



北京航空航天大学
BEIHANG UNIVERSITY

矩阵理论

谷海波

guhaibo@buaa.edu.cn

自动化科学与电气工程学院

第一章 线性空间引论

- 线性空间
- 线性子空间
- 基与坐标
- 内积空间
- 直和与投影
- 应用：多项式插值

第一章 线性空间引论

1.4 内积空间

第一章 线性空间引论——内积空间

定义1.4.1（内积空间） 设 $F = \mathbb{R}$ 或 \mathbb{C} , V 是 F 上的线性空间, 若对 V 中任意两向量 α 和 β , 定义了一个数 $(\alpha, \beta) \in F$, 使得 $\forall x, y, z \in V$ 和 $k \in F$ 满足

(1) **共轭对称性**: $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

(2) **可加性**: $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

(3) **齐次性**: $(kx, y) = k(x, y)$;

(4) **正定性**: $(x, x) \geq 0$, 当且仅当 $x = \theta$ 时等号成立.

此时, V 称为一个**内积空间**, 数 (x, y) 称为 x 与 y 的**内积**.

第一章 线性空间引论——内积空间

定义1.4.1（内积空间） 设 $F = \mathbb{R}$ 或 \mathbb{C} , V 是 F 上的线性空间, 若对 V 中任意两向量 α 和 β , 定义了一个数 $(\alpha, \beta) \in F$, 使得 $\forall x, y, z \in V$ 和 $k \in F$ 满足

(1) **共轭对称性**: $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

(2) **可加性**: $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

(3) **齐次性**: $(kx, y) = k(x, y)$;

(4) **正定性**: $(x, x) \geq 0$, 当且仅当 $x = \theta$ 时等号成立.

此时, V 称为一个**内积空间**, 数 (x, y) 称为 x 与 y 的**内积**. 有限维的实内积空间称为**欧几里得空间**. 有限维的复内积空间称为**酉空间**.

第一章 线性空间引论——内积空间

注1: 欧氏（酉）空间的维数指它作为线性空间的维数；它们的线性子空间仍是欧氏（酉）子空间.

注2: 定义1.4.1中性质（3）**齐次性仅对第一个向量成立**，对第二个向量则是“**共轭齐次性**”.

例1.4.1 设 V 是 F 上的线性空间, $\forall x, y, z \in V$ 和 $k \in F$,

$$(x, y + z) =$$

$$(x, ky) =$$

第一章 线性空间引论——内积空间

注1: 欧氏（酉）空间的维数指它作为线性空间的维数；它们的线性子空间仍是欧氏（酉）子空间.

注2: 定义1.4.1中性质（3）**齐次性仅对第一个向量成立**，对第二个向量则是“**共轭齐次性**”.

例1.4.1 设 V 是 F 上的线性空间, $\forall x, y, z \in V$ 和 $k \in F$,

$$(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$$

$$(x, ky) = \bar{k} \overline{(y, x)} = \bar{k} (x, y)$$

思考: $\forall y \in V, (\theta, y) = ?$

第一章 线性空间引论——内积空间

例1.4.2 \mathbb{R}^n 中, 取 $\boldsymbol{x} = [x_1, \cdots, x_n]^T$, $\boldsymbol{y} = [y_1, \cdots, y_n]^T$,
令

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

满足内积四条性质, 故 \mathbb{R}^n 是欧氏空间, 仍记为 \mathbb{R}^n .



第一章 线性空间引论——内积空间

例1.4.3 \mathbb{C}^n 中, $\boldsymbol{x} = [x_1, \cdots, x_n]^T$, $\boldsymbol{y} = [y_1, \cdots, y_n]^T$,
令

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

该定义能否仍作为 \mathbb{C}^n 的内积吗?

分析:

在 \mathbb{C}^1 中, 取 $x = i$ 时, x 与 x 的“内积”等于 -1 ,
不满足内积正定性要求.



第一章 线性空间引论——内积空间

例1.4.3 \mathbb{C}^n 中, $\mathbf{x} = [x_1, \cdots, x_n]^T$, $\mathbf{y} = [y_1, \cdots, y_n]^T$,
令

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^H \mathbf{x} = x_1 \bar{y}_1 + \cdots + x_n \bar{y}_n$$

式中, $\mathbf{y}^H = [\bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_n]$ 表示为向量 \mathbf{y} 的**共轭转置**.
满足内积四条性质, 故 \mathbb{C}^n 为酉空间, 仍记为 \mathbb{C}^n .



