第三章 矩阵分解

Schur 分 解

定理3.5.1（Schur引理）任意n阶复方矩阵A相似于上三角矩阵Λ，即存在可逆矩阵P使得$\Lambda = P^{-1}AP$为上三角阵，其中上三角矩阵Λ的对角元素是矩阵A的特征值.

证明：数学归纳法

1、1阶矩阵，命题显然成立

2、假设n-1阶矩阵，命题成立

代数基本定理

3、对于n阶复方矩阵A，一定存在一个特征根λ及特征向量ξ_1，使得$A\xi_1 = \lambda\xi_1$. 将ξ_1扩充为$\mathbb{C}^n$上的一组基$\xi_1, \cdots, \xi_n$.

定理3.5.1（Schur引理）任意n阶复方矩阵A相似于上三角矩阵Λ，即存在可逆矩阵P使得$\Lambda = P^{-1}AP$为上三角阵，其中上三角矩阵Λ的对角元素是矩阵A的特征值.

证明：记 $P_n = [\xi_1, \cdots, \xi_n]$, 则$P_n^{-1}AP_n = \begin{bmatrix} \lambda & * \\ 0 & A_{n-1} \end{bmatrix}$.

由假设，存在$n-1$阶可逆矩阵P_{n-1}，使得$P_{n-1}^{-1}A_{n-1}P_{n-1}$为上三角矩阵.

令$P = P_n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix}$即可. Λ对角元为A的特征根**（复数域）**

定理3.5.2（Schur引理）任意复方矩阵A酉相似于上三角矩阵Λ，即存在一酉矩阵U使得$\Lambda = U^H AU$为上三角阵.

证明：存在可逆矩阵P使得$P^{-1}AP = \Lambda_1$为上三角矩阵

可逆矩阵$P = UR, U$为酉矩阵，R为正线上三角矩阵。

$$U^{-1}AU = U^H AU = R^{-1}\Lambda_1 R\text{为上三角矩阵,}$$

且对角元为A的特征根**（复数域）**

注1： 与定理3.5.1相比，定理3.5.2进一步说明了Schur分解中的满秩矩阵P可以是酉矩阵．由于酉矩阵的逆矩阵是其共轭转置，不需要复杂计算，这为简化分析提供了重要的技术支持.

【思考】： 是否存在正交矩阵Q使得实方阵A具有如下Schur分解？

$$Q^T AQ = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

定理3.5.3（实方阵Schur引理） 设$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$的特征值均为实数，则存在正交矩阵$Q$使得

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

定义3.5.1（矩阵多项式）设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$， $\varphi(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$， $a_i \in \mathbb{C}$（$i = 0,1,\cdots,n$）是数域$\mathbb{C}$上的多项式，则

$$\varphi(A) = a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I$$

称为**矩阵多项式**.

若A, B可交换, 则$\varphi(A)$和$\varphi(B)$可交换

$$P^{-1}\varphi(A)P = \varphi(P^{-1}AP)$$

定义3.5.1（矩阵多项式） 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，$\varphi(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$，$a_i \in \mathbb{C}$（$i = 0,1,\cdots,n$）是数域$\mathbb{C}$上的多项式，则

$$\varphi(A) = a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I$$

称为**矩阵多项式**.

推论3.5.1 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$的$n$个特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则矩阵$A^m$的$n$个特征值为$\lambda_1^m,\cdots,\lambda_n^m$，$m \in \mathbb{N}$.

推论3.5.2 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$的$n$个特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，$\varphi(\lambda)$为任一多项式，则矩阵多项式$\varphi(A)$的$n$个特征值为$\varphi(\lambda_1),\cdots,\varphi(\lambda_n)$.

推论3.5.1 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$的$n$个特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则矩阵$A^m$的$n$个特征值为$\lambda_1^m,\cdots,\lambda_n^m$，$m \in \mathbb{N}$.

$$U^H A U = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$U^H A^m U = (U^H A U)^m = \Lambda^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^m \end{bmatrix}$$

推论3.5.2 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$的$n$个特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，$\varphi(\lambda)$为任一多项式，则矩阵多项式$\varphi(A)$的$n$个特征值为$\varphi(\lambda_1),\cdots,\varphi(\lambda_n)$.

$$U^H \varphi(A) U = \varphi(\Lambda) = \begin{bmatrix} \varphi(\lambda_1) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

注2： n阶矩阵A的属于特征值λ_i的特征向量$\boldsymbol{\alpha}_i$也是$\varphi(A)$的属于特征值$\varphi(\lambda_i)$的特征向量.

$$A\boldsymbol{\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i,\ A^m\boldsymbol{\alpha}_i=\lambda_i^m\boldsymbol{\alpha}_i,\ \varphi(A)\ \boldsymbol{\alpha}_i=\varphi(\lambda_i)\boldsymbol{\alpha}_i$$

反之不成立

【思考】： 设$f_A(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$是矩阵$A$特征多项式，求矩阵多项式$f_A(A)$.

$$f_A(\lambda)=|\lambda I-A|$$

$$f_A(A)=|AI-A|=|A-A|=|0|=0?\ ?$$

对吗

定理3.5.4（Hamilton-Cayley定理）设矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$的特征多项式为$f_A(\lambda) = |\lambda I - A|$，则$f_A(A) = 0$.

注3：由于$L(V) \cong \mathbb{C}^{n\times n}$，故对线性变换$T$有平行的结果：$\forall T \in L(V)$且$f_A(\lambda)$为$T$的特征多项式，则$f_A(T)$为零变换.

