MOOC平台

1

2

https://degreecourse.xuetangx.com/

矩阵理论

刘克新

自动化科学与电气工程学院

答疑邮箱：skxliu@163.com

第一章 线性空间引论

- 线性空间
- 线性子空间
- 基与坐标
- 内积空间
- 直和与投影
- 应用：多项式插值

第一章 线性空间引论

1.3 基与坐标

定义1.3.1（线性相关与线性无关）设V是F上的线性空间, $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$V$的一组向量. 若向量方程

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\theta}, k_1,\cdots,k_n\in F$$

只有平凡解, 即$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$, 则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是线性无关; 否则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是线性相关.

例1.3.1 考查多项式空间$P_1(x)$, 并令$p_1(x)=1$, $p_2(x)=x$, $p_3(x)=4-x$. 由于$p_3=4p_1-p_2$, 从而p_1,p_2,p_3是线性相关的.

例1.3.2 设信号子空间

$$\tilde{S} = \mathrm{span}(\{x_k\}, \{y_k\}, \{z_k\})$$

其中$x_k = (-1)^k$, $y_k = 2^k$, $z_k = 3^k$. 试判断信号$\{x_k\}, \{y_k\}, \{z_k\}$是否线性无关.

例1.3.2 设信号子空间

$$\tilde{S} = \operatorname{span}(\{x_k\}, \{y_k\}, \{z_k\})$$

其中$x_k = (-1)^k$, $y_k = 2^k$, $z_k = 3^k$. 试判断信号$\{x_k\}, \{y_k\}, \{z_k\}$是否线性无关.

$$\begin{bmatrix} x_k & y_k & z_k \\ x_{k+1} & y_{k+1} & z_{k+1} \\ x_{k+2} & y_{k+2} & z_{k+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = 0, \forall k$$

其中, 系数矩阵称为信号的Casorati矩阵, 行列式称为$\{x_k\}, \{y_k\}, \{z_k\}$的Casorati行列式.

注1：线性无关向量组的任一子集是线性无关的；线性相关向量组的任一扩集仍是线性相关的.

注2：单个零向量线性相关；单个非零向量线性无关.

定理1.3.1 设线性空间V的向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关，而向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$线性相关，则$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示且表示法唯一.

定义1.3.2（极大线性无关组与秩）设$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是线性空间$V$的一组向量. 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$中存在$r$个线性无关的向量$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$, 并且$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$中任一向量均可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$线性表示, 则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$的极大线性无关组, 数$r$称为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$的秩, 记为

$$\mathrm{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]=r$$

例1.3.3 求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$的极大线性无关组, 其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{i}-1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

（1）$F = \mathbb{C}$

注4： 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$的极大线性无关组不唯一.

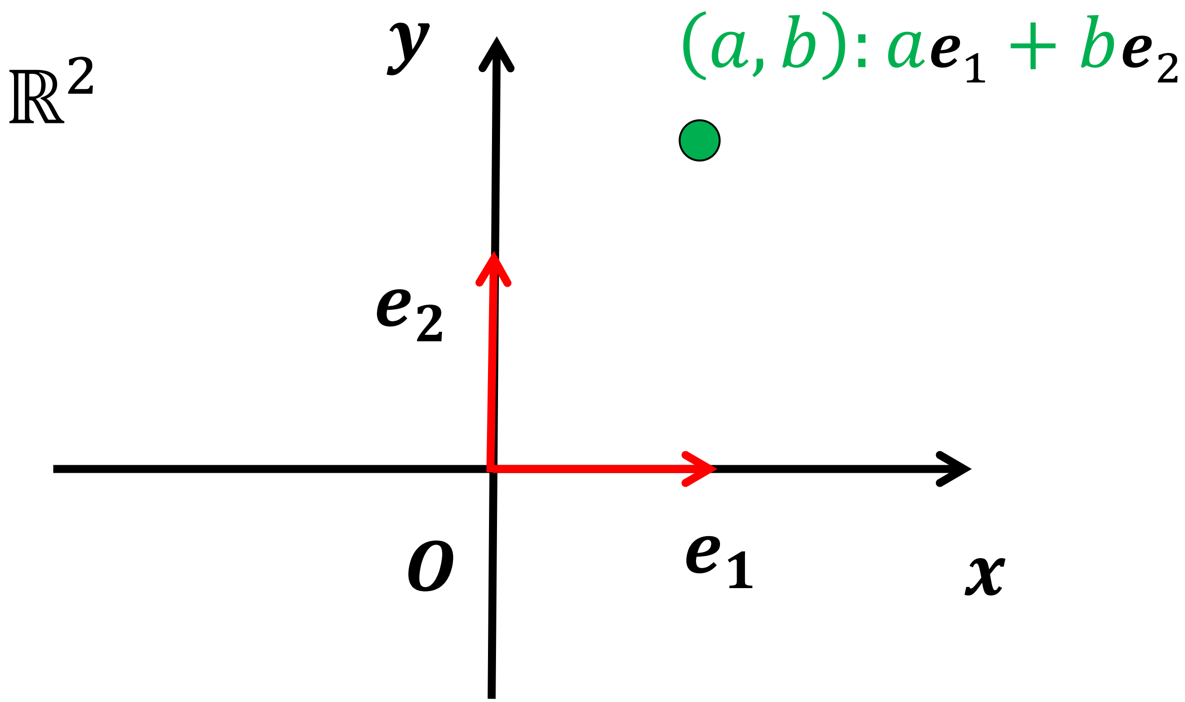
例1.3.3 求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的极大线性无关组, 其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}\mathrm{i}\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}\mathrm{i}-1\\0\end{bmatrix}$$

（2） $F=\mathbb{R}$

$$A=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3],$$
$$\mathrm{rank}(A)=3>2?$$

矩阵元素所属的数集与数域F所对应的数集一般要相同.



