



北京航空航天大学  
BEIHANG UNIVERSITY

# 矩阵理论

---

谷海波

[guhaibo@buaa.edu.cn](mailto:guhaibo@buaa.edu.cn)

自动化科学与电气工程学院

# 第一章 线性空间引论

---

- 线性空间
- 线性子空间
- 基与坐标
- 内积空间
- 直和与投影
- 应用：多项式插值

# 第一章 线性空间引论

---

## 1.4 内积空间



# 第一章 线性空间引论——内积空间

**定义1.4.1（内积空间）** 设 $F = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ ,  $V$ 是 $F$ 上的线性空间, 若对 $V$ 中任意两向量 $\alpha$ 和 $\beta$ , 定义了一个数 $(\alpha, \beta) \in F$ , 使得 $\forall x, y, z \in V$ 和 $k \in F$ 满足

(1) **共轭对称性**:  $(x, y) = \overline{(y, x)}$ ;

(2) **可加性**:  $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ ;

(3) **齐次性**:  $(kx, y) = k(x, y)$ ;

(4) **正定性**:  $(x, x) \geq 0$ , 当且仅当 $x = \theta$ 时等号成立.

此时,  $V$ 称为一个**内积空间**, 数 $(x, y)$ 称为 $x$ 与 $y$ 的**内积**.

# 第一章 线性空间引论——内积空间

**定义1.4.1（内积空间）** 设 $F = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ ,  $V$ 是 $F$ 上的线性空间, 若对 $V$ 中任意两向量 $\alpha$ 和 $\beta$ , 定义了一个数 $(\alpha, \beta) \in F$ , 使得 $\forall x, y, z \in V$ 和 $k \in F$ 满足

(1) **共轭对称性**:  $(x, y) = \overline{(y, x)}$ ;

(2) **可加性**:  $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ ;

(3) **齐次性**:  $(kx, y) = k(x, y)$ ;

(4) **正定性**:  $(x, x) \geq 0$ , 当且仅当 $x = \theta$ 时等号成立.

此时,  $V$ 称为一个**内积空间**, 数 $(x, y)$ 称为 $x$ 与 $y$ 的**内积**. 有限维的实内积空间称为**欧几里得空间**. 有限维的复内积空间称为**酉空间**.

# 第一章 线性空间引论——内积空间

---

**注1:** 欧氏（酉）空间的维数指它作为线性空间的维数；它们的线性子空间仍是欧氏（酉）子空间.

**注2:** 定义1.4.1中性质（3）**齐次性仅对第一个向量成立**，对第二个向量则是“**共轭齐次性**”.

**例1.4.1** 设 $V$ 是 $F$ 上的线性空间,  $\forall x, y, z \in V$ 和 $k \in F$ ,

$$(x, y + z) =$$

$$(x, ky) =$$

# 第一章 线性空间引论——内积空间

**注1:** 欧氏（酉）空间的维数指它作为线性空间的维数；它们的线性子空间仍是欧氏（酉）子空间.

**注2:** 定义1.4.1中性质（3）**齐次性仅对第一个向量成立**，对第二个向量则是“**共轭齐次性**”.

**例1.4.1** 设 $V$ 是 $F$ 上的线性空间,  $\forall x, y, z \in V$ 和 $k \in F$ ,

$$(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$$

$$(x, ky) = \bar{k} \overline{(y, x)} = \bar{k} (x, y)$$

**思考:**  $\forall y \in V, (\theta, y) = ?$



# 第一章 线性空间引论——内积空间

---

**例1.4.2**  $\mathbb{R}^n$  中, 取  $\boldsymbol{x} = [x_1, \cdots, x_n]^T$ ,  $\boldsymbol{y} = [y_1, \cdots, y_n]^T$ ,  
令

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

满足内积四条性质, 故  $\mathbb{R}^n$  是欧氏空间, 仍记为  $\mathbb{R}^n$ .





# 第一章 线性空间引论——内积空间

---

**例1.4.3**  $\mathbb{C}^n$  中,  $\boldsymbol{x} = [x_1, \cdots, x_n]^T$ ,  $\boldsymbol{y} = [y_1, \cdots, y_n]^T$ ,  
令

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

该定义能否仍作为  $\mathbb{C}^n$  的内积吗?

分析:

在  $\mathbb{C}^1$  中, 取  $\boldsymbol{x} = \mathrm{i}$  时,  $\boldsymbol{x}$  与  $\boldsymbol{x}$  的“内积”等于  $-1$ ,  
不满足内积正定性要求.

# 第一章 线性空间引论——内积空间

---

**例1.4.3**  $\mathbb{C}^n$  中,  $\mathbf{x} = [x_1, \cdots, x_n]^T$ ,  $\mathbf{y} = [y_1, \cdots, y_n]^T$ ,  
令

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^H \mathbf{x} = x_1 \bar{y}_1 + \cdots + x_n \bar{y}_n$$

式中,  $\mathbf{y}^H = [\bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_n]$  表示为向量  $\mathbf{y}$  的**共轭转置**.  
满足内积四条性质, 故  $\mathbb{C}^n$  为酉空间, 仍记为  $\mathbb{C}^n$ .



