北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

矩 阵 理 论

谷海波

guhaibo@buaa.edu.cn

自动化科学与电气工程学院

第一章 线性空间引论

- 线性空间
- 线性子空间
- 基与坐标
- 内积空间
- 直和与投影
- 应用：多项式插值

1.3 基 与 坐 标

定义1.3.1（线性相关与线性无关）设V是F上的线性空间, $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$V$的一组向量. 若向量方程

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\theta}, k_1,\cdots,k_n\in F$$

只有平凡解, 即$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$, 则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是线性无关; 否则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是线性相关.

注1： 单个零向量线性相关；

单个非零向量线性无关.

注2： 线性无关向量组的任一子集是线性无关的；

线性相关向量组的任一扩集仍是线性相关的.

例1.3.1 考查定义在$\mathbb{C}$上的线性空间$\mathbb{C}$, 讨论空间中向量i和向量1的线性相关性.

分析: 考查方程

$$k_1 \cdot \mathrm{i} + k_2 \cdot 1 = \boldsymbol{\theta}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{C}$$

显然, $k_1 = -1, k_2 = \mathrm{i}$是方程的一组解.

即向量 i 和向量1线性相关.

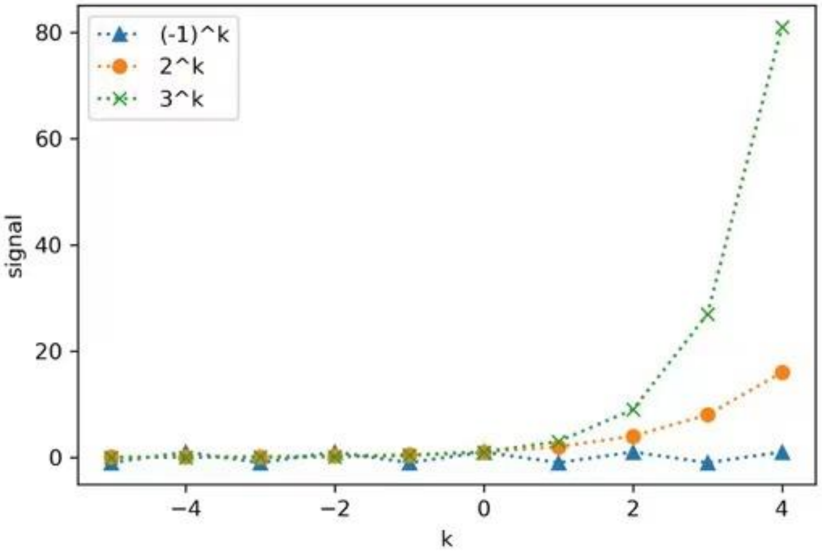
思考: 若定义在$\mathbb{R}$上的线性空间$\mathbb{C}$呢?

此时$k_1 \cdot \mathrm{i} + k_2 \cdot 1 = \boldsymbol{\theta}$在实数域无解. 即向量 i 和向量 1 线性无关.

例1.3.2 设信号子空间

$$\tilde{S} = \mathrm{span}(\{x_k\},\{y_k\},\{z_k\})$$

其中$x_k = (-1)^k, y_k = 2^k, z_k = 3^k$. 试判断信号$\{x_k\},\{y_k\},\{z_k\}$是否线性无关.



例1.3.2 设信号子空间

$$\tilde{S} = \mathrm{span}(\{x_k\}, \{y_k\}, \{z_k\})$$

其中$x_k = (-1)^k, y_k = 2^k, z_k = 3^k$. 试判断信号$\{x_k\}, \{y_k\}, \{z_k\}$是否线性无关.

$$\begin{bmatrix} x_k & y_k & z_k \\ x_{k+1} & y_{k+1} & z_{k+1} \\ x_{k+2} & y_{k+2} & z_{k+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = 0, \forall k$$

其中, 系数矩阵称为信号的Casorati矩阵, 行列式称为$\{x_k\}, \{y_k\}, \{z_k\}$的Casorati行列式.

