



物理学 B 第 14 回

過渡現象と交流回路

濱本 雄治¹

情報工学部 情報通信工学科

2025 年 1 月 21 日、26 日

¹hamamoto@c.oka-pu.ac.jp



前回の復習：準定常電流

▶ 導体中でゆっくり変動する電磁場

- ▷ 電気伝導率 $\sigma \sim 10^8 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$
- ▷ 誘電率 $\varepsilon \sim 10\varepsilon_0 \sim 10^{-10} \text{ F/m}$
- ▷ 伝導電流と誘導電流の比

$$\frac{|\dot{i}_D|_{\max}}{|\dot{i}_e|_{\max}} = \frac{\varepsilon\omega}{\sigma} \sim 10^{-18}\omega$$

▶ アンペール・マクスウェル法則をアンペールの法則で近似

$$\int_{C_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} \simeq I_e \quad (\text{磁場は伝導電流の寄与が支配的})$$

▶ ファラデーの法則はそのまま成立

$$\phi^{\text{e.m.}} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \left(\Phi = \int_S B_n dS \right)$$

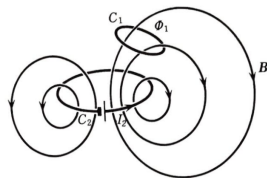
前回の復習: インダクタンス



- ▶ C_1, C_2 を貫く磁束

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M_{12} I_2,$$

$$\Phi_2 = M_{21} I_1 + L_2 I_2$$



- ▷ L_1, L_2 : C_1, C_2 の自己インダクタンス
- ▷ $M_{12} = M_{21}$: C_1 と C_2 の間の相互インダクタンス

- ▶ C_1, C_2 に発生する誘導起電力

$$\phi_1^{\text{e.m.}} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M_{12} \frac{dI_2}{dt},$$

$$\phi_2^{\text{e.m.}} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt}$$

前回の小テストの解説



断面積 $S = 1 \text{ m}^2$ で無限に長い円柱状の磁性体に巻数 $n = 10 \text{ m}^{-1}$ でコイルを巻いた無限長ソレノイドを考える。この磁性体の磁化率を $\chi_m = 1$ (or μ_0) とするとき、単位長さ当たりの自己インダクタンスを求めよ。ただし真空の透磁率を $\mu_0 = 1 \times 10^{-6} \text{ [H/m]}$ とする。

$\chi_m = 1$ (or μ_0) のとき $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$ (or $\mu_0 + \chi_m$) $= 2\mu_0$ なので

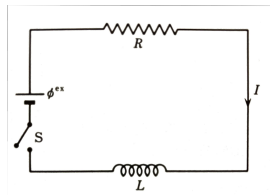
$$\begin{aligned}\frac{L}{\ell} &= \mu n^2 S = 2 \times 1 \times 10^{-6} \times 10^2 \times 1 \\ &= 2 \times 10^{-4} \text{ [H/m]}\end{aligned}$$

RL 回路を流れる電流



▶ RL 回路

- ▷ 起電力 ϕ^{ex} の電源
- ▷ 抵抗 R
- ▷ 自己インダクタンス L のコイル



▶ 時刻 $t = 0$ でスイッチ S を閉じる

- ▷ 電流 I が流れると磁束の変化を妨げる誘導起電力が発生

$$\phi^{\text{e.m.}} = -L \frac{dI}{dt} \quad (\text{時計回りが正})$$

- ▷ 回路を流れる電流 I を決定する方程式

$$RI = \phi^{\text{ex}} + \phi^{\text{e.m.}}, \quad \therefore \underbrace{L \frac{dI}{dt} + RI}_{I \text{ に関して線形}} = \underbrace{\phi^{\text{ex}}}_{t \text{ の関数}}$$

上式のような微分方程式を線形非斉次方程式と呼ぶ。

線形非斉次方程式



解法

線形非斉次方程式

$$L[y] \equiv \left(C_n \frac{d^n}{dt^n} + C_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + C_1 \frac{d}{dt} + C_0 \right) y(t) = f(t)$$

の一般解は、特解と斉次方程式 $L[y] = 0$ の一般解の和

特解 y_p が求まったとき、任意の解 y に対して差 $y - y_p$ を考えると

$$\begin{aligned} L[y - y_p] &= L[y] - L[y_p] \quad (\because L \text{ は線形演算子}) \\ &= f(t) - f(t) = 0 \end{aligned}$$

つまり差 $y - y_p$ は斉次方程式の解なので、非斉次方程式の解 y は特解 y_p と斉次方程式の解の和である

過渡現象



▶ 非斉次方程式の特解

▷ $\frac{dI}{dt} = 0$ なる解を探すと $0 + RI = \phi^{\text{ex}}, \quad \therefore I = \frac{\phi^{\text{ex}}}{R}$

