



# 物理学 B 第 4 回

## コンデンサー、静電場のエネルギー

濱本 雄治<sup>1</sup>

情報工学部 情報通信工学科

2025 年 10 月 20 日、22 日

---

<sup>1</sup>[hamamoto@c.oka-pu.ac.jp](mailto:hamamoto@c.oka-pu.ac.jp) <https://yhmmt.github.io/pages/>

# 前回の復習: 静電ポテンシャル



▶ ベクトル場  $F$  に対して次の 1, 2 は等価

1. 任意の閉曲線  $C_0$  に沿った線積分がゼロ

$$\int_{C_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

2. 積分経路に依らないポテンシャル関数が存在

$$f(\mathbf{r}) = - \int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

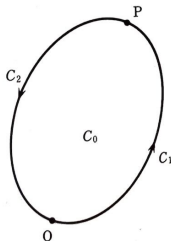
▶ 点電荷が作る静電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$  (の重ね合わせ) は 1. を満足

▶ 静電ポテンシャル (電位)

$$\phi(\mathbf{r}) = - \int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \equiv -\nabla \phi$$



## 前回の小テストの解説



半径  $a$  の中空の球殻上に電荷  $Q$  が一様に分布しているとき、球殻の内部および外部における静電ポテンシャルを求めよ。ただし無限遠方における静電ポテンシャルを  $\phi(\infty) = 0$  とする。前々回の

小テストから球殻の内外の電場は、球殻の中心から測った位置ベクトル  $\boldsymbol{r}$  に平行で  $r \equiv |\boldsymbol{r}|$  のみの関数

$$E(r) = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r > a) \end{cases},$$

$$\therefore \phi(r) = - \int E(r) dr = \begin{cases} C_1 & (r < a) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C_2 & (r > a) \end{cases}$$

## 前回の小テストの解説 (続き)



無限遠方で  $\phi(\infty) = 0$  とすると

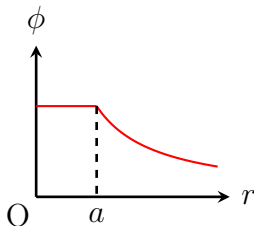
$$\phi(r > a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C_2 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 + C_2 = 0, \quad \therefore C_2 = 0$$

$r = a$  で静電ポテンシャルが連続とすると

$$\phi(r \rightarrow a - 0) = \phi(r \rightarrow a + 0), \quad \therefore C_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

以上から

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} & (r < a) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & (r > a) \end{cases}$$

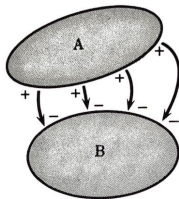


帯電した導体球の電場、静電ポテンシャルと等価

# コンデンサー



- ▶ 次のような系を**コンデンサー**と呼ぶ
  - ▷ 2つの導体が近接
  - ▷ それぞれ当量の正負の電荷を持つ
  - ▷ 電気力線は導体間のみに存在
- ▶ 導体の電荷  $\pm Q$  は導体間の電位差  $V$  に比例



$$Q = CV$$

比例係数  $C$  を**静電容量** (電気容量) と呼ぶ

- ▶ 電位差を 1 V 上昇させるのに必要な電気量が 1 C のとき  
コンデンサーの静電容量を 1 F と定義

# 補足：電荷と電位差の比例関係



- ▶ 導体が占める領域  $\Omega$  の外部における電位は

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dV' \\ & + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} \left[ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial\phi(\mathbf{r}')}{\partial n'} + \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \phi(\mathbf{r}') \right] dS'\end{aligned}$$

ここでグリーン関数  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  は次の微分方程式の解

$$\nabla'^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \left( \nabla'^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

- ▶  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  に  $\nabla'^2 H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$  を満たす  $H(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  を加えてもよい
- ▶ 境界  $\partial\Omega$  上で  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$  を課することをディレクレ条件と呼ぶ

