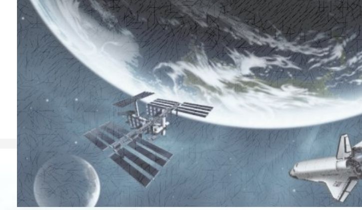


-自动化学院学科核心课-

检测技术与自动化

测量误差与数据处理（4）

本节内容：回归分析

6、最小二乘法

7、组合测量的参数最小二乘法处理

问题引出

■ 组合测量

如有若干个待求量y_1，y_2，⋯，y_m，把这些待求量用不同方式组合（或改变测量条件来获得这种不同的组合）进行测量（直接或间接），并把测量值x_1，x_2，⋯，x_n。与待求量之间的函数关系列成方程组，即

$$\begin{cases} f_1(y_1, y_2, \cdots, y_m) - x_1 = 0 \\ f_2(y_1, y_2, \cdots, y_m) - x_2 = 0 \\ \cdots\cdots \\ f_n(y_1, y_2, \cdots, y_m) - x_n = 0 \end{cases}$$

只要方程式的数量n大于待求量的个数m，可以求出各待求量的数值，这种方法叫组合测量或联立测量。

y_1，y_2，⋯，y_m如何估计？精度如何估计？

6. 最小二乘法　最小二乘与组合测量

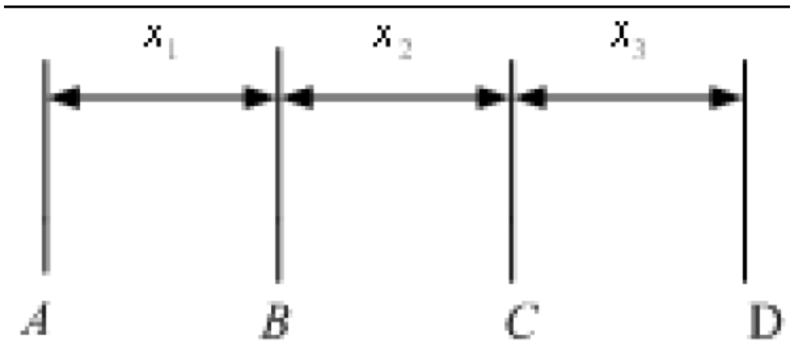
设被测量y与m个被测量x_i（$i=1,2,\cdots,m$）的相关关系可近似为

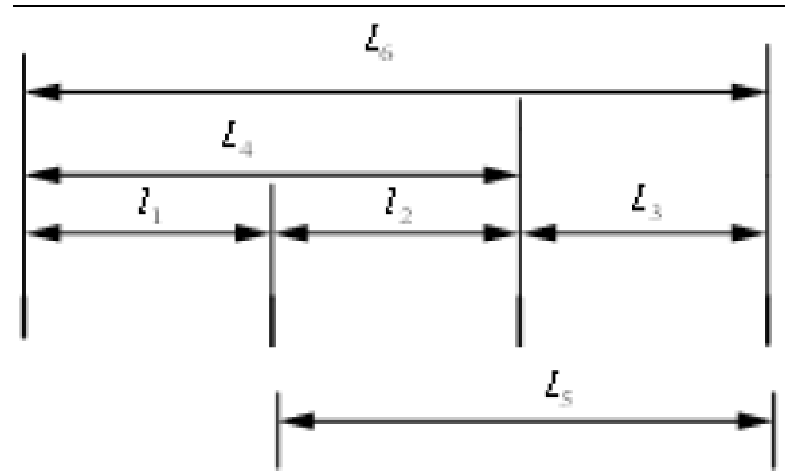
$$y=f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$$

现对y进行n次等精度测量得到n个测得值l_i（$i=1,2,\cdots,n$），其对应的估计值为$\hat{y}_i$（$i=1,2,\cdots,n$）为

$$\begin{cases}\hat{y}_1=f\left(x_{11},x_{21},\cdots,x_{m1}\right)\\ \hat{y}_2=f\left(x_{12},x_{22},\cdots,x_{m2}\right)\\ \vdots\\ \hat{y}_n=f(x_{1n},x_{2n},\cdots,x_{mn})\end{cases}$$

