



物理学 B 第 10 回

アンペールの力とローレンツ力

濱本 雄治¹

情報工学部 情報通信工学科

2025 年 12 月 3 日、12 月 8 日

¹hamamoto@c.oka-pu.ac.jp

前回の復習：静磁場の基本法則



▶ ガウスの法則

- ▷ 任意の閉曲面 S_0 に対して

$$\int_{S_0} B_n dS = 0$$

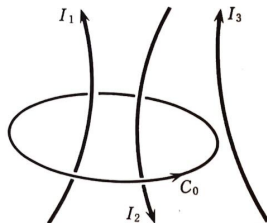
- ▷ 磁束線の発生源となる磁荷が存在しないことと等価

▶ アンペールの法則

- ▷ 任意の閉曲線 C_0 に対して

$$\int_{C_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$$

- ▷ I は C_0 が囲む曲面を貫く電流の総和



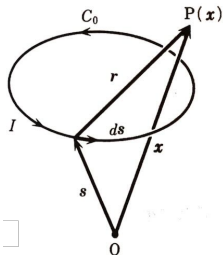
前回の復習：静磁場の基本法則 (続き)



▶ ビオ・サバルの法則

▷ 任意の曲線に対して

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C_0} \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{x} - \mathbf{s})}{|\mathbf{x} - \mathbf{s}|^3}$$



▶ 静電場との比較

	静電場	静磁場
力線の発生源	真電荷 Q_e が存在	磁荷 Q_m は不在
面積分に関する法則	ガウスの法則 $\int_{S_0} D_n dS = Q_e$	ガウスの法則 $\int_{S_0} B_n dS = 0$
線積分に関する法則	(名無しの法則) $\int_{C_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$	アンペールの法則 $\int_{C_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$

前回の小テストの解説



中空で無限に長い半径 a の導体円筒中を電流 I が一様に流れているとき、円筒の内部および外部における磁束密度の大きさと向きを求めよ。

軸上の点を中心とし、軸に垂直な半径 r の円周を C_0 とすると C_0 上で磁束密度は r のみの関数なので、アンペールの法則から

$$\int_{C_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r B(r) = \begin{cases} 0 & (0 < r < a) \\ \mu_0 I & (r > a) \end{cases},$$

$$\therefore B(r) = \begin{cases} 0 & (0 < r < a) \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & (r > a) \end{cases}$$

I を右ネジの進行方向とすると、 $B(r)$ は右ネジの回転方向

磁場内の電流に作用する力



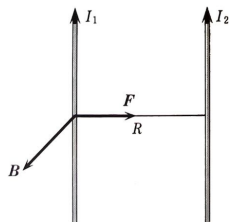
▶ 磁場 B と電流 I が直交する場合

- ▷ 電流 I_2 が距離 R に作る磁場

$$B = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi R}$$

- ▷ 電流 I_1 が B から受ける単位長さ当りの力

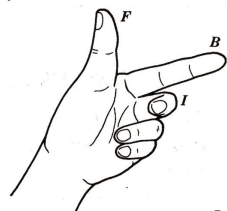
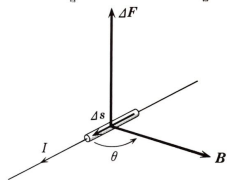
$$F = I_1 B$$



▶ 磁場 B と電流 I が直交しない場合

- ▷ 電流素片 $I\Delta s$ に作用する力

$$\Delta \mathbf{F} = I\Delta \mathbf{s} \times \mathbf{B} \quad (\text{アンペールの力})$$



Δs から B に右ネジを回したとき
 ΔF の向きは右ネジの進行方向

例 1: 磁場内のコイルに作用する力



▶ 直線電流とコイルからなる系

- ▷ 無限に長い直線電流 I_1
- ▷ 縦 a 、横 b の長方形コイルを流れる電流 I_2

▶ 辺 AB 上の磁束密度と辺 AB に作用する力

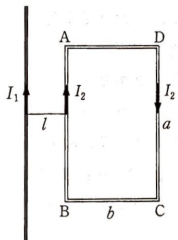
$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \ell}, \quad F = I_2 B a = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi \ell}$$

