独立増分過程と半マルチンゲール Ver. 0.0

平井祐紀

2021 年 7 月 4 日

概要

Jacod and Shiryaev [5] にしたがい，独立増分過程を主にセミマルチンゲールの特性要素の観点から調べる．

目次

1　導入

記号・用語

本ノートで用いる記号や用語の導入を行う．

自然数全体の集合を $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ で表し，$\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ と定める．また $\mathbb{R}$ を実数全体の集合とし，正と負の無限大を付加した集合を $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ で表す．さらに，$A \subset \overline{\mathbb{R}}$ に対して

$$A_{\geq a} = \{x \in A \mid x \geq a\}, \qquad A_{>a} = \{x \in A \mid x > a\},$$
$$A_{\leq a} = \{x \in A \mid x \leq a\}, \qquad A_{<a} = \{x \in A \mid x < a\}.$$

と定義することにする．例えば

$$\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \infty[= \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$$

である．

d 次元のユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ の 2 点 x, y に対して，その標準内積を $\langle x, y \rangle$ や $x \cdot y$ などの記号で表す．前者はマルチンゲール理論におけるブラケット過程 $\langle M, M \rangle$ と紛らわしいので注意が必要である．x のユークリッドノルムは $\|x\|$ で表す．

関数 $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^d$ のことを d 次元のパスと呼ぶ．パス f が $s \to t$ かつ $s < t$ または $s \leq t$ なる s についての極限が存在すれば，それぞれ

$$\lim_{s \uparrow\uparrow t} f(s), \quad \lim_{s \uparrow t} f(s)$$

で表す．不等号を逆にして

$$\lim_{s \downarrow\downarrow t} f(s), \quad \lim_{s \downarrow t} f(s)$$

も定義する．d 次元のパス f が全ての $t \geq 0$ で右連続かつ，全ての $t > 0$ で左極限を持つとき，càdlàg であるという．càdlàg パス f に対して

$$f(x-) = \lim_{y \uparrow\uparrow x} f(y), \qquad \Delta f(x) = f(x) - f(x-)$$

と定める[1)]．すなわち $f(x-)$ は f の $x > 0$ における左極限であり，$\Delta f(x)$ は f の x におけるジャンプを表す．0 におけるジャンプは便宜上 $\Delta f(0) = 0$ と定めることにする．

本ノートでは単に測度と言ったときは，$\mathbb{R}$-値測度を表すことにする．それ以外のときは何らかの方法で測度の値域を明示することにする．たとえば非負測度とは $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$-値測度のことである

1)　本ノートにおいては Δ はラプラス作用素ではないことに注意されたい．

し，有限測度とは $\mathbb{R}$-値測度のことである．測度空間 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ と可測空間 $(E, \mathscr{E})$，そして可測関数 $f\colon X \to E$ が与えられたとき，

$$\begin{aligned} \mathscr{E} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ A &\longmapsto \mu(f^{-1}(A)) \end{aligned}$$

によって $(E, \mathscr{E})$ 上の測度が定まる．これを f の像測度といい，$f_*\mu$ で表す．可測関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ の μ による積分が存在するとき，それを

$$\int_X f(x)\mu(\mathrm{d}x), \quad \int_X f \mathrm{d}\mu, \quad \int_X \mu(\mathrm{d}x) f(x), \quad \int_X \mathrm{d}\mu\, f, \quad \mu(f), \quad \langle \mu, f\rangle$$

などの記号で表す．上記の積分が定義できるとき，

$$A \mapsto \int_A f(x)\mu(\mathrm{d}x), \qquad A \in \mathscr{A}$$

で定まる測度を $f \bullet \mu$ で表す．$\mathscr{A}$ の部分 σ 代数 $\mathscr{B}$ による f の条件付き期待値が定義できるときは，それを $\mu(f|\mathscr{B})$ などで表すことにする．

ここからは確率論に関する記法や概念を導入しよう．確率空間を $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ という記号で表すことにする．確率変数 X の像測度 P_*X を特に X の分布と呼ぶのであった．二つの確率変数 X と Y について $P_*X = P_*Y$ が成り立つとき，X と Y は同分布を持つといい $X \sim Y$ などと表現する．実数値確率変数 $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ の P による積分を特に期待値と呼び $E[X]$ で表す．また $\mathscr{F}$ の部分 σ-加法族 $\mathscr{G}$ に対して，その条件付期待値の任意の変形 (version) を $E[X|\mathscr{G}]$ で表す．確率変数が可積分でなくとも，非負ならば条件付き期待値が定義できることに注意されたい．X が d 次元の確率変数 $X = (X_i)_{1\le j\le d}$ であるときには，期待値 $E[X]$ はベクトル $(E[X_j])_{1\le j\le d}$ を意味する．また d 次元確率変数のテンソル積 $X \otimes X$ は $d \times d$ 行列 $(X_iX_j)_{1\le j,k\le d}$ と同一視し，その期待値 $E[X \otimes X]$ は行列 $(E[X_jX_k])_{1\le j,k\le d}$ を表すこととする．

本ノートでは，確率過程の時刻集合は常に $\mathbb{R}_{\ge 0}$ を考える．したがってフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ が与えられたとき，フィルトレーションは $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_{\ge 0}}$ という形をしている．フィルトレーションが右連続かつ全ての $(\mathscr{F}, P)$ 零集合を含むとき，フィルター付き確率空間は通常の条件を満たすというのであった．集合 $A \subset \Omega \times \mathbb{R}_{\ge 0}$ は $\mathrm{pr}_1(A) = 0$ を満たすとき消散的であるという．ただし $\mathrm{pr}_1\colon \Omega \times \mathbb{R}_{\ge 0} \to \Omega$ は標準的な射影を表している．確率過程 X と Y は $\{X \ne Y\}$ が消散的であるときに区別不能であるという．$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ 上の良可測 σ 代数を $\mathscr{O}$ で表し，可予測 σ 代数を $\mathscr{P}$ で表す．すなわち

$$\begin{aligned} \mathscr{O} &= \sigma(X\colon \Omega \times \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}; X \text{ は càdlàg な } \mathbb{F} \text{ 適合過程}) \\ \mathscr{P} &= \sigma(X\colon \Omega \times \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}; X \text{ は左連続 } \mathbb{F} \text{ 適合過程}) \end{aligned}$$

である．$\mathscr{O}$ 可測な確率過程は良可測であるといい，$\mathscr{P}$ 可測な確率過程は可予測であるという．フィルター付き確率空間が通常の条件を満たすならば，任意の消散的集合は可予測である．

ここからは確率過程の空間に関する記法をいくつか導入する．確率過程の空間 $\mathscr{H}$ が与えられたとき，$\mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$ でその局所化を，$\mathscr{H}_{\mathrm{ploc}}$ で前局所化を表す．$\mathscr{H}^{\mathrm{c}}$ は $\mathscr{H}$ の元のうち連続なパスをもつもの全体を，$\mathscr{H}_0$ は $\mathscr{H}$ の元のうちで 0 出発のもの全体を表すことにする．$\mathscr{H}$ の元のうち可予測なもの全体は $\mathscr{H}^{\mathrm{pred}}$ で表す．

$\mathscr{M}$ は càdlàg 一様可積分マルチンゲール全体の空間を，$\mathscr{M}^2$ は càdlàg な 2 乗可積分マルチンゲール全体の空間を表すものとする．局所化の記法を用いれば，$\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ は càdlàg 局所マルチンゲール全体の空間となる．また先ほどの記法より $\mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ は連続な局所マルチンゲール全体の集合となる．全ての $M \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ について $MN \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$ を満たすような局所マルチンゲール N 全体の集合を $\mathscr{M}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{loc}}$ と書くことにする．$\mathscr{M}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{loc}}$ の元は純不連続局所マルチンゲールと呼ばれる．このとき，線形空間としての直和の意味で $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}} = \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}} \oplus \mathscr{M}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{loc}}$ が成り立っている．

càdlàg で有限変動なパスをもつ確率過程 A で $A_0 = 0$ を満たすもの全体の集合を $\mathscr{V}$ で表す．$\mathscr{V}^+$ は $\mathscr{V}$ の元のうち，増加的なパスを持つもの全体の集合である．このとき線形空間としての和の意味で $\mathscr{V} = \mathscr{V}^+ - \mathscr{V}^+$ が成り立つ．$A \in \mathscr{V}$ に対して $V(A)$ でその全変動過程を表す．$A \in \mathscr{V}$ で $V(A)_\infty = \lim_{t\to\infty} V(A)_t \in L^1(P)$ を満たすようなもの全体の集合を $\mathscr{A}^+$ で表す．さらに $\mathscr{A}^+ = \mathscr{V}^+ \cap \mathscr{A}$ とする．$A \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ なら，可予測な $A' \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ で $A - A'$ が局所マルチンゲールになるようなものがただ一つ存在する．この過程 A' を A の双対可予測射影や可予測補償子と呼び，$A^{\mathfrak{p}}$ で表す．

$M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$ と $A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ を用いて $X = X_0 + A + M$ と表される確率過程を半マルチンゲールと呼ぶのであった．このような分解として特に A を可予測であるようにとれるとき，X は特殊半マルチンゲールと呼ばれている．双対可予測射影の存在定理より，任意の $A \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ は特殊半マルチンゲールであることがわかる．X が半マルチンゲールで H が可予測局所有界過程である時，H の X による確率積分が定義される．確率積分を

$$H \bullet X, \qquad \int_0^{\cdot} H_s \mathrm{d}X_s$$

などの記号で表す．

2　独立増分過程

本ノートでは，セミマルチンゲールと確率積分論の基礎事項は前提知識とする．

まずは，独立増分過程の定義を行おう．本ノートでは，確率過程やフィルトレーションの時刻集合は常に $\mathbb{R}_{\geq 0}$ であると仮定する．

定義 2.1　$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とし，X を càdlàg な $\mathbb{R}^d$-値 $\mathbb{F}$-適合過程で $X_0 = 0$ を満たすようなものとする．

(1) 全ての $t \geq s \geq 0$ ついて $X_t - X_s$ が $\mathscr{F}_s$ と独立になる時，X は独立増分過程 (process with independent increments) であるという．独立増分過程を PII と略記する．
(2) X は PII であるとする．全ての $t \geq s \geq 0$ について $X_t - X_s \sim X_{t-s}$（分布が等しい）が成り立つとき，X を独立定常増分過程 (process with stationary independent increments) または Lévy 過程 (Lévy process) と呼ぶ．独立定常増分過程を PIIS と省略して表すこともある．
(3) $P(\Delta X_t \neq 0) > 0$ が成り立つとき，t は X の固定された不連続点 (fixed time of discontinuity) であるという．

càdlàg な確率過程の各パス $X(\omega)$ において不連続点は可算個だが，パス毎の不連続点を全て足し合わせると可算個とは限らない．しかし，càdlàg 適合過程が持つ固定された不連続点は可算個に過ぎない．

命題 2.2　càdlàg 適合過程の固定された不連続点全体の集合は可算集合である．

証明　X を càdlàg 適合過程とし，停止時刻劣 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X のジャンプの取り尽くし列とする．すなわち，(T_n) は以下を満たす．

$$\{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \Delta X(t, \omega) \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![T_n]\!],$$
$$[\![T_n]\!] \cap [\![T_m]\!] = \emptyset \quad \text{if } n \neq m.$$

各 T_n の分布のアトムは可算集合だから，

$$D_n \coloneqq \{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid P(T_n = t) > 0\}$$

は可算集合である．いま

$$\{\omega \in \Omega \mid \Delta X_t(\omega) \neq 0\} = \{\omega \in \Omega \mid \exists n \in \mathbb{N},\ T_n(\omega) = t\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega \mid T_n(\omega) = t\}$$

であることと $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ のグラフが交わらないことから,

$$P(\Delta X_t \neq 0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(T_n = t)$$

を得る．これより

$$\begin{aligned}\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid P(\Delta X_t \neq 0) > 0\} &= \{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \exists n \in \mathbb{N},\ P(T_n = t) > 0\} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid P(T_n = t) > 0\} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n\end{aligned}$$

となり，固定された不連続点全体の集合も可算であることがわかる． □

系 2.3　Lévy 過程は固定された不連続点を持たない．

証明　X を Lévy 過程とすれば，定常増分性より全ての t について ΔX_t は同じ分布を持つことがわかる．したがって命題 2.2 より固定された不連続点の集合は空集合となる． □

PII の典型例は Wiener 過程や Poisson 過程である．続く 2 つの節ではそれらの例について考えていく．

3　Wiener 過程

本節では，通常の条件を満たすフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を一つ固定して議論を進める．Brown 運動の定義に通常の条件は必要ないが，確率解析の諸結果を用いるために，通常の条件を仮定しておく．

定義 3.1　W を $\mathbb{R}^d$ 値の連続適合過程とする．W が以下の条件を満たすとき，W は Wiener 過程 (Wiener process) であるという．

(1) $W_0 = 0$ が成り立つ．
(2) 全ての $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ について $E[\|W_t\|^2] < \infty$ かつ $E[W_t] = 0$ が成り立つ．
(3) 全ての $t \geq s \geq 0$ について，$W_t - W_s$ と $\mathscr{F}_s$ は独立である．

Wiener 過程 W に対して，$\sigma^2(t) := E[W_t^{\otimes 2}]$ で定義されるパス $\sigma^2\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ を W の共分散関数 (covariance function) と呼ぶ．共分散関数が $\sigma^2(t) = tI_d$ で与えられるような Wiener 過程[2)] を，特に標準 Wiener 過程 (standard Wiener process) と呼ぶ．

Wiener 過程は Brown 運動 (Brownian motion) と呼ばれることも多い．

2)　I_d は $d \times d$ の単位行列である．

1 次元 Wiener 過程の分散関数 σ^2 が絶対連続な場合は

$$\sigma^2(t) = \int_{[0,t]} h(t)\mathrm{d}t$$

のように積分で表現することができるから，そのような Wiener 過程は標準 Wiener 過程 B による Wiener 積分を用いて

$$W_t = \int_0^t \sqrt{h(s)}\mathrm{d}B_s$$

と構成することができる．

Wiener 過程の基本的な性質を調べよう．

命題 3.2 W をフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ 上の Wiener 過程とする．このとき，次が成り立つ．

(1) σ^2 は連続関数である．また全ての $t \geq s \geq 0$ について，$\sigma^2(t) - \sigma^2(s)$ は正定値行列となる．
(2) W はマルチンゲールである．
(3) W の 2 次共変分行列は $\langle W, W \rangle = \sigma^2$ で与えられる．

証明 (2) $A \in \mathscr{F}_s$ とすれば，可積分性と独立増分性より

$$E[W_t - W_s | \mathscr{F}_s] = E[W_t - W_s] = E[W_{t-s}] = 0$$

が a.s. の意味で成立する．ゆえに W はマルチンゲールである．

(1) $t \geq s \geq 0$ とする．独立増分性と二乗可積分性，そして W_s の平均が 0 であることから，全ての $\xi \in \mathbb{R}^d$ について

$$\begin{aligned}
&\langle \{\sigma^2(t) - \sigma^2(s)\}\xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}^d} \\
&\qquad = E[\langle (W_t^{\otimes 2} - W_s^{\otimes 2})\xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}^d}] \\
&\qquad = E[\langle (W_t - W_s)^{\otimes 2}\xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}^d}] + E[\langle W_s \otimes (W_t - W_s)\xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}^d}] + E[\langle (W_t - W_s) \otimes W_s \xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}^d}] \\
&\qquad = E[\langle W_t - W_s, \xi \rangle_{\mathbb{R}^d}^2] + 2E[\langle W_s, \xi \rangle_{\mathbb{R}^d} \langle W_t - W_s, \xi \rangle_{\mathbb{R}^d}] \\
&\qquad = E[\langle W_t - W_s, \xi \rangle_{\mathbb{R}^d}^2] + 2E[\langle W_s, \xi \rangle_{\mathbb{R}^d}] E[\langle W_t - W_s, \xi \rangle_{\mathbb{R}^d}] \\
&\qquad = E[\langle W_t - W_s, \xi \rangle_{\mathbb{R}^d}^2] \geq 0
\end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに $\sigma^2(t) - \sigma^2(s)$ は正定値である．

