物理学B 第14回

過渡現象と交流回路

濱本 雄治[1]

情報工学部 情報通信工学科

2025年1月21日、26日

[1]hamamoto@c.oka-pu.ac.jp

https://yhmmt.github.io/pages/

前回の復習: 準定常電流

- 導体中でゆっくり変動する電磁場
  - 電気伝導率 $\sigma \sim 10^8\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$
  - 誘電率 $\varepsilon \sim 10\varepsilon_0 \sim 10^{-10}\ \mathrm{F/m}$
  - 伝導電流と変位電流の比

$$\frac{|\boldsymbol{i}_\mathrm{D}|_\mathrm{max}}{|\boldsymbol{i}_\mathrm{e}|_\mathrm{max}} = \frac{\varepsilon\omega}{\sigma} \sim 10^{-18}\omega\ [\mathrm{s}^{-1}]$$

- アンペール・マクスウェル法則をアンペールの法則で近似

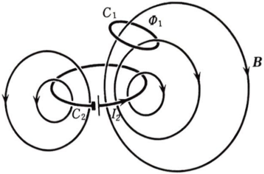
$$\int_{C_0} \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \simeq I_\mathrm{e} \qquad \text{(磁場は伝導電流の寄与が支配的)}$$

- ファラデーの法則はそのまま成立

$$\phi^{\mathrm{e.m.}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \qquad \left(\Phi = \int_S B_n \mathrm{d}S\right)$$

前回の復習: インダクタンス

- C_1, C_2 を貫く磁束



$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M_{12} I_2,$$

$$\Phi_2 = M_{21} I_1 + L_2 I_2$$

  - L_1, L_2: C_1, C_2 の自己インダクタンス
  - $M_{12} = M_{21}$: C_1 と C_2 の間の相互インダクタンス

- C_1, C_2 に発生する誘導起電力

$$\phi_1^{\mathrm{e.m.}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} = -L_1 \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} - M_{12} \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t},$$
$$\phi_2^{\mathrm{e.m.}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} = -M_{21} \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} - L_2 \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$$

前回の小テストの解説

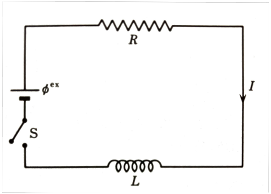
断面積 $S = 1\ \mathrm{m}^2$ で無限に長い円柱状の磁性体に巻数 $n = 10\ \mathrm{m}^{-1}$ でコイルを巻いた無限長ソレノイドを考える。この磁性体の磁化率を $\chi_\mathrm{m} = 1$ (or μ_0) とするとき、単位長さ当たりの自己インダクタンスを求めよ。ただし真空の透磁率を $\mu_0 = 1 \times 10^{-6}$ [H/m] とする。

$\chi_\mathrm{m} = 1$ (or μ_0) のとき $\mu = \mu_0(1 + \chi_\mathrm{m})$ (or $\mu_0 + \chi_\mathrm{m}$) $= 2\mu_0$ なので

$$\begin{aligned} \frac{L}{\ell} &= \mu n^2 S = 2 \times 1 \times 10^{-6} \times 10^2 \times 1 \\ &= 2 \times 10^{-4}\ [\mathrm{H/m}] \end{aligned}$$

RL 回路を流れる電流

- RL 回路
  - 起電力 ϕ^{ex} の電源
  - 抵抗 R
  - 自己インダクタンス L のコイル



- 時刻 $t = 0$ でスイッチ S を閉じる
  - 電流 I が流れると磁束の変化を妨げる誘導起電力が発生

$$\phi^{\mathrm{e.m.}} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(時計回りが正)}$$

  - 回路を流れる電流 I を決定する方程式

$$RI = \phi^{\mathrm{ex}} + \phi^{\mathrm{e.m.}}, \qquad \therefore\ \underbrace{L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI}_{I\text{ に関して線形}} = \underbrace{\phi^{\mathrm{ex}}}_{t\text{ の関数}}$$

上式のような微分方程式を線形非斉次方程式と呼ぶ。

線形非斉次方程式

解法

線形非斉次方程式

$$L[y] \equiv \left(C_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} + C_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + C_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + C_0 \right) y(t) = f(t)$$

の一般解は、特解と斉次方程式 $L[y] = 0$ の一般解の和

特解 y_p が求まったとき、任意の解 y に対して差 $y - y_p$ を考えると

$$\begin{aligned} L[y - y_p] &= L[y] - L[y_p] \qquad (\because L \text{ は線形演算子}) \\ &= f(t) - f(t) = 0 \end{aligned}$$

