セミマルチンゲール理論と確率解析の基礎

大阪大学大学院基礎工学研究科
平井祐紀

2019 年 7 月 24 日

目次

記号・用語

- $A \sqcup B$ および $\bigsqcup_i A_i$ は集合の直和，または無縁和を表す．どちらなのかは文脈に応じて判断すべし．
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
- $\mathbb{N}_{\geq k} = \{k, k+1, k+2, \dots\}$.
- $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.
- $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \sqcup \{+\infty, -\infty\}$.
- $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty] = \mathbb{R}_+ \sqcup \{+\infty\}$.
- 実数値の関数族 (f_i) が与えられたとき，$\bigvee_i f_i$ および $\bigwedge_i f_i$ はそれぞれ $\overline{\mathbb{R}}$ 値関数 $x \mapsto \sup_i f_i(x)$ および $x \mapsto \inf_i f_i(x)$ を表す．
- σ 加法族の族 $(\mathscr{A}_i)$ に対して $\bigvee_i \mathscr{A}_i$ で σ 加法族 $\sigma\left(\bigcup_i \mathscr{A}_i\right)$ を表す．
- 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して，$s \to t$ かつ $s < t$ または $s \leq t$ なる s についての極限が存在すれば，それぞれ
$$\lim_{s \uparrow\uparrow t} f(s), \quad \lim_{s \uparrow t} f(s)$$
で表す．不等号を逆にして
$$\lim_{s \downarrow\downarrow t} f(s), \quad \lim_{s \downarrow t} f(s)$$
も定義する．
- 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全ての点で右連続，かつ左極限をもつとき，f は càdlàg であるという．
- $(+\infty)$ に関する演算が出てきたときは，次のように定義することにする：
$$\begin{aligned}
&(+\infty) + a = a + (+\infty) = +\infty, && (-\infty) + a = a + (-\infty) = -\infty, && a \in \mathbb{R} \\
&(+\infty) \times a = a \times (+\infty) = +\infty, && (-\infty) \times a = a \times (-\infty) = -\infty, && 0 < a < +\infty \\
&(+\infty) \times (-a) = (-a) \times (+\infty) = -\infty, && (-\infty) \times (-a) = (-a) \times (-\infty) = +\infty, && 0 < a < +\infty \\
&(+\infty) \times 0 = 0 \times (+\infty) = 0, && (-\infty) \times 0 = 0 \times (-\infty) = 0
\end{aligned}$$
- $x, y \in \overline{\mathbb{R}}_+$ に対して
$$x \ominus y = \begin{cases} x - y & \text{if } x < +\infty \text{ or } y < +\infty, \\ +\infty & x, y = +\infty. \end{cases}$$
と定義する．標準的な記号ではないが，一般化された条件付き期待値を考えるときに有用であるから導入する[*1]．
- このノートでは $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ は常に確率空間を表すものとする．
- 確率変数 X に対してその期待値（P による積分）を $E[X]$ で表す．確率測度を明示する必要性があるときは，特に $E^P[X]$ などと書く．

[*1] Medvegyev [11] を参考にした．

- 測度空間 $(X,\mathscr{A},\mu)$ に対し，p $(\in [1,\infty[)$ 乗可積分な可測関数全体の集合を $\mathscr{L}^p(X,\mathscr{A},\mu)$ で表す．可測関数が μ-a.e. で等しいという同値関係による $\mathscr{L}^p(X,\mathscr{A},\mu)$ の商空間を $\mathscr{L}^p(X,\mathscr{A},\mu)/\mu$ または $L^p(X,\mathscr{A},\mu)$ で表す． $L^p(X,\mathscr{A},\mu)$ のノルムを $\|\ \ \|_{L^p}$ で表す．
- $\mathscr{L}^\infty(X,\mathscr{A},\mu)$ をは本質的に有界な実数値確率変数からなる空間とし，その μ による同値類を $\mathscr{L}^\infty(X,\mathscr{A},\mu)/\mu$ または $L^\infty(X,\mathscr{A},\mu)$ で表す．$L^\infty(X,\mathscr{A},\mu)$ のノルムを $\|\ \ \|_{L^\infty}$ で表す．
- $\mathscr{F}$ の部分 σ-加法族 $\mathscr{G}$ に対して，その任意の変形 (version) を $E[X|\mathscr{G}]$ で表す．可積分でなくても，非負なる確率変数に対して条件付き期待値が定義できることに注意されたい．
- 一般化条件付期待値 (generalized conditional expectation) を次のように定義する[*2]：$\widehat{E}[X|\mathscr{G}] = E[X^+|\mathscr{G}] \ominus E[X^-|\mathscr{G}]$. 一般化条件付き期待値は可予測射影の議論において有用なので導入するが，通常の条件付き期待値との違いに注意されたい．例えば線形性などは一般に成立たない．
- 一般化条件付き期待値 $\widehat{E}[X|\mathscr{G}]$ が $(+\infty)\ominus(+\infty)$ となる確率が 0 のとき，$E[X|\mathscr{G}]$ は well-defined であるということにする．
- 可測空間 $(X,\mathscr{A})$ 上の測度 μ と可測関数 f に対して

$$A \mapsto \int_A f(x)\mu(dx), \quad A \in \mathscr{A}$$

  で定まる測度を $f\bullet\mu$ で表す．
- 確率過程の空間 $\mathscr{H}$ が与えられたとき，$\mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$ でその局所化を表す．$\mathscr{H}^{\mathrm{c}}$ は $\mathscr{H}$ の元のうち連続なパスをもつもの全体を，$\mathscr{H}_0$ は $\mathscr{H}$ の元のうちで 0 出発のもの全体を表すことにする．

[*2] 一般化つき条件付期待値も条件付期待値同様，P-a.s. の意味でしか一意に定まらないことに注意されたい．

第 1 章

確率過程と可測性

1.1 確率空間とフィルトレーション

定義 1.1.1. $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を $\mathscr{F}$ の部分 σ-加法族の族とする．$0 \leq s \leq t < +\infty$ に対して $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$ が成り立つとき，$\mathbb{F}$ を $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上のフィルトレーションという．$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付確率空間 (filtered probability space) または確率基底 (stochastic basis) と呼ぶ．

$(\Omega, \mathscr{F})$ 上のフィルトレーション $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)$ と $\mathbb{G} = (\mathscr{G}_t)$ を考える．任意の t で $\mathscr{F}_t \subset \mathscr{G}_t$ が成り立つとき，$\mathbb{G}$ は $\mathbb{F}$ を含むといい，$\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$ と表す．

フィルトレーション $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ に対して $\mathscr{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s$ と定義する．$(\mathscr{F}_{t+})_{t\in\mathbb{R}_+}$ はまたフィルトレーションを成すので，これを $\mathbb{F}_+$ で表すことにする．定義より明らかに $\mathbb{F} \subset \mathbb{F}_+$ である．また，$\mathscr{F}_\infty = \mathscr{F}_{\infty-} := \bigvee_{t\in\mathbb{R}_+} \mathscr{F}_t$ とおくことにする．

定義 1.1.2. 任意の $t \in [0, +\infty[$ に対して $\mathscr{F}_{t+} = \mathscr{F}_t$ が成り立つとき，$\mathbb{F}$ は右連続であるという．$\mathbb{F}$ が右連続であるとき，フィルターつき確率空間は右連続であるということにする．また $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ が完備かつ，任意の $t \in [0, +\infty[$ に対して $\mathscr{F}_t$ が $\mathscr{F}$ の P-零集合を全て含むとき，フィルトレーション $\mathbb{F}$ およびフィルターつき確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ は完備であるという[*1]．完備性と右連続性をもつフィルターつき確率空間は通常の条件 (usual condition) を満たすという．

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間としたとき，

$$\mathscr{N}^P = \{A \subset \Omega \mid \exists N \in \mathscr{F},\ A \subset N \wedge P(N) = 0\}$$
$$\mathscr{F}^P = \mathscr{F} \vee \mathscr{N}^P$$

と定義する．$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上のフィルトレーション $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)$ に対して $\mathbb{F}^P = (\mathscr{F}_t \vee \mathscr{N}^P)_{t\in\mathbb{R}_+}$ は $(\Omega, \mathscr{F}^P, P)$ 上のフィルトレーションを成すことは明らかである．そこで，新たなフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}^P, \mathbb{F}^P, P)$ を元のフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ の完備化 (completion) と呼ぶことにする[*2]．

命題 1.1.3. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．このとき，$(\mathbb{F}_+)^P = (\mathbb{F}^P)_+$ が成立する．このフィルトレーションは，$(\Omega, \mathscr{F}^P, \mathbb{F}, P)$ 上の $\mathbb{F}$ を含む右連続かつ完備なフィルトレーションのうち最小のもの

[*1] フィルトレーションが完備という条件は，各々の確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}_t, P|_{\mathscr{F}_t})$ が完備という条件とは異なることに注意されたい．

[*2] 完備化 $(\Omega, \mathscr{F}^P, \mathbb{F}^P, P)$ の P は正確には元の $P : \mathscr{F} \to [0,1]$ の $\mathscr{F}^P$ への拡張である．これは P の生成する外測度 $P^* : 2^\Omega \to [0,1]$ の $\mathscr{F}^P$ への制限によって得られる．これ以降，この拡張された確率測度 : $\mathscr{F}^P \to [0,1]$ も元の測度と同じ記号 P で表すことにする．

である．

証明．*Step 1*：$(\mathbb{F}_+)^P \subset (\mathbb{F}^P)_+$ の証明．$t \in \mathbb{R}_+$ とする．$s > t$ とすれば，定義より明らかに

$$\mathscr{F}_{t+} \vee \mathscr{N}^P \subset \mathscr{F}_s \vee \mathscr{N}^P$$

が成立．これより

$$\mathscr{F}_{t+} \vee \mathscr{N}^P \subset \bigcap_{s>t} (\mathscr{F}_s \vee \mathscr{N}^P)$$

となり $(\mathbb{F}_+)^P \subset (\mathbb{F}^P)_+$ が分かる．

Step 2：$(\mathbb{F}_+)^P \supset (\mathbb{F}^P)_+$ の証明．

$$\mathscr{F}_t \vee \mathscr{N}^P = \{A \in \mathscr{F}^P \mid \exists B \in \mathscr{F}_t,\ A \triangle B \in \mathscr{N}^P\}$$

と書けることに注意する．

$$A \in \bigcap_{s>t} \left(\mathscr{F}_s \vee \mathscr{N}^P\right)$$

とすれば，任意の $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ に対して

$$A \in \mathscr{F}_{t+\frac{1}{n}} \vee \mathscr{N}^P$$

が成り立つ．各 n について，$A_n \in \mathscr{F}_{t+\frac{1}{n}}$ かつ $A_n \triangle A \in \mathscr{N}^P$ なる A_n を選ぶ．ここで

$$A' = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

と定義する．このとき，任意の $n \geq 1$ に対して

$$A' = \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{k\geq m} A_k = \bigcap_{m\geq n} \bigcup_{k\geq m} A_k \in \mathscr{F}_{t+\frac{1}{n}}$$

となり，よって $A' \in \mathscr{F}_{t+}$ である．さらに

$$\begin{aligned}
A' \triangle A &= \left(\bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{k\geq m} A_k\right) \triangle A \\
&= \left[\bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{k\geq m} (A_k \setminus A)\right] \cup \left[\bigcup_{m\geq 1} \bigcap_{k\geq m} (A \setminus A_k)\right] \\
&\subset \left[\bigcup_{k\geq 1} (A_k \setminus A)\right] \cup \left[\bigcup_{k\geq 1} (A \setminus A_k)\right] \\
&= \bigcup_{k\geq 1} (A_k \triangle A)
\end{aligned}$$

であるから，$A' \triangle A$ はまた P 零集合である．これより $A \in \mathscr{F}_{t+} \vee \mathscr{N}^P$ となり，$\bigcap_{s>t} \left(\mathscr{F}_s \vee \mathscr{N}^P\right) \subset \mathscr{F}_{t+} \vee \mathscr{N}^P$ が分かる．すなわち $(\mathbb{F}^P)_+ \subset (\mathbb{F}_+)^P$ が成立する．

Step 3：最小性．$\mathbb{G} = (\mathscr{G}_t)$ は通常の条件満たす $(\Omega, \mathscr{F}^P, P)$ 上のフィルトレーションで $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$ なるものとする．$\mathscr{G}$ は完備なので，明らかに $\mathscr{F}_t \vee \mathscr{N}^P \subset \mathscr{G}_t$ である．これと $\mathbb{G}$ の右連続性より

$$\bigcap_{s>t} \left(\mathscr{F}_s \vee \mathscr{N}^P\right) \subset \bigcap_{s>t} \mathscr{G}_s = \mathscr{G}_{t+} = \mathscr{G}_t$$

となり，$\mathbb{G}$ は $(\mathbb{F}^P)_+$ を含む． □

命題 1.1.3 で扱った最小の右連続，完備かフィルトレーションを $\mathbb{F}$ の通常の拡大（usual augumentation）といい，$\mathbb{F}_+^P$ で表す．

定義 1.1.4. $(E,\mathscr{E})$ を可測空間とする．確率変数 $X_t:\Omega\to E$ の族を，$X=(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を状態空間 E の（または単に E 値）確率過程という．

確率過程の像 $X_t(\omega)$ を $X(\omega,t)$ などとも書く．これは，確率過程を 2 変数の関数 $(\omega,t)\mapsto X_t(\omega)$ と見ることを意識した書き方である．$\omega\in\Omega$ を固定するごとに写像 : $\mathbb{R}_+\ni t\mapsto X_t(\omega)\in E$ が定まるが，これを確率過程のパス (path) や経路 (trajectory) などと呼ぶ．$(E,\mathscr{E})$ の例としては $(\mathbb{R}^d,\mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ や $(\overline{\mathbb{R}},\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ などが大切である．ただし，$\overline{\mathbb{R}}$ には通常の順序位相を考える．特に断らずに確率過程，または–可測関数などという言葉を使った時は，状態空間は $\mathbb{R}$ または $\overline{\mathbb{R}}$ であるものとする．殆どの主張については，状態空間が $\mathbb{R}$ なのか $\overline{\mathbb{R}}$ なのかの差は本質的な問題にはならない．

E が位相空間の場合は，特に断らない限り常に $\mathscr{E}=\mathscr{B}(E)$ として扱う．この場合，確率過程のパスは位相空間から位相空間への写像であるから，写像としての連続性を考えることが出来る．全てのパスが連続（右–，左連続）である時，確率過程 X は連続（右–，左連続）であるという．殆ど全てのパスが連続である時は「確率 1 で連続」ということにする[*3]．また，パスが右連続かつ全て t で左極限をも持つとき，確率過程は càdlàg であるという．先ほどと同様に確率 1 で càdlàg なる概念も定義される．càdlàg なパスをもつ確率過程 X に対して，

$$X_{t-}=\begin{cases}X_0 & t=0\\ \lim\limits_{s\uparrow\uparrow t}X_s & t\in]0,+\infty[\end{cases}$$

および

$$\Delta X_t=X_t-X_{t-}$$

と定義することにする．$(\Delta X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ はまた確率過程となるから，これを ΔX で表す．

$A\subset\Omega\times\mathbb{R}_+$ に対して

$$A_t=\{\omega\in\Omega\mid(\omega,t)\in A\},\quad A^\omega=\{t\in\mathbb{R}_+\mid(\omega,t)\in A\}$$

と定義する[*4]．1_A が確率過程となるとき，A は確率集合 (stochastic set) と言われる[*5]．すなわち，A が確率集合とは任意の $t\in\mathbb{R}_+$ に対して $A_t\in\mathscr{F}$ ということである．

定義 1.1.5. $A\subset\Omega\times\mathbb{R}_+$ はその第一射影 $\mathrm{pr}_1(A)$ が P-零集合となるとき[*6]，消散的 (evanescent) であるという．E 値確率過程 X，Y に対して集合 $\{(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+\mid X_t(\omega)\neq Y_t(\omega)\}$ が消散的であるとき，X と Y は区別不能 (indistinguishable) であるという．[*7]確率過程 X が 0 と区別不能なとき，X は消散的であるという．

定義 1.1.6. $(\Omega,\mathscr{F},P)$ を確率空間．$X=(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ と $Y=(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を確率過程とする．任意の $t\in\mathbb{R}_+$ に対して $X_t=Y_t$ (a.s.) が成り立つとき，Y は X の（あるいは X は Y の）修正 (modification)，あるいは変形 (version) であるという．

---

*3 「確率 1 で連続」たることをさして確率過程が「連続」という文献もあるように思うので，注意されたし．

*4 A_t を A の t-断面 (t-section)，A^ω を A の ω-断面 (ω-section) などと呼ぶ．

*5 stochastic set の語は He, Wang, & Yan [10] による．Jacod & Shiryaev には random set という用語が出ていて，これは単なる $\Omega\times\mathbb{R}_+$ の部分集合をさす言葉のようである．

*6 $\mathrm{pr}_1(A)$ は必ずしも $\mathscr{F}$ の元である必要はなく，$\mathscr{F}^P$ の元であればよい．

*7 X と Y が区別不能であるとは，すなわち $\{\omega\in\Omega\mid\exists t\in\mathbb{R}_+,\ X_t(\omega)\neq Y_t(\omega)\}$ が P-零集合であるということである．

注意 1.1.7. X と Y がともに右（あるいは左）連続過程であるとき，X と Y が区別不能であることと，互いに修正であることは明らかに同値である．

確率過程の可測性のうち，基本的なものを導入する．

定義 1.1.8. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．

(i) E 確率過程 X が写像 $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$ として $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)/E$-可測であるとき，$X$ を可測な確率過程 (*measurable*) という[*8]．

(ii) E 値確率過程 X が次の条件を満たすとき，X は $\mathbb{F}$ に適合 (*adapted*) しているという：任意の $t \in \mathbb{R}_+$ に対して X_t は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(E)$-可測である．

(iii) 任意の $t \in [0, \infty[$ に対して写像：$[0,t] \times \Omega \ni (s, \omega) \mapsto X_s(\omega) \in E$ が $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t/\mathscr{B}(E)$ 可測となるとき，X は $(\mathscr{F}_t)$ -発展的可測　(*progressively measurable*) であるという．

(iv) 確率集合 A は 1_A が発展的可測となるとき，発展的 (*progressive*) であると言う． 発展的集合の生成する σ-加法族を $\mathrm{Prog}(\mathbb{F})$ で表す．

発展的可測過程は明らかに適合可測過程である．逆は一般には成り立たない．

命題 1.1.9. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．実数値確率過程 X について，次の 2 条件は同値である．

(i) X は発展的可測．

(ii) X は $\mathrm{Prog}(\mathbb{F})$ 可測．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii)．X を発展的可測過程とし，

$$\begin{aligned} A_k^n &= \left\{ (\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid X(\omega, t) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right[\right\} \\ X_t^{(n)}(\omega) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{k}{2^n} 1_{A_k^n} \end{aligned}$$

と定義する．このとき $X^{(n)}$ は X に各点収束する．したがって各 $X^{(n)}$ が $\mathrm{Prog}(\mathbb{F})$ 可測であることを示せばよい．$t \in \mathbb{R}_+$ を固定する．

$$(\Omega \times [0,t]) \cap A_k^n = \left\{ (\omega, s) \in \Omega \times [0,t] \mid X(\omega, s) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right[\right\} \in \mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}([0,t])$$

だから，$1_{A_k^n}$ は発展的可測である．よってこれは $1_{A_k^n}$ は $\mathrm{Prog}(\mathbb{F})$ 可測で，その線形和たる $X^{(n)}$ も $\mathrm{Prog}(\mathbb{F})$ 可測となる．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．

$$\begin{aligned} \mathscr{C} &= \{ A \subset \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid A \text{ は発展的 } \} \\ \mathscr{H} &= \{ X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \mid X \text{ は発展的可測 } \} \end{aligned}$$

と定義する．$\mathscr{C}$ は π 系であるから，$\mathscr{H}$ が命題 A.1.8 の条件を満たすことを確かめればよい．定数関数 1 は明らかに発展的可測である．定義から $\mathscr{C}$ の元の指示関数は $\mathscr{H}$ に属する．可測性は各点収束で閉じているから，

[*8] 任意の $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)/E$ 可測関数が確率過程となるのは言うまでもない．

命題 A.1.8 の条件 (ii) も満たされる．これより，$\mathscr{H}$ は全ての $\sigma(\mathscr{C})$-可測関数を含む．すなわち，Prog($\mathbb{F}$)-可測関数は発展的可測である． □

命題 1.1.10. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．確率過程 $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ は任意の点で右連続（または左連続）なパスをもつとする．

(i) X は可測過程である．

(ii) $\mathbb{F}$ -適合過程なら　X は発展的可測である．

証明. 右連続な場合のみ証明する．

(i). X に対して

$$\widetilde{X}_t^{(n)}(\omega) := X_0 1_{\{0\}} + \sum_{k\in\mathbb{N}}^{2^n} 1_{]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]}(t) X_{\frac{k+1}{2^n}}(\omega)$$

と定義すれば，任意の n で $(\omega, t) \mapsto \widetilde{X}_t^{(n)}(\omega)$ は $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-可測である．パスの右連続性より，$\widetilde{X}_t^{(n)}(\omega) \to X_t(\omega)$ が各点収束の意味で成り立つ．したがって $X(\omega, t)$ は $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-可測であることが分かる．

(ii). $t > 0$ を固定して

$$X_s^{(n)}(\omega) := X_0 1_{\{0\}} + \sum_{k=1}^{2^n} 1_{]\frac{(k-1)t}{2^n}, \frac{kt}{2^n}]}(s) X_{\frac{kt}{2^n}}(\omega)$$

と定義する．X の右連続性により各 $(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega$ で $X_s^{(n)} \to X_s$ である．写像 $[0, t] \times \Omega \ni (s, \omega) \mapsto X_s^{(n)}(\omega) \in \mathbb{R}$ は明らかに $\mathscr{B}([0, t]) \otimes \mathscr{F}_t / \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ -可測なので，その各点収束極限たる　$X|_{[0,t]\times\Omega}$ も同様の可測性をもつ． □

1.2　停止時刻

定義 1.2.1. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．

(i) 写像 $T : \Omega \to [0, +\infty]$ が $\{\omega \mid T(\omega) \le t\} \in \mathscr{F}_t$ を満たすとき，T を $\mathbb{F}$-停止時刻 ($\mathbb{F}$-stopping time) という．

(ii) T が停止時刻のとき，集合族 $\mathscr{F}_T$，$\mathscr{F}_{T+}$ および $\mathscr{F}_{T-}$ を以下で定義する：

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_T &= \{A \in \mathscr{F}_\infty \mid \forall t \in [0, +\infty[,\ A \cap \{T \le t\} \in \mathscr{F}_t\} \\
\mathscr{F}_{T+} &= \{A \in \mathscr{F}_\infty \mid \forall t \in [0, +\infty[,\ A \cap \{T \le t\} \in \mathscr{F}_{t+}\} \\
\mathscr{F}_{T-} &= \sigma\bigl[\mathscr{F}_0 \cup \{A \cap \{t < T\} \mid A \in \mathscr{F}_t,\ t \in \mathbb{R}_+\}\bigr]
\end{aligned}$$

上の定義における $\mathscr{F}_T$ および $\mathscr{F}_{T+}$ が σ-加法族をなすことは容易に確かめられる．フィルトレーション $\mathbb{F}$ が右連続ならば $\mathscr{F}_T = \mathscr{F}_{T+}$ である．任意の定数関数 : $\Omega \to [0, +\infty]$ は明らかに停止時刻であり，$T(\omega) = t$ $(\forall\omega \in \Omega)$ のとき $\mathscr{F}_T = \mathscr{F}_t$ および $\mathscr{F}_{T+} = \mathscr{F}_{t+}$ となる．（よってこれらの記法は整合的である．）さらにこのとき

$$\mathscr{F}_{t-} = \begin{cases} \mathscr{F}_0 & t = 0 \\ \bigvee_{s<t} \mathscr{F}_s & t \in]0, +\infty] \end{cases}$$

が成立．

$\mathscr{F}_{T+}$ の定義に現れる条件

$$A \cap \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \le t\} \in \mathscr{F}_{t+} \tag{1.1}$$

は次の条件

$$A \cap \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) < t\} \in \mathscr{F}_{t} \tag{1.2}$$

と同値である．実際，(1.1) が成り立つならば

$$A \cap \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) < t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \underbrace{A \cap \left\{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \le t - \frac{1}{n}\right\}}_{\in \mathscr{F}_{(t-\frac{1}{n})+} \subset \mathscr{F}_t} \in \mathscr{F}_t$$

である．逆に (1.2) を仮定したとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $1/n < \varepsilon$ なる n をとれば

$$A \cap \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \le t\} = \bigcap_{m \ge n} \underbrace{A \cap \left\{\omega \in \Omega \mid T(\omega) < t + \frac{1}{m}\right\}}_{\in \mathscr{F}_{t+\frac{1}{m}} \subset \mathscr{F}_{t+\frac{1}{n}} \subset \mathscr{F}_{t+\varepsilon}} \in \mathscr{F}_{t+\varepsilon}$$

となるから，

$$A \cap \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \le t\} \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathscr{F}_{t+\varepsilon} = \mathscr{F}_{t+}$$

が分かる．

命題 1.2.2. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，T を $\mathbb{F}$-停止時刻とする．$t \in [0, +\infty[$ としたとき，$T + t$ はまた $\mathbb{F}$-停止時刻である．

証明. $s \ge t$ なら

$$\{\omega \in \Omega \mid T(\omega) + t \le s\} = \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \le s - t\} \in \mathscr{F}_{s-t} \subset \mathscr{F}_s$$

であり，$s < t$ なら

$$\{\omega \in \Omega \mid T(\omega) + t \le s\} = \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \le s - t\} = \emptyset \in \mathscr{F}_s$$

となることから分かる． □

命題 1.2.3. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，T を $\mathbb{F}$-停止時刻とする．このとき $\mathscr{F}_{T-} \subset \mathscr{F}_T \subset \mathscr{F}_{T+}$ で，T は $\mathscr{F}_{T-}$-可測である．

証明. $\mathscr{F}_T \subset \mathscr{F}_{T+}$ は明らかなので，$\mathscr{F}_{T-} \subset \mathscr{F}_T$ を示す．$\mathscr{F}_T$ が σ-加法族であることに注意すれば，

$$\mathscr{F}_0 \cup \{A \cap \{t < T\} \mid A \in \mathscr{F}_t,\ t \in \mathbb{R}_+\} \subset \mathscr{F}_T$$

を示せばよいことがわかる．$A \in \mathscr{F}_0$ ならば，任意の $t \in \mathbb{R}_+$ に対して $A \in \mathscr{F}_t$ であり，T が停止時刻であることを用いれば $A \cap \{T \le t\} \in \mathscr{F}_t$ となる．よって $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_T$．また，$A \in \mathscr{F}_t$ とすれば，$s > t$ のとき

$$\underbrace{\big[A \cap \{t < T\}\big]}_{\in \mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}_s} \cap \underbrace{\{T \le s\}}_{\in \mathscr{F}_s} \in \mathscr{F}_s$$

であり，$s \le t$ なら

$$\big[A \cap \{t < T\}\big] \cap \{T \le s\} = A \cap \{t < T \le s\} = \emptyset \in \mathscr{F}_s$$

となるので $A \cap \{t < T\} \in \mathscr{F}_T$ も分かる．したがって $\mathscr{F}_{T-} \subset \mathscr{F}_T$ が示された．

任意の $t \in [0, +\infty[$ に対して

$$\{T \leq t\} = \Omega \setminus \underbrace{\{t < T\}}_{\in \mathscr{F}_{T-}} \in \mathscr{F}_{T-}$$

が成り立つから，T が $\mathscr{F}_{T-}$-可測であることも分かる． □

系 1.2.4. ξ を $\mathscr{F}_\infty$-可測関数とし，T を停止時刻とする．このとき $\xi 1_{\{T=+\infty\}}$ は $\mathscr{F}_{T-}$ 可測である．

証明．ある t に対して $A \in \mathscr{F}_t$ のときは，$\mathscr{F}_{T-}$ の定義と命題 1.2.3 より $1_A 1_{\{T=+\infty\}} = 1_A 1_{\{t<T\}} 1_{\{T=+\infty\}} \in \mathscr{F}_{T-}$ である．よってこの主張は有限加法族 $\bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \mathscr{F}_t$ 上で成立．単調族定理を用いれば，任意の $A \in \mathscr{F}_\infty$ に対して $1_A 1_{\{T=+\infty\}}$ が $\mathscr{F}_{T-}$-可測になることまで分かる．一般の ξ に関しては，単関数で各点近似すれば可測性が示される． □

命題 1.2.5. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，T を $\mathbb{F}$-停止時刻，$A \in \mathscr{F}_T$ とする．

$$T_A(\omega) = \begin{cases} T(\omega) & \omega \in A \\ +\infty & \omega \in \Omega \setminus A \end{cases}$$

と定めれば，T_A は $\mathbb{F}$-停止時刻である．

証明．$A \in \mathscr{F}_T$ より

$$\{T_A \leq t\} = \{T \leq t\} \cap A \in \mathscr{F}_t, \quad t \in [0, +\infty[$$

である． □

命題 1.2.5 で出てきた停止時刻 T_A を，T の A への制限と呼ぶ． 停止時刻の制限については，以下の性質が成り立つ：

- $A \subset B$ なら $T_B \leq T_A$.
- 列 $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対して $T_{\bigcup A_n} = \bigwedge_n T_{A_n}$.
- 列 $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対して $T_{\bigcap A_n} = \bigvee_n T_{A_n}$.

命題 1.2.6. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ は右連続なフィルター付き確率空間とする．このとき，$T : \Omega \to [0, +\infty]$ が停止時刻であることは任意の $t \in [0, +\infty[$ に対して $\{T < t\} \in \mathscr{F}_t$ が成立することと同値である．また，$A \in \mathscr{F}_T$ は任意の $t \in [0, +\infty[$ に対して $A \cap \{T < t\} \in \mathscr{F}_t$ が成立することと同値である．

証明．T が停止時刻ならば，

$$\{\omega \in \Omega \mid T(\omega) < t\} = \bigcup_{n \geq 1} \left\{ \omega \in \Omega \,\middle|\, T(\omega) \leq t - \frac{1}{n} \right\} \in \mathscr{F}_t$$

である．逆に

$$\{\omega \in \Omega \mid T(\omega) < t\} \in \mathscr{F}_t, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

を仮定すれば，

$$\{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \leq t\} = \bigcap_{n \geq 1} \left\{ \omega \in \Omega \,\middle|\, T(\omega) < t + \frac{1}{n} \right\} \in \mathscr{F}_{t+}$$

となるが，フィルトレーションの右連続性より

$$\{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \leq t\} \in \mathscr{F}_{t+} = \mathscr{F}_t, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

が分かる．

$A \in \mathscr{F}_{T+}$ は

$$A \cap \{T < t\} \in \mathscr{F}_t, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

と同値であった[*9]ことを思い出せば，フィルトレーションの右連続性より分かる． □

注意 1.2.7. 命題 1.2.6 の条件を満たす確率変数 $T\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ は弱停止時刻 (weak stopping time) や広義停止時刻 (wide-sense stopping time) などと呼ばれる．命題 1.2.6 の証明より，任意の停止時刻は弱停止時刻である．しかし，フィルトレーションの右連続性がないと逆は成り立たない．

命題 1.2.8. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，S，T を停止時刻，$A \in \mathscr{F}_S$ とする．このとき，$A \cap \{S \leq T\}$，$A \cap \{S = T\} \in \mathscr{F}_T$ および $A \cap \{S < T\} \in \mathscr{F}_{T-}$ が成立する．

証明．S, T を $(\mathscr{F}_t)$ -停止時刻とする．このとき　$T \wedge t$ および $S \wedge t$ が $\mathscr{F}_t$ 可測な確率変数であることは容易にわかるので[*10]$A \in \mathscr{F}_S$ とすれば

$$[A \cap \{S \leq T\}] \cap \{T \leq t\} = [A \cap \{S \leq t\}] \cap \{T \leq t\} \cap \{S \wedge t \leq T \wedge t\} \in \mathscr{F}_t$$

である．また，$A \in \mathscr{F}_S$ とすれば $\mathscr{F}_{T-}$ の定義より

$$A \cap \{S < T\} = \bigcup_{t \in \mathbb{Q}_+} \underbrace{[A \cap \{S \leq t\}]}_{\in \mathscr{F}_t} \cap \{t < T\} \in \mathscr{F}_{T-}$$

となる．命題 1.2.3 より $\mathscr{F}_{T-} \subset \mathscr{F}_T$ であったことを思い出せば $A \cap \{S < T\} \in \mathscr{F}_T$ も分かるので

$$A \cap \{S = T\} = [A \cap \{S \leq T\}] \setminus [A \cap \{S < T\}] \in \mathscr{F}_T$$

が示される． □

系 1.2.9. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，S，T を停止時刻とする．このとき

$$\{S \leq T\}, \quad \{T \leq S\}, \quad \{S < T\}, \quad \{T < S\}, \quad \{S = T\}$$

はどれも $\mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$ の元である．さらに

$$\{S < T\}, \quad \{S \geq T\}$$

は $\mathscr{F}_{T-}$ の元である．

証明．命題 1.2.8 において $A = \Omega$ とればよい． □

命題 1.2.10. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．

(i) S, T を $\mathbb{F}$-停止時刻とすれば，$S \wedge T$ および $S \vee T$ は停止時刻．

(ii) Ω 上で $S \leq T$ なら $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$.

[*9] 定義 1.2.1 の下の文章を参照．

[*10] 停止時刻の定義戻って $\{T \wedge t \leq a\} \in \mathscr{F}_t$ $(a \in [0, \infty[)$ を示せばよい．

(iii) S,T を $\mathbb{F}$-停止時刻とすれば $\mathscr{F}_{S\wedge T}=\mathscr{F}_S\cap\mathscr{F}_T$.

(iv) $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{F}$-停止時刻の列とすれば，$\bigvee_n T_n$ は $\mathbb{F}$-停止時刻である．

(v) $\mathbb{F}$ は右連続であるとする．$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{F}$-停止時刻の列とすれば，$\bigwedge_n T_n$ は停止時刻である．

(vi) $\mathbb{F}$ は右連続であるとする．$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{F}$-停止時刻の列とすれば，$\mathscr{F}_{\bigwedge_n T_n}=\bigcap_n \mathscr{F}_{T_n}$ が成立．

(vii) S,T を $\mathbb{F}$-停止時刻とする．Ω 上で $S\le T$ なら $\mathscr{F}_{S-}\subset\mathscr{F}_{T-}$.

(viii) S,T を $\mathbb{F}$-停止時刻で Ω 上 $S\le T$ が成立するとする．さらに $\{T>0\}$ 上で $S<T$ なら，$\mathscr{F}_S\subset\mathscr{F}_{T-}$ となる．

(ix) (T_n) を $\mathbb{F}$-停止時刻の列とし，$T=\bigvee_n T_n$ とする．このとき $\mathscr{F}_{T-}=\bigvee_n\mathscr{F}_{T_n-}$ が成り立つ．

(x) (T_n) を $\mathbb{F}$-停止時刻列とし, $T=\bigvee_n T_n$ とする．$\{0<T<+\infty\}$ 上 $T_n<T$ となるなら, $\mathscr{F}_{T-}=\bigvee_n\mathscr{F}_{T_n}$ が成立.

証明．(i) S,T を停止時刻とすれば

$$\{S\wedge T\le t\}=\{S\le t\}\cup\{T\le t\}\in\mathscr{F}_t$$
$$\{S\vee T\le t\}=\{S\le t\}\cap\{T\le t\}\in\mathscr{F}_t$$

より $S\wedge T$ と $S\vee T$ は停止時刻である．

(ii) Ω 上 $S\le T$ ならば，命題 1.2.8 より

$$A=A\cap\{S\le T\}\in\mathscr{F}_T\quad\forall A\in\mathscr{F}_S$$

である．よって $\mathscr{F}_S\subset\mathscr{F}_T$.

(iii) $\mathscr{F}_{S\wedge T}\subset\mathscr{F}_S\cap\mathscr{F}_T$ は (ii) より明らか．$A\in\mathscr{F}_S\cap\mathscr{F}_T$ とすれば

$$A\cap\{S\wedge T\le t\}=[A\cap\{S\le t\}]\cup[A\cap\{T\le t\}]\in\mathscr{F}_t,\quad\forall t\in[0,\infty[$$

であるから，$A\in\mathscr{F}_{S\wedge T}$ となる．よって $\mathscr{F}_S\cap\mathscr{F}_T\subset\mathscr{F}_{S\wedge T}$ も成立.

(iv)

$$\left\{\bigvee_{n\in\mathbb{N}}T_n>t\right\}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{T_n>t\}\in\mathscr{F}_t$$

であるから，$\bigvee_n T_n$ は $\mathbb{F}$ -停止時刻である．

(v) $\mathbb{F}$ の右連続性に注意すれば，

$$\left\{\bigwedge_{n\in\mathbb{N}}T_n<t\right\}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{T_n<t\}\in\mathscr{F}_t$$

から $\bigwedge_n T_n$ はまた停止時刻である．

(vi) $T=\bigwedge_n T_n$ とおけば (v) より T は停止時刻なので，$\mathscr{F}_T$ が定義できる．$T\le T_n$ より $\mathscr{F}_T\subset\mathscr{F}_{T_n}$ が任意の n に対してなりたつ．よって $\mathscr{F}_T\subset\bigcap_n\mathscr{F}_{T_n}$ である．逆の包含関係を示そう．$A\in\bigcap_n\mathscr{F}_{T_n}$ とすれば

$$\begin{aligned}A\cap\{T<t\}&=A\cap\left\{\bigwedge_{n\in\mathbb{N}}T_n<t\right\}\\&=A\cap\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{T_n<t\}\\&=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[A\cap\{T_n<t\}]\in\mathscr{F}_t\end{aligned}$$

となる．命題 1.2.6 から $A \in \mathscr{F}_T$ が分かる．

(vii) $A \in \mathscr{F}_t$ とすれば，S は停止時刻だから $A \cap \{t < S\} \in \mathscr{F}_t$ である．したがって

$$A \cap \{t < S\} = A \cap \{t < S\} \cap \{t < T\} \in \mathscr{F}_{T-}$$

である．$\mathscr{F}_{S-}$ はこのような形の集合全体と $\mathscr{F}_0$ によって生成されるから，$\mathscr{F}_{S-} \subset \mathscr{F}_{T-}$ が分かる．

(viii) $A \in \mathscr{F}_S$ とすれば，命題 1.2.8 より $A \cap \{S < T\} \in \mathscr{F}_{T-}$ が成立する．また $\mathscr{F}_S$ の定義より $A \cap \{S = 0\} \in \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_{T-}$ も成り立つ．さらに T が $\mathscr{F}_{T-}$-可測であることを用いれば

$$\begin{aligned} A &= (A \cap \{T > 0\}) \cup (A \cap \{T = 0\}) \\ &= (A \cap \{S < T\}) \cup (A \cap \{S = 0\} \cap \{T = 0\}) \in \mathscr{F}_{T-} \end{aligned}$$

が分かる．

(ix) $\bigvee_n \mathscr{F}_{T_n-} \subset \mathscr{F}_{T-}$ は (vii) より明らか．逆の包含関係を示す．$t \in \mathbb{R}_+$ および $A \in \mathscr{F}_t$ とすれば，定義から $A \cap \{t < T_n\} \in \mathscr{F}_{T_n-}$ である．

$$A \cap \{t < T\} = \bigcup_n (A \cap \{t < T_n\}) \in \bigvee_n \mathscr{F}_{T_n-}$$

$\mathscr{F}_{T-}$ はこのような形の集合全体と $\mathscr{F}_0$ によって生成されるから，$\mathscr{F}_{T-} \subset \bigvee_n \mathscr{F}_{T_n-}$ となる．

(x) (viii) より任意の n で $\mathscr{F}_{T_n} \subset \mathscr{F}_{T-}$ であり，よって $\bigvee_n \mathscr{F}_{T_n} \subset \mathscr{F}_{T-}$ が成り立つ．また (ix) と命題 1.2.3 より

$$\mathscr{F}_{T-} = \bigvee_n \mathscr{F}_{T_n-} \subset \bigvee_n \mathscr{F}_{T_n}$$

も成立． □

補題 1.2.11. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を右連続なフィルター付き確率空間とする．T を $(\Omega, \mathscr{F}^P, \mathbb{F}^P, P)$ 上の停止時刻としたとき，$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ 上の停止時刻 S で $T = S$，P-a.s. なるものが存在する．

証明．任意の $t \in [0, +\infty[$ に対して $A_t \in \mathscr{F}_t$ で

$$P\left(A_t \triangle \{T < t\}\right) = 0$$

なるものが存在する[*11]．ここで

$$T'(\omega) = \inf\{s \in \mathbb{Q}_+ \mid \omega \in A_s\}$$

と定義すれば，T' は $\mathbb{F}$-停止時刻である．これは実際，

$$\{\omega \in \Omega \mid T'(\omega) < t\} = \bigcup_{\substack{s \in \mathbb{Q}_+ \\ s < t}} A_s \in \mathscr{F}_t$$

によって示される．このとき

$$\{T < t\} \triangle \{T' < t\} = \bigcup_{\substack{s \in \mathbb{Q}_+ \\ s < t}} \{T < s\} \triangle \bigcup_{\substack{s \in \mathbb{Q}_+ \\ s < t}} A_s \subset \bigcup_{\substack{s \in \mathbb{Q}_+ \\ s < t}} \{T < s\} \triangle A_s$$

に注意すれば

$$P[T \neq T'] = P\left(\bigcup_{t \in \mathbb{Q}_+} \{T < t\} \triangle \{T' < t\} \right) = 0$$

である．よって $T = T'$ が P-a.s. の意味で成立． □

[*11] $\mathscr{F}_t \vee \mathscr{N}^P$ は一般に $\mathscr{F}_t$ の最小 P-完備化よりは大きいが，Lesbesgue の意味での完備化には含まれている．

1.3 良可測 σ-加法族

定義 1.3.1. $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ をフィルター付き確率空間とする．

(i) 全ての càdlàg な $\mathbb{F}$-適合過程によって生成される $\Omega\times\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ 上の σ-加法族を $\mathscr{O}(\mathbb{F})$ と書き，良可測 σ-加法族 (optional σ-field) という．考えているフィルトレーション $\mathbb{F}$ が明らかなときには単に $\mathscr{O}$ などとも書く．

(ii) 確率過程 $X:\Omega\times\mathbb{R}_+\to E$ が $\mathscr{O}(\mathbb{F})/\mathscr{B}(E)$-可測であるとき，$X$ は良可測 (*optional*) であるという．確率集合 $A\in\Omega\times\mathbb{R}_+$ は $A\in\mathscr{O}(\mathbb{F})$ であるとき良可測という．

命題 1.3.2. $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ をフィルター付き確率空間，X を実数値良可測過程とする．このとき，次の主張が成立する．

(i) 写像 $X:\Omega\times\mathbb{R}_+\ni(\omega,t)\mapsto X_t(\omega)\in\mathbb{R}$ は $\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-可測である．

(ii) 任意の $\mathbb{F}$-停止時刻 T に対して $X_T1_{\{T<\infty\}}$ は $\mathscr{F}_T$-可測である．

(iii) X^T はまた良可測である．

ただし，(ii) の確率変数は次の様に定義する：確率変数 Y を

$$Y=\begin{cases}X(\omega,T(\omega)) & \omega\in\{T<+\infty\},\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

と定める．この確率変数 Y を $X_T1_{\{T<+\infty\}}$ で表すことにする．

証明. まずは，càdlàg な適合過程が条件 (i) から (iii) を満たすことを示す．X を càdlàg 適合過程とし，

$$X^n_t(\omega):=\sum_{k\geq1}X_{\frac{k}{2^n}}(\omega)\,1_{\left[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right[}(t)$$

と定義する．このとき任意の $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$\begin{aligned}&\{(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+\mid X^n(\omega,t)\in B\}\\ &=\bigcup_{k\geq1}\left\{(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+\mid X_{\frac{k}{2^n}}(\omega)\in B\right\}\times\left[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right[\\ &\in\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\end{aligned}$$

となるから，X^n は $\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-可測である．$(X^n)$ は X に各点収束するから，X もまた $\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-可測である．

T を $\mathbb{F}$-停止時刻とし，

$$T_n(\omega)=\begin{cases}\dfrac{k}{2^n} & T(\omega)\in\left[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right[\\ +\infty & T(\omega)=+\infty\end{cases}$$

と定義する．

$$\{T_n\leq t\}=\bigcup_{\substack{k\geq1\\k/2^n\leq t}}\left\{T_n=\frac{k}{2^n}\right\}=\bigcup_{\substack{k\geq1\\k/2^n\leq t}}\left\{\frac{k-1}{2^n}\leq T<\frac{k}{2^n}\right\}\in\mathscr{F}_{\frac{k-1}{2^n}}\subset\mathscr{F}_t$$

となるから，各 T_n は停止時刻であって，$T_1 \geq T_2 \geq \cdots \to T$（各点収束）が成立．$B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ とすれば

$$\{X_{T_n} \in B\} \cap \{T_n \leq t\} = \bigcup_{\substack{k \geq 1 \\ k/2^n \leq t}} \left\{X_{\frac{k}{2^n}} \in B\right\} \cap \left\{T_n = \frac{k}{2^n}\right\} \in \mathscr{F}_t$$

であるから，$X_{T_n} 1_{\{T_n < \infty\}}$ は $\mathscr{F}_{T_n}$-可測である．X は右連続だから，$(X_{T_n} 1_{\{T_n<\infty\}})_{n \in \mathbb{N}}$ は $X_T 1_{\{T<\infty\}}$ に各点収束する．これより $X_T 1_{\{T<\infty\}}$ は任意の n に対して $\mathscr{F}_{T_n}$ 可測であり，特に $\mathscr{F}_T = \bigcap_n \mathscr{F}_{T_n}$-可測となる[*12]．

あとは X^T が良可測であることを示せばよい．定義より X^T が càdlàg であることは明らか．

$$X_t^T = X_{T \wedge t} = X_t 1_{\{t<T\}} + X_T 1_{\{T \leq t\}}$$

の表記に注意すれば，命題 1.2.8 を用いて $X_t \in \mathscr{F}_t$ が示される．

いま，

$$\mathscr{C} = \{X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \mid X \text{ は càdlàg，}\mathbb{F}\text{-適合.}\}$$
$$\mathscr{D} = \{X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \mid X \text{ は条件 (i)–(iii) を満たす.}\}$$

と定義しよう．ここまでの議論により $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$ である．$\mathscr{C}$ は明らかに各点ごとの積に関して閉じている．また，条件 (i)–(iii) はどれも可測性に関する条件であり，$\mathscr{D}$ が定数関数を含むベクトル空間で，一様有界な単調収束について閉じていることもすぐに分かる．したがって，単調族定理を用いれば $\mathscr{D}$ は $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{O}$-可測な有界関数を全て含むことが示される．非負良可測過程の場合は，$(X \wedge n)_{n \in \mathbb{N}}$ の極限を考えればよい[*13]．一般の場合は $X = X^+ - X^-$ を考えればよい[*14]．□

良可測 σ-加法族の特徴付けを考えるために，確率区間を導入しよう．確率区間とは，以下で定義される 4 種類の集合である．S, T を Ω 上の $[0,\infty]$-値関数として

$$[\![S,T]\!] = \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid S(\omega) \leq t \leq T(\omega)\}$$
$$[\![S,T[\![= \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid S(\omega) \leq t < T(\omega)\}$$
$$]\!]S,T]\!] = \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid S(\omega) < t \leq T(\omega)\}$$
$$]\!]S,T[\![= \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid S(\omega) < t < T(\omega)\}$$

と定義する[*15]．これらの集合を確率区間 (stochastic interval) という．特に $S = T$ のとき $[\![T,T]\!] = [\![T]\!]$ と書き，これを T のグラフ (graph) と呼ぶ．$[\![T]\!]$ は $\Omega \times [0,\infty[$ の部分集合であるから，厳密には写像 $T : \Omega \to [0,\infty]$ のグラフ

$$\{(\omega,t) \in \Omega \times [0,\infty] \mid T(\omega) = t\}$$

ではなく，その $\Omega \times [0,\infty[$ への制限となっている．S, T が確率変数ならば，これらの区間はどれも $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-可測であり，特に確率集合である．$T = +\infty$（定数）のとき，$[\![S,+\infty]\!] = [\![S,+\infty[\![$ および $]\!]S,+\infty]\!] =]\!]S,+\infty[\![$ が成り立つことに注意しておく．

補題 1.3.3. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．このとき，以下の 3 条件は同値である．

(i) $T : \Omega \to [0,\infty]$ は $\mathbb{F}$-停止時刻である．

[*12] 命題 1.2.10 を参照．
[*13] $x \mapsto x \wedge n$ は連続関数であるから，カットオフした関数において可測性は保存される．
[*14] $x \mapsto x^+$ と $x \mapsto x^-$ も連続関数なので，こちらも可測性は保存される．
[*15] ここでは $S \leq T$ とは限らない場合についてもこれらの区間を定義することにする．

(ii) $1_{[\![0,T[\![}$ は適合過程である．

(iii) $1_{[\![T,\infty[\![}$ は適合過程である．

証明．(i) $\Longleftrightarrow$ (iii) $1_{[\![T,\infty[\![}$ が適合過程であることは，

$$[\![T,\infty[\![_t = \{\omega\in\Omega \mid (\omega,t)\in[\![T,\infty[\![\,\} = \{\omega\in\Omega \mid T(\omega)\le t\}\in\mathscr{F}_t$$

が成り立つことと同値であることから分かる．

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) $1_{[\![T,\infty[\![} = 1_{\Omega\times\mathbb{R}_+} - 1_{[\![0,T[\![}$ より明らか．□

命題 1.3.4. $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ をフィルター付き確率空間とし，T を $\mathbb{F}$-停止時刻とする．このとき $[\![0,T[\![$ は良可測である．

証明．補題 1.3.3 より $1_{[\![0,T[\![}$ は適合過程である．これは明らかに càdlàg なので，$[\![0,T[\![\in\mathscr{O}(\mathbb{F})$ が分かる．□

命題 1.3.5. $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ をフィルター付き確率空間，S，T を $\mathbb{F}$-停止時刻，$Y:\Omega\to\mathbb{R}$ を $\mathscr{F}_S$-可測関数とする．このとき $Y1_{[\![S,T]\!]}$，$Y1_{[\![S,T[\![}$，$Y1_{]\!]S,T]\!]}$，$Y1_{]\!]S,T[\![}$ はどれも良可測である．

証明．まずは $Y=1_A$ のときを考える．$1_A1_{[\![S,T[\![}$ は明らかに càdlàg なので，適合性を示せば良可測性が分かる．$1_A1_{[\![S,T[\![} = 1_{A\times\mathbb{R}_+\cap[\![S,T[\![}$ と表記できるから，$A\times\mathbb{R}_+\cap[\![S,T[\![$ の t セクションの可測性を考える．

$$(A\times\mathbb{R}_+\cap[\![S,T[\![\,)_t = \big[A\cap\{\omega\mid S(\omega)\le t\}\big]\cap\{\omega\mid t<T(\omega)\}\in\mathscr{F}_t$$

より，$1_A1_{[\![S,T[\![}$ の適合性が分かる．

ここで $S_n=S+1/n$，$T_n=T+1/n$ $(n\ge 1)$ および $X^{(n)}=1_A1_{]\!]S_n,T_n]\!]}$ と定めよう．$A\in\mathscr{F}_S\subset\mathscr{F}_{S_n}$ に注意すれば，先ほどの結果より $X^{(n)}$ は良可測である．$X^{(n)}\to 1_A1_{]\!]S,T]\!]}$ が各点収束の意味で成り立つから，$1_A1_{]\!]S,T]\!]}$ も良可測である．

$1_A1_{[\![S,S_n[\![}$ と $1_A1_{[\![T,T_n[\![}$ の極限を考えれば $1_A1_{[\![S]\!]}$ と $1_A1_{[\![T]\!]}$ も良可測だから，

$$\begin{aligned}1_A1_{[\![S,T]\!]} &= 1_A(1_{[\![S,T[\![\cup[\![T]\!]}) = 1_A(1_{[\![S,T[\![}+1_{[\![T]\!]})\\ 1_A1_{]\!]S,T[\![} &= 1_A(1_{[\![S,T[\![\setminus[\![S]\!]}) = 1_A(1_{[\![S,T[\![}-1_{[\![S]\!]})\end{aligned}$$

もそれぞれ良可測である．

Y が一般の $\mathscr{F}_S$-可測関数の場合は単関数で近似すればよい．□

命題 1.3.6. $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ をフィルター付き確率空間とすれば，任意の実数値左連続，$\mathbb{F}$-適合過程は良可測である．

証明．X を左連続適合過程とする．$n\in\mathbb{N}$ に対し

$$X_t^{(n)}(\omega)=\sum_{k\in\mathbb{N}} X_{\frac{k}{2^n}}(\omega)1_{[\![\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}[\![}(\omega,t)$$

と定めれば，命題 1.3.5 より $X^{(n)}$ は良可測である．X の左連続性より $X^{(n)}$ は X に各点収束するので，X は良可測である．□

系 1.3.7. $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ をフィルター付き確率空間，X を càdlàg 良可測過程とする．このとき，X_- および ΔX は良可測である．

証明．X_- は明らかに左連続適合過程なので，命題 1.3.6 により良可測である．ΔX は二つの良可測過程 X と X_- の差なので，良可測である． □

位相空間 E に値をとる確率過程 X を考える．$A \in \mathscr{B}(E)$ に対して次の写像 $: \Omega \to [0,\infty]$ を考える：

$$D_A^X(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid X_t(\omega) \in A\}$$

D_A^X は確率過程 X が集合 A に初めて到達する時刻を表しており，到達時刻 (hitting time) と呼ばれる．到達時刻は適当な条件の下で停止時刻となる．

命題 1.3.8. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，E を位相空間，X を右連続な $\mathbb{F}$-適合過程とする．

(i) フィルトレーション $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ が右連続ならば，任意の開集合 $G \subset E$ に対して D_G^X は $\mathbb{F}$-停止時刻である．

(ii) $E = \mathbb{R}$ で X は単調増大なパスを持つとする．任意の $a \in [-\infty, +\infty]$ に対して $D_{[a,\infty[}^X$ は $\mathbb{F}$-停止時刻である．

証明．(i)．X の右連続性と適合性，および G が開集合であることを用いれば

$$\{\omega \in \Omega \mid D_G^X < t\} = \bigcup_{s \in \mathbb{Q}_+, s<t} \{\omega \in \Omega \mid X_s(\omega) \in G\} \in \mathscr{F}_t$$

が分かる．$\mathbb{F}$-の右連続性より*16，これは D_G^X が停止時刻であるを示している．

(ii)．X の右連続性と単調性より

$$\{\omega \in \Omega \mid D_{[a,\infty[}^X \le t\} = \{\omega \in \Omega \mid X_t(\omega) \ge a\}$$

であり，X の適合性よりこの集合は $\mathscr{F}_t$ の元である． □

注意 1.3.9. フィルター付き確率空間に通常の条件を仮定すれば，実数値過程 X が発展的ならば，Borel 集合への到達時刻は停止時刻となることが知られている．

定義 1.3.10. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．確率集合 A がある停止時刻の列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ によって $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![T_n]\!]$ と表されるとき．A を痩せた集合 (thin set) という*17．さらに，列 (T_n) が $[\![T_n]\!] \cap [\![T_m]\!] = \emptyset$ $(n \neq m)$ を満たすとき，(T_n) は A についての取り付くし列 (exhausting sequence) であるという*18．

命題 1.3.5 より各グラフ $[\![T_n]\!]$ は良可測となるから，やせた集合はは良可測である．また，やせた集合 A の ω-セクション A^ω は高々加算集合である．実際これは

$$A^\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![T_n]\!]^\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{t \in \mathbb{R}_+ \mid T_n(\omega) = t\} = \{T_1(\omega), T_2(\omega), \dots\}$$

となることから分かる．

補題 1.3.11. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間としたとき，任意の痩せた集合は取り付くし列を持つ．

*16 命題 1.2.6 を参照．

*17 thin set にはこれといって定着した訳語は無いようであるから，適当に訳してみた．ただし，「やせた集合」という言葉自体は他の分野の数学用語にもあるようなので，混同されないよう注意されたい．

*18 exhausting sequence にも定着した訳語は無いようである．

証明．$A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\![T_n]\!]$ を thin set とする．

$$C_n=\bigcap_{0\le m\le n-1}\{\omega\in\Omega\mid T_m(\omega)\ne T_n(\omega)\}$$

とおけば，命題 1.2.8 より $C_n\in\mathscr{F}_{T_n}$ である．

$\because$ 命題 1.2.8 で $A=\Omega\in\mathscr{F}_{T_m}$ とおけば，

$$A\cap\{T_n=T_m\}=\{T_n=T_m\}\in\mathscr{F}_{T_n}$$

である．よって

$$\{T_n\ne T_m\}=\Omega\setminus\{T_n=T_m\}\in\mathscr{F}_{T_n}$$

が任意の $m\le n-1$ に対してなりたつ．

命題 1.2.5 より，停止時刻 T_n の制限 $S_n:=(T_n)_{C_n}$ はまた停止時刻となる．C_n の定義より

$$\begin{aligned}
&[\![S_n]\!]\\
&=\{(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+\mid S_n(\omega)=t\}\\
&=\{(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+\mid \omega\in C_n,\ T_n(\omega)=t\}\\
&=\{(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+\mid 0\le\forall m\le n-1,\ T_m(\omega)\ne T_n(\omega)=t\}\\
&=\{(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+\mid T_n(\omega)=t\}\cap\{(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+\mid 0\le\forall m\le n-1,\ T_m(\omega)\ne t\}\\
&=[\![T_n]\!]\setminus\bigcup_{0\le m\le n-1}[\![T_m]\!]
\end{aligned}$$

となることに注意すれば，

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\![S_n]\!]=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\![T_n]\!]=A$$

である．また，$m<n$ なら

$$\begin{aligned}
&[\![S_m]\!]\cap[\![S_n]\!]\\
&=\left([\![T_m]\!]\setminus\bigcup_{0\le l\le m-1}[\![T_l]\!]\right)\cap\left([\![T_n]\!]\setminus\bigcup_{0\le l\le n-1}[\![T_l]\!]\right)\\
&\subset[\![T_m]\!]\cap([\![T_n]\!]\setminus[\![T_m]\!])=\emptyset
\end{aligned}$$

となるから，(S_n) は A の exhausting sequence であることが分かった． $\square$

補題 1.3.12. $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ をフィルター付き確率空間とする．良可測集合 A が[*19]痩せた集合であるための必要十分条件は，$A\subset\bigcup_n[\![T_n]\!]$ を満たす停止時刻列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在することである．

証明．必要性は明らかなので，十分性を示す．$A\subset\bigcup_n[\![T_n]\!]$ を仮定する．

$$L_n=\{\omega\in\Omega\mid(\omega,T_n(\omega))\in A\}$$

と定めれば，

$$1_{L_n}=(1_A)_{T_n}1_{\{T_n<\infty\}}$$

[*19] 発展的集合でも良い．

が成立する．命題 1.3.2 より 1_{L_n} は $\mathscr{F}_{T_n}$-可測である．このとき 1.2.5 より $(T_n)_{L_n}$ は停止時刻となる．あとは

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![(T_n)_{L_n}]\!]$$

を示せばよい．$(\omega, t) \in A$ とすれば，$A \subset \bigcup_n [\![T_n]\!]$ よりある n によって $T_n(\omega) = t$ となる．このとき $(\omega, t) = (\omega, T_n(\omega)) \in A$ となるから

$$(\omega, t) \in \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid T_n(\omega) = t,\ \omega \in L_n\} = [\![(T_n)_{L_n}]\!]$$

これより

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![(T_n)_{L_n}]\!]$$

が分かる．逆に $(\omega, t) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![(T_n)_{L_n}]\!]$ を仮定すれば，ある n に対して $(\omega, t) \in [\![(T_n)_{L_n}]\!]$ である．すなわち，$(T_n)_{L_n}(\omega) = t$ であり，これより $T_n(\omega) = t$ かつ $(\omega, t) = (\omega, T_n(\omega)) \in A$ となる．したがって

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![(T_n)_{L_n}]\!] \subset A$$

も成立． □

命題 1.3.13. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を右連続なフィルター付き確率空間とする．任意の càdlàg な $\mathbb{F}$-適合過程について，

$$\{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid \Delta X_t(\omega) \neq 0\}$$

は痩せた集合である．

証明．まずは，取り付くし列のもとになる停止時刻列を次の様に定義しよう：

$$\begin{cases} S_0^p(\omega) = 0 & \omega \in \Omega \\ S_n^p(\omega) = \inf\left\{ t > S_{n-1}^p(\omega) \,\middle|\, |X_t(\omega) - X_{S_{n-1}^p}(\omega)| > \dfrac{1}{2^p} \right\} & \omega \in \Omega,\ n \geq 1. \end{cases}$$

ここで

$$Y^{(n,p)} = (X - X_{S_n^p}) 1_{[\![S_n^p, +\infty[\![}$$

と定義すれば，

$$S_{n+1}^p(\omega) = \inf\left\{ t \in \mathbb{R}_+ \,\middle|\, |Y_t^{(n,p)}(\omega)| > \frac{1}{2^p} \right\}$$

である[*20]．このとき，(S_n^p) が実際に停止時刻列を定めることを，n に関する帰納法で示そう．S_0^p が停止時刻になることは明らかである．S_n^p が停止時刻であると仮定すれば，$Y^{(n,p)} = (X - X_{S_n^p}) 1_{[\![S_n^p, +\infty[\![}$ は càdlàg な適合過程である[*21]．このとき S_n^p は càdlàg 適合過程の開集合への到達時刻なので，命題 1.3.8 により停止時刻である．いま，S_n^p の定義より

$$S_0^p(\omega) < S_1^p(\omega) < S_2^p(\omega) < \cdots \to \infty, \quad \omega \in \Omega.$$

---

*20 S_{n+1}^p の定義に出てくる条件は $t > S_n^p$ であるので，$Y^{(n,p)} = (X - X_{S_n^p}) 1_{]\!]S_n^p, +\infty[\![}$ でなければいけないようにも思われるが，そもそも $t = S_n^p$ なら $X_t(\omega) - X_{S_n^p}(\omega) = 0$ となるからこれでよいのである．

*21 補題 1.3.3 を参照．

が成立[*22].

ここで

$$A = \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid \Delta X_t(\omega) \neq 0\}$$

と定義すれば，ΔX の良可測性より A は良可測となる．A が痩せた集合であることを示すためには，$A \subset \bigcup_{n,p} [\![S_n^p]\!]$ を確かめれば良いのであった[*23]．$(\omega, t) \in A$ とすれば，$\Delta X_t(\omega) > 2^{-p}$ なる p が存在する．$(S_n^{p+1}(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ が無限大に発散するのであったから $S_n^{p+1}(\omega) \leq t < S_{n+1}^{p+1}(\omega)$ を満たす n が取れる．ここで，もし $t > S_n^{p+1}(\omega)$ なら，$S_n^{p+1}(\omega) < s < t$ に対して

$$|X_t(\omega) - X_{S_n^{p+1}}(\omega)| < \frac{1}{2^{p+1}}, \quad |X_s(\omega) - X_{S_n^{p+1}}(\omega)| < \frac{1}{2^{p+1}}$$

が存在する．$s \to t$, $s < t$ の極限をとれば

$$|X_t - X_{t-}| \leq |X_t(\omega) - X_{S_n^{p+1}}(\omega)| + |X_{t-}(\omega) - X_{S_n^{p+1}}(\omega)| < \frac{1}{2^p}$$

となるが，これは $\Delta X_t(\omega) > 2^{-p}$ に矛盾する．したがって，背理法により $t = S_n^{p+1}(\omega)$ である．これより $(\omega, t) \in [\![S_n^{p+1}]\!]$ が分かる．すなわち $A \subset \bigcup_{n,p} [\![S_n^p]\!]$ □

注意 1.3.14. 命題 1.3.13 より $\{\Delta X \neq 0\} \subset \bigcup_n [\![T_n]\!]$ なる停止時刻が取れるが，この停止時刻列は狭義に正の値をとるものと出来る．実際，命題 1.3.13 における S_n^p は $n > 0$ なら狭義に正の停止時刻になっている．$\Delta X_0 = 0$ だから，$\{\Delta X \neq 0\} \cap [\![0]\!] = \emptyset$ である．これより

$$\{\Delta X \neq 0\} \subset \bigcup_{p\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}_{\geq 1}} [\![S_n^p]\!]$$

が成立する．

1.4 可予測 σ-加法族

定義 1.4.1. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．全ての左連続な $\mathbb{F}$-適合過程によって生成される $\Omega \times \mathbb{R}_+$ 上の σ-加法族を $\mathscr{P}(\mathbb{F})$ と書き，可予測 σ-加法族 (predictable σ-field) と呼ぶ．フィルトレーションが明らかなときには，単に $\mathscr{P}$ とも書く．

$\mathscr{P}(\mathbb{F})$-可測な確率過程を可予測過程といい (predictable process)，$A \in \mathscr{P}$ なる確率集合 A を可予測集合 (predictable set) という．

命題 1.3.6 により任意の左連続適合過程は良可測だから，$\mathscr{P} \subset \mathscr{O}$ が成立する．可予測 σ-加法族について，以下のような特徴づけがある．

定理 1.4.2. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．

$$\begin{aligned}
\mathscr{C}_1 &= \{A \times \{0\} \mid A \in \mathscr{F}_0\} \cup \{[\![0, T]\!] \mid T \in \mathscr{T}(\mathbb{F})\} \\
\mathscr{C}_2 &= \{A \times \{0\} \mid A \in \mathscr{F}_0\} \cup \{A \times]s, t] \mid A \in \mathscr{F}_s,\ 0 \leq s < t\}
\end{aligned}$$

とおけば，$\mathscr{P} = \sigma(\mathscr{C}_1) = \sigma(\mathscr{C}_2)$ である．

[*22] X が càdlàg であることから従う．
[*23] 補題 1.3.12 を参照．

証明．$1_{A\times\{0\}}$ は左連続，適合過程だから $A\times\{0\}\in\mathscr{P}$ である．T を $\mathbb{F}$-停止時刻とすれば $1_{[\![0,T]\!]}$ も左連続適合過程なので，$[\![0,T]\!]\in\mathscr{P}$ も分かる．これより $\mathscr{C}_1\subset\mathscr{P}$ であり，$\sigma(\mathscr{C}_1)\subset\mathscr{P}$ が成立．

$0\le s<t$ かつ $A\in\mathscr{F}_s$ とすれば，

$$A\times]s,t]=]\!]s_A,t_A]\!]=[\![0,t_A]\!]\setminus[\![0,s_A]\!]\in\mathscr{C}_1$$

が成立．したがって $\mathscr{C}_2\subset\mathscr{C}_1$ であり，$\sigma(\mathscr{C}_2)\subset\sigma(\mathscr{C}_1)$ が成り立つ．

X を左連続適合過程とする．X の適合性より

$$X^{(n)}:=X_0 1_{[\![0]\!]}+\sum_{k\in\mathbb{N}}X_{\frac{k}{2^n}}1_{]\!]\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}]\!]}$$

は $\sigma(\mathscr{C}_2)$-可測である．X の左連続性より $X^{(n)}\to X$ が各点収束の意味で成り立つから，X も $\sigma(\mathscr{C}_2)$-可測である．ゆえに $\mathscr{P}\subset\sigma(\mathscr{C}_2)$ となる．

以上の議論により

$$\mathscr{P}\subset\sigma(\mathscr{C}_2)\subset\sigma(\mathscr{C}_1)\subset\mathscr{P}$$

となり，命題の主張が示された． □

例 1.4.3. 任意の決定論的な Borel 関数は，確率過程と見たとき可予測である．実際，決定論的な連続関数はどれも明らかに可予測である．$\mathbb{R}_+$ 上の連続関数の生成する σ-加法族は $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ に一致するので，Borel 関数は可予測である．決定論的な関数はたとえ連続関数より遥かに複雑な挙動を見せたとしても，確率論的にはパスが 1 本あるだけなのですべて「見えている」のである．

命題 1.4.4. $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ をフィルター付き確率空間，S,T を $\mathbb{F}$-停止時刻とする．Y が $\mathscr{F}_{S+}$-可測ならば $Y1_{]\!]S,T]\!]}$ は可予測である．

証明．$Y=1_A\in\mathscr{F}_{T+}$ のとして示す．

$$1_A 1_{]\!]S,T]\!]}=1_{A\times\mathbb{R}_+\cap]\!]S,T]\!]}$$

だから，$A\times\mathbb{R}_+\cap]\!]S,T]\!]$ の t-断面の可測性を見ればよい．

$$\begin{aligned}(A\times\mathbb{R}_+\cap]\!]S,T]\!])_t&=A\cap\{\omega\in\Omega\mid S(\omega)<t\le T(\omega)\}\\&=\big[\underbrace{A\cap\{\omega\in\Omega\mid S(\omega)<t\}}_{\in\mathscr{F}_t}\big]\cap\underbrace{\{\omega\in\Omega\mid t\le T(\omega)\}}_{\in\mathscr{F}_t}\\&\in\mathscr{F}_t\end{aligned}$$

となるから，$1_A 1_{]\!]S,T]\!]}$ は適合過程である．これは明らかに左連続なので，よって可予測となる．Y が一般の場合は単関数で各点近似すればよい． □

補題 1.4.5. $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ をフィルター付き確率空間とする．$\mathbb{F}$-停止時刻 T に対して写像 $f_T:\{T<+\infty\}\to\Omega\times\mathbb{R}_+$ を $f_T(\omega)=(\omega,T(\omega))$ により定めることとする．このとき，

$$f_T^{-1}(\mathscr{P})=\mathscr{F}_{T-}\cap\{\omega\in\Omega\mid T(\omega)<+\infty\}$$

が成立する．

証明．$A \in \mathscr{F}_0$ とすれば，

$$f_T^{-1}(A \times \{0\}) = A \cap \{T = 0\} = \underbrace{[A \cap \{T = 0\}]}_{\in \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_{T-}} \cap \{T < +\infty\} \in \mathscr{F}_{T-} \cap \{T < +\infty\}$$

である．また，停止時刻 S に対して

$$\begin{aligned} f_T^{-1}([\![0, S]\!]) &= f_T^{-1}(\Omega \times \mathbb{R}_+) \setminus f_T^{-1}(]\!]S, +\infty[\![) \\ &= \{T < +\infty\} \setminus \left[\underbrace{\{S < T\}}_{\in \mathscr{F}_{T-}} \cap \{T < +\infty\} \right] \\ &\in \mathscr{F}_{T-} \cap \{T < +\infty\} \end{aligned}$$

が成り立つから[*24]，$f_T^{-1}(\mathscr{C}_1) \subset \mathscr{F}_{T-} \cap \{T < +\infty\}$ となる．これより

$$f_T^{-1}(\mathscr{P}) = f_T^{-1}(\sigma(\mathscr{C}_1)) = \sigma(f_T^{-1}(\mathscr{C}_1)) \subset \mathscr{F}_{T-} \cap \{T < +\infty\}$$

が分かる[*25]．

次に，逆向きの包含関係を示す．$A \in \mathscr{F}_0$ とすれば

$$A \cap \{T < +\infty\} = f_T^{-1}(A \times \mathbb{R}_+) \in f_T^{-1}(\mathscr{P})$$

が成立．S を停止時刻，$A \in \mathscr{F}_t$ とすれば

$$[A \cap \{t < T\}] \cap \{T < +\infty\} = f^{-1}(A \times]\!]t, +\infty[\![) \in f_T^{-1}(\mathscr{P})$$

であるから，$\mathscr{F}_{T-} \cap \{T < +\infty\} \subset f_T^{-1}(\mathscr{P})$ も分かる． □

注意 1.4.6. 補題 1.4.5 と同様の特徴づけは，良可測 σ-加法族についても成立する．具体的には，補題 1.4.5 の f_T を用いて

$$f_T^{-1}(\mathscr{O}) = \mathscr{F}_T \cap \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) < +\infty\}$$

と表現される．証明は補題 1.4.5 と同様である．

命題 1.4.7. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，X を可予測過程，T を停止時刻とする．

(i) $X_T 1_{\{T<+\infty\}}$ は $\mathscr{F}_{T-}$-可測である．
(ii) 停止過程 X^T は可予測過程である．

証明．(i) $f_T : \{T < +\infty\} \to \Omega \times \mathbb{R}_+$ を補題 1.4.5 で定義したものとする．このとき，$B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ とすれば

$$\begin{aligned} \left\{X_T 1_{\{T<+\infty\}} \in B\right\} &= \{X_T \in B,\ T < +\infty\} \cup \{T = +\infty,\ 0 \in B\} \\ &= f_T^{-1}(\underbrace{X^{-1}(B)}_{\text{predictable}}) \cap \{T < +\infty\} \cup \{T = +\infty,\ 0 \in B\} \\ &\in \mathscr{F}_{T-} \quad (\because \text{Prop.1.2.3 and Lem.1.4.5}) \end{aligned}$$

となるから，$X_T 1_{\{T<+\infty\}}$ は $\mathscr{F}_{T-}$-可測である．

---

*24 命題 1.2.8 を参照せよ．
*25 ただし，$\mathscr{C}_1$ は定理 1.4.2 のもの．

(ii)

$$X^T = X1_{[\![0,T]\!]} + X_T 1_{]\!]T,+\infty[\![}$$

と書けるから，右辺各項の可測性を見ればよい．定理 1.4.2 より $1_{[\![0,T]\!]}$ は可予測であり，X も可予測だからその積 $X1_{[\![0,T]\!]}$ も可予測である．(i) より $X_T 1_{\{T<+\infty\}}$ は $\mathscr{F}_{T-}$ 可測[*26]だから，命題 1.4.4 より $X_T 1_{]\!]T,+\infty[\![} = (X_T 1_{\{T<+\infty\}}) 1_{]\!]T,+\infty[\![}$ も可予測である． □

命題 1.4.8. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，X を càdlàg，$\mathbb{F}$-適合過程とする．このとき，X_- は可予測である．さらに X が可予測ならば ΔX も可予測である．

証明．X_- は左連続適合過程なので，明らかに可予測である．X が可予測ならば $\Delta X = X - X_-$ は二つの可予測過程の差なので，可予測である． □

命題 1.4.9. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を完備なフィルター付き確率空間とする．このとき，任意の消散的な可測過程は可予測である．

証明．X を消散的な可測過程とし，$A = \mathrm{pr}_1(\{X \neq 0\})$ とおく．X は消散的だから $P(A) = 0$ であり，完備性より $A \in \mathscr{F}_0$ となる．ここで

$$\mathscr{C} = \{C \times [t, \infty[\mid C \in \mathscr{F},\ t \in \mathbb{R}_+\}$$

と定めれば，$\mathscr{C}$ は明らかに π-系であり，$\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ が成立．一方

$$\mathscr{H} = \{Y : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \mid Y \text{ は可測で}, Y1_{A\times\mathbb{R}_+} \text{ は可予測 }\}$$

とすれば，任意の $H = C \times [t, \infty[\in \mathscr{C}$ に対して $1_H 1_{A\times\mathbb{R}_+} = 1_{(A\cap C)\times[t,\infty[} \in \mathscr{H}$ が成り立つ[*27]．したがって，単調族定理（定理 A.1.8）を用いれば $\mathscr{H}$ は $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ 可測な関数を全て含む．特に，$X = X1_{A\times\mathbb{R}_+}$ は可予測である． □

系 1.4.10. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を完備なフィルター付き確率空間とし，X, Y は区別不能な二つの可測過程とする．X が良可測なら，Y も良可測であり，X が可予測なら Y も可予測となる．

証明．$Y = X1_{\{X=Y\}} + Y1_{\{X\neq Y\}}$ と表現されるから，$1_{\{X=Y\}}$ と $1_{\{X\neq Y\}}$ がともに可予測（命題 1.4.9）なことに注意すれば結論を得る． □

系 1.4.11. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を完備なフィルター付き確率空間とする．このとき，確率 1 で càdlàg なパスを持つ適合可測過程は良可測であり，確率 1 で左連続な適合可測過程は可予測である．

証明．X を確率 1 で càdlàg なパスを持つ適合可測過程とする．

$$\widetilde{X}(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{if } t \mapsto X_t(\omega) \text{ is càdlàg} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定めれば，完備性より $\widetilde{X}$ は càdlàg な適合過程であり，よって良可測である．X と $\widetilde{X}$ は区別不能なので，系 1.4.10 より結論が従う．可予測過程の場合も同様である． □

[*26] よって $\mathscr{F}_{T+}$-可測

[*27] A は零集合だから，$A \cap C$ も零集合である．よって $A \cap C \in \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_{t-}$ となり，命題 1.5.9 より $1_{(A\cap C)\times[t,\infty[}$ は可予測であることが分かる．（命題 1.5.9 の証明にはこの命題は使用しないので，循環論法の心配はない．）

系 1.4.12. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を完備なフィルター付き確率空間とする．T は停止時刻で，$S\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ は $T = S$ a.s. を満たすとする．このとき S も停止時刻である．

証明. $S = T$ a.s. より $1_{[\![S,\infty[\![}$ と $1_{[\![T,\infty[\![}$ は区別不能である．完備性より S は確率変数であり，よって $1_{[\![S,\infty[\![}$ は右連続な確率過程，特に可測過程となる．したがって系 1.4.10 より $1_{[\![S,\infty[\![}$ は良可測過程となる．これより $1_{[\![S,\infty[\![}$ は適合過程となり，命題 1.3.3 を用いれば S が停止時刻であることが分かる． □

1.5 可予測時刻

定義 1.5.1. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，$T : \Omega \to [0, +\infty]$ を写像とする．$[\![0, T[\![$ が可予測集合となるとき，T を ($\mathbb{F}$-) 可予測時刻 (predictable time) という．

任意の可予測時刻 T は停止時刻である．実際，$[\![0, T[\![\in \mathscr{P} \subset \mathscr{O}$ より $1_{[\![0,T[\![}$ は良可測，よって適合過程なので，補題 1.3.3 より T は停止時刻である．

T が停止時刻である時，可予測時刻であることと $[\![T]\!] \in \mathscr{P}(\mathbb{F})$ は同値である．実際，T が停止時刻ならば定理 1.4.2 より $[\![0, T]\!] \in \mathscr{P}$ であり，これと

$$
\begin{aligned}
[\![0, T[\![&= [\![0, T]\!] \setminus [\![T]\!] \\
[\![T]\!] &= [\![0, T]\!] \setminus [\![0, T[\![
\end{aligned}
$$

なる表現から分かる．

命題 1.5.2. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，T を $\mathbb{F}$-停止時刻とする．このとき $t \in]0, t]$ に対して，$T + t$ は可予測時刻である[*28]．

証明. $t = +\infty$ なら $T + t = +\infty$ となるから，明らかに可予測である．$t \in]0, +\infty[$ なら

$$
\begin{aligned}
[\![0, T[\![&= \{(\omega, t) \mid 0 \le t < T(\omega) + t\} \\
&= \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{\ge 1}} \left\{(\omega, t) \mid 0 \le t < T(\omega) + \frac{n-1}{n} t\right\} \\
&= \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{\ge 1}} \left[\!\!\left[0, T + \frac{n-1}{n} t\right]\!\!\right] \\
&\in \mathscr{P}(\mathbb{F})
\end{aligned}
$$

である． □

系 1.5.3. 任意の定数時刻は可予測である．

証明. 定数関数 0 は明らかに可予測時刻である．命題 1.5.2 より，任意の $t > 0$ に対して $t = 0 + t$ は可予測である． □

命題 1.5.4. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を完備なフィルター付き確率空間，T を $\mathbb{F}$-可予測時刻とする．このとき，$S = T$ a.s. ならば S も可予測時刻である．

[*28] ただし，任意の $s \in [0, +\infty]$ に対して $s + \infty = +\infty$ とする．

証明．$S=T$ a.s. より $1_{[\![S,\infty[\![}$ と $1_{[\![T,\infty[\![}$ は区別不能である．完備性より S は確率変数であり，よって $1_{[\![S,\infty[\![}$ は右連続な確率過程，特に可測過程となる．したがって系 1.4.10 より S は可予測時刻となる． □

命題 1.5.5. $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ をフィルター付き確率空間，$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を可予測時刻の列とする．

(i) $T=\bigvee_n T_n$ と定めれば，T は可予測時刻である．

(ii) $S=\bigwedge_n T_n$ と定める．$\bigcup_n\{S=T_n\}=\Omega$ ならば，S は可予測時刻である．

証明．(i)

$$\begin{aligned}[\![0,T[\![&= \left\{(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+ \;\middle|\; 0\le t<\bigvee_{n\in\mathbb{N}}T_n(\omega)\right\}\\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+\mid 0\le t<T_n(\omega)\}\\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\![0,T_n[\![\in\mathscr{P}\end{aligned}$$

より，T は可予測である．

(ii)

$$\begin{aligned}[\![0,S[\![&= \left\{(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+\mid 0\le t<\bigwedge_{n\in\mathbb{N}}T_n(\omega)\right\}\\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+\mid 0\le t<T_n(\omega)\} \qquad \left(\because \bigcup_n\{S=T_n\}=\Omega\right)\\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[\![0,T_n[\![\in\mathscr{P}\end{aligned}$$

である． □

注意 1.5.6. $\bigcup_n\{S=T_n\}=\Omega$ という条件がなければ $\bigwedge_n T_n$ は可予測とは限らない．実際，可予測でない停止時刻 S を持ってきたときに[*29]$T_n=S+1/n$ とすれば，命題 1.5.2 よりこれらは可予測時刻である．一方，$S=\bigwedge_n T_n$ は可予測ではない．

命題 1.5.7. $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ をフィルター付き確率空間，T を可予測時刻とする．$A\in\mathscr{F}_{T-}$ なら，T_A は[*30]可予測時刻である．

証明．

$$\mathscr{A}=\{A\in\mathscr{F}\mid T_A \text{ is predictable.}\}$$

とおいたとき，$\mathscr{A}$ が σ-加法族であることを示す．$T_\Omega=T$ は明らかに可予測なので，$\Omega\in\mathscr{A}$ である．$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathscr{A}$ の元の列としたとき命題 1.5.5 より $T_{\bigcup A_n}=\bigwedge T_{A_n}$ と $T_{\bigcap A_n}=\bigvee T_{A_n}$ はともに可予測時刻．よって $\mathscr{A}$

*29 実際に可予測でない停止時刻なるものがあるのかは別問題だが. . .

