矩阵理论

刘克新

自动化科学与电气工程学院

第二章 线性映射与矩阵

- □ 预备知识
- □ 线性映射
- □ 矩阵与同构基与坐标
- □ 特征值与特征向量
- □ 酉变换与酉矩阵
- □ 应用：图的矩阵表示

第二章 线性映射与矩阵

2.5 酉变换与酉矩阵

定义2.5.1（正交变换和酉变换）若欧氏（酉）空间中的线性变换T保持向量的内积不变，即对V的任意向量$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{y}$有

$$(T(\boldsymbol{x}), T(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

则称T为**正交（酉）变换**.

定义2.5.2（正交矩阵和酉矩阵）若n阶实方阵A满足$A^T A = I$或$AA^T = I$，则称A为**正交矩阵**；若n阶复方阵A满足$A^H A = I$或$AA^H = I$，则称A为**酉矩阵**.

把A写成列向量的形式

定理2.5.1 设V是n维欧氏（酉）空间, $T \in L(V)$, 则以下命题等价:

（1）T是正交（酉）变换;

（2）T保持长度不变, 即$\|T(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$;

（3）若$\xi_1, \cdots, \xi_n$是V中一组标准正交基, 则

$T(\xi_1), \cdots, T(\xi_n)$也是$V$中一组标准正交基;

（4）T在V的任一标准正交基下的矩阵为正交（酉）矩阵.

思考: 正交矩阵A的特征值一定是± 1吗？

命题2.5.1 正交（酉）矩阵A满足如下性质：

（1）正交矩阵的行列式必为± 1，酉矩阵的行列式的模值为1;

（2）$A^{-1}=A^{H}$均为正交（酉）阵;

（3）正交（酉）矩阵的乘积仍为正交（酉）阵;

（4）A的所有特征值的模值为1.

定理2.5.2 矩阵A是n阶正交（酉）矩阵当且仅当矩阵A的n个列（行）向量构成n维欧氏（酉）空间的一组标准正交基.

例2.5.1 平面旋转变换$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\forall \boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$, 满足$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$, φ为旋转角（逆时针取正）. T在标准基$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

由于A是正交矩阵, 故T是正交变换. 在一般的n维欧氏空间中, 定义

第二章 线性映射与矩阵——酉变换与酉矩阵

$$T(i,j)=(t_{kl}(i,j))_{n\times n}=\begin{bmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& \cos\varphi & 0 & \cdots & 0 & \sin\varphi &&& \\
&&& 0 & 1 &&& 0 &&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&& 0 && & 1 & 0 &&& \\
&&& -\sin\varphi & 0 & \cdots & 0 & \cos\varphi &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{bmatrix}$$

式中, $t_{ii}(i,j)=t_{jj}(i,j)=\cos\varphi$, $t_{ij}(i,j)=\sin\varphi$, $t_{ji}(i,j)=-\sin\varphi$, 且对于任意$k\neq i,j$和$l\neq i,j$, $t_{kl}(i,j)=0$. 我们将矩阵$T(i,j)$称为**Givens矩阵**（或**初等旋转矩阵**）.

命题2.5.2 设Givens矩阵$T(i,j)\in\mathbb{R}^{n\times n}$，则以下命题成立:

（1）$T(i,j)$是正交矩阵且$\left(T(i,j)\right)^{-1}=\left(T(i,j)\right)^{T}$;

（2）设$\boldsymbol{x}=[x_1,\cdots,x_n]^T$,

若$\boldsymbol{y}=T(i,j)\boldsymbol{x}=[y_1,\cdots,y_n]^T$, 则

$$y_k=x_k, k\neq i$$

$$y_i=\cos\varphi\, x_i+\sin\varphi\, x_j$$

$$y_j=-\sin\varphi\, x_i+\cos\varphi\, x_j$$

注1: 命题2.5.2性质（2）表明若$x_i^2+x_j^2\neq 0$, 定义

$$\cos\varphi=\frac{x_i}{\sqrt{x_i^2+x_j^2}},\sin\varphi=\frac{x_j}{\sqrt{x_i^2+x_j^2}}$$

