ランダム測度と半マルチンゲールの特性要素
Ver. 1.6

平井祐紀

2022 年 11 月 24 日

編集履歴

2018/08/08 Ver. 1.0. 付録を大体書き終わったので，とりあえずここで一区切りとする．

2018/09/15 Ver. 1.1. 付録の条件付き期待値の項を加筆．誤植を訂正．

2019/08/25 Ver. 1.2. 付録 B.2 における誤植をいくつか訂正．（でるたさん指摘してくれてありがとう）

2019/11/07 Ver. 1.3. 誤植を訂正．

2021/07/04 Ver. 1.4. 誤植を訂正．用語を少し変更．（英語を和訳した．）

2022/07/24 Ver. 1.5. ドキュメントクラスを変更．間違いを訂正．記号を一部変更．

2022/11/24 Ver. 1.6. 定理の参照や目次が出力されていなかったので修正．記号を一部変更．その他細かい間違いを修正．

概要

主に Jacod and Shiryaev [21] と He, Wang, and Yan [16] にしたがい，ランダム測度と半マルチンゲールの特性要素についての基本事項を解説する．

目次

導入

Lévy 過程は極めて重要な確率過程のクラスである．実数値の確率過程 X は独立定常増分を持ち，さらにパスが右連続かつ左極限を持つ[1)]とき，Lévy 過程と呼ばれるのであった．Lévy 過程の重要な性質として，X のパスは以下のような Lévy–伊藤分解を持つというものがある[2)]．

$$
\begin{aligned}
(0.1)\qquad X_t &= bt + cW_t + \int_{\{|x|<1\}} x\,(N_t(\cdot,\mathrm{d}x) - t\nu(\mathrm{d}x)) + \sum_{0<s\le t} \Delta X_s 1_{\{|\Delta X_s|\ge 1\}} \\
&= bt + cW_t + \int_{[0,t]\times\{|x|<1\}} x\,(N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) - \lambda\otimes\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)) + \int_{[0,t]\times\{|x|\ge 1\}} xN(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)
\end{aligned}
$$

ただし，(0.1) において λ は $\mathbb{R}_{\ge 0}$ 上の 1 次元 Lebesgue 測度を表す．唐突に (0.1) を提示されてもそもそも式の意味がよく分からないので，まずは式の中に現れる記号の意味を明らかにしていこう．b と c は何らかの定数で，W は Wiener 過程である．(0.1) における登場人物の中では，これは比較的馴染みやすいものである．次に，積分表示されている部分を眺めてみる．Lévy 過程 X に対して，その Poisson ランダム測度 $N(\mathrm{d}x,\mathrm{d}s)$ を以下のように定義する．

$$
N(\omega,A) = \sum_{0<s} \delta_{(s,\Delta X_s)}(A) 1_{\{\Delta X_s\ne 0\}}(\omega,s), \qquad A\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_{\ge 0})\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R})
$$

ただし，δ_a は点 a に集中した Dirac 測度を表す．特に $A=[0,t]\times\Lambda$ の形のときは，

$$
N_t(\omega,\Lambda) \coloneqq N(\omega,[0,t]\times\Lambda) = \sum_{0<s\le t} \delta_{\Delta X_s}(\Lambda) 1_{\{\Delta X_s\ne 0\}}(\omega,s)
$$

となる．この表示を眺めてみると，$N_(\omega,\Lambda)$ は時刻区間 $[0,t]$ において $\Delta X_t(\omega)\in\Lambda\setminus\{0\}$ となる X のジャンプが起こる回数を意味していることが分かる．ランダムなパラメーター ω を固定すると $N(\omega,\cdot)$ は測度となるので，このような測度はランダム測度と呼ばれている．(0.1) における ν は X の Lévy 測度と呼ばれる測度であり，

$$
\nu(\Lambda) = E[N_1(\Lambda)], \qquad \Lambda\in\mathscr{B}(\mathbb{R})
$$

によって定義される．Lévy 測度 ν は

$$
\int (x^2\wedge 1)\,\nu(\mathrm{d}x) < \infty
$$

という可積分性を持つことが知られている．このとき，確率過程 $(N_t(\Lambda))_{t\ge 0}$ はパラメータ $\nu(\Lambda)$ の Poisson 過程となる．さて，(0.1) 中の「積分」に現れる測度の導入ができたので，次に「積分」の意味を明らかにしよう．X のパスの性質から，固定した ω について $x1_{[0,t]\times\{|x|\ge 1\}}$ は Poisson ランダム測度 $N(\omega,\cdot)$ によって可積分となる．したがって，$\int_{[0,t]\times\{|x|\ge 1\}} xN(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ は各 ω を固定して

1）このような性質を持つパスは càdlàg であるという．

2）主張だけなら，Protter [28] がコンパクトにまとまっていて見やすい．証明は，たとえば Applebaum [1] や伊藤 [18, 19] などを見よ．

測度論的な意味での積分として構成できる．一方で，一つ目の積分はそのような素朴な意味では定義できない．これはマルチンゲールによる確率積分の一種であるが，一言で説明するのは難しいので，詳細は後回しとする．(0.1) で出てきた二つのパラメータと Lévy 測度の三つ組みは (b, c^2, ν) は Lévy 過程の特性量とも呼ばれ，以下の Lévy–Khintchine の公式によって Lévy 過程の分布を特徴づける量となっている．

$$E\left[e^{iuX_t}\right] = \exp t\left(iub - \frac{1}{2}c^2u^2 + \int\left(e^{iux} - 1 - iux1_{\{|x|\le 1\}}\right)\nu(\mathrm{d}x)\right)$$

Lévy–伊藤分解において

$$\begin{aligned} M_t &= cW_t + \int_{\{|x|<1\}} x\left(N_t(\,\cdot\,,\mathrm{d}x) - t\nu(\mathrm{d}x)\right) \\ A_t &= bt + \sum_{0<s\le t}\Delta X_s 1_{\{|\Delta X_s|\ge 1\}} \end{aligned}$$

と定義すれば，$X = A + M$ が成り立つ．このとき M はマルチンゲールであり，A は局所有界変動なパスを持つ確率過程となっている．したがって，Lévy–伊藤分解 (0.1) は Lévy 過程 X の半マルチンゲール分解を与える．Lévy 過程は代表的な半マルチンゲールであるから，(0.1) を何らかの意味で一般の半マルチンゲールまで拡張できないだろうかというのは自然な問いかけであろう．そこで，(0.1) の式をマルチンゲール理論の観点から眺めてみることにする．最初の項は非ランダムな連続過程であるが，もう少し広い視点で見れば，パスが局所有限変動を持つような可予測過程であるとも言える．cW をマルチンゲールとして眺めると，これは二次変分が

$$[W, W]_t = \langle W, W\rangle_t = c^2t$$

となるような連続（局所）マルチンゲールとなっている．第 3 項と第 4 項を考えるためには，N と ν の意味をマルチンゲール理論の観点から明らかにする必要がある．第 4 項は 1 行目の表現を見ればわかるとおり，パスが局所有限変動をもつような確率過程である．第 3 項は—ここが一番難しく，本ノートの主要テーマである— 純不連続（局所）マルチンゲールと呼ばれるクラスの確率過程となっている．以上のようにして，Lévy-伊藤分解の各項は一般の半マルチンゲール理論の枠組みでも解釈できそうだとわかる．

そこで，(0.1) の右辺第 3 項と第 4 項を一般の半マルチンゲールについて適切に定式化することが我々の目標となる．X が Lévy 過程でなく一般の càdlàg な半マルチンゲールとしても，$N(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)$ が同様に定義できることは明らかであろう．したがって，特に重要なのは第 3 項の「積分」をどう解釈するかである．X が一般の半マルチンゲールであるときに，Lévy 測度に対応するものは何であろうか．キーワードとなるのは，compensated Poisson process というマルチンゲールである．Poisson 過程は一般にマルチンゲールではないが，それを割り引いた過程 $(N_t(\Lambda) - t\nu(\Lambda))_{t\ge 0}$ はマルチンゲールとなる．これを補償 Poisson 過程といい，確率過程 $(t\nu(\Lambda))_{t\ge 0}$ は $N(\Lambda)$ の補償子と呼ばれる．Poisson 過程の補償子は，一般の局所可積分変動過程[3] の可予測補償子[4]の一例である．

3） 定義は後で述べる．パスが局所有限変動な適合過程のうち，適当な可積分性をもつ物である．

4） Predictable compensator の訳．compensator の標準的な訳語があるかわからなかったので，本ノートではこのように和訳することにする．

ここで可予測補償子が何だったのかを復習しておこう．局所可積分変動過程 A が与えられたとき，$A - A^{\mathfrak{p}}$ が局所マルチンゲールとなるような可予測，局所可積分変動過程 $A^{\mathfrak{p}}$ が唯一つ存在する．これを A の双対可予測射影または可予測補償子と呼ぶのであった．さて，局所可積分変動過程 A が与えられたとき，

$$\alpha(\omega, A) = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}\times\{0\}} \delta_0(\mathrm{d}x)\mathrm{d}A_s(\omega)$$

と定めると，これはランダム測度となっている．では，可予測補償子の概念を局所可積分変動過程からもう少し一般のランダム測度にまで一般化することは可能だろうか？これは実際可能であり，ランダム測度の補償子が，Lévy-伊藤分解における $\nu(\mathrm{d}x)\otimes \mathrm{d}t$ の一般の半マルチンゲールにおける対応物である．$A - A^{\mathfrak{p}}$ は局所マルチンゲールであったから，ランダム測度が A によって生成されている場合，Lévy-伊藤分解の右辺第 3 項は局所マルチンゲールによる確率積分と解釈することが出来るだろう．N がもう少し一般のランダム測度の場合，局所マルチンゲールによる確率積分をもう少し一般化した概念が必要になる．

以上の考察をまとめると（かなり強引な結論付けではあるが），(0.1) の半マルチンゲールへの拡張は次のような形になると予想される．

$$X_t = X_0 + B_t + M_t + \int_{[0,t]\times\{|x|<1\}} x\left(\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) - \nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right) + \int_{[0,t]\times\{|x|\geq 1\}} x\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x). \tag{0.2}$$

ただし，

- B は局所有限変動なパスをもつ可予測過程.
- M は二次変分 $\langle M, M\rangle = C$ をもつ連続局所マルチンゲール.
- μ は X のジャンプを数えるランダム測度で，ν はその可予測補償子.

この三つ組み (B, C, ν) を半マルチンゲールの特性要素 (characteristics) と呼ぶ．ここまできてようやく本ノートの目標が明らかになった．我々が目指すべきは，

(i) μ の補償子 ν の概念を導入し，
(ii) $\mu - \nu$ による確率積分を定式化し，
(iii) 公式 (0.2) が成り立つことを証明する

ことである．

以下，本ノートの構成を述べよう．第 1–4 節ではランダム測度の一般論を扱う．第 1 節ではランダム測度を定義し，その基本的な性質，特に可測性について調べる．第 2 節ではランダム測度の双対可予測射影を定義し，その存在と一意性を証明する．第 3 節では，ランダム測度のうち特に整数値ランダム測度と呼ばれるクラスについて調べる．これは結局のところ痩せた確率過程の数え上げ概念と一致するものである．本ノートにおいては第 3 節以降整数値ランダム測度のみを調べる．第 4 節ではランダム測度による確率積分を定義し，その基本的な性質を調べる．特に，被積分関数のクラスと得られる局所マルチンゲールのクラスの対応関係が重要である．

後半の第 5–7 節のテーマは半マルチンゲールの特性要素である．第 5 節では特性要素の概念を導入し，公式 (0.2) が成り立つことを証明する．さらに，特殊半マルチンゲールの場合はより精密が結果が得られることも示す．第 6 節では，半マルチンゲールの可積分性を特性要素の観点から調べる．半マルチンゲールが特殊半マルチンゲールになるための条件や，局所二乗可積分になるための条件は，特性要素の言葉で特徴づけることが可能であることを明らかにする．最後の第 7 節では，半マルチンゲール X と三つ組み (B,C,ν) が与えられたとき，(B,C,ν) が X の特性要素となっているかどうか判定する方法を調べる．

付録 A–C では，本文の内容を示すのに必要な数学的事項の補足を行う．付録 A では，特定のクラスの位相空間における可測性や測度の問題について論じる．付録 B では，正則条件付期待値や積空間上の測度と積分分解について重要な結果を述べる．付録 C では，確率過程の一般論とマルチンゲール理論についての補足を行なう．確率過程の一般論については証明抜きで結果のみ紹介するが，マルチンゲール理論の補足についてはほとんどの重要な結果に証明もつけた．付録 D は文献などについての簡単なノートとなっている．（予定でしたが，まだ書いている途中です．）

記号・用語

集合について

- A と B が $A\cap B=\emptyset$ を満たす集合の時，$A\sqcup B=A\cup B$ と表す．
- $(A_i)_{i\in I}$ を空でない集合族で，相異なる任意の $i,j\in I$ について $A_i\cap A_j=\emptyset$ が成り立つものとする．このとき，$\bigsqcup_{i\in I}A_i=\bigcup_{i\in I}A_i$ と表す．
- $\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$.
- $\overline{\mathbb{N}}=\mathbb{N}\sqcup\{\infty\}$.
- $\mathbb{Q}$：有理数全体の集合.
- $\mathbb{R}$：実数全体の集合.
- $\overline{\mathbb{R}}=[-\infty,+\infty]=\mathbb{R}\sqcup\{+\infty,-\infty\}$.
- $A\subset\overline{\mathbb{R}}$ に対して

$$A_{\geq a}=\{x\in A\mid x\geq a\},\qquad A_{>a}=\{x\in A\mid x>a\},$$
$$A_{\leq a}=\{x\in A\mid x\leq a\},\qquad A_{<a}=\{x\in A\mid x<a\}.$$

関数について

- 実数値の関数族 $(f_i)_{i\in I}$ が与えられたとき，その上限 $\bigvee_{i\in I}f_i$ および下限 $\bigwedge_{i\in I}f_i$ をそれぞれ

$$\left(\bigvee_{i\in I}f_i\right)(x)=\sup_{i\in I}f(x),\qquad\left(\bigwedge_{i\in I}f_i\right)(x)=\inf_{i\in I}f(x)$$

で定義する．(f_i) が非有界な時は，これらは $\overline{\mathbb{R}}$ 値関数となる．

- 関数 $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^d$ に対して，（それぞれの極限が存在するとき）

$$\lim_{s\uparrow\uparrow t} f(s) = \lim_{s\to t, s<t} f(s), \qquad \lim_{s\uparrow t} f(s) = \lim_{s\to t, s\leq t} f(s)$$

と表記する．ただし，左側の極限は $t > 0$ の時のみ考える．同様に

$$\lim_{s\downarrow\downarrow t} f(s) = \lim_{s\to t, s>t} f(s), \qquad \lim_{s\downarrow t} f(s) = \lim_{s\to t, s\geq t} f(s)$$

とする．

- $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ を関数とする．f が t で右連続であるとは，

$$f(t) = \lim_{t\downarrow s} f(s)$$

が成り立つということである．また，$t > 0$ に対して極限 $\lim_{s\uparrow\uparrow t} f(s)$ が存在するとき，f は t で左極限を持つという．f が全ての $t \geq 0$ で右連続かつ全ての $t > 0$ で左極限をもつとき，f は càdlàg であるという．càdlàg な関数 f と $t > 0$ に対して，

$$f(t-) = \lim_{s\uparrow\uparrow t} f(t), \qquad \Delta f(t) = f(t) - f(t-)$$

と定義する．$t = 0$ の時は便宜上 $\Delta f(0) = 0$ とする．

- $f \in C^n(\mathbb{R}^d)$ その偏導関数を以下で表す．

$$D_{i_1\dots i_k} f = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}, \qquad k \in \{0, \dots, n\}, \quad i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, d\}.$$

$\pm\infty$ に関する演算について

- $(\pm\infty)$ に関する演算を次のように定める．まずは，$a \in \mathbb{R}$ に対して和を

$$(+\infty) + a = a + (+\infty) = +\infty, \qquad (-\infty) + a = a + (-\infty) = -\infty$$

と定める．$0 < a \leq +\infty$ のとき，$\pm\infty$ との積を

$$(+\infty) \times a = a \times (+\infty) = +\infty, \qquad (-\infty) \times a = a \times (-\infty) = -\infty,$$
$$(+\infty) \times (-a) = (-a) \times (+\infty) = -\infty, \qquad (-\infty) \times (-a) = (-a) \times (-\infty) = +\infty$$

0 と $\pm\infty$ の積は

$$(+\infty) \times 0 = 0 \times (+\infty) = 0, \qquad (-\infty) \times 0 = 0 \times (-\infty) = 0$$

と定める．

測度論に関して

- 可測空間 $(E, \mathscr{E})$ 上の関数 $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ が $\mathscr{E}$ 可測であることを，$f \in \mathscr{E}$ と表すことがある．$f \in \mathscr{E}_b$ とは f が有界な $\mathscr{E}$-可測関数だという意味であり，$f \in \mathscr{E}_+$ は f が非負の $\mathscr{E}$-可測関数であるという意味である．

- 本ノートでは単に測度と言ったときは，$\overline{\mathbb{R}}$-値測度を表すことにする．それ以外のときは何らかの方法で測度の値域を明示することにする．たとえば非負測度とは $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ のことであるし，有限測度とは $\mathbb{R}$-値測度のことである．
- σ 代数の族 $(\mathscr{A}_i)$ に対して $\bigvee_i \mathscr{A}_i$ で σ 加法族 $\sigma(\bigcup_i \mathscr{A}_i)$ を表す．
- 測度空間 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ と可測空間 $(E, \mathscr{E})$，そして可測関数 $f\colon X \to E$ が与えられたとき，

$$\begin{aligned} \mathscr{E} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ A &\longmapsto \mu(f^{-1}(A)) \end{aligned}$$

  によって $(E, \mathscr{E})$ 上の測度が定まる．これを f の像測度といい，$f_*\mu$ で表す．
- 測度空間 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ が与えられたとき，μ による可測関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ の積分（が存在すればそれ）を

$$\int_X f(x)\mu(\mathrm{d}x), \quad \int_X f\mathrm{d}\mu, \quad \int_X \mu(\mathrm{d}x)f(x), \quad \int_X \mathrm{d}\mu\, f, \quad \mu(f), \quad \langle \mu, f\rangle$$

  などの記号で表す．
- 可測空間 $(X, \mathscr{A})$ 上の測度 μ と可測関数 f に対して

$$A \mapsto \int_A f(x)\mu(\mathrm{d}x), \quad A \in \mathscr{A}$$

  で定まる測度を $f \bullet \mu$ で表す．
- $(X, \mathscr{A}, \mu)$ を非負測度空間とし，$\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ を部分 σ 代数とする．μ の $\mathscr{B}$ 上への制限 $(X, \mathscr{B}, \mu|_{\mathscr{B}})$ が σ 有限測度空間となる時，μ は $\mathscr{B}$-σ 有限であるという．$f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ を $\mathscr{A}$ 可測関数とする．$|f| \bullet \mu$ が $\mathscr{B}$-σ 有限となるとき，f は $\mathscr{B}$-σ 可積分であるという．
- 測度空間 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ に対し，$p\ (\in [1, \infty[)$ 乗可積分な可測関数全体の集合を $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ で表す．可測関数が μ-a.e. で等しいという同値関係による $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ の商空間を $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)/\mu$ または $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ で表す． $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ のノルムを $\|\ \|_{L^p}$ で表す．
- $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$ をは本質的に有界な実数値確率変数からなる空間とし，その μ による同値類を $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)/\mu$ または $L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$ で表す．$L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$ のノルムを $\|\ \|_{L^\infty}$ で表す．
- 可測空間 $(Y, \mathscr{B})$ に値をとる可測関数全体の空間を $\mathscr{L}^0(X, \mathscr{A}; Y, \mathscr{B})$ で表す．$(Y, \mathscr{B}) = \mathbb{R}$ のときは，単に $\mathscr{L}^0(X, \mathscr{A})$ と書く．$\mathscr{L}^0(X, \mathscr{A})$ の測度 μ による同値類を $\mathscr{L}^0(X, \mathscr{A})/\mu$ あるいは $L^0(X, \mathscr{A}, \mu)$ で表す．

確率空間について

- このノートでは $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ は常に確率空間を表すものとする．
- 確率変数 X に対してその期待値（P による積分）を $E[X]$ で表す． 確率測度を明示する必要性があるときは，特に $E_P[X]$ などと書く．
- $A, B \in \mathscr{F}$ が $P(B \setminus A) = 0$ を満たすとき，$A \subset B$ a.s. と書く．$A \subset B$ a.s. かつ $B \subset A$ a.s. が成り立つとき，$A = B$ a.s. と書く．

- $A, B \subset \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ について $B \setminus A$ が消散的集合となるとき，$A \subset B$ a.s. と書く．$A \subset B$ a.s. かつ $B \subset A$ a.s. のとき，$A = B$ a.s. と表す．
- $\mathscr{F}$ の部分 σ-加法族 $\mathscr{G}$ に対して，その条件付期待値の任意の変形 (version) を $E[X|\mathscr{G}]$ で表す．可積分でなくても，非負の確率変数に対して条件付き期待値が定義できることに注意されたい．
- 確率過程の空間 $\mathscr{H}$ が与えられたとき，$\mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$ でその局所化を，$\mathscr{H}_{\mathrm{ploc}}$ で前局所化を表す．$\mathscr{H}^{\mathrm{c}}$ は $\mathscr{H}$ の元のうち連続なパスをもつもの全体を，$\mathscr{H}_0$ は $\mathscr{H}$ の元のうちで 0 出発のもの全体を表すことにする．$\mathscr{H}$ の元のうち可予測なもの全体は $\mathscr{H}^{\mathrm{pred}}$ で表す．
- $\mathbb{V}^+$：càdlàg 増加過程 A で，$A_0 = 0$ を満たすもの全体．
- $\mathbb{V} = \mathbb{V}^+ - \mathbb{V}^+$；$A \in \mathbb{V}$ に対して $V(A)$ でその全変動過程を表す．
- $\mathbb{A}^+$：$A \in \mathbb{V}^+$ で $A_\infty = \lim_{t\to\infty} A_t \in L^1(P)$ なるもの全体の集合
- $\mathbb{A} = \mathbb{A}^+ - \mathbb{A}^+$ とする．すなわち，$\mathbb{A}$ は $V(A)_\infty \in L^1(P)$ を満たす $A \in \mathbb{V}$ の全体の集合である．
- $\mathscr{V}^+$：フィルトレーションに適合した $A \in \mathbb{V}^+$ 全体の空間
- $\mathscr{V} = \mathscr{V}^+ - \mathscr{V}^+$
- $\mathscr{A}^+ = \mathscr{V}^+ \cap \mathbb{A}$，$\mathscr{A} = \mathscr{A}^+ - \mathscr{A}^+$．
- H を（結合的）可測な確率過程とし，$A \in \mathbb{V}$ とする．H の A によるパスごとの Stiltjes 積分が存在するとき，

$$(H \bullet A)_t(\omega) = \int_{[0,t]} H_s(\omega) \mathrm{d}A_s(\omega)$$

と定義する．

1　ランダム測度

確率過程の一般論及びマルチンゲール理論の基礎的内容の大部分は既知とする．本ノートで使う結果は付録にまとめてあるが，一部を除いて証明はつけない．（全てに証明をつけるとノートの長さが 3 倍くらいになる．）きちんとした説明，証明を知りたい読者は Dellacherie and Meyer [10, 11]，He, Wang, and Yan [16]，Jacod and Shiryaev [21] などを参照されたい．

定義 1.1. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F})$ をフィルター付き可測空間とし，$(E, \mathscr{E})$ を可測空間とする．新たな可測空間 $(\Omega_E, \mathscr{F}_E)$ を

$$(\Omega_E, \mathscr{F}_E) = (\Omega, \mathscr{F}) \times (\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})) \times (E, \mathscr{E})$$

（可測空間としての直積）と定義する． また，$\mathscr{F}_E$ の部分 σ 代数 $\mathscr{P}_E$ および $\mathscr{O}_E$ を

$$\mathscr{P}_E = \mathscr{P} \otimes \mathscr{E}, \qquad \mathscr{O}_E = \mathscr{O} \otimes \mathscr{E}$$

によって定義し[5]，それぞれ Ω_E 上の可予測 σ 代数 (predictable σ-algebra)，良可測 σ 代数 (optional σ-algebra) と呼ぶ．Ω_E 上の $\mathscr{P}_E$ あるいは $\mathscr{O}_E$ 可測な関数を，それぞれ可予測関数 (predictable function)，良可測関数 (optional function) という．

以下，E は Souslin 空間であると仮定する．σ 代数 $\mathscr{E}$ は常に $\mathscr{E} = \mathscr{B}(E)$ と考えることにする．基本的には，E はポーランド空間や $\mathbb{R}^d$ の「良い」部分集合と捉えてもらって差支えない．このノートを通じて，通常の条件を満たす[6] フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を固定しておく．

補題 1.2. W を $\mathscr{F}_E$ 可測関数，(α_t) を E 値可測過程，T を停止時刻とする．

(i) W が良可測かつ (α_t) が良可測なら，$W(\cdot, T, \alpha_T(\cdot))1_{\{T<\infty\}}$ は $\mathscr{F}_T$-可測である．
(ii) W が可予測かつ (α_t) が可予測なら，$W(\cdot, T, \alpha_T(\cdot))1_{\{T<\infty\}}$ は $\mathscr{F}_{T-}$-可測である．

証明　良可測の場合を考える．$f \in \mathscr{O}$ と $g \in \mathscr{E}$ を用いて，$W = fg$ と表される場合は明らかであり，一般の場合は単調族定理を用いて示せばよい．可予測の場合も同様である．　□

定義 1.3. $(\Omega, \mathscr{F})$ から $(\mathbb{R}_{\geq 0} \times E, \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \otimes \mathscr{E})$ への $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ 値の核 μ で条件

$$\mu(\omega, \{0\} \times E) = 0 \quad \forall \omega \in \Omega$$

を満たすものをランダム測度 (random measure) と呼ぶ[7]．ランダム測度 μ が次の条件を満たすとき，μ は一様に σ-有限であるということにする：$\mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \otimes \mathscr{E}$ 可測な $\mathbb{R}_{\geq 0} \times E$ の分割 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で，任意の $\omega \in \Omega$ に対して $\mu(\omega, A) < \infty$ を満たすものが存在する．また，任意の ω に対して $\mu(\omega, \cdot)$ が σ-有限な測度となるとき，μ は各点で σ-有限であるという．

---

5)　$\mathscr{P}$ および $\mathscr{O}$ はそれぞれ $\Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ 上の可予測および良可測 σ 代数である．

6)　Jacod and Shiryaev [21] によると完備性は必要ないらしいが，ここではとりあえず完備も仮定しておく．そのほうが細かいことを気にせずマルチンゲール理論の諸結果を用いることができる．

7)　この条件を課さない流儀もあるが，いずれにしても本質的な違いではない．また，ランダム測度にはじめからある種の σ 有限性を仮定する流儀もある．

ランダム測度 μ が与えられたとき，

$$M_\mu(B\times C)=E\left[\mu(\,\cdot\,,C)1_B\right]\quad B\in\mathscr{F},\ C\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})\otimes\mathscr{E}$$

で定義される関数は Carathéodory の方法により $\mathscr{F}_E$ 上の非負測度に拡張される[8]．その測度を M_μ で表し，μ によって生成された測度と呼ぶ．ランダム測度が一様に σ 有限なら，$D\in\mathscr{F}_E$ に対して

$$M_\mu(D)=\int_\Omega\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}\times E}1_D(\omega,t,x)\mu(\omega,\mathrm{d}(t,x))P(\mathrm{d}\omega)$$

が成り立つ．M_μ が有限測度であるとき，ランダム測度 μ は可積分であるという．M_μ の $\mathscr{P}_E$ 上への制限が σ-有限であるとき，μ は可予測-σ-可積分であるといい，M_μ の $\mathscr{O}_E$ 上への制限が σ-有限であるとき，良可測-σ-可積分であるという．ランダム測度 μ と ν が

$$P\left(\mathrm{pr}_1\left\{(\omega,B)\mid\mu(\omega,B)\neq\nu(\omega,B)\right\}\right)=0$$

を満たすとき，μ と ν は区別不能であるという[9]．

例 1.4. ランダム測度は，増加過程を一般化した概念である．$A\in\mathbb{V}^+$ とし，一点集合 $E=\{0\}$ 上に σ 代数 $\mathscr{E}=\{\emptyset,E\}$ を定める．

$$\mu(\omega,B)=\int_{[0,\infty[\times E}1_B(s,x)\mathrm{d}A_s(\omega)\delta_0(\mathrm{d}x)$$

と定めれば，これはランダム測度であって，

$$\mu(\omega,[0,t]\times E)=A_t(\omega)$$

が成り立つ．

十分良い可積分性をもつ非負 $\mathscr{F}_E$ 可測関数 W およびランダム測度 μ，そして $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})\otimes\mathscr{E}$ に対して

$$\nu(\omega,B)=\int_B W(\omega,t,x)\mu(\omega,\mathrm{d}(t,x))$$

と定義すれば，これはまたランダム測度である．このように定まるランダム測度を $\nu=W\bullet\mu$ などで表す．　また，十分良い可積分性をもつ $W\in\mathscr{F}_E$ に対して新たな確率過程 $W*\mu$ を

$$(W*\mu)_t(\omega)=\int_{[0,t]\times E}W(\omega,s,x)\mu(\omega,\mathrm{d}(s,x))$$

によって定義する．このとき $W*\mu\in\mathbb{V}$ が成り立つことに注意しておく．この記法を用いれば，ランダム測度が可積分であるとは，$1*\mu\in\mathbb{A}^+$ ということである．

補題 1.5. μ をランダム測度とする．

(i) W,U を非負の $\mathscr{F}_E$ 可測関数とすれば，$W\bullet(U\bullet\mu)=(WU)\bullet\mu$ が成り立つ．

8） その拡張は一意とは限らない．本ノートでは特定の構成方法で得られる拡張を M_μ と表現するということである．

9） $\mathrm{pr}_1\colon\Omega\times\mathbb{R}_{\geq 0}\times E\to\Omega$ は標準的な射影を表す．

(ii) $W \in \mathscr{F}_E$ は $W * \mu$ が存在するようなものとする．（ここでの $\bullet$ はランダム測度を作るもの.）このとき，$H \bullet (W * \mu)$ が存在するような可測過程 $H \in \mathscr{F}$ に対して，$H \bullet (W * \mu) = (HW) * \mu$ が成り立つ．（ここでの $\bullet$ はパスごとの Stieltjes 積分.）

(iii) 非負 $\mathscr{F}_E$ 可測関数 W は $W \bullet \mu$ が存在するようなものとする．$U \in \mathscr{F}_E$ に対して $U * (W \bullet \mu)$ が存在するならば，$U * (W \bullet \mu) = (UW) * \mu$ が成り立つ.

(iv) 非負 $\mathscr{F}_E$ 可測関数 W は $W \bullet \mu$ が存在するようなものとする．このとき，$M_{W \bullet \mu}(A) = M_\mu(W 1_A)$ $(A \in \mathscr{F}_E)$ が成り立つ.

証明　(i) ω を固定した積分の associativity よりわかる.

(ii) $H = 1_{[0,u] \times A}$ の形の場合は,

$$(H \bullet (W * \mu))(t, \omega) = \int_{[0,t]} H_s(\omega) \mathrm{d}(W * \mu)_s(\omega) = 1_A(\omega)(W * \mu)_{u \wedge t}(\omega)$$

および

$$\begin{aligned}(HW) * \mu(t, \omega) &= \int_{[0,t] \times E} H(\omega, s) W(\omega, s, x) \mu(\omega, \mathrm{d}(s, x)) \\ &= 1_A(\omega) \int_{[0, t \wedge u] \times E} W(\omega, s, x) \mu(\omega, \mathrm{d}(s, x)) \\ &= 1_A(\omega)(W * \mu)_{u \wedge t}(\omega)\end{aligned}$$

よりわかる．一般の場合は単調族定理を用いた議論による.

(iii) これも測度による積分の associativity よりわかる.　□

定義 1.6. $W * \mu$ が存在するような任意の良可測関数 W に対して $W * \mu$ が良可測過程となるとき，ランダム測度 μ は良可測であるという．また，$W * \mu$ が存在するような任意の可予測関数 W に対して $W * \mu$ が可予測過程となるとき，ランダム測度 μ は可予測であるという.

補題 1.7. ランダム測度 μ は $(1 * \mu)_t < \infty$ を満たすと仮定する．このとき，μ が良可測（可予測）であることの必要十分条件は任意の $B \in \mathscr{E}$ に対して $1_B * \mu$ が良可測（可予測）になることである.

証明　まずは，ランダム測度が $(1 * \mu)_t < \infty$ を満たすとき，$(1_B * \mu)_t(\omega) = \mu(\omega, [0, t] \times B)$ が成り立つことに注意しておこう．$1_B * \mu \in \mathbb{V}^+$ が成り立つから，このとき $1_B * \mu$ が良可測であることは $\mathbb{F}$-適合であることと同値となる.

必要性：$B \in \mathscr{E}$ に対して

$$W(\omega, t, x) = 1_B(x) = 1_{\Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times B}(\omega, t, x)$$

と定義する．μ は良可測だから，$1_B * \mu = W * \mu$ は良可測過程である.

十分性：

$$W = 1_{A \times [s, t[\times B} \quad A \in \mathscr{F}_s,\ s \leq t,\ B \in \mathscr{E}$$

のとき，

$$(W*\mu)_u(\omega)=1_A(\omega)\mu(\omega,[0,u]\cap[s,t[\times B)=\begin{cases}0 & u<s\\ 1_A(\omega)\mu(\omega,[s,u]\times B) & s\le u<t\\ 1_A(\omega)\mu(\omega,[s,t[\times B) & t\le u\end{cases}$$

が成り立つ．これが適合過程であることを示そう．$u<s$ のとき，$(W*\mu)_u\equiv 0$ は明らかに $\mathscr{F}_u$-可測である．$s\le u<t$ のときは

$$(W*\mu)_u(\omega)=1_A(\omega)\mu(\omega,[s,u]\times B)=1_A(\omega)\mu(\omega,[0,u]\times B)-1_A(\omega)\lim_{s'\uparrow\uparrow s}\mu(\omega,[0,s']\times B)$$

となるから，仮定によりこれが $\mathscr{F}_u$-可測となることがわかる．$t\le u$ の場合は

$$(W*\mu)_u(\omega)=1_A(\omega)\mu(\omega,[s,t[\times B)=1_A(\omega)\lim_{t'\uparrow\uparrow t}\mu(\omega,[0,t']\times B)-1_A(\omega)\lim_{s'\uparrow\uparrow s}\mu(\omega,[0,s']\times B)$$

なので，やはりこれも $\mathscr{F}_u$-可測である．以上の議論により，$W=1_{A\times[s,t[\times B}$ のときは $W*\mu$ が良可測になることがわかった．W が一般の場合は，単調族定理を用いた議論を行えばよい．

可予測の場合は，良可測の議論において $W=1_{A\times[s,t[\times B}$ の代わりに $W=1_{A\times]s,t]\times B}$ の形の表現を考えればよい．□

補題 1.8. μ が良可測（可予測）なランダム測度で W が非負良可測（可予測）関数ならば，$\nu:=W\bullet\mu$ は良可測（可予測）ランダム測度である．

証明　補題 1.5 とランダム測度の良可測性（可予測性）の定義よりわかる．□

定理 1.9. μ と ν を良可測（可予測）ランダム測度とし，これらは良可測（可予測）-σ-可積分であると仮定する．M_μ と M_ν が $\mathscr{O}_E$（$\mathscr{P}_E$）上で一致するなら，μ と ν は区別不能である．

証明　良可測の場合に示す．$(A_n)\in\mathscr{O}_E^{\mathbb{N}}$ を $A_n\uparrow\Omega_E$ かつ $M_\mu(A_n)=M_\nu(A_n)<\infty$ を満たすように選ぶ．ここで，$\sigma(\mathscr{D})=\mathscr{E}$ を満たす可算な π-系 $\mathscr{D}$ を一つ固定する．$D\in\mathscr{D}$ と $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$U=(1_{A_n}1_D)*\mu,\quad V=(1_{A_n}1_D)*\nu$$

と定めれば，$U,V\in\mathscr{A}^+$ である．H を任意の非負良可測過程とすれば，仮定より

$$E\left[\int_{[0,\infty[}H_t\mathrm{d}U_t\right]=M_\mu\left[1_{A_n}1_DH\right]=M_\nu\left[1_{A_n}1_DH\right]=E\left[\int_{[0,\infty[}H_t\mathrm{d}V_t\right].$$

が成立．これより U と V は区別不能である[10)]．これより，

$$P\left(\left\{\omega\in\Omega\,\middle|\,\forall D\in\mathscr{D},\ \forall t\in[0,\infty[,\ \int_{[0,t]\times D}1_{A_n}\mathrm{d}\mu=\int_{[0,t]\times D}1_{A_n}\mathrm{d}\nu\right\}\right)=1$$

10)　特に，H として $1_{[\![0,T]\!]}$ のようなものを考えれば，section theorem の応用によりわかる．

を得る．$\mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})\otimes\mathscr{E}$ は $[0,t]\times D$ の形の集合のからなる π-系によって生成されるから，このとき

$$P\left(\left\{\omega\in\Omega\,\middle|\,\forall B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})\otimes\mathscr{E},\ \int_B 1_{A_n}\mathrm{d}\mu=\int_B 1_{A_n}\mathrm{d}\nu\right\}\right)=1$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}
&P\left(\{\omega\in\Omega\,|\,\forall B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})\otimes\mathscr{E},\ \mu(\omega,B)=\nu(\omega,B)\}\right)\\
&\geq P\left(\left\{\omega\in\Omega\,\middle|\,\forall B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})\otimes\mathscr{E},\forall n\in\mathbb{N},\ \int_B 1_{A_n}\mathrm{d}\mu=\int_B 1_{A_n}\mathrm{d}\nu\right\}\right)\\
&=P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left\{\omega\in\Omega\,\middle|\,\forall B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})\otimes\mathscr{E},\ \int_B 1_{A_n}\mathrm{d}\mu=\int_B 1_{A_n}\mathrm{d}\nu\right\}\right)=1
\end{aligned}$$

となり，μ と ν は区別不能であることがわかった． □

2　ランダム測度の双対可予測射影

$A\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ に対してその双対可予測射影 $A^{\mathfrak{p}}$ が定義されたように，適当なランダム測度についても双対可予測射影を定義することができる．双対可予測射影は局所マルチンゲールのジャンプの解析に重要に役割を果たしたように，ランダム測度の双対可予測射影も半マルチンゲール理論においてきわめて重要な道具である．まずは，双対可予測射影の存在を保証するのに用いる以下の定理を証明する．

定理 2.1. m は $(\Omega_E,\mathscr{F}_E)$ 上の $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ 値測度で，$\mathscr{O}_E$（$\mathscr{P}_E$）-σ-有限であるとする．このとき，$m=M_\mu$ を満たす良可測（可予測）ランダム測度 μ が存在するための必要十分条件は，以下の 3 条件が成り立つことである．

(i) 任意の消散的な $N\subset\Omega\times\mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して，$m(N\times E)=0$ が成り立つ．

(ii) $m(A)<\infty$ を満たす任意の $A\in\mathscr{O}_E$（$\mathscr{P}_E$）と任意の有界可測過程 X に対して

$$m(X1_A)=m({}^{\mathfrak{o}}X1_A)\quad(\text{あるいは}m(X1_A)=m({}^{\mathfrak{p}}X1_A))$$

が成り立つ．ただし，${}^{\mathfrak{o}}X$（${}^{\mathfrak{p}}X$）は X の良可測（可予測）射影を表わす．

(iii) $m(\Omega\times\{0\}\times E)=0$ が成り立つ．

これらの条件の下で，m を表現する良可測（可予測）ランダム測度は区別不能の意味で一意に定まる．

証明　可予測な場合のみ示す．一意性は定理 1.9 よりすぐにわかる．

Step1：必要性． ある可予測ランダム測度 μ によって m が $m=M_\mu$ と表現されていると仮定する．$N\subset\Omega\times\mathbb{R}_{\geq 0}$ を消散的集合とすれば，

$$\left\{\omega\in\Omega\,\middle|\,\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}\times E}1_N(\omega,t)1_E(x)\mu(\omega,\mathrm{d}(t,x))>0\right\}\subset\{\omega\in\Omega\mid\exists t\in\mathbb{R}_{\geq 0}\ (\omega,t)\in N\}=\mathrm{pr}_1(N)$$

が成り立つ．これより確率変数

$$\omega \mapsto \int_{\mathbb{R}_{\geq 0} \times E} 1_N(\omega, t) 1_E(x) \mu(\omega, \mathrm{d}(t, x))$$

は a.s. で 0 となり，

$$M_\mu(N \times E) = \int_\Omega \int_{\mathbb{R}_{\geq 0} \times E} 1_N(\omega, t) 1_E(x) \mu(\omega, \mathrm{d}(t, x)) P(\mathrm{d}\omega) = 0$$

がわかる．よって (i) が成立．

次に (ii) が成り立つことを示そう．$A \in \mathscr{P}_E$ とし，$Y = 1_A * \mu$ によって可予測過程を定める．このとき任意の有界可測過程 X に対して

$$\begin{aligned}
m(X1_A) &= M_\mu(X1_A) \\
&= \int_\Omega \int_{[0,\infty[\times E} X(\omega, s) 1_A(\omega, s, x) \mu(\omega, \mathrm{d}(s, x)) P(\mathrm{d}\omega) \\
&= \int_\Omega \int_{[0,\infty[\times E} X(\omega, s) \mathrm{d}Y_s P(\mathrm{d}\omega) \\
&= \int_\Omega \int_{[0,\infty[\times E} {}^{\mathfrak{p}}X(\omega, s) \mathrm{d}Y_s P(\mathrm{d}\omega) \\
&= \dots \\
&= M_\mu({}^{\mathfrak{p}}X1_A) = m({}^{\mathfrak{p}}X1_A)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，5 行目の等号は Y の可予測性より従う[11]．

(iii) はランダム測度の定義より明らかである．

Step 2：十分性． まずは，m は有限であると仮定する．$\widehat{m}(A) = m(A \times E)$ と定めれば，$(\Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0}, \mathscr{P})$ から $(E, \mathscr{E})$ への確率核 $n(\omega, t, \mathrm{d}x)$ で

$$m(A \times B) = \int_{\Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0}} 1_A(\omega, t)\, n(\omega, t, B)\, \widehat{m}(d(\omega, t)) \quad \forall A \in \mathscr{P},\ \forall B \in \mathscr{E}$$

を満たすものが存在する[12]．いま $\widehat{m}$ は $\mathscr{F} \times \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ 上の可予測な有限測度で $\widehat{m}([\![0]\!]) = 0$ かつ任意の消散的集合 N に対して $\widehat{m}(N) = 0$ を満たすから，ある $A \in \mathscr{A}^{+,\mathrm{pred}}$ によって

$$\widehat{m}(X) = E\left[\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} X_s \mathrm{d}A_s\right] \quad X \in \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})_+$$

と表現される．ここで，$(\Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0}, \mathscr{F} \times \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}))$ から $(E, \mathscr{E})$ への有限核 μ を

$$\mu(\omega, B) = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \int_E 1_B(t, x) n(\omega, t, \mathrm{d}x) \mathrm{d}A_t(\omega)$$

11)　He, Wang, and Yan [16, 5.13 Theorem]
12)　系 B.30.

と定義する．この μ は明らかに可積分なランダム測度である．μ が可予測であることを示そう．$C \in \mathscr{E}$ とすれば

$$\begin{aligned}(1_C * \mu)_t(\omega) &= \mu(\omega, [0,t] \times C) \\ &= \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \int_E 1_{[0,t]\times C}(s,x) n(\omega, s, \mathrm{d}x) \mathrm{d}A_s(\omega) \\ &= \int_{[0,t]} n(\omega, s, C) \mathrm{d}A_s\end{aligned}$$

が成り立つ．今 $(\omega, t) \mapsto n(\omega, t, C)$ は可予測だから，$1_C * \mu = n(\,\cdot\,, C) \bullet A$ もまた可予測過程である．補題 1.7 を用いれば，μ が可予測であることがわかる．あとは，この μ が $m = M_\mu$ を満たすことを示せばよい．これまでの議論により有界可測過程 X と $B \in \mathscr{E}$ に対して

$$\begin{aligned}&m(X1_B) \\ &= m({}^{\mathfrak{p}}X1_B) \\ &= \int_{\Omega\times\mathbb{R}_{\geq 0}} {}^{\mathfrak{p}}X_t(\omega)\, n(\omega, t, B)\, \widehat{m}(d(\omega, t)) \\ &= \int_\Omega \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} {}^{\mathfrak{p}}X_t(\omega)\, n(\omega, t, B)\, \mathrm{d}A_t(\omega)\, P(\mathrm{d}\omega) \\ &= \int_\Omega \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} {}^{\mathfrak{p}}(X_t(\omega)\, n(\omega, t, B))\, \mathrm{d}A_t(\omega)\, P(\mathrm{d}\omega) \\ &= \int_\Omega \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} X_t(\omega)\, n(\omega, t, B)\, \mathrm{d}A_t(\omega)\, P(\mathrm{d}\omega) \quad (\because A \text{ is predictable}) \\ &= \int_\Omega \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}\times E} X_t(\omega) 1_B(x)\, \mu(\omega, \mathrm{d}(t,x))\, P(\mathrm{d}\omega) \\ &= M_\mu(X1_B)\end{aligned}$$

が成り立つ．　このような形の関数全体は積について閉じており，さらに $\mathscr{F}_E$ はこのような形の関数全体で生成されるから，$m = M_\mu$ がわかる．

次に m が $\mathscr{P}_E$-σ-有限の場合を考える．$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathscr{P}_E$ 可測な Ω_E の分割[13)]で，$m(A_n) < \infty$ を満たようなものとする．このステップの前半の結果から，可予測かつ可積分なランダム測度の列 (μ_n) で，全ての非負 $\mathscr{F}_E$ 可測関数 W に対して $m(W1_{A_n}) = M_{\mu_n}(W)$ を満たすようなものがとれる．いま

$$\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n} \mu_n$$

と定義すれば，これは $M_\mu = m$ を満たす可予測ランダム測度である．　□

定義 2.2. μ をランダム測度とする．ある可予測ランダム測度 ν で

(i) ν は可予測 σ 可積分である．

13)　disjoint であることを仮定する．

(ii) $M_\mu|_{\mathscr{P}_E} = M_\nu|_{\mathscr{P}_E}$.

