物理学 B 第 11 回

磁性体と変位電流

濱本 雄治 [1]

情報工学部 情報通信工学科

2025 年 12 月 10 日、12 月 15 日

[1] hamamoto@c.oka-pu.ac.jp

https://yhmmt.github.io/pages/

前回の復習

- 磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の内部の電流素片 $I\Delta\boldsymbol{s}$ に作用する力

$$\boxed{\Delta\boldsymbol{F} = I\Delta\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{B}} \qquad (\text{アンペールの力})$$

- 電場 $\boldsymbol{E}$、磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の内部で運動する粒子に作用する力

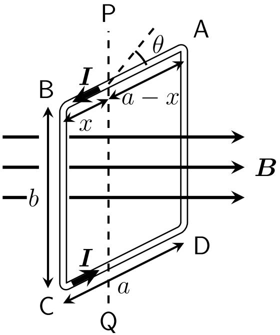
$$\boxed{\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})} \qquad (\text{ローレンツ力})$$

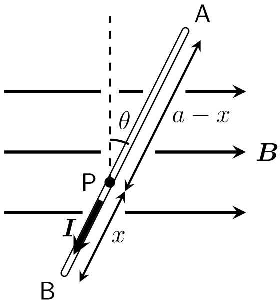
- 電磁場中で運動する荷電粒子に関するニュートン方程式

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})}$$

前回の小テストの解説

一様磁場 $\boldsymbol{B}$ 中に置かれた横の長さ a、縦の長さ b の長方形コイル ABCD が、辺 BC から距離 x $(0 < x < a)$ だけ離れた軸 PQ の周りに回転できるようになっている。このコイルに下図の定常電流が流れているとき、コイルに作用する力のモーメントを求めよ。





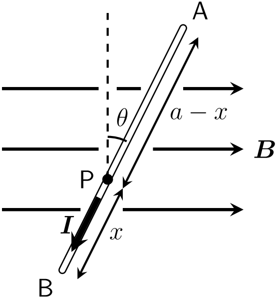
前回の小テストの解説(続き)

辺 BC に作用する力のモーメント

$$N_{\mathrm{BC}} = IBb\sin\theta \times x$$

辺 DA に作用する力のモーメント

$$N_{\mathrm{DA}} = IBb\sin\theta \times (a - x)$$



コイル全体に作用する力のモーメント

$$N = N_{\mathrm{BC}} + N_{\mathrm{DA}} = IBab\sin\theta$$

x は任意なので N は軸 PQ の位置に依らない

分子電流

- 磁性の起源は微小な円形電流 (分子電流)
  - 分子電流が z 軸上に作る磁束密度

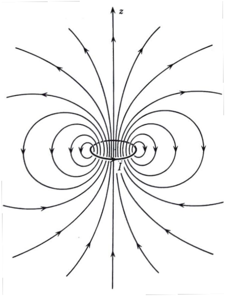
$$B(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}} \simeq \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3} \qquad (z \gg a)$$

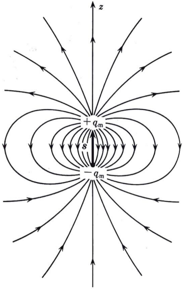
ここで a は分子電流の半径

  - 磁気双極子が z 軸上に作る磁束密度

$$B(z) = \frac{q_\mathrm{m}}{4\pi}\left[\frac{1}{(z-s/2)^2} - \frac{1}{(z+s/2)^2}\right] \simeq \frac{q_\mathrm{m} s}{2\pi z^3} \qquad (z \gg s)$$

ここで s は双極子の長さ

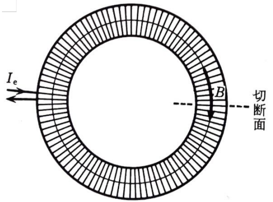


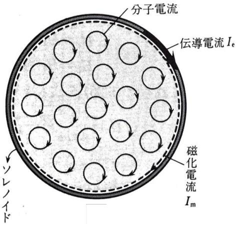


$\pi\mu_0 I a^2 = q_\mathrm{m} s$ のとき分子電流と磁気双極子が作る磁場は同じ

磁化電流

- ドーナツ形の鉄芯を持つソレノイド
- 電流 I_e を流す前
  - 鉄内部の分子電流の方向は乱雑
  - 分子電流の平均はゼロ
- 電流 I_e を流した後
  - 磁場 B で鉄内部の分子電流の軸が揃う
  - 内部の隣接した分子電流は相殺
  - 表面の分子電流を磁化電流 I_m と呼ぶ
- 鉄芯の効果
  - 伝導電流 I_e に加えて磁化電流 I_m も磁束密度を生じる
  - ソレノイドの内部が中空のときと比較して約 1 万倍の磁束密度