第一章 线性空间引论——内积空间

例1.4.4 \mathbb{C}^n 中, 取 $\mathbf{x} = [x_1, \cdots, x_n]^T$, $\mathbf{y} = [y_1, \cdots, y_n]^T$.
令

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^H \mathbf{A} \mathbf{x}$$

若该表达式能定义为 \mathbb{C}^n 的内积, 则需要什么条件?

分析: 由内积定义 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$ 知, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$,

$$\mathbf{y}^H \mathbf{A} \mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{y}}$$

$$\mathbf{y}^H \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^H \mathbf{A}^H \mathbf{x}$$

因此,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^H$$

第一章 线性空间引论——内积空间

例1.4.4 \mathbb{C}^n 中, 取 $\boldsymbol{x} = [x_1, \cdots, x_n]^T$, $\boldsymbol{y} = [y_1, \cdots, y_n]^T$.
令

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$$

矩阵满足何种性质时, \mathbb{C}^n 为酉空间?

分析: 上述定义对内积可加性和齐次性始终成立.

现分析正定性:

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n, \boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \geq 0,$$

$$\text{且 } \boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = 0 \text{ 当且仅当 } \boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

第一章 线性空间引论——内积空间

例1.4.4 \mathbb{C}^n 中, 取 $\boldsymbol{x} = [x_1, \cdots, x_n]^T$, $\boldsymbol{y} = [y_1, \cdots, y_n]^T$.
令

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$$

矩阵满足何种性质时, \mathbb{C}^n 为酉空间?

综上, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$ 能定义为 \mathbb{C}^n 的内积, 须满足

$$(1) \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^H$$

$$(2) \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n, \boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \geq 0,$$

且 $\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

第一章 线性空间引论——内积空间

定义1.4.2 (Hermite矩阵) 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$,
若 $A^H = A$, 则称矩阵 A 是 **Hermite矩阵**; 若 $A^H = -A$,
则称 A 是 **反Hermite矩阵**.



第一章 线性空间引论——内积空间

定义1.4.2 (Hermite矩阵) 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$,
若 $A^H = A$, 则称矩阵 A 是 **Hermite矩阵**; 若 $A^H = -A$,
则称 A 是 **反Hermite矩阵**.

例如, $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, 其Hermite矩阵为

$$A^H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i & 2 \end{bmatrix}$$

第一章 线性空间引论——内积空间

定义1.4.3（正定矩阵） 设 $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{C}^n$ 是未定元向量, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是Hermite矩阵, 定义**复二次型**

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^H A \mathbf{x}$$

称 **A 为 **$f(\mathbf{x})$ 的矩阵****. 若 $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, f(\mathbf{x}) \geq 0$ 且 $f(\mathbf{x}) = 0$ 当且仅当 $\mathbf{x} = 0$, 则称 $f(\mathbf{x})$ 是**正定二次型**, A 是**正定矩阵**. 若 $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, 有 $f(\mathbf{x}) \geq 0$, 则称 $f(\mathbf{x})$ 是**半正定二次型**, A 是**半正定矩阵**.

类似地, 可定义“**负定二次型**”、“**负定矩阵**”、“**半负定二次型**”和“**半负定矩阵**”.

第一章 线性空间引论——内积空间

例1.4.5 设复二次型 $f(x) = x^H A x$, 其中, $x = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{C}^2$, 矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$$

第一章 线性空间引论——内积空间

例1.4.5 设复二次型 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^H A \boldsymbol{x}$, 其中, $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{C}^2$, 矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix}$$

则 $f(\boldsymbol{x}) = |x_1 + \mathrm{i}x_2|^2 + |x_2|^2 \geq 0$.

$f(\boldsymbol{x}) = 0$ 的条件为 $x_1 = x_2 = 0$.

故 $f(\boldsymbol{x})$ 是正定二次型, A 是正定矩阵.



第一章 线性空间引论——内积空间

例1.4.5 设复二次型 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^H A \boldsymbol{x}$, 其中, $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{C}^2$, 矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}$$

则 $f(\boldsymbol{x}) = |x_1 + \mathrm{i}x_2|^2 \geq 0$.

$f(\boldsymbol{x}) = 0$ 的条件为 $x_1 = -\mathrm{i}x_2$.

显然, $f(\boldsymbol{x})$ 是半正定二次型, A 是半正定矩阵.

第一章 线性空间引论——内积空间

定义1.4.4（度量矩阵） 设 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 是内积空间 V 中的一组基, 称 n 阶矩阵

$$A = \left((\epsilon_i, \epsilon_j) \right)_{n \times n} = \begin{bmatrix} (\epsilon_1, \epsilon_1) & (\epsilon_1, \epsilon_2) & \cdots & (\epsilon_1, \epsilon_n) \\ (\epsilon_2, \epsilon_1) & (\epsilon_2, \epsilon_2) & \cdots & (\epsilon_2, \epsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\epsilon_n, \epsilon_1) & (\epsilon_n, \epsilon_2) & \cdots & (\epsilon_n, \epsilon_n) \end{bmatrix}$$

为 V 关于基 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 的**度量矩阵（或Gram矩阵）**, 常记为 $G(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$.

