



物理学 B 第 4 回

コンデンサー、静電場のエネルギー

濱本 雄治¹

情報工学部 情報通信工学科

2025 年 10 月 20 日

¹hamamoto@c.oka-pu.ac.jp <https://yhmmt.github.io/pages/>

前回の復習: 静電ポテンシャル



▶ ベクトル場 F に対して次の 1, 2 は等価

1. 任意の閉曲線 C_0 に沿った線積分がゼロ

$$\int_{C_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

2. 積分経路に依らないポテンシャル関数が存在

$$f(\mathbf{r}) = - \int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

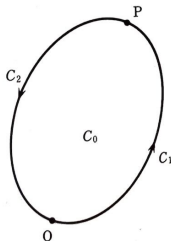
▶ 点電荷が作る静電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$ (の重ね合わせ) は 1. を満足

▶ 静電ポテンシャル (電位)

$$\phi(\mathbf{r}) = - \int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

\Leftrightarrow

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \equiv -\nabla \phi$$



前回の小テストの解説



半径 a の中空の球殻上に電荷 Q が一様に分布しているとき、球殻の内部および外部における静電ポテンシャルを求めよ。ただし無限遠方における静電ポテンシャルを $\phi(\infty) = 0$ とする。前々回の小テストから球殻の内外の電場は、球殻の中心から測った位置ベクトル \boldsymbol{r} に平行で $r \equiv |\boldsymbol{r}|$ のみの関数

$$E(r) = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r > a) \end{cases},$$

$$\therefore \phi(r) = - \int E(r) dr = \begin{cases} C_1 & (r < a) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C_2 & (r > a) \end{cases}$$

前回の小テストの解説 (続き)



無限遠方で $\phi(\infty) = 0$ とすると

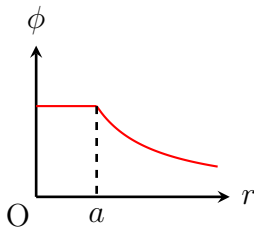
$$\phi(r > a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C_2 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 + C_2 = 0, \quad \therefore C_2 = 0$$

$r = a$ で静電ポテンシャルが連続とすると

$$\phi(r \rightarrow a - 0) = \phi(r \rightarrow a + 0), \quad \therefore C_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

以上から

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} & (r < a) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & (r > a) \end{cases}$$

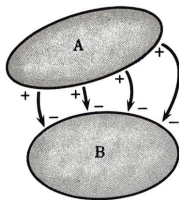


帯電した導体球の電場、静電ポテンシャルと等価

コンデンサー



- ▶ 次のような系を**コンデンサー**と呼ぶ
 - ▷ 2つの導体が近接
 - ▷ それぞれ当量の正負の電荷を持つ
 - ▷ 電気力線は導体間のみに存在
- ▶ 導体の電荷 $\pm Q$ は導体間の電位差 V に比例



$$Q = CV$$

比例係数 C を**静電容量** (電気容量) と呼ぶ

- ▶ 電位差を 1 V 上昇させるのに必要な電気量が 1 C のとき
コンデンサーの静電容量を 1 F と定義

補足：電荷と電位差の比例関係



- ▶ 導体が占める領域 Ω の外部における電位は

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dV' \\ & + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial\phi(\mathbf{r}')}{\partial n'} + \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \phi(\mathbf{r}') \right] dS'\end{aligned}$$

ここでグリーン関数 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ は次の微分方程式の解

$$\nabla'^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \left(\nabla'^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

- ▶ $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ に $\nabla'^2 H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ を満たす $H(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ を加えてもよい
- ▶ 境界 $\partial\Omega$ 上で $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ を課することをディレクレ条件と呼ぶ

補足: 電荷と電位差の比例関係 (続き)



- ▶ ディリクレ条件の下で導体外部における電位は

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \phi(\mathbf{r}') dS'$$

- ▶ Ω を導体 A, B の領域 Ω_A, Ω_B に分割すると

- ▷ 導体内部に電荷は存在しない $\rho(\mathbf{r}' \in \Omega_{A,B}) = 0$

- ▷ 導体表面は等電位 $\phi(\mathbf{r}' \in \partial\Omega_{A,B}) = \phi_{A,B}$

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{j=A,B} \frac{\phi_j}{4\pi} \oint_{\partial\Omega_j} \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} dS'$$

- ▶ 導体 i の表面の電荷密度は電場の法線成分に比例

$$\omega_i(\mathbf{r}) = \epsilon_0 E_n = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\epsilon_0}{4\pi} \sum_{j=A,B} \phi_j \oint_{\partial\Omega_j} \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'} dS'$$

