Rough Path 理論入門

河備先生の講義ノート
に平井祐紀が勝手な解釈を加えてまとめたもの

2016 年 1 月 10 日

1　代数的アプローチによる Young 積分理論

Gubinelli's (naive) observation

$x = (x_t)_{t\in[0,1]}$, $y = (y_t)_{t\in[0,1]}$ を実数値の C^1-パスとする．このとき，C^1-パス $I = (I_t)_{t\in[0,1]}$ と連続関数 $J = (J_{st}) : \Delta^{(2)}[0,1] \to \mathbb{R}$ で[*1]，次の条件を満たすものがただ一つ存在する．

(i) $y_s(x_t - x_s) = I_t - I_s - J_{st}$.（代数的条件）
(ii) $I_0 = 0$.（定数差の調整）
(iii) $0 < \forall s < 1$ に対して，$\displaystyle\lim_{t\to s}\frac{|J_st|}{|t-s|} = 0$.（解析的条件）

これが成り立つことは次のように確かめることが出来る．

$$I_t := \int_0^t y_s dx_s \left(= \int_0^t y_s \dot{x}_s ds\right)$$
$$J_{st} := \int_s^t \left(\int_s^u dy_v\right) dx_u \left(= \int_s^t (y_u - y_s) dx_u\right)$$

と定義して，I と J が実際に条件 (i)–(iii) を満たしているかどうか調べよう．(ii) と (iii) は容易であるから，(i) のみを確かめる．

$$\begin{aligned} I_t - I_s - J_{st} &= \int_s^t y_u dx_u - \int_s^t (y_u - y_s) dx_u \\ &= y_s \int_s^t dx_u = y_s(x_t - x_s) \end{aligned}$$

となり，実際に (i) が成り立つことが分かった．

次に，(i)–(iii) を満たす I, J は一意であることを確かよう．(i)–(iii) を満たす組 $(\widetilde{I}, \widetilde{J})$ をとる．条件 (i) より

$$I_t - I_s - J_{st} = \widetilde{I}_t - \widetilde{I}_s - \widetilde{J}_{st}$$

だから，

$$(I - \widetilde{I})_t - (I - \widetilde{I})_s = (J - \widetilde{J})_{st} \tag{1}$$

[*1] ただし，$\Delta^{(2)}[0,1] = \{(s,t) \mid 0 \le s \le t \le 1\}$ と定める．

となる．ここで $f = I - \widetilde{I}$ とおけば f はまた C^1-パスであって，条件 (ii) より $f_0 = 0$ を満たす．(1) から

$$\left|\frac{f_t - f_s}{t - s}\right| = \left|\frac{J_{st} - \widetilde{J}_{st}}{t - s}\right| \leq \left|\frac{J_{st}}{t - s}\right| + \left|\frac{\widetilde{J}_{st}}{t - s}\right| \tag{2}$$

となるので，ここで両辺の上極限をとれば解析的条件 (iii) より

$$\lim_{t \to s}\left|\frac{f_t - f_s}{t - s}\right| = 0 \tag{3}$$

を得る．すなわち $\dot{f} = 0$ [*2]かつ $f_0 = 0$ となり，$I = \widetilde{I}$ が分かった．

M. Gubinelli [1] は，このような考察を元に Young 積分の理論を代数的に再構築した．Young 積分について述べるために，関数の Hölder 連続性について復習しよう．

$x = (x_t) : [0,1] \to \mathbb{R}$ と $0 < \alpha \leq 1$ に対して

$$\|x\|_{(\alpha)} := \sup_{0 \leq s < t \leq 1} \frac{|x_t - x_s|}{|t - s|^\alpha}$$

定義する．$\|x\|_{(\alpha)} < \infty$ なるとき x は α-Hölder 連続であるといい，Hölder 連続関数全体の成す集合を $C^{0,\alpha}([0,1],\mathbb{R})$ や $C^{\alpha\text{-Höl}}([0,1],\mathbb{R})$ などと表す．$\|\ \|_{(\alpha)}$ は $C^{0,\alpha}([0,1],\mathbb{R})$ 上にセミノルム定めるが，$\|\ \|_{(\alpha)}$ は定数項の差を区別できないのでこれはノルムではない．$|x_0| + \|x\|_{(\alpha)}$ や $\|x_0\|_\infty + \|x\|_{(\alpha)}$ はノルムであり，これにより $C^{0,\alpha}([0,1],\mathbb{R})$ は（非可分な）Banach 空間となる．

適当なクラスの Hölder 連続関数に対しては，Riemann-Stieltjes 積分の要領で，Young 積分[*3]と呼ばれるタイプの積分を定義することが出来る．$[0,t]$ の分割 $\mathscr{P} = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$ を考える．$x = (x_t) \in C^{\alpha\text{-Höl}}([0,1],\mathbb{R})$ および $y = (y_t) \in C^{\alpha\text{-Höl}}([0,1],\mathbb{R})$ なら極限

$$\lim_{|\mathscr{P}| \to 0} \sum_{i=1}^{N} y_{t_{i-1}}(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) =: \int_0^t y_s dx_s \tag{4}$$

が存在し，これを Young 積分と呼ぶ．

1.1 代数的枠組からの準備

V を有限次元の $\mathbb{R}$-ベクトル空間とし，

$$\begin{aligned}
\Delta^{(k)}[s,t] &= \{(t_1,\ldots,t_k) \mid s \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_k \leq t\} \\
\mathscr{C}_1(V) &= C([0,1] \to V) \\
\mathscr{C}_k(V) &= \{g = (g_{t_1,\ldots,t_k}) : \Delta^{(k)}[0,1] \to V \mid g \text{ は連続で，} t_i = t_{i+1} \text{ なら } g_{t_1,\ldots,t_i,t_{i+1},\ldots,t_k} = 0\} \quad (k \geq 2)
\end{aligned}$$

と定める[*4]．$V = \mathbb{R}$ の時は，単に $\mathscr{C}_k(V) = \mathscr{C}_k$ と書く．

定義 1.1. (i) $f \in \mathscr{C}_1$，$g \in \mathscr{C}_k$ に対して，$fg \in \mathscr{C}_k$ および $gf \in \mathscr{C}_k$ を

$$\begin{aligned}
(fg)_{t_1,\ldots,t_k} &= f_{t_1} g_{t_1,\ldots,t_k} \\
(gf)_{t_1,\ldots,t_k} &= g_{t_1,\ldots,t_k} f_{t_k}
\end{aligned}$$

と定める．（これにより $\mathscr{C}_k (k \geq 2)$ には $\mathscr{C}_1$-両側加群の構造が入る．）

[*2] $\dot{f}$ は f の微分．

[*3] L. C. Young [2]

[*4] 通常の和とスカラー倍を考えれば，$\mathscr{C}_k(V)$ は $\mathbb{R}$-線形空間である．

(ii) $f,\ g \in \mathscr{C}_2$ に対して，$f \cdot g \in \mathscr{C}_3$ を $(f \cdot g)_{sut} = f_{su} g_{ut}$ で定める[*5].

