物理学B 第3回

静電ポテンシャル

濱本 雄治[1]

情報工学部 情報通信工学科

2025年10月8日

[1]hamamoto@c.oka-pu.ac.jp https://yhmmt.github.io/pages/

前回の復習: ガウスの法則

- S_0 の内部に電荷 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_N$、外部に電荷 $q_\alpha, q_\beta, \cdots, q_\sigma$
- これらの電荷が作る電場

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^{(1)} + \boldsymbol{E}^{(2)} + \cdots + \boldsymbol{E}^{(N)} + \boldsymbol{E}^{(\alpha)} + \boldsymbol{E}^{(\beta)} + \cdots + \boldsymbol{E}^{(\sigma)}$$

- S_0 上で法線成分を面積分

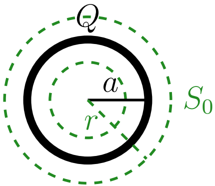
$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = \int_{S_0} E_n^{(1)} \mathrm{d}S + \int_{S_0} E_n^{(2)} \mathrm{d}S + \cdots + \int_{S_0} E_n^{(N)} \mathrm{d}S$$
$$+ \underbrace{\int_{S_0} E_n^{(\alpha)} \mathrm{d}S}_{=0} + \underbrace{\int_{S_0} E_n^{(\beta)} \mathrm{d}S}_{=0} + \cdots + \underbrace{\int_{S_0} E_n^{(\sigma)} \mathrm{d}S}_{=0}$$
$$= \frac{1}{\varepsilon_0}(Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_N)$$

S_0 上での電場の法線成分の面積分は S_0 に含まれる電荷に比例

前回の小テストの解説

半径 a の中空の球殻上に電荷 Q が一様に分布しているとき、球殻の内部および外部における電場の大きさと向きを求めよ。

半径 r の球面状の閉曲面を S_0 とする。
球対称性から電場は閉曲面に垂直である。



ガウスの法則より、$r < a$ のとき

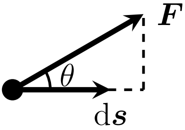
$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = 4\pi r^2 E(r) = 0, \qquad E(r < a) = 0$$

$r > a$ のとき

$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \qquad E(r > a) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

仕事

- 物体に作用する力 $\boldsymbol{F}$
- 力による物体の微小変位 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$



- $\boldsymbol{F}$ と $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ のなす角が θ のとき、$\boldsymbol{F}$ の $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 方向の成分が仕事に寄与

$$\mathrm{d}W = |\boldsymbol{F}| \cos\theta \times |\mathrm{d}\boldsymbol{s}| = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

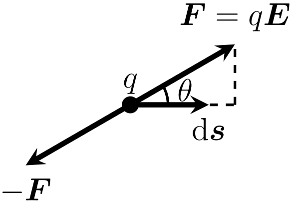
- 物体が経路 C に沿って移動するとき、$\boldsymbol{F}$ が物体になす仕事

$$W = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

このような積分を線積分と呼ぶ

電荷に対する仕事

- 固定した点電荷 Q が作る静電場 $\boldsymbol{E}$
- $\boldsymbol{E}$ が点電荷 q に作用する力 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$
- クーロン力と外力 $-\boldsymbol{F}$ がほぼ釣り合った状態で、q をゆっくり移動



- q が微小量 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ だけ移動したとき、クーロン力が q になす仕事

$$\mathrm{d}W = q\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

- q が経路 C に沿って点 A から点 B まで移動したときの仕事

$$W = q \int_{\mathrm{A},C}^{B} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

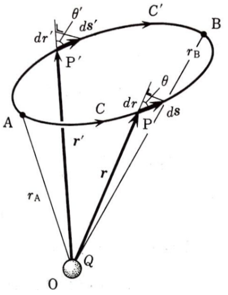
線積分の計算

- Q の位置から測った観測点 P の位置 $\boldsymbol{r}$
- P における電場

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \equiv f(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r} \qquad \left(f(r) \equiv \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)$$

