



物理学 B 第 2 回

ガウスの法則

濱本 雄治¹

情報工学部 情報通信工学科

2025 年 10 月 1 日、10 月 6 日

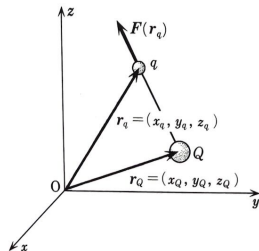
¹hamamoto@c.oka-pu.ac.jp <https://yhmmt.github.io/pages/>

前回の復習



- ▶ 電荷 Q が電荷 q に作用するクーロン力

$$\mathbf{F}_{q \leftarrow Q} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_Q}{|\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_Q|^3}$$



- ▶ 電荷 Q が位置 \mathbf{r} に作る電場

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|^3}$$

- ▶ 電荷 Q が電場 \mathbf{E} を作り、電場 \mathbf{E} が電荷 q に作用 (近接作用)

前回の復習



- ▶ n 個の電荷 Q_1, Q_2, \dots, Q_n が位置 \mathbf{r} に作る電場 (重合せの法則)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Q_i})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Q_i}|^3}$$

- ▶ 連続的に分布する電荷が位置 \mathbf{r} に作る電場

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad \left(\rho(\mathbf{r}) \equiv \sum_{i=1}^n Q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Q_i}) \right)$$

ディラックのデルタ関数

$$\delta(\mathbf{r}) = \begin{cases} \infty & (\mathbf{r} = 0) \\ 0 & (\mathbf{r} \neq 0) \end{cases}, \quad \int d\mathbf{r}' f(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = f(\mathbf{r})$$

電荷分布が作る電場を解析的に求めるには対称性の利用が不可欠

前回の小テストの解説



1 C の正の点電荷 3 個が、下図に示す配置で置かれている。この時、電荷 A に働くクーロン力の向きと大きさを求めよ。

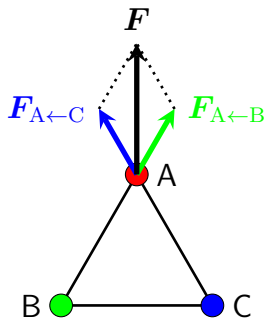
電荷 B, C が電荷 A に及ぼすクーロン力の大きさは

$$|\mathbf{F}_{A \leftarrow B}| = |\mathbf{F}_{A \leftarrow C}| = k \frac{1^2}{1^2} = k$$

これらの合力の大きさは

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{3}k = 9\sqrt{3} \times 10^9 \text{ [N]}$$

それぞれの力の向きは図の通り。

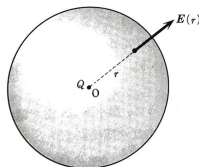


球面上の電場



- ▶ 電荷 Q が距離 r の位置に作る電場の大きさ

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$



- ▶ 両辺に半径 r の球 S_r の表面積 $4\pi r^2$ を掛けると

$$E(r) \times 4\pi r^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

- ▷ 電場ベクトル $E(r)$ は半径 r の球面に垂直
- ▷ 電場の大きさ $E(r)$ は半径 r の球面上で一定
- ▷ 左辺は $E(r)$ の球面に垂直な成分 (法線成分) $E(r)$ の面積分と解釈可

$$E(r) \times 4\pi r^2 = \underbrace{E(r)}_{S_r \text{ 上で一定}} \int_{S_r} dS = \int_{S_r} E(r) dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

以下、この式を一般の閉曲面上の面積分に一般化

一般の閉曲面上の電場



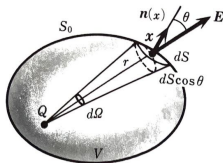
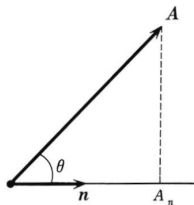
- ▶ 任意のベクトル \mathbf{A} と単位ベクトル \mathbf{n} の内積

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{A}| |\mathbf{n}| \cos \theta = |\mathbf{A}| \cos \theta = A_n$$

∴ \mathbf{A} の \mathbf{n} 方向の成分は $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ と書ける

- ▶ 閉曲面 S_0 の微小面 dS 上の電場の法線成分

$$E_n = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = E \cos \theta = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}$$



