矩阵理论

刘克新

自动化科学与电气工程学院

第二章 线性映射与矩阵

- □ 预备知识
- □ 线性映射
- □ 矩阵与同构基与坐标
- □ 特征值与特征向量
- □ 酉变换与酉矩阵
- □ 应用：图的矩阵表示

第二章 线性映射与矩阵

2.1 预 备 知 识

定义2.1.1（映射） 设V和W是两个非空集合，如果存在一个V到W的对应法则f，使得V中每一个元素x都有W中唯一的一个元素y与之对应，则称f是V到W的一个**映射**，记为$y = f(x)$. 元素$y \in W$称为元素$x \in V$在映射f下的**像**，称x为y的**原像**. 集合V称为映射f的**定义域**. 当V中元素改变时，x在映射f下的像的全体作为W的一个子集，称为映射f的**值域**，记为$R(f)$.

定义2.1.2（单射、满射与双射） 设V和W是两个非空集合, f是V到W的一个映射.

- 若对任意$x_1, x_2 \in V$, 当$x_1 \neq x_2$时有$f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称f是V到W的**单映射（简称单射）**；
- 若对任意$y \in W$都有一个元素$x \in V$使得$f(x) = y$（即$R(f) = W$）, 则称f是V到W的**满映射（简称满射）**；
- 若映射f既是单映射又是满映射, 则称f是V到W的**一一映射或双映射（简称双射）**.

定义2.1.3（映射相等）设f_1是集合V_1到集合W_1的一个映射, f_2是集合V_2到集合W_2的一个映射. 若$V_1=V_2$, $W_1=W_2$, 并且对任意$x\in V_1$有$f_1(x)=f_2(x)$, 则称**映射f_1和f_2相等**, 记为$f_1=f_2$.

定义2.1.4（映射乘积）设V_1, V_2和V_3是三个非空集合, 并设f_1是V_1到V_2的一个映射, f_2是V_2到V_3的一个映射. 由f_1和f_2确定的V_1到V_3的映射f_3: $x\to f_2(f_1(x))$, $x\in V_1$, 称为**映射f_1和f_2的乘积（又称复合映射）**，记为$f_3=f_2\cdot f_1$, 或简写为$f_3=f_2f_1$.

定义2.1.5（可逆映射） 设有映射$f_1: V \to W$, 若存在映射$f_2: W \to V$使得

$$f_2 \cdot f_1 = I_V, f_1 \cdot f_2 = I_W$$

式中, $I_V: x \to x, x \in V$为V上的恒等映射, I_W是W上的恒等映射. 我们称f_2为f_1的**逆映射**, 记为f_1^{-1}. 若映射f_1有逆映射, 则称f_1为**可逆映射**.

定理2.1.1 设映射$f: V \to W$是可逆的, 则f的逆映射f^{-1}是唯一的.

定理2.1.2 设映射$f: V \to W$是可逆映射的充分必要条件是f是双射.

定义2.1.6（变换） 设V是一个非空集合, V到自身的映射称为V的**变换**; V到自身的双射称为V的**一一变换**; 若V是有限集, V的一一变换称为V的**置换**.

如何判断两个无穷多元素的集合的“大小”

定义2.1.7（一元多项式）设F是数域, n是自然数, λ是一个文字（或符号）, 形式表达式

$$g(\lambda)=a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$$

其中$a_i\in F$（$i=0,1,\cdots,n$）, 称为数域F上的**一元多项式**. 如果$a_n\neq 0$, 则称$a_n\lambda^n$为多项式的**首项**, n称为$g(\lambda)$的**次数**, 记为$\deg\big(g(\lambda)\big)=n$, a_n称为$g(\lambda)$的首项系数. 若$a_n=1$, 则称$g(\lambda)$**为首1多项式**.

定理2.1.3 设$g(\lambda)$和$h(\lambda)$是数域F上的多项式且$h(\lambda) \neq 0$, 则存在唯一的多项式$p(\lambda)$和$q(\lambda)$使得

$$g(\lambda) = p(\lambda)h(\lambda) + q(\lambda)$$

式中$q(\lambda) = 0$或$\deg\big(q(\lambda)\big) < \deg\big(h(\lambda)\big)$.