補足: 電荷と電位差の比例関係 (続き)



- ▶ 導体 i の電荷の総量

$$\begin{aligned} Q_i &= \int_{\partial\Omega_i} \omega_i(\mathbf{r}) dS = -\frac{\varepsilon_0}{4\pi} \sum_{j=A,B} \phi_j \oint_{\partial\Omega_i} \oint_{\partial\Omega_j} \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'} dS dS' \\ &= \sum_{j=A,B} C_{ij} \phi_j \quad \left(C_{ij} \equiv -\frac{\varepsilon_0}{4\pi} \oint_{\partial\Omega_i} \oint_{\partial\Omega_j} \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'} dS dS' = C_{ji} \right) \end{aligned}$$

- ▶ $Q_A = -Q_B \equiv Q$ 、 $\phi_A = -\phi_B \equiv \frac{V}{2}$ と書くと

$$Q = C_{AA} \frac{V}{2} + C_{AB} \left(-\frac{V}{2} \right) = \frac{C_{AA} - C_{AB}}{2} V \equiv CV$$

よって電荷 Q は電位差 $V = \phi_A - \phi_B$ に比例

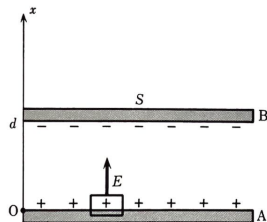
例 1: 平行板コンデンサー



▶ 極板間の電場 (復習)

- ▷ 静電誘導により電荷は内側に分布
- ▷ 極板上の一様な電荷面密度 $\omega = Q/S$
- ▷ 電極 A の表面を貫く筒状の閉曲面 S_0

$$\int_{S_0} E_n dS = E \Delta S = \frac{\omega \Delta S}{\epsilon_0}, \quad \therefore E = \frac{\omega}{\epsilon_0}$$



▶ 極板間の静電ポテンシャル

$$\phi(x) = - \int E dx = - \frac{\omega}{\epsilon_0} x + \text{const.}$$

▶ 極板間の電位差と静電容量

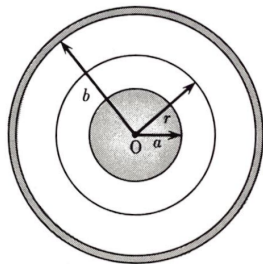
$$V = \phi(0) - \phi(d) = \frac{\omega d}{\epsilon_0} = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}, \quad \therefore C = \frac{C}{V} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

例2: 球形コンデンサー



▶ 導体球と導体球殻の間の電場 (復習)

- ▶ 導体球と導体球殻の半径 $a, b (> a)$
- ▶ 導体球表面に電荷 Q が一様に分布
- ▶ 半径 r ($a < r < b$) の球面状閉曲面 S_0



$$\int_{S_0} E_n dS = 4\pi r E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad \therefore E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

▶ 導体球と導体球殻の間の静電ポテンシャル

$$\phi(r) = - \int E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{const.}$$

▶ 導体球と導体球殻の間の電位差と静電容量

$$V = \phi(a) - \phi(b) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right), \quad \therefore C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b - a}$$

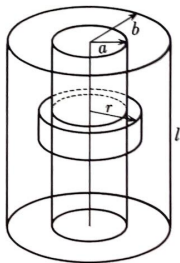
例3: 円筒形コンデンサー



▶ 2つの中空の円筒形導体の間の電場

- ▷ 内側と外側の円筒形導体の半径 $a, b (> a)$
- ▷ 内側の円筒に沿って一様な電荷線密度 $\lambda = \frac{Q}{\ell}$
- ▷ 半径 r ($a < r < b$)、高さ h の円筒状閉曲面 S_0

$$\int_{S_0} E_n dS = 2\pi r h E(r) = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}, \quad \therefore E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$



▶ 内側と外側の円筒形導体間の静電ポテンシャル

$$\phi(r) = - \int E(r) dr = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log r + \text{const.}$$

▶ 内側と外側の円筒形導体間の電位と静電容量

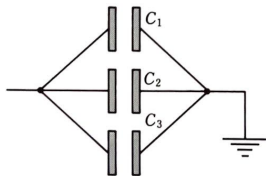
$$V = \phi(a) - \phi(b) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{b}{a} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 \ell} \log \frac{b}{a}, \quad \therefore C = \frac{2\pi\epsilon_0 \ell}{\log(b/a)}$$