(iii) $f \in \mathscr{C}_2(V)$ と $g \in \mathscr{C}_2(W)$ に対して $f \cdot g \in \mathscr{C}_3(V \otimes W)$ を $(f \cdot g)_{s,u,t} = f_{s,u} \otimes g_{u,t}$ と定める.

定義 1.1 では特に $V = \mathbb{R}$ として定義したが，V が一般の有限次元ベクトル空間の場合も，各成分を考えることにより同様に定義することにする.

定義 1.2. 作用素 $\delta = \delta_k : \mathscr{C}_k(V) \to \mathscr{C}_{k+1}(V)$ を

$$(\delta_k f)_{t_1,\dots,t_{k+1}} = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{k+1-i+1} f_{t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_{k+1}}$$

によって定める[*6].（この作用素はコホモロジー理論における cohomology operator ∂^* に相当するものである.）

例 1.3. $k = 1, 2$ の場合に作用素 δ_k を具体的に計算すると，次のようになる.

$$(\delta_1 f)_{st} = f_t - f_s, \quad f \in \mathscr{C}_1(V),$$
$$(\delta_2 g)_{sut} = g_{st} - g_{su} - g_{ut}, \quad g \in \mathscr{C}_2(V).$$

注意 1.4. 文献によっては $(\delta_1 f)_{st} = f_t - f_s$ となっているものもあるので注意されたし.

定義 1.5. $\delta_k : \mathscr{C}_k \to \mathscr{C}_{k+1}\ (k \geq 2)$ に対して

$$\mathscr{Z}\mathscr{C}_k(V) = \operatorname{Ker} \delta_k\ (\subset \mathscr{C}_k(V))$$
$$\mathscr{B}\mathscr{C}_k(V) = \operatorname{Im} \delta_{k-1}\ (\subset \mathscr{C}_k(V))$$

と定義する．$\mathscr{Z}\mathscr{C}_k(V)$ は k-cocyle の空間，$\mathscr{B}\mathscr{C}_k(V)$ は k-coboundary の空間と呼ばれる.

命題 1.6. 作用素 $\delta_k : \mathscr{C}_k(V) \to \mathscr{C}_{k+1}(V)$ に対して，次が成り立つ[*7].

(i) $\delta_{k+1}\delta_k = 0$．すなわち $\operatorname{Im} \delta_k \subset \operatorname{Ker} \delta_{k+1}$.

(ii) $\operatorname{Im} \delta_k = \operatorname{Ker} \delta_{k+1}$．すなわち $\mathscr{Z}\mathscr{C}_k(V) = \mathscr{B}\mathscr{C}_k(V)$.

証明. $k = 1$ のときのみ示す.

(i) $(\delta_1 f)_{st} = f_t - f_s (=: g_{st})$ だから，

$$(\delta_2 \delta_1 f)_{sut} = g_{st} - g_{su} - g_{ut} = (f_t - f_s) - (f_u - f_s) - (f_t - f_u) = 0 \tag{5}$$

となる.

(ii) (i) から $\operatorname{Im} \delta_1 \subset \operatorname{Ker} \delta_2$ が分かっているから，$\operatorname{Ker} \delta_2 \subset \operatorname{Im} \delta_1$ を示せばよい．$g \in \operatorname{Ker} \delta_2$ とする．$f_t = g_{0,t}$ と定義すれば，明らかに $f \in \mathscr{C}_1(V) = C([0,1], V)$ である．$g \in \operatorname{Ker} \delta_2$ だから

$$(\delta_1 f)_{st} = f_t - f_s = g_{0,t} - g_{0,s} = g_{st} \tag{6}$$

となり，$g = \delta_1 f \in \operatorname{Im} \delta_1$ が分かる. □

[*5] この “積” は可換ではない.

[*6] δ_k は $\mathbb{R}$-線型写像になる．左 $\mathscr{C}_1$-加群としての準同型にはなっていないようだ.

[*7] 要するに

$$\mathscr{C}_1(V) \xrightarrow{\delta_1} \mathscr{C}(V) \xrightarrow{\delta_2} \mathscr{C}(V) \xrightarrow{\delta_3} \dots$$

が完全ということである.

命題 1.7. $x = (x_t)$ および $y = (y_t)$ は実数値の C^1-パスとする．x, y に対して $J(x; y)$ を

$$J(y;x)_{st} = \int_s^t \left(\int_s^u dy_v \right) dx_u = \int_s^t (y_u - y_s) dx_u \left(= \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} 1_{\Delta^{(2)}[s,t]}(v,u) dy_v dx_u \right)$$

と定義する．このとき

$$(\delta_2 J(y;x))_{sut} = (\delta_1 y)_{su} (\delta_1 x)_{ut},$$

すなわち $\delta_2 J(y;x) = (\delta_1 y) \cdot (\delta_1 x)$ が成立．

命題 1.7 より，δ_2 という作用素は反復積分 $\int\int dydx$ を (y の増分)× （x の増分) 分解する役割を持っていると解釈できる．

証明．定義をもとに直接計算すれば[*8]，

$$\begin{aligned}(\delta_2 J(y;x))_{s\tau t} &= J(y;x)_{st} - J(y;x)_{s\tau} - J(y;x)_{\tau t} \\ &= \int_\tau^t \left(\int_s^\tau dy_v \right) dx_u \\ &= (y_\tau - y_s)(x_t - x_\tau) \\ &= (\delta_1 y)_{s\tau} (\delta_1 x)_{\tau t}\end{aligned}$$

