



物理学 B 第3回

静電ポテンシャル

濱本 雄治¹

情報工学部 情報通信工学科

2025 年 10 月 8 日、15 日

¹hamamoto@c.oka-pu.ac.jp <https://yhmmt.github.io/pages/>

前回の復習: ガウスの法則



- ▶ S_0 の内部に電荷 Q_1, Q_2, \dots, Q_N 、外部に電荷 $q_\alpha, q_\beta, \dots, q_\sigma$
- ▶ これらの電荷が作る電場

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)} + \dots + \mathbf{E}^{(N)} + \mathbf{E}^{(\alpha)} + \mathbf{E}^{(\beta)} + \dots + \mathbf{E}^{(\sigma)}$$

- ▶ S_0 上で法線成分を面積分

$$\begin{aligned} \int_{S_0} E_n dS &= \int_{S_0} E_n^{(1)} dS + \int_{S_0} E_n^{(2)} dS + \dots + \int_{S_0} E_n^{(N)} dS \\ &\quad + \underbrace{\int_{S_0} E_n^{(\alpha)} dS}_{=0} + \underbrace{\int_{S_0} E_n^{(\beta)} dS}_{=0} + \dots + \underbrace{\int_{S_0} E_n^{(\sigma)} dS}_{=0} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_N) \end{aligned}$$

S_0 上での電場の法線成分の面積分は S_0 に含まれる電荷に比例

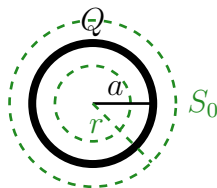
前回の小テストの解説



半径 a の中空の球殻上に電荷 Q が一様に分布しているとき、球殻の内部および外部における電場の大きさと向きを求めよ。

半径 r の球面状の閉曲面を S_0 とする。

球対称性から電場は閉曲面に垂直である。



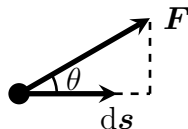
ガウスの法則より、 $r < a$ のとき

$$\int_{S_0} E_n dS = 4\pi r^2 E(r) = 0, \quad E(r < a) = 0$$

$r > a$ のとき

$$\int_{S_0} E_n dS = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \quad E(r > a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

- ▶ 物体に作用する力 \mathbf{F}
- ▶ 力による物体の微小変位 $d\mathbf{s}$



- ▶ \mathbf{F} と $d\mathbf{s}$ のなす角が θ のとき、 \mathbf{F} の $d\mathbf{s}$ 方向の成分が仕事に寄与

$$dW = |\mathbf{F}| \cos \theta \times |d\mathbf{s}| = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

- ▶ 物体が経路 C に沿って移動するとき、 \mathbf{F} が物体になす仕事

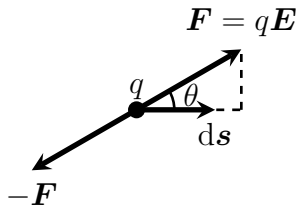
$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

このような積分を線積分と呼ぶ

電荷に対する仕事



- ▶ 固定した点電荷 Q が作る静電場 E
- ▶ E が点電荷 q に作用する力 $F = qE$
- ▶ クーロン力と外力 $-F$ がほぼ釣り合った状態で、 q をゆっくり移動



- ▶ q が微小量 ds だけ移動したとき、クーロン力が q になす仕事

$$dW = q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

- ▶ q が経路 C に沿って点 A から点 B まで移動したときの仕事

$$W = q \int_{A,C}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

線積分の計算



- ▶ Q の位置から測った観測点 P の位置 \mathbf{r}
- ▶ P における電場

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \equiv f(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \left(f(r) \equiv \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)$$

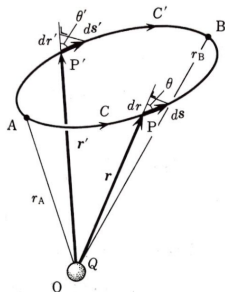
- ▶ 微小変位 $d\mathbf{s}$ の \mathbf{r} 方向の成分

$$ds \cos \theta \equiv dr$$

- ▶ \mathbf{E} と $d\mathbf{s}$ の内積

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = f(r) \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{s}}{r} = f(r) \frac{r ds \cos \theta}{r} = f(r) dr$$

r の長さ r のみで表せた (\mathbf{E} や $d\mathbf{s}$ の方向に依らない)



静電ポテンシャル



- ▶ 1 変数 r に関する積分

$$\int_{A,C}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{r_A}^{r_B} f(r)dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

積分値は Q からの距離 r_A, r_B だけで決まり、経路 C に依らない

- ▶ Q から測った位置 r だけで決まる関数

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}|}$$

を静電ポテンシャル (電位) と呼ぶ (単位は $V = J/C$)

$$\int_{A,C}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \phi(\mathbf{r}_A) - \phi(\mathbf{r}_B), \quad W = q[\phi(\mathbf{r}_A) - \phi(\mathbf{r}_B)]$$

