物理学B 第4回

コンデンサー、静電場のエネルギー

濱本 雄治[1]

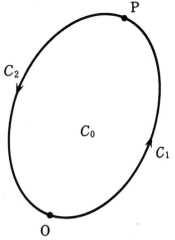
情報工学部 情報通信工学科

2025 年 10 月 20 日、22 日

[1]hamamoto@c.oka-pu.ac.jp https://yhmmt.github.io/pages/

前回の復習: 静電ポテンシャル

- ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ に対して次の 1, 2 は等価
  1. 任意の閉曲線 C_0 に沿った線積分がゼロ
     $$\int_{C_0} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$$
  2. 積分経路に依らないポテンシャル関数が存在
     $$f(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_\mathrm{O}}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$



- 点電荷が作る静電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E(r)\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ (の重ね合わせ) は 1. を満足
- 静電ポテンシャル (電位)

$$\boxed{\phi(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_\mathrm{O}}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)} \equiv -\nabla\phi$$

前回の小テストの解説

半径 a の中空の球殻上に電荷 Q が一様に分布しているとき、球殻の内部および外部における静電ポテンシャルを求めよ。ただし無限遠方における静電ポテンシャルを $\phi(\infty) = 0$ とする。前々回の

小テストから球殻の内外の電場は、球殻の中心から測った位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ に平行で $r \equiv |\boldsymbol{r}|$ のみの関数

$$E(r) = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > a) \end{cases},$$

$$\therefore \phi(r) = -\int E(r)\mathrm{d}r = \begin{cases} C_1 & (r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2 & (r > a) \end{cases}$$

前回の小テストの解説(続き)

無限遠方で $\phi(\infty) = 0$ とすると

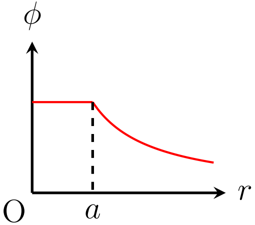
$$\phi(r > a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2 \xrightarrow{r\to\infty} 0 + C_2 = 0, \qquad \therefore C_2 = 0$$

$r = a$ で静電ポテンシャルが連続とすると

$$\phi(r \to a - 0) = \phi(r \to a + 0), \qquad \therefore C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

以上から

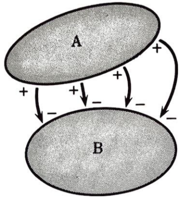
$$\phi(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} & (r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & (r > a) \end{cases}$$



帯電した導体球の電場、静電ポテンシャルと等価

コンデンサー

- 次のような系をコンデンサーと呼ぶ
  - 2 つの導体が近接
  - それぞれ当量の正負の電荷を持つ
  - 電気力線は導体間のみに存在



- 導体の電荷 $\pm Q$ は導体間の電位差 V に比例

$$Q = CV$$

  比例係数 C を静電容量 (電気容量) と呼ぶ
- 電位差を 1 V 上昇させるのに必要な電気量が 1 C のとき
  コンデンサーの静電容量を 1 F と定義

補足: 電荷と電位差の比例関係

- 導体が占める領域 Ω の外部における電位は

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Omega G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' + \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial\Omega}\left[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'} + \frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\phi(\boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}S'$$

  ここでグリーン関数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ は次の微分方程式の解

$$\nabla'^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \qquad \left(\nabla'^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

- $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ に $\nabla'^2 H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = 0$ を満たす $H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ を加えてもよい
- 境界 $\partial\Omega$ 上で $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = 0$ を課すことをディレクレ条件と呼ぶ

補足: 電荷と電位差の比例関係 (続き)

- ディリクレ条件の下で導体外部における電位は

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Omega G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' + \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial\Omega}\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\phi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'$$

- Ω を導体 A, B の領域 $\Omega_\mathrm{A},\Omega_\mathrm{B}$ に分割すると
  - 導体内部に電荷は存在しない $\rho(\boldsymbol{r}'\in\Omega_\mathrm{A,B})=0$
  - 導体表面は等電位 $\phi(\boldsymbol{r}'\in\partial\Omega_\mathrm{A,B})=\phi_\mathrm{A,B}$

