物理学B 第5回

誘電体

濱本 雄治 [1]

情報工学部 情報通信工学科

2025年10月27日、29日

[1] hamamoto@c.oka-pu.ac.jp　https://yhmmt.github.io/pages/

前回の復習: コンデンサー

- 静電容量の計算手順

1. ガウスの法則で極板間の電場を計算

$$\int_{\mathrm{S}_0} E_n \mathrm{d}S = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

2. 電場の線積分で静電ポテンシャルを計算

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -\int^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

3. 極板間の電位差と電荷の比例関係から静電容量を計算

$$V = \phi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}) - \phi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}) = \frac{Q}{C}$$

前回の復習: 静電場のエネルギー

- 電荷の位置エネルギーを静電場のエネルギーとして書き換え
  - 平行板コンデンサー

$$U_\mathrm{e} = \frac{Q^2}{2C} \quad \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 v$$

  - 多数の電荷からなる系

$$U_\mathrm{e} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\varepsilon_0}{2} \int \boldsymbol{E}^2 \mathrm{d}v} \quad \text{(動的な電場でも成立)}$$

- 体積積分の実行方法
  - 球対称な系

$$\mathrm{d}v = 4\pi r^2 \mathrm{d}r \quad \text{(半径 } r\text{、厚み d}r\text{ の球殻の体積)}$$

  - 軸対称な系

$$\mathrm{d}v = 2\pi r h \mathrm{d}r \quad \text{(半径 } r\text{、高さ } h\text{、厚み d}r\text{ の円筒の体積)}$$

前回の小テストの解説

半径 a の中空の球殻上に電荷 Q が一様に分布しているとき、この球殻状電荷が作る静電場のエネルギーを求めよ。

前々々回の小テストから、球殻の内外の電場は球殻の中心から測った位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ に平行で $r \equiv |\boldsymbol{r}|$ のみの関数

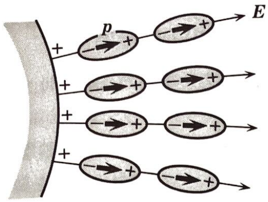
$$E(r) = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > a) \end{cases}$$

球対称な系では $\mathrm{d}v = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$ であるから、静電場のエネルギーは

$$\begin{aligned} U_\mathrm{e} &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^a 0^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_a^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^\infty = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} \end{aligned}$$

誘電体の分極

- 誘電体
  - 正の原子核と負の電子から構成
  - 原子核と電子が強く結合し、電気を流さない絶縁体
  - 例: (純) 水、空気
- 誘電体に電場を印加すると
  - 正負電荷が偏り、電気双極子 $\boldsymbol{p}$ が発生
  - 単位断面積当りの正電荷の移動量



分極ベクトル $\boldsymbol{P}$

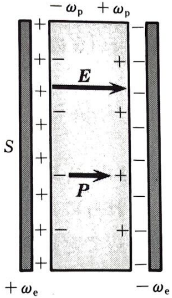
  - 誘電体内部では正負電荷が相殺
  - 誘電体両端では分極電荷が発生

平行板コンデンサーに挿入した誘電体

- コンデンサー内部の静電場
  - 電場 $\boldsymbol{E}$ と分極 $\boldsymbol{P}$ は極板に垂直
  - 定義から、$\boldsymbol{P}$ の大きさが分極電荷の面密度 ω_p

$$\omega_\mathrm{p} = P$$

  - 分極電荷の符号は電極上の電荷の符号と逆

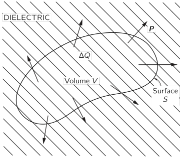


- 極板に外から与えた電荷 (真電荷) の面密度を ω_e とすると

$$\underbrace{E}_{\text{全電荷が作る電場}} = \frac{\omega_\mathrm{e} - \omega_\mathrm{p}}{\varepsilon_0} = \frac{\omega_\mathrm{e} - P}{\varepsilon_0}, \qquad \therefore \quad \underbrace{E + \frac{P}{\varepsilon_0}}_{\text{真電荷が作る電場}} = \frac{\omega_\mathrm{e}}{\varepsilon_0}$$

一般の誘電体

- $\boldsymbol{P}$ が一様でない誘電体内部の閉曲面 S_0
  - S_0 内部では正負電荷が相殺
  - S_0 上の $\boldsymbol{P}$ の法線成分が分極電荷を生じる
  - S_0 上の分極電荷を Q_p とすると



$$Q_\mathrm{p} = -\int_{\mathrm{S}_0} P_n \mathrm{d}S \quad (\text{負符号は分極電荷と真電荷が逆だから})$$

