物理学B 第2回

ガウスの法則

濱本 雄治 [1]

情報工学部 情報通信工学科

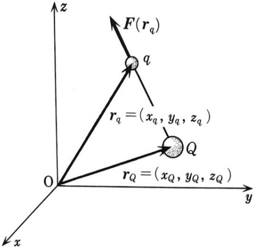
2025年10月1日

[1] hamamoto@c.oka-pu.ac.jp　https://yhmmt.github.io/pages/

前回の復習

- 電荷 Q が電荷 q に作用するクーロン力

$$\boldsymbol{F}_{q\leftarrow Q} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}_q - \boldsymbol{r}_Q}{|\boldsymbol{r}_q - \boldsymbol{r}_Q|^3}$$



- 電荷 Q が位置 $\boldsymbol{r}$ に作る電場

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_Q}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_Q|^3}$$

- 電荷 Q が電場 $\boldsymbol{E}$ を作り、電場 $\boldsymbol{E}$ が電荷 q に作用 (近接作用)

前回の復習

- n 個の電荷 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ が位置 $\boldsymbol{r}$ に作る電場 (重合せの法則)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{Q_i})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{Q_i}|^3}$$

- 連続的に分布する電荷が位置 $\boldsymbol{r}$ に作る電場

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\frac{\rho(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \qquad \left(\rho(\boldsymbol{r}) \equiv \sum_{i=1}^{n} Q_i\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)\right)$$

ディラックのデルタ関数

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \infty & (\boldsymbol{r}=0) \\ 0 & (\boldsymbol{r}\neq 0) \end{cases}, \qquad \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}' f(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = f(\boldsymbol{r})$$

電荷分布が作る電場を解析的に求めるには対称性の利用が不可欠

前回の小テストの解説

1 C の正の点電荷 3 個が、下図に示す配置で置かれている。この時、電荷 A に働くクーロン力の向きと大きさを求めよ。

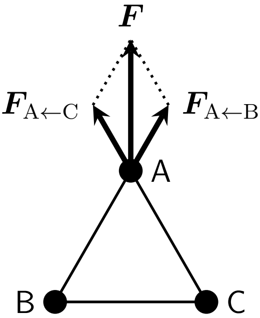
電荷 B, C が電荷 A に及ぼすクーロン力の大きさは

$$|\boldsymbol{F}_{\mathrm{A}\leftarrow\mathrm{B}}| = |\boldsymbol{F}_{\mathrm{A}\leftarrow\mathrm{C}}| = k\frac{1^2}{1^2} = k$$

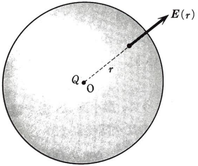
これらの合力の大きさは

$$|\boldsymbol{F}| = \sqrt{3}k = 9\sqrt{3}\times 10^9 \ [\mathrm{N}]$$

それぞれの力の向きは図の通り。



球面上の電場



- 電荷 Q が距離 r の位置に作る電場の大きさ

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

- 両辺に半径 r の球 S_r の表面積 $4\pi r^2$ を掛けると

$$E(r) \times 4\pi r^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

  - 電場ベクトル $\boldsymbol{E}(r)$ は半径 r の球面に垂直
  - 電場の大きさ $E(r)$ は半径 r の球面上で一定
  - 左辺は $\boldsymbol{E}(r)$ の球面に垂直な成分 (法線成分)$E(r)$ の面積分

$$E(r) \times 4\pi r^2 = \underbrace{E(r)}_{S_r\text{上で一定}} \int_{S_r} \mathrm{d}S = \int_{S_r} E(r)\mathrm{d}S \quad \left(= \frac{Q}{\varepsilon_0}\right)$$

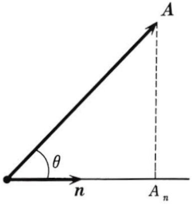
以下、この式を一般の閉曲面上の面積分に一般化

一般の閉曲面上の電場

- 任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ と単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ の内積

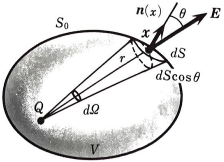
$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{n}|\cos\theta = |\boldsymbol{A}|\cos\theta = A_n$$

$\therefore$ $\boldsymbol{A}$ の $\boldsymbol{n}$ 方向の成分は $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}$ と書ける



- 閉曲面 S_0 の微小面 $\mathrm{d}S$ 上の電場の法線成分

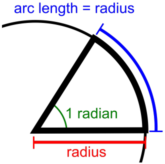
$$E_n = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n} = E\cos\theta = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}$$



弧度法

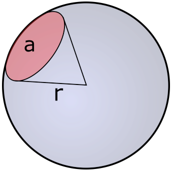
- 平面角
  - 単位円上の一部 (弧) の長さで表す
  - 単位は rad (ラジアン)
  - 半径 r の円周上の弧の長さを ℓ とするとその角度 θ は

$$\ell : \theta = r : 1, \qquad \therefore \theta = \frac{\ell}{r}\ [\mathrm{rad}]$$



