北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

矩 阵 理 论

谷海波

guhaibo@buaa.edu.cn

自动化科学与电气工程学院

第一章 线性空间引论

- □ 线性空间
- □ 线性子空间
- □ 基与坐标
- □ 内积空间
- □ 直和与投影
- □ 应用：多项式插值

1.4 内 积 空 间

定义1.4.1（内积空间）设$F=\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$, V是F上的线性空间, 若对V中任意两向量$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$, 定义了一个数$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\in F$, 使得$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in V$和$k\in F$满足

（1）**共轭对称性**：$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\overline{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}$;

（2）**可加性**: $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$;

（3）**齐次性**: $(k\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$;

（4）**正定性**: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geq 0$, 当且仅当$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\theta}$时等号成立.

此时, V称为一个**内积空间**, 数$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$称为$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{y}$的**内积**.

定义1.4.1（内积空间） 设$F=\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$, V是F上的线性空间, 若对V中任意两向量$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$, 定义了一个数$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\in F$, 使得$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in V$和$k\in F$满足

（1）**共轭对称性**: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\overline{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}$;

（2）**可加性**: $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$;

（3）**齐次性**: $(k\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$;

（4）**正定性**: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geq 0$, 当且仅当$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\theta}$时等号成立.

此时, V称为一个**内积空间**, 数$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$称为$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{y}$的**内积**. 有限维的实内积空间称为**欧几里得空间**. 有限维的复内积空间称为**酉空间**.

注1: 欧氏（西）空间的维数指它作为线性空间的维数; 它们的线性子空间仍是欧氏（西）子空间.

注2: 定义1.4.1中性质（3）**齐次性仅对第一个向量成立**, 对第二个向量则是"**共轭齐次性**".

例1.4.1 设V是F上的线性空间, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$和$k \in F$,

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) =$$

$$(\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y}) =$$

注1: 欧氏（酉）空间的维数指它作为线性空间的维数; 它们的线性子空间仍是欧氏（酉）子空间.

注2: 定义1.4.1中性质（3）**齐次性仅对第一个向量成立**, 对第二个向量则是“**共轭齐次性**”.

例1.4.1 设V是F上的线性空间, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$和$k \in F$,

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$$

$$(\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y}) = \bar{k}\overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})} = \bar{k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

思考: $\forall \boldsymbol{y} \in V, (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{y}) =$?

例1.4.2 $\mathbb{R}^n$中, 取$\boldsymbol{x}=[x_1,\cdots,x_n]^T$, $\boldsymbol{y}=[y_1,\cdots,y_n]^T$, 令

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$$

满足内积四条性质, 故$\mathbb{R}^n$是欧氏空间, 仍记为$\mathbb{R}^n$.

例1.4.3 $\mathbb{C}^n$中，$\boldsymbol{x}=[x_1,\cdots,x_n]^T$，$\boldsymbol{y}=[y_1,\cdots,y_n]^T$，令

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$$

该定义能否仍作为$\mathbb{C}^n$的内积吗？

分析：

在$\mathbb{C}^1$中，取$\boldsymbol{x}=\mathrm{i}$时，$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{x}$的“内积”等于$-1$，不满足内积正定性要求.

例1.4.3 $\mathbb{C}^n$中，$\boldsymbol{x}=[x_1,\cdots,x_n]^T$，$\boldsymbol{y}=[y_1,\cdots,y_n]^T$，令

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^H\boldsymbol{x}=x_1\bar{y}_1+\cdots+x_n\bar{y}_n$$

式中，$\boldsymbol{y}^H=[\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_n]$表示为向量$\boldsymbol{y}$的**共轭转置**.

满足内积四条性质，故$\mathbb{C}^n$为酉空间，仍记为$\mathbb{C}^n$.

例1.4.4 $\mathbb{C}^n$中，取$\boldsymbol{x} = [x_1, \cdots, x_n]^T$，$\boldsymbol{y} = [y_1, \cdots, y_n]^T$. 令

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^H A \boldsymbol{x}$$

若该表达式能定义为$\mathbb{C}^n$的内积，则需要什么条件？

分析：由内积定义$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}$知，$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$，

$$\boldsymbol{y}^H A \boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}^H A \boldsymbol{y}}$$

$$\boldsymbol{y}^H A \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^H A^H \boldsymbol{x}$$

因此，

$$A = A^H$$

例1.4.4 $\mathbb{C}^n$中，取$\boldsymbol{x}=[x_1,\cdots,x_n]^T$，$\boldsymbol{y}=[y_1,\cdots,y_n]^T$.
令

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^H A\boldsymbol{x}$$

矩阵满足何种性质时，$\mathbb{C}^n$为酉空间？

分析：上述定义对内积可加性和齐次性始终成立.

