



物理学 B 第 6 回

オームの法則、ジュールの法則、キルヒホッフの法則

濱本 雄治¹

情報工学部 情報通信工学科

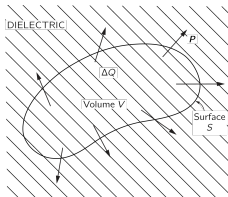
2025 年 11 月 5 日、6 日

¹hamamoto@c.oka-pu.ac.jp

前回の復習：誘電体



- ▶ P が一様でない誘電体内部の閉曲面 S_0
 - ▷ S_0 内部では正負電荷が相殺
 - ▷ S_0 上の P の接線成分も正負電荷が相殺
 - ▷ S_0 上の P の法線成分が分極電荷に寄与
 - ▷ S_0 上の分極電荷を Q_p とすると



$$Q_p = - \int_{S_0} P_n dS \quad (\text{負符号は分極電荷と真電荷が逆だから})$$

- ▶ 真電荷 Q_e と分極電荷 Q_p が作る電場はガウスの法則から

$$\int_{S_0} E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} (Q_e + Q_p) \quad \therefore \int_{S_0} (\epsilon_0 E_n + P_n) dS = Q_e$$

真電荷 Q_e が作る場 $D \equiv \epsilon_0 E + P$ を電束密度 (電気変位) と呼ぶ

前回の復習：静電場を規定する法則



1. 電束密度 D に対するガウスの法則

$$\int_{S_0} D_n dS = Q_e \quad (S_0 \text{ は任意の閉曲面})$$

ここで $D \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \simeq \varepsilon \mathbf{E}$

2. 静電場が $\mathbf{E} = E(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$ と書けることに由来する (名無しの) 法則

$$\int_{C_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (C_0 \text{ は任意の閉曲線})$$

あるいは

$$\phi(\mathbf{r}) = - \int^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

\Leftrightarrow

$$E(r) = - \frac{d\phi}{dr}$$

前回の小テストの解説



電荷 Q が内部に一様に分布した半径 a の球状電荷が半径 $b(>a)$ 、誘電率 ε の誘電体球の中心に埋め込まれている。各領域における静電場の大きさと方向を求めよ。

球状電荷と中心が同じ半径 r の閉曲面を S_0 とすると、電束密度は r のみの関数で S_0 に垂直、かつ境界面上で連続なので

$$\int_{S_0} D_n dS = 4\pi r^2 D(r) = \begin{cases} \left(\frac{r}{a}\right)^3 Q & (0 < r < a) \\ Q & (r > a) \end{cases},$$
$$\therefore D(r) = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi a^3} & (0 < r < a) \\ \frac{Q}{4\pi r^2} & (r > a) \end{cases}$$

前回の小テストの解説 (続き)



球状電荷は分極しないので誘電率は ε_0 である。 $r > a$ では $r = b$ で誘電率が ε から ε_0 に変化するので、電場は

$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon(r)} = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} & (0 < r < a) \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} & (a < r < b) \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > b) \end{cases}$$

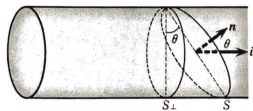
電場の向きは閉曲面 S_0 に垂直な方向

電流密度



▶ 電流 I

- ▷ 強さ: 断面を単位時間当り通過する電荷
- ▷ 向き: 正電荷の流れる方向 (電子と逆)
- ▷ 単位: $A = C/s$



▶ 電流密度 i

- ▷ 単位面積の断面を垂直に通過する電荷 (平行な成分は通過しない)
- ▷ 任意の断面 S と導線を垂直に切った断面 S_{\perp} のなす角を θ とすると

$$i = \frac{I}{S_{\perp}} = \frac{I}{S \cos \theta}, \quad I = Si \cos \theta = S \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = Si_n$$

