数値計算法 第5回

非線形方程式 (2)

濱本 雄治 [1]

情報工学部 情報通信工学科

2025年5月19日

[1] hamamoto@c.oka-pu.ac.jp

復習: 反復法

- 非線形方程式 $f(x) = 0$ を次のように変形

$$x = g(x) \qquad [x - g(x) \sim f(x)]$$

- 関数 g を x に対する変換と見なす

$$x \xrightarrow{g} x' = g(x)$$

反復法の原理

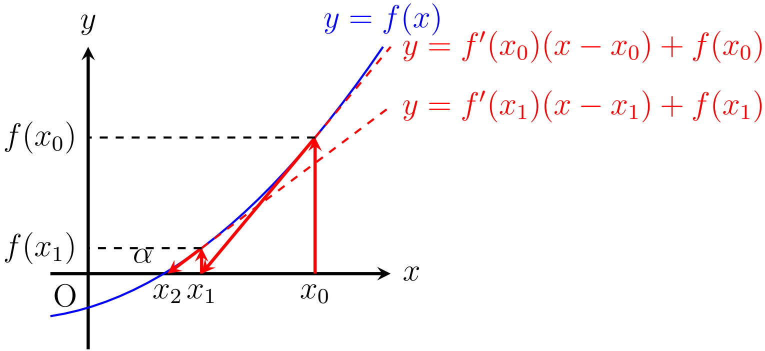
漸化式 $x_{k+1} = g(x_k)$ によって生成される数列

$$x_0, x_1, x_2, \cdots$$

がある値 α に収束すれば、α は $x = g(x)$ つまり $f(x) = 0$ の解

復習: Newton 法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



x_k における接線と x 軸の交点が x_{k+1}

復習: 収束の速さ

p 次収束

α に収束する数列 $\{x_k\}$ が十分大きな k に対して

$$|x_{k+1} - \alpha| \le C|x_k - \alpha|^p \qquad (C > 0)$$

を満たすとき、$\{x_k\}$ は α に p 次収束すると言う

- Newton 法 (単解のとき)

$$x_{k+1} - \alpha = x_k - \alpha - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{(x_k - \alpha)^2 q'(x_k)}{q(x_k) + (x_k - \alpha)q'(x)}$$

$$\frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^2} = \left|\frac{q'(x_k)}{q(x_k) + (x_k - \alpha)q'(x)}\right| \xrightarrow{k\to\infty} \left|\frac{q'(\alpha)}{q(\alpha)}\right| < \infty,$$

$$\therefore |x_{k+1} - \alpha| \le C|x_k - \alpha|^2 \qquad \to \text{2 次収束}$$

前回の小テストの解説

Newton 法で $f(x) = x^2 - 3$ として $\sqrt{3}$ を求める。初期値を $x_0 = 1.5$ として有効数字 6 桁で x_1, x_2, x_3 を計算せよ。ただし計算機を用いてよい。

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 2x, \\
x_{k+1} &= x_k - \frac{{x_k}^2 - 2}{3x_k} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{3}{x_k}\right), \\
x_1 &= \frac{1}{2}\left(1.50000 + \frac{3.00000}{1.50000}\right) = 1.75000, \\
x_2 &= \frac{1}{2}\left(1.75000 + \frac{3.00000}{1.75000}\right) = 1.73214, \\
x_2 &= \frac{1}{2}\left(1.73214 + \frac{3.00000}{1.73214}\right) = 1.73205
\end{aligned}
$$

割線法

- Newton 法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

では x_k での接線と x 軸の交点が x_{k+1} $\rightarrow$ $f'(x_k)$ の計算が必要

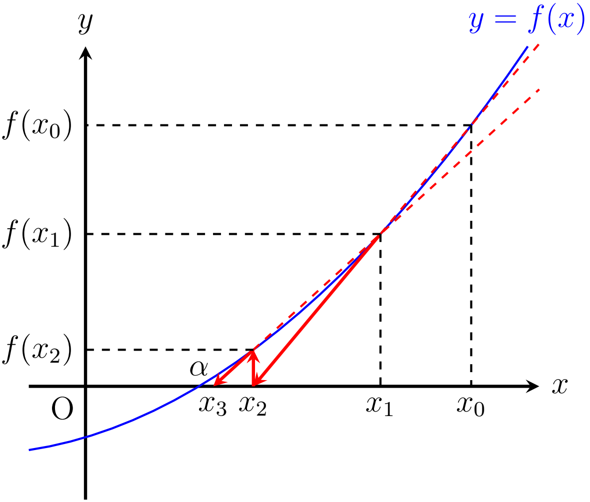
- $f'(x_k)$ が計算できない場合は 2 点 $(x_k, f(x_k)), (x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ を通る直線と x 軸の交点を x_{k+2} とする (割線法)

$$0 = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}(x_{k+2} - x_{k+1}) + f(x_{k+1}),$$

$$\therefore \ x_{k+2} = x_{k+1} - \frac{f(x_{k+1})(x_{k+1} - x_k)}{f(x_{k+1}) - f(x_k)}$$