次に σ^2 の連続性を示そう．$t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ とする．(2) より W がマルチンゲールとなるので，Doob の不等式より

$$E\left[\sup_{0 \leq s \leq t+1} \|W_s\|^2\right] \leq 4E[\|W_{t+1}\|^2]$$

が成り立つ．よって $(W_s^2)_{0 \leq s \leq t+1}$ は $\sup_{0 \leq s \leq t+1} \|W_s\|^2$ を可積分な優関数として持つ．後は W のパスの連続性に注意して優収束定理を用いれば，$s \mapsto W_s$ は $L^2(\Omega, P; \mathbb{R}^d)$ 値の関数として t で連続であることがわかる．ゆえに σ も連続である．

(3) (1) と (2)，そしてマルチンゲールの 2 次変分の定義より，$W^{\otimes 2}-\sigma^2$ がマルチンゲールになることを示せばよい．独立増分性に注意すれば，(1) と類似の計算により

$$
\begin{aligned}
E[W_t^{\otimes 2} - W_s^{\otimes 2} | \mathscr{F}_s] &= E[(W_t - W_s)^{\otimes 2} | \mathscr{F}_s] \\
&= E[(W_t - W_s)^{\otimes 2}] \\
&= E[W_t^{\otimes 2}] - E[W_s^{\otimes 2}] \\
&= \sigma^2(t) - \sigma^2(s)
\end{aligned}
$$

がわかる．ゆえに $W^{\otimes 2} - \sigma^2$ はマルチンゲールである． □

命題 3.2 の (3) は，次の命題の意味で逆向きの主張も成立する．

命題 3.3　X を連続な d 次元局所マルチンゲールで，$X_0 = 0$ を満たすようなものとする．このとき，次の 2 条件は同値である．

(1) X は分散関数 σ^2 を持つ Wiener 過程である．

(2) X の 2 次変分は（ω に依存しない）有限変動関数 $\sigma^2 \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ で与えられる．

以上の同値条件のもと，$X_t - X_s$ の分布は d 次元正規分布 $\mathscr{N}(0, \sigma^2(t) - \sigma^2(s))$ にしたがう．

命題 3.3 より，Wiener 過程とは決定論的な 2 次変分を持つ連続局所マルチンゲールに他ならないことがわかる．

証明の前に 2 次共変分行列の性質を確認しておく．X を d 次元連続マルチンゲールとする．このとき全ての $t \geq s \geq 0$ について，2 次共変分行列の変分 $\langle X, X\rangle_t - \langle X, X\rangle_s$ は a.s. で正定値となる．

証明　(1) $\Longrightarrow$ (2) は命題 3.2 で既に証明した．

(2) が成り立つと仮定し，$\xi \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$
Y_t(\xi) = \mathscr{E}(i\langle \xi, X\rangle_{\mathbb{R}^d})_t = \exp\left(i\langle \xi, X_t\rangle_{\mathbb{R}^d} + \frac{1}{2}\langle \sigma^2(t)\xi, \xi\rangle_{\mathbb{R}^d}\right)
$$

と定義する[3)]．$f_\xi(x,a) = \exp\left(i\langle \xi, x\rangle_{\mathbb{R}^d} + \frac{1}{2}\langle a\xi, \xi\rangle_{\mathbb{R}^d}\right)$ に対して伊藤の公式を適用すれば

$$
\begin{aligned}
Y_t &= f_\xi(X_t, \sigma_t^2) \\
&= 1 + i \sum_{1\leq j\leq d} \xi_i j \int_0^t Y_{s-} \mathrm{d}(X_j)_s + \frac{1}{2} \sum_{1\leq j,k\leq d} \int_0^t Y_{s-}\xi_j\xi_k \mathrm{d}(\sigma_{jk}^2)_s \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{1\leq j,k\leq d} (i)^2 \int_0^t Y_{s-}\xi_j\xi_k \mathrm{d}(\sigma_{jk}^2)_s
\end{aligned}
$$

3) $\mathscr{E}(Z)$ は指数セミマルチンゲールを表す記号であることに注意しておく．指数セミマルチンゲールとは，線形 SDE

$$
Y_t = 1 + \int_0^t Y_{s-} \mathrm{d}Z_s
$$

の（一意）解のことである．

$$= 1 + i \sum_{1 \le j \le d} \xi_j \int_0^t Y_{s-} \mathrm{d}(X_j)_s$$

という表現を得るので，$Y(\xi)$ は連続局所マルチンゲールであることがわかる．さらに

$$\sup_{s \in [0,t]} \|Y_s\| \le \exp\left(\frac{1}{2}\langle \sigma^2(t)\xi, \xi\rangle_{\mathbb{R}^d}\right)$$

という評価により Y はクラス (DL) であることがわかるから，Y はマルチンゲールである．なお上の評価には 2 次共変分行列に関する正値性を用いた．ここで $t \ge s \ge 0$ および $A \in \mathscr{F}_s$ を任意に選べば，

$$\begin{aligned}
&E\left[1_A \exp\left(i\langle \xi, X_t - X_s\rangle_{\mathbb{R}^d}\right)\right] \\
&= E\left[1_A \exp\left(i\langle \xi, X_t\rangle_{\mathbb{R}^d} + \frac{1}{2}\langle \sigma^2(t)\xi, \xi\rangle_{\mathbb{R}^d} - i\langle \xi, X_s\rangle_{\mathbb{R}^d} - \frac{1}{2}\langle \sigma^2(s)\xi, \xi\rangle_{\mathbb{R}^d}\right)\right. \\
&\quad \left. \times \exp\left(-\frac{1}{2}\langle (\sigma^2(t) - \sigma^2(s))\xi, \xi\rangle_{\mathbb{R}^d}\right)\right] \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\langle (\sigma^2(t) - \sigma^2(s))\xi, \xi\rangle_{\mathbb{R}^d}\right) E\left[\frac{1_A}{Y_s} Y_t\right] \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\langle (\sigma^2(t) - \sigma^2(s))\xi, \xi\rangle_{\mathbb{R}^d}\right) E\left[\frac{1_A}{Y_s} Y_s\right] \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\langle (\sigma^2(t) - \sigma^2(s))\xi, \xi\rangle_{\mathbb{R}^d}\right) P(A)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，下から 2 つ目に等号には Y のマルチンゲール性を用いた．またこの変形を正当化するために，$|Y| \ge 1$ であることも用いた．これより $X_t - X_s$ と $\mathscr{F}_s$ の独立性がしたがう．さらに，$A = \Omega$ とすれば特性関数の表示より $X_t - X_s \sim \mathscr{N}(0, \sigma^2(t) - \sigma^2(s))$ がわかる． □

定義より明らかに Wiener 過程は PII である．また命題 3.3 より定常増分であることもわかるので，Wiener 過程は PIIS となる．

4 Poisson ランダム測度と Poisson 過程

$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を，通常の条件を満たすフィルター付き確率空間とする．また，E を Souslin 空間[4)]とし，$\mathscr{E} = \mathscr{B}(E)$ により $(E, \mathscr{E})$ を可測空間と考える．

まずは，平井 [4] にしたがって整数値ランダム測度の定義を復習しておく．

定義 4.1 μ は良可測なランダム測度で，以下の条件を満たすようなものとする．

(1) μ は $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ に値をとる．

(2) 全ての $t \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ と全ての $\omega \in \Omega$ について，$\mu(\omega, \{t\} \times E) \le 1$ が成り立つ．

4) Souslin 空間とはポーランド空間の連続像であるような Hausdorff 空間である．もちろんポーランド空間などと仮定してもかまわない．

(3) μ は良可測 σ-可積分である．

Poisson ランダム測度とは，可測かつ独立増分であるような整数値ランダム測度である．

定義 4.2 E を Souslin 空間とし，μ を可予測 σ-可積分な整数値ランダム測度とする．

(1) μ が次の 2 条件を満たすとき，μ を広義の Poisson ランダム測度 (extended Poisson random measure) と呼ぶ．
  (a) $(\mathbb{R}_{\geq 0} \times E, \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \otimes \mathscr{B}(E))$ 上の測度 m を $m(A) = E[\mu(A)]$ によって定義する[5)]．このとき，m は σ 有限となる．
  (b) $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \otimes \mathscr{B}(E)$ で $A \subset]s, \infty[$ を満たすような任意のものについて，確率変数 $\mu(\cdot, A)$ は $\mathscr{F}_s$ と独立になる．

  このとき，測度 m を広義 Poisson ランダム測度 μ の強度 (intensity) と呼ぶ．
(2) 全ての $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ について $m(\{t\} \times E) = 0$ が成り立つとき，μ を Poisson ランダム測度 (Poisson random measure) と呼ぶ．
(3) Poisson ランダム測度 m が Lebesgue 測度と $(E, \mathscr{B}(E))$ 上の σ 有限測度の直積となっている時，μ を斉次の Poisson ランダム測度 (homogeneous Poisson random measure) と呼ぶ．

次に Poisson 過程を定義する．

定義 4.3 N を càdlàg 適合増加過程とする．

(1) N は $\mathbb{N}$ に値をとり，ΔN は $\{0, 1\}$ に値を取るとき，N は点過程 (point process) であるという．
(2) 点過程 N が以下の条件を満たすとき，N を広義の Poisson 過程 (extended Poisson process) と呼ぶ．
  (a) 全ての t について $E[N_t] < \infty$ が成り立つ．
  (b) 全ての $t > s \geq 0$ について，$N_t - N_s$ は $\mathscr{F}_s$ と独立になる．
(3) 広義の Poisson 過程 N に対して，その強度と呼ばれる増加関数 $a\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を $a(t) = E[N_t]$ と定義する．a が連続関数となる時，N は Poisson 過程 (Poisson process) であるという．
(4) Poisson 過程 N の強度が $a(t) = t$ を満たすとき，N は標準 Poisson 過程 (standard Poisson process) と呼ばれる．

点過程 N に対して $T_n = \inf\{t \geq 0 \mid N_t = n\}$ と定めれば，これは停止時刻となる．停止時刻列 (T_n) は $\{T_n < \infty\}$ 上で $T_n < T_{n+1}$ を満たし，さらに $\lim_n T_n = \infty$ となる．このとき点過程 N は

$$N = \sum_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} 1_{[\![T_n, \infty[\![}$$

5) これが測度であることは，単調収束定理よりわかる．

と表現することができる．停止時刻列の定義より $N_{T_n} \leq n$ が成り立つから，点過程は局所可積分である．したがって $N \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ であり，N は双対可予測射影を持つことがわかる．

広義 Poisson 過程は明らかに PII であり，ゆえに Poisson 過程も PII である．Poisson 過程とは固定された不連続点を持たないような広義 Poisson 過程のことである．広義 Poisson 過程は特殊セミマルチンゲールである．実際，$N = (N - N^{\mathfrak{p}}) + N^{\mathfrak{p}}$ がその標準分解を与える．

Poisson ランダム測度を用いて Poisson 過程を特徴づける．

命題 4.4 1 点集合 $1 = \{0\}$ を用意し，σ 代数 $\mathscr{P}(1)$ により可測空間と考える．càdlàg 点過程 N に対して，ランダム測度 μ を

$$\mu(\omega, A) = \int_1 \int_{[0,\infty[} 1_A(s,x) \mathrm{d}N_s(\omega)\delta_0(\mathrm{d}x)$$

により定める．

(1) N が広義の Poisson 過程となるための必要十分条件は，μ が広義の Poisson がランダム測度となることである．このとき，N の強度は $a(t) = m([0,t])$ で与えられる．
(2) N が Poisson 過程となるための必要十分条件は，μ が Poisson ランダム測度となることである．
(3) N が標準 Poisson 過程となるための必要十分条件は，μ が斉次の Poisson ランダム測度となることである．

広義の Poisson ランダム測度は可予測 σ-可積分であるから，双対可予測射影が定義できる．次の命題より，広義 Poisson ランダム測度の双対可予測射影は，その強度と一致する．

命題 4.5 μ を広義の Poisson ランダム測度とし，m をその強度とする．m は μ の双対可予測射影である．

証明 ランダム測度 ν を $\nu(\omega, A) = m(A)$ により定義する．m が σ 有限であることから，ν は明らかに可予測 σ 有限である[6]．$\mathscr{P}$ を可予測 σ 代数とすれば，M_μ と M_ν が $\mathscr{P} \otimes \mathscr{E}$ 上で一致することを示せば良い．$m(C) < \infty$ を満たすような C を任意に一つ固定する．さらに $0 \leq s < t$ かつ $A \in \mathscr{F}_s$ かつ $B \in \mathscr{E}$ とし，$A \times]s,t] \times B$ という形の $\mathscr{P} \otimes \mathscr{E}$ 可測集合を考える．このとき，広義 Poisson ランダム測度の独立性よりと可積分性より，

$$\begin{aligned}
M_\mu((A \times]s,t] \times B) \cap (\Omega \times C)) &= E[1_A \, \mu(C \cap \{]s,t] \times B\})] \\
&= E[1_A] E[\mu(C \cap \{]s,t] \times B\})] \\
&= E[1_A] m(C \cap \{]s,t] \times B\}) \\
&= E[1_A \, m(C \cap \{]s,t] \times B\})] \\
&= E[1_A \nu(C \cap \{]s,t] \times B\})]
\end{aligned}$$

6) $\Omega \times A$ の形の集合は $\Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times E$ 上の可予測集合である．

$$= M_\nu((A \times]s,t] \times B) \cap (\Omega \times C))$$

が成り立つ．π-λ 定理を用いれば，これより全ての $D \in \mathscr{P} \otimes \mathscr{E}$ について $M_\mu(D \cap (\Omega \times C)) = M_\nu(D \cap (\Omega \times C))$ となることがわかる．いま C は $m(C) < \infty$ となるような任意の可測集合を選んでいたから，m の σ 有限性より $\mathscr{P} \otimes \mathscr{E}$ 全体でも M_μ と M_ν は一致することがわかる． □

系 4.6 N が広義の Poisson 過程ならば，その双対可予測射影は $N^{\mathfrak{p}} = a$ で与えられる．

証明 命題 4.5 と命題 4.4 よりわかる． □

命題 4.7 広義 Poisson 過程について，次の 2 条件は同値である．

(1) N は Poisson 過程である．
(2) N は準左連続である．

整数値ランダム測度が（広義）Poisson ランダム測度となるための必要十分条件を与える．まずは，の測度に関する記号を用意する．m を $\mathscr{B}_{\geq 0} \otimes \mathscr{E}$ 上の σ 有限測度とし，

$$J = \{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid m(\{t\} \times E) > 0\}$$

と定義する．このとき m の σ 有限性より，J は可算集合となる．この J を用いて，

$$m^{\mathrm{d}}(A) = \int_A 1_J(t)\, m(\mathrm{d}(t,x)), \qquad m^{\mathrm{c}} = m - m^{\mathrm{d}}$$

と定める．

命題 4.8 μ を可予測 σ-可積分な整数値ランダム測度とする．

(1) μ について，以下の 2 条件は同値である．
  (a) μ は広義 Poisson ランダム測度である．
  (b) $\mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \otimes \mathscr{E}$ 上の σ 有限測度 m で，以下の条件を満たすものが存在する．
    (i) 全ての $\omega \in \Omega$ について $\mu^{\mathfrak{p}} = m$ が成り立つ．
    (ii) 全ての $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ について $m(\{t\} \times E) \leq 1$ が成り立つ．
(2) μ は広義 Poisson ランダム測度であるとする．$(A_j)_{j \in I}$ は $\mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \otimes \mathscr{E}$ 可測集合の有限列で，m 測度有限であるような任意のものとする．このとき，次の等式が成り立つ．

$$E\left[\exp\left(\sum_{j \in I} i\xi_j \mu(A_j)\right)\right] \tag{4.1}$$
$$= \left[\exp\left(\sum_{j \in I}(e^{i\xi_j} - 1)m^{\mathrm{c}}(A_j)\right)\right] \times \prod_{s>0}\left[1 + \sum_{j \in I}(e^{i\xi_j} - 1)m((\{s\} \times E) \cap A_j)\right]$$

が成り立つ．ただし，m^{c} は上で定義したものである．

(3) μ が Poisson ランダム測度ならば，(2) と同様の (A_j) に対して

$$E\left[\exp\left(\sum_{j\in I} i\xi_j\mu(A_j)\right)\right] = \exp\left(\sum_{j\in I}(e^{i\xi_j}-1)m(A_j)\right) \tag{4.2}$$

