第三章 矩阵分解

3.8 Jordan 分 解

第三章 矩阵分解

思考:一般的复方阵相似的最简阵是什么?

等价问题:线性变换T在基下的矩阵的最简形式是什么?

定义3.8.1(λ矩阵) 以λ多项式为元素的矩阵称为**λ矩阵**, 记为$A(\lambda)$, 即$A(\lambda)=\left[a_{ij}(\lambda)\right]_{m\times n}$, $a_{ij}(\lambda)\in P_n(\lambda)$.

例3.8.1 判断$A(\lambda)$和$B(\lambda)$是否为λ矩阵，其中

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$B(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ \lambda^{-2} & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$$

解: $A(\lambda)$各元素均为λ多项式，故$A(\lambda)$是λ矩阵；$B(\lambda)$元素λ^{-2}不是λ多项式，故$B(\lambda)$不是λ矩阵.

注1: 数字矩阵是特殊的λ矩阵; 复方阵A的特征矩阵$\lambda I - A$是λ矩阵.

注2: λ矩阵和数字矩阵一样有加、减、乘等运算且具有相同的运算规律. 同样可定义正方λ矩阵的行列式、子式及λ矩阵的秩等.

定义3.8.2(λ矩阵的秩) λ矩阵$A(\lambda)$中非零子式的最高阶数r定义为$A(\lambda)$的**秩**, 记为$\mathrm{rank}\big(A(\lambda)\big)=r$.

例3.8.2 求$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda+1\end{bmatrix}$的行列式和秩.

解: 由于$|A(\lambda)|=\lambda(\lambda+1)$, 故$\mathrm{rank}\big(A(\lambda)\big)=2$.

注3: 在λ矩阵理论中,"当$\lambda=0$或$\lambda=-1$时, λ矩阵的秩为1, 其余情况矩阵的秩为2",这种说法是错误的.

例3.8.3 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则$f_A(\lambda) = |\lambda I - A|$是关于$\lambda$的一元$n$次多项式. 因此, A的特征矩阵$\lambda I - A$的秩为n, 即$\lambda I - A$总是满秩的.

定义3.8.3(**λ矩阵的逆矩阵**) 设$A(\lambda)$是n阶λ方阵, 若存在n阶λ方阵$B(\lambda)$满足$A(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)A(\lambda) = I$, 则称$\lambda$矩阵$A(\lambda)$是**可逆**的, 并称$B(\lambda)$为$A(\lambda)$的**逆矩阵**, 记作$A(\lambda)^{-1}$.

思考: 在数字方阵中, 满秩和可逆是等价的. 这一结论适用于λ矩阵吗?

再次考察例3.8.2 $A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda+1\end{bmatrix}$.

由例3.8.2可知，$A(\lambda)$满秩，若$A(\lambda)$可逆，则其逆矩阵应为

$$B(\lambda)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\lambda} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\lambda+1}\end{bmatrix}$$

定理3.8.1 λ方阵$A(\lambda)$可逆的充分必要条件是其行列式$|A(\lambda)|$为非零常数.

证明: 必要性. 若存在$B(\lambda)$使得$A(\lambda)B(\lambda)=I_n$, 则

$$|A(\lambda)||B(\lambda)|=1$$

又因$|A(\lambda)|,|B(\lambda)|$均为$\lambda$的多项式, 故$|A(\lambda)|$只能是零次多项式, 即$|A(\lambda)|$为非零常数.

充分性. 设$|A(\lambda)|=r\neq 0$, $A^*(\lambda)$为$A(\lambda)$的伴随矩阵, 则

$$A(\lambda)A^*(\lambda)=A^*(\lambda)A(\lambda)=rI_n$$

取$B(\lambda)=\frac{1}{r}A^*(\lambda)$即可.

定义3.8.4(初等变换) 下列三种变换称为λ矩阵的**初等变换**:

（1）λ矩阵的两行/列互换位置；

（2）λ矩阵的某一行/列乘以非零常数k；

（3）λ矩阵的某一行/列的$\varphi(\lambda)$倍加到另一行/列，其中$\varphi(\lambda) \in P_n(\lambda)$.

