数値計算法 第12回

関数近似 (3)

濱本 雄治 [1]

情報工学部 情報通信工学科

2025年7月7日

[1] hamamoto@c.oka-pu.ac.jp

復習: Lagrange 補間

- 2 点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ を通る一次多項式

$$y = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

- 3 点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る二次多項式

$$y = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

- $n + 1$ 点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ を通る n 次多項式

$$y = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{L_i(x)}{L_i(x_i)} = y_0 \frac{L_0(x)}{L_0(x_0)} + y_1 \frac{L_1(x)}{L_1(x_1)} + \cdots + y_n \frac{L_n(x)}{L_n(x_n)},$$

ただし $L_i(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_{i-1}) \cancel{(x - x_i)} (x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)$

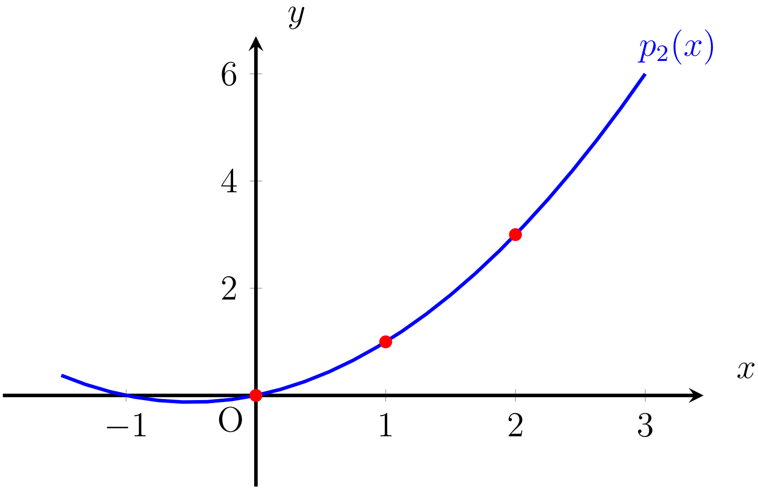
前回の小テストの解説

データ点 $(0,0),(1,1),(2,3)$ を通る関数 $y=f(x)$ を二次式で近似するとき、2 次の Lagrange 補間多項式 $p_2(x)$ を求めよ。ただし括弧は展開して同類項をまとめること。

$(x_0,y_0)=(0,0),(x_1,y_1)=(1,1),(x_2,y_2)=(2,3)$ とすると

$$
\begin{aligned}
p_2(x) &= y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\
&= 0+1\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}+3\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} \\
&= -x^2+2x+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x \\
&= \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x
\end{aligned}
$$

Lagrange 補間多項式の可視化



Newton 補間の考え方

- 補間点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots$ の追加とともに補間多項式の次数を上げる

$$
\begin{array}{lcl}
2\text{ 点を通過} & \to & p_1(x) = y_0 + m_1(x - x_0) \\
3\text{ 点を通過} & \to & p_2(x) = p_1(x) + m_2(x - x_0)(x - x_1) \\
4\text{ 点を通過} & \to & p_3(x) = p_2(x) + m_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
 & \vdots &
\end{array}
$$

- $n+1$ 個の点を通る n 次補間多項式は一意に決まるので、Newton 補間は Lagrange 補間と同じ補間多項式を与える

1 次の Newton 補間

- 異なる 2 点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ を通る一次多項式

$$p_1(x) = y_0 + \underbrace{m_1(x - x_0)}_{x=x_0\text{で消える}} \qquad \text{(1 次の Newton 補間多項式)}$$

- $x = x_0$ のとき

$$p_1(x_0) = y_0$$

  であるから、$y = p_1(x)$ は (x_0, y_0) を通過
- m_1 は $y = p_1(x)$ が (x_1, x_2) を通過する条件から決まる:

$$y_1 = y_0 + m_1(x_1 - x_0),$$

$$\therefore m_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \equiv f[x_0, x_1] \quad (= f[x_1, x_0]) \qquad \text{(1 次の差分商)}$$

