



群聊：23 矩阵



该二维码7天内(9月12日前)有效，重新进入将更新



北京航空航天大学
BEIHANG UNIVERSITY

矩阵理论

刘克新

自动化科学与电气工程学院

邮箱: skxliu@163.com

教材与参考书

参考教材:

《矩阵基本理论与应用》 王磊编著 北京航空航天大学出版社

参考书:

《矩阵论教程》 张绍飞、赵迪编著 机械工业出版社

《矩阵论》 戴华编著 科学出版社

经典教材: Matrix Analysis 2nd Edition, R.A. Horn, C.R. Johnson, Cambridge University Press, 2013.

扩展教材: 矩阵分析与应用（第二版）张贤达编著，清华大学出版社，2013.

考试成绩

MOOC+课堂随机测试

15%

- 要求:
1. 研究生智慧教育平台, 选课;
 2. 视频+每章习题;
 3. 请大家积极反馈视频、习题、课本中的错误

矩阵论在XX中的应用/介绍报告1篇 15%

- 要求:
1. 中文, 可理论分析、数值计算、或算法等;
 2. 字数不超过800字或不超过2页A4纸;
 3. 格式可参考科技论文;

- 注意:
1. 期末考试前提交纸质版和电子版;
 2. 抄袭和雷同者0分。

期末考试

70%

研究生智慧教育平台

1



· 思政课 · 课程 · 体育 · 美育 · 劳动教育 · 教材
· 虚仿实验 · 研究生教育 · 教师教研 · 课外成长 · 院士讲堂

2

<https://www.gradsmartedu.cn/>

课程筛选

上课状态

全部 即将开课 开课中

已结课

学科门类

搜索到 9 门 “矩阵理论” 相关课程



矩阵理论

王磊 刘克新 等 | 北京航空航天大学 248 人

通过学习本课程，理解并掌握数学与自然科学的基本概念和方法，加深对数学与理论创新、工程实际需求紧密结合的认识，提高工科学生利用数学工具解决科学与工程问题的能力。

矩阵理论

2023秋

开课时间: 2023-07-27 至 2024-01-23

248人已报名

去学习

课程介绍

通过学习本课程，理解并掌握数学与自然科学的基本概念和方法，加深对数学与理论创新、工程实际需求紧密结合的认识，提高工科学生利用数学工具解决科学与工程问题的能力。



其 它

- 1, 讲课本上有的, 也会适当讲一些课本上没有的**
- 2, 答疑, 可反馈给课代表, 也可反馈到群里**
- 3, 上课口误, 大家随时纠正**
- 4, 正确看待“显然”、“易得”等**



