



数値計算法 第6回

連立一次方程式 (1)

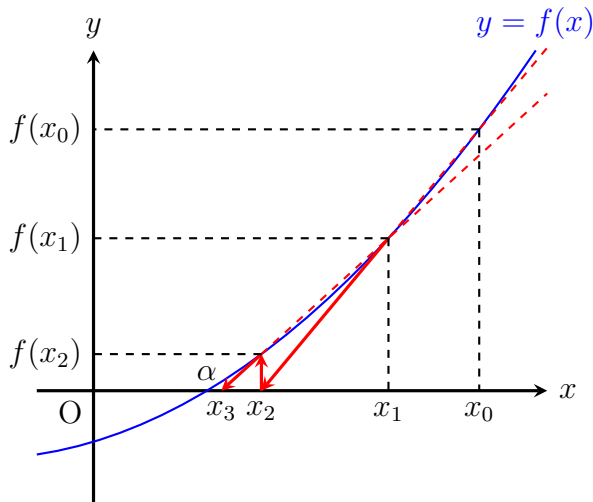
濱本 雄治¹

情報工学部 情報通信工学科

2025 年 5 月 26 日

¹hamamoto@c.oka-pu.ac.jp

復習：割線法



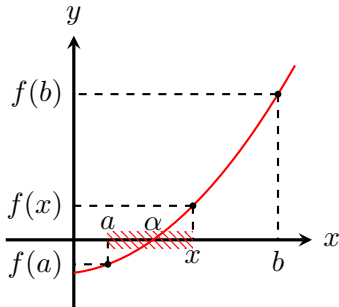
$(x_k, f(x_k)), (x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ を通る直線と x 軸の交点が x_{k+2}

復習：二分法



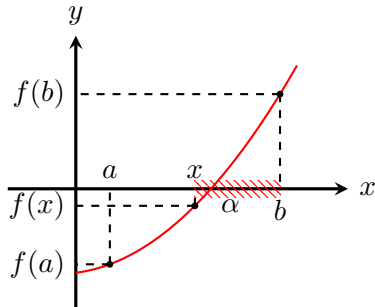
- ▶ $f(x) = 0$ の解が区間 $[a, b]$ に存在するとき $f(a)f(b) \leq 0$
- ▶ この区間の midpoint $x = (a + b)/2$ で $f(a)f(x)$ の符号を調べる

▷ $f(a)f(x) \leq 0$ のとき



解は左半分 $[a, x]$ に存在

▷ $f(a)f(x) > 0$ のとき



解は右半分 $(x, b]$ に存在

- ▶ $|a - b| < \varepsilon$ (許容誤差) となるまで区間の縮小を反復

前回の小テストの解説



二分法で $f(x) = x^2 - 3$ として $\sqrt{3}$ を求める。考える区間の両端の初期値を $a = 1.7, b = 1.8$ とすると中点の初期値は $x_0 = 1.75$ である。有効数字 6 桁で中点 x_1, x_2, x_3 を計算せよ。ただし計算機を用いてよい。

$$f(a) = -0.11 < 0, f(x_0) = 0.0625 > 0 \text{ から } \alpha \in (a, x_0)$$

$$(a, x_1, b = x_0) = (1.70000, 1.72500, 1.75000)$$

$$f(a) = -0.11 < 0, f(x_1) = -0.024375 < 0 \text{ から } \alpha \in (x_1, b)$$

$$(a = x_1, x_2, b) = (1.72500, 1.73750, 1.75000)$$

$$f(a) = -0.024375 < 0, f(x_2) = 0.01890625 > 0 \text{ から } \alpha \in (a, x_2)$$

$$(a, x_3, b = x_2) = (1.72500, 1.73125, 1.73750)$$

連立一次方程式



定義

n 変数、 m 本の一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

が同時に成立するとき、これらを連立一次方程式と呼ぶ

▶ 例えば 2 変数、2 本の場合

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}, \quad \therefore \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

消去法による連立一次方程式の解法



方程式の基本変形

- ▶ ある式の両辺を定数 ($\neq 0$) で割る
- ▶ ある式の定数倍から他の式の定数倍を引く

$$\begin{array}{rclcl} 2x + 4y & = & 10 & (\leftarrow x + 2y = 5 \text{ の両辺を } 2 \text{ 倍}) \\ -) 2x + 3y & = & 8 & \\ \hline & y & = & 2 & (\leftarrow y \text{ が未知数でなくなった}) \end{array}$$

消去法の方針

方程式の基本変形を用いて、未知数を1つずつ消していく

消去法の例



- ▶ 3変数、3本の連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x + 2y + 6z = 24 & \dots\dots\dots \textcircled{1} \\ 3x + 5y + 13z = 52 & \dots\dots\dots \textcircled{2} \\ 5x + 8y + 24z = 93 & \dots\dots\dots \textcircled{3} \end{cases}$$

