Yuki Hirai

Sigmath
Graduate Texts in
Mathematics
Volume 1

Introduction to the Theory of Continuous Martingales

Osaka University Σ Press

連続マルチンゲール理論入門

大阪大学大学院基礎工学研究科
平井祐紀

2016 年 2 月 8 日

編集履歴

2015/07/02 とりあえず完成.

2015/08/23 誤植を訂正.

2015/9/17 Fubini の定理を追加.

2015/9/21 誤植を訂正．付録に凸関数の節を追加.

2015/9/24 誤植を訂正．局所時間の節と，Kolmogorov の連続拡張定理を追加.

2015/9/30 誤植を訂正.

2015/10/21 誤植を訂正.

2015/11/04 間違いを訂正．可測関数についての単調族定理の証明を追加.

2016/02/08 非負の列マルチンゲールがクラス D に属することの証明を修正した.

目次

1　離散時間マルチンゲール

1.1　停止時刻

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ および $\mathbb{N}_\infty = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ と表記することにする．

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間，$(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ をフィルトレーションとする．

いくつか用語を定義しておく．本節では，自然数を添え字集合に持つ確率変数族 $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を離散時間確率過程，または単に確率過程などと呼ぶことにする．確率過程 $X = (X_n)$ が任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して X_n が $\mathscr{F}_n$ -可測となるとき，　X はフィルトレーション $(\mathscr{F}_n)$ に適合しているという．また，X_{n+1} が $\mathscr{F}_n$ -可測になっているときは，X は可予測であるという．

一般に σ -加法族の族　$(\mathscr{G}_i)_{i\in I}$ が与えられたとき，$\bigvee_i \mathscr{G} i := \sigma(\bigcup_i \mathscr{G}_i)$ という記法を使うことも多く，本ノートでも度々これを用いる．

定義 1.1.1. 確率変数 $T : \Omega \to \mathbb{N}_\infty$ が以下の条件を満たす時，T を $(\mathscr{F}_n)$-停止時刻（stopping time）とよぶ．

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \{\, \omega \in \Omega \mid T(\omega) \le n \,\} \in \mathscr{F}_n.$$

$$\{T \le n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{T = k\}$$
$$\{T = n+1\} = \{T \le n+1\} \setminus \{T \le n\}$$

に注意すれば，T が停止時刻であることは

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \{T = n\} \in \mathscr{F}_n$$

と同値である．自然数 n に対して

$$\{n \le k\} = \begin{cases} \Omega \in \mathscr{F}_k & (n \le k) \\ \emptyset \in \mathscr{F}_k & (n > k) \end{cases}$$

であるから，任意の自然数は停止時刻である．

注意 1.1.2. S, T が $(\mathscr{F}_n)$ -停止時刻であるとき，

$$\{S + T = n\} = \bigcup_{k=0}^{n} (\{S = k\} \cap \{T = n - k\}) \in \mathscr{F}_n$$

より $S + T$ は $(\mathscr{F}_n)$ -停止時刻である．また，

$$\{S \wedge T \le n\} = \{S \le n\} \cup \{T \le n\} \in \mathscr{F}_n$$
$$\{S \vee T \le n\} = \{S \le n\} \cap \{T \le n\} \in \mathscr{F}_n$$

から，$S \vee T, S \wedge T$ も $(\mathscr{F}_n)$ -停止時刻である．

確率過程 $X = (X_n)$ と停止時刻 T に対して新たな確率変数 $X_T 1_{\{T<\infty\}}$ を $X_{T(\omega)}(\omega) 1_{\{T<\infty\}}(\omega)$ と定めることが出来る．

定義 1.1.3. Stopping time T によって定まる σ-加法族 $\mathscr{F}_T$ を以下のように定義する．

$$A \in \mathscr{F}_T :\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad A \cap \{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n$$

命題 1.1.4. $\mathscr{F}_T$ は実際に σ-加法族であり，T は $\mathscr{F}_T$ 可測である．

証明. 明らかに $\Omega \in \mathscr{F}_T$ である．$A \in \mathscr{F}_T$ ならば，$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$A^c \cap \{T \leq n\} = (A \cap \{T \leq n\})^c \cap \{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n$$

だから，$A^c \in \mathscr{F}_T$．$(A_i) \in (\mathscr{F}_T)^{\mathbb{N}}$ なら，

$$\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \cap \{T \leq n\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cap \{T \leq n\}) \in \mathscr{F}_n.$$

よって $\mathscr{F}_T$ は σ-加法族である．T の値域は離散空間であるから，T の可測性については $\{T = n\} \in \mathscr{F}_T$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ が分かれば十分である．$n \in \mathbb{N}$ を固定すれば，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\{T = n\} \cap \{T \leq k\} = \begin{cases} \{T = n\} \in \mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_k & \text{if } n \leq k, \\ \emptyset \in \mathscr{F}_k & \text{if } n > k. \end{cases}$$

となり，$\{T = n\} \in \mathscr{F}_T$ が分かった． □

命題 1.1.5. S, T を $(\mathscr{F}_n)$ -停止時刻で　$S \leq T$ a.e. なら $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$ である．任意の停止時刻 T_1, T_2 に対し $\mathscr{F}_{T_1 \wedge T_2} = \mathscr{F}_{T_1} \cap \mathscr{F}_{T_2}$ である．

証明. $S \leq T$ のとき，$A \in \mathscr{F}_S$ とすれば

$$A \cap \{T = n\} = \left[\bigcup_{k=1}^{n} (A \cap \{S = k\}) \cup (A \cap \{S > n\})\right] \cap \{T = n\} \in \mathscr{F}_n.$$

よって $A \in \mathscr{F}_T$ が分かった．

前半の結果より $\mathscr{F}_{T_1 \wedge T_2} \subset \mathscr{F}_{T_1}$ かつ $\mathscr{F}_{T_1 \wedge T_2} \subset \mathscr{F}_{T_2}$ であるから，$\mathscr{F}_{T_1 \wedge T_2} \subset \mathscr{F}_{T_1} \cap \mathscr{F}_{T_2}$ はすぐにわかる．$A \in \mathscr{F}_{T_1} \cap \mathscr{F}_{T_2}$ とすれば，

$$A \cap \{T_1 \wedge T_2 \leq n\} = (A \cap \{T_1 \leq n\}) \cup (A \cap \{T_2 \leq n\}) \in \mathscr{F}_n$$

となるから，$A \in \mathscr{F}_{T_1 \wedge T_2}$ である．よって $\mathscr{F}_{T_1 \wedge T_2} \supset \mathscr{F}_{T_1} \cap \mathscr{F}_{T_2}$ であることも示された． □

注意 1.1.6. X_T が Ω 上で定義されているならば，それは $\mathscr{F}_T$ -可測な確率変数である．なぜならば，任意の $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$\{X_T \in B\} \cap \{T \leq n\} = \bigcup_{k=1}^{n} (\{X_k \in B\} \cap \{T = k\}) \in \mathscr{F}_n$$

が成り立つからである．

1.2 離散マルチンゲールの定義

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間，$(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ をフィルトレーションとする．

定義 1.2.1. $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が次の三条件を満たすとき，X は $(\mathscr{F}_n)$ 劣マルチンゲール（submartingale）であるという．

(i) (X_n) は $(\mathscr{F}_n)$-適合である．
(ii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $E\left[|X_n|\right] < \infty$ が成り立つ．
(iii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $E\left[X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n\right] \geq X_n$ a.e. が成り立つ．

また，$(-X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が劣マルチンゲールになるような確率過程を優マルチンゲール (supermartingale) と呼ぶ．劣マルチンゲールかつ優マルチンゲールであるとき X は $(\mathscr{F}_n)$ -マルチンゲール　(martingale) であるという．考えているフィルトレーション $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が明らかな時は，X を単に (劣, 優) マルチンゲールということもある．

注意 1.2.2. ある $\mathscr{F}_\infty (:= \bigvee_n \mathscr{F}_n)$ 可測確率変数 X_∞ が存在して，$(X_n)_{n\in\mathbb{N}_\infty}$ が同様の性質を満たすとき，$(X_n)_{n\in\mathbb{N}_\infty}$ を（劣，優）マルチンゲールということもある．

命題 1.2.3. $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $(\mathscr{F}_n)$ -マルチンゲールとし，　$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は凸関数であるとする．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\varphi(X_n)$ が可積分となるならば，$(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は劣マルチンゲールである．X が劣マルチンゲールのときは，φ が単調増加ならば $(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ も劣マルチンゲールとなる．

証明. 初めに，φ は凸関数であるから連続，よってボレル可測であることに注意しておく．このことから，$(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ の適合性は明らかである．

X がマルチンゲールの場合を考える．条件付き期待値に関する Jensen の不等式を用いれば，$n \geq 1$ に対して

$$E[\varphi(X_n) \mid \mathscr{F}_{n-1}] \leq \varphi\left(E[X_n \mid \mathscr{F}_{n-1}]\right) = \varphi(X_{n-1})$$

となり，$(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は劣マルチンゲールである．

X が劣マルチンゲールで φ が単調増加のときは，

$$E[\varphi(X_n) \mid \mathscr{F}_{n-1}] \leq \varphi\left(E[X_n \mid \mathscr{F}_{n-1}]\right) \leq \varphi(X_{n-1})$$

より劣マルチンゲール性が分かる． □

例 1.2.4. 関数 $x \mapsto |x|$ は凸関数であるから，$M = (M_n)$ がマルチンゲールならば $(|M_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ は劣マルチンゲールである．$x \mapsto x^2$ は凸関数であるから，マルチンゲール $M = (M_n)$ が $E[M_n^2] < \infty$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ を満たすならば $(M_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ もマルチンゲールである．

関数 $x \mapsto x^+$ は単調増加な凸関数なので，劣マルチンゲール $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して (X_n^+) は劣マルチンゲールとなる．

確率過程 $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ および $H = (H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，新たな確率過程 $(H \cdot X) = ((H \cdot X)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を以下のように定義する．

$$(H \cdot X)_n := \sum_{k=1}^{n} H_k (X_k - X_{k-1})$$

（ただし，任意の列 (a_n) に対して $\sum_{k=1}^{0} a_n = 0$ と考える．）

命題 1.2.5. (X_n) が劣マルチンゲールで (H_n) が非負，可予測かつ Ω 上有界であるとする．このとき $(H \cdot X)$ は劣マルチンゲールとなる．また，(X_n) がマルチンゲールならば，(H_n) の非負性を仮定しなくても $(H \cdot X)$ はマルチンゲールとなる．

証明. 各 n に対して H_n の上界の一つを M_n とおけば，

$$E\left[|(H \cdot X)_n|\right] \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \, E\left[|X_k - X_{k-1}|\right].$$

(X_n) の可積分性より，各 $n \in \mathbb{N}$ について $E|(H \cdot X)_n| < \infty$ である．また，定義より明らかに $((H \cdot X)_n)$ は $(\mathscr{F}_n)$-適合である．$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$E[(H \cdot X)_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] = (H \cdot X)_n + H_{n+1} E[X_{n+1} - X_n \mid \mathscr{F}_n] \quad \text{a.e.}$$

ここで $E[X_{n+1} - X_n \mid \mathscr{F}_n] \geq 0$（劣マルチンゲール性）と (H_n) の非負性に注意すれば

$$E[(H \cdot X)_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] \geq (H \cdot X)_n \quad \text{a.e.}$$

X がマルチンゲールのときは H の符号によらず

$$E[(H \cdot X)_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] = (H \cdot X)_n + H_{n+1} E[X_{n+1} - X_n \mid \mathscr{F}_n] = (H \cdot X)_n \quad \text{a.e.}$$

□

確率過程 $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ と停止時刻 T に対して新たな確率過程 $X^T = (X_n^T)$ を以下のように定義する．

$$X_n^T(\omega) = X_{T \wedge n}(\omega).$$

定理 1.2.6. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を $(\mathscr{F}_n)$ -劣マルチンゲール，　T を $(\mathscr{F}_n)$ -停止時刻とした時，　X^T は劣マルチンゲールとなる．

証明. 確率過程 $H = (H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$H_n = 1_{\{T \geq n\}} \quad (n \geq 0)$$

と定義すれば，H は非負かつ有界な可予測過程である．この時，

$$X_{T \wedge n} = X_0 + \sum_{k=1}^{n} H_k (X_k - X_{k-1}) = X_0 + (H \cdot X)_n$$

とかけるので，命題 1.2.5 より X^T は劣マルチンゲールである． □

1.3 任意抽出定理-その 1

定理 1.3.1. (X_n) を $(\mathscr{F}_n)$ を劣マルチンゲール，T を a.e. で有界な停止時刻としたとき，X_T は可積分な確率変数であり，T の本質的上界 $M \in \mathbb{N}$ に対して

$$E[X_0] \leq E[X_T] \leq E[X_M]$$

が成り立つ．

証明．はじめに

$$E\left[|X_T|\right]=\sum_{k=1}^{M}E\left[|X_k|1_{\{T=k\}}\right]\le\sum_{k=1}^{M}E\left[|X_k|\right]<\infty$$

であるから，X_T は可積分であることを確かめておく．定理 1.2.6 より X^T は劣マルチンゲールなので

$$E[X_0]=E[X_{T\wedge 0}]\le E[X_{T\wedge M}]=E[X_T]$$

となり，一つ目の不等号が分かる．いま，非負かつ有界な可予測過程 (K_n) を $n\ge 0$ に対して $K_n=1_{\{T<n\}}$ と定めれば，

$$X_n=X_{T\wedge n}+(K\cdot X)_n$$

が成り立つ．$(K\cdot X)$ は劣マルチンゲールであるから，

$$E[X_M-X_{T\wedge M}]=E[(K\cdot X)_M]\ge E[(K\cdot X)_0]=0$$

よって，二つ目の不等号が導かれた． □

定理 1.3.2. $X=(X_n)$ を劣マルチンゲール，S,T は a.e. で有界な停止時刻とする．$S\le T$ a.e. を満たすならば

$$E[X_S]\le E[X_T]$$

が成り立つ．

証明．可予測過程 $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$H_n=1_{\{S<n\le T\}}\quad(n\in\mathbb{N})$$

と定めれば，

$$X_{T\wedge n}-X_{S\wedge n}=(H\cdot X)_n$$

であり，命題 1.2.5 より $(H\cdot X)$ は劣マルチンゲールとなる．このとき T の本質的上界 M に対して，

$$E[X_T-X_S]=E[X_{T\wedge M}-X_{S\wedge M}]=E[(H\cdot X)_M]\ge E[(H\cdot X)_0]=0$$

が成り立つ． □

定理 1.3.3. 定理 1.3.2 と同様の仮定の下で

$$E[X_T\mid\mathscr{F}_S]\ge X_S\quad\text{a.e.}$$

が成り立つ．

証明．任意の $A\in\mathscr{F}_S$ に対して

$$E[X_T1_A]\ge E[X_S1_A]$$

が成り立つことを示せばよい．M を T の本質的上界とする．停止時刻 S と $A\in\mathscr{F}_S$ に対し確率変数 $S_A:\Omega\to\mathbb{N}$ を以下のように定める．

$$S_A(\omega)=\begin{cases}S(\omega) & \omega\in A\\ M & \omega\in\Omega\setminus A\end{cases}$$

このとき，S_A は有界な停止時刻となる．T_A を同様に定めれば定理 1.3.2 により

$$E[X_{T_A}] \geq E[X_{S_A}]$$

ところで

$$\begin{aligned} E[X_{S_A}] &= E[X_S 1_A] + E[X_M 1_{\Omega\setminus A}] \\ E[X_{T_A}] &= E[X_T 1_A] + E[X_M 1_{\Omega\setminus A}] \end{aligned}$$

であったから，

$$E[X_T 1_A] \geq E[X_S 1_A].$$

□

系 1.3.4. $X = (X_n)$ をマルチンゲール，S, T を $S \leq T$, $P-$a.s. なる有界停止時刻とする．このとき

$$E[X_T \mid \mathscr{F}_S] = X_S \quad P-\text{a.s.}$$

証明．定理 1.3.3 を X と $-X$ に用いればよろしい． □

定理 1.3.5. $X = (X_n)$ を $(\mathscr{F}_n)$ -劣マルチンゲール，　(T_k) を有界停止時刻の増大列とする．$Y_n = X_{T_n}$ および $\mathscr{G}_n = \mathscr{F}_{T_n}$ とおけば，(Y_n) は $(\mathscr{G}_n)$ -劣マルチンゲールである．

証明．注意 1.1.6 より X_{T_n} は $\mathscr{F}_{T_n}$ -可測なので，　(Y_n) は $(\mathscr{G}_n)$ -適合である．また，定理　1.3.1 より $Y_n = X_{T_n}$ の可積分性も保証される．定理 1.3.3 から

$$E[Y_{n+1} \mid \mathscr{G}_n] = E[X_{t_{n+1}} \mid \mathscr{F}_{T_n}] \geq X_{T_n} = Y_n$$

となるので，(Y_n) -の劣マルチンゲール性がわかる． □

1.4　劣マルチンゲール不等式

この節では，Doob の不等式とよばれる劣マルチンゲールに関する重要な不等式を証明する．

定理 1.4.1 (Doob の不等式)**.** $X = (X_n)$ を $(\mathscr{F}_n)$ -劣マルチンゲールとすれば，　$\lambda > 0$ に対して以下の不等式が成立する．

$$\lambda P\left[\sup_{0\leq n\leq N} X_n \geq \lambda\right] \leq E\left[X_N 1_{\{\sup_{0\leq n\leq N} X_n \geq \lambda\}}\right] \leq E\left[X_N^+\right] \tag{1.4.1}$$

$$\lambda P\left[\inf_{0\leq n\leq N} X_n \leq -\lambda\right] \leq E[X_N - X_0] - E\left[X_N 1_{\{\inf_{0\leq n\leq N} X_n \leq -\lambda\}}\right] \leq E\left[X_N^+\right] - E[X_0] \tag{1.4.2}$$

証明．**ステップ 1 : (1.4.1) の証明．** 二つ目の不等号は明らかなので，一つ目のみ示せばよい．

$$T := \inf\{n \geq 0 \mid X_n \geq \lambda\}$$

と定義する．（ただし，$\inf\emptyset = \infty$ とする．）このとき T は停止時刻であり．

$$\left\{\sup_{0\leq n\leq N} X_n \geq \lambda\right\} = \{T \leq N\} \tag{1.4.3}$$

と書ける．定理 1.3.1 により

$$
\begin{aligned}
E[X_N] &\geq E[X_{T\wedge N}] \\
&= E\left[X_{T\wedge N}1_{\{T\leq N\}}\right] + E\left[X_{T\wedge N}1_{\{T>N\}}\right] \\
&= E\left[X_T 1_{\{T\leq N\}}\right] + E\left[X_N 1_{\{T>N\}}\right] \\
&\geq E\left[\lambda 1_{\{T\leq N\}}\right] + E\left[X_N 1_{\{T>N\}}\right] \\
&= \lambda\, P\,[T\leq N] + E\left[X_N 1_{\{T>N\}}\right]
\end{aligned}
$$

となるが，(1.4.3) よりこれは

$$
\lambda\, P\left[\sup_{0\leq n\leq N} X_n \geq \lambda\right] \leq E\left[X_N 1_{\{\sup_{0\leq n\leq N} X_n \geq \lambda\}}\right]
$$

を表している．

ステップ 2：(1.4.2) の証明． 今度は停止時刻 S を

$$
S := \inf\{n\geq 0 \mid X_n \leq -\lambda\}
$$

と定めれば，

$$
\left\{\inf_{0\leq n\leq N} X_n \leq -\lambda\right\} = \{S\leq N\}
$$

である．定理 1.3.1 により

$$
\begin{aligned}
E[X_1] &\leq E[X_{S\wedge N}] \\
&= E\left[X_{S\wedge N}1_{\{S\leq N\}}\right] + E\left[X_{S\wedge N}1_{\{S>N\}}\right] \\
&= E\left[X_S 1_{\{S\leq N\}}\right] + E\left[X_N 1_{\{S>N\}}\right] \\
&\leq E\left[-\lambda 1_{\{S\leq N\}}\right] + E\left[X_N 1_{\{S>N\}}\right] \\
&= -\lambda\, P\,[S\leq N] + E\left[X_N 1_{\{S>N\}}\right]
\end{aligned}
$$

となるが，これはすなわち

$$
\lambda\, P\left[\inf_{0\leq n\leq N} X_n \leq -\lambda\right] \leq E[X_N - X_1] - E\left[X_N 1_{\{\inf_{0\leq n\leq N} X_n \leq -\lambda\}}\right]
$$

ということである．二つ目の不等号については，

$$
E\left[X_N 1_{\{\inf_{0\leq n\leq N} X_n > -\lambda\}}\right] \leq E\left[X_N^+ 1_{\{\inf_{0\leq n\leq N} X_n > -\lambda\}}\right] \leq E\left[X_N^+\right]
$$

より分かる． □

系 1.4.2. $p\geq 1$ とし $M=(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を p 乗可積分なマルチンゲール（または非負劣マルチンゲール）とすれば，$a>0$ に対して以下の不等式がなりたつ．

$$
a^p\, P\left[\sup_{0\leq n\leq N} |M_n| \geq a\right] \leq E\left[|X_N|^p\right] \tag{1.4.4}
$$

証明．命題 1.2.3 により $(|M_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ は劣マルチンゲールになるから，$X=|M|^p, \lambda=a^p$ とおいて (1.4.1) を用いればよい． □

定理 1.4.1 で得た不等式をモーメントの評価に関する式に書きかえる．次の不等式もまた Doob の不等式とよばれ，マルチンゲール理論においてきわめて重要な道具となっている．

定理 1.4.3. $p>1$ とし，$M=(M_n)$ を p 乗可積分なマルチンゲールか（または非負の劣マルチンゲール）とする[*1]．このとき

$$E\left[\sup_{0\leq k\leq n}|M_k|^p\right]\leq\left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\left[|M_N|^p\right] \tag{1.4.5}$$

が成立．

証明．この証明はなかなかテクニカルである．

ステップ 1 はじめに，$y\geq 0$ および $q>0$ としたとき，以下の関係がなりたつことに注意しておく．

$$y^q=\int_{]0,y]}qz^{q-1}dz=\int_{]0,\infty[}qz^{q-1}1_{]0,y]}(z)dz. \tag{1.4.6}$$

ステップ 2．$M_n^*=\sup_{0\leq k\leq n}|M_k|$ とおくことにする．1.4.6 において $y=M_n^*$ および $q=p$ とすれば，

$$(M_n^*(\omega))^p=\int_{]0,\infty[}qz^{q-1}1_{]0,M_n^*(\omega)]}(z)dz$$

となる．両辺の期待値をとれば，

$$\begin{aligned}
&E\left[(M_n^*)^p\right]\\
&=E\left[\int_{]0,\infty[}pz^{p-1}1_{]0,M_n^*]}(z)dz\right]\\
&=\int_{]0,\infty[}E\left[pz^{p-1}1_{]0,M_n^*]}(z)\right]dz && (\because \text{Fubini's theorem})\\
&=\int_{]0,\infty[}pz^{p-1}P\left[M_n^*\geq z\right]dz\\
&\leq\int_{]0,\infty[}pz^{p-2}\left(\int_\Omega|M_n(\omega)|1_{\{M_n^*\geq z\}}(\omega)P(d\omega)\right)dz && (\because (1.4.1))\\
&=\int_\Omega|M_n(\omega)|\left(\int_{]0,\infty[}pz^{p-2}1_{]0,M_n^*(\omega)]}(z)\,dz\right)P(d\omega) && (\because \text{Fubini})\\
&=\int_\Omega|M_n(\omega)|\left(\frac{p}{p-1}\right)(M_n^*(\omega))^{p-1}\,P(\omega) && (\because (1.4.6))\\
&=\left(\frac{p}{p-1}\right)E\left[|M_n|(M_n^*(\omega))^{p-1}\right]
\end{aligned}$$

が分かる．ここで，Hölder の不等式を用いれば

$$E\left[|M_n|(M_n^*)^{p-1}\right]\leq E\left[|M_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}E\left[(M_n^*)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

となるから，結局

$$E\left[(M_n^*)^p\right]\leq\left(\frac{p}{p-1}\right)E\left[|M_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}E\left[(M_n^*)^p\right]^{\frac{p-1}{p}} \tag{1.4.7}$$

[*1] なお X_n が p 乗可積分でない時には自明な不等式である．

なる式を得ることになる．$E\left[(M_n^*)^p\right]=0$ のときは求める式 (1.4.5) は明らかなので，いま $E\left[(M_n^*)^p\right]>0$ を仮定しても良い．(1.4.7) において両辺を $E[(M_n^*)^p]^{\frac{p-1}{p}}$ で割れば

$$\left(E\left[(M_n^*)^p\right]\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right) E\left[|M_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

となるので，これの両辺を p 乗すれば (1.4.5) を得る． □

1.5 収束定理

実数 $a<b$ と劣マルチンゲール (X_n) に対して確率変数 $U_n(a,b,X)$ を以下の手順で定める．このように定めた $U_n(a,b,X)$ のことを上向き横断数 (*upcrossing number*) とよぶ．

$$\begin{aligned} N_0 &= -1 \\ N_{2k-1} &= \inf\{m > N_{2k-2} \mid X_m < a\} \quad (k \geq 1) \\ N_{2k} &= \inf\{m > N_{2k-1} \mid X_m > b\} \quad (k \geq 1) \end{aligned}$$

と定義すれば，$(N_k)_{k\geq 1}$ は停止時刻である[*2]．このように定義した (N_k) に対して

$$U_n(a,b,X) = \sup\{k \mid N_{2k} \leq n\}$$

とする．また，可予測過程 (H_n) を

$$H_n = 1_{\{N_{2k-1} < n \leq N_{2k} \text{ for some } k \geq 1\}}$$

と定める．

定理 1.5.1 (Upcrossing inequality)．確率過程 $X=(X_n)$ が劣マルチンゲールなら

$$(b-a)E[U_n(a,b,X)] \leq E\left[(X_n-a)^+\right] - E\left[(X_0-a)^+\right] \leq E[X^+] + |a|.$$

証明．新たな確率過程 $Y=(Y_n)$ を $Y_n = a + (X_n - a)^+$ によって定めれば Y は劣マルチンゲールである．したがって $(H\cdot Y)$ も劣マルチンゲールである．H の定義より次の不等式が成り立つ．

$$(b-a)U_n(a,b,X) \leq (H\cdot Y)_n$$

ここで $K = 1 - H$ と定義すれば

$$(H\cdot Y)_n + (K\cdot Y)_n = (1\cdot Y)_n = Y_n - Y_0.$$

$(K\cdot Y)$ もまた劣マルチンゲールになるから，

$$E(K\cdot Y)_n \geq E(K\cdot Y)_0 = 0$$

である．したがって

$$(b-a)E\left[U_n(a,b,X)\right] \leq E\left[(H\cdot Y)_n\right] \leq E[Y_n - Y_0] = E\left[(X_n-a)^+\right] - E\left[(X_0-a)^+\right]$$

[*2] 離散時間の場合は $X_m \leq a$ などのように定義されることが多いが，連続マルチンゲールへの拡張の際にはこのように定義したほうが便利なので，こちらの定義を採用する．実際，確率解析の本ではこのように書いているものも多いと思う．

となり，一つ目の不等号を得る．二つ目の不等号に関しては

$$(X_n - a)^+ - (X_0 - a)^+ \leq (X_n - a)^+ \leq X_n^+ + |a|$$

より従う． □

定理 1.5.2 (劣マルチンゲール収束定理)**.** $X = (X_n)$ を X^+ が L^1 -有界であるような劣マルチンゲールとする．このとき，ある可積分な確率変数 X_∞ が存在して $X_n \to X_\infty$ a.s. となる．

証明．定理 1.5.1 により，任意の実数 $a < b$ に対して

$$E\left[U_n(a,b,X)\right] \leq \frac{E\left[X_n^+\right] + |a|}{b-a} \leq \frac{\sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^+] + |a|}{b-a} < \infty$$

が成り立つ．$U_n(a,b,X(\omega))$ の極限を $U_\infty(a,b,X(\omega))$ とおけば[*3]，単調収束定理により

$$E\left[U_\infty(a,b,X)\right] < \infty$$

であり，$U_\infty(a,b,X) < \infty$ a.e. となる．ところで，

$$\begin{aligned}\left\{\omega\in\Omega \;\middle|\; \varliminf_{n\to\infty} X_n(\omega) < \varlimsup_{n\to\infty} X_n(\omega)\right\} &\subset \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}} \left\{\omega\in\Omega \;\middle|\; \varliminf_{n\to\infty} X_n(\omega) < a < b < \varlimsup_{n\to\infty} X_n(\omega)\right\} \\ &\subset \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}} \left\{\omega\in\Omega \;\middle|\; U_\infty(a,b,X(\omega)) = \infty\right\}\end{aligned}$$

に注意すれば

$$P\left[\varliminf_{n\to\infty} X_n < \varlimsup_{n\to\infty} X_n\right] \leq \sum_{a,b\in\mathbb{Q}} P\left[U_\infty(a,b,X) = \infty\right] = 0$$

となり，$(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ がほとんど確実に極限をもつことがわかった．ここで

$$X_\infty(\omega) = \begin{cases}\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) & \text{極限が存在するとき．} \\ 0 & \text{その他．}\end{cases}$$

と定義すれば，$X_n \longrightarrow X_\infty$（概収束）となるから，あとは X_∞ の可積分性を言えばよい．Fatou の補題により

$$E[X_\infty^+] \leq \varliminf_{n\to\infty} E[X_n^+] \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^+] < \infty$$

である．また，

$$E[X_n^-] \leq E[X_n^+] - E[X_n] \leq \sup E[X_n^+] - E[X_0]$$

に注意すれば，再び Fatou の補題を用いて

$$E[X_\infty^-] \leq \varliminf_{n\to\infty} E[X_n^-] \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^+] - E[X_0] < \infty$$

が成り立つ．これにより，X_∞ の可積分性が示された． □

定理 1.5.3. 劣マルチンゲール $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，次の条件は同値である．

(i) X は一様可積分．

[*3] n に関して増加的なので $+\infty$ も含めれば極限は存在する．

(ii) X は L^1 収束する．

(iii) X はある可積分な確率変数 X_∞ に概収束し，$(X_n)_{n\in\mathbb{N}_\infty}$ は $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_\infty}$ -劣マルチンゲールとなる．さらに，$E[X_n]\to E[X_\infty]$ がなりたつ．

証明．**ステップ 1：(i)⇒(ii) の証明．** X が一様可積分ならば (X_n^+) は L^1 有界であるから，定理 1.5.2 よりある可積分な確率変数 X_∞ が存在して $X_n\to X_\infty$，$P-\text{a.s.}$ となる．一様可積分性よりこれは L^1 収束でもいえる．

ステップ 2：(ii)⇒(iii) の証明． X の L^1 -極限を $\tilde{X}_\infty$ とおく．X は L^1 収束するので L^1 -有界であり，定理 1.5.2 によりある可積分な X_∞ に概収束する．極限の一意性より $\tilde{X}_\infty=X_\infty$，$P-\text{a.s.}$ であり，L^1 収束より

$$X_n\le\lim_{m\to\infty,m\ge n}E[X_m\mid\mathscr{F}_n]=E[X_\infty\mid\mathscr{F}_n]$$

を得る．よって $(X_n;n\in\mathbb{N}_\infty)$ は $(\mathscr{F}_n;n\in\mathbb{N}_\infty)$ -劣マルチンゲールである．また，一様可積分性は期待値の収束をもたらすので，最後の条件も明らかである．

ステップ 3：(iii)⇒(i) の証明． $X=(X_n)$ は劣マルチンゲールなので，命題 1.2.3 より $(X_n^+)_{n\in\mathbb{N}_\infty}$ もまた劣マルチンゲールであり，

$$\int_{\{|X_n|\ge\lambda\}}X_n^+dP\le\int_{\{|X_n|\ge\lambda\}}X_\infty^+dP \tag{1.5.1}$$

がなりたつ．いま，劣マルチンゲール性より

$$P\left[X_n^+\ge\lambda\right]\le\frac{1}{\lambda}E[X_n^+]\le\frac{1}{\lambda}E[X_\infty^+]$$

であるから，(1.5.1) において $\lambda\to\infty$ とすれば，$X=(X_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ の一様可積分性が分かる．仮定より $X_n^+\to X_\infty$ $P-\text{a.s.}$ だから，一様可積分性とあわせて $E[X_n^+]\to E[X_\infty^+]$ となる．これと仮定の $E[X_n]\to E[X_\infty]$ をあわせれば $E[X_n^-]\to E[X_\infty^-]$ となるが，$X_n^-\to X_\infty^-$，$P-\text{a.s.}$ だったから命題 A.4.3によって (X_n^-) の一様可積分性が分かる．したがって $X=X^+-X^-$ も一様可積分である． □

定理 1.5.4. $X=(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ -マルチンゲールとしたとき，以下の条件は同値である．

(i) X は一様可積分．

(ii) X は L^1 収束する．

(iii) X はある可積分な確率変数 X_∞ に概収束し，$(X_n)_{n\in\mathbb{N}_\infty}$ は $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_\infty}$ -マルチンゲールとなる．

(iv) ある可積分な確率変数 Y が存在して，$X_n=E[Y|\mathscr{F}_n]$ と書ける．

証明．(i)⇒(ii) は定理 1.5.3 と全く同じで，(ii)⇒(iii) も劣マルチンゲールの不等号が等号になるだけである．(iii)⇒(iv) は $Y=X_\infty$ とおけばよい．(iv)⇒(i) は $X_n=E[Y\mid\mathscr{F}_n]$ の表示より一様可積分性は明らか． □

定理 1.5.5. $\mathscr{F}_\infty=\bigvee_n\mathscr{F}_n$ とおく．可積分関数 X に対して $X_n=E[X\mid\mathscr{F}_n]$ とおけば，$X_n\to X_\infty:=E[X\mid\mathscr{F}_\infty]$ が概収束と L^1 収束の意味で成立する．

証明．定義より明らかに (X_n) は一様可積分マルチンゲールである．命題 1.5.4 より (X_n) はある $\mathscr{F}_\infty$ -可測[*4]確率変数 Z に概収束，そして L^1 収束するから，$Z=Y_\infty$ であることを示せばよい．任意の $A\in\mathscr{F}_n$ に

[*4] 劣マルチンゲール収束定理では単にある可積分な確率変数 Z という主張であったが，定理の証明中にあるように $Z(\omega)=\lim X_n(\omega)$(極限が存在), 0(その他) とすればこれは自動的に $\mathscr{F}_\infty$ -可測になることに注意．

対して

$$\int_A XdP = \int_A X_n dP$$

であるから，$X_n 1_A \to Z 1_A$ in L^1 に注意すれば

$$\int_A XdP = \int_A ZdP \tag{1.5.2}$$

である．特に (1.5.2) は任意の $A \in \bigcup_n \mathscr{F}_n$ に対して成立することが分かる．条件 (1.5.2) を満たすような $A \in \mathscr{F}$ の全体が $\bigcup_n \mathscr{F}_n$ を含む Dynkin 族をなすことは容易に示されるので，Dynkin 族定理より

$$\int_A XdP = \int_A ZdP \quad \forall A \in \mathscr{F}_\infty$$

となる．Z は $\mathscr{F}_\infty$ -可測であることとに注意すれば，条件付き期待値の定義より　$Z = E[X \mid \mathscr{F}_\infty]$ a.e. である． □

命題 1.5.6. 確率変数列 (Y_n) が $Y_n \to Y$ a.s. をみたし，$|Y_n| \leq Z$ なる可積分確率変数 Z が存在するとき

$$E[Y_n \mid \mathscr{F}_n] \to E[Y \mid \mathscr{F}_\infty] \quad P-\text{a.s.}$$

である．

証明.

$$|E[Y_n|\mathscr{F}_n] - E[Y|\mathscr{F}_\infty]| \leq |E[Y_n|\mathscr{F}_n] - E[Y|\mathscr{F}_n]| + |E[Y|\mathscr{F}_n] - E[Y|\mathscr{F}_\infty]|$$

で右辺第二項は定理 1.5.5 より 0 に概収束するから，右辺第一項の収束のみ調べればよろしい．$W_N := \sup\{|Y_n - Y_m|\}$ とおいたとき，$E[W_N] \leq 2E[Z]$ より W_N は可積分である．定義より $|Y_n - Y| \leq W_N$ が任意の $n \geq N$ に対してなりたつから，

$$E[|Y_n - Y| \mid \mathscr{F}_n] \leq E[W_N \mid \mathscr{F}_n] \quad P-\text{a.s.},\ \forall n \geq N$$

となるが，ここで $N \to \infty$ の極限をとれば，定理 1.5.5 により

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty} |E[Y_n \mid \mathscr{F}_n] - E[Y \mid \mathscr{F}_\infty]| &\leq \varlimsup_{n\to\infty} E[|Y_n - Y| \mid \mathscr{F}_n] \\ &\leq \varlimsup_{n\to\infty} E[W_N \mid \mathscr{F}_n] \\ &= E[W_N \mid \mathscr{F}_\infty] = W_N\end{aligned}$$

を得る[*5]．ところで，(Y_n) が概収束する列であったから $W_N \downarrow 0$ a.e.$(N \to \infty)$ となるので[*6]

$$\varlimsup_{n\to\infty} |E[Y_n \mid \mathscr{F}_n] - E[Y \mid \mathscr{F}_\infty]| = 0$$

が分かる． □

いままでは $\mathbb{N}$ を時刻集合にもつ離散過程を考えて来たが,（技術的な理由で）$X_{-1}, X_{-2}, \ldots$ という過程を考えると便利なことも多い．これらは後々連続過程を扱う際に特に役に立つので，基本的な結果を紹介して

[*5] 各 Y_n はどれも $\mathscr{F}_\infty$ -可測なので，それらの絶対値や　sup をとったものである W_N も当然 $\mathscr{F}_\infty$ -可測になっていることに注意.
[*6] $W_N(\omega) \to 0$ というのは (Y_n) のパスに関する Cauchy 条件に他ならない.

おく．n に関して増加的な σ -加法族の列　$(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_-}$ を考える．（ただし $Z_- = \{0,-1,-2,\dots\}$ である．）$X=(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_-}$ が後ろ向き劣マルチンゲール (backward submartingale) であるとは，適合性，可積分性と

$$E[X_{n+1}\mid\mathscr{F}_n]\geq X_n$$

という条件がみたされることである．同様にして後ろ向きマルチンゲール (backward martingale) も定義する．

補題 1.5.7. $X=(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_-}$ を後ろ向き劣マルチンゲールとする．$\lim_{n\to-\infty}E[X_n]>\infty$ ならば，X は一様可積分である．

証明．はじめに (X_n^+) の一様可積分性を示す．Jensen の不等式により $(X_n^+)_{n\in\mathbb{Z}_-}$ もまた後ろ向き劣マルチンゲールであるから，$\lambda>0$ に対して

$$\int_{\{X_n>\lambda\}}X_n^+dP\leq\int_{\{X_n^+>\lambda\}}X_0^+dP\leq\int_{\{|X_n|>\lambda\}}X_0^+dP \tag{1.5.3}$$

がなりたつ．補題の仮定及び劣マルチンゲール性より

$$P[|X_n|>\lambda]\leq E[|X_n|]=2E[X_n^+]-E[X_n]\leq 2E[X_0]-\lim_{n\to-\infty}E[X_n]<\infty$$

であるから，$\sup_n P[|X_n|>\lambda]\to 0$ $(\lambda\to+\infty)$ となる．これより (1.5.3) において $\lambda\to+\infty$ とすれば $(X_n^+)_{n\in\mathbb{Z}_-}$ の一様可積分性が分かる．

次に (X_n^-) の一様可積分性について調べる．仮定より $(E[X_n])$ は収束列であるから，任意の $\varepsilon>0$ に対してある $N\in\mathbb{Z}_-$ が存在して，$m<n\leq N$ なる任意の n,m に対して $E[X_n]-E[X_m]<\varepsilon/2$ がなりたつ[*7]．先ほどと同様に

$$P\left[X_n<-\lambda\right]\leq P\left[|X_n|>\lambda\right]\leq\sup_{n\in\mathbb{Z}_-}P\left[|X_n|>\lambda\right]\to 0\quad(\lambda\to+\infty)$$

となるから，X_N の可積分性より十分大きな $\lambda>0$ に対して

$$\int_{\{X_n<-\lambda\}}|X_N|dP<\frac{\varepsilon}{2}\quad(\forall n\leq N)$$

特に

$$\sup_{n\leq N}\int_{\{X_n<-\lambda\}}|X_N|dP<\frac{\varepsilon}{2}\quad(\forall n\leq N)$$

[*7] 収束列は Cauchy 列である．（念のため．）

が成立．これらの議論により，十分大きい λ をとれば

$$
\begin{aligned}
0 \le \int_{\{X_n<-\lambda\}} X_n^- dP &= \int_{\{X_n<-\lambda\}} -X_n dP \\
&= E[-X_n] - \int_{\{X_n\ge-\lambda\}} -X_n dP \\
&= E[-X_n] + \int_{\{X_n\ge-\lambda\}} X_n dP \\
&\le E[-X_n] + \int_{\{X_n\ge-\lambda\}} X_N dP \\
&= E[X_N] - E[X_n] \int_{\{X_n<-\lambda\}} X_N dP \\
&= E[X_N] - E[X_n] \int_{\{X_n<-\lambda\}} |X_N| dP \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

が任意の $n \le N$ に対してなりたつ．$0 \ge n > N$ なる有限個の確率変数列の可積分性と合わせれば，(X_n^-) の一様可積分性も示された．

したがって $X = X^+ - X^-$ も一様可積分である． □

命題 1.5.8. $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}_-}$ を後ろ向きマルチンゲールとする．このとき $\lim_{n\to-\infty} X_n(\omega)$ は確率 1 で存在し，しかも L^1 の意味での極限にもなっている．

証明．上向き横断不等式を $X_{-n}, \ldots, X_0$ に適用すれば

$$(b-a)E\left[U_{\{-n,\ldots,0\}}(a,b,X)\right] \le E[X_0^+] + |a| < \infty$$

であるから，劣マルチンゲール収束定理と同様にして概収束極限 $\lim_{n\to-\infty} X_n(\omega) =: X_\infty(\omega)$ の存在が示される．補題 1.5.7 により X は一様可積分であるから，X_∞ は L^1 の意味での極限でもある． □

定理 1.5.9. Y を可積分確率変数，$\mathscr{F}_{-\infty} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_n$ とする．$Y_n = E[Y|\mathscr{F}_n]$ $(n \in \mathbb{Z}_- \cup \{-\infty\})$ とおけば，$Y_n \to Y_\infty$ が概収束，および L^1 -収束の意味でなりたつ．

証明．定義より $Y = (Y_n)_{n\in\mathbb{Z}_-}$ は後ろ向きマルチンゲールであるから，命題 1.5.8 より概収束（そして L^1 収束）の意味での極限 Z が存在する．$m \ge n$ での極限を考えれば，Z は $\mathscr{F}_n$ 可測である[*8]ことが分かる．N を任意に動かせば Z は結局 $\mathscr{F}_{-\infty}$ -可測である．また， $A \in \mathscr{F}_{-\infty} \subset \mathscr{F}_n$ に対して

$$\int_A Y dP = \int_A Y_n dP$$

であるから，$Y_n 1_A \to Z 1_A \ \mathrm{in}\, L^1$ により

$$\int_A Y dP = \int_A Z dP \quad A \in \mathscr{F}_\infty$$

が分かる．したがって Z は $E[Y|\mathscr{F}_{-\infty}]$ の一つのバージョンである． □

*8 ように選ぶことが出来る，というのが正確な言い方だが...

1.6 任意抽出定理-その２

命題 1.6.1. $X = (X_n)$ を一様可積分な劣マルチンゲールとしたとき任意の停止時刻 T に対して X^T は一様可積分な確率過程となる．

証明．はじめに X_T の可積分性を示す．定理 1.5.2 により X は収束するので，その極限を X_∞ とおく．この時，X_T は Ω 上で定義されていることに注意されたい．仮定と定理 1.3.2 により

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E\left[X_{T\wedge n}^+\right] \le \sup_{n\in\mathbb{N}} E\left[X_n^+\right] < \infty$$

が成り立つので，再び定理 1.5.2 により劣マルチンゲール X^T はある可積分な確率変数に概収束する．$\{T < \infty\}$ においては十分大きな n に対して

$$|X_{T\wedge n}(\omega) - X_T(\omega)| = |X_T - X_T| = 0 \quad (\text{各点収束})$$

また，$\{T = \infty\}$ 上では X_∞ の定義より

$$X_n \to X_\infty = X_T \quad \text{a.e.}$$

これらの議論により特に $X_{T\wedge n} \to X_T$ である事が分かるので，極限の一意性より (X_n^T) の概収束極限 X_T の可積分性が分かる．いま，

$$\begin{aligned} E[|X_{T\wedge n}|; |X_{T\wedge n}| > K] &= E[|X_T|; |X_T| > K, T \le n] + E[|X_n|; |X_n| > K, T > n] \\ &\le E[|X_T|; |X_T| > K] + E[|X_n|; |X_n| > K] \\ &\le E[|X_T|; |X_T| > K] + \sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n|; |X_n| > K] \end{aligned}$$

であるから，左辺で n に関して上限をとって，両辺において $K \to \infty$ とすればよい． □

命題 1.6.2. (X_n) を $(\mathscr{F}_n)$-適合な確率過程，T を $(\mathscr{F}_n)$ -停止時刻で　X_T が Ω 上で定義されているものとする．X_T が可積分で $X_n 1_{\{T>n\}}$ が一様可積分ならば $X^T = (X_{T\wedge n})$ も一様可積分である．

証明．定理 1.6.1 の証明と同様である． □

定理 1.6.3. $X = (X_n)$ を一様可積分な劣マルチンゲール，T を任意の停止時刻とするとき，以下の不等式が成り立つ．

$$E[X_0] \le E[X_T] \le E[X_\infty].$$

ただし，X_∞ は X の概収束極限である．

証明．命題 1.6.1 により X^T は一様可積分だから，$X_n^T \to X_T$（概収束）とあわせれば命題 A.4.3 によって

$$E[X_{T\wedge n}] \longrightarrow E[X_T] \quad (n \longrightarrow \infty)$$

である．

$$E[X_0] = E[X_{T\wedge 0}] \le E[X_{T\wedge n}] \longrightarrow E[X_T] \quad (\text{as } n \longrightarrow \infty)$$

より，一つ目の不等号が成り立つ．次に，定理 1.3.2 により

$$E[X_{T\wedge n}] \le \; E[X_n]$$

であるから，(X_n) の一様可積分性に注目すれば，両辺で $n \to \infty$ の極限をとって

$$E[X_T] \le E[X_\infty]$$

を得る． □

定理 1.6.4. S, T を $S \le T$ a.s. を満たす任意の停止時刻，$X = (X_n)$ を X^T が一様可積分な劣マルチンゲールになるような適合過程とする．このとき

$$E[X_T \mid \mathscr{F}_S] \ge X_S \quad \text{a.e.}$$

が成り立つ．

証明．定理 1.5.2 により X^T は a.e. で収束するので，その極限を X^T_∞ とおく．$\{T = \infty\}$ 上では $X_T = X^T_\infty$ によって定義されていると考える．このとき $X^T_\infty = X_T$ a.e. である．確率過程 $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}_\infty}$ を

$$Y_n = \begin{cases} X_{T \wedge n} & (n \in \mathbb{N}) \\ X^T_\infty & (n = \infty) \end{cases}$$

と定めれば，$(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は一様可積分な劣マルチンゲールであるから，定理 1.6.3 によって

$$E[Y_S] \le E[Y_\infty]$$

ここで $Y_S = X_{T \wedge S} = X_S$ a.e. および $Y_\infty := X^T_\infty = X_T$ a.e. に注意すれば

$$E[X_S] \le E[X_T] \quad \text{a.e.}$$

を得る．

　$A \in \mathscr{F}$ に対して確率変数 S_A を

$$S_A = \begin{cases} S(\omega) & \omega \in A \\ T(\omega) & \omega \in \Omega \setminus A \end{cases}$$

と定めれば，S_A は $S_A \le T$ を満たす停止時刻となる．前半の結果により

$$\begin{aligned} E[X_S; A] + E[X_T; A^c] &= E[X_{S_A}; A] + E[X_{S_A}; A^c] \\ &= E[X_{S_A}] \\ &\le E[X_T] \\ &= E[X_T; A] + E[X_T; A^c] \end{aligned}$$

である．これより，任意の $A \in \mathscr{F}_S$ に対して

$$E[X_S 1_A] \le E[X_T 1_A]$$

が成り立つことが示された． □

1.7 Doob 分解

　離散時間確率過程はマルチンゲールと可予測過程に分解できるという定理を証明する．Doob 分解とは，一般に劣マルチンゲールの分解に関するものであることが多いが，ここでは Rogers & Williams[40] に従ってもう少し一般的な形での主張を証明する．

定義 1.7.1 (増加過程). 以下の条件を満たす確率過程 $A=(A_n)$ を増加過程と呼ぶ.

(i) $A_0=0,\ P-\text{a.s.}$

(ii) 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $A_n\le A_{n+1},\ P-\text{a.s.}$

定理 1.7.2. 可積分関数の列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $(\mathscr{F}_n)$ -適合過程であるとする．このとき

$$X_n=M_n+A_n \quad P-\text{a.s.}$$

を満たすような $(\mathscr{F}_n)$ -マルチンゲール　$M=(M_n)$ と可予測過程 $A=(A_n)$ が存在する．この分解は一意的である.

証明. **ステップ 1：分解の構成.**

$$Y_n := E[X_n-X_{n-1}|\mathscr{F}_{n-1}] \quad (n\ge 1)$$
$$A_n := \sum_{k=1}^n Y_k \quad (n\in\mathbb{N})$$

と定めれば，$A=(A_n)$ は可予測過程である.

$$M_n=X_n-A_n$$

とおけば，適合性と可積分性は明らか．$n\ge 1$ として

$$\begin{aligned}M_n&=X_n-\sum_{k=1}^n Y_k\\&=X_{n-1}-\sum_{k=1}^{n-1}Y_k+(X_n-X_{n-1})-E[X_n-X_{n-1}|\mathscr{F}_{n-1}]\\&=M_{n-1}+X_n-E[X_n|\mathscr{F}_n]\end{aligned}$$

となるから，M のマルチンゲール性が分かる.

ステップ 2：一意性 $X=M+A=M'+A'$ という分解が得られたとする．$Z=A-A'=M'-M$ とおけば，Z は可予測なマルチンゲールになる．可予測性およびマルチンゲール性より

$$Z_n=Z_{n-1}=\cdots=Z_0=0 \quad P-\text{a.s.}$$

となるので，一意性が分かった. □

系 1.7.3 (劣マルチンゲールの Doob 分解). (X_n) が $(\mathscr{F}_n)$ -劣マルチンゲールならば，　X はマルチンゲール M と増加過程 A に分解される．A は可予測過程としてとれて，その時は分解は一意的である.

証明. 1.7.2 で得られた分解で，A が増加過程になっていることを示せばよい．$A_0=0$ は明らかであり，X の劣マルチンゲール性より

$$A_n-A_{n-1}=E[X_n|\mathscr{F}_{n-1}]-X_{n-1}\ge 0$$

となるので，A は増加過程である. □

1.8 Notes

このセクションの内容は主に Durrett [13] および舟木 [14] を参考にして書いた．離散マルチンゲールに関しては Williams [50] や Rogerts & Williams [40] なども詳しい．Chung [5] にも多くのことが書いており学ぶことも多いが，記法や証明の流儀は少々古臭く感じられるかもしれない．後ろ向き列マルチンゲールに関しては，添え字集合は $\mathbb{N}$ のままで減少的な列 $\mathscr{F}_0 \supset \cdots \supset \mathscr{F}_n \supset \mathscr{F}_{n+1} \supset \ldots$ を考えるという流儀もあるので（Karatzas & Shreve [24] など），他書を読む際には注意されたい．

2 確率過程

2.1 定義

はじめに，基礎的な用語の導入をする．

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とする．$\mathbb{T} \subset [0,\infty[= \mathbb{R}_+$ とするとき $\mathbb{T}$ によって添え字づけられた確率変数族 $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ を確率過程と呼ぶ．時間集合 $\mathbb{T}$ が $[0,\infty[$ の区間であるときに連続時間確率過程ということが多いようである．また，極限などを考慮に入れて時間集合を $[0,\infty]$ などとすることもある．$\omega \in \Omega$ を固定するたびに写像 $\mathbb{T} \ni t \mapsto X_t(\omega) \in \mathbb{R}$ が定まるが，これをパス (*path*) とよぶ．*trajectory* などということもある．

$X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ および $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ を確率過程とする．

$$\forall t \in \mathbb{T} \quad P(X_t = Y_t) = 1$$

を満たすとき，X と Y は互いに修正 (*modification*) の関係にあるという．バージョン (*version*) ということもある．また，$\{\omega \in \Omega \mid \exists t \in \mathbb{R}_+,\ X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$ が P-零集合であるとき[*9]，X と Y は区別不能 (*indistinguishable*) であるという．これはすなわち，確率 1 でパスが一致するということである．X と Y がともに確率 1 で連続[*10]なパスをもつならば，二つの概念は明らかに一致する．一般の確率過程については，X が連続でかつ Y は不連続なパスを持つような修正が存在する．[*11]

また, 必ずしも同じ確率空間で定義されていない確率過程にもある種の相等性を定義できる．$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の $\mathbb{R}^d$ 値確率過程 $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ と $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}, \tilde{P})$ 上の $\mathbb{R}^d$ 値確率過程 $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ を考える．任意の $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset \mathbb{T}$ と任意の $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$P[(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in B] = \tilde{P}[(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n}) \in B]$$

がなりたつとき，X と Y は同じ有限次元分布を持つという．もちろん X, Y は同じ確率空間上に定義されていてもかまわない．

確率過程 X は全ての $\omega \in \Omega$ に対して $t \mapsto X_t(\omega)$ が連続関数になるとき，連続なパスをもつという．X を連続確率過程ということもある．パスが不連続な ω の全体が零集合のとき，X は確率 1 で連続なパスをもつという．このことをもって X が連続過程であると称することもあるようなので，基本的には注意が必要である．（とはいうものの，連続過程でなりたつ命題は確率 1 で連続な過程でもなりたつことが多いように思う．）全てのパスが連続としたほうが証明がスッキリすることが多いので，このノートでも大体そう仮定している．

同様にして，パスの右連続性や左連続性をもって右連続過程，左連続仮定を定義する．パスが各点で右連続かつ左極限をもつとき，確率過程は *càdlàg* なパスをもつという[*12]．

2.2 フィルトレーションと可測性

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とする．$\mathscr{F}$ の部分 σ -加法族の族 $(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ を考える．t に対して（包含関係について）増加的であるような $(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ をフィルトレーション (*filtration*) とよぶ．$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, P)$ をフィルター付き確率空間とよぶことも多い．

[*9] N が P-零集合とはある $E \in \mathscr{F}$ で $N \subset E$ かつ $P(E) = 0$ なるものがあるということである．

[*10] 右連続や左連続でもよい

[*11] Karatzas and Shreve の example1.4 [24, p.2] を参照．

[*12] フランス語の *continue à droite limites à gauche* ということばの略だとのこと．

$(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ をフィルトレーションとする．$t\in]0,\infty[$ に対して σ -加法族　$\mathscr{F}_{t-}=\sigma(\bigcup_{s<t}\mathscr{F}_s)$ が定義できる．これは，t の「直前」までに観察できる情報の全体と解釈できる．$\mathscr{F}_{0-}:=\mathscr{F}_0$ とすれば $(\mathscr{F}_{t-})_{t\in\mathbb{R}_+}$ は新たなフィルトレーションを成す．同様にして $t\in[0,\infty[$ に対して $\mathscr{F}_{t+}=\bigcap_{s>t}\mathscr{F}_s$ とおけば，これは t の「直後」に観察できる情報となる．$(\mathscr{F}_{t+})$ もまたフィルトレーションである．全ての $t\in[0,\infty[$ で $\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_{t+}$ となるとき，フィルトレーションは右連続であるという．同様にして $\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_{t-}$ でフィルトレーションの左連続性も定められる．$\mathscr{F}_\infty=\sigma(\bigcup_{t\geq 0}\mathscr{F}_t)$ と定義すれば適合過程 X のおいて任意の X_t は $\mathscr{F}_\infty$ 可測であるから，各点収束極限 $\lim_{t\to\infty}X_t$ が存在すればそれは $\mathscr{F}_\infty$ -可測である．

確率空間には完備性の概念が存在するが，フィルトレーションにも同じような概念を導入しよう．$(\Omega,\mathscr{F},P)$ を完備確率空間とし，$(\mathscr{F}_t)$ をフィルトレーションとする．

$$\mathscr{N}:=\{A\subset\Omega\mid \exists N\in\mathscr{F},\ A\subset N,\ P(N)=0\}$$

を考える．$\mathscr{N}\subset\mathscr{F}_0$ が成り立つとき，フィルターつき確率空間 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$ は完備であるという．この条件は，各 $t\in\mathbb{R}_+$ について確率空間 $(\Omega,\mathscr{F}_t,P\restriction_{\mathscr{F}_t})$ が完備である、というものとは異なることに注意されたい．というのも，$(\Omega,\mathscr{F}_t,P\restriction_{\mathscr{F}_t})$ が完備だからと言って $\mathscr{F}_t$ は $\mathscr{F}$ の P-零集合を全て含んでいるとは限らないからである．フィルトレーションの完備化の話をするときに確率空間 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ の完備性を仮定しなかったり，そもそも言及していなかったりする文献も多い．このノートでは今後フィルターつき確率空間の完備性を仮定する場合には，常に $(\Omega,\mathscr{F},P)$ の完備性を仮定することとする．

定義 2.2.1. $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$ を完備なフィルター付き確率空間とする．$(\mathscr{F}_t)$ がさらに右連続性をもつとき，$(\mathscr{F}_t)$ は通常の条件 (*usual condition*) を満たすという．

確率過程の可測性についていくつか用語を導入する．

$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{T}},P)$ をフィルター付き確率空間とし，$X=(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ を $\Omega,\mathscr{F},P)$ 上の $\mathbb{R}^d$ 値確率過程とする．

定義 2.2.2. 各 $t\in\mathbb{T}$ に対して X_t が $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ 可測であるとき，X は $(\mathscr{F}_t)$ -適合　(adapted) であるという．

定義 2.2.3. 写像 : $\mathbb{T}\times\Omega\ni(t,\omega)\mapsto X_t(\omega)\in\mathbb{R}^d$ が $\mathscr{B}(\mathbb{T})\otimes\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ 可測となるとき，X は可測 (measurable) であるという．

定義 2.2.4. $\mathbb{T}=[0,\infty[$ とする．任意の $t\in[0,\infty[$ に対して写像 : $[0,t]\times\Omega\ni(s,\omega)\mapsto X_s(\omega)\in\mathbb{R}^d$ が $\mathscr{B}([0,t])\otimes\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ 可測となるとき，X は $(\mathscr{F}_t)$ -発展的可測　(*progressively measurable*) であるという．

$(\mathscr{F}_t)$ -発展的可測過程は明らかに可測かつ　$(\mathscr{F}_t)$ -可測である．発展的可測性は幾分技術的な過程であり，いまいち意味がつかみにくい．しかし，我々は今後議論を進めていくうえでその恩恵を多く受けることになる．

次の命題は，右連続な適合過程は発展的可測であるということを主張するものである．

命題 2.2.5. $(\mathscr{F}_t)$ -適合過程　$X=(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ は任意の点で右連続（または左連続）なパスをもつとする．このとき X は発展的可測である．

証明. 右連続な場合のみ証明する．$t>0$ を固定する．

$$X_s^{(n)}(\omega):=X_0 1_{\{0\}}+\sum_{k=1}^{2^n}1_{]\frac{(k-1)t}{2^n},\frac{kt}{2^n}]}(s)X_{\frac{kt}{2^n}}(\omega)$$

と定義すれば，X の右連続性により各 $(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega$ で $X_s^{(n)} \to X_s$ である．写像 $[0,t] \times \Omega \ni (s,\omega) \mapsto X_s^{(n)}(\omega) \in \mathbb{R}$ は明らかに $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t / \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ -可測なので，その各点収束極限たる　$X|_{[0,t]\times\Omega}$ も同様の可測性をもつ． □

2.3　停止時刻

定義 2.3.1. 確率変数 $T : \Omega \to [0,\infty]$ が

$$\{\omega \mid T(\omega) \le t\} \in \mathscr{F}_t \quad (\forall t \in [0,\infty[)$$

と満たすとき，T を $(\mathscr{F}_t)$ -停止時刻　(*stopping time*) という．また，上の条件の代わりに

$$\{\omega \mid T(\omega) < t\} \in \mathscr{F}_t \quad (\forall t \in [0,\infty[)$$

を満たすとき，T を弱停止時刻 (*weak stopping time*) という．

命題 2.3.2. $(\mathscr{F}_t)$ は $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上のフィルトレーションとする．

(i) 任意の定数 $t \in [0,\infty[$ は $(\mathscr{F}_t)$ -停止時刻である．
(ii) 任意の $(\mathscr{F}_t)$ -停止時刻は弱停止時刻である．
(iii) フィルトレーションが右連続ならば，弱停止時刻は停止時刻となる．
(iv) 非負確率変数 T が $(\mathscr{F}_t)$ -弱停止時刻であることの必要十分条件は，　T が $(\mathscr{F}_{t+})$ -停止時刻になっていることである．

証明．(i) 非負定数が停止時刻であることは明らか．

(ii)T を停止時刻とすれば，

$$\{T < t\} = \bigcup_{n\ge1} \left\{T \le t - \frac{1}{n}\right\} \in \mathscr{F}_t$$

より T は弱停止時刻である．

(iii)S を右連続フィルトレーションに関する弱停止時刻とする．このとき

$$\{S \le t\} = \bigcap_{n\ge1} \left\{T < t + \frac{1}{n}\right\} \in \bigcap_{n\ge1} \mathscr{F}_{t+\frac{1}{n}} = \mathscr{F}_{t+} = \mathscr{F}_t$$

よりこれは停止時刻である．

(iv) T を $(\mathscr{F}_t)$ -弱停止時刻とすれば，これは　$(\mathscr{F}_{t+})$ に関する弱停止時刻にもなっている．$(\mathscr{F}_{t+})$ の右連続性と (iii) より T は $(\mathscr{F}_{t+})$ -停止時刻である．逆に　T が $(\mathscr{F}_{t+})$ -停止時刻であることを仮定する．このとき

$$\{T < t\} = \bigcup_{n\ge1} \left\{T \le t - \frac{1}{n}\right\}$$

とかけるが，各 n に対して $\{T \le t - 1/n\} \in \mathscr{F}_{(t-1/n)+} \subset \mathscr{F}_t$ だったから $\{T < t\} \in \mathscr{F}_t$ である． □

命題 2.3.3. S,T を弱停止時刻とすれば，$S+T$ も弱停止時刻である．$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を弱停止時刻の列とすれば，以下はどれも弱停止時刻である．

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n,\ \inf_{n\in\mathbb{N}} T_n,\ \varlimsup_{n\to\infty} T_n,\ \varliminf_{n\to\infty} T_n.$$

証明．S, T を停止時刻とすれば

$$\begin{aligned}\{S+T \geq t\} &= \{T=0, S \geq t\} \cup \{T \geq t, S \geq 0\} \cup \{0 < T < t, S+T \geq t\} \\ &= \{T=0, S \geq t\} \cup \{T \geq t, S \geq 0\} \cup \left[\bigcup_{r \in]0,t[\cap \mathbb{Q}} \{r \leq T < t, S \geq t-r\} \right] \in \mathscr{F}_t\end{aligned}$$

より $S+T$ は弱停止時刻である．2.3.2 により

$$\left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} T_n > t \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{T_n > t\} \in \mathscr{F}_{t+}$$