对单位阵施行三种初等变换得到三种初等矩阵：

1）任两行/列互换（$P(i,j)$）；

$$P(i,j)=\begin{array}{c|c}\left[\begin{matrix}1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & & \cdots & & 1 & \cdots & & \cdots \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & \cdots & & 0 & \cdots & & \cdots \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1\end{matrix}\right] & \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{第i行} \\ \\ \\ \\ \text{第j行} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\end{array}$$

对单位阵施行三种初等变换得到三种初等矩阵：

2）用不为零的数k乘某行/列（$P(i(k))$）；

$$
P(i(k)) = \begin{array}{@{}c@{}l}
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 & & & k & & \cdots & & \cdots & \cdots \\
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & 1
\end{array}\right]
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \text{第i行} \\ \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}
$$

对单位阵施行三种初等变换得到三种初等矩阵：

3) 用$\varphi(\lambda)$乘j行/列并加到第i行/列上去

（$P(i,j(\varphi))$）.

$$P(i,j(\varphi))=\left[\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & \cdots & & \varphi(\lambda) & \cdots & & \cdots \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & & & 1 & \cdots & & \cdots \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]\begin{array}{l}
\\
\\
\\
\text{第i行}\\
\\
\\
\\
\text{第j行}\\
\\
\\
\\
\end{array}$$

注3: 与数字矩阵一样,对λ矩阵作一次初等行变换意味着左乘相应的初等矩阵,对λ矩阵作一次初等列变换意味着右乘相应的初等矩阵.

注4: 由于三种初等矩阵的行列式均为非零常数,故初等矩阵都是可逆的,且对λ矩阵作初等变换不改变它的秩.

定义3.8.5(行列式因子) 设λ矩阵$A(\lambda)$的秩为r, 对于正整数$1 \le k \le r$, $A(\lambda)$的全部k阶子式的首1最大公因式称为k阶行列式因子, 记为$D_k(\lambda)$.

例3.8.4 求$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$的各阶行列式因子.

解: 一阶子式共有9个, 经计算得$D_1(\lambda) = 1$;

二阶子式共有9个, 经计算得$D_2(\lambda) = \lambda$;

$$D_3(\lambda) = |A(\lambda)| = \lambda^3 + \lambda^2.$$

思考：λ矩阵能否通过初等变换化成标准形呢？

定理3.8.2(Smith标准形) 设λ矩阵$A(\lambda)$的秩为r，则

$$A(\lambda) \cong \left[\begin{array}{ccc|c} d_1(\lambda) & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & d_r(\lambda) & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right]$$

式中，$d_i(\lambda)$是首1多项式，且$d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$，称此标准形为$A(\lambda)$的Smith标准形.

注5：$A(\lambda)$不一定是方阵，故Smith标准形不一定是对角阵.

例3.8.4(续) 求$A(\lambda)=\begin{bmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{bmatrix}$Smith标准形.

解: 采用初等变换法

$$A(\lambda)\xrightarrow{\text{列}_1+\text{列}_3}\begin{bmatrix}1 & \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 1 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{列}_2+\text{列}_1(-\lambda^2)}\begin{bmatrix}1 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 1 & 0 & -\lambda^2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{列}_3+\text{列}_1(-\lambda)}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 1 & 0 & -\lambda^2-\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}_3+\text{行}_1(-1)}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda\end{bmatrix}$$

例3.8.4(续)

解: 采用初等变换法

$$A(\lambda)\xrightarrow{列_3+列_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow{列_{3(-1)}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda\end{bmatrix}$$

行列式因子:

$$D_1(\lambda)=1$$

$$D_2(\lambda)=\lambda$$

$$D_3(\lambda)=\lambda^3+\lambda^2$$

Smith标准形与行列式因子之间的关系：

$$D_1(\lambda) = d_1(\lambda)$$
$$D_2(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)$$
$$\vdots$$
$$D_r(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdot\cdots\cdot d_r(\lambda)$$

或

$$d_1(\lambda) = D_1(\lambda)$$
$$d_2(\lambda) = D_2(\lambda)/D_1(\lambda)$$
$$\vdots$$
$$d_r(\lambda) = D_r(\lambda)/D_{r-1}(\lambda)$$

推论3.8.1 λ矩阵的Smith标准形是唯一的.

