度による積分である．

証明.

$$v_t = \inf\{s \mid u(s)>t\}$$

と定義すれば $u(v_t)=t$ で[*17] v は可測関数：$[u(a),u(b)]\to[a,b]$ を定める[*18]．μ_A で A に対応する測度を表し，ν で v の μ_A に関する像測度：$[a,b]\to\mathbb{R}$ とすることにする．このとき，像測度による積分の性質より

$$\int_{[a,b]} f(u(s))\nu(ds) = \int_{[u(a),u(b)]} f(u(v(t)))\mu_A(dt) = \int_{[u(a),u(b)]} f(t)\mu_A(dt) = \int_{[u(a),u(b)]} f(t)dA_t$$

[*17] u の連続性より従う．
[*18] このとき v は単射であり，u は全射である．

が成立．特に $[a,t] \subset [a,b]$ に対して

$$\nu([a,t]) = A(u(t)) - A(u(a)-)$$

が成立．よって ν は $A \circ u$ によって生成される Stieltjes 測度である． $\square$

以下の命題は，Gronwall の補題の Stieltjes 積分への拡張と呼べるものである．

命題 A.9.9.

(i) $g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を $g(0) = 0$ なる右連続な増加関数とし，$a \geq 0$ とする．Càdlàg な関数 $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が

$$f(t) \leq a + \int_0^t f(s-)dg(s) \quad \text{for } t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

を満たすならば,

$$f(t) \leq ae^{g(t)} \qquad \text{for all } t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

が成り立つ．

(ii) $g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ を局所有界変動関数とする．$f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ について

$$f(t) = \int_{]0,t]} f(s-)dg(s)$$

が成り立つなら，$f \equiv 0$ である．

証明. (i) 線形作用素 $\Lambda\colon D[0,\infty[\to D[0,\infty[$ を

$$\Lambda(h)(t) = \int_{]0,t]} h(s-)dg(s)$$

と定義する．このとき Λ^n は単調写像であることに注意する[*19]．

Λ について

$$\Lambda^n(1)(t) \leq \frac{g(t)^n}{n!}$$

が成り立つことを帰納法で示そう．$n = 1$ のときは

$$\Lambda(1)(t) = \int_{]0,t]} dg(s) = g(t)$$

が成立．$\Lambda^n(1)(t) = g(t)^n/n!$ が成り立つと仮定すれば，Stieltjes 積分についての変数変換公式より

$$\begin{aligned}
\Lambda^{n+1}(1)(t) = \Lambda\left(\Lambda^n(1)\right)(t) &= \int_{]0,t]} \Lambda^n(1)(s-)dg(s) \\
&= \frac{1}{n!}\int_{]0,t]} g(s-)^n dg(s) \\
&= \frac{g(t)^{n+1}}{(n+1)!} - \sum_{s\in]0,t]} \left(\Delta\frac{g(s)^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{g(s-)^n}{n!}\Delta g(s)\right) \\
&\leq \frac{g(t)^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

[*19] ただし，$D[0,\infty[$ の順序は各点ごとの順序である．

となり[*20]，$n+1$ でも同様の不等式が成り立つ．

以上の議論から，

$$(\Lambda^n - \Lambda^{n+1})(f)(t) = \Lambda^n(f - \Lambda(f)) \le \Lambda^n(a) \le a\frac{g(t)^n}{n!}$$

が成り立つことが分かる．これより

$$(\Lambda - \Lambda^{n+1})(f)(t) \le \sum_{k=1}^{n}(\Lambda^n - \Lambda^{n+1})(f)(t) \le a\sum_{k=1}^{n}\frac{g(t)^k}{k!}$$

という評価が成り立つ．ここで

$$0 \le \Lambda^n(f)(t) \le \left(\sup_{s\in]0,t]}|f(s)|\right)\Lambda^n(1)(t) \le \left(\sup_{s\in]0,t]}|f(s)|\right)\frac{g(t)^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

であることに注意すれば

$$\begin{aligned} f(t) &\le a + \Lambda(f) = a + \Lambda(f) - \Lambda^{n+1}(f)(t) + \Lambda^{n+1}(f)(t) \\ &\le a\sum_{k=0}^{n}\frac{g(t)^k}{(k+1)!} + \Lambda^{n+1}(f)(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} ae^{g(t)} \end{aligned}$$

となり，期待される不等式を得る．

(ii) $V(g)$ を g の全変動関数とすれば，仮定より

$$|f(t)| \le \int_{]0,t]}|f(s-)|dV(g)(s)$$

が成立．(i) の結果から $|f| = 0$ が分かる． □

A.10 位相空間上の測度

本節では，位相空間上の測度について調べよう．単なる位相空間上の測度を考えるのではなく，特に優れた連続性をもつ測度に焦点を当てる．

A.11 超関数とその微分

本節では，m は d 次元 Lebesgue 測度を表すものとする．

U を $\mathbb{R}^d$ の開集合とする．$C_c^\infty(U)$ は U 上の無限階微分可能な実数値関数で，U においてコンパクトな台をもつようなもの全体の集合とする．これは明らかに $\mathbb{R}$-線形空間である．C_c^∞ の点列 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について，次のような収束を考える：

(i) あるコンパクト集合 $K \subset U$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ で $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$.

(ii) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $|\alpha| \le k$ なら $D^\alpha\varphi_n$ は $D^\alpha\varphi$ に一様収束.[*21].

C_c^∞ にこの収束に関する位相を入れた空間を $\mathscr{D}(U)$ で表すことにする．

[*20] 最後の不等号は，$x \mapsto x^{n+1}$ の凸性と g の増加性より従う．

[*21] ただし，ここで $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ は多重指数を表し，$D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \dfrac{\partial^{\alpha_m}}{\partial x^{\alpha_m}}$ である．

注意 A.11.1. $\mathscr{D}(U)$ の位相は，正確には次のように定式化される．コンパクト集合 $K \subset U$ に対して，$\mathscr{D}_K(U)$ で $\operatorname{supp} f \subset K$ を満たす $\varphi \in C^\infty(U)$ 全体の集合を表すことにする．このとき $\mathscr{D}_K(U)$ は，セミノルムの族 $\sup_{x\in U}|D^\alpha\varphi(x)|$ の定める位相により，Fréchet 空間となる．$\Lambda = \{K \subset U \mid K$ はコンパクト集合 $\}$ を包含関係により有向集合と見なした時，その帰納極限 $\varinjlim_K \mathscr{D}_K(U)$ は位相線形空間となる．これを $\mathscr{D}(U)$ で表す．このように Frechét 空間の帰納極限として構成される位相線形空間を，$\mathscr{LF}$ 空間と呼ぶ[22]．$\mathscr{LF}$ 空間に関する詳しい議論は宮島 [83] や Reed and Simon [93] などを参照されたい． ■

> **定義 A.11.2.**
> $\mathscr{D}(U)$ 上の連続な線形形式を超関数 (distribution) という．すなわち，超関数とは $\mathscr{D}(U)$ の（位相的）双対空間 $\mathscr{D}'(U)$ の元である．

写像 $\mathscr{D}'(U) \times \mathscr{D}(U) \ni (T, \varphi) \mapsto T(\varphi) \in \mathbb{R}$ は双線形形式を定めるから，超関数の値 $T(\varphi)$ を $\langle T, \varphi\rangle$ などと書くことも多い．

例 A.11.3. $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(U, m)$ とする．このとき，写像

$$\mathscr{D}(U) \ni \varphi \mapsto \int_U f(x)\varphi(x)\mu(dx) \in \mathbb{R}$$

は超関数である．実際，線形性は積分の線形性より明らかであり，連続性は $\mathscr{D}(U)$ の位相の定義と f の局所可積分性，そして優収束定理よりわかる．この超関数を T_f で表す． ■

例 A.11.4. U 上の Radon 測度に μ よって定まる写像

$$\mathscr{D}(U) \ni \varphi \mapsto \int_U \varphi(x)\mu(dx) \in \mathbb{R}$$

を考える．これは明らかに線形写像であり，優収束定理から $\mathscr{D}(U)$ の位相について連続となることもわかる．したがってこの写像は超関数であり，これを T_μ で表す． ■

$f \in C^\infty$ かつ $\varphi \in \mathscr{D}(U)$ とする．φ がコンパクト台を持つことに注意すれば，部分積分公式により任意の多重指数 α について

$$\begin{aligned}\langle T_{D^\alpha f}, \varphi\rangle &= \int_U \varphi(x) D^\alpha f(x) m(dx)\\ &= (-1)^{|\alpha|}\int_U (D^\alpha\varphi(x)) f(x) m(dx)\\ &= (-1)^{|\alpha|}\langle T_f, D^\alpha\varphi\rangle\end{aligned}$$

が成り立つ．この超関数については，$T_{D^\alpha f}$ を超関数 T_f の微分と呼んでもいいだろう．この考え方を用いて，一般の超関数の微分を以下のように定義する．

[22] LF は locally Fréchet の意味である．

定義 A.11.5.
$T \in \mathscr{D}'(U)$ に対して，その α 階の微分 $D^\alpha T \in \mathscr{D}'(U)$ を以下で定義する：

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle.$$

超関数の微分を用いて，古典的な意味で微分可能とは限らない関数の微分を，次のように定めよう．

定義 A.11.6.
(i) $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(U, m)$ とし，α を多重指数とする．ある局所可積分関数 u で $D^\alpha T_f = T_u$ を満たすものが存在するとき，u を f の α 階の弱微分，あるいは超関数の意味での微分と呼ぶ．超関数の微分の記号を流用して局所可積分関数 f の弱微分を $f^{(\alpha)}$ や $D^\alpha f$ などと表す．$D^\alpha f$
(ii) (i) と同じ設定の下，Radon 測度 μ で $D^\alpha T_f = T_\mu$ を満たすものが存在するとき，μ を f の α 階の弱微分，あるいは超関数の意味での微分と呼ぶ．弱微分が Radon 測度となる場合にも，先ほどと同じ記号 $f^{(\alpha)}$ や $D^\alpha f$ で表す．

(i) と (ii) の定義には共通部分があるが，どちらかがどちらかの一般化になっているわけではない．(i) は，(ii) で $\mu \ll m$ でないような場合を含まない．また，f が局所可積分関数なら T_f は Radon 測度 $f^+ \bullet m$ と $f^- \bullet m$ によって生成される超関数の差 $T_{f^+ \bullet m} - T_{f^- \bullet m}$ に等しいが，一般には $A \mapsto \int_A f d\mu$ なる Radon 測度が定まるわけではない．（f には局所可積分性しかないので，積分 $\int_X f d\mu$ が well-defined かわからない．）

A.12　凸関数

この節では，一変数の凸関数に関する基本的な事実を扱う．これらの結果は凸関数に関する伊藤の公式，伊藤 - 田中の公式などにおいて使われる．この節では，m は 1 次元の Lebesgue 測度を表すこととする．

定義 A.12.1.
I を $\mathbb{R}$ の区間とする[a]．関数 $f : I \to \mathbb{R}$ は

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \quad x, y \in I,\ \lambda \in [0,1]$$

を満たすとき，凸関数 (convex function) であるという．

[a] I は有界でも非有界でも，開でも閉でも良い．凸関数の定義域は一般には凸集合であればよいが，$\mathbb{R}$ の場合は区間に限られる．

凸関数の例を挙げる前に，凸関数の基本的な性質をいくつか調べよう．与えられた関数が凸関数がどうか調べるためには，それらの性質を知っていたほうが便利だからである．

命題 A.12.2.
f を区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の凸関数とする．このとき，$x < y < z$ を満たす I の元に対して，

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

が成立する．

証明. $y = \lambda x + (1-\lambda)z$ を満たす $\lambda \in]0,1[$ をとれば[*23]，凸関数の定義より

$$f(y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(z) = \frac{z-y}{z-x} f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z)$$

が成り立つ．これの各辺に $(z-x)$ を掛けて変形すれば，

$$(z-x)(f(y)-f(x)) \leq (y-x)(f(z)-f(x)) \tag{A.12.1}$$

なる不等式を得る．これの両辺を $(y-x)(z-x)$ で割ると，一つ目の不等号

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}.$$

がわかる．また，(A.12.1) において両辺に $zf(z) - xf(x)$ を加えて変形すれば，

$$(z-y)(f(z)-f(x)) \leq (z-x)(f(z)-f(y))$$

となる．この両辺を $(z-x)(z-y)$ で割れば，二つ目の不等号を得る．よって二つ目の不等号が示された．□

命題 A.12.2 を用いて，凸関数の一階微分の性質を調べよう．

命題 A.12.3.
I を開区間，$f : I \to \mathbb{R}$ を凸関数とする．このとき，次の主張が成立する．

(i) 任意の $x \in I$ で有限な右微分係数 $f'_+(x)$ および左微分係数 $f'_-(x)$ が存在し，それらは $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ を満たす．

(ii) $x < y$ なる I の 2 点について，次の不等式が成り立つ．

$$f'_+(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'_-(y).$$

(iii) f'_+ と f'_- はともに（広義の）増加関数である．

(iv) 次の意味で，微積分学の基本定理が成立する：$a \leq b$ なる I の二点において，

$$f(b) - f(a) = \int_{]a,b]} f'_+(x) m(dx) = \int_{]a,b]} f'_-(x) m(dx).$$

(v) f は I 上連続である．

(vi) f'_+ は右連続であり，f'_- は左連続である．

(vii) $\{x \in I \mid f'_-(x) \neq f'_+(x)\}$ は高々加算集合である．

[*23] 要するに $\lambda = \dfrac{z-y}{z-x}$ である．

(viii) f'_- および f'_+ は超関数の意味での f の微分である．

証明． (i) $x \in I$ を任意に固定する．このとき命題 A.12.2 より $\varepsilon, \delta > 0$ で $x+\varepsilon, x-\delta \in I$ なるようなものに対して

$$-\infty < \frac{f(x)-f(x-\delta)}{\delta} \leq \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} < +\infty$$

が成り立つ．命題 A.12.2 より上の式の各項は ε, δ について単調であるから，その極限をとれば

$$\begin{aligned} f'_-(x) &= \lim_{\substack{\delta \downarrow\downarrow 0 \\ x-\delta \in I}} \frac{f(x)-f(x-\delta)}{\delta} \\ &= \sup_{\substack{\delta > 0 \\ x-\delta \in I}} \frac{f(x)-f(x-\delta)}{\delta} \\ &\leq \inf_{\substack{\varepsilon > 0 \\ x+\varepsilon \in I}} \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \downarrow\downarrow 0 \\ x+\delta \in I}} \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} \\ &= f'_+(x) \end{aligned}$$