定义2.1.8（多项式整除） 设$g(\lambda)$和$h(\lambda)$是数域F上的多项式, 如果存在多项式$p(\lambda)$使得$g(\lambda) = p(\lambda)h(\lambda)$, 则称多项式$h(\lambda)$**整除**$g(\lambda)$, 记为$h(\lambda)|g(\lambda)$, $h(\lambda)$是$g(\lambda)$的**因式**, $g(\lambda)$是$h(\lambda)$的**倍式**.

定义2.1.9（公因式）设$g(\lambda)$和$h(\lambda)$是数域F上的多项式, 若多项式$p(\lambda)$既是 $g(\lambda)$的因式, 又是$h(\lambda)$的因式, 则称$p(\lambda)$是$g(\lambda)$与$h(\lambda)$的**公因式**.

定义2.1.10（公倍式）设$g(\lambda)$和$h(\lambda)$是数域F上的多项式, 若多项式$p(\lambda)$既是 $g(\lambda)$的倍式, 又是$h(\lambda)$的倍式, 则称$p(\lambda)$是$g(\lambda)$与$h(\lambda)$的**公倍式**.

定义2.1.11（友矩阵） 设$f(\lambda)$是数域F上的首1多项式，其表达式为

$$f(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$$

定义n阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \text{或} A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

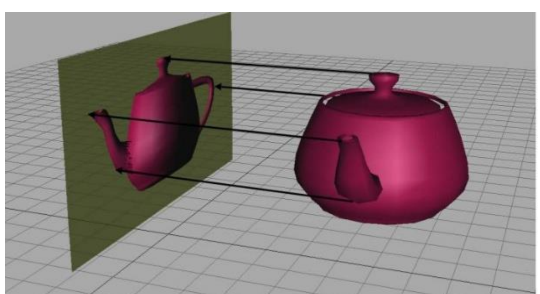
称为多项式$f(\lambda)$的**友矩阵（或伴侣矩阵）**.

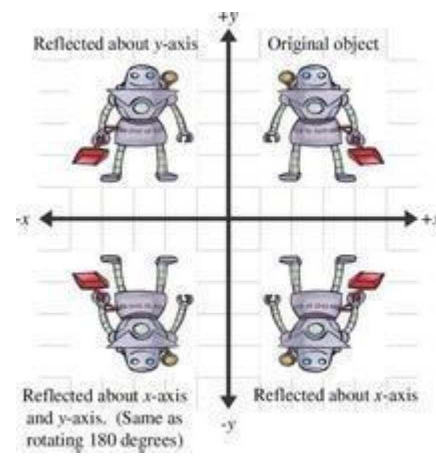
第二章 线性映射与矩阵

2.2 线 性 映 射

应用实例:灰度图像的线性变换

旋转、缩放、投影、镜像等.





定义2.2.1（线性映射）设V和W是数域F上的线性空间, 如果映射$T: V \to W$满足下述性质：

（1）**可加性**：$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$,

$$T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y});$$

（2）**齐次性**：$\forall \lambda \in F, T(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda T(\boldsymbol{x});$

称T为V到W的一个**线性映射**. 特别地, 当$V = W$时, 映射T为V到自身的线性映射, 称T为V上的**线性变换（或线性算子）**.

例2.2.1 设V是数域F上的线性空间, 定义映射$T: V \to V$, 分别满足

（1）$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta}, \forall \boldsymbol{x} \in V$;

（2）$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in V$;

（3）$T(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in V$;

则以上三个映射均为线性变换, 分别称为**零变换、恒等变换**和**负变换**.