注5: 内积空间中内积与度量矩阵是一一对应的.

每个基都对应一个度量矩阵

第一章 线性空间引论——内积空间

设 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 是内积空间 V 的一组基, 则 $\forall x, y \in V$, 有

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i \epsilon_i$$

$$y = \sum_{j=1}^n \eta_j \epsilon_j$$

式中, $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_n]^T$ 和 $\eta = [\eta_1, \dots, \eta_n]^T$ 分别是向量 x 和 y 在基 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 下的坐标.

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^n \xi_i \bar{\eta}_j (\epsilon_i, \epsilon_j)$$

第一章 线性空间引论——内积空间

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^n \xi_i \bar{\eta}_j (\epsilon_i, \epsilon_j)$$

$$= \eta^H \begin{bmatrix} (\epsilon_1, \epsilon_1) & (\epsilon_2, \epsilon_1) & \cdots & (\epsilon_n, \epsilon_1) \\ (\epsilon_1, \epsilon_2) & (\epsilon_2, \epsilon_2) & \cdots & (\epsilon_n, \epsilon_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\epsilon_1, \epsilon_n) & (\epsilon_2, \epsilon_n) & \cdots & (\epsilon_n, \epsilon_n) \end{bmatrix} \xi$$

定义 $A = \left((\epsilon_i, \epsilon_j) \right)_{n \times n}$, 则

写错了, 书上P18

$$(x, y) = \eta^H A^H \xi$$

第一章 线性空间引论——内积空间

同理,

$$(y, x) = \xi^H A^H \eta$$

又知 $(x, y) = \overline{(y, x)}$, 故

$$\eta^H A^H \xi = \overline{\xi^H A^H \eta}$$

即

$$\eta^H A^H \xi = \eta^H A \xi$$

考虑到 ξ 和 η 的任意性, $A = A^H$.

由两个向量以及内积空间的性质推导出过度矩阵应该具备的性质

因此, A 是 Hermite 矩阵, 且 $(x, y) = \eta^H A^H \xi$.



第一章 线性空间引论——内积空间

命题1.4.1（度量矩阵的性质） 设 $G(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 和 $G(\boldsymbol{\epsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\epsilon}_n)$ 均为内积空间 V 的度量矩阵, 则有

(1) $G(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 和 $G(\boldsymbol{\epsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\epsilon}_n)$ 是正定Hermite矩阵;

分析: 由内积正定性知,

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\xi}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{\xi} \geq 0$$

当且仅当 $\boldsymbol{\xi} = 0$ 时取等号.

因此, \boldsymbol{A} 是正定矩阵.



第一章 线性空间引论——内积空间

命题1.4.1（度量矩阵的性质） 设 $G(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 和 $G(\boldsymbol{\epsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\epsilon}_n)$ 均为内积空间 V 的度量矩阵, 则有

(2) $G(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 和 $G(\boldsymbol{\epsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\epsilon}_n)$ **合同** (或**相合**), 即存在非奇异矩阵 P 使得

$$P^H G(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n) P = G(\boldsymbol{\epsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\epsilon}_n)$$

式中, P 是由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到基 $\boldsymbol{\epsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\epsilon}_n$ 的过渡矩阵.

第一章 线性空间引论——内积空间

定义1.4.5（长度） 设 V 是内积空间, $\forall x \in V$, 实数 $\sqrt{(x, x)}$ 称为 x 的**长度(模)**, 记为 $\|x\|$. 长度为1的向量称为**单位向量**.