定义3.8.6(不变因子) 在λ矩阵$A(\lambda)$的Smith标准形中, $d_1(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)$由$A(\lambda)$唯一确定的, 称为$A(\lambda)$的不变因子.

例3.8.4(续) 求$A(\lambda)=\begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$不变因子.

$$A(\lambda)\cong\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix} d_1(\lambda)=1 \\ d_2(\lambda)=\lambda \\ d_3(\lambda)=\lambda(\lambda+1) \end{matrix}$$

例3.8.4(续)

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

$$d_1(\lambda)=1=\lambda^0(\lambda+1)^0$$

$$d_2(\lambda)=\lambda=\lambda^1(\lambda+1)^0$$

$$d_3(\lambda)=\lambda(\lambda+1)=\lambda^1(\lambda+1)^1$$

定义3.8.7(初等因子) 设λ矩阵$A(\lambda)$的不变因子为$d_1(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)$,且有分解式

$$\begin{cases} d_1(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{e_{11}}(\lambda-\lambda_2)^{e_{12}}\cdot\cdots\cdot(\lambda-\lambda_s)^{e_{1s}} \\ d_2(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{e_{21}}(\lambda-\lambda_2)^{e_{22}}\cdot\cdots\cdot(\lambda-\lambda_s)^{e_{2s}} \\ \vdots \\ d_r(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{e_{r1}}(\lambda-\lambda_2)^{e_{r2}}\cdot\cdots\cdot(\lambda-\lambda_s)^{e_{rs}} \end{cases}$$

则所有幂指数大于零的因子$\left(\lambda-\lambda_j\right)^{e_{ij}}$，$i=1,\cdots,r$, $j=1,\cdots,s$,统称为λ矩阵$A(\lambda)$的**初等因子**(组).

例3.8.4(续) 求$A(\lambda)=\begin{bmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{bmatrix}$初等因子.

解:

$$A(\lambda)\cong\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)\end{bmatrix}\Longrightarrow \begin{array}{l} d_1(\lambda)=1 \\ d_2(\lambda)=\lambda \\ d_3(\lambda)=\lambda(\lambda+1)\end{array}$$

根据初等因子定义知,$A(\lambda)$的初等因子为

$$\lambda,\lambda,\lambda+1$$

注6: 初等因子组可能存在相同的因子.

例3.8.5 求$A(\lambda)$的Smith标准形、不变因子和初等因子，其中

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda-a & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda-a & -1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda-a & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-a\end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$|-1|,\ \begin{vmatrix}-1 & 0\\ \lambda-a & -1\end{vmatrix},\ \cdots,\ \begin{vmatrix}-1 & 0 & \cdots & 0\\ \lambda-a & -1 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda-a & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \lambda-a & -1\end{vmatrix}$$

$$D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=\cdots=D_{n-1}(\lambda)=1,D_n(\lambda)=(\lambda-a)^n$$

例3.8.5(续)

分析: $A(\lambda)$的不变因子为

$$d_1 = d_2 = \cdots = d_{n-1} = 1$$
$$d_n = |A(\lambda)| = (\lambda - a)^n$$

其Smith标准形为

$$\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & (\lambda-a)^n \end{bmatrix}$$

相应的初等因子为$(\lambda - a)^n$.

例3.8.6 求$A(\lambda)=\mathrm{diag}(\lambda^2(\lambda+1),\lambda(\lambda+1)^2,0)$的初等因子.

解: 先求$A(\lambda)$的行列式因子

$D_1(\lambda)=\lambda(\lambda+1)$, $D_2(\lambda)=\lambda^3(\lambda+1)^3$, $D_3(\lambda)=0$.