つまり差 $y - y_p$ は斉次方程式の解なので、非斉次方程式の解 y は特解 y_p と斉次方程式の解の和である

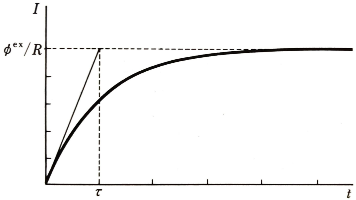
過渡現象

- 非斉次方程式の特解
  - $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0$ なる解を探すと　$0 + RI = \phi^{\mathrm{ex}}$,　$\therefore I = \dfrac{\phi^{\mathrm{ex}}}{R}$
- 斉次方程式の一般解
  - 右辺 $= 0$ として微分方程式を解くと

$$\frac{\mathrm{d}I}{I} = -\frac{R}{L}\mathrm{d}t, \qquad \log I = -\frac{R}{L}t + \mathrm{const.}, \qquad \therefore I(t) = C\mathrm{e}^{-Rt/L}$$

- 非斉次方程式の一般解
  - 上で求めた特解と一般解の和

$$I(t) = C\mathrm{e}^{-Rt/L} + \frac{\phi^{\mathrm{ex}}}{R}$$

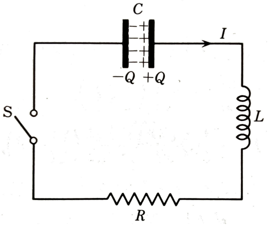


  - 初期条件 $I(0) = 0$ から

$$C = -\frac{\phi^{\mathrm{ex}}}{R}, \qquad \therefore I(t) = \frac{\phi^{\mathrm{ex}}}{R}(1 - \mathrm{e}^{-Rt/L})$$

RLC 回路を流れる電流

- RLC 回路
  - 抵抗 R
  - 自己インダクタンス L のコイル
  - 電荷 Q を蓄えたコンデンサー C



- 時刻 $t = 0$ でスイッチ S を閉じる
  - 回路を流れる電流 I を決定する方程式

$$RI = \frac{Q}{C} - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}, \qquad \therefore L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0$$

  - 電流 I は単位時間当りの電荷 Q の減少量に等しいので

$$I = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}, \qquad \therefore \boxed{L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}I = 0}$$

コイルに蓄えられたエネルギー

- RLC 回路の方程式の両辺に $I = -\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ を掛ける

$$\underbrace{RI^2}_{\text{ジュール熱}} = \frac{Q}{C}\left(-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right) - LI\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\underbrace{\frac{Q^2}{2C}}_{\text{電場のエネルギー}} + \underbrace{\frac{1}{2}LI^2}_{???}\right)$$

- 単位長さ当りの巻き数 n、長さ ℓ、断面積 S のソレノイドを仮定
  - 自己インダクタンス $L = \mu n^2 \ell S$
  - 内部の磁場 $H = nI$、磁束密度 $B = \mu H = \mu n I$
  - $U_{\mathrm{m}} = \dfrac{1}{2}LI^2$ を磁場で書き直すと

$$U_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\mu n^2 \ell S I^2 = \frac{1}{2}(\mu n I)(nI)\ell S = \frac{1}{2}BHV \qquad (V \equiv \ell S),$$

$$\to \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\,\mathrm{d}v$$

電磁場のエネルギー

- コンデンサーに蓄えられた電場のエネルギー (復習)

$$\boxed{U_\mathrm{e}} = \frac{Q^2}{2C} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\,\mathrm{d}v}$$

- コイルに蓄えられた磁場のエネルギー

$$\boxed{U_\mathrm{m}} = \frac{1}{2}LI^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\,\mathrm{d}v}$$

- RLC 回路のエネルギー保存則

$$\boxed{RI^2 = -\frac{\mathrm{d}U_\mathrm{e.m.}}{\mathrm{d}t}} \qquad \left(U_\mathrm{e.m.} = \frac{1}{2}\int_V (\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})\mathrm{d}v\right)$$

ジュール熱は電磁場のエネルギーの減少量に等しい

RLC 回路の微分方程式

- $h \equiv \dfrac{R}{2L}, p^2 \equiv \dfrac{1}{LC}$ とおいて式を整理

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + 2h\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + p^2 I = 0$$

- $I(t) = \mathrm{e}^{-ht}X(t)$ とおいて $X(t)$ に関する方程式を導出

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= -h\mathrm{e}^{-ht}X + \mathrm{e}^{-ht}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{-ht}\left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} - hX\right), \\
\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} &= -h\mathrm{e}^{-ht}\left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} - hX\right) + \mathrm{e}^{-ht}\left(\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2} - h\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \mathrm{e}^{-ht}\left(\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2} - 2h\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + h^2 X\right)
\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2} + (p^2 - h^2)X = 0} \qquad \text{(一階微分の項が消えた)}$$

減衰振動

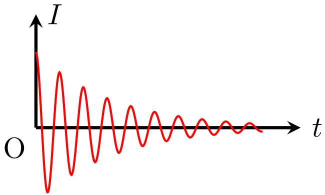
1. $p^2 > h^2$、つまり $\dfrac{L}{C} > \dfrac{R^2}{4}$ のとき
   - ▷ X は単振動

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 X = 0 \qquad \left(\omega \equiv \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right)$$

   - ▷ 一般解

$$X(t) = I_0 \cos(\omega t + \alpha),$$

$$\therefore I(t) = I_0 \mathrm{e}^{-Rt/2L} \cos(\omega t + \alpha) \qquad (I_0, \alpha\text{は定数})$$