を満たすものが存在するとき，μ は双対可予測射影をもつといい，ν を μ の双対可予測射影 (dual predictable projection) あるいは補償子 (compensator) とよぶ．双対可予測射影のことを $\mu^{\mathfrak{p}}$ や $\widetilde{\mu}$ などで表す．

定理 1.9 より，μ の双対可予測射影が存在すればそれは（区別不能の意味で）一意に定まる．

定理 2.3. ランダム測度 μ が双対可予測射影をもつための必要十分条件は，μ が可予測 σ 可積分であることである．

証明　必要性は明らかである．十分性を示すために定理 2.1 を用いる．μ は可予測 σ 可積分であると仮定し，

$$m(Xh) = M_\mu({}^{\mathfrak{p}}Xh) \quad X \in \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})_{+,b},\ h \in \mathscr{E}_{+,b}$$

と定義する．M_μ は $\mathscr{P}_E$-σ-有限なので，m は $\mathscr{F}_E$ 上への一意拡張をもつ．さらにその拡張は $m|_{\mathscr{P}_E} = M_\mu|_{\mathscr{P}_E}$ を満たす．いま測度 m は $\mathscr{P}_E$-σ-有限かつ定理 2.1 の条件 (i) と (ii) を満たすので，ある可予測ランダム測度によって $m = M_\nu$ と表現される．この ν は明らかに μ の双対可予測射影である．□

例 2.4. 例 1.4 の設定を引き継ぎ，さらに $A \in \mathbb{A}^+_{\mathrm{loc}}$ であると仮定する．この例において，μ の双対可予測射影を知りたい．

$$\nu(\omega, B) = \int_{[0,\infty[\times E} 1_B(s,x)\mathrm{d}A^{\mathfrak{p}}_s(\omega)\delta_0(\mathrm{d}x)$$

と定義すれば，実はこれが μ の双対可予測射影であることを示そう．

$A^{\mathfrak{p}}$ は局所可積分なのでその局所化列 (T_n) を一つ取れば，$[\![0,T_n]\!] \times E \in \mathscr{P}_E$ は $\mathscr{P}_E$ の分割で $M_\nu([\![0,T_n]\!] \times E) < \infty$ を満たす．よって ν は可予測 σ-可積分である．ν が可予測であることは，$1_E * \mu = A^{\mathfrak{p}}$ が可予測であることから従う[14)]．さらに有界可予測過程 X に対して

$$M_\nu(X) = E\left[\int_{[0,\infty[} X_t\,\mathrm{d}A^{\mathfrak{p}}_t\right] = E\left[\int_{[0,\infty[} X_t\,\mathrm{d}A_t\right] = M_\mu(X)$$

が成り立つことから，$M_\mu|_{\mathscr{P}_E} = M_\nu|_{\mathscr{P}_E}$ もわかる．

定理 2.5. μ を双対可予測射影をもつランダム測度とする．

(i) 非負 $\mathscr{F}_E$ 可測関数 W は $\nu = W \bullet \mu$ が可予測 σ 可積分ランダム測度になるようなものとする．このとき，ν の双対可予測射影は $\nu^{\mathfrak{p}} = U \bullet \mu^{\mathfrak{p}}$ を満たす．ただし，$U = M_\mu[W|\mathscr{P}_E]$ である．[15)]．

(ii) $W \in \mathscr{F}_E$ は $X := W * \mu \in \mathbb{A}_{\mathrm{loc}}$ を満たすと仮定する．このとき，X の双対可予測射影は $X^{\mathfrak{p}} = U * \mu^{\mathfrak{p}}$ によって与えられる．ただし，$U = M_\mu[W|\mathscr{P}_E]$ である．

14）補題 1.7 より．ここでは $\mathscr{E} = \{\emptyset, E\}$ であることに注意せよ．

15）M_μ に関する条件付期待値．

証明　(i) 仮定より M_ν は $\mathscr{P}_E$-σ-有限なので，W は M_μ について $\mathscr{P}_E$-σ-可積分である．これより，条件付期待値 $U = E_\mu[W|\mathscr{P}_E]$ は有限値をとる．いま $A \in \mathscr{P}_E$ に対して

$$M_\nu(A) = M_\mu(1_A W) = M_\mu(1_A U) = M_{\mu^\mathfrak{p}}(1_A U) = M_{U\bullet\mu^\mathfrak{p}}(A)$$

が成り立つから，$M_\nu|_{\mathscr{P}_E} = M_{U\bullet\mu^\mathfrak{p}}|_{\mathscr{P}_E}$ である．したがって，$\nu^\mathfrak{p} = U \bullet \mu^\mathfrak{p}$ である．

(ii) $W * \mu$ は局所可積分だから，適当な局所化列により

$$M_\mu(|W|1_{[\![0,T_n]\!]}) = E[(|W|1_{[\![0,T_n]\!]}) * \mu_\infty] = E[|W| * \mu_{T_n}] < \infty$$

が成り立つ．$([\![0,T_n]\!] \times E)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathscr{P}_E$ 可測なので，W は M_μ について $\mathscr{P}_E$-σ-可積分である．これより $E_\mu[W|\mathscr{P}_E]$ は well-defined で，a.s. で有限値をとる．このとき，任意の有界可予測過程 X に対して

$$E[X\bullet(W*\mu)_\infty] = M_\mu(XW) = M_\mu(XU) = M_{\mu^\mathfrak{p}}(XU) = E[X\bullet(U*\mu^\mathfrak{p})]$$

が成立．したがって $U * \mu^\mathfrak{p} \in \mathscr{A}^{\mathrm{pred}}_{\mathrm{loc}}$ は $W * \mu$ の双対可予測射影である．　□

命題 2.6. μ は双対可予測射影を持つランダム測度とし，W を非負 $\mathscr{P}_E$ 可測関数，T を可予測時刻とする．このとき，

$$\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}\times E} W(T,x)1_{\{T<\infty\}}1_{[\![T]\!]}\mu^\mathfrak{p}(d(t,x)) = E\left[\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}\times E} W(T,x)1_{\{T<\infty\}}1_{[\![T]\!]}\mu(\mathrm{d}(t,x))\middle|\mathscr{F}_{T-}\right]$$

が成り立つ．ただし，$W(T,x)$ は関数 $(\omega,x)\mapsto W(\omega,T(\omega),x)$ を意味する．

証明　(A_n) を $\mathscr{P}_E$ の元の増加列で，$\bigcup_n A_n = \Omega_E$，$M_\mu(A_n) < \infty$ かつ W が A_n 上有界であるようなものとする．$X^{(n)} = W1_{A_n} * \mu$ と定めれば，$X^{(n)} \in \mathbb{A}^+$ であるから，これは双対可予測射影をもつ．$W1_{A_n}$ は可予測関数なので，定理 2.5 の (ii) より $(X^{(n)})^\mathfrak{p} = W1_{A_n} * \mu^\mathfrak{p}$ が成り立つ．また双対可予測射影の性質より $\Delta(X^{(n)})^\mathfrak{p} = {}^\mathfrak{p}(\Delta X^{(n)})$ が成り立つのであった．したがって任意の可予測時刻 T に対して

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}\times E} W(T,x)1_{A_n}1_{\{T<\infty\}}1_{[\![T]\!]}\mu^\mathfrak{p}(d(t,x)) \\
&= \Delta(W1_{A_n} * \mu^\mathfrak{p})_T 1_{\{T<\infty\}} \\
&= E\left[(\Delta W1_{A_n} * \mu)_T 1_{\{T<\infty\}} \,\middle|\, \mathscr{F}_{T-}\right] \\
&= E\left[\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}\times E} W(T,x)1_{A_n}1_{\{T<\infty\}}1_{[\![T]\!]}\mu(\mathrm{d}(t,x))\middle|\mathscr{F}_{T-}\right]
\end{aligned}$$

が成り立つ．$n\to\infty$ とすれば，単調収束定理および条件付き期待値についての単調収束定理より結論を得る．　□

注意 2.7. 命題 2.6 は何を言っているかいまいちわかりにくいが，$W * \mu$ が定義されるような場合には意味は明確である．この場合，命題 2.6 の主張していることは任意の可予測時刻に対して

$$\Delta(W * \mu^{\mathfrak{p}})_T 1_{\{T<\infty\}} = E\left[\Delta(W * \mu)_T 1_{\{T<\infty\}} | \mathscr{F}_{T-}\right]$$

が成り立つということであり，これはすなわち ${}^{\mathfrak{p}}(\Delta(W * \mu)) = \Delta(W * \mu^{\mathfrak{p}})$ が成り立つということである．さらに $W * \mu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ ならば定理 2.5 より $W * \mu^{\mathfrak{p}} = (W * \mu)^{\mathfrak{p}}$ なので，これは (C.50) (vi) の特殊な場合に過ぎない．

3　整数値ランダム測度

定義 3.1. ランダム測度 μ が

(i) μ は $\overline{\mathbb{N}} = \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{+\infty\}$ に値をとる，
(ii) 任意の $t \in [0, \infty[$ と任意の ω に対して $\mu(\omega, \{t\} \times E) \le 1$，
(iii) μ は良可測かつ良可測 σ 可積分である，

を満たすとき，μ を整数値ランダム測度 (integer valued random measure) と呼ぶ．

定理 3.2. μ が整数値ランダム測度であるための必要十分条件は，ある痩せた集合 D[16)] と良可測過程 $\beta = (\beta_t)$ によって

$$\mu(\omega, \cdot\,) = \sum_{s \ge 0} \delta_{(s, \beta_s(\omega))}(\,\cdot\,) 1_D(\omega, s) \tag{3.1}$$

と表現されることである．

この定理における集合 D をランダム測度 μ と台 (support) と呼ぶことがある．

証明　十分性． ランダム測度 μ は (3.1) の表現を持つとする．Dirac 測度が 0 か 1 に値をとることから，μ が $\overline{\mathbb{N}}$ に値をとることはすぐにわかる．また，任意の t と ω に対して $\mu(\omega, \{t\} \times E) = \delta_{(t, \beta_t(\omega))} 1_D(t) \le 1$ だから定義の条件 (ii) も成立．

μ が良可測かつ良可測 σ 可積分であることを示そう．停止時刻列 (T_n) で $D = \bigcup_n [\![T_n]\!]$ かつ $[\![T_n]\!] \cap [\![T_m]\!] = \emptyset$ $(n \ne m)$ を満たすようなものをとる．さらに，$W \in \mathscr{O}_E$ を $W * \mu$ が定義されるようなものとする．このとき

$$W * \mu = \sum_n W(\,\cdot\,, T_n, \beta_{T_n}) 1_{[\![T_n, \infty[\![}$$

であり，補題 1.2 よりこれは良可測である[17)]．また

$$A_n = \left[\bigcup_{1 \le k \le n} [\![T_k]\!] \cup (\Omega \times \mathbb{R}_{\ge 0} \setminus D) \right] \times E$$

16）D が痩せた集合であるとは，ある停止時刻列 (T_n) で $D = \bigcup_n [\![T_n]\!]$ を満たすものが存在するということであった．
17）ξ が $\mathscr{F}_S$-可測なら，$\xi 1_{[\![S, T[\![}$ は良可測となるのであった．

と定義すれば，これらは $A_n \in \mathscr{O}_E$ かつ $A_n \uparrow \Omega_E$ を満たす．さらに

$$\begin{aligned} M_\mu(A_n) &= \sum_{1\le k\le n} M_\mu\left([\![T_k]\!] \times E\right) + M_\mu\left([\Omega \times \mathbb{R}_{\ge 0} \setminus D] \times E\right) \\ &= \sum_{1\le k\le n} \int_\Omega \mu(\omega, \{T_k(\omega)\} \times E) P(\mathrm{d}\omega) \\ &\le n \end{aligned}$$

でるから，μ は良可測 σ-可積分であることがわかる．

必要性． μ を整数値ランダム測度とし，

$$D = \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_{\ge 0} \mid \mu(\omega, \{t\} \times E) = 1\}$$

と定義する．このとき D が痩せた集合であることを示そう．μ は良可測 σ 可積分であるから，$(A_n) \in \mathscr{O}_E^{\mathbb{N}}$ で $M_\mu(A_n) < \infty$ かつ $A_n \uparrow \Omega_E$ を満たすようなものがとれる．ここで $B^{(n)} = 1_{A_n} * \mu$ と定義すれば $B^{(n)} \in \mathscr{A}^+$ である．さらに，$D = \bigcup_n \{\Delta B^{(n)} \neq 0\}$ が成り立つ．このことは次のように確かめられる：

$$\Delta B_t^{(n)}(\omega) = \int_{\{t\}\times E} 1_{A_n}(\omega, s, x) \mu(\omega, \mathrm{d}(s, x))$$

であることに注意すれば，任意の (ω, t) に対して $\Delta B_t^{(n)}(\omega) \uparrow \mu(\omega, \{t\} \times E) = 1$ が成り立つことがわかる．これより，$\mu(\omega, \{t\} \times E) = 1$ ならある n が存在して $\Delta B_t^{(n)}(\omega) > 0$ となる．一方，ある n で $\Delta B_t^{(n)}(\omega) > 0$ なら $\mu(\omega, \{t\} \times E) > 0$．いま μ は整数値ランダム測度で $0 < \mu(\omega, \{t\} \times E) \le 1$ なので，$\mu(\omega, \{t\} \times E) = 1$ である．この議論より $D = \bigcup_n \{\Delta B^{(n)} \neq 0\}$ がわかった．B^n は良可測過程なので各 $\{\Delta B^{(n)} \neq 0\}$ は痩せた集合であり，その可算和で表される D も痩せた集合である．

残る課題は良可測過程 β の構成である．停止時刻列 (T_n) を $D = \bigcup_n [\![T_n]\!]$ かつ $[\![T_n]\!] \cap [\![T_m]\!]$ $(m \neq n)$ を満たすようなものとする．$T_n(\omega) < \infty$ ならば，ある実数 $\beta_n(\omega)$ で

$$\mu\left(\omega, \{T_n(\omega)\} \times \{\beta_n(\omega)\}\right) = 1$$

を満たすものが唯一つ存在する[18)]．ここで，$x_0 \in E$ を任意に選んで

$$\beta(\omega, t) = \begin{cases} \beta_n & \text{if } (\omega, t) \in [\![T_n]\!], \\ x_0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

18）いま測度 $B \mapsto \mu(\omega, \{T_n(\omega)\} \times B)$ は E 上の τ-additive 測度である．この測度は $\{0, 1\}$ に値をとるからこれはアトムをもち，したがってある 1 点集合で正の値をとる．仮定よりその値は当然 1 である．（Bogachev [5, Chapter 7, 7.14(v)] を見よ.）そのような 1 点集合は唯一つである．二つあれば $B \mapsto \mu(\omega, \{T_n(\omega)\} \times B)$ は 1 より大きい値をとってしまう．

と定義すれば，これは (3.1) を満たす関数である．実際，$A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \otimes \mathscr{E}$ に対して

$$\begin{aligned}\mu(\omega, A) &= \sum_n \mu(\omega, [\{T_n(\omega)\} \times E] \cap A) \\ &= \sum_n 1_A(T_n(\omega), \beta_n(\omega)) \\ &= \sum_{s \geq 0} \delta_{(s, \beta_s)}(A) 1_D(\omega, s)\end{aligned}$$

が成り立っている[19]．後はこの β が良可測であることを示せばよい．

$$\begin{aligned}\{\omega \in \Omega \mid \beta_n(\omega) \in B,\ T_n(\omega) < \infty\} &= \{\omega \in \Omega \mid \mu(\omega, \{T_n(\omega)\} \times B) = 1,\ T_n(\omega) < \infty\} \\ &= \{\Delta(1_B * \mu)_{T_n} = 1\}\end{aligned}$$

であり，さらに $1_B * \mu$ は良可測過程だから[20]，この集合は $\mathscr{F}_{T_n}$-可測となる．したがって β は良可測である．　□

定理 3.3. 可予測 σ 可積分な整数値ランダム測度 μ の台を D で表し，

$$\begin{aligned}a_t(\omega) &= \mu^{\mathfrak{p}}(\omega, \{t\} \times E) \quad t \in [0, \infty[, \quad \omega \in \Omega, \\ J &= \{(\omega, t) \in \Omega \times [0, \infty[\mid a_t(\omega) > 0\}, \\ K &= \{(\omega, t) \in \Omega \times [0, \infty[\mid a_t(\omega) = 1\},\end{aligned}$$

と定義する．このとき a は $[0, 1]$ に値をとる痩せた可予測過程[21]であり，J は D の可予測台，さらに J は D に含まれる可予測集合のうち最大のものである．（ただし，ここでの包含関係は「消散的集合の差を除いて」という意味．）

証明　$(A_n) \in \mathscr{P}_E^{\mathbb{N}}$ を $A_n \uparrow \Omega$ かつ $M_\mu(A_n) < \infty$ となるように選び，$B^{(n)} = 1_{A_n} * \mu \in \mathscr{A}^+$ と定義する．このとき，定理 2.5 より $\left(B^{(n)}\right)^{\mathfrak{p}} = 1_{A_n} * \mu^{\mathfrak{p}}$ である．したがって $a = \lim_n \Delta(B^{(n)})^{\mathfrak{p}}$ は可予測である．

定理 3.2 の証明より

$$D = \{\mu(\omega, \{t\} \times E) = 1\} = \bigcup_n \{\Delta B^{(n)} \neq 0\}$$

であることに注意する．$\{\Delta B^{(n)} \neq 0\}$ の可予測台が $\{\Delta(B^{(n)})^{\mathfrak{p}} \neq 0\}$ であることと可予測射影の単調収束定理に注意すれば，D の可予測台は

$$\bigcup_n \{\Delta(B^{(n)})^{\mathfrak{p}} \neq 0\} = \{a > 0\} = J$$

であることがわかる．ゆえに a は痩せた過程である．

19）　一つ目の等号は，$\mu(\omega, \cdot)$ が $D \cap [\{\omega\} \times E]$ 上に乗っていることからわかる．このことは一つ前の注釈と同様にしわかる．

20）　μ は良可測なので，補題 1.7 よりわかる．

21）　$\{X \neq 0\}$ が痩せた集合であるような確率過程を痩せた過程という．

定理 2.6 より，任意の可予測時刻に対して

$$a_T 1_{\{T<\infty\}} = E\left[\mu(\cdot, \{T\}\times E)1_{\{T<\infty\}}|\mathscr{F}_{T-}\right] \tag{3.2}$$

が成り立つ．これより，任意の可予測時刻に対して

$$0 \leq E\left[a_T 1_{\{T<\infty\}}\right] = E\left[\mu(\,\cdot\,, \{T\}\times E)1_{\{T<\infty\}}\right] \leq 1$$

となる[22]．したがって，定理 C.19 により $0 \leq \alpha \leq 1$ が消散的集合を除いて成り立つ．

後は，$K = \{a = 1\}$ が D の含まれる最大の可予測集合であることを示せばよい．T を可予測時刻で $[\![T]\!] \subset K$ を満たすものとする．このとき (3.2) より

$$E\left[\mu(\,\cdot\,, \{T\}\times E)1_{\{T<\infty\}}\right] = E\left[a_T 1_{\{T<\infty\}}\right] = E\left[1_{\{T<\infty\}}\right] = P(\{T<\infty\})$$

が成り立つ．いま $\mu(\omega, \{T(\omega)\}\times E)1_{\{T<\infty\}}(\omega) \in [0,1]$ であるから，

$$P\left(\{\mu(\omega, \{T(\omega)\}\times E)) = 1\} \cap \{T(\omega) < \infty\}\right) = 1$$

が従う．よって $[\![T]\!] \subset D$ a.s. が成立．可予測な痩せた集合 K はある可予測時刻列によって $K = \bigcup_n [\![T_n]\!]$ a.s. と表現されるから，$K \subset D$ a.s. が成り立つ．

最後に K の最大性を証明しよう．H は $H \subset D$ a.s. を満たすような可予測集合とする．このとき $H \setminus K$ が消散的になることを示せばよい．いま H は a.s. で D に含まれるから，

$$E\left[a_T 1_{\{T<\infty\}}\right] = E\left[\mu(\,\cdot\,, \{T\}\times E)1_{\{T<\infty\}}\right] = E\left[1_{\{T<\infty\}}\right]$$

が成立．一方，$[\![T]\!]$ は K には含まれないから $\alpha_T < 1$ a.s. on $\{T<\infty\}$ も成り立つ．$P(T<\infty) > 0$ なら

$$E\left[a_T 1_{\{T<\infty\}}\right] < E\left[1_{\{T<\infty\}}\right] = E\left[a_T 1_{\{T<\infty\}}\right]$$

となってしまうので，$P(\{T<\infty\}) = 0$ である．以上の議論により $[\![T]\!] \subset H \setminus K$ なる可予測時刻は必ず $T = \infty$ a.s. を満たすので，定理 C.19（ii）により $H \setminus K$ は消散的となる．　□

注意 3.4. 定理 3.3 において，μ の双対可予測射影のバージョンで次を満たすようなものを選ぶことが出来る．

- $a(\omega, t) \leq 1$ が任意の点で成り立ち，
- $J = \bigcup_n [\![T_n]\!]$ かつ $[\![T_n]\!] \cap [\![T_m]\!]$ $(n \neq m)$ を満たす可予測時刻列が存在する．

μ 双対可予測射影 ν のバージョンを一つ固定し，定理 3.3 と同様に J を定義する．さらに，可予測時刻列 (T_n) で $J' = \bigcup_n [\![T_n]\!] \subset J$ かつ $J \setminus J'$ が消散的になるようなものを選ぶ[23]．$A_n = \{a_{T_n} \leq 1\}$

22）整数値ランダム測度の定義の条件 (ii) より．

23）J は可予測な痩せた集合だから，このようなものが存在する．例えば，Jacod and Shiryaev [21, 2.23 Lemma] などを見よ．

に対して $T'_n = (T_n)_{A_n}$ と定義すれば，これはまた可予測時刻である．$J'' = \bigcup_n [\![T_n]\!]$ とすれば $J'' \subset J' \subset J$ で，$J \setminus J'' = (J \setminus J') \cup (J' \setminus J'')$ は消散的である．ここで $\nu'' = 1_{(J\setminus J'')^c} \bullet \nu$ と定義すれば，ν'' はまた μ の可予測射影のバージョンであり，これが求める条件を満たすものである．

本節の最後に，ジャンプ測度と呼ばれるクラスの整数値ランダム測度を導入しよう．

命題 3.5. X を $\mathbb{R}^d$ 値 càdlàg 適合過程とすれば，

$$\mu(\omega, A) = \sum_{s>0} \delta_{(s,\Delta X_s)}(A) 1_{\{\Delta X \neq 0\}}(\omega, s)$$

は双対可予測過程を持つ整数値ランダム測度である．

この命題におけるランダム測度を，X のジャンプ測度と呼ぶ．さらに，その双対可予測射影 ν を X の Lévy 系ということがある．

証明　定理 3.2 よりこれは整数値ランダム測度なので，我々がここで示すべきことは μ の可予測 σ-可積分性のみである．$n \geq 1$ に対して，

$$\begin{aligned} T_{n,0} &= 0, \\ T_{n,m+1} &= \inf\left\{ t > T_{n,m} \,\middle|\, \frac{1}{n} \leq \|\Delta X_s\|_{\mathbb{R}^d} < \frac{1}{n-1} \right\}, \quad m \geq 0 \end{aligned}$$

と定義する[24]．（ただし，$n = 1$ のとき $\frac{1}{n-1} = \infty$ と考える．）ここで

$$\begin{aligned} A_{0,m} &= \Omega \times [0, \infty[\times \{0\}, \quad m \geq 0 \\ A_{n,m} &= [\![0, T_{n,m}]\!] \times \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right[\end{aligned}$$

と定めれば，これらは $A_{n,m} \in \mathscr{P}_E$ かつ $\bigcup_{n,m\geq 0} A_{n,m} = \Omega_E$ を満たす．さらに $M_\mu(A_{n,m}) \leq m$ が成り立つから，μ は可予測 σ 可積分であることがわかった．□

系 3.6. μ を $\mathbb{R}^d$ 値過程 X のジャンプ測度とする．このとき X が準左連続であるための必要十分条件は，μ の双対可予測射影のバージョン ν で $\nu(\omega, \{t\} \times E) = 0$ $(\forall \omega, t)$ を満たすものが存在することである．

証明　X が準左連続であることと，$\{\Delta X \neq 0\}$ の可予測台が消散的であることは同値なのであった．定理 3.3 より，これは μ の双対可予測射影の任意のバージョン ν に対して $J = \{\nu(\omega, \{t\} \times E) > 0\}$ が消散的となることと同値である．ここで $\nu' = 1_{\Omega\times\mathbb{R}_{\geq 0}\setminus J} \bullet \nu$ と定義すれば，この ν' が求めるランダム測度である．□

4　ランダム測度による確率積分

μ を整数値ランダム測度，ν をその双対可予測射影とする．本節での目標は，可予測関数 W の $\mu - \nu$ による確率積分を定義することである．$W * \mu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ の場合には $W * \nu$ がその双対可予測射

24）　良可測過程の Borel 集合への到達時刻は停止時刻である．

影であるから，$M := W*\mu - W*\nu$ は $M_0 = 0$ を満たす局所マルチンゲールである．この場合は，M を W の $\mu-\nu$ による確率積分と呼び，$W*(\mu-\nu) = M$ と書くのが良いであろう．このとき

$$\Delta M_t = \Delta(W*\mu)_t - \Delta(W*\nu)_t = \int_{\{t\}\times E} W(t,x)\mu(\mathrm{d}(s,x)) - \int_{\{t\}\times E} W(t,x)\nu(\mathrm{d}(s,x))$$

が成り立つ．

$W*\mu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ でない場合は $W*\mu$ は双対可予測射影を持たないが，この場合でも同様に "$W*(\mu-\nu)$" のようなものを定義することは可能だろうか？この節ではそのことについて考えて行くことにする．

その前に，ランダム測度について一つ補題を用意する．

補題 4.1. μ は各点ごとに σ-有限なランダム測度とし，$t \geq 0$ と $\omega \in \Omega$ に対して $(E,\mathscr{E})$ 上の測度 $\widehat{\mu}_t(\omega,\cdot)$ を

$$\widehat{\mu}_t(\omega,B) = \mu(\omega,\{t\}\times B)$$

によって定義する．

(i) 任意の非負 $\mathscr{F}_E$ 可測関数 W に対して

$$\int_{\{t\}\times E} W(\omega,s,x)\mu(\omega,\mathrm{d}(s,x)) = \int_{\{t\}\times E} W(\omega,t,x)\mu(\omega,\mathrm{d}(s,x)) = \int_E W(\omega,t,x)\widehat{\mu}_t(\omega,\mathrm{d}x) \tag{4.1}$$

が成り立つ．

(ii) $W \in \mathscr{F}_E$ は次のどちらかの積分が有限になるものとする．

$$\int_{\{t\}\times E} |W(\omega,s,x)|\mu(\omega,\mathrm{d}(s,x)), \qquad \int_E |W(\omega,t,x)|\widehat{\mu}_t(\omega,\mathrm{d}x)$$

このとき，もう一方の積分も有限であり，それらは (4.1) を満たす．

証明 (i) 一つ目の等号は明らかである．まずは $W = 1_{A\times B\times C}$ $(A \in \mathscr{F},\ B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}),\ C \in \mathscr{E})$ の場合を考える．このとき，

$$\begin{aligned}\int_{\{t\}\times E} W(\omega,t,x)\,\mu(\omega,\mathrm{d}(s,x)) &= 1_A(\omega)\mu(\omega,B\cap\{t\}\times C)\\ &= 1_A(\omega)1_B(t)\,\mu(\omega,\{t\}\times C)\\ &= 1_A(\omega)1_B(t)\,\widehat{\mu}_t(\omega,C)\\ &= 1_A(\omega)1_B(t)\int_E 1_C(x)\widehat{\mu}_t(\omega,\mathrm{d}x)\\ &= \int_E W(\omega,t,x)\,\widehat{\mu}_t(\omega,\mathrm{d}x)\end{aligned}$$

が成立．$\mu(\omega,\cdot)$ が有限の場合は単調族定理によって示される．その結果を用いれば σ-有限の場合にも容易に拡張される．

(ii) (i) より前半の主張が従う．さらに任意の $A \in \mathscr{F}_E$ に対して

$$\int_{\{t\}\times E} 1_A(\omega,t,x)\,\mu(\omega,\mathrm{d}(s,x)) = \int_E 1_A(\omega,t,x)\,\widehat{\mu}_t(\omega,\mathrm{d}x)$$

が成り立つことに注意すれば，W が可積分な単関数の場合には (4.1) がすぐにわかる[25]．一般の場合は単関数で近似すればよい．□

この補題より，先ほどの $M = W*\mu - W*\nu$ のジャンプについては

$$\Delta M_t = \int_E W(t,x)\widehat{\mu}_t(\mathrm{d}x) - \int_E 1_A(t,x)\widehat{\nu}_t(\mathrm{d}x)$$

という表現も可能であることがわかる．

ここから先，整数値ランダム測度 μ とその双対可予測射影 ν が与えられたとき，D，β，a，J，K は定理 3.2，3.3 で定義されたものを表すことにする．特に μ の双対可予測射影 ν は注意 3.4 の条件を満たすものとする．

補題 4.2. μ を整数値ランダム測度，ν をその双対可予測射影とし，

$$\widehat{\mu}_t(A) = \mu(\{t\}\times A), \qquad \widehat{\nu}_t(A) = \nu(\{t\}\times A)$$

と定義する．W は可予測関数で，任意の $t \geq 0$ に対して

$$\int_E |W(t,x)|\widehat{\nu}_t(\mathrm{d}x) < \infty \quad \text{a.s.}$$

を満たすと仮定する．ここで

$$\begin{aligned}
\widehat{W}_t(\omega) &= \int_E W(\omega,t,x)\,\widehat{\nu}_t(\omega,\mathrm{d}x), \quad t \geq 0\\
\widetilde{W}_t(\omega) &= \int_E W(\omega,t,x)\,\widehat{\mu}_t(\omega,\mathrm{d}x) - \int_E W(t,x)\,\widehat{\nu}_t(\omega,\mathrm{d}x)\\
&= W(\omega,t,\beta_t(\omega))1_D(t,\omega) - \widehat{W}(\omega,t,x)
\end{aligned}$$

このとき，$\widetilde{W}$ と $\widehat{W}$ は痩せた過程であり，$\widehat{W}$ は可予測である．さらに ${}^{\mathrm{p}}\widetilde{W} = 0$ が成り立つ．

証明　W^+ と W^- への分解を考えればよいから，$W \geq 0$ として示せば十分である．(T_n) を注意 3.4 における J の取りつくし列とする．T_n は可予測なのでグラフ $[\![T_n]\!]$ は可予測集合であり，$W1_{[\![T_n]\!]}$ は非負の可予測関数である．よって $(W1_{[\![T_n]\!]})*\nu$ は可予測過程であり，$\widehat{W}_{T_n} = ((W1_{[\![T_n]\!]})*\nu)_{T_n}$ は $\mathscr{F}_{T_n-}$ 可測となる．よって $\widehat{W}_{T_n}1_{[\![T_n]\!]}$ $(n\in\mathbb{N})$ は可予測であり，$\widehat{W} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\widehat{W}_{T_n}1_{[\![T_n]\!]}$ も可予測である[26]．$\widehat{W}$ は可予測かつ $\{W\neq 0\}\subset J = \bigcup_n [\![T_n]\!]$ を満たすので，これは痩せた確率過程である．命

25）　可積分性に注意して積分の線形性を用いればよい．
26）　$\widehat{W}$ の定義より $\{W\neq 0\}\subset J = \bigcup_n [\![T_n]\!]$ が成り立つことに注意する．

題 2.6 より任意の可予測時刻に対して

$$\begin{aligned}\widehat{W}_T &= \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}\times E} W(T,x)1_{[\![T]\!]}\nu(d(t,x)) \\ &= E\left[\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}\times E} W(T,x)1_{[\![T]\!]}\mu(\mathrm{d}(t,x)) \,\middle|\, \mathscr{F}_{T-}\right] \\ &= E\left[W(T,\beta_T)1_{D(T)} \,\middle|\, \mathscr{F}_{T-}\right]\end{aligned}$$

が成り立つ．これより $\widehat{W}$ は $(\omega,t)\mapsto W(\omega,t,\beta_t(\omega))1_D(\omega,t)$ の可予測射影であり，${}^{\mathfrak{p}}\widetilde{W}=0$ が成り立つ．$(\omega,t)\mapsto W(\omega,t,\beta_t(\omega))1_D(\omega,t)$ は良可測な痩せた過程であることはすぐにわかるので，$\widetilde{W}$ も痩せた良可測過程である． □

定義 4.3. (i) 整数値ランダム測度 μ に対して，

$$\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)=\left\{W\in\mathscr{P}_E \,\middle|\, \forall t\geq 0\ \int_E |W(t,x)|\widehat{\nu}_t(\mathrm{d}x)<\infty \text{ and } \sqrt{\sum\nolimits_{s\leq\cdot}\widetilde{W}_s^2}\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^+\right\}$$

と定める．

(ii) $W\in\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ に対して，$\Delta M=\widetilde{W}$ を満たす純不連続局所マルチンゲールが（区別不能の意味で）ただ一つ存在する．これを W の $\mu-\nu$ による確率積分 (stochastic integral) とよび，$M=W*(\mu-\nu)$ で表す．

(iii) $W=(W^i)_{1\leq i\leq d}$ が $W^i\in\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ を満たすとき，d 次元局所マルチンゲール $W*(\mu-\nu)$ を $(W^i*(\mu-\nu))_{1\leq i\leq d}$ によって定める．

定義より明らかに $\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ は線形空間であり，$W\mapsto W*(\mu-\nu)$ は線形写像である．

確率積分 $W*(\mu-\nu)$ の存在は次の命題 C.62 によって保証されている．一意性は，ジャンプが等しい二つの純不連続局所マルチンゲールは等しいことからわかる．

命題 4.4. ランダム測度による確率積分について，次が成立つ．

(i) $W\in\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ ならば，

$$[W*(\mu-\nu),W*(\mu-\nu)]=\sum_{0<s\leq\cdot}\widetilde{W}_s^2$$

である．

(ii) $W\in\mathscr{P}_E$ が $|W|*\mu\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^+$ を満たすなら，$W\in\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ であり

$$W*(\mu-\nu)=W*\mu-W*\nu$$

が成立する．

(iii) $W\in\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ と停止時刻 T に対して，$W1_{[\![0,T]\!]}\in\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ および $(W1_{[\![0,T]\!]})*(\mu-\nu)=(W*(\mu-\nu))^T$ が成立つ．

(iv) H が局所有界な可予測過程で $W\in\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ なら，$HW\in\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ および $(HW)*(\mu-\nu)=H\bullet(W*(\mu-\nu))$ が成立つ．（ここでの $\bullet$ は局所マルチンゲールによる通常の確率積分.）

証明　(i)$W*(\mu-\nu)$ の定義より明らか．

(ii) 仮定より $W*\mu - W*\nu \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{V} \subset \mathscr{M}^d_{\mathrm{loc}}$ である．いま $\Delta(W*\mu - W*\nu) = \widetilde{W} = \Delta(W*(\mu-\nu))$ が成立つので，純不連続局所マルチンゲールの性質より結論を得る．

(iv) $W' = HW$ と定義すれば，これは $\mathscr{P}_E$-可測であり $\widehat{W'} = H\widehat{W}$ および $\widetilde{W'} = H\widetilde{W}$ が成り立つ．これと H の局所有界性より $HW \in \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ がわかる．$H \bullet (W*(\mu-\nu))$ は純不連続局所マルチンゲールで $\Delta(H \bullet (W*(\mu-\nu))) = H(\Delta(W*(\mu-\nu))) = H\widetilde{W} = \widetilde{W'}$ を満たすから，$(HW)*(\mu-\nu) = H \bullet (W*(\mu-\nu))$ である．

(iii) (iv) において $H = 1_{[\![0,T]\!]}$ とおけば，

$$(W1_{[\![0,T]\!]})*(\mu-\nu) = 1_{[\![0,T]\!]} \bullet (W*(\mu-\nu)) = (W*(\mu-\nu))^T$$

を得る．（二つ目の等号は局所マルチンゲールによる確率積分の性質．）　□

本節の残りの部分では，確率積分 $(\,\cdot\,)*(\mu-\nu)$ の被積分関数のクラスの特徴付けを行う．その前に，まずは一つ補題を用意する．

補題 4.5. H を可予測過程とする．このとき $\sum H1_{J\cap D^c} \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ は $\sum H1_J(1-a) \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ と同値である．さらに，これらの条件が成り立つとき $\sum H1_J(1-a)$ は $\sum H1_{J\cap D^c}$ の双対可予測射影である．

証明　可予測な H に対して，形式的に

$$A(H)_t(\omega) = \sum_{s\le t} H_s(\omega)1_{J\cap D^c}(\omega,s)$$
$$B(H)_t(\omega) = \sum_{s\le t} H_s(\omega)1_J(\omega,s)(1-a_s(\omega))$$

と定義する．$A(|H|), B(|H|) \in \mathscr{V}^+$ なら[27]，$A(H)$ と $B(H)$ は well-defined で $\mathscr{V}$ の元となる．(T_n) を可予測時刻からなる J の取りつくし列とする[28]．これを用いると

$$B(H) = \sum_n H_{T_n}(1-a_{T_n})1_{[\![T_n]\!]}$$

と表現でき，$B(H)$ が well-defined なら可予測となることがわかる[29]．各 T_n は可予測時刻だから

$$a_{T_n}1_{\{T_n<\infty\}} = E\left[\mu(\cdot,\{T_n\}\times E)1_{\{T_n<\infty\}} \,\middle|\, \mathscr{F}_{T_n-}\right] = E\left[1_D(T_n)1_{\{T_n<\infty\}} \,\middle|\, \mathscr{F}_{T_n-}\right]$$

が成立[30]．これより

$$(1-a_{T_n})1_{\{T_n<\infty\}} = E\left[1_{D^c}(T_n)1_{\{T_n<\infty\}} \,\middle|\, \mathscr{F}_{T_n-}\right]$$

27）　つまり，これらの形式的級数が絶対収束するということ．

28）　注意 3.4.

29）　命題 C.9 より $H_{T_n}(1-a_{T_n})1_{\{T_n<\infty\}} \in \mathscr{F}_{T_n-}$ なので，命題 C.16 より各 $H_{T_n}(1-a_{T_n})1_{[\![T_n]\!]}$ は可予測となる．

30）　一つ目の等号は定理 3.3 の証明中の (3.2) から．二つ目は D の定義と μ が整数値ランダム測度であることからわかる．

となる[31)]．さらに H は可予測だから $H_{T_n} \in \mathscr{F}_{T_n-}$ となる[32)]．これより，

$$\begin{aligned}E[A(|H|)_\infty] &= E\left[\sum_{s\geq 0}|H_s|1_{J\cap D^c}(\,\cdot\,,s)\right]\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} E\left[|H_{T_n}|1_{D^c}(T_n)1_{\{T_n<\infty\}}\right]\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} E\left[|H_{T_n}|(1-a_{T_n})1_{\{T_n<\infty\}}\right]\\ &= E\left[\sum_{s\geq 0}|H_s|(1-a_s)1_J(s)\right]\\ &= E[B(|H|)_\infty]\end{aligned}$$

が成り立つ．任意の停止時刻に対して $A(H1_{[\![0,T]\!]}) = A(H)_T$ および $B(H1_{[\![0,T]\!]}) = B(H)_T$ が成り立つことに注意すれば，$A(H) \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ は $B(H) \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ と同値であることがわかる．

これらの条件が成り立つと仮定し，(T_n) をその局所化列とする．このとき任意の停止時刻 T に対して $A(H)_T^{T_n}, B(H)_T^{T_n} \in L^1$ が成り立ち，さらに

$$E[A(H)_T^{T_n}] = E[A(H1_{[\![0,T\wedge T_n]\!]})] = E[B(H1_{[\![0,T\wedge T_n]\!]})] = E[B(H)_T^{T_n}]$$

である．これより $A(H)^{T_n} - B(H)^{T_n}$ は一様可積分マルチンゲールとなり，$A(H) - B(H)$ は局所マルチンゲールであることがわかる．$B(H) \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^{\mathrm{pred}}$ であることに注意すれば，双対可予測射影の特徴付け（命題 C.49）より $B(H)$ が $A(H)$ の双対可予測射影であることが示される． □

可予測関数 W に対して

$$\begin{aligned}C(W) &= (W-\widehat{W})^2 * \nu + \sum_{s\leq\cdot}(1-a_s)\widehat{W}_s^2\\ \overline{C}(W) &= |W-\widehat{W}| * \nu + \sum_{s\leq\cdot}(1-a_s)|\widehat{W}_s|\\ \widehat{C}(W) &= \left\{(W-\widehat{W})^2 1_{\{|W-\widehat{W}\leq 1\}} + |W-\widehat{W}|1_{\{|W-\widehat{W}>1\}}\right\} * \nu\\ &\quad + \sum_{s\leq\cdot}\left\{\widehat{W}_s^2 1_{\{|\widehat{W}|\leq 1\}} + |\widehat{W}_s|1_{\{|\widehat{W}|>1\}}\right\}\\ \widetilde{C}(W) &= \frac{(W-\widehat{W})^2}{1+|W-\widehat{W}|} * \nu + \sum_{s\leq\cdot}(1-a_s)\frac{\widehat{W}_s^2}{1+|\widehat{W}_s|}\\ C'(W) &= \left(1-\sqrt{1+W-\widehat{W}}\right)^2 * \nu + \sum_{s\leq\cdot}(1-a_s)\left(1-\sqrt{1-\widehat{W}_s}\right)^2\end{aligned}$$

31)　a や 1_{D^c} などは有界なので，こう変形しても良い．
32)　命題 C.9

と定義する．ただし，$C'(W)$ は常に定義されるわけではない．残りのものは常に定義できるが，これらの関数は $+\infty$ の値を取り得ることに注意しよう．

$\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ の部分空間を

$$\mathscr{G}^1(\mu) = \left\{ W \in \mathscr{P}_E \;\middle|\; \sum_{s\leq\cdot} |\widetilde{W}_s| \in \mathscr{A}^+ \right\}$$

$$\mathscr{G}^1_{\mathrm{loc}}(\mu) = \left\{ W \in \mathscr{P}_E \;\middle|\; \sum_{s\leq\cdot} |\widetilde{W}_s| \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}} \right\}$$

$$\mathscr{G}^2(\mu) = \left\{ W \in \mathscr{P}_E \;\middle|\; \sum_{s\leq\cdot} (\widetilde{W}_s)^2 \in \mathscr{A}^+ \right\}$$

$$\mathscr{G}^2_{\mathrm{loc}}(\mu) = \left\{ W \in \mathscr{P}_E \;\middle|\; \sum_{s\leq\cdot} (\widetilde{W}_s)^2 \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}} \right\}$$

によって定める．これらが実際に $\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ の部分空間を定めることは，

$$\sqrt{\sum_{0<s\leq t} \widetilde{W}_s^2} \leq \sum_{0<s\leq t} |\widetilde{W}_s|, \qquad E\left[\sqrt{\sum_{0<s\leq t} \widetilde{W}_s^2}\right] \leq E\left[\sum_{0<s\leq t} \widetilde{W}_s^2\right]$$

という不等式に注意すればわかる．

以下の定理は，$\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ およびこれらの部分空間の特徴付けを与えるものである．

定理 4.6. W を $\mathscr{P}_E$ 可測関数とする．

(i) $W \in \mathscr{G}^1(\mu)$ ($W \in \mathscr{G}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$) は $\overline{C}(W) \in \mathscr{A}^+$ ($\overline{C}(W) \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$) と同値である．

(ii) $W \in \mathscr{G}^2(\mu)$ ($W \in \mathscr{G}^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$) は $C(W) \in \mathscr{A}^+$ ($C(W) \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$) と同値である．これらの条件の下で，

$$\langle W * (\mu - \nu), W * (\mu - \nu) \rangle = C(W)$$

が成り立つ．

(iii) W について，以下の 3 条件は同値である．
  (a) $W \in \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$.
  (b) $\widehat{C}(W) \in \mathscr{A}^{\mathrm{loc}}$.
  (c) $\widetilde{C}(W) \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$.

(iv) $\widetilde{W} \geq -1$ なら，消散的集合の差を除いて $\{a < 1\}$ 上で $\widehat{W} \leq 1$ が成り立つ．このとき，以下の 2 条件は同値である．
  (a) $W \in \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$.
  (b) $C'(W) \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$.

(v) $\mathscr{G}^1_{\mathrm{loc}}(\mu) + \mathscr{G}^2_{\mathrm{loc}}(\mu) = \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$.（ただし，記号 $+$ は線形空間の代数的な意味での和を表す.）

(iii) の条件 (b) において，1 を任意の $a > 0$ に置き換えても同様の主張が成り立つことに注意しておく．

証明　(i) $A=\sum_{s\le\cdot}|\widetilde{W}|$ と定義すれば，明らかに $W\in\mathscr{G}^1(\mu)$ と $A\in\mathscr{A}^+$ は同値である．$\widetilde{W}$ の定義を思い出せば，

$$\begin{aligned}
A_t &= \sum_{0<s\le t}|\widetilde{W}| \\
&= \sum_{0<s\le t}\left|W(s,\beta_s)1_D(s)-\widehat{W}(s)\right| \\
&= \sum_{0<s\le t}\left|W(s,\beta_s)1_D(s)-\widehat{W}(s)\right|[1_D(s)+1_{D^c}(s)] \\
&= \sum_{0<s\le t}\left|W(s,\beta_s)1_D(s)-\widehat{W}(s)\right|1_D(s)+\sum_{0<s\le t}\left|\widehat{W}_s\right|1_{D^c}(s) \\
&= \int_{[0,t]\times E}\left|W(s,x)-\widehat{W}(s)\right|\mu(\mathrm{d}(s,x))+\sum_{0<s\le t}\left|\widehat{W}_s\right|1_{D^c}(s) \\
&= \left|W-\widehat{W}\right|*\mu_t+\sum_{s\le t}\left|\widehat{W}(s)\right|1_J 1_{D^c}(s)
\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる．この表現より，$A\in\mathscr{A}^+$ は $|W-\widehat{W}|*\mu\in\mathscr{A}^+$ かつ $\sum|\widehat{W}|1_J1_{D^c}\in\mathscr{A}^+$ と同値であることがわかる．補題 4.5 より $\sum|\widehat{W}|1_J1_{D^c}\in\mathscr{A}^+$ と $\sum|\widehat{W}|1_J(1-a)\in\mathscr{A}^+$ は同値であり，双対可予測射影の定義より $|W-\widehat{W}|*\mu\in\mathscr{A}^+$ は $|W-\widehat{W}|*\nu\in\mathscr{A}^+$ は同値である[33]．したがって，$A\in\mathscr{A}^+$ と $\overline{C}(W)\in\mathscr{A}^+$ の同値性がわかる．$\mathscr{G}^1_{\mathrm{loc}}$ の場合も同様である．

(ii) $B=\sum_{s\le\cdot}\widetilde{W}^2$ と定めれば，定義より $W\in\mathscr{G}^2(\mu)$ は $B\in\mathscr{A}^+$ と同値である．このとき，(i) と同様にして

$$B_t=\left(W-\widehat{W}\right)^2*\mu_t+\sum_{s\le t}\widehat{W}(s)^2 1_J1_{D^c}(s)$$

がわかる．この表現に注意すれば，(i) と同様にして $B\in\mathscr{A}^+$ と $C(W)\in\mathscr{A}^+$ の同値性が示される．これらの条件が満たされるとき $W*(\mu-\nu)\in\mathscr{M}^2$ であるから[34]，可予測二次変分 $\langle W*(\mu-\nu),W*(\mu-\nu)\rangle$ が存在する．いま，$W*(\mu-\nu)$ が純不連続であることに注意すれば

$$\begin{aligned}
[W*(\mu-\nu),W*(\mu-\nu)]_t &= \sum_{s\le t}(\Delta W*(\mu-\nu))^2 \\
&= \sum_{s\le t}\widetilde{W}_s^2=B_t \\
&= \left(W-\widehat{W}\right)^2*\mu_t+\sum_{s\le t}\widehat{W}_s^2 1_J1_{D^c}(s)
\end{aligned}$$

33）　被積分関数の可予測性に注意せよ．
34）　命題 C.62．

が成立．定理 2.5 と補題 4.5 を用いれば

$$
\begin{aligned}
\langle W*(\mu-\nu), W*(\mu-\nu)\rangle &= [W*(\mu-\nu), W*(\mu-\nu)]^{\mathfrak{p}} \\
&= B^{\mathfrak{p}} \\
&= \left(W-\widehat{W}\right)^2 * \nu + \sum_{s\le\cdot} \widehat{W}(s)^2 1_J(s)(1-a_s)
\end{aligned}
$$

となることがわかる．$\mathscr{G}^2_{\mathrm{loc}}$ の場合も同様である．

(iii) 命題 C.63 より

(1)$\sqrt{\sum \widetilde{W}_s^2} \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$.
(2)$\sum (\widetilde{W}^2 1_{\{|\widetilde{W}|\le 1\}} + |\widetilde{W}| 1_{\{|\widetilde{W}|>1\}}) \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$.
(3)$\sum \frac{\widetilde{W}^2}{1+|\widetilde{W}|} \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$.

は同値だから，(3) と (c) の同値性および (2) と (b) の同値性をそれぞれ調べればよい．

$$
\begin{aligned}
&\sum_{0<s\le t} \left(\widetilde{W}_s^2 1_{\{|\widetilde{W}_s|\le 1\}}(s) + |\widetilde{W}_s| 1_{\{|\widetilde{W}_s|>1\}}(s)\right) \\
&= \sum_{0<s\le t} \left(\widetilde{W}_s^2 1_{\{|\widetilde{W}_s|\le 1\}}(s) + |\widetilde{W}_s| 1_{\{|\widetilde{W}_s|>1\}}(s)\right) 1_D(s) \\
&\quad + \sum_{0<s\le t} \left(\widetilde{W}_s^2 1_{\{|\widetilde{W}_s|\le 1\}}(s) + |\widetilde{W}_s| 1_{\{|\widetilde{W}_s|>1\}}(s)\right) 1_{D^c}(s) \\
&= \sum_{0<s\le t} \left(W(s,\beta_s)1_D(s) - \widehat{W}(s)\right)^2 1_{\{|W(s,\beta_s)1_D(s)-\widehat{W}(s)|\le 1\}}(s) 1_D(s) \\
&\quad + \sum_{0<s\le t} \left|W(s,\beta_s)1_D(s) - \widehat{W}(s)\right| 1_{\{|W(s,\beta_s)1_D(s)-\widehat{W}(s)|>1\}}(s) 1_D(s) \\
&\quad + \sum_{0<s\le t} \left(\widehat{W}_s^2 1_{\{|\widehat{W}_s|\le 1\}}(s) + |\widehat{W}_s| 1_{\{|\widehat{W}_s|>1\}}(s)\right) 1_{D^c}(s) \\
&= \sum_{0<s\le t} \left(W(s,\beta_s)1_D(s) - \widehat{W}(s)\right)^2 1_{\{|W(s,x)-\widehat{W}(s)|\le 1\}}(s,\beta_s) 1_D(s) \\
&\quad + \sum_{0<s\le t} \left|W(s,\beta_s)1_D(s) - \widehat{W}(s)\right| 1_{\{|W(s,x)-\widehat{W}(s)|>1\}}(s,\beta_s) 1_D(s) \\
&\quad + \sum_{0<s\le t} \left(\widehat{W}_s^2 1_{\{|\widehat{W}_s|\le 1\}}(s) + |\widehat{W}_s| 1_{\{|\widehat{W}_s|>1\}}(s)\right) 1_{D^c}(s) \\
&= \int_{[0,t]\times E} \left(W(s,x) - \widehat{W}(s)\right)^2 1_{\{|W-\widehat{W}|\le 1\}}(s,x)\mu(\mathrm{d}(s,x)) \\
&\quad + \int_{[0,t]\times E} \left|W(s,x) - \widehat{W}(s)\right| 1_{\{|W-\widehat{W}|>1\}}(s,x)\mu(\mathrm{d}(s,x)) \\
&\quad + \sum_{0<s\le t} \left(\widehat{W}_s^2 1_{\{|\widehat{W}_s|\le 1\}}(s) + |\widehat{W}_s| 1_{\{|\widehat{W}_s|>1\}}(s)\right) 1_{D^c}(s) \\
&= \left(\left(W-\widehat{W}\right)^2 1_{\{|W-\widehat{W}|\le 1\}} + \left|W-\widehat{W}\right| 1_{\{|W-\widehat{W}|>1\}}\right) * \mu_t
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{0<s\le t}\left(\widehat{W}_s^2 1_{\{|\widehat{W}_s|\le 1\}}(s)+|\widehat{W}_s|1_{\{|\widehat{W}_s|>1\}}(s)\right)1_J(s)1_{D^c}(s)$$

が成り立つ．この表現に注意すれば，これまでの議論と同様にして (2) と $\widehat{C}(W)\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ の同値性がわかる．

(iii) と (c) の同値性については，

$$\begin{aligned}
&\sum_{0<s\le t}\frac{\widetilde{W}_s^2}{1+|\widetilde{W}_s|}\\
&=\sum_{0<s\le t}\frac{\widetilde{W}_s^2}{1+|\widetilde{W}_s|}1_D(s)+\sum_{0<s\le t}\frac{\widetilde{W}_s^2}{1+|\widetilde{W}_s|}1_{D^c}(s)\\
&=\sum_{0<s\le t}\frac{\left(W(s,\beta_s)-\widehat{W}(s)\right)^2}{1+|W(s,\beta_s)-\widehat{W}(s)|}1_D(s)+\sum_{0<s\le t}\frac{\widehat{W}_s^2}{1+|\widehat{W}_s|}1_{D^c}(s)\\
&=\int_{[0,t]\times E}\frac{\left(W(s,x)-\widehat{W}(s)\right)^2}{1+|W(s,x)-\widehat{W}(s)|}\mu(\mathrm{d}(s,x))+\sum_{0<s\le t}\frac{\widehat{W}_s^2}{1+|\widehat{W}_s|}1_{D^c}(s)\\
&=\frac{(W-\widehat{W})^2}{1+|W-\widehat{W}|}*\mu_t+\sum_{0<s\le t}\frac{\widehat{W}_s^2}{1+|\widehat{W}_s|}1_{D^c}(s)
\end{aligned}$$

という表現を用いればわかる．

(iv) $\widetilde{W}\ge -1$ が成り立っていると仮定すれば，$\widehat{W}$ の定義より

$$-1_J1_{D^c}(t)\le\widetilde{W}_t1_J(t)1_{D^c}(t)=W(t,\beta_t)1_D(t)1_J(t)1_{D^c}(t)-\widehat{W}_t1_J(t)1_{D^c}(t)=-\widehat{W}_t1_J(t)1_{D^c}(t)$$

が成立．補題 4.5 と可予測射影の単調性より，$\widehat{W}(1-a)=\widehat{W}1_J(1-a)\le 1_J(1-a)$ が消散的集合の差を除いて成り立つ．これより，$\{a<1\}$ 上で，消散的集合の差を除いて $\widehat{W}\le 1$ が成り立つことがわかる．

命題 C.63 より

(1)$\sqrt{\sum\widetilde{W}_s^2}\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$.
(4)$\sum(1-\sqrt{1+\widetilde{W}})^2\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$. .