# 補足: 電荷と電位差の比例関係 (続き)



- ▶ ディリクレ条件の下で導体外部における電位は

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \phi(\mathbf{r}') dS'$$

- ▶  $\Omega$  を導体 A, B の領域  $\Omega_A, \Omega_B$  に分割すると

- ▶ 導体内部に電荷は存在しない  $\rho(\mathbf{r}' \in \Omega_{A,B}) = 0$
- ▶ 導体表面は等電位  $\phi(\mathbf{r}' \in \partial\Omega_{A,B}) = \phi_{A,B}$

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{j=A,B} \frac{\phi_j}{4\pi} \oint_{\partial\Omega_j} \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} dS'$$

- ▶ 導体  $i$  の表面の電荷密度は電場の法線成分に比例

$$\omega_i(\mathbf{r}) = \epsilon_0 E_n = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\epsilon_0}{4\pi} \sum_{j=A,B} \phi_j \oint_{\partial\Omega_j} \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'} dS'$$

# 補足：電荷と電位差の比例関係 (続き)



- ▶ 導体  $i$  の電荷の総量

$$\begin{aligned} Q_i &= \int_{\partial\Omega_i} \omega_i(\mathbf{r}) dS = -\frac{\varepsilon_0}{4\pi} \sum_{j=A,B} \phi_j \oint_{\partial\Omega_i} \oint_{\partial\Omega_j} \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'} dS dS' \\ &= \sum_{j=A,B} C_{ij} \phi_j \quad \left( C_{ij} \equiv -\frac{\varepsilon_0}{4\pi} \oint_{\partial\Omega_i} \oint_{\partial\Omega_j} \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'} dS dS' = C_{ji} \right) \end{aligned}$$

- ▶  $Q_A = -Q_B \equiv Q$ 、 $\phi_A = -\phi_B \equiv \frac{V}{2}$  と書くと

$$Q = C_{AA} \frac{V}{2} + C_{AB} \left( -\frac{V}{2} \right) = \frac{C_{AA} - C_{AB}}{2} V \equiv CV$$

よって電荷  $Q$  は電位差  $V = \phi_A - \phi_B$  に比例



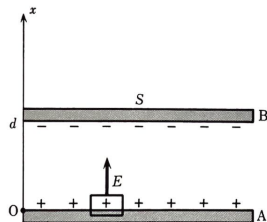
# 例 1: 平行板コンデンサー



## ▶ 極板間の電場 (復習)

- ▷ 静電誘導により電荷は内側に分布
- ▷ 極板上の一様な電荷面密度  $\omega = Q/S$
- ▷ 電極 A の表面を貫く筒状の閉曲面  $S_0$

$$\int_{S_0} E_n dS = E \Delta S = \frac{\omega \Delta S}{\epsilon_0}, \quad \therefore E = \frac{\omega}{\epsilon_0}$$



## ▶ 極板間の静電ポテンシャル

$$\phi(x) = - \int E dx = - \frac{\omega}{\epsilon_0} x + \text{const.}$$

## ▶ 極板間の電位差と静電容量

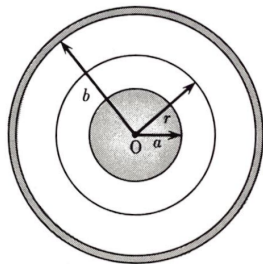
$$V = \phi(0) - \phi(d) = \frac{\omega d}{\epsilon_0} = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}, \quad \therefore C = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

## 例2: 球形コンデンサー



### ▶ 導体球と導体球殻の間の電場 (復習)

- ▶ 導体球と導体球殻の半径  $a, b (> a)$
- ▶ 導体球表面に電荷  $Q$  が一様に分布
- ▶ 半径  $r$  ( $a < r < b$ ) の球面状閉曲面  $S_0$



$$\int_{S_0} E_n dS = 4\pi r E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad \therefore E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

### ▶ 導体球と導体球殻の間の静電ポテンシャル

$$\phi(r) = - \int E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{const.}$$

