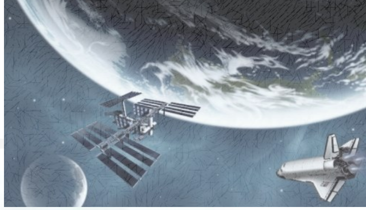


–自动化学院学科核心课–

检测技术与自动化

测量误差与数据处理（3）

本节内容：

4、误差的合成

5、误差的分配

重点与难点

重 点

误差的合成公式

误差合成的计算方法

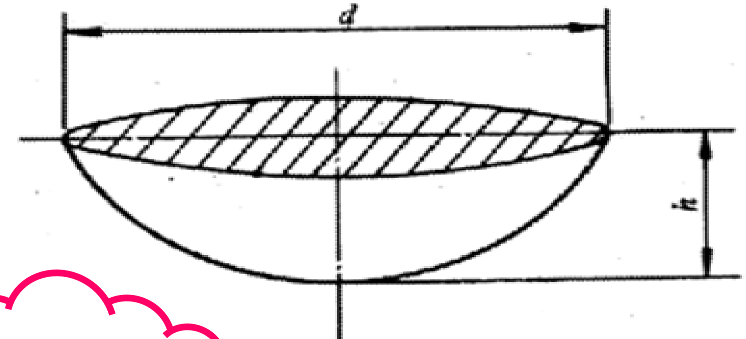
理解

误差分配的一般办法

问题提出

当我们要测量如图所示截球体的体积时，最方便的方法是先测量圆截面的直径d和高度h，再按下式计算体积:

$$V=\frac{\pi}{2}\left(\frac{hd^2}{4}+\frac{h^3}{3}\right)$$



? 如果在直接测量值d和h中含有误差Δd和Δh，则由$V=f(h,d)$计算出的体积V中，也必然会有误差ΔV这个关系如何描述?

误差合成

? 如果设定误差ΔV的限制，如何根据体检误差的限制设定高度h和直径d的误差限制？如何根据该限制选择合适的测量仪器?

误差分配

4. 误差的合成

随机误差合成公式推导

函数 $f = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$

误差计算公式 $\boldsymbol{\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2 \sigma_{x_m}^2}$

① 设对各被测量x_i都重复测量n次，得到n个测得值，其随机误差$\delta x_{i,j}(i = 1 \sim m, j = 1 \sim n)$如下：

对x_1有$\delta x_{1,1}, \delta x_{1,2}, \dots, \delta x_{1,n}$

对x_2有$\delta x_{2,1}, \delta x_{2,2}, \dots, \delta x_{2,n}$

⋮

对x_m有$\delta x_{m,1}, \delta x_{m,2}, \dots, \delta x_{m,n}$

相应地，对y有$\delta y_1, \delta y_2, \dots, \delta y_n$

② 多元函数的泰勒展开

$$\begin{cases} \delta y_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_{1,1} + \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_{2,1} + \cdots. + \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_{m,1} \\ \delta y_2 = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_{1,2} + \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_{2,2} + \cdots. + \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_{m,2} \\ \vdots \\ \delta y_n = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_{n,1} + \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_{2,n} + \cdots. + \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_{m,n} \end{cases}$$

4. 误差的合成

随机误差合成公式推导

左右两边平方

$$
\begin{cases}
\delta y_1^2 = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 (\delta x_{1,1})^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 (\delta x_{2,1})^2 + \cdots . + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2 (\delta x_{m,1})^2 \\
\qquad + \sum\limits_{i \neq j} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \delta x_{i,1}\delta x_{j,1} \\
\delta y_2^2 = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 (\delta x_{1,2})^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 (\delta x_{2,2})^2 + \cdots . + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2 (\delta x_{m,2})^2 \\
\qquad + \sum\limits_{i \neq j} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \delta x_{i,2}\delta x_{j,2} \\
\qquad \vdots \\
\delta y_n^2 = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 (\delta x_{1,n})^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 (\delta x_{2,n})^2 + \cdots . + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2 (\delta x_{m,n})^2 \\
\qquad + \sum\limits_{i \neq j} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \delta x_{i,n}\delta x_{j,n}
\end{cases}
$$