- 真電荷 Q_e と分極電荷 Q_p が作る電場はガウスの法則から

$$\int_{\mathrm{S}_0} E_n \mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon_0}(Q_\mathrm{e} - Q_\mathrm{p}) \qquad \therefore \int_{S_0} (\varepsilon_0 E_n + P_n)\mathrm{d}S = Q_\mathrm{e}$$

真電荷 Q_e が作る場 $\boldsymbol{D} \equiv \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ を電束密度 (電気変位) と呼ぶ

分極が電場に比例する場合

- 多くの場合、分極は電場に比例

$$\boldsymbol{P} \simeq \chi \boldsymbol{E} \qquad (\chi \text{ を電気感受率と呼ぶ})$$

- このとき電束密度も電場に比例

$$\boldsymbol{D} \equiv \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \simeq (\varepsilon_0 + \chi)\boldsymbol{E} \equiv \varepsilon \boldsymbol{E} \qquad (\varepsilon \text{ を誘電率と呼ぶ})$$

- 平行板コンデンサーの電場と静電容量

$$E \simeq \frac{\omega_\mathrm{e} - \chi E}{\varepsilon_0}, \qquad \therefore E = \frac{\omega_\mathrm{e}}{\varepsilon} = \frac{Q_\mathrm{e}/S}{\varepsilon} = \frac{V}{d},$$

$$C = \frac{Q_\mathrm{e}}{V} = \varepsilon \frac{S}{d} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \times \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

例: 極板間に水を挿入すると静電容量が $\varepsilon/\varepsilon_0 \simeq 80$ 倍に増大

静電場を規定する法則

1. 電束密度 $\boldsymbol{D}$ に対するガウスの法則

$$\boxed{\int_{S_0} D_n \mathrm{d}S = Q_\mathrm{e}} \qquad (S_0\text{は任意の閉曲面})$$

ここで $\boldsymbol{D} \equiv \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \simeq \varepsilon \boldsymbol{E}$

2. 静電場が $\boldsymbol{E} = E(r)\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ と書けることに由来する (名無しの) 法則

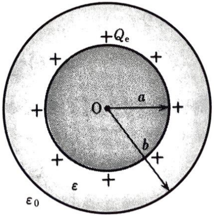
$$\boxed{\int_{C_0} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0} \qquad (C_0\text{は任意の閉曲線})$$

あるいは

$$\boxed{\phi(\boldsymbol{r}) = -\int^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{E(r) = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}}$$

例: 誘電体で包んだ導体球

- 導体球の外側の電束密度
  - 導体球と誘電体球の半径 $a, b(> a)$
  - 導体球表面に真電荷 Q_e が一様に分布
  - 半径 $r(> a)$ の球面状の閉曲面 S_0



$$\int_{S_0} D_n \mathrm{d}S = 4\pi r^2 D(r) = Q_\mathrm{e}, \quad \therefore D(r) = \frac{Q_\mathrm{e}}{4\pi r^2}$$

- 電束密度と電場の比例関係 $\boldsymbol{D} \simeq \varepsilon \boldsymbol{E}$ を用いると

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{D(r)}{\varepsilon} = \dfrac{Q_\mathrm{e}}{4\pi\varepsilon r^2} & (a < r < b) \\ \dfrac{D(r)}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q_\mathrm{e}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > b) \end{cases}$$

例: 誘電体で包んだ導体球 (続き)

- 導体球の外側の静電ポテンシャル

$$\phi(r) = -\int E(r)\mathrm{d}r = \begin{cases} \dfrac{Q_\mathrm{e}}{4\pi\varepsilon r} + C_1 & (a < r < b) \\ \dfrac{Q_\mathrm{e}}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2 & (r > b) \end{cases}$$

  - 無限遠方 $r \to \infty$ で $\phi(\infty) = 0$ とすると

$$C_2 = 0$$

  - $r = a$ で $\phi(r)$ が連続であることから

$$\frac{Q_\mathrm{e}}{4\pi\varepsilon a} + C_1 = \frac{Q_\mathrm{e}}{4\pi\varepsilon_0 a}, \qquad \therefore C_1 = \frac{Q_\mathrm{e}}{4\pi a}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

例: 誘電体で包んだ導体球 (続き)

- 誘電体内部の分極

$$P(r) \simeq \chi E(a < r < b) = \frac{\chi}{\varepsilon}\frac{Q_\mathrm{e}}{4\pi r^2} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\frac{Q_\mathrm{e}}{4\pi r^2} \quad (\because \varepsilon \equiv \varepsilon_0 + \chi)$$

