群聊：23 矩阵

该二维码7天内(9月12日前)有效，重新进入将更新

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

矩 阵 理 论

刘克新

自动化科学与电气工程学院

邮箱：skxliu@163.com

教材与参考书

参考教材:

《矩阵基本理论与应用》王磊编著　北京航天航天大学出版社

参考书:

《矩阵论教程》张绍飞、赵迪编著　机械工业出版社

《矩阵论》　戴华编著　科学出版社

经典教材: Matrix Analysis 2nd Edition, R.A. Horn, C.R. Johnson, Cambridge University Press, 2013.

扩展教材: 矩阵分析与应用（第二版）张贤达编著, 清华大学出版社，2013.

考试成绩

MOOC+课堂随机测试　15%

要求:1. 研究生智慧教育平台，选课;

2. 视频+每章习题;

3. 请大家积极反馈视频、习题、课本中的错误

矩阵论在XX中的应用/介绍报告1篇　15%

要求:1. 中文，可理论分析、数值计算、或算法等;

2. 字数不超过800字或不超过2页A4纸;

3. 格式可参考科技论文;

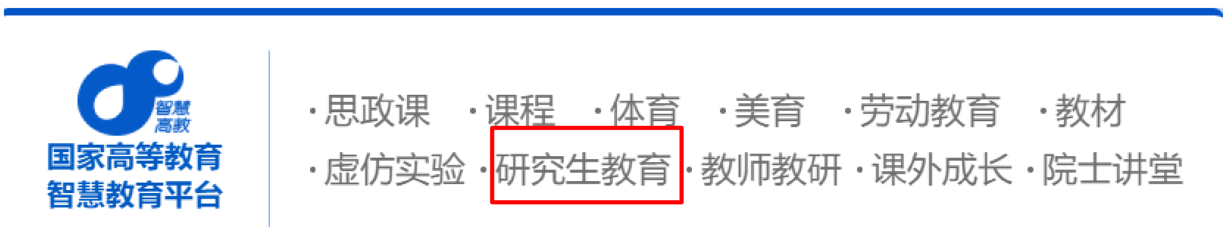
注意:1. 期末考试前提交纸质版和电子版;

2. 抄袭和雷同者0分。

期末考试　70%

研究生智慧教育平台

1



2

https://www.gradsmartedu.cn/


研究生教育
首页
矩阵理论
课程筛选
搜索到 9 门 “矩阵理论”相关课程
上课状态
全部
即将开课
开课中
已结课
学科门类
矩阵理论
矩阵理论
王磊 刘克新 等
北京航空航天大学
248 人
通过学习本课程，理解并掌握数学与自然科学的基本概念和方法，加深对数学与理论创新、工程实际需求紧密结合的认识，提高工科学生利用数学工具解决科学与工程问题的能力。


研究生教育
首页
搜索学科/高校名称
矩阵理论
北京航空航天大学
2023秋
开课时间：2023-07-27 至2024-01-23
248人已报名
去学习
课程介绍
矩阵理论