# 第一章 线性空间引论——内积空间

**例1.4.4**  $\mathbb{C}^n$  中, 取  $\mathbf{x} = [x_1, \cdots, x_n]^T$ ,  $\mathbf{y} = [y_1, \cdots, y_n]^T$ .  
令

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^H \mathbf{A} \mathbf{x}$$

若该表达式能定义为  $\mathbb{C}^n$  的内积, 则需要什么条件?

分析: 由内积定义  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$  知,  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ ,

$$\mathbf{y}^H \mathbf{A} \mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{y}}$$

$$\mathbf{y}^H \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^H \mathbf{A}^H \mathbf{x}$$

因此,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^H$$

# 第一章 线性空间引论——内积空间

**例1.4.4**  $\mathbb{C}^n$  中, 取  $\mathbf{x} = [x_1, \cdots, x_n]^T$ ,  $\mathbf{y} = [y_1, \cdots, y_n]^T$ .  
令

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^H \mathbf{A} \mathbf{x}$$

矩阵满足何种性质时,  $\mathbb{C}^n$  为酉空间?

分析: 上述定义对内积可加性和齐次性始终成立.

现分析正定性:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0,$$

$$\text{且 } \mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} = 0 \text{ 当且仅当 } \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

# 第一章 线性空间引论——内积空间

**例1.4.4**  $\mathbb{C}^n$  中, 取  $\boldsymbol{x} = [x_1, \cdots, x_n]^T$ ,  $\boldsymbol{y} = [y_1, \cdots, y_n]^T$ .  
令

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$$

矩阵满足何种性质时,  $\mathbb{C}^n$  为酉空间?

综上,  $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$  能定义为  $\mathbb{C}^n$  的内积, 须满足

$$(1) \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^H$$

$$(2) \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n, \boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \geq 0,$$

且  $\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = 0$  当且仅当  $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ .

# 第一章 线性空间引论——内积空间

---

**定义1.4.2 (Hermite矩阵)** 设  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  
若  $A^H = A$ , 则称矩阵  $A$  是 **Hermite矩阵**; 若  $A^H = -A$ ,  
则称  $A$  是 **反Hermite矩阵**.



# 第一章 线性空间引论——内积空间

**定义1.4.2 (Hermite矩阵)** 设  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  
若  $A^H = A$ , 则称矩阵  $A$  是 **Hermite矩阵**; 若  $A^H = -A$ ,  
则称  $A$  是 **反Hermite矩阵**.

例如,  $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ , 其Hermite矩阵为

$$A^H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i & 2 \end{bmatrix}$$

# 第一章 线性空间引论——内积空间

**定义1.4.3（正定矩阵）** 设  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{C}^n$  是未定元向量,  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  是Hermite矩阵, 定义**复二次型**

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^H A \mathbf{x}$$

称 **$A$ 为 $f(\mathbf{x})$ 的矩阵**. 若  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, f(\mathbf{x}) \geq 0$  且  $f(\mathbf{x}) = 0$  当且仅当  $\mathbf{x} = 0$ , 则称  $f(\mathbf{x})$  是**正定二次型**,  $A$  是**正定矩阵**. 若  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ , 有  $f(\mathbf{x}) \geq 0$ , 则称  $f(\mathbf{x})$  是**半正定二次型**,  $A$  是**半正定矩阵**.

类似地, 可定义“**负定二次型**”、“**负定矩阵**”、“**半负定二次型**”和“**半负定矩阵**”.



# 第一章 线性空间引论——内积空间

---

**例1.4.5** 设复二次型  $f(x) = x^H A x$ , 其中,  $x = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{C}^2$ , 矩阵  $A$  为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$$

# 第一章 线性空间引论——内积空间

---

**例1.4.5** 设复二次型 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^H A \boldsymbol{x}$ , 其中,  $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{C}^2$ , 矩阵 $A$ 为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix}$$

则 $f(\boldsymbol{x}) = |x_1 + \mathrm{i}x_2|^2 + |x_2|^2 \geq 0$ .

$f(\boldsymbol{x}) = 0$ 的条件为 $x_1 = x_2 = 0$ .

故 $f(\boldsymbol{x})$ 是正定二次型,  $A$ 是正定矩阵.



# 第一章 线性空间引论——内积空间

---

**例1.4.5** 设复二次型 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^H A \boldsymbol{x}$ , 其中,  $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{C}^2$ , 矩阵 $A$ 为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}$$

则 $f(\boldsymbol{x}) = |x_1 + \mathrm{i}x_2|^2 \geq 0$ .

$f(\boldsymbol{x}) = 0$ 的条件为 $x_1 = -\mathrm{i}x_2$ .

显然,  $f(\boldsymbol{x})$ 是半正定二次型,  $A$ 是半正定矩阵.