小结: $\mathbb{R}^2$中的任一向量都可由向量$\boldsymbol{e}_1$和$\boldsymbol{e}_2$唯一表示.

向量$\boldsymbol{e}_1$和$\boldsymbol{e}_2$给$\mathbb{R}^2$强加一个“坐标系”.

定义1.3.4（基） 设V是数域F上的线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$V$中一组向量. 若

（1）向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关;

（2）V中任一向量均可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示;

则称$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$V$的一个基底（或一组基）.

小结: $\mathbb{R}^2$中的任一向量都可由向量$\boldsymbol{e}_1$和$\boldsymbol{e}_2$唯一表示. 向量$\boldsymbol{e}_1$和$\boldsymbol{e}_2$给$\mathbb{R}^2$强加一个“坐标系”.

定义1.3.4（基） 设V是数域F上的线性空间, $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$V$中一组向量. 若

（1）向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关;

（2）V中任一向量均可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示;

则称$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$V$的一个基底（或一组基）.

例1.3.4 单位矩阵I的n列可构成$\mathbb{R}^n$（或$\mathbb{C}^n$）的一组基. 特别地, 令$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$是单位矩阵的$n$列, 则$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$称为$\mathbb{R}^n$的**标准基**.

思考:对于线性空间V,明确一个基的重要原因是什么?

思考:对于线性空间V,明确一个基的重要原因是什么?

定理1.3.2（唯一表示定理） 设$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$是线性空间$V$的一组基, 则$V$中任一向量$\boldsymbol{x}$都可由基$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$唯一表示.

定义1.3.5（坐标）设$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$是数域$F$上线性空间$V$的一组基, 对任意向量$\boldsymbol{x}\in V$, 令

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{x}_i=[\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n]\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$$

称有序数组$[\alpha_1,\cdots,\alpha_n]^T\in F^n$是$\boldsymbol{x}$在基$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$下的坐标, 它由$\boldsymbol{x}$与基$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$唯一确定.

线性空间V $\Rightarrow$ 基$\mathcal{B}$ $\Rightarrow$ 向量的坐标

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$ $\Updownarrow$

平面$\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ 坐标系 $\Rightarrow$ 点的坐标

标准基$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$

例1.3.6 证明$E_{ij} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$（$i, j = 1,2$）是$\mathbb{R}^{2\times 2}$的一组基, 并求矩阵$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$在该组基下的坐标.

定义1.3.6（过渡矩阵）设$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$和$\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n$是数域$F$上线性空间$V$的两组基, 令

$$\boldsymbol{y}_i=a_{1i}\boldsymbol{x}_1+\cdots+a_{ni}\boldsymbol{x}_n=[\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n]\begin{bmatrix}a_{1i}\\ \vdots\\ a_{ni}\end{bmatrix}$$

引入矩阵表示:

$$[\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n]=[\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n]A$$

其中$A=\left(a_{ij}\right)\in F^{n\times n}$, 称$A$是由基$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$到基$\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n$的过渡矩阵（或变换矩阵）.

命题1.3.1（过渡矩阵的性质）设V是数域F上的线性空间, $A\in F^{n\times n}$是由基$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$到基$\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n$的过渡矩阵, 则以下命题成立

（1）过渡矩阵A可逆（为什么）；

（2）由基$\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n$到基$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$的过渡矩阵为$A^{-1}$;

（3）任取$\boldsymbol{x}\in V$, 设$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{x}_i=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\boldsymbol{y}_i$, 则

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}\text{或}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}$$

例1.3.7 设$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$,
在基$1,x,\cdots,x^n$下的坐标:

$f(x)\in P_n[x]$, $1,x,\cdots,x^n$线性无关.

例1.3.7 设$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$,

在基$1,x,\cdots,x^n$下的坐标:

$$\left[f(0),f'(0),\cdots,\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right]^T$$

在基$1,x-x_0,\cdots,(x-x_0)^n$下的坐标:

例1.3.7 设$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$,

在基$1,x,\cdots,x^n$下的坐标:

$$\left[f(0),f'(0),\cdots,\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right]^T$$

在基$1,x-x_0,\cdots,(x-x_0)^n$下的坐标:

$$\left[f(x_0),f'(x_0),\cdots,\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right]^T$$

例1.3.7 设$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

$$(x-x_0)^k=\sum_{i=0}^{k}C_k^i\,x^i(-x_0)^{k-i}$$

$$[1,x-x_0,\cdots,(x-x_0)^n]$$

$$=[1,x,\cdots,x^n]\begin{bmatrix}1 & -x_0 & \cdots & (-x_0)^n \\ 0 & 1 & \cdots & n(-x_0)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

定义1.3.7（维数）在线性空间V中, 不同线性无关组中向量个数最大者叫作V的**维数**, 记为$\dim V$. 当$\dim V < \infty$, 称V为**有限维空间**, 否则称为**无限维空间**, 记$\dim V = \infty$.