所以$A(\lambda)$的不变因子为

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=\lambda(\lambda+1),$$

$$d_2(\lambda)=D_2(\lambda)/D_1(\lambda)=\lambda^2(\lambda+1)^2,$$

且$A(\lambda)$的初等因子为$\lambda,\lambda+1,\lambda^2,(\lambda+1)^2$.

定义3.8.8(λ矩阵相抵) 若λ矩阵$A(\lambda)$经过有限次初等变换化为$B(\lambda)$,则称$A(\lambda)$与$B(\lambda)$**相抵**,记为

$$A(\lambda) \cong B(\lambda)$$

例3.8.7 判断$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$和$B(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda^2\end{bmatrix}$是否相抵.

解: $A(\lambda)$和$B(\lambda)$均为Smith标准形,故$A(\lambda)$和$B(\lambda)$不相抵.

注7: λ矩阵相抵则其秩相同,反之则不然,这**与数字矩阵是有区别的**.

定理3.8.3 相抵的λ矩阵具有相同的Smith标准形、秩、各阶行列式因子、不变因子和初等因子.

注8: λ矩阵作初等变换时, 不改变它的Smith标准形、秩、各阶行列式因子、不变因子以及初等因子.

思考:

1. 具有相同秩的λ矩阵相抵吗？
2. 具有相同各阶行列式因子的λ矩阵相抵吗？ 可以？
3. 具有相同不变因子的λ矩阵相抵吗？ 推论3.8.2，可以
4. 具有相同初等因子的λ矩阵相抵吗？ 例3.8.9，需要补充阶数相等

推论3.8.2 λ矩阵$A(\lambda)$与$B(\lambda)$相抵当且仅当它们具有相同的各阶行列式因子，当且仅当它们具有完全一致的不变因子.

思考：4. 具有相同的初等因子的λ矩阵相抵吗？

例3.8.8判断$A(\lambda)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$和$B(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$是否相抵.

解：$A(\lambda)$和$B(\lambda)$均是Smith标准形.

尽管其初等因子相同，都是λ，但两者Smith标准形不同，故$A(\lambda)$和$B(\lambda)$不相抵.

定理3.8.4 λ矩阵$A(\lambda)\cong B(\lambda)$当且仅当它们有完全相同的初等因子，且$\operatorname{rank}\big(A(\lambda)\big)=\operatorname{rank}\big(B(\lambda)\big)$.

例3.8.6(续) 求$A(\lambda)=\operatorname{diag}(\lambda^2(\lambda+1),\lambda(\lambda+1)^2,0)$的初等因子和Smith标准形.

分析: $A(\lambda)$的初等因子为$\lambda,\lambda+1,\lambda^2,(\lambda+1)^2$，恰是$A(\lambda)$对角线元素分解出的一次因子的幂.

小结: λ对角阵的对角线元素分解出的一次因子幂的集合就是该矩阵的初等因子.

思考: 能否利用初等因子直接求Smith标准形呢?

例 3.8.6 (续) 求 $A(\lambda)=\mathrm{diag}(\lambda^2(\lambda+1),\lambda(\lambda+1)^2,0)$ 的Smith标准形.

分析: $A(\lambda)$的Smith标准形形如

$$A(\lambda)\cong\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0\\ 0 & d_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

利用初等因子$\lambda,\lambda+1,\lambda^2,(\lambda+1)^2$直接构建$\lambda$矩阵的不变因子

$$d_2=\lambda^2(\lambda+1)^2$$

$$d_1=\lambda(\lambda+1)$$

定理3.8.5 复方阵A和B相似当且仅当它们的特征矩阵相抵.

小结:对于数字方阵A和B,有

$$A \sim B \iff (\lambda I - A) \cong (\lambda I - B)$$

$$\iff \lambda I - A\text{与}\lambda I - B\text{有相同的不变因子}.$$

思考:$A \sim B \iff \lambda I - A$与$\lambda I - B$有相同的初等因子成立吗?