  - 誘電体球の外側表面における分極電荷面密度と分極電荷の総量

$$\omega_\mathrm{p}(b) = P(b) = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\frac{Q_\mathrm{e}}{4\pi b^2},$$
$$\therefore Q_\mathrm{p}(b) = 4\pi b^2 \omega_\mathrm{p}(b) = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) Q_\mathrm{e}$$

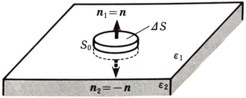
  - 導体球の表面における分極電荷面密度と分極電荷の総量

$$\omega_\mathrm{p}(a) = -P(a) = -\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\frac{Q_\mathrm{e}}{4\pi a^2},$$
$$\therefore Q_\mathrm{p}(a) = 4\pi a^2 \omega_\mathrm{p}(b) = -\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) Q_\mathrm{e} = -Q_\mathrm{p}(b)$$

誘電体の導体球側と外側の表面に当量で逆符号の分極電荷が出現

異なる誘電体の境界面上の接続条件

- 誘電率 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ の誘電体の境界面
- 境界面に分極電荷は存在しない



- 境界に平行な面の面積が ΔS の十分薄い閉曲面 S_0

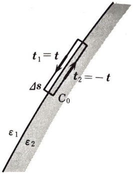
$$\int_{S_0} D_n \mathrm{d}S = \{\boldsymbol{D}_1 \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{D}_2 \cdot (-\boldsymbol{n})\}\Delta S = Q_{\mathrm{e}} = 0,$$

$$\therefore D_{1n} = D_{2n} \qquad (\text{電束密度の法線成分は連続})$$

- 境界に平行な辺の長さが Δs の十分細い閉曲線 C_0

$$\int_{C_0} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \{\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{t} + \boldsymbol{E}_2 \cdot (-\boldsymbol{t})\}\Delta s = 0,$$

$$\therefore E_{1t} = E_{2t} \qquad (\text{電場の接線成分は連続})$$



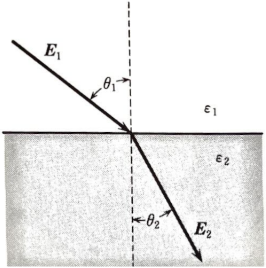
異なる誘電体の境界面における電場の屈折

- 電場の接線成分の連続性から

$$E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2$$

- 電束密度の法線成分の連続性から

$$\varepsilon_1 E_1 \cos\theta_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\theta_2$$



- 辺々を割って電場を消去すると

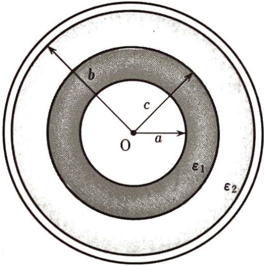
$$\frac{\tan\theta_1}{\varepsilon_1} = \frac{\tan\theta_2}{\varepsilon_2}, \qquad \therefore \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

- 真空中から水中 ($\varepsilon_2 \simeq 80\varepsilon_0$) に電場が入射角 $\theta_1 = 30^\circ$ で入ると

$$\tan\theta_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\tan\theta_1 = \frac{80}{\sqrt{3}}, \qquad \therefore \theta_2 = \tan^{-1}\frac{80}{\sqrt{3}} \simeq 89^\circ$$

例 1: 誘電体を詰めた円筒形コンデンサー

- 電極間の電束密度
  - 内半径 a、外半径 b
  - 電極に $\pm\lambda = \pm Q/\ell$ の真電荷線密度
  - $a < r < c$ の領域に誘電率 ε_1 の誘電体
  - $c < r < b$ の領域に誘電率 ε_2 の誘電体
  - 界面で $\boldsymbol{D}$ の法線成分は連続なので



$$\int_{\mathrm{S}_0} D_n \mathrm{d}S = 2\pi r h D(r) = \lambda h, \qquad \therefore D(r) = \frac{\lambda}{2\pi r} \qquad (a < r < b)$$

- 電極間の電場

$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon} = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_1 r} & (a < r < c) \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_2 r} & (c < r < b) \end{cases}$$

例 1: 誘電体を詰めた円筒形コンデンサー (続き)

- 電極間の静電ポテンシャル

$$\phi(r) = -\int E(r)\mathrm{d}r = \begin{cases} -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_1}\log r + k_1 & (a < r < c) \\ -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_2}\log r + k_2 & (c < r < b) \end{cases}$$