となる．

(ii) 命題 A.12.2 より，$x < y$ および $\varepsilon, \delta > 0$ に対して

$$\frac{f(x)-f(x-\delta)}{\delta} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y+\varepsilon)-f(y)}{\varepsilon}$$

が成立するから，(i) と同様に ε と δ の極限を考えればよい．

(iii) $x < y$ とすれば，(i) と (ii) より

$$\begin{aligned} f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y) \\ f'_+(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y) \end{aligned}$$

が成立．よって f'_- と f'_+ はともに増加的である．

(iv) $a < b$ として示せば十分である．f'_+ について証明する．$\pi^{(n)} = \{x^n_k ; k \in \mathbb{N}\}$ を $[a,b]$ の分割で，$\sup_k |x^n_k - x^n_{k-1}| \to 0$ $(n \to \infty)$ なるものとする．f'_+ は単調増加なので高々可算個の不連続点しかもたず，

$$\begin{aligned} \sum_k f'_+(x^n_{k-1}) 1_{]x^n_{k-1}, x^n_k]} \xrightarrow[n\to\infty]{m-\text{a.e.}} f'_+ \\ \sum_k f'_+(x^n_k) 1_{]x^n_{k-1}, x^n_k]} \xrightarrow[n\to\infty]{m-\text{a.e.}} f'_+ \end{aligned}$$

が成立することに注意する[*24]．ここまでの結果により

$$f'_+(x^n_{k-1}) \leq \frac{f(x^n_k)-f(x^n_{k-1})}{x^n_k - x^n_{k-1}} \leq f'_-(x^n_k) \leq f'_+(x^n_k)$$

が成り立つから，k についての和をとることで

$$\sum_k f'_+(x^n_{k-1})(x^n_k - x^n_{k-1}) \leq \sum_k f(x^n_k) - f(x^n_{k-1}) = f(b) - f(a) \leq \sum_k f'_+(x^n_k)(x^n_k - x^n_{k-1})$$

[*24] しかも，これらの収束は上界 $f'_+(b)$ をもつ．

を得る．$n \to \infty$ とすれば，有界収束定理より

$$\int_{]a,b]} f'_+(x) m(dx) \leq f(b) - f(a) \leq \int_{]a,b]} f'_+(x) m(dx)$$

となる．f'_- についても同様である．

(v) (iv) より明らか．

(vi) f'_+ の右連続性を示す．$x \in I$ を固定して，正の実数からなる単調減少列 (a_n) と (b_n) を考える[*25]．このとき，f の連続性より

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f'_+(x+a_n) &= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} \frac{f(x+a_n+b_m) - f(x+a_n)}{b_m} \\ &= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} \frac{f(x+a_n+b_m) - f(x+a_n)}{b_m} \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{f(x+b_m) - f(x)}{b_m} \\ &= f'_+(x) \end{aligned}$$

となる[*26]．f'_- の左連続性も同様である．

(vii) f'_+ と f'_- はそれぞれ右連続，左連続な増加関数なので，ともに高々可算個の不連続点しか持たない．x を f'_- の連続点とする．

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(x+\varepsilon)$$

において $\varepsilon \downarrow 0$ とすれば，$f'_-(x) = f'_+(x)$ となるので，f'_- の連続点では f'_+ と f'_- は等しい．よって

$$\{x \in I \mid f'_-(x) \neq f'_+(x)\} \subset \{x \in I \mid x \text{ は } f'_- \text{ の不連続点.}\}$$

となり，左の集合も可算集合である．

(viii) $\varphi \in C_c^\infty(I)$ とし，$h > 0$ に対して

$$\frac{\varphi(x+h)f(x+h) - \varphi(x)f(x)}{h} = \varphi(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} f(x)$$

を考える．φ がコンパクト台を持つことに注意して左辺を I 上積分すれば，h が十分小さいとき，

$$\begin{aligned} &\int_I \frac{\varphi(x+h)f(x+h) - \varphi(x)f(x)}{h} m(dx) \\ &= \frac{1}{h}\left\{\int_I \varphi(x+h)f(x+h)m(dx) - \int_I \varphi(x)f(x)m(dx)\right\} = 0 \end{aligned}$$

が成立．一方，右辺を積分して $h \to 0$ の極限を考えれば，優収束定理により

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to\infty, h>0} \int_I \left\{\varphi(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} f(x)\right\} m(dx) \\ &= \int_I \lim_{h\to\infty, h>0}\left\{\varphi(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right\} m(dx) + \int_I \lim_{h\to\infty, h>0}\left\{\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} f(x)\right\} m(dx) \\ &= \int_I \varphi(x) f'_+(x) m(dx) + \int_I \varphi'(x) f(x) m(dx) \end{aligned}$$

[*25] もちろん，任意の n, m で $x + a_n + b_m \in I$ であることも仮定する．

[*26] 一般に，二重単調増大列 (a_{mn}) について

$$\sup_{m,n} a_{mn} = \lim_{m,n\to\infty} a_{mn} = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{mn} = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{mn}$$

が成立することに注意せよ．

となる．したがって，

$$\int_I \varphi'(x)f(x)m(dx) = -\int_I \varphi(x)f'_+(x)m(dx)$$

となり，f'_+ は超関数の意味での f の微分であることが分かる．$\{x \in I \mid f'_+(x) \neq f'_-(x)\}$ が可算集合（よって Lebesgue 測度 0）であることに注意すれば，

$$\int_I \varphi'(x)f(x)m(dx) = -\int_I \varphi(x)f'_-(x)m(dx)$$

であることも示される． □

命題 A.12.3 では凸関数が与えられたとしてその導関数の性質を調べたが，逆に微分可能な関数の導関数を調べれば，それが凸関数かどうか判定することが出来る．

命題 A.12.4.
I を $\mathbb{R}$ の開区間とし，$f\colon I \to \mathbb{R}$ を関数とする．このとき，次の条件は同値である．

(i) f は凸関数である．

(ii) I 上定義された増加関数 $r\colon I \to \mathbb{R}$ で， $a < b$ なる任意の $a, b \in I$ について

$$f(b) - f(a) = \int_{]a,b]} r(t)m(dt)$$

を満たすものが存在する．

証明. (i) $\Longrightarrow$ (ii)．命題 A.12.3(iv) より，$r = f'_+$ とすればよい．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．$x < y$ および $\lambda \in [0,1]$ とすれば，

$$\begin{aligned}
&\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y) \\
&= \lambda[f(x) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)] + (1-\lambda)[f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)] \\
&= -\lambda \int_{]x, \lambda x + (1-\lambda)y]} r(t)dt + (1-\lambda)\int_{]\lambda x + (1-\lambda)y, y]} r(t)dt
\end{aligned}$$

が成り立つ．r は増加的だから

$$\begin{aligned}
-\int_{]x,\lambda x + (1-\lambda)y]} r(t)dt &\geq -r(\lambda x + (1-\lambda)y)\cdot(\lambda x + (1-\lambda)y - x) \\
\int_{]\lambda x + (1-\lambda)y, y]} r(t)dt &\geq r(\lambda x + (1-\lambda)y)\cdot(y - \lambda x - (1-\lambda)y)
\end{aligned}$$

が成立．よって

$$\begin{aligned}
&\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y) \\
&\geq -\lambda(1-\lambda)(y-x)r(\lambda x + (1-\lambda)y) + (1-\lambda)\lambda(y-x)r(\lambda x + (1-\lambda)y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

である．ゆえに

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

が成り立ち，f は凸関数であることがわかる． □

系 A.12.5.
C^1 級関数 f が凸関数であるための必要十分条件は，導関数 f' が（広義の）増加関数となることである．

今度は凸関数の 2 階微分について調べよう．凸関数は 1 階の弱導関数 f'_+ や f'_- を持つが，凸関数の 2 階弱導関数は一般に局所可積分関数とはならず正値 Radon 測度になる．

命題 A.12.6.
凸関数の 2 階微分について，次の主張が成立する．

(i) f を開区間 I 上定義された凸関数とする．このとき，f の 2 階導関数 f'' は正値 Radon 測度である．

(ii) I を開区間とし，$(I, \mathscr{B}(I))$ 上の正値 Radon 測度が与えられたとする．このとき，I 上の凸関数で $f'' = \mu$ となるものが存在する．

(iii) 開区間 I 上定義された凸関数 f が 2 階微分 $f'' = \mu$ をもつとき，任意の区間 I に対して定数 α_J と β_I が存在して，J° 上

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_J |x-a|\mu(da) + \alpha_J x + \beta_J \tag{A.12.2}$$
$$f'_-(x) = \frac{1}{2}\int_J \operatorname{sgn}(x-a)\mu(da) + \alpha_J \tag{A.12.3}$$

が成り立つ．

命題 A.12.6 に出てくる sgn は，符号関数 $\operatorname{sgn}(x) := 1_{]0,+\infty[}(x) - 1_{]-\infty,0]}(x)$ である．

証明. (i) Stieltjes 積分に関する部分積分公式により，$\varphi \in C_c^\infty(I)$ に対して

$$\int_I f'_-(x)\varphi'(x)dx = \int_I f'_-(x)d\varphi(x) = \int_I \varphi(x)df'_-(x)$$

となるから，f'_- の生成する Stieltjes 測度 df'_- は[27] f の 2 階微分である．f'_- は増加関数であるから，Stieltjes 測度 df'_- は正値である．

(ii) μ を $(I, \mathscr{B}(I))$ 上の正値 Radon 測度とする．$a_0 \in I$ を一つ固定し，$f(a_0) := c_0$, $F(a_0) := c_1$ と定める．さらに

$$F(t) = \begin{cases} c_1 + \mu(]a_0, t]) & t \geq a_0 \\ c_1 - \mu(]t, a_0]) & t < a_0 \end{cases}$$

と定義する．このとき F は明らかに増加関数で，F によって生成される Stieltjes 測度が μ に他ならない．この F を用いて f を構成する．$x \geq a_0$ に対して

$$\begin{aligned} &f(x) \\ &:= c_0 + \int_{]a_0,x]} F(t)dt \\ &= c_0 + xF(x) - a_0F(a_0) - \int_{]a_0,x]} tdF(t) \end{aligned}$$

[27] df'_+ でも同じことである．なお，f'_+ に対応する Stieltjes 測度は $\mu(]a,b]) = f'_+(b) - f'_+(a)$ で生成され，f'_- の場合は $\mu([a,b[) = f'_-(b) - f'_-(a)$ となることに注意されたい．

$$
\begin{aligned}
&= c_0 + x\{F(x) - F(a_0)\} - a_0 c_1 + xF(a_0) - \int_{]a_0,x]} t dF(t) \\
&= c_0 - a_0 c_1 + x c_1 + \int_{]a_0,x]} (x-t)\mu(dt)
\end{aligned}
$$

と定める．同様にして，$x < a_0$ に対しても

$$
\begin{aligned}
&f(x) \\
&:= c_0 - \int_{]x,a_0]} F(t)dt \\
&= c_0 - a_0 F(a_0) + xF(x) + \int_{]x,a_0]} t dF(t) \\
&= c_0 + x\{F(x) - F(a_0)\} - a_0 c_0 + xF(a_0) + \int_{]x,a_0]} t dF(t) \\
&= c_0 - a_0 c_1 + x c_1 + \int_{]x,a_0]} (t-x)\mu(dt)
\end{aligned}
$$

とする．f の凸性を見るには $a_0 \in J \subset I$ を満たす区間 $J =]a, b]$ 上での凸性を調べればよい．$x \in]a_0, b]$ なら

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(a) &= c_0 - a_0 c_1 + x c_1 + \int_{]a_0,x]} (x-t)\mu(dt) \\
&\quad - c_0 + a_0 c_1 - a c_1 - \int_{]a,a_0]} (t-a)\mu(dt) \\
&= x c_1 - a c_1 + \int_{]a_0,x]} (x-t)\mu(dt) \\
&\quad - \int_{]a,a_0]} (t-x)\mu(dt) - \int_{]a,a_0]} (x-a)\mu(dt) \\
&= x c_1 - a c_1 + (x-a)(F(a) - c_1) + \int_{]a,x]} (x-t)\mu(dt) \\
&= xF(a) - aF(a) + \int_{]a,x]} (x-t)\mu(dt)
\end{aligned}
$$

および

$$
\begin{aligned}
f(b) - f(x) &= c_0 + \int_{]a_0,b]} F(t)dt - c_0 - \int_{]a_0,x]} F(t)dt \\
&= \int_{]x,b]} F(t)dt \\
&= bF(b) - xF(x) - \int_{]x,b]} t dF(t) \\
&= bF(b) - xF(b) + \int_{]x,b]} (x-t)\mu(dt)
\end{aligned}
$$

が成り立つから，二つの式を併せて

$$
\begin{aligned}
&2f(x)\\
&= f(a) + f(b) + xc_1 - ac_1 + xF(a) - aF(a) + \int_{]a,x]} (x-t)\mu(dt)\\
&\quad - bF(b) + xF(b) - \int_{]x,b]} (x-t)\mu(dt)\\
&= \{F(a) + F(b)\}x + f(a) + f(b) - aF(a) - bF(b) + \int_{]a,b]} |x-t|\mu(dt)
\end{aligned}
$$

を得る．$x \in]a, a_0]$ の場合は

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(a) &= c_0 - \int_{]x,a_0]} F(t)dt - c_0 + \int_{]a,a_0]} F(t)dt\\
&= \int_{]a,x]} F(t)dt\\
&= xF(x) - aF(a) - \int_{]a,x]} tdF(t)\\
&= xF(a) - aF(a) + \int_{]a,x]} (x-t)\mu(dt)\\
f(b) - f(x) &= c_0 - a_0c_1 + bc_1 + \int_{]a_0,b]} (b-t)\mu(dt)\\
&\quad - c_0 + a_0c_1 - xc_1 - \int_{]x,a_0]} (t-x)\mu(dt)\\
&= bc_1 - xc_1 + \int_{]a_0,b]} (x-t)\mu(dt) + \int_{]a_0,b]} (b-x)\mu(dt) - \int_{]x,a_0]} (t-x)\mu(dt)\\
&= bc_1 - xc_1 + (b-x)(F(b) - c_1) + \int_{]x,b]} (x-t)\mu(dt)\\
&= bF(b) - xF(b) + \int_{]x,b]} (x-t)\mu(dt)
\end{aligned}
$$

