数値計算法 第 6 回

連立一次方程式 (1)

濱本 雄治 [1]

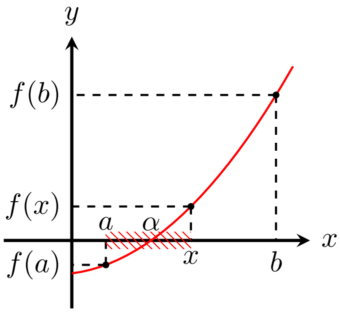
情報工学部 情報通信工学科

2025 年 5 月 26 日

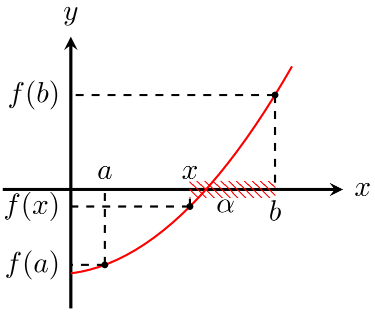
[1] hamamoto@c.oka-pu.ac.jp

復習: 二分法の考え方

- $f(x)=0$ の解が区間 $[a,b]$ に存在するとき $f(a)f(b)\leq 0$
- この区間の中点 $x=(a+b)/2$ で $f(a)f(x)$ の符号を調べる
  - $f(a)f(x)\leq 0$ のとき
  - $f(a)f(x)>0$ のとき



解は左半分 $[a,x]$ に存在



解は右半分 $(x,b]$ に存在

- $|a-b|<\varepsilon$ (許容誤差) となるまで区間の縮小を反復

前回の小テストの解説

二分法で $f(x)=x^2-3$ として $\sqrt{3}$ を求める。考える区間の両端の初期値を $a=1.7, b=1.8$ とすると中点の初期値は $x_0=1.75$ である。有効数字 6 桁で中点 x_1, x_2, x_3 を計算せよ。ただし計算機を用いてよい。

$$
\begin{aligned}
(a, x_0, b) &= (1.70000, 1.75000, 1.80000),\\
(a, x_1, b) &= (1.70000, 1.72500, 1.75000),\\
(a, x_2, b) &= (1.72500, 1.73750, 1.75000),\\
(a, x_3, b) &= (1.72500, 1.73125, 1.73750)
\end{aligned}
$$

連立一次方程式

定義

n 変数、m 本の一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

が同時に成立するとき、これらを連立一次方程式と呼ぶ

- 例えば 2 変数、2 本の場合

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}, \qquad \therefore \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

消去法による連立一次方程式の解法

方程式の基本変形

- ある式の両辺を定数 ($\neq 0$) で割る
- ある式の定数倍から他の式の定数倍を引く

$$
\begin{array}{rcl}
2x + 4y & = & 10 \\
-\,)\,2x + 3y & = & 8 \\
\hline
y & = & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
(\leftarrow x + 2y = 5 \text{ の両辺を } 2 \text{ 倍}) \\
\\
(\leftarrow y \text{ が未知数でなくなった})
\end{array}
$$

消去法の方針

方程式の基本変形を用いて、未知数を 1 つずつ消していく

消去法の例

- 3 変数、3 本の連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x+2y+6z &= 24 \quad \cdots\cdots ① \\ 3x+5y+13z &= 52 \quad \cdots\cdots ② \\ 5x+8y+24z &= 93 \quad \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

- ①の両辺を 2 で割る

$$x+y+3z=12 \quad \cdots\cdots ①'$$

- ② − ①′ $\times 3$ および ③ − ①′ $\times 5$ で x を消去

$$\begin{array}{rrrrr} & 3x & +5y & +13z & =52 \\ -) & 3x & +3y & +9z & =36 \\ \hline & & 2y & +4z & =16 \end{array}, \qquad \begin{array}{rrrrr} & 5x & +8y & +24z & =93 \\ -) & 5x & +5y & +15z & =60 \\ \hline & & 3y & +9z & =33 \end{array}$$

- 以下、y または z を消去して x, y, z を求める

連立一次方程式の行列表示

- 連立一次方程式は行列とベクトルで書き直せる

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{(係数) 行列 } \boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{ベクトル } \boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\text{ベクトル } \boldsymbol{b}}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

- 前出の 2 変数、2 本の連立一次方程式の例で確認すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad \therefore \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$$

表記の簡略化

- 係数行列 $\boldsymbol{A}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ を抽出して並べる

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

行列の基本変形

- ある行の両辺を定数 $(\neq 0)$ で割る
- ある行の定数倍から他の行の定数倍を引く
- ある行と他の行を入れ替える　($\leftarrow$ 連立方程式の順番の入れ替え)

- 行列の基本変形を用いて方程式を解く　$\rightarrow$ どう変形するか?

