物理学B 第7回

前半のまとめ

濱本 雄治[1]

情報工学部 情報通信工学科

2025年11月10日、12日

[1]hamamoto@c.oka-pu.ac.jp

https://yhmmt.github.io/pages/

前回の復習: 電流に関する法則

- 定常電流の保存則

$$\boxed{\int_{S_0} i_n \mathrm{d}S = 0}$$

(任意の閉曲面 S_0 への電流の出入りの総和はゼロ)

- オームの法則

$$\text{電流 } I = \frac{V}{R} \quad \to \quad \text{電流密度 } \boxed{\boldsymbol{i} = \sigma \boldsymbol{E}}$$

- ジュールの法則

$$\text{仕事率 } \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = IV \quad \to \quad \text{単位体積当りの仕事率 } \boxed{\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{E}}$$

前回の復習: キルヒホッフの法則

第一法則

回路の任意の分岐点に流入する電流を正、流出する電流を負とすると、その分岐点に出入りする電流の総和はゼロ

$$\text{例:}\quad I - I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

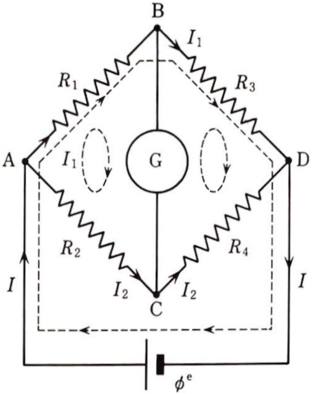
第二法則

回路の一部の閉回路で電流をある方向に流す起電力を正、反対方向に流す起電力を負とすると、その閉経路に含まれる起電力の総和は電圧降下の総和に等しい

$$\text{例:}\quad \phi(\mathrm{A}) - \phi(\mathrm{B}) + \phi^{\mathrm{e}} = (R_2 + r)I_2$$

前回の小テストの解説

右図のような既知の抵抗 $R_1 = 1\ \Omega$ と $R_2 = 2\ \Omega$、可変抵抗 R_3、未知の抵抗 R_4、検流計 G および内部抵抗の無視できる電源からなるホイートストン・ブリッジ回路を考える。電源電圧を $\phi^{\mathrm{e}} = 1.5\ \mathrm{V}$、可変抵抗を $R_3 = 3\ \Omega$ とすると検流計に電流が流れなくなった。このとき未知の抵抗 R_4 と、回路全体に流れる電流 $I = I_1 + I_2$ を求めよ。



前回の小テストの解説(続き)

閉回路 ABCA、BDCB について第二法則を用いると

$$\begin{cases} R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 \\ R_3 I_1 - R_4 I_2 = 0 \end{cases}, \qquad \therefore R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1} = \frac{2 \times 3}{1} = 6\ \Omega.$$

電源と ABD を通る経路について第二法則を用いると

$$\phi^{\mathrm{e}} = (R_1 + R_3) I_1 = (R_2 + R_4) I_2,$$

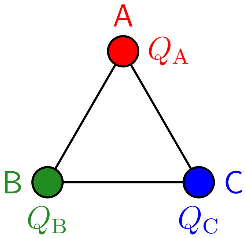
$$\therefore I_1 = \frac{\phi^{\mathrm{e}}}{R_1 + R_3} = \frac{1.5}{1+3} = \frac{3}{8}\ \mathrm{A}, \qquad I_2 = \frac{\phi^{\mathrm{e}}}{R_2 + R_4} = \frac{1.5}{2+4} = \frac{3}{16}\ \mathrm{A}$$

点 A で第一法則を用いると

$$I = I_1 + I_2 = \frac{3}{8} + \frac{3}{16} = \frac{9}{16} = 0.5625\ \Omega$$

問題 1

一辺 a の正三角形の頂点を A,B,C とする。各頂点にそれぞれ電荷 $Q_{\mathrm{A}}, Q_{\mathrm{B}}, Q_{\mathrm{C}}$ が置かれているとき、次の問いに答えよ。ただし静電ポテンシャルは無限遠をゼロとする。

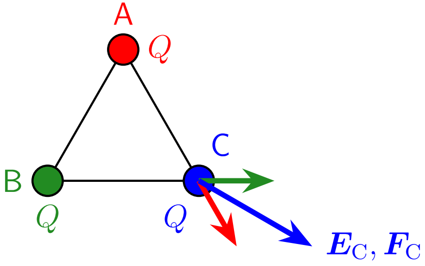


(a) $Q_{\mathrm{A}} = Q_{\mathrm{B}} = Q_{\mathrm{C}} = Q > 0$ のとき、Q_{A} と Q_{B} が頂点 C に作る電場の大きさと向きを求めよ。また Q_{C} がこの電場から受けるクーロン力の大きさと向きを求めよ。さらに Q_{A} と Q_{B} が頂点 C に作る静電ポテンシャルを求めよ。

$$|\boldsymbol{E}_{\mathrm{C}}| = \frac{\sqrt{3}Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2},$$

$$|\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}| = \frac{\sqrt{3}Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2},$$