から

$$
\begin{aligned}
&2f(x)\\
&= f(a) + f(b) + xF(a) - aF(a) + \int_{]a,x]} (x-t)\mu(dt)\\
&\quad - bF(b) + xF(b) - \int_{]x,b]} (x-t)\mu(dt)\\
&= \{F(a) + F(b)\}x + f(a) + f(b) - aF(a) - bF(b) + \int_{]a,b]} |x-t|\mu(dt)
\end{aligned}
$$

これより，f は $J =]a, b]$ で

$$
f(x) = \frac{1}{2}\{F(a) + F(b)\}x + \frac{1}{2}\{f(a) + f(b) - aF(a) - bF(b)\} + \frac{1}{2}\int_{]a,b]} |x-t|\mu(dt)
$$

という表現をもつ．右辺の関数は明らかに x について凸なので[*28]，f は $]a,b]$ 上凸である．I は開区間なので，$x,y\in I$ とすれば $x,y\in J=]a,b]$ なる J が存在する．これより I 上での凸性も分かる．

後は f の（超関数の意味での）二回微分が μ になることを示せばよい．先ほどの表現から f の左微分を定義に戻って計算すれば，Lebesgue の収束定理より

$$f'_-(x)=\frac{1}{2}\{F(a)+F(b)\}+\frac{1}{2}\int_{]a,b]}\mathrm{sgn}(x-t)\mu(dt)$$

が $J=]a,b]$ 上で成立．$\varphi\in C_c^\infty(I)$ とすれば，$\mathrm{supp}\,\varphi\subset J=]a,b]$ なる区間 J を選ぶことで

$$\begin{aligned}
&\int_I f'_-(x)\varphi'(x)m(dx)\\
&=\int_{]a,b]} f'_-(x)\varphi'(x)m(dx)\\
&=\int_{]a,b]}\left[\frac{1}{2}\{F(a)+F(b)\}+\frac{1}{2}\int_J \mathrm{sgn}(x-t)\mu(dt)\right]\varphi'(x)m(dx)\\
&=\frac{1}{2}\{F(a)+F(b)\}\int_{]a,b]}\varphi'(x)m(dx)+\frac{1}{2}\int_{]a,b]}\left(\int_{]a,b]}\varphi'(x)\mathrm{sgn}(x-t)m(dx)\right)\mu(dt)\\
&=\frac{1}{2}\int_{]a,b]}\left(-\int_{]a,t]}\varphi'(x)m(dx)+\int_{]t,b]}\varphi'(x)m(dx)\right)\mu(dt)\\
&=\frac{1}{2}\int_{]a,b]}\left[-\varphi(t)+\varphi(a)+\varphi(b)-\varphi(t)\right]\mu(dt)\\
&=-\int_{]a,b]}\varphi(t)\mu(dt)\\
&=-\int_I\varphi(t)\mu(dt)
\end{aligned}$$

が成立．これより $f''=\mu$ が分かる．

なお，この f は定数 c_0 と c_1 の分だけ自由度があることに注意されたい[*29]．

(iii) 証明は (ii) の後半とほぼ同じである．区間 $J\subset I$ が $J=[a,b]$ の形の時を考える．凸関数に関する微積分学の基本定理と Stieltjes 積分に関する部分積分公式により，$x\in I^\circ$ に対して

$$\begin{aligned}
f(x)-f(a)&=\int_{]a,x]}f'_+(t)dt\\
&=xf'_+(x)-af'_+(a)-\int_{]a,x]}tdf'_+(t)\\
&=xf'_+(a)-af'_+(a)+\int_{]a,x]}(x-t)df'_+(t)\\
&=xf'_+(a)-af'_+(a)+\int_{]a,x]}(x-t)\mu(dt)
\end{aligned}$$

[*28] affine 関数の部分は明らかに凸であり，積分の部分は凸関数と単調増加な線形形式（μ の正値性に注意）の合成であることから，やはり凸である．

[*29] $f''=\mu$ を 2 階の微分方程式と思えば，

が成立する．同様にして，

$$\begin{aligned}
f(b)-f(x) &= \int_{]x,b]} f'_+(t)dt \\
&= bf'_+(b) - xf'_+(x) - \int_{]x,b]} t df'_+(t) \\
&= bf'_+(b) - xf'_+(b) + \int_{]x,b]} (x-t)\mu(dt)
\end{aligned}$$

二つの式を合わせれば，

$$\begin{aligned}
2f(x)-f(a)-f(b) &= \int_{]a,x]} f'_+(t)dt - \int_{]x,b]} f'_+(t)dt \\
&= (f'_+(a)+f'_+(b))x - af'_+(a) - bf'_+(b) + \int_{]a,b]} |x-t|\mu(dt)
\end{aligned}$$

という表現を得る．したがって，

$$\alpha_J = \frac{1}{2}\{f'_+(a)+f'_+(b)\}, \quad \beta_J = \frac{1}{2}\{f(a)+f(b)-af'_+(a)-bf'_+(b)\}$$

と置けばよい．他の場合，例えば区間が $J'=[a,b]$ の形の時は

$$\begin{aligned}
&2f(x)-f(a)-f(b) \\
&= \{f'_+(a)+f'_+(b)\}x - af'_+(a) - bf'_+(b) + \int_{]a,b]} |x-t|\mu(dt) \\
&= \{f'_+(a)+f'_+(b)\}x - af'_+(a) - bf'_+(b) + \int_{[a,b]} |x-t|\mu(dt) - (x-a)\mu(\{a\}) \\
&= \{f'_+(a)+f'_+(b)-\mu(\{a\})\}x - a\{f'_+(a)-\mu(\{a\})\} - bf'_+(b) + \int_{[a,b]} |x-t|\mu(dt)
\end{aligned}$$

と書けるから

$$\begin{aligned}
\alpha_{J'} &= \frac{1}{2}\{f'_+(a)+f'_+(b)-\mu(\{a\})\} \\
\beta_{J'} &= \frac{1}{2}[f(a)+f(b)-a\{f'_+(a)-\mu(\{a\})\}-bf'_+(b)]
\end{aligned}$$ □

とおけばよい．

$$f'_-(x) = \frac{1}{2}\{F(a)+F(b)\} + \frac{1}{2}\int_{]a,b]} \mathrm{sgn}(x-t)\mu(dt)$$

となるのは (ii) と同様である．

本節の最後に，マルチンゲール理論において特に頻繁に現れる凸関数の例をいくつか挙げよう．

例 A.12.7. $a \in \mathbb{R}$ とする．このとき関数 $x \mapsto |x-a|$ は凸関数であり，その左微分は $x \mapsto \mathrm{sgn}(x-a)$ である．ただし，符号関数 sgn は

$$\mathrm{sgn}(z) = \begin{cases} -1 & z \le 0 \\ 1 & z > 0 \end{cases}$$

によって定義される．また，関数 $x \mapsto |x-a|$ の 2 階微分は，Dirac 測度を用いて $2\delta_a$ と表現される． ■

例 A.12.8. $a \in \mathbb{R}$ とする．関数 $x \mapsto (x-a)^+$ と $x \mapsto (x-a)^-$ はどちらも凸関数であり，その左導関数はそれぞれ $1_{]a,\infty]}$ と $-1_{]-\infty,a]}$ である．さらに，2 階微分はともに δ_a となる． ■

例 A.12.9. $p > 1$ なら，$x \mapsto |x|^p$ は凸関数である．$]0,\infty[$ 上では $|x|^p = x^p$ であるから，$|x|^p$ は $]0,\infty[$ 上で C^1 級でありその導関数は px^{p-1} に等しい．また，$]-\infty,0[$ 上では $|x|^p = (-x)^p$ が成り立つので，その微分は $-p(-x)^{p-1}$ である．これらの微分は $x \mapsto 0$ のときに 0 に収束するから，$|x|^p$ が C^1-級であることがわかる．さらに，その導関数は $p\,\mathrm{sgn}(x)|x|^{p-1}$ に等しい． ■

例 A.12.10. $x \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\log^+ x = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 1 \\ \log x & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$$

と定義する．このとき，$x \mapsto x\log^+ x$ は凸関数である．$]-\infty,1[$ 上ではこの関数は 0 なので，明らかに C^1 級でありその導関数は 0 である．$]1,\infty[$ 上ではこの関数は $x\log x$ に等しいので C^1 級であり，その導関数は $\log x + 1$ となる．そこで，

$$r(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \\ 1 + \log x & x \in]1,\infty[\end{cases}$$

と定めれば，これが $x\log^+ x$ の左導関数である． ■

A.13 線形作用素の半群

A.14 ノート

■A.1　命題 A.1.8 の証明は He, Wang, and Yan [53] からとった．命題 A.1.8 が誰によるものかはわからないが，Doob [34, p.601] で既に述べられているようである．また定理 A.1.9 の証明は Medvedyev [78, Appendix A.1] を参考にした．定理 A.1.9 の起源がどこにあるのかもいまいちわからない．いくつかの文献の bibliographical note を調べてみたが，あまりはっきり書いているものは見当たらなかった．これに近い定理は Meyer [82, Chapter I. T.20] 見られる．余談だが，一様収束の条件が必要ないことを Meyer は知らなかったのか，Dellacherie and Meyer [24] でも依然として一様収束について閉じていることを課している[*30]．Stone 条件は Stone [109, 110, 111, 112] にちなんだ名前のようだ[*31]．Stone 条件を満たすベクトル束 $V \subset \mathrm{Map}(X,\mathbb{R})$ を Stone 束と呼ぶ文献もあるが（Dudley [35] や Medvedyev [78]）これはどうなのだろう？ Stone 束という用語は束論において Heyting 代数に付加条件を課した束のことを指すことがある（Birhkoff [11]）ので，多少紛らわしいと思う．関数型の単調族定理についいは，Bogachev [12, 2.12.(iii)] や Dellacherie and Meyer [24, Chapter I] が詳しい．

■A.2　定理 A.2.7 における L^1 収束の特徴付けは，有限測度空間だから成り立つものである．一般の測度空間においては，L^1-有界性と同程度絶対連続性に加えて，「(一様) 緊密性」と類似の条件を課す必要がある．詳しくは，Fonseca and Leoni [44, Theorem 2.24] などを見て欲しい．一様可積分性についてさらに詳しいことは Bogachev [12] や Diestel [29] を，Banach 空間値測度の一様可積分性については Diestel and Uhl [28] を参照されたい．

[*30] これに関連した話が Sharpe [103, p.364–365] に書いてある．

[*31] これらの論文は Daniell-Stone 積分の理論を構築した歴史的に重要な文献である．

■A.3　本節の内容は，Banach 空間論において基本的なものばかりである．本ノートでの記述は，主に Brezis [14] や Conway [22] などを参考にした．和書では宮島 [83] が最良の教科書である．

■A.4　定理 A.4.5 の証明は Bogachev [12, 4.4.6.Theorem] を参考にした．定理 A.4.5 は Nikodym の有界性定理と呼ばれることがある．また，測度列の各点収束極限が測度になるという定理は Nikodym の収束定理と呼ばれるものである．狭い意味では，絶対連続な測度列の各点収束極限が一様に絶対連続となるという部分のみが定理が Vitali-Hahn-Saks の定理と呼ばれることもある．したがって，本ノートでの Vitali-Hahn-Saks の定理は上記の 3 つの定理を一まとめにしたものである．これらの収束定理については，Constantinescu [21] が非常に詳しい．（そして非常に難しい本である．）Banach 空間値測度に関する Vitali-Hahn-Saks の定理については，Diestel and Uhl [28] を参照されたい．また，無限測度に関する Vitali-Hahn-Saks の定理については，Bogachev [12]，Dunford and Schwartz [38]，Fonseca and Leoni [44] などが参考になる．

■A.5　Dunford-Pettis の定理（一様可積分性と相対弱コンパクト性の同値性）は，元は Dunford [37] によるものである．一様可積分 $\Longrightarrow$ 相対弱コンパクトの証明を L^2 の反射性に帰着させる方法は Kallenberg [66, Lemma 3.13] から採用したが，これが [66] のオリジナルなのか，あるいは別の文献によるものなのかはわからない．[66] には「Lemma 3.13 は Dunford [37] による」と書いてあるが，[37] の証明は関数列を用いて構成される L^1 の可分な部分空間を用いるものであり，少し異なる．

■A.6

■A.7　命題 A.7.1 の証明は DiBenedetto [27] から取った．合成積を用いたアプローチという意味ではこれは Weierstrass の原論文の証明 Weierstrass [118, 117] に近いとも言えそうだが，[118] は熱核を用いた解析関数による近似を行ってそこから多項式での近似をしているらしい．（その辺の概要が Bichteler [9, Appendix. Proposition A.2.11] 付近に書いてある．）Stone-Weierstrass の定理のコンパクト開位相への一般化は，Kelley [^][69] を参考にした．

■A.8　A.8 節の内容は，主に Bogachev [12, Section 5.2] を参考にした．補題 A.8.4 は Royden [98, Chapter 5, Section 2, Problem 9] からとった．多次元の場合も含む有界変動関数一般については，Ambrosio, Fusco, and Pallara [3]，Leoni [74]，Maz'ya [77]，Ziemer [120] などが詳しい．

■A.9　Stieltjes 積分について詳しく書いた本は少ないので，むしろ確率解析の本の付録を参考にするのがよいだろう．例えば Revuz and Yor [94] や He, Wang, and Yan [53] など．

■A.11　命題 A.12.4 は Robers and Varberg [95, I. 12. Theorem A] からとった．凸関数については，Dudley [36]，Medvegyev [78]，Revuz and Yor [94] などを参考にした．より詳しくは，Roberts and Varberg [95] や Hiriart-Urruty and Lemarechal [55] などの専門書を参照されたい．

付録 B

確率論についての補足

B.1　L^0 空間

可測空間 $(\Omega, \mathscr{A})$ 上の $(E, \mathscr{E})$-値可測関数全体の集合を $\mathscr{L}^0(\Omega, \mathscr{A}; E)$ で表す．