コンデンサーの並列接続



▶ 3つのコンデンサーを並列接続した系

- ▶ それぞれの電気量 Q_1, Q_2, Q_3
- ▶ それぞれの静電容量 C_1, C_2, C_3
- ▶ 等しい電圧 ($\equiv V$) がかけるので



$$Q_1 = C_1 V, \quad Q_2 = C_2 V, \quad Q_3 = C_3 V$$

▶ 総電気量

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)V$$

▶ 総静電容量

$$C = \frac{Q}{V} = C_1 + C_2 + C_3 \quad (> C_1, C_2, C_3)$$

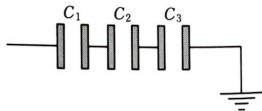
並列接続で静電容量は増加

コンデンサーの直列接続



▶ 3つのコンデンサーを並列接続した系

- ▶ それぞれの静電容量 C_1, C_2, C_3
- ▶ それぞれの電圧 V_1, V_2, V_3
- ▶ 等しい電荷 ($\equiv Q$) が誘導されるので



$$Q = C_1 V_1 = C_2 V_2 = C_3 V_3$$

▶ 総電圧

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) Q$$

▶ 総静電容量

$$C = \frac{Q}{V} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)^{-1} \quad (< C_1, C_2, C_3)$$

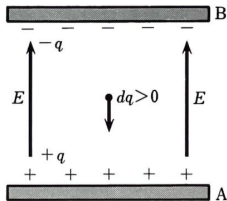
並列接続で静電容量は減少

コンデンサーの静電エネルギー



▶ 平行板コンデンサー

- ▶ 電極 A, B に正負の電荷 $\pm q$
- ▶ 電極に垂直な一様な電場 E
- ▶ 電極間の電位差 $V = \phi(A) - \phi(B) = \frac{q}{C}$



- ▶ 微小電荷 $dq > 0$ を B 極から A 極に移動させるのに必要な仕事

$$dW = Vdq = \frac{q}{C}dq$$

- ▶ 両極を $\pm Q$ 帯電させる間に蓄えられる静電エネルギー

$$U_e = \int dW = \frac{1}{C} \int_0^Q qdq = \frac{1}{C} \left[\frac{q^2}{2} \right]_0^Q = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2$$

U_e は電荷 $\pm Q$ が持つ位置エネルギーと解釈できる

コンデンサーの静電場のエネルギー



▶ $U_e = \frac{Q^2}{2C}$ を両極間の静電場 E の観点から書き直す

▷ 電極表面の電荷面密度

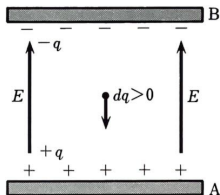
$$\omega = \frac{Q}{S} = \varepsilon_0 E, \quad \therefore Q = \varepsilon_0 S E$$

▷ 平板コンデンサーの静電容量

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

▷ U_e から Q, C を消去すると

$$U_e = \frac{(\varepsilon_0 S E)^2}{2\varepsilon_0 \frac{S}{d}} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 S d \equiv \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 v = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_v E^2 dv$$



U_e は電極間の体積 $v \equiv Sd$ 内の静電場のエネルギーと解釈できる

点電荷間の静電エネルギー



- ▶ 位置 \mathbf{r}_1 にある点電荷 q_1 が位置 \mathbf{r} に作る静電ポテンシャル

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}$$

- ▶ 位置 \mathbf{r}_2 にある別の点電荷 q_2 と q_1 との間の静電エネルギー

$$U_{12} = q_2\phi_1(\mathbf{r}_2) = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

- ▶ 恒等式 $\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} dv$ で書き直すと

$$U_{12} = \epsilon_0 \int \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} \right) \cdot \left(\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} \right) dv = \epsilon_0 \int \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 dv$$

ここで $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ は点電荷 q_1, q_2 が作る静電場

点電荷間の静電場のエネルギー



- ▶ 点電荷 q_1, q_2 が作る静電場の重ね合わせ

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

- ▶ 全電場のエネルギーをコンデンサーと同様に体積積分で表すと

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int \mathbf{E}^2 dv = \frac{\varepsilon_0}{2} \int (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 dv \\ &= \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2} \int \mathbf{E}_1^2 dv}_{\text{点電荷 } q_1 \text{ の 自己エネルギー}} + \underbrace{\varepsilon_0 \int \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 dv}_{\text{点電荷 } q_1 q_2 \text{ 間の 相互作用エネルギー } U_{12}} + \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2} \int \mathbf{E}_2^2 dv}_{\text{点電荷 } q_2 \text{ の 自己エネルギー}} \end{aligned}$$

