3.6 对 角 化 分 解

定义3.6.1（单纯矩阵）若n阶复方阵A相似于对角矩阵，则矩阵A称为**可对角化矩阵**（或**单纯矩阵**）.

【思考】：若线性变换T在某基下的矩阵为对角阵，这里的某基如何确定？

$$T(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n) = (\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A$$

$P^{-1}AP = \Lambda$为对角矩阵

$$(\xi_1,\cdots,\xi_n) = (\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)P$$

$$T(\xi_1,\cdots,\xi_n) = ?$$

定理3.6.1 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$的全部互异特征根为$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$，$(m \le n)$，则以下表达等价：

（1）A是单纯矩阵；

（2）A有n个线性无关的特征向量；

（3）特征值λ_i（$i = 1, \cdots, m$）的代数重数等于其几何重数；

（4）$\sum_{i=1}^{m} \dim E(\lambda_i) = n$；

（5）最小多项式$m_A(\lambda)$无重根.

定理3.6.1 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$的全部互异特征根为$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$，$(m \le n)$，则以下表达等价：

（1）A是单纯矩阵；

（3）特征值 λ_i （ $i = 1, \cdots, m$ ）的代数重数等于其几何重数；

证明：$(1) \Rightarrow (3)$

$$f_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1}(\lambda - \lambda_2)^{d_2}\cdots(\lambda - \lambda_m)^{d_m}$$

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \cdots, \lambda_1}_{d_1}, \cdots, \underbrace{\lambda_m, \cdots, \lambda_m}_{d_m})$$

特征子空间$E(\lambda_i)$=$\{\alpha | A\alpha = \lambda_i\alpha\}$的维数为$\lambda_i$的几何重数，

$$n - rank(\lambda_i I - A) = n - rank(P(\lambda_i I - \Lambda)P^{-1}) = d_i.$$

定理3.6.1 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$的全部互异特征根为$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$，$(m \le n)$，则以下表达等价：

（1）A是单纯矩阵；

（3）特征值 λ_i （ $i = 1, \cdots, m$ ）的代数重数等于其几何重数；

（4）$\sum_{i=1}^{m} \dim E(\lambda_i) = n$；

证明：$(3) \Rightarrow (4)$显然

$(4) \Rightarrow (1)$ 特征子空间维数之和是n, 又不同的特征根对应的特征向量线性无关，故在m个特征子空间可以找到n个线性无关向量，矩阵A是单纯矩阵.

定理3.6.1 （1）A是单纯矩阵；（5）最小多项式$m_A(\lambda)$无重根.

证明:⇒ 令$g(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_m)$

A可对角化， $g(A)=\mathbf{0}$.

由最小多项式和特征多项式的关系，

$m_A(\lambda)=g(\lambda)$是**最小多项式**

定理3.6.1 （1）A是单纯矩阵；（5）最小多项式$m_A(\lambda)$无重根.

证明：$\Leftarrow$ 最小多项式无重根

$$m_{\mathrm{A}}(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_m)$$

$$m_{\mathrm{A}}(A)=(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)\cdots(A-\lambda_m I)=0$$

$\sum_{i=1}^{m} rank(A-\lambda_i I)\le(m-1)n$

$\sum_{i=1}^{m} dim\big(E(\lambda_i)\big)=\sum_{i=1}^{m}(n-rank(A-\lambda_i I))\ge n$

又 $\sum_{i=1}^{m} dim\big(E(\lambda_i)\big)\le n$,（几何重数小于代数重数）

$\sum_{i=1}^{m} dim\big(E(\lambda_i)\big)=n$, A可对角化

例3.6.1 设线性变换$T \in L(\mathbb{R}^3)$在$\mathbb{R}^3$空间的一组基$\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3$下的矩阵为$A$，即$T[\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3] = [\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3]A$，其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

问：

（1）线性变换T可否对角化；

$$f_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 5), m_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 5)$$

（2）若T可对角化，试求满秩矩阵P使$P^{-1}AP$为对角矩阵.