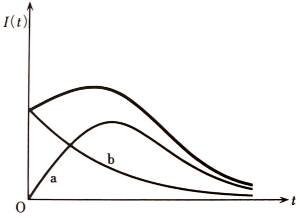
電流 I は振動しながら減衰

臨界減衰

2. $p^2 = h^2$、つまり $\dfrac{L}{C} = \dfrac{R^2}{4}$ のとき
    - ▷ 一般解

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2} = 0, \qquad X(t) = at + b \qquad (a, b \text{ は定数}),$$

$$\therefore I(t) = \mathrm{e}^{-Rt/2L}(at + b)$$



電流 I は振動せず素早く減衰 (臨界減衰)

過減衰

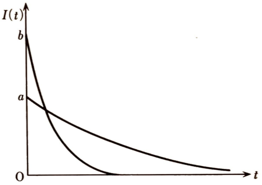
2. $p^2 < h^2$、つまり $\dfrac{L}{C} < \dfrac{R^2}{4}$ のとき
   - ▷ X は指数関数

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2} = \lambda^2 X \qquad \left(\lambda \equiv \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \right)$$

   - ▷ 一般解

$$X(t) = a\mathrm{e}^{\lambda t} + b\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

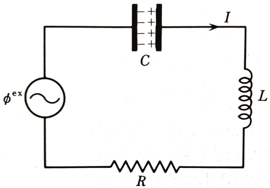
$$\therefore I(t) = \mathrm{e}^{-Rt/2L}(a\mathrm{e}^{\lambda t} + b\mathrm{e}^{-\lambda t}) \qquad (a, b \text{ は定数})$$



電流 I は振動せずゆっくり減衰 (過減衰)

交流回路を流れる電流

- RLC 回路
  - 抵抗 R
  - 自己インダクタンス L のコイル
  - 電荷 Q を蓄えたコンデンサー C



- 交流起電力 $\phi^{\mathrm{ex}}(t) = \phi_0 \cos \omega t$ を印加
  - 回路を流れる電流 I を決定する方程式

$$
\begin{aligned}
RI &= \phi^{\mathrm{ex}} + \frac{Q}{C} - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}, \\
L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{C}\mathrm{d}Q\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}\phi^{\mathrm{ex}}}{\mathrm{d}t}, \\
\therefore\ \boxed{L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{I}{C} = -\omega\phi_0 \sin \omega t}
\end{aligned}
$$

交流回路の微分方程式

- 斉次方程式 ($\phi^{\mathrm{ex}} = 0$) の一般解
  - t の増加とともに指数関数的に減衰 (RLC 回路の項目を参照)
    $\rightarrow$ 時間が経過すると重要でなくなる
- 非斉次方程式の特解
  - 特解を $I(t) = I_0 \cos(\omega t - \alpha)$ とおいて加法定理を用いると

$$
\begin{aligned}
I &= I_0(\cos\omega t \cos\alpha + \sin\omega t \sin\alpha), \\
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= -\omega I_0 \sin(\omega t - \alpha) = -\omega I_0(\sin\omega t \cos\alpha - \cos\omega t \sin\alpha), \\
\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} &= -\omega^2 I_0 \cos(\omega t - \alpha) = -\omega^2 I_0(\cos\omega t \cos\alpha + \sin\omega t \sin\alpha)
\end{aligned}
$$

インピーダンス

- $\cos\omega t$ と $\sin\omega$ の項の係数を比較して

$$\begin{cases} \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)\cos\alpha - R\sin\alpha = 0 & \cdots ① \\ \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)\sin\alpha + R\cos\alpha = \dfrac{\phi_0}{I_0} & \cdots ② \end{cases}$$

- ①から位相の遅れは

$$\tan\alpha = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}, \qquad \therefore \alpha = \tan^{-1}\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

- $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ のとき $\cos\alpha > 0$ なので

$$\cos\alpha = +\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)}}$$

- ②に $\cos\alpha$ と $\sin\alpha = \cos\alpha\tan\alpha$ を代入して

$$I_0 = \frac{\phi_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \equiv \frac{\phi_0}{Z}$$

(Z をインピーダンスと呼ぶ)

演習: RL 回路

電流が定常値 I_0 に到達すると $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0$ なので

$$RI_0 = \phi^{\mathrm{ex}}, \qquad \therefore I_0 = \frac{\phi^{\mathrm{ex}}}{R}$$

$t > 0$ で電流が減少するとコイルに $-L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ の起電力が生じるので

$$RI = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}, \qquad \frac{\mathrm{d}I}{I} = -\frac{R}{L}\mathrm{d}t, \qquad \therefore I = C\mathrm{e}^{-Rt/L}$$

$t = 0$ のとき $I(0) = I_0$ なので $C = I_0$ である。

$t > 0$ で抵抗に発生するジュール熱の総和は

$$\int_0^\infty RI^2 \mathrm{d}t = RI_0^2 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2Rt/L}\mathrm{d}t = RI_0{}^2 \frac{L}{2R} = \frac{1}{2}LI_0{}^2$$