# 第一章 线性空间引论——内积空间

**定义1.4.4（度量矩阵）** 设 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 是内积空间 $V$ 中的一组基, 称 $n$ 阶矩阵

$$A = \left( (\epsilon_i, \epsilon_j) \right)_{n \times n} = \begin{bmatrix} (\epsilon_1, \epsilon_1) & (\epsilon_1, \epsilon_2) & \cdots & (\epsilon_1, \epsilon_n) \\ (\epsilon_2, \epsilon_1) & (\epsilon_2, \epsilon_2) & \cdots & (\epsilon_2, \epsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\epsilon_n, \epsilon_1) & (\epsilon_n, \epsilon_2) & \cdots & (\epsilon_n, \epsilon_n) \end{bmatrix}$$

为 $V$ 关于基 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 的**度量矩阵（或Gram矩阵）**, 常记为 $G(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ .

**注5:** 内积空间中内积与度量矩阵是一一对应的.

每个基都对应一个度量矩阵

# 第一章 线性空间引论——内积空间

---

设 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 是内积空间 $V$ 的一组基, 则 $\forall x, y \in V$ , 有

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i \epsilon_i$$

$$y = \sum_{j=1}^n \eta_j \epsilon_j$$

式中,  $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_n]^T$  和  $\eta = [\eta_1, \dots, \eta_n]^T$  分别是向量 $x$ 和 $y$ 在基 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 下的坐标.

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^n \xi_i \bar{\eta}_j (\epsilon_i, \epsilon_j)$$

# 第一章 线性空间引论——内积空间

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^n \xi_i \bar{\eta}_j (\epsilon_i, \epsilon_j)$$

$$= \eta^H \begin{bmatrix} (\epsilon_1, \epsilon_1) & (\epsilon_2, \epsilon_1) & \cdots & (\epsilon_n, \epsilon_1) \\ (\epsilon_1, \epsilon_2) & (\epsilon_2, \epsilon_2) & \cdots & (\epsilon_n, \epsilon_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\epsilon_1, \epsilon_n) & (\epsilon_2, \epsilon_n) & \cdots & (\epsilon_n, \epsilon_n) \end{bmatrix} \xi$$

定义  $A = \left( (\epsilon_i, \epsilon_j) \right)_{n \times n}$ , 则

$$(x, y) = \eta^H A \xi$$

写错了, 书上P18

# 第一章 线性空间引论——内积空间

同理,

$$(y, x) = \xi^H A^H \eta$$

又知  $(x, y) = \overline{(y, x)}$ , 故

$$\eta^H A^H \xi = \overline{\xi^H A^H \eta}$$

即

$$\eta^H A^H \xi = \eta^H A \xi$$

考虑到  $\xi$  和  $\eta$  的任意性,  $A = A^H$ .

由两个向量以及内积空间的性质推导出过度矩阵应该具备的性质

因此,  $A$  是 Hermite 矩阵, 且  $(x, y) = \eta^H A^H \xi$ .



# 第一章 线性空间引论——内积空间

---

**命题1.4.1（度量矩阵的性质）** 设 $G(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 和 $G(\boldsymbol{\epsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\epsilon}_n)$ 均为内积空间 $V$ 的度量矩阵, 则有

(1)  $G(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 和 $G(\boldsymbol{\epsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\epsilon}_n)$ 是正定Hermite矩阵;

分析: 由内积正定性知,

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\xi}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{\xi} \geq 0$$

当且仅当 $\boldsymbol{\xi} = 0$ 时取等号.

因此,  $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.



# 第一章 线性空间引论——内积空间

**命题1.4.1（度量矩阵的性质）** 设 $G(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 和 $G(\boldsymbol{\epsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\epsilon}_n)$ 均为内积空间 $V$ 的度量矩阵, 则有

(2)  $G(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 和 $G(\boldsymbol{\epsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\epsilon}_n)$  **合同** (或**相合**), 即存在非奇异矩阵 $P$ 使得

$$P^H G(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n) P = G(\boldsymbol{\epsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\epsilon}_n)$$

式中,  $P$ 是由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到基 $\boldsymbol{\epsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\epsilon}_n$ 的过渡矩阵.

# 第一章 线性空间引论——内积空间

---

**定义1.4.5（长度）** 设 $V$ 是内积空间,  $\forall x \in V$ , 实数  $\sqrt{(x, x)}$  称为 $x$ 的**长度(模)**, 记为 $\|x\|$ . 长度为1的向量称为**单位向量**.