### ▶ 導体球と導体球殻の間の電位差と静電容量

$$V = \phi(a) - \phi(b) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right), \quad \therefore C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b - a}$$

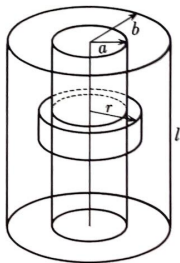
## 例3: 円筒形コンデンサー



### ▶ 2つの中空の円筒形導体の間の電場

- ▷ 内側と外側の円筒形導体の半径  $a, b (> a)$
- ▷ 内側の円筒に沿って一様な電荷線密度  $\lambda = \frac{Q}{\ell}$
- ▷ 半径  $r$  ( $a < r < b$ )、高さ  $h$  の円筒状閉曲面  $S_0$

$$\int_{S_0} E_n dS = 2\pi r h E(r) = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}, \quad \therefore E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$



### ▶ 内側と外側の円筒形導体間の静電ポテンシャル

$$\phi(r) = - \int E(r) dr = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log r + \text{const.}$$

### ▶ 内側と外側の円筒形導体間の電位と静電容量

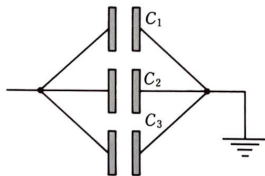
$$V = \phi(a) - \phi(b) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{b}{a} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 \ell} \log \frac{b}{a}, \quad \therefore C = \frac{2\pi\epsilon_0 \ell}{\log(b/a)}$$

# コンデンサーの並列接続



## ▶ 3つのコンデンサーを並列接続した系

- ▶ それぞれの電気量  $Q_1, Q_2, Q_3$
- ▶ それぞれの静電容量  $C_1, C_2, C_3$
- ▶ 等しい電圧 ( $\equiv V$ ) がかけるので



$$Q_1 = C_1 V, \quad Q_2 = C_2 V, \quad Q_3 = C_3 V$$

## ▶ 総電気量

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)V$$

## ▶ 総静電容量

$$C = \frac{Q}{V} = C_1 + C_2 + C_3 \quad (> C_1, C_2, C_3)$$

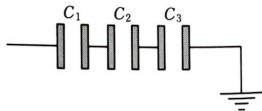
並列接続で静電容量は増加

# コンデンサーの直列接続



## ▶ 3つのコンデンサーを並列接続した系

- ▶ それぞれの静電容量  $C_1, C_2, C_3$
- ▶ それぞれの電圧  $V_1, V_2, V_3$
- ▶ 等しい電荷 ( $\equiv Q$ ) が誘導されるので



$$Q = C_1 V_1 = C_2 V_2 = C_3 V_3$$

## ▶ 総電圧

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) Q$$

## ▶ 総静電容量

$$C = \frac{Q}{V} = \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)^{-1} \quad (< C_1, C_2, C_3)$$

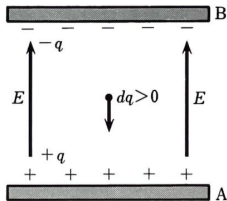
並列接続で静電容量は減少

# コンデンサーの静電エネルギー



## ▶ 平行板コンデンサー

- ▶ 電極 A, B に正負の電荷  $\pm q$
- ▶ 電極に垂直な一様な電場  $E$
- ▶ 電極間の電位差  $V = \phi(A) - \phi(B) = \frac{q}{C}$



- ▶ 微小電荷  $dq > 0$  を B 極から A 極に移動させるのに必要な仕事

$$dW = Vdq = \frac{q}{C}dq$$

- ▶ 両極を  $\pm Q$  帯電させる間に蓄えられる**静電エネルギー**

$$U_e = \int dW = \frac{1}{C} \int_0^Q qdq = \frac{1}{C} \left[ \frac{q^2}{2} \right]_0^Q = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2$$

