



物理学 B 第13回

インダクタンス

濱本 雄治¹

情報工学部 情報通信工学科

2025年1月14日、19日

¹hamamoto@c.oka-pu.ac.jp

<https://yhmmmt.github.io/pages/>

前回の復習： ファラデーの電磁誘導の法則



▶ 電磁誘導

- ▷ C_0 内の磁束 Φ の変化で誘導電流 I が発生
- ▷ I が作る磁場が Φ の変化を打ち消す向き
(レンツの法則)
- ▷ C_0 内に発生する誘導起電力

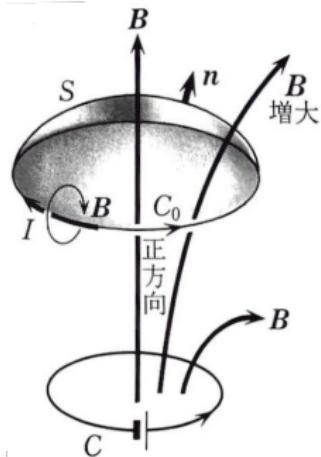
$$\phi^{\text{e.m.}} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

符号は反時計回りが正

▶ ファラデーの法則

- ▷ 任意の閉曲線 C_0 とそれに囲まれる任意の曲面 S に対して

$$\int_{C_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dS$$



前回の復習：電磁場の基本法則



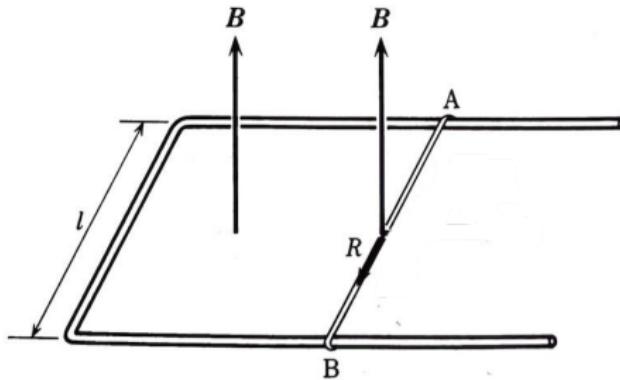
	積分形	微分形
ガウスの法則	$\int_{S_0} D_n dS = Q_e$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e$
(磁場に関する) ガウスの法則	$\int_{S_0} B_n dS = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
ファラデーの法則	$\int_{C_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dS$	$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$
アンペール・マク スウェルの法則	$\int_{C_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I_e + \int_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS$	$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{i}_e$

ただし S_0 は任意の閉曲面、 C_0 は任意の閉曲線、 S は C_0 で囲まれる任意の曲面とする



前回の小テストの解説

下図のように導線 AB が左右に移動可能な回路に垂直磁場 B が印加されている。左端から測った導線 AB の位置を $x(t) = x_0 + x_1 \cos \omega t$ のように振動させたとき、時刻 t において導線 AB に生じる誘導起電力 $\phi^{\text{e.m.}}$ を求めよ。 $\phi^{\text{e.m.}}$ の正の向きを示すこと。





前回の小テストの解説(続き)

時刻 t で回路を貫く磁束は

$$\Phi(t) = B\ell(x_0 + x_1 \cos \omega t).$$

導線 AB に生じる誘導起電力は

$$\phi^{\text{e.m.}} = -\frac{d\Phi}{dt} = B\ell x_1 \omega \sin \omega t.$$

磁場が右ネジの進行方向とすると、電流は右ネジの回転方向。
つまり誘導起電力 $\phi^{\text{e.m.}}$ は B→A の向きが正。



伝導電流 vs. 変位電流

- ▶ 導体中で電場 $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \sin \omega t$ がゆっくり変動するとき
 - ▷ 伝導電流密度に対してオームの法則が近似的に成立

$$\mathbf{i}_e \simeq \sigma \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}_0 \sin \omega t \quad (\sigma \sim 10^8 \Omega^{-1} m^{-1})$$

- ▷ 一方、変位電流密度は

$$\mathbf{i}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \epsilon \omega \mathbf{E}_0 \cos \omega t \quad (\epsilon \sim 10\epsilon_0 \sim 10^{-10} F/m)$$

- ▷ 変位電流と伝導電流の振幅の比

$$\frac{|\mathbf{i}_D|_{\max}}{|\mathbf{i}_e|_{\max}} = \frac{\epsilon \omega}{\sigma} \sim 10^{-18} \omega$$

は時間的変動が小さいとき (e.g. 低周波数 $\omega \sim 10^3 \text{ s}^{-1}$) 十分小さい



準定常電流

▶ 以下の条件を満たす電流を**準定常電流**と呼ぶ

1. 伝導電流と比較して変位電流が無視できる:

$$|i_D| \ll |i_e|$$

このときアンペールの法則が近似的に成立

$$\int_{C_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} \simeq I_e \quad (\text{右辺の変位電流の項を無視した})$$