现分析正定性：

$$\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n,\ \boldsymbol{x}^H A\boldsymbol{x}\geq 0,$$

$$\text{且}\boldsymbol{x}^H A\boldsymbol{x}=0\text{当且仅当}\boldsymbol{x}=0.$$

例1.4.4 $\mathbb{C}^n$中，取$\boldsymbol{x}=[x_1,\cdots,x_n]^T$，$\boldsymbol{y}=[y_1,\cdots,y_n]^T$. 令

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^H A\boldsymbol{x}$$

矩阵满足何种性质时，$\mathbb{C}^n$为酉空间？

综上，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^H A\boldsymbol{x}$能定义为$\mathbb{C}^n$的内积，须满足

（1）$A=A^H$

（2）$\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$，$\boldsymbol{x}^H A\boldsymbol{x}\geq 0$，

且$\boldsymbol{x}^H A\boldsymbol{x}=0$当且仅当$\boldsymbol{x}=0$.

定义1.4.2（Hermite矩阵）设$A=\left(a_{ij}\right)\in\mathbb{C}^{n\times n}$，若$A^H=A$,则称矩阵$A$是**Hermite矩阵**;若$A^H=-A$,则称$A$是**反Hermite矩阵**.

定义1.4.2（Hermite矩阵） 设$A=\left(a_{ij}\right)\in\mathbb{C}^{n\times n}$，若$A^H=A$，则称矩阵$A$是**Hermite矩阵**；若$A^H=-A$，则称$A$是**反Hermite矩阵**.

例如，$A=\begin{bmatrix}1 & \mathrm{i}\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，其Hermite矩阵为

$$A^H=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\mathrm{i} & 2\end{bmatrix}$$

定义1.4.3（正定矩阵）设$\boldsymbol{x}=[x_1,\cdots,x_n]^T\in\mathbb{C}^n$是未定元向量，$A=\left(a_{ij}\right)\in\mathbb{C}^{n\times n}$是Hermite矩阵，定义**复二次型**

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^H A\boldsymbol{x}$$

称**A为$f(\boldsymbol{x})$的矩阵**. 若$\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$, $f(\boldsymbol{x})\geq 0$且$f(\boldsymbol{x})=0$当且仅当$\boldsymbol{x}=0$，则称$f(\boldsymbol{x})$是**正定二次型**，A是**正定矩阵**. 若$\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$，有$f(\boldsymbol{x})\geq 0$，则称$f(\boldsymbol{x})$是**半正定二次型**，$A$是**半正定矩阵**.

类似地，可定义“负定二次型”、“负定矩阵”、“半负定二次型”和“半负定矩阵”.

例1.4.5 设复二次型$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^H A\boldsymbol{x}$,其中,$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2]^T\in\mathbb{C}^2$,矩阵$A$为

$$A=\begin{bmatrix}1 & \mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 2\end{bmatrix}$$

例1.4.5 设复二次型$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^H A\boldsymbol{x}$，其中，$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{C}^2$，矩阵$A$为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix}$$

则$f(\boldsymbol{x}) = |x_1 + \mathrm{i}x_2|^2 + |x_2|^2 \geq 0.$

$$f(\boldsymbol{x}) = 0\text{的条件为}x_1 = x_2 = 0.$$

故$f(\boldsymbol{x})$是正定二次型，A是正定矩阵.

例1.4.5 设复二次型$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^H A\boldsymbol{x}$, 其中, $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{C}^2$, 矩阵$A$为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}$$

则$f(\boldsymbol{x}) = |x_1 + \mathrm{i}x_2|^2 \geq 0.$

$f(\boldsymbol{x}) = 0$的条件为$x_1 = -\mathrm{i}x_2.$

显然, $f(\boldsymbol{x})$是半正定二次型, A是半正定矩阵.

