Lemieux の修士論文の勉強ノート

関根・日野研究室
平井祐紀

2015 年 10 月 19・26 日，11 月 2 日発表

編集履歴
2015/11/02 とりあえず完成.
2015/11/03 参考文献を追加.
2015/11/09 付録 B を加筆.
2015/11/10 誤植を訂正.
2015/11/26 誤植を訂正.
2015/12/06 誤植を訂正.

目次

1 準備

まずは基本的な設定と記号の説明.

- このノートでは，常に通常の条件を満たすフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を固定して考える.
- $\mathscr{P}$, $\mathscr{O}$, Prog でそれぞれ可予測，良可測，発展的 σ-加法族を表す.
- $\mathscr{L}^0(\mathscr{F})$: $\mathscr{F}$-可測関数の全体
- $\mathscr{C}_{loc}$: 確率過程のクラス $\mathscr{C}$ の局所化
- $\mathscr{C}_0$: 確率過程のクラス $\mathscr{C}$ の元で，特に 0 出発のもの
- $\mathscr{V}^+$: 適合増加過程 A で $A_0 = 0$ なるもの
- $\mathscr{V} = \mathscr{V}^+ - \mathscr{V}^+$: 局所有限変動なパスを持つ過程で 0 出発のもの.
- $\mathscr{A}^+$: $\mathscr{V}^+$ の元 V で $E[V_\infty] < +\infty$ なるもの
- $\mathscr{A} = \mathscr{A}^+ - \mathscr{A}^+$: 可積分なる全変動をもつ過程
- $\mathscr{M}^2$: 二乗可積分マルチンゲール
- $\mathscr{M}^{2,c}$: 連続な二乗可積分マルチンゲール
- $\mathscr{M}^{2,d}$: 準不連続二乗可積分マルチンゲール
- $\mathscr{M}$: 一様可積分マルチンゲール
- $\mathscr{M}^c_{loc}$: 連続な局所マルチンゲール
- $\mathscr{M}^d_{loc}$: 純不連続な局所マルチンゲール
- $\mathscr{S} = \mathscr{L}^0(\mathscr{F}_0) + \mathscr{M}_{loc,0} + \mathscr{V}$: セミマルチンゲール
- $\mathscr{S}_p$: special semimartingale
- $V \in \mathscr{V}$ に対して，pathwise な Stieltjes 測度 $dV(\omega)$ の全変動を $|dV|(\omega)$ で表す.
- 確率過程 H と $A \in \mathscr{V}$ に対して，パスごとの Stieltjes 積分で定まる確率過程

$$(\omega, t) \longmapsto \int_{]0,t]} H_s(\omega) dA_s(\omega)$$

  を $H \bullet A$ と表す.
- $\mathbb{R}$ 上の測度 μ による区間 $]0,t]$ 上の積分を

$$\int_0^t f(x)\mu(dx) := \int_{]0,t]} f(x)\mu(dx)$$

  のように略記する.
- 確率過程 H のセミマルチンゲール X により確率積分を $H \bullet X$ で表す．これはもちろん確率 1 の意味でしか一意には定まらない．このノートにおいて確率積分に関する主張をするときは，「確率積分の任意のバージョンについてその主張が成立する」を意味することとする.

1.1 セミマルチンゲールと確率解析についての基本事項

論文の本題に入る前に，セミマルチンゲールと確率解析に関する知識を補充する．（証明はしない．）

定義 1. (i) $M, N \in \mathscr{M}^2$ とする．$MN \in \mathscr{M}_0$ が成立するとき，M と N は強い意味で直交する，または単に直交する ((strongly-) orthogonal) という．

(ii) $M, N \in \mathscr{M}^2$ は $E[M_\infty N_\infty]$ を内積とした Hilbert 空間 $\mathscr{M}^2$ の元として直交するとき，弱い意味で直交するという．

(iii) $M \in \mathscr{M}^2$ とする．M が任意の $N \in \mathscr{M}^2$ と直交するとき，M は純不連続二乗可積分マルチンゲールという．

(iv) $M, N \in \mathscr{M}_{loc}$ とする．$MN \in \mathscr{M}_{loc,0}$ が成立するとき，M と N は直交するという．

(v) $M \in \mathscr{M}_{loc,0}$ が任意の連続局所マルチンゲールと直交するとき，純不連続局所マルチンゲールと呼ばれる．

純不連続な二乗可積分マルチンゲールは強い意味での直交性で定義されたが，$\mathscr{M}^{2,d}$ は実は Hilbert 空間 $\mathscr{M}^2$ の意味での $\mathscr{M}^{2,c}$ の直交補空間であることも知られている．すなわち，位相的な意味で $\mathscr{M}^2 = \mathscr{M}^{2,c} \oplus \mathscr{M}^{2,d}$ が成立[*1]．また，$\mathscr{M}^c_{loc} \cap \mathscr{M}^d_{loc} = \{0\}$ が成り立つことも示される．

定理 2 (局所マルチンゲールの分解)**.** (i) $a > 0$ とする．任意の局所マルチンゲールは

$$M = M_0 + M' + M'', \quad M' \in \mathscr{V} \cap \mathscr{M}_{loc,0}, \quad |\Delta M''| \le a \tag{1.1}$$

という分解を持つ[*2]．（この分解は必ずしも一意ではない．）特に，

$$\mathscr{M} = \mathscr{L}^0(\mathscr{F}_0) + \mathscr{V} \cap \mathscr{M}_{loc,0} + \mathscr{M}^2_{loc,0} \tag{1.2}$$

である．

(ii) 任意の $M \in \mathscr{M}$ に対して，$M - M_0 \in \mathscr{M}^c_{loc,0} \oplus \mathscr{M}^d_{loc}$ が成立[*3]．

定理 2.9 の (i) のことを局所マルチンゲールの基本定理 (the fundamental theorem of local martingales) と呼ぶこともある．(ii) の局所マルチンゲール $M - M_0$ の分解における連続部分を M^c，純不連続部分を M^d と表すことにする．すなわち任意の局所マルチンゲールは $M = M_0 + M^c + M^d$ と表される．

定理 3. M を任意の局所マルチンゲールとすれば，任意の $t \in \mathbb{R}_+$ に対して $\sum_{0<s\le t}(\Delta M_s)^2$ は a.s. で収束．

定理 4. (i) $M \in \mathscr{M}^2_{loc}$ とすれば，可予測過程 $\langle M, M\rangle \in \mathscr{A}^+_{loc}$ で $M^2 - \langle M, M\rangle \in \mathscr{M}^2_{loc}$ なるものがただ一つ存在する．

(ii) $M, N \in \mathscr{M}^2_{loc}$ とすれば，可予測過程 $\langle M, N\rangle \in \mathscr{A}_{loc}$ で $MN - \langle M, N\rangle \in \mathscr{M}^2_{loc}$ なるものがただ一つ存在する．

上の定理は，$\mathscr{M}^2$ の場合 Doob-Meyer 分解の直接の帰結であり，一般の場合は局所化によって得られる．

[*1] Doob の不等式を用いれば $\mathscr{M}^{2,c}$ が $\mathscr{M}^2$ の閉部分空間であることが示される．

[*2] よって M'' は局所有界である．

[*3] 位相は特に考えていないので，代数的直和である．

定理 5. $M, N \in \mathscr{M}_{loc}$ とすれば，$[M,N] \in \mathscr{V}$ で $MN - M_0N_0 - [M,N] \in \mathscr{M}_{loc,0}$ かつ $\Delta[M,N] = \Delta M \Delta N$ を満たすものがただ一つ存在する．

定義 6. $M, N \in \mathscr{M}_{loc}$ に対して，定理 2.21 における $[M,N]$ を M と N の二次共変分 (quadratic covariation) と呼ぶ．$M = N$ のとき，$[M,M]$ を特に M の二次変分 (quadratic variation) という．

実際のところ，

$$[M,N] = \langle M^c, N^c \rangle + \sum_{0<s\leq \cdot} \Delta M_s \Delta N_s \tag{1.3}$$

が成立する．$M, N \in \mathscr{M}^2_{loc}$ ならば $[M,N]^p = \langle M,N \rangle$（双対可予測射影）である．一般の局所マルチンゲールに対しても，$[M,N]$ の双対可予測射影によって $\langle M,N \rangle$ が定義できる．

定義 7 (Special semimartingale)**.** セミマルチンゲール $X = X_0 + M + V$ $(M \in \mathscr{M}_{loc,0}, V \in \mathscr{V})$ は，V が可予測なるものとして取れるとき special semimartingale と呼ばれる．

Special semimartingale の分解は一意的である．実際，可予測な V, V' によって $X = X_0 + M + V = X_0 + M' + V'$ と分解されたとすれば，$M - M' = V' - V \in \mathscr{M}_{loc,0} \cap \mathscr{V}$ である．これは可予測な局所マルチンゲールだから，確率 1 で連続となる．連続な局所マルチンゲールが有限変動なら定数だから，$M - M'$ は 0 と区別不能である．Special semimartingale の分解で有界変動部分が可予測になるものを標準的分解という．Special semimartingale の定義において，「V が可予測であるようにとれる」という文言は「$V \in \mathscr{A}_{loc}$ となるように取れる」と言い換えても同値であることが知られている．連続セミマルチンゲールは special semimartingale である．

命題 8. X をセミマルチンゲールとする．このとき，$X^c \in \mathscr{M}^c_{loc,0}$ で，セミマルチンゲールの任意の分解 $X = X_0 + M + V$ に対して $X^c = M^c$ となるものが存在する．

命題 2.26 の X^c を，X の連続マルチンゲール部分と呼ぶ．

定義 9. $X, Y \in \mathscr{S}$ に対して

$$[X,Y] = \langle X^c, Y^c \rangle + \sum_{0<s\leq t} \Delta X_s \Delta Y_s \tag{1.4}$$

とおき，$[X,Y]$ を X と Y の二次共変分と呼ぶ．(quadratic covariation) $[X,X]$ を特に X の二次変分と呼ぶ．(quadratic variation)

二次変分について，$[X,Y]^c = \langle X^c, Y^c \rangle$ が成立する．

定理 10. $M \in \mathscr{M}_{loc}$ とし，H を可予測過程とする．$H^2 \bullet [M,M] \in \mathscr{A}^+_{loc}$ が成り立つなら，局所マルチンゲール L で

$$[L,N] = H \bullet [M,N], \quad N \in \mathscr{M}_{loc} \tag{1.5}$$

を満たすものがただ一つ存在する．

定義 11 (確率積分)**.** (i) 定理 2.32 で存在の保証された局所マルチンゲール L を $H \bullet M$ と書き，H の M による確率積分 (stochastic integral) と呼ぶ．

(ii) 局所有界過程 H とセミマルチンゲール $X = X_0 + M + V$ に対して，X による確率積分 $H \bullet X$ を

$$H \bullet X := H \bullet M + H \bullet V \tag{1.6}$$

で定義する．確率積分は実は X の分解によらないことが示される．

定理 12 (優収束定理)**.** X をセミマルチンゲール，(H_n) を局所有界過程の列で局所有界過程 H に各点収束するものとする．適当な局所有界過程 K に対して $|H_n| \le K$ が成り立つなら，

$$H_n \bullet X \xrightarrow[n\to\infty]{ucp} H \bullet X \tag{1.7}$$

が成立．

定理 13 (部分積分公式)**.** X, Y をセミマルチンゲールとすれば，

$$XY - X_0Y_0 = X_- \bullet Y + Y_- \bullet X + [X, Y] \tag{1.8}$$

定理 14 (伊藤の公式)**.** X を $\mathbb{R}^d$ 値セミマルチンゲール，$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を C^2 級関数とする．このとき，$f(X)$ はまたセミマルチンゲールで以下の分解を持つ：

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) = &\sum_{1\le i\le d} D_i f(X_-) \bullet X^i + \frac{1}{2} \sum_{1\le i,j\le d} D_{ij} f(X_-) \bullet \langle X^{i,c}, X^{j,c} \rangle \\ &+ \sum_{0<s\le \cdot} \left[\Delta f(X_s) - \sum_{1\le i\le d} D_i f(X_-) \Delta X^i \right]. \end{aligned} \tag{1.9}$$

$X \in \mathscr{S}_p$ と $1 \le k < +\infty$ に対して，

$$\|X\|_{\mathscr{H}^k} = \left\{ E\left([M, M]_\infty^{k/2} + \left(\int_0^\infty |dV_s| \right)^k \right) \right\}^{1/k} \tag{1.10}$$

定義し，$\mathscr{H}^k$ で $\|X\|_{\mathscr{H}^k} < +\infty$ なる special semimartingale 全体を表すことにする．

1.2 局所時間

連続とは限らないセミマルチンゲールに対しても伊藤の公式を拡張し，局所時間を定義することが出来る．ここでは一般のセミマルチンゲールに関する局所時間について，基本的な事実を説明する．

定理 15 (凸関数に関する伊藤の公式)**.** X をセミマルチンゲールとし，f を凸関数とする．このとき，$f(X)$ はまたセミマルチンゲールで，ある $A^f \in \mathscr{V}^+$ が存在して次の分解を持つ：

$$f(X) - f(X_0) = f'_-(X_-) \bullet X + A^f_t \tag{1.11}$$

さらに，A^f は

$$\Delta A^f = \Delta f(X_s) - f'_-(X_{s-}) \Delta X_s \tag{1.12}$$

を満たす．ただし，f'_- は凸関数 f の左微分を表す．

証明．*Step 1.* f が C^2 級ならば，

$$A^f_t = \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_{s-}) d\langle X^c, X^c \rangle_s + \sum_{0<s\le t} \Delta f(X_s) - f'_-(X_{s-}) \Delta X_s \tag{1.13}$$

とおけばよい．実際，f は凸なので二階微分は常に非負であり，第一項のパスは増加的である．凸関数の性質より第二項が増加的であることも容易に分かる[*4]

Step 2. f が一般の凸関数の場合の証明は，mollifier（のようなもの？）を作用させて滑らかな場合に帰着させることで示す．ρ は以下の条件を満たす関数とする：

- $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ かつ $\rho \geq 0$.
- $\displaystyle\int_{]-\infty,0]} \rho(x)dx = 1$.
- $\operatorname{supp}\rho \subset]-\infty, 0]$.

この ρ に対して，$\rho_n(x) = n\rho(nx)$ と定める．ここで

$$f_n(x) = \int_{]-\infty,0]} f(x+y)\rho_n(y)dy \tag{1.14}$$

とおけば $f_n \in C^\infty$ であって $f_n \to f$ (uniformly on compacts)[*5]が成立．さらに，$f_n' \uparrow f_-'$ である．

$\because$ f が well-defined であることは，f の局所有界性より分かる[*6]．K を適当なコンパクト集合とすれば，f が K 上一様連続である[*7]．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta = \delta(\varepsilon)$ が存在して

$$x, x+y \in K \wedge |y| < \delta \Longrightarrow |f(x+y) - f(x)| < \varepsilon \tag{1.15}$$

が成立．いま，十分大きな n をとれば $\operatorname{supp}\rho_n \subset]-\delta, 0]$ と出来るから，任意の $x \in K$ で

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{]-\infty,0]} f(x+y)\rho_n(y)dy - f(x) \right| \\
&= \left| \int_{]-\infty,0]} f(x+y)\rho_n(y)dy - \int_{]-\infty,0]} f(x)\rho_n(y)dy \right| \\
&\leq \int_{]-\infty,0]} |f(x+y) - f(x)|\rho_n(y)dy \\
&= \int_{]-\delta,0]} |f(x+y) - f(x)|\rho_n(y)dy \\
&\leq \varepsilon \int_{]-\delta,0]} \rho_n(y)dy \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned} \tag{1.16}$$

となり，K 上の一様収束が分かる．f_n が C^∞ であることは，与えられた条件より微分と積分の交換が正当化され

$$\frac{d}{dx}\int_{]-\infty,0]} f(x+y)\rho_n(y)dy = \frac{d}{dx}\int_{]-\infty,0]} f(y)\rho_n(z-x)dz = \int_{]-\infty,0]} f(y)\frac{\partial\rho_n}{\partial x}(z-x)dz \tag{1.17}$$

[*4] 命題 46.
[*5] uc と略す.
[*6] 凸関数は連続.
[*7] もう一度言うが，凸関数は連続である.

となることより分かる．また f は凸より f'_- は左連続な増加関数であるから，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f_n(x) &= \frac{d}{dx}\int_{]-\infty,0]} f\left(x+\frac{z}{n}\right)\rho(z)dz \\
&= \int_{]-\infty,0]} f'_-\left(x+\frac{z}{n}\right)\rho(z)dz \\
&\leq \int_{]-\infty,0]} f'_-\left(x+\frac{z}{n+1}\right)\rho(z)dz = \frac{d}{dx}f_{n+1}(x) \\
&\leq \int_{]-\infty,0]} f'_-\left(x\right)\rho(z)dz = f'_-(x)
\end{aligned} \tag{1.18}$$

となって $f'_1 \leq f'_2 \leq \cdots \leq f'_-$ であり，特に単調収束定理より[*8]

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = \int_{]-\infty,0]} \lim_{n\to\infty}\left\{f'_-\left(x+\frac{z}{n}\right)\right\}\rho(z)dz = \int_{]-\infty,0]} f'_-(x)\rho(z)dz = f'_-(x) \tag{1.19}$$

が任意の x で成立．

ここで，各 n については伊藤の公式より

$$f_n(X_t) = f_n(X_0) + \int_{]0,t]} f'_n(X_{s-})dX_s + A^{f_n}_t \tag{1.20}$$

が成立．$n\to\infty$ としたときの挙動を調べよう．

Step 3. f_n の構成法より $f_n(X_t) - f_n(X_0) \to f(X_t) - f(X_0)$ (pointwise) が明らかに成立する．さらに，この収束は ucp の意味でも成り立つ．実際，パスを固定するごとに $[0,t]$ 上で $s \mapsto X_s(\omega)$ はコンパクト集合の中を動くから，$f_n \to f$ (uc) と併せて $f_n \to f$ (ucp) となる．

Step 4. $X_0 = 0$ のとき，確率積分に関する優収束定理より

$$f'_n(X_-)\bullet X \xrightarrow[n\to\infty]{ucp} f'_-(X_-)\bullet X \tag{1.21}$$

である．実際，$X_0=0$ なら被積分関数はどれも局所有界である．[*9]

Step 5. ここまでの結果より

$$f_n(X) - f_n(X_0) - f'_n(X_-)\bullet X \xrightarrow[n\to\infty]{ucp} f(X) - f(X_0) - f'_-(X_-)\bullet X \tag{1.22}$$

であるから，

$$A^{f_n} \xrightarrow[n\to\infty]{ucp} A^f := f(X) - f(X_0) - f'_-(X_-)\bullet X \tag{1.23}$$

も成立．よって B として *càdlàg* なるバージョンが取れる．$\Delta A^f = \Delta f(X) + f'_-(X_-)\Delta X$ となることも定義より明らかである．A^f は増加過程 A^{f_n} の極限なので，増加的なパスを持つ．

Step 6. $X_0=0$ と限らないときは，$g(X-X_0, X_0) := f(X-X_0+X_0) = f(X)$ として，多変数の伊藤の公式を使って同様に証明される．□

以下では，

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

とおくことにする．

[*8] この列は必ずしも非負ではないが，$f'_-(x+z)$ の可積分性より単調収束定理の適用が可能．

[*9] X_- は局所有界となることに注意．

定理 16 (田中の公式)．$(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ を通常の条件を満たすフィルターつき確率空間，X をセミマルチンゲールとする．このとき，$a\in\mathbb{R}$ に対して $(X-a)^+$，$(X-a)^-$，$|X-a|$ はどれもセミマルチンゲールである．各 a に対して増加過程 $A^a\in\mathscr{V}^+$ が存在し，それぞれのセミマルチンゲール表現は以下のようになる：

$$\begin{aligned}
|X_t-a| &= |X_0-a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_{s-}-a)dX_s + A_t^a \\
(X_t-a)^+ &= (X_0-a)^+ + \int_0^t 1_{]a,\infty[}(X_{s-})dX_s + \frac{1}{2}A_t^a \\
(X_t-a)^- &= (X_0-a)^- + \int_0^t 1_{]-\infty,a]}(X_{s-})dX_s + \frac{1}{2}A_t^a
\end{aligned} \tag{1.24}$$

証明．凸関数 $x\mapsto x^+$ および $x\mapsto x^-$ にそれぞれ伊藤の公式を適用すれば，

$$(X_t-a)^+ = (X_0-a)^+ + \int_0^t 1_{]a,\infty[}(X_{s-})dX_s + \frac{1}{2}A_t^+ \tag{1.25}$$

$$(X_t-a)^- = (X_0-a)^- - \int_0^t 1_{]-\infty,a]}(X_{s-})dX_s + \frac{1}{2}A_t^- \tag{1.26}$$

なる表現を得る．(1.25)−(1.26) を計算すれば，

$$\begin{aligned}
X_t-a &= X_0-a+\int_0^t dX_s + \frac{1}{2}(A_t^+-A_t^-) \\
&= X_0-a+X_t-X_0+\frac{1}{2}(A_t^+-A_t^-)
\end{aligned} \tag{1.27}$$

となるから，$A^+=A^-$ が分かる．よって $A^+=A^a$ とおけば $(X-a)^+$ と $(X-a)^-$ の表現を得る．さらに (1.25)+(1.26) により

$$|X_t-a| = |X_0-a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s-a)dX_s + A_t^a \tag{1.28}$$

も分かり，定理の主張が示された． □

田中の公式に現れた A^a の不連続部分は

$$\Delta A^a = \Delta|X_s-a| - \operatorname{sgn}(X_{s-}-a)\Delta X \tag{1.29}$$

であるが，簡単な計算によりこれは

$$\Delta A^a = 2\left\{1_{\{X_{s-}>a\}}(X_s-a)^- + 1_{\{X_{s-}\le a\}}(X_s-a)^+\right\} \tag{1.30}$$

とも表現されることに注意しよう．ここで田中の公式に現れた増加過程 A^a を改めて

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_t^a(X) &= A_t^a \\
l_t^a(X) &= 2\sum_{0<s\le t}\left[1_{\{X_{s-}>a\}}(X_s-a)^- + 1_{\{X_{s-}\le a\}}(X_s-a)^+\right] \\
L_t^a(X) &= \mathscr{L}_t^a(X) - l_t^a(X)
\end{aligned} \tag{1.31}$$

と書き，$L^a(X)$ を a における X の局所時間 (local time) と呼ぶ．

命題 17 (Yoeurp [41]). X をセミマルチンゲールとすれば，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$L_t^a(X) - L_t^{-a}(-X) = 2\int_0^t 1_{\{X_{s-}=a\}} dX_s - 2\sum_{0<s\le t} 1_{\{X_{s-}=a\}} \Delta X_s \tag{1.32}$$

が indistinguishable の意味で成立.

証明. X と a に田中の公式を適用すれば，

$$\begin{aligned} |X_t - a| &= |X_0 - a| + \int_0^t 1_{]a,+\infty[}(X_{s-}) dX_s - \int_0^t 1_{]-\infty,a]}(X_{s-}) dX_s + L_t^a(X) \\ &\quad + 2\sum_{0<s\le t} \left[1_{\{X_{s-}>a\}}(X_s - a)^- + 1_{\{X_{s-}\le a\}}(X_s - a)^+\right] \end{aligned} \tag{1.33}$$

が indistinguishable の意味で成立．また，$-X$ と $-a$ に対して田中の公式を用いれば

$$\begin{aligned} |X_t - a| &= |X_0 - a| - \int_0^t 1_{]-\infty,a[}(X_{s-}) dX_s + \int_0^t 1_{[a,+\infty[}(X_{s-}) dX_s + L_t^{-a}(-X) \\ &\quad + 2\sum_{0<s\le t} \left[1_{\{X_{s-}<a\}}(X_s - a)^+ + 1_{\{X_{s-}\ge a\}}(X_s - a)^-\right] \end{aligned} \tag{1.34}$$

(1.33)−(1.34) を計算すれば，

$$\begin{aligned} L_t^a(X) - L_t^{-a}(-X) &= 2\int_0^t 1_{\{X_{s-}=a\}} dX_s - 2\sum_{0<s\le t} 1_{\{X_{s-}=a\}}(X_s - a) \\ &= 2\int_0^t 1_{\{X_{s-}=a\}} dX_s - 2\sum_{0<s\le t} 1_{\{X_{s-}=a\}} \Delta X_s \end{aligned} \tag{1.35}$$

を得る. □

補題 18. パス $t \mapsto L_t^a(\omega)$ の生成する Stieltjes 測度を $dL^a(\omega)$ で表せば，P-a.s. に

$$\operatorname{supp} dL^a(\omega) \subset \{t : X_{t-}(\omega) = X_t(\omega) = a\} \tag{1.36}$$

が成立する[*10].

証明. dL は a.s. で連続な測度だから，特に

$$\operatorname{supp} dL^a(\omega) \subset \{t : X_{t-}(\omega) = a\} \tag{1.38}$$

を示せばよい．S, T を $0 < S \le T$ と $]\!]S,T[\![\subset \{X_- < a\}$ を満たす停止時刻とする．この時，$[\![S,T[\![\subset \{X \le a\}$ および $]\!]S,T]\!] \subset \{X_- \le a\}$ が成立.

$\because$ $(\omega,t) \in [\![S,T[\![$ とすれば，$T(\omega) > t_n > t \ge S(\omega)$ かつ $t_n \to t$ なる点列 (t_n) が取れて，仮定より $X_{t_n-} < a$ である．$n \to \infty$ とすれば

$$X_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_{t_n-}(\omega) \le a \tag{1.39}$$

が分かる．よって $[\![S,T[\![\subset \{X \le a\}$ が成立．$]\!]S,T]\!] \subset \{X_- \le a\}$ も同様に示される.

---

*10 Borel 測度 μ の台 (support) とは

$$\operatorname{supp}\mu = \bigcap\{F; F \text{ は閉集合で，} \mu(F^c) = 0\} \tag{1.37}$$

で定義される閉集合である.

田中の公式より $\{T<+\infty\}$ 上では

$$(X_T-a)^+-(X_S-a)^+=\int_S^T 1_{\{X_{s-}>a\}}dX_s+\frac{1}{2}L_T^a-\frac{1}{2}L_S^a \\ +\sum_{S<s\le T}1_{\{X_{s-}>a\}}(X_s-a)^-+1_{\{X_{s-}\le a\}}(X_s-a)^+. \tag{1.40}$$

となるが，仮定よりさらに

$$(X_T-a)^+=\frac{1}{2}L_T^a-\frac{1}{2}L_S^a+(X_T-a)^+. \tag{1.41}$$

となる．したがって $L_T^a=L_S^a$ P-a.s. on $\{T<+\infty\}$ が成立する．

いま，有理数 $r>0$ に対して

$$\begin{aligned} S^r&=\begin{cases} r & \text{if } X_{r-}<a, \\ +\infty & \text{if } X_{r-}\ge a, \end{cases} \\ T^r&=\inf\{t>S^r\mid X_{t-}\ge a\}, \\ H&=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap\,]0,+\infty[}\rrbracket S^r,T^r\llbracket. \end{aligned} \tag{1.42}$$

と定めれば，S^r,T^r はどれも停止時刻である．[*11]．任意の ω に対して H のセクション H^ω は $\{t;X_{t-}(\omega)<a\}$ の内部であることを示そう．X_- の左連続性より，任意の有理数 $r>0$ に対して $]S^r(\omega),T^r(\omega)[\subset\{t:X_{t-}(\omega)<a\}$ であることは明らか．H^ω が開集合であることから $H^\omega\subset\{t:X_{t-}(\omega)<a\}^\circ$ が分かる．逆に $s\in\{t:X_{t-}(\omega)<a\}^\circ$ として s に十分近い有理数 $0<r<s$ を取れば，$X_{r-}(\omega)<a$ が成立．よって $s\ge S^r$ である．定義から $s<T^r$ も分かる．したがって $H^\omega=\{t:X_{t-}(\omega)<a\}^\circ$ である．先の議論により $L_{S^r}^a=L_{T^r}^a$ a.s. となるから，$\operatorname{supp}dL(\omega)\subset\overline{\{t:X_{t-}(\omega)\ge a\}}$ である．X_- の左連続性より $\partial\{t:X_{t-}(\omega)\ge a\}$ は[*12]高々可算な集合なので[*13]連続なる測度 $dL(\omega)$ で見れば零集合となり，$\operatorname{supp}dL(\omega)\subset\{t:X_{t-}(\omega)\ge a\}$ も分かる．

同様の議論で $\operatorname{supp}dL(\omega)\subset\{t:X_{t-}(\omega)\le a\}$ も示されるので，

$$\operatorname{supp}dL(\omega)\subset\{t:X_{t-}(\omega)=a\} \tag{1.43}$$

である． □

局所時間 L^a は a を固定するごとに定義されていたから．(ω,t) に加えて a の関数とも見たとき，一般に可測性は保証されない．しかし，パラメータつき確率積分に関する考察から可測なバージョンをとれることが分かる．

補題 19. $A\in\mathscr{V}$ とすれば，A の不連続部分 $\sum_{0<s\le\cdot}\Delta A_s$ もまた $\mathscr{V}$ の元である．さらに，$S_n>0$ なる停止時刻列 $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $\llbracket S_n\rrbracket\cap\llbracket S_m\rrbracket$ $(n\ne m)$ かつ

$$\sum_{0<s\le\cdot}\Delta A_s=\sum_{n\in\mathbb{N}}\Delta A_{S_n}1_{\llbracket S_n<+\infty\llbracket} \tag{1.44}$$

を満たすものが存在する．

---

*11 S^r は定数停止時刻 r の $\mathscr{F}_r$-可測集合 $\{\omega\mid X_{r-}(\omega)<a\}$ への制限なので，停止時刻である．T^r は可予測集合 $\rrbracket S^r,+\infty\llbracket\cap X_-^{-1}([a,;\infty[)$ へのデビューなので，停止時刻である．

*12 ∂A は集合 A の境界．

*13 $\partial\{t:X_{t-}(\omega)\ge a\}\subset\{t:t\mapsto X_{t-}(\omega)$ の不連続点．$\}$ が成り立つ．

この補題の証明は省略する．He, Wang, & Yan [14] などを参照せよ．

補題 20. 局所時間 $L^a(X)$ に対して，以下の条件を満たす関数 $\widetilde{L}:\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が存在する：

(i) $\widetilde{L}$ は $\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測．

(ii) 任意の $a\in\mathbb{R}$ に対して，確率過程 $(\omega,t)\mapsto\widetilde{L}(\omega,t,a)$ と L^a は区別不能．

証明．まずは l_t^a の可測性を考察する．補題 19 で存在の保証される停止時刻の列 (S_n) により l_t^a は

$$l_t^a(X)=2\sum_{n\in\mathbb{N}}\left[1_{\{X_{S_n-}>a\}}(X_{S_n}-a)^-+1_{\{X_{S_n-}\le a\}}(X_{S_n}-a)^+\right] \tag{1.45}$$

と表現される．和の各項は明らかに $\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 可測なので，その可算和も同様の可測性を持つ．

ここで $H(\omega,t,a)=1_{\{X_t>a\}}(a,\omega,t)$ と定義し，命題 50 によって存在の保証される $(H(a)\bullet X)_{a\in\mathbb{R}}$ の可測なバージョンを $H\bullet X$ と表すことにする．$\widetilde{L}$ を

$$\widetilde{L}(a,\omega,t)=2(X_t-a)^+-2(X_0-a)^+-2(H\bullet X)(a,\omega,t)-l_t^a \tag{1.46}$$

と定義すればこれは $\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 可測であり，$\widetilde{L}(a,\cdot,\cdot)$ は L^a と区別不能である． □

これ以降，局所時間 $L_t^a(X)$ は補題 20 の意味での可測なバージョンを表すことにする．局所時間を用いることで，凸関数に関する伊藤の公式での増加過程部分の積分表示を得ることが出来る．

定理 21 (Meyer-Itô formula)．f を凸関数とすれば，

$$f(X)-f(X_0)=\int_0^t f'_-(X_{s-})dX_s+\sum_{0<s\le t}\left[\Delta f(X_s)-f'_-(X_{s-})\Delta X_s\right]+\int_{\mathbb{R}}L_t^a(X)f''(da) \tag{1.47}$$

が成立．ただし，f'' は非負 Radon 測度で f の超関数の意味での 2 階微分である．

証明．f が凸関数の時に示せば十分である．

Step 1. f'' がコンパクト台を持つ場合．命題 47 より

$$f(x)=\alpha x+\beta+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|x-a|f''(da) \tag{1.48}$$

として示せばよいことが分かる．田中の公式により，

$$\begin{aligned}
f(X_t)&=\alpha X_t+\beta+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|X_t-a|f''(da)\\
&=\alpha X_t+\beta+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left(|X_0-a|+\int_0^t\operatorname{sgn}(X_{s-}-a)dX_s+\mathscr{L}_t^a\right)f''(da)\\
&=f(X_0)+\alpha(X_t-X_0)+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^t\operatorname{sgn}(X_{s-}-a)dX_s\right)f''(da)\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}L_t^af''(da)+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}l_t^af''(da)
\end{aligned} \tag{1.49}$$

が成立する．確率積分に関する Fubini の定理より

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^t\operatorname{sgn}(X_{s-}-a)dX_s\right)f''(da)\\
&=\int_0^t\left(\int_{\mathbb{R}}\operatorname{sgn}(X_{s-}-a)f''(da)\right)dX_s
\end{aligned} \tag{1.50}$$

が成り立つから，さらに命題 47 を用いることにより

$$
\begin{aligned}
&\alpha(X_t - X_0) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a)dX_s\right) f''(da)\\
&= \int_0^t \left(\alpha + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(X_{s-} - a) f''(da)\right) dX_s\\
&= \int_0^t f'_-(X_{s-})dX_s
\end{aligned}
\tag{1.51}
$$

が示される．また，単調収束定理と命題 47 により

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} l_t^a f''(da)\\
&= \sum_{0<s\le t}\int_{\mathbb{R}}\{|X_s - a| - |X_{s-} - a| - \operatorname{sgn}(X_{s-} - a)\Delta X_s\} f''(da)\\
&= \sum_{0<s\le t}\left[\int_{\mathbb{R}}|X_s - a| f''(da) - \int_{\mathbb{R}}|X_{s-} - a| f''(da) - \Delta X_s \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(X_{s-} - a) f''(da)\right]\\
&= \sum_{0<s\le t}\left[f(X_s) - \alpha X_s - \beta - f(X_{s-}) + \alpha X_{s-} + \beta - \Delta X_s (f'_-(X_{s-}) - \alpha)\right]\\
&= \sum_{0<s\le t}\left[\Delta f(X_s) + f'_-(X_{s-})\Delta X_s\right]
\end{aligned}
\tag{1.52}
$$

が導かれる．これより

$$
f(X) - f(X_0) = \int_0^t f'_-(X_{s-})dX_s + \sum_{0<s\le t}\left[\Delta f(X_s) - f'_-(X_{s-})\Delta X_s\right] + \int_{\mathbb{R}} L_t^a(X) f''(da) \tag{1.53}
$$

が分かる．

Step 2：**一般の場合．** $X_0 = 0$ の場合に示せばよい．

$$
f_n(x) = \begin{cases} f(-n) + f'(-n)(x+n) & x \le -n \\ f(x) & -n < x < n \\ f(n) + f'(n)(x-n) \end{cases}
$$

とおけば，$\operatorname{supp} f''_n \subset [-n, n]$ であるから，step 1 より X と f_n に対しては Meyer-Itô formula が成立する．

$$
T_n = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid |X_t| \ge n\} \tag{1.54}
$$

とすれば (T_n) は停止時刻列を定め，$[\![0, T_n[\![$ 上で $|X| < n$ かつ $X^{T_n} = X$ である．$[-n, n]$ 上で $f_n = f$ であることに注意すれば，$[\![0, T_n[\![$ 上では

$$
\begin{aligned}
&f_n(X^{T_n}) - f_n(X_0^{T_n}) - \int_0^t (f_n)'_-(X_{s-}^{T_n})dX_s^{T_n} + \sum_{0<s\le t}\left[\Delta f(X_s^{T_n}) - f'_-(X_{s-}^{T_n})\Delta X_s\right]\\
&= f(X) - f(X_0) - \int_0^t f'_-(X_{s-})dX_s + \sum_{0<s\le t}\left[\Delta f(X_s) - f'_-(X_{s-})\Delta X_s\right]
\end{aligned}
\tag{1.55}
$$

が成立．補題 18 より $\operatorname{supp} dL^a(X^{T_n}) \subset \{X_-^{T_n} = a\}$ だったから，$|a| \ge n$ なるときは

$$
\operatorname{supp} dL^a(X^{T_n}) \subset \{X_-^{T_n} = a\} \subset \emptyset \tag{1.56}
$$

が成立．$L_0^a=0$ に注意すれば $L_t^a(X^{T_n})=0$ on $[0,+\infty[\times\{|a|\geq n\}$ である．$\operatorname{supp}(f_n)''\subset[-n,n]$ だから，

$$\int_{\mathbb{R}} L_t^a(X^{T_n})(f_n)''(da)=\int_{[-n,n]} L_t^a(X^{T_n})(f_n)''(da)=\int_{[-n,n]} L_t^a(X^{T_n})f''(da)=\int_{\mathbb{R}} L_t^a(X^{T_n})f''(da) \tag{1.57}$$