第一章 线性空间引论

- 线性空间
- 线性子空间
- 基与坐标
- 内积空间
- 直和与投影
- 应用：多项式插值

第一章 线性空间引论

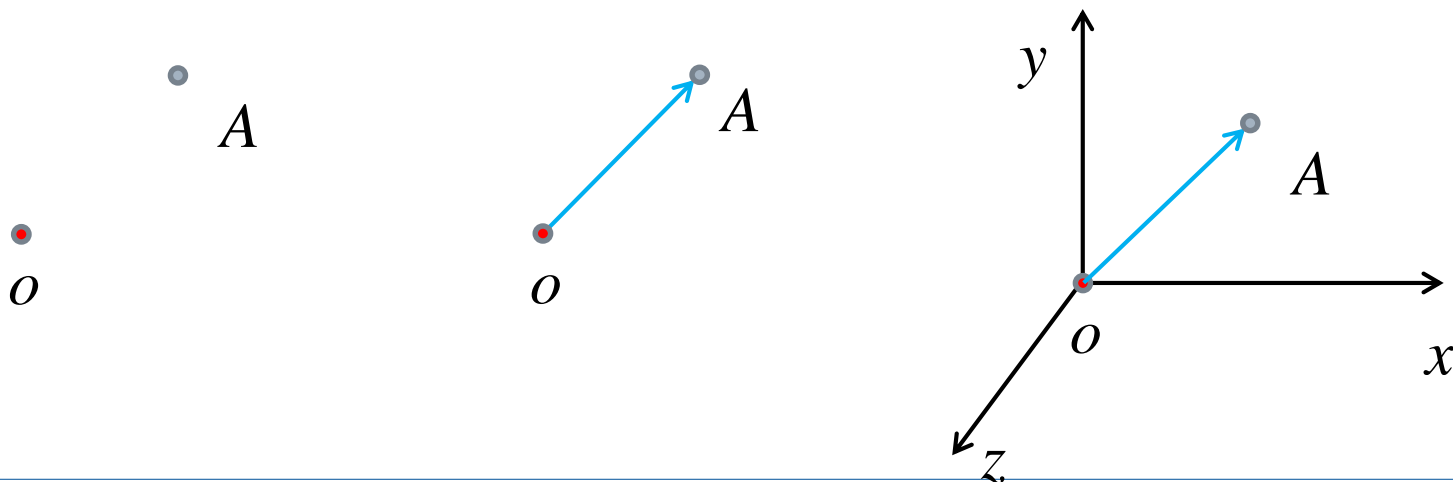
1.1 线性空间

第一章 线性空间引论——线性空间

线性空间所涵盖的范围，远超大家的想象
从向量空间到线性空间（回顾）

以三维空间为例：

- 空间的任一点与向量一一对应关系；
- 空间的任一点与三元有序数组一一对应.



第一章 线性空间引论——线性空间

定义1.1.1 (n 维向量) 若 n 维向量写成

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

的形式, 称为 n 维**列向量**; 若 n 维向量写成

$$[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$$

的形式, 称为 n 维**行向量**. 这 n 个数称为该向量的 n 个**分量**, 其中 α_i 称为第 i 个分量.

第一章 线性空间引论——线性空间

设 $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$ 和 $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]^T$, $k \in \mathbb{R}$, 则有加法和数乘运算

$$\alpha + \beta = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix}, k\alpha = \begin{bmatrix} k\alpha_1 \\ k\alpha_2 \\ \vdots \\ k\alpha_n \end{bmatrix}$$

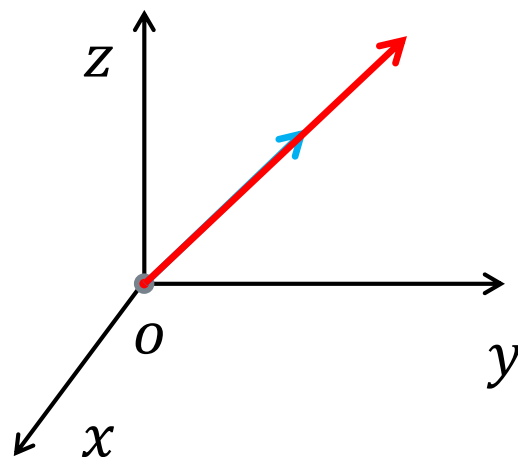
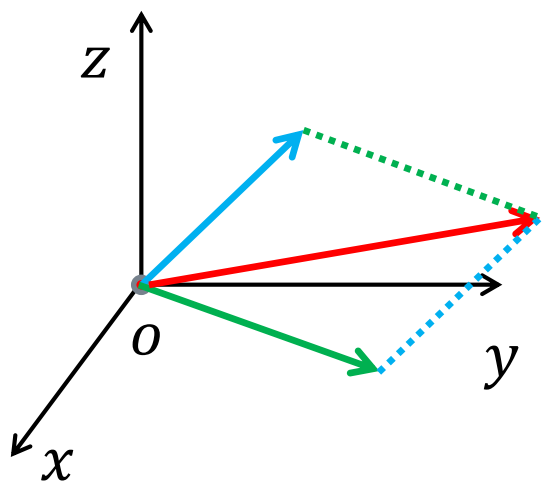