定义1.4.4（度量矩阵）设$\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n$是内积空间$V$中的一组基, 称$n$阶矩阵

$$A=\left((\epsilon_i,\epsilon_j)\right)_{n\times n}=\begin{bmatrix}(\epsilon_1,\epsilon_1) & (\epsilon_1,\epsilon_2) & \cdots & (\epsilon_1,\epsilon_n)\\ (\epsilon_2,\epsilon_1) & (\epsilon_2,\epsilon_2) & \cdots & (\epsilon_2,\epsilon_n)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ (\epsilon_n,\epsilon_1) & (\epsilon_n,\epsilon_2) & \cdots & (\epsilon_n,\epsilon_n)\end{bmatrix}$$

为V关于基$\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n$的**度量矩阵（或Gram矩阵）**，常记为$G(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n)$.

注5: 内积空间中内积与度量矩阵是一一对应的.

设$\boldsymbol{\epsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\epsilon}_n$是内积空间$V$的一组基，则$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$，有

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \boldsymbol{\epsilon}_i$$

$$\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \boldsymbol{\epsilon}_j$$

式中，$\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \cdots, \xi_n]^T$和$\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \cdots, \eta_n]^T$分别是向量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$在基$\boldsymbol{\epsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\epsilon}_n$下的坐标.

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \bar{\eta}_j (\boldsymbol{\epsilon}_i, \boldsymbol{\epsilon}_j)$$

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i,j=1}^{n}\xi_i\bar{\eta}_j(\boldsymbol{\epsilon}_i,\boldsymbol{\epsilon}_j)$$

$$=\boldsymbol{\eta}^H\begin{bmatrix}(\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_1) & (\boldsymbol{\epsilon}_2,\boldsymbol{\epsilon}_1) & \cdots & (\boldsymbol{\epsilon}_n,\boldsymbol{\epsilon}_1)\\(\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2) & (\boldsymbol{\epsilon}_2,\boldsymbol{\epsilon}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\epsilon}_n,\boldsymbol{\epsilon}_2)\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\(\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_n) & (\boldsymbol{\epsilon}_2,\boldsymbol{\epsilon}_n) & \cdots & (\boldsymbol{\epsilon}_n,\boldsymbol{\epsilon}_n)\end{bmatrix}\boldsymbol{\xi}$$

定义$A=\left(\left(\boldsymbol{\epsilon}_i,\boldsymbol{\epsilon}_j\right)\right)_{n\times n}$，则

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{\eta}^H A^H\boldsymbol{\xi}$$

同理,

$$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\xi}^H A^H \boldsymbol{\eta}$$

又知$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\overline{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}$, 故

$$\boldsymbol{\eta}^H A^H \boldsymbol{\xi}=\overline{\boldsymbol{\xi}^H A^H \boldsymbol{\eta}}$$

即

$$\boldsymbol{\eta}^H A^H \boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\eta}^H A \boldsymbol{\xi}$$

考虑到$\boldsymbol{\xi}$和$\boldsymbol{\eta}$的任意性, $A=A^H$.

因此, A是Hermite矩阵, 且$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{\eta}^H A^H \boldsymbol{\xi}$.

命题1.4.1（度量矩阵的性质） 设$G(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)$和$G(\boldsymbol{\epsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\epsilon}_n)$均为内积空间$V$的度量矩阵，则有

(1) $G(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)$和$G(\boldsymbol{\epsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\epsilon}_n)$是正定Hermite矩阵；

分析：由内积正定性知，

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=\xi^H A\xi\geq 0$$

当且仅当$\xi=0$时取等号.

因此，A是正定矩阵.

命题1.4.1（度量矩阵的性质） 设$G(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)$和$G(\boldsymbol{\epsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\epsilon}_n)$均为内积空间$V$的度量矩阵，则有

(2) $G(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)$和$G(\boldsymbol{\epsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\epsilon}_n)$**合同**（或**相合**），即存在非奇异矩阵$P$使得

$$P^H G(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)P = G(\boldsymbol{\epsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\epsilon}_n)$$

式中，P是由基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$到基$\boldsymbol{\epsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\epsilon}_n$的过渡矩阵.

定义1.4.5（长度） 设V是内积空间, $\forall \boldsymbol{x} \in V$, 实数$\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$称为$\boldsymbol{x}$的**长度(模)**, 记为$\|\boldsymbol{x}\|$. 长度为1的向量称为**单位向量**.

注6: 实数的绝对值和复数的模值都是向量长度的特例.