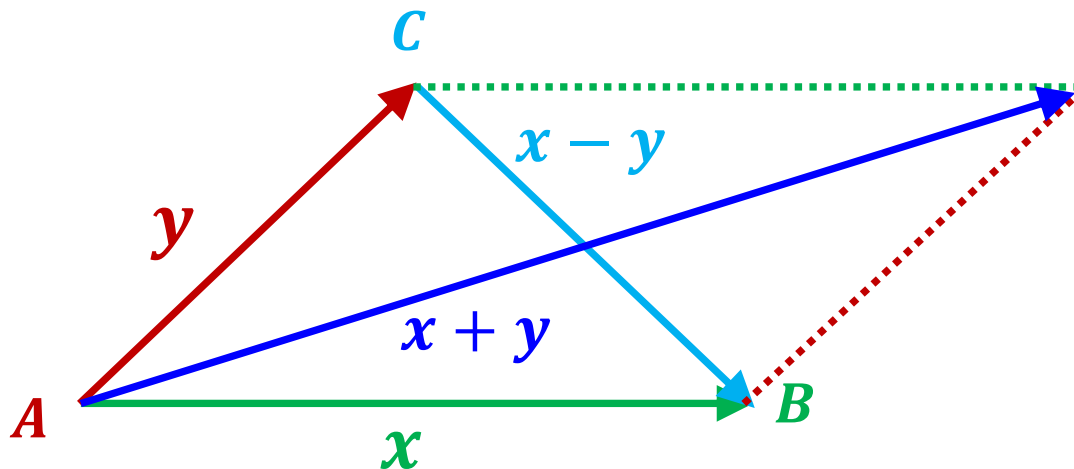
**注6:** 实数的绝对值和复数的模值都是向量长度的特例.

# 第一章 线性空间引论——内积空间

**命题1.4.2（长度性质）**  $\forall x, y \in V$  和  $k \in F$ , 有

- (1) **正定性**:  $\|x\| \geq 0$  当且仅当  $x = 0$  时有  $\|x\| = 0$ ;
- (2) **齐次性**:  $\|kx\| = |k|\|x\|$ ;
- (3) **平行四边形法则**:

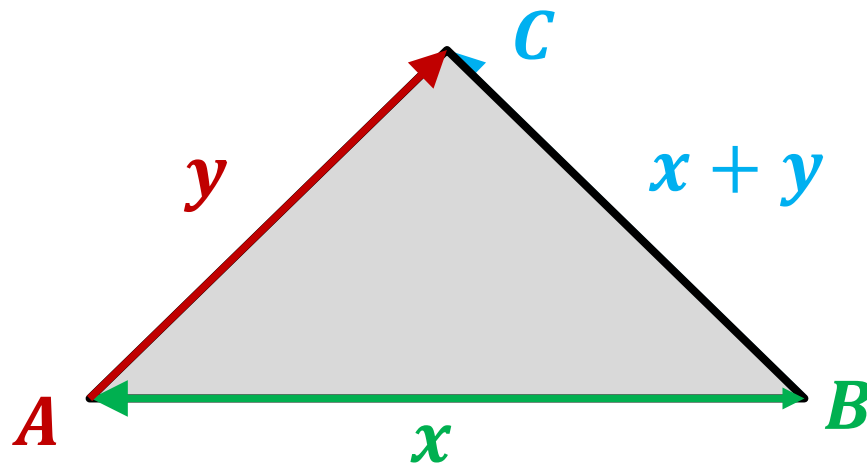
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$



# 第一章 线性空间引论——内积空间

**命题1.4.2（长度性质）**  $\forall x, y \in V$  和  $k \in F$ , 有

(4) **三角不等式**:  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ;



$$\operatorname{Re}(x, y) \leq \|x\| \|y\|$$



# 第一章 线性空间引论——内积空间

---

**定理1.4.1 (Cauchy—Schwarz不等式)** 设 $V$ 是数域 $F$ 上的内积空间, 对任意 $x, y \in V$ ,

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$$

其中,  $|(x, y)| = \|x\| \|y\|$ 当且仅当 $x, y$ 线性相关成立.

# 第一章 线性空间引论——内积空间

**定理1.4.1 (Cauchy—Schwarz不等式)** 设 $V$ 是数域 $F$ 上的内积空间, 对任意 $x, y \in V$ ,

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$$

其中,  $|(x, y)| = \|x\| \|y\|$ 当且仅当 $x, y$ 线性相关成立.

证明:  $\forall a \in \mathbb{R}$  (更一般的情况呢), 有

$$f(a) = (ax + y, ax + y) \geq 0$$

$\Rightarrow$

$$\|x\|^2 a^2 + 2a(x, y) + \|y\|^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$

$$\Delta = (2(x, y))^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$$



# 第一章 线性空间引论——内积空间

若 $x, y$ 线性相关, 则存在实数 $k$ 使得 $x = ky$ . 反之, 若 $|(x, y)| = \|x\|\|y\|$ , 分别考虑 $x = \theta$ 和 $x \neq \theta$ 两种情况. 若 $x \neq \theta$ , 则 $f(a) = (ax + y, ax + y) = 0$ 存在一个实数解

$$a = -\frac{(x, y)}{\|x\|^2}, \quad y = -ax$$

证复数, 将 $(x, y)$ 取共轭

对于一般的数域 $F$ . 分别考虑 $x = \theta$ 和 $x \neq \theta$ 两种情况. 若 $x \neq \theta$ , 对于任意的 $a \in F$ ,  $f(a) = (ax + y, ax + y) \geq 0$ 恒成立. 取

$$a = -\frac{\overline{(x, y)}}{\|x\|^2}$$

# 第一章 线性空间引论——内积空间

**注6:** 定义不同内积可得到不同的Cauchy不等式.

(1) 对 $\mathbb{R}^n$ 中任两向量 $\mathbf{x} = [x_1, \cdots, x_n]^T$ 和 $\mathbf{y} = [y_1, \cdots, y_n]^T$ , 有