単一の点電荷が作る静電場もエネルギーを持つ

点電荷の自己エネルギー



▶ 点電荷 Q が作る静電場

- ▷ 点電荷を中心とする半径 r の球面状の閉曲面 S_0
- ▷ 電場は S_0 に垂直で r のみの関数
- ▷ ガウスの法則から

$$\int_{S_0} E_n dS = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad \therefore E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

▶ 静電場のエネルギー

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^\infty \{E(r)\}^2 \underbrace{4\pi r^2}_{dv} dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_0^\infty = \infty$$

点電荷の自己エネルギーは $r \rightarrow 0$ で発散

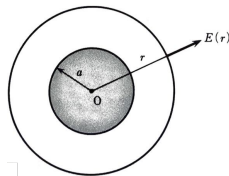
→ 電子のような点電荷は実際は微小な半径を持つと解釈

球状電荷の静電場のエネルギー



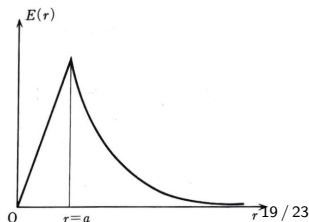
▶ 球状の電荷が作る電場 (復習)

- ▶ 電荷 Q は半径 a の球の内部に一様に分布
- ▶ 半径 r の球面状の閉曲面 S_0
- ▶ 電場は S_0 に垂直で r のみの関数
- ▶ ガウスの法則から



$$\int_{S_0} E_n dS = \underbrace{4\pi r^2}_{S_0 \text{ の表面積}} E(r) = \begin{cases} \left(\frac{r}{a}\right)^3 \frac{Q}{\varepsilon_0} & (r < a) \\ \frac{Q}{\varepsilon_0} & (r > a) \end{cases}$$

$$\therefore E(r) = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} & (r < a) \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > a) \end{cases}$$



球状電荷の静電場のエネルギー (続き)



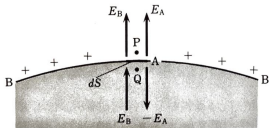
▶ 静電場のエネルギー

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2 dv \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int_0^a \left(\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \right)^2 4\pi r^2 dr + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_a^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\int_0^a \frac{r^4}{a^6} dr + \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} \right) \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\left[\frac{r^5}{5a^6} \right]_0^a - \left[\frac{1}{r} \right]_a^\infty \right) \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{5a} + \frac{1}{a} \right) \\ &= \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} \end{aligned}$$

導体表面に作用する力



- ▶ 表面の微小部分 A の面積を dS とする
- ▶ 微小部分 A の電荷 ωdS が
 - ▷ 真上の点 P に作る電場は E_A
 - ▷ 真下の点 Q に作る電場は $-E_A$ (上下対称に電場が発生)
- ▶ 残りの部分 B の電荷が
 - ▷ 点 P に作る電場は E_B
 - ▷ 点 Q に作る電場も E_B (PQ 間は近いので電場は連続)
- ▶ 導体内の電場は相殺するので $-E_A + E_B = 0 \quad \therefore E_A = E_B$
- ▶ 導体外の点 P での全電場 $E = E_A + E_B = 2E_B \quad \therefore E_B = E/2$
- ▶ B の電荷が作る電場 E_B が A の微小電荷 ωdS に作用する力



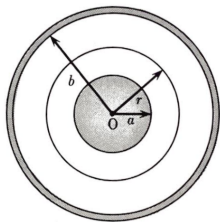
$$dF = \omega dS E_B = \varepsilon_0 E dS \frac{1}{2} E = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 dS$$

導体表面の張力は静電場のエネルギー密度 $u = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2$ に等しい

演習 1: 球形コンデンサーの静電場のエネ... ⑨

- ▶ 半径 a の導体球と半径 $b(> a)$ の導体球殻
- ▶ 導体球と導体球殻の間の静電場

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



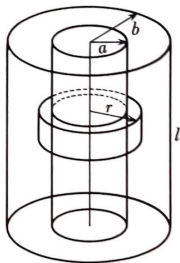
- ▶ 導体球と導体球殻の間の静電場のエネルギー

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^b \{E(r)\}^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \end{aligned}$$

演習 2: 円筒形コンデンサーの静電場のエネ...

- ▶ 半径 a および $b(>a)$ の円筒形導体
- ▶ 円筒形導体間の静電場

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$



- ▶ 円筒形導体間の長さ h の部分の静電場のエネルギー

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^b \{E(r)\}^2 2\pi r^2 h dr \\ &= \frac{\lambda^2 h}{2\pi\epsilon_0} \int_a^b dr \\ &= \frac{\lambda^2 h}{2\pi\epsilon_0} (b - a) \end{aligned}$$