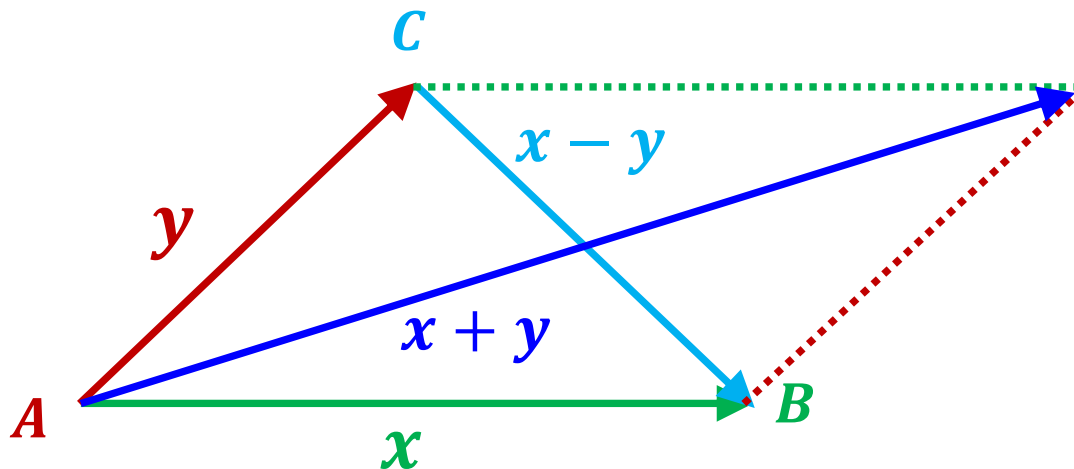
注6: 实数的绝对值和复数的模值都是向量长度的特例.

第一章 线性空间引论——内积空间

命题1.4.2（长度性质） $\forall x, y \in V$ 和 $k \in F$, 有

- (1) **正定性**: $\|x\| \geq 0$ 当且仅当 $x = 0$ 时有 $\|x\| = 0$;
- (2) **齐次性**: $\|kx\| = |k|\|x\|$;
- (3) **平行四边形法则**:

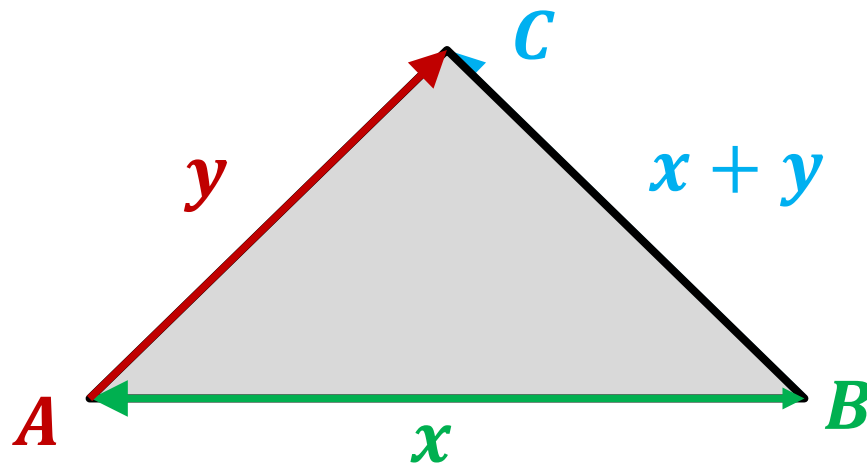
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$



第一章 线性空间引论——内积空间

命题1.4.2（长度性质） $\forall x, y \in V$ 和 $k \in F$, 有

(4) **三角不等式**: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;



$$\operatorname{Re}(x, y) \leq \|x\| \|y\|$$



第一章 线性空间引论——内积空间

定理1.4.1 (Cauchy—Schwarz不等式) 设 V 是数域 F 上的内积空间, 对任意 $x, y \in V$,

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$$

其中, $|(x, y)| = \|x\| \|y\|$ 当且仅当 x, y 线性相关成立.



第一章 线性空间引论——内积空间

定理1.4.1 (Cauchy—Schwarz不等式) 设 V 是数域 F 上的内积空间, 对任意 $x, y \in V$,

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$$

其中, $|(x, y)| = \|x\| \|y\|$ 当且仅当 x, y 线性相关成立.

证明: $\forall a \in \mathbb{R}$ (更一般的情况呢), 有

$$f(a) = (ax + y, ax + y) \geq 0$$

\Rightarrow

$$\|x\|^2 a^2 + 2a(x, y) + \|y\|^2 \geq 0$$

\Rightarrow

$$\Delta = (2(x, y))^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$$



第一章 线性空间引论——内积空间

若 x, y 线性相关, 则存在实数 k 使得 $x = ky$. 反之, 若 $|(x, y)| = \|x\|\|y\|$, 分别考虑 $x = \theta$ 和 $x \neq \theta$ 两种情况. 若 $x \neq \theta$, 则 $f(a) = (ax + y, ax + y) = 0$ 存在一个实数解

$$a = -\frac{(x, y)}{\|x\|^2}, \quad y = -ax$$

对于一般的数域 F . 分别考虑 $x = \theta$ 和 $x \neq \theta$ 两种情况. 若 $x \neq \theta$, 对于任意的 $a \in F$, $f(a) = (ax + y, ax + y) \geq 0$ 恒成立. 取

$$a = -\frac{\overline{(x, y)}}{\|x\|^2}$$

第一章 线性空间引论——内积空间

注6: 定义不同内积可得到不同的Cauchy不等式.