第一章 线性空间引论——线性空间

设 $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$, $\beta = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$, $k \in \mathbb{R}$,
则有加法运算和数乘运算

$$\alpha + \beta = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix},$$

$$k\alpha = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{bmatrix}$$



第一章 线性空间引论——线性空间

设 $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$ 和 $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]^T$, $k \in \mathbb{R}$, 则有**加法运算**和**数乘运算**

$$\alpha + \beta = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix}, k\alpha = \begin{bmatrix} k\alpha_1 \\ k\alpha_2 \\ \vdots \\ k\alpha_n \end{bmatrix}$$

定义1.1.2（向量空间） 设 V 是 n 维实向量的**非空集合**, 若 V 对向量的加法和数乘两种运算都封闭, 即对于任意向量 $\alpha, \beta \in V$ 和 $k \in \mathbb{R}$, 都有 $\alpha + \beta \in V$ 和 $k\alpha \in V$ 则称集合 V 为向量空间.



第一章 线性空间引论——线性空间

例1.1.1 定义集合 $V_1 = \{[0, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]^T \mid \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$

第一章 线性空间引论——线性空间

例1.1.1 定义集合 $V_1 = \{[0, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]^T \mid \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$, 对集合 V_1 中的任意向量 $\alpha = [0, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]^T$ 和 $\beta = [0, \beta_2, \cdots, \beta_n]^T$, 以及任意 $k \in \mathbb{R}$, 有

$$\alpha + \beta = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix} \in V_1, k\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ k\alpha_2 \\ \vdots \\ k\alpha_n \end{bmatrix} \in V_1$$

所以 V_1 对向量的加法和数乘运算封闭. 由向量空间定义知, V_1 是向量空间.

第一章 线性空间引论——线性空间

例1.1.2 集合 $V_2 = \{[1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]^T \mid \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$, 对集合 V_2 中的任意向量 $\alpha = [1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]^T$ 和 $\beta = [1, \beta_2, \cdots, \beta_n]^T$, 以及任意 $k \in \mathbb{R}$, 有

$$\alpha + \beta = \begin{bmatrix} 2 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix} \notin V_2, k\alpha = \begin{bmatrix} k \\ k\alpha_2 \\ \vdots \\ k\alpha_n \end{bmatrix} \notin V_2$$

所以集合 V_2 对向量的加法和数乘运算不封闭. 由向量空间定义知, V_2 不是向量空间.

第一章 线性空间引论——线性空间

从向量空间到线性空间

向量空间中的实数域扩展为一般的数域

向量集合扩展为一般的非空集合

向量加法和数乘扩展为一般的“加法”和“数乘”



第一章 线性空间引论——线性空间

定义1.1.3（数域） 设 F 是非空数集, 若 F 中任意两个数的和、差、积、商（除数不为0）仍在该数集, 即对四则运算封闭, 称该数集 F 为一个数域.

例如: 实数集: \mathbb{R} 、复数集: \mathbb{C} 、有理数集 \mathbb{Q} ;

自然数集 \mathbb{N} 、整数集 \mathbb{Z} .

思考1: 一个数域一定包含 0 和 1, 有理数集是最小的数域

思考2: 无理数集不构成数域

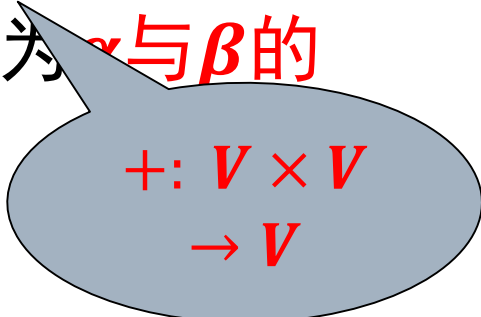
第一章 线性空间引论——线性空间

定义1.1.3（数域） 设 F 是非空数集, 若 F 中包含 0 和 1, 并且任意两个数的和、差、积、商（除数不为0）仍在该数集, 即对四则运算封闭, 称该数集 F 为一个数域.

思考3: 集合 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ 是数域?