特に，$(\mu(A_j))_{j\in J}$ は独立な確率変数列で，それぞれが平均 $m(A_j)$ の Poisson 分布にしたがう．

ここで，Poisson 分布について復習しておく．$\lambda > 0$ とし，$(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度 P を

$$P = \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\delta_n$$

によって定義する．ただし δ_n は n に集中した Dirac 測度を表す．これが実際に確率測度を定めることは，指数関数の冪級数展開の形よりわかる．このように与えられた P をパラメータ λ の Poisson 分布と呼ぶのであった． Poisson 分布の特性関数は

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x}P(\mathrm{d}x) = \sum_{n\geq 0} e^{i\xi n}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = \exp\left(\lambda(e^{i\xi}-1)\right)$$

で与えられる．

証明　Step 1：(1) の (a) $\Longrightarrow$ (b)． μ が広義 Poisson ランダム測度ならば，命題 4.5 より強度 m が双対可予測射影となる．また強度 m の定義と μ が整数値ランダム測度であることから，全ての $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ について

$$m(\{t\}\times E) = E[\mu(\{t\}\times E)] \leq 1$$

が成り立つ．よって μ は条件 (b) を満たしている．

Step 2：(1)-(b) $\Longrightarrow$ ((1)-(a)$\wedge$(2))． μ を可予測可積分な整数値ランダム測度とし，$\mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})\otimes\mathscr{E}$ 上の σ 有限測度 m は条件 (b) を満たしているとする．M_μ でランダム測度 μ と確率測度 P から生成される $\mathscr{F}_E$ 上の測度をを表すことにすれば，可予測射影の定義より全ての $A \in \mathscr{P}_E$ について

$$M_\mu(A) = M_m(A) = P\otimes m(A)$$

が成り立つ．特に任意の $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})\otimes\mathscr{E}$ について $\Omega\times B$ は可予測集合となるから，

$$E[\mu(B)] = M_\mu(\Omega\times B) = P\otimes m(\Omega\times B) = m(B)$$

である．ゆえに m は μ の強度である．仮定より m は σ 有限であるから，m は定義 4.2 の条件 (1)-(a) を満たす．

次は μ の独立増分性と (4.1) を示そう．$s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ と $B \in \mathscr{F}_s$ を任意に固定する．また $]s,\infty[\times E$ の部分集合からなる有限族 $(A_j)_{j\in I}$ は互いに交わらず，いずれも $m(A_j) < \infty$ を満たしていると仮定

する．このとき，全ての $t \geq s$ について

$$
\tag{4.3} E\left[1_B \exp\left(\sum_{j\in I} i\xi_j (1_{A_j} * \mu)_t\right)\right] = P(B)\left[\exp\left(\sum_{j\in I}(e^{i\xi_j}-1)m^{c}(A_j \cap]s,t] \times E)\right)\right] \\
\times \prod_{s<r\leq t}\left[1+\sum_{j\in I}(e^{i\xi_j}-1)m((\{r\}\times E)\cap A_j))\right]
$$

が成り立つことを示せば十分である．実際，式 (4.3) において一つの集合 A だけを考えて $t \to \infty$ とすれば，優収束定理により

$$
E\left[1_B \exp\left(i\xi\mu(A)\right)\right] = P(B)\left[\exp\left(\sum_{j\in I}(e^{i\xi}-1)m^{c}(A)\right)\right] \\
\times \prod_{r>s}\left[1+(e^{i\xi}-1)m([\{r\}\times E]\cap A)\right]
$$

を得る．この式は $\mu(A)$ が $\mathscr{F}_s$ と独立であることを示している．また，式 (4.3) において $B=\Omega$ として $t\to\infty$ の極限をとれば，(4.1) が導かれる．なお，(4.1) 右辺の無限積が実際に収束することは後に確かめることにする．

さて，実際に (4.3) が成り立つことを示していこう．まずは，càdlàg 確率過程 Y を

$$
Y_t = \exp\left(i\sum_{j\in I}(\xi_j 1_{A_j} * \mu)_t\right)
$$

となるように定義する．$m(A_j)<\infty$ と整数値ランダム測度の良可測性より，$1_{A_j} * \mu \in \mathscr{A}^+$ となることに注意しておく．定義より Y は純不連続であり，そのジャンプは

$$
\begin{aligned}
\Delta Y_t &= \exp\left(i\sum_{j\in I}(\xi_j 1_{A_j} * \mu)_t\right) - \exp\left(i\sum_{j\in I}(\xi_j 1_{A_j} * \mu)_{t-}\right) \\
&= \exp\left(i\sum_{j\in I}(\xi_j 1_{A_j} * \mu)_{t-}\right)\left\{\exp\left(i\sum_{j\in I}\Delta(\xi_j 1_{A_j} * \mu)_t\right)-1\right\} \\
&= Y_{t-}\left\{\exp\left(i\sum_{j\in I}\xi_j\mu(A_j\cap\{t\}\times E)\right)-1\right\}
\end{aligned}
$$

で与えられる．

また，可予測関数 H を

$$
H(t,\omega,x) = \sum_{j\in I} Y_{t-}(\omega)1_{A_j}(u,x)(e^{i\xi_j}-1)
$$

によって定める．このとき，$1+H*\mu$ もまた $\mathscr{A}$ の元となる．可積分性は Y の有界性と $m(A_j)<\infty$

という仮定からしたがう．$1+H*\mu$ のジャンプを計算してみると，

$$\begin{aligned}\Delta(1+H*\mu)_t &= \sum_{j\in I}\Delta(Y_{-}1_{A_j}(e^{i\xi_j}-1)*\mu)_t\\ &= \sum_{j\in I}(e^{i\xi_j}-1)\int_{\{t\}\times E}Y_{u-}1_{A_j}(u,x)\mu(\mathrm{d}(u,x))\\ &= \sum_{j\in I}(e^{i\xi_j}-1)Y_{t-}\mu(A_j\cap\{t\}\times E)\\ &= Y_{t-}\sum_{j\in I}(e^{i\xi_j}-1)\mu(A_j\cap\{t\}\times E)\end{aligned}$$

となる．

いま μ は整数値ランダム測度であるから，$\mu(\bigcup_{j\in I}A_j\cap\{t\}\times E)$ のとる値は 0 か 1 である．また各 j についても $\mu(\bigcup_{j\in I}A_j\cap\{t\}\times E)$ の取る値は 0 か 1 だから，固定した ω と t について $\mu(A_j\cap\{t\}\times E)$ は全て 0 でとなるか，あるいはただ一つの j について 1 となるかのいずれかである．全ての j で $\mu(A_j\cap\{t\}\times E)=0$ となるときには，明らかに

$$\Delta Y_t(\omega)=0=\Delta(1+H*\mu)_t(\omega)$$

である．また j_0 でのみ $\mu(A_{j_0}\cap\{t\}\times E)=1$ となるときには

$$\Delta Y_t(\omega)=Y_{t-}(\omega)\left(e^{i\xi_{j_0}}-1\right)=\Delta(1+H*\mu)_t(\omega)$$

が成り立つ．いずれの場合にも $\Delta Y_t(\omega)=\Delta(1+H*\mu)_t(\omega)$ となり，ΔY と $\Delta(1+H*\mu)$ は等しいことがわかった．Y と $1+H*\mu$ はともに純不連続な $\mathscr{A}$ の元だから，これより $Y=1+H*\mu$ がしたがう．

いま H は可予測ゆえ $H*\mu$ の双対可予測射影は $H*\mu^{\mathfrak{p}}$ となり，$H*\mu-H*\mu^{\mathfrak{p}}$ は局所マルチンゲールであることがわかる．したがって $M:=Y-H*\mu^{\mathfrak{p}}$ も局所マルチンゲールである．また $|Y|=1$ かつ

$$|H*\mu|\le\sum_{j\in I}|e^{i\xi_j}-1|\mu^{\mathfrak{p}}(A_j\cap[0,t]\times E)\le 2\sum_{j\in I}m(A_j)$$

が成り立つから M は有界であり，ゆえに一様可積分マルチンゲールとなる．

いま M の定義より明らかに

$$1_B(M_t-M_s)=1_B(Y_t-Y_s)-1_B(H*\mu^{\mathfrak{p}}_t-H*\mu^{\mathfrak{p}}_s)$$

が成り立つ．また Y の定義と $A_j\subset\,]s,\infty[\,\times E$ という仮定から

$$Y_s=\exp\left(i\sum_{j\in I}\xi_j\int_{[0,s]\times E}1_{A_j}\mathrm{d}\mu\right)=e^0=1$$

である．さらに同じ仮定 $A_j\subset\,]s,\infty[$ と H の定義から，

$$H*\mu^{\mathfrak{p}}_s=\sum_{j\in I}\int_{[0,s]\times E}Y_{u-}1_{A_j}(e^{i\xi_j}-1)\mathrm{d}\mu=0$$

であることもわかる．以上のことより

$$1_BY_t = 1_B + 1_B(M_t - M_s) + 1_B \int_{[s,t]\times E} Y_{u-} \sum_{j\in I}(e^{i\xi_j} - 1)1_{A_j}(u,x)m(\mathrm{d}(u,x)) \tag{4.4}$$

となる．

$P(B) = 0$ のとき (4.3) は自明な等式となるので，以下では $P(B) > 0$ であると仮定する．このとき関数 $f, g\colon [s,\infty[\to \mathbb{R}$ を

$$f(t) = \frac{E[1_BY_t]}{P(B)},$$
$$g(t) = \int_{[s,t]\times E} \sum_{j\in I}(e^{i\xi_j} - 1)1_{A_j}(u,x)m(\mathrm{d}(u,x))$$

と定めよう．(4.4) において期待値をとれば，M のマルチンゲール性より

$$E[1_BY_t] = P(B) + E\left[1_B \int_{[s,t]\times E} Y_{u-} \sum_{j\in I}(e^{i\xi_j} - 1)1_{A_j}(u,x)m(\mathrm{d}(u,x))\right] \tag{4.5}$$

となる．さらに Fubini の定理より

$$\begin{aligned} &E\left[1_B \int_{[s,t]\times E} Y_{u-} \sum_{j\in I}(e^{i\xi_j} - 1)1_{A_j}(u,x)m(\mathrm{d}(u,x))\right] \\ &\qquad = \int_{[s,t]\times E} E\left[1_BY_{u-}\right] \sum_{j\in I}(e^{i\xi_j} - 1)1_{A_j}(u,x)m(\mathrm{d}(u,x)) \end{aligned}$$

となることに注意して (4.5) の両辺を $P(B)$ で割れば

$$\frac{E[1_BY_t]}{P(B)} = 1 + \int_{[s,t]\times E} E\left[1_BY_{u-}\right] \sum_{j\in I}(e^{i\xi_j} - 1)1_{A_j}(u,x)m(\mathrm{d}(u,x))$$

を得る．f と g の定義及び補題 A.5 を用いて以上の式を書き換えれば

$$f(t) = 1 + \int_{[s,t]} f(r-)\mathrm{d}g(r)$$

となる．したがって f は g によって駆動される線型積分方程式の一意解であり，以下の表示を持つ．

$$f(t) = e^{g(t)} \prod_{s<r\leq t}(1 + \Delta g(r))e^{-\Delta g(r)}.$$

なお，右辺の無限積の収束は線型方程式の一般論よりわかる．いま g の定義は

$$g(t) = \int_{[s,t]\times E} \sum_{j\in I}(e^{i\xi_j} - 1)1_{A_j}(u,x)m(\mathrm{d}(u,x))$$

で与えられていたから，

$$\begin{aligned}\Delta g(r) &= \int_{\{r\}\times E}\sum_{j\in I}(e^{i\xi_j}-1)1_{A_j}(u,x)m(\mathrm{d}(u,x)) \\ &= \sum_{j\in I}(e^{i\xi_j}-1)m(A_j\cap\{r\}\times E)\end{aligned}$$

である．したがって，Δg が -1 にならないことと，ジャンプの収束性

$$\sum_{s<r\le t}|\Delta g(r)| \le 2\sum_{j\in I}m(A_j)<\infty$$

に注意して計算を進めれば，

$$\begin{aligned}f(t) &= \exp\left(\int_{[s,t]\times E}\sum_{j\in I}(e^{i\xi_j}-1)1_{A_j}(u,x)m(\mathrm{d}(u,x))\right) \\ &\quad\times\prod_{s<r\le t}(1+\Delta g(r))\prod_{s<r\le t}\exp\left(\sum_{j\in I}(e^{i\xi_j}-1)m(A_j\cap\{r\}\times E)\right) \\ &= \exp\left(\int_{]s,t]\times E}\sum_{j\in I}(e^{i\xi_j}-1)1_{A_j}(u,x)m^{\mathrm{c}}(\mathrm{d}(u,x))\right)\prod_{s<r\le t}(1+\Delta g(r)) \\ &= \exp\left(\int_{]s,t]\times E}\sum_{j\in I}(e^{i\xi_j}-1)1_{A_j}(u,x)m^{\mathrm{c}}(\mathrm{d}(u,x))\right) \\ &\quad\times\prod_{s<r\le t}\left(1+\sum_{j\in I}(e^{i\xi_j}-1)m(A_j\cap\{r\}\times E)\right)\end{aligned}$$

を得る．最後に両辺に $P(B)$ を乗じれば求める等式 (4.3) となる．□

命題 4.8 の系として，Poisson 過程に関する以下の結果が導かれる．

系 4.9　(1) 点過程 N をについて以下の 2 条件は同値である．

(a) N は広義 Poisson 過程である．

(b) 双対可予測射影 $N^{\mathfrak{p}}$ は，ある càdlàg 増加関数 $a\colon \mathbb{R}_{\ge 0}\to\mathbb{R}$ に等しい．

(2) N が広義 Poisson 過程なら，すべての $t\ge s\ge 0$ について

$$E\left[\exp^{i\xi(N_t-N_s)}\right]=\exp\left\{(e^{i\xi}-1)(a^{\mathrm{c}}(t)-a^{\mathrm{c}}(s))\right\}\prod_{s>0}\left[1+\sum_{j\in I}(e^{i\xi}-1)\Delta a(r)\right]$$

が成り立つ．ただし，a^{c} は a の連続部分を表すものとする．

(3) N が広義 Poisson 過程であるための必要十分条件は，N が固定された不連続点を持たないことである．このとき

$$E\left[\exp^{i\xi(N_t-N_s)}\right]=\exp\left\{(e^{i\xi}-1)(a(t)-a(s))\right\}$$

が成り立つ．特に $N_t - N_s$ は強度 $a(t) - a(s)$ の Poisson 分布にしたがう．

(4) N が標準 Poisson 過程ならば，

$$E\left[\exp^{i\xi(N_t - N_s)}\right] = \exp\big((t-s)(e^{i\xi} - 1)\big)$$

が成り立つ．特に $N_t - N_s$ は強度 $t - s$ の Poisson 分布にしたがう．

5 独立増分過程の半マルチンゲール性

独立増分過程は一般に半マルチンゲールになるとは限らない．そこで，本節では独立増分過程におけるセミマルチンゲール性について調べよう．本節の目標は，以下の定理を証明することである．

定理 5.1 X を d 次元の càdlàg 確率過程とする．

(1) X は独立増分過程であるとする．$\xi \in \mathbb{R}^d$ に対して，関数 $\varphi(\xi)\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ を

$$\varphi(\xi)_t = E[e^{i\xi X_t}]$$

によって定める．このとき，X について以下の条件は同値である．

 (a) X は半マルチンゲールである．

 (b) すべての $\xi \in \mathbb{R}^d$ について，$\varphi(\xi)$ は局所有界変動関数となる．

(2) X を d 次元の半マルチンゲールで，$X_0 = 0$ を満たすようなものとする．また h を切り捨て関数とし，(B, C, ν) を h に関する X の特性要素とする．このとき，X について以下の条件は同値である．

