数値計算法 第4回

非線形方程式 (1)

濱本 雄治 [1]

情報工学部 情報通信工学科

2025年5月12日

[1] hamamoto@c.oka-pu.ac.jp

復習: 桁落ち

- 値の近い数の引き算に起因

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & \multicolumn{7}{c}{\overbrace{1\quad 2\quad 3\quad .\quad 4\quad 5\quad 6}^{\text{有効数字 6 桁}}} & * & * & * & * & \cdots \\
- & 1 & 2 & 3 & . & 4 & 4 & 4 & * & * & * & * & \cdots \\
\hline
 & \multicolumn{5}{c}{\underbrace{0\quad .\quad 0}_{\text{4 桁が相殺}}} & 1 & 2 & \multicolumn{5}{c}{\underbrace{*\quad *\quad *\quad *\quad \cdots}_{\text{信用できない数字}}}
\end{array}
$$

$$0.012**** = 0.\underbrace{12****}_{\text{仮数部}}\times 10^{49-50}$$

- 桁落ちが回避できる例

$$\sqrt{x+1}-1 = (\sqrt{x+1}-1)\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}$$

前回の小テストの解説

$x = 0.0123456$ に対して有効数字 6 桁で引き算

$$\sqrt{x+1} - 1$$

を変形せずに計算したとき、有効桁数は何桁に減少するか調べよ。ただし計算機を用いてよい。

$$\sqrt{x+1} - 1 = \underbrace{1.00615}_{\text{有効数字 6 桁}} - 1.00000 = 0.00\underbrace{615}_{\text{有効数字 3 桁}}$$

因みに桁落ちを回避して計算すると

$$\sqrt{x+1} - 1 = \frac{x}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{0.0123456}{1.00615 + 1.00000} = 0.00\underbrace{615387}_{\text{有効数字 6 桁}}$$

非線形方程式

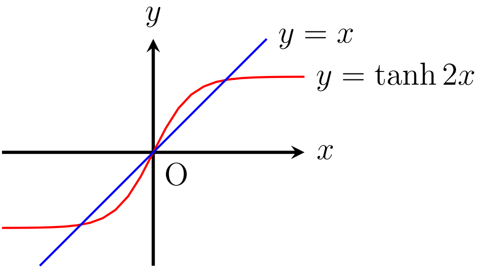
- 一次方程式以外の方程式

$$\text{e.g.,}\quad x^2 - 2 = 0, \qquad \therefore\, x = \sqrt{2}$$

- 一般には解析的に解けないことが多い

$$\text{e.g.,}\quad x - \tanh 2x = 0,$$

$$x = ???$$



$\rightarrow$ 数値的に解く

反復法の考え方

- 非線形方程式 $f(x) = 0$ を次のように変形

$$x = g(x) \qquad [x - g(x) \sim f(x)]$$

- 関数 g を x に対する変換と見なす

$$x \xrightarrow{g} x' = g(x)$$

x が解のとき

x は移動しない (不動点)

$$x \circlearrowright^{g}$$

x が解でないとき

x は異なる点に移動する

$$x \xrightarrow{g} x' \neq x$$

g を繰り返して不動点を探す

反復法による非線形方程式の数値解法

反復法の原理

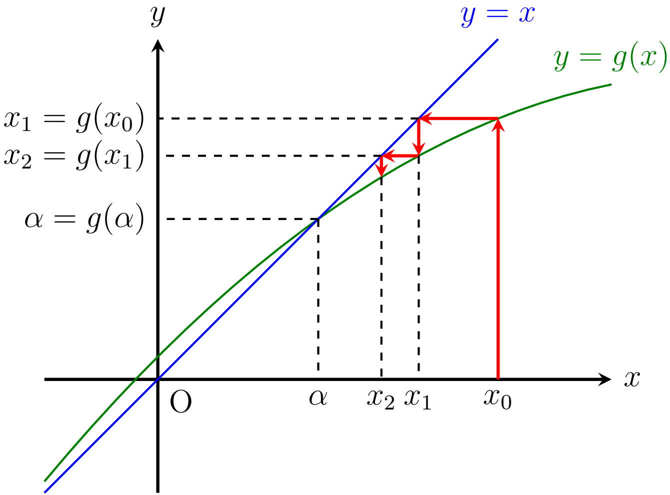
漸化式 $x_{k+1} = g(x_k)$ によって生成される数列

$$x_0, x_1, x_2, \cdots$$

がある値 α に収束すれば、α は $x = g(x)$ つまり $f(x) = 0$ の解

- 注意
  - 数列が常にある値に収束するとは限らない
  - 解が複数ある場合、どの解に収束するか分からない
  - $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ で収束したと見なすため、打切り誤差を含む