相加

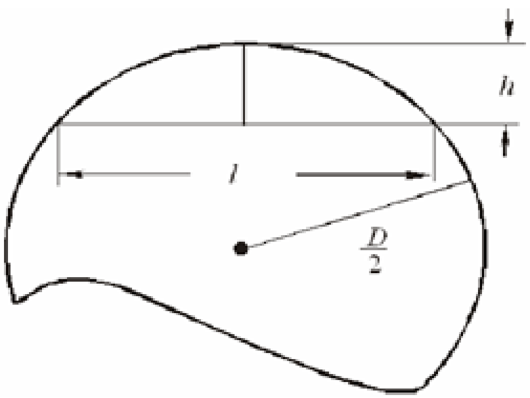
③独立假设

$$\boldsymbol{\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2 \sigma_{x_m}^2}$$

4. 误差的合成

合成时需要注意的问题

■ 问题1：如果测量存在系统误差？ 已知系统误差



例：元件半径测量

$$D=\frac{l^2}{4h}+h$$

系统误差：$\Delta h=-0.1mm$ 和 $\Delta l=1.0mm$

测量误差为：$\sigma_h=0.005mm$ 和 $\sigma_l=0.01mm$

测量结果：弓高$h=50.0mm$，弦长$l=500.0mm$

第1步：去掉测量结果中的系统误差，

$\hat{h}=h-\Delta h=50.1mm$，$\hat{l}=l-\Delta l=499.0mm$。

第2步：去掉系统误差后的测量结果代入误差合成公式

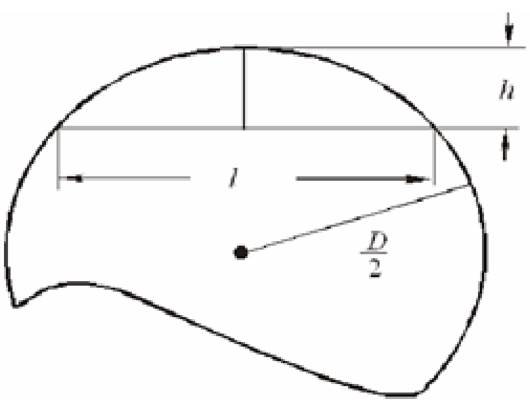
$$\sigma_D^2=\left(\frac{\partial D}{\partial h}\right)^2\sigma_h^2+\left(\frac{\partial D}{\partial l}\right)^2\sigma_l^2=\left(\frac{\hat{l}}{2\hat{h}}\right)^2\sigma_l^2+\left(\frac{-\hat{l}^2}{4\hat{h}^2}+1\right)^2\sigma_h^2$$

$$=24.80\times0.05^2+566.48\times0.01^2=0.12\text{mm}$$

4. 误差的合成

合成时需要注意的问题

■ 问题1：如果测量存在系统误差？ 已知系统误差



例：元件半径测量 **(续)**

$$D=\frac{l^2}{4h}+h$$

系统误差：$\Delta h=-0.1mm$ 和 $\Delta l=1.0mm$

测量误差为：$\sigma_h=0.005mm$ 和 $\sigma_l=0.01mm$

测量结果：弓高$h=50.0mm$，弦长$l=500.0mm$

第3步：测量结果表述

$$D=\left(\frac{\hat{l}^2}{4\hat{h}}+\hat{h}\right)\pm\sigma_D=(1292.6\pm0.12)mm$$

$$\boldsymbol{D=(1293.6\pm0.1)mm}$$

4. 误差的合成

合成时需要注意的问题

■ 问题1：如果测量存在系统误差？ 未定系统误差

未定系统误差	确定性	极限值（事先确定）
随机误差	随机性	界限不定（处理后确定）

计算方法：方和根方法

$$s = \sqrt{\sum_{j=1}^{r} s_j^2}$$

例：用天平，配三等标准砝码称一个不锈钢球质量，一次称量得到钢球质量为14.0040g，求测量结果标准差。

未定系统误差有：

① 天平称量时所用的标准砝码有三个，即10g的一个，2g的两个，它们的标准差分别为：$s_{10} = 0.4mg, s_{02} = 0.2mg$

② 天平示值误差：该项标准差为 $s_{示} = 0.03mg$

$$s = \sqrt{s_{10}^2 + s_{02}^2 + s_{02}^2 + s_{示}^2}$$

4. 误差的合成

合成时需要注意的问题

■ 问题2：如果被测量的误差不满足相互独立

例： 假设平衡常数K的估计通过测量某二聚反应$2A \rightleftharpoons A_2$（如：$2HI(g) \rightleftharpoons H_2(g) + I_2(g)$）达到平衡时$[A_2]$和$[A]$物质的量浓度获得，

计算K的公式为： $K = \frac{A_2}{(A)^2}$

若A和A_2的误差相互独立

测量A1和A2的浓度， $[A_2] = 0.010 \pm 0.001 mol/L$

$[A] = 0.100 \pm 0.004 mol/L$

再由

$$\left(\frac{\sigma_K}{K}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{[A_2]}}{[A_2]}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_{[A]}}{[A]}\right)^2.$$

因此 $K = 1.0 \pm 0.1$ L/mol.