命題 B.1.1.
$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ を有限測度空間とする．また E を位相空間とし，d を E の位相と整合的な有界距離とする．$X, Y \in \mathscr{L}^0(\Omega, \mathscr{A}; E)$ に対して

$$d_{L^0}(X, Y) = \int_\Omega d(X(\omega), Y(\omega))\, \mu(d\omega)$$

と定義すれば，d_{L^0} は $\mathscr{L}^0(\Omega, \mathscr{A}; E)$ 上の擬距離となる．また，この距離から誘導される $\mathscr{L}^0(\Omega, \mathscr{A}; E)/\mu$ 上の擬距離は特に距離となる．さらに (E, d) が完備ならば，$\mathscr{L}^0(\Omega, \mathscr{A}; E)$ も d_{L^0} について完備となる．

証明. まずは，d は $E \times E$ 上の連続関数なので $\omega \mapsto d(X(\omega), Y(\omega))$ は可測関数となることに注意しておく．d が三角不等式を満たすことと積分の線形性から，d_{L^0} も三角不等式を満たすことがわかる．また d の対称性と非負性から d_{L^0} の対称性と非負性も従う．よって d_{L^0} は $\mathscr{L}^0(\Omega, \mathscr{A}; E)$ 上の擬距離である．d が距離であることから $X = Y$ μ-a.e. は $d(X(\omega), Y(\omega)) = 0$ μ-a.e. と同値であり，よって $d_{L^0}(X, Y) = 0$ とも同値になる．ゆえに d_{L^0} から誘導される $\mathscr{L}^0(\Omega, \mathscr{A}; E)/\mu$ 上の擬距離は距離となる．

(E, d) が完備であると仮定して，d_{L^0} の完備性を示そう．$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を d_{L^0}-Cauchy 列とし，その部分列 $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ を

$$d_{L_0}(X_{n_k}, X_{n_{k+1}}) \le \frac{1}{2^{2k}}$$

を満たすように選ぶ．このとき

$$\begin{aligned}
\sum_{k\ge 0} \mu\left(d(X_{n_k}, X_{n_{k+1}}) > \frac{1}{2^k}\right) &\le \sum_{k\ge 0} 2^k \int_\Omega d(X_{n_k}(\omega), X_{n_{k+1}}(\omega))\, \mu(d\omega) \\
&= \sum_{k\ge 0} 2^k d_{L_0}(X_{n_k}, X_{n_{k+1}}) \\
&\le \sum_{k\ge 0} \frac{1}{2^k} < \infty
\end{aligned}$$

が成り立つから，Borel-Cantelli の補題により

$$\mu\left(\bigcap_{n\geq 0}\bigcup_{k\geq n}\left\{d(X_{n_k},X_{n_{k+1}})>\frac{1}{2^k}\right\}\right)=0$$

となる．

$$\Lambda=\bigcup_{n\geq 0}\bigcap_{k\geq n}\left\{d(X_{n_k},X_{n_{k+1}})>\frac{1}{2^k}\right\}=\Omega\setminus\bigcap_{n\geq 0}\bigcup_{k\geq n}\left\{d(X_{n_k},X_{n_{k+1}})>\frac{1}{2^k}\right\}$$

と定めれば $(X_{n_k}(\omega))$ は Λ 上で Cauchy 列となるから，(E,d) の完備性よりある E の元に収束する．そこで $a\in E$ を任意に選んで

$$X_\infty(\omega)=\begin{cases}\lim_{k\to\infty}X_{n_k}(\omega) & \omega\in\Lambda\\ a & \omega\in\Omega\setminus\Lambda\end{cases}$$

と定義する．$\Lambda\in\mathscr{A}$ であるから，X_∞ は E 値の $\mathscr{A}$-可測関数となる．このとき X_{n_k} は X に概収束するから，d が有界距離であることと優収束定理から，

$$\lim_{k\to\infty}d_{L_0}(X_{n_k},X)=\int_\Omega\lim_{k\to\infty}d(X_{n_k}(\omega),X(\omega))\,\mu(d\omega)=0$$

となる．ゆえに (X_{n_k}) は d_{L_0} についても X に収束する．Cauchy 列 (X_n) の部分列 (X_{n_k}) が X に収束するから，元の列 (X_n) も X に収束する．したがって d_{L^0} は完備な距離となる． $\square$

$\mathscr{L}^0(X,\mathscr{A};E)$ を命題 B.1.1 の距離から定まる位相により位相空間と見たものを $\mathscr{L}^0(\Omega,\mathscr{A},\mu;E,d)$ や $\mathscr{L}^0(\mu;d)$ で，その μ による商空間を $L^0(\Omega,\mathscr{A},\mu;E,d)$ や $L^0(\mu;d)$ で表すことにする．

系 B.1.2.
(E,d) が Fréchet 空間ならば，$L^0(\mu;d)$ も Fréchet 空間となる．

L_0-収束はいわゆる測度収束と同値である．

命題 B.1.3.
$(X,\mathscr{A},\mu)$ を測度空間とし，(E,d) を距離空間とする．このとき $\mathscr{L}^0(\Omega;E)$ の点列 (X_n) について次の条件は同値である．

(i) (X_n) は $\mathscr{L}^0(\mu;d\wedge 1)$ で X に収束する．

(ii) 任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\mu(\{d(X_n,X)>\varepsilon\})=0$$

が成り立つ．

d が E 上の距離ならば，$1\wedge d(x,y)$ は E 上の有界距離で d と同じ位相を定めることを思い出そう．

証明. $0 < \varepsilon < 1$ とすれば

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega 1 \wedge d(X(\omega), Y(\omega))\, \mu(d\omega) \\
&= \int_{\{d(X(\omega),Y(\omega))>\varepsilon\}} 1 \wedge d(X(\omega), Y(\omega))\, \mu(d\omega) + \int_{\{d(X(\omega),Y(\omega))\le\varepsilon\}} 1 \wedge d(X(\omega), Y(\omega))\, \mu(d\omega) \\
&\le \mu(\{d(X(\omega), Y(\omega)) > \varepsilon\}) + \varepsilon\mu(\Omega)
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
\varepsilon\mu(\{d(X(\omega), Y(\omega)) > \varepsilon\}) &= \int_\Omega \varepsilon 1_{\{d(X,Y)>\varepsilon\}}(\omega)\mu(d\omega) \\
&\le \int_\Omega 1 \wedge d(X(\omega), Y(\omega)) 1_{\{d(X,Y)>\varepsilon\}}(\omega)\mu(d\omega) \\
&\le \int_\Omega 1 \wedge d(X(\omega), Y(\omega))\mu(d\omega)
\end{aligned}$$

となるから，

$$\varepsilon\mu(\{d(X,Y) > \varepsilon\}) \le \int_\Omega 1 \wedge d(X(\omega), Y(\omega))\mu(d\omega) \le \mu(\{d(X,Y) > \varepsilon\}) + \varepsilon\mu(\Omega)$$

という関係が成り立つ．これより (i) と (ii) の同値性が従う． □

B.2 独立性

命題 B.2.1.
$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とする．確率変数 X と部分 σ - 代数 $\mathscr{G}$ について，X と $\mathscr{G}$ が独立となるための必要十分条件は

$$E[e^{i\xi X}|\mathscr{G}] = E[e^{i\xi X}] \quad \forall\xi \in \mathbb{R} \tag{B.2.1}$$

がなりたつことである．

証明. X と $\mathscr{G}$ が独立ならば (B.2.1) がなりたつのは条件付き期待値の性質より明らか．逆を示せばよい．(B.2.1) が成立すると仮定しよう．$P(B) > 0$ となる $B \in \mathscr{G}$ を任意に選んで

$$\begin{aligned}
P_B : \mathscr{F} &\longrightarrow [0,1] \\
A &\longmapsto \frac{P(A \cap B)}{P(B)}
\end{aligned}$$

と定めれば[*1]，P_B は $(\Omega, \mathscr{F})$ 上の確率測度となる．定義より明らかに $P_B \ll P$ であるが，

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \int_\Omega \frac{1_{A\cap B}}{P(B)} dP = \int_A \frac{1_B}{P(B)} dP$$

という関係に注意すれば $dP_B/dP = 1_B/P(B)$ となることが分かる．(B.2.1) により

$$E[e^{i\xi X} 1_B] = P(B)E[e^{i\xi X}]$$

*1 要は集合 B による条件付き確率である．

となるから，

$$\int_\Omega e^{i\xi X} dP_B = \int_\Omega e^{i\xi X} \frac{1_B}{P(B)} dP = \frac{1}{P(B)} \left(P(B) \times \int_\Omega e^{i\xi X} dP \right)$$

がなりたつ．したがって，特性関数の性質より二つの測度 $X_* P_B$ と $X_* P$ が[*2]等しいことが導かれる．すなわち

$$X_* P_B(E) = X_* P(E) \quad \forall E \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$$

である．ところで，任意の $A \in \sigma(X)$ はある $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ によって $A = X^{-1}(E)$ と表現されるから，

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P_B(A) = X_* P_B(E) = X_* P(E) = P(A) \quad \forall A \in \sigma(X)$$

であるが，これは B が任意の $A \in \sigma(X)$ と独立であるということに他ならない．$B \in \mathscr{G}$ が $P(B) = 0$ のときは

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

は自明な等式なので，$P(B) > 0$ の場合の結果と合わせれば

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad \forall A \in \sigma(X),\ \forall B \in \mathscr{G}$$

となる．よって X と $\mathscr{G}$ は独立である． □

B.3 直積可測空間と直積測度

有限個の測度空間の直積についてはよく知られているが，本節では任意の数の測度空間の直積について考えよう．$(\Omega_i, \mathscr{A}_i)_{i \in I}$ を可測空間の族とし，$\mathrm{pr}_i \colon \prod_{i \in I} \Omega_i \to \Omega_i$ を標準的な射影とする．このとき，写像の族 $(\mathrm{pr}_i)_{i \in I}$ によって生成される $\prod_{i \in I} \Omega_i$ 上の σ-代数 $\sigma(\mathrm{pr}_i; i \in I)$ を $\prod_{i \in I} \Omega_i$ 上の直積 σ-代数 (product σ-algebra) といい，$\bigotimes_{i \in I} \mathscr{A}_i$ で表す．また，可測空間 $\left(\prod_{i \in I} \Omega_i, \bigotimes_{i \in I} \mathscr{A}_i\right)$ を可測空間族 $(\Omega_i, \mathscr{A}_i)_{i \in I}$ の直積といい，$\prod_{i \in I} (\Omega_i, \mathscr{A}_i)$ で表したりする．全ての $i \in I$ について $(\Omega_i, \mathscr{A}_i) = (\Omega, \mathscr{A})$ が成り立っているときは，直積可測空間を特に $(\Omega^I, \mathscr{A}^{\otimes I})$ で表す．$\mathscr{A}^{\otimes I}$ のことをシリンダー σ-代数 (cylindrical σ-algebra) と呼んだりもする．直積可測空間は次の意味での普遍性を持つ．

命題 B.3.1.
$(\Omega_i, \mathscr{A}_i)_{i \in I}$ を可測空間の族とし，$(E, \mathscr{E})$ を可測空間とする．可測写像の族 $(f_i \colon E \to \Omega_i)_{i \in I}$ が与えられたとき，直積可測空間への可測関数 $f \colon E \to \prod_{i \in I} \Omega_i$ で任意の i について以下の図式を可換にするものがただ一つ存在する．

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\ \prod_{i \in I} \Omega_i \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"'] & \Omega_i \end{tikzcd}$$

[*2] $X_* P$ は像測度を表すのであった．

証明. 写像の存在と一意性は集合と写像の一般論から従うので，可測性を示そう．$\bigotimes_{i\in I}\mathscr{A}_i=\bigvee_{i\in I}\sigma(\mathrm{pr}_i)$ だから，任意の $i\in I$ について f が $\mathscr{E}/\sigma(\mathrm{pr}_i)$-可測になることを示せばよい．$A\in\sigma(\mathrm{pr}_i)$ は $A=\mathrm{pr}_i^{-1}(B)$（$B\in\mathscr{A}_i$）という表現を持つから，

$$f^{-1}(A)=f^{-1}(\mathrm{pr}_i^{-1}(B))=(\mathrm{pr}_i\circ f)^{-1}(B)=f_i^{-1}(B)\in\mathscr{E}$$

が成り立つ．ただし，最後の $\in$ は各 f_i の可測性よりわかる．したがって f は $\mathscr{E}/\sigma(\mathrm{pr}_i)$-可測であり，$i$ は任意に選んでいたから f が $\mathscr{E}/\bigotimes_{i\in I}\mathscr{A}_i$-可測であることもわかる． □

直積 σ-代数は以下のように特徴づけることが可能である．

命題 B.3.2.
$(\Omega_i,\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ を可測空間の族とし，$\mathscr{I}_{\mathrm{c}}$ を I の可算部分集合全体の集合とする．このとき，

$$\bigotimes_{i\in I}\mathscr{A}_i=\bigcup_{J\in\mathscr{I}_{\mathrm{c}}}\sigma(\mathrm{pr}_i\,;\,i\in J)$$

が成り立つ．（右辺は $\bigvee$ ではなくて $\bigcup$ である点に注意.）

証明. 包含関係

$$\bigotimes_{i\in I}\mathscr{A}_i\supset\bigcup_{J\in\mathscr{I}_{\mathrm{c}}}\sigma(\mathrm{pr}_i\,;\,i\in J)$$

は明らかである．逆向きの包含関係は $\bigcup_{J\in\mathscr{I}_{\mathrm{c}}}\sigma(\mathrm{pr}_i\,;\,i\in J)$ が全ての pr_i を可測にする σ-代数であることからわかる． □

確率空間の族 $(\Omega_i,\mathscr{A}_i,P_i)_{i\in I}$ が与えられたとき，直積空間 $\prod_{i\in I}(\Omega_i,\mathscr{A}_i)$ 上に $(P_i)_{i\in I}$ の無限直積測度を構成することができる．

定理 B.3.3.
$(\Omega_i,\mathscr{A}_i,P_i)_{i\in I}$ を確率空間の族とする．このとき，$\prod_{i\in I}(\Omega_i,\mathscr{A}_i)$ の確率測度 P で，任意の有限集合 $F\in I$ と射影 $\mathrm{pr}_F\colon\prod_{i\in I}\Omega_i\to\prod_{i\in F}\Omega_i$，そして $B_i\in\mathscr{A}_i$（$i\in F$）に対して

$$P\left(\mathrm{pr}_F^{-1}\left(\prod_{i\in F}B_i\right)\right)=\prod_{i\in F}P_i(B_i)$$

