

Ornstein–Uhlenbeck 半群 Ver.1.1

平井祐紀

2021 年 9 月 6 日

概要

Nualart [3] にしたがって Ornstein–Uhlenbeck 半群を導入し，その基本的な性質を調べる．

更新履歴

2021.9.6. §4 まで書いたので，とりあえず ver.1.0 と名づける．

2021.9.6. さっそく付録に間違いを見つけたので修正． ver.1.1.

目次

1	準備	1
2	Ornstein–Uhlenbeck 半群	2
3	Mehler の公式と Ornstein–Uhlenbeck 半群の拡張	4
4	Ornstein–Uhlenbeck 半群の超縮小性	7
5	Ornstein–Uhlenbeck 半群の生成作用素	13
A	L^p 空間における稠密性	13

1 準備

$(\Omega, \mathcal{F}^0, P)$ を確率空間とし， H を可分 Hilbert 空間とする．また $W: H \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}^0, P)$ を等正規 Gauss 過程 (isonormal Gaussian process) とし， \mathcal{F} を $\sigma(W) = \sigma(W(h); h \in H)$ の完備化とする．この σ 代数を用いて， W を等正規 Gauss 過程 $W: H \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と考える．以下では特に断りのない限り，上記の σ 代数 \mathcal{F} を用いて定義された確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) を扱うことにする． \mathcal{F} が W から生成されているという仮定は重要である．

$n \in \mathbb{N}$ に対して， H_n を n 次の Hermite 多項式，すなわち以下を満たす関数とする．

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

H_n は以下の Taylor 展開における係数として定めることもできる.

$$e^{tx - \frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) t^n \quad (1.1)$$

γ を 1 次元の標準 Gauss 測度とすれば, $(\sqrt{n!}H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \gamma)$ の正規直交基底となっている.

Hermite 多項式と等正規 Gauss 過程を用いて,

$$\mathcal{H}_n = \text{Cl}_{L^2(P)} \text{span}\{H_n(W(h)) \mid h \in H, \|h\| = 1\}$$

と定義し, \mathcal{H}_n を n 次の Wiener カオスと呼ぶ. また閉部分空間 \mathcal{H}_n への直交射影を $J_n: L^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}_n$ で表すことにする. このとき, $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は以下のように Hilbert 空間の l^2 直和として分解される.

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{H}_n.$$

これを伊藤–Wiener 展開と呼ぶのであった.

2 Ornstein–Uhlenbeck 半群

定義 2.1.

$F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に対して,

$$T_t F = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} J_n F$$

と定義し, 作用素族 $(T_t)_{t \geq 0}$ を Ornstein–Uhlenbeck 半群と呼ぶ.

まずは, 定義 2.1 の和が well-defined であることを確かめよう. $t = 0$ のときは伊藤–Wiener 展開より

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} J_n F$$

となるので, $T_0 = I$ (恒等作用素) である. $t \geq 0$ のとき,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|e^{-nt} J_n F\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nt} \|J_n F\|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|J_n F\|^2 < \infty$$

となるので, 直交性に注意すれば級数 $\sum e^{-nt} J_n F$ が $L^2(P)$ で収束することがわかる. 各々の射影 J_n は線形写像であるから, T_t も線形写像である.

定義 2.1 で定めた作用素族 (T_t) は, L^2 上の強連続縮小半群となる.

命題 2.2.

(T_t) を定義 2.1 における作用素族とする. このとき, 以下の性質が成り立つ.

- (i) 全ての $F \in L^2$ と $s, t \geq 0$ について, $T_t T_s F = T_{t+s} F$ が成り立つ. (半群性)
- (ii) 全ての $F \in L^2$ について, $\lim_{t \rightarrow 0} T_t F = F$ が成り立つ. (強連続性)
- (iii) 全ての $F \in L^2$ について, $\|T_t F\|_{L^2} \leq \|F\|_{L^2}$ が成り立つ. (縮小性)
- (iv) $F \geq 0$ なら, $T_t F \geq 0$ が成り立つ. (正值性)

すなわち, $(T_t)_{t \geq 0}$ は $L^2(\Omega)$ 上の正值強連続縮小半群である.

証明. (iii) 直交性に注意して先ほどと同様の評価を行えば,

$$\|T_t F\|_{L^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|e^{-nt} J_n F\|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|J_n F\|^2 = \|F\|_{L^2}^2 < \infty$$

となり, 縮小性がわかる.