*30 T_A の定義は命題 1.2.5 を参照.

可算個の合併と共通部分をとる操作に対して閉じている．$A \in \mathscr{F}$ に対して

$$\begin{aligned}
[\![T, T_A[\![&= \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid T(\omega) \le t < T_A\} \\
&= \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid \omega \in \Omega \setminus A,\ T(\omega) \le t < +\infty\} \\
&= [\![0, T_A[\![\setminus [\![0, T[\![\in \mathscr{P}
\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
[\![0, T_{\Omega\setminus A}[\![&= \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid 0 \le t < T_{\Omega\setminus A}(\omega)\} \\
&= \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid 0 \le t < T(\omega) \vee \omega \in A\} \\
&= \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid 0 \le t \vee \omega \in A\} \cap \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid t < T(\omega) \vee \omega \in A\} \\
&= \Omega \times \mathbb{R}_+ \setminus \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid T(\omega) \le t \wedge \omega \in \Omega \setminus A\} \\
&= \Omega \times \mathbb{R}_+ \setminus \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid T(\omega) \le t \wedge \omega \in \Omega \setminus A\} \\
&= [\![0, +\infty[\![\setminus [\![T, T_A[\![\in \mathscr{P}
\end{aligned}$$

となり，$\mathscr{A}$ は補集合をとる操作についても閉じていることが分かる．よって，$\mathscr{A}$ は σ-加法族である．

あとは

$$\mathscr{F}_0 \cup \{A \cap \{t < T\} \mid A \in \mathscr{F}_t,\ t \in \mathbb{R}_+\} \subset \mathscr{A}$$

を示せば，$\mathscr{F}_{T-} \subset \mathscr{A}$ が分かる[*31]．$A \in \mathscr{F}_0$ とすれば，

$$\begin{aligned}
[\![0, T_A[\![&= \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid 0 \le t < T_A(\omega)\} \\
&= \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid t < T(\omega)\} \cup \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid \omega \in \Omega\} \\
&= [\![0, T[\![\cup \big[(\Omega \setminus A) \times \mathbb{R}_+\big] \\
&= [\![0, T[\![\cup \big[(\Omega \setminus A) \times \{0\}\big] \cup \big[\,(\Omega \setminus A) \times]0, +\infty[\,\big] \in \mathscr{P} \quad (\because \text{定理 } 1.4.2)
\end{aligned}$$

が成立する，よって $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{A}$ である．$A \in \mathscr{F}_t$，$B = A \cap \{t < T\}$ とおけば，

$$\begin{aligned}
[\![0, T_{\Omega\setminus B}[\![&= \{(\omega,s) \in \Omega \mid 0 \le s < T_{\Omega\setminus B}(\omega)\} \\
&= \{(\omega,s) \in \Omega \mid 0 \le s < T(\omega)\} \cup \{(\omega,s) \in \Omega \mid \omega \in B\} \\
&= [\![0, T[\![\cup (B \times [0, +\infty[\,) \\
&= \{\, [\![0, T[\![\cup (B \times [0, t]\} \cup (B \times]t, +\infty[\,) \\
&= [\![0, T[\![\cup (B \times]t, +\infty[\,) \in \mathscr{P} \quad (\because \text{定理 } 1.4.2)
\end{aligned}$$

したがって $\mathscr{F}_{T-} \subset \mathscr{A}$ が成立する．すなわち $A \in \mathscr{F}_{T-}$ なら T_A は可予測時刻である． □

命題 1.5.8. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，T を停止時刻，S を可予測時刻とする．$A \in \mathscr{F}_{S-}$ に対して $A \cap \{S \le T\} \in \mathscr{F}_{T-}$ が成立する．

証明．$A \in \mathscr{F}_{S-}$ とする．

$$\begin{aligned}
A \cap \{S \le T\} &= [A \cap \{S \le T\} \cap \{T < +\infty\}] \cup [A \cap \{S \le T\} \cap \{T = +\infty\}] \\
&= \{S_A \le T < +\infty\} \cup [A \cap \{T = +\infty\}]
\end{aligned}$$

[*31] 定義 1.2.1 を参照．

だから，それぞれの項の可測性を調べれば良い．命題 1.5.7 より $X = 1_{[\![S_A,+\infty[\![}$ は可予測なので，命題 1.4.7 から $X_T 1_{\{T<+\infty\}}$ は $\mathscr{F}_{T-}$ 可測となる．したがって

$$\begin{aligned}\{\omega \in \Omega \mid S_A(\omega) \leq T(\omega) < +\infty\} &= \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) < +\infty \wedge (\omega, T(\omega)) \in [\![S_A, +\infty[\![\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid X_T 1_{\{T<+\infty\}} = 1\} \\ &\in \mathscr{F}_{T-}\end{aligned}$$

が成立．

$A \cap \{T = +\infty\}$ の可測性を調べるために，単調族定理を用いよう．

$$\mathscr{A} = \{A \in \mathscr{F}_{+\infty} \mid A \cap \{T = +\infty\} \in \mathscr{F}_{T-}\}$$

と定義する．命題 1.2.3 と命題 1.2.10 より $\mathscr{F}_{S-} \subset \mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_\infty$ であるから，$\mathscr{F}_\infty = \mathscr{A}$ を示せば十分である．いま

(i) $\mathscr{A}$ は単調列の極限について閉じている．

(ii) $\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} \mathscr{F}_t \subset \mathscr{A}$

が成立することを示せば，単調族定理より $\mathscr{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} \mathscr{F}_t\right) = \mathscr{A}$ が分かるのであった[*32]．$\mathscr{A}$ の定義より (i) は明らかに成立する．$A \in \mathscr{F}_t$ とすれば，

$$A \cap \{T = +\infty\} = [A \cap \{t < T\}] \cap \{T = +\infty\} \in \mathscr{F}_{T-}$$

より (ii) も成立[*33]．

よって任意の $A \in \mathscr{F}_{S-}$ に対して $A \cap \{T = +\infty\} \in \mathscr{F}_{T-}$ が成立し，

$$A \cap \{S \leq T\} = \{S_A \leq T < +\infty\} \cup [A \cap \{T = +\infty\}] \in \mathscr{F}_{T-}$$

である． □

命題 1.5.9. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，T, S を停止時刻，Y を確率変数とする．

(i) Y が $\mathscr{F}_{S+}$-可測ならば $Y 1_{]\!]S,T]\!]}$ は可予測である．

(ii) T が可予測で Y が $\mathscr{F}_{S+}$-可測 $Y 1_{]\!]S,T[\![}$ は可予測である．

(iii) S が可予測で Y が $\mathscr{F}_{S-}$-可測ならば $Y 1_{[\![S,T]\!]}$ は可予測である．

(iv) S, T が可予測で Y が $\mathscr{F}_{S-}$-可測ならば $Y 1_{[\![S,T[\![}$ は可予測である．

証明． (i) 命題 1.4.4 である．

(ii) (i) より $Y 1_{]\!]S,T]\!]}$ は可予測であり，T の可予測性より $1_{[\![0,T[\![}$ も可予測である．したがって $Y 1_{]\!]S,T[\![} = (Y 1_{]\!]S,T]\!]}) 1_{[\![0,T[\![}$ も可予測である．

(iii) $Y = 1_A \in \mathscr{F}_{T-}$ のとき，S の可予測性と命題 1.5.7 より

$$Y 1_{[\![S,T]\!]} = 1_{[\![S_A,T]\!]} = 1_{[\![0,T]\!]} - 1_{[\![0,S_A]\!]}$$

も可予測である．一般の Y は単関数で近似すればよい． □

[*32] $\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} \mathscr{F}_t$ は有限加法族であることに注意．

[*33] 定義 1.2.1 および命題 1.2.3 を見よ．

可予測時刻を用いると，可予測 σ-加法族を次のように特徴付けられる．

命題 1.5.10. $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ をフィルター付き確率空間とし，

$$\mathscr{C}=\{[\![T,\infty[\![\mid T\text{ は可予測時刻 }\}$$

と定める．このとき $\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{P}(\mathbb{F})$ が成立．

証明．可予測時刻の定義より $\mathscr{C}\subset\mathscr{P}$ は明らか．よって $\sigma(\mathscr{C})\subset\mathscr{P}$ が成立．

$$\mathscr{C}_1=\{A\times\{0\}\}\cup\{[\![0,T]\!]\mid T\in\mathscr{T}(\mathbb{F})\}$$

と定めれば $\sigma(\mathscr{C}_1)=\mathscr{P}$ なのであった．（定理 1.4.2）これより $\mathscr{C}_1\subset\sigma(\mathscr{C})$ を示せば $\mathscr{P}\subset\sigma(\mathscr{C})$ が分かる．

$A\in\mathscr{F}_0$ とすれば，系 1.5.4 および命題 1.5.7 から 0_A は可予測時刻である．$S_n=(1/n)_A$ と定めれば命題 1.5.2 これは可予測時刻となり，$[\![0_A,S_n[\![\in\sigma(\mathscr{C})$ これより $A\times\{0\}=[\![0_A]\!]=\bigcap_n[\![0_A,S_n[\![\in\sigma(\mathscr{C})$ が分かる．同様にして停止時刻 T に対して $T_n=T+1/n$ と定めればこれは可予測時刻であり，

$$[\![0,T]\!]=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[\![0,T_n[\![\in\sigma(\mathscr{C})$$

も分かる．したがって $\mathscr{C}_1\subset\sigma(\mathscr{C})$ が成り立つ． □

定義 1.5.11. $A\subset\Omega\times\mathbb{R}_+$ に対して

$$D_A(\omega):=\inf\{t\in\mathbb{R}_+\mid(\omega,t)\in A\}=\inf A^\omega$$

で定義される関数 $D_A:\Omega\to[0,+\infty]$ を A へのデビュー (debut) と呼ぶ．

確率過程 X の $B\subset\mathbb{R}$ への到達時刻 D_A^X は $X^{-1}(B)\subset\Omega\times\mathbb{R}_+$ へのデビューに他ならない．一般にはデビューが停止時刻になるかどうかは難しい問題である．「通常の条件」の下では発展的集合へのデビューは停止時刻になることが知られている．

定理 1.5.12. $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ を完備なフィルター付き確率空間，A を発展的集合[*34]とする．

(i) $[\![D_A]\!]\subset A$ なら，デビュー D_A は停止時刻である．
(ii) $\mathbb{F}$ が右連続なら，デビュー D_A は $\mathbb{F}$-停止時刻である．

証明．*Step 1*：*(ii)* **の証明．** まずは，発展的集合へのデビューが弱停止時刻であることを示す．$t\in\mathbb{R}_+$ に対して

$$E_t=\{(\omega,s)\in\Omega\times\mathbb{R}_+\mid s<t,\ (\omega,s)\in A\}=[\![0,t[\![\cap A=(\Omega\times[0,t[)\cap A$$

と定義する．A は発展的集合だから（i.e. 1_A は発展的可測過程）だから E_t は $\mathscr{F}_t\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-可測であり，$\{D_A<t\}=\mathrm{pr}_1(E_t)$ が成立．フィルター付き確率空間の完備性に注意すれば

$$\{D_A<t\}=\mathrm{pr}_1(E_t)\in\mathscr{A}(\mathscr{F}_t)=\mathscr{F}_t$$

が成立[*35]．（命題 A.2.1 と定理 A.9.14 による．）よって D_A は弱停止時刻となる．これより，$\mathbb{F}$ が右連続ならば D_A は停止時刻となる．（命題 1.2.6）したがって (ii) が成立．

[*34] 定義 1.1.8

[*35] この命題のためには，$(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ が完備という強い条件は必ずしも必要ではなく，確率空間 $(\Omega,\mathscr{F}_t,P)$ が完備（もっと言えば，普遍完備化でも良い）で十分だと思われる．

Step 2：*(i)* **の証明．** $\mathbb{F}$ が右連続とは限らなくても，step 1 より D_A は弱停止時刻にはなっている．$\overline{E}_t = [\![0,t]\!] \cap A$ と定義すれば，先ほどと同様に $\overline{E}_t \in \mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ が分かる．$[\![D_A]\!] \subset A$ との仮定より

$$\{D_A \leq t\} = \mathrm{pr}_1(\overline{E}_t) \in \mathscr{A}(\mathscr{F}_t) = \mathscr{F}_t$$

が成立．

$\because$ $(\omega,s) \in \mathrm{pr}_1(\overline{E}_t)$ なら，明らかに $D_A(\omega) \leq s \leq t$ が成立．よって $\mathrm{pr}_1(\overline{E}_t) \subset \{D_A \leq t\}$ である．また $[\![D_A]\!] \subset A$ から

$$\begin{aligned}\{D_A \leq t\} &= \{D_A < t\} \cup \{D_A = t\} = \mathrm{pr}_1(E_t) \cup \mathrm{pr}_1([\![D_A]\!] \cap [\![t]\!]) \\ &\subset \mathrm{pr}_1(E_t) \cup \mathrm{pr}_1(A \cap [\![t]\!]) = \mathrm{pr}_1(E_t \cup (A \cap [\![t]\!])) = \mathrm{pr}_1(\overline{E}_t)\end{aligned}$$

も成立．すなわち $\{D_A \leq t\} = \mathrm{pr}_1(\overline{E}_t)$ となる．

ゆえに D_A は停止時刻である．□

命題 1.5.13. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．A が可予測集合で D_A が停止時刻になっているようなものとする．$[\![D_A]\!] \subset A$ が成り立つならば，D_A は可予測時刻となる．

証明．$[\![D_A]\!] \subset A$ より

$$A \cap [\![0, D_A]\!] = (A \cap [\![D_A]\!]) \cup (A \cap [\![0, D_A[\![\,) = [\![D_A]\!] \cup \emptyset = [\![D_A]\!]$$

である．A と $[\![0, D_A]\!]$ はともに可予測集合なので，$[\![D_A]\!]$ も可予測集合である．すなわち，D_A は可予測時刻である．□

命題 1.5.13 における $[\![D_A]\!] \subset A$ という条件は外すことはできない．実際，任意の停止時刻 T に対して，可予測集合 $]\!]T, +\infty[\![$ のデビューは T であるが，これは一般には可予測時刻でない．

1.6 可予測断面定理

命題 1.6.1. $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を可測空間，Prob を $(\Omega, \mathscr{F})$ 上の確率測度全体の空間とする．このとき，任意の $A \in \mathscr{A}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$ について，A へのデビュー D_A は $\mathscr{F}^{\mathrm{Prob}}$-可測である．ただし，$\mathscr{F}^{\mathrm{Prob}}$ は $\mathscr{F}$ の普遍完備化，すなわち

$$\mathscr{F}^{\mathrm{Prob}} := \bigcap_{P \in \mathrm{Prob}} \mathscr{F}^P$$

によって定められる σ-代数である．

証明．$r > 0$ とすれば

$$\{\omega \in \Omega \mid D_A(\omega) < r\} = \{\omega \in \Omega \mid \exists t < r,\ (\omega, t) \in A\} = \mathrm{pr}_1(A \cap \Omega \times [0, r[)$$

が成立．$A \cap \Omega \times [0, t[$ は $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-解析集合だから，その第一射影 $\{D_A < r\}$ は $\mathscr{F}$-解析集合である[*36]．したがって $\{D_A < r\}$ は普遍可測となり[*37]，D_A が普遍可測であることが示される．□

[*36] 命題 A.9.9
[*37] 系 A.9.15

注意 1.6.2. X が可測過程ならば，$X^*_\infty := \sup_{s\in\mathbb{R}_+}|X_s|$ は $\mathscr{F}^{\mathrm{Prob}}$-可測である．実際

$$T_a = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ || X_t| > a\}$$

と定義すれば，命題 1.6.1 により T_a は $\mathscr{F}^{\mathrm{Prob}}$-可測となる．いま T_a の定義より

$$\left\{\omega \in \Omega \;\middle|\; \sup_{t\in\mathbb{R}_+}|X_t| > a\right\} = \{\omega \in \Omega \mid T_a(\omega) < \infty\} \in \mathscr{F}^{\mathrm{Prob}}$$

だから，X^*_∞ も $\mathscr{F}^{\mathrm{Prob}}$-可測である．

補題 1.6.3. $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，$A \in \mathscr{A}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$ とする．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して，確率変数 $T_\varepsilon \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ で $[\![T_\varepsilon]\!] \subset A$ かつ

$$P[T_\varepsilon < +\infty] > P[D_A < +\infty] - \varepsilon$$

を満たすものが存在する．

証明．定理 A.9.14 の証明から，P の外測度 P^* は Choquet $\mathscr{F}$-容量である．$\mathscr{H}$ を $\mathscr{F} \odot \mathscr{K}(\mathbb{R}_+)$ の元の有限和全体からなる舗装とすれば，$\mathscr{H}$ は有限個の和と共通部分をとる操作について閉じている．また命題 A.9.9 により

$$\mathscr{A}(\mathscr{H}) = \mathscr{A}(\mathscr{F} \odot \mathscr{K}(\mathbb{R}_+)) = \mathscr{A}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$$

が成り立つ．$\mathrm{pr}_1 \colon \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \Omega$ を標準射影とすれば，命題 A.9.9 から任意の $C \in \mathscr{A}(\mathscr{H})$ について $\mathrm{pr}_1(C) \in \mathscr{A}(\mathscr{F})$ が成り立つことに注意しておく．

$$I(C) = P^*(\mathrm{pr}_1(C)), \quad C \subset \Omega \times \mathbb{R}_+$$

と定義すれば，補題 A.9.13 より I は Choquet $\mathscr{H}$-容量となる．定理 A.9.12 より $A \in \mathscr{A}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$ は I-可容である．したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある（空でない）$B \in \mathscr{H}_\delta$ で，$B \subset A$ かつ

$$I(B) > I(A) - \varepsilon \tag{1.3}$$

を満たすものが存在する[*38]．$C \subset \Omega \times \mathbb{R}_+$ について

$$\mathrm{pr}_1(C) = \{\omega \in \Omega \mid \exists t \in \mathbb{R}_+,\ (\omega, t) \in C\} = \{\omega \in \Omega \mid D_C < \infty\}$$

が成り立つことに注意すれば，条件 (1.3) は

$$P[D_B < \infty] > P[D_A < \infty] - \varepsilon$$

とも表現できる[*39]．命題 1.6.1 により D_B は $\mathscr{F}^P$-可測だから，$\mathscr{F}$-可測な $S_\varepsilon \colon \to \overline{\mathbb{R}}_+$ で $D_B = S_\varepsilon$ P-a.s. を満たすものがとれる．$C \in \mathscr{F}$ で $C \subset \{S_\varepsilon = D_B\}$ かつ $P(C) = 1$ なるものを選び，

$$T_\varepsilon(\omega) = \begin{cases} S_\varepsilon(\omega) & \omega \in C \\ \infty & \omega \in \Omega \setminus C \end{cases}$$

[*38] いま容量 I は $\mathbb{R}_+$ に値をとることに注意せよ．

[*39] A と B は $\mathscr{F} \odot \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ 解析集合だから，D_A, D_B は $\mathscr{F}^P$-可測となる（命題 1.6.1）．よって $\{D_A < \infty\}$ と $\{D_B < \infty\}$ は P（の完備化）で測ることが可能である．

と定義する．このとき $T_\varepsilon\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ は $\mathscr{F}$-可測であって，$T_\varepsilon = S_\varepsilon = D_B$ かつ $T_\varepsilon 1_{\{T_\varepsilon < \infty\}} = D_B 1_{\{T_\varepsilon<\infty\}}$ を満たす．ここで B の ω-セクション B^ω は $\mathbb{R}_+$ のコンパクト集合であることに注意すれば[*40]，$[\![D_B]\!] \subset B \subset A$ が成り立つ．これより $[\![T_\varepsilon]\!] \subset [\![D_B]\!] \subset A$ かつ

$$P[T_\varepsilon < \infty] = P[D_B < \infty] > P[D_A < \infty] - \varepsilon$$

が成り立つ．よって補題の主張が示された． □

補題 1.6.3 を用いれば，次の強力な命題が証明される．

命題 1.6.4. $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，$A \in \mathscr{A}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$ とする．このとき，確率変数 $T\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ で $[\![T]\!] \subset A$ かつ $P[T < \infty] = P[D_A < \infty]$ を満たすものが存在する．

命題 1.6.1 より，解析集合 A へのデビューは $\mathscr{F}^P$-可測にはなっているけれども，一般に $\mathscr{F}$-可測とはならない．命題 1.6.4 の言っていることは，グラフが A に含まれる確率変数をうまく選べば，Choquet 容量 $B \mapsto P(\mathrm{pr}_1(B))$ の意味では同じ大きさになるということである．

証明．まずは，補題 1.6.3 を用いて，T の素になる確率変数列 (T_n) を帰納的に構成する．$T_0 = +\infty$ とする．確率変数 $T_n\colon \to \overline{\mathbb{R}}_+$ で，$[\![T_n]\!] \subset A$ なるものが定まっているとする．

$$A_n = A \cap \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid T_n(\omega) = +\infty\} = A \cap [\{\omega \in \Omega \mid T_n(\omega) = \infty\} \times \mathbb{R}_+]$$

と定義すれば，A_n は $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-解析集合である．補題 1.6.3 より確率変数 $S_n\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ で

$$\begin{gathered}[\![S_n]\!] \subset A_n, \\ P[S_n < \infty] \geq \frac{1}{2} P[D_{A_n} < \infty] = \frac{1}{2} P[T_n = \infty,\ D_A < \infty]\end{gathered}$$

を満たすものが存在する．この S_n を用いて $T_{n+1} = T_n \wedge S_n$ と定めれば，これはまた $\overline{\mathbb{R}}_+$-値の確率変数となる．さらに $[\![T_{n+1}]\!] \subset [\![T_n]\!] \cup [\![S_n]\!] \subset A$ および

$$\begin{aligned}P[T_{n+1} < \infty] &= P[T_n < \infty] + P[S_n < \infty] \\ &\geq P[T_n < \infty] + \frac{1}{2} P[T_n = \infty,\ D_A < \infty]\end{aligned} \tag{1.4}$$

が成立する．$T = \lim_n T_n = \bigwedge_n T_n$ と定めれば[*41]，これが求める確率変数であることを示そう．構成方法より $T_{n+1} 1_{\{T_n<\infty\}} = T_n 1_{\{T_n < \infty\}}$ であることに注意すれば，$T 1_{\{T_n<\infty\}} = T_n 1_{\{T_n<\infty\}}$ が分かる．よって

$$\{T < \infty\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{T_n < \infty\}, \quad \{T = \infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{T_n = \infty\}$$

が成り立つ．特に $[\![T]\!] \subset A$ である．(T_n) が減少列であることに注意して (1.4) で極限をとれば

$$P[T < \infty] \geq P[T < \infty] + \frac{1}{2} P[T = \infty,\ D_A < \infty]$$

を得る．これより

$$P(\{D_A < \infty\} \setminus \{T < \infty\}) = P(\{T = \infty\} \cap \{D_A < \infty\}) = 0$$

が分かり，T が求める確率変数であることが示された． □

[*40] B の構成法より B^ω は $\mathbb{R}_+$ のコンパクト集合の可算個の共通部分で表現される．

[*41] 構成法より T_n は減少列である．

注意 1.6.5. 一般に，$[\![T]\!] \subset A$ を満たす確率変数 $T\colon \Omega \to \mathbb{R}_+$ を A の断面 (section) と呼ぶ．つまり命題 1.6.4 は，任意の $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-解析集合に対して適当な断面 T を選べば，$[\![T]\!]$ と A が同じ $\mathscr{K}$-容量[*42]をもつようにすることが出来る，という主張である．

ここまでは，$\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-解析集合に対してその断面を考察してきた．では，良可測集合や可予測集合をと考えた場合，断面としてどのくらい「良い」ものがとれるのだろうか．もう少し具体的に言うと，断面として停止時刻や可予測時刻で，（Choquet 容量の意味で）良い近似をしているものを選ぶことは可能だろうか？それに答えるのが断面定理に他ならない．可予測断面定理の証明にはもう少し準備が必要なので，さらに幾つか補題を用意する．

補題 1.6.6. $(E, \mathscr{E}, \mu)$ を有限測度空間，$\mathscr{C}$ を E 上の集合代数で $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{F}$ を満たすものとする．このとき，任意の $A \in \mathscr{E}$ について以下の等式が成立する．

$$\mu(A) = \sup\{\mu(B) \mid B \in \mathscr{C}_\delta,\ B \subset A\} = \inf\{\mu(C) \mid C \in \mathscr{C}_\sigma,\ A \subset C\} \tag{1.5}$$

証明. $\mathscr{D}$ で (1.5) を満たすような $\mathscr{F}$-可測集合全体の集合を表すことにする．$\mathscr{C}$ が集合代数で，明らかに $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$ 満たす．$\mathscr{D}$ が単調列の極限について閉じていることを示せば，単調族定理によって補題の主張を得る．$\mathscr{C}$ は集合代数だから $\mathscr{C}_\sigma = \{A \mid \Omega \setminus A \in \mathscr{C}_\delta\}$ が成立．よって $\mathscr{G}$ は補集合を取る操作について閉じている．これより，特に $\mathscr{G}$ が単調増加極限について閉じていることさえ示せばよいことが分かる．

(A_n) を $\mathscr{G}$ の増加列とし，$A := \bigcup_n A_n$ と定める．このとき $A \in \mathscr{G}$ を示すのが目標である．$\varepsilon > 0$ を任意に選べば，十分大きい n について $\mu(A \setminus A_n) < \varepsilon/2$ が成立．A_n は $\mathscr{G}$ の元だから，$B \subset A_n$ かつ $\mu(A_n \setminus B) < \varepsilon/2$ を満たす $B \in \mathscr{C}_\delta$ を取ることが出来る．$B \subset A_n \subset A$ だから，

$$\mu(B) = \mu(A) - \mu(A \setminus A_n) - \mu(A_n \setminus B) > \mu(A) - \varepsilon$$

が成り立つ．よって

$$\mu(A) = \sup\{\mu(B) \mid B \in \mathscr{C}_\delta,\ B \subset A\}$$

である．一方，$A_n \in \mathscr{G}$ より $C_n \supset A_n$ かつ $P(C_n \setminus A_n) < \varepsilon/2^{n+1}$ を満たすような $C_n \in \mathscr{C}_\sigma$ を選べる．$C = \bigcup_n C_n \in \mathscr{C}_\sigma$ とすれば，

$$\mu(C \setminus A) \le \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(C_n \setminus A_n) \le \varepsilon$$

を得る．すなわち

$$\mu(A) = \inf\{\mu(C) \mid C \in \mathscr{C}_\sigma,\ A \subset C\}$$

も成り立つ．

以上の議論により $A \in \mathscr{G}$ となり，$\mathscr{G}$ が単調族であることが示された． □

命題 1.6.7. $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間，$\mathscr{G}$ を $\mathscr{G} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ の部分 σ-代数，$\mathscr{C}$ を $\Omega \times \mathbb{R}_+$ 上の集合代数で $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{G}$ なるものとする．$A \in \mathscr{G}$ をとる．このとき任意の $\varepsilon > 0$ について，ある $B \in \mathscr{C}_\delta$ で次を満たすものが存在する．

$$B \subset A,$$
$$P(\mathrm{pr}_1(A)) \le P(\mathrm{pr}_1(B)) + \varepsilon$$

[*42] 補題 1.6.3 の証明

証明．確率変数 $T\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ を，$[\![T]\!] \subset A$ かつ $P(\mathrm{pr}_1([\![T]\!])) = P([\![D_A]\!])$ を満たすようにとる．（命題 1.6.4）$\mathscr{G}$ 上の測度 μ を

$$\mu(G) = P(\{\omega \in \Omega \mid (\omega, T(\omega)) \in G\})$$

と定める[*43]．$[\![T]\!] \subset A$ との仮定より，任意の $G \in \mathscr{G}$ について $\mu(G \setminus A) = 0$ である．さらに $\mu(A) = P[T < \infty] = P(\mathrm{pr}_1(A))$ が成り立つ．任意の $G \in \mathscr{G}$ について

$$\{\omega \in \Omega \mid (\omega, T(\omega)) \in G\} = \mathrm{pr}_1([\![T]\!] \cap G) \subset \mathrm{pr}_1(G)$$

となるから，$\mu(G) \le P(\mathrm{pr}_1(G))$ が分かる．

$\varepsilon > 0$ を任意にとれば，補題 1.6.6 の結果から，$B \in \mathscr{C}_\delta$ で $B \subset A$ かつ $\mu(A) \le \mu(B) + \varepsilon$ を満たすようなものが存在する．このとき

$$P(\mathrm{pr}_1(A)) = \mu(A) \le \mu(B) + \varepsilon \le P(\mathrm{pr}_1(B)) + \varepsilon$$

となるから，補題の主張が示された．□

いよいよ可予測断面定理の証明に入る．と言いたいところだが，その前にもうひとつ技術的な補題を用意しなければならない．私もだんだん面倒くさくなってきたし，ここは読み飛ばしても構わないかも．

補題 1.6.8. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を確率空間とし，停止時刻の族 $\mathscr{S}$ は次の条件を満たすと仮定する．

(i) $0 \in \mathscr{S}$ かつ $+\infty \in \mathscr{S}$．
(ii) $S, T \in \mathscr{S}$ なら $S \wedge T, S \vee T \in \mathscr{S}$．
(iii) $S, T \in \mathscr{S}$ なら $S_{\{S<T\}} \in \mathscr{S}$．
(iv) (S_n) が $\mathscr{S}$ の元の増加列なら，$\bigvee_n S_n \in \mathscr{S}$．

集合半代数 $\mathscr{C}_0$ を

$$\mathscr{C}_0 = \{[\![S, T[\![\mid S \le T,\ S, T \in \mathscr{S}\}$$

によって定め，$\mathscr{C}_0$ によって生成される集合代数を $\mathscr{C}$ で表す[*44]．このとき，任意の $B \in \mathscr{C}_\delta$ について $[\![D_B]\!] \subset B$ が成立する．さらに $T \in \mathscr{S}$ で $T = D_B$ a.s. を満たすものが存在する．

証明．まずは $\mathscr{C}_0$ が実際に集合半代数[*45]になっていることを確かめる．条件 (i) より $\Omega \times \mathbb{R}_+ \in \mathscr{S}$ が分かる．$[\![S_1, T_1[\![, [\![S_2, T_2[\![\in \mathscr{C}_0$ を任意にとれば，条件 (ii) より

$$[\![S_1, T_1]\!] \cap [\![S_2, T_2[\![= [\![S_1 \vee S_2, T_1 \wedge T_2[\![\in \mathscr{C}_0$$

が成り立つ．$[\![S_1, T_1[\![, [\![S_2, T_2[\![\in \mathscr{C}_0$ で $[\![S_1, T_1[\![\subset [\![S_2, T_2[\![$ を満たすようなものとれば，

$$[\![S_2, T_2[\![\setminus [\![S_1, T_1[\![= [\![S_2, S_1[\![\sqcup [\![T_1, T_2[\![$$

が成立．すなわち $[\![S_2, T_2[\![\setminus [\![S_1, T_1[\![$ は $\mathscr{C}_0$ 有限個の元の非交和で書ける．以上のことから，$\mathscr{C}_0$ が集合半代数であることが確かめられた．

[*43] 要するに μ は可測関数 $\omega \mapsto (\omega, T(\omega))$ の像測度である．
[*44] 要するに $\mathscr{C}$ は $\mathscr{C}_0$ の元の有限和で表現されるような集合全体．
[*45] 定義は Bogachev [2, 1.2.13 Definition] などを見よ．

$B \in \mathscr{C}_\delta$ とする．このとき B の ω-断面は

$$B^\omega := \{t \in \mathbb{R}_+ \mid (\omega, t) \in B\} = \bigcap_k [S_k(\omega), T_k(\omega)[$$

のように表現されるから，$\inf B(\omega) \in B(\omega)$ が成立．すなわち $[\![D_B]\!] \subset B$ である．

後は $D_B = T$ a.s. を満たす $T \in \mathscr{V}$ の存在を示せばよい．

$$\mathscr{H} = \{S \in \mathscr{V} \mid S \leq D_B\}$$

として，$T = \operatorname{ess\,sup} \mathscr{H}$ と定義する[*46]．$\mathscr{S}$ は増加列の極限について閉じていること（条件 (iv)）を用いれば，$T \in \mathscr{S}$ が分かる．このとき $T = D_B$ a.s. となっていることを証明する．構成法より $T \leq D_B$ a.s. は明らかなので，逆向きの不等号を示す．(B_n) を $\mathscr{C}$ の元の減少列で $B = \bigcap_n B_n$ を満たすものとする[*47]．

$$C_n = B_n \cap [\![T, \infty[\![$$

と定義すれば，(C_n) もまた $\mathscr{C}$ の元の減少列で，

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \cap [\![T, \infty[\![= B$$

が成立．ここで，$G = [\![S, R[\![\in \mathscr{C}_0$ に対して $D_G = S_{\{S<T\}} \in \mathscr{S}$ が成り立つことに注意しておく．（条件 (iii)）$C_n \in \mathscr{C}$ は $C_n = C_{n,1} \cup \cdots \cup C_{n,m_n}$ $(C_{n,k} \in \mathscr{C}_0)$ と表現されているとする．このとき，さきほどの議論と条件 (ii) から

$$D_{C_n} = D_{\bigcap_k C_{n,k}} = \bigwedge_{k=1}^{m_n} D_{C_{n,k}} \in \mathscr{S}$$

が分かる．定義より，各 C_n は $D_{C_n} \geq T$ を満たす．また $C_n \subset B$ より $D_{C_n} \leq D_B$ となり，これらの条件から $D_{C_n} \in \mathscr{H}$ が成り立つ．本質的上限の一意性から，$D_{C_n} = T$ a.s. が示される．$[\![D_{C_n}]\!] \subset C_n$ より，$\bigcap_n [\![D_{C_n}]\!] \subset \bigcap_n C_n = B$ が成立．ここで

$$N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega \mid D_{C_n}(\omega) \neq T(\omega)\}$$

とおけば，N は $\mathscr{F}$ に属する零集合である．N 上では T は D_{C_n} と等しいから[*48]，$[\![T_N]\!] \subset B$ となる[*49]．したがって $T_N \geq D_B$ であり，$T \geq D_B$ a.s. が示された．□

ようやく面倒くさい準備が全て終わったので，可予測断面定理の証明を行おう．

定理 1.6.9 (可予測断面定理 (predictable section theorem))**.** $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，$A \subset \Omega \times \mathbb{R}_+$ を可予測集合とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，次の条件を満たす可予測時刻が存在する[*50]：

---

*46 確率変数族の本質的上限については，命題 A.2.2 を参照．

*47 $\mathscr{C}$ は有限個の共通部分をとる操作について閉じているから，(B_n) が減少列であるようにとれる．

*48 N 上では各点で，の意味．

*49 この T_N は停止時刻 T の N への制限．定義は命題 1.2.5 を見よ．いま，各 D_{C_n} は停止時刻だから N は $\mathscr{F}_T$-可測となり，よって T_N も停止時刻である．ただ，今の文脈では T_N が停止時刻であろうがなかろうが，特に興味はない．

*50 可予測集合 A の第一射影は一般には $\mathscr{F}$-可測とは限らないが，普遍可測にはなっていて P の完備化によって測ることが可能である．

(i) $[\![T]\!] \subset A$.

(ii) $P[T < \infty] \geq P(\mathrm{pr}_1(A)) - \varepsilon$.

可予測断面定理は次のようなことを主張している．可予測集合へのデビューは（通常の条件ものとでは）停止時刻であり，そのグラフは集合 A に“接して”はいるけれども，一般に A に含まれるとは限らない．しかし，A に含まれる[*51]ような停止時刻（もっと言えば可予測時刻）で A へのデビューに“十分近い”[*52]ものが存在するというのが定理の主張である．ここで“近さ”を測る基準は，(ii) に出てきている Ω への射影の確率，であり，言い換えれば $\Omega \times \mathbb{R}_+$ 上の Choquet 容量である．

証明. $\mathscr{S}$ を可予測時刻全体の集合とすれば，これは補題 1.6.8 の条件 (i)–(iv) を満たす[*53]．$\mathscr{C}$ を補題 1.6.8 のものとする．$\mathscr{S}$ は可予測時刻の集合であるから $\mathscr{C}$ の元はどれも可予測集合であって，命題 1.5.10 より $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{P}(\mathbb{F})$ となることを確かめておく．

A を可予測集合とし，$\varepsilon > 0$ を任意に選ぶ．このとき命題 1.6.7 より，$B \in \mathscr{C}_\delta$ で

$$B \subset A$$
$$P(\mathrm{pr}_1(B)) \geq P(\mathrm{pr}_1(A)) - \varepsilon$$

を満たすものが存在する．さらに補題 1.6.8 より $[\![D_B]\!] \subset B$ が成立し，可予測時刻 $S \in \mathscr{S}$ で $S = D_B$ a.s. を満たすものがとれる．

$$L = \{\omega \in \Omega \mid (\omega, S(\omega)) \in B\} = \mathrm{pr}_1([\![S]\!] \cap B)$$

と定義すれば，$L \in \mathscr{F}_{S-}$ である．（補題 1.4.5）したがって $T := S_L$ は可予測時刻であり[*54]，定義より $[\![T]\!] \subset B \subset A$ かつ $T = S = D_B$ a.s. が成り立つ[*55]．これにより

$$P[T < \infty] = P[D_B < \infty] = P(\mathrm{pr}_1(B)) \geq P(\mathrm{pr}_1(A)) - \varepsilon$$

を得る． □

注意 1.6.10. 定理 1.6.9 の主張で可予測集合の部分を良可測集合に，可予測時刻の部分を停止時刻に，それぞれ置き換えたものも成立する．可予測断面定理に対して，こちらは良可測断面定理と呼ばれるものである．証明はほぼ同様だが，詳細は He, Wang, Yan [10, 4.7 Theorem] などを参照されたい．

断面定理を用いると，以下の有用な命題を示すことが出来る．

命題 1.6.11. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，A を可予測集合とする．$[\![T]\!] \subset A$ なる可予測時刻 T はかならず $T = +\infty$ a.s. であるなら，A は消散的である．

証明. 背理法で示す．命題の仮定を満たす A が消散的でないとしよう．このとき $\varepsilon := P(\mathrm{pr}_1(A)) > 0$ とおけば，可予測断面定理より $\mathbb{F}$-可予測過程 T で $[\![T]\!] \subset T$ かつ $P[T < +\infty] \geq P(\mathrm{pr}_1(A)) - \varepsilon/2 = \varepsilon/2$ を満たすものが存在する．仮定より $T = +\infty$ a.s. となるはずなので，矛盾である． □

[*51] (i) の主張.

[*52] (ii) の主張.

[*53] 詳細は 1.5 節の諸々の命題を参照せよ.

[*54] 命題 1.5.7

[*55] $P(\{S < \infty\} \setminus L) = P(\{S = D_B\} \cap (\{S < \infty\} \setminus L) = P[S = D_B,\ S < \infty,\ (\omega, S(\omega)) \notin B] = 0$ に注意せよ.

系 1.6.12. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．このとき，$\mathbb{F}$-可予測集合 A に対して次の 2 条件は同値：

(i) A は消散的である．

(ii) 任意の可予測時刻 T に対して $A \cap [\![T]\!]$ が消散的になる．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii) は明らか．(ii) $\Longrightarrow$ (i) を示せばよい．可予測時刻 T は $[\![T]\!] \subset A$ を満たすと仮定する．(ii) より $[\![T]\!] = A \cap [\![T]\!]$ は消散的だから，$T = +\infty$ a.s.．このとき命題 1.6.11 により A は消散的である． □

定理 1.6.13. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とし，X, Y を可予測過程とする．任意の可予測時刻 T に対して $E[X_T 1_{\{T<\infty\}}] \geq E[Y_T 1_{\{T<\infty\}}]$ が成り立つなら，$X \geq Y$ が消散的集合を除いて成立する．特に，任意の可予測時刻 T に対して $E[X_T 1_{\{T<\infty\}}] = E[Y_T 1_{\{T<\infty\}}]$ なら，X と Y は区別不能である．

証明．$A = \{X < Y\}$ とすれば，A は可予測集合である．T を任意の可予測時刻とすれば，

$$\mathrm{pr}_1(A \cap [\![T]\!]) = \{\omega \in \Omega \mid (\omega, T(\omega)) \in A,\ T(\omega) < \infty\} = \{\omega \in \Omega \mid X_T(\omega) < Y_T(\omega),\ T(\omega) < \infty\}$$

であるが，仮定よりこれは P-零集合である．すなわち任意の可予測時刻 T について $A \cap [\![T]\!]$ は消散的となり，系 1.6.12 より A も消散的である．後半の主張は前半の主張より明らかである． □

定理 1.6.14. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，X と Y を可予測過程とする．任意の有界可予測時刻 T に対して $X_T \geq Y_T$ が a.s. で成り立つなら，$X \geq Y$ が消散的集合を除いて成立する．特に，任意の可予測時刻に対して $X_T = Y_T$ なら X と Y は区別不能である．

証明．$A := \{X < Y\}$ とすれば A は可予測集合である．A が消散的でないと仮定しよう．可予測断面定理より，可予測時刻 T で $[\![T]\!] \subset A$ かつ $P[T < \infty] > 0$ を満たすものがとれる．さらに，定数 $C > 0$ を $P[T \leq C] > 0$ となるように選ぶ．$S = T \wedge C$ とすれば S は有界可予測時刻で，さらに $S_{\{T \leq C\}}$ も可予測時刻である．$[\![S_{\{T\leq C\}}]\!] = [\![T_{\{T\leq C\}}]\!] \subset [\![T]\!] \subset A$ に注意すれば，

$$X_S 1_{\{T\leq C\}} = X_{S_{\{T\leq C\}}} 1_{\{S<\infty\}} < Y_{S_{\{T\leq C\}}} 1_{\{S<\infty\}} = Y_S 1_{\{T\leq C\}}$$

が分かる．すなわち，確率正の集合 $\{T \leq C\}$ 上では有界停止時刻 S について $X_S < Y_S$ が成り立つ．これは定理の仮定に矛盾する．後半の主張は前半の主張より明らかである． □

注意 1.6.15. 定理 1.6.13 および定理 1.6.14 において，可予測過程の部分を良可測過程，可予測時刻の部分を停止時刻に置き換えたものが成立する．証明は可予測時刻の場合と同様である[*56]．

定理 1.6.13 またその良可測バージョンの主張を用いるときは，有限な停止時刻だけではなく，必ず任意の停止時刻について調べなければならない．実際，M を一様可積分マルチンゲールで $M_0 = 0$ なるものとすれば，任意の有限停止時刻について

$$E[M_T 1_{\{T<\infty\}}] = E[M_T] = E[M_0] = 0$$

となるが，M は一般には消散的ではない．不等号が期待値ではなく a.e. で成り立っている場合は，任意の有界停止時刻を調べればよいというのが，定理 1.6.14 およびその良可測バージョンの主張である．その

[*56] 証明は He, Wang and Yan [10, p. 116] を見よ．

1.7 可予測時刻の予告可能性

次の定理は可予測時刻の特徴づけとして知られているものである．

定義 1.7.1. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，T を $\mathbb{F}$-停止時刻とする．次の条件満たす停止時刻列 (T_n) が存在するとき，T は可予告 (foretellable) であるという．

(i) $T_1 \leq T_2 \leq \cdots \leq T$.
(ii) $\lim_n T_n = T$.（各点収束）
(iii) $\{T > 0\}$ 上で $T_n < T$.

停止時刻列 (T_n) は T を予告 (foretell, announce) するという．

定理 1.7.2. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．このとき，可予告な $\mathbb{F}$-停止時刻は可予測である[*57]．

証明．(T_n) を T の予告列とする．このとき定理 1.4.2 より

$$[\![T, \infty[\![= \{T = 0\} \times \{0\} \cup (]\!]T_n, \infty[\![) \in \mathscr{P}(\mathbb{F})$$

となるから，T は可予測時刻である． □

可予告停止時刻の概念を用いると，可予測 σ-加法族は次のように特徴付けられる．

命題 1.7.3. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．

$$\mathscr{C} = \{[\![S, T[\![\mid S, T \text{ は可予告停止時刻，} S \leq T\}$$

としたとき，$\mathscr{P}(\mathbb{F}) = \sigma(\mathscr{C})$ が成り立つ．

証明．命題 1.5.10 の証明において用いた停止時刻 0_A, $(1/n)_A$, $T + 1/n$ は，実はどれも可予告停止時刻である．よって命題 1.5.10 の証明がそのまま適用できる． □

定理 1.7.2 より可予測時刻は可予告となるが，逆は成立するだろうか？実は全く一般の可予測時刻は可予告にはならないが,「a.s. で可予告」という，もう少し弱い条件を満たすことは知られている．その主張の証明が本節の目的である．まずは a.s. で可予告という概念を導入しよう．

定義 1.7.4. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，T を $\mathbb{F}$-停止時刻とする．

(i) $T_1 \leq T_2 \leq \cdots \leq T$.
(ii) $\lim_n T_n = T$ a.s.
(iii) $\{T > 0\}$ 上 a.s. で $T_n < T$.

を満たす停止時刻列 (T_n) が存在するとき，停止時刻 T は a.s. で可予告であるという[*58]．

[*57] He, Wang, Yan などでは，これと対応する命題において T_n, T どちらも弱停止時刻のレベルで考えているため，付加条件 $\{T = 0\} \in \mathscr{F}_0$ が必要である．ここでの可予告性と混同しないよう注意されたし．

[*58] a.s. で可予告たる停止時刻を可予測時刻と定義する文献もある．（例えば，Protter [13] など．）

a.s. で可予告な停止時刻の性質を調べる．

補題 1.7.5. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とし，$\mathscr{S}$ を a.s. で可予告な停止時刻全体の集合とする．

(i) $0 \in \mathscr{S}$ かつ $+\infty \in \mathscr{S}$．

(ii) $S, T \in \mathscr{S}$ なら $S \wedge T, S \vee T \in \mathscr{S}$．

(iii) (T_n) を $\mathscr{S}$ の元の単調増加列とすれば，$\bigvee_n T_n \in \mathscr{S}$．

(iv) $\mathbb{F}$ は右連続とする[*59]．(T_n) を $\mathscr{S}$ の元の定常 (stationary) な単調減少列とすれば，$\bigwedge_n T_n \in \mathscr{S}$．ただし，$(T_n)$ が定常とは次の条件を満たすということである：任意の $\omega \in \Omega$ に対してある $n_\omega \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq n_\omega$ ならば $S_n(\omega) = S_{n_\omega}(\omega)$ が成り立つ．

(v) $S \in \mathscr{S}$ かつ停止時刻 T が $S = T$ a.s. を満たすなら，$T \in \mathscr{S}$．

(vi) $\mathbb{F}$ は右連続とする．$S, T \in \mathscr{S}$ なら $S_{\{S<T\}} \in \mathscr{V}$．

証明．(i) $T_n \equiv 0$ 自身が 0 の予告列なので，0 は可予告である．（よって a.s. で可予告.）∞ の予告列としては $T_n = n$ をとれば良い．

(ii) (S_n) は S を，(T_n) は T を，それぞれ a.s. に予告する列とする．このとき $(S_n \wedge T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $S \wedge T$ の a.s. 予告列であり，$(S_n \vee T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $S \vee T$ の a.s. 予告列である．

(iii) (T_n) を $\mathscr{S}$ の増加列とし，$T = \bigvee_n T_n$ とする．各 n について，T_n を a.s. で予告する停止時刻列 $(S_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ をとる．

$$S_k = S_{1,k} \vee \cdots \vee S_{k,k}$$

と定義すれば，(S_k) が T を a.s. で予告する列である．

(iv) (T_n) を定常に単調減少する $\mathscr{S}$ 列とし，$T = \bigwedge_n T_n$ とする．各 n に対して，T_n を a.s. で予告する列 $(S_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ をとる．このとき，適当な部分列を取り直すことによって

$$P\left[e^{-S_{n,k}} - e^{-T_n} > \frac{1}{2^k}\right] \leq \frac{1}{2^{n+k+1}}$$

が任意の n, k について成り立っているとしてよい．$S_k = \inf_n S_{n,k}$ と定めれば[*60]，(S_k) が T を a.s. で予告することを示す．(S_k) が増加的であることは明らかである．任意の n, k について $S_{n,k} \leq T_n$ だから，任意の k で $S_k = \inf_n S_{n,k} \leq \inf_n T_n = T$ が成り立つ．$\{T > 0\}$ では任意の n で $T_n \geq T > 0$ となり，よって $\{T > 0\}$ 上任意の n, k で $T_n > S_{n,k}$ a.s. が満たされる．さらに T_n が定常的であることを用いれば，$\{T > 0\}$ 上で $S_k < T$ a.s. となることが分かる．あとは $\lim_k S_k = T$ a.s. を示せばよい．$S = \lim_k S_k$ と定義する．このとき

$$\begin{aligned}
P\left[e^{-S} - e^{-T} > \frac{1}{2^k}\right] &\leq P\left[e^{-S_k} - e^{-T} > \frac{1}{2^k}\right] \\
&\leq P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{e^{-S_{n,k}} - e^{-T} > \frac{1}{2^k}\right\}\right) \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{e^{-S_{n,k}} - e^{-T} > \frac{1}{2^k}\right\}\right)
\end{aligned}$$

[*59] Dellacherie & Meyer [4] などでは，フィルトレーションの右連続性は仮定されていない．それは a.s. で可予告の定義で，予告列として弱停止時刻を用いているからである．

[*60] これが停止時刻となるために，$\mathbb{F}$ の右連続性を仮定した

$$\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+k}} \leq \frac{1}{2^k}$$

が成立．これで $S = T$ a.s. が示された．

(v) $S \in \mathscr{S}$ とし，(S_n) は S を a.s. で予告する停止時刻列とする．このとき $(S_n \wedge T)_{n\in\mathbb{N}}$ は T を a.s. で予告する列である．

(vi) $S, T \in \mathscr{S}$ とし，対応する a.s. 予告列 (S_n) と (T_n) を考える．

$$U_n^m = n \wedge (S_n)_{\{S_n < T_m\}}$$

と定義すれば，停止時刻列 $(U_n^m)_n$ は停止時刻 $U_m = S_{\{S\leq T_m\}\cap\{T_m>0\}}$ を a.s. で予告する[*61]．よって $U_m \in \mathscr{S}$ である．(U_m) は定常な単調減少列だから，(iv) により $U := \bigwedge_m U_m \in \mathscr{S}$ となる．$U = S_{\{S<T\}}$ だから，(v) により $S_{\{S<T\}} \in \mathscr{S}$ が分かる． □

定理 1.7.6. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を右連続なフィルター付き確率空間する．任意の $\mathbb{F}$-可予測時刻は a.s. で可予告である．

証明. $\mathscr{S}$ を a.s. で可予告な停止時刻全体の集合とする．補題 1.7.5 より $\mathscr{S}$ は補題 1.6.8 の条件 (i)–(iv) を満たす．

$$\mathscr{C}_0 = \{[\![S, T[\![\mid S, T \text{ は a.s. で可予告な停止時刻},\ S \leq T\}$$

と定め，$\mathscr{C}$ を集合半代数 $\mathscr{C}_0$ によって生成される集合代数とする．命題 1.7.3 より $\mathscr{P}(\mathbb{F}) \subset \sigma(\mathscr{C})$ が成立する．このとき，$\sigma(\mathscr{C})$ の元についても断面定理が成立する．

証明は可予測断面定理とほとんど同じだが，念のために書いておこう．$A \in \sigma(\mathscr{C})$ とし，$\varepsilon > 0$ を任意に選ぶ．このとき命題 1.6.7 より，$B \in \mathscr{C}_\delta$ で

$$B \subset A$$
$$P(\mathrm{pr}_1(B)) \geq P(\mathrm{pr}_1(A)) - \varepsilon$$

を満たすものが存在する．さらに補題 1.6.8 より $[\![D_B]\!] \subset B$ が成立し，a.s. で可予告な停止時刻 $S \in \mathscr{S}$ で $S = D_B$ a.s. を満たすものがとれる．

$$L = \{\omega \in \Omega \mid (\omega, S(\omega)) \in B\} = \mathrm{pr}_1([\![S]\!] \cap B)$$

と定義すれば $L \in \mathscr{F}_S$ となるから（注意 1.4.6），命題 1.2.5 により $T := S_L$ はまた停止時刻となる．定義より $[\![T]\!] \subset B \subset A$ かつ $T = S = D_B$ a.s. が成り立つ．S は a.s. で可予告だから，T もまた a.s. で可予告である．これより

$$P[T < \infty] = P[D_B < \infty] = P(\mathrm{pr}_1(B)) \geq P(\mathrm{pr}_1(A)) - \varepsilon$$

を得る．

T を可予告時刻とすれば，$[\![T]\!] \subset \mathscr{P} \subset \sigma(\mathscr{C})$ である．よって，任意の ε に対してある $S^\varepsilon \in \mathscr{S}$ で，$[\![S^\varepsilon]\!] \subset [\![T]\!]$ かつ $P[S^\varepsilon < \infty] \geq P[T < \infty] - \varepsilon$ を満たすようなものが存在する．

$$T_n := S^{1/2} \wedge \cdots \wedge S^{1/n}, \quad n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$$

[*61] $\{T_m > 0\} \in \mathscr{F}_{T_m}$ だから $\{T_m > 0\} \cap \{T_m < S\} \in \mathscr{S}$ である．（命題 1.2.8）$\{T_m > 0\} \in \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_S$ であることに注意すれば，

$$\{S \leq T_m\} \cap \{T_m > 0\} = \{T_m > 0\} \setminus [\{T_m > 0\} \cap \{T_m < S\}] \in \mathscr{F}_S$$

が分かる．よって U_m は停止時刻となる．

と定義すれば，補題 1.6.8.(iv) より $T_n \in \mathscr{S}$ であって，さらに (T_n) は定常な減少列となる[*62]．したがって補題 1.6.8.(iv) より $\lim_n T_n \in \mathscr{S}$ が分かる．また，定義より $\lim_n T_n = T$ a.s. である．

$\because$ 実際，(T_n) は定常な減少列だから任意の $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ で

$$\begin{aligned}P\left[\lim_{n\to\infty} T_n = T,\ T < \infty\right] &= P[\exists n,\ T_n = T < \infty] \\ &\geq P[S^{1/n} = T < \infty] \geq P[S^{1/n} < \infty] \geq P[T < \infty] - \frac{1}{n}\end{aligned}$$

が成立．よって $P[\lim_n T_n = T,\ T < \infty] \geq P[T < \infty]$ である．逆向きの不等号は明らかなので $P[\lim_n T_n = T,\ T < \infty] \geq P[T < \infty]$ となる．これより

$$\begin{aligned}P\left[\lim_{n\to\infty} T_n = T\right] &= P\left[\lim_{n\to\infty} T_n = T,\ T < \infty\right] + P\left[\lim_{n\to\infty} T_n = T,\ T = \infty\right] \\ &= P[T < \infty] + P[T = \infty] = 1\end{aligned}$$

が示される．

補題 1.6.8.(v) により T も a.s. で可予告であることが分かる． □

定理 1.7.7. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を通常の条件を満たすフィルター付き確率空間する．このとき任意の $\mathbb{F}$-可予測時刻は可予告である．

証明．T を可予測時刻とし，(S_n) を T を a.s. で予告する停止時刻列とする．

$$N = \left[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{S_n < T\} \cap \left\{T = \lim_{n\to\infty} S_n\right\}\right] \cup \{T = 0\}$$
$$T_n = (S_n)_E \wedge \left(T - \frac{1}{n}\right)^+_{\Omega\setminus E}$$

と定義する．このとき $\Omega \setminus E$ は P-零集合であり，完備製性より $E \in \mathscr{F}_0$．よって $(S_n)_E$ は停止時刻であり，$(S_n)_E = T_n$ a.s. だから系 (1.4.12) により T_n は停止時刻となる．(T_n) は T の予告列であることは，定義より分かる． □

補題 1.7.8. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を右連続なフィルター付き確率空間とする．

(i) $(\Omega, \mathscr{F}^P, \mathbb{F}^P, P)$ 上の任意の可予測時刻 T に対して，$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ 上の可予測時刻で T と確率 1 で等しいものが存在する．

(ii) 任意の $\mathbb{F}^P$-可予測過程 X に対して，$\mathbb{F}$-可予測過程で X と区別不能なものが存在する．

証明．(i) (T_n) を $\mathbb{F}^P$-停止時刻の列で，単調増大に T に収束し，$\{T > 0\}$ なる集合上では $T_n < T$ を満たすものとする．T'_n を $\mathbb{F}$-停止時刻で $T'_n = T_n$ a.s. なるものとし[*63]，$T' = \sup_n T'_n$ と定める．さらに $A_n = \{0 < T' \neq T'_n\}$，$T''_n = (T'_n)_{A_n}$，$S_n = n \wedge \sup_{m\leq n} T''_m$ と定義しよう．命題 1.2.10 より T' は $\mathbb{F}$-停止時刻である．命題 1.2.8 から $A_n = \{T'_n < T'\} \in \mathscr{F}_{T'_n}$ となるので，命題 1.2.5 を用いれば $T''_n = (T'_n)_{A_n}$ も $\mathbb{F}$-停止時刻となる．S_n は $\mathbb{F}$-停止時刻で（命題 1.2.10），定義より明らかに単調増加である．

ここで $S := \bigvee_n S_n = \lim_n S_n$ と定めよう．この S が求める可予測時刻であるというのが，我々の主張したいことである．

[*62] 条件 $[\![S^\varepsilon]\!] \subset [\![T]\!]$ より，各 S^ε は有限な場合には T と同じ値をとる．

[*63] このような停止時刻の存在は，補題 1.2.11 で論じたのだった．

まずは $S=\bigvee_n T''_n$ であることを確かめよう．実際，定義より明らかに $S\le\bigvee_n T''_n$ である．$S(\omega)=+\infty$ の時は逆向きの不等号も明らかである．$S(\omega)<+\infty$ のとき，$S(\omega)<\bigvee_n T''_n(\omega)<+\infty$ であると仮定しよう[*64]．このとき，十分大きな n_0 をとれば $\bigvee_n T''_n(\omega)<n_0$ かつ $\bigvee_{n\le n_0} T''_n(\omega)>S(\omega)$ と出来るので $S(\omega)<n_0\wedge\bigvee_{n\le n_0} T''_n(\omega)$ となって矛盾である．したがって $S=\bigvee_n T''_n$ であり，さらに $S=\bigvee_n T''_n\ge\bigvee_n T'_n=T'$ も分かる．

$\omega\in\{S>0\}$ として，$S_n(\omega)$ を調べよう．$n<\bigvee_{m\le n} T''_m(\omega)$ のとき，

$$S(\omega)=n<\bigvee_{m\le n} T''_m(\omega)\le S(\omega)$$

である．$\bigvee_{m\le n} T''_m(\omega)\ge n$ の時は，任意の $m\le n$ について $\omega\in A_m$ なので，

$$S(\omega)=\bigvee_{m\le n} T''_m(\omega)<T'(\omega)\le S(\omega)$$

となる．いずれの場合も $S_n(\omega)<S(\omega)$ を満たすことが分かる．ここまでの議論により (S_n) は S の予告列であることが分かったので，S は $\mathbb{F}$-可予測時刻である．

ここで，$P(\Gamma\triangle\{T=0\})=0$ となるような $\Gamma\in\mathscr{F}_0$ を選ぶ[*65]．このとき，定数時刻 0 の制限 0_Γ はまた可予測時刻である[*66]．$\widetilde{S}=S\wedge 0_\Gamma$ とすれば，$\widetilde{S}$ が求める可予測時刻であることを示す．

$$\begin{aligned}
P[T_n\ne T''_n,T>0]&\le P[T_n\ne T'_n,T>0]+P[T'_n\ne T''_n,T>0]\\
&=P[T'_n\ne T''_n,T>0]\\
&=P((\Omega\setminus A_n)\cap\{T'_n<+\infty\}\cap\{T>0\})\\
&=P[T'_n=T',T'_n<+\infty,T>0]\\
&=P[T_n=T,T_n<+\infty,T>0,T_n=T'_n,T=T']\\
&\le P[T=0,T>0]=0
\end{aligned}$$

が成立つ．したがって

$$\begin{aligned}
P[\widetilde{S}\ne T]&=P[\widetilde{S}\ne T,T=0]+P[\widetilde{S}\ne T,T>0]\\
&=P(\{T\ne 0\}\cap\{T=0\}\cap\Gamma)+P(\{S\ne T\}\cap\{T>0\}\cap[\Omega\setminus\Gamma])\\
&\le\sum_{n\in\mathbb{N}}P[T_n\ne T''_n,T>0]=0
\end{aligned}$$

となり，$S=T$ a.s. が示された．

(ii) $X=1_{A\times\{0\}}$ $(A\in\mathscr{F}_0\vee\mathscr{N}^P)$ の場合：$A'\in\mathscr{F}_0$ で $P(A\triangle A')=0$ となるものが存在する．$X'=1_{A'\times\{0\}}$ とすれば，X' は明らかに $\mathbb{F}$-可予測である．さらに

$$\{(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+\mid X(\omega,t)\ne X'(\omega,t)\}=\{(\omega,t)\mid t=0,\omega\in A\triangle A'\}=(A\triangle A')\times\{0\}$$

だから，

$$P(\mathrm{pr}_1(\{X\ne X'\}))=P(A\triangle A')=0$$

よって X と X' は区別不能である．

*64 $S(\omega)<+\infty$ かつ $\bigvee_n T''_n=+\infty$ とはならないことに注意．
*65 T は $\mathbb{F}^P$-停止時刻なので，$\{T=0\}\in\mathscr{F}_0\vee\mathscr{N}^P$ である．
*66 命題 1.5.7

$X = 1_{[\![0,T]\!]}$（T は $\mathbb{F}^P$-停止時刻）の場合：命題 1.2.11 より $\mathbb{F}$-停止時刻 T' で $T = T'$ a.s. を満たすものが存在するから，$X' = 1_{[\![0,T']\!]}$ と定義する．このとき

$$\{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid X(\omega,t) \neq X'(\omega,t)\} = [\![0,T]\!] \triangle [\![0,T']\!] =]\!]T,T']\!] \cup]\!]T',T]\!]$$

であるから，

$$\begin{aligned} P(\mathrm{pr}_1\{X \neq X'\}) &\leq P(\mathrm{pr}_1(]\!]T,T']\!])) + P(\mathrm{pr}_1(]\!]T',T]\!])) \\ &= P[\exists r \in \mathbb{Q}_+, T < r \leq T'] + P[\exists r \in \mathbb{Q}_+, T' < r \leq T] = 0. \end{aligned}$$

よって X と X' は区別不能である．

一般の場合は単調族定理を用いればよい． □

1.8 到達不能停止時刻

この節では，可予測時刻と「直交」する停止時刻のクラスを導入する．

定義 1.8.1. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．$\mathbb{F}$-停止時刻 T は，任意の可予測時刻 S に対して $P[T = S < +\infty] = 0$ とを満たすとき，到達不能（totally inaccessible）であるという．

定義 1.8.1 の条件 $P[T = S < +\infty] = 0$ は $P(\mathrm{pr}_1([\![T]\!] \cap [\![S]\!])) = 0$ と同値であり，すなわち $[\![T]\!] \cap [\![S]\!]$ が消散的であるということである．

注意 1.8.2. T が到達不能で，S を停止時刻で $[\![S]\!] \subset [\![T]\!]$ を満たすものとする．此の時，S はまた到達不能である．実際，仮定より $S(\omega) < +\infty$ なら $S(\omega) = T(\omega)$ となるので，任意の可予測時刻 R に対して

$$P[R = S < +\infty] = P[R = T, S < \infty] \leq P[R = T < \infty] = 0$$

となる．

定理 1.8.3. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とし，T を $\mathbb{F}$-停止時刻とする．このとき，可予測時刻の列 (S_n) と $\mathscr{F}_T$-可測集合 $A \subset \{T < +\infty\}$ で

(i) $\mathbb{F}$-停止時刻 T_A は到達不能．
(ii) $\mathbb{F}$-停止時刻 $T_{\Omega \setminus A}$ は $[\![T_{\Omega \setminus A}]\!] \subset \bigcup_n [\![S_n]\!]$ を満たす．

を満たすものが存在する．さらに，A は P-零集合の差を除いて一意に定まる．

定理 1.8.3 に出てくる停止時刻 T_A は T の到達不能部分 (inaccessible part)，$T_{\Omega \setminus A}$ は到達可能成分 (accessible part) と呼ばれる[*67]．各成分は a.s. の範囲で一意に定まるが，停止時刻列 (S_n) は必ずしも一意ではない．T 自身が到達不能ならば，到達不能部分は T であり，到達可能部分は $+\infty$ である．また，T が可予測時刻ならば，到達不能部分は $+\infty$ であり，到達可能部分 T である．

[*67] 一般に停止時刻 T が適当な可予測時刻の列 (T_n) に対して $[\![T]\!] \subset \bigcup_n [\![T_n]\!]$ なる関係を満たすとき，T は到達可能 (accessible time) と呼ばれる．

証明．可予測時刻の有限族 $(S_i)_{i\in I}$ に対して $B((S_i)_{i\in I}) = \bigcup_i \{T = S_i < \infty\}$ と定めよう．このとき，命題 1.2.8 より $B((S_i)_{i\in I}) \in \mathscr{F}_T$ である．

$$\mathscr{B} := \{B((S_i)_{i\in I}) \mid (S_i)_{i\in I} \text{ は可予測時刻の有限族.}\} \subset \mathscr{F}_T$$

とすれば，命題 A.2.2（とその後の注意 A.2.3）より本質的上限 $B = \operatorname{ess\,sup} \mathscr{B} \in \mathscr{F}_T$ が存在する．B は特に $\mathscr{B}$ の列の和で書けるのであったから，

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\in I_n} \{T = S_{n,i} < \infty\}$$

のように表現される．ここで $A = \{T < +\infty\} \setminus B$ とすれば，

$$[\![T_{\Omega\setminus A}]\!] = [\![T_B]\!] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\in T_n} [\![S_{n,i}]\!]$$

が分かる．あとは，T_A が到達不能であることを示せばよい．T_A が到達不能でないと仮定すれば，ある可予測時刻 S に対して $P[T_A = S < \infty] > 0$ 成立つ．このとき，

$$\begin{aligned} P([\Omega\setminus B] \cap B(S)) &= P([\Omega\setminus B] \cap \{T < \infty\} \cap \{T = S < \infty\}) \\ &= P(A \cap \{T = S < \infty\}) = P[T_A = S < \infty] > 0 \end{aligned}$$

となるが，$B = \operatorname{ess\,sup} \mathscr{B}$ から $P([\Omega\setminus B] \cap B(S)) = 0$ となるはずなので矛盾である．したがって，T_A が到達不能だと分かる．一意性は構成法より分かる． □

一般に停止時刻の制限について $[\![T]\!] = [\![T_A]\!] \sqcup [\![T_{\Omega\setminus A}]\!]$ が成り立つことに注意しておく．

定理 1.8.4. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とし，X を càdlàg 適合過程とする．このとき，狭義に正の停止時刻列 (T_n) で次の条件を満たすものが存在する．

(i) $\{\Delta X \neq 0\} \subset \bigcup_n [\![T_n]\!]$.
(ii) T_n は可予測時刻であるか，または到達不能時刻である．
(iii) $n \neq m$ なら $[\![T_n]\!] \cap [\![T_m]\!] = \emptyset$.

定理 1.8.4 における停止時刻列を，càdlàg 過程 X のジャンプの標準的な取り付くし列 (standard sequence of stopping times exhausting the jumps of X) ということがある．

証明．命題 1.3.13 より，(i) を満たす狭義に正の停止時刻列 $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在する．各 R_n に対して，定理 1.8.1 の分解 $[\![R_n]\!] = [\![R_n^a]\!] \sqcup [\![R_n^i]\!]$ を考える．（ただし，R_n^a は到達可能部分，R_n^i は到達不能部分を表す．）さらに，各 R_n^a に対して $[\![R_n^a]\!] \subset \bigcup_k [\![R_{n,k}]\!]$ を満たす可予測時刻列がとれる[*68]．ここで $\{R_n^i, R_{n,k}; n,k\in\mathbb{N}\}$ に適当に順番を付け直した列を $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ とすれば，これは定理の条件 (i) と (ii) を満たす．あとは，グラフが互いに素となるようにこれらの停止時刻列を変形すればよい[*69]．ここで

$$N_1 = \{n\in\mathbb{N} \mid S_n \text{ は可予測時刻.}\}, \quad N_2 = \{n\in\mathbb{N} \mid S_n \text{ は到達不能時刻.}\}$$

*68 到達可能時刻の定義より．

*69 $\{\Delta X \neq 0\}$ は良可測であるからであるから，これらの停止時刻列のグラフが互いに素になるような変形自体が可能なことは既に示したのだった．（補題 1.3.11 および命題 1.3.13）ここでのポイントは，停止時刻列が到達不能時刻または可予測時刻のみからなるように変形が出来るかどうかである．

とする．これを用いて，求める停止時刻列 (T_n) を帰納的に定義していく．$T_0 = S_0$ とする．さらに

$$B_n = \begin{cases} \bigcap_{k \le n-1, k \in N_1} \{\omega \in \Omega \mid S_k(\omega) \neq S_n(\omega)\} & n \in N_1 \\ \left(\bigcap_{k \in N_1} \{S_k \neq S_n\} \right) \cap \left(\bigcap_{k \le n-1, k \in N_2} \{S_k \neq S_n\} \right) & n \in N_2 \end{cases}$$

に対して $T_n = (S_n)_{B_n}$ とする．$n \in N_1$ なら B_n は $\mathscr{F}_{S_n-}$ 可測なので[*70]，$T_n = (S_n)_{B_n}$ は可予測時刻である．また $n \in N_2$ なら $B_n \in \mathscr{F}_{S_n}$ なので，$T_n = (S_n)_{B_n}$ は停止時刻である．$[\![T_n]\!] \subset [\![S_n]\!]$ で S_n は到達不能なので，注意 1.8.2 よりこれは到達不能時刻である．この停止時刻が (iii) を満たすことは定義より明らかである． □

この定理の応用として，可予測な痩せた集合の性質を調べる．

補題 1.8.5. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．

(i) A は可予測な痩せた集合とする．このとき可予測時刻列 (T_n) で，$[\![T_n]\!] \cap [\![T_n]\!] = \emptyset$，$[\![T_n]\!] \subset A$ および $A \setminus \bigcup_n [\![T_n]\!]$ が消散的になるようなものが存在する．

(ii) フィルター付き確率空間が通常の条件を満たすならば，A は可予測時刻からなる取りつくし列を持つ．

証明. (i) A は可予測なる痩せた集合とし，$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を A についての取り付くし列とする[*71]．T_n の定理 1.8.3 の分解における到達可能部分を T'_n，到達不能部分を T''_n で表すことにする．定理 1.8.3 より，各 n に対して可予測時刻の列 $(S_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ で $[\![T'_n]\!] \subset \bigcup_k [\![S_{n,k}]\!]$ を満たすものが取れる．いま $A' = A \cap \bigcup_{n,k} [\![S_{n,k}]\!]$ とおけばこれは可予測集合なので，$A \setminus A'$ も可予測集合である．定理 1.6.9 により可予測時刻 S で $[\![S]\!] \subset A \setminus A'$ なるものが存在する．

$$[\![S]\!] \subset A \setminus A' = A \setminus \bigcup_{n,k} [\![S_{n,k}]\!] \subset A \setminus \bigsqcup_n [\![T'_n]\!]$$

であることに注意すれば，$[\![S]\!] \subset \bigsqcup_n [\![T''_n]\!]$ が分かる．いま S は可予測時刻，T''_n は到達不能時刻であることから

$$P(S < \infty) = P\left(\bigcup_n \{S = T''_n < \infty\} \right) \le \sum_n P[S = T''_n < \infty] = 0$$

となり，$S = +\infty$ a.s. が成立．命題 1.6.11 により $A \setminus A'$ は消散的であることが分かる．

ここまで用いた二重列 $(S_{n,k})$ から，(i) の条件を満たす可予測時刻の列を構成しよう．$(S_{n,k})$ の添え字を適当に付け替えて $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ とおく．

$$C_n = \bigcap_{0 \le m \le n-1} \{\omega \in \Omega \mid R_m(\omega) \neq R_n(\omega)\}$$
$$D_n = C_n \cap \{\omega \in \Omega \mid (\omega, R_n(\omega)) \in A\}$$

とすれば，補題 1.4.5 と命題 1.5.8 より $D_n \in \mathscr{F}_{R_n-}$ となる．命題 1.5.7 より $R'_n = (R_n)_{D_n}$ は可予測時刻であり，構成法より $A' = \bigcup_n [\![R'_n]\!]$ および $[\![R'_n]\!] \cap [\![R'_m]\!] = \emptyset$ $(m \neq n)$ が分かる．

(ii) A' の取り付くし列は既に得ているので，$A \setminus A'$ の取り付くし列を構成すればよい．仮定より

$$A = \left(\bigsqcup_n [\![T'_n]\!] \right) \sqcup \left(\bigsqcup_n [\![T''_n]\!] \right)$$

---

*70 命題 1.5.8

*71 すなわち，$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{F}$-停止時刻の列で $A = \bigsqcup_n [\![T_n]\!]$ を満たす．

であったから，

$$A \setminus A' \subset A \setminus \bigsqcup_n [\![T'_n]\!] = \bigsqcup_n [\![T''_n]\!]$$

が成立．

$$E_n = \{\omega \in \Omega \mid (\omega, T''_n(\omega)) \in A \setminus A'\} \in \mathscr{F}_{T''_n}$$

とすれば[*72]，$U_n := (T''_n)_{E_n}$ は停止時刻で $A \setminus A' = \bigcup_n [\![U_n]\!]$ かつ $[\![U_n]\!] \cap [\![U_m]\!] = \emptyset$ $(n \neq m)$ を満たす．いま，$A \setminus A'$ が消散的であったことを思い出せば，

$$P[U_n < \infty] = P(\mathrm{pr}_1([\![U_n]\!])) \leq P(\mathrm{pr}_1(A \setminus A')) = 0$$

したがって $U_n = +\infty$ a.s. であり，命題**??**より U_n は可予測時刻である[*73]．

(R_n) と (U_n) を併せて新たに (S_n) という列を作れば，(S_n) は可予測時刻の列であって

$$A = (A \setminus A') \cup A' = \left(\bigsqcup_n [\![U_n]\!]\right) \sqcup \left(\bigsqcup_n [\![R'_n]\!]\right) = \bigsqcup_n [\![S_n]\!]$$

を満たす．よって補題の主張が示された． □

命題 1.8.6. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，X を càdlàg な $\mathbb{F}$-可予測過程とする．このとき，X のジャンプの取り付くし列で，狭義に正の可予測時刻からなるものが存在する．さらに任意の到達不能時刻 T に対して $\Delta X_T 1_{\{T<\infty\}} = 0$ a.s. が成り立つ．

証明. (T_n) を X のジャンプの取りつくし列で，$]0, \infty]$ に値をとるものとしよう[*74]．$m \in \mathbb{N}$ に対して

$$B_m = \left[\frac{1}{m-1}, \frac{1}{m}\right[,$$

$$C_{n,m} = \left\{\omega \in \Omega \;\middle|\; \left|\Delta X_{T_n} 1_{\{T_n < +\infty\}}\right| \in B_m\right\}$$

と定める[*75]．このとき $C_{n,m} \in \mathscr{F}_{T_n}$ であり[*76]，よって $S^{n,m} := (T_n)_{C_{n,m}}$ は停止時刻である[*77]．また

$$Y_t^{(m)}(\omega) := \sum_{n \in \mathbb{N}} 1_{[\![S^{n,m}, +\infty[\![}(\omega, t)$$

とすれば，$Y^{(m)}$ は càdlàg で増加的なパスを持つ $\mathbb{N}$-値適合過程である[*78]命題 1.3.8 (ii) より

$$R^{m,k}(\omega) := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid Y_t^{(m)}(\omega) \geq k\} \quad k \in \mathbb{N}$$

は停止時刻となる[*79]．さらに，$R^{m,k}$ は実は可予測集合

$$]\!]R^{m,k-1}, +\infty[\![\cap \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid |\Delta X_t(\omega)| \in B_m\}$$

[*72] E_n の可測性は補題 1.4.5 より分かる．

[*73] フィルター付き確率空間が通常の条件を満たすことはここで用いる．

[*74] $\{\Delta X \neq 0\} = \bigsqcup_n [\![T_n]\!]$ ということである．存在は命題 1.3.13 より従う．

[*75] ただし，ここでは $1/0 = +\infty$ と考える．

[*76] X は良可測なので，$X_{T_n} 1_{\{T_n < \infty\}}$ は $\mathscr{F}_{T_n}$ 可測である．（命題 1.3.2）

[*77] この停止時刻列 $(S^{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ は T_n をグラフが disjoint な成分に分解したものである．

[*78] 適合性については補題 1.3.3 を見よ．これが $\mathbb{N}$-値過程として well-defined なことを確かめるには，(ω, t) が（n について）無限個の $[\![S^{n,m}, +\infty[\![$ に入ることが無いことを言えばよい．そのようなことが起こると無限個の n について $S^{n,m}(\omega) = (T_n)_{C_{n,m}}(\omega) \leq t$ であるが，$S^{n,m}$ は X のジャンプ時刻でしかもジャンプ幅が $1/(m-1)$ より大きいものを見てる居るから，$[0, t]$ 上にはそのような時刻は有限個しかない．（命題**??**を見よ．）

[*79] この停止時刻列 $(R^{m,k})_{k \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ は，パスを観察して $(S^{n,m})_{n \in \mathbb{N}}$ を“起こる順番”に並び替えたものに他ならない．

へのデビューとなっている．[*80]さらにこのとき

$$[\![R^{m,k}]\!] \subset]\!]R^{m,k-1}, +\infty[\![\cap \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid |\Delta X_t(\omega)| \in B_m\}$$

であるから[*81]，命題 1.5.13 より $R^{m,k}$ は可予測時刻である．$(S^{n,m})$ は (T_n) は分解したもので，$(R^{m,k})$ は $(S^{n,m})$ を並び替えたものだったから，

$$\{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid \Delta X_t(\omega) \neq 0\} = \bigsqcup_{m\in\mathbb{N},k\in\mathbb{N}_{\geq 1}} [\![R^{m,k}]\!]$$

がすぐに分かる．また $(R^{m,k})$ は可予測時刻の列だったから，任意の到達不能時刻 T に対して

$$P[\Delta X_T 1_{\{T<+\infty\}} \neq 0] = \sum_{m,k} P[T = R^{m,k} < +\infty] = 0$$

が成立する． □

命題 1.8.6 を用いると，次のような可予測過程の特徴づけが得られる．

定理 1.8.7. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，X を càdlàg な $\mathbb{F}$-適合過程とする．このとき X が $\mathbb{F}$-可予測であることは，次の 2 条件が成り立つことと同値である．

(i) 狭義に正の可予測時刻列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で，$\{\Delta X \neq 0\} \subset \bigcup_n [\![T_n]\!]$ を満たすものが存在する．
(ii) 任意の可予測時刻について，$X_T 1_{\{T<\infty\}}$ は $\mathscr{F}_{T-}$-可測である．

証明．*Step 1*：**可予測** $\Longrightarrow$ *(i)* **かつ** *(ii)*. 可予測ならば (i) が成り立つことは，命題 1.8.6 から従う．可予測ならば (ii) を満たすことは，命題 1.4.7 から分かる．

Step 2；*(i)* **かつ** *(ii)* $\Longrightarrow$ **可予測**．狭義に正の可予測時刻列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で，$\{\Delta X \neq 0\} \subset \bigcup_n [\![T_n]\!]$ を満たすものを取る．命題 1.3.11 より (T_n) のグラフは互いに共通部分を持たないとしてよい[*82]．

$$X = X_- 1_{\bigcap_n [\![T_n]\!]} + \sum_{n\in\mathbb{N}} X_{T_n} 1_{[\![T_n]\!]}$$

と表現できることに注意する．X_- は可予測であることと各 T_n が可予測時刻であることから，$X_- 1_{\bigcap_n [\![T_n]\!]}$ は可予測である[*83]．また，条件 (ii) より $X_{T_n} 1_{\{T_n<\infty\}} \in \mathscr{F}_{T_n-}$ であるから，命題 1.5.9 により

$$X_{T_n} 1_{[\![T_n]\!]} = X_{T_n} 1_{\{T_n<\infty\}} (1_{[\![T_n,\infty[\![} - 1_{]\!]T_n,\infty]\!]})$$

も可予測である．したがって X も可予測となる． □

完備性の仮定のもとでは，可予測過程の特徴づけは次のようになる．

定理 1.8.8. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を完備なフィルター付き確率空間，X を càdlàg な $\mathbb{F}$-適合過程とする．このとき X が $\mathbb{F}$-可予測であることは，次の 2 条件が成り立つことと同値である．

(i) 任意の到達不能時刻 S について，$\Delta X_S 1_{\{S<\infty\}} = 0$ a.s.

