群聊：23 矩阵

该二维码7天内(9月12日前)有效，重新进入将更新

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

# 矩 阵 理 论


**刘克新**

**自动化科学与电气工程学院**

**邮箱：skxliu@163.com**

# 教材与参考书

**参考教材:**

《矩阵基本理论与应用》王磊编著　北京航天航天大学出版社

**参考书:**

《矩阵论教程》张绍飞、赵迪编著　机械工业出版社

《矩阵论》　戴华编著　科学出版社

**经典教材:** Matrix Analysis 2nd Edition, R.A. Horn, C.R. Johnson, Cambridge University Press, 2013.

**扩展教材:** 矩阵分析与应用（第二版）张贤达编著, 清华大学出版社，2013.

# 考试成绩

MOOC+课堂随机测试 15%

要求:1. 研究生智慧教育平台，选课;

2. 视频+每章习题;

3. 请大家积极反馈视频、习题、课本中的错误

矩阵论在XX中的应用/介绍报告1篇 15%

要求:1. 中文，可理论分析、数值计算、或算法等;

2. 字数不超过800字或不超过2页A4纸;

3. 格式可参考科技论文;

注意:1. 期末考试前提交纸质版和电子版;

2. 抄袭和雷同者0分。

期末考试 70%

# 研究生智慧教育平台

1



2

https://www.gradsmartedu.cn/


研究生教育
首页
矩阵理论
课程筛选
搜索到 9 门 “矩阵理论”相关课程
上课状态
全部
即将开课
开课中
已结课
学科门类
矩阵理论
矩阵理论
王磊 刘克新 等
北京航空航天大学
248 人
通过学习本课程，理解并掌握数学与自然科学的基本概念和方法，加深对数学与理论创新、工程实际需求紧密结合的认识，提高工科学生利用数学工具解决科学与工程问题的能力。


研究生教育
首页
搜索学科/高校名称
矩阵理论
2023秋
开课时间：2023-07-27 至2024-01-23
248人已报名
去学习
课程介绍
通过学习本课程，理解并掌握数学与自然科学的基本概念和方法，加深对数学与理论创新、工程实际需求紧密结合的认识，提高工科学生利用数学工具解决科学与工程问题的能力。
矩阵理论

