



# 物理学B 第6回

オームの法則、ジュールの法則、キルヒ霍ッフの法則

濱本 雄治<sup>1</sup>

情報工学部 情報通信工学科

2025年11月5日、6日

---

<sup>1</sup>hamamoto@c.oka-pu.ac.jp

<https://yhmmt.github.io/pages/>



# 前回の復習：誘電体

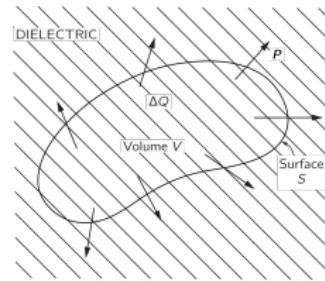
- ▶  $P$  が一様でない誘電体内部の閉曲面  $S_0$

- ▷  $S_0$  内部では正負電荷が相殺
- ▷  $S_0$  上の  $P$  の接線成分も正負電荷が相殺
- ▷  $S_0$  上の  **$P$  の法線成分**が分極電荷に寄与
- ▷  $S_0$  上の分極電荷を  $Q_p$  とすると

$$Q_p = - \int_{S_0} P_n dS \quad (\text{負符号は分極電荷と真電荷が逆だから})$$

- ▶ 真電荷  $Q_e$  と分極電荷  $Q_p$  が作る電場はガウスの法則から

$$\int_{S_0} E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} (Q_e + Q_p) \quad \therefore \int_{S_0} (\epsilon_0 E_n + P_n) dS = Q_e$$



真電荷  $Q_e$  が作る場  $D \equiv \epsilon_0 E + P$  を**電束密度** (電気変位) と呼ぶ



# 前回の復習：静電場を規定する法則

## 1. 電束密度 $D$ に対するガウスの法則

$$\int_{S_0} D_n dS = Q_e \quad (S_0 \text{は任意の閉曲面})$$

ここで  $D \equiv \epsilon_0 E + P \simeq \epsilon E$

## 2. 静電場が $E = E(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$ と書けることに由来する（名無しの）法則

$$\int_{C_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (C_0 \text{は任意の閉曲線})$$

あるいは

$$\phi(\mathbf{r}) = - \int^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad \Leftrightarrow \quad E(r) = - \frac{d\phi}{dr}$$



# 前回の小テストの解説

電荷  $Q$  が内部に一様に分布した半径  $a$  の球状電荷が半径  $b (> a)$ 、誘電率  $\varepsilon$  の誘電体球の中心に埋め込まれている。各領域における静電場の大きさと方向を求めよ。

球状電荷と中心が同じ半径  $r$  の閉曲面を  $S_0$  とすると、電束密度は  $r$  のみの関数で  $S_0$  に垂直、かつ境界面上で連続なので

$$\int_{S_0} D_n dS = 4\pi r^2 D(r) = \begin{cases} \left(\frac{r}{a}\right)^3 Q & (0 < r < a) \\ Q & (r > a) \end{cases},$$

$$\therefore D(r) = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi a^3} & (0 < r < a) \\ \frac{Q}{4\pi r^2} & (r > a) \end{cases}$$

# 前回の小テストの解説(続き)



球状電荷は分極しないので誘電率は  $\varepsilon_0$  である。 $r > a$  では  $r = b$  で誘電率が  $\varepsilon$  から  $\varepsilon_0$  に変化するので、電場は

$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon(r)} = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} & (0 < r < a) \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} & (a < r < b) \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > b) \end{cases}$$

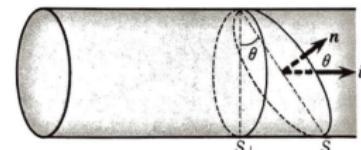
電場の向きは閉曲面  $S_0$  に垂直な方向



# 電流密度

## ▶ 電流 $I$

- ▷ 強さ: 断面を単位時間当たり通過する電荷
- ▷ 向き: 正電荷の流れる方向 (電子と逆)
- ▷ 単位: A = C/s



## ▶ 電流密度 $i$

- ▷ 単位面積の断面を垂直に通過する電荷 (平行な成分は通過しない)
- ▷ 任意の断面  $S$  と導線を垂直に切った断面  $S_{\perp}$  のなす角を  $\theta$  とすると

$$i = \frac{I}{S_{\perp}} = \frac{I}{S \cos \theta}, \quad I = Si \cos \theta = S \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = Si_n$$