组合测量举例





$$l_1 = x_1$$

$$l_2 = x_2$$

$$l_3 = x_3$$

$$l_4 = x_1 + x_2$$

$$l_5 = x_2 + x_3$$

$$l_6 = x_1 + x_2 + x_3$$

对应的残差方程组为：

$$\begin{cases} v_1 = l_1 - \hat{y}_1 = l_1 - f\left(x_{11}, x_{21}, \cdots, x_{m1}\right) \\ v_2 = l_2 - \hat{y}_2 = l_2 - f\left(x_{12}, x_{22}, \cdots, x_{m2}\right) \\ \vdots \\ v_n = l_n - \hat{y}_n = l_n - f(x_{1n}, x_{2n}, \cdots, x_{mn}) \end{cases}$$

因此最小二乘法原理要求的条件转化为

$$min \sum_{i=1}^{n} v_i^2$$

考虑线性测量的情形

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m$$

则残差方程为：

$$\boldsymbol{L} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{V}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1\mathrm{n}} & x_{2\mathrm{n}} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \quad \widehat{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

等精度测量时

$$\min\sum_{i=1}^{n} v_i^2 \Rightarrow \min\left(\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V}\right) = \min\left[(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A})^T(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A})\right]$$

令 $\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A})^T(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A})$

求偏导，求极值 $\dfrac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial \boldsymbol{A}} = -2\boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$

$$\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{L}$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{L}$$

不等精度测量时

$$min\sum_{i=1}^{n}p_i v_i^2 \Rightarrow min\left(\mathbf{V}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}\mathbf{V}\right) = min\left[(\mathbf{L}-\mathbf{XA})^{\mathbf{T}}\mathbf{P}(\mathbf{L}-\mathbf{XA})\right]$$

$$\mathbf{L}-\mathbf{AX}=\mathbf{V}$$

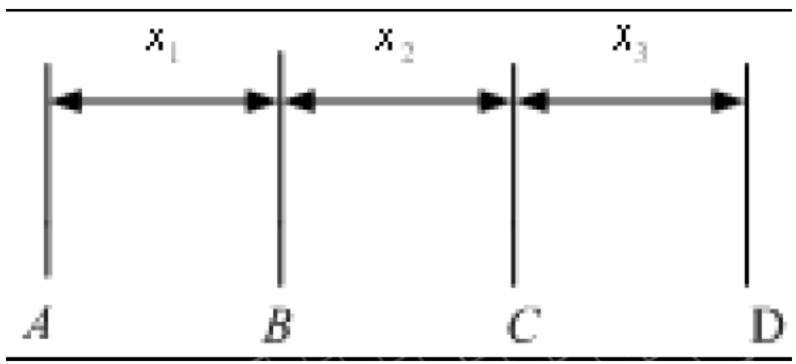
令 $S=(L-XA)^T\mathrm{P}(L-XA)$

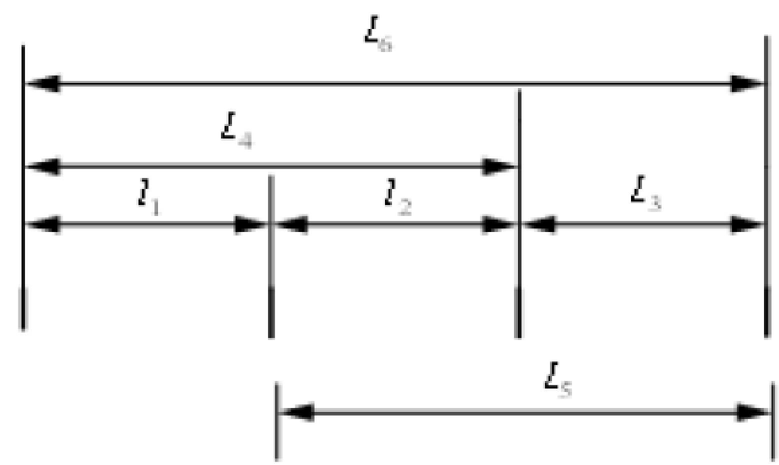
求偏导，求极值 $\dfrac{\partial S}{\partial A}=-2X^T\mathrm{P}(L-XA)=0$