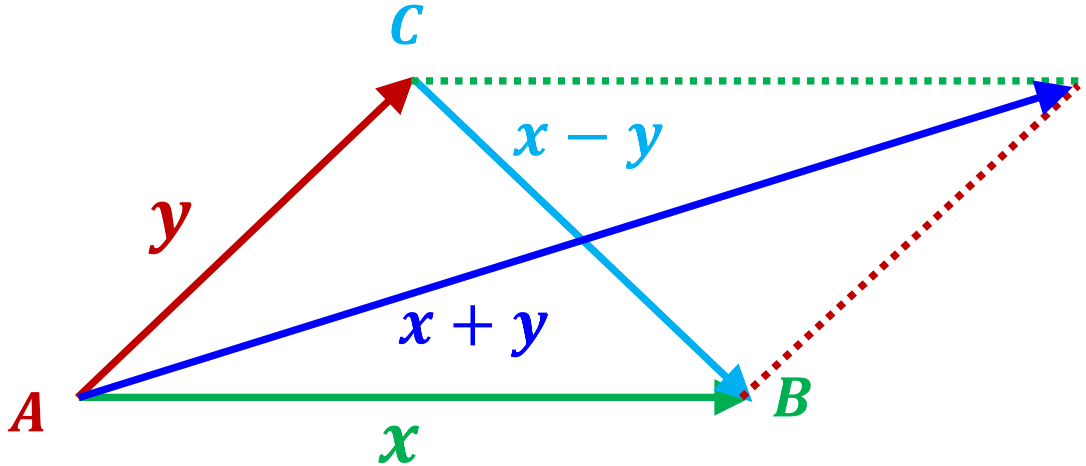
命题1.4.2（长度性质） $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$和$k \in F$，有

（1）**正定性**：$\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$当且仅当$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$时有$\|\boldsymbol{x}\| = 0$；

（2）**齐次性**：$\|k\boldsymbol{x}\| = |k|\|\boldsymbol{x}\|$；

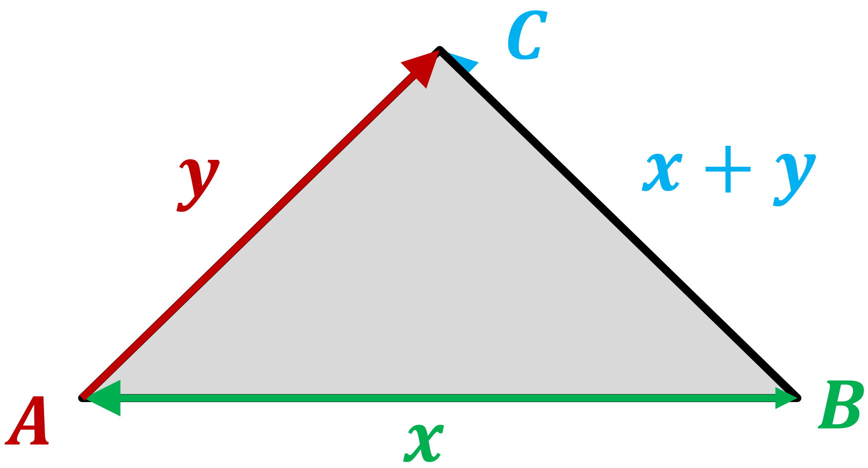
（3）**平行四边形法则**：

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2).$$



命题1.4.2（长度性质）$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$和$k \in F$，有

（4）**三角不等式**：$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$；



$$\mathrm{Re}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\|$$

定理1.4.1（Cauchy—Schwarz不等式）设V是数域F上的内积空间, 对任意$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$,

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \le \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

其中, $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$当且仅当$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$线性相关成立.

定理1.4.1（Cauchy—Schwarz不等式） 设V是数域F上的内积空间, 对任意$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$,

$$|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\leq\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

其中, $|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|=\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$当且仅当$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$线性相关成立.

证明：$\forall a\in\mathbb{R}$(更一般的情况呢), 有

$$f(a)=(a\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},a\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\geq 0$$

$\Rightarrow$

$$\|\boldsymbol{x}\|^2a^2+2a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\|\boldsymbol{y}\|^2\geq 0$$

$\Rightarrow$

$\Delta=(2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))^2-4\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2\leq\mathbf{0}$

若$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$线性相关,则存在实数$k$使得$\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{y}$. 反之,若$|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|=\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$，分别考虑$\boldsymbol{x}=\theta$和$\boldsymbol{x}\neq\theta$两种情况.

若$\boldsymbol{x}\neq\theta$，则$f(a)=(a\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},a\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=0$存在一个实数解

$$a=-\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{||\boldsymbol{x}||^2},\quad y=-ax$$

对于一般的数域F. 分别考虑$\boldsymbol{x}=\theta$和$\boldsymbol{x}\neq\theta$两种情况.