[*80] $t \in \{t \in \mathbb{R}_+ \mid Y_t^{(m)}(\omega) \geq k\}$ とは $[0,t]$ の区間でちょうど k 回だけ大きさが $[1/(m-1), 1/m[$ の範囲のジャンプが起こるということである，という事実に注意せよ．
[*81] 一つ前の注釈と同様．
[*82] 命題 1.3.11 は停止時刻に関するものだが，可予測時刻についても全く同様に証明できる．
[*83] 命題 1.4.8 と可予測時刻の性質より．

(ii) 任意の可予測時刻について，$X_T 1_{\{T<\infty\}}$ は $\mathscr{F}_{T-}$-可測である．

証明．*Step 1*：**可予測** $\Longrightarrow$ *(i)* **かつ** *(ii)*．命題 1.8.6 と命題 1.4.7 から分かる．

Step 2：*(i)* **かつ** *(ii)* $\Longrightarrow$ **可予測**．X は càdlàg 適合過程だから，狭義に正の停止時刻列 (U_n) で

$$\{\Delta X \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![U_n]\!]$$

を満たすものが取れる．$[\![U_n]\!] = [\![U_n^a]\!] \sqcup [\![U_n^i]\!]$ を命題 1.8.3 における停止時刻の分解とする．（U_n^i が到達不能部分．）U_n と到達不能停止時刻の定義より $U_n^i = \infty$ a.s. が成立．系 1.5.3 および命題 1.5.4 から[*84]U_n^i は可予測時刻となる．したがって $U_n = U_n^a \wedge U_n^i$ は到達可能時刻となり，可予測時刻列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で

$$\{\Delta X \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![U_n]\!] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![T_n]\!]$$

を満たすものが存在する．これと条件 (i) を組み合わせれば，定理 1.8.7 より X は可予測であることが分かる． □

定義 1.8.9. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，X を càdlàg な適合過程，$T>0$ を停止時刻とする．

(i) $\{T<\infty\}$ 上で $X_T \neq X_{T-}$ a.s. が成り立つとき，T を X のジャンプ時刻 (jump time) と呼ぶ．

(ii) X の任意のジャンプ時刻がある到達可能時刻と確率 1 で等しいとき，X は到達可能なジャンプのみを持つ (X has only accessible jumps) という．

(iii) X の任意のジャンプ時刻が到達不能であるとき，X は到達不能なジャンプ (X has only totally inaccessible jumps) のみをもつという．到達不能なジャンプのみをもつ càdlàg 適合過程は準左連続 (quasi-left continuous) であるともいう．

X が準左連続であるとは，任意の可予測時刻に対して a.s. で $\Delta X_T 1_{\{T<+\infty\}} = 0$ が成り立つということであり，すなわち X は可予測時刻ではジャンプしないということである．命題 1.8.6 より可予測過程は到達不能時刻ではジャンプしないので，準左連続過程とは可予測過程と“直交”するようなジャンプの構造を持つ過程と言える．実際，準左連続過程は次のように特徴付けられる．

命題 1.8.10. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，X を càdlàg な適合過程とする．このとき，次の 3 条件は同値である：

(i) X は準左連続である．

(ii) X のジャンプの取りつくし列で，到達不能時刻からなるようなものが存在する．

(iii) (T_n) 停止時刻の任意の増加列とし，T をその極限たる停止時刻とする．このとき，$\{T<+\infty\}$ 上で $\lim_n X_{T_n} = X_T$ a.s. が成立する．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii) X を càdlàg 適合過程とすれば，ジャンプの取り付くし列 (T_n) が存在する．T_n をさらに到達可能部分 T_n' と到達不能部分 T_n'' に分解しよう．到達可能部分は可予測時刻で覆われるから（定理 1.8.3），X が準左連続なら (T_n') は全て $+\infty$ となり，到達不不能部分 (T_n'') が X のジャンプの取り付くし列となる．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) (T_n) を到達不能時刻からなる X のジャンプの取り付くし列とする．S を可予測時刻とすれば，

[*84] ここで完備性を使った．

T_n が到達不能であることから

$$P[\Delta X_S \neq 0, S < +\infty] \leq \sum_n P[S = T_n < \infty] = 0$$

を得る．

(i) $\Longrightarrow$ (iii) 対偶を示す．(T_n) は (iii) を満たさない停止時刻の増加列とする．

$$A_n = \{T_n < T\}, \quad S_n = (T_n)_{A_n}$$
$$A = \bigcap_n A_n, \quad S = T_A$$

とすれば，S は予告列 (S_n) をもつ可予測時刻となる．S の構成法より

$$\begin{aligned}
\{\Delta X_S \neq 0, S < +\infty\} &= \{\Delta X_T \neq 0, T < +\infty\} \cap A \\
&= \left\{\lim_n X_{T_n} \neq X_T, T < \infty\right\} \cap A \\
&= \left\{\lim_n X_{T_n} \neq X_T, T < \infty\right\}
\end{aligned}$$

であるが，(T_n) の選び方より

$$P[\Delta X_S \neq 0, S < +\infty] = P\left[\lim_n X_{T_n} \neq X_T, T < \infty\right] > 0$$

となり X が準左連続でない．

(iii) $\Longrightarrow$ (i) X は準左連続でないと仮定し，T を可予測時刻で $P[\Delta X_T \neq 0, T < +\infty] > 0$ なる停止時刻とする．T は可予測時刻だから，a.s. で予告する列 (T_n) が存在する．

$$\begin{aligned}
P\left[\lim_n X_{T_n} \neq X_T, T < +\infty\right] &= P\left[\lim_n X_{T_n} \neq X_T, 0 < T < +\infty\right] \\
&= P\left[\Delta X_T \neq 0, 0 < T < +\infty\right] \\
&= P\left[\Delta X_T \neq 0, T < +\infty\right] \\
&> 0
\end{aligned}$$

となるから，(iii) は成り立たない． □

1.9 局所化と前局所化

定義 1.9.1. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とし，$\mathscr{C}$ を確率過程からなる集合とする．$\mathscr{C}_{loc}$ は確率過程 X で次の条件を満たすようなもの全体の空間とする：停止時刻の列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で

(i) $T_1(\omega) \leq T_2(\omega) \leq \dots$.
(ii) $T_n \to \infty$, P-a.s.
(iii) $X^{T_n} \in \mathscr{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

を満たすものが存在する．

このような条件を満たす停止時刻列 (T_n) を（$\mathscr{C}$ に関する X）の局所化列 (localizing sequence) という．また，確率過程のクラス $\mathscr{C}_{loc}$ を $\mathscr{C}$ の局所化 (localized class) という．

定義 1.9.2. $\mathscr{C}$ を確率過程の集合とする．任意の $X \in \mathscr{C}$ と任意の停止時刻 T に対して $X^T \in \mathscr{C}$ となるとき，$\mathscr{C}$ は安定 (stable) であるという．

定義より明らかに $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}_{loc}$ である．実際，任意の n に対して $T_n(\omega) = +\infty$, $\omega \in \Omega$ とおけば (T_n) は X の局所化列である．

補題 1.9.3. $\mathscr{C}$ と $\mathscr{C}$ をフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ 上の確率変数からなる集合で，安定なるものとする．このとき，次が成立する：

(i) $\mathscr{C}_{loc}$ はまた停止について安定である．

(ii) $\mathbb{F}$ が右連続ならば[*85]，$(\mathscr{C}_{loc})_{loc} = \mathscr{C}_{loc}$.

(iii) $(\mathscr{C} \cap \mathscr{C}')_{loc} = \mathscr{C}_{loc} \cap \mathscr{C}'_{loc}$.

証明. (i) $X \in \mathscr{C}_{loc}$ とし，$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X の局所化列とする．T を任意の停止時刻とすれば，$\mathscr{C}$ は安定だから

$$(X^T)^{T_n} = X^{T\wedge T_n} = (X^{T_n})^T \in \mathscr{C}$$

が成立．したがって (T_n) は X^T の局所化列であり，$X^T \in \mathscr{C}_{loc}$ が分かる．

(ii) $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}_{loc}$ は明らかなので，逆向きの包含関係を示せばよい．$X \in (\mathscr{C}_{loc})_{loc}$ とし，$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathscr{C}_{loc}$ に関する X の局所化列とする．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $X^{T_n} \in \mathscr{C}_{loc}$ だから，その $\mathscr{C}$ に関する局所化列 $(T_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ が存在する．$T_{n,k} \to +\infty$ a.s. $(n \to \infty)$ より

$$[T_{n,k_n} < T_n \wedge n] \leq \frac{1}{2^n}$$

を満たす $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が取れる．ここで

$$S_n = T_n \wedge \left(\bigwedge_{m\geq n} T_{m,k_m} \right)$$

と定義し，(S_n) が X の $\mathscr{C}$ に関する局所化列になっていることを示すことにする．

$\mathbb{F}$ の右連続性より[*86]，S_n は実際に停止時刻である．(T_n) が増加的であることと $\left(\bigwedge_{m\geq n} T_{m,k_m}\right)_n$ が増加的であることから，(S_n) もまた増加的になる．

$$\begin{aligned}
P\left[S_n < T_n \wedge n\right] &= P\left[T_n \wedge \left(\bigwedge_{m\geq n} T_{m,k_m}\right) < T_n \wedge n\right] \\
&= P\left[\exists m \geq n,\ T_{m,k_m} < T_n \wedge n\right] \\
&= \sum_{m\geq n} P\left[T_{m,k_m} < T_n \wedge n\right] \\
&= \sum_{m\geq n} P\left[T_{m,k_m} < T_m \wedge m\right] \\
&\leq \sum_{m\geq n} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

[*85] $\mathbb{F}$ に右連続性がなくても，$\mathscr{C}$ がベクトル空間になっているならば $(\mathscr{C}_{loc})_{loc} = \mathscr{C}_{loc}$ が成立する．

[*86] 命題 1.2.10 を参照．

となるから，Borel-Cantelli の補題により

$$P\left[\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\bigcap_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq m}}\{S_n\geq T_n\wedge n\}\right]=1$$

となるから，$T_n\wedge n\to\infty$ a.s. に注意すれば $S_n\to\infty$ a.s. が分かる．$\mathscr{C}$ の安定性と (T_n) および $(T_{n,k})$ の定義より

$$X^{S_n}=(\underbrace{(\underbrace{X^{T_n}}_{\in\mathscr{C}_{loc}})^{T_{n,k_n}}}_{\in\mathscr{C}})^{S_n}\in\mathscr{C}$$

であるから，(S_n) が $\mathscr{C}$ に関する X の局所化列であることが示された．これより $X\in\mathscr{C}_{loc}$ である．

(iii) $(\mathscr{C}\cap\mathscr{C})_{loc}\subset\mathscr{C}_{loc}\cap\mathscr{C}'_{loc}$ は明らかなので，逆向きの包含関係を示せば宜しい．$X\in\mathscr{C}_{loc}\cap\mathscr{C}'_{loc}$ とし，(T_n) を $\mathscr{C}$ に関する局所化列，(T'_n) を $\mathscr{C}'$ に関する局所化列とする．$S_n=T_n\wedge T'_n$ と定義し，(S_n) が $\mathscr{C}\cap\mathscr{C}'$ に対応する局所化列になっていることを示せばよい．(S_n) の増加的であることと $+\infty$ に発散することは明らかである．$\mathscr{C}$ は安定だから，

$$X^{S_n}=(\underbrace{X^{T_n}}_{\in\mathscr{C}})^{T'_n}\in\mathscr{C}$$

であり，同様に $\mathscr{C}'$ の安定性より $X^{S_n}=(X^{T'_n})^{T_n}\in\mathscr{C}'$ も分かる．したがって $X^{S_n}\in\mathscr{C}\cap\mathscr{C}'$ となり，(S_n) が $\mathscr{C}\cap\mathscr{C}'$ に関する局所化列であることが示された．□

X を càdlàg 過程とする．写像 $T\colon X\to\overline{\mathbb{R}}_+$ に対して

$$X^{T-}=X1_{[\![0,T[\![}+X_{T-}1_{[\![T,\infty[\![}$$

と定義する．X^{T-} もまた càdlàg 過程である．

命題 1.9.4. $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ をフィルター付き確率空間とする．X が $\mathbb{F}$-適合で T が $\mathbb{F}$-停止時刻ならば，X^{T-} もまた適合過程である．

証明. 定義より

$$T_t^{T-}=X_t1_{\{t<T\}}+X_{T-}1_{\{T\leq t\}}.$$

X は $\mathbb{F}$-適合で T は停止時刻なので，$X_t1_{\{t<T\}}$ は $\mathscr{F}_t$-可測である．X_- は左連続適合過程なので良可測，よって $X_{T-}1_{\{T<+\infty\}}$ は $\mathscr{F}_T$ 可測となる．これより $X_{T-}1_{\{T\leq t\}}$ が $\mathscr{F}_t$-可測であることも分かる．□

定義 1.9.5. $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ をフィルター付き確率空間とし，$\mathscr{C}$ を確率過程からなる集合とする．$\mathscr{C}_{ploc}$ は確率過程 X で次の条件を満たすようなもの全体の空間とする：停止時刻の列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で

(i) $T_1(\omega)\leq T_2(\omega)\leq\dots$.
(ii) $T_n\to\infty$, P-a.s.
(iii) $X^{T_n-}\in\mathscr{C}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

を満たすものが存在する．

このような条件を満たす停止時刻列 (T_n) を（$\mathscr{C}$ に関する X）の前局所化列 (prelocalizing sequence) という．また，確率過程のクラス $\mathscr{C}_{ploc}$ を $\mathscr{C}$ の局所化 (prelocalized class, prelocalization) という．

第 2 章

マルチンゲールの基礎理論

2.1 離散時間マルチンゲール

本節では，離散時間マルチンゲールの基本的な性質を紹介する．ここでの目標は離散時間マルチンゲール自体を深く調べることではなく，連続時間マルチンゲールに関する結果を証明するための準備を行うことである．

2.1.1 定義

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間，$\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ をフィルトレーションとする．本節では，特に断らない限り時刻集合は常に $\mathbb{N}$ とする．時刻集合として $\overline{\mathbb{N}}$ や $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ なども扱うが，それらは毎回明記して用いる．

定義 2.1.1. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．$X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が次の三条件を満たすとき，X は $(\mathscr{F}_n)$ 劣マルチンゲール（submartingale）であるという．

(i) (X_n) は $(\mathscr{F}_n)$-適合である．
(ii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $E[|X_n|] < \infty$ が成り立つ．
(iii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $E[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] \geq X_n$, a.s. が成り立つ．

また，$(-X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が劣マルチンゲールになるような確率過程を優マルチンゲール (supermartingale) と呼ぶ．劣マルチンゲールかつ優マルチンゲールであるとき X は $\mathbb{F}$-マルチンゲール (martingale) であるという．考えているフィルトレーション $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が明らかな時は，X を単に (劣, 優) マルチンゲールということもある．

ある $\mathscr{F}_\infty (:= \bigvee_n \mathscr{F}_n)$ 可測確率変数 X_∞ が存在して，$(X_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ が同様の性質を満たすとき，$(X_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ が（劣，優）マルチンゲールであるという．

命題 2.1.2. $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $(\mathscr{F}_n)$-マルチンゲールとし，$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は凸関数であるとする．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\varphi(X_n)$ が可積分となるならば，$(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は劣マルチンゲールである．X が劣マルチンゲールのときは，φ が単調増加ならば $(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ も劣マルチンゲールとなる．

証明. 初めに，φ は凸関数であるから連続，よってボレル可測であることに注意しておく．このことから，$(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ の適合性は明らかである．

X がマルチンゲールの場合を考える．条件付き期待値に関する Jensen の不等式を用いれば，$n \geq 1$ に対

して

$$E[\varphi(X_n) \mid \mathscr{F}_{n-1}] \leq \varphi\left(E[X_n \mid \mathscr{F}_{n-1}]\right) = \varphi(X_{n-1})$$

となり，$(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は劣マルチンゲールである．

X が劣マルチンゲールで φ が単調増加のときは，

$$E[\varphi(X_n) \mid \mathscr{F}_{n-1}] \leq \varphi\left(E[X_n \mid \mathscr{F}_{n-1}]\right) \leq \varphi(X_{n-1})$$

より劣マルチンゲール性が分かる． □

例 2.1.3. 関数 $x \mapsto |x|$ は凸関数であるから，$M = (M_n)$ がマルチンゲールならば $(|M_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ は劣マルチンゲールである．$x \mapsto x^2$ は凸関数であるから，マルチンゲール $M = (M_n)$ が $E[M_n^2] < \infty$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ を満たすならば $(M_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ もマルチンゲールである．

関数 $x \mapsto x^+$ は単調増加な凸関数なので，劣マルチンゲール $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して (X_n^+) は劣マルチンゲールとなる．

離散時間の場合は，停止時刻について次の特徴づけが成り立つ．

命題 2.1.4. $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．写像 $T : \Omega \to \overline{N}$ について，次の 2 条件は同値である．

(i) T は $(\mathscr{F}_n)$-停止時刻である．

(ii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$\{\omega \in \Omega \mid T(\omega) = n\} \in \mathscr{F}_n$$

が成り立つ．

2.1.2 Doob 分解とマルチンゲール変換

定義 2.1.5 (増加過程)**.** $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とする．以下の条件を満たす確率過程 $A = (A_n)$ を増加過程 (increasing process) と呼ぶ．

(i) $A_0 = 0$.

(ii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n \leq A_{n+1}$.

定義 2.1.5 の条件にある不等号を a.s. の意味で成り立つものを，増加過程と呼ぶ流儀もある．離散時間過程の場合は本質的な差はないが，可測性に関して繊細な議論が必要となる連続時間過程を意識して，このような定式化にした．A のパスは増加的だから，$n \to \infty$ としたときの極限が存在する．それを A_∞ で表す．A_∞ は $\mathscr{F}$-可測関数の各点の意味での極限だから，また $\mathscr{F}$-可測である．

離散時間過程における可予測性を定義する．

定義 2.1.6. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，$X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を確率過程とする．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して X_n が $\mathscr{F}_{n-1}$-可測になるとき，X は可予測 (predictable) であるという．

定理 2.1.7 (劣マルチンゲールの Doob 分解)**.** $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, P)$ をフィルター付き確率空間，X は $(\mathscr{F}_n)$-劣マルチンゲールであるとする．このとき

$$X_n = M_n + A_n \quad P\text{-a.s.}$$

を満たすような $(\mathscr{F}_n)$ -マルチンゲール　$M = (M_n)$ と適合増加過程 $A = (A_n)$ が存在する．A は可予測であるようにとれて，その時の分解は a.s. の意味で一意的である．

証明. **ステップ** *1*：**分解の構成.** $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ に対して，Y_n を条件付き期待値 $E[X_n - X_{n-1}|\mathscr{F}_{n-1}]$ のバージョンの一つで，特に任意の ω で $Y(\omega) \geq 0$ を満たすようなものとして定める．Y として非負のものがとれるのは，X の劣マルチンゲール性による．

$$A_n := \sum_{k=1}^{n} Y_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

と定めれば，$A = (A_n)$ は可予測増加過程で $A_0 = 0$ を満たす．

ここで

$$M_n = X_n - A_n$$

と定めれば，M は適合過程で各 M_n は可積分である．$n \in \mathbb{N}$ とすれば

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= X_{n+1} - \sum_{k=1}^{n+1} Y_k \\ &= X_n - \sum_{k=1}^{n} Y_k + (X_{n+1} - X_n) - E[X_{n+1} - X_n|\mathscr{F}_n] \\ &= M_n + X_{n+1} - E[X_{n+1}|\mathscr{F}_n], \quad \text{a.s.} \end{aligned}$$

となるから，M のマルチンゲール性が分かる．

ステップ *2*：**一意性** $X = M + A = M' + A'$ という分解が得られたとする．$Z = A - A' = M' - M$ とおけば，Z は可予測なマルチンゲールになる．可予測性およびマルチンゲール性より

$$Z_n = Z_{n-1} = \cdots = Z_0 = 0, \quad P\text{-a.s.}$$

となるので，一意性が分かった．□

確率過程 $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ および $H = (H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，新たな確率過程 $H \bullet X = ((H \bullet X)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を以下のように定義する．

$$(H \bullet X)_n := \sum_{k=1}^{n} H_k (X_k - X_{k-1})$$

（ただし，任意の列 (a_n) に対して $\sum_{k=1}^{0} a_n = 0$ と考える．）

命題 2.1.8. $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．(X_n) は劣マルチンゲール，(H_n) は非負の可予測過程で，各 H_n は有界であるものとする．このとき $H \bullet X$ は劣マルチンゲールとなる．(X_n) がマルチンゲールならば，(H_n) の非負性を仮定しなくても $H \bullet X$ はマルチンゲールとなる．

証明. 各 n に対して H_n の上界の一つを M_n とおけば，

$$E\left[|(H \bullet X)_n|\right] \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \, E\left[|X_k - X_{k-1}|\right].$$

(X_n) の可積分性より，各 $n \in \mathbb{N}$ について $E\left[|(H \bullet X)_n|\right] < \infty$ である．また，定義より明らかに $H \bullet X$ は $(\mathscr{F}_n)$-適合である．$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$E[(H \bullet X)_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] = (H \bullet X)_n + H_{n+1} E[X_{n+1} - X_n \mid \mathscr{F}_n] \quad \text{a.s.}$$

ここで $E[X_{n+1}-X_n|\mathscr{F}_n]\geq 0$（劣マルチンゲール性）と (H_n) の非負性に注意すれば

$$E[(H\bullet X)_{n+1}\mid \mathscr{F}_n]\geq (H\bullet X)_n \quad \text{a.s.}$$

X がマルチンゲールのときは H の符号によらず

$$E[(H\bullet X)_{n+1}\mid \mathscr{F}_n]=(H\bullet X)_n+H_{n+1}E[X_{n+1}-X_n\mid \mathscr{F}_n]=(H\bullet X)_n \quad \text{a.e.}$$

□

定義 2.1.9. 命題 2.1.8 の確率過程 $H\bullet X$ を，マルチンゲール変換 (*martingale transform*) または離散確率積分 (*discrete stochastic integral*) と呼ぶ．

定理 2.1.10. $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}},P)$ をフィルター付き確率空間，X を劣マルチンゲール，T を停止時刻とする．このとき，停止過程 X^T は劣マルチンゲールとなる．

証明．確率過程 $H=(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$H_n=1_{\{T\geq n\}} \quad (n\geq 0)$$

と定義すれば，H は非負かつ有界な可予測過程である．この時，

$$X_{T\wedge n}=X_0+\sum_{k=1}^{n}H_k(X_k-X_{k-1})=X_0+(H\bullet X)_n$$

とかけるので，命題 2.1.8 より X^T は劣マルチンゲールである． □

2.1.3 任意抽出定理-その 1

定理 2.1.11. $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}},P)$ をフィルター付き確率空間，(X_n) を $(\mathscr{F}_n)$ を劣マルチンゲール，T を a.e. で有界な停止時刻とする．このとき X_T は可積分な確率変数であり，T の本質的上界 $M\in\mathbb{N}$ に対して

$$E[X_0]\leq E[X_T]\leq E[X_M]$$

が成り立つ．

証明．はじめに

$$E\left[|X_T|\right]=\sum_{k=1}^{M}E\left[|X_k|1_{\{T=k\}}\right]\leq\sum_{k=1}^{M}E\left[|X_k|\right]<\infty$$

であるから，X_T は可積分であることを確かめておく．定理 2.1.10 より X^T は劣マルチンゲールなので

$$E[X_0]=E[X_{T\wedge 0}]\leq E[X_{T\wedge M}]=E[X_T]$$

となり，一つ目の不等号が分かる．いま，非負かつ有界な可予測過程 (K_n) を $n\geq 0$ に対して $K_n=1_{\{T<n\}}$ と定めれば，

$$X_n=X_{T\wedge n}+(K\bullet X)_n$$

が成り立つ．$(K\bullet X)$ は劣マルチンゲールであるから，

$$E[X_M-X_{T\wedge M}]=E[(K\bullet X)_M]\geq E[(K\bullet X)_0]=0$$

よって，二つ目の不等号が導かれた． □

定理 2.1.12. $X=(X_n)$ を劣マルチンゲール，S,T は a.e. で有界な停止時刻とする．$S\le T$ a.e. を満たすならば

$$E[X_S]\le E[X_T]$$

が成り立つ．

証明. 可予測過程 $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$H_n=1_{\{S<n\le T\}}\quad(n\in\mathbb{N})$$

と定めれば，

$$X_{T\wedge n}-X_{S\wedge n}=(H\bullet X)_n$$

であり，命題 2.1.8 より $(H\bullet X)$ は劣マルチンゲールとなる．このとき T の本質的上界 M に対して，

$$E[X_T-X_S]=E[X_{T\wedge M}-X_{S\wedge M}]=E[(H\bullet X)_M]\ge E[(H\bullet X)_0]=0$$

が成り立つ． □

定理 2.1.13. 定理 2.1.12 と同様の仮定の下で

$$E[X_T|\mathscr{F}_S]\ge X_S,\quad \text{a.e.}$$

が成り立つ．

証明. 任意の $A\in\mathscr{F}_S$ に対して

$$E[X_T1_A]\ge E[X_S1_A]$$

が成り立つことを示せばよい．M を T の本質的上界とする．停止時刻 S と $A\in\mathscr{F}_S$ に対し確率変数 $S_A:\Omega\to\mathbb{N}$ を以下のように定める．

$$S_A(\omega)=\begin{cases}S(\omega) & \omega\in A\\ M & \omega\in\Omega\setminus A\end{cases}$$

このとき，S_A は有界な停止時刻となる．T_A を同様に定めれば定理 2.1.12 により

$$E[X_{T_A}]\ge E[X_{S_A}]$$

ところで

$$\begin{aligned}E[X_{S_A}]&=E[X_S1_A]+E[X_M1_{\Omega\setminus A}]\\E[X_{T_A}]&=E[X_T1_A]+E[X_M1_{\Omega\setminus A}]\end{aligned}$$

であったから，

$$E[X_T1_A]\ge E[X_S1_A].$$

□

系 2.1.14. $X=(X_n)$ をマルチンゲール，S,T を $S\le T$, P-a.s. なる有界停止時刻とする．このとき

$$E[X_T|\mathscr{F}_S]=X_S,\quad P\text{-a.s.}$$

証明. 定理 2.1.13 を X と $-X$ に用いればよろしい． □

定理 2.1.15. $X=(X_n)$ を $(\mathscr{F}_n)$ -劣マルチンゲール， (T_k) を有界停止時刻の増大列とする．$Y_n=X_{T_n}$ および $\mathscr{G}_n=\mathscr{F}_{T_n}$ とおけば，(Y_n) は $(\mathscr{G}_n)$ -劣マルチンゲールである．

証明．注意**??**より X_{T_n} は $\mathscr{F}_{T_n}$ -可測なので， (Y_n) は $(\mathscr{G}_n)$ -適合である．また，定理 2.1.11 より $Y_n=X_{T_n}$ の可積分性も保証される．定理 2.1.13 から

$$E[Y_{n+1}|\mathscr{G}_n]=E[X_{t_{n+1}}|\mathscr{F}_{T_n}]\geq X_{T_n}=Y_n$$

となるので，(Y_n) -の劣マルチンゲール性がわかる． □

2.1.4 劣マルチンゲール不等式

この節では，Doob の不等式とよばれる劣マルチンゲールに関する重要な不等式を証明する．

定理 2.1.16 (Doob の不等式)**.** $X=(X_n)$ を $(\mathscr{F}_n)$ -劣マルチンゲールとすれば， $\lambda>0$ に対して以下の不等式が成立する．

$$\lambda\,P\left[\sup_{0\leq n\leq N}X_n\geq\lambda\right]\leq E\left[X_N1_{\{\sup_{0\leq n\leq N}X_n\geq\lambda\}}\right]\leq E\left[X_N^+\right] \tag{2.1}$$

$$\lambda\,P\left[\inf_{0\leq n\leq N}X_n\leq-\lambda\right]\leq E[X_N-X_0]-E\left[X_N1_{\{\inf_{0\leq n\leq N}X_n\leq-\lambda\}}\right]\leq E\left[X_N^+\right]-E[X_0] \tag{2.2}$$

証明．**ステップ 1 : (2.1) の証明．** 二つ目の不等号は明らかなので，一つ目のみ示せばよい．

$$T:=\inf\{n\geq 0\mid X_n\geq\lambda\}$$

と定義する．（ただし，$\inf\emptyset=\infty$ とする．）このとき T は停止時刻であり．

$$\left\{\sup_{0\leq n\leq N}X_n\geq\lambda\right\}=\{T\leq N\} \tag{2.3}$$

と書ける．定理 2.1.11 により

$$\begin{aligned}
E[X_N]&\geq E[X_{T\wedge N}]\\
&=E\left[X_{T\wedge N}1_{\{T\leq N\}}\right]+E\left[X_{T\wedge N}1_{\{T>N\}}\right]\\
&=E\left[X_T1_{\{T\leq N\}}\right]+E\left[X_N1_{\{T>N\}}\right]\\
&\geq E\left[\lambda 1_{\{T\leq N\}}\right]+E\left[X_N1_{\{T>N\}}\right]\\
&=\lambda\,P\left[T\leq N\right]+E\left[X_N1_{\{T>N\}}\right]
\end{aligned}$$

となるが，(2.3) よりこれは

$$\lambda\,P\left[\sup_{0\leq n\leq N}X_n\geq\lambda\right]\leq E\left[X_N1_{\{\sup_{0\leq n\leq N}X_n\geq\lambda\}}\right]$$

を表している．

ステップ 2 : (2.2) の証明． 今度は停止時刻 S を

$$S:=\inf\{n\geq 0\mid X_n\leq-\lambda\}$$

と定めれば,

$$\left\{\inf_{0\le n\le N} X_n \le -\lambda\right\} = \{S \le N\}$$

である．定理 2.1.11 により

$$\begin{aligned}
E[X_1] &\le E[X_{S\wedge N}] \\
&= E\left[X_{S\wedge N}1_{\{S\le N\}}\right] + E\left[X_{S\wedge N}1_{\{S>N\}}\right] \\
&= E\left[X_S 1_{\{S\le N\}}\right] + E\left[X_N 1_{\{S>N\}}\right] \\
&\le E\left[-\lambda 1_{\{S\le N\}}\right] + E\left[X_N 1_{\{S>N\}}\right] \\
&= -\lambda\, P\,[S\le N] + E\left[X_N 1_{\{S>N\}}\right]
\end{aligned}$$

となるが，これはすなわち

$$\lambda\, P\left[\inf_{0\le n\le N} X_n \le -\lambda\right] \le E[X_N - X_1] - E\left[X_N 1_{\{\inf_{0\le n\le N} X_n \le -\lambda\}}\right]$$

ということである．二つ目の不等号については,

$$E\left[X_N 1_{\{\inf_{0\le n\le N} X_n > -\lambda\}}\right] \le E\left[X_N^+ 1_{\{\inf_{0\le n\le N} X_n > -\lambda\}}\right] \le E\left[X_N^+\right]$$

より分かる． □

系 2.1.17. $p\ge 1$ とし $M=(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を p 乗可積分なマルチンゲール（または非負劣マルチンゲール）とすれば，$a>0$ に対して以下の不等式がなりたつ．

$$a^p\, P\left[\sup_{0\le n\le N} |M_n| \ge a\right] \le E\left[|X_N|^p\right]$$

証明．命題 2.1.2 により $(|M_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ は劣マルチンゲールになるから，$X=|M|^p, \lambda=a^p$ とおいて (2.1) を用いればよい． □

定理 2.1.16 で得た不等式をモーメントの評価に関する式に書きかえる．次の不等式もまた Doob の不等式とよばれ，マルチンゲール理論においてきわめて重要な道具となっている．

定理 2.1.18. $p>1$ とし，$M=(M_n)$ を p 乗可積分なマルチンゲールか（または非負の劣マルチンゲール）とする[*1]．このとき

$$E\left[\sup_{0\le k\le n} |M_k|^p\right] \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\left[|M_N|^p\right] \tag{2.4}$$

が成立．

証明．この証明はなかなかテクニカルである．

ステップ 1 はじめに，$y\ge 0$ および $q>0$ としたとき，以下の関係がなりたつことに注意しておく．

$$y^q = \int_{]0,y]} q z^{q-1} dz = \int_{]0,\infty[} q z^{q-1} 1_{]0,y]}(z) dz. \tag{2.5}$$

[*1] なお X_n が p 乗可積分でない時には自明な不等式である．

ステップ 2. $M_n^* = \sup_{0\le k\le n}|M_k|$ とおくことにする．2.5 において $y = M_n^*$ および $q = p$ とすれば，

$$(M_n^*(\omega))^p = \int_{]0,\infty[} qz^{q-1} 1_{]0,M_n^*(\omega)]}(z)dz$$

となる．両辺の期待値をとれば，

$$\begin{aligned}
&E\left[(M_n^*)^p\right] \\
&= E\left[\int_{]0,\infty[} pz^{p-1} 1_{]0,M_n^*]}(z)dz\right] \\
&= \int_{]0,\infty[} E\left[pz^{p-1} 1_{]0,M_n^*]}(z)\right] dz && (\because \text{Fubini's theorem}) \\
&= \int_{]0,\infty[} pz^{p-1} P\left[M_n^* \ge z\right] dz \\
&\le \int_{]0,\infty[} pz^{p-2} \left(\int_\Omega |M_n(\omega)| 1_{\{M_n^*\ge z\}}(\omega) P(d\omega)\right) dz && (\because (2.1)) \\
&= \int_\Omega |M_n(\omega)| \left(\int_{]0,\infty[} pz^{p-2} 1_{]0,M_n^*(\omega)]}(z)\, dz\right) P(d\omega) && (\because \text{Fubini}) \\
&= \int_\Omega |M_n(\omega)| \left(\frac{p}{p-1}\right) (M_n^*(\omega))^{p-1}\, P(\omega) && (\because (2.5)) \\
&= \left(\frac{p}{p-1}\right) E\left[|M_n|(M_n^*(\omega))^{p-1}\right]
\end{aligned}$$

が分かる．ここで，Hölder の不等式を用いれば

$$E\left[|M_n|(M_n^*)^{p-1}\right] \le E\left[|M_n|^p\right]^{\frac{1}{p}} E\left[(M_n^*)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

となるから，結局

$$E\left[(M_n^*)^p\right] \le \left(\frac{p}{p-1}\right) E\left[|M_n|^p\right]^{\frac{1}{p}} E\left[(M_n^*)^p\right]^{\frac{p-1}{p}} \tag{2.6}$$

なる式を得ることになる．$E\left[(M_n^*)^p\right] = 0$ のときは求める式 (2.4) は明らかなので，いま $E\left[(M_n^*)^p\right] > 0$ を仮定しても良い．(2.6) において両辺を $E[(M_n^*)^p]^{\frac{p-1}{p}}$ で割れば

$$\left(E\left[(M_n^*)^p\right]\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\frac{p}{p-1}\right) E\left[|M_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

となるので，これの両辺を p 乗すれば (2.4) を得る． □

2.1.5 収束定理

実数 $a < b$ と劣マルチンゲール (X_n) に対して確率変数 $U_n(a,b,X)$ を以下の手順で定める．このように定めた $U_n(a,b,X)$ のことを上向き横断数 (*upcrossing number*) とよぶ．

$$\begin{aligned}
N_0 &= -1 \\
N_{2k-1} &= \inf\{m > N_{2k-2} \mid X_m < a\} \quad (k \ge 1) \\
N_{2k} &= \inf\{m > N_{2k-1} \mid X_m > b\} \quad (k \ge 1)
\end{aligned}$$

と定義すれば，$(N_k)_{k\geq 1}$ は停止時刻である[*2]．このように定義した (N_k) に対して

$$U_n(a,b,X) = \sup\{k \mid N_{2k} \leq n\}$$

とする．また，可予測過程 (H_n) を

$$H_n = 1_{\{N_{2k-1} < n \leq N_{2k} \text{ for some } k \geq 1\}}$$

と定める．

定理 2.1.19 (上向き横断不等式)**.** 確率過程 $X = (X_n)$ が劣マルチンゲールなら

$$(b-a)E[U_n(a,b,X)] \leq E\left[(X_n - a)^+\right] - E\left[(X_0 - a)^+\right] \leq E[X^+] + |a|.$$

証明．新たな確率過程 $Y = (Y_n)$ を $Y_n = a + (X_n - a)^+$ によって定めれば Y は劣マルチンゲールである．したがって $(H \bullet Y)$ も劣マルチンゲールである．H の定義より次の不等式が成り立つ．

$$(b-a)U_n(a,b,X) \leq (H \bullet Y)_n$$

ここで $K = 1 - H$ と定義すれば

$$(H \bullet Y)_n + (K \bullet Y)_n = (1 \bullet Y)_n = Y_n - Y_0.$$

$(K \bullet Y)$ もまた劣マルチンゲールになるから，

$$E(K \bullet Y)_n \geq E(K \bullet Y)_0 = 0$$

である．したがって

$$(b-a)E\left[U_n(a,b,X)\right] \leq E\left[(H \bullet Y)_n\right] \leq E[Y_n - Y_0] = E\left[(X_n - a)^+\right] - E\left[(X_0 - a)^+\right]$$

となり，一つ目の不等号を得る．二つ目の不等号に関しては

$$(X_n - a)^+ - (X_0 - a)^+ \leq (X_n - a)^+ \leq X_n^+ + |a|$$

より従う． □

定理 2.1.20 (劣マルチンゲール収束定理)**.** $X = (X_n)$ を X^+ が L^1 -有界であるような劣マルチンゲールとする．このとき，ある可積分な確率変数 X_∞ が存在して $X_n \to X_\infty$ a.s. となる．

証明．定理 2.1.19 により，任意の実数 $a < b$ に対して

$$E\left[U_n(a,b,X)\right] \leq \frac{E\left[X_n^+\right] + |a|}{b-a} \leq \frac{\sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^+] + |a|}{b-a} < \infty$$

が成り立つ．$U_n(a,b,X(\omega))$ の極限を $U_\infty(a,b,X(\omega))$ とおけば[*3]，単調収束定理により

$$E\left[U_\infty(a,b,X)\right] < \infty$$

[*2] 離散時間の場合は $X_m \leq a$ などのように定義されることが多いが，連続マルチンゲールへの拡張の際にはこのように定義したほうが便利なので，こちらの定義を採用する．実際，確率解析の本ではこのように書いているものも多いと思う．

[*3] n に関して増加的なので $+\infty$ も含めれば極限は存在する．

であり，$U_\infty(a,b,X)<\infty$ a.e. となる．ところで，

$$\left\{\omega\in\Omega \;\middle|\; \varliminf_{n\to\infty} X_n(\omega) < \varlimsup_{n\to\infty} X_n(\omega)\right\} \subset \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}} \left\{\omega\in\Omega \;\middle|\; \varliminf_{n\to\infty} X_n(\omega) < a < b < \varlimsup_{n\to\infty} X_n(\omega)\right\}$$
$$\subset \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}} \{\omega\in\Omega \mid U_\infty(a,b,X(\omega))=\infty\}$$

に注意すれば

$$P\left[\varliminf_{n\to\infty} X_n < \varlimsup_{n\to\infty} X_n\right] \le \sum_{a,b\in\mathbb{Q}} P\left[U_\infty(a,b,X)=\infty\right]=0$$

となり，$(X_n(\omega)_{n\in\mathbb{N}}$ がほとんど確実に極限をもつことがわかった．ここで

$$X_\infty(\omega)=\begin{cases}\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) & \text{極限が存在するとき．}\\ 0 & \text{その他．}\end{cases}$$

と定義すれば，$X_n\longrightarrow X_\infty$（概収束）となるから，あとは X_∞ の可積分性を言えばよい．Fatou の補題により

$$E[X_\infty^+]\le \varliminf_{n\to\infty} E[X_n^+] \le \sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^+]<\infty$$

である．また，

$$E[X_n^-]\le E[X_n^+]-E[X_n]\le \sup E[X_n^+]-E[X_0]$$

に注意すれば，再び Fatou の補題を用いて

$$E[X_\infty^-]\le \varliminf_{n\to\infty} E[X_n^-]\le \sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^+]-E[X_0]<\infty$$

が成り立つ．これにより，X_∞ の可積分性が示された． □

定理 2.1.21. 劣マルチンゲール $X=(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，次の条件は同値である．

(i) X は一様可積分．

(ii) X は L^1 収束する．

(iii) X はある可積分な確率変数 X_∞ に概収束し，$(X_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ は $(\mathscr{F}_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ -劣マルチンゲールとなる．さらに，$E[X_n]\to E[X_\infty]$ がなりたつ．

証明．**ステップ 1 : (i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明．** X が一様可積分ならば (X_n^+) は L^1 有界であるから，定理 2.1.20 よりある可積分な確率変数 X_∞ が存在して $X_n\to X_\infty$，P-a.s. となる．一様可積分性よりこれは L^1 収束でもいえる．

ステップ 2 : (ii) $\Longrightarrow$ (iii) の証明． X の L^1 -極限を $\widetilde{X}_\infty$ とおく．X は L^1 収束するので L^1 -有界であり，定理 2.1.20 によりある可積分な X_∞ に概収束する．極限の一意性より $\widetilde{X}_\infty=X_\infty$，$P$-a.s. であり，$L^1$ 収束より

$$X_n\le \lim_{m\to\infty,m\ge n} E[X_m|\mathscr{F}_n]=E[X_\infty|\mathscr{F}_n]$$

を得る．よって $(X_n;n\in\overline{\mathbb{N}})$ は $(\mathscr{F}_n;n\in\overline{\mathbb{N}})$ -劣マルチンゲールである．また，一様可積分性は期待値の収束をもたらすので，最後の条件も明らかである．

ステップ 3 : (iii) $\Longrightarrow$ (i) の証明． $X=(X_n)$ は劣マルチンゲールなので，命題 2.1.2 より $(X_n^+)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ もまた劣マルチンゲールであり，

$$\int_{\{|X_n|\geq\lambda\}} X_n^+ dP \leq \int_{\{|X_n|\geq\lambda\}} X_\infty^+ dP \tag{2.7}$$

がなりたつ．いま，劣マルチンゲール性より

$$P\left[X_n^+\geq\lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda}E[X_n^+] \leq \frac{1}{\lambda}E[X_\infty^+]$$

であるから，(2.7) において $\lambda\to\infty$ とすれば，$X=(X_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ の一様可積分性が分かる．仮定より $X_n^+\to X_\infty$ P-a.s. だから，一様可積分性とあわせて $E[X_n^+]\to E[X_\infty^+]$ となる．これと仮定の $E[X_n]\to E[X_\infty]$ をあわせれば $E[X_n^-]\to E[X_\infty^-]$ となるが，$X_n^-\to X_\infty^-$，P-a.s. だったから命題??によって (X_n^-) の一様可積分性が分かる．したがって $X=X^+-X^-$ も一様可積分である． □

系 2.1.22. $p>1$ とする．(X_n) を非負劣マルチンゲールで $\sup_n E[X^p]<\infty$ なるものとする．このとき $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は一様可積分で $X_n\to X_\infty$ が概収束かつ L^p 収束の意味で成り立ち，

$$E[X_\infty^p] = \sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^p] \tag{2.8}$$

である．

証明．(X_n) は L^p 有界だから一様可積分となり，定理 2.1.21 から $X_n\to X_\infty$ a.s. である．Doob の不等式を劣マルチンゲール $(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ に用いれば[*4]，$\sup_n|X_n|\in L^p(\Omega)$ が示される．$|X_n-X_\infty|^p\leq 2^p\sup_n|X_n|^p$ という評価に注意すれば，優収束定理により $X_n\to X_\infty$ in L^p が分かる．最後に式 (2.8) を示そう．明らかに

$$E[X_n^p] \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^p]$$

だから，極限をとれば

$$E[X_\infty^p] \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^p]$$

となる[*5]．また，条件付期待値についての Jensen の不等式と X の非負性より

$$X_n^p \leq (E[X_\infty|\mathscr{F}_n])^p \leq E[X_\infty^p|\mathscr{F}_n], \quad P\text{-a.s.}$$

が成立．ここで期待値をとれば

$$E[X_n^p] \leq E[X_\infty^p], \quad n\in\mathbb{N}$$

となるから，さらに sup をとることで

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^p] \leq E[X_\infty^p]$$

を得る．これで逆向きの不等号も示された． □

定理 2.1.23. $X=(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-マルチンゲールとしたとき，以下の条件は同値である．

(i) X は一様可積分．

(ii) X は L^1 収束する．

[*4] 非負性はここで必要．

[*5] 今は $X_n\to X_\infty$ in L^p が成り立つのであった．

(iii) X はある可積分な確率変数 X_∞ に概収束し，$(X_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ は $(\mathscr{F}_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ -マルチンゲールとなる．

(iv) ある可積分な確率変数 Y が存在して，$X_n = E[Y|\mathscr{F}_n]$ と書ける．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii) は定理 2.1.21 と全く同じで，(ii) $\Longrightarrow$ (iii) も劣マルチンゲールの不等号が等号になるだけである．(iii) $\Longrightarrow$ (iv) は $Y = X_\infty$ とおけばよい．(iv) $\Longrightarrow$ (i) は $X_n = E[Y|\mathscr{F}_n]$ の表示より一様可積分性は明らか． □

系 2.1.24. $p > 1$ とする．(X_n) を $(\mathscr{F}_n)$-マルチンゲールで $\sup_n E[X_n^p] < \infty$ なるものとする．このとき $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は一様可積分で $X_n \to X_\infty$ が概収束かつ L^p 収束の意味で成り立ち，

$$E[X_\infty^p] = \sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^p]$$

である．

証明．系 2.1.22 の証明と同じだが，X がマルチンゲールなので非負性がなくとも $(|X_n|)_n$ は劣マルチンゲールになる． □

定理 2.1.25. $\mathscr{F}_\infty = \bigvee_n \mathscr{F}_n$ とおく．可積分関数 X に対して $X_n = E[X|\mathscr{F}_n]$ とおけば，$X_n \to X_\infty := E[X|\mathscr{F}_\infty]$ が概収束と L^1 収束の意味で成立する．

証明．定義より明らかに (X_n) は一様可積分マルチンゲールである．命題 2.1.23 より (X_n) はある $\mathscr{F}_\infty$ -可測[*6]確率変数 Z に概収束，そして L^1 収束するから，$Z = Y_\infty$ であることを示せばよい．任意の $A \in \mathscr{F}_n$ に対して

$$\int_A X dP = \int_A X_n dP$$

であるから，$X_n 1_A \to Z 1_A$ in L^1 に注意すれば

$$\int_A X dP = \int_A Z dP \tag{2.9}$$

である．特に (2.9) は任意の $A \in \bigcup_n \mathscr{F}_n$ に対して成立することが分かる．条件 (2.9) を満たすような $A \in \mathscr{F}$ の全体が $\bigcup_n \mathscr{F}_n$ を含む Dynkin 族をなすことは容易に示されるので，Dynkin 族定理より

$$\int_A X dP = \int_A Z dP \quad \forall A \in \mathscr{F}_\infty$$

となる．Z は $\mathscr{F}_\infty$ -可測であることとに注意すれば，条件付き期待値の定義より　$Z = E[X|\mathscr{F}_\infty]$, a.s. である． □

命題 2.1.26. 確率変数列 (Y_n) が $Y_n \to Y_\infty$ a.s. をみたし，$|Y_n| \le Z$ なる可積分確率変数 Z が存在するとき

$$E[Y_n|\mathscr{F}_n] \to E[Y_\infty|\mathscr{F}_\infty], \quad P\text{-a.s.}$$

である．

証明．

$$|E[Y_n|\mathscr{F}_n] - E[Y_\infty|\mathscr{F}_\infty]| \le |E[Y_n|\mathscr{F}_n] - E[Y_\infty|\mathscr{F}_n]| + |E[Y|\mathscr{F}_n] - E[Y_\infty|\mathscr{F}_\infty]|$$

[*6] 劣マルチンゲール収束定理では単にある可積分な確率変数 Z という主張であったが，定理の証明中にあるように $Z(\omega) = \lim X_n(\omega)$(極限が存在), 0(その他) とすればこれは自動的に $\mathscr{F}_\infty$ -可測になることに注意．

で右辺第二項は定理 2.1.25 より 0 に概収束するから，右辺第一項の収束のみ調べればよろしい．$W_N := \sup\{|Y_n - Y_m|\}$ とおいたとき，$E[W_N] \le 2E[Z]$ より W_N は可積分である．定義より $|Y_n - Y_\infty| \le W_N$ が任意の $n \ge N$ に対してなりたつから，

$$E[|Y_n - Y_\infty|\,|\mathscr{F}_n] \le E[W_N|\mathscr{F}_n] \quad P\text{-a.s., } \forall n \ge N$$

となるが，ここで $N \to \infty$ の極限をとれば，定理 2.1.25 により

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty} |E[Y_n|\mathscr{F}_n] - E[Y_\infty|\mathscr{F}_\infty]| &\le \varlimsup_{n\to\infty} E[|Y_n - Y_\infty||\mathscr{F}_n] \\ &\le \varlimsup_{n\to\infty} E[W_N|\mathscr{F}_n] \\ &= E[W_N|\mathscr{F}_\infty] = W_N\end{aligned}$$

を得る[*7]．ところで，(Y_n) が概収束する列であったから $W_N \downarrow 0$ a.e.$(N \to \infty)$ となるので[*8]

$$\varlimsup_{n\to\infty} |E[Y_n|\mathscr{F}_n] - E[Y|\mathscr{F}_\infty]| = 0$$

が分かる． □

いままでは $\mathbb{N}$ を時刻集合にもつ離散過程を考えて来たが，（技術的な理由で）$X_{-1}, X_{-2}, \dots$ という過程を考えると便利なことも多い．これらは後々連続過程を扱う際に特に役に立つので，基本的な結果を紹介しておく．n に関して増加的な σ -加法族の列 $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\le 0}}$ を考える．（ただし $\mathbb{Z}_{\le 0} = \{0, -1, -2, \dots\}$ である．）$X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\le 0}}$ が後ろ向き劣マルチンゲール (backward submartingale) であるとは，適合性，可積分性と

$$E[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] \ge X_n$$

という条件がみたされることである．同様にして後ろ向きマルチンゲール (backward martingale) も定義する．

補題 2.1.27. $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\le 0}}$ を後ろ向き劣マルチンゲールとする．$\lim_{n\to-\infty} E[X_n] > \infty$ ならば，X は一様可積分である．

証明．はじめに (X_n^+) の一様可積分性を示す．Jensen の不等式により $(X_n^+)_{n\in\mathbb{Z}_{\le 0}}$ もまた後ろ向き劣マルチンゲールであるから，$\lambda > 0$ に対して

$$\int_{\{X_n > \lambda\}} X_n^+ dP \le \int_{\{X_n^+ > \lambda\}} X_0^+ dP \le \int_{\{|X_n| > \lambda\}} X_0^+ dP \tag{2.10}$$

がなりたつ．補題の仮定及び劣マルチンゲール性より

$$P[|X_n| > \lambda] \le E[|X_n|] = 2E[X_n^+] - E[X_n] \le 2E[X_0] - \lim_{n\to-\infty} E[X_n] < \infty$$

であるから，$\sup_n P[|X_n| > \lambda] \to 0$ $(\lambda \to +\infty)$ となる．これより (2.10) において $\lambda \to +\infty$ とすれば $(X_n^+)_{n\in\mathbb{Z}_{\le 0}}$ の一様可積分性が分かる．

次に (X_n^-) の一様可積分性について調べる．仮定より $(E[X_n])$ は収束列であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N \in \mathbb{Z}_{\le 0}$ が存在して，$m < n \le N$ なる任意の n, m に対して $E[X_n] - E[X_m] < \varepsilon/2$ がなりたつ[*9]．

[*7] 各 Y_n はどれも $\mathscr{F}_\infty$ -可測なので，それらの絶対値や sup をとったものである W_N も当然 $\mathscr{F}_\infty$ -可測になっていることに注意．
[*8] $W_N(\omega) \to 0$ というのは (Y_n) のパスに関する Cauchy 条件に他ならない．
[*9] 収束列は Cauchy 列である．（念のため．）

先ほどと同様に

$$P\left[X_n < -\lambda\right] \leq P\left[|X_n| > \lambda\right] \leq \sup_{n\in\mathbb{Z}_{\leq 0}} P\left[|X_n| > \lambda\right] \to 0 \quad (\lambda \to +\infty)$$

となるから，X_N の可積分性より十分大きな $\lambda > 0$ に対して

$$\int_{\{X_n < -\lambda\}} |X_N| dP < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall n \leq N)$$

特に

$$\sup_{n\leq N} \int_{\{X_n < -\lambda\}} |X_N| dP < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall n \leq N)$$

が成立．これらの議論により，十分大きい λ をとれば

$$\begin{aligned}
0 \leq \int_{\{X_n<-\lambda\}} X_n^- dP &= \int_{\{X_n<-\lambda\}} -X_n dP \\
&= E[-X_n] - \int_{\{X_n\geq-\lambda\}} -X_n dP \\
&= E[-X_n] + \int_{\{X_n\geq-\lambda\}} X_n dP \\
&\leq E[-X_n] + \int_{\{X_n\geq-\lambda\}} X_N dP \\
&= E[X_N] - E[X_n] \int_{\{X_n<-\lambda\}} X_N dP \\
&= E[X_N] - E[X_n] \int_{\{X_n<-\lambda\}} |X_N| dP \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

が任意の $n \leq N$ に対してなりたつ．$0 \geq n > N$ なる有限個の確率変数列の可積分性と合わせれば，(X_n^-) の一様可積分性も示された．

したがって $X = X^+ - X^-$ も一様可積分である． □

命題 2.1.28. $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\leq 0}}$ を後ろ向きマルチンゲールとする．このとき $\lim_{n\to-\infty} X_n(\omega)$ は確率 1 で存在し，しかも L^1 の意味での極限にもなっている．

証明．上向き横断不等式を $X_{-n}, \ldots, X_0$ に適用すれば

$$(b-a)E\left[U_{\{-n,\ldots,0\}}(a,b,X)\right] \leq E[X_0^+] + |a| < \infty$$

であるから，劣マルチンゲール収束定理と同様にして概収束極限 $\lim_{n\to-\infty} X_n(\omega) =: X_\infty(\omega)$ の存在が示される．補題 2.1.27 により X は一様可積分であるから，X_∞ は L^1 の意味での極限でもある． □

定理 2.1.29. Y を可積分確率変数，$\mathscr{F}_{-\infty} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_n$ とする．$Y_n = E[Y|\mathscr{F}_n]$ $(n \in \mathbb{Z}_{\leq 0} \cup \{-\infty\})$ とおけば，$Y_n \to Y_\infty$ が概収束，および L^1 -収束の意味でなりたつ．

証明．定義より $Y = (Y_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\leq 0}}$ は後ろ向きマルチンゲールであるから，命題 2.1.28 より概収束（そして L^1 収束）の意味での極限 Z が存在する．$m \geq n$ での極限を考えれば，Z は $\mathscr{F}_n$ 可測である[*10]ことが分かる．N

[*10] ように選ぶことが出来る，というのが正確な言い方だが...

を任意に動かせば Z は結局 $\mathscr{F}_{-\infty}$ -可測である．また， $A \in \mathscr{F}_{-\infty} \subset \mathscr{F}_n$ に対して

$$\int_A Y dP = \int_A Y_n dP$$

であるから，$Y_n 1_A \to Z 1_A$ in L^1 により

$$\int_A Y dP = \int_A Z dP \quad A \in \mathscr{F}_\infty$$

が分かる．したがって Z は $E[Y|\mathscr{F}_{-\infty}]$ の一つのバージョンである． □

2.1.6　任意抽出定理-その２

命題 2.1.30. $X = (X_n)$ を一様可積分な劣マルチンゲールとしたとき任意の停止時刻 T に対して X^T は一様可積分な確率過程となる．

証明．はじめに X_T の可積分性を示す．定理 2.1.20 により X は収束するので，その極限を X_∞ とおく．この時，X_T は Ω 上で定義されていることに注意されたい．仮定と定理 2.1.12 により

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E\left[X_{T\wedge n}^+\right] \le \sup_{n\in\mathbb{N}} E\left[X_n^+\right] < \infty$$

が成り立つので，再び定理 2.1.20 により劣マルチンゲール X^T はある可積分な確率変数に概収束する．$\{T < \infty\}$ においては十分大きな n に対して

$$|X_{T\wedge n}(\omega) - X_T(\omega)| = |X_T - X_T| = 0 \quad (\text{各点収束})$$

また，$\{T = \infty\}$ 上では X_∞ の定義より

$$X_n \to X_\infty = X_T \quad \text{a.e.}$$

これらの議論により特に $X_{T\wedge n} \to X_T$ である事が分かるので，極限の一意性より (X_n^T) の概収束極限 X_T の可積分性が分かる．いま，

$$\begin{aligned} E[|X_{T\wedge n}|; |X_{T\wedge n}| > K] &= E[|X_T|; |X_T| > K, T \le n] + E[|X_n|; |X_n| > K, T > n] \\ &\le E[|X_T|; |X_T| > K] + E[|X_n|; |X_n| > K] \\ &\le E[|X_T|; |X_T| > K] + \sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n|; |X_n| > K] \end{aligned}$$

であるから，左辺で n に関して上限をとって，両辺において $K \to \infty$ とすればよい． □

命題 2.1.31. (X_n) を $(\mathscr{F}_n)$-適合な確率過程，T を $(\mathscr{F}_n)$ -停止時刻で　X_T が Ω 上で定義されているものとする．X_T が可積分で $X_n 1_{\{T>n\}}$ が一様可積分ならば $X^T = (X_{T\wedge n})$ も一様可積分である．

証明．定理 2.1.30 の証明と同様である． □

定理 2.1.32. $X = (X_n)$ を一様可積分な劣マルチンゲール，T を任意の停止時刻とするとき，以下の不等式が成り立つ．

$$E[X_0] \le E[X_T] \le E[X_\infty].$$

ただし，X_∞ は X の概収束極限である．

証明．命題 2.1.30 により X^T は一様可積分だから，$X_n^T \to X_T$（概収束）とあわせれば命題??によって

$$E[X_{T\wedge n}] \longrightarrow E[X_T] \quad (n \longrightarrow \infty)$$

である．

$$E[X_0] = E[X_{T\wedge 0}] \leq E[X_{T\wedge n}] \longrightarrow E[X_T] \quad (\text{as } n \longrightarrow \infty)$$

より，一つ目の不等号が成り立つ．次に，定理 2.1.12 により

$$E[X_{T\wedge n}] \leq \ E[X_n]$$

であるから，(X_n) の一様可積分性に注目すれば，両辺で $n \to \infty$ の極限をとって

$$E[X_T] \leq E[X_\infty]$$

を得る．□

定理 2.1.33. S, T を $S \leq T$ を満たす任意の停止時刻，$X = (X_n)$ を X^T が一様可積分な劣マルチンゲールになるような適合過程とする．このとき

$$E[X_T|\mathscr{F}_S] \geq X_S \quad \text{a.e.}$$

が成り立つ．

証明．定理 2.1.20 により X^T は a.e. で収束するので，その極限を X_∞^T とおく．$\{T = \infty\}$ 上では $X_T = X_\infty^T$ によって定義されていると考える．このとき $X_\infty^T = X_T$ a.e. である．確率過程 $Y = (Y_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ を

$$Y_n = \begin{cases} X_{T\wedge n} & (n \in \mathbb{N}) \\ X_\infty^T & (n = \infty) \end{cases}$$

と定めれば，$(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は一様可積分な劣マルチンゲールであるから，定理 2.1.32 によって

$$E[Y_S] \leq E[Y_\infty]$$

ここで $Y_S = X_{T\wedge S} = X_S$ a.e. および $Y_\infty := X_\infty^T = X_T$ a.e. に注意すれば

$$E[X_S] \leq E[X_T] \quad \text{a.e.}$$

を得る．

$A \in \mathscr{F}$ に対して確率変数 S_A を

$$S_A = \begin{cases} S(\omega) & \omega \in A \\ T(\omega) & \omega \in \Omega \setminus A \end{cases}$$

と定めれば，S_A は $S_A \leq T$ を満たす停止時刻となる．前半の結果により

$$\begin{aligned} E[X_S; A] + E[X_T; A^c] &= E[X_{S_A}; A] + E[X_{S_A}; A^c] \\ &= E[X_{S_A}] \\ &\leq E[X_T] \\ &= E[X_T; A] + E[X_T; A^c] \end{aligned}$$

である．これより，任意の $A \in \mathscr{F}_S$ に対して

$$E[X_S 1_A] \leq E[X_T 1_A]$$

が成り立つことが示された．□

2.2 連続時間マルチンゲールの定義と基本的な不等式

本節からは，一般の連続時間マルチンゲールについて考えることにする．時間集合 $\mathbb{T}$ は，特に断らない限り $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ とする．

定義 2.2.1. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．実数値確率過程 $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ が

(i) $\mathbb{F}$-適合．
(ii) 任意の $t \in \mathbb{R}_+$ について X_t は可積分．
(iii) 任意の $s, t \in \mathbb{R}_+$ に対して，$s \le t$ ならば $E[X_t|\mathscr{F}_s] = X_s$ P-a.s.

を満たすとき，X を $\mathbb{F}$-マルチンゲール（$\mathbb{F}$-martingale），あるいは単にマルチンゲールという．(iii) の代わりに

$$E[X_t|\mathscr{F}_s] \le X_s$$

が成り立つときは優マルチンゲール (supermartingale)，

$$E[X_t|\mathscr{F}_s] \ge X_s$$

が成り立つときは劣マルチンゲール (submartingale) という．

マルチンゲールの文脈では X_t の $t \to \infty$ に関する極限として，新たな確率変数 X_∞ を考えることも多い．$(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ に加えて X_∞ が与えられているとき，確率過程 $(X_t)_{t \in [0,\infty]}$ などという言い方もすることにする．特に X_∞ が $\mathscr{F}_\infty = \mathscr{F}_{\infty-}$ 可測かつ可積分，さらに

$$E[X_\infty|\mathscr{F}_t] = X_t, \quad P\text{-a.s.}$$

を満たすとき，$(X_t)_{t \in [0,\infty]}$ がマルチンゲールであるということにする．同様にして $[0, \infty]$ を時刻集合にもつ優，劣マルチンゲールも定義する．

命題 2.2.2. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，$X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ と $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ は $\mathbb{F}$-適合過程とする．

(i) X が劣マルチンゲールで Z が有界，非負かつ $\mathscr{F}_0$ -可測ならば　$ZX = (ZX_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ も劣マルチンゲール．
(ii) X, Y が劣マルチンゲールならば $X + Y = (X_t + Y_t)$ も劣マルチンゲールである．
(iii) X がマルチンゲールで Z が有界 $\mathscr{F}_0$ -可測確率変数ならば　ZX もマルチンゲールである．
(iv) X, Y がマルチンゲールならば $X + Y$ もマルチンゲールである．
(v) $(\mathscr{F}_t)$ -マルチンゲール全体のなす空間は線形空間である．

証明．(i). 有界性より ZX_t の可積分性は明らか．$0 \le s \le t$ とすれば，Z の非負性[*11]と可測性より

$$E[ZX_t|\mathscr{F}_s] = ZE[X_t|\mathscr{F}_s] \ge ZX_s$$

である．よって ZX は劣マルチンゲール．

(ii). 可積分性は明らか．$0 \le s \le t$ とすれば条件付き期待値の線形性より

$$E[X_t + Y_t|\mathscr{F}_s] = E[X_t|\mathscr{F}_s] + E[Y_t|\mathscr{F}_s] \ge X_s + Y_s$$

[*11] 不等号を保つために非負性を用いる．

となる．

(iii). (i) と同じだが，等号なので非負性は不要である．

(iv). (ii) と同様.

(v). (iii) と (iv) より明らか.