其 它

1，讲课本上有的，也会适当讲一些课本上没有的

2，答疑，可反馈给课代表，也可反馈到群里

3，上课口误，大家随时纠正

4，正确看待“显然”、“易得”等

第一章 线性空间引论

- 线性空间
- 线性子空间
- 基与坐标
- 内积空间
- 直和与投影
- 应用：多项式插值

第一章 线性空间引论

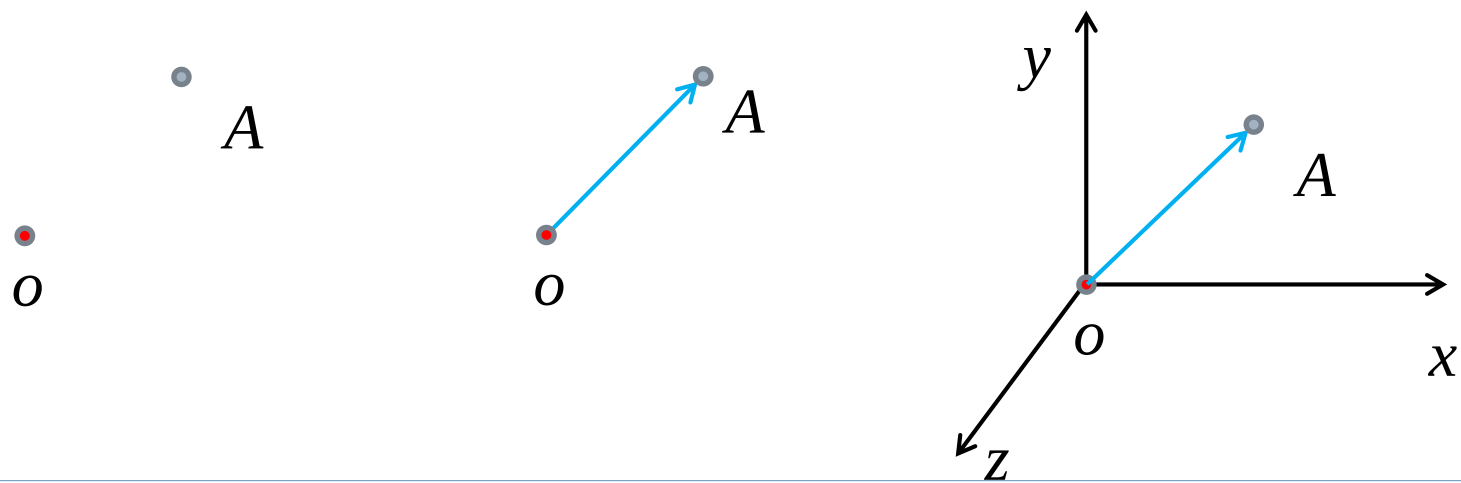
1.1 线 性 空 间

线性空间所涵盖的范围，远超大家的想象

从向量空间到线性空间（回顾）

以三维空间为例：

- 空间的任一点与向量一一对应关系；
- 空间的任一点与三元有序数组一一对应.



定义1.1.1（n维向量）若n维向量写成

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

的形式, 称为n维列向量; 若n维向量写成

$$[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$$

的形式, 称为n维行向量. 这n个数称为该向量的n个分量, 其中α_i称为第i个分量.

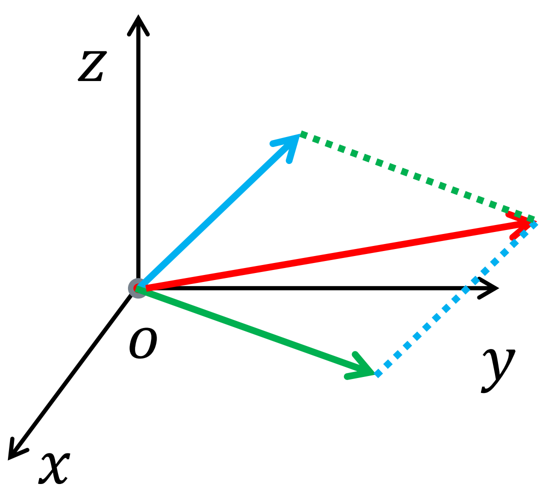
设$\boldsymbol{\alpha}=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^T$和$\boldsymbol{\beta}=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]^T$, $k\in\mathbb{R}$, 则有加法运算和数乘运算

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}\alpha_1+\beta_1\\\alpha_2+\beta_2\\\vdots\\\alpha_n+\beta_n\end{bmatrix}, k\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}k\alpha_1\\k\alpha_2\\\vdots\\k\alpha_n\end{bmatrix}$$

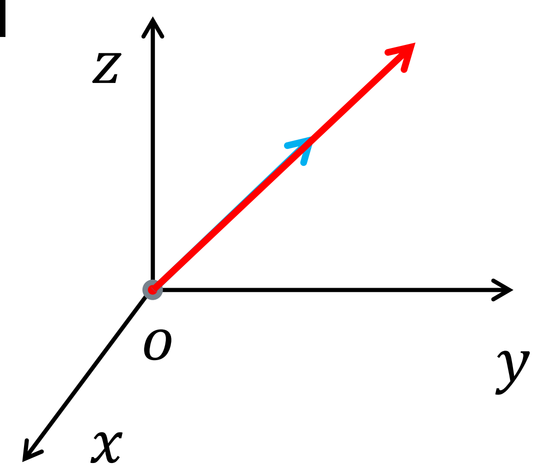
设$\boldsymbol{\alpha} = [a_1, a_2, \cdots, a_n]^T$, $\boldsymbol{\beta} = [b_1, b_2, \cdots, b_n]^T$, $k \in \mathbb{R}$,