则$y_i=\sqrt{x_i^2+x_j^2}$, $y_j=0$. 此时, 若定义$\boldsymbol{y}=T(1,j)\boldsymbol{x}$,

则向量$\boldsymbol{y}$的第1个分量为$\sqrt{x_1^2+x_j^2}$, 第j个分量为0. 进一步, 必存在着有限个Givens矩阵的乘积, 记为T使得$T\boldsymbol{x}=|\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_1$.

例2.5.2 设$\boldsymbol{x}=[0,1,1]^T$, 取Givens矩阵

$$T(1,2)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T(1,2)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

再取Givens矩阵

$$T(1,3)=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

定义$T=T(1,3)T(1,2)$得

$$T=\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

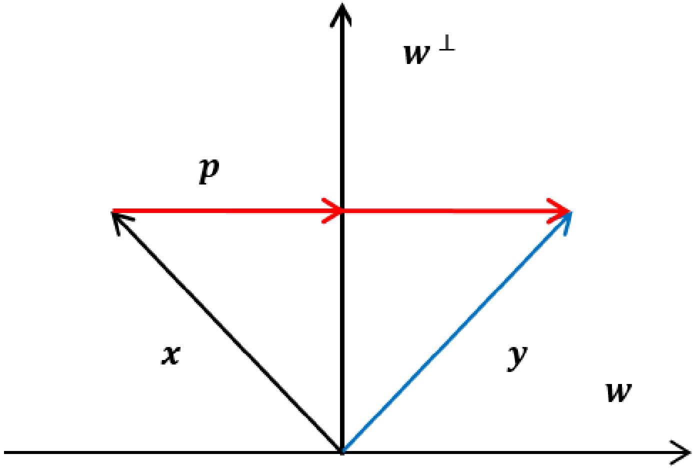
则有$T\boldsymbol{x}=|\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_1$.

定义2.5.3（Householder矩阵）设$\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^n$是单位向量，定义矩阵

$$H(\boldsymbol{w}) = I - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^H$$

称为**Householder矩阵**（或**初等反射矩阵**）.

例 2.5.3 设 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^n$ 是给定单位向量，定义映射 $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$使得对任意$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$，$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$，其中，$\boldsymbol{y}$是向量$\boldsymbol{x}$关于空间$W^{\perp}$的对称向量，$W = \mathrm{span}(\boldsymbol{w})$. 如下图所示



$$\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{p} = \boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p} = \mathrm{Proj}_{W^{\perp}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})\boldsymbol{w}$$

由此, 解得

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{H}\boldsymbol{x} = H(\boldsymbol{w})\boldsymbol{x}$$

式中, $H(\boldsymbol{w})$是Householder矩阵.

命题2.5.3 Householder矩阵$H(\boldsymbol{w})$具有以下性质：

（1）$|H(\boldsymbol{w})| = -1$;$H(\boldsymbol{w})$的特征根？

（2）$\left(H(\boldsymbol{w})\right)^H = H(\boldsymbol{w}) = \left(H(\boldsymbol{w})\right)^{-1}$;

（3）设$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$且$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$，则存在单位向量$\boldsymbol{w}$使得$H(\boldsymbol{w})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$的充分必要条件是

$$\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^H\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}^H\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^H\boldsymbol{x}$$

并且若上述条件成立，则使$H(\boldsymbol{w})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$成立的单位向量可取为$\boldsymbol{w} = \frac{e^{i\theta}}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$，其中$\theta$为任一实数.

$$H(\boldsymbol{w}) = I - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^H$$

$\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^H$特征根

(1)

(2)

$$\begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix}$$

$$\lambda^n|\lambda I - AB| = \lambda^m|\lambda I - BA|$$

例2.5.4 设$\boldsymbol{x}=[0,1,1]^T$, 取$\boldsymbol{y}=\left[\sqrt{2},0,0\right]^T$, 并定义

$$\boldsymbol{e}=\frac{1}{\|\boldsymbol{x}-\ \boldsymbol{y}\|}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

有Householder矩阵

$$H(\boldsymbol{w}) = I - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^H = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

则$H(\boldsymbol{w})\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_1$. 该结果与例2.5.2相同.