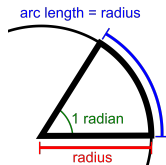
弧度法



▶ 平面角

- ▶ 単位円上の一部 (弧) の長さで表す
- ▶ 単位は rad (ラジアン)
- ▶ 半径 r の円周上の弧の長さを ℓ とするとその平面角 θ は

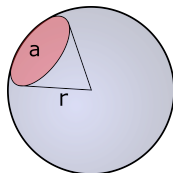
$$\ell : \theta = r : 1, \quad \therefore \theta = \frac{\ell}{r} [\text{rad}]$$



▶ 立体角

- ▶ 単位球上の一部の面積で表す
- ▶ 単位は sr (ステラジアン)
- ▶ 半径 r の球面上の一部の面積を a とするとその立体角 ω は

$$a : \Omega = r^2 : 1^2, \quad \therefore \Omega = \frac{a}{r^2} [\text{sr}]$$



閉曲面の内部に電荷がある場合



▶ E に垂直な微小面は $dS \cos \theta$

▶ $dS \cos \theta$ の立体角 $d\Omega$ は

$$dS \cos \theta : d\Omega = r^2 : 1^2, \quad \therefore d\Omega = \frac{dS \cos \theta}{r^2}$$

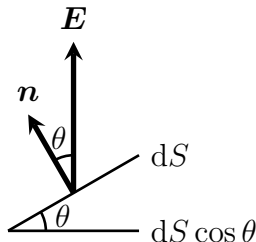
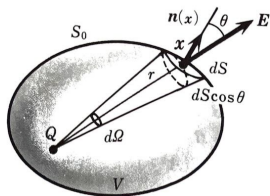
▶ 電場の法線成分と微小面の面積の積

$$E_n dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} \times \frac{r^2 d\Omega}{\cos \theta} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

閉曲面の形状に依らない式になった

▶ 両辺を面積分

$$\int_{S_0} E_n dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \left(\because \int d\Omega = 4\pi \right)$$



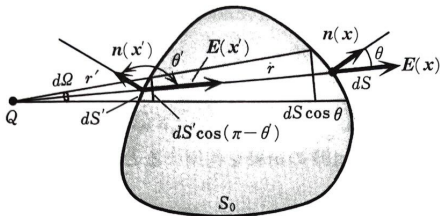
閉曲面の外部に電荷がある場合



- ▶ 微小面 dS 上は前と同じ

$$d\Omega = \frac{dS \cos \theta}{r^2}$$

$$E_n dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$



- ▶ 微小面 dS' 上は $\theta' > 90^\circ$ なので

$$d\Omega = \frac{dS' \cos(\pi - \theta')}{r'^2} = -\frac{dS' \cos \theta'}{r'^2},$$

$$E_n dS' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta'}{r'^2} \times \left(-\frac{r'^2 d\Omega}{\cos \theta'} \right) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

- ▶ 両者の和を取ると

$$E_n dS + E_n dS' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = 0, \quad \therefore \int_{S_0} E_n dS = 0$$

dS 上と dS' の寄与が相殺

ガウスの法則



- ▶ S_0 の内部に電荷 Q_1, Q_2, \dots, Q_N 、外部に電荷 $q_\alpha, q_\beta, \dots, q_\sigma$
- ▶ これらの電荷が作る電場

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)} + \dots + \mathbf{E}^{(N)} + \mathbf{E}^{(\alpha)} + \mathbf{E}^{(\beta)} + \dots + \mathbf{E}^{(\sigma)}$$

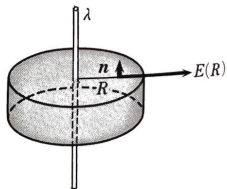
- ▶ S_0 上で法線成分を面積分

$$\begin{aligned} \int_{S_0} E_n dS &= \int_{S_0} E_n^{(1)} dS + \int_{S_0} E_n^{(2)} dS + \dots + \int_{S_0} E_n^{(N)} dS \\ &\quad + \underbrace{\int_{S_0} E_n^{(\alpha)} dS}_{=0} + \underbrace{\int_{S_0} E_n^{(\beta)} dS}_{=0} + \dots + \underbrace{\int_{S_0} E_n^{(\sigma)} dS}_{=0} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_N) \end{aligned}$$

