北京航空航天大学
BEIHANG UNIVERSITY

矩阵理论

刘克新

自动化科学与电气工程学院

第二章 线性映射与矩阵

- □ 预备知识
- □ 线性映射
- □ 矩阵与同构基与坐标
- □ 特征值与特征向量
- □ 酉变换与酉矩阵
- □ 应用：图的矩阵表示

2.3 矩 阵 与 同 构

定义2.3.1（矩阵） 设V和W是数域F上的线性空间，$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$分别是$V$和$W$的基，且$T\in\mathcal{L}(V,W)$.

$$\begin{cases} T(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=a_{11}\boldsymbol{\eta}_1+a_{21}\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+a_{m1}\boldsymbol{\eta}_m \\ T(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=a_{12}\boldsymbol{\eta}_1+a_{22}\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+a_{m2}\boldsymbol{\eta}_m \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)=a_{1n}\boldsymbol{\eta}_1+a_{2n}\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+a_{mn}\boldsymbol{\eta}_m \end{cases}$$

$$T(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\triangleq[T(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\cdots,T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)]=[\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m]A$$

$A\in F^{m\times n}$称为T在V的基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和$W$的基$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$下的**矩阵**.

线性映射可以和矩阵A联系起来，A代表了基的映射关系

若n>m，线性无关被映射为线性相关

若$V=W$, 则有

$$T(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\triangleq[T(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\cdots,T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)]=[\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n]A$$

其中

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\in F^{n\times n}$$

矩阵A称为线性变换T在V的基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$下的**矩阵**.

例2.3.1 定义平面旋转变换$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, 满足

$$T(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\boldsymbol{x},\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$$

取定$\mathbb{R}^2$中的标准基$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$, 则有

例2.3.1 定义平面旋转变换$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, 满足

$$T(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\boldsymbol{x},\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$$

取定$\mathbb{R}^2$中的标准基$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$, 则有

$$T(\boldsymbol{e}_1)=\begin{bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{bmatrix}=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]\begin{bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{bmatrix}$$

$$T(\boldsymbol{e}_2)=\begin{bmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{bmatrix}=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]\begin{bmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{bmatrix}$$

$$T(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$$

例2.3.2 在多项式空间$P_n(x)$中, 定义微分变换

$T: P_n \to P_n$:

$$T(p(x)) = \frac{dp(x)}{dx}, \forall p(x) \in P_n(x)$$

取定$P_n(x)$的一组基$1, x, x^2, \cdots, x^n$, 则有

例2.3.2 在多项式空间$P_n(x)$中, 定义微分变换 $T: P_n \to P_n$:

$$T(p(x)) = \frac{dp(x)}{dx}, \forall p(x) \in P_n(x)$$

取定$P_n(x)$的一组基$1, x, x^2, \cdots, x^n$, 则有

$$T(x^n) = nx^{n-1} = [1, x, x^2, \cdots, x^n][0,0,\cdots,n,0]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

例2.3.3 设V是数域F上的线性空间, $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$是$V$的两组基, 定义线性变换$T: V\to V$为

$$T(\boldsymbol{x})=[\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n][x_1,\cdots,x_n]^T,\forall\boldsymbol{x}\in V$$

式中, $[x_1,\cdots,x_n]^T$是$\boldsymbol{x}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$下的坐标. 求$T$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$下的矩阵.

定理2.3.1 设V和W是数域F上的线性空间, 取定$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$分别是$V$和$W$的一组基. 任取$A=\left(a_{ij}\right)\in F^{m\times n}$, 则有且仅有一个线性映射$T\in\mathcal{L}(V,W)$使其在$V$的基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和$W$的基$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$下的矩阵恰为$A$.

$$T(x)=?$$

$$T(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m)A$$

$$x=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\alpha$$

定理2.3.1 设V和W是数域F上的线性空间，取定$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$分别是$V$和$W$的一组基. 任取$A=\left(a_{ij}\right)\in F^{m\times n}$, 则有且仅有一个线性映射$T\in\mathcal{L}(V,W)$使其在$V$的基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和$W$的基$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$下的矩阵恰为$A$.