- 微小変位 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ の $\boldsymbol{r}$ 方向の成分

$$\mathrm{d}s\cos\theta \equiv \mathrm{d}r$$



- $\boldsymbol{E}$ と $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ の内積

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = f(r)\frac{\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{r} = f(r)\frac{r\mathrm{d}s\cos\theta}{r} = f(r)\mathrm{d}r$$

$\boldsymbol{r}$ の長さ r のみで表せた ($\boldsymbol{E}$ や $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ の方向に依らない)

静電ポテンシャル

- 1 変数 r に関する積分

$$\int_{\mathrm{A},C}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{r_\mathrm{A}}^{r_\mathrm{B}} f(r)\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_\mathrm{A}}^{r_\mathrm{B}} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_\mathrm{A}} - \frac{1}{r_\mathrm{B}}\right)$$

  積分値は Q からの距離 $r_\mathrm{A}, r_\mathrm{B}$ だけで決まり、経路 C に依らない

- Q から測った位置 $\boldsymbol{r}$ だけで決まる関数

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}$$

  を静電ポテンシャル (電位) と呼ぶ

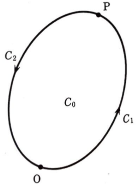
$$\int_{\mathrm{A},C}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \phi(\boldsymbol{r}_\mathrm{A}) - \phi(\boldsymbol{r}_\mathrm{B}), \qquad W = q[\phi(\boldsymbol{r}_\mathrm{A}) - \phi(\boldsymbol{r}_\mathrm{B})]$$

- 電位の単位は $\mathrm{V} = \mathrm{J/C}$

閉経路上の線積分

- 閉経路 C_0 を経路 C_1, C_2 に分割

$$\int_{C_0} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{\mathrm{O},C_1}^{\mathrm{P}} + \int_{\mathrm{P},C_2}^{\mathrm{O}}$$



- 静電ポテンシャルが存在すると

$$\int_{\mathrm{O},C_1}^{\mathrm{P}} = \phi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{O}}) - \phi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}), \qquad \int_{\mathrm{P},C_2}^{\mathrm{O}} = \phi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}) - \phi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{O}}),$$

$$\therefore \boxed{\int_{C_0} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0}$$

閉経路上の静電場の線積分はゼロ

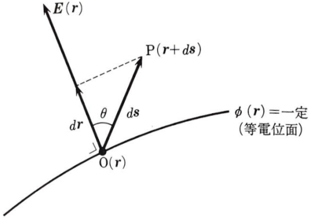
- 逆に、上式が成り立つと $\displaystyle\int_{\mathrm{O},C_1}^{\mathrm{P}} + \int_{\mathrm{P},C_2}^{\mathrm{O}} = 0, \quad \therefore \int_{\mathrm{O},C_1}^{\mathrm{P}} = \int_{\mathrm{O},C_2}^{\mathrm{P}}$

  つまり経路に依らないポテンシャル ϕ が存在

等電位面

- 原点から点 P までの線積分

$$\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{P}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \phi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{O}}) - \phi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}})$$



- O の位置を $\boldsymbol{r}$ とする
- P の位置を O から微小ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ だけ離れた $\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ とする

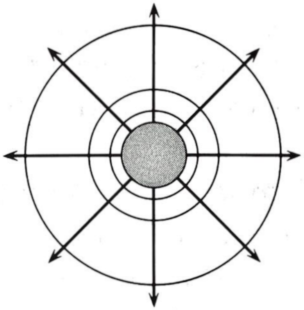
$$\phi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}) = \phi(\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{s}) \simeq \underbrace{\phi(\boldsymbol{r})}_{=\phi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{O}})} + \mathrm{d}\phi(\boldsymbol{r}), \qquad \therefore \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\mathrm{d}\phi(\boldsymbol{r})$$

