物理学B 第3回

静電ポテンシャル

濱本 雄治 [1]

情報工学部 情報通信工学科

2025年10月8日

[1] hamamoto@c.oka-pu.ac.jp　https://yhmmt.github.io/pages/

前回の復習: ガウスの法則

- S_0 の内部に電荷 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_N$、外部に電荷 $q_\alpha, q_\beta, \cdots, q_\sigma$
- これらの電荷が作る電場

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^{(1)} + \boldsymbol{E}^{(2)} + \cdots + \boldsymbol{E}^{(N)} + \boldsymbol{E}^{(\alpha)} + \boldsymbol{E}^{(\beta)} + \cdots + \boldsymbol{E}^{(\sigma)}$$

- S_0 上で法線成分を面積分

$$\begin{aligned}\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S &= \int_{S_0} E_n^{(1)} \mathrm{d}S + \int_{S_0} E_n^{(2)} \mathrm{d}S + \cdots + \int_{S_0} E_n^{(N)} \mathrm{d}S \\ &\quad + \underbrace{\int_{S_0} E_n^{(\alpha)} \mathrm{d}S}_{=0} + \underbrace{\int_{S_0} E_n^{(\beta)} \mathrm{d}S}_{=0} + \cdots + \underbrace{\int_{S_0} E_n^{(\sigma)} \mathrm{d}S}_{=0} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0}(Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_N)\end{aligned}$$

S_0 上での電場の法線成分の面積分は S_0 に含まれる電荷に比例

前回の小テストの解説

半径 a の中空の球殻上に電荷 Q が一様に分布しているとき、球殻の内部および外部における電場の大きさと向きを求めよ。

球殻状電荷と中心が同じで半径が r の閉曲面を S_0 とする。
球対称性から電場は閉曲面に垂直である。
ガウスの法則より、$r < a$ のとき

$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = 4\pi r^2 E(r) = 0, \qquad E(r < a) = 0$$

$r > a$ のとき

$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \qquad E(r > a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

仕事

- 物体に作用する力 $\boldsymbol{F}$
- 力による物体の微小変位 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$
- $\boldsymbol{F}$ と $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ のなす角が θ のとき、$\boldsymbol{F}$ の $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 方向の成分が仕事に寄与

$$\mathrm{d}W = |\boldsymbol{F}|\cos\theta \times |\mathrm{d}\boldsymbol{s}| = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

- 物体が経路 C に沿って移動するとき、$\boldsymbol{F}$ が物体になす仕事

$$W = \int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

このような積分を線積分と呼ぶ

電荷に対する仕事

- 固定した点電荷 Q が作る静電場 $\boldsymbol{E}$
- $\boldsymbol{E}$ が点電荷 q に作用する力 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$
- クーロン力と外力 $-\boldsymbol{F}$ をほぼ釣り合わせる
- q が微小量 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ だけ移動したとき、クーロン力が q になす仕事

$$\mathrm{d}W = q\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

- q が経路 C に沿って点 A から点 B まで移動したときの仕事

$$W = q \int_{\mathrm{A},C}^{B} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

線積分の計算

- Q の位置から測った観測点 P の位置 $\boldsymbol{r}$
- P における電場

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

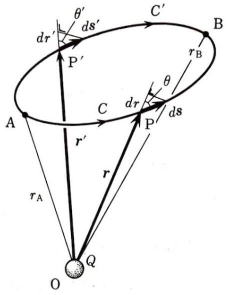
- 微小変位 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ の $\boldsymbol{r}$ 方向の成分

$$\mathrm{d}s\cos\theta \equiv \mathrm{d}r$$

- $\boldsymbol{E}$ と $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ の内積

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r\,\mathrm{d}s\cos\theta}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r\,\mathrm{d}r}{r^3}$$

$\boldsymbol{r}$ の長さ r のみで表せた ($\boldsymbol{E}$ や $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ の方向に依らない)



静電ポテンシャル

- 1 変数 r に関する積分

$$\int_{\mathrm{A},C}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_\mathrm{A}}^{r_\mathrm{B}} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_\mathrm{A}} - \frac{1}{r_\mathrm{B}}\right)$$

