

第三章 矩阵分解

- ☐ 相抵分解
- ☐ 满秩分解
- ☐ 三角分解
- ☐ QR分解
- ☐ Schur 分解
- ☐ 对角化分解
- ☐ 谱分解
- ☐ Jordan分解
- ☐ 奇异值分解



第三章 矩阵分解

相 抵 分 解

第三章 矩阵分解——相抵分解

引理3.1.1 设 $A, B \in F^{m \times n}$ ，则以下表述等价：

- (1) A 与 B 相抵；
- (2) 存在可逆矩阵 $P \in F^{m \times m}$ 和 $Q \in F^{n \times n}$ 使得 $A = PBQ$ ；
- (3) 矩阵 A 与 B 均可通过有限次初等行列变换得到同一个矩阵；
- (4) $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

第三章 矩阵分解——相抵分解

引理3.1.1 设 $A, B \in F^{m \times n}$ ，则以下表述等价：

(1) A 与 B 相抵；

(3) 矩阵 A 与 B 均可通过有限次初等行列变换得到同一个矩阵；

(1) \Rightarrow (3) 显然

(3) \Rightarrow (1)

$$P_1 \cdots P_l A Q_1 \cdots Q_m = M_1 \cdots M_s B N_1 \cdots N_t = C$$

第三章 矩阵分解——相抵分解

注1: 引理3.1.1 性质 (3) 经初等行列变换所得矩阵的最简形式为 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 称为矩阵 A (或 B) 的**相抵标准形**, 其中 r 为矩阵 A (或 B) 的秩.

引理3.1.2 设 $A \in F^{m \times n}$ 的秩为 r , 则存在可逆矩阵可逆矩阵 $P \in F^{m \times m}$ 和 $Q \in F^{n \times n}$ 使得

$$A = P \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q$$

该表达式称为矩阵 A 的**相抵分解式**.

第三章 矩阵分解——相抵分解

例3.1.1 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times p}$, 证明:

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n \leq \text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B)).$$

Sylvester
秩不等式

证明: 首先证明第二个不等号成立. 设 $A = P \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q$, 并将矩阵 QB 按行分块, 记为 $QB = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$, 则有

$$AB = P \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.2)$$

式中, $P \in \mathbb{C}^{m \times m}$ 和 $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是可逆矩阵, $C \in \mathbb{C}^{r \times p}$, $D \in \mathbb{C}^{(n-r) \times p}$, $r = \text{rank}(A)$.

由式 (3.1.2) 得,

$$\text{rank}(AB) = \text{rank} \left(\begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \text{rank}(C)$$

又知 $\text{rank}(C) \leq r$ 且 $\text{rank}(C) \leq \text{rank}(QB) = \text{rank}(B)$

因此, $\text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B))$.

$$QBx = 0$$

$$Bx = 0$$



第三章 矩阵分解——相抵分解

例3.1.1 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times p}$, 证明:

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n \leq \text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B)).$$

Sylvester
秩不等式

然后证明第一个不等号成立. 由 $QB = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$ 知, $\text{rank}(QB) \leq \text{rank}(D) + \text{rank}(C)$, 故

$$\text{rank}(B) \leq \text{rank}(D) + \text{rank}(AB)$$

又知 $\text{rank}(D) \leq n - r$. 因此, $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n \leq \text{rank}(AB)$. 证毕.



第三章 矩阵分解——相抵分解

例3.1.1 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times p}$, 证明:

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n \leq \text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B)).$$

$$\text{rank}(AB) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n$$

$$\text{rank}(AB) + n \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

$$\text{rank} \begin{pmatrix} I_n & O \\ O & AB \end{pmatrix} \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

$$\text{rank} \begin{pmatrix} -B & I_n \\ O & A \end{pmatrix} \geq \text{rank}(B) + \text{rank}(A)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I_n & O \\ O & AB \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{pmatrix} I_n & O \\ A & AB \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} I_n & -B \\ A & O \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -B & I_n \\ O & A \end{pmatrix} \end{aligned}$$

第三章 矩阵分解——相抵分解

例3.1.2 线性方程组 $Ax = 0$ 的解空间维数.

$P \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Qx = 0$ 与 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y = 0$ 解空间维数, $y = Qx$

求解线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$P \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y = b$$

第三章 矩阵分解——相抵分解

例3.1.2.

$$A = P \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q$$

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & I \\ I & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 & P^{-1} \\ 0 & 0 & \\ Q^{-1} & * & \end{bmatrix}$$

