数値計算法 第3回

誤差 (2)

濱本 雄治 [1]

情報工学部 情報通信工学科

2025 年 4 月 28 日

[1] hamamoto@c.oka-pu.ac.jp

復習: 相対誤差と精度

- 誤差の絶対値より相対値の方が重要

$$\text{相対誤差} = \frac{\text{近似値} - \text{真の値}}{\text{真の値}}$$

精度の見積り方

- 相対誤差の小数点以下何桁目にゼロでない数字が現れるかで定義
- あるいは

$$\text{精度の桁数} = -\log_{10} |\,\text{相対誤差}\,|$$

と定義してもよい

復習: 丸め誤差

- コンピュータの有効桁数が有限であることに起因
- 1234.5678 を 10 進 8 桁の浮動小数点数で表すと

$$1234.5678 = 0.123456\cancel{7}\cancel{8} \times 10^{54-50}$$

$$\underbrace{\boxed{5}\boxed{4}}_{\text{指数部 } e}\underbrace{\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}}_{\text{仮数部 } m}\underbrace{7\quad 8}_{\text{丸め誤差}}$$

$$\text{丸め誤差} = 1234.56 - 1234.5678 = -0.0078$$

$$\text{相対誤差} = \frac{-0.0078}{1234.5678} = -0.00000631 \quad (\text{精度 6 桁})$$

復習: 情報落ち

- 値に大きな差がある数の加減算に起因
- 10 進 8 桁の浮動小数点数 (仮数部が 6 桁) で

$$123.456 + 0.0001$$

を計算すると

$$\begin{array}{cccccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & . & 4 & 5 & 6 & & & & & & \\ + & & & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & . & 4 & 5 & 6 & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}$$

となり 0.0001 の加算が無視される

前回の小テストの解説

2 の平方根 $\sqrt{2}$ を 1.41 で近似したときの絶対誤差と相対誤差を求めよ。さらに相対誤差の小数点以下で初めてゼロでない数字が現れる桁から、この近似の精度の桁数を求めよ。

$$\text{絶対誤差} = 1.41 - 1.414213\cdots = -0.004213\cdots,$$

$$\text{相対誤差} = \frac{-0.004213\cdots}{1.414213} = -0.00297943$$

相対誤差に初めてゼロでない数字が現れるのは小数第 3 桁なので、この近似の精度は 3 桁。一方、常用対数を用いて評価すると

$$\text{精度} = -\log_{10}|-0.00297943| = 2.52586 \simeq 3\ \text{桁}$$

誤差の種類

誤差	原因	備考
丸め誤差	有効桁数が有限	前回
情報落ち	値に大きな差がある数の加減算	前回
桁落ち	値が近い数の減算	今回
打切り誤差	無限回の演算を有限回で打ち切り	今回
離散化誤差	連続量を離散値で近似	今回

桁落ち

- 値の近い数の引き算に起因
- 10 進 8 桁の浮動小数点数 (仮数部が 6 桁) で $123.456 - 123.444$ を計算すると

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & \multicolumn{7}{c}{\overbrace{1\ \ 2\ \ 3\ \ .\ \ 4\ \ 5\ \ 6}^{\text{有効数字 6 桁}}} & * & * & * & * & \cdots \\
- & & 1 & 2 & 3 & . & 4 & 4\ \ 4 & * & * & * & * & \cdots \\
\hline
 & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{0\ \ .\ \ 0}_{\text{4 桁が相殺}}} & & 1 & 2 & \multicolumn{5}{c}{\underbrace{*\ \ *\ \ *\ \ *\ \ \cdots}_{\text{信用できない数字}}}
\end{array}
$$

$$
0.012**** = 0.\underbrace{12****}_{\text{仮数部}} \times 10^{49-50}
$$

上位の有効数字が相殺し、有効桁が 6 桁から 2 桁に減少

- c.f. 情報落ちは値に大きな差がある数の足し算・引き算に起因

桁落ちの回避

方針

値の近い数の引き算を足し算に変形

- 例えば、引き算

$$\sqrt{x+1}-1$$

は $|x| \ll 1$ のとき $\sqrt{x+1} \lesssim 1$ なので桁落ちが発生

- そこで、分母・分子に $\sqrt{x+1}+1$ を掛けて

$$\sqrt{x+1}-1 = (\sqrt{x+1}-1)\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}$$

と変形すると引き算の代わりに足し算が出現 $\rightarrow$ 桁落ちの回避

計算結果の比較

- 小さい値 $x = 0.00123456$ に対して有効数字 6 桁で計算すると

$$\sqrt{x+1} - 1 = \underbrace{1.00062 - 1.00000}_{\text{有効数字 } 6 \text{ 桁}} = \underbrace{0.00062}_{\text{有効数字 } 2 \text{ 桁}}$$