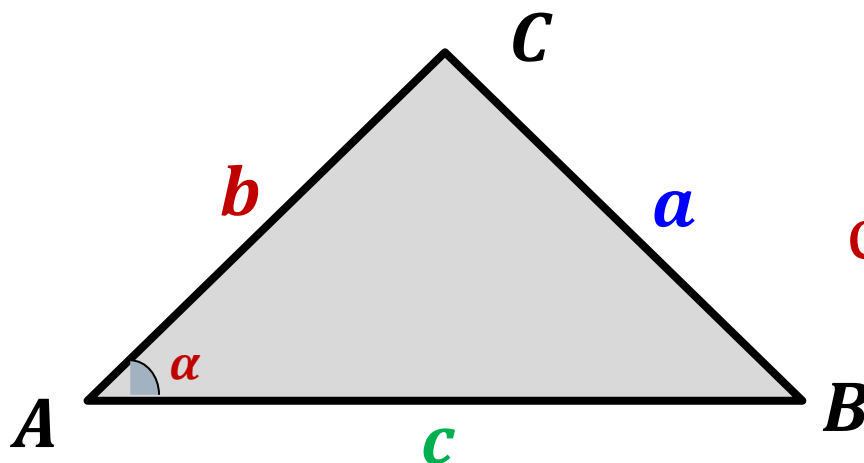
(1) 对 \mathbb{R}^n 中任两向量 $\mathbf{x} = [x_1, \cdots, x_n]^T$ 和 $\mathbf{y} = [y_1, \cdots, y_n]^T$, 有

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

(2) 对 $C_{[a,b]}$ 中任两函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 有

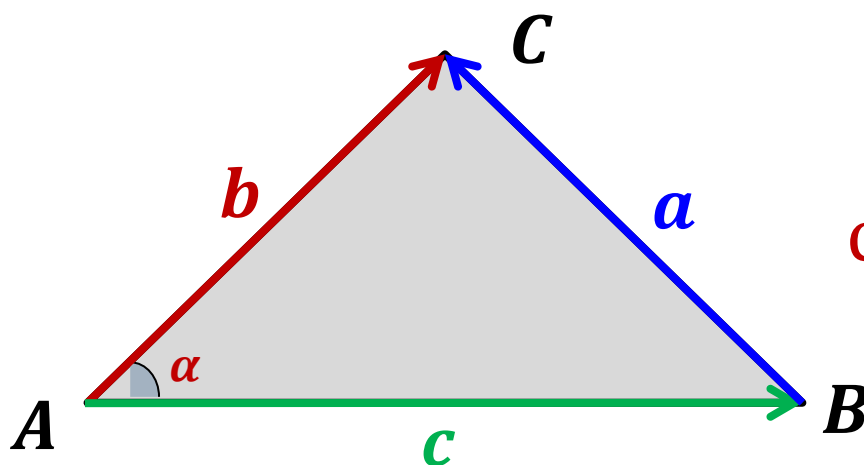
$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

第一章 线性空间引论——内积空间



$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

第一章 线性空间引论——内积空间

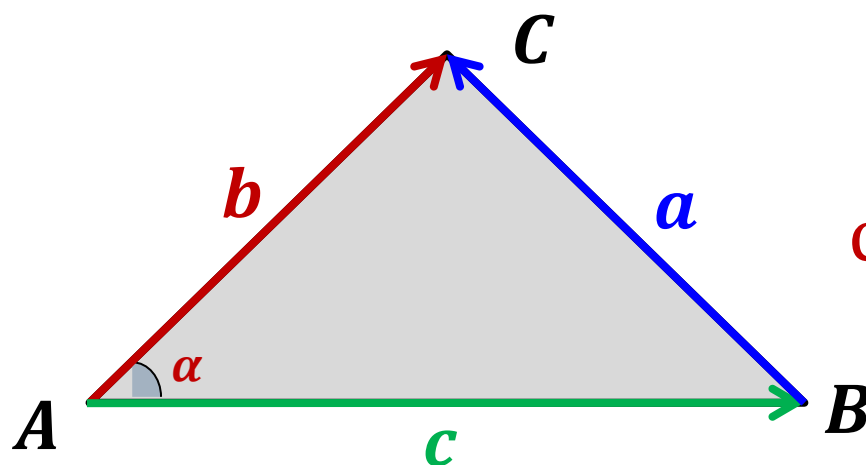


$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

若定义 \overrightarrow{AC} 和 \overrightarrow{AB} 为 \mathbb{R}^2 空间的两个向量, 则角 α 即为向量的夹角.

