北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

矩 阵 理 论

刘克新

自动化科学与电气工程学院

答疑邮箱：skxliu@163.com

$$Ax = b$$

解集不是线性空间，但是极大线性无关组中向量个数$n-r+1$

$$Ax = b$$

解集不是线性空间，但是极大线性无关组中向量个数$n - r + 1$

第一章 线性空间引论

- 线性空间
- 线性子空间
- 基与坐标
- 内积空间
- 直和与投影
- 应用：多项式插值

1.4 内 积 空 间

定义1.4.1（内积空间） 设F是实数域或复数域, V是F上的线性空间, 若对V中任意两个向量$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$, 定义了一个数$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\in F$, 使得对任意向量$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in V$和$k\in F$满足

（1）**共轭对称性**: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\overline{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}$;

（2）**可加性**: $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$;

（3）**齐次性**: $(k\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$;

（4）**正定性**: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geq 0$,当且仅当$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\theta}$时等号成立.

此时, V称为一个**内积空间**, 数$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$称为$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{y}$的**内积**. 有限维的实内积空间称为**欧几里得空间**. 有限维的复内积空间称为**酉空间**.

注1: 欧氏（酉）空间的维数指它作为线性空间的维数; 它们的线性子空间仍是欧氏（酉）子空间.

注2: 定义1.4.1中性质（3）**齐次性仅对第一个向量成立**, 对第二个向量则是"**共轭齐次性**".

例1.4.1 设V是F上的线性空间, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$和$k \in F$,

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) =$$

$$(\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y}) =$$

注1: 欧氏（酉）空间的维数指它作为线性空间的维数; 它们的线性子空间仍是欧氏（酉）子空间.

注2: 定义1.4.1中性质（3）**齐次性仅对第一个向量成立**, 对第二个向量则是“**共轭齐次性**”.

例1.4.1 设V是F上的线性空间, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$和$k \in F$,

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$$

$$(\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y}) = \bar{k}\overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})} = \bar{k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

思考: $\forall \boldsymbol{y} \in V, (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{y}) = ?$

例1.4.2 $\mathbb{R}^n$中, 取$\boldsymbol{x}=[x_1,\cdots,x_n]^T$, $\boldsymbol{y}=[y_1,\cdots,y_n]^T$, 令

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$$

满足内积四条性质, 故$\mathbb{R}^n$是欧氏空间, 仍记为$\mathbb{R}^n$.

例1.4.3 $\mathbb{C}^n$中$\boldsymbol{x}=[x_1,\cdots,x_n]^T$, $\boldsymbol{y}=[y_1,\cdots,y_n]^T$,令

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^H\boldsymbol{x}=x_1\bar{y}_1+\cdots+x_n\bar{y}_n$$

式中, $\boldsymbol{y}^H=[\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_n]$表示为向量$\boldsymbol{y}$的**共轭转置**.
满足内积四条性质, 故$\mathbb{C}^n$为酉空间, 仍记为$\mathbb{C}^n$.

$$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=$$

定义1.4.2（Hermite矩阵） 设矩阵$A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 若$A^H = A$, 则称矩阵$A$是**Hermite矩阵**; 若$A^H = -A$, 则称$A$是**反Hermite矩阵**.

定义1.4.3（正定矩阵） 设$\boldsymbol{x} = [x_1, \cdots, x_n]^T \in \mathbb{C}^n$是未定元向量, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$是Hermite矩阵, 定义**复二次型**

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^H A \boldsymbol{x}$$

称A为$f(\boldsymbol{x})$的矩阵. 若$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, $f(\boldsymbol{x}) \geq 0$, 且$f(\boldsymbol{x}) = 0$当且仅当$\boldsymbol{x} = 0$, 则称$f(\boldsymbol{x})$是**正定二次型**, A是**正定矩阵**.

例1.4.4 设复二次型$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^H A\boldsymbol{x}$, 其中, $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2]^T\in\mathbb{C}^2$, 矩阵$A$为

$$A=\begin{bmatrix}1 & \mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 2\end{bmatrix}$$

例1.4.4 设复二次型$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^H A\boldsymbol{x}$, 其中, $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{C}^2$, 矩阵$A$为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix}$$

则$f(\boldsymbol{x}) = |x_1 + \mathrm{i}x_2|^2 + |x_2|^2$. 故$f(\boldsymbol{x})$是正定二次型, A是正定矩阵.