- (i) $t, s \geq 0$ とすれば, 定義にしたがって計算することで

$$\begin{aligned} T_t(T_s F) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} J_n T_s F \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} J_n \left(\sum_{m=0}^{\infty} e^{-ms} J_m F \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} e^{-ns} J_n J_n F \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(t+s)} J_n F \\ &= T_{t+s} F \end{aligned}$$

を得る. ただし, 3 つ目の等号では直交性を, 4 つ目の等号では冪等性を用いた.

- (ii) $F \in L^2$ とすれば,

$$\|T_t F - F\|_{L^2}^2 = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-nt} - 1) J_n F \right\|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |e^{-nt} - 1|^2 \|J_n F\|^2$$

が成り立つ. $|e^{-nt} - 1| \leq 1$ かつ $e^{-nt} \rightarrow 1$ ($t \rightarrow 0$) であるから, 優収束定理により

$$\|T_t F - F\|_{L^2}^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |e^{-nt} - 1|^2 \|J_n F\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

がしたがう.

(iv) T_t の定義より, 各射影 J_n が正值性を満たすことを示せば良い. L^2 空間の直交射影は条件付き期待値作用素だから, 正值性を満たす. □

3 Mehler の公式と Ornstein–Uhlenbeck 半群の拡張

前節では Ornstein–Uhlenbeck 半群を L^2 の枠組みで導入したが、実際には任意の $p \geq 1$ に対して強連続縮小半群となるように拡張することができる。まずは、そのために用いる Mehler の公式を紹介しよう。Mehler の公式は後に超縮小性を証明するためにも有用である。

$W': H \rightarrow L^2(\Omega', \mathcal{F}', P')$ を W とは別の等正規 Gauss 過程とする。ここでも \mathcal{F}' は $\sigma(W')$ の完備化であると仮定する。 $\pi: \Omega \times \Omega' \rightarrow \Omega$ と $\pi': \Omega \times \Omega' \rightarrow \Omega'$ を射影とし、 $\widetilde{W} = W \circ \pi$ および $\widetilde{W}' = W' \circ \pi'$ と定義する。このとき、 \widetilde{W} と \widetilde{W}' は共に $(\Omega \times \Omega', \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}', P \otimes P')$ 上の独立な等正規 Gauss 過程となる。

定理 3.1.

$F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に対して、 $\Psi_F: \mathbb{R}^H \rightarrow \mathbb{R}$ を $\Psi_F \circ W = F$ となるように選ぶ。このとき上の仮定の下で、

$$T_t F = \int_{\Omega'} \Psi_F \left(e^{-t} \widetilde{W} + \sqrt{1 - e^{-2t}} \widetilde{W}' \right) dP' \quad P\text{-a.s.} \quad (3.1)$$

が成り立つ。

証明. Step 1: $e^{-t} \widetilde{W} + \sqrt{1 - e^{-2t}} \widetilde{W}'$ の分布. まずは、 $e^{-t} \widetilde{W} + \sqrt{1 - e^{-2t}} \widetilde{W}'$ が $(\Omega \times \Omega', \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}', P \otimes P')$ 上の等正規 Gauss 過程となることを示す。 W と W' の独立性より、各 $h \in H$ について $e^{-t} \widetilde{W}(h) + \sqrt{1 - e^{-2t}} \widetilde{W}'(h)$ は中心化された Gauss 型確率変数となる。また、 $h, k \in H$ とすれば、 \widetilde{W} と \widetilde{W}' が独立な等正規 Gauss 過程であることから

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times \Omega'} \left(e^{-t} \widetilde{W}(h) + \sqrt{1 - e^{-2t}} \widetilde{W}'(h) \right) \left(e^{-t} \widetilde{W}(k) + \sqrt{1 - e^{-2t}} \widetilde{W}'(k) \right) dP \otimes P' \\ &= \int_{\Omega \times \Omega'} e^{-t} \widetilde{W}(h) e^{-t} \widetilde{W}(k) dP \otimes P' \\ & \quad + \int_{\Omega \times \Omega'} e^{-t} \widetilde{W}(h) \sqrt{1 - e^{-2t}} \widetilde{W}'(k) dP \otimes P' \\ & \quad + \int_{\Omega \times \Omega'} \sqrt{1 - e^{-2t}} \widetilde{W}'(h) e^{-t} \widetilde{W}(k) dP \otimes P' \\ & \quad + \int_{\Omega \times \Omega'} \sqrt{1 - e^{-2t}} \widetilde{W}'(h) \sqrt{1 - e^{-2t}} \widetilde{W}'(k) dP \otimes P' \\ &= e^{-2t} \left(\int_{\Omega \times \Omega'} \widetilde{W}(h) \widetilde{W}(k) dP \otimes P' \right) \\ & \quad + e^{-t} \sqrt{1 - e^{-2t}} \left(\int_{\Omega \times \Omega'} \widetilde{W}(h) dP \otimes P' \right) \left(\int_{\Omega \times \Omega'} \widetilde{W}'(k) dP \otimes P' \right) \\ & \quad + e^{-t} \sqrt{1 - e^{-2t}} \left(\int_{\Omega \times \Omega'} \widetilde{W}'(h) dP \otimes P' \right) \left(\int_{\Omega \times \Omega'} \widetilde{W}(k) dP \otimes P' \right) \\ & \quad + (1 - e^{-2t}) \left(\int_{\Omega \times \Omega'} \widetilde{W}'(h) \widetilde{W}'(k) dP \otimes P' \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-2t} \langle h, k \rangle_H + (1 - e^{-2t}) \langle h, k \rangle_H \\
&= \langle h, k \rangle_H
\end{aligned}$$