$$\phi_C = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

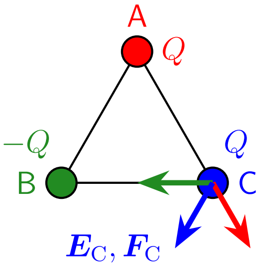


(b) $Q_{\mathrm{A}} = -Q_{\mathrm{B}} = Q_{\mathrm{C}} = Q > 0$ のとき、Q_{A} と Q_{B} が頂点 C に作る電場の大きさと向きを求めよ。また、この電場が Q_{C} に及ぼすクーロン力の大きさと向きを求めよ。さらに Q_{A} と Q_{B} が頂点 C に作る静電ポテンシャルを求めよ。

$$|\boldsymbol{E}_{\mathrm{C}}| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2},$$

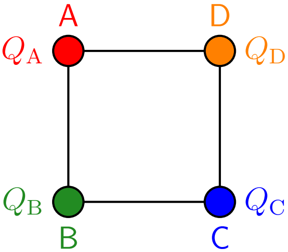
$$|\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}| = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2},$$

$$\phi_C = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} = 0$$



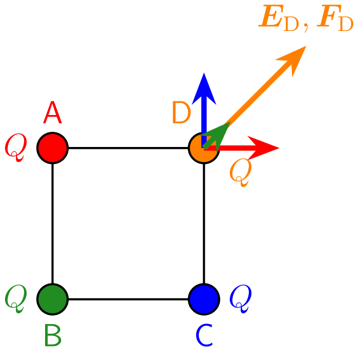
問題2

一辺 a の正方形の頂点を反時計回りに A,B,C,D とする。各頂点にそれぞれ電荷 $Q_{\mathrm{A}}, Q_{\mathrm{B}}, Q_{\mathrm{C}}, Q_{\mathrm{D}}$ が置かれているとき次の問いに答えよ。ただし静電ポテンシャルは無限遠をゼロとする。



(a) $Q_{\rm A} = Q_{\rm B} = Q_{\rm C} = Q_{\rm D} = Q > 0$ のとき、$Q_{\rm A}$、$Q_{\rm B}$ および $Q_{\rm C}$ がが頂点 D に作る電場の大きさと向きを求めよ。また $Q_{\rm D}$ がこの電場から受けるクーロン力の大きさと向きを求めよ。さらに $Q_{\rm A}$、$Q_{\rm B}$ および $Q_{\rm C}$ が頂点 D に作る静電ポテンシャルを求めよ。

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{E}_{\rm D}| &= \frac{\sqrt{2}Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{2}a)^2} \\
&= \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}, \\
|\boldsymbol{F}_{\rm D}| &= \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}, \\
\phi_{\rm D} &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} \times 2 + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{2}a)} \\
&= \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}
\end{aligned}
$$

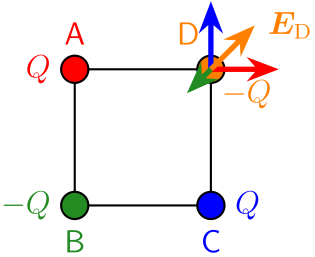


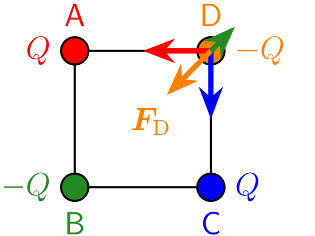
(b) $Q_\mathrm{A} = -Q_\mathrm{B} = Q_\mathrm{C} = -Q_\mathrm{D} = Q > 0$ のとき、Q_A、Q_B および Q_C がが頂点 D に作る電場の大きさと向きを求めよ。また Q_D がこの電場から受けるクーロン力の大きさと向きを求めよ。さらに Q_A、Q_B および Q_C が頂点 D に作る静電ポテンシャルを求めよ。

$$|\boldsymbol{E}_\mathrm{D}| = \frac{\sqrt{2}Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{2}a)^2} = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2},$$

$$|\boldsymbol{F}_\mathrm{D}| = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2},$$

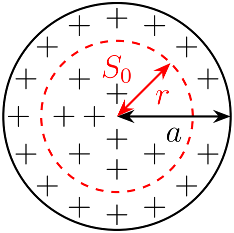
$$\phi_\mathrm{D} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} \times 2 - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{2}a)} = \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$



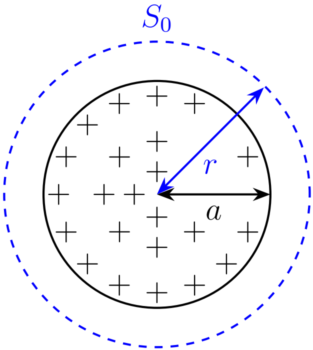


問題 3

半径 a の球の内部に電荷 Q が一様に分布しているとき次の問いに答えよ。



$0 < r < a$



$r > a$

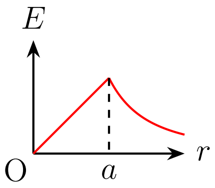
(a) 球状電荷の内部および外部における静電場の大きさと向きを求めよ。

球状電荷と中心が同じ半径 r の球面を S_0 とすると、電場は r のみの関数で S_0 に垂直かつ S_0 上で一定。とくに $0 < r < a$ のとき S_0 に含まれる電荷は $Q' = \dfrac{4\pi r^3/3}{4\pi a^3/3}Q = \left(\dfrac{r}{a}\right)^3 Q$。