□

はじめに，Doob の不等式の連続時間への拡張を行う．なお，これ以降の結果は任意のパスの右連続性，連続性などを仮定していることが多いが，必要に応じて全空間を取りかえれば「確率 1 で」ということばを付け加えることも可能である．

定理 2.2.3. $X=(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を右連続なパスをもつ[*12] 劣マルチンゲールとし，$s<t$ なる $s,t\in\mathbb{R}_+$ と $\lambda>0$ を考える．

(i) 以下の劣マルチンゲール不等式が成立する．

$$\lambda P\left[\sup_{s\le u\le t} X_u\ge\lambda\right]\le E\left[X_t 1_{\{\sup_{s\le u\le t}X_u\ge\lambda\}}\right]\le E[X_t^+] \tag{2.11}$$

$$\lambda P\left[\inf_{s\le u\le t} X_u\le -\lambda\right]\le E[X_t-X_s]-\left[X_t 1_{\{\inf_{s\le u\le t}X_u\le-\lambda\}}\right]\le E[X_t^+]-E[X_s] \tag{2.12}$$

(ii) $p\ge 1$ とする．X が非負またはマルチンゲールとなっているとき，以下が成り立つ．

$$\lambda^p P\left[\sup_{s\le u\le t}|X_u|\ge\lambda\right]\le E\left[|X_t|^p\right] \tag{2.13}$$

(iii) $p>1$ とする．X が非負かまたはマルチンゲールであるとき，以下の不等式が成立．

$$E\left[\sup_{s\le u\le t}|X_u|^p\right]\le\left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\left[|X_t|^p\right] \tag{2.14}$$

証明．(2.11) **の証明．** $F\subset[s,t]$ が有限集合のときは，離散時間の結果より $\mu>0$ に対して以下の不等式が成立[*13]．

$$\mu P\left[\sup_{u\in F}X_u>\mu\right]\le E\left[X_t;\ \sup_{u\in F}X_u>\mu\right] \tag{2.15}$$

ここで $F_n\uparrow([s,t]\cap\mathbb{Q})\cup\{s,t\}(=:D)$ なる有限集合の列を考える．

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}P\left[\sup_{u\in F_n}X_u>\mu\right]&=P\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{u\in F_n}X_u>\mu\right]=P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{u\in F_n}\{X_u>\mu\}\right)\\&=P\left(\bigcup_{u\in D}\{X_u>\mu\}\right)=P\left[\sup_{u\in D}X_u>\mu\right]\end{aligned}$$

[*12] 定理の証明を見れば明らかだが，sup や inf をとる集合がが可算集合ならばこれらの不等式は常に成立する．ここでの右連続性は次の事実を保証するために必要である：

- $\left\{\sup_{s\le u\le t}X_u\ge\lambda\right\}$ などの集合が $\mathcal{F}$ -可測になること．
- 稠密な稠密な可算部分集合上での結果を $[s,t]$ という非可算集合の場合にも拡張できること．

[*13] 不等号 $\ge$ が $>$ に代わっていることに注意．α に対して離散時間の結果を用いてから $\alpha\downarrow\mu$ などとすれば容易に示される．

に注意して[*14](2.15) で極限をとれば，

$$\mu P\left[\sup_{u\in D} X_u > \mu\right] \le E\left[X_t;\ \sup_{u\in D} X_u > \mu\right] \tag{2.16}$$

が成立する．（右辺は優収束定理を用いた．）ところで X が右連続であったことを思い出せば[*15]，(2.16) より以下の不等式が分かる．

$$\mu P\left[\sup_{u\in[s,t]} X_u > \mu\right] \le E\left[X_t;\ \sup_{u\in[s,t]} X_u > \mu\right]$$

$\mu\uparrow\lambda$ とすれば，求める不等式

$$\lambda P\left[\sup_{u\in[s,t]} X_u \ge \lambda\right] \le E\left[X_t;\ \sup_{u\in[s,t]} X_u \ge \lambda\right]$$

を得る．

(2.12) の証明．(2.11) と同様である．

(2.13) の証明．$|X|^p$ が右連続な劣マルチンゲールになっていることに注意すれば (2.11) より分かる．

(2.14) の証明．(2.11) の証明と同様に有限集合の増加列 $F_n \uparrow D$ を特に各 F_n が最終時刻 t を含むようにとって，離散時間の結果 (2.4) で極限をとればよい． □

次に，上向き横断数に関する結果を連続時間の場合に拡張する．実数 a, b は $a < b$ を満たすものとする．有限集合 $F = \{t_0, \ldots, t_n\} \subset [0,\infty[$ に対して，上向き横断数 $U_F(a,b,X(\omega))$ を $k = t_k$ と思って離散時間の場合と同様に定義する．さらに，一般の $I \subset [0,\infty[$ に対しては

$$U_I(a,b,X(\omega)) := \sup\{U_F(a,b,X(\omega)); F\subset I \text{ は有限集合.}\}$$

とおいて，$I \subset [0,\infty[$ における上向き横断数 (upcrossing number) $U_I(a,b,X(\omega))$ を定義する．

定理 2.2.4 (Upcrossing Inequality)．$X = (X_t)_{t\in[0,\infty[}$ を $(\mathscr{F}_t)$ -劣マルチンゲールとする．このとき，上向き横断数 $U_{[s,t]}(a,b,X(\omega))$ に対して以下の不等式がなりたつ．

$$E\left[U_{[s,t]}(a,b,X)\right] \le \frac{E\left[X_t^+\right] + |a|}{b-a}$$

証明．$D = ([s,t]\cap\mathbb{Q})\cup\{s,t\}$ と定義し，$F_n \uparrow D$ かつ $t \in F_n$ となるような有限集合の列をとる．このとき，定理 2.1.19 より

$$E\left[U_{F_n}(a,b,X)\right] \le \frac{E\left[X_t^+\right] + |a|}{b-a}$$

が各 F_n に対してなりたつ．$U_{F_n}(a,b,X(\omega))$ は n について増加的だから，単調収束定理より

$$\lim_{n\to\infty} E\left[U_{F_n}(a,b,X)\right] = E\left[\lim_{n\to\infty} U_{F_n}(a,b,X)\right] \le \frac{E\left[X_t^+\right] + |a|}{b-a}$$

とできる．このとき，

$$\lim_{n\to\infty} U_{F_n}(a,b,X(\omega)) = U_D(a,b,X(\omega))$$

[*14] $\{\sup_u X_u > \mu\} = \bigcup\{X_u > \mu\}$ という変形を正当化するために (2.15) で不等号 $\ge$ を $>$ に書き換える必要があったのである．

[*15] 右連続関数が稠密部分集合上で一意に決まってしまうことを用いている．D には端点 t をちゃんと含んでいるので，$\sup_{u\in D} X_u = \sup_{u\in[s,t]} X_u$ となる．

となることは容易に示されるから[*16]

$$E\left[U_D(a,b,X)\right] \le \frac{E\left[X_t^+\right]+|a|}{b-a}$$

である．X の右連続性より $U_D(a,b,X(\omega)) = U_{[s,t]}(a,b,X(\omega))$ であるから[*17]，求める不等式

$$E\left[U_{[s,t]}(a,b,X)\right] \le \frac{E\left[X_t^+\right]+|a|}{b-a}$$

を得る． □

2.3 パスの連続性

はじめの小節で述べた結果は右連続な劣マルチンゲールについて成立するが，それでは劣マルチンゲールのパスが右連続であるのはどのような場合だろうか．たとえば，ある可積分関数 X に対して $Y_t = E[X|\mathscr{F}_t]$, P-a.s. なる (Y_t) をとったとき，これは連続なマルチンゲールになるだろうか．次のいくつかの補題や命題では，このことについて考察する．

補題 2.3.1. $X=(X_t)$ を $(\mathscr{F}_t)$-劣マルチンゲールとする．[*18]このとき，確率 1 の集合 $\Omega^* \in \mathscr{F}$ で以下を満たすようなものが存在する．

(i) $\omega \in \Omega^*$ とすれば，任意の $t \in [0,\infty[$ 対して極限

$$X_{t+}(\omega) := \lim_{s\downarrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega)$$

が存在する．

(ii) $\omega \in \Omega^*$ とすれば，任意の $t \in]0,\infty[$ 対して極限

$$X_{t-}(\omega) := \lim_{s\uparrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega)$$

が存在する．

証明．$D_n = [0,n]\cap\mathbb{Q}$ とし，

$$A^n_{a,b} := \{\omega\in\Omega \mid U_{D_n}(a,b,X(\omega)) = \infty\}$$

とおく．定理 2.2.4 の証明により

$$E\left[U_{D_n}(a,b,X)\right] \le \frac{E\left[X_n^+\right]+|a|}{b-a} < \infty$$

がなりたつから，$U_{D_n}(a,b,X(\omega)) < \infty$ P-a.s. である．よって $P(A^n_{a,b}) = 0$．零集合の可算和は零集合だから，

$$P\left(\bigcup_{a,b\in\mathbb{Q},\ a<b} A^n_{a,b}\right) = 0$$

[*16] $U_D(a,b,X(\omega))$ の定義に戻れ！

[*17] 右連続性より $X_u(\omega) < a$ なる $u \in [s,t]$ の十分近くに有理数 u' で $X_{u'}(\omega) < a$ なるものがとれることに注意．upcrossing number の定義の際に $X_u(\omega) < a$ のように狭義の不等号で意義したことがここで効いている．不等号 $\le, \ge$ で定義した場合は，a, b に無理点のみでヒットしてそのまま超えずに戻ってきた場合はカウントできない．

[*18] パスの右連続性は仮定しない．

である．ところで，

$$\left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \varliminf_{s \downarrow t, s \in \mathbb{Q}} X_s(\omega) < \varlimsup_{s \downarrow t, s \in \mathbb{Q}} X_s(\omega) \text{ for some } t \in [0, n[\right\} \subset \bigcup_{a,b \in \mathbb{Q},\ a<b} A^n_{a,b}$$

であるから，

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \varliminf_{s \downarrow t, s \in \mathbb{Q}} X_s(\omega) = \varlimsup_{s \downarrow t, s \in \mathbb{Q}} X_s(\omega) \text{ for all } t \in [0, n[\right\}\right) = 1$$

となる．同様にして

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \varliminf_{s \uparrow t, s \in \mathbb{Q}} X_s(\omega) = \varlimsup_{s \uparrow t, s \in \mathbb{Q}} X_s(\omega) \text{ for all } t \in]0, n]\right\}\right) = 1$$

も分かる．さらに n について和をとれば

$$\begin{aligned}
&P\left(\left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \varliminf_{s \downarrow t, s \in \mathbb{Q}} X_s(\omega) = \varlimsup_{s \downarrow t, s \in \mathbb{Q}} X_s(\omega) \text{ for all } t \in [0, \infty[\right\}\right) \\
&= P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}}\left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \varliminf_{s \downarrow t, s \in \mathbb{Q}} X_s(\omega) = \varlimsup_{s \downarrow t, s \in \mathbb{Q}} X_s(\omega) \text{ for all } t \in [0, n[\right\}\right) = 1. \\
&P\left(\left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \varliminf_{s \uparrow t, s \in \mathbb{Q}} X_s(\omega) = \varlimsup_{s \uparrow t, s \in \mathbb{Q}} X_s(\omega) \text{ for all } t \in]0, \infty[\right\}\right) \\
&= P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}}\left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \varliminf_{s \uparrow t, s \in \mathbb{Q}} X_s(\omega) = \varlimsup_{s \uparrow t, s \in \mathbb{Q}} X_s(\omega) \text{ for all } t \in]0, n]\right\}\right) = 1.
\end{aligned}$$

よって X_{t+}, X_{t-} の存在が示された． □

命題 2.3.2. $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ を劣マルチンゲールとし，X_{t+}, X_{t-} を補題 2.3.1 で定義したものとすれば，次の主張が成立．

(i) 以下の不等式がなりたつ．

$$\begin{aligned}
&E[X_{t+}|\mathscr{F}_t] \geq X_t \quad P\text{-a.s.},\ \forall t \in [0, \infty[. \\
&E[X_t|\mathscr{F}_{t-}] \geq X_{t-} \quad P\text{-a.s.},\ \forall t \in]0, \infty[.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

(ii) $X = (X_{t+})_{t \in [0,\infty[}$ は $(\mathscr{F}_{t+})$ -劣マルチンゲールであって，確率 1 で右連続なパスをもつ．

証明．(i) の証明．$t \in [0, \infty[$ とし，有理数列 $(t_n)_{n\mathbb{Z}_{\leq 0}}$ を $t_n > t$ かつ $t_n \downarrow t$ $(n \to -\infty)$ を満たすようにとる．$(X_{t_n})_{n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}}$ は補題 2.1.27 の意味での後ろ向き劣マルチンゲールで，さらに条件 $\lim_{n \to -\infty} E[X_{t_n}] \leq E[X_t] > \infty$ を満たすから補題 2.1.27 より一様可積分である．$X = (X_t)$ の劣マルチンゲール性より

$$\int_A X_t dP \leq \int_A X_{t_n} dP \quad A \in \mathscr{F}_t$$

であるが，ここで極限をとれば $(X_{t_n})_{n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}}$ の一様可積分性より

$$\int_A X_t dP \leq \lim_{n \to -\infty} \int_A X_{t_n} dP = \int_A \lim_{n \to -\infty} X_{t_n} dP = \int_A \lim_{n \to -\infty} X_{t+} dP \quad A \in \mathscr{F}_t$$

を得る．すなわち，(2.17) がなりたつ．

今度は有理数列 $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $t_n<t$ かつ $t_n\uparrow t$ となるようにとる．劣マルチンゲール性より

$$E[X_t|\mathscr{F}_{t_n}]\geq X_{t_n}\quad P\text{-a.s.}$$

であるから，ここで $n\to+\infty$ とすれば定理 2.1.25 により

$$E\left[X_t|\mathscr{F}_{t-}\right]\geq X_{t-}$$

となる．

(ii) の証明．ステップ 1：劣マルチンゲール性の証明．$X=(X_{t+})$ の $(\mathscr{F}_{t+})$ -適合性と可積分性は明らかである．$0\leq s<t$ として，$t>s_n>s$ かつ $s_n\downarrow s$ となるような有理数列 $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\leq 0}}$ をとる．2.17 により

$$E[X_{t+}|\mathscr{F}_{s_n}]=E[E[X_{t+}|\mathscr{F}_t\,|\mathscr{F}_{s_n}]\geq E[X_t|\mathscr{F}_{s_n}]\geq X_{s_n}$$

であるから，定理 2.1.29 により

$$\lim_{n\to-\infty}E[X_{t+}|\mathscr{F}_{s_n}]=E[X_{t+}|\mathscr{F}_{s+}]\geq X_{s+}$$

となり劣マルチンゲール性が分かった．

ステップ 2：右連続性の証明．実は右連続性だけでなく，càdlàg なパスをもつことまで示すことができる．少々面倒くさいが，ε-δ 論法に戻って証明しよう．Ω^* は補題 2.3.1 で定義したものとする．まずは右連続性を示す．$\omega\in\Omega^*$ を任意にとって固定する．$t,s\in[0,\infty[$ とすれば，$X_{t+}(\omega)$ の定義より以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_1>0,\ \forall r\in\mathbb{Q},\ 0<r-t<\delta_1\Longrightarrow|X_r(\omega)-X_{t+}(\omega)|<\varepsilon.\\
&\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_2>0,\ \forall r\in\mathbb{Q},\ 0<r-s<\delta_2\Longrightarrow|X_r(\omega)-X_{s+}(\omega)|<\varepsilon.
\end{aligned}$$

ここで特に s として $0<s-t\delta_1$ なる任意の $s\in[0,\infty[$ をとれば，$0\leq r-s\delta_1\wedge\delta_2$ なる有理数 r に対して

$$|X_{t+}(\omega)-X_{s+}(\omega)|\leq|X_{t+}(\omega)-X_r(\omega)|+|X_r(\omega)-X_{s+}(\omega)|\leq 2\varepsilon$$

がなりたつから，t での $t\mapsto X_{t+}(\omega)$ の右連続性が分かる．

左極限が存在することを示すために，特に $X_{s+}\to X_{t-}$ $(s\uparrow t,s<t)$ を示す．$t\in]0,\infty[$ を任意に選んで固定する．X_{t-},X_{s+} の定義より

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\gamma_1>0,\ \forall r\in\mathbb{Q},\ 0\leq t-r<\gamma_1\Longrightarrow|X_r(\omega)-X_{t-}(\omega)|<\varepsilon. \tag{2.18}$$

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\gamma_2>0,\ \forall r\in\mathbb{Q},\ 0\leq r-s<\gamma_2\Longrightarrow|X_r(\omega)-X_{s+}(\omega)|<\varepsilon. \tag{2.19}$$

である．$0<t-s<\gamma_1\wedge\gamma_2$ なる $s\in[0,t[$ をとれば，(2.18),(2.19) より $s\leq r\leq t$ なる有理数 r に対して

$$|X_{t-}(\omega)-X_{s+}(\omega)|\leq|X_{t-}(\omega)-X_r(\omega)|+|X_r(\omega)-X_{s+}(\omega)|\leq 2\varepsilon$$

となるから，X_{t-} は $s\mapsto X_{s+}$ の t での左極限である．□

定理 2.3.3. $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,\infty[}$ を通常の条件を満たすフィルトレーションとし，$X=(X_t)_{t\in[0,\infty[}$ を $(\mathscr{F}_t)$ -劣マルチンゲールとする．このとき，以下の条件は同値である．

(i) X の修正として右連続なパスをもつものがとれる．

(ii) 関数:$[0,\infty[\ni t\mapsto E[X_t]\in\mathbb{R}$ は右連続．

この条件がなりたつとき，X の修正として特に càdlàg なパスをもち，$(\mathscr{F}_t)$ -適合であるようなものがとれる[*19]．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii) **の証明．** $\tilde{X}$ を右連続なパスを持つ X の修正とする．$(t_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\le 0}}$ を $t_n \downarrow t$ なる任意の実数列とする．$\tilde{X}$ は X の修正だったから，$P\left[X_t = \tilde{X}_t,\ X_{t_n} = \tilde{X}_{t_n};\ n \in \mathbb{Z}_{\le 0}\right] = 1$ がなりたつ．したがって，

$$\lim_{n\to-\infty} X_{t_n} = \lim_{n\to-\infty} \tilde{X}_{t_n} = \tilde{X}_t = X_t \quad P\text{-a.s.}$$

である[*20]．補題 2.1.27 より $(X_{t_n})_{n\in\mathbb{Z}_{\le 0}}$ は一様可積分なので

$$\lim_{n\to-\infty} E[X_{t_n}] = E[X_t]$$

となる．これより，関数:$[0,\infty[\ni t \mapsto E[X_t] \in \mathbb{R}$ の右連続性が分かる．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) **の証明．** $t \mapsto E[X_t]$ 右連続であると仮定する．フィルトレーションが右連続であることに注意すれば，命題 2.3.2 により (X_{t+}) は càdlàg なパス[*21]をもつ $(\mathscr{F}_t)$ -劣マルチンゲールである．このとき，(X_{t+}) が $X = (X_t)$ の修正になっていることを示せばよい．$(t_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\le 0}}$ を有理数の列で $t_n > t$ かつ $t_n \downarrow t$ なるものとしてとれば，補題 2.1.27 より (X_{t_n}) は一様可積分な後ろ向き劣マルチンゲールとなる．一様可積分性より $\lim_{n\to-\infty} EX_{t_n} = E[X_{t+}]$ であり，仮定より $\lim_{n\to-\infty} EX_{t_n} = E[X_t]$ である．したがって $E[X_{t+} - X_t] = 0$ となるが，(2.17) より $X_{t+} - X_t \ge 0$ a.e. がなりたつので $X_{t+} - X_t = 0$ a.e.. よって (X_{t+}) は X の修正である． $\square$

2.4 収束定理

以下ではフィルター付き確率空間を固定して考える．$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, P)$

定理 2.4.1 (劣マルチンゲール収束定理)**.** $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ は右連続なパスを持つ $(\mathscr{F}_t)$ -劣マルチンゲールとする．(X_t^+) が L^1 -有界ならば，ある可積分確率変数 X_∞ が存在して，$X_t \to X_\infty$ P-a.s. がなりたつ．

証明．証明は離散時間において上向き横断不等式から劣マルチンゲール収束定理を導くプロセスとほとんど同じであるが，念のために書いておく．

定理 2.2.4 により，任意の実数 $a < b$ に対して

$$E[U_{[0,n]}(a,b,X)] \le \frac{E[X_n^+] + |a|}{b-a} \le \frac{\sup_{t\in[0,\infty[} E[X_t^+] + |a|}{b-a} < \infty$$

が成り立つ．$n \to \infty$ とすれば，単調収束定理により

$$E\left[U_{[0,\infty[}(a,b,X)\right] \le \frac{\sup_{t\in[0,\infty[} E[X_t^+] + |a|}{b-a} < \infty$$

[*19] このような修正は当然 $(\mathscr{F}_t)$ -劣マルチンゲールになっている．

[*20] これだと X_t そのものが右連続であるように見えるが，ここでの確率 1 の集合は列 (t_n) のとり方に依存していることに注意．列のとり方は可算種類ではとどまらない．パスが確率 1 で連続というのは，ある確率 1 の集合 $\tilde{\Omega}$ が存在して，$\omega \in \tilde{\Omega}$ をとればどのような列 (t_n) をとっても $X_{t_n}(\omega) \to X_t(\omega)$ となるということである．

[*21] 先の命題では Ω^* 上で càdlàg なパスをもつことしか言っていないが，その他の点では 0 とでもすればよかろう．

であり，$U_{[0,\infty[} < \infty$ a.e. となる．ところで，

$$\left\{ \varliminf_{t\to\infty} X_t < \varlimsup_{t\to\infty} X_t \right\} \subset \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}} \{\varliminf X_t < a < b < \varlimsup X_t\} \subset \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}} \{U_\infty(a,b,X) = \infty\}$$

に注意すれば

$$P\left[\varliminf_{t\to\infty} X_t < \varlimsup_{t\to\infty} X_t \right] \le \sum_{a,b\in\mathbb{Q}} P[U_\infty(a,b,X) = \infty] = 0$$

となり，X_t がほとんどいたるところ収束することがわかった．あとは，その極限 X_∞ の可積分性を言えばよい．Fatou の補題により

$$E[X_\infty^+] \le \varliminf_{t\to\infty} E[X_t^+] \le \sup_{t\in[0,\infty[} E[X_t^+] < \infty$$

である．また，

$$E[X_t^-] \le E[X_t^+] - E[X_t] \le \sup E[X_t^+] - E[X_0]$$

に注意すれば，再び Fatou の補題を用いて

$$E[X_\infty^-] \le \varliminf_{t\to\infty} E[X_t^-] \le \sup_{t\in[0,\infty[} E[X_t^+] - E[X_0] < \infty$$

が成り立つ．これにより，X_∞ の可積分性が示された． □

定理 2.4.2. 劣マルチンゲール $X = (X_t)_{t\in[0,\infty[}$ に対して，次の条件は同値である．

(i) X は一様可積分．
(ii) X は L^1 収束する．
(iii) X はある可積分な確率変数 X_∞ に概収束し，$(X_t)_{t\in[0,\infty]}$ は $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$ -劣マルチンゲールとなる．さらに，$E[X_t] \to E[X_\infty]$ $(t\to\infty)$ がなりたつ．

証明. 離散時間の場合とほとんど同じである． □

定理 2.4.3. $X = (X_t)_{t\in[0,\infty[}$ を $(\mathscr{F}_t)$ -マルチンゲールとしたとき，以下の条件は同値である．

(i) X は一様可積分．
(ii) X は L^1 収束する．
(iii) X はある可積分な確率変数 X_∞ に概収束し，$(X_t)_{t\in[0,\infty]}$ は $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$ -マルチンゲールとなる．
(iv) ある可積分な確率変数 Y が存在して，$X_t = E[Y|\mathscr{F}_t]$ と書ける．

証明. 離散時間の場合と同様. □

2.5 任意抽出定理

定理 2.5.1. $X = (X_t)_{t\in[0,\infty[}$ は右連続なパスを持つ一様可積分劣マルチンゲールとし，S, T を $S \le T$ を満たす停止時刻とする．このとき

$$E[X_T|\mathscr{F}_S] \ge X_S \quad P\text{-a.s.}$$

がなりたつ．

証明．S に対して停止時刻の列 S_n を

$$S_{-n}(\omega) = \begin{cases} S(\omega) & S(\omega) = \infty \\ \dfrac{k}{2^n} & \dfrac{k-1}{2^n} \leq S(\omega) < \dfrac{k}{2^n} \end{cases}$$

とおけば，$(S_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\leq 0}}$ は停止時刻の減少列であって $S_n \downarrow S$ を満たす．さらに，これは命題??の (??) の過程を満たすものであることに注意されたい．離散時間の任意抽出定理と補題 2.1.27 より $(X_{S_n})_{n\in\mathbb{Z}_{\leq 0}}$ は一様可積分な後ろ向き劣マルチンゲールである[*22]．T についても同様に (T_n) を定義すれば，$(X_{T_n})_{n\in\mathbb{Z}_{\leq 0}}$ も一様可積分な後ろ向き劣マルチンゲールである．離散時間の任意抽出定理により任意の $A \in \mathscr{F}_{S_n}$ に対して

$$\int_A X_{S_n} dP \leq \int_A X_{T_n} dP \tag{2.20}$$

である．特に $A \in \mathscr{F}_{S+} = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}_{\leq 0}} \mathscr{F}_{S_n}$ に対しても (2.20) はなりたつので，ここで $n \to -\infty$ とすれば一様可積分性とパスの右連続性により．

$$\int_A X_S dP \leq \int_A X_T dP$$

となる．よって $E[X_T|\mathscr{F}_{S+}] \geq X_S$ が Ω 上殆ど至る所成り立つ．いま，発展的可測性より X_S は $\mathscr{F}_S$ -可測なので，特に両辺 $\mathscr{F}_S$ で条件付き期待値をとれば[*23]$E[X_T|\mathscr{F}_S] \geq X_S$ P-a.s. となる． □

系 2.5.2. $X = (X_t)_{t\in[0,\infty[}$ は右連続なパスを持つ一様可積分マルチンゲールとし，S, T を任意の停止時刻とする．このとき，

$$E[X_T|\mathscr{F}_S] \geq X_{T\wedge S} \quad P\text{-a.s.}$$

がなりたつ．

証明．$X_T 1_{\{T\leq S\}}$ は $\mathscr{F}_S$-可測だから，定理 2.5.1 より

$$\begin{aligned} E[X_T|\mathscr{F}_S] &= E[X_T 1_{\{T\leq S\}} + X_T 1_{\{T>S\}}|\mathscr{F}_S] \\ &= E[X_T 1_{\{T\leq S\}}|\mathscr{F}_S] + E[X_{T\vee S} 1_{\{T>S\}}|\mathscr{F}_S] \\ &\geq X_T 1_{\{T\leq S\}} + X_S 1_{\{T>S\}} \\ &= X_{T\wedge S} \end{aligned}$$

がしたがう． □

系 2.5.3. $X = (X_t)_{t\in[0,\infty[}$ は右連続なパスを持つ一様可積分マルチンゲールとし，S, T を $S \leq T$ を満たす停止時刻とする．このとき

$$E[X_T|\mathscr{F}_S] = X_{S\wedge T} \quad P\text{-a.s.}$$

がなりたつ．

証明．系 2.5.1 を劣マルチンゲール X と $-X$ に適用すればよい． □

定理 2.5.4. $X = (X_t)_{t\in[0,\infty[}$ 右連続なパスを持つ劣マルチンゲールとし，S, T を $S \leq T$ を満たす有界停止時刻とする．このとき

$$E[X_T|\mathscr{F}_S] \geq X_S \quad P\text{-a.s.}$$

がなりたつ．

[*22] X の一様可積分性より極限 X_∞ が存在する（命題 2.4.2）ので，X_{S_n} および X_S は任意の点で定義されていることに注意．
[*23] 命題??(??) より $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_{S+}$ であることに注意．

証明．K を T の上界とする．$X=(X_t)_{t\in[0,K]}$ は一様可積分なので，前の定理の証明を応用すればよい． $\square$

系 2.5.5. $X=(X_t)$ を右連続な $(\mathscr{F}_t)$ -劣マルチンゲールとし， T を $(\mathscr{F}_t)$ -停止時刻とする．このとき $X^T=(X_{T\wedge t})_{t\in[0,\infty[}$ もまた $(\mathscr{F}_t)$ -劣マルチンゲールである．[*24]

証明．適合性は明らかで，可積分性も定理 2.5.4 より分かる．$s<t$ および $A\in\mathscr{F}_s$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\int_A (X_{T\wedge t}-X_{T\wedge s})dP \\
&\int_\Omega 1_{A\cap\{T\le s\}}(X_{T\wedge t}-X_{T\wedge s})dP+\int_\Omega 1_{A\cap\{T>s\}}(X_{T\wedge t}-X_{T\wedge s})dP \\
&\int_\Omega 1_{A\cap\{T\le s\}}(X_T-X_T)dP+\int_\Omega 1_{A\cap\{T>s\}}(X_{T\wedge t}-X_s)dP \\
&\ge 0
\end{aligned}
$$

となる．（ただし，最後の不等号は $A\cap\{T>s\}\in\mathscr{F}_s$ と定理 2.5.4 を用いた．）したがって $E[X_{T\wedge t}|\mathscr{F}_s]\ge X_{T\wedge s}$ が a.s. でなりたち，劣マルチンゲール性が分かった． $\square$

命題 2.5.6. X を右連続な $(\mathscr{F}_t)$ -適合過程とする． X がマルチンゲールであるための必要十分条件は，任意の有界 $(\mathscr{F}_t)$ -停止時刻 T に対して以下の (i), (ii) が成り立つことである．

(i) $X_T\in L^1(\Omega)$.

(ii) $E[X_T]=E[X_0]$.

証明．X がマルチンゲールならば (i), (ii) が成り立つことは任意抽出定理より分かる．逆を示そう．$T=t$ とすれば，(i) より X_t の可積分性が分かる．$s<t$ および $A\in\mathscr{F}_s$ を任意に選んで

$$T(\omega)=t1_{\Omega\setminus A}(\omega)+s1_A(\omega)$$

とおけば，T は有界な $(\mathscr{F}_t)$ -停止時刻である． (ii) より

$$E[X_0]=E[X_T]=E[X_t1_{\Omega\setminus A}]+E[X_s1_A] \tag{2.21}$$

がなりたつ．また，t 自体を有界停止時刻と見れば (ii) により

$$E[X_0]=E[X_t]=E[X_t1_{\Omega\setminus A}]+E[X_t1_A] \tag{2.22}$$

となる．(2.21) および (2.22) から

$$E[X_s1_A]=E[X_t1_A]$$

が分かる．これより X がマルチンゲールであることが示された． $\square$

2.6 局所マルチンゲールの定義

局所マルチンゲールの詳しい性質は第 4 章で扱うが，第 2 章の最後に定義だけ与えておく．

定義 2.6.1. $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ をフィルター付き確率空間とする．

[*24] X^T が $(\mathscr{F}_{t\wedge T})_{t\in\mathbb{R}_+}$ -劣マルチンゲールになっていることは任意抽出定理より明らかであるが，フィルトレーションを $(\mathscr{F}_t)$ に取り換えてもそれが成り立つというのがポイントである．

(i) càdlàg な $\mathbb{F}$-マルチンゲール X で，確率変数族 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ が一様可積分になるようなもの全体の集合を $\mathscr{M}(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ で表すことにする．$\mathscr{M}(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ の元を一様可積分マルチンゲールと呼ぶ．

(ii) $\mathscr{M}=\mathscr{M}(\mathbb{F})$ の局所化 $\mathscr{M}_{loc}$ の元を ($\mathbb{F}$-) 局所マルチンゲールという．

誤解の恐れがないときは，省略して $\mathscr{M}(\mathbb{F})$, $\mathscr{M}$, $\mathscr{M}_{loc}$ などと書くことにする．$\mathscr{M}$ の元に対しては，次の特徴づけが便利である．

命題 2.6.2. $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ をフィルター付き確率空間，$X=(X_t)_{t\in[0,\infty]}$ を càdlàg な $\mathbb{F}$-適合過程とする．このとき，$X\in\mathscr{M}$ は次の二条件と同値である：

(i) 任意の $\mathbb{F}$-停止時刻 T に対して X_T は可積分．

(ii) 任意の $\mathbb{F}$-停止時刻 T に対して $E[X_T]=E[X_0]$ が成立．

証明．$X\in\mathscr{M}$ ならば (i) と (ii) が成り立つことは，定理 2.5.1 より分かる．逆に (i) と (ii) を仮定すれば，命題 2.5.6 より X はマルチンゲールである．したがって X が一様可積分であることを示せばよい．$t\in\mathbb{R}_+$ および $A\in\mathscr{F}_t$ を任意に選んで，$T=t_A$（停止時刻の制限；命題 1.2.5 を参照せよ．）と定める．このとき仮定の条件 (ii) より

$$E[X_0]=E[X_T]=E[X_t1_A]+E[X_\infty 1_{\Omega\setminus A}]$$

が成立．一方で，定数時刻 ∞ に対して条件 (ii) を用いれば

$$E[X_0]=E[X_\infty]=E[X_\infty 1_A]+E[X_\infty 1_{\Omega\setminus A}]$$

仮定 (i) より X_∞ は可積分だから，

$$E[X_\infty 1_A]=E[X_t1_A],\quad \forall A\in\mathscr{F}_t$$

が成立．これより $X_t=E[X_\infty|\mathscr{F}_t]$ である．したがって，命題 2.4.3 から $X\in\mathscr{M}$ が分かる．□

定義 2.6.3. $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ をフィルター付き確率空間，$\mathscr{T}=\mathscr{T}(\mathbb{F})$ を全ての $\mathbb{F}$-停止時刻の成す集合，$\mathscr{T}_a$ で $\mathbb{F}$-停止時刻を $T\le a$ なるもの全体の集合，X を確率過程とする．確率変数族 $\{X_T1_{\{T<\infty\}}\mid T\in\mathscr{T}\}$ が一様可積分になるとき，X はクラス (D) (class (D)) に属するという．また，任意の $a\in\mathbb{R}_+$ について $\{X_T\mid T\in\mathscr{T}_a\}$ が一様可積分になるとき，X はクラス (DL)(class (DL)) に属するという．

次の命題では，定義よりすぐに分かる局所マルチンゲールの基本的な性質を述べる．

命題 2.6.4. $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ をフィルター付き確率空間とする．M,N などは局所マルチンゲールを，S,T,S_n,T_n などは停止時刻を表すものとする．

(i) 任意の càdlàg マルチンゲールは局所マルチンゲールである．

(ii) $M^T\in\mathscr{M}$ かつ $S\le T$ が成り立つなら，$M^S\in\mathscr{M}$ である．

(iii) (T_n) が局所マルチンゲール M の局所化列で，(S_n) が $S_0\le S_1\le\to\infty$ P-a.s. を満たすならば，$(T_n\wedge S_n)$ もまた M の局所化列である．

(iv) $M+N$ はまた局所マルチンゲールである．

(v) Z が $\mathscr{F}_0$ -可測な有界確率変数ならば，　ZM はまた局所マルチンゲールである．

(vi) $\mathbb{F}$ -局所マルチンゲール全体のなす空間は線形空間である．

(vii) M^T はまた局所マルチンゲールである．

(viii) フィルター付き確率空間は通常の条件を満たすとする．T が可予測時刻なら，M^{T-} は局所マルチンゲールである．

(ix) 非負の局所マルチンゲールは優マルチンゲールである．

証明．(i). 局所化列として $T_n = n$ をとればよい．

(ii). 任意抽出定理より $(M^T)^S = M^{T\wedge S} = M^S$ はまた一様可積分マルチンゲールになることが分かる．

(iii). 明らかに $T_n \wedge S_n \uparrow \infty$ P-a.s. が成り立つ．(ii) より $M^{T_n \wedge S_n} \in \mathscr{M}$ なので，$(S_n \wedge T_n)$ は M の局所化列である．

(iv). $(T_n), (S_n)$ をそれぞれ M, N の局所化列とすれば，(iii) より $(R_n) := (T_n \wedge S_n)$ は M, N 両方の局所化列になっている．$M^{R_n} \in \mathscr{M}$ かつ $N^{R_n} \in \mathscr{M}$ なので，その和 $(M+N)^{R_n}$ も一様可積分マルチンゲールである．よって $M+N$ は (R_n) を局所化列にもつ局所マルチンゲールである．

(v). M の局所化列 (T_n) を適当に選ぶ．このとき M^{T_n} はマルチンゲールであるから，命題 2.2.2 により $(ZM)^{T_n} = Z(M^{T_n})$ はまたマルチンゲールである．よって ZM は (T_n) を局所化列にもつ局所マルチンゲールである．

(vi). (iv), (v) より明らか．

(vii). 任意抽出定理より分かる．

(viii).T を可予測時刻，(T_n) をその予告列とする．さらに，(S_n) を局所マルチンゲール X の局所化列とする．このとき，各 $(X^{T-})^{S_n}$ がマルチンゲールになっていることを示せばよい．

$$
\begin{aligned}
(X^{T_m})^{S_n} &= X^{T_m} 1_{[\![0,S_n]\!]} + X^{T_m}_{S_n} 1_{]\!]S_n,+\infty[\![} \\
&\xrightarrow[m\to\infty]{\text{pointwise}} X^{T-} 1_{[\![0,S_n]\!]} + X^{T-}_{S_n} 1_{]\!]S_n,+\infty[\![} = (X^{T-})^{S_n}
\end{aligned}
$$

であることが分かるから，条件付き期待値における極限操作を正当化すればよい．仮定より各 n, m に対して $(X^{T_m})^{S_n} = (X^{S_n})^{T_m} = X^{S_n \wedge T_m}$ は一様可積分マルチンゲールであるから，$s \le t$ に対して

$$
E[X_{t\wedge T_m \wedge S_n} | \mathscr{F}_s] = X_{s\wedge T_m \wedge S_n}, \quad \text{a.s.}
$$

が成立．列 $(X_t^{T_m \wedge S_n})_{m\in\mathbb{N}}$ が一様可積分であることに注意して極限をとれば

$$
E[(X_t^{T-})^{S_n} | \mathscr{F}_s] = (X_s^{T-})^{S_n}, \quad \text{a.s.}
$$

が成立．よって確率過程 X^{T-} はまた局所マルチンゲールであることが分かる．

(ix). M を局所マルチンゲールとし，(T_n) をその局所化列とする．$0 \le s \le t$ および $A \in \mathscr{F}_s$ とすれば，

$$
E[1_A M_{T_n\wedge t}] = E[1_A M_{T_n \wedge s}] = E[1_A M_0]
$$

が成立．非負性より Fatou の補題が使えて，

$$
\begin{aligned}
0 \le E[M_t] &= E\left[\liminf_{n\to\infty} M_{T_n\wedge t}\right] \\
&\le \liminf_{n\to\infty} E[M_{T_n\wedge t}] \\
&= \liminf_{n\to\infty} E[M_0] \\
&= E[M_0] < \infty
\end{aligned}
$$

となり，M_t は可積分である．さらに条件付き期待値についての Fatou の補題を用いれば，

$$
E[M_t|\mathscr{F}_s] \le \liminf_{n\to\infty} E[M_t^{T_n}|\mathscr{F}_s] = \liminf_{n\to\infty} M_s^{T_n} = M_s, \quad \text{a.s.}
$$

となり，優マルチンゲールであることが分かった． □

命題 2.6.5. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．

(i) 局所マルチンゲールについて，マルチンゲールであることとクラス (DL) に属することは同値である．

(ii) 局所マルチンゲールについて，一様可積分マルチンゲールであることとクラス (D) であることは同値である．

証明．(i) 任意抽出定理より，マルチンゲールがクラス (DL) の局所マルチンゲールであることは明らか．逆を示す．M をクラス (DL) の $(\mathscr{F}_t)$ -局所マルチンゲールとし， (T_n) をその局所化列とする．満たすものとする．このとき，$(M_{T_n \wedge t})_{n \in \mathbb{N}}$ は一様可積分な確率変数列で $M_{T_n \wedge t} \to M_t$（概収束）を満たすから，$M_{T_n \wedge t} \to M_t$ は L^1 の意味でもなりたつ．これより M_t は可積分で，さらに $s \leq t$ とすれば

$$E[M_s 1_A] = \lim_{n \to \infty} E[M_{T_n \wedge s} 1_{\{T_n > 0\}} 1_A] = \lim_{n \to \infty} E[M_{T_n \wedge t} 1_{\{T_n > 0\}} 1_A] = E[M_t 1_A] \quad (\forall A \in \mathscr{F}_s)$$

も成立する．したがって，M はマルチンゲールである．

(ii)．M が一様可積分マルチンゲールならば，任意抽出定理よりクラス (D) に属することが示される．M をクラス (D) の局所マルチンゲールとしよう．(i) の結果から M がマルチンゲールである．停止時刻として任意の定数時刻 $t \in \mathbb{R}_+$ を考えれば，M が一様可積分であることも分かる． □

第 3 章

確率過程の射影と増加過程

3.1 可予測射影

この節では局所マルチンゲールの構造を調べるために必要な道具である，可予測射影の概念を導入する．この節の内容は主に Medvegyev [11] を参考にした．

定義 3.1.1. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，X を確率過程とする．$\overline{\mathbb{R}}$ 確率過程 ${}^{\mathfrak{p}}X$ で次の条件を満たすものが存在する時，${}^{\mathfrak{p}}X$ を X の可予測射影 (*predictable projection*) と呼ぶ：

(i) ${}^{\mathfrak{p}}X$ は $\mathbb{F}$-可予測過程．

(ii) 任意の可予測時刻 T に対して

$$
{}^{\mathfrak{p}}X_T 1_{\{T<+\infty\}} = \widehat{E}[X_T 1_{\{T<+\infty\}} | \mathscr{F}_{T-}], \quad P\text{-a.s.} \tag{3.1}
$$

が成立．

任意の可予測時刻 T に対して (3.1) 右辺の一般化条件付き期待値が well-defined [*1]になるとき，${}^{\mathfrak{p}}X$ が well-defined であるということにする．であるということにする．

さらに，任意の可予測時刻 T に対して (3.1) 右辺の一般化条件付き期待値が a.s. で有限値を取るとき，${}^{\mathfrak{p}}X$ が有限であるということにする．このとき，(3.1) 右辺の一般化条件付き期待値は通常の条件付き期待値に他ならない．

可予測過程の存在を論じる前に，可予測射影なるものがあったとしてそれが満たす性質を調べることにしよう．

定理 3.1.2 (可予測射影の一意性)**.** $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，X を確率過程とする．X の可予測過程が存在すれば，それは区別不能の意味で一意である．

証明. Y および Z は X の可予測射影とする．可予測過程の定義より，Y, Z は共に可予測過程で，任意の可予測時刻 T に対して $Y_T 1_{\{T<+\infty\}} = Z_T 1_{\{T<+\infty\}}$ が成立する．命題 1.6.11 より Y と Z は区別不能である[*2]. □

[*1] ここでの well-defined の意味は notation の項にある．

[*2] 命題 1.6.11 では実数値確率過程に限った話をしていたが，$+\infty$ まで含めたものに拡張するのは容易である．

命題 3.1.3 (可予測射影の性質). $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を完備なフィルター付き確率空間とする．このとき以下の主張が成立．ただし，以下の条件において確率過程の相等は常に区別不能の意味である．

(i) Y が $\mathbb{F}$-可予測過程なら可予測射影が存在し，${}^{\mathfrak{p}}Y = Y$ が区別不能の意味で成立．

(ii) Y は実数値の可予測過程で，X は有限なる可予測射影 ${}^{\mathfrak{p}}X$ を持つとする．このとき，YX もまた有限なる可予測射影を持ち，${}^{\mathfrak{p}}(YX) = Y({}^{\mathfrak{p}}X)$ が成立．

(iii) Y は $\overline{\mathbb{R}}_+$ 値可予測過程で，X は非負の過程で可予測射影 ${}^{\mathfrak{p}}X$ を持つこと，または Y は $\mathbb{R}_+$ 値の可予測過程で X は可予測射影 ${}^{\mathfrak{p}}X$ を持つとする．このとき，YX もまた可予測射影を持ち，${}^{\mathfrak{p}}(YX) = Y({}^{\mathfrak{p}}X)$ が成立．

(iv) $0 \le X \le Y$ が可予測射影をもつならば，$0 \le {}^{\mathfrak{p}}X \le {}^{\mathfrak{p}}Y$ が成立．(i.e. $X \mapsto {}^{\mathfrak{p}}X$ は増加的である．)

(v) X, Y が有限なる可予測射影を持つとする．このとき，$X + Y$ もまた有限なる可予測射影を持ち ${}^{\mathfrak{p}}(X+Y) = {}^{\mathfrak{p}}X + {}^{\mathfrak{p}}Y$ が成立．

(vi) X と Y が非負ならば $X + Y$ もまた（非負の）可予測射影を持ち，${}^{\mathfrak{p}}(X+Y) = {}^{\mathfrak{p}}X + {}^{\mathfrak{p}}Y$ が成立．

(vii) X が可予測射影を持つならば，任意の実数 a に対して aX もまた可予測過程を持つ．特に $a \ge 0$ なら ${}^{\mathfrak{p}}(aX) = a({}^{\mathfrak{p}}X)$ である．

(viii) 可予測射影についての単調収束定理が成り立つ : 非負かつ単調増大な (X_n) は $X_n \to X$ (pointwise) を満たし，各 X_n は可予測射影を持つとする．このとき，X もまた可予測射影を持ち，${}^{\mathfrak{p}}X_n \uparrow {}^{\mathfrak{p}}X$ が確率 1 で全ての t に対して成立．

(ix) X は有限なる可予測射影をもつ過程とする．任意の停止時刻 T について X^T はまた有限の可予測射影を持ち，

$${}^{\mathfrak{p}}(X^T) = ({}^{\mathfrak{p}}X)1_{[\![0,T]\!]} + ({}^{\mathfrak{p}}X_T)1_{]\!]T,+\infty[\![}$$

が a.s. で成立．特に ${}^{\mathfrak{p}}(X^T)1_{[\![0,T]\!]} = ({}^{\mathfrak{p}}X)^T 1_{[\![0,T]\!]}$ が成立する．非負でも同様の主張が成り立つ．

(x) 可予測射影は局所化可能である : (T_n) を停止時刻の増加列で，a.s. で $+\infty$ に発散するものとする．また，X^{T_n} は任意の n で可予測射影を持つとする．ある確率過程 Y に対して $Y^{T_n}1_{[\![0,T_n]\!]} = {}^{\mathfrak{p}}(X^{T_n})1_{[\![0,T_n]\!]}$ a.s. $(n \in \mathbb{N})$ が成り立つなら，${}^{\mathfrak{p}}X$ も存在して ${}^{\mathfrak{p}}X = Y$ a.s. である．X^{T_n} が任意の n で well-defined（resp. 有限）ならば，${}^{\mathfrak{p}}X$ も well-defined（resp. 有限）となる..

証明. (i) Y が可予測ならば，任意の可予測時刻に対して $Y_T^+ 1_{\{T<+\infty\}}$ および $Y_T^- 1_{\{T<+\infty\}}$ は $\mathscr{F}_{T-}$ 可測だから[*3]，

$$\begin{aligned}
\widehat{E}[Y_T 1_{\{T<+\infty\}} \mid \mathscr{F}_{T-}] &= E[Y_T^+ 1_{\{T<+\infty\}} \mid \mathscr{F}_{T-}] \ominus E[Y_T^- 1_{\{T<+\infty\}} \mid \mathscr{F}_{T-}] \\
&= Y_T^+ 1_{\{T<+\infty\}} \ominus Y_T^- 1_{\{T<+\infty\}} \\
&= Y_T 1_{\{T<+\infty\}}
\end{aligned}$$

が成立．よって $Y = {}^{\mathfrak{p}}Y$ である．

(ii) X は有限なる可予測射影を持つから，任意の可予測時刻 T に対して

$${}^{\mathfrak{p}}X_T 1_{\{T<+\infty\}} = E[X_T 1_{\{T<+\infty\}} | \mathscr{F}_{T-}]$$

である．Y は可予測過程だから $Y_T 1_{\{T<+\infty\}}$ は $\mathscr{F}_{T-}$-可測であり，条件付き期待値の性質から

$$Y_T({}^{\mathfrak{p}}X_T)1_{\{T<+\infty\}} = (Y_T 1_{\{T<+\infty\}})E[X_T 1_{\{T<+\infty\}} | \mathscr{F}_{T-}] = E[Y_T X_T 1_{\{T<+\infty\}} | \mathscr{F}_{T-}].$$

[*3] 命題 1.4.7

Y は可予測だから $Y({}^{\mathfrak{p}}X)$ も可予測であり，可予測射影の一意性より $Y({}^{\mathfrak{p}}X) = {}^{\mathfrak{p}}(XY)$ である．

(iii) (ii) と同じように証明できる．

(iv) 命題 1.6.11 より明らか．

(v) X, Y が有限なる可予測射影を持つという仮定から，任意の可予測時刻に対して

$$ {}^{\mathfrak{p}}X_T 1_{\{T<+\infty\}} = E[X_T 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}], \quad {}^{\mathfrak{p}}Y_T 1_{\{T<+\infty\}} = E[Y_T 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}] $$

である．条件付き期待値の線形性より

$$ \begin{aligned} ({}^{\mathfrak{p}}X_T + {}^{\mathfrak{p}}Y_T)1_{\{T<+\infty\}} &= {}^{\mathfrak{p}}X_T 1_{\{T<+\infty\}} + {}^{\mathfrak{p}}Y_T 1_{\{T<+\infty\}} \\ &= E[X_T 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}] + E[Y_T 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}] \\ &= E[X_T 1_{\{T<+\infty\}} + Y_T 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}] \\ &= E[(X_T + Y_T)1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}] \end{aligned} $$

となるので，${}^{\mathfrak{p}}X + {}^{\mathfrak{p}}Y = {}^{\mathfrak{p}}(X+Y)$ である．

(vi) (v) とあまり変わらない．

(vii) (i) のように $\widehat{E}[\,\cdot\,|\,\cdot\,]$ の定義に戻ればよい．

(viii) 非負性より，通常の条件付き期待値で話を進めればよい．$(X^{(n)})$ は仮定を満たす確率過程列とする．非負で可予測射影を持つから，任意の n と任意の可予測時刻 T に対して

$$ {}^{\mathfrak{p}}X_T^{(n)} 1_{\{T<+\infty\}} = E[X_T^{(n)} 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}] $$

である．$(X^{(n)})$ は可予測時刻列なので，各点の意味での極限 $Z := \liminf_n {}^{\mathfrak{p}}X^{(n)}$ も可予測である[*4]．可予測射影の単調性より，

$$ {}^{\mathfrak{p}}X_T^{(0)} 1_{\{T<+\infty\}} \le {}^{\mathfrak{p}}X_T^{(1)} 1_{\{T<+\infty\}} \le {}^{\mathfrak{p}}X_T^{(2)} 1_{\{T<+\infty\}} \le \cdots $$

が a.s. の意味で成立するから，${}^{\mathfrak{p}}X_T^{(n)} 1_{\{T<+\infty\}} \to Z_T 1_{\{T<+\infty\}}$ も a.s. の意味で成立する[*5]．一方，条件付き期待値に関する単調収束定理を用いれば

$$ \lim_{n\to\infty} E[X_T^{(n)} 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}] = E[X_T 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}], \quad P\text{-a.s.} $$

も成立．したがって $E[X_T 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}] = Z_T 1_{\{T<+\infty\}}$ となり，Z は X の可予測射影である．

(ix) T を任意の停止時刻としたとき，一般に

$$ X^T = X 1_{[\![0,T]\!]} + X_T 1_{]\!]T,+\infty[\![} $$

と表現できることに注意する．$1_{[\![0,T]\!]}$ は可予測過程であるから，(iii) により $X 1_{[\![0,T]\!]}$ はまた可予測射影を持ち $1_{[\![0,T]\!]}({}^{\mathfrak{p}}X) = {}^{\mathfrak{p}}(1_{[\![0,T]\!]}X)$ が成立．

$$ \begin{aligned} Y &= X_T 1_{]\!]T,+\infty[\![} = X_T 1_{\{T<+\infty\}} 1_{]\!]T,+\infty[\![} \\ Z &= {}^{\mathfrak{p}}X_T 1_{]\!]T,+\infty[\![} = {}^{\mathfrak{p}}X_T 1_{\{T<+\infty\}} 1_{]\!]T,+\infty[\![} \end{aligned} $$

[*4] 可予測射影をとると単調性は a.e. でしかないので，各点の意味での極限が存在するかは不明である．

[*5] 各点で収束するかは不明だが，a.s. の単調性より a.s. での収束は分かる．

と定義する．S を任意の可予測時刻とすれば，

$$\begin{aligned}
&\widehat{E}[Y_S 1_{\{S<+\infty\}}|\mathscr{F}_{S-}]\\
&= \widehat{E}[X_T 1_{\{T<S\}} 1_{\{S<+\infty\}}|\mathscr{F}_{S-}]\\
&= \widehat{E}[X_T 1_{\{T<+\infty\}} 1_{\{T<S\}} 1_{\{S<+\infty\}}|\mathscr{F}_{S-}]\\
&= E[X_T^+ 1_{\{T<+\infty\}} 1_{\{T<S\}} 1_{\{S<+\infty\}}|\mathscr{F}_{S-}] - E[X_T^- 1_{\{T<+\infty\}} 1_{\{T<S\}} 1_{\{S<+\infty\}}|\mathscr{F}_{S-}]\\
&= 1_{\{T<S\}} 1_{\{S<+\infty\}} E[X_T^+ 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{S-}] - 1_{\{T<S\}} 1_{\{S<+\infty\}} E[X_T^- 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{S-}]\\
&= 1_{\{T<S\}} 1_{\{S<+\infty\}} E[X_T 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{S-}]\\
&= 1_{\{T<S\}} 1_{\{S<+\infty\}} {}^{\mathfrak{p}}X_T 1_{\{T<+\infty\}}\\
&= Z_S 1_{\{S<+\infty\}}
\end{aligned}$$

となる．命題 1.5.9 より Z は可予測だから，Y は可予測射影を持ち ${}^{\mathfrak{p}}Y = Z$ である．形から有限性は明らかである．すなわち ${}^{\mathfrak{p}}(X_T 1_{\rrbracket T,+\infty\llbracket}) = {}^{\mathfrak{p}}X_T 1_{\rrbracket T,+\infty\llbracket}$．(v) より $X^T = X1_{\llbracket 0,T\rrbracket} + X_T 1_{\rrbracket T,+\infty\llbracket}$ も有限な可予測射影を持ち，

$${}^{\mathfrak{p}}(X^T) = {}^{\mathfrak{p}}(X1_{\llbracket 0,T\rrbracket}) + {}^{\mathfrak{p}}(X_T 1_{\rrbracket T,+\infty\llbracket}) = ({}^{\mathfrak{p}}X)1_{\llbracket 0,T\rrbracket} + {}^{\mathfrak{p}}X_T 1_{\rrbracket T,+\infty\llbracket}$$

後半の主張は前半の主張より明らかである．非負の場合も同様に証明される．

(x) S を任意の可予測時刻とすれば，フィルター付き確率空間の完備性より S の予告列 (S_n) が存在する．このとき，命題 1.2.10 と系 1.2.9 よりより

$$\{S \le T_n\} = \bigcap_k \{S_k \le T_n\} \in \bigvee_k \mathscr{F}_{S_k} = \mathscr{F}_{S-}$$

したがって

$$\begin{aligned}
1_{\{S\le T_n\}} \widehat{E}[X_S 1_{\{S<+\infty\}}|\mathscr{F}_{S-}] &= \widehat{E}[X_S 1_{\{S<+\infty\}} 1_{\{S\le T_n\}}|\mathscr{F}_{S-}]\\
&= \widehat{E}[X_S^{T_n} 1_{\{S<+\infty\}} 1_{\{S\le T_n\}}|\mathscr{F}_{S-}]\\
&= 1_{\{S\le T_n\}} \widehat{E}[X_S^{T_n} 1_{\{S<+\infty\}}|\mathscr{F}_{S-}]\\
&= 1_{\{S\le T_n\}} {}^{\mathfrak{p}}X_S^{T_n} 1_{\{S<+\infty\}}\\
&= 1_{\{S\le T_n\}} Y_S^{T_n} 1_{\{S<+\infty\}} \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

が a.s. の意味で成り立つ[*6]．(T_n) は a.s. で $+\infty$ に発散するから，極限をとれば

$$\widehat{E}[X_S 1_{\{S<+\infty\}}|\mathscr{F}_{S-}] = Y_S 1_{\{S<+\infty\}}, \quad P\text{-a.s.}$$

となる．(3.2) に注目すれば，後半の主張も明らかである． □

定理 3.1.4 (可予測任意抽出定理)．$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を完備なフィルター付き確率空間，X を càdlàg な一様可積分 $\mathbb{F}$-マルチンゲールとする．この時，任意の可予測時刻に対して

$$E[X_\infty|\mathscr{F}_{T-}] = E[X_T|\mathscr{F}_{T-}] = X_{T-} \qquad (3.3)$$

が a.s. で成立する．

*6 $\widehat{E}$ に関する演算は定義に戻れば正当化される．

証明．T を可予測時刻とし，(S_n) を T を予告する停止時刻列とする[*7]．Ω 上 $S_n \le T \le +\infty$ だから，任意抽出定理により

$$E[X_\infty|\mathscr{F}_{S_n}] = E[X_T|\mathscr{F}_{S_n}] = X_{S_n}$$

が成立[*8]．(S_n) は T を予告するから，$X_{S_n} \to X_{T-}$ a.s. である．命題 1.2.10 により $\bigvee_n \mathscr{F}_{S_n} = \mathscr{F}_{T-}$ となるから，離散時間のマルチンゲールに関する結果により $E[X_T|\mathscr{F}_{S_n}] \to E[X_T|\mathscr{F}_{T-}]$ a.s. および $E[X_\infty|\mathscr{F}_{S_n}] \to E[X_\infty|\mathscr{F}_{T-}]$ a.s. が成立．よって

$$E[X_\infty|\mathscr{F}_{T-}] = E[X_T|\mathscr{F}_{T-}] = X_{T-}, \quad P\text{-a.s.}$$

である． □

系 3.1.5. 定理 3.1.4 と同様の仮定の下，任意の可予測時刻 S, T に対して

$$E[X_{T-}|\mathscr{F}_{S-}] = X_{(T\wedge S)-} \quad P\text{-a.s.}$$

が成り立つ．

証明．$X_{T-}1_{\{T<S\}}$ が $\mathscr{F}_{S-}$ 可測であることと定理 3.1.4 より，

$$\begin{aligned}
E[X_{T-}|\mathscr{F}_{S-}] &= E[X_{T-}1_{\{T\ge S\}} + X_{T-}1_{\{T<S\}}|\mathscr{F}_{S-}] \\
&= E[X_{(T\vee S)-}1_{\{T\ge S\}}|\mathscr{F}_{S-}] + E[X_{T-}1_{\{T<S\}}|\mathscr{F}_{S-}] \\
&= 1_{\{T\ge S\}}E[E[X_{T\vee S}|\mathscr{F}_{(T\vee S)-}]|\mathscr{F}_{S-}] + X_{T-}1_{\{T<S\}} \\
&= 1_{\{T\ge S\}}E[X_{T\vee S}|\mathscr{F}_{S-}] + X_{(S\wedge T)-}1_{\{T<S\}} \\
&= 1_{\{T\ge S\}}E[X_S|\mathscr{F}_{S-}] + X_{(S\wedge T)-}1_{\{T<S\}} \\
&= 1_{\{T\ge S\}}X_{S-} + X_{(S\wedge T)-}1_{\{T<S\}} \\
&= 1_{\{T\ge S\}}X_{(S\wedge T)-} + X_{(S\wedge T)-}1_{\{T<S\}} = X_{(T\wedge S)-}
\end{aligned}$$

がわかる． □

定理 3.1.4 において，$\{T<+\infty\}$ は $\mathscr{F}_{T-}$-可測なことに注意すれば[*9]，(3.3) で各辺に $1_{\{T<+\infty\}}$ を掛ければ

$$E[X_\infty 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}] = E[X_T 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}] = X_{T-}1_{\{T<+\infty\}}$$

が示される．この事実を用いれば局所マルチンゲールの可予測過程を容易に求めることが出来る．

系 3.1.6. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を完備なフィルター付き確率空間，X を $\mathbb{F}$-局所マルチンゲールとする．このとき，X は有限な可予測射影 ${}^{\mathfrak{p}}X$ をもち，${}^{\mathfrak{p}}X = X_-$ が成立．

証明．$X \in \mathscr{M}$ なら，定理 3.1.4 より直ちに ${}^{\mathfrak{p}}X = X_-$ が分かる．$X \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ の時，(T_n) を局所化列とすれば ${}^{\mathfrak{p}}(X^{T_n}) = X_-^{T_n}$ が成立．ゆえに命題 3.1.3 (x) より結論が従う． □

系 3.1.7. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を完備なフィルター付き確率空間とする．$\mathbb{F}$-局所マルチンゲールが可予測であることと確率 1 で連続であることは同値である．

[*7] 完備性より可予測時刻は可予告である．
[*8] X は一様可積分マルチンゲールなので，X_∞ が定義されることに注意．
[*9] 命題 1.2.3．

証明．X を確率 1 で連続な局所マルチンゲールとする．局所マルチンゲールは常に càdlàg なパスをもつ適合過程と仮定しているから，X は可測な過程となる．よって系 1.4.11 から X は可予測である．逆に，$\mathbb{F}$-局所マルチンゲール X が可予測ならば，命題 3.1.3 (i) より ${}^{\mathfrak{p}}X = X$ である．また系 3.1.6 より ${}^{\mathfrak{p}}X = X_-$ だから，X と X_- は区別不能である．よって X は確率 1 で連続となる． □

系 3.1.8. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を完備なフィルター付き確率空間とする．このとき，任意の $\mathbb{F}$-局所マルチンゲール X に対して ${}^{\mathfrak{p}}(\Delta X) = 0$ が成立．

証明．可予測射影の加法性より，

$$
{}^{\mathfrak{p}}(\Delta X) = {}^{\mathfrak{p}}X - {}^{\mathfrak{p}}X_- = X_- - X_- = 0
$$

である． □

可予測射影の基本的な性質を一通り学んだところで，いよいよ可予測射影の存在定理を証明する．

命題 3.1.9. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を通常の条件を満たすフィルター付き確率空間とする．ξ を可積分な確率変数とし $M = (M_t)$ を $(E[\xi|\mathscr{F}_t])$ の càdlàg 修正とする[*10]．確率過程 $X \equiv \xi$ は有限な可予測射影を持ち ${}^{\mathfrak{p}}X = M_-$ である．

証明．T を可予測時刻とすれば，定理 3.1.4 より

$$
\begin{aligned}
M_{T-}1_{\{T<+\infty\}} &= 1_{\{T<+\infty\}}E[M_\infty|\mathscr{F}_{T-}] \\
&= 1_{\{T<+\infty\}}E[E[\xi|\mathscr{F}_\infty]|\mathscr{F}_{T-}] \\
&= 1_{\{T<+\infty\}}E[\xi|\mathscr{F}_{T-}] \\
&= E[X_T 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}]
\end{aligned}
$$

が成立．よって ${}^{\mathfrak{p}}X = M_-$ である． □

定理 3.1.10. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を通常の条件を満たすフィルター付き確率空間とする．このとき任意の $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ 可測過程 X は可予測射影を持つ．

証明．*Step 1*：$X = \xi 1_B$ **のとき．** ξ を可積分確率変数とし，$B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ とする．1_B は可予測で確率過程 ξ は有限な可予測射影を持つ（命題 3.1.9）から，$X = \xi 1_B$ もまた可予測射影を持ち（命題 3.1.3 (ii)），${}^{\mathfrak{p}}(1_B\xi) = 1_B({}^{\mathfrak{p}}\xi)$ が成立．$\xi 1_B$ の形の過程は明らかに（各点ごとの）積に対して閉じていて，$\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ を生成する．$\mathscr{H}$ を有界可測過程で可予測射影を持つもの全体としよう．このとき，$\mathscr{H}$ が条件

(i) $1 \in \mathscr{H}$.
(ii) $\mathscr{H}$ はベクトル空間.
(iii) $\mathscr{H}$ は一様有界な単調収束について閉じている.

を満たすことを示せば，単調族定理により $\mathscr{H}$ は有界可測過程をすべて含むことが分かる．実際，(i) については定数関数は可予測だから明らか，(ii) と (iii) は命題 3.1.3 の中で既に示されている．したがって，全ての有界可測関数は可予測射影を持つ．命題 3.1.3 における単調収束定理をもう一度使えば，$\mathscr{H}$ は全ての非負可測過

[*10] ここでフィルトレーションの右連続性が必要.

程を含むことも示される．X が任意の可測過程の場合は $X = X^+ - X^-$ に分解して

$$ {}^{\mathfrak{p}}X = {}^{\mathfrak{p}}X^+ \ominus {}^{\mathfrak{p}}X^- $$

とすれば，これは明らかに可予測射影である．ゆえに，全ての可測過程は可予測射影を持つ． □

定義 3.1.11. 確率集合 $A \in \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ に対して，

$$ A' = \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid {}^{\mathfrak{p}}(1_A)(\omega, t) > 0\} $$

で定義される可予測集合 A' を A の可予測台 (predictable support) と呼ぶ[*11]．

命題 3.1.12. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を通常の条件を満たすフィルター付き確率空間，A を $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ 可測集合とする．A の可予測台 A' は，次の条件を満たす（消散的集合の差の範囲で）唯一つの可予測集合である：任意の可予測時刻 T に対して $A \cap [\![T]\!]$ が消散的であることと $A' \cap [\![T]\!]$ が消散的であることは同値である．

証明．任意の可予測時刻に対して

$$ {}^{\mathfrak{p}}(1_A)_T 1_{\{T<+\infty\}} = E[(1_A)_T 1_{\{T<+\infty\}} | \mathscr{F}_{T-}] $$

が成立．このとき

$$ {}^{\mathfrak{p}}(1_A)_T 1_{\{T<+\infty\}} = 0 \text{ a.s.} \iff (1_A)_T 1_{\{T<+\infty\}} = 0 \text{ a.s.} $$

が成り立つ．

$\because$ $\Longleftarrow$ は命題 3.1.3 から分かる．
$\Longrightarrow$ は期待値をとれば

$$ E[(1_A)_T 1_{\{T<+\infty\}}] = E[{}^{\mathfrak{p}}(1_A)_T 1_{\{T<+\infty\}}] = 0 $$

となるから，非負性より $(1_A)_T 1_{\{T<+\infty\}} = 0$ a.s. が分かる．

さらに

$$ \begin{aligned} A \cap [\![T]\!] \text{ が消散的} &\iff (1_A)_T 1_{\{T<+\infty\}} = 0 \text{ a.s.} \\ A' \cap [\![T]\!] \text{ が消散的} &\iff (1_{A'})_T 1_{\{T<+\infty\}} = 0 \text{ a.s.} \\ &\iff {}^{\mathfrak{p}}(1_A)_T 1_{\{T<+\infty\}} = 0 \text{ a.s.} \end{aligned} $$

となるから，$A \cap [\![T]\!]$ が消散的であることと $A' \cap [\![T]\!]$ が消散的であることは同値である．

B および C は可予測集合で

$$ \begin{aligned} A \cap [\![T]\!] \text{ が消散的} &\iff B \cap [\![T]\!] \text{ が消散的} \\ A \cap [\![T]\!] \text{ が消散的} &\iff C \cap [\![T]\!] \text{ が消散的} \end{aligned} $$

を満たすものとすれば，

$$ B \cap [\![T]\!] \text{ が消散的} \iff B \cap [\![T]\!] \text{ が消散的} $$

が成立．このとき $B \triangle C$ が消散的になることを背理法で示そう．ある可予測時刻 T に対して $(B \triangle C) \cap [\![T]\!]$ は消散的でないとする[*12]．

$$ \begin{aligned} E &= \{\omega \in \Omega \mid (\omega, T(\omega)) \in B \setminus C\} \\ F &= \{\omega \in \Omega \mid (\omega, T(\omega)) \in C \setminus B\} \end{aligned} $$

[*11] 可予測射影は消散的集合の差を除いてしか一意に定まらないので，A' も集合としては消散的集合の曖昧をもって定義される．
[*12] 系 1.6.12 を参照．

と定義すれば，T_E と T_F は可予測時刻である[*13]．定義より

$$(B \triangle C) \cap [\![T]\!] = \{(B \setminus C) \cap [\![T_E]\!]\} \cup \{(C \setminus B) \cap [\![T_F]\!]\}$$

であり，過程から $(B \setminus C) \cap [\![T_E]\!]$ と $(C \setminus B) \cap [\![T_F]\!]$ のどちらかは消散的ではない．$(B \setminus C) \cap [\![T_E]\!]$ が消散的でないと仮定すれば $B \cap [\![T_E]\!]$ は消散的でないが，E の定義より $C \cap [\![T_E]\!]$ は消散的である．よって矛盾．$(C \setminus B) \cap [\![T_F]\!]$ が消散的でないとしても同様に矛盾なので，$(B \triangle C) \cap [\![T]\!]$ が消散的でないという仮定が否定される． □

系 3.1.13. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を通常の条件を満たすフィルター付き確率空間とする．S を到達不能停止時刻とすれば，${}^{\mathrm{p}}1_{[\![S]\!]}$ は消散的である．

証明．$[\![S]\!]$ の可予測台を $[\![S]\!]'$ と書く．S は到達不能だから，命題 3.1.12 より任意の可予測時刻 T について $[\![S]\!]' \cap [\![T]\!]$ は消散的である．$[\![S]\!]'$ は可予測集合であるから，系 1.6.12 により $[\![S]\!]'$ は消散的となる．よって ${}^{\mathrm{p}}1_{[\![S]\!]}$ は消散的であることが示された． □

命題 3.1.14. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を通常の条件を満たすフィルター付き確率空間とする．$\mathbb{F}$-良可測集合 A が痩せた集合ならば，その可予測台 A' も痩せた集合である．

証明．(T_n) は停止時刻の列で $A = \bigcup_n [\![T_n]\!]$ なるものとする．T_n' を T_n の到達可能部分とし，T_n' のグラフを覆う可予測時刻列を $(S^{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ で表すことにする．A' を A の可予測台のバージョンとし，

$$B_{n,k} := \{\omega \in \Omega \mid (\omega, S^{n,k}(\omega)) \in A'\} \in \mathscr{F}_{S^{n,k}-} \cap \{S^{n,k} < +\infty\}$$

と定義する[*14]．$R^{n,k} = (S^{n,k})_{B_{n,k}}$ とすれば $R^{n,k}$ は可予測時刻である[*15]．$A'' = \bigcup_n [\![R^{n,k}]\!]$ と定めればこれは痩せた可予測集合だから，A'' が A' のバージョンになっていることを示せばよい．A'' は $(S^{n,k})$ を A' 上に制限したものだったから $A'' \subset A'$ である．S を可予測時刻で $[\![S]\!] \subset A' \setminus A''$ なるものとすれば

$$\begin{aligned}
P[\mathrm{pr}_1([\![S]\!] \cap A)] &\leq \sum_n P[S = T_n < +\infty] \\
&= \sum_n P[S = T_n' < +\infty] \quad (\because T_n' \text{ をは } T_n \text{ の到達可能部分}) \\
&\leq \sum_{n,k} P[S = S^{n,k} < +\infty] \quad \left(\because [\![T_n']\!] \subset \bigcup_k [\![S^{n,k}]\!]\right) \\
&= 0 \quad (\because [\![S]\!] \cap A'' = \emptyset)
\end{aligned}$$

したがって $A \cap [\![S]\!]$ は消散的であり，命題 3.1.12 より $A' \cap [\![S]\!] = [\![S]\!]$ も消散的である．すなわち $S = +\infty$ a.s. であり，命題 1.6.11 より $A' \setminus A''$ は消散的である． □

命題 3.1.15. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を通常の条件を満たすフィルター付き確率空間とし，X を càdlàg な $\mathbb{F}$-適合過程とする[*16]．X が準左連続であることと，確率集合 $\{\Delta X \neq 0\}$ の可予測台が消散的であることは同値である．この条件の下，${}^{\mathrm{p}}X = X_-$ である．

[*13] 補題 1.4.5 および命題 1.5.7 を見よ．
[*14] この集合の可測性は補題 1.4.5 を見よ．
[*15] 命題 1.5.7
[*16] よって良可測である．

証明．$A=\{\Delta X\neq 0\}$ とすれば $\{\Delta X_T\neq 0, T<+\infty\}=\mathrm{pr}_1(A\cap [\![T]\!])$ である．これより X が準左連続であることは任意の可予測時刻 T に対して $A\cap [\![T]\!]$ が消散的になることと同値である．命題 3.1.12 より任意の可予測時刻 T に対して $A\cap [\![T]\!]$ が消散的になることは，任意の可予測時刻 T に対して $A'\cap [\![T]\!]$ が消散的になることと同値であり，これはさらに可予測集合 A' が消散的になることと同値である．

これらの条件が成り立つと仮定して，X の可予測射影を求めてみよう．T を任意の可予測時刻とすれば，X の準左連続性より

$$E[\Delta X_T 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}]=0$$

である．X_- は可予測なので $X_{T-}1_{\{T<+\infty\}}$ は $\mathscr{F}_{T-}$-可測であり[*17]，

$$E[X_T 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}]-X_{T-}1_{\{T<+\infty\}}=E[\Delta X_T 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}]=0$$

となる．よって ${}^{\mathfrak{p}}X=X_-$ である． □

注意 3.1.16. 可予測射影と似た概念で，可測過程の良可測射影 (optional projection) というものがある．X を可測過程とする．確率過程 ${}^{\mathfrak{o}}X$ が次の条件を満たすとき，${}^{\mathfrak{o}}X$ は X の良可測射影であるという．

(i) ${}^{\mathfrak{o}}X$ は $\mathbb{F}$-良可測過程．

(ii) 任意の停止時刻 T に対して

$${}^{\mathfrak{o}}X_T 1_{\{T<+\infty\}}=\widehat{E}[X_T 1_{\{T<+\infty\}}|\mathscr{F}_T],\quad P\text{-a.s.}$$

が成立．

良可測射影についても，可予測射影の性質（命題 3.1.3）と対応する性質が成り立つ．良可測射影については，Dellacherie & Meyer [5] または He, Wang, & Yan [10] を参照されたし．

3.2 増加過程

定義 3.2.1. $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ をフィルター付き確率空間とする．$\mathbb{V}^+(\Omega,\mathscr{F})$ を実数値の確率過程 A で，パス $t\mapsto A_t(\omega)$ が càdlàg な増加関数かつ $A_0=0$ となるようなもの全体の空間とする．$\mathscr{V}^+(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F})$ は $\mathbb{V}^+$ の元のうち $\mathbb{F}$-適合なもの全体の集合を表す．パスが増加的である代わりに，局所有限変動をもつ[*18]過程の全体をそれぞれ $\mathbb{V}(\Omega,\mathscr{F})$ および $\mathscr{V}(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F})$ で表す．

考えているフィルター付き確率空間が明らかなときは，単に $\mathscr{V}$ や $\mathscr{V}^+$ などと書く．条件を一部省略して，$\mathscr{V}^+$ の元を適合増加過程，$\mathscr{V}$ の元を適合有限変動過程などと呼ぶこともある．$A\in\mathbb{V}^+$ は右連続な確率過程だから，可測過程である．$A\in\mathbb{V}^+$ に対して

$$A_\infty(\omega)=\lim_{t\to\infty}A_t(\omega)$$

とすれば $\overline{\mathbb{R}}_+$ 値確率変数 A_∞ が定まる．$A\in\mathbb{V}$ に対して，$V(A)_t(\omega)$ でパス $t\mapsto A_t(\omega)$ の $[0,t]$ 上での全変動を表すことにする．$A\in\mathscr{V}^+$ ならば $V(A)=A$ である．

*17 命題 1.4.7 および命題 1.4.8.
*18 定義 A.7.1.

命題 3.2.2. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．$A \in \mathscr{V}$ とすれば，$B, C \in \mathscr{V}^+$ で $A = B - C, V(A) = B + C$ なる組 (B, C) がただ一つ存在する．もし A が可予測なら，$B, C, V(A)$ はどれも可予測である．

証明．命題 A.7.3 より各パス ω に対して

$$B.(\omega) = \frac{V(A).(\omega) + A.(\omega)}{2}, \quad C.(\omega) = \frac{V(A).(\omega) - A.(\omega)}{2}$$

と一意に定まるから，$V(A)$ の可測性を調べればよい．命題 A.7.5 より任意の $\omega \in \Omega$ と $t \in \mathbb{R}_+$ に対して

$$V(A)_t(\omega) = \lim_{n \to \infty} \left| A_{\frac{kt}{n}}(\omega) - A_{\frac{(k-1)t}{n}}(\omega) \right|$$

が成立するから，$V(A)$ は $\mathscr{F}_t$-可測であり，よって $V(A)$ は $\mathbb{F}$-適合である．A が可予測であると仮定しよう．$V(A)$ は càdlàg 適合過程であるから，命題 1.4.8 より $V(A)_-$ は可予測である．A は可予測であると仮定しているから，命題 1.4.8 より $|\Delta A|$ も可予測である．命題 A.7.6 より $|\Delta A| = \Delta V(A)$ であったから

$$V(A) = \Delta V(A) + V(A)_-$$

も可予測である． □

一般に有界変動関数は，連続部分とジャンプ部分に分解できるのであった．$A \in \mathbb{V}$ に対しても，パスごとに同様の分解を考えることは出来るが，それが良い可測性を持つかは明らかではない．しかし，次の命題より実際それは良い可測性を持つことが示される．命題に入る前に，記号を少し準備しよう．$A \in \mathbb{V}$ に対して，パスごとに

$$A_t^{\mathrm{d}}(\omega) = \sum_{0 < s \le t} \Delta A_s(\omega)$$

と定義する．局所有界変動関数の性質[*19]より，右辺の和は well-defined である．これはパスごとには可算和だが，ω が Ω を走ると右辺の可測性は明らかではない．

命題 3.2.3. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．

(i) $A \in \mathscr{V}$ なら $A^{\mathrm{d}} \in \mathscr{V}$ である．

(ii) $A \in \mathscr{V}$ がさらに可予測なら，A^{d} も可予測である．

証明．T が可予測な場合に示す．命題 1.8.6 より，狭義に正の可予測時刻列 $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ で $\{\Delta A \neq 0\} \subset \bigsqcup_n [\![S_n]\!]$ を満たすものがとれる．このとき

$$A^{\mathrm{d}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \Delta A_{S_n} 1_{[\![S_n, \infty [\![}$$

が成立．いま ΔA は可予測だから[*20]$\Delta A_{S_n} 1_{\{S_n < \infty\}}$ は $\mathscr{F}_{S_n -}$ 測であり[*21]，よって $A_{S_n} 1_{[\![S_n, \infty [\![}$ は可予測である[*22]．したがって A^{d} も可予測であることが分かる． □

---

*19 命題 A.7.6.
*20 命題 1.4.8.
*21 命題 1.4.7
*22 命題 1.5.9.