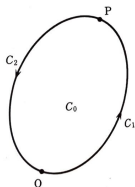
- ▶ 電位は単位電荷 $+1\text{ C}$ が感じる静電的な位置エネルギー

閉経路上の線積分



- ▶ 閉経路 C_0 を経路 C_1, C_2 に分割

$$\int_{C_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{O, C_1}^P + \int_{P, C_2}^O$$



- ▶ 静電ポテンシャルが存在すると

$$\int_{O, C_1}^P = \phi(\mathbf{r}_O) - \phi(\mathbf{r}_P), \quad \int_{P, C_2}^O = \phi(\mathbf{r}_P) - \phi(\mathbf{r}_O),$$

$$\therefore \int_{C_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

閉経路上の静電場の線積分はゼロ

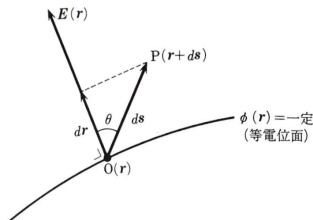
- ▶ 逆に、上式が成り立つと $\int_{O, C_1}^P + \int_{P, C_2}^O = 0$, $\therefore \int_{O, C_1}^P = \int_{O, C_2}^P$
つまり経路に依らないポテンシャル ϕ が存在

等電位面



- ▶ 原点から点 P までの線積分

$$\int_O^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \phi(\mathbf{r}_O) - \phi(\mathbf{r}_P)$$



- ▶ O の位置を \mathbf{r} とする
- ▶ P の位置を O から微小ベクトル $d\mathbf{s}$ だけ離れた $\mathbf{r} + d\mathbf{s}$ とする

$$\phi(\mathbf{r}_P) = \phi(\mathbf{r} + d\mathbf{s}) \simeq \underbrace{\phi(\mathbf{r})}_{=\phi(\mathbf{r}_O)} + d\phi(\mathbf{r}), \quad \therefore \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -d\phi(\mathbf{r})$$

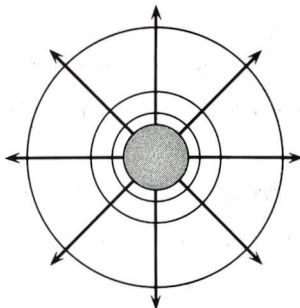
- ▶ O と P が等電位 $\phi(\mathbf{r}_P) - \phi(\mathbf{r}_O) = d\phi(\mathbf{r}) = 0$ のとき

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad \therefore \text{等電位面と電場 } \mathbf{E} \text{ は直交}$$

等電位面の例



▶ 帯電した導体球の周りの等電位面



- ▷ 等電位面は導体球と中心が同じ球面状
- ▷ 等電位面の間隔の狭いところほど電場が強い

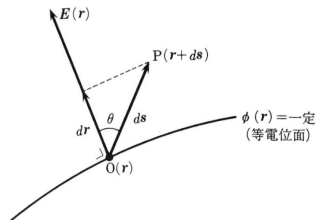
静電ポテンシャルと電場の関係



- ▶ E の ds 方向の成分を E_s とすると

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E ds \cos \theta = E_s ds = -d\phi,$$

$$\therefore E_s \equiv E \cos \theta = -\frac{d\phi}{ds}$$



- ▶ ds の $E \propto r$ 方向の成分を dr とすると

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E ds \cos \theta = E dr = -d\phi,$$

$$\therefore E = -\frac{d\phi}{dr} \quad (\text{電場の大きさ})$$

- ▷ 電位 ϕ の微分の符号を反転 → 電場 E
- ▷ 電場 E の積分の符号を反転 → 電位 ϕ

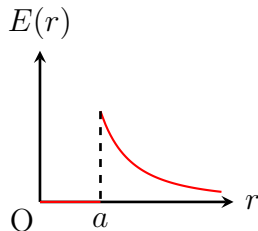
例 1: 帯電した導体球の静電ポテンシャル



- ▶ 電荷 Q は半径 a の導体球表面に一様に分布
- ▶ 半径 r の球面状の閉曲面 S_0
- ▶ 電場は S_0 に垂直で r のみの関数
- ▶ ガウスの法則から

$$\int_{S_0} E_n dS = \underbrace{4\pi r^2}_{S_0 \text{ の表面積}} E(r) = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ \frac{Q}{\varepsilon_0} & (r > a) \end{cases}$$

$$\therefore E(r) = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > a) \end{cases}$$



例1: 帯電した導体球の静電ポテンシャル

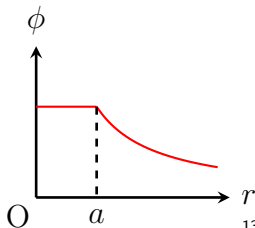


- ▶ 電場を r で積分して符号を反転すると

$$\phi(r) = - \int E(r) dr = \begin{cases} C_1 & (r < a) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C_2 & (r > a) \end{cases}$$