思考: 若定义映射f为从线性映射T到其所对应的矩阵A, 则映射f具有什么性质？ $\boxed{\text{双构}}$

定义2.3.2（同构映射）设V和W是数域F上的线性空间，若存在双射$f: V \to W$满足

（1）$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$;

（2）$f(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x})$,

式中，$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$是V中任意向量，λ是数域F的任意数，则称f是V到W的**同构映射**，并称线性空间V与W**同构**.

注意，上面的公式也是线性映射的定义，因此同构映射必定是线性映射

同构的双射性也保证了双射的两个空间维数相等

定理2.3.2 设V和W是数域F上的线性空间，它们维数分别为n和m，则线性映射空间$\mathcal{L}(V,W)$和矩阵空间$F^{m\times n}$同构.

定理2.3.2 设V和W是数域F上的线性空间，它们维数分别为n和m，则线性映射空间$\mathcal{L}(V,W)$和矩阵空间$F^{m\times n}$同构.

L（V,W）与F mn之间存在一个映射
T（e1,e2···）=（n1,n2···）*A

命题2.3.1（同构映射的性质）设V和W是数域F上的线性空间, $T: V \to W$是同构映射, 则

（1）$T(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta}'$, $\boldsymbol{\theta} \in V$, $\boldsymbol{\theta}' \in W$;

（2）$T(-\boldsymbol{x}) = -T(\boldsymbol{x})$, $\forall \boldsymbol{x} \in V$;

（3）$T(\sum \alpha_i \boldsymbol{x}_i) = \sum \alpha_i T(\boldsymbol{x}_i)$, $\forall \alpha_i \in F$和$\boldsymbol{x}_i \in V$;

（4）V的向量组$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r$线性相关当且仅当其像$T(\boldsymbol{x}_1), \cdots, T(\boldsymbol{x}_r)$线性相关;

（5）若$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$是$V$的一组基, 则$T(\boldsymbol{\varepsilon}_1), \cdots, T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$是$W$的一组基 双射包括单射

$$\mathbf{dim}(\boldsymbol{V}) = \mathbf{dim}(\boldsymbol{W});$$

（6）T的逆映射$T^{-1}: W \to V$存在且是同构映射.

证明见P50，维数不相同必定不同构

定理2.3.3 线性空间同构当且仅当它们的维数相等.

推论2.3.1 任一实（复）n维线性空间均与$\mathbb{R}^n$（$\mathbb{C}^n$）同构.