命題 3.2.3 より，$A \in \mathscr{V}$ は $A = A^{\mathrm{c}} + A^{\mathrm{d}}$ $(A^{\mathrm{c}}, A^{\mathrm{d}} \in \mathscr{V})$ という分解を持つ．A^{c} を A の連続部分 (continuous part) といい，A^{d} を A の純不連続部分 (purely discontinuous part of processes with finite variation) またはジャンプ部分 (jump part) という．$A^{\mathrm{c}} = 0$ のとき $A \in \mathscr{V}$ は純不連続 (purely discontinuous) であるという．

命題 3.2.4. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．$A \in \mathscr{V}$ なら，$V(A) = V(A^{\mathrm{c}}) + V(A^{\mathrm{d}})$ が成り立つ．

証明．命題 A.7.7 より明らか． □

命題 3.2.3(i) の証明より A^{d} のジャンプは停止時刻によって記述されることが分かるが，そのジャンプ時刻の構造がどのようなものかは定かではない．次の命題により，A のジャンプ時刻の詳しい性質が明らかになる．

命題 3.2.5. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とし，$A \in \mathscr{V}$ とする．このとき，A は次のように一意的に分解できる．

$$A = A^{\mathrm{c}} + A^{\mathrm{da}} + A^{\mathrm{di}}$$

であって，$A^{\mathrm{c}}, A^{\mathrm{da}}, A^{\mathrm{di}} \in \mathscr{V}$ はそれぞれ次の条件を満たす：A^{c} は連続，A^{da} は純不連続で到達可能なジャンプのみを持ち，A^{di} は純不連続で到達不能なジャンプのみを持つ．

証明．$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を A のジャンプの標準的な取り付くし列とし，$\mathbb{N}$ を

$$N_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid T_n \text{ は可予測 }\}, \quad N_2 = \{n \in \mathbb{N} \mid T_n \text{ は到達不能 }\}$$

と分割する．いま

$$A^{\mathrm{da}} = \sum_{n\in N_1} \Delta A_{T_n} 1_{[\![T_n,\infty[\![}, \quad A^{\mathrm{di}} = \sum_{n\in N_2} \Delta A_{T_n} 1_{[\![T_n,\infty[\![}$$

と定義すれば，これは明らかに求める分解である．

次に分解の一意性を示す．$A = A^{\mathrm{c}} + \widetilde{A}^{\mathrm{da}} + \widetilde{A}^{\mathrm{di}}$ もまた命題の条件を満たす分解とする．$B = A^{\mathrm{da}} - \widetilde{A}^{\mathrm{da}} = \widetilde{A}^{\mathrm{di}} - A^{\mathrm{di}}$ とすれば，$B \in \mathscr{V}$ は純不連続である．$T > 0$ を任意の停止時刻とし，到達可能成分と到達不能成分への分解 $[\![T]\!] = [\![T^a]\!] \sqcup [\![T^i]\!]$ を考える．定義より明らかに

$$\Delta B_{T^a} 1_{\{T^a<\infty\}} = \Delta \widetilde{A}^{\mathrm{di}}_{T^a} 1_{\{T^a<\infty\}} - \Delta A^{\mathrm{di}}_{T^a} 1_{\{T^a<\infty\}} = 0$$
$$\Delta B_{T^i} 1_{\{T^i<\infty\}} = \Delta \widetilde{A}^{\mathrm{da}}_{T^i} 1_{\{T^i<\infty\}} - \Delta A^{\mathrm{da}}_{T^i} 1_{\{T^i<\infty\}} = 0$$

が成り立つので，$\Delta B_T 1_{\{T<\infty\}} = 0$ が分かる．注意 1.6.15 から良可測過程 ΔB は消散的となり，B は純不連続だから B 自身が消散的である．これにより $A^{\mathrm{da}} = \widetilde{A}^{\mathrm{da}}$ および $A^{\mathrm{di}} = \widetilde{A}^{\mathrm{di}}$ が区別不能の意味で成立する． □

$A \in \mathscr{V}$ としよう．各 ω に対して局所有界変動関数 $t \mapsto A_t(\omega)$ によって生成される Stieltjes 測度を $dA(\omega)$ で表すことにする．これが有限測度となるための必要十分条件は $V(A)_\infty(\omega) < +\infty$ である．

$A, B \in \mathscr{V}$ が与えられたときに，任意の $\omega \in \Omega$（resp. a.e.$\omega \in \Omega$）に対して測度 $dA(\omega)$ が $dB(\omega)$ に対して絶対連続となる時，$dA \ll dB$ (resp. $dA \ll dB$ a.s.) と 表現する．

可測な $\mathbb{R}$ 値確率過程 H が与えられたとき，各々のパス $\omega \mapsto H_t(\omega)$ は Borel 可測であるから，パスに沿った Stieltjes 積分を考えることが出来る．パスごとの Stieltjes 積分によって定まるであろう $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 値確率

過程[*23]を次のように表す：

$$(H\bullet A)_t(\omega)=\begin{cases}\displaystyle\int_{[0,t]}H_s(\omega)dA_s(\omega) & \text{if the Lebesgue-Stieltjes integral exists,}\\ +\infty & \text{otherwise.}\end{cases}$$

命題 3.2.6. $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ をフィルター付き確率空間とする．

(i) $A\in\mathscr{V}^+$ とし，H は非負の良可測過程で $H\bullet A$ が有限値になるようなものとする．このとき $H\bullet A\in\mathscr{V}^+$ であり，さらに $d(H\bullet A)\ll dA$ が成立．

(ii) (i) においてさらに A,H が可予測なら，$H\bullet A$ も可予測である．

(iii) $A\in\mathscr{V}$ とし，H は非負の良可測過程で $H\bullet A$ が有限値になるようなものとする．このとき $H\bullet A\in\mathscr{V}$ であり，さらに $d(H\bullet A)\ll dA$ が成立．

(iv) (iii) においてさらに A,H が可予測なら，$H\bullet A$ も可予測である．

証明．(i) $H\bullet A$ が càdlàg で増加的なパスを持つこと，および $(H\bullet A)_0=0$ は明らかである．よって適合性を示せばよい．

$$\mu(\omega,dt)=dA_t(\omega)$$

とすれば，μ は定義 A.6.1 の意味での核を定める．特に μ の $\Omega\times[0,t]$ への制限は有限値の核となっていることに注意されたい．H は良可測過程だから発展的可測であり，$\Omega\times[0,t]$ への制限は $\mathscr{F}_t\otimes\mathscr{B}([0,t])$-可測である．

$$(H\bullet A)_t(\omega)=\int_{]0,t]}H(\omega,s)\mu(\omega,ds)=\int_{[0,t]}H(\omega,s)\mu(\omega,ds)$$

だから，命題 A.6.5 により $(H\bullet A)_t$ は $\mathscr{F}_t$-可測となる．$d(H\bullet A)\ll dA$ は Lebesgue 積分の絶対連続性より明らかである．

(ii) H および A は可予測であると仮定する．

$$\begin{aligned}\Delta(H\bullet A)_t(\omega)&=\int_{]0,t]}H(\omega,s)\mu(\omega,ds)-\int_{]0,t[}H(\omega,s)\mu(\omega,ds)\\&=\int_{\{t\}}H(\omega,s)\mu(\omega,ds)\\&=H(\omega,t)\mu(\omega,\{t\})\\&=H_t(\omega)\Delta A_t(\omega)\end{aligned}$$

だから，$\Delta(H\bullet A)=H\Delta A$ は可予測である[*24]．(i) より $H\bullet A$ は càdlàg 適合過程だから，$(H\bullet A)_-$ も可予測である．したがって $H\bullet A=(H\bullet A)_-+\Delta(H\bullet A)$ も可予測である．

(iii) および (iv) の証明も (i), (ii) と同様である．□

命題 3.2.7. $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ をフィルター付き確率空間，H を可測過程，$A\in\mathbb{V}$ とする．任意の t に対して $(H\bullet A)_t$ は有限値になると仮定する．このとき，任意の $\mathscr{F}$ -可測関数 $T\colon\Omega\to\overline{\mathbb{R}}_+$ に関して

$$(H\bullet A)^T=H1_{[\![0,T]\!]}\bullet A=H^T\bullet A^T=H\bullet A^T$$
$$(H\bullet A)^{T-}=H1_{[\![0,T[\![}\bullet A=H\bullet A^{T-}$$

[*23] 「定まるであろう」などと訳の分からない言い方をしたのは，ここで定義するものが本当に確率過程になっているか確かめる必要があるからである．

[*24] A が可予測なら，ΔA も可予測である．（命題 1.4.8）

が成り立つ．

証明．*Step 1*：T で止める場合

$$(H \bullet A)^T = H \bullet A = H1_{[\![0,T]\!]} \bullet A$$

は Lebesgue-Stieltjes 積分の定義より明らかである．$(H \bullet A)^T = H \bullet A^T$ を示そう．X は非負，$A \in \mathscr{V}^+$ であるとする．$\omega \in \Omega$ を固定して，$u(s) = T(\omega) \wedge s$ とおけば，命題 A.8.6 により

$$\begin{aligned}\int_{[0,T(\omega)\wedge t]} H_s(\omega) dA_s(\omega) &= \int_{[0,t]} H_{u(s)} dA_{u(s)} \\ &= \int_{[0,t]} H_{s\wedge T(\omega)}(\omega) dA_{s\wedge T(\omega)}(\omega) \\ &= \int_{[0,t]} H_s^T(\omega) dA_s^T(\omega)\end{aligned}$$

がなりたつ．これは $(H \bullet A)^T = H^T \bullet A^T$ に他ならない．ω を固定したとき $\operatorname{supp} dA^T(\omega) \subset [0, T(\omega)]$ となる[*25]ことに注意すれば

$$\begin{aligned}\int_{[0,t]} H_s(\omega) dA_s^T(\omega) &= \int_{[0,T(\omega)\wedge t]} H_s(\omega) dA_s^T(\omega) + \int_{]t\wedge T(\omega),t]} H_s(\omega) dA_s^T(\omega) \\ &= \int_{[0,T(\omega)\wedge t]} H_s(\omega) dA_s^T(\omega) \\ &= \int_{[0,t]} H_s^T(\omega) dA_s^T(\omega)\end{aligned}$$

となり $H^T \bullet A^T = H \bullet A^T$ も分かる．H が非負でない時は H^+ と H^- を考えればよい．$A \in \mathbb{V}$ のときは A を二つの増加関数に分解すればよい．

Step 2：$T-$ で止める場合．一般に $X^{T-} = X^T - \Delta X_T 1_{[\![T,\infty[\![}$ と書けるから

$$(H \bullet A)^{T-} = (H \bullet A)^T - \Delta(H \bullet A)_T 1_{[\![T,\infty[\![} = (H \bullet A)^T - H_T \Delta A_T 1_{[\![T,\infty[\![}$$

という関係式が成り立つ．いま $B = \Delta A_T 1_{[\![T,\infty[\![}$ とすれば，

$$H \bullet A^{T-} = H \bullet (A^T - B) = (H \bullet A)^T - H \bullet B = (H \bullet A)^T - H_T \Delta A_T 1_{[\![T,\infty[\![}$$

が成り立つ．よって $(H \bullet A)^{T-} = H \bullet (A^{T-})$ となる．また

$$(H1_{[\![0,T[\![}) \bullet A = (H1_{[\![0,T]\!]}) \bullet A - (H1_{[\![T]\!]}) \bullet A = (H \bullet A)^T - H_T \Delta A_T 1_{[\![T,\infty[\![}$$

であるから，$(H1_{[\![0,T[\![}) \bullet A = (H \bullet A)^{T-}$ も分かる． □

定義 3.2.8. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．

(i) $\mathscr{V}^+$ の元 A で $E[A_\infty] < +\infty$ となるもの全体の空間を $\mathscr{A}^+(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ で表す．$\mathscr{V}^+$ の元 A が $\mathscr{A}^+$ であるとき，A は可積分 (integrable) であるという．

(ii) $\mathscr{V}$ の元 A で $E[V(A)_\infty] < +\infty$ となるもの全体の空間を $\mathscr{A}(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ で表す．$\mathscr{A}$ の元たる有界変動過程は，可積分変動 (integrable variation) をもつという．定義より明らかに $\mathscr{A} = \mathscr{A}^+ - \mathscr{A}^+$ である．

[*25] $T(\omega) < \infty$ の場合．$T(\omega) = \infty$ のときは明らかである

(iii) $\mathscr{A}^+$ の局所化 $\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ の元を，局所可積分 (locally integrable) な適合増加過程と呼ぶ．また，$\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ の元は局所可積分変動 (locally integrable variation) をもつという．

$\mathscr{V}^+, \mathscr{V}, \mathscr{A}^+, \mathscr{A}$ は明らかに停止について安定である．また $\mathscr{V}^+_{loc} = \mathscr{V}^+$ および $\mathscr{V}_{loc} = \mathscr{V}$ が成り立つ．

補題 3.2.9. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とし，$A \in \mathscr{V}$ は $\mathbb{F}$-可予測であるとする．このとき，局所化列 (T_n) で $V(A)_{T_n} \le n$ a.s. を満たすものが存在する．特に $A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ である．

証明．

$$T_n(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid V(A)_t(\omega) \ge n\}$$

と定義すれば，命題 1.3.8 より T_n は $\mathbb{F}$-停止時刻である．さらに，命題 3.2.2 より $V(A)$ は可予測だから，T_n は可予測集合

$$E^n := \{(\omega, t) \mid V(A)_t(\omega) \ge n\}$$

へのデビューに他ならない．$V(A)$ の右連続性より $[\![T_n]\!] = [\![D_{E^n}]\!] \subset E^n$ となるから，命題 1.5.13 より T_n は可予測時刻となる．可予測時刻 T_n を a.s. で予告する停止時刻列 $(S^{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ をとる．さらに，$p_n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ を

$$P[S^{n,p_n} < T_n - 1] \le \frac{1}{2^n}$$

となるように取り，

$$S_n := \bigvee_{1\le m\le n} S^{m,p_m}$$

と定めよう．このとき，(S_n) が求める局所化列になっていることを示したい．定義より明らかに

$$S_1 \le S_2 \le \cdots \le S_n \le \cdots$$

である．(S_n) の定義を思い出せば

$$\begin{aligned}\sum_{n\ge1} P[S_n < T_n - 1] &\le \sum_{n\ge1} P[S^{n,p_n} < T_n - 1] \\ &\le \sum_{n\ge1} \frac{1}{2^n} < +\infty\end{aligned}$$

が成り立つから，Borel-Cantelli の第一補題により

$$P\left(\bigcup_{n\ge1}\bigcap_{k\ge n}\{S_n \ge T_n - 1\}\right) = 1.$$

$T_n \to +\infty$ a.s. だったから $S_n \to +\infty$ a.s. も分かる．$(S^{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ は T_n の予告列だったから，$n \ge 1$ に対して

$$S_n = \bigvee_{1\le m\le n} S^{m,p_m} < \bigvee_{1\le m\le n} T_m = T_n, \quad \text{a.s. on the set } \{T_n > 0\}$$

が成立．したがって T_n の定義より $V(A)_{S_n} \le n$ a.s. が分かる．このとき

$$E[V(A)_{S_n}] \le E[n] = n < +\infty$$

なので，(S_n) は $V(A)$ の $\mathscr{A}$ に関する局所化列になっている． □

補題 3.2.10. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を右連続なフィルター付き確率空間とする．$X \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{V}$ ならば，$X \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ である．

証明．$X \in \mathscr{M} \cap \mathscr{V}$ の場合に示す．

$$T_n(\omega) := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid V(X)_t > n\}$$

とすれば，フィルトレーションの右連続性から T_n は停止時刻となる*26．$X \in \mathscr{V}$ から $V(X)$ は有限値を取るので，定義から $T_1 \leq T_2 \leq \cdots \to +\infty$ となる．任意の $t \in \mathbb{R}_+$ に対して各点で $X_{t-} \leq V(X)_{t-}$ および*27$\Delta V(X)_t = |\Delta X_t| \leq |X_t| + |X_{t-}|$ である*28ことに注意すれば，

$$V(X)_{T_n} \leq V(X)_{T_n-} + |X_{T_n-}| + |X_{T_n}| \leq V(X)_{T_n-} + |X_{T_n}| \leq 2n + |X_{T_n}|$$

が成立．X は一様可積分マルチンゲールなので X_{T_n} は可積分であり*29，よって $V(X)_{T_n}$ も可積分である．すなわち，$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は X の $\mathscr{A}$ に関する局所化列で，$\mathscr{M} \cap \mathscr{V} \subset \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ が分かる．ここまでの結果と補題 1.9.3 により

$$\mathscr{M}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{V} \subset \mathscr{M}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{V}_{loc} = (\mathscr{M} \cap \mathscr{V})_{loc} \subset (\mathscr{A}_{\mathrm{loc}})_{loc} = \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$$

であるから*30，補題の主張が示された． □

補題 3.2.11. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．$A \in \mathscr{A}$ とし，M は有界な càdlàg マルチンゲールとする．このとき任意の停止時刻 T に対して $E[M_T A_T] = E[(M \bullet A)_T]$ である．さらに A が可予測ならば，$E[M_T A_T] = E[(M_- \bullet A)_T]$ が成り立つ．

証明．$A \in \mathscr{A}^+$ として示せばよい．

$$C_t(\omega) = \inf\{s \in \mathbb{R}_+ \mid A_s \geq t\}$$

とすれば，命題 1.3.8 より C_t は停止時刻となる．さらに，A が可予測過程ならば C_t は可予測時刻となる*31．このとき，(A.8.5) より任意の有界可測過程 H に対して

$$\int_{[0,\infty[} H_s(\omega) = \int_{[0,\infty[} H_{C_s}(\omega) 1_{\{C_s(\omega)<\infty\}} ds \tag{3.4}$$

が成り立つ．これより

$$\begin{aligned}
E[M_T A_T] &= E\left[\int_{[0,\infty[} M_T 1_{[\![0,T]\!]}(s) dA_s\right] \\
&= E\left[\int_{[0,\infty[} M_T 1_{[\![0,T]\!]}(C_s) 1_{\{C_s<\infty\}} ds\right] \quad (\because (3.4)) \\
&= \int_{[0,\infty[} E\left[M_T 1_{[\![0,T]\!]}(C_s) 1_{\{C_s<\infty\}}\right] ds \quad (\because \text{Fubini}) \\
&= \int_{[0,\infty[} E\left[M_{C_s} 1_{[\![0,T]\!]}(C_s) 1_{\{C_s<\infty\}}\right] ds \quad (\because \text{任意抽出定理})
\end{aligned}$$

*26 命題 1.3.8
*27 $\mathscr{V}$ の定義より X は 0 出発である．
*28 命題 A.7.6 を参照．
*29 補題??
*30 最後の等号にはフィルトレーションの右連続性を使っている．（補題 1.9.3）
*31 命題 1.5.13 より従う．補題 3.2.9 の証明を参考にせよ．

$$
\begin{aligned}
&= E\left[\int_{[0,\infty[} M_{C_s} 1_{[\![0,T]\!]}(C_s) 1_{\{C_s<\infty\}} ds\right] \quad (\because \text{Fubini}) \\
&= E\left[\int_{[0,\infty[} M_s 1_{[\![0,T]\!]}(s) dA_s\right] \quad (\because (3.4)) \\
&= E[(M 1_{[\![0,T]\!]} \bullet A)_\infty] \\
&= E[(M \bullet A)^T_\infty] \quad (\because \text{命題 } 3.2.7) \\
&= E[(M \bullet A)_T]
\end{aligned}
$$

となる．A が可予測な場合は，

$$
\begin{aligned}
E[M_T A_T] &= \int_{[0,\infty[} E\left[M_T 1_{[\![0,T]\!]}(C_s) 1_{\{C_s<\infty\}}\right] ds \\
&= \int_{[0,\infty[} E\left[M_{C_s} 1_{[\![0,T]\!]}(C_s) 1_{\{C_s<\infty\}}\right] ds \quad (\because \text{任意抽出定理}) \\
&= \int_{[0,\infty[} E\left[M_{C_s-} 1_{[\![0,T]\!]}(C_s) 1_{\{C_s<\infty\}}\right] ds \quad (\because \text{可予測任意抽出定理（定理 } 3.1.4)) \\
&= E\left[\int_{[0,\infty[} M_{C_s-} 1_{[\![0,T]\!]}(C_s) 1_{\{C_s<\infty\}} ds\right] \quad (\because \text{Fubini}) \\
&= E\left[\int_{[0,\infty[} M_{s-} 1_{[\![0,T]\!]}(s) dA_s\right] \quad (\because (3.4)) \\
&= E[(M_- \bullet A)_T]
\end{aligned}
$$

とすれば良い． □

測度論における Radon-Nikodym の定理では，$\nu \ll \mu$ なる測度に対して $\nu = f \bullet \mu$ なる可測関数 f（Radon-Nikodym 密度）の存在が示される．同様にして，二つの局所有界変動過程 A, B に対して $dB \ll dA$（あるいは $dB \ll dA$ a.s.）ならば，$B = H \bullet A$ なる可測過程 H が存在するかという疑問が生ずる．それに答えるのが以下の命題である．

命題 3.2.12. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を右連続なフィルター付き確率空間とする．

(i) $A, B \in \mathscr{V}^+$ は $dB \ll dA$ a.s. なる関係を満たすとする．このとき，非負の良可測過程 H で $B = H \bullet A$ を（区別不能の意味で）満たすものが存在する．

(ii) $A, B \in \mathscr{V}$ かつ $dB \ll dA$ a.s ならば，良可測過程 H で $B = H \bullet A$ を区別不能の意味で満たすものが存在する．

(iii) A, B が可予測なら，(i) と (ii) における H として可予測なものが取れる．

証明．*Step 1* : $A, B \in \mathscr{A}^+$ **の場合**．$E \in \mathscr{O}(\mathbb{F})$ に対して

$$
\mu_A(E) = E[(1_E \bullet A)_\infty], \quad \mu_B(E) = E[(1_E \bullet A)_\infty]
$$

とすれば，μ_A と μ_B は $(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathscr{O}(\mathbb{F}))$ 上の有限測度を定める[*32]．$E \in \mathscr{O}$ が $\mu_A(E) = 0$ を満たすなら，ほとんど全ての ω に対して $(1_E \bullet A)_\infty(\omega) = 0$ であり，$dB \ll dA$ a.s. との仮定より確率 1 で $(1_E \bullet B)_\infty = 0$

[*32] 付録の 1.5 節「積空間上の測度について」を参照．

も成り立つ．ゆえに $\mu_B(E)=0$ となり，$\mu_B \ll \mu_A$ が分かる．非負の良可測過程 H を，μ_B の μ_A に関する Radon-Nikodym 微分の一つのバージョンとして定める．$B' = H \bullet A$ として，$B = B'$ が区別不能の意味で成り立つことを示そう．B と B' はともに càdlàg な過程であるから，互いに修正であることを示せば十分である．さらに，B と B' はともに適合過程なので，任意の t と任意の $F \in \mathscr{F}_t$ に対して $E[B_t 1_F] = E[B'_t 1_F]$ が成り立つことを示せばよい．$F \in \mathscr{F}_t$ に対して，$M \in \mathscr{M}$ を $E[1_F|\mathscr{F}_t]$ の càdlàg バージョンとして[*33]定める．このとき

$$\begin{aligned}
E[B_t 1_F] &= E[B_t M_t] \qquad (\because M \text{ の定義}) \\
&= E[(M \bullet B)_t] \qquad (\because \text{補題 } 3.2.11) \\
&= \int_{\Omega\times\mathbb{R}_+} M(\omega,t)\mu_B(d(\omega,t)) \qquad (\because \text{定理 A.6.5}) \\
&= \int_{\Omega\times\mathbb{R}_+} M(\omega,t)H(\omega,t)\mu_A(d(\omega,t)) \qquad (\because H \text{ の定義}) \\
&= E[((MH)\bullet A)_t] \qquad (\because \text{定理 A.6.5}) \\
&= E[((M\bullet B')_t] \qquad (\because \text{associativity of “pathwise” Stieltjes integrals}) \\
&= E[M_t B'_t] \qquad (\because \text{補題 } 3.2.11) \\
&= E[B'_t 1_F] \qquad (\because M \text{ の定義})
\end{aligned}$$

となるので，実際に $B'_t = B_t$ (a.s.) が分かった．

Step 2：$A, B \in \mathscr{V}^+$ **かつ** A, B **が可予測な場合．** Step 1 と同様にして μ_A, μ_B を今度は $(\Omega\times\mathbb{R}_+, \mathscr{P}(\mathbb{F}))$ 上に構成する．ここでも $\mu_B \ll \mu_A$ だから，$\mu_B = H \bullet \mu_A$ なる可予測過程 H が存在する．$B' = H \bullet A$ として，step 1 と同様にして $B = B'$ を示そう．$F \in \mathscr{F}_t$ に対して $E[1_F|\mathscr{F}_t]$ の càdlàg バージョンをとれば，

$$\begin{aligned}
E[B_t 1_F] &= E[B_t M_t] \qquad (\because M \text{ の定義}) \\
&= E[(M_- \bullet B)_t] \qquad (\because \text{補題 } 3.2.11) \\
&= \int_{\Omega\times\mathbb{R}_+} M(\omega,t-)\mu_B(d(\omega,t)) \qquad (\because \text{定理 A.6.5}) \\
&= \int_{\Omega\times\mathbb{R}_+} M(\omega,t-)H(\omega,t)\mu_A(d(\omega,t)) \qquad (\because H \text{ の定義}) \\
&= E[((M_-H)\bullet A)_t] \qquad (\because \text{定理 A.6.5}) \\
&= E[((M_-\bullet B')_t] \qquad (\because \text{associativity of “pathwise” Stieltjes integrals}) \\
&= E[M_t B'_t] \qquad (\because \text{補題 } 3.2.11) \\
&= E[B'_t 1_F] \qquad (\because M \text{ の定義})
\end{aligned}$$

が成り立つ[*34]．よって B' は B の修正であり，パスは càdlàg だから B と B' は区別不能である．

Step 3：$A, B \in \mathscr{V}^+$ **の場合．**

$$T_n = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid A_t + B_t \geq n\}$$

と定義すれば，$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は停止時刻列である[*35]．このとき

$$A^{(n)} = 1_{[\![T_{n-1},T_n[\![} \bullet A, \quad B^{(n)} = 1_{[\![T_{n-1},T_n[\![} \bullet B$$

*33 フィルトレーションの右連続性．

*34 ここで $M \bullet B$ でなく $M_- \bullet B$ を考えたのは，4 つ目の等式を正当化するためである．今，H は $\mu_B|_{\mathscr{P}}$ の $\mu_A|_{\mathscr{P}}$ に関する Radon-Nikodym 微分なので，可予測な被積分関数でないと 4 つ目の等号は保証されない！よって良可測な M の代わりに可予測な M_- を用いたのである．

*35 命題 1.3.8.

とすれば，$A^{(n)}, B^{(n)} \in \mathscr{A}^+$ であり[*36]，明らかに $dB^{(n)} \ll dA^{(n)}$ が成り立つ．Step 1 の結果より，$B^{(n)} = H^{(n)} \bullet A^{(n)}$ を（区別不能の意味で）満たす非負良可測過程 $H^{(n)}$ が存在する．$H = \sum 1_{[\![T_{n-1}, T_n[\![} H^{(n)}$ と定義すれば，H が求める良可測過程である．

Step 4：**$A, B \in \mathscr{V}^+$ かつ A, B が可予測な場合．** A と B が可予測なら，命題 1.5.13 より (T_n) は可予測時刻列となる．このとき $A^{(n)}$ と $B^{(n)}$ はともに可予測となり（命題 3.2.6），step 2 より $H^(n)$ として可予測なものが取れる．$H = \sum 1_{[\![T_{n-1}, T_n[\![} H^{(n)}$ と定めれば，H はまた可予測で $B = H \bullet A$ を満たしている．

Step 5：**$A, B \in \mathscr{V}$ の場合．** $A = A' - A''$ かつ $V(A) = A' + A''$ および $B = B' - B''$ かつ $V(B) = B' - B''$ を満たす $A', A'', B', B'' \in \mathscr{V}^+$ を選ぶ[*37]．$dA', dA'', dB', dB'' \ll dV(A)$ だから，step 4 より非負の良可測過程 H', H'', K', K'' で $A' = H' \bullet V(A)$, $A'' = H'' \bullet V(A)$, $B' = K' \bullet V(A)$ そして $B'' = K'' \bullet V(A)$ を満たすものが存在する．このとき，特に H', H'' のバージョンとして $H' - H''$ が $\{-1, 1\}$ に値をとるようなものが選べる．$H = K' - K''/H' - H''$ とおけば，H が求める良可測過程である．

A, B がともに可予測ならば，H', H'', K', K'' はどれも可予測であるように取れるので，同様に定義した H は可予測となる． □

3.3 双対可予測射影

双対可予測射影について考察するための道具として，命題 3.2.12 で用いた測度 μ_A をもう少し詳しく考察する．

補題 3.3.1. $A \in \mathbb{V}^+$ に対して $\nu(\omega, dt) = dA_t(\omega)$ と定義すれば，$\nu\colon \Omega \times \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ は定義 A.6.1 の意味での核である[*38]．

証明. $\omega \in \Omega$ を固定するたびに，$\nu(\omega, \cdot\,)$ が $\mathbb{R}_+$ 上の測度になっていることは明らかである．$B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ を固定したとき，$\nu(\,\cdot\,, B)$ が確率変数になっていることを示そう．まずは A が有界な場合を考える．

$$
\begin{aligned}
\mathscr{C} &= \{[0, t] \mid t \in \mathbb{R}_+\} \\
\mathscr{D} &= \{B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \mid \omega \mapsto \nu(\omega, B) \text{ は } \mathscr{F}\text{-可測 }\}
\end{aligned}
$$

と定義する．$\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$ かつ $\mathscr{C}$ は π-系なので，$\mathscr{D}$ が λ-系であることを示せばよい．$B, C \in \mathscr{D}$ かつ $B \subset C$ とすれば

$$
\nu(\omega, C \setminus B) = \nu(\omega, C) - \nu(\omega, B), \quad \omega \in \Omega
$$

より $C \setminus B \in \mathscr{D}$ が分かる[*39]．他の性質は明らかであり，$\mathscr{D}$ は λ-系である．π-λ 定理により $\mathscr{D} = \sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ である．よって ν は核である．

次に，一般の $A \in \mathbb{V}^+$ の場合を考える．

$$
T_n := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid A_t(\omega) \geq n\}
$$

と定めれば，これは非負の確率変数である．A は可測過程だから $A^{T_n-} \in \mathbb{V}^+$ となる．A^{T_n-} は有界だから，

[*36] $A^{(n)}$ および $B^{(n)}$ は T_n に到達する“直前”に止めているので，$A^{(n)}_\infty$ も $B^{(n)}_\infty$ も n 以下である．
[*37] 命題 3.2.2 よりこの様な組は唯一つ存在する．
[*38] 先ほどの節では当然のように扱っていたが，面倒くさいから後回しにしただけである．
[*39] この操作を可能にするために，A の有界性を用いた．

先ほどの結果により $A^{T_{n+1}-} - A^{T_n-} \in \mathbb{V}^+$ に対応する核 ν_n が存在する．

$$\nu(\omega, B) = \int_B dA_s(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_B 1_{[\![T_n, T_{n+1}[\![} dA_s = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_n(\omega, B)$$

だから，$\omega \mapsto \nu(\omega, B)$ も $\mathscr{F}$-可測である．すなわち，一般の $A \in \mathbb{V}^+$ に対応する ν も核である． □

定義 3.3.2. ν は定義 A.6.1 の意味での核だから，ν と P によって生成される $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ 上の $\overline{\mathbb{R}}_+$ 値測度が存在する．（命題 A.6.2）これを μ_A という記号で表す．

補題 3.3.3. $A \in \mathbb{V}^+$ とする．このとき μ_A は σ-有限測度で，

$$\mu_A(E) = E\left[\int_{[0,\infty[} 1_E(\cdot, s) dA_s\right], \quad E \in \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$$

が成立する．

証明．A が有界な場合，命題 A.6.4 より明らかに補題の主張が成り立つ．A が一般の場合は，(T_n) を補題 3.3.1 の証明と同じ $\overline{\mathbb{R}}_+$ 値確率変数列とする．このとき $[\![T_n, T_{n+1}[\![$ 上では A は有界だから，

$$\mu_A(E \cap [\![T_n, T_{n+1}]\!]) = E\left[\int_{[0,\infty[} 1_{E\cap[\![T_n,T_{n+1}[\![} dA_s\right], \quad E \in \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$$

が成り立つ．単調収束定理により，任意の $E \in \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ について

$$\begin{aligned}\mu_A(E) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_A(E \cap [\![T_n, T_{n+1}]\!]) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} E\left[\int_{[0,\infty[} 1_{E\cap[\![T_n,T_{n+1}[\![} dA_s\right] \\ &= E\left[\int_{[0,\infty[} 1_E dA_s\right]\end{aligned}$$

となる．特に

$$\mu_A([\![T_n, T_{n+1}]\!]) = E[A_{T_{n+1}-} - A_{T_n-}] < \infty$$

かつ $\bigcup_n [\![T_n, T_{n+1}[\![= \Omega \times \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ だから，μ_A は σ-有限である． □

定義 3.3.4. μ を $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ 上の $\overline{\mathbb{R}}_+$ 値測度とする．ある $A \in \mathbb{V}^+$ が存在して

$$\mu_A(E) = \mu(E), \quad E \in \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$$

が成り立つとき，μ は A によって生成される測度であるという．

定義 3.3.5. μ は $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ 上の $\overline{\mathbb{R}}_+$ 値測度とする．任意の消散的な集合 $N \in \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ に対して $\mu(N) = 0$ となるとき，μ は許容可能 (admissible) であるという．

定理 3.3.6. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を右連続なフィルター付き確率空間，μ を $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ 上の $\overline{\mathbb{R}}_+$ 値測度とする．μ がある $A \in \mathbb{V}^+$ によって生成される測度であることは，以下の 3 条件が成り立つことと同値である．

(i) $\mu([\![0]\!]) = 0$.

(ii) 任意の $t \in \mathbb{R}_+$ に対して $F \mapsto \mu(F \times [0,t])$ は σ-有限測度である．

(iii) μ は許容可能な測度である．

μ が増加過程 $A, B \in \mathbb{V}^+$ によって生成されているとき，$A = B$ が区別不能の意味で成り立つ．

証明．*Step 1*：*(i)–(iii)* **の必要性．** μ はある $A \in \mathbb{V}^+$ によって生成される測度であるとする．

(i) $A \in \mathbb{V}^+$ より $A_0 = 0$ である．よって $\mu_A([\![0]\!]) = E[A_0] = 0$ が成立．

(iii) $N \in \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ を消散的な集合とすれば，

$$\left\{\omega \in \Omega \;\middle|\; \int_0^\infty 1_{N^\omega}(s) dA_s(\omega) > 0\right\} \subset \{\omega \in \Omega \mid \exists t \in \mathbb{R}_+,\ (\omega, t) \in N\} = \mathrm{pr}_1(N)$$

より

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \;\middle|\; \int_0^\infty 1_{N^\omega}(s) dA_s > 0\right\}\right) \leq P(\mathrm{pr}_1(N)) = 0$$

が成立．したがって

$$\mu_A(N) = E\left[\int_0^\infty 1_N dA_s\right] = 0$$

となる．

(ii) $t \in \mathbb{R}_+$ を固定する．$\mu(F \times [0,t]) = E[A_t 1_F]$ だから，$F \mapsto \mu(F \times [0,t])$ は非負測度である．

$$E_n = \{\omega \in \Omega \mid A_t(\omega) \geq n\}$$

と定めれば $\Omega = \bigcup_n E_n$ であり，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$E[A_{t-} 1_{E_n}] \leq E[n 1_{E_n}] \leq n$$

が成立．したがって，$F \mapsto \mu(F \times [0,t[)$ は σ-有限であることが分かる．これは任意の t について成り立つから，(ii) が成立することが分かる[*40]．以上の議論により，$\mu = \mu_A$ の時 (i)–(iii) が成り立つ．

Step 2：*(i)–(iii)* **の十分性．** $\mathscr{F}$ 上の測度 ρ_t を

$$\rho_t(E) = \mu(E \times [0,t]) = \mu(E \times]0,t])$$

によって定めれば，仮定 (iii) より $\rho_t \ll P$ である[*41]．A'_t は非負かつ有限値なる $d\rho_t/dP$ のバージョンとする[*42]．仮定 (i) より，$A'_0 = 0$ a.s. である．$s \leq t$ とすれば，任意の $E \in \mathscr{F}$ に対して

$$\int_E A'_s dP = \rho_s(E) = \mu(E \times [0,s]) \leq \mu(E \times [0,t]) = \rho_t(E) = \int_E A'_t dP$$

が成立．よって $A'_s \leq A'_t$ a.s. となる．(t_k) を $t_k \downarrow t$ なる列とする．

$$F_n = \{A'_{t_1} \leq n\}$$

とすれば，

$$\lim_{k\to\infty} E[1_{F_n}(A'_{t_k} - A'_t)] = \lim_{k\to\infty} \mu(F_n \times]t, t_k]) = 0$$

---

*40 正の $\varepsilon > 0$ をとれば，任意の $F \in \mathscr{F}$ について $\mu(F \times [0,t]) \leq \mu(F \times [0, t+\varepsilon[)$ となることに注意せよ．

*41 明らかなことだが，N が P-零集合なら $N \times [0,t]$ は消散的である．

*42 ρ_t の σ-有限性より，有限値なものがとれる．

が成立[43]．A' の単調性より，$A'_{t_k} \to A'_t$ a.s. on F_n が分かる．いま $\Omega = \bigcup_n F_n$ だから，$A'_{t_k} \to A'_t$ a.s. である．現時点で分かっているのは $A'_s \le A'_t$ a.s. ということだけであり，パス自体が増加関数かどうかは明らかではない．したがって，この A' の修正として μ を表現する $A \in \mathbb{V}^+$ を構成する必要がある．

$$A''_t(\omega) = \inf\{A'_r(\omega) \mid r > t,\ r \in \mathbb{Q}\}$$

と定めよう．A'' は可算個の確率変数の inf をとったものだから，これもまた $\mathscr{F}$-可測である．定義より明らかに，全てのパスは右連続増加関数である．

$t \in \mathbb{R}_+$ を任意に固定して，$A''_t = A'_t$ a.s. となることを示そう．(r_k) を $r_k \downarrow t$ かつ $r_k > t$ なる有理数列とする．定義より $A''_t \le A'_{r_k}$ だから，極限を取れば $A''_t \le A'_t$ a.s. である．また，任意の有理数 $r > t$ に対して $A'_t \le A'_r$ a.s. であった．

$$N_0(t) := \bigcup_{r>t} \{\omega \in \Omega \mid A'_t > A'_r\}$$

とすれば，これは $\mathscr{F}$-可測な P-零集合である．$\omega \notin N_0(t)$ とすれば，定義より $A'_t(\omega) \le A''_t(\omega)$ である．したがって $A''_t \ge A'_t$ a.s. も成立．すなわち $A''_t = A'_t$ a.s. である．特に $A''_0 = 0$ a.s. が成り立つ．

この A'' は $A''_0 = 0$（各点）とは限らないので，さらに修正を作る．

$$N_1 := \{\omega \in \Omega \mid A''_0 \neq 0\}$$

と定めれば，これは $\mathscr{F}$-可測な P-零集合である．

$$A_t(\omega) = \begin{cases} A''_t(\omega) & \omega \in N_1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義すれば，$A \in \mathbb{V}^+$ となる．A の構成法より，任意の s, t と任意の $F \in \mathscr{F}$ に対して

$$E[1_F(A_t - A_s)] = E[1_F(A'_t - A'_s)] = \mu(F \times]s,t])$$

が成り立つ．これより $\mu_A = \mu$ が分かる．μ が $B \in \mathbb{V}^+$ によっても生成されているなら，Radon-Nikodym 導関数の一意性より B は A の修正である．パスの右連続性より，これらは区別不能である． □

定理 3.3.6 では μ が $A \in \mathbb{V}^+$ によって生成されることの特徴づけを行った．それでは，その A として適合過程や，可予測過程がとれるのどういった場合であろうか．ここでは可予測過程の場合を考察する．

定義 3.3.7. μ は $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ 上の許容可能な測度とする．任意の有界可測過程に対して $\mu(X) = \mu({}^{\mathfrak{p}}X)$ が成り立つとき，μ は可予測 (predictable) であるという．ただし，$\mu(X)$ は可測過程 X の測度 μ による積分である．

定理 3.3.8. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を通常の条件を満たすフィルター付き確率空間，$A \in \mathbb{V}^+$ とする．このとき，A が可予測であることと μ_A が可予測であることは同値である．

証明．*Step 1*：**A が可予測 $\Longrightarrow$ μ_A が可予測．** A は可予測であると仮定する．

$$C_t(\omega) = \inf\{s \in \mathbb{R}_+ \mid A_s \ge t\}$$

[43] 各 F_n 上では A'_{t_k} と A'_t は a.s. で n 以下なので，$\mu(F_n \times]t, t_k])$ は有限値である．

とすれば，C_t は可予測時刻となる[*44]．このとき，非負の有界可測過程 X に対して

$$
\begin{aligned}
\mu_A(X) &= E\left[\int_{[0,\infty[} X_s dA_s\right] \\
&= E\left[\int_{[0,\infty[} X_{C_s} 1_{\{C_s<\infty\}} ds\right] \quad (\because \text{命題 A.8.5}) \\
&= \int_{[0,\infty[} E\left[X_{C_s} 1_{\{C_s<\infty\}}\right] ds \quad (\because \text{Fubini}) \\
&= \int_{[0,\infty[} E\left[{}^{\mathfrak{p}}X_{C_s} 1_{\{C_s<\infty\}}\right] ds \quad (\because \text{可予測射影の定義，}\{C_s<\infty\} \in \mathscr{F}_{C_s-} \text{ に注意}) \\
&= E\left[\int_{[0,\infty[} {}^{\mathfrak{p}}X_{C_s} 1_{\{C_s<\infty\}} ds\right] \quad (\because \text{Fubini}) \\
&= E\left[\int_{[0,\infty[} {}^{\mathfrak{p}}X_s dA_s\right] \quad (\because \text{命題 A.8.5}) \\
&= \mu_A({}^{\mathfrak{p}}X)
\end{aligned}
$$

が成立．よって μ_A は可予測である．

Step 2：**μ_A が可予測 $\Longrightarrow$ A が可予測．**まずは A が適合であることを示す．$t \in \mathbb{R}_+$ および $F \in \mathscr{F}$ とする．$X = 1_F 1_{[\![0,t]\!]}$ とし，$M = (M_s)$ を $E[1_F|\mathscr{F}_s]$ の càdlàg 修正とする．さらに，確率変数 $Z = E[1_F|\mathscr{F}_t]$ を考える．$1_{[\![0,t]\!]}$ は可予測過程だから，命題 3.1.3 と命題 3.1.9 により[*45] ${}^{\mathfrak{p}}X = 1_{[\![0,t]\!]}{}^{\mathfrak{p}}1_F = 1_{[\![0,t]\!]}M_-$ が成立．また，M はマルチンゲールだから，系 3.1.6 により ${}^{\mathfrak{p}}(1_{[\![0,t]\!]}Z) = 1_{[\![0,t]\!]}{}^{\mathfrak{p}}Z = 1_{[\![0,t]\!]}M^t_- = 1_{[\![0,t]\!]}M_-$ である．したがって X と $1_{[\![0,t]\!]}M$ は（区別不能の意味で）同じ可予測射影を持つ．これより

$$
\begin{aligned}
&E[A_t 1_F] = \mu_A(F \times [0,t]) = \mu_A(X) = \mu_A({}^{\mathfrak{p}}X) = \mu_A(1_{[\![0,t]\!]}Z) \\
&\quad = E\left[ZA_t\right] = E[E[1_F|\mathscr{F}_t]A_t] = E[E[1_F|\mathscr{F}_t]E[A_t|\mathscr{F}_t]] = E[1_F E[A_t|\mathscr{F}_t]]
\end{aligned}
$$

が成立．F は任意の $\mathscr{F}$-可測関数だから，$A_t = E[A_t|\mathscr{F}_t]$ a.s. が成立．フィルトレーションの完備性より，A_t は $\mathscr{F}_t$-可測となる．t は任意に選んだものだったから，A は $\mathbb{F}$-適合である．

A は càdlàg 適合過程であるから，A が可予測であることを示すためには定理 1.8.8 の同値条件を調べれば良い．S を到達不能停止時刻とすれば，${}^{\mathfrak{p}}1_{[\![S]\!]} = 0$ が区別不能の意味で成り立つ．（命題 3.1.13）よって

$$
E[\Delta A_S] = \mu_A(1_{[\![S]\!]}) = \mu_A({}^{\mathfrak{p}}1_{[\![S]\!]}) = 0
$$

である．$\Delta A_S \geq 0$ に注意すれば $\Delta A_S = 0$ が分かる．すなわち $P[\Delta X_S 1_{\{S<\infty\}}] = 0$ となり，定理 1.8.8 の条件 (i) が満たされる．

T を可予測時刻とする．$F \in \mathscr{F}$ とすれば，$1_F 1_{[\![0,T]\!]}$ と $E[1_F|\mathscr{F}_{T-}]1_{[\![0,T]\!]}$ おなじ可予測射影を持つ．$X = 1_F 1_{[\![0,T]\!]}$ および $Y = E[1_F|\mathscr{F}_{T-}]1_{[\![0,T]\!]}$ とすれば，任意の可予測時刻 S に対して

$$
\begin{aligned}
&E[{}^{\mathfrak{p}}X_S 1_{\{S<\infty\}}] = E[X_S 1_{\{S<\infty\}}] = E[1_F 1_{[\![0,T]\!]}(S) 1_{\{S<\infty\}}] = E[1_F 1_{\{S\leq T\}} 1_{\{S<\infty\}}] \\
&\quad = E[E[1_F|\mathscr{F}_{T-}] 1_{\{S<\infty\}}] = E[Y_S 1_{\{S<\infty\}}] = E[{}^{\mathfrak{p}}Y_S 1_{\{S<\infty\}}]
\end{aligned}
$$

[*44] 命題 1.5.13 より従う．補題 3.2.9 の証明を参考にせよ．
[*45] ここで通常の条件を使う．

が成り立つ[*46]．これにより，定理 1.6.13 から ${}^{\mathfrak{p}}X = {}^{\mathfrak{p}}Y$ が確かめられる．仮定より μ_A は可予測だから，

$$\begin{aligned}E[1_F A_T] &= \mu_A(1_F 1_{[\![0,T]\!]}) = \mu_A(X) = \mu_A({}^{\mathfrak{p}}X) = \mu_A({}^{\mathfrak{p}}Y)\\ &= \mu_A(Y) = E[E[1_F|\mathscr{F}_{T-}]A_T] = E[E[1_F|\mathscr{F}_{T-}]E[A_T|\mathscr{F}_{T-}]] = E[1_F E[A_T|\mathscr{F}_{T-}]]\end{aligned}$$

が成立．F は任意の $\mathscr{F}$-可測集合だったから $A_T = E[A_T|\mathscr{F}_{T-}]$ a.s. となり，完備性より A_T が $\mathscr{F}_{T-}$-可測であることが分かる．T は $\mathscr{F}_{T-}$ 可測なので，$A_T 1_{\{T<\infty\}}$ も $\mathscr{F}_{T-}$-可測である．T は任意の可予測時刻であったから，A は定理 1.8.8 の条件 (ii) を満たすことが示された．

以上の結果から A は定理 1.8.8 の条件 (i) と (ii) を満たす càdlàg 適合過程となり，したがって可予測過程であることの証明が完了した． □

注意 3.3.9. 定理 3.3.8 と同様の設定のもと，A が良可測であることは，任意の有界可測過程について $\mu(X) = \mu({}^{o}X)$ が成り立つことと同値になる．証明は，He, Wang, and Yan [10, 5.13 Theorem] を参照されたい．

可測過程の可予測射影を用いて，許容可能な測度の可予測射影を定める．

定義 3.3.10. σ-有限測度 $\mu\colon \mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ は許容可能であるとする．有界可測過程 X に対して

$$\mu^{\mathfrak{p}}(X) = \mu({}^{\mathfrak{p}}X)$$

と定義すれば，可予測射影の性質（命題 3.1.3）より $\mu^{\mathfrak{p}}$ は $\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ 上の可予測な測度となる[*47]．$\mu^{\mathfrak{p}}$ を μ の可予測射影 (predictable projection) と呼ぶ．

定理 3.3.11. $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ を通常の条件を満たすフィルター付き確率空間，$A\in\mathbb{V}^+$ とする．このとき次の 2 条件は同値である．

(i) $(\mu_A)^{\mathfrak{p}}$ はある $A'\in\mathbb{V}^+$ によって生成される測度である．

(ii) A は局所可積分である[*48]．

証明．*Step 1*: *(i) $\Longrightarrow$ (ii)*. $(\mu_A)^{\mathfrak{p}}$ は A' によって生成される測度であるとする．$\mu_A^{\mathfrak{p}}$ は可予測だから定理 3.3.8 により A' も可予測であり，さらに補題 3.2.9 により A' は局所可積分である．$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathscr{A}$ に関する A' の局所化列とすれば，

$$E[A_{T_n}] = \mu_A([\![0,T_n]\!]) = (\mu_A)^{\mathfrak{p}}([\![0,T_n]\!]) = E[A'_{T_n}] \leq \infty$$

が成立[*49]．すなわち (T_n) は A の局所化列でもあり，A は局所可積分である．

Step 2: *(ii) $\Longrightarrow$ (i)*. A は局所可積分であるとし，その局所化列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を適当に選ぶ．このとき，$(\mu_A)^{\mathfrak{p}}$ が定理 3.3.6 の 3 条件を満たすことを示せばよい．$[\![0]\!]$ は可予測だから，

$$(\mu_A)^{\mathfrak{p}}([\![0]\!]) = \mu_A([\![0]\!]) = E[A_0] = 0$$

である．N を消散的集合とすれば 1_N は可予測だから[*50]，

$$(\mu_A)^{\mathfrak{p}}(N) = \mu_A(N) = 0$$

[*46] 命題 1.5.8 より $\{S<\infty\}\cap\{S\leq T\}\in\mathscr{F}_{T-}$ となることに注意せよ．

[*47] 可予測な測度の定義は定義 3.3.7.

[*48] $A\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ である必要はない．（適合かどうかの違い．）

[*49] $[\![0,T_n]\!]$ は可予測集合であることに注意．

[*50] 命題 1.4.9.

となる．あとは定理 3.3.6 の条件 (ii) を示せば良い．

$$E_n = \{\omega \in \Omega \mid T_n(\omega) \geq t\}$$

と定義し，N は $T_n \to 0$ が成り立たないような零集合とする．このとき $\Omega = N \cup \bigcup_n E_n$ であって，$E_n \times [0,t] \subset [\![0, T_n]\!]$ が成立．したがって

$$(\mu_A)^{\mathfrak{p}}(E_n \times [0,t]) \leq (\mu_A)^{\mathfrak{p}}([\![0, T_n]\!]) = \mu_A([\![0, T_n]\!]) = E[A_{T_n}] < \infty$$

となり，$F \mapsto (\mu_A)^{\mathfrak{p}}(F \times [0,t])$ は σ-有限であることが分かる．定理 3.3.6 の条件 (i)–(iii) が満たされるから，$(\mu_A)^{\mathfrak{p}}$ はある $A' \in \mathbb{V}^+$ によって生成される測度であることが示された． □

定義 3.3.12 (双対可予測射影)．$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を通常の条件を満たすフィルター付き確率空間とし，$A \in \mathbb{V}^+$ は局所可積分であるとする．このとき $(\mu_A)^{\mathfrak{p}}$ はある可予測増加過程 $A^{\mathfrak{p}}$ によって生成される．この可予測増加過程 $A^{\mathfrak{p}}$ を A の双対可予測射影 (dual predictable projection) または可予測補償過程 (predictable compensator) と呼ぶ．$A \in \mathbb{V}$ の時は，増加過程による標準的な分解 $A = A_1 - A_2$ によって $A^{\mathfrak{p}} = A_1^{\mathfrak{p}} - A_2^{\mathfrak{p}}$ と定める．

双対可予測射影の定義より，非負有界可測過程 H に対して

$$E[({}^{\mathfrak{p}}H \bullet A)_\infty] = \mu_A({}^{\mathfrak{p}}H) = (\mu_A)^{\mathfrak{p}}(H) = \mu_{A^{\mathfrak{p}}}(H) = E[(H \bullet A^{\mathfrak{p}})_\infty]$$

すなわち，射影作用素 ${}^{\mathfrak{p}}(\,\cdot\,)$ を $(\,\cdot\,)^{\mathfrak{p}}$ として A に移すことが出来る．これより $A^{\mathfrak{p}}$ は双対可予測射影と呼ばれるのである．

命題 3.3.13. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を通常の条件を満たすフィルター付き確率空間とし，$A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ について，次の 2 条件は同値である．

(i) 可予測過程 A' は A の双対可予測射影である．

(ii) $A - A' \in \mathscr{M}_{loc,0}$

証明．$A \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ の場合に示せば十分である．*Step 1 : (i) $\Longrightarrow$ (ii).* (T_n) を A と A' の $\mathscr{A}^+$ に関する局所化列とする．このとき，任意の停止時刻 T に対して $(A - A')^{T_n}_T$ は可積分である．また，任意の停止時刻 T に対して

$$E[(A - A')^{T_n}_T] = E[A^{T_n}_T] - E[(A')^{T_n}_T] = \mu_{A^{T_n}}([\![0, T]\!]) - \mu_{(A')^{T_n}}([\![0, T]\!]) = 0 = E[(A - A')^{T_n}_0]$$

が成り立つから，命題 2.6.2 より $(A - A')^{T_n} \in \mathscr{M}$ となる．

Step 2 : (ii) $\Longrightarrow$ (i). (S_n) を $A - A'$ の $\mathscr{M}$ についての局所化列とする．このとき，先ほどと同様の計算により，任意の停止時刻 T に対して $E[A^{T_n}_T] = E[(A')^{T_n}_T]$ が成り立つ．$n \to \infty$ とすれば

$$(\mu_A)^{\mathfrak{p}}([\![0, T]\!]) = \mu_A([\![0, T]\!]) = E[A_T] = E[A'_T] = \mu_{A'}([\![0, T]\!])$$

が分かる．測度 $(\mu_A)^{\mathfrak{p}}$ と $\mu_{A'}$ は $\mathscr{P}(\mathbb{F})$ を生成する π 系の上で一致するから，$\mathscr{P}(\mathbb{F})$ 上でも一致する．すなわち $(\mu_A)^{\mathfrak{p}}$ は A' によって生成されるので，A' は A の双対可予測射影である． □

命題 3.3.14 (双対可予測射影の性質)．$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を通常の条件を満たすフィルター付き確率空間とする．このとき，可予測射影について次の性質が成立する．ただし，確率過程の等号はどれも区別不能の意味である．

(i) $A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ が可予測なら，$A^{\mathfrak{p}} = A$.

(ii) $A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ が局所マルチンゲールであることと，$A^{\mathfrak{p}}$ が消散的であることは同値である.

(iii) $A, B \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ なら，$(A+B)^{\mathfrak{p}} = A^{\mathfrak{p}} + B^{\mathfrak{p}}$ かつ $(cA)^{\mathfrak{p}} = c(A^{\mathfrak{p}})$.（$c$ は定数.）

(iv) $A \in \mathscr{A}$ なら，$A^{\mathfrak{p}} \in \mathscr{A}$ かつ $A - A^{\mathfrak{p}} \in \mathscr{M}$ が成立.

(v) $A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ なら，任意の停止時刻 T に対して $(A^T)^{\mathfrak{p}} = (A^{\mathfrak{p}})^T$.

(vi) $A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ なら，$\Delta(A^{\mathfrak{p}}) = {}^{\mathfrak{p}}(\Delta A)$.

(vii) $A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ のとき，A が準左連続ならば $A^{\mathfrak{p}}$ が確率 1 で連続である．さらに $A \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ なら逆も成立.

(viii) H は可予測，$A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$，$(H \bullet A) \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ なら $(H \bullet A)^{\mathfrak{p}} = H \bullet A^{\mathfrak{p}}$.

(ix) H が可予測かつ $H \bullet A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ なら，$H \bullet (A - A^{\mathfrak{p}}) = H \bullet A - H \bullet A^{\mathfrak{p}}$ は局所マルチンゲールである.

証明．どれも A が増加過程のときに示せば十分である.

(i) – (iii) は命題 3.3.13 より明らかである.

(iv). 停止時刻 $T = \infty$ を考えれば，$E[A^{\mathfrak{p}}_\infty] = E[A_\infty] < \infty$ となり $A^{\mathfrak{p}} \in \mathscr{A}^+$ が分かる．これより $A - A^{\mathfrak{p}} \in \mathscr{A}$ が成立．特に $A - A^{\mathfrak{p}}$ はクラス (D) に属するから，一様可積分マルチンゲールである[*51].

(v). T を停止時刻とすれば，$(A - A^{\mathfrak{p}})^T = A^T - (A^{\mathfrak{p}})^T = \mathscr{M}_{loc,0}$ である．これより $(A^T)^{\mathfrak{p}} = (A^{\mathfrak{p}})^T$ が分かる.

(vi). $A^{\mathfrak{p}}$ は可予測だから，$\Delta A^{\mathfrak{p}}$ も可予測である．また，$A - A^{\mathfrak{p}} \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ より ${}^{\mathfrak{p}}(\Delta(A - A^{\mathfrak{p}})) = 0$ である．したがって

$$0 = {}^{\mathfrak{p}}(\Delta(A - A^{\mathfrak{p}})) = {}^{\mathfrak{p}}(\Delta A) - {}^{\mathfrak{p}}(\Delta A^{\mathfrak{p}}) = {}^{\mathfrak{p}}(\Delta A) - \Delta A^{\mathfrak{p}}$$

が成立.

(vii) (vi) と可予測時刻の定義より，任意の可予測時刻について

$$E[\Delta A_T 1_{\{T<\infty\}} | \mathscr{F}_{T-}] = \Delta A^{\mathfrak{p}}_T 1_{\{T<\infty\}}$$

が成立．A が準左連続なら左辺は 0 となり，よって右辺も 0 となる．$A^{\mathfrak{p}}$ は可予測だから可予測時刻でしかジャンプしないので，$A^{\mathfrak{p}}$ の連続性が従う.

$A \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}} A^{\mathfrak{p}}$ が連続であると仮定する．いま A は増加的だから，$E[\Delta A_T 1_{\{T<\infty\}}] = E[\Delta A^{\mathfrak{p}}_T 1_{\{T<\infty\}}]$ より $\Delta A_T 1_{\{T<\infty\}} = 0$ が分かる.

(viii). H が非負で $A \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ の場合を考えればよい．K を任意の非負，有界可測過程とする.

$$\begin{aligned} E[K \bullet (H \bullet A)^{\mathfrak{p}}] &= E[{}^{\mathfrak{p}}K \bullet (H \bullet A)] = E[({}^{\mathfrak{p}}KH) \bullet A] \\ &= E[({}^{\mathfrak{p}}(KH)) \bullet A] = E[(KH) \bullet A^{\mathfrak{p}}] = E[K \bullet (H \bullet A^{\mathfrak{p}})] \end{aligned}$$

が成り立つ．$H \bullet A^{\mathfrak{p}}$ が可予測となることに注意すれば[*52]，$(H \bullet A)^{\mathfrak{p}} = (H \bullet A^{\mathfrak{p}})$ が分かる.

(ix). $H \bullet A^{\mathfrak{p}}$ は可予測なので $H \bullet A^{\mathfrak{p}} \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ であることに注意すれば，$H \bullet (A - A^{\mathfrak{p}}) = H \bullet A - H \bullet A^{\mathfrak{p}} \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ が分かる．(viii) から

$$(H \bullet (A - A^{\mathfrak{p}}))^{\mathfrak{p}} = H \bullet (A - A^{\mathfrak{p}})^{\mathfrak{p}} = 0$$

となる．(ii) から $H \bullet (A - A^{\mathfrak{p}}) \in \mathscr{M}_{loc,0}$ が分かる. □

初等的な確率過程の場合は，双対可予測射影を具体的に求めることができる.

[*51] 命題 2.6.5.

[*52] 命題 3.2.6.

命題 3.3.15. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を通常の条件を満たすフィルター付き確率空間，T を可予測時刻，ξ を実数値の確率過程とする．このとき，$A = \xi 1_{[\![T,\infty[\![} \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ は $\xi 1_{\{T<\infty\}}$ が $\mathscr{F}_{T-}$-σ 可積分であることと同値である．$A \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ なら

$$A^{\mathfrak{p}} = E[\xi 1_{\{T<\infty\}} | \mathscr{F}_{T-}] 1_{[\![T,\infty[\![}$$

が成り立つ．

証明．$A \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ とし，(T_n) を A の局所化列とする．このとき $A_{T_n} = \xi 1_{\{T \leq T_n < \infty\}}$ であることに注意する．$E_n = \{T = \infty\} \cup \{T_n \geq T\} \in \mathscr{F}_{T-}$ とすれば[*53]，(E_n) は増加列で $\bigcup_n E_n = \Omega$ を満たす．いま

$$\xi 1_{\{T<\infty\}} 1_{E_n} = \xi 1_{\{T<\infty\}} 1_{\{T=\infty\} \cup \{T_n \geq T\}} = \xi 1_{\{T<\infty\}} 1_{\{T_n \geq T\}} = A_{T_n} 1_{\{T<\infty\}} = A_{T_n}$$

であるから，

$$E[\xi 1_{\{T<\infty\}} 1_{E_n}] \leq E[A_{T_n}] < \infty$$

となる．すなわち $\xi 1_{\{T<\infty\}}$ は $\mathscr{F}_{T-}$-σ 可積分である．

逆に，$\xi 1_{\{T<\infty\}}$ が $\mathscr{F}_{T-}$-σ 可積分であると仮定しよう．特に $\xi \geq 0$ としても一般性を失わない．

$$B = E[\xi 1_{\{T<\infty\}} | \mathscr{F}_{T-}] 1_{[\![T,\infty[\![}$$

と定義すれば，$\xi 1_{\{T<\infty\}}$ の $\mathscr{F}_{T-}$-σ-可積分性より B は非負実数値の可予測過程となる[*54]．これより，任意の非負可測過程 X に対して

$$\begin{aligned}
\mu_A({}^{\mathfrak{p}}X) &= E\left[({}^{\mathfrak{p}}X \bullet A)_\infty\right] \\
&= E[{}^{\mathfrak{p}}X_T \xi 1_{\{T<\infty\}}] \\
&= E[{}^{\mathfrak{p}}X_T 1_{\{T<\infty\}} E[\xi 1_{\{T<\infty\}} | \mathscr{F}_{T-}]] \\
&= E[X_T 1_{\{T<\infty\}} E[\xi 1_{\{T<\infty\}} | \mathscr{F}_{T-}]] \\
&= E[(X \bullet B)] = \mu_B(X)
\end{aligned}$$

が成立．このとき定理 3.3.11 から A は局所可積分となり，さらに双対可予測射影の定義より $A^{\mathfrak{p}} = B$ が分かる． □

命題 3.3.16. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を通常の条件を満たすフィルター付き確率空間とし，$A \in \mathbb{V}^+$ は局所可積分であるとする．このとき任意の可予測過程 H に対して

$$E[(|H| \bullet V(A^{\mathfrak{p}}))_\infty] \leq E\left[(|H| \bullet V(A))_\infty\right]$$

が成り立つ．特に，$V(A) \in \mathscr{A}$ なら $V(A^{\mathfrak{p}}) \in \mathscr{A}$ である．

証明．$A \in \mathbb{V}$ に対して

$$A^+ = \frac{V(A) + A}{2}, \quad A^- = \frac{V(A) - A}{2}$$

[*53] E_n の可測性は命題 1.2.3 および系 1.2.9 から分かる．

[*54] 可測性については命題 1.5.9．条件付期待値が実数値になることは，付録の命題??

と定めれば，$A^+, A^- \in \mathscr{V}^+$ が成り立つのであった．いま A が局所可積分であることから，A^+ と A^- はともに局所可積分である．双対可予測射影の線形性[*55]より $A^\mathfrak{p} = (A^+)^\mathfrak{p} - (A^-)^\mathfrak{p}$ であることに注意すれば，

$$\begin{aligned}
E[(|H| \bullet V(A^\mathfrak{p}))_\infty] &\leq E[(|H| \bullet V((A^+)^\mathfrak{p})_\infty] + E[(|H| \bullet V((A^-)^\mathfrak{p})_\infty] \\
&= E[(|H| \bullet (A^+)^\mathfrak{p})_\infty] + E[(|H| \bullet (A^-)^\mathfrak{p})_\infty] \\
&= E[(|H| \bullet A^+)_\infty] + E[(|H| \bullet A^-)_\infty] \quad (\because H \text{ の可予測性}) \\
&= E\left[(|H| \bullet V(A))_\infty\right]
\end{aligned}$$

となり結論を得る． □

3.4 Doob-Meyer 分解

定義 3.4.1 (ポテンシャル)．$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．非負の $\mathbb{F}$-優マルチンゲール X が $\lim_{t\to\infty} E[X_t] = 0$ を満たすとき，X をポテンシャル (*potential*) と呼ぶ．

$A \in \mathscr{V}$ ならば，A によって生成される測度 μ_A を考えることが出来た．確率過程 X のパスが局所有限変動でない場合，一般には $E\left[\int_{]0,t]} H_s dX_s\right]$ という量を考えることはできない．しかし，X がポテンシャルの場合には X と対応する測度が存在することが知られている．

$$\mathscr{S} = \{[\![0_F]\!] \mid F \in \mathscr{F}_0\} \cup \{]\!]S, T]\!] \mid S, T \in \mathscr{T},\ S \leq T\}$$

と定めれば，$\sigma(\mathscr{S}) = \mathscr{P}(\mathbb{F})$ が成り立つのであった．[*56]．$\mathscr{C}$ で $\mathscr{S}$ の元の有限和全体からなる集合を表すことにする．このとき $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{P}(\mathbb{F})$ であり，$\mathscr{C}$ は集合代数である．$E \in \mathscr{C}$ とする．このとき，

$$E = [\![0_F]\!] \sqcup]\!]S_1, T_1]\!] \sqcup \cdots \sqcup]\!]S_n, T_n]\!] \tag{3.5}$$

（ただし，$F \in \mathscr{F}_0$ かつ各 S_k, T_k は停止時刻で，$\{S_k < \infty\}$ 上では $S_k(\omega) < T_k(\omega)$ が，$\{T_k < \infty\}$ 上では $T_k(\omega) < S_{k+1}(\omega)$ が成り立っているものとする.）という表現が可能である．実際，次のような手順で (T_k) を定めればよい．T_0 は $E \cap]\!]0, \infty[\![$ へのデビューとし，T_1 は $(\Omega \times \mathbb{R}_+ \setminus E) \cap]\!]T_0, \infty[\![$ へのデビューと定める．さらに T_2 は $E \cap]\!]T_1, \infty[\![$ へのデビュー... と続ければよい．$E \in \mathscr{C}$ のこのような形の表現を，E の標準表現と呼ぶことにする．（この節でだけ使う言葉.）さらに，E の標準表現 (3.5) に対して

$$\overline{E} = [\![0_F]\!] \sqcup [\![S_1, T_1]\!] \sqcup \cdots \sqcup [\![S_n, T_n]\!]$$

と表記することにする．

命題 3.4.2. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とし，X を優マルチンゲールで，クラス (D) に属するものとする．$E \in \mathscr{C}$ の標準表現 $E = [\![0_F]\!] \sqcup]\!]S_0, T_0]\!] \sqcup \cdots \sqcup]\!]S_n, T_n]\!]$ に対して

$$\mu(E) = \mu\left([\![0_F]\!] \sqcup]\!]S_0, T_0]\!] \sqcup \cdots \sqcup]\!]S_n, T_n]\!]\right) = \sum_{k=0}^{n} E[X_{S_k} - X_{T_k}]$$

と定めれば，$\mu\colon \mathscr{C} \to \mathbb{R}_+$ 有界な有限加法的測度である．このとき μ は $\mathscr{P}(\mathbb{F})$ 上の有限測度に拡張可能である．

[*55] 命題 3.3.14 (iii).
[*56] 定理 1.4.2.

証明．Carathéoroy の拡張定理より，μ が $\mathscr{C}$ 上で可算加法的であることを示せばよい．まずは，準備として次の主張を示す[*57]．

主張 1

任意の $E \in \mathscr{C}$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$F \in \mathscr{C}$ で $\overline{F} \subset E$ かつ $F \cap [\![0]\!] = \emptyset$，および $\mu(E) - \varepsilon \leq \mu(F)$ を満たすものが存在する．

$E \in \mathscr{C}$ が $E =]\!]S, T]\!]$（$S \leq T$, $S < T$ on $\{S < \infty\}$）という形の場合に示せば十分である．S, T に対して

$$S_n := \left(S + \frac{1}{n}\right)_{\{S+1/n<T\}}, \quad T_n = T_{\{S+1/n<T\}}$$

という停止時刻列を定義する[*58]．定義より明らかに $S_n \geq S$, $S_n > S$ on $\{S < \infty\}$ かつ $\lim_n S_n = S$（各点）を満たす．同様にして $T_n \geq T$, $T_n = T$ on $\{S_n < \infty\}$ かつ $\lim_n T_n = T$（各点）も成り立つ．構成法より任意の $n \in \mathbb{N}$ について $[\![S_n, T_n]\!] \subset]\!]S, T]\!]$ が成立する．X は右連続かつクラス (D) だから，

$$X_{S_n} \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} X_S, \quad X_{T_n} \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} X_T, \quad \lim_{n\to\infty} E[X_{S_n} - X_{T_n}] = E[X_S - X_T]$$

が成立[*59]．これより，十分大きな n をとれば

$$\mu(]\!]S_n, T_n]\!]) = E[X_{S_n} - X_{T_n}] \geq E[X_S - X_T] - \varepsilon = \mu(]\!]S, T]\!])$$

となるから，$K =]\!]S_n, T_n]\!]$ とすればよい．これにより主張 1 は証明された．

これを用いて μ の可算加法性を示そう．ここでは，同値な性質として $\emptyset$ での連続性を示すことにする．$\varepsilon > 0$ を任意にとって固定する．$(E_n) \in \mathscr{C}^{\mathbb{N}}$ は $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \to \emptyset$ を満たすものとする．$(K_n) \in \mathscr{C}^{\mathbb{N}}$ を $K_n \cap [\![0]\!] = \emptyset$ かつ $\overline{K_n} \subset E_n$，そして

$$\mu(K_n) \geq \mu(E_n) - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

を満たすように取る[*60]．さらに $L_n = K_0 \cap \cdots \cap K_n$ とすれば，任意の n について $L_n \in \mathscr{C}$，$\overline{L_n} \subset \overline{K_n} \subset E_n$，および

$$\mu(L_n) \geq \mu(E_n) - \varepsilon$$

が成り立つ[*61]．$E_n \downarrow \emptyset$ だから $\overline{L_n} \downarrow \emptyset$ となる．D_n を $\overline{L_n}$ へのデビューとすれば，$[\![D_n]\!] \subset \overline{L_n}$ より D_n は停止時刻である．X はクラス (D) で，μ は有限加法的な非負，有界測度だから

$$\mu(L_n \setminus L_{n+1}) \leq \mu(]\!]D_n, D_{n+1}]\!]) = E[X_{D_n} - X_{D_{n+1}}] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

[*57] 内正則性の一種と考えればよい．

[*58] これが停止時刻になることは，命題 1.2.2 と命題 1.2.5 より分かる．

[*59] クラス (D) であるから L^1 収束が従う．

[*60] 主張 1 より可能である．

[*61] 測度が有限で有限加法的なことに注意すれば，

$$\mu(E_n \setminus L_n) \leq \sum_{k=0}^{n} \mu(E_k \setminus K_k) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} < \varepsilon$$

が分かる．

となる[*62]．これより，$\mu(L_{n_k} \setminus L_{n_{k+1}}) \leq \varepsilon/2^{k+1}$ を満たすような部分列 $(L_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ を選ぶことが出来る．このとき，任意の k に対して

$$\mu(E_{n_k}) \leq \mu(L_{n_k}) + \varepsilon \leq \sum_{k\geq n} \mu(L_{n_k} \setminus L_{n_{k+1}}) + \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

が成立．$k \to \infty$ とすれば $\lim_k \mu(E_{n_k}) \leq 2\varepsilon$ を得る．$\varepsilon > 0$ は任意に選んだものだったから，$\lim_k \mu(E_{n_k}) = 0$ である．μ は有限加法的な非負測度だから $\mu(E_n)$ は単調減少列であり，よって極限が存在する．部分列 $\mu(E_{n_k})$ が 0 に収束するから，元の列 $\mu(E_n)$ もまた 0 に収束する．これより $E_n \downarrow \emptyset$ ならば $\lim_n \mu(E_n)$ が示された． □

定義 3.4.3. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とし，X をクラス (D) の非負優マルチンゲールとする．命題 3.4.2 により存在の保証される測度 μ を X によって生成される Doléans 測度といい，μ_X で表す．

定理 3.4.4 (ポテンシャルに対する Doob-Meyer 分解)**.** $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を通常の条件を満たすフィルター付き確率空間とする．X をクラス (D) のポテンシャルとすれば，$M \in \mathscr{M}$ と可予測過程 $A \in \mathscr{A}^+$ で $X = M - A$ を満たすものがただ一つ存在する．

証明．*Step 1*：A **の構成．** 非負の有界可測過程 H に対して

$$\mu(H) = \mu_X({}^{\mathfrak{p}}H)$$

と定義する．可予測射影の加法性および可予測射影についての単調収束定理より，μ は $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ 上の有限測度である．定義より明らかに μ は可予測である．μ が増加過程によって生成される測度であることを示そう．H を消散的な可測過程とすれば，通常の条件より N は可予測である[*63]．$T_n = n_{\mathrm{pr}_1(N)}$ と定めれば[*64]，T_n は停止時刻である[*65]．したがって $[\![0, T_n]\!]$ は可予測集合であり，

$$\mu(N) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu([\![0, T_n]\!]) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_X([\![0, T_n]\!]) = \sum_{n\in\mathbb{N}} E[1_N(X_n - X_0)] = 0$$

が成立．すなわち μ は許容可能な測度である．また μ は有限測度だから，$F \mapsto \mu(F \times [0, t])$ が明らかに σ-有限測度である．$[\![0]\!]$ は可予測だから，$\mu([\![0]\!]) = \mu_X([\![0]\!]) = 0$ となる．したがって μ は定理 3.3.6 の条件 (i)–(iii) の条件を満たすから，ある増加過程 A によって表現される．μ は可予測だから，定理 3.3.8 より A も可予測となる．

Step：$X + A \in \mathscr{M}$ **の証明．** $F \in \mathscr{F}$ および $t \in \mathbb{R}_+$ とすれば $F \times]t, \infty[$ は可予測だから，

$$E[1_F(A_\infty - A_t)] = \mu(F \times]t, \infty[) = \mu_X(F \times]t, \infty[) = E[1_F(X_t - X_\infty)] = E[1_F X_t]$$

が成立[*66]．すなわち，$X_t = E[A_\infty - A_t|\mathscr{F}_t] = E[A_\infty|\mathscr{F}_t] - A_t$ となる．$A_\infty \in L_1(P)$ かつ $M_t := X_t + A_t = E[A_\infty|\mathscr{F}_t]$ は一様可積分マルチンゲールである． □

[*62] X は一様可積分な優マルチンゲールだから，$\infty > E[X_{D_n}] \geq E[X_{D_{n+1}}] \geq \cdots \geq E[X_\infty]$．（マルチンゲール収束定理と任意抽出定理を参照せよ．）よってこれは有限値に収束する．

[*63] 命題 1.4.9

[*64] 完備性の仮定より $\mathrm{pr}_1(N) \in \mathscr{F}_0$ である．

[*65] $\mathbb{F}$ の完備性より．

[*66] X はクラス (D) のポテンシャルだから，$X_t \to X_\infty = 0$ in L^1 が成り立つことに注意せよ．

命題 3.4.5 (Riesz 分解)**.** $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を通常の条件を満たすフィルター付き確率空間とし，X をクラス (D) の劣マルチンゲールとする．このときクラス (D) のポテンシャル Z と一様可積分マルチンゲール M で，$X = M - Z$ を満たすものが存在する．この分解は区別不能の意味で一意である．

証明．*Step 1*：**分解の存在．** X はクラス (D) の列マルチンゲールだから一様可積分である．よって劣マルチンゲールの収束定理によって $X_t \to {}^{\exists}X_\infty \in L_1$ が L^1 収束かつ概収束の意味で成立．$M \in \mathscr{M}_0$ を $E[X_\infty|\mathscr{F}_t]$ の càdlàg バージョンとして定義する[*67]．このとき $Z := M - X$ がクラス (D) のポテンシャルであることを示す．X と M はともにクラス (D) だから，Z もクラス (D) である．$s < t$ とすれば

$$Z_s = M_s - X_s \geq E[M_t|\mathscr{F}_s] - E[X_t|\mathscr{F}_s] = E[M_t - X_t|\mathscr{F}_s]$$

が成立．一様可積分性より $M_t \to M_\infty = X_\infty$ かつ $X_t \to X_\infty$ が L^1 収束の意味で成立．これより $Z_s \geq 0$, a.s. が分かる．また，L^1 収束より

$$E[X_t] = E[M_t - X_t] \xrightarrow[t\to\infty]{} E[X_\infty - X_\infty] = 0$$

だから，Z はポテンシャルである．

Step 2：**一意性．** $X = M_1 - Z_1 = M_2 - Z_2$ を 2 種類の分解とする．Z_1, Z_2 はクラス (D) のポテンシャルだから，$Z_i \to 0$ が L_1 かつ a.s. の意味で成立．したがって

$$0 = \lim_{t\to\infty}(Z_1 - Z_2)(t) = \lim_{t\to\infty} E[M_1(\infty) - M_2(\infty)|\mathscr{F}_t] = M_1(\infty) - M_2(\infty) = 0, \quad a.s.$$

となる．これより M_1 と M_2 は修正であり，右連続性より区別不能である．したがって Z_1 と Z_2 も区別不能である． □

定理 3.4.6 (クラス (D) 劣マルチンゲールについての Doob-Meyer 分解)**.** $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を通常の条件を満たすフィルター付き確率空間とし，X をクラス (D) の劣マルチンゲールとする．このとき，$M \in \mathscr{M}$ と可予測なる $A \in \mathscr{A}^+$ で，$X = M + A$ という関係を満たすものが存在する．さらに，この分解は区別不能の意味で一意的である．

証明．$X = M - Z$ を Riesz 分解とする．（命題 3.4.5.）Z はクラス (D) のポテンシャルだから，定理 3.4.4 より Doob-Meyer 分解 $Z = N - A$ が存在する．このとき $X = (M - N) + A$ が求める分解である．

次に，分解の一意性を証明する．$X = M_1 + A_1 = M_2 + A_2$ を 2 種類の Doob-Meyer 分解とする．このとき，$Y := A_1 - A_2 = M_2 - M_1 \in \mathscr{M} \cap \mathscr{A}$ で，Y は可予測である．双対可予測射影の性質（命題 3.3.14）より，$A_1 - A_2 = (A_1 - A_2)^{\mathfrak{p}} = 0$ が成立．これより $M_1 = M_2$ も分かる． □

定義 3.4.7. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，X を一様可積分な劣マルチンゲールとする．任意の可予測時刻 T について $E[X_{T-}] = E[X_T]$ が成り立つとき，X は正則であるという．

注意 3.4.8. 定義 3.4.7 の条件は，任意の可予測時刻について $E[X_T|\mathscr{F}_{T-}] = X_{T-}$ が成り立つことと同値である．実際，定理 3.1.4 の証明を劣マルチンゲールに当てはめれば，任意の可予測時刻について $E[X_T|\mathscr{F}_{T-}] \geq X_{T-}$ が成り立つ．$E[E[X_T|\mathscr{F}_{T-}] - X_{T-}] = 0$ で $E[X_T|\mathscr{F}_{T-}] - X_{T-}$ は非負だから，$E[X_T|\mathscr{F}_{T-}] = X_{T-}$ となる．

[*67] フィルトレーションが通常の条件を満たすことから可能である．

定理 3.4.9. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を通常の条件を満たすフィルター付き確率空間とし，X をクラス (D) の劣マルチンゲールとする．Doob-Meyer 分解 $X = M + A$ において，A として確率 1 で連続であることは，X が正則であることと同値である．

証明．A が確率 1 で連続なら，$E[A_T] = E[A_{T-}]$ である．可予測任意抽出定理（定理 3.1.4）より $E[M_T] = E[M_{T-}]$ も成り立つ．よって $E[X_T] = E[X_{T-}]$ である．

X は正則であると仮定する．このとき，任意の可予測時刻について

$$E[A_T] = E[X_T - M_T] = E[X_{T-} - M_{T-}] = E[A_{T-}]$$

が成立．A は増加過程だから $A_T = A_{T-}$ a.s. となる．つまり，任意の可予測時刻 T に対して $\{\Delta A \neq 0\} \cap \cancel{[\![\;]\!]}\ [\![T]\!]$ は消散的である．$\{\Delta A \neq 0\}$ は可予測だから，系 1.6.12 により消散的集合となる．すなわち A は確率 1 で連続である． □

第 4 章

二乗可積分マルチンゲールの解析

第 4 章では，二乗可積分マルチンゲールの詳細な性質を調べる．二乗可積分マルチンゲールは，伊藤解析の理論の中核をなす確率過程のクラスである．二乗可積分マルチンゲールの空間は Hilbert 空間をなし，その事実を用いると確率積分を関数解析的に導入することができる．

本章では，フィルターつき確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ は常に通常の条件を満たすものと仮定する．これ以降の全ての結果に必ずしも通常の条件が必要な訳ではないが，議論が煩雑になるのを防ぐために最初から通常の条件を仮定しておく．

4.1 二乗可積分マルチンゲールの構造

本節では，二乗可積分マルチンゲールの定義と基本的な性質を扱う．二乗可積分マルチンゲールが重要なのは，それの成す集合が適当な内積により Hilbert 空間の構造を持つからである．Hilbert 空間論の結果を用いれば，任意の二乗可積分マルチンゲールは連続部分と，その直交成分に分解することができる．

定義 4.1.1. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．$\mathbb{F}$-マルチンゲール M は

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} E[M_t^2] < \infty$$

を満たすとき，二乗可積分マルチンゲール (*square integrable martingale*) と呼ばれる．二乗可積分マルチンゲール全体の空間を $\mathscr{M}^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ で表す．$\mathscr{M}^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ の元のうち，特に連続なパスをもつもの全体の集合を $\mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ と書く．

考えているフィルター付き確率空間が明らかな場合には，省略して単に $\mathscr{M}^2$ や $\mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ などと書くことも多い．命題 A.5.4 より二乗可積分マルチンゲールは一様可積分マルチンゲールなので，$\mathscr{M}^2 \subset \mathscr{M}$ である．

命題 4.1.2. $M \in \mathscr{M}$ としたとき，$M \in \mathscr{M}^2$ と $E[M_\infty^2] < \infty$ は同値である．このとき

$$E[M_\infty^2] = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} E[M_t^2] \tag{4.1}$$

が成り立つ．

証明．$M \in \mathscr{M}^2$ とする．このとき，Fatou の補題より

$$E[M_\infty^2] \le \sup_{t\in\mathbb{R}_+} E[M_t^2] < \infty \tag{4.2}$$

が成立．

逆に $M \in \mathscr{M}$ が $E[M_\infty^2] < \infty$ を満たすと仮定する。M は一様可積分マルチンゲールだから $M_t = E[M_\infty|\mathscr{F}_t]$ を満たす．条件付期待値についての Jensen の不等式より

$$M_t^2 \le (E[M_\infty|\mathscr{F}_t])^2 \le E[M_\infty^2|\mathscr{F}_t], P\text{-a.s.}$$

が成り立つ．これより

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} E[M_t^2] \le E[M_\infty^2] < \infty \tag{4.3}$$

が分かる．

(4.1) は (4.2) と (4.3) から分かる． □

$M \in \mathscr{M}^2$ に対して

$$\langle M, N\rangle_{\mathscr{M}^2} = E[M_\infty N_\infty]$$

と定義する．命題 4.1.2 より，

$$E[|M_\infty N_\infty|] \le \sqrt{E[M_\infty^2]}\sqrt{E[N_\infty^2]} < \infty$$

だから，$\langle\ ,\ \rangle_{\mathscr{M}^2}$ は well-defined である．これは明らかに正定値の対称形式であるが，一般に非退化ではない．そこで，$\mathscr{M}^2$ を内積空間と見なすには適当な商空間をとる必要がある．

$$M \sim_P N \iff M \text{ と } N \text{ は区別不能}$$

と定義すれば，$\sim_P$ は $\mathscr{M}^2$ 上の同値関係を定める．$M \sim_P 0$ が $\langle M, M\rangle_{\mathscr{M}^2} = 0$ と同値であることを示そう．命題??より $\langle M, M\rangle_{\mathscr{M}^2} = 0$ は $\sup_t E[M_t^2] = 0$ と同値であり，さらにこれは M が 0 の修正であることと同値である．パスが càdlàg であることより，これはさらに M が消散的であることと同値である．

$\langle M, M\rangle_{\mathscr{M}^2} = 0$ と $M \sim_P 0$ の同値性の証明はこの程度で十分であるが，実用上はもっと強い評価，特に $\sup_t M_t$ についてのもう少し直接的な評価があると便利である．次の命題はその意味で有用である．（といっても，Doob の不等式よりほとんど明らかであるが...）

命題 4.1.3. $M \in \mathscr{M}^2$ とすれば，次の評価が成り立つ．

$$P\left[\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|M_t| \ge \lambda\right] \le \frac{1}{\lambda^2}\sup_{t\in\mathbb{R}_+} E[M_t^2], \quad \lambda > 0$$

$$E\left[\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|M_t|^2\right] \le 4\sup_{t\in\mathbb{R}_+} E[M_t^2]$$

証明．Doob の不等式（定理 2.2.3）より，任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$P\left[\sup_{t\in[0,n]}|M_t| \ge \lambda\right] \le \frac{1}{\lambda^2}E[M_n^2] \le \frac{1}{\lambda^2}\sup_{t\in\mathbb{R}_+} E[M_t^2], \quad \lambda > 0$$

$$E\left[\sup_{t\in[0,n]}|M_t|^2\right] \le 4E[M_n^2] \le 4\sup_{t\in\mathbb{R}_+} E[M_t^2]$$

が成立．$n \to \infty$ とすれば単調収束定理より結論を得る．（第一式，左辺の集合は n について増大的であることに注意せよ．） □

$\mathscr{M}^2$ を Hilbert 空間と見る話の続きに戻ろう．同値関係 $\sim_P$ による商空間を $\mathscr{M}^2/P$ で表せば，ここまでの議論からこれは内積空間であることが分かる．もちろん，$\mathscr{M}^2/P$ 上の内積は正定値対称形式 $\langle\ ,\ \rangle_{\mathscr{M}^2}$ から誘導される自然な内積を考えている．新たな記号を作るのが面倒くさいので，この内積も $\langle\ ,\ \rangle_{\mathscr{M}^2}$ で表すことにする．ここまでの準備により，次の定理が定式化される．

定理 4.1.4. $(\mathscr{M}^2/P, \langle\ ,\ \rangle_{\mathscr{M}^2})$ は $L^2(\Omega, \mathscr{F}_\infty, P)$ に同型な Hilbert 空間である．

証明. 写像 $j\colon \mathscr{M}^2 \to \mathscr{L}^2(\Omega, \mathscr{F}_\infty, P)$ を $j(M) = M_\infty$ によって定義し，j によって誘導される写像 $\mathscr{M}/P \to L^2(\Omega, \mathscr{F}_\infty, P)$ を $\widetilde{j}$ で表す．

$$\begin{tikzcd} \mathscr{M}^2 \arrow[r, "j"] \arrow[d] & \mathscr{L}^2(\Omega, \mathscr{F}_\infty, P) \arrow[d] \\ \mathscr{M}^2/P \arrow[r, "\widetilde{j}"'] & L^2(\Omega, \mathscr{F}_\infty, P) \end{tikzcd}$$

このとき，命題 4.1.2 の議論により $\widetilde{j}$ が等長同型写像であることが分かる． □

Hilbert 空間の理論を用いるときには正確には $\mathscr{M}^2$ ではなくて $\mathscr{M}^2/P$ を用いなければならない．しかし，確率解析の慣習に従い，今後は $\mathscr{M}^2$ の元と $\mathscr{M}^2/P$ を区別せず扱うことにする．Hilbert 空間の理論を用いているのに $M \in \mathscr{M}^2$ について言及しているときは，$\mathscr{M}^2/P$ で議論をした後，その元の任意の代表元を取り出していると解釈する．

命題 4.1.5. $(M^n) \in (\mathscr{M}^2)^{\mathbb{N}}$ は $M \in \mathscr{M}^2$ にノルム収束するとする．このとき，適当な部分列 $(M^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ をとれば，ほとんど全ての ω についてパスの列 $(M(\omega)^{n_k})_k$ はパス $M(\omega)$ に一様収束する．

証明. (M^n) の部分列 M^{n_k} を

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|M^{n_k} - M\|_{\mathscr{M}^2} < \infty$$

を満たすように選ぶ[*1]．この仮定と命題 4.1.2 と命題 4.1.3 より

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |M_t^{n_k} - M_t|\right] &\le \sum_{k\in\mathbb{N}} E\left[\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |M_t^{n_k} - M_t|\right] \\ &\le \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(E\left[\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |M_t^{n_k} - M_t|^2\right]\right)^{1/2} \\ &\le \sum_{k\in\mathbb{N}} 2\left(E\left[(M_\infty^{n_k} - M_\infty)\right]\right)^{1/2} \\ &= 2\sup_{k\in\mathbb{N}} \|M^{n_k} - M\|_{\mathscr{M}^2} < \infty \end{aligned}$$

が成立．すなわち

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |M_t^{n_k} - M_t| < \infty, \quad a.s.$$

となる．これよりほとんど全ての ω で $M^{n_k}(\omega)$ は $M(\omega)$ に一様収束する． □

---

*1 例えば，

$$\|M^{n_k} - M\|_{\mathscr{M}^2} \le \frac{1}{2^{k+1}}$$

となるようにとるなど．

系 4.1.6. $\mathscr{M}^{2,c}/P$ は $\mathscr{M}^2/P$ の閉部分空間である[*2].