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

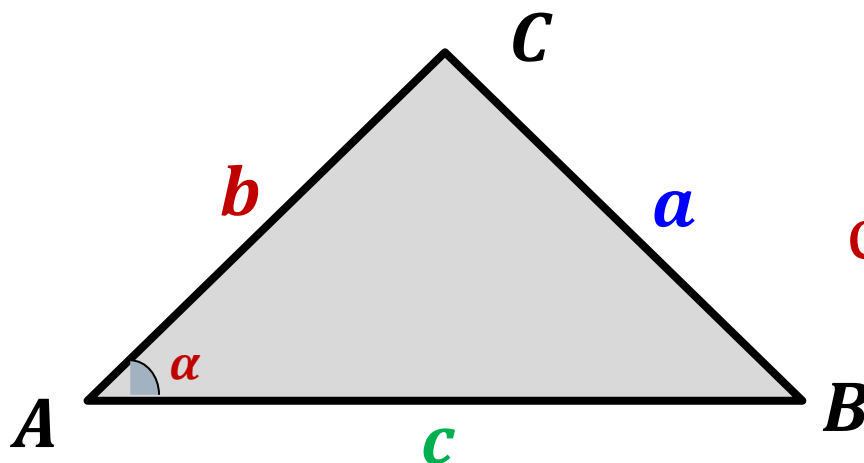
(2) 对 $C_{[a,b]}$ 中任两函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ , 有

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$



# 第一章 线性空间引论——内积空间

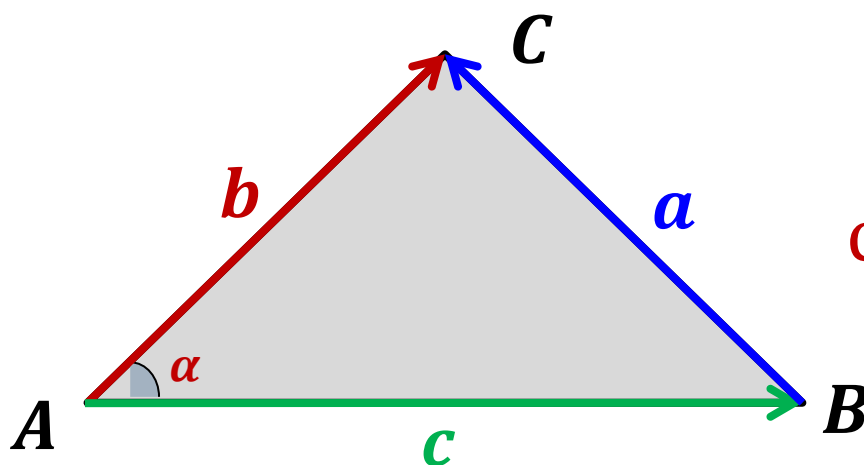
---



$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$



# 第一章 线性空间引论——内积空间

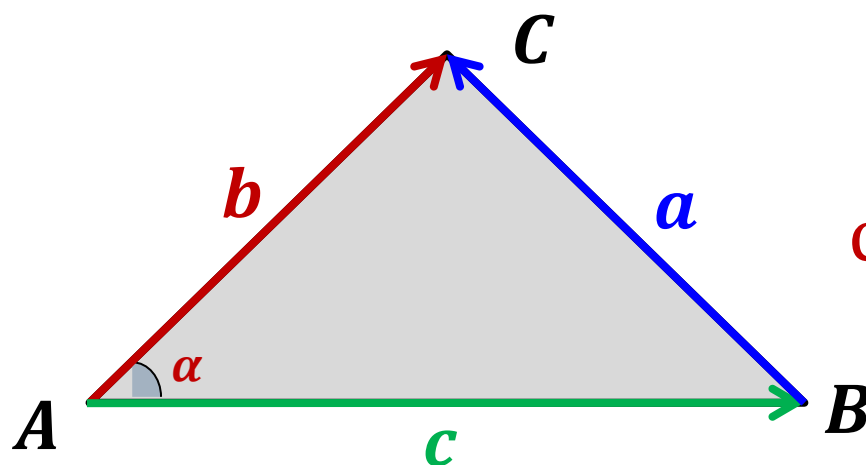


$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

若定义 $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{AB}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 空间的两个向量, 则角 $\alpha$ 即为向量的夹角.

$$\cos \alpha = \frac{\|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2}{2 \|\overrightarrow{AC}\| \|\overrightarrow{AB}\|}$$

