



# 物理学 B 第 5 回

## 誘電体

濱本 雄治<sup>1</sup>

情報工学部 情報通信工学科

2025 年 10 月 27 日、29 日

---

<sup>1</sup>hamamoto@c.oka-pu.ac.jp <https://yhmmt.github.io/pages/>

# 前回の復習: コンデンサー



## ▶ 静電容量の計算手順

1. ガウスの法則で極板間の電場を計算

$$\int_{S_0} E_n dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

2. 電場の線積分で静電ポテンシャルを計算

$$\phi(\mathbf{r}) = - \int^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

3. 極板間の電位差と電荷の比例関係から静電容量を計算

$$V = \phi(\mathbf{r}_A) - \phi(\mathbf{r}_B) = \frac{Q}{C}$$

# 前回の復習：静電場のエネルギー



- ▶ 電荷の位置エネルギーを静電場のエネルギーとして書き換え

- ▷ 平行板コンデンサー

$$U_e = \frac{Q^2}{2C} \Rightarrow \frac{\epsilon_0}{2} E^2 v$$

- ▷ 多数の電荷からなる系

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \Rightarrow \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E}^2 dv \quad (\text{動的な電場でも成立})$$

- ▶ 体積積分の実行方法

- ▷ 球対称な系

$$dv = 4\pi r^2 dr \quad (\text{半径 } r、\text{ 厚み } dr \text{ の球殻の体積})$$

- ▷ 軸対称な系

$$dv = 2\pi r h dr \quad (\text{半径 } r、\text{ 高さ } h、\text{ 厚み } dr \text{ の円筒の体積})$$

## 前回の小テストの解説



半径  $a$  の中空の球殻上に電荷  $Q$  が一様に分布しているとき、この球殻状電荷が作る静電場のエネルギーを求めよ。

前々々回の小テストから、球殻の内外の電場は球殻の中心から測った位置ベクトル  $\mathbf{r}$  に平行で  $r \equiv |\mathbf{r}|$  のみの関数

$$E(r) = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r > a) \end{cases}$$

球対称な系では  $dv = 4\pi r^2 dr$  であるから、静電場のエネルギーは

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^a 0^2 4\pi r^2 dr + \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^\infty \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_a^\infty = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a} \end{aligned}$$

# 誘電体の分極



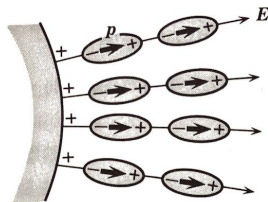
## ▶ 誘電体

- ▷ 正の原子核と負の電子から構成
- ▷ 原子核と電子が強く結合し、電気を流さない絶縁体
- ▷ 例: (純) 水、空気

## ▶ 誘電体に電場を印加すると

- ▷ 正負電荷が偏り、電気双極子  $p$  が発生
- ▷ 単位断面積当りの正電荷の移動量

分極ベクトル  $P$



- ▷ 誘電体内部では正負電荷が相殺
- ▷ 誘電体両端では分極電荷が発生

# 平行板コンデンサーに挿入した誘電体



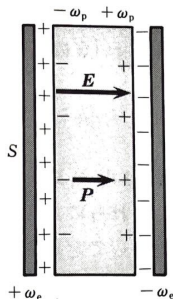
## ▶ コンデンサー内部の静電場

- ▷ 電場  $E$  と分極  $P$  は極板に垂直
- ▷ 定義から、 $P$  の大きさが分極電荷の面密度  $\omega_p$

$$\omega_p = P$$

- ▷ 分極電荷の符号は電極上の電荷の符号と逆

## ▶ 極板に外から与えた電荷 (真電荷) の面密度を $\omega_e$ とすると



$$\underbrace{E}_{\text{全電荷が作る電場}} = \frac{\omega_e - \omega_p}{\varepsilon_0} = \frac{\omega_e - P}{\varepsilon_0}, \quad \therefore \underbrace{E + \frac{P}{\varepsilon_0}}_{\text{真電荷が作る電場}} = \frac{\omega_e}{\varepsilon_0}$$

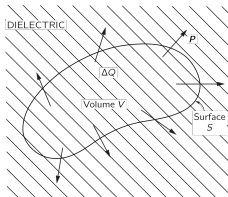
全電荷が作る電場

真電荷が作る電場

# 一般の誘電体



- ▶  $P$  が一様でない誘電体内部の閉曲面  $S_0$ 
  - ▷  $S_0$  内部では正負電荷が相殺
  - ▷  $S_0$  上の  $P$  の法線成分が分極電荷を生じる
  - ▷  $S_0$  上の分極電荷を  $Q_p$  とすると



$$Q_p = - \int_{S_0} P_n dS \quad (\text{負符号は分極電荷と真電荷が逆だから})$$

- ▶ 真電荷  $Q_e$  と分極電荷  $Q_p$  が作る電場はガウスの法則から

$$\int_{S_0} E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} (Q_e + Q_p) \quad \therefore \int_{S_0} (\varepsilon_0 E_n + P_n) dS = Q_e$$