例1.4.4 设复二次型$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^H A \boldsymbol{x}$, 其中, $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{C}^2$, 矩阵$A$为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}$$

则$f(\boldsymbol{x}) = |x_1 + \mathrm{i}x_2|^2$.

例1.4.4 设复二次型$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^H A\boldsymbol{x}$, 其中, $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{C}^2$, 矩阵$A$为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}$$

则$f(\boldsymbol{x}) = |x_1 + \mathrm{i}x_2|^2$. 显然, $f(\boldsymbol{x})$是半正定二次型, A是半正定矩阵.

例1.4.5 $\mathbb{C}^n$中, 取$\boldsymbol{x}=[x_1,\cdots,x_n]^T$, $\boldsymbol{y}=[y_1,\cdots,y_n]^T$, 并设Hermite矩阵$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$是正定的. 令

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^H A\boldsymbol{x}$$

满足内积的四条性质, 故$\mathbb{C}^n$为欧氏空间.

反之亦成立

例1.4.5 $\mathbb{C}^n$中, 取$\boldsymbol{x}=[x_1,\cdots,x_n]^T$, $\boldsymbol{y}=[y_1,\cdots,y_n]^T$,并设Hermite矩阵$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$是正定的. 令

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^H A\boldsymbol{x}$$

满足内积的四条性质, 故$\mathbb{C}^n$为欧氏空间.

注4: 同一线性空间可定义不同的内积.

思考: 为什么在酉空间中采用共轭转置而不用普通的向量转置?

例1.4.6 设函数$f,g\in C[a,b]$,定义内积$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$, 则$C[a,b]$为内积空间.

设$\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n$是内积空间$V$中的一组基, 对于$V$中的任意向量

$$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{\epsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\epsilon}_n]\xi,\ \boldsymbol{y} = [\boldsymbol{\epsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\epsilon}_n]\eta$$

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j\, \bar{\eta}_i (\boldsymbol{\epsilon}_j, \boldsymbol{\epsilon}_i)$$

$$= \eta^{\mathrm{H}} A \xi$$

$$A_{ij} = (\boldsymbol{\epsilon}_j, \boldsymbol{\epsilon}_i)$$

由两个向量以及内积空间的性质推导出过度矩阵应该具备的性质

定义1.4.4（度量矩阵） 设$\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n$是内积空间$V$中的一组基，称$n$阶矩阵

$$A=\left((\epsilon_j,\epsilon_i)\right)_{n\times n}=\begin{bmatrix}(\epsilon_1,\epsilon_1) & (\epsilon_2,\epsilon_1) & \cdots & (\epsilon_n,\epsilon_1)\\ (\epsilon_1,\epsilon_2) & (\epsilon_2,\epsilon_2) & \cdots & (\epsilon_n,\epsilon_2)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ (\epsilon_1,\epsilon_n) & (\epsilon_2,\epsilon_n) & \cdots & (\epsilon_n,\epsilon_n)\end{bmatrix}$$

为V关于基$\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n$的**度量矩阵（或Gram矩阵）**，常记为$G(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n)$.

每个基都对应一个度量矩阵

$$A=A^H$$

注5: 内积空间中内积与度量矩阵是一一对应的.

命题1.4.1（度量矩阵的性质） 设$G(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$和$G(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n)$均为内积空间$V$的度量矩阵, 则有

（1）$G(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$和$G(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n)$是正定Hermite矩阵;

（2）$G(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$和$G(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n)$**合同（或相合）**，即存在非奇异矩阵$P$使得

$$P^H G(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)P = G(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n)$$

式中, P是由基$\zeta_1,\cdots,\zeta_n$到基$\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n$的过渡矩阵.

定义1.4.5（长度） 设V是内积空间，$\forall \boldsymbol{x} \in V$，实数 $\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$称为$\boldsymbol{x}$的**长度（模）**，记为$\|\boldsymbol{x}\|$. 长度为1的向量称为**单位向量**.

命题1.4.2（长度性质） $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$和$k \in F$，有

（1）**正定性**：$\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$当且仅当$\boldsymbol{x}=0$时有$\|\boldsymbol{x}\|=0$;

（2）**齐次性**：$\|k\boldsymbol{x}\| = |k|\|\boldsymbol{x}\|$;

（3）**三角不等式**：$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$;

（4）**平行四边形法则**：

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2).$$

定理1.4.1（Cauchy不等式）设V是数域F上的内积空间, 对任意$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$,

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

其中, $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$当且仅当$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$线性相关成立.

定理1.4.1（Cauchy不等式） 设V是数域F上的内积空间, 对任意$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$,

$$|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\le\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

其中, $|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|=\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$当且仅当$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$线性相关成立.

