物理学B 第6回

オームの法則、ジュールの法則、キルヒホッフの法則

濱本 雄治[1]

情報工学部 情報通信工学科

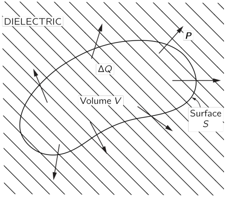
2025年11月5日、6日

[1]hamamoto@c.oka-pu.ac.jp

https://yhmmt.github.io/pages/

前回の復習: 誘電体

- $\boldsymbol{P}$ が一様でない誘電体内部の閉曲面 S_0
  - S_0 内部では正負電荷が相殺
  - S_0 上の $\boldsymbol{P}$ の接線成分も正負電荷が相殺
  - S_0 上の $\boldsymbol{P}$ の法線成分が分極電荷に寄与
  - S_0 上の分極電荷を Q_p とすると



$$Q_\mathrm{p} = -\int_{S_0} P_n \mathrm{d}S \quad \text{(負符号は分極電荷と真電荷が逆だから)}$$

- 真電荷 Q_e と分極電荷 Q_p が作る電場はガウスの法則から

$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon_0}(Q_\mathrm{e} + Q_\mathrm{p}) \qquad \therefore \boxed{\int_{S_0} (\varepsilon_0 E_n + P_n)\mathrm{d}S = Q_\mathrm{e}}$$

真電荷 Q_e が作る場 $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ を電束密度 (電気変位) と呼ぶ

前回の復習: 静電場を規定する法則

1. 電束密度 $\boldsymbol{D}$ に対するガウスの法則

$$\boxed{\int_{S_0} D_n \mathrm{d}S = Q_\mathrm{e}} \qquad (S_0\text{は任意の閉曲面})$$

ここで $\boldsymbol{D} \equiv \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \simeq \varepsilon \boldsymbol{E}$

2. 静電場が $\boldsymbol{E} = E(r)\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ と書けることに由来する (名無しの) 法則

$$\boxed{\int_{C_0} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0} \qquad (C_0\text{は任意の閉曲線})$$

あるいは

$$\boxed{\phi(\boldsymbol{r}) = -\int^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{E(r) = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}}$$

前回の小テストの解説

電荷 Q が内部に一様に分布した半径 a の球状電荷が半径 $b(> a)$、誘電率 ε の誘電体球の中心に埋め込まれている。各領域における静電場の大きさと方向を求めよ。

球状電荷と中心が同じ半径 r の閉曲面を S_0 とすると、電束密度は r のみの関数で S_0 に垂直、かつ境界面上で連続なので

$$\int_{S_0} D_n \mathrm{d}S = 4\pi r^2 D(r) = \begin{cases} \left(\dfrac{r}{a}\right)^3 Q & (0 < r < a) \\ Q & (r > a) \end{cases},$$

$$\therefore D(r) = \begin{cases} \dfrac{Qr}{4\pi a^3} & (0 < r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi r^2} & (r > a) \end{cases}$$

前回の小テストの解説 (続き)

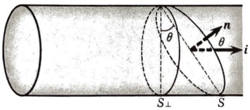
球状電荷は分極しないので誘電率は ε_0 である。$r > a$ では $r = b$ で誘電率が ε から ε_0 に変化するので、電場は

$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon(r)} = \begin{cases} \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} & (0 < r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} & (a < r < b) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > b) \end{cases}$$

電場の向きは閉曲面 S_0 に垂直な方向

電流密度

- 電流 I
  - 強さ: 断面を単位時間当り通過する電荷
  - 向き: 正電荷の流れる方向 (電子と逆)
  - 単位: $\mathrm{A} = \mathrm{C/s}$



- 電流密度 i
  - 単位面積の断面を垂直に通過する電荷 (平行な成分は通過しない)
  - 任意の断面 S と導線を垂直に切った断面 $S_\perp$ のなす角を θ とすると

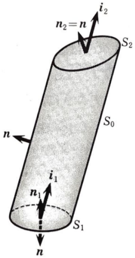
$$i = \frac{I}{S_\perp} = \frac{I}{S\cos\theta}, \qquad I = Si\cos\theta = S\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i} = Si_n$$

  - 断面が曲面のときは面積 $\mathrm{d}S$ を通過する電流 $\mathrm{d}I = i_n\mathrm{d}S$ を積分して

$$I = \int_S \mathrm{d}I = \int_S i_n \mathrm{d}S$$

定常電流の保存則

- 時間的に変化しない電流を**定常電流**と呼ぶ
- 導線を通過する定常電流の値は断面に依らない
  - 断面 S_1, S_2 を通過する電流を I_1, I_2 とすると



$$I_1 = I_2, \qquad \therefore \int_{S_1} i_{n_1} \mathrm{d}S = \int_{S_2} i_{n_2} \mathrm{d}S$$