▶ 辺 CD 上の磁束密度と辺 CD に作用する力

$$B' = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(\ell + b)}, \quad F' = I_2 B' a = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi(\ell + b)}$$

▶ コイル全体が受ける力 (左向き)

$$F - F' = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi} \left(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{\ell + b} \right) = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a b}{2\pi \ell (\ell + b)}$$



例2: 磁場内のコイルに働く力のモーメント

- ▶ 一様磁場 B 中の PC 周りに回転するコイル
- ▶ 辺 BC に作用する力のモーメント

$$N_{BC} = IBb \sin \theta \times \frac{a}{2} = \frac{IBab}{2} \sin \theta$$

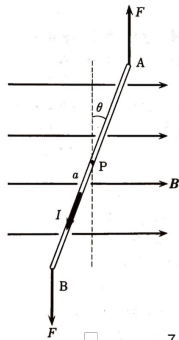
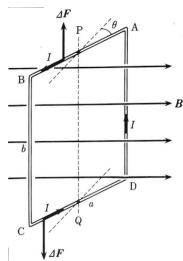
- ▶ 辺 DA に作用する力のモーメント

$$N_{DA} = IBb \sin \theta \times \frac{a}{2} = \frac{IBab}{2} \sin \theta$$

- ▶ コイル全体に作用する力のモーメント

$$N = N_{BC} + N_{DA} = IBS \sin \theta \quad (S = ab)$$

N は軸の位置に依らないことが示せる



定常電流間に働く力の作用・反作用

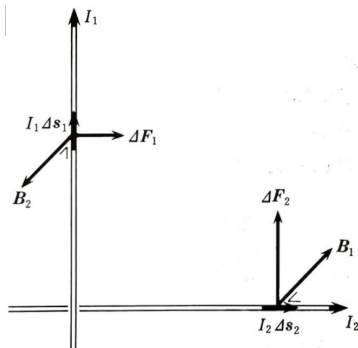


- ▶ 直交した2本の直線電流 I_1, I_2
- ▶ 電流素片 $I_1 \Delta s_1$ に作用する力

$$\Delta \mathbf{F}_1 = I_1 \Delta \mathbf{s}_1 \times \mathbf{B}_2$$

- ▶ 電流素片 $I_2 \Delta s_2$ に作用する力

$$\Delta \mathbf{F}_2 = I_2 \Delta \mathbf{s}_2 \times \mathbf{B}_1$$



- ▶ $\Delta \mathbf{F}_1$ と $\Delta \mathbf{F}_2$ は平行でないので $\Delta \mathbf{F}_1 + \Delta \mathbf{F}_2 \neq 0$

電流素片間の力には作用・反作用の法則は成り立たない

定常電流間に働く力の作用・反作用 (続き)

- ▶ ビオ・サバールの法則から

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_{I_1 \text{上}} \frac{d\mathbf{s}_1 \times (\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1)}{|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1|^3}, \quad \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \int_{I_2 \text{上}} \frac{d\mathbf{s}_2 \times (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)}{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2|^3}$$

- ▶ I_1 全体に作用する力

$$\mathbf{F}_1 = \int_{I_1 \text{上}} I_1 d\mathbf{s}_1 \times \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{I_1 \text{上}} \int_{I_2 \text{上}} \frac{d\mathbf{s}_1 \times [d\mathbf{s}_2 \times (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)]}{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2|^3}$$

- ▶ I_2 全体に作用する力

$$\mathbf{F}_2 = \int_{I_2 \text{上}} I_2 d\mathbf{s}_2 \times \mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{I_1 \text{上}} \int_{I_2 \text{上}} \frac{d\mathbf{s}_2 \times [d\mathbf{s}_1 \times (\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1)]}{|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1|^3}$$

- ▶ 外積の公式 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$ から $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$