$$X^TPXA=X^TPL$$

$$\Downarrow$$

$$A=\left(X^TPX\right)^{-1}X^TPL$$





$l_1 = 1.015mm$， $l_2 = 0.985mm$， $l_3 = 1.020mm$， $l_4 = 2.016mm$， $l_5 = 1.981mm$， $l_6 = 3.032mm$

$$l_1 = x_1$$
$$l_2 = x_2$$
$$l_3 = x_3$$
$$l_4 = x_1 + x_2$$
$$l_5 = x_2 + x_3$$
$$l_6 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \widehat{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1.028mm \\ x_2 &= 0.983mm \\ x_3 &= 1.013mm \end{aligned}\right\}$$

例： 某测量的误差方程和相应的标准差为：

$$\begin{cases} v_1 = 6.44 - (x_1 + x_2), & \sigma_1 = 0.06 \\ v_2 = 8.60 - (x_1 + 2x_2), & \sigma_2 = 0.06 \\ v_3 = 10.81 - (x_1 + 3x_2), & \sigma_3 = 0.08 \\ v_4 = 13.22 - (x_1 + 4x_2), & \sigma_4 = 0.08 \\ v_5 = 15.27 - (x_1 + 5x_2), & \sigma_5 = 0.08 \end{cases}$$

$$p_1 : p_2 : p_3 : p_4 : p_5 = \frac{1}{\sigma_1^2} : \frac{1}{\sigma_2^2} : \frac{1}{\sigma_3^2} : \frac{1}{\sigma_4^2} : \frac{1}{\sigma_5^2}$$

$$= \frac{1}{0.06^2} : \frac{1}{0.06^2} : \frac{1}{0.08^2} : \frac{1}{0.08^2} : \frac{1}{0.08^2} = 16 : 16 : 9 : 9 : 9$$

$$\hat{X} = \left(C^T P C\right)^{-1} C^T P L \qquad x_1 = 4.186, \qquad x_2 = 2.227$$

思考：为什么用$min\sum_{i=1}^{n} v_i^2$

问题引出

有一些不能或不易观测的量$\theta_1,\ldots,\theta_k$,另有一些容易观测的量$x_0,\ldots,x_k$,按理论（例如牛顿力学理论），它们应有严格的线性关系

$$x_0 + x_1\theta_1 + \cdots + x_k\theta_k = 0$$

则问题归结为：要根据$x_0,\ldots,x_k$的观测数据$(x_0,\ldots,x_k), i = 1,2,\ldots,n$去估计$\theta_1,\ldots,\theta_k$。由观测数据可得方程

$$x_{0i} + x_{1i}\theta_1 + \cdots + x_{ki}\theta_k = 0, i = 1,\ldots,n$$

共有n个方程。但是，由于观测有误差以及理论并非完全确切，实际

$$x_{0i} + x_{1i}\theta_1 + \cdots + x_{ki}\theta_k = \varepsilon_i,\quad i = 1,\ldots,n$$

其中，$\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$为随机误差。这里要求$n \geq k$

$$\boxed{E(\varepsilon_i) = 0 \rightarrow 含义?}$$

首次提出LSE

勒让德在他参加的一项测地学工作中，即从1792年开始持续了10余年的量测**过巴黎子午线之长的工作**（当时把1米定义为此线长的4000万分之一）中使用了LSE。这个工作所用的模型，是根据地球略微有些椭性这个事实。如图，由椭圆方程出发，**根据地球椭性甚小而略去高次项，不难证明以下近似公式：**

$$\boldsymbol{l(\varphi) = \theta_1 + \theta_2 sin^2\varphi}$$

式中，$\boldsymbol{\varphi}$为c点的纬度， $\boldsymbol{l(\varphi)}$为子午线上以c为中心1度的弧长， $\boldsymbol{\theta_1}$和$\boldsymbol{\theta_2}$为参数。
记$x_0 = -l(\varphi), x_1 = 1, x_2 = sin^2(\varphi)$,
上式： $x_0 + x_1\boldsymbol{\theta_1} + x_2\boldsymbol{\theta_2} = 0$