证明：$\forall a\in\mathbb{R}$(更一般的情况呢), 有

$$f(a)=(a\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},a\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\ge 0$$

$\Rightarrow$

$$\|\boldsymbol{x}\|^2a^2+2a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\|\boldsymbol{y}\|^2\ge 0$$

$\Rightarrow$

$$\Delta=(2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))^2-4\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2\le\mathbf{0}$$

定理1.4.1（Cauchy不等式） 设V是数域F上的内积空间, 对任意$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$,

$$|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\le\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

其中, $|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|=\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$当且仅当$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$线性相关成立.

证明：若$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$线性相关, 则存在实数$k$使得$\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{y}$. ···

反之, 若$|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|=\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$,

$$\Delta=(2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))^2-4\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2=0$$

分别考虑$\boldsymbol{x}=\theta$和$\boldsymbol{x}\ne\theta$两种情况.

若$\boldsymbol{x}\ne\theta$，则$f(a)=(a\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},a\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=0$存在一个实数解

$$a=-\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|^2},\quad y=-ax$$

定理1.4.1（Cauchy不等式） 设V是数域F上的内积空间, 对任意$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$,

$$|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\le\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

其中, $|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|=\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$当且仅当$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$线性相关成立.

证明：对于一般的数域F. 分别考虑$\boldsymbol{x}=\theta$和$\boldsymbol{x}\neq\theta$两种情况.

若$\boldsymbol{x}\neq\theta$，对于任意的$a\in F$, $f(a)=(a\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},a\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\ge 0$恒成立. 取

$$a=-\frac{\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}}{||\boldsymbol{x}||^2}$$

建议配合谷河燕PPT进行观看

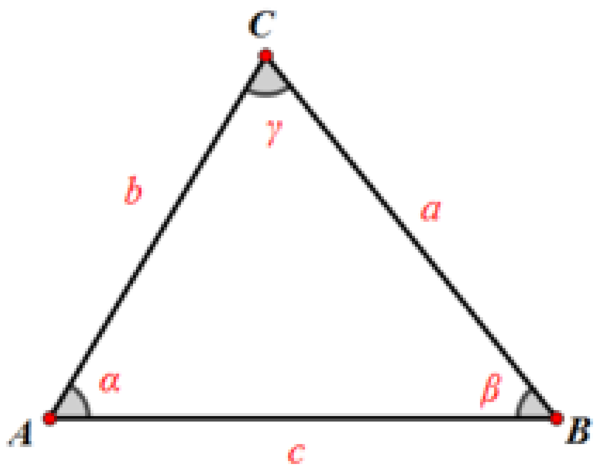
注6: 定义不同内积可得到不同的Cauchy不等式.

（1）对$\mathbb{R}^n$中任两向量$\boldsymbol{x} = [x_1, \cdots, x_n]^T$和$\boldsymbol{y} = [y_1, \cdots, y_n]^T$, 有

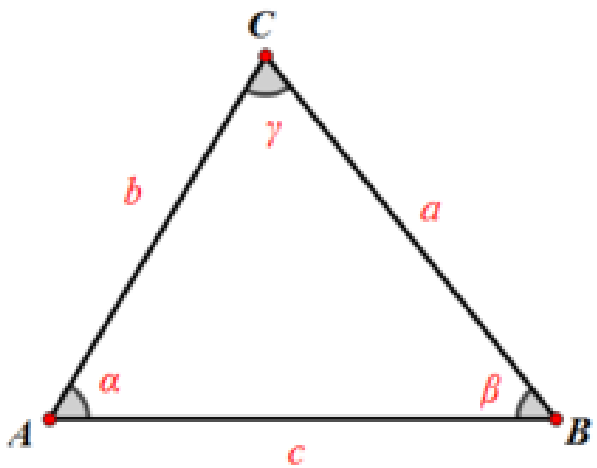
$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2}$$

（2）对$C_{[a,b]}$中任两函数$f(x)$和$g(x)$, 有

$$\left|\int_a^b f(x) g(x) dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}$$



$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$



$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

若定义$\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{AB}$为$\mathbb{R}^2$空间的两个向量, 则角α即为向量的夹角.

$$\cos\alpha = \frac{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})}{\|\overrightarrow{AC}\| \|\overrightarrow{AB}\|}$$

定义1.4.6（向量夹角）设V是欧氏空间(西空间？), 对V中任意向量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$, 定义向量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$的**夹角**为

$$\alpha = < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > = \arccos\frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|} \in [0, \pi]$$

例1.4.7 $\mathbb{R}^2$关于基$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$的度量矩阵为

$$G(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_1) & (\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1)\\(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) & (\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_2)\end{bmatrix}$$

行列式

R^2内，

$$|G(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)|=\|\boldsymbol{x}_1\|^2\|\boldsymbol{x}_2\|^2\sin^2\alpha$$

恰好是以向量$\boldsymbol{x}_1$与$\boldsymbol{x}_2$为邻边的平行四边形的面积的平方.

