第三章 矩阵分解

- 相抵分解
- 满秩分解
- 三角分解
- QR分解
- Schur分解
- 对角化分解
- 谱分解
- Jordan分解
- 奇异值分解

相 抵 分 解

引理3.1.1 设A，$B \in F^{m\times n}$，则以下表述等价：

（1） A与B相抵；

（2）存在可逆矩阵$P \in F^{m\times m}$和$Q \in F^{n\times n}$使得 $A = PBQ$；

（3）矩阵A与B均可通过有限次初等行列变换得到同一个矩阵；

（4） $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

引理3.1.1 设A，$B \in F^{m\times n}$，则以下表述等价：

（1） A与B相抵；

（3）矩阵A与B均可通过有限次初等行列变换得到同一个矩阵；

（1）⇒（3）显然

（3）⇒（1）

$$P_1 \cdots P_l A Q_1 \cdots Q_m = M_1 \cdots M_s B N_1 \cdots N_t = C$$

注1： 引理3.1.1 性质（3）经初等行列变换所得矩阵的最简形式为$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，称为矩阵$A$（或$B$）的**相抵标准形**，其中$r$为矩阵$A$（或$B$）的秩.

引理3.1.2 设$A \in F^{m\times n}$的秩为r，则存在可逆矩阵可逆矩阵$P \in F^{m\times m}$和$Q \in F^{n\times n}$使得

$$A = P \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q$$

该表达式称为矩阵A 的**相抵分解式**.

例3.1.1 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$， $B \in \mathbb{C}^{n\times p}$，证明：

$$\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)-n \le \mathrm{rank}(AB) \le \min(\mathrm{rank}(A),\mathrm{rank}(B)).$$

Sylvester
秩不等式

证明：首先证明第二个不等号成立. 设$A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$，并将矩阵$QB$按行分块，记为$QB = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$，则有

$$AB = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.1.2)$$

式中，$P \in \mathbb{C}^{m\times m}$和$Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$是可逆矩阵，$C \in \mathbb{C}^{r\times p}$，$D \in \mathbb{C}^{(n-r)\times p}$，$r = \mathrm{rank}(A)$.

由式（3.1.2）得，

$$\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{rank}(C)$$

又知$\mathrm{rank}(C) \le r$且$\mathrm{rank}(C) \le \mathrm{rank}(QB) = \mathrm{rank}(B)$.

??

$$\boldsymbol{QBx = 0}$$

$$\boldsymbol{Bx = 0}$$

因此，$\mathrm{rank}(AB) \le \min(\mathrm{rank}(A),\mathrm{rank}(B))$.

例3.1.1 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$， $B \in \mathbb{C}^{n\times p}$，证明：

$$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)-n \le \operatorname{rank}(AB) \le \min(\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)).$$

Sylvester
秩不等式

然后证明第一个不等号成立．由$QB=\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$知， $\operatorname{rank}(QB) \le \operatorname{rank}(D)+\operatorname{rank}(C)$，故

$$\operatorname{rank}(B) \le \operatorname{rank}(D)+\operatorname{rank}(AB)$$

又知$\operatorname{rank}(D) \le n-r$．因此，$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)-n \le \operatorname{rank}(AB)$．证毕.

例3.1.1 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$， $B \in \mathbb{C}^{n\times p}$，证明：

$$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)-n \le \operatorname{rank}(AB) \le \min(\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)).$$

$$rank(AB) \ge rank(A) + rank(B) - n$$

$$rank(AB) + n \ge rank(A) + rank(B)$$

$$rank\begin{pmatrix} I_n & O \\ O & AB \end{pmatrix} \ge rank(A) + rank(B)$$

$$rank\begin{pmatrix} -B & I_n \\ O & A \end{pmatrix} \ge rank(B) + rank(A)$$

$$\begin{pmatrix} I_n & O \\ O & AB \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} I_n & O \\ A & AB \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} I_n & -B \\ A & O \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -B & I_n \\ O & A \end{pmatrix}$$

例3.1.2 线性方程组$Ax=0$的解空间维数.

$P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q\boldsymbol{x}=0$ 与 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}y=0$解空间维数,$\boldsymbol{y}=Q\boldsymbol{x}$

求解线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，其中

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$$

Q可逆，一个无关向量组哦乘Q结果维数不变，因为可以把线性无关组扩充成矩阵，矩阵乘可逆矩阵相当于做初等行变换，不会改变矩阵维数。由于P可逆，因此【 】*y的解就是Ax=0的解

例3.1.2.

$$A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q$$

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & I \\ I & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 & P^{-1} \\ 0 & 0 & \\ Q^{-1} & & * \end{bmatrix}$$