共在5个位置测定φ和$l(\varphi)$，然后用LSE求出θ_1和θ_2

LSE此时还是纯计算方法，有计算方便的优点

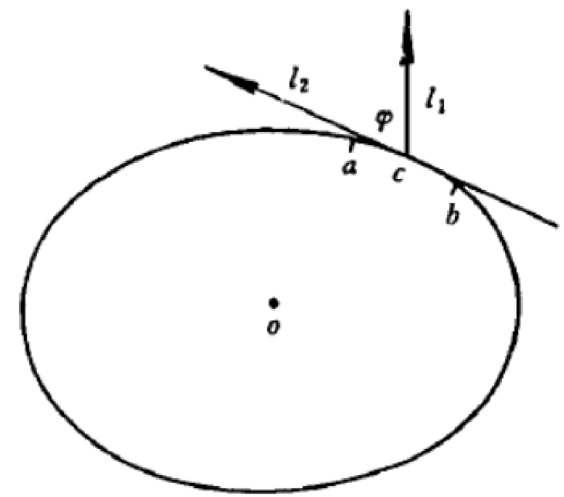


图 2

c为子午线上一点；l_2为过该点的切线；l_1过c指向天顶；φ为l_1、l_2的夹角，即c点处的纬度；a点的纬度比b点高1°，且c是ab弧的中点

误差概念的引出

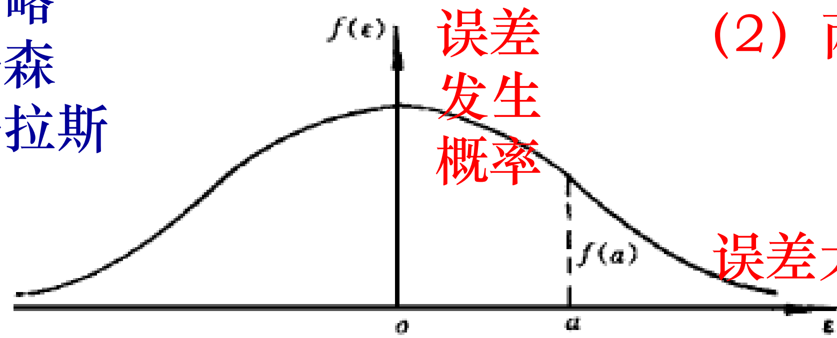
$$x_{0i} + x_{1i}\theta_1 + \cdots + x_{ki}\theta_k = \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

误差ε大小对θ的估计有重大影响，ε的概率性质决定了θ的统计性质。因此，引出了对ε的概率性质进行适当描述的研究。

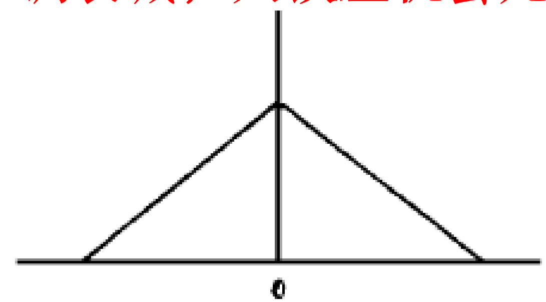
伽利略
辛普森
拉普拉斯
……

（1）正负误差有等同出现的机会
（2）两边单调衰减，大误差机会几乎为0

误差发生概率



误差大小



以后的学者在研究误差理论时，多遵循这个出发点，但满足这个性质的函数很多，如何决定出一个具体形式是一个困难问题。

高斯提出的误差

轮到高斯。他不从单纯“把f作为一个函数而要设法找出一些条件去决定它”这个思维定势出发，而是径直假定这样的“公理”：在多次观测中取平均是天然合理的。由此出发，再配合他的“极大似然”的想法，很容易决定出f应有以下形式：