を満たすものがただ一つ存在する．

定理 B.3.3 における確率測度 P を確率測度族 $(P_i)_{i\in I}$ の直積といい，$\bigotimes_{i\in I}P_i$ で表す．

証明. Step 1：$I=\mathbb{N}$ の場合． $\mathscr{E}$ を

$$\mathscr{E}^{(n)}=\bigcup_{\substack{F\subset\mathbb{N}_{n+1}\\ F\text{ は有限集合}}}\left\{\pi_F^{-1}\left(\prod_{i\in F}B_i\right)\middle|\,\forall i\in F\ B_i\in\mathscr{A}_i\right\}$$

と定義すれば，これは $\prod_{i\geq n+1}\Omega_i$ 上の π-系で $\sigma(\mathscr{E}^{(n)})=\bigotimes_{i\geq n+1}\mathscr{A}_i$ を満たす．$\mathscr{E}^{(n)}$ 上の関数 $P^{(n)}$ を

$$P^{(n)}\left(\mathrm{pr}_F^{-1}\left(\prod_{i\in F}B_i\right)\right)=\prod_{i\in F}P_i(B_i)$$

によって定義しよう．これは$\mathscr{E}$の元の表現によらず定まることに注意されたい．$\mathscr{E}^{(0)}$はπ-系であることから，特に$P^{(0)}$が$\bigotimes_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{A}_i$上の確率測度に拡張できたとしたら，その拡張は一意的である．（命題 A.1.7）後はこれが$\mathscr{E}^{(0)}$上$\emptyset$で連続であることを示せば，Pは$\sigma(\mathscr{E}^{(0)})$上の確率測度に拡張されることがわかる．

(A_n)を$\mathscr{E}^{(n)}$の元の減少列で，任意のnについて$P^{(0)}(A_n)>\varepsilon$を満たすものとする．このとき$\bigcap_n A_n\neq\emptyset$であることを示せばよい．$(x_1,\ldots,x_k)$に対して

$$A_n(x_1,\ldots,x_k)=\left\{z\in\prod_{i\geq k+1}\Omega_i\;\middle|\;(x_1,\ldots,x_n,z)\in A_n\right\}$$

と定義することにする．（つまりA_nの$(x_1,\ldots,x_k)$断面である．）

$$B_1^n=\left\{x_1\in\Omega_1\;\middle|\;P^{(1)}(A_n(x_1))>\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

とすれば，$B_1^n\in\mathscr{A}_1$が成り立つ．$A_n=\mathrm{pr}_F^{-1}\left(\prod_{i\in F}C_i^n\right)$を満たすような有限集合$F\ni 1$と$(C_i^n)$を選べば，

$$\begin{aligned}
\varepsilon &< P^{(0)}(A_n)\\
&=\prod_{i\in F}P_i(C_i^n)=P_1\otimes\left(\prod_{i\in F_{\geq 2}}P_i\right)\left(\prod_{i\in F}C_i^n\right)\\
&\leq P_1\otimes\left(\prod_{i\in F_{\geq 2}}P_i\right)\left((B_1^n)\times\prod_{i\in F_{\geq 2}}C_i^n\right)\\
&\quad+P_1\otimes\left(\prod_{i\in F_{\geq 2}}P_i\right)\left((C_1^n\setminus B_1^n)\times\prod_{i\in F_{\geq 2}}C_i^n\right)\\
&=\int_{\Omega_1}1_{B_1^n}(x_1)P^{(1)}\left(A_n(x_1)\right)P_1(dx_1)\\
&\quad\int_{\Omega_1}1_{C_1^n\setminus B_1^n}(x_1)P^{(1)}\left(A_n(x_1)\right)P_1(dx_1)\\
&\leq P_1(B_1^n)+\frac{\varepsilon}{2}P_1(X\setminus B_1^n)\leq P_1(B_1^n)+\frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

となる．よって$P_1(B_1^n)>\varepsilon/2$である．$(B_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$は減少列であり，上の評価とP_1が確率測度であることから$\bigcap_n B_1^n\neq\emptyset$を満たしている．

$x_1\in\bigcap_n B_1^n\neq\emptyset$を固定し，$(A_n(x_1))$に先ほどと同様の議論を適用することで$\mathscr{A}_2$の減少列$(B_2^n)$で$\bigcap_n B_2^n\neq\emptyset$なるものを得る．そして$x_2\in\bigcap_n B_2^n$を一つ選んで固定する．このようにして再帰的に構成された数列$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$は$(x_n)\in\bigcap_n A_n$を満たしている．よって$\bigcap_n A_n$は空ではない．

Step 2：一般の場合． $\mathscr{I}_{\mathrm{c}}$をIの可算部分集合全体の集合とする．$J\in\mathscr{I}_{\mathrm{c}}$とすれば，step 1 での議論により$\left(\prod_{i\in J}\Omega_i,\bigotimes_{i\in J}\mathscr{A}_i\right)$上の直積確率測度$P_J$がただ一つ存在する．$A\in\bigotimes_{i\in J}\mathscr{A}_i$に対して

$$P(\mathrm{pr}_J^{-1}(A))=P_J(A)$$

と定義する．各P_Jが直積測度であることと命題 B.3.2 から，これにより$\bigotimes\mathscr{A}_i=\bigcup_{J\in\mathscr{I}_{\mathrm{c}}}\sigma(\mathrm{pr}_i\,;\,i\in J)$上の$[0,1]$-値写像$P$が定まることがわかる．あとはこの$P$が可算加法的であることを示せばよい．$(A_n)\in\bigotimes\mathscr{A}_i$に対して，任意の$n$について$A_n\in\sigma(\mathrm{pr}_i\,;\,i\in J)$が成り立つような可算集合$J$を一つ選ぶ．$B_n\in\bigotimes_{i\in J}\mathscr{A}_i$

を $A_n = \mathrm{pr}_J^{-1}(B_n)$ となるように選べば，P_J の可算加法性より

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = P_J\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P_J(B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$$

となることがわかる．したがって P も可算加法的である． □

B.4 Kolmogorov の拡張定理

B.5 Gauss 系

$x, y \in \mathbb{R}^d$ に対してその標準内積を $\langle x, y\rangle$ と書くことにする．

定義 B.5.1.
$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，$X = (X_1, \ldots, X_d)$ を d 次元確率変数とする．ある $m \in \mathbb{R}^d$ と d 次対称正定値行列 V によって

$$E[e^{i\langle \xi, X\rangle}] = \exp\left(i\langle m, \xi\rangle - \frac{1}{2}\langle V\xi, \xi\rangle\right) \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}^d)$$

と表されているとき，X を d 次元 Gauss 型確率変数という．

注意 B.5.2. V が狭義の正定値，すなわち V が退化していない場合には d 次元 Gauss 型確率変数の分布は密度関数

$$\frac{1}{(2\pi)^{-d/2}} \frac{1}{\sqrt{\det V}} \exp\left(-\frac{1}{2}\langle V^{-1}(x-m), x-m\rangle\right)$$

をもつ．密度関数による定義では V が退化している場合は扱えないので，定義 B.5.1 は密度関数による定義の一般化になっていることに注意されたい．

命題 B.5.3.
確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の確率変数の有限族 $X_1, \ldots, X_d$ に対して以下は同値．

(i) $X = (X_1, \ldots, X_d)$ は d 次元 Gauss 型確率変数．
(ii) 任意の $a, \ldots, a_d$ に対して $a_1X_1 + \cdots + a_dX_d$ は 1 次元 Gauss 型確率変数．

証明. $a = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ に対して確率変数 $a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$ を $\langle a, X\rangle$ で表すことにする．

Step1：(i) ならば (ii) の証明． $X = (X_1, \ldots, X_d)$ は d 次元 Gauss 分布とし，その特性関数は $m \in \mathbb{R}^d$ と d 次正方行列 V で表されているものとする．とおく．このとき，任意の $t \in \mathbb{R}$ と任意の $a \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\begin{aligned} E[e^{it\langle a, X\rangle}] &= E[e^{i\langle ta, X\rangle}] \\ &= \exp\left(i\langle ta, m\rangle - \frac{1}{2}\langle V(ta), ta\rangle\right) \\ &= \exp\left(it\langle a, m\rangle - \frac{1}{2}t^2\langle Va, a\rangle\right) \end{aligned}$$

となるから，確率変数 $\omega \mapsto \langle a, X(\omega)\rangle$ は平均 $\langle a, m\rangle$，分散 $\langle Va, a\rangle$ の Gauss 分布に従う．

Step2：(ii) ならば (i) の証明．仮定より，任意の $\xi = (\xi_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ に対して $\langle \xi, X\rangle$ は正規分布に従う．

$$\begin{aligned}
E[\langle \xi, X\rangle] &= \xi_1 E[X_1] + \cdots + \xi_d E[X_d] \\
\mathrm{Var}(\langle \xi, X\rangle) &= E\left[\left(\sum_{j=1}^d \xi_j (X_j - E[X_j])\right)\left(\sum_{j=1}^d \xi_j (X_j - E[X_j])\right)\right] \\
&= \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \xi_j \xi_k \mathrm{Cov}(X_j, X_k)
\end{aligned}$$

であるから，

$$m = \begin{pmatrix} E[X_1] \\ \vdots \\ E[X_d] \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \mathrm{Cov}(X_1, X_1) & \ldots & \mathrm{Cov}(X_1, X_d) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_d, X_1) & \ldots & \mathrm{Cov}(X_d, X_d) \end{pmatrix}$$

とおけば[*3]

$$\begin{aligned}
E[\langle \xi, X\rangle] &= \langle m, \xi\rangle \\
\mathrm{Var}(\langle \xi, X\rangle) &= \langle V\xi, \xi\rangle
\end{aligned}$$

となる．よって $\langle \xi, X\rangle \sim \mathcal{N}(\langle m, \xi\rangle, \langle V\xi, \xi\rangle)$ であり

$$E[e^{it\langle \xi, X\rangle}] = \exp\left(it\langle m, \xi\rangle - \frac{1}{2}t^2\langle V\xi, \xi\rangle\right) \qquad \square$$

が任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ．特に $t = 1$ とすれば

$$E[e^{i\langle \xi, X\rangle}] = \exp\left(i\langle m, \xi\rangle - \frac{1}{2}\langle V\xi, \xi\rangle\right)$$

となる．いま $\xi \in \mathbb{R}^d$ は任意に選んだものだったから，これは $X = (X_1, \ldots, X_d)$ が d 次元 Gauss 型確率変数であることに他ならない．

注意 B.5.4. いまの命題の証明よりわかるように，d 次正方行列 V は X の成分の分散，共分散を並べたものになっている．これより V を共分散行列などと呼ぶこともある．

命題 B.5.5.
$X = (X_1, \ldots, X_d)$ は d 次元 Gauss 分布であるとする．このとき，有限族 $X_1, \ldots, X_d$ が独立であることと

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0 \quad (i \neq j) \tag{$*$}$$

は同値である．

[*3] 任意の $\xi \in \mathbb{R}^d$ に対して $\langle V\xi, \xi\rangle = \mathrm{Var}(\langle \xi, X\rangle) \geq 0$ となるから V は非負定値行列になっていることに注意されたい．

証明. $X_a, \dots, X_d$ が独立なら $(*)$ が満たされることは明らかであるから，逆を示せばよい．$(*)$ がなりたつと仮定すれば，X の共分散行列は対角行列である．したがって

$$
\begin{aligned}
E[e^{i\langle \xi, X\rangle}] &= \exp\left(i\langle m, \xi\rangle - \frac{1}{2}\langle V\xi, \xi\rangle\right) \\
&= \exp\left(i\sum_{j=1}^{d} E[X_j]\xi_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} \mathrm{Var}(X_j)\xi^2\right) \\
&= \prod_{j=1}^{d} \exp\left(iE[X_j]\xi_j - \frac{1}{2}\mathrm{Var}(X_j)\xi^2\right) \\
&= \prod_{j=1}^{d} E[e^{i\xi_j X_j}] \qquad \square
\end{aligned}
$$

となり，X の特性関数が X_j の特性関数の積に分解されることがわかる．よって $X_1, \dots, X_d$ は独立である．

定義 B.5.6.
$\mathscr{X}$ を確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の空でない確率変数族とする．任意の $n \geq 1$ と $X_1, \dots, X_n \in \mathscr{X}$ に対して $X = (X_1, \dots, X_n)$ が n 次元 Gauss 型確率変数となるとき，$\mathscr{X}$ を Gauss 系 (Gaussian family) とよぶ．

注意 B.5.7. 補題 B.5.3 より，定義 B.5.6 での「X が d 次元 Gauss 型確率変数である」の部分は「任意の $a \in \mathbb{R}^n$ に対して $\langle a, X\rangle$ は 1 次元 Gauss 確率変数である」としても同値である．

命題 B.5.8.
$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間，$\mathscr{X}$ をその上の Gauss 系とする．$\mathrm{Span}(\mathscr{X}) \subset L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ で $\mathscr{X}$ によって生成される部分空間を表したとき，$L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ での閉包 $\overline{\mathrm{Span}(\mathscr{X})}$ はまたガウス系である．[a]

[a] 実はもっと強く，確率収束による閉包もまた Gauss 系になることが言える．小谷の補題 10.9 [70, p.226] などを参照のこと．

証明. Gauss 系の定義より，$\mathrm{Span}(\mathscr{X})$ もまた Gauss 系となることに注意しておく．$X_n \longrightarrow X$（L^2 収束）なら X は Gauss 分布に従うことを示す．L^2 収束より明らかに

$$
\begin{aligned}
E[X_n] &\longrightarrow E[X] \\
\mathrm{Var}(X_n) &\longrightarrow \mathrm{Var}(X)
\end{aligned}
$$

である．また，L^2 収束は分布収束を導くから，

$$
E[e^{i\xi X_n}] \longrightarrow E[e^{i\xi X}]
$$

である．以上の結果より

$$
\begin{aligned}
E[e^{i\xi X}] = \lim_{n\to\infty} E[e^{i\xi X_n}] &= \lim_{n\to\infty} \exp\left\{i\xi E[X_n] - \frac{\xi^2}{2}\mathrm{Var}(X_n)\right\} \\
&= \exp\left\{i\xi E[X] - \frac{\xi^2}{2}\mathrm{Var}(X)\right\} \qquad \square
\end{aligned}
$$