は同値だから，あとは (4) と (b) の同値性を調べればよい．既に何度も用いた議論と同様にして，

$$\begin{aligned}
&\sum_{0<s\le t}\left(1-\sqrt{1+\widetilde{W}_s}\right)^2\\
&=\sum_{0<s\le t}\left(1-\sqrt{1+W(s,\beta_s)1_D(s)-\widehat{W}(s)}\right)^2 1_D(s)\\
&\quad+\sum_{0<s\le t}\left(1-\sqrt{1-\widehat{W}(s)}\right)^2 1_{D^c}(s)\\
&=\left(1-\sqrt{1+W(s,x)-\widehat{W}(s)}\right)^2*\mu_t+\sum_{0<s\le t}\left(1-\sqrt{1-\widehat{W}(s)}\right)^2 1_{D^c}(s)
\end{aligned}$$

が確かめられる．この表現を用いれば，これまでの議論と同様にして (4) と $C'(W) \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ の同値性がわかる．

(v) 任意の $W \in \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ がある $U \in \mathscr{G}^1_{\mathrm{loc}}$ と $V \in \mathscr{G}^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$ を用いて $W = U + V$ と表現されることを示せばよい．

$$U = (W - \widehat{W})1_{\{|W-\widehat{W}|>1\}} + \widehat{W}1_{\{|\widehat{W}|>1\}}$$
$$V = (W - \widehat{W})1_{\{|W-\widehat{W}|\le 1\}} + \widehat{W}1_{\{|\widehat{W}|\le 1\}}$$

と定義すれば，これらは明らかに $W = U + V$ を満たす．この U と V が $U \in \mathscr{G}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$ および $V \in \mathscr{G}^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$ を満たすことを示そう．

$M = W * (\mu - \nu)$ および

$$A_t = \sum_{0<s\le t} \Delta M_s 1_{\{|\Delta M|>1\}}(s)$$

と定義する．このとき $A \in \mathscr{V}$ が局所可積分変動をもつことを示そう．(S_n) を M の $\mathscr{M}$ に関する局所化列とする．

$$T_n = \inf\left\{t \ge 0 \;\middle|\; |M_t| \ge n \text{ または } V(A)_t \ge n\right\} \wedge S_n$$

によって停止時刻列 (T_n) を定めれば，これは $T_n \le T_{n+1} \le\to \infty$ を満たす．このとき

$$|\Delta A_{T_n}| \le |\Delta M_{T_n}| \le |M_{T_n-}| + |M_{T_n}| \le n + |M_{T_n}|$$

が成り立つから，

$$V(A)_{T_n} \le V(A)_{T_n-} + |\Delta A_{T_n}| \le 2n + |M_{T_n}|$$

が成立．$M^{S_n} \in \mathscr{M}$ に注意すれば

$$E[|M_{T_n}|] = E[|M^{S_n}_{T_n}|] \le E\left[|M^{S_n}_\infty|\right] = E[|M_{S_n}|] < \infty$$

がわかるので，

$$E[V(A)_{T_n}] \le 2n + E[|M_{S_n}|] < \infty$$

が成立．よって (T_n) は A の $\mathscr{A}$ に関する局所化列であり，$A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ が示された．

A の定義より

$$
\begin{aligned}
A_t &= \sum_{0<s\le t} \Delta M_s 1_{\{|\Delta M|>1\}}(s) \\
&= \sum_{0<s\le t} \widetilde{W}_s 1_{\{|\widetilde{W}|>1\}}(s) \\
&= \left(W - \widehat{W}\right) 1_{\{|W-\widehat{W}|>1\}} * \mu_t - \sum_{0<s\le t} \widehat{W}_s 1_{\{|\widehat{W}|>1\}}(s) 1_{D^c}(s) \\
&= U * \mu_t - \widehat{W} 1_{\{|\widehat{W}|>1\}} * \mu_t - \sum_{0<s\le t} \widehat{W}_s 1_{\{|\widehat{W}|>1\}}(s) 1_{D^c}(s) \\
&= U * \mu_t - \sum_{0<s\le t} \widehat{W}_s 1_{\{|\widehat{W}|>1\}}(s)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．既に示したように $A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ であったから，A は双対可予測射影を持つ．また，$\sum \widehat{W}_s 1_{\{|\widehat{W}_s|>1\}} \in \mathscr{V}$ は可予測なので，その双対可予測射影は

$$
\left(\sum_{0<s\le \cdot} \widehat{W}_s 1_{\{|\widehat{W}_s|>1\}} \right)^{\mathfrak{p}} = \sum_{0<s\le \cdot} \widehat{W}_s 1_{\{|\widehat{W}_s|>1\}}
$$

である．これより $U * \mu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ であり[35)]，定理 2.5 から

$$
A^{\mathfrak{p}} = U * \nu - \sum_{0<s\le \cdot} \widehat{W}_s 1_{\{|\widehat{W}_s|>1\}}
$$

となることがわかる．ゆえに

$$
\Delta A^{\mathfrak{p}} = \Delta(U * \nu) - \widehat{W} 1_{\{|\widehat{W}|>1\}} = \widehat{U} - \widehat{W} 1_{\{|\widehat{W}|>1\}}
$$

が成立．ここで $N = A - A^{\mathfrak{p}} \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ と定義すれば，

$$
\Delta N = \Delta(A - A^{\mathfrak{p}}) = \Delta A - \Delta A^{\mathfrak{p}} = \Delta U * \mu - \widehat{U} = \widetilde{U}
$$

が成立．いま，U はある $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ の元のジャンプとして表現されているから，命題 C.62(iii) により $U \in \mathscr{G}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$ がわかる．

最後に $V \in \mathscr{G}^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$ を示そう．$V = W - U$ だから $V \in \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ であり，確率積分 $V * (\mu - \nu)$ が定義されることに注意しておく．定義より明らかに $|V| \le 2$ だから，

$$
|\widetilde{V}| \le \int_E |V(t,x)| \widehat{\mu}_t(\mathrm{d}x) + \int_E |V(t,x)| \widehat{\nu}_t(\mathrm{d}x) \le 4
$$

が成り立つ．これより $V * (\mu - \nu)$ は有界なジャンプをもち，$V * (\mu - \nu) \in \mathscr{M}^2_{0,\mathrm{loc}}$ を満たす．いま $\Delta V * (\mu - \nu) = \widetilde{V}$ であることを用いれば，命題 C.62(ii) により $V \in \mathscr{G}^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$ が示される．

これで定理の証明が完了した．　□

35）U は可予測であり，μ は良可測であることに注意されたい．

5　半マルチンゲールの特性要素と標準表現

$\mathscr{D}$ を càdlàg 適合過程全体の集合とする．

まずは，半マルチンゲールの特性要素を定義するのに必要な切り捨て関数の概念を導入しよう．$h\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ を有界 Borel 可測関数とする．h コンパクト台を持ち 0 のある近傍上で恒等写像と等しいとき，h を切り捨て関数 (truncation function) と呼ぶ．$\mathbb{R}^d$ 上の切り捨て関数全体の集合を $\mathscr{C}_{\mathrm{t}}^d$ で表すことにする[36)]．

切り捨て関数の典型的な例は，$h(x) = x1_{\{|x|\leq 1\}}$ という関数である．半マルチンゲールの特性要素について論じている文献ではこの形の関数のみを扱っているものも多いが，ここでは Jacod and Shiryaev に従い一般的な形で導入することにした．

$h \in \mathscr{C}_{\mathrm{t}}^d$ と $X \in \mathscr{D}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\check{X}(h) &= \sum_{0<s\leq\cdot} (\Delta X_s - h(\Delta X_s)) \\
X(h) &= X - \check{X}(h)
\end{aligned}
$$

と定義する．切り捨て関数の定義より，$x - h(x)$ は適当な 0 の近傍 $B(0,a)$ 上で 0 となる．したがって

$$
\{s \in [0,\infty[\mid \Delta X_s - h(\Delta X_s) \neq 0\} \subset \{s \in [0,\infty[\mid \|\Delta X_s\| \geq a\}
$$

が成り立ち，$\check{X}(h)$ の定義における和は（ω を固定すると）実質的に有限和となっている．これより $\check{X}(h)$ と $X(h)$ は well-defined であり，$\check{X}(h) \in \mathscr{V}^d$ である．また $\Delta X(h) = h(\Delta X)$ より $X(h)$ は有界なジャンプをもつ càdlàg 適合過程であることがわかる．

X が半マルチンゲールならば，$X(h)$ は有界なジャンプを持つ càdlàg 半マルチンゲールであり，よって特殊半マルチンゲールである．$X(h)$ の標準分解を

$$
X(h) = X_0 + M(h) + B(h), \quad M(h) \in (\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0})^d,\ B(h) \in (\mathscr{V}^{\mathrm{pred}})^d \tag{5.1}
$$

で表す．

定義 5.1. $h \in \mathscr{C}_{\mathrm{t}}^d$ を固定する．半マルチンゲール X の（切り捨て関数 h に関する）特性要素 (characteristics) とは，以下で定義される三つ組 (B,C,ν) のことである．

(i) $B = B(h) \in (\mathscr{V}^{\mathrm{pred}})^d$．ただし，$B(h)$ は (5.1) のものである．
(ii) $C = (C^{i,j})_{1\leq i,j\leq d} = (\langle X^{i,c}, X^{j,c}\rangle)_{1\leq i,j\leq d} \in M_d(\mathscr{V}^c)$．ただし，$X^{i,c}$ は X の第 i 成分の連続マルチンゲール部分である．
(iii) ν は X のジャンプ測度 μ の双対可予測射影．

36） $\mathscr{C}_{\mathrm{t}}^d$ の右下の t は時刻ではなく，truncation の t である．

定義より明らかなように，半マルチンゲールの特性要素は区別不能の意味でしか一意に定まらない．特性要素 (B,C,ν) のうち C と ν は切り捨て関数に依存しない概念だが，B は h の取り方によって変わるものである．

特性要素を用いると，ランダム測度による確率積分を用いた半マルチンゲールの表現が得られる．

定理 5.2. X を d 次元半マルチンゲールとし，μ を X そのジャンプ測度，(B,C,ν) を切り捨て関数 $h\in\mathscr{C}_{\mathrm{t}}^d$ に関する X の特性要素とする．このとき，$h^i\in\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ であり，

$$X = X_0 + X^{\mathrm{c}} + h*(\mu-\nu) + (x-h(x))*\mu + B \tag{5.2}$$

が成り立つ[37]．

定理 5.2 における表現 (5.2) のことを，半マルチンゲールの標準的表現 (canonical representation) や積分表現 (integral representation)　などと呼ぶ．

証明　$X(h)=X_0+M(h)+B(h)$ を (5.1) の意味での標準分解とする．定義より $\check{X}(h)=(x-h(x))*\mu$ であるから，(5.2) は

$$X(h) = X_0 + X^{\mathrm{c}} + h*(\mu-\nu) + B$$

と書き換えられる．これより，$M(h)^{\mathrm{d}} = h*(\mu-\nu)$ を示せば十分であることがわかる．$W^i(\omega,t,x) = h^i(x)$ と定義すれば，これは明らかに Ω_E 上の可予測関数である．いま $\Delta X(h) = \Delta M(h) + \Delta B$ および ${}^{\mathrm{p}}(\Delta M(h)^i)=0$ であることに注意すれば，[38]，$\Delta B^i = {}^{\mathrm{p}}(\Delta B^i) = {}^{\mathrm{p}}(\Delta X(h)^i)$ が成り立つことがわかる[39]．一方で命題 2.6 より任意の可予測時刻 T に対して

$$\begin{aligned}
\widehat{W^i}(T) &= \int_{\{T\}\times E} h^i(x)\nu(\mathrm{d}(s,x))1_{\{T<\infty\}} \\
&= E\left[\int_{\{T\}\times E} h^i(x)\mu(\mathrm{d}(s,x))1_{\{T<\infty\}} \,\middle|\, \mathscr{F}_{T-}\right] \\
&= E\left[h^i(\Delta X_T)1_{\{T<\infty\}} \,\middle|\, \mathscr{F}_{T-}\right]
\end{aligned}$$

が成立．したがって $\Delta X(h)^i = h^i(\Delta X)$ の双対可予測射影は $\widehat{W^i}$ である．ゆえに $\Delta B^i = \widehat{W^i}$ であり，さらに

$$\Delta M(h)^i = \Delta X(h)^i - \Delta B^i = \Delta(W*\mu)^i - \widehat{W^i} = \widetilde{W^i}$$

を得る．$M(h)^i$ は局所マルチンゲールだから，命題 C.62 により $W^i\in\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ となり，さらに確率積分の定義より $\Delta M(h)^i = \Delta(W^i*(\mu-\nu))$ がわかる．このとき，特に $\Delta M(h)^{i,d} = \Delta(W^i*(\mu-\nu))$ である．二つの純不連続局所マルチンゲール $M(h)^i$ と $W^i*(\mu-\nu)$ は共通のジャンプをもつから，これらは区別不能である．　□

37)　$x-h(x)*\mu$ は $W(\omega,t,x)=x-h(x)$ の積分過程 $W*\mu$ を表している．このような記法はあまり行儀のいいものには思えないが，一般的に使われているものなのでこのノートでも用いることにする．

38)　定理 C.33.

39)　B は可予測なので，ΔB も可予測である．（命題 C.4）

系 5.3. $X \in \mathscr{S}\mathscr{M}^d_{\mathrm{sp}}$ の標準分解を $X = X_0 + M + A$ と表し，μ を X のジャンプ測度，ν をその双対可予測射影とする．このとき，

$$X = X_0 + X^{\mathrm{c}} + x * (\mu - \nu) + A$$

が成り立つ[40]．すなわち，$M^{\mathrm{d}} = x * (\mu - \nu)$ が区別不能の意味で成り立つ．

証明　$V^i(\omega, t, x) = x^i$ および $W^i(\omega, t, x) = h^i(x)$ と定義すれば，定理 5.2 より $W^i \in \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ である．このとき $V^i \in \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ を示したいのだが，そのためにまずは $V^i - W^i \in \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ を示すことにしよう．いま X と $X(h)$ は特殊半マルチンゲールだから，$\check{X}(h) = X - X(h)$ も特殊半マルチンゲールである．定義より $\check{X}(h) \in \mathscr{V}^d$ であるから，命題 C.70 により $\check{X}(h) \in \mathscr{A}^d_{\mathrm{loc}}$ でなければならない．$\check{X}(h)^i = (V^i - W^i) * \mu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ だから，$(V^i - W^i) * \mu$ は双対可予測射影 $(V^i - W^i) * \nu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ を持つ．これより $(V^i - W^i) * \mu - (V^i - W^i) * \nu$ 局所マルチンゲールであり，

$$\Delta\big((V^i - W^i) * \mu - (V^i - W^i) * \nu\big) = \Delta(V^i - W^i) * \mu - \Delta(V^i - W^i) * \nu = \widetilde{V^i - W^i}$$

と命題 C.62 より $V^i - W^i \in \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ となることがわかる．ゆえに $V^i = (V^i - W^i) + W^i \in \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ が従う．

以上の議論と定理 5.2 より，

$$\begin{aligned} X &= X_0 + X^{\mathrm{c}} + W * (\mu - \nu) + (V - W) * \mu + B(h) \\ &= X_0 + X^{\mathrm{c}} + V * (\mu - \nu) + (W - V) * (\mu - \nu) + (V - W) * \mu + B(h) \\ &= X_0 + X^{\mathrm{c}} + V * (\mu - \nu) + (V - W) * \nu + B(h) \end{aligned}$$

が成立．このとき $X^{\mathrm{c}} + V * (\mu - \nu) \in (\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0})^d$ かつ $(V - W) * \nu + B(h) \in \mathscr{V}^{\mathrm{pred}}$ であるから，標準分解の一意性より $A = (V - W) * \nu + B(h)$ となり結論を得る．□

特性要素を用いて伊藤の公式を書き換えてみよう．X を d 次元半マルチンゲールとし，μ を X のジャンプ測度，(B, C, ν) を切り捨て関数 $h \in \mathscr{C}^d_{\mathrm{t}}$ に関する X の特性要素とする．このとき，伊藤の公式より $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \sum_{1 \le i \le d} \int_0^t D_i f(X_{s-}) \mathrm{d}X^i_s + \frac{1}{2} \sum_{1 \le i,j \le d} \int_0^t D_{ij} f(X_{s-}) \mathrm{d}\langle X^{i,c}, X^{j,c} \rangle_s \\ &\quad + \sum_{0 < s \le t} \left\{ f(X_{s-} + \Delta X_s) - f(X_{s-}) - \sum_{1 \le i \le d} D_i f(X_{s-}) \Delta X_s \right\} \\ &= \sum_{1 \le i \le d} \left(\int_0^t D_i f(X_{s-}) \mathrm{d}X^{i,c}_s + \int_0^t D_i f(X_{s-}) \mathrm{d}(h^i * (\mu - \nu))_s \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t D_i f(X_{s-}) \mathrm{d}((x^i - h^i(x)) * \mu)_s + \int_0^t D_i f(X_{s-}) \mathrm{d}B^i \right) \end{aligned}$$

40）　ただし，$x * (\mu - \nu)$ は可予測関数 $W(\omega, t, x) = x$ の確率積分 $W * (\mu - \nu)$ を表す．

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le d}\int_0^t D_{ij}f(X_{s-})\mathrm{d}C_s^{i,j}\\
&+\left\{f(X_{s-}+x)-f(X_{s-})-\sum_{1\le i\le d}x^iD_if(X_{s-})\right\}*\mu\\
=&\sum_{1\le i\le d}\int_0^t D_if(X_{s-})\mathrm{d}X_s^{i,c}+\sum_{1\le i\le d}\big(h^i(x)D_if(X_{s-})\big)*(\mu-\nu)_t\\
&+\sum_{1\le i\le d}\big((x^i-h^i(x))D_if(X_{s-})\big)*\mu_t+\sum_{1\le i\le d}\int_0^t D_if(X_{s-})\mathrm{d}B^i\\
&+\frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le d}\int_0^t D_{ij}f(X_{s-})\mathrm{d}C_s^{i,j}\\
&+\left\{f(X_{s-}+x)-f(X_{s-})-\sum_{1\le i\le d}x^iD_if(X_{s-})\right\}*\mu_t\\
=&\sum_{1\le i\le d}\int_0^t D_if(X_{s-})\mathrm{d}X_s^{i,c}+\sum_{1\le i\le d}\big(h^i(x)D_if(X_{s-})\big)*(\mu-\nu)_t\\
&+\sum_{1\le i\le d}\int_0^t D_if(X_{s-})\mathrm{d}B^i\\
&+\frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le d}\int_0^t D_{ij}f(X_{s-})\mathrm{d}C_s^{i,j}\\
&+\left\{f(X_{s-}+x)-f(X_{s-})-\sum_{1\le i\le d}h^i(x)D_if(X_{s-})\right\}*\mu_t
\end{aligned}
$$

が成り立つ．したがって

$$
\begin{aligned}
f(X_t)-f(X_0)=&\sum_{1\le i\le d}D_if(X_-)\bullet X^{i,c}+\sum_{1\le i\le d}\big(h^i(x)D_if(X_{s-})\big)*(\mu-\nu)\\
&+\sum_{1\le i\le d}D_if(X_-)\bullet B^i+\frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le d}D_{ij}f(X_-)\bullet C^{i,j}\\
&+\left\{f(X_-+x)-f(X_-)-\sum_{1\le i\le d}h^i(x)D_if(X_-)\right\}*\mu
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

である．

定理 5.4. X を d 次元半マルチンゲールとし，μ をそのジャンプ測度，(B,C,ν) を切り捨て関数 h に関する特性要素とする．f を実数値あるいは複素数値の有界 C^2 級関数とする．このとき，特殊半マルチンゲール $f(X)$ の標準分解は以下で与えられる．

$$
\begin{aligned}
f(X)&=f(X_0)+M+A,\\
M&=\sum_{1\le i\le d}D_if(X_-)\bullet X^{i,c}+(f(X_-+x)-f(X_-))*(\mu-\nu),
\end{aligned}
$$

$$A=\sum_{1\le i\le d}D_if(X_-)\bullet B^i+\frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le d}D_{ij}f(X_-)\bullet C^{i,j}$$
$$+\left\{f(X_-+x)-f(X_-)-\sum_{1\le i\le d}h^i(x)D_if(X_-)\right\}*\nu$$

証明　複素数値の場合は実部と虚部をそれぞれ調べればいいから，実数値の場合に示せば十分である．(5.3) より

$$\begin{aligned}f(X_t)-f(X_0)=&\sum_{1\le i\le d}D_if(X_-)\bullet X^{i,c}+\sum_{1\le i\le d}\left(h^i(x)D_if(X_{s-})\right)*(\mu-\nu)\\&+\sum_{1\le i\le d}D_if(X_-)\bullet B^i+\frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le d}D_{ij}f(X_-)\bullet C^{i,j}\\&+\left\{f(X_-+x)-f(X_-)-\sum_{1\le i\le d}h^i(x)D_if(X_-)\right\}*\mu\end{aligned}\tag{5.4}$$

である．この等式の最後の項以外は明らかに特殊半マルチンゲールであるまた f は有界だからもちろん $f(X)$ は局所可積分であり，命題 C.70 より $f(X)$ は特殊半マルチンゲールである．したがって $\left\{f(X_-+x)-f(X_-)-\sum_{1\le i\le d}h^i(x)D_if(X_-)\right\}*\mu\in\mathscr{V}$ は特殊半マルチンゲールであり，命題 C.70 より特に $\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ であることがわかる．ゆえに

$$\left\{f(X_-+x)-f(X_-)-\sum_{1\le i\le d}h^i(x)D_if(X_-)\right\}*(\mu-\nu)$$

はまた局所マルチンゲールである．この考察を念頭に (5.4) をさらに変形すると，

$$\begin{aligned}f(X_t)-f(X_0)=&\sum_{1\le i\le d}D_if(X_-)\bullet X^{i,c}+\sum_{1\le i\le d}\left(h^i(x)D_if(X_{s-})\right)*(\mu-\nu)\\&+\sum_{1\le i\le d}D_if(X_-)\bullet B^i+\frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le d}D_{ij}f(X_-)\bullet C^{i,j}\\&+\left\{f(X_-+x)-f(X_-)-\sum_{1\le i\le d}h^i(x)D_if(X_-)\right\}*\mu\\=&\sum_{1\le i\le d}D_if(X_-)\bullet X^{i,c}+\sum_{1\le i\le d}\left(h^i(x)D_if(X_{s-})\right)*(\mu-\nu)\\&+\sum_{1\le i\le d}D_if(X_-)\bullet B^i+\frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le d}D_{ij}f(X_-)\bullet C^{i,j}\\&+\left\{f(X_-+x)-f(X_-)-\sum_{1\le i\le d}h^i(x)D_if(X_-)\right\}*(\mu-\nu)\\&+\left\{f(X_-+x)-f(X_-)-\sum_{1\le i\le d}h^i(x)D_if(X_-)\right\}*\nu\\=&\sum_{1\le i\le d}D_if(X_-)\bullet X^{i,c}+(f(X_-+x)-f(X_-))*(\mu-\nu)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{1\le i\le d} D_i f(X_-) \bullet B^i + \frac{1}{2} \sum_{1\le i,j\le d} D_{ij} f(X_-) \bullet C^{i,j} \\
&+ \left\{ f(X_- + x) - f(X_-) - \sum_{1\le i\le d} h^i(x) D_i f(X_-) \right\} * \nu
\end{aligned}
$$

となる．これより命題の主張を得る． □

系 5.5. X を d 次元半マルチンゲールとし，μ をそのジャンプ測度，(B,C,ν) を切り捨て関数 h に関する特性要素とする．特殊半マルチンゲール $Y = e^{iuX}$ $(u \in \mathbb{R}^d)$ の標準分解は以下で与えられる．

$$
\begin{aligned}
Y &= Y_0 + Y_- \bullet N + Y_- \bullet H, \\
N &= iu \cdot X^c + \big(e^{iux} - 1\big) * (\mu - \nu), \\
H &= iu \cdot B - \frac{1}{2} u \cdot Cu + \big\{ e^{iux} - 1 - iu \cdot h(x) \big\} * \nu
\end{aligned}
$$

ただし，$u, v \in \mathbb{R}^d$ に対して $u \cdot v$ でその標準内積を表す．

6　特性要素と半マルチンゲールの可積分性

本節では，半マルチンゲールと特性要素の関係を可積分性の観点から調べよう．

補題 6.1. X を d 次元半マルチンゲールとし，μ を X そのジャンプ測度，(B,C,ν) を切り捨て関数 $h \in \mathscr{C}_{\mathrm{t}}^d$ に関する X の特性要素とする．このとき，$(|x|^2 \wedge 1) * \nu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ であり，さらに，次の条件が a.s. の意味で成り立つ．

(6.1)　任意の $s \le t$ に対して $C_t - C_s$ は a.s. で正定値対称行列である．

$$\nu(\{0\} \times E) = \nu(\mathbb{R}_{\ge 0} \times \{0\}) = 0 \tag{6.2}$$

$$\nu(\{t\} \times \mathbb{R}^d) \le 1 \tag{6.3}$$

$$\Delta B = \int_{\mathbb{R}^d} h(x) \widehat{\nu}_t(\mathrm{d}x) \tag{6.4}$$

証明　ジャンプ測度 μ の定義より明らかに

$$\mu(\{0\} \times E) = \mu(\mathbb{R}_{\ge 0} \times \{0\}) = 0 \quad \text{a.s.}$$

が成立．いま $\Omega \times \{0\} \times E$ および $\Omega \times \mathbb{R}_{\ge 0} \times \{0\}$ は可予測であるから，可予測射影の定義を思い出せば (6.2) がわかる．(6.3) は定理 3.3 より明らかである．(6.4) は定理 5.2 の証明の中ですでに示されている[41)]．

41）　$\Delta B^i = \widehat{W^i}$ と書いてある部分．

次に $(|x|^2 \wedge 1) * \nu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ を示す．補題 C.67 より

$$\sum_{0<s\le\cdot} (\Delta X_s^i)^2 = (x^i)^2 * \mu \in \mathscr{V}$$

であるから，

$$(|x|^2 \wedge 1) * \mu = \sum_{0<s\le\cdot} |\Delta X_s|^2 \wedge 1 \le \sum_{0<s\le\cdot} |\Delta X_s|^2 = \sum_{1\le i\le d} (x^i)^2 * \mu$$

という不等式を用いることで $(|x|^2 \wedge 1) * \mu \in \mathscr{V}$ がわかる．

$$\Delta((|x|^2 \wedge 1) * \mu)_t = |\Delta X_s|^2 \wedge 1 \le 1$$

であるから半マルチンゲール $(|x|^2 \wedge 1) * \mu$ は有界なジャンプを持ち，命題 C.73 によりこれは特殊半マルチンゲールである．さらに命題 C.70 を用いれば，$(|x|^2 \wedge 1) * \mu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ であることがわかる．

後は，$C_t - C_s$ の非負性を示せばよい．$t > s$ を固定する．二次変分の性質より，任意の $u \in \mathbb{Q}^d$ に対して適当な零集合 N_u を選べば，$\Omega \setminus N_u$ 上で

$$\langle u \cdot X^{\mathrm{c}}, u \cdot X^{\mathrm{c}} \rangle_t = \sum_{1\le i,j\le d} u^i u^j \langle X^{i,\mathrm{c}}, X^{j,\mathrm{c}} \rangle_t = u \cdot C_t u$$
$$\langle u \cdot X^{\mathrm{c}}, u \cdot X^{\mathrm{c}} \rangle_s = \sum_{1\le i,j\le d} u^i u^j \langle X^{i,\mathrm{c}}, X^{j,\mathrm{c}} \rangle_s = u \cdot C_s u$$

が成立する．したがって

$$u \cdot (C_t - C_s) u = \langle u \cdot X^{\mathrm{c}}, u \cdot X^{\mathrm{c}} \rangle_t - \langle u \cdot X^{\mathrm{c}}, u \cdot X^{\mathrm{c}} \rangle_s \ge 0 \quad \text{on } \Omega \setminus N_u$$

が成立．ここで $N = \bigcup_{u\in\mathbb{Q}^d} N_u$ と定義すれば N はまた零集合であり，$\Omega \setminus N$ 上で

$$u \cdot (C_t - C_s) u \ge 0 \quad \text{for all } u \in \mathbb{Q}^d$$

となる．ω を固定すれば左辺は明らかに u の連続関数なので，結局 $\Omega \setminus N$ 上で

$$u \cdot (C_t - C_s) u \ge 0 \quad \text{for all } u \in \mathbb{R}^d$$

となることがわかる． □

注意 6.2. 半マルチンゲール X の特性要素 (B, C, ν) のバージョンで，(6.1)–(6.4) を恒等的に[42]満たすようなものがとれる．詳細は Jacod and Shiryaev [21, Chapter II, 2.9 Proposition] を参考にされたい．ν の選び方については，注意 3.4 も参照．

命題 6.3. X を d 次元半マルチンゲールとし，(B, C, ν) を $h \in \mathscr{C}_{\mathrm{t}}^d$ に関するその特性要素とする．

42）a.s. の意味ではなく，ということ．

(i) X が特殊半マルチンゲールとなるための必要十分条件は，$(|x|^2 \wedge |x|) * \nu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ が成り立つことである．これらの条件の下で X の標準分解を $X = X_0 + M + A$ で表せば，

$$A = B(h) + (x - h(x)) * \nu \tag{6.5}$$

$$\Delta A_t = \int_{\mathbb{R}^d} x \widehat{\nu}_t(\mathrm{d}x) \tag{6.6}$$

が区別不能の意味で成り立つ．

(ii) X が局所二乗可積分であるための必要十分条件は，$|x|^2 * \nu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ である．X が局所二乗可積分であるとき，その標準分解 $X = X_0 + M + A$ は (6.5)，(6.6) および

$$\langle M^i, M^j \rangle = C^{ij} + x^i x^j * \nu - \sum_{s \leq \cdot} \Delta A^i_s \Delta A^j_s$$

を満たす．

証明　(i)．(6.5) は系 5.3 の証明の中で既に示されている．(6.6) は (6.5) と (6.4) を組み合わせればわかる．したがって，示すべきは可積分性についての同値性のみである．

$a > 0$ を $|x| \leq a$ なら $x - h(x) = 0$ となるように選ぶ．このとき，適当な定数 $C > 0$ を選べば

$$|x - h(x)| \leq C(|x| \wedge |x|^2)$$

が成り立つ[43)]．さらに適当な定数 $C' > 0$ を選べば

$$|x| \wedge |x|^2 \leq C' \left(|x|^2 \wedge 1 + |x - h(x)| \right)$$

も成り立つ[44)]．X は半マルチンゲールなので補題 6.1 より $(|x|^2 \wedge 1) * \nu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ が成り立つ．これより，$(|x|^2 \wedge |x|) * \nu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ は $|x - h(x)| * \nu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ と同値であることがわかる．

X が特殊半マルチンゲールなら系 5.3 の証明より

$$|x - h(x)| * \nu \leq \sum_{1 \leq i \leq d} |x^i - h^i(x)| * \nu \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$$

である．逆に $|x - h(x)| * \nu \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ なら，系 5.3 の証明より $\check{X}(h) = (x - h(x)) * \mu \in \mathscr{A}^d_{\mathrm{loc}}$ であり，$X = X(h) + \check{X}(h)$ は特殊半マルチンゲールとなることがわかる．ゆえに X が特殊半マルチンゲールであることと $|x - h(x)| * \nu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ が成り立つことは同値である．

(ii)．$|x|^2 * \nu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ 成り立っていると仮定する．このとき

$$(|x|^2 \wedge |x|) * \nu \leq |x|^2 * \nu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$$

---

43)　例えば $|x| \leq a$ なら $x - h(x) = 0$ となるような定数 $a > 0$ を用いて

$$C = \frac{1 + \sup_x |h(x)|}{1 \wedge a \wedge a^2}$$

とするなど．もっとマシな定数の選び方があるかも知れないが，とりあえず僕はこれくらいしか思いつかなかった．

44)　例えば $C' = 1 + \sup_x |h(x)|$ など．

であるから (i) により X は特殊半マルチンゲールとなる．$X = X_0 + M + A$ をその標準分解としよう．(i) より $\Delta A = \left(\int_{\mathbb{R}^d} x\widehat{\nu}_t(\mathrm{d}x)\right)_{t\geq 0}$ であることに注意すれば，

$$\begin{aligned}\sum_{0<s\leq t}(\Delta A_s^i)^2 &= \sum_{0<s\leq t}\left(\int_{\mathbb{R}^d} x^i\widehat{\nu}_t(\mathrm{d}x)\right)^2 \\ &\leq \sum_{0<s\leq t}\int_{\mathbb{R}^d}(x^i)^2\widehat{\nu}_t(\mathrm{d}x) \\ &\leq \sum_{0<s\leq t}\Delta((x^i)^2 * \nu)_t \\ &\leq ((x^i)^2 * \nu)_t\end{aligned}$$

がわかる[45]．さらに $\int_{\mathbb{R}^d} x\widehat{\mu}_t(\mathrm{d}x) = \Delta X_t$ であるから，

$$\int_{\mathbb{R}^d} x\widehat{\mu}_t(\mathrm{d}x) - \int_{\mathbb{R}^d} x\widehat{\nu}_t(\mathrm{d}x) = \Delta X_t - \Delta A_t$$

が成立．これより

$$\begin{aligned}\sum_{0<s\leq\cdot}\left(\Delta X_t^i - \Delta A_t^i\right)^2 &\leq 2\sum_{0<s\leq\cdot}\left(\Delta X_t^i\right)^2 + 2\sum_{0<s\leq\cdot}\left(\Delta A_t^i\right)^2 \\ &\leq 2(x^i)^2 * \mu_t + 2(x^i)^2 * \nu_t \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}\end{aligned}$$

を得る．したがって，$x^i \in \mathscr{G}^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$ であり $x^i * (\mu-\nu) \in \mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}$ がわかった．系 5.3 より X は標準分解

$$X = X_0 + M + A = X_0 + X^{\mathrm{c}} + x * (\mu - \nu) + A$$

をもつ．先ほどの議論より $M = X^{\mathrm{c}} + x * (\mu-\nu) \in \mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}$ となるので，命題 C.74 より X は局所二乗可積分である．二次変分の定義より

$$\begin{aligned}[M^i, M^j] &= [X^{i,c}, X^{j,c}] + \sum_{0<s\leq\cdot}\Delta M^i \Delta M^j \\ &= C^{ij} + (x^i x^j) * \mu - \sum_{0<s\leq\cdot}\Delta A^i \Delta A^j\end{aligned}$$

であり，その双対可予測射影をとれば

$$\langle M^i, M^j\rangle = C^{ij} + (x^i x^j) * \nu - \sum_{0<s\leq\cdot}\Delta A^i \Delta A^j$$

という表現を得る．

逆に X が局所二乗可積分であると仮定する．

$$Y_t = \sup_{0<s\leq t}|X_t - X_0|^2$$

45）2 行目の不等号には $\widehat{\nu}_t \leq 1$ であることを用いた．

と定義し，(T_n) を Y の $\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ に関する局所化列とする．また

$$S_n = \inf\{t \geq 0 \mid (x^i)^2 * \mu_t \geq n\}$$

と定義し，$R_n = S_n \wedge T_n$ とおく．このとき (R_n) は停止時刻の増加列で a.s. で無限大に発散する．

$$E[(x^i)^2 * \mu_{R_n}] \leq n + E\left[(\Delta X_{R_n})^2\right] \leq n + 2E[Y_{R_n}^2] \leq n + 2E[Y_{T_n}] < \infty$$

が成り立つから，$(x^i)^2 * \mu$ は局所化列 (R_n) をもつ $\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^+$ の元である．これより $(x^i)^2 * \nu = ((x^i)^2 * \mu)^{\mathfrak{p}} \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^+$ となり，$|x|^2 * \nu = \sum_{1 \leq i \leq d} (x^i)^2 * \nu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ がわかる．□

次の系は命題 6.3 の (ii) よりただちに従う．

系 6.4. $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^2$ に対してに対して ν を M のジャンプ測度の双対可予測射影とすれば，その可予測二次変分は

$$\langle M, M \rangle = \langle M^{\mathrm{c}}, M^{\mathrm{c}} \rangle + x^2 * \nu$$

という表現をもつ．

7　特性要素による半マルチンゲールの特徴づけ

これまでは半マルチンゲールが与えられたときに，その特性要素がもつ性質を調べてきた．本節では逆に，特性要素と同様の性質をもつ三つ組 (B, C, ν) が与えられたとき，これを特性要素とする半マルチンゲールが存在するかという問題を考えよう．

この節では，これ以降 (B, C, ν) は次の条件を満たす 3 つ組を表すこととする．

- $B \in (\mathscr{V}^{\mathrm{pred}})^d$.
- $C \in M_d(\mathscr{V}^{+,\mathrm{c}})$.
- ν は可予測ランダム測度.
- (B, C, ν) は恒等的に以下の条件を満たす.

$$\text{任意の } s \leq t \text{ に対して，} C_t - C_s \text{ は正定値対称行列}$$
$$\nu(\{t\} \times \mathbb{R}^d) \leq 1, \quad \nu(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}) = 0$$
$$(|x|^1 \wedge 1) * \nu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$$
$$\Delta B = \int_{\mathbb{R}^d} h(x) \widehat{\nu}_t(\mathrm{d}x)$$

$u \in \mathbb{R}^d$ に対して，

(7.1)
$$A(u)_t = iu \cdot B_t - \frac{1}{2} u \cdot C_t u + \int_{[0,t] \times \mathbb{R}} (e^{iu \cdot x} - 1 - iu \cdot h(x)) \nu(\mathrm{d}(s, x))$$

と定義する．これが well-defined であることは，$(|x|^2 \wedge 1) * \nu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ という仮定と

$$|e^{iu \cdot x} - 1 - iu \cdot h(x)| \leq \mathrm{const.}(|x|^2 \wedge 1) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

という評価からわかる[46]．これらの準備のもと，目標となる定理の主張を述べよう．

定理 7.1. d 次元 càdlàg 適合過程 X に対して，次の 3 条件は同値である．

(i) X は特性要素 (B, C, ν) を持つ半マルチンゲールである．

(ii) 任意の $u \in \mathbb{R}^d$ に対して，$e^{iu\cdot X} - e^{iu\cdot X_-} \bullet A(u)$ は複素局所マルチンゲールである．

(iii) 任意の有界 C^2 級関数 f に対して，

$$f(X) - f(X_0) - \sum_{1\le i\le d} D_i f(X_-) \bullet B^i - \frac{1}{2} \sum_{1\le i,j\le d} D_{ij} f(X_-) \bullet C^{i,j} - \left\{ f(X_- + x) - f(X_-) - \sum_{1\le i\le d} h^i(x) D_i f(X_-) \right\} * \nu$$

は局所マルチンゲールである．

定理の証明のために，いくつか補題を用意する．

補題 7.2. $b \in \mathbb{R}^d$ とし，$c \in M_d(\mathbb{R}^d)$ を正定値[47]対称行列とする．さらに F を $\mathbb{R}^d$ 上の非負測度で $F(\{0\}) = 0$ かつ $x \mapsto |x|^2 \wedge 1$ が可積分となるようなものとする．関数 ψ を

$$\psi(u) = iu\cdot b - \frac{1}{2} u\cdot cu + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{iu\cdot x} - 1 - iu\cdot h(x)) F(\mathrm{d}x) \tag{7.2}$$

によって定義する．このとき，(7.2) の形の表現は一意的である．すなわち，同様の過程を満たす別の b'，c'，F' によって ψ が

$$\psi(u) = iu\cdot b' - \frac{1}{2} u\cdot c'u + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{iu\cdot x} - 1 - iu\cdot h(x)) F'(\mathrm{d}x) \tag{7.3}$$

と表現されているなら，$b = b'$，$c = c'$，$F = F'$ が成り立つ．

証明　$w \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ に対して

$$\varphi_w(u) = \psi(u) - \frac{1}{2} \int_{[-1,1]} \psi(u + sw) \mathrm{d}s$$

46）　左辺の関数が有界であることと，左辺の関数は局所的には 1 次の Taylor 展開なので 2 次の評価をもつことからわかる．

47）　退化していても良い．

と定義する．ψ の定義より

$$
\begin{aligned}
\int_{[-1,1]} \psi(u+sw)\mathrm{d}s &= \int_{[-1,1]} i(u+sw)\cdot b\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_{[-1,1]} (u+sw)\cdot c(u+sw)\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_{[-1,1]}\int_{\mathbb{R}^d} (e^{i(u+sw)\cdot x} - 1 - i(u+sw)\cdot h(x))F(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s \\
&= i\left(\int_{[-1,1]} (u+sw)\,\mathrm{d}s\right)\cdot b \\
&\quad - \frac{1}{2}\sum_{1\le j,k\le d} c^{jk}\int_{[-1,1]} (u^j u^k + s(w^j u^k + w^k u^j) + w^j w^k s^2)\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d}\int_{[-1,1]} (e^{i(u+sw)\cdot x} - 1 - i(u+sw)\cdot h(x))\,\mathrm{d}s\,F(\mathrm{d}x) \\
&= 2i(u\cdot b) - \frac{1}{2}\sum_{1\le j,k\le d} c^{jk} 2\left(u^j u^k + \frac{1}{3}w^j w^k\right) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d}\left(e^{iu\cdot x}2\frac{\sin w\cdot x}{w\cdot x} - 2 - 2iu\cdot h(x)\right)F(\mathrm{d}x) \\
&= 2i(u\cdot b) - u\cdot cu - \frac{1}{3}w\cdot cw \\
&\quad + 2\int_{\mathbb{R}^d}\left(e^{iu\cdot x}\frac{\sin w\cdot x}{w\cdot x} - 1 - iu\cdot h(x)\right)F(\mathrm{d}x)
\end{aligned}
$$

が成立．これより

$$
\begin{aligned}
\varphi_w(u) &= \psi(u) - \frac{1}{2}\int_{[-1,1]} \psi(u+sw)\mathrm{d}s \\
&= \psi(u) - i(u\cdot b) + \frac{1}{2}u\cdot cu + \frac{1}{6}w\cdot cw \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^d}\left(e^{iu\cdot x}\frac{\sin w\cdot x}{w\cdot x} - 1 - iu\cdot h(x)\right)F(\mathrm{d}x) \\
&= \frac{1}{6}w\cdot cw + \int_{\mathbb{R}^d} e^{iu\cdot x}\left(1 - \frac{\sin w\cdot x}{w\cdot x}\right)F(\mathrm{d}x)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで

$$
G_w = \frac{1}{6}(w\cdot cw)\delta_0(\mathrm{d}x) + \left(1 - \frac{\sin w\cdot x}{w\cdot x}\right)F(\mathrm{d}x)
$$

と定義すれば[48)]，

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} e^{iu\cdot x} G_w(\mathrm{d}x) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{iu\cdot x}\frac{1}{6}(w\cdot cw)\delta_0(\mathrm{d}x) + \int_{\mathbb{R}^d} e^{iu\cdot x}\left(1 - \frac{\sin w\cdot x}{w\cdot x}\right)F(\mathrm{d}x) \\
&= \frac{1}{6}w\cdot cw + \int_{\mathbb{R}^d} e^{iu\cdot x}\left(1 - \frac{\sin w\cdot x}{w\cdot x}\right)F(\mathrm{d}x)
\end{aligned}
$$

となり，すなわち φ_w は非負測度 G_w の特性関数である．

48）　δ_0 は 0 における Dirac 測度．

(b', c', F') は (7.3) を満たすと仮定する．φ_w は ψ から一意的に定まるから，

$$\varphi_w(u) = \frac{1}{6} w \cdot c' w + \int_{\mathbb{R}^d} e^{iu\cdot x} \left(1 - \frac{\sin w\cdot x}{w\cdot x}\right) F'(\mathrm{d}x)$$

も成り立つ．これより，φ_w は測度

$$G'_w(\mathrm{d}x) = \frac{1}{6}(w \cdot c'w)\delta_0(\mathrm{d}x) + \left(1 - \frac{\sin w\cdot x}{w\cdot x}\right) F'(\mathrm{d}x)$$

の特性関数でもある．特性関数が一致するから，二つの測度 G_w と G'_w も一致する．よって，任意の $w \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ に対して $G_w = G'_w$ となる．したがって任意の $w \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ に対して

$$\frac{1}{6}(w \cdot cw) = G_w(\{0\}) = G'_w(\{0\}) = \frac{1}{6}(w \cdot c'w)$$

が成り立つ．ゆえに $c = c'$ である．また，これより

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} e^{iu\cdot x} \left(1 - \frac{\sin w\cdot x}{w\cdot x}\right) F(\mathrm{d}x) &= \varphi_w(u) - \frac{1}{6} w\cdot cw \\ &= \varphi_w(u) - \frac{1}{6} w\cdot c'w \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{iu\cdot x} \left(1 - \frac{\sin w\cdot x}{w\cdot x}\right) F'(\mathrm{d}x)\end{aligned}$$

が成立．特性関数が等しいので測度 $\left(1 - \frac{\sin w\cdot x}{w\cdot x}\right) F(\mathrm{d}x)$ と $\left(1 - \frac{\sin w\cdot x}{w\cdot x}\right) F'(\mathrm{d}x)$ は等しい．いま $1 - \frac{\sin w\cdot x}{w\cdot x}$ が $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ で狭義に正であることに注意すれば，$F = F'$ もわかる．$c = c'$ および $F = F'$ から

$$u \cdot b = u \cdot b' \quad \forall u \in \mathbb{R}^d$$

が従うので，$b = b'$ が成り立つ．これで補題の主張が示された．□

補題 7.3. X を実数値 càdlàg 適合過程とする．任意の $u \in \mathbb{R}$ に対して e^{iuX} が半マルチンゲールになるなら，X も半マルチンゲールである．

証明　複素数値過程 e^{iuX} が半マルチンゲールであるというのは，実部 $\cos uX$ と虚部 $\sin uX$ がともに半マルチンゲールであるということであった．$f \in C^2(\mathbb{R})$ を $|x| \le 1/2$ なら $f(\sin x) = x$ となるように選ぶ[49)]．

$$T_n = \inf\left\{t \ge 0 \,\middle|\, |X_t| > \frac{n}{2}\right\}$$

と定義すれば，(T_n) は無限大に発散する停止時刻の増加列であり，仮定より $X^{T_n-} = nf(\sin(X/n))^{T_n-}$ は半マルチンゲールとなる．したがって，命題 C.72 より $X \in \mathscr{SM}_{\mathrm{ploc}} = \mathscr{SM}$ がわかる．□

これで準備が整ったので，定理 7.1 の証明に入ろう．

49)　$x \mapsto \sin x$ は $[-1/2, 1/2]$ 上で狭義単調増加なので，単射である．

定理 7.1 の証明　(i) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (ii) は定理 5.4 と系 5.5 に他ならない．よって (ii) $\Longrightarrow$ (i) のみ示せば十分である．

(ii) を仮定すれば，任意の $u \in \mathbb{R}^d$ に対して $e^{iu\cdot X}$ は複素数値半マルチンゲールとなる．特に u として第 j 成分以外が 0 のベクトルをとれば，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して e^{iaX^j} が半マルチンゲールとなることがわかる．よって補題 7.3 から X^j 自身が半マルチンゲールとなる．d 次元半マルチンゲール X の特性要素 (B', C', ν') のバージョンで，特に条件 6.3 を任意の点で満たすようなものを一つ選ぶ．（注意 3.4 を参照．）このとき (B, C, ν) と (B', C', ν') が区別不能であることを示すのが目標となる．

(B', C', ν') に関して (7.1) で定義される過程を $A'(u)$ で表すことにする．系 5.5 より $e^{iu\cdot X} - e^{iu\cdot X_-} \bullet A'(u)$ は局所マルチンゲールとなる．いま $A(u)$ と $A'(u)$ は可予測なので $e^{iu\cdot X_-} \bullet A(u)$ と $e^{iu\cdot X_-} \bullet A'(u)$ も可予測である．したがって

$$
\begin{aligned}
e^{iu\cdot X} &= \bigl(e^{iu\cdot X} - e^{iu\cdot X_-} \bullet A(u)\bigr) + e^{iu\cdot X_-} \bullet A(u) \\
&= \bigl(e^{iu\cdot X} - e^{iu\cdot X_-} \bullet A'(u)\bigr) + e^{iu\cdot X_-} \bullet A'(u)
\end{aligned}
$$

は特殊半マルチンゲール $e^{iu\cdot X}$ の標準分解を与える．標準分解の一意性より，$e^{iu\cdot X_-} \bullet A(u)$ と $e^{iu\cdot X_-} \bullet A'(u)$ は区別不能である．これらの過程で $e^{-iu\cdot X_-}$ を積分すれば，$A(u) = A'(u)$ が区別不能の意味で成立することがわかる．

$u \in \mathbb{Q}^d$ に対して，零集合 N_u を $\Omega \setminus N_u$ 上で $A_\cdot(u) = A'_\cdot(u)$ が恒等的に成り立つようなものとする．$N = \bigcup_{u \in \mathbb{Q}^d} N_u$ と定義すれば，これはまた零集合であり，$\Omega \setminus N$ 上で，任意の $u \in \mathbb{Q}^d$ と任意の $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して $A(u)_t = A'(u)_t$ が成り立つ．特に t を固定すれば $u \mapsto A(u)_t$ は連続だから，結局任意の $u \in \mathbb{R}^d$ に対して $A(u)_t = A'(u)_t$ が成り立つことがわかる．

ここで補題 7.2 を用いれば，N 上で任意の $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して $B_t = B'_t$ および $C_t = C'_t$，そして $\nu([0,t] \times \mathrm{d}x) = \nu'([0,t] \times \mathrm{d}x)$ が成り立つことがわかる．よって B は B' の，C は C' のそれぞれ修正であり，右連続性よりこれらは区別不能である．また，$\omega \in \Omega \setminus N$ なら

$$
\forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0},\ \forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \quad \nu(\omega, [0,t] \times E) = \nu'(\omega, [0,t] \times E)
$$

であるから，ν と ν' の各点ごとの σ 有限性および単調族定理より，

$$
\forall \omega \in \Omega \setminus N,\ \forall E' \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \quad \nu(\omega, E') = \nu'(\omega, E')
$$

を得る[50)]．すなわち

$$
\mathrm{pr}_1 \{(\omega, E') \mid \mu(\omega, E') \neq \nu(\omega, E')\} \subset N
$$

であり，ν と ν' は区別不能である．以上の議論により (B, C, ν) は X の特性要素 (B', C', ν') と区別不能であり，(B, C, ν) もまた X の特性要素であることが示された．$\square$

50)　ν' の各点ごとの σ 有限性を得るために条件 6.3 が「任意の点で」成り立つようなバージョンをとったが，この条件が本当に必要かは僕にはよくわからない．

A　位相と可測空間

付録 A では，ポーランド空間や Souslin 空間，その上の確率測度について論じる．本節における我々の目標は，Souslin 空間の Borel-σ 代数が可算生成であることと，Souslin 空間上の確率測度においては，任意の Borel 集合が内正則となることを示すことである．この事実は，のちに正則条件付確率の存在を示すのに用いられる．

A.1　ポーランド空間と Souslin 空間，その可測性

定義 A.1. X を Haudorff 空間とする．

(i) X 上の距離関数 d で，(X,d) が完備可分距離空間となり，さらに d より誘導される位相が X のもとの位相と一致するようなものが存在するとき，X をポーランド空間 (Polish space) という．

(ii) あるポーランド空間 Y と連続全射 $f\colon Y \to X$ が存在するとき，X を Souslin 空間 (Souslin space) と呼ぶ．ポーランド空間の部分空間で Souslin 空間であるものを，解析集合 (analytic set) という．

(iii) (ii) において f を単射とできるとき，X を Lusin 空間 (Lusin space) と呼ぶ．

言うまでもなく Polish 空間は Lusin 空間であり，Lusin 空間は Souslin 空間である．また，解析集合は明らかに Souslin 空間である．これ以降，解析集合上の位相や σ 代数を考えるときは，全体のポーランド空間からの部分空間として考えることにする．

代表的なポーランド空間は，$2=\{0,1\}$, $2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $[0,1]$, $[0,1]^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}$ などである．

まずは，解析集合の基本的な性質を調べよう．

命題 A.2. (i) 解析集合の高々可算直積は解析集合である．

(ii) 解析集合の可算和，可算共通部分はまた解析集合である．

(iii) ポーランド空間の開部分集合および閉部分集合は，解析集合である．

(iv) ポーランド空間の Borel 集合は解析集合である．

証明 (i) 可算無限の場合のみ証明する．(X_n) をポーランド空間の列，(A_n) をその解析集合の列とする．$f_n\colon Z_n \to A_n$ をポーランド空間からの連続全射とすれば，その積 $\prod_n f_n\colon \prod_n Z_n \to \prod_n A_n \subset \prod_n X_n$ は連続全射である．$\prod_n X_n$ と $\prod_n Z_n$ はまたポーランド空間なので，$\prod_n A_n$ は解析集合である．

(ii) X をポーランド空間，(A_n) をその解析集合列とし，$f_n\colon Z_n \to A_n$ をポーランド空間からの連続全射の列とする．$\coprod_n Z_n$ を直和位相空間とすれば，これはまたポーランド空間となる．このとき，(f_n) の和 $f\colon \coprod_n Z_n \to \bigcup_n A_n$ はポーランド空間からの連続全射であり，ゆえに $\bigcup_n A_n$ はポーランド空間である．

次に，(f_n) の直積 $F\colon \prod_n Z_n \to \prod_n A_n \subset X^{\mathbb{N}}$ を考える．

$$\Delta := \{(x_n) \in X^{\mathbb{N}} \mid \forall n, m,\ x_n = x_m\} = \bigcap_{n,m} (\mathrm{pr}_n, \mathrm{pr}_m)^{-1}(\Delta_X)$$

は閉集合であるから，$Z := F^{-1}(\Delta)$ はポーランド空間 $\prod_n Z_n$ の閉部分空間となり，これもまたポーランド空間である．なお，この Z は空である可能性もある．Z が空でないための必要十分条件はもちろん $\Delta \cap \prod_n A_n \neq \emptyset$ であり，これは $\bigcap_n A_n \neq \emptyset$ とも同値である．

写像 $g\colon Z \to X$ を $g = f_1 \circ \mathrm{pr}_1|_Z\colon Z \to A_1$ と定めればこれは明らかに連続写像である．Z の定義より任意の n に対して $g = f_n \circ \mathrm{pr}_n|_Z$ が成り立つから $g(Z) \subset \bigcap_n A_n$ が成り立つ．さらに $x \in \bigcap_n A_n$ とすれば，$F^{-1}(x, x, \dots) \subset F^{-1}(\Delta \cap \prod_n A_n) \in Z$ であり，$z \in F^{-1}(x, x, \dots)$ に対して $g(z) = x$ が成り立つ．ゆえに $g\colon Z \to \bigcap_n A_n$ は連続全射であり，$\bigcap_n A_n$ は解析集合である．

(iii) ポーランド空間の開部分空間と閉部分空間はポーランド空間なので[51]，解析集合である．

(iv) X をポーランド空間，$\mathscr{A}(X)$ をその解析集合全体の集合とする．$\mathscr{E} = \{A \in \mathscr{A}(X) \mid X \setminus A \in \mathscr{A}(X)\}$ と定義したとき，$\mathscr{B}(X) \subset \mathscr{E}$ であることを示そう．そのためには，$\mathscr{E}$ が X の開集合をすべて含む σ 代数であることを示せばよい．G が開集合なら (iii) より $G \in \mathscr{A}(X)$ かつ $X \setminus G \in \mathscr{A}(X)$ なので，$\mathscr{E}$ は X の開集合を含む．定義より明らかに，$\mathscr{E}$ は補集合をとる操作について閉じている．(A_n) を $\mathscr{E}$ の列とすれば，(ii) より $\bigcup_n A_n \in \mathscr{A}(X)$ が成り立つ．さらに (iii) と $\mathscr{E}$ の定義より，$X \setminus \bigcap_n A_n = \bigcap_n X \setminus A_n \in \mathscr{A}(X)$ となり，これより $\bigcup_n A_n \in \mathscr{A}(X)$ がわかる．以上の議論により $\mathscr{E}$ は開集合を全て含む σ 代数であることが示されたので，$\mathscr{B}(X) \subset \mathscr{E}$ である．□

命題 A.2 (iv) の証明において，実は $\mathscr{E} = \mathscr{B}(X)$ が成り立っている．それを示すためには，もう少し準備が必要となる．

命題 A.3. Souslin 空間は強 Lindelöf 空間である[52]．

証明　初めに，任意の第 2 可算空間は Lindelöf であることに注意しておこう．X を Souslin 空間，Z をポーランド空間，$f\colon Z \to X$ を連続全射とする．$\mathscr{U}$ を $A \subset X$ の開被覆とする．$(f^{-1}(U); U \in \mathscr{U})$ を部分空間 $f^{-1} \bigcup \mathscr{U}$ の開被覆と思うと，$f^{-1} \bigcup \mathscr{U}$ の Lindelöf 性より可算部分被覆 $(f^{-1}(U_n); n \in \mathbb{N})$ を選び出すことができる．いま $f^{-1}(A) \subset \bigcup_n f^{-1}(U_n)$ であるから，f が全射であることに注意すれば

$$A = ff^{-1}(A) \subset f\left(\bigcup_n f^{-1}(U_n)\right) = \bigcup_n ff^{-1}(U_n) \subset \bigcup_n U_n$$

が成り立つ．ゆえに $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は A の可算部分被覆である．これより，X は強 Lindelöf 空間であることがわかる．□

51）　ポーランド空間の閉部分空間がポーランド空間となることは難しくない．ポーランド空間の開部分空間がポーランド空間となることの証明は Srivastava [33, Theorem 2.2.1] などを参照されたい．

52）　Lindelöf 空間は，任意の開被覆か可算部分被覆を持つ位相空間である．強 Lindelöf 空間は，任意の部分空間が Lindelöf となる空間のことである．

X が第 2 可算な Hausdorff 空間なら $\mathscr{B}(X)\otimes\mathscr{B}(X)=\mathscr{B}(X\times X)$ であるから，$\Delta_X\in\mathscr{B}(X)\otimes\mathscr{B}(X)$ が成り立つ[53]．しかし一般の Haudoff 空間においては $\mathscr{B}(X)\otimes\mathscr{B}(X)\subset\mathscr{B}(X\times X)$ しかいえないから，$\Delta_X\in\mathscr{B}(X)\otimes\mathscr{B}(X)$ が成り立つとは限らない．$\Delta_X\in\mathscr{B}(X)\otimes\mathscr{B}(X)$ が成り立つための十分条件を与えるのが次の命題である．対角集合の可測性は，可測関数のグラフの可測性を論じる際に重要な概念である．

補題 A.4. X を Hausdorff 空間とする．$X\times X$ が強 Lindelöf 空間なら，$\Delta_X=\{(x,x)\in X\times X\mid x\in X\}\in\mathscr{B}(X)\otimes\mathscr{B}(X)$ である．

証明　X は Hausdorff 空間なので，Δ_X は $X\times X$ の閉集合である．よってその補集合は開集合であり，強 Lindelöf 性よりこれは $U\times V$ の形の開集合の可算和で表現される．よって $\mathscr{B}(X)\otimes\mathscr{B}(X)$ 可測である．　□

特に X が Souslin 空間なら $X\times X$ はまた Souslin 空間となるので，Δ_X は $\mathscr{B}(X)\otimes\mathscr{B}(X)$ 可測となる．

命題 A.5. $(X,\mathscr{A})$ と $(Y,\mathscr{B})$ を可測空間とし，$f\colon X\to Y$ を可測関数とする．$\Delta_Y\in\mathscr{B}\otimes\mathscr{B}$ なら，f のグラフ $\Gamma_f=\{(x,f(x))\in X\times Y\mid x\in X\}$ は $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ に属する．

証明　$\Gamma_f=(f\times\mathrm{id}_Y)^{-1}(\Delta_Y)$ に注意すればよい．　□

系 A.6. X が位相空間，Y が Souslin 空間なら，Borel 可測関数 $f\colon X\to Y$ のグラフ Γ_f は $\mathscr{B}(X)\otimes\mathscr{B}(Y)$-可測である．

証明　補題 A.4 と命題 A.5 より明らかである．　□

ポーランド空間の間の可測関数 $f\colon X\to Y$ が与えられたとき，Borel 集合 B の像 $f(B)$ は Borel 可測になるかどうかは難しい問題である．しかし，これまでの議論で得られた結果を用いれば，解析集合の像が解析集合になることを証明できる．このことを示すのには，グラフの可測性の議論が有効である．