$$\cos \alpha = \frac{\|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2}{2 \|\overrightarrow{AC}\| \|\overrightarrow{AB}\|}$$

第一章 线性空间引论——内积空间



$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

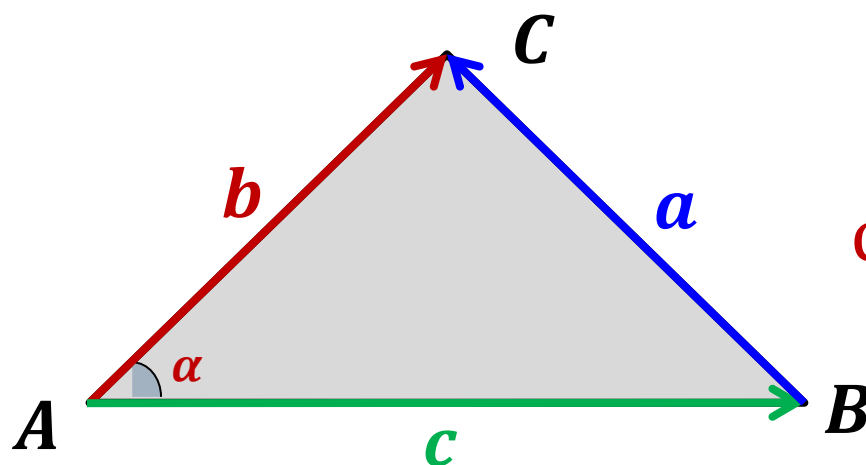
替换为 $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC})$ 利用平行四边形公式换掉最后一项

若定义 \overrightarrow{AC} 和 \overrightarrow{AB} 为 \mathbb{R}^2 空间的两个向量, 则角 α 即为向量的夹角.

$$\cos \alpha = \frac{\|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2}{2 \|\overrightarrow{AC}\| \|\overrightarrow{AB}\|}$$



第一章 线性空间引论——内积空间



$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

若定义 \overrightarrow{AC} 和 \overrightarrow{AB} 为 \mathbb{R}^2 空间的两个向量, 则角 α 即为向量的夹角.

$$\cos \alpha = \frac{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})}{\|\overrightarrow{AC}\| \|\overrightarrow{AB}\|}$$

第一章 线性空间引论——内积空间

定义1.4.6（向量夹角） 设 V 是欧氏空间, 对 V 中任意向量 x 和 y , 定义向量 x 和 y 的**夹角**为

注意上面的向量
在 R^2 内

$$\alpha = \langle x, y \rangle = \arccos \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|} \in [0, \pi]$$

注7: 引入内积至线性空间才有了向量夹角的概念, 为线性空间带来了“图形化”的理解.

第一章 线性空间引论——内积空间

例1.4.7 \mathbb{R}^2 关于基 x_1, x_2 的度量矩阵为

$$G(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} (x_1, x_1) & (x_2, x_1) \\ (x_1, x_2) & (x_2, x_2) \end{bmatrix}$$

行列式 $|G(x_1, x_2)|$ 的几何含义.



第一章 线性空间引论——内积空间

例1.4.7 \mathbb{R}^2 关于基 x_1, x_2 的度量矩阵为

$$G(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} (x_1, x_1) & (x_2, x_1) \\ (x_1, x_2) & (x_2, x_2) \end{bmatrix}$$

行列式 $|G(x_1, x_2)|$ 的几何含义.

\mathbb{R}^2 内

分析: $|G(x_1, x_2)| = \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - (x_1, x_2)^2$

定义向量 x_1 与 x_2 的夹角为 α , 上式改写为

$$\begin{aligned} |G(x_1, x_2)| &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \cos^2 \alpha \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$|G(x_1, x_2)|$ 恰是以向量 x_1 与 x_2 为邻边的平行四边形面积的平方



第一章 线性空间引论——内积空间

定义1.4.7（正交和正交向量组） 设 V 是内积空间，对 V 中任意向量 x 和 y ， $(x, y) = 0$ ，则称向量 x 与 y **正交**（或**垂直**），记为 $x \perp y$ 。若一组非零向量两两正交，则称为**正交向量组**。单位向量构成的正交向量组称为**标准正交向量组**。



第一章 线性空间引论——内积空间

定义1.4.7（正交和正交向量组） 设 V 是内积空间，对 V 中任意向量 x 和 y ， $(x, y) = 0$ ，则称向量 x 与 y **正交**（或**垂直**），记为 $x \perp y$ 。若一组非零向量两两正交，则称为**正交向量组**。单位向量构成的正交向量组称为**标准正交向量组**。

注8：零向量 θ 与任何向量均正交。**正交向量组要求向量均为非零向量。**

注9：向量 x 与 y 正交当且仅当 $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (**勾股定理**)。该结果可推广至一般情形。

第一章 线性空间引论——内积空间

例1.4.8 求 \mathbb{R}^4 中的单位向量 x 使它与 $\alpha_1 = [1, 1, -1, 1]^T$, $\alpha_2 = [1, -1, -1, 1]^T$, $\alpha_3 = [2, 1, 1, 3]^T$ 均正交.