よってガウスの法則から

$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = 4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} \left(\dfrac{r}{a}\right)^3 \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & (0 < r < a) \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & (r > a) \end{cases},$$

$$\therefore E(r) = \begin{cases} \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} & (0 < r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > a) \end{cases}$$



(b) 球状電荷の内部および外部における静電ポテンシャルを求めよ。ただし静電ポテンシャルは無限遠をゼロとする。

電場は $\boldsymbol{r}$ 方向の成分しか持たないので

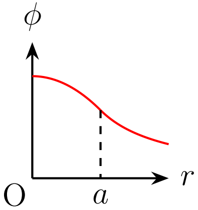
$$\phi(r) = -\int \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int E(r)\mathrm{d}r = \begin{cases} -\dfrac{Qr^2}{8\pi\varepsilon_0 a^3} + C_1 & (0 < r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2 & (r > a) \end{cases}$$

静電ポテンシャルは無限遠でゼロなので $C_2 = 0$。

静電ポテンシャルは $r = a$ で連続なので

$$-\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a} + C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}, \qquad \therefore C_1 = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 a},$$

$$\therefore \phi(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}\left[3 - \left(\dfrac{r}{a}\right)^2\right] & (0 < r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & (r > a) \end{cases}$$



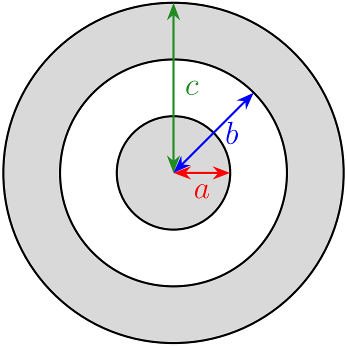
(c) 球状電荷が作る静電場のエネルギーを求めよ。

球対称な系の体積要素は $\mathrm{d}v = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$ なので

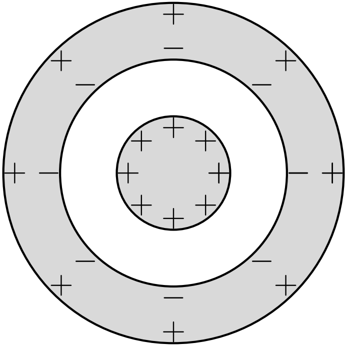
$$
\begin{aligned}
E_\mathrm{e} &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2 \mathrm{d}v \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2} \int_0^a \left(\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \right)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_a^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r \\
&= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\int_0^a \frac{r^4 \mathrm{d}r}{a^6} + \int_a^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2} \right) \\
&= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{5a} + \frac{1}{a} \right) \\
&= \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 a}
\end{aligned}
$$

問題 4

半径 a の導体球が内径 $b\ (> a)$、外径 c の導体球殻の中心に置かれているとき次の問いに答えよ。ただし静電ポテンシャルは無限遠をゼロとする。



(a) 導体球に電荷 Q を与えたとき、電荷がどのように分布するか説明せよ。



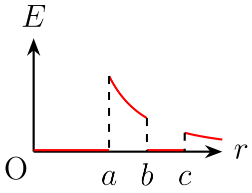
電荷が完全に静止したとき導体内部に電荷は存在しないので、電荷 Q は導体球の表面に一様に分布する。静電誘導により、導体球殻の内側 (外側) の表面には電荷 $-Q$ (Q) が一様に分布する。

(b) (a) のとき、各領域における静電場と静電ポテンシャルを求めよ。

導体球と中心が同じ半径 r の球面を S_0 とすると、電場は r のみの関数で S_0 に垂直かつ S_0 上で一定。

$$\int E_n \mathrm{d}S = 4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} 0 & (0 < r < a, b < r < c) \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & (a < r < b, r > c) \end{cases},$$

$$\therefore E(r) = \begin{cases} 0 & (0 < r < a, b < r < c) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (a < r < b, r > c) \end{cases}$$



電場は $\boldsymbol{r}$ 方向の成分しか持たないので

$$\phi(r) = -\int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int E(r)\mathrm{d}r = \begin{cases} C_1 & (0 < r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2 & (a < r < b) \\ C_3 & (b < r < c) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_4 & (r > c) \end{cases}$$

静電ポテンシャルは無限遠でゼロなので $C_4 = 0$。

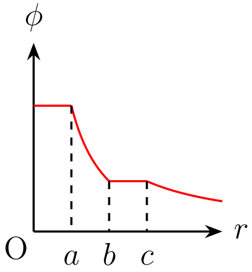
静電ポテンシャルは $r = a, b, c$ で連続なので

$$C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} + C_2, \qquad \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b} + C_2 = C_3, \qquad C_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c} + 0,$$

$$\therefore C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right), \quad C_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right), \quad C_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c}$$

