北京航空航天大学
BEIHANG UNIVERSITY

# 矩阵理论


**王磊**

自动化科学与电气工程学院

# 第四章 矩阵分析

- 向量范数
- 矩阵范数
- 相容范数
- 矩阵扰动分析
- 特征值估计

- 矩阵级数
- 矩阵函数
- 函数矩阵
- 应用：主元分析法

# 矩 阵 级 数

**定义4.6.1(向量序列按范数收敛)** 设$(V,\|\cdot\|_\alpha)$是$n$维赋范线性空间,$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_k,\cdots$是$V$中一个向量序列,记为$\{\boldsymbol{x}_k\}$. 若存在$V$的向量$\boldsymbol{x}$满足

$$\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}\|_\alpha=0$$

则称向量序列$\{\boldsymbol{x}_k\}$按范数$\|\cdot\|_\alpha$收敛于$\boldsymbol{x}$,记作

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}\text{ 或}\boldsymbol{x}_k\xrightarrow{\alpha}\boldsymbol{x}$$

不收敛的向量称为是发散的.

**例4.6.1** 设$V = \mathbb{R}, \|\cdot\|_\alpha$取为绝对值，则定义4.6.1中敛散性与高等数学中的相关概念一致.

**定理4.6.1** 设$(V,\|\cdot\|)$是$n$维赋范线性空间，$\{\boldsymbol{x}_k\}$是$V$的一个向量序列. 序列$\{\boldsymbol{x}_k\}$按某种范数收敛于$\boldsymbol{x}$，则序列$\{\boldsymbol{x}_k\}$按任意范数收敛于$\boldsymbol{x}$，有限维空间中按范数收敛是等价的.

**定义4.6.2(向量序列按坐标收敛)** 设$(V,\|\cdot\|_\alpha)$是$n$维赋范线性空间, $\boldsymbol{\epsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\epsilon}_n$是$V$中一组基, $\{\boldsymbol{x}_k\}$是$V$中一个向量序列, 并记向量序列$\{\boldsymbol{x}_k\}$中的任一向量$\boldsymbol{x}_k$在$\boldsymbol{\epsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\epsilon}_n$下坐标为

$$\xi_k=\left[\xi_1^{(k)},\cdots,\xi_n^{(k)}\right]^T\in F^n$$

若存在$V$的向量$\boldsymbol{x}$满足$\lim\limits_{k\to\infty}\xi_i^{(k)}=\xi_i, i=1,\cdots,n$

则称向量序列$\{\boldsymbol{x}_k\}$按坐标收敛于向量$\boldsymbol{x}$, 其中$\xi$是向量$\boldsymbol{x}$在基$\boldsymbol{\epsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\epsilon}_n$下坐标.

**定理4.6.2** 设$(V,\|\cdot\|)$是$n$维赋范线性空间，$\{\boldsymbol{x}_k\}$是$V$的一个向量序列且$\boldsymbol{x}\in V$. 向量序列$\{\boldsymbol{x}_k\}$按范数收敛于向量$\boldsymbol{x}$当且仅当它按坐标收敛于$\boldsymbol{x}$.

向量序列$\{\boldsymbol{x}_k\}$按范数收敛

定义:对某一范数

$$\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}\|_\alpha=0$$

向量序列$\{\boldsymbol{x}_k\}$收敛

:对任一范数

$$\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}\|=0$$

向量序列$\{\boldsymbol{x}_k\}$按坐标收敛

定义:对某一基下坐标

$$\lim_{k\to\infty}\xi_i^{(k)}=\xi_i$$

向量序列$\{\boldsymbol{x}_k\}$收敛

:对任一范数

$$\lim_{k\to\infty}\|\xi_k-\xi\|=0$$

**定义4.6.3(矩阵序列按坐标收敛)** 设矩阵序列$\{A_k\}$，其中矩阵$A_k=(a_{ij}{}^{(k)})\in\mathbb{C}^{m\times n}, k=1,2,\cdots$.

若当$k\to\infty$时，$A_k$的任一个元素$a_{ij}{}^{(k)}$均有极限$a_{ij}{}^{(0)}$，即

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}{}^{(k)}=a_{ij}{}^{(0)}, 1\le i\le m, 1\le j\le n$$

则称矩阵序列按元素收敛或按坐标收敛(或简称为矩阵序列$\{A_k\}$收敛)，$A_0=(a_{ij}{}^{(0)})$称为序列的极限，记为$\lim\limits_{k\to\infty} A_k=A_0$.

