

情報通信工学演習 Ⅲ

数値計算プログラミング

濱本 雄治 *

2025 年 5 月 20 日、6 月 10 日

* hamamoto@c.oka-pu.ac.jp

1 はじめに

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) は 18 世紀から 19 世紀にかけて活躍したフランスの数学者・物理学者であり、**熱流は温度勾配に比例する**という Fourier の法則が有名である。彼は自著『熱の解析的理論 (Théorie Analytique de la Chaleur)』の中で、熱伝導方程式を解く手法として**任意の周期関数は三角関数の重ね合わせで表現できる**ことを主張した。これは Fourier 級数と呼ばれ、物理学を始め理工学のあらゆる分野に応用されてきた。本ソフトウェア演習では、Fourier 級数展開を数値的に実行することで Fourier 級数の性質とその限界を理解する。

2 Fourier 級数の基礎

関数 $f(t)$ がすべての t に対して

$$f(t+T) = f(t) \quad (1)$$

を満たすとき、 $f(t)$ は T を周期とする周期関数である。Fourier の定理によると、この周期関数は三角関数の無限級数として

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t) \quad (2)$$

のように展開される。ここで a_k, b_k を Fourier 係数、 $\omega_k = 2\pi k/T$ を (角) 周波数と呼ぶ。 $\cos \omega_k t$ は偶関数、 $\sin \omega_k t$ は奇関数であるから、 $f(t)$ が偶関数 $f(-t) = f(t)$ のときは $b_k = 0$ 、奇関数 $f(-t) = -f(t)$ のときは $a_k = 0$ が成り立つ。

式 (2) の Fourier 係数を求めるには、三角関数の直交関係

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega_\ell t \cos \omega_k t \, dt = \begin{cases} T \delta_{\ell k} & (\ell = 0) \\ (T/2) \delta_{\ell k} & (\ell \neq 0) \end{cases}, \quad (3)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin \omega_\ell t \sin \omega_k t \, dt = \frac{T}{2} \delta_{\ell k}, \quad \int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega_\ell t \sin \omega_k t \, dt = 0 \quad (4)$$

を利用する。ここで

$$\delta_{\ell k} = \begin{cases} 1 & (\ell = k) \\ 0 & (\ell \neq k) \end{cases} \quad (5)$$

は Kronecker delta である。式 (2) の両辺に $\cos \omega_\ell t$ または $\sin \omega_\ell t$ を掛けて積分すると

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \omega_\ell t \, dt &= \frac{a_0}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega_\ell t \cos \omega_0 t \, dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} (a_k \cos \omega_\ell t \cos \omega_k t + b_k \cos \omega_\ell t \sin \omega_k t) \, dt \end{aligned} \quad (6)$$

$$= \frac{T}{2} a_0 \delta_{\ell 0} + \frac{T}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta_{\ell k} + 0 = \frac{T}{2} a_\ell, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \omega_\ell t \, dt &= \frac{a_0}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \sin \omega_\ell t \cos \omega_0 t \, dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} (a_k \sin \omega_\ell t \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_\ell t \sin \omega_k t) \, dt \end{aligned} \quad (8)$$

$$= 0 + 0 + \frac{T}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \delta_{\ell k} = \frac{T}{2} b_\ell. \quad (9)$$

これらの結果から Fourier 係数

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \omega_k t \, dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \omega_k t \, dt \quad (10)$$

が得られる。

式 (10) から、上述の通り $f(t)$ が偶 (奇) 関数のとき $b_k = 0$ ($a_k = 0$) となることが確認できるが、この偶奇性から積分区間を狭めることもできる。まず $f(t)$ が偶関数のときは

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 f(t) \cos \omega_k t \, dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos \omega_k t \, dt \quad (11)$$

$$= \frac{2}{T} \int_{+T/2}^0 f(-t') \cos(-\omega_k t') (-dt') + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos \omega_k t \, dt \quad (12)$$

$$= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos \omega_k t \, dt \quad [\because f(-t) = f(t)]. \quad (13)$$

一方、 $f(t)$ が奇関数のときは

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 f(t) \sin \omega_k t dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin \omega_k t dt \quad (14)$$

$$= \frac{2}{T} \int_{+T/2}^0 f(-t') \sin(-\omega_k t') (-dt') + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin \omega_k t dt \quad (15)$$

$$= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin \omega_k t dt \quad [\because f(-t) = -f(t)] \quad (16)$$