- ▷ 断面が曲面のときは面積 dS を通過する電流 $dI = i_n dS$ を積分して

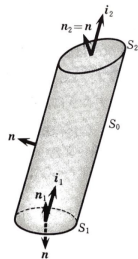
$$I = \int_S dI = \int_S i_n dS$$

定常電流の保存則



- ▶ 時間的に変化しない電流を**定常電流**と呼ぶ
- ▶ 導線を通過する定常電流の値は断面に依らない
 - ▷ 断面 S_1, S_2 を通過する電流を I_1, I_2 とすると

$$I_1 = I_2, \quad \therefore \int_{S_1} i_{n_1} dS = \int_{S_2} i_{n_2} dS$$

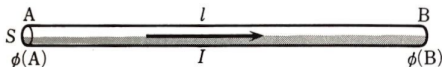


- ▷ S_1, S_2 および側面からなる閉曲面 S_0
- ▷ S_0 に外向きに立てた法線ベクトルを n とすると

$$\begin{aligned} i_{n_1} &= \mathbf{i} \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{i} \cdot (-\mathbf{n}) = -i_n, & i_{n_2} &= \mathbf{i} \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} = i_n, \\ - \int_{S_1} i_n dS &= \int_{S_2} i_n dS, & \therefore \int_{S_1+S_2} i_n dS &= 0 \end{aligned}$$

- ▷ 側面上では $i_n = 0$ なので $\int_{S_0} i_n dS = 0$ (**定常電流の保存則**)

一様な導線中のオームの法則



- ▶ 導線中の2点間を流れる電流は2点間の電位差に比例

$$I = \frac{\phi(A) - \phi(B)}{R} = \frac{V}{R} \quad (\text{オームの法則})$$

- ▶ (電気) 抵抗 R の単位は $\Omega = \text{V/A}$
- ▶ R は2点間の長さ ℓ に比例し、導線の垂直断面積 S に反比例

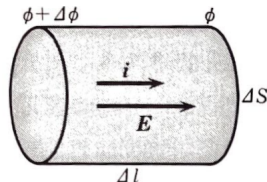
$$R = \rho \frac{\ell}{S}$$

- ▶ 比例係数 ρ を抵抗率と呼び、単位は Ω/m
- ▶ 抵抗率の逆数 $\sigma = \rho^{-1}$ を電気伝導率と呼ぶ

微小領域でのオームの法則



- ▶ 断面積 ΔS 、長さ $\Delta \ell$ の微小な導線
- ▶ オームの法則から



$$\begin{aligned} i\Delta S &= \frac{\Delta\phi}{\Delta R} \quad \left(\Delta R = \rho \frac{\Delta\ell}{\Delta S} \right) \\ &= \frac{\Delta\phi}{\frac{\Delta\ell}{\rho\Delta S}} = \rho^{-1} \frac{\Delta\phi}{\Delta\ell} \Delta S = \sigma E \Delta S \end{aligned}$$

$$\therefore i = \sigma E$$

- ▶ ベクトル形式で表すと、任意の位置 \boldsymbol{r} におけるオームの法則は

$$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}) = \sigma \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

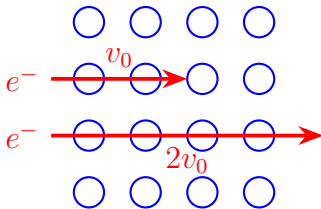


オームの法則の電子論

▶ 電子の運動からオームの法則を導く

- ▷ 電子は電場 E により加速
- ▷ 電子は原子との衝突により減速
- ▷ 原子との衝突頻度は電子速度 v に比例

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} - \frac{m}{\tau} \mathbf{v} \quad (\tau \text{は緩和時間})$$



- ▷ 加速力と減速力が釣り合ったとき

$$e\mathbf{E} - \frac{m}{\tau} \mathbf{v} = 0, \quad \therefore \mathbf{v} = \frac{e\tau}{m} \mathbf{E}$$

- ▶ 単位体積当りの電子数を n とすると、電流密度と抵抗率は

$$\mathbf{i} = en\mathbf{v} = \frac{ne^2\tau}{m} \mathbf{E} \equiv \rho^{-1} \mathbf{E}, \quad \therefore \rho = \frac{m}{ne^2\tau}$$

ジュールの法則



- ▶ 高電位の A から低電位の B に移動する電荷 q が外部にする仕事

$$W = q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = q[\phi(A) - \phi(B)] = qV \quad [V \equiv \phi(A) - \phi(B)]$$

- ▶ 強さ I の電流が単位時間当り外部にする仕事を仕事率と呼ぶ

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dq}{dt}V = IV = RI^2 = \frac{V^2}{R} \quad (\text{ジュールの法則})$$

