



物理学B 第11回

磁性体と変位電流

濱本 雄治¹

情報工学部 情報通信工学科

2025年12月10日、12月15日

¹hamamoto@c.oka-pu.ac.jp

<https://yhmmmt.github.io/pages/>



前回の復習

- ▶ 磁束密度 B の内部の電流素片 $I\Delta s$ に作用する力

$$\Delta \mathbf{F} = I\Delta s \times \mathbf{B} \quad (\text{アンペールの力})$$

- ▶ 電場 E 、磁束密度 B の内部で運動する粒子に作用する力

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (\text{ローレンツ力})$$

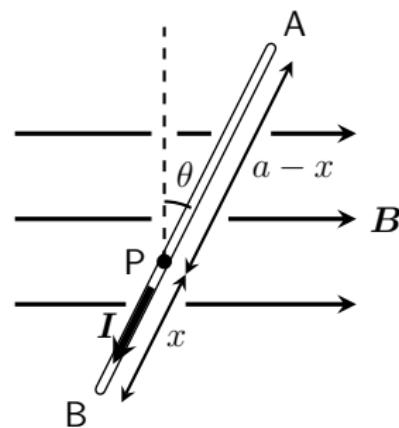
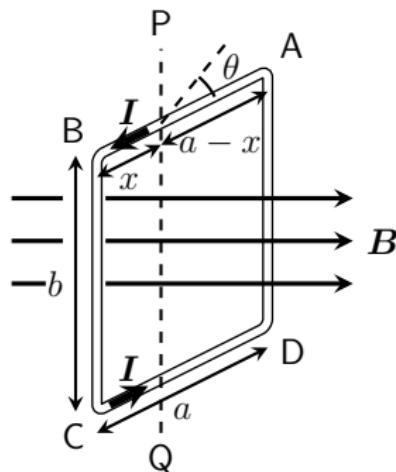
- ▶ 電磁場中で運動する荷電粒子に関するニュートン方程式

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

前回の小テストの解説



一様磁場 B 中に置かれた横の長さ a 、縦の長さ b の長方形コイル ABCD が、辺 BC から距離 x ($0 < x < a$) だけ離れた軸 PQ の周りに回転できるようになっている。このコイルに下図の定常電流が流れているとき、コイルに作用する力のモーメントを求めよ。





前回の小テストの解説(続き)

辺 BC に作用する力のモーメント

$$N_{BC} = IBb \sin \theta \times x$$

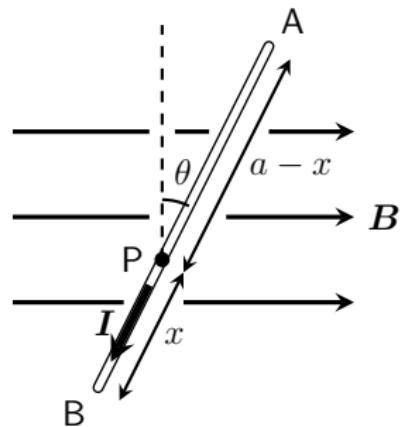
辺 DA に作用する力のモーメント

$$N_{DA} = IBb \sin \theta \times (a - x)$$

コイル全体に作用する力のモーメント

$$N = N_{BC} + N_{DA} = IBab \sin \theta$$

x は任意なので *N* は軸 PQ の位置に依らない



分子電流

- ▶ 磁性の起源は微小な円形電流(分子電流)

- ▷ 分子電流が z 軸上に作る磁束密度

$$B(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \simeq \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3} \quad (z \gg a)$$