$U_e$  は電荷  $\pm Q$  が持つ位置エネルギーと解釈できる

# コンデンサーの静電場のエネルギー



▶  $U_e = \frac{Q^2}{2C}$  を両極間の静電場  $E$  の観点から書き直す

▷ 電極表面の電荷面密度

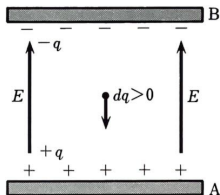
$$\omega = \frac{Q}{S} = \varepsilon_0 E, \quad \therefore Q = \varepsilon_0 S E$$

▷ 平板コンデンサーの静電容量

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

▷  $U_e$  から  $Q, C$  を消去すると

$$U_e = \frac{(\varepsilon_0 S E)^2}{2\varepsilon_0 \frac{S}{d}} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 S d \equiv \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 v = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_v E^2 dv$$



$U_e$  は電極間の体積  $v \equiv Sd$  内の静電場のエネルギーと解釈できる



# 多電荷系の静電エネルギー

- ▶  $i$  番目以外の電荷が位置  $\mathbf{r}$  に作る静電ポテンシャル

$$\phi_{\neq i}(\mathbf{r}) = \sum_{j(\neq i)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}$$

- ▶ 全電荷間の静電エネルギー

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi_{\neq i}(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j(\neq i)} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

係数  $\frac{1}{2}$  は電荷対の重複を防ぐために必要

- ▶  $i = j$  の場合 (自己エネルギー =  $\infty$ ) を含めると

$$U_e \simeq \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$



# 多電荷系の静電場のエネルギー



## ▶ 恒等式

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} dv$$

を用いて静電エネルギーを変形すると

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} dv \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int \left( \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \right) \cdot \left( \sum_j \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} \right) dv \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E}^2 dv \end{aligned}$$

クーロン力による位置エネルギー = 静電場のエネルギー  
(静電エネルギー)

# 点電荷の自己エネルギー



- ▶ 静電場のエネルギーに含めた点電荷の自己エネルギー ( $i = j$ )

$$\begin{aligned} U_{\text{self}} &= \frac{1}{2} \sum_i \frac{q_i^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i|} = \frac{1}{2} \sum_i \frac{q_i^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} dv \\ &= \sum_i \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E}_i^2 dv \quad \left( \mathbf{E}_i \equiv \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \right) \end{aligned}$$

- ▶ 積分を実行すると

$$\begin{aligned} U_{\text{self}} &= \sum_i \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int_0^\infty \frac{4\pi R_i^2 dR_i}{R_i^4} \quad (R_i \equiv |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|) \\ &= \sum_i \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 4\pi \left[ -\frac{1}{R_i^2} \right]_0^\infty = \infty \end{aligned}$$

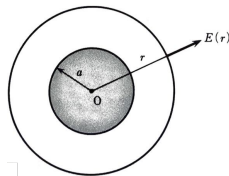
点電荷は有限の大きさを持つ or 極めて短い距離で理論が破綻

# 球状電荷の静電場のエネルギー



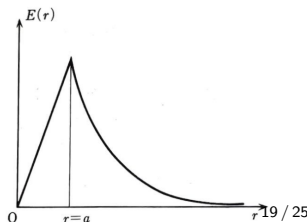
## ▶ 球状の電荷が作る電場 (復習)

- ▶ 電荷  $Q$  は半径  $a$  の球の内部に一様に分布
- ▶ 半径  $r$  の球面状の閉曲面  $S_0$
- ▶ 電場は  $S_0$  に垂直で  $r$  のみの関数
- ▶ ガウスの法則から



$$\int_{S_0} E_n dS = \underbrace{4\pi r^2}_{S_0 \text{ の表面積}} E(r) = \begin{cases} \left(\frac{r}{a}\right)^3 \frac{Q}{\varepsilon_0} & (r < a) \\ \frac{Q}{\varepsilon_0} & (r > a) \end{cases}$$

$$\therefore E(r) = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} & (r < a) \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > a) \end{cases}$$



