



数値計算法 第7回

連立一次方程式 (2)

濱本 雄治¹

情報工学部 情報通信工学科

2025 年 6 月 2 日

¹hamamoto@c.oka-pu.ac.jp

復習: 掃出し法



掃出し法の目標

係数行列の対角要素が1、非対角要素が0になるように変形

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \color{red}{1} & \color{blue}{0} & \cdots & \color{blue}{0} & b'_1 \\ \color{blue}{0} & \color{red}{1} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \color{red}{0} & \vdots \\ \color{blue}{0} & \cdots & \color{blue}{0} & \color{red}{1} & b'_n \end{array} \right)$$

▶ 例

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 24 \\ 3 & 5 & 13 & 52 \\ 5 & 8 & 24 & 93 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right), \quad \therefore \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = 3 \end{cases}$$

復習: Gauss の消去法



Gauss の消去法の目標

係数行列の下半分の要素がすべて 0 になるように変形 (前進消去)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & b'_1 \\ 0 & u_{22} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} & b'_n \end{array} \right)$$

▶ x_n, \dots, x_{k+1} まで降順に得られたら、 k 行目から x_k が求まる

$$x_k = \frac{1}{u_{kk}} (b_k - u_{k,k+1}x_{k+1} - \cdots - u_{kn}x_n) \quad (\text{後退代入})$$

係数行列が上三角行列なら連立一次方程式の解は容易に求まる

► 例:



▷ 前進消去

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 24 \\ 3 & 5 & 13 & 52 \\ 5 & 8 & 24 & 93 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 24 \\ 0 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

▷ 後退代入

$$3z = 9, \quad z = \frac{9}{3} = 3,$$

$$2y + 4z = 16, \quad y = \frac{16 - 4 \times 3}{2} = 2,$$

$$2x + 2y + 6z = 24, \quad x = \frac{24 - 2 \times 2 - 6 \times 3}{2} = 1$$

$$\therefore \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = 3. \end{cases}$$

前回の小テストの解説



Gauss の消去法を用いて次の連立一次方程式を解け:

$$\begin{cases} -x + y - 2z = -3 \\ x - 2y + 3z = 5 \\ 3x - 3y + 4z = 3 \end{cases}.$$

▶ 前進消去

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & | & -3 \\ 1 & -2 & 3 & | & 5 \\ 3 & -3 & 4 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & | & -3 \\ 0 & -1 & 1 & | & 2 \\ 3 & -3 & 4 & | & 3 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & | & -3 \\ 0 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & -2 & | & -6 \end{pmatrix}$$

▶ 後退代入



$$-2z = -6, \quad \therefore z = \frac{-6}{-2} = 3,$$

$$-y + z = 2, \quad \therefore y = \frac{2 - 1 \times 3}{-1} = 1,$$

$$-x + y - 2z = -3, \quad \therefore x = \frac{-3 - 1 \times 1 - (-2) \times 3}{-1} = -2$$

$$\begin{cases} x = -2, \\ y = 1, \\ z = 3. \end{cases}$$

LU 分解の考え方



- ▶ 係数行列を下三角行列と上三角行列に分解

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{係数行列 } A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{pmatrix}}_{\text{下三角行列 } L} \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}}_{\text{上三角行列 } U}$$

- ▶ $Ux = y$ において、連立一次方程式 $Ax = L \underbrace{Ux}_y = b$ を

1. $Ly = b$ から y を求める
2. $Ux = y$ から x を求める

の 2 段階に分解

係数行列が下・上三角行列なら連立一次方程式は容易に解ける

LU 分解の目標

係数行列が下三角行列と上三角行列の積になるように変形

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \ell_{n1} & \cdots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{下三角})$$
$$\times \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{上三角})$$

LU 分解の手順



1. 係数行列 A と同じサイズの行列 M を導入
2. M の初期値を単位行列とする

$$M_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. A の左下半分を掃出すると同時に M を更新
 - ▷ a_{ij} を掃出するとき、第 i 行に $m_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ii}}$ を掛けて第 j 行から引く
 - ▷ M の (i, j) 要素を乗数 m_{ij} で上書き
4. A が上三角行列 U になったとき、 M は下三角行列 L