差分商の書き換え

- n 次多項式

$$L_i^n(x) = \frac{1}{x - x_i} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \qquad (0 \leq i \leq n),$$

  を定義すると

$$L_0^1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{x - x_0} = x - x_1, \quad L_1^1(x) = \cdots = x - x_0$$

- Lagurange 基底を用いて 1 次の差分商を書き直すと

$$f[x_0, x_1] = \frac{y_0}{x_0 - x_1} + \frac{y_1}{x_1 - x_0} = \sum_{i=0}^{1} \frac{y_i}{L_i^1(x_i)}$$

- $L_0^0(x) = 1$ であるから $y_0 = \sum_{i=0}^{0} \frac{y_i}{L_0^0(x_i)} \equiv f[x_0]$ (0 次の差分商)

2 次の Newton 補間

- 異なる 3 点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る二次多項式
- 1 次の Newton 補間多項式に 2 次の項を追加

$$
\begin{aligned}
p_2(x) &= p_1(x) + \underbrace{m_2(x - x_0)(x - x_1)}_{x=x_0,x_1\text{ で消える}} \quad \text{(2 次の Newton 補間多項式)} \\
&= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + m_2(x - x_0)(x - x_1)
\end{aligned}
$$

- $x = x_0, x_1$ のとき

$$
p_2(x_0) = p_1(x_0) = y_0, \qquad p_2(x_0) = p_1(x_0) = y_0
$$

  であるから $y = p_2(x)$ は $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ を通過
- m_2 は $y = p_2(x)$ が (x_2, y_2) を通過する条件から決まる

- 補間点を x_1, x_0, x_2 の順に追加したと考えると

$$p_2'(x) = f[x_1] + \underbrace{f[x_1, x_0]}_{=f[x_0,x_1]}(x - x_1) + m_2'(x - x_1)(x - x_0)$$

- 補間点を x_1, x_2, x_0 の順に追加したと考えると

$$p_2''(x) = f[x_1] + f[x_1, x_2](x - x_1) + m_2''(x - x_1)(x - x_2)$$

- 補間多項式は補間点を追加する順序に依らないので

$$p_2(x) = p_2'(x) = p_2''(x)$$

- p_2, p_2', p_2'' で x^2 の係数は等しいので

$$m_2 = m_2' = m_2''$$

2 次の差分商

- $p_2'(x) = p_2''(x)$ として $x - x_1$ を消去すると

$$m_2 = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2} \equiv f[x_0, x_1, x_2] \qquad \text{(2 次の差分商)}$$

- 1 次の差分商を用いて書き直すと

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{\dfrac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_1} - \dfrac{f[x_1] - f[x_2]}{x_1 - x_2}}{x_0 - x_2} \\ &= \frac{f[x_0]}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \cdots \\ &= \sum_{i=0}^{2} \frac{y_i}{L_i^2(x_i)} \end{aligned}$$

1〜2 次の Newton 補間のまとめ

- 1 点 (x_0, y_0) を通る 0 次 Newton 補間多項式

$$p_0(x) = m_0 \qquad \left(m_0 = f[x_0] \equiv y_0 = \sum_{i=0}^{0} \frac{y_i}{L_i^0(x_i)} \right)$$

- 2 点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ を通る 1 次 Newton 補間多項式

$$p_1(x) = m_0 + m_1(x - x_0) \quad \left(m_1 = f[x_0, x_1] \equiv \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \sum_{i=0}^{1} \frac{y_i}{L_i^1(x_i)} \right)$$

- 3 点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る 2 次 Newton 補間多項式

$$p_2(x) = m_0 + m_1(x - x_0) + m_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$\left(m_2 = f[x_0, x_1, x_2] \equiv \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_1 - x_0} = \sum_{i=0}^{2} \frac{y_i}{L_i^2(x_i)} \right)$$

