



数値計算法 第12回

関数近似 (3)

濱本 雄治¹

情報工学部 情報通信工学科

2025 年 7 月 7 日

¹hamamoto@c.oka-pu.ac.jp

復習: Lagrange 補間



- ▶ 2点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ を通る一次多項式

$$y = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

- ▶ 3点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る二次多項式

$$y = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

- ▶ $n + 1$ 点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ を通る n 次多項式

$$y = \sum_{i=0}^n y_i \frac{L_i(x)}{L_i(x_i)} = y_0 \frac{L_0(x)}{L_0(x_0)} + y_1 \frac{L_1(x)}{L_1(x_1)} + \dots + y_n \frac{L_n(x)}{L_n(x_n)},$$

ただし $L_i(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_{i-1}) \cancel{(x - x_i)} (x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)$

前回の小テストの解説

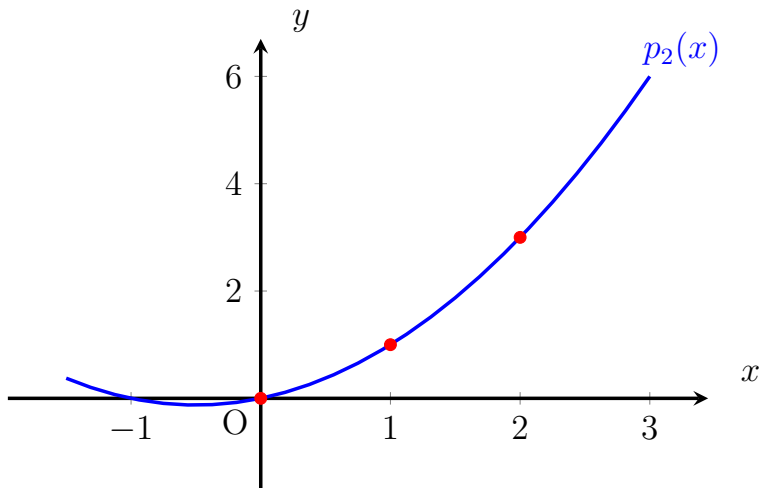


データ点 $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 3)$ を通る関数 $y = f(x)$ を二次式で近似するとき、2 次の Lagrange 補間多項式 $p_2(x)$ を求めよ。ただし括弧は展開して同類項をまとめること。

$(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(x_1, y_1) = (1, 1)$, $(x_2, y_2) = (2, 3)$ とすると

$$\begin{aligned} p_2(x) &= y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= 0 + 1 \frac{(x - 0)(x - 2)}{(1 - 0)(1 - 2)} + 3 \frac{(x - 0)(x - 1)}{(2 - 0)(2 - 1)} \\ &= -x^2 + 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

Lagrange 補間多項式の可視化



Newton 補間の考え方



- ▶ 補間点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$ の追加とともに補間多項式の次数を上げる

$$2 \text{ 点を通過} \rightarrow p_1(x) = y_0 + m_1(x - x_0)$$

$$3 \text{ 点を通過} \rightarrow p_2(x) = p_1(x) + m_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$4 \text{ 点を通過} \rightarrow p_3(x) = p_2(x) + m_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\vdots$$

- ▶ $n + 1$ 個の点を通る n 次補間多項式は一意に決まるので、Newton 補間は Lagrange 補間と同じ補間多項式を与える



1 次の Newton 補間

- ▶ 異なる 2 点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ を通る一次多項式

$$p_1(x) = y_0 + \underbrace{m_1(x - x_0)}_{x=x_0 \text{ で消える}} \quad (1 \text{ 次の Newton 補間多項式})$$

- ▶ $x = x_0$ のとき

$$p_1(x_0) = y_0$$

であるから、 $y = p_1(x)$ は (x_0, y_0) を通過

- ▶ m_1 は $y = p_1(x)$ が (x_1, y_1) を通過する条件から決まる:

$$y_1 = y_0 + m_1(x_1 - x_0),$$

$$\therefore m_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \equiv \textcolor{red}{f[x_0, x_1]} \quad (= f[x_1, x_0]) \quad (\textcolor{red}{1 \text{ 次の差分商}})$$

差分商の書き換え



▶ n 次多項式

$$L_i^n(x) = \frac{1}{x - x_i} \prod_{j=0}^n (x - x_j) \quad (0 \leq i \leq n),$$