线性空间的**维数**与向量组的**秩**

定义1.3.7（维数） 在线性空间V中，不同线性无关组中向量个数最大者叫作V的**维数**，记为$\dim V$. 当$\dim V < \infty$，称V为**有限维空间**，否则称为**无限维空间**，记$\dim V = \infty$.

例1.3.8 离散时间信号空间

$$S = \left\{\{x_k\} = [\cdots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \cdots] \middle| x_i \in \mathbb{R}\right\}$$

是$\mathbb{R}$上的无限维线性空间.

思考：单个零向量线性组成的空间的维数？

定义1.3.7（维数）在线性空间V中，不同线性无关组中向量个数最大者叫作V的**维数**，记为$\dim V$. 当$\dim V<\infty$，称V为**有限维空间**，否则称为**无限维空间**，记$\dim V=\infty$.

例1.3.9 求空间$\mathbb{C}$在实数域$\mathbb{R}$和复数域$\mathbb{C}$上的维数.

考查空间$\mathbb{C}$中的向量1和i

定理1.3.3（维数与基的关系）设V是有限维线性空间, 则$\dim V = n$当且仅当V的任一基底的向量个数为n.

例1.3.9 求空间$\mathbb{C}$在实数域$\mathbb{R}$和复数域$\mathbb{C}$上的维数.

例1.3.10 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 求$N(A)$和$R(A)$的维数.

例1.3.3 求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的极大线性无关组, 其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}\mathrm{i}\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}\mathrm{i}-1\\0\end{bmatrix}$$

（1）定义角度

（2）$R(A)=span(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$

数域$\mathrm{F}=\mathbb{C}$, $\mathrm{dim}\big(\mathbf{R}(\mathbf{A})\big)=\mathbf{2},$

数域$\mathrm{F}=\mathbb{R}$, $\mathrm{dim}\big(\mathbf{R}(\mathbf{A})\big)=\mathbf{2}?\,\mathbf{3}?$

推论1.3.1（基扩充定理）n维线性空间中任意n个线性无关的向量均为V的一个基底, 且任一线性无关向量组$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r$（$1 \leq r < n$）可扩充为$V$的一个基底.

注5：在构造子空间的一组基时, 优先利用“加法”原则, 尽量避免“减法”原则.

定理1.3.4（维数定理）设W_1和W_2是线性空间V的两个子空间, 则

$$\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)$$

例1.3.11 设$W_1=\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $W_2=\mathrm{span}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$, 其中$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,1,0]^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,1,0]^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=[1,0,1,1]^T$, $\boldsymbol{\beta}_1=[2,1,0,0]^T$, $\boldsymbol{\beta}_2=[0,1,0,0]^T$, 求$\dim(W_1+W_2)$和$\dim(W_1\cap W_2)$.

$$W_1+W_2=\{\alpha+\beta|\alpha\in W_1,\beta\in W_2\}$$
$$W_1\cap W_2=\{\alpha|\alpha\in W_1,\alpha\in W_2\}$$

例1.3.11 设$W_1 = \text{span}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, $W_2 = \text{span}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2)$, 其中$\boldsymbol{\alpha}_1 = [1,2,1,0]^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = [1,1,1,0]^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = [1,0,1,1]^T$, $\boldsymbol{\beta}_1 = [2,1,0,0]^T$, $\boldsymbol{\beta}_2 = [0,1,0,0]^T$, 求$\dim(W_1 + W_2)$和$\dim(W_1 \cap W_2)$.

解: 观察知$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性无关, $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$线性无关，故有

$$\dim(W_1) = 3, \dim(W_2) = 2$$

$$W_1 + W_2 = R(A)$$

再对如下矩阵进行初等变换, 得

$$A = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

例1.3.11 设$W_1 = \mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, $W_2 = \mathrm{span}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2)$, 其中$\boldsymbol{\alpha}_1 = [1,2,1,0]^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = [1,1,1,0]^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = [1,0,1,1]^T$, $\boldsymbol{\beta}_1 = [2,1,0,0]^T$, $\boldsymbol{\beta}_2 = [0,1,0,0]^T$, 求$\dim(W_1 + W_2)$和$\dim(W_1 \cap W_2)$.

解: 于是,

$$\dim(W_1 + W_2) = \mathrm{rank}A = 4$$

由维数定理可知$\dim(W_1 \cap W_2) = 3 + 2 - 4 = 1$.

能否直接求$W_1 \cap W_2$?

$$W_1 \cap W_2 = N(A)$$

思考：设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，其零空间和列空间有可能相同吗？若这两个空间相同，则矩阵A具有何性质？