物理学B 第1回

クーロンの法則

濱本 雄治[1]

情報工学部 情報通信工学科

2025年9月24日、29日

[1] hamamoto@c.oka-pu.ac.jp https://yhmmt.github.io/pages/

電気

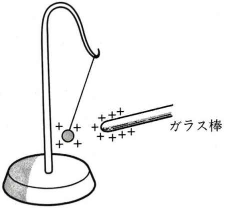
- 電気 (electricity) の発生
  - ガラス棒を絹布でこする　→　ガラス棒が正に帯電
  - 樹脂棒を毛皮でこする　→　樹脂棒が負に帯電
  - 正・負 2 種類の電荷 (charge) が存在

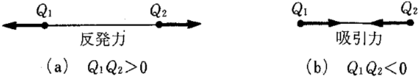
電荷保存則

外部から電荷の出入りのない系では、電荷の総和は一定

電荷間に働く力

- 電気の移動
  - 正に帯電したガラス棒をコルク球に接触 → コルク球も正に帯電
  - 物質中の電子 (負電荷) の移動が原因
- 電荷間に作用する力
  - 接触後、ガラス棒をコルク球に近づける → 反発
  - 同符号の電荷間には斥力
  - 異符号の電荷間には引力





クーロンの法則

- 2 個の点電荷 q, Q の間の力 F は
  1. 両者を結ぶ直線に平行
  2. それぞれの電荷の量に比例
  3. それらの間の距離の 2 乗に反比例
- 2 と 3 の定式化 (1 は後述)

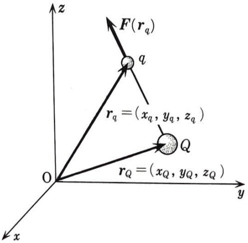
$$
\begin{aligned}
&\text{クーロン力} & F &= k\frac{qQ}{r^2} \qquad (k > 0), \\
&\text{クーロン定数} & k &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99 \times 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}, \\
&\text{真空の誘電率} & \varepsilon_0 &= 8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/Nm^2}
\end{aligned}
$$

  - $F > 0$ (同符号 $qQ > 0$) のとき斥力
  - $F < 0$ (異符号 $qQ < 0$) のとき引力

ベクトルの復習

- 電荷 q, Q の座標を $\boldsymbol{r}_q, \boldsymbol{r}_Q$ とする
  - Q から q に向かうベクトル (Q を基準に取る)

$$\boldsymbol{r}_q - \boldsymbol{r}_Q$$



  - q-Q 間の距離

$$r = |\boldsymbol{r}_q - \boldsymbol{r}_Q| = \sqrt{(x_q - x_Q)^2 + (y_q - y_Q)^2 + (z_q - z_Q)^2}$$

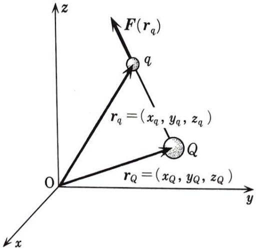
  - Q から q に向かう単位ベクトル

$$\hat{\boldsymbol{e}} = \frac{\boldsymbol{r}_q - \boldsymbol{r}_Q}{|\boldsymbol{r}_q - \boldsymbol{r}_Q|} \qquad \left(\because \hat{\boldsymbol{e}} \cdot \hat{\boldsymbol{e}} = \frac{(\boldsymbol{r}_q - \boldsymbol{r}_Q) \cdot (\boldsymbol{r}_q - \boldsymbol{r}_Q)}{|\boldsymbol{r}_q - \boldsymbol{r}_Q|^2} = 1 \right)$$

ベクトル形式のクーロンの法則

- 電荷 Q が電荷 q に作用する力

$$\boldsymbol{F}_{q\leftarrow Q} = k\frac{qQ}{r^2}\hat{\boldsymbol{e}} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}_q - \boldsymbol{r}_Q}{|\boldsymbol{r}_q - \boldsymbol{r}_Q|^3}$$



- 電荷 q が電荷 Q に作用する力

$$\boldsymbol{F}_{Q\leftarrow q} = k\frac{qQ}{r^2}(-\hat{\boldsymbol{e}}) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}_Q - \boldsymbol{r}_q}{|\boldsymbol{r}_Q - \boldsymbol{r}_r|^3}$$

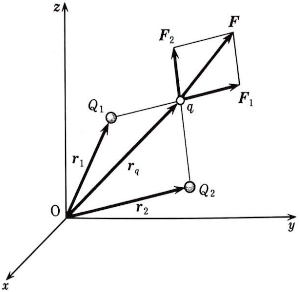
- 作用・反作用の法則

$$\boldsymbol{F}_{q\leftarrow Q} + \boldsymbol{F}_{Q\leftarrow q} = 0$$

重ね合わせの法則

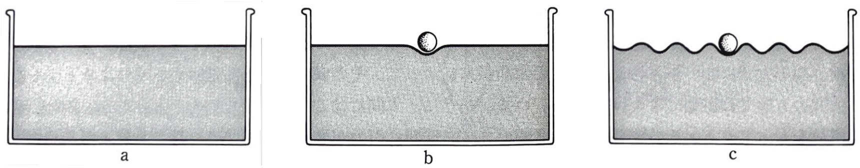
- n 個の電荷 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ が電荷 q に作用する力