が成り立つ．これより，$[\![0,T_n[\![$ 上では

$$\int_{\mathbb{R}} L_t^a(X^{T_n})(f_n)''(da)=\int_{\mathbb{R}} L_t^a(X)f''(da) \tag{1.58}$$

が成立．$\Omega\times\mathbb{R}_+=\bigcup_n[\![0,T_n]\!]$ より結論が従う． □

系 22 (滞在時間公式 (occupation times formula))**.** P-零集合 N で，$\Omega\setminus N$ 上次の条件が成り立つようなものが存在する：任意の有界（または非負）Borel 関数 Φ と任意の t に対して

$$\int_0^t \Phi(X_s)d\langle X^c,X^c\rangle_s=\int_0^t \Phi(X_{s-})d\langle X^c,X^c\rangle_s=\int_{\mathbb{R}}\Phi(a)L_t^a(X)da \tag{1.59}$$

証明. まずは，Φ を有界連続関数として示す．Φ^+ と Φ^- を 2 階微分にもつ凸関数をそれぞれ f_1, f_2 とおけば，$f=f_1-f_2$ に対して伊藤の公式と Meyer-Itô を用いれば，

$$f(X_t)=f(X_0)+\int_0^t f'(X_{s-})dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t f''(X_{s-})d\langle X^c,X^c\rangle_s+\sum_{0<s\leq t}\left[\Delta f(X_s)-f'_-(X_{s-})\Delta X_s\right]$$

$$f(X_t)-f(X_0)=\int_0^t f'_-(X_{s-})dX_s+\sum_{0<s\leq t}\left[\Delta f(X_s)-f'_-(X_{s-})\Delta X_s\right]+\int_{\mathbb{R}}L_t^a(X)f''(da) \tag{1.60}$$

が成り立つ．よって $\int_0^t f''(X_{s-})d\langle X^c,X^c\rangle_s$ と $\int L_t^a f''(da)$ は区別不能である．すなわち，ある P-零集合 Γ_Φ が存在して，$\Omega\setminus\Gamma_\Phi$ 上で

$$\int_0^t \Phi(X_s)d\langle X^c,X^c\rangle_s=\int_0^t \Phi(X_{s-})d\langle X^c,X^c\rangle_s=\int_{\mathbb{R}}L_t^a(X)\Phi(a)da,\quad \forall t\in\mathbb{R}_+ \tag{1.61}$$

が成立する．

$C_c(\mathbb{R})$ の可算稠密部分集合 D を考える．このとき，系の主張において，$N=\bigcup_{\Psi\in D}\Gamma_\Psi$ とすればよいことを示そう．$\Phi\in C_c(\mathbb{R})$ とすれば，D の列 (Φ_n) で Φ を（一様収束位相で）近似するものが存在する．$\bigcup_{\Psi\in D}\Gamma_\Psi$ の補集合上では，任意の n と任意の t に対して

$$\int_0^t \Phi_n(X_s)d\langle X^c,X^c\rangle_s=\int_{\mathbb{R}}L_t^a(X)\Phi_n(a)da \tag{1.62}$$

が成立する．$n\to\infty$ とすれば[*14]，

$$\int_0^t \Phi(X_s)d\langle X^c,X^c\rangle_s=\int_{\mathbb{R}}L_t^a(X)\Phi(a)da \tag{1.63}$$

である．Φ が任意の有界 Borel 関数の場合は，単調族定理により示される．非負の場合は，$(\Phi\wedge n)_{n\in\mathbb{N}}$ の単調極限を考えればよい． □

[*14] Φ_n は Φ に一様収束することに注意せよ．

系 23. 任意のセミマルチンゲールに対して

$$\langle X^c, X^c\rangle_t = \int_{\mathbb{R}} L_t^a(X)da \tag{1.64}$$

局所時間 $L^a(X)$ は各 a に対して連続適合過程だが，a を動かしたときに連続性云々のよい性質があるかは分からない．しかし，$L^a(X)$ のバージョンとしてはそのような良いものが取れることが知られている．連続なバージョンの存在を調べるためには，次の評価が有用である．

命題 24 (Yor[43])**.** $X \in \mathscr{S}_p$ とすれば，任意の $k \in [1, +\infty[$ に対してある $0 < C_k < +\infty$ が存在して

$$\|1_{\{a<X_-\le b\}} \bullet X^c\|_{\mathscr{H}^{2k}}^{2k} \le C_k(b-a)^k \|X\|_{\mathscr{H}^k}^k \tag{1.65}$$

証明. t と有界区間 I を任意に固定して，$a < b$ および $k \ge 1$ とすれば，

$$\begin{aligned}
&E\left[\left(\int_0^t 1_{]a,b]}(X_{s-})d\langle X^c, X^c\rangle_s\right)^k\right] \\
&= E\left[\left(\int_{\mathbb{R}} 1_{]a,b]}(x)L_t^x(X)dx\right)^k\right] \quad (\because \text{occupation time formula}) \\
&= (b-a)^k E\left[\left(\int_{]a,b]} L_t^x(X)\frac{dx}{b-a}\right)^k\right] \\
&\le (b-a)^k E\left[\int_{]a,b]} (L_t^x(X))^k \frac{dx}{b-a}\right] \quad \left(\because \text{Jensen for the probability measure } \frac{dx}{b-a}\right) \\
&= (b-a)^k \frac{1}{b-a}\int_{]a,b]} E\left[(L_t^x(X))^k\right]dx \quad (\because \text{Fubini}) \\
&\le (b-a)^k \sup_{x\in I} E\left[(L_t^x(X))^k\right] \\
&\le (b-a)^k \sup_{x\in I} E\left[(\mathscr{L}_t^x(X))^k\right]
\end{aligned} \tag{1.66}$$

が成立する．ここで

$$|(X_t - x)^+ - (X_0 - x)^+| \le |X_t - X_0| \tag{1.67}$$

とおいて $X = X_0 + M + V$ を special semimartingale の標準分解とすれば，

$$\begin{aligned}
(\mathscr{L}_t^x(X))^k &= 2^k \left|(X_t - x)^+ - (X_0 - x)^+ - \int_0^t 1_{]x,\infty[}(X_{s-})dM_s - \int_0^t 1_{]x,\infty[}(X_{s-})dV_s\right|^k \\
&\le 2^k \left(|X_t - X_0| + \int_0^t |dV|_s + \left|\int_0^t 1_{]x,\infty[}(X_{s-})dM_s\right|\right)^k \\
&\le 2^k 3^{k-1}\left[|X_t - X_0|^k + \left(\int_0^t |dV|_s\right)^k + \left|\int_0^t 1_{]x,\infty[}(X_{s-})dM_s\right|^k\right]
\end{aligned} \tag{1.68}$$

が成立するから[*15]，

$$
\begin{aligned}
&E\left[(\mathscr{L}_t^x)^k\right] \\
&\leq 2^k 3^{k-1} E\left[|X_t - X_0|^k + \left(\int_0^t |dV|_s\right)^k + \left|\int_0^t 1_{]x,\infty[}(X_{s-}) dM_s\right|^k\right] \\
&\leq 2^k 3^{k-1} E\left[|X_t - X_0|^k + \left(\int_0^t |dV|_s\right)^k + C_k \left(\int_0^t 1_{]x,\infty[}(X_{s-}) d[M,M]_s\right)^{k/2}\right] \quad (\because \text{BDG}) \\
&\leq 2^k 3^{k-1} E\left[|X_t - X_0|^k + \left(\int_0^t |dV|_s\right)^k + C_k [M,M]_t^{k/2}\right]
\end{aligned} \tag{1.69}
$$

となる．さらに，

$$
\begin{aligned}
E\left[|X_t - X_0|^k\right] &= E\left[|V_t + M_t|^k\right] \\
&\leq 2^{k-1} E\left[|V_t|^k + |M_t|^k\right] \\
&\leq 2^{k-1} E\left[\left(\int_0^t |dV|_s\right)^k + C_k [M,M]_t^{k/2}\right]
\end{aligned} \tag{1.70}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
&E\left[(\mathscr{L}_t^x)^k\right] \\
&\leq 2^k 3^{k-1} (2^{k-1}+1) E\left[\left(\int_0^t |dV|_s\right)^k + C_k [M,M]_t^{k/2}\right] \\
&\leq 2^k 3^{k-1} (2^{k-1}+1)(1+C_k) E\left[\left(\int_0^t |dV|_s\right)^k + [M,M]_t^{k/2}\right] \\
&\leq 2^k 3^{k-1} (2^{k-1}+1)(1+C_k) \|X\|_{\mathscr{H}^k}^k
\end{aligned} \tag{1.71}
$$

ここで，最後の辺はもはや x および t によらない量であることに注目しよう．以上をまとめれば，任意の t に対して

$$
E\left[\left(\int_0^t 1_{]a,b]}(X_s) d\langle X^c, X^c\rangle_s\right)^k\right] \leq C_{2k} 2^k 3^{k-1} (2^{k-1}+1)(1+C_k)(b-a)^k \|X\|_{\mathscr{H}^k}^k \tag{1.72}
$$

という評価が成立つ．$\widetilde{C}_k := 2^k 3^{k-1}(2^{k-1}+1)(1+C_k)$ と新たにおいて $t \to \infty$ とすれば，

$$
\|1_{\{a < X_{s-} \leq b\}} \bullet X^c\|_{\mathscr{H}^{2k}}^{2k} \leq \widetilde{C}_k (b-a)^k \|X\|_{\mathscr{H}^k}^k \tag{1.73}
$$

を得る． □

セミマルチンゲール X のほとんど全てのパスが任意の $t \in \mathbb{R}_+$ に対して

$$
\sum_{0<s\leq t} |\Delta X_s|(\omega) < +\infty \tag{1.74}
$$

[*15] 一種の凸不等式で，Jensen の不等式から導かれる．

を満たすとき，「X は仮定 (A) を満たす」(hypothesis (A)) ということにする[*16]．

ここで，セミマルチンゲール X に対して，形式的に

$$J(X)_t = \sum_{0<s\le t} \Delta X_s, \quad K(X)_t = \sum_{0<s\le t} |\Delta X_s| \tag{1.76}$$

と書くことにする．$K(X)$ は $+\infty$ を含めれば必ず存在するが，$J(X)$ の収束は一般には分からない．仮定 (A) を満たすというのは言うまでもなく $K(X)$ が a.s. で有限値を取る増加過程ということであり，その時 $J(X)$ のパスは局所有限変動となる．セミマルチンゲール X が仮定 (A) を満たすとき $X - J(X)$ は連続セミマルチンゲールであるから，一意的な分解 $X - J(X) = M + V$ を持つ．

定理 25 (Yor [43])．X は仮定 (A) を満たすセミマルチンゲールとする．

(i) $L^a_t(X)$ のバージョンとして，確率 1 で a について *càdlàg*，t について連続なるものが取れる．

(ii) $\mathscr{L}^a_t(X)$ のバージョンとして，確率 1 で a と t それぞれについて *càdlàg* なものが取れる．

(iii) a に関するジャンプは次のように表現される：P-a.s. で任意の (a, t) に対して

$$\mathscr{L}^a_t(X) - \mathscr{L}^{a-}_t(X) = 2\left[\int_0^t 1_{\{X_{s-}=a\}} dV_s + \sum_{0<s\le t} (\Delta X_s) 1_{\{X_{s-}=a\}}\right] \tag{1.77}$$

$$\begin{aligned} L^a_t(X) - L^{a-}_t(X) &= 2\left[\int_0^t 1_{\{X_{s-}=a\}} dV_s\right] \\ &= 2\left[\int_0^t 1_{\{X_s=a\}} dV_s\right] \\ &= 2\left[\int_0^t 1_{\{X_{s-}=a\}} dX_s - \sum_{0<s\le t} \Delta X_s 1_{\{X_{s-}=a\}}\right] \end{aligned} \tag{1.78}$$

証明．*Step 1.* X は条件 (A) を満たすとしているから，連続セミマルチンゲール $Y := X - J(X)$ は一意的な分解

$$Y = Y_0 + M + V = Y_0 + Y^c + V = X_0 + X^c + V \tag{1.79}$$

をもつ．任意の t に対して $K(A)_t(\omega) < +\infty$ が成り立つような集合の補集合を $N_{K(X)}$ とする．三角不等式より $|\Delta|X_s - a|| \le |\Delta X_s|$ が成り立つことに注意すれば，仮定 (A) より和

$$\sum_{0<s\le t} \Delta|X_s - a| \tag{1.80}$$

は $a.s.$ で絶対収束する．簡単な計算によって

$$\begin{aligned} \Delta l^a_s(X) &= \Delta|X_s - a| - (1_{]a,+\infty]}(X_{s-}) - 1_{]-\infty,a]}(X_{s-}))\Delta X_s \\ &= \Delta|X_s - a| + \Delta X_s - 2\Delta\widehat{J(X)}_s \end{aligned} \tag{1.81}$$

[*16] (1.74) となる ω の集合は t について単調減少なので，仮定 (A) は「任意の $t > 0$ に対して P-a.s. に (1.74) を満たす」としても同値である．実際，$\sum_{0<s\le n}|\Delta X_s| < +\infty$ に対応する零集合を N_n として，$N = \bigcup_n N_n$ と定める．$\omega \in N$ とすれば，任意の $t \in \mathbb{R}_+$ に対して $t \le {}^\exists n \in \mathbb{N}$ となるので，

$$\sum_{0<s\le t} |\Delta X_s(\omega)| \le \sum_{0<s\le n} |\Delta X_s(\omega)| < +\infty \tag{1.75}$$

が成り立つ．

となることが分かる．局所時間の定義を思い出せば，

$$
\begin{aligned}
L_t^a(X) &= 2(X_t-a)^+ - 2(X_0-a)^+ - 2\widehat{M}(a,t) \\
&\quad - 2\widehat{V}(a,t) - 2\widehat{J(X)}(a,t) - l_t^a(X) \\
&= 2(X_t-a)^+ - 2(X_0-a)^+ - 2\widehat{M}(a,t) \\
&\quad - 2\widehat{V}(a,t) - \sum_{0<s\le t} \Delta|X_s-a| + J(X)_t
\end{aligned} \tag{1.82}
$$

が成立する．これより，右辺各項の regularity を調べれば良いことが分かるが，通常の積分論の収束定理を用いることで $(X_t-a)^+, (X_0-a)^+, J(X), \sum \Delta|X_s-a|$ は a について連続，$\widehat{V}(a,t)$ は a について *càdlàg* であることが分かる．（この部分は pathwise [*17]に成り立つ．）

Step 2. まずは $\widehat{X^c}(a,t)$ について連続な修正の存在を証明する．証明には Kolmogorov の連続変形定理を用いる．確率過程 $I \ni a \mapsto \widehat{X^c}(a,\cdot) \in C([0,t];\mathbb{R})$ の連続修正を取れることを示せば十分である[*18]．

命題 25 における評価を用いれば[*19]，

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left\|\widehat{X^c}(a,\cdot) - \widehat{X^c}(b,\cdot)\right\|_{C[0,t]}^{2k}\right] \\
&= E\left[\sup_{s\in[0,t]}\left|\widehat{X^c}(a,s) - \widehat{X^c}(b,s)\right|^{2k}\right] \\
&= E\left[\sup_{s\in[0,t]}\left|\int_0^s 1_{]a,b]}(X_{u-})dX_u^c\right|^{2k}\right] \\
&\le C_{2k}E\left[\left(\int_0^t 1_{]a,b]}(X_{s-})d\langle X^c,X^c\rangle_s\right)^k\right] \quad (\because \text{BDG-inequality}) \\
&\le C_{2k}\widetilde{C}_k(b-a)^k E\left[\left(\int_0^t |d(V+J)|_s\right)^k + \langle X^c,X^c\rangle_t^{k/2}\right]
\end{aligned} \tag{1.83}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
A_t &= \left(\int_0^t |d(V+J)|_s\right)^k + \langle X^c,X^c\rangle_t^{k/2} \\
T_n &= \inf\left\{t\in\mathbb{R}_+ \;\middle|\; A_{t-}\ge n\right\}
\end{aligned} \tag{1.84}
$$

とおけば，T_n は可予測時刻であり，

$$
\widetilde{C}(t,k,n) := C_{2k}\widetilde{C}_k E[A^{T_n-}] < +\infty \tag{1.85}
$$

が成り立つ．このとき $M^{T_n-}+V^{T_n-}$ は連続セミマルチンゲール $X^{T_n-}-J(X)^{T_n-}$ の標準分解となるから，ここまでの議論により

$$
E\left[\left\|\widehat{M}^{T_n-}(a,\cdot) - \widehat{M}^{T_n-}(b,\cdot)\right\|_{C[0,t]}^{2k}\right] \le \widetilde{C}(t,k,n)|b-a|^k \tag{1.86}
$$

[*17] より正確には，仮定 (A) における除外集合上でかな？

[*18] 一般に連続関数 $g: I \to C([0,t];\mathbb{R})$ が与えられたとき，関数 $I\times[0,t] \ni (a,s) \mapsto g(x)(s) \in \mathbb{R}$ は連続になることに注意されたい．

[*19] 命題 25 では special semimartingale に対して評価を出したが，明らかに同様の評価は任意のセミマルチンゲール分解に対して成立する．ただ，$\mathscr{H}^k$-ノルムの値は分解に依存するので，special semimartingale に対して論じたのだろう．

が成立する．よって Kolmogorov の連続変形定理により $a \mapsto \widehat{M}^{T_n-}(a,\cdot)$ は I 上連続修正を持つ．これより $M(a,\cdot)$ もまた連続修正を持つ．なお，ここで得られる連続修正は結局のところ $C[0,\infty[$-値確率過程としての修正になっているので，任意の a について，$\Omega\times\mathbb{R}_+$ 上の確率過程としては区別不能であることに注意されたい．

Step 3. 以上のことから，$(L_t^a(X))_{(a,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}$ は a について *càdlàg*，t について連続な修正（$\widetilde{L}$ で表す）を持つことが分かった．今，$\widehat{M}'(a,t)$ を $\widehat{M}$ の bicontinuous な修正とする．このとき，任意の (a,t) について P-a.s. で

$$\begin{aligned}\widetilde{L}_t^a(X) &= 2(X_t-a)^+ - 2(X_0-a)^+ - 2\widehat{M}'(a,t)\\ &\quad - 2\widehat{V}(a,t) - \sum_{0<s\le t}\Delta|X_s-a| + J(X)_t \end{aligned} \tag{1.87}$$

が成立．さらに，パスの regularity を用いれば，P-a.s. で任意の (a,t) に対して (1.87) が成立することが分かる．N を零集合で，$\Omega\backslash N$ 上では任意の (a,t) で (1.87) が成り立つようなものとしよう．$\omega\in\Omega\backslash(N_{K(X)}\cup N)$ をとる．このとき，$t\in\mathbb{R}_+$ を固定して a について極限操作を行えば，（$\widehat{V}$ 以外の項は a について連続性を持つので）優収束定理により

$$\widetilde{L}(\omega,t,a)-\widetilde{L}(\omega,t,a-) = 2\left(\widehat{V}(\omega,t,a-)-\widehat{V}(\omega,t,a)\right) = 2\int_0^t 1_{\{X_{s-}=a\}}(\omega)dV_s(\omega), \quad \forall(t,a)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R} \tag{1.88}$$

が成立する．また $\{s\in[0,t]\mid X_{s-}(\omega)=a\}\triangle\{s\in[0,t]\mid X_s(\omega)=a\}$ は可算集合であり，V は連続だから

$$2\int_0^t 1_{\{X_{s-}=a\}}(\omega)dV_s(\omega) = 2\int_0^t 1_{\{X_s=a\}}(\omega)dV_s(\omega). \tag{1.89}$$

さらに滞在時間公式における零集合を N' とおけば[*20]，$\Omega\setminus N'$ 上で任意の (a,t) に対して

$$\int_0^t 1_{\{X_{s-}=a\}}(\omega)d\langle M,M\rangle_s(\omega) = \int_0^t 1_{\{X_{s-}=a\}}(\omega)d\langle X^c,X^c\rangle_s(\omega) = \int_{\mathbb{R}} 1_{\{a\}}L_t^a(X)(\omega)da = 0 \tag{1.90}$$

となるから，

$$E\left[\int_0^t 1_{\{X_{s-}=a\}}d\langle M,M\rangle_s\right] = E\left[\left(\int_0^t 1_{\{X_{s-}=a\}}dM_s\right)^2\right] = 0 \tag{1.91}$$

すなわち，ある零集合 N'' が存在して $\Omega\setminus N''$ 上で，任意の (a,t) に対して

$$(1_{\{X_{s-}=a\}}\bullet M)(\omega,t)=0 \tag{1.92}$$

これにより，$\Omega\setminus(N_{K(X)}\cup N\cup N'')$ 上では，任意の (a,t) に対して

$$\begin{aligned}\widetilde{L}(a,t)-\widetilde{L}(a-,t) &= 2\int_0^t 1_{\{X_{s-}=a\}}dV_s\\ &= 2\left[\int_0^t 1_{\{X_{s-}=a\}}dX_s - \sum_{0<s\le t}1_{\{X_{s-}=a\}}\Delta X_s\right]\end{aligned} \tag{1.93}$$

が示される． □

*20 命題 22 を参照．

注意 26. 命題 25 に於ける局所時間のバージョン $\widetilde{L}$ についても，系 22 は成り立つ．実際バージョンの取り方より任意の a に対して L^a と $\widetilde{L}(\cdot,\cdot,a)$ は区別不能だから，補題 48 により，任意の非負（または有界）Borel-関数について

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(a)L_t^a(\omega)da = \int_{\mathbb{R}} \Phi(a)\widetilde{L}_t^a(\omega)da \tag{1.94}$$

が区別不能の意味で成立する．Φ について共通の零集合が取れることは，系 22 の証明と同様である．

命題 25 の仮定が満たされるときは，局所時間 $(L_t^a(X))$ は常にこれらのバージョンを取ったものを考えることにする．

系 27. X はセミマルチンゲールで仮定 (A) を満たすものとする．このとき，P-a.s. で任意の t と任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\downarrow\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t 1_{[a,a+\varepsilon]}(X_s)d\langle X^c, X^c\rangle_s = L_t^a. \tag{1.95}$$

証明. 局所時間の結合可測なるバージョンを L，*càdlàg* パスを持つバージョンを $\widetilde{L}$ で表すことにする．Occupation time formula が成立し，かつ $\widetilde{L}$ が a と t それぞれについて *càdlàg* となるような零集合を N とする．Occupation time formula より $\Omega \setminus N$ 上では任意の (a,t) に対して

$$\int_0^t 1_{[a,a+\varepsilon]}(X_s)d\langle X^c, X^c\rangle_s(\omega) = \int_{[a,a+\varepsilon[} L_t^x(X)(\omega)dx \tag{1.96}$$

が成立する Lebesgue 積分の一般論より

$$\lim_{\varepsilon\downarrow\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t 1_{[a,a+\varepsilon]}(X_s)d\langle X^c, X^c\rangle_s(\omega) = \lim_{\varepsilon\downarrow\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}\int_{[a,a+\varepsilon[} \widetilde{L}_t^x(X)(\omega)dx = \widetilde{L}_t^a(\omega) \tag{1.97}$$

が Lebesgue 測度で殆ど至る所成立する．$\widetilde{L}(X)$ が a について *càdlàg* なことを用いれば，すべての a で成立することも容易に示される． □

2 Upcrossings of A Semi-martingale

2.1 A stopping time representation

これ以降も通常の条件を満たすフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, P)$ を固定して議論を進める．

セミマルチンゲールの上向き横断数を定義しよう．$I = [a,b]$ $(a < b)$ を有界なる閉区間とする．次のような停止時刻の族を考える：

$$\begin{aligned}
S_1^a(X;s) &= \inf\{t > s \mid X_t \le a\} \\
&= \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid (\omega,t) \in X^{-1}(\,]-\infty,a])\cap]\!]s,+\infty]\!]\} \\
T_n^b(X;s) &= \inf\{t > S_n^a(X;s) \mid X_t \ge b\} \\
&= \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid (\omega,t) \in X^{-1}([b,+\infty[\,)\cap]\!]S_n^a(X;s),+\infty]\!]\}, \quad n \ge 1 \\
S_n^a(X;s) &= \inf\{t > T_{n-1}^a(X;s) \mid X_t \le a\} \\
&= \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid (\omega,t) \in X^{-1}(\,]-\infty,a])\cap]\!]T_{n-1}^a(X;s),+\infty]\!]\}, \quad n \ge 2
\end{aligned} \tag{2.1}$$

これらが実際に停止時刻であることは数学的帰納法によって確かめられる：$n=1$ のとき．$S_1^a(X;s)$ は良可測（よって発展的）集合 $X^{-1}(]-\infty,a])\cap]\!]s,+\infty]\!]$ へのデビューなので停止時刻である．$S_1^a(X;s)$ は停止時刻だから確率区間 $]\!]S_n^a(X;s),+\infty]\!]$ は良可測集合となり，良可測集合 $X^{-1}([b,+\infty[)\cap]\!]S_n^a(X;s),+\infty]\!]$ へのデビューである所の $T_1^b(X;s)$ も停止時刻である．
$S_n^a(X;s), T_n^b(X;s)$ が停止時刻であると仮定する．このとき $S_{n+1}^a(X;s)$ は良可測集合 $X^{-1}(]-\infty,a])\cap]\!]T_n^a(X;s),+\infty]\!]$ へのデビューなので停止時刻である．$S_{n+1}^a(X;s)$ は停止時刻であることが分かったので，$X^{-1}([b,+\infty[)\cap]\!]S_{n+1}^a(X;s),+\infty]\!]$ は良可測となり，そのデビュー $T_n^b(X;s)$ も停止時刻である．

特に $s=0$ の時は $S_n^a(X):=S_n^a(X;0)$, $T_n^b(X):=T_n^b(X;0)$ と表記することにする． 誤解の恐れのないときには X や添え字の a,b などは省略することもある．定義より明らかに

$$s\le S_1^a(X;s)<T_1^b(X;s)<S_2^a(X;s)<T_2^b(X;s)<\cdots \tag{2.2}$$

が成り立つ．

これらの停止時刻を用いて，

$$\begin{aligned}N^+(X,s,t;I)&=\sum_{n\ge 1}1_{\{T_n^b(X;s)\le t\}}\\ N^-(X,s,t;I)&=1_{\{X_s>b\}}+\sum_{n\ge 2}1_{\{S_n^a(X;s)\le t\}}\\ N(X,s,t;I)&=N^+(X;s,t;I)+N^-(X;s,t;a,b)\end{aligned} \tag{2.3}$$

と定義する [*21]．$N^+(X,s,t;I)$（resp. $N^-(X,s,t;I)$, $N(X,s,t;I)$）は区間 $I=[a,b]$ の，X による時刻 s から t における上向き横断数 (upcrossing number)（resp. 下向き横断数（downcrossing number)，総横断数）と呼ばれる．

定義より直ちに，各 $N^+(X,s,t;I)$（resp. $N^-(X,s,t;I)$, $N(X,s,t;I)$）は確率変数となることが分かる．さらに，例えば $(\omega,t)\mapsto N^+(X,0,t,I)(\omega)$ は $\sum_n 1_{[\![T_n^b(X;s),+\infty]\!]}$ に等しいから良可測過程になる．N^+ および N^- の定義より $|N^+(X,s,t;I)-N^-(X,s,t;I)|\le 1$ である．

$I=[a,b]$ のとき $N^+(X,s,t;I)$ を $N^+(X,s,t,a,b)$ とも書く．

$$\begin{aligned}U(X;I)&=\bigsqcup_{n\ge 1}]\!]S_n^a(X),T_n^b(X)]\!]\\ U^o(X;I)&=\bigsqcup_{n\ge 1}[\![S_n^a(X),T_n^b(X)[\![\\ D(X;I)&=\Omega\times\mathbb{R}_+\setminus U(X;I)=[\![0,S_1]\!]\sqcup\left(\bigsqcup_{n\ge 1}]\!]T_n^b(X),S_{n+1}^a(X)]\!]\right)\\ D^o(X;I)&=\Omega\times\mathbb{R}_+\setminus U^o(X;I)=[\![0,S_1[\![\sqcup\left(\bigsqcup_{n\ge 1}[\![T_n^b(X),S_{n+1}^a(X)[\![\right)\end{aligned} \tag{2.5}$$

とすれば $U(X;I),D(X;I)$ は可予測集合であり，$U^o(X;I),D^o(X;I)$ は良可測集合である．(Lemieux の論

[*21] 直感的には

$$N^-(s,t,a,b)=1_{\{S_1\le t\}\cap\{X_s>b\}}+\sum_{n\ge 2}1_{\{S_n\le t\}} \tag{2.4}$$

などと定義した方が良さそうな気もするが...

文とは $+, -$ を逆にしている点に注意されたい.）これらの集合の定義より

$$]\!]S_1^a(X), +\infty[\![\cap \{X_- < a\} \subset U(X;I) \subset]\!]S_1^a(X), +\infty[\![\cap \{X_- \leq b\} \tag{2.6}$$
$$[\![S_1^a(X), +\infty[\![\cap \{X_- \leq a\} \subset U^o(X;I) \subset [\![S_1^a(X), +\infty[\![\cap \{X_- < b\} \tag{2.7}$$

が成り立つことに注意しておく.

命題 28 (El Karoui [10]). X をセミマルチンゲールとし，$I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ とする．このとき，X による上向き横断数について以下の表現が成立つ：

$$\begin{aligned}(b-a)N^+(0,t;I) = &-(X_0 - a)^+ + (X_t - a)1_{D^o(I)}(\cdot, t) \\ &- \int_0^t 1_{D(X;I)}(\cdot, s)1_{\{X_- > a\}}(\cdot, s)dX_s \\ &- \sum_{0<s\leq t} 1_{D^o(X;I)}(\cdot, s)1_{\{X_{s-}=a<X_s\}}(X_s - a) \\ &- \sum_{n\geq 1}(X_{T_n} - b)1_{\{a<X_{T_n-}\leq b\leq X_{T_n}\}}1_{\{T_n\leq t\}} \\ &- \sum_{n\geq 1}(X_{T_n} - a)1_{\{X_{T_n-}<a<b\leq X_{T_n}\}}1_{\{T_n\leq t\}} \\ &- \sum_{n\geq 1}(a - X_{S_n})1_{\{X_{S_n}<a<X_{S_n-}\}}1_{\{S_n\leq t\}} \\ &+ (b-a)\sum_{n\geq 1}1_{\{X_{T_n-}\leq a<b\leq X_{T_n}\}}1_{\{T_n\leq t\}}\end{aligned} \tag{2.8}$$

証明. *Step 1.* 停止時刻 S_n と T_n の定義より，任意の $n \geq 2$ に対して $X_{S_n} \leq a \leq X_{S_n-}$ であり[*22]，$n \geq 1$ に対しては $X_{T_n-} \leq b \leq X_{T_n}$ が成り立つことに注意しておく．定義より任意の n に対し

$$\begin{aligned}(b-a)1_{\{T_n\leq t\}} = &(X_{T_n\wedge t} - X_{S_n\wedge t}) - (X_t - a)1_{\{S_n\leq t<T_n\}} \\ &- (X_{T_n} - b)1_{\{X_{T_n-}\leq b<X_{T_n}\}}1_{\{T_n\leq t\}} - (a - X_{S_n})1_{\{S_n\leq t\}}\end{aligned} \tag{2.9}$$

が成立する.

実際，$t < S_n \leq T_n$ なら (2.9) 右辺は
$$X_t - X_t - 0 - 0 - 0 = 0, \tag{2.10}$$

$S_n \leq t < T_n$ なら
$$X_t - X_{S_n} - (X_t - a) - 0 - (a - X_{S_n}) = 0, \tag{2.11}$$

$S_n \leq T_n \leq t$ なら

$$\begin{aligned}&X_{T_n} - X_{S_n} - 0 - (X_{T_n} - b)1_{\{X_{T_n-}\leq b<X_{T_n}\}} - (a - X_{S_n}) \\ &= X_{T_n} - X_{S_n} - (X_{T_n} - b)1_{\{X_{T_n-}\leq b\leq X_{T_n}\}} - a + X_{S_n} \\ &= X_{T_n} - X_{S_n} - (X_{T_n} - b) - a + X_{S_n} \\ &= b - a\end{aligned} \tag{2.12}$$

となり，(2.9) が確かめれられる.

[*22] S_1 についてこれが成り立たないのは，$X_0 < a$ の場合は $X_{S_1} = X_{S_1-} = X_0 < a$ となるからである.