- ▶ ①の両辺を2で割る

$$x + y + 3z = 12 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}'$$

- ▶ ② - ①' × 3 および ③ - ①' × 5 で x を消去

$$\begin{array}{rclcl} 3x & +5y & +13z & = & 52 & & 5x & +8y & +24z & = & 93 \\ -) & 3x & +3y & +9z & = & 36 & , & -) & 5x & +5y & +15z & = & 60 \\ \hline & & 2y & +4z & = & 16 & & & 3y & +9z & = & 33 \end{array}$$

- ▶ 以下、 y または z を消去して x, y, z を求める

連立一次方程式の行列表示



- ▶ 連立一次方程式は行列とベクトルで書き直せる

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{(係数) 行列 } \mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{ベクトル } \mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\text{ベクトル } \mathbf{b}}$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

- ▶ 前出の2変数、2本の連立一次方程式の例で確認すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \therefore \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$$

表記の簡略化



- ▶ 係数行列 A とベクトル b を抽出して並べる

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

行列の基本変形

- ▶ ある行の両辺を定数 ($\neq 0$) で割る
 - ▶ ある行の定数倍から他の行の定数倍を引く
 - ▶ ある行と他の行を入れ替える (← 連立方程式の順番の入れ替え)
-
- ▶ 行列の基本変形を用いて方程式を解く → どう変形するか?

掃出し法



- ▶ 行列を次のように変形できれば、明らかに右辺のベクトルが解

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} 1x + 0y + 0z = a \\ 0x + 1y + 0z = b \\ 0x + 0y + 1z = c \end{cases}, \quad \therefore \begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \end{cases}$$

掃出し法の目標

係数行列が単位行列になるように変形

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \color{red}{1} & \color{blue}{0} & \cdots & \color{blue}{0} & b'_1 \\ \color{blue}{0} & \color{red}{1} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \color{red}{0} & \vdots \\ \color{blue}{0} & \cdots & \color{blue}{0} & \color{red}{1} & b'_n \end{array} \right)$$

掃出し法の例



- ▶ 前出の3変数、3本の連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x + 2y + 6z = 24 \\ 3x + 5y + 13z = 52 \\ 5x + 8y + 24z = 93 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 24 \\ 3 & 5 & 13 & 52 \\ 5 & 8 & 24 & 93 \end{array} \right) \begin{array}{l} \dots\dots\dots ① \\ \dots\dots\dots ② \\ \dots\dots\dots ③ \end{array}$$

- ▶ ① ÷ 2 で (1, 1) 成分 (ピボット) を 1 にする

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & 1 & 3 & 12 \\ 3 & 5 & 13 & 52 \\ 5 & 8 & 24 & 93 \end{array} \right) \begin{array}{l} \dots\dots\dots ①' \\ \dots\dots\dots ② \\ \dots\dots\dots ③ \end{array}$$

- ▶ ② - ①' × 3 および ③ - ①' × 5 で (2, 1), (3, 1) 成分を掃き出す

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & 3 & 9 & 33 \end{array} \right) \begin{array}{l} \dots\dots\dots ①' \\ \dots\dots\dots ②' \\ \dots\dots\dots ③' \end{array}$$



- ▶ ②' ÷ 2 で (2, 2) 成分 (ピボット) を 1 にする

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 9 & 33 \end{array} \right) \begin{array}{l} \dots\dots ①' \\ \dots\dots ②'' \\ \dots\dots ③' \end{array}$$

- ▶ ①' - ②'' および ③' - ②'' × 3 で (1, 2), (3, 2) 成分を掃き出す

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & \color{red}{0} & \color{red}{1} & \color{red}{4} \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{3} & \color{red}{9} \end{array} \right) \begin{array}{l} \dots\dots ①'' \\ \dots\dots ②'' \\ \dots\dots ③'' \end{array}$$



- ▶ ③' ÷ 3 で (3, 3) 成分 (ピボット) を 1 にする

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{\underline{1}} & \color{red}{3} \end{array} \right) \begin{array}{l} \dots\dots \textcircled{1}'' \\ \dots\dots \textcircled{2}'' \\ \dots\dots \textcircled{3}''' \end{array}$$

- ▶ ①'' - ③''' および ②'' - ③''' × 2 で (3, 1), (3, 2) 成分を掃き出す

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{1} \\ \color{red}{0} & \color{red}{1} & \color{red}{0} & \color{red}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \dots\dots \textcircled{1}''' \\ \dots\dots \textcircled{2}''' \\ \dots\dots \textcircled{3}''' \end{array}$$