以上から

$$\phi(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{b}\right) & (0<r<a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{b}\right) & (a<r<b) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c} & (b<r<c) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & (r>c) \end{cases}$$



(c) (b) の静電場から、導体球の表面、導体球殻の内側と外側の表面における電荷面密度を求めよ。

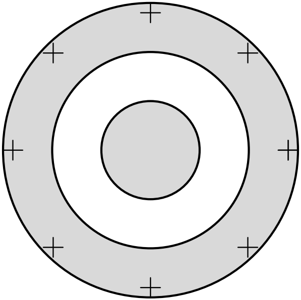
導体表面を貫く微小な底面積 ΔS の薄い円筒面を S_0 とすると、電場は導体の外側の底面でのみ法線成分を持つので、電荷面密度を ω とするとガウスの法則から

$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = E_n \Delta S = \frac{\omega \Delta S}{\varepsilon_0}, \qquad \therefore \omega = \varepsilon_0 E_n = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}$$

導体表面外向きの法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と電場 $\boldsymbol{E}$ の向きに注意すると

$$\omega = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi a^2} & (\text{導体球の表面}) \\ -\dfrac{Q}{4\pi b^2} & (\text{導体球殻の内側表面}) \\ \dfrac{Q}{4\pi c^2} & (\text{導体球殻の外側表面}) \end{cases}$$

(d) 導体球殻に電荷 Q を与えたとき、電荷がどのように分布するか説明せよ。



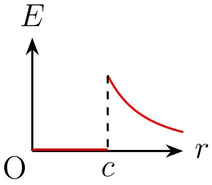
導体球と中心が同じ導体球殻内を通る球面 $(b < r < c)$ を S_0 とすると、S_0 上で電場はゼロなので、ガウスの法則から導体球表面と導体球殻の内側表面の電荷の総和はゼロ。導体球は電荷を持たないので導体球殻の内側表面も電荷を持たない。よって電荷は導体球殻の外側表面に一様に分布。

(e) (d) のとき、各領域における静電場と静電ポテンシャルを求めよ。

導体球と中心が同じ半径 r の球面を S_0 とすると、電場は r のみの関数で S_0 に垂直かつ S_0 上で一定。

$$\int E_n \mathrm{d}S = 4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} 0 & (0 < r < c) \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & (r > c) \end{cases},$$

$$\therefore E(r) = \begin{cases} 0 & (0 < r < c) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > c) \end{cases}$$



電場は $\boldsymbol{r}$ 方向の成分しか持たないので

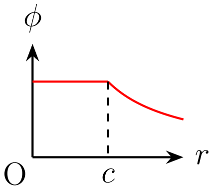
$$\phi(r) = -\int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int E(r)\mathrm{d}r = \begin{cases} C_1 & (0 < r < c) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2 & (r > c) \end{cases}$$

静電ポテンシャルは無限遠でゼロなので $C_2 = 0$。
静電ポテンシャルは $r = c$ で連続なので

$$C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c} + 0$$

以上から

$$\phi(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c} & (0 < r < c) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & (r > c) \end{cases}$$

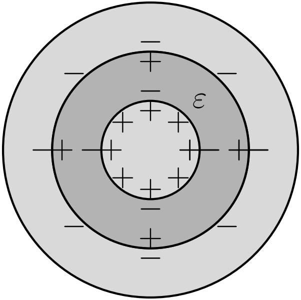


(f) (e) の静電場から、導体球の表面、導体球殻の内側と外側の表面における電荷面密度を求めよ。

(c) と同様に

$$\omega = \varepsilon_0 E = \begin{cases} 0 & \text{(導体球の表面および導体球殻の内側表面)} \\ \dfrac{Q}{4\pi c^2} & \text{(導体球殻の外側表面)} \end{cases}$$

(g) 導体球と導体球殻にそれぞれ電荷 $Q, -Q$ を与え、間を誘電率 ε の誘電体で満たしたとき、真電荷と分極電荷がどのように分布するか説明せよ。



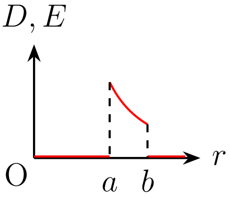
導体球と導体球殻に与えた真電荷 $Q, -Q$ は互いに引き合うため、それぞれ導体球表面、導体球殻の内側表面に一様に分布する。導体球と導体球殻の間の電場により誘電体の内側表面と外側表面には分極電荷が一様に分布する。

(h) (g) のとき、各領域における静電場と静電ポテンシャルを求めよ。

$$\int_{S_n} D_n \mathrm{d}S = 4\pi r^2 D(r) = \begin{cases} 0 & (0 < r < a, r > b) \\ Q & (a < r < b) \end{cases},$$

$$\therefore D(r) = \begin{cases} 0 & (0 < r < a, r > b) \\ \dfrac{Q}{4\pi r^2} & (a < r < b) \end{cases},$$

$$E(r) = \begin{cases} 0 & (0 < r < a, r > b) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} & (a < r < b) \end{cases},$$



$$\phi(r) = \begin{cases} C_1 & (0 < r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r} + C_2 & (a < r < b) \\ C_3 & (r > b) \end{cases}$$