なお $n \geq 2$ の時，最後の項は

$$
\begin{aligned}
(a - X_{S_n}) &= (a - X_{S_n})1_{\{XS_n \leq a \leq X_{S_n-}\}} \\
&= (a - X_{S_n})1_{\{X_{S_n} < a \leq X_{S_n-}\}} + (a - X_{S_n})1_{\{X_{S_n} = a < X_{S_n-}\}} \\
&= (a - X_{S_n})1_{\{X_{S_n} < a \leq X_{S_n-}\}} + (a - a)1_{\{X_{S_n} = a < X_{S_n-}\}} \\
&= (a - X_{S_n})1_{\{X_{S_n} < a \leq X_{S_n-}\}}
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

と書き換えられることに注意しよう．また $n = 1$ のときは

$$
\begin{aligned}
&(a - X_{S_1})1_{\{S_1 \leq t\}} \\
&= (a - X_{S_1})1_{\{X_{S_1} < a \leq X_{S_1-}\}}1_{\{S_1 \leq t\}} + (a - X_{S_1})1_{\{X_{S_1} \geq a\}}1_{\{S_1 \leq t\}} + (a - X_{S_1})1_{\{X_{S_1-} < a\}}1_{\{S_1 \leq t\}} \\
&= (a - X_{S_1})1_{\{X_{S_1} < a \leq X_{S_1-}\}}1_{\{S_1 \leq t\}} + (a - X_0)1_{\{X_0 < a\}}1_{\{S_1 \leq t\}} \\
&= (a - X_{S_1})1_{\{X_{S_1} < a \leq X_{S_1-}\}}1_{\{S_1 \leq t\}} + (a - X_0)1_{\{X_0 < a\}}
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

である[*23]．単純可予測過程に対する確率積分の表現を思い出せば

$$
X_{T_n \wedge t} - X_{S_n \wedge t} = \int_0^t 1_{]\!]S_n, T_n]\!]} dX_s \tag{2.15}
$$

であった．(2.9), (2.15) から

$$
\begin{aligned}
&(b - a)N^+(0, t; I) \\
&= \sum_{n \geq 1} \int_0^t 1_{]\!]S_n, T_n]\!]} dX_s - \sum_{n \geq 1} (X_t - a)1_{\{S_n \leq t < T_n\}} - \sum_{n \geq 1} (X_{T_n} - b)1_{\{X_{T_n-} \leq b < X_{T_n}\}}1_{\{T_n \leq t\}} \\
&\quad - \sum_{n \geq 1} (a - X_{S_n})1_{\{X_{S_n} < a \leq X_{S_n-}\}}1_{\{S_n \leq t\}} - (a - X_0)1_{\{X_0 < a\}} \\
&= \int_0^t 1_{\bigsqcup_n]\!]S_n, T_n]\!]} dX_s - \sum_{n \geq 1} (X_t - a)1_{[S_n, T_n[}(\cdot, t) - \sum_{n \geq 1} (X_{T_n} - b)1_{\{X_{T_n-} \leq b < X_{T_n}\}}1_{\{T_n \leq t\}} \\
&\quad - \sum_{n \geq 1} (a - X_{S_n})1_{\{X_{S_n} < a \leq X_{S_n-}\}}1_{\{S_n \leq t\}} - (a - X_0)1_{\{X_0 < a\}} \\
&= \int_0^t 1_{U(I)}(\cdot, s) dX_s - (X_t - a)1_{U^\circ(I)}(\cdot, t) - \sum_{n \geq 1} (X_{T_n} - b)1_{\{X_{T_n-} \leq b < X_{T_n}\}}1_{\{T_n \leq t\}} \\
&\quad - \sum_{n \geq 1} (a - X_{S_n})1_{\{X_{S_n} < a \leq X_{S_n-}\}}1_{\{S_n \leq t\}} - (a - X_0)1_{\{X_0 < a\}} \\
&= (X_t - X_0) - \int_0^t 1_{D(I)}(\cdot, s) dX_s - (X_t - a) + (X_t - a)1_{D^\circ(I)}(\cdot, t) \\
&\quad - \sum_{n \geq 1} (X_{T_n} - b)1_{\{X_{T_n-} \leq b < X_{T_n}\}}1_{\{T_n \leq t\}} \\
&\quad - \sum_{n \geq 1} (a - X_{S_n})1_{\{X_{S_n} < a \leq X_{S_n-}\}}1_{\{S_n \leq t\}} - (a - X_0)1_{\{X_0 < a\}} \\
&= (a - X_0) - (a - X_0)1_{\{X_0 < a\}} - \int_0^t 1_{D(I)}(\cdot, s) dX_s + (X_t - a)1_{D^\circ(I)}(\cdot, t)
\end{aligned}
$$

[*23] 定義より $\{X_0 < 0\} = \{X_{S_1-} < a\}$ であることに注意せよ．実際，$X_0 < 0$ なら明らかに $S_1 = 0$ で，$X_{S_1-} = X_0 < a$ となる．逆に $X_{S_1-} < 0$ なら $S_1 = 0$ となり，$X_0 = X_{S_1-} < a$ となる．$X_{S_1-} < 0$ なら $S_1 = 0$ となることは対偶を考えれば分かる．さらに集合 $\{X_{S_1} \geq a\}$ と $\{X_{S_1-} < a\}$ は共通部分を持たないことにも注意する．実際，既に述べたように $\{X_0 < 0\} = \{X_{S_1-} < a\}$ であったが，このとき $X_{S_1} = X_0 < a$ となるからである．

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{n\geq 1}(X_{T_n} - b)1_{\{X_{T_n-}\leq b < X_{T_n}\}}1_{\{T_n\leq t\}} \\
&- \sum_{n\geq 1}(a - X_{S_n})1_{\{X_{S_n} < a \leq X_{S_n-}\}}1_{\{S_n\leq t\}} \\
= &-(X_0 - a)^+ - \int_0^t 1_{D(I)}(\cdot, s)dX_s + (X_t - a)1_{D^o(I)}(\cdot, t) \\
&- \sum_{n\geq 1}(X_{T_n} - b)1_{\{X_{T_n-}\leq b < X_{T_n}\}}1_{\{T_n\leq t\}} \\
&- \sum_{n\geq 1}(a - X_{S_n})1_{\{X_{S_n} < a \leq X_{S_n-}\}}1_{\{S_n\leq t\}}
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

という表現を得る．ここで $D(X;I) \cap \{X_- = a\} = E$ と定義しよう[*24].

$$
E^1 = E \cap \{\Delta X \leq 0\}, \quad E^2 = E \cap \{\Delta X > 0\} \tag{2.17}
$$

とすれば $E = E^1 \sqcup E^2$ で，E^1, E^2 の ω-セクションはどれも可算集合である．

$E^2 \subset \{\Delta X \neq 0\}$ であり，$\{\Delta X \neq 0\}$ は可算集合なる ω-セクションを持つ（つまり，*càdlàg* な関数は可算個のジャンプしか持たないということである．）ことから E^2 は OK．E^1 については

$$
\begin{aligned}
E^1 &= D(X;I) \cap \{X_- = a\} \cap \{\Delta X \leq 0\} \\
&= \left[[\![0, S_1]\!] \sqcup \left(\bigsqcup_{n\geq 1}]\!]T_n^b(X), S_{n+1}^a(X)]\!] \right) \right] \cap \{X_- = a\} \cap \{\Delta X \leq 0\} \\
&= \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid 0 \leq t \leq S_1(\omega), X_{t-}(\omega) = a \geq X_t(\omega)\} \\
&\quad \sqcup \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid {}^\exists n \geq 1, T_n(\omega) < t \leq S_{n+1}(\omega), X_{t-}(\omega) = a \geq X_t(\omega)\} \\
&= \big(\{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid t = 0, X_0(\omega) = a\} \\
&\quad \cup \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid t = S_1(\omega), X_{t-}(\omega) = a \geq X_t(\omega)\}\big) \\
&\quad \sqcup \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid {}^\exists n \geq 2, S_n(\omega) = t, X_{t-}(\omega) = a \geq X_t(\omega)\} \\
&= \big[\{\omega \in \Omega \mid X_0(\omega) = a\} \times \{0\} \cup (\{X_- = a\} \cap [\![S_1]\!])\big] \\
&\quad \sqcup \left(\{X_- = a\} \cap \bigsqcup_{n\geq 2} [\![S_n]\!] \right)
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

という表現より E^1 も可算なる ω-セクションを持つ．

命題 17 により

$$
\begin{aligned}
\int_0^t 1_{\{X_{s-}=a\}}dX_s &= \sum_{0<s\leq t} 1_{\{X_{s-}=a\}}\Delta X_s + \phi_t^a \\
&= \sum_{0<s\leq t} 1_{\{X_{s-}=a\}}(X_s - a) + \phi_t^a
\end{aligned} \tag{2.19}
$$

のように表現される．ただし，ϕ_t^a は連続な有界変動過程で $\operatorname{supp}\phi^a \subset \{X_- = a\}$ なるものである．

$$
F := \{\omega \in \Omega \mid X_0(\omega) = a\} \times \{0\} \cup (\{X_- = a\} \cap [\![S_1]\!]) \tag{2.20}
$$

[*24] X_- は可予測で $U(X;I)$ も可予測なので，E は可予測集合である．

とおけば,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t 1_{D(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_{s-}=a\}}dX_s \\
&= \int_0^t 1_E d\phi_s^a + \sum_{0<s\le t} 1_{D(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_{s-}=a\}}(X_s-a) \\
&= \sum_{0<s\le t} 1_E(\cdot,s)(X_s-a) \quad (\because \phi^a \text{ は連続で } E \text{ の } \omega\text{-セクションは可算集合}) \\
&= \sum_{0<s\le t} 1_{E^1}(\cdot,s)(X_s-a) + \sum_{0<s\le t} 1_{E^2}(\cdot,s)(X_s-a) \\
&= \sum_{0<s\le t} 1_F(\cdot,s)(X_s-a) + \sum_{0<s\le t}\sum_{n\ge 2} 1_{[\![S_n]\!]\cap\{X_-=a\}}(\cdot,s)(X_s-a) \\
&\quad + \sum_{0<s\le t} 1_{D(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_{s-}=a>X_s\}}(\cdot,s)(X_s-a) \\
&= \sum_{0<s\le t} 1_{[\![S_n]\!]\cap\{X_-=a\}}(\cdot,s)(X_s-a) + \sum_{n\ge 2}\sum_{0<s\le t} 1_{[\![S_n]\!]\cap\{X_-=a\}}(\cdot,s)(X_s-a) \\
&\quad + \sum_{0<s\le t} 1_{D(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_{s-}=a<X_s\}}(\cdot,s)(X_s-a) \\
&= \sum_{n\ge 1} 1_{\{S_n\le t\}}1_{\{X_{S_n-}=a\}}(\cdot)(X_{S_n}-a) + \sum_{0<s\le t} 1_{D(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_{s-}=a<X_s\}}(\cdot)(X_s-a)
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

である[*25]．さらに

$$
D(X;I) = \left[D^o(X;I) \sqcup \left(\bigsqcup_{n\ge 1} [\![S_n]\!] \right) \right] \setminus \bigsqcup_{n\ge 1} [\![T_n]\!] \tag{2.23}
$$

であることに注意すれば

$$
\begin{aligned}
&\sum_{0<s\le t} 1_{D(X;I)}(s)1_{\{X_{s-}=a<X_s\}}(X_s-a) \\
&= \sum_{0<s\le t} 1_{D^o(X;I)}(s)1_{\{X_{s-}=a<X_s\}}(X_s-a) + \sum_{0<s\le t}\sum_{n\ge 1} 1_{[\![S_n]\!]}(\cdot,s)1_{\{X_{s-}=a<X_s\}}(X_s-a) \\
&\quad - \sum_{0<s\le t}\sum_{n\ge 1} 1_{[\![T_n]\!]}(\cdot,s)1_{\{X_{s-}=a<X_s\}}(X_s-a) \\
&= \sum_{0<s\le t} 1_{D^o(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_{s-}=a<X_s\}}(X_s-a) - \sum_{n\ge 1} 1_{\{T_n\le t\}}(\cdot)1_{\{X_{T_n-}=a<X_{T_n}\}}(\cdot)(X_{T_n}-a) \\
&= \sum_{0<s\le t} 1_{D^o(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_{s-}=a<X_s\}}(X_s-a) - \sum_{n\ge 1} 1_{\{T_n\le t\}}(\cdot)1_{\{X_{T_n-}=a\}}(\cdot)(X_{T_n}-a)
\end{aligned} \tag{2.24}
$$

[*25] 途中の式変形で

$$
\sum_{0<s\le t} 1_F(\cdot,s)(X_s-a) = \sum_{0<s\le t} 1_{[\![S_n]\!]\cap\{X_{s-}=a\}}(X_s-a) \tag{2.22}
$$

となっている所に注意．F のうち $s=0$ となる元に対しては必ず $X_0(\omega)=X_{0-}(\omega)=a$ となるので (X_s-a) を掛けると結局消えてしまうのである．

も分かる．定義より $D(I)\cap\{X_- < a\} = \{X_0 < a\}\times\{0\}$ となるから[*26]，(2.21), (2.24) により

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t 1_{D(X;I)}(\cdot,s)dX_s \\
&= \int_0^t 1_{D(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_-\geq a\}}dX_s \\
&= \int_0^t 1_{D(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_->a\}}(\cdot,\omega)dX_s + \int_0^t 1_{D(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_-=a\}}(\cdot,\omega)dX_s \\
&= \int_0^t 1_{D(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_->a\}}(\cdot,\omega)dX_s + \sum_{n\geq 1} 1_{\{S_n\leq t\}}1_{\{X_{S_n-}=a\}}(\cdot)(X_{S_n}-a) \\
&\quad + \sum_{0<s\leq t} 1_{D(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_{s-}=a<X_s\}}(X_s-a) \\
&= \int_0^t 1_{D(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_->a\}}(\cdot,\omega)dX_s + \sum_{n\geq 1} 1_{\{S_n\leq t\}}1_{\{X_{S_n-}=a\}}(\cdot)(X_{S_n}-a) \\
&\quad + \sum_{0<s\leq t} 1_{D^o(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_{s-}=a<X_s\}}(X_s-a) - \sum_{n\geq 1} 1_{\{T_n\leq t\}}(\cdot)1_{\{X_{T_n-}=a\}}(\cdot)(X_{T_n}-a)
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

が成立．(2.16), (2.25) から

$$
\begin{aligned}
&(b-a)N^+(0,t;I) \\
&= -(X_0-a)^+ - \int_0^t 1_{D(I)}(\cdot,s)dX_s + (X_t-a)1_{D^o(I)}(\cdot,t) \\
&\quad - \sum_{n\geq 1}(X_{T_n}-b)1_{\{X_{T_n-}\leq b<X_{T_n}\}}1_{\{T_n\leq t\}} \\
&\quad - \sum_{n\geq 1}(a-X_{S_n})1_{\{X_{S_n}<a\leq X_{S_n-}\}}1_{\{S_n\leq t\}} \\
&= -(X_0-a)^+ + (X_t-a)1_{D^o(I)}(\cdot,t) \\
&\quad - \int_0^t 1_{D(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_->a\}}(\cdot,s)dX_s - \sum_{n\geq 1} 1_{\{S_n\leq t\}}1_{\{X_{S_n-}=a\}}(\cdot)(X_{S_n}-a) \\
&\quad - \sum_{0<s\leq t} 1_{D^o(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_{s-}=a<X_s\}}(X_s-a) + \sum_{n\geq 1} 1_{\{T_n\leq t\}}(\cdot)1_{\{X_{T_n-}=a\}}(\cdot)(X_{T_n}-a) \\
&\quad - \sum_{n\geq 1}(X_{T_n}-b)1_{\{X_{T_n-}\leq b<X_{T_n}\}}1_{\{T_n\leq t\}} \\
&\quad - \sum_{n\geq 1}(a-X_{S_n})1_{\{X_{S_n}<a\leq X_{S_n-}\}}1_{\{S_n\leq t\}} \\
&= -(X_0-a)^+ + (X_t-a)1_{D^o(I)}(\cdot,t) \\
&\quad - \int_0^t 1_{D(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_->a\}}(\cdot,s)dX_s - \sum_{0<s\leq t} 1_{D^o(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_{s-}=a<X_s\}}(X_s-a) \\
&\quad - \sum_{n\geq 1} 1_{\{S_n\leq t\}}1_{\{X_{S_n-}=a\}}(\cdot)(X_{S_n}-a) \\
&\quad - \sum_{n\geq 1}(a-X_{S_n})1_{\{X_{S_n}<a\leq X_{S_n-}\}}1_{\{S_n\leq t\}}
\end{aligned}
$$

[*26] $D(X;I)$ は X が I を下向きに横断している時間帯だけを見ていたことに注意しよう．

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{n\geq 1} 1_{\{T_n\leq t\}}(\cdot)1_{\{X_{T_n-}=a\}}(\cdot)(X_{T_n}-a) \\
&-\sum_{n\geq 1}(X_{T_n}-b)1_{\{X_{T_n-}\leq b<X_{T_n}\}}1_{\{T_n\leq t\}}
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

を得る．（これでも十分な気もするが...）さらに

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 1}(a-X_{S_n})1_{\{X_{S_n}<a\leq X_{S_n-}\}}1_{\{S_n\leq t\}} \\
&=\sum_{n\geq 1}(a-X_{S_n})1_{\{X_{S_n}<a=X_{S_n-}\}}1_{\{S_n\leq t\}}+\sum_{n\geq 1}(a-X_{S_n})1_{\{X_{S_n}<a<X_{S_n-}\}}1_{\{S_n\leq t\}} \\
&=\sum_{n\geq 1}(a-X_{S_n})1_{\{X_{S_n-}=a\}}1_{\{S_n\leq t\}}+\sum_{n\geq 1}(a-X_{S_n})1_{\{X_{S_n}<a<X_{S_n-}\}}1_{\{S_n\leq t\}}
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

および[*27]

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1}(X_{T_n}-b)1_{\{X_{T_n-}\leq b<X_{T_n}\}}1_{\{T_n\leq t\}} &= \sum_{n\geq 1}(X_{T_n}-b)1_{\{a<X_{T_n-}\leq b\leq X_{T_n}\}}1_{\{T_n\leq t\}} \\
&\quad+\sum_{n\geq 1}(X_{T_n}-a)1_{\{X_{T_n-}\leq a<b\leq X_{T_n}\}}1_{\{T_n\leq t\}} \\
&\quad+(a-b)\sum_{n\geq 1}1_{\{X_{T_n-}\leq a<b\leq X_{T_n}\}}1_{\{T_n\leq t\}}
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

が成り立つことに注意すれば，(2.26) は

$$
\begin{aligned}
&(b-a)N^+(0,t;I) \\
&=-(X_0-a)^+ + (X_t-a)1_{D^o(I)}(\cdot,t) \\
&\quad-\int_0^t 1_{D(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_->a\}}(\cdot,s)dX_s-\sum_{0<s\leq t}1_{D^o(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_{s-}=a<X_s\}}(X_s-a) \\
&\quad-\sum_{n\geq 1}1_{\{S_n\leq t\}}1_{\{X_{S_n-}=a\}}(\cdot)(X_{S_n}-a) \\
&\quad-\sum_{n\geq 1}(a-X_{S_n})1_{\{X_{S_n}<a\leq X_{S_n-}\}}1_{\{S_n\leq t\}} \\
&\quad+\sum_{n\geq 1}1_{\{T_n\leq t\}}(\cdot)1_{\{X_{T_n-}=a\}}(\cdot)(X_{T_n}-a) \\
&\quad-\sum_{n\geq 1}(X_{T_n}-b)1_{\{X_{T_n-}\leq b<X_{T_n}\}}1_{\{T_n\leq t\}} \\
&=-(X_0-a)^+ + (X_t-a)1_{D^o(I)}(\cdot,t) \\
&\quad-\int_0^t 1_{D(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_->a\}}(\cdot,s)dX_s-\sum_{0<s\leq t}1_{D^o(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_{s-}=a<X_s\}}(X_s-a) \\
&\quad-\sum_{n\geq 1}1_{\{S_n\leq t\}}1_{\{X_{S_n-}=a\}}(\cdot)(X_{S_n}-a) \\
&\quad-\sum_{n\geq 1}(a-X_{S_n})1_{\{X_{S_n-}=a\}}1_{\{S_n\leq t\}}-\sum_{n\geq 1}(a-X_{S_n})1_{\{X_{S_n}<a<X_{S_n-}\}}1_{\{S_n\leq t\}} \\
&\quad+\sum_{n\geq 1}1_{\{T_n\leq t\}}(\cdot)1_{\{X_{T_n-}=a\}}(\cdot)(X_{T_n}-a)
\end{aligned}
$$

[*27] $n\geq 1$ で $X_{S_n}\leq a$ であることを用いた．

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{n\geq 1}(X_{T_n}-b)1_{\{a<X_{T_n-}\leq b\leq X_{T_n}\}}1_{\{T_n\leq t\}} - \sum_{n\geq 1}(X_{T_n}-a)1_{\{X_{T_n-}\leq a<b\leq X_{T_n}\}}1_{\{T_n\leq t\}} \\
&- (a-b)\sum_{n\geq 1}1_{\{X_{T_n-}\leq a<b\leq X_{T_n}\}}1_{\{T_n\leq t\}} \\
={}& -(X_0-a)^+ + (X_t-a)1_{D^o(I)}(\cdot,t) \\
&- \int_0^t 1_{D(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_->a\}}(\cdot,s)dX_s - \sum_{0<s\leq t}1_{D^o(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_{s-}=a<X_s\}}(X_s-a) \\
&- \sum_{n\geq 1}(a-X_{S_n})1_{\{X_{S_n}<a<X_{S_n-}\}}1_{\{S_n\leq t\}} \\
&- \sum_{n\geq 1}(X_{T_n}-b)1_{\{a<X_{T_n-}\leq b\leq X_{T_n}\}}1_{\{T_n\leq t\}} - \sum_{n\geq 1}(X_{T_n}-a)1_{\{X_{T_n-}<a<b\leq X_{T_n}\}}1_{\{T_n\leq t\}} \\
&+ (b-a)\sum_{n\geq 1}1_{\{X_{T_n-}\leq a<b\leq X_{T_n}\}}1_{\{T_n\leq t\}} \\
={}& -(X_0-a)^+ + (X_t-a)1_{D^o(I)}(\cdot,t) \\
&- \int_0^t 1_{D(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_->a\}}(\cdot,s)dX_s - \sum_{0<s\leq t}1_{D^o(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_{s-}=a<X_s\}}(X_s-a) \\
&- \sum_{n\geq 1}(X_{T_n}-b)1_{\{a<X_{T_n-}\leq b\leq X_{T_n}\}}1_{\{T_n\leq t\}} \\
&- \sum_{n\geq 1}(X_{T_n}-a)1_{\{X_{T_n-}<a<b\leq X_{T_n}\}}1_{\{T_n\leq t\}} \\
&- \sum_{n\geq 1}(a-X_{S_n})1_{\{X_{S_n}<a<X_{S_n-}\}}1_{\{S_n\leq t\}} \\
&+ (b-a)\sum_{n\geq 1}1_{\{X_{T_n-}\leq a<b\leq X_{T_n}\}}1_{\{T_n\leq t\}} \\
={}& -(X_0-a)^+ + (X_t-a)1_{D^o(I)}(\cdot,t) \\
&- \int_0^t 1_{D(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_->a\}}(\cdot,s)dX_s - \sum_{0<s\leq t}1_{D^o(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_{s-}=a<X_s\}}(X_s-a) \\
&- \sum_{n\geq 1}(X_{T_n}-b)1_{\{a<X_{T_n-}\leq b\leq X_{T_n}\}}1_{\{T_n\leq t\}} \\
&- \sum_{n\geq 1}(X_{T_n}-a)1_{\{X_{T_n-}<a<b\leq X_{T_n}\}}1_{\{T_n\leq t\}} \\
&- \sum_{n\geq 1}(a-X_{S_n})1_{\{X_{S_n}<a<X_{S_n-}\}}1_{\{S_n\leq t\}} \\
&+ (b-a)\sum_{n\geq 1}1_{\{X_{T_n-}\leq a<b\leq X_{T_n}\}}1_{\{T_n\leq t\}} \qquad (2.29)
\end{aligned}
$$

が分かる. □

局所時間の定義より

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}L_t^a ={}& (X_t-a)^+ - (X_0-a)^+ - \int_0^t 1_{\{X_{s-}>a\}}dX_s \\
&- \sum_{0<s\leq t}\left[(X_s-a)^- 1_{\{X_{s-}>a\}} + (X_s-a)^+ 1_{\{X_{s-}\leq a\}}\right] \qquad (2.30)
\end{aligned}
$$

であったことを思い出そう．命題 28 の表現を用いれば，

$$
\begin{aligned}
&(b-a)N^{+}(0,t,[a,b]) - \frac{1}{2}L_t^a \\
&= -(X_0-a)^{+} + (X_t-a)1_{D^o(I)}(\cdot,t) - \int_0^t 1_{D(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_->a\}}(\cdot,s)dX_s \\
&\quad - \sum_{0<s\le t} 1_{D^o(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_{s-}=a<X_s\}}(X_s-a) - \sum_{n\ge1}(X_{T_n}-b)1_{\{a<X_{T_n-}\le b\le X_{T_n}\}}1_{\{T_n\le t\}} \\
&\quad - \sum_{n\ge1}(X_{T_n}-a)1_{\{X_{T_n-}<a<b\le X_{T_n}\}}1_{\{T_n\le t\}} - \sum_{n\ge1}(a-X_{S_n})1_{\{X_{S_n}<a<X_{S_n-}\}}1_{\{S_n\le t\}} \\
&\quad + (b-a)\sum_{n\ge1}1_{\{X_{T_n-}\le a<b\le X_{T_n}\}}1_{\{T_n\le t\}} - (X_t-a)^{+} + (X_0-a)^{+} + \int_0^t 1_{\{X_{s-}>a\}}dX_s \\
&\quad + \sum_{0<s\le t}\left[(X_s-a)^{-}1_{\{X_{s-}>a\}} + (X_s-a)^{+}1_{\{X_{s-}\le a\}}\right] \\
&= \int_0^t 1_{U(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_->a\}}(\cdot,s)dX_s + (X_t-a)1_{D^o(I)}(\cdot,t) - (X_t-a)^{+} \\
&\quad - \sum_{0<s\le t} 1_{D^o(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_{s-}=a<X_s\}}(X_s-a) - \sum_{n\ge1}(X_{T_n}-b)1_{\{a<X_{T_n-}\le b\le X_{T_n}\}}1_{\{T_n\le t\}} \\
&\quad - \sum_{n\ge1}(X_{T_n}-a)1_{\{X_{T_n-}<a<b\le X_{T_n}\}}1_{\{T_n\le t\}} - \sum_{n\ge1}(a-X_{S_n})1_{\{X_{S_n}<a<X_{S_n-}\}}1_{\{S_n\le t\}} \\
&\quad + (b-a)\sum_{n\ge1}1_{\{X_{T_n-}\le a<b\le X_{T_n}\}}1_{\{T_n\le t\}} + \sum_{0<s\le t}\left[(X_s-a)^{-}1_{\{X_{s-}>a\}} + (X_s-a)^{+}1_{\{X_{s-}\le a\}}\right] \\
&= \int_0^t 1_{U(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_->a\}}(\cdot,s)dX_s + (X_t-a)1_{D^o(I)}(\cdot,t) - (X_t-a)^{+} \\
&\quad - \sum_{0<s\le t} 1_{D^o(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_{s-}=a<X_s\}}(X_s-a) - \sum_{n\ge1}(X_{T_n}-b)1_{\{a<X_{T_n-}\le b\le X_{T_n}\}}1_{\{T_n\le t\}} \\
&\quad - \sum_{n\ge1}(X_{T_n}-a)1_{\{X_{T_n-}<a<b\le X_{T_n}\}}1_{\{T_n\le t\}} - \sum_{n\ge1}(a-X_{S_n})1_{\{X_{S_n}<a<X_{S_n-}\}}1_{\{S_n\le t\}} \\
&\quad + (b-a)\sum_{n\ge1}1_{\{X_{T_n-}\le a<b\le X_{T_n}\}}1_{\{T_n\le t\}} + \sum_{0<s\le t}(a-X_s)1_{\{X_{s-}>a>X_s\}} \\
&\quad + \sum_{0<s\le t}(X_s-a)1_{\{X_{s-}=a<X_s\}} + \sum_{0<s\le t}(X_s-a)1_{\{X_{s-}<a<X_s\}} \qquad (2.31)
\end{aligned}
$$

なる関係が成り立つ．ここで

$$
\begin{aligned}
E_t(a,b) = (b-a)&\sum_{n\ge1}1_{\{X_{T_n-}\le a<b\le X_{T_n}\}}1_{\{T_n\le t\}} \\
&+ \sum_{0<s\le t}(X_s-a)1_{\{X_{s-}<a<X_s\}} - \sum_{n\ge1}(X_{T_n}-a)1_{\{X_{T_n-}<a<b\le X_{T_n}\}}1_{\{T_n\le t\}} \\
&+ \sum_{0<s\le t}(X_s-a)1_{\{X_{s-}=a<X_s\}} - \sum_{0<s\le t}1_{D^o(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_{s-}=a<X_s\}}(X_s-a) \\
&+ \sum_{0<s\le t}(a-X_s)1_{\{X_{s-}>a>X_s\}} - \sum_{n\ge1}(a-X_{S_n})1_{\{X_{S_n}<a<X_{S_n-}\}}1_{\{S_n\le t\}} \\
&- \sum_{n\ge1}(X_{T_n}-b)1_{\{a<X_{T_n-}\le b\le X_{T_n}\}}1_{\{T_n\le t\}} \qquad (2.32)
\end{aligned}
$$

とおけば，

$$
\begin{aligned}
&(b-a)N^+(0,t,[a,b]) - \frac{1}{2}L_t^a \\
&= \int_0^t 1_{U(X;I)}(\cdot,s)1_{\{X_->a\}}(\cdot,s)dX_s + (X_t-a)1_{D^o(I)}(\cdot,t) - (X_t-a)^+ + E_t(a,b)
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

2.2 Uniform convergence to local time

この節では，$2(b-a)N^+(X,0,t,[a,b])$ が $b\to a$ としたとき，P-a.s. で (a,t) に対して一様に局所時間 $L_t^a(X)$ に収束することを示す．

初めに，$D^o(X;I)$ の定義より

$$
|(X_t-a)1_{D^o(X;I)} - (X_t-a)^+| \le b-a \tag{2.34}
$$

が成り立つことに注意しておく．実際，$D^o(X;I)$ 上では $X_t \ge a$ であり，$U^o(X;I) = \Omega\times\mathbb{R}_+ \setminus D^o(X;I)$ 上では $X_t \ge b$ となることから分かる．

補題 29. X をセミマルチンゲールとする．

(i) X が仮定 (A) を満たすならば，任意の t に対して，確率 1 で[*28]高々可算個の x を除いて[*29]次の式が成り立つ：

$$
\lim_{\varepsilon\downarrow\downarrow 0}\int_0^t 1_{]x-\varepsilon,x+\varepsilon]}(X_{s-})|d(V+J)_s| = 0 \tag{2.35}
$$

(ii) X が連続セミマルチンゲールとし，ω は $L(X)$ が x について *càdlàg*，t について連続であるようなパスとする．$x\mapsto L_t^x(\omega)$ が連続となるような t に対して

$$
\lim_{\varepsilon\downarrow\downarrow 0}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\int_0^t 1_{U([x,x+\varepsilon])}(\omega,s)1_{\{X>x\}}(\omega,s)dV_s(\omega)\right| = 0. \tag{2.36}
$$

証明. (i) $t\in\mathbb{R}_+$ を固定し，$\omega\in\Omega$ を $K(X)_t(\omega)<+\infty$, かつ $\int_0^t|dV_s|(\omega)<+\infty$ を満たすようなものとする．$V+J$ は有界変動だから，優収束定理により

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\downarrow\downarrow 0}\int_0^t 1_{]x-\varepsilon,x+\varepsilon]}(X_{s-}(\omega))|d(V+J)_s|(\omega) \\
&\le \int_0^t 1_{\{X_{s-}=x\}}(\omega)|dV_s|(\omega) + \sum_{0<s\le t}1_{\{X_{s-}=x\}}(\omega)|\Delta X_s(\omega)|
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

が成り立つ．ここで

$$
E(\omega,t) = \{y\in\mathbb{R} \mid L_t^y(\omega)\ne L_t^{y-}(\omega)\}\cup\{X_s(\omega),X_{s-}(\omega)\in\mathbb{R}\mid 0\le s\le t,\Delta X_s(\omega)\ne 0\} \tag{2.38}
$$

とすれば，$E(\omega,t)$ は可算集合である．定理 25 より $\mathbb{R}\setminus E(\omega,t)$ 上では

$$
\int_0^s 1_{\{X_{u-}=x\}}dV_u = L_s^x - L_s^{x-} = 0,\quad \text{for all s} \in [0,t] \tag{2.39}
$$

[*28] 証明を見れば分かるが，これは L が a と t についての regularity を持ち，$K(X)_t<+\infty$ かつ $\int_0^t|dV_s|<+\infty$ となるような集合で確率 1 のもの，ということである．

[*29] この「高々可算個の x」は証明中にある $E(\omega,t)$ の元のことである．

なので，

$$\int_0^t 1_{\{X_{s-}=x\}}|dV_s| = 0 \tag{2.40}$$

が成り立つ．また $\mathbb{R}\setminus E(\omega,t)$ 上では任意の $s\in[0,t]$ に対して $1_{\{X_{s-}=x\}}(\omega)|\Delta X_s(\omega)|=0$ なので，

$$\sum_{0<s\le t} 1_{\{X_{s-}=x\}}(\omega)|\Delta X_s(\omega)| = 0 \tag{2.41}$$

も成立．よって高々可算個の x を除いて

$$\lim_{\varepsilon\downarrow\downarrow 0}\int_0^t 1_{]x-\varepsilon,x+\varepsilon]}(X_{s-}(\omega))|d(V+J)_s|(\omega) = 0 \tag{2.42}$$

(ii) $L(X)(\omega,\cdot,\cdot)$ が x について *càdlàg*，t について連続であり，かつ

$$\int_0^t |dV_s|(\omega) < \infty \tag{2.43}$$

となるような $\omega\in\Omega$ を固定する[*30]．t はパス $x\mapsto L_t^x(X)(\omega)$ が連続になるようなものとしよう[*31]．

$$f_n(x) = \int_0^t 1_{]x,x+\frac{1}{n}]}(X_s(\omega))|dV_s|(\omega) \tag{2.44}$$

と定義したとき，x について一様に $f_n(\omega,x,t)\to 0$ $(n\to\infty)$ となることを示す．

明らかに $f_n(x)$ の被積分関数は n について単調減少なので，有界収束定理により $f_n(x)\to 0$ が各点収束の意味で成立する．ここで

$$g(x) = \int_0^t 1_{]-\infty,x]}(X_s)|dV_s|(\omega) \tag{2.45}$$

と定義すれば，有界収束定理により

$$\lim_{y\uparrow x} g(y) = \int_0^t 1_{]-\infty,x[}(X_s)|dV_s|(\omega) = \int_0^t 1_{]-\infty,x]}(X_s)|dV_s|(\omega) \tag{2.46}$$

となる．ただし，二つ目の等号は定理 25 より従う[*32]．このことより g は x の関数と見て連続であることが分かり，さらに

$$f_n(x) = g\left(x+\frac{1}{n}\right) - g(x) \tag{2.47}$$

と書けることに注意すれば f_n の x に関する連続性も示される．

ここで f_n はコンパクト台を持つ関数であることに注意する．実際，パス $X_s(\omega)$ は $[0,t]$ 上では適当なコンパクト集合 $K(\omega,t)$ の中に滞在することを考えれば，このことは明らかであろう．したがって，Dini の定理を用いれば連続性と単調減少に各点収束するという事実から $\sup_x f_n(x)\to 0$ が従う．

証明の本題に戻ろう．本来我々が示したいことは

$$\lim_{\varepsilon\downarrow\downarrow 0}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\int_0^t 1_{U([x,x+\varepsilon])}(\omega,s)1_{\{X>x\}}(\omega,s)dV_s(\omega)\right| = 0. \tag{2.48}$$

[*30] このような ω の全体は確率 1 である．

[*31] Lemiux の論文ではこの t が ω と関係なくとっているような書き方をしているが，やはりこの t は ω に依存するはず．

[*32] いま x は局所時間の連続点としてとっていることに注意せよ．

なのであった．$U([x,x+\varepsilon])$ の定義を思い出せば，

$$U([x,x+\varepsilon])\{X>x\}\subset\{x<X\le x+\varepsilon\} \tag{2.49}$$

となることが分かるから，右辺の集合の ε に関する単調性とあわせれば，実は $\sup_x f_n(x)\to 0$ を示せば十分であったことが分かるのである．□

$k\in\mathbb{N}_{\ge 1}$ に対して

$$R_k=\left\{\frac{i}{k^7}\mid i\in\mathbb{Z},|i|\le k^8\right\} \tag{2.50}$$

と定義することにする．

補題 30. $X\in\mathscr{H}^2_{loc}$ とすれば，任意の $t>0$ に対して

$$\varlimsup_{k\to\infty}\left\{\omega\in\Omega\;\middle|\;\max_{x\in R_k}\sup_{t\le T}\left|\int_0^t 1_{U(X;[x,x+k^{-6}])}(s)1_{\{X_->x\}}(s)dX^c_s\right|(\omega)>\frac{1}{k^{1/2}}\right\} \tag{2.51}$$

は P-零集合である．

証明.

$$Y_t(x,k^{-6}):=\int_0^t 1_{U(X;[x,x+k^{-6}])}1_{\{X_{s-}>x\}}dX^c_s,\quad x\in\bigcup_{k\ge1}R_k \tag{2.52}$$

と定義する．$\mathscr{H}^2$ に関する X の局所化列 (T_n) を取り，T_n による $X,X^c,Y(x,k^{-6})$ の停止過程をそれぞれ $X^n,(X^c)^n,Y^n(x,k^{-6})$ で表す．$T>0$ とすれば，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
&P\left(\varlimsup_{k\to\infty}\left\{\max_{x\in R_k}\sup_{t\le T}\left|Y(x,k^{-6})\right|>\frac{1}{k^{1/2}}\right\}\right)\\
&=P\left(\varlimsup_{k\to\infty}\left\{\max_{x\in R_k}\sup_{t\le T}\left|Y(x,k^{-6})\right|>\frac{1}{k^{1/2}}\right\}\cap\{T_n>T\}\right)\\
&\quad+P\left(\varlimsup_{k\to\infty}\left\{\max_{x\in R_k}\sup_{t\le T}\left|Y(x,k^{-6})\right|>\frac{1}{k^{1/2}}\right\}\cap\{T_n\le T\}\right)\\
&\le P\left(\varlimsup_{k\to\infty}\left\{\max_{x\in R_k}\sup_{t\le T}\left|Y^n(x,k^{-6})\right|>\frac{1}{k^{1/2}}\right\}\right)+P\left[T_n\le T\right]
\end{aligned} \tag{2.53}$$

が成り立つ．Chebyshev の不等式，および Burkholder-Davis-Gundy の不等式を用いれば

$$\begin{aligned}
&P\left[\sup_{t\le T}\left|Y^n(x,k^{-6})\right|>\frac{1}{k^{1/2}}\right]\\
&\le k^2E\left[\sup_{t\le T}\left|Y^n(x,k^{-6})\right|^4\right]\\
&\le k^2E\left[\left(\int_0^T 1_{U(X;[x,x+k^{-6}])}(s)1_{]x,+\infty[}(X^n_{s-})d\langle (X^c)^n,(X^c)^n\rangle_s\right)^2\right]\\
&\le k^2E\left[\left(\int_0^{+\infty} 1_{U(X;[x,x+k^{-6}])}(s)1_{]x,+\infty[}(X^n_{s-})d\langle (X^c)^n,(X^c)^n\rangle_s\right)^2\right]
\end{aligned} \tag{2.54}$$

ここで，

$$1_{U(X;[x,x+k^{-6}])}(s)1_{\{X^n_{s-}>x\}}\le 1_{\{x<X^n_{s-}\le x+k^{-6}\}} \tag{2.55}$$

という関係が成り立つことに注意すれば，定理 24 よりある定数 $C>0$ が存在して

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left(\int_0^{+\infty} 1_{U(X;[x,x+k^{-6}])}(s)1_{]x,+\infty[}(X^n_{s-})d\langle (X^c)^n,(X^c)^n\rangle_s\right)^2\right]\\
&\le E\left[\left(\int_0^{+\infty} 1_{\{x<X^n_{s-}\le x+k^{-6}\}}d\langle (X^c)^n,(X^c)^n\rangle_s\right)^2\right]\\
&=\left\|1_{\{x<X^n_{-}\le x+k^{-6}\}}\bullet (X^c)^n\right\|^4_{\mathscr{H}^4}\\
&\le C\left(\frac{1}{k^6}\right)^2\|X^n\|^2_{\mathscr{H}^2}=\frac{C}{k^{12}}\|X^n\|^2_{\mathscr{H}^2}<+\infty
\end{aligned}
\tag{2.56}
$$

が成立[*33]．したがって

$$
P\left[\sup_{t\le T}\left|Y^n(x,k^{-6})\right|>\frac{1}{k^{1/2}}\right]\le\frac{C}{k^4}\|X^n\|_{\mathscr{H}^1}
\tag{2.57}
$$

であり，これを $x\in R_k$ について足し合わせれば

$$
\begin{aligned}
P\left[\max_{x\in R_k}\sup_{t\le T}\left|Y^n(x,k^{-6})\right|>\frac{1}{k^{1/2}}\right]&\le\sum_{x\in R_k}P\left[\sup_{t\le T}\left|Y^n(x,k^{-6})\right|>\frac{1}{k^{1/2}}\right]\\
&\le\sum_{x\in R_k}\frac{C}{k^4}\|X^n\|_{\mathscr{H}^1}=\frac{C(2k^8+1)}{k^{10}}\|X^n\|_{\mathscr{H}^1}
\end{aligned}
\tag{2.58}
$$

となる．よって

$$
\sum_{k\ge 1}P\left[\max_{x\in R_k}\sup_{t\le T}\left|Y^n(x,k^{-6})\right|>\frac{1}{k^{1/2}}\right]<+\infty
\tag{2.59}
$$

