数値計算法 第 11 回

関数近似 (2)

濱本 雄治 [1]

情報工学部 情報通信工学科

2025 年 6 月 30 日

[1] hamamoto@c.oka-pu.ac.jp

最小二乗近似 ($n = 1$)

- 最小二乗近似 1 次多項式

$$p(x) = a + bx$$

- m 個の点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_m, y_m)$ が与えられたとき

$$m = \sum_k 1, \qquad S_x = \sum_k x_k, \qquad S_{x^2} = \sum_k {x_k}^2,$$
$$S_y = \sum_k y_k, \qquad S_{xy} = \sum_k x_k y_k, \qquad S_{y^2} = \sum_k {y_k}^2$$

- a, b を決定する方程式

$$\begin{cases} m\ a + S_x\ b = S_y \\ S_x\ a + S_{xx}\ b = S_{xy} \end{cases}, \qquad \therefore \begin{pmatrix} m & S_x \\ S_x & S_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_y \\ S_{xy} \end{pmatrix}$$

前回の小テストの解説

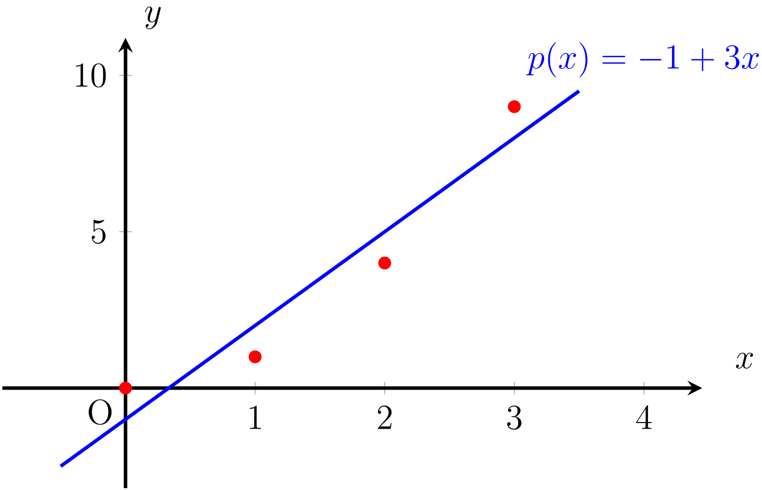
データ点 $(0,0),(1,1),(2,4),(3,9)$ が満たす関数 $y=f(x)$ を一次式 $p(x)=a+bx$ で近似するとき、最小二乗法により定数 a,b を求めよ。

$$\begin{aligned} m &= 4, \\ S_x &= 0+1+2+3, \\ S_{xx} &= 0+1+4+9=14, \\ S_y &= 0+1+4+9=14, \\ S_{xy} &= 0+1+8+27=36 \end{aligned}$$

$$a = \frac{14\times 14 - 6\times 36}{4\times 14 - 6^2} = -1, \qquad b = \frac{4\times 36 - 14\times 6}{4\times 14 - 6^2} = 3,$$

$$\therefore p(x) = -1+3x$$

最小二乗１次多項式の可視化



補間

- 関数 $f(x)$ を次の n 次多項式で近似

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad (n \text{ 次補間多項式})$$

- 係数 $a_0, \cdots, a_n$ の決め方
  - p_n が与えられた点すべてを通過することを要求
  - c.f. 回帰では $p_n(x)$ と $f(x)$ の差を最小化
- 相異なる $n+1$ 個の点を通る n 次多項式は一意に決まる
  - 例: 2 点を通る直線 (1 次多項式)
  - 例: 3 点を通る放物線 (2 次多項式)

補間の例

- 2 点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ を通る次の一次多項式を考える:

$$y = ax + b$$

- それぞれの点を代入すると、未知数 a, b を決める連立方程式は

$$\begin{cases} y_0 = ax_0 + b, \\ y_1 = ax_1 + b \end{cases}$$

- $n + 1$ 点を通る n 次多項式では n 変数連立一次方程式
  $\rightarrow n$ の増加とともに計算コストが増大

Lagrange 補間の考え方

- $x = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ のとき次の $n+1$ 次多項式はゼロ

$$L(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$

- $L(x)$ から因子 $x - x_i$ を取り除いた n 次多項式

$$L_i(x) = (x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})\cancel{(x - x_i)}(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)$$
$$= \begin{cases} L_i(x_i) \neq 0 & (x = x_i), \\ 0 & (x = x_0, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n) \end{cases}$$

- $n+1$ 点 $(x_0, y_0), \cdots, (x_n, y_n)$ を通る n 次の Lagrange 補間多項式

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j L_j(x) = c_0 L_0(x) + \cdots + c_n L_n(x)$$

