第三章 矩阵分解

QR 分 解

定义3.4.1（QR分解）若复方阵A可分解为$A = QR$，其中Q为酉矩阵，R为上三角矩阵，则称矩阵A可作QR**分解**（或**酉三角分解**）. 若分解式$A = QR$中，矩阵A是实方阵，Q为正交矩阵，R为上三角矩阵，此时则称分解式$A = QR$为**正交三角分解**.

注意，没要求是正三角阵，因此分解可能不唯一

定理3.4.1 若实方阵A满秩，则存在正交矩阵Q及正线上三角阵R 满足$A = QR$且分解唯一.

证明：$A = (\boldsymbol{x_1}, \cdots, \boldsymbol{x_n})$

回顾Schmidt单位正交化过程

正交化：

$$\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} h_i^k \boldsymbol{z}_i, \quad h_i^k = (\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{z}_i),$$

单位化：$\boldsymbol{z}_k = \frac{\boldsymbol{y}_k}{\|\boldsymbol{y}_k\|}$

$$\boldsymbol{x}_k = ||\boldsymbol{y}_k||\boldsymbol{z}_k + \sum_{i=1}^{k-1} (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i)\, \boldsymbol{z}_i$$

定理3.4.1 若实方阵A满秩，则存在正交矩阵Q及正线上三角阵R 满足$A=QR$且分解唯一.

证明：$A=(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$

$$\boldsymbol{x}_k=||\boldsymbol{y}_k||\boldsymbol{z}_k+\sum_{i=1}^{k-1}(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{z}_i)\,\boldsymbol{z}_i$$

$$(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$$

$$=(\boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_n)\begin{bmatrix} \|\boldsymbol{y}_1\| & (\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{z}_1) & \cdots & (\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{z}_1) \\ & \|\boldsymbol{y}_2\| & \cdots & (\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{z}_2) \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \|\boldsymbol{y}_n\| \end{bmatrix}$$

2.1 QR分解

定理1：若实方阵A满秩，则存在正交矩阵Q及正线上三角阵R 满足$A = QR$且分解唯一.

证明：假设分解不唯一. $A = Q_1R_1 = Q_2R_2$.

则$Q_2^TQ_1 = R_2R_1^{-1}$，等式左边正交矩阵，右边为正线上三角阵.

记 $R_2R_1^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{r}_{11} & \tilde{r}_{12} & \cdots & \tilde{r}_{1n} \\ & \tilde{r}_{22} & \cdots & \tilde{r}_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \tilde{r}_{nn} \end{bmatrix}$

可验证

$$\tilde{r}_{ii}^2 = 1, i = 1, \cdots, n$$

$$\tilde{r}_{ij} = 0, \ j \neq i, \ i, j = 1, \cdots, n$$

注1： 若一实方阵既是正交矩阵又是正线上三角矩阵，则该矩阵一定是单位矩阵.

注2： 若不要求上三角阵R的对角元素全为正实数，则定理3.4.1证明中方程（3.4.2）的解不唯一，进而导致矩阵A的QR分解不唯一. 例如，考查二阶单位矩阵I_2的QR分解问题，显然，以下两种结果都是A的QR分解：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\triangleq QR$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\triangleq Q_1R_1$$

定理3.4.2 设复方阵A可逆，则存在酉矩阵U及正线上三角阵R 满足$A=UR$且分解唯一.

推论3.4.1 矩阵$A\in\mathbb{C}_n^{m\times n}$可分解为$A=UR$，其中，$U$是$m$阶酉矩阵，$R=\begin{bmatrix}R_1\\0\end{bmatrix}_{m\times n}$，$R_1$为正线上三角矩阵，$n\le m$.

证明:$A=[A_1,A_2,\dots,A_n]$,$A_1,A_2,\dots,A_n$扩充为m个线性无关向量，构成满秩矩阵B，然后再做UR 分解.

$$[A_1,A_2,\dots,A_m]=U[R,\tilde{R}]$$

【思考】：非方矩阵是否可作QR分解？

求矩阵的特征值、特征向量的方法:QR算法.

首先对矩阵A_k进行QR分解:

$$A_k = Q_k R_k,$$

其中$A_1 = A$.

然后令$A_{k+1} = R_k Q_k$.

由$A_k = Q_k R_k \Rightarrow A_{k+1} = {Q_k}^H A_k Q_k$

即A_{k+1}与A_k相似, 有相同特征值.

（2）求矩阵的特征值、特征向量的一种有效方法:QR算法.

例1: $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}$,

$$A_{10}=\begin{bmatrix}4.7282 & 0.0781 & 0\\ 0.0781 & 3.0035 & -0.0020\\ 0 & 0.0048 & 1.2680\end{bmatrix}$$

该矩阵特征值精确解: $\lambda_1=3+\sqrt{3}=4.7321$,

$\lambda_2=3, \lambda_3=3-\sqrt{3}=1.2679$.

（2）求矩阵的特征值、特征向量的一种有效方法:QR算法(二十世纪在科学和工程上有最大贡献与影响的十大算法).

IMA Journal of Numerical Analysis (2009) **29**, 467–485
doi:10.1093/imanum/drp012
Advance Access publication on June 8, 2009

The QR algorithm: 50 years later its genesis by John Francis and Vera Kublanovskaya and subsequent developments

GENE GOLUB

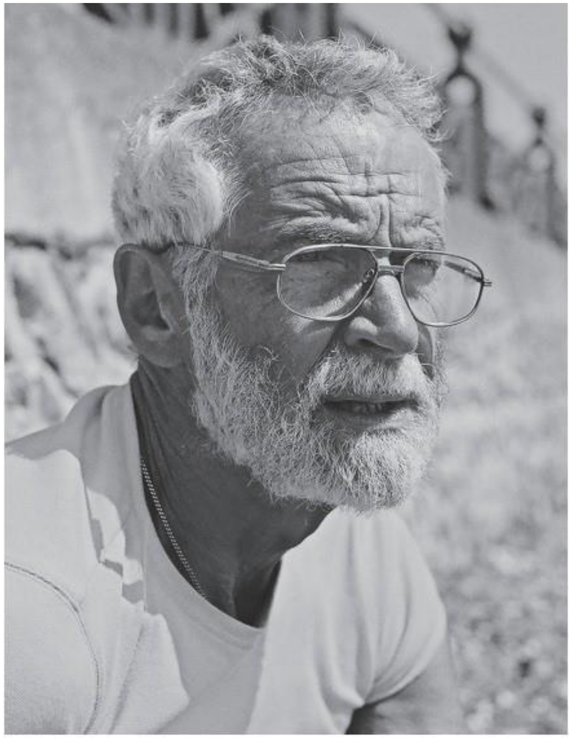
'February 29, 1932 – November 16, 2007, formerly Fletcher Jones Professor of Computer Science, Stanford University'

AND

FRANK UHLIG†

Department of Mathematics and Statistics, Auburn University, Auburn, AL 36849-5310

[Received on 31 January 2009]



John Francis in July 2008

例3.4.1 利用QR算法求矩阵的特征值，其中

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&3&1\\0&1&4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4&1&-3\\-2&1&1\\2&1&-1\end{bmatrix}$$

【思考】： 能否利用Givens矩阵或Householder将满秩矩阵作QR分解，若可行试设计相应的求解方法？