模长为1

第一章 线性空间引论——向量长度与夹角

定理1.4.2 正交向量组线性无关.

证明: 设向量组 x_1, x_2, \dots, x_s 是内积空间 V 的正交向量组. 现考查方程

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_s x_s = \theta$$

用 $x_i (i = 1, 2, \dots, s)$ 与上式两端作内积, 得

$$(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_s x_s, x_i) = (\theta, x_i) = 0 \quad *$$

注意到(*)式左边

$$(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_s x_s, x_i) = \sum_j k_j (x_j, x_i)$$

第一章 线性空间引论——内积空间

定理1.4.2 正交向量组线性无关.

证明(续): 且 x_1, x_2, \dots, x_s 是正交向量组, 故当 $j \neq i$ 时有 $(x_j, x_i) = 0$; 当 $j = i$ 时有 $(x_j, x_i) \neq 0$.

进而 (*)式化简为

$$k_i(x_i, x_i) = 0$$

即 $k_i = 0 (i = 1, 2, \dots, s)$.

因此, x_1, x_2, \dots, x_s 线性无关. 证毕.

第一章 线性空间引论——向量长度与夹角

推论1.4.1 在 n 维内积空间中, 正交向量组中的向量不会超过 n 个.



第一章 线性空间引论——向量长度与夹角

推论1.4.1 在 n 维内积空间中, 正交向量组中的向量不会超过 n 个.

思考: 在 n 维内积空间中 V , 能否一定找到包含 n 个向量的正交向量组?



第一章 线性空间引论——向量长度与夹角

推论1.4.1 在 n 维内积空间中, 正交向量组中的向量不会超过 n 个.

思考: 在 n 维内积空间中 V , 能否一定找到包含 n 个向量的正交向量组?

分析: 假设 x_1, \dots, x_n 是 V 的一组基, y_1, \dots, y_n 是待定的正交向量组.

根据Gram-Schmidt正交化方法

$$y_1 = x_1$$

$$y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(x_k, y_i)}{(y_i, y_i)} y_i, k > 1$$



第一章 线性空间引论——内积空间

定义1.4.8（标准正交基） 在 n 维内积空间中, 由 n 个向量组成的正交向量组称为**正交基**. 由单位向量组成的正交基称为**标准正交基**.



第一章 线性空间引论——内积空间

例1.4.9考查定义在 $[-\pi, \pi]$ 的光滑函数空间 S , 定义内积为 $\forall f(t), g(t) \in S$,

$$(f(t), g(t)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$$

分析: $\forall k, m, n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos ktdt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin ktdt = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \cdot \cos mtdt = 0$$

第一章 线性空间引论——内积空间

例1.4.9考查定义在 $[-\pi, \pi]$ 的光滑函数空间 S , 定义内积为 $\forall f(t), g(t) \in S$,

$$(f(t), g(t)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$$

分析: 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的三角函数组

$$1, \cos t, \sin t, \cdots, \cos kt, \sin kt, \cdots,$$

是正交向量组, 也是空间 S 的正交基.

因此, 光滑函数 $f(x)$ 展开为 **傅里叶三角级数**

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$



第一章 线性空间引论——内积空间

例1.4.10 设 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 是线性空间 V 的标准正交基, 并定义 $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$ 和 $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]^T$ 分别是 V 中向量 x 和 y 在基 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 下的坐标, 则

$$(x, y) = \beta^H G(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \alpha$$

$$(x, y) = \beta^H \alpha$$

注10: 线性空间 V 的向量组 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 是标准正交基当且仅当 V 关于 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 的度量矩阵为单位矩阵.
在标准正交基下, 内积的运算变得更加简单.

第一章 线性空间引论——内积空间

定义1.4.9（向量正交于集合） 设 V 是内积空间, W 是 V 的子集, 若对任意向量 $y \in W$ 和 $x \in V$ 有 $x \perp y$, 则称 x 正交（或垂直）于集合 W , 记为 $x \perp W$.

定义1.4.10（两集合正交） 设 W_1 与 W_2 是内积空间 V 的两个子集, 若对任意向量 $x \in W_1$ 和任意向量 $y \in W_2$ 有 $x \perp y$, 则称 W_1 与 W_2 是正交的, 记为 $W_1 \perp W_2$.



