物理学B 第9回

アンペールの法則とビオ・サバールの法則

濱本 雄治[1]

情報工学部 情報通信工学科

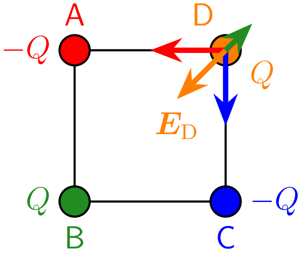
2025年11月26日、12月1日

[1]hamamoto@c.oka-pu.ac.jp https://yhmmt.github.io/pages/

第 7 回の小テストの解説

一辺 a の正方形の頂点を反時計回りに A,B,C,D とする。各頂点にそれぞれ電荷 $Q_{\mathrm{A}} = -Q, Q_{\mathrm{B}} = Q, Q_{\mathrm{C}} = -Q, Q_{\mathrm{D}} = Q$ $(Q > 0)$ が置かれているとき、$Q_{\mathrm{A}}, Q_{\mathrm{B}}, Q_{\mathrm{C}}$ が頂点 D に作る電場の大きさと向きを求めよ。

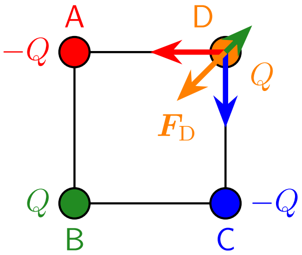
$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{E}_{\mathrm{D}}| &= \frac{\sqrt{2}Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{2}a)^2} \\
&= \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}
\end{aligned}
$$



第 7 回の小テストの解説 (続き)

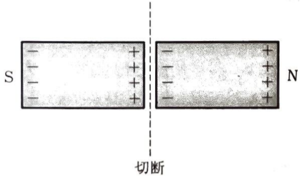
また Q_{D} がこの電場から受けるクーロン力の大きさと向きを求めよ。さらに $Q_{\mathrm{A}}, Q_{\mathrm{B}}, Q_{\mathrm{C}}$ が頂点 D に作る静電ポテンシャルを求めよ。ただし静電ポテンシャルは無限遠をゼロとする。

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{F}_{\mathrm{D}}| &= |Q\boldsymbol{E}_{\mathrm{E}}| \\
&= \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}, \\
\phi_{\mathrm{D}} &= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} \times 2 + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{2}a)} \\
&= \left(-2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}
\end{aligned}
$$

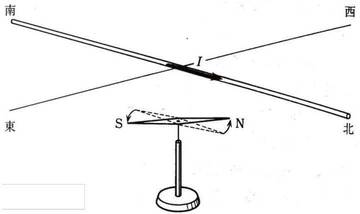


磁気的現象

- 磁荷
  - 北を指す磁極を N 極 (+)、南を指す磁極を S 極 (−) と呼ぶ
  - 異なる極の間には引力、同じ極の間には斥力が働く
  - 正負の磁荷は分離できない (単極磁荷は存在しない)



- 電流の磁気作用
  - 南 → 北に電流を流すと
    磁石の N 極が西に向く

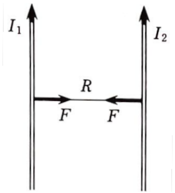


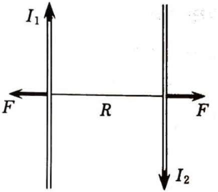
電流間に働く力

- 直線状の 2 本の平行な導線に電流を流す
  - 平行 (反平行) 電流の間には引力 (斥力)
  - 力の強さは電流の積に比例、距離に反比例

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{R}$$

- 真空の透磁率 μ_0 の定義の変更
  - 2019 年以前:
    $$\mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}$$
    F の観測値から 1 A を定義
  - 2019 年以降:
    $$\mu_0 \equiv 1.25663706127(20) \times 10^{-6}\ \mathrm{N/A^2}$$
    流れる電子数の観測から 1 A を定義





磁場

- 磁束密度
  - 電流 I_1, I_2 間に働く力は $I_1(I_2)$ が作る磁場と $I_2(I_1)$ との近接作用
  - 接線方向が磁場の方向と一致するように引いた線を磁束線と呼ぶ
  - $I_1(I_2)$ が作る磁束密度を $B_1(B_2)$ とすると

$$F = I_1 B_2 = I_2 B_1, \qquad B_1(R) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{R}, \qquad B_2(R) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{R}$$