定理3.5.4（Hamilton-Cayley定理）设矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的特征多项式为 $f_A(\lambda) = |\lambda I - A|$，则 $f_A(A) = 0.$

证明: (1) Schur引理

$f_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$

$f_A(A)$特征根为$f(\lambda_1)\cdots f(\lambda_n)$，均为0，

$f_A(A)$=0，？？？

Schur引理并未将矩阵分解为对角型，$\Lambda = P^{-1}AP$为上三角矩阵.

$f_A(A) = (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)\cdots(A - \lambda_n I)$

$P^{-1}f_A(A)P$= $P^{-1}(\Lambda - \lambda_1 I)(\Lambda - \lambda_2 I)\cdots(\Lambda - \lambda_n I)P$=0

复数域

定理3.5.4（Hamilton-Cayley定理）设矩阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的特征多项式为 $f_A(\lambda)=|\lambda I-A|$，则 $f_A(A)=0.$

证明:（2）伴随矩阵方法

$$B(\lambda)(\lambda I-A)=f_A(\lambda)I=(\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0)I$$

$$B(\lambda)=\lambda^{n-1}B_0+\lambda^{n-2}B_1+\cdots+B_{n-1}$$

比较系数，

$$B_0=I,\ (B_1-B_0A)=a_{n-1}I\ \cdots,\ -B_{n-1}A=a_0I$$

左右同乘A^n, A^{n-1}**,...,**E**, 相加，得**$f_A(A)=0$

第三章 矩阵分解——Schur分解

（2）伴随矩阵方法

$B(\lambda)(\lambda I - A) = f_A(\lambda)I = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)I$

$B(\lambda) = \lambda^{n-1}B_0 + \lambda^{n-2}B_1 + \cdots + B_{n-1}$

比较系数，

$B_0 = I, (B_1 - B_0 A) = a_{n-1}I \cdots, -B_{n-1}A = a_0 I$

左右同乘$A^n, A^{n-1}, \cdots, I$**相加，得**$f_A(A) = 0$

$$-B_{n-1}A = a_0 I = (-1)^n |A| I$$

$$A^* = adj(A) = (-1)^{n-1}B_{n-1}$$

$$= (-1)^{n-1}\ (A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} \cdots + a_1 I)$$

（实方阵Schur引理）设$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，则其复数特征根必成对出现, 且存在可逆实数矩阵$P$使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_n \end{bmatrix}$$

$\Lambda_i = |\lambda_i| \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix}$, λ_i为复数, 或者 $\Lambda_i = \lambda_i$, λ_i为实数.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_n \end{bmatrix}$$

$\Lambda_i = |\lambda_i| \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix}$, λ_i为复数, 其特征多项式

$$f_{\Lambda_i}(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)(\lambda - \bar{\lambda}_i)$$

例3.5.1 已知$A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}$，计算矩阵多项式$A^4-2A^2+I$.

解：矩阵A的特征多项式为

$$f_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+1 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3$$

令$g(\lambda)=\lambda^4-2\lambda^2+1$，由多项式除法可得

$$g(\lambda)=f_A(\lambda)(\lambda+3)+4(\lambda-1)^2$$

多项式带余除法

由定理3.5.4知，$g(A)=4(A-I)^2$. 将矩阵A表达式代入上式得$g(A)=0$.

推论3.5.3 设复方阵A可逆，其特征多项式为$f_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$，则矩阵$A$的逆矩阵计算公式为

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I)$$

$$f_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0.$$

左右同乘以A^{-1}, 移项即可得到结论.

例3.5.2 求矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$的逆.

定义3.5.2（零化多项式）给定复方阵$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，若存在多项式$g(\lambda)$使得$g(A)=0$，则称$g(\lambda)$为$A$的**零化多项式**.

定义3.5.3（最小多项式）设复方阵A的零化多项式中最小次数的首1多项式称为A的**最小多项式**，记为$m_A(\lambda)$.

【思考】：特征多项式$f_A(\lambda)$是矩阵A的零化多项式，问$f_A(\lambda)$是矩阵A的最小多项式吗？

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

定理3.5.5（最小多项式的性质） 设矩阵$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，则

（1）矩阵A的最小多项式$m_A(\lambda)$是唯一的，且可整除A的任一零化多项式. 特别地，有$m_A(\lambda)|f_A(\lambda)$.

（2）矩阵A的特征多项式$f_A(\lambda)$与最小多项式$m_A(\lambda)$具有相同的根（不计重数）.

证明: (1) 带余除法， $f_A(\lambda)=m_A(\lambda)q_A(\lambda)+r_A(\lambda)$

（2） 显然， $m_A(\lambda)=0$ 的根一定是 $f_A(\lambda)=0$ 的根；反过来，若$f_A\,(\lambda_i)=0, Ax_i=\lambda_i x_i$.

$0=m_A(\mathrm{A})x_i=m_A(\lambda_i)x_i$， $m_A(\lambda_i)=0$

例3.5.3 求矩阵$A=\begin{bmatrix}2 & -2 & 2\\ -2 & -1 & 4\\ 2 & 4 & -1\end{bmatrix}$的最小多项式.

$$f_A(\lambda)=(\lambda-3)^2(\lambda+6).$$

$$m_A(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda+6)$$

或者$m_A(\lambda)=(\lambda-3)^2(\lambda+6).$

例3.5.4 设$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$，求$A^{100}$.

$$f_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-4)$$