であるから，$\sup_n T_n$ は $(\mathscr{F}_{t+})$ -停止時刻，よって　$(\mathscr{F}_t)$ に関して弱停止時刻である．また

$$\left\{ \inf_{n \in \mathbb{N}} T_n < t \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{T_n < t\} \in \mathscr{F}_t$$

から $\inf_n T_n$ はまた弱停止時刻である．ここまでの議論より残りの二つは明らか． □

命題 2.3.4. S, T を停止時刻とすれば，$S \wedge T, S \vee T, S+T$ はどれも停止時刻である．また $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を停止時刻の列とすれば，$\sup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ も停止時刻である．

証明．$S \wedge T$ および $S \vee T$ がまた停止時刻となることの証明は弱停止時刻の場合と同様である．

$$\begin{aligned}&\{S+T > t\} \\ &= \{T=0, S > t\} \cup \{0 < T < t, T+S > t\} \cup \{T > t, S = 0\} \cup \{T \geq t, S > 0\} \\ &= \{T=0, S > t\} \cup \{0 < T < t, T+S > t\} \cup \left[\bigcup_{r \in]0,t[\cap \mathbb{Q}} \{t > T > r, S > t-r\} \right] \cup \{T \geq t, S > 0\} \\ &\in \mathscr{F}_t\end{aligned}$$

より $S+T$ もまた停止時刻である．(T_n) が停止時刻の列のときは，

$$\left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} T_n > t \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{T_n > t\} \in \mathscr{F}_t$$

より $\sup_n T_n$ も停止時刻である． □

確率過程 $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ を考える．$T : \Omega \to [0, \infty]$ を停止時刻とすれば，$\{\omega \in \Omega \mid T(\omega) < \infty\}$ なる集合上で $X_{T(\omega)}(\omega)$ によって新たに「確率変数のようなもの」が定義できそうだというのは自然な考えであろう．実際，$\{T = \infty\}$ なる集合上での値を適当に決めればそれは確率変数となる．

命題 2.3.5. $X : \Omega \times [0, \infty[\to \mathbb{R}$ を可測な確率過程，ξ を確率変数とする．このとき，

$$Y(\omega) := \begin{cases} X(\omega, T(\omega)) & \omega \in \{T < \infty\} \\ \xi(\omega) & \omega \in \{T = \infty\} \end{cases}$$

とおけば，Y は確率変数である．とくに $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega) 1_{\{T<\infty\}}(\omega)$ とおけば X_T は確率変数である．

証明．写像 $\widetilde{X} : \Omega \times [0, \infty] \to \mathbb{R}$ を

$$\widetilde{X}(\omega, t) = \begin{cases} X(\omega, t) & (\omega, t) \in \{T < \infty\} \times \mathbb{R}_+ \\ \xi(\omega) & (\omega, t) \in \{T = \infty\} \times \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

によって定義すれば，$\widetilde{X}$ は $\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ -可測関数である． $\mathscr{F}/\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ 可測写像 $(Id,T):\Omega\ni\omega\mapsto(\omega,T(\omega))\in\Omega\times[0,\infty]$ を考えれば，上で定義された Y は写像 $\tilde{X}\circ(Id,T):\Omega\to\mathbb{R}$ で表されるから，$\mathscr{F}$ -可測，よって確率変数である． □

定義 2.3.6. $(\mathscr{F}_t)$ 停止時刻 T に対して σ -加法族を $\mathscr{F}_T$ を以下で定義する．

$$\mathscr{F}_T=\{A\mid\forall t\in[0,\infty[,\ A\cap\{T\le t\}\in\mathscr{F}_t\}$$

命題 2.3.7. $(\mathscr{F}_t)$ -停止時刻 T に関して以下が成り立つ．

(i) $\mathscr{F}_T$ は実際に σ -加法族である．
(ii) $T=t$（定数）なら $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_t$.
(iii) T は $\mathscr{F}_T$ -可測である．
(iv) S,T が停止時刻ならば，任意の $A\in\mathscr{F}_S$ に対して $A\cap\{S\le T\}\in\mathscr{F}_T$.
(v) Ω 上で $S\le T$ なら $\mathscr{F}_S\subset\mathscr{F}_T$.
(vi) S,T が停止時刻ならば $\mathscr{F}_{S\wedge T}=\mathscr{F}_S\cap\mathscr{F}_T$.
(vii) 次の集合はどれも $\mathscr{F}_S\cap\mathscr{F}_T$ の元である．

$$\{T<S\},\{S<T\},\ \{T\le S\},\ \{S\le T\},\ \{T=S\}. \tag{2.3.1}$$

証明. (i). 明らかに $\Omega\in\mathscr{F}_T$ である．$A\in\mathscr{F}_T$ とすれば

$$(\Omega\setminus A)\cap\{T\le t\}=\{T\le t\}\cap[\Omega\setminus(A\cap\{T\le t\})]\in\mathscr{F}_T$$

より $\Omega\setminus\mathscr{F}_T$．さらに $(A_n)\in(\mathscr{F}_T)^{\mathbb{N}}$ なら

$$\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right]\cap\{T\le t\}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[A_n\cap\{T\le t\}]\in\mathscr{F}_T$$

より $\bigcup_n A_n\in\mathscr{F}_T$ となり，$\mathscr{F}_T$ が σ 加法族であることが分かった．

(ii). 定数時刻 $T(\omega)=t$ を考える．$A\in\mathscr{F}_T$ なら，

$$A\cap\{T\le t\}=A\cap\Omega=A\in\mathscr{F}_t$$

である．よって $\mathscr{F}_T\subset\mathscr{F}_t$．逆に $A\in\mathscr{F}_t$ なら任意の $s\in[0,\infty[$ に対して

$$A\cap\{T\le s\}=A\cap\{t\le s\}=\begin{cases}A\in\mathscr{F}_t\subset\mathscr{F}_s & \text{if } t\le s,\\ \emptyset\in\mathscr{F}_s & \text{if } t>s\end{cases}$$

となるから $\mathscr{F}_t\subset\mathscr{F}_T$．したがって $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_t$ である．

(iii). 任意の $a\in[0,\infty[$ に対して $\{T\le a\}\in\mathscr{F}_T$ を示せば十分である．

$$\{T\le a\}\cap\{T\le t\}=\{T\le a\wedge t\}\in\mathscr{F}_{a\wedge t}\subset\mathscr{F}_t\quad(t\in[0,\infty[)$$

より $\{T\le a\}\in\mathscr{F}_T$ である．

(iv).S,T を $(\mathscr{F}_t)$ -停止時刻とする． $T\wedge t$ および $S\wedge t$ が $\mathscr{F}_t$ 可測な確率変数であることは容易にわかるので[*13]$A\in\mathscr{F}_S$ とすれば

$$[A\cap\{S\le T\}]\cap\{T\le t\}=[A\cap\{S\le t\}]\cap\{T\le t\}\cap\{S\wedge t\le T\wedge t\}\in\mathscr{F}_t$$

[*13] 停止時刻の定義戻って $\{T\wedge t\le a\}\in\mathscr{F}_t$ $(a\in[0,\infty[)$ を示せばよい．

である．

(v).Ω 上 $S \le T$ ならば (iv) より

$$A \cap \{S \le T\} = A \in \mathscr{F}_T \quad \forall A \in \mathscr{F}_S$$

である．よって $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$．

(vi).$\mathscr{F}_{S\wedge T} \subset \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$ は (v) より明らか．$A \in \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$ とすれば

$$A \cap \{S \wedge T \le t\} = [A \cap \{S \le t\}] \cup [A \cap \{T \le t\}] \in \mathscr{F}_t \quad \forall t \in [0,\infty[$$

であるから，$A \in \mathscr{F}_{S\wedge T}$ となる．よって $\mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T \subset \mathscr{F}_{S\wedge T}$ も成立．

(vii).(iv) および (vi) により $\{S \le T\} = \{S \le S \wedge T\} \in \mathscr{F}_{S\wedge T} = \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$ である．よって $\{S > T\} \in \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$ もいえる．S と T の役割を入れ替えれば $\{T \le S\}, \{T > S\} \in \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$ も分かる．さらに $\{S = T\} = \{S \le T\} \cap \{T \le S\} \in \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$ である． □

命題 2.3.8. $X = (X_t)$ を $(\mathscr{F}_t)$ -発展的可測な確率過程， ξ を $\mathscr{F}_\infty(:= \bigwedge_t \mathscr{F}_t)$ 可測な確率変数とする．このとき $X_T 1_{\{T<\infty\}}$ は $\mathscr{F}_T$ -可測である．また，確率過程 $X^T = (X_{t\wedge T})$ は $(\mathscr{F}_t)$ -発展的可測である．

証明. 二つ目の主張から証明する．X および X^T を $\Omega \times [0,\infty[$ から $\mathbb{R}$ への写像と考える．写像 $\phi_t : \Omega \times [0,t] \to \Omega \times [0,t]$ を $\phi_t(\omega, s) = (\omega, T(\omega) \wedge t)$ によって定めれば，これは明らかに $\mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}([0,t])$ -可測である．$X^T = X \circ \phi_t$ であるから，X の発展的可測性と合わせて X^T の発展的可測性がわかる．

これを用いて一つ目の主張を示す．発展的可測性より X^T は $(\mathscr{F}_t)$ -に適合しているので, 任意の $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$\{X_T \in B\} \cap \{T \le t\} = \{X_{T\wedge t} \in B\} \cap \{T \le t\} \in \mathscr{F}_t \quad (\forall t \in [0,\infty[\,)$$

となるので，$\{X_T \in B\} \in \mathscr{F}_T$ である．すなわち，X_T は $\mathscr{F}_T$ -可測である． □

定義 2.3.9. $(\mathscr{F}_t)$ に関する弱停止時刻 T に対して σ -加法族 $\mathscr{F}_{T+}$ を以下で定義する．

$$\mathscr{F}_{T+} = \{A \mid \forall t \in [0,\infty[,\ A \cap \{T \le t\} \in \mathscr{F}_{t+}\}$$

命題 2.3.10. $(\mathscr{F}_t)$ に関する弱停止時刻 T に関して以下が成り立つ．

(i) $\mathscr{F}_{T+}$ は実際に σ -加法族である．
(ii) T は $\mathscr{F}_{T+}$ -可測である．
(iii) $A \in \mathscr{F}_{T+} \iff A \cap \{T < t\} \in \mathscr{F}_t, \forall t \in [0,\infty[$.
(iv) $T = t$（定数）なら $\mathscr{F}_{T+} = \mathscr{F}_{t+}$.
(v) S, T が弱停止時刻ならば，任意の $A \in \mathscr{F}_{S+}$ に対して $A \cap \{S \le T\} \in \mathscr{F}_{T+}$.
(vi) Ω 上で $S \le T$ なら $\mathscr{F}_{S+} \subset \mathscr{F}_{T+}$.
(vii) S, T が弱停止時刻ならば $\mathscr{F}_{(S\wedge T)+} = \mathscr{F}_{S+} \cap \mathscr{F}_{T+}$.
(viii) 次の集合はどれも $\mathscr{F}_{S+} \cap \mathscr{F}_{T+}$ の元である．

$$\{T < S\}, \{S < T\},\ \{T \le S\},\ \{S \le T\},\ \{T = S\}. \tag{2.3.2}$$

証明. (iii) のみ示す．（他は命題 2.3.7 と同様.）$A \in \mathscr{F}_{T+}$ とすれば，任意の $t \in \mathbb{R}_+$ に対して

$$A \cap \{T < t\} = A \cap \left[\bigcup_{n\ge1} \left\{T \le t - \frac{1}{n}\right\}\right] = \bigcup_{n\ge1} \left[A \cap \left\{T \le t - \frac{1}{n}\right\}\right] \in \mathscr{F}_t$$

である．逆に $A \cap \{T < t\} \in \mathscr{F}_t$ が任意の $t \geq 0$ に対してなりたつと仮定すれば，

$$A \cap \{T \leq t\} = A \cap \left[\bigcap_{n \geq 1} \left\{ T \leq t + \frac{1}{n} \right\} \right] = \bigcap_{n \geq 1} \left[A \cap \left\{ T \leq t + \frac{1}{n} \right\} \right] \in \mathscr{F}_{t+}$$

となり $A \in \mathscr{F}_{T+}$ である． □

命題 2.3.11. $(\mathscr{F}_t)$ をフィルトレーションとしたとき，次がなりたつ．

(i) T が停止時刻なら $\mathscr{F}_T \subset \mathscr{F}_{T+}$．

(ii) S が弱停止時刻で T は停止時刻であるとする．Ω 上 $S \leq T$ かつ $\{S < \infty\}$ 上で $S < T$ なら，$\mathscr{F}_{S+} \subset \mathscr{T}$ である．

(iii) (T_n) を弱停止時刻の列とし，$T = \inf_n T_n$ とする．このとき $\mathscr{F}_{T+} = \bigcap_n \mathscr{F}_{T_n+}$．

(iv) (T_n) を停止時刻の列とし，，$T = \inf_n T_n$ とする．さらに Ω 上で $T \leq T_n$ かつ $\{T < \infty\}$ 上で $T < T_n$ であるとする．このとき $\mathscr{F}_{T+} = \bigcap_n \mathscr{F}_{T_n}$ がなりたつ．

証明．(i).T を停止時刻，$A \in \mathscr{F}_T$ とすれば

$$A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}_{t+} \quad \forall t \in [0, \infty[$$

となるから $A \in \mathscr{F}_{T+}$ である．

(ii).$A \in \mathscr{F}_{S+}$ とすれば，

$$\begin{aligned} A \cap \{T \leq t\} &= A \cap \{T \leq t\} \cap \{S < T\} \\ &= A \cap \left[\bigcup_{r \in [0,t] \cap \mathbb{Q}} \{S < r < T\} \right] \cap \{T \leq t\} \\ &= \bigcup_{r \in [0,t[\cap \mathbb{Q}} [A \cap \{S < r\} \cap \{r < T \leq t\}] \\ &\in \mathscr{F}_t \quad \forall t \in [0, \infty[\end{aligned}$$

だから，$A \in \mathscr{F}_T$ である．

(iii).$T \leq T_n$ より $\mathscr{F}_{T+} \subset \mathscr{F}_{T_n+}$ が任意の n に対してなりたつ．よって $\mathscr{F}_{T+} \subset \bigcap_n \mathscr{F}_{T_n+}$ である．逆の包含関係を示そう．$A \in \bigcap_n \mathscr{F}_{T_n+}$ とすれば

$$\begin{aligned} A \cap \{T < t\} &= A \cap \left\{ \inf_{n \in \mathbb{N}} T_n < t \right\} \\ &= A \cap \left[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{T_n < t\} \right] \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [A \cap \{T_n < t\}] \in \mathscr{F}_t \end{aligned}$$

となるから，$A \in \mathscr{F}_{T+}$ である．（命題 2.3.10 の (iii) を使った．）

(iv).(T_n) が条件を満たす停止時刻の列のとき，(ii) より各 n について $\mathscr{F}_{T+} \subset \mathscr{F}_{T_n}$ である．よって $\mathscr{F}_{T+} \subset \bigcap_n \mathscr{F}_{T_n}$ が分かる．(i) および (iii) の結果より

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{F}_{T_n} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{F}_{T_n+} = \mathscr{F}_{T+}$$

なので，逆の包含関係もなりたつ． □

ここまで停止時刻の重要な性質について学んできたが，次に停止時刻の重要な例をあげる．

命題 2.3.12. $X=(X_t)$ を右連続なパスをもつ d 次元 $(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 適合過程とし，$A\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$D_A(\omega) := \{t\in[0,\infty[\mid X_t(\omega)\in A\}$$
$$T_A(\omega) := \{t\in]0,\infty[\mid X_t(\omega)\in A\}$$

と定める．（ただし，$\inf\emptyset=\infty$ と考える．）このとき，以下が成立．

(i) A が空でない開集合ならば，D_A は $(\mathscr{F}_t)$ -弱停止時刻である．
(ii) A が空でない開集合ならば，T_A は $(\mathscr{F}_t)$ -弱停止時刻である．
(iii) A が空でない閉集合で X のパスが連続ならば，D_A は $(\mathscr{F}_t)$ -停止時刻である．
(iv) A が空でない閉集合で X のパスが連続ならば，T_A は $(\mathscr{F}_t)$ -弱停止時刻である．

ここで定めた確率変数 D_A を X の集合 A への entry time などと呼ばれる．また，T_A は A への到達時刻 (hitting time) という．本によっては D_A を到達時刻と呼ぶこともあるが，本レクチャーノートではこれらの用語を区別することにする．なお，A が空集合ならば D_A，T_A は X の性質にかかわらず常に ∞ となり明らかに停止時刻である．

証明．**(i) の証明．** $t=0$ のときの $\{D_A<0\}=\emptyset\in\mathscr{F}_0$ である．$t>0$ の時は

$$\{\omega\in\Omega\mid D_A(\omega)<t\}=\bigcup_{s\in[0,t[\cap\mathbb{Q}}\{\omega\mid X_s\in A\}\in\mathscr{F}_t$$

であることから分かる．

(ii) の証明． (i) と同様に，$t>0$ のときは

$$\{\omega\in\Omega\mid T_A(\omega)<t\}=\bigcup_{s\in]0,t[\cap\mathbb{Q}}\{\omega\mid X_s\in A\}\in\mathscr{F}_t$$

となる．なお，開集合という設定下ではこれらの値は一致することに注意されたい．D_A と T_A が異なるのは時刻 0 で A の端点から出発してすぐに $\mathbb{R}^d\setminus A$ へ突入してしまう場合である．

(iii) の証明． $d(x,A):=\inf\{d(x,y)\mid y\in A\}$ として，$A_n=\{x\in\mathbb{R}^d\mid d(x,A)<1/n\}$ $(n\geq 1)$ と定めることにする．A_n は開集合であるから，(i) の結果により $D_n:=D_{A_n}$ は弱停止時刻である．(D_n) は増大列なので[*14]，その極限を $S=\lim_{n\to\infty}D_n\leq D_A$ とおくことにする．このとき $S=D_A$ であることを示し，それを利用して D_A が停止時刻であることの証明を完成させよう．

Case1 : $D_A(\omega)=0$ **のとき．** $D_A(\omega)=0$ ならば明らかに任意の n に対して $D_n(\omega)=0$ で，当然 $S(\omega)=0$ となる．よってこの場合は $D_A(\omega)=S(\omega)$

Case2 : $D_A(\omega)>0$ **かつ** $S(\omega)<\infty$ **のとき．** $D_A(\omega)>0$ なら，ある $N(\omega)\geq 1$ が存在して $T_n(\omega)=0$ $(1\leq n<N(\omega))$ かつ $T_n(\omega)<T_{n+1}(\omega)<D_A$ $(n\geq N(\omega))$ がなりたつことに注意しておく．これはパスの連続性より導かれる性質である．パスの連続性より $X_S(\omega)=\lim_{n\to\infty}X_{D_n}(\omega)$ かつ $X_{D_m}\in\partial A_m\subset\overline{A_{n+1}}\subset A_n$ $(m>n\geq N(\omega))$ が成立する．ここで $m\to\infty$ とすれば $X_S\in\overline{A_{n+1}}\subset A_n$ が任意の $n\geq N(\omega)$ に対して

*14 inf をとる集合が減少的であることに注意せよ．

成り立つ．これより，$X_S(\omega) \in \bigcap_{n\geq N(\omega)} A_n = A$ となるから[*15]，$D_A(\omega) \leq S(\omega)$ である．逆向きの不等号は明らかなので，$\{D_A > 0,\ S < \infty\}$ 上で $D_A(\omega) = S(\omega)$.

Case3：$D_A(\omega) > 0$ **かつ** $S(\omega) = \infty$ **のとき．**明らかに $T(\omega) = S(\omega) = \infty$ である．

以上の議論により，$D_A = S = \lim_{n\to\infty} D_n$ であることが分かった．いま $t > 0$ なるときは

$$\begin{aligned}\{D_A \leq t\} &= \{D_A = 0\} \cup \{0 < D_A \leq t\} \\ &= \left(\bigcap_{n\geq 1} \{D_n < t\} \cap \{D_A = 0\}\right) \cup \left(\bigcap_{n\geq 1} \{D_n < t\} \cap \{D_A > 0\}\right) \\ &= \bigcap_{n\geq 1} \{D_n < t\} \in \mathscr{F}_t\end{aligned}$$

であり，

$$\{D_A = 0\} = \{X_0 \in A\} \in \mathscr{F}_0$$

となるから D_A は $(\mathscr{F}_t)$ -停止時刻である．

(iv) の証明． 命題としては正しいはずだが，証明の間違いに気づいたのでとりあえず保留... □

2.4 Notes

このセクションの内容は主に Karatzas & Shreve [24] を参考にして書いた．

「弱停止時刻」の用語は Medvegyev [30] にしたがった．Karatzas & Shreve では optional time との語を用いているが，optional process などの用語と紛らわしいので（まあ，現時点でこのノートには出てきていない概念ではあるが...）そちらを使うことにしている．文献によってはフィルトレーション $(\mathscr{F}_t)$ に常に usual condition を仮定する場合もあるが，それだと反って usual condition の重要性が不明瞭になりやすいと考え，本ノートでは usual condition を必要とする場合はそのたびに断って使うことにした．

Entry time と hitting time の用語は Revuz & Yor [38] を参考にした．

[*15] A は閉集合である．

3　連続マルチンゲールの基礎理論

3.1　定義と基本的な不等式

この節では特に断りのないかぎり確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を固定して考えることにする．

定義 3.1.1. $(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ -適合過程　$X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ が以下の条件を満たすとき，X を $(\mathscr{F}_t)$ 劣マルチンゲール (*submartingale*) という．

(i) 任意の $t \in \mathbb{T}$ に対して $E[|X_t|] < \infty$

(ii) $s \leq t$ なる任意の $s, t \in \mathbb{T}$ に対して $E[X_t|\mathscr{F}_s] \geq X_s$ P-a.s.

$-X$ が劣マルチンゲールになるとき，X を優マルチンゲール (*supermartingale*) という．劣マルチンゲールかつ優マルチンゲールのとき，X をマルチンゲール (*martingale*) とよぶ

命題 3.1.2. $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ は $(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 適合過程とする．

(i) X が劣マルチンゲールで Z が有界，非負かつ $\mathscr{F}_0$ -可測ならば　$ZX = (ZX_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ も劣マルチンゲール．

(ii) X, Y が劣マルチンゲールならば $X + Y = (X_t + Y_t)$ も劣マルチンゲールである．

(iii) X がマルチンゲールで Z が有界 $\mathscr{F}_0$ -可測確率変数ならば　ZX もマルチンゲールである．

(iv) X, Y がマルチンゲールならば $X + Y$ もマルチンゲールである．

(v) $(\mathscr{F}_t)$ -マルチンゲール全体のなす空間は線形空間である．

証明．(i). 有界性より ZX_t の可積分性は明らか．$0 \leq s \leq t$ とすれば，Z の非負性[*16]と可測性より

$$E[ZX_t|\mathscr{F}_s] = ZE[X_t|\mathscr{F}_s] \geq ZX_s$$

である．よって ZX は劣マルチンゲール．

(ii). 可積分性は明らか．$0 \leq s \leq t$ とすれば条件付き期待値の線形性より

$$E[X_t + Y_t|\mathscr{F}_s] = E[X_t|\mathscr{F}_s] + E[Y_t|\mathscr{F}_s] \geq X_s + Y_s$$

となる．

(iii). (i) と同じだが，等号なので非負性は不要である．

(iv). (ii) と同様.

(v). (iii) と (iv) より明らか.

□

はじめに，Doob の不等式の連続時間への拡張を行う．なお，これ以降の結果は任意のパスの右連続性，連続性などを仮定していることが多いが，必要に応じて全空間を取りかえれば「確率 1 で」ということばを付け加えることも可能である．

[*16] 不等号を保つために非負性を用いる．

定理 3.1.3. $X=(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を右連続なパスをもつ[*17] 劣マルチンゲールとし，$s<t$ なる $s,t\in\mathbb{R}_+$ と $\lambda>0$ を考える．

(i) 以下の劣マルチンゲール不等式が成立する．

$$\lambda P\left[\sup_{s\le u\le t}X_u\ge\lambda\right]\le E\left[X_t1_{\{\sup_{s\le u\le t}X_u\ge\lambda\}}\right]\le E[X_t^+] \tag{3.1.1}$$

$$\lambda P\left[\inf_{s\le u\le t}X_u\le-\lambda\right]\le E[X_t-X_s]-\left[X_t1_{\{\inf_{s\le u\le t}X_u\le-\lambda\}}\right]\le E[X_t^+]-E[X_s] \tag{3.1.2}$$

(ii) $p\ge1$ とする．X が非負またはマルチンゲールとなっているとき，以下が成り立つ．

$$\lambda^pP\left[\sup_{s\le u\le t}|X_u|\ge\lambda\right]\le E\left[|X_t|^p\right] \tag{3.1.3}$$

(iii) $p>1$ とする．X が非負かまたはマルチンゲールであるとき，以下の不等式が成立．

$$E\left[\sup_{s\le u\le t}|X_u|^p\right]\le\left(\frac{p}{p-1}\right)^pE\left[|X_t|^p\right] \tag{3.1.4}$$

証明．(3.1.1) **の証明．** $F\subset[s,t]$ が有限集合のときは，離散時間の結果より $\mu>0$ に対して以下の不等式が成立[*18]．

$$\mu P\left[\sup_{u\in F}X_u>\mu\right]\le E\left[X_t;\ \sup_{u\in F}X_u>\mu\right] \tag{3.1.5}$$

ここで $F_n\uparrow([s,t]\cap\mathbb{Q})\cup\{s,t\}(=:D)$ なる有限集合の列を考える．

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}P\left[\sup_{u\in F_n}X_u>\mu\right]&=P\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{u\in F_n}X_u>\mu\right]=P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{u\in F_n}\{X_u>\mu\}\right)\\&=P\left(\bigcup_{u\in D}\{X_u>\mu\}\right)=P\left[\sup_{u\in D}X_u>\mu\right]\end{aligned}$$

に注意して[*19](3.1.5) で極限をとれば，

$$\mu P\left[\sup_{u\in D}X_u>\mu\right]\le E\left[X_t;\ \sup_{u\in D}X_u>\mu\right] \tag{3.1.6}$$

が成立する．（右辺は優収束定理を用いた．）ところで X が右連続であったことを思い出せば[*20]，(3.1.6) より以下の不等式が分かる．

$$\mu P\left[\sup_{u\in[s,t]}X_u>\mu\right]\le E\left[X_t;\ \sup_{u\in[s,t]}X_u>\mu\right] \tag{3.1.7}$$

[*17] 定理の証明を見れば明らかだが，sup や inf をとる集合がが可算集合ならばこれらの不等式は常に成立する．ここでの右連続性は次の事実を保証するために必要である：
- $\{\sup_{s\le u\le t}X_u\ge\lambda\}$ などの集合が $\mathscr{F}$ -可測になること．
- 稠密な稠密な可算部分集合上での結果を $[s,t]$ という非可算集合の場合にも拡張できること．

[*18] 不等号 $\ge$ が $>$ に代わっていることに注意．α に対して離散時間の結果を用いてから $\alpha\downarrow\mu$ などとすれば容易に示される．

[*19] $\{\sup_u X_u>\mu\}=\bigcup\{X_u>\mu\}$ という変形を正当化するために (3.1.5) で不等号 $\ge$ を $>$ に書き換える必要があったのである．

[*20] 右連続関数が稠密部分集合上で一意に決まってしまうことを用いている．D には端点 t をちゃんと含んでいるので，$\sup_{u\in D}X_u=\sup_{u\in[s,t]}X_u$ となる．

$\mu \uparrow \lambda$ とすれば，求める不等式

$$\lambda P\left[\sup_{u\in[s,t]} X_u \geq \lambda\right] \leq E\left[X_t;\ \sup_{u\in[s,t]} X_u \geq \lambda\right] \tag{3.1.8}$$

を得る．

(3.1.2) の証明．(3.1.1) と同様である．

(3.1.3) の証明．$|X|^p$ が右連続な劣マルチンゲールになっていることに注意すれば (3.1.1) より分かる．

(3.1.4) の証明．(3.1.1) の証明と同様に有限集合の増加列 $F_n \uparrow D$ を特に各 F_n が最終時刻 t を含むようにとって，離散時間の結果 (1.4.5) で極限をとればよい． □

次に，上向き横断数に関する結果を連続時間の場合に拡張する．実数 a, b は $a < b$ を満たすものとする．有限集合 $F = \{t_0, \ldots, t_n\} \subset [0, \infty[$ に対して，上向き横断数 $U_F(a, b, X(\omega))$ を $k = t_k$ と思って離散時間の場合と同様に定義する．さらに，一般の $I \subset [0, \infty[$ に対しては

$$U_I(a, b, X(\omega)) := \sup\{U_F(a, b, X(\omega)); F \subset I \text{ は有限集合.}\}$$

とおいて，$I \subset [0, \infty[$ における上向き横断数 (upcrossing number) $U_I(a, b, X(\omega))$ を定義する．

定理 3.1.4 (Upcrossing Inequality)．$X = (X_t)_{t\in[0,\infty[}$ を $(\mathscr{F}_t)$ -劣マルチンゲールとする．このとき，上向き横断数 $U_{[s,t]}(a, b, X(\omega))$ に対して以下の不等式がなりたつ．

$$E\left[U_{[s,t]}(a, b, X)\right] \leq \frac{E\left[X_t^+\right] + |a|}{b - a} \tag{3.1.9}$$

証明．$D = ([s, t] \cap \mathbb{Q}) \cup \{s, t\}$ と定義し，$F_n \uparrow D$ かつ $t \in F_n$ となるような有限集合の列をとる．このとき，定理 1.5.1 より

$$E\left[U_{F_n}(a, b, X)\right] \leq \frac{E\left[X_t^+\right] + |a|}{b - a}$$

が各 F_n に対してなりたつ．$U_{F_n}(a, b, X(\omega))$ は n について増加的だから，単調収束定理より

$$\lim_{n\to\infty} E\left[U_{F_n}(a, b, X)\right] = E\left[\lim_{n\to\infty} U_{F_n}(a, b, X)\right] \leq \frac{E\left[X_t^+\right] + |a|}{b - a}$$

とできる．このとき，

$$\lim_{n\to\infty} U_{F_n}(a, b, X(\omega)) = U_D(a, b, X(\omega))$$

となることは容易に示されるから[*21]

$$E\left[U_D(a, b, X)\right] \leq \frac{E\left[X_t^+\right] + |a|}{b - a}$$

である．X の右連続性より $U_D(a, b, X(\omega)) = U_{[s,t]}(a, b, X(\omega))$ であるから[*22]，求める不等式

$$E\left[U_{[s,t]}(a, b, X)\right] \leq \frac{E\left[X_t^+\right] + |a|}{b - a}$$

を得る． □

[*21] $U_D(a, b, X(\omega))$ の定義に戻れ！

[*22] 右連続性より $X_u(\omega) < a$ なる $u \in [s, t]$ の十分近くに有理数 u' で $X_{u'}(\omega) < a$ なるものがとれることに注意．upcrossing number の定義の際に $X_u(\omega) < a$ のように狭義の不等号で意義したことがここで効いている．不等号 $\leq, \geq$ で定義した場合は，a, b に無理点のみでヒットしてそのまま超えずに戻ってきた場合はカウントできない．

3.2 パスの連続性

はじめの小節で述べた結果は右連続な劣マルチンゲールについて成立するが，それでは劣マルチンゲールのパスが右連続であるのはどのような場合だろうか．たとえば，ある可積分関数 X に対して $Y_t = E[X|\mathscr{F}_t],\ P-\text{a.s.}$ なる (Y_t) をとったとき，これは連続なマルチンゲールになるだろうか．次のいくつかの補題や命題では，このことについて考察する．

補題 3.2.1. $X = (X_t)$ を $(\mathscr{F}_t)$ -劣マルチンゲールとする．[*23]このとき，確率 1 の集合 $\Omega^* \in \mathscr{F}$ で以下を満たすようなものが存在する．

(i) $\omega \in \Omega^*$ とすれば，任意の $t \in [0,\infty[$ 対して極限

$$X_{t+}(\omega) := \lim_{s\downarrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega)$$

が存在する．

(ii) $\omega \in \Omega^*$ とすれば，任意の $t \in]0,\infty[$ 対して極限

$$X_{t-}(\omega) := \lim_{s\uparrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega)$$

が存在する．

証明．$D_n = [0,n]\cap\mathbb{Q}$ とし，

$$A^n_{a,b} := \{\omega\in\Omega \mid U_{D_n}(a,b,X(\omega)) = \infty\}$$

とおく．定理 3.1.4 の証明により

$$E\left[U_{D_n}(a,b,X)\right] \le \frac{E\left[X_n^+\right]+|a|}{b-a} < \infty$$

がなりたつから，$U_{D_n}(a,b,X(\omega)) < \infty\ P-\text{a.s.}$ である．よって $P(A^n_{a,b}) = 0$．零集合の可算和は零集合だから，

$$P\left(\bigcup_{a,b\in\mathbb{Q},\ a<b} A^n_{a,b}\right) = 0$$

である．ところで，

$$\left\{\omega\in\Omega \;\middle|\; \varliminf_{s\downarrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega) < \varlimsup_{s\downarrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega) \text{ for some } t\in[0,n[\right\} \subset \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q},\ a<b} A^n_{a,b}$$

であるから，

$$P\left(\left\{\omega\in\Omega \;\middle|\; \varliminf_{s\downarrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega) = \varlimsup_{s\downarrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega) \text{ for all } t\in[0,n[\right\}\right) = 1$$

となる．同様にして

$$P\left(\left\{\omega\in\Omega \;\middle|\; \varliminf_{s\uparrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega) = \varlimsup_{s\uparrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega) \text{ for all } t\in]0,n]\right\}\right) = 1$$

[*23] パスの右連続性は仮定しない．

も分かる．さらに n について和をとれば

$$\begin{aligned}
&P\left(\left\{\omega\in\Omega \,\middle|\, \varliminf_{s\downarrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega)=\varlimsup_{s\downarrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega) \text{ for all } t\in[0,\infty[\right\}\right)\\
&=P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\omega\in\Omega \,\middle|\, \varliminf_{s\downarrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega)=\varlimsup_{s\downarrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega) \text{ for all } t\in[0,n[\right\}\right)=1.\\
&P\left(\left\{\omega\in\Omega \,\middle|\, \varliminf_{s\uparrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega)=\varlimsup_{s\uparrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega) \text{ for all } t\in]0,\infty[\right\}\right)\\
&=P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\omega\in\Omega \,\middle|\, \varliminf_{s\uparrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega)=\varlimsup_{s\uparrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega) \text{ for all } t\in]0,n]\right\}\right)=1.
\end{aligned}$$

よって X_{t+}, X_{t-} の存在が示された． □

命題 3.2.2. $X=(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を劣マルチンゲールとし，X_{t+}, X_{t-} を補題 3.2.1 で定義したものとすれば，次の主張が成立．

(i) 以下の不等式がなりたつ．

$$E\left[X_{t+}|\mathscr{F}_t\right]\geq X_t \quad P-\text{a.s.},\ \forall t\in[0,\infty[. \tag{3.2.1}$$

$$E\left[X_t|\mathscr{F}_{t-}\right]\geq X_{t-} \quad P-\text{a.s.},\ \forall t\in]0,\infty[. \tag{3.2.2}$$

(ii) $X=(X_{t+})_{t\in[0,\infty[}$ は $(\mathscr{F}_{t+})$ -劣マルチンゲールであって，確率 1 で右連続なパスをもつ．

証明．**(i) の証明．** $t\in[0,\infty[$ とし，有理数列 $(t_n)_{n\mathbb{Z}_-}$ を $t_n>t$ かつ $t_n\downarrow t$ $(n\to-\infty)$ を満たすようにとる．$(X_{t_n})_{n\in\mathbb{Z}_-}$ は補題 1.5.7 の意味での後ろ向き劣マルチンゲールで，さらに条件 $\lim_{n\to-\infty}E[X_{t_n}]\leq E[X_t]>\infty$ を満たすから補題 1.5.7 より一様可積分である．$X=(X_t)$ の劣マルチンゲール性より

$$\int_A X_t dP\leq\int_A X_{t_n}dP \quad A\in\mathscr{F}_t$$

であるが，ここで極限をとれば $(X_{t_n})_{n\in\mathbb{Z}_-}$ の一様可積分性より

$$\int_A X_t dP\leq\lim_{n\to-\infty}\int_A X_{t_n}dP=\int_A\lim_{n\to-\infty}X_{t_n}dP=\int_A\lim_{n\to-\infty}X_{t+}dP \quad A\in\mathscr{F}_t$$

を得る．すなわち，(3.2.1) がなりたつ．

今度は有理数列 $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $t_n<t$ かつ $t_n\uparrow t$ となるようにとる．劣マルチンゲール性より

$$E[X_t|\mathscr{F}_{t_n}]\geq X_{t_n} \quad P-\text{a.s.}$$

であるから，ここで $n\to+\infty$ とすれば定理 1.5.5 により

$$E\left[X_t \mid \mathscr{F}_{t-}\right]\geq X_{t-}$$

となる．

(ii) の証明．ステップ 1：劣マルチンゲール性の証明． $X=(X_{t+})$ の $(\mathscr{F}_{t+})$ -適合性と可積分性は明らかである．$0\leq s<t$ として，$t>s_n>s$ かつ $s_n\downarrow s$ となるような有理数列 $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}_-}$ をとる．3.2.1 により

$$E[X_{t+}|\mathscr{F}_{s_n}]=E[E[X_{t+}|\mathscr{F}_t\,|\mathscr{F}_{s_n}]\geq E[X_t|\mathscr{F}_{s_n}]\geq X_{s_n}$$

であるから，定理 1.5.9 により

$$\lim_{n\to-\infty} E[X_{t+}|\mathscr{F}_{s_n}] = E[X_{t+} \mid \mathscr{F}_{s+}] \geq X_{s+}$$

となり劣マルチンゲール性が分かった．

ステップ 2：右連続性の証明． 実は右連続性だけでなく，*càdlàg* なパスをもつことまで示すことができる．少々面倒くさいが，$\varepsilon-\delta$ に戻って証明しよう．Ω^* は補題 3.2.1 で定義したものとする．まずは右連続性を示す．$\omega\in\Omega^*$ を任意にとって固定する．$t,s\in[0,\infty[$ とすれば，$X_{t+}(\omega)$ の定義より以下が成り立つ．

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_1>0,\ \forall r\in\mathbb{Q},\ 0<r-t<\delta_1 \Longrightarrow |X_r(\omega)-X_{t+}(\omega)|<\varepsilon.$$
$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_2>0,\ \forall r\in\mathbb{Q},\ 0<r-s<\delta_2 \Longrightarrow |X_r(\omega)-X_{s+}(\omega)|<\varepsilon.$$

ここで特に s として $0<s-t\delta_1$ なる任意の $s\in[0,\infty[$ をとれば，$0\leq r-s\delta_1\wedge\delta_2$ なる有理数 r に対して

$$|X_{t+}(\omega)-X_{s+}(\omega)| \leq |X_{t+}(\omega)-X_r(\omega)|+|X_r(\omega)-X_{s+}(\omega)| \leq 2\varepsilon$$

がなりたつから，t での $t\mapsto X_{t+}(\omega)$ の右連続性が分かる．

左極限が存在することを示すために，特に $X_{s+}\to X_{t-}$ $(s\uparrow t, s<t)$ を示す．$t\in]0,\infty[$ を任意に選んで固定する．X_{t-},X_{s+} の定義より

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\gamma_1>0,\ \forall r\in\mathbb{Q},\ 0\leq t-r<\gamma_1 \Longrightarrow |X_r(\omega)-X_{t-}(\omega)|<\varepsilon. \tag{3.2.3}$$
$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\gamma_2>0,\ \forall r\in\mathbb{Q},\ 0\leq r-s<\gamma_2 \Longrightarrow |X_r(\omega)-X_{s+}(\omega)|<\varepsilon. \tag{3.2.4}$$

である．$0<t-s<\gamma_1\wedge\gamma_2$ なる $s\in[0,t[$ をとれば，(3.2.3),(3.2.4) より $s\leq r\leq t$ なる有理数 r に対して

$$|X_{t-}(\omega)-X_{s+}(\omega)| \leq |X_{t-}(\omega)-X_r(\omega)|+|X_r(\omega)-X_{s+}(\omega)| \leq 2\varepsilon$$

となるから，X_{t-} は $s\mapsto X_{s+}$ の t での左極限である． □

定理 3.2.3. $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,\infty[}$ を通常の条件を満たすフィルトレーションとし，$X=(X_t)_{t\in[0,\infty[}$ を $(\mathscr{F}_t)$ -劣マルチンゲールとする．このとき，以下の条件は同値である．

(i) X の修正として右連続なパスをもつものがとれる．

(ii) 関数:$[0,\infty[\ni t\mapsto E[X_t]\in\mathbb{R}$ は右連続．

この条件がなりたつとき，X の修正として特に *càdlàg* なパスをもち，$(\mathscr{F}_t)$ -適合であるようなものがとれる[*24]．

証明．**(i)⇒(ii) の証明．** $\tilde{X}$ を右連続なパスを持つ X の修正とする．$(t_n)_{n\in\mathbb{Z}_-}$ を $t_n\downarrow t$ なる任意の実数列とする．$\tilde{X}$ は X の修正だったから，$P\left[X_t=\tilde{X}_t,\ X_{t_n}=\tilde{X}_{t_n};\ n\in\mathbb{Z}_-\right]=1$ がなりたつ．したがって，

$$\lim_{n\to-\infty} X_{t_n} = \lim_{n\to-\infty}\tilde{X}_{t_n} = \tilde{X}_t = X_t \quad P-\text{a.s.}$$

である[*25]．補題 1.5.7 より $(X_{t_n})_{n\in\mathbb{Z}_-}$ は一様可積分なので

$$\lim_{n\to-\infty} E[X_{t_n}] = E[X_t]$$

*24 このような修正は当然 $(\mathscr{F}_t)$ -劣マルチンゲールになっている．

*25 これだと X_t そのものが右連続であるように見えるが，ここでの確率 1 の集合は列 (t_n) のとり方に依存していることに注意．列のとり方は可算種類ではとどまらない．パスが確率 1 で連続というのは，ある確率 1 の集合 $\tilde{\Omega}$ が存在して，$\omega\in\tilde{\Omega}$ をとればどのような列 (t_n) をとっても $X_{t_n}(\omega)\to X_t(\omega)$ となるということである．

となる．これより，関数:$[0,\infty[\ni t\mapsto E[X_t]\in\mathbb{R}$ の右連続性が分かる．

(ii)⇒(i) の証明．$t\mapsto E[X_t]$ 右連続であると仮定する．フィルトレーションが右連続であることに注意すれば，命題 3.2.2 により (X_{t+}) は *càdlàg* なパス[*26]をもつ $(\mathscr{F}_t)$ -劣マルチンゲールである．このとき， (X_{t+}) が $X=(X_t)$ の修正になっていることを示せばよい．$(t_n)_{n\in\mathbb{Z}_-}$ を有理数の列で $t_n>t$ かつ $t_n\downarrow t$ なるものとしてとれば，補題 1.5.7 より (X_{t_n}) は一様可積分な後ろ向き劣マルチンゲールとなる．一様可積分性より $\lim_{n\to-\infty}EX_{t_n}=E[X_{t+}]$ であり，仮定より $\lim_{n\to-\infty}EX_{t_n}=E[X_t]$ である．したがって $E[X_{t+}-X_t]=0$ となるが，(3.2.1) より $X_{t+}-X_t\geq 0$ a.e. がなりたつので $X_{t+}-X_t=0$ a.e.. よって (X_{t+}) は X の修正である． □

3.3 収束定理

以下ではフィルター付き確率空間を固定して考える．$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+},P)$

定理 3.3.1 (劣マルチンゲール収束定理)．$X=(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ は右連続なパスを持つ $(\mathscr{F}_t)$ -劣マルチンゲールとする．(X_t^+) が L^1 -有界ならば，ある可積分確率変数　X_∞ が存在して，$X_t\to X_\infty$ $P-$a.s. がなりたつ．

証明．証明は離散時間において上向き横断不等式から劣マルチンゲール収束定理を導くプロセスとほとんど同じであるが，念のために書いておく．

定理 3.1.4 により，任意の実数 $a<b$ に対して

$$E[U_{[0,n]}(a,b,X)]\leq\frac{E[X_n^+]+|a|}{b-a}\leq\frac{\sup_{t\in[0,\infty[}E[X_t^+]+|a|}{b-a}<\infty$$

が成り立つ．$n\to\infty$ とすれば，単調収束定理により

$$E\left[U_{[0,\infty[}(a,b,X)\right]\leq\frac{\sup_{t\in[0,\infty[}E[X_t^+]+|a|}{b-a}<\infty$$

であり，$U_{[0,\infty[}<\infty$ a.e. となる．ところで，

$$\begin{aligned}\left\{\varliminf_{t\to\infty}X_t<\varlimsup_{t\to\infty}X_t\right\}&\subset\bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}}\{\varliminf X_t<a<b<\varlimsup X_t\}\\&\subset\bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}}\{U_\infty(a,b,X)=\infty\}\end{aligned}$$

に注意すれば

$$P\left[\varliminf_{t\to\infty}X_t<\varlimsup_{t\to\infty}X_t\right]\leq\sum_{a,b\in\mathbb{Q}}P[U_\infty(a,b,X)=\infty]=0$$

となり，X_t がほとんどいたるところ収束することがわかった．あとは，その極限 X_∞ の可積分性を言えばよい．Fatou の補題により

$$E[X_\infty^+]\leq\varliminf_{t\to\infty}E[X_t^+]\leq\sup_{t\in[0,\infty[}E[X_t^+]<\infty$$

である．また，

$$E[X_t^-]\leq E[X_t^+]-E[X_t]\leq\sup E[X_t^+]-E[X_0]$$

[*26] 先の命題では Ω^* 上で *càdlàg* なパスをもつことしか言っていないが，その他の点では 0 とでもすればよかろう．

に注意すれば，再び Fatou の補題を用いて

$$E[X_\infty^-] \le \varliminf_{t\to\infty} E[X_t^-] \le \sup_{t\in[0,\infty[} E[X_t^+] - E[X_0] < \infty$$

が成り立つ．これにより，X_∞ の可積分性が示された． □

定理 3.3.2. 劣マルチンゲール $X = (X_t)_{t\in[0,\infty[}$ に対して，次の条件は同値である．

(i) X は一様可積分．

(ii) X は L^1 収束する．

(iii) X はある可積分な確率変数 X_∞ に概収束し，$(X_t)_{t\in[0,\infty]}$ は $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$ -劣マルチンゲールとなる．さらに，$E[X_t] \to E[X_\infty]$ $(t\to\infty)$ がなりたつ．

証明．離散時間の場合とほとんど同じである． □

定理 3.3.3. $X = (X_t)_{t\in[0,\infty[}$ を $(\mathscr{F}_t)$ -マルチンゲールとしたとき，以下の条件は同値である．

(i) X は一様可積分．

(ii) X は L^1 収束する．

(iii) X はある可積分な確率変数 X_∞ に概収束し，$(X_t)_{t\in[0,\infty]}$ は $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$ -マルチンゲールとなる．

(iv) ある可積分な確率変数 Y が存在して，$X_t = E[Y|\mathscr{F}_t]$ と書ける．

証明．離散時間の場合と同様． □

3.4 任意抽出定理

定理 3.4.1. $X = (X_t)_{t\in[0,\infty[}$ は右連続なパスを持つ一様可積分劣マルチンゲールとし，S, T を $S \le T$, $P-$a.s. を満たす停止時刻とする．このとき

$$E[X_T \mid \mathscr{F}_S] \ge X_S \quad P-\text{a.s.}$$

がなりたつ．

証明．S に対して停止時刻の列 S_n を

$$S_{-n}(\omega) = \begin{cases} S(\omega) & S(\omega) = \infty \\ \dfrac{k}{2^n} & \dfrac{k-1}{2^n} \le S(\omega) < \dfrac{k}{2^n} \end{cases} \tag{3.4.1}$$

とおけば，$(S_n)_{n\in\mathbb{Z}_-}$ は停止時刻の減少列であって $S_n \downarrow S$ を満たす．さらに，これは命題 2.3.11 の (iii) の過程を満たすものであることに注意されたい．離散時間の任意抽出定理と補題 1.5.7 より $(X_{S_n})_{n\in\mathbb{Z}_-}$ は一様可積分な後ろ向き劣マルチンゲールである[*27]．T についても同様に (T_n) を定義すれば，$(X_{T_n})_{n\in\mathbb{Z}_-}$ も一様可積分な後ろ向き劣マルチンゲールである．離散時間の任意抽出定理により任意の $A \in \mathscr{F}_{S_n}$ に対して

$$\int_A X_{S_n} dP \le \int_A X_{T_n} dP \tag{3.4.2}$$

[*27] X の一様可積分性より極限 X_∞ が存在する（命題 3.3.2）ので，X_{S_n} および X_S は任意の点で定義されていることに注意．

である．特に $A \in \mathscr{F}_{S+} = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}_-} \mathscr{F}_{S_n}$ に対しても (3.4.2) はなりたつので，ここで $n \to -\infty$ とすれば一様可積分性とパスの右連続性により．

$$\int_A X_S dP \leq \int_A X_T dP$$

となる．よって $E[X_T \mid \mathscr{F}_{S+}] \geq X_S$ が Ω 上殆ど至る所成り立つ．いま，発展的可測性より X_S は $\mathscr{F}_S$ -可測なので，特に両辺 $\mathscr{F}_S$ で条件付き期待値をとれば[*28] $E[X_T|\mathscr{F}_S] \geq X_S$ $P-$a.s. となる． □

系 3.4.2. $X = (X_t)_{t\in[0,\infty[}$ は右連続なパスを持つ一様可積分劣マルチンゲールとし，S, T を $S \leq T$, $P-$a.s. を満たす停止時刻とする．このとき

$$E[X_T|\mathscr{F}_S] = X_S \quad P-\text{a.s.}$$

がなりたつ．

定理 3.4.3. $X = (X_t)_{t\in[0,\infty[}$ 右連続なパスを持つ劣マルチンゲールとし，S, T を $S \leq T$, $P-$a.s. を満たす有界停止時刻とする．このとき

$$E[X_T|\mathscr{F}_S] \geq X_S \quad P-\text{a.s.}$$

がなりたつ．

証明．K を T の上界とする．$X = (X_t)_{t\in[0,K]}$ は一様可積分なので，前の定理の証明を応用すればよい． □

系 3.4.4. $X = (X_t)$ を右連続な $(\mathscr{F}_t)$ -劣マルチンゲールとし， T を $(\mathscr{F}_t)$ -停止時刻とする．このとき $X^T = (X_{T\wedge t})_{t\in[0,\infty[}$ もまた $(\mathscr{F}_t)$ -劣マルチンゲールである．[*29]

証明．適合性は明らかで，可積分性も定理 3.4.3 より分かる．$s < t$ および $A \in \mathscr{F}_s$ に対して

$$\begin{aligned}
&\int_A (X_{T\wedge t} - X_{T\wedge s})dP \\
&\int_\Omega 1_{A\cap\{T\leq s\}}(X_{T\wedge t} - X_{T\wedge s})dP + \int_\Omega 1_{A\cap\{T>s\}}(X_{T\wedge t} - X_{T\wedge s})dP \\
&\int_\Omega 1_{A\cap\{T\leq s\}}(X_T - X_T)dP + \int_\Omega 1_{A\cap\{T>s\}}(X_{T\wedge t} - X_s)dP \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

となる．（ただし，最後の不等号は $A \cap \{T > s\} \in \mathscr{F}_s$ と定理 3.4.3 を用いた．）したがって $E[X_{T\wedge t} \mid \mathscr{F}_s] \geq X_{T\wedge s}$ が a.s. でなりたち，劣マルチンゲール性が分かった． □

命題 3.4.5. X を右連続な $(\mathscr{F}_t)$ -適合過程とする． X がマルチンゲールであるための必要十分条件は，任意の有界 $(\mathscr{F}_t)$ -停止時刻 T に対して以下の (i), (ii) が成り立つことである．

(i) $X_T \in L^1(\Omega)$.

(ii) $E[X_T] = E[X_0]$.

[*28] 命題 2.3.11(i) より $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_{S+}$ であることに注意．

[*29] X^T が $(\mathscr{F}_{t\wedge T})_{t\in\mathbb{R}_+}$ -劣マルチンゲールになっていることは任意抽出定理より明らかであるが，フィルトレーションを $(\mathscr{F}_t)$ に取り換えてもそれが成り立つというのがポイントである．

証明．X がマルチンゲールならば (i), (ii) が成り立つことは任意抽出定理より分かる．逆を示そう．$T=t$ とすれば，(i) より X_t の可積分性が分かる．$s<t$ および $A\in\mathscr{F}_s$ を任意に選んで

$$T(\omega)=t1_{\Omega\setminus A}(\omega)+s1_A(\omega)$$

とおけば，T は有界な $(\mathscr{F}_t)$ -停止時刻である． (ii) より

$$E[X_0]=E[X_T]=E[X_t1_{\Omega\setminus A}]+E[X_s1_A] \tag{3.4.3}$$

がなりたつ．また，t 自体を有界停止時刻と見れば (ii) により

$$E[X_0]=E[X_t]=E[X_t1_{\Omega\setminus A}]+E[X_t1_A] \tag{3.4.4}$$

となる．(3.4.3) および (3.4.4) から

$$E[X_s1_A]=E[X_t1_A]$$

が分かる．これより X がマルチンゲールであることが示された． □

3.5 Doob-Meyer 分解

本節では，劣マルチンゲールの Doob 分解の連続時間版である Doob-Meyer 分解を扱う．Doob-Meyer 分解は，劣マルチンゲールがマルチンゲールと増加過程に分解できることを主張する．大ざっぱな言い方をすれば劣マルチンゲールは全体として増加的な傾向があるので，その増加部分を抜き出してやろうというような話である．

$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+},P)$ をフィルター付き確率空間とする．

定義 3.5.1. $(\mathscr{F}_t)$ 適合過程 $A=(A_t)_{t\in[0,\infty[}$ に対して次の条件を考える．

(i) 確率 1 で $A_0(\omega)=0$.

(ii) $t\mapsto A_t(\omega)$ は確率 1 で右連続な増加関数．

(iii) 任意の $t\in[0,\infty[$ に対して，$E[A_t]<\infty$.

(iv) $\sup_t E[A_t]<\infty$.

A が条件 (i),(ii) を満たすとき，増加過程 (increasing process) であるという．(iii) も満たすときは，$A=(A_t)$ は局所可積分であるという．さらに (iv) も満たすときは，A は可積分であるという．

注意 3.5.2. A を増加過程とし，$A_\infty(\omega)=\lim_{t\to\infty}A_t(\omega)$ とおく．このとき A が（増加過程として）可積分であることと A_∞ が（確率変数として）可積分であることは同値であることに注意されたい．

命題 3.5.3. A を増加過程とし，H を可測な確率過程とする．$\omega\in\Omega$ と $t\in\mathbb{R}_+$ に対して

$$(H\bullet A)_t(\omega):=\int_{]0,t]}H_s(\omega)dA_s(\omega)$$

を考える．$t\in\mathbb{R}_+$ を固定したとき任意の ω について $s\mapsto H_s(\omega)$ が $s\mapsto A_s(\omega)$ の生成する Stieltjes 測度に対して $]0,t]$ 上可積分ならば，写像 $\omega\mapsto(H\bullet A)_t(\omega)$ は確率変数となる．

証明．$H = 1_{B\times]a,b]}$ の場合を考える．このとき

$$(1_{B\times]a,b]} \bullet A)_t(\omega) = \int_{]0,t]} 1_{B\times]a,b]}(\omega,t)dA_s(\omega) = 1_B(\omega)(A_{b\wedge t}(\omega) - A_{a\wedge t}(\omega))$$

となるから，$(1_{B\times]a,b]} \bullet A)_t$ は $\mathscr{F}$-可測である．ここで

$$\mathscr{C} = \{B\times]a,b] \mid B \in \mathscr{F}, a < b\} \cup \{\emptyset\}$$
$$\mathscr{D} = \{E \in \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \mid (1_E \bullet A)_t \text{ は } \mathscr{F}\text{-可測 }\}$$

とおけば，$\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$ である．$\mathscr{C}$ は π 系であるから，$\mathscr{D}$ が Dynkin 族であることを示せばよい．

$$(1_{\Omega\times[0,\infty[} \bullet A)_t = A_t - A_0$$

より $\Omega \times [0,\infty[\in \mathscr{D}$ である．$E, F \in \mathscr{D}$ かつ $E \subset F$ とすれば

$$(1_{F\setminus E} \bullet A)_t = (1_F \bullet A)_t - (1_E \bullet A)_t$$

だから $F \setminus E \in \mathscr{D}$ も分かる．(E_n) が $\mathscr{D}$ の単調増大列で $\bigcup_n E_n = E$ としたとき，優収束定理により

$$\begin{aligned}(1_E \bullet A)_t(\omega) &= \int_{]0,t]} 1_{\bigcup E_n}(\omega,t)dA_s(\omega) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{]0,t]} 1_{E_n}(\omega,s)dA_s(\omega) \\ &= \lim_{n\to\infty} (1_{E_n} \bullet A)_t(\omega)\end{aligned}$$

となる．$(1_E \bullet A)_t$ は $\mathscr{F}$-可測関数列 $((1_{E_n} \bullet A)_t)_{n\in\mathbb{N}}$ 各点収束極限なので，$\mathscr{F}$-可測である．よって $E = \bigcup_n E_n \in \mathscr{D}$ である．以上の議論より Dynkin 族定理が適用できるので，$\mathscr{D} = \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ が示される．

H が非負の場合，$\Omega \times \mathbb{R}_+$ 上の単関数で単調近似できるから，パスごとに単調収束定理を用いることで可測性が分かる．H が一般の場合は $H = H \vee 0 - H \wedge 0$ を考えればよい．□

定義 3.5.4. $A = (A_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を局所可積分な増加過程とする．任意の右連続 $(\mathscr{F}_t)$ 有界マルチンゲール $(M_t)_{t\in[0,\infty[}$ に対して

$$E\left[\int_{]0,t]} M_s dA_s\right] = E\left[\int_{]0,t]} M_{s-} dA_s\right]$$

が成り立つとき，A は自然 (natural) な増加過程であるという．

自然な増加過程の特徴付けを与えるために，ひとつ補題を証明する．表記の簡略化のため，次の様な記法を用意しよう．区間 $[0,t] \subset \mathbb{R}_+$ とその分割

$$\Pi = \{t_i : i = 0, \ldots, n(\Pi)\} : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n(\Pi)} = t$$

を考える．確率過程 $X = (X_s)$ に対して，

$$X_t^{(\Pi)}(\omega) = \sum_{i=1}^n X_{t_i}(\omega) 1_{]t_{i-1},t_i]}(t)$$
$$X_t^{(\Pi-)}(\omega) = \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}(\omega) 1_{]t_{i-1},t_i]}(t)$$

とおくことにする．もし (X_s) が *càdlàg* なパスを持つならば，$\|\Pi\| = \max_i(t_i - t_{i-1})$ とおいたとき

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0} X_t^{(\Pi)} = X_t \quad P-\text{a.s.}$$
$$\lim_{\|\Pi\|\to 0} X_t^{(\Pi_-)} = X_{t-} \quad P-\text{a.s.}$$

となる．

命題 3.5.5. $A = (A_s)_{s\in\mathbb{R}_+}$ を局所可積分な増加過程としたとき，任意の有界，右連続 $(\mathscr{F}_s)$ -マルチンゲール M に対して

$$E[M_tA_t] = E\left[\int_{]0,t]} M_s dA_s\right] \quad (t>0)$$

がなりたつ．

証明. $\Pi = (t_i)_{i=1}^n$ を $[0,t]$ の分割とすれば，

$$\begin{aligned} E\left[\int_{]0,t]} M_s^{(\Pi)} dA_s\right] &= E\left[\sum_{i=1}^n M_{t_i}(A_{t_i} - A_{t_{i-1}})\right] \\ &= E[M_tA_t] + E\left[\sum_{i=1}^n A_{t_{i-1}}(M_{t_{i-1}} - M_{t_i})\right] = E[M_0A_0] \\ &= E[M_tA_t] \end{aligned}$$

である．（最後の等号は $A_0 = 0$ と M のマルチンゲール性より分かる．）よって $\|\Pi\| \to 0$ とすれば Lebesgue の優収束定理によって

$$E\left[\int_{]0,t]} M_s dA_s\right] = E[M_tA_t]$$

を得る． □

系 3.5.6. 局所可積分なる増加過程 A が自然であることは，任意の右連続有界マルチンゲール $(M_t, \mathscr{F}_t)$ に対して

$$E[M_tA_t] = E\left[\int_{]0,t]} M_{s-} dA_s\right] \quad (\forall t>0).$$

が成り立つことと同値である．

次に，Doob-Meyer 分解が可能であるような確率過程のクラスの定義を与える．$a>0$ として

$$\mathscr{S} = \{T : \Omega \to [0,\infty] \mid T \text{ は } (\mathscr{F}_t)\text{ -停止時刻で} \quad P(T<\infty) = 1 \text{ を満たす.}\}$$
$$\mathscr{S}_a = \{T : \Omega \to [0,\infty] \mid T \text{ は } (\mathscr{F}_t)\text{ -停止時刻で} \quad P(T\le a) = 1 \text{ を満たす.}\}$$

と書くことにする．

定義 3.5.7. 右連続過程 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を考える．確率変数族 $(X_T)_{T\in\mathscr{S}}$ が一様可積分となるとき，$(X_t, \mathscr{F}_t)$ はクラス D に属するという．また，任意の $a>0$ に対して $(X_T)_{T\in\mathscr{S}_a}$ が一様可積分な族となるとき，クラス DL であるという．

定理 3.5.8 (Doob-Meyer 分解)**.** $(\mathscr{F}_t)$ を通常の条件を満たすフィルトレーションとし，右連続 $(\mathscr{F}_t)$-劣マルチンゲール $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ はクラス DL に属するとする．このとき，X はある右連続マルチンゲール (M_t) と局所可積分な増加過程 (A_t) によって $X = M + A$ と表現される．特に A は自然な増加過程であるようにとれて，A が自然になるような分解は一意的である．[*30]

証明の思想は，過程を離散化して Doob 分解を作り，それの極限をとるということである．その過程で様々な細かい性質を調べることが必要になり，それがこの証明は複雑にしている要因だと思われる．流れを明確にするため，証明は多くのステップに分けて行う．

証明．**ステップ 1：一意性の証明．** このステップでは，分解の一意性の証明を行う．A, A' はともに自然な増加過程であるものとし，$X = M + A = M' + A'$ という分解が得られたとする．このとき，$A = A'$ を示せばよい．$B := A - A' = M' - M$ と定義すれば，B は有界変動で右連続なパスを持つマルチンゲールになる．このとき，任意の有界マルチンゲール $(\xi, \mathscr{F}_t)$ に対して

$$\begin{aligned}
E[\xi_t B_t] &= E[\xi_t(A_t - A'_t)] \\
&= E\left[\int_{]0,t]} \xi_{s-} dA_s\right] - E\left[\int_{]0,t]} \xi_{s-} dA_s\right] \quad (\because \text{natulality of } A \text{ and } A'.) \\
&= E\left[\int_{]0,t]} \xi_{s-} dB_s\right] \\
&= \lim_{\|\Pi\|\to 0} E\left[\int_{]0,t]} \xi_s^{(\Pi-)} dB_s\right] \quad (\because \text{Dominated Convergence Theorem})
\end{aligned}$$

がなりたつ．いま，$[0,t]$ 任意の分割 $\Pi = (t_i)_{i=0}^n$ に対して

$$\begin{aligned}
E\left[\int_{]0,t]} \xi_s^{(\Pi-)} dB_s\right] &= \sum_{i=1}^n E\left[\xi_{t_{i-1}}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\right] \\
&= 0 \quad (\because \text{Martingale property of } B)
\end{aligned}$$

であるから，

$$E[\xi_t B_t] = \lim_{\|\Pi\|\to 0} E\left[\int_{]0,t]} \xi_s^{(\Pi-)} dB_s\right] = 0$$

となる．特に任意の有界確率変数 ξ に対して (ξ_t) を $(E[\xi \mid \mathscr{F}_t])$ の右連続な修正としてとれば[*31]，

$$E[\xi_t(B_t)] = E[\xi B_t] = 0.$$

よって $B_t = A_t - A'_t = 0$ $P-\text{a.s.}$ であり，A の右連続性とあわせて A と A' が区別不能であることを得る．

ステップ 2：離散化と Doob 分解． これ以降のステップでは，有界区間 $[0,a]$ において分解を構成する．ひとたび $[0,a]$ での分解が構成できれば，それに連結する形で帰納的に区間を延長していき，$[0,\infty[$ 全体を覆うことができるからである．

確率過程 $Y = (Y_t)$ を

$$Y_t = X_t - E[X_a \mid \mathscr{F}_t]$$

[*30] 一意性は，過程が indistinguishable であるという意味において．右連続なので modification を示せば十分であるが...