物質中の磁場

- 物質中の磁束密度は伝導電流 I_e と磁化電流 I_m の寄与の和
- アンペールの法則の修正

$$\int_{C_0} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 (I_\mathrm{e} + I_\mathrm{m})$$

- 磁化電流 I_m が作る磁束密度を磁化ベクトル $\boldsymbol{J}$ と呼ぶ

$$\int_{C_0} \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 I_\mathrm{m}$$

  磁化を生じる物質を磁性体と呼ぶ
- 物質の応答を除いたアンペールの法則

$$\int_{C_0} (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{J}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 I_\mathrm{e}$$

真空中の磁場 $\boldsymbol{H}$

- 物質の応答を除いた真空中の磁場として磁場の強さ $\boldsymbol{H}$ を導入

$$\mu_0 \boldsymbol{H} \equiv \boldsymbol{B} - \boldsymbol{J}$$

- 物質中でも成立するアンペールの法則

$$\boxed{\int_{C_0} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = I_{\mathrm{e}}}$$

  - I_{e} は C_0 で囲まれる曲面を貫く伝導電流 (磁化電流は含まない)
  - $\boldsymbol{H}$ の単位は $\mathrm{A/m}$

- 物質中でも磁束線はループ状なのでガウスの法則は成立

$$\boxed{\int_{S_0} B_n \mathrm{d}S = 0} \qquad (\boldsymbol{B} \equiv \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{J})$$

物質中の静電磁場の基本法則

	静電場	静磁場
力線の発生源	真電荷 Q_{e} が存在	磁荷 Q_{m} は不在
面積分に関する法則	ガウスの法則 $\int_{S_0} D_n \mathrm{d}S = Q_{\mathrm{e}}$	ガウスの法則 $\int_{S_0} B_n \mathrm{d}S = 0$
線積分に関する法則	(名無しの法則) $\int_{C_0} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$	アンペールの法則 $\int_{C_0} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = I_{\mathrm{e}}$
物質の応答	$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{B} = \varepsilon_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{J}$

- $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ は物質の応答 (分極 $\boldsymbol{P}$、磁化 $\boldsymbol{J}$) を含まない
- $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}$ は物質の応答を含む
- $Q_{\mathrm{e}}, I_{\mathrm{e}}$ は物質の応答 (分極電荷 ρ_{p}、磁化電流 I_{m}) を含まない

磁性体の性質

- 多くの場合、磁化は磁場に比例

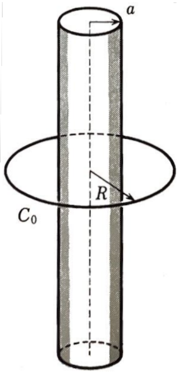
$$\boldsymbol{J} \simeq \chi_{\mathrm{m}} \boldsymbol{H} \qquad (\chi_{\mathrm{m}}\text{を磁化率と呼ぶ})$$

  - 常磁性体: $0 < \chi_{\mathrm{m}}/\mu_0 \ll 1$
  - 強磁性体: $\chi_{\mathrm{m}}/\mu_0 \gg 1$
  - 反磁性体: $\chi_{\mathrm{m}}/\mu_0 < 0$
- このとき磁束密度も磁場に比例

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &\equiv \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{J} \\ &\simeq (\mu_0 + \chi_{\mathrm{m}}) \boldsymbol{H} \\ &\equiv \mu \boldsymbol{H} \qquad (\mu \equiv \mu_0 + \chi_{\mathrm{m}}\text{を透磁率と呼ぶ}) \end{aligned}$$

例: 円柱状の磁性体を流れる電流が作る磁場

- 透磁率 μ、半径 a の円柱状磁性体
- 定常かつ一様な伝導電流 I_e
- 軸上の点を中心とし、軸に垂直な半径 R の円周 C_0 にアンペールの法則を適用すると



$$\int_{C_0} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 2\pi R H(R) = \begin{cases} \left(\dfrac{R}{a}\right)^2 I_\mathrm{e} & (R < a) \\ I_\mathrm{e} & (R > a) \end{cases}$$

$$\therefore H(R) = \begin{cases} \dfrac{I_\mathrm{e} R}{2\pi a^2} & (R < a) \\ \dfrac{I_\mathrm{e}}{2\pi R} & (R > a) \end{cases}, \quad B(R) = \begin{cases} \dfrac{\mu I_\mathrm{e} R}{2\pi a^2} & (R < a) \\ \dfrac{\mu_0 I_\mathrm{e}}{2\pi R} & (R > a) \end{cases}$$