電子が原子に衝突して発生する熱をジュール熱と呼ぶ

- ▶ 断面積 ΔS 、長さ $\Delta \ell$ の領域を考えると単位体積当りの仕事率は

$$\begin{cases} W = w\Delta S\Delta \ell \\ I = i\Delta S \\ V = \Delta \phi \end{cases} \quad \text{から} \quad \frac{dw}{dt} = i \frac{\Delta \phi}{\Delta \ell} = iE = \mathbf{i} \cdot \mathbf{E}$$

抵抗の温度依存性



▶ 導体の抵抗の主な原因は熱的な原子振動

- ▷ 原子振動の振幅を u とすると

$$R \propto \langle u^2 \rangle \propto kT \quad (\text{抵抗は絶対温度 } T \text{ に比例})$$

- ▷ 摂氏温度を t [$^{\circ}\text{C}$] で表し、 $t = 0^{\circ}\text{C}$ での抵抗を R_0 とすると

$$R = R_0 \left(1 + \frac{t}{273.15} \right) = R_0(1 + \alpha t)$$

- ▷ $\alpha = 1/273.15 = 3.6 \times 10^{-3} \text{ deg}^{-1}$ を抵抗の温度係数と呼ぶ

▶ 実際の導体で温度係数が $\alpha = 1/273.15$ からずれる要因

- ▷ 格子欠陥 → 0 K でも抵抗が残る (残留抵抗)
- ▷ 超伝導転移 → ある温度以下で抵抗ゼロ
- ▷ 磁性不純物 → ある温度で抵抗極小、それ以下で増加

非オーム性 ($I \propto V$ からのずれ)



- ▶ 温度 T の物体から単位時間当り放出される電磁波のエネルギー

$$\mathcal{I}(\nu) = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (\text{プランクの公式})$$

- ▶ 電球に電圧 V をかけたときに発生するジュール熱

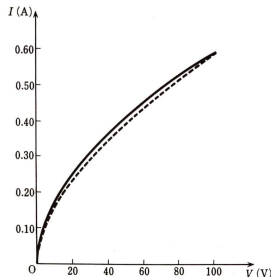
$$\frac{V^2}{R} \simeq \int \mathcal{I}(\nu) d\nu = \sigma T^4 \quad (\text{ステファン-ボルツマンの法則})$$

- ▶ $R = kT$ を用いると

$$\frac{V^2}{kT} = \sigma T^4, \quad \therefore T \propto V^{2/5},$$

$$I = \frac{V}{R} = \frac{V}{kT} \propto \frac{V}{V^{2/5}} \propto V^{3/5}$$

I - V 曲線の実測値 (実線) とよく一致

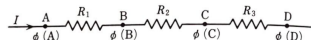


抵抗の直列接続



▶ 3つの抵抗を直列接続した系

- ▶ それぞれの抵抗 R_1, R_2, R_3
- ▶ 点 A, ..., D の電位 $\phi(A), \dots, \phi(D)$
- ▶ 各抵抗に流れる電流 I は等しい



$$\phi(A) - \phi(B) = R_1 I, \quad \phi(B) - \phi(C) = R_2 I, \quad \phi(C) - \phi(D) = R_3 I$$

▶ A-D 間の電圧

$$V = \phi(A) - \phi(D) = (R_1 + R_2 + R_3)I$$

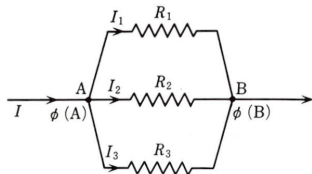
▶ 直列接続の場合の合成抵抗

$$R = \frac{V}{I} = R_1 + R_2 + R_3$$

抵抗の並列接続



- ▶ 3つの抵抗を並列接続した系
 - ▷ それぞれの抵抗 R_1, R_2, R_3
 - ▷ それぞれの電流 I_1, I_2, I_3
 - ▷ 各抵抗にかかる電圧 V は等しい



$$V = \phi(A) - \phi(B) = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3$$

- ▶ A-B 間の電流

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) V$$

- ▶ 並列接続の場合の合成抵抗

$$R = \frac{V}{I} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1} \quad (\text{逆数の和の逆数})$$