利用定理2.3.3证明

推论2.3.2 设V和W是数域F上的线性空间, 它们维数分别为n和m, 则

定理2.3.2

$$\dim\big(L(V,W)\big)=\dim(F^{m\times n})=mn$$

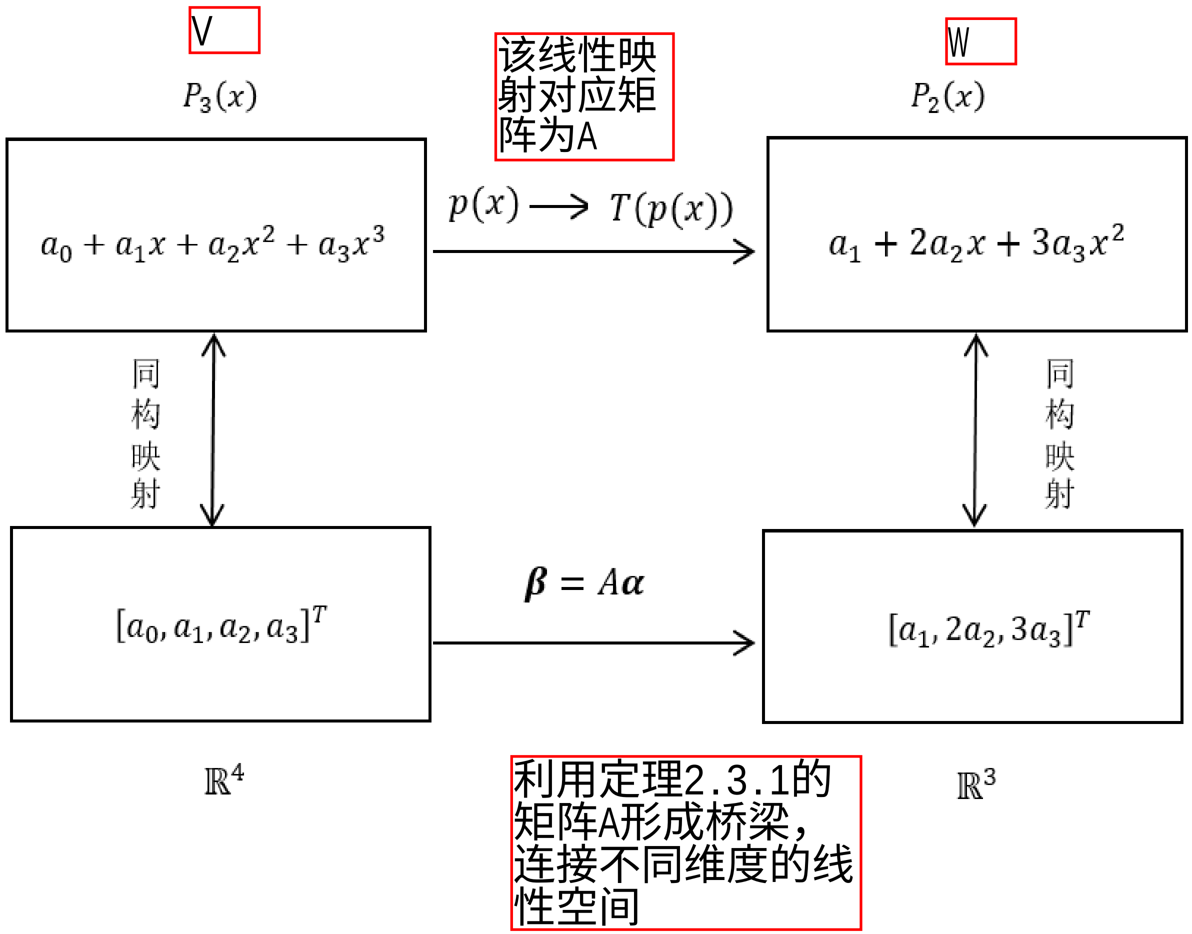
推论2.3.3 设V是数域$\mathbb{R}$（或$\mathbb{C}$）上的n维线性空间, 则线性变换空间$L(V)$与$\mathbb{R}^{n\times n}$（或$\mathbb{C}^{n\times n}$）同构.

定理2.3.4 设映射T是n维线性空间V到m维线性空间W的线性映射, T在V的基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和$W$的基$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$下的矩阵为$A$. 对任意向量$\boldsymbol{x}\in V$, 有

$$\boldsymbol{\beta}=A\boldsymbol{\alpha}$$

式中, $\boldsymbol{\beta}\in F^m$是像$T(\boldsymbol{x})$在$W$基$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$下的坐标,$\boldsymbol{\alpha}\in F^n$是原像$\boldsymbol{x}$在$V$的基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和下的坐标.

第二章 线性映射与矩阵——矩阵与同构



定理2.3.5 设V和W是数域F上的n维和m维线性空间，$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和$\boldsymbol{\varepsilon}_1',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$是$V$的两组基，由$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$到$\boldsymbol{\varepsilon}_1',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$的过渡矩阵为$Q$; $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$和$\boldsymbol{\eta}_1',\cdots,\boldsymbol{\eta}_m'$是$W$的两组基，由$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$到$\boldsymbol{\eta}_1',\cdots,\boldsymbol{\eta}_m'$的过渡矩阵为$P$; 设线性映射$T\in\mathcal{L}(V,W)$在$V$的基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和$W$的基$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$下的矩阵为$A$, T在V的基$\boldsymbol{\varepsilon}_1',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$和$W$的基$\boldsymbol{\eta}_1',\cdots,\boldsymbol{\eta}_m'$下的矩阵为$B$, 则

$$B=P^{-1}AQ$$

注1: 矩阵$A \in F^{m\times n}$经过有限次初等变换变成矩阵B, 则称**矩阵A与B相抵（或等价）**, 记为$A \cong B$. 上式表明**线性映射在不同基下的矩阵是相抵的**;