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \sum_{j=\mathrm{A,B}}\frac{\phi_j}{4\pi}\oint_{\partial\Omega_j}\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}S'$$

- 導体 i の表面の電荷密度は電場の法線成分に比例

$$\omega_i(\boldsymbol{r}) = \epsilon_0 E_n = -\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial n} = -\frac{\varepsilon_0}{4\pi}\sum_{j=\mathrm{A,B}}\phi_j\oint_{\partial\Omega_j}\frac{\partial^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n\partial n'}\mathrm{d}S'$$

補足: 電荷と電位差の比例関係 (続き)

- 導体 i の電荷の総量

$$Q_i = \int_{\partial\Omega_i} \omega_i(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S = -\frac{\varepsilon_0}{4\pi}\sum_{j=\mathrm{A,B}} \phi_j \oint_{\partial\Omega_i}\oint_{\partial\Omega_j} \frac{\partial^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n \partial n'}\mathrm{d}S\mathrm{d}S'$$

$$= \sum_{i=\mathrm{A,B}} C_{ij}\phi_j \quad \left(C_{ij} \equiv -\frac{\varepsilon_0}{4\pi}\oint_{\partial\Omega_i}\oint_{\partial\Omega_j} \frac{\partial^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n \partial n'}\mathrm{d}S\mathrm{d}S' = C_{ji} \right)$$

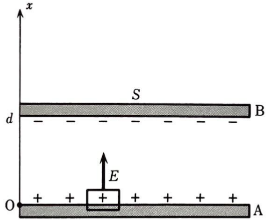
- $Q_A = -Q_B \equiv Q$、$\phi_\mathrm{A} = -\phi_\mathrm{B} \equiv \dfrac{V}{2}$ と書くと

$$Q = C_\mathrm{AA}\frac{V}{2} + C_\mathrm{AB}\left(-\frac{V}{2}\right) = \frac{C_\mathrm{AA} - C_\mathrm{AB}}{2}V \equiv CV$$

よって電荷 Q は電位差 $V = \phi_\mathrm{A} - \phi_\mathrm{B}$ に比例

例 1: 平行板コンデンサー

- 極板間の電場 (復習)
  - 静電誘導により電荷は内側に分布
  - 極板上の一様な電荷面密度 $\omega = Q/S$
  - 電極 A の表面を貫く筒状の閉曲面 S_0



$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = E\Delta S = \frac{\omega \Delta S}{\varepsilon_0}, \qquad \therefore E = \frac{\omega}{\varepsilon_0}$$

- 極板間の静電ポテンシャル

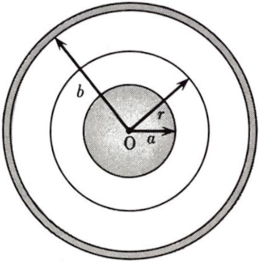
$$\phi(x) = -\int E\mathrm{d}x = -\frac{\omega}{\varepsilon_0}x + \mathrm{const.}$$

- 極板間の電位差と静電容量

$$V = \phi(0) - \phi(d) = \frac{\omega d}{\varepsilon_0} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}, \qquad \therefore C = \frac{Q}{V} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

例 2: 球形コンデンサー

- 導体球と導体球殻の間の電場 (復習)
  - 導体球と導体球殻の半径 $a, b\,(> a)$
  - 導体球表面に電荷 Q が一様に分布
  - 半径 r $(a < r < b)$ の球面状閉曲面 S_0



$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \quad \therefore E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

- 導体球と導体球殻の間の静電ポテンシャル

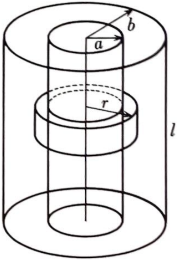
$$\phi(r) = -\int E(r)\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \mathrm{const.}$$

- 導体球と導体球殻の間の電位差と静電容量

$$V = \phi(a) - \phi(b) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right), \qquad \therefore C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$$