# 第一章 线性空间引论——内积空间



$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

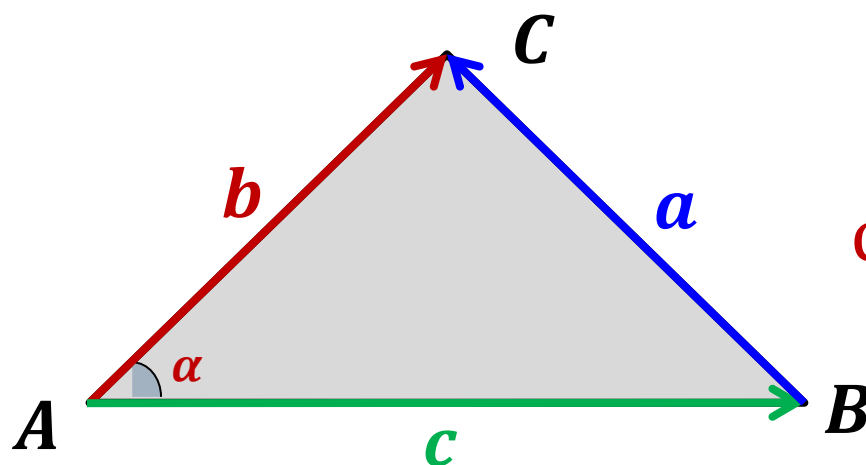
替换为  $(AC, AC)$ ,  $(AB, AB)$ ,  $(AC-AB, AC-AB)$  利用平行四边形公式换掉最后一项

若定义  $\overrightarrow{AC}$  和  $\overrightarrow{AB}$  为  $\mathbb{R}^2$  空间的两个向量, 则角  $\alpha$  即为向量的夹角.

$$\cos \alpha = \frac{\|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2}{2 \|\overrightarrow{AC}\| \|\overrightarrow{AB}\|}$$



# 第一章 线性空间引论——内积空间



$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

若定义 $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{AB}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 空间的两个向量, 则角 $\alpha$ 即为向量的夹角.

$$\cos \alpha = \frac{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})}{\|\overrightarrow{AC}\| \|\overrightarrow{AB}\|}$$

# 第一章 线性空间引论——内积空间

**定义1.4.6（向量夹角）** 设 $V$ 是欧氏空间, 对 $V$ 中任意向量 $x$ 和 $y$ , 定义向量 $x$ 和 $y$ 的**夹角**为

注意上面的向量在 $R^2$ 内

$$\alpha = \langle x, y \rangle = \arccos \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|} \in [0, \pi]$$

**注7:** 引入内积至线性空间才有了向量夹角的概念, 为线性空间带来了“图形化”的理解.

$$\begin{aligned} e(iz) &= \cos z + i \sin z \\ e(-iz) &= \cos z - i \sin z \end{aligned}$$

$\cos z = (e(iz) + e(-iz)) / 2$   
 $z = ki$ , 就可以求出 $\cos(\text{复数})$ 的范围很明显不在 $(-1, +1)$ 范围内。

# 第一章 线性空间引论——内积空间

---

**例1.4.7**  $\mathbb{R}^2$  关于基  $x_1, x_2$  的度量矩阵为

$$G(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} (x_1, x_1) & (x_2, x_1) \\ (x_1, x_2) & (x_2, x_2) \end{bmatrix}$$

行列式  $|G(x_1, x_2)|$  的几何含义.



# 第一章 线性空间引论——内积空间

**例1.4.7**  $\mathbb{R}^2$  关于基  $x_1, x_2$  的度量矩阵为

$$G(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} (x_1, x_1) & (x_2, x_1) \\ (x_1, x_2) & (x_2, x_2) \end{bmatrix}$$

行列式  $|G(x_1, x_2)|$  的几何含义.

$\mathbb{R}^2$  内

分析:  $|G(x_1, x_2)| = \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - (x_1, x_2)^2$

定义向量  $x_1$  与  $x_2$  的夹角为  $\alpha$ , 上式改写为

$$\begin{aligned} |G(x_1, x_2)| &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \cos^2 \alpha \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$|G(x_1, x_2)|$  恰是以向量  $x_1$  与  $x_2$  为邻边的平行四边形面积的平方

# 第一章 线性空间引论——内积空间

---

**定义1.4.7（正交和正交向量组）** 设 $V$ 是内积空间，对 $V$ 中任意向量 $x$ 和 $y$ ， $(x, y) = 0$ ，则称向量 $x$ 与 $y$ **正交**（或**垂直**），记为 $x \perp y$ 。若一组非零向量两两正交，则称为**正交向量组**。单位向量构成的正交向量组称为**标准正交向量组**。





# 第一章 线性空间引论——内积空间

**定义1.4.7（正交和正交向量组）** 设 $V$ 是内积空间，对 $V$ 中任意向量 $x$ 和 $y$ ， $(x, y) = 0$ ，则称向量 $x$ 与 $y$ **正交**（或**垂直**），记为 $x \perp y$ 。若一组非零向量两两正交，则称为**正交向量组**。单位向量构成的正交向量组称为**标准正交向量组**。

**注8：**零向量 $\theta$ 与任何向量均正交。**正交向量组要求向量均为非零向量。**

欧氏空间（实数）与酉空间（复数）都可以

**注9：**向量 $x$ 与 $y$ 正交当且仅当 $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ （**勾股定理**）。该结果可推广至一般情形。

# 第一章 线性空间引论——内积空间

---

**例1.4.8** 求 $\mathbb{R}^4$ 中的单位向量 $x$ 使它与 $\alpha_1 = [1, 1, -1, 1]^T$ ,  $\alpha_2 = [1, -1, -1, 1]^T$ ,  $\alpha_3 = [2, 1, 1, 3]^T$ 均正交.