# 其 它

1，讲课本上有的，也会适当讲一些课本上没有的

2，答疑，可反馈给课代表，也可反馈到群里

3，上课口误，大家随时纠正

4，正确看待“显然”、“易得”等

# 第一章 线性空间引论

- □ 线性空间
- □ 线性子空间
- □ 基与坐标
- □ 内积空间
- □ 直和与投影
- □ 应用：多项式插值

# 第一章 线性空间引论

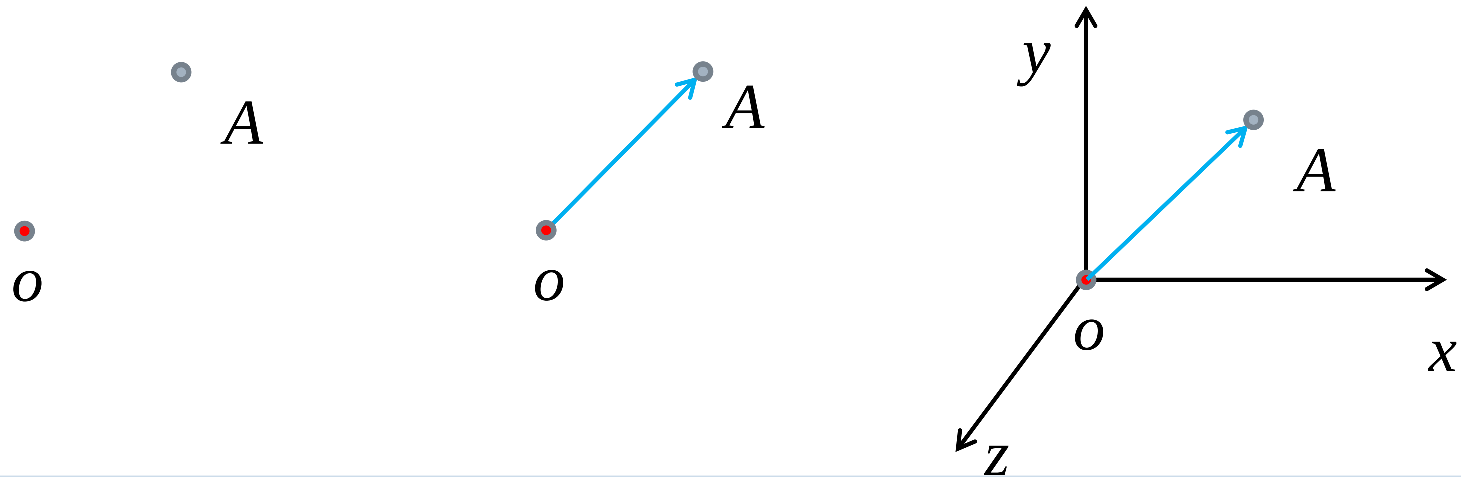
## 1.1 线 性 空 间

线性空间所涵盖的范围，远超大家的想象

从向量空间到线性空间（回顾）

以三维空间为例:

- 空间的任一点与向量一一对应关系;
- 空间的任一点与三元有序数组一一对应.



**定义1.1.1（$n$维向量）** 若$n$维向量写成

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

的形式, 称为$n$维**列向量**; 若$n$维向量写成

$$[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$$

的形式, 称为$n$维**行向量**. 这$n$个数称为该向量的$n$个**分量**, 其中$\alpha_i$称为第$i$个分量.

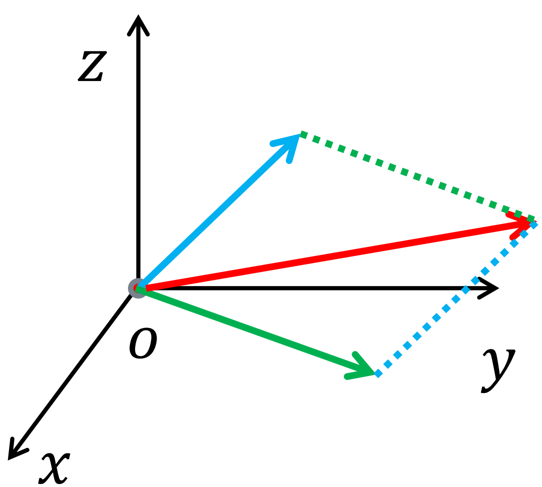
设$\boldsymbol{\alpha}=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^T$和$\boldsymbol{\beta}=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]^T$, $k\in\mathbb{R}$, 则有加法运算和数乘运算

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \alpha_2+\beta_2\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{bmatrix}, k\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}k\alpha_1\\ k\alpha_2\\ \vdots\\ k\alpha_n\end{bmatrix}$$

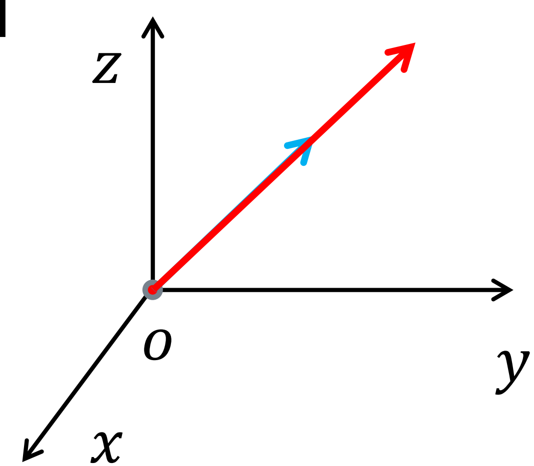
设$\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T$, $\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^T$, $k\in\mathbb{R}$,

则有加法运算和数乘运算

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{bmatrix},$$




$$k\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{bmatrix}$$



设$\boldsymbol{\alpha}=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^T$和$\boldsymbol{\beta}=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]^T$, $k\in\mathbb{R}$, 则有加法运算和数乘运算

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \alpha_2+\beta_2\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{bmatrix}, k\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}k\alpha_1\\ k\alpha_2\\ \vdots\\ k\alpha_n\end{bmatrix}$$

**定义1.1.2（向量空间）**设$V$是$n$维实向量的非空集合, 若$V$对向量的加法和数乘两种运算都封闭, 即对于任意向量$\alpha,\beta\in V$和$k\in\mathbb{R}$, 都有$\alpha+\beta\in V$和$k\alpha\in V$则称集合$V$为向量空间.