S_0 上での電場の法線成分の面積分は S_0 に含まれる電荷に比例

例 1: 無限に長い直線状の電荷が作る静電場

- ▶ 電荷は単位長さ当り λ で一様に分布
- ▶ 高さ h 、半径 R の円筒状の閉曲面 S_0
 - ▷ 電場は側面に垂直で R のみの関数
 - ▷ 上下の底面上で電場の法線成分はゼロ
 - ▷ S_0 に含まれる電荷は $h\lambda$
- ▶ ガウスの法則から



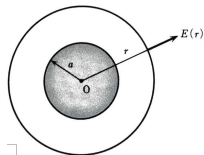
$$\int_{S_0} E_n dS = E(R) \times 2\pi R h = \frac{h\lambda}{\epsilon_0},$$
$$\therefore E(R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

積分を実行することなくクーロンの法則の結果が得られた

例 2: 球状の電荷が作る静電場



- ▶ 電荷 Q が半径 a の球内に一様に分布
- ▶ 半径 r の球面状の閉曲面 S_0
 - ▷ 電場は S_0 に垂直で r のみの関数
 - ▷ S_0 に含まれる電荷は



$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{4}{3}\pi r^3 Q = \left(\frac{r}{a}\right)^3 Q & (r < a) \\ Q & (r > a) \end{array} \right.$$

例2: 球状の電荷が作る静電場



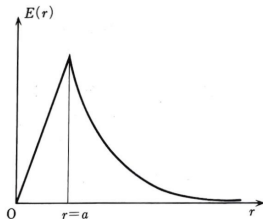
▶ ガウスの法則から

▷ $r < a$ のとき

$$\int_{S_0} E_n dS = E(r) \times 4\pi R^2 = \left(\frac{r}{a}\right)^3 \frac{Q}{\varepsilon_0}, \quad \therefore E(r) = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \propto r$$

▷ $r > a$ のとき

$$\int_{S_0} E_n dS = E(r) \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \quad \therefore E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \propto \frac{1}{r^2}$$

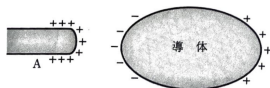


球外では点電荷が作る電場と一致

導体



- ▶ 導体内には自由電子が存在
- ▶ 帯電体を近づけると誘導電荷が発生
(静電誘導)

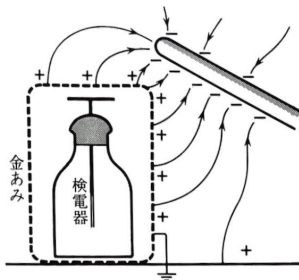


- ▶ 電荷が静止しているとき
 - ▷ 導体内の静電場はゼロ
 - ∴ 導体内に静電場が存在すると、自由電子が運動 (対偶)
 - ▷ 導体表面の静電場は表面に垂直
 - ∴ 導体表面に平行な成分が存在すると、自由電子が運動 (対偶)
 - ▷ 導体内の電荷はゼロ
 - ∴ 導体内の任意の閉曲面上で静電場はゼロ
 - ガウスの法則から閉曲面に含まれる電荷もゼロ

静電遮へい



- ▶ 導体内部に静電場は存在しない
- ▶ 導体で覆うことで外部の電場を遮断 (静電遮蔽)



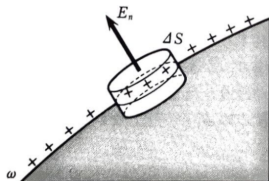
導体表面上の電場と電荷分布



- ▶ 導体内の電場はゼロ
- ▶ 導体表面の電場は表面に垂直
- ▶ 導体表面を貫く底面積 ΔS の微小な円筒状の閉曲面 S_0
 - ▷ 電場は上の底面に垂直
 - ▷ 側面上で電場の法線成分はゼロ
 - ▷ 下の底面上で電場はゼロ
- ▶ S_0 内の電荷面密度を ω とすると、ガウスの法則から

$$\int_{S_0} E_n dS = E_n \Delta S = \frac{\omega \Delta S}{\varepsilon_0}, \quad \therefore \omega = \varepsilon_0 E_n$$