- 立体角
  - 単位球上の一部の面積で表す
  - 単位は sr (ステラジアン)
  - 半径 r の球面上の一部の面積を a とするとその立体角 ω は

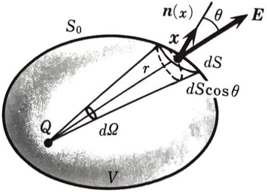
$$a : \Omega = r^2 : 1^2, \qquad \therefore \Omega = \frac{a}{r^2}\ [\mathrm{sr}]$$



閉曲面内に電荷がある場合

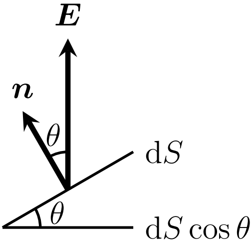
- $\boldsymbol{E}$ に垂直な微小面は $\mathrm{d}S\cos\theta$
- $\mathrm{d}S\cos\theta$ の立体角 $\mathrm{d}\Omega$ は

$$\mathrm{d}S\cos\theta : \mathrm{d}\Omega = r^2 : 1^2, \quad \therefore \mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S\cos\theta}{r^2}$$



- 電場の法線成分と微小面の面積の積

$$E_n\mathrm{d}S = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2} \times \frac{r^2\mathrm{d}\Omega}{\cos\theta} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\Omega$$



- 両辺を面積分

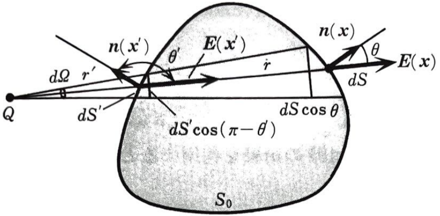
$$\int_{S_0} E_n\mathrm{d}S = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}\Omega = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

閉曲面外に電荷がある場合

- 微小面 $\mathrm{d}S$ 上は前と同じ

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S\cos\theta}{r^2}$$

$$E_n \mathrm{d}S = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\Omega$$



- 微小面 $\mathrm{d}S'$ 上は $\theta' > 90^\circ$ なので

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S'\cos(\pi-\theta')}{r'^2} = -\frac{\mathrm{d}S'\cos\theta'}{r'^2},$$

$$E_n \mathrm{d}S' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta'}{r'^2}\times\left(-\frac{r'^2\mathrm{d}\Omega}{\cos\theta'}\right) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\Omega$$

- 両者の和を取ると

$$E_n \mathrm{d}S + E_n \mathrm{d}S' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\Omega - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\Omega = 0, \qquad \therefore \int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = 0$$

$\mathrm{d}S$ 上と $\mathrm{d}S'$ の寄与が相殺

ガウスの法則

- S_0 の内部に電荷 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_N$、外部に電荷 $q_\alpha, q_\beta, \cdots, q_\sigma$
- これらの電荷が作る電場

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^{(1)} + \boldsymbol{E}^{(2)} + \cdots + \boldsymbol{E}^{(N)} + \boldsymbol{E}^{(\alpha)} + \boldsymbol{E}^{(\beta)} + \cdots + \boldsymbol{E}^{(\sigma)}$$

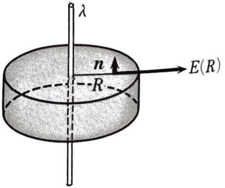
- S_0 上で法線成分を面積分

$$\begin{aligned}\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S &= \int_{S_0} E_n^{(1)} \mathrm{d}S + \int_{S_0} E_n^{(2)} \mathrm{d}S + \cdots + \int_{S_0} E_n^{(N)} \mathrm{d}S \\ &\quad + \underbrace{\int_{S_0} E_n^{(\alpha)} \mathrm{d}S}_{=0} + \underbrace{\int_{S_0} E_n^{(\beta)} \mathrm{d}S}_{=0} + \underbrace{\int_{S_0} E_n^{(\sigma)} \mathrm{d}S}_{=0} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0}(Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_N)\end{aligned}$$

S_0 上での電場の法線成分の面積分は S_0 に含まれる電荷に比例

例 1: 無限に長い直線状の電荷が作る静電場

- 電荷は単位長さ当り λ で一様に分布
- 高さ h、半径 R の円筒状の閉曲面 S_0
  - 電場は側面に垂直で R のみの関数
  - 上下の底面上で電場の法線成分はゼロ
  - S_0 に含まれる電荷は $h\lambda$



- ガウスの法則から

$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = E(R) \times 2\pi R h = \frac{h\lambda}{\varepsilon_0},$$

$$\therefore E(R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

積分を実行することなくクーロンの法則の結果が得られた

例 2: 無限に長い円筒状の電荷が作る静電場

- 電荷は半径 a の円筒の内部に単位体積当り ρ で一様に分布
- 高さ h、半径 R の円筒状の閉曲面 S_0
  - 電場は側面に垂直で R のみの関数
  - 上下の底面上で電場の法線成分はゼロ
  - S_0 に含まれる電荷は $R < a$ のとき $\pi R^2 h\rho$、$R > a$ のとき $\pi a^2 h\rho$
- ガウスの法則から
  - $R < a$ のとき