**例1.1.1** 定义集合$V_1=\{[0,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^T|\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{R}\}$

**例1.1.1** 定义集合$V_1=\{[0,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^T|\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{R}\}$, 对集合$V_1$中的任意向量$\boldsymbol{\alpha}=[0,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^T$和$\boldsymbol{\beta}=[0,\beta_2,\cdots,\beta_n]^T$, 以及任意$k\in\mathbb{R}$, 有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}0\\ \alpha_2+\beta_2\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{bmatrix}\in V_1,\ k\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}0\\ k\alpha_2\\ \vdots\\ k\alpha_n\end{bmatrix}\in V_1$$

所以$V_1$对向量的加法和数乘运算封闭. 由向量空间定义知, $V_1$是向量空间.

**例1.1.2** 集合$V_2=\{[1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^T|\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{R}\}$, 对集合$V_2$中的任意向量$\boldsymbol{\alpha}=[1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^T$和$\boldsymbol{\beta}=[1,\beta_2,\cdots,\beta_n]^T$, 以及任意$k\in\mathbb{R}$, 有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}2\\ \alpha_2+\beta_2\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{bmatrix}\notin V_2, k\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}k\\ k\alpha_2\\ \vdots\\ k\alpha_n\end{bmatrix}\notin V_2$$

所以集合$V_2$对向量的加法和数乘运算不封闭. 由向量空间定义知, $V_2$不是向量空间.

## 从向量空间到线性空间

向量空间中的实数域扩展为一般的数域

向量集合扩展为一般的非空集合

向量加法和数乘扩展为一般的“加法”和“数乘”

**定义1.1.3（数域）**设$F$是非空数集, 若$F$中任意两个数的和、差、积、商（除数不为0）仍在该数集, 即对四则运算封闭, 称该数集$F$为一个数域.

**例如:** 实数集:$\mathbb{R}$、复数集:$\mathbb{C}$、有理数集$\mathbb{Q}$;
自然数集$\mathbb{N}$、整数集$\mathbb{Z}$.

思考1：一个数域一定包含 0 和 1，有理数集是最小的数域

思考2：无理数集不构成数域

**定义1.1.3（数域）** 设$F$是非空数集, 若$F$中包含 0 和 1，并且任意两个数的和、差、积、商（除数不为0）仍在该数集, 即对四则运算封闭, 称该数集$F$为一个数域.

思考3:集合$\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}|a,b\in\mathbb{Q}\}$是数域？

**定义1.1.4(加群)** 在**非空集合**$V$上定义一种代数运算，称之为**加法**(记为“$+$”)，使得$\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$都有$V$中唯一元素$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$与之对应，该元素称为$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的和，且满足如下性质：

$+: \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$

（1）交换律：$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；

（2）结合律：$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$；

（3）存在零元素$\boldsymbol{\theta} \in V$使得$\forall \boldsymbol{\alpha} \in V, \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\alpha}$；

（4）$\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$，存在负元素$-\boldsymbol{\alpha}$使得$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\theta}$；

称$V$在加法运算下构成一个**加群**，记为$(V,+)$.

**定义1.1.5（线性空间）** 设$(V,+)$是一个加群, $F$是一个数域. 若有$F$对$V$的数乘规则, 使得$\forall \lambda \in F$, $\boldsymbol{u} \in V$, 有$V$中唯一元素与之对应, 记为$\lambda \cdot \boldsymbol{u}$, 且此规则满足以下性质:

$\cdot : \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$

（1）$\lambda(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\lambda\boldsymbol{u}+\lambda\boldsymbol{v}$, 数乘对加法分配律;

（2）$(\lambda+\mu)\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}+\mu\boldsymbol{u}$, 数乘对数的加法分配律;

（3）$\lambda(\mu\boldsymbol{u})=(\lambda\mu)\boldsymbol{u}$, 数乘的结合律;

（4）$1\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$; 数乘的初始条件;

此时, $V$称为数域$F$上的线性空间, $V$中元素称为向量, $F$中元素称为标量.

当$F=\mathbb{R}$时, 称为**实线性空间**; 当$F=\mathbb{C}$时, 称为**复线性空间**.