コンデンサーと直列・並列の関係が逆であることに注意

起電力



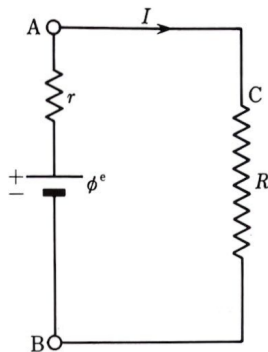
- ▶ 電源が単位電荷にする仕事 ϕ^e を起電力と呼ぶ
- ▶ 抵抗 R を電流 I が流れるときの電圧降下 RI
- ▶ 電源の内部抵抗 r も考慮すると

$$\phi^e = (R + r)I$$

- ▶ 電源の端子電圧

$$V = RI = \phi^e - rI$$

は電流 I とともに減少



キルヒホッフの法則

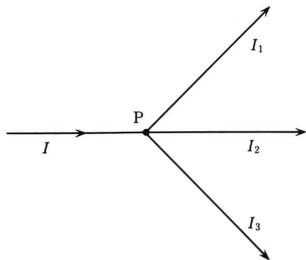


第一法則

回路の任意の分岐点に流入する電流を正、流出する電流を負とすると、その分岐点に出入りする電流の総和はゼロ

- ▶ 点 P に電流 I が流入
- ▶ 点 P から I_1, I_2, I_3 に分かれて流出

$$I - I_1 - I_2 - I_3 = 0$$



キルヒホッフの法則



第二法則

回路の一部の閉回路で電流をある方向に流す起電力を正、反対方向に流す起電力を負とすると、その閉経路に含まれる起電力の総和は電圧降下の総和に等しい

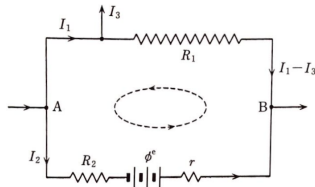
- ▶ 上と下の枝路それぞれについて

$$\phi(A) - \phi(B) = R_1(I_1 - I_3),$$

$$\phi(A) - \phi(B) + \phi^e = (R_2 + r)I_2$$

- ▶ $\phi(A) - \phi(B)$ を消去すると

$$\phi^e = (R_2 + r)I_2 - R_1(I_1 - I_3)$$



例: ホイートストン・ブリッジ

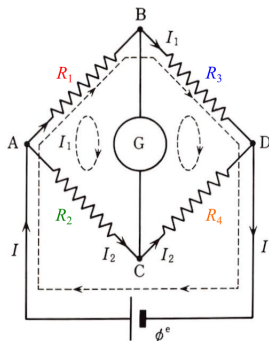


▶ 抵抗と電源、検流計からなる回路

- ▷ 既知の抵抗 R_1 , R_2 と可変抵抗 R_3
- ▷ 未知の抵抗 R_4 ← 求めたい
- ▷ 検流計を流れる電流はゼロ

▶ 上の2つの閉回路で第二法則から

$$\begin{cases} R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 \\ R_3 I_1 - R_4 I_2 = 0 \end{cases} \quad \therefore R_4 = \frac{R_2}{R_1} R_3$$



▶ 残りの閉回路で第一、第二法則を使うと

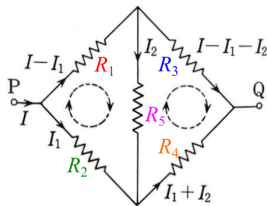
$$\begin{aligned} \phi^e &= (R_1 + R_3) I_1, & I &= I_1 + I_2, \\ I_1 &= \frac{\phi^e}{R_1 + R_3}, & I_2 &= \frac{R_1}{R_2} I_1, & \therefore I &= I_1 + I_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_3} \frac{\phi^e}{R_2} \end{aligned}$$

演習：複数の抵抗からなる系の合成抵抗



$$R_1 = 2\ \Omega, \quad R_2 = 4\ \Omega, \quad R_3 = 4\ \Omega, \quad R_4 = 2\ \Omega, \quad R_5 = 1\ \Omega$$

$$\begin{cases} R_1(I - I_1) + R_5 I_2 - R_2 I_1 = 0 \\ R_3(I - I_1 - I_2) - R_4(I_1 + I_2) - R_5 I_2 = 0 \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} 6I_1 - I_2 = 2I \\ 6I_1 + 7I_2 = 4I \end{cases}$$



$$I_1, I_2 \text{ について解くと } I_1 = \frac{3}{8}I, \quad I_2 = \frac{1}{4}I$$

PQ 間の電位差は

$$V = 4I_1 + 2(I_1 + I_2) = \frac{11}{4}I$$

PQ 間の合成抵抗は

$$R = \frac{V}{I} = \frac{11}{4}\ \Omega$$