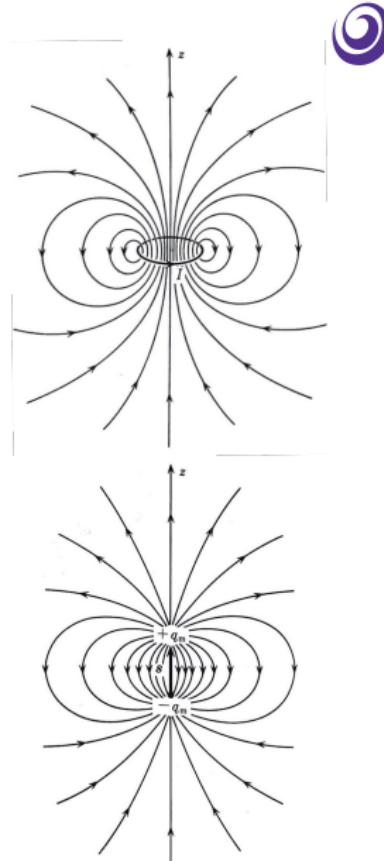
ここで a は分子電流の半径

- ▷ 磁気双極子が z 軸上に作る磁束密度

$$\begin{aligned} B(z) &= \frac{q_m}{4\pi} \left[\frac{1}{(z - s/2)^2} - \frac{1}{(z + s/2)^2} \right] \\ &\simeq \frac{q_m s}{2\pi z^3} \quad (z \gg s) \end{aligned}$$

ここで s は双極子の長さ

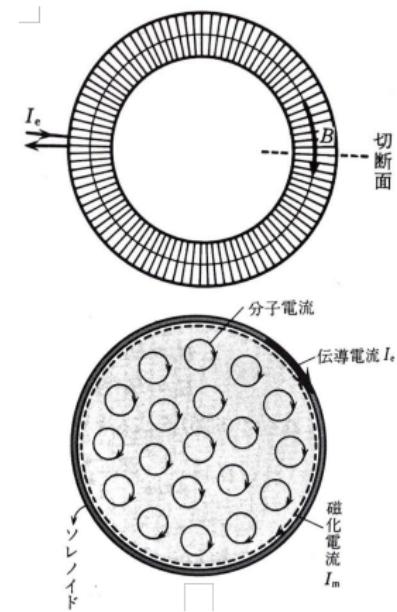
$\pi\mu_0 I a^2 = q_m s$ のとき分子電流と磁気双極子が作る磁場は同じ





磁化電流

- ▶ ドーナツ形の鉄芯を持つソレノイド
- ▶ 電流 I_e を流す前
 - ▷ 鉄内部の分子電流の方向は乱雑
 - ▷ 分子電流の平均はゼロ
- ▶ 電流 I_e を流した後
 - ▷ 磁場 B で鉄内部の分子電流の軸が揃う
 - ▷ 内部の隣接した分子電流は相殺
 - ▷ 表面の分子電流を**磁化電流 I_m** と呼ぶ
- ▶ 鉄芯の効果
 - ▷ 伝導電流 I_e に加えて磁化電流 I_m も磁束密度を生じる
 - ▷ ソレノイドの内部が中空のときと比較して約1万倍の磁束密度





物質中の磁場

- ▶ 物質中の磁束密度は伝導電流 I_e と磁化電流 I_m の寄与の和
- ▶ アンペールの法則の修正

$$\int_{C_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0(I_e + \mathbf{I}_m)$$

- ▶ 磁化電流 I_m が作る磁束密度を**磁化ベクトル \mathbf{J}** と呼ぶ

$$\int_{C_0} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_m$$

磁化を生じる物質を**磁性体**と呼ぶ

- ▶ 物質の応答を除いたアンペールの法則

$$\int_{C_0} (\mathbf{B} - \mathbf{J}) \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_e$$



真空中の磁場 H

- ▶ 物質の応答を除いた真空中の磁場として**磁場の強さ H** を導入

$$\mu_0 \mathbf{H} \equiv \mathbf{B} - \mathbf{J}$$

- ▶ 物質中でも成立するアンペールの法則

$$\int_{C_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I_e$$

- ▷ I_e は C_0 で囲まれる曲面を貫く伝導電流 (磁化電流は含まない)
 - ▷ \mathbf{H} の単位は A/m
- ▶ 物質中でも磁束線はループ状なのでガウスの法則は成立

$$\int_{S_0} B_n dS = 0 \quad (\mathbf{B} \equiv \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{J})$$