例2.2.2 定义$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\forall \boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$,

（1）$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$, k_1和k_2为正常数;

（2）$T(\boldsymbol{x}) = (x_1, -x_2)$;

（3）$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$, φ为旋转角;

例2.2.2 定义$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\forall \boldsymbol{x}=[x_1,x_2]^T\in\mathbb{R}^2$,

（1）$T(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}k_1 & 0\\ 0 & k_2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$, k_1和k_2为正常数;

（2）$T(\boldsymbol{x})=(x_1,-x_2)$;

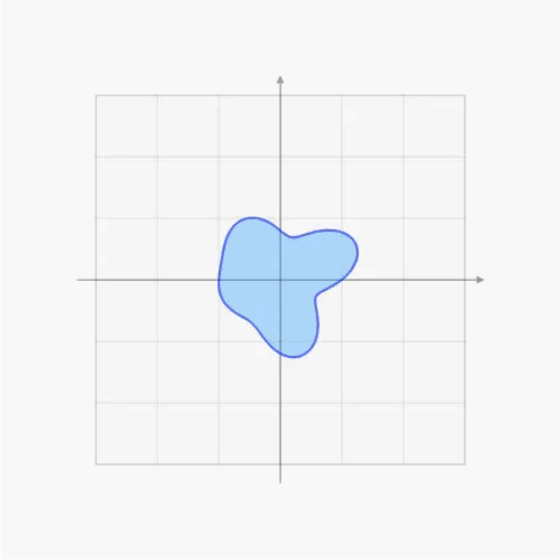
（3）$T(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$, φ为旋转角;

则以上三个映射均为线性变换, 分别称为**平面伸压变换**、**平面反射变换**和**平面旋转变换**, 它们是常见的图形变换.

例2.2.2 定义$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \forall \boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$,

（3）$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$, φ为旋转角, $\boldsymbol{b}$为非零向量,

平移变换不是线性变换



例2.2.3 在多项式空间$P_n(x)$, 定义$T: P_n \to P_n$满足

$$T(p(x)) = \frac{dp(x)}{dx}, \forall p(x) \in P_n(x)$$

则映射T是$P_n(x)$上的线性变换, 称为**微分变换**.

例2.2.4 在$C[a,b]$空间, 定义$T: C[a,b] \to C[a,b]$满足

$$T(f(x)) = \int_a^x f(t)dt, \forall f(x) \in C[a,b]$$

则映射T是$C[a,b]$上的线性变换, 称为**积分变换**.

例2.2.5 设W是线性空间V的非平凡子空间，定义映射T为

$$T(\boldsymbol{x}) = \mathrm{Proj}_W \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in V$$

则映射T是V上的线性变换，称为**正交投影变换**.

再次回顾投影的几何意义

$$T(\boldsymbol{x}) = \mathrm{Proj}_W \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{\alpha}_n$$

代数与几何方法的区别

例2.2.6 设V是数域F上的线性空间，$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$是$V$的两组基，定义映射$T: V\to V$为

$$T(\boldsymbol{x})=[\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n][x_1,\cdots,x_n]^T,\forall\boldsymbol{x}\in V$$

式中，$[x_1,\cdots,x_n]^T$是向量$\boldsymbol{x}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$下的坐标. 则映射$T$是$V$上的线性变换.

例2.2.7 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是线性空间$V$的一组基, 定义映射$T$为

$$T(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3)$$
$$=(k_1+k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$$

式中, $k_1,k_2,k_3\in F$.

（1）证明映射T是$V\to V$的线性变换.

（2）若$\boldsymbol{\beta}_0=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$, 求$T(\boldsymbol{\beta}_0)$.

例2.2.8 定义在自身上的线性空间$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$中, 定义映射T为

$$T(x + y\sqrt{3}) = x, \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

例2.2.8 定义在自身上的线性空间$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$中, 定义映射T为

$$T(x+y\sqrt{3})=x, \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

则映射T不是线性变换. 这是因为$T(\sqrt{3}\cdot\sqrt{3})=3\neq\sqrt{3}T(\sqrt{3})$.

定理2.2.1 设T是数域F上线性空间V到W的线性映射，若$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$是$V$的一组向量，$k_1,\cdots,k_p\in F$，则

$$T\left(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_p\boldsymbol{\alpha}_p\right)=k_1T(\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+k_pT\left(\boldsymbol{\alpha}_p\right)$$

推论2.2.1 设T是线性空间V到W的线性映射, 则

（1）$T(\boldsymbol{\theta})=\boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\theta}\in V, \boldsymbol{\theta}'\in W$;

（2）$T(-\boldsymbol{x})=-T(\boldsymbol{x}), \forall \boldsymbol{x}\in V$;

推论2.2.1 设T是线性空间V到W的线性映射, 则

（1）$T(\boldsymbol{\theta})=\boldsymbol{\theta}'$, $\boldsymbol{\theta}\in V$, $\boldsymbol{\theta}'\in W$;

（2）$T(-\boldsymbol{x})=-T(\boldsymbol{x})$, $\forall \boldsymbol{x}\in V$;

注1： 推论2.2.1性质（1）的几何意义是**线性映射必须保持原点不动**. 因此解析几何中常见的平移变换一般不是线性变换.