# 球状電荷の静電場のエネルギー (続き)



## ▶ 静電場のエネルギー

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2 dv \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int_0^a \left( \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \right)^2 \underbrace{4\pi r^2 dr}_{dv} + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_a^\infty \left( \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 \underbrace{4\pi r^2 dr}_{dv} \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left( \int_0^a \frac{r^4}{a^6} dr + \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} \right) \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left( \left[ \frac{r^5}{5a^6} \right]_0^a - \left[ \frac{1}{r} \right]_a^\infty \right) \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{5a} + \frac{1}{a} \right) \\ &= \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} \end{aligned}$$

# 補足: 球座標系での体積積分



## ▶ 球座標系

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

## ▶ ヤコビアン

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

▶ 体積要素  $dv = \det J \, dr d\theta d\varphi = r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\varphi$

▶  $r$  のみの関数の体積積分

$$\int f(r) dv = \int_0^\infty f(r) r^2 dr \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta}_2 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} = \int_0^\infty f(r) \underbrace{4\pi r^2 dr}_{dv}$$

# 補足: 円柱座標系での体積積分



## ▶ 球座標系

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z$$

## ▶ ヤコビアンとその行列式

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## ▶ 体積要素 $dv = \det J \, dr d\varphi dz = r \, dr d\varphi dz$

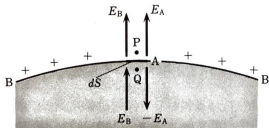
## ▶ $r$ のみの関数の体積積分

$$\int f(r) dv = \int_0^\infty f(r) r \, dr \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^h dz}_h = \int_0^\infty f(r) \underbrace{2\pi r h \, dr}_{dv}$$



# 導体表面に作用する力

- ▶ 表面の微小部分 A の面積を  $dS$  とする
- ▶ 微小部分 A の電荷  $\omega dS$  が
  - ▷ 真上の点 P に作る電場は  $E_A$
  - ▷ 真下の点 Q に作る電場は  $-E_A$  (上下対称に電場が発生)
- ▶ 残りの部分 B の電荷が
  - ▷ 点 P に作る電場は  $E_B$
  - ▷ 点 Q に作る電場も  $E_B$  (PQ 間は近いので電場は連続)
- ▶ 導体内の電場は相殺するので  $-E_A + E_B = 0 \quad \therefore E_A = E_B$
- ▶ 導体外の点 P での全電場  $E = E_A + E_B = 2E_B \quad \therefore E_B = E/2$
- ▶ B の電荷が作る電場  $E_B$  が A の微小電荷  $\omega dS$  に作用する力



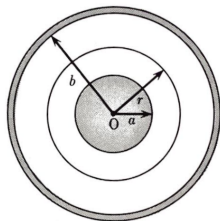
$$dF = \omega dS E_B = \varepsilon_0 E dS \frac{1}{2} E = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 dS$$

導体表面の張力は静電場のエネルギー密度  $u = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2$  に等しい

# 演習 1: 球形コンデンサーの静電場のエネ... ㊟

- ▶ 半径  $a$  の導体球と半径  $b(> a)$  の導体球殻
- ▶ 導体球と導体球殻の間の静電場

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



- ▶ 導体球と導体球殻の間の静電場のエネルギー

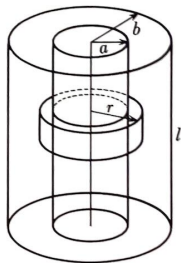
$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^b \{E(r)\}^2 \underbrace{4\pi r^2 dr}_{dv} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$



## 演習 2: 円筒形コンデンサーの静電場のエネ...

- ▶ 半径  $a$  および  $b(>a)$  の円筒形導体
- ▶ 円筒形導体間の静電場

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$



- ▶ 円筒形導体間の長さ  $h$  の部分の静電場のエネルギー

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^b \{E(r)\}^2 \underbrace{2\pi r h dr}_{dv} = \frac{\lambda^2 h}{2\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\lambda^2 h}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{b}{a}$$

- ▶ 単位長さ当りの静電場のエネルギー

$$u_e \equiv \frac{U_e}{h} = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{b}{a}$$