推论2.3.4 设V是数域F上的n维线性空间, $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和$\boldsymbol{\varepsilon}_1',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$是$V$的两组基, 由$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$到$\boldsymbol{\varepsilon}_1',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$的过渡矩阵为$P$, 线性变换$T \in \mathcal{L}(V)$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和基$\boldsymbol{\varepsilon}_1',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$下的矩阵分别为$A$和$B$, 则

$$B = P^{-1}AP$$

注2: **相似矩阵反映的是同一个线性变换在不同的基下的矩阵**.

定理2.3.6 设V和W是数域F上的n维和m维线性空间, 若$T \in L(V,W)$在V的基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和$W$的基$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$下的矩阵为$A$, 则

（1）$\dim N(T) = \dim N(A)$;

（2）$\dim R(T) = \dim R(A) = \operatorname{rank}(A)$;

（3）$\dim N(A) + \dim R(A) = n$.（亏加秩）

定理2.3.6 设V和W是数域F上的n维和m维线性空间, 若$T\in L(V,W)$在V的基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和$W$的基$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$下的矩阵为$A$, 则

（1）$\dim N(T)=\dim N(A)$;

证明：对于任意的$x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\varepsilon_i$,

$$T(x)=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)A\alpha$$

$T(x)=\theta$当且仅当$A\alpha=0$. 定义映射$f\colon N(T)\to N(A)$: $f(x)=\alpha$.

容易验证$f\colon N(T)\to N(A)$为同构映射.

$$\dim N(T)=\dim N(A).$$

定理2.3.6 设V和W是数域F上的n维和m维线性空间, 若$T \in L(V,W)$在V的基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和$W$的基$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$下的矩阵为$A$, 则

（2）$\dim R(T)=\dim R(A)=\operatorname{rank}(A)$;

证明：假设V的一组基$\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$,

$$R(T)=span(T(\varepsilon_1),\ldots,T(\varepsilon_n)).$$

假设$T(\varepsilon_1),\ldots,T(\varepsilon_{\mathrm{r}})$**为**$R(T)$**的一组基，易得**$A_1,\ldots,A_r$线性无关, 且$A_i$, $i=r+1,\ldots,n$, 可由$A_1,\ldots,A_r$线性表出.

例2.3.5 考查齐次线性差分方程

$$u_{k+n}+a_{n-1}u_{k+n-1}+\cdots+a_1u_{k+1}+a_0u_k=0$$

$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 求方程的解空间的维数.

例2.3.5 考查齐次线性差分方程

$$u_{k+n}+a_{n-1}u_{k+n-1}+\cdots+a_1u_{k+1}+a_0u_k=0$$

$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 求方程的解空间的维数.

$$\boldsymbol{x}_k=\begin{bmatrix}u_k\\u_{k+1}\\\vdots\\u_{k+n-1}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^n, A=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

则有

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=A\boldsymbol{x}_k,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots \qquad (2.3.4)$$

例2.3.5 考查齐次线性差分方程

$$u_{k+n} + a_{n-1}u_{k+n-1} + \cdots + a_1 u_{k+1} + a_0 u_k = 0$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. 求方程的解空间的维数.

由式（2.3.4）易验证, 当$\boldsymbol{x}_0$给定, 序列$\{u_k\}$唯一确定. 因此, 定义映射$T: \tilde{S} \to \mathbb{R}^n$满足

$$T(\{u_k\}) = \boldsymbol{x}_0$$

易证T是同构映射. 因此,$\dim\left(\tilde{S}\right) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$,即$\tilde{S}$是$S$的一个$n$维线性子空间.