



物理学B 第9回

アンペールの法則とビオ・サバールの法則

濱本 雄治¹

情報工学部 情報通信工学科

2025年11月26日、12月1日

¹hamamoto@c.oka-pu.ac.jp

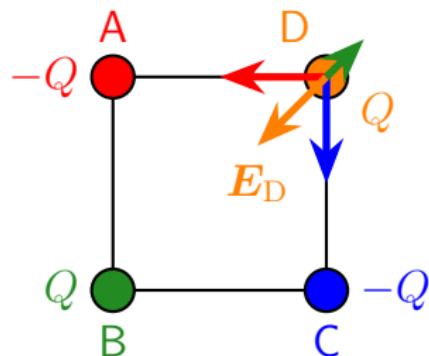
<https://yhmmt.github.io/pages/>



第7回の小テストの解説

一辺 a の正方形の頂点を反時計回りに A,B,C,D とする。各頂点にそれぞれ電荷 $Q_A = -Q, Q_B = Q, Q_C = -Q, Q_D = Q$ ($Q > 0$) が置かれているとき、 Q_A, Q_B, Q_C が頂点 D に作る電場の大きさと向きを求めよ。

$$|E_D| = \frac{\sqrt{2}Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (\sqrt{2}a)^2}$$
$$= \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$



第7回の小テストの解説(続き)



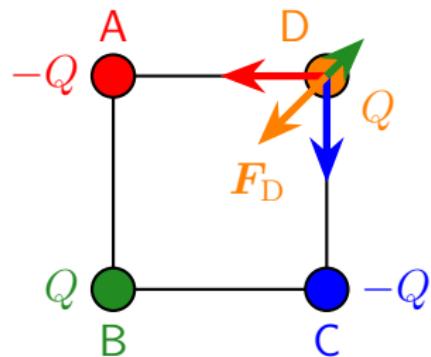
また Q_D がこの電場から受けるクーロン力の大きさと向きを求めよ。さらに Q_A, Q_B, Q_C が頂点 D に作る静電ポテンシャルを求めよ。ただし静電ポテンシャルは無限遠をゼロとする。

$$|F_D| = |QE_E|$$

$$= \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2},$$

$$\phi_D = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} \times 2 + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (\sqrt{2}a)}$$

$$= \left(-2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

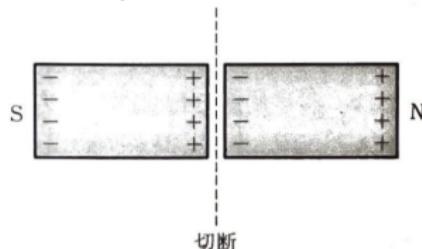




磁気的現象

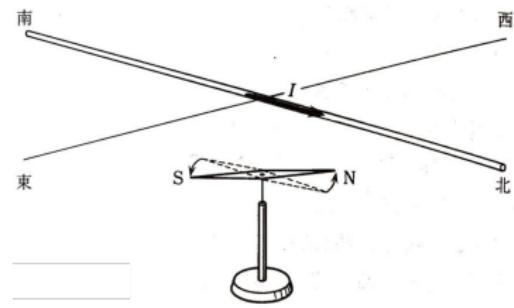
▶ 磁荷

- ▷ 北を指す磁極を N 極 (+)、南を指す磁極を S 極 (-) と呼ぶ
- ▷ 異なる極の間には引力、同じ極の間には斥力が働く
- ▷ 正負の磁荷は分離できない (単極磁荷は存在しない)



▶ 電流の磁気作用

- ▷ 南 → 北に電流を流すと
磁石の N 極が西に向く





電流間に働く力

- ▶ 直線状の2本の平行な導線に電流を流す
 - ▷ 平行(反平行)電流の間には引力(斥力)
 - ▷ 力の強さは電流の積に比例、距離に反比例

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{R}$$

- ▶ 真空の透磁率 μ_0 の定義の変更

- ▷ 2019年以前:

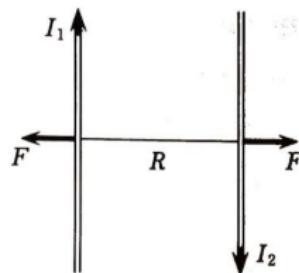
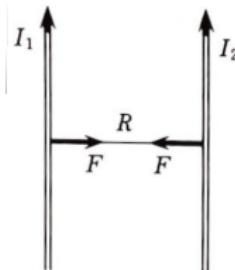
$$\mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$$

F の観測値から 1 A を定義

- ▷ 2019年以降:

$$\mu_0 \equiv 1.25663706127(20) \times 10^{-6} \text{ N/A}^2$$

流れる電子数の観測から 1 A を定義





磁場

▶ 磁束密度

- ▷ 電流 I_1, I_2 間に働く力は $I_1(I_2)$ が作る磁場と $I_2(I_1)$ との近接作用
- ▷ 接線方向が磁場の方向と一致するように引いた線を **磁束線** と呼ぶ
- ▷ $I_1(I_2)$ が作る**磁束密度**を $B_1(B_2)$ とすると

$$F = I_1 B_2 = I_2 B_1, \quad B_1(R) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{R}, \quad B_2(R) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_2}{R}$$

- ▷ 磁束密度の単位は $T = N/A\ m$
- ▷ 後述の磁場の強さ $H \simeq \mu^{-1}B$ とは区別する



磁場に関するガウスの法則

▶ 直線電流 I が作る磁束密度

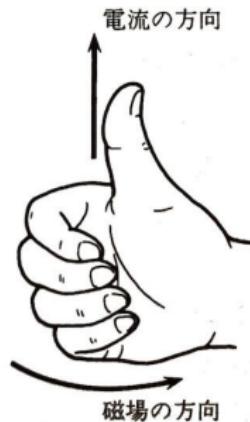
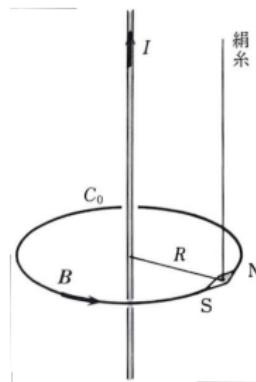
- ▷ 電流の方向を右ネジの進行方向とすると
磁束密度の方向は右ネジの回転方向
- ▷ 磁束線は一般に閉曲線を描く
- ▷ 任意の閉曲面 S_0 を貫く磁束の総和

$$\int_{S_0} B_n dS = 0 \quad (\text{流出量と流入量は相殺})$$

▶ 電場に関するガウスの法則との違い

$$\int_{S_0} D_n dS = Q_e$$

- ▷ 電束線の発生源である真電荷 Q_e に対応する
磁荷 Q_m が存在しないため右辺は常にゼロ





アンペールの法則

▶ 直線電流 I が作る磁束密度

- ▷ 距離 R で B は半径 R の円 C_0 を描く
- ▷ 磁束密度の式を変形すると

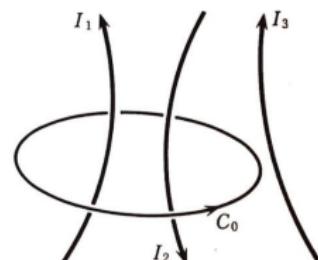
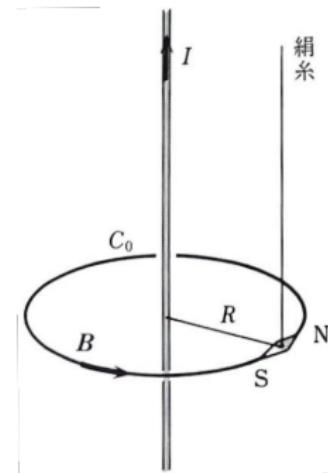
$$B(R) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} \quad \rightarrow \quad 2\pi R B(R) = \mu_0 I$$