4. 误差的合成

合成时需要注意的问题

若被测量$x=A+2A_2$和$y=A_2$误差独立，

由 $K=\frac{A_2}{(A)^2}$ 可得 $K=\frac{y}{(x-2y)^2}$

$$\sigma_K^2=(x-2y)^{-6}\left(4y^2\sigma_x^2+(x+2y)^2\sigma_y^2\right)$$

若测得 $x=0.120\pm 0.005mol/L$

$y=0.010\pm 0.001mol/L$

则 $\sigma_k^2=400\sigma_x^2+19600\sigma_y^2=0.030$

$\sigma_k=\sqrt{0.030}=0.17$

$k=1.0\pm 0.2L/mol$

4. 误差的合成

相关系数

■ 问题2：如果被测量的误差不满足相互独立

$$\sigma_f^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\sigma_{x_1}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\sigma_{x_2}^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2\sigma_{x_m}^2+2\sum_{i,j}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\sum_{m=1}^{N}\delta x_{i,m}\delta x_{j,m}}{N}$$

若定义 $K_{ij}=\frac{\sum_{m=1}^{N}\delta x_{i,m}\delta x_{j,m}}{N}$ ， $\rho_{ij}=\frac{K_{ij}}{\sigma_{x_i}\sigma_{x_j}}$

$$\sigma_f^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\sigma_{x_1}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\sigma_{x_2}^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2\sigma_{x_m}^2+2\sum_{i,j}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\rho_{ij}\sigma_{x_i}\sigma_{x_j}$$

K_{ij}为误差x_i和误差x_j之间的协方差

4. 误差的合成

相关系数

■ 问题2：如果被测量的误差不满足相互独立

$$\rho_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sigma_{x_i}\sigma_{x_j}}$$

K_{ij}为误差x_i和误差x_j之间的协方差

计算方法①：按照相关系数的定义，直接计算

根据多组测量的对应值(ξ_i,η_j)，按照相关系数的定义直接计算得

$$\rho = \frac{\sum(\xi_i-\bar{\xi})(\eta_i-\bar{\eta})}{\sqrt{(\xi_i-\bar{\xi})^2(\eta_i-\bar{\eta})^2}}$$

$\bar{\xi}$和$\bar{\eta}$为(ξ_i,η_j)的均值

4. 误差的合成

相关系数

■ 问题2：如果被测量的误差不满足相互独立

$$\rho_{ij}=\frac{K_{ij}}{\sigma_{x_i}\sigma_{x_j}}$$

K_{ij}为误差x_i和误差x_j之间的协方差

计算方法②：理论计算法

有些误差间的相关系数，可根据概率论和最小二乘法直接求出

如果求得两个误差ξ和η间为线性相关，即$\xi=a\eta+b$，则相关系数

$$\rho=\begin{cases}+1, a>0\\-1, a<0\end{cases}$$

例：某电路电流I和U，求功率P=UI

4. 误差的合成

合成时需要注意的问题

■ 问题3：泰勒展开高阶项数值是否可以删掉？

测量球体体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ 若测得半径 $r=1.0\pm 0.1mm$

$V=\frac{4}{3}\pi r^3=4.19mm^3$ $\sigma_V=4\pi r^2\sigma_r=1.26\,mm^3$

若考虑高阶项

$$\sigma_V=\sqrt{(4\pi r^2)^2\sigma_r^2+\frac{1}{2}(8\pi r)^2\sigma_r^4}=\sqrt{(1.256)^2\times 0.01+\frac{1}{2}\times(0.2512)^2\times 0.01}$$
$$=1.27mm^3$$

根据微小误差取舍原则，$\sqrt{\frac{1}{2}(8\pi r)^2\sigma_r^4}=0.18$，高阶项可以舍去

若 $r=1.0\pm 0.2mm$

$$\sigma_V=\sqrt{6.3101+0.5048}=1.44mm^3$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(8\pi r)^2\sigma_r^4}=\sqrt{\frac{1}{2}(1.0048)^2}=0.71$$ 高阶项不可以舍去