思考：给定实方阵A，是否有限个Givens矩阵或Householder矩阵的乘积，记为T使得TA变成如下形式

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

其中, $*$为任意实数, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$是矩阵$A$的$n$个特征值.

2.6 图的矩阵表示

定义 2.6.1（**图**）图G是有序三元组，记作$G=(V(G),E(G),\varphi_G)$，其中，非空集合$V(G)$是G的**节点集**，其元素称为**节点**（或**结点**，**顶点**），集合$E(G)$是G的**边集**，其元素称为**边**，而$\varphi(G)$是集合E到集合V中元素有序对$V\times V$的函数，称为**关联函数**．若$V\times V$中元素全是无序对，则图G称为**无向图**；若$V\times V$中元素全是有序对，则图G称为**有向图**．

设边$e \in E(G)$, 则存在$x, y \in V(G)$和有序对$(x, y) \in V \times V$使得$\varphi_G(e) = (x, y)$, e称为从x到y的**有向边**, x称为边e的**起点**, y称为边e的**终点**. 在无向图中, x和y称为边e的端点. 去掉有向图G边上的方向得到的无向图称为G的**基础图**.

例2.6.1 如图2.6.2所示，$G_1=\left(V(G_1),E(G_1),\varphi_{G_1}\right)$，其中，

$$V(G_1)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$$
$$E(G_1)=\{e_{12},e_{23},e_{34},e_{45},e_{15}\}$$

而关联函数φ_{G_1}定义为

$\varphi_{G_1}(e_{12})=(v_1,v_2)$ $\varphi_{G_1}(e_{23})=(v_2,v_3)$

$\varphi_{G_1}(e_{34})=(v_3,v_4)$ $\varphi_{G_1}(e_{45})=(v_4,v_5)$

$\varphi_{G_1}(e_{15})=(v_1,v_5)$

对于$G_2 = (V(G_2), E(G_2), \varphi(G_2))$, 有

$$V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E(G_2) = \{e_{12}, e_{32}, e_{34}, e_{43}, e_{54}, e_{15}\}$$