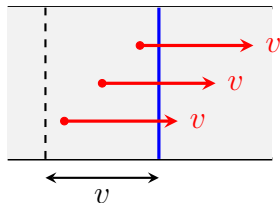
電流間の力には作用・反作用の法則が成り立つ

磁場中の荷電粒子



▶ 導線内部を運動する荷電粒子

- ▷ 電荷 q 、速さ v 、単位長さ当りの密度 n
- ▷ 断面を単位時間当り通過する粒子数 nv
- ▷ 断面を単位時間当り通過する電流



$$I = qnv$$

▶ 磁場 B を印加したとき長さ Δs 内の荷電粒子に作用する力

$$\Delta \mathbf{F} = I \Delta \mathbf{s} \times \mathbf{B} = qnv \Delta \mathbf{s} \times \mathbf{B} = n \Delta s \cdot q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (\because \Delta \mathbf{s} // \mathbf{v})$$

▶ $n \Delta s$ は長さ Δs 内の粒子数なので、粒子 1 個に作用する力は

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{F}}{n \Delta s} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$



電磁場中の荷電粒子

- ▶ 電場 E 、磁束密度 B の内部で運動する粒子に作用する力

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (\text{ローレンツ力})$$

- ▶ 質量 m の荷電粒子が従うニュートン方程式

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- ▶ ニュートン方程式の解き方

1. 速度に関する方程式を解いて速度の各成分 v_x, v_y, v_z を求める
2. 速度を積分して座標の各成分 x, y, z を求める
3. 初期条件から積分定数を決める

例 1: 一様な静磁場中の荷電粒子



▶ ニュートン方程式

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

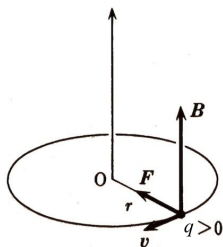
▶ 加速度 ($\propto \mathbf{F}$) は速度に直交するので

$$0 = \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{v}|^2, \quad \therefore |\mathbf{v}| = v_0 = \text{const.}$$

▶ 円運動を仮定すると

$$m \frac{v^2}{r} = qvB, \quad \therefore r_c = \frac{mv}{qB} = \frac{mv_0}{qB} \quad (\text{サイクロトロン半径}),$$

$$\omega_c = \frac{v_0}{r_c} = \frac{qB}{m} \quad (\text{サイクロトロン角振動数})$$



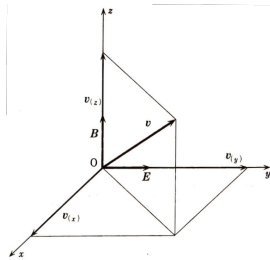
例 2: 一様な静電場と静磁場の中の荷電粒子

▶ $\mathbf{E} = (0, E, 0)$, $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ とすると

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \times \mathbf{B} &= (v_y B_z - v_z B_y, \\ &\quad v_z B_x - v_x B_z, \\ &\quad v_x B_y - v_y B_x) \\ &= (v_y B, -v_x B, 0)\end{aligned}$$

▶ ニュートン方程式

$$m \frac{dv_x}{dt} = q v_y B, \quad m \frac{dv_y}{dt} = q(E - v_x B), \quad m \frac{dv_z}{dt} = 0$$





(1) 初速度が $v_x = \frac{E}{B}, v_y = 0, v_z = 0$ のとき

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_z}{dt} = 0,$$

から上の初速度が維持され、粒子は速さ $\frac{E}{B}$ で x 方向に直進

(2) 初め粒子が原点に静止しているとき

$$v_x(0) = v_y(0) = v_z(0) = 0, \quad x(0) = y(0) = z(0) = 0$$

(a) v_z の方程式を積分して初期条件 $v_z(0) = 0$ を使うと

$$v_z(t) = \text{const.}, \quad 0 = v_z(0) = \text{const.}, \quad \therefore v_z(t) = \frac{dz}{dt} = 0$$

時間積分して初期条件 $z(0) = 0$ を使うと

$$z(t) = \text{const.}, \quad 0 = z(0) = \text{const.}, \quad \therefore z(t) = 0$$