となり，Borel-Cantelli の補題により

$$
P\left(\varlimsup_{k\to\infty}\left\{\max_{x\in R_k}\sup_{t\le T}\left|Y^n(x,k^{-6})\right|>\frac{1}{k^{1/2}}\right\}\right)=0
\tag{2.60}
$$

が任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して成り立つことが示される．このことから，(2.53) は

$$
P\left(\varlimsup_{k\to\infty}\left\{\max_{x\in R_k}\sup_{t\le T}\left|Y(x,k^{-6})\right|>\frac{1}{k^{1/2}}\right\}\right)\le P\left[T_n\le T\right]
\tag{2.61}
$$

と書き直される．(T_n) は局所化列だったから，(2.61) において $n\to\infty$ とすれば

$$
P\left(\varlimsup_{k\to\infty}\left\{\max_{x\in R_k}\sup_{t\le T}\left|Y(x,k^{-6})\right|>\frac{1}{k^{1/2}}\right\}\right)=0
\tag{2.62}
$$

を得る． □

注意 31. X が連続セミマルチンゲールならば，命題 28 および (2.34) により

$$
\begin{aligned}
&\left|(b-a)N^+(0,t,a,b)-\frac{1}{2}L^a_t\right|\\
&\le\left|\int_0^t 1_{U([a,b])}1_{\{X_s>a\}}dX_s\right|+\left|(X_t-a)1_{D^\circ}-(X_t-a)^+\right|\\
&\le\left|\int_0^t 1_{U([a,b])}1_{\{X_s>a\}}dV_s\right|+\left|\int_0^t 1_{U([a,b])}1_{\{X_s>a\}}dM_s\right|+(b-a)
\end{aligned}
\tag{2.63}
$$

[*33] いま，仮定より $X^n\in\mathscr{H}^2$ であったことを思そう．

が成り立つ[*34]．特に $a = x,\ b = x + k^{-6}$ とすれば

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{k^6} N^+(0,t,x,x+k^{-6}) - \frac{1}{2} L_t^x \right| \\
&\leq \left| \int_0^t 1_{U([x,x+k^{-6}])} 1_{\{X_s > x\}} dV_s \right| + \left| \int_0^t 1_{U([x,x+k^{-6}])} 1_{\{X_s > x\}} dM_s \right| + (b-a)
\end{aligned} \tag{2.64}
$$

となる．ここで

$$
\begin{aligned}
\Omega_0 &= \{ \omega \in \Omega \mid L_t^x \text{ は } t \text{ について連続，} x \text{ について } c\grave{a}dl\grave{a}g \} \\
&\cap \varliminf_{k \to \infty} \left\{ \omega \in \Omega \;\middle|\; \max_{x \in R_k} \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t 1_{U(X;[x,x+k^{-6}])}(s) 1_{\{X>x\}}(s) dM_s \right| (\omega) \leq \frac{1}{k^{1/2}} \right\}
\end{aligned} \tag{2.65}
$$

と置こう．このとき，$a \mapsto L_t^a(\omega)$ が連続となるような t においては，ある k_1

$$
\max_{x \in R_k} \left| \int_0^t 1_{U(X;[x,x+k^{-6}])}(s) 1_{\{X_s > x\}} dV_s \right| (\omega) < \delta \tag{2.66}
$$

が成立[*35]．また補題 30 より十分大きな k に対して

$$
\max_{x \in R_k} \left| \int_0^t 1_{U(X;[x,x+k^{-6}])}(s) 1_{\{X>x\}}(s) dM_s \right| (\omega) \leq \frac{1}{k^{1/2}} \tag{2.67}
$$

が成立．これより，Ω_0 上では $a \mapsto L_t^a(\omega)$ が連続となるような t と十分大きな k に対して

$$
\max_{x \in R_k} \left| \frac{1}{k^6} N^+(0,t,x,x+k^{-6}) - \frac{1}{2} L_t^x \right| \leq \delta + \frac{1}{k^{1/2}} + \frac{1}{k^6} \tag{2.68}
$$

定理 32. X を連続セミマルチンゲールとし，局所時間 $L_t^a(X)$ は (a,t) に関して連続なるものとする[*36]．このとき，確率 1 で，任意の $T > 0$ に対して

$$
\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ t \leq T}} \left| \varepsilon N^+(0,t,[x,x+\varepsilon]) - \frac{1}{2} L_t^x \right| = 0 \tag{2.69}
$$

が成立する．

証明．*Step 1.* まずは，次の主張を証明する．任意の $t \in \mathbb{R}_+$ に対して

$$
\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \varepsilon N^+(0,t,x,x+\varepsilon) - \frac{1}{2} L_t^x \right| = 0, \quad \text{a.s..} \tag{2.70}
$$

$t > 0$ および $0 < \delta < 1$ を固定する．注意 53 より，確率 1 の集合 $\Omega_0 \in \mathscr{F}$ を適当にとれば $\omega \in \Omega_0$ に対してある $N = N(\omega)$ で次を満たすようなものが存在する[*37]

$$
\frac{1}{(k-1)^6} - \frac{1}{(k-1)^7} > \frac{1}{k^6}, \quad \text{for all } k \geq N(\omega), \tag{2.71}
$$

$$
\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s(\omega)| + 1 < N(\omega), \tag{2.72}
$$

$$
\max_{x \in R_k} \left| \frac{1}{k^6} N^+\left(0,t,x,x+\frac{1}{k^6}\right) - \frac{1}{2} L_t^x \right| < \delta, \quad \text{for all } k \geq N(\omega). \tag{2.73}
$$

[*34] 連続セミマルチンゲールにおいては誤差項 $E_t(a,b)$ は 0 になる．
[*35] 補題 29
[*36] 例えば，連続局所マルチンゲールはこの条件を満たす．（定理 25）
[*37] ：

正の実数 $\varepsilon = \varepsilon(\omega) \le (N+1)^{-6}$ を任意に選び，$m = m(\omega) \in \mathbb{N}$ は $(m+1)^{-6} < \varepsilon \le m^{-6}$ となる自然数とする[*38]．

$|x| \ge N-1$ なら $L_t^x = N^+(0,t,x,x+\varepsilon) = 0$ である．実際，N^+ の定義と (2.72) より $N^+(0,t,x,x+\varepsilon) = 0$ となる．また，系 27 と (2.72) より $L_t^x = 0$ も分かる．$|x| < N-1$ のとき，$k \ge N$ に対して $x_k = \max\{y \in R_k \mid y \le x\}$ とおくことにする．ε と x_k の定義および (2.71) より

$$x + \varepsilon \le x + \frac{1}{m^6} \le \left(x_{m-1} + \frac{1}{(m-1)^7}\right) + \frac{1}{m^6} < x_{m-1} + \frac{1}{(m-1)^6} \tag{2.74}$$

であるから，

$$x_{m-1} \le x < x + \varepsilon < x_{m-1} + \frac{1}{(m-1)^6} \tag{2.75}$$

が成立．また，(2.71) より

$$\frac{1}{(m+2)^6} < \frac{1}{(m+1)^6} - \frac{1}{(m+1)^7} < \frac{1}{(m+1)^6} - \frac{1}{(m+2)^7} \tag{2.76}$$

だから，

$$x < x_{m+2} + \frac{1}{(m+2)^7} < x_{m+2} + \frac{1}{(m+2)^7} + \frac{1}{(m+2)^6} < x_{m+2} + \varepsilon \tag{2.77}$$

も成り立つ．ここで

$$\begin{aligned} I_{m-1} &= \left[x_{m-1}, x_{m-1} + \frac{1}{(m-1)^6}\right], \\ I_{m+2}^0 &= \left[x_{m+2} + \frac{1}{(m+2)^7}, x_{m+2} + \frac{1}{(m+2)^7} + \frac{1}{(m+2)^6}\right] \end{aligned} \tag{2.78}$$

と表記することにしよう．$I \subset J$ ならば $N^+(0,t,I) \ge N^+(0,t,J)$ となることに注意すれば，(2.75), (2.77) より

$$\begin{aligned} \frac{1}{(m+1)^6} N^+(0,t,I_{m-1}) - \frac{1}{2} L_t^x &\le \varepsilon N^+(0,t,[x,x+\varepsilon]) - \frac{1}{2} L_t^x \\ &\le \frac{1}{m^6} N^+(0,t,I_{m+2}^0) - \frac{1}{2} L_t^x \end{aligned} \tag{2.79}$$

を得る．

$$\begin{aligned} &\left|(m+1)^{-6} N^+(0,t,I_{m-1}) - \frac{1}{2} L_t^x\right| \\ &\le \left(\frac{m-1}{m+1}\right)^6 \left|\frac{1}{(m-1)^6} N^+\left(0,t,I_{m-1}\right) - \frac{1}{2} L_t^{x_{m-1}}\right| \\ &\quad + \left(\frac{m-1}{m+1}\right)^6 \left|\frac{1}{2} L_t^{x_{m-1}} - \frac{1}{2} L_t^x\right| + \left|\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^6 - 1\right| \left|\frac{1}{2} L_t^x\right| \\ &\le \left(\frac{m-1}{m+1}\right)^6 \max_{y \in R_{m-1}} \left|\frac{1}{(m-1)^6} N^+\left(0,t,\left[y, y + \frac{1}{(m-1)^6}\right]\right) - \frac{1}{2} L_t^y\right| \\ &\quad + \left(\frac{m-1}{m+1}\right)^6 \sup_{x \in \mathbb{R}} \left|\frac{1}{2} L_t^{x_{m-1}} - \frac{1}{2} L_t^x\right| + \left|\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^6 - 1\right| \sup_{x \in \mathbb{R}} \left|\frac{1}{2} L_t^x\right| \end{aligned} \tag{2.80}$$

*38 当然 $m > N$ である．

という評価が成り立つが，$x \mapsto L_t^x$ がコンパクト台を持つこと，よって一様連続であることを用いれば $m \to +\infty$ で (2.80) 最後の二項は 0 に収束する．さらに (2.73) が成り立つことを思い出せば，十分大きい m に対して (2.80) の最後の辺は 3δ で上から抑えられる．同様の議論により，十分大きい m に対して

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{m^6} N^+(0,t,I^0_{m+2}) - \frac{1}{2}L_t^x \right| < 3\delta \tag{2.81}$$

が成り立つことも分かるから，(2.79) により十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \varepsilon N^+(0,t,[x,x+\varepsilon]) - \frac{1}{2}L_t^x \right| < 3\delta \tag{2.82}$$

となることが示される．

Step 2. (2.70) から定理の主張を導く．$L_t^x(\omega)$ は (t,x) の二変数について連続と仮定しているから，$T>0$ とすれば特に $[0,T]\times\mathbb{R}$ 上で一様連続である．[39]区間の分割 $[0,T] = \bigcup_{1\le i\le n}[t_{i-1},t_i]$ を十分細かく取れば，パスの一様連続性より

$$\max_{1\le i\le n} |L^x_{t_{i-1}} - L^x_{t_i}| < \delta, \quad x\in\mathbb{R} \tag{2.83}$$

とすることが出来る．$t\in[t_{i-1},t_i]\subset[0,T]$ の時は

$$\begin{aligned}
&\left|\varepsilon N^+(0,t,x,x+\varepsilon) - \frac{1}{2}L_t^x\right| \\
&\le |N^+(0,t,x,x+\varepsilon) - N^+(0,t_{i-1},x,x+\varepsilon)| \\
&\quad + \left|N^+(0,t_{i-1},x,x+\varepsilon) - \frac{1}{2}L^x_{t_{i-1}}\right| + \left|\frac{1}{2}L^x_{t_{i-1}} - \frac{1}{2}L^x_t\right| \\
&\le |N^+(0,t_i,x,x+\varepsilon) - N^+(0,t_{i-1},x,x+\varepsilon)| \\
&\quad + \left|N^+(0,t_{i-1},x,x+\varepsilon) - \frac{1}{2}L^x_{t_{i-1}}\right| + \left|\frac{1}{2}L^x_{t_{i-1}} - \frac{1}{2}L^x_t\right| \\
&\le \left|N^+(0,t_i,x,x+\varepsilon) - \frac{1}{2}L^x_{t_i}\right| + \left|\frac{1}{2}L_{t_i} - \frac{1}{2}L^x_{t_{i-1}}\right| \\
&\quad + 2\left|N^+(0,t_{i-1},x,x+\varepsilon) - \frac{1}{2}L^x_{t_{i-1}}\right| + \left|\frac{1}{2}L^x_{t_{i-1}} - \frac{1}{2}L^x_t\right|
\end{aligned} \tag{2.84}$$

これより定理の主張が分かる． □

注意 33. 定理 32 より，下向き横断数についても

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\varepsilon N^-(0,t,x,x+\varepsilon) - \frac{1}{2}L_t^x\right| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \tag{2.85}$$

が成り立つ．実際，

$$\begin{aligned}
&\left|\varepsilon N^-(0,t,x,x+\varepsilon) - \frac{1}{2}L_t^x\right| \\
&\le \varepsilon\left|N^-(0,t,x,x+\varepsilon) - N^+(0,t,x,x+\varepsilon)\right| + \left|\varepsilon N^+(0,t,x,x+\varepsilon) - \frac{1}{2}L_t^x\right| \\
&\le \varepsilon + \left|\varepsilon N^+(0,t,x,x+\varepsilon) - \frac{1}{2}L_t^x\right|
\end{aligned} \tag{2.86}$$

から収束が分かる．

[39] パス $L(\omega)$ は x についてはコンパクト台を持つことに注意すべし．

3 Generalized Arc Length for Semi-martingales

3.1 Definition

$\mathbb{R}$ の元の族 $\pi = (x_i^\pi; i \in \mathbb{Z})$ を $\mathbb{R}$ の分割と呼び，$\|\pi\| = \sup_{i\in\mathbb{Z}} |x_i^\pi - x_{i+1}^\pi|$ と定義する．$\mathbb{R}$ の分割 π が次の条件を満たすとき，π は正則であるという：

(i) $x_i^\pi < x_{i+1}^\pi$ for all $i \in \mathbb{Z}$,

(ii) $\lim_{i\to+\infty} x_i^\pi = +\infty$, $\lim_{i\to-\infty} x_i^\pi = -\infty$

$\mathbb{R}$ の正則な分割全体の集合を Π で表す．さらに，$\Pi(\delta)$ で $\|\pi\| \le \delta$ を満たす $\pi \in \Pi$ 全体の集合を表すことにする．$\pi \in \Pi$ に対して

$$K_s^t(X,\pi) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (x_{i+1}^\pi - x_i^\pi)^2 \times N(s,t,x_i^\pi,x_{i+1}^\pi) \tag{3.1}$$

と定義することにする．

誤解の恐れがないときには，π の元 x_i^π は上付き添え字を省略して x_i とも書くことにする．

定義 34. $a \in \mathbb{R}$ および $\varepsilon > 0$ に対して

$$P(a,\varepsilon) := \{a + i\varepsilon : i \in \mathbb{Z}\} \tag{3.2}$$

と定める[*40]．X を確率過程とする．ある関数 $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ が存在して，任意の $0 < s < t$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\downarrow\downarrow 0} \sup_{a\in\mathbb{R}} K_s^t(X, P(a,\varepsilon)) = L(t) - L(s) \tag{3.3}$$

となるとき，X は arc length L を持つという．

3.2 A special case

命題 35. X を連続セミマルチンゲールで局所時間 $L_t^a(X)$ は (a,x) の関数として連続であるとする．このとき，殆ど全てのパスにおいて，任意の $T > 0$ に対して

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{\substack{\pi\in\Pi(\delta)\\ 0\le s<t\le T}} |K_s^t(X,\pi) - (\langle X,X\rangle_t - \langle X,X\rangle_s)| = 0 \tag{3.4}$$

が成立する．

証明．*Step 1.* まずは，次が成り立つことを示す：任意の t に対して，

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{\pi\in\Pi(\delta)} |K_0^t(X,\pi) - \langle X,X\rangle_t| = 0, \quad P\text{-a.s.} \tag{3.5}$$

K_0^t の定義より

$$K_0^t(X,\pi) = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{x_i\in\pi} (x_{i+1} - x_i) N(0,t,x_i,x_{i+1}) 1_{]x_i,x_{i+1}]}(x) \right) dx \tag{3.6}$$

[*40] 明らかに $P(a,\varepsilon) \in \Pi(\varepsilon)$ である．

であるから，

$$
\begin{aligned}
&|K_0^t(X,\pi)-\langle X,X\rangle_t| \\
&=\left|\int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{x_i\in\pi}(x_{i+1}-x_i)N(0,t,x_i,x_{i+1})1_{]x_i,x_{i+1}]}(x)\right)dx-\langle X,X\rangle_t\right| \\
&=\left|\int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{x_i\in\pi}(x_{i+1}-x_i)N(0,t,x_i,x_{i+1})1_{]x_i,x_{i+1}]}(x)\right)dx-\int_{\mathbb{R}}L_t^x dx\right| \\
&\leq\sum_{x_i\in\pi}\int_{\mathbb{R}}|(x_{i+1}-x_i)N(0,t,x_i,x_{i+1})-L_t^{x_i}|\,1_{]x_i,x_{i+1}]}(x)dx+\sum_{x_i\in\pi}\int_{\mathbb{R}}|L_t^{x_i}-L_t^x|dx \\
&\leq\sum_{x_i\in\pi}\int_{\mathbb{R}}\left|(x_{i+1}-x_i)N^+(0,t,x_i,x_{i+1})-\frac{1}{2}L_t^{x_i}\right|1_{]x_i,x_{i+1}]}(x)dx \\
&\quad+\sum_{x_i\in\pi}\int_{\mathbb{R}}\left|(x_{i+1}-x_i)N^-(0,t,x_i,x_{i+1})-\frac{1}{2}L_t^{x_i}\right|1_{]x_i,x_{i+1}]}(x)dx+\sum_{x_i\in\pi}\int_{\mathbb{R}}|L_t^{x_i}-L_t^x|dx
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

という評価が成立．(3.7) において各項の挙動を調べよう．各々のパスは $[0,t]$ 上では有界は範囲しか動かないから，適当なコンパクト集合 $K=K^\omega$ をとれば任意の $\pi\in\Pi$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x_i\in\pi}\left|(x_{i+1}-x_i)N^+(0,t,x_i,x_{i+1})-\frac{1}{2}L_t^{x_i}\right|1_{]x_i,x_{i+1}]}(x) \\
&\leq\sup_{x_i\in\pi}\left|(x_{i+1}-x_i)N^+(0,t,x_i,x_{i+1})-\frac{1}{2}L_t^{x_i}\right|1_K(x)
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

となることに注意する．ここで，命題 32 と優収束定理を用いれば，ほとんど全てのパスで

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x_i\in\pi}\int_{\mathbb{R}}\left|(x_{i+1}-x_i)N^+(0,t,x_i,x_{i+1})-\frac{1}{2}L_t^{x_i}\right|1_{]x_i,x_{i+1}]}(x)dx \\
&\leq\sup_{x_i\in\pi}\left|(x_{i+1}-x_i)N^+(0,t,x_i,x_{i+1})-\frac{1}{2}L_t^{x_i}\right|m(K^\omega) \\
&\leq\sup_{\substack{\pi\in\Pi(\delta)\\ x_i\in\pi}}\left|(x_{i+1}-x_i)N^+(0,t,x_i,x_{i+1})-\frac{1}{2}L_t^{x_i}\right|m(K^\omega) \\
&\xrightarrow[\delta\to 0]{}0
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

が成り立つ．同様にして

$$
\sup_{\pi\in\Pi(\delta)}\sum_{x_i\in\pi}\int_{\mathbb{R}}\left|(x_{i+1}-x_i)N^-(0,t,x_i,x_{i+1})-\frac{1}{2}L_t^{x_i}\right|1_{]x_i,x_{i+1}]}(x)dx\xrightarrow[\delta\to 0]{}0,\quad P\text{-a.s.}
\tag{3.10}
$$

も分かる．さらに，$a\mapsto L_t^a(X)(\omega)$ はコンパクト台をもつ連続関数（よって一様連続）だから，

$$
\sup_{\pi\in\Pi(\delta)}\sum_{x_i\in\pi}\int_{\mathbb{R}}|L_t^{x_i}-L_t^x|dx\leq\text{const.}\times\sup_{|x-y|<\delta}|L_t^y-L_t^x|\xrightarrow[\delta\to 0]{}0,\quad P\text{-a.s.}
\tag{3.11}
$$

も成立．(3.7), (3.9), (3.10), (3.11) より

$$
\sup_{\pi\in\Pi(\delta)}|K_0^t(X,\pi)-\langle X,X\rangle_t|\xrightarrow[\delta\to 0]{}0
\tag{3.12}
$$

が示される．

Step 2. (3.5) から (3.4) が導かれることを示す．横断数の定義から

$$|N^+(0,s,[a,b]) + N^+(s,t,[a,b]) - N^+(0,t,[a,b])| \le 1 \tag{3.13}$$

および $|N^+ - N^-| \le 1$ であることがが分かる．$K_s^t(X;\pi)$ の定義を思い出せば，

$$\begin{aligned}
&|K_0^s(X;\pi) + K_s^t(X;\pi) - K_0^t(X;\pi)| \\
&= \sum_i (x_{i+1}^\pi - x_i^\pi)^2 \left|N(0,s,x_i^\pi,x_{i+1}^\pi) + N(s,t,x_i^\pi,x_{i+1}^\pi) - N(0,t,x_i^\pi,x_{i+1}^\pi)\right| \\
&\le \|\pi\| \sum_i (x_{i+1}^\pi - x_i^\pi) \left|N(0,s,x_i^\pi,x_{i+1}^\pi) + N(s,t,x_i^\pi,x_{i+1}^\pi) - N(0,t,x_i^\pi,x_{i+1}^\pi)\right| \\
&\le \|\pi\| \left(2 \sup_{0\le u\le t} |X_u(\omega)|\right) \times 5
\end{aligned} \tag{3.14}$$

となるから，

$$\begin{aligned}
&|K_s^t(X,\pi) - (\langle X,X\rangle_t - \langle X,X\rangle_s)| \\
&\le |K_0^t(X,\pi) - \langle X,X\rangle_t| + |K_0^s(X;\pi) - \langle X,X\rangle_s| + |K_0^s(X;\pi) + K_s^t(X;\pi) - K_0^t(X;\pi)|
\end{aligned} \tag{3.15}$$

に注意すれば

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{\pi\in\Pi(\delta)\\ 0\le s<t\le T}} |K_s^t(X,\pi) - (\langle X,X\rangle_t - \langle X,X\rangle_s)| \\
&\le 2 \sup_{\substack{\pi\in\Pi(\delta)\\ t\le T}} |K_0^t(X,\pi) - \langle X,X\rangle_t| + 10\delta \sup_{0\le u\le T} |X_u(\omega)|
\end{aligned} \tag{3.16}$$

となる．したがって，特に $s=0$ の場合に (3.4) を示せば十分であることが分かる．$\langle X,X\rangle_s$ の $[0,T]$ 上での一様連続性より任意の $\varepsilon>0$ に対してある $\gamma>0$ が存在して，$|u-v| <\le \gamma$ なら $|\langle X,X\rangle_u - \langle X,X\rangle_v| < \varepsilon$ が成立．ここで，分割 $[0,T] = \bigcup_{1\le i\le n}[t_{i-1},t_i]$ を $\max_{1\le i\le n}|t_i - t_{i-1}| \le \gamma$ を満たすように選ぶ．$t\in[t_{i-1},t_i]\subset[0,T]$ の時は

$$\begin{aligned}
&|K_0^t(X,\pi) - \langle X,X\rangle_t| \\
&\le |K_0^t(X;\pi) - K_0^{t_{i-1}}(X;\pi)| \\
&\quad + \left|K_0^{t_{i-1}}(X;\pi) - \langle X,X\rangle_{t_{i-1}}\right| + |\langle X,X\rangle_{t_{i-1}} - \langle X,X\rangle_t| \\
&\le |K_0^{t_i}(X;\pi) - K_0^{t_{i-1}}(X;\pi)| \\
&\quad + \left|K_0^{t_{i-1}}(X;\pi) - \langle X,X\rangle_{t_{i-1}}\right| + |\langle X,X\rangle_{t_{i-1}} - \langle X,X\rangle_t| \\
&\le |K_0^{t_i}(X;\pi) - K_0^{t_{i-1}}(X;\pi)| + \left|\langle X,X\rangle_{t_{i-1}} - \langle X,X\rangle_{t_i}\right| \\
&\quad + 2\left|K_0^{t_{i-1}}(X;\pi) - \langle X,X\rangle_{t_{i-1}}\right| + |\langle X,X\rangle_{t_{i-1}} - \langle X,X\rangle_t| \\
&\le |K_0^{t_i}(X;\pi) - K_0^{t_{i-1}}(X;\pi)| + 2\left|K_0^{t_{i-1}}(X;\pi) - \langle X,X\rangle_{t_{i-1}}\right| + 2\varepsilon
\end{aligned} \tag{3.17}$$

が成立．(3.5) を用いれば，各 $i\in\{0,\dots,n-1\}$ に対して

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{\substack{\pi\in\Pi(\delta)\\ t\in[t_i,t_{i+1}]}} |K_0^t(X,\pi) - \langle X,X\rangle_t| \le 2\varepsilon \tag{3.18}$$

であり，特に

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{\substack{\pi\in\Pi(\delta)\\ t\le T}} |K_0^t(X,\pi) - \langle X,X\rangle_t| \le 2\varepsilon \tag{3.19}$$

が分かる．$\varepsilon > 0$ は任意に選んだものだったから，

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{\substack{\pi\in\Pi(\delta)\\ t\le T}} |K_0^t(X,\pi) - \langle X, X\rangle_t| = 0 \tag{3.20}$$

となり，命題の主張が示された． □

3.3 The jump case

この節の目標は，命題 35 の結果を仮定 (A) を満たすセミマルチンゲールの場合に拡張することである．

補題 36. X は仮定 (A) を満たすセミマルチンゲールとする．

(i) (El Karoui [10]) 任意の t に対して，P-a.s. で[*41]

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |E_t(x, x+\varepsilon)| = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.21}$$

が成立する．

(ii) 任意の t に対して P-a.s. で[*42]，高々可算個の $x \in \mathbb{R}$ を除いて[*43]

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{[a,b]\subset[x-\varepsilon,x+\varepsilon]} |E_t(a,b)| = 0 \tag{3.23}$$

が成立する．

証明．(i) *Step 1.* $t > 0$ と，$K(X)_t(\omega)$ が有限となり，occupation times formula が成立するような ω を固定する．

$$A_s(x) = \sum_{0<u\le s} (X_u - x) 1_{\{X_{u-}<x<X_u\}} \tag{3.24}$$

$$B_s(x) = \sum_{0<u\le s} (x - X_u) 1_{\{X_u<x<X_{u-}\}} \tag{3.25}$$

$$C_s(x) = \sum_{0<u\le s} (X_u - x) 1_{\{X_{u-}=x<X_u\}} \tag{3.26}$$

と定義する．仮定 (A) より任意の $x \in \mathbb{R}$ について，$A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ は任意の s で絶対収束し，しかも増加

[*41] 具体的には「命題 28 の表現が成り立ち，かつ $K(X)_t < +\infty$ となるような確率 1 の集合上で」という意味．

[*42] (i) に同じ．

[*43] 証明を見れば分かることだが，この「高々可算個の x」とは

$$D = \{X_s, X_{s-} \mid s \in [0,t],\ \Delta X_s \neq 0\} \tag{3.22}$$

で表される $D \subset \mathbb{R}$ の元に他ならない．

的なパスを持つ過程となる．$x \in \mathbb{R}$ を固定しよう．$E_t(a,b)$ の定義[*44]より

$$
\begin{aligned}
E_t(x, x+\varepsilon) = \varepsilon \sum_{n \geq 1} 1_{\{X_{T_n -} \leq x < x+\varepsilon \leq X_{T_n}\}} 1_{\{T_n \leq t\}} \\
&+ \sum_{0<s\leq t} (X_s - x) 1_{\{X_{s-} < x < X_s\}} - \sum_{n\geq 1} (X_{T_n} - x) 1_{\{X_{T_n -} < x < x+\varepsilon \leq X_{T_n}\}} 1_{\{T_n \leq t\}} \\
&+ \sum_{0<s\leq t} (X_s - x) 1_{\{X_{s-} = x < X_s\}} - \sum_{0<s\leq t} 1_{D^o([x,x+\epsilon])}(\cdot, s) 1_{\{X_{s-}=x<X_s\}} (X_s - x) \\
&+ \sum_{0<s\leq t} (x - X_s) 1_{\{X_{s-} > x > X_s\}} - \sum_{n\geq 1} (x - X_{S_n}) 1_{\{X_{S_n} < x < X_{S_n -}\}} 1_{\{S_n \leq t\}} \\
&- \sum_{n\geq 1} (X_{T_n} - (x+\varepsilon)) 1_{\{a < X_{T_n -} \leq x+\varepsilon \leq X_{T_n}\}} 1_{\{T_n \leq t\}} \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

であったから，

$$
\begin{aligned}
|E_t(x, x+\varepsilon)| \leq & \left| A_t(x) - \sum_{n\geq 1} (X_{T_n} - x) 1_{\{X_{T_n -} < x < x+\varepsilon \leq X_{T_n}\}} 1_{\{T_n \leq t\}} \right| \\
&+ \left| B_t(x) - \sum_{n\geq 1} (x - X_{S_n}) 1_{\{X_{S_n} < x < X_{S_n -}\}} 1_{\{S_n \leq t\}} \right| \\
&+ \left| C_t(x) - \sum_{0<s\leq t} 1_{D^o(X;I)}(\cdot, s) 1_{\{X_{s-} = x < X_s\}} (X_s - x) \right| \\
&+ \varepsilon \sum_{n\geq 1} 1_{\{X_{T_n -} \leq x < x+\varepsilon \leq X_{T_n}\}} 1_{\{T_n \leq t\}} \\
&+ \sum_{n\geq 1} (X_{T_n} - (x+\varepsilon)) 1_{\{x < X_{T_n -} \leq x+\varepsilon \leq X_{T_n}\}} 1_{\{T_n \leq t\}} \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

が成立．よって (3.28) の右辺各項の挙動を調べれば良い．

Step 2. $T_n^{x+\varepsilon}(\omega)$ の定義より，$X_{s-}(\omega) < x < x+\varepsilon \leq X_s(\omega)$ なるジャンプは $T_n^{x+\varepsilon}(\omega)$ $(n \geq 1)$ の何れかに於いてしか起こらないから，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 1} (X_{T_n}(\omega) - x) 1_{\{X_{T_n -} < x < x+\varepsilon \leq X_{T_n}\}}(\omega) 1_{\{T_n \leq t\}}(\omega) \\
&= \sum_{0<s\leq t} (X_s(\omega) - x) 1_{\{X_{s-} < x < x+\varepsilon \leq X_s\}}(\omega) \\
&= \sum_{0<s\leq t} 1_{\{X_s \geq x+\varepsilon\}}(\omega) (X_s(\omega) - x) 1_{\{X_{s-} < x < X_s\}}(\omega) \\
&= \int_0^t 1_{\{X_s \geq x+\varepsilon\}}(\omega) dA_s(\omega) \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

[*44] 式 (2.32).

が成立．よって

$$\begin{aligned}
&\left|A_t(x)(\omega) - \sum_{n\geq 1}(X_{T_n}(\omega) - x)1_{\{X_{T_n-}<x<x+\varepsilon\leq X_{T_n}\}}(\omega)1_{\{T_n\leq t\}}(\omega)\right| \\
&= \left|A_t(x)(\omega) - A_0(x)(\omega) - \int_0^t 1_{\{X_s\geq x+\varepsilon\}}(\omega)dA_s(\omega)\right| \\
&= \int_0^t 1_{\{X_s<x+\varepsilon\}}(\omega)dA_s(\omega) \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

となる．(3.30) において $\varepsilon \to 0$ とすれば，優収束定理と $A_t(x)$ の定義より

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\left|A_t(x)(\omega) - \sum_{n\geq 1}(X_{T_n}(\omega) - x)1_{\{X_{T_n-}<x<x+\varepsilon\leq X_{T_n}\}}(\omega)1_{\{T_n\leq t\}}(\omega)\right| \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t 1_{\{X_s<x+\varepsilon\}}(\omega)dA_s(\omega) \\
&= \int_0^t 1_{\{X_s\leq x\}}(\omega)dA_s(\omega) \\
&= \sum_{0<s\leq t} 1_{\{X_s\leq x\}}(\omega)(X_s(\omega) - x)1_{\{X_{s-}<x<X_s\}}(\omega) \\
&= 0 \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

を得る．

Step 3. $S_n^x(\omega)$ の定義より，$X_s(\omega) < x < x+\varepsilon \leq X_{s-}(\omega)$ なるジャンプは $S_n^x(\omega)$ $(n \geq 1)$ の何れかに於いてしか起こらないから，

$$\begin{aligned}
&\int_0^t 1_{\{X_{s-}>x+\varepsilon\}}(\omega)dB_s(x)(\omega) \\
&= \sum_{0<s\leq t} 1_{\{X_{s-}>x+\varepsilon\}}(\omega)(x - X_s(\omega))1_{\{X_s<x<X_{s-}\}}(\omega) \\
&= \sum_{0<s\leq t} (x - X_s(\omega))1_{\{X_s<x<x+\varepsilon<X_{s-}\}}(\omega) \\
&= \sum_{n\geq 1}(x - X_{S_n^x}(\omega))1_{\{X_{S_n^x}<x<x+\varepsilon<X_{S_n^x-}\}}(\omega)1_{\{S_n^x\leq t\}}(\omega) \\
&\leq \sum_{n\geq 1}(x - X_{S_n^x}(\omega))1_{\{X_{S_n^x}<x<X_{S_n^x-}\}}(\omega)1_{\{S_n^x\leq t\}}(\omega) \\
&\leq \sum_{0<s\leq t} (x - X_s(\omega))1_{\{X_s<x<X_{s-}\}}(\omega) \\
&= B_t(x)(\omega) \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}
&0 \leq B_t(x)(\omega) - \sum_{n\geq 1}(x - X_{S_n^x}(\omega))1_{\{X_{S_n^x}<x<X_{S_n^x-}\}}(\omega)1_{\{S_n^x\leq t\}}(\omega) \\
&\leq B_t(x)(\omega) - \int_0^t 1_{\{X_{s-}>x+\varepsilon\}}(\omega)dB_s(x)(\omega) \\
&= \int_0^t 1_{\{X_{s-}\leq x+\varepsilon\}}(\omega)dB_s(x)(\omega). \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

$\varepsilon \to 0$ とすれば，優収束定理により

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\left| B_t(x)(\omega) - \sum_{n\geq 1}(x - X_{S_n^x}(\omega))1_{\{X_{S_n^x}<x<X_{S_n^x-}\}}(\omega)1_{\{S_n^x\leq t\}}(\omega)\right| \\
&\leq \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t 1_{\{X_{s-}\leq x+\varepsilon\}}(\omega)dB_s(x)(\omega) \\
&= \int_0^t 1_{\{X_{s-}\leq x\}}(\omega)dB_s(x)(\omega) \\
&= \sum_{0<s\leq t} 1_{\{X_{s-}\leq x\}}(\omega)(x - X_s(\omega))1_{\{X_s<x<X_{s-}\}}(\omega) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.34}$$

が示される．

Step 4. $C_t(x)$ の定義を思い出せば，

$$\begin{aligned}
&\left| C_t(x) - \sum_{0<s\leq t} 1_{D^o([x,x+\epsilon])}(\omega,s)1_{\{X_{s-}=x<X_s\}}(X_s(\omega)-x)\right| \\
&= \left| C_t(x) - \int_0^t 1_{D^o([x,x+\epsilon])}(\omega,s)dC_s(\omega)\right| \\
&= \int_0^t 1_{U^o([x,x+\epsilon])}(\omega,s)dC_s(\omega)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

が成立．さらに $U^o(X;I)$ の定義より $s \in U^o([x,x+\epsilon])$ ならば $X_s < x+\varepsilon$ となるから，優収束定理により

$$\begin{aligned}
&\left| C_t(x)(\omega) - \sum_{0<s\leq t} 1_{D^o([x,x+\epsilon])}(\omega,s)1_{\{X_{s-}=x<X_s\}}(\omega)(X_s(\omega)-x)\right| \\
&= \int_0^t 1_{U^o([x,x+\epsilon])}(\omega,s)dC_s(\omega) \\
&\leq \int_0^t 1_{\{X_s<x+\varepsilon\}}(\omega,s)dC_s(\omega) \\
&\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Step 5.