先证明加法与数乘封闭，再证明加群与线性空间的八条性质

**例1.1.3** 设$V=\mathbb{R}^{+}$, $F=\mathbb{R}$, 定义$V$中加法运算为

$$x\oplus y=xy$$

定义$V$中元素与$F$中数的数乘为

$$k\cdot x=x^{k}$$

突破传统“线性”的印象

其中, $x,y\in V$, $k\in F$. 证明$(V,\oplus,\cdot)$是实线性空间.

若$V=\mathbb{R}$, $F=\mathbb{R}$, $x\oplus y=xy$, $k\cdot x=|x|^{k}$,

$(V,\oplus,\cdot)$是否实线性空间

**例1.1.4** 常见的线性空间包括以下例子.

（1）向量空间$\mathbb{R}^n(n \geq 1)$是线性空间的首个例子.

（2）矩阵空间: 设$V$为$\mathbb{C}$上所有$m \times n$矩阵构成的集合, 即$V = \{(a_{ij})_{m\times n} | a_{ij} \in \mathbb{C}\}$. 在矩阵加法和数乘运算下, 集合$V$构成$\mathbb{C}$上的线性空间, 记为$\mathbb{C}^{m\times n}$. 类似的可定义$\mathbb{R}^{m\times n}$.

澄清一个概念：数域$F$中的数，与构成$V$中元素的“数”，不是必然一致的。

**例1.1.4** 常见的线性空间包括以下例子.

（3）正弦函数集合 （提示：三角函数和差公式）

$$S_{[x]} = \{a\sin(x+b), a, b \in \mathbb{R}\}$$

在函数加法和乘法运算下 $S_{[x]}$ 构成$\mathbb{R}$上的线性空间.

留作作业

**例1.1.4** 常见的线性空间包括以下例子.

（4）一元多项式集合

$$P_n(x) = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i | a_i \in \mathbb{C}\}$$

集合$P_n(x)$构成$\mathbb{C}$上的线性空间, 称为多项式空间.

（5）分别定义在区间$[a, b]$上全体多项式集合$S_1$, 全体可微函数集合$S_2$, 全体连续函数集合$S_3$, 全体可积函数集合$S_4$, 全体实函数集合$S_5$, 则

$$S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset S_4 \subset S_5$$

且这五个集合均为$\mathbb{R}$上的线性空间.

解集非空

**例1.1.4 常见的线性空间包括以下例子.**

（6）设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 齐次线性方程组$A\boldsymbol{x} = 0$的解集构成$\mathbb{C}$上的线性空间, 而非齐次线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的解集则不构成$\mathbb{C}$上的线性空间.

（7）设$S$是所有双边序列集合, 其中双边序列

$$\{x_k | x_k \in \mathbb{R}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$$

若序列$\{y_k\}$是集合$S$中的元素, 定义$\{x_k\}$与$\{y_k\}$的和为$\{x_k + y_k\}$, 数乘$c\{x_k\}$为$\{cx_k\}$, 则$S$是$\mathbb{R}$上的线性空间, 我们称为离散时间信号空间.

注4: 设$V$是数域$F$上的线性空间, 有

（1）零向量是唯一的;

（2）任一向量的负向量是唯一的;

（3）对任意$k \in F$和$\boldsymbol{\alpha} \in V$,

$$0\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}, (-1)\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha}, k\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta};$$

（4）若$k\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}$, 则$k = 0$或$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}$.

留作作业

注5: 线性空间中的两种运算—加法和数乘—合称为**线性运算**.

**线性组合和线性表示**: 若线性空间$V$中的向量$\boldsymbol{\alpha}$可由$V$中一组向量$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$通过线性运算获得, 即存在$k_i \in F$, $i = 1, \cdots, n$满足

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则称向量$\boldsymbol{\alpha}$是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$的一个**线性组合**, 或者说$\boldsymbol{\alpha}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$**线性表示**.

注: $n$是有限的

**例1.1.5** 试判断矩阵$A^2$是否可以由$A$和$I$线性表示，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$$

**例1.1.5** 试判断矩阵$A^2$是否可以由$A$和$I$线性表示，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$$

解: 由于

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}=2A-I$$

因此, 矩阵$A^2$可以由$A$和$I$线性表示.