[*31] このような修正がとれることは定理 3.2.3 による．ここで「通常の条件」を用いている．

によって定義すれば，Y は明らかに非正の劣マルチンゲールになる．$[0,a]$ の分割の列 $\Pi^{(n)}$ を

$$\Pi^{(n)} = \left\{ \frac{j}{2^n}a\,;\, j=0,\dots,2^n \right\}$$

とおくことにする．Y を離散化した $(Y_{t_j}^{(n)})_{j=0}^{2^n}$ を考えれば[*32]，離散時間における結果より一意的な Doob 分解

$$Y_{t_j}^{(n)} = M_{t_j}^{(n)} + A_{t_j}^{(n)}$$

が得られる．いま，$M_{t_j}^{(n)} = E[M_a^{(n)} \mid \mathscr{F}_{t_j}]$ および $M_a^{(n)} + A_a^{(n)} = Y_a^{(n)} = 0$ に注意すれば

$$Y_{t_j}^{(n)} = A_{t_j}^{(n)} - E[A_a^{(n)} \mid \mathscr{F}_{t_j}] \tag{3.5.1}$$

である．

ステップ 3：$(A_a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ の一様可積分性． このステップでの議論はかなりテクニカルな話になる．はじめに確率変数 $T_\lambda^{(n)}$ を

$$T_\lambda^{(n)} = a \wedge \min\{t_{j-1} \mid A_{t_{j-1}}^{(n)} > \lambda\}.$$

と定義する．このとき

$$\{T_\lambda^{(n)} \le t_{j-1}\} = \{A_{t_j}^{(n)} > \lambda\} \in \mathscr{F}_{t_{j-1}}$$

より $T_\lambda^{(n)}$ は $(\mathscr{F}_{t_j})_{j=0}^{2^n}$ -停止時刻で，特に　$T_\lambda^{(n)} \in \mathscr{S}_a$ である．また $\{T_\lambda^{(n)} < a\} = \{A_a^{(n)} > \lambda\}$ であることを確かめておく．(3.5.1) より，

$$\begin{aligned} Y_{T_\lambda^{(n)}} &= A_{T_\lambda^{(n)}}^{(n)} - E\left[A_a^{(n)} \mid \mathscr{F}_{T_\lambda^{(n)}}\right] && (3.5.2)\\ &\le \lambda - E\left[A_a^{(n)} \mid \mathscr{F}_{T_\lambda^{(n)}}\right] && (3.5.3)\end{aligned}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned} &\int_{\{A_a^{(n)}>\lambda\}} A_a^{(n)} dP = \int_{\{A_a^{(n)}>\lambda\}} E\left[A_a^{(n)} \mid \mathscr{F}_{T_\lambda^{(n)}}\right] dP \\ &\le \int_{\{A_a^{(n)}>\lambda\}} \left(\lambda - Y_{T_\lambda^{(n)}}\right) dP \\ &= \lambda P(A_a^{(n)}) - \int_{\{T_\lambda^{(n)}<a\}} Y_{T_\lambda^{(n)}} dP \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

である．また，式 (3.5.2) より

$$\begin{aligned} -\int_{\{T_{\lambda/2}^{(n)}<a\}} Y(T_{\lambda/2}^{(n)})dP &\ge \int_{\{T_{\lambda/2}^{(n)}<a\}} \left(A_a^{(n)} - A^{(n)}(T_{\lambda/2}^{(n)})\right) dP \\ &\ge \int_{\{T_\lambda^{(n)}<a\}} A_a^{(n)} dP - \int_{\{T_\lambda^{(n)}<a\}} A^{(n)}(T_{\lambda/2}^{(n)})dP \\ &\ge \int_{\{T_\lambda^{(n)}<a\}} \lambda dP - \int_{\{T_\lambda^{(n)}<a\}} \frac{\lambda}{2} dP \\ &= \frac{\lambda}{2} P\left(T_\lambda^{(n)} < a\right) \end{aligned}$$

[*32] 添え字の t_j は本来 $t_j^{(n)}$ などと書くべきであろうが，記号が煩雑になるので，誤解の恐れが無い時はこう書くことにする．間違いそうなときはちゃんと $t_j^{(n)}$ と書くのでご心配なく．

であるから，(3.5.4) とあわせて

$$\int_{\{A_a^{(n)}>\lambda\}} A_a^{(n)} dP = -2\int_{\{T_{\lambda/2}^{(n)}<a\}} Y(T_{\lambda/2}^{(n)})dP - \int_{\{T_\lambda^{(n)}<a\}} Y(T_\lambda^{(n)})dP \tag{3.5.5}$$

ここで，$(X_T)_{T\in\mathscr{S}_a}$ の一様可積分性より $(Y_T)_{T\in\mathscr{S}_a}$ も一様可積分であり，さらにその部分系 $\{Y(T_c^{(n)});c>0,n\in\mathbb{N}\}$ も一様可積分になる．あとは，$\lambda\to\infty$ としたとき (3.5.5) の右辺が 0 に収束することを示せば $(A_a^{(n)})_{n^in^mathbbN}$ の一様可積分性が分かる．Chebyshev の不等式より

$$P(T_\lambda^{(n)}<a) = P(A_a^{(n)}>\lambda) \le \frac{E[A_a^{(n)}]}{\lambda} = -\frac{E[Y_0]}{\lambda}$$

であるから，

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} P(T_\lambda^{(n)}<a) \xrightarrow{\lambda\to\infty} 0$$

が成り立つ．一様可積分性により (3.5.5) 右辺は実際に $\lambda\to\infty$ のとき 0 に収束することが分かるので，このステップでの証明が終わる．

ステップ 4：増加過程 A の構成． $(A_a^{(n)})$ の一様可積分性を調べたのは，それにより適当な意味で極限の存在が保証されるからである．これ以降のステップでは，その極限が実際に欲しかった増加過程であることを調べていく．ステップ 3 での議論により確率変数族 $(A_a^{(n)})$ は一様可積分であることがわかった．定理 A.7.4 によりこれは $L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$ の弱位相に関して収束する部分列をもつので，*33その極限を $A_a\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$ と書く．また表記の簡略化のため，今の議論で得られた部分列を新たに $(A_a^{(n)})$ とおくことにする．

さて，この A_a から新たに増加過程 (A_t) を構成したいのであるが，(3.5.1) を見習えば

$$A_t = Y_t + E[A_a \mid \mathscr{F}_t] \tag{3.5.6}$$

とおくのが妥当であろう．正確には，右辺のバージョンのうち特に右連続なパスをもつものを取る，という表現をするべきである．右連続なパスをもつことがとれるということは，定理 3.2.3 より分かる*34．

ステップ 5：A が増加過程であること． $A_0=0\,p-$a.s. は明らかであるから，A が増加的なパスをもつことを示す．$\Pi=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Pi^{(n)}$ とおく．$t\in\Pi$ とすれば*35，命題 A.7.5 より任意の有界確率変数 ξ に対して

$$\lim_{n\to\infty} E[\xi A_t^{(n)}] = E[\xi A_t]$$

がなりたつ．*36したがって，$s,t\in\Pi$ を $0\ge s<t$ なるようにとれば $A^{(n)}$ が増加過程であったことにより

$$E[\xi(A_t-A_s)] = \lim_{n\to\infty} E[\xi(A_t^{(n)}-A_s^{(n)})] \ge 0$$

となる．すなわち，$(A_t)_{t\in\Pi}$ は単調増加なパスをもつことがわかる．Π が $[0,a]$ で稠密なことと A の右連続性より，$t\mapsto A_t(\omega)$ が増加的であることが示される．したがって $A=(A_t)_{t\in[0,a]}$ は増加過程である．

ステップ 6：M のマルチンゲール性． ここまでの議論で，与えられた劣マルチンゲール X から，Doob-Meyer 分解の候補となる増加過程 $A=(A_t)_{t\in[0,a]}$ を構成した．次に，分解のマルチンゲール部分となるべき確率過程を定義する必要があるが，議論の流れからマルチンゲールパート M は明らかに

$$M_t = X_t - A_t = E[X_a - A_a|\mathscr{F}_t]$$

*33 「分布の弱収束」の「弱収束」ではない！

*34 ここでも「通常の条件」が必要．

*35 $(A_t^{(n)})$ なる過程は $t\in\Pi^{(n)}$ 上でしか定義されていないことに注意すべし．

*36 正確には，$t\in\Pi^{(n)}$ となるような n から先で極限をとったというべき部分ではある．

と定義されるべきである．X_a および A_a の可積分性よりこれは明らかにマルチンゲールである．

ステップ 7 : 増加過程 A が自然であること． ステップ 5 までで構成した増加過程が，実は自然な増加過程になっていることを示す．自然な過程の特徴づけより，任意の右連続有界マルチンゲールに対して

$$\begin{aligned} E[\xi_a A_a^{(n)}] &= E\left[\sum_{j=1}^{2^n} \xi_{t_j-1}\left(A_{t_j}^{(n)} - A_{t_{j-1}}^{(n)}\right)\right] \\ &= E\left[\sum_{j=1}^{2^n} \xi_{t_j-1}\left(Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}}\right)\right] \\ &= E\left[\sum_{j=1}^{2^n} \xi_{t_j-1}\left(A_{t_j} - A_{t_{j-1}}\right)\right] \\ &= E\left[\int_{(0,a]} \xi_t^{(\Pi_-^{(n)})} dA_t\right] \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，途中の等号では $(Y_t - A_t)$ および $(Y_t - A_t^{(n)})$ のマルチンゲール性を用いた．ここで $n \to \infty$ とすると，$A_a^{(n)}$ が L^1 の弱位相で A_a に収束することと，ルベーグの収束定理により

$$E[\xi_a A_a] = E\left[\int_{(0,a]} \xi_{s_-} dA_s\right]$$

となる．系 3.5.6 より $A = (A_s)_{s\in[0,a]}$ は自然な増加過程である．これで定理の証明は完了した． □

系 3.5.9. X がクラス D の劣マルチンゲールなら，Doob-Meyer 分解 $X = M + A$ が存在して，特にマルチンゲール部分 M は一様可積分で，増加過程 A は可積分となる．

証明．分解の存在と一意性は既に示されている．$X = (X_t)$ はクラス D であったから，特に停止時刻として定数時刻を考えれば X 自体は明らかに一様可積分である．劣マルチンゲールの収束定理より概収束（そして L^1 収束）極限として可積分関数 X_∞ がとれる．先の定理と同様の議論を $[0,\infty]$ で行うことにより，A_∞ の可積分性が分かる．A_∞ の可積分性より (A_t) は一様可積分な族となり，$M_t = X_t - A_t$ も一様可積分となる． □

系 3.5.10. 右連続な $(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-劣マルチンゲール $X = (X_t)$ がクラス DL に属することの必要十分条件は，X があるマルチンゲール $M = (M_t)$ と局所可積分な増加過程 $A = (A_t)$ によって

$$X = M + A$$

と分解されることである．

証明．クラス DL なら分解が存在することは 3.5.8 で証明されているので，逆を示せばよい．右連続劣マルチンゲール X が分解 $X = M + A$（ただし M はマルチンゲール，A は増加過程とする．）をもつとする．$T \in \mathscr{S}_a$ とすれば任意抽出定理により

$$M_T = E[M_a \mid \mathscr{F}_T]$$

となるから，$(M_T)_{T\in\mathscr{S}_a}$ は一様可積分である．また A は増加過程だから $0 \le A_T \le A_a \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$ となり，$(A_T)_{T\in\mathscr{S}_a}$ も一様可積分である．よって $(X_T)_{T\in\mathscr{S}_a}$ は一様可積分となり，すなわちクラス DL である． □

この節の残りの部分では，Doob-Meyer 分解における増加過程が連続なパスをもつ必要十分条件を調べる．はじめに，必要な概念の定義を行う．

定義 3.5.11. $X = (X_t)_{t\in[0,\infty[}$ を $(\mathscr{F}_t)$-劣マルチンゲールとする．$\mathscr{S}_a$ の任意の増加列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して $\lim_{n\to\infty} E[X_{T_n}] = E[X_T]$（ただし $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ とおいた．）がなりたつとき，X は正則（*regular*）であるという．

定理 3.5.12. $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,\infty[}$ を通常の条件を満たすフィルトレーションとし，$X = (X_t)$ をクラス DL の右連続 $(\mathscr{F}_t)$ 劣マルチンゲールとする．$A = (A_t)$ を X の Doob-Meyer 分解における自然な増加過程とする．このとき，A が連続過程であることと X が正則であることは同値である．

証明．**ステップ 1：（A が連続）$\Rightarrow$（X は正則）の証明．** $\mathscr{S}_a$ の増加列 T_n に対して

$$E[X_{T_n}] = E[M_{T_n}] + E[A_{T_n}]$$

がなりたつが，有界停止時刻に関する任意抽出定理により

$$E[X_{T_n}] = E[M_T] + E[A_{T_n}]$$

がわかる．A の連続性より単調収束定理が使えて

$$\lim_{n\to\infty} E[X_{T_n}] = E[M_T] + \lim_{n\to\infty} E[A_{T_n}] = E[M_T] + E[A_T] = E[X_T]$$

となるので，X は正則である．

ステップ 2-1：（X は正則）$\Rightarrow$（A が連続）の証明その 1． X が正則だと仮定する．このときステップ 1 と同様の議論により

$$\lim_{n\to\infty} E[A_{T_n}] = \lim_{n\to\infty} E[X_{T_n}] - E[M_T] = E[X_T] - E[M_T] = E[A_T]$$

を得る．いま (A_{T_n}) の単調性より $A_{T_n} \to A_T$ in L^1 が直ちに分かる．これより $A_{T_n} \to A_T$ in probability も導かれるが，単調性より結局概収束まで言えることになる．ここで $t_n \uparrow t$ なる定数時刻の列をとれば連続性が言えそうだが，先ほどの議論では概収束における測度 0 の除外集合は (T_n) のとりかたに依存していることに注意されたい．列のとりかたのパターンは可算では収まらないはずなので，あらゆる場合も考慮してもまだ概収束が言えるかどうかは現時点では定かではない．

ステップ 2-2. 以降の証明における目標は，以下の等式を示すことである．

$$E\left[\int_{]0,t]} (A_s - A_{s-})\, dA_s\right] = 0. \quad (t \in [0,\infty[) \tag{3.5.7}$$

右連続な増加過程 (A_s) が不連続点をもつとき，Lebesgue-Stieltjes 測度 dA_s はその点で正の測度をもつ．したがって，ジャンプが存在するようなパスの集合が正の確率をもてば (3.5.7) の左辺の積分は正の値をとることになる．これより，(3.5.7) が分かれば A のパスでジャンプが存在するようなものは確率 0 であることが分かるのである．

ステップ 2 - 3. このステップ以降は実際に (3.5.7) を示すための準備を整えていく．[*37] $\Pi^{(n)}$ を定理 3.5.8 でもちいた $[0,a]$ の分割とする．このとき，確率過程 $(\xi_t^{(n)})_{t\in[0,a]}$ を

$$\xi_t^{(n)} = \sum_{i=0}^{2^n-1} E[\lambda \wedge A_{t_{j+1}} \mid \mathscr{F}_{t_j}]\, 1_{]t_j,t_{j+1}]}(t)$$

[*37] ここからはかなりテクニカルな議論になるので，正直言ってつまらないと思う．

となるものの *càdlàg* なパスをもつバージョンをとして定義することにする．このとき $(\xi_t^{(n)}, \mathscr{F}_t)$ は各区間 $]t_j, t_{j+1}]$ 上で有界マルチンゲールとなり，確率過程 $(\xi_t^{(n)})_{t\in[0,a]}$ は $[0,a]\setminus\Pi^{(n)}$ 上で右連続である．[*38]さらに，定義より $(\xi_t^{(n)})$ は $(\lambda\wedge A_t;\ 0\geq t\geq a)$ を dominate する過程であることに注意されたい．（分点の上では値は一致する．）A は自然な増加過程であったから各 $j\in\{0,\dots,2^n-1\}$ について

$$E\left[\int_{]t_j,t]}\xi_s^{(n)}dA_s\right]=E\left[\int_{]t_j,t]}\xi_{s-}^{(n)}dA_s\right]\quad (t\in]t_j,t_{j+1}])$$

j について和をとれば

$$E\left[\int_{]0,t]}\xi_s^{(n)}dA_s\right]=E\left[\int_{]0,t]}\xi_{s-}^{(n)}dA_s\right]\quad t\in[0,a]. \tag{3.5.8}$$

を得る．

ステップ 2-4. このステップでは先ほど定義した $(\xi_t^{(n)})$ から新たな確率過程を作り，その過程でもって後の議論で用いる停止時刻の列を構成する．

$$\eta_t^{(n)}=\begin{cases}\xi_{t+}^{(n)}-(\lambda\wedge A_t) & 0\geq t<a,\\ 0, & t=a.\end{cases}$$

このとき $(\eta_t^{(n)})_{t\in[0,a]}$ が右連続な適合過程になるのは明らかである．ここで，新たな確率変数を

$$\begin{aligned}T_n(\varepsilon)&=a\wedge\inf\left\{t\in[0,a]\mid\eta_t^{(n)}>\varepsilon\right\}\\&=a\wedge\inf\left\{t\in[0,a]\mid\xi_t^{(n)}-\lambda\wedge A_t>\varepsilon\right\}\end{aligned}$$

と定めれば[*39]，これは右連続適合過程の開集合への到達時刻なので $(\mathscr{F}_t)$-optional time であり，フィルトレーションの右連続性より停止時刻でもある．ここで $\varphi_n:[0,a]\to\Pi^{(n)}$ を

$$\varphi_n(t)=1_{]t_j,t_{j+1}]}$$

で定めると $\varphi_n(T_n(\varepsilon))\in T_a$ が分かる．定義より明らかに $\xi^{(n)}$ は n について減少列をなすから，$T_n(\varepsilon)$ は n について増加列となる．これより単調極限 $\lim_{n\to\infty T_n(\varepsilon)}\in\mathscr{S}_a$ は確率 1 で存在するが，特に φ_n の定義より

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(T_n(\varepsilon))=T_\varepsilon\quad P-\text{a.s.}$$

が分かる．[*40]

ステップ 2-5. ここにきてようやく X の正則性を使うための停止時刻の列が用意された．あとは (3.5.7) を

[*38] 分点での右連続性は必ずしも保証されない．
[*39] 定義の中の等号は $t\to\xi_t(\omega)$ がほとんどいたるところ右連続であることから従う．
[*40] 定義に戻って $\varepsilon-\delta$ 論法を用いれば，φ_n の左連続性より分かる．

導くために計算を重ねていくだけである．いま，任意抽出定理により[*41]

$$
\begin{aligned}
&E\left[\xi^{(n)}_{T_n(\varepsilon)}\right]\\
&=\sum_{j=0}^{2^n-1} E\left[E\left[\lambda\wedge A_{t_{j+1}}\mid \mathscr{F}_{T_n(\varepsilon)}\right] 1_{\{t_j<T_n(\varepsilon)\le t_{j+1}\}}\right] \quad (\because \text{Optional Sampling Theorem})\\
&=\sum_{j=0}^{2^n-1} E\left[(\lambda\wedge A_{t_{j+1}})1_{\{t_j<T_n(\varepsilon)\le t_{j+1}\}}\right] \quad (\because \text{Definintion of the conditional expectation})\\
&=\sum_{j=0}^{2^n-1} E\left[(\lambda\wedge A_{\varphi_n(T_n(\varepsilon))})1_{\{t_j<T_n(\varepsilon)\le t_{j+1}\}}\right]\\
&=E[\lambda\wedge A_{\varphi_n(T_n(\varepsilon))}]
\end{aligned}
$$

がなりたつから，

$$
\begin{aligned}
&E[(\lambda\wedge A_{\varphi_n(T_n(\varepsilon))})-(\lambda\wedge A_{T_n(\varepsilon)})]\\
&=E\left[\xi^{(n)}_{T_n(\varepsilon)}-(\lambda\wedge A_{T_n(\varepsilon)})\right]\\
&=E\left[1_{\{T_n(\varepsilon)<a\}}\xi^{(n)}_{T_n(\varepsilon)}-(\lambda\wedge A_{T_n(\varepsilon)})\right] \quad (\because \text{分点上では } (\xi^{(n)}_t) \text{ と } \lambda\wedge A_t \text{ は一致.})\\
&\le E\left[1_{\{T_n(\varepsilon)<a\}}\varepsilon\right]
\end{aligned}
\tag{3.5.9}
$$

である．ここで $Q_n:=\sup_{0\le t\le a}|\xi^{(n)}_t-\lambda\wedge A_t|$ とおけば (3.5.9) と有界収束定理より，任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$
\begin{aligned}
P[Q_n>\varepsilon]&=P[T_n(\varepsilon)<a]\\
&\le\frac{1}{\varepsilon}E[(\lambda\wedge A_{\varphi_n(T_n(\varepsilon))})-(\lambda\wedge A_{T_n(\varepsilon)})]\longrightarrow 0 \quad \text{as } n\longrightarrow\infty
\end{aligned}
$$

となるから，$(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 に確率収束することが分かる．特に，適当な部分列をとることにより概収束させることができる．このとき実は $\xi^{(n)}_{s-}$ も $\lambda\wedge A_{s-}$ に概収束する．実際，十分小さい $\delta>0$ に対して

$$
\begin{aligned}
\left|\xi^{(n)}_{s-}-(\lambda\wedge A_{s-})\right|&\le|\xi^{(n)}_{s-}-\xi_{s-\delta}|+|\xi^{(n)}_{s-\delta}-(\lambda\wedge A_{s-\delta})|+|(\lambda\wedge A_{s-\delta})-(\lambda\wedge A_{s-})|\\
&\le|\xi^{(n)}_{s-}-\xi_{s-\delta}|+\sup_{t\in[0,a]}|\xi^{(n)}_t-(\lambda\wedge A_t)|+|(\lambda\wedge A_{s-})-(\lambda\wedge A_s)|
\end{aligned}
$$

となることから，ここで $\delta\to 0$ としたあとに $n\to\infty$ とすれば結論を得る．

さて，これらの議論および優収束定理より (3.5.8) において $n\to\infty$ とすれば

$$
E\left[\int_{]0,t]}(\lambda\wedge A_s)dA_s\right]=E\left[\int_{]0,t]}(\lambda\wedge A_{s-})dA_s\right] \quad (t\in[0,a]).
$$

なる関係式を得る．さらに $\lambda\to\infty$ とすれば単調収束定理より

$$
E\left[\int_{]0,t]}A_s dA_s\right]=E\left[\int_{]0,t]}A_{s-}dA_s\right] \quad (t\in[0,a]).
$$

となるが，a は任意に選んだものだったから結局 (3.5.7) が分かり，A の連続性が示された． □

[*41] $Y_t=E[X\mid\mathscr{F}_t]$ ように定義された確率過程が停止時刻 T に対して $Y_T=E[X\mid\mathscr{F}_T]$ を満たすことは任意抽出定理による．

3.6 二乗可積分マルチンゲール

この節では，確率解析の理論においてきわめて重要な役割を果たす二乗可積分なマルチンゲールについての基礎を学ぶ．

これから後の節においては確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ と通常の条件を満たす[*42]フィルトレーション $(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を固定して考えることにする．

定義 3.6.1. $X = (X_t, \mathscr{F}_t; t \in [0,\infty])$ を右連続なマルチンゲールとする．任意の $t \in [0,\infty]$ に対して $E[X_t^2] < \infty$ となるとき，X は二乗可積分であるという．

今後用いる確率過程の空間をいくつか用意する．

$$
\begin{aligned}
\mathscr{M}^2 &= \{X = (X_t)_{t\in[0,\infty]} \mid X \text{ は二乗可積分な右連続 } (\mathscr{F}) \text{ -マルチンゲール．}\} \\
\mathscr{M}_0^2 &= \{X \in \mathscr{M}^2 \mid X_0 = 0 \ P-\text{a.s.}\} \\
\mathscr{M}^{2,c} &= \{X \in \mathscr{M}_2 \mid X \text{ は連続なパスをもつ.}\} \\
\mathscr{M}_0^{2,c} &= \{X \in \mathscr{M}^{2,c} \mid X_0 = 0 \ P-\text{a.s.}\}
\end{aligned}
$$

これらは正確には $\mathscr{M}^2(\mathscr{F}_t)$ などと書くべき空間であり，必要な時にはそのような表記を行うこともある．上で定義した空間がどれも線形空間となるのは明らかである．さらに，適切なノルムを入れることによりこれらの空間は Banach 空間となり，そのことが確率解析において基本的な役割を果たす．はじめに，これらのマルチンゲールの空間に入れるノルムの定義をする．$X \in \mathscr{M}^2$ に対して，

$$\|X\|_{\mathscr{M}^2,t} = \left(E[X_t^2]\right)^{\frac{1}{2}}$$

と定める．さらに，

$$\|X\|_{\mathscr{M}^2} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \wedge \|X\|_{\mathscr{M}^2,n}}{2^n}$$

とおくことにする．

命題 3.6.2. 上で定義したノルムに関して，$\mathscr{M}^2$ は Banach 空間である．さらに $\mathscr{M}_0^2, \mathscr{M}^{2,c}, \mathscr{M}_0^{2,c}$ はどれもその閉部分空間である．

証明．**ステップ 0：はじめに** $\|\ \ \|_{\mathscr{M}^2}$ がノルムの条件を満たすことは積分論の基本的な話題よりわかるので，完備性のみを示すことにする．$X^{(n)}$ が $\mathscr{M}^2$ の Cauchy 列であることと任意の $k \geq 1$ に対して $(X_t)_{t\in[0,k]}$ が $\|\ \ \|_{\mathscr{M}^2,k}$ に関して Cauchy 列になることが同値になることに注意しておく．同様にして，$\|\ \ \|_{\mathscr{M}^2}$ での収束は任意の k に対して $\|\ \ \|_{\mathscr{M}^2,k}$ で収束することと同値である．したがって，$t \in [0,\infty]$ 任意に固定して話を進めればよいことが分かる．証明のポイントは，ノルム $\|\ \ \|_{\mathscr{M}^2}$ での収束は実質的にパスごとの一様収束を導くことである．その議論のために，Doob の不等式と Borel-Cantelli の第一補題という確率論的手法を使うことになる．

[*42] この節では基本的に定理 3.5.8 の結果を用いているので，この条件は必須である．

ステップ 1 X を $\mathscr{M}^2$ の Cauchy 列とする．まずは，Cauchy 列の極限の候補となる確率過程を見つけることが目標である．これ以降 $t \in [0,\infty[$ を固定して考えることにする．$X = (X_s)_{s\in[0,t]}$ に関して Doob の不等式用いれば，

$$E\left(\sup_{s\in[0,t]}|X_s|^2\right) \le 4E[X_t^2]$$

である．$(X_s)_{s\in[0,t]}$ は $\|\ \ \|_{\mathscr{M}^2,t}$ に関して Cauchy 列だから，

$$\begin{aligned}
&\forall\varepsilon>0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon)\in\mathbb{N} \quad \forall n,m\ge N_0\\
&E\left(\sup_{s\in[0,t]}|X_s^{(m)}-X_s^{(n)}|^2\right) \le 4E|X_t^{(m)}-X_t^{(n)}|^2 = 4\left\|X^{(m)}-X^{(n)}\right\|_{\mathscr{M}^2,t}^2 < \varepsilon
\end{aligned}$$

特に，$(X^{(n)})$ の部分列で

$$n,m\ge n_k \Longrightarrow E\left(\sup_{s\in[0,t]}|X_s^{(m)}-X_s^{(n)}|\right) < \frac{1}{2^{3k}}$$

を満たすものがとれる．このとき

$$\begin{aligned}
P\left(\sup_{s\in[0,t]}|X_s^{(n_{k+1})}-X_s^{(n_k)}| > \frac{1}{2^k}\right) &\le (2^k)^2\, E\left(\sup_{s\in[0,T]}|X_s^{(n_{k+1})}-X_s^{(n_k)}|^2\right)\\
&\le 2^{2k}\cdot\frac{1}{2^{3k}} = \frac{1}{2^k}.
\end{aligned}$$

である．

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\left(\sup_{s\in[0,t]}|X_s^{(n_{k+1})}-X_s^{(n_k)}| > \frac{1}{2^k}\right) < \infty.$$

がなりたつから，Borel-Cantelli の第一補題より

$$P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=m}^{\infty}\left\{\sup_{s\in[0,t]}|X_s^{(n_{k+1})}-X_s^{(n_k)}| > \frac{1}{2^k}\right\}\right) = 0.$$

すなわち

$$P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{k=m}^{\infty}\left\{\sup_{s\in[0,t]}|X_s^{(n_{k+1})}-X_s^{(n_k)}| \le \frac{1}{2^k}\right\}\right) = 1.$$

これより，ほとんどすべての $\omega\in\Omega$ に関して，任意の $m>l\ge k$ について

$$\sup_{s\in[0,t]}|X_s^{(n_m)}(\omega)-X_s^{(n_l)}(\omega)| \le \sum_{i=l}^{m-1}\sup_{s\in[0,t]}|X_s^{(n_{i+1})}(\omega)-X_s^{(n_i)}(\omega)| \le \sum_{i=l}^{m-1}\frac{1}{2^i} \le \frac{1}{2^{l-1}} \le \frac{1}{2^{k-1}}.$$

このことより $(X^{(n_k)})$ のほとんどすべてのパスは区間 $[0,t]$ 上で sup-ノルムに関して Cauchy 列をなしており，ある右連続関数に一様収束する．

$$X(\cdot,\omega) = \begin{cases}\lim_{k\to\infty}X^{(n_k)}(\cdot,\omega) & \text{極限が存在するとき,}\\ 0 & \text{その他,}\end{cases} \tag{3.6.1}$$

と定義する．これはほとんどすべてのパスで部分 Cauchy 列 $X^{(n_k)}(\omega)$ の（sup-ノルムに関する）極限となっているから，元の Cauchy 列 $X^{(n)}(\omega)$ の極限にもなっていることに注意されたい．以降のステップでは，この確率過程が求められる性質を備えていることを確かめることにしよう．

ステップ 2 前のステップで見つけた極限の候補 X が，実際に考えているノルムに関して $(X^{(n)})$ の極限になっていることを示す．sup-ノルムの連続性より

$$\sup_{s\in[0,t]}|X_s^{(n)}-X_s| = \lim_{m\to\infty}\sup_{s\in[0,t]}|X_s^{(n)}-X_s^{(m)}|$$

がなりたつ．Fatou の補題を用いれば，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} E\left(\sup_{s\in[0,t]}|X_s^{(n)}-X_s|^2\right) &= \lim_{n\to\infty} E\left(\varliminf_{m\to\infty}\sup_{s\in[0,t]}|X_s^{(n)}-X_s^{(m)}|^2\right)\\
&\le \lim_{n\to\infty}\varliminf_{m\to\infty} E\left(\sup_{s\in[0,t]}|X_s^{(n)}-X_s^{(m)}|^2\right)\\
&\le \lim_{n,m\to\infty}\left\|X^{(n)}-X^{(m)}\right\|_{\mathscr{M}^2,t}\\
&= 0
\end{aligned}$$

が分かる．

$$E|X_t^{(n)}-X_t|^2 \le E\left(\sup_{s\in[0,t]}|X_s^{(n)}-X_s|^2\right)$$

に注意すれば，$\lim_{n\to\infty}\left\|X^{(n)}-X\right\|_{\mathscr{M}^2,t}=0$ となる．

ステップ 3：マルチンゲール性． 得られた極限 X がマルチンゲールになることを示す．先ほどと同様に，

$$\lim_{n\to\infty} E|X_s^{(n)}-X_s|^2 \le \lim_{n\to\infty} E\left(\sup_{s\in[0,t]}|X_s^{(n)}-X_s|^2\right)=0$$

$0\le s\le u\le t$ なる s,u を任意に選べば，$X^{(m)}$ のマルチンゲール性により $A\in\mathscr{F}_s$ に対して

$$E\left(X_u^{(m)}1_A\right)=E\left(X_s^{(m)}1_A\right).$$

いま，$X_u^{(n)}$ は L^2 で X_u に収束するので L^1 でも収束する．（確率空間においては L^1 ノルム $\le L^2$ ノルム となるため．）m について両辺の極限をとれば

$$E[X_u1_A]=E[X_s1_A]$$

となり，マルチンゲール性が分かる．

ステップ 4：まとめ． 今までの議論により，各区間 $[0,k]$ 上で右連続マルチンゲールが構成されたが，極限の一意性よりパスが連続であるような集合上では任意の $k,m\ge 1$ に対して $[0,k]\cap[0,m]$ でのパスは一致する．したがって，Cachy 列 $(X^{(n)})$ の極限であるような右連続マルチンゲール $X=(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ が構成された．以上より，$\mathscr{M}^2$ は完備であることが分かった．その他の空間が閉部分空間であることは，いままでの議論から明らかである．[*43] □

$M=(M_t)_{t\in[0,\infty[}\in\mathscr{M}^2$ に対して $M^2=(M_t^2)_{t\in[0,\infty[}$ は劣マルチンゲールになるので，定理 3.5.8 より Doob-Meyer 分解の存在が期待される．次の命題では，M^2 が実際にクラス DL に属することを証明する．

命題 3.6.3. 非負の右連続劣マルチンゲール $X=(X_t)_{t\in[0,\infty[}$ はクラス DL に属する．

[*43] 極限なる確率過程は結局パスごとの一様収束極限として構成されたことに注意せよ．

証明．$a>0$, $T\in\mathscr{S}_a$ とすれば，有界停止時刻についての任意抽出定理により $E[X_a|\mathcal{F}_T]\geq X_T$ a.s. $(T\in\mathscr{S}_a)$ が成立．よって

$$P[X_T>\lambda]\leq P[E[X_a|\mathscr{F}_T]>\lambda]$$

となる．これと有界停止時刻についての任意抽出定理を再び用いれば

$$\int_{\{X_T>\lambda\}}X_T dP\leq\int_{\{X_T>\lambda\}}E[X_a|\mathcal{F}_T]dP\leq\int_{\{E[X_a|\mathscr{F}_T]>\lambda\}}E[X_a|\mathcal{F}_T]dP$$

がなりたつ．族 $\{E[X_a|\mathcal{F}_T];T\in\mathscr{S}_a\}$ は一様可積分だから，$\{X_T;T\in\mathscr{S}_a\}$ も一様可積分である． □

命題 3.6.4. 非負な連続劣マルチンゲールは正則である．

証明．$a>0$ とし，(T_n) を $\mathscr{S}_a$ の増加列とする．$T=\lim_{n\to\infty}T_n$ とおけば，(X_t) の連続性より $\lim_{n\to\infty}X_{T_n}=X_T$，$P-$ a.s. である．命題 3.6.3 より X はクラス DL なので，$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は一様可積分．よって $\lim_{n\to\infty}E[X_{T_n}]=E[X_T]$ が分かる． □

命題 3.6.3 によれば $X\in\mathscr{M}^2$ のとき X^2 はクラス DL の劣マルチンゲールであるから，定理 3.5.8 により X^2 はマルチンゲールと自然な増加過程に分解することができ，その表現は一意である．

定義 3.6.5. $X\in\mathscr{M}^2$ とする．$X^2=M+A$ を Doob-Meyer 分解としたとき，自然な増加過程 $A=(A_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を $\langle X,X\rangle=(\langle X,X\rangle_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ で表し，X の二次変分 (*quadratic variation*) とよぶ．$\langle X,X\rangle$ のことを単に $\langle X\rangle$ と書くこともある．

注意 3.6.6. $X\in\mathscr{M}^{2,c}$ のとき，命題 3.5.1 および定理 3.5.12 より $\langle X\rangle$ は連続過程となる．

注意 3.6.7. Doob-Meyer 分解の一意性より，$\langle X\rangle$ は 0 出発の自然な増加過程であって $X^2-\langle X\rangle$ がマルチンゲールになるような唯一のものである．

命題 3.6.8. $M\in\mathscr{M}^2$ とすれば，任意の停止時刻 T について

$$\langle M^T,M^T\rangle=\langle M,M\rangle^T$$

が成り立つ．

証明．一意性より，$(M^T)^2-\langle M,M\rangle^T$ がマルチンゲールになることを示せば十分である．実際，$M^2-\langle M,M\rangle$ は $(\mathscr{F}_t)$ -マルチンゲールであるから，任意抽出定理により $(M^2_{T\wedge t}-\langle M,M\rangle_{T\wedge t})_{t\in[0,\infty[}$ もまたマルチンゲールとなる． □

確率過程の記述に便利なように，新たな空間をいくつか用意することにする．[44][45]

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_+&=\{A=(A_t)_{t\in\mathbb{R}_+}\mid \text{A は増加過程.}\}\\
\mathscr{A}_+^c&=\{A\in\mathscr{A}_+\mid A\ \text{は連続なパスを持つ.}\}\\
\mathscr{A}&=\{B=(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}\mid \text{ある}\ A_1,A_2\in\mathscr{A}_+\ \text{が存在して}\ B=A_1-A_2\ \text{と表現される.}\}\\
\mathscr{A}^c&=\{A\in\mathscr{A}\mid A\ \text{は連続なパスを持つ.}\}
\end{aligned}$$

[44] 増加過程の定義は 3.5.1 を見よ．

[45] $\mathscr{A}$ の元のことを，局所有限変動過程と言ったりする．

$\mathscr{M}^2$ は線形空間であったから，$M, N \in \mathscr{M}^2$ とすれば $M+N, M-N \in \mathscr{M}^2$ である．いま，簡単な計算により

$$\begin{aligned}&(M+N)^2 - \langle M+N, M+N\rangle - (M-N)^2 - \langle M-N, M-N\rangle \\ &= 4MN - (\langle M+N, M+N\rangle - \langle M-N, M-N\rangle)\end{aligned}$$

が分かる．$(M+N)^2 - \langle M+N\rangle$ および $(M-N)^2 - \langle M-N\rangle$ がマルチンゲールであることに注意すれば，$MN - \frac{1}{4}(\langle M+N, M+N\rangle - \langle M-N, M-N\rangle)$ もまたマルチンゲールになることが分かる．

定義 3.6.9. $M, N \in \mathscr{M}^2$ に対して確率過程 $\langle M, N\rangle = (\langle M, N\rangle_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を

$$\langle M, N\rangle_t = \frac{1}{4}(\langle M+N, M+N\rangle_t - \langle M-N, M-N\rangle_t)$$

と定義し，$\langle M, N\rangle$ を M と N の交差変分 (*cross variation*) とよぶ．[*46]

注意 3.6.10. $M = N$ とすれば，交差変分 $\langle M, M\rangle$ と二次変分 $\langle M, M\rangle$ は明らかに一致するので，これは整合性のとれた記法である．

注意 3.6.11. $MN - \langle M, N\rangle$ がマルチンゲールになるということから，MN は劣マルチンゲールや優マルチンゲールの類似物なのではなかろうかという予想が立てられる．我々は現時点では MN という過程を説明する言葉を持たないが，これについては後の節で答えが得られるだろう．

特にパスが連続な場合は，$MN - A$ がマルチンゲールとなる有界変動，連続過程は交差変分 $\langle M, N\rangle$ に限られる．

命題 3.6.12. $M, N \in \mathscr{M}^{2,c}$ とすれば，$MN - A$ がマルチンゲールとなるような $A \in \mathscr{A}^c$ が唯一つ存在する．

証明．

$$A = \langle M, N\rangle = \frac{1}{4}\left(\langle M+N, M+N\rangle - \langle M-N, M-N\rangle\right)$$

と定義すれば，A は明らかに連続過程で $MN - A$ はマルチンゲールとなる．$MN - A'$ もマルチンゲールとなるような $A' \in \mathscr{A}^c$ が存在したとする．このとき $MN - A - (MN - A') = A' - A$ は有界変動な連続マルチンゲールとなるが，定理 3.7.1 の結果をとりあえず認めれば[*47]，有界変動な連続マルチンゲールは定数に限るので，$A' - A$ は定数である．いま，$A'_0 = A_0 = 0$ に注意すれば $A' - A = 0$ である． □

命題 3.6.13. Cross variation $\langle\ ,\ \rangle$ は対称双線形写像 $\langle\ ,\ \rangle : \mathscr{M}^{2,c} \times \mathscr{M}^{2,c} \to \mathscr{A}^c$ を定める．

証明．第一成分についての線形性と対称性を示せばよい．$M, M', N \in \mathscr{M}^{2,c}$ とする．

$$(M+M')N - (\langle M, N\rangle + \langle M', N\rangle) = MN - \langle M, N\rangle + M'N - \langle M', N\rangle$$

はマルチンゲールで，さらに $\langle M, N\rangle + \langle M', N\rangle \in \mathscr{A}^c$ であるから 3.6.12 により

$$\langle M+M', N\rangle = \langle M, N\rangle + \langle M', N\rangle$$

である．また，$M, N \in \mathscr{M}^{2,c}$ および $\lambda \in \mathbb{R}$ とすれば

$$(\lambda M)N - \lambda\langle M, N\rangle = \lambda(MN - \langle M, N\rangle)$$

[*46] M と N のブラケット (bracket) ということもある．
[*47] その命題はここでまでの結果を使わないので，循環論法の心配はない．

はマルチンゲールであるから，同様にして

$$\langle \lambda M, N\rangle = \lambda\langle M, N\rangle$$

が分かる．$MN - \langle N, M\rangle$ がマルチンゲールであることから対称性も明らかである． □

実は線形性よりもう少し強く，次のことが成り立つ．

命題 3.6.14. $M, N \in \mathscr{M}^{2,c}$ および有界 $\mathscr{F}_0$ -可測関数　Z に対して

$$Z\langle M, N\rangle = \langle ZM, N\rangle = \langle M, ZN\rangle$$

が成り立つ．

証明．一つ目の等号を示す．命題 3.1.2 より $ZM \in \mathscr{M}^{2,c}$ となることに注意しておく[*48]．命題 3.6.12 より $(ZM)N - Z\langle M, N\rangle$ がマルチンゲールになっていることを示せば十分であるが，再び命題 3.1.2 を用いれば $(ZM)N - Z\langle M, N\rangle = Z(MN - \langle M, N\rangle)$ はマルチンゲールである．

同様にして

$$Z\langle M, N\rangle = \langle M, ZN\rangle$$

も示される． □

$\mathscr{M}^{2,c}$ よりも少し狭いマルチンゲールの空間

$$H^2 = \left\{ M \in \mathscr{M}^{2,c} \mid \sup_t E[M_t^2] < \infty \right\}$$
$$H_0^2 = \{ M \in H^2 \mid M_0 = 0 \}$$

を用意する．これらの空間はフィルトレーションの取り方に依存するものなので，フィルトレーションを特に意識する必要があるときには $H^2(\mathscr{F}_t)$ などとも表記することにする．この空間の元は明らかに一様可積分なマルチンゲールになっていることに注意されたい．

命題 3.6.15. H^2 は以下のノルムによって Hilbert 空間となる．

$$\|M\|_{H^2} = E[M_\infty^2]^{\frac{1}{2}} = \lim_{t\to\infty} E[M_t^2]^{\frac{1}{2}}$$

証明．定理 3.3.1 より劣マルチンゲール (M_t^2) がある確率変数 M_∞^2 に概収束かつ L^1 収束することに注意すれば，内積空間になっていることは容易に分かる．完備性の証明は定理 3.6.2 と同様である． □

$$\|M_\infty^*\|_2 := E\left[\left(\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |M_t|\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

とおけば，$M \mapsto \|M_\infty^*\|$ もまた H^2 のノルムを定める．明らかに

$$\|M\|_{H^2} = \lim_{t\to\infty} E[M_t^2]^{\frac{1}{2}} \le E\left[\left(\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |M_t|\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \|M_\infty^*\|_2$$

[*48] Z の有界性より二乗可積分性も明らか．

なる関係がなりたつ．また，Doob の不等式

$$E\left[\left(\sup_{0\le s\le t}|M_s|\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \le 2E[M_t^2]^{\frac{1}{2}}$$

において極限をとれば

$$\|M_\infty^*\|_2 \le 2\|M\|_{H^2}$$

となることも分かるので，$\|M_\infty^*\|_2$ は $\|M\|_{H^2}$ と同値なノルムである．しかし，このノルムは内積から導かれるものではないことに注意しておく．

3.7　二次変分その 2

3.6 では二次変分を Doob-Meyer 分解によって定義したが，実際の所二次変分にはもう少し直感的に重要な意味がある．$M \in \mathscr{M}^2$ パスの $[0,t]$ での挙動を考えたときに，微小区間での変動の二乗和を考える．すなわち，$[0,t]$ の分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ に対して

$$\sum_{j=1}^{2^n}\left|M_{t_j}(\omega) - M_{t_{j-1}}(\omega)\right|^2$$

という量の $n \to \infty$ のときの極限のふるまいを調べたい．その極限が $\langle M\rangle_t(\omega)$ になるのではないかというのが，我々の主張したいことである．実際，収束の意味を適切に解釈することで，この主張は正当化される．これを証明するのが本節での目標である．

マルチンゲール $M = (M_s)_{s\in\mathbb{R}_+} \in \mathscr{M}^c$ を考える．$[0,\infty[$ の分割 Π を

$$\Pi = (t_i)_{i\in\mathbb{N}};\ 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots \to \infty$$

かつ $\sup|t_i - t_{i-1}| < \infty$ となるようにとる．このとき，M と Π から決まる確率過程 $(V_t^{(p)}(\Pi))$ を以下のように定義する．[*49]

$$V_t^{(p)}(\Pi) := \sum_{k=1}^{\infty}|M_{t\wedge t_k} - M_{t\wedge t_{k-1}}|^p.$$

はじめに，パスの変動に関する重要な性質を証明する．これは，定数でないマルチンゲールのパスは非常に細かく振動していることを示すものである．

命題 3.7.1. マルチンゲール M が $\mathscr{A}^c$ に属するならば，M ほとんどすべてのパスは定数である．

証明．$M = 0$ としても一般性を失わないこのとき，任意の $t \in \mathbb{R}_+$ に対して $E[M_t^2] = 0$ を示せばよい．$[0,\infty[$ の分割 $\Pi = \{t_j\}_{j=0}^n : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots \to \infty$ を考える．適当な停止時刻で局所化することを考えれば，

---

*49 ここで定義した $V_t^{(p)}(\Pi)$ を分割 Π における M の p 次変分などと呼ぶ．右辺は形式的には無限和だが，実際は有限和であることに注意する．

$\sup_\Pi V_t^{(1)}(\Pi) \le K$ なる場合を考えればよい．このとき M は二乗可積分だから，マルチンゲール性より

$$
\begin{aligned}
E[M_t^2] &= E\left[\sum_{j=1}^{\infty}(M_{t\wedge t_j}^2 - M_{t\wedge t_{j-1}}^2)\right] \\
&= E\left[\sum_{j=1}^{n}(M_{t\wedge t_j} - M_{t\wedge t_{j-1}})^2\right] \\
&\le E\left[\max_j |M_{t\wedge t_j} - M_{t\wedge t_{j-1}}| V_t^{(1)}(\Pi)\right] \\
&\le KE\left[\max_j |M_{t\wedge t_j} - M_{t\wedge t_{j-1}}|\right] \xrightarrow[\|\Pi\|\to 0]{} 0
\end{aligned}
$$

となる．ただし，最後の極限操作は $[0,t]$ でのパスの一様連続性と有界収束定理により保証される．M の連続性より，ほとんど全てのパスは 0 であることが分かる． □

本題に戻って証明に用いる補題の証明を行おう．

補題 3.7.2. $M = (M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を二乗可積分なマルチンゲールで，ある $K > 0$ に対して $P(\forall s \in [0,t]\ |M_s| \le K) = 1$ となるようなものする．このとき，$E[V_t^{(2)}(\Pi)^2] \le 6K^4$ がなりたつ．

証明．ある m に対して $t = t_m$ として場合に示せばよい．

$$
\begin{aligned}
E[V_t^{(2)}(\Pi)^2] &= E\left[\left(\sum_{k=1}^{m}(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2\right)^2\right] \\
&= E\left[\sum_{k=1}^{m}(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^4 + 2\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=k+1}^{m}(M_{t\wedge t_k} - M_{t_{k-1}})^2(M_{t_l} - M_{t_{l-1}})^2\right] \\
&= E\left[\sum_{k=1}^{m}(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^4\right] + 2E\left[\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=k+1}^{m}(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2(M_{t_l} - M_{t_{l-1}})^2\right]. \qquad (3.7.1)
\end{aligned}
$$

がなりたつ．はじめに，（3.7.1）の右辺第二項について考える．$0 \le s \le t \le u \le T$ に対して

$$
\begin{aligned}
E\left[(M_u - M_t)^2 \mid \mathscr{F}_s\right] &= E\left[E\left[(M_u - M_t)^2 \mid \mathscr{F}_t\right] \mid \mathscr{F}_s\right] \\
&= E\left[E\left[M_u^2 - 2M_tM_u + M_t^2 \mid \mathscr{F}_t\right] \mid \mathscr{F}_s\right] \\
&= E\left[E\left[M_u^2 \mid \mathscr{F}_t\right] - 2M_tE\left[M_u \mid \mathscr{F}_t\right] + M_t^2 \mid \mathscr{F}_s\right] \\
&= E\left[M_u^2 - M_t^2 \mid \mathscr{F}_s\right]
\end{aligned}
$$

となることに注意すれば，

$$
\begin{aligned}
E\left[\sum_{l=k+1}^{m}(M_{t_l}-M_{t_{l-1}})^2 \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_k}\right] &= \sum_{l=k+1}^{m} E\left[(M_{t_l}-M_{t_{l-1}})^2 \mid \mathscr{F}_{t_k}\right] \\
&= \sum_{l=k+1}^{m} E\left[M_{t_l}^2 - M_{t_{l-1}}^2 \mid \mathscr{F}_{t_k}\right] \\
&= E\left[\sum_{l=k+1}^{m}\left(M_{t_l}^2 - M_{t_{l-1}}^2\right) \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_k}\right] \\
&= E\left[M_{t_m}^2 - M_{t_k}^2 | \mathscr{F}_{t_k}\right] \\
&= E\left[M_{t}^2 - M_{t_k}^2 | \mathscr{F}_{t_k}\right] \\
&\leq E[M_t^2|\mathscr{F}_{t_k}] \leq K^2
\end{aligned}
$$

がなりたつ．さらに M のマルチンゲール性より，$0 \leq s \leq t \leq T$ に対して

$$
\begin{aligned}
E[(M_t-M_s)^2] &= E[E[(M_t-M_s)^2|\mathscr{F}_s]] \\
&= E[E[M_t^2|\mathscr{F}_s] - 2M_sE[M_t|\mathscr{F}_s] + M_s^2] \\
&= E[M_t^2 - M_s^2]
\end{aligned}
$$

がなりたつことがわかる．したがって，

$$
\begin{aligned}
&E\left[\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=k+1}^{m}(M_{t_k}-M_{t_{k-1}})^2(M_{t_l}-M_{t_{l-1}})^2\right] \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} E\left[\sum_{l=k+1}^{m}(M_{t_k}-M_{t_{k-1}})^2(M_{t_l}-M_{t_{l-1}})^2\right] \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} E\left[E\left[\sum_{l=k+1}^{m}(M_{t_k}-M_{t_{k-1}})^2(M_{t_l}-M_{t_{l-1}})^2 \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_k}\right]\right] \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} E\left[(M_{t_k}-M_{t_{k-1}})^2 E\left[\sum_{l=k+1}^{m}(M_{t_l}-M_{t_{l-1}})^2 \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_k}\right]\right] \\
&\leq \sum_{k=1}^{m-1} E\left[(M_{t_k}-M_{t_{k-1}})^2 K^2\right] \\
&= K^2 \sum_{k=1}^{m-1} E\left[(M_{t_k}-M_{t_{k-1}})^2\right] \\
&= K^2 \sum_{k=1}^{m-1} E\left[M_{t_k}^2 - M_{t_{k-1}}^2\right] \\
&\leq K^2 E\left[M_{t_{m-1}}^2\right] \leq K^4
\end{aligned}
\tag{3.7.2}
$$

となる．次に（3.7.1）の右辺第一項についての評価として，以下の不等式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
E\left[\sum_{k=1}^{m}(M_{t_k}-M_{t_{k-1}})^4\right] &\leq E\left[\sum_{k=1}^{m}(M_{t_k}-M_{t_{k-1}})^2(|M_{t_k}|+|M_{t_{k-1}}|)^2\right] \\
&\leq E\left[\sum_{k=1}^{m}(M_{t_k}-M_{t_{k-1}})^2(2K)^2\right] \\
&= 4K^2\sum_{k=1}^{m}E\left[M_{t_k}^2-M_{t_{k-1}}^2\right] \\
&\leq 4K^2E\left[M_{t_m}^2\right] \\
&\leq 4K^4
\end{aligned}
\tag{3.7.3}
$$

したがって，（3.7.1），（3.7.2）および（3.7.3）により

$$
E[V_t^{(2)}(\Pi)]^2 \leq 4K^4+2K^4=6K^4
$$

となり，求める不等式が得られた． □

補題 3.7.3. $M\in\mathscr{M}_2^c$ は $|M_s|\leq K<\infty;\ \forall s\in[0,t],\ P-\text{a.s.}$ を満たすものとする．このとき，

$$
\lim_{\|\Pi\|\to 0} EV_t^{(4)}(\Pi)=0
$$

がなりたつ．

証明．$[0,\infty[$ の任意の分割 $\Pi=(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ に対して

$$
\begin{aligned}
V_t^{(4)}(\Pi) &= \sum_{i=1}^{\infty}(M_{t\wedge t_i}-M_{t\wedge t_{i-1}})^4 \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty}(M_{t\wedge t_i}-M_{t\wedge t_{i-1}})^2\left(\max_{i\in\mathbb{N}}|M_{t\wedge t_i}-M_{t\wedge t_{i-1}}|\right)^2 \\
&= V_t^{(2)}(\Pi)\cdot m_t^2(\Pi)
\end{aligned}
$$

がなりたつ．（ただし，$m_t(\Pi):=\max_{i\in\mathbb{N}}\left|M_{t\wedge t_i}-M_{t\wedge t_{i-1}}\right|$ とおいた．）両辺の期待値をとって，さらに Schwarz の不等式と補題 3.7.2 を用いることにより

$$
\begin{aligned}
E\left[V_t^{(4)}(\Pi)\right] &\leq E\left[V_t^{(2)}(\Pi)\cdot m_t(\Pi)^2\right] \\
&\leq \sqrt{E\left[V_t^{(2)}(\Pi)\right]}\sqrt{E\left[m_t(\Pi)^4\right]} \\
&\leq \sqrt{6K^4}\sqrt{E\left[m_t(\Pi)^4\right]}
\end{aligned}
\tag{3.7.4}
$$

となる．ここで，M の連続性より $P-\text{a.s.}$ で $\lim_{\|\Pi\|\to 0}m_t(\Pi)=0$ である．さらに，M の有界性より

$$
\begin{aligned}
m_t^2(\Pi) &= \left(\max_{i\in\mathbb{N}}|M_{t\wedge t_i}-M_{t\wedge t_{i-1}}|\right)^2 \\
&\leq \left(\max_{i\in\mathbb{N}}\left\{|M_{t\wedge t_i}|+|M_{t\wedge t_{i-1}}|\right\}\right)^2 \\
&\leq (2K)^2
\end{aligned}
$$

となるから，有界収束定理により $\lim_{\|\Pi\|\to 0} Em_t^2(\Pi) = 0$ が分かる．したがって，式（3.7.4）で極限をとることにより

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0} EV_t^{(4)}(\Pi) = 0.$$

□

定理 3.7.4. $M \in \mathscr{M}^{2,c}$ とする．Π を $[0,\infty[$ の分割としたとき，任意の $t \in [0,\infty[$ に対して[*50]

$$\sup_{0\le s\le t} \left| V_s^2(\Pi) - \langle M, M\rangle_s \right| \xrightarrow[\|\Pi\|\to 0]{} \quad \text{(in probability)}.$$

証明．**ステップ 1：M が有界な場合．** M の上界の一つを K とし，$\Pi = (t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を $[0,\infty[$ の分割とする．このとき

$$\begin{aligned}
&E\left[\left(V_t^{(2)}(\Pi) - \langle M\rangle_t\right)^2\right] \\
&= E\left[\left\{\sum_{j=1}^n \left|M_{t_j} - M_{t_{j-1}}\right|^2 - \left(\langle M\rangle_{t_j} - \langle M\rangle_{t_{j-1}}\right)\right\}^2\right] \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n E\left[\left\{\left|M_{t_j} - M_{t_{j-1}}\right|^2 - \left(\langle M\rangle_{t_j} - \langle M\rangle_{t_{j-1}}\right)\right\}\left\{\left|M_{t_i} - M_{t_{-1}}\right|^2 - \left(\langle M\rangle_{t_i} - \langle M\rangle_{t_{i-1}}\right)\right\}\right] \\
&= \sum_{j=1}^n E\left[\left\{\left|M_{t_j} - M_{t_{j-1}}\right|^2 - \left(\langle M\rangle_{t_j} - \langle M\rangle_{t_{j-1}}\right)\right\}^2\right] \\
&\le \sum_{j=1}^n 2E\left[\left|M_{t_j} - M_{t_{j-1}}\right|^4 + \left(\langle M\rangle_{t_j} - \langle M\rangle_{t_{j-1}}\right)^2\right] \\
&= 2E\left[\sum_{j=1}^n \left|M_{t_j} - M_{t_{j-1}}\right|^4\right] + 2E\left[\sum_{j=1}^n \left(\langle M\rangle_{t_j} - \langle M\rangle_{t_{j-1}}\right)^2\right] \\
&\le 2E\left[V_t^{(4)}(\Pi)\right] + 2E\left[m_t(\Pi)\sum_{j=1}^n \left(\langle M\rangle_{t_j} - \langle M\rangle_{t_{j-1}}\right)\right] \\
&= 2E\left[V_t^{(4)}(\Pi)\right] + 2E\left[m_t(\Pi)\langle M\rangle_t\right]
\end{aligned}$$

という評価が得られる．（ただし，三つ目の等号ではマルチンゲール性をもちいた．）補題 3.7.3 および M のパスの $[0,t]$ での一様連続性，ルベーグの優収束定理により最終辺は $\|\Pi\| \to 0$ で 0 に収束する．これより，$V_t^{(2)}(\Pi)$ は $\langle M\rangle_t$ に L^2 収束する．また，

$$V_s^{(2)}(\Pi) - \langle M, M\rangle_s = \sum_{i=0}^\infty \left[(M_{s\wedge t_{i+1}} - M_{s\wedge t_i})^2 - (\langle M\rangle_{s\wedge t_{i+1}} - \langle M\rangle_{s\wedge t_i})\right]$$

[*50] 一般に確率過程の列 $X^{(n)}$ と確率過程 X が任意の $t \in [0,\infty[$ に対して

$$\sup_{0\le s\le t} |X_s^{(n)} - X_s| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{in probability}$$

を満たすとき，

$$X^{(n)} \xrightarrow{\text{ucp}} X$$

などと書くことが多い．ucp は “uniformly on compacts in probability” の略である．

の表現より，$V.(\Pi)-\langle M,M\rangle$ はマルチンゲールであることが分かるので*51，Doob の不等式より

$$E\left[\sup_{0\le s\le t}\left|V_s^{(2)}(\Pi)-\langle M,M\rangle_s\right|^2\right]\le 4E\left[\left(V_t^{(2)}(\Pi)-\langle M\rangle_t\right)^2\right]$$

より，$\sup_{0\le s\le t}\left|V_s^{(2)}(\Pi)-\langle M,M\rangle_s\right|$ は 0 に L^2 収束することが分かる．

ステップ 2：一般の場合． 局所化を行い，その極限を考えることで一般の場合を示す．

$$T_m:=\{t\ge 0\mid |M_t|\vee\langle M\rangle_t\ge m\}$$

とおけば，T_n は停止時刻であって*52，$T_n\to\infty$, $P-$a.s. となる．このとき停止過程 M^{T_n} は有界連続マルチンゲールとなるから，ステップ 1 の結果と命題 3.6.8 より

$$\begin{aligned}&\lim_{\|\Pi\|\to 0}E\left[\sup_{0\le s\le t}\left|\sum_{j=1}^{\infty}\left(M^{T_m}_{s\wedge t_j}-M^{T_m}_{s\wedge t_{j-1}}\right)^2-\langle M^{T_m}\rangle_s\right|^2\right]\\&=\lim_{\|\Pi\|\to 0}E\left[\sup_{0\le s\le t}\left|\sum_{j=1}^{\infty}\left(M_{s\wedge t_j\wedge T_m}-M_{s\wedge t_{j-1}\wedge T_m}\right)^2-\langle M\rangle_{s\wedge T_m}\right|^2\right]=0\end{aligned}$$

である．したがって

$$\sup_{0\le s\le t}\left|\sum_{j=1}^{\infty}\left(M_{s\wedge t_j\wedge T_m}-M_{s\wedge t_{j-1}\wedge T_m}\right)^2-\langle M\rangle_{s\wedge T_m}\right|^2\xrightarrow[\|\Pi\|\to 0]{}\quad\text{in probability}$$

が成立．$T_m\to\infty$, $P-$a.s. とあわせて確率収束が分かる． □

系 3.7.5. $M,N\in\mathscr{M}^{2,c}$ とする．$\Pi=(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ を $[0,\infty[$ の分割とすれば，

$$\sup_{0\le s\le t}\left|\sum_{j=1}^{\infty}\left(M_{s\wedge t_j}-M_{s\wedge t_{j-1}}\right)\left(N_{s\wedge t_j}-N_{s\wedge t_{j-1}}\right)-\langle M,N\rangle_s\right|\xrightarrow[\|\Pi\|\to 0]{}0\quad\text{in probability}$$

がなりたつ．

証明．

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\left\{(M_{t_j}+N_{t_j})-(M_{t_{j-1}}+N_{t_{j-1}})\right\}^2\\&=\sum_{j=1}^{n}\left\{(M_{t_j}-M_{t_{j-1}})^2+(N_{t_j}-N_{t_{j-1}})^2+2(M_{t_j}-M_{t_{j-1}})(N_{t_j}-N_{t_{j-1}})\right\}\end{aligned}\tag{3.7.5}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\left\{(M_{t_j}-N_{t_j})-(M_{t_{j-1}}-N_{t_{j-1}})\right\}^2\\&=\sum_{j=1}^{n}\left\{(M_{t_j}-M_{t_{j-1}})^2+(N_{t_j}-N_{t_{j-1}})^2-2(M_{t_j}-M_{t_{j-1}})(N_{t_j}-N_{t_{j-1}})\right\}\end{aligned}\tag{3.7.6}$$