となる。

例として $-T/2 \leq t < T/2$ で $f(t) = t$ となる周期関数の Fourier 級数展開を考える。

$f(t)$ は奇関数なので $a_k = 0$ である。また式 (16) から

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} t \sin \omega_k t dt \quad (17)$$

$$= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} t \left(-\frac{1}{\omega_k} \cos \omega_k t \right)' dt \quad (18)$$

$$= \frac{4}{T} \left[-\frac{t}{\omega_k} \cos \omega_k t \right]_0^{T/2} + \frac{4}{\omega_k T} \int_0^{T/2} \cos \omega_k t dt \quad (19)$$

$$= \frac{T(-1)^{k+1}}{\pi k} + \frac{4}{\omega_k T} \left[\frac{1}{\omega_k} \sin \omega_k t \right]_0^{T/2} \quad (20)$$

$$= \frac{T(-1)^{k+1}}{\pi k} \quad (21)$$

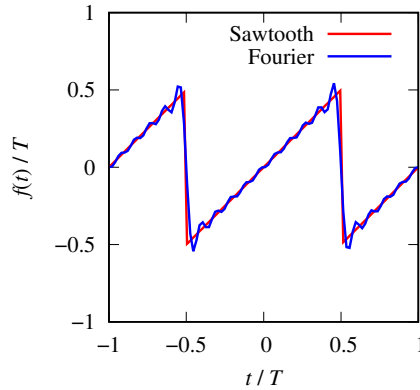


図1 のこぎり波の Fourier 級数展開。Fourier 級数は最初の 10 項で打ち切った。

よって $f(t) = t$ の Fourier 級数展開は

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T(-1)^{k+1}}{\pi k} \sin \omega_k t = \frac{T}{\pi} \left(\sin \frac{2\pi t}{T} - \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi t}{T} + \frac{1}{3} \sin \frac{6\pi t}{T} - \cdots \right). \quad (22)$$

Fourier 級数を最初の 10 項で打ち切った結果を図 1 に示す。

3 数値積分

前節では、Fourier 級数 (2) の展開係数として積分 (10) または関数の偶奇性を考慮した積分 (13)(16) を計算すればよいことが分かった。これらの積分が解析的に実行できない場合、あるいは離散的なデータしか与えられていない場合は、Fourier 係数を数値的に評価する必要がある。数値積分では区間 $[a, b]$ の積分

$$S = \int_a^b g(t) dt \quad (23)$$

を N 個の小区間

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{N-2}, t_{N-1}], [t_{N-1}, t_N] \quad (24)$$

$$(a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{N-2} < t_{N-1} < t_N = b) \quad (25)$$

毎の積分に分割し、各小区間で近似的に得られた積分値の総和 S_k を区間 $[a, b]$ の積分の近似値とする。いま小区間 $[t_n, t_{n+1}]$ で $y = 0$ と $y = g(t)$ に囲まれた領域を上底

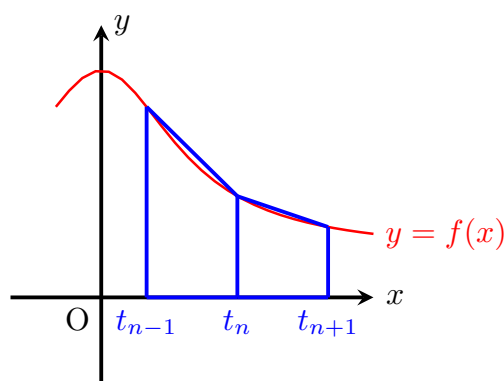


図 2 数値積分の台形公式。

$y_n = g(t_n)$ 、下底 $y_{n+1} = g(t_{n+1})$ 、および高さ $h_n = t_{n+1} - t_n$ の台形と見なすと、この小区間での $g(t)$ の積分は

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(t) dt \simeq \frac{y_n + y_{n+1}}{2} h_n = \frac{y_n + y_{n+1}}{2} (t_{n+1} - t_n) \quad (26)$$

と近似できる。したがって区間 $[a, b]$ の積分の近似値は

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{y_n + y_{n+1}}{2} (t_{n+1} - t_n) \quad (27)$$

