



北京航空航天大学
BEIHANG UNIVERSITY

矩阵理论

刘克新

自动化科学与电气工程学院

第二章 线性映射与矩阵

- 预备知识
- 线性映射
- 矩阵与同构基与坐标
- 特征值与特征向量
- 酉变换与酉矩阵
- 应用：图的矩阵表示

第二章 线性映射与矩阵

2.3 矩阵与同构

第二章 线性映射与矩阵——矩阵与同构

定义2.3.1 (矩阵) 设 V 和 W 是数域 F 上的线性空间,
 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 和 η_1, \dots, η_m 分别是 V 和 W 的基, 且 $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

$$\begin{cases} T(\varepsilon_1) = a_{11}\eta_1 + a_{21}\eta_2 + \dots + a_{m1}\eta_m \\ T(\varepsilon_2) = a_{12}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + \dots + a_{m2}\eta_m \\ \dots \dots \dots \\ T(\varepsilon_n) = a_{1n}\eta_1 + a_{2n}\eta_2 + \dots + a_{mn}\eta_m \end{cases}$$

$$T(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \triangleq [T(\varepsilon_1), \dots, T(\varepsilon_n)] = [\eta_1, \dots, \eta_m]A$$

$A \in F^{m \times n}$ 称为 T 在 V 的基 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 和 W 的基
 η_1, \dots, η_m 下的矩阵.

线性映射可以和矩阵A联系起来, A代表了基的映射关系

若 $n > m$, 线性无关被映射为线性相关

第二章 线性映射与矩阵——矩阵与同构

若 $V = W$, 则有

$$T(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n) \triangleq [T(\boldsymbol{\varepsilon}_1), \cdots, T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)] = [\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n]A$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in F^{n \times n}$$

矩阵 A 称为线性变换 T 在 V 的基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵.



第二章 线性映射与矩阵——矩阵与同构

例2.3.1 定义平面旋转变换 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, 满足

$$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$$

取定 \mathbb{R}^2 中的标准基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$, 则有

第二章 线性映射与矩阵——矩阵与同构

例2.3.1 定义平面旋转变换 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, 满足

$$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$$

取定 \mathbb{R}^2 中的标准基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$, 则有

$$T(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2] \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$T(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2] \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$T(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2] \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

第二章 线性映射与矩阵——矩阵与同构

例2.3.2 在多项式空间 $P_n(x)$ 中, 定义微分变换

$T: P_n \rightarrow P_n:$

$$T(p(x)) = \frac{dp(x)}{dx}, \forall p(x) \in P_n(x)$$

取定 $P_n(x)$ 的一组基 $1, x, x^2, \dots, x^n$, 则有

第二章 线性映射与矩阵——矩阵与同构

例2.3.2 在多项式空间 $P_n(x)$ 中, 定义微分变换

$$T: P_n \rightarrow P_n:$$

$$T(p(x)) = \frac{dp(x)}{dx}, \forall p(x) \in P_n(x)$$

取定 $P_n(x)$ 的一组基 $1, x, x^2, \dots, x^n$, 则有

$$T(x^n) = nx^{n-1} = [1, x, x^2, \dots, x^n][0, 0, \dots, n, 0]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$



第二章 线性映射与矩阵——矩阵与同构

例2.3.3 设 V 是数域 F 上的线性空间, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 和 η_1, \dots, η_n 是 V 的两组基, 定义线性变换 $T: V \rightarrow V$ 为

$$T(x) = [\eta_1, \dots, \eta_n][x_1, \dots, x_n]^T, \forall x \in V$$

式中, $[x_1, \dots, x_n]^T$ 是 x 在基 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 下的坐标. 求 T 在基 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵.

第二章 线性映射与矩阵——矩阵与同构

定理2.3.1 设 V 和 W 是数域 F 上的线性空间, 取定 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 和 η_1, \dots, η_m 分别是 V 和 W 的一组基. 任取 $A = (a_{ij}) \in F^{m \times n}$, 则有且仅有一个线性映射 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 使其在 V 的基 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 和 W 的基 η_1, \dots, η_m 下的矩阵恰为 A .

$$T(x) = ?$$

$$T(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = (\eta_1, \dots, \eta_m)A$$

$$x = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)\alpha$$

第二章 线性映射与矩阵——矩阵与同构

定理2.3.1 设 V 和 W 是数域 F 上的线性空间, 取定 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 和 η_1, \dots, η_m 分别是 V 和 W 的一组基. 任取 $A = (a_{ij}) \in F^{m \times n}$, 则有且仅有一个线性映射 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 使其在 V 的基 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 和 W 的基 η_1, \dots, η_m 下的矩阵恰为 A .

