



# 物理学 B 第 12 回

## ファラデーの法則

濱本 雄治<sup>1</sup>

情報工学部 情報通信工学科

2025 年 12 月 17 日、1 月 7 日

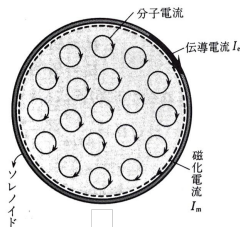
---

<sup>1</sup>hamamoto@c.oka-pu.ac.jp

# 前回の復習：物質中の静磁場



- ▶ 伝導電流  $I_e$  で磁性体に磁場を印加
  - ▷ 分子電流の軸が外部磁場の方向に揃う
  - ▷ 内部では分子電流が相殺
  - ▷ 表面の磁化電流  $I_m$  が磁化  $J$  を発生
- ▶ 物質中の静磁場の基本法則
  - ▷ 物質中でも磁束線はループ状なので



$$\int_{S_0} B_n dS = 0 \quad (\text{ガウスの法則})$$

- ▷ 物質応答を除いた磁場の強さ  $H \equiv \mu_0^{-1}(B - J)$  を導入すると

$$\int_{C_0} H \cdot ds = I_e \quad (\text{物質中でも成立するアンペールの法則})$$

# 前回の復習：時間的に変動する電磁場



- ▶ 閉曲面を貫く電束線、磁束線の本数の性質は動的な場合も不変

$$\int_{S_0} D_n dS = Q_e, \quad \int_{S_0} B_n dS = 0 \quad (\text{ガウスの法則})$$

- ▶ アンペールの法則の修正

- ▷ 右辺に変位電流を追加

$$\int_{C_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \left( i_n + \frac{\partial D_n}{\partial t} \right) dS$$

(アンペール・マクスウェルの法則)

- ▷  $C_0$  で囲まれる曲面の取り方が任意のとき、電荷保存則が成立

$$\therefore \int_{S_0} i_n dS = -\frac{d}{dt} \int_{S_0} D_n dS = -\frac{dQ_e}{dt}$$

領域内の電荷が時間的に変化する非定常的な場合も記述可能

## 前回の小テストの解説



無限に長い円柱状の磁性体のまわりにコイルを巻いた直線ソレノイドを考える。この磁性体の磁化率が  $\chi_m$ 、コイルの巻数が単位長さ当たり  $n$ 、コイルを流れる電流が  $I_e$  のとき、磁性体内の磁束密度の大きさと向きを求めよ。

ビオ・サバルの法則から中心軸上の磁場と磁束密度の大きさは

$$H^{\text{center}} = nI,$$
$$B^{\text{center}} = \mu H^{\text{center}} = (\mu_0 + \chi_m)nI.$$

## 前回の小テストの解説 (続き)



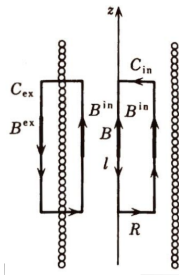
内部の長さ  $\ell$  の長方形を  $C_{\text{in}}$  とすると

$$\int_{C_{\text{in}}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = [H^{\text{in}} - H^{\text{center}}]\ell = 0,$$
$$\therefore H^{\text{in}} = H^{\text{center}}$$

導線を囲むの長さ  $\ell$  の長方形を  $C_{\text{ex}}$  とすると

$$\int_{C_{\text{ex}}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = [H^{\text{in}} - H^{\text{ex}}]\ell = n\ell I,$$
$$\therefore H^{\text{ex}} = H^{\text{in}} - nI = 0$$

よってソレノイド内部の磁束密度は大きさ  $(\mu_0 + \chi_m)nI$  で向きは電流方向に回転した右ネジの進行方向。外部の磁束密度はゼロ。

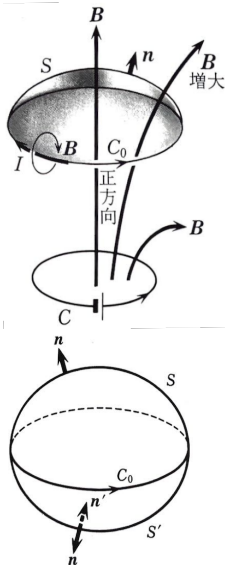


# 電磁誘導



- ▶ 以下のとき  $C_0$  に誘導電流  $I$  が発生
  - ▷  $C$  の電流の強度を変えたとき
  - ▷  $C$  の電流は一定で、 $C_0$  を移動したとき
  - ▷ 磁石を  $C_0$  近くで移動したとき
- ▶ 誘導電流  $I$  の向き
  - ▷  $C_0$  内の磁束  $\Phi$  が増加するとき時計回り
  - ▷  $C_0$  内の磁束  $\Phi$  が減少するとき反時計回り
  - ▷ つまり  $I$  が作る磁場が外部磁場の変化を打ち消す向きに  $I$  は流れる (レンツの法則)
- ▶  $\Phi$  の値は曲面  $S$  の取り方に依らない

$$\int_{S+S'} B_n dS = 0, \quad \therefore \int_S B_n dS = \int_{S'} B_{n'} dS$$



# ファラデーの電磁誘導の法則



- ▶  $C_0$  に発生する起電力 (反時計回りが正)

$$\phi^{\text{e.m.}} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \left( \Phi \equiv \int_S B_n dS \right)$$