よって粒子は x - y 面内で運動



(b) $v'_x \equiv v_x - \frac{E}{B}$ とおくと v_x, v'_y の微分方程式は

$$\frac{dv'_x}{dt} = \frac{qB}{m}v_y = \omega_c v_y, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB}{m}v'_x = -\omega_c v'_x$$

第二式を時間微分して第一式を代入し、 v'_x を消去すると

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\omega_c \frac{dv'_x}{dt} = -\omega_c^2 v_y$$

この単振動の方程式は次の形の一般解を持つ

$$v_y(t) = C_1 \sin \omega_c t + C_2 \cos \omega_c t$$

v_y の初期条件から $0 = v_y(0) = 0 + C_2$ なので

$$\therefore v_y(t) = \frac{dy}{dt} = C_1 \sin \omega_c t$$

時間積分して初期条件 $y(0) = 0$ を使うと

$$y(t) = -\frac{C_1}{\omega_c} \cos \omega_c t + C_3, \quad 0 = y(0) = -\frac{C_1}{\omega_c} + C_3,$$

$$\therefore y(t) = \frac{C_1}{\omega_c} (1 - \cos \omega_c t)$$



(c) $v_y(t)$ の式を v'_x の微分方程式に代入すると

$$v'_x(t) = -\frac{1}{\omega_c} \frac{dv_y}{dt} = -C_1 \cos \omega_c t$$

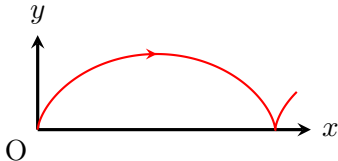
$v'_x = v_x - \frac{E}{B}$ の初期条件から $-\frac{E}{B} = -C_1$ なので

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = v'_x(t) + \frac{E}{B} = \frac{E}{B}(1 - \cos \omega_c t)$$

時間積分して初期条件 $x(0) = 0$ を使うと

$$x(t) = \frac{E}{B} \left(t - \frac{1}{\omega_c} \sin \omega_c t \right) + C_4, \quad 0 = x(0) = C_4,$$

$$\therefore \begin{cases} x(t) = \frac{E}{B\omega_c}(\omega_c t - \sin \omega_c t), \\ y(t) = \frac{E}{B\omega_c}(1 - \cos \omega_c t) \end{cases}$$



粒子はサイクロイド曲線を描く

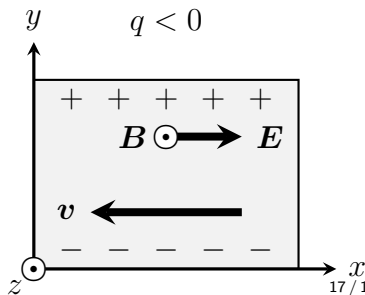
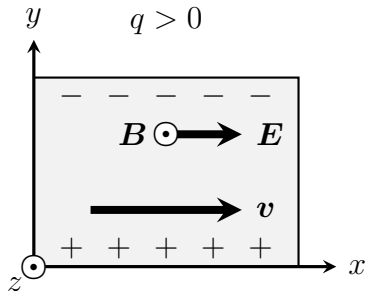
演習：ホール効果



- ▶ 電荷担体の電荷を q 、速度を v とすると磁場から受ける力は

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

- ▶ $q > 0$ とき \mathbf{F} は下向きなので導体の下側が正、上側が負に帯電
- ▶ $q < 0$ とき \mathbf{F} は下向きなので導体の下側が負、上側が正に帯電
- ▶ いずれも電荷担体が下側に蓄積することに注意



演習: ホール効果 (続き)



- ▶ 上側と下側に生じた電荷によるホール電場を E_H とすると

$$|E_H| = |v \times B|$$

- ▶ $q > 0$ とき E_H は上向き
- ▶ $q < 0$ とき E_H は下向き
- ▶ ホール電圧を測定すると電荷担体が持つ電荷の符号が判明