$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = E(R) \times 2\pi Rh = \frac{\pi R^2 h\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \therefore E(R) = \frac{R\rho}{2\varepsilon_0}$$

  - $R > a$ のとき

$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = E(R) \times 2\pi Rh = \frac{\pi a^2 h\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \therefore E(R) = \frac{a^2\rho}{2\varepsilon_0 R}$$

$\lambda = \pi a^2\rho$ とすると例 1 の結果と一致

例 2: 無限に長い円筒面状の電荷が作る静電場

- 電荷は半径 a の中空の円筒面上に単位面積当り ω で一様に分布
- 高さ h、半径 R の円筒状の閉曲面 S_0
  - 電場は側面に垂直で R のみの関数
  - 上下の底面上で電場の法線成分はゼロ
  - S_0 に含まれる電荷は $R < a$ のときゼロ、$R > a$ のとき $2\pi ah\omega$
- ガウスの法則から
  - $R < a$ のとき

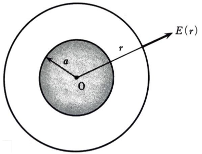
$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = E(R) \times 2\pi Rh = 0, \qquad \therefore E(R) = 0$$

  - $R < a$ のとき

$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = E(R) \times 2\pi Rh = \frac{2\pi ah\omega}{\varepsilon_0}, \qquad \therefore E(R) = \frac{a\omega}{\varepsilon_0 R}$$

$\lambda = 2\pi a\omega$ とすると例 1 の結果と一致

例 3: 球状の電荷が作る静電場



- 電荷 Q が半径 a の球内に一様に分布
- 半径 R の球状の閉曲面 S_0
  - 電場は S_0 に垂直で R のみの関数
  - S_0 に含まれる電荷は $R < a$ のとき $\left(\frac{R}{a}\right)^3 Q$、$R > a$ のとき Q
- ガウスの法則から
  - $R < a$ のとき

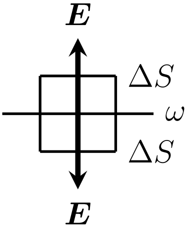
$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = E(R) \times 4\pi R^2 = \left(\frac{R}{a}\right)^3 \frac{Q}{\varepsilon_0}, \qquad \therefore E(R) = \frac{QR}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$$

  - $R > a$ のとき

$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = E(R) \times 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \qquad \therefore E(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

球外では点電荷が作る電場と一致

例 4: 無限に広い平面状の電荷が作る静電場



- 電荷は単位面積当り ω で一様に分布
- 平面を貫く高さ h、底面積 ΔS の閉曲面 S_0
  - 電場は底面に垂直
  - 側面上で電場の法線成分はゼロ
  - S_0 に含まれる電荷は $\omega\Delta S$
- ガウスの法則から

$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = E \times 2\Delta S = \frac{\omega\Delta S}{\varepsilon_0}, \qquad \therefore E = \frac{\omega}{2\varepsilon_0}$$

導体

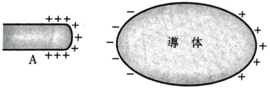
- 導体内には自由電子が存在
- 帯電体を近づけると誘導電荷が発生 (静電誘導)
- 電荷が静止しているとき
  - 導体内の静電場はゼロ

    ∵ 導体内に静電場が存在すると、自由電子が運動 (対偶)
  - 導体表面の静電場は表面に垂直

    ∵ 導体表面に平行な成分が存在すると、自由電子が運動 (対偶)
  - 導体内の電荷はゼロ

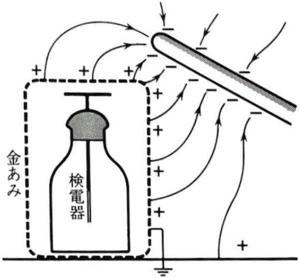
    ∵ 導体内の任意の閉曲面上で静電場はゼロ

    → ガウスの法則から閉曲面に含まれる電荷もゼロ



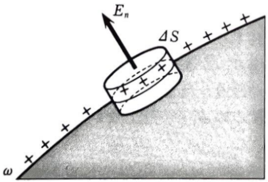
静電遮へい

- 導体内部に静電場は存在しない
- 導体で覆うことで外部の電場を遮断 (静電遮蔽)



導体表面上の電場と電荷分布

- 導体内の電場はゼロ
- 導体表面の電場は表面に垂直
- 導体表面を貫く底面積 ΔS の微小な円筒状の閉曲面 S_0
  - 電場は上の底面に垂直
  - 側面上で電場の法線成分はゼロ
  - 下の底面上で電場はゼロ
- S_0 内の電荷面密度を ω とすると、ガウスの法則から



$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = E_n \Delta S = \frac{\omega \Delta S}{\varepsilon_0}, \qquad \therefore \omega = \varepsilon_0 E_n$$

導体表面上の電場が分かれば電荷分布も分かる