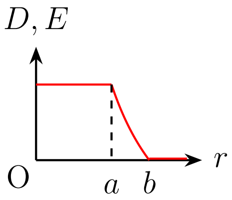
静電ポテンシャルは無限遠でゼロなので $C_3 = 0$。

静電ポテンシャルは $r = a, b$ で連続なので

$$C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon a} + C_2, \qquad \frac{Q}{4\pi\varepsilon b} + C_2 = C_3 = 0,$$

$$\therefore C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right), \qquad C_2 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon b}$$

$$\therefore \phi(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right) & (0 < r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{b}\right) & (a < r < b) \\ 0 & (r > b) \end{cases}$$



(i) (h) の静電場から、誘電体の内側と外側の表面に現れる分極電荷の面密度を求めよ。

電場は導体表面に垂直なので分極も導体と誘電体の界面に垂直。
誘電体の表面に対して外向きの法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると

$$\omega_\mathrm{p} = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n} = (\varepsilon-\varepsilon_0)\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n} = \left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\frac{Q}{4\pi r^2}\boldsymbol{n}_E\cdot\boldsymbol{n}$$

ここで $\boldsymbol{n}_E$ は $\boldsymbol{E}$ 方向の単位ベクトル。
誘電体の内側と外側の表面で $\boldsymbol{n}_E$ と $\boldsymbol{n}$ の関係は逆であるから

$$\therefore \omega_\mathrm{p} = \begin{cases} \left(1-\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\dfrac{-Q}{4\pi a^2} & \text{(内側表面)} \\ \left(1-\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\dfrac{+Q}{4\pi b^2} & \text{(外側表面)} \end{cases}$$

(j) (h) の静電ポテンシャルから、導体球と導体球殻の間の静電容量を求めよ。

$$V = \phi(a) - \phi(b) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right),$$

$$\therefore C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^{-1}$$

問題 5

無限に長い半径 a の円柱の内部に電荷が単位長さ当り λ で一様に分布しているとき次の問いに答えよ。

(a) 円柱状電荷の内部および外部における静電場の大きさと向きを求めよ。円柱状電荷と中心軸が同じ半径 r、高さ h の円筒面を S_0 とすると、電場は r のみの関数で S_0 の側面に垂直かつ側面上で一定。とくに $0 < r < a$ のとき S_0 に含まれる電荷は

$$Q' = \frac{\pi r^2 h}{\pi a^2 h}\lambda h = \left(\frac{r}{a}\right)^2 \lambda h.$$

よってガウスの法則から

$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = 2\pi r h E(r) = \begin{cases} \left(\dfrac{r}{a}\right)^2 \dfrac{\lambda h}{\varepsilon_0} & (0 < r < a) \\ \dfrac{\lambda h}{\varepsilon_0} & (r > a) \end{cases},$$

$$\therefore E(r) = \begin{cases} \dfrac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 a^2} & (0 < r < a) \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & (r > a) \end{cases}$$

(b) 円柱状電荷の内部および外部における静電ポテンシャルを求めよ。静電ポテンシャルは円柱状電荷の表面をゼロとする。

電場は S_0 の側面に垂直な方向の成分しか持たないので

$$\phi(r) = -\int E(r)\mathrm{d}r = \begin{cases} -\dfrac{\lambda r^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} + C_1 & (0 < r < a) \\ -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log r + C_2 & (r > a) \end{cases}$$

静電ポテンシャルは円柱表面でゼロなので $C_2 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log a$。

静電ポテンシャルは $r = a$ で連続なので

$$-\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} + C_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log a + C_2 = 0, \qquad \therefore C_1 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0},$$

$$\therefore \phi(r) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[1 - \left(\dfrac{r}{a}\right)^2\right] & (0 < r < a) \\ -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log\dfrac{r}{a} & (r > a) \end{cases}$$

(c) 円柱状電荷が作る単位長さ当りの静電場のエネルギーを求めよ。

軸対称な系の体積要素は $\mathrm{d}v = 2\pi r h \mathrm{d}r$ なので

$$
\begin{aligned}
E_\mathrm{e} &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 \mathrm{d}v \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^a \left(\frac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\right)^2 2\pi r h \mathrm{d}r + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_a^\infty \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)^2 2\pi r h \mathrm{d}r \\
&= \frac{\lambda^2 h}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_0^a \frac{r^3 \mathrm{d}r}{a^4} + \int_a^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r}\right) \\
&= \frac{\lambda^2 h}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{4} + \infty\right)
\end{aligned}
$$

よって (単位長さ当りの) 静電場のエネルギーは発散

問 6

無限に長い半径 a の導体円柱が内径 $b\ (> a)$、外径 c の導体円筒の中心に置かれているとき次の問いに答えよ。ただし静電ポテンシャルは導体円柱の表面をゼロとする。