定义1.4.7（正交向量和正交向量组）设V是内积空间，对V中任意向量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$，则称向量$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{y}$**正交（或垂直）**，记为$\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$. 若一组非零向量两两正交，则称为**正交向量组**. 单位向量构成的正交向量组称为**标准正交向量组**.

定义1.4.7（正交向量和正交向量组）设V是内积空间, 对V中任意向量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$, 则称向量$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{y}$**正交（或垂直）**, 记为$\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$. 若一组非零向量两两正交, 则称为**正交向量组**. 单位向量构成的正交向量组称为**标准正交向量组**.

并不要求是欧式空间，酉空间也可以

注7: 零向量$\boldsymbol{\theta}$与任何向量均正交. **正交向量组要求向量均为非零向量**.

注8: 欧式空间中，向量x与y正交当且仅当$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$（**勾股定理**）. 该结果可推广至多个向量的情形.

酉空间，结果成立吗？

(1) $x=1+\mathrm{i}, y=1-\mathrm{i}$

(2) $x=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, y=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

把勾股定理公式展开
,
(x,y)+(y,x)=0
(x,y)+(x,y)共轭=0
a+bi+a-bi=0
所以(x,y)实部必为0
因此正交可推勾股,
勾股推不了正交。

例1.4.8 求$\mathbb{R}^4$中的单位向量$\boldsymbol{x}$使它与$\boldsymbol{\alpha}_1 = [1,1,-1,1]^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = [1,-1,-1,1]^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = [2,1,1,3]^T$均正交.

定理1.4.2 正交向量组线性无关.

推论1.4.1 在n维欧氏空间或酉空间中, 正交向量组中的向量不会超过n个.

定理1.3.3（维数与基的关系）设V是有限维线性空间，则$\dim V = n$当且仅当V的任一基底的向量个数为n.

有限维线性空间，不同基的向量个数相同

任一n个线性无关向量，都可以选作空间的一组基

什么样的一组基“性质较好”？

定理1.4.2 正交向量组线性无关.

推论1.4.1 在n维欧氏空间或酉空间中, 正交向量组中的向量不会超过n个.

n个正交向量刚好构成空间的一组基

定义1.4.8（标准正交基）在n维内积空间中，由n个向量组成的正交向量组称为**正交基**. 由单位向量组成的正交基称为**标准正交基**.

例1.4.9 考查$[-\pi,\pi]$上的三角函数组

$$1, \cos t, \sin t, \cdots, \cos kt, \sin kt, \cdots$$

定义1.4.8（标准正交基）在n维内积空间中，由n个向量组成的正交向量组称为**正交基**. 由单位向量组成的正交基称为**标准正交基**.

例1.4.9 考查$[-\pi,\pi]$上的三角函数组

$$1,\cos t,\sin t,\cdots,\cos kt,\sin kt,\cdots$$

解: 在区间$[-\pi,\pi]$上的三角函数组

$1,\cos t,\sin t,\cdots,\cos kt,\sin kt,\cdots$,是正交向量组.

光滑函数$f(x)$展开为（**傅里叶三角级数**）

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

例1.4.10 设$\boldsymbol{\epsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\epsilon}_n$是线性空间$V$的标准正交基，并定义$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]^T$和$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n]^T$分别是$V$中向量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$在基$\boldsymbol{\epsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\epsilon}_n$下的坐标，则

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\beta}^H \boldsymbol{\alpha}$$

注9: 线性空间V的向量组$\boldsymbol{\epsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\epsilon}_n$是标准正交基当且仅当$V$关于$\boldsymbol{\epsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\epsilon}_n$的度量矩阵为单位矩阵. 在标准正交基下，内积的运算变得更加简单.

定义1.4.9（向量正交于集合）设V是内积空间, W是V的子集, 若对任意向量$\boldsymbol{y} \in W$和$\boldsymbol{x} \in V$有$\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$, 则称$\boldsymbol{x}$正交（或垂直）于集合$W$, 记为$\boldsymbol{x} \perp W$.