真電荷  $Q_e$  が作る場  $D \equiv \varepsilon_0 E + P$  を **電束密度** (電気変位) と呼ぶ



# 分極が電場に比例する場合

- ▶ 多くの場合、分極は電場に比例

$$\mathbf{P} \simeq \chi \mathbf{E} \quad (\chi \text{ を電気感受率と呼ぶ})$$

- ▶ このとき電束密度も電場に比例

$$\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \simeq (\varepsilon_0 + \chi) \mathbf{E} \equiv \varepsilon \mathbf{E} \quad (\varepsilon \text{ を誘電率と呼ぶ})$$

- ▶ 平行板コンデンサーの電場と静電容量

$$E \simeq \frac{\omega_e - \chi E}{\varepsilon_0}, \quad \therefore E = \frac{\omega_e}{\varepsilon} = \frac{Q_e/S}{\varepsilon} = \frac{V}{d},$$
$$C = \frac{Q_e}{V} = \varepsilon \frac{S}{d} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \times \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

例: 極板間に水を挿入すると静電容量が  $\varepsilon/\varepsilon_0 \simeq 80$  倍に増大



# 静電場を規定する法則



## 1. 電束密度 $D$ に対するガウスの法則

$$\int_{S_0} D_n dS = Q_e \quad (S_0 \text{ は任意の閉曲面})$$

ここで  $D \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \simeq \varepsilon \mathbf{E}$

## 2. 静電場が $\mathbf{E} = E(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$ と書けることに由来する (名無しの) 法則

$$\int_{C_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (C_0 \text{ は任意の閉曲線})$$

あるいは

$$\phi(\mathbf{r}) = - \int^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$\Leftrightarrow$

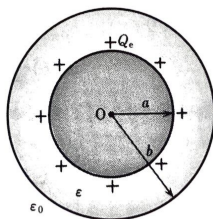
$$E(r) = - \frac{d\phi}{dr}$$

# 例：誘電体で包んだ導体球



## ▶ 導体球の外側の電束密度

- ▶ 導体球と誘電体球の半径  $a, b(>a)$
- ▶ 導体球表面に真電荷  $Q_e$  が一様に分布
- ▶ 半径  $r(>a)$  の球面状の閉曲面  $S_0$



$$\int_{S_0} D_n dS = 4\pi r^2 D(r) = Q_e, \quad \therefore D(r) = \frac{Q_e}{4\pi r^2}$$

## ▶ 電束密度と電場の比例関係 $D \simeq \varepsilon E$ を用いると

$$E(r) = \begin{cases} \frac{D(r)}{\varepsilon} = \frac{Q_e}{4\pi\varepsilon r^2} & (a < r < b) \\ \frac{D(r)}{\varepsilon_0} = \frac{Q_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > b) \end{cases}$$

## 例: 誘電体で包んだ導体球 (続き)



- ▶ 導体球の外側の静電ポテンシャル

$$\phi(r) = - \int E(r) dr = \begin{cases} \frac{Q_e}{4\pi\epsilon r} + C_1 & (a < r < b) \\ \frac{Q_e}{4\pi\epsilon_0 r} + C_2 & (r > b) \end{cases}$$

- ▷ 無限遠方  $r \rightarrow \infty$  で  $\phi(\infty) = 0$  とすると

$$C_2 = 0$$

- ▷ 導体球と真空の界面  $r = b$  で  $\phi(r)$  が連続であることから

$$\frac{Q_e}{4\pi\epsilon b} + C_1 = \frac{Q_e}{4\pi\epsilon_0 b}, \quad \therefore C_1 = \frac{Q_e}{4\pi b} \left( \frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon} \right)$$

# 例: 誘電体で包んだ導体球 (続き)



## ▶ 誘電体内部の分極

$$P(r) \simeq \chi E(a < r < b) = \frac{\chi}{\varepsilon} \frac{Q_e}{4\pi r^2} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \frac{Q_e}{4\pi r^2} \quad (\because \varepsilon \equiv \varepsilon_0 + \chi)$$

## ▷ 誘電体球の外側表面における分極電荷面密度と分極電荷の総量

$$\begin{aligned}\omega_p(b) &= \mathbf{P}(b) \cdot \mathbf{n} = P(b) = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \frac{Q_e}{4\pi b^2}, \\ \therefore Q_p(b) &= 4\pi b^2 \omega_p(b) = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) Q_e\end{aligned}$$

