数値計算法 第7回

連立一次方程式 (2)

濱本 雄治 [1]

情報工学部 情報通信工学科

2025年6月2日

[1] hamamoto@c.oka-pu.ac.jp

復習: 掃出し法

掃出し法の目標

係数行列の対角要素が 1、非対角要素が 0 になるように変形

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & b'_n \end{array}\right)$$

- 例

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 24 \\ 3 & 5 & 13 & 52 \\ 5 & 8 & 24 & 93 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right), \quad \therefore \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = 3 \end{cases}$$

復習: Gauss の消去法

Gauss の消去法の目標

係数行列の下半分の要素がすべて 0 になるように変形 (前進消去)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & b'_1 \\ 0 & u_{22} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} & b'_n \end{array}\right)$$

- $x_n, \cdots, x_{k+1}$ まで降順に得られたら、k 行目から x_k が求まる

$$x_k = \frac{1}{u_{kk}}(b_k - u_{k,k+1}x_{k+1} - \cdots - u_{kn}x_n) \qquad \text{(後退代入)}$$

係数行列が上三角行列なら連立一次方程式の解は容易に求まる

- 例:
  - 前進消去

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 24 \\ 3 & 5 & 13 & 52 \\ 5 & 8 & 24 & 93 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 24 \\ 0 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

  - 後退代入

$$\begin{aligned} 3z &= 9, & z &= \frac{9}{3} = 3, \\ 2y + 4z &= 16, & y &= \frac{16 - 4 \times 3}{2} = 2, \\ 2x + 2y + 6z &= 24, & x &= \frac{24 - 2 \times 2 - 6 \times 3}{2} = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = 3. \end{cases}$$

前回の小テストの解説

Gauss の消去法を用いて次の連立一次方程式を解け:

$$\begin{cases} -x + y - 2z = -3 \\ x - 2y + 3z = 5 \\ 3x - 3y + 4z = 3 \end{cases}.$$

- 前進消去

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \\ 3 & -3 & 4 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

▶ 後退代入

$$
\begin{aligned}
-2z &= -6, & \therefore z &= \frac{-6}{-2} = 3, \\
-y + z &= 2, & \therefore y &= \frac{2 - 1 \times 3}{-1} = 1, \\
-x + y - 2z &= -3, & \therefore x &= \frac{-3 - 1 \times 1 - (-2) \times 3}{-1} = -2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
x = -2, \\
y = 1, \\
z = 3.
\end{cases}
$$

LU 分解の考え方

- 係数行列を下三角行列と上三角行列に分解

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{係数行列 } \boldsymbol{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{pmatrix}}_{\text{下三角行列 } \boldsymbol{L}} \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}}_{\text{上三角行列 } \boldsymbol{U}}$$

- $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ とおいて、連立一次方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{L}\underbrace{\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}}_{y} = \boldsymbol{b}$ を
  1. $\boldsymbol{L}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ から $\boldsymbol{y}$ を求める
  2. $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ から $\boldsymbol{x}$ を求める

  の 2 段階に分解

係数行列が下・上三角行列なら連立一次方程式は容易に解ける

LU 分解の目標

係数行列が下三角行列と上三角行列の積になるように変形

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 \\
\ell_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
\ell_{n1} & \cdots & \ell_{n,n-1} & 1
\end{pmatrix}
\quad (\text{下三角})
$$

$$
\times
\begin{pmatrix}
u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\
0 & u_{22} & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & u_{n-1,n} \\
0 & \cdots & 0 & u_{nn}
\end{pmatrix}
\quad (\text{上三角})
$$

LU 分解の手順

1. 係数行列 $\boldsymbol{A}$ と同じサイズの行列 $\boldsymbol{M}$ を導入
2. $\boldsymbol{M}$ の初期値を単位行列とする

$$\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. $\boldsymbol{A}$ の左下半分を掃出すと同時に $\boldsymbol{M}$ を更新
   - a_{ij} を掃出すとき、第 i 行に $m_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$ を掛けて第 j 行から引く
   - $\boldsymbol{M}$ の (i,j) 要素を乗数 m_{ij} で上書き
4. $\boldsymbol{A}$ が上三角行列 $\boldsymbol{U}$ になったとき、$\boldsymbol{M}$ は下三角行列 $\boldsymbol{L}$

LU 分解の例

- 前回の 3 変数、3 本の連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x + 2y + 6z &= 24 \\ 3x + 5y + 13z &= 52 \\ 5x + 8y + 24z &= 93 \end{cases} \quad \to \quad \boldsymbol{A}_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 13 \\ 5 & 8 & 24 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdots\cdots ① \\ \cdots\cdots ② \\ \cdots\cdots ③ \end{array}$$

- ② − ① × $\frac{3}{2}$

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 24 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdots\cdots ① \\ \cdots\cdots ②' \\ \cdots\cdots ③ \end{array}$$

- ③ $-$ ① $\times \frac{5}{2}$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdots\cdots ① \\ \cdots\cdots ②' \\ \cdots\cdots ③' \end{array}$$

- ③$'$ $-$ ②$'$ $\times \frac{3}{2}$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdots\cdots ① \\ \cdots\cdots ②' \\ \cdots\cdots ③'' \end{array}$$

- 念のため、LU 分解できているか確認

$$M_2A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 13 \\ 5 & 8 & 24 \end{pmatrix} = A_0$$

▶ $\boldsymbol{Ly = b}$ を解く (前進代入)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 52 \\ 93 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 24, & & \\ \frac{3}{2}y_1 + y_2 &= 52 & \qquad y_2 &= 52 - \frac{3}{2} \times 24 = 16, \\ \frac{5}{2}y_1 + \frac{3}{2}y_2 + y_3 &= 93 & \qquad y_3 &= 93 - \frac{5}{2} \times 24 - \frac{3}{2} \times 16 = 9. \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} y_1 = 24, \\ y_2 = 16, \\ y_3 = 9. \end{cases}$$