がわかる.

Step 2 : 可積分性. $\Psi_F(e^{-t}\widetilde{W} + \sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W}')$ の可積分性を示そう. μ を $(\mathbb{R}^H, \mathcal{B}(\mathbb{R}^H))$ 上に誘導された等正規 Gauss 過程の分布とする. Step 1 で示したように $e^{-t}\widetilde{W} + \sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W}'$ は等正規 Gauss 過程だから,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega \times \Omega'} \left| \Psi_F \left(e^{-t}\widetilde{W} + \sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W}' \right) \right|^2 dP \otimes P' &= \int_{\mathbb{R}^H} |\Psi_F(x)|^2 \mu(dx) \\
&= \int_{\Omega} |\Psi_F \circ W|^2 dP \\
&= \int_{\Omega} |F|^2 dP \\
&< \infty
\end{aligned}$$

が成り立つ. したがって Fubini の定理を用いれば

$$\int_{\Omega'} \left| \Psi_F \left(e^{-t}\widetilde{W} + \sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W}' \right) \right|^2 dP' < \infty \quad P\text{-a.s.}$$

がわかる. P' は確率測度だから, 二乗可積分から可積分性がしただう.

Step 3 : (3.1) の証明. $t \geq 0$ に対して,

$$S_t F = \int_{\Omega'} \Psi_F \left(e^{-t}\widetilde{W} + \sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W}' \right) dP'$$

と定める. 右辺の積分が well-defined であることは, step 2 での議論からわかる. S_t の値が Ψ_F の選び方によらないことを示そう. Ψ と Φ は

$$\Psi \circ W = \Phi \circ W = F$$

を満たしているとする. このとき

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \left| \int_{\Omega'} \Psi \left(e^{-t}\widetilde{W} + \sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W}' \right) dP' - \int_{\Omega'} \Phi \left(e^{-t}\widetilde{W} + \sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W}' \right) dP' \right| dP \\
&\leq \int_{\Omega \times \Omega'} \left| \Psi \left(e^{-t}\widetilde{W} + \sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W}' \right) - \Phi \left(e^{-t}\widetilde{W} + \sqrt{1-e^{-2t}}\widetilde{W}' \right) \right| dP \otimes P' \\
&= \int_{\Omega} |\Psi(W) - \Phi(W)| dP \\
&= \int_{\Omega} |F - F| dP \\
&= 0
\end{aligned}$$

となるから, S_t が表現によらず well-defined であることが確かめられた.

Step 3-1 : $F = e^{W(h) - \frac{1}{2}\|h\|^2}$ の場合. $F = e^{W(h) - \frac{1}{2}\|h\|^2}$ の場合に (3.1) が成り立つことを示そう.
関数 $\varphi: \mathbb{R}^H \rightarrow \mathbb{R}$ を $x \mapsto x(h) - \frac{1}{2}\|h\|^2$ によって定義すれば, $F = \exp \circ \varphi \circ W$ が成り立つ. これより, $\Psi_F = \exp \circ \varphi$ とすることができる. 定義にしたがって $S_t F$ の値を計算すれば,