第一章 线性空间引论——线性空间

定义1.1.4(加群) 在**非空集合** V 上定义一种代数运算, 称之为**加法**(记为“ $+$ ”), 使得 $\forall \alpha, \beta \in V$ 都有 V 中唯一元素 $\alpha + \beta$ 与之对应, 该元素称为 **α 与 β 的和**, 且满足如下性质:

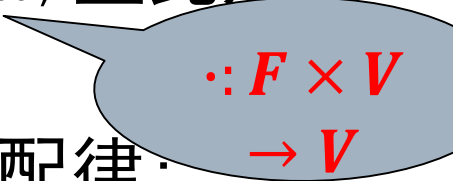

$$+: V \times V \rightarrow V$$

- (1) 交换律: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
 - (2) 结合律: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
 - (3) 存在零元素 $\theta \in V$ 使得 $\forall \alpha \in V, \alpha + \theta = \alpha$;
 - (4) $\forall \alpha \in V$, 存在负元素 $-\alpha$ 使得 $\alpha + (-\alpha) = \theta$;
- 称 V 在加法运算下构成一个**加群**, 记为 $(V, +)$.



第一章 线性空间引论——线性空间

定义1.1.5（线性空间） 设 $(V, +)$ 是一个加群, F 是一个数域. 若有 F 对 V 的**数乘**规则, 使得 $\forall \lambda \in F, u \in V$, 有 V 中**唯一元素与之对应**, 记为 $\lambda \cdot u$, 且此规则满足以下性质:


$$\because F \times V \rightarrow V$$

- (1) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$, 数乘对加法分配律;
- (2) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$, 数乘对数的加法分配律;
- (3) $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$, 数乘的结合律;
- (4) $1 \cdot u = u$; 数乘的初始条件;

此时, V 称为数域 F 上的**线性空间**, V 中元素称为**向量**, F 中元素称为**标量**.

第一章 线性空间引论——线性空间

当 $F = \mathbb{R}$ 时, 称为**实线性空间**; 当 $F = \mathbb{C}$ 时, 称为**复线性空间**.

先证明加法与数乘封闭, 再证明加群与线性空间的八条性质

例1.1.3 设 $V = \mathbb{R}^+$, $F = \mathbb{R}$, 定义 V 中加法运算为

$$x \oplus y = xy$$

定义 V 中元素与 F 中数的数乘为

$$k \cdot x = x^k$$

突破传统“线性”的印象

其中, $x, y \in V$, $k \in F$. 证明 (V, \oplus, \cdot) 是实线性空间.

若 $V = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$, $x \oplus y = xy$, $k \cdot x = |x|^k$,

(V, \oplus, \cdot) 是否实线性空间

第一章 线性空间引论——线性空间

例1.1.4 常见的线性空间包括以下例子.

- (1) **向量空间** $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ 是线性空间的首个例子.
- (2) **矩阵空间**: 设 V 为 \mathbb{C} 上所有 $m \times n$ 矩阵构成的集合, 即 $V = \{(a_{ij})_{m \times n} | a_{ij} \in \mathbb{C}\}$. 在矩阵加法和数乘运算下, 集合 V 构成 \mathbb{C} 上的线性空间, 记为 $\mathbb{C}^{m \times n}$. 类似的可定义 $\mathbb{R}^{m \times n}$.

澄清一个概念: 数域 F 中的数, 与构成 V 中元素的“数”, 不是必然一致的。

第一章 线性空间引论——线性空间

例1.1.4 常见的线性空间包括以下例子.

(3) 正弦函数集合 (提示: 三角函数和差公式)

$$S_{[x]} = \{a \sin(x + b), a, b \in \mathbb{R}\}$$

在函数加法和乘法运算下 $S_{[x]}$ 构成 \mathbb{R} 上的线性空间.

留作作业



第一章 线性空间引论——线性空间

例1.1.4 常见的线性空间包括以下例子.

(4) 一元多项式集合

$$P_n(x) = \{\sum_{i=0}^n a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{C}\}$$

集合 $P_n(x)$ 构成 \mathbb{C} 上的线性空间, 称为**多项式空间**.