$$f(\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right)$$

在多次观测中取平均是天然合理的

↓

中心极限定理

按照高斯分布，误差$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)$的联合密度为：

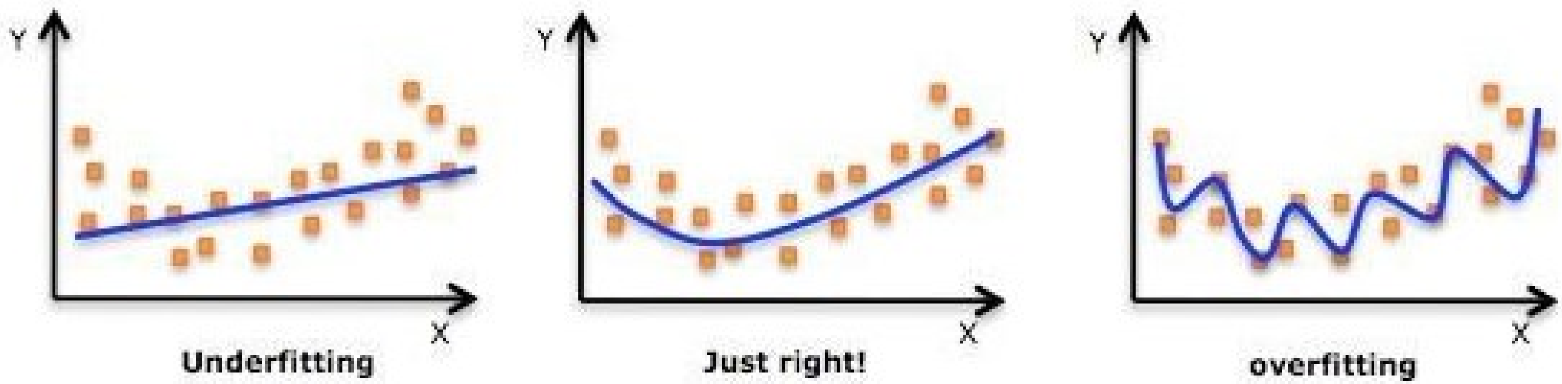
$$L=(2\pi)^{-n/2}\sigma^{-n}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_{0i}+x_{1i}\theta_1+\cdots+x_{ki}\theta_k)^2\right)$$

为要使L达到最大（即最大似然），必须使下式达到最小，因此引出LSE

$$\sum_{i=1}^{n}(x_{i0}+x_{i1}\vartheta_1+\cdots+x_{ik}\vartheta_k)^2$$

意义在于：（1）无论从实际与理论看，正态误差是合理的选择；（2）在正态误差下，有一套严格简洁的小样本理论，因而大大提高了LSE在实用上的方便和广泛性。

组合测量与回归分析需考虑的误差估计问题



（1） 从偏差大小角度

$$S = \sum [y_i - f(x_i)]^2$$

观测值 拟合值

S 越小越精确

（2）从随机误差角度

不存在过拟合
不存在系统误差

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i$$

$$E[\varepsilon_i] = 0,$$

$$E[\varepsilon_i \varepsilon_j] = \sigma_i^2 \delta_{ij}.$$

7. 组合测量的参数最小二乘法处理

y_1，y_2，⋯，y_m的估计精度取决于：

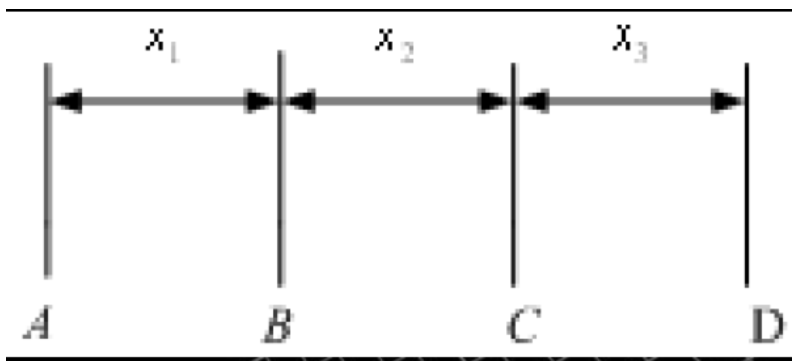
① x_1，x_2，⋯，x_n测量精度 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$