第一章 线性空间引论——内积空间

例1.4.11 在直角坐标系中定义三个子空间: 过坐标原点的直线 W 、过坐标原点的平面 W_1 和 W_2 如图所示. 在几何上, 直线 W 垂直平面 W_1 , 平面 W_1 垂于 W_2 .

考察子空间 W 与 W_1 是否正交问题:

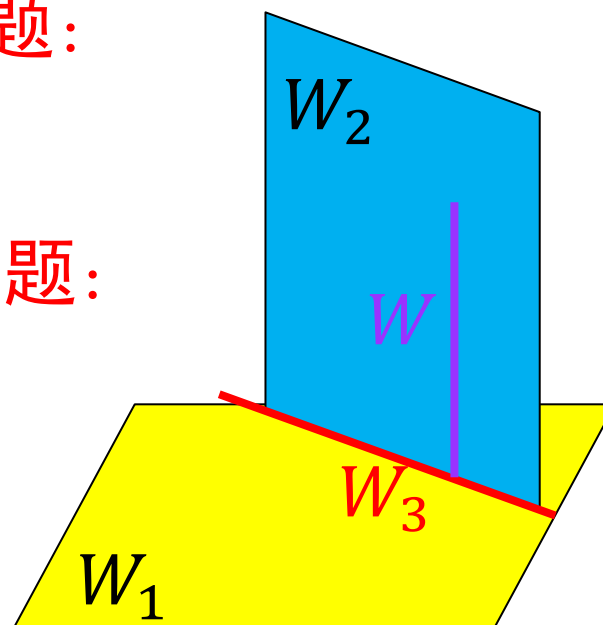
子空间 W 正交于 W_1 .

考察子空间 W_1 与 W_2 是否正交问题:

$$W_1 \cap W_2 = W_3$$

W_3 任两非零向量共线, 不正交.

因此, 子空间 W_1 与 W_2 不正交.



第一章 线性空间引论——内积空间

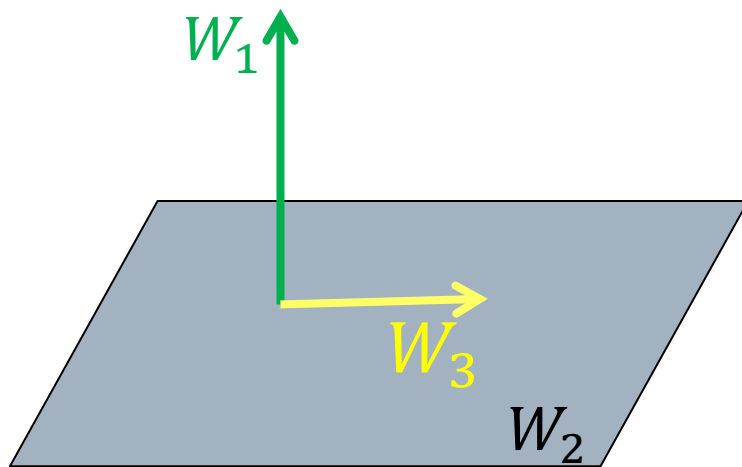
定义1.4.11（子空间正交补） 设 W 是 V 的线性子空间, 则集合 $W^\perp = \{x \in V | x \perp W\}$ 称为 W 的**正交补**.



第一章 线性空间引论——内积空间

定义1.4.11（子空间正交补） 设 W 是 V 的线性子空间, 则集合 $W^\perp = \{x \in V | x \perp W\}$ 称为 W 的**正交补**.

思考: 与 W 正交的子空间是 W 的正交补空间吗?



第一章 线性空间引论——内积空间

定理1.4.3 W 是 V 的线性子空间, 则 W^\perp 也是 V 的线性子空间.

证明: 对任意向量 $x, y \in W^\perp, z \in W, \lambda, \mu \in F$, 有

$$(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z) = 0$$

内积空间的前提
是线性空间

思考: 给定 W , W^\perp 是惟一的吗?

第一章 线性空间引论——内积空间

定理1.4.4 W 是 V 的线性子空间, 则 $V = W + W^\perp$

证明: $V = W + W^\perp \Leftrightarrow V \supset W + W^\perp$ 且 $V \subset W + W^\perp$

选择 W 的一组正交基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, 对于任意的 $x \in V$,

$$x = \sum_{i=1}^m k_i \alpha_i + \left(x - \sum_{i=1}^m k_i \alpha_i \right), k_i \in F$$

$$k_i = \frac{(x, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$$

k_i 是唯一的吗, 取值是否有更直观解释?