则有加法运算和数乘运算

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix},$$



$$k\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{bmatrix}$$



设$\boldsymbol{\alpha}=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^T$和$\boldsymbol{\beta}=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]^T$, $k\in\mathbb{R}$, 则有加法运算和数乘运算

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \alpha_2+\beta_2\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{bmatrix}, k\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}k\alpha_1\\ k\alpha_2\\ \vdots\\ k\alpha_n\end{bmatrix}$$

定义1.1.2（向量空间）设V是n维实向量的非空集合, 若V对向量的加法和数乘两种运算都封闭, 即对于任意向量$\alpha,\beta\in V$和$k\in\mathbb{R}$, 都有$\alpha+\beta\in V$和$k\alpha\in V$则称集合V为向量空间.

例1.1.1 定义集合$V_1 = \{[0, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]^T | \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$

例1.1.1 定义集合$V_1=\{[0,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^T|\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{R}\}$, 对集合$V_1$中的任意向量$\boldsymbol{\alpha}=[0,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^T$和$\boldsymbol{\beta}=[0,\beta_2,\cdots,\beta_n]^T$, 以及任意$k\in\mathbb{R}$, 有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}0\\\alpha_2+\beta_2\\\vdots\\\alpha_n+\beta_n\end{bmatrix}\in V_1, k\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}0\\k\alpha_2\\\vdots\\k\alpha_n\end{bmatrix}\in V_1$$

所以V_1对向量的加法和数乘运算封闭. 由向量空间定义知, V_1是向量空间.

例1.1.2 集合$V_2=\{[1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^T|\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{R}\}$, 对集合$V_2$中的任意向量$\boldsymbol{\alpha}=[1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^T$和$\boldsymbol{\beta}=[1,\beta_2,\cdots,\beta_n]^T$, 以及任意$k\in\mathbb{R}$, 有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}2\\ \alpha_2+\beta_2\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{bmatrix}\notin V_2, k\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}k\\ k\alpha_2\\ \vdots\\ k\alpha_n\end{bmatrix}\notin V_2$$

所以集合V_2对向量的加法和数乘运算不封闭. 由向量空间定义知, V_2不是向量空间.

从向量空间到线性空间

向量空间中的实数域扩展为一般的数域

向量集合扩展为一般的非空集合

向量加法和数乘扩展为一般的“加法”和“数乘”

定义1.1.3（数域） 设F是非空数集, 若F中任意两个数的和、差、积、商（除数不为0）仍在该数集, 即对四则运算封闭, 称该数集F为一个数域.

例如: 实数集:$\mathbb{R}$、复数集:$\mathbb{C}$、有理数集$\mathbb{Q}$;

自然数集$\mathbb{N}$、整数集$\mathbb{Z}$.

思考1：一个数域一定包含 0 和 1，有理数集是最小的数域

思考2：无理数集不构成数域

定义1.1.3（数域）设F是非空数集，若F中包含 0 和 1，并且任意两个数的和、差、积、商（除数不为0）仍在该数集，即对四则运算封闭，称该数集F为一个数域.

思考3:集合$\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)=\{a+b\sqrt{2}|a,b\in\mathbb{Q}\}$是数域？

定义1.1.4(加群) 在**非空集合**V上定义一种代数运算, 称之为**加法**(记为“$+$”), 使得$\forall \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$都有$V$中唯一元素$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$与之对应, 该元素称为$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的**和**, 且满足如下性质:

$+: \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$

（1）交换律: $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

（2）结合律: $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

（3）存在零元素$\boldsymbol{\theta}\in V$使得$\forall \boldsymbol{\alpha}\in V, \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\alpha}$;

（4）$\forall \boldsymbol{\alpha}\in V$, 存在负元素$-\boldsymbol{\alpha}$使得$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\theta}$;

称V在加法运算下构成一个**加群**, 记为$(V,+)$.