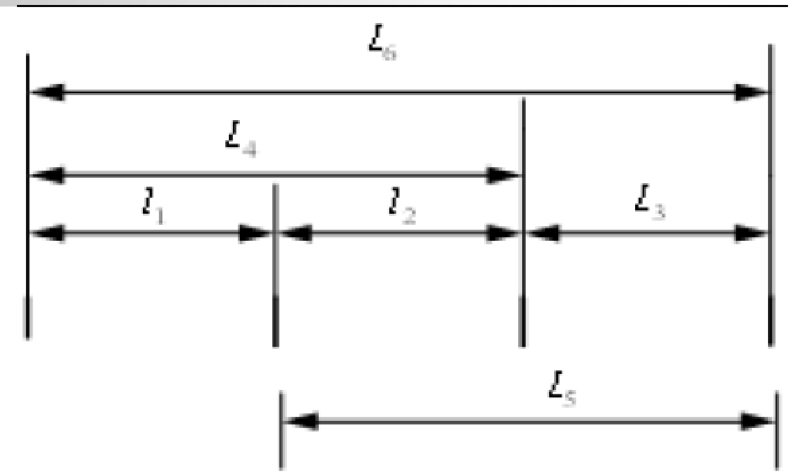
② 方程组中方程的数量

对y进行n次等精度测量得到n个测得值l_i（$i = 1,2,\cdots,n$），其相应的测量误差分别为δ_i（$i = 1,2,\cdots,n$），它们是互不相关的随机误差。

可证明，$(\sum_{i=1}^{n} v_i^2)/\sigma^2$是自由度为（$n-m$）的$\chi^2$变量，

$$E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{\sigma^2}\right) = n - m \Rightarrow \widehat{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-m}}$$





$l_1 = 1.015mm$， $l_2 = 0.985mm$， $l_3 = 1.020mm$， $l_4 = 2.016mm$， $l_5 = 1.981mm$， $l_6 = 3.032mm$

$$l_1 = x_1$$

$$l_2 = x_2$$

$$l_3 = x_3$$

$$l_4 = x_1 + x_2$$

$$l_5 = x_2 + x_3$$

$$l_6 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1.028mm \\ x_2 &= 0.983mm \\ x_3 &= 1.013mm \end{aligned}\right\}$$

$$v_1 = l_1 - x_1 = 1.015 - 1.028 = -0.013$$

$$v_2 = l_2 - x_2 = 0.985 - 0.983 = 0.002$$

$$v_3 = l_3 - x_3 = 1.020 - 1.013 = 0.007$$

$$v_4 = l_4 - (x_1 + x_2) = 0.005$$

$$v_5 = l_5 - (x_2 + x_3) = -0.015$$

$$v_6 = l_6 - (x_1 + x_2 + x_3) = 0.008$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6} v_i^2}{n-t}} = \sqrt{\frac{0.000536}{6-3}} = 0.013mm$$