物質中の静電磁場の基本法則



| | 静電場 | 静磁場 |
|-----------|---|---|
| 力線の発生源 | 真電荷 Q_e が存在 | 磁荷 Q_m は不在 |
| 面積分に関する法則 | ガウスの法則 $\int_{S_0} D_n dS = Q_e$ | ガウスの法則 $\int_{S_0} B_n dS = 0$ |
| 線積分に関する法則 | (名無しの法則) $\int_{C_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$ | アンペールの法則 $\int_{C_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I_e$ |
| 物質の応答 | $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ | $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{J}$ |

- ▷ \mathbf{E}, \mathbf{H} は物質の応答 (分極 \mathbf{P} 、磁化 \mathbf{J}) を含まない
- ▷ \mathbf{D}, \mathbf{B} は物質の応答を含む
- ▷ Q_e, I_e は物質の応答 (分極電荷 ρ_p 、磁化電流 I_m) を含まない



磁性体の性質

- ▶ 多くの場合、磁化は磁場に比例

$$\mathbf{J} \simeq \chi_m \mathbf{H} \quad (\chi_m \text{を磁化率と呼ぶ})$$

- ▷ 常磁性体: $0 < \chi_m/\mu_0 \ll 1$
 - ▷ 強磁性体: $\chi_m/\mu_0 \gg 1$
 - ▷ 反磁性体: $\chi_m/\mu_0 < 0$
- ▶ このとき磁束密度も磁場に比例

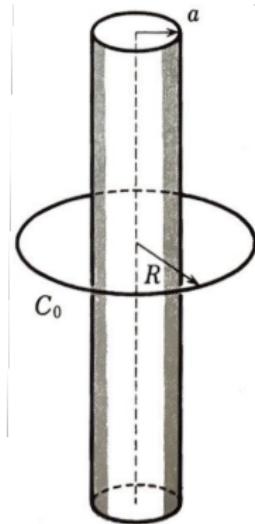
$$\begin{aligned}\mathbf{B} &\equiv \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{J} \\ &\simeq (\mu_0 + \chi_m) \mathbf{H} \\ &\equiv \mu \mathbf{H} \quad (\mu \equiv \mu_0 + \chi_m \text{を透磁率と呼ぶ})\end{aligned}$$

例: 円柱状の磁性体を流れる電流が作る磁場

- ▶ 透磁率 μ 、半径 a の円柱状磁性体
- ▶ 定常かつ一様な伝導電流 I_e
- ▶ 軸上の点を中心とし、軸に垂直な半径 R の円周 C_0 にアンペールの法則を適用すると

$$\int_{C_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi R H(R) = \begin{cases} \left(\frac{R}{a}\right)^2 I_e & (R < a) \\ I_e & (R > a) \end{cases}$$

$$\therefore H(R) = \begin{cases} \frac{I_e R}{2\pi a^2} & (R < a) \\ \frac{I_e}{2\pi R} & (R > a) \end{cases}, \quad B(R) = \begin{cases} \frac{\mu I_e R}{2\pi a^2} & (R < a) \\ \frac{\mu_0 I_e}{2\pi R} & (R > a) \end{cases}$$