証明. $\mathscr{M}^2/P$ は距離空間であるから，$\mathscr{M}^{2,c}/P$ の収束点列の極限がまた $\mathscr{M}^{2,c}/P$ の元であることを示せばよい．これは命題 4.1.5 より明らかである． □

命題 4.1.7. 二乗可積分マルチンゲールについて次が成り立つ．

(i) $\mathscr{M}^2$ は停止について安定である．

(ii) $M \in \mathscr{M}^2$ とする．$T_1 \leq T_2 \leq \cdots$ かつ $T_n \to \infty$ a.s. なる停止時刻について $M_{T_n} \to M_\infty$ in $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ が成り立つ．

(iii) $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathscr{M}^2$ の点列，$M \in \mathscr{M}^2$ とする．$M^n \to M$ in $\mathscr{M}^2$ が成り立つなら，任意の停止時刻 T について $M^n_T \to M_T$ in $L^2(P)$ となる．

証明. (i) $M \in \mathscr{M}^2 \subset \mathscr{M}$ なら，命題 2.6.4 より $M^T \in \mathscr{M}$ となる．このとき命題 4.1 より，M^T_∞ の 2 乗モーメントを調べれば十分であることが分かる．仮定と命題 4.1.3 から

$$E[(M^T_\infty)^2] = E[M_T^2] \leq E\left[\left(\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |M_t|\right)^2\right] \leq 4 \sup_{t\in\mathbb{R}_+} E[M_t^2] < \infty$$

となるので，$M^T \in \mathscr{M}^2$ であることが確かめられた．

(ii) $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を停止時刻列で $T_n \uparrow \infty$ a.s. を満たすようなものとすれば，任意抽出定理と (i) の議論により，$(M_{T_n})_{n\in\mathbb{N}}$ は二乗可積分な $(\mathscr{F}_{T_n})$-マルチンゲールである．系 2.1.24 からこれは M_∞ に概収束かつ L^2 収束する．

(iii) $(M^n - M)^2$ は劣マルチンゲールだから，

$$E[(M^n_T - M_T)^2] \leq E[(M^n_\infty - M_\infty)^2] = \|M^n - M\|^2_{\mathscr{M}^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

となる． □

次は，マルチンゲールの直交性の概念を定義する．

定義 4.1.8. $M, N \in \mathscr{M}^2$ が $MN \in \mathscr{M}_0$ を満たすとき，M と N は直交するといい，$M \perp\!\!\!\perp N$ と書く[*3]．M と N が Hilbert 空間の元として直交するときは，弱い意味で直交するといい，$M \perp N$ と表す．

$M, N \in \mathscr{M}^2$ が直交するなら，それらは弱い意味でも直交している．実際，$MN \in \mathscr{M}_0$ より

$$\langle M, N\rangle_{\mathscr{M}^2} = E[M_\infty N_\infty] = E[M_0 N_0] = 0$$

が成り立つ．

命題 4.1.9. $M, N \in \mathscr{M}^2$ について，次の 2 条件は同値である．

(i) $M \perp\!\!\!\perp N$.

[*2] より正確には，等長埋め込み $\mathscr{M}^{2,c}/P \hookrightarrow \mathscr{M}^2/P$ の像は $\mathscr{M}^2/P$ の閉部分空間である，というべきかも知れない．$\mathscr{M}^{2,c}$ は全てのパスが連続な過程からなっているから，$\mathscr{M}^{2,c}/P$ の元は全てのパスが連続な過程の同値類である．ところが $\mathscr{M}^2/P$ ではほとんど全てのパスが連続ならば $\mathscr{M}^{2,c}$ の元と区別できないので，$\mathscr{M}^{2,c}/P$ の元とは文字通りの意味での同じ集合ではない．もちろん，等長埋め込みによってそれらは同一視される．

[*3] このノート独自の記法である．

(ii) $M_0N_0 = 0$ a.s. かつ，MN がマルチンゲールとなる．

(iii) $M_0N_0 = 0$ a.s. かつ，任意の停止時刻 T に対して $E[M_TN_T] = 0$ が成り立つ．

証明．(i) $\Longrightarrow$ (ii) 明らか．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) MN の一様可積分性のみを示せばよい．$M, N \in \mathscr{M}^2$ だから，Schwarz の不等式と命題 4.1.3 より

$$E\left[\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|M_tN_t|\right] \le \left(E\left[\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|M_t|^2\right]\right)^{1/2}\left(E\left[\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|N_t|^2\right]\right)^{1/2} < \infty \tag{4.4}$$

が成立．$M, N \in \mathscr{M}^2 \subset \mathscr{M}$ より $M_tN_t \to M_\infty N_\infty$ a.s. であって*4である．さらに (4.4) の評価から $|M_tN_t| \le \sup_t|M_tN_t| \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$ が成立．よって $(M_tN_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ は L^1 収束し，定理 2.4.3 によりこれは一様可積分となる．

(iii) $\Longrightarrow$ (i) 任意の停止時刻 T について M_TN_T が可積分となることを示す．$M, N \in \mathscr{M}^2$ だから，

$$E\left[|M_TN_T|\right] \le \left(E\left[|M_T|^2\right]\right)^{1/2}\left(E\left[|N_T|^2\right]\right)^{1/2} \le \left(E\left[M_\infty^2\right]\right)^{1/2}\left(E\left[N_\infty^2\right]\right)^{1/2} < \infty$$

が成立．よって $M_TN_T \in L^1(P)$ である．さらに仮定より

$$E[M_TN_T] = 0 = E[M_0N_0]$$

だから，定理 2.6.2 により MN は一様可積分マルチンゲールとなる．□

命題 4.1.10. $\mathscr{X} \subset \mathscr{M}^2$ に対して，$\mathscr{X}$ から生成される $\mathscr{M}^2$ の閉部分空間を $\overline{\mathrm{Span}(\mathscr{X})}$ で表すことにする．$N \in \mathscr{M}^2$ が $N \perp\!\!\!\perp \mathscr{X}$ を満たすならば，$N \perp\!\!\!\perp \overline{\mathrm{Span}(\mathscr{X})}$ となる．

証明．$\mathscr{X} \subset \mathscr{M}^2$ かつ $N \perp\!\!\!\perp \mathscr{X}$ とする．$M = \alpha_1M_1 + \cdots + \alpha_nM_n \in \mathrm{Span}(\mathscr{X})$ を任意にとれば，

$$MN = \alpha_1\underbrace{M_1N}_{\in\mathscr{M}_0} + \cdots + \alpha_n\underbrace{M_nN}_{\in\mathscr{M}_0} \in \mathscr{M}_0$$

だから，$M = \alpha_1M_1 + \cdots + \alpha_nM_n \perp\!\!\!\perp N$ である．$M \in \overline{\mathrm{Span}(\mathscr{X})}$ に対して，$\mathscr{M}^2$ のノルムで M を近似する $\mathrm{Span}(\mathscr{X})$ の列 $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$ をとる．このとき任意の停止時刻 T に対して

$$E[|M_T^nN_T - M_TN_T|] \le \left(E[|M_T^n - M_T|^2]\right)^{1/2}\left(E[N_T^2]\right)^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

だから*5，

$$E[M_TN_T] = \lim_{n\to\infty} E[M_T^nN_T] = 0$$

となる．また，$L^2(P)$ 収束する列 $(M_n^TN_T)$ から概収束する部分列を選び出せば

$$M_0N_0 = \lim_{n\to\infty} M_0^nN_0 = 0 \quad \text{a.s.}$$

も分かる．すなわち，$M \in \overline{\mathrm{Span}(\mathscr{X})}$ なら $M \perp\!\!\!\perp N$ である．□

定義 4.1.11. 可測過程の集合 $\mathscr{X}$ が安定で，任意の $X \in \mathscr{X}$ と $A \in \mathscr{F}_0$ について $1_AX \in \mathscr{X}$ を満たすとき，$\mathscr{X}$ は $\mathscr{F}_0$-安定であるという*6．

*4 定理 2.4.1

*5 命題 4.1.7

*6 $\mathscr{F}_0$-安定はこのノートだけの用語である．Dellacherie & Meyer [5] や He, Wang, Yan [10] では $\mathscr{F}_0$-安定のことを安定と呼んでいる．

定理 4.1.12. $\mathscr{X} \subset \mathscr{M}^2$ は $\mathscr{F}_0$-安定な部分集合とする．このとき $\mathscr{X}^\perp$ と $\overline{\mathrm{Span}(\mathscr{X})}$ はともに $\mathscr{F}_0$-安定な $\mathscr{M}^2$ の閉部分空間であり，$\overline{\mathrm{Span}(\mathscr{X})} \perp\!\!\!\perp \mathscr{X}^\perp$ が成り立つ．

証明．*Step1* : **$\mathscr{X}^\perp$ が $\mathscr{F}_0$-安定であること．** $N \in \mathscr{X}^\perp$ および $M \in \mathscr{X}$ とし，T を任意の停止時刻とする．このとき，任意抽出定理を用いれば

$$\begin{aligned}
\langle M, N^T \rangle_{\mathscr{M}^2} &= E[M_\infty N^T_\infty] \\
&= E[E[M_\infty | \mathscr{F}_T] N_T] \\
&= E[M_T N_T] \\
&= E[M_T E[N_\infty | \mathscr{F}_T]] \\
&= E[M_T N_\infty] \\
&= E[M^T_\infty N_\infty] \\
&= \langle M^T, N \rangle_{\mathscr{M}^2}
\end{aligned}$$

となり，$N^T \perp M$ が分かる．

$$\langle 1_A N, M \rangle_{\mathscr{M}^2} = E[(1_A N_\infty M_\infty)] = E[N_\infty (1_A M_\infty)] = \langle N, 1_A M \rangle_{\mathscr{M}^2} = 0$$

であるから，$\mathscr{X}^\perp$ が $\mathscr{F}_0$-安定であることが示された．

Step2 : **$\overline{\mathrm{Span}(\mathscr{X})}$ が $\mathscr{F}_0$-安定であること．** $(\mathscr{X}^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{Span}(\mathscr{X})}$ に注意すれば，step1 より分かる．

Step3 : **$\overline{\mathrm{Span}(\mathscr{X})} \perp\!\!\!\perp \mathscr{X}^\perp$ の証明．** 命題 4.1.10 より，$\mathscr{X} \perp\!\!\!\perp \mathscr{X}^\perp$ を示せば十分である．$M \in \mathscr{X}$ かつ $N \in \mathscr{X}^\perp$ とする．$\mathscr{X}$ と $\mathscr{X}^\perp$ は停止について安定だから，任意の停止時刻 T について $M^T \in \mathscr{X}$ かつ $N^T \in \mathscr{X}^\perp$ が成立．よって

$$E[M_T N_T] = E[M^T_\infty N^T_\infty] = \langle M^T, N^T \rangle_{\mathscr{M}^2} = 0$$

が成立．また $\mathscr{X}$ と $\mathscr{X}^\perp$ は $\mathscr{F}_0$-安定であることから，任意の停止時刻 T と任意の $A \in \mathscr{F}_0$ について

$$E[1_A M_T N_T] = E[(1_A M^T_\infty) N_\infty] \langle 1_A M^T, N^T \rangle_{\mathscr{M}^2} = 0$$

となる．特に $T = 0$ をとれば，任意の $A \in \mathscr{F}_0$ について

$$E[1_A M_0 N_0] = 0, \quad \forall A \in \mathscr{F}_0$$

が分かる．$M_0 N_0$ は $\mathscr{F}_0$-可測だから，$M_0 N_0 = 0$ a.s. である． □

定義 4.1.13. $\mathscr{F}_0$-安定な閉部分空間 $\mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ の直交補空間を $\mathscr{M}^{2,\mathrm{d}} := (\mathscr{M}^{2,\mathrm{c}})^\perp$ と表し，$\mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ の元を純不連続二乗可積分マルチンゲール (purely discontinuous square integrable martingale) という．

定義より，$N \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ なら $N_0 = 0$ a.s. である[*7]．定理 4.1.12 より，任意の $M \in \mathscr{M}^2$ は

$$M = M_0 + M^{\mathrm{c}} + M^{\mathrm{d}}, \quad M^{\mathrm{c}} \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}_0, \quad M^{\mathrm{d}} \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$$

と（区別不能の意味で）一意に分解される．この分解において，M^{c} を M の連続マルチンゲール部分 (continuous martingale part)，M^{d} を純不連続マルチンゲール部分 (purely discontinuous martingale part) という．

[*7] $\mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ の元として定数関数 $C \neq 0$ をとれば，$CN_0 = 0$ a.s. となるので，$N_0 = 0$ a.s. が成り立つ必要があると分かる．

命題 4.1.14. 任意の停止時刻 T と任意の $M \in \mathscr{M}^2$ について

$$(M^T)^{\mathrm{c}} = (M^{\mathrm{c}})^T, \quad (M^T)^{\mathrm{d}} = (M^{\mathrm{d}})^T$$

が成り立つ．

証明. 明らかに

$$M^T = (M_0 + M^{\mathrm{c}} + M^{\mathrm{d}})^T = M_0 + (M^{\mathrm{c}})^T + (M^{\mathrm{d}})^T$$

である．$\mathscr{M}_0^{2,\mathrm{c}}$ と $\mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ は停止について安定だから，$(M^{\mathrm{c}})^T \in \mathscr{M}_0^{2,\mathrm{c}}$ および $(M^{\mathrm{d}})^T \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ が成り立つ．このとき分解の一意性から

$$(M^T)^{\mathrm{c}} = (M^{\mathrm{c}})^T, \quad (M^T)^{\mathrm{d}} = (M^{\mathrm{d}})^T$$

が分かる． □

4.2 純不連続二乗可積分マルチンゲール

この節では，純不連続二乗可積分マルチンゲールの構造を調べる．準備としてまずは次の補題を示す．補題の主張していることは，増加過程が二乗可積分ならその双対可予測射影も二乗可積分となるということである．

補題 4.2.1. 任意の $A \in \mathscr{A}^+$ に対して

$$E[(A^{\mathfrak{p}}_\infty)^2] \leq 4E[A^2_\infty]$$

が成り立つ．（ただし，ここでの $A^{\mathfrak{p}}$ は A の双対可予測射影[*8]である．）

証明. $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を $(E[A_\infty|\mathscr{F}_t])_{t\in\mathbb{R}_+}$ の càdlàg な修正とし[*9]，$N^*_t = \sup_{s\leq t}|N_s|$ とする．一様可積分マルチンゲール $N = (N_t)$ に対して Doob の不等式[*10]を用いれば，

$$E[(N^*_\infty)^2] \leq 4E[N^2_\infty] = 4E[A^2_\infty] \tag{4.5}$$

いま $A \in \mathscr{A}^+$ より，$A^{\mathfrak{p}} \in \mathscr{A}^+$ かつ $A - A^{\mathfrak{p}} \in \mathscr{M}_0$ であることに注意する[*11]．また，(L_t) を $(E[A^{\mathfrak{p}}_\infty|\mathscr{F}_t])$ の càdlàg な修正とすれば，命題 3.1.9 より ${}^{\mathfrak{p}}(A^{\mathfrak{p}}_\infty) = L_-$ であり，

$$L_t = E[A^{\mathfrak{p}}_\infty - A_\infty|\mathscr{F}_t] + N_t = A^{\mathfrak{p}}_t - A_t + N_t \quad P\text{-a.s.}$$

が成り立つ．したがって，双対可予測射影の性質により

$$\begin{aligned}
E[(A^{\mathfrak{p}}_\infty)^2] &= E[(A^{\mathfrak{p}}_\infty \bullet A^{\mathfrak{p}})_\infty] \\
&= E[({}^{\mathfrak{p}}(A^{\mathfrak{p}}_\infty) \bullet A)_\infty] \\
&= E[(L_- \bullet A)_\infty] \\
&= E[((A^{\mathfrak{p}}_- - A_- + N_-) \bullet A)_\infty] \\
&\leq E[(A^{\mathfrak{p}}_- \bullet A)_\infty] + E[(N_- \bullet A)_\infty] \\
&\leq E[A^{\mathfrak{p}}_\infty A_\infty] + E[N^*_\infty A_\infty]
\end{aligned}$$

[*8] 定義 3.3.12

[*9] 定理 2.3.3 よりこのような修正がとれる．

[*10] 定理 2.2.3

[*11] 定理 3.3.14

となる．いま

$$E[A^{\mathfrak{p}}_{\infty} A_{\infty}] = E[(A_{\infty} \bullet A^{\mathfrak{p}})_{\infty}] = E[({}^{\mathfrak{p}}A_{\infty} \bullet A)_{\infty}] = E[(N_{-} \bullet A)_{\infty}] \le E[N^{*}_{\infty} A_{\infty}]$$

であることに注意すれば，Schwartz の不等式と (4.5) より

$$E[(A^{\mathfrak{p}}_{\infty})^2] \le 2E[N^{*}_{\infty} A_{\infty}] \le 2\left(E[(N^{*}_{\infty})^2]\right)^{1/2}\left(E[A^2_{\infty}]\right)^{1/2} \le 2\left(4E[A^2_{\infty}]\right)^{1/2}\left(E[A^2_{\infty}]\right)^{1/2} = 4E[A^2_{\infty}]$$

を得る． □

続いて，二乗可積分マルチンゲールのジャンプに関する補題を用意する．

補題 4.2.2. $M \in \mathscr{M}^2$ とすれば，任意の停止時刻 T について

$$E[(\Delta M_T)^2] \le 16E[M^2_{\infty}]$$

が成り立つ．

証明．$M^{*}_{\infty} = \sup_t |M_t|$ と定義すれば，Doob の不等式より

$$E[(M^{*}_{\infty})^2] \le 4E[M^2_{\infty}] < \infty$$

が成立．

$$|\Delta M_T| \le |M_T| + |M_{T-}| \le 2M^{*}_{\infty}$$

という評価に注意すれば，

$$E[(\Delta M_T)^2] \le 4E[(M^{*}_{\infty})^2] \le 16E[M^2_{\infty}]$$

を得る． □

ここからは，純不連続二乗可積分マルチンゲールの構造を調べていこう．純不連続二乗可積分マルチンゲールは $\mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ の直交補空間の元として定義されていたから，それ自身がどのようなものなのか，定義からはよく分からない．しかし，双対可予測射影とジャンプ時刻の分解という道具を用いて，その詳しい構造を明らかにすることが出来る．

狭義に正の停止時刻 T に対して

$$\mathscr{M}^2[T] = \{M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}} \mid \{\Delta M \neq 0\} \subset [\![T]\!]\}$$

と定義する．$\mathscr{M}^2[T]$ とは，純不連続マルチンゲールのうちジャンプが T でしか起こらないようなものの全体である．

補題 4.2.3. $\mathscr{M}^2[T]$ は $\mathscr{M}^2$ の $\mathscr{F}_0$-安定な閉部分空間[*12]である．

証明．*Step1* : **$\mathscr{M}^2[T]$ が線形部分空間であること．** $M, N \in \mathscr{M}^2[T]$ とすれば，明らかに $M + N \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ である．

$$\{\Delta(M+N) \neq 0\} = \{\Delta M + \Delta N \neq 0\} \subset \{\Delta M \neq 0\} \cup \{\Delta N \neq 0\} \subset [\![T]\!]$$

となるから，$M + N \in \mathscr{M}^2[T]$ が分かる．$\mathscr{M}^2[T]$ がスカラー倍について閉じていることは明らかである．

[*12] これも正確には $\mathscr{M}^2[T]/P$ が $\mathscr{M}^2/P$ の閉部分空間である，という意味．

Step2：**$\mathscr{M}^2[T]$ が $\mathscr{F}_0$-安定であること．** $A \in \mathscr{F}_0$ とすれば，

$$\{\Delta(1_A M) \neq 0\} = \{1_A(\Delta M) \neq 0\} \subset \{\Delta M \neq 0\} \subset [\![T]\!]$$

より $1_A M \in \mathscr{M}^2[T]$ が分かる．S を停止時刻とすれば，

$$\{\Delta M^S \neq 0\} = \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid \Delta M^t(\omega) \neq 0\} \subset \{\Delta M \neq 0\} \subset [\![T]\!]$$

が成立[*13]．よって $M^S \in \mathscr{M}^2[T]$ である．以上の議論により $\mathscr{M}^2[T]$ が $\mathscr{F}_0$ 安定であることが示された．

Step3：**閉部分集合であること．** (M^n) を $\mathscr{M}^2[T]$ の点列で，$\mathscr{M}^2$ で収束するものとする．このとき，適当な部分列をとれば，ほとんど全ての ω でパスの列 $(M^n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ は一様収束する．これより，極限の適当な修正は $M \in \mathscr{M}^2[T]$ を満たすことが分かる． □

次の命題では，純不連続二乗可積分マルチンゲールの基本的な性質を調べる．

命題 4.2.4. $T > 0$ を，到達不能時刻または可予測時刻とする．

(i) 次の 2 条件は同値である．
  (a) $M \in \mathscr{M}^2[T]$.
  (b) ある $\xi \in L^2(\mathscr{F}_T)$ が存在して，$A = \xi 1_{[\![T,\infty[\![}$ とおけば $M = A - A^{\mathfrak{p}}$ が成り立つ．

(ii) $M \in \mathscr{M}^2[T]$ とすれば，任意の $N \in \mathscr{M}^2$ について次が成り立つ．

$$\langle M, N\rangle_{\mathscr{M}^2} = E[M_\infty N_\infty] = E[\Delta M_T \Delta N_T] \tag{4.6}$$

(iii) $M \in \mathscr{M}^2$ とすれば，M の $\mathscr{M}^2[T]$ への直交射影 N は次で与えられる．

$$N = A - A^{\mathfrak{p}}, \quad A = \Delta M_T 1_{[\![T,\infty[\![}.$$

証明．(i) (b) $\Longrightarrow$ (a) $\xi \in L^2(\mathscr{F}_T)$ および $A = \xi 1_{[\![T,\infty[\![}$ とする．定義より $A \in \mathscr{A}$ だから，命題 3.3.14 により $A - A^{\mathfrak{p}} \in \mathscr{M}$ である．いま，$A_\infty = \xi \in L^2$ だから，補題 4.2.1 より $A^{\mathfrak{p}}_\infty \in L^2$ であり，よって $A - A^{\mathfrak{p}} \in \mathscr{M}^2$ が分かる[*14]．

Case1：**T が到達不能停止時刻のとき．** T が到達不能停止時刻なら A は準左連続であり[*15]，よって $A^{\mathfrak{p}}$ は連続となる[*16]．

Case2：**T が可予測時刻のとき．** T が可予測時刻ならば，命題 3.3.15 より $A^{\mathfrak{p}} = E[\xi 1_{\{T<\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}]1_{[\![T,\infty[\![}$ となる．

いずれの場合でも，$\{\Delta(A - A^{\mathfrak{p}}) \neq 0\} \subset [\![T]\!]$ が成立．あとは，$M := A - A^{\mathfrak{p}} \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ を示せばよい．$N \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}_0$ に対して

$$T_n = \inf\{t \geq 0 \mid |N_t| \geq n\}$$

と定義すれば，$T_n \uparrow \infty$ であり N^{T_n} は有界マルチンゲールとなる[*17]．いま $M = A - A^{\mathfrak{p}} \in \mathscr{A}$ であることに注意すれば，補題 3.2.11 より

$$E[M_\infty N^{T_n}_\infty] = E[(N^{T_n} \bullet M)_\infty] \tag{4.7}$$

[*13] $t > S(\omega)$ なら，$\Delta M^S_t = M^S_t - M^S_{t-} = M_S - M_S = 0$ である．
[*14] 命題 4.1.2
[*15] $\{\Delta A \neq 0\} = [\![T]\!]$ と到達不能停止時刻の定義に注意．
[*16] 命題 3.3.14.
[*17] $N_0 = 0$ と N の連続性に注意せよ．

となる．一方 $M \in \mathscr{M}$ でもあるから，$M^{\mathfrak{p}} = 0$ である[*18]．これより

$$E[(N_-^{T_n} \bullet M)_\infty] = E[(N_-^{T_n} \bullet M^{\mathfrak{p}})_\infty] = 0 \tag{4.8}$$

が成り立つ．(4.7) と (4.8) から

$$E[M_\infty N_\infty^{T_n}] = E[((\Delta N^{T_n}) \bullet M)_\infty] = E\left[\sum_{s>0} \Delta N_s^{T_n} \Delta M_s\right] = 0$$

を得る．さらに命題 4.1.7 より $N^{T_n} \to N$ in L^2 だから，$\langle M, N\rangle_{\mathscr{M}^2} = 0$ が分かる．すなわち，任意の $N \in \mathscr{M}_0^{2,\mathrm{c}}$ に対して $M \perp_{\mathscr{M}^2} N$ が成り立つ．一般の $N \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ に対しては $\langle M, N\rangle_{\mathscr{M}^2} = \langle M, N - N_0\rangle_{\mathscr{M}^2} = 0$ となるから[*19]，任意の $N \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ に対して $M \perp_{\mathscr{M}^2} N$ である．すなわち $M = A - A^{\mathfrak{p}} \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ が成り立つ．$\{\Delta M \neq 0\} \subset [\![T]\!]$ は既に示していたから，$M \in \mathscr{M}^2[T]$ がしたがう．

(a) $\Longrightarrow$ (b) $M \in \mathscr{M}^2[T]$ とし，$A = \Delta M_T 1_{[\![T,\infty[\![}$ とおく．補題 4.2.2 より，$\Delta M_T \in L^2(\mathscr{F}_T)$ であることに注意する．このとき $M = A - A^{\mathfrak{p}}$ であることを示そう．Step1 での議論により $A - A^{\mathfrak{p}} \in \mathscr{M}^2[T]$ が成り立つことに注意する．仮定より $M \in \mathscr{M}^2[T]$ だから，$M - (A - A^{\mathfrak{p}}) \in \mathscr{M}^2[T]$ である．

Case1：**T が到達不能時刻の場合．** T が到達不能時刻ならば A は純不連続だから $A^{\mathfrak{p}}$ は連続となる[*20]．よって $\Delta(A - A^{\mathfrak{p}})_T = \Delta A_T = \Delta M_T$ が成立．

Case2：**T が可予測時刻の場合．** T が可予測のときは

$$A^{\mathfrak{p}} = E[\Delta M_T | \mathscr{F}_{T-}] 1_{[\![T,\infty[\![} = {}^{\mathfrak{p}}(\Delta M)_T = 0$$

が成立．よって $\Delta A_T^{\mathfrak{p}} = 0$ となり，$\Delta(A - A^{\mathfrak{p}})_T = \Delta M_T$ が分かる．

いずれの場合でも $\Delta M_T = \Delta(A - A^{\mathfrak{p}})_T$ が成り立つ．$M - (A - A^{\mathfrak{p}}) \in \mathscr{M}^2[T]$ だったから，$M - (A - A^{\mathfrak{p}})$ は確率 1 で連続となり，$M - (A - A^{\mathfrak{p}}) \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}} \cap \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ が分かる．これより $M = A - A^{\mathfrak{p}}$ が示された．

(ii) $M \in \mathscr{M}^2[T]$ $N \in \mathscr{M}^2$ とし，$N^{(n)}$ を $(E[N_\infty 1_{\{|N_\infty| \leq n\}} | \mathscr{F}_t])_{t \in \mathbb{R}_+}$ の càdlàg な修正とする．このとき $N^{(n)}$ は有界なマルチンゲールであり，(i) の証明と同様の議論で

$$E[M_\infty N_\infty^{(n)}] = E\left[\sum_{s>0} \Delta M_s \Delta N_s^{(n)}\right] = E\left[\Delta M_T \Delta N_T^{(n)}\right]$$

が示される．いま $N_\infty^{(n)} = N_\infty 1_{\{|N_\infty| \leq n\}}$ は N_∞ に L^2 収束するから，補題 4.2.2 より

$$E[(\Delta N_T^{(n)} - \Delta N_T)^2] \leq 16 E[(N_\infty^{(n)} - N_\infty)^2] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

が成り立つ．これより

$$E[M_\infty N_\infty] = \lim_{n\to\infty} E[M_\infty N_\infty^{(n)}] = \lim_{n\to\infty} E\left[\Delta M_T \Delta N_T^{(n)}\right] = E\left[\Delta M_T \Delta N_T\right]$$

を得る．

[*18] 命題 3.3.14

[*19] ただし，$\langle M, N_0\rangle_{\mathscr{M}^2} = 0$ は

$$E[M_\infty N_0] = E[E[M_\infty | \mathscr{F}_0] N_0] = E[M_0 N_0] = 0$$

から分かる．

[*20] 命題 3.3.14.

(iii) $M \in \mathscr{M}^2$ および $A = \Delta M_T 1_{[\![T,\infty[\![}$ とすれば，(i) より $N := A - A^{\mathfrak{p}} \in \mathscr{M}^2[T]$ である．また，このとき (i) での議論から $\Delta(M-N)_T = \Delta A^{\mathfrak{p}}_T = 0$ が分かる．したがって任意の $M' \in \mathscr{M}^2[T]$ に対して

$$\langle M - N, M' \rangle_{\mathscr{M}^2} = E[(M_\infty - N_\infty)M'_\infty] = E[\Delta(M-N)_T \Delta M'_T] = 0$$

となり，$M - N \perp_{\mathscr{M}^2} \mathscr{M}^2[T]$ が分かる．すなわち $N = A - A^{\mathfrak{p}}$ は M の $\mathscr{M}^2[T]$ 上への直交射影である． □

次の定理により，純不連続二乗可積分マルチンゲールの構造が明らかにされる．

定理 4.2.5. 純不連続二乗可積分マルチンゲールについて，次が成り立つ．

(i) $M \in \mathscr{M}^2$ なら

$$E[M_0^2] + E\left[\sum_{s>0}(\Delta M_s)^2\right] \le E[M_\infty^2] \tag{4.9}$$

が成り立つ．(4.9) において等号成り立つことの必要十分条件は $M - M_0 \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ である．

(ii) $M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ に対して，$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を定理 1.8.4 における停止時刻列[*21]とする．いま，M^n で M の $\mathscr{M}^2[T_n]$ への直行射影を表すことにする．このとき

$$M = \sum_{n\in\mathbb{N}} M^n$$

が $\mathscr{M}^2$ における収束の意味で成り立つ．

(iii) $M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ とする．このとき，$M = M^{\mathrm{da}} + M^{\mathrm{di}}$ という分解で

（a）$M^{\mathrm{da}} \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ は到達可能なジャンプのみを持つ．

（b）$M^{\mathrm{di}} \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ は到達不能なジャンプのみを持つ．

を満たすものが存在する．この分解は一意的である．

証明．*Step1*：*(i)* と *(ii)* **の証明．** $M \in \mathscr{M}$ に対して，次の 3 条件を満たす停止時刻列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を選ぶ[*22]．

(i) $\{\Delta M \neq 0\} \subset \bigcup_n [\![T_n]\!]$.

(ii) 各 T_n は可予測時刻であるか，または到達不能時刻である．

(iii) $n \neq m$ なら $[\![T_n]\!] \cap [\![T_m]\!] = \emptyset$.

いま

$$A^n = \Delta M_{T_n} 1_{[\![T_n,\infty[\![}, \quad M^n = A^n - (A^n)^{\mathfrak{p}}$$

と定義すれば，命題 4.2.4 より M^n は M の $\mathscr{M}^2[T_n]$ への直交射影である．このとき，$n \neq m$ ならば

$$\langle M^n, M^m \rangle_{\mathscr{M}^2} = E[M^n_\infty M^m_\infty] = E\left[\Delta M^n_{T_n} \Delta M^m_{T_n}\right] = 0$$

となるから[*23]，$M^n \perp M^m$ である．ここで

$$H^k = \sum_{1\le n\le k} M^n$$

---

*21 すなわち，(T_n) は次を満たす．
（a）$\{\Delta M \neq 0\} \subset \bigcup_n [\![T_n]\!]$.
（b）各 T_n は可予測時刻であるか，または到達不能時刻である．
（c）$n \neq m$ なら $[\![T_n]\!] \cap [\![T_m]\!] = \emptyset$.

*22 定理 1.8.4

*23 一つ目の等号は内積の定義，二つ目の等号は命題 4.2.4(ii)，三つ目は $[\![T_n]\!] \cap [\![T_m]\!] = \emptyset$ および $\{\Delta M^m\} \subset [\![T_m]\!]$ よりしたがう．

と定める．このとき $M-M_0-H^k$ は $[\![T_1]\!]\cup\cdots\cup[\![T_k]\!]$ ジャンプを持たないことに注意しよう[*24]．命題 4.2.4 より

$$\begin{aligned}
\langle M-M_0-H^k, H^k\rangle_{\mathscr{M}^2} &= \sum_{n=0}^{k}\langle M-M_0-H^k, M^k\rangle_{\mathscr{M}^2} \\
&= \sum_{n=0}^{k} E[\left(M_\infty-M_0-H^k_\infty\right)M^k_\infty] \\
&= \sum_{n=0}^{k} E[\Delta(M-M_0-H^k)_{T_k}\Delta M^k_{T_k}] \\
&= 0
\end{aligned}$$

が成立．よって $M-M_0-H^k\perp H^k$ が分かる．したがって

$$\begin{aligned}
E[M_\infty^2] &= E\left[\left(M_0+H^k_\infty+M_\infty-M_0-H^k_\infty\right)^2\right] \\
&= E[M_0^2]+E\left[(H^k_\infty)^2\right]+E\left[\left(M_\infty-M_0-H^k_\infty\right)^2\right] \\
&\quad +2E\left[M_0H^k_\infty\right]+2E\left[M_0\left(M_\infty-M_0-H^k_\infty\right)\right]+2E\left[\left(M_\infty-M_0-H^k\right)H^k_\infty\right] \\
&= E[M_0^2]+E\left[(H^k_\infty)^2\right]+E\left[\left(M_\infty-M_0-H^k_\infty\right)^2\right] \\
&\quad +2E\left[M_0H^k_0\right]+2E\left[M_0\left(M_0-M_0-H^k_0\right)\right] \\
&= E[M_0^2]+E\left[(H^k_\infty)^2\right]+E\left[\left(M_\infty-M_0-H^k_\infty\right)^2\right] \\
&= E[M_0^2]+\sum_{n=0}^{k}E\left[(M^n_\infty)^2\right]+\sum_{\substack{n\neq m\\1\le n,m\le k}}E\left[M^n_\infty M^m_\infty\right]+E\left[\left(M_\infty-M_0-H^k_\infty\right)^2\right] \\
&= E[M_0^2]+\sum_{n=0}^{k}E\left[(M^n_\infty)^2\right]+E\left[\left(M_\infty-M_0-H^k_\infty\right)^2\right]
\end{aligned}$$

が成り立つ．さらに，(4.6) より $E[(M^n_\infty)^2]=E[(\Delta M_{T_n})^2]$ だから，

$$E[M_\infty^2]=E[M_0^2]+\sum_{n=0}^{k}E\left[(\Delta M_{T_n})^2\right]+E\left[\left(M_\infty-M_0-H^k_\infty\right)^2\right] \tag{4.10}$$

となる．これより，特に

$$\sum_{n=0}^{k}\|M^n\|^2_{\mathscr{M}^2}\le E[M_0^2]+\sum_{n=0}^{k}E\left[(\Delta M_{T_n})^2\right]+E\left[\left(M_\infty-M_0-H^k_\infty\right)^2\right]\le E[M_\infty^2]$$

となり，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|M^n\|^2_{\mathscr{M}^2}\le E[M_\infty^2]<\infty \tag{4.11}$$

が分かる．この評価を用いて，(H^n) が $\mathscr{M}^2$ の Cauchy 列であることを示そう．$n>m$ とすれば，$H^n-H^m\in$

[*24] $n\neq m$ なら $[\![T_n]\!]\cap[\![T_m]\!]=\emptyset$ なのであった．

$\mathscr{M}^{2,\mathrm{d}} \subset \mathscr{M}^2$ であって，命題 4.1.2 および 4.1.3 より

$$P\left(\sup_{t\geq 0}|H_t^n - H_t^m| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}E[|H_\infty^n - H_\infty^m|^2] \\ \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n\leq k\leq m}\|M^k\|_{\mathscr{M}^2}^2$$

が成立．これと (4.11)，Borel-Cantelli の補題より

$$\forall\varepsilon > 0,\quad P\left(\bigcap_{N\geq 1}\bigcup_{m,n\geq N}\left\{\sup_{t\geq 0}|H_t^n - H_t^m| > \varepsilon\right\}\right) = 0 \tag{4.12}$$

が分かる．したがって (H^n) は $\mathscr{M}^2$ の Cauchy 列であり，$\mathscr{M}^2$ の完備性より極限を H をもつ．さらに (4.12) より H^n の a.e. パスは一様収束しており，H と M は同じジャンプを持つことが分かる[*25]．これより $M - H \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ であって，

$$M^{\mathrm{c}} = M - M_0 - H,\quad M^{\mathrm{d}} = H$$

となる．特に $M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ なら $M^{\mathrm{c}} = 0$ であって

$$M = M^{\mathrm{d}} = H = \sum_{n\geq 1}M^n \quad (\text{in } \mathscr{M}^2)$$

が成り立つ．

(4.10) において極限をとれば，

$$\begin{aligned} E[M_\infty^2] &= E[M_0^2] + \sum_{n\geq 0}E\left[(\Delta M_{T_n})^2\right] + E\left[(M_\infty - M_0 - H_\infty)^2\right] \\ &= E[M_0^2] + E\left[\sum_{n\geq 0}(\Delta M_{T_n})^2\right] + E\left[(M_\infty - M_0 - H_\infty)^2\right] \\ &= E[M_0^2] + E\left[\sum_{s>0}(\Delta M_s)^2\right] + E\left[(M_\infty - M_0 - H_\infty)^2\right] \end{aligned}$$

なる式を得る[*26]．これより

$$\begin{aligned} E[M_0^2] + E\left[\sum_{s>0}(\Delta M_s)^2\right] &\leq E[M_0^2] + E\left[\sum_{s>0}(\Delta M_s)^2\right] + E\left[(M_\infty - M_0 - H_\infty)^2\right] \\ &= E[M_\infty^2] \end{aligned}$$

がしたがう．また等号成立は $E[(M_\infty^{\mathrm{c}})^2] = 0$ と同値であり，これは明らかに $M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ とも同値である．これで (i) と (ii) の証明が完了した．

Step 2：*(iii)* **の証明．** まずは分解の構成を行う．$M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ に対して $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と M^n は step1 で用いた停止時刻列およびマルチンゲール列とする．ここで $\mathbb{N}$ を

$$N_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid T_n \text{ は可予測時刻 }\},\quad N_2 = \{n \in \mathbb{N} \mid T_n \text{ は到達不能時刻 }\}$$

[*25] 命題 4.2.4 の証明を思い出せば，$\Delta M_{T_n} = \Delta M_{T_n}^n$ が成り立つのであった．

[*26] 2 行目の式より，$\sum_{n\geq 0}(\Delta M_{T_n})^2$ は可積分であり，すなわちこの和は確率 1 で絶対収束する．この和は足す順番によらず定まり，$\sum_{s>0}(\Delta M_s)^2$ と書いても誤解の余地は無い．（3 行目）

と分割し，

$$M^{\mathrm{da}} = \sum_{n \in N_1} M^n, \quad M^{\mathrm{di}} = \sum_{n \in N_2} M^n$$

と定義する．$n \in N_1$ なら M^n は明らかに到達可能なジャンプしかもたず，また $n \in N_2$ なら M^n は到達不能なジャンプしか持たない．M^{da} はほとんど全てのパスが部分和の一様収束極限であるから，M^{da} のジャンプは M^n $(n \in N_1)$ のジャンプと一致し M^{da} もまた到達可能なジャンプのみ持たない．同様にして，M^{di} は到達不能なジャンプのみを持つ．(ii) より $M = M^{\mathrm{da}} + M^{\mathrm{di}}$ であるから，これが求める分解である．

次に分解の一意性を示す．$M = \widetilde{M}^{\mathrm{da}} + \widetilde{M}^{\mathrm{di}}$ はまた同様の条件を満たす分解とする．ここで

$$N = M^{\mathrm{da}} - \widetilde{M}^{\mathrm{da}} = \widetilde{M}^{\mathrm{di}} - M^{\mathrm{di}} \in \mathscr{M}^d$$

とおけば，命題 3.2.5 の一意性証明と同様にして任意の停止時刻 T について $\Delta N_T 1_{\{T<\infty\}} = 0$ が分かる．これより $N \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}} \cap \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}} = \{0\}$ となり，N は消散的である．これより区別不能の意味で

$$M^{\mathrm{da}} = \widetilde{M}^{\mathrm{da}}, \quad M^{\mathrm{di}} = \widetilde{M}^{\mathrm{di}}$$

が成り立つ． □

定理 4.2.5 の (i) より，$M \in \mathscr{M}^2$ ならばジャンプの二乗和 $\sum_{s>0}(\Delta M_s)^2$ はほとんど全てのパスで収束することが分かる．これはもちろん一般の càdlàg 関数について成り立つことではないから，二乗可積分マルチンゲールの著しい性質である．二乗可積分マルチンゲールの重要な性質としては，さらに次のようなものもある．

定理 4.2.6. 二乗可積分マルチンゲールについて，次が成り立つ．

(i) $M, N \in \mathscr{M}^2$ とすれば，

$$E\left[|M_0 N_0|\right] + E\left[\sum_{s>0} |\Delta M_s \Delta N_s|\right] \le \sqrt{E[M_\infty^2]}\sqrt{E[N_\infty^2]}. \tag{4.13}$$

(ii) $M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ とする．このとき任意の $N \in \mathscr{M}^2$ に対して

$$E\left[M_\infty N_\infty\right] = E\left[\sum_{s>0} \Delta M_s \Delta N_s\right]. \tag{4.14}$$

さらに $L = MN - \Sigma_{0<s\le \cdot} \Delta M_s \Delta N_s$ と定義すれば，$L \in \mathscr{M}$ である[*27]．

証明．**(i) の証明．** Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned}
&\left(E\left[|M_0 N_0|\right] + E\left[\sum_{s>0} |\Delta M_s \Delta N_s|\right]\right)^2 \\
&= \left(E\left[|M_0 N_0|\right]\right)^2 + \left(E\left[\sum_{s>0} |\Delta M_s \Delta N_s|\right]\right)^2 + 2E\left[|M_0 N_0|\right] E\left[\sum_{s>0} |\Delta M_s \Delta N_s|\right] \\
&\le E[M_0^2]E[N_0^2] + E\left[\sum_{s>0} (\Delta M_s)^2\right] E\left[\sum_{s>0} (\Delta N_s)^2\right] + 2E\left[|M_0 N_0|\right] E\left[\sum_{s>0} |\Delta M_s \Delta N_s|\right]
\end{aligned} \tag{4.15}$$

*27 $\mathscr{M}$ は一様可積分マルチンゲール全体の空間であった．

が成立．さらに

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \left(\sqrt{E[M_0^2]E\left[\sum_{s>0}(\Delta N_s)^2\right]} - \sqrt{E[N_0^2]E\left[\sum_{s>0}(\Delta M_s)^2\right]}\right)^2 \\
&= E[M_0^2]E\left[\sum_{s>0}(\Delta N_s)^2\right] + E[N_0^2]E\left[\sum_{s>0}(\Delta M_s)^2\right] \\
&\quad - 2\sqrt{E[M_0^2]E[N_0^2]E\left[\sum_{s>0}(\Delta M_s)^2\right]E\left[\sum_{s>0}(\Delta N_s)^2\right]}
\end{aligned}
$$

に注意すれば，再び Schwarz の不等式を用いることにより

$$
\begin{aligned}
&2E\left[|M_0N_0|\right]E\left[\sum_{s>0}|\Delta M_s \Delta N_s|\right] \\
&\leq 2\sqrt{E[M_0^2]}\sqrt{E[N_0^2]}\sqrt{E\left[\sum_{s>0}(\Delta M_s)^2\right]}\sqrt{E\left[\sum_{s>0}(\Delta N_s)^2\right]} \\
&\leq E[M_0^2]E\left[\sum_{s>0}(\Delta N_s)^2\right] + E[N_0^2]E\left[\sum_{s>0}(\Delta M_s)^2\right] \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

を得る．(4.15) と (4.16) を組み合わせれば

$$
\begin{aligned}
&\left(E\left[|M_0N_0|\right] + E\left[\sum_{s>0}|\Delta M_s \Delta N_s|\right]\right)^2 \\
&\leq E[M_0^2]E[N_0^2] + E\left[\sum_{s>0}(\Delta M_s)^2\right]E\left[\sum_{s>0}(\Delta N_s)^2\right] \\
&\quad + E[M_0^2]E\left[\sum_{s>0}(\Delta N_s)^2\right] + E[N_0^2]E\left[\sum_{s>0}(\Delta M_s)^2\right] \\
&= \left(E[M_0^2] + E\left[\sum_{s>0}(\Delta M_s)^2\right]\right)\left(E[N_0^2] + E\left[\sum_{s>0}(\Delta N_s)^2\right]\right) \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

となる．ここで (4.9) より

$$
\begin{aligned}
E[M_0^2] + E\left[\sum_{s>0}(\Delta M_s)^2\right] &\leq E[M_\infty^2] \\
E[N_0^2] + E\left[\sum_{s>0}(\Delta N_s)^2\right] &\leq E[N_\infty^2]
\end{aligned}
$$

という評価が成り立つので，(4.17) はさらに

$$
\left(E\left[|M_0N_0|\right] + E\left[\sum_{s>0}|\Delta M_s \Delta N_s|\right]\right)^2 \leq E[M_\infty^2]E[N_\infty^2]
$$

と出来る．これより (4.13) がしたがう．

(ii) の証明． まずは $N \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ として証明しよう．$M, N, M+N \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ であるから，定理 4.2.5 の (i) により

$$E\left[M_\infty^2\right] = E\left[\sum_{s>0}(\Delta M_s)^2\right]$$
$$E\left[N_\infty^2\right] = E\left[\sum_{s>0}(\Delta N_s)^2\right]$$
$$E\left[(M_\infty + N_\infty)^2\right] = E\left[\sum_{s>0}(\Delta M_s + \Delta N_s)^2\right]$$

が成り立つ．特にこれらの積分は有限値であるから，確率 1 で和

$$\sum_{s>0}(\Delta M_s(\omega))^2, \quad \sum_{s>0}(\Delta N_s(\omega))^2, \quad \sum_{s>0}(\Delta M_s(\omega) + \Delta N_s(\omega))^2$$

は収束し，

$$2\sum_{s>0}\Delta M_s \Delta N_s = \sum_{s>0}(\Delta M_s + \Delta N_s)^2 - \sum_{s>0}(\Delta M_s)^2 - \sum_{s>0}(\Delta N_s)^2, \quad P\text{-a.s.}$$

が成り立つことに注意しておく．以上のことから

$$\begin{aligned} E[M_\infty N_\infty] &= \frac{1}{2}\left\{E[(M_\infty + N_\infty)^2] - E[M_\infty^2] - E[N_\infty^2]\right\} \\ &= \frac{1}{2}E\left[\sum_{s>0}(\Delta M_s + \Delta N_s)^2 - \sum_{s>0}(\Delta M_s)^2 - \sum_{s>0}(\Delta N_s)^2\right] \\ &= E\left[\sum_{s>0}\Delta M_s \Delta N_s\right] \end{aligned}$$

がわかる．したがって，$N \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ のとき (4.14) は成り立つ．

次に一般の $N \in \mathscr{M}^2$ を考える．N^d を $N \in \mathscr{M}^2$ の純不連続マルチンゲール部分としよう．N^d の定義より $N - N^\mathrm{d} \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ および $M \perp\!\!\!\perp N - N^\mathrm{d}$ が成り立つのであった．$M \perp\!\!\!\perp N - N^\mathrm{d}$ とは $M(N - N^\mathrm{d}) \in \mathscr{M}_0$ ということであったから，

$$E[M_\infty N_\infty] - E[M_\infty N_\infty^\mathrm{d}] = E[M_\infty(N_\infty - N_\infty^\mathrm{d})] = E[M_0(N_0 - N_0^\mathrm{d})] = 0$$

である．これより

$$E[M_\infty N_\infty] = E[M_\infty N_\infty^\mathrm{d}] = E\left[\sum_{s>0}\Delta M_s \Delta N_s\right]$$

となる．よって一般の $N \in \mathscr{M}^2$ に対しても (4.14) は成立することがわかった．

最後に，$L := MN - \sum_{s\leq\cdot}\Delta M_s \Delta N_s$ が一様可積分マルチンゲールになることを示そう．L は適合 càdlàg 過程なので，これが命題 2.6.2 の 2 条件を満たすことを示せばよい．T を任意の停止時刻とする．$M^T, N^T \in \mathscr{M}^2$ に対して (4.13) を適用すれば，

$$E[|L_T|] = E[|L_\infty^T|] \leq E[|M_\infty^T N_\infty^T|] + E\left[\sum_{s>0}|\Delta M_s^T \Delta N_s^T|\right] \leq \sqrt{E[(M_\infty^T)^2]}\sqrt{E[(N_\infty^T)^2]} < \infty$$

となり L_T は可積分である．さらに，このとき (4.14) から

$$E[L_T] = E[L_\infty^T] = E[M_\infty^T N_\infty^T] - E\left[\sum_{s>0} \Delta M_s^T \Delta N_s^T\right] = 0 = E[L_0]$$

も成り立つ．したがって命題 2.6.2 から (L_t) が一様可積分マルチンゲールであることがわかる． □

この節の最後に，有界変動なパスを持つマルチンゲールについて少しばかり調べることにする．M は $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ 上のマルチンゲールで，さらに $M \in \mathscr{A}$ を満たすようなものとする．このとき $|M_t| \leq V(M)_\infty \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$ であるから[*28]，M は明らかに一様可積分である．$\mathscr{M} \cap \mathscr{A}$ の元を，（そのまま言葉を並べただけであるが）可積分変動を持つマルチンゲール (martingale with integrable variation) という．後で述べることだが，一般のマルチンゲールが有界変動なパスをもつことは期待できず，したがって $\mathscr{M} \cap \mathscr{A}$ は $\mathscr{M}$ のうちあまり大きなクラスをなすとは言えない．では，$\mathscr{M} \cap \mathscr{A}$ にはどのような確率過程が属しているだろうか．我々が既に知っている例は，$A \in \mathscr{A}$ を用いて $A - A^{\mathfrak{p}}$ と表現されるようなものである[*29]．実は一般の $\mathscr{M} \cap \mathscr{A}$ の元もそのような過程の初期値をいじっただけに過ぎないというのが，次の命題の主張である．

命題 4.2.7. $M \in \mathscr{M} \cap \mathscr{A}$ とし，

$$A_t = \sum_{0<s\leq t} \Delta M_s$$

と定義する．このとき $A \in \mathscr{A}$ であって，その双対可予測射影 $A^{\mathfrak{p}}$ は連続，そして $M = A - A^{\mathfrak{p}}$ が成り立つ．さらに，任意の可予測過程 H に対して

$$E[(|H| \bullet V(M))_\infty] \leq 2E\left[\sum_{s>0} |H_s|\,|\Delta M_s|\right] \tag{4.18}$$

となる．

証明. $M = D^{\mathrm{c}} + D^{\mathrm{d}} = D^{\mathrm{c}} + A$ を，$M \in \mathscr{A}$ と見たときの連続部分と純不連続部分への分解とする[*30]．$V(M) = V(D^{\mathrm{c}}) + V(A)$ より $A, D^{\mathrm{c}} \in \mathscr{A}$ である[*31]．$M \in \mathscr{A}$ だから M は双対可予測射影をもち[*32]，双対可予測射影の線形性[*33]より $M^{\mathfrak{p}} = (D^{\mathrm{c}})^{\mathfrak{p}} + A^{\mathfrak{p}} = D^{\mathrm{c}} + A^{\mathfrak{p}}$ である．さらに，$M \in \mathscr{A}$ について M が（局所）マルチンゲールならば $M^{\mathfrak{p}}$ が消散的なのであったから[*34]，$A^{\mathfrak{p}} = -D^{\mathrm{c}}$ が区別不能の意味で成り立つ．これより $M = A - A^{\mathfrak{p}}$ となる．

次に (4.18) を示そう．命題 3.3.16 より

$$E[(|H| \bullet V(A^{\mathfrak{p}}))_\infty] \leq E[(|H| \bullet V(A))_\infty]$$

[*28] $V(M)_t(\omega)$ はパス $M_\cdot(\omega)$ の $[0, t]$ 上での全変動であった．
[*29] 命題 3.3.14 より $A \in \mathscr{A}$ なら $A - A^{\mathfrak{p}} \in \mathscr{M} \cap \mathscr{A}$ なのであった．
[*30] 3 章 2 節の命題 3.2.3 付近を見よ．
[*31] 命題 3.2.4.
[*32] 定義 3.3.12.
[*33] 命題 3.3.14
[*34] 命題 3.3.14

となるから，

$$\begin{aligned}E[(|H| \bullet V(M))_\infty] &\le E[(|H| \bullet V(A))_\infty] + E[(|H| \bullet V(A^{\mathfrak{p}}))_\infty] \\ &\le 2E[(|H| \bullet V(A))_\infty] \\ &= E\left[\sum_{s>0} |H|\,|\Delta M_s|\right]\end{aligned}$$

が成り立つ． □

命題 4.2.8. $M \in \mathscr{M} \cap \mathscr{A}$ が可予測ならば，M は消散的である．

証明．$M \in \mathscr{M} \cap \mathscr{A}$ なら命題 3.3.14 の (ii) より，$M^{\mathfrak{p}}$ は消散的である．いま M は可予測なので $M^{\mathfrak{p}} = M$ であり，M もまた消散的である． □

命題 4.2.9. $M \in \mathscr{A} \cap \mathscr{M}$ とし，H は次の条件を満たす可予測過程とする．

$$E\left[(|H| \bullet V(M))_\infty\right] < \infty.$$

このとき，$H \bullet M \in \mathscr{A} \cap \mathscr{M}$ が成り立つ．

証明．$M \in \mathscr{A} \cap \mathscr{M}$ より $M^{\mathfrak{p}}$ は消散的であることに注意する．定理 3.3.14 より

$$(H \bullet M)^{\mathfrak{p}} = H \bullet M^{\mathfrak{p}} = 0$$

が成立．したがって

$$H \bullet M = H \bullet M - (H \bullet M)^{\mathfrak{p}} \in \mathscr{A} \cap \mathscr{M}$$

である． □

定理 4.2.10. $M \in \mathscr{A} \cap \mathscr{M}$ なら，任意の有界マルチンゲール N に対して

$$E[M_\infty N_\infty] = E\left[\sum_{s>0} \Delta M_s \Delta N_s\right]$$

が成り立つ．さらに，$L = MN - \sum_{0<s\le \cdot} \Delta M_s \Delta N_s$ と定義すれば L は一様可積分マルチンゲールである．

証明．M は可積分変動を持つから，補題 3.2.11 により

$$E[N_\infty M_\infty] = E[(N \bullet M)_\infty]$$

が成り立つ．一方 $M \in \mathscr{A}$ は一様可積分マルチンゲールなので $M^{\mathfrak{p}} = 0$ であり[*35]，

$$E[N_- \bullet M] = E[{}^{\mathfrak{p}}N \bullet M] = E[{}^{\mathfrak{p}}N \bullet M^{\mathfrak{p}}] = 0$$

である．したがって

$$E[M_\infty N_\infty] = E[(N \bullet M)_\infty] - E[N_- \bullet M] = E[(\Delta N \bullet M)_\infty] = E\left[\sum_{0<s<\infty} \Delta M_s \Delta N_s\right]$$

が成立．これを停止時刻 T についての停止過程についてこれの式を適用すれば，$E[L_T] = E[L_0]$ を得る．可積分性は明らかなので，L は一様可積分マルチンゲールである． □

[*35] 定理 3.3.14.

定理 4.2.10 より，可積分変動を持つマルチンゲールは準不連続二乗可積分マルチンゲールと似たような性質を持つ．可積分変動をもつマルチンゲールが二乗可積分マルチンゲールならば，実際にそれは純不連続となる．

系 4.2.11. $\mathscr{M}^2 \cap \mathscr{A} \subset \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ が成り立つ．

証明．$M \in \mathscr{M}^2 \cap \mathscr{A} \subset \mathscr{M} \cap \mathscr{A}$ なら，定理 4.2.10 より任意の有界マルチンゲール N に対して

$$E[M_\infty N_\infty] = E\left[\sum_{s>0} \Delta M_s \Delta N_s\right] \tag{4.19}$$

が成り立つ．ここで，

$$M_\infty^n = M_\infty 1_{\{|M_\infty| \le n\}} + n 1_{\{|M_\infty|>n\}}$$

とおけば M_∞^n は有界な $\mathscr{F}_\infty$ 可測関数である．有界マルチンゲール (M_t^n) を $E[M_\infty^n|\mathscr{F}_t]$ の càdlàg 修正として定義する．このとき (4.19) より

$$E[M_\infty M_\infty^n] = E\left[\sum_{s>0} \Delta M_s^n \Delta M_s^n\right] \tag{4.20}$$

が成立．いま $(M_\infty - M_\infty^n)^2 \le 4M_\infty^2$ であることに注意すれば，優収束定理により

$$\|M - M^n\|_{\mathscr{M}^2}^2 = E\left[(M_\infty - M_\infty^n)^2\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

を得る．したがって $M^n \to M$ が $\mathscr{M}^2$ のノルムの意味で成立する．これより (4.20) 左辺については

$$|E[M_\infty M_\infty^n] - E[M_\infty^2] = |\langle M, M - M^n\rangle_{\mathscr{M}^2}| \le \|M\|_{\mathscr{M}^2} \|M - M^n\|_{\mathscr{M}^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

が成り立つ．一方右辺の極限は，(4.13) より

$$\begin{aligned}\left| E\left[\sum_{s>0} \Delta M_s \Delta M_s^n\right] - E\left[\sum_{s>0} (\Delta M_s)^2\right]\right| &\le E\left[\sum_{s>0} |\Delta M_s (\Delta M_s^n - \Delta M_s)|\right] \\ &\le \|M\|_{\mathscr{M}^2} \|M - M^n\|_{\mathscr{M}^2} \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

となることがわかる．よって (4.20) において $n \to \infty$ の極限をとることにより，

$$E[M_\infty^2] = E\left[\sum_{s>0} (\Delta M_s^n)^2\right]$$

を得る．定理 4.2.5(i) を用いれば，$M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ が示される． □

4.3 二次変分

4.4 二乗可積分マルチンゲールによる確率積分

第 5 章

局所マルチンゲールの構造

第 6 章

セミマルチンゲールと確率積分

第 7 章

ランダム測度とセミマルチンゲールの特性要素

第 8 章

測度変換

付録 A

補足

A.1 単調族定理

本節では，測度論における多くの命題を証明するのに欠かせない，単調族定理を扱う．前半では可測集合についての単調族定理，後半では可測関数についての単調族定理に焦点を当てる．

定義 A.1.1. Ω を集合とする．Ω の部分集合族 $\mathscr{C}$ は，次の条件を満たすとき単調族 (*monotone class*) であるという．

(i) $\mathscr{C}$ の任意の増大列 $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$\bigcup_n C_n \in \mathscr{C}$．
(ii) $\mathscr{C}$ の任意の減少列 $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$\bigcap_n C_n \in \mathscr{C}$．

補題 A.1.2. Ω 集合とし，$\mathscr{F}$ を部分集合族とする．このとき，次の 2 条件は同値：

(i) $\mathscr{F}$ は σ-加法族である．
(ii) $\mathscr{F}$ は有限加法族かつ単調族．

証明．(i) ならば (ii) は明らかなので，逆を示す．(ii) を仮定したとき，$\mathscr{F}$ が任意の可算和について閉じていることを示せば十分である．任意の列 $(A_n) \in \mathscr{F}^{\mathbb{N}}$ に対して，

$$B_n = \bigcup_{0\leq k\leq n} A_k$$

と定義すれば，$\mathscr{F}$ は集合代数なので $B_n \in \mathscr{F}$ となり，さらに (B_n) は増加列である．$\mathscr{F}$ は単調族なので

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathscr{F}.$$

□

集合 Ω の部分集合族 $\mathscr{A}$ が与えられたとき，それを含む最小の単調族が存在するから，それを $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ と書くことにする．

定理 A.1.3 (単調族定理)**.** $\mathscr{A}$ を集合 Ω 上の集合代数とする．このとき $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{M}(\mathscr{A})$ が成立つ．

証明．σ-加法族は明らかに単調族であるから，$\mathscr{M}(\mathscr{A}) \subset \sigma(\mathscr{A})$．逆向きの包含関係を保証するためには，$\mathscr{M}(\mathscr{A})$ が σ-加法族であることを示せばよいが，補題 A.1.2 より特に $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ が集合代数であることが分かれば十分で

ある．明らかに $\Omega \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$ である．

$$\mathscr{M}_c = \{A \in \mathscr{M}(\mathscr{A}) \mid \Omega \setminus A \in \mathscr{M}(\mathscr{A})\}$$

と定める．このとき，明らかに $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}_c$ である．(A_n) を (B_n) をそれぞれ $\mathscr{M}_c$ の増大列，減少列とすれば，$(\Omega \setminus A_n)$，$(\Omega \setminus B_n)$ はそれぞれ $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ の減少列，増大列となっているので

$$\Omega \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega \setminus A_n \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$$
$$\Omega \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega \setminus B_n \in \mathscr{M}(\mathscr{A}).$$

よって $\bigcup_n A_n, \bigcap_n B_n \in \mathscr{M}_c$ となり，$\mathscr{M}_c$ は単調族である．したがって $\mathscr{M}_c$ は $\mathscr{A}$ を含む単調族で，$\mathscr{M}_c = \mathscr{M}(\mathscr{A})$．すなわち，$\mathscr{M}(\mathscr{A})$ は補集合をとる操作について閉じている．

次に，$A \subset \Omega$ に対して

$$\mathscr{M}_A = \{B \in \mathscr{M}(\mathscr{A}) \mid A \cap B \in \mathscr{M}(\mathscr{A})\}\}$$

と定義する．(A_n) を (B_n) をそれぞれ $\mathscr{M}_A$ の増大列，減少列とすれば，$(A \cap A_n)$，$(A \cap B_n)$ はそれぞれ $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ の増大列，減少列となっているので

$$A \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A \cap A_n \in \mathscr{M}(\mathscr{A}),$$
$$A \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A \cap B_n \in \mathscr{M}(\mathscr{A}).$$

よって $\mathscr{M}_A$ は単調族である．$A \in \mathscr{A}$ なら $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}_A$ であるから，$\mathscr{M}_A = \mathscr{M}(\mathscr{A})$．すなわち $\bigcap_{A\in\mathscr{A}} \mathscr{M}_A = \mathscr{M}(\mathscr{A})$．ここで $B \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$ とすれば，任意の $A \in \mathscr{A}$ に対して $A \cap B \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$ なので，$\mathscr{A} \subset \mathscr{M}_B \subset \mathscr{M}(\mathscr{A})$ が分かる．$\mathscr{M}_B$ は単調族だったから特に $\mathscr{M}_B = \mathscr{M}(\mathscr{A})$ であり，$\bigcap_{A\in\mathscr{M}(\mathscr{A})} \mathscr{M}_A = \mathscr{M}(\mathscr{A})$ が成立．これは $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ が有限個の共通部分をとる操作について閉じているということに他ならない． □

次に，単調族定理と類似の命題で Dynkin 族定理とか，π-λ 定理とか呼ばれるものを紹介する．

定義 A.1.4. 集合 Ω の部分集合族 $\mathscr{I}$ が任意の $A, B \in \mathscr{I}$ に対して $A \cap B \in \mathscr{I}$ となるとき，$\mathscr{I}$ は π -系 (π-*system*) であるという．

定義 A.1.5. 集合族 $\mathscr{D}$ が以下の条件を満たすとき，$\mathscr{D}$ は Dynkin 族 (*Dynkin class*)，または λ-系 (λ-*system*) であるという．

(i) $\Omega \in \mathscr{D}$.
(ii) $A, B \in \mathscr{D}$ かつ $A \subset B$ ならば，$B \setminus A \in \mathscr{D}$.
(iii) $A_n \in \mathscr{D}$ $(n \in \mathbb{N})$ かつ $A_n \uparrow A$ ならば，$A \in \mathscr{D}$.

Dynkin 族からなる族の共通部分はあきらかに Dynkin 族であり，Ω の冪集合は明らかに Dynkin 族である．よって部分集合族 $\mathscr{F}$ が与えられたときそれを含む最小の Dynkin 族が存在し，それを $\mathscr{D}(\mathscr{F})$ と書くことにする．

命題 A.1.6. Ω の部分集合族 $\mathscr{F}$ に対して，以下は同値．

(i) $\mathscr{F}$ は σ -加法族である．

(ii) $\mathscr{F}$ は π 系かつ Dynkin 族である．

証明．σ -加法族なら　π -系かつ　Dynkin は明らかなので，逆を示す．$\mathscr{F}$ は π -系かつ　Dynkin 族であると仮定する．$A \in \mathscr{F}$ なら，$A \subset \Omega \in \mathscr{F}$ より $X \setminus A \in \mathscr{F}$ である．$A, B \in \mathscr{F}$ なら $A \cup B = \Omega \setminus [(\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B)] \in \mathscr{F}$ より $\mathscr{F}$ は有限和についても閉じていることが分かる．さらに $(\mathscr{F}_n)$ を $\mathscr{F}$ の元の族とすれば，$B_n = \bigcup_{k=0}^{n}$ とおくことで $B_n \uparrow \bigcup_n A_n$ となるので $\bigcup_n A_n \in \mathscr{F}$ も分かる．よって $\mathscr{F}$ は σ -加法族である．□

定理 A.1.7 (Dynkin 族定理（または π-λ 定理）)**.** $\mathscr{F}$ が π -系なら，　$\sigma(\mathscr{F}) = \mathscr{D}(\mathscr{F})$.

証明．命題 A.1.6 より $\sigma(\mathscr{F})$ は Dynkin 族なので，$\sigma(\mathscr{F}) \supset \mathscr{D}(\mathscr{F})$ は明らか．逆の包含関係を示す．それには $\mathscr{D}(\mathscr{F})$ が σ -加法族であることを示せばよいが，命題　A.1.6 より特に π -系であることを示せば十分である．

Step1.

$$\mathscr{D}_1 = \{B \in \mathscr{D}(\mathscr{F}) \mid \forall A \in \mathscr{F} \ \ A \cap B \in \mathscr{D}(\mathscr{F})\}$$

とおくことにする．このとき $\mathscr{D}(\mathscr{F}) = \mathscr{D}_1$ であることを示す．定義より $\mathscr{D}_1 \subset \mathscr{D}(\mathscr{F})$ なので，逆の包含関係を示せばよい．$\mathscr{F}$ 自体は π -系なので，明らかに　$\mathscr{F} \subset \mathscr{D}_1$ あとは $\mathscr{D}_1$ が Dynkin 族であることを示せば $\mathscr{D}(\mathscr{F})$ の最小性より $\mathscr{D}(\mathscr{F}) \subset \mathscr{D}_1$ がわかる．

任意の $A \in \mathscr{F}$ に対して

$$\Omega \cap A = A \in \mathscr{F} \subset \mathscr{D}(\mathscr{F})$$

より $\Omega \in \mathscr{D}_1$ である．また，$B, C \in \mathscr{D}_1$ かつ $B \subset C$ とすれば，任意の $A \in \mathscr{F}$ に対して

$$(C \setminus B) \cap A = (A \cap C) \setminus (A \cap B) \in \mathscr{D}(\mathscr{F})$$

も成り立つ．実際，$B, C \in \mathscr{D}_1$ より $A \cap B, A \cap C \in \mathscr{D}(\mathscr{F})$ であり，$A \cap B \subset A \cap C$ であることに注意すれば λ 系の定義よりわかる．さらに，$(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を $\mathscr{D}_1$ の単調増大列とする．$A \in \mathscr{F}$ とすれば，

$$A \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A \cap B_n$$

であるが，$B_n \in \mathscr{D}_1$ から $A \cap B_n \in \mathscr{D}(\mathscr{F})$ であり，$A \cap B_n \uparrow \bigcup (A \cap B_n)$ から $A \cap \bigcup B_n \in \mathscr{D}(\mathscr{F})$ が示される．以上の議論より $\mathscr{D}_1$ は Dynkin 族である．

Step2.

$$\mathscr{D}_2 = \{B \in \mathscr{D}(\mathscr{F}) \mid \forall A \in \mathscr{D}(\mathscr{F}) \ \ A \cap B \in \mathscr{D}(\mathscr{F})\}$$

とおく．このとき $\mathscr{D}_2 = \mathscr{D}(\mathscr{F})$ を示せば定理の証明が完了する．Step1 より $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}(\mathscr{F})$ だったから，$\mathscr{F} \subset \mathscr{D}_2$ は明らかである．$\mathscr{D}_2$ が Dynkin 族であることが示されれば，$\mathscr{D}_2 = \mathscr{D}(\mathscr{F})$ がわかるが，これは実際 Step1 と全く同じ議論により達成される．したがって $\mathscr{D}_2 = \mathscr{D}(\mathscr{F})$ が言えるが，これは $\mathscr{D}(\mathscr{F})$ が π -系であるということに他ならず，よって定理の主張は示された．□

命題 A.1.8 (可測関数についての単調族定理 I)**.** $\mathscr{C}$ を集合 Ω 上の π-系とし，$\mathscr{H}$ を Ω 上の実数値（resp. 有界）関数からなるベクトル空間とする．$\mathscr{H}$ が条件

(i) $1 \in \mathscr{H}$.

(ii) $(f_n) \in \mathscr{H}^{\mathbb{N}}$ が非負の単調増大列で非負の実数値（resp. 有界）関数 f に各点収束するなら，$f \in \mathscr{H}$.

(iii) $A \in \mathscr{C}$ ならば $1_A \in \mathscr{H}$.

を満たすなら，$\mathscr{H}$ は $\sigma(\mathscr{C})$-可測な全ての関数を含む．

証明.

$$\mathscr{F} = \{A \subset \Omega \mid 1_A \in \mathscr{H}\}$$

と定めれば，$\mathscr{F}$ は $\mathscr{C}$ を含む λ 系である．実際，条件 (iii) は $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$ を意味している．また条件 (i) は $\Omega \in \mathscr{F}$ ということである．(A_n) が $\mathscr{F}$ の増大列なら，(ii) より

$$0 \leq 1_{A_1} \leq 1_{A_2} \leq \cdots \to 1_{\bigcup_n A_n} \in \mathscr{H}$$

となるので，$\bigcup_n A_n \in \mathscr{F}$ も成立．さらに，$A, B \in \mathscr{F}$ かつ $A \subset B$ なら，$\mathscr{H}$ がベクトル空間であることから

$$1_{B \setminus A} = 1_B - 1_A \in \mathscr{H}$$

となり，$\mathscr{F}$ が λ 系であることが分かった．

定理 A.1.7 により $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{F}$ となるので，$\mathscr{H}$ は全ての $\sigma(\mathscr{C})$-可測指示関数を含む．ξ を $\sigma(\mathscr{C})$-可測な実数値関数として，

$$\xi_n^+ := \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} 1_{\left\{\frac{k}{2^n} \leq \xi < \frac{k+1}{2^n}\right\}} = \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} 1_{\xi^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\right)}$$

と定める．$\mathscr{H}$ は全ての $\sigma(\mathscr{C})$-可測指示関数を含むから，各 n と k に対して $1_{\xi^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\right)} \in \mathscr{H}$ が成り立つ．さらに $\mathscr{H}$ はベクトル空間なので，$\xi_n^+ \in \mathscr{H}$ である．定義より (ξ_n^+) は明らかに単調増大で，非負実数値関数 ξ^+ に各点収束する．したがって，条件 (ii) より $\xi^+ \in \mathscr{H}$ である．同様にして $\xi^- \in \mathscr{H}$ であることも分かる．$\mathscr{H}$ はベクトル空間だから

$$\xi = \xi^+ - \xi^- \in \mathscr{H}$$

が示された．有界関数の場合も同様である． □

実はもっと強く，次の定理が成立する．

定理 A.1.9 (可測関数に対する単調族定理 II)**.** Ω を集合とし，$\mathscr{H}$ を実数値有界関数の集合で次の条件を満たすものとする：

(i) 定数関数は $\mathscr{H}$ の元である．

(ii) (h_n) は（広義の）単調増大列で $\lim_n h_n = h$ も有界なら $h \in \mathscr{H}$.

(iii) $\mathscr{H}$ はベクトル空間.

$\mathscr{C} \subset \mathscr{H}$ が各点ごとの積に対して閉じているなら，$\mathscr{H}$ は $\sigma(\mathscr{C})$-可測有界関数をすべて含む．

実際，定理 A.1.9 から定理 A.1.8 の有界な場合を導くことが出来る．$\mathscr{C}$，$\mathscr{H}$ を定理 A.1.8 の仮定を満たすものとする．

$$\mathscr{D} = \{1_A \mid A \in \mathscr{C}\}$$

とすれば $\mathscr{D} \subset \mathscr{H}$ であり，$\mathscr{C}$ が π 系との仮定から $\mathscr{D}$ は積について閉じている．よって $\mathscr{H}$ は全ての有界 $\sigma(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{D})$ 可測関数を含む．

定義 A.1.10. X を集合とし，$\mathscr{H}$ を X 上の実数値有界関数の集合とする．$\mathscr{H}$ が条件

(i) 定数関数は $\mathscr{H}$ の元である．

(ii) (h_n) は（広義の）単調増大列で $\lim_n h_n = h$ も有界なら $h \in \mathscr{H}$.

(iii) $\mathscr{H}$ はベクトル空間.