思考: 若定义映射 f 为从线性映射 T 到其所对应的矩阵 A , 则映射 f 具有什么性质? 同构

第二章 线性映射与矩阵——矩阵与同构

定义2.3.2（同构映射） 设 V 和 W 是数域 F 上的线性空间, 若存在双射 $f: V \rightarrow W$ 满足

$$(1) \quad f(x + y) = f(x) + f(y);$$

$$(2) \quad f(\lambda x) = \lambda f(x),$$

式中, x 和 y 是 V 中任意向量, λ 是数域 F 的任意数, 则称 f 是 V 到 W 的**同构映射**, 并称线性空间 V 与 W **同构**.

注意, 上面的公式也是线性映射的定义, 因此同构映射必定是线性映射

同构的双射性也保证了双射的两个空间维数相等

第二章 线性映射与矩阵——矩阵与同构

定理2.3.2 设 V 和 W 是数域 F 上的线性空间, 它们维数分别为 n 和 m , 则线性映射空间 $\mathcal{L}(V, W)$ 和矩阵空间 $F^{m \times n}$ 同构.



第二章 线性映射与矩阵——矩阵与同构

定理2.3.2 设 V 和 W 是数域 F 上的线性空间, 它们维数分别为 n 和 m , 则线性映射空间 $\mathcal{L}(V, W)$ 和矩阵空间 $F^{m \times n}$ 同构.

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(V, W) \text{ 与 } F^{m \times n} \text{ 之间存在一个映射} \\ & T(e_1, e_2, \dots) = (n_1, n_2, \dots) * A \end{aligned}$$

第二章 线性映射与矩阵——矩阵与同构

命题2.3.1（同构映射的性质） 设 V 和 W 是数域 F 上的线性空间, $T: V \rightarrow W$ 是同构映射, 则

$$(1) \quad T(\theta) = \theta', \theta \in V, \theta' \in W;$$

$$(2) \quad T(-x) = -T(x), \forall x \in V;$$

$$(3) \quad T(\sum \alpha_i x_i) = \sum \alpha_i T(x_i), \forall \alpha_i \in F \text{ 和 } x_i \in V;$$

(4) V 的向量组 x_1, \dots, x_r 线性相关当且仅当其像 $T(x_1), \dots, T(x_r)$ 线性相关;

(5) 若 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基, 则 $T(\varepsilon_1), \dots, T(\varepsilon_n)$ 是 W 的一组基

双射包括单射

$$\dim(V) = \dim(W);$$

(6) T 的逆映射 $T^{-1}: W \rightarrow V$ 存在且是同构映射.

第二章 线性映射与矩阵——矩阵与同构

证明见P50, 维数
不相同必定不同构

定理2.3.3 线性空间同构当且仅当它们的维数相等.

推论2.3.1 任一实（复） n 维线性空间均与 \mathbb{R}^n （ \mathbb{C}^n ）同构.

利用定理2.3.3证明

推论2.3.2 设 V 和 W 是数域 F 上的线性空间, 它们维数分别为 n 和 m , 则

$$\dim(L(V, W)) = \dim(F^{m \times n}) = mn$$

定理2.3.2

推论2.3.3 设 V 是数域 \mathbb{R} （或 \mathbb{C} ）上的 n 维线性空间, 则线性变换空间 $L(V)$ 与 $\mathbb{R}^{n \times n}$ （或 $\mathbb{C}^{n \times n}$ ）同构.