掃出し法

- 行列を次のように変形できれば、明らかに右辺のベクトルが解

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right) \to \begin{cases} 1x + 0y + 0z = a \\ 0x + 1y + 0z = b \\ 0x + 0y + 1z = c \end{cases}, \quad \therefore \begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \end{cases}$$

掃出し法の目標

係数行列が単位行列になるように変形

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} {\color{red}1} & {\color{blue}0} & {\color{blue}\cdots} & {\color{blue}0} & b'_1 \\ {\color{blue}0} & {\color{red}1} & {\color{blue}\ddots} & {\color{blue}\vdots} & \vdots \\ {\color{blue}\vdots} & {\color{blue}\ddots} & {\color{red}\ddots} & {\color{blue}0} & \vdots \\ {\color{blue}0} & {\color{blue}\cdots} & {\color{blue}0} & {\color{red}1} & b'_n \end{array}\right)$$

掃出し法の例

- 前出の 3 変数、3 本の連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x + 2y + 6z &= 24 \\ 3x + 5y + 13z &= 52 \\ 5x + 8y + 24z &= 93 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 24 \\ 3 & 5 & 13 & 52 \\ 5 & 8 & 24 & 93 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \cdots\cdots ① \\ \cdots\cdots ② \\ \cdots\cdots ③ \end{array}$$

- ① $\div 2$ で $(1,1)$ 成分 (ピボット) を 1 にする

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & 1 & 3 & 12 \\ 3 & 5 & 13 & 52 \\ 5 & 8 & 24 & 93 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdots\cdots ①' \\ \cdots\cdots ② \\ \cdots\cdots ③ \end{array}$$

- ② $-$ ①$'$ $\times 3$ および ③ $-$ ①$'$ $\times 5$ で $(2,1), (3,1)$ 成分を掃き出す

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & 3 & 9 & 33 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdots\cdots ①' \\ \cdots\cdots ②' \\ \cdots\cdots ③' \end{array}$$

- ②$'$ $\div 2$ で $(2,2)$ 成分 (ピボット) を 1 にする

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 9 & 33 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \cdots\cdots ①' \\ \cdots\cdots ②'' \\ \cdots\cdots ③' \end{array}$$

- ①$'$ $-$ ②$''$ および ③$'$ $-$ ②$''$ $\times 3$ で $(1,2),(3,2)$ 成分を掃き出す

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \cdots\cdots ①'' \\ \cdots\cdots ②'' \\ \cdots\cdots ③'' \end{array}$$

- ③$'$ $\div 3$ で $(3,3)$ 成分 (ピボット) を 1 にする

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \cdots\cdots ①'' \\ \cdots\cdots ②'' \\ \cdots\cdots ③''' \end{array}$$

- ①$''$ − ③$'''$ および ②$''$ − ③$''' \times 2$ で $(3,1), (3,2)$ 成分を掃き出す

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \cdots\cdots ①''' \\ \cdots\cdots ②''' \\ \cdots\cdots ③''' \end{array}$$

- 係数行列が単位行列になったので、連立一次方程式の解は

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = 3 \end{cases}$$

Gaussの消去法

- 行列を次のように変形できれば、解は容易に求まる

$$\left(\begin{array}{ccc|c} u_{11} & u_{12} & u_{13} & b_1 \\ 0 & u_{22} & u_{13} & b_2 \\ 0 & 0 & u_{33} & b_3 \end{array}\right) \to \left\{\begin{aligned} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 &= b_1 \\ u_{22}x_2 + u_{23}x_3 &= b_2 \\ u_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}\right.$$