例3: 円筒形コンデンサー

- 2 つの中空の円筒形導体の間の電場
  - 内側と外側の円筒形導体の半径 $a, b\,(> a)$
  - 内側の円筒に沿って一様な電荷線密度 $\lambda = \dfrac{Q}{\ell}$
  - 半径 r $(a < r < b)$、高さ h の円筒状閉曲面 S_0



$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = 2\pi r h E(r) = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}, \quad \therefore E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

- 内側と外側の円筒形導体間の静電ポテンシャル

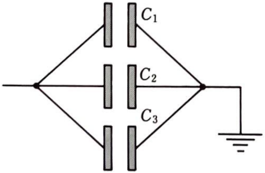
$$\phi(r) = -\int E(r)\mathrm{d}r = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log r + \mathrm{const.}$$

- 内側と外側の円筒形導体間の電位と静電容量

$$V = \phi(a) - \phi(b) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log\frac{b}{a} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\ell}\log\frac{b}{a}, \quad \therefore C = \frac{2\pi\varepsilon_0\ell}{\log(b/a)}$$

コンデンサーの並列接続

- 3 つのコンデンサーを並列接続した系
  - それぞれの電気量 Q_1, Q_2, Q_3
  - それぞれの静電容量 C_1, C_2, C_3
  - 等しい電圧 ($\equiv V$) がかかるので



$$Q_1 = C_1 V, \quad Q_2 = C_2 V, \quad Q_3 = C_3 V$$

- 総電気量

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)V$$

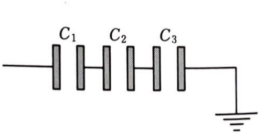
- 総静電容量

$$C = \frac{Q}{V} = C_1 + C_2 + C_3 \quad (> C_1, C_2, C_3)$$

並列接続で静電容量は増加

コンデンサーの直列接続

- 3 つのコンデンサーを並列接続した系
  - それぞれの静電容量 C_1, C_2, C_3
  - それぞれの電圧 V_1, V_2, V_3
  - 等しい電荷 $(\equiv Q)$ が誘導されるので



$$Q = C_1V_1 = C_2V_2 = C_3V_3$$

- 総電圧

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) Q$$

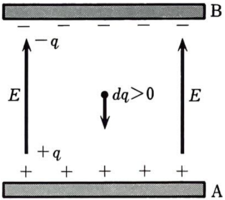
- 総静電容量

$$C = \frac{Q}{V} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)^{-1} \quad (< C_1, C_2, C_3)$$

並列接続で静電容量は減少

コンデンサーの静電エネルギー

- 平行板コンデンサー
  - 電極 A, B に正負の電荷 $\pm q$
  - 電極に垂直な一様な電場 E
  - 電極間の電位差 $V = \phi(A) - \phi(B) = \dfrac{q}{C}$



- 微小電荷 $\mathrm{d}q > 0$ を B 極から A 極に移動させるのに必要な仕事

$$\mathrm{d}W = V\mathrm{d}q = \frac{q}{C}\mathrm{d}q$$

- 両極を $\pm Q$ 帯電させる間に蓄えられる静電エネルギー

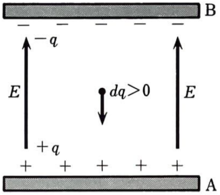
$$\boxed{U_\mathrm{e}} = \int \mathrm{d}W = \frac{1}{C}\int_0^Q q\mathrm{d}q = \frac{1}{C}\left[\frac{q^2}{2}\right]_0^Q = \boxed{\frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2}$$

U_e は電荷 $\pm Q$ が持つ位置エネルギーと解釈できる

コンデンサーの静電場のエネルギー

- $U_\mathrm{e} = \dfrac{Q^2}{2C}$ を両極間の静電場 E の観点から書き直す
  - 電極表面の電荷面密度

$$\omega = \frac{Q}{S} = \varepsilon_0 E, \qquad \therefore Q = \varepsilon_0 S E$$



  - 平板コンデンサーの静電容量

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

  - U_e から Q, C を消去すると

$$\boxed{U_e} = \frac{(\varepsilon_0 S E)^2}{2\varepsilon_0 \dfrac{S}{d}} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 S d \equiv \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 v = \boxed{\frac{\varepsilon_0}{2} \int_v E^2 \mathrm{d}v}$$