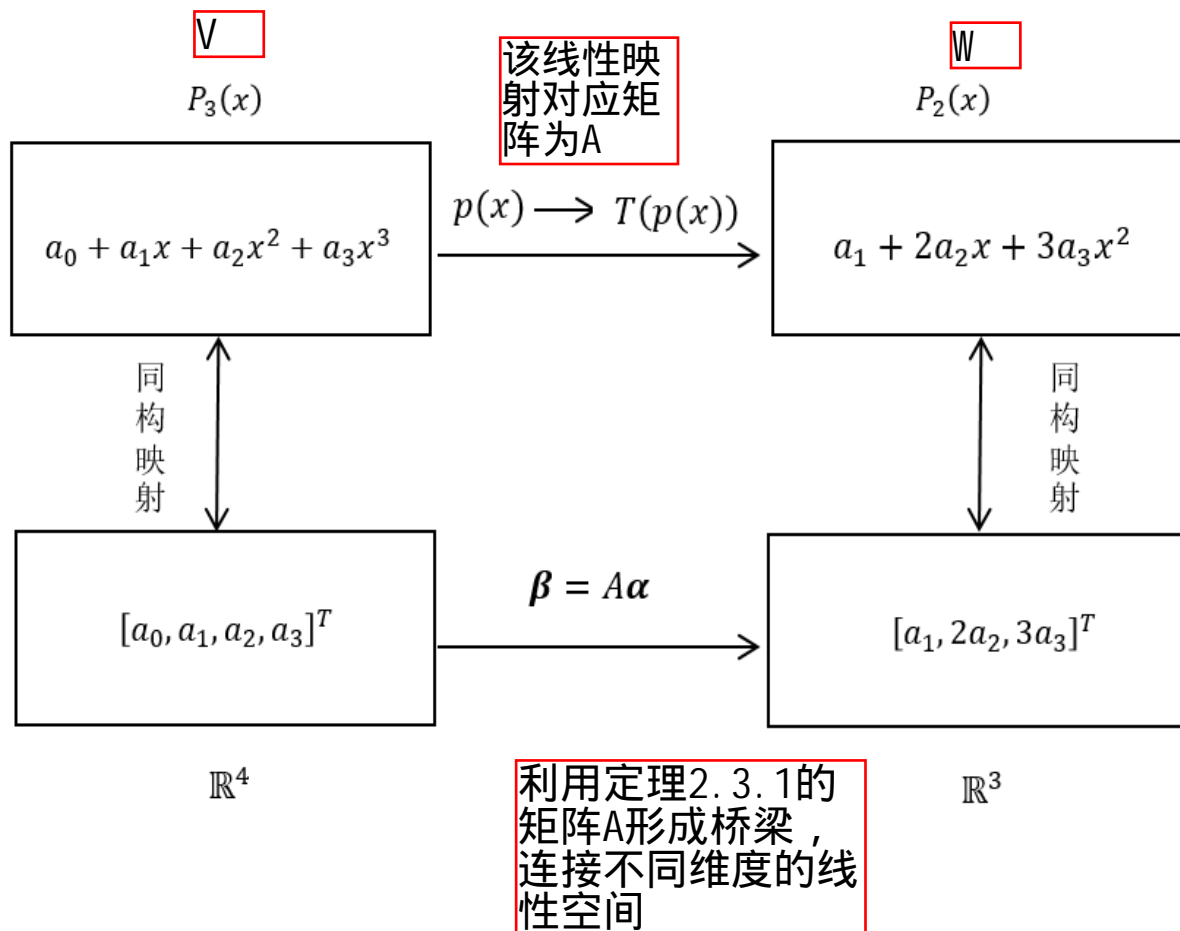
第二章 线性映射与矩阵——矩阵与同构

定理2.3.4 设映射 T 是 n 维线性空间 V 到 m 维线性空间 W 的线性映射, T 在 V 的基 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 和 W 的基 η_1, \dots, η_m 下的矩阵为 A . 对任意向量 $x \in V$, 有

$$\beta = A\alpha$$

式中, $\beta \in F^m$ 是像 $T(x)$ 在 W 基 η_1, \dots, η_m 下的坐标, $\alpha \in F^n$ 是原像 x 在 V 的基 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 和下的坐标.