- 誘電体の界面 ($r = c$) 上で静電ポテンシャルは連続

$$\phi(r \to c - 0) = \phi(r \to c + 0), \quad \therefore k_1 - k_2 = \frac{\lambda}{2\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right)\log c$$

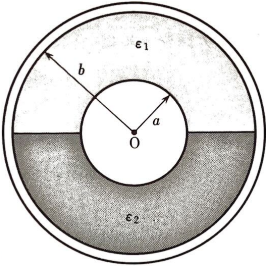
- 電極間の電位差と静電容量

$$V = \phi(a) - \phi(b) = \frac{\lambda}{2\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\log\frac{c}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2}\log\frac{b}{c}\right],$$

$$\therefore C = \frac{\lambda\ell}{V} = 2\pi\ell\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\log\frac{c}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2}\log\frac{b}{c}\right]^{-1}$$

例 2: 誘電体を詰めた円筒形コンデンサー

- 電極間の電束密度
  - 内半径 a、外半径 b
  - 電極に $\pm\lambda = \pm Q/\ell$ の真電荷線密度
  - 電極間の断面の上半分に ε_1 の誘電体
  - 電極間の断面の下半分に ε_2 の誘電体
  - 界面で $\boldsymbol{E}$ の接線成分は連続なので



$$\int_{S_0} D_n \mathrm{d}S = \pi r h(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)E(r) = \lambda h, \qquad \therefore E(r) = \frac{\lambda}{\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) r}$$

- 電極間の静電ポテンシャル

$$\phi(r) = -\int E(r)\mathrm{d}r = -\frac{\lambda}{\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \log r + k$$

例 2: 誘電体を詰めた円筒形コンデンサー (続2)

- 電極間の電位差

$$V = \phi(a) - \phi(b) = \frac{\lambda}{\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \log \frac{b}{a}$$

- 電極間の静電容量

$$C = \frac{\lambda \ell}{V} = \frac{\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\log(b/a)}$$

演習 1: 誘電体を詰めた平行板コンデンサー 1

- 電極間の電束密度
  - 極板の面積 S、間隔 d、電荷面密度 $\omega = Q/S$
  - 極板間の領域を極板に平行な平面で半分に分けて領域 1,2 とする
  - 極板間の電束密度は一定かつ極板に垂直で境界面で連続

$$\int_{S_0} D_n \mathrm{d}S = D_n \Delta S = \omega \Delta S, \qquad D = \omega$$

- 極板間の電場

$$E = \begin{cases} \dfrac{\omega}{\varepsilon_1} & \left(0 < y < \dfrac{d}{2}\right) \\ \dfrac{\omega}{\varepsilon_2} & \left(\dfrac{d}{2} < y < d\right) \end{cases}$$

演習 1: 誘電体を詰めた平行板コンデンサー 1

- 極板間の静電ポテンシャル

$$\phi(y) = \begin{cases} -\dfrac{\omega}{\varepsilon_1} y + k_1 & \left(0 < y < \dfrac{d}{2}\right) \\ -\dfrac{\omega}{\varepsilon_2} y + k_2 & \left(\dfrac{d}{2} < y < d\right) \end{cases}$$

- 境界面 $y = d/2$ で静電ポテンシャルが連続とすると

$$k_1 - k_2 = \frac{\omega d}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)$$

- 極板間の電位差と静電容量

$$V = \phi(0) - \phi(d) = k_1 - k_2 + \frac{\omega d}{\varepsilon_0} = \frac{Qd}{2S}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right),$$

$$C = \frac{Q}{V} = 2\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right)^{-1} \frac{S}{d}$$

演習 2: 誘電体を詰めた平行板コンデンサー 2

- 電極間の電束密度
  - 極板の面積 S、間隔 d、電荷面密度 $\omega = Q/S$
  - 極板間の領域を極板に垂直な平面で半分に分けて領域 1,2 とする
  - 極板間の電束密度は一定かつ極板に垂直

$$\int_{S_0} D_n \mathrm{d}S = D_n \Delta S = \omega \Delta S, \qquad D = \omega,$$

- 電場は境界面で連続

$$E = \frac{\omega_1}{\varepsilon_1} = \frac{Q_1}{\varepsilon_1 S/2} = \frac{\omega_2}{\varepsilon_2} = \frac{Q_2}{\varepsilon_2 S/2}, \qquad \therefore Q_1 + Q_2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{E}{2}$$

- 極板間の静電ポテンシャル、電位差、および静電容量

$$\phi(y) = -Ey + k, \qquad V = \phi(0) - \phi(d) = Ed$$

$$C = \frac{Q}{V} =\therefore (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{S}{2d}$$