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_q &= \boldsymbol{F}_{q\leftarrow Q_1} + \boldsymbol{F}_{q\leftarrow Q_2} + \cdots + \boldsymbol{F}_{q\leftarrow Q_n} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i(\boldsymbol{r}_q - \boldsymbol{r}_{Q_i})}{|\boldsymbol{r}_q - \boldsymbol{r}_{Q_i}|^3}
\end{aligned}
$$



遠隔作用 vs. 近接作用

- 遠隔作用
  - 電荷が 1 つ存在するだけでは、空間の性質は変化しない (a)
  - 瞬時に (無限の速さで) 伝わる
- 近接作用
  - 電荷が存在するとき、空間が歪み (b)、歪みが他の電荷に作用
  - 電荷が振動すると、空間の歪みが伝播 (c) $\rightarrow$ 電磁波
  - 伝播速度は空間の性質 (光速) に依存



- (時) 空間は物理現象の舞台ではなく、物理法則に従う実体

電場

- 電気現象に伴う空間の歪みを電場 (電界) と呼ぶ
- 特に、時間的な変動のない電場を静電場と呼ぶ
- 電荷 Q が $\boldsymbol{r}$ に作る電場

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_Q}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_Q|^3}$$

- n 個の電荷 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ が $\boldsymbol{r}$ に作る電場

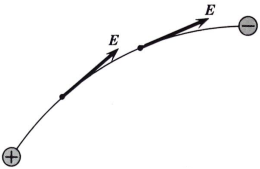
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{Q_i})}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{Q_i}|^3} \qquad \text{(重ね合わせの法則)}$$

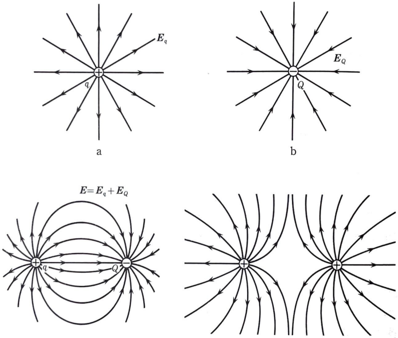
- 他の電荷が作る電場が電荷 q に作用するクーロン力

$$\boldsymbol{F}_q = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_q)$$

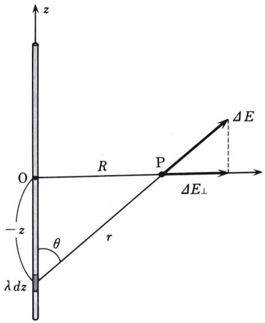
電気力(りき)線

- 電荷が電場から受ける力を可視化
- 電気力線の描き方
  - 正電荷が始点、負電荷が終点
  - 接線方向が電場と一致
  - 電気力線の密度は電場の強さに比例





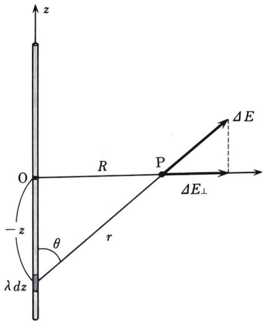
無限に長い直線状の電荷の作る静電場



- 直線電荷と平行に z 軸を取る　$\rightarrow$　電荷の位置を z で記述
- 長さ $\mathrm{d}z$ の要素に分割　$\rightarrow$　各要素が作る電場の重ね合わせ
- 電荷線密度 λ　$\rightarrow$　長さ $\mathrm{d}z$ の要素の電荷は $\lambda\mathrm{d}z$

各 z の電荷 $\lambda\mathrm{d}z$ が観測点 P に作る電場を重ね合わせる

無限に長い直線状の電荷の作る静電場



- z 軸周りに回転対称　$\rightarrow$　電場は z 軸周りの回転角に依らない
- z 軸方向に並進対称　$\rightarrow$　電場は z 座標に依らない
- 観測点 P の z 座標 $(z = 0)$ に対して反転対称

  $\rightarrow$　位置 $z, -z$ の電荷が作る電場の z 成分は互いに相殺

電場は距離 R のみの関数で、z 軸に垂直な成分しか持たない

無限に長い直線状の電荷の作る静電場

- 位置 z にある長さ $\mathrm{d}z$ の要素の電荷が点 P に作る電場の大きさ

$$\Delta E = \frac{\lambda \mathrm{d}z}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

- z 軸に垂直な成分

$$\Delta E_\perp = \frac{\lambda \mathrm{d}z}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\theta$$

- 直線電荷全体が点 P に作る電場の大きさ

$$E(R) = \sum \Delta E_\perp = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda \mathrm{d}z}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\theta$$

z, r, θ は互いに独立でないことに注意

無限に長い直線状の電荷の作る静電場

- 図の直角三角形の正接から

$$\tan\theta = \frac{R}{-z}, \qquad z = -\frac{R}{\tan\theta}, \qquad \therefore \mathrm{d}z = R\frac{\tan'\theta}{\tan^2\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{R\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta}$$

- 図の直角三角形の正弦から

$$\sin\theta = \frac{R}{r}, \qquad \therefore \frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2\theta}{R^2}$$

- これらを $E(R)$ に代入すると

$$\begin{aligned} E(R) &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\pi \frac{\sin^2\theta}{R^2}\frac{R\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta}\sin\theta \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \end{aligned}$$