$$\begin{aligned}
S_t F &= \int_{\Omega'} \Psi_F \left(e^{-t} \widetilde{W} + \sqrt{1 - e^{-2t}} \widetilde{W}' \right) dP' \\
&= \int_{\Omega'} \exp \left(e^{-t} \widetilde{W}(h) + \sqrt{1 - e^{-2t}} \widetilde{W}'(h) - \frac{1}{2} \|h\|^2 \right) dP' \\
&= \exp \left(e^{-t} W(h) - \frac{1}{2} \|h\|^2 \right) \int_{\Omega'} \exp \left(\sqrt{1 - e^{-2t}} W'(h) \right) dP' \\
&= \exp \left(e^{-t} W(h) - \frac{1}{2} \|h\|^2 \right) \exp \left(\frac{\|h\|^2}{2} (1 - e^{-2t}) \right) \\
&= \exp \left(e^{-t} W(h) - \frac{e^{-2t}}{2} \|h\|^2 \right) \\
&= \exp \left(e^{-t} \|h\| W \left(\frac{h}{\|h\|} \right) - \frac{e^{-2t}}{2} \|h\|^2 \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-t} \|h\|)^n H_n \left(W \left(\frac{h}{\|h\|} \right) \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} \|h\|^n H_n \left(W \left(\frac{h}{\|h\|} \right) \right)
\end{aligned}$$

となる. ただし, 4 つ目の等号は $W'(h) \sim N(0, \|h\|^2)$ であることと, 正規分布の Laplace 変換の公式から導かれる. また, 7 つ目の等号は (1.1) よりしたがう.

後は,

$$\|h\|^n H_n \left(W \left(\frac{h}{\|h\|} \right) \right) = J_n F \quad P\text{-a.s.}$$

が成り立つことを示せば良い. 再び (1.1) を用いれば

$$\begin{aligned}
F &= \exp \left(W(h) - \frac{1}{2} \|h\|^2 \right) \\
&= \exp \left(\|h\| W \left(\frac{h}{\|h\|} \right) - \frac{1}{2} \|h\|^2 \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \|h\|^n H_n \left(W \left(\frac{h}{\|h\|} \right) \right)
\end{aligned}$$

となる. $\|h\|^n H_n \left(W \left(\frac{h}{\|h\|} \right) \right) \in \mathcal{H}_n$ であるから, 伊藤–Wiener 展開の一意性より

$$\|h\|^n H_n \left(W \left(\frac{h}{\|h\|} \right) \right) = J_n(F) \quad P\text{-a.s.}$$

がわかる.

Step 3-2 : 一般の場合. $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の部分集合 A を

$$A = \left\{ e^{W(h) - \frac{1}{2}\|h\|^2} \mid h \in H \right\}$$

によって定義する．Step 3-1 での議論により， S_t と T_t は A 上では一致する．部分空間 $\text{span } A$ は $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ において稠密だから， S_t が有界線形写像であることを示せば $S_t = T_t$ が得られる．

$F, G \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ および $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とすれば，

$$(\alpha \Psi_F + \beta \Psi_G) \circ W = \alpha(\Psi_F \circ W) + \beta(\Psi_G \circ W) = \alpha F + \beta G$$

が成り立つ．この等式と積分の線形性より， S_t の線形性がわかる．さらに Step 2 の不等式評価と Fubini の定理を用いれば，

$$\|S_t F\|_{L^2(P)}^2 \leq \int_{\Omega \times \Omega'} \left| \Psi_F \left(e^{-t} \widetilde{W} + \sqrt{1 - e^{-2t}} \widetilde{W}' \right) \right|^2 dP \otimes P' \leq \|F\|_{L^2(P)}^2$$

となるので， S_t の有界性もわかる． □

定理 3.2.

定理 3.1 の表現により， L^2 上の Ornstein–Uhlenbeck 半群 (T_t) は任意の $p \geq 1$ について L^p 上の強連続縮小半群に拡張される．

証明. $p \geq 1$ とする．このとき，命題 3.1 の証明と同様にして，全ての $F \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ について

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left| \int_{\Omega'} \Psi_F \left(e^{-t} \widetilde{W} + \sqrt{1 - e^{-2t}} \widetilde{W}' \right) dP' \right|^p dP \\ & \leq \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega'} \left| \Psi_F \left(e^{-t} \widetilde{W} + \sqrt{1 - e^{-2t}} \widetilde{W}' \right) \right|^p dP' \right) dP \\ & = \int_{\Omega \times \Omega'} \left| \Psi_F \left(e^{-t} \widetilde{W} + \sqrt{1 - e^{-2t}} \widetilde{W}' \right) \right|^p dP \otimes P' \\ & = \int_{\Omega} |\Psi_F \circ W|^p dP \\ & = \int_{\Omega} |F|^p dP \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる．ただし，最初の不等号は Jensen の不等式により，最初の等号では Fubini の定理を用いた．この評価より定理の主張がしたがう． □

4 Ornstein–Uhlenbeck 半群の超縮小性

本節では，Ornstein–Uhlenbeck 半群の超縮小性と呼ばれる性質を証明する．

定理 4.1 (超縮小性).