(5) 分别定义在区间 $[a, b]$ 上**全体多项式集合** S_1 , **全体可微函数集合** S_2 , **全体连续函数集合** S_3 , **全体可积函数集合** S_4 , **全体实函数集合** S_5 , 则

$$S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset S_4 \subset S_5$$

且这五个集合均为 \mathbb{R} 上的线性空间.

例1.1.4 常见的线性空间包括以下例子.

(6) 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, 齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解集构成 \mathbb{C} 上的线性空间, 而非齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解集则不构成 \mathbb{C} 上的线性空间.

(7) 设 S 是所有双边序列集合, 其中双边序列

$$\{x_k | x_k \in \mathbb{R}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

若序列 $\{y_k\}$ 是集合 S 中的元素, 定义 $\{x_k\}$ 与 $\{y_k\}$ 的和为 $\{x_k + y_k\}$, 数乘 $c\{x_k\}$ 为 $\{cx_k\}$, 则 S 是 \mathbb{R} 上的线性空间, 我们称为离散时间信号空间.

第一章 线性空间引论——线性空间

注4: 设 V 是数域 F 上的线性空间, 有

- (1) 零向量是唯一的;
- (2) 任一向量的负向量是唯一的;
- (3) 对任意 $k \in F$ 和 $\alpha \in V$,

$$0\alpha = \theta, (-1)\alpha = -\alpha, k\theta = \theta;$$

- (4) 若 $k\alpha = \theta$, 则 $k = 0$ 或 $\alpha = \theta$.

留作作业

第一章 线性空间引论——线性空间

注5: 线性空间中的两种运算——加法和数乘——合称为**线性运算**.

线性组合和线性表示: 若线性空间 V 中的向量 α 可由 V 中一组向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 通过线性运算获得, 即存在 $k_i \in F, i = 1, \dots, n$ 满足

$$\alpha = k_1 \alpha_1 + \dots + k_n \alpha_n,$$

则称向量 α 是向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 的一个**线性组合**, 或者说 α 可由向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ **线性表示**.

注: n 是有限的

第一章 线性空间引论——线性空间

例1.1.5 试判断矩阵 A^2 是否可以由 A 和 I 线性表示，
其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



第一章 线性空间引论——线性空间

例1.1.5 试判断矩阵 A^2 是否可以由 A 和 I 线性表示, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解: 由于

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2A - I$$

因此, 矩阵 A^2 可以由 A 和 I 线性表示.

思考: 对于一般的 n 阶复方阵 A , A^n 是否可以写成 $I(A^0), A^2, \dots, A^{n-1}$ 的线性组合呢?

第一章 线性空间引论

线 性 子 空 间



第一章 线性空间引论——线性子空间

定义1.2.1(子空间) 设 V 是 F 上的线性空间, W 是 V 的非空子集. 若 W 的向量关于 V 的加法和数乘运算也构成 F 上的线性空间, 则称 W 是 V 的**子空间**.

例1.2.1 取定矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 定义集合

$$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$$



第一章 线性空间引论——线性子空间

定义1.2.1(子空间) 设 V 是 F 上的线性空间, W 是 V 的**非空子集**. 若 W 的向量关于 V 的加法和数乘运算也构成 F 上的线性空间, 则称 W 是 V 的**子空间**.

例1.2.1 取定矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 定义集合

$$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$$

则集合 W 是 \mathbb{C} 上的线性空间.

又知 W 是向量空间 \mathbb{C}^n 的子集, 故 W 是 \mathbb{C}^n 的子空间.

第一章 线性空间引论——线性子空间

例1.2.2 在线性空间 V 中, 仅包含单个零向量的集合是线性空间吗?



第一章 线性空间引论——线性子空间

例1.2.2 在线性空间 V 中, 仅包含单个零向量的集合是线性空间吗?

该集合是线性空间, 我们称之为**零子空间**, 记为 $\{\theta\}$ (注意与零元素 θ 的区别) .