▶ 任意の閉曲線、電流への一般化

- ▷ 任意の閉曲線 C_0 に対して

$$\int_{C_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I \quad (\text{アンペールの法則})$$

- I は C_0 で囲まれる曲面を貫く電流の総和
- ▷ 証明は電場に関するガウスの法則と類似



静電場と静磁場の比較



	静電場	静磁場
力線の発生源	真電荷 Q_e が存在	磁荷 Q_m は不在
面積分に関する法則	ガウスの法則 $\int_{S_0} D_n dS = Q_e$	ガウスの法則 $\int_{S_0} B_n dS = 0$
線積分に関する法則	(名無しの法則) $\int_{C_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$	アンペールの法則 $\int_{C_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$

▶ 補足

- ▷ アンペールの法則は後で磁場 $\mathbf{H} \simeq \mu^{-1} \mathbf{B}$ を用いて再定式化
- ▷ アンペールの法則はスカラーポテンシャル $\phi_m = - \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ の不在、ガウスの法則はベクトルポテンシャル \mathbf{A} の存在を示唆

例: 無限に長い円柱状電流の作る静磁場

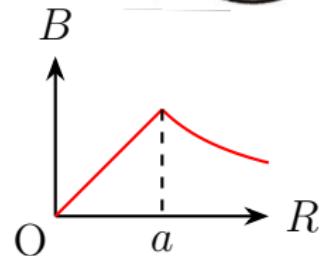
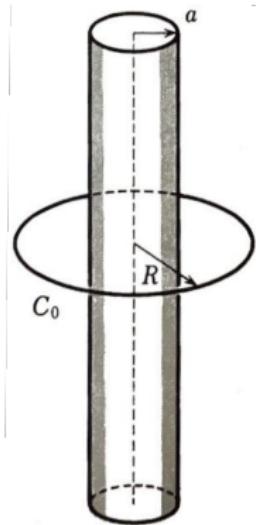


- ▶ 半径 a の円柱状導体内部に一様な電流 I
- ▶ $R < a$ のとき C_0 を貫く電流は $\frac{\pi R^2}{\pi a^2} I$
- ▶ 軸に垂直な半径 R の円を C_0 とすると

$$\int_{C_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi R B(R) = \begin{cases} \mu_0 \left(\frac{R}{a}\right)^2 I & (R < a) \\ \mu_0 I & (R > a) \end{cases}$$

- ▶ 以上から

$$B(R) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I R}{2\pi a^2} & (R < a) \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi R} & (R > a) \end{cases}$$



直線電流に関するビオ・サバールの法則



- ▶ 直線状電荷が距離 R の位置に作る電場

$$E(R) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R}$$

は微小電荷 $\lambda\Delta z$ の電場(次式)の重合せ

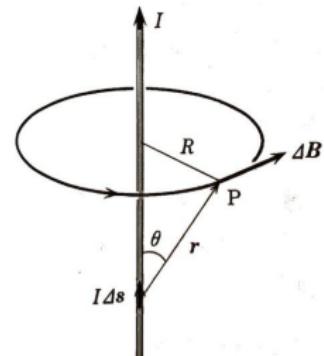
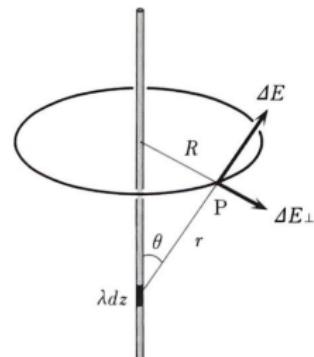
$$\Delta E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda\Delta z \sin\theta}{r^2}$$