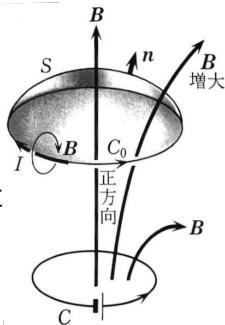
- ▶  $\phi^{\text{e.m.}}$  は電場が  $C_0$  に沿って単位電荷になす仕事

$$\phi^{\text{e.m.}} = \int_{C_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

- ▶ 2式から  $\phi^{\text{e.m.}}$  を消去すると

$$\int_{C_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dS \quad (\text{ファラデーの法則})$$

$C_0$  は一般にコイル上に限らない任意の閉曲線



# 電磁場の基本法則 (マクスウェル方程式)



- ▷ 閉曲面  $S_0$  を貫く電束線の総数は  $S_0$  内の真電荷で決まる

$$\int_{S_0} D_n dS = Q_e \quad (\text{ガウスの法則})$$

- ▷ 閉曲面  $S_0$  を貫く磁束線の総数はゼロ (磁荷は存在しない)

$$\int_{S_0} B_n dS = 0 \quad (\text{磁場に関するガウスの法則})$$

- ▷ 閉曲線  $C_0$  内の磁束の変化は  $C_0$  に沿った電場を発生

$$\int_{C_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dS \quad (\text{ファラデーの法則})$$

- ▷ 閉曲線  $C_0$  の伝導電流と変位電流は  $C_0$  に沿った磁場を発生

$$\int_{C_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I_e + \int_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS$$

(アンペール・マクスウェルの法則)



# 補足：微分形のマクスウェル方程式



## ▶ 微分形の導出に必要な数学

### ▷ 面積分を体積積分に変換

$$\int_{S_0} D_n dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV \quad (\text{ガウスの定理}),$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} \equiv \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad (\mathbf{E} \text{ の発散})$$

### ▷ 線積分を面積分に変換

$$\int_{C_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E})_n dS \quad (\text{ストークスの定理}),$$

$$\nabla \times \mathbf{E} \equiv \left( \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}, \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right), \quad (\mathbf{E} \text{ の回転})$$

## 補足：微分形のマクスウェル方程式 (続き)



- ▶ 電荷密度  $\rho_e$  と電流密度  $i_e$  を定義

$$Q_e \equiv \int_{S_0} \rho_e dV, \quad I_e \equiv \int_S i_{en} dS$$

- ▶ マクスウェル方程式から積分記号を外す

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} = \int_V \rho_e dV \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E})_n dS = - \int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dS \quad \rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H})_n dS = \int_S \left( i_{en} + \frac{\partial D_n}{\partial t} \right) dS \quad \rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{i}_e$$

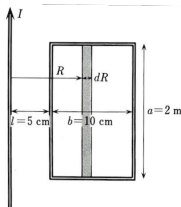
# 例1: 長方形コイルに生じる誘導起電力



- ▶ 電流  $I$  を軸とする半径  $R$  の円を  $C_0$  とすると

$$\int_{C_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi R H(R) = I,$$

$$H(R) = \frac{I}{2\pi R}, \quad \therefore B(R) = \mu_0 H(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



- ▶ 長方形コイルを貫く磁束は

$$\Phi = \int_{\ell}^{\ell+b} B(R) a dR = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_{\ell}^{\ell+b} \frac{dR}{R} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \log \frac{\ell+b}{\ell}$$

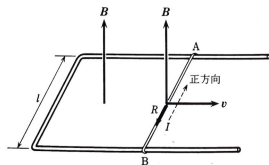
- ▶  $I(t) = I_0 \sin \omega t$  のときコイルに生じる誘導起電力は

$$\begin{aligned} \phi^{\text{e.m.}} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \left( \log \frac{\ell+b}{\ell} \right) \frac{dI}{dt} \\ &= -\frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi} \left( \log \frac{\ell+b}{\ell} \right) \omega \cos \omega t \end{aligned}$$

