物理学B 第15回

後半のまとめ

濱本 雄治[1]

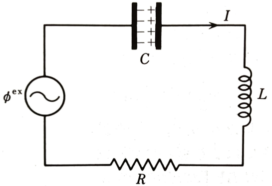
情報工学部 情報通信工学科

2025年1月28日、2月2日

[1]hamamoto@c.oka-pu.ac.jp

https://yhmmt.github.io/pages/

前回の復習: 交流回路と微分方程式



- RLC 回路
  - 抵抗 R
  - 自己インダクタンス L のコイル
  - 電荷 Q を蓄えたコンデンサー C
  - 交流起電力 $\phi^{\mathrm{ex}}(t) = \phi_0 \cos \omega t$
- 回路を流れる電流 I を決定する方程式

$$L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{I}{C} = -\omega\phi_0 \sin \omega t$$

- 線形非斉次方程式の解法
  1. 非斉次方程式の特解を求める
  2. 斉次方程式 (右辺 $= 0$) の一般解を求める
  3. 非斉次方程式の一般解は特解と斉次方程式の一般解の和

前回の小テストの解説

静電容量 C、電荷 Q のコンデンサーの両端に抵抗 R を接続したところ、R に電流 I が流れた。R を接続した時刻を $t=0$ として $t>0$ における I の変化を調べよ。ただし回路に流れる電流を決定する方程式は $RI=\dfrac{Q}{C}$ であり、電流と電荷は $I=-\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ で関係づけられる。さらに $t>0$ において抵抗で発生するジュール熱の総和を求めよ。

$RI=\dfrac{Q}{C}$ の両辺を微分すると

$$R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=-\frac{I}{C}$$

$$\frac{\mathrm{d}I}{I}=-\frac{\mathrm{d}t}{RC},\qquad \log I=-\frac{t}{RC}+\mathrm{const.},\qquad \therefore I=A\mathrm{e}^{-t/RC}$$

ここで A は定数。

前回の小テストの解説 (続き)

時刻 $t = 0$ で $I = \dfrac{Q}{RC}$ の電流が流れるので

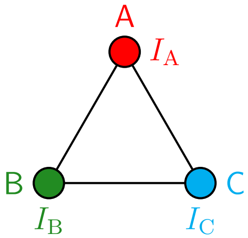
$$\frac{Q}{RC} = A, \qquad \therefore I = \frac{Q}{RC}\mathrm{e}^{-t/RC}$$

$t > 0$ において抵抗で発生するジュール熱は

$$\begin{aligned}\int_0^\infty RI^2 \mathrm{d}t &= R\left(\frac{Q}{RC}\right)^2 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2t/RC}\mathrm{d}t \\ &= \frac{Q^2}{RC^2}\left[-\frac{RC}{2}\mathrm{e}^{-2t/RC}\right]_0^\infty \\ &= \frac{Q^2}{2C}\end{aligned}$$

問題 1

一辺 a の正三角形の頂点を A,B,C とする。各頂点にそれぞれ電流 $I_{\mathrm{A}}, I_{\mathrm{B}}, I_{\mathrm{C}}$ が平面 ABC に対して垂直方向に流れているとき、次の問いに答えよ。ただし平面 ABC に対して奥から手前に流れている電流を正とする。

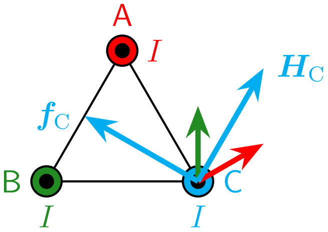


(a) $I_\mathrm{A} = I_\mathrm{B} = I_\mathrm{C} = I > 0$ のとき、I_A と I_B が頂点 C に作る静磁場の大きさと向きを求めよ。また I_C がこの静磁場から受ける単位長さ当りのアンペールの力の大きさと向きを求めよ。

$$|\boldsymbol{H}_\mathrm{C}| = \frac{\sqrt{3}I}{2\pi a},$$

$$|\boldsymbol{B}_\mathrm{C}| = \mu_0|\boldsymbol{H}_\mathrm{C}| = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi a},$$

$$|\boldsymbol{f}_\mathrm{C}| = I|\boldsymbol{B}_\mathrm{C}| = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I^2}{2\pi a},$$