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 1}(X_{T_n} - (x+\varepsilon))1_{\{x<X_{T_n-}\leq x+\varepsilon\leq X_{T_n}\}}1_{\{T_n\leq t\}} \\
&\leq \sum_{0<s\leq t}(X_s - (x+\varepsilon))1_{\{x<X_{s-}\leq x+\varepsilon\leq X_s\}} \\
&\leq \sum_{0<s\leq t} 1_{\{x<X_{s-}\leq x+\varepsilon\leq X_s\}}\Delta X_s \\
&= \int_0^t 1_{\{x<X_{s-}\leq x+\varepsilon\leq X_s\}}(\omega)dK(X)_s(\omega) \\
&= \int_0^t 1_{\{x<X_{s-}\leq x+\varepsilon\}}(\omega)dK(X)_s(\omega) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0
\end{aligned} \tag{3.37}$$

である．また

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon \sum_{n\geq 1} 1_{\{X_{T_n-}\leq x<x+\varepsilon\leq X_{T_n}\}}1_{\{T_n\leq t\}}(\omega) \\
&\leq \varepsilon \sum_{0<s\leq t} 1_{\{X_{s-}\leq x<x+\epsilon\leq X_s\}} \\
&= \sum_{0<s\leq t} \frac{\epsilon}{X_s(\omega)-x}1_{\{X_s\geq x+\epsilon\}}(\omega)(X_s(\omega)-x)1_{\{X_{s-}\leq x<X_s\}} \\
&= \int_{]0,t]} \frac{\epsilon}{X_s(\omega)-x}1_{\{X_s\geq x+\epsilon\}}(\omega)d(A+C)_s(x) \qquad (3.38)
\end{aligned}
$$

とすれば，最後の行の被積分関数は

$$
\frac{\epsilon}{X_s(\omega)-x}1_{\{X_s\geq x+\epsilon\}}(\omega)\leq 1\times 1_{\{X_s\geq x+\epsilon\}}(\omega)\leq 1 \qquad (3.39)
$$

を満たすから，優収束定理により[*45]

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\varepsilon \sum_{n\geq 1} 1_{\{X_{T_n-}\leq x<x+\varepsilon\leq X_{T_n}\}}1_{\{T_n\leq t\}}(\omega) \\
&\leq \lim_{\epsilon\to 0}\int_{]0,t]} \frac{\epsilon}{X_s(\omega)-x}1_{\{X_s\geq x+\epsilon\}}(\omega)d(A+C)_s(x)=0 \qquad (3.40)
\end{aligned}
$$

となる．

(ii) $t>0$ と，$K(X)_t(\omega)$ が有限となるような ω を固定する．さらに，$x\in\{X_s,X_{s-}\mid 0\leq s\leq t,\ \Delta X_s\neq 0\}$ として，$\varepsilon>0$ に対して $[a,b]\subset[x-\varepsilon,x+\varepsilon]$ なる a,b を任意に選ぶ．$A_s(x)$ の定義より

$$
\begin{aligned}
\int_0^t 1_{\{X_s<b\}}dA_s(a)(\omega) &\leq \int_0^t 1_{\{X_s\leq x+\varepsilon\}}dA_s(a)(\omega) \\
&= \sum_{0<s\leq t} 1_{\{X_s\leq x+\varepsilon\}}(\omega)(X_s(\omega)-a)1_{\{X_{s-}<a<X_s\}}(\omega) \\
&= \sum_{0<s\leq t} 1_{\{X_{s-}<a<X_s\leq x+\varepsilon\}}(\omega)(X_s(\omega)-a) \\
&\leq \sum_{0<s\leq t} 1_{\{X_{s-}<a<X_s\leq x+\varepsilon\}}(\omega)|\Delta X_s(\omega)| \\
&\leq \sum_{0<s\leq t} 1_{\{x-\varepsilon\leq X_s\leq x+\varepsilon\}}|\Delta X_s(\omega)| \\
&= \int_0^t 1_{\{x-\varepsilon\leq X_s\leq x+\varepsilon\}}dK(X)_s(\omega) \qquad (3.41)
\end{aligned}
$$

であるから，(3.30) より

$$
\begin{aligned}
&\left|A_t(a)(\omega)-\sum_{n\geq 1}(X_{T_n}(\omega)-a)1_{\{X_{T_n-}<a<b\leq X_{T_n}\}}(\omega)1_{\{T_n\leq t\}}\right| \\
&= \int_0^t 1_{\{X_s<b\}}(\omega)dA_s(a)(\omega) \\
&\leq \int_0^t 1_{\{x-\varepsilon\leq X_s\leq x+\varepsilon\}}(\omega)dK(X)_s(\omega) \qquad (3.42)
\end{aligned}
$$

[*45] 仮定 (A) より定数関数は $d(A+C)$ で $[0,t]$ 上可積分．

が成立．また (3.37) から

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 1}(X_{T_n}(\omega)-b)1_{\{a<X_{T_n-}\leq b\leq X_{T_n}\}}(\omega)1_{\{T_n\leq t\}}\\
&\leq \sum_{0<s\leq t}(X_s(\omega)-b)1_{\{a<X_{s-}\leq b\leq X_s\}}(\omega)\\
&\leq \sum_{0<s\leq t}1_{\{a<X_{s-}\leq b\leq X_s\}}(\omega)|\Delta X_s(\omega)|\\
&\leq \int_0^t 1_{\{x<X_{s-}\leq x+\varepsilon\}}(\omega)dK(X)_s(\omega)\\
&\leq \int_0^t 1_{\{x-\varepsilon\leq X_{s-}\leq x+\varepsilon\}}(\omega)dK(X)_s(\omega)
\end{aligned}\tag{3.43}
$$

も分かる．さらに

$$
\begin{aligned}
&(b-a)\sum_{0<s\leq t}1_{\{X_{s-}\leq a<b\leq X_s\}}(\omega)\\
&\leq (b-a)\sum_{0<s\leq t}1_{\{X_{s-}\leq x-\varepsilon\leq a<b\leq x+\varepsilon\leq X_s\}}+(b-a)\sum_{0<s\leq t}1_{\{x-\varepsilon<X_{s-}\leq a<b\leq x+\varepsilon\leq X_s\}}\\
&\quad+(b-a)\sum_{0<s\leq t}1_{\{x-\varepsilon<X_{s-}\leq a<b\leq X_s<x+\varepsilon\}}+(b-a)\sum_{0<s\leq t}1_{\{x-\varepsilon<X_{s-}\leq a<b\leq X_s<x+\varepsilon\}}\\
&\leq (b-a)\sum_{0<s\leq t}1_{\{X_{s-}\leq x-\varepsilon\leq a<b\leq x+\varepsilon\leq X_s\}}+\sum_{0<s\leq t}\Delta X_s 1_{\{x-\varepsilon<X_{s-}\leq a<b\leq x+\varepsilon\leq X_s\}}\\
&\quad+\sum_{0<s\leq t}\Delta X_s 1_{\{x-\varepsilon<X_{s-}\leq a<b\leq X_s<x+\varepsilon\}}+\sum_{0<s\leq t}\Delta X_s 1_{\{X_{s-}\leq x-\varepsilon\leq a<b\leq X_s<x+\varepsilon\}}
\end{aligned}\tag{3.44}
$$

および[*46]．

$$
\begin{aligned}
&\sum_{0<s\leq t}(b-a)1_{\{X_{s-}\leq x-\varepsilon<x+\varepsilon\leq X_s\}}(\omega)\\
&\leq \sum_{0<s\leq t}2\varepsilon 1_{\{X_{s-}\leq x-\varepsilon<x+\varepsilon\leq X_s\}}(\omega)\\
&\leq \sum_{0<s\leq t}2\varepsilon 1_{\{X_{s-}\leq x<x+\varepsilon\leq X_s\}}(\omega)\\
&\leq \sum_{0<s\leq t}2\varepsilon\frac{X_s-x}{X_s-(x-\varepsilon)}1_{\{X_{s-}\leq x<x+\varepsilon\leq X_s\}}(\omega)\\
&\leq \sum_{0<s\leq t}\frac{2\varepsilon}{X_s(\omega)-(x-\varepsilon)}1_{\{X_{s-}\leq x+\varepsilon\}}(\omega)1_{\{X_s\geq x+\varepsilon\}}(\omega)(X_s(\omega)-x)1_{\{X_{s-}\leq x<X_s\}}(\omega)\\
&\leq \sum_{0<s\leq t}\Bigg\{\frac{2\varepsilon}{X_s(\omega)-(x-\varepsilon)}1_{\{X_{s-}\leq x+\varepsilon\}}(\omega)1_{\{X_s\geq x+\varepsilon\}}(\omega)(X_s(\omega)-x)\\
&\quad\times\left(1_{\{X_{s-}<x<X_s\}}(\omega)+1_{\{X_{s-}=x<X_s\}}(\omega)\right)\Bigg\}\\
&=\int_0^t\frac{2\varepsilon}{X_s(\omega)-(x-\varepsilon)}1_{\{X_{s-}\leq x+\varepsilon\}}(\omega)1_{\{X_s\geq x+\varepsilon\}}(\omega)d(A+C)_s(x)(\omega)
\end{aligned}\tag{3.45}
$$

[*46] 各々のパスにおいて大きさ $b-a$ を上回るジャンプは $[0,t]$ 上に有限個しかないことに注意.

という関係が成り立つことを確かめておく．(3.44) と (3.45) から

$$
\begin{aligned}
&(b-a)\sum_{n\geq 1} 1_{\{X_{T_n-}\leq a<b\leq X_{T_n}\}}(\omega)1_{\{T_n\leq t\}}(\omega)\\
&\leq (b-a)\sum_{0<s\leq t} 1_{\{X_{s-}\leq a<b\leq X_s\}}(\omega)\\
&\leq (b-a)\sum_{0<s\leq t} 1_{\{X_{s-}\leq x-\varepsilon\leq a<b\leq x+\varepsilon\leq X_s\}} + \sum_{0<s\leq t} \Delta X_s 1_{\{x-\varepsilon<X_{s-}\leq a<b\leq x+\varepsilon\leq X_s\}}\\
&\quad + \sum_{0<s\leq t} \Delta X_s 1_{\{x-\varepsilon<X_{s-}\leq a<b\leq X_s<x+\varepsilon\}} + \sum_{0<s\leq t} \Delta X_s 1_{\{X_{s-}\leq x-\varepsilon\leq a<b\leq X_s<x+\varepsilon\}}\\
&\leq \int_0^t \frac{2\varepsilon}{X_s(\omega)-(x-\varepsilon)} 1_{\{X_{s-}\leq x+\varepsilon\}}(\omega)1_{\{X_s\geq x+\varepsilon\}}(\omega)d(A+C)_s(x)(\omega)\\
&\quad + \int_0^t 1_{\{x-\varepsilon<X_{s-}\leq a<b\leq x+\varepsilon\leq X_s\}}(\omega)dK(X)_s(\omega) + \int_0^t 1_{\{x-\varepsilon<X_{s-}\leq a<b\leq X_s<x+\varepsilon\}}(\omega)dK(X)_s(\omega)\\
&\quad + \int_0^t 1_{\{X_{s-}\leq x-\varepsilon\leq a<b\leq X_s<x+\varepsilon\}} dK(X)_s(\omega)\\
&\leq \int_0^t \frac{2\varepsilon}{X_s(\omega)-(x-\varepsilon)} 1_{\{X_{s-}\leq x+\varepsilon\}}(\omega)1_{\{X_s\geq x+\varepsilon\}}(\omega)d(A+C)_s(x)(\omega)\\
&\quad + 2\int_0^t 1_{\{x-\varepsilon\leq X_{s-}\leq x+\varepsilon\}}(\omega)dK(X)_s(\omega) + \int_0^t 1_{\{x-\varepsilon\leq X_s\leq x+\varepsilon\}} dK(X)_s(\omega)
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

を得る．(3.33) から

$$
\begin{aligned}
&\left| B_t(a)(\omega) - \sum_{n\geq 1}(a - X_{S_n^x}(\omega))1_{\{X_{S_n^x}<a<X_{S_n^x-}\}}(\omega)1_{\{S_n^x\leq t\}}(\omega)\right|\\
&= \int_0^t 1_{\{X_{s-}\leq b\}}(\omega)dB_s(a)(\omega)\\
&= \sum_{0<s\leq t} 1_{\{X_{s-}\leq b\}}(\omega)(a - X_s(\omega))1_{\{X_s<a<X_{s-}\}}(\omega)\\
&\leq \sum_{0<s\leq t} 1_{\{X_{s-}\leq b\}}(\omega)1_{\{X_s<a<X_{s-}\}}(\omega)\,|\Delta X_s|\\
&\leq \sum_{0<s\leq t} 1_{\{a\leq X_{s-}\leq b\}}(\omega)\,|\Delta X_s|\\
&\leq \sum_{0<s\leq t} 1_{\{x-\varepsilon\leq X_{s-}\leq x+\varepsilon\}}(\omega)\,|\Delta X_s|\\
&= \int_0^t 1_{\{x-\varepsilon\leq X_{s-}\leq x+\varepsilon\}}(\omega)dK(X)_s
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

であり，また (3.36) から

$$
\begin{aligned}
&\left| C_t(a)(\omega) - \sum_{0<s\leq t} 1_{D^o(X,[a,b])}(\omega,s)1_{\{X_{s-}=a<X_s\}}(\omega)(X_s(\omega)-a)\right|\\
&\leq \int_0^t 1_{\{X_s<b\}}(\omega)dC_s(a)(\omega)\\
&= \sum_{0<s\leq t} 1_{\{X_s<b\}}(\omega)(X_s(\omega)-a)1_{\{X_{s-}=a<X_s\}}(\omega)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{0<s\le t} 1_{\{X_s<b\}}(\omega)1_{\{X_{s-}=a<X_s\}}(\omega)\,|\Delta X_s(\omega)| \\
&\le \sum_{0<s\le t} 1_{\{a<X_s<b\}}(\omega)\,|\Delta X_s(\omega)| \\
&\le \sum_{0<s\le t} 1_{\{x-\varepsilon\le X_s\le x+\varepsilon\}}(\omega)\,|\Delta X_s(\omega)| \\
&= \int_0^t 1_{\{x-\varepsilon\le X_s\le x+\varepsilon\}}(\omega)dK(X)_s
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

が分かる．(3.42), (3.43), (3.46), (3.47), (3.48) を用いれば，$[a,b]\subset[x-\varepsilon,x+\varepsilon]$ を満たす任意の $a<b$ に対して

$$
\begin{aligned}
|E_t(a,b)| \le& \int_0^t 1_{\{x-\varepsilon\le X_s\le x+\varepsilon\}}(\omega)dK(X)_s(\omega) + \int_0^t 1_{\{x-\varepsilon\le X_{s-}\le x+\varepsilon\}}(\omega)dK(X)_s \\
&+ \int_0^t 1_{\{x-\varepsilon\le X_s\le x+\varepsilon\}}(\omega)dK(X)_s + \int_0^t 1_{\{x-\varepsilon\le X_{s-}\le x+\varepsilon\}}(\omega)dK(X)_s(\omega) \\
&+ \int_0^t \frac{2\varepsilon}{X_s(\omega)-(x-\varepsilon)}1_{\{X_{s-}\le x+\varepsilon\}}(\omega)1_{\{X_s\ge x+\varepsilon\}}(\omega)d(A+C)_s(x)(\omega) \\
&+ 2\int_0^t 1_{\{x-\varepsilon\le X_{s-}\le x+\varepsilon\}}(\omega)dK(X)_s(\omega) + \int_0^t 1_{\{x-\varepsilon\le X_s\le x+\varepsilon\}}dK(X)_s(\omega) \\
=& \,3\int_0^t 1_{\{x-\varepsilon\le X_s\le x+\varepsilon\}}(\omega)dK(X)_s(\omega) + 4\int_0^t 1_{\{x-\varepsilon\le X_{s-}\le x+\varepsilon\}}(\omega)dK(X)_s \\
&+ \int_0^t \frac{2\varepsilon}{X_s(\omega)-(x-\varepsilon)}1_{\{X_{s-}\le x+\varepsilon\}}(\omega)1_{\{X_s\ge x+\varepsilon\}}(\omega)d(A+C)_s(x)(\omega)
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

という評価が成り立つ．$[a,b]$ について上限を取って $\varepsilon\to 0$ とすれば，優収束定理により

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{\varepsilon\to 0} \sup_{[a,b]\subset[x-\varepsilon,x+\varepsilon]} |E_t(a,b)| \\
&\le 3\int_0^t 1_{\{X_s=x\}}(\omega)dK(X)_s(\omega) + 4\int_0^t 1_{\{X_{s-}=x\}}(\omega)dK(X)_s \\
&\quad + \limsup_{\varepsilon\to 0}\int_0^t \frac{2\varepsilon}{X_s(\omega)-(x-\varepsilon)}1_{\{X_{s-}\le x+\varepsilon\}}(\omega)1_{\{X_s\ge x+\varepsilon\}}(\omega)d(A+C)_s(x)(\omega) \\
&= 3\sum_{0<s\le t} 1_{\{X_s=x\}}(\omega)|\Delta X_s| + 4\sum_{0<s\le t} 1_{\{X_{s-}=x\}}(\omega)|\Delta X_s(\omega)| \\
&\quad + \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{0<s\le t} \frac{2\varepsilon}{X_s(\omega)-(x-\varepsilon)}1_{\{X_{s-}\le x<x+\varepsilon\le X_s\}}(\omega)(X_s(\omega)-x)
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

が成立．

$$
\begin{aligned}
&\frac{2\varepsilon}{X_s(\omega)-(x-\varepsilon)}1_{\{X_{s-}\le x<x+\varepsilon\le X_s\}}(\omega) \\
&= \frac{2\varepsilon}{X_s(\omega)-x+\varepsilon}1_{\{X_{s-}\le x<x+\varepsilon\le X_s\}}(\omega) \\
&\le \frac{2\varepsilon}{\varepsilon}1_{\{X_{s-}\le x<x+\varepsilon\le X_s\}}(\omega) \\
&\le 2
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

であることと，仮定 (A) から定数関数は $\sum|\Delta X_s|$ で可積分であることを用いれば，優収束定理により

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{0<s\le t}\frac{2\varepsilon}{X_s(\omega)-(x-\varepsilon)}1_{\{X_{s-}\le x<x+\varepsilon\le X_s\}}(\omega)(X_s(\omega)-x)\\
&\le \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{0<s\le t}\frac{2\varepsilon}{X_s(\omega)-(x-\varepsilon)}1_{\{X_{s-}\le x<x+\varepsilon\le X_s\}}(\omega)|\Delta X_s|\\
&=0.
\end{aligned}\tag{3.52}$$

したがって

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\sup_{[a,b]\subset[x-\varepsilon,x+\varepsilon]}|E_t(a,b)|\le 3\sum_{0<s\le t}1_{\{X_s=x\}}(\omega)|\Delta X_s(\omega)|+4\sum_{0<s\le t}1_{\{X_{s-}=x\}}(\omega)|\Delta X_s(\omega)|. \tag{3.53}$$

が成立．さらに高々可算個の x を除いて

$$\sum_{0<s\le t}1_{\{X_s=x\}}(\omega)|\Delta X_s(\omega)|=0 \tag{3.54}$$

$$\sum_{0<s\le t}1_{\{X_{s-}=x\}}(\omega)|\Delta X_s(\omega)|=0 \tag{3.55}$$

となる[*47]ことから補題の主張が示される． □

補題 37. X が仮定 (A) を満たすセミマルチンゲールとする．$Y_t=\arctan(X_t)$ によって新たなセミマルチンゲールを定める．このとき，任意の $p\ge 1$ に対して $Y\in\mathscr{H}^p_{loc}$ であり，さらに，確率 1 で

$$L^x_t(X)=(1+x^2)L^{\arctan(x)}_t(Y),\quad x\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R}_+ \tag{3.57}$$

が成立する[*48]．

証明．伊藤の公式より Y はセミマルチンゲールであり，$\arctan(x)$ の Lipschitz 連続性より Y が仮定 (A) を満たすことも分かる．$X=M+V+J(X)$ を標準分解とすれば，伊藤の公式より

$$\begin{aligned}
Y-Y_0&=\frac{1}{1+X_-^2}\bullet M+\frac{1}{1+X_-^2}\bullet(V+J(X))\\
&\quad-\frac{X_-}{(1+X_-^2)^2}\bullet\langle X^c,X^c\rangle_s+\sum_{0<s\le\cdot}\left[\Delta Y_s-\frac{1}{1+X_{s-}^2}\Delta X_s\right]\\
&=\frac{1}{1+X_-^2}\bullet M+\frac{1}{1+X_-^2}\bullet(V+J(X))\\
&\quad-\frac{X_-}{(1+X_-^2)^2}\bullet\langle X^c,X^c\rangle_s+\sum_{0<s\le\cdot}\Delta Y_s\\
&=\frac{1}{1+X_-^2}\bullet M+\frac{1}{1+X_-^2}\bullet V-\frac{X_-}{(1+X_{s-}^2)^2}\bullet\langle X^c,X^c\rangle+J(Y)
\end{aligned}\tag{3.58}$$

[*47] 実際，

$$\sum_{0<s\le t}1_{\{X_s=x\}}(\omega)|\Delta X_s(\omega)|>0 \tag{3.56}$$

を仮定すればある $s_x\in]0,t]$ が存在して $\Delta X_{s_x}\neq 0$ かつ $X_{s_x}=x$ となる．$x\neq y$ なら $s_x\neq s_y$ だから，このような x は高々可算個である．（*càdlàg* な関数は高々可算個のジャンプしか持たない．）

[*48] 論文では任意の t に対して，確率 1 で，任意の x に対して云々... となっているが，occupation time formula のこのノートでの定式化により，より強い主張が成立するはず．

が成立．$Y \in \mathscr{H}^p$ を確かめるには $J(Y)$ の全変動の可積分性を調べればよい．

$$T_n := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid K(Y)_t \geq n\} \tag{3.59}$$

によって停止時刻列を定めれば，$|\Delta Y_s| \leq \pi$ より[*49]$K(Y)_{T_n} \leq n + \pi$ となり，(T_n) が $\mathscr{H}^p$ に関する $J(X)$ の局所化列になっていることが分かる．故に $Y \in \mathscr{H}^p_{loc}$ である．

ここで $\Delta(x, \varepsilon) = \arctan(x+\varepsilon) - \arctan(x)$ と表すことにする．(3.58) の表現より $Y^c = (1+X_-^2)^{-1} \bullet M$ であることが分かるから，$\langle Y^c, Y^c \rangle = (1+X_-^2)^{-2} \bullet \langle M, M \rangle$ となる．

$$\operatorname{supp} d\langle Y^c, Y^c \rangle \subset \{s \in [0,t] \mid X_s \neq X_{s-}\} \tag{3.60}$$

であることに注意すれば，任意の $x \in \mathbb{R}$ と $\varepsilon > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(1+x^2)^2} \frac{\varepsilon}{\Delta(x,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1_{\{x \leq X_s \leq x+\varepsilon\}} d\langle X^c, X^c \rangle_s \\
&= \frac{\varepsilon}{\Delta(x,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \frac{1}{(1+x^2)^2} 1_{\{x \leq X_s \leq x+\varepsilon\}} d\langle X^c, X^c \rangle_s \\
&\geq \frac{\varepsilon}{\Delta(x,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \frac{1}{(1+X_s^2)^2} 1_{\{x \leq X_s \leq x+\varepsilon\}} d\langle X^c, X^c \rangle_s \\
&= \frac{\varepsilon}{\Delta(x,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \frac{1}{(1+X_{s-}^2)^2} 1_{\{x \leq X_s \leq x+\varepsilon\}} d\langle X^c, X^c \rangle_s \\
&= \frac{\varepsilon}{\Delta(x,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1_{\{x \leq X_s \leq x+\varepsilon\}} d\langle Y^c, Y^c \rangle_s \\
&= \frac{\varepsilon}{\Delta(x,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1_{\{\arctan(x) \leq Y_s \leq \arctan(x+\varepsilon)\}} d\langle Y^c, Y^c \rangle_s
\end{aligned} \tag{3.61}$$

および

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(1+(x+\varepsilon)^2)^2} \frac{\varepsilon}{\Delta(x,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1_{\{x \leq X_s \leq x+\varepsilon\}} d\langle X^c, X^c \rangle_s \\
&= \frac{\varepsilon}{\Delta(x,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \frac{1}{(1+(x+\varepsilon)^2)^2} 1_{\{x \leq X_s \leq x+\varepsilon\}} d\langle X^c, X^c \rangle_s \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\Delta(x,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \frac{1}{(1+X_s^2)^2} 1_{\{x \leq X_s \leq x+\varepsilon\}} d\langle X^c, X^c \rangle_s \\
&= \frac{\varepsilon}{\Delta(x,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \frac{1}{(1+X_{s-}^2)^2} 1_{\{x \leq X_s \leq x+\varepsilon\}} d\langle X^c, X^c \rangle_s \\
&= \frac{\varepsilon}{\Delta(x,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1_{\{x \leq X_s \leq x+\varepsilon\}} d\langle Y^c, Y^c \rangle_s \\
&= \frac{\varepsilon}{\Delta(x,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1_{\{\arctan(x) \leq Y_s \leq \arctan(x+\varepsilon)\}} d\langle Y^c, Y^c \rangle_s
\end{aligned} \tag{3.62}$$

[*49] そもそも $|\arctan(x)|$ が $\pi/2$ で抑えられている．

が成立．すなわち

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(1+(x+\varepsilon)^2)^2}\frac{\varepsilon}{\Delta(x,\varepsilon)}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t 1_{\{x\le X_s\le x+\varepsilon\}}d\langle X^c,X^c\rangle_s \\
&\le \frac{\varepsilon}{\Delta(x,\varepsilon)}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t 1_{\{\arctan(x)\le Y_s\le \arctan(x+\varepsilon)\}}d\langle Y^c,Y^c\rangle_s \\
&\le \frac{1}{(1+x^2)^2}\frac{\varepsilon}{\Delta(x,\varepsilon)}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t 1_{\{x\le X_s\le x+\varepsilon\}}d\langle X^c,X^c\rangle_s
\end{aligned}
\tag{3.63}
$$

である．

$$
\frac{\varepsilon}{\Delta(x,\varepsilon)}=\frac{\varepsilon}{\arctan(x+\varepsilon)-\arctan(x)}\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}\frac{1}{\arctan'(x)}=1+x^2 \tag{3.64}
$$

に注意すれば，系 27 より

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1+(x+\varepsilon)^2)^2}\frac{\varepsilon}{\Delta(x,\varepsilon)}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t 1_{\{x\le X_s\le x+\varepsilon\}}d\langle X^c,X^c\rangle_s &\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}\frac{1}{1+x^2}L_t^x(X) \\
\frac{1}{(1+x^2)^2}\frac{\varepsilon}{\Delta(x,\varepsilon)}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t 1_{\{x\le X_s\le x+\varepsilon\}}d\langle X^c,X^c\rangle_s &\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}\frac{1}{1+x^2}L_t^x(X) \\
\frac{\varepsilon}{\Delta(x,\varepsilon)}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t 1_{\{\arctan(x)\le Y_s\le \arctan(x+\varepsilon)\}}d\langle Y^c,Y^c\rangle_s &\xrightarrow[\varepsilon\to0]{} L_t^{\arctan(x)}(Y)
\end{aligned}
\tag{3.65}
$$

となる．(3.63), (3.3) より

$$
L_t^x(X)=(1+x^2)L_t^{\arctan(x)}(Y) \tag{3.66}
$$

□

ここまでの結果を用いて，定理 (35) の結果を *càdlàg* セミマルチンゲールまで拡張しよう．

$S(x,\delta)$ で，$x\in I$ かつ $0<|I|<\delta$ を満たす[*50]区間[*51]I の全体がなす集合をあらわすことにする．

定理 38. X は仮定 (A) を満たすセミマルチンゲールとする．このとき，確率 1 で次の主張が成立する：

(i) 任意の $T>0$ と高々可算個[*52]の $x\in\mathbb{R}$ を除いて

$$
\lim_{\nu\to0}\sup_{\substack{I\in S(x,\nu)\\ t\le T}}\left||I|N^+(0,t,I)-\frac{1}{2}L_t^x\right|=0 \tag{3.67}
$$

が成り立つ．

(ii) 任意の $T>0$ に対して

$$
\lim_{\nu\to0}\sup_{\substack{\pi\in\Pi(\nu)\\ 0\le t\le T}}\left|K_s^t(X,\pi)-\{\langle X^c,X^c\rangle_t-\langle X^c,X^c\rangle_s\}\right|=0 \tag{3.68}
$$

が成立．特に，殆ど全てのパスにおいて，$\langle X^c,X^c\rangle$ は X の arc length である．

*50 ただし $|I|$ は区間 I の長さである．

*51 この区間は閉区間，開区間，etc. 何でも良いとしているようだが，そもそも横断数は閉区間に対して定義されていたことと整合的でないのでは？論文 [21] の 7 ページを見よ．

*52 証明中の $D_1(\omega)\cup D_2(\omega)$ の元のこと．

証明．*Step 1-1.* まずは $X \in \mathscr{H}^2_{loc}$ と仮定して[*53]，確率 1 で任意の t に対して，高々可算個の x を除いて

$$\lim_{\nu \to 0} \sup_{I \in S(x,\nu)} \left| |I| N^+(0,t,I) - \frac{1}{2} L_t^x \right| = 0 \tag{3.69}$$

が成り立つことを示す．(ω, t) に対して，

$$D_1(\omega,t) = \{X_s, X_{s-} \mid s \in [0,t], \Delta X_s(\omega) \neq 0\}, \quad D_2(\omega,t) = \{x \in \mathbb{R} \mid L_t^x(\omega) \neq L_t^{x-}(\omega)\} \tag{3.70}$$

と定めよう．補題 29 (i) と補題 30 より補題 36 (ii) により，ある P-零集合 N が存在して $\Omega \setminus N$ 上では

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t 1_{\{x-\varepsilon < X_{s-} \le x+\varepsilon\}}(\omega) |d(V+J)_s(\omega)| = 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus (D_1(\omega,t) \cup D_2(\omega,t)), \tag{3.71}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{[a,b] \subset [x-\varepsilon, x+\varepsilon]} |E_t(a,b)| = 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus D_1(\omega,t), \tag{3.72}$$

$$\max_{x \in R_k} \left| \int_0^t 1_{U([x,x+k^{-6}])} 1_{\{X_{s-} > x\}} dM_s(\omega) \right| \le \frac{1}{k^{1/2}}, \quad \text{for large enough k.} \tag{3.73}$$

が成立．$x \in \mathbb{R} \setminus (D_1(\omega) \cup D_2(\omega))$ を任意にとって固定する．δ を $0 < \delta < 1$ を満たす任意の実数としよう．局所時間が x について *càdlàg* であることと ω の選び方よりある実数 $\varepsilon = \varepsilon(\omega,\delta)$ と $B = B(\omega,\delta)$，そして自然数 $N = N(\omega,\delta)$ で以下を満たすようなものが存在する[*54]：

$$0 < \varepsilon < \delta, \quad B > 1, \quad N \in \mathbb{N}_{\ge 2}, \tag{3.74}$$

$$\int_0^t 1_{\{x-\varepsilon < X_{s-} \le x+\varepsilon\}}(\omega) |d(V+J)_s(\omega)| < \delta \tag{3.75}$$

$$\sup_{[a,b] \subset [x-\varepsilon, x+\varepsilon]} |E_t(a,b)| < \delta \tag{3.76}$$

$$\max_{x \in R_k} \left| \int_0^t 1_{U([x,x+k^{-6}])} 1_{\{X_{s-} > x\}} dM_s(\omega) \right| \le \frac{1}{k^{1/2}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_{\ge N} \tag{3.77}$$

$$\left| \frac{1}{2} L_t^y(\omega) - \frac{1}{2} L_t^x(\omega) \right| < \delta, \quad \text{if } |y-x| < \varepsilon \tag{3.78}$$

$$\sup_{0 \le s \le t} |X_s(\omega)| + 1 < N \tag{3.79}$$

$$\int_0^t |dV_s(\omega)| + K(X)_t(\omega) + \sup_{x \in \mathbb{R}} L_t^x(\omega) < B \tag{3.80}$$

$$\frac{1}{N^{1/2}} \vee \left| \left(1 - \frac{2}{N}\right)^6 - 1 \right| < \frac{\delta}{B} \tag{3.81}$$

$$\frac{1}{N^6} < \frac{\varepsilon}{8} \tag{3.82}$$

$$\frac{1}{(k-1)^6} - \frac{1}{(k-1)^7} > \frac{1}{k^6}, \quad \text{for } k \ge N \tag{3.83}$$

$\nu \le (N+1)^{-6}$ および $I \in S(x,\nu)$ を選ぶ．$S(x,\nu)$ の定義より $x \in I$ かつ

$$|I| < \nu \le \frac{1}{(N+1)^6} < \frac{1}{N^6} < \frac{\varepsilon}{8} \tag{3.84}$$

[*53] この仮定は補題 30 の結果を用いるために必要である．

[*54] x は $L_t^{\cdot}(\omega)$ の連続点として取っていることに注意せよ．

であるから，$I \subset [x-\varepsilon/8, x+\varepsilon/8]$ が成立．$I=[a,b]$ と書くことにしよう．ここで

$$\frac{1}{(m+1)^6} < |I| \le \frac{1}{m^6} \tag{3.85}$$

を満たす $m=m(I)$ を取ろう[*55]．$|x| \ge N-1$ なら，$N^+(0,t,I)$ の定義と系 27，そして (3.79) から

$$L_t^x(\omega) = N^+(0,t,I) = 0 \tag{3.86}$$

となる．$|x| < N-1$ の時，$a_k = a_k(I) = \max\{y \in R_k \mid y \le a\}$ $(k \ge N)$ として，

$$\begin{aligned} I_{m-1} &= \left[a_{m-1}, a_{m-1} + \frac{1}{(m-1)^6}\right], \\ I^0_{m+2} &= \left[a_{m+2} + \frac{1}{(m+2)^7}, a_{m+2} + \frac{1}{(m+2)^7} + \frac{1}{(m+2)^6}\right] \end{aligned} \tag{3.87}$$

と定めよう．a_k の定義および (3.83) より

$$b \le x + \frac{1}{m^6} \le \left(a_{m-1} + \frac{1}{(m-1)^7}\right) + \frac{1}{m^6} < a_{m-1} + \frac{1}{(m-1)^6} \tag{3.88}$$

であるから，

$$a_{m-1} \le a < b < a_{m-1} + \frac{1}{(m-1)^6} \tag{3.89}$$

が成立．また，(3.83) より

$$\frac{1}{(m+2)^6} < \frac{1}{(m+1)^6} - \frac{1}{(m+1)^7} < \frac{1}{(m+1)^6} - \frac{1}{(m+2)^7} \tag{3.90}$$

だから，

$$\begin{aligned} a < a_{m+2} + \frac{1}{(m+2)^7} &< a_{m+2} + \frac{1}{(m+2)^7} + \frac{1}{(m+2)^6} \\ &< a_{m+2} + \frac{1}{(m+1)^6} < a_{m+2} + |I| \le a + |I| = b \end{aligned} \tag{3.91}$$

も成り立つ．(3.89) と (3.91)，そして (3.82) から

$$I^0_{m+2} \subset I \subset I_{m-1} \subset \left[x - \frac{\varepsilon}{8}, x + \frac{\varepsilon}{8}\right] \tag{3.92}$$

が分かる．$I \subset J$ ならば $N^+(0,t,I) \ge N^+(0,t,J)$ となることに注意すれば，(3.85) より

$$\begin{aligned} \frac{1}{(m+1)^6} N^+(0,t,I_{m-1}) - \frac{1}{2}L_t^x &\le |I| N^+(0,t,I_{m-1}) - \frac{1}{2}L_t^x \\ &\le |I| N^+(0,t,I) - \frac{1}{2}L_t^x \\ &\le |I| N^+(0,t,I^0_{m+2}) - \frac{1}{2}L_t^x \\ &\le \frac{1}{m^6} N^+(0,t,I^0_{m+2}) - \frac{1}{2}L_t^x \end{aligned} \tag{3.93}$$

[*55] このとき $m > N$ である．

を得る．(3.93) から

$$
\begin{aligned}
&\sup_{I\in S(x,\nu)}\left||I|N^+(0,t,I)-\frac{1}{2}L_t^x\right| \\
&\le\left(\sup_{I\in S(x,\nu)}\left|\frac{1}{(m+1)^6}N^+(0,t,I_{m-1})-\frac{1}{2}L_t^x\right|\right)\vee\left(\sup_{I\in S(x,\nu)}\left|\frac{1}{m^6}N^+(0,t,I_{m+2}^0)-\frac{1}{2}L_t^x\right|\right)
\end{aligned}\tag{3.94}
$$

となるので，(3.94) 右辺の挙動を調べればよいことが分かる．$m>N$ であったから (3.81) より

$$
\left|\frac{(m-1)^6}{(m+1)^6}-1\right|=1-\left(1-\frac{2}{m+1}\right)^6\le 1-\left(1-\frac{2}{N}\right)^6<\frac{\delta}{B}<\delta \tag{3.95}
$$

が成立．

$$
\begin{aligned}
&\sup_{I\in S(x,\nu)}\left|\frac{1}{(m+1)^6}N^+(0,t,I_{m-1})-\frac{1}{2}L_t^x\right| \\
&\le\frac{(m-1)^6}{(m+1)^6}\sup_{I\in S(x,\nu)}\left|\frac{1}{(m-1)^6}N^+(0,t,I_{m-1})-\frac{1}{2}L_t^{a_{m-1}}\right| \\
&\quad+\frac{(m-1)^6}{(m+1)^6}\sup_{I\in S(x,\nu)}\left|\frac{1}{2}L_t^{a_{m-1}}-\frac{1}{2}L_t^x\right|+\left|\frac{(m-1)^6}{(m+1)^6}-1\right|\left|\frac{1}{2}L_t^x\right| \\
&\le\sup_{I\in S(x,\nu)}\left|\frac{1}{(m-1)^6}N^+(0,t,I_{m-1})-\frac{1}{2}L_t^{a_{m-1}}\right| \\
&\quad+\sup_{I\in S(x,\nu)}\left|\frac{1}{2}L_t^{a_{m-1}}-\frac{1}{2}L_t^x\right|+\frac{\delta}{B}\left|\frac{1}{2}L_t^x\right|
\end{aligned}\tag{3.96}
$$