若$\boldsymbol{x}\neq\theta$，对于任意的$a\in F$, $f(a)=(a\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},a\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\geq 0$恒成立. 取

$$a=-\frac{\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}}{||\boldsymbol{x}||^2}$$

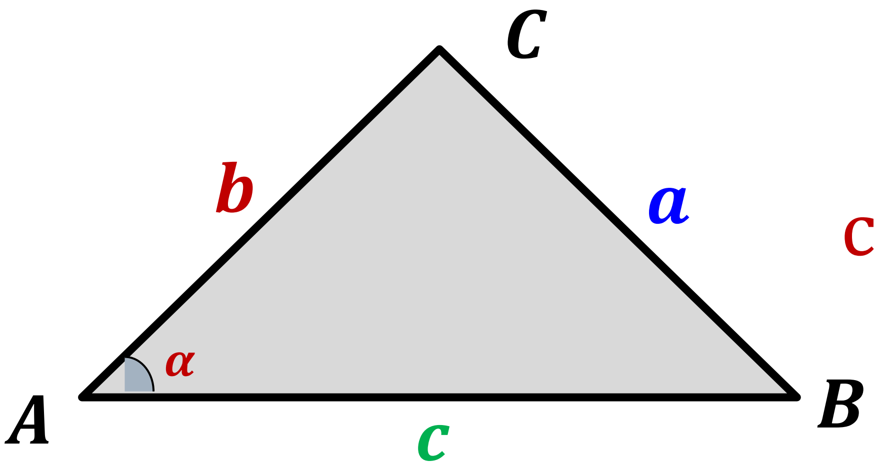
注6: 定义不同内积可得到不同的Cauchy不等式.

（1）对$\mathbb{R}^n$中任两向量$\boldsymbol{x} = [x_1, \cdots, x_n]^T$和$\boldsymbol{y} = [y_1, \cdots, y_n]^T$, 有

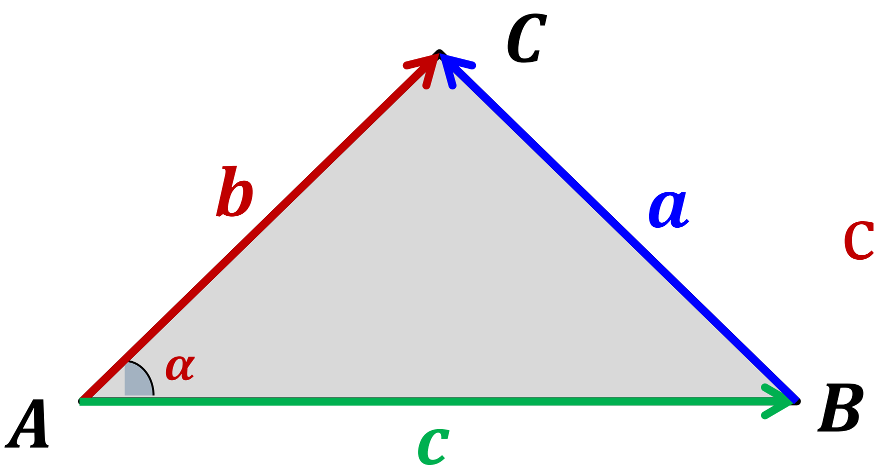
$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2}$$

（2）对$C_{[a,b]}$中任两函数$f(x)$和$g(x)$, 有

$$\left|\int_a^b f(x) g(x) dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}$$



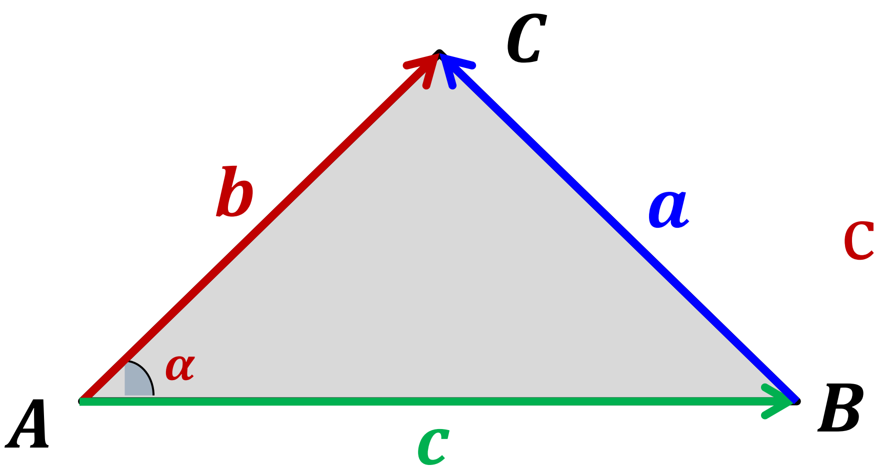
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$