(a) 導体円柱に電荷を単位長さ当り λ で与えたとき、電荷がどのように分布するか説明せよ。

電荷が完全に静止したとき導体内部に電荷は存在しないので、面密度 λ の電荷は導体円柱の表面に一様に分布する。静電誘導により、導体円筒の内側 (外側) の表面には面密度 $-\lambda(\lambda)$ の電荷が一様に分布する。

(b) (a) のとき、各領域における静電場と静電ポテンシャルを求めよ。

導体円柱と中心軸が同じ半径 r、高さ h の円筒面を S_0 とすると、電場は r のみの関数で S_0 の側面に垂直かつ側面上で一定。

$$\int E_n \mathrm{d}S = 2\pi r h E(r) = \begin{cases} 0 & (0 < r < a, b < r < c) \\ \dfrac{\lambda h}{\varepsilon_0} & (a < r < b, r > c) \end{cases},$$

$$\therefore E(r) = \begin{cases} 0 & (0 < r < a, b < r < c) \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & (a < r < b, r > c) \end{cases}$$

電場は S_0 の側面に垂直な方向の成分しか持たないので

$$\phi(r) = -\int E(r)\mathrm{d}r = \begin{cases} C_1 & (0 < r < a) \\ -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log r + C_2 & (a < r < b) \\ C_3 & (b < r < c) \\ -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log r + C_4 & (r > c) \end{cases}$$

静電ポテンシャルは導体円柱の表面でゼロなので $C_1 = 0$。

静電ポテンシャルは $r = a, b, c$ で連続なので

$$0 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log a + C_2, \qquad -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log b + C_2 = C_3,$$

$$C_3 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log c + C_4,$$

$$\therefore C_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log a, \quad C_3 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log\frac{a}{b}, \quad C_4 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\log\frac{a}{b} + \log c\right)$$

以上から

$$
\phi(r) = \begin{cases} 0 & (0 < r < a) \\ -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log\dfrac{r}{a} & (a < r < b) \\ -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log\dfrac{b}{a} & (b < r < c) \\ -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log\dfrac{br}{ac} & (r > c) \end{cases}
$$

(c) (b) の静電場から、導体円柱の表面、導体円筒の内側と外側の表面における電荷面密度を求めよ。

導体表面を貫く微小な底面積 ΔS の薄い円筒面を S_0 とすると、電場は導体の外側の底面でのみ法線成分を持つので、電荷面密度を ω とするとガウスの法則から

$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = E_n \Delta S = \frac{\omega \Delta S}{\varepsilon_0}, \qquad \therefore \omega = \varepsilon_0 E_n = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}$$

導体表面外向きの法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と電場 $\boldsymbol{E}$ の向きに注意すると

$$\therefore \omega = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\pi a} & (\text{導体円柱の表面}) \\ -\dfrac{\lambda}{2\pi b} & (\text{導体円筒の内側表面}) \\ \dfrac{\lambda}{2\pi c} & (\text{導体円筒の外側表面}) \end{cases}$$

(d) 導体円筒に電荷を単位長さ当り λ で与えたとき、電荷がどのように分布するか説明せよ。

導体円柱と中心軸が同じ導体円筒内を通る円筒面 $(b < r < c)$ を S_0 とすると、S_0 上で電場の法線成分はゼロなので、ガウスの法則から導体円柱表面と導体円筒の内側表面の電荷の総和はゼロ。導体円柱は電荷を持たないので導体円筒の内側表面も電荷を持たない。よって電荷は導体円筒の外側表面に単位長さ当り λ で一様に分布。

(e) (d) のとき、各領域における静電場と静電ポテンシャルを求めよ。

導体円柱と中心軸が同じで半径 r、高さ h の円筒面を S_0 とすると、電場は r のみの関数で S_0 の側面に垂直かつ側面上で一定。

$$\int E_n \mathrm{d}S = 2\pi r h E(r) = \begin{cases} 0 & (0 < r < c) \\ \dfrac{\lambda h}{\varepsilon_0} & (r > c) \end{cases},$$

$$\therefore E(r) = \begin{cases} 0 & (0 < r < c) \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & (r > c) \end{cases}$$

電場は S_0 の側面に垂直な方向の成分しか持たないので

$$\phi(r) = -\int E(r)\mathrm{d}r = \begin{cases} C_1 & (0 < r < c) \\ -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log r + C_2 & (r > c) \end{cases}$$

静電ポテンシャルは導体円柱の表面でゼロなので $C_1 = 0$。
静電ポテンシャルは $r = c$ で連続なので

$$0 = C_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log c + C_2, \qquad \therefore C_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log c$$

以上から

$$\phi(r) = \begin{cases} 0 & (0 < r < c) \\ -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log\dfrac{r}{c} & (r > c) \end{cases}$$