4. 误差的合成

微小误差取舍原理

$$\sigma_y = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_{k-1}^2 + D_k^2 + D_{k+1}^2 + \cdots + D_n^2}$$

将其中的误差D_k^2取出后，得:

$$\sigma_y' = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_{k-1}^2 + D_{k+1}^2 + \cdots + D_n^2}$$

若有：$\sigma_y \approx \sigma_y'$，则称$D_k$为微小误差

① 根据有效数字运算规则，对一般准确度的测量，测量误差有效数字只取一位，在此情况下，若将某部分误差舍去后，满足σ_y-$\sigma_y' \leq (0.1-0.05)\sigma_y$,则不会对测量结果的误差产生影响

$$D_k \leq \frac{1}{3}\sigma_y$$

② 对比较精密的测量，测量误差有效数字取二位，则有满足σ_y-$\sigma_y' \leq (0.01-0.005)\sigma_y$

$$D_k \leq \frac{1}{10}\sigma_y$$

结论：被舍去误差小于或等于测量结果总标准差的1/10~1/3

4. 误差的合成

Monte Carlo合成法

■ 问题4：如果函数关系复杂？

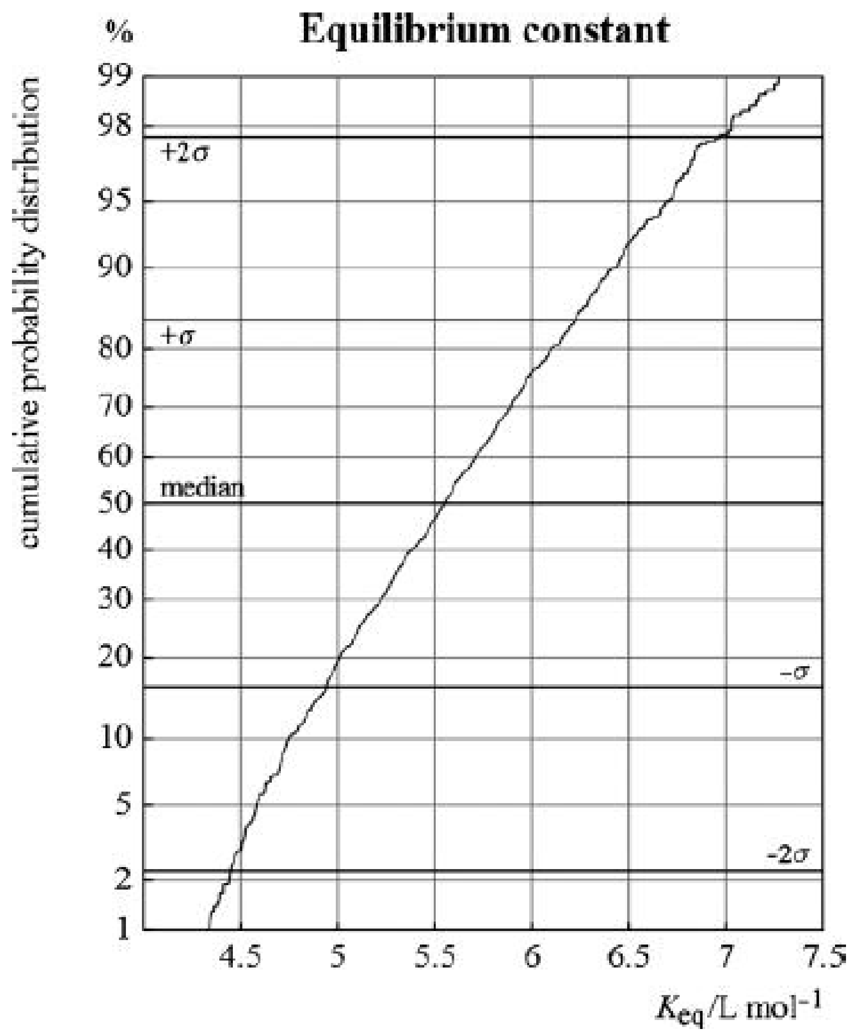
例：

$$K = \frac{x}{(a/(V_1+V_2)-x)(b/(V_1+V_2)-x)},$$

x, a, b, V_1, V_2为被测量

假定被测量的测量值满足正态分布，根据正态分布规则产生多个随机数，

K与输入参数的非线性关系



4. 误差的合成

Monte Carlo合成法

例：K型热电偶测量不确定评定

Ref：2013 基于蒙特卡罗法的K型热电偶测量不确定度评定

仪器： ZJ-2E型热工全自动检定系统，SRJK-3-12型管型电阻炉， 长度为600mm， 加热管内径为40mm， 2000型数字多用表

材料： 铂铑10-铂标准热电偶，

镍铬－镍硅热电偶（K型热电偶）（长度≥750mm， 电极直径=1.0mm）

测量原理： 在管式炉中将待测的K型热电偶和标准铂铑10-铂热电偶捆扎成圆形一束， 被检热电偶的测量端围绕标准热电偶的测量端均匀分布一周，并处于垂直标准热电偶同一截面上。当炉温升到检定点温度， 炉温变化小于0.2℃/min时， 自标准热电偶开始， 依次测量各被检热电偶的热电动势。