となる． □

ここまで準備した概念をもとに，Gubinelli の考察における条件 (i) を代数的に書き直してみよう．条件 (i) とは次のようなものであった

$$y_s(x_t - x_s) = I_t - I_s - J_{st}$$

Operator δ_1 の言葉を用いれば，これは

$$y_s(\delta x)_{st} = (\delta_1 I)_{st} - J_{st}$$

ということである．左辺は $y \in \mathscr{C}_1$ を $\delta x \in \mathscr{C}_2$ に左から作用させたものに等しいから，すなわち

$$y(\delta_1 x) = \delta_1 I - J$$

である．この両辺に δ_2 を施せば，

$$\delta_2[y(\delta_1 x)] = \delta_2 \delta_1 I - \delta_2 J = \delta_2 J, \quad \text{in } \mathscr{C}_3 \tag{8}$$

ここから，δ_2^{-1} らしき作用素（Gubinelli's sewing map）を導入して，（1 次方程式を解くように）J を求められないかという考えが浮かぶ．しかし，実際のところは $\delta_2 : \mathscr{C}_2(V) \to \mathscr{C}_3(V)$ は単車ではないという問題がある．

補題 1.8. $-\delta_2[y(\delta_1 x)] = (\delta_1 x) \cdot (\delta_1 y) \in \mathscr{C}_3$ が成り立つ．

---

*8

$$1_{\Delta^{(2)}[s,t]}(v,u) - 1_{\Delta^{(2)}[s,\tau]}(v,u) - 1_{\Delta^{(2)}[\tau,t]}(v,u) = 1_{[s,\tau]\times[\tau,t]}(v,u) \tag{7}$$

であることに注意せよ．

証明．定義に戻って計算すれば，$(s,u,t)\in\Delta^{(3)}[0,1]$ に対して

$$\begin{aligned}
-(\delta_2[y(\delta_1 x)])_{sut} &= -\left[[y(\delta_1 x)]_{st} - [y(\delta_1 x)]_{su} - [y(\delta_1 x)]_{ut}\right] \\
&= -\left[y_s(\delta_1 x)_{st} - y_s(\delta_1 x)_{su} - y_u(\delta_1 x)_{ut}\right] \\
&= -\left[y_s(x_t - x_s) - y_s(x_u - x_s) - y_u(x_u - x_t)\right] \\
&= (y_u - y_s)(x_t - x_u) \\
&= (\delta_1 y)_{su}(\delta_1 x)_{ut}
\end{aligned}$$

となる． □

例 1.9. $g=(g_{st})\in\mathscr{C}_2(V)$ と $f=(f_t)\in\mathscr{C}_1(V)$ に対して $\widetilde{g}=g+\delta_1 f$ と定めれば，$\delta_2\widetilde{g}=\delta_2 g$ である．

この視点で先ほどの $J(y;x)$ と $-y(\delta_1 x)$ を比較すれば，

$$\begin{aligned}
J(y;x)_{st} + [y(\delta_1 x)]_{st} &= \int_s^t (y_u - y_s)dx_u + y_s(x_t - x_s) \\
&= \int_s^t y_u dx_u \\
&= \delta_1 \underbrace{\left(\int_0^{\cdot} y_u dx_u\right)}_{\text{上記の } f \text{ に相当.}}
\end{aligned}$$

一般には δ_2 を考えることは出来ないが，解析的条件（Gubinelli's observation の (iii) に相当）を加味してそれらしきものを作りたい．

1.2 Gubinelli's sewing map

解析的準備

$x=(x_t)\in C([0,1],V)$ に対して，α-Hölder（セミ）ノルム $\|\ \ \|_{(\alpha)}$ の他に

$$\|x\|_{p\text{-var},[s,t]} = \sup_{\mathscr{P}} \left(\sum_{i=1}^N |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|_V^p\right)^{1/p}, \quad \text{where } \mathscr{P} = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$$

も導入しておく．

命題 1.10. (i) $\|x\|_{1/\alpha\text{-var}} \le 1^\alpha \|x\|_{(\alpha)}$ が成立．特に，α-Hölder 連続関数は有限なる $1/\alpha$-variation を持つ．

(ii) x はある $\alpha>1$ に対して α-Hölder 連続であるとする．このとき，x は有限なる $1/\alpha$-variation を持ち，さらに x は定数関数となる．

証明．(i).

$$|x_t - x_s|_V \le \|x\|_{(\alpha)}|t-s|^\alpha$$

の両辺を $1/\alpha$ 乗して足し合わせると

$$\sum_{i=1}^N |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|_V^{1/\alpha} \le \|x\|_{(\alpha)}^{1/\alpha} \sum_{i=1}^N |t_i - t_{i-1}| = \|x\|_{(\alpha)}^{1/\alpha}(t_N - t_0) = \|x\|_{(\alpha)}^{1/\alpha}$$

となる．後は各辺を α 乗して $\sup_{\mathscr{P}}$ を取ればよい．

(ii). $p := 1/\alpha(<1)$-variation が有限なら，パス x は定数になることを示せばよい．$\mathscr{P} = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$ とすれば

$$\begin{aligned}|x_t - x_0| &\le \sum_{i=1}^{N} |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|_V^p |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|_V^{1-p} \\ &\le \left(\max_i |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^{1-p}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|_V^p\right) \\ &\le \left(\max_i |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^{1-p}\right) \|x\|_{p\text{-var},[0,t]}\end{aligned}$$

なる評価が成り立つ．$|\mathscr{P}| \to 0$ とすれば x の一様連続性より最終辺は 0 に収束する． □

注意 1.11. 命題 1.10 (i) の逆は一般には不成立．（例えば，単調関数は不連続でも 1-variation 有限（$\Longrightarrow$p-var 有限））

連続関数の枠内でも，$x_t = \sqrt{t}$ は 1-variation が有限だが，Lipschitz 連続（=1-Hölder 連続）ではない．

注意 1.12. $x \in C([0,1], \mathbb{R})$ だが，どんなに小さく $\alpha > 0$ をとっても α-Hölder 連続にならない例は作れる．

$$x_t = \begin{cases} 0 & (t = 0) \\ -\dfrac{1}{\log(t/2)} & (0 < t \le 1) \end{cases}$$

つまり，Young 積分は Riemann-Stieltjes 積分 $\int y_t dx_t$（y:連続，x：有界変動 (or Lipschitz)）を完全に含んでいるわけではない．