であるから，(3.7.5) − (3.7.6) を計算して極限をとれば，交叉変分の定義と定理 3.7.4 よりすぐにわかる． □

*51 定義に戻って直接確かめればよい．

*52 連続過程の閉集合への到達時刻である．

3.8 局所マルチンゲール

定義 3.8.1 (局所マルチンゲール). 右連続な $(\mathscr{F}_t)$ -適合過程　M を考える．M に対して次の条件を満たす $(\mathscr{F}_t)$ -停止時刻の列　$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在するとき[*53]，M を局所マルチンゲール (local martingale) という．

(i) $T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \cdots \to \infty$ $(n \to \infty)$, $P-$a.s.
(ii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $M^{T_n}1_{\{T_n>0\}}$ はマルチンゲールとなる．

注意 3.8.2. マルチンゲールは明らかに可積分な局所マルチンゲールであるが，逆はなりたたない．可積分，それどころか一様可積分な局所マルチンゲールであってもマルチンゲールでないような例すら存在する．[*54]

次の命題では，定義よりすぐに分かる局所マルチンゲールの基本的な性質を述べる．

命題 3.8.3. M, N を $(\mathscr{F}_t)$ -局所マルチンゲールとし，　T, S, T_n, S_n などは停止時刻を表すものとする．

(i) $M^T 1_{\{T>0\}}$ がマルチンゲールで $S \leq T$ が成り立つなら，$M^S 1_{\{S>0\}}$ もマルチンゲールである．
(ii) (T_n) が M を局所化する列で (S_n) が $S_0 \leq S_1 \leq \to \infty$ P-a.s. を満たすならば，$(T_n \wedge S_n)$ もまた M の局所化列である．
(iii) $M + N$ はまた局所マルチンゲールである．
(iv) Z が $\mathscr{F}_0$ -可測な確率変数ならば，　ZM はまた局所マルチンゲールである．
(v) $(\mathscr{F}_t)$ -局所マルチンゲール全体のなす空間は線形空間である．
(vi) M^T はまた局所マルチンゲールである．
(vii) 局所化列として $M^{T_n}1_{\{T_n>0\}}$ が一様可積分となるようなものがとれる．
(viii) M が連続なら，局所化列として $M^{T_n}1_{\{T_n>0\}} \in H^2$ となるようなものがとれる．
(ix) 非負の局所マルチンゲール (M_t) は M_0 が可積分となるとき，優マルチンゲールである．

証明. (i). 任意抽出定理より $(M^T 1_{\{T>0\}})^S = M^{T\wedge S}1_{\{T>0\}} = M^S 1_{\{T>0\}}$ はマルチンゲールである．$1_{\{S>0\}}$ は有界で $\mathscr{F}_0$ -可側だから，命題　3.1.2 より $M^S 1_{\{T>0\}}1_{\{S>0\}} = M^S 1_{\{S>0\}}$ もマルチンゲールとなる．

(ii). 明らかに $T_n \wedge S_n \uparrow \infty$ P-a.s. が成り立つ．また (i) より $M^{T_n\wedge S_n}1_{\{T_n\wedge S_n>0\}}$ はまたマルチンゲールである．

(iii). $(T_n), (S_n)$ をそれぞれ M, N を局所化する列とすれば, (ii) より $(R_n) := (T_n \wedge S_n)$ は M, N 両方の局所化列になっている．$M^{R_n}1_{\{R_n>0\}}$ および $N^{R_n}1_{\{R_n>0\}}$ はマルチンゲールなので，その和 $(M+N)^{R_n}1_{\{R_n>0\}}$ もマルチンゲールである．よって $M + N$ は (R_n) を局所化列にもつ局所マルチンゲールである．

(iv). M の局所化列 (T_n) を適当に選ぶ．さらに

$$S_n(\omega) = \begin{cases} \infty & |Z(\omega)| \leq n \\ 0 & |Z(\omega)| > n \end{cases}$$

とおき $R_n = T_n \wedge S_n$ とすれば，(R_n) はまた M を局所化する[*55]．$Z1_{\{R_n>0\}}$ が有界かつ $(\mathscr{F}_0)$ -可測であることに注意すれば，命題 3.1.2 より $(ZM)^{R_n}1_{\{R_n>0\}} = (Z1_{\{R_N>0\}})M^{R_n}1_{\{R_n>0\}}$ はまたマルチンゲール

[*53] このような (T_n) は M を局所化するという．(T_n) のことを局所化列 (localizing sequence) ともいう．
[*54] Karatzas & Shreve の Excercise3.36,3.37 [24, p.168] 等を参照．この例は Marc Yor さんによるものらしいので Revuz & Yor にもありそうなものだが，どこにあるのか分からなかった．見つけた方は教えていただきたい．
[*55] Z は実数値で考えている．

である．よって ZM は (R_n) を局所化列にもつ局所マルチンゲールである．

(v). (iii), (iv) より明らか．

(vi). 任意抽出定理より分かる．

(vii). 局所化列 (T_n) に対して $(T_n \wedge n)$ を考えればよい．

(viii). (T_n) を M を局所化する停止時刻列とする．

$$S_n(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid |M_t(\omega)| \geq n\}$$

とおけば命題 2.3.12 より S_n は停止時刻で[*56]，$S_n \uparrow \infty P$-a.s. を満たす．$R_n = T_n \wedge S_n$ とおけば (R_n) は M の局所化列であり，$M^{R_n}1_{\{R_n>0\}} \leq n$ （有界）となる．特に $M^{R_n}1_{\{R_n>0\}} \in H^2$ である．

(iv). (M_t) を局所マルチンゲールとし，(T_n) をその局所化列とする．$0 \leq s \leq t$ および $A \in \mathscr{F}_s$ とすれば，

$$E[1_A M_{T_n\wedge t}1_{\{T_n>0\}}] = E[1_A M_{T_n\wedge s}1_{\{T_n>0\}}] = E[1_A M_0 1_{\{T_n>0\}}]$$

が成立．非負性より Fatou の補題が使えて，

$$\begin{aligned}
0 \leq E[1_A M_t] &= E\left[\liminf_{n\to\infty} M_{T_n\wedge t}1_{\{T_n>0\}}\right] \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} E[M_{T_n\wedge t}1_{\{T_n>0\}}] \\
&= \liminf_{n\to\infty} E[M_0 1_{\{T_n>0\}}] \\
&= E[M_0] < \infty
\end{aligned}$$

となり，M_t は可積分である．さらに条件付き Fatou の補題を使えば，

$$\begin{aligned}
E[M_t|\mathscr{F}_s] &= E[\liminf_{n\to\infty} M_{T_n\wedge t}1_{\{T_n>0\}}|\mathscr{G}] \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} E[M_{T_n\wedge t}1_{\{T_n>0\}}|\mathscr{G}] \\
&= \liminf_{n\to\infty} M_{T_n\wedge s}1_{\{T_n>0\}} \\
&= M_s
\end{aligned}$$

となり，優マルチンゲールであることが分かった． □

二乗可積分マルチンゲールの場合と同じように局所マルチンゲールの空間をいくつか用意する．

$$\begin{aligned}
\mathscr{M}^{loc} &= \{M = (M_t)_{t\in\mathbb{R}_+} \mid M \text{ は } (\mathscr{F}_t) \text{ -局所マルチンゲール．}\} \\
\mathscr{M}_0^{loc} &= \{M \in \mathscr{M}^{loc} \mid M_0 = 0,\ P-\text{a.s.}\} \\
\mathscr{M}^{c,loc} &= \{M \in \mathscr{M}^{loc} \mid M \text{ は連続なパスを持つ．}\} \\
\mathscr{M}_0^{c,loc} &= \{M \in \mathscr{M}^{c,loc} \mid M_0 = 0,\ P-\text{a.s.}\}
\end{aligned}$$

命題 3.8.4. 局所マルチンゲールがマルチンゲールとなることの必要十分条件は，それがクラス DL に属することである．

証明. 任意抽出定理より，マルチンゲールがクラス DL の局所マルチンゲールであることは明らか．逆を示す．M をクラス DL の $(\mathscr{F}_t)$ -局所マルチンゲールとし，停止時刻の列 (T_n) は定義 3.8.1 の二条件を満たす

[*56] ここに連続性を用いた

ものとする．このとき，$(M_{T_n\wedge t})_{n\in\mathbb{N}}$ は一様可積分な確率変数列で $M_{T_n\wedge t}\to M_t$（概収束）を満たすから，$M_{T_n\wedge t}\to M_t$ は L^1 の意味でもなりたつ．これより M_t は可積分で，さらに $s\le t$ とすれば

$$E[M_s 1_A]=\lim_{n\to\infty}E[M_{T_n\wedge s}1_{\{T_n>0\}}1_A]=\lim_{n\to\infty}E[M_{T_n\wedge t}1_{\{T_n>0\}}1_A]=E[M_t 1_A]\quad(\forall A\in\mathscr{F}_s)$$

も成立する．したがって，M はマルチンゲールである． □

局所マルチンゲールに関しても二次変分や交差変分といった概念が定義でき，それらは局所マルチンゲールの解析に重要な役割を果たす．

定理 3.8.5. M を連続な局所マルチンゲールとする．このとき確率過程 $A\in\mathscr{A}_+^c$ で M^2-A が局所マルチンゲールになるようなものが（indistinguishable の意味で）唯一つ存在する．

証明．**ステップ 1：存在の証明．** 停止時刻の列 (T_n) を $T_n\uparrow\infty$, P–a.s. かつ $M^{T_n}1_{\{T_n>0\}}$ がマルチンゲールになるようなものとする．さらに

$$S_n=T_n\wedge\inf\{t\ge 0\mid |M_t|\ge n\}$$

と定めれば，(S_n) はまた $S_n\uparrow\infty$, $P-$a.e. を満たす停止時刻の列となる．さらに $M^{S_n}1_{\{S_n>0\}}$ は有界な，よって二乗可積分な $(\mathscr{F}_t)$ -マルチンゲールとなる．（任意抽出定理．）したがって，各　n に対して

$$A^{(n)}=\langle M^{S_n},M^{S_n}\rangle$$

が定義できる．この $A^{(n)}$ によって A が定義できるというのが言いたいことであるが，その前に $A^{(n)}$ と $A^{(n+1)}$ が然るべき集合上では一致していることを示さなければいけない．$n\le m$ とすれば，命題 3.6.8 より $\{t\le S_n\}$ なる集合上では

$$\langle M^{S_n}\rangle_t=\langle M^{S_n\wedge S_m}\rangle_t=\langle M^{S_m}\rangle_{S_n\wedge t}=\langle M^{S_m}\rangle_t$$

となり，望ましい結果が得られた．いま $\{t\le S_n\}$ 上で

$$\langle M,M\rangle_t:=\langle M^{S_n},M^{S_n}\rangle_t$$

とおけば $\langle M,M\rangle$ は well-defined である．[*57]定義より $\langle M,M\rangle$ が 0 出発で，パスが連続かつ有界変動であることは明らかである．あとは $M-\langle M,M\rangle$ が局所マルチンゲールになることを言えば良いが，正にここで定義されている (S_n) が M^{S_n} をマルチンゲールにしていることが分かる．実際，$\{S_n\ge t\}$ 上では定義より明らかに

$$\langle M,M\rangle_{t\wedge S_n}=\langle M,M\rangle_t=\langle M^{S_n},M^{S_n}\rangle_t$$

であり，$\{S_n<t\}$ 上でも，ω に応じて十分大きな m をとれば[*58]

$$\begin{aligned}\langle M,M\rangle_{t\wedge S_n}(\omega)&=\langle M^{S_m},M^{S_m}\rangle_{t\wedge S_n}(\omega)\\&=\langle M^{S_m\wedge S_n},M^{S_m\wedge S_n}\rangle_t(\omega)\\&=\langle M^{S_n},M^{S_n}\rangle_t(\omega)\end{aligned}$$

[*57] 正確には $\{\lim_{n\to\infty}S_n=\infty\}$ となる集合上でしか定まらないが，その他の点では 0 とでもおけばよい．

[*58] 具体的には $S_m(\omega)\ge t$ となる m である．

である．（ただし，二つ目の等号では命題 3.6.8 を用いた．）これより $\langle M,M\rangle^{S_n} = \langle M^{S_n}, M^{S_n}\rangle$ となるが，$(M^{S_n})^2 - \langle M^{S_n}, M^{S_n}\rangle$ は明らかにマルチンゲールである．これで存在の証明が終わった．

ステップ 2：一意性． $A, B \in \mathscr{A}^c$ は $MN - A$ および $MN - B$ が局所マルチンゲールになるような過程とする．このとき $X = (MN - A) - (MN - B) = B - A$ は局所マルチンゲールで，パスはほとんど確実に有界変動である．特にこれを局所化する停止時刻の増加列 (T_n) をとれば X^{T_n} は有界変動なパスをもつマルチンゲールであるが，定理 3.7.1 により $X^{T_n} = 0$ である．これより $X = B - A = 0$ を得る． □

定理 3.8.6. $M, N \in \mathscr{M}^{c,loc}$ とすれば $MN - A$ が局所マルチンゲールとなるような $A \in \mathscr{A}^c$ がただ一つ存在する．

証明．定理 3.8.5 の $\langle\quad,\quad\rangle$ を用いて

$$A := \frac{1}{4}\left(\langle M+N, M+N\rangle - \langle M-N, M-N\rangle\right)$$

とおけば，この A が求めるものである．一意性も 3.8.5 と同様にして示される． □

定義 3.8.7. 系 3.8.6 で存在と一意性が保証されるところの有界変動なパスを持つ確率過程を $\langle M,N\rangle$ と書き，M, N の交差変分 (cross variation) とよぶ．特に $\langle M,M\rangle$ を M の二次変分 (quadratic variation) といい，単に $\langle M\rangle$ と書くこともある．

注意 3.8.8. 二乗可積分マルチンゲールの場合と同様にして，交差変分の双線形性，対称性を示すことができる．

命題 3.8.9. $M, N \in \mathscr{M}^{c,loc}$ とする．$(\mathscr{F}_t)$ -停止時刻　T に対して

$$\langle M^T, N^T\rangle = \langle M^T, N\rangle = \langle M, N^T\rangle = \langle M,N\rangle^T$$

がなりたつ．

証明．$(MN)^T = M^T N^T$ であることから $M^T N^T - \langle M,N\rangle^T$ は局所マルチンゲールになるが，定理 3.8.5 の一意性より

$$\langle M^T, N^T\rangle = \langle M,N\rangle^T$$

が分かる．また，$M^T(N - N^T)$ は局所マルチンゲールだから*59，局所マルチンゲール $M^T N^T - \langle M,N\rangle^T$ との和をとることで $M^T N - \langle M,N\rangle^T$ も局所マルチンゲールになることが分かる．一意性より $\langle M,N\rangle^T = \langle M^T, N\rangle$ も分かる．後の一つも同様である． □

命題 3.8.10. $M \in \mathscr{M}^{c,loc}$ に対して，

$$\langle M,M\rangle = 0 \iff M_0 = M_t \ (\forall t \in [0,\infty[)$$

がなりたつ．

証明．(S_n) を定理 3.8.5 の証明で用いた停止時刻の列とすれば，$M^{S_n} \in \mathscr{M}^{2,c}$ である．$(M^{S_n})^2 - \langle M^{S_n}\rangle$ のマルチンゲール性より

$$E[(M_t^{S_n} - M_0^{S_n})^2] = E[\langle M^{S_n}, M^{S_n}\rangle_t] = E[\langle M,M\rangle_t^{S_n}] = 0$$

*59 命題 3.4.5 より分かる．

となるから，$\langle M,M\rangle_t^{S_n}=0$ と $M_t^{S_n}=M_0^{S_n}$ は同値である．あとは $n\to\infty$ の極限を考えればよい． □

実は今の命題よりもう少し強く，次の主張が成立する．

命題 3.8.11. $M\in\mathscr{M}^{c,loc}$ とすれば，ほとんど全ての ω に対して次は同値である．

(i) $M_t(\omega)=M_a(\omega),\ (\forall t\in[a,b])$ がなりたつ．
(ii) $\langle M,M\rangle_a(\omega)=\langle M,M\rangle_b(\omega)$.

注意 3.8.12. この命題では a,b がパスに依存することを許しているので，命題 3.8.10 より強い主張をしていることに気をつけられたい．

証明．ステップ 1 : (i) ⇒ (ii)．$t\mapsto M_t(\omega)$ が $[a,b]$ 上定数であれば，明らかに二次変分も定数である．

ステップ 2 : (ii) ⇒ (i)．逆は少しばかりテクニカルである．$q\in\mathbb{Q}_+$ に対して，確率過程 $N_t=M_{t+q}-M_q$ を考える．明らかに $(N_t)_{t\geq 0}$ は $(\mathscr{F}_{t+q})_{t\geq 0}$ -局所マルチンゲールであり， $\langle N,N\rangle_t=\langle M,M\rangle_{q+t}-\langle M,M\rangle_t$ がなりたつ．さて，確率変数 T_q を以下のように定める．

$$T_q(\omega)=\inf\{s>0\mid\langle N,N\rangle_s(\omega)>0.\}$$

このとき，T_q は $(\mathscr{F}_{t+q})$ 停止時刻である[*60]．命題 3.8.9 より

$$\langle N^{T_q},N^{T_q}\rangle=\langle N,N\rangle_{T_q}=0$$

であるから，命題 3.8.10 により $N_t^{T_q}=N_0^{T_q}=0$ が分かる．これより，$M_{q+(T_q\wedge t)}-M_q=0$ であるから，$M_t(\omega)$ は区間 $[q,T_q(\omega)]$ 上で定数である．q が $\mathbb{Q}_+$ を走れば，命題の過程を満たすような任意の $[a,b]$ を覆うことが出来るので，これで定理の証明が終わる[*61]． □

命題 3.8.4 では局所マルチンゲールがにマルチンゲールになるための必要十分条件を考えた．次の命題では，連続局所マルチンゲールが二乗可積分マルチンゲールになるための条件を調べる．

命題 3.8.13. M を連続な $(\mathscr{F}_t)$ -局所マルチンゲールとする．このとき，以下の　2 条件は同値．

(i) $M\in\mathscr{M}^{2,c}$
(ii) M_0 が二乗可積分で，$\forall t,\ E[\langle M,M\rangle_t]<\infty$.

特に $M\in\mathscr{M}_0^{2,c}$ のときは $E[M_t^2]=E[\langle M,M\rangle_t]$ が成立する．

証明．(i)⇒(ii) は明らかなので，逆を示す．(ii) を仮定する．このとき，停止時刻の列 (T_n) を $T_n\uparrow\infty\ P-\mathrm{a.s.}$ かつ $M^{T_n}1_{\{T_n>0\}}$ が有界マルチンゲールになるようにとると $((M^{T_n})^2-\langle M^{T_n},M^{T_n}\rangle)1_{\{T_n>0\}}$ はマルチンゲールになる．よって

$$E[(M_{T_n\wedge t}^2-\langle M,M\rangle_{T_n\wedge t})1_{\{T_n>0\}}]=E[M_0^21_{\{T_n>0\}}] \tag{3.8.1}$$

がなりたつ．(3.8.1) より

$$\begin{aligned}E[M_{T_n\wedge t}^21_{\{T_n>0\}}]&=E[\langle M,M\rangle_{T_n\wedge t}1_{\{T_n>0\}}]+E[M_0^21_{\{T_n>0\}}]\\&\leq E[\langle M,M\rangle_t]+E[M_0^2]<\infty\end{aligned}$$

*60 連続過程の開集合への到達時刻である．フィルトレーションの右連続性から停止時刻になっていることに注意．
*61 最後の所がちょっと消化不良．

を得る．したがって $(M_{T_n\wedge t}1_{\{T_n>0\}})_{n\in\mathbb{N}}$ は L^2 -有界であり，特に一様可積分となる．

$$E[M_{T_n\wedge t}1_{\{T_n>0\}}|\mathscr{F}_s] = M_{T_n\wedge s}1_{\{T_n>0\}}$$

において極限を取れば一様可積分性より

$$E[M_t|\mathscr{F}_s] = M_s$$

となり，マルチンゲール性が分かる．また Fatou の補題を用いれば

$$E[M_t^2] \leq \varliminf_{n\to\infty} E[(M_{T_n\wedge t}^2 1_{\{T_n>0\}}] \leq E[\langle M, M\rangle_t] + E[M_0^2] < \infty$$

となり二乗可積分性も分かる．よって $M \in \mathscr{M}^{2,c}$ が示された．特に $M_0 = 0$ のときは (3.8.1) において極限を取ることにより

$$E[M_t^2] = E[\langle M, M\rangle_t]$$

が分かる． □

系 3.8.14. $M \in \mathscr{M}^{c,loc}$ に対して，以下の 2 条件は同値．

(i) $M \in H^2$.

(ii) $E[\langle M, M\rangle_\infty] < \infty$.

証明．$M \in \mathscr{M}^{c,loc}$ とする．命題 3.8.13 より $M \in \mathscr{M}^{2,c}$ と $E[\langle M, M\rangle_t] < \infty$ $(\forall t)$ は同値で，いまはこの条件がなりたっていると考えてよい[*62]．このとき，

$$E[M_t^2] - E[M_0^2] = E[(M_t - M_0)^2] = E[\langle M, M\rangle_t]$$

となるのであった．t に関して極限をとれば

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} E[M_t^2] - E[M_0^2] = \lim_{t\to\infty} E[M_t^2] - E[M_0^2] = \lim_{t\to\infty} E[\langle M, M\rangle_t] = E[\langle M, M\rangle_\infty]$$

となるから[*63]，(i) と (ii) の同値性が分かる． □

系 3.8.15. $M \in H_0^2$ ならば

$$\|M\|_{H^2} = \|\langle M, M\rangle_\infty^{1/2}\|_2 := E[\langle M, M\rangle_\infty]^{1/2}$$

が成立．

証明．補題 3.8.15 の証明において $M_0 = 0$ とすれば直ちに分かる． □

次に，國田・渡辺の不等式として知られる二次変分に関する重要な評価式を証明する．

命題 3.8.16. H, K を可測な[*64]確率過程，$M, N \in \mathscr{M}^{c,loc}$ とするとき，任意の $t \in [0, \infty]$ に対して[*65]以下の不等式が成立する．

$$\int_0^t |H_s||K_s|\,|d\langle M, N\rangle_s| \leq \left(\int_0^t H_s^2 d\langle M, M\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t K_s^2 d\langle N, N\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.8.2}$$

[*62] $H^2 \subset \mathscr{M}^{2,c}$ および $E[\langle M, M\rangle_t] \leq E[\langle M, M\rangle_\infty]$ $(\forall t \in \mathbb{R}_+)$ に注意せよ

[*63] 一つ目の等号は (M_t^2) の劣マルチンゲール性，三つ目の等号は単調収束定理による．

[*64] 定義は 2.2.3 を見よ．

[*65] $+\infty$ を含んでいることに注意．

証明．(3.8.2) 左辺の $|d\langle M,N\rangle|$ は，$s\to d\langle M,N\rangle_s(\omega)$ が導く Lebesgue-Stieltjes 測度の全変動であることを注意しておく．

ステップ 1：H,K が単純過程のとき． 最初のステップでは，$t\in[0,\infty[$ に対して，以下の不等式を示す．

$$\left|\int_0^t H_sK_sd\langle M,N\rangle_s\right|\le\left(\int_0^t H_s^2d\langle M,M\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t K_s^2d\langle N,N\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}\tag{3.8.3}$$

H,K は単純過程とする．すなわち，$[0,t]$ の分割 $\{0=t_0,\dots,t_n=t\}$ に対して

$$K=K_01_{\{0\}}+\sum_{i=1}^n K_i1_{]t_{i-1},t_i]}$$
$$H=H_01_{\{0\}}+\sum_{i=1}^n H_i1_{]t_{i-1},t_i]}$$

なる表現をもつとする．[*66]いま，$s<u$ を固定して $\langle M,N\rangle_s^u=\langle M,N\rangle_u-\langle M,N\rangle_s$ と表記することにする．ここで $r\in\mathbb{R}$ とすれば，ほとんどすべての[*67]$\omega\in\Omega$ に対して

$$\langle M+rN,M+rN\rangle_s^u=\langle M,M\rangle_s^u+2r\langle M,N\rangle_s^u+r^2\langle N,N\rangle_s^u\tag{3.8.4}$$

がなりたつ．[*68]このことから，ほとんどすべての $\omega\in\Omega$ において，任意の $r\in\mathbb{Q}$ に対して (3.8.4) がなりたつことが分かる．さらに，(3.8.4) において右辺は明らかに連続なので，これは任意の $r\in\mathbb{R}$ としてもなりたつ．これより，内積に対する Schwarz の不等式の証明と同様にして

$$|\langle M,N\rangle_s^u|\le(\langle M,M\rangle_s^u)^{\frac{1}{2}}(\langle N,N\rangle_s^u)^{\frac{1}{2}}\quad P-\text{a.s.}$$

なる式が得られる．したがって，

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t H_sK_sd\langle M,N\rangle_s\right|&=\left|\sum_{i=1}^n H_iK_i\langle M,N\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}\right|\\&\le\sum_{i=1}^n|H_i||K_i||\langle M,N\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}|\\&\le\sum_{i=1}^n|H_i||K_i|\left(\langle M,M\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\langle N,N\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

が言えるが，さらに和に関する Schwarz の不等式を使えば

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^n|H_i||K_i|\left(\langle M,M\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\langle N,N\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}\right)^{\frac{1}{2}}\\&\le\left(\sum_{i=1}^n|H_i|\langle M,M\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^n|K_i|\langle N,N\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\left(\int_0^t H_s^2d\langle M,M\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t K_s^2d\langle N,N\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

[*66] このノートでは，単純過程と言えば (ω に関する) 有界性も仮定することにする．

[*67] ここで出てくる確率 1 の集合は r に依存していることに注意！

[*68] ここで念のため再び注意しておくが，これは r が $\mathbb{R}$ を走るときは非可算個の等式を意味しており，これがなりたつ「確率 1 の集合」も非可算個必要になることになる．「任意の $r\in\mathbb{R}$ に対してある確率 1 の集合が存在して，その集合の元 ω に対しては...」という主張は，「ある確率 1 の集合が存在して，その元 ω に対しては任意の $r\in\mathbb{R}$...」という主張とは異なるものだということを念頭に置く必要がある．ここでの状況を鑑みて初めて実はその二つの主張が同等であるということが言える．

がわかる．これにより (3.8.3) が示された．

ステップ 2：有界過程の場合-その 1． まずは単純過程 K を固定し，(3.8.3) が成り立つ過程 H の空間を $\mathscr{H}$，単純過程の空間を $\mathscr{C}$ とおく．これらは定理 A.1.10 の仮定を満たすから，(3.8.3) は任意の有界可測過程 H に対して成立．次に有界可測過程 H を固定して K に対して同様に単調族定理を用いれば，K も任意の有界可測過程と出来ることが示される．

ステップ 3：有界の場合-その 2． (3.8.3) を本来主張している不等式 (3.8.2) とは幾分違うものだったので，欲しい形に変形する．いま Lebesgue-Stieltjes 測度 $d\langle M,N\rangle$ は $|d\langle M,N\rangle|$ に対して絶対連続であるから，Radon-Nikodym 密度 $d\langle M,N\rangle/|d\langle M,N\rangle| =: J$ が存在する[*69]．$\tilde{H} = HJ\cdot\mathrm{sgn}(HK)$ と定義すれば $\tilde{H}$ も明らかに有界なので[*70]，(3.8.3) より

$$\begin{aligned}\int_0^t |H_s|\,|K_s|\,|d\langle M,N\rangle_s| &= \left|\int_0^t \mathrm{sgn}(H_sK_s)\cdot(H_sK_s)J_s d\langle M,N\rangle_s\right| \\ &= \left|\int_0^t \tilde{H}_s K_s d\langle M,N\rangle_s\right| \\ &\le \left(\int_0^t H_s^2 d\langle M,M\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t K_s^2 d\langle N,N\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

を得る．

ステップ 4：一般の場合． H,K が有界でない場合は有界なものの増大列を取れば，単調収束定理より従う[*71]．$t=+\infty$ の場合は，さらに $t\to+\infty$ の極限を取ればよい．□

系 3.8.17 (國田・渡辺の不等式)**.** 任意の $p,q\ge 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ に対して，以下の不等式が成立する．

$$E\left[\int_0^\infty |H_s|\,|K_s|\,|d\langle M,N\rangle_s|\right] \le \left\|\left(\int_0^t H_s^2 d\langle M,M\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\Omega)}\left\|\left(\int_0^t K_s^2 d\langle N,N\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^q(\Omega)} \tag{3.8.5}$$

証明．(3.8.2) で $t=\infty$ として両辺の期待値をとり，Hölder の不等式を用いればよろしい．□

系 3.8.18. M,N を連続な局所マルチンゲールとしたとき，

(i) $|\langle M,N\rangle| \le \sqrt{\langle M,M\rangle}\sqrt{\langle N,N\rangle}$
(ii) $\langle M+N,M+N\rangle^{1/2} \le \langle M,M\rangle^{1/2} + \langle N,N\rangle^{1/2}$
(iii) $\langle M+N,M+N\rangle \le 2(\langle M,M\rangle + \langle N,N\rangle)$

が成り立つ[*72]．

証明．(i). 命題 3.8.16 で $H=K=1$ とすればよい．

[*69] このとき J は $\{-1,1\}$ に値を取る関数であることに注意されたい．

[*70] 実は J に二変数関数としての可測性があるか少し不安である．ただし (3.8.3) を求める過程はあくまで pathwise に話を進めていたので，たぶん J を (3.8.3) に入れることは問題ないはず．

[*71] (3.8.2) は両辺ともに非負なので，$+\infty$ も認めればとりあえず積分は存在することに注意．

[*72] 言わば，ブラケット版 Schwarz の不等式，三角不等式である．

(ii). ブラケットの双線形性および対称性と (i) より

$$\begin{aligned}\langle M+N, M+N\rangle &= \langle M,M\rangle + 2\langle M,N\rangle + \langle N,N\rangle \\ &\le \langle M,M\rangle + 2\sqrt{\langle M,M\rangle}\sqrt{\langle N,N\rangle} + \langle N,N\rangle \\ &= (\langle M,M\rangle^{1/2} + \langle N,N\rangle^{1/2})^2\end{aligned}$$

である．

(iii).

$$\begin{aligned}\langle M+N, M+N\rangle &\le \langle M,M\rangle + 2\sqrt{\langle M,M\rangle}\sqrt{\langle N,N\rangle} + \langle N,N\rangle \\ &\le \langle M,M\rangle + (\le \langle M,M\rangle + \langle N,N\rangle) + \langle N,N\rangle \\ &= 2(\langle M,M\rangle + \langle N,N\rangle)\end{aligned}$$

より分かる．（二つ目の不等号は $\langle M-N\rangle \ge 0$ から示される．） □

局所マルチンゲールの二次変分についても，二乗可積分マルチンゲールの場合と同様に直感的な意味づけが与えられる．この節の最後のその証明を行おう．

定理 3.8.19. $M \in \mathscr{M}^{c,loc}$ とする．$\Pi = \{t_j; j \in \mathbb{N}\}$ を $[0,\infty[$ の分割とすれば

$$\sup_{0\le s\le t}\left|\sum_{j=1}^{\infty}(M_{s\wedge t_j} - M_{s\wedge t_{j-1}})^2 - \langle M,M\rangle_s\right| \xrightarrow{\|\Pi\|\to 0} 0 \quad \text{(in probability)}$$

がなりたつ．

証明．(S_n) を定理 3.8.5 で用いた停止時刻の列とする．このとき，定理 3.7.4 より

$$\sup_{s\le t}\left|\sum_{j=1}^{\infty}(M^{S_k}_{s\wedge t_j} - M^{S_k}_{s\wedge t_{j-1}})^2 - \langle M^{S_k}, M^{S_k}\rangle_s\right| \xrightarrow{\|\Pi\|\to 0} 0 \quad \text{(in probability)}$$

がなりたつ．いま $\{S_k \ge t\}$ 上では $\langle M^{S_k}, M^{S_k}\rangle_s = \langle M,M\rangle_s$ $(0\le s\le t)$ であったから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0} P\left(\sup_{s\le t}\left|\sum_{j=1}^{\infty}(M_{s\wedge t_j} - M_{s\wedge t_{j-1}})^2 - \langle M,M\rangle_s\right| 1_{\{S_k\ge t\}} > \varepsilon\right) = 0$$

がなりたつ．$S_k \uparrow \infty$ だったから，任意の $\delta > 0$ に対して十分大きな k をとれば

$$\begin{aligned}&P\left(\sup_{s\le t}\left|\sum_{j=1}^{\infty}(M_{s\wedge t_j} - M_{s\wedge t_{j-1}})^2 - \langle M,M\rangle_s\right| > \varepsilon\right) \\ &\le P\left(\sup_{s\le t}\left|\sum_{j=1}^{\infty}(M_{s\wedge t_j} - M_{s\wedge t_{j-1}})^2 - \langle M,M\rangle_s\right| 1_{\{S_k\ge t\}} > \varepsilon\right) + P\left(S_k < t\right) \\ &\le P\left(\sup_{s\le t}\left|\sum_{j=1}^{\infty}(M_{s\wedge t_j} - M_{s\wedge t_{j-1}})^2 - \langle M,M\rangle_s\right| 1_{\{S_k\ge t\}} > \varepsilon\right) + \delta\end{aligned}$$

がなりたつ．ここで $\|\Pi\| \to 0$ とすれば

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0} P\left(\sup_{s\le t}\left|\sum_{j=1}^{\infty}(M_{s\wedge t_j}-M_{s\wedge t_{j-1}})^2-\langle M,M\rangle_s\right|>\varepsilon\right)\le\delta \quad (\forall\delta>0)$$

となり，確率収束が分かる． □

系 3.8.20. $M,N\in\mathscr{M}^{c,loc}$ とすれば，

$$\sup_{0\le s\le t}\left|\sum_{j=1}^{\infty}(M_{s\wedge t_j}-M_{s\wedge t_{j-1}})(N_{s\wedge t_j}-N_{s\wedge t_{j-1}})-\langle M,N\rangle_s\right|\xrightarrow{\|\Pi\|\to 0}0 \quad \text{(in probability)}$$

がなりたつ．

証明．定理 3.8.19 からすぐに分かる． □

3.9 連続セミマルチンゲール

定義 3.9.1 (連続セミマルチンゲール)**.** X を連続な $(\mathscr{F}_t)$ -適合過程とする．ある $M\in\mathscr{M}^{c,loc}$ と $A\in\mathscr{A}^c$ によって $X=M+A$ と分解されるとき，X を連続セミマルチンゲール (continuous semimartingale) という．

注意 3.9.2. セミマルチンゲールの分解は明らかに一意的である．実際，$X=M+A=M'+A'$ という分解を考えれば，$M-M'=A'-A$ は有限変動のパスを持つ局所マルチンゲールとなる．これまでの議論によりこれは定数となるから，$M_t-M'_t=M_0-M'_0=A'_0-A_0=0$ が分かる．

定義 3.9.3. 連続な $(\mathscr{F}_t)$ -セミマルチンゲール　X,Y は

$$X=M+A \tag{3.9.1}$$
$$Y=N+B \tag{3.9.2}$$

という表現を持つものとする．このとき，連続適合過程 $\langle X,Y\rangle$ を

$$\langle X,Y\rangle:=\langle M,N\rangle$$

と定義し，X,Y の交差変分と呼ぶ．特に $\langle X,X\rangle$ を X の二次変分と呼ぶ．

セミマルチンゲールの二次変分は上のように定義したが，実際二次変分とよぶべき過程は 3.9.2 で定義したもの以外にあり得ないことを示す．

命題 3.9.4. $X=M+A$ を連続セミマルチンゲールとする．$\Pi=\{t_j;\ j\in\mathbb{N}\}$ を $[0,\infty[$ の分割とすれば，任意の $t\in\mathbb{R}_+$ に対して

$$\sup_{s\le t}\left|\sum_{j=1}^{\infty}(X_{s\wedge t_j}-X_{s\wedge t_{j-1}})^2-\langle M,M\rangle_s\right|\xrightarrow{\|\Pi\|\to 0}0 \quad \text{(in probability.)}$$

が成立する．

証明．

$$\begin{aligned}\sup_{s\le t}\left|\sum_{j=1}^{\infty}(M_{s\wedge t_j}-M_{s\wedge t_{j-1}})(A_{s\wedge t_j}-A_{s\wedge t_{j-1}})\right| &\le \sup_{s\le t}\sum_{j=1}^{\infty}\left|(M_{s\wedge t_j}-M_{s\wedge t_{j-1}})(A_{s\wedge t_j}-A_{s\wedge t_{j-1}})\right| \\ &\le \left(\max_j\left|M_{t\wedge t_j}-M_{t\wedge t_{j-1}}\right|\right)\sum_{j=1}^{\infty}\left|A_{t\wedge t_j}-A_{t\wedge t_{j-1}}\right|\end{aligned}$$

となるが，A のパスは有界変動で M のパスは $[0,t]$ 上一様連続だから，これは $\|\Pi\|\to 0$ のとき 0 に概収束する．同様にして，

$$\sup_{s\le t}\sum_{j=1}^{\infty}(A_{s\wedge t_j}-A_{s\wedge t_{j-1}})^2 \xrightarrow{\|\Pi\|\to\infty} 0,\ \ P-\text{a.s.}$$

も分かるので，

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{j=1}^{\infty}(X_{s\wedge t_j}-X_{s\wedge t_{j-1}})^2-\langle M,M\rangle_s\right| \\ &\le \left|\sum_{j=1}^{\infty}(M_{s\wedge t_j}-M_{s\wedge t_{j-1}})^2-\langle M,M\rangle_s\right|+\left|\sum_{j=1}^{\infty}(A_{s\wedge t_j}-A_{s\wedge t_{j-1}})^2\right| \\ &\quad +2\left|\sum_{j=1}^{\infty}(M_{s\wedge t_j}-M_{s\wedge t_{j-1}})(A_{s\wedge t_j}-A_{s\wedge t_{j-1}})\right|\end{aligned}$$

において両辺で $\sup_{s\le t}$ をとった後 $\|\Pi\|\to 0$ とすれば求める収束を得る． □

系 3.9.5. $X=M+A$ および $Y=N+B$ を連続セミマルチンゲールとすれば，

$$\sup_{0\le s\le t}\left|\sum_{j=1}^{n}(X_{s\wedge t_j}-X_{s\wedge t_{j-1}})(Y_{s\wedge t_j}-Y_{s\wedge t_{j-1}})-\langle M,N\rangle_s\right| \xrightarrow{\|\Pi\|\to 0} 0 \quad \text{(in probability.)}$$

である．

証明．命題 3.9.4 より明らか． □

3.10 Notes

このセクションの内容は主に Karatzas & Shreve [?] と Revuz & Yor [38] を参考にした．

劣マルチンゲールの定義は Revuz & Yor や Medvegyev [30] など，可積分性を仮定しない流儀もある．今のところ可積分性を仮定しないことの恩恵を感じられないので，可積分性の仮定のもとに話を進めている．

Doob-Meyer 分解の証明は Karatzas & Shreve [24] を参考にした．これは Meyer 流の証明は Meyer [30] を参照．「自然な」増加過程の概念は幾分不自然に思えるが，増加過程については可予測性と一致する概念である．連続時間の可予測性は左連続性の概念の拡張である．詳しくは He, Wang & Yan [18], Medvegyev [30] などを参照されたい．Doob-Meyer 分解の証明に用いる Dunford-Pettis の定理の証明は付録に付けた．この証明は Dunford & Schwartz [12] と Dellacherie & Meyer [?] を参考にして書いた．X の正則性と増加過程 A の連続性の関係を調べる定理の証明はかなりテクニカルである．これも Karatzas & Shreve を参考にしたが，証明を読み込むことによる恩恵があるかは不明である．

二次変分の導入は，Doob-Meyer 分解における自然な増加過程で定義する方法を用いた．パスが連続な場合は，Revuz & Yor [38] にあるようにもう少し直接的に存在を示すこともできる．パスが不連続な場合の二次変分についても He, Wang & Yan [18], Medvegyev [30] などが詳しい．

局所マルチンゲールの定義は Revuz & Yor [38] にしたがった．局所マルチンゲールの定義としては M^{T_n} そのものがマルチンゲールになるというものもある．そちらの流儀では必然的に M_0 の可積分性が仮定されるので，ここでのやり方とは少々異なる点に注意をされたい．(Karatzas & Shreve [24] 参照．)

國田・渡辺の不等式については Revuz & Yor [38] を参考にした．Revuz & Yor は (3.8.5) を國田・渡辺の不等式と呼んでいるが，むしろ (3.8.2) をそう呼ぶ本のほうが多いかも知れない．

4　確率積分

4.1　定義と基本性質

この章を通して，$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, P)$ は通常の条件を満たすフィルター付き確率空間とする．

定義 4.1.1. $M \in H^2$ とする．$(\mathscr{F}_t)$ -発展的可測過程　K で

$$E\left[\int_0^\infty K_s^2 d\langle M, M\rangle_s\right] < +\infty$$

を満たすもの全体の集合を $\mathscr{L}^2_\infty(M)$ とし，その同値類をとったものを $L^2_\infty(M)$ とする． $K \in \mathscr{L}^2_\infty(M)$ に対して

$$\|K\|_M^2 = E\left[\int_0^\infty K_s^2 d\langle M, M\rangle_s\right]$$

とおく．さらに，任意の $\Gamma \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{F}_\infty$ に対して

$$\mu_M(\Gamma) = E\left[\int_0^\infty 1_\Gamma d\langle M, M\rangle_s\right]$$

と定める．

$M \in H^2$ との仮定より $E[\langle M, M\rangle_\infty] < \infty$ なので，μ_M は $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{F}_\infty$ 上の有限測度を定めることに注意されたい．このとき，$\mathscr{L}^2_\infty(M)$ は μ_M -二乗可積分な発展的可測過程のなす空間に他ならない．特に $L^2_\infty(M)$ は $\| \quad \|_M$ により Banach 空間[*73]となる．実際，完備性以外の主張は明らかである．$(K^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ を $(L^2_\infty(M), \| \quad \|_M)$ の Cauchy 列とすれば，L^2 空間に関する一般論より極限 $K : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ が存在する．さらに適当に部分列をとれば $K^{(n_k)} \to K$ μ_M-a.e. とすることができる[*74]．いま，

$$A = \left\{(s,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \;\middle|\; \lim_{k\to\infty} K^{(n_k)}(s,\omega) \text{ が存在する．}\right\}$$

とおいて

$$K'(s,\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} K^{(n_k)}(s,\omega) & (s,\omega) \in A \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定める．このとき $K^{(n)} \to K'$ が $\| \quad \|_M$ に関する収束の意味で成り立ち，K' は発展的可測である．これより完備性もわかる．

以上の考察より，$L^2_\infty(M)$ はよい性質をもつ空間であることが分かった．この空間の元を「被積分関数」として，我々は確率積分を定義することができる．ここで定義される確率積分は非常によい性質を持つものである．あとで確率積分の対象となる空間はもっと広げられるが，拡張された意味での確率積分はここでもものに比べて幾分扱いにくいものになっている．

[*73] もっと言えば Hilbert 空間ともできる．

[*74] これ以降は各 $K^{(n)}$ の代表元をとってきた $\mathscr{L}^2_\infty(M)$ の列も同様の記号で表すことにする．関数とその同値類を混同するやり方は少し行儀が悪いだろうか．

定理 4.1.2. $M \in H^2$ とする．任意の $K \in L^2_\infty(M)$ に対してある $K \bullet M \in H^2_0$ で以下の条件満たすものがただひとつ存在する[*75]．

$$\langle K \bullet M, N\rangle = K \bullet \langle M, N\rangle \quad (\forall N \in H^2). \tag{4.1.1}$$

証明．**Step1：一意性．** $L, L' \in H^2_0$ は任意の $N \in H^2$ に対して

$$\langle L, N\rangle = \langle L', N\rangle = K \bullet \langle M, N\rangle$$

を満たすとする．命題 3.6.13[*76]

$$\langle L - L', N\rangle = 0 \quad \forall N \in H^2$$

がなりたつが，特に $N = L - L' \in H^2$ とおけば

$$\langle L - L', L - L'\rangle = 0$$

である．命題 3.8.10 により $L_t - L'_t = L_0 - L'_0 = 0$ となるから，$L = L'$ が成立．

Step2：存在． まずは $M \in H^2_0$ の場合に示す．$K \in L^2_\infty(M)$ とすれば

$$\begin{aligned}
&\left| E\left[\int_0^\infty K_s d\langle M, N\rangle_s\right]\right| \\
&\leq E\left[\int_0^\infty |K_s| \cdot 1 |d\langle M, N\rangle_s|\right] \\
&\leq \left\| \left(\int_0^\infty K_s^2 d\langle M, M\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \left(\int_0^\infty 1^2 d\langle N, N\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^2(\Omega)} \qquad (\because \text{國田・渡辺の不等式 (3.8.5)}) \\
&= E\left[\int_0^\infty K_s^2\, d\langle M, M\rangle_s\right]^{\frac{1}{2}} E\left[\int_0^\infty 1\, d\langle N, N\rangle_s\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \|K\|_M\, E[\langle N, N\rangle_\infty] \\
&= \|K\|_M\, \|N\|_{H^2} \quad (\because \text{系 3.8.15})
\end{aligned}$$

だから，

$$E[(K \bullet \langle M, N\rangle)_\infty] \leq \|K\|_M\, \|N\|_{H^2} \tag{4.1.2}$$

が成立．これより写像 $H^2_0 \ni N \mapsto E[(K \bullet \langle M, N\rangle)_\infty] \in \mathbb{R}$ は有界線形汎関数である．Riesz の表現定理によって，ある $K \bullet M \in H^2_0$ で

$$E[(K \bullet \langle M, N\rangle)_\infty] = \langle K \bullet M, N\rangle_{H^2_0} = E[(K \bullet M)_\infty N_\infty] \quad \forall N \in H^2_0 \tag{4.1.3}$$

を満たすものがただひとつ存在する．この $K \bullet M$ が条件 (4.1.1) を満たすことを示したいのだが，そのためには $(K \bullet M)N - K \bullet \langle M, N\rangle$ がマルチンゲールになっていることを言えればよい[*77]．$N \in H^2_0$ とし，T を

[*75] 右辺は $(t, \omega) \mapsto \int_0^t K_s(\omega) d\langle M, N\rangle_s(\omega)$ で定まる確率過程を表す．要するにパスに沿った Stieltjes 積分である．
[*76] ブラケットの線形性．
[*77] 命題 3.6.12 を参照．

任意の停止時刻とすれば

$$
\begin{aligned}
&E[(K \bullet M)_T N_T] \\
&= E[E[(K \bullet M)_\infty \mid \mathscr{F}_T] N_T] \quad (\because \text{任意抽出定理（系 3CZ)}) \\
&= E[(K \bullet M)_\infty N_T] \quad (\because \text{条件付き期待値の性質}) \\
&= E[(K \bullet M)_\infty N^T_\infty] \\
&= E[(K \bullet \langle M, N^T \rangle)_\infty] \quad (\because N^T \in H^2_0 \text{ と (4.1.2) から}) \\
&= E[(K \bullet \langle M, N \rangle^N)_\infty] \quad (\because \text{命題 3.8.9}) \\
&= E[(K \bullet \langle M, N \rangle)_T]
\end{aligned}
$$

が成り立つ．すなわち

$$
E[(K \bullet M)_T N_T - (K \bullet \langle M, N \rangle)_T] = 0 = E[(K \bullet M)_0 N_0 - (K \bullet \langle M, N \rangle)_0]
$$

となり，命題 3.4.5 により $(K \bullet M)N - K \bullet \langle M, N \rangle$ はマルチンゲールである．よって任意の $N \in H^2_0$ に対して

$$
\langle K \bullet M, N \rangle = K \bullet \langle M, N \rangle
$$

が分かる．$N \in H^2$ に対しては，$N' = N - N_0$ とおくことにより

$$
\langle K \bullet M, N' \rangle = K \bullet \langle M, N' \rangle
$$

となるから，

$$
\begin{aligned}
\langle K \bullet M, N \rangle &= \langle K \bullet M, N_0 + N' \rangle \\
&= \langle K \bullet M, N' \rangle + \langle K \bullet M, N_0 \rangle \\
&= \langle K \bullet M, N' \rangle \\
&= \langle K \bullet M, N' \rangle + \langle K \bullet M, N_0 \rangle \\
&= K \bullet \langle M, N \rangle
\end{aligned}
$$

である．したがって (4.1.1) が成立．

一般の $M \in H^2$ に対しては $K \bullet M := K \bullet (M - M_0)$ と置けばよい． □

系 4.1.3. 定理 4.1.2 の設定の下，

$$
\langle K \bullet M, K \bullet M \rangle_t = \int_0^t K_s^2 d\langle M, M \rangle_s
$$

が成立．

証明．(4.1.1) とブラケットの対称性より

$$
\begin{aligned}
\langle K \bullet M, K \bullet M \rangle &= K \bullet \langle M, K \bullet M \rangle \\
&= K \bullet \langle K \bullet M, M \rangle \\
&= K \bullet (K \bullet \langle M, M \rangle) \\
&= K^2 \bullet \langle M, M \rangle
\end{aligned}
$$

となる． □

定義 4.1.4. $M \in H^2$ および $K \in L^2_\infty(M)$ とする．定理 4.1.2 で存在と一意性が保証された確率過程 $K \bullet M$ を K の M に関する確率積分 (stochastic integral) とよぶ．伊藤積分 (Itô integral) という場合もある．

$$(K \bullet M)_t = \int_0^t K_s dM_s$$

という記法も用いることにする．さらに，$s < t$ に対して

$$\int_s^t K_u dM_u := (K \bullet M)_t - (K \bullet M)_s$$

と書くことにする．

確率積分の基本的な性質を述べた次の命題は極めて重要である．

命題 4.1.5 (Itô isometry)**.** $M \in H^2$ とすれば，写像 $L^2_\infty(M) \ni K \mapsto K \bullet M \in H^2_0$ は等長写像である．また，任意の $t \in \mathbb{R}_+$ に対して

$$E\left[\int_0^t K_s^2 d\langle M, M\rangle_s\right] = E[(K \bullet M)_t^2] = \|K \bullet M\|_{\mathscr{M}^2,t}$$

が成立．

証明．式 (4.1.3) により

$$\begin{aligned}\|K \bullet M\|^2_{H^2_0} &= E[(K \bullet M)^2_\infty] = E[K \bullet \langle M, K \bullet M\rangle_\infty] = E[(K \bullet (K \bullet \langle M, M\rangle))_\infty] \\ &= E[(K^2 \bullet \langle M, M\rangle)_\infty] = E\left[\int_0^\infty K_s^2 d\langle M, M\rangle_s\right] = \|K\|^2_M\end{aligned}$$

となる．後半の主張については，定理 4.1.2 の証明中で得られた等式

$$E[(K \bullet M)_T N_T] = E[(K \bullet \langle M, N\rangle)_T]$$

において $N = K \bullet M$ および $T = t$ とおけば分かる． □

命題 4.1.6. 確率積分について次が成立．

(i) $M \in H^2$ とすれば，写像 $L^2_\infty(M) \ni K \mapsto K \bullet M \in H^2_0$ は線形．

(ii) $M, N \in H^2$ とすれば，$K \in L^2_\infty(M) \cap L^2_\infty(N)$ と $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$K \bullet (aM + bN) = a(K \bullet M) + b(K \bullet N)$$

が成り立つ．

証明．(i)．a, b を任意の実数，$H, K \in L^2_\infty(M)$ とすれば，Stieltjes 積分の線形性とブラケットの双線形性により

$$\begin{aligned}(aH + bK) \bullet \langle M, N\rangle &= a(H \bullet \langle M, N\rangle) + b(K \bullet \langle M, N\rangle) \\ &= a\langle H \bullet M, N\rangle + b\langle K \bullet M, N\rangle \\ &= \langle a(H \bullet M) + b(K \bullet M), N\rangle\end{aligned}$$

が任意の $N \in H^2$ に対して成立．確率積分の一意性より

$$(aH + bK) \bullet M = a(H \bullet M) + b(K \bullet M)$$

となる．

(ii)．$K \in L^2_\infty(M) \cap L^2_\infty(N)$ ならば，系 3.8.18 の証明と同様にして

$$K^2 \bullet \langle M+N \rangle \leq 2(K^2 \bullet \langle M, M\rangle + K^2 \bullet \langle N, N\rangle)$$

すなわち任意の t に対して P-a.s. で

$$\int_0^t K_s^2 d\langle M+N\rangle_s \leq 2\left(\int_0^t K_s^2 d\langle M, M\rangle_s + \int_0^t K_s^2 d\langle N, N\rangle_s\right)$$

が成立することが示される．$t \to \infty$ として期待値をとれば

$$E\left[\int_0^\infty K_s^2 d\langle M+N\rangle_s\right] \leq 2\left(E\left[\int_0^\infty K_s^2 d\langle M, M\rangle_s\right] + E\left[\int_0^\infty K_s^2 d\langle N, N\rangle_s\right]\right) < \infty$$

となり，$K \in L^2_\infty(M+N)$ である．よって $K \bullet (aM+bN)$ が定義できる．(i) と同様にして

$$\begin{aligned} K \bullet \langle aM+bN, L\rangle &= K \bullet (a\langle M, L\rangle + b\langle N, L\rangle) \\ &= a(K \bullet \langle M, L\rangle) + b(K \bullet \langle N, L\rangle) \\ &= a\langle K \bullet M, L\rangle + b\langle K \bullet N, L\rangle \\ &= \langle a(K \bullet M) + b(K \bullet N), L\rangle \end{aligned}$$

が任意の $L \in H^2$ に対して成立．よって

$$K \bullet (aM+bN) = a(K \bullet M) + b(K \bullet N)$$

である．

□

注意 4.1.7. 命題 4.1.5 の前半で証明された性質 $\|K \bullet M\|_{H_0^2} = \|K\|_M$ は伊藤の等長性 (Itô isometry) と呼ばれる．

実は線形性より少し強く次の主張が成立する．

命題 4.1.8. Z が有界 $\mathscr{F}_0$ -可測関数ならば

$$\int_0^t ZK_s dM_s = Z\int_0^t K_s dM_s$$

が成立．

証明．命題 3.6.14 と (4.1.1) より，任意の $N \in H^2$ に対して

$$\begin{aligned} \langle (ZK) \bullet M, N\rangle &= (ZK) \bullet \langle M, N\rangle = Z(K \bullet \langle M, N\rangle) \\ &= Z\langle K \bullet M, N\rangle = \langle Z(K \bullet M), N\rangle \end{aligned}$$

となるから $(ZK) \bullet M = Z(K \bullet M)$ が分かる． □

命題 4.1.9 (associativity)**.** $M \in H^2$ とする．$K \in L^2_\infty(M)$ かつ $H \in L^2_\infty(K \bullet M)$ ならば，$HK \in L^2_\infty(M)$ であり

$$(HK) \bullet M = H \bullet (K \bullet M)$$

が成立．

証明．$\langle K\bullet M, K\bullet M\rangle = K^2\bullet\langle M,M\rangle$ に注意すれば，仮定より

$$E\left[\int_0^\infty H_s^2K_s^2 d\langle M,M\rangle_s\right] = E\left[\int_0^\infty H_s^2 d\langle K\bullet M, K\bullet M\rangle_s\right] < \infty$$

となり $HK\in L^2_\infty(M)$ が分かる．(4.1.1) より任意の $N\in H^2$ に対して

$$\langle (HK)\bullet M, N\rangle = (HK)\bullet\langle M,N\rangle = H\bullet(K\bullet\langle M,N\rangle) = H\bullet\langle K\bullet M, N\rangle$$

が成立．定理 4.1.2 の一意性より $(HK)\bullet M = H\bullet(K\bullet M)$ が示される． □

命題 4.1.10. $M\in H^2$ とする．$K\in L^2_\infty(M)$ とすれば，$(\mathscr{F}_t)$ 停止時刻 T に対して

$$K\bullet M^T = K1_{[\![0,T]\!]}\bullet M = (K\bullet M)^T = K^T\bullet M^T$$

が成り立つ．[*78]

証明．T を $(\mathscr{F}_t)$ -停止時刻とすれば

$$E\left[\int_0^\infty 1_{[\![0,T]\!]}(s,\omega)d\langle M,M\rangle_s\right] = E[\langle M,M\rangle_T] < \infty$$

より $1_{[\![0,T]\!]}\in L^2_\infty(M)$ である[*79]．このとき任意の $N\in H^2$ に対して

$$\langle M^T, N\rangle = \langle M,N\rangle^T = 1_{[\![0,T]\!]}\bullet\langle M,N\rangle = \langle 1_{[\![0,T]\!]}\bullet M, N\rangle$$

がなりたつから，

$$M^T = 1_{[\![0,T]\!]}\bullet M \tag{4.1.4}$$

が分かる．(4.1.4) と命題 4.1.9 を用いれば

$$K\bullet M^T = K\bullet(1_{[\![0,T]\!]}\bullet M) = K1_{[\![0,T]\!]}\bullet M$$

となる．一方

$$(K\bullet M)^T = 1_{[\![0,T]\!]}\bullet(K\bullet M) = 1_{[\![0,T]\!]}K\bullet M$$

でもあるから，はじめの二つの等号が示された．同様にして

$$K^T\bullet M^T = K^T\bullet(1_{[\![0,T]\!]}\bullet M) = K^T 1_{[\![0,T]\!]}\bullet M = K1_{[\![0,T]\!]}\bullet M$$

も分かるので[*80]，最後の等号も成り立つ． □

---

*78 ただし，

$$[\![0,T]\!] = \{(t,\omega)\in\mathbb{R}_+\times\Omega \mid 0\le t\le T(\omega)\}$$

である．

*79 $1_{[\![0,T]\!]}$ が発展的発展的可測であることは自明ではないが，ここでは認めることにする．

*80 $K^T 1_{[\![0,T]\!]} = K1_{[\![0,T]\!]}$ は定義よりすぐに分かる．

4.2 確率積分の拡張

前節で構成された確率積分の理論であるが,「被積分関数」のクラスとして $L^2_\infty(M)$ はいささか狭く，定義をもっと拡張することが望まれる．実際のところもっと多くの過程に対して確率積分の定義は可能であるが,そこではもはや確率積分はマルチンゲールとはならず，局所マルチンゲールの世界で議論をすることが必要になる．

通常の条件を満たすフィルターつき確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, P)$ を固定して考える．

これ以降，H^2 の元とは限らない $M \in \mathscr{M}^{c,loc}$ に対しても，定義 4.1.1 と同様にして $L^2_\infty(M)$ という空間を考えることにする．ただし，一般の M に対しては μ_M はもはや有限測度とはならないことに注意しておく．

定義 4.2.1. $M \in \mathscr{M}^{c,loc}$ とする．$L^2_{loc}(M)$ で次のような条件を満たす発展的可測過程 K の全体がなす空間[*81]を表すことにする；ある停止時刻の列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で

(i) $T_0 \le T_1 \le T_2 \le \cdots \to \infty$ P-a.s..

(ii) $E\left[\int_0^{T_n} K_s^2 d\langle M, M\rangle_s\right] < \infty$ for all $n \in \mathbb{N}$.