**例4.6.2** 设$A_k=\begin{bmatrix} \frac{2k^2+k+1}{k^2} & \frac{\sin k}{k} \\ e^{-k}\sin k & (1+\frac{1}{2k})^k \end{bmatrix}$，求极限$\lim\limits_{k\to\infty} A_k$.

**命题4.6.1** 设矩阵序列$\{A_k\},\{B_k\}$和$\{C_k\}$分别收敛于矩阵$A,B$和$C$，则$\forall c_1,c_2\in\mathbb{C}$，有

（1）$\lim\limits_{k\to\infty}(c_1A_k+c_2B_k)=c_1A+c_2B$

（2）$\lim\limits_{k\to\infty}(A_kC_k)=AC$

（3）若$A_k$和$A$为可逆矩阵，则$\lim\limits_{k\to\infty}A_k^{-1}=A^{-1}$.

其中$A_k,B_k\in\mathbb{C}^{m\times n},C_k\in\mathbb{C}^{n\times p}$.

**推论4.6.1** 设$\|\cdot\|$是$\mathbb{C}^{m\times n}$上任一矩阵范数，线性空间$\mathbb{C}^{m\times n}$中矩阵序列$\{A_k\}$收敛于矩阵$A_0$的充要条件是

$$\lim_{k\to\infty}\|A_k-A_0\|=0.$$

**推论4.6.2** 复方阵$A$的某一范数满足$\|A\| < 1$, 则

$$\lim_{k\to\infty} A^k = 0.$$

思考: 若$\lim_{k\to\infty} A^k = 0$, 则$\|A\| < 1$成立吗?

**推论4.6.2** 复方阵$A$的某一范数满足$\|A\| < 1$,则

$$\lim_{k\to\infty} A^k = 0.$$

思考:若$\lim_{k\to\infty} A^k = 0$,则$\|A\| < 1$成立吗?

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^k = \begin{bmatrix} 0.1^k & 0 \\ k0.1^{k-1} & 0.1^k \end{bmatrix}$$

**定理4.6.3** 设$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $\lim\limits_{k\to\infty}A^k=0$的充分必要条件是$\rho(A)<1$.

**定理4.6.3** 设$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\lim\limits_{k\to\infty}A^k=0$的充分必要条件是$\rho(A)<1$.

$$J_i^k=\begin{bmatrix}\lambda_i^k & C_k^1\lambda_i^{k-1} & C_k^2\lambda_i^{k-2} & \cdots & C_k^{n_i-1}\lambda_i^{k-n_i+1}\\ & \lambda_i^k & C_k^1\lambda_i^{k-1} & \cdots & C_k^{n_i-2}\lambda_i^{k-n_i+2}\\ & & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & & \lambda_i^k & C_k^1\lambda_i^{k-1}\\ & & & & \lambda_i^k\end{bmatrix}$$

**例4.6.3** 设$A=\begin{bmatrix} c & 2c \\ 3c & 4c \end{bmatrix}$，其中$c$为实数. 求$\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$的充分必要条件.

**定义4.6.4(矩阵级数)** 设矩阵序列$\{A_k \in \mathbb{C}^{m\times n}\}$, 称$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$为矩阵级数. 令

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} A_k ,$$

称$S_N$为矩阵级数的部分和.

- 若矩阵序列$\{S_N\}$收敛且有极限$S$, 即

$$\lim_{N\to\infty} S_N = S ,$$

则称矩阵级数$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$收敛且有和$S$.

- 不收敛的矩阵级数称为发散级数.

**例4.6.4** 设$A_k=\begin{bmatrix}\frac{1}{k(k+1)} & 0\\ 0 & \frac{2k}{3^k}\end{bmatrix}$, $k=1,2,\cdots$, 求矩阵级数$\sum_{k=1}^{\infty}A_k$.

**例4.6.4** 设$A_k=\begin{bmatrix}\frac{1}{k(k+1)} & 0\\ 0 & \frac{2k}{3^k}\end{bmatrix}, k=1,2,\cdots$，求矩阵级数$\sum_{k=1}^{\infty}A_k$.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1$$

当$|x|<1$时，

$$1+x+x^2+\cdots+x^k+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

$$1+2x+3x^2+\cdots+kx^{k-1}+\cdots=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$x+2x^2+3x^3+\cdots+kx^k+\cdots=\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{3^k}=2\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{1}{3}\right)^k=\frac{3}{2}$$

**命题4.6.2** 设$A_k \in \mathbb{C}^{m\times n}$，则以下命题成立：

（1）$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $mn$个数值级数$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}$收敛；

（2）$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 发散 $\Leftrightarrow$ $mn$个数值级数$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}$中至少有一个发散；

（3） $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 收敛 $\Rightarrow$

$$\lim_{k\to\infty} A_k = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \|A_k\| = 0.$$

**定义4.6.5(矩阵级数绝对收敛)** 设$A_k \in \mathbb{C}^{m\times n}$,若矩阵级数$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$所对应的$mn$个数值级数$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}$,$1 \le i \le m, 1 \le j \le n$均绝对收敛,则称$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$绝对收敛.