を満たすとき，$\mathscr{H}$ は λ-系 (λ-*system*) であるという[*1]． また，Ω 上の実数値関数族 $\mathscr{C}$ が $f, g \in \mathscr{C}$ なら $fg \in \mathscr{C}$ を満たすとき[*2]，$\mathscr{C}$ は π 系 (π-*system*) または乗法的 (*multiplicative*) であるという．

定理 A.1.9 の証明を行う前に，幾らかの準備が必要である．

順序構造を持つベクトル空間 V において，任意の二元 $u, v \in V$ が下限 $u \wedge v \in V$ および上限 $u \vee v \in V$ を持つとき V はベクトル束 (vector lattice) と呼ばれるのであった．

X を任意の集合とする．V が $\mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$ の部分空間であるとき，V が束であることは任意の $f \in V$ に対して $|f| \in V$ であることと同値である．実際 V がベクトル束なら

$$|f| = (f \vee 0) - (f \wedge 0) \in V$$

である．逆に V が絶対値をとる操作について閉じているなら

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \in V, \quad f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \in V$$

となり V はベクトル束である．ベクトル束 $V \subset \mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$ が任意の $f \in V$ に対して $f \wedge 1 \in V$ を満足するとき，V は Stone 束 (Stone lattice) であるという[*3]．$\mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$ の元のうち有界なるもの全体のなす部分空間を $B(X, \mathbb{R})$ で表すことにする．

補題 A.1.11. X を集合とし，$\mathscr{H}$ は X 上の有界関数の集合とする．このとき，$\mathscr{H}$ を含む最小の λ 系 $\Lambda(\mathscr{H})$ が存在する．

証明．X 上の全ての実数値有界関数全体の集合 $B(X, \mathbb{R})$ は明らかに λ 系である．よって集合

$$\{\mathscr{E} \subset \mathrm{Map}(X, \mathbb{R}) \mid \mathscr{H} \subset \mathscr{E} \text{ かつ } \mathscr{E} \text{ は } \lambda \text{ 系 }\}$$

は空ではないから

$$\Lambda(\mathscr{H}) = \bigcap \{\mathscr{E} \subset \mathrm{Map}(X, \mathbb{R}) \mid \mathscr{H} \subset \mathscr{E} \text{ かつ } \mathscr{E} \text{ は } \lambda \text{ 系 }\}$$

とすれば良い． □

補題 A.1.12. X を集合とし，$\mathscr{C} \subset B(X, \mathbb{R})$ は π 系であるとする．このとき，$\Lambda(\mathscr{C})$ はまた π 系である．

証明．$f \in B(X, \mathbb{R})$ に対して

$$\Lambda_f = \{g \in \Lambda(\mathscr{C}) \mid fg \in \Lambda(\mathscr{C})\}$$

と定めれば，任意の $f \in B(X, \mathbb{R})$ に対して Λ_f は λ 系である．$\mathscr{C}$ は π 系だから，$f \in \mathscr{C}$ なら明らかに $\mathscr{C} \subset \Lambda_f$ が成立．したがって $\Lambda(\mathscr{C}) \subset \bigcap \{\Lambda_f ; f \in \mathscr{C}\}$ となる．定義より逆向きの包含関係は明らかだから，$\Lambda(\mathscr{C}) = \bigcap \{\Lambda_f ; f \in \mathscr{C}\}$ が分かる．これは $\Lambda(\mathscr{C})$ が π 系であるということに他ならない． □

補題 A.1.13. 任意の $N > 0$ に対して，多項式関数列 (p_n) で $[-N, N]$ 上 $0 \leq p_n(x) \uparrow |x|$ を満たすものが存在する．

[*1] 特に定着した呼称はないようである．Sharpe [18] には MVS（monotone vector space の略か？）とか書いてある．λ 系は Medvegyev [11] からとった．

[*2] ただし fg は各点ごとの積で定まる関数である．

[*3] Medvegyev [11] からとった．標準的な用語かは不明．

証明. $N>0$ を固定し，求める多項式列を具体的に構成しよう．$p_0 \equiv N$ とし，$n \in \mathbb{N}$ に対して再帰的に

$$p_{n+1}(x) := \frac{1}{2N}(p_n^2(x) + N^2 - x^2)$$

と定める．このとき，多項式関数 $p_n(x)$ は明らかに $[-N,N]$ 上で $p_n(x) \geq 0$ を満たす．(p_n) が $[-N,N]$ 上で減少列であって，$N-|x|$ に収束することを示そう．まずは (p_n) が $[-N,N]$ 減少列であることを帰納法で示す．定義より

$$p_1(x) = \frac{1}{2N}(N^2 + N^2 - x^2) = N - \frac{x^2}{2N} \leq N = p_0(x)$$

である．$[-N,N]$ 上で $p_{n-1}(x) \geq p_n(x)$ が成り立つと仮定する．このとき

$$\begin{aligned} p_n(x) - p_{n+1}(x) &= \frac{1}{2N}\left\{(p_n^2(x) + N^2 - x^2) - (p_{n-1}^2(x) + N^2 - x^2)\right\} \\ &= \frac{1}{2N}\left\{p_n^2(x) - (p_{n-1}^2(x)\right\} \\ &= \frac{1}{2N}(p_n(x) - p_{n-1}(x))(p_n(x) + p_{n-1}(x)) \end{aligned}$$

が成立．仮定と p_n の定義より $[-N,N]$ 上 $(p_n(x) - p_{n-1}(x))(p_n(x) + p_{n-1}(x)) \geq 0$ となるから，$[-N,N]$ 上 $y_n(x) \geq y_{n+1}(x)$ が分かる．$[-N,N]$ 上で $(p_n(x))$ は下に有界な減少列であるから，極限が存在する．その極限を $p^*(x)$ $(x \in [-N,N])$ で表すことにしよう．(p_n) の定義を思い出せば

$$p^*(x) := \frac{1}{2N}[(p^*(x))^2 + N^2 - x^2], \quad x \in [-N,N]$$

が成り立つ．これより $[-N,N]$ 上で $x^2 = (p^*(x) - N)^2$ となり，

$$|x| = |p^*(x) - N| = N - p^*(x), \quad \forall x \in [-N,N]$$

が示される[*4]．$q_n(x) := N - p_n(x)$ とおけば，ここまでの議論により (q_n) が求める多項式の列であることが分かる． □

命題 A.1.14. X を集合とし，$\mathscr{C} \subset B(X,\mathbb{R})$ を π 系とする．このとき，$\Lambda(\mathscr{C})$ は Stone 束である．

証明. 定義より明らかに $\Lambda(\mathscr{C})$ はベクトル空間なので，任意の $f \in \Lambda(\mathscr{C})$ に対して $|f| \in \Lambda(\mathscr{C})$ が成り立つことを示せばよい．$f \in \Lambda(\mathscr{C})$ に対して，$|f(x)| \leq N$ $(\forall x \in X)$ なる N を取れば，補題 A.1.13 より $[-N,N]$ 上で $|y|$ を単調増大に近似する多項式列 (p_n) が存在する．補題 A.1.12 より $\Lambda(\mathscr{C})$ は積について閉じているから，$p_n(f) \in \Lambda(\mathscr{C})$ である．また p_n の選び方から任意の $x \in X$ に対して $0 \leq p_n(f(x)) \uparrow |f(x)|$ が成立．したがって λ 系の定義から $|f| \in \Lambda(\mathscr{C})$ であり，$\Lambda(\mathscr{C})$ はベクトル束である．さらに $\Lambda(\mathscr{C})$ は λ 系だから定数関数 1 を元に持ち，よって $f \wedge 1 \in \Lambda(\mathscr{C})$ が分かる．すなわち $\Lambda(\mathscr{C})$ は Stone 束となる． □

命題 A.1.15. X を集合とし，$\mathscr{H} \subset B(X,\mathbb{R})$ とする．$\mathscr{H}$ が λ 系かつ Stone 束ならば，$\mathscr{H}$ は $\sigma(\mathscr{H})$-可測有界関数全体の集合と一致する[*5]．

証明. $\mathscr{H}$ の元が $\sigma(\mathscr{H})$-可測な有界関数であることは明らかなので，任意の $\sigma(\mathscr{H})$-可測な有界関数が $\mathscr{H}$ の元となることを示せばよい．

$$\mathscr{E} = \{A \subset X \mid 1_A \in \mathscr{H}\}$$

[*4] $[-N,N]$ 上で (p_n) は減少列なので，当然 $p^*(x) \leq N$ $(\forall x \in [-N,N])$ である．

[*5] 証明を見れば分かるが，この命題では関数の有界性はこれといって必要ではない．つまり，λ 系の定義から有界性を除いたものと，可測関数の集合から有界性の条件を取り除いたものに対しても，同様の主張が成立する．

と定義する．このとき $\mathscr{E} = \sigma(\mathscr{H})$ を示すことが第一の目標である．$\mathscr{E} \subset \sigma(\mathscr{H})$ は明らかなので，逆向きの包含関係を示す．

$\mathscr{H}$ は束なので，$\mathscr{E}$ は合併，共通部分をとる操作について閉じている．また $1 \in \mathscr{H}$ と $\mathscr{H}$ がベクトル空間との仮定より，$\Omega \in \mathscr{E}$ および $\mathscr{E}$ が補集合を取る操作についても閉じていることが分かる．$\mathscr{H}$ が一様有界なる単調収束について閉じていることは，$\mathscr{E}$ が増大列の極限について閉じていることを保証する．したがって $\mathscr{E}$ は σ-加法族となる．

$f \in \mathscr{H}$ とすれば，$\mathscr{H}$ は Stone 束だから

$$f_n := 1 \wedge (n(f - 1 \wedge f)) \in \mathscr{H}$$

である．明らかに $f_n \geq 0$ であり，しかも $f_n \uparrow 1_{\{f>1\}}$ が成立．$\mathscr{H}$ は λ 系だから $1_{\{f>0\}} \in \mathscr{H}$ となる．すなわち $\{f > 1\} \in \mathscr{E}$ が成り立つ．$\mathscr{H}$ はベクトル空間だから，これより任意の $\alpha > 0$ に対して $\{f > \alpha\} \in \mathscr{E}$ が分かる．したがって任意の $f \in \mathscr{H}$ に対して f^+ は $\mathscr{E}$-可測であり，同様にして f^- も $\mathscr{E}$-可測たることが示される．ゆえに $f = f^+ - f^-$ も $\mathscr{E}$-可測である．これより任意の $f \in \mathscr{H}$ は $\mathscr{E}$-可測であり，すなわち $\sigma(\mathscr{H}) \subset \mathscr{E}$ が成り立つ．

以上の議論により $\mathscr{E} = \sigma(\mathscr{H})$ が示された．これはすなわち，単関数が $\sigma(\mathscr{H})$-可測であることと $\mathscr{H}$ の元であることは同値であるということに他ならない．f を $\sigma(\mathscr{H})$-可測な有界関数とする．このとき，f は $\sigma(\mathscr{H})$ 可測な単関数によって単調に近似されるが，もちろんこれは $\mathscr{H}$ の元によって単調に近似されるということに他ならない[*6]．$\mathscr{H}$ は一様有界な単調収束について閉じていたから，$f \in \mathscr{H}$ が分かる． □

定理 *A.1.9* の証明. 仮定より $\mathscr{H}$ は π 系 $\mathscr{C}$ を含む λ 系であるから，$\Lambda(\mathscr{C}) \subset \mathscr{H}$ である．命題 A.1.14 から $\Lambda(\mathscr{C})$ は Stone 束であることも分かるから，命題 A.1.15 より $\Lambda(\mathscr{C})$ は $\sigma(\Lambda(\mathscr{C}))$-可測な有界関数全体の集合と一致する．よって $\mathscr{H}$ は $\sigma(\Lambda(\mathscr{C}))$-可測な有界関数を全て含み，特に $\sigma(\mathscr{C})$-可測な有界関数を全て含む． □

A.2 本質的上限について

定義 A.2.1. $(X, \mathscr{A}, \mu)$ を非負測度空間とし，$\mathscr{H}$ は空でない $\overline{\mathbb{R}}$ 値の $\mathscr{A}$ 可測関数族とする．$\mathscr{A}$ 可測関数 η は次の条件を満たすとき，$\mathscr{H}$ の本質的上限 (*essential supremum*) であるという：

(i) 任意の $\xi \in \mathscr{H}$ に対して $\xi \leq \eta$, μ-a.e.,

(ii) (i) を満たすような任意の確率変数 η' に対して，$\eta \leq \eta'$ μ-a.e..

(ii) の条件より，$\mathscr{H}$ の本質的上限が存在すれば，それは a.e. の意味で一意に定まることが分かる．我々はそれを $\operatorname*{ess\,sup}_{\xi \in \mathscr{H}} \xi$ または $\operatorname{ess\,sup} \mathscr{H}$ と表すことにしよう．定義 A.2.1 の不等号を逆にすることで，本質的下限 (*essential infimum*) $\operatorname{ess\,inf} \mathscr{H}$ も定義される．

以下の定理により，空でない確率変数族に対して必ずその本質的上限，本質的下限が存在することが保証される．

命題 A.2.2. $(X, \mathscr{A}, \mu)$ を σ-有限測度空間とし，$\mathscr{H}$ を空でない $\overline{\mathbb{R}}$ 値の可測関数族とする．この時，$\mathscr{H}$ の本質

[*6] $\mathscr{H}$ はベクトル空間なのであった．

的上限が存在し，適当な $\mathscr{H}$ の列 (ξ_n) によって

$$\operatorname{ess\,sup}\mathscr{H} = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \xi_n$$

と表現される．さらに $\mathscr{H}$ が $\vee$ について閉じているならば，(ξ_n) は単調増大であるように取れる．

本質的下限においても $\wedge$ と $\vee$ を入れ替えることで同様の主張が成立する．

証明は Fonseca & Leoni [7] を参考にした．

証明．本質的上限の場合を示す．μ が有限かつ $\mathscr{H}$ が一様に有界なる場合を考える．$\mathscr{H} = \{\xi_i; i \in I\}$ として，

$$\alpha := \sup\left\{ \int_X \sup_{i\in J} \xi_i \, d\mu \;\middle|\; J \subset I, J \text{ is countable} \right\} < \infty$$

と定める．定義より任意の整数 $n \geq 1$ に対して可算集合 I_n で

$$\int_X \sup_{i\in I_n} \xi_i \, d\mu > \alpha - \frac{1}{n}$$

を満たすものが存在する．$I_0 = \bigcup_n I_n$ とすれば I_0 は可算集合なので，

$$\eta = \sup_{i\in I_0} \xi_i$$

によって可測関数 η が定まる．これが $\mathscr{H}$ の本質的上限であることを示そう．η の構成法より (ii) は明らかである．任意の $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ に対して

$$\alpha - \frac{1}{n} \leq \int_X \sup_{i\in I_n} \xi_i \, d\mu \leq \int_X \eta \, d\mu \leq \alpha$$

だから，$E[\eta] = \alpha$ である．ここで $j \in I$ を任意にとれば，

$$\alpha = \int_X \eta \, d\mu \leq \int_X (\eta \vee \xi_j) d\mu = \int_X \left(\sup_{i\in I_0\cup\{j\}} \xi_i \right) d\mu \leq \alpha$$

となるから，$\eta = \eta \vee \xi_j$ a.s. すなわち $\xi_j \leq \eta$ a.s. が分かる．したがって，この η が $\mathscr{H}$ の本質的上限である．$\mathscr{H}$ が有界でない場合は

$$\widetilde{\mathscr{H}} := \{\arctan \xi \mid \xi \in \mathscr{H}\}$$

を考えればよい．μ が σ-有限の時は，$(E_n) \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}$ で $\mu(E_n) < +\infty$ なる可測集合列をとる．ここまでの証明により，有限測度 $\mu(\cdot \cap E_n)$ に対応する本質的上限とそれを表現する $\mathscr{H}$ の列 $(\xi_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ が存在する．$\eta = \bigvee_{n,k} \xi_{n,k}$ とすれば，これが元の μ に対応する $\mathscr{H}$ の本質的上限に他ならない．

$\mathscr{H}$ が $\vee$ について閉じているときは，

$$\xi'_n = \bigvee_{0\leq k\leq n} \xi_k$$

と定めることで (ξ'_n) は単調増加となる．□

注意 A.2.3. $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$ を空でない集合族とする．$\mathscr{H} = \{1_C \mid C \in \mathscr{C}\}$ と定めれば，命題 A.2.2 より $\mathscr{C}$ の列 $(\mathscr{C}_n)$ と (D_n) で

$$1_{\bigcup_n C_n} = \bigvee_n 1_{C_n} = \operatorname{ess\,sup}\mathscr{H}$$

$$1_{\bigcup_n D_n} = \bigwedge_n 1_{D_n} = \operatorname{ess\,inf}\mathscr{H}$$

となるものが存在する．$\bigcup_n C_n$（resp. $\bigcap_n D_n$）を $\mathscr{C}$ の本質的上限（resp. 本質的下限）と呼び，$\operatorname{ess\,sup}\mathscr{C}$ (resp. $\operatorname{ess\,inf}\mathscr{C}$) で表す．

A.3　Radon-Nikodym の定理

Radon-Nikodym の定理は表現される測度が有限測度の場合に限って論じているものが多いが，実際は任意の非負測度に対しても成立する．一般化された条件付き期待値を論じる場合にはより一般的な場合の Radon-Nikodym の定理が必要となるから，基本的な場合も含めて証明を紹介する．

可測空間 $(X,\mathscr{A})$ が与えられたとき，$E \subset X$ に対して

$$\mathscr{A} \cap E = \{A \cap E \mid A \in \mathscr{A}\}$$

と定義する．$\mathscr{A} \cap E$ は E 上の σ-代数であり，特に $E \in \mathscr{A}$ なら $\mathscr{A} \cap E \subset \mathscr{A}$ となる[*7]．

定義 A.3.1. $(X,\mathscr{A})$ を可測空間とし，$\mu,\nu : \mathscr{A} \to [0,+\infty]$ を測度とする．

(i) 任意の $E \in \mathscr{A}$ に対して $\mu(E)=0$ ならば $\nu(E)=0$ となるとき，ν は μ に対して絶対連続 (*absolutely continuous*) であるといい，$\nu \ll \mu$ と書く．

(ii) $\mathscr{A}$ 可測集合 X_μ, X_ν で $X = X_\mu \sqcup X_\nu$ かつ

$$\mu(E) = \mu(E \cap X_\mu), \quad \nu(E) = \nu(E \cap X_\nu), \quad \forall E \in \mathscr{A}$$

を満たすものが存在するとき，μ と ν は互いに特異 (*singular*) であるといい，$\mu \perp \nu$ と表す．

補題 A.3.2. $(X,\mathscr{A})$ を可測空間とし，$\mu : \mathscr{A} \to [0,+\infty]$ および $\nu : \mathscr{A} \to [0,+\infty[$ を測度とする．このとき，次の 2 条件は同値である：

(i) $\nu \ll \mu$.

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，$\mu(E) < \delta$ ならば $\nu(E) < \varepsilon$ が成り立つ．

証明．(i) $\Rightarrow$ (ii)．対偶を示す．(ii) が成り立たないと仮定しよう．このとき，ある $\varepsilon > 0$ をとれば $\mu(E_n) \le 2^{-n}$ かつ $\nu(E_n) \ge \varepsilon$ を満たすような可測集合列 (E_n) が取れる．任意の n に対して

$$\mu\left(\varlimsup_{k\to\infty} E_k\right) = \mu\left(\bigcap_{n\ge1}\bigcup_{k\ge n} E_k\right) \le \mu\left(\bigcup_{k\ge n} E_k\right) \le \sum_{k\ge n}\mu(E_k) \le \frac{1}{2^{n-1}}$$

が成立するから，$\mu(\varlimsup_n E_n) = 0$ である[*8]．ところが，仮定と ν の有限性より

$$\nu\left(\varlimsup_{n\to\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \nu\left(\bigcup_{k\ge n} E_k\right) \ge \varepsilon$$

となるので[*9]，ν は μ に対して絶対連続でないことが示された．

(ii) $\Rightarrow$ (i)．$E \in \mathscr{A}$ かつ $\mu(E) = 0$ とすれば，条件 (ii) より任意の ε に対して $\nu(E) < \varepsilon$ である．すなわち $\nu(E) = 0$ であり，$\nu \ll \mu$ が分かる．□

[*7] $E \subsetneq X$ なら $\mathscr{A} \cap E$ は X を含まないので，$(X,\mathscr{A})$ の部分 σ 代数という訳ではない．
[*8] 所謂 Borel-Cantelli の第一補題に他ならないが，確率測度でない場合でもそう呼ぶのだろうか？
[*9] 測度の上からの連続性は一般には成り立たないが，集合列に測度有限性があれば良いのであった．

補題 A.3.3. $(X, \mathscr{A})$ を可測空間とし，$\mu, \nu : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ を測度とする．$E \in \mathscr{A}$ とし，$\mathscr{C}_E$ を $\mathscr{A}$ 可測関数 $u : X \to [0, +\infty]$ で次の条件を満たすもの全体の集合とする：任意の $E' \subset E$ で $\mathscr{A}$-可測なるものに対して

$$\int_{E'} u \, d\mu \leq \nu(E')$$

が成り立つ．

$E \in \mathscr{A}$ に対して

$$\nu_{\mathrm{ac}}(E) = \sup \left\{ \int_E u \, d\mu \;\middle|\; u \in \mathscr{C}_E \right\}$$

と定めれば，$\nu_{\mathrm{ac}} : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ は μ に対して絶対連続な測度である．さらに任意の E に対して $\nu_{\mathrm{ac}}(E) = \int_E u_E \, d\mu$ を満たす $u_E \in \mathscr{C}_E$ が存在する．ν_{ac} が σ 有限なら u_E は E によらず一意に定まる．

証明．*Step 1*：**ν_{ac} が μ に絶対連続な測度となること．** 定義より $\nu_{\mathrm{ac}}(\emptyset) = 0$ は明らかなので，ν_{ac} が可算加法的であることを示そう．$(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を互いに疎な集合列とし，$E = \bigcup_n E_n$ と定める．$u \in \mathscr{C}_E \subset \mathscr{C}_{E_n}$ とすれば[*10]，

$$\int_E u \, d\nu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{E_n} u \, d\nu \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_{\mathrm{ac}}(E_n)$$

が成り立つから，$u \in \mathscr{C}_E$ について sup を取れば

$$\nu_{\mathrm{ac}}(E) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_{\mathrm{ac}}(E_n) \tag{A.1}$$

となる．次に (A.1) とは逆向きの不等号を示そう．ν_{ac} の定義より $\varepsilon > 0$ とすれば，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対してある可測関数 $u_n \in \mathscr{C}_{E_n}$ で

$$\nu_{\mathrm{ac}}(E_n) - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} < \int_{E_n} u_n \, d\mu$$

を満たすものが存在する．$u = 1_{E_n} u_n$ と定めれば，任意の $E' \subset E$ で可測なるものに対して

$$\int_{E'} u \, d\mu = \int_{E'} 1_{E_n} u_n \, d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{E' \cap E_n} u_n \, d\mu \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(E' \cap E_n) = \nu(E')$$

となるから，$u \in \mathscr{C}_E$ である．さらに

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_{\mathrm{ac}}(E_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\int_{E_n} u_n \, d\mu + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) = \int_E u \, d\mu + \varepsilon \leq \nu_{\mathrm{ac}}(E) + \varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ は任意に選んだものだったから，

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_{\mathrm{ac}}(E_n) \leq \nu_{\mathrm{ac}}(E) \tag{A.2}$$

となる．(A.1), (A.2) から ν_{ac} の可算加法性が示された．したがって ν_{ac} は測度である．$\mathscr{A}$ 可測集合 E が $\mu(E)$ を満たすならば，明らかに任意の $u \in \mathscr{C}_E$ に対して $\int_E u \, d\mu = 0$ となり，$\nu_{\mathrm{ac}}(E) = 0$ が分かる．したがって ν_{ac} は μ に対して絶対連続である．

Step 2：**$\nu_{\mathrm{ac}}(E)$ を実現する $u_E \in \mathscr{C}_E$ の存在．** まずは，$\mathscr{C}_E$ が $\vee$ の演算について閉じていることを示す．$u, v \in \mathscr{C}_E$ とすれば，任意の $E' \subset E$ で $E' \in \mathscr{A}$ なるものに対して，

$$\int_{E'} u \vee v \, d\mu = \int_{E' \cap \{u > v\}} u \, d\mu + \int_{E' \cap \{u \leq v\}} v \, d\mu \leq \nu(E' \cap \{u > v\}) + \nu(E' \cap \{u \leq v\}) = \nu(E')$$

[*10] 二つの可測集合 $E \subset F$ に対して $\mathscr{C}_F \subset \mathscr{C}_E$ となることは，定義よりすぐに分かる．

となるので，$u \vee v \in \mathscr{C}_E$ である．さて，ν_{ac} の定義より $E \in \mathscr{A}$ に対して $\mathscr{C}_E$ の列 $(u_E^{(n)})$ で

$$\lim_{n\to\infty}\int_E u_E^{(n)}\,d\mu = \nu_{\mathrm{ac}}(E)$$

を満たすものが取れる．$\mathscr{C}_E$ は $\vee$ に対して閉じているから，$(u_E^{(n)})$ は特に単調増大であるように取れる．$u_E = \lim_n u_E^{(n)}$ (pointwise) と定めれば，u は $[0,+\infty]$ 値の可測関数である．$E' \subset E$ が可測であるとき，単調収束定理より

$$\int_{E'} u_E\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{E'} u_E^{(n)}\,d\mu \leq \nu(E')$$

となるから，$u_E \in \mathscr{C}_E$ である．再び単調収束定理を用いれば

$$\int_E u_E\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E u_E^{(n)}\,d\mu = \nu_{\mathrm{ac}}(E)$$

となり，u_E が $\nu_{\mathrm{ac}}(E)$ を実現する $[0,+\infty]$ 値可測関数であることが分かる．

Step 3：**一意性．** まずは ν_{ac} が有限な測度になっているとき，$\nu_{\mathrm{ac}}(E)$ を実現する可測関数 u_E が実は E によらず定まっていることを示す．$\nu_{\mathrm{ac}}(X)$ を実現する u_X を選んだとき，任意の $E \in \mathscr{A}$ に対して $\nu_{\mathrm{ac}}(E) = \int_E u_X\,d\mu$ となっていることを言えばよい．背理法で証明するため，$E_0 \in \mathscr{A}$ に対して $\nu_{\mathrm{ac}}(E_0) \neq \int_{E_0} u_X\,d\mu$ となっていると仮定する．Step 2 より $u_X \in \mathscr{C}_X \subset \mathscr{C}_{E_0}$ であるから，明らかに

$$\int_{E_0} u_X\,d\mu \leq \nu_{\mathrm{ac}}(E_0)$$

が成り立つ．両辺は異なるという仮定していたから

$$\int_{E_0} u_X\,d\mu < \nu_{\mathrm{ac}}(E_0)$$

となる．このとき ν_{ac} の定義より $v \in \mathscr{C}_{E_0}$ で

$$\int_{E_0} u_X\,d\mu < \int_{E_0} v\,d\mu \leq \nu_{\mathrm{ac}}(E_0)$$

なるものが存在する．$\overline{u} := (u \vee v)1_{E_0} + u1_{X\setminus E_0}$ とおけば，

$$\nu_{\mathrm{ac}}(X) = \int_X \overline{u}\,d\mu = \int_{E_0}(u\vee v)\,d\mu + \int_{X\setminus E_0} \geq \int_{E_0} v\,d\mu + \int_{X\setminus E_0} u\,d\mu > \int_X u\,d\mu$$

となり矛盾である．したがって，ν_{ac} が非負有限測度の場合には表現する u の一意性が示された．

ν_{ac} が σ-有限の場合，$X = \bigsqcup_n X_n$ かつ $\nu_{\mathrm{ac}}(X_n) < +\infty$ なる $\mathscr{A}$ の元の列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を取る．このとき，先ほどの結果から各 X_n 上で ν_{ac} を表現する u_n が唯一つ定まる．$u = 1_{X_n}u_n$ とすればこれが ν_{ac} を表現するただ一つの関数に他ならない．　$\square$

補題 A.3.4. $(X,\mathscr{A})$ を可測空間とし，$\mu : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ を測度とする．$E \in \mathscr{A}$ に対して

$$\mu^+(E) = \sup\{\mu(E') \mid E' \in \mathscr{A},\ E' \subset E\}$$

と定める．この時，μ^+ は非負の有限測度であり

$$\mu^+(E) = \sup\left\{\mu(E') \mid E' \in \mathscr{A},\ E' \subset E,\ (-\mu)^+(E') = 0\right\} \tag{A.3}$$

が成立．

証明．*Step 1*：μ^+ が $\mathbb{R}_+$ 値測度であること．定義より明らかに $\mu^+(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$ である．任意の $E \in \mathscr{A}$ に対して $\emptyset \subset E$ だから，$\mu(E) \geq \mu(\emptyset) = 0$ となる．後は μ^+ が可算加法的であることを示せば良い．$(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を交わりを持たない集合列とし，$E = \bigsqcup_n E_n$ とする．このとき，任意の $E' \subset E$ で $\mathscr{A}$-可測なるものに対して

$$\mu(E') = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E' \cap E_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^+(E_n)$$

が成立．可測な $E' \subset E$ について上限を取れば

$$\mu(E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$$

が分かる．次に逆向きの不等号を示そう．$\varepsilon > 0$ を任意に選ぶ．μ^+ の定義より，各 n に対して $\mathscr{A}$-可測な $E'_n \subset E_n$ で

$$\mu(E'_n) \geq \mu^+(E_n) - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

を満たすものが存在する．n について和をとれば

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^+(E_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E'_n) + \varepsilon = \mu(E) + \varepsilon \leq \mu^+(E) + \varepsilon$$

ε の任意性より

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^+(E_n) \leq \mu^+(E)$$

となり，μ^+ の可算加法性が示された．

後は，μ^+ の有限性を示せばよい．$\mu^+(X) = +\infty$ と仮定しよう．このとき $\mathscr{A}$ の元の増大列 (A_n) で

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu^+(X) = +\infty$$

を満たすものがとれる．このとき，集合列の増大性より

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = +\infty$$

となり，μ の有限性に反する．よって $\mu^+(X) > +\infty$ である．

Step 2：(A.3) の証明．

$$\mu^+(E) \geq \sup\left\{\mu(E') \mid E' \in \mathscr{A},\ E' \subset E,\ (-\mu)^+(E') = 0\right\}$$

は仮定より明らかなので，逆向きの不等号を示す．そのためには，可測な $E' \subset E$ で $\mu(E') > 0$ なる任意のものに対して，可測なる $E'' \subset E'$ で $(-\mu)^+(E'') = 0$ かつ $\mu(E'') \geq \mu(E')$ なるものが存在することを示せばよい．E'' の元となる集合列を再帰的に構成する．$(-\mu)^+(E') > 0$ とすれば，可測集合 $E''_0 \subset E'$ で

$$-\mu(E''_0) \geq 0 \vee [(-\mu)^+(E') - 1]$$

を満たすものが存在する．$E'_0 = E' - E''_0$ と定めれば

$$\mu(E'_0) = \mu(E') - \mu(E''_0) \geq \mu(E')$$

および

$$(-\mu)^+(E'_0) = (-\mu)^+(E') - (-\mu)^+(E''_0) \leq (-\mu)^+(E') + \mu(E''_0) \leq 1$$

が成り立つ．可測なる $E'_n \subset E'$ で

$$\mu(E'_n) \geq \mu(E'), \quad (-\mu)^+(E'_n) \leq \frac{1}{n+1}$$

を満たすものが与えられたとしよう．$(-\mu)^+(E'_n) = 0$ なら，$E'' = E'_n$ とする．$(-\mu)^+(E'_n) > 0$ なら

$$-\mu(E''_{n+1}) \geq 0 \vee \left[(-\mu)^+(E') - \frac{1}{n+2}\right]$$

なる可測集合 $E''_{n+1} \subset E'_n$ をとって $E'_{n+1} = E'_n \setminus E''_{n+1}$ と定める．このとき明らかに

$$\mu(E'_{n+1}) \geq \mu(E'), \quad (-\mu)^+(E'_{n+1}) \leq \frac{1}{n+2}$$

が成り立つ．このように定義された減少列 $(E'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して $E'' = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E'_n$ とすれば，

$$\mu(E'') \geq \mu(E'), \quad (-\mu)^+(E'') = 0$$

となるので，求める結果が得られた． □

定理 A.3.5 (Radon-Nikodym の定理その 1)**.** $(X, \mathscr{A})$ を可測空間とし，$\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ を σ-有限測度とする．$\nu : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ を任意の測度で $\nu \ll \mu$ なるものとする．このとき，可測関数 $f : X \to [0, +\infty]$ で

$$\nu(E) = \int_E f(x)\mu(dx), \quad \forall E \in \mathscr{A}$$

を満たすものが存在する．このような可測関数は μ-a.s. の意味で一意である．

証明．*Step 1*：μ と ν がともに有限の場合．

Step 1-1：存在．ν の有限性と補題 A.3.3 より，可測関数 $u : X \to [0, +\infty]$ で

$$\nu_{\mathrm{ac}}(E) = \int_E u(x)\mu(dx), \quad \forall E \in \mathscr{A}$$

を満たすものが存在する．ν_{ac} の定義より

$$\nu(E) - \nu_{\mathrm{ac}}(E) = \nu(E) \overset{-}{\cancel{=}} \int_E u(x)\mu(dx) \geq 0, \quad \forall E \in \mathscr{A}$$

が成立するから，$\nu' = \nu - \nu_{\mathrm{ac}}$ により $\mathscr{A}$ 上の非負有限測度が定まる．ν と ν_{ac} はともに μ に対して絶対連続だったから，ν' も μ に対して絶対連続である．このとき，$\nu' = 0$ を示すことが出来れば，有限測度の場合に定理の「存在」の部分が証明されたことになる．背理法で証明する．$E'_0 \in \mathscr{A}$ に対して $\nu'(E_0) > 0$ が成り立っていると仮定し，矛盾を導くことが目標である．$\nu' \ll \mu$ だったから $\nu(E_0) > 0$ であり，十分小さい $\varepsilon > 0$ をとれば $\nu'(E_0) > \varepsilon\mu(E_0)$ が成り立つ．このとき補題 A.3.4 の記号を用いれば*11

$$(\nu' - \varepsilon\mu)^+(E_0) \geq \nu'(E_0) - \varepsilon\mu(E_0) > 0$$

が成立．補題 A.3.4 の主張から $\mathscr{A}$-可測集合 $E'_0 \subset E_0$ で

$$(\nu' - \varepsilon\mu)(E'_0) > 0, \quad (\varepsilon\mu - \nu')^+(E'_0) = 0$$

*11 $\nu' - \varepsilon\mu$ は明らかに実数値測度である．

を満たすものを取れる．

$$\nu'(E_0') > \varepsilon\mu(E_0') \geq 0$$

だから，再び $\nu' \ll \mu$ なる事実を用いれば $\mu(E_0') > 0$ が分かる．$(\varepsilon\mu-\nu')$ の定義を思い出せば，$(\varepsilon\mu-\nu')^+(E_0')$ から任意の $E'' \subset E_0'$ に対して

$$\varepsilon\mu(E'') - \nu'(E'') \leq (\varepsilon\mu - \nu')^+(E_0') = 0$$

となることが分かる．よって任意の可測な $E'' \subset E_0'$

$$\varepsilon\mu(E'') \leq \nu'(E'') = \nu(E'') - \nu_{\mathrm{ac}}(E'') = \nu(E'') - \int_{E''} u(x)\mu(dx)$$

であり，すなわち

$$\nu(E'') \geq \varepsilon\mu(E'') + \int_{E''} u(x)\mu(dx) = \int_{E''} (u(x) + \varepsilon 1_{E_0'}(x))\mu(dx)$$

が成立．したがって，任意の $E \in \mathscr{A}$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_E (u(x) + \varepsilon 1_{E_0'}(x))\mu(dx) &= \int_{E\setminus E_0'} (u(x) + \varepsilon 1_{E_0'}(x))\mu(dx) + \int_{E\cap E_0'} (u(x) + \varepsilon 1_{E_0'}(x))\mu(dx) \\
&= \int_{E\setminus E_0'} u(x)\mu(dx) + \int_{E\cap E_0'} (u(x) + \varepsilon 1_{E_0'}(x))\mu(dx) \\
&= \nu_{\mathrm{ac}}(E \setminus E_0') + \int_{E\cap E_0'} (u(x) + \varepsilon 1_{E_0'}(x))\mu(dx) \\
&\leq \nu(E \setminus E_0') + \nu(E \cap E_0') = \nu(E)
\end{aligned}$$

が成立．補題 A.3.3 の記号を使えば，これは $u + \varepsilon 1_{E_0'} \in \mathscr{C}_X$ ということであり，ν_{ac} の定義より

$$\begin{aligned}
\nu_{\mathrm{ac}}(X) &\geq \int_X (u(x) + \varepsilon 1_{E_0'}(x))\mu(dx) \\
&= \int_X u(x)\mu(dx) + \varepsilon\mu(E_0') \\
&= \nu_{\mathrm{ac}}(X) + \varepsilon\mu(E_0') \\
&> \nu_{\mathrm{ac}}(X)
\end{aligned}$$

となり[*12]，矛盾が導かれた．

以上の議論により，$\nu' = \nu - \nu_{\mathrm{ac}} = 0$ が示された．これはすなわち，ν が $\mathscr{A}$ 可測関数 $u : X \mapsto [0, +\infty]$ により表現されているということに他ならない．

Step 1-2：**一意性．** $v : X \to [0, +\infty]$ はまた

$$\nu(E) = \int_E v(x)\mu(dx), \quad \forall E \in \mathscr{A}$$

を満たす $\mathscr{A}$-可測関数であるとする．このとき，任意の $E \in \mathscr{A}$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_E (u \vee v)(x)\mu(dx) &= \int_{E\cap\{u>v\}} u(x)\mu(dx) + \int_{E\cap\{u\leq v\}} v(x)\mu(dx) \\
&= \nu(E \cap \{u > v\}) + \nu(E \cap \{u \leq v\}) \\
&= \nu(E)
\end{aligned}$$

[*12] E_0' の選び方から $\mu(E_0') > 0$ であった．

だから，$u \vee v$ もまた μ によって ν を表現する可測関数である．ν の有限性より $u, v, u \vee v$ は μ-可積分であり，特に μ-a.e. で有限値を取る[*13]．したがって

$$\int_X [(u \vee v) - u] d\mu = \int_X [(u \vee v) - v] d\mu = 0$$

となり，被積分関数の非負性より $u \vee v = u = v$ μ-a.e. が分かる．

Step 2：μ **が有限で，**ν **が** σ**-有限測度の場合．** $X = \bigsqcup_n X_n$ かつ $\nu(X_n) < \infty$ なる $\mathscr{A}$ 可測集合列を考える．Step 1 より，各 n に対して測度 $\nu(\cdot \cap X_n)$ を表現する（i.e. 任意の $E \in \mathscr{A}$ に対して

$$\nu(E \cap X_n) = \int_E u_n(x) \mu(dx)$$

を満たす）可測関数 $u_n : X \to [0, +\infty]$ が唯一つ存在する．$u = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n 1_{X_n}$ と定めれば，任意の $E \in \mathscr{A}$ に対して

$$\nu(E) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(E \cap X_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{E \cap X_n} u_n d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_E 1_{X_n} u_n d\mu = \int_E u \, d\mu$$

が成立する，同様に ν を表現する可測関数 $v : X \to [0, +\infty]$ があったとしよう．このとき u_n の一意性より $u = u_n = v$ μ-a.e. on X_n が成立．$X = \bigsqcup_n X_n$ だから $u = v$ μ-a.e. も分かる．

Step 3：μ **が有限で，**ν **が任意の** $[0, +\infty]$**-値測度の場合．**

Step 3-1:**存在．** $\nu(X) = +\infty$ として示せばよい．$\mathscr{F}_\nu = \{E \in \mathscr{A}, \, \nu(E) < +\infty\}$ として，$T = \sup_{E \in \mathscr{F}_\nu} \mu(E)$ と定める．$\mathscr{F}_\nu$ が $\cup$ について閉じていることに注意すれば，T の定義より $\mathscr{F}_\nu$ の元の増大列で (E_n) で $T = \lim_n \mu(E_n)$ を満たすものが存在する．$E_\infty = \bigcup_n E_n$ とすれば，$\nu\restriction_{\mathscr{A} \cap E_\infty}$ は σ-有限測度となる．Step 2 により可測関数 $u : E_\infty \to [0, +\infty]$ で，次を満たすようなものがただ一つ存在する[*14]：

$$\nu(E \cap E_\infty) = \nu\restriction_{\mathscr{A} \cap E_\infty} (E \cap E_\infty) = \int_{E \cap E_\infty} u_\infty \, d(\mu\restriction_{\mathscr{A} \cap E_\infty}) = \int_E 1_{E_\infty} u_\infty \, d\mu, \quad E \in \mathscr{A}.$$

この u_∞ を用いて，ν を表現する可測関数を構成するのが目標である．まずは，$\nu(\mathscr{A} \cap (X \setminus E_\infty)) = \{0, +\infty\}$ となることを示そう．$0 < \nu(F) < +\infty$ なる $F \in \mathscr{A} \cap (X \setminus E_\infty)$ があると仮定して，矛盾を導く．$\nu \ll \mu$ であったことを思い出せば，$\mu(F) > 0$ である．$\nu(F) < +\infty$ より $F \in \mathscr{F}_\nu$ となるので，T の定義より $\mu(F) \leq T$ が分かる．このとき，E_∞ の定義より十分大きい n に対して

$$\mu(E_n) > \mu(E_\infty) - \mu(F) = T - \mu(F)$$

が成立[*15]．$E_n, F \in \mathscr{F}_\nu$ より $E_n \sqcup F \in \mathscr{F}_\nu$ となるから，

$$T < \mu(E_n) + \mu(F) = \mu(E_n \sqcup F) \leq \sup_{E \in \mathscr{F}_\nu} \mu(E) = T$$

となり，矛盾が導かれた．したがって $F \in \mathscr{A} \cap (X \setminus E_\infty)$ なら $\nu(F) \in \{0, +\infty\}$ である．さらに，$F \in \mathscr{A} \cap (X \setminus E_\infty)$ が $\mu(F) > 0$ を満たすとき，$\nu(F) = +\infty$ となる．実際 $\mu(F) > 0$ かつ $\nu(F) < +\infty$ とすれば，先程と同様に十分大きい n に対して

$$T < \mu(E_n) + \mu(F) = \mu(E_n \sqcup F) \leq \sup_{E \in \mathscr{F}_\nu} \mu(E) = T$$

[*13] よって $u \vee v - u$ などが定義される．

[*14] ただし，二つ目の等号では E_∞ 上の関数 u_∞ の X へのゼロ拡張を $1_{E_\infty} u_\infty$ と書いている．

[*15] $0 < \mu(F) \leq T$ なのであった．

となり矛盾である．

ここで，可測関数 $u : X \to [0, +\infty]$ を

$$u(x) = \begin{cases} u_\infty(x) & x \in E_\infty, \\ +\infty & x \in X \setminus E_\infty, \end{cases}$$

と定義しよう．このとき u が ν を表現する関数になっていることを示したい．$E \in \mathscr{A}$ とする．もし $\mu(E \cap (X \setminus E_\infty)) > 0$ なら，先ほどの議論により $\nu(E \cap (X \setminus E_\infty)) = \infty$ である．よって

$$\int_E u \, d\mu = \int_{E \cap (X \setminus E_\infty)} u \, d\mu + \int_{E \cap E_\infty} u \, d\mu = +\infty = \nu(E)$$

である．$\mu(E \cap (X \setminus E_\infty)) = 0$ なら $\nu(E \cap (X \setminus E_\infty)) = 0$ だから

$$\begin{aligned} \int_E u \, d\mu &= \int_{E \cap (X \setminus E_\infty)} u \, d\mu + \int_{E \cap E_\infty} u \, d\mu = \int_E 1_{E_\infty} u_\infty \, d\mu \\ &= \nu(E \cap E_\infty) = \nu(E \cap E_\infty) + \nu(E \cap (X \setminus E_\infty)) = \nu(E) \end{aligned}$$

となる．したがって，任意の $E \in \mathscr{A}$ に対して

$$\int_E u \, d\mu = \nu(E)$$

が成立する．

Step 3-2：**一意性．** $v : X \to [0, +\infty]$ は

$$\nu(E) = \int_E v \, d\mu$$

を満たす可測関数としよう．Step 2 での一意性の議論より $u = v$ μ-a.e. on E_∞ は既に分かっているから，$X \setminus E_\infty$ 上で v が μ-a.e. に $+\infty$ になることを示せばよい．$F \in \mathscr{A} \cap (X \setminus E_\infty)$ は $\mu(F) > 0$ かつ F 上 $v < +\infty$ μ-a.e. を満たすものとする．このとき step 3-1 の議論により $\nu(F) = +\infty$ なのであった．$F_n = F \cap \{u \leq n\}$ と定めれば，

$$\lim_{n \to \infty} \mu(F_n) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n\right) = \mu(F) > 0$$

が成立．よって十分大きい n_0 をとれば $\mu(F_{n_0}) > 0$ であり，よって $\nu(F_{n_0}) = +\infty$ となる．

$$+\infty = \nu(F_{n_0}) = \int_{F_{n_0}} v \, d\mu \leq \int_{F_{n_0}} n_0 \, d\mu = n_0 \mu(F_{n_0}) < +\infty$$

となり矛盾である[*16]．

Step 4：**μ が σ-有限，ν が一般の非負測度の場合．** $X = \bigsqcup_n X_n$ かつ $\mu(X_n) < +\infty$ なる可測集合列 (X_n) をとる．Step 3 より X_n 上で ν を表現する非負可測関数 u_n があるから，$u = \sum_n u_n 1_{X_n}$ とすればよい．　□

注意 A.3.6. 定理 A.3.5 の証明 step 1-1 により ν が有限測度の場合には $\nu = \nu_{\mathrm{ac}}$ が成り立つ．このためには実際のところ ν が有限である必要はない．ν_{ac} の定義を思い出せば，u が ν を表現していることから任意の

*16 Step 3 では μ は有限測度なのであった．

$E \in \mathscr{A}$ に対して

$$\begin{aligned}\nu(E) &\geq \nu_{\mathrm{ac}}(E) \\ &= \sup\left\{\int_E f\,d\mu \mid \forall F \in \mathscr{A} \cap E,\ \int_F f\,d\mu \leq \nu(F)\right\} \\ &\geq \int_E u\,d\mu = \nu(E)\end{aligned}$$

が成立することが分かる．

記号の簡略化のため，測度 $A \mapsto \int_A u d\mu$ を $u \bullet \mu$ で表すことにする．この記法を用いれば，Radon-Nikodym の定理の主張は「$\nu = u \bullet \mu$ を満たす $u : X \to [0, +\infty]$ がただ一つ存在する」と表現される．

注意 A.3.7. 可測空間 $(X, \mathscr{A})$ と σ-有限なる非負測度 μ が与えられたとする．非負可測関数 f によって $\nu = f \bullet \mu$ としたとき，ν が有限測度であることと f が可積分であることは明らかに同値である．さらに，ν が σ-有限であることと f が μ-a.e. で有限値をとることも同値となる．実際，ν が σ-有限なら $X = \bigcup_n X_n$ かつ $\nu(X_n) < +\infty$ なる可測集合列とることにより，$1_{X_n} f$ は可積分となるから f は X_n 上 μ-a.e. で有限．その可算和 $X = \bigcup_n X_n$ 上でも μ-a.e. で有限である．逆に，f は μ-a.e. で有限値をとると仮定しよう．$X = \bigcup_n X_n$ かつ $\mu(X_n) < +\infty$ なる可測集合列 (X_n) をとり，$Y_n = \{f \leq n\}$ と定める．このとき，$n, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\nu(X_n \cap Y_m) = \int_{X_n \cap Y_m} f\,d\mu \leq \int_{X_n} m\,d\mu = m\mu(X_n) < +\infty$$

となる．明らかに

$$X = \left(\bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} X_n \cap Y_m\right) \cup \{x \in X \mid f(x) = +\infty\}$$

であり，$f < +\infty$ μ-a.e. だったことから ν は σ 有限となる．

Radon-Nikodym の定理は，適当な条件の下で符号付き測度に対しても成立する．ここでは符号付き測度とは $]-\infty, +\infty]$ または $[-\infty, +\infty[$ に値をとる測度のことを指す[*17]．まずは，符号付き測度に関する Hahn 分解と Jordan 分解を復習しよう．

可測空間 $(X, \mathscr{A})$ とその上の符号付き測度 $\mu : \mathscr{A} \to [-\infty, +\infty]$ を考える．$E \in \mathscr{A}$ とする．任意の $F \in \mathscr{A} \cap E$ に対して $\mu(F) \geq 0$ が成立つとき，E は μ-正集合であるという．また E が $(-\mu)$-正集合であるとき，E は μ-負集合であるという．

補題 A.3.8. $(X, \mathscr{A})$ と可測空間，$\mu : \mathscr{A} \to [-\infty, \infty]$ を符号付き測度とする．$\mathscr{A}$-可測集合 E は $0 < \mu(E) < +\infty$ を満たすものとしよう．このとき μ-正集合 F で $\mu(F) > 0$ なるものが存在する．

証明. *Step 1.* まずは，$|\mu(E)| < +\infty$ ならば任意の $F \in \mathscr{A} \cap E$ に対して $|\mu(F)| < +\infty$ となることを示す．$\mu(\mathscr{A}) \subset [-\infty, +\infty[$ の場合を考えよう．$F \in \mathscr{A} \cap E$ とする．$\mu(F) \geq 0$ なら仮定より $|\mu(F)| = \mu(F) < +\infty$ である．$\mu(F) < 0$ のとき，

$$0 < -\mu(F) = \mu(E \setminus F) - \mu(E) < +\infty$$

なので，$|\mu(F)| = -\mu(F) < +\infty$ となる．$\mu(\mathscr{A}) \subset]-\infty, +\infty]$ なら，今の議論を $-\mu$ に対して行えばよい．

[*17] 有限でなくとも構わない．$\mu : \mathscr{A} \to [-\infty, +\infty]$ が符号付き測度であるといった時には，$\mu(\mathscr{A}) \subset]-\infty, +\infty]$ または $\mu(\mathscr{A}) \subset [-\infty, +\infty[$ とどちらかが成り立つことを仮定する．

Step 2. $E \in \mathscr{A}$ は $0 < \mu(E) < +\infty$ なる集合としよう．Step 1 により $\mu\restriction_{\mathscr{A}\cap E}$ は有限値の符号付き測度となる．

$$\begin{aligned}\mu^+(F) &:= \sup\{\mu(A) \mid A \in \mathscr{A} \cap F\} \\ \mu^-(F) &:= (-\mu)^+(F) = -\inf\{\mu(A) \mid A \in \mathscr{A} \cap F\}\end{aligned}$$

とすれば，補題 A.3.4 より μ^+ と μ^- は $\mathscr{A} \cap E$ 上の非負有限測度となる．さらに補題 A.3.4 における (A.3) より

$$\begin{aligned}\mu^+(F) &= \sup\left\{\mu(A) \mid A \in \mathscr{A} \cap F,\ \mu^-(A) = 0\right\} \\ &= \sup\left\{\mu(A) \mid A \in \mathscr{A} \cap F,\ A \text{ is } \mu\text{-positive}\right\}\end{aligned} \tag{A.4}$$

が成り立つ[*18]．今 $0 < \mu(E) < +\infty$ と仮定していたから，(A.4) より μ-正集合 $F \subset E$ で $\mu(F)$ なるものが取れることが分かる． □

定理 A.3.9 (Hahn 分解)**.** $(X, \mathscr{A})$ と可測空間，$\mu : \mathscr{A}$ を符号付き測度とする．このとき，μ-正集合 X^+ と μ-負集合 X^- で $X = X^+ \cup X^-$ を満たすものが存在する．この分解は特に $X^+ \cap X^- = \emptyset$ となるように取れる．

証明．$\mu : \mathscr{A} \to [-\infty, +\infty[$ の場合に示す．

$$\begin{aligned}\mu^+(X) &:= \sup\{\mu(E) \mid E \in \mathscr{A}\} \\ &= \sup\left\{\mu(E) \mid E \in \mathscr{A},\ A \text{ is } \mu\text{-positive}\right\}\end{aligned}$$

とすれば，μ-正集合の増大列 (E_n) で

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu^+(X)$$

を満たすものが存在する．$X^+ = \bigcup_n E_n$ と定めれば，X^+ はまた正集合である．$X^- := X \setminus X^+$ としたとき，X^- が負集合であることを示せばよい．可測な $F \subset X^-$ で $0 < \mu(F) < +\infty$ なるものが存在したとすれば，補題 A.3.8 より $F' \subset F$ で $\mu(F') > 0$ なる正集合が取れる．このとき

$$\mu^+(X) = \mu(X^+) < \mu(X^+) + \mu(F') = \mu(X^+ \cup F') < +\infty$$

となるが，これは μ^+ の定義に反する．よって X^- は負集合である． □

定理 A.3.9 における分解 $X = X^+ \cup X^-$ を Hahn 分解 (Hahn decomposition) と呼ぶ．$X = X^+ \sqcup X^-$ を Hahn 分解としたとき補題 A.3.8 の意味での μ^+ と μ^- に対して，

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap X^+), \quad \mu^-(E) = \mu(E \cap X^-) \tag{A.5}$$

が成立する．これより明らかに $\mu^+ \perp \mu^-$ である．符号付き測度 μ の分解 $\mu = \mu^+ - \mu^-$ を μ の Jordan 分解 (Jordan decomposition) と呼ぶ．また，非負測度 $|\mu| := \mu^+ + \mu^-$ を μ の全変動測度 (total variation measure) という．

Hahn 分解は集合としては一意ではないが，μ-a.e. の意味では一意に定まる．正確には，次の主張が成り立つ：$X = X_1^+ \cup X_1^-$ と $X = X_2^+ \cup X_2^-$ をともに Hahn 分解とする．このとき，任意の可測な $E \subset (X_1^+ \triangle X_2^+) \cup (X_1^- \triangle X_2^-)$ は $|\mu|$-零集合である．実際これは (A.5) より直ぐに分かる．同様にして Jordan 分解の一意性も示される．

測度の全変動の概念を用いれば，符号付き測度に関する絶対連続性が定義される．

[*18] 二つ目の等号は定義より明らか．

定義 A.3.10. $(X, \mathscr{A})$ を可測空間，$\mu, \nu : \mathscr{A} \to [-\infty, +\infty]$ を測度とする．

(i) $|\nu| \ll |\mu|$ のとき，ν は μ に対して絶対連続 (absolutely continuous) であるといい，$\nu \ll \mu$ と書く．

(ii) $|\nu| \perp |\mu|$ のとき，ν と μ は互いに特異 (singular) であるといい，$\mu \perp \nu$ と書く．

定理 A.3.11 (Radon-Nikodym の定理その 2)**.** $(X, \mathscr{A})$ を可測空間，$\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ を σ-有限測度，$\nu : \mathscr{A} \to [-\infty, \infty]$ を測度とする．$\nu \ll \mu$ ならば可測関数 $u : X \to [-\infty, +\infty]$ で

$$\nu(E) = \int_E u \, d\mu, \quad \forall E \in \mathscr{A}$$

を満たすものがただ一つ存在する．

証明. Jordan 分解または Hahn 分解を考え，それぞれに Radon-Nikodym の定理（A.3.5）を適用すればよい． □

A.4 条件付期待値

A.5 一様可積分性

定義 A.5.1. $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とする．確率変数族 $\mathscr{H}$ が次の条件を満たすとき，$\mathscr{H}$ は一様可積分 (uniformly integrable) であるという．

$$\lim_{a \to \infty} \sup_{X \in \mathscr{H}} \int_{\{|X| > a\}} |X(\omega)| P(d\omega) = 0.$$

命題 A.5.2. 確率変数族 $\mathscr{H}$ が一様可積分であるための必要十分条件は，以下の 2 条件が成立することと同値である．

(i) $\sup_{X \in \mathscr{H}} E[\,|X|\,] < \infty$.

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在して，任意の $X \in \mathscr{H}$ および $P(A) < \delta$ を満たす任意の $A \in \mathscr{F}$ に対して $E[\,|X| 1_A] < \varepsilon$ が成り立つ．

証明. $\mathscr{H}$ は一様可積分であると仮定する．このとき十分大きい K をとれば，任意の $X \in \mathscr{H}$ に対して

$$\int_\Omega |X| \, dP = \int_{\{|X| > K\}} |X| \, dP + \int_{\{|X| \le K\}} |X| \, dP < 1 + K$$

である．よって (i) が成立．また，一様可積分性より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\sup_{X \in \mathscr{H}} \int_{\{|X| > K\}} |X| \, dP < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たす $K > 0$ がとれる．$0 < \delta < \varepsilon / 2K$ となる δ をとれば，任意の $X \in \mathscr{H}$ と $P(A) < \delta$ なる任意の A について

$$\begin{aligned} \int_A |X| \, dP &= \int_{A \cap \{|X| > K\}} |X| \, dP + \int_{A \cap \{|X| \le K\}} |X| \, dP \\ &\le \int_{\{|X| > K\}} |X| \, dP + K P(A) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

すなわち (ii) が成り立つことが示された．

逆を示すために，(i) と (ii) を仮定する．(ii) の $\delta = \delta(\varepsilon)$ に対して，

$$P(|X| > K_0) \leq \frac{E[\,|X|\,]}{K_0} \leq \frac{\sup_{X\in\mathscr{H}} E[\,|X|\,]}{K_0} < \delta$$

を満たす $K_0 > 0$ をとれば，任意の $K > K_0$ において

$$\int_{\{|X|>K\}} |X| dP < \varepsilon \quad (\forall X \in \mathscr{H})$$

である．したがって $\mathscr{H}$ は一様可積分． □

一様可積分な確率変数族の例を挙げる．

命題 A.5.3. $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，X を可積分な確率変数とする．確率変数族 $\mathscr{H}$ を

$$\mathscr{H} := \{Y \mid \text{ある部分 } \sigma\text{-加法族 } \ \mathscr{G} \subset \mathscr{F} \text{ が存在して，} Y \text{ は } E[X|\mathscr{G}] \text{ のバージョンとなっている }\}$$

とおけば，$\mathscr{H}$ は一様可積分である．

証明．$Y = E[X|\mathscr{G}] \in \mathscr{H}$ とすれば，Jensen の不等式により

$$|Y| \leq E[|X|\,|\mathscr{G}] \quad \text{a.s.}$$

となる．両辺を $\{|Y| > \lambda\} \in \mathscr{G}$ 上で積分すれば，条件付き期待値の定義より

$$\int_{\{|Y|>\lambda\}} |Y|\, dP \leq \int_{\{|Y|>\lambda\}} |X|\, dP$$

を得る．いま Chebyshev の不等式により

$$\sup_{Y\in\mathscr{H}} P\left[\,|Y| > \lambda\,\right] \leq \sup_{Y\in\mathscr{H}} \frac{E[\,|Y|\,]}{\lambda} \leq \frac{E[\,|X|\,]}{\lambda} \to 0 \ (\lambda \to \infty)$$

となるから，A.5 において $\lambda \to \infty$ とすれば右辺は Y について一様に 0 に収束する．これより一様可積分性がわかる． □

命題 A.5.4. $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathscr{H}$ を確率変数列とする．ある $p > 1$ に対して $\sup_{X\in\mathscr{H}} E[|X|^p] < \infty$ が成り立つなら，$\mathscr{H}$ は一様可積分である．

証明．$A = \sup_{X\in\mathscr{H}} E[|X|^p] < \infty$ とする．

$$\sup_{X\in\mathscr{H}} \int_{\{|X|>a\}} |X| dP \leq \sup_{X\in\mathscr{H}} \int_{\{|X|>a\}} \frac{|X|^p}{a^{p-1}} dP \leq \frac{A}{a^{p-1}} \xrightarrow[a\to\infty]{} 0$$

だから，$\mathscr{H}$ は一様可積分である． □

定理 A.5.5. (X_n) を可積分な確率変数列とし，$X_n \to X$ a.e. とする．このとき，以下の三条件は同値である．

(i) (X_n) は一様可積分である．

(ii) $X_n \to X$ in L^1.

(iii) $E[\,|X_n|\,] \to E[\,|X|\,] < \infty$.

証明. (i) $\Rightarrow$ (ii) 一様可積分な列は L^1 -有界であることに注意すれば， Fatou の補題より

$$E[\,|X|\,] \leq \varliminf_{n\to\infty} E\,[\,|X_n|\,] \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} E[\,|X_n|\,] < \infty$$

となり X は可積分である．これより $(X_n - X)$ も一様可積分である．一様可積分性より任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$P(\Lambda) < \delta \implies E[|X_n - X|\,;\Lambda] < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たす $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在する．$X_n \to X$ a.e. より $X_n \to X$ in probability であるから，

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ P(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}) < \delta$$

がなりたつ．したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n > N$ について

$$\begin{aligned} E[|X_n - X|] &\leq E\left[|X_n - X|\,;|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right] + E\left[|X_n - X|\,;|X_n - X| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right] \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $X_n \to X$ in L^1 より，十分大きい自然数 n に対して，$E[|X_n - X|] < \infty$ である．(X_n) の可積分性と合わせれば，十分大きい n に対して，

$$E[|X|] \leq E[|X_n|] + E[|X - X_n|] < \infty.$$

また，

$$|E[|X_n|] - E[|X|]| \leq E[|X_n - X|] \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

よって，$E[|X_n|] \to E[|X|] \quad (n \to \infty)$ がなりたつ．

(iii) $\Rightarrow$ (i) 可測関数 f に対して可測関数 f^a を以下の様に定義する．

$$f^a(\omega) = f1_{\{|f|<a\}} = \begin{cases} f(\omega) & |f(\omega)| < a \text{ のとき}, \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

このとき，$\{\omega \in \Omega \mid |X(\omega)| = a\}$ が零集合となる a(このような a を X の分布の連続点と呼ぶ) に対して，$X_n^a \to X^a$ a.e. がなりたち，したがって $|X_n^a| \to |X^a|$ a.e. である．有界収束定理により，

$$E[\,|X_n^a|\,] \longrightarrow E[\,|X^a|\,] \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が分かる．ゆえに，

$$\begin{aligned} E[\,|X_n|\,;|X_n| \geq a\,] &= E[\,|X_n|\,] - E[\,|X_n|\,;|X_n| < a\,] \\ &= E[\,|X_n|\,] - E[\,|X_n^a|\,]. \end{aligned}$$

両辺で n について極限をとれば

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} E[\,|X_n|\,;|X_n| \geq a\,] &= \lim_{n\to\infty} E[\,|X_n|\,] - \lim_{n\to\infty} E[\,|X_n^a|\,] \\ &= E[\,|X|\,] - E[\,|X^a|\,] \\ &= E[\,|X|\,] - E[\,|X|\,;|X| < a\,] \\ &= E[\,|X|\,;|X| \geq a\,]. \end{aligned}$$

X の可積分性より X の分布の連続点 a を十分大きくとれば,

$$E[\,|X|\,;|X|>a\,]<\frac{\varepsilon}{2}$$

であり，さらに任意の $\varepsilon>0$ に対してある $N\in\mathbb{N}$ が存在して，任意の $n\geq N$ に対して

$$E[|X_n|;|X_n|>a]<E[\,|X|\,;|X|>a\,]+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

各 $n\in\{1,2,\dots,N-1\}$ に対して

$$E[\,|X_n|\,;|X_n|\geq b_n\,]<\varepsilon$$

を満たす b_n が存在するので，$c>\max\{a,b_1,b_2,\dots,b_{N-1}\}$ なる c をとれば，任意の n について

$$E[\,|X_n|\,;|X_n|>c\,]<\varepsilon.$$

すなわち，(X_n) は一様可積分である． □

A.6 積空間上の測度について

測度空間 $(X,\mathscr{A},\mu)$ と $(Y,\mathscr{B},\nu)$ が与えられたとき，それらの積 $(X\times Y,\mathscr{A}\otimes\mathscr{B},\mu\otimes\nu)$ が構成され，$\mu\otimes\nu$ は対称な（または可換な）重複積分によって得られるというのはよく知られた話である．しかし，積空間 $(X\times Y,\mathscr{A}\otimes\mathscr{B})$ 上に測度を構成する方法は対称なるものだけでなく，非可換なる重複積分においても測度は定義できる．こういった手法はマルコフ過程の推移確率や，正則条件付確率，有界変動過程の作る測度の理論などとして，確率過程論において極めて重要な役割を果たす．

この節では，特に断りなく「測度」と言えば「$\overline{\mathbb{R}}_+$-値測度」を表すものとする．集合族 $\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ が与えられたとき

$$\mathscr{A}\odot\mathscr{B}=\{A\times B\mid A\in\mathscr{A},\ B\in\mathscr{B}\}$$

と定める[*19]．

定義 A.6.1. $(X,\mathscr{A})$ と $(Y,\mathscr{B})$ を可測空間とする．写像 $\kappa:X\times\mathscr{B}\to[0,+\infty]$ が次の条件を満たすとき，κ を $(X,\mathscr{A})$ から $(Y,\mathscr{B})$ への核 (kernel)，あるいは推移関数 (transition function) と呼ぶ：

(i) 任意の $x\in X$ に対して，写像 $\mathscr{B}\ni B\to\kappa(x,B)\in[0,+\infty]$ は測度である．

(ii) 任意の $B\in\mathscr{B}$ に対して，写像 $X\ni x\mapsto\kappa(x,B)\in[0,+\infty]$ は $\mathscr{A}$-可測関数である．

命題 A.6.2. $(X,\mathscr{A})$ と $(Y,\mathscr{B})$ を可測空間とする．さらに，測度 $\mu:\mathscr{A}\to\overline{\mathbb{R}}_+$ と核 $\nu:X\times\mathscr{B}\to\overline{\mathbb{R}}_+$ が与えられたとしよう．$\mathscr{S}$ を $A\times B$ $(A\in\mathscr{A},B\in\mathscr{B})$ の成す $X\times Y$ 上の集合半代数とする．$\mathscr{S}$ 上の関数 α を

$$\alpha(A\times B)=\int_X\left(\int_Y 1_{A\times B}(x,y)\nu(x,dy)\right)\mu(dx)=\int_A\nu(x,B)\mu(dx)$$

によって定義すれば，α は $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ 上の測度に拡張される．

[*19] このノートだけの記法である．

証明. α が $\mathscr{S}$ 上可算加法的であることを示せば，Carathéodory の拡張定理により α が $\sigma(\mathscr{S}) = \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ の測度に拡張されることが示される.

(C_n) を $\mathscr{C}$ の列で $C_n \cap C_m = \emptyset$ $(n \neq m)$ かつ $C := \bigcup_n C_n \in \mathscr{S}$ なるものとする．$\mathscr{S}$ の定義より各 C_n は $C_n = A_n \times B_n$ $(A_n \in \mathscr{A}, B_n \in \mathscr{B})$ と表現され，また C 自身も $X = A \times B$ $(A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B})$ と表される．ここで非負の可測関数列 (f_n) を

$$f_n(x) = 1_{A_n}(x)\nu(x, B_n)$$

で定義すれば，単調収束定理により

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha(A_n \times B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n(x)\mu(dx) = \int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\mu(dx)$$

が成り立つ．$x \in X$ を固定すれば，$y \mapsto 1_{A_n}(x)1_{B_n}(y)$ によって非負の可測関数列が定まるから，単調収束定理により

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n}(x)\nu(x, B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_Y 1_{A_n}(x)1_{B_n}(y)\nu(x, dy) = \int_Y \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n}(x)1_{B_n}(y)\nu(x, dy)$$

が成立．ここで，仮定より

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n}(x)1_{B_n}(y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{C_n}(x, y) = 1_C(x, y) = 1_A(x)1_B(y)$$

となるから，

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = \int_Y 1_A(x)1_B(y)\nu(x, dy) = 1_A(x) \int_Y 1_B(y)\nu(x, dy) = 1_A(x)\nu(x, B)$$

である．したがって

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha(C_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha(A_n \times B_n) = \int_X 1_A(x)\nu(x, B)\mu(dx) = \alpha(A \times B) = \alpha(C)$$

となり α は $\mathscr{S}$ 上で可算加法的である. □

注意 A.6.3. 命題 A.6.2 は Carathéodory の拡張定理を用いているから，σ-有限性などがないと拡張の一意性は保証されない．これ以降，「命題 A.6.2 で構成された測度」などと言った場合，外測度を用いて作られた[*20]測度を表すことにする．これは積測度の非対称バージョンと考えればよい．

命題 A.6.4. $(X, \mathscr{A})$ と $(Y, \mathscr{B})$ を可測空間とする.

(i) $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ とする．任意の $x \in X$ に対して E の x-セクション E_x は $\mathscr{B}$-可測であり，任意の $y \in Y$ に対して y-セクション E^y は $\mathscr{A}$-可測である.

(ii) $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ を $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$-可測であるとする．このとき，任意の $x \in X$ に対して $y \mapsto f(x, y)$ は $\mathscr{B}$-可測であり，任意の $y \in Y$ に対して $x \mapsto f(x, y)$ は $\mathscr{A}$-可測である.

(iii) $\nu : X \times \mathscr{B} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ を核とし，測度 $\nu(x, \cdot)$ は（x について）一様に σ-有限であるとする．（i.e. $\mathscr{B}$ の元の列 (B_n) で $X = \bigcup_n B_n$ かつ任意の $x \in X$ に対して測度 $\nu(x, B_n) < +\infty$ となるものが存在する.）$E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ とすれば，写像 $x \mapsto \nu(x, E_x)$ は $\mathscr{A}$-可測である.

[*20] すなわち，Carathéodory の拡張定理の証明で実際に構成するもの.

(iv) μ を $(X, \mathscr{A})$ 上の σ-有限測度とし，λ を命題 A.6.2 で存在の保証された $(X \times Y, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B})$ 上の測度とする．このとき (iii) と同様の仮定の下で，

$$\lambda(E) = \int_X \left(\int_Y \nu(x, E_x) \right) \mu(dx)$$

が成り立つ．

(v) (iii) と同様の仮定の下で，$\lambda(E) < +\infty$ なら $\nu(x, E_x)$ は μ-可積分であり，さらに

$$\lambda(E) = \int_X \left(\int_Y \nu(x, E_x) \right) \mu(dx)$$

が成立．

証明. (i) E_x の可測性を示す．

$$\begin{aligned} \mathscr{S} &= \{A \times B \subset X \times Y \mid A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\} \\ \mathscr{E} &= \{E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \mid \text{任意の } x \in X \text{ に対して } E_x \text{ は } \mathscr{B}\text{-可測となる.}\} \end{aligned}$$

とおく．$E = A \times B$ $(A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B})$ の時は $E_x = B \in \mathscr{A}$ より $\mathscr{S} \subset \mathscr{E}$ である．$\mathscr{E}$ が σ-代数であることを示せば $\mathscr{E} = \sigma(\mathscr{S}) = \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ となり主張が示される．

明らかに $X \times Y \in \mathscr{E}$ である．$E \in \mathscr{E}$ とすれば，

$$(X \times Y \setminus E)_x = Y \setminus E_x \in \mathscr{E}$$

である．また，$(E^n)_{n \in \mathbb{N}}$ を $\mathscr{E}$ の列とすれば，

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E^n \right)_x = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E^n_x \in \mathscr{B}$$

も成立．よって $\mathscr{E}$ は σ-代数である．

E^y の可測性も同様に示される．

(ii) (i) より任意の $B \in \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$ に対して

$$\begin{aligned} \{x \in X \mid f(x, y) \in B\} &= f^{-1}(B)_y \in \mathscr{A} \\ \{y \in Y \mid f(x, y) \in B\} &= f^{-1}(B)_x \in \mathscr{B} \end{aligned}$$

である．

(iii) まずは ν が有限値として示す．(i) の結果により，任意の $x \in X$ と $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ に対して $\nu(x, E_x)$ は well-defined であることに注意する．

$$\begin{aligned} \mathscr{S} &= \{A \times B \subset X \times Y \mid A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\} \\ \mathscr{E} &= \{E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \mid \text{写像 } x \mapsto \nu(x, E_x) \text{ は } \mathscr{B}\text{-可測となる.}\} \end{aligned}$$

とする．$\mathscr{S}$ は明らかに π 系であるから，$\mathscr{E}$ が $\mathscr{S}$ を含む λ-系であることを示せば，π-λ 定理により $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} = \sigma(\mathscr{S}) = \mathscr{E}$ となる．

$E = A \times B \in \mathscr{S}$ の時は $\nu(x, E_x) = \nu(x, B)$ であるから，ν が核であるとの仮定により $x \mapsto \nu(x, B)$ は $\mathscr{A}$-可測となる．これより $\mathscr{S} \subset \mathscr{E}$ である．次に $\mathscr{E}$ が λ-系であることを示そう．$X \times Y \in \mathscr{E}$ は明らかである．$E, F \in \mathscr{E}$ かつ $E \subset F$ とすれば，

$$\nu(x, (F \setminus E)_x) = \nu(x, F_x \setminus E_x) = \nu(x, F_x) - \nu(x, F_x)$$

であるから，$x \mapsto \nu(x, (F \setminus E)_x)$ の可測性も分かる．よって $F \setminus E \in \mathscr{E}$ である．(E^n) を $\mathscr{E}$ の元の増大列，$E = \bigcup_n E^n$ とすれば，任意の x に対して

$$\nu(x, E_x) = \lim_{n \to \infty} \nu(x, E_x^n)$$

が成り立つ．よって $x \mapsto \nu(x, E_x)$ は $\mathscr{B}$-可測であり，$E \in \mathscr{E}$ となる．以上より $\mathscr{E}$ が λ-系であることが分かり，$\mathscr{E} = \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ が示された．

ν が一様に σ-有限なる場合を考えよう．$(Y^{(n)})$ を $\mathscr{B}$ の元の列で $\bigsqcup_n Y^{(n)} = Y$ かつ任意の $x \in X$ に対して $\nu(x, Y^{(n)}) < \infty$ となるものとする．各 ν に対して

$$\nu^n(x, B) := \nu(x, B \cap Y^{(n)}), \quad x \in X,\ B \in \mathscr{B}$$

と置けば，$\nu^n : X \times \mathscr{B} \to \mathbb{R}_+$ は有限値の核を定める．前半の議論により，任意の $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ に対して $x \mapsto \nu^n(x, E_x)$ は $\mathscr{B}$-可測である．いま

$$\nu(x, E_x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(x, E_x \cap Y^{(n)}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu^n(x, E_x)$$

であることに注意すれば，写像 $x \mapsto \nu(x, E_x)$ も $\mathscr{B}$ 可測になることが分かる．

(iv) (iii) より

$$x \mapsto \nu(x, C_x) = \int_Y 1_C(x, y) \nu(x, dy)$$

は非負の $\mathscr{B}$ 可測関数となるから，μ による積分が存在することを注意しておく．$\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ 上の関数 α を

$$\alpha(C) = \int_X \left(\int_Y 1_C(x, y) \nu(x, dy) \right) \mu(dx)$$

によって定めれば，α は明らかに $\overline{\mathbb{R}}_+$-値測度となる．したがって，測度 λ と α が等しいことを示せば良いことになる．

$$\mathscr{S} = \{A \times B \subset X \times Y \mid A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\}$$

とすれば $\mathscr{S}$ は π-系で $\sigma(\mathscr{S}) = \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ である．今，λ と α は共に σ-有限測度だから，特に $\mathscr{S}$ 上で λ と α が一致することを示せばよい．これは λ の定義より明らかである．

(v) $\lambda(E) < +\infty$ を仮定すれば，

$$C_n = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i^n \times B_i^n, \quad A_i^n \in \mathscr{A},\ B_i^n \in \mathscr{B}$$

という形の集合で $E \subset C_n$ かつ $\lambda(C_n) \leq \lambda(E) + 1/n$ なるものが存在する．したがって

$$\begin{aligned}
\int_X \nu(x, E_x) \mu(dx) &\leq \int_X \nu(x, (C_n)_x) \mu(dx) \quad (\because E \subset C_n \text{ から分かる}) \\
&= \int_X \sum_i 1_{A_i^n} \nu(x, B_i^n) \mu(dx) \\
&= \lambda(C_n) \quad (\because C_n \text{ の形から示される}) \\
&\leq \lambda(E) + \lambda(C_n \setminus E) \\
&\leq \lambda(E) + \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

これより $\nu(x, E_x)$ の可積分性と

$$\int_X \nu(x, E_x)\mu(dx) \leq \lambda(E) \tag{A.6}$$

が分かる．先ほどの議論から $\nu(x, (C_n)_x)$ も可積分であることがわかり，μ-a.e. x に対して $\nu(x, (C_n)_x)$ は有限値となる．したがって $C = \bigcap_n C_n$ とすれば，

$$\lim_{n\to\infty} \nu\left(x, (C_n)_x\right) = \nu\left(x, C_x\right) \quad \mu\text{-a.e.}$$

が成り立つ．優収束定理から[21]，

$$\begin{aligned}
\lambda(C) &= \lim_{n\to\infty} \lambda(C_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X \nu(x, (C_n)_x)\mu(dx) \quad (\because C_n \text{ の形から}) \\
&= \int_X \lim_{n\to\infty} \nu(x, (C_n)_x)\mu(dx) \\
&= \int_X \nu(x, C_x)\mu(dx)
\end{aligned}$$

がわかる．(C_n) の定義より，$\lambda(C) = \lambda(E)$ である．(A.6) の評価と合わせれば，

$$\int_X \nu(x, E_x) \leq \lambda(E) = \int_X \nu(x, C_x)\mu(dx)$$

がわかる．これより，あとは

$$\int_X \nu(x, E_x)\mu(dx) \geq \int_X \nu(x, C_x)\mu(dx)$$

を示せばよいことがわかる．いま $\nu(x, E_x)$ は a.e. で有限だから，

$$\nu(x, C_x) - \nu(x, E_x) = \nu(x, (C \setminus E)_x) \quad \text{a.e.}$$

となり，$\nu(x, (C \setminus E)_x)$ は a.e. で有限な $\mathscr{A}$ 可測関数である．このとき

$$\int_X \nu(x, (C \setminus E)_x)\mu(dx) = \int_X \nu(x, C_x)\mu(dx) - \int_X \nu(x, E_x)\mu(dx)$$

であるから，

$$\int_X \nu(x, (C \setminus E)_x)\mu(dx) = 0$$

を示せばよい．再び (A.6) の評価により

$$\int_X \nu(x, (C \setminus E)_x)\mu(dx) \leq \lambda(C \setminus E) = 0$$

となることがわかるから[22]，実際これは成り立っている． □

定理 A.6.5. $(X, \mathscr{A})$ と $(Y, \mathscr{B})$ を可測空間とし，測度 $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ と一様に σ-有限な核 $\nu : X \times \mathscr{B} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ が与えられているものとする．さらに，λ を命題 A.6.2 で存在の保証される $(X \times Y, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B})$ 上の測度としよう．

(i) $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ は $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ 可測関数で，任意の x に対して $y \mapsto f(x, y)$ は $\nu(x, \cdot)$-可積分であるとする．

---

[21] $x \mapsto \nu(x, (C_1)_x)$ を優関数と思う．

[22] 先ほどの E を $C \setminus E$ で置き換えればよい．

(a) 写像 $x \mapsto \int_Y f(x,y)\nu(x,dy)$ は $\mathscr{A}$-可測である．

(b) f が λ-可積分なら，(a) の関数は μ-可積分である．

(c) (b) の条件のもとで，次の等式が成立つ：

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\lambda(d(x,y)) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\nu(x,dy)\right)\mu(dx).$$

(ii) μ は σ-有限であるとする．このとき，任意の $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$-可測関数 $f : X\times Y \to \overline{\mathbb{R}}_+$ に対して

(a) 写像 $x \mapsto \int_X f(x,y)\nu(x,dy)$ は $\mathscr{A}$-可測である．

(b) 次の積分のいずれかが有限ならば，もう一方も有限で値は等しく，一方が無限ならばもう一方も無限である，という意味において以下の等式が成立：

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\lambda(d(x,y)) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\nu(x,dy)\right)\mu(dx)$$

証明．(i) $f = 1_E$ の形の時は，命題 A.6.4 の (v) より (a), (b), (c) ともに明らかである．f が非負であるとき，単関数列 (s^n) を f を下から一様近似するように選ぶ．各単関数は

$$s^n = \sum_{i=1}^{m_n} a_i^n 1_{E_i^n}$$

という表現を持つとしよう．この表現において $(E_i^n)_i$ は互いに交わらないとしてよい．このとき，任意の x, n, i に対して

$$\nu(x,(E_i^n)_x) = \int_Y 1_{E_i^n}(x,y)\nu(x,dy) \le \int_Y f(x,y)\nu(x,dy)$$

および

$$\lambda(E_i^n) = \int_{X\times Y} 1_{E_i^n}(x,y)\lambda(d(x,y)) \le \int_{X\times Y} f(x,y)\lambda(d(x,y))$$

が成り立つ．したがって，任意の $1_{E_i^n}$ に対して (a), (b) および (c) が成立し，さらに積分の線形性より各 s^n に対しても成立する．単調収束定理を用いれば f についても成り立つことが分かる．f が非負とは限らないといは $f = f^+ - f^-$ という分解を考えればよい．

(ii) $f = 1_E$ の形の時は，命題 A.6.4 の (iv) より明らかである．一般の f については単関数で下から近似すればよい． □

直積測度に関する Fubini-Tonelli の定理と同じように，先ほどの幾つかの命題の完備化バージョンも存在するがここではそれについては述べない．

A.7 有限変動関数

$I = [a,b]$ を $\mathbb{R}$ の閉区間とし，$\Pi = \Pi(I)$ で I の分割の全体を表す．$\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ に対して

$$|\pi| = \sup_{1\le i\le n} |x_i - x_{i-1}|$$

定める．

定義 A.7.1. E を $\mathbb{R}$ の部分集合とし，$I \subset E$ を有界閉区間とする．関数 $f : E \to \mathbb{R}$ と $\pi \in \Pi(I)$ に対して

$$V(f, I, \pi) = \sum_{x_i, x_{i-1} \in \pi} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

と定義する．族 $(V(f, I, \pi))_{\pi \in \Pi(I)}$ が有界となるとき，f は I 上で有限変動または有界変動であるといい，

$$V(f, I) = \sup_{\pi \in \Pi(I)} V(f, I, \pi)$$

を f の I での全変動という．任意のコンパクト区間 $I \subset E$ 上で有限変動となるとき，f は局所有限変動であるという．

$$\sup\{V(f; I) \mid I \subset E \text{ はコンパクトな区間}\} < +\infty$$

のとき，f は（E 上）有限変動であるという．f の E 上での全変動を $V(f, E)$ で表す．

$I = [a, b]$ の時，$V(f, [a, b])$ を $V_a^b(f)$ とも書く．以下では主に有界閉区間 $[a, b]$ 上の有限変動関数について調べるが，これらの結果のほとんどは $[a, \infty[$ 上の局所有限変動関数についても成り立つことが容易に確かめられるだろう．

命題 A.7.2. f, g を $[a, b]$ 上定義された実数値関数，$\alpha \in \mathbb{R}$ とすれば

$$V_a^b(f + g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g), \quad V_a^b(\alpha f) = |\alpha| V_a^b(f)$$

が成立[*23]．

証明．$\pi \in \Pi([a, b])$ とすれば，三角不等式より

$$\begin{aligned}
V(f + g, [a, b], \pi) &= \sum_{\pi} |f(x_i) + g(x_i) - \{f(x_{i-1}) + g(x_{i-1})\}| \\
&\leq \sum_{\pi} \{|f(x_i) - f(x_{i-1})| + |g(x_i) - g(x_{i-1})|\} \\
&= \sum_{\pi} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{\pi} |g(x_i) - g(x_{i-1})| \\
&= V(f, [a, b], \pi) + V(g, [a, b], \pi)
\end{aligned}$$

である．π について上限を取れば

$$V_a^b(f + g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g)$$

が成立．また

$$V(\alpha f, I, \pi) = \sum_{\pi} |\alpha f(x_i) - \alpha f(x_{i-1})| = |\alpha| \sum_{\pi} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = |\alpha| V(f, I, \pi)$$

で π についての上限を考えれば後半の主張も分かる． □

命題 A.7.3. f を $[a, b]$ 上の有界変動関数とする．

(i) f が単調増加ならば $V(f, I) = f(b) - f(a)$，単調減少ならば $V(f, I) = f(a) - f(b)$．

[*23] これより，$f \mapsto V_a^b(f)$ は $[a, b]$ 上の有界変動関数の空間にセミノルムを与える．

(ii) $c \in]a,b[$ とすれば

$$V(f,[a,b]) = V(f,[a,c]) + V(f,[c,b]).$$

(iii) 関数 $[a,b] \ni x \mapsto V(f,[a,x]) \in \mathbb{R}$，$x \mapsto V(f,[a,x]) + f(x)$ および $x \mapsto V(f,[a,x]) - f(x)$ は単調増加である．

(iv) 関数 $x \mapsto V(f,[a,x])$ が $x_0 \in [a,b[$ で右連続（$x_0 \in]a,b]$ で左連続）であることは f が x_0 で右連続（左連続）であることと同値．

(v) f は二つの単調増加関数 f_1, f_2 によって $f = f_1 - f_2$ と表現される．この時 f_1, f_2 は特に $V(f,[a,x]) = f_1(x) + f_2(x)$ を満たすように取ることが出来て，この場合の分解は一意である．

(vi) 有界変動関数 f は任意の点で右極限と左極限を持つ．特に f が右連続なら càdlàg である．

証明．(i) f が単調なら，任意の分割 $\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ に対して

$$V(f,I,\pi) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \{f(x_i) - f(x_{i-1})\} = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a)$$

であるから，sup をとっても $V(f,I) = f(b) - f(a)$ となる．f が単調減少の場合は $-f$ は単調増加なので，(i) により

$$V(f,I) = V(-f,I) = -f(b) - (-f(a)) = f(a) - f(b)$$

が分かる．

(ii) $a < c < b$ とする．$\pi \in \Pi([a,c])$ および $\pi' \in \Pi([c,b])$ とすれば，$\pi \cup \pi'$ は $[a,b]$ の分割を定める．

$$\begin{aligned}
V(f,[a,c],\pi) + V(f,[c,b],\pi') &= \sum_{\pi} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{\pi'} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\
&= \sum_{\pi \cup \pi'} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\
&= V(f,[a,b],\pi \cup \pi') \\
&\leq V(f,[a,b])
\end{aligned}$$

$\pi \in \Pi([a,c])$ と $\pi' \in \Pi([c,b])$ それぞれについて上限を考えれば

$$V(f,[a,c]) + V(f,[c,b]) \leq V(f,[a,b])$$

が成立．$\pi = \{x_i\}$ を $[a,b]$ の分割とすれば，$\pi_1 = \{x_i \wedge c\}$ と $\pi_2 = \{x_i \vee c\}$ はそれぞれ $[a,c]$ と $[c,b]$ の分割を定めるから，

$$\begin{aligned}
V(f,[a,b],\pi) &= \sum_{\pi} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\
&= \sum_{\pi_1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{\pi_2} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\
&\leq V(f,[a,c]) + V(f,[c,b])
\end{aligned}$$

が成り立つ．$\pi \in \Pi([a,b])$ に関する上限を取れば

$$V(f,[a,b]) \leq V(f,[a,c]) + V(f,[c,b])$$

も分かる．したがって

$$V(f,[a,b]) = V(f,[a,c]) + V(f,[c,b]).$$

(iii) $x<y$ とすれば (ii) より

$$V(f,[a,y]) - V(f,[a,x]) = V(f,[x,y]) \geq |f(y)-f(x)| \geq f(y)-f(x) \tag{A.7}$$

が成り立つから，

$$V(f,[a,y]) - V(f,[a,x]) \geq 0$$

と

$$V(f,[a,y]) - f(y) \geq V(f,[a,x]) - f(x)$$

が示される．(A.7.4) 最後の辺で符号を入れ替えれば

$$V(f,[a,y]) + f(y) \geq V(f,[a,x]) + f(x)$$

も分かる．

(iv) 右連続性の場合を示す．(A.7) より

$$V(x+\varepsilon) - V(x) \geq |f(x+\varepsilon) - f(x)|$$

であるから，V の右連続点が f の右連続点になっていることが直ぐに分かる．$x \in [a,b[$ で f が右連続であるとしよう．このとき，ある $\delta(\varepsilon)>0$ が存在して $0<h<\delta(\varepsilon)$ ならば $|f(x+h)-f(x)| \leq \varepsilon/2$ となる．全変動の定義より，適当な $\pi^\varepsilon \in \Pi([x,b])$ をとれば

$$|V(f,[x,b]) - V(f,[x,b],\pi^\varepsilon)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成立．$0<h<|\pi^\varepsilon|$ とすれば x と $x+h$ の間には π^ε の点はないから，$\widetilde{\pi}^{\varepsilon,h} := \pi^\varepsilon \cup \{x+h\} \setminus \{x\}$ は $[x+h,b]$ の分割を定める．$0<h<|\pi^\varepsilon| \vee \delta(\varepsilon)$ とすれば

$$\begin{aligned}
&V(f,[a,x+h]) - V(f,[a,x]) \\
&= V(f,[x,x+h]) \\
&= V(f,[x,b]) - V(f,[x+h,b]) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + V(f,[x,b],\pi^\varepsilon) - V(f,[x+h,b]) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + |f(x+h)-f(x)| + V(f,[x+h,b],\widetilde{\pi}^{\varepsilon,h}) - V(f,[x+h,b]) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + |f(x+h)-f(x)| < \varepsilon
\end{aligned}$$

となる．したがって，V は x で右連続である．左連続の場合も同様に示される．

(v)

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) \tag{A.8}$$
$$V(f,[a,x]) = f_1(x) + f_2(x) \tag{A.9}$$

を満たすような f_1, f_2 があったとすれば，(A.8)+(A.9) および (A.8)−(A.9) により

$$f_1 = \frac{V(f,[a,x]) + f(x)}{2}, \quad f_2 = \frac{V(f,[a,x]) - f(x)}{2}$$

となる．(iii) よりこれらは実際に単調増加である．

(vi) (v) より $f = f_1 - f_2$ と表現でき，f_1, f_2 は単調増加だから各点で右極限，左極限を持つ．よって f も各点で右極限，左極限を持つ．後半の主張は明らか． □

命題 A.7.3.v において，$f = f_1 - f_2$，f_1, f_2 は単調増加となるような分解自体は一意ではない．実際，$f_1(x) = V(f, [a, x])$ および $f_2 = V(f, [a, x]) - f(x)$ はその条件を満たしている．

補題 A.7.4. (f_n) は $I = [a, b]$ 上の関数列とし，$f : I \to \mathbb{R}$ に各点収束するものとする．このとき，

$$V(f, I) \leq \liminf_{n\to\infty} V(f_n, I)$$

が成立する．

補題 A.7.4 の言わんとしていることは，$f \mapsto V(f, I)$ がある種の下半連続性をもつというようなことである．

証明. $\pi \in \Pi(I)$ とすれば，

$$\begin{aligned} V(f, I, \pi) &= \sum_{\pi} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &\leq \sum_{\pi} |f_n(x_i) - f_n(x_{i-1})| + 2 \sum_{x_i\in\pi} |f(x_i) - f_n(x_i)| \\ &= V(f_n, I, \pi) + 2 \sum_{x_i\in\pi} |f(x_i) - f_n(x_i)| \end{aligned}$$

なる評価が成り立つ．(f_n) は f に各点収束するから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分大きな $N(\pi, \varepsilon)$ を取れば

$$2 \sum_{x_i\in\pi} |f(x_i) - f_n(x_i)| < \varepsilon \quad \text{for any } k \geq N(\pi, \varepsilon)$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned} V(f, I, \pi) &\leq \inf_{n\geq N(\pi,\varepsilon)} V(f_n, I, \pi) + \varepsilon \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} V(f_n, I, \pi) + \varepsilon \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} V(f_n, I) + \varepsilon \end{aligned}$$

が任意の $\pi \in \Pi(I)$ に対して成立．π について sup を取れば

$$V(f, I) \leq \liminf_{n\to\infty} V(f_n, I) + \varepsilon$$

となるが，ε は任意の正の実数だったから

$$V(f, I) \leq \liminf_{n\to\infty} V(f_n, I)$$

が分かる． □

命題 A.7.5. f を $I = [a, b]$ 上の右連続な有限変動関数，(π_n) を $\Pi(I)$ の列で $|\pi_n| \to 0$ なる列とする．このとき，

$$\sum_{\pi_n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \xrightarrow[n\to\infty]{} V(f, I)$$

が成立．

証明.

$$f_n = \sum_{x_i, x_{i-1}\in\pi_n} f(x_i) 1_{]x_{i-1}, x_i]}$$

とすれば

$$V(f_n, I) = \sum_{x_i, x_{i-1} \in \pi_n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = V(f, I, \pi_n)$$

であり，f の右連続性より $f_n \to f$ が各点収束の意味で成立．したがって補題 A.7.4 により

$$V(f, I) \leq \liminf_{n\to\infty} V(f_n, I) = \liminf_{n\to\infty} V(f, I, \pi_n)$$

が成り立つ．また全変動の定義より

$$\limsup_{n\to\infty} V(f, I, \pi_n) \leq \sup_n V(f, I, \pi_n) \leq \sup_{\pi \in \Pi(I)} V(f, I, \pi) = V(f, I)$$

となるから，

$$V(f, I) \leq \liminf_{n\to\infty} V(f, I, \pi_n) \leq \limsup_{n\to\infty} V(f, I, \pi_n) \leq V(f, I)$$

が成立．すなわち

$$\sum_{x_i, x_{i-1} \in \pi_n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \xrightarrow[n\to\infty]{} V(f, I)$$

である． □

命題 A.7.6. f を $[a, b]$ 上の càdlàg な有界変動関数とし，$V(x) = V(f; [a, x])$ と定める．

(i) 任意の $x \in [a, b]$ に対して

$$\sum_{a<t\leq x} |\Delta f(t)| \leq V(x) - V(a)$$

が成り立つ．特に，級数 $\sum_{a<t\leq x} \Delta f(t)$ は絶対収束する．

(ii) $|\Delta f(x)| = \Delta V(x)$

証明．(i)

$$D^x = \{y \in]a, x] \mid y \text{ は } f \text{ の不連続点.}\}$$
$$D^x_n = \left\{ y \in D^x \mid \Delta f(y) > \frac{1}{n} \right\}$$

とおけば，$\bigcup_n D_n = D$ であり各 D_n は有限集合である[*24]．したがって，数列 $n \mapsto \sum_{D_n} |\Delta f(y)|$ が有界であることを示せばよろしい．f は単調増加であるとする．D_n の元を大きさの順に並び替えて $x^n_0, x^n_2, \dots, x^n_{k(n)}$ とすれば，

$$\sum_{x\in D_n} |\Delta f(x)| = \sum_{i=0}^{k(n)} f(x^n_i) - f(x^n_i -) \leq \sum_{i=0}^{k(n)} f(x^n_i) - f(x^n_{i-1}) = f(x^n_{k(n)}) - f(x^n_0) \leq f(x) - f(a)$$

が任意の n に対して成立．したがって

$$\sum_{x\in D} |\Delta f(x)| \leq f(x) - f(a) < +\infty$$

が分かる．f が一般の有界変動関数の時は，増加関数による分解 $f = f_1 - f_2$ より

$$\sum_{x\in D} |\Delta f(x)| \leq \sum_{x\in D} \Delta f_1(x) + \sum_{x\in D} \Delta f_2(x) \leq f_1(x) - f_1(a) + f_2(x) - f_2(a) = V(x) - V(a)$$

[*24] 命題**??**.