模长为1

# 第一章 线性空间引论——向量长度与夹角

**定理1.4.2** 正交向量组线性无关.

**证明:** 设向量组  $x_1, x_2, \dots, x_s$  是内积空间  $V$  的正交向量组. 现考查方程

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_s x_s = \theta$$

用  $x_i (i = 1, 2, \dots, s)$  与上式两端作内积, 得

$$(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_s x_s, x_i) = (\theta, x_i) = 0 \quad *$$

注意到(\*)式左边

$$(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_s x_s, x_i) = \sum_j k_j (x_j, x_i)$$



# 第一章 线性空间引论——内积空间

---

**定理1.4.2** 正交向量组线性无关.

**证明(续):** 且 $x_1, x_2, \dots, x_s$ 是正交向量组, 故当 $j \neq i$ 时有 $(x_j, x_i) = 0$ ; 当 $j = i$ 时有 $(x_j, x_i) \neq 0$ .

进而 (\*) 式化简为

$$k_i(x_i, x_i) = 0$$

即 $k_i = 0 (i = 1, 2, \dots, s)$ .

因此,  $x_1, x_2, \dots, x_s$ 线性无关. 证毕.

# 第一章 线性空间引论——向量长度与夹角

---

**推论1.4.1** 在 $n$ 维内积空间中, 正交向量组中的向量不会超过 $n$ 个.



# 第一章 线性空间引论——向量长度与夹角

---

**推论1.4.1** 在 $n$ 维内积空间中, 正交向量组中的向量不会超过 $n$ 个.

**思考:** 在 $n$ 维内积空间中 $V$ , 能否一定找到包含 $n$ 个向量的正交向量组?

# 第一章 线性空间引论——向量长度与夹角

**推论1.4.1** 在 $n$ 维内积空间中, 正交向量组中的向量不会超过 $n$ 个.

**思考:** 在 $n$ 维内积空间中 $V$ , 能否一定找到包含 $n$ 个向量的正交向量组?

分析: 假设 $x_1, \dots, x_n$ 是 $V$ 的一组基,  $y_1, \dots, y_n$ 是待定的正交向量组.

根据Gram-Schmidt正交化方法

$$y_1 = x_1$$

$$y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(x_k, y_i)}{(y_i, y_i)} y_i, k > 1$$



# 第一章 线性空间引论——内积空间

---

**定义1.4.8（标准正交基）** 在 $n$ 维内积空间中, 由 $n$ 个向量组成的正交向量组称为**正交基**. 由单位向量组成的正交基称为**标准正交基**.





# 第一章 线性空间引论——内积空间

**例1.4.9**考查定义在 $[-\pi, \pi]$ 的光滑函数空间 $S$ , 定义内积为 $\forall f(t), g(t) \in S$ ,

$$(f(t), g(t)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$$

分析:  $\forall k, m, n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos ktdt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin ktdt = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \cdot \cos mtdt = 0$$

# 第一章 线性空间引论——内积空间

**例1.4.9**考查定义在 $[-\pi, \pi]$ 的光滑函数空间 $S$ , 定义内积为 $\forall f(t), g(t) \in S$ ,

$$(f(t), g(t)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$$

分析: 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的三角函数组

$$1, \cos t, \sin t, \dots, \cos kt, \sin kt, \dots,$$

是正交向量组, 也是空间 $S$ 的正交基.

因此, 光滑函数 $f(x)$ 展开为 **傅里叶三角级数**

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$



## 第一章 线性空间引论——内积空间

**例1.4.10** 设 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 是线性空间 $V$ 的标准正交基, 并定义 $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$ 和 $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]^T$ 分别是 $V$ 中向量 $x$ 和 $y$ 在基 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 下的坐标, 则

$$(x, y) = \beta^H G(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \alpha$$

$$(x, y) = \beta^H \alpha$$

**注10:** 线性空间 $V$ 的向量组 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 是标准正交基当且仅当 $V$ 关于 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 的度量矩阵为单位矩阵.  
在标准正交基下, 内积的运算变得更加简单.

# 第一章 线性空间引论——内积空间

---

**定义1.4.9（向量正交于集合）** 设 $V$ 是内积空间,  $W$ 是 $V$ 的子集, 若对任意向量 $y \in W$ 和 $x \in V$ 有 $x \perp y$ , 则称 $x$ 正交（或垂直）于集合 $W$ , 记为 $x \perp W$ .

**定义1.4.10（两集合正交）** 设 $W_1$ 与 $W_2$ 是内积空间 $V$ 的两个子集, 若对任意向量 $x \in W_1$ 和任意向量 $y \in W_2$ 有 $x \perp y$ , 则称 $W_1$ 与 $W_2$ 是正交的, 记为 $W_1 \perp W_2$ .