の $n+1$ 個の未知数は $c_i = \dfrac{p_n(x_i)}{L_i(x_i)} = \dfrac{y_i}{L_i(x_i)}$ から容易に求まる

Lagrange 補間の例: $n=1$

- 2 点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ を通る 1 次の Lagrange 補間多項式

$$y = a\underbrace{(x - x_1)}_{x-x_0\text{以外}} + b\underbrace{(x - x_0)}_{x-x_1\text{以外}}$$

- (x, y) に $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ を代入すると

$$\begin{aligned} y_0 &= a(x_0 - x_1) + 0, &\qquad \therefore a &= \frac{y_0}{x_0 - x_1}, \\ y_1 &= 0 + b(x_1 - x_0), &\qquad \therefore b &= \frac{y_1}{x_1 - x_0} \end{aligned}$$

- したがって求める一次多項式は

$$y = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Lagrange補間の例: $n=2$

- 3 点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る 2 次の Lagrange 補間多項式

$$y = a\underbrace{(x-x_1)(x-x_2)}_{x-x_0\text{以外}} + b\underbrace{(x-x_0)(x-x_2)}_{x-x_1\text{以外}} + c\underbrace{(x-x_0)(x-x_1)}_{x-x_2\text{以外}}$$

- (x, y) に $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を代入すると

$$y_0 = a(x_0-x_1)(x_0-x_2)+0+0, \qquad \therefore a = \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)},$$

$$y_1 = 0+b(x_1-x_0)(x_1-x_2)+0, \qquad \therefore b = \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},$$

$$y_2 = 0+0+c(x_2-x_0)(x_2-x_1), \qquad \therefore c = \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

- したがって求める二次多項式は

$$y = y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Lagrange 補間の例: $n = 3$

- $n = 1, 2$ からの類推により、4 点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ を通る 3 次の Lagrange 補間多項式は

$$y = y_0 \underbrace{\overbrace{\frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}}^{x - x_0 \text{以外}}}_{\text{分子で } x = x_0} + y_1 \underbrace{\overbrace{\frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}}^{x - x_1 \text{以外}}}_{\text{分子で } x = x_1}$$

$$+ y_2 \underbrace{\overbrace{\frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}}^{x - x_2 \text{以外}}}_{\text{分子で } x = x_2} + y_3 \underbrace{\overbrace{\frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_2 - x_2)}}^{x - x_3 \text{以外}}}_{\text{分子で } x = x_3}$$

3 次の Lagrange 補間多項式の例

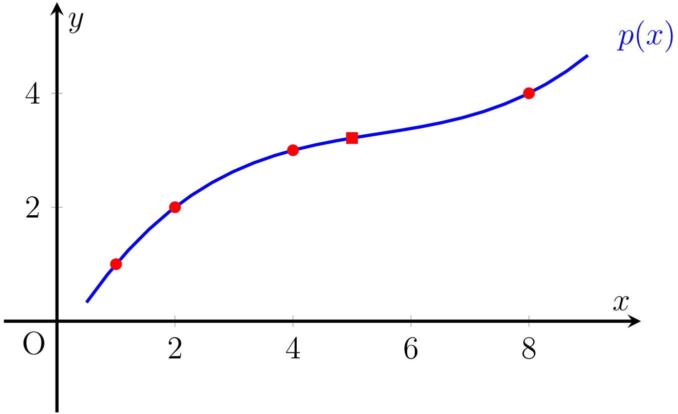
- 点 $(1,1),(2,2),(4,3),(8,4)$ を通る 3 次の Lagrange 補間多項式は

$$\begin{aligned} p_3(x) = \quad & 1\frac{(x-2)(x-4)(x-8)}{(1-2)(1-4)(1-8)} + 2\frac{(x-1)(x-4)(x-8)}{(2-1)(2-4)(2-8)} \\ & + 3\frac{(x-1)(x-2)(x-8)}{(4-1)(4-2)(4-8)} + 4\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(8-1)(8-2)(8-4)} \\ = & -\frac{1}{21}(x-2)(x-4)(x-8) + \frac{1}{6}(x-1)(x-4)(x-8) \\ & -\frac{1}{8}(x-1)(x-2)(x-8) + \frac{1}{42}(x-1)(x-2)(x-4) \end{aligned}$$

- $x=5$ における関数値は

$$\begin{aligned} p_3(5) &= -\frac{3\cdot 1\cdot(-3)}{21} + \frac{4\cdot 1\cdot(-3)}{6} - \frac{4\cdot 3\cdot(-3)}{8} + \frac{4\cdot 3\cdot 1}{42} \\ &= \frac{3}{7} - 2 + \frac{9}{2} + \frac{2}{7} = \frac{45}{14} \end{aligned}$$