定义1.1.5（线性空间） 设$(V,+)$是一个加群, F是一个数域. 若有F对V的数乘规则, 使得$\forall\lambda\in F$, $\boldsymbol{u}\in V$, 有V中唯一元素与之对应, 记为$\lambda\cdot\boldsymbol{u}$, 且此规则满足以下性质:

$\because \boldsymbol{F}\times\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$

（1）$\lambda(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\lambda\boldsymbol{u}+\lambda\boldsymbol{v}$, 数乘对加法分配律;

（2）$(\lambda+\mu)\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}+\mu\boldsymbol{u}$, 数乘对数的加法分配律;

（3）$\lambda(\mu\boldsymbol{u})=(\lambda\mu)\boldsymbol{u}$, 数乘的结合律;

（4）$1\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$; 数乘的初始条件;

此时, V称为数域F上的线性空间, V中元素称为向量, F中元素称为标量.

当$F=\mathbb{R}$时，称为**实线性空间**；当$F=\mathbb{C}$时，称为**复线性空间**.

先证明加法与数乘封闭，再证明加群与线性空间的八条性质

例1.1.3 设$V=\mathbb{R}^+$, $F=\mathbb{R}$, 定义V中加法运算为

$$x \oplus y = xy$$

定义V中元素与F中数的数乘为

$$k \cdot x = x^k$$

突破传统“线性”的印象

其中, $x, y \in V$, $k \in F$. 证明$(V,\oplus,\cdot)$是实线性空间.

若$V=\mathbb{R}$, $F=\mathbb{R}$, $x \oplus y = xy$, $k \cdot x = |x|^k$,

$(V,\oplus,\cdot)$是否实线性空间

例1.1.4 常见的线性空间包括以下例子.

（1）向量空间$\mathbb{R}^n(n \geq 1)$是线性空间的首个例子.

（2）矩阵空间: 设V为$\mathbb{C}$上所有$m \times n$矩阵构成的集合, 即$V = \{(a_{ij})_{m \times n} | a_{ij} \in \mathbb{C}\}$. 在矩阵加法和数乘运算下, 集合$V$构成$\mathbb{C}$上的线性空间, 记为$\mathbb{C}^{m \times n}$. 类似的可定义$\mathbb{R}^{m \times n}$.

澄清一个概念：数域F中的数，与构成V中元素的"数"，不是必然一致的。

例1.1.4 常见的线性空间包括以下例子.

（3）正弦函数集合（提示：三角函数和差公式）

$$S_{[x]} = \{a\sin(x+b), a, b \in \mathbb{R}\}$$

在函数加法和乘法运算下 $S_{[x]}$ 构成$\mathbb{R}$上的线性空间.

留作作业

例1.1.4 常见的线性空间包括以下例子.

（4）一元多项式集合

$$P_n(x)=\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i | a_i \in \mathbb{C}\}$$

集合$P_n(x)$构成$\mathbb{C}$上的线性空间, 称为多项式空间.

（5）分别定义在区间$[a,b]$上全体多项式集合S_1, 全体可微函数集合S_2, 全体连续函数集合S_3, 全体可积函数集合S_4, 全体实函数集合S_5, 则

$$S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset S_4 \subset S_5$$

且这五个集合均为$\mathbb{R}$上的线性空间.

解集非空

例1.1.4 常见的线性空间包括以下例子.

（6）设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{n}$, 齐次线性方程组$A\boldsymbol{x} = 0$的解集构成$\mathbb{C}$上的线性空间, 而非齐次线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的解集则不构成$\mathbb{C}$上的线性空间.

（7）设S是所有双边序列集合, 其中双边序列

$$\{x_k | x_k \in \mathbb{R}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$$

若序列$\{y_k\}$是集合S中的元素, 定义$\{x_k\}$与$\{y_k\}$的和为$\{x_k + y_k\}$, 数乘$c\{x_k\}$为$\{cx_k\}$, 则S是$\mathbb{R}$上的线性空间, 我们称为离散时间信号空间.

注4: 设V是数域F上的线性空间, 有

（1）零向量是唯一的;

（2）任一向量的负向量是唯一的;

（3）对任意$k\in F$和$\boldsymbol{\alpha}\in V$,

$$0\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta},\ (-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha},\ k\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta};$$

（4）若$k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}$, 则$k=0$或$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}$.

留作作业

注5:线性空间中的两种运算—加法和数乘—合称为**线性运算**.

线性组合和线性表示: 若线性空间V中的向量$\boldsymbol{\alpha}$可由V中一组向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$通过线性运算获得, 即存在$k_i \in F$, $i = 1,\cdots,n$满足

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则称向量$\boldsymbol{\alpha}$是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$的一个**线性组合**，或者说$\boldsymbol{\alpha}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$**线性表示**.