これから，$\mathscr{C}_2(V)$ と $\mathscr{C}_3(V)$ にも Hölder ノルムを導入したい．

定義 1.13. (i) $g = (g_{st}) \in \mathscr{C}_2(V)$ に対して

$$\|g\|_{(\mu)} := \sup_{0 \le s < t \le 1} \frac{|g_{st}|_V}{|t-s|^\mu}$$

と定義する．$\|g\|_{(\mu)} < \infty$ なる $g \in \mathscr{C}_2(V)$ 全体の空間を $\mathscr{C}_2^{\mu\text{-Höl}}(V)$ と表記する．

(ii) $h = (h_{sut}) \in \mathscr{C}_3(V)$ に対して

$$\|h\|_{(\mu)} := \inf\left\{ \sum_{\text{finite}} \|h\|_{(\gamma_i, \mu-\gamma_i)} \mid h = \sum_{\text{finite}} h_i,\ 0 < \gamma_i < \mu \right\}.$$

$$\text{ただし} \quad \|h\|_{(\gamma,\mu-\gamma)} := \sup_{0 \le s < t \le 1} \frac{|h_{sut}|_V}{|u-s|^\gamma |t-u|^{\mu-\gamma}}.$$

注意 1.14. (i) $g = \delta_1 f \in \mathscr{C}_2(V)$ の場合は

$$\|g\|_{(\mu)} = \|\delta_1 f\|_{(\mu)} = \|f\|_{(\mu)} \tag{9}$$

が成立する[*9][*10]．

[*9] このことは

$$\frac{|g_{st}|_V}{|t-s|^\mu} = \frac{|(\delta_1 f)_{st}|_V}{|t-s|^\mu} = \frac{|f_t - f_s|_V}{|t-s|^\mu} \tag{10}$$

という関係から分かる．

[*10] よって $\delta_1(C^{\mu\text{-Höl}}) \subset \mathscr{C}_2^{\mu\text{-Höl}}(V)$ である．

(ii) 文献によっては

$$\|h\|_{(\mu)} = \sup_{0\le s<u<t\le 1} \frac{|h_{sut}|}{|t-s|^{\mu}} \tag{11}$$

となっていることもある．

先の話を $\delta_2 : \mathscr{C}_2^{\mu\text{-Höl}}(V) \to \mathscr{Z}\mathscr{C}_3(V)$（ただし $\mu > 1$）に制限して考え直す．

例 1.15. $g = (g_{st}) \in \mathscr{C}_2^{\mu\text{-Höl}}(V)$ および $f = (f_t) \in \mathscr{C}_1^{\mu\text{-Höl}}(V)$ に対して $\widetilde{g} = g + \delta_1 f$ と定めれば，$\delta_2 \widetilde{g} = \delta_2 g$ である．f は $\mu > 1$ に対して μ-Hölder 連続だから命題 1.10.(ii) により定数関数となり，$\delta_1 f = 0$ が成立．結局 $g = \widetilde{g}$ ということになる．

注意 1.16. $\delta_2(\mathscr{C}_2^{\mu\text{-Höl}}(V)) \subset \mathscr{Z}\mathscr{C}_3^{\mu\text{-Höl}}(V)$ が成立つかは一般には分からない．

定理 1.17 (Sewing map Λ の存在定理)**.** $\mu > 1$ を固定する．

(i) 写像 $\Lambda : \mathscr{Z}\mathscr{C}_3^{\mu\text{-Höl}}(V) \to \mathscr{C}_2^{\mu\text{-Höl}}(V)$ で $\delta_2 \Lambda = Id_{\mathscr{Z}\mathscr{C}_3^{\mu}}$ を満たすものがただ一つ存在する．

(ii) 任意の $h \in \mathscr{Z}\mathscr{C}_3^{\mu\text{-Höl}}(V)$ に対して

$$\|\Lambda h\|_{(\mu)} \le \frac{1}{2^{\mu} - 2} \|h\|_{(\mu)} \tag{12}$$

が成り立つ．

系 1.18. $g \in \mathscr{C}_2^{\mu\text{-Höl}}(V)$ かつ $\delta_2 g \in \mathscr{Z}\mathscr{C}_3^{\mu\text{-Höl}}(V)$ なら，$\Lambda \delta_2 g = g$ が成立．

定理 1.17 より先に，系 1.18 の証明をすることにする．

証明. $g \in \mathscr{C}_2^{\mu\text{-Höl}} \cap \delta_2^{-1}(\mathscr{Z}\mathscr{C}_3^{\mu\text{-Höl}})$ とする．$\widetilde{g} = \Lambda \delta_2 g$ と定めれば，$\delta_2 \widetilde{g} = (\delta_2 \Lambda)\delta_2 g = \delta_2 g$ である．よって $g - \widetilde{g} \in \operatorname{Ker} \delta_2 = \operatorname{Im} \delta_1$ となり，$f \in \mathscr{C}_1^{\mu\text{-Höl}}(V)$ で $g - \widetilde{g} = \delta_1 f$ なるものが存在する．f は $\mu > 1$ の Hölder 連続関数だから命題 1.10.(ii) により定数となり，$\delta_1 f = 0$ が分かる．これより $g = \widetilde{g}$ を得る． □

例 1.19. $x = (x_t)_{0\le t\le 1}$ と $y = (y_t)_{0\le t\le 1}$ を C^1-パスとする．x を γ-Höllder 連続，y を κ-Höllder 連続（ただし，$0 < \gamma, \kappa < 1$ かつ $\gamma + \kappa > 1$）と見做して $\mu = \gamma + \kappa$ とおく．

$$J(y;x)_{st} = \int_s^t \left(\int_s^u dy_v \right) dx_u \in \mathscr{C}_2^2 \subset \mathscr{C}_2^{\mu} \tag{13}$$

とすれば[*11]，

$$\begin{aligned}
\|\delta_2 J(y;x)\|_{(\mu)} &= \|(\delta_1 y)\cdot(\delta_1 x)\|_{(\mu)} \\
&\le \sup_{0\le s<u<t\le 1} \frac{|[(\delta_1 y)\cdot(\delta_1 x)]_{sut}|}{|u-s|^{\kappa}|t-u|^{\gamma}} \\
&= \sup_{0\le s<u<t\le 1} \frac{|(y_u - y_s)(x_t - x_u)|}{|u-s|^{\kappa}|t-u|^{\gamma}}
\end{aligned}$$