命題 A.7. X,Y をポーランド空間，A を X の解析集合，$f\colon A\to Y$ を可測関数とする．このとき，任意の解析集合 $B\subset A$ に対して，$f(B)$ は Y の解析集合となる．

証明　いま Y はポーランド空間（よって Souslin 空間）であるから，系 A.6 より $\Gamma_f\in\mathscr{B}(A)\otimes\mathscr{B}(Y)\subset\mathscr{B}(A\times Y)$ が成り立つ．特に，Γ_f は $X\times Y$ の解析集合である．いま $i\colon A\times Y\to X\times Y$ を包含写像とすれば，ある $C\in\mathscr{B}(X\times Y)$ によって $i^{-1}(C)=\Gamma_f$ という表現が可能である．$B(\subset A\subset X)$ を解析集合とすれば，命題 A.2 より，$(B\times Y)\cap\Gamma_f$ は $X\times Y$ の解析集合である．

ここで，$g\colon Z\to(B\times Y)\cap\Gamma_f$ をポーランド空間からの連続全射とする．$\mathrm{pr}_2\colon X\times Y\to Y$ を射影とすれば，$f(B)=\mathrm{pr}_2((B\times Y)\cap\Gamma_f)=\mathrm{pr}_2 g(Z)$ が成立．したがってポーランド空間からの連続全射 $\mathrm{pr}_2\circ g\colon Z\to f(B)$ が存在し，$f(B)$ が解析集合であることがわかった．　□

53）　X が Hausdorff 空間なら Δ_X は $X\times X$ の閉集合である．

A.2　解析集合の特徴付け

A.2 節では，解析集合の特徴付けを考える．そのために，まずは Souslin スキームと Souslin 演算という概念を導入しよう．

$\mathbb{N}^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^n$ と定義する．すなわち，$\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ は自然数の有限列全体の集合である．$s = (s_0, \ldots, s_{n-1}) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ に対して $|s| = n$ と定義する．$|s|$ とはつまり有限数列 s の長さである．X を集合とし，$\mathscr{E}$ を X の部分集合族とする．写像 : $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathscr{E}$ を，$\mathscr{E}$-値の Souslin スキーム (Souslin scheme) と呼ぶ．Souslin スキーム $P = (P_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ が与えたとき，P に集合

$$S(P) = \bigcup_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\mathbb{N}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} P_{\mathbf{n}|_k}$$

を対応させせる操作を，Souslin 演算 (Souslin operation) や A-演算 (A-operation) と呼ぶ．ただし，$\mathbf{n}|_k$ は自然数列 $\mathbf{n}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ の $k = \{0, \ldots, k-1\}$ 上への制限であり，具体的に書くと有限列 $(\mathbf{n}_0, \ldots, \mathbf{n}_{k-1})$ である．$\mathscr{E}$-値の Souslin スキームに対する Souslin 演算で得られる集合全体を $S(\mathscr{E})$ で表す．$s = (s_0, \ldots, s_n) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ と $t = (t_0, \ldots, t_m) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ を並べて出来る有限列 $(s_0, \ldots, s_n, t_0, \ldots, t_m)$ を st で表すことにする．$|s| \leq |t|$ を満たす $s, t \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ について，$t|_{|s|} = s$ が成り立っているとき，$s \prec t$ と書く．Souslin スキーム P が $s \prec t$ なら $P_s \supset P_t$ を満たすとき，P は正則であるという．

Souslin 演算の基本的な性質を調べる．特に重要なのは冪等性 $S(\mathscr{E}) = S(S(\mathscr{E}))$ である．それを示すために，まずは一つ技術的な補題を用意しよう．

補題 A.8. 全単射

$$\beta\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad \Phi\colon \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$$

で，次の条件を満たすものが存在する：

(i) $\Phi(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = \beta \circ (\mathbf{n}, \mathbf{m} \circ \beta^{-1})$ を満たす．

(ii) 全ての m と n に対して $m \leq \beta(m, n)$ が成り立つ．また，全ての m と $n < k$ に対して $\beta(m, n) < \beta(m, k)$ が成り立つ．

ここで，条件 (ii) は以下の (ii)” と書き換えられることに注意されたい．

(ii)”全ての k に対して $\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1}(k) \leq k$ が成り立つ．また，全ての $p \leq l$ に対して $\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1}(p) = \mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1}(l)$ なら，$\mathrm{pr}_2 \circ \beta^{-1}(p) \leq \mathrm{pr}_2 \circ \beta^{-1}(l)$ が成り立つ．

証明　写像 $\beta\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $\beta(m, n) = 2^m(2n+1) - 1$ と定めれば，これは全単射である[54]．このとき任意の m, n に対して $m < 2^m \leq 2^m(2n+1)$ が成り立つから，$m \leq \beta(m, n)$ である．さらに，任意の $n < k$ に対して $\beta(m, n) < \beta(m, k)$ が成り立つことにも注意しておく．

既に β は定まっているので $\Phi(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = \beta \circ (\mathbf{n}, \mathbf{m} \circ \beta^{-1})$ と定義し，これが全単射であることを示

54）　整数 $l + 1 \geq 1$ は $l + 1 = 2^m(2n+1)$ と一意的に表現できるから．

せばよい．いまは逆写像 Ψ を具体的に構成することにする．$\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に対して．

$$\Psi(\mathbf{n}) = (\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1} \circ \mathbf{n}, \mathrm{pr}_2 \circ \beta^{-1} \circ \mathbf{n} \circ \beta) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$$

と定義する．これが Φ の逆写像であることを示そう．$(\mathbf{n}, \mathbf{m}) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ なら

$$\begin{aligned}
\Psi \circ \Phi(\mathbf{n}, \mathbf{m}) &= (\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1} \circ \Phi(\mathbf{n}, \mathbf{m}), \mathrm{pr}_2 \circ \Phi(\mathbf{n}, \mathbf{m}) \circ \beta) \\
&= (\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1} \circ \beta \circ (\mathbf{n}, \mathbf{m} \circ \beta^{-1}), \mathrm{pr}_2 \circ \beta^{-1} \circ \beta \circ (\mathbf{n}, \mathbf{m} \circ \beta^{-1}) \circ \beta) \\
&= (\mathrm{pr}_1 \circ (\mathbf{n}, \mathbf{m} \circ \beta^{-1}), \mathrm{pr}_2 \circ (\mathbf{n} \circ \beta, \mathbf{m})) \\
&= (\mathbf{n}, \mathbf{m})
\end{aligned}$$

である．一方，$\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ なら

$$\begin{aligned}
\Phi \circ \Psi(\mathbf{n}) &= \Phi\left(\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1} \circ \mathbf{n}, \mathrm{pr}_2 \circ \beta^{-1} \circ \mathbf{n} \circ \beta\right) \\
&= \beta \circ \left(\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1} \circ \mathbf{n}, \mathrm{pr}_2 \circ \beta^{-1} \circ \mathbf{n} \circ \beta \circ \beta^{-1}\right) \\
&= \beta \circ \left(\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1} \circ \mathbf{n}, \mathrm{pr}_2 \circ \beta^{-1} \circ \mathbf{n}\right) \\
&= \beta \circ (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2) \circ \beta^{-1} \circ \mathbf{n} \\
&= \mathbf{n}
\end{aligned}$$

が成立．よって Ψ は Φ の逆写像である． □

命題 A.9. $\mathscr{E}$ を X の部分集合族とする．このとき，Souslin 演算について以下が成り立つ．

(i) $\mathscr{E}, \mathscr{E}_\sigma, \mathscr{E}_\delta \subset S(\mathscr{E})$ が成り立つ．
(ii) $S(S(\mathscr{E})) = S(\mathscr{E})$．特に，$S(\mathscr{E})$ は可算個の和と共通部分をとる操作について閉じている．
(iii) $\emptyset \in \mathscr{E}$ とする．$A \in \mathscr{E}$ なら $X \setminus A \in S(\mathscr{E})$ が成り立つなら，$\sigma(\mathscr{E}) \subset S(\mathscr{E})$ が成り立つ．

ただし，$\mathscr{E}_\sigma$ は $\mathscr{E}$ の元の可算和として表現される集合全体で，$\mathscr{E}_\delta$ は $\mathscr{E}$ の元の可算個の有限部分集合で表される集合全体である．

証明　(i) $A \in \mathscr{E}$ に対して $P_s = A$ と定めれば，$S((P_s)) = A \in S(\mathscr{E})$ となる．(A_n) を $\mathscr{E}$ の元の列とする．Souslin スキーム P を $s = (s_0, \ldots, s_n)$ に対して $P_s = A_{s_0}$ と定めることにする．このとき

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_{\mathbf{n}_0} = \bigcup_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} P_{\mathbf{n}|_k} = S(P) \in S(\mathscr{E})$$

である．また，Souslin スキーム Q を $Q_s = A_{|s|}$ と定義する．このとき

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} Q_{\mathbf{n}|_k} = S(Q) \in S(\mathscr{E})$$

(ii) (i) より $S(\mathscr{E}) \subset S(S(\mathscr{E}))$ が成り立つから，逆向きの包含関係 $S(S(\mathscr{E})) \subset S(\mathscr{E})$ を示せばよい．$P = (P_s)$ を $S(\mathscr{E})$ に値をとる Souslin スキームとし，$A = S(P)$ と定める．各 s に対して，$\mathscr{E}$ に値を

とる Souslin スキーム $Q_s = (Q_{s,t})$ で $AQ_s = P_s$ を満たすものが存在する．この $Q_{s,t}$ を用いて，$\mathscr{E}$ 値の Souslin スキーム $R = (R_s)$ で $S(R) = A$ を満たすようなものを構成すればよい．

β, Φ を補題 A.8 の写像とする．さらに写像 $\varphi\colon \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ を次の要領で定義する：$s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ に対して，$\mathbf{n}|_n = s$ なる $\mathbf{n}$ を選んで

$$\varphi(s) = \bigl(\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1} \circ \mathbf{n}|_{\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1}(n)}, \mathrm{pr}_2 \circ \beta^{-1} \circ \mathbf{n} \circ \beta_{\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1}(n)}|_{\mathrm{pr}_2 \circ \beta^{-1}(n)}\bigr)$$

と定義する．これが $\mathbf{n}$ の選びかたによらず定まることは，補題 A.8 の条件 (ii) および (ii)" からわかる[55)]．この φ を用いて $R_s = Q_{\varphi(s)}$ と定めると，これはまた $\mathscr{E}$-値の Souslin スキームである．あとは，この新たな Souslin スキーム $R = (R_s)$ が $S(R) = A$ を満たすことを示せばよい．そのために，まずは以下の同値関係があることを確かめよう．

$$\begin{aligned}
x \in A &\iff x \in S(P) \\
&\iff \exists \mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\ \forall k \in \mathbb{N}\ x \in P_{\mathbf{n}|_k} \\
&\iff \exists \mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\ \forall k \in \mathbb{N}\ \exists \mathbf{m} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\ \forall l \in \mathbb{N}\ x \in Q_{\mathbf{n}|_k, \mathbf{m}|_l} \\
&\iff \exists \mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\ \exists \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}\ \forall k \in \mathbb{N}\ \forall l \in \mathbb{N}\ x \in Q_{\mathbf{n}|_k, \alpha_k|_l}
\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}
x \in S(R) &\iff \exists \mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\ \forall k \in \mathbb{N}\ x \in R_{\mathbf{n}|_k} \\
&\iff \exists \mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\ \forall k \in \mathbb{N}\ x \in Q_{\phi(\mathbf{n}|_k)}
\end{aligned}$$

であるから，これらの条件を比較すればよい．いま，我々が確かめたいのは

$$\exists \mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\ \exists \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}\ \forall k \in \mathbb{N}\ \forall l \in \mathbb{N}\ x \in Q_{\mathbf{n}|_k, \alpha_k|_l} \iff \exists \mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\ \forall k \in \mathbb{N}\ x \in Q_{\phi(\mathbf{n}|_k)} \tag{A.1}$$

である．(A.1) の左辺が成り立つと仮定する．$\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ と $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$ は，すべての $k, l \in \mathbb{N}$ に対して $x \in Q_{\mathbf{n}|_k, \alpha_k|_l}$ を満たすと仮定する．ここで $\mathbf{m} = \Phi(\mathbf{n}, \alpha)$ と定義しよう．いま

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{m}|_k) &= \bigl(\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1} \circ \Phi(\mathbf{n}, \alpha)|_{\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1}(n)}, \mathrm{pr}_2 \circ \beta^{-1} \circ \Phi(\mathbf{n}, \alpha) \circ \beta_{\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1}(n)}|_{\mathrm{pr}_2 \circ \beta^{-1}(n)}\bigr) \\
&= \bigl(\mathbf{n}|_{\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1}(n)}, \alpha \circ \beta^{-1} \circ \beta_{\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1}(n)}|_{\mathrm{pr}_2 \circ \beta^{-1}(n)}\bigr) \\
&= \bigl(\mathbf{n}|_{\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1}(n)}, \alpha_{\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1}(n)}|_{\mathrm{pr}_2 \circ \beta^{-1}(n)}\bigr)
\end{aligned}$$

であることに注意すれば，全ての k に対して

$$x \in Q\left(\mathbf{n}|_{\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1}(n)}, \alpha_{\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1}(n)}|_{\mathrm{pr}_2 \circ \beta^{-1}(n)}\right) = Q_{\phi(\mathbf{m}|_k)} = R_{\mathbf{m}|_k}$$

が成立．

55)　一つ目の項は，$\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1}(n) \leq n$ よりわかる．二つ目の項は $\beta(\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1}(n), \mathrm{pr}_2 \circ \beta^{-1}(n)) = n$ と条件 (ii)" の後半よりわかる．

逆に，(A.1) の右辺を仮定しよう．$\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ は，全ての $k \in \mathbb{N}$ に対して $x \in Q_{\phi(\mathbf{n}|_k)}$ を満たすと仮定する．ここで $(\mathbf{m}, \alpha) = \Psi(\mathbf{n})$ と定めれば，

$$\begin{aligned}(\mathbf{n}|_k, \alpha_k|_l) &= (\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1} \circ \mathbf{m}|_k, \mathrm{pr}_2 \circ \beta^{-1} \circ \mathbf{m} \circ \beta_k|_l) \\ &= \left(\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1} \circ \mathbf{m}|_{\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1}(\beta(k,l))}, \mathrm{pr}_2 \circ \beta^{-1} \circ \mathbf{m} \circ \beta_{\mathrm{pr}_1 \circ \beta^{-1}(\beta(k,l))}|_{\mathrm{pr}_2 \circ \beta^{-1}(\beta(k,l))}\right) \\ &= \varphi(\mathbf{n}|_{\beta(k,l)})\end{aligned}$$

が成立．これより全ての $k, l \in \mathbb{N}$ について

$$x \in Q(\varphi(\mathbf{n}|_{\beta(k,l)})) = Q(\mathbf{n}|_k, \alpha_k|_l)$$

となり，(A.1) 左辺を得る．

(iii) $\mathscr{A} = \{A \in S(\mathscr{E}) \mid X \setminus A \in S(\mathscr{E})\}$ と定義すれば，仮定よりこれは $\mathscr{E}$ を含む．定義より明らかに $\mathscr{A}$ は補集合をとる操作について閉じており，また空集合は $\mathscr{A}$ に属する．さらに (ii) より $S(\mathscr{E})$ は可算和と可算共通部分をとる操作について閉じているから，$\mathscr{A}$ は σ 代数であることがわかる．したがって，最小性より $\sigma(\mathscr{E}) \subset \mathscr{A}$ となる． □

ポーランド空間の解析部分集合は，以下のように特徴づけることができる．

命題 A.10. X をポーランド空間とし，d をその位相構造と整合的な完備距離とする．このとき，X の部分集合 A について次の条件は同値である．

(i) A は解析集合である．
(ii) A は閉集合からなる Souslin スキーム $F = (F_s)$ によって $S(F)$ と表現される．
(iii) A は閉集合からなる正則 Souslin スキーム $F = (F_s)$ によって $S(F)$ と表現される．さらに，この F は全ての $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に対して $\mathrm{diam}(F_{x|_n}) \to 0\ (n \to \infty)$ を満たすように取れる．特に A が空でなければ，各 F_s は空でないとしてよい．
(iv) A が空でなければ，連続全射 $f\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to A$ が存在する．
(v) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X$ の閉集合 F で，$A = \mathrm{pr}_2(F) = A$ を満たすものが存在する．

証明 (iii) $\Longrightarrow$ (ii) は明らかである．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．A は閉集合からなる Souslin スキーム $F = (F_s)$ によって $A = S(F)$ と表現されているとする．ここで $E \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X$ を

$$\begin{aligned}E &= \{(\mathbf{n}, x) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X \mid \forall k \in \mathbb{N}\ x \in F_{\mathbf{n}|_k}\} \\ &= \bigcup_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \left(\{\mathbf{n}\} \times \bigcap_k F_{\mathbf{n}|_k}\right) = \coprod_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_{\mathbf{n}|_k}\end{aligned}$$

と定義する．E は

$$E = \bigcap_k \bigcup_{s \in \mathbb{N}^k} \{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \mathbf{n}|_k = s\} \times F_s \tag{A.2}$$

とも表現できることに注意されたい．$\{\mathbf{n}|_k = s\}$ は射影による $\{s\}$ の引き戻しなので閉集合であり，よって $\{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \mathbf{n}|_k = s\} \times F_s$ も閉集合である．ゆえに (A.2) の表現と命題 A.9 から E はポーランド空間 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X$ の解析集合であることがわかる．いま，$A = \mathrm{pr}_2(E)$ だから A は連続写像 $\mathrm{pr}_2\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X \to X$ による解析集合 E の像であり，命題 A.7 より解析集合である．

(i) $\Longrightarrow$ (iv)．A を空でない解析集合とし，$g\colon Z \to A$ を空でないポーランド空間 Z からの連続全射とする．いま，d_Z で Z の位相と整合的な完備距離を表すこととする．$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の距離 ρ を

$$\rho(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{1 \wedge |n_j - m_j|}{2^{k+1}}$$

によって定めよう．

いま，Z の閉部分集合に値をとる正則 Souslin スキームで，以下の条件を満たすものが存在する．

(i) A_s の直径は $1/|s|$ 以下である．
(ii) $A_s = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{sk}$ [56]．
(iii) $Z = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$．

これは実際，次のような手順で帰納的に構成できる．$\{z_n; n \in \mathbb{N}\}$ を Z の稠密部分集合とし，A_n を中心 z_n，半径 $1/2$ の閉球とする．上の条件 (i)–(iii) を満たす $(A_s)_{s \in \mathbb{N}^n}$ が与えられているとする．このとき A_s は可分距離空間 Z の閉部分区間なので，これもまた閉部分空間である．その稠密な可算集合 $\{x_{sn}\}_n$ を選んで，A_{s_n} を中心 x_{sn} で半径 $(2(n+1))^{-1}$ の閉球と，A_s の共通部分とする．このようにして作られた Souslin スキームは上の条件 (i)–(iii) を満たす．

この Souslin スキームを用いて連続全射 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to Z$ を構成しよう．$\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に対して，$(A_{\mathbf{n}|_k})_{k \in \mathbb{N}}$ は閉集合の減少列で $\mathrm{diam}(A_{\mathbf{n}|_k}) \to 0$ を満たす．したがって $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_{\mathbf{n}|_k}$ はただ 1 点からなり，これを $h(\mathbf{n})$ と定める．このとき，写像 $h\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to Z$ は連続であることを示そう．$k \geq 1$ とする．$\rho(\mathbf{n}, \mathbf{m}) < 1/2^k$ なら $\mathbf{n}|_k = \mathbf{m}|_k = 0$ なので，$h(\mathbf{n}), h(\mathbf{m}) \in A_{\mathbf{n}_k}$ が成立．よって $d_Z(h(\mathbf{n}), h(\mathbf{m})) \leq \mathrm{diam}(A_{\mathbf{n}_k}) \leq \frac{1}{k}$ が成り立つ．すなわち，$h\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to Z$ は一様連続である．後は，h が全射であることを示せばよい．$z \in X$ とすれば，$A = (A_s)$ の定義より $z \in A_{n_0}$ なる $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在する．さらに $A_{n_0} = \bigcup_n A_{n_0 n}$ だから，$x \in A_{n_0 n_1}$ なる n_{n_1} が存在する．このようにして $\mathbf{n}$ を再帰的に構成すれば，$h(\mathbf{n}) = z$ がわかる．

最後に，$f = g \circ h\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to A$ と定めれば，これは連続全射の合成なので連続全射である．

(iv) $\Longrightarrow$ (v)．$f\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to A$ を連続全射とすれば，そのグラフ $\Gamma_f \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X$ は閉集合となる[57]．このとき，A は $\mathrm{pr}_2(\Gamma_f) = f(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = A$ と表現される．

(v) $\Longrightarrow$ (i)．ポーランド空間 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X$ の閉部分空間 $F \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X$ はまたポーランド空間と見なせるので，連続写像 $\mathrm{pr}_2|_F\colon F \to X$ による像 $\mathrm{pr}_2(F)$ は解析集合である．　□

56）st は s と t を並べたものであった．
57）ハウスドルフ空間への連続写像のグラフは，積空間の閉集合である．

A.3　分離定理

A.3 節では，共通部分をもたない二つの解析集合は Borel 集合で分離できるという Lusin の分離定理の証明を行う．さらにその応用として，ポーランド空間の Borel 集合とは解析集合かつ余解析集合（補集合が解析集合）であるような集合に他ならないことを明らかにする．

集合 X の部分集合 A, B, C について，$A \subset C$ かつ $B \subset X \setminus C$ が成り立っているとき，C は A と B を分離する (separate) という．

定理 A.11 (Lusin の分離定理)**.** X をポーランド空間，とし A, B をその解析集合とする．A と B の共通部分が空なら，それらはある Borel 集合で分離できる．

定理の証明の前に，一つ補題を用意する．

補題 A.12. 位相空間 X の部分集合 P, Q について $P = \bigcup_n P_n$, $Q = \bigcup_m Q_m$ が成り立っているとする．全ての n, m について P_n と Q_m が Borel 集合で分離できるなら，P と Q もボレル集合で分離できる．

証明　$R_{n,m}$ は $P_n \subset R_{n,m}$ かつ $Q_m \subset X \setminus R_{n,m}$ を満たす Borel 集合とする．このとき $R = \bigcup_n \bigcap_m R_{n,m}$ とすれば，これは P と Q を分離する Borel 集合である．実際，全ての n, m に対して $P_n \subset R_{n,m}$ だから $P = \bigcup_n P_n \subset \bigcup_n \bigcap_m R_{n,m}$ であり，また全ての n, m に対して $Q_m \subset X \setminus R_{n,m}$ だから $\bigcup_m Q_m \subset \bigcup_m \bigcap_n X \setminus R_{n,m} = X \setminus \bigcup_n \bigcap_m R_{n,m}$ となる．□

定理 A.11 の証明　**Step 1：準備．** A と B は空でないとして示せば十分である．$f\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to A$ と $g\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to B$ を連続全射とする．$s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ に対して定まる $\{\mathbf{n} \mid \mathbf{n}|_{|s|} = s\} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ を $\Sigma(s)$ で表すことにする．これは射影による $\{s\} \subset \mathbb{N}^{|s|}$ の引き戻しなので，$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の閉集合であることに注意しておく．この記法を用いて，$A_s = f(\Sigma(s))$ および $B_s = g(\Sigma(s))$ と定義する．

Step 2：証明に使う主張の証明． まずは，次の主張を示す．

主張 1

任意の $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に対してある k が存在して，$A_{\mathbf{n}|_k}$ と $B_{\mathbf{m}|_k}$ は Borel 集合で分離される．

$\{\Sigma(\mathbf{n}|_k); k \in \mathbb{N}\}$ と $\{\Sigma(\mathbf{m}|_k); k \in \mathbb{N}\}$ はそれぞれ $\mathbf{n}, \mathbf{m}$ に収束するフィルター基底であり，f の連続性より $\{A_{\mathbf{n}|_k}; k \in \mathbb{N}\}$ と $\{B_{\mathbf{m}|_k}; k \in \mathbb{N}\}$ はそれぞれ $f(\mathbf{n}) \in A_s \subset A$ と $g(\mathbf{m}) \in B_s \subset B$ に収束するフィルター基底となる．いま A と B は共通部分をもたないから，$f(\mathbf{n}) \in U$, $g(\mathbf{m}) \in V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ を満たすような X の開集合 U と V が存在する．フィルター基底の収束性より，十分大きい n をとれば $A_{\mathbf{n}|_k} \subset U$ かつ $B_{\mathbf{n}|_k} \subset V$ となり，$A_{\mathbf{n}|_k}$ と $B_{\mathbf{n}|_k}$ は Borel 集合で分離されることがわかった．

Step 3：定理の証明． 先ほどの主張 1 より，次の主張を示せば十分であることがわかる．

主張 2

任意の $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に対して，ある k が存在して，$A_{\mathbf{n}|_k}$ と $B_{\mathbf{m}|_k}$ は Borel 集合で分離されるとする．このとき，A と B は Borel 集合で分離できる．

対偶を示すことにする．A と B は Borel 集合で分離できないとする．このとき，いかなる k

について $A_{\mathbf{n}|_k}$ と $B_{\mathbf{m}|_k}$ が分離できないような列 $\mathbf{n}$ と $\mathbf{m}$ を再帰的に構成しよう．$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ であることに注意すれば，補題 A.12 よりある $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ で A_{n_0} と B_{m_0} が分離できないようなものが存在する．次に，$A_{n_0\ldots n_{k-1}}$ と $B_{n_0\ldots n_{k-1}}$ が Borel 集合で分離できないと仮定する．このとき $A_{n_0\ldots n_{k-1}} = \bigcup_n A_{n_0\ldots n_{k-1}n}$ かつ $B_{n_0\ldots n_{k-1}} = \bigcup_n B_{n_0\ldots n_{k-1}n}$ が成り立つことに注意すれば，やはりある n_k, m_k で $A_{n_0\ldots n_{k-1}n}$ と $B_{n_0\ldots n_{k-1}n}$ が Borel 集合で分離できないようなものがとれる．これにより，求める性質をもつ列 $\mathbf{n} = (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ と $\mathbf{m} = (m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ が構成された． □

系 A.13. X をポーランド空間とする．$A \subset X$ が Borel 集合であるための必要十分条件は，A と $X \setminus A$ がともに解析集合であることである．

証明　A が Borel 集合なら $X \setminus A$ も Borel 集合であり，命題 A.2 よりこれらは解析集合である．

$A \subset X$ を解析集合とし，さらに $X \setminus A$ も解析集合であるとする．A と $X \setminus A$ は共通部分が空の解析集合だから，定理 A.11 よりある Borel 集合 B で $A \subset B$ かつ $X \setminus A \subset X \setminus B$ を満たすものが存在する．このとき $A = B$ であり，A は X の Borel 集合である． □

A.4　標準可測空間，解析的可測空間

A.4 節では，Souslin 空間の可測空間としての性質を調べる．本節での目標は，解析的可測空間が Blackwell 空間であることを示すことと，Souslin 空間は解析的空間であることを示すことである．

まずは可測空間に関する用語をいくつか導入しよう．

定義 A.14. $(X, \mathscr{A})$ を可測空間とする．

(i) X の部分集合からなる可算族 $\mathscr{E}$ で $\sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{A}$ を満たすものが存在するとき，$\mathscr{A}$ は可算生成 (countably generated) であるという．

(ii) $\mathscr{A}$ は可算生成かつすべての 1 点集合を含むとする．さらに，任意の可算生成かつすべての 1 点集合を含む $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ に対して $\mathscr{B} = \mathscr{A}$ が成り立つとき，$(X, \mathscr{A})$ を Blackwell 空間 (Blackwell space) という．

(iii) $x \in X$ とする．集合 $\bigcap_{x\in A\in\mathscr{A}} A$ を，$\mathscr{A}$ における x を含むアトム (atom) という．

(iv) $\mathscr{E}$ を X の部分集合族とする．全ての $x, y \in X$ に対して，ある $A \in \mathscr{E}$ で $x \in A$ かつ $y \notin A$ を満たすから，あるいは $x \notin A$ かつ $y \in A$ を満たすものが存在するとき，$\mathscr{E}$ は分離的であるという．

(v) $\mathscr{A}$ の可算部分集合で分離的なものが存在するとき，$\mathscr{A}$ は可算分離的 (countably separated) であるという．

(vi) あるポーランド空間と可測空間として同型である空間を，標準可測空間 (standard measurable space) と呼ぶ．

(vii) ある解析集合と可測空間として同型であるような可測空間を，解析的可測空間 (analytic measurable space) という．

一般にアトムは可測集合とは限らない．$\mathscr{A}$ が分離的なら，$x \in X$ を含むアトムは 1 点集合である．$\mathscr{A}$ が可算分離的なら，アトム $\{x\}$ は $\mathscr{A}$-可測となる．1 点集合が可測なら，x を含むアトムは

$\{x\}$ である．$\mathscr{A}$ が可算生成的かつ分離的なら，

X が第 2 可算な Haudorff 空間なら，$\mathscr{B}(X)$ は可算生成かつ可算分離的である．実際，X の可算開基は分離的で $\mathscr{B}(X)$ を生成する集合族になっている．ゆえにポーランド空間は可測空間として可算生成かつ可算分離的である．したがって標準可測空間の σ 代数は可算生成かつ可算分離的となる．

命題 A.15. $(X, \mathscr{A})$ を解析的可測空間，Y をポーランド空間，$f\colon X \to Y$ を可測関数とする．このとき，任意の $A \in \mathscr{A}$ の像 $f(A)$ は Y の解析集合である．

証明　$(Z, \mathscr{B}(Z))$ を $(X, \mathscr{A})$ と可測空間として同型である（あるポーランド空間の）解析集合とし，$g\colon Z \to X$ を同型写像とする．このとき $f(A) = f \circ g(g^{-1}(A))$ であることに注意する．$B = g^{-1}(A)$ とおけば，$B \in \mathscr{B}(Z)$ である．B は解析集合の Borel 部分集合であるから，また解析集合である[58]．$f \circ g\colon Z \to Y$ は可測関数なので命題 A.7 により $f(A) = f \circ g(g^{-1}(A))$ はまた解析集合となる．　□

補題 A.16. $\mathscr{E}$ を X の部分集合族とする．このとき，$\sigma(\mathscr{E})$ が分離的となる必要十分条件は，$\mathscr{E}$ が分離的であることである．

証明　$\mathscr{E}$ が分離的なら $\sigma(\mathscr{E})$ が分離的になることは明らかであろう．逆を示すために，その対偶を示すことにする．$\mathscr{E}$ は分離的でないとし，(x, y) を $\mathscr{E}$ で分離できない点の組とする．ここで

$$\mathscr{A} = \{A \subset X \mid \{x, y\} \subset A \text{ または } \{x, y\} \subset X \setminus A \text{ が成り立つ}\}$$

と定義する．このとき $\mathscr{A}$ は $\mathscr{E}$ を含む σ 代数であるから，$\sigma(\mathscr{E}) \subset \mathscr{A}$ が成り立つ．すなわち，$\sigma(\mathscr{E})$ は x と y を分離しない．　□

命題 A.17. X 上の σ 代数 $\mathscr{A}$ が可算生成かつ分離的なら，$\mathscr{A}$ は可算分離的である．

証明　補題 A.16 より明らか．　□

補題 A.18. $\mathscr{A}$ を X 上の可算生成的な σ 代数とする．$\mathscr{A}$ は $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ によって生成されるとし，$F\colon X \to 2^{\mathbb{N}}$ を $x \mapsto (1_{A_n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ で定める．（ただし，$2 = \{0, 1\}$ は離散空間と考える．）このとき，$\mathscr{A}$ は F による $\mathscr{B}(2^{\mathbb{N}})$ の引き戻しである．

証明　F による $\mathscr{B}(2^{\mathbb{N}})$ の引き戻しを $F^*\mathscr{B}(2^{\mathbb{N}})$ で表すことにする．まずは，$\mathscr{B}(2^{\mathbb{N}}) = \mathscr{B}(2)^{\mathbb{N}}$ が成り立つことに注意しておこう．F は可測関数 $x \mapsto 1_{A_n}(x)$ の積であるから，$\mathscr{B}(2^{\mathbb{N}})$ 可測である．したがって $F^*\mathscr{B}(2^{\mathbb{N}}) \subset \mathscr{A}$ が成り立つ．また，各 A_n はファイバー $F^{-1}\mathrm{pr}_n^{-1}(1)$ に等しいから[59]，$A_n \in \mathscr{B}(2^{\mathbb{N}})$ を満たす．これより $\mathscr{A} = \sigma(A_n; n \in \mathbb{N}) \subset \mathscr{B}(2^{\mathbb{N}})$ も成り立つ．　□

解析的可測空間が Blackwell 空間であることを示すためには，以下の命題が重要である．

命題 A.19. $(X, \mathscr{A})$ を解析的可測空間とし，$\mathscr{A}_0$ を可算生成的な $\mathscr{A}$ の部分-σ 代数とする．このとき，$A \subset X$ について次の 2 条件は同値である．

58）　B が解析集合 Z の Borel 部分集合なら，全体のポーランド空間の Borel 集合 C を用いて $C \cap A$ と表現される．Z と C はともに全体のポーランド空間の解析集合なので，命題 A.2 により解析集合である．

59）　pr_n は第 n 射影 $2^{\mathbb{N}} \to \{0, 1\}$．

(i) $A \in \mathscr{A}_0$.

(ii) $A \in \mathscr{A}$ であり，A は $\mathscr{A}_0$ におけるアトムの和として表現される．

証明　(i) $\Longrightarrow$ (ii) は明らかなので，(ii) $\Longrightarrow$ (i) を示そう．$F\colon X \to 2^{\mathbb{N}}$ を $\mathscr{A}_0 = F^*\mathscr{B}(2^{\mathbb{N}})$ なる写像とする．（補題 A.18 のもの．）A を $\mathscr{A}_0$ における $x \in X$ を含むアトムとすれば，これは $A = F^{-1}F(x)$ を満たす．実際，$A = F^{-1}B$ と表現されているとき $x \in A$ は $F(x) \in B$ と同値なので，

$$\bigcap_{x \in A \in \mathscr{A}_0} A = \bigcap_{F(x) \in B \in \mathscr{B}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})} F^{-1}B = F^{-1}\left(\bigcap_{F(x) \in B \in \mathscr{B}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})} B\right)$$

が成立．$2^{\mathbb{N}}$ はポーランド空間なので $F(x)$ を含む $\mathscr{B}2^{\mathbb{N}}$ のアトムは $\{F(x)\} \in \mathscr{B}\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ であり，ゆえに $F^{-1}(F(x))$ は x を含むアトムである．

さて，$A \in \mathscr{A}$ は $\mathscr{A}_0$ におけるアトムの和で表現されているとしよう．いま A, $X \setminus A \in \mathscr{A}$ であるから，命題 A.15 による $F(A)$ と $F(X \setminus A)$ は $2^{\mathbb{N}}$ の解析集合である．さらに，A が $\mathscr{A}_0$ におけるアトムの和で表現されているという条件と先ほどまでの議論により，$A = \bigcup_{x \in A} F^{-1}F(x)$ が成り立つ．これより $y \in F(A)$ なら $F^{-1}(y) \subset A$ であり，$F^{-1}(y) \cap (X \setminus A) = \emptyset$ となる．これより $y \notin X \setminus A$ となり[60]，$F(A) \cap F(X \setminus A) = \emptyset$ がわかる．したがって $F(A)$ と $F(X \setminus A)$ は共通部分を持たない解析集合であり，定理 A.11 によりある Borel 集合 $C \subset 2^{\mathbb{N}}$ によって $F(A) \subset C$, $F(X \setminus A) \subset 2^{\mathbb{N}} \setminus C$ と分離される．この包含関係を変形すれば $A \subset FF^{-1}(A) \subset F^{-1}(C)$ かつ $X \setminus A \subset F^{-1}F(X \setminus A) \subset X \setminus F^{-1}(C)$ を得る．すなわち $F^{-1}(C) = A$ であり，$A \in \mathscr{A}_0 = F^*\mathscr{B}(2^{\mathbb{N}})$ がわかる．　□

系 A.20. 解析的可測空間は Blackwell 空間である．

証明　$(X, \mathscr{A})$ を解析的可測空間とし，$\mathscr{A}_0$ は $\mathscr{A}$ の部分 σ 代数で可算生成かつ 1 点集合が可測であるようなものとする．$A \in \mathscr{A}$ とすれば，$\mathscr{A}_0$ は全ての 1 点集合を含むから，$x \in A$ を含む $\mathscr{A}_0$ のアトムは 1 点集合 $\{x\}$ である．したがって，$A = \bigcup_{x \in A}\{x\}$ となり A は命題 A.19 より $A \in \mathscr{A}_0$ がわかる．ゆえに $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}_0$ である．　□

系 A.21. 解析的可測空間の σ 代数は可算生成的かつ分離的である．

ここからは，Souslin 空間や Lusin 空間の，可測空間としての構造を調べよう．

命題 A.22. (i) $(X, \mathscr{A})$ を解析的可測空間とし，可測空間 $(Y, \mathscr{B})$ は可算生成的かつ分離的であるとする．$f\colon X \to Y$ が可測な全射ならば，$(Y, \mathscr{B})$ は解析的可測空間である．

(ii) $(X, \mathscr{A})$ を標準可測空間とし，可測空間 $(Y, \mathscr{B})$ は可算生成的かつ分離的であるとする．$f\colon X \to Y$ が可測な全単射ならば，$(Y, \mathscr{B})$ は解析的可測空間である．

証明　(i) $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を $\mathscr{B}$ を生成する可算族とし，$F\colon Y \to 2^{\mathbb{N}}$ を補題 A.17 のものとする．このとき補題 A.16 より F は単射であり，したがって $\mathscr{B}$ は $(F(Y), \mathscr{B}(F(Y))$ と可測空間として同型である．いま $F(Y) = (F \circ f)(X)$ なので命題 A.15 より $F(Y)$ は解析集合であり，ゆえに $(Y, \mathscr{B})$ は解析的可測空間である．

---

60)　一般に，$B \subset X$ に対して $F(B) = \{y \in Y \mid F^{-1}(y) \cap B \neq \emptyset\}$ が成り立つのであった．

(ii) $(X,\mathscr{A})$ と $(Y,\mathscr{B})$ は可測空間として同型であることを示せばよい．そのためには，任意の $A \in \mathscr{A}$ に対して $f(A) \in \mathscr{B}$ が成り立つことを示せば十分である．(i) の結果より $(Y,\mathscr{B})$ は解析的なので，あるポーランド空間 Z の解析集合 Z_0 と同型である．$g\colon Y \to Z_0$ を可測空間としての同型写像とする．このとき，命題 A.15 より $g(f(A))$ と $g(f(X \setminus A))$ はともに Z の解析集合である．いま f と g は全単射なので $g(f(X \setminus A)) = Y \setminus g(f(A))$ であり，命題 A.13 より $g(f(A))$ はボレル集合となる．いま g は同型なので，$f(A) \in \mathscr{B}$ がわかる． □

系 A.23. (i) $(X,\mathscr{A})$ を解析的可測空間とし，可測空間 $(Y,\mathscr{B})$ は可算分離的であるとする．$f\colon X \to Y$ が可測な全射ならば，$(Y,\mathscr{B})$ は解析的可測空間である．

(ii) $(X,\mathscr{A})$ を標準可測空間とし，可測空間 $(Y,\mathscr{B})$ は可算分離的であるとする．$f\colon X \to Y$ が可測な全単射ならば，$(Y,\mathscr{B})$ は標準可測空間である．

証明　命題 A.22 より，$(Y,\mathscr{B})$ が可算生成的であることを示せばよい．$\mathscr{C}$ を $\mathscr{B}$ の可算部分集合で，分離的なものとする．このとき，$\sigma(\mathscr{C}) \supset \mathscr{B}$ であることを示そう．定義より明らかに，$\sigma(\mathscr{C})$ は可算生成的かつ可算分離的であり，よって 1 点集合は可測であることに注意する．

$B \in \mathscr{B}$ に対して，$\mathscr{D}_B = \sigma(\mathscr{C} \cup \{B\})$ と定義する．$\mathscr{D}_B$ は可算生成的かつ分離的であり，f は $\mathscr{D}_B/\mathscr{A}$-可測な全射なので，命題 A.22 より $(Y,\mathscr{D}_B)$ は解析的である．系 A.20 より解析的可測空間は Blackwell 空間なので，$\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{D}_B$ である．したがってすべての $B \in \mathscr{B}$ に対して $B \in \sigma(\mathscr{C})$ となり，$\mathscr{B} \subset \sigma(\mathscr{C})$ がわかる． □

命題 A.24. (i) Souslin 空間は解析的可測空間である．

(ii) Lusin 空間は標準可測空間である．

証明　(i) X を Souslin 空間とし $f\colon Z \to X$ をポーランド空間からの連続全射とする．$\mathscr{B}(X)$ が可算分離的であることを示せば，命題 A.23 より $(X,\mathscr{B}(X))$ は解析的であることがわかる．$\mathscr{U}$ を，$U \times V \subset X \times X \setminus \Delta_X$ を満たすような開集合 $U \times V$ の全体とする．これは $X \times X \setminus \Delta_X$ の開被覆であるから，$X \times X$ の強 Lindelöf 性より，可算な部分族 $\mathscr{U}_0$ が存在する．ここで $\mathscr{V} = \{\mathrm{pr}_1(V), \mathrm{pr}_2(V) \mid V \in \mathscr{U}_0\}$ と定めれば，$\mathscr{V}$ は可算な分離族である．

(ii) Lusin 空間は Souslin 空間なので，(i) より可算分離的である．これより，命題 A.23 を用いれば Lusin 空間は標準可測空間であることがわかる． □

A.5　Choquet 容量

A.5 節では，Choquet 容量を導入し，その性質を調べる．Choquet 容量を用いると，解析集合の可測性を調べることができる．また，Choquet 容量は Souslin 空間上の有限測度の緊密性を調べるのにも有用である．これについては，A.6 節で扱う．

定義 A.25. X を Hausdorff 空間とする．$I\colon \mathrm{Pow}(X) \to [0,\infty]$ が次の 3 条件を満たすとき[61]，I を X 上の容量 (capacity) と呼ぶ．

61）Pow(X) は X の冪集合．

(i) $A \subset B$ なら，$I(A) \leq I(B)$.
(ii) (A_n) が増大列なら，$\lim_{n\to\infty} I(A_n) = I\left(\bigcup_n A_n\right)$.
(iii) K がコンパクト集合なら，$I(K) < \infty$.
(iv) K がコンパクトで $I(K) < a$ なら，ある開集合 $U \supset K$ で $I(U) < a$ を満たすものがとれる.

条件 (iv) は

$$I(K) = \inf\{I(U) \mid U\colon \mathrm{open} K \subset U\}$$

と言い換えても良いだろう.

代表的な容量は有限測度から作られるものである.

命題 A.26. X をポーランド空間とし，μ をその上の有限 Borel 測度とする．このとき μ から作られる外測度 μ^* は X 上の容量である．ただし，外測度 μ^* は以下で定義される.

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) \mid B \in \mathscr{B}(X)\}$$

証明　単調性は外測度の性質より明らかである．μ^* の下からの連続性を示そう．(A_n) を X の部分集合の増大列とし，$A = \bigcup_n A_n$ と定める．μ^* の単調性より $\lim_n \mu^*(A_n) \leq \mu^*(A)$ は明らかである．逆向きの不等号を示そう．$\varepsilon > 0$ とし，$B'_n \in \mathscr{B}(X)$ を

$$\mu(B'_n) < \mu^*(A_n) + \varepsilon, \qquad B'_n \supset A_n$$

を満たすように選ぶ．このとき $B_n = \bigcap_{k\geq n} B'_k \in \mathscr{B}(X)$ と定めれば，(B_n) は増大列かつ

$$A_n = \bigcap_{k\geq n} A_k \subset \bigcap_{k\geq n} B'_k = B_n$$

であって，さらに

$$\mu(B_n) \leq \mu(B'_n) < \mu^*(A_n) + \varepsilon$$

を満たす．ここで $n \to \infty$ の極限をとれば，

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \leq \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon$$

が成り立つ．これより

$$\mu^*(A) \leq \mu(B) \leq \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon$$

となり，$\varepsilon > 0$ は任意に選んでいたから $\mu^*(A) \leq \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n)$ がわかる．したがって μ^* は下からの連続性を満たす.

μ は有限測度であるから，特に局所有限である．ポーランド空間上の有限 Borel 測度はラドン測度なので[62]，任意の Borel 集合に対して

$$\mu(B) = \inf\{\mu(O) \mid O \text{ is open},\ B \subset O\}$$

62) Radon 測度の定義は，次の A.6 節を参照せよ．ポーランド空間上の有限測度がラドン測度になることは，特に容量の議論を用いずに証明できるので，循環論法に陥る心配はない.

が成り立つ．特に B をコンパクト集合としてとれば，定義 A.25 の条件 (iv) が従う． □

命題 A.27. X, Y を Hausdorff 空間とし，$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．I が Y 上の容量なら，$I_f(A) = I(f(A))$ は X 上の容量である．

証明　単調性は明らかである．K が X のコンパクト集合なら $f(K)$ は Y のコンパクト集合となるので，局所有限性もすぐにわかる．$\bigcup_n f(A_n) = f\left(\bigcup_n A_n\right)$ に注意すれば上からの連続性もわかる．最後に，容量の定義の条件 (iv) を確かめよう．K を X のコンパクト集合とし，$I_f(K) = I(f(K)) < a$ とする．$f(K)$ は Y でコンパクトなので，ある開集合 $O \supset f(K)$ で $I(O) < a$ を満たすものが存在する．f の連続性より $f^{-1}(O)$ は開集合で，さらに

$$I_f(f^{-1}(O)) = I(ff^{-1}(O)) \leq I(O) < a$$

を満たすので，I_f が条件 (iv) を満たすことがわかった． □

定義 A.28. I を Hausdorff 空間 X 上の容量とし，$A \subset X$ とする．

$$I(A) = \sup\{I(K) \mid K \subset A,\ K \text{ is compact}\}$$

が成り立つとき，A は I-可容 (capacitable) であるという．すべての容量 I に対して可容となると，A は普遍可容 (universally capacitable) であるという．

定理 A.29 (The Choquet Capacitability theorem)**.** ポーランド空間上の解析集合は普遍可容である．

定理 A.29 を示す前に，まずは特殊なポーランド空間の可容性を証明しよう．

命題 A.30. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ は普遍可容である．

証明　I を $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上の容量とする．$s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に対して，

$$\Sigma^*(s) = \{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \text{各点ごとの順序で } \mathbf{n}|_{|s|} \leq s \text{ を満たす}\}$$

と定義する．

$I(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) > a$ としたとき，$I(K) \geq a$ となるようなコンパクト集合 K を見つけよう．$\Sigma^*(n)$ は n について増大列で $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 全体を被覆するから，十分大きい n_0 を一つ固定して $I(\Sigma^*(n_0)) > a$ と出来る．また $\Sigma^*(n_0 n)$ は n について増大的で $\Sigma^*(n_0)$ を被覆するから，同様にして $I(\Sigma^*(n_0 n_1)) > a$ と出来る．このようにして再帰的に $I(\Sigma^*(\mathbf{n}|_k)) > a$ $(k \in \mathbb{N})$ を満たすような $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ を構成できる．ここで，$K = \{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \mathbf{m} \leq \mathbf{n}\}$ （順序は各点ごとの順序）と定義すれば，これは $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ のコンパクト集合である．実際これはコンパクト集合族 $(\{\mathbf{n}_0, \ldots, \mathbf{n}_k\})_{k \in \mathbb{N}}$ の直積なので，Tychonoff の定理によりコンパクトであることがわかる．これが実際に $I(K) \geq a$ を満たすことを示そう．$I(K) < a$ なら，容量の定義よりある開集合 $U \supset K$ で $I(U) < a$ を満たすようなものが存在する．いま $U \supset K$ だから，ある k で $\Sigma^*(\mathbf{n}|_k) \subset U$ を満たすものが存在する．このとき $a > I(U) > I(\Sigma^*(\mathbf{n}|_k))$ となり，$\mathbf{n}$ の性質に矛盾する．よって $I(K) \geq a$ が成り立つ．

さて，最後に先ほど説明抜きで用いた事実「ある k で $\Sigma^*(\mathbf{n}|_k) \subset U$ を満たすものが存在する」を証明しよう．こちらも背理法で証明する．「全ての k で $\Sigma^*(\mathbf{n}|_k) \cap (\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus U)$ が成り立つ」と仮定する．このとき，$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の列 $(x^{(n)})$ で $x^{(n)} \in \Sigma^*(\mathbf{n}|_k) \cap (\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus U)$ を満たすようなものが存在する．このとき，(x^n) の部分列 $(x^{(n_k)})$ で $x^{(n_k)} \to \exists x \leq \mathbf{n}$ を見たすようなものを選べる．実際，次のような手順を踏めばよい．$\{0, \ldots, \mathbf{n}(\mathbf{0})\}$ に属する 1 点 p で，無限個の n に対して $x^{(n)}(0) = p$ を満たすようなものが存在する．その点を $x(0)$ とおき，その部分列を $x^{(n_{0,i})}$ と表記する．同様の操作で再帰的に列 $x \leq \mathbf{n}$ と $(x^{(n_{k,i})})$ が構成できる．$x^{(n_k)} = x^{(n_{k,k})}$ とおけば，これが求める収束列である．この列は閉集合 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus U$ の収束列なので，その極限 x も $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus U$ に属さなければならない．一方で，条件 $x \leq \mathbf{n}$ より $x \in K \subset U$ となるから，これは矛盾である．□

定理 A.29 の証明　X をあるポーランド空間 Y の解析集合とし，I を Y 上の容量とする．X が空集合なら主張は明らかなので，X は空でないとして示せばよい．$f\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X \subset Y$ を連続全射とすれば（命題 A.10），命題 A.27 より $A \mapsto I(f(A))$ は $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上の容量を定める．

いま $I(X) > a$ と仮定する．命題 A.30 より $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ は普遍可容なので，$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ のコンパクト集合 K を上手くとれば $I(X) = I(f(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})) > I(f(K)) > a$ と出来る．f の連続性より $f(K)$ は Y のコンパクト集合であり $f(K) \subset f(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = X$ を満たすから，これで X の I-可容性が示された．□

A.6　Souslin 空間上の測度

A.6 節では，Souslin 空間上の有限測度は Radon 測度となることを示す．まずは Radon 測度の定義を復習しよう．

定義 A.31. $(X, \mathscr{A})$ 可測空間，$\mu\colon \mathscr{A} \to [0, \infty]$ を測度とする．さらに $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$ とする．

(i) $\mu(A) = \inf\{\mu(C) \mid C \in \mathscr{C},\ A \subset C\}$ が成り立つとき，$A \in \mathscr{A}$ は $(\mu, \mathscr{C})$-外正則であるという．
(ii) $\mu(A) = \sup\{\mu(C) \mid C \in \mathscr{C},\ C \subset A\}$ が成り立つとき，$A \in \mathscr{A}$ は $(\mu, \mathscr{C})$-内正則であるという．

この用語は一般的なものではなく，このノート独自のものである．

定義 A.32. X を位相空間とし，$\mathscr{O}_X$ と $\mathscr{K}_X$ をそれぞれその開集合，コンパクト集合全体の集合とする．

(i) X 上の $[0, \infty]$-値 Borel 測度 μ は
  (a) 全ての $K \in \mathscr{K}_X$ で $\mu(K) < \infty$.
  (b) 全ての開集合は $(\mu, \mathscr{K}_X)$-内正則である．
  (c) 全ての Borel 集合は $(\mu, \mathscr{O}_X)$-外正則である．
  を満たすとき，Radon 測度 (Radon measure) と呼ばれる．
(ii) 全ての非負有限測度が Radon 測度となるような位相空間を Radon 空間 (Radon space) という．

良く知られているように，ポーランド空間は Radon 空間である．付録 A でこれまで調べてきた結果を用いれば，Souslin 空間が Radon 空間であることを証明できる．

定理 A.33. Souslin 空間は Radon 空間である．

証明　X を Souslin 空間とし，μ を $(X, \mathscr{B}(X))$ 上の有限測度とする．このとき，任意の Borel 集合が $(\mu, \mathscr{K}_X)$-内正則であることを示せばよい．実際，Borel 集合が $(\mu, \mathscr{K}_X)$-内正則なら，Borel 集合として特に開集合考えればよいから，開集合が $(\mu, \mathscr{K}_X)$-内正則であることがわかる．また，B を Borel 集合としたとき，$X \setminus B$ の内正則性より

$$\begin{aligned}
\mu(B) &= \mu(X) - \mu(X \setminus B) \\
&= \mu(X) - \sup\{\mu(K) \mid K \in \mathscr{K}_X,\ K \subset X \setminus B\} \\
&= \inf\{\mu(G) \mid B \subset G,\ X \setminus G \in \mathscr{K}_X\} \\
&\geq \inf\{\mu(G) \mid B \subset G,\ G \in \mathscr{O}_X\} \geq \mu(B)
\end{aligned}$$

となるので，B は $(\mu, \mathscr{O}_X)$-外正則である．

さて，それでは先ほどの宣言通り，任意の Borel 集合が $(\mu, \mathscr{K}_X)$-内正則であることを示そう．B を X の空でない Borel 集合として示せばよい．$h\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ を連続全射とする．このとき $h^{-1}(B)$ は $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の空でない Borel 集合なので，命題 A.2 より特に $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の空でない解析集合である．したがって，あるポーランド空間からの連続全射 $g\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to h^{-1}(B)$ が存在する（命題 A.10）．ここで $f = h \circ g$ と定義すれば，$A \mapsto \mu^*(f(A))$ は $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上の容量を定める（命題 A.26 と命題 A.27）．$\mu(B) = \mu^*(f(A)) > a$ とすれば，$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ は可容なので，あるコンパクト集合 $K \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ で $\mu^*(f(K)) > a$ を満たすものが存在する．f の連続性より $f(K)$ は X のコンパクト集合となるので，$\mu^*(f(K)) = \mu(f(K)) > a$ がわかる．すなわち，B は $(\mu, \mathscr{K}_X)$-内正則である．　□

B　条件付期待値と積分分解

B.1　条件付期待値

この節では，条件付き期待値とその一般化について基本的な事実を紹介する．確率論の多くの文献では確率空間とその上の可積分関数のみについて条件付き期待値を論じているが，条件付き期待値の理論はより一般的な設定化でも展開することができる．

定義 B.1. $(X, \mathscr{A})$ を可測空間，μ を $[0, \infty]$ 値測度，$\mathscr{B}$ を $\mathscr{A}$ の部分 σ 代数とする．

(i) $\mathbb{R}$ 値 $\mathscr{A}$-可測関数 f は f^+ または f^- が可積分であるとする．$\mathbb{R}$ 値関数 g が

(a) g は $\mathscr{B}$ 可測．

(b) 任意の $A \in \mathscr{B}$ に対して

$$\int_X 1_B(x) f(x)\, \mu(\mathrm{d}x) = \int_X 1_B(x) g(x)\, \mu(\mathrm{d}x)$$

が成り立つ．

を満たすとき，g は f の $\mathscr{B}$ 関する条件付き期待値であるという．

(ii) f を $\mathbb{R}$ 値 $\mathscr{A}$-可測関数とする．$\mathbb{R}$ 値関数 g が

(a) g は $\mathscr{B}$ 可測.
(b) $f1_B \in L^1(\mu)$ となる任意の $B \in \mathscr{B}$ に対して

$$\int_X 1_B(x)f(x)\,\mu(\mathrm{d}x) = \int_X 1_B(x)g(x)\,\mu(\mathrm{d}x)$$

が成り立つ.