が成立するから，(3.96) の各項を評価する．(3.80) より

$$
\frac{\delta}{B}\left|\frac{1}{2}L_t^x\right|<\frac{\delta}{B}\times\frac{B}{2}=\frac{\delta}{2}\tag{3.97}
$$

である．(3.82) と a_k の定義より，任意の $I=[a,b]\in S(x,\nu)$ と $m\ge N+1$ に対して

$$
|a_{m-1}-x|\le|a_{m-1}-a|+|a-x|\le\frac{1}{k^7}+\nu\le\frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon}{8}=\frac{\varepsilon}{4}<\varepsilon\tag{3.98}
$$

だから，(3.78) を用いれば

$$
\sup_{I\in S(x,\nu)}\left|\frac{1}{2}L_t^{a_{m-1}}-\frac{1}{2}L_t^x\right|\le\delta\tag{3.99}
$$

となる．(2.33) および (3.82), (3.92), (3.75), (3.76), (3.77) から

$$
\begin{aligned}
&\sup_{I\in S(x,\nu)}\left|\frac{1}{(m-1)^6}N^+(0,t,I_{m-1})-\frac{1}{2}L_t^{a_{m-1}}\right| \\
&=\sup_{I\in S(x,\nu)}\left|\int_0^t 1_{U(X;I_{m-1})}(\cdot,s)1_{\{X_->a_{m-1}\}}(\cdot,s)d(V+J)_s\right| \\
&\quad+\sup_{I\in S(x,\nu)}\left|\int_0^t 1_{U(X;I_{m-1})}(\cdot,s)1_{\{X_->a_{m-1}\}}(\cdot,s)dM_s\right| \\
&\quad+\sup_{I\in S(x,\nu)}\left|(X_t-a_{m-1})1_{D^o(I_{m-1})}(\cdot,t)-(X_t-a_{m-1})^+\right| \\
&\quad+\sup_{I\in S(x,\nu)}\left|E_t\left(a_{m-1},a_{m-1}+\frac{1}{(m-1)^6}\right)\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sup_{I\in S(x,\nu)} \int_0^t 1_{U(X;I_{m-1})}(\cdot,s) 1_{\{a_{m-1}+(m-1)^6 \geq X_- > a_{m-1}\}}(\cdot,s)\,|d(V+J)_s| \\
&\quad + \sup_{I\in S(x,\nu)} \left| \int_0^t 1_{U(X;I_{m-1})}(\cdot,s) 1_{\{X_- > a_{m-1}\}}(\cdot,s) dM_s \right| \\
&\quad + \sup_{I\in S(x,\nu)} \left| (X_t - a_{m-1})^+ 1_{U^o(I_{m-1})}(\cdot,t) \right| \\
&\quad + \sup_{I\in S(x,\nu)} \left| E_t \left(a_{m-1}, a_{m-1} + \frac{1}{(m-1)^6} \right) \right| \\
&\leq \sup_{I\in S(x,\nu)} \int_0^t 1_{\{a_{m-1} < X_{s}- \leq a_{m-1}+(m+1)^{-6}\}}\,|d(V+J)_s| \\
&\quad + \sup_{I\in S(x,\nu)} \left| \int_0^t 1_{U(X;I_{m-1})}(\cdot,s) 1_{\{X_- > a_{m-1}\}}(\cdot,s) dM_s \right| \\
&\quad + \sup_{I\in S(x,\nu)} \left| \left(a_{m-1} + \frac{1}{(m-1)^6} \right) - a_{m-1} \right| \\
&\quad + \sup_{I\in S(x,\nu)} \left| E_t \left(a_{m-1}, a_{m-1} + \frac{1}{(m-1)^6} \right) \right| \\
&\leq \sup_{I\in S(x,\nu)} \int_0^t 1_{\{a_{m-1} < X_{s}- \leq a_{m-1}+(m+1)^{-6}\}}\,|d(V+J)_s| \\
&\quad + \sup_{I\in S(x,\nu)} \left| \int_0^t 1_{U(X;I_{m-1})}(\cdot,s) 1_{\{X_- > a_{m-1}\}}(\cdot,s) dM_s \right| \\
&\quad + \sup_{I\in S(x,\nu)} \left| E_t \left(a_{m-1}, a_{m-1} + \frac{1}{(m-1)^6} \right) \right| + \frac{1}{N^6} \\
&\leq \sup_{I\in S(x,\nu)} \int_0^t 1_{\{x-\varepsilon < X_{s}- \leq x+\varepsilon\}}\,|d(V+J)_s| \\
&\quad + \sup_{I\in S(x,\nu)} \sup_{x\in R_{m-1}} \left| \int_0^t 1_{U([x,x+(m-1)^{-6}])}(\cdot,s) 1_{\{X_- > x\}}(\cdot,s) dM_s \right| \\
&\quad + \sup_{[a,b]\subset[x-\varepsilon,x+\varepsilon]} |E_t([a,b])| + \frac{1}{N^6} \\
&\leq \delta + \frac{1}{(m-1)^{1/2}} + \delta + \frac{\varepsilon}{8} \\
&< \delta + \frac{\delta}{B} + \delta + \frac{\varepsilon}{8} \\
&< \delta + \delta + \delta + \delta = 4\delta
\end{aligned} \tag{3.100}
$$

が成立．(3.96), (3.97), (3.99), (3.100) から，

$$
\begin{aligned}
&\sup_{I\in S(x,\nu)} \left| \frac{1}{(m+1)^6} N^+(0,t,I_{m-1}) - \frac{1}{2} L_t^x \right| \\
&\leq \sup_{I\in S(x,\nu)} \left| \frac{1}{(m-1)^6} N^+(0,t,I_{m-1}) - \frac{1}{2} L_t^{a_{m-1}} \right| + \sup_{I\in S(x,\nu)} \left| \frac{1}{2} L_t^{a_{m-1}} - \frac{1}{2} L_t^x \right| + \frac{\delta}{B} \left| \frac{1}{2} L_t^x \right| \\
&< 4\delta + \delta + \frac{\delta}{2} < 4\delta + \delta + \delta = 6\delta
\end{aligned} \tag{3.101}
$$

が示される[*56]．同様の議論によって

$$\sup_{I\in S(x,\nu)}\left|\frac{1}{m^6}N^+(0,t,I^0_{m+2})-\frac{1}{2}L^x_t\right|<6\delta \tag{3.102}$$

も分かる．(3.94), (3.101), (3.102) より

$$\sup_{I\in S(x,\nu)}\left||I|N^+(0,t,I)-\frac{1}{2}L^x_t\right|<6\delta \tag{3.103}$$

が成立．(3.103) の左辺は ν について単調増大だから，(3.103) で ν を任意の $0<\mu\le\nu$ に取り換えても同じ評価が成り立つ．δ は $0<\delta<1$ なる任意の実数だったから，これは

$$\lim_{\nu\to 0}\sup_{I\in S(x,\nu)}\left||I|N^+(0,t,I)-\frac{1}{2}L^x_t\right|=0 \tag{3.104}$$

が成り立つということに他ならない．

Step 1-2. Step 1-1 と同様の仮定の下，(3.104) から (3.67) を導こう．ω を step 1-1 と同じ確率 1 の集合から選び，$T>0$，$x\in\mathbb{R}\setminus(D_1(\omega,T)\cup D_2(\omega,T))$ とする．区間 $[0,T]$ 上で $L^x_\cdot(\omega)$ は一様連続だから，任意の $\delta>0$ に対して区間の分割 $[0,T]=\bigcup_{1\le i\le n}[t_{i-1},t_i]$ を十分細かく取れば

$$\max_{1\le i\le n}|L^x_{t_{i-1}}(\omega)-L^x_{t_i}(\omega)|<\delta \tag{3.105}$$

とすることが出来る．$t\in[t_{i-1},t_i]\subset[0,T]$ の時は，$I\in S(x,\nu)$ に対して

$$\begin{aligned}
&\left||I|N^+(0,t,I)(\omega)-\frac{1}{2}L^x_t(\omega)\right|\\
&\le ||I|N^+(0,t,I)(\omega)-N^+(0,t_{i-1},I)(\omega)|\\
&\quad+\left||I|N^+(0,t_{i-1},I)(\omega)-\frac{1}{2}L^x_{t_{i-1}}(\omega)\right|+\left|\frac{1}{2}L^x_{t_{i-1}}(\omega)-\frac{1}{2}L^x_t(\omega)\right|\\
&\le ||I|N^+(0,t_i,I)-|I|N^+(0,t_{i-1},I)|\\
&\quad+\left||I|N^+(0,t_{i-1},I)(\omega)-\frac{1}{2}L^x_{t_{i-1}}(\omega)\right|+\left|\frac{1}{2}L^x_{t_{i-1}}(\omega)-\frac{1}{2}L^x_t(\omega)\right|\\
&\le \left||I|N^+(0,t_i,I)-\frac{1}{2}L^x_{t_i}\right|+\left|\frac{1}{2}L^x_{t_i}(\omega)-\frac{1}{2}L^x_{t_{i-1}}(\omega)\right|\\
&\quad+2\left||I|N^+(0,t_{i-1},I)-\frac{1}{2}L^x_{t_{i-1}}(\omega)\right|+\left|\frac{1}{2}L^x_{t_{i-1}}(\omega)-\frac{1}{2}L^x_t(\omega)\right|\\
&<\sup_{I\in S(x,\nu)}\left||I|N^+(0,t_i,I)-\frac{1}{2}L^x_{t_i}\right|\\
&\quad+2\sup_{I\in S(x,\nu)}\left||I|N^+(0,t_{i-1},I)-\frac{1}{2}L^x_{t_{i-1}}(\omega)\right|+2\delta
\end{aligned} \tag{3.106}$$

が成立つから，

$$\sup_{\substack{I\in S(x,\nu)\\ t\in[0,T]}}\left||I|N^+(0,t,I)(\omega)-\frac{1}{2}L^x_t(\omega)\right|<3\bigvee_{1\le i\le n}\sup_{I\in S(x,\nu)}\left||I|N^+(0,t_i,I)-\frac{1}{2}L^x_{t_i}\right|+2\delta \tag{3.107}$$

[*56] $0<\delta<1$ より $\delta^2<\delta$ である．

という不等式を得る．(3.107) において極限を取れば，step 1-1 の結果より

$$\lim_{\nu\to0}\sup_{\substack{I\in S(x,\nu)\\ t\in[0,T]}}\left||I|N^+(0,t,I)(\omega)-\frac{1}{2}L_t^x(\omega)\right|\le 2\delta \tag{3.108}$$

が成立．δ は任意の正の実数だったから

$$\lim_{\nu\to0}\sup_{\substack{I\in S(x,\nu)\\ t\in[0,T]}}\left||I|N^+(0,t,I)(\omega)-\frac{1}{2}L_t^x(\omega)\right|=0. \tag{3.109}$$

Step 1-3. $X\in\mathscr{H}_{loc}^2$ の仮定を取り除く．X は仮定 (A) を満たすセミマルチンゲールとする．$Y=\arctan(X)$ とすれば，補題 37 より $Y\in\mathscr{H}_{loc}^2$ であり確率 1 で

$$L_t^x(X)=(1+x^2)L_t^{\arctan(x)}(Y),\quad x\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R}_+ \tag{3.110}$$

が成立．また，横断数の定義より

$$N^+(0,t,a,b,X)(\omega)=N^+(0,t,\arctan(a),\arctan(b),Y)(\omega) \tag{3.111}$$

となることに注意しておく．(3.109) と (3.110) をともに満たすような ω を任意に選ぶ．記号の簡単化のため，$x\in\mathbb{R}$ に対して $\arctan(x)=\overline{x}$ と表記することにしよう．このとき，任意の $T>0$ と $x\in\mathbb{R}\setminus(D_1(\omega,T)\cup D_2(\omega,T))$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\left|(b-a)N^+(0,t,a,b,X)(\omega)-\frac{1}{2}L_t^x(X)(\omega)\right|\\
&=\left|\frac{(b-a)}{\overline{b}-\overline{a}}(\overline{b}-\overline{a})N^+(0,t,\overline{a},\overline{b},Y)(\omega)-\frac{1}{2}(1+x^2)L_t^{\overline{x}}(Y)(\omega)\right|\\
&\le\frac{(b-a)}{\overline{b}-\overline{a}}\left|(\overline{b}-\overline{a})N^+(0,t,\overline{a},\overline{b},Y)(\omega)-\frac{1}{2}L_t^{\overline{x}}(Y)(\omega)\right|\\
&\quad+\left|\frac{(b-a)}{\overline{b}-\overline{a}}-(1+x^2)\right|L_t^{\overline{x}}(Y)(\omega)\\
&\le\frac{(b-a)}{\overline{b}-\overline{a}}\sup_{\substack{[a,b]\in S(x,\nu)\\ a<b}}\left|(\overline{b}-\overline{a})N^+(0,t,\overline{a},\overline{b},Y)(\omega)-\frac{1}{2}L_t^{\overline{x}}(Y)(\omega)\right|\\
&\quad+\left|\frac{(b-a)}{\overline{b}-\overline{a}}-(1+x^2)\right|L_t^{\overline{x}}(Y)(\omega)
\end{aligned} \tag{3.112}$$

が成立．これより

$$\lim_{\nu\to0}\sup_{[a,b]\in S(x,\nu)}\left|(b-a)N^+(0,t,a,b,X)(\omega)-\frac{1}{2}L_t^x(X)(\omega)\right| \tag{3.113}$$

が分かる[*57]．

Step 2-1. ここまでの設定を引き続き適用する．(ii) を示す為に，まずは次の主張を証明する：

$$\lim_{\nu\to0}\sup_{\pi\in\Pi(\nu)}\left|K_0^t(X,\pi)-\langle X^c,X^c\rangle_t\right|=0,\quad \forall t\in\mathbb{R}_+. \tag{3.114}$$

補題 36 (ii) の証明中の式 (3.49) を思い出せば，

$$\sup_{[a,b]\subset[x-\epsilon,x+\epsilon]}|E_t(a,b)(\omega)|\le 8K(X)_t(\omega) \tag{3.115}$$

*57 arctan（または tan）の微分を思い出せ．

という評価が成り立つのであった．(3.77), (3.80), (3.100), (3.115) を用いれば，

$$
\begin{aligned}
&\sup_{I\in S(x,\nu)}\left|\frac{1}{(m-1)^6}N^+(0,t,I_{m-1})-\frac{1}{2}L_t^{a_{m-1}}\right| \\
&\le \sup_{I\in S(x,\nu)}\int_0^t 1_{\{x-\varepsilon<X_{s-}\le x+\varepsilon\}}\,|d(V+J)_s| \\
&\quad+\sup_{I\in S(x,\nu)}\sup_{x\in R_{m-1}}\left|\int_0^t 1_{U([x,x+(m-1)^{-6}])}(\cdot,s)1_{\{X_->x\}}(\cdot,s)dM_s\right| \\
&\quad+\sup_{[a,b]\subset[x-\varepsilon,x+\varepsilon]}|E_t([a,b])|+\frac{1}{N^6} \\
&\le \int_0^t |dV_s(\omega)|+\int_0^t|dJ(X)_s(\omega)| \\
&\quad+\sup_{I\in S(x,\nu)}\sup_{x\in R_{m-1}}\left|\int_0^t 1_{U([x,x+(m-1)^{-6}])}(\cdot,s)1_{\{X_->x\}}(\cdot,s)dM_s\right| \\
&\quad+\sup_{[a,b]\subset[x-\varepsilon,x+\varepsilon]}|E_t([a,b])|+\frac{1}{N^6} \\
&\le \int_0^t|dV_s(\omega)|+9K(X)_t(\omega)+\frac{1}{(m-1)^6}+\frac{1}{N^6} \\
&< 9B+2<11B
\end{aligned}
\tag{3.116}
$$

さらに (3.96) を用いれば

$$
\begin{aligned}
&\sup_{I\in S(x,\nu)}\left|\frac{1}{(m+1)^6}N^+(0,t,I_{m-1})-\frac{1}{2}L_t^{x}\right| \\
&\le \frac{(m-1)^6}{(m+1)^6}\sup_{I\in S(x,\nu)}\left|\frac{1}{(m-1)^6}N^+(0,t,I_{m-1})-\frac{1}{2}L_t^{a_{m-1}}\right| \\
&\quad+\frac{(m-1)^6}{(m+1)^6}\sup_{I\in S(x,\nu)}\left|\frac{1}{2}L_t^{a_{m-1}}-\frac{1}{2}L_t^x\right|+\left|\frac{(m-1)^6}{(m+1)^6}-1\right|\left|\frac{1}{2}L_t^x\right| \\
&\le \sup_{I\in S(x,\nu)}\left|\frac{1}{(m-1)^6}N^+(0,t,I_{m-1})-\frac{1}{2}L_t^{a_{m-1}}\right| \\
&\quad+\sup_{I\in S(x,\nu)}\left|\frac{1}{2}L_t^{a_{m-1}}-\frac{1}{2}L_t^x\right|+\left|\frac{1}{2}L_t^x\right| \\
&\le 11B+2B+B=14B
\end{aligned}
\tag{3.117}
$$

I^0_{m+2} に対しても同様の議論を行えば，(3.94) より x によらない定数 c によって

$$
\sup_{I\in S(x,\nu)}\left||I|N^+(0,t,I)-\frac{1}{2}L_t^x\right|\le cB,\quad x\in\mathbb{R} \tag{3.118}
$$

という評価が成り立つことが分かる．十分大きい $M=M(\omega,t)\in\mathbb{N}$ を取れば，(3.118) 左辺は $x>M$ で 0 となるから，(i) の結果と優収束定理により[*58]

$$
\lim_{\nu\to 0}\int_{\mathbb{R}}\sup_{I\in S(x,\nu)}||I|N(0,t,I)-L_t^x|\,dx
$$

*58 被積分関数は $x\in\mathbb{R}\setminus(D_1(\omega,t)\cup D_2(\omega,t))$ でしか収束が保証されないが，$D_1(\omega,t)\cup D_2(\omega,t)$ は可算集合であり，よって Lebesgue 測度零である．

$$= \lim_{\nu \to 0} \int_{[-M,M]} \sup_{I \in S(x,\nu)} ||I|N(0,t,I) - L_t^x|\, dx = 0 \tag{3.119}$$

が成立[*59]．K_0^t の定義より

$$K_0^t(X,\pi) = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{x_i \in \pi} (x_{i+1} - x_i) N(0,t,x_i,x_{i+1}) 1_{]x_i,x_{i+1}]}(x) \right) dx \tag{3.120}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
&|K_0^t(X,\pi) - \langle X^c, X^c \rangle_t| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{x_i \in \pi} (x_{i+1} - x_i) N(0,t,x_i,x_{i+1}) 1_{]x_i,x_{i+1}]}(x) \right) dx - \langle X^c, X^c \rangle_t \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{x_i \in \pi} (x_{i+1} - x_i) N(0,t,x_i,x_{i+1}) 1_{]x_i,x_{i+1}]}(x) \right) dx - \int_{\mathbb{R}} L_t^x dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \sum_{x_i \in \pi} |(x_{i+1} - x_i) N(0,t,x_i,x_{i+1}) - L_t^x|\, 1_{]x_i,x_{i+1}]}(x) dx
\end{aligned} \tag{3.121}$$

という評価が成立する．先ほどの $M = M(\omega, t)$ をとれば任意の $\pi \in \Pi(\nu)$ に対して

$$\begin{aligned}
&\sum_{x_i \in \pi} |(x_{i+1} - x_i) N(0,t,x_i,x_{i+1}) - L_t^x|\, 1_{]x_i,x_{i+1}]}(x) \\
&\leq \sup_{x_i \in \pi} |(x_{i+1} - x_i) N(0,t,x_i,x_{i+1}) - L_t^x|\, 1_{[-M,M]}(x) \\
&\leq \sup_{I \in S(x,\nu)} ||I|N(0,t,I) - L_t^x|\, 1_{[-M,M]}(x)
\end{aligned} \tag{3.122}$$

となることに注意する．(3.119) と (3.122)

$$\begin{aligned}
&\sup_{\pi \in \Pi(\nu)} \sum_{x_i \in \pi} \int_{\mathbb{R}} |(x_{i+1} - x_i) N(0,t,x_i,x_{i+1}) - L_t^{x_i}|\, 1_{]x_i,x_{i+1}]}(x) dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \sup_{I \in S(x,\nu)} ||I|N(0,t,I) - L_t^x|\, 1_{[-M,M]}(x) dx \xrightarrow[\nu \to 0]{} 0
\end{aligned} \tag{3.123}$$

が成り立つ．これで (3.114) が示された．

Step 2. (3.114) から (3.68) が導かれることを示す．横断数の定義から

$$|N^+(0,s,[a,b]) + N^+(s,t,[a,b]) - N^+(0,t,[a,b])| \leq 1 \tag{3.124}$$

および $|N^+ - N^-| \leq 1$ であることがが分かる．$K_s^t(X;\pi)$ の定義を思い出せば，

$$\begin{aligned}
&|K_0^s(X;\pi) + K_s^t(X;\pi) - K_0^t(X;\pi)| \\
&= \sum_i (x_{i+1}^\pi - x_i^\pi)^2 \left| N(0,s,x_i^\pi,x_{i+1}^\pi) + N(s,t,x_i^\pi,x_{i+1}^\pi) - N(0,t,x_i^\pi,x_{i+1}^\pi) \right| \\
&\leq \|\pi\| \sum_i (x_{i+1}^\pi - x_i^\pi) \left| N(0,s,x_i^\pi,x_{i+1}^\pi) + N(s,t,x_i^\pi,x_{i+1}^\pi) - N(0,t,x_i^\pi,x_{i+1}^\pi) \right| \\
&\leq \|\pi\| \left(2 \sup_{0 \leq u \leq t} |X_u(\omega)| \right) \times 5
\end{aligned} \tag{3.125}$$

[*59] (i) の主張や先ほどの評価は N^+ に関するものだったが，N^+ と N^- の差が高々 1 であることを用いれば (3.119) も明らかである．

となるから，

$$
\begin{aligned}
&|K_s^t(X,\pi)-(\langle X^c,X^c\rangle_t-\langle X^c,X^c\rangle_s)| \\
&\le |K_0^t(X,\pi)-\langle X^c,X^c\rangle_t|+|K_0^s(X;\pi)-\langle X^c,X^c\rangle_s|+|K_0^s(X;\pi)+K_s^t(X;\pi)-K_0^t(X;\pi)| \qquad (3.126)
\end{aligned}
$$

に注意すれば

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\substack{\pi\in\Pi(\nu)\\ 0\le s<t\le T}} |K_s^t(X,\pi)-(\langle X^c,X^c\rangle_t-\langle X,X\rangle_s)| \\
&\le 2\sup_{\substack{\pi\in\Pi(\nu)\\ t\le T}} |K_0^t(X,\pi)-\langle X^c,X^c\rangle_t|+10\nu\sup_{0\le u\le T}|X_u(\omega)| \qquad (3.127)
\end{aligned}
$$

となる．したがって，特に $s=0$ の場合に (3.68) を示せば十分であることが分かる．$\langle X^c,X^c\rangle_s$ の $[0,T]$ 上での一様連続性より任意の $\varepsilon>0$ に対してある $\gamma>0$ が存在して，$|u-v|\le\gamma$ なら $|\langle X^c,X^c\rangle_u-\langle X^c,X^c\rangle_v|<\varepsilon$ が成立．ここで，分割 $[0,T]=\bigcup_{1\le i\le n}[t_{i-1},t_i]$ を $\max_{1\le i\le n}|t_i-t_{i-1}|\le\gamma$ を満たすように選ぶ．$t\in[t_{i-1},t_i]\subset[0,T]$ の時は

$$
\begin{aligned}
&|K_0^t(X,\pi)-\langle X^c,X^c\rangle_t| \\
&\le |K_0^t(X;\pi)-K_0^{t_{i-1}}(X;\pi)| \\
&\quad +\left|K_0^{t_{i-1}}(X;\pi)-\langle X^c,X^c\rangle_{t_{i-1}}\right|+|\langle X,X\rangle_{t_{i-1}}-\langle X^c,X^c\rangle_t| \\
&\le |K_0^{t_i}(X;\pi)-K_0^{t_{i-1}}(X;\pi)| \\
&\quad +\left|K_0^{t_{i-1}}(X;\pi)-\langle X^c,X^c\rangle_{t_{i-1}}\right|+|\langle X^c,X^c\rangle_{t_{i-1}}-\langle X,X\rangle_t| \\
&\le |K_0^{t_i}(X;\pi)-K_0^{t_{i-1}}(X;\pi)|+\left|\langle X^c,X^c\rangle_{t_{i-1}}-\langle X^c,X^c\rangle_{t_i}\right| \\
&\quad +2\left|K_0^{t_{i-1}}(X;\pi)-\langle X^c,X^c\rangle_{t_{i-1}}\right|+|\langle X^c,X^c\rangle_{t_{i-1}}-\langle X^c,X^c\rangle_t| \\
&\le |K_0^{t_i}(X;\pi)-K_0^{t_{i-1}}(X;\pi)|+2\left|K_0^{t_{i-1}}(X;\pi)-\langle X^c,X^c\rangle_{t_{i-1}}\right|+2\varepsilon \qquad (3.128)
\end{aligned}
$$

が成立．(3.114) を用いれば，各 $i\in\{0,\dots,n-1\}$ に対して

$$
\lim_{\nu\to0}\sup_{\substack{\pi\in\Pi(\nu)\\ t\in[t_i,t_{i+1}]}} |K_0^t(X,\pi)-\langle X^c,X^c\rangle_t|\le2\varepsilon \qquad (3.129)
$$

であり，特に

$$
\lim_{\nu\to0}\sup_{\substack{\pi\in\Pi(\nu)\\ t\le T}} |K_0^t(X,\pi)-\langle X^c,X^c\rangle_t|\le2\varepsilon \qquad (3.130)
$$

が分かる．$\varepsilon>0$ は任意に選んだものだったから，

$$
\lim_{\nu\to0}\sup_{\substack{\pi\in\Pi(\nu)\\ t\le T}} |K_0^t(X,\pi)-\langle X^c,X^c\rangle_t|=0 \qquad (3.131)
$$

となり，命題の主張が示された． □

付録 A　補足

A.1　Kolmogorov の連続変形定理

この節では，Kolmogorov の連続変形定理の証明を行う．これはブラウン運動の構成において使われることが多いものだが，このノートでは局所時間の regularity に関する命題の証明に用いる．

初めに，関数の Höllder 連続性の定義を復習しておこう．$(E,\|\quad\|_E)$ を Banach 空間とする．ここでは，$x=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$ のノルムを $\|x\|=\sup_i|x_i|$ で定めることにする[*60]．関数 $f:\mathbb{R}^d\to E$ が局所 α 次 Höllder 連続であるとは，任意の $L>0$ に対して

$$\sup\left\{\frac{\|f(x)-f(y)\|_E}{\|x-y\|^\alpha}\;\middle|\;\|x\|,\|y\|\le L, x\neq y\right\}<+\infty \tag{A.1.1}$$

が成立するということであった．言い換えれば，任意の $L>0$ に対してある定数 $C_L>0$ が存在して，

$$\|x\|,\|y\|\Longrightarrow\|f(x)-f(y)\|_E\le C_L\|x-y\|^\alpha \tag{A.1.2}$$

が成り立つということでもある．

定理 39 (Kolmogorov の連続変形定理)**.** I_i $(i\in\{1,\dots,d\})$ を $\mathbb{R}$ の有界区間とし，$I=\prod_{i=1}^d I_i$ と置く．$(X_t)_{t\in I}$ を E 値確率過程で，次の条件を満たすものとする：ある定数 $\gamma,c,\varepsilon>0$ が存在して

$$E[\,\|X_t-X_s\|_E^\gamma\,]\le c\|t-s\|^{d+\varepsilon},\quad s,t\in I \tag{A.1.3}$$

が成立する．このとき X の修正 $\widetilde{X}$ で，任意の $\alpha\in[0,\varepsilon/\gamma[$ に対して

$$E\left[\left(\sup_{s,t\in I,s\neq t}\frac{\|\widetilde{X}_t-\widetilde{X}_s\|_E}{\|t-s\|^\alpha}\right)^\gamma\right]<+\infty \tag{A.1.4}$$

を満たすものが存在する．特に，$\widetilde{X}$ のパスは確率 1 で α-Höllder 連続である．

証明．記号の乱用を避けるために，$I_i=[0,1[$ として示す．$m\in\mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
D_m&=\left\{\left(\frac{i_1}{2^m},\dots,\frac{i_d}{2^m}\right)\in[0,1[^d\;\middle|\;i_k\in\{0,1,\dots,2^m-1\}\right\}\\
D&=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}D_m\\
\Delta_m&=\left\{(s,t)\in D_m\times D_m\;\middle|\;\|s-t\|=\frac{1}{2^m}\right\}
\end{aligned} \tag{A.1.5}$$

と定める．このとき，Δ_m の元は $2^{(m+1)d}$ 個以下であることに注意されたい[*61]．$s,t\in D$ に対して，順序 $s\le t$ を $s_i\le t_i,\ \forall i\in\{1,\dots,d\}$ で定める．

いま D は $[0,1[^d$ で稠密なので，D 上で X が α-Höllder 連続であることを示せばよい．

$$K_i=\sup_{(s,t)\in\Delta_i}\|X_s-X_t\| \tag{A.1.7}$$

---

*60 $\mathbb{R}^d$ のノルムはどれも同値なので，$\mathbb{R}^d$ のノルムをどのように定めようとも命題の主張は成り立つ．今回は証明のしやすさから上限ノルムを選んでいる．

*61 $\|s-t\|=1/2^m$ とは，s と t 各成分の差は 0 かちょうど一区画分（$1/2^m$）であり，違う成分が少なくとも一つあるということである．こういった (s,t) の組の数を考えるには次のようにすればよい：異なる成分の数が i 個の場合は，合わせて ${}_dC_i(2^m-1)^d(2^m)^{d-i}$ パターンある．$i\ge1$ を足し合わせれば

$$\sum_{i=1}^d{}_dC_i(2^m-1)^d(2^m)^{d-i}\le\sum_{i=0}^d{}_dC_i(2^m-1)^d(2^m)^{d-i}=(2^m-1+2^m)^d\le2^{(m+1)d} \tag{A.1.6}$$

となる．

と定めれば，仮定より

$$
\begin{aligned}
E[K_i^\gamma] &\leq \sum_{(s,t)\in\Delta_i} E[\,\|X_t - X_s\|_E^\gamma\,] \leq \sum_{(s,t)\in\Delta_i} c\|s-t\|^{d+\varepsilon} = \\
&= \sum_{(s,t)\in\Delta_i} c(2^{-i})^{d+\varepsilon} \leq c2^{(i+1)d}\cdot 2^{-i(d+\varepsilon)} = c2^d \cdot 2^{-i\varepsilon} =: J2^{-i\varepsilon}
\end{aligned} \tag{A.1.8}
$$

が成立する．

$s,t \in D$ に対して，次のような条件を満たす D の列 (s^n), (t^n) を考える：各 n で $s^n \in D_n$ かつ，$0 = s^0 \leq s^1 \leq \cdots \leq s$，さらにある n より先では常に $s^n = s$ となる．(t^n) についても同様とする．

$s,t \in D$ は $\|s-t\| \leq 1/2^m$ を満たすとしよう．十分大きい n については s^n, t^n はそれぞれ s,t に等しいことを思い出せば，

$$
X_s - X_t = \sum_{i=m}^{\infty}(X_{s^{i+1}} - X_{s^i}) + X_{s^m} - X_{t^m} + \sum_{i=m}^{\infty}(X_{t^i} - X_{t^{i+1}}) \tag{A.1.9}
$$

と表現できる．（右辺は実際には有限和である．）これより，

$$
\|X_s - X_t\|_E \leq K_m + 2\sum_{i=m+1}^{\infty} K_i \leq 2\sum_{i=m}^{\infty} K_i \tag{A.1.10}
$$

なる評価を得る．

この部分をもう少し丁寧に説明しよう．s,t はともに D_N に入ると仮定すれば，第 i 成分は

$$
s_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{e_1(k,i)}{2^k}, \quad t_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{e_2(k,i)}{2^k} \tag{A.1.11}
$$

のように展開される．（ただし，各 $e_j(k,i)$ は 0 か 1 のいずれかの値をとる．）

$$
s_i^n = \sum_{k=1}^{n\wedge N} \frac{e_1(k,i)}{2^k}, \quad t_i^n = \sum_{k=1}^{n\wedge N} \frac{e_2(k,i)}{2^k} \tag{A.1.12}
$$

とすれば，(s^n) および (t^n) は先ほどの条件を満たす D の列である．ここで $\|s-t\| \leq 1/2^m$ という仮定から全ての i で

$$
|s_i - t_i| = \sum_{k=1}^{N} \frac{|e_1(k,i) - e_2(k,i)|}{2^k} \leq \frac{1}{2^m} \tag{A.1.13}
$$

となり，明らかに $e_1(k,i) = e_2(k,i)$ $(1 \leq i \leq m-1)$ が成り立つ．これより，各成分において

$$
|s_i^m - t_i^m| = \frac{|e_1(m,i) - e_2(m,i)|}{2^m} \leq \frac{1}{2^m} \tag{A.1.14}
$$

となるから，$\|s^m - t^m\| \leq 1/2^m$ が分かる．このとき $s^m = t^m$ か $(s^m, t^m) \in \Delta_m$ のどちらかが成り立つが，いずれにせよ

$$
\|X_{s^m} - X_{t^m}\|_E \leq K_m \tag{A.1.15}
$$

である．さらに

$$
s_i^{n+1} - s_i^n = \frac{e_1(n+1,i)}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}, \quad i \in \{1,\dots,d\} \tag{A.1.16}
$$

$$
t_i^{n+1} - t_i^n = \frac{e_2(n+1,i)}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}, \quad i \in \{1,\dots,d\} \tag{A.1.17}
$$

という評価から $s^{n+1} = s^n$ または $(s^n, s^{n+1}) \in \Delta$ （および $t^{n+1} = t^n$ または $(t^n, t^{n+1}) \in \Delta$）が成り立つので，

$$
\|X_{s^{n+1}} - X_{s^n}\|_E \leq K_m, \quad \|X_{t^{n+1}} - X_{t^n}\|_E \leq K_m \tag{A.1.18}
$$

であることも分かる．これにより求める評価を得る．

ここで

$$M_\alpha = \sup\left\{ \frac{\|X_t - X_s\|_E}{\|t-s\|^\alpha} \;\middle|\; s,t \in D,\ s \neq t \right\} \tag{A.1.19}$$

と定めれば，

$$\begin{aligned}
M_\alpha &= \sup_{m\in\mathbb{N}} \left\{ \sup\left\{ \frac{\|X_t - X_s\|_E}{\|t-s\|^\alpha} \;\middle|\; s,t\in D,\ s\neq t, \frac{1}{2^{m+1}} < \|s-t\| \le \frac{1}{2^m} \right\} \right\} \\
&\le \sup_{m\in\mathbb{N}} \left\{ \sup\left\{ 2^{\alpha(m+1)} \|X_t - X_s\|_E \;\middle|\; s,t\in D,\ s\neq t, \frac{1}{2^{m+1}} < \|s-t\| \le \frac{1}{2^m} \right\} \right\} \\
&\le \sup_{m\in\mathbb{N}} \left\{ 2^{\alpha(m+1)} \sup\left\{ \|X_t - X_s\|_E \;\middle|\; s,t\in D,\ s\neq t, \|s-t\| \le \frac{1}{2^m} \right\} \right\} \\
&\le \sup_{m\in\mathbb{N}} \left[2^{\alpha(m+1)} \left(2\sum_{i=m}^\infty K_i \right) \right] \\
&\le 2^{\alpha+1} \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=m}^\infty 2^{\alpha m} K_i \right) \\
&\le 2^{\alpha+1} \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=m}^\infty 2^{\alpha i} K_i \right) \\
&= 2^{\alpha+1} \sum_{i=0}^\infty 2^{\alpha i} K_i
\end{aligned} \tag{A.1.20}$$

となる．$\gamma \ge 1$ の時，$\alpha < \varepsilon/\gamma$ なる α に対して

$$\|M_\alpha\|_\gamma \le 2^{\alpha+1} \sum_{i=0}^\infty 2^{\alpha i} \|K_i\|_\gamma \le 2^{\alpha+1} \sum_{i=0}^\infty 2^{\alpha i} (J 2^{-i\varepsilon})^{1/\gamma} = 2^{\alpha+1} J^{1/\gamma} \sum_{i=0}^\infty 2^{i(\alpha - \varepsilon/\gamma)} < \infty \tag{A.1.21}$$

が成立．$0 < \gamma < 1$ の場合は，$L^\gamma(P)$ ノルムの代わりに $E[(M_\alpha)^\gamma]$ に対して

$$E[(M_\alpha)^\gamma] \le 2^{\gamma(\alpha+1)} \sum_{i=0}^\infty 2^{\gamma\alpha i} E[(K_i)^\gamma] \le 2^{\gamma(\alpha+1)} \sum_{i=0}^\infty 2^{\gamma\alpha i} J 2^{-i\varepsilon} = 2^{\gamma(\alpha+1)} J \sum_{i=0}^\infty 2^{i(\gamma\alpha - \varepsilon)} < \infty \tag{A.1.22}$$

という評価をすれば良い．いずれにせよ，P-a.s. で $M_\alpha < \infty$ となることが分かる．これはすなわち，X のパスは確率 1 で D 上 α-Höllder 連続であるということに他ならない．ここで

$$\widetilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{s\to t\\ s\in D}} X_s(\omega) & \text{if } M_\alpha(\omega) < +\infty \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定めれば，先ほどの評価 $E[(M_\alpha)^\gamma] < \infty$ より，$\widetilde{X}$ は明らかに A.1.4 を満たす．後は $\widetilde{X}$ が元の過程 X の修正になっていることを示せばよいが，これは

$$E[\|\widetilde{X}_t - X_t\|^\gamma] \le \liminf_{\substack{s\to t\\ s\in D}} E[\|X_s - X_t\|^\gamma] \le \liminf_{\substack{s\to t\\ s\in D}} \|s-t\|^{d+\varepsilon} = 0 \tag{A.1.23}$$

より分かる． □

A.2 *càdlàg* な関数について

命題 40. $[a,b] \subset \mathbb{R}$ はコンパクトなる区間とし，$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は *càdlàg* な関数とする．このとき，次が成立：

(i) 任意の $c>0$ に対して c を超える大きさのジャンプは有限個しかない．

(ii) f の不連続点は高々可算個．

(iii) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は有界．

(iv) f のジャンプがどれも $c>0$ より小さいならば，任意の $\varepsilon>0$ に対してある $\delta>0$ が存在して

$$|s-t|\le\delta \Longrightarrow |f(s)-f(t)|<c+\varepsilon. \tag{A.2.1}$$

証明．(i). 背理法で示す．ある $c>0$ に対して $|\Delta f(t_n)|>c$ をみたす無限個の (t_n) が存在したとする．（各 t_n は相異なるものを取る．）$[a,b]$ はコンパクトなので適当な部分列をとりなおすことで $t_n\to{}^{\exists}t^*\in[a,b]$ $(n\to\infty)$ と仮定してよい．さらに部分列を取り直せば $t_n<t^*$ または $t_n>t^*$ が常になりたつと考えてもよい[*62]．ここでは特に $t_n\le t^*$ $(\forall n)$ の場合を示そう．f は任意の点で右連続かつ左極限をもつから，$x<t_n<y<t^*$ を t^* に十分近くとれば

$$\begin{aligned}|f(t_n)-f(y)|&<\frac{c}{4}\\ |f(y)-f(x)|&<\frac{c}{4}\\ |f(x)-f(t_n-)|&<\frac{c}{4}\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって

$$\begin{aligned}c&\le\Delta f(t_n)\\ &=|f(t_n)-f(t_n-)|\\ &\le|f(t_n)-f(y)|+|f(y)-f(X)|+|f(X)-f(t_n-)|\\ &<\frac{3}{4}c\end{aligned} \tag{A.2.2}$$

となり矛盾である．$t^*\le t_n$ の場合も同様に示される．

(ii).

$$\{t\in[a,b]\mid t\text{ は }f\text{ の不連続点 }\}=\bigcup_{n\ge1}\left\{t\in[a,b]\;\middle|\;|\Delta f(t)|\ge\frac{1}{n}\right\} \tag{A.2.3}$$

に注意すれば，(i) の結果より分かる．

(iii). f が $[a,b]$ 上有界でないとする．このとき $|f(t_n)|\ge n$ なる $[a,b]$ の点列 (t_n) をとれる．$[a,b]$ のコンパクト性より，適当に部分列を取り直せば $t_n\uparrow{}^{\exists}t^*$ とできる．ところが，f は左極限を持つから

$$f(t_n)\longrightarrow f(t^*-)\in\mathbb{R} \tag{A.2.4}$$

となり矛盾である．

(iv). 主張を否定すればある $\varepsilon>0$ に対して，$\delta_n\downarrow0$ なる列を適当にとれば $|t_n-t'_n|\le\delta_n$ かつ $|t_n-t'_n|\ge c+\varepsilon$ なる (t_n,t'_n) をとることができる．$[a,b]$ のコンパクト性より $t_n,t'_n\to\exists t^*$ とできる．t_n,t'_n がそれぞれ上から，下から近づく場合を考えれば，どの場合でも $|\Delta f(t^*)|\le c$ に矛盾する． □

[*62] $t_n<t^*$ なる n が無限個あるか，$t_n\ge t^*$ なる n が無限個あるか，どちらか一方は少なくとも成り立つことに注意せよ．

A.3 超関数とその微分

m は d 次元 Lebesgue 測度を表すものとする．

U を $\mathbb{R}^d$ の開集合とする．$C_c^\infty(U)$ は U 上の無限階微分可能な実数値関数で，U においてコンパクトな台をもつようなもの全体の集合とする．これは明らかに $\mathbb{R}$-線形空間である．C_c^∞ の元の列 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について，次のような収束を考える：

(i) あるコンパクト集合 $K \subset U$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ で $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$.