$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

若定义$\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{AB}$为$\mathbb{R}^2$空间的两个向量,则角α即为向量的夹角.

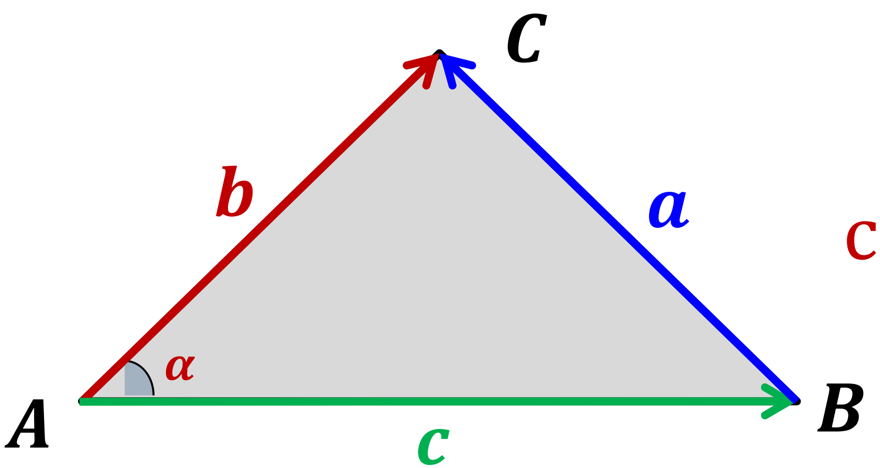
$$\cos\alpha = \frac{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}{2\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$$



$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

若定义$\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{AB}$为$\mathbb{R}^2$空间的两个向量，则角α即为向量的夹角.

$$\cos\alpha = \frac{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right\|^2}{2\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$$



$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

若定义$\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{AB}$为$\mathbb{R}^2$空间的两个向量，则角α即为向量的夹角.

$$\cos\alpha=\frac{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$$

定义1.4.6（向量夹角） 设V是欧氏空间, 对V中任意向量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$, 定义向量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$的**夹角**为

$$\alpha =< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >= \arccos \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|} \in [0, \pi]$$

注7: 引入内积至线性空间才有了向量夹角的概念, 为线性空间带来了“图形化”的理解.

例1.4.7 $\mathbb{R}^2$关于基$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$的度量矩阵为

$$G(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_1) & (\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1)\\(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) & (\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_2)\end{bmatrix}$$

行列式$|G(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)|$的几何含义.

例1.4.7 $\mathbb{R}^2$关于基$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$的度量矩阵为

$$G(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_1) & (\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1)\\(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) & (\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_2)\end{bmatrix}$$

行列式$|G(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)|$的几何含义.

分析：$|G(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)|=\|\boldsymbol{x}_1\|^2\|\boldsymbol{x}_2\|^2-(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)^2$

定义向量$\boldsymbol{x}_1$与$\boldsymbol{x}_2$的夹角为α,上式改写为

$$\begin{aligned}|G(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)|&=\|\boldsymbol{x}_1\|^2\|\boldsymbol{x}_2\|^2-\|\boldsymbol{x}_1\|^2\|\boldsymbol{x}_2\|^2\cos^2\alpha\\&=\|\boldsymbol{x}_1\|^2\|\boldsymbol{x}_2\|^2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

$|G(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)|$恰是以向量$\boldsymbol{x}_1$与$\boldsymbol{x}_2$为邻边的平行四边形面积的平方

定义1.4.7（正交和正交向量组）设V是内积空间，对V中任意向量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$, 则称向量$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{y}$**正交**（或**垂直**），记为$\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$. 若一组非零向量两两正交，则称为**正交向量组**. 单位向量构成的正交向量组称为**标准正交向量组**.