 (a) X は独立増分過程である．

 (b) 特性要素 (B, C, ν) のバージョンで，ω に依存しないものが存在する．

X が半マルチンゲールかつ PII であるとき，X の固定された不連続点全体の集合は $J \coloneqq \{t \mid \nu(\{t\} \times \mathbb{R}^d) > 0\}$ に等しい．さらに $X_t - X_s$ の特性関数は以下の表示を持つ．

$$\begin{aligned} E[e^{i\xi(X_t - X_s)}] = \exp\Bigg(& i\langle \xi, B_t - B_s\rangle - \frac{1}{2}\langle (C_t - C_s)\xi, \xi\rangle \\ & + \int_s^t \int_{\mathbb{R}^d} (e^{\langle \xi, x\rangle} - 1 - i\langle \xi, h(x)\rangle) 1_{J^c}(r)\nu(\mathrm{d}(r,x))\Bigg) \\ & \times \prod_{s<r\leq t} \left[e^{-i\langle \xi, \Delta B_r\rangle} \left\{ 1 + \int_{\{r\}\times\mathbb{R}} (e^{i\langle \xi, x\rangle} - 1)\nu(\mathrm{d}(r,x)) \right\} \right] \end{aligned} \tag{5.1}$$

この定理の証明は長いので，いくつものステップにわけて行う．まずは定理の証明に用いる補題を用意しよう．

補題 5.2 X を d 次元の独立増分過程とし，X_t と $X_t - X_s$ の特性関数を

$$\varphi(\xi)_t = E[e^{i\langle \xi, X_t \rangle}], \qquad \psi(\xi)_{s,t} = E[e^{\langle \xi, X_t - X_s \rangle}]$$

と書くことにする．また，時刻 $S_\xi \in [0,\infty]$ を

$$S_\xi = \inf\{t \geq 0 \mid \varphi(\xi)_t = 0\}$$

と定義する．

(1) このとき以下の主張が成り立つ．

 (a) 関数 $t \mapsto |\varphi(\xi)_t|$ は càdlàg かつ減少的である．

 (b) $S_\xi < \infty$ なら，$\varphi(\xi)_{S_\xi -} \neq 0$ が成り立つ．

(2) 確率過程 $Z(\xi)$ を

$$Z(\xi) = \frac{1}{\varphi(\xi)} e^{i\langle \xi, X \rangle} 1_{[\![0, S_\xi[\![} + \frac{1}{\varphi(\xi)_{S_\xi -}} e^{i\langle \xi, X_{S_\xi -}\rangle} 1_{[\![S_\xi, \infty[\![}$$

によって定義する[7]．ただし，時刻 S_ξ は自然と停止時刻とみなしている．このとき $Z(\xi)$ は複素数値マルチンゲールで，適当な $a > 0$ について $1 \leq |Z(\xi)| \leq a$ を満たす．

証明 (1)-(a) の証明． X の独立増分性より，任意の $t \geq s \geq 0$ について

$$\begin{aligned}
\varphi(\xi)_t &= E[e^{i\langle \xi, X_t \rangle}] \\
&= E[e^{i\langle \xi, X_t - X_s \rangle} e^{i\langle \xi, X_s \rangle}] \\
&= E[e^{i\langle \xi, X_t - X_s \rangle}] E[e^{i\langle \xi, X_s \rangle}] \\
&= \varphi(\xi)_s \psi(\xi)_{s,t}
\end{aligned}$$

が成り立つ．定義より明らかに $|\psi(\xi)_{s,t}| \leq 1$ だから，$t \mapsto |\varphi(\xi)_t|$ は減少的であることがわかる．$\varphi(\xi)$ が càdlàg であることは，パスが càdlàg であることと被積分関数の有界性，そして優収束定理を用いることで示される．

(1)-(b) の証明． $S_\xi < \infty$ であると仮定する．$\varphi(\xi)_0 = 1$ より $S_\xi > 0$ であることに注意しておく．先ほどの議論より全ての $S_\xi > t > s \geq 0$ について $\varphi(\xi)_t = \varphi(\xi)_s \psi(\xi)_{s,t}$ が成り立つので，$t \uparrow\uparrow S_\xi$ の極限をとれば優収束定理より

$$\varphi(\xi)_{S_\xi -} = \varphi(\xi)_s \psi(\xi)_{s, S_\xi -}$$

を得る．$s < S_\xi$ なら $\varphi(\xi)_s \neq 0$ であることに注意すれば，

$$\varphi(\xi)_{S_\xi -} \iff [\forall s < S_{\xi -} \quad \psi(\xi)_{s, S_\xi -} = 0]$$

7) $Z(\xi)$ の気持ちは，$Y = e^{i\langle \xi, X \rangle}/\varphi(\xi)$ と定めた時の停止過程 $Y^{S_\xi -}$ である．ただし．いま Y を初めから $\Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ 上で定義することはできないことに注意されたい．

がわかる．ところが優収束定理より

$$\psi(\xi)_{s,S_\xi -} \xrightarrow[s\uparrow\uparrow S_\xi]{} 1$$

が成り立つから，特にある $s < S_\xi -$ について $\psi(\xi)_{s,S_\xi -} \neq 0$ となる．ゆえに $\varphi(\xi)_{S_\xi -}$ は 0 ではない．

(2) の証明． まずは $Z(\xi)$ の範囲を評価しよう．定義より

$$\begin{aligned}|Z(\xi)_t| &= \left| \frac{1}{\varphi(\xi)_t} e^{i\langle \xi, X\rangle} 1_{[\![0,S_\xi[\![}(t) + \frac{1}{\varphi(\xi)_{S_\xi -}} e^{i\langle \xi, X_{S_\xi -}\rangle} 1_{[\![S_\xi,\infty[\![}(t)\right| \\ &= \frac{1}{|\varphi(\xi)_t|} 1_{[\![0,S_\xi[\![}(t) + \frac{1}{|\varphi(\xi)_{S_\xi -}|} 1_{[\![S_\xi,\infty[\![}(t)\end{aligned}$$

となることに注意する．(1) より $t \mapsto |\varphi(\xi)_t|$ は減少関数かつ $|\varphi(\xi)_{S_\xi -}| \neq 0$ となるから，

$$|Z(\xi)_t| \leq \frac{1}{|\varphi(\xi)_{S_\xi -}|} < \infty$$

が成り立つ．また定義より明らかに $|\varphi(\xi)_0| = 1$ なので，

$$|Z(\xi)_t| \geq \frac{1}{|\varphi(\xi)_0|} \geq 1$$

もわかる．ゆえに求める評価を得た．

次に $Z(\xi)$ マルチンゲール性を示す．そのための準備として，まずは停止過程 $X^{S_\xi -}$ が独立増分過程であることを確かめる．$0 \leq s < t$ とすれば

$$X_t^{S_\xi -} - X_s^{S_\xi -} = \begin{cases} X_t - X_s & t < S_\xi \\ X_{S_\xi -} - X_s & s < S_\xi \leq t \\ 0 & S_\xi < s \end{cases}$$

となるから，いずれの場合も $\mathscr{F}_s$ と独立である．この独立増分過程 $X^{S_\xi -}$ に対して

$$\varphi'(\xi)_t = E[e^{i\langle \xi, X_t^{S_\xi -}\rangle}]$$

と定義すれば，

$$\varphi'(\xi) = \varphi(\xi) 1_{[0,S_\xi[} + \varphi(\xi)_{S_\xi -} 1_{[S_\xi,\infty[}$$

が成り立つ．よって (1) の結果より $\varphi'(\xi)_{S_\xi -} \neq 0$ がわかる．

このとき，以下の等式が成り立つことを示そう．

$$Z(\xi)_t = \frac{\varphi'(\xi)_s}{\varphi'(\xi)_t} Z(\xi)_s \exp\left(i \left\langle \xi, X_t^{S_\xi -} - X_s^{S_\xi -} \right\rangle \right).$$

ここでそもそも $Z(\xi)$ は補題の主張のように定めたいわけだが，(1) の結果より $Z(\xi)$ は well-defined であることがわかる．また先ほどの議論により

$$Z(\xi) = \frac{1}{\varphi'(\xi)} e^{i\langle \xi, X^{S_\xi -}\rangle} 1_{[\![0,S_\xi[\![} + \frac{1}{\varphi'(\xi)_{S_\xi -}} e^{i\langle \xi, X_{S_\xi -}\rangle} 1_{[\![S_\xi,\infty[\![}$$

が成り立つこともわかる．これより

$$
\begin{aligned}
\varphi'(\xi)_t Z(\xi)_t &= \exp\left(i\left\langle \xi, X_t^{S_\xi -}\right\rangle\right) 1_{[\![0,S_\xi[\![}(t) + \frac{\varphi'(\xi)_t}{\varphi'(\xi)_{S_\xi -}} \exp\left(i\langle \xi, X_{S_\xi -}\rangle\right) 1_{[\![S_\xi,\infty[\![}(t) \\
&= \exp\left(i\left\langle \xi, X_t^{S_\xi -}\right\rangle\right) 1_{[\![0,S_\xi[\![}(t) + \exp\left(i\langle \xi, X_t^{S_\xi -}\rangle\right) 1_{[\![S_\xi,\infty[\![}(t) \\
&= \exp\left(i\left\langle \xi, X_t^{S_\xi -}\right\rangle\right)
\end{aligned}
$$

となる．すなわち

$$
\varphi'(\xi) Z(\xi) = \exp\left(i\left\langle \xi, X^{S_\xi -}\right\rangle\right) \tag{5.2}
$$

である．この関係式より任意の $t \geq s$ について

$$
\begin{aligned}
\varphi'(\xi)_t Z(\xi)_t &= \exp\left(i\left\langle \xi, X_t^{S_\xi -}\right\rangle\right) \\
&= \exp\left(i\left\langle \xi, X_t^{S_\xi -} - X_s^{S_\xi -}\right\rangle\right) \exp\left(i\left\langle \xi, X_s^{S_\xi -}\right\rangle\right) \\
&= \exp\left(i\left\langle \xi, X_t^{S_\xi -} - X_s^{S_\xi -}\right\rangle\right) \varphi'(\xi)_s Z(\xi)_s
\end{aligned}
$$

となるので，さらに変形すれば求める等式

$$
Z(\xi)_t = \frac{\varphi'(\xi)_s}{\varphi'(\xi)_t} Z(\xi)_s \exp\left(i\left\langle \xi, X_t^{S_\xi -} - X_s^{S_\xi -}\right\rangle\right) \tag{5.3}
$$

を得る．

後は (5.3) の表現を用いて $Z(\xi)$ のマルチンゲール性を確かめればよい．有界性の評価は済んでいるから，可積分性は明らかである．(5.3) 右辺の量の条件付き期待値をとれば，$X^{S_\xi -}$ の独立増分性に注意して計算をすることで

$$
\begin{aligned}
&E\left[\frac{\varphi'(\xi)_s}{\varphi'(\xi)_t} Z(\xi)_s \exp\left(i\left\langle \xi, X_t^{S_\xi -} - X_s^{S_\xi -}\right\rangle\right) \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right] \\
&= \frac{\varphi'(\xi)_s}{\varphi'(\xi)_t} Z(\xi)_s E\left[\exp\left(i\left\langle \xi, X_t^{S_\xi -} - X_s^{S_\xi -}\right\rangle\right) \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right] \\
&= \frac{\varphi'(\xi)_s}{\varphi'(\xi)_t} Z(\xi)_s E\left[\exp\left(i\left\langle \xi, X_t^{S_\xi -} - X_s^{S_\xi -}\right\rangle\right)\right] \\
&= Z(\xi)_s
\end{aligned}
$$

を得る．ゆえに $Z(\xi)$ はマルチンゲールである． □

定理 5.1 の証明　Step 1：(1) の (a) $\Longrightarrow$ (b)． X は独立増分過程かつ半マルチンゲールであるとする．関数 $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ を

$$
f(x,z) = \frac{e^{-i\langle \xi, x\rangle}}{z}
$$

で定めれば，これは実 $n+2$ 変数関数とみて C^2 級である．したがって伊藤の公式より

$$
f(X_t, Z(\xi)_t) = \frac{e^{-i\langle \xi, X_t\rangle}}{Z(\xi)_t}
$$

は半マルチンゲールとなる．Z の定義より

$$\varphi(\xi) = \frac{e^{i\langle \xi, X\rangle}}{Z(\xi)} 1_{[\![0,S_\xi[\![} + \frac{\varphi(\xi)}{\varphi(\xi)_{S_\xi -}} \frac{e^{i\langle \xi, X_{S_\xi -}\rangle}}{Z(\xi)} 1_{[\![S_\xi,\infty[\![}$$

となるから，

$$\varphi(\xi) 1_{[\![0,S_\xi[\![} = \frac{e^{i\langle \xi, X\rangle}}{Z(\xi)} 1_{[\![0,S_\xi[\![}$$

が成り立つ．$e^{i\langle \xi, X\rangle}/Z(\xi)$ は半マルチンゲールだから $\frac{e^{i\langle \xi, X\rangle}}{Z(\xi)} 1_{[\![0,S_\xi[\![}$ も半マルチンゲールであり，ゆえに $\varphi(\xi) 1_{[\![0,S_\xi[\![}$ も半マルチンゲールとなる．決定論的な半マルチンゲールは有限変動過程に限るから，$\varphi(\xi)$ は有限変動関数である．

Step 2：(1) の (b) $\Longrightarrow$ (a)． 全ての $\xi \in \mathbb{R}^d$ について $\varphi(\xi)$ は有限変動関数になると仮定する．このとき X が局所半マルチンゲールになることを示せばよい．より具体的には，任意の $t>0$ に対して停止過程 X^t が d 次元半マルチンゲールになることを示す．そのためには，全ての ξ について $e^{i\langle \xi, X^t\rangle}$ が半マルチンゲールになることを示せばよい[8)]（補題 A.33)．

$t>0$ を任意に固定し，$\varepsilon > 0$ を $\xi \in B(0;\varepsilon)$ なら $|\varphi(\xi)_t| > 0$ となるように選ぶ．このような φ の存在は，$\xi \mapsto \varphi(\xi)_t$ の 0 における連続性と $\varphi(0)_t = 1$ よりしたがう．まずは $x \in B(0;\varepsilon)$ なら $e^{i\langle \xi, X\rangle}$ が半マルチンゲールとなることを示そう．ε の選び方より $\xi \in B(0;\varepsilon)$ なら $t < S_\xi$ となるので，(5.2) より

$$\varphi(\xi)_s Z(\xi)_s = e^{i\langle \xi, X_s\rangle} \quad \text{for } s \in [0,t]$$

がわかる．補題 5.2 より $Z(\xi)^t$ は半マルチンゲールであり，仮定より $\varphi(\xi)^t$ も半マルチンゲールだから，伊藤の公式より $e^{i\langle \xi, X^t\rangle}$ も半マルチンゲールになることがわかる．

次に一般の ξ について考えよう．$\xi \in \mathbb{R}^d$ に対して，$n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ を $|\xi|/n \in B(0;\varepsilon)$ となるように選ぶ．先ほどの議論により $e^{i\langle \xi/n, X^t\rangle}$ は半マルチンゲールとなる．さらに $e^{i\langle \xi, X^t\rangle} = (e^{i\langle \xi/n, X^t\rangle})^n$ に伊藤の公式を適用すれば，$e^{i\langle \xi, X^t\rangle}$ も半マルチンゲールとなることがわかる．

以上の議論で X の半マルチンゲール性が示された．

Step 3：(2) の (a) $\Longrightarrow$ (b)． X は半マルチンゲールかつ PII であると仮定する．このとき（切り捨て関数 h に関する）X の特性要素 (B,C,ν) を調べよう．$\xi \in \mathbb{R}^d$ に対して，X の可予測キュムラント過程 $K(\xi)$ は

$$K(\xi)_t = i\langle \xi, B_t\rangle - \frac{1}{2}\langle C_t \xi, \xi\rangle + \int_{[0,t]\times\mathbb{R}^d} \{e^{i\langle \xi, x\rangle} - 1 - i\langle \xi, h(x)\rangle\}\nu(\mathrm{d}(s,x))$$

で定義されるのであった．

また，S_ξ を補題 5.2 のように定め，

$$\varphi'(\xi)_t = E[e^{i\langle \xi, X_t^{S_\xi -}\rangle}]$$

とする．このとき

$$\varphi'(\xi) = \varphi(\xi) 1_{[0,S_\xi[} + \varphi(\xi)_{S_\xi -} 1_{[S_\xi,\infty[}$$