## ▷ 導体球の表面における分極電荷面密度と分極電荷の総量

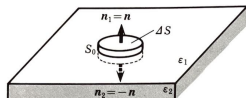
$$\begin{aligned}\omega_p(a) &= -\mathbf{P}(a) \cdot \mathbf{n} = -P(a) = -\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \frac{Q_e}{4\pi a^2}, \\ \therefore Q_p(a) &= 4\pi a^2 \omega_p(b) = -\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) Q_e = -Q_p(b)\end{aligned}$$

誘電体の導体球側と外側の表面に当量で逆符号の分極電荷が出現

# 異なる誘電体の境界面上の接続条件



- ▶ 誘電率  $\epsilon_1, \epsilon_2$  の誘電体の境界面
- ▶ 境界面に分極電荷は存在しない



- ▶ 境界に平行な面の面積が  $\Delta S$  の十分薄い閉曲面  $S_0$

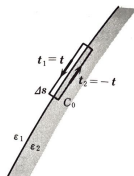
$$\int_{S_0} D_n dS = \{ \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} + \mathbf{D}_2 \cdot (-\mathbf{n}) \} \Delta S = Q_e = 0,$$

$$\therefore D_{1n} = D_{2n} \quad (\text{電束密度の法線成分は連続})$$

- ▶ 境界に平行な辺の長さが  $\Delta s$  の十分細い閉曲線  $C_0$

$$\int_{C_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \{ \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{t} + \mathbf{E}_2 \cdot (-\mathbf{t}) \} \Delta s = 0,$$

$$\therefore E_{1t} = E_{2t} \quad (\text{電場の接線成分は連続})$$



# 異なる誘電体の境界面における電場の屈折

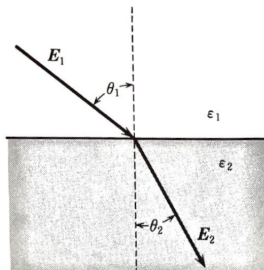


- ▶ 電場の接線成分の連続性から

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$$

- ▶ 電束密度の法線成分の連続性から

$$\varepsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos \theta_2$$



- ▶ 辺々を割って電場を消去すると

$$\frac{\tan \theta_1}{\varepsilon_1} = \frac{\tan \theta_2}{\varepsilon_2}, \quad \therefore \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

- ▶ 真空中から水中 ( $\varepsilon_2 \simeq 80\varepsilon_0$ ) に電場が入射角  $\theta_1 = 30^\circ$  で入ると

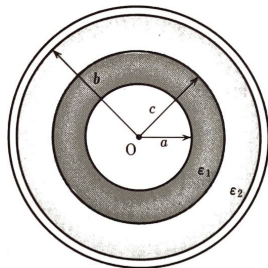
$$\tan \theta_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \tan \theta_1 = \frac{80}{\sqrt{3}}, \quad \therefore \theta_2 = \tan^{-1} \frac{80}{\sqrt{3}} \simeq 89^\circ$$

# 例1: 誘電体を詰めた円筒形コンデンサー



## ▶ 電極間の電束密度

- ▷ 内半径  $a$ 、外半径  $b$
- ▷ 電極に  $\pm\lambda = \pm Q/\ell$  の真電荷線密度
- ▷  $a < r < c$  の領域に誘電率  $\epsilon_1$  の誘電体
- ▷  $c < r < b$  の領域に誘電率  $\epsilon_2$  の誘電体
- ▷ 界面で  $D$  の法線成分は連続なので



$$\int_{S_0} D_n dS = 2\pi r h D(r) = \lambda h, \quad \therefore D(r) = \frac{\lambda}{2\pi r} \quad (a < r < b)$$

## ▶ 電極間の電場

$$E(r) = \frac{D(r)}{\epsilon} = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_1 r} & (a < r < c) \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_2 r} & (c < r < b) \end{cases}$$

# 例 1: 誘電体を詰めた円筒形コンデンサー (続)

## ▶ 電極間の静電ポテンシャル

$$\phi(r) = - \int E(r) dr = \begin{cases} -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_1} \log r + k_1 & (a < r < c) \\ -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_2} \log r + k_2 & (c < r < b) \end{cases}$$

## ▶ 誘電体の界面 ( $r = c$ ) 上で静電ポテンシャルは連続

$$\phi(r \rightarrow c - 0) = \phi(r \rightarrow c + 0), \quad \therefore k_1 - k_2 = \frac{\lambda}{2\pi} \left( \frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right) \log c$$

## ▶ 電極間の電位差と静電容量

$$V = \phi(a) - \phi(b) = \frac{\lambda}{2\pi} \left[ \frac{1}{\epsilon_1} \log \frac{c}{a} + \frac{1}{\epsilon_2} \log \frac{b}{c} \right],$$
$$\therefore C = \frac{\lambda \ell}{V} = 2\pi\ell \left[ \frac{1}{\epsilon_1} \log \frac{c}{a} + \frac{1}{\epsilon_2} \log \frac{b}{c} \right]^{-1}$$