であり，特性関数の形から X が Gauss 分布に従うことが分かった．

さて，$X_k \in \overline{\mathrm{Span}(\mathscr{X})}$ $(k=1,\dots,n)$ とすれば各 k に対して $X_k^{(l)} \longrightarrow X_k$（$L^2$ - 収束）を満たす $\mathrm{Span}(\mathscr{X})$ の元の列がとれる．$\mathrm{Span}(\mathscr{X})$ は Gauss 系だったから $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$ に対して $a_1X_1^{(l)}+\cdots+a_nX_n^{(l)}$ は Gauss 分布に従う．先ほどの結果よりその L^2 極限 $a_1X_1+\cdots+a_nX_n$ も Gauss 分布に従う．よって $\overline{\mathrm{Span}(\mathscr{X})}$ は Gauss 系である．

B.6　ノート

■B.3　抽象的な確率空間の可算直積の存在は Hopf [57] によるらしい．（と Bogachev [12, Bibliographical and Historical Comments] に書いてある．）任意の数の直積測度の存在定理は角谷 [65] によって証明された．直積を考える限りは，位相的条件や「コンパクトクラス」の概念を必要としないのがポイントである．本ノートでの証明は Bogachev [12] に従った．

■B.4

■B.5　Gauss 系は確率論において重要な対象であるが，どういったものが基本的な文献なのか筆者は知らない．このノートを書くのには伊藤 [60]，小谷 [70]，西尾・樋口 [88] などを参考にした．収束についてさらに精密な結果が Gihkman and Skorokhod [48] に書いてあったような気もする．（筆者はきちんと読んでいない．）

付録 C

確率過程論についての補足

C.1 Kolmogorov の連続変形定理

この節では，Kolmogorov の連続変形定理の証明を行う．これはブラウン運動の構成において使われることが多いものだが，このノートでは局所時間の regularity に関する命題の証明に用いる．

初めに，関数の Höllder 連続性の定義を復習しておこう．$(E, \| \quad \|_E)$ を Banach 空間とする．ここでは，$x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ のノルムを $\|x\| = \sup_i |x_i|$ で定めることにする[*1]．関数 $f : \mathbb{R}^d \to E$ が局所 α 次 Höllder 連続であるとは，任意の $L > 0$ に対して

$$\sup\left\{ \frac{\|f(x) - f(y)\|_E}{\|x - y\|^\alpha} \;\middle|\; \|x\|, \|y\| \le L, x \ne y \right\} < +\infty$$

が成立するということであった．言い換えれば，任意の $L > 0$ に対してある定数 $C_L > 0$ が存在して，

$$\|x\|, \|y\| \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\|_E \le C_L \|x - y\|^\alpha$$

が成り立つということでもある．

定理 C.1.1 (Kolmogorov の連続変形定理).
I_i $(i \in \{1, \ldots, d\})$ を $\mathbb{R}$ の有界区間とし，$I = \prod_{i=1}^d I_i$ と置く．$(X_t)_{t \in I}$ を E 値確率過程で，次の条件を満たすものとする：ある定数 $\gamma, c, \varepsilon > 0$ が存在して

$$E[\, \|X_t - X_s\|_E^\gamma \,] \le c \|t - s\|^{d+\varepsilon}, \quad s, t \in I$$

が成立する．このとき X の修正 $\widetilde{X}$ で，任意の $\alpha \in [0, \varepsilon/\gamma[$ に対して

$$E\left[\left(\sup_{s,t \in I, s \ne t} \frac{\|\widetilde{X}_t - \widetilde{X}_s\|_E}{\|t - s\|^\alpha} \right)^\gamma \right] < +\infty \tag{C.1.1}$$

を満たすものが存在する．特に，$\widetilde{X}$ のパスは確率 1 で α-Höllder 連続である．

---

*1 $\mathbb{R}^d$ のノルムはどれも同値なので，$\mathbb{R}^d$ のノルムをどのように定めようとも命題の主張は成り立つ．今回は証明のしやすさから上限ノルムを選んでいる．

証明. 記号の乱用を避けるために，$I_i = [0,1[$ として示す．$m \in \mathbb{N}$ に対して

$$D_m = \left\{ \left(\frac{i_1}{2^m}, \dots, \frac{i_d}{2^m} \right) \in [0,1[^d \;\middle|\; i_k \in \{0,1,\dots,2^m-1\} \right\}$$
$$D = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} D_m$$
$$\Delta_m = \left\{ (s,t) \in D_m \times D_m \;\middle|\; \|s-t\| = \frac{1}{2^m} \right\}$$

と定める．このとき，Δ_m の元は $2^{(m+1)d}$ 個以下であることに注意されたい[*2]．$s,t \in D$ に対して，順序 $s \le t$ を $s_i \le t_i, \forall i \in \{1,\dots,d\}$ で定める．

いま D は $[0,1[^d$ で稠密なので，D 上で X が α-Höllder 連続であることを示せばよい．

$$K_i = \sup_{(s,t) \in \Delta_i} \|X_s - X_t\|$$

と定めれば，仮定より

$$E[K_i^\gamma] \le \sum_{(s,t)\in\Delta_i} E[\,\|X_t - X_s\|_E^\gamma\,] \le \sum_{(s,t)\in\Delta_i} c\|s-t\|^{d+\varepsilon} =$$
$$= \sum_{(s,t)\in\Delta_i} c(2^{-i})^{d+\varepsilon} \le c2^{(i+1)d} \cdot 2^{-i(d+\varepsilon)} = c2^d \cdot 2^{-i\varepsilon} =: J2^{-i\varepsilon}$$

が成立する．

$s,t \in D$ に対して，次のような条件を満たす D の列 (s^n), (t^n) を考える：各 n で $s^n \in D_n$ かつ，$0 = s^0 \le s^1 \le \dots \le s$，さらにある n より先では常に $s^n = s$ となる．(t^n) についても同様とする．

$s,t \in D$ は $\|s-t\| \le 1/2^m$ を満たすとしよう．十分大きい n については s^n, t^n はそれぞれ s,t に等しいことを思い出せば，

$$X_s - X_t = \sum_{i=m}^{\infty} (X_{s^{i+1}} - X_{s^i}) + X_{s^m} - X_{t^m} + \sum_{i=m}^{\infty} (X_{t^i} - X_{t^{i+1}})$$

と表現できる．（右辺は実際には有限和である．）これより，

$$\|X_s - X_t\|_E \le K_m + 2\sum_{i=m+1}^{\infty} K_i \le 2\sum_{i=m}^{\infty} K_i$$

なる評価を得る．

この部分をもう少し丁寧に説明しよう．s,t はともに D_N に入ると仮定すれば，第 i 成分は

$$s_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{e_1(k,i)}{2^k}, \quad t_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{e_2(k,i)}{2^k}$$

[*2] $\|s-t\| = 1/2^m$ とは，s と t 各成分の差は 0 かちょうど一区画分（$1/2^m$）であり，違う成分が少なくとも一つあるということである．こういった (s,t) の組の数を考えるには次のようにすればよい：異なる成分の数が i 個の場合は，合わせて ${}_dC_i(2^m-1)^d(2^m)^{d-i}$ パターンある．$i \ge 1$ を足し合わせれば

$$\sum_{i=1}^{d} {}_dC_i(2^m-1)^d(2^m)^{d-i} \le \sum_{i=0}^{d} {}_dC_i(2^m-1)^d(2^m)^{d-i} = (2^m - 1 + 2^m)^d \le 2^{(m+1)d}$$

となる．

のように展開される．（ただし，各 $e_j(k,i)$ は 0 か 1 のいずれかの値をとる．）

$$s_i^n = \sum_{k=1}^{n\wedge N} \frac{e_1(k,i)}{2^k}, \quad t_i^n = \sum_{k=1}^{n\wedge N} \frac{e_2(k,i)}{2^k}$$

とすれば，(s^n) および (t^n) は先ほどの条件を満たす D の列である．ここで $\|s-t\| \leq 1/2^m$ という仮定から全ての i で

$$|s_i - t_i| = \sum_{k=1}^{N} \frac{|e_1(k,i) - e_2(k,i)|}{2^k} \leq \frac{1}{2^m}$$

となり，明らかに $e_1(k,i) = e_2(k,i)$ $(1 \leq i \leq m-1)$ が成り立つ．これより，各成分において

$$|s_i^m - t_i^m| = \frac{|e_1(m,i) - e_2(m,i)|}{2^m} \leq \frac{1}{2^m}$$

となるから，$\|s^m - t^m\| \leq 1/2^m$ が分かる．このとき $s^m = t^m$ か $(s^m, t^m) \in \Delta_m$ のどちらかが成り立つが，いずれにせよ

$$\|X_{s^m} - X_{t^m}\|_E \leq K_m$$

である．さらに

$$\begin{aligned}
s_i^{n+1} - s_i^n &= \frac{e_1(n+1,i)}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}, \quad i \in \{1,\dots,d\} \\
t_i^{n+1} - t_i^n &= \frac{e_2(n+1,i)}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}, \quad i \in \{1,\dots,d\}
\end{aligned}$$

という評価から $s^{n+1} = s^n$ または $(s^n, s^{n+1}) \in \Delta$ （および $t^{n+1} = t^n$ または $(t^n, t^{n+1}) \in \Delta$）が成り立つので，

$$\|X_{s^{n+1}} - X_{s^n}\|_E \leq K_m, \quad \|X_{t^{n+1}} - X_{t^n}\|_E \leq K_m$$

であることも分かる．これにより求める評価を得る．

ここで

$$M_\alpha = \sup\left\{ \frac{\|X_t - X_s\|_E}{\|t-s\|^\alpha} \;\middle|\; s,t \in D,\ s \neq t \right\}$$

と定めれば，

$$\begin{aligned}
M_\alpha &= \sup_{m\in\mathbb{N}} \left\{ \sup\left\{ \frac{\|X_t - X_s\|_E}{\|t-s\|^\alpha} \;\middle|\; s,t \in D,\ s \neq t, \frac{1}{2^{m+1}} < \|s-t\| \leq \frac{1}{2^m} \right\} \right\} \\
&\leq \sup_{m\in\mathbb{N}} \left\{ \sup\left\{ 2^{\alpha(m+1)} \|X_t - X_s\|_E \;\middle|\; s,t \in D,\ s \neq t, \frac{1}{2^{m+1}} < \|s-t\| \leq \frac{1}{2^m} \right\} \right\} \\
&\leq \sup_{m\in\mathbb{N}} \left\{ 2^{\alpha(m+1)} \sup\left\{ \|X_t - X_s\|_E \;\middle|\; s,t \in D,\ s \neq t, \|s-t\| \leq \frac{1}{2^m} \right\} \right\} \\
&\leq \sup_{m\in\mathbb{N}} \left[2^{\alpha(m+1)} \left(2 \sum_{i=m}^{\infty} K_i \right) \right] \\
&\leq 2^{\alpha+1} \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=m}^{\infty} 2^{\alpha m} K_i \right) \\
&\leq 2^{\alpha+1} \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=m}^{\infty} 2^{\alpha i} K_i \right) \\
&= 2^{\alpha+1} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{\alpha i} K_i
\end{aligned}$$

となる．$\gamma \geq 1$ の時，$\alpha < \varepsilon/\gamma$ なる α に対して

$$\|M_\alpha\|_\gamma \leq 2^{\alpha+1} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{\alpha i} \|K_i\|_\gamma \leq 2^{\alpha+1} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{\alpha i} (J 2^{-i\varepsilon})^{1/\gamma} = 2^{\alpha+1} J^{1/\gamma} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i(\alpha-\varepsilon/\gamma)} < \infty$$

が成立．$0 < \gamma < 1$ の場合は，$L^\gamma(P)$ ノルムの代わりに $E[(M_\alpha)^\gamma]$ に対して

$$E[(M_\alpha)^\gamma] \leq 2^{\gamma(\alpha+1)} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{\gamma\alpha i} E[(K_i)^\gamma] \leq 2^{\gamma(\alpha+1)} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{\gamma\alpha i} J 2^{-i\varepsilon} = 2^{\gamma(\alpha+1)} J \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i(\gamma\alpha-\varepsilon)} < \infty \qquad \square$$

という評価をすれば良い．いずれにせよ，P-a.s. で $M_\alpha < \infty$ となることが分かる．これはすなわち，X のパスは確率 1 で D 上 α-Höllder 連続であるということに他ならない．ここで

$$\widetilde{X}_t := \lim_{\substack{s\to t\\ s\in D}} X_s$$

と定めれば，先ほどの評価 $E[(M_\alpha)^\gamma] < \infty$ より，$\widetilde{X}$ は明らかに C.1.1 を満たす．後は $\widetilde{X}$ が元の過程 X の修正になっていることを示せばよいが，これは

$$E[\|\widetilde{X}_t - X_t\|^\gamma] \leq \liminf_{\substack{s\to t\\ s\in D}} E[\|X_s - X_t\|^\gamma] \leq \liminf_{\substack{s\to t\\ s\in D}} \|s-t\|^{d+\varepsilon} = 0$$

より分かる．

C.2 Markov 過程について

C.3 Brown 運動

C.4 ノート

付録 D

文献について

筆者の独断と偏見に基づいて，マルチンゲール理論や確率解析を学ぶ際に役に立つ書籍を紹介する．

連続マルチンゲール理論や確率積分，確率微分方程式の教科書として定評あるものとして，まずは Karatzas and Shreve [68]，Revuz and Yor [94]，Ikeda and Watanabe [59]，Chung and Williams [18]，Durrett [40] を挙げておく．連続マルチンゲールとそれに基づく確率解析の教科書としては，特に Karatzas and Shreve [68] および Revuz and Yor [94] が標準的である．このノートも，これらの文献を参考にした部分が多い．[68] は基本的なことから丁寧に書かれた文献で，証明の行間も少ない．しかし多くの重要な主張が Exercise になっていることや，離散マルチンゲールについては他書（[16]）の結果に全面的に頼っていることなど，注意が必要な部分もある．また，記述に幾分古めかしさも感じる．[94] は名著として名高く，[68] よりもさらに多くの話題を扱っている．[94] は簡潔でスッキリとした記述で内容も非常によく整理されているが，その分 [68] よりも全体的に難しい印象があり，読みこなすためには力が必要である．（私が力不足なだけかも知れないが．）Ikeda and Watanabe [59] は確率微分方程式に関する権威的文献であり，ありとあらゆる場所で引用されている．特に確率微分方程式に詳しく，多様体上の確率微分方程式についても多くのことが書いてある．しかしこれも難しい本である．[59] は不連続な場合もある程度扱っているが，そちらは完全に一般的な設定で書いてあるわけではない．Chung and Williams [18] は入門的文献の中では比較的可測性に詳しい点が特徴的である．