8）　証明は，例えば平井 [4, 補題 7.3] を参照．

であったことを思い出そう．補題 5.2 より $\varphi'(\xi) \neq 0$ であり，また (1) より $\varphi(\xi)$ は有限変動を持つから，càdlàg 関数

$$g(\xi) = \frac{1}{\varphi'(\xi)} \bullet \varphi'(\xi)$$

が定義できる．定義より明らかに $g(\xi)$ は ω に依存しない関数である．

上のように定めた関数 $g(\xi)$ が $1_{[\![0,S_\xi[\![}$ 上で可予測キュムラント $K(\xi)$ と区別不能であることを示そう．そのためには，全ての $\xi \in \mathbb{R}^d$ について

$$e^{i\langle \xi, X^{S_\xi -}\rangle} - e^{i\langle \xi, X_-^{S_\xi -}\rangle} \bullet g(\xi)$$

が局所マルチンゲールになることを示せばよい．ここで，S_ξ が可予測時刻であることから $K(\xi)^{S_\xi -}$ は停止過程 $X^{S_\xi -}$ の可予測キュムラントになっていることに注意しておく．実際，

$$e^{i\langle \xi, X^{S_\xi -}\rangle} - e^{i\langle \xi, X_-^{S_\xi -}\rangle} \bullet K(\xi)^{S_\xi -} = \left(e^{i\langle \xi, X\rangle} - e^{i\langle \xi, X_-\rangle} \bullet K(\xi)\right)^{S_\xi -}$$

という表示と S_ξ の可予測性から，この過程は局所マルチンゲールとなる．このことと可予測キュムラントの特徴づけから $K(\xi)^{S_\xi -}$ が $X^{S_\xi -}$ の可予測キュムラントであることがわかる．

$Z(\xi)$ を補題 5.2 で定めたマルチンゲールとすれば，部分積分公式より

$$\begin{aligned}
e^{i\langle \xi, X^{S_\xi -}\rangle} &= Z\varphi'(\xi) \\
&= Z_0\varphi'(\xi)_0 + \varphi'(\xi)_- \bullet Z + Z_- \bullet \varphi'(\xi) + [Z, \varphi'(\xi)] \\
&= 1 + \varphi'(\xi)_- \bullet Z + Z_- \bullet \varphi(\xi) + (\Delta\varphi'(\xi)) \bullet Z \\
&= 1 + \varphi'(\xi) \bullet Z + Z_- \bullet \varphi'(\xi)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，2 つ目の等号では $\varphi'(\xi)$ が可予測かつ有限変動であることを用いた[9)]．したがって，$g(\xi)$ の定義にしたがって計算を進めることで

$$\begin{aligned}
e^{i\langle \xi, X^{S_\xi -}\rangle} - e^{i\langle \xi, X_-^{S_\xi -}\rangle} \bullet g(\xi) &= e^{i\langle \xi, X^{S_\xi -}\rangle} - \frac{e^{i\langle \xi, X_-^{S_\xi -}\rangle}}{\varphi'(\xi)_-} \bullet \varphi'(\xi) \\
&= e^{i\langle \xi, X^{S_\xi -}\rangle} - Z_- \bullet \varphi'(\xi) \\
&= 1 + \varphi'(\xi) \bullet Z
\end{aligned}$$

がわかる．定義より明らかに $\varphi'(\xi)$ は有界なので，最後の項は局所マルチンゲールとなる．これで目標の局所マルチンゲール性が示された．

最後に補題 A.32 を用いれば，X の特性要素が ω によらないバージョンを持つことがわかる．

Step 3：(2) の (b) $\Longrightarrow$ (a) と (5.1)． X は ω に依存しない特性要素 (B, C, ν) を持つとする．このとき，任意の $t \geq s$ と任意の $F \in \mathscr{F}_s$ について

$$E[1_F e^{i\langle \xi, X_t - X_s\rangle}] = P(F)\mathscr{E}(K(\xi) - K(\xi)^s)_t \tag{5.4}$$

9） 例えば He, Wang, and Yan [3, 9.4 Example] を見よ．

が成り立つことを示す．

まずは (5.4) が成り立つと仮定して，定理の主張を示そう．(5.4) が全ての $F \in \mathscr{F}_s$ について成り立つことと (5.4) 右辺は ω によらないことから，$X_t - X_s$ は $\mathscr{F}_s$ と独立であることがわかる．さらに $t > s$ は任意に選んでいるから，X は独立増分過程である．

(5.1) を導くために，(5.4) の Doleans-Dade 指数を具体的に計算しよう．いま $K(\xi)$ は有限変動を持つことに注意すれば，

$$
\begin{aligned}
\mathscr{E}(K(\xi) - K(\xi)^s)_t &= e^{K(\xi)_t - K(\xi)^s_t} \prod_{0<r\leq t} (1 + \Delta\{K(\xi)_r - K(\xi)^s_r\})\, e^{-\Delta\{K(\xi)_r - K(\xi)^s_r\}} \\
&= e^{K(\xi)_t - K(\xi)_s} \prod_{s<r\leq t} (1 + \Delta K(\xi)_r)\, e^{-\Delta K(\xi)_r\}}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．可予測キュムラントの定義より

$$
\begin{aligned}
&K(\xi)_t - K(\xi)_s \\
&\quad = i\langle \xi, B_t - B_s\rangle - \frac{1}{2}\langle (C_t - C_s)\xi, \xi\rangle + \int_{]s,t]\times\mathbb{R}^d} \{e^{i\langle\xi,x\rangle} - 1 - i\langle\xi, h(x)\rangle\}\nu(\mathrm{d}(r,x)) \\
&\quad = i\langle \xi, B_t - B_s\rangle - \frac{1}{2}\langle (C_t - C_s)\xi, \xi\rangle + \int_{]s,t]\times\mathbb{R}^d} \{e^{i\langle\xi,x\rangle} - 1 - i\langle\xi, h(x)\rangle\}1_{J^c}\nu(\mathrm{d}(r,x)) \\
&\qquad + \sum_{s<r\leq t} \int_{\{r\}\times\mathbb{R}^d} \{e^{i\langle\xi,x\rangle} - 1 - i\langle\xi, h(x)\rangle\}\nu(\mathrm{d}(r,x))
\end{aligned}
$$

である．また，C の連続性に注意すれば可予測キュムラントのジャンプは

$$
\Delta K(\xi)_r = i\langle \xi, \Delta B_r\rangle + \int_{\{r\}\times\mathbb{R}^d} \{e^{i\langle\xi,x\rangle} - 1 - i\langle\xi, h(x)\rangle\}\nu(\mathrm{d}(s,x))
$$

と表される．これらの表示を用いて計算を続ければ，

$$
\begin{aligned}
&e^{K(\xi)_t - K(\xi)_s} \prod_{s<r\leq t} \{1 + \Delta K(\xi)_r\}\, e^{-\Delta K(\xi)_r} \\
&\quad = \exp\left(i\langle \xi, B_t - B_s\rangle - \frac{1}{2}\langle (C_t - C_s)\xi, \xi\rangle + \int_{]s,t]\times\mathbb{R}^d} \{e^{i\langle\xi,x\rangle} - 1 - i\langle\xi, h(x)\rangle\}1_{J^c}\nu(\mathrm{d}(r,x)) \right) \\
&\qquad \times \prod_{s<r\leq t} e^{-i\langle\xi,\Delta B_r\rangle} \left\{ i\langle\xi, \Delta B_r\rangle + \int_{\{r\}\times\mathbb{R}^d} \{e^{i\langle\xi,x\rangle} - 1 - i\langle\xi, h(x)\rangle\}\nu(\mathrm{d}(s,x)) \right\} \\
&\quad = \exp\left(i\langle \xi, B_t - B_s\rangle - \frac{1}{2}\langle (C_t - C_s)\xi, \xi\rangle + \int_{]s,t]\times\mathbb{R}^d} \{e^{i\langle\xi,x\rangle} - 1 - i\langle\xi, h(x)\rangle\}1_{J^c}\nu(\mathrm{d}(r,x)) \right) \\
&\qquad \times \prod_{s<r\leq t} e^{-i\langle\xi,\Delta B_r\rangle} \left\{ \int_{\{r\}\times\mathbb{R}^d} \{e^{i\langle\xi,x\rangle} - 1\}\nu(\mathrm{d}(s,x)) \right\}
\end{aligned}
$$

を得る．ただし，特性要素 $(B(h), C, \nu)$ において

$$
\Delta B(h)_r = \int_{\{r\}\times\mathbb{R}^d} h\,\mathrm{d}\nu
$$

が成り立つことを用いた．（補題 A.27）これで目的の等式 (5.1) を得た．

最後に，実際に (5.4) が成り立つことを示そう．可予測キュムラントの特徴づけより

$$M := e^{i\langle \xi, X\rangle} - e^{i\langle \xi, X_-\rangle} \bullet K(\xi)$$

は局所マルチンゲールである．いま $s \leq t$ なる全ての s について

$$|M_s| \leq 1 + V(K(\xi))_s \leq 1 + V(K(\xi))_t$$

が成り立つから M はクラス (DL) であり，ゆえに M はマルチンゲールとなる．

さて，ここで s なる時刻と $F \in \mathscr{F}$ を任意に固定する．$P(F) = 0$ の場合 (5.4) は自明な等式なので，$P(F) > 0$ と仮定して示せばよい．M の定義に注意すれば，全ての $t \geq s$ について

$$1_F\left(e^{i\langle \xi, X_t\rangle} - e^{i\langle \xi, X_s\rangle}\right) = 1_F(M_t - M_s) + \int_s^t e^{i\langle \xi, X_{r-}\rangle} \mathrm{d}K(\xi)_r$$

となることがわかる．各辺に $e^{i\langle \xi, X_s\rangle}$ を乗ずれば，

$$1_F e^{i\langle \xi, X_t - X_s\rangle} - 1_F = 1_F e^{i\langle \xi, X_s\rangle}(M_t - M_s) + \int_s^t \left(e^{i\langle \xi, X_{r-} - X_s\rangle}\right) \mathrm{d}K(\xi)_r \tag{5.5}$$

を得る．この表示に着目して，関数 f を

$$f(t) = \frac{E[1_F e^{i\langle \xi, X_{t\wedge s} - X_s\rangle}]}{P(F)}$$

と定義する．$t \geq s$ のとき，M のマルチンゲール性に注意して (5.5) で期待値をとれば

$$1_F f(t) - P(F) = E\left[\int_s^t \left(e^{i\langle \xi, X_{r-} - X_s\rangle}\right) \mathrm{d}K(\xi)_r\right]$$

となる．$K(\xi)$ が ω に依らないことを用いて Fubini の定理を適用すれば

$$\begin{aligned}
f(t) &= 1 + \frac{1}{P(F)} E\left[\int_s^t \left(e^{i\langle \xi, X_{r-} - X_s\rangle}\right) \mathrm{d}K(\xi)_r\right] \\
&= 1 + \int_s^t \frac{E[e^{i\langle \xi, X_{r-} - X_s\rangle}]}{P(F)} \mathrm{d}K(\xi)_r \\
&= 1 + \int_s^t f(r-) \mathrm{d}K(\xi)_r \\
&= 1 + \int_0^t f(r-) \mathrm{d}K(\xi)_r - \int_0^s f(r-) \mathrm{d}K(\xi)_r \\
&= 1 + \int_0^t f(r-) \mathrm{d}K(\xi)_r - \int_0^t f(r-) \mathrm{d}K(\xi)_r^s \\
&= 1 + \int_0^t f(r-) \mathrm{d}\{K(\xi) - K(\xi)^s\}_r
\end{aligned}$$

がわかる．ゆえに，全ての $t \geq s$ について

$$f(t) = 1 + \int_0^t f(r-) \mathrm{d}\{K(\xi) - K(\xi)^s\}_r$$

が成り立つ．f の定義よりこの等式は $t < s$ の場合にも成り立つから，

$$f = \mathscr{E}(K(\xi) - K(\xi)^s)$$

であることがわかる．最後に両辺に $P(F)$ を掛ければ，求める等式 (5.4) がしたがう．

最後に，X の固定された不連続点全体の集合が

$$J = \{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \nu(\{t\} \times \mathbb{R}^d) > 0\}$$

で与えられることを示そう．(5.1) において $s \uparrow\uparrow t$ の極限をとれば，C の連続性と J の定義より

$$\begin{aligned}
E[e^{i\langle \xi, \Delta X_t\rangle}] &= \exp\left(i\langle \xi, \Delta B_r\rangle + \int_{\{t\}\times\mathbb{R}^d} (e^{\langle \xi, x\rangle} - 1 - i\langle \xi, h(x)\rangle)1_{J^c}(r)\nu(\mathrm{d}(r,x)) \right) \\
&\quad \times e^{-i\langle \xi, \Delta B_t\rangle} \left\{ 1 + \int_{\{t\}\times\mathbb{R}^d} (e^{i\langle \xi, x\rangle} - 1)\nu(\mathrm{d}(r,x)) \right\} \\
&= 1 + \int_{\{t\}\times\mathbb{R}^d} (e^{i\langle \xi, x\rangle} - 1)\nu(\mathrm{d}(r,x))
\end{aligned}$$

となる．したがって，$\Delta X_t = 0$ が確率 1 で成り立つことは

$$\int_{\{t\}\times\mathbb{R}^d} (e^{i\langle \xi, x\rangle} - 1)\nu(\mathrm{d}(r,x)) = 0 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^d \tag{5.6}$$

が成り立つことと同値である．(5.6) は，測度 $\nu(\{t\} \times \mathrm{d}x)$ の特性関数が定数 $\nu(\{t\} \times \mathbb{R}^d)$ になるということを示している．$\nu(\{t\} \times \mathbb{R}^d) > 0$ の場合，これは特性関数が ν がディラック測度 $\delta_{(t,0)}$ の正定数倍であることを示している．しかしジャンプ測度の双対可予測射影の性質よりそのようなことは起こりえないから（補題 A.27），(5.6) は $\nu(\{t\} \times \mathbb{R}^d) = 0$ と同値である．すなわち，X の固定された不連続点全体の集合は J に等しい． □

定理 5.1 の (5.1) において $s = 0$ とすれば，直ちに以下の公式が導かれる．

系 5.3（Lévy–Khintchine type formula） X を独立増分を持つ半マルチンゲールとする．このとき

$$\begin{aligned}
E[e^{i\langle \xi, X_t\rangle}] &= \exp\left(i\langle \xi, B_t\rangle - \frac{1}{2}\langle C_t\xi, \xi\rangle + (e^{\langle \xi, x\rangle} - 1 - i\langle \xi, h(x)\rangle)1_{J^c}(r) * \nu_t \right) \\
&\quad \times \prod_{0<r\leq t} \left[e^{-i\langle \xi, \Delta B_r\rangle} \left\{ 1 + \int_{\{r\}\times\mathbb{R}} (e^{i\langle \xi, x\rangle} - 1)\nu(\mathrm{d}(r,x)) \right\} \right]
\end{aligned}$$

が成り立つ．

6 Lévy–伊藤分解と Lévy–Khintchine の公式

本節では，§5 での結果を用いて，Lévy 過程を調べていく．定理 5.1 の系として，Lévy–伊藤分解と Lévy–Khintchine の公式といった高名な結果が得られる．

定理 6.1　X を d 次元の càdlàg 適合過程で $X_0 = 0$ を満たすものとする．このとき，次の条件は同値である．

(1) X は Lévy 過程である．
(2) X は半マルチンゲールで，その特性要素 (B, C, ν) は次の条件を満たす．
  (a) ある $b \in \mathbb{R}^d$ で $B_t = bt$ を満たすものが存在する．
  (b) 対称正定値行列 c で，$C_t = ct$ を満たすようなものが存在する．
  (c) $\mathbb{R}^d$ 上の測度 n で，次の条件を満たすものが存在する．
    (i) $|x|^2 \wedge 1$ は n 可積分である．
    (ii) $n(\{0\}) = 0$ が成り立つ．
    (iii) $\mathrm{d}\nu = \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}n$ が成り立つ．

証明　(2) $\Longrightarrow$ (1) の証明． (2) を仮定すれば X は ω によらない特性要素を持つので独立増分過程であり，定理 5.1 より

$$
\begin{aligned}
E[e^{i\xi(X_t - X_s)}] = \exp\Bigg(& i(t-s)\langle \xi, b\rangle - \frac{1}{2}(t-s)\langle c\xi, \xi\rangle \\
& +(t-s)\int_{\mathbb{R}^d} (e^{\langle \xi, x\rangle} - 1 - i\langle \xi, h(x)\rangle) 1_{J^c}(r) n(\mathrm{d}(x)) \Bigg) \prod_{s<r\leq t} e^{-i\langle \xi, \Delta B_r\rangle}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．さらに関係式

$$
\Delta B(h)_r = \int_{\{r\}\times\mathbb{R}^d} h(x)\mathrm{d}t \otimes n(\mathrm{d}x)
$$