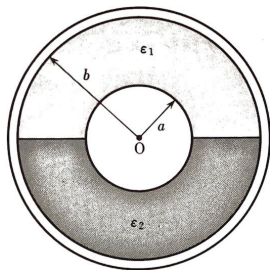


## 例2: 誘電体を詰めた円筒形コンデンサー



### ▶ 電極間の電束密度

- ▷ 内半径  $a$ 、外半径  $b$
- ▷ 電極に  $\pm\lambda = \pm Q/\ell$  の真電荷線密度
- ▷ 電極間の断面の上半分に  $\varepsilon_1$  の誘電体
- ▷ 電極間の断面の下半分に  $\varepsilon_2$  の誘電体
- ▷ 界面で  $E$  の接線成分は連続なので



$$\int_{S_0} D_n dS = \pi r h (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) E(r) = \lambda h, \quad \therefore E(r) = \frac{\lambda}{\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r}$$

### ▶ 電極間の静電ポテンシャル

$$\phi(r) = - \int E(r) dr = - \frac{\lambda}{\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \log r + k$$

## 例 2: 誘電体を詰めた円筒形コンデンサー (続)

### ▶ 電極間の電位差

$$V = \phi(a) - \phi(b) = \frac{\lambda}{\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \log \frac{b}{a}$$

### ▶ 電極間の静電容量

$$C = \frac{\lambda \ell}{V} = \frac{\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\log(b/a)}$$

# 演習 1: 誘電体を詰めた平行板コンデンサー 1

## ▶ 電極間の電束密度

- ▶ 極板の面積  $S$ 、間隔  $d$ 、電荷面密度  $\omega = Q/S$
- ▶ 極板間の領域を極板に平行な平面で半分に分けて領域 1,2 とする
- ▶ 極板間の電束密度は一定かつ極板に垂直で境界面で連続

$$\int_{S_0} D_n dS = D_n \Delta S = \omega \Delta S, \quad D = \omega$$

## ▶ 極板間の電場

$$E = \begin{cases} \frac{\omega}{\varepsilon_1} & \left(0 < y < \frac{d}{2}\right) \\ \frac{\omega}{\varepsilon_2} & \left(\frac{d}{2} < y < d\right) \end{cases}$$

# 演習 1: 誘電体を詰めた平行板コンデンサー 1

## ▶ 極板間の静電ポテンシャル

$$\phi(y) = \begin{cases} -\frac{\omega}{\varepsilon_1}y + k_1 & \left(0 < y < \frac{d}{2}\right) \\ -\frac{\omega}{\varepsilon_2}y + k_2 & \left(\frac{d}{2} < y < d\right) \end{cases}$$

## ▶ 境界面 $y = d/2$ で静電ポテンシャルが連続とすると

$$k_1 - k_2 = \frac{\omega d}{2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right)$$

## ▶ 極板間の電位差と静電容量

$$V = \phi(0) - \phi(d) = k_1 - k_2 + \frac{\omega d}{\varepsilon_0} = \frac{Qd}{2S} \left( \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right),$$

$$C = \frac{Q}{V} = \left( \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right)^{-1} \frac{2S}{d} = \left( \frac{d/2}{\varepsilon_1 S} + \frac{d/2}{\varepsilon_2 S} \right)^{-1}$$

## 演習 2: 誘電体を詰めた平行板コンデンサー 2

### ▶ 電極間の電束密度

- ▶ 極板の面積  $S$ 、間隔  $d$ 、電荷面密度  $\omega = Q/S$
- ▶ 極板間の領域を極板に垂直な平面で半分に分けて領域 1,2 とする
- ▶ 極板間の電束密度は一定かつ極板に垂直

$$\int_{S_0} D_n dS = D_n \Delta S = \omega \Delta S, \quad D = \omega,$$

### ▶ 電場は境界面で連続

$$E = \frac{\omega_1}{\varepsilon_1} = \frac{Q_1}{\varepsilon_1 S/2} = \frac{\omega_2}{\varepsilon_2} = \frac{Q_2}{\varepsilon_2 S/2}, \quad \therefore Q_1 + Q_2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{E}{2}$$

### ▶ 極板間の静電ポテンシャル、電位差、および静電容量

$$\phi(y) = -Ey + k, \quad V = \phi(0) - \phi(d) = Ed$$

$$C = \frac{Q}{V} = \therefore (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{S}{2d} = \varepsilon_1 \frac{S/2}{d} + \varepsilon_2 \frac{S/2}{d}$$