$p > 1$ かつ $t > 0$ とし， $q(t) = e^{2t}(p-1) + 1$ と定める^a．このとき，

$$\|T_t F\|_{q(t)} \leq \|F\|_p \quad \forall F \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) \quad (4.1)$$

が成り立つ.

a このとき $q(t) > p$ となっていることに注意する.

定理の証明のために補題を用意する.

補題 4.2.

$p > 1$ と $t > 0$ および $q = q(t)$ を定理 4.1 のものとし, q' を q の共役指数とする. また $B^1 = (B_s^1)_{s \in [0,1]}$ と $B^2 = (B_s^2)_{s \in [0,1]}$ を確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上の独立な Brown 運動とする. これらを用いて, Brown 運動 B^3 を

$$B^3 = e^{-t} B^1 + \sqrt{1 - e^{-2t}} B^2$$

と定義する. σ 代数 \mathcal{G}^3 と \mathcal{G}^1 は, それぞれ B^3 と B^1 によって生成される σ 代数の (\mathcal{F}, P) -完備化であるとする. このとき, 全ての非負 \mathcal{G}^3 可測関数 X と非負 \mathcal{G}^1 可測関数 Y について

$$E[|XY|] \leq \|X\|_{L^p} \|Y\|_{L^{q'}}$$

が成り立つ.

証明. フィルトレーション $\mathbb{G}^1 = (\mathcal{G}_s^1)_{s \in [0,1]}$ と $\mathbb{G}^3 = (\mathcal{G}_s^3)_{s \in [0,1]}$ を, それぞれ B^1 と B^3 から生成されたフィルトレーションを完備右連続化したものとする.

Step 1: $0 < a \leq X, Y \leq b$ の場合. まずは, 正の数 $0 < a < b$ で $a \leq X, Y \leq b$ を満たすものが存在すると仮定する. このとき, マルチンゲール表現定理より, \mathbb{G}^3 可予測過程 H と \mathbb{G}^1 可予測過程 K で

$$X^p = E[X^p] + \int_0^1 H_u dB_u^3, \quad Y^q = E[Y^q] + \int_0^1 K_u dB_u^1$$

を満たすものが存在する. これを用いて, 有界連続マルチンゲール M と N を

$$M_s = \int_0^s H_u dB_u^3, \quad N_s = \int_0^s K_u dB_u^1$$

を満たすように選ぶ. 特に M と N は $a \leq M, N \leq b$ を満たすように選ぶことができる. 実際,

$$M_s = E[X^p | \mathcal{G}_s^3], \quad N_s = E[Y^q | \mathcal{G}_s^1], \quad P\text{-a.s.}$$

だから, このような修正の存在がわかる.

ここで, フィルトレーション $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_s)_{s \in [0,1]}$ を, (B^1, B^2) から生成されたフィルトレーションの完備右連続化として定めれば, 独立性より B^1, B^2, B^3 はどれも \mathbb{G} -Brown 運動となっている. ここで

$$\alpha = \frac{1}{p} \in]0, 1[, \quad \beta = \frac{1}{q'} \in]0, 1[$$

とし, 関数 $f:]0, \infty[\times]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$ によって定義する. f と M, N に伊藤の公式を

適用すれば,

$$\begin{aligned}
XY &= f(X^p, Y^p) \\
&= f(E[X^p], E[Y^q]) + \alpha \int_0^1 M_u^{\alpha-1} N_u^\beta dM_u + \beta \int_0^t M_u^\alpha N_u^{\beta-1} dN_u \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \alpha(\alpha-1) M_u^{\alpha-2} N_u^\beta d\langle M, M \rangle_u + \frac{1}{2} \int_0^1 \beta(\beta-1) M_u^\alpha N_u^{\beta-2} d\langle N, N \rangle_u \\
&\quad + \int_0^1 \alpha\beta M_u^{\alpha-1} N_u^{\beta-1} d\langle M, N \rangle_u
\end{aligned}$$

を得る. M と N の積分表示にしたがって 2 次変分を計算すれば,

$$\begin{aligned}
\langle M, M \rangle_s &= \int_0^s H_u^2 du, \\
\langle N, N \rangle_s &= \int_0^s K_u^2 du, \\
\langle M, N \rangle_s &= e^{-t} \int_0^s H_u K_u du
\end{aligned}$$