を定義すると

$$L_0^1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{x - x_0} = x - x_1, \quad L_1^1(x) = \cdots = x - x_0$$

▶ Lagrange 基底を用いて 1 次の差分商を書き直すと

$$f[x_0, x_1] = \frac{y_0}{x_0 - x_1} + \frac{y_1}{x_1 - x_0} = \sum_{i=0}^1 \frac{y_i}{L_i^1(x_i)}$$

▶ $L_0^0(x) = 1$ であるから $y_0 = \sum_{i=0}^0 \frac{y_i}{L_0^0(x_i)} \equiv f[x_0]$ (0 次の差分商)

2 次の Newton 補間



- ▶ 異なる 3 点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る二次多項式
- ▶ 1 次の Newton 補間多項式に 2 次の項を追加

$$p_2(x) = p_1(x) + \underbrace{m_2(x - x_0)(x - x_1)}_{x=x_0, x_1 \text{ で消える}} \quad (2 \text{ 次の Newton 補間多項式})$$

$$= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + m_2(x - x_0)(x - x_1)$$

- ▶ $x = x_0, x_1$ のとき

$$p_2(x_0) = p_1(x_0) = y_0, \quad p_2(x_1) = p_1(x_1) = y_1$$

であるから $y = p_2(x)$ は $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ を通過

- ▶ m_2 は $y = p_2(x)$ が (x_2, y_2) を通過する条件から決まる



- ▶ 補間点を x_1, x_0, x_2 の順に追加したと考えると

$$p_2'(x) = f[x_1] + \underbrace{f[x_1, x_0]}_{=f[x_0, x_1]}(x - x_1) + m_2'(x - x_1)(x - x_0)$$

- ▶ 補間点を x_1, x_2, x_0 の順に追加したと考えると

$$p_2''(x) = f[x_1] + f[x_1, x_2](x - x_1) + m_2''(x - x_1)(x - x_2)$$

- ▶ 補間多項式は補間点を追加する順序に依らないので

$$p_2(x) = p_2'(x) = p_2''(x)$$

- ▶ p_2, p_2', p_2'' で x^2 の係数は等しいので

$$m_2 = m_2' = m_2''$$

2 次の差分商



- ▶ $p_2'(x) = p_2''(x)$ として $x - x_1$ を消去すると

$$m_2 = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2} \equiv f[x_0, x_1, x_2] \quad (2 \text{ 次の差分商})$$

- ▶ 1 次の差分商を用いて書き直すと

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{\frac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_1} - \frac{f[x_1] - f[x_2]}{x_1 - x_2}}{x_0 - x_2} \\ &= \frac{f[x_0]}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \cdots \\ &= \sum_{i=0}^2 \frac{y_i}{L_i^2(x_i)} \end{aligned}$$

0~2 次の Newton 補間のまとめ



- ▶ 1 点 (x_0, y_0) を通る 0 次 Newton 補間多項式

$$p_0(x) = m_0 \quad \left(m_0 = f[x_0] \equiv y_0 = \sum_{i=0}^0 \frac{y_i}{L_i^0(x_i)} \right)$$

- ▶ 2 点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ を通る 1 次 Newton 補間多項式

$$p_1(x) = m_0 + m_1(x - x_0) \quad \left(m_1 = f[x_0, x_1] \equiv \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \sum_{i=0}^1 \frac{y_i}{L_i^1(x_i)} \right)$$

- ▶ 3 点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る 2 次 Newton 補間多項式

$$p_2(x) = m_0 + m_1(x - x_0) + m_2(x - x_0)(x - x_1) \\ \left(m_2 = f[x_0, x_1, x_2] \equiv \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_1 - x_0} = \sum_{i=0}^2 \frac{y_i}{L_i^2(x_i)} \right)$$

和の形から、差分商は補間点を追加する順序に依らない



n 次の Newton 補間への一般化

- ▶ $n + 1$ 点 $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ を通る n 次の Newton 補間多項式