小结:对于数字方阵A和B,有

$$A \sim B \iff \lambda I - A\text{与}\lambda I - B\text{有相同的初等因子}.$$

思考：方阵A可对角化的充要条件？

定理3.6.1

（1）A是单纯矩阵；

（2）A有n个线性无关的特征向量；

（3）特征值$\lambda_i(i=1,\cdots,m)$的代数重数等于其几何重数；

（4）$\sum_{i=1}^{m}\dim E(\lambda_i)=n$；

（5）最小多项式$m_A(\lambda)$无重根.

思考：方阵A可对角化的充要条件？

$$A \sim B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda - \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda - \lambda_n \end{bmatrix}$$

推论3.8.3 复方阵A是单纯矩阵的充分必要条件是它的特征矩阵$\lambda I - A$的初等因子是一次的.

推论3.8.4 复方阵A是单纯矩阵的充分必要条件是它的特征矩阵$\lambda I - A$的不变因子无重根.

例3.8.8 判断矩阵$A=\begin{bmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & a & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & a \end{bmatrix}_{n\times n}$是否为单纯矩阵$(n>1)$.

解: $\lambda I-A=\begin{bmatrix} \lambda-a & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda-a & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-a \end{bmatrix}$

$\lambda I-A$的初等因子为$(\lambda-a)^n$，即A不是单纯阵.

思考：一般的复方阵相似的最简矩阵是什么？

等价问题：线性变换T在基下的矩阵的最简形式是什么？

定理3.8.5 复方阵A和B相似当且仅当它们的特征矩阵相抵.

思路：寻找与复方阵A相似的最简矩阵B，可先找到与$\lambda I-A$相抵的最简λ矩阵$\lambda I-B$；

寻找最简λ矩阵$\lambda I-B$可根据$\lambda I-A$的初等因子进行构造.

定义3.8.9(Jordan块) 设复方阵A的特征阵$\lambda I - A$的初等因子为$(\lambda-\lambda_1)^{n_1},(\lambda-\lambda_2)^{n_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$. 对$(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$作$n_i$阶方阵

$$J_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$$

则称矩阵$J_i(i=1,\cdots,s)$为A的**Jordan块**.

例3.8.9 判断下列矩阵是否为Jordan块，其中

$$A_1=\begin{bmatrix} \mathrm{i}+1 & 1 & \\ & \mathrm{i}+1 & 1 \\ & & \mathrm{i}+1 \end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3=\begin{bmatrix} 3 & 1 & & \\ & 3 & & \\ & & 3 & 1 \\ & & & 3 \end{bmatrix}, A_4=\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 3 & 1 \\ & & & 3 \end{bmatrix}$$

解: 由Jordan块的定义知，只有A_1是Jordan块；

A_2、 A_3和A_4均包含2个Jordan块.

例3.8.10 求Jordan块$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}$ 的最小多项式.

解: J_i的特征多项式$(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$,其最小多项式可能为

$$\lambda-\lambda_i, (\lambda-\lambda_i)^2, \cdots, (\lambda-\lambda_i)^{n_i}$$

经计算知,对$j=1,2,\cdots,n_i-1$, $(\lambda_i I-J_i)^j \neq 0$. 因此,$J_i$的最小多项式为

$$m_{J_i}(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$$

注9: 任一Jordan块的最小多项式等于它的特征多项式, 也是Jordan块所对应特征矩阵的初等因子. 从Jordan块形式看, 给定初等因子所作的最简λ矩阵就是Jordan块的特征矩阵.

那么对复方阵A所有的初等因子作最简λ矩阵, 并构造对角块矩阵即可得到与A相似的最简阵B.

定义3.8.10(Jordan标准形) 设n阶复方阵A的特征矩阵为$\lambda I - A$, 其初等因子为

$$(\lambda-\lambda_1)^{n_1}, (\lambda-\lambda_2)^{n_2}, \cdots, (\lambda-\lambda_s)^{n_s}$$

对应的Jordan块分别记为$J_1, \cdots, J_s$, 则由s个Jordan块作n阶对角块矩阵

$$J = \mathrm{diag}(J_1, \cdots, J_s)$$

称为A的**Jordan标准形**(或**Jordan法式**).