となることに注意する. ただし, 2 次共変分の計算には B^1 と B^2 が独立ゆえそれらの 2 次共変分が 0 になることを用いた. このことから,

$$\begin{aligned}
XY &= \|X\|_{L^p} \|Y\|_{L^q} + \alpha \int_0^1 M_u^{\alpha-1} N_u^\beta dM_u + \beta \int_0^t M_u^\alpha N_u^{\beta-1} dN_u \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \alpha(\alpha-1) M_u^{\alpha-2} N_u^\beta H_u^2 du + \frac{1}{2} \int_0^1 \beta(\beta-1) M_u^\alpha N_u^{\beta-2} K_u^2 du \\
&\quad + \int_0^1 \alpha\beta M_u^{\alpha-1} N_u^{\beta-1} e^{-t} H_u K_u du
\end{aligned}$$

となることがわかる. ここで

$$A_s = \alpha(\alpha-1) M_u^{-2} H_s^2 + \beta(\beta-1) N_u^{-2} K_s^2 + 2\alpha\beta e^{-t} M_s^{-1} N_s^{-1} H_s K_s$$

と定義すれば,

$$XY = \|X\|_{L^p} \|Y\|_{L^q} + (\text{マルチンゲール}) + \frac{1}{2} \int_0^1 M_u^\alpha N_u^\beta A_u du$$

と表現できる. さらにマルチンゲール性に注意しつつ期待値をとって Fubini の定理を用いれば,

$$E[XY] = \|X\|_{L^p} \|Y\|_{L^q} + \frac{1}{2} \int_0^1 E[M_u^\alpha N_u^\beta A_u] du$$

を得る.

以上の議論の結果から,

$$E[M_u^\alpha N_u^\beta A_u] \leq 0 \quad \text{for a.e. } u$$

を示せば補題の主張が証明されたことになる. いま M と N は共に正の値をとるから, P -a.s. で $A_u \leq 0$ が成り立つことを示せば良い. p, t, q に関する仮定から, この条件が導かれることを確かめ

よう．実数 (x, y) に対して

$$P(x, y) = \alpha(\alpha - 1)x^2 + 2\alpha\beta e^{-t}xy + \beta(\beta - 1)y^2$$

と定義する． A の定義より

$$A_s = P\left(\frac{H_s}{M_s}, \frac{K_s}{N_s}\right)$$

であるから，もし全ての x, y について $P(x, y) \leq 0$ が成り立つなら，所望の不等式が得られることになる． $P(x, y)$ を x に関する 2 次式と考えよう． $\alpha(\alpha - 1) < 0$ であることに注意すれば，

$$(\alpha\beta e^{-t}y)^2 - \alpha(\alpha - 1)\beta(\beta - 1)y^2 \leq 0$$

が成り立つことが，全ての x について $P(x, y) \leq 0$ が成り立つための必要十分条件だとわかる． $y = 0$ のとき，この不等号は明らかである． $y \neq 0$ のときは，この不等号は

$$\alpha^2\beta^2e^{-2t} - \alpha(\alpha - 1)\beta(\beta - 1) \leq 0$$

と同値である． $\alpha, \beta > 0$ であるから，これはさらに

$$\alpha\beta e^{-2t} - (\alpha - 1)(\beta - 1) \leq 0$$

とも同値である．上の不等号の左辺を計算してみると，

$$\begin{aligned} \alpha\beta e^{-2t} - (\alpha - 1)(\beta - 1) &= \frac{1}{p} \frac{1}{q'} e^{-2t} - \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{q'}\right) \\ &= \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{q}\right) e^{-2t} - \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{1}{q} \\ &= \frac{1}{p} \frac{(q - 1)(e^{-2t})}{q} - \frac{p - 1}{p} \frac{1}{q} \\ &= \frac{1}{p} \frac{p - 1}{q} - \frac{p - 1}{p} \frac{1}{q} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる．よって期待された不等式は実際に成り立っている．

Step 2：一般の場合． X と Y は非負かつ補題の可測性を満たすとする．可積分性がない場合には証明すべき不等式は明らかなので， $X \in L^p$ かつ $Y \in L^{q'}$ であると仮定して示せば良い． $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ に対して

$$X^{(n)} = (X \wedge n) \vee \frac{1}{n}, \quad Y^{(n)} = (Y \wedge n) \vee \frac{1}{n}$$

と定めれば，step 1 の結果より任意の n について

$$E[X^{(n)}Y^{(n)}] \leq \|X^{(n)}\|_{L^p} \|Y^{(n)}\|_{L^{q'}}$$

が成り立つ．この不等式において $n \rightarrow \infty$ とすれば，優収束定理により

$$E[XY] \leq \|X\|_{L^p} \|Y\|_{L^{q'}}$$

が得られる. \square

証明 (定理 4.1). Step 1: W がホワイトノイズの場合.