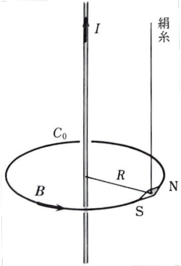
  - 磁束密度の単位は $\mathrm{T} = \mathrm{N/A\,m}$
  - 後述の磁場の強さ $H \simeq \mu^{-1} B$ とは区別する

磁場に関するガウスの法則

- 直線電流 I が作る磁束密度
  - 電流の方向を右ネジの進行方向とすると磁束密度の方向は右ネジの回転方向
  - 磁束線は一般に閉曲線を描く
  - 任意の閉曲面 S_0 を貫く磁束の総和

$$\int_{S_0} B_n \mathrm{d}S = 0$$

(流出量と流入量は相殺)



- 電場に関するガウスの法則との違い

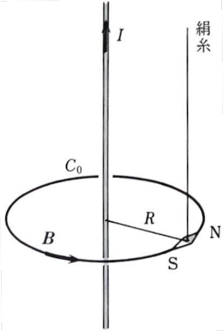
$$\int_{S_0} D_n \mathrm{d}S = Q_\mathrm{e}$$

  - 電束密度の発生源である真電荷 Q_e に対応する磁荷 Q_m が存在しないため右辺はゼロ

アンペールの法則

- 直線電流 I が作る磁束密度
  - 距離 R で B は半径 R の円 C_0 を描く
  - 磁束密度の式を変形すると

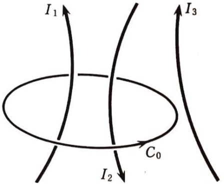
$$B(R) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R} \quad \to \quad 2\pi R B(R) = \mu_0 I$$



- 任意の閉曲線、電流への一般化
  - 任意の閉曲線 C_0 に対して

$$\boxed{\int_{C_0} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 I} \qquad \text{(アンペールの法則)}$$

  I は C_0 で囲まれる曲面を貫く電流の総和
  - 証明は電場に関するガウスの法則と類似



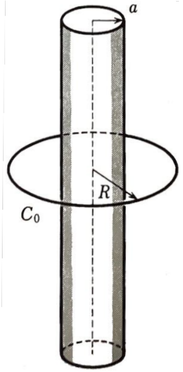
静電場と静磁場の比較

	静電場	静磁場
力線の発生源	真電荷 Q_{e} が存在	磁荷 Q_{m} は不在
面積分に関する法則	ガウスの法則 $\displaystyle\int_{S_0} D_n \mathrm{d}S = Q_{\mathrm{e}}$	ガウスの法則 $\displaystyle\int_{S_0} B_n \mathrm{d}S = 0$
線積分に関する法則	(名無しの法則) $\displaystyle\int_{C_0} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$	アンペールの法則 $\displaystyle\int_{C_0} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 I$

- 補足
  - アンペールの法則は後で磁場 $\boldsymbol{H} \simeq \mu^{-1}\boldsymbol{B}$ を用いて再定式化
  - アンペールの法則はスカラーポテンシャル $\phi_{\mathrm{m}} = -\int \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ の不在、ガウスの法則はベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の存在を示唆

例: 無限に長い円柱状電流の作る静磁場

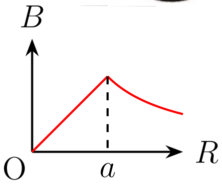
- 半径 a の円柱状導体内部に一様な電流 I
- 軸に垂直な半径 R の円を C_0 とすると



$$\int_{C_0} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 2\pi R B(R) = \begin{cases} \mu_0 \left(\dfrac{R}{a}\right)^2 I & (R < a) \\ \mu_0 I & (R > a) \end{cases}$$

- 以上から

$$B(R) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 \pi I R}{2\pi a^2} & (R < a) \\ \dfrac{\mu_0 \pi I}{2\pi R} & (R > a) \end{cases}$$



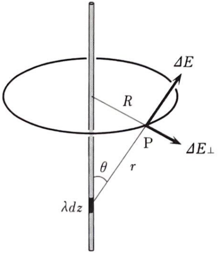
直線電流に関するビオ・サバールの法則

- 直線状電荷が距離 R の位置に作る電場

$$E(R) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}$$

は微小電荷 $\lambda\Delta z$ の電場 (次式) の重合せ

$$\Delta E_\perp = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\Delta z\sin\theta}{r^2}$$

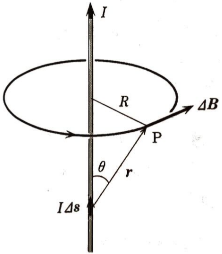


- 直線電流が距離 R の位置に作る磁束密度

$$B(R) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}$$

も微小電流 $I\Delta s$ の電場 (次式) の重合せ

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta s\sin\theta}{r^2}$$ (ビオ・サバールの法則)