# 第一章 线性空间引论——内积空间

**例1.4.11** 在直角坐标系中定义三个子空间: 过坐标原点的直线 $W$ 、过坐标原点的平面 $W_1$ 和 $W_2$ 如图所示. 在几何上, 直线 $W$ 垂直平面 $W_1$ , 平面 $W_1$ 垂于 $W_2$ .

考察子空间 $W$ 与 $W_1$ 是否正交问题:

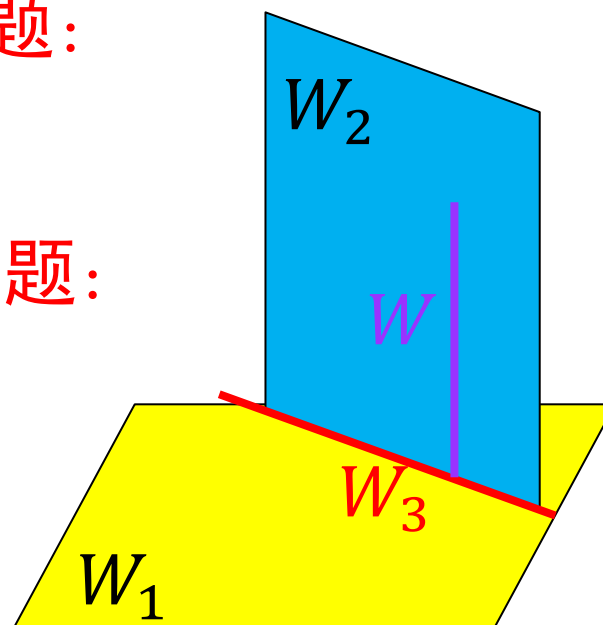
子空间 $W$ 正交于 $W_1$ .

考察子空间 $W_1$ 与 $W_2$ 是否正交问题:

$$W_1 \cap W_2 = W_3$$

$W_3$ 任两非零向量共线, 不正交.

因此, 子空间 $W_1$ 与 $W_2$ 不正交.



# 第一章 线性空间引论——内积空间

---

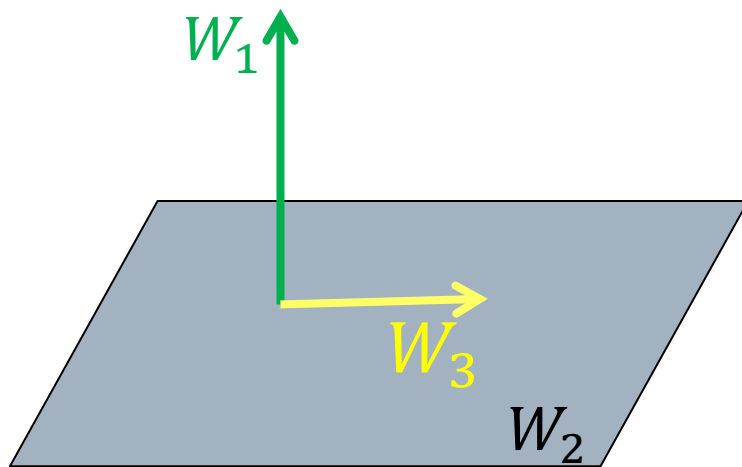
**定义1.4.11（子空间正交补）** 设 $W$ 是 $V$ 的线性子空间, 则集合 $W^\perp = \{x \in V | x \perp W\}$  称为 $W$ 的**正交补**.



# 第一章 线性空间引论——内积空间

**定义1.4.11（子空间正交补）** 设 $W$ 是 $V$ 的线性子空间, 则集合 $W^\perp = \{x \in V | x \perp W\}$  称为 $W$ 的**正交补**.

**思考:** 与 $W$ 正交的子空间是 $W$ 的正交补空间吗?



正交补的子集,  
yoz的与x轴,x  
轴本身不是正交  
补



# 第一章 线性空间引论——内积空间

---

**定理1.4.3**  $W$  是  $V$  的线性子空间, 则  $W^\perp$  也是  $V$  的线性子空间.

证明: 对任意向量  $x, y \in W^\perp, z \in W, \lambda, \mu \in F$ , 有

$$(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z) = 0$$

内积空间的前提  
是线性空间

**思考:** 给定  $W$ ,  $W^\perp$  是惟一的吗?



# 第一章 线性空间引论——内积空间

**定理1.4.4**  $W$  是  $V$  的线性子空间, 则  $V = W + W^\perp$

证明:  $V = W + W^\perp \Leftrightarrow V \supset W + W^\perp$  且  $V \subset W + W^\perp$

选择  $W$  的一组正交基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , 对于任意的  $x \in V$ ,

$$x = \sum_{i=1}^m k_i \alpha_i + \left( x - \sum_{i=1}^m k_i \alpha_i \right), k_i \in F$$

$$k_i = \frac{(x, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$$

$k_i$  是唯一的吗, 取值是否有更直观解释?