反復法の視覚化



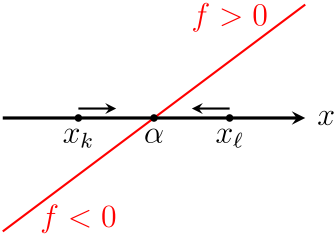
数列 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ は α に収束

原始反復法

- $g(x) = x - hf(x)$ とおくと

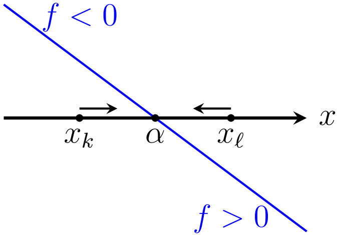
$$\boxed{x_{k+1} = x_k - hf(x_k)} \quad \text{or} \quad \Delta x_k = -hf(x_k) \qquad (h \neq 0)$$

- 解 α 付近で単調増加のとき



$$\therefore h > 0$$

- 解 α 付近で単調減少のとき



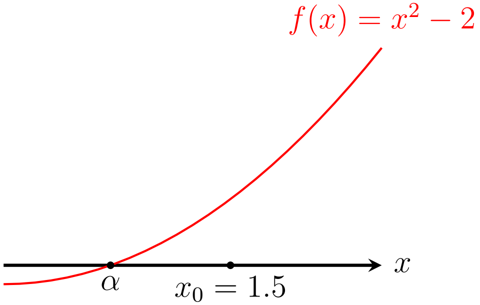
$$\therefore h < 0$$

原始反復法の例

- 方程式 $x^2 - 2 = 0$ を解く
  - $f(x) = x^2 - 2$
  - 解 $\alpha = \sqrt{2}$ 付近で f は単調増加なので、例えば $h = 0.2 > 0$

$$x_{k+1} = x_k - hf(x_k) = x_k - 0.2({x_k}^2 - 2)$$

  - 初期値 $x_0 = 1.5$



原始反復法の数値計算

- `primitive.c`

```c
#include <stdio.h>

int main(){
  double x = 1.5;
  double h = 0.2;

  for(int i=0; i!=21; ++i){
    printf("%2i %.8f %.8e\n",
           i, x, x*x-2);
    x -= h * (x*x - 2);
  }
}
```

- 実行結果

```
$ gcc primitive.c
$ ./a.out
 0 1.50000000 2.50000000e-01
 1 1.45000000 1.02500000e-01
 2 1.42950000 4.34702500e-02
 3 1.42080595 1.86895476e-02
 4 1.41706804 8.08183138e-03
 .
 .
 .
16 1.41421369 3.62840459e-07
17 1.41421362 1.57586886e-07
18 1.41421359 6.84422793e-08
19 1.41421357 2.97254788e-08
20 1.41421357 1.29102086e-08
```

Newton 法

- $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ とおくと

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

- 上式を少し変形すると

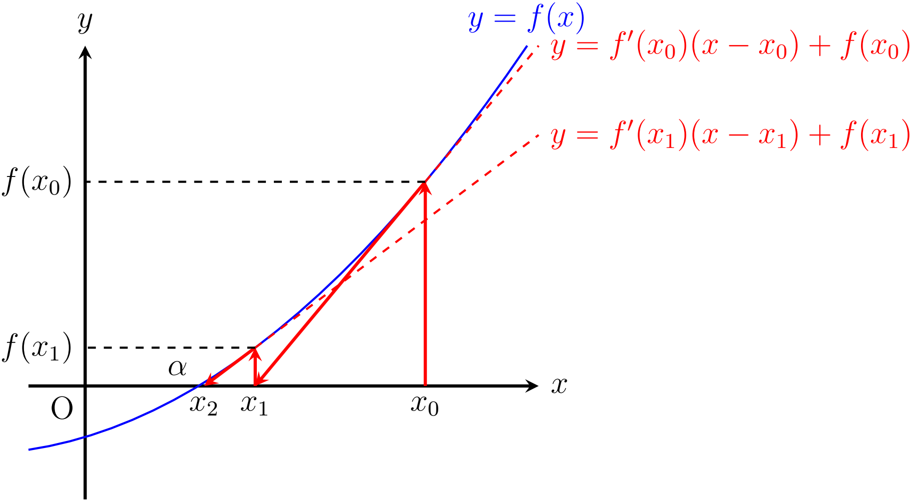
$$0 = f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + f(x_k)$$