第二章 线性映射与矩阵——矩阵与同构



第二章 线性映射与矩阵——矩阵与同构

定理2.3.5 设 V 和 W 是数域 F 上的 n 维和 m 维线性空间, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 和 $\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n$ 是 V 的两组基, 由 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 到 $\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n$ 的过渡矩阵为 Q ; η_1, \dots, η_m 和 η'_1, \dots, η'_m 是 W 的两组基, 由 η_1, \dots, η_m 到 η'_1, \dots, η'_m 的过渡矩阵为 P ; 设线性映射 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 在 V 的基 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 和 W 的基 η_1, \dots, η_m 下的矩阵为 A , T 在 V 的基 $\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n$ 和 W 的基 η'_1, \dots, η'_m 下的矩阵为 B , 则

$$B = P^{-1}AQ$$

第二章 线性映射与矩阵——矩阵与同构

注1: 矩阵 $A \in F^{m \times n}$ 经过有限次初等变换变成矩阵 B , 则称**矩阵 A 与 B 相抵 (或等价)**, 记为 $A \cong B$. 上式表明**线性映射在不同基下的矩阵是相抵的**;

推论2.3.4 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 和 $\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n$ 是 V 的两组基, 由 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 到 $\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n$ 的过渡矩阵为 P , 线性变换 $T \in \mathcal{L}(V)$ 在基 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 和基 $\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n$ 下的矩阵分别为 A 和 B , 则

$$B = P^{-1}AP$$

注2: **相似矩阵反映的是同一个线性变换在不同的基下的矩阵.**

第二章 线性映射与矩阵——矩阵与同构

定理2.3.6 设 V 和 W 是数域 F 上的 n 维和 m 维线性空间, 若 $T \in L(V, W)$ 在 V 的基 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 和 W 的基 η_1, \dots, η_m 下的矩阵为 A , 则

- (1) $\dim N(T) = \dim N(A)$;
- (2) $\dim R(T) = \dim R(A) = \text{rank}(A)$;
- (3) $\dim N(A) + \dim R(A) = n$. (**亏加秩**)

第二章 线性映射与矩阵——矩阵与同构

定理2.3.6 设 V 和 W 是数域 F 上的 n 维和 m 维线性空间, 若 $T \in L(V, W)$ 在 V 的基 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 和 W 的基 η_1, \dots, η_m 下的矩阵为 A , 则

$$(1) \dim N(T) = \dim N(A);$$

证明: 对于任意的 $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_i$,

$$T(x) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) A \alpha$$

$T(x) = \theta$ 当且仅当 $A\alpha = 0$. 定义映射 $f: N(T) \rightarrow N(A)$:
 $f(x) = \alpha$.

容易验证 $f: N(T) \rightarrow N(A)$ 为同构映射.

$$\dim N(T) = \dim N(A).$$

第二章 线性映射与矩阵——矩阵与同构

定理2.3.6 设 V 和 W 是数域 F 上的 n 维和 m 维线性空间, 若 $T \in L(V, W)$ 在 V 的基 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 和 W 的基 η_1, \dots, η_m 下的矩阵为 A , 则

$$(2) \dim R(T) = \dim R(A) = \text{rank}(A);$$

证明: 假设 V 的一组基 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$,

$$R(T) = \text{span}(T(\varepsilon_1), \dots, T(\varepsilon_n)).$$

假设 $T(\varepsilon_1), \dots, T(\varepsilon_r)$ 为 $R(T)$ 的一组基, 易得

A_1, \dots, A_r 线性无关, 且 $A_i, i = r + 1, \dots, n$, 可由 A_1, \dots, A_r 线性表出.



第二章 线性映射与矩阵——矩阵与同构

例2.3.5 考查齐次线性差分方程

$$u_{k+n} + a_{n-1}u_{k+n-1} + \cdots + a_1u_{k+1} + a_0u_k = 0$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 求方程的解空间的维数.

第二章 线性映射与矩阵——矩阵与同构

例2.3.5 考查齐次线性差分方程

$$u_{k+n} + a_{n-1}u_{k+n-1} + \cdots + a_1u_{k+1} + a_0u_k = 0$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 求方程的解空间的维数.

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

则有

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.3.4)$$

第二章 线性映射与矩阵——矩阵与同构

例2.3.5 考查齐次线性差分方程

$$u_{k+n} + a_{n-1}u_{k+n-1} + \cdots + a_1u_{k+1} + a_0u_k = 0$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 求方程的解空间的维数.

由式(2.3.4)易验证, 当 x_0 给定, 序列 $\{u_k\}$ 唯一确定.

因此, 定义映射 $T: \tilde{S} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 满足

$$T(\{u_k\}) = x_0$$

易证 T 是同构映射. 因此, $\dim(\tilde{S}) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$, 即 \tilde{S} 是 S 的一个 n 维线性子空间.