例1.3.2 设信号子空间

$$\tilde{S} = \mathrm{span}(\{x_k\},\{y_k\},\{z_k\})$$

其中$x_k = (-1)^k, y_k = 2^k, z_k = 3^k$. 试判断信号$\{x_k\},\{y_k\},\{z_k\}$是否线性无关.

取$k = 0$时, Casorati矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

该矩阵可逆. 因此, 信号$\{x_k\},\{y_k\},\{z_k\}$线性无关.

定理1.3.1 设线性空间V中向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$线性无关,而向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}$线性相关($\boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{\theta}$),则$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$线性表示且表示法唯一.

分析:由线性相关知,必存在不全为零的数$k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}$使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n + k_{n+1}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta}$$

其中$k_{n+1} \neq 0$,故

$$\boldsymbol{\beta} = -\frac{k_1}{k_{n+1}}\boldsymbol{\alpha}_1 - \cdots - \frac{k_n}{k_{n+1}}\boldsymbol{\alpha}_n$$

定理1.3.1 设线性空间V中向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关，而向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$线性相关($\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{\theta}$)，则$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示且表示法唯一.

分析：证明唯一性通常采用反证法.

假设$\boldsymbol{\beta}$的表法不唯一，不妨设有两种不同表示：

$$\boldsymbol{\beta}=a_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{\alpha}_n=b_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+b_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

其中a_i和b_i（$i=1,\cdots,n$）不同时为零.

$$a_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{\alpha}_n+\left(-(b_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+b_n\boldsymbol{\alpha}_n)\right)=\boldsymbol{\theta}$$

$$(a_1-b_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(a_n-b_n)\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\theta}$$

定义1.3.2（极大线性无关组与秩）设$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是线性空间$V$的一组向量. 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$中存在$r$个线性无关的向量$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$, 并且$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$中任一向量均可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$线性表示, 则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$的极大线性无关组, 数$r$称为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$的秩, 记为

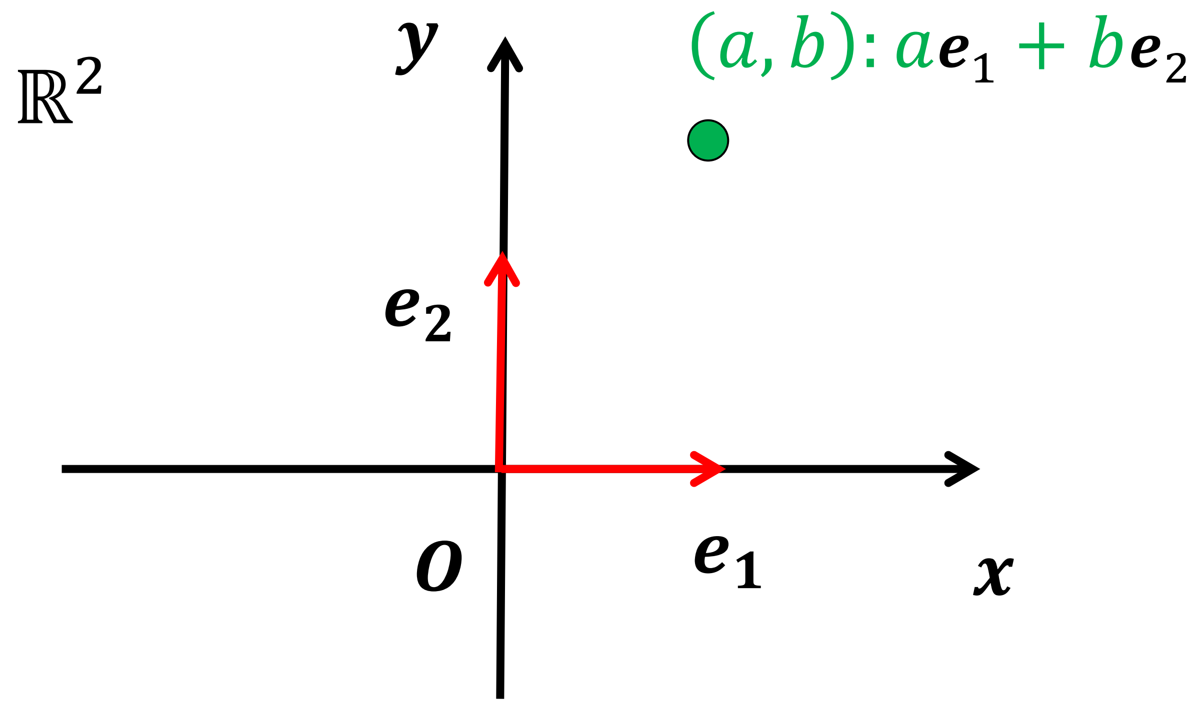
$$\operatorname{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]=r$$