3 次の Lagrange 補間多項式の可視化



Lagrange 補間多項式の一般形

- $x = x_0, \cdots, x_n$ でゼロになる $n+1$ 次多項式

$$L(x) = (x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{x+i})\cdots(x - x_n)$$

- $L(x)$ から因子 $x - x_i$ を取り除いた n 次多項式

$$L_i(x) = (x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})\cancel{(x - x_i)}(x - x_{x+i})\cdots(x - x_n)$$

- $n+1$ 個の点 $(x_0, y_0), \cdots, (x_n, y_n)$ を通る n 次の補間多項式

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{L_i(x\ )}{L_i(x_i)}$$

Lagrange 補間の応用: 逆補間

- $y = f(x)$ を満たす離散的なデータ点が与えられたとき

通常の補間

任意の x に対する $y = f(x)$ を近似的に求める

$$\updownarrow$$

逆補間

任意の y を与える $x = f^{-1}(y)$ を近似的に求める

逆補間の例

- $y = f(x) = x^2$ として $\sqrt{2}$ を逆補間で求める
- $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$ は既知として $y = 2$ を与える $x = \sqrt{2}$ を近似

x	1.3	1.4	1.5	1.6
y	1.69	1.96	2.25	2.56

- 3 次の Lagrange 補間多項式は

$$\begin{aligned} p_3(y) &= 1.3\frac{(y-1.96)(y-2.25)(y-2.56)}{(1.69-1.96)(1.69-2.25)(1.69-2.56)} \\ &+ 1.4\frac{(y-1.69)(y-2.25)(y-2.56)}{(1.96-1.69)(1.69-2.25)(1.69-2.56)} \\ &+ 1.5\frac{(y-1.69)(y-1.96)(y-2.56)}{(2.25-1.69)(2.25-1.96)(2.25-2.56)} \\ &+ 1.6\frac{(y-1.69)(y-1.96)(y-2.25)}{(2.56-1.69)(2.56-1.96)(2.56-2.25)} \end{aligned}$$

計算結果

- lagrange.c

```
#include <stdio.h>

int main(){
  int np = 3;
  double xmin = 1.3;
  double xmax = 1.6;
  double dx = (xmax - xmin) / np;
  double xp[np+1];
  double yp[np+1];
  for(int i=0; i<=np; ++i){
    double x = xmin + dx * i;
    xp[i] = x;
    yp[i] = x * x;
  }
```

```
  double x = 0.0;
  double y = 2.0;
  for(int j=0; j<=np; ++j){
    double prod = xp[j];
    for(int k=0; k<=np; ++k){
      if(k==j)
        continue;
      prod*=(y-yp[k])/(yp[j]-yp[k]);
    }
    x += prod;
  }
  printf("%f %f\n", x, y);
}
```

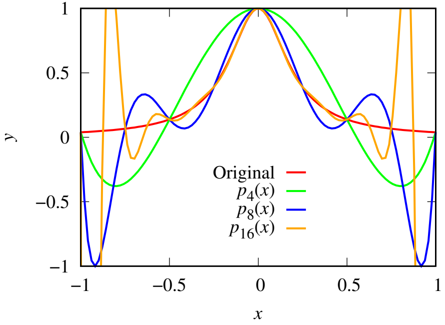
```
$./a.out
1.414219 2.000000
```

Rungeの現象

- Rungeの関数

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

- 区間 $[-1, 1]$ で Lagrange 補間すると両端で振動 (Rungeの現象)
- 補間点の数を増やすとより一層大きく振動



補足: Rungeの現象を計算するプログラム

- runge.c

```
#include <stdio.h>
int main(){
  int np = 16;
  double xmin = -1.0;
  double xmax = 1.0;
  double dx = (xmax - xmin) / np;
  double xp[np+1];
  double yp[np+1];
  for(int i=0; i<=np; ++i){
    double x = xmin + dx * i;
    xp[i] = x;
    yp[i] = 1.0 / (1.0 + 25*x*x);
  }
  int nx = np * 10;
  dx = (xmax - xmin) / nx;
```

```
  for(int i=0; i<=nx; ++i){
    double x = xmin + dx * i;
    double y = 0.0;
    for(int j=0; j<=np; ++j){
      double prod = yp[j];
      for(int k=0; k<=np; ++k){
        if(k==j)
          continue;
        prod*=(x-xp[k])/(xp[j]-xp[k]);
      }
      y += prod;
    }
    printf("%f %f\n", x, y);
  }
}
```