▶ 斉次方程式の一般解

▷ 右辺 = 0 として微分方程式を解くと

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt, \quad \log I = -\frac{R}{L}t + \text{const.}, \quad \therefore I(t) = Ce^{-Rt/L}$$

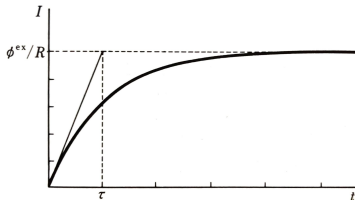
▶ 非斉次方程式の一般解

▷ 上で求めた特解と一般解の和

$$I(t) = Ce^{-Rt/L} + \frac{\phi^{\text{ex}}}{R}$$

▷ 初期条件 $I(0) = 0$ から

$$C = -\frac{\phi^{\text{ex}}}{R}, \quad \therefore I(t) = \frac{\phi^{\text{ex}}}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

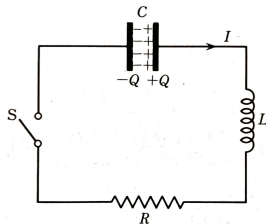


RLC回路を流れる電流



▶ RLC 回路

- ▷ 抵抗 R
- ▷ 自己インダクタンス L のコイル
- ▷ 電荷 Q を蓄えたコンデンサー C



▶ 時刻 $t = 0$ でスイッチ S を閉じる

- ▷ 回路を流れる電流 I を決定する方程式

$$RI = \frac{Q}{C} - L \frac{dI}{dt}, \quad \therefore L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} - \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} = 0$$

- ▷ 電流 I は単位時間当りの電荷 Q の減少量に等しいので

$$I = -\frac{dQ}{dt}, \quad \therefore L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0$$

コイルに蓄えられたエネルギー



- ▶ RLC 回路の方程式の両辺に $I = -\frac{dQ}{dt}$ を掛ける

$$\underbrace{RI^2}_{\text{ジュール熱}} = \frac{Q}{C} \left(-\frac{dQ}{dt} \right) - LI \frac{dI}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{Q^2}{2C}}_{\text{電場のエネルギー}} + \underbrace{\frac{1}{2}LI^2}_{???} \right)$$

- ▶ 単位長さ当たりの巻き数 n 、長さ ℓ 、断面積 S のソレノイドを仮定

- ▷ 自己インダクタンス $L = \mu n^2 \ell S$
- ▷ 内部の磁場 $H = nI$ 、磁束密度 $B = \mu H = \mu nI$
- ▷ $U_m = \frac{1}{2}LI^2$ を磁場で書き直すと

$$U_m = \frac{1}{2} \mu n^2 \ell S I^2 = \frac{1}{2} (\mu nI) (nI) \ell S = \frac{1}{2} B H V \quad (V \equiv \ell S),$$
$$\rightarrow \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV$$

電磁場のエネルギー



- ▶ コンデンサーに蓄えられた電場のエネルギー (復習)

$$U_e = \frac{Q^2}{2C} \rightarrow \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dv$$

- ▶ コイルに蓄えられた磁場のエネルギー

$$U_m = \frac{1}{2} LI^2 \rightarrow \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv$$

- ▶ RLC 回路のエネルギー保存則

$$RI^2 = -\frac{dU_{e.m.}}{dt} \quad \left(U_{e.m.} = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dv \right)$$

ジュール熱は電磁場のエネルギーの減少量に等しい



RLC 回路の微分方程式

- ▶ $h \equiv \frac{R}{2L}, p^2 \equiv \frac{1}{LC}$ において式を整理

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 2h \frac{dI}{dt} + p^2 I = 0$$

- ▶ $I(t) = e^{-ht} X(t)$ において $X(t)$ に関する方程式を導出

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= -he^{-ht} X + e^{-ht} \frac{dX}{dt} = e^{-ht} \left(\frac{dX}{dt} - hX \right), \\ \frac{d^2 I}{dt^2} &= -he^{-ht} \left(\frac{dX}{dt} - hX \right) + e^{-ht} \left(\frac{d^2 X}{dt^2} - h \frac{dX}{dt} \right) \\ &= e^{-ht} \left(\frac{d^2 X}{dt^2} - 2h \frac{dX}{dt} + h^2 X \right)\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d^2 X}{dt^2} + (p^2 - h^2)X = 0 \quad (\text{一階微分の項が消えた})$$

減衰振動



1. $p^2 > h^2$ 、つまり $\frac{L}{C} > \frac{R^2}{4}$ のとき

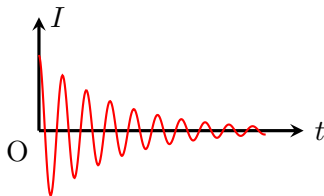
▷ X は単振動

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \omega^2 X = 0 \quad \left(\omega \equiv \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \right)$$

▷ 一般解

$$X(t) = I_0 \cos(\omega t + \alpha),$$

$$\therefore I(t) = I_0 e^{-Rt/2L} \cos(\omega t + \alpha) \quad (I_0, \alpha \text{ は定数})$$