小结: 向量组中的任一向量都可由极大线性无关组线性唯一表示.

例1.3.3 求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的极大线性无关组, 其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}\mathrm{i}\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}\mathrm{i}-1\\0\end{bmatrix}$$

注3：向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$的极大线性无关组不唯一.



小结: $\mathbb{R}^2$中的任一向量都可由向量$\boldsymbol{e}_1$和$\boldsymbol{e}_2$唯一表示.

向量$\boldsymbol{e}_1$和$\boldsymbol{e}_2$给$\mathbb{R}^2$强加一个“坐标系”.

定义1.3.4（基）设V是数域F上的线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$V$中一组向量. 若

（1）向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关;

（2）V中任一向量均可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示;

则称$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$V$的一个基底（或一组基）.

小结: 在线性空间，明确一组基的重要原因在于给线性空间强加一个“坐标系”.

例1.3.4 单位矩阵I的n列可构成$\mathbb{R}^n$（或$\mathbb{C}^n$）的一组基. 特别地, 令$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$是单位矩阵的$n$列, 则$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$称为$\mathbb{R}^n$的**标准基**.

例1.3.4 单位矩阵I的n列可构成$\mathbb{R}^n$（或$\mathbb{C}^n$）的一组基. 特别地, 令$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$是单位矩阵的$n$列, 则$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$称为$\mathbb{R}^n$的**标准基**.

例1.3.5 已知$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, 求$N(A)$的一组基.

定理1.3.2（唯一表示定理） 设$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$是线性空间$V$的一组基, 则$V$中任一向量$\boldsymbol{x}$都可由基$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$唯一表示.

定理1.3.2（唯一表示定理）设$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$是线性空间$V$的一组基, 则$V$中任一向量$\boldsymbol{x}$都可由基$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$唯一表示.

定义1.3.5（坐标）设$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$是数域$F$上线性空间$V$的一组基, 对任意向量$\boldsymbol{x}\in V$, 令

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{x}_i=[\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n]\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$$

称有序数组$[\alpha_1,\cdots,\alpha_n]^T\in F^n$是$\boldsymbol{x}$在基$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$下的坐标, 它由$\boldsymbol{x}$与基$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$唯一确定.

例1.3.6 证明$E_{ij} \in \mathbb{R}^{2\times2}$（$i,j=1,2$）是$\mathbb{R}^{2\times2}$的一组基，并求矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}$在该组基下的坐标.

分析:

$$k_1E_{11}+k_2E_{12}+k_3E_{21}+k_4E_{22}=O$$

对任意的$A\in\mathbb{R}^{2\times2}$，有

$$A=a_{11}E_{11}+a_{12}E_{12}+a_{21}E_{21}+a_{22}E_{22}$$

$$A=E_{11}+2E_{12}+E_{21}+E_{22}$$

思考:同一空间不同基所包含的向量个数一定相同?

分析:设$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$, $\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_m$分别是$V$的两组基,不设妨$m>n$.