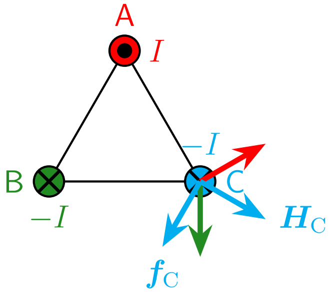


(b) $I_{\rm A} = -I_{\rm B} = -I_{\rm C} = I > 0$ のとき、$I_{\rm A}$ と $I_{\rm B}$ が頂点 C に作る静磁場の大きさと向きを求めよ。また $I_{\rm C}$ がこの静磁場から受ける単位長さ当りのアンペールの力の大きさと向きを求めよ。

$$|\boldsymbol{H}_{\rm C}| = \frac{I}{2\pi a},$$

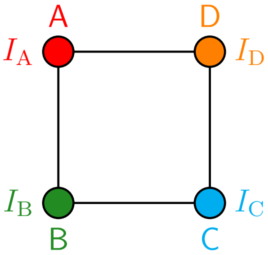
$$|\boldsymbol{B}_{\rm C}| = \mu_0 |\boldsymbol{H}_{\rm C}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi a},$$

$$|\boldsymbol{f}_{\rm C}| = I|\boldsymbol{B}_{\rm C}| = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a}$$



問題 2

一辺 a の正方形の頂点を反時計回りに A,B,C,D とする。各頂点にそれぞれ電流 $I_{\mathrm{A}}, I_{\mathrm{B}}, I_{\mathrm{C}}, I_{\mathrm{D}}$ が平面 ABCD に対して垂直方向に流れているとき、次の問いに答えよ。ただし平面 ABCD に対して奥から手前に流れている電流を正とする。

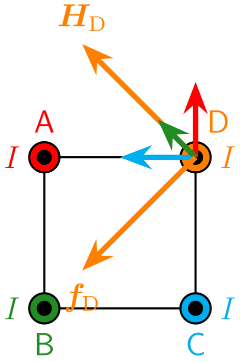


(a) $I_\mathrm{A} = I_\mathrm{B} = I_\mathrm{C} = I_\mathrm{D} = I > 0$ のとき、I_A、I_B および I_C が頂点 D に作る磁場の大きさと向きを求めよ。また I_D がこの磁場から受ける単位長さ当りのアンペールの力の大きさと向きを求めよ。

$$|\boldsymbol{H}_\mathrm{D}| = \frac{\sqrt{2}I}{2\pi a} + \frac{I}{2\pi\sqrt{2}a} = \frac{3\sqrt{2}I}{4\pi a},$$

$$|\boldsymbol{B}_\mathrm{D}| = \mu_0|\boldsymbol{H}_\mathrm{D}| = \frac{3\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi a}$$

$$|\boldsymbol{f}_\mathrm{D}| = I|\boldsymbol{B}_\mathrm{D}| = \frac{3\sqrt{2}\mu_0 I^2}{4\pi a}$$

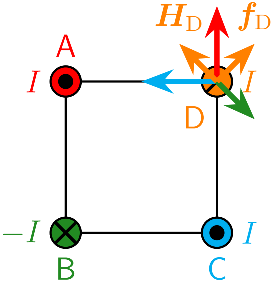


(b) $I_\mathrm{A} = -I_\mathrm{B} = I_\mathrm{C} = -I_\mathrm{D} = I > 0$ のとき、I_A、I_B および I_C が頂点 D に作る磁場の大きさと向きを求めよ。また I_D がこの磁場から受ける単位長さ当りのアンペールの力の大きさと向きを求めよ。

$$|\boldsymbol{H}_\mathrm{D}| = \frac{\sqrt{2}I}{2\pi a} - \frac{I}{2\pi\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}I}{4\pi a},$$

$$|\boldsymbol{B}_\mathrm{D}| = \mu_0|\boldsymbol{H}_\mathrm{D}| = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi a}$$