時間的に変動する電磁場

- ▶ 静的な(時間的に変動しない)電磁場に関するガウスの法則

$$\int_{S_0} D_n dS = Q_e, \quad \int_{S_0} B_n dS = 0$$

- ▶ S_0 内の電荷が時間的に変化すれば、 S_0 を貫く電束線も変動

$$\int_{S_0} D_n(t) dS = Q_e(t) \quad (S_0 \text{ 上の電束線の総和は電荷に比例})$$

- ▶ S_0 を貫く磁束線が変動しても、ループ状であることは不变

$$\int_{S_0} B_n(t) dS = 0 \quad (S_0 \text{ 上の磁束線の出入りは相殺})$$

時間的に変動する電磁場に対してもガウスの法則はそのまま成立

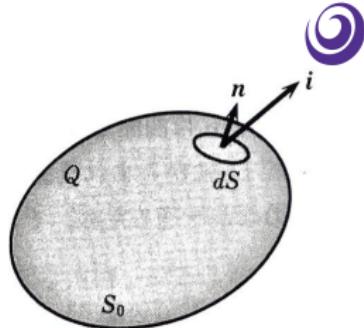


線積分に関する法則は修正が必要

電荷保存則

- ▶ 電流が時間的に変化しないとき

$$\int_{S_0} i_n dS = 0 \quad (\text{定常電流の保存則})$$



▷ S_0 を貫く電流の流入量と流出量は相殺し、 S_0 内の電荷は一定

- ▶ 電流が時間的に変化するとき

$$\int_{S_0} i_n(t) dS = -\frac{dQ(t)}{dt} \quad (\text{電荷保存則})$$

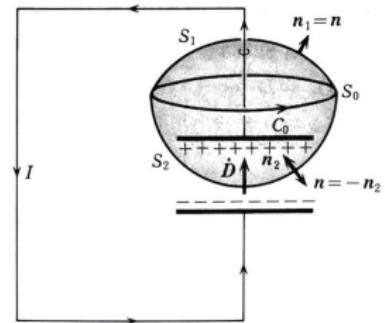
▷ S_0 を貫く電流の流入量と流出量が相殺せず、 S_0 内の電荷が変化
▷ 電流密度 i は単位時間当たりに単位面積を通過する電荷量で定義



変位電流

- ▶ コンデンサーの正極と負極をつなぐ
- ▶ 閉曲線 C_0 に関するアンペールの法則
 - ▷ 電流 I が貫く曲面 S_1 に注目すると

$$\int_{C_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_1} i_{n_1} dS = I$$



- ▷ 電流が流れない極板間の曲面 S_2 に注目すると

$$\int_{C_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_2} i_{n_2} dS = 0 \quad (\text{上式と矛盾!})$$

- ▷ 矛盾を回避するために S_2 では次式を仮定

$$\int_{C_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} \int_{S_2} D_{n_2} dS$$

右辺を**変位電流**と呼ぶ



変位電流の計算

▶ 変位電流が I に等しいことの確認

$$\frac{d}{dt} \int_{S_2} D_{n_2} dS$$

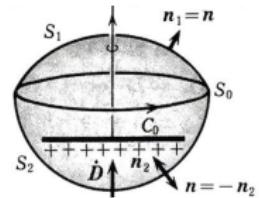
$$= \frac{d}{dt} \left[\int_{S_2} D_{n_2} dS - \int_{S_1} D_{n_1} dS \right]$$

$$= -\frac{d}{dt} \left[\int_{S_2} D_n dS + \int_{S_1} D_n dS \right]$$

$$= -\frac{d}{dt} \int_{S_0} D_n dS$$

$$= -\frac{dQ}{dt}$$

$$= I$$



($\because S_1$ 上で $D = 0$)

($\because S_2$ 上で $n = -n_2$)

($\because S_0 = S_1 + S_2$)

(\because ガウスの法則)

(\because 電荷保存則)

アンペール・マクスウェルの法則



▶ 微分と積分の順序の入れ替え

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_S D_n(x, y, z, t) dS \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_S D_n(x, y, z, t) dS \quad (\because \text{積分 } \int \cdots dS \text{ は } t \text{ のみの関数}) \\ &= \int_S \frac{\partial D_n(x, y, z, t)}{\partial t} dS \quad (\text{時間 } t \text{ のみの偏微分}) \end{aligned}$$

▶ 一般に伝導電流と変位電流が曲面 S を貫くとき

$$\int_{C_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \left(i_n + \frac{\partial D_n}{\partial t} \right) dS$$

(アンペール・マクスウェルの法則)

演習



電圧 $V(t) = V_0 \sin \omega t$ が印加されているとき極板間の電束密度は

$$D = \varepsilon E = \varepsilon \frac{V}{d} = \frac{\varepsilon V_0}{d} \sin \omega t$$

極板間の変位電流は

$$\frac{d}{dt} \int_S D_n dS = \frac{d}{dt} DS = \omega \varepsilon \frac{S}{d} V_0 \cos \omega t = \omega C V_0 \cos \omega t$$

極板上の電荷 $Q = CV$ の時間変化は

$$\frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} = \omega C V_0 \cos \omega t$$

よって変位電流はコンデンサーから流出する電流に等しい