$\rightarrow$ 初期値として x_0, x_1 が必要

割線法の可視化



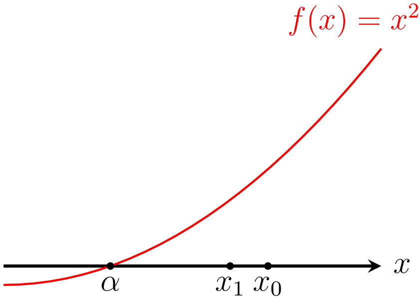
$(x_k, f(x_k)), (x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ を通る直線と x 軸の交点が x_{k+2}

割線法の例

- 方程式 $x^2 - 2 = 0$ を解く
  - $f(x) = x^2 - 2$

$$x_{k+2} = x_{k+1} - \frac{f(x_{k+1})(x_{k+1} - x_k)}{f(x_{k+1}) - f(x_k)} = \frac{x_{k+1}x_k + 2}{x_{k+1} + x_k}$$

  - 初期値 $x_0 = 1.6, x_1 = 1.5$



割線法の数値計算

- secant.c

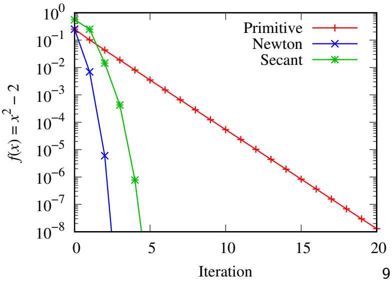
```
#include <stdio.h>

int main(){
  double x0 = 1.6;
  double x1 = 1.5;
  double x2;

  for(int i=0; i!=6; ++i){
    printf("%2i %.8f %.8e\n",
           i, x0, x0*x0-2);
    x2 = (x1*x0+2) / (x1+x0);
    x0 = x1;
    x1 = x2;
  }
}
```

- 実行結果

```
$ gcc secant.c; ./a.out
 0 1.60000000 5.60000000e-01
 1 1.50000000 2.50000000e-01
 2 1.41935484 1.45681582e-02
 3 1.41436464 4.27337383e-04
 4 1.41421384 7.75285788e-07
 5 1.41421356 4.14092639e-11
```



割線法の収束の速さ

方針

x_k が α に p 次収束するとき、十分大きな k に対して

$$|x_{k+1}-\alpha| \leq C|x_k-\alpha|^p$$

が成り立つと仮定して、割線法の漸化式から p の条件を求める

- 割線法の漸化式の両辺から α を引くと

$$\underbrace{x_{k+2}-\alpha}_{e_{k+2}} = \underbrace{x_{k+1}-\alpha}_{e_{k+1}} - \frac{f(x_{k+1})\overbrace{(x_{k+1}-x_k)}^{e_{k+1}-e_k}}{f(x_{k+1})-f(x_k)}$$

- $e_k \equiv x_k - \alpha$ を定義して漸化式を書き直すと

$$e_{k+2} = e_{k+1} - \frac{f(x_{k+1})(e_{k+1} - e_k)}{f(x_{k+1}) - f(x_k)}$$

- 右辺の $f(x)$ を $x = \alpha$ の周りで 2 次まで Taylor 展開すると

$$\begin{aligned} f(x) &\simeq \underbrace{f(\alpha)}_{=0} + f'(\alpha)\underbrace{(x-\alpha)}_{e} + \frac{1}{2}f''(\alpha)\underbrace{(x-\alpha)^2}_{e^2}, \\ f(x_k) &\simeq f'(\alpha)e_k + \frac{1}{2}f''(\alpha){e_k}^2, \\ f(x_{k+1}) &\simeq f'(\alpha)e_{k+1} + \frac{1}{2}f''(\alpha){e_{k+1}}^2, \end{aligned}$$

k が十分大きいとき e は微小量であることに注意

- これらを右辺第二項に代入すると

$$第二項 \simeq \frac{[f'(\alpha)e_{k+1} + \frac{1}{2}f''(\alpha){e_{k+1}}^2]\cancel{(e_{k+1} - e_k)}}{f'(\alpha)\cancel{(e_{k+1} - e_k)} + \frac{1}{2}f''(\alpha)(e_{k+1} + e_k)\cancel{(e_{k+1} - e_k)}}$$

$$= \frac{1 + \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}e_{k+1}}{1 + \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}(e_{k+1} + e_k)} e_{k+1}$$