和の形から、差分商は補間点を追加する順序に依らない

n 次の Newton 補間への一般化

- $n+1$ 点 $(x_0, y_0), \cdots, (x_n, y_n)$ を通る n 次の Newton 補間多項式

$$
\begin{aligned}
p_2(x) = m_0 + m_1(x - x_0) + m_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\
\cdots + m_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

- k 次の差分商は漸化式

$$
\begin{aligned}
m_k = f[x_0, x_1, \cdots, x_k] &= \sum_{i=0}^{k} \frac{y_i}{L_i^k(x_i)} \\
&= \frac{f[\overbrace{x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}}^{x_k\text{以外の差分商}}] - f[\overbrace{x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k}^{x_0\text{以外の差分商}}]}{x_0 - x_k}
\end{aligned}
$$

を用いて逐次的に求める

差分表

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\boxed{x_0} & \to & \boxed{f[x_0]} & \searrow & & & & & \\
 & & & & \boxed{f[x_0,x_1]} & \searrow & & & \\
\boxed{x_1} & \to & \boxed{f[x_1]} & \begin{array}{c}\nearrow\\ \searrow\end{array} & & & \boxed{f[x_0,x_1,x_2]} & \searrow & \\
 & & & & \boxed{f[x_1,x_2]} & \begin{array}{c}\nearrow\\ \searrow\end{array} & & & \boxed{f[x_0,x_1,x_2,x_3]} \\
\boxed{x_2} & \to & \boxed{f[x_2]} & \begin{array}{c}\nearrow\\ \searrow\end{array} & & & \boxed{f[x_1,x_2,x_3]} & \nearrow & \\
 & & & & \boxed{f[x_2,x_3]} & \nearrow & & & \\
\boxed{x_3} & \to & \boxed{f[x_3]} & \nearrow & & & & &
\end{array}
$$

- 例えば $f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_2, x_3]}{x_1 - x_3}$

Newton 補間の例

- 4 点 $(0,1),(1,2),(2,4),(3,10)$ を通る 3 次の補間多項式の差分表

$$\begin{array}{ccccccc}
\boxed{0}\to\boxed{\color{red}1} & \searrow & & & & & \\
 & & \boxed{\color{green}2-1=1} & \searrow & & & \\
\boxed{1}\to\boxed{2} & \nearrow\ \searrow & & & \boxed{\color{blue}\frac{2-1}{2}=0.5} & \searrow & \\
 & & \boxed{4-2=2} & \nearrow\ \searrow & & & \boxed{\color{orange}\frac{2-0.5}{3}=0.5} \\
\boxed{2}\to\boxed{4} & \nearrow\ \searrow & & & \boxed{\frac{6-2}{2}=2} & \nearrow & \\
 & & \boxed{10-4=6} & \nearrow & & & \\
\boxed{3}\to\boxed{10} & \nearrow & & & & &
\end{array}$$

- $p_3(x) = {\color{red}1} + {\color{green}1}(x-0) + {\color{blue}0.5}(x-0)(x-1) + {\color{orange}0.5}(x-0)(x-1)(x-2)$

Newton 補間の計算

- 括弧を展開せず入れ子構造にすることで計算量を削減

$$
\begin{aligned}
p_n(x) &= m_0 + m_1(x-x_0) + m_2(x-x_0)(x-x_1) + m_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \cdots \\
&= \underbrace{m_0 + (x-x_0)[\underbrace{m_1 + (x-x_1)[\underbrace{m_2 + (x-x_2)[\underbrace{m_3 + \cdots}_{(1)}]}_{(2)}]}_{(3)}]}_{(4)}
\end{aligned}
$$

- $n = 3$ のときの計算手順

(1) $S_3 = m_3$

(2) $S_2 = m_2 + (x - x_2)S_3$

(3) $S_1 = m_1 + (x - x_1)S_2$

(4) $p_3(x) = m_0 + (x - x_0)S_1$