推论2.2.1 设T是线性空间V到W的线性映射, 则

（3）若$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$是$V$中一组线性相关向量, 则$T(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,T(\boldsymbol{\alpha}_p)$是$W$中一组线性相关向量;

（4）若$T(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,T(\boldsymbol{\alpha}_p)$是$W$的一组线性无关向量, 则$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$是$V$中一组线性无关向量.

思考：若$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$是$V$中线性无关向量组, 则$T(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,T(\boldsymbol{\alpha}_p)$在什么条件下也线性无关？

定理2.2.2 设T是数域F上n维线性空间V到m维线性空间W的线性映射，当且仅当T是单射时，V中任意线性无关向量组的像是W中线性无关向量组.

注1：线性映射不一定将一组基映射为像空间的一组基.

见书P43
单射保证了每个T（单个基）不相等。

注2：$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$是$V$中线性无关向量，$p<n$，像$T(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,T(\boldsymbol{\alpha}_p)$线性无关，不一定说明$T$是单射.

定理2.2.2 设T是数域F上n维线性空间V到m维线性空间W的线性映射, 当且仅当T是单射时, V中线性无关向量组的像是W中线性无关向量组.

证明：必要性：利用$T(\theta) = \theta'$

充分性：选取 V中的一组基

定理2.2.2 设T是数域F上线性空间V到W的线性映射, 当且仅当T是单射时, V中线性无关向量组的像是W中线性无关向量组.

推论2.2.2 设线性空间V和W的维数相同, 且T是线性空间V到W的线性映射, 当且仅当T是单射时, V中一组基的像是W中一组基. 此时映射T是双射.

定义2.2.2（线性映射的加法运算） 设$T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$，定义$T_1$与$T_2$的和为

表示线性空间V到W的所有线性映射的集合

$$(T_1 + T_2)(\boldsymbol{x}) = T_1(\boldsymbol{x}) + T_2(\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in V$$

式中，等式右端“+”表示线性空间W的加法运算.

定义2.2.3（线性映射的数乘运算） 设$T \in \mathcal{L}(V, W)$，$\lambda \in F$，定义λ与T的数乘$\lambda \cdot T$为

$$(\lambda T)(\boldsymbol{x}) = \lambda \cdot T(\boldsymbol{x}), \forall \boldsymbol{x} \in V$$

式中，等式右端“·”表示线性空间W的数乘运算，常省略.

定理2.2.3 集合$\mathcal{L}(V,W)$对定义2.2.2的加法和定义2.2.3的数乘构成数域F上的线性空间, 称为**线性映射空间**. 特别地, $\mathcal{L}(V)$称为**线性变换空间**.

思考: 线性空间$\mathcal{L}(V,W)$的维数是多少?

定理2.2.4（线性映射值空间和核空间）设$T \in \mathcal{L}(V,W)$, 定义

$$N(T)=\{\boldsymbol{x}\in V|T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\theta}\}$$

$$R(T)=\{\boldsymbol{y}\in W|\boldsymbol{y}=T(\boldsymbol{x}),\forall \boldsymbol{x}\in V\}$$

则$N(T)$是V的子空间, $R(T)$是W的子空间. 我们称$N(T)$是线性映射T的**核空间（或零空间）**，$R(T)$是线性映射T的**像空间（或值空间）**；并称$\dim N(T)$为T的**零度（或亏）**，$\dim R(T)$为T的**秩**.

定理2.2.5（亏加秩定理）设$T \in L(V,W)$, 则

$$\dim N(T) + \dim R(T) = \dim V$$

即线性映射T的亏加秩等于其定义域V空间的维数.

思考: $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 定义映射$T\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{n\times m}$使得

$$T(A) = A^T$$

问: 映射T是线性映射吗？