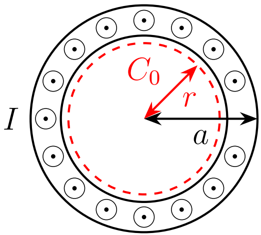
$$|\boldsymbol{f}_\mathrm{D}| = I|\boldsymbol{B}_\mathrm{D}| = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I^2}{4\pi a}$$



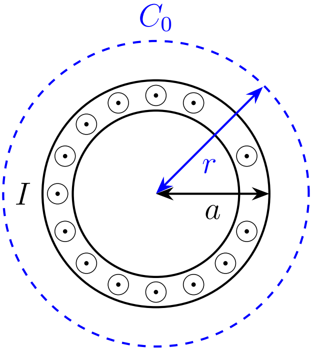
問題3

次のような軸対称な導体を流れる電流が作る静磁場を求め、単位長さ当りの静磁場のエネルギーを計算せよ。ただし導体は非磁性 $(\mu = \mu_0)$ とする。

(a) 内部が中空で厚さゼロ、半径 a の円筒状導体を流れる電流 I。



$0 < r < a$

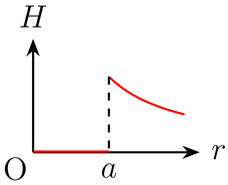


$r > a$

- 軸と垂直な平面上で、軸と平面の交点を中心とする半径 r 円周の C_0
- 軸対称性から磁場は軸からの距離 r のみの関数なので、C_0 上で一定
- 電流を右ネジの進行方向とすると、磁場は右ネジの回転方向で C_0 に接する
- C_0 を貫く電流は $0 < r < a$ のとき 0、$r > a$ のとき I なので アンペールの法則から

$$\int_{C_0} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 2\pi r H(r) = \begin{cases} 0 & (0 < r < a) \\ I & (r > a) \end{cases}$$

$$\therefore H(r) = \begin{cases} 0 & (0 < r < a) \\ \dfrac{I}{2\pi r} & (r > a) \end{cases}$$

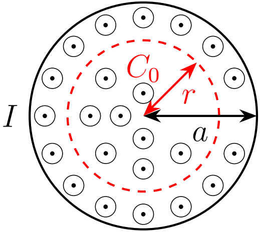


▷ 軸対称な系の単位長さ当りの体積要素は $\mathrm{d}v = 2\pi r \mathrm{d}r \times 1$ なので単位長さ当りの静磁場のエネルギーは

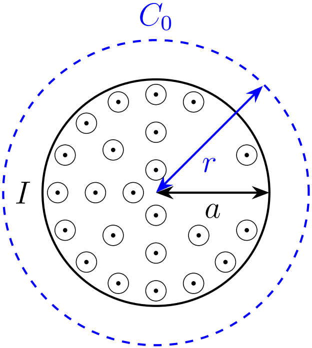
$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}_{\mathrm{m}} &= \frac{\mu_0}{2} \int H^2 \mathrm{d}v \\
&= \frac{\mu_0}{2} \int_0^a 0^2 2\pi r \mathrm{d}r + \frac{\mu_0}{2} \int_a^\infty \left(\frac{I}{2\pi r} \right)^2 2\pi r \mathrm{d}r \\
&= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \int_a^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r} \\
&= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \Big[\log r \Big]_a^\infty
\end{aligned}
$$