Step 1-1: 準備. $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], \lambda)$ を Lebesgue 測度空間とし, $W: L^2([0, 1], \lambda) \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ はホワイトノイズであると仮定する. このとき, W は $t \mapsto W(1_{[0,t]})$ の連続修正として定めた Brown 運動 B による Wiener 積分で,

$$W(h) = \int_0^1 h(s) dB_s$$

と表現することができる. また, このとき \mathcal{F} は B が生成する σ -代数の完備化であることに注意する. また, Mehler の公式で用いる W' も, 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}', P)$ 上の Brown 運動 B' によって定まっているとする. さらに, $(\Omega \times \Omega', \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}', P \otimes P')$ 上の Brown 運動 B'' を $B'' = e^{-t}B + \sqrt{1 - e^{-2t}}B'$ によって定める. B と B' は自然にこの空間上の独立な Brown 運動と見なす.

以上の仮定の下で, 超縮小性の証明を行おう. q' を $q(t) = e^{2t}(p - 1) + 1$ の共役指数とする. このとき, 双対性より全ての $G \in L^{q'}$ について

$$|E[(T_t F)G]| \leq \|F\|_{L^p} \|G\|_{L^{q'}} \quad (4.2)$$

が成り立つことを示せば良い. Ornstein–Uhlenbeck 半群の正值性より

$$|T_t F| \leq T_t |F|$$

が成り立つから, F と G が非負の場合に示せば十分である. さらに極限操作を考えることにより F と G は有界であるとしてよい.

Step 1-2: $F = f(W(h_1), \dots, W(h_n))$ かつ $G = g(W(h_1), \dots, W(h_n))$ の場合. F と G が有限個の $h_1, \dots, h_n \in L^2([0, 1])$ と非負有界可測関数 $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ により, $F = f(W(h_1), \dots, W(h_n))$ および $G = g(W(h_1), \dots, W(h_n))$ と表現されている場合を考える. いま W は Wiener 積分であるから, 各 i について

$$W(h_i) = \int_0^1 h_i(s) dB_s$$

が成り立つ. また, 確率積分の線形性より

$$e^{-t}W(h_i) + \sqrt{1 - e^{-2t}}W'(h_i) = \int_0^1 h_i(s) dB''_s$$

となることに注意しておく. 以上の注意と Mehler の公式, そして Fubini の定理により,

$$\begin{aligned} E[(T_t F)G] &= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega'} f \left(\int_0^1 h_1(s) dB''_s, \dots, \int_0^1 h_n(s) dB''_s \right) dP' \right) \\ &\quad \times g \left(\int_0^1 h_1(s) dB_s, \dots, \int_0^1 h_n(s) dB_s \right) dP \\ &= \int_{\Omega \times \Omega'} f \left(\int_0^1 h_1(s) dB''_s, \dots, \int_0^1 h_n(s) dB''_s \right) \\ &\quad \times g \left(\int_0^1 h_1(s) dB_s, \dots, \int_0^1 h_n(s) dB_s \right) dP \otimes P' \end{aligned}$$

が成り立つ。最後の辺の積分には補題 4.2 が適用できるから、縮小性と併せて

$$E[(T_t F)] \leq \|T_t F\|_{L^p} \|G\|_{L^{q'}} \leq \|F\|_{L^p} \|G\|_{L^{q'}}$$

を得る。

Step 1-3：一般の F と G の場合． 次に、一般の有界な F, G について考える。まずは、有界可測関数の空間 \mathcal{K} を

$$\mathcal{K} = \{G \mid G = g(W(h_1), \dots, W(h_n)) \text{ という表現を持つ}\}$$

と定義する。ただし、 G の表現に現れる g は有界 Borel 可測関数とする。このとき、 \mathcal{K} は $L^{q'}(\mathcal{F})$ の稠密な部分空間だから、 $G \in L^{q'}(\mathcal{F})$ と $F = f(W(h_1), \dots, W(h_n))$ という形の F について

$$|E[(T_t F)G]| \leq \|F\|_{L^p} \|G\|_{L^{q'}}$$

となることがわかる。これより、 $F = f(W(h_1), \dots, W(h_n))$ という形の F については、不等式

$$\|T_t F\|_q \leq \|F\|_p$$

がしたがう。一般の場合は、再び稠密性を用いればよい。

Step 2：一般の等正規 Gauss 過程の場合． 最後に、一般の等正規 Gauss 過程 $W: H \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の場合を考える。 $\Theta: L^2([0, 1], \lambda) \rightarrow H$ を Hilbert 空間としての等長同型写像とし、 $\widehat{W} = W \circ \Theta$ と定義する。このとき $\widehat{W}: L^2([0, 1], \lambda) \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ はホワイトノイズである。さらに Θ は全単射だから、 \mathcal{F} は $\sigma(\widehat{W})$ の完備化にも等しい。 \widehat{W} の場合の超縮小性は既に示されているから、 W に関する超縮小性を \widehat{W} に関する議論に帰着させればよい。