(ii) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $|\alpha| \leq k$ なら $D^\alpha\varphi_n$ は $D^\alpha\varphi$ に一様収束.[*63].

C_c^∞ この収束に関する位相を入れた空間を $\mathscr{D}(U)$ で表すことにする[*64]．このとき，$\mathscr{D}(U)$ は位相線形空間となる[*65].

定義 41. $\mathscr{D}(U)$ 上の連続な線形形式を超関数 (distribution) という．すなわち，超関数とは $\mathscr{D}(U)$ の（位相的）双対空間 $\mathscr{D}'(U)$ の元である．

写像 $\mathscr{D}'(U) \times \mathscr{D}(U) \ni (T,\varphi) \mapsto T(\varphi) \in \mathbb{R}$ は双線形形式を定めるから，超関数の値 $T(\varphi)$ を $\langle T,\varphi\rangle$ などと書くことも多い．

U 上の Radon 測度に μ について，写像

$$\mathscr{D}(U) \ni \varphi \mapsto \int_U \varphi(x)\mu(dx) \in \mathscr{R} \tag{A.3.1}$$

は超関数を定めるから，これを T_μ とおく．$d\mu = f dm$（ただし，f は局所可積分な Borel 関数）のとき，T_μ を特に T_f と書く．

次に，超関数の微分を定義する．

定義 42. $T \in \mathscr{D}'(U)$ に対して，その α 階の微分 $D^\alpha T \in \mathscr{D}'(U)$ を以下で定義する：

$$\langle D^\alpha T,\varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\varphi\rangle. \tag{A.3.2}$$

超関数の微分の定義において，念頭にあるのは部分積分公式である．f が $|\alpha|$ 回連続微分可能な関数としたとき，部分積分公式により

$$\langle D^\alpha T_f,\varphi\rangle = \int_U (D^\alpha\varphi(x))f(x)m(dx) = (-1)^{|\alpha|}\int_U \varphi(x)D^\alpha f(x)m(dx), \quad \varphi \in \mathscr{D}(U) \tag{A.3.3}$$

が成り立つ．したがって，f が定める超関数の α 階微分は，f の α 階微分 (の $(-1)^{|\alpha|}$ 倍) が定める超関数である．この考え方を用いて，微分可能とは限らない関数についても微分の定義を広げておこう．

定義 43. $u : U \to \mathbb{R}$ は局所可積分な Borel 関数とする．u に対してある局所可積分 Borel 関数が存在して

$$\int_U u(x)D^\alpha\varphi(x)m(dx) = \int_U v(x)\varphi(x)m(dx), \quad \varphi \in C_c^\infty(U) \tag{A.3.4}$$

[*63] ただし，ここで $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ は多重指数を表し，$D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\cdots\dfrac{\partial^{\alpha_m}}{\partial x^{\alpha_m}}$ である．

[*64] 正確な定式化は，宮島 [30] や Reed & Simon [33] などを参照されたい．

[*65] もっというと，$\mathscr{LF}$ 空間なるものである．

が成立するとき，v を u の α 階の弱微分，または超関数の意味での微分と呼ぶ．弱微分のこともまた u' や Du などと表す．

定義より明らかなように，超関数の微分 Du は一般に m-a.e. の範囲でしか一意に定まらない．定義 43 よりもさらに一般的に，

$$\int_U u(x)D^\alpha\varphi(x)m(dx) = \int_U \varphi(x)\mu(dx), \quad \varphi \in C_c^\infty(U) \tag{A.3.5}$$

を満たす Borel 測度 μ を指して u の超関数の意味での微分ということもある．u が定義 43 の意味で微分可能なとき，測度 $u'(x)m(dx)$ を u' と同一視するということである．こちらの定義では $\mu \ll m$ でない場合も μ を微分と呼ぶので，先ほどのものより広いクラスを扱うことになる．

A.4 凸関数

この節では，凸関数の微分に関する基本的な事実を扱う．これらの結果は凸関数に関する伊藤の公式，伊藤-田中の公式などにおいて使われる．

この節では，m は 1 次元の Lebesgue 測度を表すこととする．

定義 44. I を $\mathbb{R}$ の区間とする[*66]．関数 $f : I \to \mathbb{R}$ は

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \quad x, y \in I,\ \lambda \in [0,1] \tag{A.4.1}$$

を満たすとき，凸関数と呼ばれる．

命題 45. f を区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の凸関数とする．このとき，$x < y < z$ を満たす I の元に対して，

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \tag{A.4.2}$$

が成立する．

証明．$y = \lambda x + (1-\lambda)z$ を満たす $\lambda \in]0,1[$ をとれば[*67]，凸関数の定義より

$$f(y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(z) = \frac{z-y}{z-x}f(x) + \frac{y-x}{z-x}f(z) \tag{A.4.3}$$

である．これを変形すれば，

$$\begin{aligned}
&f(y) \le \frac{z-y}{z-x}f(x) + \frac{y-x}{z-x}f(z) \\
&\rightsquigarrow (z-x)f(y) \le (z-y)f(x) + (y-x)f(z) \\
&\rightsquigarrow (z-x)f(y) \le (z-x)f(x) + (x-y)f(x) + (y-x)f(z) \\
&\rightsquigarrow (z-x)(f(y)-f(x)) \le (y-x)(f(z)-f(x)) \\
&\rightsquigarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(x)}{z-x}
\end{aligned} \tag{A.4.4}$$

となり，一つ目の不等号を得る．また，

$$(z-x)(f(y)-f(x)) \le (y-x)(f(z)-f(x)) \tag{A.4.5}$$

[*66] 凸関数の定義域は一般には凸集合であればよい．凸集合は連結集合なので，$\mathbb{R}$ の場合は区間に限られる．

[*67] 要するに $\lambda = \dfrac{z-y}{z-x}$ である．

で両辺に $zf(z)-xf(x)$ を加えれば，

$$\begin{aligned}
&(z-x)(f(y)-f(x)) \le (y-x)(f(z)-f(x)) \\
&\rightsquigarrow zf(y)-zf(x)-xf(y)+xf(x)+[zf(z)-xf(x)] \\
&\qquad \le yf(z)-yf(x)-xf(z)+xf(x)+[zf(z)-xf(x)] \\
&\rightsquigarrow zf(y)-zf(x)-xf(y)+zf(z) \le yf(z)-yf(x)-xf(z)+zf(z) \\
&\rightsquigarrow (z-x)f(y)+z(f(z)-f(x)) \le y(f(z)-f(x))+(z-x)f(z) \\
&\rightsquigarrow (z-y)(f(z)-f(x)) \le (z-x)(f(z)-f(y)) \\
&\rightsquigarrow \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \frac{f(z)-f(y)}{z-y}
\end{aligned} \tag{A.4.6}$$

である．よって二つ目の不等号が示された． □

命題 46. I を開区間，$f: I \to \mathbb{R}$ を凸関数とする．このとき，次の主張が成立する．

(i) 任意の $x \in I$ で有限な右微分係数 $f'_+(x)$ および左微分係数 $f'_-(x)$ が存在し，$f'_-(x) \le f'_+(x)$ を満たす．

(ii) $x < y$ なる I の 2 点について，次の不等式が成立：

$$f'_+(x) \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le f'_-(y). \tag{A.4.7}$$

(iii) f'_+ と f'_- は増加関数である．

(iv) 次の意味で，微積分学の基本定理が成立する：$a \le b$ なる I の二点において，

$$f(b)-f(a) = \int_{]a,b]} f'_+(x)m(dx) = \int_{]a,b]} f'_-(x)m(dx) \tag{A.4.8}$$

(v) f は I 上連続である．

(vi) f'_+ は右連続であり，f'_- は左連続である．

(vii) $\{x \in I \mid f'_-(x) \neq f'_+(x)\}$ は高々加算集合である．

(viii) f'_- および f'_+ は超関数の意味での f の微分である．

証明．(i) $x \in I^\circ$ を固定する．命題 45 より $\varepsilon, \delta > 0$ で $x+\varepsilon, x-\delta \in I$ なるようなものに対して

$$-\infty < \frac{f(x)-f(x-\delta)}{\delta} \le \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} < +\infty \tag{A.4.9}$$

が成立．各項が ε, δ に関する単調性をもつことに注意すれば，

$$f'_-(x) = \sup_{\substack{\delta>0 \\ x-\delta\in I}} \frac{f(x)-f(x-\delta)}{\delta} \le \sup_{\substack{\varepsilon>0 \\ x+\varepsilon\in I}} \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} = f'_+(x) \tag{A.4.10}$$

が分かる．

(ii) 命題 45 より，$x < y$ および $\varepsilon, \delta > 0$ に対して

$$\frac{f(x)-f(x-\delta)}{\delta} \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(y+\varepsilon)-f(y)}{\varepsilon} \tag{A.4.11}$$

が成立するから，(i) と同様に ε と δ の極限を考えればよい．

(iii) $x<y$ とすれば，(i) と (ii) より

$$\begin{aligned} f'_-(x) \le f'_+(x) \le f'_-(y) \\ f'_+(x) \le f'_-(y) \le f'_+(y) \end{aligned} \tag{A.4.12}$$

が成立．よって f'_- と f'_+ はともに増加的である．

(iv) $a<b$ として示せば十分である．f'_+ について証明する．$\pi^{(n)}=\{x^n_k;k\in\mathbb{N}\}$ を $[a,b]$ の分割で，$\sup_k|x^n_k-x^n_{k-1}|\to 0\ (n\to\infty)$ なるものとする．f'_+ は単調なので高々可算個の不連続点しかもたず，

$$\begin{aligned} \sum_k f'_+(x^n_{k-1})1_{]x^n_{k-1},x^n_k]} \xrightarrow[n\to\infty]{m-\text{a.e.}} f'_+ \\ \sum_k f'_+(x^n_k)1_{]x^n_{k-1},x^n_k]} \xrightarrow[n\to\infty]{m-\text{a.e.}} f'_+ \end{aligned} \tag{A.4.13}$$

が成立することに注意する[*68]．ここまでの結果により

$$f'_+(x^n_{k-1}) \le \frac{f(x^n_k)-f(x^n_{k-1})}{x^n_k-x^n_{k-1}} \le f'_-(x^n_k) \le f'_+(x^n_k) \tag{A.4.14}$$

が成り立つから，k についての和をとることで

$$\sum_k f'_+(x^n_{k-1})(x^n_k-x^n_{k-1}) \le \sum_k f(x^n_k)-f(x^n_{k-1}) = f(b)-f(a) \le \sum_k f'_+(x^n_k)(x^n_k-x^n_{k-1}) \tag{A.4.15}$$

を得る．$n\to\infty$ とすれば，有界収束定理より

$$\int_{]a,b]} f'_+(x)m(dx) \le f(b)-f(a) \le \int_{]a,b]} f'_+(x)m(dx) \tag{A.4.16}$$

となる．f'_- についても同様である．

(v) (iv) より明らか．

(vi) f'_+ の右連続性を示す．$x\in I$ を固定して，正の実数からなる単調減少列 (a_n) と (b_n) を考える[*69]．このとき，f の連続性より

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f'_+(x+a_n) &= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} \frac{f(x+a_n+b_m)-f(x+a_n)}{b_m} \\ &= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} \frac{f(x+a_n+b_m)-f(x+a_n)}{b_m} \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{f(x+b_m)-f(x)}{b_m} \\ &= f'_+(x) \end{aligned} \tag{A.4.17}$$

となる[*70]．f'_- の左連続性も同様である．

[*68] しかも，これらの収束は上界 $f'_+(b)$ をもつ．

[*69] もちろん，任意の n,m で $x+a_n+b_m\in I$ であることも仮定する．

[*70] 一般に，二重単調増大列 (a_{mn}) について

$$\sup_{m,n} a_{mn} = \lim_{m,n\to\infty} a_{mn} = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{mn} = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{mn} \tag{A.4.18}$$

が成立することに注意せよ．

(vii) f'_+ と f'_- はそれぞれ右連続，左連続な増加関数なので，ともに高々可算個の不連続点しか持たない．x を f'_- の連続点とする．

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(x+\varepsilon) \tag{A.4.19}$$

において $\varepsilon \downarrow 0$ とすれば，$f'_-(x) = f'_+(x)$ となるので，f'_- の連続点では f'_+ と f'_- は等しい．よって

$$\{x \in I \mid f'_-(x) \neq f'_+(x)\} \subset \{x \in I \mid x \text{ は } f'_- \text{ の不連続点.}\} \tag{A.4.20}$$

となり，左の集合も可算集合である．

(viii) $\varphi \in C_c^\infty(I)$ とし，$h > 0$ に対して

$$\frac{\varphi(x+h)f(x+h) - \varphi(x)f(x)}{h} = \varphi(x+h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}f(x) \tag{A.4.21}$$

を考える．φ がコンパクト台を持つことに注意して左辺を U 上積分すれば，h が十分小さいとき，

$$\begin{aligned}
&\int_U \frac{\varphi(x+h)f(x+h) - \varphi(x)f(x)}{h} m(dx) \\
&= \frac{1}{h}\left\{\int_U \varphi(x+h)f(x+h)m(dx) - \int_U \varphi(x)f(x)m(dx)\right\} = 0
\end{aligned} \tag{A.4.22}$$

が成立．一方，右辺を積分して $h \to 0$ の極限を考えれば，優収束定理により

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to\infty, h>0} \int_U \left\{\varphi(x+h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}f(x)\right\} m(dx) \\
&= \int_U \lim_{h\to\infty, h>0}\left\{\varphi(x+h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\} m(dx) + \int_U \lim_{h\to\infty, h>0}\left\{\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}f(x)\right\} m(dx) \\
&= \int_U \varphi(x)f'_+(x)m(dx) + \int_U \varphi'(x)f(x)m(dx)
\end{aligned} \tag{A.4.23}$$

したがって，

$$\int_U \varphi'(x)f(x)m(dx) = -\int_U \varphi(x)f'_+(x)m(dx) \tag{A.4.24}$$

となり，f'_+ は超関数の意味での f の微分であることが分かる．$\{x \mid f'_+(x) \neq f'_-(x)\}$ が可算集合（よって Lebesgue 測度 0）であることに注意すれば，

$$\int_U \varphi'(x)f(x)m(dx) = -\int_U \varphi(x)f'_-(x)m(dx) \tag{A.4.25}$$

であることも示される． □

命題 47. 凸関数の 2 階微分について，次の主張が成立する．

(i) f を開区間 I 上定義された凸関数とする．このとき，f の 2 階導関数 f'' は正値 Radon 測度である．

(ii) I を開区間とし，$(I, \mathscr{B}(I))$ 上の正値 Radon 測度が与えられたとする．このとき，I 上の凸関数で $f'' = \mu$ となるものが存在する．

(iii) 開区間 I 上定義された凸関数 f が 2 階微分 $f'' = \mu$ をもつとき，任意の区間 J に対して定数 α_J と β_I が存在して，J° 上

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_J |x-a|\mu(da) + \alpha_J x + \beta_J \tag{A.4.26}$$

$$f'_-(x) = \frac{1}{2}\int_J \mathrm{sgn}(x-a)\mu(da) + \alpha_J \tag{A.4.27}$$

が成り立つ[71].

証明．(i) Stieltjes 積分に関する部分積分公式により，

$$\int_I f'_-(x)\varphi'(x)dx = \int_I f'_-(x)d\varphi(x) = \int_I \varphi(x)df'_-(x) \tag{A.4.28}$$

となるから，f'_- の生成する Stieltjes 測度 df'_- は[72]f の 2 階微分である．f'_- は増加関数であるから，Stieltjes 測度 df'_- は正値である．

(ii) μ を $(I, \mathscr{B}(I))$ 上の正値 Radon 測度とする．$a_0 \in I$ を一つ固定し，$f(a_0) := c_0$, $F(a_0) := c_1$ と定める．さらに

$$F(t) = \begin{cases} c_1 + \mu(\,]a_0, t]) & t \geq a_0 \\ c_1 - \mu(\,]t, a_0]) & t < a_0 \end{cases}$$

と定義する．このとき F は明らかに増加関数で，F によって生成される Stieltjes 測度が μ に他ならない．この F を用いて f を構成する．$x \geq a_0$ に対して

$$\begin{aligned} & f(x) \\ & := c_0 + \int_{]a_0, x]} F(t)dt \\ & = c_0 + xF(x) - a_0F(a_0) - \int_{]a_0,x]} tdF(t) \\ & = c_0 + x\{F(x) - F(a_0)\} - a_0c_1 + xF(a_0) - \int_{]a_0,x]} tdF(t) \\ & = c_0 - a_0c_1 + xc_1 + \int_{]a_0,x]} (x-t)\mu(dt) \end{aligned} \tag{A.4.29}$$

と定める．同様にして，$x < a_0$ に対しても

$$\begin{aligned} & f(x) \\ & := c_0 - \int_{]x, a_0]} F(t)dt \\ & = c_0 - a_0F(a_0) + xF(x) + \int_{]x,a_0]} tdF(t) \\ & = c_0 + x\{F(x) - F(a_0)\} - a_0c_0 + xF(a_0) + \int_{]x,a_0]} tdF(t) \\ & = c_0 - a_0c_1 + xc_1 + \int_{]x,a_0]} (t-x)\mu(dt) \end{aligned} \tag{A.4.30}$$

[71] $\mathrm{sgn}(x) := 1_{]0,+\infty[}(x) - 1_{]-\infty,0]}(x)$ である．

[72] df'_+ でも同じことである．なお，f'_+ に対応する Stieltjes 測度は $\mu(\,]a,b]) = f'_+(b) - f'_+(a)$ で生成され，f'_- の場合は $\mu([a,b[\,) = f'_-(b) - f'_-(a)$ となることに注意されたい．

とする．f の凸性を見るには $a_0 \in J \subset I$ を満たす区間 $J =]a, b]$ 上での凸性を調べればよい．$x \in]a_0, b]$ なら

$$\begin{aligned}
f(x) - f(a) &= c_0 - a_0c_1 + xc_1 + \int_{]a_0,x]} (x-t)\mu(dt) \\
&\quad - c_0 + a_0c_1 - ac_1 - \int_{]a,a_0]} (t-a)\mu(dt) \\
&= xc_1 - ac_1 + \int_{]a_0,x]} (x-t)\mu(dt) \\
&\quad - \int_{]a,a_0]} (t-x)\mu(dt) - \int_{]a,a_0]} (x-a)\mu(dt) \\
&= xc_1 - ac_1 + (x-a)(F(a)-c_1) + \int_{]a,x]} (x-t)\mu(dt) \\
&= xF(a) - aF(a) + \int_{]a,x]} (x-t)\mu(dt) \qquad \text{(A.4.31)}
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
f(b) - f(x) &= c_0 + \int_{]a_0,b]} F(t)dt - c_0 - \int_{]a_0,x]} F(t)dt \\
&= \int_{]x,b]} F(t)dt \\
&= bF(b) - xF(x) - \int_{]x,b]} t dF(t) \\
&= bF(b) - xF(b) + \int_{]x,b]} (x-t)\mu(dt) \qquad \text{(A.4.32)}
\end{aligned}$$

が成り立つから，二つの式を併せて

$$\begin{aligned}
&2f(x) \\
&= f(a) + f(b) + xc_1 - ac_1 + xF(a) - aF(a) + \int_{]a,x]} (x-t)\mu(dt) \\
&\quad - bF(b) + xF(b) - \int_{]x,b]} (x-t)\mu(dt) \\
&= \{F(a)+F(b)\}x + f(a) + f(b) - aF(a) - bF(b) + \int_{]a,b]} |x-t|\mu(dt) \qquad \text{(A.4.33)}
\end{aligned}$$

を得る．$x \in]a, a_0]$ の場合は

$$\begin{aligned}
f(x) - f(a) &= c_0 - \int_{]x,a_0]} F(t)dt - c_0 + \int_{]a,a_0]} F(t)dt \\
&= \int_{]a,x]} F(t)dt \\
&= xF(x) - aF(a) - \int_{]a,x]} t dF(t) \\
&= xF(a) - aF(a) + \int_{]a,x]} (x-t)\mu(dt) \\
f(b) - f(x) &= c_0 - a_0c_1 + bc_1 + \int_{]a_0,b]} (b-t)\mu(dt)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- c_0 + a_0c_1 - xc_1 - \int_{]x,a_0]}(t-x)\mu(dt) \\
&= bc_1 - xc_1 + \int_{]a_0,b]}(x-t)\mu(dt) + \int_{]a_0,b]}(b-x)\mu(dt) - \int_{]x,a_0]}(t-x)\mu(dt) \\
&= bc_1 - xc_1 + (b-x)(F(b)-c_1) + \int_{]x,b]}(x-t)\mu(dt) \\
&= bF(b) - xF(b) + \int_{]x,b]}(x-t)\mu(dt)
\end{aligned} \tag{A.4.34}
$$

から

$$
\begin{aligned}
&2f(x) \\
&= f(a) + f(b) + xF(a) - aF(a) + \int_{]a,x]}(x-t)\mu(dt) \\
&\quad - bF(b) + xF(b) - \int_{]x,b]}(x-t)\mu(dt) \\
&= \{F(a)+F(b)\}x + f(a) + f(b) - aF(a) - bF(b) + \int_{]a,b]}|x-t|\mu(dt)
\end{aligned} \tag{A.4.35}
$$

これより，f は $J =]a,b]$ で

$$
f(x) = \frac{1}{2}\{F(a)+F(b)\}x + \frac{1}{2}\{f(a)+f(b)-aF(a)-bF(b)\} + \frac{1}{2}\int_{]a,b]}|x-t|\mu(dt) \tag{A.4.36}
$$

という表現をもつ．右辺の関数は明らかに x について凸なので[*73]，f は $]a,b]$ 上凸である．I は開区間なので，$x,y \in I$ とすれば $x,y \in J =]a,b]$ なる J が存在する．これより I 上での凸性も分かる．

後は f の（超関数の意味での）二回微分が μ になることを示せばよい．先ほどの表現から f の左微分を定義に戻って計算すれば，Lebesgue の収束定理より

$$
f'_-(x) = \frac{1}{2}\{F(a)+F(b)\} + \frac{1}{2}\int_{]a,b]}\mathrm{sgn}(x-t)\mu(dt) \tag{A.4.37}
$$

が $J =]a,b]$ 上で成立．$\varphi \in C_c^\infty(I)$ とすれば，$\mathrm{supp}\,\varphi \subset J =]a,b]$ なる区間 J を選ぶことで

$$
\begin{aligned}
&\int_I f'_-(x)\varphi'(x)m(dx) \\
&= \int_{]a,b]} f'_-(x)\varphi'(x)m(dx) \\
&= \int_{]a,b]} \left[\frac{1}{2}\{F(a)+F(b)\} + \frac{1}{2}\int_J \mathrm{sgn}(x-t)\mu(dt)\right]\varphi'(x)m(dx) \\
&= \frac{1}{2}\{F(a)+F(b)\}\int_{]a,b]}\varphi'(x)m(dx) + \frac{1}{2}\int_{]a,b]}\left(\int_{]a,b]}\varphi'(x)\mathrm{sgn}(x-t)m(dx)\right)\mu(dt) \\
&= \frac{1}{2}\int_{]a,b]}\left(-\int_{]a,t]}\varphi'(x)m(dx) + \int_{]t,b]}\varphi'(x)m(dx)\right)\mu(dt)
\end{aligned}
$$

[*73] affine 関数の部分は明らかに凸であり，積分の部分は凸関数と単調増加な線形形式（μ の非負性に注意）の合成であることから，やはり凸である．

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_{]a,b]} [-\varphi(t)+\varphi(a)+\varphi(b)-\varphi(t)]\,\mu(dt) \\
&= -\int_{]a,b]} \varphi(t)\mu(dt) \\
&= -\int_{I} \varphi(t)\mu(dt)
\end{aligned} \tag{A.4.38}
$$

が成立．これより $f''=\mu$ が分かる．

なお，この f は定数 c_0 と c_1 の分だけ自由度があることに注意されたい[*74]．

(iii) 証明は (ii) の後半とほぼ同じである．区間 $J\subset I$ が $J=[a,b]$ の形の時を考える．凸関数に関する微積分学の基本定理と Stieltjes 積分に関する部分積分公式により，$x\in I^\circ$ に対して

$$
\begin{aligned}
f(x)-f(a) &= \int_{]a,x]} f'_+(t)dt \\
&= xf'_+(x)-af'_+(a)-\int_{]a,x]} tdf'_+(t) \\
&= xf'_+(a)-af'_+(a)+\int_{]a,x]} (x-t)df'_+(t) \\
&= xf'_+(a)-af'_+(a)+\int_{]a,x]} (x-t)\mu(dt)
\end{aligned} \tag{A.4.39}
$$

が成立する．同様にして，

$$
\begin{aligned}
f(b)-f(x) &= \int_{]x,b]} f'_+(t)dt \\
&= bf'_+(b)-xf'_+(x)-\int_{]x,b]} tdf'_+(t) \\
&= bf'_+(b)-xf'_+(b)+\int_{]x,b]} (x-t)\mu(dt)
\end{aligned} \tag{A.4.40}
$$

二つの式を合わせれば，

$$
\begin{aligned}
2f(x)-f(a)-f(b) &= \int_{]a,x]} f'_+(t)dt-\int_{]x,b]} f'_+(t)dt \\
&= (f'_+(a)+f'_+(b))x-af'_+(a)-bf'_+(b)+\int_{]a,b]} |x-t|\mu(dt)
\end{aligned} \tag{A.4.41}
$$

という表現を得る．したがって，

$$
\alpha_J=\frac{1}{2}\{f'_+(a)+f'_+(b)\},\quad \beta_J=\frac{1}{2}\{f(a)+f(b)-af'_+(a)-bf'_+(b)\} \tag{A.4.42}
$$

と置けばよい．他の場合，例えば区間が $J'=[a,b]$ の形の時は

$$
\begin{aligned}
&2f(x)-f(a)-f(b) \\
&= \{f'_+(a)+f'_+(b)\}x-af'_+(a)-bf'_+(b)+\int_{]a,b]} |x-t|\mu(dt) \\
&= \{f'_+(a)+f'_+(b)\}x-af'_+(a)-bf'_+(b)+\int_{[a,b]} |x-t|\mu(dt)-(x-a)\mu(\{a\}) \\
&= \{f'_+(a)+f'_+(b)-\mu(\{a\})\}x-a\{f'_+(a)-\mu(\{a\})\}-bf'_+(b)+\int_{[a,b]} |x-t|\mu(dt)
\end{aligned} \tag{A.4.43}
$$

[*74] $f''=\mu$ を 2 階の微分方程式と思えば，こうなるのは自然であろう．

と書けるから

$$\alpha_{J'} = \frac{1}{2}\{f'_+(a) + f'_+(b) - \mu(\{a\})\}$$
$$\beta_{J'} = \frac{1}{2}[f(a) + f(b) - a\{f'_+(a) - \mu(\{a\})\} - bf'_+(b)] \tag{A.4.44}$$

とおけばよい．

$$f'_-(x) = \frac{1}{2}\{F(a) + F(b)\} + \frac{1}{2}\int_{]a,b]} \mathrm{sgn}(x-t)\mu(dt) \tag{A.4.45}$$

となるのは (ii) と同様である． □

A.5 確率積分に関する Fubini の定理

まずは，パラメータを持つ確率過程に関する考察から始めることにする．

補題 48. $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$ は完備なフィルター付き確率空間とし，$(A, \mathscr{A}, \mu)$ は σ-有限測度空間とする．$\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{A}$-可測関数 $X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times A \to \mathbb{R}$ に対して，

$$X^*(\omega, a) = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |X(\omega, t, a)| \tag{A.5.1}$$

と定める．このとき：

(i) X^* は $(\mathscr{F} \otimes \mathscr{A})^{P \otimes \mu}$ 可測である．

(ii) 任意の a について確率過程 $X(\cdot, \cdot, a)$ が消散的ならば，確率過程

$$(\omega, t) \longmapsto \int_A X(\omega, t, a)\mu(da)$$

も消散的である．

証明．(i) $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} E_x &= \left\{(\omega, a) \in \Omega \times A \mid \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |X(\omega, t, a)| > x\right\} \\ &= \{(\omega, a) \in \Omega \times A \mid \exists t \in \mathbb{R}_+,\ |X(\omega, t, a)| > x\} \\ &= \mathrm{pr}_{1,3}(\{(\omega, t, a) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \times A \mid |X(\omega, t, a)| > x\}) \end{aligned} \tag{A.5.2}$$

とすれば[*75]，E_x は $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+ \times \mathscr{A})$-可測集合の射影だから，$\mathscr{F} \otimes \mathscr{A}$-解析集合であり[*76]，よって $E_x \in (\mathscr{F} \otimes \mathscr{A})^{P \otimes \mu}$ となる[*77]．すなわち (i) が成立する．

(ii) 任意の a について確率過程 $X(\cdot, \cdot, a)$ が消散的であるとする．(i) の結果と Tonelli の定理を用いれば，

$$E\left[\int_A X^*(\cdot, a)\mu(da)\right] = \int_A E\left[X^*(\cdot, a)\right]\mu(da) = 0 \tag{A.5.3}$$

[*75] $\mathrm{pr}_{1,3}$ は第 1 成分と第 3 成分への射影を表す．
[*76] 例えば，He, Yan, & Wang [14] の定理 1.32 など．
[*77] He, Yan, & Wang [14] の定理 1.36 などを見よ．

が成立する．ただし，二つ目の等号は X に関する仮定より，任意の $a \in A$ に対して $E[X^*(a)] = 0$ となることを用いた．(A.5.3) より P-a.s. ω に対して

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \int_A X(\omega,t,a)\mu(da) \right| \leq \int_A X^*(\omega,a)\mu(da) = 0 \tag{A.5.4}$$

すなわち，

$$(\omega,t) \longmapsto \int_A X(\omega,t,a)\mu(da)$$

は消散的である．□

補題 49. $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$ をフィルター付き確率空間とし，$(A, \mathscr{A})$ を任意の可測空間とする．$\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{A}$-可測関数の列 $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で，任意の (ω, a) に対して $t \mapsto Z(\omega,t,a)$ が *càdlàg* な関数であるようなものを考える．任意の $a \in A$ に対して確率過程の列 $(Z_n(a))$ は ucp で収束しているものと仮定しよう．このとき，$\Omega \times \mathbb{R}_+ \times A$ 上の実数値関数 Z で以下の条件を満たすものが存在する[*78]．

(i) Z は $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{A}$-可測．
(ii) 任意の $a \in A$ に対して，$Z(a)$ は確率 1 で *càdlàg* なパスを持つ．
(iii) 任意の $a \in A$ に対して $Z_n(a) \xrightarrow{ucp} Z(a)$ が成立．

証明．$D[0,\infty[$ に適当な距離を入れることから始めよう[*79]．

$$d_t(f,g) = \sup_{s\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} |f(s) - g(s)|$$
$$d(f,g) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(f,g)}{1 + d_n(f,g)} \tag{A.5.5}$$

と定義すれば，d は $D[0,\infty[$ に距離を定める．任意の $i,j \in \mathbb{N}$ に対して写像：$(\omega,a) \mapsto d(Z_i(\omega,a), Z_j(\omega,a))$ は $\mathscr{F} \otimes \mathscr{A}$-可測である[*80]．ここで，$\mathbb{N}$-値 $\mathscr{A}/2^{\mathbb{N}}$-可測関数の列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ を次のように定めよう：

$$n_0(a) = 1, \quad a \in A,$$
$$n_k(a) = \inf\left\{ m > n_{k-1}(a) \;\middle|\; \sup_{i,j\geq m} P\left(d(Z_i(a), Z_j(a)) > \frac{1}{2^k} \right) < \frac{1}{2^k} \right\}, \quad k \geq 1. \tag{A.5.6}$$

このとき

$$Y_k(\omega,t,a) = Z_{n_k(a)}(\omega,t,a) \tag{A.5.7}$$

と定めれば Y_k は $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{A}$-可測である．実際，$B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$\begin{aligned}
&\{(\omega,t,a) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \times A \mid Y_k(\omega,t,a) \in B\} \\
&= \{(\omega,t,a) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \times A \mid Z_{n_k(a)}(\omega,t,a) \in B\} \\
&= \bigcup_{m\geq 1} \{(\omega,t,a) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \times A \mid n_k(a) = m,\ Z_m(\omega,t,a) \in B\} \\
&\in \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{A}
\end{aligned} \tag{A.5.8}$$

[*78] $Z_n(a)$ は ucp で収束する言っているのだから (ii),，(iii) を満たす関数が存在するのは明らかであり，それが (i) の意味で可測となるようにとれるのかということが問題なのである．
[*79] ここで適当だというだけで，一般的に $D[0,+\infty[$ に入れるべき距離がこれだということではない．
[*80] 可測関数の可算族の sup や和をとったものだったから可測である．

となることから可測性が分かる．このとき，定義より

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \sup_{i,j\geq k} P\left[d(Y_i(a),Y_j(a)) > \frac{1}{2^k}\right] = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sup_{l,m\geq n_k(a)} P\left[d(Z_l(a),Z_m(a)) > \frac{1}{2^k}\right]$$
$$\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k} < \infty \tag{A.5.9}$$

特に，

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} P\left[d(Y_k(a),Y_{k+1}(a)) > \frac{1}{2^k}\right] < +\infty \tag{A.5.10}$$

が成立．Borel-Cantelli の補題により

$$P\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq m}\left\{\omega\in\Omega \;\middle|\; d(Y_k(a),Y_{k+1}(a)) > \frac{1}{2^k}\right\}\right) = 0 \tag{A.5.11}$$

となる．ここで，

$$N(a) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq m}\left\{\omega\in\Omega \;\middle|\; d(Y_k(a),Y_{k+1}(a)) > \frac{1}{2^k}\right\} \tag{A.5.12}$$

とする．$\omega\in\Omega\setminus N(a)$ とすれば，$N(a)$ の定義よりある $m_1 = m_1(\omega)\in\mathbb{N}$ が存在して

$$d(Y_k(\omega,a),Y_{k+1}(\omega,a)) \leq \frac{1}{2^k}, \quad k\geq m_1 \tag{A.5.13}$$

が成り立つ．任意の $\varepsilon>0$ に対して $1/2^{m_2} < \varepsilon$ なる $m_2 = m_2(\omega,\varepsilon)$ を取れば，任意の $i,j\geq m_1\vee m_2$ に対して

$$d(Y_i(\omega,a),Y_j(\omega,a)) \leq \sum_{k\geq m_1\vee m_2+1} d(Y_k(\omega,a),Y_{k+1}(\omega,a)) \leq \sum_{k\geq m_1\vee m_2+1}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m_1\vee m_2}} \leq \frac{1}{2^{m_2}} < \varepsilon \tag{A.5.14}$$

が成立．すなわち，任意の a と $\omega\in n(a)$ に対して $(Y_i(\omega,a))_{i\in\mathbb{N}}$ は $(D[0,\infty[\,,d)$ の Cauchy 列であることが分かる．いま，

$$Z(a,\omega,t) = \begin{cases} \lim_{k\to\infty} Y_k(a,\omega,t) & a\in A, \omega\in N(a), t\in\mathbb{R}_+ \\ 0 & \text{その他}. \end{cases}$$

と定めれば，任意の $a\in A$ に対して $Y_i(a) \xrightarrow{ucp} Z(a)$ が成立する．定義より Z は明らかに (i) から (iii) を満たす． □

命題 50 (パラメータつき確率積分の可測性)**.** $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},P)$ を通常の条件を満たすフィルターつき確率空間とし，$\mathscr{G}\subset\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ は部分 σ-加法族[*81]，$(A,\mathscr{A})$ を任意の可測空間とする．また，X をセミマルチンゲールとし，$H:\Omega\times\mathbb{R}_+\times A\to\mathbb{R}$ は $\mathscr{G}\otimes\mathscr{A}$-可測関数であるものとする．任意の $a\in A$ に対して確率積分 $H(a)\bullet X$ が存在するならば，関数 $H\bullet X:\Omega\times\mathbb{R}_+\times A\to\mathbb{R}$ で次の条件を満たすものが存在する：

(i) $H\bullet X$ は $\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathscr{A}$-可測[*82]．

(ii) 各 $a\in\mathscr{A}$ に対して $(H\bullet X)(a):\Omega\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ は確率 1 で *càdlàg* な適合過程．

[*81] 確率積分の被積分関数に求められる可測性，例えば $\mathscr{P}$ や Prog などが入る．
[*82] 完備性と確率積分の性質より，$\mathscr{O}\otimes\mathscr{A}$-可測までは出るように思う．

(iii) 各 $a \in \mathscr{A}$ に対して $(\omega,t) \mapsto (H(a) \bullet X)_t(\omega)$ と $(\omega,t) \mapsto (H \bullet X)(\omega,t,a)$ は区別不能.