定义1.4.7（正交和正交向量组）设V是内积空间，对V中任意向量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$，则称向量$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{y}$**正交**（或**垂直**），记为$\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$. 若一组非零向量两两正交，则称为**正交向量组**. 单位向量构成的正交向量组称为**标准正交向量组**.

注8：零向量$\boldsymbol{\theta}$与任何向量均正交. **正交向量组要求向量均为非零向量**.

注9：向量$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{y}$正交当且仅当$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2$(**勾股定理**). 该结果可推广至一般情形.

例1.4.8 求$\mathbb{R}^4$中的单位向量$\boldsymbol{x}$使它与$\boldsymbol{\alpha}_1 = [1,1,-1,1]^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = [1,-1,-1,1]^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = [2,1,1,3]^T$均正交.

定理1.4.2 正交向量组线性无关.

证明: 设向量组$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_s$是内积空间$V$的正交向量组. 现考查方程

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{\theta}$$

用$\boldsymbol{x}_i (i = 1,2, \dots, s)$与上式两端作内积, 得

$$(k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{x}_s, \boldsymbol{x}_i) = (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{x}_i) = 0 \qquad *$$

注意到$(*)$式左边

$$(k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{x}_s, \boldsymbol{x}_i) = \sum_j k_{\mathrm{j}}(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_i)$$

定理1.4.2 正交向量组线性无关.

证明(续): 且$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_s$是正交向量组, 故当$j \neq i$时有$(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_i) = 0$; 当$j = i$时有$(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_i) \neq 0$.

进而 (*)式化简为

$$k_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i) = 0$$

即$k_i = 0(i = 1,2, \ldots, s)$.

因此, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_s$线性无关. 证毕.

推论1.4.1 在n维内积空间中, 正交向量组中的向量不会超过n个.

推论1.4.1 在n维内积空间中，正交向量组中的向量不会超过n个.

思考: 在n维内积空间中V，能否一定找到包含n个向量的正交向量组？

推论1.4.1 在n维内积空间中，正交向量组中的向量不会超过n个.

思考: 在n维内积空间中V，能否一定找到包含n个向量的正交向量组？

分析：假设$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$是$V$的一组基，$\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n$是待定的正交向量组.

根据Gram-Schmidt正交化方法

$$\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{x}_1$$

$$\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{x}_k-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{y}_i)}{(\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{y}_i)}\boldsymbol{y}_i,k>1$$

定义1.4.8（标准正交基） 在n维内积空间中，由n个向量组成的正交向量组称为**正交基**. 由单位向量组成的正交基称为**标准正交基**.

例1.4.9考查定义在$[-\pi,\pi]$的光滑函数空间S，定义内积为$\forall f(t),g(t)\in S$,

$$(f(t),g(t))=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)g(t)dt$$

分析：$\forall k,m,n\in\mathbb{N}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos ktdt=\int_{-\pi}^{\pi}\sin ktdt=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mt\cdot\cos mtdt=0$$

例1.4.9考查定义在$[-\pi,\pi]$的光滑函数空间S，定义内积为$\forall f(t),g(t)\in S$,

$$(f(t),g(t))=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)g(t)dt$$

分析：在区间$[-\pi,\pi]$上的三角函数组

$$1,\cos t,\sin t,\cdots,\cos kt,\sin kt,\cdots,$$

是正交向量组，也是空间S的正交基.

因此，光滑函数$f(x)$展开为 **傅里叶三角级数**

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

例1.4.10 设$\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n$是线性空间$V$的标准正交基，并定义$\boldsymbol{\alpha}=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^T$和$\boldsymbol{\beta}=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]^T$分别是$V$中向量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$在基$\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n$下的坐标，则

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{\beta}^H\boldsymbol{G}(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n)\boldsymbol{\alpha}$$

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{\beta}^H\boldsymbol{\alpha}$$

注10: 线性空间V的向量组$\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n$是标准正交基当且仅当$V$关于$\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n$的度量矩阵为单位矩阵.

在标准正交基下，内积的运算变得更加简单.

定义1.4.9（向量正交于集合）设V是内积空间, W是V的子集, 若对任意向量$\boldsymbol{y} \in W$和$\boldsymbol{x} \in V$有$\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$, 则称$\boldsymbol{x}$正交（或垂直）于集合$W$, 记为$\boldsymbol{x} \perp W$.

定义1.4.10（两集合正交）设W_1与W_2是内积空间V的两个子集, 若对任意向量$\boldsymbol{x} \in W_1$和任意向量$\boldsymbol{y} \in W_2$有$\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$, 则称$W_1$与$W_2$是正交的, 记为$W_1 \perp W_2$.