---

*11 $J(y;x) \in \mathscr{C}_2^{2\text{-Höl}}$ は

$$\frac{|J(y;x)_{st}|}{|t-s|^2} \le \frac{1}{|t-s|} \int_s^t \frac{|y_u - y_s|}{|u-s|} |\dot{x}_u| du \le \|y\|_{(1)} \frac{1}{|t-s|} \int_s^t |\dot{x}_u| du$$

という評価と，$t \mapsto \int_0^t |\dot{x}_u| du$ が C^1 であることから分かる．

$$
\begin{aligned}
&\le \left(\sup_{0\le s<u\le 1} \frac{|(y_u - y_s)|}{|u-s|^{\kappa}} \right) \left(\sup_{0\le u<t\le 1} \frac{|x_t - x_u|}{|t-u|^{\gamma}} \right) \\
&= \|y\|_{(\kappa)} \|x\|_{(\gamma)} < \infty
\end{aligned}
$$

が成立．よって $\delta_2 J \in \mathscr{Z}\mathscr{C}_3^{\mu\text{-Höl}} = \mathscr{C}_3^{\mu\text{-Höl}}(V) \cap \mathscr{Z}\mathscr{C}_3(V)$ が分かった．したがって $J(y;x)$ に対して系 1.18 が適用出来て，

$$
\begin{array}{ccccc}
g = J(y;x) & \xmapsto[\text{decomposition}]{\delta_2} & (\delta_1 y)\cdot(\delta_1 x) & \xmapsto[\text{reconstruction}]{\Lambda} & J(y;x) \\
\Cap & & \Cap & & \Cap \\
\mathscr{C}_2^{\mu\text{-Höl}}(V) & & \mathscr{Z}\mathscr{C}_3^{\mu\text{-Höl}}(V) & & \mathscr{C}_2^{\mu\text{-Höl}}(V)
\end{array}
$$

が得られた．

定理 1.17 証明のアイディアを例 1.19 で見てみよう．$(h_{sut}) = (\delta_1 y)\cdot(\delta_1 x) \in \mathscr{C}_3$ に対して形式的計算を行えば[*12]

$$
\begin{aligned}
(\Lambda h)_{st} :&= -\int_s^t dr \int_{\mathbb{R}} d\tau\, \delta_0'(\tau) h_{s,r,r+\tau} \\
&= -\int_s^t dr \int_{\mathbb{R}} d\tau\, \delta_0'(\tau) (\delta_1 y)_{s,r} (\delta_1 x)_{r,r+\tau} \\
&= -\int_s^t dr \int_{\mathbb{R}} d\tau\, \delta_0'(\tau) (y_r - y_s)(x_{r+\tau} - x_r) \\
&= \int_s^t dr \int_{\mathbb{R}} d\tau\, \delta_0'(\tau) (y_r - y_s)(x_r - x_{r+\tau}) \\
&= \int_s^t dr\, x_r (y_r - y_s) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} d\tau\, \delta_0'(\tau)}_{=0} - \int_s^t dr\, (y_r - y_s) \int_{\mathbb{R}} d\tau\, \delta_0'(\tau) x_{r+\tau} \\
&= -\int_s^t dr\, (y_r - y_s) \left(- \int_{\mathbb{R}} \delta_0(\tau) \dot{x}_{r+\tau} dr \right) \quad \text{(integration by parts)} \\
&= \int_s^t dr\, (y_r - y_s) \dot{x}_r \\
&= \int_s^t (y_r - y_s) dx_r \\
&= J(y;x)_{st}
\end{aligned}
$$

と J を reconstruction 出来た．

実際は Dirac の δ-関数を (ρ_ϵ)（mollifier）で近似して $-\int_s^t dr \int_{\mathbb{R}} d\tau\, \rho_\epsilon'(\tau) h_{s,r,r+\tau}$ の極限をとったものとして捉える．

定理 1.17 証明のために，まずは次の補題を用意する．

補題 1.20. $g = (g_{st}) \in \mathscr{C}_2(V)$（今後は $g_{st} = g(s,t)$ とも書く）とし，$[s,t]$ の分割を

$$
\mathscr{P}^{(n)}[s,t] := \left\{ t_i^n = s + \frac{t-s}{2^n} i \;\middle|\; i = 0, 1, \ldots, 2^n \right\} \tag{14}
$$

[*12] 以下での δ_0 は “Dirac のデルタ関数” を表す．

と定める．（$[s,t]$ を幅 $2^{-n}(t-s)$ で等分割したものである．）このとき，g は次のように表現される：

$$g_{st}=\sum_{i=0}^{2^n-1} g(t_i^n,t_{i+1}^n)+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{2^k-1}(\delta_2 g)(t_{2i}^{k+1},t_{2i+1}^{k+1},t_{2i+2}^{k+1}) \tag{15}$$

証明．$n=2$ の場合に示す．定義に戻って実際に計算すれば，

$$\begin{aligned}
(\text{右辺第 2 項}) &= (\delta_2 g)(t_0^1,t_1^1,t_2^1)+(\delta_2 g)(t_0^2,t_1^2,t_2^2)+(\delta_2 g)(t_2^2,t_3^2,t_4^2)\\
&= g(t_0^1,t_2^1)-g(t_0^1,t_2^1)-g(t_1^1,t_2^1)\\
&\quad + g(t_0^2,t_2^2)-g(t_0^2,t_1^2)-g(t_1^2,t_2^2)\\
&\quad + g(t_2^2,t_4^2)-g(t_2^2,t_3^2)-g(t_3^2,t_4^2)\\
&= g(s,t)-g(t_0^2,t_1^2)-g(t_1^2,t_2^2)-g(t_2^2,t_3^2)-g(t_3^2,t_4^2)\\
&= g(s,t)-\sum_{i=0}^{2^2-1} g(t_i^2,t_{i+1}^2)
\end{aligned}$$