- ▷ 断面が曲面のときは面積  $dS$  を通過する電流  $dI = i_n dS$  を積分して

$$I = \int_S dI = \int_S i_n dS$$

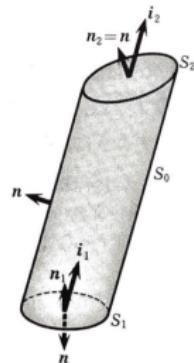


# 定常電流の保存則

- ▶ 時間的に変化しない電流を**定常電流**と呼ぶ
- ▶ 導線を通過する定常電流の値は断面に依らない
  - ▷ 断面  $S_1, S_2$  を通過する電流を  $I_1, I_2$  とすると

$$I_1 = I_2, \quad \therefore \int_{S_1} i_{n_1} dS = \int_{S_2} i_{n_2} dS$$

- ▷  $S_1, S_2$  および側面からなる閉曲面  $S_0$
- ▷  $S_0$  に外向きに立てた法線ベクトルを  $n$  とすると



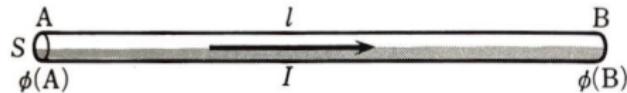
$$i_{n_1} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{i} \cdot (-\mathbf{n}) = -i_n, \quad i_{n_2} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} = i_n,$$

$$-\int_{S_1} i_n dS = \int_{S_2} i_n dS, \quad \therefore \int_{S_1 + S_2} i_n dS = 0$$

- ▷ 側面上では  $i_n = 0$  なので  $\int_{S_0} i_n dS = 0$  (**定常電流の保存則**)



# 一様な導線中のオームの法則



- ▶ 導線中の 2 点間を流れる電流は 2 点間の電位差に比例

$$I = \frac{\phi(A) - \phi(B)}{R} = \frac{V}{R} \quad (\text{オームの法則})$$

- ▷ (電気) 抵抗  $R$  の単位は  $\Omega = V/A$
- ▶  $R$  は 2 点間の長さ  $\ell$  に比例し、導線の垂直断面積  $S$  に反比例

$$R = \rho \frac{\ell}{S}$$

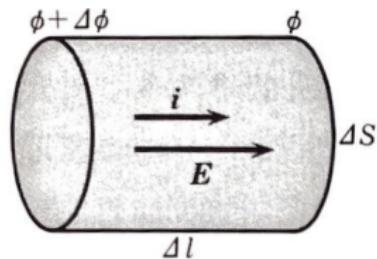
- ▷ 比例係数  $\rho$  を抵抗率と呼び、単位は  $\Omega/m$
- ▷ 抵抗率の逆数  $\sigma = \rho^{-1}$  を電気伝導率と呼ぶ



# 微小領域でのオームの法則

- ▶ 断面積  $\Delta S$ 、長さ  $\Delta \ell$  の微小な導線
- ▶ オームの法則から

$$\begin{aligned} i\Delta S &= \frac{\Delta\phi}{\Delta R} \quad \left( \Delta R = \rho \frac{\Delta\ell}{\Delta S} \right) \\ &= \frac{\Delta\phi}{\Delta\ell} = \rho^{-1} \frac{\Delta\phi}{\Delta\ell} \Delta S = \sigma E \Delta S \\ &\quad \rho \frac{\Delta S}{\Delta\ell} \end{aligned}$$