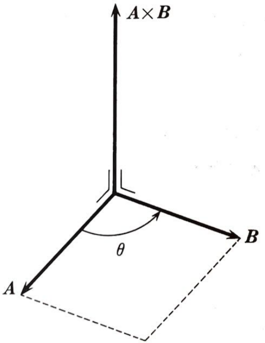


ベクトルの外積

- 定義 (x, y, z 成分は赤、緑、青)

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (A_y B_z - A_z B_y, \quad A_z B_x - A_x B_z, \quad A_x B_y - A_y B_x)$$

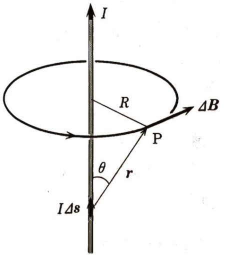
- 方向
  - $\boldsymbol{A}$ から $\boldsymbol{B}$ に右ネジを回したとき $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ の方向は右ネジの進行方向
  - $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$
- 絶対値
  - $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \sin\theta$
  - $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ が作る平行四辺形の面積



一般的な電流に関するビオ・サバールの法則

- 直線電流の素片 $I\Delta s$ が作る磁束密度

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta s\sin\theta}{r^2} \qquad (\Delta s \equiv |\Delta \boldsymbol{s}|)$$



- 直線状以外の電流への一般化
  - $\Delta\boldsymbol{s}$ と $\boldsymbol{r}$ のなす角は θ だから

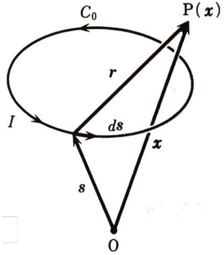
$$\Delta\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r} = \Delta z r\sin\theta, \qquad \therefore \Delta z\sin\theta = \frac{\Delta\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{r}$$

  - 電流素片 $I\Delta\boldsymbol{s}$ が作る磁束密度

$$\Delta\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$

  - 閉経路 C_0 を流れる電流が作る磁束密度

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \int\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \qquad (\boldsymbol{r}\equiv\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s})$$



例 1: 正方形電流の中心軸上の静磁場

- AB 間の電流が距離 R で作る磁束密度
  - $\tan\theta = \dfrac{R}{-s}$ の両辺を微分して

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta} = R\frac{\mathrm{d}s}{s^2},$$

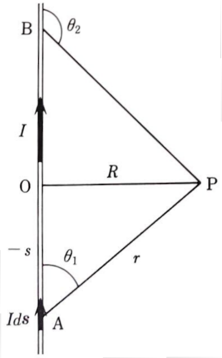
$$\therefore \mathrm{d}s = \frac{s^2\mathrm{d}\theta}{R\cos^2\theta} = \frac{r^2\mathrm{d}\theta}{R} \qquad \left(\because \cos\theta = \frac{-s}{r}\right)$$

  - ビオ・サバールの法則に代入して

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}s\sin\theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\sin\theta\mathrm{d}\theta}{R}$$

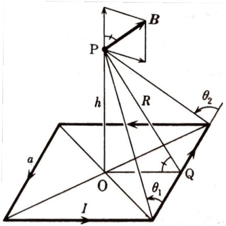
  - 区間 $[\theta_1, \theta_2]$ で積分すると

$$B(\mathrm{P}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\Big[-\cos\theta\Big]_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$



例 1: 正方形電流の中心軸上の静磁場 (続き)

- 正方形電流の中心軸上の磁束密度
  - 辺から中心軸上の高さ h の点までの距離



$$R = \sqrt{h^2 + (a/2)^2}$$

  - この辺の両端における余弦

$$\cos\theta_1 = -\cos\theta_2 = \frac{a/2}{\sqrt{R^2 + (a/2)^2}} = \frac{a/2}{\sqrt{h^2 + a^2/2}}$$

  - これらを前頁の磁束密度の式に代入して

$$B = |\boldsymbol{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi\sqrt{h^2 + (a/2)^2}} \frac{a}{\sqrt{h^2 + a^2/2}}$$

  - 4 辺からの寄与の軸に平行な成分を足すと

$$B(\mathrm{P}) = B\frac{a/2}{R} \times 4 = \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi R[h^2 + (a/2)^2]\sqrt{h^2 + a^2/2}}$$