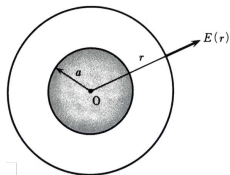
- ▶ 無限遠方 $r \rightarrow \infty$ で $\phi(\infty) = 0$ とすると $C_2 = 0$
- ▶ 導体表面上 $r = a$ で ϕ が連続とすると $C_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} + C_2$
- ▶ 以上から

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} & (r < a) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & (r > a) \end{cases}$$



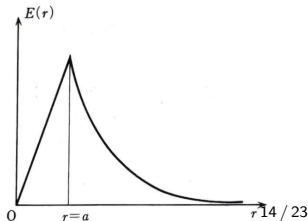
例2: 一様に帯電した球の静電ポテンシャル

- ▶ 電荷 Q は半径 a の球の内部に一様に分布
- ▶ 半径 r の球面状の閉曲面 S_0
- ▶ 電場は S_0 に垂直で r のみの関数
- ▶ ガウスの法則から



$$\int_{S_0} E_n dS = \underbrace{4\pi r^2}_{S_0 \text{の表面積}} E(r) = \begin{cases} \left(\frac{r}{a}\right)^3 \frac{Q}{\varepsilon_0} & (r < a) \\ \frac{Q}{\varepsilon_0} & (r > a) \end{cases}$$

$$\therefore E(r) = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} & (r < a) \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > a) \end{cases}$$



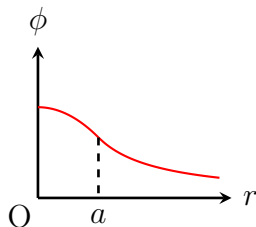
例2: 一様に帯電した球の静電ポテンシャル

- ▶ 電場を r で積分して符号を反転すると

$$\phi(r) = - \int E(r) dr = \begin{cases} -\frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 a^3} + C_1 & (r < a) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C_2 & (r > a) \end{cases}$$

- ▶ 無限遠方 $r \rightarrow \infty$ で $\phi(\infty) = 0$ とすると $C_2 = 0$
- ▶ 球面上で ϕ が連続とすると $-\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} + C_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$, $\therefore C_1 = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 a}$
- ▶ 以上から

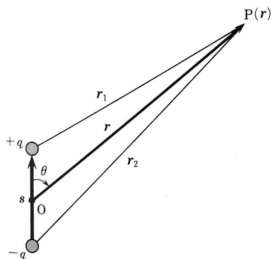
$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} \left[3 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right] & (r < a) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & (r > a) \end{cases}$$



電気双極子の静電ポテンシャル



- ▶ 正負電荷 $\pm q$ の対を **電気双極子** と呼ぶ
 - ▷ 負電荷から正電荷への長さベクトル s
 - ▷ 電気双極子モーメント $p = qs$
- ▶ 観測点 P における静電ポテンシャル



$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

余弦定理から

$$\begin{aligned} r_1^2 &= r^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 - 2r\frac{s}{2}\cos\theta, & \therefore r_1 &= \sqrt{r^2 + (s/2)^2 - rs\cos\theta}, \\ r_2^2 &= r^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 - 2r\frac{s}{2}\cos(\pi - \theta), & \therefore r_2 &= \sqrt{r^2 + (s/2)^2 + rs\cos\theta} \end{aligned}$$

双極子の中心を原点とする極座標 (r, θ) を用いていることに注意

遠方での近似



▶ 平方根から r を括り出す

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{s}{r} \cos \theta + \left(\frac{s}{2r} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{s}{r} \cos \theta + \left(\frac{s}{2r} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

▶ 遠方で $\frac{s}{r} \ll 1$ なので、 $(1 \pm x)^{-1/2} \simeq 1 \mp \frac{x}{2}$ ($|x| \ll 1$) を用いると

$$\frac{1}{r_1} \simeq \frac{1}{r} \left[1 - \frac{s}{r} \cos \theta + \cancel{\left(\frac{s}{2r} \right)^2} \right]^{-1/2} \simeq \frac{1}{r} \left(1 + \frac{s}{2r} \cos \theta \right),$$

$$\frac{1}{r_2} \simeq \frac{1}{r} \left[1 + \frac{s}{r} \cos \theta + \cancel{\left(\frac{s}{2r} \right)^2} \right]^{-1/2} \simeq \frac{1}{r} \left(1 - \frac{s}{2r} \cos \theta \right),$$

$$\therefore \phi(\mathbf{r}) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \left(\cancel{1} + \frac{s}{2r} \cos \theta \right) - \frac{1}{r} \left(\cancel{1} - \frac{s}{2r} \cos \theta \right) \right] = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