証明．*Step 1*：H **が有界な場合**．$\mathscr{D}$ を命題の主張を満たすような有界 $\mathscr{G} \otimes \mathscr{A}$-可測関数の全体とする．$\mathscr{A}$-可測な単関数 H_1 と[*83]有界な $H_2 \in \mathscr{G}$ に対して $H = H_1 H_2$ と表現される関数の全体を $\mathscr{C}$ で表す．単調族定理を用いるために，以下のことを示せばよい[*84]：

(a) $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$.
(b) $\mathscr{C}$ は（各点ごとの）積について閉じている．
(c) $\mathscr{D}$ は線形空間.
(d) $\mathscr{D}$ は一様有界な単調収束について閉じている．

(a) $H_1 = \sum_i a_i 1_{A_i}$, $H = H_1 H_2 \in \mathscr{C}$ とし，

$$Z(\omega,t,a) := H_1(a)(H_2 \bullet X)(\omega,t) \tag{A.5.15}$$

と定義する．Z は $\mathscr{A}$-可測関数と $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-可測関数の積なので，$\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{A}$-可測である．$a$ を固定すれば Z は確率積分の $H_2 \bullet X$ の定数倍なので，連続性および適合性も分かる．さらに確率積分の線形性より，任意の $a \in A$ に対して

$$Z(a) = \sum_i a_i 1_{A_i}(a)(H_2 \bullet X) = \left(\sum_i a_i 1_{A_i}(a) H_2\right) \bullet X = H(a) \bullet X \tag{A.5.16}$$

が区別不能の意味で成り立つことが分かる．これより $Z = H_1 H_2 \in \mathscr{D}$ である．すなわち，$\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$ となり (a) が分かる．

(b) $H = H_1 H_2$, $H' = H_1' H_2' \in \mathscr{C}$ とする．$H_1 H_1'$ は単関数，$H_2 H_2'$ は有界 $\mathscr{G}$-可測関数なので，$HH' = (H_1 H_1')(H_2 H_2')$ はまた $\mathscr{C}$ の元である．よって (b) が成立．

(c) $H, K \in \mathscr{D}$ および $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$(\alpha H + \beta K) \bullet X := \alpha(H \bullet X) + \beta(K \bullet X) \tag{A.5.17}$$

と定義する．このとき $(\alpha H + \beta K) \bullet X$ は条件 (i)–(ii) を満たす．したがって $\mathscr{D}$ は線形空間である．

(d) $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathscr{D}$ の元で，単調増大かつ一様有界なるもの，H を (H_n) の（各点収束の意味での）極限とする．このとき，$H \in \mathscr{D}$ を示せばよい．確率積分に関する優収束定理より $(H_n(a) \bullet X)_{n\in\mathbb{N}}$ は $H(a) \bullet X$ に ucp の意味で収束するから，$((H_n \bullet X)(a))_{n\in\mathbb{N}}$ もまた ucp の意味で $H(a) \bullet X$ に収束する．したがって，補題 49 により $H(a) \bullet X$ のバージョン $H \bullet X$ で (i) と (ii) 満たすものが存在する．$H(a) \bullet X$ と $(H \bullet X)(a)$ はともに ucp の意味での $((H_n \bullet X)(a))_{n\in\mathbb{N}}$ の極限であるから，区別不能の意味での一意性がなりたつ．すなわち (iii) も成立．ゆえに $H \in \mathscr{D}$ であることが分かった．

$\mathscr{C}$ および $\mathscr{D}$ は条件 (a)–(d) を満たすから，単調収束定理により $\mathscr{D}$ は全ての $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{A} \otimes \mathscr{G}$ 可測有界関数を含む．

Step 2：**一般の場合**．H が有界とは限らないとき，$H^{(n)} = H 1_{\{|H| \le n\}}$ とおけば，書く n に対して $(H^{(n)}(a) \bullet X)_{a\in A}$ のバージョン $H^{(n)} \bullet X$ で (i)–(iii) を満たすものが存在する．確率積分に関する優収束定理より任意の a について $((H^{(n)} \bullet X)(a))_{n\in\mathbb{N}}$ は ucp の意味で $H(a) \bullet X$ に収束するから，先ほどと同様に命題の条件を満たすバージョン $H \bullet X$ が取れる． □

---

*83 このノートでは“単関数”は有界なるもの（i.e. 有限和で書かれているもの）に限って使っている．

*84 単調族定理の条件としては $1 \in \mathscr{D}$ というのもあるが，$1 \in \mathscr{C}$ なので (a) を示せば十分．

定理 51 (確率積分に関する Fubini の定理)．$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を通常の条件を満たすフィルターつき確率空間，$(A, \mathscr{A}, \mu)$ を任意の有限測度空間，X をセミマルチンゲールとする．$H : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times A \to \mathbb{R}$ を有界なる $\mathscr{P}(\mathbb{F}) \otimes \mathscr{A}$-可測関数とし，$H \bullet X$ で $(H(a) \bullet X)_{a \in A}$ の可測なバージョンを表すことにする．このとき，以下の等式が indistinguishable の意味で成立する：

$$\int_A (H \bullet X)(a) \mu(da) = \left(\int_A H(a) \mu(da) \right) \bullet X \tag{A.5.18}$$

ただし，(A.5.18) の左辺は確率過程 $(\omega, t) \mapsto \int_A (H \bullet X)(\omega, t, a) \mu(da)$ を表す．

証明．*Step 1* : $X \in \mathscr{M}^2$ **の場合．** 単調族定理によって証明する．$\mathscr{D}$ を有界 $\mathscr{P}(\mathbb{F}) \otimes \mathscr{A}$-可測関数で，(A.5.18) を満たすもの全体のなす集合，$\mathscr{C}$ を $H = H_1 H_2$ （$H_1 = \sum_i a_i 1_{A_i}$ は $\mathscr{A}$-可測単関数，H_2 は有界な $\mathscr{P}(\mathbb{F})$-可測関数）と表現される H 全体の作る集合とする．このとき，以下の事項を示せば良いのであった[*85]．

(a) $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$.
(b) $\mathscr{C}$ は（各点ごとの）積について閉じている．
(c) $\mathscr{D}$ は線形空間．
(d) $\mathscr{D}$ は一様有界な単調収束について閉じている．

(a) $H = H_1 H_2 \in \mathscr{C}$ とおけば，

$$\int_A (H \bullet X)(a) \mu(da) = \int_A \left(\sum_i a_i 1_{A_i} \right) (H_2 \bullet X) \mu(da) \tag{A.5.19}$$

が成立する．よって $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$ である．

(b) 明らか．

(c) $H, K \in \mathscr{D}$ および $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_A ((\alpha H + \beta K) \bullet X)(a) \mu(da) &= \int_A \alpha \big[(H \bullet X)(a) + \beta (K \bullet X)(a) \big] \mu(da) \\
&= \alpha \int_A (H \bullet X)(a) \mu(da) + \beta \int_A (K \bullet X)(a) \mu(da) \\
&= \alpha \left(\int_A H(a) \mu(da) \right) \bullet X + \beta \left(\int_A K(a) \mu(da) \right) \bullet X \\
&= \left(\alpha \int_A H(a) \mu(da) + \beta \int_A K(a) \mu(da) \right) \bullet X \\
&= \left(\int_A (\alpha H + \beta K)(a) \mu(da) \right) \bullet X.
\end{aligned} \tag{A.5.20}$$

よって $\alpha H + \beta K \in \mathscr{D}$ である．すなわち，$\mathscr{D}$ は線形空間である．

(d) 非負の関数列 $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は $\mathscr{D}$ の列で，単調増大に有界関数 H に各点収束するとする．仮定より

$$\int_A (H_n \bullet X)(a) \mu(da) = \left(\int_A H_n(a) \mu(da) \right) \bullet X \tag{A.5.21}$$

だから，この式における極限操作を正当化するのが目標である．(A.5.21) の右辺については確率積分に優収束定理より，

$$\left(\int_A H_n(a) \mu(da) \right) \bullet X \xrightarrow[n \to \infty]{ucp} \left(\int_A H(a) \mu(da) \right) \bullet X \tag{A.5.22}$$

[*85] 単調族定理の条件としては $1 \in \mathscr{D}$ というのもあるが，いま $1 \in \mathscr{C}$ なので (a) を示せば十分である．

が成立する．

次に，(A.5.21) 左辺の挙動を調べよう．初めに，そもそも (A.5.21) の左辺が well-defined かを確かめる．$Z_n = H_n \bullet X$ および $Z = H \bullet X$ と定義すれば，

$$\begin{aligned}
&E\left[\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\int_A |Z_n(a,\cdot,t)|\,\mu(da)\right] \\
&\leq E\left[\int_A \sup_{t\in\mathbb{R}_+}|Z_n(a,\cdot,t)|\,\mu(da)\right] \\
&\leq \sqrt{\mu(A)}\sqrt{E\left[\int_A\left(\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|Z_n(a,\cdot,t)|\right)^2\mu(da)\right]} \quad (\because \text{Schwarz}) \\
&= \sqrt{\mu(A)}\sqrt{\int_A E\left[\left(\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|Z_n(a,\cdot,t)|\right)^2\right]\mu(da)} \quad (\because \text{Fubini}) \\
&\leq \sqrt{\mu(A)}\sqrt{\int_A 4E\left[(Z_n(a,\cdot,\infty))^2\right]\mu(da)} \quad (\because \text{Doob；仮定より } Z_n \in H^2 \text{ であることに注意.}) \\
&= \sqrt{\mu(A)}\sqrt{\int_A 4E\left[\int_{[0,\infty[}(H_n(a,\cdot,s))^2 d[X,X]_s\right]\mu(da)} \quad (\because \text{Itô isometry}) \\
&< \infty
\end{aligned} \tag{A.5.23}$$

これより P-a.s. で，任意の $t \in \mathbb{R}_+$ に対して

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\int_A |Z_n(a,\omega,t)|\,\mu(da) < \infty \tag{A.5.24}$$

が成立する．同様にして $\int_A Z(a)\mu(da)$ が well-defined であることも分かる．ここで

$$\delta_n(\omega) = \sup_{t\in\mathbb{R}_+}\left|\int_A Z_n(a,\omega,t)\mu(da) - \int_A Z(a,\omega,t)\mu(da)\right| \tag{A.5.25}$$

とおいたとき，δ_n が確率収束することを示したい．先ほどと同様にして

$$\begin{aligned}
&E[\delta_n] \\
&\leq E\left[\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\int_A |Z_n(a,\cdot,t) - Z(a,\cdot,t)|\,\mu(da)\right] \\
&\leq E\left[\int_A \sup_{t\in\mathbb{R}_+}|Z_n(a,\cdot,t) - Z(a,\cdot,t)|\,\mu(da)\right] \\
&\leq \sqrt{\mu(A)}\sqrt{E\left[\int_A\left(\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|Z_n(a,\cdot,t) - Z(a,\cdot,t)|\right)^2\mu(da)\right]} \quad (\because \text{Schwarz}) \\
&= \sqrt{\mu(A)}\sqrt{\int_A E\left[\left(\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|Z_n(a,\cdot,t) - Z(a,\cdot,t)|\right)^2\right]\mu(da)} \quad (\because \text{Fubini})
\end{aligned}$$

$$\leq \sqrt{\mu(A)}\sqrt{\int_A 4E\left[(Z_n(a,\cdot,t)-Z(a,\cdot,t))^2\right]\mu(da)} \quad (\because \text{Doob})$$
$$= \sqrt{\mu(A)}\sqrt{\int_A 4E\left[\int_{[0,\infty[}(H_n(a,\cdot,s)-H(a,\cdot,s))^2 d[X,X]_s\right]\mu(da)} \quad (\because \text{Itô isometry}) \tag{A.5.26}$$

という評価が成り立つから[*86]，ここで $n\to\infty$ とすれば有界収束定理により最終辺は 0 に収束する．したがって $E[\delta_n]\to 0$ が成立し，特に

$$\int_A (H_n \bullet X)(a)\mu(da) \xrightarrow[n\to\infty]{ucp} \int_A (H \bullet X)(a)\mu(da) \tag{A.5.27}$$

も分かる．(??) の両辺はともに ucp で収束するから，その極限 $\left(\int_A H(a)\mu(da)\right)\bullet X$ と $\int_A (H\bullet X)(a)\mu(da)$ は indistinguishale の意味で一致する．

Step 2：$X\in\mathscr{M}^2_{loc}$ **の場合．** $X_0=0$ として示せばよい．X の局所化列 (T_n) を $X^{T_n}\in\mathscr{M}^2$ となるように選ぶ．このとき，step 1 の結果より

$$\int_A (H\bullet X^{T_n})(a)\mu(da) = \left(\int_A H(a)\mu(da)\right)\bullet X^{T_n} \tag{A.5.28}$$

が成立．この式は n ごとに indistinguishable の意味で成り立つから，対応する確率 1 の集合を Ω_n とする．さらに Ω' 上で $\lim_n T_n = T$ が成り立つような確率 1 の集合をとり，$\widetilde{\Omega}=\Omega'\cap\bigcap_n \Omega_n$ とおけば，これはまた確率 1 をもつ．$\omega\in\widetilde{\Omega}$ とすれば，任意の t に対して十分大きな $n=n(t)$ をとれば

$$\begin{aligned}\int_A (H\bullet X)(a,\omega,t)\mu(da) &= \int_A (H\bullet X^{T_n})(a,\omega,t)\mu(da)\\ &= \left(\int_A H(a)\mu(da)\right)\bullet X^{T_n}\\ &= \left(\left(\int_A H(a)\mu(da)\right)\bullet X\right)(\omega,t)\end{aligned} \tag{A.5.29}$$

したがって，$\omega\in\widetilde{\Omega}$ に対して二つのパスは一致する．すなわち二つの過程は区別不能である．

Step 3：**一般のセミマルチンゲールの場合．** 局所マルチンゲールの基本定理により任意のセミマルチンゲールは $X=X_0+A+M$ $(A\in\mathscr{V}, M\in\mathscr{M}^2_{loc})$ と表現される．M に関しては step 2 より定理の主張が成立．A に関しては通常の Fubini の定理より従う． □

A.6 停止過程について

X を確率過程としたとき，停止時刻 T に対して停止過程 X^T が定義される．X^T は明らかに

$$X^T = X1_{[\![0,T]\!]} + X_T 1_{]\!]T,+\infty[\![} = X1_{[\![0,T[\![} + X_T 1_{[\![T,+\infty[\![} \tag{A.6.1}$$

とも表現される．この表示からの類推で，*càdlàg* な確率過程 X に対して新たな確率過程 X^{T-} を定義しよう．

定義 52. X を *càdlàg* なパスを持つ確率過程とする．停止時刻 T に対して新たな確率過程 X^{T-} を

$$X^{T-} = X1_{[\![0,T[\![} + X_{T-}1_{[\![T,+\infty[\![} \tag{A.6.2}$$

によって定義する．

[*86] $X\in H^2$ と被積分関数の有界性より Doob の不等式が使える．

命題 53. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ を通常の条件を満たすフィルター付き確率空間，X を *càdlàg* なパスを持つ確率過程，T を停止時刻とする．

(i) X^{T-} はまた *càdlàg* なパスを持つ．Y も *càdlàg* 過程なら $(X+Y)^{T-} = X^{T-} + Y^{T-}$

(ii) X が適合なら，X^{T-} は適合過程である．

(iii) X が劣マルチンゲールで T が可予測時刻ならば，X^{T-} も劣マルチンゲールである．

(iv) X が局所マルチンゲールで T が可予測時刻ならば，X^{T-} も局所マルチンゲールである．

(v) X がセミマルチンゲールで T が停止時刻ならば，X^{T-} もセミマルチンゲールである．

(vi) H を可予測過程で X による確率積分が存在するものとすれば，任意の可予測時刻に対して $(H \bullet X)^{T-} = H \bullet X^{T-}$ が成立．

証明．(i) 明らか．

(ii) 定義より

$$T_t^{T-} = X_t 1_{\{t<T\}} + X_{T-} 1_{\{T \leq t\}}. \tag{A.6.3}$$

X は $\mathbb{F}$-適合で T は停止時刻なので，$X_t 1_{\{t<T\}}$ は $\mathscr{F}_t$-可測である．X_- は左連続適合過程なので発展的可測，よって $X_{T-} 1_{\{T<+\infty\}}$ は $\mathscr{F}_T$ 可測となる．これより $X_{T-} 1_{\{T \leq t\}}$ が $\mathscr{F}_t$-可測であることも分かる．

(iii) T を可予測時刻とすれば，予告列 (T_n) が存在する．このとき $X^{T_n} \to X^{T-}$ が各点の意味で成り立つ．実際，

$$X^{T_n} = X 1_{[\![0,T_n]\!]} + X_{T_n} 1_{]\!]T_n,+\infty]\!]} \tag{A.6.4}$$

という表示に注意して $n \to \infty$ とすれば，右辺は明らかに

$$X 1_{[\![0,T]\!]} + X_{T-} 1_{[\![T_n,+\infty]\!]} \tag{A.6.5}$$

に各点収束する．各 T_n については，$s \leq t$ とすれば任意抽出定理より

$$E[X_t^{T_n} | \mathscr{F}_s] \geq X_s^{T_n}, \quad \text{a.s.} \tag{A.6.6}$$

がなりたつので，$n \to \infty$ とすれば，

$$E[X_t^{T-} | \mathscr{F}_s] \geq X_s^{T-} \quad \text{a.s.} \tag{A.6.7}$$

が分かる．ただし，左辺の収束は L^1 かつ $a.s.$ で，右辺は各点の意味である．

(iv) T を可予測時刻，(T_n) をその予告列とする．さらに，(S_n) を局所マルチンゲール X の局所化列とする．このとき，各 $(X^{T-})^{S_n}$ がマルチンゲールになっていることを示せばよい．

$$\begin{aligned}(X^{T_m})^{S_n} &= X^{T_m} 1_{[\![0,S_n]\!]} + X_{S_n}^{T_m} 1_{]\!]S_n,+\infty]\!]} \\ &\xrightarrow[m\to\infty]{\text{pointwise}} X^{T-} 1_{[\![0,S_n]\!]} + X_{S_n}^{T-} 1_{]\!]S_n,+\infty]\!]} = (X^{T-})^{S_n}\end{aligned} \tag{A.6.8}$$

であることが分かるから，条件付き期待値における極限操作を正当化すればよい．仮定より各 n, m に対して $(X^{T_m})^{S_n} = (X^{S_n})^{T_m} = X^{S_n \wedge T_m}$ は一様可積分マルチンゲールであるから，$s \leq t$ に対して

$$E[X_{t \wedge T_m \wedge S_n} | \mathscr{F}_s] = X_{s \wedge T_m \wedge S_n}, \quad \text{a.s.} \tag{A.6.9}$$

が成立．列 $(X_t^{T_m \wedge S_n})_{m \in \mathbb{N}}$ が一様可積分であることに注意して極限をとれば

$$E[(X_t^{T-})^{S_n} | \mathscr{F}_s] = (X_s^{T-})^{S_n}, \quad \text{a.s.} \tag{A.6.10}$$

が成立．よって確率過程 X^{T-} はまた局所マルチンゲールであることが分かる．

(v)

$$\begin{aligned} X^{T-} &= X1_{[\![0,T[\![} + X_{T-}1_{[\![T,+\infty[\![} \\ &= X1_{[\![0,T[\![} + X_T 1_{[\![T,+\infty[\![} - \left(X_T 1_{[\![T,+\infty[\![} - X_{T-}1_{[\![T,+\infty[\![}\right) \\ &= X^T - \Delta X_T 1_{[\![T,+\infty[\![} \end{aligned} \tag{A.6.11}$$

という表示より分かる．なお，一般の停止時刻に対しては，セミマルチンゲール分解 $X = M + A$ の停止過程 $X^{T-} = M^{T-} + A^{T-}$ がセミマルチンゲールの分解を与えているとは限らない点に注意せよ．T が可予測時刻ならば (iv) より $X^{T-} = M^{T-} + A^{T-}$ は実際に局所マルチンゲールと有限変動過程への分解になっている．

(vi) 省略．Protter [32] などを見よ． □

A.7 Dini の定理

わざわざ小節を割いてまで扱う内容でもない気がするが，一応証明を載せておく．

定理 54 (Dini の定理)**.** K をコンパクト空間とする．(f_n) を $C(K,\mathbb{R})$ の列で，$f \in C(K,\mathbb{R})$ に単調減少に，各点収束するものとする．このとき，(f_n) は f に一様収束する．

証明. 任意の n について $f_n - f \geq 0$ であることに注意する．$\varepsilon > 0$ に対して

$$U_n^\varepsilon := \{x \in K \mid f_n(x) - f(x) < \varepsilon\} \tag{A.7.1}$$

と定義しよう．f_n および f の連続性より各 U_n は開集合であり，(f_n) の単調性より (U_n^ε) は（包含関係について）単調増大列である．さらに，(f_n) が f に収束することを思い出せば $K = \bigcup_n U_n^\varepsilon$ であり，コンパクト性より有限部分被覆が存在する．よってある $n_0(\varepsilon)$ に対して $U_{n_0(\varepsilon)}^\varepsilon = K$ が成り立つが，これはすなわち

$$\sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{for all } n \geq n_0(\varepsilon) \tag{A.7.2}$$

ということに他ならない．よって (f_n) は f に一様収束する． □

付録 B　補足，注釈など

セミマルチンゲールや確率解析に関する歴史や文献に関しては Dellacherie & Meyer [6, 7] や Protter [32], Revuz & Yor [34] などが詳しく，この節の記述も [32] と [34] を参考にしている部分も多い．詳細はこれらの文献を参照されたい．

Lemieux 氏の論文 [21] における参考文献は Chacon et al. [2], Doob [9], El Karoui [10], Meyer [27], Monroe [31], Taylor [37], Walsh [39], Yor [43] である．ただし，[21] の参考文献の情報は所々間違っているので注意せよ．

■Section 1　セミマルチンゲールと確率解析についての基礎事項は，He, Wang, & Yan [14], Jacod & Shiryaev [18], Medvegyev [26] を参考にした．

セミマルチンゲールの $\mathscr{H}^p$ 空間は，Emery [11] において最初に導入された．Lemieux の論文では special semimartingale に対して $\mathscr{H}^p$ ノルムを定義していたが，実際はセミマルチンゲール X に対して $X = M + A$

というセミマルチンゲール分解に関する $\mathscr{H}^p$ ノルムの inf を X の $\mathscr{H}^p$ ノルムと定義する．このとき，$\mathscr{H}^p$ の元は結果的に special semimartingale になることが示される．（Emery [12]）

ブラウン運動に関する局所時間の概念は Paul Lévy [22, 23] によって導入された[*87]．我々は田中の公式に現れる有界変動部分として局所時間を定義したが，Lévy の思想はむしろ滞在時間公式や系 27 である．滞在時間の密度としての局所時間の存在は Trotter [38] によって成された．セミマルチンゲールの局所時間の研究は Meyer [27] に始まる．

ブラウン運動とその局所時間における田中の公式は田中洋によるものであり[*88]，独立，定常増分過程については関連する結果 Millar [29] がある．セミマルチンゲールの場合（定理 16）は [27] による．補題 18 も [27] にあるようだが（フランス語が分からないので断言は出来ないが...）ここでの証明は恐らく Jacod [17] が書いたものである．（英語の方が良いので，私は [14] を読んだ．）Meyer-Itô の公式（定理 21）は連続セミマルチンゲールの場合 Itô-Tanaka の公式とも呼ばれるようである（[34]）．凸関数 f が絶対値の場合は Meyer [27] に既に見られるが，一般の場合は Yor [42] および [17] による．

Occupation time formula は Revuz & Yor に従い，より強い形の主張を採用した．（Lemieux の論文と比較せよ．）局所時間の空間パラメータに関する連続性を示す定理 25 とその補題 27 は Yor [43] による．空間パラメータに関する *càdlàg* バージョンについても occupation time formula が成り立つことを保証するためには補題 48 [*89]が必要であるように思うが（注意 26 を見よ），それともこれは自明なことだろうか？

セミマルチンゲールの局所時間に詳しい書物としては，Dellacherie, Maisonneuve, & Meyer [5] や [26], Protter [32] がある．連続セミマルチンゲールの局所時間については Revuz & Yor [34] が優れている．

■Section 2　上向き横断数の確率積分による表示を与える命題 28 は El Karoui [10] によるが，Lemiux の論文の表示は本来の El Karoui によるものとは幾分異なる．上向き横断数の表示として，局所時間の定義に出てくるのと似た形の項を出したかったのかもしれない．Lemieux の証明では

$$\int_0^t 1_{\{X_{s-}=a\}} dX_s = \sum_{0<s\leq t} 1_{\{X_{s-}=a\}} \Delta X_s + \phi_t^a$$

という表現の根拠として定理 25 を用いているが，これでは仮定 (A) が必要であり，Lemieux の論文の仮定では成り立たないことになってしまう．それよりも命題 17 (Yoeurp [41]) の結果を用いるべきである．（そもそも El Karoui はこのように証明している．）

ブラウン運動の横断数が局所時間に収束するという定理 32 のアイディアは Lévy によるもので，Itô & McKean [16] において最初に証明された．その後も Chung & Derret [3], Williams [40], Kasahara [20], Maisonneuve [24] などがあり，Getoor [13] はより一般的な過程に対して定理を証明した．セミマルチンゲールの場合は El Karoui [10] によって証明された．Lemieux の論文では x についての一様性まで保証されているが，この部分はむしろ Chacon et al. [2] を参考にしたものと思われる．

■Section 3　この論文における確率過程の arc length の概念は，Chacon et al. [2] を参考にしている．[2] で用いられている quadratic arc length, generalized arc length といったものが [2] で初めて導入されたものかはよく分からないが，確率過程論において一般的な道具というわけではなさそうである．この論文の主定理である定理 38 は [2] の結果の，セミマルチンゲールへの一般化となっている．

[*87] 私はフランス語が読めないので，実際のところこの本に何が書いてあるのかさっぱり分からない．しかし，幸いなことに Lévy の仕事は Itô & McKean [16, chapter 2] において詳しく解説されているようなので，そちらも参照されたい．

[*88] この結果自体は未発表であるが，McKean [25, p.68] において田中の結果であることが述べられている．

[*89] 証明が見つからないのでとりあえず自分で書いてみたが，本当に正しいだろうか？

■付録　Kolmogorov の連続変形定理の証明は [34] にあるものを引用したが，[34] には Meyer [28] にある証明を用いたと書いてある．

A.2 および A.3 の内容は [34] の appendix および [26] の 6.5 を参考にした．凸関数についてより詳しいことは，Roberts & Varberg [35] や Hiriart-Urruty & Lemarechal [15] などの専門書を参照されたい．

パラメータ付確率積分の節は [26] を参考に書いた．パラメータを持つ確率積分の研究は Doleans-Dade [8] に端を発し，Stricker-Yor [36] によるところが大きい．確率積分に関する Fubini の定理は Doob [9, p.431] および Kallianpur & Striebel [19] に始まり，Jacod [17] によってセミマルチンゲールの場合に示された．

停止過程 X^{T-} については [32] を参考にした．今のところ起源は分からないが，少なくとも Emery [11] において既に使われている．

参考文献

[1] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer-Verlag New York, 2011.

[2] R. V. Chacon, Y. Le Jan, E. Perkins, and S. J. Taylor. Generalised arc length for Brownian motion and Lévy processes. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, No. 2, pp. 197–211, june 1981.

[3] Kai Lai Chung and Richard Durrett. Downcrossings and local time. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, Vol. 35, No. 2, pp. 147–149, June 1976.

[4] Donald L. Cohn. *Measure theory*. Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher. Birkhäuser, second edition, 2013.

[5] Claude Dellacherie, Bernard Maisonneuve, and Paul-André Meyer. *Probabilités et potentiel. Chapitres XVII à XXIV. Processus de Markov (fin). Compléments de calcul stochastique*. Hermann, 1992.

[6] Claude Dellacherie and Paul-André Meyer. *Probabilities and Potential*. North-Holland, 1978.

[7] Claude Dellacherie and Paul-André Meyer. *Probabilities and Potential B*. North-Holland, 1982.

[8] C Doleans-Dade. Intégrales stochastiques dépendant d'un paramtère. *Publications de l'Institut de statistique de l'Universit de Paris*, Vol. 16, pp. 23–34, 1967.

[9] J. L. Doob. *Stochastic Processes*. 1953.

[10] Nikole El Karoui. Sur les montées des semi-martingales le cas non continu. *Astérisque*, Vol. 52–53, pp. 73–87, 1978.

[11] Michel Emery. Stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques application aux intégrales multiplicatives stochastiques. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, Vol. 41, No. 3, pp. 241–262, September 1978.

[12] Michel Émery. Une topologie sur l'espace des semimartingales. In *Séminaire de probabilités XIII Université de Strasbourg 1977/78*, Vol. 721 of *Lecture Notes in Mathematics*, pp. 260–280. Springer Berlin Heidelberg, 1979.

[13] R. K. Getoor. Another limit theorem for local time. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, Vol. 34, No. 1, pp. 1–10, March 1976.

[14] Sheng-wu He, Jia-gang Wang, and Jia-an Yan. *Semimartingale Theory and Stochastic Calculus*. Science Press and CRC Press, 1992.

[15] Jean-Baptiste Hiriart-Urruty and Claude Lemaréchal. *Fundamentals of convex analysis*. Grundlehren text editions. Springer-Verlag, 2001.

[16] Kyosi Itô and Henry P. Jr. McKean. *Diffusion Processes and their Sample Paths*, Vol. 125 of *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1965.

[17] J. Jacod. *Calcul Stochastique et Problèmes de Martingales*, Vol. 714 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1979.

[18] Jean Jacod and Albert N. Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Vol. 288 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1987.

[19] G. Kallianpur and C. Striebel. Stochastic differential equations occurring in the estimation of continuous parameter stochastic processes. *Teoriya Veroyatnostei i ee Primeneniya*, Vol. 14, pp. 597–622.

[20] Yuji Kasahara. On Lévy's downcrossing theorem. *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, Vol. 56, No. 10, pp. 455–458, 1980.

[21] Marc Lemieux. On the quadratic variation of semi-martingales. Master's thesis, The University of British Columbia, 1983.

[22] Paul Lévy. Sur certains processus stochastiques homogènes. *Compositio Mathematica*, Vol. 7, pp. 283–339, 1940.

[23] Paul Lévy. *Processus stochastiques et mouvement brownien*. Monographies des probabilités : calcul des probabilités et ses applications. Gauthier-Villars, 1948.

[24] B. Maisonneuve. On Levy's downcrossing theorem and various extensions. In Jacques Azéma and Marc Yor, editors, *Séminaire de Probabilités XV 1979/80*, Vol. 850 of *Lecture Notes in Mathematics*, pp. 191–205. Springer Belin Heidelberg, 1981.

[25] H. P. McKean, Jr. *Stochastic Integrals*. Probability and Mathematical Statistics: A Series of Monographs and Textbooks. Academic Press, 1969.

[26] Peter Medvegyev. *Stochastic Integration Theory*. Oxford University Press, 2007.

[27] Paul-André Meyer. Un cours sur les integrales stochastiques. In *Séminaire de Probabilités X Université de Strasbourg*, Vol. 511 of *Lecture Notes in Mathematics*, pp. 245–400. Springer-Verlag, 1976.

[28] Paul-André Meyer. Flot d'une équation différentielle stochastique. In *Séminaire de Probabilités XV 1979/80*, Vol. 850 of *Springer Lecture Notes in Mathematics*, pp. 103–117. Springer-Verlag, 1981.

[29] P. Warwick Millar. Stochastic integrals and processes with stationary independent increments. In *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 3: Probability Theory*, pp. 307–331, Berkeley, 1972. University of California Press.

[30] 宮島静雄. 関数解析. 横浜図書, 2014.

[31] Itrel Monroe. Almost sure convergence of the quadratic variation of martingales: A counterexample. *The Annals of Probability*, Vol. 4, No. 1, pp. 133–138, 1976.

[32] Philip E. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations*, Vol. 21 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer-Verlag, second edition, 2004.

[33] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis,*

Revised and Enlarged Edition. Academic Press, 1980.

[34] Daniel Revuz and Marc Yor. *Continusous Martingales and Brownian Motion*, Vol. 293 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, third edition, 1999.

[35] A. Wayne Roberts and Dale E. Varberg. *Convex functions*, Vol. 57 of *Pure and applied mathematics*. Academic Press, New York, 1973.

[36] C. Stricker and M. Yor. Calcul stochastique dépendant d'un paramètre. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, Vol. 45, No. 2, pp. 109–133, June 1978.

[37] S. J. Taylor. Exact asymptotic estimates of brownian path variation. *Duke Mathematical Journal*, Vol. 39, No. 2, pp. 219–241, 06 1972.

[38] H. F. Trotter. A property of Brownian motion paths. *Illinois Journal of Mathematics*, Vol. 2, No. 3, pp. 425–433, 09 1958.

[39] J. Walsh. A diffusion with a discontinuous local time. *Astérisque*, Vol. 37–46, pp. 197–218, 1978.

[40] David Williams. Lévy's downcrossing theorem. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, Vol. 40, No. 2, pp. 157–158, June 1977.

[41] CH. Yoeurp. Compléments sur les temp locaux et les quasi-martingales. *Astérisque*, Vol. 52-53, pp. 197–218, 1978.

[42] Marc Yor. Rappels et préliminaires généraux. *Astérisque*, Vol. 52-53, pp. 17–22, 1978.

[43] Marc Yor. Sur la continuité des temps locaux associés á certaines semi-martingales. *Astérisque*, Vol. 52–53, pp. 23–36, 1978.

索引