を満たすとき，g は f の $\mathscr{B}$ に関する一般化条件付き期待値であるという[63)].

定義 B.1 において，条件付き期待値は明らかに条件付き期待値でもある．条件付き期待値を考えるためには f の積分が well-defined である必要があるため，少なくとも f^+ か f^- の一方は可積分でなければならない．一方，一般化条件付き期待値においては可積分性の制限がなく，通常の条件付き期待値よりは広いクラスの関数を扱うことが可能になる（はずである）.

補題 B.2. $(X, \mathscr{A}, \mu)$ を非負測度空間とし，$\mathscr{B}$ を $\mathscr{A}$ の部分 σ 代数とする．また，$f\colon X \to [0,\infty]$ を $\mathscr{A}$-可測関数とし，$g\colon X \to [0,\infty]$ を $\mathscr{B}$-可測関数とする．このとき次の条件は同値である.

(i) g は f の $\mathscr{B}$ に関する条件付き期待値である.
(ii) 任意の非負 $\mathscr{B}$-可測関数 h について

$$\int_X hg\,\mathrm{d}\mu = \int_X hf\,\mathrm{d}\mu$$

が成り立つ.

証明　(ii) $\Longrightarrow$ (i) は明らかであり，(i) $\Longrightarrow$ (ii) は単関数近似と単調収束定理を用いればよい.　□

定義 B.1 では μ は任意の非負測度としているが，実際に条件付き期待値がきちんと定まるためには測度にある程度の過程を課さなくてはならない．きちんと定まるというのは，まずは一意性の問題がある．条件付き期待値や一般化条件付き期待値に一意性を保証する条件を考えるために，まずは測度についてある種の“有限性”の概念を定義しよう.

定義 B.3. $(X, \mathscr{A})$ を可測空間，$\mu\colon \mathscr{A} \to [0,\infty]$ を測度とする.

(i) $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ を部分 σ 代数とする．列 $(B_n) \in \mathscr{B}^{\mathbb{N}}$ で，$X = \bigcup_n B_n$ かつ $\mu(B_n) < \infty$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ を満たすものが存在するとき，μ は $\mathscr{B}$-σ-有限であるという.
(ii) $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ を可測関数とする．測度 $|f| \bullet \mu$ が $\mathscr{B}$-σ-有限であるとき，f は $\mathscr{B}$-σ-可積分であるという.
(iii) $\mu(A) > 0$ を満たすような任意の $A \in \mathscr{A}$ に対して，ある $B \in \mathscr{A}$ で $0 < \mu(B) < \infty$ を満たすものが存在するとき，測度 μ は $\mathscr{B}$ に関して有限部分集合性 (finite subset property) をもつ，あるいは半有限 (semi-finite) であるという.
(iv) μ は有限部分集合性をもつとする．任意の $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$ が本質的上限をもつとき，μ は $\mathscr{B}$ に関して局所化可能 (localizable) であるという[64)].

63)　「一般化条件付き期待値」という用語はこれと異なる意味でつかわれることもあるので注意されたい.
64)　localizable measure の定義に有限部分集合性を含めない流儀もある．(Fonseca and Leoni [14])

μ が $\mathscr{B}$-σ-有限であるとは，$\mu|_{\mathscr{B}}$ が σ-有限であるということに他ならない．μ が半有限であるための必要十分条件は，$\mu(E) > 0$ なる可測集合に対して

$$\mu(E) = \sup\{\mu(F) \mid F \in \mathscr{A},\ F \subset E,\ 0 < \mu(F) < \infty\}$$

が成り立つことである．

補題 B.4. $(X, \mathscr{A}, \mu)$ は有限部分集合性を持つ測度空間とし，$f, g\colon X \to [0, \infty]$ を $\mathscr{A}$-可測関数とする．任意の $A \in \mathscr{A}$ について $\int_A f\,\mathrm{d}\mu \geq \int_A g\,\mathrm{d}\mu$ が成り立つなら，$f \geq g$ μ-a.e. である．

証明　対偶を示す．$\mu(\{f < g\}) > 0$ であると仮定する．$\omega \in \{f < g\}$ なら $0 \leq f(\omega) < \infty$ であるから，測度の連続性よりある $n \geq 1$ に対して $\mu(\{f < g, f \leq n\}) > 0$ となる．このとき μ の有限部分集合性より，$E \subset \{f < g, f \leq n\}$ かつ $0 < \mu(E) < \infty$ を満たすような $E \in \mathscr{A}$ が存在する．この E について

$$\int_E g\,\mathrm{d}\mu > \int_E f\,\mathrm{d}\mu$$

が成り立つ．（E 上 f は可積分であることに注意せよ．）□

ここで，条件付き期待値を考える際に有用な道具となる Radon-Nikodym の定理を復習しよう．

定理 B.5 (Radon-Nikodym)**.** $(X, \mathscr{A})$ を可測空間とし，$\mu\colon \mathscr{A} \to [0, \infty]$ を局所化可能測度とする．$\nu\colon \mathscr{A} \to [0, \infty]$ は $\nu \ll \mu$ かつ

$$\nu(A) = \sup\{\nu(A \cap E) \mid E \in \mathscr{A},\ \mu(E) < \infty\} \tag{B.1}$$

を満たすとする．このとき，ある可測関数 $u\colon X \to [0, \infty]$ で $\nu = u \bullet \mu$ を満たすものがただ一つ存在する．

条件 (B.1) は「ν が μ に対して有限部分集合性をもつ」というような条件である．μ が σ-有限ならば，明らかに (B.1) は満たされる．定理の証明は Fonseca and Leoni [14] や Rao [30] などを参照せよ．

Radon-Nikodym の定理を用いれば，条件付き期待値の存在と一意性を示すことができる．

定理 B.6. $(X, \mathscr{A}, \mu)$ を測度空間とし，$\mathscr{B}$ を $\mathscr{A}$ の部分 σ 代数とする．$(X, \mathscr{B}, \mu|_{\mathscr{B}})$ は局所化可能で，さらに全ての $A \in \mathscr{A}$ について次の条件が成り立つと仮定する．

$$\mu(A) = \sup\{\mu(A \cap B) \mid B \in \mathscr{B},\ \mu(B) < \infty\}. \tag{B.2}$$

このとき，任意の $[0, \infty]$-値 $\mathscr{A}$-可測関数 f に対して，その $\mathscr{B}$ に関する条件付き期待値が存在する．

証明　Radon-Nikodym の定理より，$f \bullet \mu|_{\mathscr{B}}$ が $\mathscr{B}$ と μ に関して条件 (B.1) を満たすことを示せばよい．$B \in \mathscr{B}$ を任意に選ぶ．$\mu(B) < \infty$ なら，条件 (B.1) は明らかに成り立つから，$\mu(B) = \infty$ の場合を考えればよい．

不等号

$$f \bullet \mu(B) \geq \sup\{f \bullet \mu(B \cap E) \mid E \in \mathscr{B},\ \mu(E) < \infty\}$$

は sup の定義より明らかである．右辺が ∞ となる場合は等号が成り立つので，右辺が有限値であるとして示せばよい．$B_0 \in \mathscr{B}$ について

$$f \bullet \mu(B_0) > \sup\{f \bullet \mu(B_0 \cap E) \mid E \in \mathscr{B},\ \mu(E) < \infty\} = r$$

が成り立っていると仮定する．このとき，r の定義より $(E_n) \in \mathscr{B}^{\mathbb{N}}$，$E_n \subset E_{n+1}$，$\mu(E_n) < \infty$，および

$$\lim_{n\to\infty} f \bullet \mu(B_0 \cap E_n) = r$$

を満たすものが存在する．$E = \bigcup_n E_n$ と定めれば，測度の連続性より

$$f \bullet \mu(B_0 \cap E) = \lim_{n\to\infty} f \bullet \mu(B_0 \cap E_n) = r$$

が成り立つ．$\mu(B_0 \setminus E) = 0$ なら，

$$f \bullet \mu(B_0) = f \bullet \mu(B_0 \cap E) + f \bullet \mu(B_0 \setminus E) = r$$

となり，仮定に矛盾する．$\mu(B_0 \setminus E) > 0$ の場合を考えよう．$B_0 \setminus E$ 上で $f = 0$，μ-a.e. なら，先ほどと同様に

$$f \bullet \mu(B_0) = f \bullet \mu(B_0 \cap E) + f \bullet \mu(B_0 \setminus E) = r$$

となり仮定に矛盾する．$\mu([B_0 \setminus E] \cap \{f > 0\}) > 0$ の場合は，条件 (B.2) よりある $F \in \mathscr{B}$ で，$\mu(F) < \infty$ かつ $\mu([B_0 \setminus E] \cap \{f > 0\} \cap F) > 0$ を満たすものが存在する．このとき，$E \cup F \in \mathscr{B}$，$\mu(E \cup F) < \infty$，および

$$\begin{aligned}\mu(B_0 \cap [E \cup F]) &= \mu(B_0 \cap E) + \mu(B_0 \cap [F \setminus E]) \\ &= r + \mu([B_0 \setminus E] \cap F) \\ &\geq r + \mu([B_0 \setminus E] \cap \{f > 0\} \cap F) \\ &> r\end{aligned}$$

が成り立つ．これは r の定義に矛盾する．以上の議論により，

$$f \bullet \mu(B_0) = \sup\{f \bullet \mu(B_0 \cap E) \mid E \in \mathscr{B},\ \mu(E) < \infty\}$$

が示された．　□

定義 B.7. 測度空間 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ と $\mathscr{B}$ が定理 B.6 の仮定を満たすとき，非負可測関数 f の条件付き期待値が μ-a.e. で一意に定まるので，それをを $E_\mu[f|\mathscr{B}]$ や $E_\mu^{\mathscr{B}}[f]$ などの記号で表す．考えている測度が明らかな場合には μ を省略して $E[f|\mathscr{B}]$，$E^{\mathscr{B}}[f]$，などと書いたりもする．可測関数 $f\colon X \to [-\infty, \infty]$ について f^+ または f^- が μ-可積分となるとき，$E_\mu[f|\mathscr{B}] = E_\mu[f^+|\mathscr{B}] - E_\mu[f^-|\mathscr{B}]$ と定義する．

条件付き期待値は，以下の基本性質を持つ．

命題 B.8. $(X, \mathscr{A}, \mathscr{B}, \mu)$ は定理 B.6 の仮定を満たすとする．

(i) f が $\mathscr{B}$ 可測で条件付き期待値が定義できるなら，μ-a.e. で $E_\mu^{\mathscr{B}}[f] = f$ が成り立つ．

(ii) $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}$ は部分 σ 代数で，定理 B.6 の $\mathscr{B}$ と同じ仮定を満たすとする．f の条件付き期待値が定義出来るならば，$E_\mu^{\mathscr{C}}[E_\mu^{\mathscr{B}}[f]] = E_\mu^{\mathscr{C}}[f]$ a.e. が成り立つ．

(iii) f，$g \in \mathscr{L}^0(X, \mathscr{A}; [0, \infty])$ なら，$E_\mu^{\mathscr{B}}[f + g] = E_\mu^{\mathscr{B}}[f] + E_\mu^{\mathscr{B}}[g]$ が成り立つ．

(iv) $f \in \mathscr{L}^0(X, \mathscr{A}; [0, \infty])$ かつ $g \in \mathscr{L}^0(X, \mathscr{B}; [0, \infty])$ なら，$E_\mu^{\mathscr{B}}[gf] = gE_\mu^{\mathscr{B}}[f]$ が成り立つ．

(v) $f \geq g \geq 0$ なら，$E_\mu^{\mathscr{B}}[f] \geq E_\mu^{\mathscr{B}}[g]$ が成り立つ．

(vi) (f_n) が非負 $\mathscr{A}$-可測関数の単調増大列なら，$\lim_{n\to\infty} E_\mu^{\mathscr{B}}[f_n] = E_\mu^{\mathscr{B}}[\lim_{n\to\infty} f_n | \mathscr{B}]$．（単調収束定理）

(vii) (f_n) が非負 $\mathscr{A}$-可測関数の列なら，$E_\mu^{\mathscr{B}}[\liminf_n f_n] \leq \liminf_n E_\mu^{\mathscr{B}}[f_n]$ a.e. が成り立つ．（Fatou の補題）

(viii) f の条件付き期待値が定義されるならば，$\left|E_\mu^{\mathscr{B}}[f]\right| \leq E_\mu^{\mathscr{B}}[\,|f|\,]$ が成り立つ．

(ix) μ は確率測度であるとする．$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は凸関数で，$f \in L^1(\mathscr{A}, \mu)$ かつ $\varphi \circ f \in L^1(\mathscr{A}, \mu)$ が成り立つとする．このとき $\varphi(E_\mu^{\mathscr{B}}[f]) \leq E_\mu^{\mathscr{B}}[\varphi \circ f]$ a.e. が成り立つ．（Jensen の不等式）

(x) 任意の $p \in [1, \infty]$ に対して，$E_\mu^{\mathscr{B}} : L^p(\mathscr{A}, \mu) \cap L^1(\mathscr{A}, \mu) \to L^p(\mathscr{B}, \mu) \cap L^1(\mathscr{B}, \mu)$ は有界線形作用素である．

証明 (i) と (ii) は定義よりすぐにわかる．(iii) は積分の加法性よりわかる．(iv) は補題 B.2 より示され，(v) は補題 B.4 より従う．

(vi) $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ と定義する．(v) より $(E_\mu^{\mathscr{B}}[f_n])_{n\in\mathbb{N}}$ が a.e. で増大的な列になることに注意すれば，単調収束定理により任意の $B \in \mathscr{B}$ について

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n 1_B \,\mathrm{d}\mu = \int_X f 1_B \,\mathrm{d}\mu,$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_X E_\mu^{\mathscr{B}}[f_n] 1_B \,\mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} E_\mu^{\mathscr{B}}[f_n] 1_B \,\mathrm{d}\mu$$

が成り立つ．これより

$$\int_X f 1_B \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n 1_B \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X E_\mu^{\mathscr{B}}[f_n] 1_B \,\mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} E_\mu^{\mathscr{B}}[f_n] 1_B \,\mathrm{d}\mu$$

が成り立つ．したがって $\lim_{n\to\infty} E_\mu^{\mathscr{B}}[f_n]$ は f の $\mathscr{B}$-に関する条件付き期待値である．

(vii) $f = \liminf_n f_n$ および $f'_n = \inf_{k\geq n} f_k$ と定義する．このとき (vi) より $\lim_n E_\mu^{\mathscr{B}}[f'_n] = E_\mu^{\mathscr{B}}[f]$ a.e. が成り立つ．また (v)より$E_\mu^{\mathscr{B}}[f_n] \geq E_\mu^{\mathscr{B}}[f'_n]$ a.e. が成り立つので，

$$\liminf_{n\to\infty} E_\mu^{\mathscr{B}}[f_n] \geq \liminf_{n\to\infty} E_\mu^{\mathscr{B}}[f'_n] = E_\mu^{\mathscr{B}}[f]$$

となる．

(viii) f^- が可積分であるとして示せばよい．仮定より $E_\mu^{\mathscr{B}}[f^-]$ は可積分で a.e. で有限値をとるか

ら，(v) より

$$E_\mu^{\mathscr{B}}[f] = E_\mu^{\mathscr{B}}[f^+] - E_\mu^{\mathscr{B}}[f^-] \leq E_\mu^{\mathscr{B}}[f^+] + E_\mu^{\mathscr{B}}[f^-] = E_\mu^{\mathscr{B}}[\,|f|\,]$$
$$-E_\mu^{\mathscr{B}}[f] = -E_\mu^{\mathscr{B}}[f^+] + E_\mu^{\mathscr{B}}[f^-] \leq E_\mu^{\mathscr{B}}[f^+] + E_\mu^{\mathscr{B}}[f^-] = E_\mu^{\mathscr{B}}[\,|f|\,]$$

がわかる．これを組み合わせれば求める不等式を得る．

(ix) φ がアファイン関数の場合には，不等式は容易に示される．一般の凸関数については，任意の凸関数はアファイン関数の可算族の sup として表現される[65] ことから主張が従う．

(x) $f \in L^p(\mathscr{A},\mu) \cap L^1(\mathscr{A},\mu)$ とする．$1 < p < \infty$ の時，q を p の共役指数としてとれば，

$$\|E^{\mathscr{B}}[f]\|_{L^p(\mathscr{B})} = \sup_{\substack{g \in L^q(\mathscr{B}) \\ \|g\|_{L^q} \leq 1}} \left| \int_X E^{\mathscr{B}}[f] g \, \mathrm{d}\mu \right|$$

が成り立つ．このとき Hölder の不等式と (viii) より

$$\begin{aligned} \left| \int_X E^{\mathscr{B}}[f] g \, \mathrm{d}\mu \right| &\leq \int_X E^{\mathscr{B}}[|f|]|g| \, \mathrm{d}\mu \\ &= \int_X |f|\,|g| \, \mathrm{d}\mu \\ &\leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q} \end{aligned}$$

となるので，$\|E^{\mathscr{B}}[f]\|_{L^p(\mathscr{B})} \leq \|f\|_{L^p}\|$ がわかる．

$p = 1$ の場合．μ と $\mu|_{\mathscr{B}}$ が局所化可能であることから $L^1(\mathscr{A},\mu)$，$L^1(\mathscr{B},\mu)$ の双対はそれぞれ $L^\infty(\mathscr{A},\mu)$，$L^\infty(\mathscr{B},\mu)$ となる[66]．これより $1 < p < \infty$ と同じ議論が走る．

$p = \infty$ の場合は，不等式 (viii) から任意の $B \in \mathscr{B}$ について

$$\int_X |E_\mu^{\mathscr{B}}[f]| 1_B \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X |f| 1_B \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X \|f\|_{L^\infty(\mathscr{A})} 1_B \, \mathrm{d}\mu$$

が成り立つ．したがって補題 B.4 より $|E_\mu^{\mathscr{B}}[f]| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathscr{A})}$ a.e. となり，$\|E_\mu^{\mathscr{B}}[f]\|_{L^\infty(\mathscr{B})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathscr{A})}$ がわかる．□

命題 B.8 より（σ-有限ですらない）測度空間においても，条件付き期待値がきちんと定義できるような場合には，それは確率空間の場合と同じような性質を持つことがわかる．

B.2　正則条件付測度

本節では，$(X,\mathscr{A},\mu)$ は常に非負有限測度空間とする．$\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ を部分 σ 代数としたとき，$A \mapsto \mu^{\mathscr{B}}(A) = E_\mu^{\mathscr{B}}[1_A]$ は $L^1(\mu)$ に値をとるベクトル値測度となる．また互いに素な (A_n) に応じて適当な零集合をとることで，$\mu^{\mathscr{B}}\left(\bigsqcup_n A_n\right) = \sum_n \mu^{\mathscr{B}}(A_n)$ a.e. が成り立つ．ところが，このとき零集合の取り方は (A_n) の選び方によるわけなので，可算種類しかないわけではない．よってそれを集

65） 証明は，例えば Fonseca and Leoni [14, Theorem 4.79] を見よ．余談だが，この主張は確率論の本では「よく知られた結果である」と済まされることが多く，証明を知るには凸関数について書いている本を見る必要がある．

66） Fonseca and Leoni [14, Corollary 2.41].

計してすべての $x \in X$ で $A \mapsto \mu^{\mathscr{B}}(A)(x)$ が測度となるような条件付き期待値のバージョンが取れるかどうかというのは，難しい問題であることがわかるだろう．そういったバージョンが取れるとき，その測度族を正則条件付き測度という．本節では，どういった条件の下で正則条件付き測度が存在するかという問題を考える．

定義 B.9. $(X, \mathscr{A}, \mu)$ を有限測度空間とする．

(i) $\mathscr{B}$ を $\mathscr{A}$ の部分 σ 代数とする．関数 $\mu^{\mathscr{B}} \colon \mathscr{A} \times X \to [0, \infty[$ が
- (a) 全ての $x \in X$ に対して，$A \mapsto \mu^{\mathscr{B}}(A, x)$ は $\mathscr{A}$ 上の測度である．
- (b) 全ての $A \in \mathscr{A}$ に対して，$x \mapsto \mu^{\mathscr{B}}(A, x)$ は $\mathscr{B}$-可測関数である．
- (c) 全ての $A \in \mathscr{A}$ と $B \in \mathscr{B}$ に対して
$$\mu(A \cap B) = \int_B \mu^{\mathscr{B}}(A, x)\mu(\mathrm{d}x)$$
が成り立つ．

を満たすとき，$\mu^{\mathscr{B}}$ を $\mathscr{A}$ 上の $\mathscr{B}$ に関する正則条件付き測度 (regular conditional measure) と呼ぶ． μ が特に確率測度で，各 $A \mapsto \mu^{\mathscr{B}}(A, x)$ が確率測度の場合には，$\mu^{\mathscr{B}}$ を特に正則条件付き確率 (regular conditional probability) とも呼ぶ．

(ii) $\mathscr{A}'$ と $\mathscr{B}$ を $\mathscr{A}$ の部分 σ 代数とする．関数 $\mu^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}'} \colon \mathscr{A}' \times X \to [0, \infty[$ が
- (a) 全ての $x \in X$ に対して，$A' \mapsto \mu^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}'}(A, x)$ は $\mathscr{A}'$ 上の測度である．
- (b) 全ての $A \in \mathscr{A}'$ に対して，$x \mapsto \mu^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}'}(A, x)$ は $\mathscr{B}$-可測関数である．
- (c) 全ての $A \in \mathscr{A}'$ と $B \in \mathscr{B}$ に対して
$$\mu(A \cap B) = \int_B \mu^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}'}(A, x)\mu(\mathrm{d}x) \tag{B.3}$$
が成り立つ．

を満たすとき，$\mu^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}'}$ を $\mathscr{A}'$ 上の $\mathscr{B}$ に関する正則条件付き測度という．

(iii) $(E, \mathscr{E})$ を可測空間とし，$\varphi \colon X \to E$ を $\mathscr{A}/\mathscr{E}$-可測関数とする．関数 $\mu^{\varphi} \colon \mathscr{A} \times Y \to [0, \infty[$ が
- (a) 全ての $y \in Y$ に対して，$A \mapsto \mu^{\varphi}(A, x)$ は $\mathscr{A}$ 上の測度である．
- (b) 全ての $A \in \mathscr{A}$ に対して，$y \mapsto \mu^{\varphi}(A, y)$ は $\mathscr{E}$-可測関数である．
- (c) 全ての $A \in \mathscr{A}$ と $E \in \mathscr{E}$ に対して
$$\mu(A \cap \varphi^{-1}(E)) = \int_E \mu^{\varphi}(A, y)\varphi_*\mu(\mathrm{d}y) \tag{B.4}$$
が成り立つ．

を満たすとき，μ^{φ} を可測関数 φ に関する $\mathscr{A}$ 上の正則条件付き測度と呼ぶ．

次節の言葉を使えば，正則条件付き測度 $\mu^{\mathscr{B}}$ とは $(X, \mathscr{B})$ から $(X, \mathscr{A})$ への核で (B.3) を満たすものである．条件 (B.3) を標語的に言えば，$x \mapsto \mu^{\mathscr{B}}(A, x)$ は条件付き期待値 $E^{\mathscr{B}}[1_A]$ のバージョンになっているということである．正則条件付き測度について (ii) のややわかりにくい定義も導入したのは，完備性などを考えるとこちらの方が便利な場合もあるからである．(i) と (ii) の違いは，$\mathscr{A}'$ が必ずしも $\mathscr{B}$ を含む必要がない点にある．

正則条件付き確率が与えられると，それによる積分で条件付き期待値を求めることができる．

命題 B.10. $(X, \mathscr{A}, \mu)$ を有限測度空間とし，$\mathscr{B}$ を $\mathscr{A}$ の部分 σ 代数とする．このとき，任意の非負 $\mathscr{A}$-可測関数について，写像 $x \mapsto \int_X f(y)\mu^{\mathscr{B}}(\mathrm{d}y, x)$ は条件付き期待値 $E_\mu^{\mathscr{B}}[f]$ のバージョンである．

証明　$f = 1_A$（$A \in \mathscr{A}$）の形の時には，正則条件付き確率の定義より任意の $B \in \mathscr{B}$ について

$$\int_B 1_A \,\mathrm{d}\mu = \int_B \mu^{\mathscr{B}}(A, x)\,\mu(\mathrm{d}x) = \int_B \int_X 1_A(y)\,\mu^{\mathscr{B}}(\mathrm{d}y, x)\,\mu(\mathrm{d}x)$$

が成り立つ．条件付き期待値の定義より写像 $x \mapsto \int_X 1_A(y)\,\mu^{\mathscr{B}}(\mathrm{d}y, x)$ は $\mathscr{B}$ 可測であるから，この写像は $E_\mu^{\mathscr{B}}[1_A]$ のバージョンである．一般の場合は積分の線形性と単調収束定理よりわかる．　□

正則条件付き測度の一意性については，以下の補題の十分条件が知られている．

補題 B.11. $\mathscr{A}'$ が可算生成的であれば，$\mathscr{A}'$ 上の $\mathscr{B}$ に関する正則条件付き測度は次の意味で一意である：ν_1 と ν_2 がともに μ の $\mathscr{A}'$ の $\mathscr{B}$ に関する正則条件付き測度ならば，ある μ-零集合 $N \in \mathscr{B}$ で

$$\nu_1(A, x) = \nu_2(A, x) \quad \forall A \in \mathscr{A}' \; \forall x \in X \setminus N$$

を満たすものが存在する．

証明　$\mathscr{C}$ を $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{A}'$ を満たすような可算代数とする．各 $C \in \mathscr{C}$ に対して，$N_C \in \mathscr{B}$ を

$$\nu_1(C, x) = \nu_2(C, x) \quad \forall x \in X \setminus N_C$$

となるように選ぼう[67)]．$N = \bigcup_{C \in \mathscr{C}} N_C \in \mathscr{B}$ とおけば，N はまた μ-零集合である．ここで

$$\mathscr{D} = \{A \in \mathscr{A}' \mid \forall A \in \mathscr{D} \; \forall x \in X \setminus N \; \nu_1(A, x) = \nu_2(A, x)\}$$

と定めれば，$\mathscr{D} = \mathscr{A}'$ を示すことで補題の主張の証明が完成する．$\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$ は定義より明らかである．$\mathscr{C}$ は集合代数であるからあとは $\mathscr{D}$ が単調族であることを示せばよいが，これは各測度 $A \mapsto \nu_1(A, x)$ および $A \mapsto \nu_2(A, x)$ の連続性よりすぐにわかる．　□

正則条件付き測度の存在について論じたいわけだが，その前に測度の構成についての補題を用意する．測度を構成する際には，有限加法的測度を集合代数上に構成し，その可算加法性を示すことで，Carathéodory の拡張定理を経由して σ 代数上の測度に拡張する，という手順を踏むことが多い．以下では，有限加法的測度の可算加法性を示すための十分条件を与える．

定義 B.12. X を集合とする．

(i) $\mathscr{K}$ を X の部分集合族とする．任意の可算族 $\mathscr{K}' \subset \mathscr{K}$ が，有限交叉性をもつならば $\bigcap \mathscr{K}' \neq \emptyset$ を満たすとき，$\mathscr{K}$ をコンパクトクラス (compact class) という．

(ii) $\mathscr{A}$ を X 上の集合代数，$\mathscr{A}'$ をその部分代数とし，$\mu\colon \mathscr{A} \to [0, \infty[$ を有限加法的測度とする．また $\mathscr{C}$ を X の部分集合族とする．任意の $A \in \mathscr{A}'$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$A_\varepsilon \in \mathscr{A}$ と $C_\varepsilon \in \mathscr{C}$ で $A_\varepsilon \subset C_\varepsilon \subset A$ かつ

$$|\mu(A \setminus A_\varepsilon)| < \varepsilon$$

67)　条件付き期待値の一意性よりこのような N_C がとれる．

を満たすものが存在するとき，$\mathscr{C}$ は $\mathscr{A}'$ 上で，$\mathscr{A}$ に関して μ を近似するという．

補題 B.13. $\mathscr{A}$ を集合 X 上の集合代数，$\mathscr{A}'$ をその部分代数とし，$\mu\colon \mathscr{A} \to [0,\infty[$ を有限加法的測度とする．$\mathscr{A}'$ 上で $\mathscr{A}$ に関して μ を近似するコンパクトクラス $\mathscr{K}$ が存在すれば，μ は $\mathscr{A}'$ 上可算加法的である．

証明　μ が $\mathscr{A}'$ 上 $\emptyset$ で連続であることを示せばよい．$(A_n) \in \mathscr{A}'$ は $\bigcap_n A_n = \emptyset$ を満たす減少列としよう．$\varepsilon > 0$ を任意に選び固定する．$n \in \mathbb{N}$ に対して，$B_n \in \mathscr{A}$ と $K_n \in \mathscr{K}$ を，$B_n \subset K_n \subset A_n$ かつ

$$\mu(A_n \setminus B_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

を満たすようにとる．いま $\bigcap_n K_n \subset \bigcap_n A_n = \emptyset$ であるから，十分大きい N をとれば $\bigcap_{0\le n\le N} K_n = \emptyset$ となる[68]．したがって $\bigcap_{0\le n\le N} B_n = \emptyset$ であり，これより

$$A_N = A_N \setminus \left(\bigcap_{0\le n\le N} B_n \right) = \bigcup_{0\le n\le N} (A_N \setminus B_n) \subset \bigcup_{0\le n\le N} (A_n \setminus B_n)$$

が成り立つ．よって

$$\mu(A_N) \le \sum_{0\le n\le N} \mu(A_n \setminus B_n) < \varepsilon$$

となり，$\mu(A_n) \to 0$ がわかった．　□

正則条件付き測度の存在については，以下の定理が基本的である．

定理 B.14. $\mathscr{A}'$ は可算生成的で，$\mathscr{A}'$ 上で $\mathscr{A}$ について μ を近似するコンパクトクラス $\mathscr{K}$ が存在するとする．このとき，任意の部分 σ 代数 $\mathscr{B}$ について，正則条件付き測度 $\mu^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}'}$ が存在する．

証明　まずは μ が確率測度であるとして示す．

Step 1：$\mu^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}'}$ の "素" p_0 の構成． $\mathscr{C}$ は $\mathscr{A}'$ を生成する可算代数とする．$n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ と $C \in \mathscr{C}$ に対して，$K_{C,n} \in \mathscr{K}$ と $A_{C,n} \in \mathscr{A}$ を，$A_{C,n} \subset K_{C,n} \subset C$ かつ

$$\mu(C \setminus A_{C,n}) < \frac{1}{n}$$

を満たすように選ぶ．$\mathscr{C}$ と $(A_{C,n})_{C,n}$ から生成される可算代数を $\mathscr{D}$ で表すことにする．$D \in \mathscr{D}$ に対して，$p_0(D,\cdot)\colon X \to [0,1]$ を条件付き期待値 $E^{\mathscr{B}}_\mu[1_D]$ のバージョンの一つとなるように定める．特に X，$\emptyset \in \mathscr{D}$ に対しては，常に $p_0(X,x) = 1$ かつ $p_0(\emptyset,x) = 0$ となるように定義しておく．$(A,B) \in \mathscr{D} \times \mathscr{D}$ で $A \cap B = \emptyset$ を満たすようなものに対して，零集合 $N_{(A,B)} \in \mathscr{B}$ を

$$p_0(A \sqcup B, x) = p_0(A,x) + p_0(B,x) \quad \forall x \in X \setminus N_{(A,B)}$$

となるように選ぶ．さらに

$$N_0 = \bigcup \{N_{(A,B)} \mid (A,B) \in \mathscr{D} \times \mathscr{D}\ A \cap B = \emptyset\}$$

68）$\mathscr{K}$ がコンパクトクラスであることから．

と定めれば，$A \mapsto p_0(A,x)$ は全ての $x \in X \setminus N_0$ において有限加法的である．

Step 2：p_0 の連続性の証明． ほとんどすべての x に対して，

$$p_0(C,x) = \sup_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}} p_0(A_{C,n},x) \quad \forall C \in \mathscr{C}$$

が成り立つことを示す．この等式より，ほとんどすべての x について，$\mathscr{K}$ は $\mathscr{C}$ 上で，$\mathscr{D}$ について $C \mapsto p_0(C,x)$ を近似するコンパクトクラスであることがわかる．

$q_C(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}} p_0(A_{C,n},x)$ と定義する．q_C は $\mathscr{B}$-可測関数の可算族の sup をとったものだから，それ自身が $\mathscr{B}$-可測である．条件付き期待値の性質より，任意の C と任意の n に対して $p_0(A_{C,n},x) \leq p_0(C,x)$ が a.e. の意味で成り立っている．これより適当な零集合 $N_{(C,n)} \in \mathscr{B}$ をとって $X \setminus N_{(C,n)}$ 上で $p_0(A_{C,n},x) \leq p_0(C,x)$ が成り立つようにすることができる．ここで

$$N_1 = \bigcup_{C\in\mathscr{C},n\in\mathbb{N}_{\geq 1}} N_{(C,n)}$$

と定義すれば，$N_1 \in \mathscr{B}$ はまた μ-零集合である．N_1 の定義より明らかに

$$p_0(A_{C,n},x) \leq p_0(C,x) \quad \forall x \in X \setminus N_1$$

が成り立つ．n について sup をとれば

$$q_C(x) \leq p_0(C,x) \quad \forall x \in X \setminus N_1$$

となる．また q_C の定義と p_0 の定義[69)]に注意すれば，

$$\mu(A_{C,n}) = \mu(A_{C,n} \cap X) = \int_X p_0(A_{C,n},x)\,\mu(\mathrm{d}x) \leq \int_X q_C(x)\mu(\mathrm{d}x)$$

が成り立つことがわかる．したがって

$$\mu(A_{C,n}) \leq \int_X q_C(x)\mu(\mathrm{d}x) \leq \int_X p_0(C,x)\,\mu(\mathrm{d}x) = \mu(C)$$

であり，n について sup をとれば

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}} \mu(A_{C,n}) \leq \int_X q_C(x)\mu(\mathrm{d}x) \leq \int_X p_0(C,x)\,\mu(\mathrm{d}x) = \mu(C)$$

を得る．測度 μ の連続性と $(A_{C,n})$ の選び方より $\sup_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}} \mu(A_{C,n}) = \mu(C)$ となるので，これより

$$\int_X q_C(x)\mu(\mathrm{d}x) = \int_X p_0(C,x)\,\mu(\mathrm{d}x)$$

となる．いま $q_C(x) \leq p_0(C,x)$ a.e. であったことに注意すれば，ここから $q_C(x) = p_0(C,x)$ a.e. が結論付けられる．いま $\mathscr{C}$ は可算族であるから，μ-零集合 $N_2 \in \mathscr{B}$ を

$$\forall x \in X \setminus N_2 \; \forall C \in \mathscr{C} \; p_0(C,x) = q_C(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}} p_0(A_{C,n},x)$$

69）条件付き期待値のバージョンである．

を見たすように選ぶことができる．

Step 3：$\mu^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}'}$ の構成． $N = N_0 \cup N_2$ とする．このとき Step 1 および 2 における議論により，任意の $x \in X \setminus N$ について，$A \mapsto p_0(x, A)$ は $\mathscr{C}$ 上で可算加法的[70)]な測度である．したがって，任意の $x \in X \setminus N$ について $p_0(\cdot, x)$ は $\mathscr{A}'$ 上の確率測度の一意的に拡張される．その確率測度族を $\mu^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}'}(\cdot, x)$ で表すことにする．さらに，$x \in N$ に対しては $\mu^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}'}(\cdot, x) = \mu$ と定める．

Step 4：$\mu^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}'}$ の可測性． Step 3 で構成した $\mu^{\mathscr{B}}$ が必要な可測性を持っていることを証明しよう．単調族定理を用いるために，

$$\mathscr{E} = \{A \in \mathscr{A}' \mid \text{写像 } x \mapsto \mu^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}'}(A, x) \text{ は } \mathscr{B}\text{-可測}\}$$

と定義する．$A \in \mathscr{C}$ については $\mu^{\mathscr{B}}(A, \cdot)$ と $p_0(A, \cdot)$ は一致するから，$\mathscr{C} \subset \mathscr{E}$ である．可測性の概念は各点収束列の極限については閉じているから，$\mathscr{E}$ が単調族であることが分かり，よって $\mathscr{A}' = \sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{E}$ である．すなわち，すべての $A \in \mathscr{A}'$ について写像 $x \mapsto \mu^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}'}(A, x)$ は $\mathscr{B}$-可測となっていることがわかる．

Step 5：$\mu^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}'}$ が (B.3) を満たすことの証明．

$$\mathscr{F} = \left\{ A \in \mathscr{A}' \,\middle|\, \text{全ての } B \in \mathscr{B} \text{ に対して } \mu(A \cap B) = \int_B \mu^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}'}(A, x)\mu(\mathrm{d}x) \text{ が成り立つ} \right\}$$

と定義すれば，$\mu^{\mathscr{B}}$ と p_0 の定義より $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$ である．$B \in \mathscr{B}$ を任意に固定する．(E_n) を $\mathscr{F}$ の単調増大列とすれば，優収束定理より

$$\begin{aligned}
\int_B \mu^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}'}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n, x\right)\mu(\mathrm{d}x) &= \int_B \lim_{n\to\infty} \mu^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}'}(E_n, x)\mu(\mathrm{d}x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_B \mu^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}'}(E_n, x)\mu(\mathrm{d}x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(B \cap E_n) \\
&= \mu\left(B \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって $\bigcup_n E_n \in \mathscr{F}$ である．同様にして単調減少列の共通部分をとる操作についても $\mathscr{F}$ は閉じていることがわかるので，$\mathscr{F}$ は $\mathscr{C}$ を含む単調族である．したがって単調族定理から $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{F}$ がわかる．

Step 6：一般の有限測度の場合． μ が（0 でない）一般の有限測度の場合，$\nu = \mu/\mu(X)$ と定義する．このとき，step 5 までの議論により正則条件付き確率 $\nu^{\mathscr{B}}$ が存在する．これを用いて，$\mu^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}'} = \nu^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}'}$ と定義する．このとき，$\mu^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}'}$ が正則条件付き測度の条件 (a) と (b) を満たすことは明らかであろう．さらに $A \in \mathscr{A}$ かつ $B \in \mathscr{B}$ とすれば，

$$\mu(A \cap B) = \mu(X)\nu(A \cap B) = \mu(X)\int_B \nu^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}'}(A, x)\nu(\mathrm{d}x) = \int_B \mu^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}']}(A, x)\mu(\mathrm{d}x)$$

となり，$\mu^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}'}$ が実際に正則条件付き測度であることが確かめられた．　□

70）　補題 B.13 を見よ．

定理 B.14 において $\mathscr{A}' = \mathscr{A}$ とすれば，直ちに以下の系を得る．

系 B.15. $\mathscr{A}$ が可算生成的かつ，μ を近似するコンパクトクラスが存在するとする．このとき，任意の部分 σ 代数 $\mathscr{B}$ について正則条件付き測度 $\mu^{\mathscr{B}}$ が存在する．

X が Souslin 空間で $\mathscr{A} = \mathscr{B}(X)$ の場合には，正則条件付き測度が常に存在する．

系 B.16. X を Souslin 空間とし，μ をその上の有限 Borel 測度とする．このとき，任意の部分 σ 代数 $\mathscr{E} \subset \mathscr{B}(X)$ に対して，正則条件付き測度 $\mu^{\mathscr{E}}$ が存在する．

証明　命題 A.24，定理 A.33 および定理 B.14 からわかる． □

可測関数が与えられた下での正則条件付き測度については，以下の存在定理がある．

定理 B.17. $(X, \mathscr{A}, \mu)$ と $(Y, \mathscr{E})$ を可測空間とする．$\mathscr{A}$ は可算生成的であるとし，$\mathscr{A}$ 上の有限測度 μ は近似コンパクトクラス $\mathscr{K}$ を持つとする．さらに $\varphi\colon X \to Y$ は $\mathscr{A}$-可測で，$\varphi(X) \in \mathscr{E}^{\varphi_*\mu}$ を満たすとする．このとき，φ に関する $\mathscr{A}$ 上の正則条件付き測度 μ^{φ} が存在する．

証明　$\mathscr{B} = \varphi^*\mathscr{E}$ とすれば，定理 B.14 より $\mathscr{A}$ 上の $\mathscr{B}$ に関する正則条件付き測度 $\mu^{\mathscr{B}}$ が存在する[71)]．$A \in \mathscr{A}$ を固定すれば $\mu^{\mathscr{B}}(A, \cdot)$ は $\mathscr{B} = \varphi^*\mathscr{E}$ 可測だから，$\mathscr{E}$-可測関数 α_A で $\alpha_A \circ \varphi = \mu^{\mathscr{B}}(A, \cdot)$ を満たすものが存在する．いま $\varphi(X)$ は $\mathscr{E}^{\varphi_*\mu}$-可測なので，$Y \setminus \varphi(X)$ は $\varphi_*\mu$-零集合である[72)]．したがって，$N \in \mathscr{E}$ で $Y \setminus \varphi(X) \subset N$ かつ $\varphi_*\mu(N) = 0$ を満たすものが存在する．$y \in Y \setminus N$ に対して，$\mu^{\varphi}(A, y) = \alpha_A(y)$ と定義する．$y \in N$ については，$\mu^{\varphi}(A, y) = \mu(A)$ と定める．N の可測性と α_A の可測性より，$\mu^{\varphi}(A, \cdot)$ の可測性はすぐにわかる．これが測度であることを確かめよう．$y \in N$ なら $\mu^{\varphi}(A, y)$ は μ と等しいので測度である．$y \in Y \setminus N$ のとき $y \in \varphi(X)$ であるから，$x \in \varphi^{-1}(y)$ を一つ選んで固定する．このとき，任意の $A \in \mathscr{A}$ について

$$\mu^{\varphi}(A, y) = \alpha_A(\varphi(x)) = \mu^{\mathscr{B}}(A, x)$$

が成り立つ．したがって，$\mu^{\mathscr{B}}(\cdot, x)$ の可算加法性より $\mu^{\varphi}(\cdot, y)$ の可算加法性もわかる．最後に，μ^{φ} が条件 (B.4) を満たすことを示そう．$E \in \mathscr{E}$ かつ $A \in \mathscr{A}$ とすれば，μ^{φ} の構成法より

$$\begin{aligned}
\mu(A \cap \varphi^{-1}(E)) &= \int_{\varphi^{-1}E} \mu^{\mathscr{B}}(A, x)\mu(\mathrm{d}x) \\
&= \int_{\varphi^{-1}(E)} \alpha_A(\varphi(x))\mu(\mathrm{d}x) \\
&= \int_E \alpha_A(y)\varphi_*\mu(\mathrm{d}y) \\
&= \int_{E\cap N} \alpha_A(y)\,\varphi_*\mu(\mathrm{d}x) + \int_{E\setminus N} \alpha_A(y)\,\varphi_*\mu(\mathrm{d}x) \\
&= \int_{E\setminus N} \mu^{\varphi}(A, y)\varphi_*\mu(\mathrm{d}y) \\
&= \int_E \mu^{\varphi}(A, y)\varphi_*\mu(\mathrm{d}y)
\end{aligned}$$

71)　定理 B.14 の主張において $\mathscr{A}$ を $\mathscr{A}^{\mu}$ で，$\mathscr{A}'$ を $\mathscr{A}$ で置き換えよ．

72)　$\varphi_*\mu$ は実質的には $\varphi(X)$ 上に乗っているが，何らかの可測性がないと $\varphi(X)$ が零集合であることを示すのは難しい．

となり，μ^φ が実際に (B.4) を満たすことが確かめられた．　$\square$

注意 B.18. 定理 B.14 と同様に，$\mathscr{A}$ でなくてその可算生成的な部分 σ 代数 $\mathscr{A}'$ 上の正則条件付き測度を構成することができる．

B.3　核と積空間上の測度

集合族 $\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ が与えられたとき

$$\mathscr{A} \odot \mathscr{B} = \{A \times B \mid A \in \mathscr{A},\ B \in \mathscr{B}\}$$

と定める[73)]．

定義 B.19. $(X, \mathscr{A})$ と $(Y, \mathscr{B})$ を可測空間とする．写像 $\kappa : X \times \mathscr{B} \to [0, +\infty]$ が次の条件を満たすとき，κ を $(X, \mathscr{A})$ から $(Y, \mathscr{B})$ への核 (kernel)，あるいは推移関数 (transition function) と呼ぶ：

(i) 任意の $x \in X$ に対して，写像 $\mathscr{B} \ni B \to \kappa(x, B) \in [0, +\infty]$ は測度である．
(ii) 任意の $B \in \mathscr{B}$ に対して，写像 $X \ni x \mapsto \kappa(x, B) \in [0, +\infty]$ は $\mathscr{A}$-可測関数である．

測度空間への核が与えられたとき，積空区間上に非対称な測度を誘導することができる．

命題 B.20. $(X, \mathscr{A})$ と $(Y, \mathscr{B})$ を可測空間とする．さらに，測度 $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ と核 $\nu : X \times \mathscr{B} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ が与えられたとしよう．$\mathscr{S}$ を $A \times B$ $(A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B})$ の成す $X \times Y$ 上の集合半代数とする．$\mathscr{S}$ 上の関数 α を

$$\alpha(A \times B) = \int_X \left(\int_Y 1_{A \times B}(x, y) \nu(x, \mathrm{d}y) \right) \mu(\mathrm{d}x) = \int_A \nu(x, B) \mu(\mathrm{d}x)$$

によって定義すれば，α は $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ 上の測度に拡張される．

証明　α が $\mathscr{S}$ 上可算加法的であることを示せば，Carathéodory の拡張定理により α が $\sigma(\mathscr{S}) = \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ の測度に拡張されることが示される．

(C_n) を $\mathscr{C}$ の列で $C_n \cap C_m = \emptyset$ $(n \neq m)$ かつ $C := \bigcup_n C_n \in \mathscr{S}$ なるものとする．$\mathscr{S}$ の定義より各 C_n は $C_n = A_n \times B_n$ $(A_n \in \mathscr{A}, B_n \in \mathscr{B})$ と表現され，また C 自身も $X = A \times B$ $(A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B})$ と表される．ここで非負の可測関数列 (f_n) を

$$f_n(x) = 1_{A_n}(x) \nu(x, B_n)$$

で定義すれば，単調収束定理により

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha(A_n \times B_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n(x) \mu(\mathrm{d}x) = \int_X \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \mu(\mathrm{d}x)$$

が成り立つ．$x \in X$ を固定すれば，$y \mapsto 1_{A_n}(x) 1_{B_n}(y)$ によって非負の可測関数列が定まるから，

73)　このノートだけの記法である．

単調収束定理により

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n}(x)\nu(x,B_n)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_Y 1_{A_n}(x)1_{B_n}(y)\nu(x,\mathrm{d}y)\\ &= \int_Y \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n}(x)1_{B_n}(y)\nu(x,\mathrm{d}y)\end{aligned}$$

が成立．ここで，仮定より

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n}(x)1_{B_n}(y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{C_n}(x,y) = 1_C(x,y) = 1_A(x)1_B(y)$$

となるから，

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = \int_Y 1_A(x)1_B(y)\nu(x,\mathrm{d}y) = 1_A(x)\int_Y 1_B(y)\nu(x,\mathrm{d}y) = 1_A(x)\nu(x,B)$$

である．したがって

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha(C_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha(A_n\times B_n) = \int_X 1_A(x)\nu(x,B)\mu(\mathrm{d}x) = \alpha(A\times B) = \alpha(C)$$

となり α は $\mathscr{S}$ 上で可算加法的である．　□

注意　B.21. 命題 B.20 は Carathéodory の拡張定理を用いているから，σ-有限性などの何らかの付加条件がないと拡張の一意性は保証されない．

ν が核ではなく単なる測度の場合，Fremlin [15] ではこの測度を原始積（primitive product）と呼んでいる．二つの測度 μ と ν がともに σ 有限の場合は標準的な積測度はただ一つ定まるから，これを単に積測度，直積測度などと呼ぶのであった．

これ以降，命題 B.21 で構成された測度[74]を，Fremlin [15] の用語法を拡張して核 ν と測度 μ の原始積（primitive product）と呼ぶことにする．$\mathscr{A}\odot\mathscr{B}$ 上で $\int_A \nu(x,B)\mu(\mathrm{d}x)$ となる $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ 上の測度がただ一つ定まる場合には，これを単に ν と μ の積と呼ぶことにする．

本節ではこれから核に関する様々な性質を証明してゆくが，そのためにまずは集合の断面とその可測性について復習する．直積空間 $X\times Y$ の部分集合 E に対して，

$$\begin{aligned}E_x &= \{y\in Y \mid (x,y)\in E\} = \mathrm{pr}_2(E\cap(\{x\}\times Y))\\ E^y &= \{x\in X \mid (x,y)\in E\} = \mathrm{pr}_1(E\cap(X\times\{y\}))\end{aligned}$$

と定義し，E_x を E の x-断面，E^y を E の y-断面と呼ぶ．

補題 B.22. (i) $E\in\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ とする．任意の $x\in X$ に対して E の x-断面 E_x は $\mathscr{B}$-可測であり，任意の $y\in Y$ に対して y-断面 E^y は $\mathscr{A}$-可測である．

74）すなわち，Carathéodory の拡張定理の証明で実際に構成するもの．

(ii) $f: X\times Y\to\overline{\mathbb{R}}$ は $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$-可測であるとする．このとき，任意の $x\in X$ に対して $y\mapsto f(x,y)$ は $\mathscr{B}$-可測であり，任意の $y\in Y$ に対して $x\mapsto f(x,y)$ は $\mathscr{A}$-可測である．

証明　(i) まずは $x\in X$ を任意に固定し，E_x の可測性を示そう．

$$\mathscr{S}=\{A\times B\subset X\times Y\mid A\in\mathscr{A}, B\in\mathscr{B}\}$$
$$\mathscr{E}=\{E\in\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}\mid \text{任意の } x\in X \text{ に対して } E_x \text{ は } \mathscr{B}\text{-可測となる.}\}$$

とおく．$E=A\times B$ $(A\in\mathscr{A}, B\in\mathscr{B})$ の時は $E_x=B$ または $E_x=\emptyset$ であり，いずれも $E_x\in\mathscr{A}$ となる．よって $\mathscr{S}\subset\mathscr{E}$ である．$\mathscr{E}$ が σ 代数であることを示せば $\mathscr{E}=\sigma(\mathscr{S})=\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ となり主張が示される．

明らかに $X\times Y\in\mathscr{E}$ である．$E\in\mathscr{E}$ とすれば,

$$(X\times Y\setminus E)_x=Y\setminus E_x\in\mathscr{E}$$

である．また，$(E^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathscr{E}$ の列とすれば,

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E^n\right)_x=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E^n_x\in\mathscr{B}$$

も成立．よって $\mathscr{E}$ は σ 代数である．

E^y の可測性も同様に示される．

(ii) (i) より，任意の $B\in\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$ と任意の $x\in X$，任意の $y\in Y$ に対して

$$\{x\in X\mid f(x,y)\in B\}=f^{-1}(B)^y\in\mathscr{A}$$
$$\{y\in Y\mid f(x,y)\in B\}=f^{-1}(B)_x\in\mathscr{B}$$

が成り立つことがわかる．　□

核についての有限性や可積分性の概念を導入する．

定義 B.23. $\nu: X\times\mathscr{B}\to\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ を可測空間 $(X,\mathscr{A})$ から $(Y,\mathscr{B})$ への核とする．さらに，$\mathscr{A}'\subset\mathscr{A}$，$\mathscr{B}'\subset\mathscr{B}$ を部分 σ 代数とする．

(i) 任意の $x\in X$ に対して $\nu(x,\cdot)$ が有限測度となるとき，ν は各点で有限であるという．

(ii) 任意の $x\in X$ に対して $\nu(x,\cdot)$ が $\mathscr{B}'$-σ-有限測度となるとき，ν は各点で $\mathscr{B}'$-σ 有限であるという．

(iii) ある $\mathscr{A}'\otimes\mathscr{B}'$ 可測集合列 (E_n) が存在して，$\bigcup_n E_n=X\times Y$ かつ任意の $x\in X$ に対して $\nu(x,(E_n)_x)<\infty$ が成り立つとき，ν は $\mathscr{A}'\otimes\mathscr{B}'$-$\sigma$ 有限であるという．

(iv) (ii) で特に $E_n=X\times B_n$（$B_n\in\mathscr{B}'$）と出来るとき，ν は一様に $\mathscr{B}'$-σ-有限であるという．