積分値は Q からの距離 $r_\mathrm{A}, r_\mathrm{B}$ だけで決まり、経路 C に依らない

- 位置 $\boldsymbol{r}$ だけで決まる関数

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}$$

を静電ポテンシャル (電位) と呼ぶ

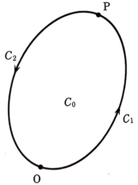
$$\int_{\mathrm{A},C}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \phi(\boldsymbol{r}_\mathrm{A}) - \phi(\boldsymbol{r}_\mathrm{B}), \qquad W = q[\phi(\boldsymbol{r}_\mathrm{A}) - \phi(\boldsymbol{r}_\mathrm{B})]$$

- 電位の単位は $\mathrm{V} = \mathrm{J}/\mathrm{C}$

閉経路上の線積分

- 閉経路 C_0 を経路 C_1, C_2 に分割

$$\int_{C_0} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{\mathrm{O},C_1}^{\mathrm{P}} + \int_{\mathrm{P},C_2}^{\mathrm{O}}$$



- 静電ポテンシャルが存在すると

$$\int_{\mathrm{O},C_1}^{\mathrm{P}} = \phi(\boldsymbol{r}_\mathrm{O}) - \phi(\boldsymbol{r}_\mathrm{P}), \qquad \int_{\mathrm{P},C_2}^{\mathrm{O}} = \phi(\boldsymbol{r}_\mathrm{P}) - \phi(\boldsymbol{r}_\mathrm{O}),$$

$$\therefore \boxed{\int_{C_0} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0}$$

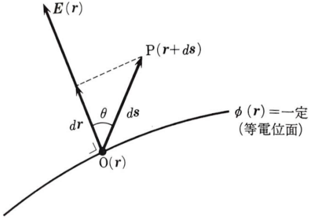
閉経路上の静電場の線積分はゼロ

- 逆に上式が成り立つと $\int_{\mathrm{O},C_1}^{\mathrm{P}} = \int_{\mathrm{O},C_2}^{\mathrm{P}}$、つまり静電ポテンシャルが存在

等電位面

- 原点から点 P までの線積分

$$\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{P}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \phi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{O}}) - \phi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}})$$



- O の位置を $\boldsymbol{r}$ とする
- P の位置を P から微小ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ だけ離れた $\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ とする

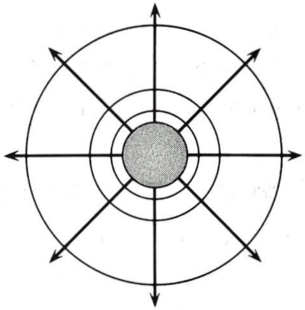
$$\phi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}) = \phi(\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{s}) \simeq \underbrace{\phi(\boldsymbol{r})}_{=\phi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{O}})} + \mathrm{d}\phi(\boldsymbol{r}), \qquad \therefore \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\mathrm{d}\phi(\boldsymbol{r})$$

- O と P が等電位 $\phi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}) - \phi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{O}}) = \mathrm{d}\phi(\boldsymbol{r}) = 0$ のとき

$$\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0, \qquad \therefore$$ 等電位面と電場 $\boldsymbol{E}$ は直交

等電位面の例

- 帯電した導体球の周りの等電位面



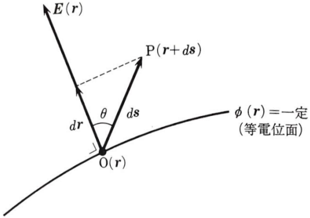
  - 等電位面は導体球と中心が同じ球面状
  - 等電位面の間隔の狭いところほど電場が強い

静電ポテンシャルと電場の関係

- $\boldsymbol{E}$ の $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 方向の成分を E_s とすると

$$\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = E\mathrm{d}s\cos\theta = E_s\mathrm{d}s = -\mathrm{d}\phi,$$

$$\therefore E_s \equiv E\cos\theta = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}$$



- $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ の $\boldsymbol{E}\propto\boldsymbol{r}$ 方向の成分を $\mathrm{d}r$ とすると

$$\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = E\mathrm{d}s\cos\theta = E\mathrm{d}r = -\mathrm{d}\phi,$$

$$\therefore E = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} \qquad \text{(電場の大きさ)}$$

電場は静電ポテンシャルを微分に負符号をつけたもの
静電ポテンシャルは電場の積分に負符号をつけたもの

例 1: 帯電した導体球の静電ポテンシャル

- 電荷 Q は半径 a の導体球表面に一様に分布
- 半径 r の球状の閉曲面を S_0 とすると、ガウスの法則から

$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = 4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & (r > a) \end{cases}$$

$$\therefore E(r) = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > a) \end{cases}$$