测量步骤：经外观检查合格的新制K 型热电偶， 在800℃退火2h后， 随炉冷却至250℃以下， 并在此条件下进行试验。由低温向高温逐点升温， 在400℃点测量标准与被检热电偶的热电动势， 每支热电偶读数为10次。

测量时的参考端温度为20.0℃， 引入补偿电动势400℃时的被测热电偶的补偿电动势为0.7981mV。

求：温度误差Δt的分布

(即热电偶热电动势误差Δe 换算的温度误差)

$$\Delta t=\frac{\bar{e}_{被}}{s_{被}}-\frac{\bar{e}_{标}-e_{证}}{s_{标}}+\frac{e_{补}-e_{分}}{s_{被}}$$

$\bar{e}_{被}$-被检热电偶热电动势测量平均值；

$e_{证}$-标准热电偶证书上查得的标准热电偶热电动势值；

$\bar{e}_{标}$-标准热电偶热电动势测量平均值；

$e_{补}$-采用测量时冷端不为 0 ℃时被测热电偶引入补偿电动势；

$e_{分}$-分度表上被检热电偶的热电动势值，即16.397m V；

$s_{标}$、 $s_{被}$ −为分度表上查得的标准、被检热电偶的微分热电动势值，其值分别为$s_{标}=9.57\times10^{-3}\text{mV}$， $s_{被}=42.24\times10^{-3}\text{mV}$

表 1　K 型热电偶测量值及计算结果表

序号	$e_{被}$/mV	$e_{标}$/mV
1	15.6012	3.1438
2	15.6032	3.1443
3	15.6322	3.1448
4	15.6092	3.1453
5	15.6112	3.1440
6	15.6068	3.1442
7	15.6300	3.1450
8	15.6138	3.1441
9	15.5910	3.1452
10	15.6052	3.1445
平均值	15.6104	3.1445
s	0.0126	0.0005

求：温度误差Δt的分布　　(Δt为由热电偶热电动势误差Δe 换算的温度误差)

$$\Delta t=\frac{\bar{e}_{被}}{s_{被}}-\frac{\bar{e}_{标}-e_{证}}{s_{标}}+\frac{e_{补}-e_{分}}{s_{被}}$$

其中:

$\bar{e}_{被}\sim N(15.6104, 0.0126^2), \bar{e}_{标}\sim N(3.1445, 0.0005^2), e_{证}\sim N(3.1438, 0.00023^2)$

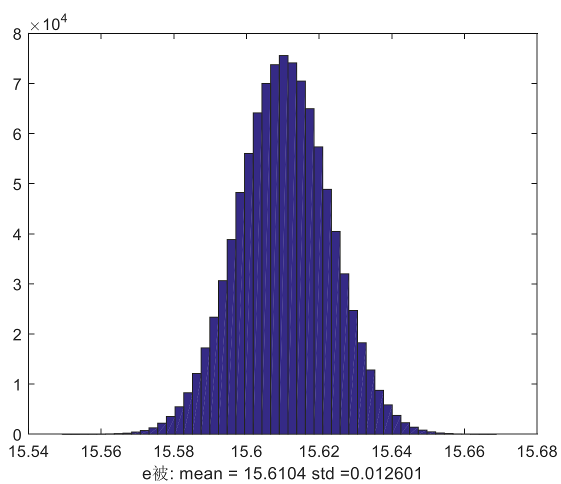
$s_{标}=0.009570, s_{被}=0.04224, e_{分}=16.397, e_{补}=0.7981$