これらの σ-有限性について，考えている部分 σ 代数が元の σ 代数と同じ場合は，σ 代数の名前を省略して単に σ-有限であるという．

定義 B.24. $\nu: X\times\mathscr{B}\to\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ を可測空間 $(X,\mathscr{A})$ から $(Y,\mathscr{B})$ への核，$\mu\colon\mathscr{A}\to[0,\infty]$ を測度とする．

(i) 定義 B.23 において「任意の $x \in X$ に対して」を「μ-a.e. x に対して」で置き換えた条件が成り立つとき，ν は μ-a.e. でそれぞれの条件を満たすという．
(ii) μ と ν から生成される測度が有限測度となるとき，核 ν は μ 可積分であるという．
(iii) $\mathscr{C} \subset \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ を部分-σ 代数とする．μ と ν から生成される測度が $\mathscr{C}$-σ-有限となるとき，ν は μ について $\mathscr{C}$-σ-可積分であるという．$\mathscr{C} = \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ のときは，単に σ-可積分であるという．

以下の定理は可測集合に関する Fubini の定理あるいは Tonelli の定理の非対称版である．

定理 B.25. $(X, \mathscr{A})$ と $(Y, \mathscr{B})$ を可測空間，$\nu\colon X \times \mathscr{B} \to [0, \infty]$ を核，$\mu\colon \mathscr{A} \to [0, \infty]$ を測度とする．さらに λ を測度 μ と核 ν の原始積とする．

(i) 任意の $E \in (\mathscr{A} \odot \mathscr{B})_\sigma$ に対して $x \mapsto \nu(x, E_x)$ は $\mathscr{A}$-可測であり，

$$\lambda(E) = \int_X \nu(x, E_x)\mu(\mathrm{d}x) \tag{B.5}$$

が成り立つ．
(ii) $E \in (\mathscr{A} \odot \mathscr{B})_{\sigma\delta}$ に対してある $F \in (\mathscr{A} \odot \mathscr{B})_\sigma$ で $E \subset F$ かつ任意の x に対して $\nu(x, F_x) < +\infty$ を満たすものが存在するとする．このとき $x \mapsto \nu(x, E_x)$ は $\mathscr{A}$-可測である．
(iii) (ii) と同様の仮定の下で，さらに $\lambda(E) \le \lambda(F) < \infty$ なら (B.5) が成り立つ．
(iv) 核 $\nu : X \times \mathscr{B} \to [0, \infty]$ は一様に σ-有限であるとする．このとき任意の $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ に対して写像 $x \mapsto \nu(x, E_x)$ は $\mathscr{A}$-可測である．
(v) μ は σ-有限であると仮定する．このとき (iv) と同様の仮定の下で，(B.5) が成り立つ．
(vi) $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ とし，$x \mapsto \nu(x, E_x)$ は $\mathscr{A}$-可測になっていると仮定する．このとき，任意の $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ に対して

$$\int_X \nu(x, E_x)\mu(\mathrm{d}x) \le \lambda(E)$$

が成り立つ．
(vii) (vi) の仮定に加えて，$x \mapsto \nu(x, E_x)$ は各点で有限であると仮定する．このとき $\lambda(E) < \infty$ なら $\nu(x, E_x)$ は μ-可積分であり，(B.5) が成り立つ．

証明　(i) $A \times B \in \mathscr{A} \odot \mathscr{B}$ の場合は λ の定義より明らかである．$E \in (\mathscr{A} \odot \mathscr{B})_\sigma$ の場合を考える．$\mathscr{A} \odot \mathscr{B}$ が集合半代数をなすことに注意すれば，E は互いに素な列 $(E_n) \in (\mathscr{A} \odot \mathscr{B})^{\mathbb{N}}$ によって $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ と表現される．このとき

$$\nu(x, E_x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(x, (E^n)_x)$$

であるから，$x \mapsto \nu(x, (E^n)_x)$ は $\mathscr{A}$-可測であることがわかる．さらに単調収束定理により

$$\begin{aligned}\lambda(E) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(E^n) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_X \left(\int_Y \nu(x, (E^n)_x) \right) \mu(\mathrm{d}x)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_Y \nu(x, (E^n)_x) \right) \mu(\mathrm{d}x) \\
&= \int_X \left(\int_Y \nu(x, E_x) \right) \mu(\mathrm{d}x)
\end{aligned}
$$

となり (B.5) もわかる．

(ii) $E \in (\mathscr{A} \odot \mathscr{B})_{\sigma\delta}$ とする．ここでも $\mathscr{A} \odot \mathscr{B}$ が集合半代数をなすことに注意すれば，減少列 $(E^n)_{n\in\mathbb{N}} \in ((\mathscr{A} \odot \mathscr{B})_\sigma)^{\mathbb{N}}$ で $E = \bigcap_n E^n$ を満たすものがとれる．さらに，$F^n = E^n \cap F \in (\mathscr{A} \odot \mathscr{B})_\sigma$ と定義すれば，仮定より

$$
\nu(x, (E^1)_x) \le \nu(x, F_x) < \infty
$$

が成り立つ．このとき

$$
\nu(x, E_x) = \lim_{n\to\infty} \nu(x, (E^n)_x)
$$

が成り立つので[75)]，$x \mapsto \nu(x, E_x)$ の可測性がわかる．

(iii) (ii) と同様の記号設定の下で，$\lambda(F) < \infty$ という仮定より

$$
\lambda(E) = \lim_{n\to\infty} \lambda(E^n)
$$

が成り立つ．また，(ii) より $F \in (\mathscr{A} \odot \mathscr{B})_\sigma$ に対しては

$$
\int_X \nu(x, F_x)\mu(\mathrm{d}x) = \lambda(F) < \infty
$$

が成り立つから，$x \mapsto \nu(x, F_x)$ は可積分である．したがって優収束定理により

$$
\lim_{n\to\infty} \int_X \nu(x, (E^n)_x)\mu(\mathrm{d}x) = \int_X \lim_{n\to\infty} \nu(x, (E^n)_x)\mu(\mathrm{d}x) = \int_X \nu(x, E_x)\mu(\mathrm{d}x)
$$

を得る．さらに (i) より

$$
\int_X \nu(x, (E^n)_x)\mu(\mathrm{d}x) = \lambda(E^n)
$$

となるので，これらをあわせれば

$$
\lambda(E) = \int_X \nu(x, E_x)\mu(\mathrm{d}x)
$$

という関係式を得る．

(iv) まずは ν が有限値として示す．補題 B.22 より，任意の $x \in X$ と $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ に対して $\nu(x, E_x)$ は well-defined であることに注意する．

$$
\mathscr{E} = \{E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \mid \text{写像 } x \mapsto \nu(x, E_x) \text{ は } \mathscr{B}\text{-可測となる.}\}
$$

75）これを導くために E^1 を用いており，そのために (ii) の仮定を用いた．測度について上からの連続性を導くためには，測度有限性が必要なのであった．

とする．$\mathscr{A}\odot\mathscr{B}$ は明らかに π 系であるから，$\mathscr{E}$ が $\mathscr{A}\odot\mathscr{B}$ を含む λ-系であることを示せば，π-λ 定理により $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}=\sigma(\mathscr{A}\odot\mathscr{B})=\mathscr{E}$ となる．

$E=A\times B\in\mathscr{A}\odot\mathscr{B}$ の時は (i) より $x\mapsto\nu(x,B)$ が $\mathscr{A}$-可測となり，$\mathscr{A}\odot\mathscr{B}\subset\mathscr{E}$ である．次に $\mathscr{E}$ が λ-系であることを示そう．$X\times Y\in\mathscr{E}$ は明らかである．$E,F\in\mathscr{E}$ かつ $E\subset F$ とすれば，

$$\nu(x,(F\setminus E)_x)=\nu(x,F_x\setminus E_x)=\nu(x,F_x)-\nu(x,E_x)$$

であるから，$x\mapsto\nu(x,(F\setminus E)_x)$ の可測性も分かる．よって $F\setminus E\in\mathscr{E}$ である．(E^n) を $\mathscr{E}$ の元の増大列，$E=\bigcup_n E^n$ とすれば，任意の x に対して

$$\nu(x,E_x)=\lim_{n\to\infty}\nu(x,E^n_x)$$

が成り立つ．よって $x\mapsto\nu(x,E_x)$ は $\mathscr{B}$-可測であり，$E\in\mathscr{E}$ となる．以上より $\mathscr{E}$ が λ-系であることが分かり，$\mathscr{E}=\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ が示された．

ν が一様に σ-有限なる場合を考えよう．$(Y^{(n)})$ を $\mathscr{B}$ の元の列で $\bigsqcup_n Y^{(n)}=Y$ かつ任意の $x\in X$ に対して $\nu(x,Y^{(n)})<\infty$ となるものとする．各 ν に対して

$$\nu^n(x,B):=\nu(x,B\cap Y^{(n)}),\quad x\in X,\ B\in\mathscr{B}$$

と置けば，$\nu^n:X\times\mathscr{B}\to\mathbb{R}_+$ は有限値の核を定める．前半の議論により，任意の $E\in\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ に対して $x\mapsto\nu^n(x,E_x)$ は $\mathscr{B}$-可測である．いま

$$\nu(x,E_x)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\nu(x,E_x\cap Y^{(n)})=\sum_{n\in\mathbb{N}}\nu^n(x,E_x)$$

であることに注意すれば，写像 $x\mapsto\nu(x,E_x)$ も $\mathscr{B}$ 可測になることが分かる．

(v) (iv) より

$$x\mapsto\nu(x,E_x)=\int_Y 1_E(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y)$$

は非負の $\mathscr{B}$ 可測関数となるから，μ による積分が存在することを注意しておく．$\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ 上の関数 α を

$$\alpha(E)=\int_X\left(\int_Y 1_E(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y)\right)\mu(\mathrm{d}x)$$

によって定めれば，α は明らかに $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$-値測度となる．したがって，測度 λ と α が等しいことを示せば良いことになる．

λ と α は明らかに $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ 上で一致する．$(B_n)\in\mathscr{B}^{\mathbb{N}}$ を Y の分割で，任意の x に対して $\nu(x,B_n)<\infty$ を満たすものとする．また，$(A_n)\in\mathscr{A}^{\mathbb{N}}$ を $\mu(A_n)<\infty$ なる X の分割とする．ここで

$$A_{n,m,k}=\{x\in A_n\mid\nu(x,B_m)\leq k\}\in\mathscr{A}$$

と定義する．このとき，仮定より $\bigcup_k A_{n,m,k}=A_n$ となることに注意する．$E_{n,m,k}=A_{n,m,k}\times B_m$ と定義すれば，(i) より

$$\lambda(A_{n,m,k}\times B_m)=\int_{A_{n,m,k}}\nu(x,B_m)\mu(\mathrm{d}x)\leq k\,\mu(A_{n,m,k})\leq k\,\mu(A_n)<\infty$$

が成立．測度の拡張定理の一意性より，λ と α は $E_{n,m,k}$ 上では一致する．さらに $X \times Y = \bigcup_{n,m,k} E_{n,m,k}$ であるから，λ と α は $X \times Y$ 上でも一致する．

(vi) $\lambda(E) = \infty$ の場合はこの不等式は明らかである．$\lambda(E) < +\infty$ を仮定すれば，$C_n \in (\mathscr{A} \odot \mathscr{B})_\sigma$ で $E \subset C_n$ かつ $\lambda(C_n) \leq \lambda(E) + 1/n$ なるものが存在する[76]．C_n に対して (i) の結果を用いれば，

$$\begin{aligned}\int_X \nu(x, E_x)\mu(\mathrm{d}x) &\leq \int_X \nu(x, (C_n)_x)\mu(\mathrm{d}x) \\ &= \lambda(C_n) \\ &\leq \lambda(E) + \frac{1}{n}\end{aligned}$$

となる．ここで $n \to \infty$ とすれば，

$$\int_X \nu(x, E_x)\mu(\mathrm{d}x) \leq \lambda(E)$$

を得る．

(vii) $\lambda(E) < \infty$ を仮定すれば，(vi) より $x \mapsto \nu(x, E_x)$ は μ-可積分である．(C_n) を (vi) と同様のものとする．このとき (vi) での途中の議論から $\nu(x, (C_n)_x)$ も可積分であることがわかり，μ-a.e. x に対して $\nu(x, (C_n)_x)$ は有限値となる．よって

$$\lim_{n\to\infty} \nu\left(x, (C_n)_x\right) = \nu\left(x, C_x\right) \quad \mu\text{-a.e.}$$

が成り立つ．優収束定理と (i) を用いれば[77]，

$$\begin{aligned}\lambda(C) &= \lim_{n\to\infty} \lambda(C_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_X \nu(x, (C_n)_x)\mu(\mathrm{d}x) \\ &= \int_X \lim_{n\to\infty} \nu(x, (C_n)_x)\mu(\mathrm{d}x) \\ &= \int_X \nu(x, C_x)\mu(\mathrm{d}x)\end{aligned}$$

がわかる．(C_n) の定義より，$\lambda(C) = \lambda(E)$ である．(vi) の評価と合わせれば，

$$\int_X \nu(x, E_x) \leq \lambda(E) = \int_X \nu(x, C_x)\mu(\mathrm{d}x)$$

がわかる．これより，あとは

$$\int_X \nu(x, E_x)\mu(\mathrm{d}x) = \int_X \nu(x, C_x)\mu(\mathrm{d}x)$$

を示せばよいことがわかる．いま $\nu(x, E_x)$ は有限と仮定しているから，

$$\nu(x, C_x) - \nu(x, E_x) = \nu(x, (C \setminus E)_x)$$

76)　λ は Carathéodory の外測度を用いて構成された積測度であった．
77)　$x \mapsto \nu(x, (C_1)_x)$ を優関数と思う．

となり，$\nu(x,(C\setminus E)_x)$ は a.e. で有限な $\mathscr{A}$ 可測関数である．このとき

$$\int_X \nu(x,(C\setminus E)_x)\mu(\mathrm{d}x)=\int_X \nu(x,C_x)\mu(\mathrm{d}x)-\int_X \nu(x,E_x)\mu(\mathrm{d}x)$$

であるから，

$$\int_X \nu(x,(C\setminus E)_x)\mu(\mathrm{d}x)=0$$

を示せばよい．再び (vi) の評価によりお

$$\int_X \nu(x,(C\setminus E)_x)\mu(\mathrm{d}x)\le\lambda(C\setminus E)=0$$

となることがわかるから[78]，実際これは成り立っている． □

非対称な積測度についての Fubini の定理，Tonelli の定理は次のような形となる．

定理 B.26. $(X,\mathscr{A})$ と $(Y,\mathscr{B})$ を可測空間とし，測度 $\mu:\mathscr{A}\to\overline{\mathbb{R}}_{\ge0}$ と核 $\nu:X\times\mathscr{B}\to\overline{\mathbb{R}}_{\ge0}$ が与えられているものとする．さらに，λ を ν と μ の原始積とする．

(i) μ は σ-有限で，ν は $x\in X$ について一様に σ-有限であるとする．このとき，任意の $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$-可測関数 $f:X\times Y\to\overline{\mathbb{R}}_{\ge0}$ に対して
  (a) 写像 $x\mapsto\displaystyle\int_X f(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y)$ は $\mathscr{A}$-可測である．
  (b) 次の積分のいずれかが有限ならば，もう一方も有限で値は等しく，一方が無限ならばもう一方も無限である，という意味において以下の等式が成立：

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\lambda(\mathrm{d}(x,y))=\int_X\left(\int_Y f(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y)\right)\mu(\mathrm{d}x)$$

(ii) $\lambda(E)<\infty$ なる任意の E に対して $x\mapsto\nu(x,E_x)$ は $\mathscr{A}$-可測になると仮定する．$f:X\times Y\to\overline{\mathbb{R}}$ は $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ 可測関数で，任意の x に対して $y\mapsto f(x,y)$ は $\nu(x,\cdot)$-可積分であるとする．
  (a) 写像 $x\mapsto\int_Y f(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y)$ は $\mathscr{A}$-可測である．
  (b) f が λ-可積分なら，$x\mapsto\int_Y f(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y)$は$\mu$-可積分である．
  (c) 次の等式が成立つ：

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\lambda(\mathrm{d}(x,y))=\int_X\left(\int_Y f(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y)\right)\mu(\mathrm{d}x).$$

証明　(i) $f=1_E$ の形の時は，定理 B.25 の (iv) と (v) より明らかである．f が単関数の場合には，積分の線形性を用いて示される．一般の非負可測関数の場合は，単関数で下から近似すればよい．

(ii) $f=1_E$ の形の時は，定理 B.25 の (vii) よりわかる．

f が非負であるとき，単関数列 (s^n) を f を下から一様近似するように選ぶ．各単関数は

$$s^n=\sum_{i=1}^{m_n}a_i^n 1_{E_i^n}$$

78） 先ほどの E を $C\setminus E$ で置き換えればよい．

という表現を持つとしよう．この表現において $(E_i^n)_i$ は互いに交わらないとしてよい．このとき，任意の x,n,i に対して

$$\nu(x,(E_i^n)_x) = \int_Y 1_{E_i^n}(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y) \le \int_Y f(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y) < \infty$$
$$\lambda(E_i^n) = \int_{X\times Y} 1_{E_i^n}(x,y)\lambda(\mathrm{d}(x,y)) \le \int_{X\times Y} f(x,y)\lambda(\mathrm{d}(x,y)) < \infty$$

が成り立つ．したがって各 E_i^n は定理 B.25 (vii) の条件を満たし，$1_{E_i^n}$ について (c) が成立する．また

$$\int_Y s^n(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y) = \sum_{1\le i\le m_n} a_i^n \nu(x,(E_i^n)_x)$$

が成り立つから，$x \mapsto \int_Y s^n(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y)$ は $\mathscr{A}$-可測である．積分の線形性を用いれば

$$\begin{aligned}
\int_{X\times Y} s^n(x,y)\lambda(\mathrm{d}(x,y)) &= \sum_{1\le i\le m_n} a_i^n \int_{X\times Y} 1_{E_i^n}(x,y)\lambda(\mathrm{d}(x,y)) \\
&= \sum_{1\le i\le m_n} a_i^n \int_X \nu(x,(E_i^n)_x)\mu(\mathrm{d}x) \\
&= \int_X \left(\sum_{1\le i\le m_n} a_i^n \nu(x,(E_i^n)_x)\right)\mu(\mathrm{d}x) \\
&= \int_X \left(\int_Y s^n(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y)\right)\mu(\mathrm{d}x)
\end{aligned}$$

がわかる．単調収束定理を用いれば

$$\int_Y f(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y) = \lim_{n\to\infty}\int_Y s^n(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y) \quad \forall x \in X$$

が成り立つから，$x \mapsto \int_Y f(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y)$ の可測性がわかる．さらに単調収束定理を用いれば,

$$\begin{aligned}
\int_{X\times Y} f(x,y)\lambda(\mathrm{d}(x,y)) &= \lim_{n\to\infty}\int_{X\times Y} s^n(x,y)\lambda(\mathrm{d}(x,y)) \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_X \left(\int_Y s^n(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y)\right)\mu(\mathrm{d}x) \\
&= \int_X \left(\lim_{n\to\infty}\int_Y s^n(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y)\right)\mu(\mathrm{d}x) \\
&= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y)\right)\mu(\mathrm{d}x)
\end{aligned}$$

となり，(c) が成り立つことが示された．これより，特に $x \mapsto \int_Y f(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y)$ は μ-可積分である．

f が非負とは限らない時は，$f = f^+ - f^-$ という分解を考える．

$$\int_Y f(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y) = \int_Y f^+(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y) - \int_Y f^-(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y)$$

に注意すれば，非負の場合の結果より $x \mapsto \int_Y f(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y)$ の可測性がわかる．さらに

$$
\begin{aligned}
&\int_X \left|\int_Y f(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y)\right| \mu(\mathrm{d}x) \\
&\leq \int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\nu(x,\mathrm{d}y)\right)\mu(\mathrm{d}x) \\
&= \int_{X\times Y} |f(x,y)|\lambda(\mathrm{d}(x,y)) < \infty
\end{aligned}
$$

が成り立つから，$x \mapsto \int_Y f(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y)$ は μ-可積分である．さらに

$$
\begin{aligned}
&\int_X \left(\int_Y f(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y)\right)\mu(\mathrm{d}x) \\
&= \int_X \left(\int_Y f^+(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y)\right)\mu(\mathrm{d}x) - \int_X \left(\int_Y f^-(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y)\right)\mu(\mathrm{d}x) \\
&= \int_{X\times Y} f^+(x,y)\lambda(\mathrm{d}(x,y)) - \int_{X\times Y} f^-(x,y)\lambda(\mathrm{d}(x,y)) \\
&= \int_{X\times Y} f(x,y)\lambda(\mathrm{d}(x,y))
\end{aligned}
$$

となるので，(c) も成立．よって定理の主張が示された．□

先ほどの幾つかの主張に対して，可測性の意味をいくらか弱めた主張も存在する．測度空間 $(X,\mathscr{A},\mu)$ に対して，その完備化を $(X,\mathscr{A}^\mu,\mu)$ で表すことにする．

命題 B.27. $(X,\mathscr{A})$ と $(Y,\mathscr{B})$ を可測空間，$\nu : X\times\mathscr{B} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ を核，$\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ を測度とする．また λ を ν と μ の原始積とする．

(i) ν は μ-a.e. で一様に σ-有限であるとする．$E \in \mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ とすれば，写像 $x \mapsto \nu(x,E_x)$ は $\mathscr{A}^\mu$-可測である．

(ii) μ は σ-有限であると仮定すれば，(i) と同様の仮定の下で，

$$
\lambda(E) = \int_X \left(\int_Y 1_E(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y)\right)\mu(\mathrm{d}x), \quad E \in \mathscr{A}\otimes\mathscr{B}
$$

が成り立つ．

(iii) $E \in (\mathscr{A}\otimes\mathscr{B})^\lambda$ は $\lambda(E) < \infty$ を満たすとする．このとき $x \mapsto \nu(x,E_x)$ は A^μ 可測かつ μ 可積分である．さらに，

$$
\lambda(E) = \int_X \left(\int_Y 1_E(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y)\right)\mu(\mathrm{d}x), \tag{B.6}
$$

が成り立つ．

証明　(i) μ-零集合 N を ν が N 上一様に σ-有限となるように選ぶ．写像 $\widetilde{\nu} : X\times\mathscr{B} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ を

$$
\widetilde{\nu}(x,B) = \begin{cases} \nu(x,B) & x \in X\setminus N \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
$$

と定義すれば，$\widetilde{\nu}$ は $(X, \mathscr{A}^\mu)$ から $(Y, \mathscr{B})$ への核で，一様に σ-有限なものである．したがって定理 B.25 の (iv) より，任意の $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ に対して $x \mapsto \widetilde{\nu}(x, E_x)$ は $\mathscr{A}^\mu$ 可測である．$\nu(x, E_x)$ と $\widetilde{\nu}(x, E_x)$ は μ-a.e. で等しいから，これも $\mathscr{A}^\mu$ 可測である．

(ii) (i) での $\widetilde{\nu}$ を用いれば，定理 B.25 の結果より分かる．

(iii) まずは $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ の場合を考える．$\lambda(E) < \infty$ という仮定より，$(\mathscr{A} \odot \mathscr{B})_\sigma$ の元からなる減少列 (C_n) で $E \subset C_n$ かつ $\lambda(C_n) \le \lambda(E) + 1/n$ を満たすようなものを選び出すことができる．定理 B.25 より $x \mapsto \nu(x, (C_n)_x)$ は μ-可積分となり，特に μ-a.e. で有限値をとる．ここで $C = \bigcap_n C_n$ と定義すれば $C \in (\mathscr{A} \odot \mathscr{B})_{\sigma\delta}$ であり，測度の上からの連続性から

$$\nu(x, C_x) = \lim_{n\to\infty} \nu(x, (C_n)_x) \quad \mu\text{-a.e.}$$

となる．よって $x \mapsto \nu(x, C_x)$ は $\mathscr{A}^\mu$-可測である．$\lambda(C \setminus E) = 0$ に注意して同様の議論を $C \setminus E$ に対して行うことで，$C \setminus E \subset F \in (\mathscr{A} \odot \mathscr{B})_{\sigma\delta}$ かつ $\nu(x, F_x) = 0$ μ-a.e. を満たすものの存在がわかる．これより $\nu(x, (C \setminus E)_x) = 0$ μ-a.e. も成り立ち，$x \mapsto \nu(x, (C \setminus E)_x)$ は $\mathscr{A}^\mu$-可測である．さらに

$$\nu(x, E_x) = \nu(x, C_x) - \nu(x, (C \setminus E)_x) \quad \mu\text{-a.e.}$$

が成り立つから，$x \mapsto \nu(x, E_x)$ も $\mathscr{A}^\mu$-可測であることがわかる．あとは定理 B.25(vii) の証明と同様の議論を行えば (B.6) が示される．

$E \in (\mathscr{A} \otimes \mathscr{B})^\lambda$ の場合を考える．このとき，$F \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ で $\lambda(F \triangle E) = 0$ を満たすものが存在する．ここまでの議論により，F に対しては (iii) の主張が成り立っていることがわかる．あとは $\nu(x, E_x) = \nu(x, F_x)$ μ-a.e. を示せば十分である．先ほどの議論で $\nu(x, (C \setminus E)_x) = 0$ a.e. を示したのと同様の方法を用いれば，実際 $\nu(x, (E \setminus F)_x) = \nu(x, (F \setminus E)_x) = 0$ が示される．　□

定理 B.25 に対する定理 B.26 と同様に，定理 B.27 に対応して次の定理が成立する．

定理 B.28. $(X, \mathscr{A})$ と $(Y, \mathscr{B})$ を可測空間とし，測度 $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_{\ge 0}$ と核 $\nu : X \times \mathscr{B} \to \overline{\mathbb{R}}_{\ge 0}$ が与えられているものとする．さらに，λ を ν と μ の原始積とする．

(i) μ は σ-有限で，ν は a.e. で一様に σ-有限であるとする．このとき，任意の $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$-可測関数 $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}_{\ge 0}$ に対して
  - (a) 写像 $x \mapsto \displaystyle\int_X f(x, y)\nu(x, \mathrm{d}y)$ は $\mathscr{A}^\mu$-可測である．
  - (b) 次の積分のいずれかが有限ならば，もう一方も有限で値は等しく，一方が無限ならばもう一方も無限である，という意味において以下の等式が成立：

$$\int_{X\times Y} f(x, y)\lambda(\mathrm{d}(x, y)) = \int_X \left(\int_Y f(x, y)\nu(x, \mathrm{d}y) \right) \mu(\mathrm{d}x)$$

(ii) $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ は $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ 可測関数で，λ 可積分であるものとする．
  - (a) 写像 $x \mapsto \displaystyle\int_Y f(x, y)\nu(x, \mathrm{d}y)$ は $\mathscr{A}^\mu$-可測である．
  - (b) (a) の関数は μ-可積分である．

(c) 次の等式が成立つ：

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\lambda(\mathrm{d}(x,y)) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\nu(x,\mathrm{d}y)\right)\mu(\mathrm{d}x).$$

証明　定理 B.25 から定理 B.26 を導く手続きと同様の議論で証明できる． □

B.4　積空間上の測度の積分分解

B.3 では，核と測度が与えられたときに，それらの積測度が満たす性質を調べた．では，逆に積空間上の測度が与えられたときに，それが核と測度に分解できるのはどのような場合だろうか．それがこの小節のテーマである．この問いには，正則条件付き測度の概念を用いて答えることができる．本小節の結果はランダム測度の双対可予測射影の存在を示すのに用いるため，ある意味では本ノートで数学的に最も重要な部分とも言える．

以下，本小節における設定を述べよう．$(X,\mathscr{A})$ と $(Y,\mathscr{B})$ を可測空間とし，μ を $(X\times Y,\mathscr{A}\otimes\mathscr{B})$ 上の有限測度とする．また，$\mathrm{pr}_X\colon X\times Y\to X$ と $\mathrm{pr}_Y\colon X\times Y\to Y$ をそれぞれ標準的な射影とする．

定理 B.29. $\mathscr{B}$ は可算生成的で，$(\mathrm{pr}_Y)_*\mu$ を近似するコンパクトクラスが存在するとする．このとき，$(X,\mathscr{A})$ から $(Y,\mathscr{B})$ への核 ν で，全ての $A\in\mathscr{A}$ と $B\in\mathscr{B}$ に対して

$$\mu(A\times B) = \int_A \nu(B,x)(\mathrm{pr}_X)_*\mu(\mathrm{d}x) \tag{B.7}$$

を満たすものが存在する．

証明　μ と可測関数 $\mathrm{pr}_X\colon X\times Y\to X$ に対して正則条件付き測度を構成しよう．$\mathscr{B}$ は可算生成的なので，$\mathrm{pr}_Y^*\mathscr{B}\subset\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ もまた可算生成的な σ 代数である．さらに，Y における近似コンパクトクラス $\mathscr{K}$ の引き戻し $\mathrm{pr}_Y^*\mathscr{K}$ は，$\mathrm{pr}_Y^*\mathscr{A}$ 上で $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ について μ を近似するコンパクトクラスになっている．さらに $\mathrm{pr}_X(X\times Y)=X$ は可測であるから，$\mathrm{pr}_Y^*\mathscr{B}$ 上で pr_X に関する正則条件付き測度 ν_0 が存在する[79]．すなわち ν_0 は $(X,\mathscr{A})$ から $(X\times Y,\mathscr{A}\otimes\mathscr{B})$ への核で，

$$\mu(\mathrm{pr}_X^{-1}(A)\cap\mathrm{pr}_Y^{-1}(B)) = \int_A \nu_0(\mathrm{pr}_Y^{-1}(B),x)(\mathrm{pr}_X)_*\mu(\mathrm{d}x)\quad A\in\mathscr{A}\quad B\in\mathscr{B} \tag{B.8}$$

を満たすものである．ここで，$\nu(x,B)=\nu_0(\mathrm{pr}_Y^{-1}(B),x)$ と定義すれば，ν は $(X,\mathscr{A})$ から $(Y,\mathscr{B})$ への核であり，(B.7) は (B.8) より直ちに従う． □

定理 B.29 において Y を Souslin 空間としてとれば，以下の結果を得る．

系 B.30. Y が Souslin 空間のとき，$(X,\mathscr{A})$ から $(Y,\mathscr{B})$ への核 ν で，全ての $A\in\mathscr{A}$ と $B\in\mathscr{B}$ に対して

$$\mu(A\times B) = \int_A \nu(B,x)(\mathrm{pr}_X)_*\mu(\mathrm{d}x)$$

を満たすものが存在する．

79)　定理 B.17 と注意 B.18 を見よ．

C　確率過程論の補足

このノートを読むために必要な確率過程論の知識の補足を行う．

C.1　確率過程の可測性と停止時刻

この小節では，確率過程の可測性および停止時刻についての基礎事項を証明抜きで紹介する．証明やより詳しい結果を知りたい場合は，Bichteler [3]，Dellacherie [9]，Dellacherie and Meyer [10]，He, Wang, and Yan [16]，Jacod and Shiryaev [21] などを参考にして頂きたい．

C.1.1　フィルターつき確率空間

定義 C.1. (i) $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ を $\mathscr{F}$ の部分 σ-加法族の族とする．$0 \leq s \leq t < +\infty$ に対して $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$ が成り立つとき，$\mathbb{F}$ を $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上のフィルトレーションという．$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付確率空間または確率基底 (stochastic basis) と呼ぶ．

(ii) 任意の $t \in [0, +\infty[$ に対して $\mathscr{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s = \mathscr{F}_t$ が成り立つとき，$\mathbb{F}$ は右連続であるという．$\mathbb{F}$ が右連続であるとき，フィルターつき確率空間は右連続であるという．

(iii) $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ が完備かつ，任意の $t \in [0, +\infty[$ に対して $\mathscr{F}_t$ が $\mathscr{F}$ の P-零集合を全て含むとき，フィルトレーション $\mathbb{F}$ およびフィルターつき確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ は完備であるという[80]．

(iv) 完備性と右連続性をもつフィルターつき確率空間は通常の条件を満たすという．

フィルターつき確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ に対して $\mathscr{G}_t = \mathscr{F}_t^{(\mathscr{F}, P)}$ と定めれば，$(\mathscr{G}_t)$ は完備なフィルトレーションである．このフィルトレーションを $\mathbb{F}^P$ で表す．また新たなフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}^P, \mathbb{F}^P, P)$ を元のフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ の完備化と呼ぶことにする

$\mathscr{H}_t = \mathscr{F}_{t+}$ で定義されるフィルトレーション $\mathbb{H} = (\mathscr{H}_t)$ は右連続なフィルトレーションであり，これを $\mathbb{F}_+$ で表す．

フィルトレーションに対して一般に $(\mathbb{F}^P)_+ = (\mathbb{F}_+)^P$ が成立する．このフィルトレーションは，$(\Omega, \mathscr{F}^P, \mathbb{F}, P)$ 上の $\mathbb{F}$ を含む右連続かつ完備なフィルトレーションのうち最小のものである．これを $\mathbb{F}$ の通常の拡大と呼び，$\mathbb{F}_+^P$ で表す．

C.1.2　確率過程

定義 C.2. (i) $(E, \mathscr{E})$ を可測空間とする．確率変数 $X_t : \Omega \to E$ の族を，$X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ を状態空間 E の（または単に E 値）確率過程という．

(ii) $A \subset \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ はその第一射影 $\mathrm{pr}_1(A)$ が P-零集合となるとき[81]，消散的 (evanescent) であるという．E 値確率過程 X，Y に対して集合 $\{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \mid X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$ が消散的であると

80）　フィルトレーションが完備という条件は，各々の確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}_t, P|_{\mathscr{F}_t})$ が完備という条件とは異なることに注意されたい．

81）　$\mathrm{pr}_1(A)$ は必ずしも $\mathscr{F}$ の元である必要はなく，$\mathscr{F}^P$ の元であればよい．

き，X と Y は区別不能 (indistinguishable) [82]であるという．確率過程 X が 0 と区別不能なとき，X は消散的であるという．

(iii) $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間．$X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ と $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ を確率過程とする．任意の $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して $X_t = Y_t$ (a.s.) が成り立つとき，Y は X の（あるいは X は Y の）修正 (modification)，あるいは変形 (version) であるという．

E 値確率過程 $(X_t)_{t\geq 0}$ が与えられたとき，$\omega \in \Omega$ 固定するごとに写像：$\mathbb{R}_{\geq 0} \ni t \mapsto X_t(\omega) \in E$ が定まる．これを確率過程のパスや経路などと呼ぶ．

E が位相空間の場合は，特に断らない限り常に $\mathscr{E} = \mathscr{B}(E)$ として扱う．位相空間に値をとう確率変数の全てのパスが連続（右–，左連続）である時，確率過程 X は連続（右–，左連続）であるという．殆ど全てのパスが連続である時は「確率 1 で連続」ということにする[83]．また，パスが右連続かつ全ての t で左極限をも持つとき，確率過程は càdlàg であるという．パスが左連続かつ全ての t で右極限をも持つ場合は，その確率過程は càglàd であるという．先ほどと同様に確率 1 で càdlàg なる概念も定義される．X と Y がともに右（あるいは左）連続過程であるとき，X と Y が区別不能であることと，互いに修正であることは明らかに同値である．

càdlàg なパスをもつ確率過程 X に対して，

$$X_{t-} = \begin{cases} X_0 & t = 0 \\ \lim_{s\uparrow\uparrow t} X_s & t \in]0, +\infty[\end{cases}$$

および

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-}$$

と定義することにする．$(\Delta X_t)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ はまた確率過程となるから，これを ΔX で表す．

$A \subset \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して

$$A_t = \{\omega \in \Omega \mid (\omega, t) \in A\}, \quad A^\omega = \{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid (\omega, t) \in A\}$$

と定義する[84]．1_A が確率過程となるとき，A は確率集合 (stochastic set) と呼ばれる[85]．すなわち，A が確率集合とは任意の $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して $A_t \in \mathscr{F}$ ということである．

確率過程の可測性のうち，基本的なものを導入する．

定義 C.3. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．

(i) E 確率過程 X が写像 $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$ として $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})/E$-可測であるとき，$X$ を可測な確率過程 (measurable) という[86]．

82） X と Y が区別不能であるとは，すなわち $\{\omega \in \Omega \mid \exists t \in \mathbb{R}_{\geq 0},\ X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$ が P-零集合であるということである．

83） 「確率 1 で連続」たることをさして確率過程が「連続」という文献もあるように思うので，注意されたし．

84） A_t を A の t-断面 (t-section)，A^ω を A の ω-断面 (ω-section) などと呼ぶ．

85） stochastic set の語は He, Wang, and Yan [16] による．Jacod and Shiryaev には random set という用語が出ていて，これは単なる $\Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ の部分集合をさす言葉のようである．

86） 任意の $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})/E$ 可測関数が確率過程となるのは言うまでもない．

(ii) E 値確率過程 X が次の条件を満たすとき，X は $\mathbb{F}$ に適合している (*adapted*) という：任意の $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して X_t は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(E)$-可測である．

(iii) 任意の $t \in [0, \infty[$ に対して写像：$[0,t] \times \Omega \ni (s,\omega) \mapsto X_s(\omega) \in E$ が $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t/\mathscr{B}(E)$ 可測となるとき，X は $(\mathscr{F}_t)$-発展的可測 (progressively measurable) であるという．

(iv) 確率集合 A は 1_A が発展的可測となるとき，発展的 (progressive) であると言う．発展的集合の生成する σ-加法族を $\mathrm{Prog}(\mathbb{F})$ で表す．

(v) 全ての càdlàg な $\mathbb{F}$-適合過程によって生成される $\Omega \times \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ 上の σ-加法族を $\mathscr{O}(\mathbb{F})$ と書き，良可測 σ-加法族 (optional σ-field) という．考えているフィルトレーション $\mathbb{F}$ が明らかなときには単に $\mathscr{O}$ などとも書く．

(vi) 確率過程 $X : \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to E$ が $\mathscr{O}(\mathbb{F})/\mathscr{B}(E)$-可測であるとき，$X$ は良可測 (*optional*) であるという．確率集合 $A \in \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ は $A \in \mathscr{O}(\mathbb{F})$ であるとき良可測という．

(vii) 全ての左連続な $\mathbb{F}$-適合過程によって生成される $\Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ 上の σ-加法族を $\mathscr{P}(\mathbb{F})$ と書き，可予測 σ-加法族と呼ぶ．フィルトレーションが明らかなときには，単に $\mathscr{P}$ とも書く．

(viii) $\mathscr{P}(\mathbb{F})$-可測な確率過程を可予測過程，$A \in \mathscr{P}$ なる確率集合 A を可予測集合という．

発展的可測過程は明らかに適合可測過程である．逆は一般には成り立たない．確率過程 X について，X が発展的可測であることと $\mathrm{Prog}(\mathbb{F})$ 可測であることは同値である．右連続あるいは左連続な確率過程 $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ は常に可測過程となる．上で定義されたいくつかの σ 加法族については，次の包含関係がある．

$$\mathscr{P} \subset \mathscr{O} \subset \mathrm{Prog}$$

確率過程の可測性に関して，次の命題は基本的なものである．

命題 C.4. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．

(i) 任意の実数値左連続，$\mathbb{F}$-適合過程は良可測である．

(ii) X が càdlàg 適合過程なら X_- は可予測であり，ΔX は良可測である．

(iii) X が càdlàg 可予測過程ならば ΔX も可予測である．

(iv) $\mathbb{F}$ が完備なら，任意の消散的な可測過程は可予測である．

(v) $\mathbb{F}$ は完備であると仮定し，X, Y を区別不能な二つの可測過程とする．X が良可測なら，Y も良可測であり，X が可予測なら Y も可予測となる．

(vi) $\mathbb{F}$ が完備なら，確率 1 で càdlàg なパスを持つ適合可測過程は良可測であり，確率 1 で左連続な適合可測過程は可予測である．

C.1.3　停止時刻

定義 C.5. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．

(i) 写像 $S, T\colon \Omega \to [0,\infty]$ に対して，確率区間とよばれる集合を以下で定義する．

$$
\begin{aligned}
[\![S,T]\!] &= \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \mid S(\omega) \leq t \leq T(\omega)\} \\
[\![S,T[\![&= \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \mid S(\omega) \leq t < T(\omega)\} \\
]\!]S,T]\!] &= \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \mid S(\omega) < t \leq T(\omega)\} \\
]\!]S,T[\![&= \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \mid S(\omega) < t < T(\omega)\}
\end{aligned}
$$

と定義する[87]．特に $S = T$ のとき $[\![T,T]\!] = [\![T]\!]$ と書き，これを T のグラフと呼ぶ．[88][89]

(ii) 写像 $T : \Omega \to [0,+\infty]$ が $\{\omega \mid T(\omega) \leq t\} \in \mathscr{F}_t$ を満たすとき，T を $\mathbb{F}$-停止時刻とよぶ．

(iii) T が停止時刻のとき，集合族 $\mathscr{F}_T$，$\mathscr{F}_{T+}$ および $\mathscr{F}_{T-}$ を以下で定義する：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}_T &= \{A \in \mathscr{F}_\infty \mid \forall t \in [0,+\infty[,\ A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t\} \\
\mathscr{F}_{T+} &= \{A \in \mathscr{F}_\infty \mid \forall t \in [0,+\infty[,\ A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_{t+}\} \\
\mathscr{F}_{T-} &= \sigma\big[\mathscr{F}_0 \cup \{A \cap \{t < T\} \mid A \in \mathscr{F}_t,\ t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}\big]
\end{aligned}
$$

これらはどれも σ-加法族となっている．

(iv) T を $\mathbb{F}$-停止時刻，$A \in \mathscr{F}_T$ とする．

$$
T_A(\omega) = \begin{cases} T(\omega) & \omega \in A \\ +\infty & \omega \in \Omega \setminus A \end{cases}
$$

と定めれば，T_A は $\mathbb{F}$-停止時刻である．これを T の A への制限と呼ぶ．

S, T が確率変数ならば，確率区間 $[\![S,T]\!]$，$[\![S,T[\![$，$]\!]S,T]\!]$，$]\!]S,T[\![$ はどれも $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})$-可測であり，特に確率集合である．$\mathbb{F}$-停止時刻全体の集合を $\mathscr{T}(\mathbb{F})$ で表すことにする．一般に停止時刻の制限について $[\![T]\!] = [\![T_A]\!] \sqcup [\![T_{\Omega\setminus A}]\!]$ が成り立つことに注意しておく．

停止時刻は次の基本性質を持つ．

命題 C.6. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．

(i) 定数関数 $\Omega \ni \omega \mapsto t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ は停止時刻である．

(ii) 停止時刻 T と $t \in [0,+\infty[$ に対して，$T + t$ はまた $\mathbb{F}$-停止時刻である．

(iii) S, T を停止時刻とすれば，$S \wedge T$ および $S \vee T$ は停止時刻．

(iv) $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を停止時刻の列とすれば，$\bigvee_n T_n$ は $\mathbb{F}$-停止時刻である．

(v) $\mathbb{F}$ は右連続であるとする．$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{F}$-停止時刻の列とすれば，$\bigwedge_n T_n$ は停止時刻である．

---

87) ここでは $S \leq T$ とは限らない場合についてもこれらの区間を定義することにする．

88) $[\![T]\!]$ は $\Omega \times [0,\infty[$ の部分集合であるから，厳密には写像 $T : \Omega \to [0,\infty]$ のグラフ

$$\{(\omega,t) \in \Omega \times [0,\infty] \mid T(\omega) = t\}$$

ではなく，その $\Omega \times [0,\infty[$ への制限となっている．

89) $T = +\infty$（定数）のとき，$[\![S,+\infty]\!] = [\![S,+\infty[\![$ および $]\!]S,+\infty]\!] =]\!]S,+\infty[\![$ が成り立つことに注意せよ．

(vi) $\mathbb{F}$ は完備であるとし，T を停止時刻とする．$S\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ が $T = S$ a.s. を満たすなら，S も停止時刻である．

生成される σ-加法族は，次の基本的な性質を持つ．

命題 C.7. (i) T を $\mathbb{F}$-停止時刻とする．このとき $\mathscr{F}_{T-} \subset \mathscr{F}_T \subset \mathscr{F}_{T+}$ で，T は $\mathscr{F}_{T-}$-可測である．

(ii) S，T を停止時刻，$A \in \mathscr{F}_S$ とする．このとき，$A \cap \{S \leq T\}$，$A \cap \{S = T\} \in \mathscr{F}_T$ および $A \cap \{S < T\} \in \mathscr{F}_{T-}$ が成立する．

(iii) S，T を停止時刻とする．このとき $\{S \leq T\}$, $\{T \leq S\}$, $\{S < T\}$, $\{T < S\}$, $\{S = T\}$ はどれも $\mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$ の元である．さらに $\{S < T\}$, $\{S \geq T\}$ は $\mathscr{F}_{T-}$ の元である．

(iv) Ω 上で $S \leq T$ なら $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$．

(v) S, T を $\mathbb{F}$-停止時刻とすれば $\mathscr{F}_{S\wedge T} = \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$．

(vi) $\mathbb{F}$ は右連続であるとする．$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{F}$-停止時刻の列とすれば，$\mathscr{F}_{\bigwedge_n T_n} = \bigcap_n \mathscr{F}_{T_n}$ が成立．

(vii) S, T を $\mathbb{F}$-停止時刻で Ω 上 $S \leq T$ が成立するとする．さらに $\{T > 0\}$ 上で $S < T$ なら，$\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_{T-}$ となる．

(viii) S, T を $\mathbb{F}$-停止時刻とする．Ω 上で $S \leq T$ なら $\mathscr{F}_{S-} \subset \mathscr{F}_{T-}$．

(ix) (T_n) を $\mathbb{F}$-停止時刻の列とし，$T = \bigvee_n T_n$ とする．このとき $\mathscr{F}_{T-} = \bigvee_n \mathscr{F}_{T_n-}$ が成り立つ．

(x) (T_n) を $\mathbb{F}$-停止時刻列とし，$T = \bigvee_n T_n$ とする．$\{0 < T < +\infty\}$ 上 $T_n < T$ となるなら，$\mathscr{F}_{T-} = \bigvee_n \mathscr{F}_{T_n}$ が成立．

命題 C.8. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．

(i) T が $\mathbb{F}$-停止時刻であることは，$1_{[\![T,\infty[\![}$ が適合過程であることと同値である．このとき，$[\![T,\infty[\![$ は良可測である．

(ii) $\mathscr{O} = \sigma([\![T,\infty[\![\,; T \in \mathscr{T}(\mathbb{F}))$ が成り立つ．

(iii) S，T を $\mathbb{F}$-停止時刻，$Y : \Omega \to \mathbb{R}$ を $\mathscr{F}_S$-可測関数とする．このとき $Y1_{[\![S,T]\!]}$，$Y1_{[\![S,T[\![}$，$Y1_{]\!]S,T]\!]}$，$Y1_{]\!]S,T[\![}$ はどれも良可測である．

(iv) $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，S, T を $\mathbb{F}$-停止時刻とする．Y が $\mathscr{F}_{S+}$-可測ならば $Y1_{]\!]S,T]\!]}$ は可予測である．

(v)

$$\mathscr{C}_1 = \{A \times \{0\} \mid A \in \mathscr{F}_0\} \cup \{[\![0,T]\!] \mid T \in \mathscr{T}(\mathbb{F})\}$$
$$\mathscr{C}_2 = \{A \times \{0\} \mid A \in \mathscr{F}_0\} \cup \{A \times]s,t] \mid A \in \mathscr{F}_s,\ 0 \leq s < t\}$$

とおけば，$\mathscr{P} = \sigma(\mathscr{C}_1) = \sigma(\mathscr{C}_2)$ である．

確率過程 X と停止時刻 T に対して

$$X_T 1_{\{T<\infty\}} = \begin{cases} X_{T(\omega)}(\omega) & \omega \in \{T < \infty\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義する．T が有限値あるいは X_∞ が定義されているときは，$X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$ と定める．ま

た，X の停止過程 X^T を

$$X_t^T(\omega) = X_{T(\omega)\wedge t}(\omega)$$

と定義する．

命題 C.9. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，X を確率過程，T を停止時刻とする．

(i) X が発展的可測なら，$X_T 1_{\{T<\infty\}}$ は $\mathscr{F}_T$-可測である．

(ii) ξ を $\mathscr{F}_\infty$-可測関数とし，T を停止時刻とする．このとき $\xi 1_{\{T=+\infty\}}$ は $\mathscr{F}_{T-}$ 可測である．

(iii) X が良可測なら，X^T はまた良可測である．

(iv) X が可予測なら，$X_T 1_{\{T<+\infty\}}$ は $\mathscr{F}_{T-}$-可測である．

(v) X が可予測なら，X^T は可予測過程である．

定義 C.10. (i) $A \subset \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して

$$D_A(\omega) := \inf\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid (\omega, t) \in A\} = \inf A^\omega$$

で定義される関数 $D_A : \Omega \to [0, +\infty]$ を A へのデビュー (debut) と呼ぶ．

(ii) $(E, \mathscr{E})$ を可測空間とする．E-値確率過程 X と $A \in \mathscr{E}$ に対してデビュー $D_{X^{-1}(A)}$ を X の A への到達時刻と呼ぶ．

デビューや到達時刻は一般には停止時刻とはならないが，これらが停止時刻となるような十分条件として以下のようなものがよく知られている．

命題 C.11. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．

(i) $\mathbb{F}$ が完備で A が発展的集合であるとする．$[\![D_A]\!] \subset A$ なら，デビュー D_A は停止時刻である．

(ii) $\mathbb{F}$ が通常の条件を満たすなら，D_A は停止時刻である．

(iii) E を位相空間，X を右連続な $\mathbb{F}$-適合過程とする． フィルトレーション $\mathbb{F}$ が右連続ならば，任意の開集合 $G \subset E$ に対して X の G への到達時刻は停止時刻である．

(iv) $E = \mathbb{R}$ で X は単調増大なパスを持つとする．このとき任意の $a \in [-\infty, +\infty]$ に対して X の $[a, \infty[$ への到達時刻は停止時刻である．

定義 C.12. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．確率集合 A がある停止時刻の列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ によって $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![T_n]\!]$ と表されるとき．A を痩せた集合 (thin set) という [90]．さらに，列 (T_n) が $[\![T_n]\!] \cap [\![T_m]\!] = \emptyset$ $(n \neq m)$ を満たすとき，(T_n) は A についての取り付くし列 (exhausting sequence) であるという．$\{X \neq 0\}$ が痩せた集合であるような良可測過程を，痩せた確率過程 (thin process) という．

各グラフ $[\![T_n]\!]$ は良可測となるから，やせた集合は良可測である．また，やせた集合 A の ω-セクション A^ω は高々加算集合である．

命題 C.13. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．

90） thin set にはこれといって定着した訳語は無いようであるから，適当に訳してみた．ただし，「やせた集合」という言葉自体は他の分野の数学用語にもあるようなので，混同されないよう注意されたい．

(i) 任意の痩せた集合は取り付くし列を持つ．

(ii) 発展的集合 A が痩せた集合であるための必要十分条件は，$A \subset \bigcup_n [\![T_n]\!]$ を満たす停止時刻列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在することである．

(iii) 任意の càdlàg 適合過程 X について，

$$\{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \Delta X_t(\omega) \neq 0\}$$

は痩せた集合である．特に $\{\Delta X \neq 0\}$ の取りつくし列として狭義に正の停止時刻からなるものをとれる．

C.1.4　可予測時刻

定義 C.14. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，T を停止時刻とする．

(i) $[\![0, T[\![$ が可予測集合となるとき，T を ($\mathbb{F}$-) 可予測時刻 (predictable time) という．

(ii) T を $\mathbb{F}$-停止時刻とする．次の条件満たす停止時刻列 (T_n) が存在するとき，T は可予告 (foretellable) であるという．

  (a) $T_1 \leq T_2 \leq \cdots \leq T$.

  (b) $\lim_n T_n = T$.（各点収束）

  (c) $\{T > 0\}$ 上で $T_n < T$.

  停止時刻列 (T_n) は T を予告 (foretell, announce) するという．

(iii) T を $\mathbb{F}$-停止時刻とする．

  (a) $T_1 \leq T_2 \leq \cdots \leq T$.

  (b) $\lim_n T_n = T$ a.s.

  (c) $\{T > 0\}$ 上 a.s. で $T_n < T$.