LU 分解の例



- ▶ 前回の3変数、3本の連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x + 2y + 6z = 24 \\ 3x + 5y + 13z = 52 \\ 5x + 8y + 24z = 93 \end{cases} \rightarrow \mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 13 \\ 5 & 8 & 24 \end{pmatrix} \begin{matrix} \dots\dots\dots \textcircled{1} \\ \dots\dots\dots \textcircled{2} \\ \dots\dots\dots \textcircled{3} \end{matrix}$$

- ▶ $\textcircled{2} - \textcircled{1} \times \frac{3}{2}$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 24 \end{pmatrix} \begin{matrix} \dots\dots\dots \textcircled{1} \\ \dots\dots\dots \textcircled{2}' \\ \dots\dots\dots \textcircled{3} \end{matrix}$$



▶ $\textcircled{3} - \textcircled{1} \times \frac{5}{2}$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \dots\dots \textcircled{1} \\ \dots\dots \textcircled{2}' \\ \dots\dots \textcircled{3}' \end{array}$$

▶ $\textcircled{3}' - \textcircled{2}' \times \frac{3}{2}$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \dots\dots \textcircled{1} \\ \dots\dots \textcircled{2}' \\ \dots\dots \textcircled{3}'' \end{array}$$

▶ 念のため、LU 分解できているか確認

$$M_2 A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 13 \\ 5 & 8 & 24 \end{pmatrix} = A_0$$

► $Ly = b$ を解く (前進代入)



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 52 \\ 93 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = 24,$$

$$\frac{3}{2}y_1 + y_2 = 52 \quad y_2 = 52 - \frac{3}{2} \times 24 = 16,$$

$$\frac{5}{2}y_1 + \frac{3}{2}y_2 + y_3 = 93 \quad y_3 = 93 - \frac{5}{2} \times 24 - \frac{3}{2} \times 16 = 9.$$

$$\therefore \begin{cases} y_1 = 24, \\ y_2 = 16, \\ y_3 = 9. \end{cases}$$

► $Ux = y$ を解く (後退代入)



$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 16 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$3x_3 = 9, \quad x_3 = 3,$$

$$2x_2 + 4x_3 = 16, \quad x_2 = \frac{16 - 4 \times 3}{2} = 2,$$

$$2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 24, \quad x_1 = \frac{24 - 2 \times 2 - 6 \times 3}{2} = 1.$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

LU 分解の応用: 逆行列 (1)



- ▶ A の逆行列を X とすると

$$AX = I$$

- ▶ X, I を列ごとに $X = (x_1, \dots, x_n)$ 、 $I = (e_1, \dots, e_n)$ と表すと

$$Ax_j = e_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

ここで e_j は第 j 要素が 1、残りが 0 の縦ベクトル

- ▶ 各 j に対して $Ax_j = e_j$ を LU 分解で解く
- ▶ 各 j で $A = LU$ は共通なので、LU 分解は一度でよい
- ▶ 各 j の解 x_j を並べたものが逆行列 $A^{-1} = X = (x_1, \dots, x_n)$

LU 分解による逆行列の計算例



► 次の行列の逆行列を考える

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 13 \\ 5 & 8 & 24 \end{pmatrix} = LU,$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

► 前進代入 (第 1 列)



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = 1,$$

$$\frac{3}{2}y_1 + y_2 = 0 \quad y_2 = 0 - \frac{3}{2} \times 1 = -\frac{3}{2},$$

$$\frac{5}{2}y_1 + \frac{3}{2}y_2 + y_3 = 0 \quad y_3 = 0 - \frac{5}{2} \times 1 - \frac{3}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}.$$

$$\therefore \begin{cases} y_1 = 1, \\ y_2 = -3/2, \\ y_3 = -1/4. \end{cases}$$

► 後代入 (第 1 列)