となる． □

定理 1.17.(ii) の証明 *(A priori estimate)*. $h\in\mathscr{Z}\mathscr{C}_3^\mu(V)$ が

$$|\Lambda h(s,t)|_V\le C|t-s|^\mu \tag{$*$}$$

を満たしているとして，C を求める．$h\in\mathscr{Z}\mathscr{C}_3^\mu(V)\subset\mathscr{Z}\mathscr{C}_3(V)=\operatorname{Im}\delta_2$ とすれば，$g=(g_{st})\in\mathscr{C}_2(V)$ で $\delta_2 g=h$ なるものが存在する．Λh $(=\Lambda\delta_2 g)$ に対して補題 1.20 を用いれば，

$$\begin{aligned}
|\Lambda h(s,t)|_V &\le \sum_{i=0}^{2^n-1}\left|\Lambda h(t_i^n,t_{i+1}^n)\right|+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{2^k-1}\left|\delta_2\Lambda h(t_{2i}^{k+1},t_{2i+1}^{k+1},t_{2i+2}^{k+1})\right|\\
&= \sum_{i=0}^{2^n-1}\left|\Lambda h(t_i^n,t_{i+1}^n)\right|+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{2^k-1}\left|h(t_{2i}^{k+1},t_{2i+1}^{k+1},t_{2i+2}^{k+1})\right|\\
&\le \sum_{i=0}^{2^n-1} C|t_{i+1}^n-t_i^n|^\mu+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{2^k-1}\left|h(t_{2i}^{k+1},t_{2i+1}^{k+1},t_{2i+2}^{k+1})\right|\times\left|\frac{2^{k+1}}{t-s}\right|\times\left|\frac{t-s}{2^{k+1}}\right|\\
&= \sum_{i=0}^{2^n-1} C\left|\frac{t-s}{2^n}\right|^\mu+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{2^k-1}\frac{\left|h(t_{2i}^{k+1},t_{2i+1}^{k+1},t_{2i+2}^{k+1})\right|}{|t_{2i+1}^{k+1}-t_{2i}^{k+1}|^{\bullet}|t_{2i+2}^{k+1}-t_{2i+1}^{k+1}|^{\mu-\bullet}}\times\left|\frac{t-s}{2^{k+1}}\right|\\
&\le 2^nC\left|\frac{t-s}{2^n}\right|^\mu+\sum_{k=0}^{n-1}2^k\|h\|_\mu\left|\frac{t-s}{2^{k+1}}\right|\\
&\le 2^{n(1-\mu)}|t-s|^\mu+2^{-\mu}\|h\|_{(\mu)}|t-s|^\mu\left(\sum_{k=0}^{\infty}2^{k(1-\mu)}\right)\\
&= C2^{n(1-\mu)}|t-s|^\mu+\frac{\|h\|_{(\mu)}}{2^\mu-2}|t-s|^\mu
\end{aligned}$$

となる[*13]．後は $n\to\infty$ とすれば

$$|\Lambda h(s,t)|_V\le\frac{\|h\|_{(\mu)}}{2^\mu-2}|t-s|^\mu \tag{16}$$

を得る． □

[*13] 無限級数の収束に $\mu>1$ が効いている．

定理 *1.17.(i)* の証明. □

1.3 Young 積分の代数的定式化

- $x = (x_t) : C^1$-path（γ-Hölder とみなす）
- $y = (y_t) : C^1$-path（κ-Hölder とみなす）
- $I(y;x)_t = \int_0^t y_u dx_u$
- $J(y;x) = \int_s^t \left(\int_s^u dy_v \right) dx_u$

Gubinelli's observation (i) の代数化は

$$- \delta_2[y(\delta_1 x)] = \delta_2 J, \quad \text{in } \mathscr{C}_3 \tag{17}$$

であった.

補題 1.21. $\mu = \gamma + \kappa$ とすると,

$$\begin{aligned} \|\delta_2[y(\delta_1 x)]\|_{(\mu)} &= \|(\delta_1 y) \cdot (\delta_1 x)\|_\mu \qquad (\because \text{Lemma } 1.8) \\ &\le \|y\|_{(\kappa)} \|x\|_{(\gamma)} \end{aligned} \tag{18}$$

であったから, (17) の左辺は μ-Hölder 連続性を持つ. ここで $\mu > 1$ を仮定すると (17) の両辺に sewing map Λ を作用することが出来て,

$$-\Lambda[\delta_2(y(\delta_1 x))] = \Lambda \delta_2 J = J.$$

すなわち

$$J(y;x) = \int_s^t \left(\int_s^u dy_v \right) dx_u = -\Lambda[\delta_2(y(\delta_1 x))] \tag{19}$$

と書け, observation-(i) より

$$\begin{aligned} I(y;x)_t - I(y;x)_s &= \int_s^t y_u dx_u \\ &= J(y;x)_{st} + y(\delta_1 x)_{st} \\ &= y(\delta_1 x)_{st} - \Lambda[\delta_2(y(\delta_1 x))] \end{aligned}$$

となる.

定義 1.22 (Young 積分). $x = (x_t) : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ を γ-Hölder 連続関数, $y = (y_t) : [0,1] \to \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^d$ を κ-Hölder 連続関数とし, $\gamma + \kappa > 1$ が成り立っていると仮定する. このとき Young 積分を

$$I(y;x)_{st} := y(\delta_1 x)_{st} - \Lambda[\delta_2(y(\delta_1 x))]_{st} \tag{20}$$

と定義する[*14]. また $-\Lambda[\delta_2(y(\delta_1 x))] \in \mathscr{C}_3(\mathbb{R}^n)$ を $J(y;x)$ と書く.

[*14] ここでの δ_1, δ_2 は

$$\begin{aligned} \delta_1 &: \mathscr{C}_1(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{C}_2(\mathbb{R}^d) \\ \delta_2 &: \mathscr{C}_2(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{C}_3(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

ということ？

定理 1.23. (i) $x=(x_t)$ と $y=(y_t)$ が C^1-パスの時は

$$I(y;x)_{st}=\int_s^t y_u dx_u, \quad J(y;x)_{st}=\int_s^t \left(\int_s^u dy_v\right) dx_u \tag{21}$$

が成り立つ.

(ii) $I(y;x)_{st}=I(y;x)_{su}+I(y;x)_{ut}$.