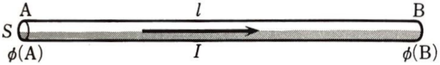
  - S_1, S_2 および側面からなる閉曲面 S_0
  - S_0 に外向きに立てた法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると

$$i_{n_1} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{i} \cdot (-\boldsymbol{n}) = -i_n, \qquad i_{n_2} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{n} = i_n,$$

$$-\int_{S_1} i_n \mathrm{d}S = \int_{S_2} i_n \mathrm{d}S, \qquad \therefore \int_{S_1+S_2} i_n \mathrm{d}S = 0$$

  - 側面上では $i_n = 0$ なので $\boxed{\int_{S_0} i_n \mathrm{d}S = 0}$ (**定常電流の保存則**)

一様な導線中のオームの法則



- 導線中の 2 点間を流れる電流は 2 点間の電位差に比例

$$I = \frac{\phi(\mathrm{A}) - \phi(\mathrm{B})}{R} = \frac{V}{R} \quad \text{(オームの法則)}$$

  - (電気) 抵抗 R の単位は $\Omega = \mathrm{V/A}$
- R は 2 点間の長さ ℓ に比例し、導線の垂直断面積 S に反比例

$$\boxed{R = \rho\frac{\ell}{S}}$$

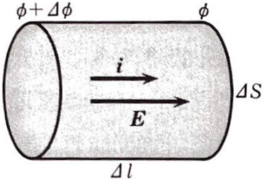
  - 比例係数 ρ を抵抗率と呼び、単位は Ω/m
  - 抵抗率の逆数 $\sigma = \rho^{-1}$ を電気伝導率と呼ぶ

微小領域でのオームの法則

- 断面積 ΔS、長さ $\Delta \ell$ の微小な導線
- オームの法則から

$$i\Delta S = \frac{\Delta\phi}{\Delta R} \qquad \left(\Delta R = \rho\frac{\Delta\ell}{\Delta S}\right)$$
$$= \frac{\Delta\phi}{\rho\frac{\Delta\ell}{\Delta S}} = \rho^{-1}\frac{\Delta\phi}{\Delta\ell}\Delta S = \sigma E\Delta S$$

$$\therefore\ \boxed{i = \sigma E}$$

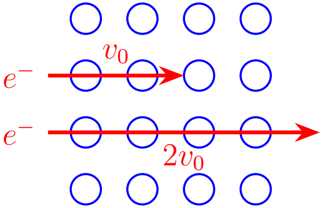


- ベクトル形式で表すと、任意の位置 $\boldsymbol{r}$ におけるオームの法則は

$$\boxed{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}) = \sigma\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}$$

オームの法則の電子論

- 電子の運動からオームの法則を導く
  - 電子は電場 $\boldsymbol{E}$ により加速
  - 電子は原子との衝突により減速
  - 原子との衝突頻度は電子速度 $\boldsymbol{v}$ に比例



$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = e\boldsymbol{E} - \frac{m}{\tau}\boldsymbol{v}} \qquad (\tau\text{は緩和時間})$$

  - 加速力と減速力が釣り合ったとき

$$e\boldsymbol{E} - \frac{m}{\tau}\boldsymbol{v} = 0, \qquad \therefore \boldsymbol{v} = \frac{e\tau}{m}\boldsymbol{E}$$

- 単位体積当りの電子数を n とすると、電流密度と抵抗率は

$$\boldsymbol{i} = en\boldsymbol{v} = \frac{ne^2\tau}{m}\boldsymbol{E} \equiv \rho^{-1}\boldsymbol{E}, \qquad \therefore \boxed{\rho = \frac{m}{ne^2\tau}}$$

ジュールの法則

- 高電位の A から低電位の B に移動する電荷 q が外部にする仕事

$$W = q\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = q[\phi(\mathrm{A}) - \phi(\mathrm{B})] = qV \qquad [V \equiv \phi(\mathrm{A}) - \phi(\mathrm{B})]$$

- 強さ I の電流が単位時間当り外部にする仕事を仕事率と呼ぶ

$$\boxed{P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}V = \boxed{IV = RI^2 = \frac{V^2}{R}} \qquad \text{(ジュールの法則)}$$