7. 组合测量的参数最小二乘法处理

y_1，y_2，⋯，y_m的估计精度取决于：

③ 方程组的函数关系

$$\sigma_{yi}^2 = d_{ii}\sigma^2 (i = 1,2,\ldots,m)$$

则相应的最小二乘估计值的标准差为

$$\sigma_{y1} = \sigma\sqrt{d_{11}}$$

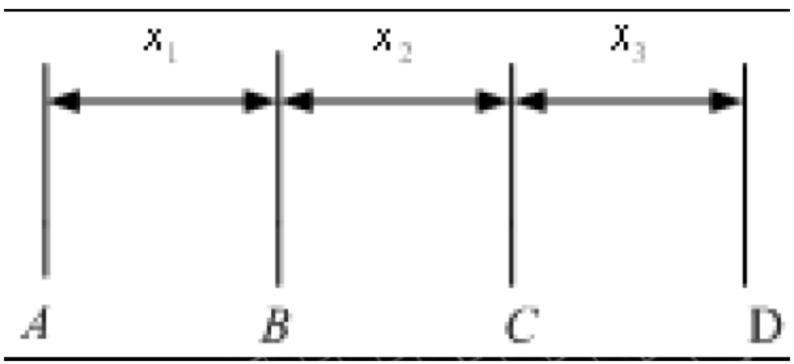
$$\sigma_{x2} = \sigma\sqrt{d_{22}}$$

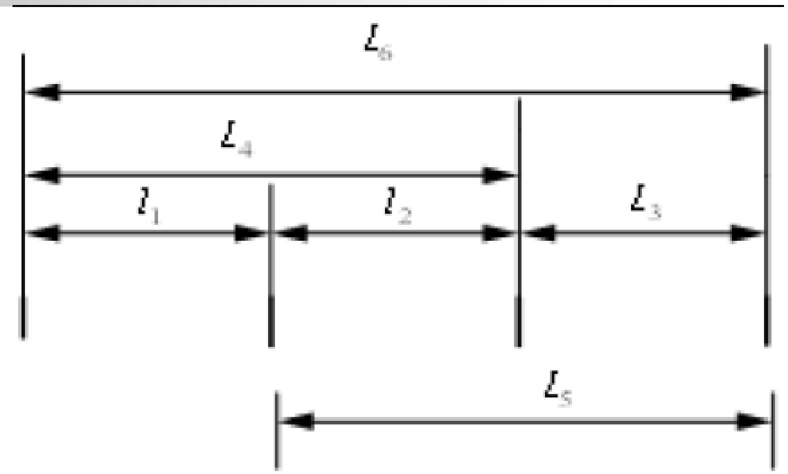
…… ……

$$\sigma_{xm} = \sigma\sqrt{d_{mm}}$$

如何求取d_{ii}？

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{t1} & \cdots & d_{tt} \end{bmatrix} = \left(X^T X\right)^{-1}$$





$l_1 = 1.015mm$，$l_2 = 0.985mm$，$l_3 = 1.020mm$，$l_4 = 2.016mm$，$l_5 = 1.981mm$，$l_6 = 3.032mm$

$$l_1 = x_1$$

$$l_2 = x_2$$

$$l_3 = x_3$$

$$l_4 = x_1 + x_2$$

$$l_5 = x_2 + x_3$$

$$l_6 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1.028mm \\ x_2 &= 0.983mm \\ x_3 &= 1.013mm \end{aligned}\right\}$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{t1} & \cdots & d_{tt} \end{bmatrix} = \left(X^T X\right)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$d_{11} = \frac{1}{4} \times 2 = 0.5$$

$$d_{22} = \frac{1}{4} \times 2 = 0.5$$

$$d_{33} = \frac{1}{4} \times 2 = 0.5$$

$$\sigma_{x1} = \sigma\sqrt{d_{11}} = 0.013\sqrt{0.5}mm = 0.009mm$$

$$\sigma_{x2} = \sigma\sqrt{d_{22}} = 0.013\sqrt{0.5}mm = 0.009mm$$

$$\sigma_{x3} = \sigma\sqrt{d_{33}} = 0.013\sqrt{0.5}mm = 0.009mm$$

7. 组合测量的参数最小二乘法处理

y_1，y_2，…，y_m的估计精度取决于：

④ 重复测量次数

$$\sigma_i \Rightarrow \overline{\sigma_i}$$

若 $f_1(y_1, y_2, \cdots, y_m) - x_1 = 0$ 为非线性?

方法：线性化

今有两个电容器，分别测其电容，然后又将其串联和并联，得到如下测量结果：

$C_1 = 0.2071uF$， $C_2 = 0.2056uF$， $C_1 + C_2 = 0.4111uF$， $\dfrac{C_1C_2}{C_1 + C_2} = 0.1035uF$

试求电容器电容量的最可信赖值及其精度。

令 C_1 近似值 $C_{10} = 0.2071$， C_2 近似值 $C_{20} = 0.2056$， 则：

$$C_1 = C_{10} + \delta_1 \qquad C_2 = C_{20} + \delta_2$$

$$f_i(C_1, C_2) = f_i(C_{10}, C_{20}) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial C_1}\right)\delta_1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial C_2}\right)\delta_2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial C_1} = 1,\quad \frac{\partial f_1}{\partial C_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial C_1} = 0,\quad \frac{\partial f_2}{\partial C_2} = 1$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial C_1} = 1,\quad \frac{\partial f_3}{\partial C_2} = 1$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial C_1} = \left.\frac{C_2^2}{(C_1 + C_2)^2}\right|_{C_{10}C_{20}} = \frac{0.2056^2}{(0.2071 + 0.2056)^2} = 0.2482$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial C_1} = \left.\frac{C_1^2}{(C_1 + C_2)^2}\right|_{C_{10}C_{20}} = \frac{0.2071^2}{(0.2071 + 0.2056)^2} = 0.2518$$