の二条件を満たすものが存在する．

T_n として特に定数なるものがとれるような K の全体を $L^2(M)$ と表記する．

注意 4.2.2. 上の定義は次のように言い換えても同じである；K は発展的可測過程で，任意の $t \in \mathbb{R}_+$ に対して

$$\int_0^t K_s^2 d\langle M, M\rangle_s < \infty \quad P\text{-a.s.} \tag{4.2.1}$$

を満たす．実際，定義の条件が成立つとすれば，任意の $t > 0$ に対して $T_n \ge t$ なる n がとれて

$$\int_0^t K_s^2 d\langle M, M\rangle_s \le \int_0^{T_n} K_s^2 d\langle M, M\rangle_s < \infty \quad P\text{-a.s.}$$

となる．また (4.2.1) を仮定したときは

$$T_n(\omega) := \inf\left\{t \in \mathbb{R}_+ \,\middle|\, \int_0^t K_s^2(\omega) d\langle M, M\rangle_s(\omega) \ge n\right\}$$

とおけば (T_n) は定義 4.2.1 の (i), (ii) の条件を満たす．

また，$K \in L^2(M)$ は明らかに

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad E\left[\int_0^t K_s^2 d\langle M, M\rangle_s\right] < \infty$$

と同値である．以上の考察より $M \in \mathscr{M}^{c,loc}$ に対して $L^2_\infty(M) \subset L^2(M) \subset L^2_{loc}(M)$ となっていることが分かる．

$L^2_{loc}(M)$ の元に対して確率積分を定義するための準備として，いくつか補題を用意する．

[*81] 正確にはそれを「殆ど至る所等しい」という同値関係で割ったもの，というべきだろうか．これ以降もしばしば確率過程とその同値類を区別せずに扱うこともあるので注意されたい．

補題 4.2.3. $M \in \mathscr{M}^{c,loc}$ および $K \in L^2_{loc}(M)$ とすれば，$K \bullet M$ は適合過程である．

証明．命題 3.5.3 において，$t \in \mathbb{R}_+$ を固定するごとに $\mathscr{F} \times \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-可測過程を $\mathscr{F}_t \times \mathscr{B}([0,t])$ 可測過程で置き換えて証明すればよい． □

補題 4.2.4. 右連続な適合過程 X と $A \in \mathscr{A}^c$ は任意の $t \in \mathbb{R}_+$ に対して $\int_0^t X_s(\omega) dA_s(\omega)$ は P-a.s. に有限の値として定まるものとする．このとき，任意の $(\mathscr{F}_t)$ -停止時刻に関して

$$(X \bullet A)^T = X^T \bullet A = X 1_{[\![0,T]\!]} \bullet A = X^T \bullet A^T = X \bullet A^T$$

が成立[*82]．

証明．

$$(X \bullet A)^T = X^T \bullet A = X 1_{[\![0,T]\!]} \bullet A$$

は Lebesgue-Stieltjes 積分の定義より明らかである．$(X \bullet A)^T = X \bullet A^T$ を示そう．X は非負，$A \in \mathscr{A}^c_+$ であるとする．$\omega \in \Omega$ を固定して，$u(s) = T(\omega) \wedge s$ とおけば，命題 A.6.1 により

$$\begin{aligned}\int_{[0,T(\omega)\wedge t]} X_s(\omega) dA_s(\omega) &= \int_{[0,t]} X_{u(s)} dA_{u(s)} \\ &= \int_{[0,t]} X_{s\wedge T(\omega)}(\omega) dA_{s\wedge T(\omega)}(\omega) \\ &= \int_{[0,t]} X^T_s(\omega) dA^T_s(\omega)\end{aligned}$$

がなりたつ．これは $(X \bullet A)^T = X^T \bullet A^T$ に他ならない．ω を固定したとき測度 $dA(\omega)$ が $]T(\omega), \infty[$ 上では[*83]0 になることに注意すれば

$$\begin{aligned}\int_{[0,t]} X_s(\omega) dA^T_s(\omega) &= \int_{[0,T(\omega)\wedge t]} X_s(\omega) dA^T_s(\omega) + \int_{]t\wedge T(\omega),t]} X_s(\omega) dA^T_s(\omega) \\ &= \int_{[0,T(\omega)\wedge t]} X_s(\omega) dA^T_s(\omega) \\ &= \int_{[0,t]} X^T_s(\omega) dA^T_s(\omega)\end{aligned}$$

となり $X^T \bullet A^T = X \bullet A^T$ も分かる．X が非負でない時は X^+ と X^- を考えればよい．$A \in \mathscr{A}^c$ のときは A を二つの増加関数に分解すればよい．[*84] □

命題 4.2.5. M を連続な $(\mathscr{F}_t)$ -局所マルチンゲールとする．任意の　$K \in L^2_{loc}(M)$ に対して，以下の条件を満たすような $K \bullet M \in \mathscr{M}^{c,loc}_0$ が唯一つ存在する：

$$\langle K \bullet M, N \rangle = K \bullet \langle M, N \rangle \quad (\forall N \in \mathscr{M}^{c,loc}). \tag{4.2.2}$$

証明．**Step1：存在．** $M \in \mathscr{M}^{c,loc}_0$ に対して[*85]，停止時刻の列 (T_n) を $T_n \uparrow \infty$ かつ $M^{S_n} \in H^2$ となるようにとる．

$$S_n(\omega) := \inf \left\{ t \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; \int_0^t K^2_s(\omega) d\langle M, M \rangle_s(\omega) \geq n \right\}$$

[*82] これは命題 4.1.10 の Stieltjes 積分バージョンである．
[*83] $T(\omega) < \infty$ の場合．$T(\omega) = \infty$ のときは明らかである
[*84] この補題の証明は割といい加減です．すみません．
[*85] 0 での可積分性の問題を避けるためにとりあえず $\mathscr{M}^{c,loc}_0$ で考える．

とおけば，S_n は連続な適合過程の閉集合への到達時刻であるから停止時刻となる．（命題 2.3.12.）ここで $R_n := T_n \wedge S_n$ とおけば $R_n \uparrow \infty$ であり，$M^{R_n} \in H^2$ かつ $K^{R_n} \in L^2_\infty(M^{R_n})$ となるから，確率積分 $X^{(n)} = K^{R_n} \bullet M^{R_n}$ が定義できる．このとき，$X^{(n+1)}$ と $X^{(n)}$ は $[\![0, R_n]\!]$ 上では一致する．実際，命題 4.1.10 より

$$\begin{aligned} X^{(n+1)} 1_{[\![0,R_n]\!]} &= (K^{R_{n+1}} \bullet M^{R_{n+1}})^{R_n} 1_{[\![0,R_n]\!]} \\ &= (K^{R_{n+1}\wedge R_n} 1_{[\![0,R_n]\!]} \bullet M^{R_{n+1}\wedge R_n}) 1_{[\![0,R_n]\!]} \\ &= (K^{R_n} \bullet M^{R_n}) 1_{[\![0,R_n]\!]} \\ &= X^{(n)} 1_{[\![0,R_n]\!]} \end{aligned}$$

となる．これより

$$(K \bullet M)_t(\omega) = \begin{cases} X^{(n)}_t(\omega) = (K^{R_n} \bullet M^{R_n})_t(\omega) & (t,\omega) \in [\![0, R_n]\!] \\ 0 & (t,\omega) \notin \bigcup_n [\![0, R_n]\!] \end{cases}$$

と定義することができる．$K \bullet M$ が R_n を局所化列にもつ 0 出発の局所マルチンゲールであることは定義から明らかである．あとは，この $K \bullet M$ が (4.2.2) を満たすことを示せばよい．まずは $N \in H^2$ の場合を考える．

$$\begin{aligned} \langle K \bullet M, N \rangle^{R_n} &= \langle (K \bullet M)^{R_n}, N \rangle \quad (\because \text{命題 } 3.8.9) \\ &= \langle K^{R_n} \bullet M^{R_n}, N \rangle \quad (\because \text{命題 } 4.1.10) \\ &= K^{R_n} \bullet \langle M^{R_n}, N \rangle \quad (\because \text{確率積分の定義}) \\ &= K^{R_n} \bullet \langle M, N \rangle^{R_n} \quad (\because \text{命題 } 3.8.9) \\ &= (K \bullet \langle M, N \rangle)^{R_n} (\because \text{補題 } 4.2.4 \end{aligned}$$

となる[*86]．$n \to \infty$ とすれば[*87]任意の $N \in H^2$ に対して

$$\langle K \bullet M, N \rangle = K \bullet \langle M, N \rangle$$

となることが分かる．$N \in \mathscr{M}^{c,loc}_0$ のときは N の局所化列で特に $N^{\tau_n} \in H^2$ となるものをもってくる．命題 3.8.9 とここまでの結果より

$$\langle K \bullet M, N \rangle^{\tau_n} = \langle K \bullet M, N^{\tau_n} \rangle = K \bullet \langle M, N^{\tau_n} \rangle = K \bullet \langle M, N \rangle^{\tau_n}$$

となるから，$n \to \infty$ とすればよい．$N \in \mathscr{M}^{c,loc}$ のときは $N' = N - N_0$ を考えればすぐに分かる．$M \in \mathscr{M}^{c,loc}$ のときは

$$K \bullet M = K \bullet (M - M_0)$$

と定義する．

Step2：一意性． $L, L' \in \mathscr{M}^{c,loc}$ が (4.2.2) を満たすとすれば

$$\langle L - L', N \rangle = 0 \quad \forall N \in \mathscr{M}^{c,loc}$$

である．$N = L - L'$ とおけば，命題 3.8.10 より $L_t - L'_t = L_0 - L'_0 = 0$ が分かる． □

---

*86 最後の等式で補題 4.2.4 の仮定を満たすことは國田・渡辺の不等式より分かる．

*87 $R_n \uparrow \infty P$-a.s. であることに注意．

定義 4.2.6. 命題 4.2.5 における $K \bullet M$ を K の M に関する確率積分という．

$$(K \bullet M)_t = \int_0^t K_s dM_s$$

という表記もよく用いられる．

命題 4.2.7. 局所マルチンゲールに関する確率積分について，次が成立．

(i) $M \in \mathscr{M}^{c,loc}$, $K \in L^2_{loc}(M)$ とすれば

$$\langle K \bullet M, K \bullet M \rangle_t = \int_0^t K_s^2 d\langle M, M \rangle_s.$$

(ii) $M \in \mathscr{M}^{c,loc}$ とすれば，写像 $L^2_{loc}(M) \ni K \mapsto K \bullet M \in H_0^2$ は線形．

(iii) $M, N \in \mathscr{M}^{c,loc}$ とすれば，$K \in L^2_{loc}(M) \cap L^2_{loc}(N)$ と $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$K \bullet (aM + bN) = a(K \bullet M) + b(K \bullet N)$$

が成り立つ．

(iv) $M \in \mathscr{M}^{c,loc}$ とする．$K \in L^2_{loc}(M)$ かつ $H \in L^2_{loc}(K \bullet M)$ ならば，$HK \in L^2_{loc}(M)$ であり

$$(HK) \bullet M = H \bullet (K \bullet M)$$

が成立．

(v) $M \in \mathscr{M}^{c,loc}$ とする．$K \in L^2_{loc}(M)$ とすれば，$(\mathscr{F}_t)$ 停止時刻 T に対して

$$K \bullet M^T = K 1_{[\![0,T]\!]} \bullet M = (K \bullet M)^T = K^T \bullet M^T$$

が成り立つ．

(vi) $K \bullet M \in \mathscr{M}_0^{2,c}$ は

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad E\left[\int_{[0,t]} K_s^2 d\langle M, M \rangle_s\right] < \infty$$

と同値である．このとき，

$$E\left[\int_{[0,t]} K_s^2 d\langle M, M \rangle_s\right] = E\left[(K \bullet M)_t^2\right]$$

が成立[*88]．

証明．(i)–(v) は H^2 マルチンゲールに基づく確率積分の場合と同様である．(vi) は (i) と命題 3.8.13 より分かる． □

$M \in \mathscr{M}^{c,loc}$ および $\mathscr{A}^c$ によって $X = M + A$ と表現されるような確率過程 X を連続セミマルチンゲールと呼ぶのであった．今度はセミマルチンゲールによる確率積分を考えよう．

定義 4.2.8. K を発展的可測過程とする．停止時刻の列 (T_n) と定数 C_n の列で

(i) $T_1 \leq T_2 \leq \to \infty$

[*88] この性質もまた伊藤の等長性 (Itô isometry) と呼ばれる．

(ii) $|K^{T_n}| \leq C_n$

を満たすものが存在するとき，K は局所有界 (*locally bounded*) であるという．

任意の連続適合過程は局所有界である．実際，$T_n = \inf\{t \mid |K_t| \geq n\}$ および $C_n = n$ とおけばよい．局所有界過程は $L^2_{loc}(M)$ の元である．局所有界性の意味での局所化列を (T_n) とおけば，$S_n = T_n \wedge n$ で定める (S_n) は $L^2_{loc}(M)$ に関する局所化列である．

定義 4.2.9. 局所有界な発展的可測過程 K と連続セミマルチンゲール $X = M + A$ を考える．X に関する K の確率積分 $K \bullet X$ を

$$K \bullet X := K \bullet M + K \bullet A$$

と定める．（ただし，右辺第二項はパスに沿った Stieltjes 積分の意味である．）積分の記号を用いて

$$(K \bullet X)_t = \int_0^t K_s dX_s$$

とも書くことにする．

命題 4.2.10. セミマルチンゲールによる確率積分について，以下の性質が成り立つ．

(i) X を連続セミマルチンゲールとすれば，$a, b \in \mathbb{R}$ と局所有界過程 H, K に対して次の等式が成り立つ．

$$(aH + bK) \bullet X = a(H \bullet X) + b(K \bullet X).$$

(ii) K を局所有界過程とすれば，$a, b \in \mathbb{R}$ と連続セミマルチンゲール X, Y に対して次の等式が成り立つ．

$$K \bullet (aX + bY) = a(K \bullet X) + b(K \bullet Y).$$

(iii) X を連続セミマルチンゲールとする．H, K が局所有界過程ならば，次の等式が成立．

$$(HK) \bullet X = H \bullet (K \bullet X)$$

(iv) X を連続セミマルチンゲールとする．K を局所有界過程とすれば，$(\mathscr{F}_t)$ 停止時刻 T に対して

$$K \bullet M^T = K1_{[\![0,T]\!]} \bullet M = (K \bullet M)^T = K^T \bullet M^T$$

が成り立つ．

(v) $X \in \mathscr{M}^{c,loc}$ ならば $K \bullet X \in \mathscr{M}^{c,loc}$ である．また，$X \in \mathscr{A}^c$ ならば $K \bullet X \in \mathscr{A}^c$ である．

証明. 局所マルチンゲール部分と有限変動部分に分けて考えればどれも明らかである． □

4.3 確率積分の表現と近似

$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, P)$ をフィルターつき確率空間とする．

ここまでの節では Revuz & Yor でのやり方に倣って，抽象的な方法で確率積分を導入した．ここでは，その確率積分の具体的な表示を考えてみたい．被積分関数が初等確率過程と呼ばれるクラスのときは，確率積分はパスごとの Stieltjes 積分（というか Riemann 和）と一致する．一般のケースでは必ずしも明示的な表現は得られないが，何らかの意味では Riemann 和の極限になっていることが分かる．

$\mathscr{E}(\mathscr{F}_t)$ で以下のような表現を持つ確率過程 K 全体からなる空間を表すことにする．

$$K_t(\omega) = \xi_0(\omega)1_{\{0\}}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j(\omega)1_{]t_{j-1},t_j]}(t)$$

ただし，(t_j) は $0 = t_0 < t_1 < \cdots \to \infty$ をみたし，$(\xi_j)_{j\geq 1}$ は有界[*89]で各 ξ_j は $\mathscr{F}_{t_{j-1}}$ 可測になっているものとする．我々は $\mathscr{E}$ の元を初等確率過程 (*elementary process*) と呼ぶことにしよう[*90]．

明らかに $M \in H^2$ に対して明らかに $\mathscr{E}(\mathscr{F}_t) \subset L^2_\infty(M)$ である．

命題 4.3.1. $M \in H^2$ とし，$K \in \mathscr{E}$ は

$$K_t(\omega) = \xi_0(\omega)1_{\{0\}}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j(\omega)1_{]t_{j-1},t_j]}(t)$$

という表現をもつとする．このとき，

$$(K \bullet M)_t = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j (M_{t\wedge t_j} - M_{t \wedge t_{j-1}}) \tag{4.3.1}$$

が成り立つ．[*91]

証明．(4.3.1) 右辺の確率過程を $\overline{K \bullet M}$ と書くことにする．

(i) $\overline{K \bullet M} \in H_0^2$

(ii) $\forall N \in H^2$ $\langle \overline{K \bullet M}, N \rangle = K \bullet \langle M, N \rangle$

の二つを確かめればよい．H_0^2 が線形空間であることとブラケットの線型性を用いれば，特に $K_u(\omega) = \xi(\omega)1_{]s,t]}(u)$ の形の場合に示せば十分であることが分かる．このとき $\overline{K \bullet M}_u = \xi(M_{t\wedge u} - M_{s\wedge u})$ であるから，$\overline{K \bullet M} \in H_0^2$ は明らかであろう．交差変分の一意性より，$\overline{K \bullet M} N - K \bullet \langle M, N\rangle$ がマルチンゲールになることを示せばよいのであった．$r < u$ とすれば，$r < s$ の時

$$\begin{aligned}
&E[(\overline{K \bullet M})_u N_u - (K \bullet \langle M, N \rangle)_u | \mathscr{F}_r] \\
&= E[\xi (M_{t\wedge u} - M_{s\wedge u}) N_u - \xi(\langle M, N\rangle_{t\wedge u} - \langle M, N\rangle_{s\wedge u}) | \mathscr{F}_r] \\
&= E[E[\xi(M_u^t - M_u^s)N_u - \xi(\langle M^t, N\rangle_u - \langle M^s, N\rangle_u)|\mathscr{F}_s]\,|\mathscr{F}_r] \\
&= E[\xi E[(M_u^t N_u - \langle M^t, N\rangle_u) - (M_u^s N_u - \langle M^s, N\rangle_u | \mathscr{F}_s]\,|\mathscr{F}_r] \\
&= E[\xi(M_s^t N_s - \langle M^t, N\rangle_s) - (M_s^s N_s - \langle M^s, N\rangle_s | \mathscr{F}_r] \\
&= 0 = (\overline{K \bullet M})_r N_r - (K \bullet \langle M, N\rangle)_r
\end{aligned}$$

*89 一様に有界などと言ったほうが誤解の余地がないかも知れない．

*90 単純過程 (simple process) などと言う流儀もある．

*91 (4.3.1) は $t \in]t_{n-1}, t_n]$ に対して

$$(K \bullet M)_t = \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j (M_{t_j} - M_{t_{j-1}}) + \xi_n (M_t - M_{t_{n-1}}) \tag{4.3.2}$$

がなりたつ，としても同値である．

となる．また，$r \geq s$ のときは

$$\begin{aligned}
&E[(\overline{K \bullet M})_u N_u - (K \bullet \langle M, N\rangle)_u | \mathscr{F}_r] \\
&= \xi E[(M_u^t N_u - \langle M^t, N\rangle_u) - (M_u^s N_u - \langle M^s, N\rangle_u | \mathscr{F}_r] \\
&= \xi \left\{ (M_r^t N_r - \langle M^t, N\rangle_r) - (M_r^s N_r - \langle M^s, N\rangle_r \right\} \\
&= \xi (M_{t\wedge r} - M_{s\wedge r}) N_r - \xi (\langle M, N\rangle_{t\wedge r} - \langle M, N\rangle_{s\wedge r}) \\
&= (\overline{K \bullet M})_r N_r - (K \bullet \langle M, N\rangle)_r
\end{aligned}$$

となるから，結局 $\overline{K \bullet M} N - K \bullet \langle M, N\rangle$ がマルチンゲールになることが分かった． □

命題 4.3.2. $M \in \mathscr{M}^{2,c}$ とする．$L^2(M)$ の列 (K^n) が K に（$L^2(M)$ のノルムで）収束するなら，$(K^n \bullet M)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathscr{M}^{2,c}$ で $K \bullet M$ に収束する．

証明．命題 4.2.7 の等長性より明らか． □

定理 4.3.3 (Dominated convergence theorem for stochastic integrals)**.** $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を連続セミマルチンゲールとし，(K^n) は局所有界な発展的可測過程の列，K を局所有界な発展的可測過程とする．(K^n) が 0 に各点収束し，任意の n に対して $|K^n| \leq K$ が成り立つならば，任意の $t \in \mathbb{R}_+$ で $\sup_{0\leq s\leq t} |(K^n \bullet X)_s|$ は 0 に確率収束する．

証明．$X = M + A$ という表現を考えれば，$K^n \bullet M$ と $K^n \bullet A$ の収束をそれぞれ考えればよい．(T_m) を K の局所化列とする．このとき任意の m に対して，有界収束定理より

$$\sup_{0\leq s\leq t} \left| \int_{]0,s]} K^n_{s\wedge T_m}(\omega) dA_s(\omega) \right| \leq \int_{]0,t]} |K^n_{s\wedge T_m}(\omega)||dA_s(\omega)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{a.s.}$$

が成立．よって元の過程 $K^n \bullet A$ に対して定理の主張の意味での収束が成立する．

(S_m) を局所有界過程 K と連続局所マルチンゲール M を局所化する列で，特に M^{S_m} が H^2 の元となるようなものとする．このとき，任意の m に対して $((K^n)^{S_m})_{n\in\mathbb{N}}$ は $L^2(M^{S_m})$ で 0 に収束するから，$((K^n)^{S_m} \bullet M)_{n\in\mathbb{N}}$ は H^2 で収束する．あとは命題 3.8.19 と同様の手法で示される． □

確率積分に対する優収束定理を用いることで，確率積分の「区間の左端点をとった Riemann 和」の極限としての意味を明らかにする次の命題が証明される．

命題 4.3.4. X を連続セミマルチンゲールとし，K は連続な発展的可測過程とする．このとき，$\mathbb{R}_+$ の分割の列 (Π_n) で $\|\Pi_n\| \to 0$ なるものに対して

$$\sup_{0\leq s\leq t} \left| \sum_{t_i \in \Pi_n} K_{t_i}(X_{s\wedge t_{i+1}} - X_{s\wedge t_i}) - \int_0^s K_u dX_u \right| \xrightarrow[n\to\infty]{\text{in prob.}} 0$$

が成立．

証明．K が有界な場合は定理 4.3.3 より明らか．K が有界とは限らない場合は局所化を行えばよい． □

4.4 伊藤の公式

この節では，確率積分版の「微積分学の基本定理」とも言える伊藤の公式の証明を行う．

定理 4.4.1. 関数 $f \in C^2(\mathbb{R})$ を考える．確率過程 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ は $X = M + A$ という分解を持つセミマルチンゲールとする．このとき，$f(X) := (f(X_t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ はまたセミマルチンゲールで

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X, X\rangle_s, \quad t \geq 0, \quad P\text{-a.s.} \tag{4.4.1}$$

という表現を持つ．

証明．表記の簡略化のために，$s \mapsto A_s(\omega)$ の全変動で定義されるパスを持つ確率過程を $\tilde{A}$ と表すことにする．証明は非常に長いので，いくつかのステップに分けて証明する．

ステップ 1：有界性の仮定． この定理をいきなり一般の場合に示すのは難しいので，まずは簡単な設定のもとに証明を進めていくことにする．ある定数 $K > 0$ に対して，

$$\begin{cases} X_0(\omega) \leq K & \text{on } \Omega \\ |M_t(\omega)| \vee \tilde{A}_t(\omega) \vee \langle X, X\rangle_t(\omega) \leq K & \text{on } \mathbb{R}_+ \times \Omega \end{cases}$$

がなりたつとする．このとき，

$$|X_t(\omega)| \leq |X_0(\omega)| + |A_t(\omega)| + |M_t(\omega)| \leq 3K \quad \text{on } \mathbb{R}_+ \times \Omega$$

となる．有界性より特に $M \in H^2$ であることに注意されたい．このような仮定の下では $[-3K, 3K]$ の外での f の挙動には興味がないので，f はコンパクトな台をもつこと，よって f, f', f'' が有界であることを仮定しても一般性を失うことはない．

ステップ 2：テイラー展開． $t = 0$ のとき，（4.4.1）は明らかになりたつ．$t \in (0, T]$ を固定し，$[0, t]$ の分割 Π を $\Pi = (t_i)_{i=0}^m; 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = t$ とする．テイラーの定理によれば，各 $k \in \{1, \ldots, m\}$ に対して

$$f(X_{t_k}) - f(X_{t_{k-1}}) = f'(X_{k-1})(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) + \frac{1}{2}f''(\eta_k)(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 \tag{4.4.2}$$

を満たす確率変数 η_k が存在する．ただし，この η_k は

$$\eta_k(\omega) = X_{t_{k-1}}(\omega) + \theta_k(\omega)\{X_{t_k}(\omega) - X_{t_{k-1}}(\omega)\} \quad 0 \leq \theta_k(\omega) \leq 1$$

と書けるものであった．式 (4.4.2) を解くことにより $f''(\eta_k)$ が可測であるようにとれることが分かる[*92]．さて，式（4.4.2）の両辺で k について和をとれば

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{k=1}^m f'(X_{t_{k-1}})(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m f''(\eta_k)(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 \tag{4.4.3}$$

[*92] η_k は ω ごとに決定するものであるが，これが ω の関数とみて $\mathscr{F}$-可測になっているかは明らかではない．よって，$f''(\eta_k)$ の可測性も明らかではない．しかし，例えば

$$U = \begin{cases} \dfrac{f(X_{t_k}) - f(X_{t_{k-1}}) - f'(X_{k-1})(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})}{(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2} & X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \neq 0 \\ 0 & X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = 0 \end{cases}$$

とおけば U は可測で (4.4.2) を満たす．これを新たに $f''(\eta_k)$ とおいて議論を進めればよい．

がなりたつ．$X_t - X_s = (M_t - M_s) + (A_t - A_s)$ に注意すれば，

$$
\begin{aligned}
J_1(\Pi) &:= \sum_{k=1}^{m} f'(X_{t_{k-1}})(A_{t_k} - A_{t_{k-1}}) \\
J_2(\Pi) &:= \sum_{k=1}^{m} f'(X_{t_{k-1}})(M_{t_k} - M_{t_{k-1}}) \\
J_3(\Pi) &:= \sum_{k=1}^{m} f''(\eta_k)(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2
\end{aligned}
$$

とおくことにより，式 (4.4.3) は

$$
f(X_t) - f(X_0) = J_1(\Pi) + J_2(\Pi) + \frac{1}{2}J_3(\Pi) \tag{4.4.4}
$$

と書くことが出来る．$\|\Pi\| := \max_{k\in\{1,\dots,m\}}|t_k - t_{k-1}|$ とおけば，$\|\Pi\| \longrightarrow 0$ としたときに式 (4.4.4) の右辺各項が式（4.4.1）の該当する項に「収束」することを示せば証明が完了する．

ステップ 3：$J_1(\Pi)$ の Stieltjes 積分への収束． 仮定より，ほとんど全ての $\omega \in \Omega$ に対して $s \longmapsto f'(X_s(\omega))$ は $[0,t]$ 上の連続関数であり，$s \longmapsto A_s(\omega)$ は $[0,t]$ 上の有界変動関数であるから，そのような ω については前者は後者によって（Riemann-）Stieltjes 積分可能である．[*93] したがって，

$$
J_1(\Pi)(\omega) \xrightarrow[\|\Pi\|\to 0]{} \int_0^t f'(X_s(\omega))dA_s(\omega) \quad \text{a.e.}\,\omega \in \Omega. \tag{4.4.5}
$$

がなりたつ．

ステップ 4：$J_2(\Pi)$ の確率積分への収束． 確率過程 $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ を $Y_s(\omega) = f'(X_s(\omega))$ と定義しよう．このとき，仮定より (Y_s) は有界適合過程である．

$$
Y_s^{\Pi}(\omega) = \sum_{k=1}^{n} Y_{t_{k-1}}(\omega)1_{(t_{k-1},t_k]}(s)
$$

と定義すれば，

$$
\begin{aligned}
J_2(\Pi) &= \sum_{k=1}^{m} Y_{t_{k-1}}(M_{t_k} - M_{t_{k-1}}) \\
&= \int_0^t Y_s^{\Pi} dM_s
\end{aligned}
$$

がなりたつ．ところで，$s \longmapsto Y_s(\omega)$ は連続関数であるから

$$
Y_s^{\Pi}(\omega) \xrightarrow[\|\Pi\|\longrightarrow 0]{} Y_s(\omega) \quad P\text{-a.s.}
$$

がなりたつ．ところで，任意の分割 Π に対して $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上で $|Y_s^{\Pi}(\omega)| \leq \|f'\|_\infty$ であるから，有界収束定理により

$$
E\left[\int_0^\infty |Y_s^{\Pi} - Y_s|^2 d\langle M, M\rangle_s\right] \longrightarrow 0 \quad (\|\Pi\| \longrightarrow 0).
$$

[*93] Stieltjes 積分については盛田 [33] の 6 章が詳しい．また，Riemann-Stieltjes 積分については杉浦 [47] の第 IV 章 §17 にも記述がある．証明などはこれらの本を参照されたい．

である[*94]．確率積分の等長性により

$$J_2(\Pi) \xrightarrow[\|\Pi\|\longrightarrow 0]{} \int_0^t Y_s dM_s = \int_0^t f'(X_s) dM_s \quad \text{in } L^2(\Omega, \mathscr{F}, P).$$

ステップ 5：$J_3(\Pi)$ の分解．

$$J_4(\Pi) := \sum_{k=1}^m f''(\eta_k)(A_{t_k} - A_{t_{k-1}})^2 \tag{4.4.6}$$

$$J_5(\Pi) := 2\sum_{k=1}^m f''(\eta_k)(A_{t_k} - A_{t_{k-1}})(M_{t_k} - M_{t_{k-1}}) \tag{4.4.7}$$

$$J_6(\Pi) := \sum_{k=1}^m f''(\eta_k)(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 \tag{4.4.8}$$

とおけば，$J_3(\Pi)$ はさらに

$$J_3(\Pi) = J_4(\Pi) + J_5(\Pi) + J_6(\Pi)$$

と分解することが出来る．

$$\sum_{k=1}^m \left|A_{t_k} - A_{t_{k-1}}\right| \leq \sum_{k=1}^m \tilde{A}_{t_k} - \tilde{A}_{t_{k-1}} = \tilde{A}_t \leq K$$

に注意すれば，

$$\begin{aligned}
|J_4(\Pi)| &= \left|\sum_{k=1}^m f''(\eta_k)(A_{t_k} - A_{t_{k-1}})^2\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^m \left|f''(\eta_k)(A_{t_k} - A_{t_{k-1}})^2\right| \\
&\leq \max_{1\leq k\leq m}\left|A_{t_k} - A_{t_{k-1}}\right| \|f''\|_\infty \sum_{k=1}^m \left|A_{t_k} - A_{t_{k-1}}\right| \\
&\leq K\|f''\|_\infty \max_{1\leq k\leq m}\left|A_{t_k} - A_{t_{k-1}}\right|
\end{aligned} \tag{4.4.9}$$

同様に，

$$\begin{aligned}
|J_5(\Pi)| &= 2\sum_{k=1}^m f''(\eta_k)(A_{t_k} - A_{t_{k-1}})(M_{t_k} - M_{t_{k-1}}) \\
&\leq 2\sum_{k=1}^m \left|f''(\eta_k)(A_{t_k} - A_{t_{k-1}})(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})\right| \\
&\leq 2\max_{1\leq k\leq m}\left|M_{t_k} - M_{t_{k-1}}\right| \|f''\|_\infty \sum_{k=1}^m \left|A_{t_k} - A_{t_{k-1}}\right| \\
&\leq 2K\|f''\|_\infty \max_{1\leq k\leq m}\left|M_{t_k} - M_{t_{k-1}}\right|
\end{aligned} \tag{4.4.10}$$

[*94] $M \in H^2$ に注意！

式 (4.4.9) と (4.4.10) において $\Pi \longrightarrow 0$ とすれば，M と A の連続性により，右辺はそれぞれ 0 に概収束する．よって $J_4(\Pi)$ および $J_5(\Pi)$ も 0 に概収束する．さらに，

$$\max_{1\le k\le m} \left|A_{t_k} - A_{t_{k-1}}\right| \le 2K$$
$$\max_{1\le k\le m} \left|M_{t_k} - M_{t_{k-1}}\right| \le 2K$$

から $J_4(\Pi), J_5(\Pi)$ の有界性が分かるので，有界収束定理により L^1 収束まで示せる．

ステップ 6：$J_6(\Pi)$ の極限．

$$J_6^*(\Pi) := \sum_{k=1}^{m} f''(X_{t_{k-1}})(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2$$

とする．このとき

$$\begin{aligned}|J_6^*(\Pi) - J_6(\Pi)| &= \left|\sum_{k=1}^{m}\{f''(X_{t_{k-1}}) - f''(\eta_k)\}(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2\right| \\ &\le \max_{1\le k\le m}|f''(X_{t_{k-1}}) - f''(\eta_k)|\sum_{k=1}^{m}(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2\end{aligned}$$

がなりたつ．両辺の期待値をとって右辺に Schwarz の不等式を適用すれば

$$\begin{aligned}E\left[\,|J_6^*(\Pi) - J_6(\Pi)|\,\right] &\le E\left[\max_{1\le k\le m}|f''(X_{t_{k-1}}) - f''(\eta_k)|\sum_{k=1}^{m}(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2\right] \\ &\le \sqrt{E\left[\left(\max_{1\le k\le m}\left|f''(X_{t_{k-1}}) - f''(\eta_k)\right|\right)^2\right]}\sqrt{E\left[\left(\sum_{k=1}^{m}(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2\right)^2\right]}\end{aligned}$$

である．さらに補題 **??**により

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^{m}(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2\right)^2\right] = E\left[\left(V_t^{(2)}(\Pi)\right)^2\right] \le 6K^4$$

であるから，

$$E\left[\,|J_6^*(\Pi) - J_6(\Pi)|\,\right] \le \sqrt{6K^4}\sqrt{E\left[\left(\max_{1\le k\le m}|f''(X_{t_{k-1}}) - f''(\eta_k)|\right)^2\right]} \tag{4.4.11}$$

を得る．f'' および $t \longmapsto X_t(\omega)$ の連続性と有界収束定理により

$$E\left[\left(\max_{1\le k\le m}|f''(X_{t_{k-1}}) - f''(\eta_k)|\right)^2\right] \xrightarrow[\|\Pi\|\to 0]{} 0$$

がなりたつから，(4.4.11) の両辺で $\|\Pi\| \longrightarrow 0$ とすることにより

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0} E\left[\,|J_6^*(\Pi) - J_6(\Pi)|\,\right] = 0 \tag{4.4.12}$$

となる．これより，$J_3(\Pi)$ の収束を調べるには $J_6^*(\Pi)$ について考察すればよいことがわかる．さて，ここであらたに

$$J_7(\Pi)=\sum_{k=1}^{m} f''(X_{t_{k-1}})\left(\langle X,X\rangle_{t_k}-\langle X,X\rangle_{t_{k-1}}\right) \tag{4.4.13}$$

を定義しよう．仮定より $\langle X,X\rangle$ は有界変動過程であるから $J_1(\Pi)$ の場合と同様に

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0} J_7(\Pi)=\int_0^t f''(X_s)d\langle X,X\rangle_s \quad P\text{-a.s.} \tag{4.4.14}$$

が成立し，さらに有界収束定理により L^1 収束までわかることに注意されたい．$k<l$ のとき命題 4.2.7 より

$$\begin{aligned}
&E\left[\left\{\left(M_{t_k}-M_{t_{k-1}}\right)^2-\left(\langle X,X\rangle_{t_k}-\langle X,X\rangle_{t_{k-1}}\right)\right\}\left\{\left(M_{t_l}-M_{t_{l-1}}\right)^2-\left(\langle X,X\rangle_{t_l}-\langle X,X\rangle_{t_{l-1}}\right)\right\}\right]\\
&=E\Biggl[\left\{\left(M_{t_k}-M_{t_{k-1}}\right)^2-\left(\langle X,X\rangle_{t_k}-\langle X,X\rangle_{t_{k-1}}\right)\right\}\\
&\qquad\times E\left[\left\{\left(M_{t_l}-M_{t_{l-1}}\right)^2-\left(\langle X,X\rangle_{t_l}-\langle X,X\rangle_{t_{l-1}}\right)\right\}\,\middle|\,\mathscr{F}_{l-1}\right]\Biggr]\\
&=0
\end{aligned}$$

がなりたつ．したがって

$$\begin{aligned}
&E\left[|J_6^*(\Pi)-J_7(\Pi)|\right]^2\\
&=E\left|\sum_{k=1}^{m} f''(X_{t_{k-1}})\left\{\left(M_{t_k}-M_{t_{k-1}}\right)^2-\left(\langle X,X\rangle_{t_k}-\langle X,X\rangle_{t_{k-1}}\right)\right\}\right|^2\\
&=E\left[\sum_{k=1}^{m}\left\{f''(X_{t_{k-1}})\right\}^2\left\{\left(M_{t_k}-M_{t_{k-1}}\right)^2-\left(\langle X,X\rangle_{t_k}-\langle X,X\rangle_{t_{k-1}}\right)\right\}^2\right]\\
&\le \|f''\|_\infty^2\sum_{k=1}^{m}E\left\{\left(M_{t_k}-M_{t_{k-1}}\right)^2-\left(\langle X,X\rangle_{t_k}-\langle X,X\rangle_{t_{k-1}}\right)\right\}^2\\
&\le \|f''\|_\infty^2\sum_{k=1}^{m}E\left[\left(M_{t_k}-M_{t_{k-1}}\right)^4+\left(\langle X,X\rangle_{t_k}-\langle X,X\rangle_{t_{k-1}}\right)^2\right]\\
&\le \|f''\|_\infty^2 E\left[\sum_{k=1}^{m}\left(M_{t_k}-M_{t_{k-1}}\right)^4+\sum_{k=1}^{m}\left(\langle X,X\rangle_{t_k}-\langle X,X\rangle_{t_{k-1}}\right)^2\right]\\
&\le \|f''\|_\infty^2 E\left[V_t^{(4)}(\Pi)+\langle X,X\rangle_t\cdot\max_{1\le k\le m}\left(\langle X,X\rangle_{t_k}-\langle X,X\rangle_{t_{k-1}}\right)\right]\\
&\le \|f''\|_\infty^2\left(EV_t^{(4)}(\Pi)+KE\left[\max_{1\le k\le m}\left(\langle X,X\rangle_{t_k}-\langle X,X\rangle_{t_{k-1}}\right)\right]\right)
\end{aligned} \tag{4.4.15}$$

である．$\langle X,X\rangle$ の連続性と補題 3.7.3 により，$\|\Pi\|\longrightarrow 0$ のとき (4.4.15) の左辺は 0 に収束する．すなわち

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0} E\left[|J_6^*(\Pi)-J_7(\Pi)|^2\right]=0.$$

ステップ 7：$J_3(\Pi)$ の Stieltjes 積分への収束． ステップ 5 より

$$J_3(\Pi)=J_4(\Pi)+J_5(\Pi)+J_6(\Pi)$$

であったから，

$$\begin{aligned}
&E\left[\left|J_3(\Pi)-\int_0^t f''(X_s)d\langle X,X\rangle_s\right|\right]\\
&\le E\left[|J_4(\Pi)|\right]+E\left[|J_5(\Pi)|\right]+E\left[|J_6(\Pi)-J_6^*(\Pi)|\right]\\
&\qquad +E\left|J_6^*(\Pi)-J_7(\Pi)\right|+E\left|J_7(\Pi)-\int_0^t f''(X_s)d\langle X,X\rangle_s\right| \qquad (4.4.16)
\end{aligned}$$

がなりたつ．ステップ 5 とステップ 6 の結果により (4.4.16) の第 2 辺はすべて 0 に収束するから

$$J_3(\Pi)\xrightarrow[\|\Pi\|\to 0]{}\int_0^t f''(X_s)d\langle X,X\rangle_s \quad \text{in } L^1(\Omega,\mathscr{F},P).$$

ステップ 8：有界の場合のまとめ． ステップ 1 から 7 の結果をまとめれば

$$f(X_t)-f(X_0)=J_1(\Pi)+J_2(\Pi)+\frac{1}{2}J_3(\Pi)$$

であって，$\|\Pi^{(n)}\|\longrightarrow 0\ (n\longrightarrow\infty)$ を満たすような任意の分割の列 $(\Pi^{(n)})$ について

$$\begin{aligned}
J_1(\Pi)&\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_0^t f'(X_s(\omega))dA_s(\omega) \quad P\text{-a.s.},\\
J_2(\Pi)&\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_0^t Y_s dM_s=\int_0^t f'(X_s)dM_s \quad \text{in } L^2(\Omega,\mathscr{F},P),\\
J_3(\Pi)&\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_0^t f''(X_s)d\langle X,X\rangle_s \quad \text{in } L^1(\Omega,\mathscr{F},P).
\end{aligned}$$

がなりたつ．適当な部分列をとることにより各項は概収束するので，任意の $t\in\mathbb{R}_+$ に対して

$$f(X_t)=f(X_0)+\int_0^t f'(X_s)dA_s+\int_0^t f'(X_s)dM_s+\frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X,X\rangle_s, \quad P\text{-a.s.}$$

が導かれる．さらに，f および X の連続性により（4.4.1）がなりたつことがわかる．

ステップ 9：より一般の場合—局所化． ステップ 8 までの結果を適用するために，時刻を適当な停止時刻でカットすることを考えよう．このステップでも f がコンパクト台をもつことは仮定することにする．これは教科書の定理 3.4.6 の証明中に使われたのと同様の手法である．確率変数 $T_n:\Omega\longrightarrow[0,T]\cup\{\infty\}$ を以下のように定義する．

$$T_n(\omega)=\begin{cases}0; & \text{if } |X_0(\omega)|\ge n\\ \inf\left\{t\in[0,T]\ \middle|\ |M_t(\omega)|\vee|\tilde{A}_t(\omega)|\vee|\langle X,X\rangle_t(\omega)|\ge n\right\}; & \text{if } |X_0(\omega)|<n\end{cases}$$

ただし，$\inf\emptyset=\infty$ とする．このとき T_n は停止時刻で，$T_n\nearrow\infty$ となる．停止過程 $M^{T_n},\tilde{A}^{T_n},\langle X,X\rangle^{T_n}$ は n を上界に持つから，ステップ 8 までの議論により伊藤の公式が適用でき，（簡単化のため，とりあえず任意の $t\in[0,T]$ を固定して考える．）

$$\begin{aligned}
f(X_t^{T_n}1_{\{T_n>0\}})=&f(X_0 1_{\{T_n>0\}})+\int_0^t f'(X_s^{T_n}1_{\{T_n>0\}})dA_s^{T_n}+\int_0^t f'(X_s^{T_n}1_{\{T_n>0\}})dM_s^{T_n}\\
&+\frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s^{T_n}1_{\{T_n>0\}})d\langle X,X\rangle_s^{T_n};\quad P\text{-a.s.} \qquad (4.4.17)
\end{aligned}$$

がなりたつ．式 4.4.17 の左辺の収束は明らかである．また，f', f'' の有界性と優収束定理によって，

$$\int_0^t f'(X_s^{T_n} 1_{\{T_n>0\}}) dA_s^{T_n} \longrightarrow \int_0^t f'(X_s) dA_s \quad P\text{-a.s.}$$
$$\int_0^t f''(X_s^{T_n} 1_{\{T_n>0\}}) d\langle X, X\rangle_s^{T_n} \longrightarrow \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X\rangle_s \quad P\text{-a.s.}$$

となることも直ちに分かる．さらに (T_n) が適当な局所化列になっていることから

$$\int_0^t f'(X_s^{T_n} 1_{\{T_n>0\}}) H_s^{(n)} dM_s \longrightarrow \int_0^t f'(X_s) H_s dM_s \quad \text{in Prob.}$$

が導かれる．したがって，式 (4.4.17) で適当な部分列 (n_k) をとって $k \longrightarrow \infty$ とすれば，過程の連続性とあわせて式（4.4.1）を得る．

ステップ 10：一般の C^2 級関数の場合．[*95] 一般に $f \in C^2(\mathbb{R})$ に対して，コンパクト台をもつ $f_K \in C^2(\mathbb{R})$ で，$[-N, N]$ 上で f と一致するものが存在する．[*96] ステップ 9 までの議論により，そのような f_N に対しては明らかに（4.4.1）がなりたつ．よって，(X_t) をセミマルチンゲールとすれば

$$f_N(X_t) = f_N(X_0) + \int_0^t f_N'(X_s) dA_s + \int_0^t f_N'(X_s) dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_N''(X_s) d\langle X, X\rangle_s, \quad P\text{-a.s.} \tag{4.4.18}$$

がなりたつ．いま，path が連続となるような ω を任意に固定する．

$$|X_s(\omega)| \leq \sup_{s\in[0,t]} |X_s(\omega)| =: K(\omega) < +\infty$$

とであるから，$[-K(\omega), K(\omega)] \subset [-N, N]$ となるような任意の N に対して

$$|f_N'(X_s(\omega))| = |f'(X_s(\omega))| \leq \sup_{|x|\leq K(\omega)} |f'(x)| \quad (\forall s \in [0, t])$$
$$|f_N''(X_s(\omega))| = |f''(X_s(\omega))| \leq \sup_{|x|\leq K(\omega)} |f''(x)| \quad (\forall s \in [0, t])$$

となるから，path ごとに優収束定理を適用すればステップ 9 と同様に (4.4.18) 右辺の収束が示される．さらに path の連続性を用いれば（4.4.1）が得られ，ここに伊藤の公式の証明は完了した． □

4.5 Fubini の定理

この節では，確率積分に関する Fubini の定理を扱う．$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, P)$ をフィルター付き確率空間とし，$(A, \mathscr{A}, \mu)$ を何らかの有限測度空間とする．H を $A \times \Omega \times \mathbb{R}_+$ 上の適当な可測関数としたとき，次のような関係式が成り立つかを知りたい：

$$\int_A \left(\int_0^t H(a, \omega, s) dX_s\right) \mu(da) = \int_0^t \left(\int_A H(a, \omega, s)\mu(da)\right) dX_s. \tag{4.5.1}$$

数学的な厳密性は忘れて，とりあえず式 (4.5.1) について大雑把な考察をしよう。端的に言えば，(4.5.1) は測度 μ による積分とセミマルチンゲール X による確率積分の順序が交換可能であるということを主張してい

[*95] このステップは Steele [46] を参考にした．
[*96] 杉浦 [48] などを参考にされたい．

る．二つの測度による積分の可換性の問題は，まさしく測度論における Fubini の定理によって正当化されるが，しかし確率積分はどう考えても（測度論の意味での）積分ではないのである．

話を簡単にするために，H が有界な場合に限って考えてみよう．(4.5.1) の右辺については意味づけが出来そうだ．実際，有界関数を有限測度 μ で積分したのだから，

$$\int_A H(a,\omega,s)\mu(da)$$

はまた有界で，さらに可測性を保存するはずである*97．したがって，この関数の X による確率積分を考えることは難しくない．ところが，(4.5.1) の左辺は話が違う．H が有界だからと言って，$H \bullet X$ が有界になるかはよく分からない．そもそも，パラメータ $a \in A$ をもつ関数の確率積分によって可測性が保存されるかどうかさえ定かではない．

このような簡単な考察により，二つの「積分」の順序交換が可能かどうかはそう簡単な問題ではなさそうなことが分かるだろう．実際のところ，適当な条件のもと順序交換は正当化される．その定理を証明するのが本節の目標である．まずは，可測性の問題に関する補題から始めることにする．

$(\mathscr{F}_t)$-発展的可測過程によって生成される $\Omega \times \mathbb{R}_+$ 上の σ-加法族を $\mathrm{Prog}(\mathscr{F}_t)$ で表すことにする．

補題 4.5.1. $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$ をフィルター付き確率空間とし，$(A, \mathscr{A})$ を任意の可測空間とする．$\mathscr{A} \otimes \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-可測関数の列 $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で，任意の (a,ω) に対して $t \mapsto Z(a,\omega,t)$ が連続関数であるようなものを考える．任意の $a \in A$ に対して確率過程の列 $(Z_n(a))$ は ucp で収束しているものと仮定しよう．このとき，$A \times \Omega \times \mathbb{R}_+$ 上の実数値関数 Z で以下の条件を満たすものが存在する*98．

(i) Z は $\mathscr{A} \otimes \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-可測．
(ii) 任意の $a \in A$ に対して，$Z(a)$ は確率 1 で連続なパスを持つ．
(iii) 任意の $a \in A$ に対して $Z_n(a) \xrightarrow{ucp} Z(a)$ が成立．

証明．$C[0,\infty[$ を広義一様収束位相により位相空間とみなす．

$$d_t(f,g) = \sup_{s\in[0,t]} |f(s) - g(s)|$$
$$d(f,g) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(f,g)}{1 + d_n(f,g)}$$

と定義すれば，d は $C[0,\infty[$ の位相と整合的な距離である．このとき，任意の $i,j \in \mathbb{N}$ に対して写像：$(a,\omega) \mapsto d(Z_i(a,\omega), Z_j(a,\omega))$ は $\mathscr{A} \otimes \mathscr{F}$-可測である*99．ここで，$\mathbb{N}$-値 $\mathscr{A}/2^{\mathbb{N}}$-可測関数の列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ を次のように定めよう：

$$n_0(a) = 1, \quad a \in A,$$
$$n_k(a) = \inf\left\{ m > n_{k-1}(a) \,\middle|\, P\left(\sup_{i,j\geq m} d(Z_i(a), Z_j(a)) > \frac{1}{2^k}\right) < \frac{1}{2^k} \right\}, \quad k \geq 1.$$

このとき

$$Y_k(a,\omega,t) = Z_{n_k(a)}(a,\omega,t)$$

*97 通常の意味での Fubini の定理による．

*98 $Z_n(a)$ は ucp で収束する言っているのだから (ii),，(iii) を満たす関数が存在するのは明らかであり，それが (i) の意味で可測となるようにとれるのかということが問題なのである．

*99 d は連続関数である．$C[0,\infty[$ の位相の入れ方より $(a,\omega) \mapsto Z_i(a,\omega)$ は $\mathscr{A} \otimes \mathscr{F}/\mathscr{B}(C[0,\infty[)$-可測関数とと見做せるのであったから，連続関数と可測関数の合成も可測関数である．

と定めれば Y_k は $\mathscr{A}\otimes\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-可測である．実際，$B\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\{(a,\omega,t)\in\mathscr{A}\otimes\Omega\times\mathbb{R}_+ \mid Y_k(a,\omega,t)\in B\}\\
&=\{(a,\omega,t)\in\mathscr{A}\otimes\Omega\times\mathbb{R}_+ \mid Z_{n_k(a)}(a,\omega,t)\in B\}\\
&=\bigcup_{m\geq 1}\{(a,\omega,t)\in A\otimes\Omega\otimes\mathbb{R}_+ \mid n_k(a)=m,\ Z_m(a,\omega,t)\in B\}\\
&\in\mathscr{A}\otimes\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)
\end{aligned}
$$

となることから可測性が分かる．このとき，定義より

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{N}} P\left[\sup_{i,j\geq k} d(Y_i(a),Y_j(a))>\frac{1}{2^k}\right] &= \sum_{k\in\mathbb{N}} P\left[\sup_{l,m\geq n_k(a)} d(Z_l(a),Z_m(a))>\frac{1}{2^k}\right]\\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^k}<\infty
\end{aligned}
$$

特に，

$$
\sum_{k\in\mathbb{N}} P\left[d(Y_k(a),Y_{k+1}(a))>\frac{1}{2^k}\right]<+\infty \tag{4.5.2}
$$

が成立．Borel-Cantelli の補題により

$$
P\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq m}\left\{\omega\in\Omega \,\middle|\, d(Y_k(a),Y_{k+1}(a))>\frac{1}{2^k}\right\}\right)=0 \tag{4.5.3}
$$

となる．ここで，

$$
N(a)=\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq m}\left\{\omega\in\Omega \,\middle|\, d(Y_k(a),Y_{k+1}(a))>\frac{1}{2^k}\right\} \tag{4.5.4}
$$

とする．$\omega\in\Omega\setminus N(a)$ とすれば，$N(a)$ の定義よりある $m_1=m_1(\omega)\in\mathbb{N}$ が存在して

$$
d(Y_k(\omega,a),Y_{k+1}(\omega,a))\leq\frac{1}{2^k},\quad k\geq m_1 \tag{4.5.5}
$$

が成り立つ．任意の $\varepsilon>0$ に対して $1/2^{m_2}<\varepsilon$ なる $m_2=m_2(\omega,\varepsilon)$ を取れば，任意の $i,j\geq m_1\vee m_2$ に対して

$$
d(Y_i(\omega,a),Y_j(\omega,a))\leq\sum_{k\geq m_1\vee m_2+1} d(Y_k(\omega,a),Y_{k+1}(\omega,a))\leq\sum_{k\geq m_1\vee m_2+1}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{m_1\vee m_2}}\leq\frac{1}{2^{m_2}}<\varepsilon \tag{4.5.6}
$$

が成立．すなわち，任意の a と $\omega\in n(a)$ に対して $(Y_i(\omega,a))_{i\in\mathbb{N}}$ は $(C[0,\infty[\,,d)$ の Cauchy 列であることが分かる．いま，

$$
Z(a,\omega,t)=\begin{cases}\lim_{k\to\infty} Y_k(a,\omega,t) & a\in A,\omega\in N(a),t\in\mathbb{R}_+\\ 0 & \text{その他.}\end{cases}
$$

と定めれば，任意の $a\in A$ に対して $Y_i(a)\xrightarrow{ucp}Z(a)$ が成立する．定義より Z は明らかに (i) から (iii) を満たす． □

命題 4.5.2 (パラメータつき確率積分の可測性)**.** $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$ を通常の条件を満たすフィルターつき確率空間とし，$(A,\mathscr{A})$ を可測空間とする．また，X を連続セミマルチンゲールとし，$H:A\times\Omega\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ は $\mathscr{A}\otimes\mathrm{Prog}(\mathscr{F}_t)$-可測関数であるものとする．任意の $a\in A$ に対して確率積分 $H(a)\bullet X$ が存在するならば，関数 $H\bullet X:A\times\Omega\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ で次の条件を満たすものが存在する：

(i) $H \bullet X$ は $\mathscr{A} \otimes \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-可測.

(ii) 各 $a \in A$ に対して $(H \bullet X)(a) : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ は確率 1 で連続な適合過程.

(iii) 各 $a \in A$ に対して $(\omega, t) \mapsto (H(a) \bullet X)_t(\omega)$ と $(\omega, t) \mapsto (H \bullet X)(a, \omega, t)$ は indistinguishable.

証明. *Step 1*：**H が有界な場合**. $\mathscr{D}$ を命題の主張を満たすような有界 $\mathscr{A} \otimes \mathrm{Prog}(\mathscr{F}_t)$-可測関数の全体とする. $\mathscr{A}$-可測な単関数 H_1 と[*100]有界な $H_2 \in \mathrm{Prog}(\mathscr{F}_t)$ に対して $H = H_1 H_2$ と表現される関数の全体を $\mathscr{C}$ で表す. 単調族定理を用いるために, 以下のことを示せばよい[*101]：

(a) $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$.

(b) $\mathscr{C}$ は（各点ごとの）積について閉じている.

(c) $\mathscr{D}$ は線形空間.

(d) $\mathscr{D}$ は一様有界な単調収束について閉じている.

(a) $H_1 = \sum_i a_i 1_{A_i}$, $H = H_1 H_2 \in \mathscr{C}$ とし,

$$Z(a, \omega, t) := H_1(a)(H_2 \bullet X)(\omega, t)$$

と定義する. Z は $\mathscr{A}$-可測関数と $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-可測関数の積なので, $\mathscr{A} \otimes \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-可測である. a を固定すれば Z は確率積分の $H_2 \bullet X$ の定数倍なので, 連続性および適合性も分かる. さらに確率積分の線形性より, 任意の $a \in A$ に対して

$$Z(a) = \sum_i a_i 1_{A_i}(a)(H_2 \bullet X) = \left(\sum_i a_i 1_{A_i}(a) H_2 \right) \bullet X = H(a) \bullet X$$

が indistinguishable の意味で成り立つことが分かる. これより $Z = H_1 H_2 \in \mathscr{D}$ である. すなわち, $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$ となり (a) が分かる.

(b) $H = H_1 H_2$, $H' = H_1' H_2' \in \mathscr{C}$ とする. $H_1 H_1'$ は単関数, $H_2 H_2'$ は有界 $\mathscr{F} \otimes \mathrm{Prog}(\mathscr{F}_t)$-可測関数なので, $HH' = (H_1 H_1')(H_2 H_2')$ はまた $\mathscr{C}$ の元である. よって (b) が成立.

(c) $H, K \in \mathscr{D}$ および $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$(\alpha H + \beta K) \bullet X := \alpha(H \bullet X) + \beta(K \bullet X)$$

と定義する. このとき $(\alpha H + \beta K) \bullet X$ は条件 (i)–(ii) を満たす. したがって $\mathscr{D}$ は線形空間である.

(d) $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を $\mathscr{D}$ の元で, 単調増大かつ一様有界なるもの, H を (H_n) の（各点収束の意味での）極限とする. このとき, $H \in \mathscr{D}$ を示せばよい. 定理 4.3.3（確率積分に関する優収束定理）より $(H_n(a) \bullet X)_{n \in \mathbb{N}}$ は $H(a) \bullet X$ に ucp の意味で収束するから, $((H_n \bullet X)(a))_{n \in \mathbb{N}}$ もまた ucp の意味で $H(a) \bullet X$ に収束する. したがって, 補題 4.5.1 により $H(a) \bullet X$ のバージョン $H \bullet X$ で (i) と (ii) 満たすものが存在する. $H(a) \bullet X$ と $(H \bullet X)(a)$ はともに ucp の意味での $((H_n \bullet X)(a))_{n \in \mathbb{N}}$ の極限であるから, indistinguishable の意味での一意性がなりたつ. すなわち (iii) も成立. ゆえに $H \in \mathscr{D}$ であることが分かった.

$\mathscr{C}$ および $\mathscr{D}$ は条件 (a)–(d) を満たすから, 単調収束定理により $\mathscr{D}$ は全ての $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{A} \otimes \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ 可測有界関数を含む.

Step 2：**一般の場合**. H が有界とは限らないとき, $H^{(n)} = H 1_{\{|H| \leq n\}}$ とおけば, 書く n に対して $(H^{(n)}(a) \bullet X)_{a \in A}$ のバージョン $H^{(n)} \bullet X$ で (i)–(iii) を満たすものが存在する. 確率積分に関する優収束定理

[*100] このノートでは“単関数”は有界なるもの（i.e. 有限和で書かれているもの）に限って使っている.

[*101] 単調族定理の条件としては $1 \in \mathscr{D}$ というのもあるが, $1 \in \mathscr{C}$ なので (a) を示せば十分.

より任意の a について $((H^{(n)} \bullet X)(a))_{n\in\mathbb{N}}$ は ucp の意味で $H(a) \bullet X$ に収束するから，先ほどと同様に命題の条件を満たすバージョン $H \bullet X$ が取れる． $\square$

定理 4.5.3 (確率積分に関する Fubini の定理)**.** $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$ を通常の条件を満たすフィルターつき確率空間，$(A, \mathscr{A}, \mu)$ を任意の有限測度空間，X を連続セミマルチンゲールとする．$H : A \times \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ を有界なる $\mathscr{A} \otimes \mathrm{Prog}(\mathscr{F}_t)$-可測関数とし，$H \bullet X$ で $(H(a) \bullet X)_{a\in A}$ の可測なバージョンを表すことにする．このとき，以下の等式が indistinguishable の意味で成立する：

$$\int_A (H \bullet X)(a)\mu(da) = \left(\int_A H(a)\mu(da)\right) \bullet X \tag{4.5.7}$$

ただし，(4.5.7) の左辺は確率過程 $(\omega, t) \mapsto \int_A (H \bullet X)\mu(da)$ を表す．

証明．*Step 1* : $X \in H^2$ **の場合**．単調族定理によって証明する．$\mathscr{D}$ を有界 $\mathscr{A} \otimes \mathrm{Prog}(\mathscr{F}_t)$-可測関数で，(4.5.7) を満たすもの全体のなす集合，$\mathscr{C}$ を $H = H_1 H_2$（$H_1 = \sum_i a_i 1_{A_i}$ は $\mathscr{A}$-可測単関数，H_2 は有界な $\mathrm{Prog}(\mathscr{F}_t)$-可測関数）と表現される H 全体の作る集合とする．このとき，以下の事項を示せば良いのであった[*102]．

(a) $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$.
(b) $\mathscr{C}$ は（各点ごとの）積について閉じている．
(c) $\mathscr{D}$ は線形空間．
(d) $\mathscr{D}$ は一様有界な単調収束について閉じている．

(a) $H = H_1 H_2 \in \mathscr{C}$ とおけば，

$$\int_A (H \bullet X)(a)\mu(da) = \int_A \left(\sum_i a_i 1_{A_i}\right)(H_2 \bullet X)\mu(da)$$

が成立する．よって $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$ である．

(b) 明らか．

(c) $H, K \in \mathscr{D}$ および $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_A ((\alpha H + \beta K) \bullet X)(a)\mu(da) &= \int_A \alpha\big[(H \bullet X)(a) + \beta(K \bullet X)(a)\big]\mu(da) \\
&= \alpha \int_A (H \bullet X)(a)\mu(da) + \beta \int_A (K \bullet X)(a)\mu(da) \\
&= \alpha\left(\int_A H(a)\mu(da)\right) \bullet X + \beta\left(\int_A K(a)\mu(da)\right) \bullet X \\
&= \left(\alpha \int_A H(a)\mu(da) + \beta \int_A K(a)\mu(da)\right) \bullet X \\
&= \left(\int_A (\alpha H + \beta K)(a)\mu(da)\right) \bullet X.
\end{aligned}$$

よって $\alpha H + \beta K \in \mathscr{D}$ である．すなわち，$\mathscr{D}$ は線形空間である．

(d) 非負の関数列 $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathscr{D}$ の列で，単調増大に有界関数 H に各点収束するとする．仮定より

$$\int_A (H_n \bullet X)(a)\mu(da) = \left(\int_A H_n(a)\mu(da)\right) \bullet X \tag{4.5.8}$$

[*102] 単調族定理の条件としては $1 \in \mathscr{D}$ というのもあるが，いま $1 \in \mathscr{C}$ なので (a) を示せば十分である．

だから，この式における極限操作を正当化するのが目標である．(4.5.8) の右辺については確率積分に優収束定理より，

$$\left(\int_A H_n(a)\mu(da)\right)\bullet X \xrightarrow[n\to\infty]{ucp} \left(\int_A H(a)\mu(da)\right)\bullet X$$

が成立する．

次に，(4.5.8) 左辺の挙動を調べよう．初めに，そもそも (4.5.8) の左辺が well-defined かを調べよう．$Z_n = H_n \bullet X$ および $Z = H \bullet X$ と定義する．このとき，

$$\begin{aligned}
&E\left[\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\int_A |Z_n(a,\cdot,t)|\,\mu(da)\right]\\
&\leq E\left[\int_A \sup_{t\in\mathbb{R}_+}|Z_n(a,\cdot,t)|\,\mu(da)\right]\\
&\leq \sqrt{\mu(A)}\sqrt{E\left[\int_A\left(\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|Z_n(a,\cdot,t)|\right)^2\mu(da)\right]} \quad (\because \text{Schwarz})\\
&= \sqrt{\mu(A)}\sqrt{\int_A E\left[\left(\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|Z_n(a,\cdot,t)|\right)^2\right]\mu(da)} \quad (\because \text{Fubini})\\
&\leq \sqrt{\mu(A)}\sqrt{\int_A 4E\left[(Z_n(a,\cdot,\infty))^2\right]\mu(da)} \quad (\because \text{Doob；仮定より } Z_n \in H^2 \text{ であることに注意.})\\
&= \sqrt{\mu(A)}\sqrt{\int_A 4E\left[\int_{[0,\infty[}(H_n(a,\cdot,s))^2 d\langle X,X\rangle_s\right]\mu(da)} \quad (\because \text{Itô isometry})\\
&< \infty
\end{aligned}$$

これより P-a.s. で，任意の $t\in\mathbb{R}_+$ に対して

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\int_A |Z_n(a,\omega,t)|\,\mu(da) < \infty$$

が成立する．同様にして $\int_A Z(a)\mu(da)$ が well-defined であることも分かる．ここで

$$\delta_n(\omega) = \sup_{t\in\mathbb{R}_+}\left|\int_A Z_n(a,\omega,t)\mu(da) - \int_A Z(a,\omega,t)\mu(da)\right|$$

とおいたとき，δ_n が確率収束することを示したい．先ほどと同様にして

$$\begin{aligned}
&E[\delta_n] \\
&\leq E\left[\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\int_A |Z_n(a,\cdot,t)-Z(a,\cdot,t)|\,\mu(da)\right] \\
&\leq E\left[\int_A \sup_{t\in\mathbb{R}_+}|Z_n(a,\cdot,t)-Z(a,\cdot,t)|\,\mu(da)\right] \\
&\leq \sqrt{\mu(A)}\sqrt{E\left[\int_A\left(\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|Z_n(a,\cdot,t)-Z(a,\cdot,t)|\right)^2\mu(da)\right]} \quad (\because \text{Schwarz}) \\
&= \sqrt{\mu(A)}\sqrt{\int_A E\left[\left(\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|Z_n(a,\cdot,t)-Z(a,\cdot,t)|\right)^2\right]\mu(da)} \quad (\because \text{Fubini}) \\
&\leq \sqrt{\mu(A)}\sqrt{\int_A 4E\left[(Z_n(a,\cdot,t)-Z(a,\cdot,t))^2\right]\mu(da)} \quad (\because \text{Doob}) \\
&= \sqrt{\mu(A)}\sqrt{\int_A 4E\left[\int_{[0,\infty[}(H_n(a,\cdot,s)-H(a,\cdot,s))^2 d\langle X,X\rangle_s\right]\mu(da)} \quad (\because \text{Itô isometry})
\end{aligned}$$

という評価が成り立つから[*103]，ここで $n\to\infty$ とすれば有界収束定理により最終辺は 0 に収束する．したがって $E[\delta_n]\to 0$ が成立し，特に

$$\int_A (H_n\bullet X)(a)\mu(da) \xrightarrow[n\to\infty]{ucp} \int_A (H\bullet X)(a)\mu(da)$$

も分かる．(4.5.8) の両辺はともに ucp で収束するから，その極限 $\left(\int_A H(a)\mu(da)\right)\bullet X$ と $\int_A (H\bullet X)(a)\mu(da)$ は indistinguishale の意味で一致する．

Step 2: X **が連続局所マルチンゲールの場合**．$X_0=0$ として示せばよい．X の局所化列 (T_n) を $X^{T_n}\in H^2$ となるように選ぶ．このとき，step 1 の結果より

$$\int_A (H\bullet X^{T_n})(a)\mu(da) = \left(\int_A H(a)\mu(da)\right)\bullet X^{T_n}$$

が成立．この式は n ごとに indistinguishable の意味で成り立つから，対応する確率 1 の集合を Ω_n とする．さらに Ω' 上で $\lim_n T_n = T$ が成り立つような確率 1 の集合をとり，$\widetilde{\Omega}=\Omega'\cap\bigcap_n\Omega_n$ とおけば，これはまた確率 1 をもつ．$\omega\in\widetilde{\Omega}$ とすれば，任意の t に対して十分大きな $n=n(t)$ をとれば

$$\begin{aligned}
\int_A (H\bullet X)(a,\omega,t)\mu(da) &= \int_A (H\bullet X^{T_n})(a,\omega,t)\mu(da) \\
&= \left(\int_A H(a)\mu(da)\right)\bullet X^{T_n} \\
&= \left(\left(\int_A H(a)\mu(da)\right)\bullet X\right)(\omega,t)
\end{aligned}$$

したがって，$\omega\in\widetilde{\Omega}$ に対して二つのパスは一致する．すなわち二つの過程は区別不能である． □

[*103] $X\in H^2$ と被積分関数の有界性より Doob の不等式が使える．

4.6 Notes

確率積分の定義は Revuz & Yor [38] に従い，Riesz の表現定理を用いる抽象的な方法で導入した．3 節で紹介した，初等過程に関する Stieltjes 積分の L^2 極限を確率積分の定義とする文献も多い．被積分関数の近似に関しては Karatzas & Shreve [24] が詳しい．可予測な被積分過程の近似は Ikeda & Watanabe [21] に見られる．

伊藤の公式の証明は Karatzas & Shreve [24] を参考にしたが，これはもとは國田・渡辺 [27] によるものである．これはより直感的な証明であって，他には Revuz & Yor に見られる証明タイプの証明もある．（元ネタは Dellacherie & Meyer [9] だろうか？）そちらの方が洗練されていると言えるかもしれない．

パラメータ付き確率積分について，被積分関数が有界でない場合にも，適当な仮定の下 Fubuni の定理が成り立つことが知られている．証明は Medvegyev [30] を見よ．

5　確率積分とマルチンゲール

5.1　Burkholder-Davis-Gundy の不等式

$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$ を通常の条件を満たすフィルター付き確率空間とする．確率過程 X が与えられたとき，新たな確率過程 X^* を

$$X_t^* = \sup_{0 \le s \le t} |X_s|$$

と定義することにする[*104]．

定理の証明に入る前に，いくつか補題を用意する．

定義 5.1.1. 非負なる右連続適合過程 X と，$A - A_0 \in \mathscr{A}_+$ なる適合過程 A を考える．任意の有界停止時刻 T に対して

$$E[X_T] \le E[A_T]$$

が成り立つとき，X は A によって支配 (dominate) されるという．

補題 5.1.2. X は A によって支配され，さらに A は連続であるとする．このとき，$x, y > 0$ に対して

$$P[X_\infty^* > x, A_\infty \le y] \le \frac{1}{x} E[A_\infty \wedge y] \tag{5.1.1}$$

が成立する．

証明．$P[A_0 \le y] > 0$ なる場合に (5.1.1) を示せば十分である．実際，$P[A_0 \le y] > 0$ なら A の増加性より

$$P[A_\infty \le y] \le P[A_0 \le y] = 0$$

となり，(5.1.1) の右辺は 0 なので不等式は明らか．

Step1：$P[A_0 \le y] = 1$ **なる場合．** 停止時刻 S, T を

$$S(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid X_t(\omega) > x\}$$
$$T(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid A_t(\omega) > y\}$$

と定めれば，フィルトレーションの右連続性よりこれは停止時刻である[*105]．A の連続性より

$$\{A_n \le y\} = \{T \wedge n = n\}$$

[*104] ここで「確率過程」とは言ったが，X_t^* の可測性は自明ではない．今は通常の条件を仮定しているので，完備性より X_t^* の可測性が従う．パスが右連続または左連続ならば，$\mathscr{F}$ に完備性がなくても可測となる．

[*105] 命題 2.3.2 および命題 2.3.12 を見よ．

となることに注意しておく．これより

$$
\begin{aligned}
P[X_n^* > x, A_n \leq y] &= P[X_n^* > x, T \wedge n = n] \\
&\leq P[X_S \geq x, S < n, T \wedge n = n] \\
&\leq P[X_{S \wedge T \wedge n}] \\
&\leq \frac{1}{x} E[X_{S \wedge R \wedge n}] \quad (\because \text{Chebyshev inequality}) \\
&\leq \frac{1}{x} E[A_{S \wedge R \wedge n}] \quad (\because X \text{ is dominated by A}) \\
&\leq \frac{1}{x} E[A_\infty \wedge y]
\end{aligned}
$$

が成り立つ[*106]．Fatou の補題を用いれば

$$
E\left[\liminf_{n\to\infty} 1_{\{X_n^* > x\} \cap \{A_n \leq y\}}\right] \leq \liminf_{n\to\infty} E[1_{\{X_n^* > x\} \cap \{A_n \leq y\}}] \leq \frac{1}{x} E[A_\infty \wedge y]
$$

であるが，いま

$$
\begin{aligned}
E\left[\liminf_{n\to\infty} 1_{\{X_n^* > x\} \cap \{A_n \leq y\}}\right] &= E\left[1_{\liminf\{X_n^* > x\} \cap \{A_n \leq y\}}\right] \\
&= P\left(\bigcup_{n \geq 1} \left[\bigcap_{k \geq n} \{X_k^* > x\} \cap \{A_k \leq y\}\right]\right) \\
&= P\left(\bigcup_{n \geq 1} [\{X_n^* > x\} \cap \{A_\infty \leq y\}]\right) \\
&= P\left[X_\infty^* > x, A_\infty \leq y\right]
\end{aligned}
$$

となるから (5.1.1) が成立．

Step2：$P[A_0 \leq y] \in]0,1[$ **なる場合．** $P'(\cdot) = P(\cdot \mid \{A_0 \leq y\})$ とおけば[*107] P' は $(\Omega, \mathscr{F})$ 上の確率測度を定め，しかも $A_0 \leq y$, P'-a.s. が成り立つ．Step1 の結果より

$$
P'[X_\infty^* > x, A_\infty \leq y] \leq \frac{1}{x} \int_\Omega A_\infty \wedge y \, dP'
$$

となるから，両辺に $P(Y_0 \leq y)$ を掛ければ (5.1.1) を得る． □

補題 5.1.3. 補題 5.1.2 と同様の仮定の下，任意の $k \in]0,1[$ に対して

$$
E\left[(X_\infty^*)^k\right] \leq \frac{2-k}{1-k} E\left[A_\infty^k\right]
$$

が成立．

---

*106 最後の不等号は仮定：$A_0 \leq y$ a.s. から $A_{S \wedge T \wedge n} \leq A_\infty \wedge y$ a.s. が成り立つことを用いる．
*107 $P(B) \neq 0$ のとき $P(A|B) := P(A \cap B)/P(B)$ と定める．

証明. $F:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ を連続な増加関数で $F(0)=0$ なるものとすれば,

$$
\begin{aligned}
E[F(X_\infty^*)] &= E[F(X_\infty^*)-F(0)]\\
&= E\left[\int_0^\infty 1_{[0,X_\infty^*]}(x)dF(x)\right]\\
&= E\left[\int_0^\infty 1_{[0,X_\infty^*[}(x)dF(x)\right] \quad (\because F \text{ の連続性})\\
&= \int_0^\infty E\left[1_{]x,\infty]}(X_\infty^*)\right]dF(x) \quad (\because \text{Fubini の定理})\\
&= \int_0^\infty P\left[X_\infty^*>x\right]dF(x)\\
&= \int_0^\infty \left(P\left[X_\infty^*>x, A_\infty\le x\right]+P\left[X_\infty^*>x, A_\infty>x\right]\right)dF(x)\\
&\le \int_0^\infty \left(P\left[X_\infty^*>x, A_\infty\le x\right]+P\left[A_\infty>x\right]\right)dF(x)\\
&\le \int_0^\infty \left(\frac{1}{x}E[A_\infty\wedge x]+P\left[A_\infty>x\right]\right)dF(x) \quad (\because \text{補題 } 5.1.2)\\
&= \int_0^\infty \left(\frac{1}{x}E[A_\infty\wedge x, A_\infty>x]+\frac{1}{x}E[A_\infty\wedge x, A_\infty\le x]+P\left[A_\infty>x\right]\right)dF(x)\\
&= \int_0^\infty \left(\frac{1}{x}E[x, A_\infty>x]+\frac{1}{x}E[A_\infty, A_\infty\le x]+P\left[A_\infty>x\right]\right)dF(x)\\
&= \int_0^\infty \left(\frac{1}{x}E[A_\infty 1_{\{A_\infty\le x\}}]+2P\left[A_\infty>x\right]\right)dF(x)\\
&= E\left[A_\infty\int_0^\infty 1_{\{A_\infty\le x\}}\frac{1}{x}dF(x)\right]+2\int_0^\infty P[A_\infty>x]dF(x) \quad (\because \text{Fubini})\\
&= E\left[A_\infty\int_{A_\infty}^\infty \frac{1}{x}dF(x)\right]+2E[F(A_\infty)]
\end{aligned}
$$

となる. ここで

$$\widetilde{F}(x)=2F(x)+x\int_x^\infty\frac{dF(t)}{t}$$

とおけば

$$E[F(X_\infty^*)]\le E\left[\widetilde{F}(A_\infty)\right]$$

である. いま $F(x)=x^k$ の場合を考えれば

$$\widetilde{F}(x)=2x^k+x\int_x^\infty\frac{1}{t}kt^{k-1}dt=2x^k+\frac{k}{k-1}x\lim_{R\to\infty}(R^{k-1}-x^{k-1})=\frac{2-k}{1-k}x^k$$

となるから,

$$E[F(X_\infty^*)]\le E\left[\widetilde{F}(A_\infty)\right]=\frac{2-k}{1-k}E\left[A_\infty^k\right]$$

を得る. □

以下に定理として Burkholder-Davis-Gundy の不等式を述べる, 証明は長いので, いくつかのステップに分けて行う.