▶ $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ を解く (後退代入)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 16 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x_3 &= 9, & x_3 &= 3, \\ 2x_2 + 4x_3 &= 16, & x_2 &= \frac{16 - 4 \times 3}{2} = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 24, & x_1 &= \frac{24 - 2 \times 2 - 6 \times 3}{2} = 1. \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

LU 分解の応用: 逆行列 (1)

- $\boldsymbol{A}$ の逆行列を $\boldsymbol{X}$ とすると

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$$

- $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{I}$ を列ごとに $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$、$\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ と表すと

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{e}_j \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

  ここで $\boldsymbol{e}_j$ は第 j 要素が 1、残りが 0 の縦ベクトル
  - 各 j に対して $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{e}_j$ を LU 分解で解く
  - 各 j で $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$ は共通なので、LU 分解は一度でよい
  - 各 j の解 $\boldsymbol{x}_j$ を並べたものが逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$

LU 分解による逆行列の計算例

- 次の行列の逆行列を考える

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 13 \\ 5 & 8 & 24 \end{pmatrix} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U},
$$

$$
\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
$$

第1列の前進代入

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 1, & & \\
\frac{3}{2}y_1 + y_2 &= 0, & \qquad y_2 &= 0 - \frac{3}{2} \times 1 = -\frac{3}{2}, \\
\frac{5}{2}y_1 + \frac{3}{2}y_2 + y_3 &= 0, & \qquad y_3 &= 0 - \frac{5}{2} \times 1 - \frac{3}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \begin{cases} y_1 = 1, \\ y_2 = -3/2, \\ y_3 = -1/4. \end{cases}
$$

第1列の後退代入

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x_3 &= -\frac{1}{4}, & x_3 &= -\frac{1}{12}, \\ 2x_2 + 4x_3 &= -\frac{3}{2}, & x_2 &= \frac{-\frac{3}{2} - 4 \times \left(-\frac{1}{12}\right)}{2} = -\frac{7}{12}, \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 1, & x_1 &= \frac{1 - 2 \times \left(-\frac{7}{12}\right) - 6 \times \left(-\frac{1}{12}\right)}{2} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = 4/3, \\ x_2 = -7/12, \\ x_3 = -1/12. \end{cases}$$

第2列の前進代入

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, \\ \frac{3}{2}y_1 + y_2 &= 1, \qquad & y_2 &= 1 - \frac{3}{2} \times 0 = 1, \\ \frac{5}{2}y_1 + \frac{3}{2}y_2 + y_3 &= 0, \qquad & y_3 &= 0 - \frac{5}{2} \times 0 - \frac{3}{2} \times 1 = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} y_1 = 0, \\ y_2 = 1, \\ y_3 = -3/2. \end{cases}$$

第 2 列の後退代入

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x_3 &= -\frac{3}{2}, & x_3 &= -\frac{1}{2}, \\ 2x_2 + 4x_3 &= 1, & x_2 &= \frac{1 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{3}{2}, \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 0, & x_1 &= \frac{0 - 2 \times \frac{3}{2} - 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = 0. \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 3/2, \\ x_3 = -1/2. \end{cases}$$

第 3 列の前進代入

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, & & \\ \frac{3}{2}y_1 + y_2 &= 0, & \qquad y_2 &= 0 - \frac{3}{2} \times 0 = 0, \\ \frac{5}{2}y_1 + \frac{3}{2}y_2 + y_3 &= 1, & \qquad y_3 &= 1 - \frac{5}{2} \times 0 - \frac{3}{2} \times 0 = 1. \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} y_1 = 0, \\ y_2 = 0, \\ y_3 = 1. \end{cases}$$

第3列の後退代入

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x_3 &= 1, & x_3 &= \frac{1}{3}, \\ 2x_2 + 4x_3 &= 0, & x_2 &= \frac{0 - 4 \times \frac{1}{3}}{2} = -\frac{2}{3}, \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 0, & x_1 &= \frac{0 - 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) - 6 \times \frac{1}{3}}{2} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = -1/3, \\ x_2 = -2/3, \\ x_3 = 1/3. \end{cases}$$

- 以上をまとめると $\boldsymbol{A}$ の逆行列は

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

LU 分解の応用: 逆行列 (2)

- 前のページで $\boldsymbol{I}$ を $\boldsymbol{B}$ で置き換えると、同じ手順で

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$$

  を満たす $\boldsymbol{X}$、つまり $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ が得られる
- 逆行列 $\boldsymbol{X}$ を求めてから $\boldsymbol{B}$ に掛けるよりも効率的
- $\boldsymbol{A}^{-1}$ そのものでなく積 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ を計算するときは、こちらを採用

行列式

- 2×2、3×3 行列のとき

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - c_2b_3) + b_1(c_2a_3 - a_2c_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)$$

- $n\times n$ 行列のとき

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

行・列が異なる要素で積を作り、置換 σ に応じて符号を変える

LU 分解の応用: 行列式

- $\boldsymbol{L}$ は下三角行列なので

$$|\boldsymbol{L}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \ell n1 & \cdots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times \cdots \times 1 = 1$$

- $\boldsymbol{U}$ は上三角行列なので

$$|\boldsymbol{U}| = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{vmatrix} = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn} = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

- 行列式の性質から $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{L}||\boldsymbol{U}| = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$

LU 分解による行列式の計算例

- 再び次の行列の行列式を考える

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 13 \\ 5 & 8 & 24 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 行列式の性質から

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{L}||\boldsymbol{U}| = |\boldsymbol{U}| = 2 \times 2 \times 3 = 12.$$