$$\therefore i = \sigma E$$

- ▶ ベクトル形式で表すと、任意の位置  $r$  におけるオームの法則は

$$\mathbf{i}(r) = \sigma \mathbf{E}(r)$$

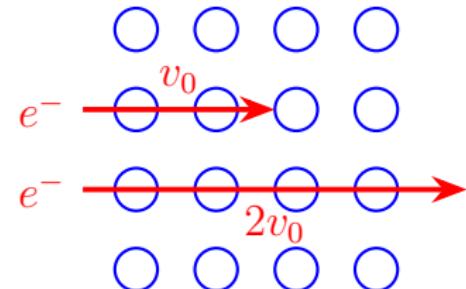


# オームの法則の電子論

## ▶ 電子の運動からオームの法則を導く

- ▷ 電子は電場  $E$  により加速
- ▷ 電子は原子との衝突により減速
- ▷ 原子との衝突頻度は電子速度  $v$  に比例

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} - \frac{m}{\tau} \mathbf{v} \quad (\tau \text{は緩和時間})$$



- ▷ 加速力と減速力が釣り合ったとき

$$e\mathbf{E} - \frac{m}{\tau} \mathbf{v} = 0, \quad \therefore \mathbf{v} = \frac{e\tau}{m} \mathbf{E}$$

- ▶ 単位体積当たりの電子数を  $n$  とすると、電流密度と抵抗率は

$$\mathbf{i} = en\mathbf{v} = \frac{ne^2\tau}{m} \mathbf{E} \equiv \rho^{-1} \mathbf{E}, \quad \therefore \rho = \frac{m}{ne^2\tau}$$

# ジュールの法則



- ▶ 高電位の A から低電位の B に移動する電荷  $q$  が外部にする仕事

$$W = q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = q[\phi(A) - \phi(B)] = qV \quad [V \equiv \phi(A) - \phi(B)]$$

- ▶ 強さ  $I$  の電流が単位時間当たり外部にする仕事を**仕事率**と呼ぶ

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dq}{dt}V = IV = RI^2 = \frac{V^2}{R} \quad (\text{ジュールの法則})$$

電子が原子に衝突して発生する熱を**ジュール熱**と呼ぶ

- ▶ 断面積  $\Delta S$ 、長さ  $\Delta \ell$  の領域を考えると単位体積当たりの仕事率は

$$\left\{ \begin{array}{l} W = w\Delta S \Delta \ell \\ I = i\Delta S \\ V = \Delta \phi \end{array} \right. \quad \text{から} \quad \frac{dw}{dt} = i \frac{\Delta \phi}{\Delta \ell} = iE = \mathbf{i} \cdot \mathbf{E}$$



# 抵抗の温度依存性

- ▶ 導体の抵抗の主な原因是熱的な原子振動

- ▷ 原子振動の振幅を  $u$  とすると

$$R \propto \langle u^2 \rangle \propto kT \quad (\text{抵抗は絶対温度 } T \text{ に比例})$$

- ▷ 摂氏温度を  $t$  [°C] で表し、 $t = 0^\circ\text{C}$  での抵抗を  $R_0$  とすると

$$R = R_0 \left( 1 + \frac{t}{273.15} \right) = R_0(1 + \alpha t)$$

- ▷  $\alpha = 1/273.15 = 3.6 \times 10^{-3} \text{ deg}^{-1}$  を**抵抗の温度係数**と呼ぶ

- ▶ 実際の導体で温度係数が  $\alpha = 1/273.15$  からずれる要因

- ▷ 格子欠陥 → 0 K でも抵抗が残る (残留抵抗)

- ▷ 超伝導転移 → ある温度以下で抵抗ゼロ

- ▷ 磁性不純物 → ある温度で抵抗極小、それ以下で増加

# 非オーム性 ( $I \propto V$ からのずれ)



- ▶ 温度  $T$  の物体から単位時間当たり放出される電磁波のエネルギー

$$\mathcal{I}(\nu) = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (\text{プランクの公式})$$

- ▶ 電球に電圧  $V$  をかけたときに発生するジュール熱

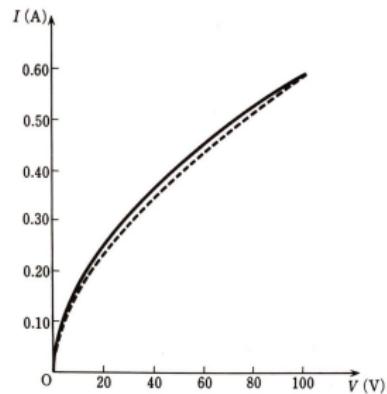
$$\frac{V^2}{R} \simeq \int \mathcal{I}(\nu) d\nu = \sigma T^4 \quad (\text{ステファン-ボルツマンの法則})$$