であることから分かる．

(ii)

$$|\Delta f(x)| \le \Delta V(x)$$

は明らかである．命題 A.7.3(iv) と同様の評価により，任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分小さい $\delta > 0$ をとれば

$$V(x) - V(x-\delta) = V(f;[x-\varepsilon, x]) \le |f(x) - f(x-\delta)| + \varepsilon$$

なる評価が成り立つ．$\delta \to 0$ とすれば

$$\Delta V(x) \le |\Delta f(x)| + \varepsilon$$

となり，ε は任意の正の実数だったから

$$\Delta V(x) \le |\Delta f(x)|$$

が分かる． □

$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ を càdlàg 有限変動関数とすれば，命題 A.7.6 より

$$f^{\mathrm{d}}(x) = \sum_{a<t\le t} \Delta f(t)$$

により関数 $f^{\mathrm{d}}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ が定まる．また，$f^{\mathrm{c}} = f - f(a) - f^{\mathrm{d}}$ と定義する．

命題 A.7.7. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ を càdlàg 有限変動関数とし，f^{d}, f^{c} を上で定義したものとする．このとき関数 f^{c} は連続であり，f^{d} は càdlàg で $\Delta f^{\mathrm{d}} = \Delta f$ を満たす．さらに f^{c} と f^{d} はともに有限変動であり，

$$V(f^{\mathrm{d}};[a,x]) = \sum_{a<s\le x} |\Delta f(s)|$$
$$V(f;[a,x]) = V(f^{\mathrm{d}};[a,x]) + V(f^{\mathrm{c}};[a,x])$$

が成り立つ．すなわち，$x \mapsto V(f;[a,x])$ の連続部分は $x \mapsto V(f^{\mathrm{c}};[a,x])$ であり，純不連続部分は $x \mapsto V(f^{\mathrm{d}};[a,x])$ である．

有限変動関数 f に対して定義された f^{c} を f の連続部分 (continuous part)，f^{d} を純不連続部分 (purely discontinuous part) と呼ぶ．$f^{\mathrm{c}} = 0$ のとき，有限変動関数は純不連続 (purely discontinuous) であるという．

証明．**ステップ 1：f が càdlàg 増加関数の場合．** 任意の $t \in [a,b]$ で $\Delta f(t) \ge 0$ だから f^{d} は明らかに増加関数であり，

$$V(f^{\mathrm{d}};[a,x]) = f^{\mathrm{d}}(x) - f^{\mathrm{d}}(a) = \sum_{a<s\le x} \Delta f(s)$$

が成り立つ．また，$a \le y \le x \le b$ なら

$$f^{\mathrm{c}}(x) - f^{\mathrm{c}}(y) = f(x) - f(y) - (f^{\mathrm{d}}(x) - f^{\mathrm{d}}(y)) = f(x) - f(y) - \sum_{y<t\le x} \Delta f(t) \ge 0$$

なので[*25]，f^{c} も増加関数である．$f, f^{\mathrm{c}}, f^{\mathrm{d}}$ はどれも増加関数であるから，等式

$$f^{\mathrm{c}}(x) - f^{\mathrm{c}}(a) + \sum_{a<t\le x} \Delta f(t) = f(x) - f(a)$$

[*25] 最後の不等号は命題 A.7.6 よりわかる．

は

$$V(f;[a,x]) = V(f^{\mathrm{d}};[a,x]) + V(f^{\mathrm{c}};[a,x])$$

を表している．f^{d} は増加関数であるから，各点で右極限および左極限をもつ．これが右連続であることを示そう．$x \in [a,b]$ を固定すれば，命題 A.7.6 の (i) より任意の $x' \in [a,b]$ に対して

$$f^{\mathrm{d}}(x') - f^{\mathrm{d}}(x) = \sum_{a<t\leq x'} \Delta f(t) - \sum_{a<t\leq x} \Delta f(t) = \sum_{x<t\leq x'} \Delta f(t) \leq V(f;[a,x']) - V(f;[a,x])$$

が成り立つ．命題 A.7.3 より関数 $x' \mapsto V(f;[a,x'])$ は右連続なので，$x' \downarrow x$ とすることで f^{d} の右連続性がわかる．以上により f^{d} は càdlàg であり，よって $f^{\mathrm{c}} := f - f^{\mathrm{d}}$ もまた càdlàg である．また，今度は $x \in]a,b]$ を固定して $x'' \in [a,x[$ をとれば，

$$\Delta f(x) \leq \sum_{x''<t\leq x} \Delta f(x) = f^{\mathrm{d}}(x) - f^{\mathrm{d}}(x'') \leq V(f;[a,x]) - V(f;[a,x''])$$

が成り立つ．この式において極限をとれば

$$\Delta f(x) \leq f^{\mathrm{d}}(x) - f^{\mathrm{d}}(x-) \leq V(f;[a,x]) - \lim_{x''\uparrow\uparrow x} V(f;[a,x'']) = \Delta f(x)$$

を得る[*26]．これより $\Delta f(x) = \Delta f^{\mathrm{d}}(x)$ であって，

$$f^{\mathrm{c}}(x) - f^{\mathrm{c}}(x-) = f(x) - f(x-) - (f^{\mathrm{d}}(x) - f^{\mathrm{d}}(x-)) = \Delta f(x) - \Delta f(x) = 0$$

となるから f^{c} の連続性もわかる．

ステップ 2：f が一般の càdlàg 有限変動関数の場合． $f = f_1 - f_2$ という増加関数による標準的な分解を考えれば，f の分解 $f = f(a) + f^{\mathrm{c}} + f^{\mathrm{d}}$ に対して

$$\begin{aligned} f^{\mathrm{d}} &= \sum_{a<t\leq \cdot} \Delta f(t) = \sum_{a<t\leq \cdot} (\Delta f_1(t) - \Delta f_2(t)) = \sum_{a<t\leq \cdot} \Delta f_1(t) - \sum_{a<t\leq \cdot} \Delta f_2(t) = (f_1)^{\mathrm{d}} - (f_2)^{\mathrm{d}}, \\ f^{\mathrm{c}} &= f - f^{\mathrm{d}} = (f_1 - f_2) - ((f_1)^{\mathrm{d}} - (f_2)^{\mathrm{d}}) = (f_1 - (f_1)^{\mathrm{d}}) - (f_2 - (f_2)^{\mathrm{d}}) = (f_1)^{\mathrm{c}} - (f_2)^{\mathrm{c}}, \end{aligned}$$

が成り立つ．ステップ 1 での議論により $(f_1)^{\mathrm{d}}$ と $(f_2)^{\mathrm{d}}$ は càdlàg 増加関数だから，$f^{\mathrm{d}} = (f_1)^{\mathrm{d}} - (f_2)^{\mathrm{d}}$ は càdlàg 有限変動関数であり，

$$\Delta f^{\mathrm{d}} = \Delta((f_1)^{\mathrm{d}} - (f_2)^{\mathrm{d}}) = \Delta(f_1)^{\mathrm{d}} - \Delta(f_2)^{\mathrm{d}} = \Delta f_1 - \Delta f_2 = \Delta(f_1 - f_2) = \Delta f$$

となる．さらにステップ 1 より $(f_1)^{\mathrm{c}}$ と $(f_2)^{\mathrm{c}}$ は連続増加関数だから，$f^{\mathrm{c}} = (f_1)^{\mathrm{c}} - (f_2)^{\mathrm{c}}$ は連続有限変動関数である．ここからは f^{d} と f^{c} の全変動の具体的な値を調べよう．命題 A.7.2，命題 A.7.6 (i) およびこの証明の前半での議論により

$$\begin{aligned} V(f^{\mathrm{d}};[a,x]) &\leq V((f_1)^{\mathrm{d}};[a,x]) + V((f_2)^{\mathrm{d}};[a,x]) \\ &= \sum_{a<t\leq x} \Delta f_1(t) + \sum_{a<t\leq x} \Delta f_2(t) \\ &= \sum_{a<t\leq x} \Delta(f_1(t) + f_2(t)) \\ &= \sum_{a<t\leq x} \Delta V(f;[a,x]) \\ &= \sum_{a<t\leq x} |\Delta f(t)| \end{aligned}$$

*26 最後の等号は命題 A.7.6 の (ii) より．

が成り立つ．また $((f_i)^{\mathrm{d}})^{\mathrm{d}} = (f_i)^{\mathrm{d}}$ $(i = 1, 2)$ および[*27]命題 A.7.6 (ii) より，

$$\sum_{a<t\leq x} |\Delta f(t)| = \sum_{a<t\leq x} |\Delta f^{\mathrm{d}}(t)| \leq V(f^{\mathrm{d}}; [a, x])$$

も成立するので，

$$V(f^{\mathrm{d}}; [a, x]) = \sum_{a<t\leq x} |\Delta f(t)| = (f_1)^{\mathrm{d}} + (f_2)^{\mathrm{d}}$$

となる．$(f_1)^{\mathrm{c}}$ と $(f_2)^{\mathrm{c}}$ は a で 0 をとる増加関数なので，

$$V(f^{\mathrm{c}}; [a, x]) \leq V((f_1)^{\mathrm{c}}; [a, x]) + V((f_2)^{\mathrm{c}}; [a, x]) = (f_1)^{\mathrm{c}}(x) + (f_2)^{\mathrm{c}}(x)$$

を満たす．これより

$$\begin{aligned} V(f^{\mathrm{c}}; [a, x]) + V(f^{\mathrm{d}}; [a, x]) &\leq (f_1)^{\mathrm{c}}(x) + (f_2)^{\mathrm{c}}(x) + (f_1)^{\mathrm{d}}(x) + (f_2)^{\mathrm{d}}(x) \\ &= f_1(x) + f_2(x) \\ &= V(f; [a, x]) \end{aligned}$$

が成り立つ．逆向きの不等号

$$V(f; [a, x]) \leq V(f^{\mathrm{c}}; [a, x]) + V(f^{\mathrm{d}}; [a, x])$$

は命題 A.7.2 より明らかなので，

$$V(f; [a, x]) = V(f^{\mathrm{c}}; [a, x]) + V(f^{\mathrm{d}}; [a, x])$$

がわかる． □

A.8 Stieltjes 積分

この節では，Lebesgue-Stieltjes 積分に関する基本的な事項を扱う．

命題 A.8.1. $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ は非負かつ右連続な増加関数とする．このとき，$(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$ 上の測度 μ で

$$F(t) = \mu([0, t]), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

を満たすものが存在する．

証明．証明は Bogachev [2, Theorem 1.8.1] などを見よ． □

命題 A.8.1 において存在の保証される測度を，F に対応する (Lebesgue-)Stieltjes 測度という．命題 A.8.1 から，càdlàg な局所有界変動関数 F に対しても対応する Stieltjes 測度が存在することが容易に分かる．Borel 可測関数 $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ が $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ 上 $|\mu|$ -可積分であるとき， g の F による (Lebesgue-)Stieltjes 積分を

$$\int_A g(s)dF(s) := \int_A g(s)\mu(ds)$$

[*27] この命題の証明の「ステップ 1」からわかる．

と定義する．$]s,t]$ という形の区間上での積分は，特に

$$\int_{]s,t]} g(s)dF(s) = \int_s^t g(s)dF(s)$$

とも表記することにする．関数 $t \mapsto \int_{]0,t]} g\,dF$ を $g \bullet F$ と書くことにする．$g \bullet F$ はまた càdlàg な局所有界変動関数である．

命題 A.8.2 (部分積分公式)**.** F および G を càdlàg な局所有界変動関数とする．このとき，Stieltjes 積分に対して以下の等式が成り立つ．

$$\begin{aligned} F(t)G(t) - F(0)G(0) &= \int_{]0,t]} F(s)dG(s) + \int_{]0,t]} G(s-)dF(s) \\ &= \int_{]0,t]} F(s-)dG(s) + \int_{]0,t]} G(s-)dF(s) + \sum_{0<s\le t} \Delta F(s)\Delta G(s) \end{aligned}$$

証明. μ，ν をそれぞれ F と G が生成する Stieltjes 測度とし，$E = \{(s,u) \in [0,t]^2 \mid 0 \le s \le u \le t\}$ と定める．このとき，

$$(\mu \otimes \nu)([0,t]^2) = \mu([0,t])\nu([0,t]) = F(t)G(t) \tag{A.10}$$

が成立．一方

$$\begin{aligned} (\mu \otimes \nu)([0,t]^2) &= (\mu \otimes \nu)(E) + (\mu \otimes \nu)([0,t]^2 \setminus E) \\ &= \int_{[0,t]} \mu([0,u])\nu(du) + \int_{]0,t]} \nu\left([0,s[\right)\mu(ds) \\ &= \int_{[0,t]} F(u)dG(u) + \int_{]0,t]} G(s-)dF(s) \\ &= F(0)G(0) + \int_{]0,t]} F(s)dG(s) + \int_{]0,t]} G(s-)dF(s) \end{aligned} \tag{A.11}$$

であるから，(A.10)，(A.11) より

$$F(t)G(t) = F(0)G(0) + \int_{]0,t]} F(s)dG(s) + \int_{]0,t]} G(s-)dF(s)$$

となる．二つ目の等号は

$$\int_{]0,t]} F(s)dG(s) = \int_{]0,t]} \left(F(s-) + \Delta F(s)\right) dG(s) = \int_{]0,t]} F(s-)dG(s) + \sum_{0<s\le t} \Delta F(s)\Delta G(s)$$

から分かる．最後に，和 $\sum_{0<s\le t} \Delta F(s)\Delta G(s)$ が実際に収束していることを確かめておこう．F および G は有界変動なので，$]0,t]$ 上でのジャンプの和は収束する．（命題 A.7.6.）これよりジャンプの二乗和も収束する[*28]．したがって

$$\sum_{0<s\le t} |\Delta F(s)\Delta G(s)| \le \left(\sum_{0<s\le t} (\Delta F(s))^2\right)^{1/2} \left(\sum_{0<s\le t} (\Delta G(s))^2\right)^{1/2} < \infty$$

となり，$\sum_{0<s\le t} \Delta F(s)\Delta G(s)$ の絶対収束が示された． □

[*28] $l^1 \subset l^2$ ということである．

命題 A.8.3. $f \in C^1(\mathbb{R})$ とし，$A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ は càdlàg な有界変動関数とする．このとき $f \circ A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ はまた有界変動関数であり，

$$f(A_t) = f(A_0) + \int_{]0,t]} f'(A_{s-})dA_s + \sum_{0<s\le t} (\Delta f(A_s) - f'(A_{s-})\Delta A_s) \tag{A.12}$$

が成り立つ．

証明. $f(x) = x$ のとき，定理の主張は明らかに成立つ．関数 f に対して (A.12) が成り立つと仮定しよう[*29]．$F(x) = xf(x)$ とすれば，部分積分公式[*30]により

$$\begin{aligned}
&F(A_t) \\
&= A_t f(A_t) \\
&= A_0 f(A_0) + \int_{]0,t]} f(A_{s-})dA_s + \int_{]0,t]} A_{s-}df(A_s) + \sum_{0<s\le t} \Delta A_s \Delta f(A_s) \\
&= A_0 f(A_0) + \int_{]0,t]} f(A_{s-})dA_s + \int_{]0,t]} A_{s-}f'(A_s)dA_s \\
&\quad + \sum_{0<s\le t} A_{s-}\left(\Delta f(A_s) - f'(A_{s-})\Delta A_s\right) + \sum_{0<s\le t} \Delta A_s \Delta f(A_s) \\
&= A_0 f(A_0) + \int_{]0,t]} \left[f(A_{s-}) + A_{s-}f'(A_{s-})\right] dA_s \\
&\quad + \sum_{0<s\le t} \left[A_{s-}\Delta f(A_s) + f(A_{s-})\Delta A_s + \Delta A_s \Delta f(A_s) - \left(f(A_{s-} + A_{s-}f'(A_{s-}))\right)\Delta A_s\right] \\
&= F(A_0) + \int_{]0,t]} F'(A_{s-})dA_s + \sum_{0<s\le t} \left[\Delta F(A_s) - F'(A_{s-})\Delta A_s\right]
\end{aligned}$$

となる．よって $F(x) = xf(x)$ に対しても (A.12) は成立．したがって，f が多項式関数の時には (A.12) が成り立つことが分かる．一般の $f \in C^1$ については，多項式で近似すればよい． □

ここからは時間変更についての基礎的なテクニックを扱う．$A : \mathbb{R}_+ \to]-\infty, \infty]$ は右連続な増加関数とする．$s \in \mathbb{R}_+$ に対して

$$C(s) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid A(t) > s\} \tag{A.13}$$

と定める[*31]．

補題 A.8.4. (A.13) によって定義される関数 $C : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ は右連続な増加関数で，$C_{s-} = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid A(t) \ge s\}$ が成立．さらに，$A(C(s)) \ge s$ であり，$A(t) = \inf\{s \in \mathbb{R}_+ \mid C(s) > t\}$ が成り立つ．

証明. C が増加関数であることは明らかである．$C(s)$ の定義より，$t_n \downarrow C_s$ かつ $A_{t_n} > s$ なるものが存在する．したがって

$$A(C_s) = \lim_{n\to\infty} A(t_n) \ge s$$

が分かる．

[*29] よって $f \circ A$ は càdlàg な有界変動関数である．
[*30] 命題 A.8.2.
[*31] ただし $\inf \emptyset = +\infty$ と考える．

$\delta > 0$ とすれば

$$\{t \in \mathbb{R} \mid A(t) \geq s\} \subset \{t \in \mathbb{R}_+ \mid A(t) > s - \delta\}$$

であるから，$C(s-\delta) \leq \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid A(t) \geq s\}$ が成立．$\delta \downarrow\downarrow 0$ とすれば $C(s-) \leq \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid A(t) \geq s\}$ を得る．また $\delta > 0$ に対して $A(C(s-)) \geq A(C(s-\delta)) \geq s - \delta$ だから，$A(C(s-)) \geq s$ となる．したがって

$$\inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid A(t) \geq s\} \leq C(s-)$$

も成り立つ．

$$\begin{aligned} C(s) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid A_t > s\} &= \inf\left(\bigcup_{\varepsilon>0}\{t \in \mathbb{R}_+ \mid A_t > s + \varepsilon\}\right) \\ &= \inf_{\varepsilon>0} \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid A_t > s + \varepsilon\} = \inf_{\varepsilon>0} C_{s+\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} C(s+\varepsilon) \end{aligned}$$

となるから，C は右連続である．

$C(s) > t$ なら $t \notin \{u \mid A(u) > s\}$ だから，$A_t \leq s$ である．よって

$$A_t \leq \inf\{s \in \mathbb{R}_+ \mid C(s) > t\} \tag{A.14}$$

が成立．一方，A の増加性より

$$C(A_t) = \inf\{u \in \mathbb{R}_+ \mid A_u > A_t\} \geq t$$

なので，$\varepsilon > 0$ に対して $C(A(t+\varepsilon)) \geq t + \varepsilon > t$ である．これより

$$A(t+\varepsilon) \geq \inf\{s \mid C_s > t\}$$

となるが，$\varepsilon \to 0$ とすれば A の右連続性より

$$A(t) \geq \inf\{s \mid C_s > t\} \tag{A.15}$$

を得る．(A.14)，(A.15) より

$$A(t) = \inf\{s \mid C_s > t\}$$

が示される． □

次の命題はある種の変数変換公式を与えている．

命題 A.8.5. $A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ は càdlàg 増加関数，$f : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ は Borel 関数とする．このとき，(A.13) で C を定めれば

$$\int_{[0,\infty[} f(u)dA(u) = \int_{[0,\infty[} f(C(s))1_{\{C(s)<\infty\}}(s)m(ds) \tag{A.16}$$

$$\int_{[0,\infty[} f(u)dA(u) = \int_{[0,\infty[} f(C(s-))1_{\{C(s-)<\infty\}}(s)m(ds) \tag{A.17}$$

が成り立つ．

証明．$f = 1_{[0,v]}$ の時は

$$\int_{[0,\infty[} 1_{[0,v]}(u)dA(u) = A(v)$$

である．一方

$$\begin{aligned}\int_{[0,\infty[} 1_{[0,v]}(C(s))1_{\{C(s)<\infty\}}m(ds) &= \int_{[0,\infty[} 1_{\{C(s)\le v\}}m(ds) \\ &= m(\{s\in\mathbb{R}_+ \mid C(s)\le v\}) \\ &= \sup\{s\in\mathbb{R}_+ \mid C(s)\le v\} \\ &= \inf\{s\in\mathbb{R}_+ \mid C(s)> v\} \\ &= A(v)\end{aligned}$$

となるから，

$$\int_{[0,\infty[} 1_{[0,v]}(u)dA(u) = \int_{[0,\infty[} 1_{[0,v]}(C(s))1_{\{C(s)<\infty\}}m(ds)$$

が成立．これより $f = 1_{]u,v]} = 1_{[0,v]} - 1_{[0,u]}$（$u < v$）に対して

$$\int_{[0,\infty[} 1_{]u,v]}(t)dA(t) = \int_{[0,\infty[} 1_{]u,v]}(C(s))1_{\{C(s)<\infty\}}m(ds)$$

が成り立つことも分かる．同様にして $f = 1_{]v,[\infty} = 1_{[0,\infty[} - 1_{[0,v]}$ 場合も成立する．$\mathscr{A}$ をこれらの区間の生成する集合代数とする．$\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ だから，単調族定理を用いれば任意の非負 Borel 関数に対して (A.16) が成り立つことが示される．$C(s)$ の不連続点は高々可算個だから $\{s \mid C(s) \neq C(s-)\}$ m-零集合である．したがって (A.16) より (A.17) が導かれる． □

(A.16) の右辺は

$$\int_{[0,\infty[} f(C(s))1_{\{C(s)<\infty\}}m(ds) = \int_{[0,A_\infty[} f(C(s))m(ds) \tag{A.18}$$

と書き直せることに注意しよう．実際，「$C(s) < \infty$」という主張は「$t \in \mathbb{R}_+$ で $A(t) > s$ なるものが存在する」と同値であり，これはさらに「$A_\infty = \sup_t A_t > s$」とも同値であることから (A.18) が従う．

命題 A.8.6. u を $[a, b]$ 上の連続な増加関数とし，f は $[u(a), u(b)]$ を含む集合上で定義された非負 Borel 可測関数とする．このとき

$$\int_{[a,b]} f(u(s))dA_{u(s)} = \int_{[u(a),u(b)]} f(t)dA_t$$

が成立する．ただし，左辺の積分は右連続な増加関数 $s \mapsto A_{u(s)}$ に対応する測度による積分である．

証明．

$$v_t = \inf\{s \mid u(s) > t\}$$

と定義すれば $u(v_t) = t$ で[*32] v は可測関数：$[u(a), u(b)] \to [a, b]$ を定める[*33]．μ_A で A に対応する測度を表し，ν で v の μ_A に関する像測度：$[a, b] \to \mathbb{R}$ とすることにする．このとき，像測度による積分の性質より

$$\int_{[a,b]} f(u(s))\nu(ds) = \int_{[u(a),u(b)]} f(u(v(t)))\mu_A(dt) = \int_{[u(a),u(b)]} f(t)\mu_A(dt) = \int_{[u(a),u(b)]} f(t)dA_t$$

[*32] u の連続性より従う．
[*33] このとき v は単射であり，u は全射である．

が成立．特に $[a,t] \subset [a,b]$ に対して

$$\nu([a,t]) = A(u(t)) - A(u(a)-)$$

が成立．よって ν は $A \circ u$ によって生成される Stieltjes 測度である[*34]． □

Stieltjes 積分についても，Gronwall の補題は成立する．

補題 A.8.7. (i) $g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を $g(0) = 0$ なる右連続な増加関数とし，$a \geq 0$ とする．Càdlàg な関数 $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が

$$f(t) \leq a + \int_0^t f(s-)dg(s) \quad \text{for } t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

を満たすならば，

$$f(t) \leq ae^{g(t)} \qquad \text{for all } t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

が成り立つ．

(ii) $g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ を局所有界変動関数とする．$f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ について

$$f(t) = \int_{]0,t]} f(s-)dg(s)$$

が成り立つなら，$f \equiv 0$ である．

証明. (i) 線形作用素 $\Lambda\colon D[0,\infty[\to D[0,\infty[$ を

$$\Lambda(h)(t) = \int_{]0,t]} h(s-)dg(s)$$

と定義する．このとき Λ^n は単調写像であることに注意する[*35]．

Λ について

$$\Lambda^n(1)(t) \leq \frac{g(t)^n}{n!}$$

が成り立つことを帰納法で示そう．$n = 1$ のときは

$$\Lambda(1)(t) = \int_{]0,t]} dg(s) = g(t)$$

が成立．$\Lambda^n(1)(t) = g(t)^n/n!$ が成り立つと仮定すれば，Stieltjes 積分についての変数変換公式より

$$\begin{aligned}
\Lambda^{n+1}(1)(t) = \Lambda\left(\Lambda^n(1)\right)(t) &= \int_{]0,t]} \Lambda^n(1)(s-)dg(s) \\
&= \frac{1}{n!}\int_{]0,t]} g(s-)^n dg(s) \\
&= \frac{g(t)^{n+1}}{(n+1)!} - \sum_{s\in]0,t]} \left(\Delta\frac{g(s)^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{g(s-)^n}{n!}\Delta g(s)\right) \\
&\leq \frac{g(t)^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

[*34] この定義だと $\nu(\{a\}) = A(u(a)) - A(u(a)-)$ になっているので，ここでの Stieltjes 測度の定義とは必ずしも一致しないが...ただ，本文中でこれを用いるのは $a = 0$, $u(a) = 0$ の場合だったはず．

[*35] ただし，$D[0,\infty[$ の順序は各点ごとの順序である．

となり[*36]，$n+1$ でも同様の不等式が成り立つ．

以上の議論から，

$$(\Lambda^n - \Lambda^{n+1})(f)(t) = \Lambda^n(f - \Lambda(f)) \leq \Lambda^n(a) \leq a\frac{g(t)^n}{n!}$$

が成り立つことが分かる．これより

$$(\Lambda - \Lambda^{n+1})(f)(t) \leq \sum_{k=1}^{n}(\Lambda^n - \Lambda^{n+1})(f)(t) \leq a\sum_{k=1}^{n}\frac{g(t)^k}{k!}$$

という評価が成り立つ．ここで

$$0 \leq \Lambda^n(f)(t) \leq \left(\sup_{s\in]0,t]}|f(s)|\right)\Lambda^n(1)(t) \leq \left(\sup_{s\in]0,t]}|f(s)|\right)\frac{g(t)^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

であることに注意すれば

$$\begin{aligned} f(t) &\leq a + \Lambda(f) = a + \Lambda(f) - \Lambda^{n+1}(f)(t) + \Lambda^{n+1}(f)(t) \\ &\leq a\sum_{k=0}^{n}\frac{g(t)^k}{(k+1)!} + \Lambda^{n+1}(f)(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} ae^{g(t)} \end{aligned}$$

となり，期待される不等式を得る．

(ii) $V(g)$ を g の全変動関数とすれば，仮定より

$$|f(t)| \leq \int_{]0,t]}|f(s-)|dV(g)(s)$$

が成立．(i) の結果から $|f| = 0$ が分かる． □

A.9 解析集合と Choquet 容量

本節では，He, Wang, and Yan [10] にしたがって解析集合の概念を導入する．

集合 X に対し，その冪集合を $\mathfrak{P}(X)$ で表す．集合 X, Y と部分集合族 $\mathscr{A} \subset \mathfrak{P}(X)$ および $\mathscr{B} \subset \mathfrak{P}(Y)$ が与えられているとする．このとき

$$\mathscr{A} \odot \mathscr{B} = \{A \times B \mid A \in \mathscr{A},\ B \in \mathscr{B}\}$$

と定義する[*37]．

定義 A.9.1. E を集合とし，$\mathscr{E} \subset \mathfrak{P}(E)$ とする．$\emptyset \in \mathscr{E}$ が成り立つとき，$\mathscr{E}$ は E 上の舗装 (paving) であるといい，$(E, \mathscr{E})$ を舗装集合 (paved set) という．

定義 A.9.2. $(F, \mathscr{F})$ は舗装集合，A は F の部分集合とする．ある空でないコンパクト距離付け可能空間 E と $B \in (\mathscr{F} \odot \mathscr{K}(E))_{\sigma\delta}$ が存在して[*38] $A = \mathrm{pr}_1(B)$ と表現されるとき，A を $\mathscr{F}$-解析集合 ($\mathscr{F}$-*analytic set*) と呼ぶ．ただし，$\mathscr{K}(E)$ は E のコンパクト部分集合全体のなす舗装で，$\mathrm{pr}_1\colon F \times E \to F$ は標準的な射影である．全ての $\mathscr{F}$-解析集合の成す集合を $\mathscr{A}(\mathscr{F})$ で表す．

---

*36 最後の不等号は，$x \mapsto x^{n+1}$ の凸性と g の増加性より従う．

*37 この記法はこのノートだけのものであり，一般的なものではない．$\times$ という記号を使う場合も多いが，これは集合の直積と紛らわしいので好ましくないと思う．

*38 集合族 $\mathscr{A}$ に対して $\mathscr{A}_\sigma$ は $\mathscr{A}$ の元の可算和で書かれる集合全体，$\mathscr{A}_\delta$ は $\mathscr{A}$ の元の可算個の共通部分で表現される集合の全体であった．

命題 A.9.3. $(F, \mathscr{F})$ を舗装集合とする．

(i) $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}(\mathscr{F})$.

(ii) $A \in \mathscr{A}(\mathscr{F})$ なら，$B \in \mathscr{F}_\sigma$ で $A \subset B$ なるものが存在する．

(iii) $\mathscr{A}(\mathscr{F})$ は可算族の和および共通部分をとる操作について閉じている．

証明. (i). $A \in \mathscr{F}$ とする．E を任意のコンパクト距離付け可能空間として $B = A \times E$ と定めれば，$B \in (\mathscr{F} \odot \mathscr{K}(E))_{\sigma\delta}$ かつ $A = \mathrm{pr}_1(B)$ である．よって $A \in \mathscr{A}(\mathscr{F})$ が成立．

(ii). $A \in \mathscr{A}(\mathscr{F})$ とする．コンパクト距離付け可能空間 E と $C \in (\mathscr{F} \odot \mathscr{K}(E))_{\sigma\delta}$ を $A = \mathrm{pr}_1(C)$ を満たすよう選ぶ．$C \in (\mathscr{F} \odot \mathscr{K}(E))_{\sigma\delta}$ より，$C' = \bigcup_n (F_n \times E_n) \in (\mathscr{F} \odot \mathscr{K}(E))_\sigma$ で $C \subset C'$ となるものがとれる．このとき

$$\mathrm{pr}_1(C') = \mathrm{pr}_1\left(\bigcup_n (F_n \times E_n)\right) = \bigcup_n \mathrm{pr}_1(F_n \times E_n) = \bigcup_n F_n \in \mathscr{F}_\sigma$$

が成立[*39]．よって $B = \bigcup_n F_n$ とおけば

$$A = \mathrm{pr}_1(C) \subset \mathrm{pr}_1(C') = B \in \mathscr{F}_\sigma$$

となる．

(iii). $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathscr{A}(\mathscr{F})$ の元の列とする．解析集合の定義より，各 n についてコンパクト距離付け可能空間 E_n と $B_n \in (\mathscr{F} \odot \mathscr{K}(E_n))_{\sigma\delta}$ で $A_n = \mathrm{pr}_1^n(B_n)$ を満たすものがとれる．（ただし，$\mathrm{pr}_1^n \colon F \times E_n \to F$ は射影を表す．）

$E = \prod_n E_n$ と定めれば，E はコンパクトな距離付け可能空間である[*40]．第一射影 $F \times E \to F$ を π で，射影 $F \times E \to F \times E_n$ を π_n で表すことにする．$C_n = \pi_n^{-1}(B_n)$ と定義すれば，

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \pi(C_n) = \pi\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) \tag{A.19}$$

が成り立つ．

(A.19) は自明ではないので，以下で証明を与える．まずは，次の主張が成り立つことに注意する．

主張 1

任意の $G \subset F \times E_n$ について $\mathrm{pr}_1^n(G) = \pi(\pi_n^{-1}(G))$ が成り立つ．

主張 1 はほぼ明らかである．実際，定義より $\pi = \mathrm{pr}_1^n \pi_n$ であるから，

$$\begin{tikzcd}
F \times \prod_n E_n \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi_n"'] & F \\
F \times E_n \arrow[ur, "\mathrm{pr}_1^n"'] &
\end{tikzcd}$$

$\pi(\pi_n^{-1}(G)) = \mathrm{pr}_1^n(\pi_n \pi_n^{-1}(G))$ が成立．π_n は全射だから $\pi_n \pi_n^{-1}(G) = G$ となり，$\pi\pi_n^{-1}(G) = \mathrm{pr}_1^n(G)$ が分かる．これより特に，$A_n = \mathrm{pr}_1^n(B_n) = \pi\pi_n^{-1}(B_n) = \pi(C_n)$ が成り立つ．

*39 任意の写像と集合族について $f(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f(A_i)$ が成り立つのであった．証明はほぼ明らかだが，例えば斎藤 [17, 命題 2.5.2] などを見ればよい．

*40 コンパクト空間の積はコンパクト空間である．（Tychonoff の定理．斎藤 [17, 定理 6.4.8] などを参照）距離付け可能空間の可算個の積はまた距離付け可能である．（斎藤 [17, 問題 8.4.7] など）

主張 2

$\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \pi(C_n) = \pi\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n\right)$ が成り立つ.

集合と写像の一般論から $\pi\left(\bigcap_n C_n\right) \subset \bigcap_n \pi(C_n)$ は明らかなので，逆向きの包含関係を示す．$y \in \bigcap_n \pi(C_n)$ とする．このとき，任意の n について $(y, x^n) \in B_n$ を満たす $x_n \in E_n$ がとれる．$z = (y, x_0, x_2, \dots)$ と定めれば，任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\pi_n(z) = (y, x_n) \in B_n$ だから $z \in \pi_n^{-1}(B_n) = C_n$．これより $z \in \bigcap_n C_n$ となり，$y = \pi(z) \in \pi\left(\bigcap_n C_n\right)$ が分かる．すなわち $\bigcap_n \pi(C_n) \subset \pi\left(\bigcap_n C_n\right)$ である．

$B_n \in (\mathscr{F} \odot \mathscr{K}(E_n))_{\sigma\delta}$ であったから，各 B_n は $B_n = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_{n,k}$ $(B_{n,k} \in (\mathscr{F} \odot \mathscr{K}(E_n))_{\sigma})$ という表現を持つ．さらに $B_{n,k} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_{n,k,m}$ $(B_{n,k,m} \in \mathscr{F} \odot \mathscr{K}(E_n))$ という表現も存在する．これより，各 C_n は

$$C_n = \pi_n^{-1}(B_n) = \pi_n^{-1}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_{n,k,m}\right) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \pi_n^{-1}(B_{n,k,m})$$

と表現される．$\pi_n^{-1}(B_{n,k,m}) \in \mathscr{F} \odot \mathscr{K}(E)$ であることに注意すれば[*41]，$C_n \in (\mathscr{F} \odot \mathscr{K}(E))_{\sigma\delta}$ となる．これよりさらに $\bigcap_n C_n \in (\mathscr{F} \odot \mathscr{K}(E))_{\sigma\delta}$ も分かるから，$\bigcap_n A_n = \pi(\bigcap_n C_n) \in \mathscr{A}(\mathscr{F})$ が成立する．すなわち，$\mathscr{A}(\mathscr{F})$ は可算個の共通部分をとる操作について閉じている．

次に $\mathscr{A}(\mathscr{F})$ が可算個の和をとる操作について閉じていることを示す．E' を直和位相空間 $\coprod_n E_n$ の 1 点コンパクト化とする．$\pi' : F \times \coprod_n E_n \to F$ を射影とし，その拡張 $F \times E' \to F$ も同じ記号 π' で表す．$j_n \colon E_n \to \coprod_n E_n$ を標準単射とし，$i_n = \mathrm{id}_F \times j_n \colon F \times E_n \to F \times \coprod_n E_n$ と定める．このとき，次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
F \times \coprod_n E_n \arrow[r, "\pi'"] & F \\
F \times E_n \arrow[u, "i_n"] \arrow[ur, "\mathrm{pr}_1^n"'] &
\end{tikzcd}$$

先ほどと同じ表現 $A_n = \mathrm{pr}_1^n(B_n)$, $B_n = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_{n,k}$ を考えれば，

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{pr}_1^n(B_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \pi'(i_n(B_n)) = \pi'\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} i_n(B_n)\right)$$

が成立する．i_n が単射であることに注意すれば，

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} i_n(B_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} i_n\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_{n,k}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} i_n(B_{n,k}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} i_n(B_{n,k})$$

となることが分かる．

最後の等号は明らかではないので証明を与える．i_n の定義より $n \neq m$ なら $i_n(B_{n,k}) \cap i_m(B_{m,l}) = \emptyset$ であるから，次の主張を示せばよい．

[*41] 射影 $\pi_n' \colon E \to E_n$ を考えれば，$\pi_n = \mathrm{id}_F \times \pi_n' \colon F \times E \to F \times E_n$ である．$B_{n,k,m} = G_{n,k,m} \times H_{n,k,m}$ $(G_{n,k,m} \in \mathscr{F}$, $H_{n,k,m} \in \mathscr{K}(E_n))$ という表現を考えれば，$\pi_n^{-1}(B_{n,k,m}) = G_{n,k,m} \times (\pi_n')^{-1}(H_{n,k,m})$ である．$(\pi_n')^{-1}(H_{n,k,m})$ はコンパクト空間 E の閉部分集合だから，コンパクトである．すなわち $\pi_n^{-1}(B_{n,k,m}) = G_{n,k,m} \times (\pi_n')^{-1}(H_{n,k,m}) \in \mathscr{F} \odot \mathscr{K}(E)$ が分かる．

主張 3

集合族 $(X_{n,k})$ は $n \neq m$ ならば $X_{n,k} \cap X_{m,l} = \emptyset$ $(k, l \in \mathbb{N})$ を満たすとする．このとき $\bigcup_n \bigcap_k X_{n,k} = \bigcap_k \bigcup_n X_{n,k}$ が成り立つ．

任意の n について $\bigcap_k X_{n,k} \subset \bigcap_k \bigcup_n X_{n,k}$ であるから，$\bigcup_n \bigcap_k X_{n,k} \subset \bigcap_k \bigcup_n X_{n,k}$ は直ちに分かる．逆向きの包含関係を示そう．$x \in \bigcap_k \bigcup_n X_{n,k}$ とすれば，任意の k に対してある $n = n(k)$ が唯一つ存在して $x \in X_{n,k}$ を満たす．このとき

$$x \in \bigcap_k X_{n(k),k} \subset \bigcup_n \bigcap_k X_{n,k}$$

であるから，$\bigcap_k \bigcup_n X_{n,k} \subset \bigcup_n \bigcap_k X_{n,k}$ も分かる．

$i_n(B_{n,k}) = \bigcup_m i_n(B_{n,k,m}) \in (\mathscr{F} \odot \mathscr{K}(E'))_\sigma$ に注意すれば，

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} i_n(B_n) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} i_n(B_{n,k}) \in (\mathscr{F} \odot \mathscr{K}(E'))_{\sigma\delta}$$

が分かる．これより $\bigcup_n A_n = \pi'\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} i_n(B_n)\right)$ は $\mathscr{F}$-解析集合である． □

命題 A.9.4. $(E, \mathscr{E})$ と $(F, \mathscr{F})$ を舗装集合とすれば，次が成立する．

(i) $\mathscr{E} \odot \mathscr{A}(\mathscr{F}) \subset \mathscr{A}(\mathscr{E} \odot \mathscr{F})$.

(ii) $\mathscr{A}(\mathscr{E}) \odot \mathscr{A}(\mathscr{F}) \subset \mathscr{A}(\mathscr{E} \odot \mathscr{F})$.

証明. (i) $A \times B \in \mathscr{E} \odot \mathscr{A}(\mathscr{F})$ とする．解析集合の定義よりコンパクト距離付け可能空間 X と $C \in (\mathscr{F} \odot \mathscr{K}(X))_{\sigma\delta}$ で $B = \mathrm{pr}_1(C)$ を満たすものがとれる．（ただし $\mathrm{pr}_1\colon F\times X \to F$ は射影．）$\pi_1\colon E\times F\times X \to E\times F$ を射影とすれば，明らかに $A \times C \in ((\mathscr{E} \odot \mathscr{F}) \odot \mathscr{K}(X))_{\sigma\delta}$ かつ $\pi_1(A \times C) = A \times B$ である．したがって $A \times B \in \mathscr{A}(\mathscr{E} \odot \mathscr{F})$ が分かる．

(ii) $A \in \mathscr{A}(\mathscr{E})$ かつ $B \in \mathscr{A}(\mathscr{F})$ とすれば，命題 A.9.3 より $A_1 \in \mathscr{E}_\sigma$ と $B_1 \in \mathscr{F}_\sigma$ で $A \subset A_1$ かつ $B \subset B_1$ を満たすようなものがとれる．命題 A.9.3 と (i) より

$$\mathscr{E}_\sigma \odot \mathscr{A}(\mathscr{F}) \subset (\mathscr{E} \odot \mathscr{A}(\mathscr{F}))_\sigma \subset \mathscr{A}(\mathscr{E} \odot \mathscr{F})$$

が成立．同様にして $\mathscr{A}(\mathscr{E}) \odot \mathscr{F}_\sigma \subset \mathscr{A}(\mathscr{E} \odot \mathscr{F})$ も示される．これより

$$A \times B = (A_1 \times B) \cap (A \times B_1) \in \mathscr{A}(\mathscr{E} \odot \mathscr{F})$$

が分かる． □

命題 A.9.5. $(F, \mathscr{F})$ を舗装集合，E をコンパクト距離付け可能空間とする．$\mathrm{pr}_1\colon F \times E \to F$ を射影とすれば，任意の $A \in \mathscr{A}(\mathscr{F} \odot \mathscr{K}(E))$ について $\mathrm{pr}_1(A) \in \mathscr{A}(\mathscr{F})$ が成立．

証明. コンパクト距離付け可能空間 G と $B \in (\mathscr{F} \odot \mathscr{K}(E) \odot \mathscr{K}(G))_{\sigma\delta}$ で $A = \pi_1(B)$ となるようなものを選ぶ．（ただし $\pi_1\colon F \times E \times G \to F \times E$ は射影．）このとき $E \times G$ はコンパクト距離付け可能空間であり，$\mathscr{K}(E) \odot \mathscr{K}(G) \subset \mathscr{K}(E \times G)$ が成立．π を射影 : $F \times E \times G \to F$ とすれば，

$$\begin{tikzcd} F \times E \times G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi_1"'] & F \\ F \times E \arrow[ur, "\mathrm{pr}_1"'] & \end{tikzcd}$$

$\mathrm{pr}_1(A) = \mathrm{pr}_1\pi_1(B) = \pi(B)$ かつ $B \in (\mathscr{F} \odot \mathscr{K}(E \times G))_{\sigma\delta}$ となる．すなわち $\mathrm{pr}_1(A)$ は $\mathscr{F}$-解析集合である． □

命題 A.9.6. $(F, \mathscr{F})$ を舗装集合とし，$\mathscr{G}$ は F の舗装で $\mathscr{F} \subset \mathscr{G} \subset \mathscr{A}(\mathscr{F})$ なるものとする．このとき

$$\mathscr{A}(\mathscr{F}) = \mathscr{A}(\mathscr{G}) = \mathscr{A}(\mathscr{A}(\mathscr{F}))$$

が成り立つ．

証明. $\mathscr{A}(\mathscr{F}) \subset \mathscr{A}(\mathscr{G}) \subset \mathscr{A}(\mathscr{A}(\mathscr{F}))$ は明らかなので，$\mathscr{A}(\mathscr{A}(\mathscr{F})) \subset \mathscr{A}(\mathscr{F})$ を示せばよい．$A \in \mathscr{A}(\mathscr{A}(\mathscr{F}))$ とする．コンパクト距離付け可能空間 E と $B \in (\mathscr{A}(\mathscr{F}) \odot \mathscr{K}(E))_{\sigma\delta}$ を $\pi_1(B) = A$ となるようにとる．($\mathrm{pr}_1 \colon F \times E \to F$ は標準射影．）命題 A.9.4 より

$$\mathscr{A}(\mathscr{F}) \odot \mathscr{K}(E) \subset \mathscr{A}(\mathscr{F}) \odot \mathscr{A}(\mathscr{K}(E)) \subset \mathscr{A}(\mathscr{F} \odot \mathscr{K}(E))$$

が成立するから，$B \in \mathscr{A}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{K}(E))$ である．命題 A.9.5 により $A = \mathrm{pr}_1(B) \in \mathscr{A}(\mathscr{F})$ となるので，$\mathscr{A}(\mathscr{A}(\mathscr{F})) \subset \mathscr{A}(\mathscr{F})$ が分かった． □

命題 A.9.7. $(F, \mathscr{F})$ を舗装集合，A を F の部分集合とする．$\mathscr{F} \cap A = \{B \cap A \mid B \in \mathscr{F}\}$ と定めれば

$$\mathscr{A}(\mathscr{F} \cap A) = \mathscr{A}(\mathscr{F}) \cap A$$

が成り立つ．

証明. $B \in \mathscr{A}(\mathscr{F} \cap A)$ とし，コンパクト距離化可能空間 E と $C \in ((\mathscr{F} \cap A) \odot \mathscr{K}(E))_{\sigma\delta}$ で $\mathrm{pr}_1(C) = B$ なるものをとる．$C = \bigcap_n \bigcup_k (G_{n,k} \times H_{n,k})$ と表現されているとする．$G_{n,k} \in \mathscr{F} \cap A$ だから，$G'_{n,k} \in \mathscr{F}$ で $G_{n,k} = G'_{n,k} \cap A$ なるものが存在する．このとき

$$\begin{aligned} C &= \bigcap_n \bigcup_k (G_{n,k} \times H_{n,k}) = \bigcap_n \bigcup_k ((G'_{n,k} \cap A) \times H_{n,k}) \\ &= \left(\bigcap_n \bigcup_k (G'_{n,k} \times H_{n,k}) \right) \cap (A \times E) \in (\mathscr{F} \odot \mathscr{K}(E))_{\sigma\delta} \cap (A \times E) \end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned} B = \mathrm{pr}_1(C) &= \mathrm{pr}_1 \left(\left[\bigcap_n \bigcup_k (G'_{n,k} \times H_{n,k}) \right] \cap [A \times E] \right) \\ &= \mathrm{pr}_1 \left(\bigcap_n \bigcup_k (G'_{n,k} \times H_{n,k}) \right) \cap A \in \mathscr{A}(\mathscr{F}) \cap A \end{aligned}$$

が成立する[*42]．よって $\mathscr{A}(\mathscr{F} \cap A) \subset \mathscr{A}(\mathscr{F}) \cap A$ である．

逆向きの包含関係を示そう．$B' \in \mathscr{A}(\mathscr{F})$ とし，コンパクト距離付け可能空間 E' と $C' \in (\mathscr{F} \odot \mathscr{K}(E'))_{\sigma\delta}$ を $B' = \mathrm{pr}_1(C')$ を満たすように選ぶ．$C' = \bigcap_n \bigcup_k (G''_{n,k} \times H''_{n,k})$ $(G''_{n,k} \times H''_{n,k} \in \mathscr{F} \odot \mathscr{K}(E'))$ という表現を

*42 3 つ目の等号に注意．一般には $\mathrm{pr}_1(X \cap Y) = \mathrm{pr}_1(X) \cap \mathrm{pr}_1(Y)$ はもちろん成り立たないが，$\mathrm{pr}_1(X \cap (D \times E)) = \mathrm{pr}_1(X) \cap D$ は成り立つ．

考えれば，

$$
\begin{aligned}
(A\times E')\cap C' &= (A\times E)\cap\bigcap_n\bigcup_k(G''_{n,k}\times H''_{n,k})=\bigcap_n\bigcup_k\left[(G''_{n,k}\times H''_{n,k})\cap(A\times E')\right]\\
&=\bigcap_n\bigcup_k(G''_{n,k}\cap A)\times H''_{n,k}\in((\mathscr{F}\cap A)\odot\mathscr{K}(E'))_{\sigma\delta}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．したがって

$$B'\cap A=\mathrm{pr}_1(C')\cap A=\mathrm{pr}_1\left(C'\cap(A\times E')\right)\in\mathscr{A}(\mathscr{F}\cap A)$$

となる．これより $\mathscr{A}(\mathscr{F})\cap A\subset\mathscr{A}(\mathscr{F}\cap A)$ も示された． □

命題 A.9.8. $(F,\mathscr{F})$ を舗装集合とする．このとき，$\sigma(\mathscr{F})\subset\mathscr{A}(\mathscr{F})$ であるための必要十分条件は，任意の $A\in\mathscr{F}$ について $F\setminus A\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$ が成り立つことである．

証明．必要性．$\sigma(\mathscr{F})\subset\mathscr{A}(\mathscr{F})$ と仮定すれば，任意の $A\in\mathscr{F}$ について

$$F\setminus A\in\sigma(\mathscr{F})\subset\mathscr{A}(\mathscr{F}).$$

よって $F\setminus A\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$ である．

十分性．

$$\mathscr{G}=\{A\in\mathscr{A}(\mathscr{F})\mid F\setminus A\in\mathscr{A}(\mathscr{F})\}$$

と定めれば，命題 A.9.3 より $\mathscr{G}$ は σ-代数となる．仮定より $\mathscr{F}\subset\mathscr{G}$ だから，$\sigma(\mathscr{F})\subset\mathscr{G}\subset\mathscr{A}(\mathscr{F})$ が分かる． □

命題 A.9.9. $(\Omega,\mathscr{F})$ を可測空間とし，X を第 2 可算な局所コンパクト Hausdorff 空間，$\mathscr{K}(X)$ を X のコンパクト集合全体とする．

(i) $\mathscr{B}(X)\subset\mathscr{A}(\mathscr{K}(X))$ かつ $\mathscr{A}(\mathscr{B}(X))=\mathscr{A}(\mathscr{K}(X))$ が成り立つ．
(ii) $\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(X)\subset\mathscr{A}(\mathscr{F}\odot\mathscr{K}(X))=\mathscr{A}(\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(X))$ である．
(iii) 任意の $A\in\mathscr{A}(\mathscr{F}\odot\mathscr{K}(X))$ について $\mathrm{pr}_1(A)\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$ となる．

証明．(i) $K\in\mathscr{K}(X)$ とすれば，$X\setminus K\in\mathscr{K}_\sigma\subset\mathscr{A}(\mathscr{K}(X))$ が成立[*43]．命題 A.9.8 より $\mathscr{B}(X)=\sigma(\mathscr{K}(X))\subset\mathscr{A}(\mathscr{F})$ が分かる．また $\mathscr{K}(X)\subset\sigma(\mathscr{K}(X))=\mathscr{B}(X)\subset\mathscr{A}(\mathscr{F})$ だから，命題 A.9.6 により $\mathscr{A}(\mathscr{B}(X))=\mathscr{A}(\mathscr{K}(X))$ が従う．

(ii) $A\in\mathscr{F}\odot\mathscr{K}(X)$ とすれば，$(F\times X)\setminus A\in(\mathscr{F}\odot\mathscr{K}(X))_\sigma\subset\mathscr{A}(\mathscr{F}\odot\mathscr{K}(X))$ である．よって命題 A.9.8 から $\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(X)=\sigma(\mathscr{F}\odot\mathscr{K}(X))\subset\mathscr{A}(\mathscr{F}\odot\mathscr{K}(X))$ となる．また $\mathscr{F}\odot\mathscr{B}(X)\subset\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(X)\subset\mathscr{A}(\mathscr{F}\odot\mathscr{K}(X))$ なので，命題 A.9.6 により $\mathscr{A}(\mathscr{F}\odot\mathscr{B}(X))=\mathscr{A}(\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(X))$ が分かる．

(iii) X は σ コンパクトだから，$(K_n)\in\mathscr{K}(X)^{\mathbb{N}}$ かつ $\bigcup_n K_n=X$ なる列がとれる．このとき任意の n について

$$\mathscr{A}(\mathscr{F}\odot\mathscr{K}(X))\cap(\Omega\times K_n)=\mathscr{A}([\mathscr{F}\odot\mathscr{K}(X)]\cap[\Omega\times K_n])=\mathscr{A}(\mathscr{F}\odot[\mathscr{K}(X)\cap K_n])$$

が成立．X は Hausdorff 空間だから，$\mathscr{K}(K_n)=\mathscr{K}(X)\cap K_n$ であることに注意する．$A\in\mathscr{A}(\mathscr{F}\odot\mathscr{K}(X))$ とすれば，命題 A.9.5 により $\mathrm{pr}_1(A\cap(\Omega\times K_n))\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$ となる．これより $\mathrm{pr}_1(A)=\bigcup_n\mathrm{pr}_1(A\cap(\Omega\times K_n))\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$ も分かる．（命題 A.9.3） □

[*43] X が第 2 可算な局所コンパクト空間であることに注意せよ．

定義 A.9.10. $(F, \mathscr{F})$ を舗装集合とし，$\mathscr{F}$ は有限個の合併と共通部分をとる操作について閉じているとする．$I\colon \mathfrak{P}(F) \to \overline{\mathbb{R}}$ は次の 3 条件を満たすとき Choquet $\mathscr{F}$-容量 (*Choquet $\mathscr{F}$-capacity*) と呼ばれる．

(i) $A \subset B$ なら $I(A) \leq I(B)$．（増加性）
(ii) $A_n \uparrow A$ なら $I(A) = \sup_n I(A_n)$．（下からの連続性）
(iii) $(A_n) \in \mathscr{F}^{\mathbb{N}}$ が $A_n \downarrow A$ を満たすなら，$I(A) = \inf I(A_n)$．（$\mathscr{F}$ における上からの連続性）

$A \in \mathfrak{P}(F)$ が

$$I(A) = \sup_{B \in \mathscr{F}_\delta, B \subset A} I(B)$$

を満たすとき，A は I-可容 (I-capacitable) であるという．

補題 A.9.11. I を F 上の Choquet $\mathscr{F}$ 容量とする．このとき $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$ の元は可容である．

証明．$A \in \mathscr{F}_{\sigma\delta}$ とする．$I(A) = -\infty$ なら，A は明らかに可容である．$I(A) > -\infty$ と仮定する．このとき，$A_{n,m} \in \mathscr{F}$ によって

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_{n,m} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

と表現される．（ただし $A_n := \bigcup_m A_{n,m} \in \mathscr{F}_\sigma$ である．）$\mathscr{F}$ は有限和について閉じていると仮定しているから，$(A_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ は単調増大であるとして良い．$a < I(A)$ を任意にとって固定する．Choquet 容量の下からの連続性より，

$$I(A) = I(A \cap A_0) = \sup_{m \in \mathbb{N}} I(A \cap A_{0,m})$$

が成立．したがって $I(A \cap A_{0,m_0}) > a$ を満たす m_0 がとれる．このとき

$$I(A \cap A_{0,m_0}) = I(A \cap A_{0,m_0} \cap A_1) = \sup_{m \in \mathbb{N}} I(A \cap A_{0,m_0} \cap A_{1,m})$$

なので，$I(A \cap A_{0,m_0} \cap A_{1,m_1}) > a$ を満たす m_1 をとる．同様の操作により，帰納的に $I(A \cap A_{0,m_0} \cap \cdots \cap A_{k,m_k}) > a$ を満たす列 $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ が構成される．$B_n = \bigcap_{k=0}^n A_{k,m_k} \in \mathscr{F}$ および[*44] $B = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_n \in \mathscr{F}_\delta$ と定めれば，構成法より任意の n で $I(B_n) > a$ である．Choquet 容量の，$\mathscr{F}$ における上からの連続性より $I(B) = \inf_n I(B_n) \geq a$ が成立．さらに $B_n \subset A_{n,m_n} \subset A_n$ より $B = \bigcap_n B_n \subset \bigcap_n A_n = A$ となる．すなわち，任意の $a < I(A)$ に対してある $B \in \mathscr{F}_\delta$ が存在して $I(B) \geq a$ が成立．これは A が可容ということに他ならない． □

以下の定理は，Choquet の定理と呼ばれるものである．

定理 A.9.12. I は F 上の Choquet $\mathscr{F}$-容量とする．このとき，任意の $A \in \mathscr{A}(\mathscr{F})$ は可容である．

定理 A.9.12 の証明のために，重要な補題を用意する．

補題 A.9.13. I は F 上の Choquet $\mathscr{F}$-容量とし，X を第 2 可算な局所コンパクト Hausdorff 空間とする．$\mathscr{H}$ は $F \times X$ 上の舗装で，$\mathscr{F} \odot \mathscr{K}(X)$ の元の有限和全体からなるものとする．$H \subset F \times X$ に対して $J(G) = I(\mathrm{pr}_1(G))$ と定義すれば，J は Choquet $\mathscr{H}$-容量となる．

[*44] $\mathscr{F}$ は有限個の共通部分をとる操作について閉じているのであった．（定義 A.9.10）

証明．構成法より $\mathscr{H}$ は明らかに有限和について閉じており，$\mathscr{H}_{\sigma\delta} = (\mathscr{F} \odot \mathscr{K}(X))_{\sigma\delta}$ が成立することに注意する．定義 A.9.10 の条件 (i) は明らかである．(H_n) を $F \times X$ の部分集合の増大列とする．このとき $\bigcup_n \mathrm{pr}_1(H_n) = \mathrm{pr}_1\left(\bigcup_n H_n\right)$ に注意すれば

$$J\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n\right) = I\left(\mathrm{pr}_1\left(\bigcup_n H_n\right)\right) = I\left(\bigcup_n \mathrm{pr}_1(H_n)\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} I(\mathrm{pr}_1(H_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} J(H_n)$$

となり，(ii) も分かる．

あとは条件 (iii) を示せばよい．(B_n) を $\mathscr{H}$ の元の減少列とし，各 B_n は

$$B_n = \bigcup_{k=0}^{m(n)} D_k^n \times C_k^n, \quad D_k^n \in \mathscr{F},\ C_k^n \in \mathscr{K}(X)$$

と表現されているとする．$x \in \bigcap_n \mathrm{pr}_1(B_n)$ とし，$C_n = \bigcup_{\{k; x\in D_k^n\}} C_k$ と定める．このとき各 C_n は空でない X のコンパクト集合であって

$$(\{x\} \times E) \cap B_n = \{x\} \times C_n$$

が成り立つ．さらに，列 (B_n) が減少的であるから (C_n) も減少列となる．(C_n) は空でないコンパクト集合の減少列だから有限交叉性をもち，よって $\bigcap_n C_n \neq \emptyset$ である[*45]．これより

$$(\{x\} \times E) \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [(\{x\} \times E) \cap B_n] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [\{x\} \times C_n] = \{x\} \times \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$$

が成立．すなわち $x \in \mathrm{pr}_1\left(\bigcap_n B_n\right)$ であり，この議論から $\bigcap_n \mathrm{pr}_1(B_n) \subset \mathrm{pr}_1\left(\bigcap_n B_n\right)$ が分かる．つまり，$\mathscr{H}$ の元の減少列 (B_n) に対しては

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{pr}_1(B_n) = \mathrm{pr}_1\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \tag{A.20}$$

が成り立つ．$\mathscr{F}$ は有限和について閉じていると仮定しているから，$\mathrm{pr}_1(B_n) \in \mathscr{F}$ である．さらに，(B_n) は減少列だから $(\mathrm{pr}_1(B_n))$ もまた減少列である．したがって Choquet 容量 I の $\mathscr{F}$ における上からの連続性より

$$J\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = I\left(\mathrm{pr}_1\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)\right) = I\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{pr}_1 B_n\right) = \inf_{n\in\mathbb{N}} I(\mathrm{pr}_1(B_n)) = \inf_{n\in\mathbb{N}} J(B_n)$$

が成立．よって J が定義 A.9.10 の条件 (iii) を満たすことも示された．すなわち，J は Choquet $\mathscr{H}$-容量である． □

定理 *A.9.12* の証明．$A \in \mathscr{A}(\mathscr{F})$ とし，コンパクト距離化可能空間 E と $B \in (\mathscr{F} \odot \mathscr{K}(E))_{\sigma\delta}$ で $A = \mathrm{pr}_1(B)$ を満たすものをとる．$\mathscr{H}$ は $F \times E$ 上の舗装で，$\mathscr{F} \odot \mathscr{K}(E)$ の元の有限和全体からなるものとする．$H \subset F \times E$ に対して $J(G) = I(\mathrm{pr}_1(G))$ と定義すれば，補題 A.9.13 よりこれは Choquet $\mathscr{H}$-容量である．

$B \in \mathscr{H}_{\sigma\delta}$ としていたから，補題 A.9.11 により B は J-可容である．また，(A.20) より $C \in \mathscr{H}_\delta$ ならば $\mathrm{pr}_1(C) \in \mathscr{F}_\delta$ となる[*46]．ゆえに

$$I(A) = I(\mathrm{pr}_1(B)) = J(B) = \sup_{C\in\mathscr{H}_\delta, C\subset B} J(C) = \sup_{C\in\mathscr{H}_\delta, C\subset B} I(\mathrm{pr}_1(C)) \leq \sup_{D\in\mathscr{F}_\delta, D\subset A} I(D)$$

*45 コンパクト集合の基本性質である．

*46 構成法より $\mathscr{H}$ は有限個の共通部分をとる操作について閉じていることに注意せよ．

が分かる．Choquet 容量の増加性より

$$\sup_{D\in\mathscr{F}_\delta, D\subset A} I(D) \leq I(A)$$

は明らかである．したがって

$$I(A) = \sup_{D\in\mathscr{F}_\delta, D\subset A} I(D)$$

が成立．すなわち A は $\mathscr{F}$-可容である． □

Choquet の定理を用いると，解析集合の可測性についての重要な結果が得られる．

定理 A.9.14. $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を非負有限測度空間とすれば，$\mathscr{A}(\mathscr{F}) \subset \mathscr{F}^\mu = \mathscr{A}(\mathscr{F}^\mu)$ が成り立つ．（ただし，$\mathscr{F}^\mu$ は $\mathscr{F}$ の μ-完備化である．）

証明．$A \subset X$ に対して

$$I(A) = \inf_{B\in\mathscr{F}, A\subset B} \mu(B)$$

と定義する[*47]．このとき，I は Choquet $\mathscr{F}$-容量であることを示そう．I の増加性は定義より明らかである．

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X の部分集合の増大列とし，$A = \bigcup_n A_n$ とする．I の増加性より $\sup_n I(A_n) \leq I(A)$ はすぐに分かるので，逆向きの不等号を示せばよい．$\varepsilon > 0$ を任意にとって固定する．このとき I の定義より

$$\mu(B'_n) < I(A_n) + \varepsilon, \qquad B'_n \supset A_n$$

を満たす $B'_n \in \mathscr{F}$ が存在する．$B_n = \bigcap_{k\geq n} B'_k \in \mathscr{F}$ と定めれば (B_n) は $\mathscr{F}$ の元の増大列で，

$$\mu(B_n) \leq I(A_n) + \varepsilon, \qquad A_n \subset B_n$$

を満たす．$B := \bigcup_n B_n \in \mathscr{F}$ とすれば構成法より $A \subset B$ であって，

$$I(A) \leq \mu(B) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} I(A_n) + \varepsilon$$

が成立．$\varepsilon > 0$ は任意に選んでいたから $I(A) \leq \sup_n I(A_n)$ が分かる．すなわち，I は下からの連続性（定義 A.9.10 の条件 (ii)）を満たす．

次に $\mathscr{F}$ における上からの連続性を示したいが，これはほとんど明らかである．実際，(A_n) を $\mathscr{F}$ の元の減少列とすれば，$A := \bigcap_n A_n \in \mathscr{F}$ である．μ は有限測度だからいかなる減少列についても上からの連続性を満たし，

$$I(A) = \mu(A) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} I(A_n)$$

が分かる．

Choquet の定理[*48]より $A \in \mathscr{A}(\mathscr{F})$ は I-可容なので，

$$I(A) = \sup_{B\in\mathscr{F}_\delta, B\subset A} I(B) = \sup_{B\in\mathscr{F}, B\subset A} I(B) = \sup_{B\in\mathscr{F}, B\subset A} \mu(B)$$

が成立．これより A は $\mathscr{F}^\mu$ 可測となる．したがって

$$\mathscr{A}(\mathscr{F}) \subset \mathscr{F}^\mu \subset \mathscr{A}(\mathscr{F}^\mu) \subset (\mathscr{F}^\mu)^\mu = \mathscr{F}^\mu$$

である． □

[*47] 要するに外測度 μ^* である．

[*48] 定理 A.9.12

系 A.9.15. $(\Omega, \mathscr{F})$ を可測空間とし，Prob で $(\Omega, \mathscr{F})$ 上の確率測度全体の集合を表すことにする．このとき

$$\mathscr{A}(\mathscr{F}) \subset \mathscr{F}^{\mathrm{Prob}} := \bigcap_{P \in \mathrm{Prob}} \mathscr{F}^{P} = \mathscr{A}(\mathscr{F}^{\mathrm{Prob}})$$

が成り立つ．

証明．定理 A.9.14 より明らか． □

系 A.9.15 に出てきた σ-代数 $\mathscr{F}^{\mathrm{Prob}}$ を $\mathscr{F}$ の普遍完備化 (universal completion) と呼ぶ．また，$\mathscr{F}^{\mathrm{Prob}}$ の元は普遍可測集合 (universally measurable set) と呼ばれる．

Bibliography

[1] Charalambos D. Aliprantis and Kim Border. *Infinite Dimensional Analysis. A Hitchhiker's Guide*. 3rd ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006. XXII+704. DOI: 10.1007/3-540-29587-9. URL: https://www.springer.com/gp/book/9783540295860.

[2] Vladimir I. Bogachev. *Measure Theory*. 2 vols. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. DOI: 10.1007/978-3-540-34514-5. URL: http://www.springer.com/us/book/9783540345138.

[3] Claude Dellacherie. *Capacités et processus stochastiques*. Spriger-Verlag Berlin Heidelberg, 1972.

[4] Claude Dellacherie and Paul-André Meyer. *Probabilities and Potential*. North-Holland Mathematics Studies 29. North-Holland, 1978. viii+189. ISBN: 0-7204-0701-X. URL: https://www.elsevier.com/books/probabilities-and-potential-a/dellacherie/978-0-7204-0701-3.

[5] Claude Dellacherie and Paul-André Meyer. *Probabilities and Potential B. Theory of Martingales*. Trans. by J. P. Wilson. North-Holland Mathematics Studies 72. North-Holland, 1982. xvii+463. ISBN: 0-444-86526-8. URL: https://www.elsevier.com/books/probabilities-and-potential-b/dellacherie/978-0-444-86526-7.

[6] Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz. *Linear Operators, Part I: General Theory*. Interscience, 1964.

[7] Irene Fonseca and Giovanni Leoni. *Modern Methods in the Calculus of Variations. L^p Spaces*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag New York, 2007. DOI: 10.1007/978-0-387-69006-3. URL: http://www.springer.com/jp/book/9780387357843?wt_mc=ThirdParty.SpringerLink.3.EPR653.About_eBook.

[8] 福島 正俊 and 竹田 雅好. マルコフ過程. 確率論教程シリーズ 4. 培風館, 2008.

[9] 舟木 直久. 確率論. 朝倉書店, 2004. URL: http://www.asakura.co.jp/books/isbn/978-4-254-11600-7/.

[10] Sheng-wu He, Jia-gang Wang, and Jia-an Yan. *Semimartingale Theory and Stochastic Calculus*. Science Press and CRC Press, 1992. URL: https://www.crcpress.com/Semimartingale-Theory-and-Stochastic-Calculus/eWangyan/p/book/9780849377150.

[11] Peter Medvegyev. *Stochastic Integration Theory*. Oxford Graduate Texts in Mathematics 14. Oxford University Press, 2007. xx+608. ISBN: 978-0-19-921525-6.

[12] Ashkan Nikeghbali. “An essay on the general theory of stochastic processes”. In: *Probability Surveys* 3 (2006), pp. 345–412. DOI: 10.1214/154957806000000104. URL: http://dx.doi.org/10.1214/154957806000000104.

[13] Philip E. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations*. 2nd ed. Stochastic Modelling and Applied Probability 21. Springer-Verlag, 2004.

[14] M. M. Rao. *Conditional Measures and Applications*. 2nd ed. Pure and applied mathematics 271. Chapman & Hall/CRC, 2005.

[15] M. M. Rao. *Measure Theory and Integration*. Second, revised and expanded edition. Pure and applied mathematics 265. Marcer Dekker, 2004.

[16] Daniel Revuz and Marc Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. 3rd ed. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 293. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999. DOI: 10.1007/978-3-662-06400-9. URL: http://www.springer.com/cn/book/9783540643258.

[17] 斎藤 毅. **集合と位相**. 大学数学の入門 8. 東京大学出版会, 2009.

[18] Michael Sharpe. *General Theory of Markov Processes*. Academic Press, 1988.

索引