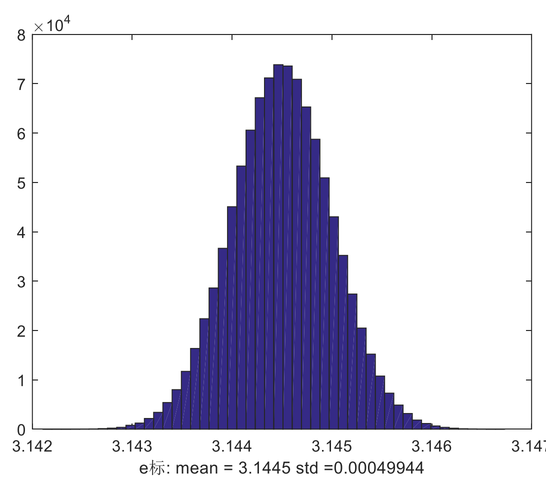
Monte Carlo求解:

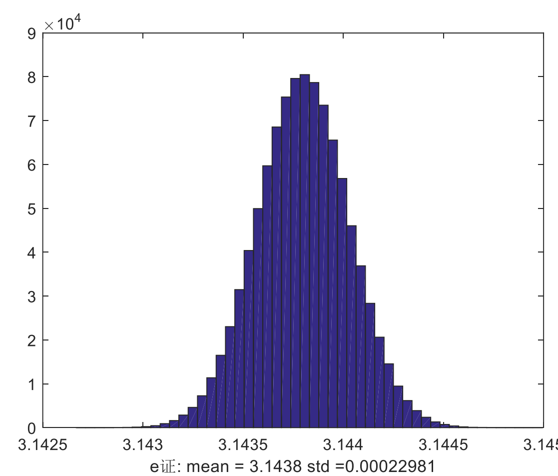
1）设定蒙特卡罗采样次数$M=1000000$；

2）分别对$\bar{e}_{被}$、$\bar{e}_{标}$、$e_{证}$进行采样；

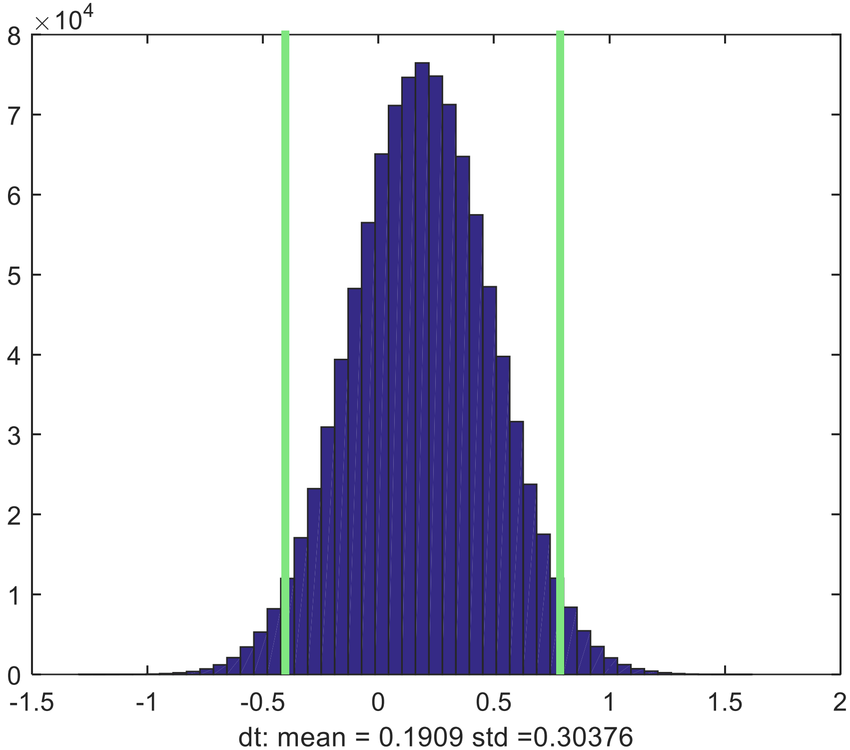
3）根据公式计算Δt







计算结果：



$\Delta t = (0.1909 \pm 0.3038)℃$

真值的置信区间（置信水平为95%）：
[0.1909- **0.3038***1,96,
0.1909+**0.3038***1.96]
即[-0.4045,0.7863]

与标准方法对比：

$\Delta t = (0.2 \pm 1.8)℃$

[-1.6,2.0]

MCM包含的区间更加收敛：
1）方法原理
2）误差假设

5. 误差的分配

误差分配

- 误差分配的概念

给定测量结果允许的总误差，合理确定各个单项误差

- 误差分配和误差合成的关系

互为逆问题

- 误差分配的作用与意义

确定测量方案，选定测量设备等

- 误差分配是否含系统误差？

- 为什么调整?