つまり x_k における $y = f(x)$ の接線

$$y = f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k)$$

と x 軸の交点が x_{k+1} である

Newton 法の可視化



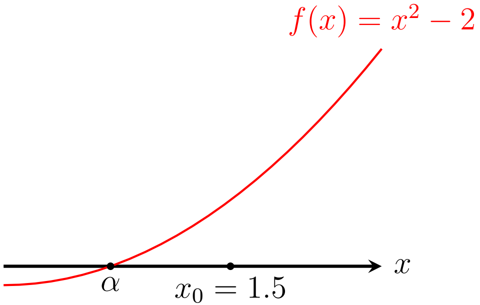
x_k における接線と x 軸の交点が x_{k+1}

Newton 法の例

- 方程式 $x^2 - 2 = 0$ を解く
  - $f(x) = x^2 - 2$
  - $f'(x) = 2x$ であるから

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{{x_k}^2 - 2}{2x_k} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{2}{x_k}\right)$$

  - 初期値 $x_0 = 1.5$



Newton 法の数値計算

- newton.c

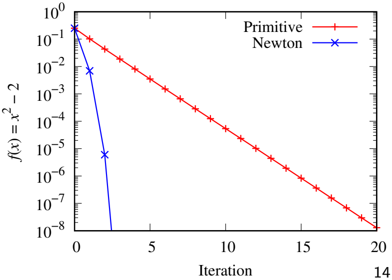
```
#include <stdio.h>

int main(){
  double x = 1.5;

  for(int i=0; i!=5; ++i){
    printf("%2i %.8f %.8e\n",
           i, x, x*x-2);
    x = 0.5 * (x + 2 / x);
  }
}
```

- 実行結果

```
$ gcc newton.c
$ ./a.out
 0 1.50000000 2.50000000e-01
 1 1.41666667 6.94444444e-03
 2 1.41421569 6.00730488e-06
 3 1.41421356 4.51083505e-12
 4 1.41421356 -3.54604637e-16
```



収束判定

- 実際の数値計算では、十分収束したと見なせた時点で打ち切る

許容誤差 ε

$$|x_k - x_{k+1}| < \varepsilon$$

許容残差 δ

$$|f(x_k)| < \delta$$

$\rightarrow$ 普通はこちらを採用

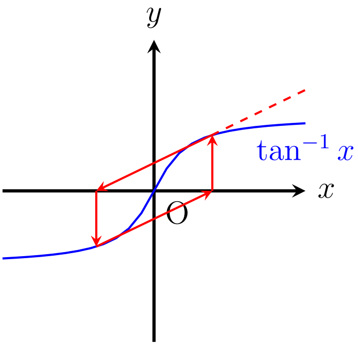
- 許容残差の注意点
  - 解の近傍で桁落ちによる精度低下

$$\text{e.g.,}\ f(x) = x^2 - 2 = \underbrace{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}_{x\simeq\pm\sqrt{2}\text{で桁落ち}}$$

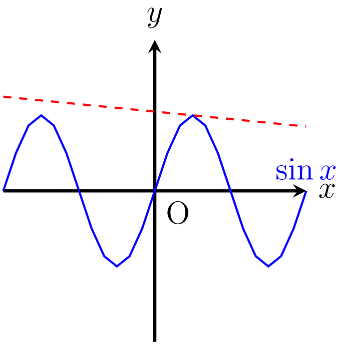
  - 残差が小さいからといって常に誤差が小さいとは限らない

初期値と収束性

- 振動



- 発散



初期値の取り方に依っては Newton 法でも収束しないことがある

収束の速さ

p 次収束

α に収束する数列 $\{x_k\}$ が十分大きな k に対して

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq C|x_k - \alpha|^p \qquad (C > 0)$$

を満たすとき、$\{x_k\}$ は α に p 次収束すると言う

$e_k \equiv x_k - \alpha$ と書くと

$$\begin{aligned} |e_k| &\leq C|e_{k-1}|^p \\ &\leq C^{1+p}|e_{k-2}|^{p^2} \\ &\vdots \\ &\leq C^{1+p+\cdots+p^{k-1}}|e_0|^{p^k} \end{aligned}$$

- $p = 1$ のとき

$$|e_k| \leq C^k|e_0|$$

- $p \geq 2$ のとき

$$|e_k| \leq C^{\frac{p^k - 1}{p-1}}|e_0|^{p^k}$$

原始反復法の収束の速さ

- $f(x) = 0$ は α を解に持つので

$$f(x) = (x - \alpha)q(x) \qquad (|q(\alpha)| < \infty)$$

と書けることに注意すると

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - hf(x_k) \\ x_{k+1} - \alpha &= x_k - \alpha - hf(x_k) && \text{(両辺から } \alpha \text{ を引いた)} \\ &= x_k - \alpha - h(x_k - \alpha)q(x_k) && \text{(上式を代入した)} \\ &= (x_k - \alpha)[1 - hq(x_k)] \end{aligned}$$

$$\therefore \left| \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} \right| = |1 - hq(x_k)| \xrightarrow{k \to \infty} |1 - hq(\alpha)| < \infty$$