不連続な場合も含む一般のマルチンゲール，セミマルチンゲール理論については，Dellacherie and Meyer [24, 25]，Jacod and Shiryaev [62]，Rogers and Williams [96, 97]，He, Wang, and Yan [53]，Cohen and Elliott [19]，Metivier [79]，Liptser and Shiryaev [75, 76]，Medvegyev [78] が参考になる．Dellacherie and Meyer [24, 25] はセミマルチンゲール理論のバイブルである．Jacod and Shiryaev [62] は Dellacherie and Meyer 以降の多くの結果を含んでおり，セミマルチンゲールの収束理論に主眼をおいた本である．どちらも非常に多くのことが書いてあるが，大変難しい．He, Wang, and Yan [53] は [24, 25] と [62] を足して 3 で割ったような本であり，これらよりはだいぶ良心的である．筆者のセミマルチンゲール理論に関する知識の大部分はこれで勉強した．（というかしている．）Cohen and Elliott [19] もセミマルチンゲール理論に基づく確率解析の教科書だが，[24, 25] と [62] より読みやすく，また SDE などについてはより最近の結果も含んでおり推奨できる．Metivier [79] もセミマルチンゲールの本格的な教科書だが，Banach 空間値や Hilbert 空間値のセミマルチンゲールにも詳しい点に特色がある．Medvegyev [78] はセミマルチンゲール理論に基づく確率積分論を大変丁寧に解説した本であり，これらの中でも最も初学者向きである．

確率積分論には，セミマルチンゲール理論的なアプローチのほかにも，integrator 的アプローチがよく知られている．初めから「確率積分の integrator として上手く働く確率過程」を考えるのである．このアプローチをとる本として代表的なものには Protter [90] と Bichteler [9] がある．Protter [90] は不連続な仮定による確

率積分論の代表的教科書であり，特にセミマルチンゲールを driver とする確率微分方程式に詳しい点に特色がある．しかし，証明はわりといい加減な部分も多く，読む際には注意が必要である．

確率微分方程式に関する入門的文献としてはØksendal [89] が良く知られている．

確率論の入門的事項から確率解析の進んだ話題までを論じたスケールの大きい本として，Rogers and Williams [96, 97]，Kallenberg [67] を紹介しておく．

ファイナンスとの関連を意識して書かれた本や，あるいは数理ファイナンスと確率解析を同時に学ぶことを目的とした本としては Lamberton and Lapeyre [73]，Shreve [106, 107]，Steele [108]，Jeanblanc, Yor, and Chesney [64] を挙げておく．Lamberton and Lapeyre [73] は筆者が M1 セミナーの教科書として読んでいた（読まされていた？）本である．Jeanblanc, Yor, and Chesney [64] には非常に詳しい文献ガイドがついており，大変役に立つ．

確率積分や確率微分方程式を論じた和書では，渡辺 [116]，長井 [85]，舟木 [46]，西尾・樋口 [88]，谷口・松本 [115]，谷口 [114] などが参考になる．

確率過程一般の本としては，Doob [34], Gikhman and Skorokhod [48]，Gikhman and Skorohod [49, 50, 51] などがよく知られている．

確率解析の前に学ぶ測度論的確率論の教科書としては，舟木 [47]，Williams [119] が適している．どちらも非常に優れた入門書である．確率論の標準的教科書として他にも Billingsley [10]，Chung [16]，Durrett [39]，Ash [5]，Shiryaev [105] を挙げておく．確率論の和書では伊藤 [60]，西尾 [87]，志賀 [104]，小谷 [70]，佐藤 [101]，熊谷 [71]，高信 [113] などがある．

測度論や実解析の本は星の数ほどあるが，Cohn [20]，Dudley [36]，Royden [98] などを推奨する．さらに高度な内容を多く含んだものとしては，Bogachev [12]，Fonseca and Leoni [44]，Diestel and Uhl [28]，Rao [92]，Fremlin [45] が参考になる．測度論や Legesgue 積分の基礎と，実解析のより進んだ内容を同時に学べる本としては，Rudin [100]，Folland [42]，DiBenedetto [27] が良い．和書では伊藤 [61]，猪狩 [58]，盛田 [84] などが定評ある入門書である．

本ノートで学んだようなマルチンゲール理論の基礎的部分に関しては，必要とされる関数解析の知識は限られている．筆者は宮島 [83]，日合・柳 [54]，Brezis [14]，Conway [22]，Reed and Simon [93]，Rudin [99] などを適宜参照した．

Bibliography

[1] Fernando Albiac and Nigel J. Kalton. *Topics in Banach Space Theory*. 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics 233. Springer International Publishing, 2016. XX+508. DOI: 10.1007/978-3-319-31557-7. URL: https://www.springer.com/la/book/9783319315553.

[2] Charalambos D. Aliprantis and Kim Border. *Infinite Dimensional Analysis. A Hitchhiker's Guide*. 3rd ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006. XXII+704. DOI: 10.1007/3-540-29587-9. URL: https://www.springer.com/gp/book/9783540295860.

[3] Luigi Ambrosio, Nicola Fusco, and Diego Pallara. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000. xviii+434. ISBN: 0-19-850245-1.

[4] David H. Armitage and Stephen J. Gardiner. *Classical Potential Theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag London, 2001. DOI: 10.1007/978-1-4471-0233-5. URL: http://www.springer.com/gp/book/9781852336189.

[5] Robert B. Ash. *Probability and Measure Theory*. 2nd ed. With contributions by Catherine Doléans-Dade. Harcourt/Academic Press, Burlington, MA, 2000. xii+516. ISBN: 0-12-065202-1.

[6] Richard F. Bass. *Stochastic Processes*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics 33. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. DOI: 10.1017/CBO9780511997044.

[7] Richard F. Bass. "The Doob-Meyer decomposition revisited". In: *Canadian Mathematical Bulletin. Bulletin Canadien de Mathématiques* 39.2 (1996), pp. 138–150. ISSN: 0008-4395. DOI: 10.4153/CMB-1996-018-8.

[8] Mathias Beiglböck, Walter Schachermayer, and Bezirgen Veliyev. "A short proof of the Doob–Meyer theorem". In: *Stochastic Processes and their Applications* 122.4 (2012), pp. 1204–1209. ISSN: 0304-4149. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.spa.2011.12.001. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304414911002973.

[9] Klaus Bichteler. *Stochastic Integration with Jumps*. Vol. 89. Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge University Press, 2002. xiv+501. ISBN: 0-521-81129-5. DOI: 10.1017/CBO9780511549878.

[10] Patrick Billingsley. *Probability and Measure*. 2nd ed. John Wiley & Sons, 1986.

[11] Garrett Birkhoff. *Lattice theory*. 3rd ed. American Mathematical Society Colloquium Publications XXV. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1967, pp. vi+418.

[12] Vladimir I. Bogachev. *Measure Theory*. 2 vols. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. DOI: 10.1007/978-3-540-34514-5. URL: http://www.springer.com/us/book/9783540345138.

[13] Nicolas Bourbaki. *General Topology Part 2*. Elements of Mathematics. Hermann, 1966.

[14] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential EquationsEquations*. Universitext. Springer-Verlag New York, 2011. DOI: 10.1007/978-0-387-70914-7. URL: http://www.springer.com/la/book/9780387709130.

[15] Yuan Shih Chow and Henry Teicher. *Probability Theory. Independence, Interchangeability, Martingales*. 3rd ed. Springer Texts in Statistics. Springer-Verlag New York, 1997. DOI: 10.1007/978-1-4612-1950-7. URL: http://www.springer.com/gp/book/9780387982281.

[16] Kai Lai Chung. *A Course in Probability Theory*. 2nd ed. Academic Press, 1974.

[17] Kai Lai Chung. *A Course in Probability Theory*. 3rd ed. Academic Press, 2001.

[18] Kai Lai Chung and R. J. Williams. *Introduction to stochastic integration*. 2nd ed. Probability and its applications. Boston: Birkhäuser, 1990. XVI+278. DOI: 10.1007/978-1-4612-4480-6. URL: https://www.springer.com/us/book/9781461288374.

[19] Samuel Cohen and Robert J. Elliott. *Stochastic Calculus and Applications*. 2nd ed. Probability and Its Applications. Birkhäuser Basel, 2015. DOI: 10.1007/978-1-4939-2867-5. URL: http://www.springer.com/la/book/9781493928668.

[20] Donald L. Cohn. *Measure theory*. 2nd ed. Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher. Birkhäuser, 2013. DOI: 10.1007/978-1-4614-6956-8. URL: https://www.springer.com/la/book/9781461469551.

[21] Corneliu Constantinescu. *Spaces of measures*. De Gruyter Studies in Mathematics 4. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1984. 444 pp. ISBN: 3-11-008784-7. DOI: 10.1515/9783110853995. URL: https://www.degruyter.com/view/product/171662.

[22] John B. Conway. *A Course in Functional Analysis*. 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics 96. Springer-Verlag New York, 1990. xvi+399. ISBN: 0-387-97245-5.

[23] Claude Dellacherie. *Capacités et processus stochastiques*. Spriger-Verlag Berlin Heidelberg, 1972.

[24] Claude Dellacherie and Paul-André Meyer. *Probabilities and Potential*. North-Holland Mathematics Studies 29. North-Holland, 1978. viii+189. ISBN: 0-7204-0701-X. URL: https://www.elsevier.com/books/probabilities-and-potential-a/dellacherie/978-0-7204-0701-3.

[25] Claude Dellacherie and Paul-André Meyer. *Probabilities and Potential B. Theory of Martingales*. Trans. by J. P. Wilson. North-Holland Mathematics Studies 72. North-Holland, 1982. xvii+463. ISBN: 0-444-86526-8. URL: https://www.elsevier.com/books/probabilities-and-potential-b/dellacherie/978-0-444-86526-7.

[26] Claude Dellacherie and Paul-André Meyer. *Probabilities and Potential C. Potential Theory for Discrete and Continuous Semigroups*. Trans. by J. Norris. North-Holland Mathematics Studies 151. North-Holland, 1988. xiv+416. ISBN: 0-444-70386-1. URL: https://www.elsevier.com/books/probabilities-and-potential-c/dellacherie/978-0-444-70386-6.

[27] Emmanuele DiBenedetto. *Real Analysis*. 2nd ed. Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher. Birkhäuser Basel, 2016. DOI: 10.1007/978-1-4939-4005-9. URL: http://www.springer.com/us/book/9781493940035.

[28] J. Diestel and J. J. Uhl Jr. *Vector measures*. Mathematical Surveys and Monographs 15. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977, pp. xiii+322.

[29] Joe Diestel. “Uniform integrability: an introduction”. In: *Rendiconti dell’Istituto di Matematica dell’Università di Trieste. An International Journal of Mathematics* 23.1 (1991). School on Measure Theory and Real Analysis (Grado, 1991), pp. 41–80. ISSN: 0049-4704.

[30] Nicolae Dinculeanu. *Vector Integration and Stochastic Integration in Banach Spaces*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs, and Tracts. John Wiley & Sons, 2000. DOI: 10.1002/9781118033012. URL: http://as.wiley.com/WileyCDA/WileyTitle/productCd-0471377384.html.

[31] Catherine Doléans. “Existence du processus croissant naturel associé à un potentiel de la classe (D)”. In: *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* 9.4 (Dec. 1968), pp. 309–314. ISSN: 1432-2064. DOI: 10.1007/BF00531754. URL: https://doi.org/10.1007/BF00531754.

[32] Joseph L. Doob. *Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart*. Classics in Mathematics. Originally published as Vol. 262 in the series: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001. DOI: 10.1007/978-3-642-56573-1. URL: http://www.springer.com/la/book/9783540412069.

[33] J. L. Doob. “Regularity properties of certain families of chance variables”. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 47 (1940), pp. 455–486. ISSN: 0002-9947. DOI: 10.2307/1989964.

[34] J. L. Doob. *Stochastic Processes*. John Wiley & Sons, Inc., 1953.

[35] R. M. Dudley. *Real Analysis and Probability*. 2nd ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 74. Cambridge University Press, 2002. DOI: http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511755347.

[36] Richard M. Dudley. *Real Analysis and Probability*. The Wadsworth & Brooks/Cole, 1989.

[37] Nelson Dunford. “A mean ergodic theorem”. In: *Duke Mathematical Journal* 5.3 (Sept. 1939), pp. 635–646. DOI: 10.1215/S0012-7094-39-00552-1. URL: https://doi.org/10.1215/S0012-7094-39-00552-1.

[38] Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz. *Linear Operators, Part I: General Theory*. Interscience, 1964.

[39] Rick Durrett. *Probability: Theory and Examples*. Forth. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 2010.

[40] Richard Durrett. *Stochastic Calculus: A Practical Introduction*. Probability and Stochastics Series. CRC Press, 1996. URL: https://www.crcpress.com/Stochastic-Calculus-A-Practical-Introduction/Durrett/p/book/9780849380716.

[41] Marián Fabian et al. *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*. CMS Books in Mathematics. Springer-Verlag New York, 2011. DOI: 10.1007/978-1-4419-7515-7.

[42] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2nd ed. John Wiley & Sons, 1999.

[43] Hans Föllmer. “The exit measure of a supermartingale”. In: *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* 21.2 (1972), pp. 154–166. ISSN: 1432-2064. DOI: 10.1007/BF00532472. URL: http://dx.doi.org/10.1007/BF00532472.

[44] Irene Fonseca and Giovanni Leoni. *Modern Methods in the Calculus of Variations. L^p Spaces*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag New York, 2007. DOI: 10.1007/978-0-

387-69006-3. URL: http://www.springer.com/jp/book/9780387357843?wt_mc=ThirdParty.SpringerLink.3.EPR653.About_eBook.