例 1: 帯電した導体球の静電ポテンシャル

- 電場を r で積分して負符号をつけると

$$\phi(r) = -\int E(r)\mathrm{d}r = \begin{cases} C_1 & (r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2 & (r > a) \end{cases}$$

- 無限遠方 $r \to \infty$ で $\phi(\infty) = 0$ とすると $C_2 = 0$
- 導体表面上で ϕ が連続とすると $C_1 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$
- 以上から

$$\phi(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} & (r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & (r > a) \end{cases}$$

例 2: 一様に帯電した球の静電ポテンシャル

- 電荷 Q は半径 a の球の内部に一様に分布
- 半径 r の球状の閉曲面を S_0 とすると、ガウスの法則から

$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = 4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} \left(\dfrac{r}{a}\right)^3 \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & (r < a) \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & (r > a) \end{cases}$$

$$\therefore E(r) = \begin{cases} \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} & (r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > a) \end{cases}$$

例2: 一様に帯電した球の静電ポテンシャル

- 電場を r で積分して負符号をつけると

$$\phi(r) = -\int E(r)\mathrm{d}r = \begin{cases} -\dfrac{Qr^2}{8\pi\varepsilon_0 a^3} + C_1 & (r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2 & (r > a) \end{cases}$$

- 無限遠方 $r \to \infty$ で $\phi(\infty) = 0$ とすると $C_2 = 0$
- 球面上で ϕ が連続とすると $-\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a} + C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}, \quad \therefore C_1 = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 a}$
- 以上から

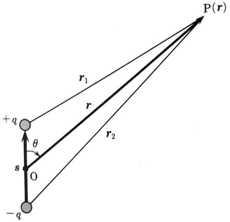
$$\phi(r) = \begin{cases} \dfrac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 a} - \dfrac{Qr^2}{8\pi\varepsilon_0 a^3} & (r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & (r > a) \end{cases}$$

電気双極子の静電ポテンシャル

- 接近した正負電荷 $\pm q$ の対を電気双極子と呼ぶ
- 負電荷から正電荷への長さベクトル $\boldsymbol{s}$
- 電気双極子モーメント $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{s}$
- 観測点 P における静電ポテンシャル

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

$$r_1 = \sqrt{r^2 + (s/2)^2 - rs\cos\theta}, \qquad r_2 = \sqrt{r^2 + (s/2)^2 + rs\cos\theta}$$



電気双極子の静電場

- 十分遠方で $s/r \ll 1$ なので $(1 \pm x)^{-1/2} \simeq 1 \mp x/2$ を用いると

$$
\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{r}) &\simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(1 + \frac{s}{2r}\cos\theta\right) - \left(1 - \frac{s}{2r}\cos\theta\right)\right] \\
&= \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (q = ps)
\end{aligned}
$$

- r, θ 方向で微分して負符号をつけると、静電場は

$$
\begin{aligned}
E_r &= -\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3}, \\
E_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3}
\end{aligned}
$$

演習 1: 直線状電荷の静電ポテンシャル

- 無限に長い直線上に電荷が線密度 λ で一様に分布
- 高さ h、半径 r の円筒状の閉曲面 S_0
- ガウスの法則から

$$\int_{\mathrm{S}_0} E_n \mathrm{d}S = 2\pi r h E(r) = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}, \qquad \therefore E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

- 電場を r で積分して負符号をつけると

$$\phi(r) = -\int E(r)\mathrm{d}r = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log r + C$$

積分定数 C は境界条件を基に決める

演習 2: 平面状電荷の静電ポテンシャル

- 無限に広い平面上に電荷が面密度 ω で一様に分布
- 平面状電荷を貫く高さ h、底面積 ΔS の円筒状の閉曲面 S_0
- ガウスの法則から

$$\int_{\mathrm{S}_0} E_n \mathrm{d}S = 2\Delta S E = \frac{\omega \Delta S}{\varepsilon_0}, \qquad \therefore E = \frac{\omega}{2\varepsilon_0}$$

- 平面より上側 $z > 0$ のとき

$$\phi(z) = -\int E \mathrm{d}z = -\frac{\omega z}{2\varepsilon_0} + C_1$$

- 平面より下側 $z < 0$ のとき

$$\phi(z) = -\int (-E) \mathrm{d}z = \frac{\omega z}{2\varepsilon_0} + C_2$$

平面上 $z = 0$ で $\phi(0) = 0$ とすると $\phi(z) = -\dfrac{\omega |z|}{2\varepsilon_0}$