1）对一部分测量误差的需求实现颇感容易，而对另一些测量误差的要求则难以达到；

2）当各个分项误差一定时，相应测量值的误差与其传播系数成反比。因此，当各个分项误差相等时，相应测量值的误差并不相等，有的可能相差很大。

- 调整原则?

5. 误差的分配

误差分配举例

例： 测量圆柱形体积时，可间接测量圆柱形直径D及高度h,根据函数式 $V=\pi D^2h/4$,求得体积V,若要求测量体积的相对误差为1%，已知直径和高度的工称值为D_0=20mm，h_0=50mm,试确定直径及高度h的测量精度。

$$V_0=\frac{\pi D_0^2}{4}h_0=\frac{3.1416\times 20^2}{4}\times 50mm^3=15708mm^3$$

因此体积的绝对误差为：$\sigma_v=V_0\times 1\%=15708mm^3\times 1\%=157.08mm^3$

等影响分配原则分配误差

$$\sigma_D=\frac{\sigma_V}{\sqrt{n}}\frac{1}{\partial V/\partial D}=\frac{\sigma_V}{\sqrt{n}}\frac{2}{\pi Dh}=\frac{157.08}{\sqrt{2}}\times\frac{2}{3.1416\times 20\times 50}=\mathbf{0.071}\boldsymbol{mm}$$

$$\sigma_h=\frac{\sigma_V}{\sqrt{n}}\frac{1}{\partial V/\partial h}=\frac{\sigma_V}{\sqrt{n}}\frac{4}{\pi D^2}=\frac{157.08}{\sqrt{2}}\times\frac{4}{3.1416\times 20\times 20}=\mathbf{0.351}\boldsymbol{mm}$$

续： 测量圆柱形体积时，可间接测量圆柱形直径D及高度h,根据函数式 **V=πD^2h/4**,求得体积V,若要求测量体积的**相对误差为1%**，已知直径和高度的工称值为D_0=20mm，h_0=50mm,试确定直径及高度h的测量精度。

$$\sigma_D = 0.071mm, \sigma_h = 0.351mm$$

测量圆柱形直径D的精度需要高些，而测量高度h的精度可低些。根据各种量具的极限误差表查得，直径可用2级千分尺测量，在20mm测量范围内的极限误差为$\pm 0.013mm$。而高度可用分度值为0.10mm的游标卡尺测量，在50mm测量范围内的极限误差为$\pm 0.150mm$

$$\sigma_v = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2 \sigma_D^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 \sigma_h^2}$$

$$= \pm\sqrt{\left(\frac{\pi \times 20 \times 250}{2}\right)^2 \times 0.013^2 + \left(\frac{\pi \times 20 \times 20}{4}\right)^2 \times 0.150^2}$$

$$= \pm 51.36mm^3$$

根据相对误差为1%，

体积的绝对误差为：$\sigma_v = V_0 \times 1\% = 15708mm^3 \times 1\% = 157.08mm^3$

而直径采用2级千分尺测量，高度用分度值为0.10mm的游标卡尺测量后，$\sigma_v = 51.36mm^3$

显然采用的量具准确度偏高，应当适当调整，若将用分度值为0.05mm的游标卡尺来测量直径和高度，在50mm测量范围内的极限误差为0.08mm,此时测量直径的极限误差超出按等级影响原则分配所得的允许误差，但可以从测量高度允许的多余部分得到补偿。

$$\sigma_v = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2 \sigma_D^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 \sigma_h^2}$$

$$= \pm\sqrt{\left(\frac{\pi \times 20 \times 250}{2}\right)^2 \times 0.08^2 + \left(\frac{\pi \times 20 \times 20}{4}\right)^2 \times 0.08^2} = \pm 128.45mm^3$$