有効数字が 6 桁から 2 桁に減少

- 引き算を足し算に変換して計算し直すと

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{0.00123456}{1.00062 + 1.00000} = \frac{0.00123456}{\underbrace{2.00062}_{\text{有効数字 } 6 \text{ 桁}}} = 0.000\underbrace{617089}_{\text{有効数字 } 6 \text{ 桁}}$$

有効数字は 6 桁のまま (掛け算・割り算では有効桁数は維持)

身近な桁落ちの例: 2次方程式の解の公式

- 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \qquad (D = b^2 - 4ac > 0)$$

には $D = b^2 - 4ac$ と $-b \pm \sqrt{D}$ の 2 箇所に引き算が存在

- $b^2 \simeq 4ac$、つまり $D \simeq 0$ のとき $b^2 - 4ac$ の引き算で桁落ち

$\to$ 足し算への変形では桁落ちを回避不可能

- $b^2 \gg 4ac$、つまり $D \simeq |b|$ のときは桁落ちを回避可能
  - $b > 0$ ならば

$$\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{b + \sqrt{D}}{b + \sqrt{D}} = \frac{-2c}{b + \sqrt{D}}$$

  - $b < 0$ ならば

$$\frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{b - \sqrt{D}}{b - \sqrt{D}} = \frac{-2c}{b - \sqrt{D}}$$

身近な桁落ちの例: 統計学における分散

- 標本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が得られたとき、標本分散は

$$s^2 = \boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \qquad \left(平均 \quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \tag{1}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}({x_i}^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - 2\bar{x}\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}_{\bar{x}} + \bar{x}^2\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1}_{1}$$

$$= \boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - \bar{x}^2} \tag{2}$$

- (1),(2) いずれの表式で分散を計算すればよいか?

分散の計算例: 1円玉の重さ

- 標本値は参考図書 p.17 参照

variance.c

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>   /* pow */

int main(){
  float data[] = {0.9997, 1.0007, 0.9995, ...};
  int num = sizeof(d) / sizeof(data[0]);

  float mean = 0.0;   /* 平均 */
  for(int i=0; i!=num; ++i)
    mean += data[i];
  mean /= num;

  float var1 = 0.0;   /* 分散 (1) */
  for(int i=0; i!=num; ++i)
    var1 += pow(data[i] - mean, 2.0);
  var1 /= num;
}
```

```
  float var2 = 0.0;   /* 分散 (2) */
  for(int i=0; i!=num; ++i)
    var2 += pow(data[i], 2.0);
  var2 /= num;
  var2 -= pow(mean, 2.0);

  printf("%e\n%e\n", var1, var2);
}
```

- 出力

```
$ gcc variance.c -lm
$ ./a.out
3.083146e-07   // (1) の分散
1.681441e-07   // (2) の分散
```

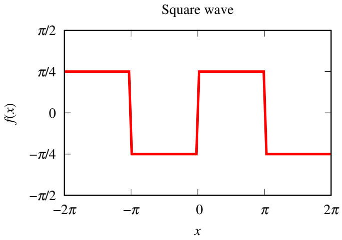
(2) の方が桁落ちが大きい

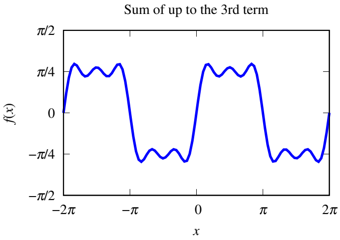
打ち切り誤差

- 無限回の演算を有限回で打ち切ることに起因
- 例: 方形波の Fourier 級数展開

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & 2m\pi < x < (2m+1)\pi \\ -\frac{\pi}{4} & (2m-1)\pi < x < 2m\pi \end{cases} \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$$= \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$





- 上の関数で $x = \frac{\pi}{2}$ とすると

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \qquad \text{(Leibniz の公式)}$$

- 円周率を有限和で近似すると

$$\pi_3 \simeq 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) = 3.46666 > \pi,$$

$$\pi_4 \simeq 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) = 2.89523 < \pi,$$

$$\pi_5 \simeq 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right) = 3.33968 > \pi,$$

$$\pi_6 \simeq 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) = 2.97604 < \pi,$$

$$\vdots$$

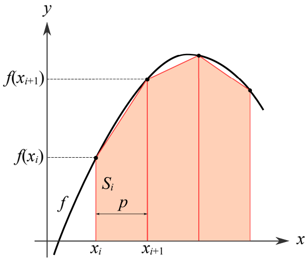
情報落ちを避けるために、高次 (右側) の項から逆順に和を取る

離散化誤差

- 連続量を離散値で近似することに起因
- 例: 定積分の台形公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{N}\left[\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} f(x_n) + \frac{f(x_N)}{2}\right] \quad \left(\begin{array}{l} x_0 = a, \\ x_N = b \end{array}\right)$$

  - N が大きくすると離散化誤差は減少
  - N を大きくすると情報落ちの可能性



出典: Wikipedia