(f) (e) の静電場から、導体円柱の表面、導体円筒の内側と外側の表面における電荷面密度を求めよ。

(c) と同様に

$$\omega = \varepsilon_0 E = \begin{cases} 0 & (\text{導体円柱の表面および導体円筒の内側表面}) \\ \dfrac{\lambda}{2\pi c} & (\text{導体円筒の外側表面}) \end{cases}$$

(g) 導体円柱と導体円筒に電荷をそれぞれ単位長さ当り $\lambda, -\lambda$ で与え、間を誘電率 ε の誘電体で満たしたとき、真電荷と分極電荷がどのように分布するか説明せよ。

導体円柱と導体円筒に与えた面密度 $\lambda, -\lambda$ の真電荷は互いに引き合うため、それぞれ導体円柱の表面、導体円筒の内側表面に一様に分布する。導体円柱と導体円筒の間の電場により誘電体の内側表面と外側表面には分極電荷が一様に分布する。

(h) (g) のとき、各領域における静電場と静電ポテンシャルを求めよ。

$$\int_{S_n} D_n \mathrm{d}S = 2\pi r h D(r) = \begin{cases} 0 & (0 < r < a, r > b) \\ \lambda h & (a < r < b) \end{cases},$$

$$\therefore D(r) = \begin{cases} 0 & (0 < r < a, r > b) \\ \dfrac{\lambda}{2\pi r} & (a < r < b) \end{cases},$$

$$E(r) = \begin{cases} 0 & (0 < r < a, r > b) \\ \dfrac{\lambda}{2\pi \varepsilon r} & (a < r < b) \end{cases},$$

$$\phi(r) = \begin{cases} C_1 & (0 < r < a) \\ -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\log r + C_2 & (a < r < b) \\ C_3 & (r > b) \end{cases}$$

静電ポテンシャルは $r = a, b$ で連続なので

$$0 = C_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\log a + C_2, \qquad -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\log b + C_2 = C_3,$$

$$\therefore C_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\log a, \qquad C_3 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\log\frac{b}{a}$$

$$\therefore \phi(r) = \begin{cases} 0 & (0 < r < a) \\ -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\log\dfrac{r}{a} & (a < r < b) \\ -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\log\dfrac{b}{a} & (r > b) \end{cases}$$

(i) (h) の静電場から、誘電体の内側と外側の表面に現れる分極電荷の面密度を求めよ。

電場は導体表面に垂直なので分極も導体と誘電体の界面に垂直。
誘電体表面に対して外向きの法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると

$$\omega_{\mathrm{p}} = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n} = (\varepsilon-\varepsilon_0)\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n} = \left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\frac{\lambda}{2\pi r}\boldsymbol{n}_E\cdot\boldsymbol{n}$$

$\boldsymbol{E}$ 方向の単位ベクトル $\boldsymbol{n}_E$ と $\boldsymbol{n}$ の関係は内側と外側で逆なので

$$\therefore\ \omega_{\mathrm{p}} = \begin{cases} \left(1-\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\dfrac{-\lambda}{2\pi a} & \text{(内側表面)} \\ \left(1-\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\dfrac{+\lambda}{2\pi b} & \text{(外側表面)} \end{cases}$$

(j) (h) の静電ポテンシャルから、導体円柱と導体円筒の間の静電容量を求めよ。

$$V = \phi(a) - \phi(b) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\log\frac{b}{a} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon\ell}\log\frac{b}{a},$$

$$\therefore C = \frac{Q}{V} = 2\pi\varepsilon\ell\left(\log\frac{b}{a}\right)^{-1}$$

よって単位長さ当りの静電容量は

$$\frac{C}{\ell} = 2\pi\varepsilon\left(\log\frac{b}{a}\right)^{-1}$$

問題 7

無限に広い平面に電荷が単位面積当り ω で一様に分布しているとき次の問いに答えよ。

(a) 平面状電荷の外部における静電場の大きさと向きを求めよ。

平面状電荷に平行で面積 ΔS の底面を持ち、かつ平面を垂直に貫く円筒面を S_0 とすると、電場は S_0 の底面に垂直で面内方向の位置に依らない。よってガウスの法則から

$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = 2E\Delta S = \frac{\omega \Delta S}{\varepsilon_0}, \qquad \therefore E = \frac{\omega}{2\varepsilon_0}$$

電場の向きは平面状電荷の両側で向きが反対なので、平面状電荷の位置を $z=0$ とし、符号も E に含めると

$$E(z) = \frac{\omega}{2\varepsilon_0}\mathrm{sgn}(z)$$

(b) 平面状電荷の外部における静電ポテンシャルを求めよ。ただし静電ポテンシャルは平面上をゼロとする。

$$\phi(z) = -\int E(z)\mathrm{d}z = \begin{cases} -\dfrac{\omega}{2\varepsilon_0}z + C_1 & (z > 0) \\ +\dfrac{\omega}{2\varepsilon_0}z + C_2 & (z < 0) \end{cases}$$

静電ポテンシャルは $z = 0$ で連続かつゼロなので $C_1 = C_2 = 0$。
よって

$$\phi(z) = -\frac{\omega}{2\varepsilon_0}|z| = \begin{cases} -\dfrac{\omega}{2\varepsilon_0}z & (z > 0) \\ +\dfrac{\omega}{2\varepsilon_0}z & (z < 0) \end{cases}$$