U_e は電極間の体積 $v \equiv Sd$ 内の静電場のエネルギーと解釈できる

多電荷系の静電エネルギー

- i 番目以外の電荷が位置 $\boldsymbol{r}$ に作る静電ポテンシャル

$$\phi_{\neq i}(\boldsymbol{r}) = \sum_{j(\neq i)} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j|}$$

- 全電荷間の静電エネルギー

$$U_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi_{\neq i}(\boldsymbol{r}_i) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j(\neq i)} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|}$$

係数 $\frac{1}{2}$ は電荷対の重複を防ぐために必要

- $i = j$ の場合 (自己エネルギー $= \infty$) を含めると

$$U_{\mathrm{e}} \simeq \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|}$$

多電荷系の静電場のエネルギー

- 恒等式

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i) \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^3 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j|^3} \mathrm{d}v$$

を用いて静電エネルギーを変形すると

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{e}} &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{4\pi} \int \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i) \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^3 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j|^3} \mathrm{d}v \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int \left(\sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^3} \right) \cdot \left(\sum_j \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j|^3} \right) \mathrm{d}v \\ &= \boxed{\frac{\varepsilon_0}{2} \int \boldsymbol{E}^2 \mathrm{d}v} \end{aligned}$$

クーロン力による位置エネルギー $=$ 静電場のエネルギー
(静電エネルギー)

点電荷の自己エネルギー

- 静電場のエネルギーに含めた点電荷の自己エネルギー $(i = j)$

$$U_{\text{self}} = \frac{1}{2}\sum_i \frac{{q_i}^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_i|} = \frac{1}{2}\sum_i \frac{{q_i}^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{4\pi}\int\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3}\mathrm{d}v$$

$$= \sum_i \frac{\varepsilon_0}{2}\int {\boldsymbol{E}_i}^2\mathrm{d}v \qquad \left(\boldsymbol{E}_i \equiv \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3}\right)$$

- 積分を実行すると

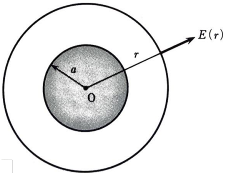
$$U_{\text{self}} = \sum_i \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\int_0^\infty \frac{4\pi {R_i}^2\mathrm{d}R_i}{{R_i}^4} \qquad (R_i \equiv |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|)$$

$$= \sum_i \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 4\pi\left[-\frac{1}{R_i}\right]_0^\infty = \infty$$

点電荷は有限の大きさを持つ or 極めて短い距離で理論が破綻

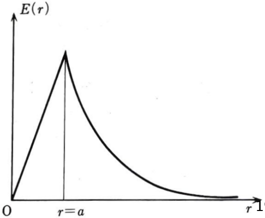
球状電荷の静電場のエネルギー

- 球状の電荷が作る電場 (復習)
  - 電荷 Q は半径 a の球の内部に一様に分布
  - 半径 r の球面状の閉曲面 S_0
  - 電場は S_0 に垂直で r のみの関数
  - ガウスの法則から



$$\int_{S_0} E_n \mathrm{d}S = \underbrace{4\pi r^2}_{S_0\text{の表面積}} E(r) = \begin{cases} \left(\dfrac{r}{a}\right)^3 \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & (r < a) \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & (r > a) \end{cases}$$

$$\therefore E(r) = \begin{cases} \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} & (r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > a) \end{cases}$$



球状電荷の静電場のエネルギー (続き)

- 静電場のエネルギー

$$
\begin{aligned}
U_{\mathrm{e}} &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 \mathrm{d}v \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^a \left(\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\right)^2 \underbrace{4\pi r^2 \mathrm{d}r}_{\mathrm{d}v} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_a^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 \underbrace{4\pi r^2 \mathrm{d}r}_{\mathrm{d}v} \\
&= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\int_0^a \frac{r^4}{a^6}\mathrm{d}r + \int_a^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2}\right) \\
&= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\left[\frac{r^5}{5a^6}\right]_0^a - \left[\frac{1}{r}\right]_a^\infty\right) \\
&= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{5a} + \frac{1}{a}\right) \\
&= \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}
\end{aligned}
$$