無限に長い円筒状電流の静磁場は外部で減衰が遅い $\left(\propto \dfrac{1}{r} \right)$ ため磁場のエネルギーは対数発散

(b) 半径 a の円柱状導体の内部を一様に流れる電流 I。ただし導体は非磁性 $(\mu = \mu_0)$ とする。



$0 < r < a$

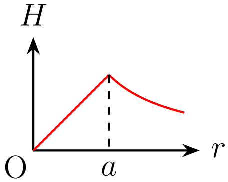


$r > a$

- 軸と垂直な平面上で、軸と平面の交点を中心とする半径 r 円周の C_0
- 軸対称性から磁場は軸からの距離 r のみの関数なので、C_0 上で一定
- 電流を右ネジの進行方向とすると、磁場は右ネジの回転方向で C_0 に接する (ここまでは円筒状電流と同じ)
- C_0 を貫く電流は $0 < r < a$ のとき $\dfrac{\pi r^2}{\pi a^2} I = \left(\dfrac{r}{a}\right)^2 I$、$r > a$ のとき I なので、アンペールの法則から

$$\int_{C_0} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 2\pi r H(r) = \begin{cases} \left(\dfrac{r}{a}\right)^2 I & (0 < r < a) \\ I & (r > a) \end{cases}$$

$$\therefore H(r) = \begin{cases} \dfrac{Ir}{2\pi a^2} & (0 < r < a) \\ \dfrac{I}{2\pi r} & (r > a) \end{cases}$$

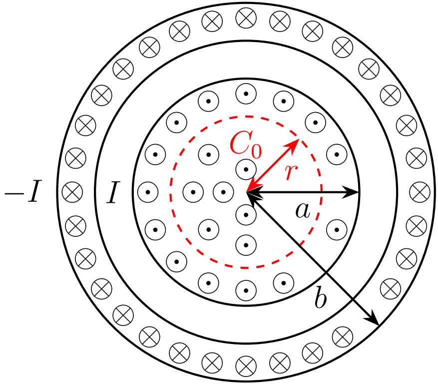


▷ 軸対称な系の単位長さ当りの体積要素は $\mathrm{d}v = 2\pi r \mathrm{d}r \times 1$ なので単位長さ当りの静磁場のエネルギーは

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}_{\mathrm{m}} &= \frac{\mu_0}{2} \int H^2 \mathrm{d}v \\
&= \frac{\mu_0}{2} \int_0^a \left(\frac{Ir}{2\pi a^2} \right)^2 2\pi r \mathrm{d}r + \frac{\mu_0}{2} \int_a^\infty \left(\frac{I}{2\pi r} \right)^2 2\pi r \mathrm{d}r \\
&= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\int_0^a \frac{r^3 \mathrm{d}r}{a^4} + \int_a^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r} \right) \\
&= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\frac{1}{4} + \Big[\log r \Big]_a^\infty \right)
\end{aligned}
$$

無限に長い円柱状電流の静磁場は外部で減衰が遅い $\left(\propto \dfrac{1}{r} \right)$ ため磁場のエネルギーは対数発散 (円筒状電流と同じ)

(c) 半径 a の円柱状導体を流れる電流 I と、この円柱状導体を中心とする厚さゼロ、半径 a の円筒状導体を逆向きに流れる電流 $-I$。

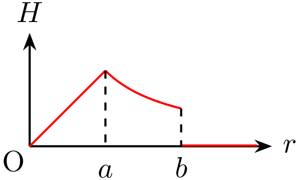


$$0 < r < a$$

- 軸と垂直な平面上で、軸と平面の交点を中心とする半径 r 円周の C_0
- 軸対称性から磁場は軸からの距離 r のみの関数なので、C_0 上で一定
- 電流を右ネジの進行方向とすると、磁場は右ネジの回転方向で C_0 に接する (ここまでは円筒状電流と同じ)
- C_0 を貫く電流は $0 < r < a$ のとき $\left(\frac{r}{a}\right)^2 I$、$a < r > b$ のとき I、$r > b$ のとき 0 なのでアンペールの法則から

$$\int_{C_0} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 2\pi r H(r) = \begin{cases} \left(\frac{r}{a}\right)^2 I & (0 < r < a) \\ I & (a < r < b) \\ 0 & (r > b) \end{cases}$$

$$\therefore H(r) = \begin{cases} \dfrac{Ir}{2\pi a^2} & (0 < r < a) \\ \dfrac{I}{2\pi r} & (a < r < b) \\ 0 & (r > b) \end{cases}$$