- ▶ 係数行列が単位行列になったので、連立一次方程式の解は

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = 3 \end{cases}$$

Gauss の消去法



- ▶ 行列を次のように変形できれば、解は容易に求まる

$$\left(\begin{array}{ccc|c} u_{11} & u_{12} & u_{13} & b_1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & u_{33} & b_3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 = b_1 \\ u_{22}x_2 + u_{23}x_3 = b_2 \\ u_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

- ▶ x_3, x_2, x_1 について解くと

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{b_3}{u_{33}}, \\ x_2 &= \frac{b_2 - u_{23}x_3}{u_{22}}, \\ x_1 &= \frac{b_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3}{u_{11}} \end{aligned}$$

のように解が x_3, x_2, x_1 の順に計算できる

- ▶ 掃出し法より効率的に連立一次方程式の解を求めることが可能

Gauss の消去法の目標

係数行列の下半分の要素がすべて 0 になるように変形 (前進消去)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & b'_1 \\ 0 & u_{22} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} & b'_n \end{array} \right)$$

▶ x_n, \dots, x_{k+1} まで降順に得られたら、 k 行目から x_k が求まる

$$u_{kk} \underset{\text{未知}}{x_k} + u_{k,k+1} \underset{\text{既知}}{x_{k+1}} + \cdots + u_{kn} \underset{\text{既知}}{x_n} = b_k,$$

$$\therefore \underset{\text{未知}}{x_k} = \frac{1}{u_{kk}} (b_k - u_{k,k+1} \underset{\text{既知}}{x_{k+1}} - \cdots - u_{kn} \underset{\text{既知}}{x_n}) \quad (\text{後退代入})$$

Gauss の消去法の例



- ▶ 前出の3変数、3本の連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x + 2y + 6z = 24 \\ 3x + 5y + 13z = 52 \\ 5x + 8y + 24z = 93 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 24 \\ 3 & 5 & 13 & 52 \\ 5 & 8 & 24 & 93 \end{array} \right) \begin{array}{l} \dots\dots\dots ① \\ \dots\dots\dots ② \\ \dots\dots\dots ③ \end{array}$$

- ▶ ② - ① × 3/2 で (2, 1) 成分を掃き出す

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 24 \\ 0 & 2 & 4 & 16 \\ 5 & 8 & 24 & 93 \end{array} \right) \begin{array}{l} \dots\dots\dots ① \\ \dots\dots\dots ②' \\ \dots\dots\dots ③ \end{array}$$

- ▶ ③ - ① × 5/2 で (3, 1) 成分を掃き出す

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 24 \\ 0 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & 3 & 9 & 33 \end{array} \right) \begin{array}{l} \dots\dots\dots ① \\ \dots\dots\dots ②' \\ \dots\dots\dots ③' \end{array}$$



- ▶ ③' - ②' × 3/2 で (3, 2) 成分を掃き出す

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 24 \\ 0 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right) \begin{array}{l} \dots\dots ① \\ \dots\dots ②' \\ \dots\dots ③'' \end{array}$$

- ▶ ③'' から

$$x_3 = \frac{b_3}{u_{33}} = \frac{9}{3} = 3$$

- ▶ x_3 を ②' に代入して

$$x_2 = \frac{b_2 - u_{23}x_3}{u_{22}} = \frac{16 - 4 \times 3}{2} = 2$$

- ▶ x_3, x_2 を ① に代入して

$$x_1 = \frac{b_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3}{u_{11}} = \frac{24 - 2 \times 2 - 6 \times 3}{2} = 1$$

ピボット選択



▶ Gauss 消去法の注意点

- ▷ 対角成分 a_{kk} (ピボット) が 0 のとき a_{kk} での割り算はエラー
- ▷ a_{kk} の絶対値が非常に小さいときも誤差が大きくなる

▶ 対策

- ▷ 第 k 列で絶対値が最大の a_{ik} ($i > k$) を探し、第 k 行と第 i 行を交換

a_{kk} ピボット

\vdots

a_{ik} 絶対値最大

\vdots

a_{nk}

- ▷ a_{kk}, \dots, a_{nk} がすべて 0 なら解なし、または解が一意に定まらない

スケーリング



▶ ピボット選択の注意点

▷ 行列

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \end{array} \right)$$

の係数行列の (2, 1) 成分 10 は (1, 1) 成分 2 より大きい

▷ 一方、第 2 行を 10 で割ると

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \end{array} \right)$$

となり、係数行列の (1, 1) 成分 2 は (2, 1) 成分 1 より大きい

▶ 対策

▷ 各等式の係数を絶対値最大の係数で割る