5. 误差的分配

最佳测量方案的确定

- **一点说明**

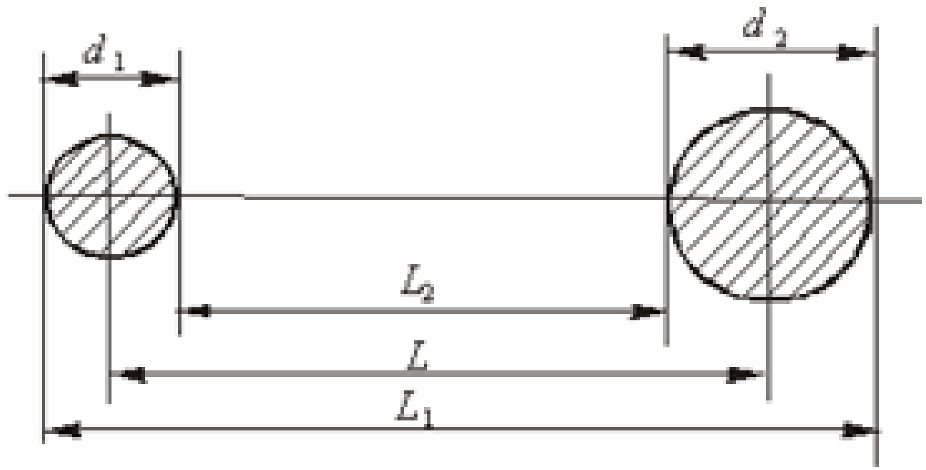
  只需考虑随机误差和未定系统误差的影响，而不需要考虑已定系统误差。

- **从三个方面考虑：**

  误差项越少越好
  误差传递系数越小越好
  误差越小越好

5. 误差的分配

最佳测量方案的确定



用分度值为0.05mm的游标卡尺测量两轴中心距L

方法一：分别测量两轴的直径d1,d2和外尺寸L1,中心距L的函数表达式：

$$L = L_1 - \frac{\mathrm{d}_1}{2} - \frac{d_2}{2}$$

方法二：分别测量两轴的直径d1,d2和内尺寸L2,中心距L的函数表达式

$$L = L_2 + \frac{\mathrm{d}_1}{2} + \frac{d_2}{2}$$

方法三：分别测量外尺寸L1和外尺寸L2,中心距L的函数表达式：

$$L = \frac{L_1}{2} + \frac{L_2}{2}$$

5. 误差的分配

最佳测量方案的确定

$$\sigma_{d1}=5\mu m,\sigma_{d2}=7\mu m,\sigma_{L1}=8\mu m,\sigma_{L2}=10\mu m$$

方法一:

$$\sigma_L=\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial L_1})^2\sigma_{L1}^2+(\frac{\partial f}{\partial d_1})^2\sigma_{d1}^2+(\frac{\partial f}{\partial d_2})^2\sigma_{d1}^2}=\sqrt{\sigma_{L1}^2+(\frac{1}{2})^2\sigma_{d1}^2+(\frac{1}{2})^2\sigma_{d1}^2}=9.1\mu m$$

方法二:

$$\sigma_L=\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial L_2})^2\sigma_{L2}^2+(\frac{\partial f}{\partial d_1})^2\sigma_{d1}^2+(\frac{\partial f}{\partial d_2})^2\sigma_{d1}^2}=\sqrt{\sigma_{L2}^2+(\frac{1}{2})^2\sigma_{d1}^2+(\frac{1}{2})^2\sigma_{d1}^2}=10.9\mu m$$

方法三: $$\sigma_L=\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial L_2})^2\sigma_{L2}^2+(\frac{\partial f}{\partial L_1})^2\sigma_{L1}^2}=\sqrt{(\frac{1}{2})^2\sigma_{L1}^2+(\frac{1}{2})^2\sigma_{L2}^2}=6.4\mu m$$

为什么方法三的效果最好?
为什么方法二差于方法一?

相同条件下测量内尺寸的误差要比测量外尺寸的误差大，应尽量选择包含测量外尺寸的函数公式

5. 误差的分配

最佳测量方案的确定

测量金属导线的电导率γ，已知其函数式为 $\gamma=\frac{4l}{\pi d^2R}$，长度$l$、直径d和电阻R

$$\sigma_\gamma=\sqrt{\left(\frac{4}{\pi d^2R}\right)^2\sigma_l^2+\left(\frac{8l}{\pi d^3R}\right)^2\sigma_d^2+\left(\frac{4l}{\pi d^2R^2}\right)^2\sigma_R^2}$$

（1） $l=0$，不可，但可以越小越好→短小导线
（2）d和R尽量大→ 直径大、电阻大

谢谢！

Q & A