を用いれば

$$
\begin{aligned}
E[e^{i\xi(X_t - X_s)}] = \exp\Bigg(& i(t-s)\langle \xi, b\rangle - \frac{1}{2}(t-s)\langle c\xi, \xi\rangle \\
& +(t-s)\int_{\mathbb{R}^d} (e^{\langle \xi, x\rangle} - 1 - i\langle \xi, h(x)\rangle) 1_{J^c}(r) n(\mathrm{d}(x)) \Bigg)
\end{aligned}
$$

を得る．右辺は明らかに時刻の差 $t - s$ にしかよらないから，X は定常増分をもつことがわかる．すなわち X は Lévy 過程である．

(1) $\Longrightarrow$ (2) の証明． X は Lévy 過程であるとする．まずは X が半マルチンゲールであることを示そう．$t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ と $\xi \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$
\varphi(\xi)_t = E[e^{i\langle \xi, X_t\rangle}]
$$

と定義する．仮定より X は独立増分過程だから，$\varphi(\xi)$ が有限変動関数であることを示せばよい．（定理 5.1.）X の独立定常増分性より，

$$
\varphi(\xi)_{t+s} = E[e^{i\langle \xi, X_{t+s}\rangle}] = E[e^{i\langle \xi, X_{t+s} - X_s\rangle}]E[e^{i\langle \xi, X_s\rangle}] = E[e^{i\langle \xi, X_t\rangle}]E[e^{i\langle \xi, X_s\rangle}] = \varphi(\xi)_t\varphi(\xi)_s
$$

が成り立つ．定義より明らかに $\varphi(\xi)_0 = 0$ だから，指数関数の性質より $\varphi(\xi)$ は

$$
\varphi(\xi)_t = e^{t\Phi(\xi)}
$$

という表現を持つことがわかる．特に $\varphi(\xi)$ が有限変動を持ち，X の半マルチンゲール性がしたがう．

X は独立増分な半マルチンゲールだから，定理 5.1 により ω によらない特性要素 (B, C, ν) が存在する．系 2.3 より X は固定された不連続点を持たないから，(5.1) より

$$\begin{aligned}\varphi(\xi)_t &= \exp\left(i\langle \xi, B_t\rangle - \frac{1}{2}\langle C_t\xi, \xi\rangle + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (e^{\langle \xi, x\rangle} - 1 - i\langle \xi, h(x)\rangle)\nu(\mathrm{d}(r, x))\right) \\ &= e^{K(\xi)_t}\end{aligned}$$

となることがわかる．特に $\varphi(\xi)_t$ は 0 にならない．したがって定理 5.1 の証明と同様に $\varphi(\xi)^{-1} \bullet \varphi(\xi) = t\Phi(\xi)$ が可予測キュムラント $K(\xi)$ と区別不能であることがわかる．すなわち，

$$t\Phi(\xi) = i\langle \xi, B_t\rangle - \frac{1}{2}\langle C_t\xi, \xi\rangle + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (e^{\langle \xi, x\rangle} - 1 - i\langle \xi, h(x)\rangle)\nu(\mathrm{d}(r, x))$$

である．ここで $b = B_1$，$c = C_1$，$n(F) = \nu([0, 1] \times F)$ と定めれば，

$$\begin{aligned}t\Phi(\xi) &= t \times (1\Phi(\xi)) \\ &= t\left(i\langle \xi, b\rangle - \frac{1}{2}\langle c\xi, \xi\rangle + \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} (e^{\langle \xi, x\rangle} - 1 - i\langle \xi, h(x)\rangle)\nu(\mathrm{d}(r, x))\right) \\ &= i\langle \xi, bt\rangle - \frac{1}{2}\langle ct\xi, \xi\rangle + t\int_{\mathbb{R}^d} (e^{\langle \xi, x\rangle} - 1 - i\langle \xi, h(x)\rangle)n(\mathrm{d}x)\end{aligned}$$

がわかる．最後に一意性の補題 A.32 を用いれば

$$B_t = bt, \quad C_t = ct, \quad \mathrm{d}\nu = \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}n$$

となり，定理の主張が示された．□

定理 6.1 を結果を用いて (5.1) を書き直せば，ただちに Lévy–Khintchine の公式を得る．

系 6.2（Lévy–Khintchine の公式） X を Lévy 過程とし，三つ組み (b, c, n) を定理 6.1 の (2) のようにとる．このとき

$$E[e^{i\langle \xi, X_t\rangle}] = \exp t\left(i\langle \xi, b\rangle - \frac{1}{2}\langle c\xi, \xi\rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{\langle \xi, x\rangle} - 1 - i\langle \xi, h(x)\rangle)n(\mathrm{d}x)\right)$$

が成り立つ．

d 次元半マルチンゲールは X のジャンプ測度を μ とし，切り捨て関数 h に関する特性要素を (B, C, ν) と表すことにする．このとき X は以下の標準分解を持つのであった（定理 A.23）．

$$X = X_0 + X^{\mathrm{c}} + h * (\mu - \nu) + (x - h(x)) * \mu + B.$$

特に X が Lévy 過程で切り捨て関数が $h(x) = x1_{\{|x|<\}}$ の場合，X の標準表現は Lévy–伊藤分解と呼ばれている．

系 6.3　d 次元 Lévy 過程 X は以下の分解を持つ．

$$X_t = bt + W_t + \int_{[0,t]\times\{|x|\geq 1\}} xN(\mathrm{d}(s,x)) + \int_{[0,t]\times\{|x|<1\}} x(N(\mathrm{d}(s,x)) - n(\mathrm{d}x)\otimes \mathrm{d}s).$$

ここで，b は $\mathbb{R}^d$ の元であり，c は $d\times d$ 正定値対称行列である．また W は絶対連続な 2 次変分を持つ d 次元 Wiener 過程であり[10)]，N は X のジャンプから定まる斉次の Poisson ランダム測度であり，n は $n(A) = E[N(A)]$ で定まる測度である．

系 6.3 における測度 n を X の Lévy 測度と呼ぶ.

証明　X を Lévy 過程とし，N を X のジャンプ測度とする．切り捨て関数を $h(x) = x1_{\{|x|<1\}}$ で与えれば，定理 6.1 より，X の特性要素 (B, C, ν) は以下のような形をしているのであった．

$$B_t = bt, \quad C_t = ct, \quad \mathrm{d}\nu = \mathrm{d}t\otimes \mathrm{d}n.$$

このとき，X の標準表現は以下の形になる．

$$X_t = bt + X^{\mathrm{c}}_t + \int_{[0,t]\times\{|x|\geq 1\}} xN(\mathrm{d}(s,x)) + \int_{[0,t]\times\{|x|<1\}} x(N(\mathrm{d}(s,x)) - n(\mathrm{d}x)\otimes \mathrm{d}s).$$

したがって，X^{c} が時間斉次的な Wiener 過程であることと，μ が斉次 Poisson ランダム測度であることを示せばよい．X^{c} が Wiener 過程であることは X^{c} の 2 次共変分行列が ct で与えられることと命題 3.3 からわかる．また N が Poisson ランダム測度であることは，双対可予測射影 $N^{\mathfrak{p}}$ が

$$N^{\mathfrak{p}}(A) = \int_A \mathrm{d}t\otimes n(\mathrm{d}x)$$

で与えられることと命題 4.8 からわかる．　□

10)　本ノートでは Wiener 過程の定義に定常増分性を課していないのであった．

A　ランダム測度の基礎事項

本節では，ランダム測度の基礎事項を証明なしでまとめる．詳細は Jacod and Shiryaev [5]，He, Wang, and Yan [3]，平井 [4] などを参照されたい．

A.1　ランダム測度とその双対可予測射影

ランダム測度とその双対化予測射影を定義し，双対化予測射影の存在定理を紹介する．§A を通じてフィルトレーションと確率過程の時刻集合は $\mathbb{R}_{\geq 0}$ であると仮定する．

定義 A.1　$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F})$ をフィルター付き可測空間とし，$(E, \mathscr{E})$ を可測空間とする．新たな可測空間 $(\Omega_E, \mathscr{F}_E)$ を

$$\Omega_E = \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times E, \qquad \mathscr{F}_E = \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \otimes \mathscr{E}$$

によって定める．すなわち，$(\Omega_E, \mathscr{F}_E)$ は与えられた 3 つの可測空間 $(\Omega, \mathscr{F})$，$(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}))$，$(E, \mathscr{E})$ から定まる直積可測空間である． また，$\mathscr{F}_E$ の部分 σ 代数 $\mathscr{P}_E$ および $\mathscr{O}_E$ を

$$\mathscr{P}_E = \mathscr{P} \otimes \mathscr{E}, \qquad \mathscr{O}_E = \mathscr{O} \otimes \mathscr{E}$$

によって定義し[11)]，それぞれ Ω_E 上の可予測 (predictable)，良可測 (optional) σ 代数と呼ぶ．Ω_E 上の $\mathscr{P}_E$ あるいは $\mathscr{O}_E$ 可測な関数を，それぞれ可予測関数 (predictable function)，良可測関数 (optional function) という．

以下，E は Souslin 空間であると仮定し，σ 代数 $\mathscr{E}$ は常に $\mathscr{E} = \mathscr{B}(E)$ を考えることにする．もちろん，E をポーランド空間やその Borel 部分集合などもっと「良い」可測空間と考えても差支えない．以下，通常の条件を満たすフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を固定して議論を進める．

定義 A.2　関数 $\mu\colon \Omega \times (\mathscr{B}_{\geq 0} \otimes \mathscr{E}) \to [0, \infty]$ は以下の条件を満たすとき，可測空間 $(\Omega, \mathscr{F})$ から可測空間 $(\mathbb{R}_{\geq 0} \times E, \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \otimes \mathscr{E})$ への核 (kernel) と呼ばれるのであった．

(1) 全ての $\omega \in \Omega$ について，$\mu(\omega, \cdot)$ は $\mathscr{B}_{\geq 0} \otimes \mathscr{E}$ 上の $[0, \infty]$ 値測度である．
(2) 全ての $A \in \mathscr{B}_{\geq 0} \otimes \mathscr{E}$ について，$\mu(\cdot, A)$ は $\mathscr{F}$ 可測関数である．

上記の意味での核 μ がさらに

$$\mu(\omega, \{0\} \times E) = 0 \qquad \forall \omega \in \Omega$$

を満たすとき，μ ランダム測度 (random measure) と呼ぶ[12)]．

11) $\mathscr{P}$ および $\mathscr{O}$ はそれぞれ可予測，良可測 σ 代数である．
12) この条件を課さない流儀もある．これは，増加過程 A に条件 $A_0 = 0$ を課すかどうかに対応するものである．さらに，ランダム測度にはじめからある種の σ 有限性を仮定する流儀もある．

ランダム測度 μ と ν が

$$P\left(\mathrm{pr}_1\left\{(\omega,B)\mid \mu(\omega,B)\neq\nu(\omega,B)\right\}\right)=0$$

を満たすとき，μ と ν は区別不能であるという[13)]．

ランダム測度 μ が与えられたとき，

$$M_\mu(B\times C)=E\left[\mu(\,\cdot\,,C)1_B\right]\quad B\in\mathscr{F}\quad C\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})\otimes\mathscr{E}$$

で定義される関数は Carathéodory の拡張定理により $\mathscr{F}_E$ 上の非負測度に拡張される[14)]．その測度を M_μ で表し，μ によって生成された測度と呼ぶ．μ の十分良い可積分性の下で，Fubini 型の等式

$$M_\mu(D)=\int_\Omega\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}\times E}1_D(\omega,t,x)\mu(\omega,\mathrm{d}(t,x))P(\mathrm{d}\omega)$$

が成り立つ．

次にランダム測度の可積分性に関する言葉を導入する．

定義 A.3　μ をランダム測度とする．

(1) M_μ が有限測度であるとき，ランダム測度 μ は可積分であるという．
(2) M_μ が σ 有限測度であるとき，μ は σ 可積分であるという．
(3) M_μ の $\mathscr{O}_E$ 上への制限が σ 有限であるとき，良可測 σ 可積分であるという．
(4) M_μ の $\mathscr{P}_E$ 上への制限が σ 有限であるとき，μ は可予測 σ 可積分であるという．

本ノートではこれ以降，良可測 σ 可積分なランダム測度のみを扱う．

μ を良可測 σ 可積分なランダム測度とする．十分良い可積分性をもつ $\mathscr{F}_E$ 可測関数 W と $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})\otimes\mathscr{E}$ に対して

$$\nu(\omega,B)=\int_B W(\omega,t,x)\mu(\omega,\mathrm{d}(t,x))$$

と定義すれば，ν はまたランダム測度となる．このように定まるランダム測度を $\nu=W\bullet\mu$ で表す． また，十分良い可積分性をもつ $\mathscr{F}_E$ 可測関数 W に対して新たな確率過程 $W*\mu$ を

$$(W*\mu)_t(\omega)=\int_{[0,t]\times E}W(\omega,s,x)\mu(\omega,\mathrm{d}(s,x))$$

によって定義する．

定義 A.4　$W*\mu$ が存在するような任意の良可測関数 W に対して $W*\mu$ が良可測過程となるとき，ランダム測度 μ は良可測であるという．また，$W*\mu$ が存在するような任意の可予測関数 W に対して $W*\mu$ が可予測過程となるとき，ランダム測度 μ は可予測であるという．

---

13)　$\mathrm{pr}_1:\Omega\times\mathbb{R}_{\geq 0}\times E\to\Omega$ は標準的な射影を表す．
14)　拡張は一意とは限らない．M_μ が σ 有限ならもちろん一意である．

μ が良可測ランダム測度であるとき，$W * \mu_t < \infty$ となるような非負良可測な W について $W * \mu \in \mathscr{V}$ が成り立つ．このとき μ が可積分であるとは $1 * \mu \in \mathscr{A}^+$ が成り立つということである．

μ が良可測（可予測）なランダム測度で W が非負良可測（可予測）関数ならば，$\nu := W \bullet \mu$ は良可測（可予測）ランダム測度である．

ランダム測度による諸々の積分について，以下の意味での結合律が成り立つ．

命題 A.5　μ を良可測 σ 可積分ランダム測度とする．

(1) $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 値 $\mathscr{F}_E$ 可測関数 W と U について $W \bullet (U \bullet \mu) = (WU) \bullet \mu$ が成り立つ．
(2) $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 値 $\mathscr{F}_E$ 可測関数 W と $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 値可測過程 H について，$H \bullet (W * \mu) = (HW) * \mu$ が成り立つ．ただし，左辺の $\bullet$ はパスごとの Stieltjes 積分である．
(3) $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 値 $\mathscr{F}_E$ 可測関数 W と U について $U * (W \bullet \mu) = (UW) * \mu$ が成り立つ．
(4) $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 値 $\mathscr{F}_E$ 可測関数 W について $M_{W \bullet \mu}(A) = M_\mu(W 1_A)$ $(A \in \mathscr{F}_E)$ が成り立つ．

命題 A.5 は非負でなくとも十分良い可積分性を持つ被積分関数について成り立つ．

定理 A.6　μ と ν を良可測（可予測）ランダム測度とし，これらは良可測（可予測）σ 可積分であると仮定する．M_μ と M_ν が $\mathscr{O}_E$（$\mathscr{P}_E$）上で一致するなら，μ と ν は区別不能である．

$A \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ に対してその双対可予測射影 $A^{\mathfrak{p}}$ が定義されたように，適当なランダム測度についても双対可予測射影を定義することができる．双対可予測射影は局所マルチンゲールのジャンプの解析に重要に役割を果たしたように，ランダム測度の双対可予測射影も半マルチンゲール理論においてきわめて重要な道具である．まずは，双対可予測射影の存在を保証するのに用いる以下の定理を証明する．

定理 A.7　m は $(\Omega_E, \mathscr{F}_E)$ 上の $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ 値測度で，$\mathscr{O}_E$（$\mathscr{P}_E$）-σ 有限であるとする．このとき，$m = M_\mu$ を満たす良可測（可予測）ランダム測度 μ が存在するための必要十分条件は，以下の 3 条件が成り立つことである．

(1) 任意の消散的な $N \subset \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して，$m(N \times E) = 0$,
(2) $m(A) < \infty$ を満たす任意の $A \in \mathscr{O}_E$（$\mathscr{P}_E$）と任意の有界可測過程 X に対して

$$m(X 1_A) = m({}^{\mathfrak{o}} X 1_A) \qquad (\text{あるいは} m(X 1_A) = m({}^{\mathfrak{p}} X 1_A))$$

が成り立つ．ただし，${}^{\mathfrak{o}} X$（${}^{\mathfrak{p}} X$）は X の良可測（可予測）射影を表わしている．
(3) $m(\Omega \times \{0\} \times E) = 0$.