- ▶ 直線電流が距離 R の位置に作る磁束密度

$$B(R) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R}$$

も微小電流 $I\Delta s$ の磁場(次式)の重合せ

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\Delta s \sin\theta}{r^2} \quad (\text{ビオ・サバールの法則})$$





ベクトルの外積

- ▶ 定義 (x, y, z 成分は赤、緑、青)

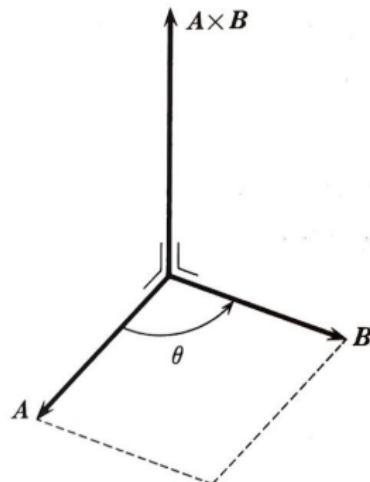
$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} = & (\textcolor{green}{A_y}B_z - \textcolor{blue}{A}_zB_y, \\ & \textcolor{blue}{A}_zB_x - \textcolor{red}{A}_xB_z, \\ & \textcolor{red}{A}_xB_y - \textcolor{green}{A}_yB_x)\end{aligned}$$

- ▶ 方向

- ▷ A から B に右ネジを回したとき
 $A \times B$ の方向は右ネジの進行方向
- ▷ $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$

- ▶ 絶対値

- ▷ $|A \times B| = |A||B| \sin \theta$
- ▷ A, B が作る平行四辺形の面積



一般的な電流に関するビオ・サバールの法則

- ▶ 直線電流の素片 $I\Delta s$ が作る磁束密度

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\Delta s \sin \theta}{r^2} \quad (\Delta s \equiv |\Delta s|)$$

- ▶ 直線状以外の電流への一般化

▷ Δs と r のなす角は θ だから

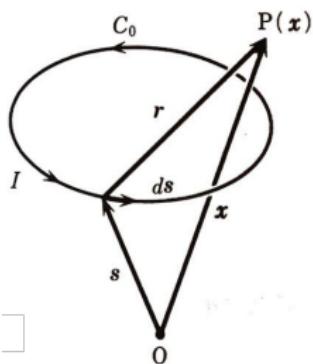
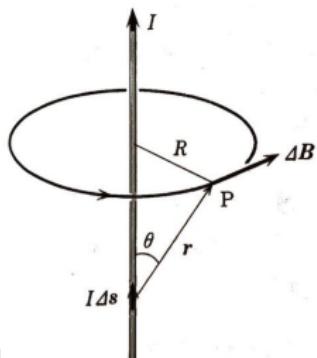
$$|\Delta s \times r| = \Delta s r \sin \theta, \quad \therefore \Delta s \sin \theta = \frac{|\Delta s \times r|}{r}$$

- ▷ 電流素片 $I\Delta s$ が作る磁束密度

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\Delta s \times r}{r^3}$$

- ▷ 閉経路 C_0 を流れる電流が作る磁束密度

$$B(x) = \int_{C_0} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ids \times r}{r^3} \quad (r \equiv x - s)$$





例1：正方形電流の中心軸上の静磁場

▶ AB 間の電流が距離 R で作る磁束密度

▷ $\tan \theta = \frac{R}{-s}$ の両辺を微分して

$$\frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = R \frac{ds}{s^2},$$

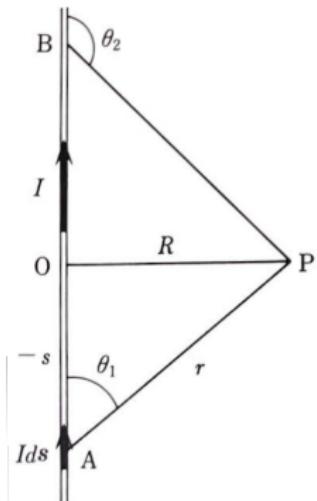
$$\therefore ds = \frac{s^2 d\theta}{R \cos^2 \theta} = \frac{r^2 d\theta}{R} \quad \left(\because \cos \theta = \frac{-s}{r} \right)$$