  を満たす停止時刻列 (T_n) が存在するとき，停止時刻 T は a.s. で可予告であるという[91]．

(iv) T を停止時刻とする．適当な可予測時刻の列 (T_n) で $[\![T]\!] \subset \bigcup_n [\![T_n]\!]$ なるものが存在するとき，T は到達可能 (accessible) であるという．

(v) $\mathbb{F}$-停止時刻 T は，任意の可予測時刻 S に対して $P[T = S < +\infty] = 0$ とを満たすとき，到達不能（totally inaccessible）であるという．

停止時刻 T が可予測時刻であることと $[\![T]\!] \in \mathscr{P}(\mathbb{F})$ は同値である．T が到達不能であるための定義に出てくる条件 $P[T = S < +\infty] = 0$ は $P(\mathrm{pr}_1([\![T]\!] \cap [\![S]\!])) = 0$ と同値であり，すなわち $[\![T]\!] \cap [\![S]\!]$ が消散的であるということである．これより，T が到達不能で，停止時刻 R が $[\![R]\!] \subset [\![T]\!]$ を満たすなら，R はまた到達不能となることがすぐにわかる．

可予測時刻の基本的な性質は次のようなものである．

命題 C.15. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．

91） a.s. で可予告たる停止時刻を可予測時刻と定義する文献もある．（例えば，Protter [28] など．）

(i) T を $\mathbb{F}$-停止時刻とする．このとき $t \in]0,\infty]$ に対して，$T+t$ は可予測時刻である[92]．
(ii) 任意の定数時刻は可予測である．
(iii) $\mathbb{F}$ が完備であると仮定し，T を $\mathbb{F}$-可予測時刻とする．このとき，$S=T$ a.s. ならば S も可予測時刻である．
(iv) (T_n) が可予測時刻列ならば，$T=\bigvee_n T_n$ は可予測時刻である．
(v) 可予測時刻列 (T_n) に対して $S=\bigwedge_n T_n$ と定める．$\bigcup_n \{S=T_n\}=\Omega$ ならば，S は可予測時刻である．
(vi) T を可予測時刻とする．$A\in\mathscr{F}_{T-}$ なら，T_A は[93]可予測時刻である．
(vii) 可予告な $\mathbb{F}$-停止時刻は可予測である．
(viii) $\mathbb{F}$ が右連続ならば，任意の $\mathbb{F}$-可予測時刻は a.s. で可予告である．
(ix) $\mathbb{F}$ が通常の条件を満たすなら，任意の $\mathbb{F}$-可予測時刻は可予告である．
(x) A が可予測集合で D_A が停止時刻になっているようなものとする．$[\![D_A]\!]\subset A$ が成り立つならば，D_A は可予測時刻となる．

デビューの可予測性については，$[\![D_A]\!]\subset A$ という条件は外すことはできない．実際，任意の停止時刻 T に対して，可予測集合 $]\!]T,+\infty[\![$ のデビューは T であるが，これは一般には可予測時刻でない．

可予測時刻と可予測過程，あるいは可予測集合は以下のような関係を持つ．

命題 C.16. (i) T を停止時刻，S を可予測時刻とする．$A\in\mathscr{F}_{S-}$ なら $A\cap\{S\le T\}\in\mathscr{F}_{T-}$ が成立．
(ii) T,S を停止時刻，Y を確率変数とする．
(a) Y が $\mathscr{F}_{S+}$-可測ならば $Y1_{]\!]S,T]\!]}$ は可予測である．
(b) T が可予測で Y が $\mathscr{F}_{S+}$-可測 $Y1_{]\!]S,T[\![}$ は可予測である．
(c) S が可予測で Y が $\mathscr{F}_{S-}$-可測ならば $Y1_{[\![S,T]\!]}$ は可予測である．
(d) S,T が可予測で Y が $\mathscr{F}_{S-}$-可測ならば $Y1_{[\![S,T[\![}$ は可予測である．
(iii) $\mathscr{C}=\{[\![T,\infty[\![\mid T \text{ は可予測時刻}\}$ に対して，$\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{P}(\mathbb{F})$ が成立．
(iv) $\mathscr{C}=\big\{[\![S,T[\![\mid S,T \text{ は可予告停止時刻},\ S\le T\big\}$ としたとき，$\mathscr{P}(\mathbb{F})=\sigma(\mathscr{C})$ が成り立つ．
(v) X を càdlàg な $\mathbb{F}$-適合過程とする．このとき X が $\mathbb{F}$-可予測であることは，次の 2 条件が成り立つことと同値である．
(a) 狭義に正の可予測時刻列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で，$\{\Delta X\neq 0\}\subset\bigcup_n[\![T_n]\!]$ を満たすものが存在する．
(b) 任意の可予測時刻について，$X_T1_{\{T<\infty\}}$ は $\mathscr{F}_{T-}$-可測である．

定理 C.17 (可予測断面定理 (predictable section theorem))**.** $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ をフィルター付き確率空間，$A\subset\Omega\times\mathbb{R}_{\ge 0}$ を可予測集合とする．このとき，任意の $\varepsilon>0$ に対して，次の条件を満たす可予測時刻が存在する[94]：

92) ただし，任意の $s\in[0,+\infty]$ に対して $s+\infty=+\infty$ とする．
93) T_A の定義は命題 C.5 を参照．
94) 可予測集合 A の第一射影は一般には $\mathscr{F}$-可測とは限らないが，普遍可測にはなっていて P の完備化によって測ることが可能である．

(i) $[\![T]\!] \subset A$.
(ii) $P[T < \infty] \geq P(\mathrm{pr}_1(A)) - \varepsilon$.

注意 C.18. 定理 C.17 の主張で可予測集合の部分を良可測集合に，可予測時刻の部分を停止時刻に，それぞれ置き換えたものも成立する．可予測断面定理に対して，こちらは良可測断面定理と呼ばれるものである．

断面定理を用いると，以下の有用な定理を示すことが出来る．

定理 C.19. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．

(i) A を可予測集合とする．$[\![T]\!] \subset A$ なる可予測時刻 T はかならず $T = +\infty$ a.s. であるなら，A は消散的である．
(ii) $\mathbb{F}$-可予測集合 A に対して次の 2 条件は同値である．
  (a) A は消散的である．
  (b) 任意の可予測時刻 T に対して $A \cap [\![T]\!]$ が消散的になる．
(iii) X, Y は可予測過程で，全ての可予測時刻 T について $X_T 1_{\{T<\infty\}}$ および $Y_T 1_{\{T<\infty\}}$ が可積分になると仮定する．全ての可予測時刻 T に対して $E[X_T 1_{\{T<\infty\}}] \geq E[Y_T 1_{\{T<\infty\}}]$ が成り立つなら，$X \geq Y$ が消散的集合を除いて成立する．特に，任意の可予測時刻 T に対して $E[X_T 1_{\{T<\infty\}}] = E[Y_T 1_{\{T<\infty\}}]$ なら，X と Y は区別不能である．
(iv) X と Y を可予測過程とする．任意の有界可予測時刻 T に対して $X_T \geq Y_T$ が a.s. で成り立つなら，$X \geq Y$ が消散的集合を除いて成立する．特に，任意の可予測時刻に対して $X_T = Y_T$ なら X と Y は区別不能である．

注意 C.20. 定理 C.19 において，可予測過程の部分を良可測過程，可予測時刻の部分を停止時刻に置き換えたものが成立する．

任意の停止時刻は到達可能な停止時刻と到達不能な停止時刻に分解することができる．

定理 C.21. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とし，T を $\mathbb{F}$-停止時刻とする．このとき，可予測時刻の列 (S_n) と $\mathscr{F}_T$-可測集合 $A \subset \{T < +\infty\}$ で

(i) $\mathbb{F}$-停止時刻 T_A は到達不能．
(ii) $\mathbb{F}$-停止時刻 $T_{\Omega \setminus A}$ は到達可能．

を満たすものが存在する．さらに，A は P-零集合の差を除いて一意に定まる．

定理 C.21 に出てくる停止時刻 T_A は T の到達不能部分 (inaccessible part)，$T_{\Omega\setminus A}$ は到達可能成分 (accessible part) と呼ばれる．各成分は a.s. の範囲で一意に定まるが，停止時刻列 (S_n) は必ずしも一意ではない．T 自身が到達不能ならば，到達不能部分は T であり，到達可能部分は $+\infty$ である．また，T が可予測時刻ならば，到達不能部分は $+\infty$ であり，到達可能部分 T である．

定理 C.22. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とし，H を痩せた良可測過程で $H_0 = 0$ を満たすものとする．このとき，狭義に正の停止時刻列 (T_n) で次の条件を満たすものが存在する．

(i) $\{H \neq 0\} \subset \bigcup_n [\![T_n]\!]$.

(ii) T_n は可予測時刻であるか，または到達不能時刻である．

(iii) $n \neq m$ なら $[\![T_n]\!] \cap [\![T_m]\!] = \emptyset$.

特に $H = \Delta X$ のとき，定理 C.22 における停止時刻列を càdlàg 過程 X のジャンプの標準的な取り付くし列 (standard sequence of stopping times exhausting the jumps of X) ということがある．

命題 C.23. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．

(i) A は可予測な痩せた集合とする．このとき可予測時刻列 (T_n) で，$[\![T_n]\!] \cap [\![T_n]\!] = \emptyset$，$[\![T_n]\!] \subset A$ および $A \setminus \bigcup_n [\![T_n]\!]$ が消散的になるようなものが存在する．

(ii) $\mathbb{F}$ が通常の条件を満たすならば，可予測な痩せた集合 A は可予測時刻からなる取りつくし列を持つ．

(iii) X を càdlàg な可予測過程とする．このとき，X のジャンプの取り付くし列で，狭義に正の可予測時刻からなるものが存在する．さらに任意の到達不能時刻 T に対して $\Delta X_T 1_{\{T<\infty\}} = 0$ a.s. が成り立つ．

(iv) $\mathbb{F}$ が完備ならば，càdlàg な適合過程 X が可予測であることは，次の 2 条件が成り立つことと同値である．

  (a) 任意の到達不能時刻 S について，$\Delta X_S 1_{\{S<\infty\}} = 0$ a.s.

  (b) 任意の可予測時刻について，$X_T 1_{\{T<\infty\}}$ は $\mathscr{F}_{T-}$-可測である．

定義 C.24. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，X を càdlàg な適合過程，$T > 0$ を停止時刻とする．

(i) $\{T < \infty\}$ 上で $X_T \neq X_{T-}$ a.s. が成り立つとき，T を X のジャンプ時刻 (jump time) と呼ぶ．

(ii) X の任意のジャンプ時刻がある到達可能時刻と確率 1 で等しいとき，X は到達可能なジャンプのみを持つ (X has only accessible jumps) という．

(iii) X の任意のジャンプ時刻が到達不能であるとき，X は到達不能なジャンプ (X has only totally inaccessible jumps) のみをもつという．到達不能なジャンプのみをもつ càdlàg 適合過程は準左連続 (quasi-left continuous) であるともいう．

X が準左連続であるとは，任意の可予測時刻に対して a.s. で $\Delta X_T 1_{\{T<+\infty\}} = 0$ が成り立つということであり，すなわち X は可予測時刻ではジャンプしないということである．命題 C.23 より可予測過程は到達不能時刻ではジャンプしないので，準左連続過程とは可予測過程と“直交”するようなジャンプの構造を持つ過程と言える．実際，準左連続過程は次のように特徴付けられる．

命題 C.25. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，X を càdlàg な適合過程とする．このとき，次の 3 条件は同値である：

(i) X は準左連続である．

(ii) X のジャンプの取りつくし列で，到達不能時刻からなるようなものが存在する．

(iii) (T_n) 停止時刻の任意の増加列とし，T をその極限たる停止時刻とする．このとき，$\{T < +\infty\}$ 上で $\lim_n X_{T_n} = X_T$ a.s. が成立する．

C.1.5　確率過程の局所化と前局所化

定義 C.26. $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ をフィルター付き確率空間とし，$\mathscr{C}$ を確率過程からなる集合とする．$\mathscr{C}_{\mathrm{loc}}$ は確率過程 X で次の条件を満たすようなもの全体の空間とする：停止時刻の列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で

(i) $T_1(\omega)\le T_2(\omega)\le\dots$.
(ii) $T_n\to\infty$, P-a.s.
(iii) $X^{T_n}\in\mathscr{C}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

を満たすものが存在する．

このような条件を満たす停止時刻列 (T_n) を（$\mathscr{C}$ に関する X）の局所化列 (localizing sequence) という．また，確率過程のクラス $\mathscr{C}_{\mathrm{loc}}$ を $\mathscr{C}$ の局所化 (localized class) という．

定義 C.27. $\mathscr{C}$ を確率過程の集合とする．任意の $X\in\mathscr{C}$ と任意の停止時刻 T に対して $X^T\in\mathscr{C}$ となるとき，$\mathscr{C}$ は安定 (stable) であるという．

定義より明らかに $\mathscr{C}\subset\mathscr{C}_{\mathrm{loc}}$ である．実際，任意の n に対して $T_n(\omega)=+\infty,\omega\in\Omega$ とおけば (T_n) は X の局所化列である．

補題 C.28. $\mathscr{C}$ をフィルター付き確率空間 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ 上の確率変数からなる集合で，安定なるものとする．このとき，次が成立する：

(i) $\mathscr{C}_{\mathrm{loc}}$ はまた停止について安定である．
(ii) $\mathbb{F}$ が右連続ならば，$(\mathscr{C}_{\mathrm{loc}})_{\mathrm{loc}}=\mathscr{C}_{\mathrm{loc}}$.
(iii) $\mathscr{C}$ がベクトル空間ならば，$(\mathscr{C}_{\mathrm{loc}})_{\mathrm{loc}}=\mathscr{C}_{\mathrm{loc}}$.
(iv) $(\mathscr{C}\cap\mathscr{C}')_{\mathrm{loc}}=\mathscr{C}_{\mathrm{loc}}\cap\mathscr{C}'_{\mathrm{loc}}$.

X を càdlàg 過程とする．写像 $T\colon X\to\overline{\mathbb{R}}_{\ge 0}$ に対して

$$X^{T-}=X1_{[\![0,T[\![}+X_{T-}1_{[\![T,\infty[\![}$$

と定義する．X^{T-} もまた càdlàg 過程である．

命題 C.29. $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ をフィルター付き確率空間とする．X が $\mathbb{F}$-適合で T が $\mathbb{F}$-停止時刻ならば，X^{T-} もまた適合過程である．

定義 C.30. $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ をフィルター付き確率空間とし，$\mathscr{C}$ を確率過程からなる集合とする．$\mathscr{C}_{ploc}$ は確率過程 X で次の条件を満たすようなもの全体の空間とする：停止時刻の列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で

(i) $T_1\le T_2\le\dots$.
(ii) $T_n\to\infty$, P-a.s.
(iii) 全ての $n\in\mathbb{N}$ に対して $X^{T_n-}\in\mathscr{C}$,

を満たすものが存在する．

このような条件を満たす停止時刻列 (T_n) を（$\mathscr{C}$ に関する X）の前局所化列 (prelocalizing sequence) という．また，確率過程のクラス $\mathscr{C}_{\mathrm{ploc}}$ を $\mathscr{C}$ の局所化 (prelocalized class, prelocalization) という．

C.2　可予測射影と双対可予測射影

確率過程の可予測射影と双対可予測射影は，ジャンプをもつ局所マルチンゲールの解析に必要な概念である．ここでも証明はせずに基本的な結果のみを紹介する．証明が知りたい場合は Dellacherie and Meyer [10]，He, Wang, and Yan [16]，Jacod and Shiryaev [21]，Medvegyev [24] などが参考になる．

C.2.1　可予測射影

定義 C.31. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間，X を確率過程とする．$\overline{\mathbb{R}}$ 確率過程 ${}^{\mathfrak{p}}X$ で次の条件を満たすものが存在する時，${}^{\mathfrak{p}}X$ を X の可予測射影 (predictable projection) と呼ぶ：

(i) ${}^{\mathfrak{p}}X$ は $\mathbb{F}$-可予測過程.

(ii) 任意の可予測時刻 T に対して

$$
{}^{\mathfrak{p}}X_T 1_{\{T<+\infty\}} = E[X_T 1_{\{T<+\infty\}} | \mathscr{F}_{T-}], \quad P\text{-a.s.}
$$

が成立.

ただし，任意の可予測時刻 T に対して右辺の条件付き期待値が定義できることも，可予測射影の定義に含むものとする．

可予測射影は次の基本的な性質を持つ．

定理 C.32. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を完備なフィルター付き確率空間とする．このとき以下の主張が成立．ただし，以下の条件において確率過程の相等は常に区別不能の意味である．

(i) 可予測過程が存在すれば，それは区別不能の意味で一意である．

(ii) Y が可予測で双対可予測射影ももつなら，${}^{\mathfrak{p}}Y = Y$ が区別不能の意味で成立.

(iii) Y は実数値の可予測過程で，X は有限なる可予測射影 ${}^{\mathfrak{p}}X$ を持つとする．このとき，YX もまた有限なる可予測射影を持ち，${}^{\mathfrak{p}}(YX) = Y({}^{\mathfrak{p}}X)$ が成立.

(iv) Y は $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ 値可予測過程で，X は非負の過程で可予測射影 ${}^{\mathfrak{p}}X$ を持つこと，または Y は $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 値の可予測過程で X は可予測射影 ${}^{\mathfrak{p}}X$ を持つとする．このとき，YX もまた可予測射影を持ち，${}^{\mathfrak{p}}(YX) = Y({}^{\mathfrak{p}}X)$ が成立.

(v) $0 \leq X \leq Y$ が可予測射影をもつならば，$0 \leq {}^{\mathfrak{p}}X \leq {}^{\mathfrak{p}}Y$ が成立．(i.e. $X \mapsto {}^{\mathfrak{p}}X$ は増加的である．)

(vi) X, Y が有限なる可予測射影を持つとする．このとき，$X+Y$ もまた有限なる可予測射影を持ち ${}^{\mathfrak{p}}(X+Y) = {}^{\mathfrak{p}}X + {}^{\mathfrak{p}}Y$ が成立.

(vii) X と Y が非負ならば $X+Y$ もまた（非負の）可予測射影を持ち，${}^{\mathfrak{p}}(X+Y) = {}^{\mathfrak{p}}X + {}^{\mathfrak{p}}Y$ が成立.

(viii) X が可予測射影を持つならば，任意の実数 a に対して aX もまた可予測過程を持ち，${}^{\mathfrak{p}}(aX) = a({}^{\mathfrak{p}}X)$ が成り立つ.

(ix) 可予測射影についての単調収束定理が成り立つ：非負かつ単調増大な (X_n) は $X_n \to X$

(pointwise) を満たし，各 X_n は可予測射影を持つとする．このとき，X もまた可予測射影を持ち，${}^{\mathfrak{p}}X_n \uparrow {}^{\mathfrak{p}}X$ が確率 1 で全ての t に対して成立．

(x) X は有限なる可予測射影をもつ過程とする．任意の停止時刻 T について X^T はまた有限の可予測射影を持ち，

$$
{}^{\mathfrak{p}}(X^T) = ({}^{\mathfrak{p}}X)1_{[\![0,T]\!]} + ({}^{\mathfrak{p}}X_T)1_{]\!]T,+\infty[\![}
$$

が a.s. で成立．特に ${}^{\mathfrak{p}}(X^T)1_{[\![0,T]\!]} = ({}^{\mathfrak{p}}X)^T 1_{[\![0,T]\!]}$ が成立する．非負でも同様の主張が成り立つ．

(xi) 可予測射影は局所化可能である：(T_n) を停止時刻の増加列で，a.s. で $+\infty$ に発散するものとする．また，X^{T_n} は任意の n で可予測射影を持つとする．ある確率過程 Y に対して $Y^{T_n}1_{[\![0,T_n]\!]} = {}^{\mathfrak{p}}(X^{T_n})1_{[\![0,T_n]\!]}$ a.s. $(n \in \mathbb{N})$ が成り立つなら，${}^{\mathfrak{p}}X$ も存在して ${}^{\mathfrak{p}}X = Y$ a.s. である．X^{T_n} が任意の n で well-defined（resp. 有限）ならば，${}^{\mathfrak{p}}X$ も well-defined（resp. 有限）となる．.

可予測過程の存在については以下の結果が重要である．

定理 C.33. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を通常の条件を満たすフィルター付き確率空間とする．

(i) X が局所マルチンゲールならば，X は有限な可予測射影 ${}^{\mathfrak{p}}X$ をもち，${}^{\mathfrak{p}}X = X_-$ が成立．

(ii) 任意の $\mathbb{F}$-局所マルチンゲール X に対して ${}^{\mathfrak{p}}(\Delta X) = 0$ が成立．

(iii) 可積分な確率変数 ξ に対して $M = (M_t)$ を $(E[\xi|\mathscr{F}_t])$ の càdlàg 修正とする．このとき確率過程 $X \equiv \xi$ は有限な可予測射影を持ち ${}^{\mathfrak{p}}X = M_-$ である．

(iv) 任意の非負あるいは有界 $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ 可測過程 X は可予測射影を持つ．

定義 C.34. 確率集合 $A \in \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ に対して，

$$
A' = \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \mid {}^{\mathfrak{p}}(1_A)(\omega, t) > 0\}
$$

で定義される可予測集合 A' を A の可予測台 (predictable support) と呼ぶ[95]．

命題 C.35. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を通常の条件を満たすフィルター付き確率空間とする．

(i) A を $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ 可測集合とする．A の可予測台 A' は，次の条件を満たす（消散的集合の差の範囲で）唯一つの可予測集合である：任意の可予測時刻 T に対して $A \cap [\![T]\!]$ が消散的であることと $A' \cap [\![T]\!]$ が消散的であることは同値である．

(ii) S を到達不能停止時刻とすれば，${}^{\mathfrak{p}}1_{[\![S]\!]}$ は消散的である．

(iii) $\mathbb{F}$-良可測集合 A が痩せた集合ならば，その可予測台 A' も痩せた集合である．

(iv) X を càdlàg 適合過程とする[96]．X が準左連続であることと，確率集合 $\{\Delta X \neq 0\}$ の可予測台が消散的であることは同値である．この条件の下，${}^{\mathfrak{p}}X = X_-$ である．

注意 C.36. 可予測射影と似た概念で，可測過程の良可測射影 (optional projection) というものがある．X を可測過程とする．確率過程 ${}^{\mathfrak{o}}X$ が次の条件を満たすとき，${}^{\mathfrak{o}}X$ は X の良可測射影であるという．

95） 可予測射影は消散的集合の差を除いてしか一意に定まらないので，A' も集合としては消散的集合の曖昧をもって定義される．

96） よって良可測である．

(i) ${}^{o}X$ は $\mathbb{F}$-良可測過程.

(ii) 任意の停止時刻 T に対して

$$ {}^{o}X_T 1_{\{T<+\infty\}} = E[X_T 1_{\{T<+\infty\}} | \mathscr{F}_T], \quad P\text{-a.s.} $$

が成立.

良可測射影については，Dellacherie and Meyer [11] または He, Wang, and Yan [16] を参照されたし.

C.2.2　増加過程

フィルターつき確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を一つ固定して話を進める.

定義 C.37. $\mathbb{V}^+$ を実数値の確率過程 A で，パス $t \mapsto A_t(\omega)$ が càdlàg な増加関数かつ $A_0 = 0$ となるようなもの全体の空間とする．$\mathscr{V}^+$ は $\mathbb{V}^+$ の元のうち $\mathbb{F}$-適合なもの全体の集合を表す．パスが増加的である代わりに，局所有限変動をもつ過程の全体をそれぞれ $\mathbb{V}$ および $\mathscr{V}$ で表す.

考えているフィルター付き確率空間が明らかなときは，単に $\mathscr{V}$ や $\mathscr{V}^+$ などと書く．条件を一部省略して，$\mathscr{V}^+$ の元を適合増加過程，$\mathscr{V}$ の元を適合有限変動過程などと呼ぶこともある．$A \in \mathbb{V}^+$ は右連続な確率過程だから，可測過程である．$A \in \mathbb{V}^+$ に対して

$$ A_\infty(\omega) = \lim_{t\to\infty} A_t(\omega) $$

とすれば $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ 値確率変数 A_∞ が定まる．$A \in \mathbb{V}$ に対して，$V(A)_t(\omega)$ でパス $t \mapsto A_t(\omega)$ の $[0,t]$ 上での全変動を表すことにする．$A \in \mathscr{V}^+$ ならば $V(A) = A$ である．$A \in \mathbb{V}$ に対して，パスごとに

$$ A^{\mathrm{d}}_t(\omega) = \sum_{0<s\leq t} \Delta A_s(\omega) $$

と定義する.

命題 C.38. (i) $A \in \mathscr{V}$ とすれば，$B, C \in \mathscr{V}^+$ で $A = B - C, V(A) = B + C$ なる組 (B, C) がただ一つ存在する.

(ii) A が可予測なら，上の $B, C, V(A)$ はどれも可予測である.

(iii) $A \in \mathscr{V}$ なら $A^{\mathrm{d}} \in \mathscr{V}$ である.

(iv) $A \in \mathscr{V}$ が可予測なら，A^{d} も可予測である.

$A \in \mathscr{V}$ は $A = A^{\mathrm{c}} + A^{\mathrm{d}}$ $(A^{\mathrm{c}}, A^{\mathrm{d}} \in \mathscr{V})$ という分解を持つ．A^{c} を A の連続部分 (continuous part) A^{d} を A の純不連続部分 (purely discontinuous part of a process of finite variation) またはジャンプ部分 (jump part) という．$A^{\mathrm{c}} = 0$ のとき $A \in \mathscr{V}$ は純不連続 (purely discontinuous) であるという．$A \in \mathscr{V}$ なら，$V(A)^{\mathrm{c}} = V(A^{\mathrm{c}})$ かつ $V(A)^{\mathrm{d}} = V(A^{\mathrm{d}})$ が成り立つ.

命題 C.39. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とし，$A \in \mathscr{V}$ とする．このとき，A は次のように一意的に分解できる.

$$ A = A^{\mathrm{c}} + A^{\mathrm{da}} + A^{\mathrm{di}} $$

であって，$A^{\mathrm{c}}, A^{\mathrm{da}}, A^{\mathrm{di}} \in \mathscr{V}$ はそれぞれ次の条件を満たす：A^c は連続，A^{da} は純不連続で到達可能なジャンプのみを持ち，A^{di} は純不連続で到達不能なジャンプのみを持つ．

$A \in \mathscr{V}$ としよう．各 ω に対して局所有界変動関数 $t \mapsto A_t(\omega)$ によって生成される Stieltjes 測度を $\mathrm{d}A_t(\omega)$ で表すことにする．これが有限測度となるための必要十分条件は $V(A)_\infty(\omega) < +\infty$ である．

$A, B \in \mathscr{V}$ が与えられたときに，任意の $\omega \in \Omega$（resp. a.e.$\omega \in \Omega$）に対して測度 $\mathrm{d}A(\omega)$ が $\mathrm{d}B(\omega)$ に対して絶対連続となる時，$\mathrm{d}A \ll \mathrm{d}B$ (resp. $\mathrm{d}A \ll \mathrm{d}B$ a.s.) と 表現する．

可測な $\mathbb{R}$ 値確率過程 H が与えられたとき，各々のパス $\omega \mapsto H_t(\omega)$ は Borel 可測であるから，パスに沿った Stieltjes 積分を考えることが出来る．パスごとの Stieltjes 積分が存在するとき，それによって定まる $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 値確率過程を次のように表す：

$$(H \bullet A)_t(\omega) = \int_{[0,t]} H_s(\omega)\mathrm{d}A_s(\omega)$$

命題 C.40. (i) $A \in \mathscr{V}^+$ とし，H は非負の良可測過程で $H \bullet A$ が有限値になるようなものとする．このとき $H \bullet A \in \mathscr{V}^+$ であり，さらに $d(H \bullet A) \ll \mathrm{d}A$ が成立.

(ii) (i) においてさらに A, H が可予測なら，$H \bullet A$ も可予測である．

(iii) $A \in \mathscr{V}$ とし，H は非負の良可測過程で $H \bullet A$ が有限値になるようなものとする．このとき $H \bullet A \in \mathscr{V}$ であり，さらに $d(H \bullet A) \ll \mathrm{d}A$ が成立.

(iv) (iii) においてさらに A, H が可予測なら，$H \bullet A$ も可予測である．

定義 C.41. (i) $\mathbb{V}^+$ の元 A で $E[A_\infty] < +\infty$ となるもの全体の空間を $\mathbb{A}^+$ で表わし，$\mathscr{A}^+ = \mathbb{A}^+ \cap \mathscr{V}^+$ と定義する．$\mathbb{V}^+$ の元 A が $\mathbb{A}^+$ を満たすとき，A は可積分 (integrable) であるという．

(ii) $\mathbb{V}$ の元 A で $E[V(A)_\infty] < +\infty$ となるもの全体の空間を $\mathbb{A}$ で表し，$\mathscr{A} = \mathscr{V} \cap \mathbb{A}$ と定義する．$\mathbb{A}$ の元たる有界変動過程は，可積分変動 (integrable variation) をもつという．定義より明らかに $\mathscr{A} = \mathscr{A}^+ - \mathscr{A}^+$ である．

(iii) $\mathbb{A}^+$ の局所化 $\mathbb{A}^+_{\mathrm{loc}}$ の元は，局所可積分 (locally integrable) であるという．また，$\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ の元は局所可積分変動 (locally integrable variation) をもつという．

$\mathscr{V}^+, \mathscr{V}, \mathscr{A}^+, \mathscr{A}$ は明らかに停止について安定である．また $\mathscr{V}^+_{\mathrm{loc}} = \mathscr{V}^+$ および $\mathscr{V}_{\mathrm{loc}} = \mathscr{V}$ が成り立つ．

命題 C.42. $A \in \mathscr{V}$ に対して，次の 4 条件は同値である．

(i) $A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$.

(ii) $\sum \Delta A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$.

(iii) $\sqrt{\sum(\Delta A)^2} \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$.

(iv) $A^* = \sup_{s \leq \cdot} |A_s| \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$

命題 C.43. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ をフィルター付き確率空間とする．$A \in \mathscr{A}$ とし，M は有界な càdlàg マルチンゲールとする．このとき任意の停止時刻 T に対して $E[M_T A_T] = E[(M \bullet A)_T]$ である．さらに A が可予測ならば，$E[M_T A_T] = E[(M_- \bullet A)_T]$ が成り立つ．

測度論における Radon-Nikodym の定理では，$\nu \ll \mu$ なる測度に対して $\nu = f \bullet \mu$ なる可測関数 f（Radon-Nikodym 密度）の存在が示される．同様にして，二つの局所有界変動過程 A, B に対して $\mathrm{d}B \ll \mathrm{d}A$（あるいは $\mathrm{d}B \ll \mathrm{d}A$ a.s.）ならば，$B = H \bullet A$ なる可測過程 H が存在するかという疑問

が生ずる．それに答えるのが以下の命題である．

命題 C.44. $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ を右連続なフィルター付き確率空間とする．

(i) $A,B \in \mathscr{V}^+$ は $\mathrm{d}B \ll \mathrm{d}A$ a.s. なる関係を満たすとする．このとき，非負の良可測過程 H で $B = H \bullet A$ を（区別不能の意味で）満たすものが存在する．

(ii) $A,B \in \mathscr{V}$ かつ $\mathrm{d}B \ll \mathrm{d}A$ a.s ならば，良可測過程 H で $B = H \bullet A$ を区別不能の意味で満たすものが存在する．

(iii) A,B が可予測なら，(i) と (ii) における H として可予測なものが取れる．

C.2.3　双対可予測射影

$(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ は通常の条件を見たすフィルターつき確率空間とする．

$A \in \mathbb{V}^+$ に対して $\nu(\omega,\mathrm{d}t) = \mathrm{d}A_t(\omega)$ と定義すれば，$\nu\colon \Omega \times \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ は $(\Omega,\mathscr{F})$ から $(\mathbb{R}_{\geq 0},\mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}))$ への核である．したがって ν と P によって生成される $\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ 上の $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ 値測度が存在する．これを μ_A という記号で表す．$A \in \mathbb{V}^+$ に対して μ_A は σ-有限測度となり，

$$\mu_A(E) = E\left[\int_{[0,\infty[} 1_E(\cdot,s)\mathrm{d}A_s\right],\quad E \in \mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})$$

が成立する．

$\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ 上の $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ 値測度 μ がある $A \in \mathbb{V}^+$ に対して

$$\mu_A(E) = \mu(E),\quad E \in \mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})$$

を満たすとき，μ は A によって生成される測度であるという．また，μ 任意の消散的な集合 $N \in \mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ に対して $\mu(N) = 0$ となるとき，μ は許容可能 (admissible) であるという．ある $A \in \mathbb{V}^+$ によって生成される測度は明らかに許容可能である．許容可能な測度 μ が任意の有界可測過程に対して $\mu(X) = \mu({}^{\mathfrak{p}}X)$ ($\mu(X) = \mu({}^{\mathfrak{o}}X)$) を満たすとき，$\mu$ は可予測（良可測）であるという[97]．

与えられた測度が増加過程によって生成されるものか判定するためには，次の定理が有用である．

定理 C.45. (i) μ を $\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ 上の $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ 値測度とする．μ がある $A \in \mathbb{V}^+$ によって生成される測度であることは，以下の 3 条件が成り立つことと同値である．

(a) $\mu([\![0]\!]) = 0$.

(b) 任意の $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して $F \mapsto \mu(F\times[0,t])$ は σ-有限測度である．

(c) μ は許容可能な測度である．

μ が増加過程 $A,B \in \mathbb{V}^+$ によって生成されているとき，$A = B$ が区別不能の意味で成り立つ．

(ii) $A \in \mathbb{V}^+$ とする．このとき，A が可予測（良可測）であることと μ_A が可予測（良可測）であることは同値である．

97)　ただし，$\mu(X)$ は可測過程 X の測度 μ による積分である．

可測過程の可予測射影を用いて，許容可能な測度の可予測射影を定める．

定義 C.46. σ-有限測度 $\mu\colon \mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ は許容可能であるとする．有界可測過程 X に対して

$$^{\mathfrak{p}}\mu(X) = \mu(^{\mathfrak{p}}X)$$

と定義すれば，可予測射影の性質より $^{\mathfrak{p}}\mu$ は $\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ 上の可予測な測度となる．$^{\mathfrak{p}}\mu$ を μ の可予測射影 (predictable projection) と呼ぶ．

定理 C.47. $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ を通常の条件を満たすフィルター付き確率空間，$A\in\mathbb{V}^+$ とする．このとき次の 2 条件は同値である．

(i) $^{\mathfrak{p}}\mu_A$ はある $A'\in\mathbb{V}^+$ によって生成される測度である．

(ii) A は局所可積分である[98]．

定義 C.48 (双対可予測射影)**.** $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ を通常の条件を満たすフィルター付き確率空間とし，$A\in\mathbb{V}^+$ は局所可積分であるとする．このとき $^{\mathfrak{p}}\mu_A$ はある可予測増加過程 $A^{\mathfrak{p}}$ によって生成される．この可予測増加過程 $A^{\mathfrak{p}}$ を A の双対可予測射影 (dual predictable projection) または可予測補償子 (predictable compensator) と呼ぶ． $A\in\mathbb{V}$ の時は，増加過程による標準的な分解 $A=A_1-A_2$ によって $A^{\mathfrak{p}}=A_1^{\mathfrak{p}}-A_2^{\mathfrak{p}}$ と定める．

双対可予測射影の定義より，非負有界可測過程 H に対して

$$E[(^{\mathfrak{p}}H\bullet A)_\infty] = \mu_A(^{\mathfrak{p}}H) = (\mu_A)^{\mathfrak{p}}(H) = \mu_{A^{\mathfrak{p}}}(H) = E[(H\bullet A^{\mathfrak{p}})_\infty]$$

すなわち，射影作用素 $^{\mathfrak{p}}(\cdot)$ を $(\cdot)^{\mathfrak{p}}$ として A に移すことが出来る．これより $A^{\mathfrak{p}}$ は双対可予測射影と呼ばれるのである．

命題 C.49. $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ を通常の条件を満たすフィルター付き確率空間とし，$A\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ について，次の 2 条件は同値である．

(i) 可予測過程 A' は A の双対可予測射影である．

(ii) $A-A'\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$

命題 C.50 (双対可予測射影の性質)**.** $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ を通常の条件を満たすフィルター付き確率空間とする．このとき，可予測射影について次の性質が成立する．ただし，確率過程の等号はどれも区別不能の意味である．

(i) $A\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ が可予測なら，$A^{\mathfrak{p}}=A$.

(ii) $A\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ が局所マルチンゲールであることと，$A^{\mathfrak{p}}$ が消散的であることは同値である．

(iii) $A,B\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ なら，$(A+B)^{\mathfrak{p}}=A^{\mathfrak{p}}+B^{\mathfrak{p}}$ かつ $(cA)^{\mathfrak{p}}=c(A^{\mathfrak{p}})$.（$c$ は定数.）

(iv) $A\in\mathscr{A}$ なら，$A^{\mathfrak{p}}\in\mathscr{A}$ かつ $A-A^{\mathfrak{p}}\in\mathscr{M}$ が成立.

(v) $A\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ なら，任意の停止時刻 T に対して $(A^T)^{\mathfrak{p}}=(A^{\mathfrak{p}})^T$.

98） $A\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^+$ である必要はない．（適合かどうかの違い.）

(vi) $A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ なら，$\Delta(A^{\mathfrak{p}}) = {}^{\mathfrak{p}}(\Delta A)$.

(vii) $A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ のとき，A が準左連続ならば $A^{\mathfrak{p}}$ が確率 1 で連続である．さらに $A \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ なら逆も成立．

(viii) H は可予測，$A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$，$(H \bullet A) \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ なら $(H \bullet A)^{\mathfrak{p}} = H \bullet A^{\mathfrak{p}}$.

(ix) H が可予測かつ $H \bullet A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ なら，$H \bullet (A - A^{\mathfrak{p}}) = H \bullet A - H \bullet A^{\mathfrak{p}}$ は局所マルチンゲールである．

(x) 任意の $A \in \mathscr{A}^+$ に対して $E[(A^{\mathfrak{p}}_\infty)^2] \leq 4E[A^2_\infty]$ が成り立つ．

初等的な確率過程の場合は，双対可予測射影を具体的に求めることができる．

命題 C.51. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を通常の条件を満たすフィルター付き確率空間，T を可予測時刻，ξ を実数値の確率過程とする．このとき，$A = \xi 1_{[\![T,\infty[\![} \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ は $\xi 1_{\{T<\infty\}}$ が $\mathscr{F}_{T-}$-σ 可積分であることと同値である．$A \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ なら

$$A^{\mathfrak{p}} = E[\xi 1_{\{T<\infty\}} | \mathscr{F}_{T-}] 1_{[\![T,\infty[\![}$$

が成り立つ．

C.3　マルチンゲール理論についての補足

本節では，通常の条件を満たすフィルターつき確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を一つ固定して議論を進めることにする．この節の結果の全てに必ずしも通常の条件が必要なわけではないが，議論が徒に難しくなることを避けるための仮定である．

C.3.1　局所マルチンゲールの基本定理

$\mathscr{M}$ は一様可積分マルチンゲール全体の空間とする．$\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ の元は局所マルチンゲールと呼ばれる．

次の定理は局所マルチンゲール (the fundamental theorem of local martingales) の基本定理と呼ばれ，局所マルチンゲールの理論において最も重要な結果の一つである．

定理 C.52 (局所マルチンゲールの基本定理)**.**
$a > 0$ とする．任意の局所マルチンゲールは

$$M = M_0 + M' + M'', \quad M' \in \mathscr{V} \cap \mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}, \quad |\Delta M''| \leq a$$

という分解を持つ[99]．（この分解は必ずしも一意ではない．）特に，

$$\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0} = \mathscr{V} \cap \mathscr{M}_{\mathrm{loc},0} + \mathscr{M}^2_{\mathrm{loc},0}$$

である．

99）　よって M'' は局所有界である．

証明　$M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ に対して，

$$A_t = \sum_{0<s\le t} \Delta M_s 1_{\{|\Delta M|>a/2\}}(s)$$

と定義する．このとき明らかに $A \in \mathscr{V}$ である．まずはこの過程が局所可積分であることを示そう．(T_n) を M の $\mathscr{M}$ についての局所化列とし，さらに

$$S_n = \inf\left\{ t \ge 0 \,\middle|\, |M_t| \ge n \text{ or } \sum_{s\le t} |\Delta A_s| \ge n \right\}$$

と定義する．$R_n = T_n \wedge S_n$ とすれば，(R_n) は停止時刻の増加列で $R_n \to \infty$ a.s. を満たす．

$$|\Delta A_{R_n}| \le |\Delta M_{R_n}| \le n + |M_{R_n}| = n + \left| M^{T_n}_{S_n} \right|$$

であることに注意すれば，

$$V(A)_{R_n} \le n + |\Delta A_{R_n}| \le 2n + \left| M^{T_n}_{S_n} \right|$$

がわかる．ここで期待値をとれば

$$E[V(A)_{R_n}] \le 2n + E\left[\left| M^{T_n}_{S_n} \right| \right] < \infty$$

よって (R_n) は A の $\mathscr{A}$ に関する局所化列であり，$A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ が示された．

$A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ だから，A は双対可予測射影をもつ．そこで $M' = A - A^{\mathfrak{p}}$ と定義する．双対可予測射影の定義より明らかに $M' \in \mathscr{V} \cap \mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$ である．さらに $M'' = M - M_0 - M'$ と定義したとき，この M'' ジャンプが a 以下であることを示そう．$X = \Delta M 1_{\{|\Delta M| \le a/2\}}$ と定義すれば，$\Delta A = \Delta M - X$ である．定理 C.33 と定理 C.50 から

$$\Delta(A^{\mathfrak{p}}) = {}^{\mathfrak{p}}(\Delta A) = {}^{\mathfrak{p}}(\Delta M) - {}^{\mathfrak{p}}X = -{}^{\mathfrak{p}}X$$

が成り立つことに注意する．これより

$$\Delta M'' = \Delta M - \Delta M' = \Delta M - \Delta A + \Delta(A^{\mathfrak{p}}) = X - {}^{\mathfrak{p}}X$$

が成り立つ．定義より明らかに $|X|| \le a/2$ である．さらに可予測射影の単調性より $|{}^{\mathfrak{p}}X| \le a/2$ も成り立つ．ゆえに

$$|\Delta M''| \le |X| + |{}^{\mathfrak{p}}X| \le a$$

となり，求める不等式が示された．特に M'' は局所有界なので，局所二乗可積分である．　□

C.3.2　二乗可積分マルチンゲール，局所マルチンゲールと二次変分

$$\mathscr{M}^2 = \left\{ M \in \mathscr{M} \,\middle|\, \sup_t E\left[M_t^2\right] < \infty \right\}$$

と定義する．$\mathscr{M}^2$ の元を二乗可積分マルチンゲールと呼ぶ．明らかに $\mathscr{M}^2 \subset \mathscr{M}$ であるから，$M \in \mathscr{M}^2$ ならある $M_\infty \in L^1(\mathscr{F}_\infty)$ が存在して $(M_t)_{t\in[0,\infty]}$ はマルチンゲールとなる．Fatou の補題用いれば

$$E\left[M_\infty^2\right] \leq \liminf_{n\to\infty} E\left[M_n^2\right] \leq \sup_t E\left[M_t^2\right]$$

は二乗可積分であることがわかる．逆に $M \in \mathscr{M}$ が $E[M_\infty^2] < \infty$ を満たすならば $(M_t^2)_{t\in[0,\infty]}$ は劣マルチンゲールとなり，

$$\sup_t E\left[M_t^2\right] \leq E\left[M_\infty^2\right] < \infty$$

が従う．つまり，$M \in \mathscr{M}$ に対して $M \in \mathscr{M}^2$ と $M_\infty \in L^2(\mathscr{F}_\infty)$ は同値であり，さらにこのとき

$$E\left[M_\infty^2\right] = \sup_t E\left[M_t^2\right]$$

が成り立つ．ここで

$$\langle M, N\rangle_{\mathscr{M}^2} = E[M_\infty N_\infty]$$

と定義する．このとき，$\mathscr{M}^2$ は $M \mapsto M_\infty$ という対応により $L^2(\mathscr{F}_\infty)$ と等長同型な Hilbert 空間となることがわかる．また，Doob の不等式を用いることで $\mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ が閉部分空間であることもわかる．

定義 C.53. (i) $M, N \in \mathscr{M}^2$ とする．$MN \in \mathscr{M}_0$ が成立するとき，M と N は強い意味で直交する，または単に直交する ((strongly-) orthogonal) という．

(ii) $M, N \in \mathscr{M}^2$ は $E[M_\infty N_\infty]$ を内積とした Hilbert 空間 $\mathscr{M}^2$ の元として直交するとき，弱い意味で直交するという．

(iii) $M \in \mathscr{M}^2$ とする．M が任意の $N \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ と強い意味で直交するとき，M は純不連続二乗可積分マルチンゲール (purely discontinuous square integrable martingale) であるという．純不連続二乗可積分マルチンゲール全体の空間を $\mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ で表す．

(iv) $M, N \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ とする．$MN \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$ が成立するとき，M と N は直交するという．

(v) $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$ が任意の連続局所マルチンゲールと直交するとき，M を純不連続局所マルチンゲール (purely discontinuous local martingale) と呼ぶ．

定義 C.53 によれば，$M \in \mathscr{M}^2$ が純不連続であるとは二乗可積分マルチンゲールの意味と，局所マルチンゲールの意味の 2 種類があることになる．これらの定義が整合的であることを主張するのが次の命題である．

命題 C.54. $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ が純不連続であるための必要十分条件は，M が任意の有界連続マルチンゲールと直交することである．

証明　必要性は明らかなので，十分性のみを示す．M は任意の有界連続マルチンゲールと直交すると仮定する．このとき $M_0 = 0$ であることは容易に示される．N を連続局所マルチンゲールとすれば，$N - N_0$ は局所有界である．そこで局所化列 (T_n) をとれば，$N^{T_n} - N_0$ は有界連続マルチンゲールとなる．このとき仮定より $M(N^{T_n} - N_0) \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$ である．局所マルチンゲー

ル性は停止について安定だから，さらに $M^{T_n}(N^{T_n}-N_0)\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$ も成り立っている．これより $M(N-N_0)\in(\mathscr{M}_{\mathrm{loc}})_{\mathrm{loc}}=\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ である．ゆえに $MN\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$ となり，M と N は直交する．N は任意の連続局所マルチンゲールなので，M は純不連続局所マルチンゲールであることがわかる．　□

命題 C.55. $M,N\in\mathscr{M}^2$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(i) M と N は強い意味で直交する．
(ii) 任意の停止時刻 T に対して，M^T と N は弱い意味で直交し，さらに $M_0N_0=0$ が成り立つ．

証明　(i) $\Longrightarrow$ (ii)：M と N は直交すると仮定する．このとき，任意の停止時刻 T に対して M^T と N も直交する．実際，M^T と N はそれぞれ二乗可積分マルチンゲールだから，任意の停止時刻 S に対して $M^T_SN_S$ は可積分である[100)]．

$$E[M^T_SN_S]=E[E[N_S|\mathscr{F}_{S\wedge T}]M_{S\wedge T}]=E[N_{S\wedge T}M_{S\wedge T}]=E[M_0N_0]=0$$

が成り立つから，M^TN は一様可積分マルチンゲールである[101)]．$M^T_0N_0=M_0N_0=0$ に注意すれば，M^T と N が直交することがわかる．したがって

$$\langle M^T,N\rangle_{\mathscr{M}^2}=E[M^T_\infty N_\infty]=E[M^T_0N_0]=0$$

となり，M^T と N は弱い意味でも直交している．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：(ii) を仮定する．このとき，任意の停止時刻 T に対して

$$E[M_TN_T]=E[M_TE[N_\infty|\mathscr{F}_T]]=E[M_TN_\infty]=E[M^T_\infty N_\infty]=E[M^T_0N_0]=0$$

が成立．ゆえに $MN\in\mathscr{M}_0$ となり，M と N は直交する．　□

系 C.56. $\mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}=(\mathscr{M}^{2,\mathrm{c}})^\perp$ がなりたつ．すなわち，$\mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ は Hilbert 空間 $\mathscr{M}^2$ における $\mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ の直交補空間である．

証明　$M\in\mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ と仮定する．このとき，命題 C.55 の (i) $\Longrightarrow$ (ii) より M は任意の $N\in\mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ と Hilbert 空間の元として直交する．よって $\mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}\subset(\mathscr{M}^{2,\mathrm{c}})^\perp$ である．

逆に $M\in(\mathscr{M}^{2,\mathrm{c}})^\perp$ を仮定する．$\xi\in L^2(\mathscr{F}_0)$ に対して連続マルチンゲール $\xi=N_t$ を考えれば，仮定より $E[\xi M_0]=E[N_\infty M_\infty]=0$ が成り立つ．ξ は任意に選んでいるから，$M_0=0$ a.s. となる．次に $N\in\mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ を任意に選ぶ．このとき任意の停止時刻 T に対して $N^T\in\mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}$ が成立．定義より M と N^T は Hilbert 空間の元として直交し，さらに $M_0N_0=0$ が成り立つから，命題 C.55 の (ii) $\Longrightarrow$ (i) により M と N は強い意味でも直交することがわかる．ゆえに M は純不連続マルチンゲールであり，$(\mathscr{M}^{2,\mathrm{c}})^\perp\subset\mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ も示された．　□

系 C.56 より任意の $M\in\mathscr{M}^2$ は

$$M=M'+M'',\quad M\in\mathscr{M}^{2,\mathrm{c}},\ M''\in\mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$$

100）Doob の不等式より，M^T_S と N_S がそれぞれ二乗可積分であることがわかる．
101）He, Wang, and Yan [16, 4.40 Theorem] などを参照せよ．

という一意的な分解を持つ．これと同様のことは局所マルチンゲールについても成り立っている．

定理 C.57. 任意の $M \in \mathscr{M}$ に対して，$M - M_0 \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc},0} \oplus \mathscr{M}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{loc}}$ が成立[102)]．

定理の証明の前に少し補題を用意する．

補題 C.58. 局所マルチンゲールの空間について，次が成立．

(i) $\mathscr{M}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}} = \{0\}$.

(ii) $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{V} \subset \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$.

(iii) $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{V} \subset \mathscr{M}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{loc}}$.