思考：对于一般的$n$阶复方阵$A$, $A^n$是否可以写成$I(A^0), A^2, \cdots, A^{n-1}$的线性组合呢？

# 线 性 子 空 间

**定义1.2.1(子空间)** 设$V$是$F$上的线性空间，$W$是$V$的非空子集. 若$W$的向量关于$V$的加法和数乘运算也构成$F$上的线性空间，则称$W$是$V$的子空间.

**例1.2.1** 取定矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$，定义集合

$$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

**定义1.2.1(子空间)** 设$V$是$F$上的线性空间,$W$是$V$的非空子集. 若$W$的向量关于$V$的加法和数乘运算也构成$F$上的线性空间,则称$W$是$V$的子空间.

**例1.2.1** 取定矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$,定义集合

$$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

则集合$W$是$\mathbb{C}$上的线性空间.

又知$W$是向量空间$\mathbb{C}^n$的子集,故$W$是$\mathbb{C}^n$的子空间.

**例1.2.2** 在线性空间$V$中，仅包含单个零向量的集合是线性空间吗？

**例1.2.2** 在线性空间$V$中，仅包含单个零向量的集合是线性空间吗？

该集合是线性空间，我们称之为零子空间，记为$\{\boldsymbol{\theta}\}$（注意与零元素$\boldsymbol{\theta}$的区别）.

空间$V$本身也是$V$的一个子空间. 子空间$V$和$\{\boldsymbol{\theta}\}$称为$V$的平凡子空间.

$\{\boldsymbol{\theta}\}$为元素最少的空间

**例1.2.3** 向量空间$\mathbb{R}^2$是$\mathbb{R}^3$的子空间吗？

因为$\mathbb{R}^3$中的向量是3元有序数组，而$\mathbb{R}^2$中的向量为2元有序数组，故$\mathbb{R}^2$不是$\mathbb{R}^3$的子集.

**例1.2.3** 向量空间$\mathbb{R}^2$是$\mathbb{R}^3$的子空间吗？

因为$\mathbb{R}^3$中的向量是3元有序数组，而$\mathbb{R}^2$中的向量为2元有序数组，故$\mathbb{R}^2$不是$\mathbb{R}^3$的子集.

**例1.2.4**注意集合$W=\{[\alpha_1,\alpha_2,0]^T,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\}$是$\mathbb{R}^3$的一个子集，尽管它很像$\mathbb{R}^2$，但$W$是$\mathbb{R}^3$的一个子空间.

思考：$W'=\{[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^T,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$且$\alpha_3\neq 0\}$是$\mathbb{R}^3$的子空间吗？

回答：$W'$不是线性空间.

**例1.2.2** 线性空间$V$的仅由零向量组成的集合是$V$的一个子空间，称为零子空间，记为$\{\boldsymbol{\theta}\}$(注意与零元素$\boldsymbol{\theta}$的区别); 线性空间$V$本身也是$V$的一个子空间. 子空间$V$和$\{\boldsymbol{\theta}\}$称为$V$的平凡子空间.

思考： 子空间一定包含零元素. $\{\boldsymbol{\theta}\}$是最小的子空间. 区分零子空间和空集、平凡子集与平凡子空间.

**例1.2.3** 向量空间$\mathbb{R}^2$是$\mathbb{R}^3$的子空间吗？

**例1.2.4** $\mathbb{R}^3$ 中不通过原点的平面是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间吗？

**定理1.2.1（子空间判别法）** 设$V$是$F$上的线性空间，$W$是$V$的一个非空子集. 以下命题等价：

（1）$W$是$V$的子空间.

（2）a $\forall k \in F, \boldsymbol{\alpha} \in W$, 有$k\boldsymbol{\alpha} \in W$;

b $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in W$, 有$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in W$.

（3）$\forall k, l \in F$和$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in W$, 有$k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\beta} \in W$.

注1: 检验子空间首先观察零向量是否存在于$W$中.

注2：子空间是凸集

**定理1.2.1（子空间判别法）**设$V$是$F$上的线性空间, $W$是$V$的一个非空子集. 以下命题等价：

（1）$W$是$V$的子空间.

（2）a $\forall k \in F, \boldsymbol{\alpha} \in W$, 有$k\boldsymbol{\alpha} \in W$;

b $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in W$, 有$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in W$.