空间 V 本身也是 V 的一个子空间. 子空间 V 和 $\{\theta\}$ 称为 V 的**平凡子空间**.

$\{\theta\}$ 为元素最少的空间

第一章 线性空间引论——线性子空间

例1.2.3 向量空间 \mathbb{R}^2 是 \mathbb{R}^3 的子空间吗？

因为 \mathbb{R}^3 中的向量是3元有序数组, 而 \mathbb{R}^2 中的向量为2元有序数组, 故 \mathbb{R}^2 不是 \mathbb{R}^3 的子集.



第一章 线性空间引论——线性子空间

例1.2.3 向量空间 \mathbb{R}^2 是 \mathbb{R}^3 的子空间吗？

因为 \mathbb{R}^3 中的向量是3元有序数组，而 \mathbb{R}^2 中的向量为2元有序数组，故 \mathbb{R}^2 不是 \mathbb{R}^3 的子集。

例1.2.4 注意集合 $W = \{[\alpha_1, \alpha_2, 0]^T, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$ 是 \mathbb{R}^3 的一个子集，尽管它很像 \mathbb{R}^2 ，但 W 是 \mathbb{R}^3 的一个子空间。

思考： $W' = \{[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^T, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \text{ 且 } \alpha_3 \neq 0\}$ 是 \mathbb{R}^3 的子空间吗？

回答： W' 不是线性空间。



第一章 线性空间引论——线性子空间

例1.2.2 线性空间 V 的仅由零向量组成的集合是 V 的一个子空间, 称为**零子空间**, 记为 $\{\theta\}$ (注意与零元素 θ 的区别); 线性空间 V 本身也是 V 的一个子空间. 子空间 V 和 $\{\theta\}$ 称为 V 的**平凡子空间**.

思考: 子空间一定包含零元素. $\{\theta\}$ 是最小的子空间. 区分零子空间和空集、平凡子集与平凡子空间.

例1.2.3 向量空间 \mathbb{R}^2 是 \mathbb{R}^3 的子空间吗?

例1.2.4 \mathbb{R}^3 中不通过原点的平面是 \mathbb{R}^3 的子空间吗?

第一章 线性空间引论——线性子空间

定理1.2.1（子空间判别法） 设 V 是 F 上的线性空间,
 W 是 V 的一个非空子集. 以下命题等价:

(1) W 是 V 的子空间.

(2) a $\forall k \in F, \alpha \in W$, 有 $k\alpha \in W$;

b $\forall \alpha, \beta \in W$, 有 $\alpha + \beta \in W$.

(3) $\forall k, l \in F$ 和 $\alpha, \beta \in W$, 有 $k\alpha + l\beta \in W$.

注1: 检验子空间首先观察零向量是否存在于 W 中.

注2: 子空间是凸集

第一章 线性空间引论——线性子空间

定理1.2.1（子空间判别法） 设 V 是 F 上的线性空间, W 是 V 的一个非空子集. 以下命题等价:

- (1) W 是 V 的子空间.
- (2) a $\forall k \in F, \alpha \in W$, 有 $k\alpha \in W$;
b $\forall \alpha, \beta \in W$, 有 $\alpha + \beta \in W$.

证明: W 是 V 的一个非空子集, 则 W 中的加法和数乘满足加法的交换律、结合律, 数乘的结合律、数乘对加法的分配率、数乘对数的加法的分配率以及数乘的初始条件.

W 存在零元和负元.

第一章 线性空间引论——线性子空间

例1.2.5 线性滤波器常用 n 阶线性差分方程描述. 考查齐次线性差分方程

$$u_{k+n} + a_{n-1}u_{k+n-1} + \cdots + a_1u_{k+1} + a_0u_k = 0$$

解集非空

该差分方程的解集 \tilde{S} 是线性空间吗?

\tilde{S} 信号空间 S 的子空间.