**命题4.6.3** 设$A_k \in \mathbb{C}^{m\times n}$,则以下命题成立:

（1）若$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$绝对收敛,则$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$收敛. 但$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$收敛并不蕴含$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$绝对收敛;

（2）若$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$绝对收敛于$S$,对$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$任意重新排列得$\sum_{k=1}^{\infty} B_k$,则$\sum_{k=1}^{\infty} B_k$绝对收敛于$S$;

（3）$\forall P \in \mathbb{C}^{p\times m}$和$Q \in \mathbb{C}^{n\times q}$,若$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ (绝对)收敛,则$\sum_{k=1}^{\infty} PA_kQ$ (绝对)收敛. 反之则不然.

**例4.6.5** 考查矩阵级数$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$的敛散性，其中

$$A_k = \begin{bmatrix} (-1)^{k+1}\dfrac{1}{k} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**定理4.6.4** 设$A_k=\left(a_{ij}{}^{(k)}\right)\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$\sum_{k=1}^{\infty}A_k$绝对收敛当且仅当对任意矩阵范数,数值级数$\sum_{k=1}^{\infty}\|A_k\|$收敛.

**例4.6.6** 考查矩阵级数$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$的敛散性，其中

$$A_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{3^k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k(k+1)} \end{bmatrix}.$$

**定义4.6.6(矩阵幂级数)** 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 定义矩阵级数$\sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$, 其中$A^0 = I$, 则称该级数为**矩阵幂级数**.

**引理4.6.1** 设$z \in \mathbb{C}$, 若幂级数$\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$在$z = z_0$点收敛, 则对满足$|z| < |z_0|$的幂级数都绝对收敛. 反之, 若幂级数$\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$在$z = z_0$点发散, 则对于$|z| > |z_0|$的幂级数都发散.

复习: 若存在非负实数或无穷大数$r$满足$|z| < r$时, 幂级数$\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$收敛; 而$|z| > r$时, $\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$都发散, 则称$r$为收敛半径.

**定理4.6.5(Abel型定理)** 设复变量幂级数 $\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$的收敛半径为$r$,矩阵$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$的谱半径为$\rho(A)$,则

（1）当$\rho(A) < r$,$\sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$绝对收敛;

（2）当$\rho(A) > r$,$\sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$发散.

注1: 当$\rho(A)=r$时, 矩阵幂级数$\sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$的敛散性无法由Abel型定理判断, 只能根据矩阵级数的定义进行判断.

**例4.6.7** 设$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, 判断$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} A^k$的敛散性.

**推论4.6.4** 若幂级数$\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$在整个复平面上都收敛，则$\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，有幂级数$\sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$收敛.

**例4.6.8** 已知$e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k$收敛, $\forall z\in\mathbb{C}$, 则$\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 矩阵幂级数$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k$收敛, 我们将该幂级数记为$e^A$.

**推论4.6.5(Neumann级数)** 矩阵幂级数$\sum_{m=0}^{\infty} A^m$收敛当且仅当$\rho(A) < 1$, 此时

$$\sum_{m=0}^{\infty} A^m = (I - A)^{-1}.$$

**例4.6.9** 判断幂级数$\sum_{m=1}^{\infty} A^m$的敛散性，其中

$$A=\begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}$$

注2: 可逆矩阵$(I-A)^{-1}$与矩阵$A$的乘积可交换,

$$(I-A)^{-1}A = A(I-A)^{-1}$$

这是基于幂级数的定义推导的. 实际上, 所有可展开成幂级数的矩阵都具有这一性质.

例如, 当$|z|<1$时, 有$\sum_{k=0}^{\infty} kz^k = \frac{z}{(1-z)^2}$. 相应的, 令$\rho(A)<1$, 则有矩阵幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} kA^k = A(I-A)^{-2} = (I-A)^{-2}A$$
$$= (I-A)^{-1}A(I-A)^{-1}$$