[45] D. H. Fremlin. *Mesure Theory*. 2nd ed. 5 vols. 2010–2015.

[46] 舟木 直久. **確率微分方程式**. 岩波書店, 2005. URL: https://www.iwanami.co.jp/book/b265758.html.

[47] 舟木 直久. **確率論**. 朝倉書店, 2004. URL: http://www.asakura.co.jp/books/isbn/978-4-254-11600-7/.

[48] I. I. Gikhman and A. V. Skorokhod. *Introduction to the Theory of Random Processes*. Trans. by Scripta Technica. W. B. Saunders Co., Philadelphia, Pa.-London-Toronto, Ont., 1969. xiii+516.

[49] Iosif I. Gikhman and Anatoli V. Skorokhod. *The Theory of Stochastic Processes I*. Trans. by S. Kotz. Classics in Mathematics. Originally published as Vol. 210 in the series: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004. VIII, 574. DOI: 10.1007/978-3-642-61943-4. URL: https://www.springer.com/us/book/9783540202844.

[50] Iosif I. Gikhman and Anatoli V. Skorokhod. *The Theory of Stochastic Processes II*. Classics in Mathematics. Originally published as Vol. 218 in the series: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004. URL: http://www.springer.com/us/book/9783540202851.

[51] Iosif I. Gikhman and Anatoli V. Skorokhod. *The Theory of Stochastic Processes III*. Trans. by S. Kotz. Classics in Mathematics. Reprint of the 1974 Edition (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 232). Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. IX, 387. DOI: 10.1007/978-3-540-49941-1. URL: https://www.springer.com/us/book/9783540499404.

[52] Loukas Grafakos. *Classical Fourier Analysis*. 3rd ed. Graduate Texts in Mathematics 249. Springer-Verlag New York, 2014. DOI: 10.1007/978-1-4939-1194-3.

[53] Sheng-wu He, Jia-gang Wang, and Jia-an Yan. *Semimartingale Theory and Stochastic Calculus*. Science Press and CRC Press, 1992. URL: https://www.crcpress.com/Semimartingale-Theory-and-Stochastic-Calculus/eWangyan/p/book/9780849377150.

[54] 日合 文雄 and 柳 研二郎. **ヒルベルト空間と線形作用素**. 牧野書店, 1995.

[55] Jean-Baptiste Hiriart-Urruty and Claude Lemaréchal. *Fundamentals of convex analysis*. Grundlehren text editions. Springer-Verlag, 2001.

[56] 一松 信. **多変数解析関数論**. 培風館, 1960.

[57] Eberhard Hopf. “On Causality, Statistics and Probability”. In: *Journal of Mathematics and Physics* 13.1-4 (1934), pp. 51–102. DOI: 10.1002/sapm193413151. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/sapm193413151.

[58] 猪狩 惺. **実解析入門**. 岩波書店, 1996. ISBN: 9784000054447. URL: https://www.iwanami.co.jp/book/b265406.html.

[59] Nobuyuki Ikeda and Shinzo Watanabe. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. North-Holland, Kodansha, 1981.

[60] 伊藤 清. **確率論**. 岩波書店, 1991.

[61] 伊藤 清三. **ルベーグ積分入門（新装版）**. 数学選書 4. 裳華房, 2017. 324 pp. ISBN: 978-4-7853-1318-0. URL: https://www.shokabo.co.jp/mybooks/ISBN978-4-7853-1318-0.htm.

[62] Jean Jacod and Albert N. Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes*. 2nd ed. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 288. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003. DOI: 10.1007/978-3-662-05265-5. URL: http://www.springer.com/la/book/9783540439325.

[63] Adam Jakubowski. "An Almost Sure Approximation for the Predictable Process in the Doob-Meyer Decomposition Theorem". In: *Séminaire de Probabilités XXXVIII*. Ed. by Michel Émery, Michel Ledoux, and Marc Yor. Lecture Notes in Mathematics 1857. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2005, pp. 158–164. ISBN: 978-3-540-31449-3. DOI: 10.1007/978-3-540-31449-3_11. URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-31449-3_11.

[64] Monique Jeanblanc, Marc Yor, and Marc Chesney. *Mathematical Methods for Financial Markets*. Springer Finance. Springer London, 2009. DOI: 10.1007/978-1-84628-737-4.

[65] Shizuo Kakutani. "Notes on infinite product measure spaces, I". In: *Proceedings of the Imperial Academy* 19.3 (1943), pp. 148–151. DOI: 10.3792/pia/1195573633. URL: http://dx.doi.org/10.3792/pia/1195573633.

[66] Olav Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. Probability and Its Applications. Springer-Verlag New York, 1997. XII, 523. DOI: 10.1007/b98838. URL: https://www.springer.com/la/book/9780387227047.

[67] Olav Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. 2nd ed. Probability and Its Applications. Springer-Verlag New York, 2002. XX, 638. URL: https://www.springer.com/la/book/9780387953137.

[68] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics 113. Springer-Verlag New York, 1998. DOI: 10.1007/978-1-4612-0949-2. URL: http://www.springer.com/us/book/9780387976556.

[69] John L. Kelley. *General Topology*. Graduate Texts in Mathematics 27. Originally published by Van Nostrand, 1955. Springer-Verlag New York, 1975, pp. xiv+298. URL: https://www.springer.com/la/book/9780387901251.

[70] 小谷 眞一. **測度と確率**. 岩波書店, 2005.

[71] 熊谷 隆. **確率論**. 共立出版, 2003.

[72] Hiroshi Kunita and Shinzo Watanabe. "On Square Integrable Martingales". In: *Nagoya Mathematical Journal* 30 (1967), pp. 209–245. URL: http://projecteuclid.org/euclid.nmj/1118796812.

[73] Damien Lamberton and Bernard Lapeyre. *Introduciton to Stochastic Calculus Applied to Finance*. 2nd ed. Chapman & Hall, 2008.

[74] Giovanni Leoni. *A First Course in Sobolev Spaces*. Graduate Studies in Mathematics 105. American Mathematical Society, 2009.

[75] Robert S. Liptser and Albert N. Shiryaev. *Statistics of Random Processes. I. General Theory*. Trans. by B. Aries. 2nd ed. Stochastic Modelling and Applied Probability 5. Original Russian edition published by Nauka, Moscow, 1974. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001. DOI: 10.1007/978-3-662-13043-8. URL: http://www.springer.com/us/book/9783540639299.

[76] Robert S. Liptser and Albert N. Shiryaev. *Statistics of Random Processes. II. Applications*. Trans. by A.B. Aries. 2nd ed. Stochastic Modelling and Applied Probability 6. Springer-Verlag Berlin

Heidelberg, 2001. DOI: 10.1007/978-3-662-10028-8. URL: http://www.springer.com/us/book/9783540639282.

[77] Vladimir Maz'ya. *Sobolev Spaces. with Applications to Elliptic Partial Differential Equations.* Trans. by T.O. Shaposhnikova. 2nd ed. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 342. Originally published under Vladimir G. Maz'ja in Springer Series of Soviet Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011. DOI: 10.1007/978-3-642-15564-2. URL: https://www.springer.com/us/book/9783642155635.

[78] Peter Medvegyev. *Stochastic Integration Theory.* Oxford Graduate Texts in Mathematics 14. Oxford University Press, 2007. xx+608. ISBN: 978-0-19-921525-6.

[79] Michel Métivier. *Semimartingales: a course on stochastic processes.* De Gruyter studies in mathematics 2. Walter de Gruyter, 1982.

[80] P. A. Meyer. "A decomposition theorem for supermartingales". In: *Illinois Journal of Mathematics* 6.2 (June 1962), pp. 193–205. URL: http://projecteuclid.org/euclid.ijm/1255632318.

[81] P. A. Meyer. "Decomposition of supermartingales: The uniqueness theorem". In: *Illinois Journal of Mathematics* 7.1 (Mar. 1963), pp. 1–17. URL: http://projecteuclid.org/euclid.ijm/1255637477.

[82] Paul-André Meyer. *Probability and Potentials.* Blaisdell Publishing Company, 1966.

[83] 宮島 静雄. **関数解析**. 横浜図書, 2014.

[84] 盛田 健彦. **実解析と測度論の基礎**. 培風館, 2004.

[85] 長井 英生. **確率微分方程式**. 共立出版, 1999. URL: http://www.kyoritsu-pub.co.jp/bookdetail/9784320015791.

[86] Ashkan Nikeghbali. "An essay on the general theory of stochastic processes". In: *Probability Surveys* 3 (2006), pp. 345–412. DOI: 10.1214/154957806000000104. URL: http://dx.doi.org/10.1214/154957806000000104.

[87] 西尾 真喜子. **確率論**. 実教出版, 1978.

[88] 西尾 眞喜子 and 樋口保成. **確率過程入門**. 確率論教程シリーズ 3. 培風館, 2006.

[89] Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications.* 6th ed. Universitext. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003. XXVII, 379. DOI: 10.1007/978-3-642-14394-6. URL: https://www.springer.com/la/book/9783540047582.

[90] Philip E. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations.* Second editioin, version 2.1. Stochastic Modelling and Applied Probability 21. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. DOI: 10.1007/978-3-662-10061-5. URL: http://www.springer.com/us/book/9783540003137.

[91] K. Murali Rao. "On decomposition theorems of Meyer". In: *Mathematica Scandinavica* 24.1 (1969), pp. 66–78. ISSN: 00255521, 19031807. URL: http://www.jstor.org/stable/24489870.

[92] M. M. Rao. *Measure Theory and Integration.* Second, revised and expanded edition. Pure and applied mathematics 265. Marcer Dekker, 2004.

[93] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis, Revised and Enlarged Edition.* Academic Press, 1980.

[94] Daniel Revuz and Marc Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. 3rd ed. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 293. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999. DOI: 10.1007/978-3-662-06400-9. URL: http://www.springer.com/cn/book/9783540643258.

[95] A. Wayne Roberts and Dale E. Varberg. *Convex functions*. Pure and applied mathematics 57. New York: Academic Press, 1973.

[96] L. C. G. Rogers and D. Williams. *Diffusion, Markov Processes, and Martingales. Volume 1: Foundations*. Wiley, 1994.

[97] L. C. G. Rogers and David Williams. *Diffusion, Markov Processes, and Martingales. Volume 2: Itô Calculus*. Wiley, 1987.

[98] H. L. Royden. *Real Analysis*. 3rd ed. Macmillan, 1988.

[99] Walter Rudin. *Functional Analysis*. 2nd ed. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, 1991.

[100] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. 3rd ed. McGraw-Hill, 1987.

[101] 佐藤 坦. **はじめての確率論. 測度から確率へ**. 共立講座 21 世紀の数学 10. 共立出版, 1994. URL: http://www.kyoritsu-pub.co.jp/bookdetail/9784320014732.

[102] H. H. Schaefer. *Topological Vector Spaces*. 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics 3. Springer-Verlag New York, 1999.

[103] Michael Sharpe. *General Theory of Markov Processes*. Academic Press, 1988.

[104] 志賀 徳造. **ルベーグ積分から確率論**. 共立出版, 2000. 256 pp. URL: http://www.kyoritsu-pub.co.jp/bookdetail/9784320015623.

[105] Albert N. Shiryaev. *Probability*. Trans. by S. S. Wilson. 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics 95. Original Russian edition published by Nauka, 1989. Springer-Verlag New York, 1996. DOI: 10.1007/978-1-4757-2539-1. URL: http://www.springer.com/us/book/9781475725391.

[106] Steven E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance I. The Binomial Asset Pricing Model*. Springer Finance Textbooks. Springer-Verlag New York, 2004. XV+187. URL: https://www.springer.com/gp/book/9780387401003.

[107] Steven E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II. Continuous-Time Models*. Springer Finance Textbooks. Springer-Verlag New York, 2004. XIX+550. URL: https://www.springer.com/gp/book/9780387401010.

[108] J. Michael Steele. *Stochastic Calculus and Financial Applications*. Stochastic Modelling and Applied Probability 45. Springer-Verlag New York, 2001. DOI: 10.1007/978-1-4684-9305-4. URL: http://www.springer.com/la/book/9781441928627.

[109] M. H. Stone. "Notes on integration. I". In: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 34 (1948), pp. 336–342. ISSN: 0027-8424. DOI: 10.1073/pnas.34.7.336.

[110] M. H. Stone. "Notes on integration. II". In: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 34 (1948), pp. 447–455. ISSN: 0027-8424. DOI: 10.1073/pnas.34.9.447.

[111] M. H. Stone. "Notes on integration. III". In: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 34 (1948), pp. 483–490. ISSN: 0027-8424. DOI: 10.1073/pnas.34.10.483.

[112] M. H. Stone. "Notes on integration. IV". In: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 35 (1949), pp. 50–58. ISSN: 0027-8424. DOI: 10.1073/pnas.35.1.50.

[113] 高信 敏. **確率論**. 共立講座 数学の魅力 4. 共立出版, 2015. URL: http://www.kyoritsu-pub.co.jp/bookdetail/9784320111592.

[114] 谷口 説男. **確率微分方程式**. 共立講座 数学の輝き 7. 共立出版, 2016. 236 pp. URL: http://www.kyoritsu-pub.co.jp/bookdetail/9784320112018.

[115] 谷口説男 and 松本裕行. **確率解析**. 確率論教程シリーズ 5. 培風館, 2013.

[116] 渡辺 信三. **確率微分方程式**. 数理解析とその周辺 9. 産業図書, 1975.

[117] Karl Weierstrass. *Mathematische Werke. III. Abhandlungen 3*. Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim; Johnson Reprint Corp., New York, 1967. viii+362 pp. (1 plate).

[118] Karl Weierstrass. "Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willküurlicher Functionen reeller Argumente". In: *Sitzungsbericlit der Königl. Akademie der Wissenschaften* 9.30 (July 1885), pp. 633–639, 789–805.

[119] David Williams. *Probability with Martingales*. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, 1991. DOI: 10.1017/CBO9780511813658.

[120] William P. Ziemer. *Weakly Differentiable Functions. Sobolev Spaces and Functions of Bounded Variation*. Graduate Texts in Mathematics 120. Springer-Verlag New York, 1989. DOI: 10.1007/978-1-4612-1015-3. URL: https://www.springer.com/la/book/9780387970172.

索引