これらの条件が成り立つとき，m を表現する良可測（可予測）ランダム測度は一意に定まる．

定義 A.8 μ をランダム測度とする．ある可予測ランダム測度 ν で

(1) ν は可予測 σ 可積分である．
(2) $M_\mu|_{\mathscr{P}_E} = M_\nu|_{\mathscr{P}_E}$.

を満たすものが存在するとき，μ は双対可予測射影をもつといい，ν を μ の双対可予測射影 (dual predictable projection) あるいは補償子 (compensator) とよぶ．双対可予測射影のことを $\mu^{\mathfrak{p}}$ や $\widetilde{\mu}$ などで表す．

定理 A.6 より，μ の双対可予測射影が存在すればそれは（区別不能の意味で）一意に定まる．

定理 A.9 ランダム測度 μ が双対可予測射影をもつための必要十分条件は，μ が可予測 σ 可積分であることである．

定理 A.10 μ を双対可予測射影をもつランダム測度とする．

(1) $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 値 $\mathscr{F}_E$ 可測関数 W は $\nu = W \bullet \mu$ が可予測 σ 可積分ランダム測度になるようなものとする．このとき，ν の双対可予測射影は $\nu^{\mathfrak{p}} = U \bullet \mu^{\mathfrak{p}}$ を満たす．ただし，$U = M_\mu[W|\mathscr{P}_E]$ である．[15]．
(2) $W \in \mathscr{F}_E$ は $X \coloneqq W * \mu$ が局所可積分になるようなものとする．このとき，X の双対可予測射影は $X^{\mathfrak{p}} = U * \mu^{\mathfrak{p}}$ によって与えられる．ただし，$U = M_\mu[W|\mathscr{P}_E]$ である．

命題 A.11 μ は双対可予測射影を持つランダム測度とし，$W \in (\mathscr{P}_E)_{\geq 0}$，$T$ を可予測時刻とする．このとき，

$$\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}\times E} W(T,x)1_{\{T<\infty\}}1_{[\![T]\!]}\mu^{\mathfrak{p}}(\mathrm{d}(t,x)) = E\left[\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}\times E} W(T,x)1_{\{T<\infty\}}1_{[\![T]\!]}\mu(\mathrm{d}(t,x)) \,\middle|\, \mathscr{F}_{T-}\right] \tag{A.1}$$

が成り立つ．ただし，$W(T,x)$ は関数 $(\omega,x)\mapsto W(\omega,T(\omega),x)$ を意味する．

命題 A.11 は何を言っているかいまいちわかりにくいが，$W*\mu$ が定義されるような場合には意味は明確である．この場合，命題 A.11 の主張していることは任意の可予測時刻に対して

$$\Delta(W*\mu^{\mathfrak{p}})_T 1_{\{T<\infty\}} = E\left[\Delta(W*\mu)_T 1_{\{T<\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}\right] \tag{A.2}$$

が成り立つということであり，これはすなわち ${}^{\mathfrak{p}}(\Delta(W*\mu)) = \Delta(W*\mu^{\mathfrak{p}})$ が成り立つということである．さらに $W*\mu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ ならば定理 A.10 より $W*\mu^{\mathfrak{p}} = (W*\mu)^{\mathfrak{p}}$ なので，結局 ${}^{\mathfrak{p}}\Delta(W*\mu = \Delta(W*\mu)^{\mathfrak{p}}$ が成り立つという意味になる．この等式は，増加過程の双対可予測射影に関する古典的な結果である．それをランダム測度の場合に一般化したのが命題 A.11 だということができる．

15） M_μ に関する条件付期待値．

A.2 整数値ランダム測度とランダム測度による確率積分

§A.3 では，Poisson ランダム測度を含む重要なランダム測度のクラスである整数値ランダム測度を導入する．

定義 A.12 ランダム測度 μ が

(1) μ は $\overline{\mathbb{N}} = \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{+\infty\}$ に値をとる，
(2) 任意の $t \in [0, \infty[$ と任意の ω に対して $\mu(\omega, \{t\} \times E) \leq 1$,
(3) μ は良可測かつ良可測 σ 可積分である，

を満たすとき，μ を整数値ランダム測度 (integer valued random measure) と呼ぶ．

定理 A.13 μ が整数値ランダム測度であるための必要十分条件は，ある痩せた集合 D[16] と良可測過程 $\beta = (\beta_t)$ によって

$$\mu(\omega, \cdot\,) = \sum_{s \geq 0} \delta_{(s, \beta_s(\omega))}(\,\cdot\,) 1_D(\omega, s) \tag{A.3}$$

と表現されることである．

定理 A.13 における集合 D をランダム測度 μ と台 (support) と呼ぶことがある．定理 A.13 より，整数値ランダム測度は本質的には数を数える測度だということがわかる．

定理 A.14 可予測 σ 可積分な整数値ランダム測度 μ の台を D で表し，

$$a_t(\omega) = \mu^{\mathfrak{p}}(\omega, \{t\} \times E) \quad t \in [0, \infty[\quad \omega \in \Omega,$$
$$J = \{(\omega, t) \in \Omega \times [0, \infty[\mid a_t(\omega) > 0\},$$
$$K = \{(\omega, t) \in \Omega \times [0, \infty[\mid a_t(\omega) = 1\},$$

と定義する．このとき a は $[0, 1]$ に値をとる痩せた可予測過程[17]であり，J は D の可予測台，さらに J は D に含まれる可予測集合のうち最大のものである．（ただし，ここでの包含関係は「消散的集合の差を除いて」という意味．）

さらに μ の双対可予測射影のバージョン $\mu^{\mathfrak{p}}$ で，以下の条件を満たすものが存在する．

- $a(\omega, t) \leq 1$ が各点で成り立つ．
- $J = \bigcup_n [\![T_n]\!]$ かつ $[\![T_n]\!] \cap [\![T_m]\!] = \emptyset$ $(n \neq m)$ を満たす可予測時刻列が存在する．

càdlàg 適合過程のジャンプ測度と呼ばれるクラスの整数値ランダム測度を導入しよう．

16） D が痩せた集合であるとは，ある停止時刻列 (T_n) で $D = \bigcup_n [\![T_n]\!]$ を満たすものが存在するということであった．
17） $\{X \neq 0\}$ が痩せた集合であるような確率過程を痩せた過程という．

命題 A.15　X を $\mathbb{R}^d$ 値 càdlàg 適合過程とすれば,

$$\mu(\omega, A) = \sum_{s>0} \delta_{(s,\Delta X_s)}(A) 1_{\{\Delta X \neq 0\}}(\omega, s)$$

は双対可予測過程を持つ整数値ランダム測度である.

この命題におけるランダム測度を，X のジャンプ測度と呼ぶ．さらに，その双対可予測射影 ν を X の Lévy 系ということがある.

系 A.16　μ を $\mathbb{R}^d$ 値過程 X のジャンプ測度とする．このとき X が準左連続であるための必要十分条件は，μ の双対可予測射影のバージョン ν で $\nu(\omega, \{t\} \times E) = 0$ $(\forall \omega, t)$ を満たすものが存在することである.

μ を整数値ランダム測度，ν をその双対可予測射影とする．本節におけるこれ以降の目標は，可予測関数 W の $\mu - \nu$ による確率積分を定義することである．$W * \mu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ の場合には $W * \nu$ がその双対可予測射影であるから，$M := W * \mu - W * \nu$ は $M_0 = 0$ を満たす局所マルチンゲールである．この場合は，M を W の $\mu - \nu$ による確率積分と呼び，$W * (\mu - \nu) = M$ と書くのが良いであろう．このとき

$$\Delta M_t = \Delta(W * \mu)_t - \Delta(W * \nu)_t = \int_{\{t\}\times E} W(t, x)\mu(\mathrm{d}(s, x)) - \int_{\{t\}\times E} W(t, x)\nu(\mathrm{d}(s, x))$$

が成り立つ.

$W * \mu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ でない場合は $W * \mu$ は双対可予測射影を持たないが，この場合でも同様に "$W * (\mu - \nu)$" のようなものを定義することは可能だろうか？この節ではそのことについて考えて行くことにする.

その前に，ランダム測度について一つ補題を用意する.

補題 A.17　μ は各点ごとに σ 有限なランダム測度とし，$t \geq 0$ と $\omega \in \Omega$ に対して $(E, \mathscr{E})$ 上の測度 $\widehat{\mu}_t(\omega, \cdot)$ を

$$\widehat{\mu}_t(\omega, B) = \mu(\omega, \{t\} \times B)$$

によって定義する.

(1) 任意の $W \in (\mathscr{F}_E)_{\geq 0}$ に対して

$$\int_{\{t\}\times E} W(\omega, s, x)\mu(\omega, \mathrm{d}(s, x)) = \int_{\{t\}\times E} W(\omega, t, x)\mu(\omega, \mathrm{d}(s, x)) = \int_E W(\omega, t, x)\widehat{\mu}_t(\omega, \mathrm{d}x) \tag{A.4}$$

が成り立つ.

(2) $W \in \mathscr{F}_E$ は次のどちらかの積分が有限になるものとする.

$$\int_{\{t\}\times E} |W(\omega, s, x)|\mu(\omega, \mathrm{d}(s, x)), \qquad \int_E |W(\omega, t, x)|\widehat{\mu}_t(\omega, \mathrm{d}x).$$

このとき，もう一方の積分も有限であり，それらは (A.4) を満たす．

この補題より，先ほどの $M = W * \mu - W * \nu$ のジャンプについては

$$\Delta M_t = \int_E W(t,x)\widehat{\mu}_t(\mathrm{d}x) - \int_E 1_A(t,x)\widehat{\nu}_t(\mathrm{d}x) \tag{A.5}$$

という表現も可能であることがわかる．

ここから先，整数値ランダム測度 μ とその双対可予測射影 ν が与えられたとき，D，β，a，J，K は定理 A.13，A.14 で定義されたものを表すことにする．特に μ の双対可予測射影 ν は注意??の条件を満たすものとする．

補題 A.18　μ を整数値ランダム測度，ν をその双対可予測射影とし，

$$\widehat{\mu}_t(A) = \mu(\{t\} \times A), \qquad \widehat{\nu}_t(A) = \nu(\{t\} \times A)$$

と定義する． W は可予測関数で，任意の $t \geq 0$ に対して

$$\int_E |W(t,x)|\widehat{\nu}_t(\mathrm{d}x) < \infty \quad \text{a.s.}$$

を満たすと仮定する．ここで

$$\begin{aligned}
\widehat{W}_t(\omega) &= \int_E W(\omega,t,x)\,\widehat{\nu}_t(\omega,\mathrm{d}x), \quad t \geq 0 \\
\widetilde{W}_t(\omega) &= \int_E W(\omega,t,x)\,\widehat{\mu}_t(\omega,\mathrm{d}x) - \int_E W(t,x)\,\widehat{\nu}_t(\omega,\mathrm{d}x) \\
&= W(\omega,t,\beta_t(\omega))1_D(t,\omega) - \widehat{W}(\omega,t,x)
\end{aligned}$$

このとき，$\widetilde{W}$ と $\widehat{W}$ は痩せた過程であり，$\widehat{W}$ は可予測である．さらに ${}^{\mathrm{p}}\widetilde{W} = 0$ が成り立つ．

定義 A.19　(1) 整数値ランダム測度 μ に対して，

$$\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu) = \left\{ W \in \mathscr{P}_E \;\middle|\; \forall t \geq 0 \ \int_E |W(t,x)|\widehat{\nu}_t(\mathrm{d}x) < \infty \text{ and } \sqrt{\sum\nolimits_{s\leq\cdot} \widetilde{W}_s^2} \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^+ \right\}$$

と定める．

(2) $W \in \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ に対して，$\Delta M = \widetilde{W}$ を満たす純不連続局所マルチンゲールが（区別不能の意味で）ただ一つ存在する．これを W の $\mu - \nu$ による確率積分 (stochastic integral) とよび，$M = W * (\mu - \nu)$ で表す．

(3) $W = (W^i)_{1\leq i\leq d}$ が $W^i \in \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ を満たすとき，d 次元局所マルチンゲール $W * (\mu - \nu)$ を $(W^i * (\mu - \nu))_{1\leq i\leq d}$ によって定める．

定義より明らかに $\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ は線形空間であり，$W \mapsto W * (\mu - \nu)$ は線形写像である．

確率積分 $W*(\mu-\nu)$ の存在は次の命題??によって保証されている．一意性は，ジャンプが等しい二つの純不連続局所マルチンゲールは等しいことからわかる．

命題 A.20　ランダム測度による確率積分について，次が成立つ．

(1) $W\in\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ ならば，

$$[W*(\mu-\nu),W*(\mu-\nu)]=\sum_{0<s\leq\cdot}\widetilde{W}_s^2$$

である．

(2) $W\in\mathscr{P}_E$ が $|W|*\mu\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ を満たすなら，$W\in\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ であり

$$W*(\mu-\nu)=W*\mu-W*\nu$$

が成立する．

(3) $W\in\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ と停止時刻 T に対して，$W1_{[\![0,T]\!]}\in\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ および $(W1_{[\![0,T]\!]})*(\mu-\nu)=(W*(\mu-\nu))^T$ が成立つ．

(4) H が局所有界な可予測過程で $W\in\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ なら，$HW\in\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ および $(HW)*(\mu-\nu)=H\bullet(W*(\mu-\nu))$ が成立つ．（ここでの $\bullet$ は局所マルチンゲールによる通常の確率積分．）

本節の残りの部分では，確率積分 $(\,\cdot\,)*(\mu-\nu)$ の被積分関数のクラスの特徴付けを行う．その前に，まずは一つ補題を用意する．

補題 A.21　H を可予測過程とする．このとき $\sum H1_{J\cap D^c}\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ は $\sum H1_J(1-a)\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ と同値である．さらに，これらの条件が成り立つとき $\sum H1_J(1-a)$ は $\sum H1_{J\cap D^c}$ の双対可予測射影である．

$\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ の部分空間を

$$\mathscr{G}^1(\mu)=\left\{W\in\mathscr{P}_E\;\middle|\;\sum_{s\leq\cdot}|\widetilde{W}_s|\in\mathscr{A}^+\right\}$$

$$\mathscr{G}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)=\left\{W\in\mathscr{P}_E\;\middle|\;\sum_{s\leq\cdot}|\widetilde{W}_s|\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}\right\}$$

$$\mathscr{G}^2(\mu)=\left\{W\in\mathscr{P}_E\;\middle|\;\sum_{s\leq\cdot}(\widetilde{W}_s)^2\in\mathscr{A}^+\right\}$$

$$\mathscr{G}^2_{\mathrm{loc}}(\mu)=\left\{W\in\mathscr{P}_E\;\middle|\;\sum_{s\leq\cdot}(\widetilde{W}_s)^2\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}\right\}$$

によって定める．これらが実際に $\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ の部分空間を定めることは，

$$\sqrt{\sum_{0<s\le t} \widetilde{W}_s^2} \le \sum_{0<s\le t} |\widetilde{W}_s|, \qquad E\left[\sqrt{\sum_{0<s\le t} \widetilde{W}_s^2}\right] \le E\left[\sum_{0<s\le t} \widetilde{W}_s^2\right] \tag{A.6}$$

という不等式に注意すればわかる．これらの部分空間は，それぞれ $W * (\mu - \nu)$ がどのような局所マルチンゲールとなるかという条件と対応している．$W \in \mathscr{G}^2(\mu)$ は $W * (\mu - \nu)$ が二乗可積分になるということであり，$W \in \mathscr{G}^1(\mu)$ は $W * (\mu - \nu)$ が可積分変動を持つということである．また loc のついた空間はそれぞれの過程の局所化クラスに対応する．