定理 5.1.4 (Burkholder-Davis-Gundy inequality)**.** $p \in]0,\infty[$ とする．このときある定数 $c_p, C_p > 0$ が存在して，任意の $M \in \mathscr{M}_0^{c,loc}$ に対して

$$c_p E\left[\langle M,M\rangle_\infty^{p/2}\right] \leq E\left[(M_\infty^*)^p\right] \leq C_p E\left[\langle M,M\rangle_\infty^{p/2}\right] \tag{5.1.2}$$

が成り立つ[*108].

系 5.1.5. 任意の停止時刻 T に対して

$$c_p E\left[\langle M,M\rangle_T^{p/2}\right] \leq E\left[(M_T^*)^p\right] \leq C_p E\left[\langle M,M\rangle_T^{p/2}\right] \tag{5.1.3}$$

が成り立つ．

証明はいくつかの場合に分けて行う．まずは $p \geq 2$ なる場合に M^* に上からの評価を与えよう．

命題 5.1.6. $p \geq 2$ のとき，ある定数 $C_p > 0$ が存在して，任意の $M \in \mathscr{M}_0^{c,loc}$ に対して

$$E\left[(M_\infty^*)^p\right] \leq C_p E\left[\langle M,M\rangle_\infty^{p/2}\right] \tag{5.1.4}$$

が成り立つ．

証明．**Step1：M が有界な場合.**

Step1-2：$p > 2$ の場合. $p \geq 2$ より関数 $x \mapsto |x|^p$ は C^2 級なので，伊藤の公式を用いれば

$$|M_t|^p = |M_0|^p + \int_0^t p|M_s|^{p-1}\left(\mathrm{sgn} M_s\right) dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t p(p-1)|M_s|^{p-2} d\langle M,M\rangle_s$$

が任意の $t \geq 0$ に対して成立．M の有界性からマルチンゲールの収束定理により $t \to \infty$ の（概収束および L^1 収束）極限が存在して

$$|M_\infty|^p = |M_0|^p + \int_0^\infty p|M_s|^{p-1}\left(\mathrm{sgn} M_s\right) dM_s + \frac{1}{2}\int_0^\infty p(p-1)|M_s|^{p-2} d\langle M,M\rangle_s$$

となる．両辺の期待値をとれば

$$\begin{aligned}
&E\left[|M_\infty|^p\right] \\
&= \frac{p(p-1)}{2} E\left[\int_0^\infty |M_s|^{p-2} d\langle M,M\rangle_s\right] \quad \left(\because \left(|M_s|^{p-1}\mathrm{sgn}\, M\right) \bullet M \text{ のマルチンゲール性}\right) \\
&\leq \frac{p(p-1)}{2} E\left[(M_\infty^*)^{p-2}\langle M,M\rangle_\infty\right] \\
&\leq \frac{p(p-1)}{2}\left(E\left[(M_\infty^*)^p\right]\right)^{(p-2)/p}\left(E\left[\langle M,M\rangle_\infty^{p/2}\right]\right)^{2/p} \quad (\because \text{Höllder の不等式})
\end{aligned}$$

が成立．Doob の不等式より

$$E[(M_\infty^*)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|X_\infty|^p]$$

であったから，

$$E[(M_\infty^*)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \frac{p(p-1)}{2}\left(E\left[(M_\infty^*)^p\right]\right)^{(p-2)/p}\left(E\left[\langle M,M\rangle_\infty^{p/2}\right]\right)^{2/p}$$

[*108] 驚くべきことに，この定数は局所マルチンゲール M に依らないのである．

となる．これを整理すれば

$$E[(M_\infty^*)^p]^{2/p} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \frac{p(p-1)}{2} \left(E\left[\langle M,M\rangle_\infty^{p/2}\right]\right)^{2/p}.$$

両辺を $p/2$ 乗すれば結論を得る．

Step1-2：$p=2$ の場合． $p=2$ の場合は Höllder の不等式を使わずとも

$$\begin{aligned} E\left[|M_\infty|^p\right] &\leq \frac{p(p-1)}{2} E\left[\int_0^\infty |M_s|^{p-2} d\langle M,M\rangle_s\right] \\ &= \frac{p(p-1)}{2} E[\langle M,M\rangle_\infty] \end{aligned}$$

という評価を得るので，あとは同様である．

Step2：一般の連続局所マルチンゲールの場合． $M \in \mathscr{M}^{c,loc}$ の局所化列 (T_n) を M^{T_n} が有界となるようにとれば[*109]，Step1 の結果より

$$E\left[\left\{(M_\infty^{T_n})^*\right\}^p\right] \leq C_p E\left[(\langle M,M\rangle_\infty^{T_n})^{p/2}\right]$$

が成立．$n \to \infty$ とすれば単調収束定理より (5.1.4) が従う． □

命題 5.1.7. $p \geq 4$ とすれば，ある c_p が存在して

$$c_p E[\langle M,M\rangle_\infty] \leq E[(M_\infty^*)^p] \quad \forall M \in \mathscr{M}_0^{c,loc} \tag{5.1.5}$$

が成り立つ．

証明．$p \geq 4$ とする．はじめに，任意の実数 x,y と $q>0$ に対して

$$|x+y|^q \leq (|x|+|y|)^q \leq 2^q(|x| \vee |y|)^q = 2^q(|x|^q + |y|^q) \tag{5.1.6}$$

が成り立つことに注意しておく．

$\langle M,M\rangle$ が有界な場合に示す．伊藤の公式より $M \in \mathscr{M}_0^{c,loc}$ に対して

$$M_t^2 = 2\int_0^t M_s dM_s + \langle M,M\rangle_t$$

となるので，(5.1.6) を用いれば

$$\begin{aligned} \langle M,M\rangle_t^{p/2} &= \left|M_t^2 - 2\int_0^t M_s dM_s\right|^{p/2} \\ &\leq 2^{p/2}\left(\left|M_t^2\right|^{p/2} + \left|2\int_0^t M_s dM_s\right|^{p/2}\right) \\ &= 2^{p/2}\left(|M_t|^p + \left|2\int_0^t M_s dM_s\right|^{p/2}\right) \\ &\leq 2^{(p+2)/2}\left(|M_t|^p + \left|\int_0^t M_s dM_s\right|^{p/2}\right) \end{aligned}$$

[*109] いま $M_0=0$ だったから，$M^{T_n}1_{\{T_n>0\}}$ ではなく M^{T_n} を考えればよい．

が分かる．$t \to \infty$ として期待値を取れば，

$$
\begin{aligned}
&E[\langle M, M\rangle_\infty^{p/2}] \\
&\leq 2^{(p+2)/2}\left(E\left[|M_\infty|^p\right] + E\left[\left|\int_0^\infty M_s dM_s\right|^{p/2}\right]\right) \\
&\leq 2^{(p+2)/2}\left(E\left[(M_\infty^*)^p\right] + E\left[\sup_{t\geq 0}\left|\int_0^t M_s dM_s\right|^{p/2}\right]\right) \\
&= 2^{(p+2)/2}\left(E\left[(M_\infty^*)^p\right] + E\left[\{(M \bullet M)^*\}^{p/2}\right]\right) \\
&\leq 2^{(p+2)/2}\left(E\left[(M_\infty^*)^p\right] + C^p E\left[\langle M \bullet M\rangle_\infty^{p/4}\right]\right) \quad (\because \text{命題 } 5.1.6) \\
&\leq 2^{(p+2)/2}(1 \vee C^p)\left(E\left[(M_\infty^*)^p\right] + E\left[\langle M \bullet M\rangle_\infty^{p/4}\right]\right) \\
&= 2^{(p+2)/2}(1 \vee C^p)\left(E\left[(M_\infty^*)^p\right] + E\left[\left(\int_0^\infty M_s^2 d\langle M, M\rangle_s\right)^{p/4}\right]\right) \\
&\leq 2^{(p+2)/2}(1 \vee C^p)\left(E\left[(M_\infty^*)^p\right] + E\left[(M_\infty^*)^{p/2}\langle M, M\rangle_\infty^{p/4}\right]\right) \\
&\leq 2^{(p+2)/2}(1 \vee C^p)\left(E\left[(M_\infty^*)^p\right] + E\left[(M_\infty^*)^p\right]^{1/2} E\left[\langle M, M\rangle_\infty^{p/2}\right]^{1/2}\right) \quad (\because \text{Höllder の不等式})
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
E[\langle M, M\rangle_\infty^{p/2}] \leq 2^{(p+2)/2}(1 \vee C^p)\left(E\left[(M_\infty^*)^p\right] + E\left[(M_\infty^*)^p\right]^{1/2} E\left[\langle M, M\rangle_\infty^{p/2}\right]^{1/2}\right) \tag{5.1.7}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
x &= E[\langle M, M\rangle_\infty^{p/2}]^{1/2} \\
y &= E\left[(M_\infty^*)^p\right]^{1/2} \\
a_p &= 2^{(p+2)/2}(1 \vee C^p)
\end{aligned}
$$

とおけば，(5.1.7) より x, y は

$$
\begin{cases} x^2 - a_p xy - a_p y^2 \leq 0 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \tag{5.1.8}
$$

を満たす．二次方程式

$$
z^2 - a_p zy - a_p y^2 = 0
$$

を解けば，

$$
z = \frac{a_p y \pm \sqrt{a_p^2 y^2 + 4a_p y^2}}{2} = \frac{a_p \pm \sqrt{a_p^2 + 4a_p}}{2} y.
$$

これより，(5.1.8) との条件を満たす x は

$$
x \leq \frac{a_p + \sqrt{a_p^2 + 4a_p}}{2} y
$$

を満たすことが分かる．これより

$$
E[\langle M, M\rangle_\infty^{p/2}]^{1/2} \leq \frac{a_p + \sqrt{a_p^2 + 4a_p}}{2} E\left[(M_\infty^*)^p\right]^{1/2}
$$

となるから，

$$c_p = \frac{a_p + \sqrt{a_p^2 + 4a_p}}{2}$$

とおけばよい．

一般の場合には $M \in \mathscr{M}_0^{c,loc}$ を局所化する列 (T_n) で，特に M^{T_n} が有界となるようなものをとって $n \to \infty$ とすればよい． □

定理 *5.1.4* の証明．$X = (M^*)^2$ および $A = C_2\langle M, M\rangle$ とおけば，(5.1.4) より任意の有界停止時刻 T に対して

$$E[X_T] = E[\{(M_\infty^T)^*\}^2] \le C_2 E[\langle M^T, M^T\rangle_\infty] = C_2 E[\langle M, M\rangle_T]$$

より定義 5.1.1 の意味での支配関係を満たす．これに補題 (5.1.3) を適用すれば，$k \in]0,1[$ に対して

$$E\left[(M_\infty^*)^{2k}\right] = E\left[(X_\infty^*)^k\right] \le \frac{2-k}{1-k} E[A_\infty^k] = \frac{2-k}{1-k} E[C_2\langle M, M\rangle_\infty^k].$$

$p \in]0,2[$ のときは

$$C_p = \frac{2-p/2}{1-p/2} C_2$$

とおくことで BDG-不等式 (5.1.2) の 2 つ目の不等号を得る．$p \ge 2$ のときは既に命題 5.1.6 において示されている．

また，$X = \langle M, M\rangle^2$ および $A = c_4^{-1}(M^*)^4$ とおけば，(5.1.5) より任意の有界停止時刻 T に対して

$$c_4 E[X_T] = c_4 E[\langle M^T, M^T\rangle_\infty^2] \le E[\{(M_\infty^T)^*\}^4] = E[A_T]$$

となり，定義 5.1.1 の意味での支配関係を満たす．したがって補題 (5.1.3) によって任意の $k \in]0,1[$ に対して

$$c_4 E\left[\langle M, M\rangle_\infty^{2k}\right] = c_4 E\left[(X_\infty^*)^k\right] \le \frac{2-k}{1-k} E[A_\infty^k] = \frac{2-k}{1-k} E[(M^*)^{4k}]$$

が成立．$p \in]0,4[$ に対しては

$$c_p = c_4 \frac{2-p/4}{1-p/4}$$

とおけば (5.1.2) が示される．$p \ge 4$ に対しては既に分かっていたから，これで定理 5.1.4 の証明が完了した．

系 5.1.5 を示すためには，局所マルチンゲール M^T に対して 5.1.2 を適用すればよい． □

5.2 P. Lévy の定理

$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$ をフィルター付き確率空間とする．

定義 5.2.1. $\mathbb{R}^d$ 値確率過程 $X = (X^1, \dots, X^d)$ を考える．各 X^i が $(\mathscr{F}_t)$ -局所マルチンゲールのとき， X は d 次元ベクトル局所マルチンゲール (d-dimentional vector local martingale) という．X^i が連続セミマルチンゲールのときは，d 次元ベクトル連続セミマルチンゲールという．(d-dimentional vector semimartingale) また，X が複素数値確率過程のとき，実部と虚部がともに局所マルチンゲールならば X を複素局所マルチンゲール (complex local martingale) という．同様にして複素連続セミマルチンゲール (complex continuous semimartingale) も定める．

以下では，伊藤の公式の一つのバージョンを紹介する．これは $f(x,t)$ なる形の関数で出てくることが多いものだが，Lévy の定理の証明に使いやすようにもう少し一般的な形で述べておくことにする．なお，以下では $f \in C^{n,m}(X \times Y)$ という書き方をしたときは，$x \mapsto f(x,y)$ は C^n 級関数で，$y \mapsto f(x,y)$ が C^m 級関数となっていることを意味する．

定理 5.2.2 (伊藤の公式)**.** X を連続セミマルチンゲールとし，$A \in \mathscr{A}^c$ および $f \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ とする．このとき，確率過程 $f(X,A) = (f(X_t,A_t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ はまた連続セミマルチンゲールで，以下の等式がなりたつ．

$$\begin{aligned} f(X_t,A_t) =& f(X_0,A_0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial y} f(X_s,A_s) dA_s \\ &+ \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(X_s,A_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(X_s,A_s) d\langle X,X\rangle_s \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

証明. 証明は省略. □

命題 5.2.3. $f \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ は条件

$$\frac{\partial}{\partial y} f + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = 0$$

を満たすとする．このとき，連続局所マルチンゲール $M = (M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ に対して $f(M, \langle M,M\rangle)$ はまた連続な局所マルチンゲールとなる．特に，任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$\mathscr{E}^\lambda(M)_t = \exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2}\langle M,M\rangle_t\right)$$

によって定まる確率過程 $\mathscr{E}^\lambda(M)$ は連続な局所マルチンゲールである．

証明. f が実数値のときは (5.2.1) により

$$\begin{aligned} f(M_t,\langle M,M\rangle_t) &= f(M_0,0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial y} f(M_s,\langle M,M\rangle_s) d\langle M,M\rangle_s \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(X_s,\langle M,M\rangle_s) dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(M_s,\langle M,M\rangle_s) d\langle M,M\rangle_s \\ &= f(M_0,0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(X_s,\langle M,M\rangle_s) dM_s \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial}{\partial y}\left\{ f(M_s,\langle M,M\rangle_s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(M_s,\langle M,M\rangle_s)\right\} d\langle M,M\rangle_s \\ &= f(M_0,0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(X_s,\langle M,M\rangle_s) dM_s \end{aligned}$$

となるが，これは明らかに連続な局所マルチンゲールである．f が複素数値の場合は $f = u + iv$ のように分解すればよい．特に $f(x,y) = e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}y}$ と定めれば

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = -\frac{\lambda^2}{2} f(x,y) + \frac{1}{2}\{\lambda^2 f(x,y)\} = 0$$

となるので，前半の結果より $\mathscr{E}^\lambda(M)$ は局所マルチンゲールである． □

定理 5.2.4 (P. Lévy)**.** $X = (X^1,\ldots,X^d)$ は d 次元 $(\mathscr{F}_t)$ -適合過程で　$X_0 = 0$ を満たすものとする．このとき，以下の条件は同値である．

(i) X は d 次元 $(\mathscr{F}_t)$ -ブラウン運動である．

(ii) X は連続局所マルチンゲールで，$\langle X^i, X^j\rangle_t = \delta_{ij}t$ を満たす．（ただし δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．）

(iii) X は連続局所マルチンゲールで，任意の $f = (f_1, \ldots, f_d) \in [L^2(\mathbb{R}_+)]^d$ に対して

$$\mathscr{E}_t^{if} = \exp\left(i\sum_{k=1}^{d}\int_0^t f_k(s)dX_s^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\int_0^t f_k^2(s)ds\right)$$

は複素マルチンゲールとなる．

証明．(i)$\Longrightarrow$(ii) は明らか．

(ii)$\Longrightarrow$(iii)．

$$M_t = \sum_{k=1}^{d}\int_0^t f_k(s)dX_s^k$$

とおけば，ブラケットおよび確率積分の性質により

$$\begin{aligned}
\langle M, M\rangle_t &= \left\langle \sum_{k=1}^{d} f_k \bullet X^k, \sum_{k=1}^{d} f_k \bullet X^k \right\rangle_t \\
&= \sum_{k=1}^{d}\left\langle f_k \bullet X^k, f_k \bullet X^k\right\rangle_t + \sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d}\left\langle f_k \bullet X^k, f_l \bullet X^l\right\rangle_t \\
&= \sum_{k=1}^{d} f_k^2 \bullet \left\langle X^k, X^k\right\rangle_t + \sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d} f_k f_l \bullet \left\langle X^k, X^l\right\rangle_t \\
&= \sum_{k=1}^{d}\int_0^t f_k^2(s)ds
\end{aligned}$$

となる．5.2.3 において $\lambda = i$ とおけば，

$$\exp\left(iM_t + \frac{1}{2}\langle M, M\rangle_t\right) = \exp\left(i\sum_{k=1}^{d}\int_0^t f_k(s)dX_s^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\int_0^t f_k^2(s)ds\right) = \mathscr{E}_t^{if}$$

より $\mathscr{E}^{if}$ は複素局所マルチンゲールである．特に $f_k \in L^2(\mathbb{R}_+)$ との仮定より，

$$\left|\mathscr{E}_t^{if}\right| = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\int_0^t f_k^2(s)ds\right) \le \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\int_0^\infty f_k^2(s)ds\right) < \infty.$$

よって $\mathscr{E}^{if}$ は有界なので，複素マルチンゲールである．

(iii)$\Longrightarrow$(i)．$0 < T$ を任意に選んで，任意の $\xi \in \mathbb{R}^d$ に対して $f = \xi 1_{[0,T]}$ とおく．このとき $f_k = \xi_k 1_{[0,T]} \in L^2(\mathbb{R}_+)$ であるから，(iii) により

$$\mathscr{E}_t^{if} = \exp\left(i(\xi, X_{t\wedge T}) + \frac{1}{2}|\xi|^2(t\wedge T)\right)$$

は複素マルチンゲールである．（ただし，(x, y) は $\mathbb{R}^d$ の内積である．）マルチンゲール性と条件付き期待値の

性質より任意の $0 \le s < t$ と $A \in \mathscr{F}_s$ に対して

$$\begin{aligned}
E\left[1_A e^{i(\xi, X_t - X_s) + |\xi|^2(t-s)}\right] & E\left[\left(1_A e^{-i(\xi, X_s) - |\xi|^2 s}\right) e^{i(\xi, X_t) + |\xi|^2 t}\right] \\
&= E\left[\left(1_A e^{-i(\xi, X_s) - |\xi|^2 s}\right) E[e^{i(\xi, X_t) + |\xi|^2 t} \mid \mathscr{F}_s]\right] \\
&= E\left[\left(1_A e^{-i(\xi, X_s) - |\xi|^2 s}\right) e^{i(\xi, X_s) + |\xi|^2 s}\right] \\
&= P(A)
\end{aligned}$$

がなりたつ[*110]．これを整理すれば

$$E\left[1_A e^{i(\xi, X_t - X_s)}\right] = P(A) e^{|\xi|^2(t-s)} = E[1_A e^{|\xi|^2(t-s)}].$$

すなわち

$$E\left[e^{i(\xi, X_t - X_s)} \mid \mathscr{F}_s\right] = e^{|\xi|^2(t-s)}$$

が分かる．これは $X_t - X_s$ が $\mathscr{F}_s$ と独立で $X_t - X_s \sim N(0, t-s)$ を示している．T, t, s は任意に選んだものだったから，X はブラウン運動であることが示される． □

5.3 Girsanov の定理

$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, P)$ をフィルター付き確率空間とし，$B = (B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d)})_{t \in \mathbb{R}_+}$ を d 次元 $(\mathscr{F}_t)$ -標準ブラウン運動とする．

定理 5.3.1 (Girsanov)**.** $H^{(i)} \in L^2_{loc}(B)$ $(i = 1, \dots, d)$ に対して

$$L_t = \exp\left(\sum_{i=1}^d \int_0^t H_s^{(i)} dB_s^{(i)} - \frac{1}{2}\int_0^t \|H_s\|^2 ds\right)$$

とおいたとき，(L_t) が $(\mathscr{F}_t)$ -マルチンゲールになっているものとする．このとき，　$dP^{(L_t)} = L_t dP$ および

$$W_t^{(i)} = B_t^{(i)} - \int_0^t H_s^{(i)} ds$$

とおけば，任意の $T \in [0, \infty[$ に対して確率過程 $W = (W_t^{(1)}, \dots, W_t^{(d)})_{t \in [0,T]}$ は確率測度 $P^{(L_T)}$ の下で d 次元 $(\mathscr{F}_t)$ -標準ブラウン運動である．

証明のためにいくつか補題を用意する．

補題 5.3.2 (Bayse' rule)**.** 定理 5.3.1 の条件のもと，$T \in [0, \infty[$ を固定して考える．$0 \le s \le t \le T$ および $P^{(L_T)}$ 可積分な $\mathscr{F}_t$ -可測関数　Y に対して，次の等式が成立つ：

$$E^{(L_T)}[Z|\mathscr{F}_s] = \frac{1}{L_s} E[Z L_t | \mathscr{F}_s], \quad P \text{ and } P^{(L_T)}\text{-a.s.} \tag{5.3.1}$$

ただし，$E^{(L_T)}[\,\cdot \mid \cdot\,]$ は確率測度 $P^{(L_T)}$ の下での条件付き期待値を表す．

[*110] $1_A e^{-i(\xi, X_s) - |\xi|^2 s}$ は非負かつ有界な $\mathscr{F}_s$ -可測関数であることに注意

証明．はじめに $P^{(L_T)}$ が確率測度になっていることを確認する．$P^{(L_t)}$ が非負測度となっていることは測度と積分の一般論より分かる．マルチンゲール性より

$$P^{(L_t)}(\Omega) = \int_\Omega L_t(\omega)P(d\omega) = \int_\Omega L_0(\omega)P(d\omega) = 1$$

となり，$P^{(L_t)}$ は実際に確率測度であることがわかった．しかもこれは P と同値な測度になっていることに注意する．次に $\mathscr{F}_t$ 上 $P^{(L_T)} = P^{(L_t)}$ であることを示そう．$E \in \mathscr{F}_t$ とすれば，マルチンゲール性より

$$P^{(L_t)}(E) = \int_\Omega 1_E(\omega)L_tP(d\omega) = \int_\Omega 1_E(\omega)L_TP(d\omega) = P^{(L_T)}(E)$$

である．

Z を $P^{(L_T)}$ 可積分なる $\mathscr{F}_t$ -可測関数とすれば，任意の　$E \in \mathscr{F}_s$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_\Omega 1_E \frac{E[ZL_t|\mathscr{F}_s]}{L_s} dP^{(L_T)} &= \int_\Omega 1_E \frac{E[ZL_t|\mathscr{F}_s]}{L_s} dP^{(L_s)} \\
&= \int_\Omega 1_E \frac{E[ZL_t|\mathscr{F}_s]}{L_s} L_s dP \\
&= \int_\Omega 1_E E[ZL_t|\mathscr{F}_s] dP \\
&= \int_\Omega 1_E ZL_t dP \\
&= \int_\Omega 1_E Z dP^{(L_t)} \\
&= \int_\Omega 1_E Z dP^{(L_T)}
\end{aligned}$$

であるから

$$E^{(L_T)}[Z \mid \mathscr{F}_s] = \frac{E[ZL_t \mid \mathscr{F}_s]}{L_s}$$

がなりたつ． □

以下の議論では $T \in [0,\infty[$ を固定し，表記の簡略化のため $P^{(L_T)} = \widetilde{P}$ および $E^{L_T}[\,\cdot \mid \cdot\,] = \widetilde{E}[\,\cdot \mid \cdot\,]$ と書くことにする．また，P および $\widetilde{P}$ に対応するブラケットをそれぞれ $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ で表す．

補題 5.3.3. 定理 5.3.1 の仮定の下で考える．$M, N \in \mathscr{M}_0^{c,loc}((\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$ に対して

$$\widetilde{M} = M - \sum_{i=1}^d H^{(i)} \bullet \langle M, B^{(i)} \rangle$$

$$\widetilde{N} = N - \sum_{i=1}^d H^{(i)} \bullet \langle N, B^{(i)} \rangle$$

と定めれば $\widetilde{M}, \widetilde{N} \in \mathscr{M}_0^{c,loc}((\mathscr{F}_t), \widetilde{P})$ であり，

$$\langle\!\langle \widetilde{M}, \widetilde{N} \rangle\!\rangle = \langle M, N \rangle, \quad P \text{ (and } \widetilde{P}\text{)-a.s.}$$

が成り立つ．

証明．一般の場合は局所化を考えればよいから，M, N, $\langle M,M\rangle$, $\langle N,N\rangle$, (L_t), $H^{(i)}\bullet\langle B^{(i)}\rangle$ は有界として示せば十分である．國田・渡辺の不等式より

$$\begin{aligned}\left|(H^{(i)}\bullet\langle M,W^{(i)}\rangle)_t\right|^2 &\le [\langle M,M\rangle_t]\left[(H^{(i)})^2\bullet\langle B^{(i)},B^{(i)}\rangle_t\right]\\ &=[\langle M,M\rangle_t]\left[\int_0^t (H_s^{(i)})^2ds\right]\end{aligned}$$

となるから，このとき $\widetilde{M},\widetilde{N}$ も有界である．確率過程 X を

$$X_t=\sum_{i=1}^d\int_0^t H^{(i)}dB_s^{(i)}-\frac{1}{2}\int_0^t\|H_s\|^2ds$$

定めよう．（これは P の下では明らかにセミマルチンゲールである．）$L_t=e^{X_t}$ だったから，伊藤の公式により

$$\begin{aligned}L_t&=L_0+\int_0^t L_sdX_s+\frac{1}{2}\int_0^t L_sd\langle X,X\rangle_s\\ &=1+\sum_{i=1}^d\int_0^t L_sH_s^{(i)}dB_s^i\end{aligned}\tag{5.3.2}$$

となる．部分積分公式により

$$\begin{aligned}&L_t\widetilde{M}_t\\ &=\int_0^t L_sd\widetilde{M}_s+\int_0^t\widetilde{M}_sdL_s+\langle L,\widetilde{M}\rangle_t\\ &=\int_0^t L_sdM_s-\sum_{i=1}^d\int_0^t L_sH^{(i)}d\langle M,B^{(i)}\rangle+\sum_{i=1}^d\int_0^t\widetilde{M}_sH^{(i)}L_sdB_s^{(i)}+\sum_{i=1}^d\Big(LH^{(i)}\bullet\langle B^{(i)},M\rangle\Big)_t\\ &=\int_0^t L_sdM_s+\sum_{i=1}^d\int_0^t\widetilde{M}_sH^{(i)}L_sdB_s^{(i)}\end{aligned}$$

が成立．これより $(\widetilde{M}_tL_t)$ は P のもと局所マルチンゲールとなるが，さらに有界性の仮定よりマルチンゲールとなる．したがって

$$\begin{aligned}\widetilde{E}[\widetilde{M}_t|\mathscr{F}_s]&=\frac{1}{L_s}E[\widetilde{M}_tL_t|\mathscr{F}_s]\quad(\because\text{Bayse' rule})\\ &=\frac{1}{L_s}\widetilde{M}_sL_s\quad(\because\text{martingale property})\\ &=\widetilde{M}_s\end{aligned}$$

となり，$\widetilde{M}$ は $(\mathscr{F}_t,\widetilde{P})$ -マルチンゲールである．同様にして　$\widetilde{N}$ も $(\mathscr{F}_t,\widetilde{P})$ -マルチンゲールである．

部分積分公式を再び用いれば

$$\begin{aligned}
&\widetilde{M}_t\widetilde{N}_t - \langle M, N\rangle_t \\
&= \widetilde{M}_t\widetilde{N}_t - \langle \widetilde{M}, \widetilde{N}\rangle_t \\
&= \int_0^t \widetilde{M}_s d\widetilde{N}_s + \int_0^t \widetilde{N}_s d\widetilde{M}_s + \langle \widetilde{M}, \widetilde{N}\rangle_t \\
&= \int_0^t \widetilde{M}_s dN_s + \int_0^t \widetilde{N}_s dM_s - \sum_{i=1}^d \left[\int_0^t \widetilde{M}_s H_s^{(i)} d\langle M, B^i\rangle_s + \int_0^t \widetilde{N}_s H_s^{(i)} d\langle N, B^i\rangle_s\right]
\end{aligned}$$

となるから，さらに

$$\begin{aligned}
&L_t\left[\widetilde{M}_t\widetilde{N}_t - \langle M, N\rangle_t\right] \\
&= \int_0^t L_s d\left(\widetilde{M}\widetilde{N} - \langle M, N\rangle\right)_s + \int_0^t \left[\widetilde{M}_s\widetilde{N}_s - \langle M, N\rangle_s\right] dL_s + \left\langle L, \widetilde{M}\widetilde{N} - \langle M, N\rangle\right\rangle_t \\
&= \int_0^t L_s\widetilde{M}_s dN_s + \int_0^t L_s\widetilde{N}_s dM_s + \sum_{i=1}^d \int_0^t \left[\widetilde{M}_s\widetilde{N}_s - \langle M, N\rangle_s\right] H_s^{(i)} L_s dB_s^{(i)}
\end{aligned}$$

が分かる．この表現から $L_t\left[\widetilde{M}_t\widetilde{N}_t - \langle M, N\rangle_t\right]$ は $(\mathscr{F}_t, P)$ -マルチンゲールであることが分かり， (5.3.1) より

$$\begin{aligned}
\widetilde{E}[\widetilde{M}_t\widetilde{N}_t - \langle M, N\rangle_t|\mathscr{F}_s] &= \frac{1}{Z_s}E\left[L_t\left(\widetilde{M}_t\widetilde{N}_t - \langle M, N\rangle_t\right)|\mathscr{F}_s\right] \\
&= \frac{1}{Z_s}L_s\left(\widetilde{M}_s\widetilde{N}_s - \langle M, N\rangle_s\right)
\end{aligned}$$

となる．すなわち，$(\widetilde{M}_t\widetilde{N}_t - \langle M, N\rangle_t)$ は $\widetilde{P}$ のもとマルチンゲールである．ブラケットの一意性より $\langle\!\langle \widetilde{M}, \widetilde{N}\rangle\!\rangle = \langle M, N\rangle$ が示される． □

定理 *5.3.1* の証明．定理 5.2.4 により，W が $\widetilde{P}$ の下で連続局所マルチンゲールになっていることと，W の二次変分が $\widetilde{P}$ のもと

$$\langle\!\langle W^{(i)}, W^{(j)}\rangle\!\rangle_t = \delta_{ij}t$$

で与えられることを示せばよい．したがって示すべきは

$$\langle B^{(i)}, B^{(j)}\rangle = \langle\!\langle W^{(i)}, W^{(j)}\rangle\!\rangle, \quad 1 \le i \le d, \quad P\text{-a.s.}$$

である[*111]．補題 5.3.3 において $M = B^{(i)}$, $N = B^{(j)}$, $\widetilde{M} = W^{(i)}$, $\widetilde{N} = W^{(j)}$ とおけば

$$\langle\!\langle W^{(i)}, W^{(j)}\rangle\!\rangle_t(\omega) = \langle B^{(i)}, B^{(j)}\rangle_t(\omega), \quad t \in [0, T], \quad P\text{-a.s.}$$

が分かる． □

[*111] 測度の同値性より $\widetilde{P}$-a.s. と言っても同じである

5.4 マルチンゲール表現定理

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，$B = (B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を Brown 運動とする．この節を通して，フィルトレーション $(\mathscr{F}_t)$ は Brown 運動によって生成されるフィルトレーションの augumentation を考える．

$\mathscr{T}$ を

$$\mathscr{T} = \{f \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+), m) \mid f \text{ は（5.4.1）のような表現をもつ.}\}$$

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{]t_{i-1},t_i]}(t) \quad (0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty) \tag{5.4.1}$$

と定義する[*112]．ここで，$L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$ の元を確率変数族とみて $L^2_{loc}(B)$ の元を対応させることにより埋め込み $L^2(\mathbb{R}_+) \hookrightarrow L^2_{loc}(B)$ が定まり，これにより $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$ の元と $L^2_{loc}(B)$ の元を同一視することにする．ここで

$$\mathscr{E}^f := \mathscr{E}(f \bullet B) = \exp\left(\int_0^t f(s)dB_s - \int_{]0,t]} f^2(s)ds\right)$$

と定義することにする．

補題 5.4.1. $\mathscr{W} = \{\mathscr{E}^f_\infty ; f \in \mathscr{T}\}$ とおけば[*113] $\mathscr{W}$ は $L^2(\Omega, \mathscr{F}_\infty, P)$ で total[*114]である．[*115]

証明．$L^2(\Omega, \mathscr{F}_\infty, P)$ の Hilbert 構造に注目すれば，$\mathscr{W}^\perp = \{0\}$ を言えばよい．そのため，$Y \in \mathscr{W}^\perp$ なら $Y \cdot P$ が零測度になることを示す．さらに，実は $Y \cdot P$ が任意の $0 = t_0 < t_1 < \ldots, < t_n \le T$ に対して $\sigma(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$ 上で 0 であることを示せば十分である．

$$\varphi(z_1, \ldots, z_n) = E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{n} z_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\right) \cdot Y\right]$$

とおけば，φ は $\mathbb{C}^n$ で解析的である．[*116]ところで，Y の選び方から[*117] $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ に対して

$$\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\right) \cdot Y\right] = 0.$$

実解析関数 $\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ の $\mathbb{C}^n$ への拡張は一意的なので，φ は $\mathbb{C}^n$ 上 0 である．このことから，特に

$$\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = E\left[\exp\left(\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\right) \cdot Y\right] = 0.$$

[*112] ただし，m は Lebesgue 測度を表す．

[*113] f の可積分性より $\mathscr{E}^f$ は H^2 の元となり，よって極限 $\mathscr{E}_\infty$ が存在することに注意すべし．

[*114] total はその線形包が稠密であるという意味．（Schaefer [43] より．）適切な訳語は何であろうか．

[*115] この命題は Revuz and Yor [38] による．証明の一部に，多変数解析関数論の初等的な結果が使われている．多変数複素関数については一松 [20] などを参考にされたい．

[*116] 各変数に関して積分記号下での微分を行えば，その変数についての微分可能性が得られる（はず）．実は多変数複素関数においては，各変数について正則なら多変数複素関数として正則であることが導かれる．（Hartogs の正則性定理．）自分は詳しくないので，この辺りは割といい加減であるが...

[*117] exp の中身が $\mathscr{T}$ の元の確率積分になっていることに注意．ルベーグ積分の項は，期待値をとれば外に出る．

$(B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ のフーリエ変換が 0 なので，その確率変数の像測度 $Y \cdot P$ も 0 である．これより，$Y \cdot P$ は $\sigma(B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) = \sigma(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ 上 0 である．$\mathscr{F}_\infty$ がこういったもの全体[*118]によって生成されるもの[*119]であったから，$\mathscr{F}_\infty$ 上で $Y \cdot P = 0$. □

定理 5.4.2. $F \in L^2(\mathscr{F}_\infty, P)$ に対してある $H \in L^2_\infty(B)$ が一意に存在して

$$F = E[F] + \int_0^\infty H_s dB_s, \quad P\text{-a.s.} \tag{5.4.2}$$

証明. $L^2(\mathscr{F}_\infty, P) \supset \mathscr{V}$ で上のような表現を持つ確率変数の全体を表すことにする．このとき $\mathscr{V}$ が $L^2(\mathscr{F}_\infty, P)$ の閉（線形）部分空間であることを示す．$\mathscr{V}$ が線形部分空間であることは明らかである．したがって，$\mathscr{V}$ の完備性を示せばよい．ここで，$F \in \mathscr{V}$ に対して，伊藤の等長性より以下の等式が成り立つことに注意しておく．

$$E[F^2] = (E[F])^2 + E\left[\int_0^\infty H_s^2 ds\right]. \tag{5.4.3}$$

(F_n) を $\mathscr{V}$ の Cauchy 列とし

$$F_n = E[F_n] + \int_0^\infty |H_s^{(n)}|^2 dBs$$

という表現を持つとする．このとき

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^\infty |H_s^{(n)} - H_s^{(m)}|^2 ds\right] &= E[(F_n - F_m)^2] - |E[F_n - F_m]|^2 \\ &\le E[F_n - F_m]^2 = \|F_n - F_m\|^2_{L^2(\mathscr{F}_\infty, P)} \end{aligned}$$

より，$(H^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ は $L^2_\infty(B)$ の Cauchy 列である．$L^2_\infty(B)$ の完備性より $H^{(n)} \longrightarrow {}^\exists H \text{ in } L^2_\infty(B)$ であり，等長性から

$$F_n - E[F_n] = \int_0^\infty H_s^{(n)} dB_s \longrightarrow \int_0^\infty H_s dB_s \quad \text{in } L^2(\mathscr{F}_T, P).$$

が分かる．F_n は L^1 でも収束するから，適当な部分列を選んで極限をとれば

$$F = E[F] + \int_0^\infty H_s dB_s \quad \text{a.e. on } (\Omega, \mathscr{F}_\infty, P).$$

よって $F \in \mathscr{V}$ であり，$\mathscr{V}$ は完備である．補題 5.4.1 よりあとは $\mathscr{W} \subset \mathscr{V}$ を示せば，存在の証明が完了する．伊藤の公式により，任意の $t \in \mathbb{R}_+$ に対して

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_t^f &= \mathscr{E}_0^f + \int_0^t \mathscr{E}_s^f \left(f(s)dB_s - \frac{1}{2}f(s)^2 ds\right) + \frac{1}{2}\int_0^t f(s)^2 ds \\ &= 1 + \int_0^t \mathscr{E}_s^f f(s) dB_s. \end{aligned}$$

[*118] これは π-系をなす．

[*119] 正確には，その augmentation をとったものであるが，結局 P-零集合が付け加わったに過ぎないのでここでの結論には影響しない．

が成立．Fubini の定理より

$$
\begin{aligned}
E\int_0^t \left(\mathscr{E}_s^f f(s)\right)^2 ds &= \int_0^t f(s)^2\, E\left[\left(\mathscr{E}_s^f\right)^2\right] ds \\
&= \int_0^t f(s)^2\, E\left[\exp\left(2\int_0^s f(u)dB_u - \int_0^s f(u)^2 du\right)\right] ds \\
&= \int_0^t f(s)^2 \exp\left(-\int_0^s f(u)^2 du + 2\int_0^s f(u)^2 du\right) ds \\
&\leq \exp\left(\int_0^t f(u)^2 du\right)\int_0^t f(u)^2 du < \infty
\end{aligned}
$$

となり，$t\to\infty$ とすれば $\mathscr{E}^f \in L^2_\infty(B)$ を得る[*120]．したがって $\mathscr{W}\subset\mathscr{V}$ が従う．一意性は，$H,K\in L^2_\infty(B)$ が共に M を表現するとき，

$$
\begin{aligned}
E\left[\int_0^\infty (H_s-K_s)^2 ds\right] &= E\left[\left(\int_0^\infty (H_s-K_s)dB_s\right)^2\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となることから分かる． □

定理 5.4.3. $M=(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を連続な $(\mathscr{F}_t)$ -局所マルチンゲールとする．このとき，ある定数 C と確率過程 $H\in L^2_{loc}(B)$ が存在して

$$
M_t = C + \int_0^t H_s dB_s \tag{5.4.4}
$$

がなりたつ．さらにこの表現は一意である．

証明．$M\in H^2(\mathscr{F}_t)$ のとき．定理 5.4.2 より

$$
M_\infty = E[M_\infty] + \int_0^\infty H_s dB_s \tag{5.4.5}
$$

と一意に表現できる．両辺で $\mathscr{F}_t$ に関する条件付き期待値をとればよい．M が連続局所マルチンゲールの場合は，M の局所化列で特に M^{T_n} が[*121] $H^2(\mathscr{F}_t)$ の元となるようなものを考える．このとき，各 n に対して

$$
M_t^{T_n} = C + \int_0^t H_s^{(n)} dB_s
$$

と一意的に表現される．[*122] ここで，$n<m$ とすれば，表現の一意性より $[\![0,T_n]\!]$ 上では $H^{(n)}=H^{(m)}$ が $P\otimes m$-a.s. の意味で成り立つ．そこで

$$
H_t(\omega) = \begin{cases} H_t^{(n)}(\omega) & (\omega,t)\in[\![0,T_n]\!] \\ 0 & (\omega)\in\Omega\times\mathbb{R}_+\setminus\bigcup_n [\![0,T_n]\!] \end{cases} \tag{5.4.6}
$$

と定める．このとき明らかに $H\in L^2_{loc}(B)$ かつ

$$
M_t = C + \int_0^t H_s dB_s
$$

*120 $\mathscr{T}\subset L^2_\infty(B)$ に注意せよ．

*121 このノートでの局所マルチンゲールの定義は $M^{T_n}1_{\{T_n>0\}}$ が云々というものであったが，いま $(\mathscr{F}_t)$ の作り方から $\mathscr{F}_0$-可測関数は必然的に殆ど定数になることに注意．

*122 任意の $n,m\in\mathbb{N}$ に対して明らかに $E[M_{T_n}]=E[M_{T_m}]$ なので，その共通の値を C が取れる．

であり，作り方から $P\otimes m$-a.e. の一意性もわかる． $\square$

注意 5.4.4. 定理 5.4.3 における連続性の仮定は落とすことが出来る．Revuz & Yor [38] などを参照せよ．

5.5 伊藤の公式の拡張と局所時間

はじめに，伊藤の公式の凸関数への拡張を行う．

定理 5.5.1. X を連続セミマルチンゲールとし，f を凸関数とする．このとき，以下の等式を満たすような連続増加過程 A^f が存在する：

$$f(X_t)-f(X_0)=\int_0^t f'_-(X_s)dX_s+\frac{1}{2}A^f_t.$$

ただし，f'_- は f の左微分を表す．

証明．はじめに，f は凸関数なので任意の点で右微分および左微分を持ち，かつ（Lebsugue 測度に関して）殆どいたるところ微分可能であることに注意しておく．f が C^2 級ならば，

$$A^f_t=\int_0^t f''(X_s)d\langle X,X\rangle_s$$

とおけばよい．実際，f は凸なので二階微分は常に正である．

f が一般の凸関数の場合の証明は，mollifier（のようなもの？）を作用させて滑らかな場合に帰着させることで示す．ρ は以下の条件を満たす関数とする：

- $\rho\in C^\infty_c(\mathbb{R})$ かつ $\rho\geq 0$.
- $\displaystyle\int_{]-\infty,0]}\rho(x)dx=1.$
- $\operatorname{supp}\rho\subset\,]-\infty,0]$.

この ρ に対して，$\rho_n(x)=n\rho(nx)$ と定める．ここで

$$f_n(x)=\int_{]-\infty,0]}f(x+y)\rho_n(y)dy$$

とおけば $f_n\in C^\infty$ であって $f_n\to f$ (pointwise) が成立．さらに，$f'_n\uparrow f'_-$ である．

$\because$ f が well-defined であることは，f の局所有界性より分かる[*123]．f が凸より連続なので，任意の $\varepsilon>0$ に対してある $\delta=\delta(\varepsilon)$ が存在して

$$|y|<\delta\Longrightarrow|f(x+y)-f(x)|<\varepsilon$$

*123 凸関数は連続．

が成立．いま，十分大きな n をとれば $\operatorname{supp}\rho \subset]-\delta, 0]$ と出来るから，

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{]-\infty,0]} f(x+y)\rho_n(y)dy - f(x) \right| \\
&= \left| \int_{]-\infty,0]} f(x+y)\rho_n(y)dy - \int_{-\infty,0]} f(x)\rho_n(y)dy \right| \\
&\leq \int_{]-\infty,0]} |f(x+y) - f(x)|\rho_n(y)dy \\
&= \int_{]-\delta,0]} |f(x+y) - f(x)|\rho_n(y)dy \\
&\leq \varepsilon \int_{]-\delta,0]} \rho_n(y)dy \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

より各点収束が分かる．f_n が C^∞ であることは，与えられた条件より微分と積分の交換が正当化され

$$\frac{d}{dx}\int_{]-\infty,0]} f(x+y)\rho_n(y)dy = \frac{d}{dx}\int_{]-\infty,0]} f(y)\rho_n(z-x)dz = \int_{]-\infty,0]} f(y)\frac{\partial \rho_n}{\partial x}(z-x)dz$$

となることより分かる．また f は凸より f'_- は左連続な増加関数であるから，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f_n(x) &= \frac{d}{dx}\int_{]-\infty,0]} f\left(x + \frac{z}{n}\right)\rho(z)dz \\
&= \int_{]-\infty,0]} f'_-\left(x + \frac{z}{n}\right)\rho(z)dz \\
&\leq \int_{]-\infty,0]} f'_-\left(x + \frac{z}{n+1}\right)\rho(z)dz = Df_{n+1}(x) \\
&\leq \int_{]-\infty,0]} f'_-\left(x\right)\rho(z)dz = f'_-(x)
\end{aligned}$$

となって $f'_1 \leq f'_2 \leq \cdots \leq f'_-$ であり，特に単調収束定理より[*124]

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = \int_{]-\infty,0]} \lim_{n\to\infty}\left\{f'_-\left(x + \frac{z}{n}\right)\right\}\rho(z)dz = \int_{]-\infty,0]} f'_-(x)\rho(z)dz = f'_-(x)$$

が任意の x で成立．

ここで，各 n については伊藤の公式より

$$f_n(X_t) = f_n(X_0) + \int_{]0,t]} f'_n(X_s)dX_s + A_t^{f_n}$$

が成立．$n \to \infty$ とすれば，確率積分に関する優収束定理より

$$f_n(X_t) - f_n(X_0) - \int_0^t f'_n(X_s)dX_s \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ucp.}} f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t f'_-(X_s)dX_s$$

となる．これより A^{f_n} の極限たる増加過程 A^f が存在する．特に A のバージョンとして連続なものをとればよい．□

以下では，$\operatorname{sgn}(x) = 1_{]a,\infty[} - 1_{]-\infty,a]}$ とおくことにする．

*124 この列は必ずしも非負ではないが，$f'_-(x+z)$ の可積分性より単調収束定理の適用が可能．

定理 5.5.2 (田中の公式)**.** $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$ を通常の条件を満たすフィルターつき確率空間，X をセミマルチンゲールとする．このとき，$a \in \mathbb{R}$ に対して $(X-a)^+$，$(X-a)^-$，$|X-a|$ はどれもセミマルチンゲールである．各 a に対して連続増加過程 L^a が存在し，それぞれのセミマルチンゲール表現は以下のようになる：

$$
\begin{aligned}
|X_t - a| &= |X_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s + L_t^a \\
(X_t - a)^+ &= (X_0 - a)^+ + \int_0^t 1_{]a,\infty[}(X_s) dX_s + \frac{1}{2} L_t^a \\
(X_t - a)^- &= (X_0 - a)^- + \int_0^t 1_{]-\infty,a]}(X_s) dX_s + \frac{1}{2} L_t^a
\end{aligned}
$$

証明．凸関数 $x \mapsto x^+$ および $x \mapsto x^-$ にそれぞれ伊藤の公式を適用すれば，

$$
(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t 1_{]a,\infty[}(X_s) dX_s + \frac{1}{2} A_t^+ \tag{5.5.1}
$$

$$
(X_t - a)^- = (X_0 - a)^- - \int_0^t 1_{]-\infty,a]}(X_s) dX_s + \frac{1}{2} A_t^- \tag{5.5.2}
$$

なる表現を得る．(5.5.1)−(5.5.2) を計算すれば，

$$
\begin{aligned}
X_t - a &= X_0 - a + \int_0^t dX_s + \frac{1}{2}(A_t^+ - A_t^-) \\
&= X_0 - a + X_t - X_0 + \frac{1}{2}(A_t^+ - A_t^-)
\end{aligned}
$$

となるから，$A^+ = A^-$ が分かる．よって $A^+ = L_t^a$ とおけば $(X-a)^+$ と $(X-a)^-$ の表現を得る．さらに (5.5.1)+(5.5.2) により

$$
|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s + L_t^a
$$

も分かり，定理の主張が示された． □

定義 5.5.3. 命題 5.5.2 で存在の示された確率過程 $L^a = L^a(X)$ を，連続セミマルチンゲール X の a における局所時間 (local time) という．

補題 5.5.4. Stieltjes 測度 $dL^a(\omega)$ は P-a.s. で $\operatorname{supp} dL^a(\omega) \subset \{X_t = a\}$ を満たす．

証明．セミマルチンゲール $|X-a|$ と C^∞ 級関数 x^2 に伊藤の公式を用いれば，

$$
(X_t - a)^2 = (X_0 - a)^2 + \int_0^t 2|X_s - a| d|X - a|_s + \langle |X-a|, |X-a| \rangle_t \tag{5.5.3}
$$

が成り立つ．田中の公式より $|X-a|$ のセミマルチンゲール表現は

$$
|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s + L_t^a
$$

となるから，(5.5.3) はさらに

$$
\begin{aligned}
&(X_t-a)^2\\
&=|X_0-a|^2+\int_0^t 2|X_s-a|\,(\mathrm{sgn}(X_s-a)dX_s+dL_s^a)+\{\mathrm{sgn}(X_s-a)\}^2\langle X,X\rangle_t\\
&=|X_0-a|^2+2\int_0^t(X_s-a)dX_s+2\int_0^t|X_s-a|dL_s^a+\langle X,X\rangle_t
\end{aligned}
$$

と書き換えられる．一方，セミマルチンゲール $X-a$ に伊藤の公式を適用すれば

$$
(X_t-a)^2=(X_0-a)^2+2\int_0^t(|X_s-a)dX_s+\langle X,X\rangle_t
$$

が得られるから，先ほどの式と比較すれば

$$
\int_0^t|X_s-a|dL_s^a=0 \quad P\text{-a.s.}
$$

を得る． □

局所時間 L^a は a を固定するごとに定義されていたから．(ω,t) に加えて a の関数とも見たとき，一般に可測性は保証されない．しかし，4 章でのパラメータつき確率積分に関する考察から可測なバージョンをとれることが分かる．

補題 5.5.5. 局所時間 L^a に対して，以下の条件を満たす関数 $\widetilde{L}:\mathbb{R}\times\Omega\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ が存在する：

(i) $\widetilde{L}$ は $\mathscr{B}(\mathbb{R})\otimes\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-可測．
(ii) 任意の $a\in\mathbb{R}$ に対して，確率過程 $(\omega,t)\mapsto\widetilde{L}(a,\omega,t)$ と L^a は区別不能．

証明．$H(a,\omega,t)=1_{\{X_t>a\}}(a,\omega,t)$ と定義し，命題 4.5.2 存在の保証される $(H(a)\bullet X)_{a\in\mathbb{R}}$ の可測なバージョンを $H\bullet X$ と表すことにする．$\widetilde{L}$ を

$$
\widetilde{L}(a,\omega,t)=2(X_t-a)^+-2(X_0-a)^+-2(H\bullet X)(a,\omega,t)
$$

と定義すれば，定理 5.5.2 より $\widetilde{L}(a,\cdot,\cdot)$ は L^a と区別不能である． □

これ以降は，L^a は補題 5.5.5 の意味で可測なものとして考えることにする．L^a は a についての可測性をもつので，a についての Lebesgue 積分を考えることができ，以下の伊藤-田中の公式の表現を得る．

定理 5.5.6 (伊藤-田中の公式)**.** X を連続セミマルチンゲールとし，関数 f は二つの凸関数の差で表されるものする．このとき，$f(X)$ はまたセミマルチンゲールで，以下の表現を持つ：

$$
f(X_t)=f(X_0)+\int_0^t f'_-(X_s)dX_s+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}L_t^a f''(da)
$$

証明．f が凸関数の時に示せば十分である．適当な局所化列をとることにより，X の値域はあるコンパクト集

合に含まれるとしてよいから，f'' はコンパクト台を持つと仮定して示す[*125]．さらに，命題 A.9.4 より

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |x-a| f''(da)$$

として示せばよいことが分かる．田中の公式により，

$$\begin{aligned} f(X_t) &= \alpha X_t + \beta + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |X_s - a| f''(da) \\ &= \alpha X_t + \beta + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(|X_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s + L_t^a \right) f''(da) \\ &= f(X_0) + \alpha(X_t - X_0) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s \right) f''(da) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L_t^a f''(da) \end{aligned}$$

が成立する．確率積分に関する Fubini の定理より

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s \right) f''(da) \\ &= \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(X_s - a) f''(da) \right) dX_s \end{aligned}$$

が成り立つから，さらに命題 A.9.4 を用いることにより

$$\begin{aligned} &\alpha(X_t - X_0) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s \right) f''(da) \\ &= \int_0^t \left(\alpha + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(X_s - a) f''(da) \right) dX_s \\ &= \int_0^t f'_-(X_s) dX_s \end{aligned}$$

これより

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_-(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L_t^a f''(da)$$

が分かる． □

系 5.5.7 (滞在時間公式 (occupation times formula))．P-零集合 N で，$\Omega \setminus N$ 上次の条件が成り立つようなものが存在する：任意の有界（または非負）Borel 関数 Φ と任意の t に対して

$$\int_0^t \Phi(X_s) d\langle X, X\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} \Phi(a) L_t^a da$$

証明．まずは，Φ を有界連続関数として示す．Φ^+ と Φ^- を 2 階微分にもつ凸関数をそれぞれ f_1，f_2 とおけば，$f = f_1 - f_2$ に対して伊藤の公式と伊藤-田中の公式より

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) d\langle X, X\rangle_s \\ f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L_t^a f''(a) da \end{aligned}$$

[*125] Borel 測度 μ の台 (support) とは

$$\operatorname{supp}\mu = \bigcap \{F ; F \text{ は閉集合で，} \mu(F^c) = 0\}$$

で定義される閉集合である．

が成り立つ．よって $\int_0^t f''(X_s)d\langle X,X\rangle_s$ と $\int L_t^a f''(da)$ は区別不能である．すなわち，ある P-零集合 Γ_Φ が存在して，$\Omega\setminus\Gamma_\Phi$ 上で

$$\int_0^t \Phi(X_s)d\langle X,X\rangle_s=\int_{\mathbb{R}} L_t^a f''(a)da=\int_{\mathbb{R}} L_t^a\Phi(a)da,\quad \forall t\in\mathbb{R}_+$$