$F \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とし、 Ψ_F と $\widehat{\Psi}_F$ を以下の図式を可換にするように選ぶ。

$$\begin{array}{ccccc} \Omega & \xrightarrow{W} & \mathbb{R}^H & \xrightarrow{\Theta^*} & \mathbb{R}^{L^2([0,1], \lambda)} \\ & \searrow F & \downarrow \Psi_F & & \swarrow \widehat{\Psi}_F \\ & & \mathbb{R} & & \end{array}$$

ただし、 Θ^* は $\Theta(x) = x \circ \Theta$ で定まる写像である。 \widehat{W} に関する Ornstein–Uhlenbeck 半群を \widehat{T} で表すことにする。すなわち、 $\widehat{W}' = W' \circ \Theta$ とすれば

$$\widehat{T}_t F = \int_{\Omega'} \widehat{\Psi}_F(e^{-t}\widehat{W} + \sqrt{1-e^{-2t}}\widehat{W}') dP'$$

である。このとき、 $\widehat{\Psi}$ の定義より

$$\begin{aligned} \widehat{T}_t F &= \int_{\Omega'} \widehat{\Psi}_F(e^{-t}\widehat{W} + \sqrt{1-e^{-2t}}\widehat{W}') dP' \\ &= \int_{\Omega'} \widehat{\Psi}_F \circ \Theta(e^{-t}W + \sqrt{1-e^{-2t}}W') dP' \\ &= \int_{\Omega'} \Psi_F(e^{-t}W + \sqrt{1-e^{-2t}}W') dP' \\ &= T_t F \end{aligned}$$

となる。したがって、 \hat{T}_t の超縮小性より T_t の超縮小性がわかる。 \square

5 Ornstein–Uhlenbeck 半群の生成作用素

A L^p 空間における稠密性

命題 A.1.

(Ω, \mathcal{F}, P) を任意の確率空間とし、 $X = (X_i)_{i \in I}$ を確率変数族とする。 \mathcal{F} の部分 σ 代数 \mathcal{G} を $\mathcal{G} = \sigma(X)$ によって定義する。 また、有限集合 $J \subset I$ と有界可測関数 $f: \mathbb{R}^J \rightarrow \mathbb{R}$ によって $F = f \circ (X_i)_{i \in J}$ と表現されるような有界確率変数全体の空間を \mathcal{H} で表す。 このとき、任意の $p \geq 1$ について \mathcal{H} は $L^p(\Omega, \mathcal{G}, P)$ で稠密である。

証明. q を p の共役指数とする。 双対性より、全ての $g \in L^q(P, \mathcal{G}, P)$ について

$$(\forall f \in \mathcal{H} \quad E[fg] = 0) \implies g = 0$$

が成り立つことを示せばよい。

$g = g^+ - g^-$ という分解を考える。 $g \in L^q(\mathcal{G}) \subset L^1(\mathcal{G})$ だから、 $g^+, g^- \in L^1(\mathcal{G})$ である。 そこで、有限測度 Q_1 と Q_2 をそれぞれ

$$Q_1(A) = E[1_A g^+], \quad Q_2(A) = E[1_A g^-]$$

によって定義する。 仮定より $A = \bigcap_{i \in J} X_i^{-1}(B_i)$ という形の集合については $E[1_A g^+] = E[1_A g^-]$ が成り立つ。 このような集合全体は \mathcal{G} を生成する π 系だから、 Q_1 と Q_2 は \mathcal{G} 上で一致する。 ゆえに $g^+ = g^-$ a.s. となり、 $g = 0$ がしたがう。 \square

References

- [1] Vladimir I. Bogachev. *Gaussian Measures*. Mathematical Surveys and Monographs 62. American Mathematical Society, 1998. xii+433 pp. ISBN: 0-8218-1054-5. DOI: [10.1090/surv/062](https://doi.org/10.1090/surv/062). URL: <http://bookstore.ams.org/surv-62/>.
- [2] Ivan Nourdin and Giovanni Peccati. *Normal Approximations with Malliavin Calculus. From Stein's Method to Universality*. Cambridge Tracts in Mathematics 192. Cambridge University Press, 2012. DOI: [10.1017/CB09781139084659](https://doi.org/10.1017/CB09781139084659).
- [3] David Nualart. *The Malliavin Calculus And Related Topics*. 2nd ed. Springer-Verlag, 2006.