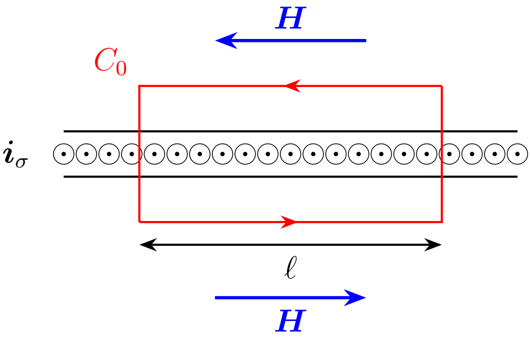


- 軸対称な系の単位長さ当りの体積要素は $\mathrm{d}v = 2\pi r \mathrm{d}r \times 1$ なので単位長さ当りの静磁場のエネルギーは

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}_\mathrm{m} &= \frac{\mu_0}{2} \int H^2 \mathrm{d}v \\
&= \frac{\mu_0}{2} \int_0^a \left(\frac{Ir}{2\pi a^2} \right)^2 2\pi r \mathrm{d}r + \frac{\mu_0}{2} \int_a^b \left(\frac{I}{2\pi r} \right)^2 2\pi r \mathrm{d}r + 0 \\
&= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\int_0^a \frac{r^3 \mathrm{d}r}{a^4} + \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} \right) \\
&= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\frac{1}{4} + \log \frac{b}{a} \right)
\end{aligned}
$$

問題 4

無限に広い平面上を面電流密度 $\boldsymbol{i}_\sigma$ の平面電流が一様に流れている。この平面電流の両側に発生する静磁場を求めよ。



- 平面電流の両側に平面電流と直交する逆向きの磁場 $\boldsymbol{H}$ が発生
- 平面電流と直交する平面上に長辺の長さ ℓ の長方形の積分経路 C_0

- 長方形の短辺と $\boldsymbol{H}$ は直交するので、アンペールの法則から

$$\int_{C_0} \boldsymbol{H}\mathrm{d}\boldsymbol{s} = 2H\ell = i_\sigma \ell,$$

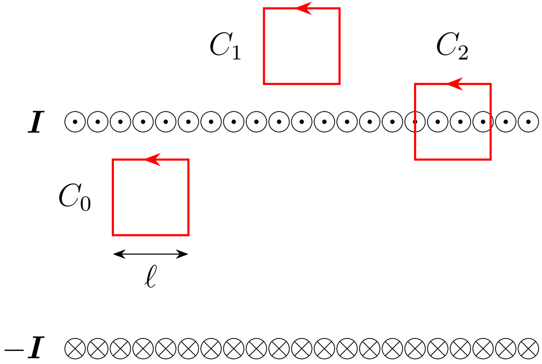
$$\therefore H = \frac{i_\sigma}{2}$$

つまり平面電流の両側に発生する磁場は

- 大きさは平面電流からの距離に依らない
- 平面電流を右ネジの進行方向とすると、向きは右ネジの回転方向で平面電流に直交

問題 5

単位長さ当りの巻き数 n で断面積 S の無限に長いソレノイドに電流 I が流れているとき、ソレノイドの内部と外部に発生する静磁場を求め、単位長さ当りの静磁場のエネルギーを計算せよ。



- ソレノイドの軸を含む平面上に経路 C_0, C_1, C_2

- 電流 I によって発生する磁場はソレノイドに平行
- 各経路の下底と上底での磁場を H_1, H_2 とすると、C_0, C_1 に対して

$$\int_{C_0,C_1} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = (H_1 - H_2)\ell = 0, \qquad \therefore H_1 = H_2$$