注： n是有限的

例1.1.5 试判断矩阵A^2是否可以由A和I线性表示，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

例1.1.5 试判断矩阵A^2是否可以由A和I线性表示，其中

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$$

解: 由于

$$A^2=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}=2A-I$$

因此, 矩阵A^2可以由A和I线性表示.

思考：对于一般的n阶复方阵A, A^n是否可以写成$I(A^0),A^2,\cdots,A^{n-1}$的线性组合呢？

线 性 子 空 间

定义1.2.1(子空间) 设V是F上的线性空间, W是V的非空子集. 若W的向量关于V的加法和数乘运算也构成F上的线性空间, 则称W是V的子空间.

例1.2.1 取定矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 定义集合

$$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

定义1.2.1(子空间) 设V是F上的线性空间, W是V的非空子集. 若W的向量关于V的加法和数乘运算也构成F上的线性空间, 则称W是V的子空间.

例1.2.1 取定矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 定义集合

$$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

则集合W是$\mathbb{C}$上的线性空间.

又知W是向量空间$\mathbb{C}^n$的子集, 故W是$\mathbb{C}^n$的子空间.

例1.2.2 在线性空间V中，仅包含单个零向量的集合是线性空间吗？

例1.2.2 在线性空间V中，仅包含单个零向量的集合是线性空间吗？

该集合是线性空间，我们称之为零子空间，记为$\{\boldsymbol{\theta}\}$(注意与零元素$\boldsymbol{\theta}$的区别).

空间V本身也是V的一个子空间. 子空间V和$\{\boldsymbol{\theta}\}$称为V的平凡子空间.

$\{\boldsymbol{\theta}\}$为元素最少的空间

例1.2.3 向量空间$\mathbb{R}^2$是$\mathbb{R}^3$的子空间吗？

因为$\mathbb{R}^3$中的向量是3元有序数组，而$\mathbb{R}^2$中的向量为2元有序数组，故$\mathbb{R}^2$不是$\mathbb{R}^3$的子集.

例1.2.3 向量空间$\mathbb{R}^2$是$\mathbb{R}^3$的子空间吗？

因为$\mathbb{R}^3$中的向量是3元有序数组，而$\mathbb{R}^2$中的向量为2元有序数组，故$\mathbb{R}^2$不是$\mathbb{R}^3$的子集.

例1.2.4注意集合$W=\{[\alpha_1,\alpha_2,0]^T,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\}$是$\mathbb{R}^3$的一个子集，尽管它很像$\mathbb{R}^2$，但$W$是$\mathbb{R}^3$的一个子空间.

思考：$W'=\{[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^T,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$且$\alpha_3\neq 0\}$是$\mathbb{R}^3$的子空间吗？

回答：W'不是线性空间.

例1.2.2 线性空间V的仅由零向量组成的集合是V的一个子空间, 称为零子空间, 记为$\{\boldsymbol{\theta}\}$(注意与零元素$\boldsymbol{\theta}$的区别); 线性空间V本身也是V的一个子空间. 子空间V和$\{\boldsymbol{\theta}\}$称为V的平凡子空间.

思考： 子空间一定包含零元素. $\{\boldsymbol{\theta}\}$是最小的子空间. 区分零子空间和空集、平凡子集与平凡子空间.

例1.2.3 向量空间$\mathbb{R}^2$是$\mathbb{R}^3$的子空间吗？

例1.2.4 $\mathbb{R}^3$ 中不通过原点的平面是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间吗？

定理1.2.1（子空间判别法）设V是F上的线性空间，W是V的一个非空子集. 以下命题等价：

（1）W是V的子空间.

（2）a $\forall k \in F, \boldsymbol{\alpha} \in W$, 有$k\boldsymbol{\alpha} \in W$;

b $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in W$, 有$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in W$.

（3）$\forall k, l \in F$和$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in W$, 有$k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\beta} \in W$.

注1: 检验子空间首先观察零向量是否存在于W中.

注2：子空间是凸集

定理1.2.1（子空间判别法） 设V是F上的线性空间, W是V的一个非空子集. 以下命题等价：

（1）W是V的子空间.

（2）a $\forall k \in F, \boldsymbol{\alpha} \in W$, 有$k\boldsymbol{\alpha} \in W$;

b $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in W$, 有$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in W$.