▷ ビオ・サバールの法則に代入して

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ids \sin \theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \theta d\theta}{R}$$

▷ 区間 $[\theta_1, \theta_2]$ で積分すると

$$B(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left[-\cos \theta \right]_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$



例1：正方形電流の中心軸上の静磁場（続き）

▶ 正方形電流の中心軸上の磁束密度

- ▷ 辺から中心軸上の高さ h の点までの距離

$$R = \sqrt{h^2 + (a/2)^2}$$

- ▷ この辺の両端における余弦

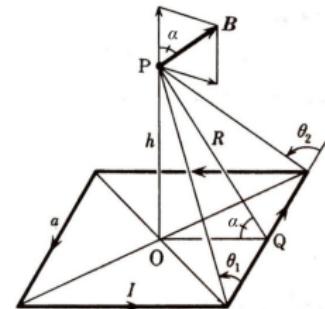
$$\cos \theta_1 = -\cos \theta_2 = \frac{a/2}{\sqrt{R^2 + (a/2)^2}}$$

- ▷ これらを前頁の磁束密度の式に代入して

$$B = |\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \frac{a}{\sqrt{R^2 + (a/2)^2}}$$

- ▷ 4辺からの寄与の軸に平行な成分を足すと

$$B(P) = B \cos \alpha \times 4 = \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi R^2 \sqrt{R^2 + (a/2)^2}}$$



$$\left(\because \cos \alpha = \frac{a/2}{R} \right)$$



例2: 円形電流の中心軸上の静磁場

▶ 電流素片 Ids が高さ z で作る磁束密度

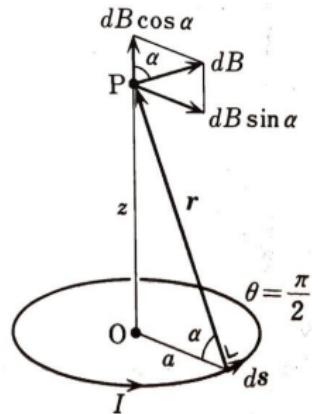
▷ ds と r のなす角は $\theta = \frac{\pi}{2}$ だから

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ids \sin \frac{\pi}{2}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ids}{r^2}$$

▶ 円電流全体が高さ z で作る磁束密度

▷ 軸に平行な成分を円周上で積分すると

$$\begin{aligned} B(P) &= \int_{\text{円周}} dB \cos \alpha \\ &= \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3} \quad \left(\because \cos \alpha = \frac{a}{r} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad \left(\because r = \sqrt{z^2 + a^2} \right) \end{aligned}$$



例3: 無限に長いソレノイドの作る静磁場



- ▶ 半径 a 、単位長さ当たりの巻数 n のソレノイド
- ▶ 中心軸上の点 P における磁束密度
 - ▷ 高さ z 、長さ dz の部分が点 P に作る磁束密度

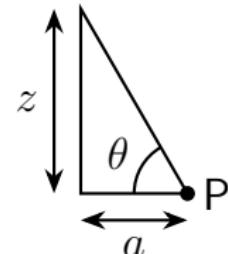
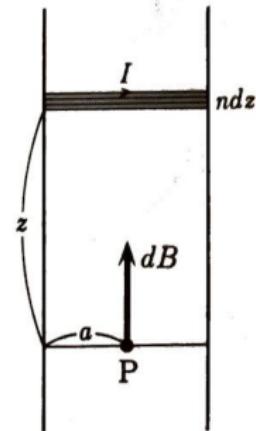
$$dB = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \times ndz$$