- 分母の第二項は第一項に比べて小さいので $(1+x)^{-1} \simeq 1 - x$ $(|x| \ll 1)$ を用いると

$$第二項 = \left[1 + \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}e_{k+1}\right]\left[1 - \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}(e_{k+1} + e_k)\right] e_{k+1}$$

$$\simeq \left[1 + \cancel{\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}e_{k+1}} - \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}(\cancel{e_{k+1}} + e_k)\right] e_{k+1}$$

$$= e_{k+1} - \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} e_k e_{k+1}$$

- よって漸化式は

$$e_{k+2} = e_{k+1} - \left(e_{k+1} - \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} e_k e_{k+1} \right) = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} e_k e_{k+1}$$

- これを $|e_{k+1}| \le C|e_k|^p$ と比較するために e_k の次数を揃える

$$|e_{k+2}| \le C|e_{k+1}|^p \le C\Big|C|e_k|^p\Big|^p = C^{1+p}|e_k|^{p^2},$$
$$|e_{k+2}| = \left|\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right| |e_k||e_{k+1}| \le C\left|\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right| |e_k|^{1+p}$$

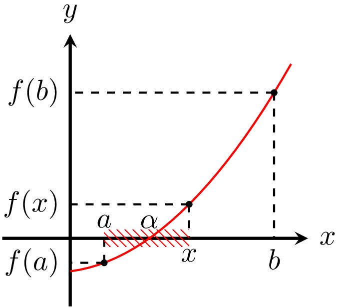
- 右辺の $|e_k|$ の指数を比較して

$$p^2 = p + 1, \qquad \therefore p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.618$$

よって割線法は 1.618 次収束である

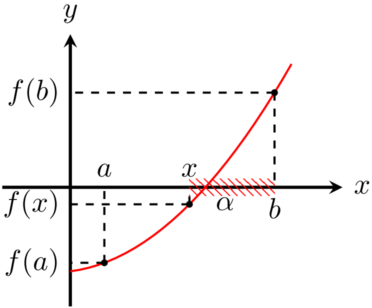
二分法の考え方

- $f(x) = 0$ の解が区間 $[a, b]$ に存在するとき $f(a)f(b) \leq 0$
- この区間の中点 $x = (a + b)/2$ で $f(a)f(x)$ の符号を調べる
  - $f(a)f(x) \leq 0$ のとき



解は左半分 $[a, x]$ に存在

  - $f(a)f(x) > 0$ のとき



解は右半分 $(x, b]$ に存在

- $|a - b| < \varepsilon$ (許容誤差) となるまで区間の縮小を反復

二分法の数値計算

- bisection.c

```c
#include <stdio.h>
double func(double x){
  return x * x - 2;
}
int main(){
  double a = 1.4;
  double b = 1.5; double x;
  for(int i=0; i!=16; ++i){
    x = 0.5 * (a + b);
    printf("%2d %.8f %.8e\n",
           i, x, func(x));
    if(func(a)*func(x)<=0)
      b = x;
    else
      a = x;
  }
}
```

- 実行結果

```
$ gcc bisection.c
$ ./a.out
 0 1.45000000 1.02500000e-01
 1 1.42500000 3.06250000e-02
 2 1.41250000 -4.84375000e-03
 3 1.41875000 1.28515625e-02
 4 1.41562500 3.99414062e-03
.
.
.
11 1.41423340 5.61052561e-05
12 1.41422119 2.15782225e-05
13 1.41421509 4.31481749e-06
14 1.41421204 -4.31685708e-06
15 1.41421356 -1.02212678e-09
```

二分法の収束の速さ

- k 回目の中点を x_k とすると

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{1}{2^k}(b - a)$$

- $|x_k - \alpha|$ の上限はステップ毎に半減して概ね

$$|x_k - \alpha| \sim \frac{1}{2}|x_k - \alpha|$$

が成り立つため、二分法は1次収束

- 収束の速さの比較