$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

$$3x_3 = -\frac{1}{4}, \quad x_3 = -\frac{1}{12},$$

$$2x_2 + 4x_3 = -\frac{3}{2} \quad x_2 = \frac{-\frac{3}{2} - 4 \times \left(-\frac{1}{12}\right)}{2} = -\frac{7}{12}$$

$$2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 1 \quad x_1 = \frac{1 - 2 \times \left(-\frac{7}{12}\right) - 6 \times \left(-\frac{1}{12}\right)}{2} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = 4/3, \\ x_2 = -7/12, \\ x_3 = -1/12. \end{cases}$$

► 前進代入 (第 2 列)



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = 0,$$

$$\frac{3}{2}y_1 + y_2 = 1 \quad y_2 = 1 - \frac{3}{2} \times 0 = 1,$$

$$\frac{5}{2}y_1 + \frac{3}{2}y_2 + y_3 = 0 \quad y_3 = 0 - \frac{5}{2} \times 0 - \frac{3}{2} \times 1 = -\frac{3}{2}.$$

$$\therefore \begin{cases} y_1 = 0, \\ y_2 = 1, \\ y_3 = -3/2. \end{cases}$$

▶ 後代入 (第 2 列)



$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

$$3x_3 = -\frac{3}{2}, \quad x_3 = -\frac{1}{2},$$

$$2x_2 + 4x_3 = 1, \quad x_2 = \frac{1 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{3}{2}$$

$$2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0, \quad x_1 = \frac{0 - 2 \times \frac{3}{2} - 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = 0$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 3/2, \\ x_3 = -1/2. \end{cases}$$

► 前進代入 (第 3 列)



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = 0,$$

$$\frac{3}{2}y_1 + y_2 = 0, \quad y_2 = 0 - \frac{3}{2} \times 0 = 0,$$

$$\frac{5}{2}y_1 + \frac{3}{2}y_2 + y_3 = 1, \quad y_3 = 1 - \frac{5}{2} \times 0 - \frac{3}{2} \times 0 = 1.$$

$$\therefore \begin{cases} y_1 = 0, \\ y_2 = 0, \\ y_3 = 1. \end{cases}$$

► 後代入 (第 3 列)



$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3x_3 = 1, \quad x_3 = \frac{1}{3},$$

$$2x_2 + 4x_3 = 0, \quad x_2 = \frac{0 - 4 \times \frac{1}{3}}{2} = -\frac{2}{3},$$

$$2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0, \quad x_1 = \frac{0 - 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) - 6 \times \frac{1}{3}}{2} = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = -1/3, \\ x_2 = -2/3, \\ x_3 = 1/3. \end{cases}$$



▶ 以上をまとめると A の逆行列は

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

LU 分解の応用: 逆行列 (2)



- ▶ 前のページで I を B で置き換えると、同じ手順で

$$AX = B$$

を満たす X 、つまり $X = A^{-1}B$ が得られる

- ▶ 逆行列 X を求めてから B に掛けるよりも効率的
- ▶ A^{-1} そのものでなく積 $A^{-1}B$ を計算するときは、こちらを採用

行列式



▶ 2×2 、 3×3 行列のとき

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - c_2b_3) + b_1(c_2a_3 - a_2c_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)$$

▶ $n \times n$ 行列のとき

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

行・列が異なる要素で積を作り、置換 σ に応じて符号を変える

LU 分解の応用: 行列式



- ▶ L は下三角行列なので

$$|L| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \ell_{n1} & \cdots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times \cdots \times 1 = 1$$

- ▶ L は下三角行列なので

$$|U| = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{vmatrix} = u_{11}u_{22} \cdots u_{nn} = \prod_{i=1}^n u_{ii}$$

- ▶ 行列式の性質から $|A| = |L||U| = \prod_{i=1}^n u_{ii} = U$ の対角要素

LU 分解による行列式の計算例



- ▶ 再び次の行列の行列式を考える

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 13 \\ 5 & 8 & 24 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- ▶ 行列式の性質から

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{L}||\mathbf{U}| = |\mathbf{U}| = 2 \times 2 \times 3 = 12$$