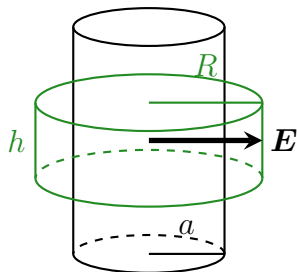
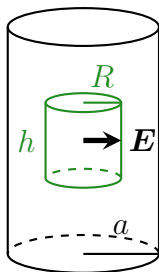
導体表面上の電場が分かれば電荷分布も分かる



演習 1: 無限に長い円柱状の電荷が作る静電場

- ▶ 電荷は半径 a の円柱の内部に単位体積当り ρ で一様に分布
- ▶ 高さ h 、半径 R の円筒状の閉曲面 S_0
 - ▷ 電場は側面に垂直で R のみの関数
 - ▷ 上下の底面上で電場の法線成分はゼロ
 - ▷ S_0 に含まれる電荷は

$$\begin{cases} \pi R^2 h \rho & (R < a) \\ \pi a^2 h \rho & (R > a) \end{cases}$$



演習 1: 無限に長い円柱状の電荷が作る静電場

▶ ガウスの法則から

▷ $R < a$ のとき

$$\int_{S_0} E_n dS = E(R) \times 2\pi R h = \frac{\pi R^2 h \rho}{\varepsilon_0} \propto R, \quad \therefore E(R) = \frac{R \rho}{2\varepsilon_0}$$

▷ $R > a$ のとき

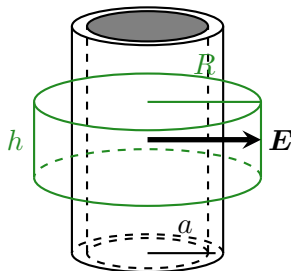
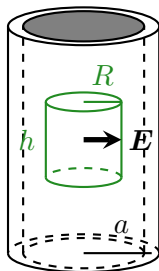
$$\int_{S_0} E_n dS = E(R) \times 2\pi R h = \frac{\pi a^2 h \rho}{\varepsilon_0}, \quad \therefore E(R) = \frac{a^2 \rho}{2\varepsilon_0 R} \propto \frac{1}{R}$$

$\lambda = \pi a^2 \rho$ とすると例 1 の結果と一致

演習 2: 無限に長い円筒状の電荷が作る静電場

- ▶ 電荷は半径 a の中空の円筒面上に単位面積当り ω で一様に分布
- ▶ 高さ h 、半径 R の円筒状の閉曲面 S_0
 - ▷ 電場は側面に垂直で R のみの関数
 - ▷ 上下の底面上で電場の法線成分はゼロ
 - ▷ S_0 に含まれる電荷は

$$\begin{cases} 0 & (R < a) \\ 2\pi a h \omega & (R > a) \end{cases}$$



演習 2: 無限に長い円筒状の電荷が作る静電場

▶ ガウスの法則から

▷ $R < a$ のとき

$$\int_{S_0} E_n dS = E(R) \times 2\pi R h = 0, \quad \therefore E(R) = 0$$

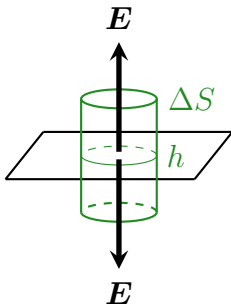
▷ $R > a$ のとき

$$\int_{S_0} E_n dS = E(R) \times 2\pi R h = \frac{2\pi a h \omega}{\varepsilon_0}, \quad \therefore E(R) = \frac{a\omega}{\varepsilon_0 R}$$

$\lambda = 2\pi a\omega$ とすると例 1 の結果と一致

演習 3: 無限に広い平面状の電荷が作る静電場

- ▶ 電荷は単位面積当り ω で一様に分布
- ▶ 平面を貫く高さ h 、底面積 ΔS の閉曲面 S_0
 - ▷ 電場は底面に垂直
 - ▷ 側面上で電場の法線成分はゼロ
 - ▷ S_0 に含まれる電荷は $\omega \Delta S$



- ▶ ガウスの法則から

$$\int_{S_0} E_n dS = E \times 2\Delta S = \frac{\omega \Delta S}{\epsilon_0}, \quad \therefore E = \frac{\omega}{2\epsilon_0}$$