電子が原子に衝突して発生する熱をジュール熱と呼ぶ

- 断面積 ΔS、長さ $\Delta\ell$ の領域を考えると単位体積当りの仕事率は

$$\begin{cases} W = w\Delta S\Delta\ell \\ I = i\Delta S \\ V = \Delta\phi \end{cases} \quad \text{から} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}} = i\frac{\Delta\phi}{\Delta\ell} = iE = \boxed{\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{E}}$$

抵抗の温度依存性

- 導体の抵抗の主な原因は熱的な原子振動
  - 原子振動の振幅を u とすると

$$R \propto \langle u^2 \rangle \propto kT \qquad (\text{抵抗は絶対温度 } T \text{ に比例})$$

  - 摂氏温度を t [°C] で表し、$t = 0°\mathrm{C}$ での抵抗を R_0 とすると

$$R = R_0 \left(1 + \frac{t}{273.15}\right) = R_0(1 + \alpha t)$$

  - $\alpha = 1/273.15 = 3.6 \times 10^{-3}\ \mathrm{deg}^{-1}$ を抵抗の温度係数と呼ぶ
- 実際の導体で温度係数が $\alpha = 1/273.15$ からずれる要因
  - 格子欠陥 $\rightarrow$ 0 K でも抵抗が残る (残留抵抗)
  - 超伝導転移 $\rightarrow$ ある温度以下で抵抗ゼロ
  - 磁性不純物 $\rightarrow$ ある温度で抵抗極小、それ以下で増加

非オーム性 ($I \propto V$ からのずれ)

- 温度 T の物体から単位時間当り放出される電磁波のエネルギー

$$\mathcal{I}(\nu) = \frac{2h}{c^2}\frac{\nu^3}{\mathrm{e}^{h\nu/kT} - 1} \qquad \text{(プランクの公式)}$$

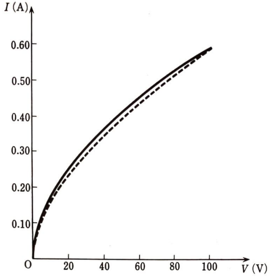
- 電球に電圧 V をかけたときに発生するジュール熱

$$\frac{V^2}{R} \simeq \int \mathcal{I}(\nu)\mathrm{d}\nu = \sigma T^4 \qquad \text{(ステファン-ボルツマンの法則)}$$

- $R = kT$ を用いると

$$\frac{V^2}{kT} = \sigma T^4, \qquad \therefore T \propto V^{2/5},$$

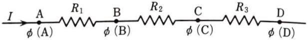
$$I = \frac{V}{R} = \frac{V}{kT} \propto \frac{V}{V^{2/5}} \propto V^{3/5}$$



I-V 曲線の実測値 (実線) とよく一致

抵抗の直列接続

- 3 つの抵抗を直列接続した系
  - それぞれの抵抗 R_1, R_2, R_3
  - 点 A,$\cdots$, D の電位 $\phi(\mathrm{A}), \cdots, \phi(\mathrm{D})$
  - 各抵抗に流れる電流 I は等しい



$$\phi(\mathrm{A}) - \phi(\mathrm{B}) = R_1 I, \quad \phi(\mathrm{B}) - \phi(\mathrm{C}) = R_2 I, \quad \phi(\mathrm{C}) - \phi(\mathrm{D}) = R_3 I$$

- A-D 間の電圧

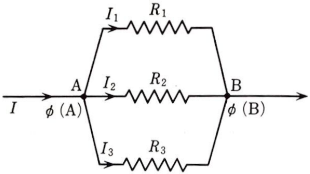
$$V = \phi(\mathrm{A}) - \phi(\mathrm{D}) = (R_1 + R_2 + R_3) I$$

- 直列接続の場合の合成抵抗

$$R = \frac{V}{I} = R_1 + R_2 + R_3$$

抵抗の並列接続

- 3 つの抵抗を並列接続した系
  - それぞれの抵抗 R_1, R_2, R_3
  - それぞれの電流 I_1, I_2, I_3
  - 各抵抗にかかる電圧 V は等しい



$$V = \phi(\mathrm{A}) - \phi(\mathrm{B}) = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3$$

- A-B 間の電流

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) V$$

- 並列接続の場合の合成抵抗

$$\boxed{R} = \frac{V}{I} = \boxed{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1}}$$

(逆数の和の逆数)