が成立する．

$C_c(\mathbb{R})$ の可算稠密部分集合 D を考える．このとき，系の主張において，$N=\bigcup_{\Psi\in D}\Gamma_\Psi$ とすればよいことを示そう．$\Phi\in C_c(\mathbb{R})$ とすれば，D の列 (Φ_n) で Φ を（一様収束位相で）近似するものが存在する．$\bigcup_{\Psi\in D}\Gamma_\Psi$ の補集合上では，任意の n と任意の t に対して

$$\int_0^t \Phi_n(X_s)d\langle X,X\rangle_s=\int_{\mathbb{R}} L_t^a\Phi_n(a)da$$

が成立する．$n\to\infty$ とすれば[*126]，

$$\int_0^t \Phi(X_s)d\langle X,X\rangle_s=\int_{\mathbb{R}} L_t^a(a)\Phi(a)da$$

である．Φ が任意の有界 Borel 関数の場合は，単調族定理により示される．非負の場合は，$(\Phi\wedge n)_{n\in\mathbb{N}}$ の単調極限を考えればよい． □

注意 5.5.8. 系 5.5.6 において，特に $X=B$（ブラウン運動），$\Phi=1_A$ の場合を考えれば

$$\int_0^t 1_A(B_s)ds=\int_A L_t^a da$$

となる．左辺の量はブラウン運動 (B_s) が時刻 t までに集合 A に滞在する時間の合計と見ることが出来る．この式より，左辺を A に対して時間を対応させる「測度」としてみれば，局所時間はその「密度関数」を表している，という解釈が出来るであろう．

定理 5.5.9. X を連続セミマルチンゲールとする．このとき，確率過程 $(L_t^a(X))_{(a,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}$ の修正 $\widetilde{L}$ で，確率 1 で $(a,t)\mapsto\widetilde{L}(a,t)$ は t について連続，a について *càdlàg* となるようなものが存在する．さらに $X=M+A$ をセミマルチンゲールの分解とすれば，

$$\widetilde{L}(a,t)-\widetilde{L}(a-,t)=2\int_0^t 1_{\{X_s=a\}}dA_s=2\int_0^t 1_{\{X_s=a\}}dX_s$$

が成立する[*127]．特に X が連続局所マルチンゲールなら，(L_t^a) の修正として (a,t) について連続であるようなものが取れる．

証明．田中の公式より局所時間は

$$L_t^a=2\left[(X_t-a)^+-(X_0-a)^+-\int_0^t 1_{]a,\infty[}(X_s)dM_s-\int_0^t 1_{]a,\infty[}(X_s)dA_s\right]$$

と表現されるのであったから，右辺の確率積分の項と Stieltjes 積分の項をそれぞれ考察すればよい．

---

*126 Φ_n は Φ に一様収束することに注意せよ．

*127 「〜な修正がある」というのが定理の主張なので，素朴に考えればこの等式も修正の意味で取るべきだろう．しかし，実際は両辺によい regularity があるので（2-パラメータ (a,t) に関して）区別不能の意味で用いても差し支えない．

まずは局所マルチンゲール部分において，連続な修正の存在を証明する．証明には定理 A.10.1（Kolmogorov の連続変形定理）を用いる．

$$\widehat{M}(a,t)=\int_0^t 1_{\{X_s>a\}}dM_s$$

と定義する．t と有界区間 I を任意に固定して，確率過程 $I\ni a\mapsto \widehat{M}(a,\cdot)\in C([0,t];\mathbb{R})$ の連続修正を取れることを示せば十分である[*128]．$a<b$ および $k>1$ とすれば，

$$\begin{aligned}
&E\left[\left\|\widehat{M}(a,\cdot)-\widehat{M}(b,\cdot)\right\|_{C[0,t]}^{2k}\right]\\
&=E\left[\sup_{s\in[0,t]}\left|\widehat{M}(a,s)-\widehat{M}(b,s)\right|^{2k}\right]\\
&=E\left[\sup_{s\in[0,t]}\left|\int_0^s 1_{]a,b]}(X_u)dM_u\right|^{2k}\right]\\
&\leq C_{2k}E\left[\left(\int_0^t 1_{]a,b]}(X_s)d\langle M,M\rangle_s\right)^k\right]\quad(\because \text{BDG-inequality})\\
&=C_{2k}E\left[\left(\int_{\mathbb{R}} 1_{]a,b]}(x)L_t^x dx\right)^k\right]\quad(\because \text{系 } 5.5.7)\\
&=C_{2k}(b-a)^kE\left[\left(\int_{]a,b]} L_t^x\frac{dx}{b-a}\right)^k\right]\\
&\leq C_{2k}(b-a)^kE\left[\int_{]a,b]} (L_t^x)^k\frac{dx}{b-a}\right]\quad\left(\because \text{Jensen for the probability measure } \frac{dx}{b-a}\right)\\
&=C_{2k}(b-a)^k\frac{1}{b-a}\int_{]a,b]}E\left[(L_t^x)^k\right]dx\quad(\because \text{Fubini})\\
&\leq C_{2k}(b-a)^k\sup_{x\in I}E\left[(L_t^x)^k\right]
\end{aligned}$$

が成立する．ここで

$$|(X_t-x)^+-(X_0-x)^+|\leq|X_t-X_0|$$

に注意すれば

$$\begin{aligned}
(L_t^x)^k&=2^k\left|(X_t-x)^+-(X_0-x)^+-\int_0^t 1_{]x,\infty[}(X_s)dM_s-\int_0^t 1_{]x,\infty[}(X_s)dA_s\right|^k\\
&\leq 2^k\left(|X_t-X_0|+\int_0^t|dA|_s+\left|\int_0^t 1_{]x,\infty[}(X_s)dM_s\right|\right)^k\\
&\leq 2^k3^{k-1}\left[|X_t-X_0|^k+\left(\int_0^t|dA|_s\right)^k+\left|\int_0^t 1_{]x,\infty[}(X_s)dM_s\right|^k\right]
\end{aligned}$$

[*128] 一般に連続関数 $g:I\to C([0,t];\mathbb{R})$ が与えられたとき，関数 $I\times[0,t]\ni(a,s)\mapsto g(x)(t)\in\mathbb{R}$ は連続になることに注意されたい．

が成立するから[129]，

$$
\begin{aligned}
E\left[(L_t^x)^k\right] &\le 2^k 3^{k-1} E\left[|X_t - X_0|^k + \left(\int_0^t |dA|_s\right)^k + \left|\int_0^t 1_{]x,\infty[}(X_s) dM_s\right|^k\right] \\
&\le 2^k 3^{k-1} E\left[|X_t - X_0|^k + \left(\int_0^t |dA|_s\right)^k + C_k \left(\int_0^t 1_{]x,\infty[}(X_s) d\langle M, M\rangle_s\right)^{k/2}\right] \\
&\le 2^k 3^{k-1} E\left[|X_t - X_0|^k + \left(\int_0^t |dA|_s\right)^k + C_k \langle M, M\rangle_t^{k/2}\right] \\
&\le 2^k 3^{k-1} (1 + C_k) E\left[|X_t - X_0|^k + \left(\int_0^t |dA|_s\right)^k + \langle M, M\rangle_t^{k/2}\right]
\end{aligned}
$$

となる．ここで，最後の辺はもはや x によらない量であることに注目しよう．ここで，

$$
T_n := \inf\left\{ t \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; \sup_{s\in[0,t]} |X_t - X_0|^k + \left(\int_0^t |dA|_s\right)^k + \langle M, M\rangle_t^{k/2} \ge n \right\}
$$

とおけば，

$$
\widetilde{C}(t,k,n) := C_{2k} 2^k 3^{k-1} (1 + C_k) E\left[|X_t^{T_n} - X_0|^k + \left(\int_0^{t\wedge T_n} |dA|_s\right)^k + (\langle M, M\rangle_t^{T_n})^{k/2}\right] < \infty
$$

が成り立つ．ここまでの議論により

$$
E\left[\left\|\widehat{M}(a,\cdot) - \widehat{M}(b,\cdot)\right\|_{C[0,t]}^{2k}\right] \le \widetilde{C}(t,k,n)|b-a|^k
$$

が成立するから[130]，Kolmogorov の連続変形定理により $a \mapsto \widehat{M}^{T_n}(a,\cdot)$ は I 上連続修正を持つ．これより $M(a,\cdot)$ もまた連続修正を持つ．なお，これより X 自身が連続局所マルチンゲールの場合は，(a,t) について連続な修正をとれることが分かる．

次に，有界変動部分を考察しよう．

$$
\widehat{A}(a,t) = \int_0^t 1_{\{X_s > a\}} dA_s
$$

とおいたとき，$(a,t) \mapsto \widehat{A}(a,t)$ が a について *càdlàg*，t について連続であることを示すのが目的である．Lebesgue の収束定理により，

$$
\widehat{A}(a-,t) = \lim_{b\uparrow\uparrow a} \int_0^t 1_{\{X_s > b\}} dA_s = \int_0^t 1_{\{X_s \ge a\}} dA_s
$$

が成立．よって左極限が存在する．同様にして

$$
\widehat{A}(a+,t) = \lim_{b\downarrow\downarrow a} \int_0^t 1_{\{X_s > b\}} dA_s = \int_0^t 1_{\{X_s > a\}} dA_s = \widetilde{A}(a,t)
$$

となり，右連続性が分かる．

---

*129 一種の凸不等式で，Jensen の不等式から導かれる．

*130 この評価自体は，a, b の走る区間 I にすらよらない．（念のため．）

以上のことから，$(L_t^a(X))_{(a,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}$ は a について *càdlàg*，t について連続な修正（$\widetilde{L}$ で表す）を持つことが分かった．田中の公式の表現と局所マルチンゲール項の連続性より

$$\widetilde{L}(a,t)-\widetilde{L}(a-,t)=2\left(\widehat{A}(a-,t)-\widehat{A}(a,t)\right)=2\int_0^t 1_{\{X_s=a\}}dA_s$$

が成立する．さらに滞在時間公式より

$$\int_0^t 1_{\{X_s=a\}}d\langle M,M\rangle_s=\int_0^t 1_{\{X_s=a\}}d\langle X,X\rangle_s=\int_{\mathbb{R}} 1_{\{a\}}L_t^a(X)da=0$$

となるから，

$$\int_0^t 1_{\{X_s=a\}}dM_s=0$$

である[*131]．これにより

$$\widetilde{L}(a,t)-\widetilde{L}(a-,t)=2\int_0^t 1_{\{X_s=a\}}dA_s=2\int_0^t 1_{\{X_s=a\}}dX_s$$

が示される． □

これ以降，局所時間は常に定理 5.5.9 で存在の保証されたバージョンを考えることとする．

系 5.5.10. X を連続セミマルチンゲールとすれば，確率 1 で

$$L_t^a(X)=\lim_{\varepsilon\downarrow\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t 1_{[a,a+\varepsilon[}(X_s)d\langle X,X\rangle_s,\quad \forall(a,t)$$

が成立つ．特に，連続局所マルチンゲール M に対しては確率 1 で

$$L_t^a(M)=\lim_{\varepsilon\downarrow\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t 1_{]a-\varepsilon,a+\varepsilon[}(M_s)d\langle M,M\rangle_s,\quad \forall(a,t)$$

が成立する．

証明．滞在時間公式より，ある零集合 N が存在して，$\Omega\setminus N$ 上で任意の t,a,ε に対して

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t 1_{[a,a+\varepsilon[}(X_s)d\langle X,X\rangle_s&=\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} 1_{[a,a+\varepsilon[}(x)L_t^x dx\\&=\frac{1}{\varepsilon}\int_a^{a+\varepsilon} L_t^x dx\end{aligned}$$

が成立．$\varepsilon\to 0$ の極限を考えれば，

$$L_t^a=\lim_{\varepsilon\downarrow\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t 1_{[a,a+\varepsilon[}(X_s)d\langle X,X\rangle_s$$

が（Lebesgue 測度について）殆ど全ての a で成立．さらに，右連続性より任意の a でも成立することが分かる．連続局所マルチンゲールの場合も同様である． □

5.6 Notes

この章の内容は，Girsanov の定理の節を除いて Revuz & Yor [38] に従って書いた．Girsanov の定理は Karatzas & Shreve [24] による．

[*131] 二次変分が 0 の連続局所マルチンゲールは定数なのであった．（命題 3.8.10）

付録 A　本文の補足的事項

A.1　単調族定理

命題 A.1.1 (可測関数に対する単調族定理)**.** $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathscr{H}$ を有界可測関数の集合で次の条件を満たすものとする：

(i) 定数関数は $\mathscr{H}$ の元である．
(ii) (h_n) は（広義の）単調増大列で $\lim_n h_n = h$ も有界なら $h \in \mathscr{H}$.

$\mathscr{C} \subset \mathscr{H}$ が各点ごとの積に対して閉じているなら，$\mathscr{H}$ は $\sigma(\mathscr{C})$-可測有界関数をすべて含む．

定義 A.1.2. Ω を集合とする．Ω の部分集合族 $\mathscr{C}$ は，次の条件を満たすとき単調族 (*monotone class*) であるという．

(i) $\mathscr{C}$ の任意の増大列 $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$\bigcup_n C_n \in \mathscr{C}$.
(ii) $\mathscr{C}$ の任意の減少列 $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$\bigcap_n C_n \in \mathscr{C}$.

補題 A.1.3. Ω 集合とし，$\mathscr{F}$ を部分集合族とする．このとき，次の 2 条件は同値：

(i) $\mathscr{F}$ は σ-加法族である．
(ii) $\mathscr{F}$ は集合代数かつ単調族.

証明. (i) ならば (ii) は明らかなので，逆を示す．(ii) を仮定したとき，$\mathscr{F}$ が任意の可算和について閉じていることを示せば十分である．任意の列 $(A_n) \in \mathscr{F}^{\mathbb{N}}$ に対して，

$$B_n = \bigcup_{0\le k\le n} A_k$$

と定義すれば，$\mathscr{F}$ は集合代数なので $B_n \in \mathscr{F}$ となり，さらに (B_n) は増加列である．$\mathscr{F}$ は単調族なので

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathscr{F}.$$

□

集合 Ω の部分集合族 $\mathscr{A}$ が与えられたとき，それを含む最小の単調族が存在するから，それを $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ と書くことにする．

定理 A.1.4 (単調族定理)**.** $\mathscr{A}$ を集合 Ω 上の集合代数とする．このとき $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{M}(\mathscr{A})$ が成立つ．

証明. σ-加法族は明らかに単調族であるから，$\mathscr{M}(\mathscr{A}) \subset \sigma(\mathscr{A})$. 逆向きの包含関係を保証するためには，$\mathscr{M}(\mathscr{A})$ が σ-加法族であることを示せばよいが，補題 A.1.3 より特に $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ が集合代数であることが分かれば十分である．明らかに $\Omega \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$ である．

$$\mathscr{M}_c = \{A \in \mathscr{M}(\mathscr{A}) \mid \Omega \setminus A \in \mathscr{M}(\mathscr{A})\}$$

と定める．このとき，明らかに $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}_c$ である．(A_n) を (B_n) をそれぞれ $\mathscr{M}_c$ の増大列，減少列とすれば，

$(\Omega \setminus A_n)$，$(\Omega \setminus B_n)$ はそれぞれ $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ の減少列，増大列となっているので

$$\Omega \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega \setminus A_n \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$$
$$\Omega \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega \setminus B_n \in \mathscr{M}(\mathscr{A}).$$

よって $\bigcup_n A_n, \bigcap_n B_n \in \mathscr{M}_c$ となり，$\mathscr{M}_c$ は単調族である．したがって $\mathscr{M}_c$ は $\mathscr{A}$ を含む単調族で，$\mathscr{M}_c = \mathscr{M}(\mathscr{A})$．すなわち，$\mathscr{M}(\mathscr{A})$ は補集合をとる操作について閉じている．

次に，$A \subset \Omega$ に対して

$$\mathscr{M}_A = \{B \in \mathscr{M}(\mathscr{A}) \mid A \cap B \in \mathscr{M}(\mathscr{A})\}\}$$

と定義する．(A_n) を (B_n) をそれぞれ $\mathscr{M}_A$ の増大列，減少列とすれば，$(A \cap A_n)$，$(A \cap B_n)$ はそれぞれ $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ の増大列，減少列となっているので

$$A \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A \cap A_n \in \mathscr{M}(\mathscr{A}),$$
$$A \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A \cap B_n \in \mathscr{M}(\mathscr{A}).$$

よって $\mathscr{M}_A$ は単調族である．$A \in \mathscr{A}$ なら $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}_A$ であるから，$\mathscr{M}_A = \mathscr{M}(\mathscr{A})$．すなわち $\bigcap_{A\in\mathscr{A}} \mathscr{M}_A = \mathscr{M}(\mathscr{A})$．ここで $B \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$ とすれば, 任意の $A \in \mathscr{A}$ に対して $A \cap B \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$ なので, $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}_B \subset \mathscr{M}(\mathscr{A})$ が分かる．$\mathscr{M}_B$ は単調族だったから特に $\mathscr{M}_B = \mathscr{M}(\mathscr{A})$ であり，$\bigcap_{A\in\mathscr{M}(\mathscr{A})} \mathscr{M}_A = \mathscr{M}(\mathscr{A})$ が成立．これは $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ が有限個の共通部分をとる操作について閉じているということに他ならない． □

次に，単調族定理と類似の命題で Dynkin 族定理とか，π-λ 定理とか呼ばれるものを紹介する．

定義 A.1.5. 集合 Ω の部分集合族 $\mathscr{I}$ が任意の $A, B \in \mathscr{I}$ に対して $A \cap B \in \mathscr{I}$ となるとき，$\mathscr{I}$ は π-系 (π-*system*) であるという．

定義 A.1.6. 集合族 $\mathscr{D}$ が以下の条件を満たすとき，$\mathscr{D}$ は Dynkin 族 (*Dynkin class*)，または λ-系 (λ-*system*) であるといわれる．

(i) $\Omega \in \mathscr{D}$.
(ii) $A, B \in \mathscr{D}$ かつ $A \subset B$ ならば，$B \setminus A \in \mathscr{D}$.
(iii) $A_n \in \mathscr{D}$ $(n \in \mathbb{N})$ かつ $A_n \uparrow A$ ならば，$A \in \mathscr{D}$.

Dynkin 族からなる族の共通部分はあきらかに λ 系であり，Ω の冪集合は明らかに λ 系である．よって部分集合族 $\mathscr{F}$ が与えられたときそれを含む最小の Dynkin 族が存在し，それを $\mathscr{D}(\mathscr{F})$ と書くことにする．

命題 A.1.7. Ω の部分集合族 $\mathscr{F}$ に対して，以下は同値.

(i) $\mathscr{F}$ は σ-加法族である．
(ii) $\mathscr{F}$ は π 系かつ λ 系である．

証明. σ-加法族なら　π-系かつ　Dynkin は明らかなので，逆を示す．$\mathscr{F}$ は π-系かつ　Dynkin 族であると仮定する．$A \in \mathscr{F}$ なら, $A \subset \Omega \in \mathscr{F}$ より $X \setminus A \in \mathscr{F}$ である．$A, B \in \mathscr{F}$ なら $A \cup B = \Omega \setminus [(\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B)] \in \mathscr{F}$

より $\mathscr{F}$ は有限和についても閉じていることが分かる．さらに $(\mathscr{F}_n)$ を $\mathscr{F}$ の元の族とすれば，$B_n = \bigcup_{k=0}^{n}$ とおくことで $B_n \uparrow \bigcup_n A_n$ となるので $\bigcup_n A_n \in \mathscr{F}$ も分かる．よって $\mathscr{F}$ は σ -加法族である． □

定理 A.1.8 (Dynkin 族定理（または π-λ 定理)**.** $\mathscr{F}$ が π -系なら， $\sigma(\mathscr{F}) = \mathscr{D}(\mathscr{F})$.

証明．命題 A.1.7 より $\sigma(\mathscr{F})$ は λ 系なので，$\sigma(\mathscr{F}) \supset \mathscr{D}(\mathscr{F})$ は明らか．逆の包含関係を示す．それには $\mathscr{D}(\mathscr{F})$ が σ -加法族であることを示せばよいが，命題　A.1.7 より特に π -系であることを示せば十分である．

Step1.

$$\mathscr{D}_1 = \{B \in \mathscr{D}(\mathscr{F}) \mid \forall A \in \mathscr{F}\ A \cap B \in \mathscr{D}(\mathscr{F})\}$$

とおくことにする．このとき $\mathscr{D}(\mathscr{F}) = \mathscr{D}_1$ であることを示す．定義より $\mathscr{D}_1 \subset \mathscr{D}(\mathscr{F})$ なので，逆の包含関係を示せばよい．$\mathscr{F}$ 自体は π -系なので，明らかに　$\mathscr{F} \subset \mathscr{D}_1$ あとは $\mathscr{D}_1$ が λ 系であることを示せば $\mathscr{D}(\mathscr{F})$ の最小性より $\mathscr{D}(\mathscr{F}) \subset \mathscr{D}_1$ がわかる．

任意の $A \in \mathscr{F}$ に対して

$$\Omega \cap A = A \in \mathscr{F} \subset \mathscr{D}(\mathscr{F})$$

より $\Omega \in \mathscr{D}_1$ である．また，$B, C \in \mathscr{D}_1$ かつ $B \subset C$ とすれば，任意の $A \in \mathscr{F}$ に対して

$$(C \setminus B) \cap A = (A \cap C) \setminus (A \cap B) \in \mathscr{D}(\mathscr{F})$$

も成り立つ．実際，$B, C \in \mathscr{D}_1$ より $A \cap B, A \cap C \in \mathscr{D}(\mathscr{F})$ であり，$A \cap B \subset A \cap C$ であることに注意すれば λ 系の定義よりわかる．さらに，$(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathscr{D}_1$ の単調増大列とする．$A \in \mathscr{F}$ とすれば，

$$A \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A \cap B_n$$

であるが，$B_n \in \mathscr{D}_1$ から $A \cap B_n \in \mathscr{D}(\mathscr{F})$ であり，$A \cap B_n \uparrow \bigcup (A \cap B_n)$ から $A \cap \bigcup B_n \in \mathscr{D}(\mathscr{F})$ が示される．以上の議論より $\mathscr{D}_1$ は λ 系である．

Step2.

$$\mathscr{D}_2 = \{B \in \mathscr{D}(\mathscr{F}) \mid \forall A \in \mathscr{D}(\mathscr{F})\ A \cap B \in \mathscr{D}(\mathscr{F})\}$$

とおく．このとき $\mathscr{D}_2 = \mathscr{D}(\mathscr{F})$ を示せば定理の証明が完了する．Step1 より $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}(\mathscr{F})$ だったから，$\mathscr{F} \subset \mathscr{D}_2$ は明らかである．$\mathscr{D}_2$ が *Dynkin* 族であることが示されれば，$\mathscr{D}_2 = \mathscr{D}(\mathscr{F})$ がわかるが，これは実際 Step1 と全く同じ議論により達成される．したがって $\mathscr{D}_2 = \mathscr{D}(\mathscr{F})$ が言えるが，これは $\mathscr{D}(\mathscr{F})$ が π -系であるということに他ならず，よって定理の主張は示された． □

命題 A.1.9 (可測関数についての単調族定理 1)**.** $\mathscr{C}$ を集合 Ω 上の π-系とし，$\mathscr{H}$ を Ω 上の実数値（resp. 有界）関数からなるベクトル空間とする．$\mathscr{H}$ が条件

(i) $1 \in \mathscr{H}$.
(ii) $(f_n) \in \mathscr{H}^{\mathbb{N}}$ が非負の単調増大列で非負の実数値（resp. 有界）関数 f に各点収束するなら，$f \in \mathscr{H}$.
(iii) $A \in \mathscr{C}$ ならば $1_A \in \mathscr{H}$.

を満たすなら，$\mathscr{H}$ は $\sigma(\mathscr{C})$-可測な全ての関数を含む．

証明．

$$\mathscr{F} = \{A \subset \Omega \mid 1_A \in \mathscr{H}\}$$

と定めれば，$\mathscr{F}$ は $\mathscr{C}$ を含む λ 系である．実際，条件 (iii) は $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$ を意味している．また条件 (i) は $\Omega \in \mathscr{F}$ ということである．(A_n) が $\mathscr{F}$ の増大列なら，(ii) より

$$0 \leq 1_{A_1} \leq 1_{A_2} \leq \cdots \to 1_{\bigcup_n A_n} \in \mathscr{H}$$

となるので，$\bigcup_n A_n \in \mathscr{F}$ も成立．さらに，$A, B \in \mathscr{F}$ かつ $A \subset B$ なら，$\mathscr{H}$ がベクトル空間であることから

$$1_{B \setminus A} = 1_B - 1_A \in \mathscr{H}$$

となり，$\mathscr{F}$ が λ 系であることが分かった．

定理 A.1.8 により $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{F}$ となるので，$\mathscr{H}$ は全ての $\sigma(\mathscr{C})$-可測指示関数を含む．ξ を $\sigma(\mathscr{C})$-可測な実数値関数として，

$$\xi_n^+ := \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} 1_{\left\{\frac{k}{2^n} \leq \xi < \frac{k+1}{2^n}\right\}} = \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} 1_{\xi^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\right)}$$

と定める．$\mathscr{H}$ は全ての $\sigma(\mathscr{C})$-可測指示関数を含むから，各 n と k に対して $1_{\xi^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\right)} \in \mathscr{H}$ が成り立つ．さらに $\mathscr{H}$ はベクトル空間なので，$\xi_n^+ \in \mathscr{H}$ である．定義より (ξ_n^+) は明らかに単調増大で，非負実数値関数 ξ^+ に各点収束する．したがって，条件 (ii) より $\xi^+ \in \mathscr{H}$ である．同様にして $\xi^- \in \mathscr{H}$ であることも分かる．$\mathscr{H}$ はベクトル空間だから

$$\xi = \xi^+ - \xi^- \in \mathscr{H}$$

が示された．有界関数の場合も同様である．□

実はもっと強く，次の定理が成立する．

定理 A.1.10 (可測関数に対する単調族定理 2)**.** Ω を集合とし，$\mathscr{H}$ を実数値有界関数の集合で次の条件を満たすものとする：

(i) 定数関数は $\mathscr{H}$ の元である．
(ii) (h_n) は（広義の）単調増大列で $\lim_n h_n = h$ も有界なら $h \in \mathscr{H}$.
(iii) $\mathscr{H}$ はベクトル空間.

$\mathscr{C} \subset \mathscr{H}$ が各点ごとの積に対して閉じているなら，$\mathscr{H}$ は $\sigma(\mathscr{C})$-可測有界関数をすべて含む．

実際，定理 A.1.10 から定理 A.1.9 の有界な場合を導くことが出来る．$\mathscr{C}$，$\mathscr{H}$ を定理 A.1.9 の仮定を満たすものとする．

$$\mathscr{D} = \{1_A \mid A \in \mathscr{C}\}$$

とすれば $\mathscr{D} \subset \mathscr{H}$ であり，$\mathscr{C}$ が π 系との仮定から $\mathscr{D}$ は積について閉じている．よって $\mathscr{H}$ は全ての有界 $\sigma(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{D})$ 可測関数を含む．

定義 A.1.11. X を集合とし，$\mathscr{H}$ を X 上の実数値有界関数の集合とする．$\mathscr{H}$ が条件

(i) 定数関数は $\mathscr{H}$ の元である．
(ii) (h_n) は（広義の）単調増大列で $\lim_n h_n = h$ も有界なら $h \in \mathscr{H}$.
(iii) $\mathscr{H}$ はベクトル空間.

を満たすとき，$\mathscr{H}$ は λ 系 (λ-system) であるという*132． また，Ω 上の実数値関数族 $\mathscr{C}$ が $f, g \in \mathscr{C}$ なら $fg \in \mathscr{C}$ を満たすとき*133，$\mathscr{C}$ は π 系 (π-system) または乗法的 (multiplicative) であるという．

定理 A.1.10 の証明を行う前に，幾らかの準備が必要である．

順序構造を持つベクトル空間 V において，任意の二元 $u, v \in V$ が下限 $u \wedge v \in V$ および上限 $u \vee v \in V$ を持つとき V はベクトル束 (vector lattice) と呼ばれるのであった．

X を任意の集合とする．V が $\mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$ の部分空間であるとき，V が束であることは任意の $f \in V$ に対して $|f| \in V$ であることと同値である．実際 V がベクトル束なら

$$|f| = (f \vee 0) - (f \wedge 0) \in V$$

である．逆に V が絶対値をとる操作について閉じているなら

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \in V, \quad f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \in V$$

となり V はベクトル束である．ベクトル束 $V \subset \mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$ が任意の $f \in V$ に対して $f \wedge 1 \in V$ を満足するとき，V は Stone 束 (Stone lattice) であるという．$\mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$ の元のうち有界なるもの全体のなす部分空間を $B(X, \mathbb{R})$ で表すことにする．

補題 A.1.12. X を集合とし，$\mathscr{H}$ は X 上の有界関数の集合とする．このとき，$\mathscr{H}$ を含む最小の λ 系 $\Lambda(\mathscr{H})$ が存在する．

証明．X 上の全ての実数値有界関数全体の集合 $B(X, \mathbb{R})$ は明らかに λ 系である．よって集合

$$\{\mathscr{E} \subset \mathrm{Map}(X, \mathbb{R}) \mid \mathscr{H} \subset \mathscr{E} \text{ かつ } \mathscr{E} \text{ は } \lambda \text{ 系 }\}$$

は空ではないから

$$\Lambda(\mathscr{H}) = \bigcap \{\mathscr{E} \subset \mathrm{Map}(X, \mathbb{R}) \mid \mathscr{H} \subset \mathscr{E} \text{ かつ } \mathscr{E} \text{ は } \lambda \text{ 系 }\}$$

とすれば良い． □

補題 A.1.13. X を集合とし，$\mathscr{C} \subset B(X, \mathbb{R})$ は π 系であるとする．このとき，$\Lambda(\mathscr{C})$ はまた π 系である．

証明．$f \in B(X, \mathbb{R})$ に対して

$$\Lambda_f = \{g \in \Lambda(\mathscr{C}) \mid fg \in \Lambda(\mathscr{C})\}$$

と定めれば，任意の $f \in B(X, \mathbb{R})$ に対して Λ_f は λ 系である．$\mathscr{C}$ は π 系だから，$f \in \mathscr{C}$ なら明らかに $\mathscr{C} \subset \Lambda_f$ が成立．したがって $\Lambda(\mathscr{C}) \subset \bigcap\{\Lambda_f; f \in \mathscr{C}\}$ となる．定義より逆向きの包含関係は明らかだから，$\Lambda(\mathscr{C}) = \bigcap\{\Lambda_f; f \in \mathscr{C}\}$ が分かる．これは $\Lambda(\mathscr{C})$ が π 系であるということに他ならない． □

補題 A.1.14. 任意の $N > 0$ に対して，多項式関数列 (p_n) で $[-N, N]$ 上 $0 \le p_n(x) \uparrow |x|$ を満たすものが存在する．

証明．$N > 0$ を固定し，求める多項式列を具体的に構成しよう．$p_0 \equiv N$ とし，$n \in \mathbb{N}$ に対して再帰的に

$$p_{n+1}(x) := \frac{1}{2N}(p_n^2(x) + N^2 - x^2)$$

---

*132 特に定着した呼称はないようである．Sharpe [45] には MVS（monotone vector space の略か？）とか書いてある．λ 系は Medvegyev [30] からとった．

*133 ただし fg は各点ごとの積で定まる関数である．

と定める．このとき，多項式関数 $p_n(x)$ は明らかに $[-N,N]$ 上で $p_n(x)\geq 0$ を満たす．(p_n) が $[-N,N]$ 上で減少列であって，$N-|x|$ に収束することを示そう．まずは (p_n) が $[-N,N]$ 減少列であることを帰納法で示す．定義より

$$p_1(x)=\frac{1}{2N}(N^2+N^2-x^2)=N-\frac{x^2}{2N}\leq N=p_0(x)$$

である．$[-N,N]$ 上で $p_{n-1}(x)\geq p_n(x)$ が成り立つと仮定する．このとき

$$\begin{aligned}p_n(x)-p_{n+1}(x)&=\frac{1}{2N}\left\{(p_n^2(x)+N^2-x^2)-(p_{n-1}^2(x)+N^2-x^2)\right\}\\&=\frac{1}{2N}\left\{p_n^2(x)-(p_{n-1}^2(x)\right\}\\&=\frac{1}{2N}(p_n(x)-p_{n-1}(x))(p_n(x)+p_{n-1}(x))\end{aligned}$$

が成立．仮定と p_n の定義より $[-N,N]$ 上 $(p_n(x)-p_{n-1}(x))(p_n(x)+p_{n-1}(x))\geq 0$ となるから，$[-N,N]$ 上 $y_n(x)\geq y_{n+1}(x)$ が分かる．$[-N,N]$ 上で $(p_n(x))$ は下に有界な減少列であるから，極限が存在する．その極限を $p^*(x)$ $(x\in[-N,N])$ で表すことにしよう．(p_n) の定義を思い出せば

$$p^*(x):=\frac{1}{2N}[(p^*(x))^2+N^2-x^2],\quad x\in[-N,N]$$

が成り立つ．これより $[-N,N]$ 上で $x^2=(p^*(x)-N)^2$ となり，

$$|x|=|p^*(x)-N|=N-p^*(x),\quad \forall x\in[-N,N]$$

が示される[*134]．$q_n(x):=N-p_n(x)$ とおけば，ここまでの議論により (q_n) が求める多項式の列であることが分かる． □

命題 A.1.15. X を集合とし，$\mathscr{C}\subset B(X,\mathbb{R})$ を π 系とする．このとき，$\Lambda(\mathscr{C})$ は Stone 束である．

証明. 定義より明らかに $\Lambda(\mathscr{C})$ はベクトル空間なので，任意の $f\in\Lambda(\mathscr{C})$ に対して $|f|\in\Lambda(\mathscr{C})$ が成り立つことを示せばよい．$f\in\Lambda(\mathscr{C})$ に対して，$|f(x)|\leq N$ $(\forall x\in X)$ なる N を取れば，補題 A.1.14 より $[-N,N]$ 上で $|y|$ を単調増大に近似する多項式列 (p_n) が存在する．補題 A.1.13 より $\Lambda(\mathscr{C})$ は積について閉じているから，$p_n(f)\in\Lambda(\mathscr{C})$ である．また p_n の選び方から任意の $x\in X$ に対して $0\leq p_n(f(x))\uparrow|f(x)|$ が成立．したがって λ 系の定義から $|f|\in\Lambda(\mathscr{C})$ であり，$\Lambda(\mathscr{C})$ はベクトル束である．さらに $\Lambda(\mathscr{C})$ は λ 系だから定数関数 1 を元に持ち，よって $f\wedge 1\in\Lambda(\mathscr{C})$ が分かる．すなわち $\Lambda(\mathscr{C})$ は Stone 束となる． □

命題 A.1.16. X を集合とし，$\mathscr{H}\subset B(X,\mathbb{R})$ とする．$\mathscr{H}$ が λ 系かつ Stone 束ならば，$\mathscr{H}$ は $\sigma(\mathscr{H})$-可測有界関数全体の集合と一致する[*135]．

証明. $\mathscr{H}$ の元が $\sigma(\mathscr{H})$-可測な有界関数であることは明らかなので，任意の $\sigma(\mathscr{H})$-可測な有界関数が $\mathscr{H}$ の元となることを示せばよい．

$$\mathscr{E}=\{A\subset X\mid 1_A\in\mathscr{H}\}$$

と定義する．このとき $\mathscr{E}=\sigma(\mathscr{H})$ を示すことが第一の目標である．$\mathscr{E}\subset\sigma(\mathscr{H})$ は明らかなので，逆向きの包含関係を示す．

---

*134 $[-N,N]$ 上で (p_n) は減少列なので，当然 $p^*(x)\leq N$ $(\forall x\in[-N,N])$ である．

*135 証明を見れば分かるが，この命題では関数の有界性はこれといって必要ではない．つまり，λ 系の定義から有界性を除いたものと，可測関数の集合から有界性の条件を取り除いたものに対しても，同様の主張が成立する．

$\mathscr{H}$ は束なので，$\mathscr{E}$ は合併，共通部分をとる操作について閉じている．また $1 \in \mathscr{H}$ と $\mathscr{H}$ がベクトル空間との仮定より，$\Omega \in \mathscr{E}$ および $\mathscr{E}$ が補集合を取る操作についても閉じていることが分かる．$\mathscr{H}$ が一様有界なる単調収束について閉じていることは，$\mathscr{E}$ が増大列の極限について閉じていることを保証する．したがって $\mathscr{E}$ は σ-加法族となる．

$f \in \mathscr{H}$ とすれば，$\mathscr{H}$ は Stone 束だから

$$f_n := 1 \wedge (n(f - 1 \wedge f)) \in \mathscr{H}$$

である．明らかに $f_n \geq 0$ であり，しかも $f_n \uparrow 1_{\{f>1\}}$ が成立．$\mathscr{H}$ は λ 系だから $1_{\{f>0\}} \in \mathscr{H}$ となる．すなわち $\{f > 1\} \in \mathscr{E}$ が成り立つ．$\mathscr{H}$ はベクトル空間だから，これより任意の $\alpha > 0$ に対して $\{f > \alpha\} \in \mathscr{E}$ が分かる．したがって任意の $f \in \mathscr{H}$ に対して f^+ は $\mathscr{E}$-可測であり，同様にして f^- も $\mathscr{E}$-可測たることが示される．ゆえに $f = f^+ - f^-$ も $\mathscr{E}$-可測である．これより任意の $f \in \mathscr{H}$ は $\mathscr{E}$-可測であり，すなわち $\sigma(\mathscr{H}) \subset \mathscr{E}$ が成り立つ．

以上の議論により $\mathscr{E} = \sigma(\mathscr{H})$ が示された．これはすなわち，単関数が $\sigma(\mathscr{H})$-可測であることと $\mathscr{H}$ の元であることは同値であるということに他ならない．f を $\sigma(\mathscr{H})$-可測な有界関数とする．このとき，f は $\sigma(\mathscr{H})$ 可測な単関数によって単調に近似されるが，もちろんこれは $\mathscr{H}$ の元によって単調に近似されるということに他ならない[*136]．$\mathscr{H}$ は一様有界な単調収束について閉じていたから，$f \in \mathscr{H}$ が分かる． □

定理 *A.1.10* の証明．仮定より $\mathscr{H}$ は π 系 $\mathscr{C}$ を含む λ 系であるから，$\Lambda(\mathscr{C}) \subset \mathscr{H}$ である．命題 A.1.15 から $\Lambda(\mathscr{C})$ は Stone 束であることも分かるから，命題 A.1.16 より $\Lambda(\mathscr{C})$ は $\sigma(\Lambda(\mathscr{C}))$-可測な有界関数全体の集合と一致する．よって $\mathscr{H}$ は $\sigma(\Lambda(\mathscr{C}))$-可測な有界関数を全て含み，特に $\sigma(\mathscr{C})$-可測な有界関数を全て含む． □

A.2　独立性

命題 A.2.1. $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とする．確率変数 X と部分 σ -加法族 $\mathscr{G}$ について，X と $\mathscr{G}$ が独立となるための必要十分条件は

$$E[e^{i\xi X}|\mathscr{G}] = E[e^{i\xi X}] \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \tag{A.2.1}$$

がなりたつことである．

証明．X と $\mathscr{G}$ が独立ならば (A.2.1) がなりたつのは条件付き期待値の性質より明らか．逆を示せばよい．(A.2.1) が成立すると仮定しよう．$P(B) > 0$ となる $B \in \mathscr{G}$ を任意に選んで

$$\begin{aligned} P_B : \mathscr{F} &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{aligned}$$

と定めれば[*137]，P_B は $(\Omega, \mathscr{F})$ 上の確率測度となる．定義より明らかに $P_B \ll P$ であるが，

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \int_\Omega \frac{1_{A \cap B}}{P_B} dP = \int_A \frac{1_B}{P(B)} dP$$

という関係に注意すれば $dP_B/dP = 1_B/P(B)$ となることが分かる．(A.2.1) により

$$E[e^{i\xi X} 1_B] = P(B) E[e^{i\xi X}]$$

[*136] $\mathscr{H}$ はベクトル空間なのであった．

[*137] 要は集合 B による条件付き確率である．

となるから，

$$\int_\Omega e^{i\xi X}dP_B = \int_\Omega e^{i\xi X}\frac{1_B}{P(B)}dP = \frac{1}{P(B)}\left(P(B)\times\int_\Omega e^{i\xi X}dP\right)$$

がなりたつ．したがって，特性関数の性質より二つの測度 P_B^X と P^X が[*138]等しいことが導かれる．すなわち

$$P_B^X(E) = P_B(E) \quad \forall E\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$$

である．ところで，任意の $A\in\sigma(X)$ はある $E\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$ によって $A = X^{-1}(E)$ と表現されるから，

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P_B(A) = P_B^X(E) = P^X(E) = P(A) \quad \forall A\in\sigma(X)$$

であるが，これは B が任意の $A\in\sigma(X)$ と独立であるということに他ならない．$B\in\mathscr{G}$ が $P(B)=0$ のときは

$$P(A\cap B) = P(A)P(B)$$

は自明な等式なので，$P(B)>0$ の場合の結果と合わせれば

$$P(A\cap B) = P(A)P(B) \quad \forall A\in\sigma(X),\ \forall B\in\mathscr{G}$$

となる．よって X と $\mathscr{G}$ は独立である． □

A.3 Gauss 系

$x, y\in\mathbb{R}^d$ に対してその標準内積を $\langle x, y\rangle$ と書くことにする．

定義 A.3.1. $(\Omega,\mathscr{F},P)$ を確率空間とし，$X=(X_1,\ldots,X_d)$ を d 次元確率変数とする．ある $m\in\mathbb{R}^d$ と d 次対称正定値行列 V によって

$$E[e^{i\langle\xi,X\rangle}] = \exp\left(i\langle m,\xi\rangle - \frac{1}{2}\langle V\xi,\xi\rangle\right) \quad (\forall\xi\in\mathbb{R}^d)$$

と表されているとき，X を d 次元 Gauss 型確率変数という．

注意 A.3.2. V が狭義の正定値，すなわち V が退化していない場合には d 次元 Gauss 型確率変数の分布は密度関数

$$\frac{1}{(2\pi)^{-d/2}}\frac{1}{\sqrt{\det V}}\exp\left(-\frac{1}{2}\langle V^{-1}(x-m), x-m\rangle\right)$$

をもつ．密度関数による定義では V が退化している場合は扱えないので，定義 A.3.1 は密度関数による定義の一般化になっていることに注意されたい．

命題 A.3.3. 確率空間 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上の確率変数の有限族 $X_1,\ldots,X_d$ に対して以下は同値．

(i) $X=(X_1,\ldots,X_d)$ は d 次元 Gauss 型確率変数．
(ii) 任意の $a,\ldots,a_d$ に対して $a_1X_1+\cdots+a_dX_d$ は 1 次元 Gauss 型確率変数．

[*138] P^X で X の像測度を表している．

証明．$a=(a_1,\dots,a_d)\in\mathbb{R}^d$ に対して確率変数 $a_1X_1+\cdots+a_nX_n$ を $\langle a,X\rangle$ で表すことにする．

Step1 : (i) ならば (ii) の証明． $X=(X_1,\dots,X_d)$ は d 次元 Gauss 分布とし，その特性関数は $m\in\mathbb{R}^d$ と d 次正方行列 V で表されているものとする．とおく．このとき，任意の $t\in\mathbb{R}$ と任意の $a\in\mathbb{R}^d$ に対して

$$\begin{aligned}E[e^{it\langle a,X\rangle}]&=E[e^{i\langle ta,X\rangle}]\\&=\exp\left(i\langle ta,m\rangle-\frac{1}{2}\langle V(ta),ta\rangle\right)\\&=\exp\left(it\langle a,m\rangle-\frac{1}{2}t^2\langle Va,a\rangle\right)\end{aligned}$$

となるから，確率変数 $\omega\mapsto\langle a,X(\omega)\rangle$ は平均 $\langle a,m\rangle$，分散 $\langle Va,a\rangle$ の Gauss 分布に従う．

Step2 : (ii) ならば (i) の証明． 仮定より，任意の $\xi=(\xi_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$ に対して $\langle\xi,X\rangle$ は正規分布に従う．

$$\begin{aligned}E[\langle\xi,X\rangle]&=\xi_1E[X_1]+\cdots+\xi_dE[X_d]\\\mathrm{Var}(\langle\xi,X\rangle)&=E\left[\left(\sum_{j=1}^d\xi_j(X_j-E[X_j])\right)\left(\sum_{j=1}^d\xi_j(X_j-E[X_j])\right)\right]\\&=\sum_{j=1}^d\sum_{k=1}^d\xi_j\xi_k\mathrm{Cov}(X_j,X_k)\end{aligned}$$

であるから，

$$m=\begin{pmatrix}E[X_1]\\\vdots\\E[X_d]\end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix}\mathrm{Cov}(X_1,X_1)&\dots&\mathrm{Cov}(X_1,X_d)\\\vdots&&\vdots\\\mathrm{Cov}(X_d,X_1)&\dots&\mathrm{Cov}(X_d,X_d)\end{pmatrix}\tag{A.3.1}$$

とおけば[*139]

$$\begin{aligned}E[\langle\xi,X\rangle]&=\langle m,\xi\rangle\\\mathrm{Var}(\langle\xi,X\rangle)&=\langle V\xi,\xi\rangle\end{aligned}$$

となる．よって $\langle\xi,X\rangle\sim\mathscr{N}(\langle m,\xi\rangle,\langle V\xi,\xi\rangle)$ であり

$$E[e^{it\langle\xi,X\rangle}]=\exp\left(it\langle m,\xi\rangle-\frac{1}{2}t^2\langle V\xi,\xi\rangle\right)$$

が任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して成り立つ．特に $t=1$ とすれば

$$E[e^{i\langle\xi,X\rangle}]=\exp\left(i\langle m,\xi\rangle-\frac{1}{2}\langle V\xi,\xi\rangle\right)$$

となる．いま $\xi\in\mathbb{R}^d$ は任意に選んだものだったから，これは $X=(X_1,\dots,X_d)$ が d 次元 Gauss 型確率変数であることに他ならない．□

注意 A.3.4. いまの命題の証明よりわかるように，d 次正方行列 V は X の成分の分散，共分散を並べたものになっている．これより V を共分散行列などと呼ぶこともある．

[*139] 任意の $\xi\in\mathbb{R}^d$ に対して $\langle V\xi,\xi\rangle=\mathrm{Var}(\langle\xi,X\rangle)\geq 0$ となるから V は非負定値行列になっていることに注意されたい．

命題 A.3.5. $X=(X_1,\dots,X_d)$ は d 次元 Gauss 分布であるとする．このとき，有限族 $X_1,\dots,X_d$ が独立であることと

$$\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=0 \quad (i\neq j) \tag{$*$}$$

は同値である．

証明．$X_a,\dots,X_d$ が独立なら $(*)$ が満たされることは明らかであるから，逆を示せばよい．$(*)$ がなりたつと仮定すれば，X の共分散行列は対角行列である．したがって

$$\begin{aligned}
E[e^{i\langle\xi,X\rangle}]&=\exp\left(i\langle m,\xi\rangle-\frac{1}{2}\langle V\xi,\xi\rangle\right)\\
&=\exp\left(i\sum_{j=1}^{d}E[X_j]\xi_j-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\mathrm{Var}(X_j)\xi^2\right)\\
&=\prod_{j=1}^{d}\exp\left(iE[X_j]\xi_j-\frac{1}{2}\mathrm{Var}(X_j)\xi^2\right)\\
&=\prod_{j=1}^{d}E[e^{i\xi_jX_j}]
\end{aligned}$$

となり，X の特性関数が X_j の特性関数の積に分解されることがわかる．よって $X_1,\dots,X_d$ は独立である． □

定義 A.3.6. $\mathscr{X}$ を確率空間 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上の空でない確率変数族とする．任意の $n\geq 1$ と $X_1,\dots,X_n\in\mathscr{X}$ に対して $X=(X_1,\dots,X_n)$ が n 次元 Gauss 型確率変数となるとき，$\mathscr{X}$ を Gauss 系 (Gaussian family) とよぶ．

注意 A.3.7. 補題 A.3.3 より，定義 A.3.6 での「X が d 次元 Gauss 型確率変数である」の部分は「任意の $a\in\mathbb{R}^n$ に対して $\langle a,X\rangle$ は 1 次元 Gauss 確率変数である」としても同値である．

命題 A.3.8. $(\Omega,\mathscr{F},P)$ を確率空間，$\mathscr{X}$ をその上の Gauss 系とする．$\mathrm{Span}(\mathscr{X})\subset L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$ で $\mathscr{X}$ によって生成される部分空間を表したとき，$L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$ での閉包 $\overline{\mathrm{Span}(\mathscr{X})}$ はまたガウス系である．[*140]

証明．Gauss 系の定義より，$\mathrm{Span}(\mathscr{X})$ もまた Gauss 系となることに注意しておく．$X_n\longrightarrow X$（L^2 収束）なら X は Gauss 分布に従うことを示す．L^2 収束より明らかに

$$\begin{aligned}
E[X_n]&\longrightarrow E[X]\\
\mathrm{Var}(X_n)&\longrightarrow \mathrm{Var}(X)
\end{aligned}$$

である．また，L^2 収束は分布収束を導くから，

$$E[e^{i\xi X_n}]\longrightarrow E[e^{i\xi X}]$$

である．以上の結果より

$$\begin{aligned}
E[e^{i\xi X}]=\lim_{n\to\infty}E[e^{i\xi X_n}]&=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{i\xi E[X_n]-\frac{\xi^2}{2}\mathrm{Var}(X_n)\right\}\\
&=\exp\left\{i\xi E[X]-\frac{\xi^2}{2}\mathrm{Var}(X)\right\}
\end{aligned}$$

[*140] 実はもっと強く，確率収束による閉包もまた Gauss 系になることが言える．小谷の補題 10.9 [25, p.226] などを参照のこと．

であり，特性関数の形から X が Gauss 分布に従うことが分かった．

さて，$X_k \in \overline{\mathrm{Span}(\mathscr{X})}$ $(k=1,\dots,n)$ とすれば各 k に対して $X_k^{(l)} \longrightarrow X_k$ (L^2 -収束) を満たす $\mathrm{Span}(\mathscr{X})$ の元の列がとれる．$\mathrm{Span}(\mathscr{X})$ は Gauss 系だったから $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$ に対して $a_1X_1^{(l)}+\cdots+a_nX_n^{(l)}$ は Gauss 分布に従う．先ほどの結果よりその L^2 極限 $a_1X_1+\cdots+a_nX_n$ も Gauss 分布に従う．よって $\overline{\mathrm{Span}(\mathscr{X})}$ は Gauss 系である． □

A.4 一様可積分性

命題 A.4.1. 確率変数族 $\mathscr{H}$ が一様可積分であるための必要十分条件は，以下の 2 条件が成立することと同値である．

(i) $\sup_{X\in\mathscr{H}} E[\,|X|\,] < \infty$.

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在して，任意の $X \in \mathscr{H}$ および $P(A) < \delta$ を満たす任意の $A \in \mathscr{F}$ に対して $E[\,|X|1_A] < \varepsilon$ が成り立つ．

証明. $\mathscr{H}$ は一様可積分であると仮定する．このとき十分大きい K をとれば，任意の $X \in \mathscr{H}$ に対して

$$\int_\Omega |X|\,dP = \int_{\{|X|>K\}} |X|\,dP + \int_{\{|X|>K\}} |X|\,dP < 1 + K$$

である．よって (i) が成立．また，一様可積分性より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\sup_{X\in\mathscr{H}} \int_{\{|X|>K\}} |X|\,dP < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たす $K > 0$ がとれる．$0 < \delta < \varepsilon/2K$ となる δ をとれば，任意の $X \in \mathscr{H}$ と $P(A) < \delta$ なる任意の A について

$$\begin{aligned}\int_A |X|\,dP &= \int_{A\cap\{|X|>K\}} |X|\,dP + \int_{A\cap\{|X|\le K\}} |X|\,dP \\ &\le \int_{\{|X|>K\}} |X|\,dP + KP(A) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

すなわち (ii) が成り立つことが示された．

逆を示すために，(i) と (ii) を仮定する．(ii) の $\delta = \delta(\varepsilon)$ に対して，

$$P(|X| > K_0) \le \frac{E[\,|X|\,]}{K_0} \le \frac{\sup_{X\in\mathscr{H}} E[\,|X|\,]}{K_0} < \delta$$

を満たす $K_0 > 0$ をとれば，任意の $K > K_0$ において

$$\int_{\{\ \ |>K\}} |X| dP < \varepsilon \quad (\forall X \in \mathscr{H})$$

である．したがって $\mathscr{H}$ は一様可積分． □

命題 A.4.2. $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，X を可積分な確率変数とする．確率変数族 $\mathscr{H}$ を

$$\mathscr{H} := \{Y \mid \text{ある部分 } \sigma\text{ -加法族 } \mathscr{G} \subset \mathscr{F} \text{ が存在して，} Y \text{ は } E[X|\mathscr{G}] \text{ のバージョンとなっている } \}$$

とおけば，$\mathscr{H}$ は一様可積分である．

証明．$Y = E[X|\mathscr{G}] \in \mathscr{H}$ とすれば，Jensen の不等式により

$$|Y| \leq E[|X|\,|\mathscr{G}] \quad \text{a.s.}$$

となる．両辺を $\{|Y| > \lambda\} \in \mathscr{G}$ 上で積分すれば，条件付き期待値の定義より

$$\int_{\{|Y|>\lambda\}} |Y|\,dP \leq \int_{\{|Y|>\lambda\}} |X|\,dP \tag{A.4.1}$$

を得る．いま Chebyshev の不等式により

$$\sup_{Y\in\mathscr{H}} P\,[\,|Y| > \lambda\,] \leq \sup_{Y\in\mathscr{H}} \frac{E[\,|Y|\,]}{\lambda} \leq \frac{E[\,|X|\,]}{\lambda} \to 0\ (\lambda \to \infty)$$

となるから，A.4.1 において $\lambda \to \infty$ とすれば右辺は Y について一様に 0 に収束する．これより一様可積分性がわかる． □

定理 A.4.3. (X_n) を可積分な確率変数列とし，$X_n \to X$ a.e. とする．このとき，以下の三条件は同値である．

(i) (X_n) は一様可積分である．
(ii) $X_n \to X$ in L^1.
(iii) $E[\,|X_n|\,] \to E[\,|X|\,] < \infty$.

証明．(i) ⇒ (ii) 一様可積分な列は L^1 -有界であることに注意すれば，　Fatou の補題より

$$E[\,|X|\,] \leq \varliminf_{n\to\infty} E\,[\,|X_n|\,] \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} E[\,|X_n|\,] < \infty$$

となり X は可積分である．これより $(X_n - X)$ も一様可積分である．一様可積分性より任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$P(\Lambda) < \delta \implies E[|X_n - X|\,;\Lambda] < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たす $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在する．$X_n \to X$ a.e. より $X_n \to X$ in probability であるから，

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ P(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}) < \delta$$

がなりたつ．したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n > N$ について

$$\begin{aligned} E[|X_n - X|] &\leq E[|X_n - X|\,;|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}] + E[|X_n - X|\,;|X_n - X| \leq \frac{\varepsilon}{2}] \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(ii) ⇒ (iii) $X_n \to X$ in L^1 より，十分大きい自然数 n に対して，$E[|X_n - X|] < \infty$ である．(X_n) の可積分性と合わせれば，十分大きい n に対して，

$$E[|X|] \leq E[|X_n|] + E[|X - X_n|] < \infty.$$

また，

$$|E[|X_n|] - E[|X|]| \leq E[|X_n - X|] \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

よって，$E[|X_n|] \to E[|X|] \quad (n \to \infty)$ がなりたつ．

(iii) $\Rightarrow$ (i) 可測関数 f に対して可測関数 f^a を以下の様に定義する．

$$f^a(\omega) = \begin{cases} f(\omega) & (|f(\omega)| < a), \\ 0 & (otherwise). \end{cases}$$

このとき，$\{\omega \in \Omega \mid |X(\omega)| = a\}$ が零集合となる a(このような a を X の分布の連続点と呼ぶ) に対して，$X_n^a \to X^a$ a.e. がなりたち，したがって $|X_n^a| \to |X^a|$ a.e. である．有界収束定理により，

$$E[\,|X_n^a|\,] \longrightarrow E[\,|X^a|\,] \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が分かる．ゆえに，

$$\begin{aligned} E[\,|X_n|\,;|X_n| \geq a\,] &= E[\,|X_n|\,] - E[\,|X_n|\,;|X_n| < a\,] \\ &= E[\,|X_n|\,] - E[\,|X_n^a|\,]. \end{aligned}$$

両辺で n について極限をとれば

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} E[\,|X_n|\,;|X_n| \geq a\,] &= \lim_{n\to\infty} E[\,|X_n|\,] - \lim_{n\to\infty} E[\,|X_n^a|\,] \\ &= E[\,|X|\,] - E[\,|X^a|\,] \\ &= E[\,|X|\,] - E[\,|X|\,;|X| < a\,] \\ &= E[\,|X|\,;|X| \geq a\,]. \end{aligned}$$

X の可積分性より X の分布の連続点 a を十分大きくとれば，

$$E[\,|X|\,;|X| > a\,] < \frac{\varepsilon}{2}$$

であり，さらに任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \geq N$ に対して

$$E[|X_n|;|X_n| > a\,] < E[\,|X|\,;|X| > a\,] + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

各 $n \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$ に対して

$$E[\,|X_n|\,;|X_n| \geq b_n\,] < \varepsilon$$

を満たす b_n が存在するので，$c > \max\{a, b_1, b_2, \ldots, b_{N-1}\}$ なる c をとれば，任意の n について

$$E[\,|X_n|\,;|X_n| > c\,] < \varepsilon.$$

すなわち，(X_n) は一様可積分である． □

A.5　一般化された条件付き期待値

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ を σ -加法族とする．可積分な確率変数　X に対してその条件付き期待値は次の条件を満たす確率変数 Y として定義されるのであった．

(i) Y は $\mathscr{G}$ -可測．

(ii) 任意の $E \in \mathscr{G}$ に対して以下の条件がなりたつ．

$$\int_E Y(\omega)P(d\omega) = \int_E X(\omega)P(d\omega)$$

これらの条件は X の積分値が確定さえすれば，必ずしも可積分でなくても論ずることが出来る．これより，条件付き期待値の定義を一般化できる．

定義 A.5.1. $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ を σ -加法族とする．確率変数 $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ に対して次の条件を満たす確率変数 Y が存在するとき，Y を X の条件付き期待値と呼ぶ．

(i) Y は $\mathscr{G}$ -可測．

(ii) 任意の $E \in \mathscr{G}$ に対して E 上で X の積分が存在し[*141]

$$\int_E Y(\omega)P(d\omega) = \int_E X(\omega)P(d\omega)$$

を満たす．

X の $\mathscr{G}$ による条件付き期待値が存在するとき，それは確率 1 の意味で一意であることが示される．確率変数の空間におけるその同値類を $E[X|\mathscr{G}]$ で表すことにする．また，同値類の代表元も同様に $E[X|\mathscr{G}]$ と表すことが多い．Radon-Nykodym の定理より，$X \geq 0$ P-a.s. ならば $E[X|\mathscr{G}]$ は存在する．X^+ または X^- の一方が可積分ならば $E[X|\mathscr{G}]$ は存在し，その値は $E[X^+|\mathscr{G}] - E[X^-|\mathscr{G}]$ に等しい．

命題 A.5.2. $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ を σ -加法族とする．確率変数 X, Y には条件付き期待値 $E[X|\mathscr{G}], E[Y|\mathscr{G}]$ が存在して，それらは確率 1 で有限であるようなものとする．このとき，以下の性質が成り立つ．

(i) X が $\mathscr{G}$ -可測なら　$E[X|\mathscr{G}] = X$ P-a.s.