而关联函数φ_{G_2}定义为

$$\varphi_{G_2}(e_{12}) = (v_1, v_2) \quad \varphi_{G_2}(e_{32}) = (v_3, v_2)$$

$$\varphi_{G_2}(e_{34}) = (v_3, v_4) \quad \varphi_{G_2}(e_{43}) = (v_4, v_3)$$

$$\varphi_{G_2}(e_{54}) = (v_5, v_4) \quad \varphi_{G_2}(e_{15}) = (v_1, v_5)$$

第二章 线性映射与矩阵——应用：图的矩阵表示

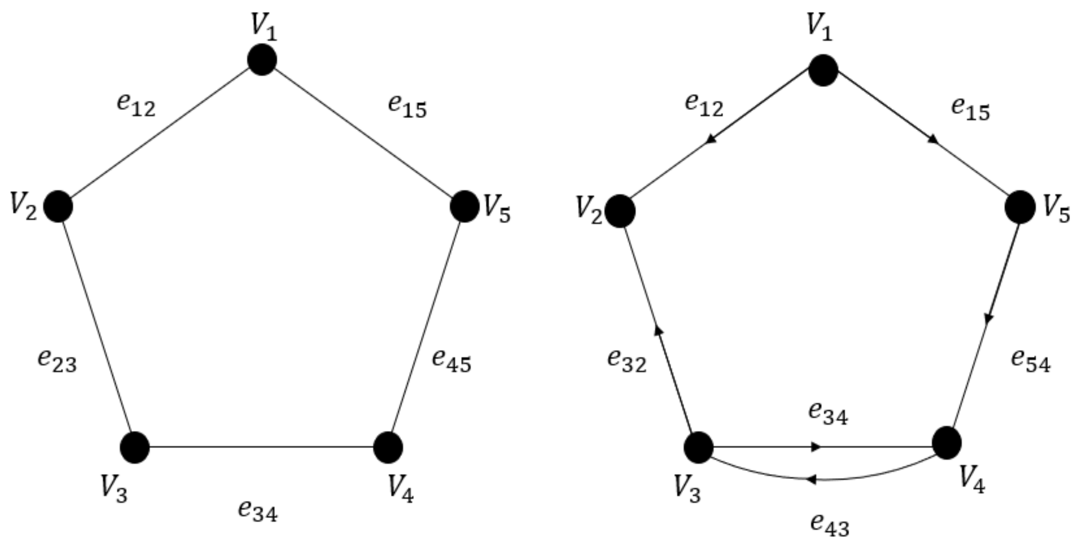


图2.6.2 例2.6.1中的G_1（左）和G_2（右）

定义2.6.2（**度**）设$G=(V(G),E(G),\varphi_G)$是无向图，$v\in V(G)$的**节点度**定义为G中与v关联边的数目，记为$d_G(v)$.

定义2.6.3（**路**）设u和v是任意图G的节点，图G的一条 $u-v$ **链** 是有限的节点和边交替序列 $u_0e_1u_1e_2\ldots\ldots u_{n-1}e_nu_n$（$u=u_0,v=u_n$），其中与边$e_i$（$1\le i\le n$）相邻的两节点$u_{i-1}$和$u_i$正好是$e_i$的两个端点．数$n$（链中出现的边数）称为**链的长度**.$u(u_0)$和$v(u_n)$称为链的**端点**，其余的节点称为链的**内部点**．一条$u-v$链，当$u\neq v$时，称它为**开的**，否则称为**闭的**．边互不同的链称为**迹**，内部点互不同的链称为**路**.

定义2.6.4（**连通图**）如果无向图G中每一对不同的节点x和y都有一条路，则称G是**连通图**，反之称为**非连通图**.

定义2.6.5（连通分支） 设$V_i, i=1,\cdots,m$是图$G=(V(G),E(G),\varphi_G)$节点集$V(G)$的子集，满足（1）$\bigcup_i V_i = V(G)$；（2）对$i \neq j$有，$V_i \cap V_j = \emptyset$. 若V_i（$i=1,\cdots,m$）使得当且仅当两节点v和u属于同一子集V_i时，节点v和u间存在一条路，则V_i在G中导出的子图G_i（以V_i为节点集，以两两端点均在V_i中的全体边为边集合的G的子图）称为G的**连通分支**, m称为G的**连通分支数**.

定义2.6.6（**邻接矩阵**）设图$G=(V(G),E(G),\varphi_G)$，$V(G)=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$．若$a_{ij}$是图$G$中以$x_i$为起点且以$x_j$为终点的边的数目，则$n$阶方阵$A=(a_{ij})$称为$G$的**邻接矩阵**.

定义2.6.7（关联矩阵）

设 无 向 图 $G=(V(G),E(G),\varphi_G)$ ， $V(G)=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$, $E=\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$. 若定义

$$m_{ij}=\begin{cases}2 & e_j\text{关联于与}x_i,e_j\text{是自环}\\ 1 & e_j\text{关联于与}x_i,e_j\text{不是自环}\\ 1 & e_j\text{与}x_i\text{不关联}\end{cases}$$

则称$n\times m$阶矩阵$M=(m_{ij})$为无向图G的**关联矩阵**.