(c) 平面状電荷が作る単位体積当りの静電場のエネルギーを求めよ。

$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{e}} &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 \mathrm{d}v \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{z>0}\left(\frac{\omega}{2\varepsilon_0}\right)^2 \mathrm{d}v + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{z<0}\left(\frac{\omega}{2\varepsilon_0}\right)^2 \mathrm{d}v \\
&= \frac{\omega^2}{8\varepsilon_0}(v_{z>0} + v_{z>0}) \\
&= \frac{\omega^2}{8\varepsilon_0}v
\end{aligned}
$$

よって単位体積当りの静電場のエネルギーは

$$
\frac{E_{\mathrm{e}}}{v} = \frac{\omega^2}{8\varepsilon_0}
$$

問題 8

無限に広い 2 枚の極板からなる平行板コンデンサーについて次の問いに答えよ。ただし静電ポテンシャルは負極上をゼロとする。

(a) 正負極に電荷を単位面積当り $\pm\omega$ で与えたとき、電荷がどのように分布するか説明せよ。

両極板上の正負電荷は互いに引き合うため、正極上の正電荷は負極側、負極上の負電荷は正極側の表面に一様に分布する。

(b) (a) のとき、極板間における静電場と静電ポテンシャルを求めよ。

極板に平行な底面を持ち、電荷が面密度 ω で分布する極板表面を垂直に貫く円筒面を S_0 とすると、電場は極板間のみに存在し S_0 の底面に垂直である。よってガウスの法則から

$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = E\Delta S = \frac{\omega \Delta S}{\varepsilon_0}, \qquad \therefore E = \frac{\omega}{\varepsilon_0}$$

極板に垂直な方向に z 軸をとると

$$\phi(z) = -\int E \mathrm{d}z = -\frac{\omega}{\varepsilon_0} z + k$$

ϕ は負極上でゼロなので、正負極の位置を $z = 0, d$ とすると

$$\phi(d) = -\frac{\omega}{\varepsilon_0} d + k = 0 \qquad \therefore k = \frac{\omega}{\varepsilon_0} d,$$

$$\therefore \phi(z) = \frac{\omega}{\varepsilon_0}(d - z)$$

(c) (b) の静電場から、単位体積当りの静電場のエネルギーを求めよ。

$$E_{\mathrm{e}} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 \mathrm{d}v = \frac{\varepsilon_0}{2}\int\left(\frac{\omega}{\varepsilon_0}\right)^2 \mathrm{d}v = \frac{\omega^2}{2\varepsilon_0}v$$

よって単位体積当りの静電場のエネルギーは

$$\frac{E_{\mathrm{e}}}{v} = \frac{\omega}{2\varepsilon_0}$$

(d) 正負極に電荷を単位面積当り $\pm\omega$ で与え、間を誘電率 ε の誘電体で満たしたとき、真電荷と分極電荷がどのように分布するか説明せよ。

(a) と同様に、正極上の正の真電荷は負極側、負極上の負の真電荷は正極側の表面に一様に分布し、これらが作る電場によって誘電体の正極側には負、負極側には正の分極電荷が一様に誘導される。

(e) (d) のとき、極板間における静電場と静電ポテンシャルを求めよ。

極板に平行な底面を持ち、真電荷が面密度 ω で分布する極板表面を垂直に貫く円筒面を S_0 とすると、電束密度は極板間のみに存在し S_0 の底面に垂直である。よってガウスの法則から

$$\int_{S_0} D_n \mathrm{d}S = D\Delta S = \omega\Delta S, \qquad \therefore D = \omega$$

よって電場と静電ポテンシャルは

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{\omega}{\varepsilon},$$

$$\phi(z) = -\int E\mathrm{d}z = -\frac{\omega}{\varepsilon}z + k$$

$\phi(d) = 0$ とすると

$$k = \frac{\omega}{\varepsilon}d, \qquad \therefore \phi(z) = \frac{\omega}{\varepsilon}(d - z)$$

(f) (e) の静電場から、単位体積当りの静電場のエネルギーを求めよ。

$$E_{\mathrm{e}} = \frac{\varepsilon}{2}\int E^2 \mathrm{d}v = \frac{\varepsilon}{2}\int \left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)^2 \mathrm{d}v = \frac{\omega^2}{2\varepsilon}v$$

よって単位体積当りの静電場のエネルギーは

$$\frac{E_{\mathrm{e}}}{v} = \frac{\omega^2}{2\varepsilon}$$

(f) (e) の静電ポテンシャルから、極板間の単位面積当りの静電容量を求めよ。

極板の面積を S、極板上の電荷を Q とすると

$$V = \phi(0) - \phi(d) = \frac{\omega}{\varepsilon} d = \frac{Q}{\varepsilon S} d,$$
$$\therefore C = \frac{Q}{V} = \varepsilon \frac{S}{d}$$