- O と P が等電位 $\phi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}) - \phi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{O}}) = \mathrm{d}\phi(\boldsymbol{r}) = 0$ のとき

$$\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0, \qquad \therefore \text{等電位面と電場 } \boldsymbol{E} \text{ は直交}$$

等電位面の例

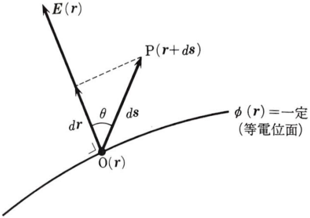
- 帯電した導体球の周りの等電位面



  - 等電位面は導体球と中心が同じ球面状
  - 等電位面の間隔の狭いところほど電場が強い

静電ポテンシャルと電場の関係

- $\boldsymbol{E}$ の $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 方向の成分を E_s とすると



$$\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = E\mathrm{d}s\cos\theta = E_s\mathrm{d}s = -\mathrm{d}\phi,$$

$$\therefore E_s \equiv E\cos\theta = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}$$

- $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ の $\boldsymbol{E} \propto \boldsymbol{r}$ 方向の成分を $\mathrm{d}r$ とすると

$$\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = E\mathrm{d}s\cos\theta = E\mathrm{d}r = -\mathrm{d}\phi,$$

$$\therefore E = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} \qquad \text{(電場の大きさ)}$$

  - 電位 ϕ の微分の符号を反転 $\rightarrow$ 電場 $\boldsymbol{E}$
  - 電場 $\boldsymbol{E}$ の積分の符号を反転 $\rightarrow$ 電位 ϕ

例 1: 帯電した導体球の静電ポテンシャル

- 電荷 Q は半径 a の導体球表面に一様に分布
- 半径 r の球面状の閉曲面 S_0
- 電場は S_0 に垂直で r のみの関数
- ガウスの法則から

$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = \underbrace{4\pi r^2}_{S_0\text{の表面積}} E(r) = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & (r > a) \end{cases}$$

$$\therefore E(r) = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > a) \end{cases}$$

例 1: 帯電した導体球の静電ポテンシャル

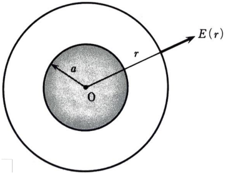
- 電場を r で積分して符号を反転すると

$$\phi(r) = -\int E(r)\mathrm{d}r = \begin{cases} C_1 & (r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2 & (r > a) \end{cases}$$

- 無限遠方 $r \to \infty$ で $\phi(\infty) = 0$ とすると $C_2 = 0$
- 導体表面上 $r = a$ で ϕ が連続とすると $C_1 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} + C_2$
- 以上から

$$\phi(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} & (r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & (r > a) \end{cases}$$

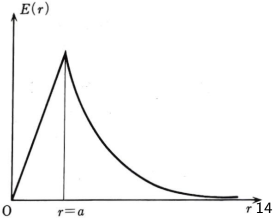
例 2: 一様に帯電した球の静電ポテンシャル



- 電荷 Q は半径 a の球の内部に一様に分布
- 半径 r の球面状の閉曲面 S_0
- 電場は S_0 に垂直で r のみの関数
- ガウスの法則から

$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = \underbrace{4\pi r^2}_{S_0\text{の表面積}} E(r) = \begin{cases} \left(\dfrac{r}{a}\right)^3 \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & (r < a) \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & (r > a) \end{cases}$$

$$\therefore E(r) = \begin{cases} \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} & (r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > a) \end{cases}$$



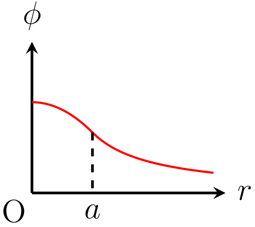
例 2: 一様に帯電した球の静電ポテンシャル

- 電場を r で積分して符号を反転すると

$$\phi(r) = -\int E(r)\mathrm{d}r = \begin{cases} -\dfrac{Qr^2}{8\pi\varepsilon_0 a^3} + C_1 & (r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2 & (r > a) \end{cases}$$