第一章 线性空间引论——线性子空间

例1.2.6 设 W_1 和 W_2 是 V 的子空间, 定义三个集合

$$W_1 \cap W_2 = \{x \in V | x \in W_1 \text{ 且 } x \in W_2\}$$

$$W_1 \cup W_2 = \{x \in V | x \in W_1 \text{ 或 } x \in W_2\}$$

$$W_1 + W_2 = \{x_1 + x_2 | x_1 \in W_1, x_2 \in W_2\}$$

试判断它们是否是 V 的子空间.

所有能表示为 x_1 与 x_2 的向量集合, 因此为整个 R^3 空间



第一章 线性空间引论——线性子空间

在 \mathbb{R}^3 空间中,

(1) $W_1 = xoy$ 平面, $W_2 = yoz$ 平面;

(2) $W_1 = x$ 轴, $W_2 = yoz$ 平面

考察集合 $W_1 \cap W_2$, $W_1 + W_2$, $W_1 \cup W_2$.

第一章 线性空间引论——线性子空间

定理1.2.2（和空间与交空间） 设 W_1 和 W_2 是数域 F 上线性空间 V 的子空间, 则集合

$$W_1 \cap W_2 \triangleq \{\alpha \mid \alpha \in W_1, \alpha \in W_2\}$$

$$W_1 + W_2 \triangleq \{\alpha_1 + \alpha_2 \mid \alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2\}$$

是 V 的子空间, 分别称为 W_1 与 W_2 的**交（或交空间）**与**和（或和空间）**.

证明: 显然两个集合非空.

第一章 线性空间引论——线性子空间

例1.2.7 取 $V = \mathbb{R}^{n \times n}$, 定义

$$W_1 = \{A \in V \mid A^T = A\}$$

$$W_2 = \{A \in V \mid A^T = -A\}$$

验证 W_1 和 W_2 是 V 的线性子空间, 且 $V = W_1 + W_2$.

证明:

$$2^*A = (A^T + A) + (-A^T + A)$$

$$V \supset W_1 + W_2; \quad V \subset W_1 + W_2$$



第一章 线性空间引论——线性空间

注4: 设 V 是数域 F 上的线性空间, 有

(4) 若 $k\alpha = \theta$, 则 $k = 0$ 或 $\alpha = \theta$.

W 为 V 的子空间, 则 W 中元素要么1个, 要么无穷多个!

$$W = \{x \in \mathbb{C}^n | Ax = 0\}$$

第一章 线性空间引论——线性子空间

子空间的表示方法:

设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是 F 上线性空间 V 的一向量组, 记

$$W = \{k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n \mid k_i \in F, i = 1, \dots, n\}$$

定理1.2.3 若 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是线性空间 V 的一组向量, 由上式定义的集合 W 是 V 的一个线性子空间, 并称 W 是由向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 张成 (或生成) 的子空间, 记为 $\text{span}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

上述方法解决了抽象空间中子集的描述.

第一章 线性空间引论——线性子空间

定义1.2.2（矩阵零空间） 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则矩阵 A 的 **零空间（或核空间）** 定义为齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解集, 记为

$$N(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

定义1.2.3（矩阵列空间） 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则矩阵 A 的 **列空间（或值空间）** 是由 A 的列的所有线性组合组成的集合, 即

$$R(A) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m \mid \mathbf{y} = A\mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n\}$$

若记 $A = [\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n]$, 则 $R(A) = \text{span}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$

第一章 线性空间引论——线性子空间

例1.2.8 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ 的零空间和列空间.



第一章 线性空间引论——线性子空间

例1.2.8 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ 的零空间和列空间.

解: $R(A) = \text{span}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 其中 $\alpha_1 = [1, -2]^T$, $\alpha_2 = [1, 3]^T$, $\alpha_3 = [2, 1]^T$.

对矩阵 A 进行初等变换得

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

由此, $Ax = 0$ 的一个基础解系为 $\beta = [1, 1, -1]^T$,
故 $N(A) = \text{span}(\beta)$.

第一章 线性空间引论——线性子空间

思考1: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 其零空间和列空间有可能相等吗? 若相同, 矩阵 A 满足什么性质

留作作业

思考2: $R(A) = \text{span}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 还可以再化简吗?