▷ $z = a \tan \theta$ とすると $dz = \frac{ad\theta}{\cos^2 \theta}$ であるから

$$dB = \frac{\mu_0 I a^2}{2 \frac{a^3}{\cos^3 \theta}} \times n \frac{ad\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\mu_0 n I}{2} \cos \theta d\theta$$

▷ 区間 $[-\pi/2, \pi/2]$ で積分すると

$$B(P) = \int dB = \frac{\mu_0 n I}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \mu_0 n I$$



例3: 無限に長いソレノイドの作る静磁場(続)

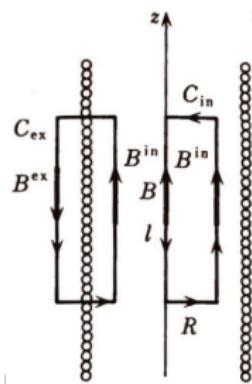
- ▶ 軸から外れた点でも磁束密度は軸に平行
- ▶ 内部の点における磁束密度
 - ▷ 内部の長さ ℓ の長方形を C_{in} とすると

$$\int_{C_{\text{in}}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = [B^{\text{in}} - B(P)]\ell = 0,$$
$$\therefore B^{\text{in}} = B(P) = \mu_0 n I$$

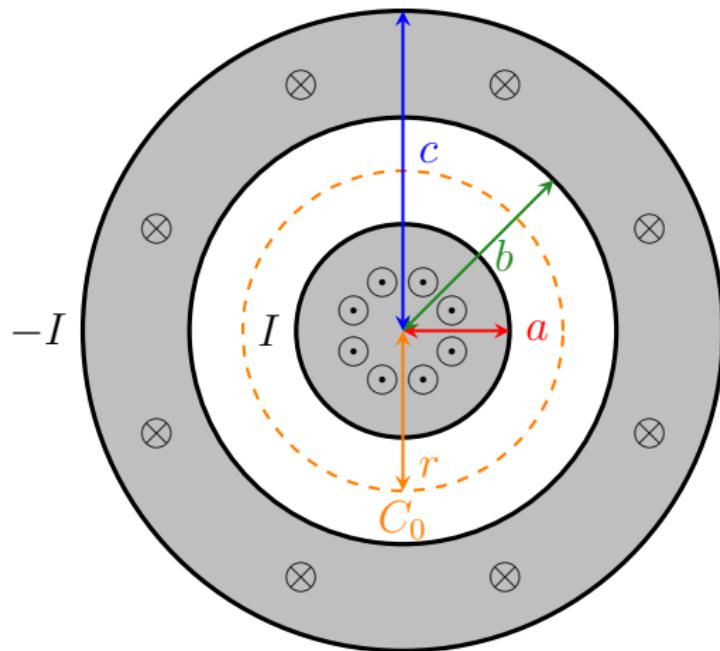
- ▶ 外部の点における磁束密度
 - ▷ 導線を囲むの長さ ℓ の長方形を C_{ex} とすると

$$\int_{C_{\text{ex}}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = [B^{\text{in}} - B^{\text{ex}}]\ell = \mu_0 n \ell I,$$
$$\therefore B^{\text{ex}} = B^{\text{in}} - \mu_0 n I = 0$$

ソレノイドの磁束密度は内部は一様で外部はゼロ



演習：同軸ケーブルの磁束密度



- ▶ 中心から半径 r の円周を C_0 とする



演習: 同軸ケーブルの磁束密度(続き)

▶ 各領域で C_0 を貫く電流は

$$I(r) = \begin{cases} (r/a)^2 I & (0 < r < a) \\ I & (a < r < b) \\ I - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} I = \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} I & (b < r < c) \\ 0 & (r > c) \end{cases}$$

▶ アンペールの法則から

$$B(r) = \frac{\mu_0 I(r)}{2\pi r} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} & (0 < r < a) \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & (a < r < b) \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} & (b < r < c) \\ 0 & (r > c) \end{cases}$$

演習: 同軸ケーブルの磁束密度(続き)