例3.8.11 设A的特征矩阵

$$(\lambda I-A)\cong \mathrm{diag}(\lambda^2,\lambda(\lambda+1)^2,1,1,1)$$

求A的Jordan标准形.

解: $(\lambda I-A)$初等因子为$\lambda^2,\lambda,(\lambda+1)^2$. 作Jordan块

$$J_1=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},J_2=[0],J_3=\begin{bmatrix}-1&1\\0&-1\end{bmatrix}$$

$$J=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&1\\0&0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

定理3.8.6(**Jordan标准形定理**) 设矩阵J是复方阵A的Jordan标准形,则矩阵A与矩阵J相似.

例3.8.12 求$A=\begin{bmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{bmatrix}$的Jordan标准形$J$,并求$P$使得$P^{-1}AP=J$.

解: 对A特征矩阵作初等变换得

$$\lambda I-A\cong\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda-1&0\\0&0&(\lambda-1)^2\end{bmatrix}$$

则特征矩阵$\lambda I-A$的初等因子为$\lambda-1,(\lambda-1)^2$，故A的Jordan标准形为

$$J=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

定义$P=[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3]$，根据$AP=PJ$，得

$$A[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3]=[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3]J$$

$$\begin{cases}A\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{p}_1\\A\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_2\\A\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3\end{cases}$$

由$A\boldsymbol{p}_i=\boldsymbol{p}_i$解得两个线性无关的向量为

$$\boldsymbol{p}_1=[3,0,1]^T,\boldsymbol{p}_2=[0,3,1]^T$$

将$\boldsymbol{p}_2=[0,3,1]^T$代入$A\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3$, 此时方程无解.

若将$\boldsymbol{p}_1$和$\boldsymbol{p}_2$调整顺序, 定义$\boldsymbol{p}_2=[3,0,1]^T$; 再将$\boldsymbol{p}_2$代入$A\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3$, 方程仍无解.

思考: 为什么找不到可逆阵P使得$P^{-1}AP=J$?

回答: $\boldsymbol{p}_2$是$A\boldsymbol{p}_i=\boldsymbol{p}_i$的任一非零解, 之前选取的$\boldsymbol{p}_2$不合适.

定义

$$\boldsymbol{p}_2 = k_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

并将$\boldsymbol{p}_2$代入$A\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3$得

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{p}_3 = k_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

观察知$\boldsymbol{p}_2$应表示为

$$\boldsymbol{p}_2 = k[2,1,1]^T$$

取$k=1$, 求解方程组

$$k_1\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$$

解得$k_1=\frac{2}{3}, k_2=\frac{1}{3}$. 这表明向量$\boldsymbol{p}_2=[2,1,1]^T$是方程$A\boldsymbol{p}_i=\boldsymbol{p}_i$的解. 此时, $\boldsymbol{p}_1=[3,0,1]^T, \boldsymbol{p}_2=[2,1,1]^T$, 解得$\boldsymbol{p}_3=[-1,0,0]^T$. 因此

$$P=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\0 & 1 & 0\\1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

例3.8.13 求矩阵$A=\begin{bmatrix}3 & & & \\ & 3 & 1 & \\ & & 3 & 1 \\ & & & 3\end{bmatrix}$的最小多项式.

解: 矩阵$\lambda I-A$的初等因子为

$$\lambda-3,(\lambda-3)^3$$

这也是对应两个Jordan块的最小多项式. 故A的最小多项式为

$$m_A(\lambda)=(\lambda-3)^3$$

定理3.8.7(**Frobenious定理**) 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 其特征矩阵$\lambda I - A$的Smith标准形为$\mathrm{diag}(d_1(\lambda), \dots, d_n(\lambda))$, 则$A$的最小多项式

$$m_A(\lambda) = d_n(\lambda)$$

注10: $\lambda I - A$的初等因子的最小公倍式即为矩阵A的最小多项式$m_A(\lambda)$.

小结：

基本概念：λ矩阵及其秩、逆、初等变换、相抵、行列式因子、不变因子、初等因子、Simith标准形、Jordon块、Jordon标准形

重要结论：Jordon标准形定理、Frobenious定理

重要计算：Jordon分解