A.3 半マルチンゲールの特性要素

$\mathscr{D}$ を càdlàg 適合過程全体の集合とする．

まずは，半マルチンゲールの特性要素を定義するのに必要な切り捨て関数の概念を導入しよう．$h\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ を有界 Borel 可測関数とする．h コンパクト台を持ち 0 のある近傍上で恒等写像と等しいとき，h を切り捨て関数 (truncation function) と呼ぶ．$\mathbb{R}^d$ 上の切り捨て関数全体の集合を $\mathscr{C}_{\mathrm{t}}^d$ で表すことにする[18)]．

切り捨て関数の典型的な例は，$h(x) = x1_{\{|x|\le 1\}}$ という関数である．半マルチンゲールの特性要素や Lévy–伊藤分解について論じている文献ではこの形の関数のみを扱っているものも多い．ここでは Jacod and Shiryaev [5] に従い一般的な形で導入することにした．切り捨て関数の例としては次のようなものも考えられる．コンパクト台を持つ滑らかな関数 φ で，0 の適当な近傍 V において $\varphi(V) \subset \{1\}$ を満たすようなものを用意する．このとき $h(x) = x\varphi(x)$ と定義すれば，h は滑らかな切り捨て関数である．

$h \in \mathscr{C}_{\mathrm{t}}^d$ と $X \in \mathscr{D}^d$ に対して，

$$\begin{aligned}\check{X}(h) &= \sum_{0<s\le\cdot} (\Delta X_s - h(\Delta X_s)) \\ X(h) &= X - \check{X}(h)\end{aligned}$$

と定義する．切り捨て関数の定義より，$x - h(x)$ は適当な 0 の近傍 $B_r(0)$ 上で 0 となる．したがって

$$\{s \in [0,\infty[\mid \Delta X_s - h(\Delta X_s) \ne 0\} \subset \{s \in [0,\infty[\mid \|\Delta X_s\| \ge r\}$$

が成り立ち，$\check{X}(h)$ の定義における和は（ω を固定すると）実質的に有限和となっている．これより $\check{X}(h)$ と $X(h)$ は well-defined であり，$\check{X}(h) \in \mathscr{V}^d$ である．また $\Delta X(h) = h(\Delta X)$ より $X(h)$ は有界なジャンプをもつ càdlàg 適合過程であることがわかる．

X が半マルチンゲールならば，$X(h)$ は有界なジャンプを持つ càdlàg 半マルチンゲールであり，よって特殊半マルチンゲールである．$X(h)$ の標準分解を

$$X(h) = X_0 + M(h) + B(h), \quad M(h) \in (\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0})^d, \quad B(h) \in (\mathscr{V}^{\mathrm{pred}})^d \tag{A.7}$$

18） $\mathscr{C}_{\mathrm{t}}^d$ の右下の t は時刻ではなく，truncation の t である．

で表す.

定義 A.22 $h \in \mathscr{C}_{\mathrm{t}}^d$ を固定する．半マルチンゲール X の（切り捨て関数 h に関する）特性要素 (characteristics) とは，以下で定義される三つ組 (B, C, ν) のことである．

(1) $B = B(h) \in (\mathscr{V}^{\mathrm{pred}})^d$ は特殊半マルチンゲールの標準分解 (A.7) によって与えられる．
(2) $C = (C^{i,j})_{1 \le i,j \le d} = (\langle X^{i,\mathrm{c}}, X^{j,\mathrm{c}} \rangle)_{1 \le i,j \le d} \in M_d(\mathscr{V}^{\mathrm{c}})$．ただし，$X^{i,\mathrm{c}}$ は X の第 i 成分の連続マルチンゲール部分である．
(3) ν は X のジャンプ測度 μ の双対可予測射影とする．

定義より明らかなように，半マルチンゲールの特性要素は区別不能の意味でしか一意に定まらない．特性要素 (B, C, ν) のうち C と ν は切り捨て関数に依存しない概念だが，B は h の取り方によって変わるものである．

特性要素を用いると，ランダム測度による確率積分を用いた半マルチンゲールの表現が得られる．

定理 A.23 X を d 次元半マルチンゲールとし，μ を X そのジャンプ測度，(B, C, ν) を切り捨て関数 $h \in \mathscr{C}_{\mathrm{t}}^d$ に関する X の特性要素とする．このとき，$h^i \in \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ であり，

$$X = X_0 + X^{\mathrm{c}} + h * (\mu - \nu) + (x - h(x)) * \mu + B \tag{A.8}$$

が成り立つ[19)]．

定理 A.23 における表現 (A.8) のことを, 半マルチンゲールの標準的表現 (canonical representation) や積分表現 (integral representation) などと呼ぶ.

系 A.24 $X \in \mathscr{SM}_{\mathrm{sp}}^d$ の標準分解を $X = X_0 + M + A$ と表し，μ を X のジャンプ測度，ν をその双対可予測射影とする．このとき，

$$X = X_0 + X^{\mathrm{c}} + x * (\mu - \nu) + A \tag{A.9}$$

が成り立つ[20)]．すなわち，$M^{\mathrm{d}} = x * (\mu - \nu)$ が区別不能の意味で成り立つ.

特性要素を用いて伊藤の公式を表現しよう.

定理 A.25（伊藤の公式） X を d 次元半マルチンゲールとし，μ を X のジャンプ測度，(B, C, ν) を切り捨て関数 $h \in \mathscr{C}_{\mathrm{t}}^d$ に関する X の特性要素とする．

19) $x - h(x) * \mu$ は $W(\omega, t, x) = x - h(x)$ の積分過程 $W * \mu$ を表している．このような記法はあまり行儀のいいものには思えないが，一般的に使われているものなのでこのノートでも用いることにする．
20) ただし，$x * (\mu - \nu)$ は可予測関数 $W(\omega, t, x) = x$ の確率積分 $W * (\mu - \nu)$ を表す.

(1) C^2 級関数 f について，以下の等式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
f(X_t) - f(X_0) = &\sum_{1\le i\le d} D_i f(X_-) \bullet X^{i,\mathrm{c}} + \sum_{1\le i\le d} \bigl(h^i(x) D_i f(X_{s-})\bigr) * (\mu - \nu) \\
&+ \sum_{1\le i\le d} D_i f(X_-) \bullet B^i + \frac{1}{2} \sum_{1\le i,j\le d} D_{ij} f(X_-) \bullet C^{i,j} \\
&+ \left\{ f(X_- + x) - f(X_-) - \sum_{1\le i\le d} h^i(x) D_i f(X_-) \right\} * \mu
\end{aligned}
$$

と表現される．

(2) f を実数値あるいは複素数値の有界 C^2 級関数とする．このとき，特殊半マルチンゲール $f(X)$ の標準分解は以下で与えられる．

$$
\begin{aligned}
f(X) &= f(X_0) + M + A, \\
M &= \sum_{1\le i\le d} D_i f(X_-) \bullet X^{i,\mathrm{c}} + (f(X_- + x) - f(X_-)) * (\mu - \nu), \\
A &= \sum_{1\le i\le d} D_i f(X_-) \bullet B^i + \frac{1}{2} \sum_{1\le i,j\le d} D_{ij} f(X_-) \bullet C^{i,j} \\
&\quad + \left\{ f(X_- + x) - f(X_-) - \sum_{1\le i\le d} h^i(x) D_i f(X_-) \right\} * \nu
\end{aligned}
$$

d 次元半マルチンゲール X は切り捨て関数 h に関する特性要素 (B, C, ν) を持つとする．このとき，$\xi \in \mathbb{R}^d$ に対して可予測キュムラント過程 (predictable cumulant process) を

$$
K(\xi)_t = i\langle \xi, B_t \rangle - \frac{1}{2}\langle C_t \xi, \xi \rangle + \int_{[0,t]\times E} \{ e^{i\langle \xi, x\rangle} - 1 - i\langle \xi, h(x)\rangle \} \nu(\mathrm{d}(s,x))
$$

によって定義する．

系 A.26 X を d 次元半マルチンゲールとし，μ をそのジャンプ測度，(B, C, ν) を切り捨て関数 h に関する特性要素とする．特殊半マルチンゲール $Y = e^{i\langle \xi, X\rangle}$ $(u \in \mathbb{R}^d)$ の標準分解は以下で与えられる．

$$
\begin{aligned}
Y &= Y_0 + Y_- \bullet N + Y_- \bullet K(\xi), \\
N &= i\langle \xi, X^{\mathrm{c}} \rangle + (e^{i\langle \xi, x\rangle} - 1) * (\mu - \nu).
\end{aligned}
$$

本節では，半マルチンゲールと特性要素の関係を可積分性の観点から調べよう．

命題 A.27 X を d 次元半マルチンゲールとする．このとき切り捨て関数 $h \in \mathscr{C}_{\mathrm{t}}^d$ に関する特性要素のバージョン (B, C, ν) で，以下の条件を満たすものが存在する．

(1) 任意の $s \le t$ に対して $C_t - C_s$ は正定値対称行列である．
(2) 全ての t について $\nu(\{t\} \times \mathbb{R}^d) \le 1$ が各点で成り立つ．また $\nu(\mathbb{R}_{\ge 0} \times \{0\}) = 0$ が各点で成り立つ．
(3) $(|x|^1 \wedge 1) * \nu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ が成り立つ．
(4) $\Delta B_t = \int_{\mathbb{R}^d} h(x)\widehat{\nu}_t(\mathrm{d}x)$ が成り立つ．

命題 A.28　X を d 次元半マルチンゲールとし，(B, C, ν) を $h \in \mathscr{C}_{\mathrm{t}}^d$ に関するその特性要素とする．

(1) X が特殊半マルチンゲールとなるための必要十分条件は，$(|x|^2 \wedge |x|) * \nu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ が成り立つことである．これらの条件の下で X の標準分解を $X = X_0 + M + A$ で表せば，

$$A = B(h) + (x - h(x)) * \nu \tag{A.10}$$

$$\Delta A_t = \int_{\mathbb{R}^d} x\widehat{\nu}_t(\mathrm{d}x) \tag{A.11}$$

が区別不能の意味で成り立つ．
(2) X が局所二乗可積分であるための必要十分条件は，$|x|^2 * \nu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ である．X が局所二乗可積分であるとき，その標準分解 $X = X_0 + M + A$ は (A.10)，(A.11) および

$$\langle M^i, M^j \rangle = C^{ij} + x^i x^j * \nu - \sum_{s \le \cdot} \Delta A_s^i \Delta A_s^j \tag{A.12}$$

を満たす．

系 A.29　$M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^2$ に対してに対して ν を M のジャンプ測度の双対可予測射影とすれば，その可予測二次変分は

$$\langle M, M \rangle = \langle M^{\mathrm{c}}, M^{\mathrm{c}} \rangle + x^2 * \nu \tag{A.13}$$

という表現をもつ．

以下，(B, C, ν) を次の条件を満たす三つ組みとする．

- $B \in (\mathscr{V}^{\mathrm{pred}})^d$.
- $C \in M_d(\mathscr{V}^{+,\mathrm{c}})$.
- ν は可予測ランダム測度．
- (B, C, ν) は恒等的に以下の条件を満たす．

$$\text{任意の } s \le t \text{ に対して，} C_t - C_s \text{ は正定値対称行列}$$

$$\nu(\{t\} \times \mathbb{R}^d) \le 1, \quad \nu(\mathbb{R}_{\ge 0} \times \{0\}) = 0$$

$$(|x|^1 \wedge 1) * \nu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$$

$$\Delta B = \int_{\mathbb{R}^d} h(x)\widehat{\nu}_t(\mathrm{d}x)$$

この三つ組みが与えられた半マルチンゲール X の特性要素であるかを確かめる方法を与えよう．このために，(B,C,ν) に対する可予測キュムラントを

$$K(\xi)_t = i\langle \xi, B_t\rangle - \frac{1}{2}\langle C_t\xi,\xi\rangle + \int_{[0,t]\times E}\{e^{i\langle\xi,x\rangle} - 1 - i\langle\xi,h(x)\rangle\}\nu(\mathrm{d}(s,x))$$

と定義する．

定理 A.30 d 次元 càdlàg 適合過程 X に対して，次の 3 条件は同値である．

(1) X は特性要素 (B,C,ν) を持つ半マルチンゲールである．
(2) 全ての $\xi\in\mathbb{R}^d$ について，$e^{i\xi\cdot X} - e^{i\xi\cdot X_-}\bullet K(\xi)$ は複素局所マルチンゲールとなる．
(3) 全ての有界 C^2 級関数 f に対して，

$$\begin{aligned}(\mathrm{A.14})\quad & f(X)-f(X_0)-\sum_{1\le i\le d}D_if(X_-)\bullet B^i - \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le d}D_{ij}f(X_-)\bullet C^{i,j}\\ &- \left\{f(X_-+x)-f(X_-)-\sum_{1\le i\le d}h^i(x)D_if(X_-)\right\}*\nu\end{aligned}$$

は局所マルチンゲールとなる．

定理 A.30 の証明には，可予測キュムラントの特徴づけが用いられる．

命題 A.31 $K(\xi)$ が半マルチンゲール X の可予測キュムラントとなるための必要十分条文条件は，全ての $\xi\in\mathbb{R}^d$ について $e^{i\xi\cdot X} - e^{i\xi\cdot X_-}\bullet K(\xi)$ が（複素）局所マルチンゲールとなることである．

以下の補題は可予測キュムラントの一意性を示すのに有用である．

補題 A.32 $b\in\mathbb{R}^d$ とし，$c\in M_d(\mathbb{R}^d)$ を正定値[21)]対称行列とする．さらに F を $\mathbb{R}^d$ 上の非負測度で $F(\{0\})=0$ かつ $x\mapsto|x|^2\wedge 1$ が可積分となるようなものとする．関数 ψ を

$$\psi(u) = iu\cdot b - \frac{1}{2}u\cdot cu + \int_{\mathbb{R}^d}(e^{iu\cdot x}-1-iu\cdot h(x))F(\mathrm{d}x) \tag{A.15}$$

によって定義する．このとき，(A.15) の形の表現は一意的である．すなわち，同様の過程を満たす別の b'，c'，F' によって ψ が

$$\psi(u) = iu\cdot b' - \frac{1}{2}u\cdot c'u + \int_{\mathbb{R}^d}(e^{iu\cdot x}-1-iu\cdot h(x))F'(\mathrm{d}x)$$

と表現されているなら，$b=b'$，$c=c'$，$F=F'$ が成り立つ．

21） 退化していても良い．

補題 A.33　X を d 次元 càdlàg 適合過程とする．任意の $\xi \in \mathbb{R}$ について $e^{i\langle \xi, X\rangle}$ が半マルチンゲールになるなら，X も半マルチンゲールである．

References

[1] David Applebaum. *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. 2nd ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 116. Cambridge University Press, 2009. DOI: 10.1017/CBO9780511809781.

[2] Rick Durrett. *Probability: Theory and Examples*. Forth. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 2010.

[3] Sheng-wu He, Jia-gang Wang, and Jia-an Yan. *Semimartingale Theory and Stochastic Calculus*. Science Press and CRC Press, 1992. xiv+546. URL: https://www.crcpress.com/Semimartingale-Theory-and-Stochastic-Calculus/eWangyan/p/book/9780849377150.

[4] 平井祐紀. **ランダム測度と半マルチンゲールの特性要素**. Version 1.3. Nov. 7, 2019. URL: https://github.com/yhirai-math/note_prob/blob/public/Random_measure_note.pdf.

[5] Jean Jacod and Albert N. Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes*. 2nd ed. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 288. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003. DOI: 10.1007/978-3-662-05265-5. URL: https://www.springer.com/gp/book/9783540439325.

[6] Peter Medvegyev. *Stochastic Integration Theory*. Oxford Graduate Texts in Mathematics 14. Oxford University Press, 2007. xx+608. ISBN: 978-0-19-921525-6.

[7] Goran Peskir and Albert Shiryaev. *Optimal Stopping and Free-Boundary Problems*. Lectures in Mathematics. ETH Zürich. Birkhäuser Basel, 2006. XXII+502. ISBN: 978-3-7643-7390-0. DOI: 10.1007/978-3-7643-7390-0.

[8] Philip E. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations*. Second editioin, version 2.1. Stochastic Modelling and Applied Probability 21. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. DOI: 10.1007/978-3-662-10061-5. URL: https://www.springer.com/gp/book/9783540003137.

索引