時間的に変動する電磁場

- 静的な (時間的に変動しない) 電磁場に関するガウスの法則

$$\int_{S_0} D_n \mathrm{d}S = Q_\mathrm{e}, \qquad \int_{S_0} B_n \mathrm{d}S = 0$$

- S_0 内の電荷が時間的に変化すれば、S_0 を貫く電束線も変動

$$\boxed{\int_{S_0} D_n(t)\mathrm{d}S = Q_\mathrm{e}(t)} \qquad (S_0 \text{ 上の電束線の総和は電荷に比例})$$

- S_0 を貫く磁束線が変動しても、ループ状であることは不変

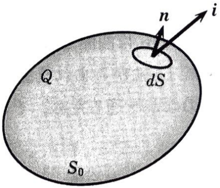
$$\boxed{\int_{S_0} B_n(t)\mathrm{d}S = 0} \qquad (S_0 \text{ 上の磁束線の出入りは相殺})$$

時間的に変動する電磁場に対してもガウスの法則はそのまま成立

$$\updownarrow$$

線積分に関する法則は修正が必要

電荷保存則



- 電流が時間的に変化しないとき

$$\int_{S_0} i_n \mathrm{d}S = 0 \qquad \text{(定常電流の保存則)}$$

  - S_0 を貫く電流の流入量と流出量は相殺し、S_0 内の電荷は一定

- 電流が時間的に変化するとき

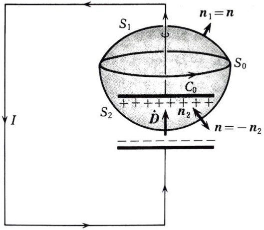
$$\boxed{\int_{S_0} i_n(t) \mathrm{d}S = -\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t}} \qquad \text{(定常電流の保存則)}$$

  - S_0 を貫く電流の流入量と流出量が相殺せず、S_0 内の電荷が変化
  - 電流密度 i は単位時間当りに単位面積を通過する電荷量で定義

変位電流

- コンデンサーの正極と負極をつなぐ
- 閉曲線 C_0 に関するアンペールの法則
  - 電流 I が貫く曲面 S_1 に注目すると

$$\int_{C_0} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{S_1} i_{n_1} \mathrm{d}S = I$$



  - 電流が流れない極板間の曲面 S_2 に注目すると

$$\int_{C_0} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{S_2} i_{n_2} \mathrm{d}S = 0 \qquad \text{(上式と矛盾!)}$$

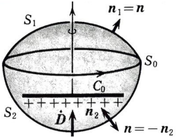
  - 矛盾を回避するために S_2 では次式を仮定

$$\int_{C_0} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{S_2} D_{n_2} \mathrm{d}S$$

右辺を変位電流と呼ぶ

変位電流の計算

- 変位電流が I に等しいことの確認



$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_2} D_{n_2}\mathrm{d}S \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{S_2} D_{n_2}\mathrm{d}S - \int_{S_1} D_{n_1}\mathrm{d}S\right] && (\because S_1 \text{ 上で } D = 0) \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{S_2} D_{n}\mathrm{d}S + \int_{S_1} D_{n}\mathrm{d}S\right] && (\because S_2 \text{ 上で } \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{n}_2) \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_0} D_{n}\mathrm{d}S && (\because S_0 = S_1 + S_2) \\
&= -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} && (\because \text{ガウスの法則}) \\
&= I && (\because \text{電流保存則})
\end{aligned}
$$

アンペール・マクスウェルの法則

- 微分と積分の順序の入れ替え

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S D_n(x,y,z,t)\mathrm{d}S \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\int_S D_n(x,y,z,t)\mathrm{d}S \qquad (\because \text{積分} \textstyle\int \cdots \mathrm{d}S \text{ は } t \text{ のみの関数}) \\
&= \int_S \frac{\partial D_n(x,y,z,t)}{\partial t}\mathrm{d}S \qquad (\text{時間 } t \text{ のみの偏微分})
\end{aligned}
$$

- 一般に伝導電流と変位電流が曲面 S を貫くとき

$$
\int_{C_0} \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_S \left(i_n + \frac{\partial D_n}{\partial t} \right) \mathrm{d}S
$$

演習

電圧 $V(t) = V_0 \sin \omega t$ が印加されているとき極板間の電束密度は

$$D = \varepsilon E = \varepsilon \frac{V}{d} = \frac{\varepsilon V_0}{d} \sin \omega t$$

極板間の変位電流は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S D_n \mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} DS = \omega \varepsilon \frac{S}{d} V_0 \cos \omega t = \omega C V_0 \cos \omega t$$

極板上の電荷 $Q = CV$ の時間変化は

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = C \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \omega C V_0 \cos \omega t$$

よって変位電流はコンデンサーから流出する電流に等しい