定义1.4.10（两集合正交）设W_1与W_2是内积空间V的两个子集, 若对任意向量$\boldsymbol{x} \in W_1$和任意向量$\boldsymbol{y} \in W_2$有$\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$, 则称$W_1$与$W_2$是正交的, 记为$W_1 \perp W_2$.

例1.4.11 在直角坐标系$O-xyz$中, 定义过坐标原点的直线$\boldsymbol{x}$和过坐标原点的平面W_1和W_2. 直线$\boldsymbol{x}$在几何上垂直平面W_1, 平面W_1与W_2在几何上相互垂直, 是否正交呢?

定义1.4.11（子空间正交补） 设W是V的线性子空间, 则集合$W^{\perp}=\{\boldsymbol{x}\in V|\boldsymbol{x}\perp W\}$ 称为W的**正交补**.

定义1.4.11（子空间正交补） 设W是V的线性子空间, 则集合$W^{\perp}=\{\boldsymbol{x}\in V|\boldsymbol{x}\perp W\}$称为$W$的**正交补**.

思考:

1.与W正交的子空间W_1一定是W的正交补空间吗?

再回到三维空间的例子

W**为**x**轴，则**$W^{\perp}=?$ $\boldsymbol{W}$**为**$\boldsymbol{yoz}$平面，**则**$W^{\perp}=?$

定义1.4.11（子空间正交补）设W是V的线性子空间, 则集合$W^{\perp}=\{\boldsymbol{x}\in V|\boldsymbol{x}\perp W\}$称为$W$的**正交补**.

思考:

2.W的补集W^{c}是线性子空间吗？ $W^{\perp}$和W的补集有什么关系

$$W^{\perp}\cap W=\{\theta\}$$
$$W^{\perp}\subseteq W^{c}\cup\{\theta\}$$

定义1.4.11（子空间正交补）设W是V的线性子空间，则集合$W^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \in V | \boldsymbol{x} \perp W\}$称为$W$的**正交补**.

思考:

3.空间W_1中无穷多个向量正交于W

是否意味着

空间W_1中任意的向量正交于W

定义1.4.11（子空间正交补）设W是V的线性子空间，则集合$W^{\perp}=\{\boldsymbol{x}\in V|\boldsymbol{x}\perp W\}$称为$W$的**正交补**.

思考:

4.若空间W_1中无穷多个向量正交于W_2，

是否意味着

空间W_2中无穷多个向量正交于W_1?

$$W_1=\mathrm{span}\left([1,0,1]^{\mathrm{T}}\right), W_2=\left\{[x_1,x_2,0]^{\mathrm{T}}\middle|x_1,x_2\in\mathbb{R}\right\}$$

定义1.4.11（子空间正交补）设W是V的线性子空间, 则集合$W^{\perp}=\{\boldsymbol{x}\in V|\boldsymbol{x}\perp W\}$称为$W$的**正交补**.

思考:

5.空间W_1中任意向量正交于W,

是否意味着

空间W中任意向量正交于W_1

$$(W^{\perp})^{\perp}=W$$

定理1.4.3 W **是** V **的线性子空间, 则** $W^{\perp}$ **也是** V **的线性子空间.**

定理1.4.4 W**是**V**的线性子空间，则**$V = W + W^{\perp}$

注10: 我们在说明线性空间V的两个子空间W_1和W_2相等常采用以下两种方法:

（1）$W_1 \subset W_2, W_1 \supset W_2$

（2）W_1和W_2均是由同一向量组所张成的子空间,或更确定的说明它们有相同的一组基;

（3）W_1是W_2的子集（或W_2是W_1的子集）且W_1和W_2的维数相等（课后习题5）.

定理1.4.4 W**是**V**的线性子空间，则**$V = W + W^{\perp}$

证明： $V = W + W^{\perp} \Leftrightarrow V \supset W + W^{\perp}$**且**$V \subset W + W^{\perp}$

选择W**的一组正交基**$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$，对于任意的$x \in V$,

$$x = \sum_{i=1}^{m} k_i \alpha_i + \left(x - \sum_{i=1}^{m} k_i \alpha_i\right), k_i \in F$$

$$k_i = \frac{(x, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$$

这里去看P23的1.4.4,更直观

k_i是唯一的吗，取值是否有更直观解释？

定理1.4.3 W **是** V **的线性子空间，则** $W^\perp$ **也是** V **的线性子空间.**

遗留问题： 给定W，$W^\perp$**是惟一的吗？**