由于$\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_m$可由基$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$表示,即

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}_1 = a_{11}\boldsymbol{x}_1 + a_{12}\boldsymbol{x}_2 \ldots + a_{1n}\boldsymbol{x}_n \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_m = a_{m1}\boldsymbol{x}_1 + a_{m2}\boldsymbol{x}_2 \ldots + a_{mn}\boldsymbol{x}_n \end{cases}$$

又知$\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_m$线性无关,故$k_1\boldsymbol{y}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{y}_m=\boldsymbol{\theta}$只有零解.

思考:同一空间不同基所包含的向量个数一定相同?

分析:即

$$(k_1a_{11}+\cdots+k_ma_{m1})\boldsymbol{x}_1+\cdots$$
$$+(k_1a_{1n}+\cdots+k_ma_{mn})\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{\theta}$$

又知$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$线性无关,所以

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}=0$$

注意$\mathrm{rank}(A)\le n<m$,故上方程组必有非零解.

思考:同一空间不同基所包含的向量个数一定相同?

分析:这与方程$k_1\boldsymbol{y}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{y}_m=\boldsymbol{\theta}$只有零解矛盾. 故$n=m$.

这表明同一空间不同基所包含的向量个数相同.

再思考:同一空间不同基有何关系?

定义1.3.6（过渡矩阵）设$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$和$\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n$是数域$F$上线性空间$V$的两组基, 令

$$\boldsymbol{y}_i = a_{1i}\boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_{ni}\boldsymbol{x}_n = [\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n]\begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$$

引入矩阵表示:

$$[\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n] = [\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n]A$$

其中$A = \left(a_{ij}\right) \in F^{n\times n}$, 称$A$是由基$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$到基$\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n$的过渡矩阵（或变换矩阵）.

命题1.3.1（过渡矩阵的性质）设V是数域F上的线性空间, $A \in F^{n\times n}$是由基$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$到基$\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n$的过渡矩阵, 则以下命题成立

（1）过渡矩阵A可逆（为什么）;

（2）由基$\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n$到基$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$的过渡矩阵为$A^{-1}$;

（3）任取$\boldsymbol{x} \in V$, 设$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \boldsymbol{y}_i$, 则

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

例1.3.7 设$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$,

在基$1,x,\cdots,x^n$下的坐标:

$f(x)\in P_n[x]$, $1,x,\cdots,x^n$线性无关.

例1.3.7 设$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$,
在基$1,x,\cdots,x^n$下的坐标:

$$\left[f(0),f'(0),\cdots,\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right]^T$$

例1.3.7 设$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$,

在基$1,x,\cdots,x^n$下的坐标:

$$\left[f(0),f'(0),\cdots,\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right]^T$$

在基$1,x-x_0,\cdots,(x-x_0)^n$下的坐标:

$$\left[f(x_0),f'(x_0),\cdots,\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right]^T$$

例1.3.7 设$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

$$(x-x_0)^k=\sum_{i=0}^{k}C_k^i\,x^i(-x_0)^{k-i}$$

$$[1,x-x_0,\cdots,(x-x_0)^n]$$

$$=[1,x,\cdots,x^n]\begin{bmatrix}1 & -x_0 & \cdots & (-x_0)^n\\ 0 & 1 & \cdots & n(-x_0)^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

定义1.3.7（维数）在线性空间V中, 不同线性无关组中向量个数最大者叫作V的**维数**, 记为$\dim V$. 当$\dim V<\infty$, 称V为**有限维空间**, 否则称为**无限维空间**, 记$\dim V=\infty$.

定义1.3.7（维数） 在线性空间V中，不同线性无关组中向量个数最大者叫作V的**维数**，记为$\dim V$. 当$\dim V<\infty$，称V为**有限维空间**，否则称为**无限维空间**，记$\dim V=\infty$.

例1.3.8 离散时间信号空间

$$S=\{\{x_k\}=[\cdots,x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2,\cdots]\,|\,x_i\in\mathbb{R}\}$$

是$\mathbb{R}$上的无限维线性空间.

