第三章 矩阵分解

满 秩 分 解

定理3.2.1 （满秩分解定理）设$A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$（$r>0$），则存在列满秩矩阵$B$和行满秩矩阵$C$使得$A=BC$.

证明:第一种方法：矩阵的相抵标准型

$$A=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q=[P_1,P_2]\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}=P_1Q_1.$$

第二种方法：选择矩阵A列空间中的一组基

注1：由于列空间$R(A)$的基选取不同，矩阵A的**满秩分解也不唯一**．实际上，上述证明也提供了一种满秩分解的计算方法.

例3.2.1 求矩阵$A=\begin{bmatrix} i & 1 & 1 \\ 1 & -i & 1 \end{bmatrix}$的满秩分解.

$R(A)$的一组基$a_1=\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$, $a_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B=[a_1,a_3]$

A的列向量在这组基下的坐标分别为

$$c_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ c_2=\begin{bmatrix} -i \\ 0 \end{bmatrix}, c_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C=[c_1,c_2,c_3]$$

例3.2.1 求矩阵$A=\begin{bmatrix} i & 1 & 1 \\ 1 & -i & 1 \end{bmatrix}$的满秩分解.

注2： 在挑选列空间$R(A)$的基时，并不一定从A的列向量中选取. 比如在例3.2.1中，列满秩矩阵B也可选取为单位矩阵（单位矩阵的列向量不是矩阵A的任一列向量），则$A=I_2A$也是A的满秩分解. 之所以出现$A=IA$形式的满秩分解，原因在于矩阵A本身是行满秩矩阵. 实际上，若A是列满秩矩阵，则$A=AI$是A的满秩分解形式.

定理3.2.2 设$A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$（$r > 0$），$A = B_1C_1$和$A = B_2C_2$是矩阵$A$的两种不同满秩分解，则存在可逆矩阵$D \in \mathbb{C}^{r\times r}$使得 $B_1 = B_2D$和$C_1 = D^{-1}C_2$.

注3： 定理3.2.2表明只要找到矩阵A的一个满秩分解表达式就可以构造无数个满秩分解.

定理3.2.2 设$A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$（$r>0$），$A = B_1C_1$和$A = B_2C_2$是矩阵$A$的两种不同满秩分解，则存在可逆矩阵$D \in \mathbb{C}^{r\times r}$使得 $B_1 = B_2D$和$C_1 = D^{-1}C_2$.

证明：将矩阵B_1和B_2进行列分块，并记为

$$B_1 = [\boldsymbol{b}_{11}, \cdots, \boldsymbol{b}_{1r}],\ B_2 = [\boldsymbol{b}_{21}, \cdots, \boldsymbol{b}_{2r}]$$

由于B_1和B_2均为列满秩矩阵，则向量组$\boldsymbol{b}_{11}, \cdots, \boldsymbol{b}_{1r}$和向量组$\boldsymbol{b}_{21}, \cdots, \boldsymbol{b}_{2r}$均构成列空间$R(A)$的一组基. 根据同一空间中不同基的关系，得

$$[\boldsymbol{b}_{11}, \cdots, \boldsymbol{b}_{1r}] = [\boldsymbol{b}_{21}, \cdots, \boldsymbol{b}_{2r}]D$$

式中，D是从基$\boldsymbol{b}_{21}, \cdots, \boldsymbol{b}_{2r}$到基$\boldsymbol{b}_{11}, \cdots, \boldsymbol{b}_{1r}$的过渡矩阵.

因此，存在可逆矩阵D使得$B_1 = B_2D$. 再根据坐标与过渡矩阵的关系，易证$C_1 = D^{-1}C_2$. 证毕.

$A\in\mathbb{C}_r^{m\times n}$（$r>0$）当且仅当存在列满秩矩阵$B$和行满秩矩阵$C$使得$A=BC$.

充分性：

$$Ax=0\Leftrightarrow BCx=0$$
$$BCx=0\Leftrightarrow Cx=0$$
$$r(A)=r(C)=r$$

存在行满秩矩阵$B \in \mathbb{C}_m^{m\times n}$和列满秩矩阵$C \in \mathbb{C}_m^{n\times m}$使得$A = BC$，则$A$是满秩方阵？

不一定

若已知方阵A是满秩，且 $A = BC$， B,C应该满足什么样的性质呢？

例3.2.2 求满足等式$AB=I$或$BA=I$的矩阵B，其中，矩阵A分别为

（1） $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

（2） $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

（3） $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

定理3.2.2 （右逆和左逆）矩阵$A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$（$r>0$）有右逆（即存在矩阵$B$使得$AB=I$）的充分必要条件是$A$为行满秩矩阵；矩阵$A$有左逆（即存在矩阵$B$使得$BA=I$）的充分必要条件是$A$为列满秩矩阵.

注4：设$A \in \mathbb{C}_r^{r\times n}$，则$AA^H$是$r$阶非奇异矩阵．根据$AA^H(AA^H)^{-1}=I$，得$A^H(AA^H)^{-1}$是矩阵$A$的一个右逆．同理，当$A \in \mathbb{C}_r^{m\times r}$时，$(A^HA)^{-1}A^H$是矩阵$A$的一个左逆.

定理3.2.2 （右逆和左逆）矩阵$A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$（$r>0$）有右逆（即存在矩阵$B$使得$AB=I$）的充分必要条件是$A$为行满秩矩阵.

证明：必要性： A行不满秩, 存在非零向量x，使得$x^{\mathrm{T}}A=0$.

$$0=x^{\mathrm{T}}AB=x^{\mathrm{T}}I=x^{\mathrm{T}}.$$

秩1矩阵

$r(A) = 1$, 则$A = \xi\eta^T$, $\mathrm{tr}(A) =$?