電流 I は振動しながら減衰

臨界減衰

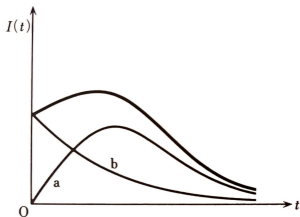


2. $p^2 = h^2$ 、つまり $\frac{L}{C} = \frac{R^2}{4}$ のとき

▷ 一般解

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = 0, \quad X(t) = at + b \quad (a, b \text{ は定数}),$$

$$\therefore I(t) = e^{-Rt/2L}(at + b)$$



電流 I は振動せず素早く減衰 (臨界減衰)

過減衰



2. $p^2 < h^2$ 、つまり $\frac{L}{C} < \frac{R^2}{4}$ のとき

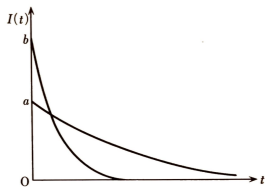
▷ X は指数関数

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \lambda^2 X \quad \left(\lambda \equiv \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \right)$$

▷ 一般解

$$X(t) = ae^{\lambda t} + be^{-\lambda t},$$

$$\therefore I(t) = e^{-Rt/2L}(ae^{\lambda t} + be^{-\lambda t}) \quad (a, b \text{ は定数})$$



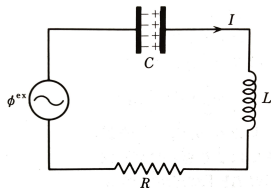
電流 I は振動せずゆっくり減衰 (過減衰)

交流回路を流れる電流



▶ RLC 回路

- ▷ 抵抗 R
- ▷ 自己インダクタンス L のコイル
- ▷ 電荷 Q を蓄えたコンデンサー C



▶ 交流起電力 $\phi^{\text{ex}}(t) = \phi_0 \cos \omega t$ を印加

- ▷ 回路を流れる電流 I を決定する方程式

$$RI = \phi^{\text{ex}} + \frac{Q}{C} - L \frac{dI}{dt},$$

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} - \frac{1}{C} dQ dt = \frac{d\phi^{\text{ex}}}{dt},$$

$$\therefore L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -\omega \phi_0 \sin \omega t$$

交流回路を流れる電流



▶ 齊次方程式の一般解

▷ $\phi^{\text{ex}} = 0$ のときは時間の経過とともに減衰 (上記を参照)

▶ 非齊次方程式の特解

▷ 特解を $I(t) = I_0 \cos(\omega t - \alpha)$ とおいて加法定理を用いると

$$\begin{aligned} I &= I_0(\cos \omega t \cos \alpha + \sin \omega t \sin \alpha), \\ \frac{dI}{dt} &= -\omega I_0 \sin(\omega t - \alpha) = -\omega I_0(\sin \omega t \cos \alpha - \cos \omega t \sin \alpha), \\ \frac{d^2 I}{dt^2} &= -\omega^2 I_0 \cos(\omega t - \alpha) = -\omega^2 I_0(\cos \omega t \cos \alpha + \sin \omega t \sin \alpha) \end{aligned}$$

交流回路を流れる電流



- ▷ $\cos \omega t$ と $\sin \omega$ の項の係数を比較して

$$\begin{cases} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos \alpha - R \sin \alpha = 0 & \dots \textcircled{1} \\ \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \sin \alpha + R \cos \alpha = \frac{\phi_0}{I_0} & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

- ▷ ①から位相の遅れは

$$\tan \alpha = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}, \quad \therefore \alpha = \tan^{-1} \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

- ▷ $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ のとき $\cos \alpha > 0$ なので

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}{R}$$

- ▷ ②に $\cos \alpha$ と $\sin \alpha = \cos \alpha \tan \alpha$ を代入して

$$I_0 = \frac{\phi_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \equiv \frac{\phi_0}{Z} \quad (Z \text{ をインピーダンスと呼ぶ})$$

演習: RL 回路



電流が定常値 I_0 に到達すると $\frac{dI}{dt} = 0$ なので

$$RI_0 = \phi^{\text{ex}}, \quad \therefore I_0 = \frac{\phi^{\text{ex}}}{R}$$

$t > 0$ で電流が減少するとコイルに $-L \frac{dI}{dt}$ の起電力が生じるので

$$RI = -L \frac{dI}{dt}, \quad \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt, \quad \therefore I = Ce^{-Rt/L}$$

$t = 0$ のとき $I(0) = I_0$ なので $C = I_0$ である。

$t > 0$ で抵抗に発生するジュール熱の総和は

$$\int_0^\infty RI^2 dt = RI_0^2 \int_0^\infty e^{-2Rt/L} dt = RI_0^2 \frac{L}{2R} = \frac{1}{2} LI_0^2$$