(iii) J および I について次の評価が成り立つ.

$$\begin{aligned}
|J(y;x)_{st}| &\le \frac{1}{2^\mu-2}\|x\|_{(\gamma)}\|y\|_{(\kappa)}|t-s|^\mu \\
&\left(\rightsquigarrow \|J(y;x)\|_{(\mu)} \le \frac{1}{2^\mu-2}\|x\|_{(\gamma)}\|y\|_{(\kappa)}\right) \\
|I(y;x)_{st}| &\le \|x\|_{(\gamma)}\|y\|_{(\kappa)}|t-s|^\gamma+\frac{1}{2^\mu-2}\|x\|_{(\gamma)}\|y\|_{(\kappa)}|t-s|^\mu \\
&\left(\rightsquigarrow \|I(y;x)\|_{(\gamma)} \le \|x\|_{(\gamma)}\|y\|_{(\kappa)}+\frac{1}{2^\mu-2}\|x\|_{(\gamma)}\|y\|_{(\kappa)}\right)
\end{aligned}$$

(iv) $[s,t]$ の分割を $\mathscr{P}=\{s=t_0<t_1<\cdots<t_N=t\}$ で表せば,

$$I(y;x)_{st}=\lim_{|\mathscr{P}|\to 0}\sum_{i=1}^N y_{t_{i-1}}(x_{t_i}-x_{t_{i-1}})$$

が成立.

証明. (i) はここまでの考察において既に示されている.

(ii) (20) に δ_2 を作用させて 0 になることを示せばよい. 実際,

$$\delta_2 I(y;x)=\delta_2[y(\delta_1 x)]-(\delta_2\Lambda)\delta_2[y(\delta_1 x)]=\delta_2[y(\delta_1 x)]-\delta_2[y(\delta_1 x)]=0$$

である.

(iii) 定理 1.17.(ii) および (18) より

$$\begin{aligned}
\|J(y;x)\|_{(\mu)} &= \|\Lambda[\delta_2(y\delta_1 x)]\|_{(\mu)} \\
&\le \frac{1}{2^\mu-2}\|\delta_2(y\delta_1 x)\|_{(\mu)} \\
&\le \frac{1}{2^\mu-2}\|x\|_{(\gamma)}\|y\|_{(\kappa)}
\end{aligned}$$

である. また

$$|y(\delta_1 x)_{st}|=|y_s(x_t-x_s)|\le \|y\|_\infty\|x\|_{(\gamma)}|t-s|^\gamma \tag{22}$$

に注意すれば,

$$\begin{aligned}
|I(y;x)_{st}| &\le |y(\delta_1 x)_{st}|+|J(y;x)_{st}| \\
&\le \|y\|_\infty\|x\|_{(\gamma)}|t-s|^\gamma+\frac{1}{2^\mu-2}\|x\|_{(\gamma)}\|y\|_{(\kappa)}|t-s|^\mu
\end{aligned}$$

を得る.

(iv)

$$S(\mathscr{P}) = \sum_{i=1}^{N} y_{t_{i-1}}(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \tag{23}$$

と定めれば，Young 積分 I の区間加法性より

$$\begin{aligned} S(\mathscr{P}) &= \sum_{i=1}^{N} y_{t_{i-1}}(\delta_1 x)_{t_{i-1}t_i} \\ &= \sum_{i=1}^{N} [y(\delta_1 x]_{t_{i-1}t_i} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left\{ I(y;x)_{t_{i-1}t_i} + J(y;x)_{t_{i-1}t_i} \right\} \\ &= I(y;x)_{st} + \sum_{i=1}^{N} J(y;x)_{t_{i-1}t_i} \end{aligned}$$

となる．(iii) より

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{N} J(y;x)_{t_{i-1}t_i} \right| &\leq \sum_{i=1}^{N} \frac{\|x\|_{(\gamma)}\|y\|_{(\kappa)}}{2^\mu - 2} |t_i - t_{i-1}|^\mu \\ &= \frac{\|x\|_{(\gamma)}\|y\|_{(\kappa)}}{2^\mu - 2} \sum_{i=1}^{N} |t_i - t_{i-1}|^\mu \\ &\leq \frac{\|x\|_{(\gamma)}\|y\|_{(\kappa)}}{2^\mu - 2} |\mathscr{P}|^{\mu-1} \sum_{i=1}^{N} |t_i - t_{i-1}| \\ &= \frac{\|x\|_{(\gamma)}\|y\|_{(\kappa)}}{2^\mu - 2} (t-s)|\mathscr{P}|^{\mu-1} \xrightarrow[|\mathscr{P}|\to 0]{} 0 \end{aligned}$$

だから

$$\lim_{|\mathscr{P}|\to 0} S(\mathscr{P}) = I(y;x)_{st} \tag{24}$$

□

2 (α-Hölder) Rough Path

以下 $1/3 < \alpha \leq 1/2$ と仮定する．V を有限次元の $\mathbb{R}$-線形空間とする．

定義 2.1. $T^{(2)}(V) = \mathbb{R} \oplus V \oplus (V \otimes V)$ に以下の様な代数演算を入れたものを，step 2 の truncated tensor algebra という．

(i) 和とスカラー倍は，成分ごとの和とスカラー倍とする．

(ii) $a = (a^0, a^1, a^2)$, $b = (b^0, b^1, b^2) \in T^{(2)}(V)$ に対して，テンソル積 $\circledast$ を[*15]

$$a \circledast b = (a^0 b^0, a^0 b^1 + a^1 b^0, a^0 b^2 + a^1 \otimes b^1 + a^2 b^1) \in T^{(2)}(V)$$

と定める．

[*15] 何でこれをテンソル積というのだ？テンソル積というより単なる積のような．

さらに $T^{(2)}(V)$ には直積位相を入れて，位相線形空間と考える．

注意 2.2. (i) 一般に $a \circledast b \neq b \circledast a$．すなわち積 $\circledast$ は非可換である．

(ii) $T^{(2)}(V)$ は単位元 $\mathbf{1} = (1, 0, 0)$ を持つ．

(iii) $a = (a^0, a^1, a^2)$ は $a^0 \neq 0$ の時，逆元

$$a^{-1} = \left(\frac{1}{a^0}, -\frac{1}{(a^0)^2} a^1, -\frac{1}{(a^0)^2} a^2 + \frac{1}{(a^0)^3} a^1 \otimes a^1 \right) \tag{25}$$

を持つ．

定義 2.3 (α-Hölder Rough Path)**.** 連続関数 $\mathbf{X} = (1, X^1, X^2) : \Delta^{(2)}[0,1] \to T^{(2)}(V)$ が条件

(i) $X^1 \in \mathscr{C}_2^{\alpha\text{-Höl}}(V)$ かつ $X^2 \in \mathscr{C}_2^{2\alpha\text{-Höl}}(V \otimes V)$,

(ii) $\mathbf{X}_{su} \circledast \mathbf{X}_{ut} = \mathbf{X}_{st}$ (Chen's identity),