思考：单个零向量线性组成的空间的维数？

定理1.3.3(**维数与基的关系**) 设V是有限维线性空间，则$\dim V = n$当且仅当V的任一基底的向量个数为n.

注4: 可直接用线性空间中基所包含的向量个数定义该空间的维数.

例1.3.9 求空间$\mathbb{C}$在实数域$\mathbb{R}$和复数域$\mathbb{C}$上的维数.

例1.3.9 求空间$\mathbb{C}$在实数域$\mathbb{R}$和复数域$\mathbb{C}$上的维数.

解: (1)考查在实数域$\mathbb{R}$上的线性空间$\mathbb{C}$

向量1和 i 线性无关, 且$\mathbb{C}$中任一复数均可由1和i线性表示. 故向量组1和 i 是$\mathbb{C}$的一组基, 即定义在$\mathbb{R}$上的线性空间$\mathbb{C}$的维数为2.

例1.3.9 求空间$\mathbb{C}$在实数域$\mathbb{R}$和复数域$\mathbb{C}$上的维数.

解: (1)考查在实数域$\mathbb{R}$上的线性空间$\mathbb{C}$

向量1和 i 线性无关, 且$\mathbb{C}$中任一复数均可由1和i线性表示. 故向量组1和 i 是$\mathbb{C}$的一组基, 即定义在$\mathbb{R}$上的线性空间$\mathbb{C}$的维数为2.

(2)考查在复数域$\mathbb{C}$上的线性空间$\mathbb{C}$

向量1和 i 线性相关, 且$\mathbb{C}$中任一复数均可由1或 i 线性表示. 故向量组1和 i 分别构成$\mathbb{C}$的一组基, 即定义在$\mathbb{C}$上的线性空间$\mathbb{C}$的维数为1.

推论1.3.1（基扩充定理）n维线性空间中任意n个线性无关的向量均为V的一个基底, 且任一线性无关向量组$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r$（$1 \leq r < n$）可扩充为$V$的一个基底.

注5：在构造子空间的一组基时, 优先利用“加法”原则, 尽量避免“减法”原则.

定理1.3.4（维数定理）设W_1和W_2是线性空间V的两个子空间, 则

$$\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)$$

例1.3.10 设$W_1=\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $W_2=\mathrm{span}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$, 其中$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,1,0]^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,1,0]^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=[1,0,1,1]^T$, $\boldsymbol{\beta}_1=[2,1,0,0]^T$, $\boldsymbol{\beta}_2=[0,1,0,0]^T$, 求$\dim(W_1+W_2)$和$\dim(W_1\cap W_2)$.

例1.3.10 设$W_1 = \mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, $W_2 = \mathrm{span}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2)$, 其中$\boldsymbol{\alpha}_1 = [1,2,1,0]^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = [1,1,1,0]^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = [1,0,1,1]^T$, $\boldsymbol{\beta}_1 = [2,1,0,0]^T$, $\boldsymbol{\beta}_2 = [0,1,0,0]^T$, 求$\dim(W_1 + W_2)$和$\dim(W_1 \cap W_2)$.

解: 观察知$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性无关, $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$线性无关，故有

$$\dim(W_1) = 3, \dim(W_2) = 2$$

再对如下矩阵进行初等变换, 得

$$[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

例1.3.10 设$W_1=\text{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $W_2=\text{span}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$, 其中$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,1,0]^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,1,0]^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=[1,0,1,1]^T$, $\boldsymbol{\beta}_1=[2,1,0,0]^T$, $\boldsymbol{\beta}_2=[0,1,0,0]^T$, 求$\dim(W_1+W_2)$和$\dim(W_1\cap W_2)$.

解: 于是,

$$\dim(W_1+W_2)=\text{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=4$$

由维数定理可知$\dim(W_1\cap W_2)=3+2-4=1$.

思考：设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，其零空间和列空间有可能相同吗？若这两个空间相同，则矩阵A具有何性质？（课后作业）