定义2.6.8（拉普拉斯矩阵）

设无向图 $G=(V(G),E(G),\varphi_G)$ 无自环，$V(G)=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$，则称$n$阶方阵$L=D-A$是图$G$的**拉普拉斯矩阵**，其中，$A$是图$G$的邻接矩阵，$D$是$n$阶对角阵，其对角线元素是对应节点的度.

例2.6.2 给出图2.6.3所示图G的关联矩阵、邻接矩阵和拉普拉斯矩阵.

解：图G的关联矩阵为

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

图G的节点顺序为a,b,c,d,e的邻接矩阵和拉普拉斯

矩阵是$A=\begin{bmatrix}0&2&0&0&0\\2&0&1&1&1\\0&1&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\end{bmatrix}$,

$$L=\begin{bmatrix}2&-2&0&0&0\\-2&5&-1&-1&-1\\0&-1&2&0&-1\\0&-1&0&1&0\\0&-1&-1&0&2\end{bmatrix}$$

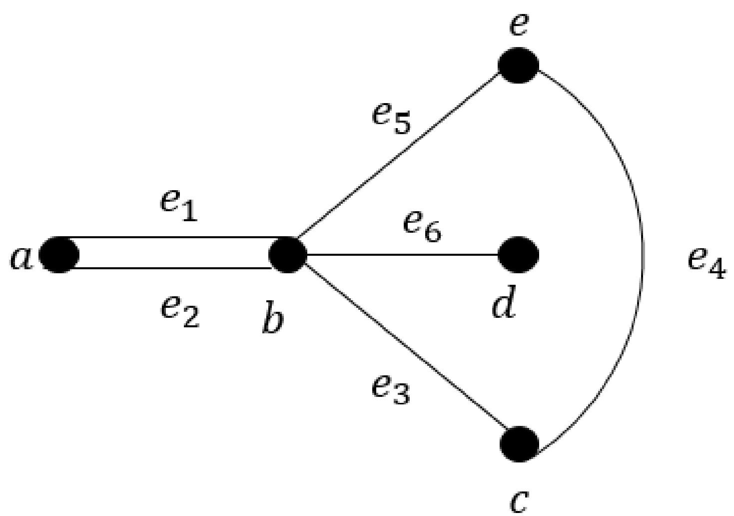


图2.6.3 例2.6.2图G

定理2.6.1 设无向图$G=(V(G),E(G),\varphi_G)$，$V(G)=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$，且$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$为$G$的邻接矩阵，则$A^k$中的$i$行$j$列元素$a_{ij}{}^{(k)}$是图$G$中以$x_i$和$x_j$为端点且长度为$k$的链的数目.

定理2.6.2 设图G的邻接矩阵为$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，作方阵$R=A+A^2+\cdots+A^{n-1}$，则图$G$连通的充分必要条件为$R$中的每个元素都不为零.

定理2.6.3 设图G有n个节点和k个连通分支，则$\operatorname{rank}(M)=n-k$，其中$M$是$G$的关联矩阵.

定义2.6.9（**不可约矩阵**）如果存在n阶排列矩阵P使得

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

其中, $A_{11} \in \mathbb{R}^{k\times k}$（$1 \le k \le n-1$）, 则称矩阵$A$是**可约矩阵**; 否则称$A$为**不可约矩阵**.

定理2.6.4 无向图G是连通的当且仅当它的拉普拉斯矩阵L不可约.

定理2.6.5 无向图G的拉普拉斯矩阵$L=\left(l_{ij}\right)\in\mathbb{R}^{n\times n}$具有以下性质：

（1）L是半正定实对称矩阵;

（2）$\operatorname{rank}(L)=n-k$, 其中$k$为图的连通分支数; 特别地, 若$G$是连通图, 则0是矩阵$L$的单根;

（3）对任意向量$\boldsymbol{x}=[x_1,\cdots,x_n]^T\in\mathbb{R}^n$,有

$$\boldsymbol{x}^T L\boldsymbol{x}=-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} l_{ij}\left(x_i-x_j\right)^2$$