を満たすとき，$\mathbf{X}$ は α-Hölder Rough Path であるという．α-Hölder Rough Path 全体の空間を $\Omega_\alpha^{(H)}(V)$ で表す．

注意 2.4. (i) $\Omega_\alpha^{(H)}(V)$ は距離

$$\rho_\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \|X^1, Y^1\|_{(\alpha)} + \|X^2, Y^2\|_{2\alpha} \tag{26}$$

により，完備（非可分）距離空間になる．

(ii) $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} \in \Omega_\alpha^{(H)}(V)$ のとき，$\mathbf{X} + \mathbf{Y} \notin \Omega_\alpha^{(H)}(V)$ である．

Chen's identity を成分ごとに考察してみよう．

$$\mathbf{X}_{su} \circledast \mathbf{X}_{ut} = \left(1, X_{su}^1 + X_{ut}^1, X_{ut}^2 + X_{su}^1 \otimes X_{ut}^1 + X_{su}^2\right) \tag{27}$$

だから，成分ごとの条件は

- 1st level path : $X_{su}^1 + X_{ut}^1 = X_{st}^1$,
- 2nd level path : $X_{su}^2 + X_{ut}^2 + X_{su}^1 \otimes X_{ut}^1 = X_{st}^2$,

となる．ここで $(X_t) = (X_{0,t}^1) \in \mathscr{C}_1^{\alpha\text{-Höl}}(V)$ という記号を導入すれば，これらの条件はさらに

- 1st level path の条件 $\iff$ $X^1 = \delta_1 X$,
- 2nd level path の条件 $\iff$ $(\delta_1 X) \cdot (\delta_1 X) = \delta_2 X^2$,

注意 2.5. Chen's identity から $\mathbf{X}_{s,t} = \mathbf{X}_{0,s}^{-1} \circledast \mathbf{X}_{0,t}$ となる．

例 2.6. $x = (x_t) \in C^1([0,1], \mathbb{R}^d)$ に対して $\mathbf{X} = \mathscr{S}(x) = (1, \overline{x}^1, \overline{x}^2)$ を以下で定める

$$\begin{aligned}
\overline{x}_{s,t}^1 &= \int_s^t dx_u \in \mathbb{R}^d \\
\overline{x}_{s,t}^2 &= \iint_{\Delta^{(2)}[s,t]} dx_{u_1} \otimes dx_{u_2} = \left(\iint_{\Delta^{(2)}[s,t]} dx_{u_1}^i dx_{u_2}^j \right)_{(i,j) \in \{1,\dots,d\}^2} \in \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d
\end{aligned}$$

これを x の自然な Rough Path lift（x に対応する smooth Rough Path etc.）と呼ぶ．$\mathbf{X} = \mathscr{S}(x) \in \Omega_\alpha^{(H)}$ $(1/3 < \alpha \leq 1/2)$ を確かめよう．成分ごとに見れば，

$$\begin{aligned}
\overline{x}_{st}^{2,ij} - \overline{x}_{su}^{2,ij} - \overline{x}_{ut}^{2,ij} &= \iint_{\Delta^{(2)}[s,t]} dx_{u_1}^i dx_{u_2}^j - \iint_{\Delta^{(2)}[s,u]} dx_{u_1}^i dx_{u_2}^j - \iint_{\Delta^{(2)}[u,t]} dx_{u_1}^i dx_{u_2}^j \\
&= \iint_{[s,u]\times[u,t]} dx_{u_1}^i dx_{u_2}^j \\
&= \int_u^t (x_u^i - x_s^i) dx_{u_2}^j \\
&= (x_u^i - x_s^i)(x_t^j - x_u^j) \\
&= (\overline{x}_{su}^1 \otimes \overline{x}_{ut}^1)^{ij}
\end{aligned}$$

となり，実際に Chen's identity が成り立っている．

自然な Rough Path lift $\mathscr{S}(x)$ は次の性質を満たすことも知られている[*16]．

$$2\,\mathrm{Sym}(\overline{x}_{st}^2) = \overline{x}_{st}^1 \otimes \overline{x}_{st}^1$$

（x が良いパスであることを使っている．）これより，

$$(\overline{x}_{st}^2)^{ij} = \underbrace{\frac{1}{2}(\overline{x}_{st}^1)^i(\overline{x}_{st}^1)^j}_{\text{symmetric part}} + \underbrace{\frac{1}{2}\iint_{s\leq u_1<u_2\leq t} dx_{u_1}^i dx_{u_2}^j - dx_{u_1}^j dx_{u_2}^i}_{\text{anti-symmetric part } =: A_{s,t}^{ij}}$$

が成立．ここで $A = (A^{ij})_{(ij)\in\{1,\dots,d\}^2} \in so(d) \cong \mathbb{R}^{d(d-1)/2}$ と表記することにすれば[*17]，2nd level path は 1st level path の情報のみからなる対称部分 $\overline{x}_{st}^1 \otimes \overline{x}_{st}^1$ と，非対称部分 A^{ij} から決まると考えられる．そこで，ラフパス

$$\mathbf{X} : \Delta^{(2)}[0,1] \ni (s,t) \longmapsto (1, \overline{x}_{st}^1, \overline{x}_{st}^2) = (1, \overline{x}_{st}^1, \overline{x}_{st}^1 \otimes \overline{x}_{st}^1 + A_{st}) \in T^{(2)}(\mathbb{R}^d)$$

を

$$\mathbf{X} : \Delta^{(2)}[0,1] \ni (s,t) \longmapsto (\overline{x}_{st}^1, A_{st}) \in \mathbb{R}^d \otimes so(d) \cong \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^{d(d-1)/2} \cong \mathbb{R}^{d(d+1)/2}$$

と理解することにしよう．

参考文献

[1] M. Gubinelli. Controlling rough paths. *Journal of Functional Analysis*, 216(1):86 – 140, 2004.

[2] L. C. Young. An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration. *Acta Mathematica*, 67(1):251–282, 12 1936.

*16 ただし，行列 A に対して $\mathrm{Sym}(A) = (A + {}^tA)/2$ および $\mathrm{Anti}(A) = (A - {}^tA)/2$ と定める．

*17 $A_{s,t}^{ij}$ は x_s と x_t を結んだ直線と，$[s,t]$ における x のパスが囲む領域の（符号付面積に相当する量である．）