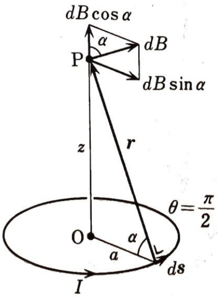
例 2: 円形電流の中心軸上の静磁場

- 電流素片 $I\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ が高さ z で作る磁束密度
  - $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ と $\boldsymbol{r}$ のなす角は $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ だから

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}s}{r^2}$$

- 円電流全体が高さ z で作る磁束密度
  - 軸に平行な成分を円周上で積分すると

$$B(\mathrm{P}) = \int_{\text{円周}} \mathrm{d}B\cos\alpha = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}}$$



例 3: 無限に長いソレノイドの作る静磁場

- 半径 a、単位長さ当りの巻数 n のソレノイド
- 中心軸上の点 P における磁束密度
  - 高さ z、長さ $\mathrm{d}z$ の部分が点 P に作る磁束密度

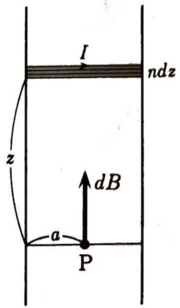
$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}} \times n\mathrm{d}z$$

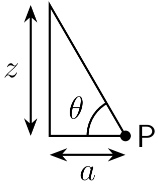
  - $z = a\tan\theta$ とすると $\mathrm{d}z = \dfrac{a\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}$ であるから

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I a^2}{2\dfrac{a^3}{\cos^3\theta}} \times n\frac{a\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\mu_0 n I}{2}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

  - 区間 $[-\pi/2, \pi/2]$ で積分すると

$$B(\mathrm{P}) = \int \mathrm{d}B = \frac{\mu_0 n I}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\mathrm{d}\theta = \mu_0 n I$$



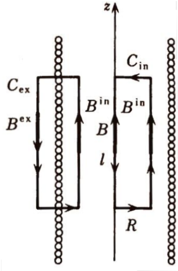


例 3: 無限に長いソレノイドの作る静磁場 (続き)

- 軸から外れた点でも磁束密度は軸に平行
- 内部の点における磁束密度
  - 内部の長さ ℓ の長方形を C_{in} とすると

$$\int_{C_{\mathrm{in}}} \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = [B^{\mathrm{in}} - B(\mathrm{P})]\ell = 0,$$

$$\therefore B^{\mathrm{in}} = B(\mathrm{P}) = \mu_0 n I$$



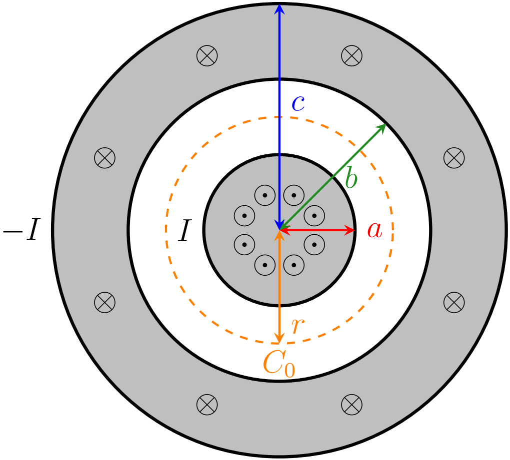
- 外部の点における磁束密度
  - 導線を囲むの長さ ℓ の長方形を C_{ex} とすると

$$\int_{C_{\mathrm{ex}}} \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = [B^{\mathrm{in}} - B^{\mathrm{ex}}]\ell = \mu_0 n \ell I,$$

$$\therefore B^{\mathrm{ex}} = B^{\mathrm{in}} - \mu_0 n I = 0$$

ソレノイドの磁束密度は内部は一様で外部はゼロ

演習: 同軸ケーブルの磁束密度



- 中心から半径 r の円周を C_0 とする

演習: 同軸ケーブルの磁束密度 (続き)

- 各領域で C_0 を貫く電流は

$$I(r) = \begin{cases} (r/a)^2 I & (0 < r < a) \\ I & (a < r < b) \\ I - \dfrac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} I = \dfrac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} I & (b < r < c) \\ 0 & (r > c) \end{cases}$$

- アンペールの法則から

$$H(r) = \frac{\mu_0 I(r)}{2\pi r} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} & (0 < r < a) \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & (a < r < b) \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \dfrac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} & (a < r < b) \\ 0 & (r > c) \end{cases}$$

演習: 同軸ケーブルの磁束密度 (続き)