证明：W是V的一个非空子集，则W中的加法和数乘满足加法的交换律、结合律，数乘的结合律、数乘对加法的分配率、数乘对数的加法的分配率以及数乘的初始条件.

W存在零元和负元.

例1.2.5 线性滤波器常用n阶线性差分方程描述. 考查齐次线性差分方程

$$u_{k+n}+a_{n-1}u_{k+n-1}+\cdots+a_1u_{k+1}+a_0u_k=0$$

解集非空

该差分方程的解集$\tilde{S}$是线性空间吗？

$\tilde{S}$信号空间S的子空间.

例1.2.6 设W_1和W_2是V的子空间, 定义三个集合

$$W_1 \cap W_2 = \{x \in V | x \in W_1 \text{且} x \in W_2\}$$

$$W_1 \cup W_2 = \{x \in V | x \in W_1 \text{或} x \in W_2\}$$

$$W_1 + W_2 = \{x_1 + x_2 | x_1 \in W_1, x_2 \in W_2\}$$

试判断它们是否是V的子空间.

所有能表示为x1与x2的向量集合，因此为整个R3空间

在$\mathbb{R}^3$空间中,

（1） $W_1 = xoy$平面, $W_2 = yoz$平面；

（2） $W_1 = x$轴, $W_2 = yoz$平面

考察集合$W_1 \cap W_2$, $W_1 + W_2$, $W_1 \cup W_2$.

定理1.2.2（和空间与交空间）设W_1和W_2是数域F上线性空间V的子空间, 则集合

$$W_1 \cap W_2 \triangleq \{\alpha | \alpha \in W_1, \alpha \in W_2\}$$

$$W_1 + W_2 \triangleq \{\alpha_1 + \alpha_2 | \alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2\}$$

是V的子空间, 分别称为W_1与W_2的交（或交空间）与和（或和空间）.

证明：显然两个集合非空.

例1.2.7 取$V=\mathbb{R}^{n\times n}$, 定义

$$W_1=\{A\in V|A^T=A\}$$

$$W_2=\{A\in V|A^T=-A\}$$

验证W_1和W_2是V的线性子空间, 且$V=W_1+W_2$.

证明:

2*A=(AT+A)+(-AT+A)

$V\supset W_1+W_2$; $V\subset W_1+W_2$

注4: 设V是数域F上的线性空间, 有

（4）若$k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}$, 则$k=0$或$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}$.

W为V的子空间，则W中元素要么1个，要么无穷多个！

$$W=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n|A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$$

子空间的表示方法:

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$F$上线性空间$V$的一向量组, 记

$$W=\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n|k_i\in F,i=1,\cdots,n\}$$

定理1.2.3 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是线性空间$V$的一组向量, 由上式定义的集合$W$是$V$的一个线性子空间, 并称$W$是由向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$张成（或生成）的子空间, 记为$\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$.

上述方法解决了抽象空间中子集的描述.

定义1.2.2（矩阵零空间） 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则矩阵$A$的**零空间（或核空间）**定义为齐次线性方程组$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$的解集, 记为

$$N(A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n | A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$$

定义1.2.3（矩阵列空间） 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则矩阵$A$的**列空间（或值空间）**是由$A$的列的所有线性组合组成的集合, 即

$$R(A) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^m | \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n\}$$

若记$A = [\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n]$, 则$R(A) = \mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$

例1.2.8 求矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$的零空间和列空间.

例1.2.8 求矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 1\end{bmatrix}$的零空间和列空间.

解：$R(A)=\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,-2]^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,3]^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[2,1]^T$.

对矩阵A进行初等变换得

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

由此，$A\boldsymbol{x}=0$的一个基础解系为$\boldsymbol{\beta}=[1,1,-1]^T$，

故$N(A)=\mathrm{span}(\boldsymbol{\beta})$.

思考1：$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，其零空间和列空间有可能相等吗？若相同，矩阵$A$满足什么性质

A^2=0

P26,N(A)与R（AT）在任何情况下秩的加和才等于n

留作作业

矩阵的零空间与列空间的秩加和必等于n，
但不一定构成整个空间
欧氏空间[1,-1;1,-1]，Cn空间[1,i;i,-1]

思考2： $R(A) = \text{span}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 还可以再化简吗？