证明：$W$是$V$的一个非空子集，则$W$中的加法和数乘满足加法的交换律、结合律，数乘的结合律、数乘对加法的分配率、数乘对数的加法的分配率以及数乘的初始条件.

**$W$存在零元和负元.**

**例1.2.5** 线性滤波器常用$n$阶线性差分方程描述. 考查齐次线性差分方程

$$u_{k+n}+a_{n-1}u_{k+n-1}+\cdots+a_1u_{k+1}+a_0u_k=0$$

解集非空

该差分方程的解集$\tilde{S}$是线性空间吗？

$\tilde{S}$信号空间$S$的子空间.

**例1.2.6** 设$W_1$和$W_2$是$V$的子空间, 定义三个集合

$$W_1 \cap W_2 = \{x \in V | x \in W_1 \text{且} x \in W_2\}$$

$$W_1 \cup W_2 = \{x \in V | x \in W_1 \text{或} x \in W_2\}$$

$$W_1 + W_2 = \{x_1 + x_2 | x_1 \in W_1, x_2 \in W_2\}$$

试判断它们是否是$V$的子空间.

所有能表示为x1与x2的向量集合，因此为整个R3空间

在$\mathbb{R}^3$空间中,

（1） $W_1 = xoy$平面, $W_2 = yoz$平面；

（2） $W_1 = x$轴, $W_2 = yoz$平面

考察集合$W_1 \cap W_2$, $W_1 + W_2$, $W_1 \cup W_2$.

**定理1.2.2（和空间与交空间）** 设$W_1$和$W_2$是数域$F$上线性空间$V$的子空间, 则集合

$$W_1 \cap W_2 \triangleq \{\alpha | \alpha \in W_1, \alpha \in W_2\}$$

$$W_1 + W_2 \triangleq \{\alpha_1 + \alpha_2 | \alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2\}$$

是$V$的子空间, 分别称为$W_1$与$W_2$的交（或交空间）与和（或和空间）.

证明：显然两个集合非空.

**例1.2.7** 取$V=\mathbb{R}^{n\times n}$, 定义

$$W_1=\{A\in V|A^T=A\}$$

$$W_2=\{A\in V|A^T=-A\}$$

验证$W_1$和$W_2$是$V$的线性子空间, 且$V=W_1+W_2$.

证明:

2*A=(AT+A)+(-AT+A)

$V\supset W_1+W_2$； $V\subset W_1+W_2$

注4: 设$V$是数域$F$上的线性空间, 有

（4）若$k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}$, 则$k=0$或$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}$.

$W$为$V$的子空间，则$W$中元素要么1个，要么无穷多个！

$$W=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n|A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$$

## 子空间的表示方法:

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$F$上线性空间$V$的一向量组, 记

$$W=\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n|k_i\in F,i=1,\cdots,n\}$$

**定理1.2.3** 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是线性空间$V$的一组向量, 由上式定义的集合$W$是$V$的一个线性子空间, 并称$W$是由向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$张成（或生成）的子空间, 记为$\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$.

上述方法解决了抽象空间中子集的描述.

**定义1.2.2（矩阵零空间）**设$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则矩阵$A$的零空间（或核空间）定义为齐次线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的解集，记为

$$N(A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

**定义1.2.3（矩阵列空间）**设$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则矩阵$A$的列空间（或值空间）是由$A$的列的所有线性组合组成的集合，即

$$R(A) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^m | \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n\}$$

若记$A = [\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n]$, 则$R(A) = \mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$

**例1.2.8** 求矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 1\end{bmatrix}$的零空间和列空间.

**例1.2.8** 求矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 1\end{bmatrix}$的零空间和列空间.

解：$R(A)=\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,-2]^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,3]^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[2,1]^T$.

对矩阵$A$进行初等变换得

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

由此，$A\boldsymbol{x}=0$的一个基础解系为$\boldsymbol{\beta}=[1,1,-1]^T$，故$N(A)=\mathrm{span}(\boldsymbol{\beta})$.

思考1：$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，其零空间和列空间有可能相等吗？若相同，矩阵$A$满足什么性质

A^2=0

P26,N(A)与R（AT）在任何情况下秩的加和才等于n

**留作作业**

矩阵的零空间与列空间的秩加和不等于n
欧氏空间[1,-1;1,-1]，Cn空间[1,i;i,-1]

思考2：$R(A) = \mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 还可以再化简吗？