- 無限遠方 $r \to \infty$ で $\phi(\infty) = 0$ とすると $C_2 = 0$
- 球面上で ϕ が連続とすると $-\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a} + C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}, \quad \therefore C_1 = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 a}$
- 以上から

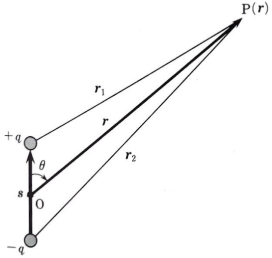
$$\phi(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}\left[3 - \left(\dfrac{r}{a}\right)^2\right] & (r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & (r > a) \end{cases}$$



電気双極子の静電ポテンシャル

- 正負電荷 $\pm q$ の対を電気双極子と呼ぶ
  - 負電荷から正電荷への長さベクトル $\boldsymbol{s}$
  - 電気双極子モーメント $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{s}$
- 観測点 P における静電ポテンシャル

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$



余弦定理から

$$r_1{}^2 = r^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 - 2r\frac{s}{2}\cos\theta, \qquad \therefore r_1 = \sqrt{r^2 + (s/2)^2 - rs\cos\theta},$$

$$r_2{}^2 = r^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 - 2r\frac{s}{2}\cos(\pi-\theta), \quad \therefore r_2 = \sqrt{r^2 + (s/2)^2 + rs\cos\theta}$$

双極子の中心を原点とする極座標 (r, θ) を用いていることに注意

遠方での近似

- 平方根から r を括り出す

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{s}{r}\cos\theta + \left(\frac{s}{2r}\right)^2\right]^{-1/2}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\left[1 + \frac{s}{r}\cos\theta + \left(\frac{s}{2r}\right)^2\right]^{-1/2}$$

- 遠方で $\dfrac{s}{r} \ll 1$ なので、$(1 \pm x)^{-1/2} \simeq 1 \mp \dfrac{x}{2}$ $(|x| \ll 1)$ を用いると

$$\frac{1}{r_1} \simeq \frac{1}{r}\left[1 - \frac{s}{r}\cos\theta + \cancel{\left(\frac{s}{2r}\right)^2}\right]^{-1/2} \simeq \frac{1}{r}\left(1 + \frac{s}{2r}\cos\theta\right),$$

$$\frac{1}{r_2} \simeq \frac{1}{r}\left[1 + \frac{s}{r}\cos\theta + \cancel{\left(\frac{s}{2r}\right)^2}\right]^{-1/2} \simeq \frac{1}{r}\left(1 - \frac{s}{2r}\cos\theta\right),$$

$$\therefore \boxed{\phi(\boldsymbol{r})} \simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\left(\cancel{1} + \frac{s}{2r}\cos\theta\right) - \frac{1}{r}\left(\cancel{1} - \frac{s}{2r}\cos\theta\right)\right] = \boxed{\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

ここで $p \equiv qs$ は双極子モーメントの大きさ

補足: 極座標系での微分

- 直交座標から極座標への変換

$$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{e}}_x + y\hat{\boldsymbol{e}}_y, \qquad x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

- 半径 r 方向の単位ベクトル

$$\hat{\boldsymbol{e}}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{x}{r}\hat{\boldsymbol{e}}_x + \frac{y}{r}\hat{\boldsymbol{e}}_y = \cos\theta\hat{\boldsymbol{e}}_x + \sin\theta\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

- 角度 θ 方向の単位ベクトル

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta} = \frac{1}{r}(-r\sin\theta\hat{\boldsymbol{e}}_x + r\cos\theta\hat{\boldsymbol{e}}_y) = -\sin\theta\hat{\boldsymbol{e}}_x + \cos\theta\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

補足: 極座標系での微分

- 極座標から直交座標への変換

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

- 両辺を x で偏微分

$$2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x, \qquad \therefore \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta,$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \qquad \therefore \frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\cos^2\theta = -\frac{\sin\theta}{r}$$