例1.4.11 在直角坐标系中定义三个子空间：过坐标原点的直线W、过坐标原点的平面W_1和W_2如图所示. 在几何上，直线W垂直平面W_1，平面W_1垂于W_2.

考察子空间W与W_1是否正交问题：

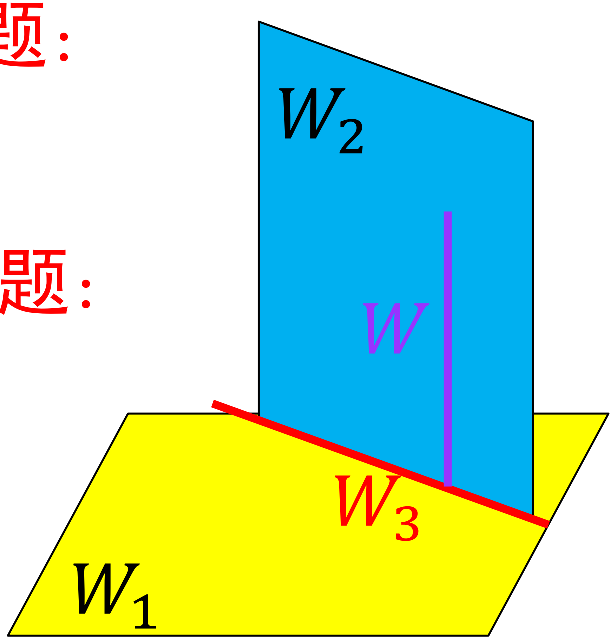
子空间W正交于W_1.

考察子空间W_1与W_2是否正交问题：

$$W_1 \cap W_2 = W_3$$

W_3任两非零向量共线，不正交.

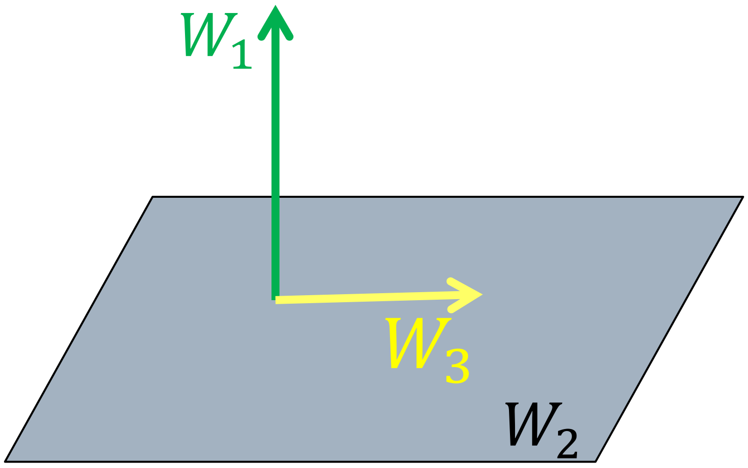
因此，子空间W_1与W_2不正交.



定义1.4.11（子空间正交补）设W是V的线性子空间，则集合$W^{\perp}=\{\boldsymbol{x}\in V|\boldsymbol{x}\perp W\}$称为$W$的**正交补**.

定义1.4.11（子空间正交补） 设W是V的线性子空间, 则集合$W^{\perp}=\{\boldsymbol{x}\in V|\boldsymbol{x}\perp W\}$称为$W$的**正交补**.

思考: 与W正交的子空间是W的正交补空间吗？



定理1.4.3 W是V的线性子空间, 则$W^{\perp}$也是V的线性子空间.

证明：对任意向量$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{W}^{\perp}$,$\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{F}$，有

$$(\boldsymbol{\lambda x} + \boldsymbol{\mu y}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}$$

思考： 给定W，$W^{\perp}$**是惟一的吗？**

定理1.4.4 W**是**V**的线性子空间，则**$V = W + W^{\perp}$

证明： $V = W + W^{\perp} \Leftrightarrow V \supset W + W^{\perp}$**且**$V \subset W + W^{\perp}$

选择W**的一组正交基**$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$，对于任意的$x \in V$,

$$x = \sum_{i=1}^{m} k_i \alpha_i + \left(x - \sum_{i=1}^{m} k_i \alpha_i \right), k_i \in F$$

$$k_i = \frac{(x, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$$

k_i是唯一的吗，取值是否有更直观解释？