- $C \geq 1 - hq(\alpha)$ を導入すると $|x_{k+1} - \alpha| \leq C|x_k - \alpha| \to$ 1 次収束

Newton 法の収束の速さ (単解のとき)

- $f(x) = (x-\alpha)q(x)$ $(q(\alpha) \neq 0)$ とすると

$$f'(x) = q(x) + (x-\alpha)q'(x)$$

- $|q(\alpha)|, |q'(\alpha)| < \infty$ とすると

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\
x_{k+1} - \alpha &= x_k - \alpha - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} && \text{(両辺から } \alpha \text{ を引いた)} \\
&= x_k - \alpha - \frac{(x_k-\alpha)q(x_k)}{q(x_k)+(x_k-\alpha)q'(x)} && (f, f' \text{ の式を代入)} \\
&= \frac{\cancel{(x_k-\alpha)q(x_k)} + (x_k-\alpha)^2 q'(x_k) - \cancel{(x_k-\alpha)q(x_k)}}{q(x_k)+(x_k-\alpha)q'(x)}
\end{aligned}
$$

$$\frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^2} = \left|\frac{q'(x_k)}{q(x_k)+(x_k-\alpha)q'(x)}\right| \xrightarrow{k\to\infty} \left|\frac{q'(\alpha)}{q(\alpha)}\right| < \infty$$

- $C \geq \left|\dfrac{q'(\alpha)}{q(\alpha)}\right|$ なる C を導入すると

$$|x_{k+1}-\alpha| \leq C|x_k-\alpha|^2$$

が成り立つので単解 α に 2 次収束する

Newton 法の収束の速さ (m 重解のとき)

- $f(x) = (x-\alpha)^{m} q(x)$ $(m \geq 2, q(\alpha) \neq 0)$ とすると

$$f'(x) = m(x-\alpha)^{m-1} q(x) + (x-\alpha)^m q'(x)$$

- $|q(\alpha)|, |q'(\alpha)| < \infty$ とすると

$$\begin{aligned} x_{k+1} - \alpha &= x_k - \alpha - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ &= x_k - \alpha - \frac{(x_k-\alpha)^m q(x_k)}{m(x_k-\alpha)^{m-1} q(x_k) + (x_k-\alpha)^m q'(x)} \\ &= x_k - \alpha - \frac{(x-\alpha) q(x_k)}{mq(x_k) + (x_k-\alpha) q'(x_k)} \\ &= \frac{(x_k-\alpha)(m-1)q(x_k) + (x_k-\alpha)^2 q'(x_k)}{mq(x_k) + (x_k-\alpha)q'(x)} \end{aligned}$$

$m \geq 2$ なので分子第 1 項が消えない

$$\left|\frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha}\right| = \left|\frac{(m-1)q(x_k)+(x_k-\alpha)q'(x_k)}{mq(x_k)+(x_k-\alpha)q'(x)}\right| \xrightarrow{k\to\infty} \frac{m-1}{m} < \infty$$

- $C \geq \dfrac{m-1}{m}$ なる C を導入すると

$$|x_{k+1}-\alpha| \leq C|x_k-\alpha|$$

が成り立つので m 重解 α に 1 次収束する

- $m \gg 1$ のとき

$$\frac{m-1}{m} \lesssim 1, \qquad \therefore |x_{k+1}-\alpha| \lesssim |x_k-\alpha|$$

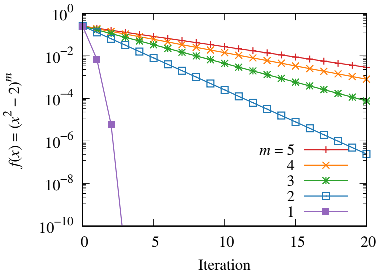
となり収束が緩慢になることに注意

収束の速さの比較

- Newton 法で m 重解を持つ方程式 $(x^2-2)^m=0$ を解く
  - $f(x)=(x^2-2)^m$
  - $f'(x)=2m(x^2-2)^{m-1}$ であるから

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=\frac{1}{2m}\left[(2m-1)x_k+\frac{2}{x_k}\right]$$

- 計算結果



  - $m=1$ では収束が速い
  - $m\geq 2$ では収束が緩慢
  - m の増加とともに収束速度が低下