コンデンサーと直列・並列の関係が逆であることに注意

起電力

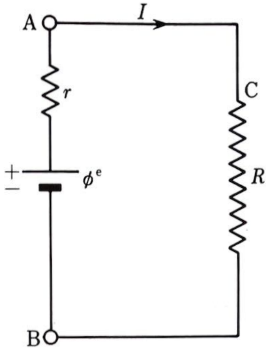
- 電源が単位電荷にする仕事 ϕ^{e} を起電力と呼ぶ
- 抵抗 R を電流 I が流れるときの電圧降下 RI
- 電源の内部抵抗 r も考慮すると

$$\phi^{\mathrm{e}} = (R + r)I$$

- 電源の端子電圧

$$V = RI = \phi^{\mathrm{e}} - rI$$

は電流 I とともに減少



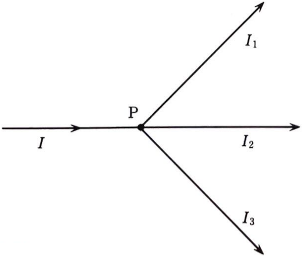
キルヒホッフの法則

第一法則

回路の任意の分岐点に流入する電流を正、流出する電流を負とすると、その分岐点に出入りする電流の総和はゼロ

- 点 P に電流 I が流入
- 点 P から I_1, I_2, I_3 に分かれて流出

$$I - I_1 - I_2 - I_3 = 0$$



キルヒホッフの法則

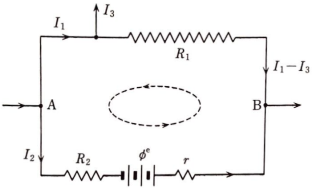
第二法則

回路の一部の閉回路で電流をある方向に流す起電力を正、反対方向に流す起電力を負とすると、その閉経路に含まれる起電力の総和は電圧降下の総和に等しい

- 上と下の枝路それぞれについて

$$\phi(\mathrm{A}) - \phi(\mathrm{B}) = R_1(I_1 - I_3),$$

$$\phi(\mathrm{A}) - \phi(\mathrm{B}) + \phi^{\mathrm{e}} = (R_2 + r)I_2$$

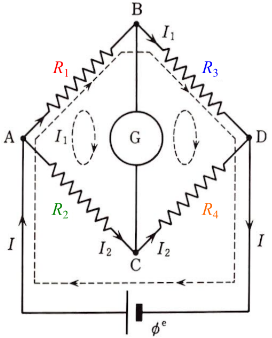


- $\phi(\mathrm{A}) - \phi(\mathrm{B})$ を消去すると

$$\phi^{\mathrm{e}} = (R_2 + r)I_2 - R_1(I_1 - I_3)$$

例: ホイートストン・ブリッジ

- 抵抗と電源、検流計からなる回路
  - 既知の抵抗 R_1, R_2 と可変抵抗 R_3
  - 未知の抵抗 R_4　$\leftarrow$　求めたい
  - 検流計を流れる電流はゼロ



- 上の 2 つの閉回路で第一法則から

$$\begin{cases} R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 \\ R_3 I_1 - R_4 I_2 = 0 \end{cases} \qquad \therefore \boxed{R_4 = \frac{R_2}{R_1} R_3}$$

- 残りの閉回路で第一、第二法則を使うと

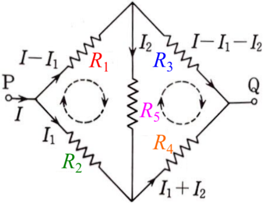
$$\phi^{\mathrm{e}} = (R_1 + R_3) I_1, \qquad I = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \frac{\phi^{\mathrm{e}}}{R_1 + R_3}, \quad I_2 = \frac{R_1}{R_2} I_1, \quad \therefore I = I_2 + I_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_3} \frac{\phi^{\mathrm{e}}}{R_2}$$

演習: 複数の抵抗からなる系の合成抵抗

$R_1 = 2\ \Omega$、$R_2 = 4\ \Omega$、$R_3 = 4\ \Omega$、$R_4 = 2\ \Omega$、$R_5 = 1\ \Omega$

$$\begin{cases} R_1(I - I_1) + R_5 I_2 - R_2 I_1 = 0 \\ R_3(I - I_1 - I_2) - R_4(I_1 + I_2) - R_5 I_2 = 0 \end{cases}$$



$$\therefore \begin{cases} 6I_1 - I_2 = 2I \\ 6I + 7I_2 = 4I \end{cases}$$

I_1, I_2 について解くと　$I_1 = \dfrac{3}{8}I, \quad I_2 = \dfrac{1}{4}I$

PQ 間の電位差は

$$V = 4I_1 + 2(I_1 + I_2) = \frac{11}{4}I$$

PQ 間の合成抵抗は

$$R = \frac{V}{I} = \frac{11}{4}\ \Omega$$