- x_3, x_2, x_1 について解くと

$$x_3 = \frac{b_3}{u_{33}},$$

$$x_2 = \frac{b_2 - u_{23}x_3}{u_{22}},$$

$$x_1 = \frac{b_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3}{u_{11}}$$

  のように解が x_3, x_2, x_1 の順に計算できる
- 掃出し法より効率的に連立一次方程式の解を求めることが可能

Gauss の消去法の目標

係数行列の下半分の要素がすべて 0 になるように変形 (前進消去)

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} & b_n
\end{array}\right)
\to
\left(\begin{array}{cccc|c}
u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & b'_1 \\
0 & u_{22} & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\
0 & \cdots & 0 & u_{nn} & b'_n
\end{array}\right)
$$

- $x_n, \cdots, x_{k+1}$ まで降順に得られたら、k 行目から x_k が求まる

$$
u_{kk} \underset{\text{未知}}{x_k} + u_{k,k+1} \underset{\text{既知}}{x_{k+1}} + \cdots + u_{kn} \underset{\text{既知}}{x_{k+1}} = b_k,
$$

$$
\therefore \underset{\text{未知}}{x_k} = \frac{1}{u_{kk}} \left(b_k - u_{k,k+1} \underset{\text{既知}}{x_{k+1}} - \cdots - u_{kn} \underset{\text{既知}}{x_n} \right) \qquad \text{(後退代入)}
$$

Gaussの消去法の例

- 前出の 3 変数、3 本の連立一次方程式

$$\left\{\begin{aligned} 2x + 2y + 6z &= 24 \\ 3x + 5y + 13z &= 52 \\ 5x + 8y + 24z &= 93 \end{aligned}\right. \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 24 \\ 3 & 5 & 13 & 52 \\ 5 & 8 & 24 & 93 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdots\cdots ① \\ \cdots\cdots ② \\ \cdots\cdots ③ \end{array}$$

- ② − ① × 3/2 で (2, 1) 成分を掃き出す

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 24 \\ 0 & 2 & 4 & 16 \\ 5 & 8 & 24 & 93 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdots\cdots ① \\ \cdots\cdots ②' \\ \cdots\cdots ③ \end{array}$$

- ③ − ① × 5/2 で (3, 1) 成分を掃き出す

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 24 \\ 0 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & 3 & 9 & 33 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdots\cdots ① \\ \cdots\cdots ②' \\ \cdots\cdots ③' \end{array}$$

- ③$'$ − ②$'$ $\times 3/2$ で $(3,2)$ 成分を掃き出す

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 24 \\ 0 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdots\cdots ① \\ \cdots\cdots ②' \\ \cdots\cdots ③'' \end{array}$$

- ③$''$ から

$$x_3 = \frac{b_3}{u_{33}} = \frac{9}{3} = 3$$

- x_3 を ②$'$ に代入して

$$x_2 = \frac{b_2 - u_{23}x_3}{u_{33}} = \frac{16 - 4 \times 3}{2} = 2$$

- x_3, x_2 を ①$'$ に代入して

$$x_1 = \frac{b_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3}{u_{11}} = \frac{24 - 2 \times 2 - 6 \times 3}{2} = 1$$

ピボット選択

- Gauss 消去法の注意点
  - 対角成分 a_{kk}(ピボット) が 0 のとき a_{kk} での割り算はエラー
  - a_{kk} の絶対値が非常に小さいときも誤差が大きくなる
- 対策
  - 第 k 列で絶対値が最大の a_{ik} $(i > k)$ を探し、第 k 行と第 i 行を交換

$$\begin{array}{rl} a_{kk} & \text{ピボット} \\ \vdots & \\ a_{ik} & \text{絶対値最大} \\ \vdots & \\ a_{nk} & \end{array}$$

  - $a_{kk}, \cdots, a_{nk}$ がすべて 0 なら解なし、または解が一意に定まらない

スケーリング

- ピボット選択の注意点
  - 行列

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \end{array}\right)$$

  の係数行列の $(2,1)$ 成分 10 は $(1,1)$ 成分 2 より大きい
  - 一方、第 2 行を 10 で割ると

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \end{array}\right)$$

  となり、係数行列の $(1,1)$ 成分 2 は $(2,1)$ 成分 1 より大きい
- 対策
  - 各等式の係数を絶対値最大の係数で割る