- ▶  $R = kT$  を用いると

$$\frac{V^2}{kT} = \sigma T^4, \quad \therefore T \propto V^{2/5},$$

$$I = \frac{V}{R} = \frac{V}{kT} \propto \frac{V}{V^{2/5}} \propto V^{3/5}$$

$I-V$  曲線の実測値 (実線) とよく一致

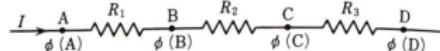




# 抵抗の直列接続

## ▶ 3つの抵抗を直列接続した系

- ▷ それぞれの抵抗  $R_1, R_2, R_3$
- ▷ 点 A, …, D の電位  $\phi(A), \dots, \phi(D)$
- ▷ 各抵抗に流れる電流  $I$  は等しい



$$\phi(A) - \phi(B) = R_1 I, \quad \phi(B) - \phi(C) = R_2 I, \quad \phi(C) - \phi(D) = R_3 I$$

## ▶ A-D 間の電圧

$$V = \phi(A) - \phi(D) = (R_1 + R_2 + R_3)I$$

## ▶ 直列接続の場合の合成抵抗

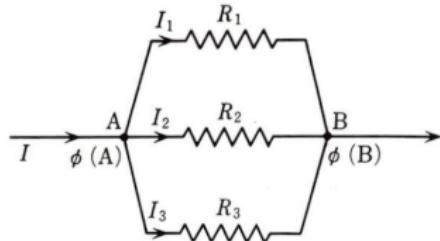
$$R = \frac{V}{I} = R_1 + R_2 + R_3$$



# 抵抗の並列接続

## ▶ 3つの抵抗を並列接続した系

- ▷ それぞれの抵抗  $R_1, R_2, R_3$
- ▷ それぞれの電流  $I_1, I_2, I_3$
- ▷ 各抵抗にかかる電圧  $V$  は等しい



$$V = \phi(A) - \phi(B) = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3$$

## ▶ A-B 間の電流

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) V$$

## ▶ 並列接続の場合の合成抵抗

$$R = \frac{V}{I} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1}$$

(逆数の和の逆数)

コンデンサーと直列・並列の関係が逆であることに注意



# 起電力

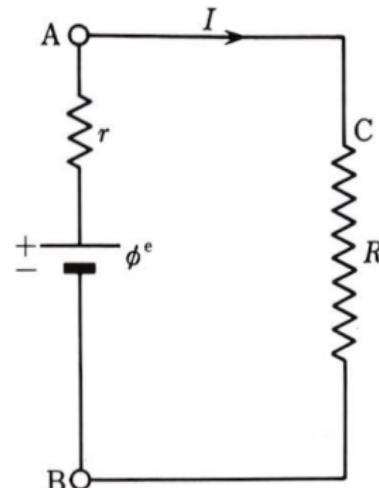
- ▶ 電源が単位電荷にする仕事  $\phi^e$  を**起電力**と呼ぶ
- ▶ 抵抗  $R$  を電流  $I$  が流れるときの電圧降下  $RI$
- ▶ 電源の内部抵抗  $r$  も考慮すると