## 例2: 面積の変化で生じる誘導起電力



- ▶ 移動可能な導線 AB を持つ回路
  - ▷ 回路に垂直な一様磁場  $B$
  - ▷ 導線 AB が一定な速さ  $v$  で右に移動
- ▶ 時刻  $t$  で回路を貫く磁束



$$\Phi(t) = Bl(vt + \text{const.})$$

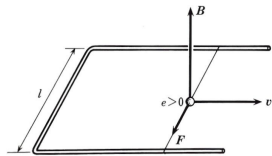
- ▶ 回路に生じる誘導起電力

$$\phi^{\text{e.m.}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -Blv$$

磁束密度だけでなく閉曲線が囲む面積の変化でも起電力が発生

## 例2: 面積の変化で生じる誘導起電力(続き)

- ▶ 面積変化の起電力を微視的に再考
  - ▷ 回路に垂直な一様磁場  $B$
  - ▷ 導線 AB 内の電荷  $q > 0$  が一定の速さ  $v$  で右に運動
- ▶ 電荷に作用するローレンツ力



$$F = qvB$$

- ▶ 誘導起電力は導線 AB 内の電荷になす単位電荷当りの仕事

$$|\phi^{\text{e.m.}}| = \frac{F\ell}{q} = B\ell v$$

回路の面積変化による誘導起電力の起源はローレンツ力

# 例3: 回転するコイルに生じる誘導起電力



## ▶ 磁場中で回転するコイル

- ▷ コイルの面積  $S$ 、角速度  $\omega$
- ▷ 回転軸に垂直な一様磁場  $B$
- ▷  $B$  とコイルの短辺のなす角  $\omega t$

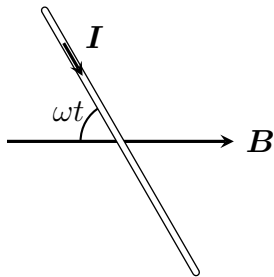
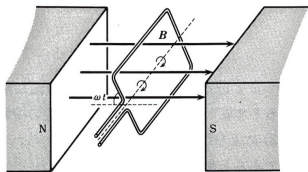
## ▶ コイルを貫く磁束

$$\Phi = BS \sin \omega t$$

## ▶ コイルに生じる誘導起電力と電流

$$\phi^{\text{e.m.}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -BS\omega \cos \omega t,$$

$$I = \frac{\phi^{\text{e.m.}}}{R} = -\frac{BS\omega}{R} \cos \omega t$$



電流は図の向きが正

## 例 4: 単極誘導



### ▶ 垂直磁場 $B$ 中で回転する金属円板

- ▷ 円板の半径  $a$ 、角速度  $\omega$
- ▷ 回路  $C_0$  を貫く磁束はゼロ

→ 電磁誘導の法則が使えない

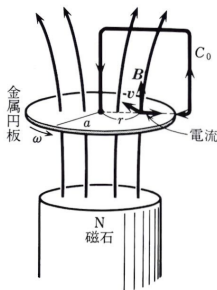
- ▷ 半径  $[r, r + dr]$  の範囲にある荷電粒子は  
速さ  $v = r\omega$  で  $B$  に垂直な方向に運動

### ▶ 電荷 $q > 0$ が半径 $[r, r + dr]$ 間を移動する間に受ける仕事

$$dW = qvBdr = qB\omega r dr$$

### ▶ 円板の中心と縁の間に生じる起電力

$$\phi^{\text{e.m.}} = \frac{1}{q} \int dW = B\omega \int_0^a r dr = \frac{1}{2} B\omega a^2$$



## 演習：時間的に変動する円柱状の磁束密度



- ▶ 半径  $a$  の円柱状領域に軸方向の一様な磁束密度  $B(t) = B_0 \cos \omega t$
- ▶ 円柱の軸上の点が中心で軸に垂直な半径  $r$  の円周を  $C_0$  とすると、軸対称性から電場は半径  $r$  のみの関数
- ▶ ファラデーの法則から

$$\int_{C_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r E(r) = \begin{cases} -\dot{B}(t)\pi r^2 = \pi r^2 \omega B_0 \sin \omega t & (r < a) \\ -\dot{B}(t)\pi a^2 = \pi a^2 \omega B_0 \sin \omega t & (r > a) \end{cases},$$
$$\therefore E(r) = \begin{cases} \frac{r\omega B_0}{2} \sin \omega t & (r < a) \\ \frac{a^2\omega B_0}{2r} \sin \omega t & (r > a) \end{cases}$$

磁束密度の方向を右ネジの進行方向とすると、電場は  $C_0$  の接線方向で右ネジの回転方向が正。