例3.6.2 若矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$且$A^2 = A$，试判断$A$是否可对角化.

推论3.6.1 若复方阵A的零化多项式$g(\lambda)$无重根，则矩阵A是单纯矩阵.

推论3.6.2 若n阶复方阵A恰好有n个互异特征值，则它必可对角化，反之则不然.

注1： 上述两个推论仅是复方阵A为单纯矩阵的充分而非必要条件.

例3.6.3 设$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$，求$A^{100}$.

$$f_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-4)$$

例3.6.4 求解常系数线性常微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 \\ \dot{x}_3 = 6x_1 - 6x_2 + 4x_3 \end{cases}$$

定义3.6.1（单纯矩阵）若n阶复方阵A相似于对角矩阵，则矩阵A称为**可对角化矩阵**（或**单纯矩阵**）.

【思考】：若定义3.6.1中的相似变换矩阵是酉矩阵，则此时的单纯矩阵会表现出何种性质？

推论3.6.3 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，则$A$是Hermite矩阵当且仅当$A$的所有特征值$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$为实数，且存在酉矩阵$U \in \mathbb{C}^{n\times n}$使得$U^H A U = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

对应于不同特征根的特征向量正交

推论3.6.4 设矩阵$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，则$A$是实对称矩阵当且仅当$A$的所有特征值$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$为实数，且存在正交矩阵$Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$使得$Q^T A Q = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

例3.6.5 求正交矩阵Q使得Q^TBQ为对角阵，其中

$$B=\begin{bmatrix}-1 & -3 & 3 & -3\\ -3 & -1 & -3 & 3\\ 3 & -3 & -1 & -3\\ -3 & 3 & -3 & -1\end{bmatrix}$$

$$|\lambda I-B|=(\lambda-8)(\lambda+4)^3$$

注2： 求Hermite矩阵A酉相似于对角阵的步骤如下：

（1）求出A的全部相异特征值及重数；

（2）对于每个特征值λ，求方程$(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = 0$的一个基础解系，并将其单位正交化处理；

（3）由标准正交特征向量生成酉矩阵Q，则$Q^T A Q$是对角矩阵.

【思考】： 除了Hermite矩阵外，还有哪些矩阵可以酉相似对角化？

定义3.6.2（正规矩阵）设矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，若$A^H A = AA^H$，则称$A$为**正规矩阵**（或**规范矩阵**）.

定理3.6.2 复方阵A是正规矩阵当且仅当A酉相似于对角阵，即$A^H A = AA^H$当且仅当存在酉矩阵U使得$U^H AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

充分性显然

必要性：由Schur引理，存在酉阵U，使得

$U^H AU = \Lambda$，Λ为上三角矩阵

$A^H A = AA^H$，　　　$\Lambda^H \Lambda = \Lambda \Lambda^H$

Λ非对角元为零

推论3.6.5 复方阵A是正规矩阵当且仅当A有n个特征向量构成$\mathbb{C}^n$空间的一组标准正交基，且属于A的不同特征值的特征向量正交.

例3.6.6 设$A=\begin{bmatrix}0 & \mathrm{i} & -1\\ -\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i}\\ -1 & -\mathrm{i} & 0\end{bmatrix}$，验证$A$是正规矩阵，并求酉矩阵$U$使得$U^HAU$为对角阵.

推论3.6.6 实方阵A是正交矩阵当且仅当A的所有特征值的模值为1，且存在酉矩阵U使得$U^H AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$，其中$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$是$A$的$n$个特征值.

注3： 正交矩阵酉相似对角化时的变换矩阵是酉矩阵，不一定是正交矩阵.

推论3.6.7 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，则$A$是酉矩阵当且仅当$A$的所有特征值的模值为1，且存在酉矩阵$U$使得$U^H AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$，其中$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$是$A$的$n$个特征值.

A 是实对称矩阵，且相似于对角阵 diag(3, 9, 3)，$x_1=(1,2,3)^T$， $x_2=(1,1,1)^T$ 是属于特征值 3 的特征根，求矩阵 A .