$$\phi^e = (R + r)I$$

- ▶ 電源の**端子電圧**

$$V = RI = \phi^e - rI$$

は電流  $I$  とともに減少





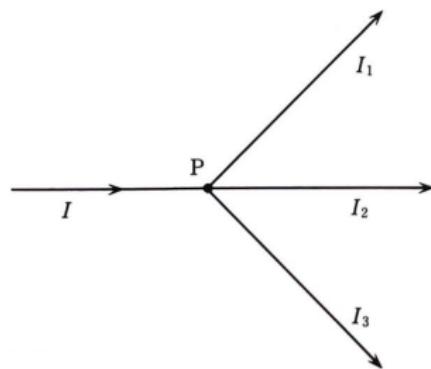
# キルヒ霍ッフの法則

## 第一法則

回路の任意の分岐点に流入する電流を正、流出する電流を負とすると、その分岐点に出入りする電流の総和はゼロ

- ▶ 点Pに電流  $I$  が流入
- ▶ 点Pから  $I_1, I_2, I_3$  に分かれて流出

$$I - I_1 - I_2 - I_3 = 0$$



# キルヒ霍フの法則



## 第二法則

回路の一部の閉回路で電流をある方向に流す起電力を正、反対方向に流す起電力を負とすると、その閉経路に含まれる起電力の総和は電圧降下の総和に等しい

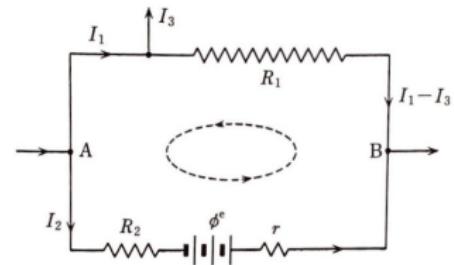
- ▶ 上と下の枝路それぞれについて

$$\phi(A) - \phi(B) = R_1(I_1 - I_3),$$

$$\phi(A) - \phi(B) + \phi^e = (R_2 + r)I_2$$

- ▶  $\phi(A) - \phi(B)$  を消去すると

$$\phi^e = (R_2 + r)I_2 - R_1(I_1 - I_3)$$



# 例: ホイートストン・ブリッジ

## ▶ 抵抗と電源、検流計からなる回路

- ▷ 既知の抵抗  $R_1$ ,  $R_2$  と可変抵抗  $R_3$
- ▷ 未知の抵抗  $R_4$  ← 求めたい
- ▷ 検流計を流れる電流はゼロ

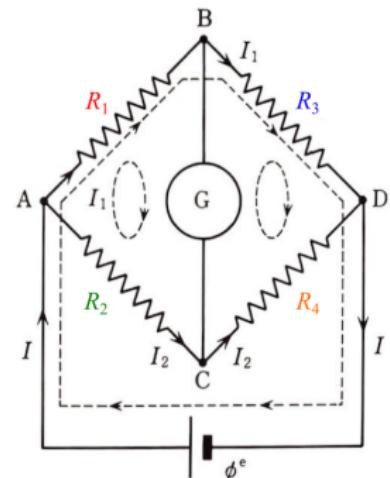
## ▶ 上の 2 つの閉回路で第二法則から

$$\begin{cases} R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 \\ R_3 I_1 - R_4 I_2 = 0 \end{cases} \quad \therefore R_4 = \frac{R_2}{R_1} R_3$$

## ▶ 残りの閉回路で第一、第二法則を使うと

$$\phi^e = (R_1 + R_3) I_1, \quad I = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \frac{\phi^e}{R_1 + R_3}, \quad I_2 = \frac{R_1}{R_2} I_1, \quad \therefore I = I_1 + I_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_3} \frac{\phi^e}{R_2}$$



# 演習：複数の抵抗からなる系の合成抵抗



$$R_1 = 2 \Omega, R_2 = 4 \Omega, R_3 = 4 \Omega, R_4 = 2 \Omega, R_5 = 1 \Omega$$

$$\begin{cases} R_1(I - I_1) + R_5 I_2 - R_2 I_1 = 0 \\ R_3(I - I_1 - I_2) - R_4(I_1 + I_2) - R_5 I_2 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 6I_1 - I_2 = 2I \\ 6I_1 + 7I_2 = 4I \end{cases}$$

$$I_1, I_2 \text{について解くと } I_1 = \frac{3}{8}I, \quad I_2 = \frac{1}{4}I$$

PQ 間の電位差は

$$V = 4I_1 + 2(I_1 + I_2) = \frac{11}{4}I$$

PQ 間の合成抵抗は

$$R = \frac{V}{I} = \frac{11}{4} \Omega$$