補足: 球座標系での体積積分

- 球座標系

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta$$

- ヤコビアン

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

- 体積要素　$\mathrm{d}v = \det J\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$
- r のみの関数の体積積分

$$\int f(r)\mathrm{d}v = \int_0^\infty f(r)r^2\mathrm{d}r \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta}_{2} \underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi}_{2\pi} = \int_0^\infty f(r)\underbrace{4\pi r^2\mathrm{d}r}_{\mathrm{d}v}$$

補足: 円柱座標系での体積積分

- 球座標系

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z$$

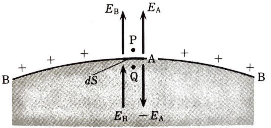
- ヤコビアンとその行列式

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\cos\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 体積要素 $\mathrm{d}v = \det J\, \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$
- r のみの関数の体積積分

$$\int f(r)\mathrm{d}v = \int_0^\infty f(r) r\mathrm{d}r \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^h \mathrm{d}z}_{h} = \int_0^\infty f(r) \underbrace{2\pi r h\mathrm{d}r}_{\mathrm{d}v}$$

導体表面に作用する力 (時間切れ)



- 表面の微小部分 A の面積を $\mathrm{d}S$ とする
- 微小部分 A の電荷 $\omega \mathrm{d}S$ が
  - 真上の点 P に作る電場は E_A
  - 真下の点 Q に作る電場は $-E_\mathrm{A}$ (上下対称に電場が発生)
- 残りの部分 B の電荷が
  - 点 P に作る電場は E_B
  - 点 Q に作る電場も E_B (PQ 間は近いので電場は連続)
- 導体内の電場は相殺するので $-E_\mathrm{A} + E_\mathrm{B} = 0 \qquad \therefore E_\mathrm{A} = E_\mathrm{B}$
- 導体外の点 P での全電場 $E = E_\mathrm{A} + E_\mathrm{B} = 2E_\mathrm{B} \qquad \therefore E_\mathrm{B} = E/2$
- B の電荷が作る電場 E_B が A の微小電荷 $\omega \mathrm{d}S$ に作用する力

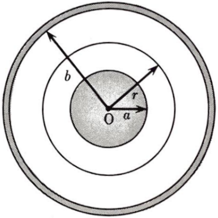
$$\mathrm{d}F = \omega \mathrm{d}S E_B = \varepsilon_0 E \mathrm{d}S \frac{1}{2} E = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \mathrm{d}S$$

導体表面の張力は静電場のエネルギー密度 $u = \dfrac{\varepsilon_0}{2} E^2$ に等しい

演習 1: 球形コンデンサーの静電場のエネ…

- 半径 a の導体球と半径 $b(> a)$ の導体球殻
- 導体球と導体球殻の間の静電場

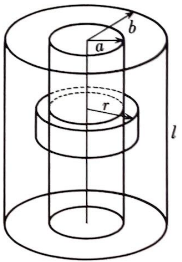
$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



- 導体球と導体球殻の間の静電場のエネルギー

$$U_\mathrm{e} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_a^b \{E(r)\}^2 \underbrace{4\pi r^2 \mathrm{d}r}_{\mathrm{d}v} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

演習 2: 円筒形コンデンサーの静電場のエネ…



- 半径 a および $b(> a)$ の円筒形導体
- 円筒形導体間の静電場

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

- 円筒形導体間の長さ h の部分の静電場のエネルギー

$$U_\mathrm{e} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_a^b \{E(r)\}^2 \underbrace{2\pi r h \mathrm{d}r}_{\mathrm{d}v} = \frac{\lambda^2 h}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\lambda^2 h}{2\pi\varepsilon_0}\log\frac{b}{a}$$

- 単位長さ当りの静電場のエネルギー

$$u_\mathrm{e} \equiv \frac{U_\mathrm{e}}{h} = \frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0}\log\frac{b}{a}$$