- 両辺を y で偏微分

$$2r\frac{\partial r}{\partial y} = 2y, \qquad \therefore \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta,$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{1}{x}, \qquad \therefore \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos^2\theta}{x} = \frac{\cos\theta}{r}$$

補足: 極座標系での微分

- chain rules

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}
\end{aligned}
$$

- 微分演算子

$$
\begin{aligned}
\nabla &\equiv \hat{\boldsymbol{e}}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{e}}_y\frac{\partial}{\partial y} \\
&= \hat{\boldsymbol{e}}_x\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \hat{\boldsymbol{e}}_y\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \\
&= (\hat{\boldsymbol{e}}_x\cos\theta + \hat{\boldsymbol{e}}_y\sin\theta)\frac{\partial}{\partial r} + (-\hat{\boldsymbol{e}}_x\sin\theta + \hat{\boldsymbol{e}}_y\sin\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\
&= \boxed{\hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{e}}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}}
\end{aligned}
$$

r 方向の微分は $\dfrac{\partial}{\partial r}$、$\theta$ 方向の微分は $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}$

電気双極子の静電場

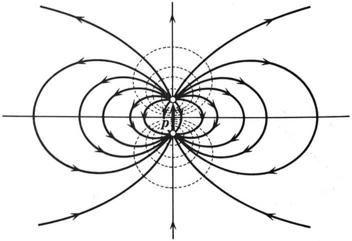
- 電気双極子の静電ポテンシャル

$$\phi(\boldsymbol{r}) \simeq \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (p = qs)$$

- r, θ 方向で微分して符号を反転すると、静電場は

$$E_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3},$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3}$$



演習 1: 直線状電荷の静電ポテンシャル

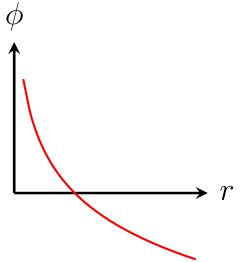
- 無限に長い直線上に電荷が線密度 λ で一様に分布
- 高さ h、半径 r の円筒状の閉曲面 S_0
- E は S_0 の側面に垂直で r のみの関数なので、ガウスの法則から

$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = \underbrace{2\pi r h}_{S_0\text{の側面積}} E(r) = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}, \qquad \therefore E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

- 電場を r で積分して符号を反転すると

$$\phi(r) = -\int E(r)\mathrm{d}r = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log r + C$$

積分定数 C は境界条件を基に決める



演習 2: 平面状電荷の静電ポテンシャル

- 無限に広い平面上に電荷が面密度 ω で一様に分布
- 平面状電荷を貫く高さ h、底面積 ΔS の円筒状の閉曲面 S_0
- E は S_0 の底面に垂直で h のみの関数なので、ガウスの法則から

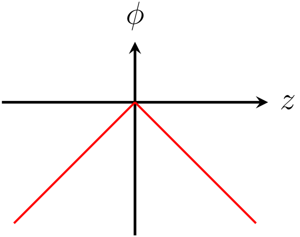
$$\int_{\mathrm{S}_0} E_n \mathrm{d}S = \underbrace{2\Delta S}_{S_0\text{の上下の底面積}} E = \frac{\omega \Delta S}{\varepsilon_0}, \qquad \therefore E = \frac{\omega}{2\varepsilon_0}$$

- 平面より上側 $z > 0$ のとき

$$\phi(z) = -\int E \mathrm{d}z = -\frac{\omega z}{2\varepsilon_0} + C_1$$

- 平面より下側 $z < 0$ のとき

$$\phi(z) = -\int (-E) \mathrm{d}z = \frac{\omega z}{2\varepsilon_0} + C_2$$



平面上 $z = 0$ で $\phi(0) = 0$ とすると $\phi(z) = -\dfrac{\omega |z|}{2\varepsilon_0}$