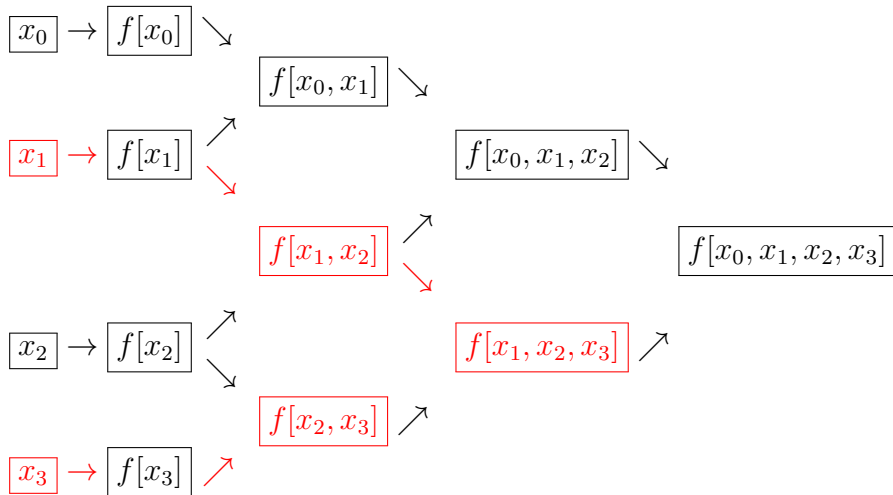
$$\begin{aligned} p_2(x) = m_0 + m_1(x - x_0) + m_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ \dots + m_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

- ▶ k 次の差分商は漸化式

$$\begin{aligned} m_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k] &= \sum_{i=0}^k \frac{y_i}{L_i^k(x_i)} \\ &= \frac{\overbrace{f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}^{x_k \text{ 以外の差分商}} - \overbrace{f[x_1, \dots, x_{k-1}, x_k]}^{x_0 \text{ 以外の差分商}}}{x_0 - x_k} \end{aligned}$$

を用いて逐次的に求める

差分表

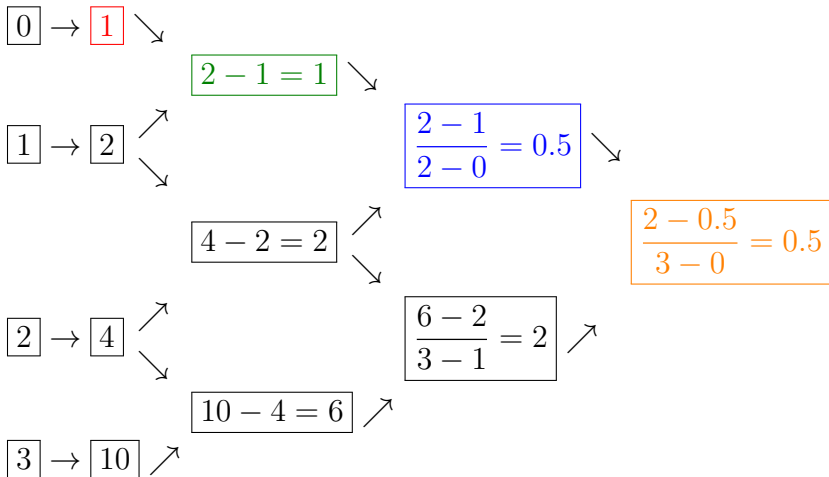


▶ 例えば $f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_2, x_3]}{x_1 - x_3}$

Newton 補間の例



- ▶ 4 点 $(0, 1), (1, 2), (2, 4), (3, 10)$ を通る 3 次の補間多項式の差分表



- ▶ $p_3(x) = 1 + 1(x - 0) + 0.5(x - 0)(x - 1) + 0.5(x - 0)(x - 1)(x - 2)$

Newton 補間の計算



- ▶ 括弧を展開せず入れ子構造にすることで計算量を削減

$$\begin{aligned} p_n(x) &= m_0 + m_1(x - x_0) + m_2(x - x_0)(x - x_1) + m_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots \\ &= m_0 + (x - x_0)[m_1 + (x - x_1)[m_2 + (x - x_2)\underbrace{[m_3 + \cdots]}_{(1)}]] \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{(2)} \\ &\quad \underbrace{\hspace{15em}}_{(3)} \\ &\quad \underbrace{\hspace{20em}}_{(4)} \end{aligned}$$

- ▶ $n = 3$ のときの計算手順

- (1) $S_3 = m_3$
- (2) $S_2 = m_2 + (x - x_2)S_3$
- (3) $S_1 = m_1 + (x - x_1)S_2$
- (4) $p_3(x) = m_0 + (x - x_0)S_1$