2. 伝導電流と磁束の時間的な変化による電磁誘導が無視できない:

$$\phi^{\text{e.m.}} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{ファラデーの電磁誘導の法則})$$

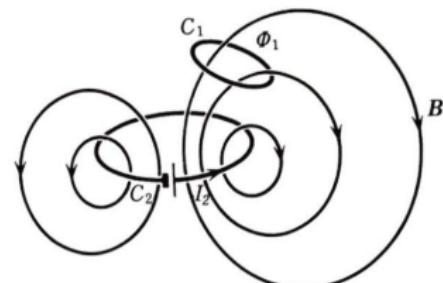
以下の回路の問題では、準定常電流を仮定



相互インダクタンス

- ▶ C_2 内の電流 I_2 を定数倍すると

$$\alpha I_2 = \alpha \int_{C_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_0} (\alpha \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s}$$



から I_2 が作る磁場 \mathbf{H} も定数倍

- ▶ \mathbf{H} は I_2 に比例 $\rightarrow C_1$ を貫く磁束 Φ_1 も I_2 に比例

$$\Phi_1 = M_{12}I_2$$

比例係数 M_{12} を C_1 と C_2 の間の相互インダクタンスを呼ぶ

自己インダクタンス



- ▶ I_2 が変化すると C_1 に誘導起電力

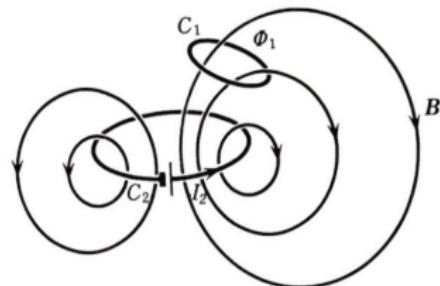
$$-\frac{d\Phi_1}{dt} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

が発生し、誘導電流 I_1 が流れる

- ▶ C_1 内の誘導電流 I_1 が作る磁場も、 C_1 を貫く磁束 Φ_1 に寄与：

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M_{12} I_2$$

比例係数 L_1 を C_1 の**自己インダクタンス**を呼ぶ



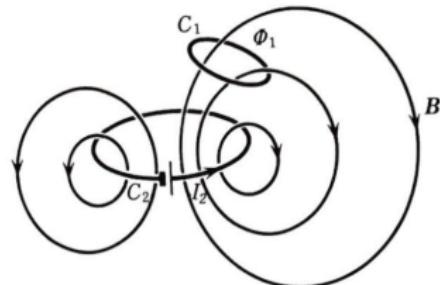
複数のコイルからなる系の誘導起電力



- ▶ C_1 を貫く磁束

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M_{12} I_2$$

- ▶ C_1 内に発生する誘導起電力



$$\phi_1^{\text{e.m.}} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

- ▶ C_2 を貫く磁束

$$\Phi_2 = L_2 I_2 + M_{21} I_1 \quad (\text{一般に } M_{12} = M_{21} \text{ が成立})$$

- ▶ C_2 内に発生する誘導起電力

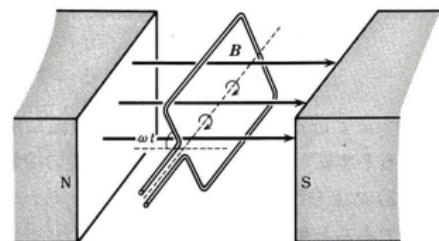
$$\phi_2^{\text{e.m.}} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

例1: 回転するコイルに生じる誘導起電力



- ▶ コイルを貫く外部磁場の磁束 Φ
- ▶ 以前は誘導電流による磁場を無視

$$RI = \phi^{\text{e.m.}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -BS\omega \cos \omega t$$



- ▶ 誘導電流による磁場も考慮すると

$$RI = \phi^{\text{e.m.}} = -\frac{d}{dt}(\Phi + LI), \quad \therefore L \frac{dI}{dt} + RI = -BS\omega \cos \omega t$$

- ▶ 電流の位相のずれを α として $I = I_0 \cos(\omega t - \alpha)$ を方程式に代入

$$L \frac{dI}{dt} = -LI_0\omega \sin(\omega t - \alpha) = -LI_0\omega (\sin \omega t \cos \alpha - \cos \omega t \sin \alpha)$$

$$RI = RI_0 \cos(\omega t - \alpha) = RI_0(\cos \omega t \cos \alpha + \sin \omega t \sin \alpha)$$

例1：回転するコイルに生じる誘導起電力（続）

- ▶ 方程式を整理すると

$$(-L\omega \cos \alpha + R \sin \alpha)I_0 \sin \omega t + (L\omega \sin \alpha + R \cos \alpha)I_0 \cos \omega t = -BS\omega \cos \omega t$$