証明 (i) $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ が純不連続かつ連続なら，M は M 自身と直交している．すなわち，$M^2 \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$ である．(T_n) を M と M^2 に共通する，$\mathscr{M}$ に関する局所化列とする．このとき $E[(M_t^{T_n})^2] = E[M_0^2] = 0$ なので，任意の t に対して $M_t^{T_n} = 0$ a.s. が成立．$n \to \infty$ とすれば，任意の t で $M_t = 0$ a.s. が成り立つことがわかる．これと右連続性より，M は消散的であることがわかる．

(ii) $M \in \mathscr{M} \cap \mathscr{V}$ の場合に示す．

$$T_n(\omega) := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid V(M)_t > n\}$$

とすれば，T_n は停止時刻となる．$M \in \mathscr{V}$ から $V(M)$ は有限値を取るので，このとき $T_1 \leq T_2 \leq \cdots \to +\infty$ となる．任意の $t \in \mathbb{R}_+$ に対して各点で $M_{t-} \leq V(M)_{t-}$ および[103)] $\Delta V(M)_t = |\Delta M_t| \leq |M_t| + |M_{t-}|$ であることに注意すれば，

$$V(M)_{T_n} \leq V(M)_{T_n-} + |M_{T_n-}| + |M_{T_n}| \leq V(M)_{T_n-} + |M_{T_n}| \leq 2n + |M_{T_n}|$$

が成立．M は一様可積分マルチンゲールなので M_{T_n} は可積分であり，よって $V(M)_{T_n}$ も可積分である．すなわち，$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は M の $\mathscr{A}$ に関する局所化列で，$\mathscr{M} \cap \mathscr{V} \subset \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ が分かる．ここまでの結果と補題 C.28 により

$$\mathscr{M}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{V} \subset \mathscr{M}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{V}_{\mathrm{loc}} = (\mathscr{M} \cap \mathscr{V})_{\mathrm{loc}} \subset (\mathscr{A}_{\mathrm{loc}})_{\mathrm{loc}} = \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$$

であるから，(ii) の主張が示された．

(iii) $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{V}$ とすれば，(ii) より $M \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ である．(T_n) を M の $\mathscr{A}$ についての局所化列とする．N を有界連続マルチンゲールとすれば，命題 C.43 より $N(M^{T_n}) - N \bullet (M^{T_n})$ は一様可積分マルチンゲールとなる．したがって $NM - N \bullet M$ は局所化列 (T_n) をもつ局所マルチンゲールである．さらに命題 C.50 より $N \bullet M$ 自身が局所マルチンゲールとなるので，NM は局所マルチンゲールである．N は任意の有界連続マルチンゲールとしていたから，命題 C.54 より M は純不連続局所マルチンゲールであることがわかる． □

定理 C.57 の証明　分解の一意性：

$$M = M_0 + M^{(1)} + M^{(2)} = M_0 + N^{(1)} + N^{(2)}$$

102）位相は特に考えていないので，代数的直和である．

103）$\mathscr{V}$ の定義より X は 0 出発である．

を $M^{(1)}, N^{(1)} \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ かつ $M^{(2)}, N^{(2)} \in \mathscr{M}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{loc}}$ を満たすような分解とする．このとき $M^{(1)} - N^{(1)} = N^{(2)} - M^{(2)}$ は純不連続かつ連続な局所マルチンゲールとなり，補題 C.58 (i) により消散的である．したがって $M^{(1)} = N^{(1)}$ と $N^{(2)} - M^{(2)}$ が区別不能の意味でなりたつ．

分解の存在：$M \in \mathscr{M}^2$ の場合は系 C.56 より明らかである．

次に $M \in \mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}$ の場合を考える．M の $\mathscr{M}^2_{\mathrm{loc},2}$ に関する局所化列 (T_n) を一つ選べば，

$$(M)^{T_n} = M^{n,\mathrm{c}} + M^{n,\mathrm{d}}, \quad M^{n,\mathrm{c}} \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}},\ M^{n,\mathrm{d}} \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$$

という一意分解が存在する．この分解の一意性より

$$M^{'} = M^{n,\mathrm{c}}, \quad M^{''} = M^{n,\mathrm{d}}, \quad \text{on } [\![0, T_n]\!]$$

によって確率過程を定めることができる．これらは $(M^{'})^{T_n} = M^{n,\mathrm{c}}$ および $(M^{''})^{T_n} = M^{n,\mathrm{d}}$ を満たすから，ともに局所マルチンゲールである．さらに M' は定義より明らかに連続である．あとは M'' が純不連続であることを示せばよい．N を任意の有界連続マルチンゲールとすれば，定義より $(M^{''})^{T_n} N = M^{n,\mathrm{d}} N$ は局所マルチンゲールである．これより $(M^{''})^{T_n} N^{T_n}$ も局所マルチンゲールであるから，$M''N$ は局所局所マルチンゲールとなり，ゆえに局所マルチンゲールである．$M''_0 = 0$ は明らかなので，M'' は純不連続であることが示された．

$M = M_0 + M^{(1)} + M^{(2)}$ を $M^{(1)} \in \mathscr{V} \cap \mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$ かつ $M^{(2)} \in \mathscr{M}^2_{\mathrm{loc},2}$ を満たすような分解とする．(局所マルチンゲールの基本定理による．) さらに $M^{(2)} = M' + M''$ を $M' \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}$ かつ $M'' \in \mathscr{M}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{loc}}$ を満たすような分解とする．補題 C.58 より $M^{(1)}$ は純不連続なので，$M^{(1)} + M''$ もまた純不連続局所マルチンゲールである．したがって

$$M = M_0 + M' + (M^{(1)} + M''), \quad M' \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}},\ M^{(1)} + M'' \in \mathscr{M}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{loc}}$$

が求めるべき分解である．□

定理 C.57 の局所マルチンゲール $M - M_0$ の分解における連続部分を M^{c}，純不連続部分を M^{d} と表すことにする．すなわち任意の局所マルチンゲールは $M = M_0 + M^{\mathrm{c}} + M^{\mathrm{d}}$ と表される．このとき M^{c} と M^{d} をそれぞれ M の連続部分，純不連続部分と呼ぶ．

系 C.59. 純不連続局所マルチンゲール M と N が $\Delta M = \Delta N$ を満たせば，$M = N$ が区別不能の意味で成り立つ．

証明　不連続局所マルチンゲール M と N が $\Delta M = \Delta N$ を満たせば，$M - N \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{M}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{loc}} = \{0\}$ となる．□

この小節の最後に，局所マルチンゲールの二次変分の概念を導入しよう．

定義 C.60. (i) $M \in \mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}$ のとき，$A \in \mathscr{A}^{+,\mathrm{pred}}_{\mathrm{loc}}$ で $M^2 - A$ が局所マルチンゲールとなるようなものが存在する．この A を $\langle M, M\rangle$ で表し，M の可予測二次変分 (predictable quadratic variation) と呼ぶ．

(ii) $M,N \in \mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}$ に対しては

$$\langle M,N\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle M+N, M+N\rangle - \langle M,M\rangle - \langle N,N\rangle\right)$$

と定義し，これを M と N の可予測二次共変分 (predictable quadratic covariation) と呼ぶ．

(iii) $M,N \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ に対して

$$[M,N] = \langle M^{\mathrm{c}}, N^{\mathrm{c}}\rangle + \sum_{0<s\le\cdot} \Delta M_s \Delta N_s$$

と定義し，$[M,N]$ を M と N の二次共変分 (quadratic covariation) と呼ぶ，特に $[M,M]$ を M の二次変分 (quadratic variation) という．

可予測二次変分の存在と一意性は Doob-Meyer 分解の帰結である．

C.3.3　局所マルチンゲールのジャンプの特徴づけ

ランダム測度による確率積分を定義するために必要となる，純不連続局所マルチンゲールの性質を述べよう．

補題 C.61. $T>0$ を，到達不能時刻または可予測時刻とする．$\xi \in L^2(\mathscr{F}_T)$ に対して，$A = \xi 1_{[\![T,\infty[\![}$ とおけば，$M := A - A^{\mathfrak{p}}$ は純不連続二乗可積分マルチンゲールで $\{\Delta M \neq 0\} \subset [\![T]\!]$ を満たす．さらに，任意の $N \in \mathscr{M}^2$ に対して

$$\langle M,N\rangle_{\mathscr{M}^2} = E[M_\infty N_\infty] = E[\Delta M_T \Delta N_T]$$

が成り立つ．

証明　$\xi \in L^2(\mathscr{F}_T)$ および $A = \xi 1_{[\![T,\infty[\![}$ とする．定義より $A \in \mathscr{A}$ だから，命題 C.50 により $M := A - A^{\mathfrak{p}} \in \mathscr{M}$ である．いま，$A_\infty = \xi \in L^2$ だから，命題 C.50 より $A^{\mathfrak{p}}_\infty \in L^2$ であり，よって $A - A^{\mathfrak{p}} \in \mathscr{M}^2$ が分かる[104]．

Case1：**T が到達不能停止時刻のとき．** T が到達不能停止時刻なら A は準左連続であり[105]，よって $A^{\mathfrak{p}}$ は連続となる[106]．この場合 $\Delta M = \Delta A = \xi 1_{[\![T]\!]}$ である．

Case2：**T が可予測時刻のとき．** T が可予測時刻ならば，命題 C.51 より $A^{\mathfrak{p}} = E[\xi 1_{\{T<\infty\}} | \mathscr{F}_{T-}] 1_{[\![T,\infty[\![}$ となる．

いずれの場合でも，$\{\Delta M \neq 0\} \subset [\![T]\!]$ が成立．あとは，$A - A^{\mathfrak{p}} \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ を示せばよい．$N \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{c}}_0$ に対して

$$T_n = \inf\{t \ge 0 \mid |N_t| \ge n\}$$

104）$M^2 \le 2(A^2 + (A^{\mathfrak{p}})^2)$ に注意せよ．

105）$\{\Delta A \neq 0\} \subset [\![T]\!]$ と到達不能停止時刻の定義に注意．

106）命題 C.50．

と定義すれば，$T_n \uparrow \infty$ であり N^{T_n} は有界マルチンゲールとなる[107)]．いま $M = A - A^{\mathfrak{p}} \in \mathscr{A}$ であることに注意すれば，命題 C.43 より

$$E[M_\infty N_\infty^{T_n}] = E[(N^{T_n} \bullet M)_\infty] \tag{C.1}$$

となる．一方 $M \in \mathscr{M}$ でもあるから，命題 $C.50$ より $M^{\mathfrak{p}} = 0$ となる．これより

$$E[(N_-^{T_n} \bullet M)_\infty] = E[(N_-^{T_n} \bullet M^{\mathfrak{p}})_\infty] = 0 \tag{C.2}$$

が成り立つ．(C.1) と (C.2) から

$$E[M_\infty N_\infty^{T_n}] = E[((\Delta N^{T_n}) \bullet M)_\infty] = E\left[\sum_{s>0} \Delta N_s^{T_n} \Delta M_s\right] = 0$$

を得る．さらに $N^{T_n} \to N$ in L^2 が成り立つから，$\langle M, N\rangle_{\mathscr{M}^2} = 0$ が分かる．すなわち，任意の $N \in \mathscr{M}_0^{2,c}$ に対して M と N は弱い意味で直交する．一般の $N \in \mathscr{M}^{2,c}$ に対しては $\langle M, N\rangle_{\mathscr{M}^2} = \langle M, N - N_0\rangle_{\mathscr{M}^2} = 0$ となるから[108)]，任意の $N \in \mathscr{M}^{2,c}$ に対して M と N は弱い意味で直交する．すなわち $M = A - A^{\mathfrak{p}} \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ が成り立つ．

$N \in \mathscr{M}^2$ とし，$N^{(n)}$ を $(E[N_\infty 1_{\{|N_\infty| \le n\}} | \mathscr{F}_t])_{t \in \mathbb{R}_+}$ の càdlàg な修正とする．このとき $N^{(n)}$ は有界なマルチンゲールであり，(i) の証明と同様の議論で

$$E[M_\infty N_\infty^{(n)}] = E\left[\sum_{s>0} \Delta M_s \Delta N_s^{(n)}\right] = E\left[\Delta M_T \Delta N_T^{(n)}\right]$$

が示される．いま $N_\infty^{(n)} = N_\infty 1_{\{|N_\infty| \le n\}}$ は N_∞ に L^2 収束するから，

$$\begin{aligned} E[(\Delta N_T^{(n)} - \Delta N_T)^2] &\le E\left[(2 \sup_t |N_t^{(n)} - N_t|)^2\right] \\ &\le 4E\left[\sup_t |N_t^{(n)} - N_t|^2\right] \\ &\le 16E[(N_\infty^{(n)} - N_\infty)^2] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

が成り立つ[109)]．これより

$$E[M_\infty N_\infty] = \lim_{n\to\infty} E[M_\infty N_\infty^{(n)}] = \lim_{n\to\infty} E\left[\Delta M_T \Delta N_T^{(n)}\right] = E\left[\Delta M_T \Delta N_T\right]$$

を得る． □

命題 C.62. H は $H_0 = 0$ を満たす痩せた過程とする．

107） $N_0 = 0$ と N の連続性に注意せよ．

108） ただし，$\langle M, N_0\rangle_{\mathscr{M}^2} = 0$ は

$$E[M_\infty N_0] = E[E[M_\infty | \mathscr{F}_0] N_0] = E[M_0 N_0] = 0$$

から分かる．

109） 3 つ目の不等号は Doob の不等式より．

(i) $\Delta M = H$ を満たす $M \in \mathscr{M}^2$ が存在するための必要十分条件は，${}^{\mathfrak{p}}H = 0$ かつ $\sum H^2 \in \mathscr{A}^+$ が成り立つことである．

(ii) $\Delta M = H$ を満たす $M \in \mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}$ が存在するための必要十分条件は，${}^{\mathfrak{p}}H = 0$ かつ $\sum H^2 \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ が成り立つことである．

(iii) $\Delta M = H$ を満たす $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ が存在するための必要十分条件は，${}^{\mathfrak{p}}H = 0$ かつ $\sum |H| \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ が成立つことである．

(iv) $\Delta M = H$ を満たす $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ が存在するための必要十分条件は，${}^{\mathfrak{p}}H = 0$ かつ $\sqrt{\sum_{0<s\leq \cdot} H_s^2} \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ が成立つことである．

証明　(i) **必要性：**$\Delta M = H$ を満たす $M \in \mathscr{M}^2$ が存在すると仮定する．$M_0 = 0$ であるとしてよい．このとき可予測射影の性質より ${}^{\mathfrak{p}}(\Delta M) = 0$ である．$\sum H^2 \in \mathscr{A}^+$ を示すためには，$[M, M] \in \mathscr{A}^+$ を言えば十分であるが[110)]，M は二乗可積分であるからこれは明らか．

十分性：可予測時時刻と到達不能時刻からなる列 (T_n) を $\{H \neq 0\} \subset \bigcup_n [\![T_n]\!]$ かつ $[\![T_n]\!] \cap [\![T_m]\!] = \emptyset$ $(n \neq m)$ を満たすように選ぶ[111)]．$A^n = H_{T_n} 1_{[\![T_n, \infty[\![}$ および $M^n = A^n - (A^n)^{\mathfrak{p}}$ と定義すれば，仮定と補題 C.61 より $M^n \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ である．T_n が可予測な場合は

$$\Delta (A^n)^{\mathfrak{p}} = E[H_{T_n} 1_{\{T_n < \infty\}} | \mathscr{F}_{T_n -}] = {}^{\mathfrak{p}}H_{T_n} 1_{\{T_n < \infty\}} = 0$$

であり[112)]．T_n が到達不能の場合は $A^{\mathfrak{p}}$ が連続であったから，いずれの場合も $\Delta M^n = \Delta A^n$ である．

このとき級数 $\sum M^n$ は $\mathscr{M}^2$ のノルムで収束し，極限はまた $\mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ の元であることを示そう．先ほどの議論により

$$\sum_{0\leq k\leq n} E[(\Delta M^k_{T_k})^2] = \sum_{0\leq k\leq n} E\left[(\Delta A^k_{T_k})^2\right] = \sum_{0\leq k\leq n} E\left[(\Delta H_{T_k})^2\right] \leq E\left[\sum_{s\geq 0} H_s^2\right] < \infty$$

が任意の n で成立．これと補題 C.61 より

$$\sum_{n\geq 0} \|M^n\|^2_{\mathscr{M}^2} = \sum_{n\geq 0} E[(\Delta M^n_{T_n})^2] \leq E\left[\sum_{s\geq 0} H_s^2\right] < \infty$$

を得る．

ここで

$$N^n = \sum_{1\leq k\leq n} M^k$$

と定める．補題 C.61 より $n \neq m$ ならば

$$\langle M^n, M^m \rangle_{\mathscr{M}^2} = E[M^n_\infty M^m_\infty] = E\left[\Delta M^n_{T_n} \Delta M^m_{T_n}\right] = 0$$

110）$[M, M] = \langle M^c, M^c \rangle + \sum (\Delta M)^2 \geq \sum (\Delta M)^2$ だから．

111）命題 C.22 を見よ．

112）${}^{\mathfrak{p}}H = 0$ と可予測射影の定義より．

となるから[113]，M^n と M^m は弱い意味で直交する．これより任意の $n > m$ に対して

$$\|N^n - N^m\|^2_{\mathscr{M}^2} = \sum_{k=m+1}^{n} \|M^k\|^2_{\mathscr{M}^2}$$

が成り立つ．これと $\sum_{n\geq 0}\|M^n\|^2_{\mathscr{M}^2} < \infty$ より $(N^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathscr{M}^2$ の Cauchy 列であることがわかる．$\mathscr{M}^2$ は Hilbert 空間なので Cauchy 列 (N^n) は収束する．$M = \sum_n M^n = \lim_n N^n$ と定義すれば，$M \in \mathscr{M}^{2,\mathrm{d}}$ である．

さらに Doob の不等式より $n > m$ に対して

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{t\geq 0}|N^n_t - N^m_t| > \varepsilon\right) &\leq \frac{1}{\varepsilon^2}E[|N^n_\infty - N^m_\infty|^2] \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n\leq k\leq m}\|M^k\|^2_{\mathscr{M}^2} \end{aligned}$$

が成立．これと $\sum_{n\geq 0}\|M^n\|^2_{\mathscr{M}^2} < \infty$，Borel-Cantelli の補題より

$$\forall\varepsilon > 0, \quad P\left(\bigcap_{N\geq 1}\bigcup_{m,n\geq N}\left\{\sup_{t\geq 0}|N^n_t - N^m_t| > \varepsilon\right\}\right) = 0$$

が分かる．したがって (N^n) のほとんど全てのパスは一様収束しており，$\Delta M = H$ となることが分かる．

(ii) **必要性：**(i) と同様だが，$M \in \mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}$ なので $[M, M] \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ となることに注意する．

十分性：$\sum H^2$ の局所化列 (T_n) を一つ固定し，M^n を $\Delta M^n = (\sum H^2)^{T_n}$ を満たすような純不連続二乗可積分マルチンゲールとする．これを用いて

$$M = \sum_{n\geq 1} M^n 1_{]\!]T_{n-1},T_n]\!]}$$

と定義すれば，この M は $M \in \mathscr{M}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{loc}}$ かつ $\Delta M = H$ を満たす．

(iii) **必要性：**$M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ は $\Delta M = H$ を満たすとする．可予測射影の性質より ${}^{\mathfrak{p}}H = 0$ であり，$\sum|H| \leq V(M) \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ より局所可積分性がわかる．

十分性：$M = \sum H - (\sum H)^{\mathfrak{p}} \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ と定めればこれは

$$\Delta M = H - \Delta\left(\sum H\right)^{\mathfrak{p}} = H - {}^{\mathfrak{p}}\left(\Delta\sum H\right) = H - {}^{\mathfrak{p}}H = H$$

を満たしている．

(iv) **必要性：**$\Delta M = H$ を満たす $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ が存在すると仮定する．$M_0 = 0$ であると仮定してよい．このとき可予測射影の性質より ${}^{\mathfrak{p}}(\Delta M) = 0$ である．$\sqrt{\sum H^2} \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ を示すためには，$\sqrt{[M, M]} \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ を言えば十分である[114]．$M = M' + M''$ を $M' \in \mathscr{M}^2_{\mathrm{loc},0}$ かつ $M'' \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ を

113）一つ目の等号は内積の定義，三つ目は $[\![T_n]\!] \cap [\![T_m]\!] = \emptyset$ および $\{\Delta M^m\} \subset [\![T_m]\!]$ よりしたがう．

114）$[M, M] = \langle M^c, M^c\rangle + \sum(\Delta M)^2 \geq \sum(\Delta M)^2$ だから．

満たす分解とする．国田-渡辺の不等式より

$$
\begin{aligned}
\sqrt{[M,M]} &= \sqrt{[M',M']+[M'',M'']+2[M',M'']} \\
&\le \sqrt{[M',M']+[M'',M'']+2\sqrt{[M',M'][M'',M'']}} \\
&\le \sqrt{[M',M']}+\sqrt{[M'',M'']} \\
&\le \frac{1+[M',M']}{2}+\sqrt{\sum|\Delta M''|^2} \\
&\le \frac{1+[M',M']}{2}+\sum|\Delta M''|
\end{aligned}
$$

が成立．いま $[M',M'] \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ および $\sum|\Delta M''| \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ が成立っているから，$\sqrt{[M,M]} \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ がわかる．

十分性： $A = \sum H^2$ と定義すれば，仮定より $A \in \mathscr{V}^+$ および $\sqrt{A} \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ が成立．さらに

$$
K = H1_{\{|H|>1\}}, \qquad H'' = K - {}^{\mathfrak{p}}K, \qquad H' = H - H''
$$

と定義すれば，${}^{\mathfrak{p}}H' = {}^{\mathfrak{p}}H'' = 0$ が成立つ．H' と H'' それぞれに対して，それらをジャンプにもつ局所マルチンゲールを構成しよう．

$B = \sum|K|$ と定義すれば，明らかに $B \in \mathscr{V}^+$ である．$\Delta B \le \sqrt{|\Delta A|}$ および $\sqrt{A} \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ に注意すれば，$B \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ がわかる[115]．さらに

$$
\sum|{}^{\mathfrak{p}}K| \le \sum{}^{\mathfrak{p}}|K| = \sum \Delta B^{\mathfrak{p}} = B^{\mathfrak{p}} \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}
$$

も成立つから，$\sum|H''| \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ を得る．step 3 での結果より，$\Delta M'' = H''$ を満たす $M'' \in \mathscr{M}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{loc}}$ が存在する．

また，$|H'|^2 \le 2(|H|^2 + |H''|^2)$ であることを用いれば $\sum|H'|^2 \in \mathscr{V}^+$ がわかる．${}^{\mathfrak{p}}H = 0$ との仮定より，

$$
H' = H - K + {}^{\mathfrak{p}}K = H - K - ({}^{\mathfrak{p}}H - {}^{\mathfrak{p}}K = H1_{\{|H|\le 1\}} - {}^{\mathfrak{p}}\left(H1_{\{|H|\le 1\}}\right)
$$

が成立つので，$|H'| \le 2$ である．ゆえに $\sum|H'|^2 \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ となる[116]．このとき step 2 議論から $\Delta M' = H'$ を満たす $M' \in \mathscr{M}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{loc}}$ が存在する．$M = M' + M'' \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ と定義すれば，これが求める局所マルチンゲールである．□

命題 C.62 における条件 $\sqrt{\sum_{s\le\cdot} H_s^2} \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ は次のように特徴づけられる．

命題 C.63. H を $H_0 = 0$ を満たす痩せた確率過程，$a > 0$ とする．このとき，次の 3 条件は同値である．

(i) $\sqrt{\sum H^2} \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$.
(ii) $\sum(H^2 1_{\{|H|\le a\}} + |H|1_{\{|H|>a\}}) \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$.

115) 命題 C.42 を見よ．
116) $C \in \mathscr{V}^+$ が有界なジャンプをもつなら $C \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ となるのであった．

(iii) $\sum \frac{H^2}{1+|H|} \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$.

さらに $H \geq -1$ が成り立っているなら，上の 3 条件は次の条件とも同値である．

(iv)$\sum(1-\sqrt{1+H})^2 \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$.

証明　H_0 を満たす痩せた過程 H に対して

$$\begin{aligned}
A_t &= \sqrt{\sum_{0\leq s\leq t} H_s^2} \\
B_t &= \sum_{0\leq s\leq t} (H_s^2 1_{\{|H|\leq a\}} + |H_s| 1_{\{|H|>a\}}) \\
C_t &= \sum_{0\leq s\leq t} \frac{H_s^2}{1+|H_s|} \\
D_t &= \sum_{0\leq s\leq t} (1-\sqrt{1+H_s})^2
\end{aligned}$$

と定義する．

(i) $\Longrightarrow$ (ii)．$A \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ と仮定し，その局所化列 (S_n) を一つ固定する．ω を固定するごとに $H_t(\omega) > a$ を満たす t は有限個しかないから，

$$\sum_{0\leq s\leq t} |H_s| 1_{\{|H|>a\}}(s)$$

は $\mathscr{V}^+$ の元である[117]．また，$A \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ と

$$\sum_{0\leq s\leq t} H_s^2 1_{\{|H|\leq a\}} \leq A_t^2$$

なる評価から，確率過程

$$\sum_{0\leq s\leq t} H_s^2 1_{\{|H|\leq a\}}$$

もまた $\mathscr{V}^+$ の元となる．よって $B \in \mathscr{V}^+$ がわかる．ここで

$$T_n(\omega) = \inf\{t \geq 0 \mid B_t(\omega) \geq n\}$$

と定義すれば，命題 C.11 よりこれは停止時刻となる．定義より明らかに (T_n) は増加列であり，B が有限の値をとることから $T_n \uparrow \infty$ a.s. もわかる．T_n の定義より

$$\begin{aligned}
B_{S_n\wedge T_n} &\leq n + \Delta B_{S_n\wedge T_n} \\
&\leq n + H^2_{S_n\wedge T_n} 1_{\{|H|\leq a\}} + |H_{S_n\wedge T_n}| 1_{\{|H|>a\}} \\
&\leq n + a^2 + |H_{S_n\wedge T_n}| \\
&\leq n + a^2 + A_{S_n}
\end{aligned}$$

117）　命題 C.13 より $\{H > b\}$ もまた痩せた集合となることに注意せよ．

が成立．(S_n) の選び方より $E[A_{S_n}] < \infty$ なので，$E[B_{S_n\wedge T_n}] < \infty$ も成り立つ．よって $(S_n \wedge T_n)_n$ は B の $\mathscr{A}^+$ に関する局所化列である．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)．$B \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ と仮定し，(S_n) を B の $\mathscr{A}^+$ に関する局所化列とする．

$$\sum_{s\le t} H_s^2 = \sum_{s\le t} H_s^2 1_{\{|H|\le a\}} + \sum_{s\le t} H_s^2 1_{\{|H|>a\}} \le B_t^2 + \sum_{s\le t} H_s^2 1_{\{|H|>a\}}$$

であるから，$A \in \mathscr{V}^+$ となることに注意する．

$$T_n(\omega) = \inf\{t \ge 0 \mid A_t(\omega) \ge n\}$$

と定めれば，T_n は $T_n \to \infty$ を満たす停止時刻の増加列である．さらに

$$\begin{aligned}
A_{T_n\wedge S_n} &\le n + \Delta A_{T_n\wedge S_n} \\
&\le n + \sqrt{H^2_{S_n\wedge T_n}} \\
&= n + |H_{S_n\wedge T_n}| \\
&= n + |H_{S_n\wedge T_n}| 1_{\{|H_{S_n\wedge T_n}|\le a\}} + H_{S_n\wedge T_n}|1_{\{|H_{S_n\wedge T_n}|>a\}} \\
&\le n + a + B_{S_n}
\end{aligned}$$

であるから[118)]，$E[A_{T_n\wedge S_n}] < \infty$ が従う[119)]．したがって，A は局所化列 $(S_n \wedge T_n)_n$ によって $A \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ となる．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)．

$$\begin{aligned}
\frac{H_s^2}{1+|H_s|} &= \frac{H_s^2}{1+|H_s|} 1_{\{|H|\le a\}} + \frac{H_s^2}{1+|H_s|} 1_{\{|H|>a\}} \\
&= H_s^2 1_{\{|H|\le a\}} \frac{1}{1+|H_s|} + |H_s| 1_{\{|H|>a\}} \frac{|H_s|}{1+|H_s|} \\
&= H_s^2 1_{\{|H|\le a\}} + |H_s| 1_{\{|H|>a\}}
\end{aligned}$$

に注意すれば，$C_t \le B_t$ がわかる．よって，$B \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ なら $C \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ である．

(iii) $\Longrightarrow$ (ii)．

$$\begin{aligned}
H_s^2 1_{\{|H|\le a\}} + |H_s| 1_{\{|H|>a\}} &\le \frac{1+a}{1+|H_s|} H_s^2 1_{\{|H|\le a\}} + \frac{1+a}{a} \frac{|H_s|}{1+|H_s|} |H_s| 1_{\{|H|>a\}} \\
&= (1+a) \frac{H_s^2}{1+|H_s|} 1_{\{|H|\le a\}} + \left(1+\frac{1}{a}\right) \frac{H_s^2}{1+|H_s|} 1_{\{|H|>a\}} \\
&\le \left(1+a+\frac{1}{a}\right) \left(\frac{H_s^2}{1+|H_s|} 1_{\{|H|\le a\}} + \frac{H_s^2}{1+|H_s|} 1_{\{|H|>a\}} \right) \\
&\le \left(1+a+\frac{1}{a}\right) \frac{H_s^2}{1+|H_s|}
\end{aligned}$$

118)　2 行目の不等号には，$a > b$ なら $\sqrt{a} - \sqrt{b} \le \sqrt{a-b}$ が成り立つことを用いた．
119)　S_n は B の局所化列なのであった．

という関係式がなりたつから，

$$B_t \leq \left(1 + a + \frac{1}{a}\right) C_t$$

である．ゆえに $C \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ なら $B \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ となる．

(iii) $\Longleftrightarrow$ (iv)．$y \geq -1$ なら，

$$(1 - \sqrt{1+y})^2 = \frac{y^2}{(1 + \sqrt{1+y})^2}$$

であることに注意する．これより

$$\begin{aligned}\left(1 - \sqrt{1+y}\right)^2 \frac{1+|y|}{y^2} &= \frac{y^2}{(1+\sqrt{1+y})^2}\frac{1+|y|}{y^2} \\ &= \frac{1+|y|}{(1+\sqrt{1+y})^2} \\ &\longrightarrow \begin{cases} 1, & y \to \infty \\ \dfrac{1}{4}, & y \to 0 \\ 2, & y \to -1 \end{cases}\end{aligned}$$

が成り立つ．このことから，

$$f(y) = \left(1 - \sqrt{1+y}\right)^2 \frac{1+|y|}{y^2}$$

は $[-1, \infty[\setminus \{0\}$ 上で定義された正の有界連続関数で，$\inf_y f(y) > 0$ を満たすものである．したがって，適当な $K_1, K_2 > 0$ を選べば $y \in [-1, \infty[\setminus \{0\}$

$$K_1 \frac{y^2}{1+|y|} \leq \left(1 - \sqrt{1+y}\right)^2 \leq K_2 \frac{y^2}{1+|y|},$$

が成り立つ．また，この不等式は明らかに $y = 0$ でも成り立っている．ゆえに

$$K_1 C_t \leq D_t \leq K_2 C_t,$$

となり，(iii) と (iv) の同値性がわかる．□

C.3.4　半マルチンゲールについて

定義 C.64. (i) 実数値適合確率過程 X がある $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$ と $A \in \mathscr{V}$ によって $X = X_0 + M + A$ と表現されるとき，X は半マルチンゲール (semimartingale) であるという． マルチンゲール全体の空間を $\mathscr{SM}$ で表す． すなわち $\mathscr{SM} = \mathscr{L}^0(\mathscr{F}_0) + \mathscr{M}_{\mathrm{loc},0} + \mathscr{V}$ である．

(ii) 半マルチンゲールの分解 $X = X_0 + M + A$ において特に A を可予測であるようにとれるとき，X を特殊半マルチンゲール (special semimartingale) とよぶ．特殊半マルチンゲール全体の空間を $\mathscr{SM}_{\mathrm{sp}}$ で表す[120)]．

120)　標準的な記法ではない．

(iii) $\mathbb{R}^d$ 値の確率過程で各成分が半マルチンゲール（特殊半マルチンゲール）であるようなものを d 次元半マルチンゲール（特殊半マルチンゲール）とよぶ．また，複素数値の確率過程で実部，虚部がともに半マルチンゲール（特殊半マルチンゲール）であるようなものを複素半マルチンゲール（特殊半マルチンゲール）という．

半マルチンゲールの分解 $X = X_0 + M + A$ は一般に一意ではない．実際，可予測でない $X \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ は $M = 0$ かつ $A = X$ という分解と，$M = X - X^{\mathfrak{p}}$ かつ $A = X^{\mathfrak{p}}$ という分解を持つ．後半の分解は A として可予測なものをとれているから，これは $\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ の元が特殊半マルチンゲールであることを示している．

局所マルチンゲールは明らかに特殊半マルチンゲールである．また，Doob-Meyer 分解よりクラス (DL) の劣マルチンゲールや優マルチンゲールは特殊半マルチンゲールであることがわかる．

命題 C.65. 特殊半マルチンゲールの分解 $X = X_0 + M + A$ $(M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc},0},\ A \in \mathscr{V})$ において，A が可予測になるような分解は一意的である．

証明　$X = X_0 + M + A = X_0 + N + B$ を A と B がともに可予測となるような分解とする．このとき，$M - N = B - A$ 可予測な局所マルチンゲールである．定理 C.33 より $\Delta(M-N) = {}^{\mathfrak{p}}(\Delta(M-N)) = 0$ となるので，$M - N$ は a.s. で連続なパスを持つ．ゆえに $M - N \in \mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{A}_{\mathrm{loc}} = \{0\}$ であり $M - N = B - A = 0$ が区別不能の意味で成り立つ．□

命題 C.65 における分解 $X = X_0 + M + A$ を，特殊半マルチンゲールの標準分解 (canonical decomposition) とよぶ．

補題 C.66. $X = X_0 + M + A$ を半マルチンゲールの分解とする．このとき，局所マルチンゲール M の連続部分 M^{c} は分解によらず一意に定まる．

半マルチンゲール X の分解によらず一意に定める連続局所マルチンゲールを X の連続マルチンゲール部分 (continuous martingale part) といい[121)]，X^{c} という記号で表す．

証明　X を半マルチンゲールとし，

$$X = X_0 + M + A = X_0 + N + B$$

を $M, N \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$ かつ $A, B \in \mathscr{V}$ を満たすような分解とする．また

$$M = M^{\mathrm{c}} + M^{\mathrm{d}}$$
$$N = N^{\mathrm{c}} + N^{\mathrm{d}}$$

を連続部分と純不連続部分への分解とする．このとき $M^{\mathrm{c}} = N^{\mathrm{c}}$ が成り立つことを示せばよい．いま

$$M - N = B - A$$

121)　連続マルチンゲール部分とは言うが，連続局所マルチンゲールである．

という関係式より $B-A$ は $\mathscr{V}\cap\mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$ の元であり，よって純不連続である．さらに

$$M^{\mathrm{c}}-N^{\mathrm{c}}=N^{\mathrm{d}}-M^{\mathrm{d}}+B-A$$

という関係式に注意すれば，$M^{\mathrm{c}}-N^{\mathrm{c}}\in\mathscr{M}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{loc}}\cap\mathscr{M}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{loc}}=\{0\}$ であることがわかるから，M^{c} と N^{c} は区別不能である． □

補題 C.67. X が半マルチンゲールなら，任意の t に対して $\sum_{0<s\le t}(\Delta X_s)^2<\infty$ a.s. が成り立つ．

証明　$X=X_0+M+A$ という分解を考える．M は局所マルチンゲールだから，

$$\sum_{0<s\le t}(\Delta M_s)^2<\infty\quad\text{a.s.}$$

が成立．また $A\in\mathscr{V}$ であるから，

$$\sum_{0<s\le t}(\Delta A_s)^2\le\left(\sum_{0<s\le t}|\Delta A_s|\right)^2<\infty\quad\text{a.s.}$$

が成り立つ．したがって

$$\sum_{0<s\le t}(\Delta X_s)^2\le 2\sum_{0<s\le t}(\Delta A_s)^2+2\sum_{0<s\le t}(\Delta M_s)^2<\infty$$

となり補題の主張を得る． □

定義 C.68. 半マルチンゲール X と Y に対して

$$[X,Y]_t=\langle X^{\mathrm{c}},Y^{\mathrm{c}}\rangle_t+\sum_{0<s\le t}\Delta X_s\Delta Y_s$$

と定義し，$[X,Y]\in\mathscr{V}$ を X と Y の二次共変分 (quadratic variation) とよぶ．特に $[X,X]$ を X の二次変分 (quadratic variation) という．二次共変分の定義より明らかに $[X,Y]^{\mathrm{c}}=\langle X^{\mathrm{c}},Y^{\mathrm{c}}\rangle$ である．

特殊半マルチンゲールの特徴づけを行うために，確率過程の可積分性の概念を導入しよう．

定義 C.69. Càdlàg 適合過程 X に対して，

$$X^*_t=\sup_{s\in[0,t]}|X_s|$$

によって新しい確率過程を定義する．このとき X^* は $\mathscr{V}^+$ の元となっている．$X^*\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ が成り立つとき，X は局所可積分 (locally integrable) であるという．また，$(X^*)^2\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ のとき，X は局所二乗可積分 (locally integrable) であるという．

命題 C.70. 半マルチンゲール X について，次の条件は同値である．

(i) X は特殊半マルチンゲールである．
(ii) $X=X_0+M+A$ という半マルチンゲールの分解で，$A\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ を満たすものが存在する．
(iii) 任意の分解 $X=X_0+M+A$ に対して，$A\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ が成り立つ．

(iv) $X - X_0$ は局所可積分である．

命題の証明の前に，局所可積分性に関する補題を一つ用意する．

補題 C.71. (i) $A \in \mathscr{V}$ が可予測なら，局所化列 (T_n) で $V(A)_{T_n} \le n$ を満たすものが存在する．特に $A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ である．

(ii) $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ なら，M は局所可積分である．

証明 (i)

$$T_n(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid V(A)_t(\omega) \ge n\}$$

と定義すれば，命題 C.11 より T_n は停止時刻である．さらに，命題 C.38 より $V(A)$ は可予測だから，T_n は可予測集合

$$E^n := \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_{\ge 0} \mid V(A)_t(\omega) \ge n\}$$

へのデビューに他ならない．$V(A)$ の右連続性より $[\![T_n]\!] = [\![D_{E^n}]\!] \subset E^n$ となるから，命題 C.15 より T_n は可予測時刻となる．可予測時刻 T_n を予告する停止時刻列 $(S^{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ をとる[122]．さらに，$p_n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ を

$$P[S^{n,p_n} < T_n - 1] \le \frac{1}{2^n}$$

となるように取り，

$$S_n := \bigvee_{1\le m\le n} S^{m,p_m}$$

と定めよう．このとき，(S_n) が求める局所化列になっていることを示したい．定義より明らかに

$$S_1 \le S_2 \le \cdots \le S_n \le \cdots$$

である．(S_n) の定義を思い出せば

$$\sum_{n\ge1} P[S_n < T_n - 1] \le \sum_{n\ge1} P[S^{n,p_n} < T_n - 1] \le \sum_{n\ge1} \frac{1}{2^n} < +\infty$$

が成り立つから，Borel-Cantelli の第一補題により

$$P\left(\bigcup_{n\ge1}\bigcap_{k\ge n}\{S_k \ge T_k - 1\}\right) = 1.$$

$T_n \to +\infty$ a.s. だったから $S_n \to +\infty$ a.s. も分かる．$(S^{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ は T_n の予告列だったから，$n \ge 1$ に対して

$$S_n = \bigvee_{1\le m\le n} S^{m,p_m} < \bigvee_{1\le m\le n} T_m = T_n, \quad \text{a.s. on the set } \{T_n > 0\}$$

122） 命題 C.15(ix) よりこのような停止時刻列が存在する．

が成立．したがって T_n の定義より $V(A)_{S_n} \leq n$ が分かる．このとき

$$E[V(A)_{S_n}] \leq E[n] = n < +\infty$$

なので，(S_n) は $V(A)$ の $\mathscr{A}$ に関する局所化列になっている．

(ii) M を局所マルチンゲールとし，(T_n) を M の $\mathscr{M}$ に関する局所化列とする．

$$S_n(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid |M_t(\omega)| \geq n\}$$

と定義すれば (S_n) は停止時刻の増加列となる．いま $R_n = S_n \wedge T_n$ と定めれば R_n もまた停止時刻の増加列であって，これは $R_n \to \infty$ a.s. を満たす．

$$M^*_{R_n} \leq M^*_{R_n-} + |M_{R_n}| \leq n + |M^{S_n}_{T_n}|$$

いま M^{S_n} は一様可積分マルチンゲールだから $E[M^{S_n}_{T_n}] < \infty$ であり，これより $E[M^*_{R_n}] < \infty$ を得る．すなわち，M^* は局所化列 (R_n) をもつ $\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ の元である．□

命題 C.70 の証明　(iii) $\Longrightarrow$ (ii) は明らかである．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：A が局所可積分となるような分解 $X = X_0 + M + A$ を一つ選ぶと，$X = X_0 + M + (A - A^{\mathfrak{p}}) + A^{\mathfrak{p}}$ は $M + A - A^{\mathfrak{p}} \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$ かつ $A^{\mathfrak{p}} \in \mathscr{V}^{\mathrm{pred}}$ を満たす分解である．

(i) $\Longrightarrow$ (iv)：X を特殊半マルチンゲールとし，$X = X_0 + M + A$ をその標準分解とする．

$$(X - X_0)^* \leq M^* + A^* \leq M^* + V(A)$$

であるから，M^* と $V(A)$ がそれぞれ局所可積分になることを示せばよい．ところがこれらは補題 C.71 より明らかである．

(iv) $\Longrightarrow$ (iii)：$X = X_0 + M + A$ を $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc},0}$ かつ $A \in \mathscr{V}$ を満たす分解とする．M は局所マルチンゲールであるから，補題 C.71 の (ii) より $M^* \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ となる．さらに仮定より $(X - X_0)^* \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ であるから，

$$A^* \leq (X - X_0)^* + M^*$$

という関係式を用いれば $A^* \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ となることがわかる．ここで，

$$V(A) \leq V(A)_- + (\Delta A)^* \leq V(A)_- + 2A^*$$

という関係式が成り立っていることに注意しよう．$V(A)$ は càdlàg 適合過程であるから，$V(A)_-$ は可予測過程であり，補題 C.71 よりこれは局所可積分である．既に述べたように A^* も局所可積分であるから，$V(A)$ も局所可積分であることががわかった．□

半マルチンゲールや特殊半マルチンゲールの空間は，局所化について閉じている．

命題 C.72.　(i) $\mathscr{SM}$ と $\mathscr{SM}_{\mathrm{sp}}$ は停止について安定である．

(ii) $\mathscr{SM}_{\mathrm{loc}} = \mathscr{SM}$ および $(\mathscr{SM}_{\mathrm{sp}})_{\mathrm{loc}} = \mathscr{SM}_{\mathrm{sp}}$ が成り立つ．

(iii) $\mathscr{SM}_{\mathrm{ploc}} = \mathscr{SM}$.

証明　(i) $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ と $\mathscr{V}$，そして $\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ が停止について安定であることからわかる．

(ii) $(\mathscr{M}_{\mathrm{loc}})_{\mathrm{loc}} = \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$，$(\mathscr{A}_{\mathrm{loc}})_{\mathrm{loc}} = \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$，$\mathscr{V}_{\mathrm{loc}} = \mathscr{V}$ が成り立つことに注意すれば容易に示される[123]．

(iii) $\mathscr{SM}_{\mathrm{ploc}} \supset \mathscr{SM}$ は明らかなので，逆向きの包含関係を示す．$X \in \mathscr{SM}_{\mathrm{ploc}}$ とし，(T_n) をその前局所化列とする．いま

$$X^{T_n} = X^{T_n-} + \Delta X_{T_n} 1_{[\![T_n,\infty[\![}$$

という関係式が成り立つことに注意する．仮定より X^{T_n-} は半マルチンゲールであり，$\Delta X_{T_n} 1_{[\![T_n,\infty[\![} \in \mathscr{V}$ であるから，X^{T_n} もまた半マルチンゲールである．よって $X \in \mathscr{SM}_{\mathrm{loc}} = \mathscr{SM}$ となる．したがって $\mathscr{SM}_{\mathrm{ploc}} \subset \mathscr{SM}$ も成り立つ．　□

命題 C.73. 半マルチンゲール X は $|\Delta X| \le a$ を満たしていると仮定する．このとき X は特殊半マルチンゲールであり，その標準分解 $X = X_0 + M + A$ は $|\Delta A| \le a$ および $|\Delta M| \le 2a$ を満たす．

証明　$T_n = \inf\{t \ge 0 \mid (X - X_0)^*_t \ge n\}$ と定義すれば (T_n) は停止時刻の増大列であり，$T_n \to \infty$ a.s. を満たす．仮定より

$$(X - X_0)^*_{T_n} \le (X - X_0)^*_{T_n-} + |\Delta X_{T_n}| \le n + a$$

なので，$(X - X_0)$ は局所有界であり，特に局所可積分である．したがって命題 C.70 より X は特殊半マルチンゲールであることがわかる．可予測射影の性質より ${}^{\mathfrak{p}}(\Delta X) = {}^{\mathfrak{p}}(\Delta M) + {}^{\mathfrak{p}}(\Delta A) = \Delta A$ なので，可予測射影の単調性より $|\Delta A| \le a$ が導かれる．これより

$$|\Delta M| \le |\Delta X| + |\Delta A| \le a + a = 2a$$

もわかる．　□

半マルチンゲールの局所二乗可積分性は次の命題のように特徴付けられる．

命題 C.74. 半マルチンゲール X について，次の 2 条件は同値である．

(i) $X - X_0$ は局所二乗可積分である．

(ii) X は特殊半マルチンゲールであり，その標準分解 $X = X_0 + M + A$ は $M \in \mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}$ を満たす．

この命題 C.74 よりわかるように，特殊半マルチンゲール $X = X_0 + M + A$ の可積分二乗可積分性はマルチンゲール部分 M のみに依る．これは，$A \in \mathscr{V}^{\mathrm{pred}}$ は局所有界なので任意の局所可積分性をもつ，という事実が効いているためである．

証明　(i) $\Longrightarrow$ (ii)：$Y = \{(X - X_0)^*\}^2$ と定義する．(i) を仮定すれば $X - X_0$ は局所可積分でもあるから，命題 C.70 より X は特殊半マルチンゲールである．$X = X_0 + M + A$ をその標準分解とし，

123）　補題 C.28 を見よ．

(T_n) を $E[Y_{T_n}] < \infty$ かつ $V(A)_{T_n} \le n$ を満たすような局所化列とする[124)]．このとき

$$\sup_{s\ge 0} \left| M_s^{T_n} \right|^2 \le 2Y_{T_n} + 2V(A)_{T_n}^2 \le 2Y_{T_n} + 2n^2$$

であるから，$M^{T_n} \in \mathscr{M}^2$ がわかる．したがって $N \in \mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}$ である．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：$X = X_0 + M + A$ を特殊半マルチンゲール X の標準分解とし，局所化列 (T_n) を $M^{T_n} \in \mathscr{M}^2$ かつ $V(A)_{T_n} \le n$ となるように選ぶ．このとき先ほどと同様に定義した Y に対して

$$Y_{T_n} \le 2\sup_{s\ge 0} \left| M_s^{T_n} \right|^2 + 2V(A)_{T_n}^2 \le \sup_{s\ge 0} \left| M_s^{T_n} \right|^2 + 2n^2$$

が成り立つから，期待値をとれば $E[Y_{T_n}] < \infty$ を得る．すなわち $X - X_0$ は局所二乗可積分である．

□

D　注釈および文献についてのコメント

本ノートは全体として，Jacod and Shiryaev [21] と He, Wang, and Yan [16] を参考にして書いた．ランダム測度と半マルチンゲールの特性要素の一般論については，他にも Bichteler [3]，Cohen and Elliott [7]，Jacod [20]，Medvegyev [24]，Metivier [25] などが詳しい．概要を知るためには Yan [34] が手ごろである．

第 1 節　Random measure の訳語として本ノートではランダム測度という用語を用いたが，一般に定着した用語はないようである．ランダム測度の定義自体には，ω についての可測性を課さない場合もある．(Jacod and Shiryaev [21] など．）本ノートでは，He, Wang, and Yan [16] に従い，ランダム測度と確率測度から生成される測度 M_μ を重視する立場をとった．

付録 A　付録 A の内容については，主に Bogachev [5]，Cohn [8]，Kechris [22]，Srivastava [33] を参考にした．他にも Baskara Rao and Rao [2]，Christensen [6]，Dellcherie [9]，Dellacherie and Meyer [10]，Schwartz [31] なども参考になる．確率論関連の文献では用語の定義などについて Dellacherie and Meyer [10] にしたがっているものが多いので，本ノートとの違いに注意されたい．

Lusin の分離定理は Lusin [23] による．系 A.13 は Souslin [32] にちなんで Souslin の定理と呼ばれることもあるようだが，ここには主張が載っているだけできちんとした証明が世に出たのはもう少し後のようである[125)]．

ここでの Blackwell 空間の定義は Bogachev [5] に従った．この空間の由来は Blackwell [4] だが，[4] においてここでの Blackwell 空間が定義されているわけではない．Blackwell は [4] において，$(X, \mathscr{A})$ が countably generated で任意の可測関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ に対して $f(X)$ が解析集合となる集合を Lusin 空間と呼んだ．Dellacherie and Meyer ではこの空間を Blackwell 空間と呼んでいる．一点集合の可測性を仮定した下では，この空間は $\mathbb{R}$ の解析集合と可測空間として同型になり (Bogachev [5, Exercise 6.10.64] を見よ)，結局のところ解析的可測空間と同値な概念となる．とい

124）　A は可予測だから，このような列が存在する．（補題 C.71）

125）　Moschovakis [26] によると．

うのも，解析的可測空間はポーランド空間の解析集合と同型な空間だが，解析集合は可算生成的かつ可算分離的なので補題 A.11 の写像を経由して $[0,1]$ 解析集合として同型に埋め込まれるからである．（もっと言えば，カントール集合に埋め込まれる．）命題 A.19 は Blackwell [4] による．

標準可測空間，解析的可測空間などの用語は Cohn [8] に従った．

Souslin 空間などの位相空間上の測度については，Bogachev [5] や Schwartz [31] が詳しい．Souslin 空間は Radon 空間であることを述べたが，実はもっと強く強 Radon 空間（局所有限 Borel 測度が Radon になる）となっている．（例えば，[31, Chapter II Section 3 Theorem 11] など．）

付録 B

B. 1　条件付き期待値を有限ではない測度空間において定義している文献としては，例えば Rao [30, 29] や Hornor [17] がある．条件付き期待値の存在を示すのに用いた条件 (B.2) は [17] から取った．Rao [29, Section 7.1] には条件 (B.2) が必要ないかのような書き方がしてあるけど，本当だろうか？確率空間における一般化条件付き期待値については，He, Wang, and Yan [16, Chapter I. §4] なども参照されたい．

有限でない測度空間における Radon-Nikodym の定理については，Fonseca and Leoni [14]，Fremlin [15]，Rao [30]，Zaanen [35] などが参考になる．有限でない測度空間における L^p 空間の双対性についても，Fonseca and Leoni [14] がわかりやすい．

B. 2　この小節の内容は，ほぼ Bogachev [5, Chapter 10] を参考にして書いた．確率空間の場合は Dellacherie and Meyer [10] も参考になるが，Bogachev [5] の方が読みやすい．

B. 3　核と測度によって生成される積空空間上の測度と非対称版 Fubini の定理について詳しく述べた文献はかなり少ないようである．この小節の記述は Rao [30, VI. 6.2. Exercises] を参考にしたが，先行結果が見つからず本ノート独自に証明を与えたものもある．確率測度と確率核の場合には他にも Dellacherie and Meyer [10, Chapter II. 1] に記述がある．これらの内容の起源がどこにあるのかはわからないが，比較的古いものでは Elliott [12] がある．

B. 4　この小節も，主に Bogachev [5, Chapter 10] を参考にした．

付録 C　付録 C の内容について詳しくは Dellahcerie [9], Dellacherie and Meyer [10, 11], He, Wang, and Yan [16] などを参考にされたい．他にも Bichteler [3, Appendix]，Jacod and Shiryaev [21]，Medvegyev [24] も参考になる．概要を知るためには Nikeghbali [27] も役に立つだろう．

参考文献

[1] David Applebaum. *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 93. Cambridge University Press, 2004. DOI: 10.1017/CBO9780511755323.

[2] K. P. S. Bhaskara Rao and B. V. Rao. *Borel spaces*. Warszawa: Instytut Matematyczny Polskiej Akademi Nauk, 1981. URL: http://eudml.org/doc/268562.

[3] Klaus Bichteler. *Stochastic Integration with Jumps*. Vol. 89. Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge University Press, 2002. xiv+501 pp. ISBN: 0-521-81129-5. DOI: 10.1017/CBO9780511549878.

[4] David Blackwell. "On a Class of Probability Spaces". In: *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 2: Contributions to Probability Theory*. Berkeley, Calif.: University of California Press, 1956, pp. 1–6. URL: http://projecteuclid.org/euclid.bsmsp/1200502002.

[5] Vladimir I. Bogachev. *Measure Theory*. 2 vols. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. DOI: 10.1007/978-3-540-34514-5. URL: https://www.springer.com/gp/book/9783540345138.

[6] J. P. R. Christensen. *Topology and Borel Structures*. North Holland Mathematic Studies 10. Amsterdam: North Holland Publ. Co., 1974.

[7] Samuel N. Cohen and Robert J. Elliott. *Stochastic Calculus and Applications*. 2nd ed. Probability and Its Applications. Birkhäuser Basel, 2015. DOI: 10.1007/978-1-4939-2867-5. URL: https://www.springer.com/gp/book/9781493928668.

[8] Donald L. Cohn. *Measure theory*. 2nd ed. Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher. Birkhäuser, 2013. DOI: 10.1007/978-1-4614-6956-8. URL: https://www.springer.com/la/book/9781461469551.

[9] Claude Dellacherie. *Capacités et processus stochastiques*. Spriger-Verlag Berlin Heidelberg, 1972. ix+155 pp.

[10] Claude Dellacherie and Paul-André Meyer. *Probabilities and Potential*. North-Holland Mathematics Studies 29. North-Holland, 1978. viii+189. ISBN: 0-7204-0701-X. URL: https://www.elsevier.com/books/probabilities-and-potential-a/dellacherie/978-0-7204-0701-3.

[11] Claude Dellacherie and Paul-André Meyer. *Probabilities and Potential B. Theory of Martingales*. Trans. by J. P. Wilson. North-Holland Mathematics Studies 72. North-Holland, 1982. xvii+463. ISBN: 0-444-86526-8. URL: https://www.elsevier.com/books/probabilities-and-potential-b/dellacherie/978-0-444-86526-7.

[12] E. O. Elliott. "Measures on Product Spaces". In: *Transactions of the American Mathematical Society* 128.3 (1967), pp. 379–388.

[13] Ryszard Engelking. *General topology*. Translated from the Polish by the author, Monografie Matematyczne, Tom 60. [Mathematical Monographs, Vol. 60]. PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977, 626 pp. (errata insert).

[14] Irene Fonseca and Giovanni Leoni. *Modern Methods in the Calculus of Variations. L^p Spaces*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag New York, 2007. DOI: 10.1007/978-0-387-69006-3. URL: https://www.springer.com/gp/book/9780387357843.

[15] D. H. Fremlin. *Measure Theory*. 2nd ed. 5 vols. 2010–2015.

[16] Sheng-wu He, Jia-gang Wang, and Jia-an Yan. *Semimartingale Theory and Stochastic Calculus*. Science Press and CRC Press, 1992. xiv+546. URL: https://www.crcpress.com/Semimartingale-Theory-and-Stochastic-Calculus/eWangyan/p/book/9780849377150.

[17] William E. Hornor. "Generalized Conditional Expectations". In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 123.12 (1995), pp. 3681–3685. ISSN: 00029939, 10886826. URL: http://www.jstor.org/stable/2161893.

[18] 伊藤清. **確率論**. 岩波書店, 1991.

[19] 伊藤清. **確率過程**. **オルフス大学講義録**. Ed. by O.E. バルンドルフ-ニールセン and 佐藤健一. Trans. by 佐藤 由身子. 丸善出版, 2012.

[20] Jean Jacod. *Calcul Stochastique et Problèmes de Martingales*. Lecture Notes in Mathematics 714. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1979. DOI: 10.1007/BFb0064907.

[21] Jean Jacod and Albert N. Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes*. 2nd ed. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 288. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003. DOI: 10.1007/978-3-662-05265-5. URL: https://www.springer.com/gp/book/9783540439325.

[22] Alexander S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*. Graduate Texts in Mathematics 156. Springer-Verlag New York, 1995. DOI: 10.1007/978-1-4612-4190-4. URL: https://www.springer.com/us/book/9780387943749.

[23] Nicolas Lusin. "Sur les ensembles analytiques". French. In: *Fundamenta Mathematicae* 10.1 (1927), pp. 1–95. URL: http://eudml.org/doc/211183.

[24] Peter Medvegyev. *Stochastic Integration Theory*. Oxford Graduate Texts in Mathematics 14. Oxford University Press, 2007. xx+608. ISBN: 978-0-19-921525-6.

[25] Michel Métivier. *Semimartingales: a course on stochastic processes*. De Gruyter studies in mathematics 2. Walter de Gruyter, 1982.

[26] Yiannis N. Moschovakis. *Descriptive Set Theory*. 2nd ed. Mathematical Surveys and Monographs 155. American Mathematical Society, 2009. DOI: 10.1090/surv/155. URL: http://bookstore.ams.org/surv-155.

[27] Ashkan Nikeghbali. "An essay on the general theory of stochastic processes". In: *Probability Surveys* 3 (2006), pp. 345–412. DOI: 10.1214/154957806000000104. URL: http://dx.doi.org/10.1214/154957806000000104.

[28] Philip E. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations*. Second editioin, version 2.1. Stochastic Modelling and Applied Probability 21. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. DOI: 10.1007/978-3-662-10061-5. URL: https://www.springer.com/gp/book/9783540003137.

[29] M. M. Rao. *Conditional Measures and Applications*. 2nd ed. Pure and applied mathematics 271. Chapman & Hall/CRC, 2005.

[30] M. M. Rao. *Measure Theory and Integration*. Second, revised and expanded edition. Pure and applied mathematics 265. Marcer Dekker, 2004.

[31] Laurent Schwartz. *Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical Measures*. Tata Institute Monographs on Mathematics & Physics. Oxford University Press, 1973.

[32] M. Souslin. “Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres tansfinis”. In: *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l’Académie des Sciences* 164 (1917), pp. 88–91.

[33] S. M. Srivastava. *A Course on Borel Sets*. Graduate Texts in Mathematics 180. Springer-Verlag New York, 1998. DOI: 10.1007/b98956.

[34] Jia-an Yan. “Semimartingale Theory and Stochastic Calculus”. In: *Handbook of Stochastic Analysis and Applications*. Ed. by D. Kannan and V. Lakshmikantham. STATISTICS: Textbooks and Monographs 163. Marcer Dekker, 2002. DOI: 10.1201/9781482294705.

[35] Adriaan Cornelis Zaanen. *Integration*. 2nd ed. Completely revised edition of An introduction to the theory of integration. North-Holland Publishing Co., Amsterdam; Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967.

索引