  つまりソレノイドの内部と外部では磁場は一様
- 一方、C_2 に対しては

$$\int_{C_2} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = (H_1 - H_2)\ell = n\ell I, \qquad \therefore H_1 = H_2 + nI$$

  つまりソレノイド内部の磁場は外部の磁場より nI だけ大きい
- $\boldsymbol{I}$ が作る磁場と $-\boldsymbol{I}$ が作る磁場は外部で相殺
- 以上から、ソレノイド内部の磁場は nI、外部の磁場はゼロ

▷ 単位長さ当りの静磁場のエネルギーは

$$\mathcal{U}_{\mathrm{m}} = \frac{\mu_0}{2}(nI)^2 S \times 1 = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 S I^2$$

▷ 単位長さ当りの自己インダクタンス $\mathcal{L} = \mu_0 n^2 S$ を用いると

$$\mathcal{U}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\mathcal{L} I^2$$

問題 6

一様な磁束密度 $\boldsymbol{B}$ に対して、初速度 $\boldsymbol{v}_0$、質量 m、電荷 $q > 0$ の荷電粒子が垂直に入射した。この荷電粒子が描く軌道を求めよ。

- $\boldsymbol{B}$ を $+z$ 方向、$\boldsymbol{v}_0$ を $+x$ 方向にとる
- x-y 面内のローレンツ力

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = q(v_y B, -v_x B)$$

- 運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = qB\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \quad \cdots ①, \qquad m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -qB\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \cdots ②$$

- ①②を積分すると

$$m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = qBy + C_1, \qquad m\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -qBx + C_2$$

- 初期条件 $x=y=0, v_x=v_0, v_y=0$ を課すと

$$C_1 = mv_0, \qquad C_2 = 0,$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{qBy}{m} + v_0 \quad \cdots ①', \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{qBx}{m} \quad \cdots ②'$$

- エネルギー保存則

$$\frac{m}{2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] = \frac{m{v_0}^2}{2}, \qquad \therefore \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = {v_0}^2$$

- ①′②′を代入して

$$\left(\frac{qBy}{m} + v_0\right)^2 + \left(-\frac{qBx}{m}\right)^2 = {v_0}^2,$$

$$\therefore x^2 + \left(y + \frac{mv_0}{qB}\right)^2 = \left(\frac{mv_0}{qB}\right)$$

つまり荷電粒子は中心 $\left(0, -\dfrac{mv_0}{qB}\right)$、半径 $\dfrac{mv_0}{qB}$ の円軌道を描く

問題 7

直径を回転軸とする半径 a の一巻きの円形コイルが一様な磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の中に置かれている。回転軸を $\boldsymbol{B}$ に直交させ、円形コイルを一定の角速度 ω で回転させたとき、コイルに発生する誘導起電力を求めよ。

- 時刻 t で円形コイルと $\boldsymbol{B}$ がなす角を $\theta = \omega t$ とする
- 円形コイルを垂直に貫く磁束

$$\Phi = B \sin \omega t \times \pi a^2$$

- コイルに発生する誘導起電力

$$\phi^{\mathrm{e.m.}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\pi\omega B a^2 \cos \omega t$$

問題 8

問題 3(c) の導体系は円柱状導体と円筒状導体が無限遠で繋がった回路とみなすことができる。この導体系の自己インダクタンスを求めよ。

- 円柱状導体と円筒状導体の間の領域の磁場の大きさは $B(r) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$
- 円柱状導体を流れる電流を右ネジの進行方向とすると、磁場の向きは右ネジの回転方向
- 円柱状導体と円筒状導体の間を貫く単位長さ当りの磁束

$$\Phi = \int_a^b B(r)\mathrm{d}r \times 1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\log\frac{b}{a}$$

- 単位長さ当りの自己インダクタンス

$$\mathcal{L} = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi}\log\frac{b}{a}$$