- ▶ 両辺を比較して

$$\begin{cases} -L\omega \cos \alpha + R \sin \alpha = 0 & \dots \textcircled{1} \\ L\omega \sin \alpha + R \cos \alpha = -\frac{BS\omega}{I_0} & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

- ▶ ①を変形すると、電流の位相のずれは

$$\tan \alpha = \frac{L\omega}{R}, \quad \therefore \alpha = \tan^{-1} \frac{L\omega}{R}$$

例1：回転するコイルに生じる誘導起電力(続)

▶ ①②の両辺を二乗すると

$$\begin{cases} (L\omega)^2 \cos^2 \alpha - 2LR\omega \cos \alpha \sin \alpha + R^2 \sin^2 \alpha = 0 & \cdots ①' \\ (L\omega)^2 \sin^2 \alpha + 2LR\omega \cos \alpha \sin \alpha + R^2 \cos^2 \alpha = \left(\frac{BS\omega}{I_0}\right)^2 & \cdots ②' \end{cases}$$

①' ②' の辺々を加えると、電流の振幅は

$$(L\omega)^2 + R^2 = \left(\frac{BS\omega}{I_0}\right)^2$$

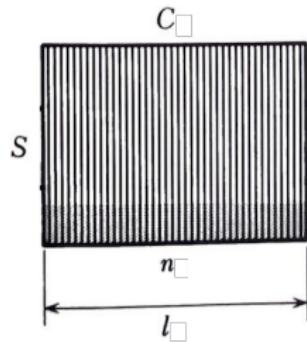
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ のとき、②から $I_0 < 0$ なので

$$\therefore I_0 = -\frac{BS\omega}{\sqrt{(L\omega)^2 + R^2}}$$

例2: 直線ソレノイドの自己インダクタンス ⑤

▶ 無限の長さのソレノイド C

- ▷ 内部の物質の透磁率 μ
- ▷ 長さ ℓ 、断面積 S
- ▷ 単位長さ当たりの巻き数 n



▶ 電流 I を流したとき、 C 内の磁束密度は

$$B = \mu n I$$

C 全体を貫く磁束と単位長さ当たりの自己インダクタンスは

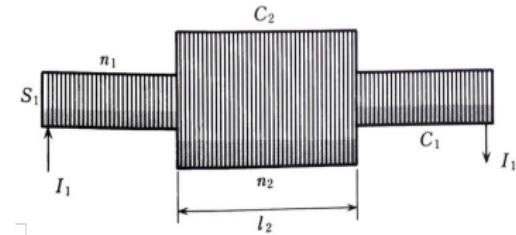
$$\Phi = n\ell B S = \underbrace{\mu n^2 \ell S}_L I, \quad \therefore \frac{L}{\ell} = \mu n^2 S$$

例3: 二重ソレノイドの相互インダクタンス

▶ 無限の長さのソレノイド C_1

- ▷ 内部の物質の透磁率 μ
- ▷ 単位長さ当たりの巻き数 n_1
- ▷ 断面積 S_1
- ▷ 電流 I_1 を流したとき、 C_1 を貫く磁束は

$$\Phi_1 = B_1 S_1 = \mu n_1 I_1 S_1 \quad (B_1 = \mu n_1 I_1)$$



▶ 有限の長さのソレノイド C_2

- ▷ 長さ ℓ_2
- ▷ 単位長さ当たりの巻き数 n_2
- ▷ C_2 全体を貫く磁束と単位長さ当たりの相互インダクタンスは

$$\Phi_2 = n_2 \ell_2 \Phi_1 = \underbrace{\mu n_1 n_2 \ell_2 S_1}_{M_{21}} I_1, \quad \therefore \frac{M_{21}}{\ell_2} = \mu n_1 n_2 S_1$$

演習：直線状導線と長方形コイルの間の M

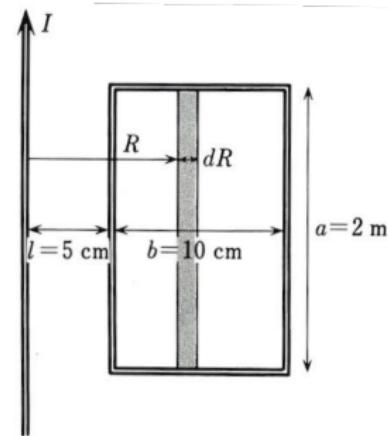
- ▶ 導線から距離 R の位置の磁束密度

$$B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

- ▶ 長方形コイルを貫く磁束

$$\Phi = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_{\ell}^{\ell+b} \frac{dR}{R} = \underbrace{\frac{\mu_0 a}{2\pi} \log \frac{\ell+b}{\ell}}_M I$$

- ▶ 直線状導線と長方形コイルの間の相互インダクタンス



$$M = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \log \frac{\ell+b}{\ell}$$