(ii) 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して $\alpha X + \beta Y$ には条件付き期待値が存在して，確率 1 で有限値をとる．さらに

$$E[\alpha X + \beta Y|\mathscr{G}] = \alpha E[X|\mathscr{G}] + \beta E[Y|\mathscr{G}] \quad P\text{-a.s.}$$

(iii) Z が $\mathscr{G}$ 可測な確率変数ならば ZX の条件付き期待値が存在してほとんど確実に有限である．さらに

$$E[ZX|\mathscr{G}] = ZE[X|\mathscr{G}] \quad P\text{-a.s.}$$

A.6 Stieltjes 積分

写像 $[0, \infty[\ni s \mapsto A_s \in \mathbb{R}$ は右連続な有界変動関数であるとする．このとき，$(\,[0, \infty[, \mathscr{B}([0, \infty[\,)\,)$ 上の（符号付き）測度 μ で任意の $s < t$ に対して

$$\mu(\,]s, t]\,) = A_t - A_s$$

を満たすものがただ一つ存在することが知られている[*142]．Borel 可測関数 $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ が $]0, t]$ 上 $|\mu|$ -可積分であるとき

$$\int_{]0,t]} f(s)dA_s := \int_{]0,t]} f(s)\mu(ds)$$

とおくことにより f の A による (Lebesgue-)Stieltjes 積分が定義される．

---

*141 $+\infty$ や $-\infty$ も含む．

*142 Royden [?] や盛田 [33] などを参照．

命題 A.6.1. A は特に増加的であると仮定する．u を $[a,b]$ 上の連続な増加関数とし，f は $[u(a),u(b)]$ を含む集合上で定義された非負 Borel 可測関数とする．このとき

$$\int_{[a,b]} f(u(s))dA_{u(s)} = \int_{[u(a),u(b)]} f(t)dA_t$$

が成立する．ただし，左辺の積分は右連続な増加関数 $s \mapsto A_{u(s)}$ に対応する測度による積分である．

証明.

$$v_t = \inf\{s \mid u(s) > t\}$$

と定義すれば $u(v_t) = t$ で[*143] v は可測関数 : $[u(a),u(b)] \to [a,b]$ を定める．μ_A で A に対応する測度を表し，ν で v の μ_A に関する像測度 : $[a,b] \to \mathbb{R}$ とすることにする．このとき，Lebesgue 積分の性質より

$$\int_{[a,b]} f(u(s))\nu(ds) = \int_{[u(a),u(b)]} f(t)\mu_A(dt) = \int_{[u(a),u(b)]} f(t)dA_t$$

が成立．$f = 1$ とおけば測度の対応が分かる． □

A.7 弱位相とコンパクト性

はじめに Dunford-Pettis の定理を証明するために必要となる Vitali-Hahn-Saks の定理の紹介する．ここで述べる定理は条件がいくぶん限定的なものであり，より一般の場合の証明は Dunford-Schwartz [?] などを参照されたい．

定理 A.7.1 (Vitali-Hahn-Saks)**.** (μ_n) を可測空間 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上の（符号付き）有界測度の列とする．λ は有界非負測度で，各 μ_n が λ に対して絶対連続になっているものとする．任意の $A \in \mathscr{F}$ に対して $\mu(A) := \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$ が存在するとき，以下の条件がなりたつ．

(i) μ は $(\Omega,\mathscr{F})$ 上の有界測度である．

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，$\lambda(A) \le \delta$ となるような任意の $A \in \mathscr{F}$ に対して $\sup_n |\mu_n|(A) \le \varepsilon$ がなりたつ．さらに，$|\mu_n| := |\mu_n|(\Omega)$ は一様有界である．ただし，$|\mu_n|$ は測度 μ_n の全変動とする．

証明. ステップ１．はじめに，有界測度の列 (μ_n) が与えられたときに定理の条件を満たす λ が実際に存在することに注意しておく．実際，

$$\lambda(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{|\mu_n|(A)}{|\mu_n|}$$

とおけば，$\lambda : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ が条件を満たすものであるということは容易にわかる．仮定 $\mu_n \ll \lambda$ より Radon-Nikodym 密度 $d\mu_n/d\lambda$ が存在するから，(ii) の主張は「$L^1(\Omega,\mathscr{F},\lambda)$ の元の族 $(d\mu_n/d\lambda)$ が一様可積分となる」と言い換えることが出来る．

ステップ２．測度を { 指示関数 } $\subset L^1(\Omega,\mathscr{F},\lambda)$ 上の汎関数とみることで，位相的にその性質を考察する．$\mathscr{I}$ を $\mathscr{F}$ 上の指示関数全体の空間を λ が定める同値関係で割ったものとする．λ は有界測度だからもちろん $\mathscr{I} \subset L^1(\Omega,\mathscr{F},\lambda)$ である．このとき，測度 μ_n は線形汎関数 : $\mathscr{I} \ni 1_A \mapsto \int 1_A d\mu_n \in \mathbb{R}$ と同一視できるから，

[*143] u の連続性より従う．

以下この写像も μ_n で表すことにする．$\mathscr{I}$ は $L^1(\Omega,\mathscr{F},\lambda)$ の閉集合であるから[*144]，特に完備距離空間になっている．このときあきらかに $\mu: 1_A \mapsto \mu_n(A)$ は連続な線形汎関数であり，仮定より $\mu_n \to \mu$ が各点収束の意味でなりたつ．いま，$\alpha > 0$ に対して

$$\begin{aligned} L_j^\alpha &= \{1_A \in \mathscr{I} \mid \forall n,m \geq j \ \ |\mu_n(A) - \mu_n A| \leq \alpha\} \\ &= \bigcap_{n,m\geq j} \{1_A \in \mathscr{I} \mid |\mu_n(A) - \mu_m A| \leq \alpha\} \end{aligned}$$

と定めれば，各 μ_n の連続性より L_j^α は閉集合である．更に，$\mathscr{I} = \bigcup_j L_j^\alpha$ であるから[*145]，Baire のカテゴリー定理によってある L_j は内点を持つことが分かる．これを言い換えれば，ある $1_A \in L_j$ をとれば，ある $\delta > 0$ が存在して任意の $B \in \mathscr{F}$ に対して

$$\int_\Omega |1_A - 1_B|\, d\lambda = \lambda(A \triangle B) \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \forall n,m \geq j,\ |\mu_n(B) - \mu_m(B)| \leq \alpha \tag{A.7.1}$$

が成り立つということである．

ステップ３．$L_{j_0}^\alpha$ 内点をもつ j_0 とその内点 A_0 および $L_{j_0}^\alpha$ に含まれる A_0 の開近傍の半径 δ_0 を固定して考える．これが内点であるという条件から，測度の族 (μ_n) に関して良い評価を導くのが目標である．$\gamma \in]0,\delta_0[$ を

$$\lambda(C) \leq \gamma \Rightarrow \sup_{0 \leq i \leq j_0} |\mu_i(C)| \leq \alpha \tag{A.7.2}$$

を満たすように選ぶ.（もちろん $\mu_i(C) \leq 2\alpha$ $(0 \leq i \leq j_0)$ となっている.）

$$\begin{aligned} &|\mu_n(C)| \\ &\leq |\mu_n(A_0 \cup C) - \mu_n(A_0)| + |\mu_n(A_0 \setminus C) - \mu_n(A_0)| \\ &\leq |\mu_n(A_0 \cup C) - \mu_{j_0}(A_0 \cup C)| + |\mu_{j_0}(A_0 \cup C) - \mu_{j_0}(A_0)| + |\mu_{j_0}(A_0) - \mu_n(A_0)| \\ &\quad + |\mu_n(A_0 \setminus C) - \mu_{j_0}(A_0 \setminus C)| + |\mu_{j_0}(\mu_{j_0}(A_0) - A_0 \setminus C)| + |\mu_{j_0}(A_0) - \mu_n(A_0)| \end{aligned} \tag{A.7.3}$$

という評価が成り立つから，条件 $\lambda(C) \leq \gamma$ のもとで (A.7.3) の右辺各項の評価を試みたい．$n \leq j_0$ のときには δ のとり方より明らかに $|\mu_n(C)| \leq \alpha$ なので，$n > j_0$ の場合を考えれば十分である．1_{A_0} は $L_{j_0}^\alpha$ の元であったから，第 3 項および第 6 項は $|\mu_j(A_0) - \mu_n(A_0)| \leq \alpha$ をみたす．次に第 1 項を評価する．

$$\lambda([A_0 \cup C] \triangle A_0) = \lambda(C \setminus A_0) \leq \lambda(C) \leq \gamma \leq \delta_0$$

という関係に注意すれば，(A.7.1) より

$$|\mu_n(A_0 \cup C) - \mu_{j_0}(A_0 \cup C)| \leq \alpha$$

を得る．第 4 項も $[A_0 \setminus C] \triangle A_0 = A_0 \cap C$ に注意すれば同様にして

$$|\mu_n(A_0 \setminus C) - \mu_{j_0}(A_0 \setminus C)| \leq \alpha$$

となる．第 2 項については，$\lambda(C \setminus A) \leq \lambda(C) \leq \gamma$ に注意すれば，(A.7.2) より

$$|\mu_{j_0}(A \cup C) - \mu_{j_0}(A)| = |\mu_{j_0}(C \setminus A)| \leq \alpha$$

[*144] 列 (1_{A_n}) がある可測関数 f に L^1 収束したら，適当な部分列をとることにより概収束させられるから f はある指示関数と $a.e.$ で等しいことが分かる．より詳しくは Dunford & Schwartz の III 章 7 節 [12, pp.155–164] を参照せよ．

[*145] $(\mu_n(A))$ は収束列なので Cauchy 列である．

である．第 5 項も同様にして

$$|\mu_{j_0}(A_0) - \mu_{j_0}(A_0 \setminus C)| = |\mu_{j_0}(A_0 \cap C)| \le \alpha$$

がわかる．これらの考察により，条件 $\lambda(C) \le \gamma$ から結局 $|\mu_n(C)| \le 6\alpha$ (for all n $\in \mathbb{N}$) という評価が導かれることが示された．測度のジョルダン分解を思い出せば，特に $\lambda(C) \le \gamma$ ならば $\sup_n |\mu_n|(C) \le 12\alpha$．

ステップ 4 先ほどの $\alpha > 0$ は任意に選んだものだったことを思い出そう．ここまでの議論をまとめれば，「任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\gamma > 0$ が存在して，$\lambda(C) \le \gamma$ なる任意の可測集合 $C \in \mathscr{F}$ に対して $\sup_n |\mu_n|(C) \le 12\varepsilon$ がなりたつ」という主張が証明されたことになる．このことを用いて命題の主張を示そう．

(i) について． (μ_n) の極限 μ が有限測度であることを示す．特に，可算加法性のみを示せばよいが，μ は有限加法的な実数値関数であることは容易にわかるので，$\emptyset$ における連続性を示せば十分である[*146]．しかし，$|\mu(C)| = \overline{\lim}_n |\mu_n(C)| \le \sup \mu(C)$ によりこれは明らかである．

(ii) の前半． まさにステップ 3 までの議論で証明されたそのものである．

(iii) の後半． $|\mu_n(\Omega)|$ は収束列なので有界性は明らかであるが，これも Hahn 分解を考えれば容易に示される． □

ここで，参考までに証明なしで以下の定理を述べておく．証明は宮島の定理 5.8 [32, p.380] などを参照されたい．なお，この事実を本文で使うことはない．

定理 A.7.2 (Eberlein-Šmulian の定理)**.** Banach 空間 X の部分集合 A に対して以下の二条件は同値.

(i) A は X の弱位相に関して相対コンパクト．
(ii) A は X の弱位相に関して点列コンパクト．

注意 A.7.3. 上の定理の主張は距離空間に関しては当たり前であるが，弱位相は一般に距離づけ可能でないことに注意されたい．また，実は条件 (i) および (ii) はいずれも A の有界性を導くことにも注意しておきたい.[*147]

定理 A.7.4 (Dunford-Pettis Compactness Criterion)**.** $\mathscr{H}$ を $L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$ の部分集合とする．このとき，以下の条件は同値である．

(i) $\mathscr{H}$ は一様可積分である．
(ii) $\mathscr{H}$ は $L^1(P)$ の弱位相に関して相対コンパクト．
(iii) $\mathscr{H}$ の任意の点列は弱位相に関して収束する部分列をもつ．

証明. (ii) $\iff$ (iii) は Eberlein-Šmulian の定理に他ならない．ここでは (i) $\iff$ (iii) の証明を行う．はじめに，$L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$ の双対空間は $L^\infty(\Omega, \mathscr{F}, P)$ であり，同型 $L^\infty \ni g \mapsto T_g \in (L^1)^*$ は以下で与えられることに注意しておく．

$$\begin{aligned} T_g : L^1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_\Omega gf \, dP \end{aligned}$$

[*146] たとえば，舟木の定理 2.10 の (iv)⇒(i) [14, pp.35–36] などを参照．これは確率測度についてのみ示しているが，証明を少し変えれば符号付き有限測度にまで拡張するのは容易．
[*147] このことの証明も宮島の p.380 に書いてある．

ステップ１：(i)⇒(iii) の証明．$\mathscr{H}$ が一様可積分であると仮定する．このとき，$\mathscr{H}$ の任意の点列が L^1 の弱位相で収束する部分列をもつことを示せばよろしい．$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathscr{H}$ の点列とする．(f_n) も明らかに一様可積分である．ここで $f_{n,k}1_{\{|f_n|\le k\}}$ と定義すれば，$(f_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ は明らかに $L^2(\Omega,\mathscr{F},P)(\subset L^1(\Omega,\mathscr{F},P))$ での有界列[*148]になっている．反射的バナッハ空間 $L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$ の有界点列は L^2 の弱位相で収束する部分列をもつので[*149]，その極限を g_k とおくことにする．Cantor の対角線論法を用いることにより，ある (n_j) で

$$f_{n_j,k}\xrightarrow{j\to\infty} g_k \quad \text{weakly in } L^2 \quad \text{for all } k\in\mathbb{N}$$

なるものをとれるので[*150]，今後その列を $(f_{n,k})$ と表記することにする．もちろん $g_k\in L^2(P)\subset L^1(P)$ である．ここで，$f_{n,k}\to g_k$ weakly in L^2 とは以下の意味であったことを思い出しておく．

$$\forall h\in L^2(\Omega,\mathscr{F},P) \quad \int_\Omega hf_{n,k}\,dP\longrightarrow\int_\Omega hg\,dP \quad (n\to\infty).$$

このとき (g_k) は $L^1(P)$ の Cauchy 列になっている．実際

$$\begin{aligned}\|g_k-g_l\|_{L^1} &\le \varliminf_{n\to\infty}\|f_{n,k}-f_{l,k}\|_{L^1}\\ &= \varliminf_{n\to\infty} E\left[\left|f_n1_{\{|f_n|\le k\}}-f_n1_{\{|f_n|\le l\}}\right|\right]\\ &\le \varliminf_{n\to\infty} E\left[|f_n|1_{\{|f_n|>k\wedge l\}}\right]\\ &\le \sup_{n\in\mathbb{N}} E\left[|f_n|1_{\{|f_n|>k\wedge l\}}\right]\end{aligned}$$

となるから[*151]，(f_n) の一様可積分性より (g_k) が Cauchy 列であることが分かった．$L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$ の完備性より，(g_k) はある $g\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$ に L^1 -ノルムで収束する．あとは，この　g が (f_n) の弱収束極限になっていることを示せばよい[*152]．$h\in L^\infty(\Omega,\mathscr{F},P)$ とすれば

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega h(\omega)\{f_n(\omega)-g(\omega)\}P(d\omega)\right|\\ &\le \int_\Omega |h(\omega)|\,|f_n(\omega)-f_{n,k}(\omega)|\,P(d\omega)+\left|\int_\Omega h(\omega)\{f_{n,k}(\omega)-g_k(\omega)\}P(d\omega)\right|\\ &\quad+\int_\Omega |h(\omega)|\,|g_k(\omega)-g(\omega)|\,P(d\omega)\\ &\le \|h\|_{L^\infty}\int_{\{|f_n|>k\}}|f_n(\omega)|\,P(d\omega)+\left|\int_\Omega h(\omega)\{f_{n,k}(\omega)-g_k(\omega)\}P(d\omega)\right|\\ &\quad+\|h\|_{L^\infty}\int_\Omega |g_k(\omega)-g(\omega)|\,P(d\omega)\end{aligned}$$

という評価は容易に得られる．いま，$f_{n,k}\to g_k$ $(n\to\infty)$ が L^2 -の弱位相で収束（よって　L^1 の弱位相でも

---

*148 L^2 のノルムで有界という意味．

*149 証明は宮島の定理 2.114 [32, p.169] などを参照．

*150 弱収束する部分列は元々 k ごとに違うものであることに注意

*151 一つ目の不等号では，$x_n\to x$（弱収束）ならば $\|x\|\le\varliminf_n\|x_n\|$ になるという事実を用いた．証明は宮島の命題 2.102 [32, p.160] などを見よ．

*152 この (f_n) はもとの列ではなく既に部分列をとったものであることに注意！

収束[*153]）することに注意すれば次の関係が示される．

$$\begin{aligned}
&\varlimsup_{n\to\infty}\left|\int_\Omega h(\omega)\{f_n(\omega)-g(\omega)\}P(d\omega)\right| \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\|h\|_{L^\infty}\int_{\{|f_n|>k\}}|f_n(\omega)|\,P(d\omega)+\|h\|_{L^\infty}\int_\Omega|g_k(\omega)-g(\omega)|\,P(d\omega)
\end{aligned}$$

さらに (f_n) の一様可積分性と $g_k\to g$（L^1 収束）より，$k\to\infty$ とすれば

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left|\int_\Omega h(\omega)\{f_n(\omega)-g(\omega)\}P(d\omega)\right|\leq 0$$

となり結論を得る．

ステップ 2：(iii)⇒(i) の証明． $\mathscr{H}$ が弱位相で相対点列コンパクトであるとする．このとき，注意 A.7.3 より $\mathscr{H}$ は L^1 で有界であることに注意しておく．背理法で示すために，$\mathscr{H}$ が一様可積分でないと仮定しよう．$\mathscr{H}$ は一様可積分ではないが L^1 -有界にはなるのである　$\varepsilon_0>0$ に対して以下の条件を満たす集合 $A_n\in\mathscr{F}$ と $f_n\in\mathscr{H}$ の列が存在する[*154]．

$$P(A_n)<\frac{1}{2^n}\quad かつ\quad\left|\int_{A_n}f_n\,dP\right|>\varepsilon_0$$

$\mathscr{H}$ は相対弱点列コンパクトなので，適当な部分列をとれば (f_n) は弱位相で収束する．その部分列を (f_{n_k})，極限を f とおくことにする．各 m に対して

$$\int_{A_m}f_{n_k}\,dP\to\int_{A_m}f\,dP$$

であるから，十分大きい l をとれば Vitali-Hahn-Saks の定理により

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\int_{A_{n_l}}f_{n_k}\,dP\right|<\varepsilon$$

とならなければいけないので，これは矛盾である．よって $\mathscr{H}$ は一様可積分．　□

命題 A.7.5. $(\Omega,\mathscr{F},P)$ を確率空間とする．$L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$ の元の列 (X_n) が弱位相で X に収束するならば，任意の部分 σ -加法族　$\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$ に対して $(E[X_n|\mathscr{G}])$ も弱位相で $E[X|\mathscr{G}]$ に収束する．

証明．任意の有界確率変数 ξ に対して

$$E[\xi\,E[X_n|\mathscr{G}]]=E[E[\xi|\mathscr{G}]\cdot E[\xi|\mathscr{G}]]=E[X_n\,E[\xi|\mathscr{G}]]$$

となるから，$E[\xi|\mathscr{G}]$ が有界確率変数であることに注意して極限をとれば

$$\lim_{n\to\infty}E[\xi\,E[X_n|\mathscr{G}]]=\lim_{n\to\infty}E[X_n\,E[\xi|\mathscr{G}]]=E[X\,E[\xi|\mathscr{G}]]$$

である．　□

[*153] L^2 の弱収束で特に $h\in L^\infty\subset L^2$ による作用素を考えれば分かる．
[*154] 命題 A.4.1 における一様可積分性の特徴付けを思い出したい．

A.8 超関数についてほんのちょこっと

m は d 次元 Lebesgue 測度を表すものとする．

U を $\mathbb{R}^d$ の開集合とする．$C_c^\infty(U)$ は U 上の無限階微分可能な実数値関数で，U においてコンパクトな台をもつようなもの全体の集合とする．これは明らかに $\mathbb{R}$-線形空間である．C_c^∞ の元の列 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について，次のような収束を考える：

(i) あるコンパクト集合 $K \subset U$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ で $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$.

(ii) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $|\alpha| \le k$ なら $D^\alpha\varphi_n$ は $D^\alpha\varphi$ に一様収束. *155.

C_c^∞ この収束に関する位相を入れた空間を $\mathscr{D}(U)$ で表すことにする*156．このとき，$\mathscr{D}$ は位相線形空間となる*157.

定義 A.8.1. $\mathscr{D}(U)$ 上の連続な線形形式を超関数 (distribution) という．すなわち，超関数とは $\mathscr{D}(U)$ の（位相的）双対空間 $\mathscr{D}'(U)$ の元である．

写像 $\mathscr{D}'(U) \times \mathscr{D}(U) \ni (T, \varphi) \mapsto T(\varphi) \in \mathbb{R}$ は双線形形式を定めるから，超関数の値 $T(\varphi)$ を $\langle T, \varphi\rangle$ などと書くことも多い．

U 上の Radon 測度に μ について，写像

$$\mathscr{D}(U) \ni \varphi \mapsto \int_U \varphi(x)\mu(dx) \in \mathscr{R}$$

は超関数を定めるから，これを T_μ とおく．$d\mu = f dm$（ただし，f は局所可積分な Borel 関数）のとき，T_μ を特に T_f と書く．

次に，超関数の微分を定義する．

定義 A.8.2. $T \in \mathscr{D}'(U)$ に対して，その α 階の微分 $D^\alpha T \in \mathscr{D}'(U)$ を以下で定義する：

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\varphi\rangle.$$

超関数の微分の定義において，念頭にあるのは部分積分公式である．f が $|\alpha|$ 回連続微分可能な関数としたとき，部分積分公式により

$$\langle D^\alpha T_f, \varphi\rangle = \int_U (D^\alpha\varphi(x))f(x)m(dx) = (-1)^{|\alpha|}\int_U \varphi(x)D^\alpha f(x)m(dx), \quad \varphi \in \mathscr{D}(U)$$

が成り立つ．したがって，f が定める超関数の α 階微分は，f の α 階微分 (の $(-1)^{|\alpha|}$ 倍) が定める超関数である．この考え方を用いて，微分可能とは限らない関数についても微分の定義を広げておこう．

定義 A.8.3. $u : U \to \mathbb{R}$ は局所可積分な Borel 関数とする．u に対してある局所可積分 Borel 関数が存在して

$$\int_U u(x)D^\alpha\varphi(x)m(dx) = \int_U v(x)\varphi(x)m(dx), \quad \varphi \in C_c^\infty(U)$$

*155 ただし，ここで $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ は多重指数を表し，$D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \dfrac{\partial^{\alpha_m}}{\partial x^{\alpha_m}}$ である．

*156 正確な定式化は，宮島 [32] や Reed & Simon [37] などを参照されたい．

*157 もっというと，$\mathscr{L}\mathscr{F}$ 空間なるものである．

が成立するとき，v を u の α 階の弱微分，または超関数の意味での微分と呼ぶ．弱微分のこともまた u' や Du などと表す．

定義より明らかなように，超関数の微分 Du は一般に m-a.e. の範囲でしか一意に定まらない．定義 A.8.3 よりもさらに一般的に，

$$\int_U u(x)D^\alpha\varphi(x)m(dx) = \int_U \varphi(x)\mu(dx), \quad \varphi \in C_c^\infty(U)$$

を満たす Borel 測度 μ を指して u の超関数の意味での微分ということもある．u が定義 A.8.3 の意味で微分可能なとき，測度 $u'(x)m(dx)$ を u' と同一視するということである．こちらの定義では $\mu \ll m$ でない場合も μ を微分と呼ぶので，先ほどのものより広いクラスを扱うことになる．

A.9　凸関数

この節では，凸関数の微分に関する基本的な事実を扱う．これらの結果は凸関数に関する伊藤の公式，伊藤-田中の公式などにおいて使われる．

この節では，m は 1 次元の Lebesgue 測度を表すこととする．

定義 A.9.1. I を $\mathbb{R}$ の区間とする[*158]．関数 $f : I \to \mathbb{R}$ は

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \quad x, y \in I,\ \lambda \in [0,1]$$

を満たすとき，凸関数と呼ばれる．

命題 A.9.2. f を区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の凸関数とする．このとき，$x < y < z$ を満たす I の元に対して，

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

が成立する．

証明．$y = \lambda x + (1-\lambda)z$ を満たす $\lambda \in]0,1[$ をとれば[*159]，凸関数の定義より

$$f(y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(z) = \frac{z-y}{z-x}f(x) + \frac{y-x}{z-x}f(z)$$

である．これを変形すれば，

$$\begin{aligned}
&f(y) \leq \frac{z-y}{z-x}f(x) + \frac{y-x}{z-x}f(z) \\
&\rightsquigarrow (z-x)f(y) \leq (z-y)f(x) + (y-x)f(z) \\
&\rightsquigarrow (z-x)f(y) \leq (z-x)f(x) + (x-y)f(x) + (y-x)f(z) \\
&\rightsquigarrow (z-x)(f(y)-f(x)) \leq (y-x)(f(z)-f(x)) \\
&\rightsquigarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}
\end{aligned}$$

*158 凸関数の定義域は一般には凸集合であればよい．凸集合は連結集合なので，$\mathbb{R}$ の場合は区間に限られる．

*159 要するに $\lambda = \dfrac{z-y}{z-x}$ である．

となり，一つ目の不等号を得る．また，

$$(z-x)(f(y)-f(x)) \leq (y-x)(f(z)-f(x))$$

で両辺に $zf(z)-xf(x)$ を加えれば，

$$\begin{aligned}
&(z-x)(f(y)-f(x)) \leq (y-x)(f(z)-f(x)) \\
&\rightsquigarrow zf(y)-zf(x)-xf(y)+xf(x)+[zf(z)-xf(x)] \\
&\qquad \leq yf(z)-yf(x)-xf(z)+xf(x)+[zf(z)-xf(x)] \\
&\rightsquigarrow zf(y)-zf(x)-xf(y)+zf(z) \leq yf(z)-yf(x)-xf(z)+zf(z) \\
&\rightsquigarrow (z-x)f(y)+z(f(z)-f(x)) \leq y(f(z)-f(x))+(z-x)f(z) \\
&\rightsquigarrow (z-y)(f(z)-f(x)) \leq (z-x)(f(z)-f(y)) \\
&\rightsquigarrow \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}
\end{aligned}$$

である．よって二つ目の不等号が示された． □

命題 A.9.3. I を開区間，$f: I \to \mathbb{R}$ を凸関数とする．このとき，次の主張が成立する．

(i) 任意の $x \in I$ で有限な右微分係数 $f'_+(x)$ および左微分係数 $f'_-(x)$ が存在し，$f'_-(x) \leq f'_+(x)$ を満たす．

(ii) $x < y$ なる I の 2 点について，次の不等式が成立：

$$f'_+(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'_-(y).$$

(iii) f'_+ と f'_- は増加関数である．

(iv) 次の意味で，微積分学の基本定理が成立する：$a \leq b$ なる I の二点において，

$$f(b)-f(a) = \int_{]a,b]} f'_+(x)m(dx) = \int_{]a,b]} f'_-(x)m(dx)$$

(v) f は I 上連続である．

(vi) f'_+ は右連続であり，f'_- は左連続である．

(vii) $\{x \in I \mid f'_-(x) \neq f'_+(x)\}$ は高々加算集合である．

(viii) f'_- および f'_+ は超関数の意味での f の微分である．

証明．(i) $x \in I^\circ$ を固定する．命題 A.9.2 より $\varepsilon, \delta > 0$ で $x+\varepsilon, x-\delta \in I$ なるようなものに対して

$$-\infty < \frac{f(x)-f(x-\delta)}{\delta} \leq \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} < +\infty$$

が成立．各項が ε, δ に関する単調性をもつことに注意すれば，

$$f'_-(x) = \sup_{\substack{\delta>0 \\ x-\delta\in I}} \frac{f(x)-f(x-\delta)}{\delta} \leq \sup_{\substack{\varepsilon>0 \\ x+\varepsilon\in I}} \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} = f'_+(x)$$

が分かる．

(ii) 命題 A.9.2 より，$x < y$ および $\varepsilon, \delta > 0$ に対して

$$\frac{f(x)-f(x-\delta)}{\delta} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y+\varepsilon)-f(y)}{\varepsilon}$$

が成立するから，(i) と同様に ε と δ の極限を考えればよい．

(iii) $x < y$ とすれば，(i) と (ii) より

$$
\begin{aligned}
f'_-(x) \le f'_+(x) \le f'_-(y) \\
f'_+(x) \le f'_-(y) \le f'_+(y)
\end{aligned}
$$

が成立．よって f'_- と f'_+ はともに増加的である．

(iv) $a < b$ として示せば十分である．f'_+ について証明する．$\pi^{(n)} = \{x^n_k; k \in \mathbb{N}\}$ を $[a,b]$ の分割で，$\sup_k |x^n_k - x^n_{k-1}| \to 0$ $(n \to \infty)$ なるものとする．f'_+ は単調なので高々可算個の不連続点しかもたず，

$$
\begin{aligned}
\sum_k f'_+(x^n_{k-1}) 1_{]x^n_{k-1}, x^n_k]} \xrightarrow[n\to\infty]{m-\text{a.e.}} f'_+ \\
\sum_k f'_+(x^n_k) 1_{]x^n_{k-1}, x^n_k]} \xrightarrow[n\to\infty]{m-\text{a.e.}} f'_+
\end{aligned}
$$

が成立することに注意する[*160]．ここまでの結果により

$$
f'_+(x^n_{k-1}) \le \frac{f(x^n_k) - f(x^n_{k-1})}{x^n_k - x^n_{k-1}} \le f'_-(x^n_k) \le f'_+(x^n_k)
$$

が成り立つから，k についての和をとることで

$$
\sum_k f'_+(x^n_{k-1})(x^n_k - x^n_{k-1}) \le \sum_k f(x^n_k) - f(x^n_{k-1}) = f(b) - f(a) \le \sum_k f'_+(x^n_k)(x^n_k - x^n_{k-1})
$$

を得る．$n \to \infty$ とすれば，有界収束定理より

$$
\int_{]a,b]} f'_+(x) m(dx) \le f(b) - f(a) \le \int_{]a,b]} f'_+(x) m(dx)
$$

となる．f'_- についても同様である．

(v) (iv) より明らか．

(vi) f'_+ の右連続性を示す．$x \in I$ を固定して，正の実数からなる単調減少列 (a_n) と (b_n) を考える[*161]．このとき，f の連続性より

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f'_+(x + a_n) &= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \frac{f(x + a_n + b_m) - f(x + a_n)}{b_m} \\
&= \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{f(x + a_n + b_m) - f(x + a_n)}{b_m} \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{f(x + b_m) - f(x)}{b_m} \\
&= f'_+(x)
\end{aligned}
$$

となる[*162]．f'_- の左連続性も同様である．

[*160] しかも，これらの収束は上界 $f'_+(b)$ をもつ．

[*161] もちろん，任意の n, m で $x + a_n + b_m \in I$ であることも仮定する．

[*162] 一般に，二重単調増大列 (a_{mn}) について

$$
\sup_{m,n} a_{mn} = \lim_{m,n\to\infty} a_{mn} = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{mn} = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{mn}
$$

が成立することに注意せよ．

(vii) f'_+ と f'_- はそれぞれ右連続，左連続な増加関数なので，ともに高々可算個の不連続点しか持たない．x を f'_- の連続点とする．

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(x+\varepsilon)$$

において $\varepsilon \downarrow 0$ とすれば，$f'_-(x) = f'_+(x)$ となるので，f'_- の連続点では f'_+ と f'_- は等しい．よって

$$\{x \in I \mid f'_-(x) \neq f'_+(x)\} \subset \{x \in I \mid x \text{ は } f'_- \text{ の不連続点.}\}$$

となり，左の集合も可算集合である．

(viii) $\varphi \in C_c^\infty(I)$ とし，$h > 0$ に対して

$$\frac{\varphi(x+h)f(x+h) - \varphi(x)f(x)}{h} = \varphi(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}f(x)$$

を考える．φ がコンパクト台を持つことに注意して左辺を U 上積分すれば，h が十分小さいとき，

$$\begin{aligned}
&\int_U \frac{\varphi(x+h)f(x+h) - \varphi(x)f(x)}{h} m(dx) \\
&= \frac{1}{h}\left\{\int_U \varphi(x+h)f(x+h)m(dx) - \int_U \varphi(x)f(x)m(dx)\right\} = 0
\end{aligned}$$

が成立．一方，右辺を積分して $h \to 0$ の極限を考えれば，優収束定理により

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to\infty, h>0} \int_U \left\{\varphi(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}f(x)\right\} m(dx) \\
&= \int_U \lim_{h\to\infty, h>0} \left\{\varphi(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right\} m(dx) + \int_U \lim_{h\to\infty, h>0} \left\{\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}f(x)\right\} m(dx) \\
&= \int_U \varphi(x)f'_+(x)m(dx) + \int_U \varphi'(x)f(x)m(dx)
\end{aligned}$$

したがって，

$$\int_U \varphi'(x)f(x)m(dx) = -\int_U \varphi(x)f'_+(x)m(dx)$$

となり，f'_+ は超関数の意味での f の微分であることが分かる．$\{x \mid f'_+(x) \neq f'_-(x)\}$ が可算集合（よって Lebesgue 測度 0）であることに注意すれば，

$$\int_U \varphi'(x)f(x)m(dx) = -\int_U \varphi(x)f'_-(x)m(dx)$$

であることも示される． □

命題 A.9.4. 凸関数の 2 階微分について，次の主張が成立する．

(i) f を開区間 I 上定義された凸関数とする．このとき，f の 2 階導関数 f'' は正値 Radon 測度である．

(ii) I を開区間とし，$(I, \mathscr{B}(I))$ 上の正値 Radon 測度が与えられたとする．このとき，I 上の凸関数で $f'' = \mu$ となるものが存在する．

(iii) 開区間 I 上定義された凸関数 f が 2 階微分 $f'' = \mu$ をもつとき，任意の区間 I に対して定数 α_J と β_I が存在して，J° 上

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_J |x-a|\mu(da) + \alpha_J x + \beta_J \tag{A.9.1}$$

$$f'_-(x) = \frac{1}{2}\int_J \mathrm{sgn}(x-a)\mu(da) + \alpha_J \tag{A.9.2}$$

が成り立つ[*163].

証明. (i) Stieltjes 積分に関する部分積分公式により，$\varphi \in C_c^\infty(I)$ に対して

$$\int_I f'_-(x)\varphi'(x)dx = \int_I f'_-(x)d\varphi(x) = \int_I \varphi(x)df'_-(x)$$

となるから，f'_- の生成する Stieltjes 測度 df'_- は[*164] f の 2 階微分である．f'_- は増加関数であるから，Stieltjes 測度 df'_- は正値である．

(ii) μ を $(I, \mathscr{B}(I))$ 上の正値 Radon 測度とする．$a_0 \in I$ を一つ固定し，$f(a_0) := c_0$, $F(a_0) := c_1$ と定める．さらに

$$F(t) = \begin{cases} c_1 + \mu(\,]a_0, t]) & t \geq a_0 \\ c_1 - \mu(\,]t, a_0]) & t < a_0 \end{cases} \tag{A.9.3}$$

と定義する．このとき F は明らかに増加関数で，F によって生成される Stieltjes 測度が μ に他ならない．この F を用いて f を構成する．$x \geq a_0$ に対して

$$\begin{aligned}
&f(x) \\
&:= c_0 + \int_{]a_0,x]} F(t)dt \\
&= c_0 + xF(x) - a_0F(a_0) - \int_{]a_0,x]} tdF(t) \\
&= c_0 + x\{F(x) - F(a_0)\} - a_0c_1 + xF(a_0) - \int_{]a_0,x]} tdF(t) \\
&= c_0 - a_0c_1 + xc_1 + \int_{]a_0,x]} (x-t)\mu(dt)
\end{aligned}$$

と定める．同様にして，$x < a_0$ に対しても

$$\begin{aligned}
&f(x) \\
&:= c_0 - \int_{]x,a_0]} F(t)dt \\
&= c_0 - a_0F(a_0) + xF(x) + \int_{]x,a_0]} tdF(t) \\
&= c_0 + x\{F(x) - F(a_0)\} - a_0c_0 + xF(a_0) + \int_{]x,a_0]} tdF(t) \\
&= c_0 - a_0c_1 + xc_1 + \int_{]x,a_0]} (t-x)\mu(dt)
\end{aligned}$$

[*163] $\mathrm{sgn}(x) := 1_{]0,+\infty[}(x) - 1_{]-\infty,0]}(x)$ である．

[*164] df'_+ でも同じことである．なお，f'_+ に対応する Stieltjes 測度は $\mu(\,]a,b]) = f'_+(b) - f'_+(a)$ で生成され，f'_- の場合は $\mu([a,b[\,) = f'_-(b) - f'_-(a)$ となることに注意されたい．

とする．f の凸性を見るには $a_0 \in J \subset I$ を満たす区間 $J =]a, b]$ 上での凸性を調べればよい．$x \in]a_0, b]$ なら

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(a) &= c_0 - a_0 c_1 + x c_1 + \int_{]a_0, x]} (x-t)\mu(dt) \\
&\quad - c_0 + a_0 c_1 - a c_1 - \int_{]a, a_0]} (t-a)\mu(dt) \\
&= x c_1 - a c_1 + \int_{]a_0, x]} (x-t)\mu(dt) \\
&\quad - \int_{]a, a_0]} (t-x)\mu(dt) - \int_{]a, a_0]} (x-a)\mu(dt) \\
&= x c_1 - a c_1 + (x-a)(F(a) - c_1) + \int_{]a, x]} (x-t)\mu(dt) \\
&= xF(a) - aF(a) + \int_{]a, x]} (x-t)\mu(dt)
\end{aligned}
$$

および

$$
\begin{aligned}
f(b) - f(x) &= c_0 + \int_{]a_0, b]} F(t)dt - c_0 - \int_{]a_0, x]} F(t)dt \\
&= \int_{]x, b]} F(t)dt \\
&= bF(b) - xF(x) - \int_{]x, b]} t dF(t) \\
&= bF(b) - xF(b) + \int_{]x, b]} (x-t)\mu(dt)
\end{aligned}
$$

が成り立つから，二つの式を併せて

$$
\begin{aligned}
&2f(x) \\
&= f(a) + f(b) + x c_1 - a c_1 + xF(a) - aF(a) + \int_{]a, x]} (x-t)\mu(dt) \\
&\quad - bF(b) + xF(b) - \int_{]x, b]} (x-t)\mu(dt) \\
&= \{F(a) + F(b)\}x + f(a) + f(b) - aF(a) - bF(b) + \int_{]a, b]} |x-t|\mu(dt)
\end{aligned}
$$

を得る．$x \in]a, a_0]$ の場合は

$$\begin{aligned}
f(x) - f(a) &= c_0 - \int_{]x,a_0]} F(t)dt - c_0 + \int_{]a,a_0]} F(t)dt \\
&= \int_{]a,x]} F(t)dt \\
&= xF(x) - aF(a) - \int_{]a,x]} tdF(t) \\
&= xF(a) - aF(a) + \int_{]a,x]} (x-t)\mu(dt) \\
f(b) - f(x) &= c_0 - a_0 c_1 + bc_1 + \int_{]a_0,b]} (b-t)\mu(dt) \\
&\quad - c_0 + a_0 c_1 - xc_1 - \int_{]x,a_0]} (t-x)\mu(dt) \\
&= bc_1 - xc_1 + \int_{]a_0,b]} (x-t)\mu(dt) + \int_{]a_0,b]} (b-x)\mu(dt) - \int_{]x,a_0]} (t-x)\mu(dt) \\
&= bc_1 - xc_1 + (b-x)(F(b) - c_1) + \int_{]x,b]} (x-t)\mu(dt) \\
&= bF(b) - xF(b) + \int_{]x,b]} (x-t)\mu(dt)
\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}
&2f(x) \\
&= f(a) + f(b) + xF(a) - aF(a) + \int_{]a,x]} (x-t)\mu(dt) \\
&\quad - bF(b) + xF(b) - \int_{]x,b]} (x-t)\mu(dt) \\
&= \{F(a) + F(b)\}x + f(a) + f(b) - aF(a) - bF(b) + \int_{]a,b]} |x-t|\mu(dt)
\end{aligned}$$

これより，f は $J =]a, b]$ で

$$f(x) = \frac{1}{2}\{F(a) + F(b)\}x + \frac{1}{2}\{f(a) + f(b) - aF(a) - bF(b)\} + \frac{1}{2}\int_{]a,b]} |x-t|\mu(dt)$$

という表現をもつ．右辺の関数は明らかに x について凸なので[*165]，f は $]a, b]$ 上凸である．I は開区間なので，$x, y \in I$ とすれば $x, y \in J =]a, b]$ なる J が存在する．これより I 上での凸性も分かる．

後は f の（超関数の意味での）二回微分が μ になることを示せばよい．先ほどの表現から f の左微分を定義に戻って計算すれば，Lebesgue の収束定理より

$$f'_-(x) = \frac{1}{2}\{F(a) + F(b)\} + \frac{1}{2}\int_{]a,b]} \mathrm{sgn}(x-t)\mu(dt)$$

[*165] affine 関数の部分は明らかに凸であり，積分の部分は凸関数と単調増加な線形形式（μ の非負性に注意）の合成であることから，やはり凸である．

が $J=]a,b]$ 上で成立．$\varphi\in C_c^\infty(I)$ とすれば，$\operatorname{supp}\varphi\subset J=]a,b]$ なる区間 J を選ぶことで

$$
\begin{aligned}
&\int_I f'_-(x)\varphi'(x)m(dx)\\
&=\int_{]a,b]} f'_-(x)\varphi'(x)m(dx)\\
&=\int_{]a,b]}\left[\frac{1}{2}\{F(a)+F(b)\}+\frac{1}{2}\int_J \operatorname{sgn}(x-t)\mu(dt)\right]\varphi'(x)m(dx)\\
&=\frac{1}{2}\{F(a)+F(b)\}\int_{]a,b]}\varphi'(x)m(dx)+\frac{1}{2}\int_{]a,b]}\left(\int_{]a,b]}\varphi'(x)\operatorname{sgn}(x-t)m(dx)\right)\mu(dt)\\
&=\frac{1}{2}\int_{]a,b]}\left(-\int_{]a,t]}\varphi'(x)m(dx)+\int_{]t,b]}\varphi'(x)m(dx)\right)\mu(dt)\\
&=\frac{1}{2}\int_{]a,b]}\left[-\varphi(t)+\varphi(a)+\varphi(b)-\varphi(t)\right]\mu(dt)\\
&=-\int_{]a,b]}\varphi(t)\mu(dt)\\
&=-\int_I\varphi(t)\mu(dt)
\end{aligned}
$$

が成立．これより $f''=\mu$ が分かる．

なお，この f は定数 c_0 と c_1 の分だけ自由度があることに注意されたい[*166]．

(iii) 証明は (ii) の後半とほぼ同じである．区間 $J\subset I$ が $J=[a,b]$ の形の時を考える．凸関数に関する微積分学の基本定理と Stieltjes 積分に関する部分積分公式により，$x\in I^\circ$ に対して

$$
\begin{aligned}
f(x)-f(a)&=\int_{]a,x]} f'_+(t)dt\\
&=xf'_+(x)-af'_+(a)-\int_{]a,x]} tdf'_+(t)\\
&=xf'_+(a)-af'_+(a)+\int_{]a,x]}(x-t)df'_+(t)\\
&=xf'_+(a)-af'_+(a)+\int_{]a,x]}(x-t)\mu(dt)
\end{aligned}
$$

が成立する．同様にして，

$$
\begin{aligned}
f(b)-f(x)&=\int_{]x,b]} f'_+(t)dt\\
&=bf'_+(b)-xf'_+(x)-\int_{]x,b]} tdf'_+(t)\\
&=bf'_+(b)-xf'_+(b)+\int_{]x,b]}(x-t)\mu(dt)
\end{aligned}
$$

*166 $f''=\mu$ を 2 階の微分方程式と思えば，

二つの式を合わせれば，

$$
\begin{aligned}
2f(x) - f(a) - f(b) &= \int_{]a,x]} f'_+(t)dt - \int_{]x,b]} f'_+(t)dt \\
&= (f'_+(a) + f'_+(b))x - af'_+(a) - bf'_+(b) + \int_{]a,b]} |x-t|\mu(dt)
\end{aligned}
$$

という表現を得る．したがって，

$$
\alpha_J = \frac{1}{2}\{f'_+(a) + f'_+(b)\}, \quad \beta_J = \frac{1}{2}\{f(a) + f(b) - af'_+(a) - bf'_+(b)\}
$$

と置けばよい．他の場合，例えば区間が $J' = [a,b]$ の形の時は

$$
\begin{aligned}
&2f(x) - f(a) - f(b) \\
&= \{f'_+(a) + f'_+(b)\}x - af'_+(a) - bf'_+(b) + \int_{]a,b]} |x-t|\mu(dt) \\
&= \{f'_+(a) + f'_+(b)\}x - af'_+(a) - bf'_+(b) + \int_{[a,b]} |x-t|\mu(dt) - (x-a)\mu(\{a\}) \\
&= \{f'_+(a) + f'_+(b) - \mu(\{a\})\}x - a\{f'_+(a) - \mu(\{a\})\} - bf'_+(b) + \int_{[a,b]} |x-t|\mu(dt)
\end{aligned}
$$

と書けるから

$$
\begin{aligned}
\alpha_{J'} &= \frac{1}{2}\{f'_+(a) + f'_+(b) - \mu(\{a\})\} \\
\beta_{J'} &= \frac{1}{2}[f(a) + f(b) - a\{f'_+(a) - \mu(\{a\})\} - bf'_+(b)]
\end{aligned}
$$

とおけばよい．

$$
f'_-(x) = \frac{1}{2}\{F(a) + F(b)\} + \frac{1}{2}\int_{]a,b]} \mathrm{sgn}(x-t)\mu(dt)
$$

となるのは (ii) と同様である． □

A.10 Kolmogorov の連続変形定理

この節では，Kolmogorov の連続変形定理の証明を行う．これはブラウン運動の構成において使われることが多いものだが，このノートでは局所時間の regularity に関する命題の証明に用いる．

初めに，関数の Höllder 連続性の定義を復習しておこう．$(E, \| \quad \|_E)$ を Banach 空間とする．ここでは，$x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ のノルムを $\|x\| = \sup_i |x_i|$ で定めることにする[*167]．関数 $f : \mathbb{R}^d \to E$ が局所 α 次 Höllder 連続であるとは，任意の $L > 0$ に対して

$$
\sup\left\{ \frac{\|f(x) - f(y)\|_E}{\|x-y\|^\alpha} \;\middle|\; \|x\|, \|y\| \leq L, x \neq y \right\} < +\infty
$$

が成立するということであった．言い換えれば，任意の $L > 0$ に対してある定数 $C_L > 0$ が存在して，

$$
\|x\|, \|y\| \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\|_E \leq C_L \|x-y\|^\alpha
$$

が成り立つということでもある．

[*167] $\mathbb{R}^d$ のノルムはどれも同値なので，$\mathbb{R}^d$ のノルムをどのように定めようとも命題の主張は成り立つ．今回は証明のしやすさから上限ノルムを選んでいる．

定理 A.10.1 (Kolmogorov の連続変形定理)．I_i $(i \in \{1,\dots,d\})$ を $\mathbb{R}$ の有界区間とし，$I = \prod_{i=1}^d I_i$ と置く．$(X_t)_{t\in I}$ を E 値確率過程で，次の条件を満たすものとする：ある定数 $\gamma, c, \varepsilon > 0$ が存在して

$$E[\,\|X_t - X_s\|_E^\gamma\,] \le c\|t-s\|^{d+\varepsilon}, \quad s,t \in I$$

が成立する．このとき X の修正 $\widetilde{X}$ で，任意の $\alpha \in [0, \varepsilon/\gamma[$ に対して

$$E\left[\left(\sup_{s,t\in I, s\neq t} \frac{\|\widetilde{X}_t - \widetilde{X}_s\|_E}{\|t-s\|^\alpha}\right)^\gamma\right] < +\infty \tag{A.10.1}$$

を満たすものが存在する．特に，$\widetilde{X}$ のパスは確率 1 で α-Höllder 連続である．

証明．記号の乱用を避けるために，$I_i = [0,1[$ として示す．$m \in \mathbb{N}$ に対して

$$D_m = \left\{\left(\frac{i_1}{2^m}, \dots, \frac{i_d}{2^m}\right) \in [0,1[^d \;\middle|\; i_k \in \{0,1,\dots,2^m-1\}\right\}$$
$$D = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} D_m$$
$$\Delta_m = \left\{(s,t) \in D_m \times D_m \;\middle|\; \|s-t\| = \frac{1}{2^m}\right\}$$

と定める．このとき，Δ_m の元は $2^{(m+1)d}$ 個以下であることに注意されたい[*168]．$s,t \in D$ に対して，順序 $s \le t$ を $s_i \le t_i$, $\forall i \in \{1,\dots,d\}$ で定める．

いま D は $[0,1[^d$ で稠密なので，D 上で X が α-Höllder 連続であることを示せばよい．

$$K_i = \sup_{(s,t)\in\Delta_i} \|X_s - X_t\|$$

と定めれば，仮定より

$$\begin{aligned} E[K_i^\gamma] &\le \sum_{(s,t)\in\Delta_i} E[\,\|X_t - X_s\|_E^\gamma\,] \le \sum_{(s,t)\in\Delta_i} c\|s-t\|^{d+\varepsilon} = \\ &= \sum_{(s,t)\in\Delta_i} c(2^{-i})^{d+\varepsilon} \le c2^{(i+1)d} \cdot 2^{-i(d+\varepsilon)} = c2^d \cdot 2^{-i\varepsilon} =: J2^{-i\varepsilon} \end{aligned}$$

が成立する．

$s,t \in D$ に対して，次のような条件を満たす D の列 (s^n), (t^n) を考える：各 n で $s^n \in D_n$ かつ，$0 = s^0 \le s^1 \le \cdots \le s$，さらにある n より先では常に $s^n = s$ となる．(t^n) についても同様とする．

$s,t \in D$ は $\|s-t\| \le 1/2^m$ を満たすとしよう．十分大きい n については s^n, t^n はそれぞれ s,t に等しいことを思い出せば，

$$X_s - X_t = \sum_{i=m}^\infty (X_{s^{i+1}} - X_{s^i}) + X_{s^m} - X_{t^m} + \sum_{i=m}^\infty (X_{t^i} - X_{t^{i+1}})$$

[*168] $\|s-t\| = 1/2^m$ とは，s と t 各成分の差は 0 かちょうど一区画分（$1/2^m$）であり，違う成分が少なくとも一つあるということである．こういった (s,t) の組の数を考えるには次のようにすればよい：異なる成分の数が i 個の場合は，合わせて ${}_dC_i(2^m-1)^d(2^m)^{d-i}$ パターンある．$i \ge 1$ を足し合わせれば

$$\sum_{i=1}^d {}_dC_i(2^m-1)^d(2^m)^{d-i} \le \sum_{i=0}^d {}_dC_i(2^m-1)^d(2^m)^{d-i} = (2^m - 1 + 2^m)^d \le 2^{(m+1)d}$$

となる．

と表現できる．（右辺は実際には有限和である．）これより，

$$\|X_s - X_t\|_E \leq K_m + 2\sum_{i=m+1}^{\infty} K_i \leq 2\sum_{i=m}^{\infty} K_i$$

なる評価を得る．

この部分をもう少し丁寧に説明しよう．s, t はともに D_N に入ると仮定すれば，第 i 成分は

$$s_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{e_1(k,i)}{2^k}, \quad t_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{e_2(k,i)}{2^k}$$

のように展開される．（ただし，各 $e_j(k,i)$ は 0 か 1 のいずれかの値をとる．）

$$s_i^n = \sum_{k=1}^{n\wedge N} \frac{e_1(k,i)}{2^k}, \quad t_i^n = \sum_{k=1}^{n\wedge N} \frac{e_2(k,i)}{2^k}$$

とすれば，(s^n) および (t^n) は先ほどの条件を満たす D の列である．ここで $\|s-t\| \leq 1/2^m$ という仮定から全ての i で

$$|s_i - t_i| = \sum_{k=1}^{N} \frac{|e_1(k,i) - e_2(k,i)|}{2^k} \leq \frac{1}{2^m}$$

となり，明らかに $e_1(k,i) = e_2(k,i)$ $(1 \leq i \leq m-1)$ が成り立つ．これより，各成分において

$$|s_i^m - t_i^m| = \frac{|e_1(m,i) - e_2(m,i)|}{2^m} \leq \frac{1}{2^m}$$

となるから，$\|s^m - t^m\| \leq 1/2^m$ が分かる．このとき $s^m = t^m$ か $(s^m, t^m) \in \Delta_m$ のどちらかが成り立つが，いずれにせよ

$$\|X_{s^m} - X_{t^m}\|_E \leq K_m$$

である．さらに

$$s_i^{n+1} - s_i^n = \frac{e_1(n+1,i)}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}, \quad i \in \{1,\ldots,d\}$$
$$t_i^{n+1} - t_i^n = \frac{e_2(n+1,i)}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}, \quad i \in \{1,\ldots,d\}$$

という評価から $s^{n+1} = s^n$ または $(s^n, s^{n+1}) \in \Delta$ （および $t^{n+1} = t^n$ または $(t^n, t^{n+1}) \in \Delta$）が成り立つので，

$$\|X_{s^{n+1}} - X_{s^n}\|_E \leq K_m, \quad \|X_{t^{n+1}} - X_{t^n}\|_E \leq K_m$$

であることも分かる．これにより求める評価を得る．

ここで

$$M_\alpha = \sup\left\{ \frac{\|X_t - X_s\|_E}{\|t-s\|^\alpha} \;\middle|\; s,t \in D,\ s \neq t \right\}$$

と定めれば，

$$
\begin{aligned}
M_\alpha &= \sup_{m\in\mathbb{N}} \left\{ \sup\left\{ \frac{\|X_t - X_s\|_E}{\|t-s\|^\alpha} \;\middle|\; s,t\in D,\ s\neq t, \frac{1}{2^{m+1}} < \|s-t\| \le \frac{1}{2^m} \right\} \right\} \\
&\le \sup_{m\in\mathbb{N}} \left\{ \sup\left\{ 2^{\alpha(m+1)}\|X_t - X_s\|_E \;\middle|\; s,t\in D,\ s\neq t, \frac{1}{2^{m+1}} < \|s-t\| \le \frac{1}{2^m} \right\} \right\} \\
&\le \sup_{m\in\mathbb{N}} \left\{ 2^{\alpha(m+1)} \sup\left\{ \|X_t - X_s\|_E \;\middle|\; s,t\in D,\ s\neq t, \|s-t\| \le \frac{1}{2^m} \right\} \right\} \\
&\le \sup_{m\in\mathbb{N}} \left[2^{\alpha(m+1)} \left(2\sum_{i=m}^{\infty} K_i \right) \right] \\
&\le 2^{\alpha+1} \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=m}^{\infty} 2^{\alpha m} K_i \right) \\
&\le 2^{\alpha+1} \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=m}^{\infty} 2^{\alpha i} K_i \right) \\
&= 2^{\alpha+1} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{\alpha i} K_i
\end{aligned}
$$

となる．$\gamma \ge 1$ の時，$\alpha < \varepsilon/\gamma$ なる α に対して

$$
\|M_\alpha\|_\gamma \le 2^{\alpha+1} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{\alpha i} \|K_i\|_\gamma \le 2^{\alpha+1} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{\alpha i} (J 2^{-i\varepsilon})^{1/\gamma} = 2^{\alpha+1} J^{1/\gamma} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i(\alpha - \varepsilon/\gamma)} < \infty
$$

が成立．$0 < \gamma < 1$ の場合は，$L^\gamma(P)$ ノルムの代わりに $E[(M_\alpha)^\gamma]$ に対して

$$
E[(M_\alpha)^\gamma] \le 2^{\gamma(\alpha+1)} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{\gamma\alpha i} E[(K_i)^\gamma] \le 2^{\gamma(\alpha+1)} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{\gamma\alpha i} J 2^{-i\varepsilon} = 2^{\gamma(\alpha+1)} J \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i(\gamma\alpha - \varepsilon)} < \infty
$$

という評価をすれば良い．いずれにせよ，P-a.s. で $M_\alpha < \infty$ となることが分かる．これはすなわち，X のパスは確率 1 で D 上 α-Höllder 連続であるということに他ならない．ここで

$$
\widetilde{X}_t := \lim_{\substack{s\to t\\ s\in D}} X_s
$$

と定めれば，先ほどの評価 $E[(M_\alpha)^\gamma] < \infty$ より，$\widetilde{X}$ は明らかに A.10.1 を満たす．後は $\widetilde{X}$ が元の過程 X の修正になっていることを示せばよいが，これは

$$
E[\|\widetilde{X}_t - X_t\|^\gamma] \le \liminf_{\substack{s\to t\\ s\in D}} E[\|X_s - X_t\|^\gamma] \le \liminf_{\substack{s\to t\\ s\in D}} \|s-t\|^{d+\varepsilon} = 0
$$

より分かる． □

A.11 Notes

単調族定理は確率論においてきわめて重要である．可測集合や可測関数といった対象は具体的な性質が分かりにくく，それらに関する主張を証明するには単調族定理くらいしか道具がないというのが筆者の感想である．関数型の単調族定理には，様々なバージョンの主張，証明が存在するが，すべてを網羅した文献には心当たりがない．適宜，必要な文献を参照するしかないだろう．

Gauss 系は確率論において重要な対象であるが，どういったものが基本的な文献なのか筆者は知らない．このノートを書くのには伊藤 [22]，小谷 [25]，西尾・樋口 [29] などを参考にした．収束についてさらに精密な結果が Gihkman & Skorokhod [16] に書いてあったような気もする．（筆者はきちんと読んでいない．）

Stieltjes 積分について詳しく書いた本は少ないので，むしろ確率解析の本の付録を参考にするのがよいだろう．例えば Revuz & Yor [38] や He, Wang, & Yan [18] など．

Dunford-Pettis の定理は興味深い結果であるが，ほとんどの測度論の本には証明が載っていない．準備のために必要な Vitali-Hahn-Saks の定理がなかなか高級なものだからだろうか．なお，Vitali-Hahn-Saks の定理は測度論において最も重要な結果の一つであるとのことである．（どこかに書いてあったけど，何の文献だっただろうか...）このノートを書くのには，Dunford & Schwartz [12] および Dellacherie & Meyer [8] を参考にした．新しい文献では，Bogachev [3] が参考になるだろう．

凸関数については，Dudley [11]，Medvegyev [30]，Revuz & Yor [38] などを参考にした．より詳しくは，Roberts & Varberg [39] や Hiriart-Urruty & Lemarechal [19] などの専門書を参照されたい．

付録 B　文献について

連続マルチンゲールとそれに基づく確率解析の教科書としては，Karatzas & Shreve [24] および Revuz & Yor [38] が基本的である．このノートも大部分はこれらを参考にして書いた．[24] は基本的なことから丁寧に書かれた文献で，行間も少ない．しかし離散マルチンゲールについては他書（[5]）の結果に全面的に頼っており，別の本で学ぶ必要がある．[38] は名著として名高く，[24] よりもさらに多くの話題を扱っている．ただし，[38] は [24] よりも全体的に難しい印象があり，解析全般に対するより深い知識が必要とされるように思われる．（私が力不足なだけかも知れないが．）

不連続な場合も含む一般のセミマルチンゲールについては，Dellacherie & Meyer [8, 9], He, Wang, & Yan [18] および Metivier [31] がある．また，Jacod & Shiryaev [23] の 1 章も参考になる．（2 章以降は長大で読めたものではない．）[8] および [9] は確率過程の一般論とセミマルチンゲール理論のバイブルとも言える文献であるが，すべて読むのは不可能に近い．[18] は [8, 9] 同様本格的だが，こちらのほうが読みやすくなっている．断面定理などの証明を全て含んだ完全な本は，[8, 9], [18], [1] くらいしか存在しない．

セミマルチンゲールを integrator としての立場から考察した確率解析の本としては，Bichteler [1] および Protter [36] などがある．[1] は筆者もほとんど読んだことがないが，かなり本格的な本のようである．きちんとした（?）不連続過程の確率解析の文献の中では [36] は手軽で，最も有名なものであろう．[36] は SDE などについても詳しい．

確率積分の教科書で筆者の一押しは Medvegyev [30] である．この本は行間が存在しないといっていいほど，全ての証明が丁寧に書かれている．ただ，唯一ケチをつけるとすれば，応用的な話は（SDE についてさえも！）ほとんど書かれていないことだろうか．

他に確率解析の本としては Chung & Williams [6], Ikeda & Watanabe [21], Rogers & Williams [40, 41] などが有名である．和書では，谷口・松本 [44]，長井 [34]，西尾・樋口 [29]，舟木 [15]，渡辺 [49] が参考になる．ファイナンスへの応用を念頭に書かれた本として Lamberton & Lapeyre [28] と Steele [46] を挙げておく．

確率過程一般の本としては，Doob [10], Gikhman & Skorokhod [16], Gihman & Skorohod [17] などがよく知られている．

確率解析の前に学ぶ測度論的確率論の教科書としては，Durret [13]，舟木 [14]，Williams [50] が適している．これらは離散マルチンゲールにも詳しく，このノートを書くための参考にした．[14] と [50] は特に素晴らしく，私の「独断と偏見で選ぶ確率論の教科書ランキング」のトップ 2 である！確率論の本としては他にも Billingsley [2]， Chung [5]，伊藤 [22]，小谷 [25]，西尾 [35] などが良い．

測度論の本は数多くあるが，特に本格的な内容のものとして Bogachev [3]，Cohn [7]，Dudley [11]，Royden [?] などを挙げておく．[3] と [11] は確率論の話題も多く扱っている．

参考文献

[1] Klaus Bichteler. *Stochastic Integration with Jumps*, Vol. 89 of *Encyclopedia of mathematics and its applications*. Cambridge University Press, 2002.

[2] Patrick Billingsley. *Probability and Measure*. John Wiley & Sons, second edition, 1986.

[3] Vladimir I. Bogachev. *Measure Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.

[4] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer-Verlag New York, 2011.

[5] Kai Lai Chung. *A Course in Probability Theory*. Academic Press, 1974.

[6] Kai Lai Chung and R. J. Williams. *Introduction to stochastic integration*. Probability and its applications. Birkhäuser, Boston, second edition, 1990.

[7] Donald L. Cohn. *Measure theory*. Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher. Birkhäuser, second edition, 2013.

[8] Claude Dellacherie and Paul-André Meyer. *Probabilities and Potential*. North-Holland, 1978.

[9] Claude Dellacherie and Paul-André Meyer. *Probabilities and Potential B*. North-Holland, 1982.

[10] J. L. Doob. *Stochastic Processes*. John Wiley & Sons, Inc., 1953.

[11] Richard M. Dudley. *Real Analysis and Probability*. The Wadsworth & Brooks/Cole, 1989.

[12] Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz. *Linear Operators, Part I: General Theory*. 1964.

[13] Richard Durret. *Probability: theory and examples*. Duxbury Press, 1991.

[14] 舟木直久. 確率論. 朝倉書店, 2004.

[15] 舟木直久. 確率微分方程式. 岩波書店, 2005.

[16] I. I. Gihkman and A. V. Skorokhod. *Introduction to the Theory of Random Processes*. W. B. Saunders Company, 1969.

[17] I. I. Gihman and A. V. Skorohod. *The Theory of Stochastic Processes I*. Springer-Verlag, 1974.

[18] Sheng-wu He, Jia-gang Wang, and Jia-an Yan. *Semimartingale Theory and Stochastic Calculus*. Science Press and CRC Press, 1992.

[19] Jean-Baptiste Hiriart-Urruty and Claude Lemaréchal. *Fundamentals of convex analysis*. Grundlehren text editions. Springer-Verlag, 2001.

[20] 一松信. 多変数解析関数論. 培風館, 1960.

[21] Nobuyuki Ikeda and Shinzo Watanabe. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. North-Holland, Kodansha, 1981.

[22] 伊藤清. 確率論. 岩波書店, 1991.

[23] Jean Jacod and Albert N. Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Vol. 288 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1987.

[24] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Vol. 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, second edition, 1991.

[25] 小谷眞一. 測度と確率. 岩波書店, 2005.

[26] 熊谷隆. 確率論. 共立出版, 2003.

[27] Hiroshi Kunita and Shinzo Watanabe. On square integrable martingales. *Nagoya Mathematical*

Journal, Vol. 30, pp. 209–245, 1967.

[28] Damien Lamberton and Bernard Lapeyre. *Introduciton to Stochastic Calculus Applied to Finance.* Chapman & Hall, second edition, 2008.

[29] 西尾眞喜子, 樋口保成. 確率過程入門. 確率論教程シリーズ 3. 培風館, 2006.

[30] Peter Medvegyev. *Stochastic Integration Theory.* Oxford University Press, 2007.

[31] Michel Métivier. *Semimartingales : a course on stochastic processes*, Vol. 2 of *De Gruyter studies in mathematics.* Walter de Gruyter, 1982.

[32] 宮島静雄. 関数解析. 横浜図書, 2014.

[33] 盛田健彦. 実解析と測度論の基礎. 培風館, 2004.

[34] 長井英生. 確率微分方程式. 共立出版, 1999.

[35] 西尾真喜子. 確率論. 実教出版, 1978.

[36] Philip E. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations*, Vol. 21 of *Stochastic Modelling and Applied Probability.* Springer-Verlag, second edition, 2004.

[37] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis, Revised and Enlarged Edition.* Academic Press, 1980.

[38] Daniel Revuz and Marc Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Vol. 293 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* Springer-Verlag, third edition, 1999.

[39] A. Wayne Roberts and Dale E. Varberg. *Convex functions*, Vol. 57 of *Pure and applied mathematics.* Academic Press, New York, 1973.

[40] L. C. G. Rogers and D. Williams. *Diffusion, Markov Processes, and Martingales. Volume 1: Foundations.* Wiley, 1994.

[41] L. C. G. Rogers and David Williams. *Diffusion, Markov Processes, and Martingales. Volume 2: Itô Calculus.* Wiley, 1987.

[42] Walter Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill, third edition, 1987.

[43] H. H. Schaefer. *Topological Vector Spaces*, Vol. 3 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag New York, second edition, 1999.

[44] 谷口説男, 松本裕行. 確率解析. 確率論教程シリーズ 5. 培風館, 2013.

[45] Michael Sharpe. *General Theory of Markov Processes.* Academic Press, 1988.

[46] J. Michael Steele. *Stochastic Calculus and Financial Applications.* Springer-Verlag, 2001.

[47] 杉浦光夫. 解析入門 I. 東京大学出版会, 1980.

[48] 杉浦光夫. 解析入門 II. 東京大学出版会, 1985.

[49] 渡辺信三. 確率微分方程式. 数理解析とその周辺 9. 産業図書, 1975.

[50] David Williams. *Probability with Martingales.* Cambridge University Press, 1991.

索引