ここで $p \equiv qs$ は双極子モーメントの大きさ

補足：極座標系



- ▶ 直交座標から極座標への変換

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{e}}_x + y\hat{\mathbf{e}}_y, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

- ▶ 半径 r 方向の単位ベクトル

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{x}{r}\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{y}{r}\hat{\mathbf{e}}_y = \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_x + \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_y$$

- ▶ 角度 θ 方向の単位ベクトル

$$\hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \frac{1}{r} (-r \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_x + r \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_y) = -\sin \theta \hat{\mathbf{e}}_x + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_y$$

補足：偏微分係数の計算



- ▶ 極座標から直交座標への変換

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

- ▶ 両辺を x で偏微分

$$2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x, \quad \therefore \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \theta,$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \quad \therefore \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \cos^2 \theta = -\frac{\sin \theta}{r}$$

- ▶ 両辺を y で偏微分

$$2r \frac{\partial r}{\partial y} = 2y, \quad \therefore \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta,$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{x}, \quad \therefore \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos^2 \theta}{x} = \frac{\cos \theta}{r}$$

補足：極座標系での微分



► chain rules

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\end{aligned}$$

► 微分演算子

$$\begin{aligned}\nabla &\equiv \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \\ &= \hat{e}_x \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \hat{e}_y \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &= (\hat{e}_x \cos \theta + \hat{e}_y \sin \theta) \frac{\partial}{\partial r} + (-\hat{e}_x \sin \theta + \hat{e}_y \cos \theta) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &= \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\end{aligned}$$

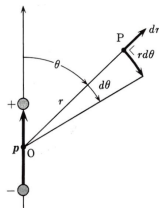
r 方向の微分は $\frac{\partial}{\partial r}$ 、 θ 方向の微分は $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$

電気双極子の静電場



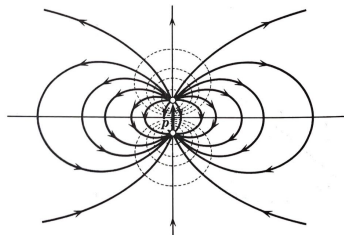
▶ 電気双極子の静電ポテンシャル

$$\phi(\mathbf{r}) \simeq \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (p = qs)$$



▶ r, θ 方向で微分して符号を反転すると、静電場は

$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3},$$
$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}$$



▷ 点電荷の電位 $\propto \frac{1}{r}$ 、電場 $\propto \frac{1}{r^2}$ より速く減衰することに注意

∴ 遠方 $r \gg s$ では正負電荷がほぼ相殺して見えるため

演習 1: 直線状電荷の静電ポテンシャル



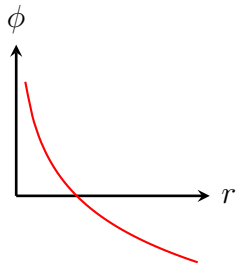
- ▶ 無限に長い直線上に電荷が線密度 λ で一様に分布
- ▶ 高さ h 、半径 r の円筒状の閉曲面 S_0
- ▶ E は S_0 の側面に垂直で r のみの関数なので、ガウスの法則から

$$\int_{S_0} E_n dS = \underbrace{2\pi r h}_{S_0 \text{ の側面積}} E(r) = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}, \quad \therefore E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

- ▶ 電場を r で積分して符号を反転すると

$$\phi(r) = - \int E(r) dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log r + C$$

積分定数 C は境界条件を基に決める



演習 2: 平面状電荷の静電ポテンシャル



- ▶ 無限に広い平面上に電荷が面密度 ω で一様に分布
- ▶ 平面状電荷を貫く高さ h 、底面積 ΔS の円筒状の閉曲面 S_0
- ▶ E は S_0 の底面に垂直で h のみの関数なので、ガウスの法則から

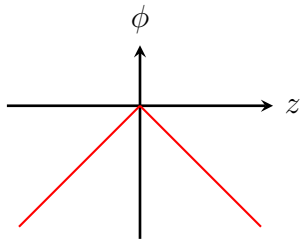
$$\int_{S_0} E_n dS = \underbrace{2\Delta S}_{S_0 \text{ の上下の底面積}} E = \frac{\omega \Delta S}{\epsilon_0}, \quad \therefore E = \frac{\omega}{2\epsilon_0}$$

- ▶ 平面より上側 $z > 0$ のとき

$$\phi(z) = - \int E dz = - \frac{\omega z}{2\epsilon_0} + C_1$$

- ▶ 平面より下側 $z < 0$ のとき

$$\phi(z) = - \int (-E) dz = \frac{\omega z}{2\epsilon_0} + C_2$$



平面上 $z = 0$ で $\phi(0) = 0$ とすると $\phi(z) = -\frac{\omega|z|}{2\epsilon_0}$