で与えられる (台形公式)。とくに区間 $[a, b]$ を N 等分して各小区間の幅を一定値 $h = (b - a)/N$ にすると、台形公式 (27) は

$$S_N = h \sum_{n=0}^{N-1} \frac{y_n + y_{n+1}}{2} \quad (28)$$

$$= h \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \cdots + \frac{y_{N-2} + y_{N-1}}{2} + \frac{y_{N-1} + y_N}{2} \right) \quad (29)$$

$$= h \left(\frac{y_0}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} y_n + \frac{y_N}{2} \right) \quad (30)$$

と簡単化できる。

例として次の定積分の数値計算を考える。

$$I = \int_0^1 \frac{4dt}{1+t^2} \quad (31)$$

解析的には $t = \tan \theta$, $dt = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$ とすれば

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{4}{1 + \tan^2 \theta} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = 4 \int_0^{\pi/4} d\theta = \pi \quad (32)$$

のように計算できる。台形公式を用いて I の数値積分を行うプログラムを以下に示す。

```

#include <stdio.h>

double func(double t){
    return 4.0 / (1 + t * t);          /* f(t) */
}

int main(){
    double a = 0.0;    double b = 1.0; /* 区間 [a, b] */
    int n = 1024;      /* 分割数 N */
    double h = (b - a) / n; /* 幅 h */
    double t = a + 0.0 * h; /* t0 */
    double sum = 0.5 * func(t);

    for(int i=1; i!=n; ++i){
        t = a + i * h;          /* ti */
        sum += func(t);
    }

    t = a + n * h;              /* tN */
    sum += 0.5 * func(t);
    printf("%f\n", sum * h);
}

```

実行結果は以下の通り。

```

$ gcc pi.c
$ ./a.out
3.141592

```

4 標本化定理

以上で数値的に Fourier 級数展開を実行する準備が整ったので、Fourier 係数 a_k, b_k を数値積分で求めれば元の関数 $f(t)$ を再構成することができる。ただし式 (2) の無限和を取ることはできないので、適当な項数 K で打ち切った部分

$$f_K(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^K (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t) \quad (33)$$

を計算する。このとき $f_K(t)$ に含まれる周波数の最大値は $\omega_K = 2\pi K/T$ であるから、 $f(t)$ に近い $f_N(t)$ を得るためには、数値積分で用いる小区間の幅 $h = T/N$ は周期の最小値 T/K の半分以下、すなわち

$$h = \frac{T}{N} \leq \frac{T}{2K}, \quad \therefore N \geq 2K \quad (34)$$

とする必要がある (標本化定理)。

5 Gibbs 現象

部分和 $f_K(t)$ と元の関数 $f(t)$ の関係調べるために、式 (10) の Fourier 係数 a_k, b_k を式 (33) に代入して積分をまとめると

$$f_K(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^K \cos \omega_k(t - t') \right] f(t') dt' \quad (35)$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} D_K(t - t') f(t') dt' \quad (36)$$

つまり部分和 $f_K(t)$ は元の関数 $f(t)$ と Dirichlet 核

$$D_K(\tau) = 1 + 2 \sum_{k=1}^K \cos \omega_k \tau \quad (37)$$

の畳み込みで表すことができる。Euler の定理 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ と等差数列の和の公式を用いると、式 (37) の和は実行できて

$$\sum_{k=1}^K \cos \omega_k = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^K e^{i\omega_k \tau} = \operatorname{Re} \frac{e^{i\omega \tau} (1 - e^{iK\omega \tau})}{1 - e^{i\omega \tau}} = \frac{\sin\{(K + 1/2)\omega \tau\}}{2 \sin(\omega \tau/2)} - \frac{1}{2}, \quad (38)$$

$$\therefore D_K(\tau) = \frac{\sin\{(2K + 1)\omega \tau/2\}}{\sin(\omega \tau/2)} \quad (39)$$

となる。ここで $\omega = \omega_1 = 2\pi/T$ は基本振動数である。 $D_K(\tau)$ は $\tau = 0$ に鋭いピークを持つ関数なので分母を $\sin(\omega \tau/2) \simeq \omega \tau/2$ と近似すると、sinc 関数で表すこともできる。

$$D_K(\tau) \simeq (2K + 1) \operatorname{sinc} \frac{(2K + 1)\omega \tau}{2\pi} \quad \left(\operatorname{sinc} x = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \right). \quad (40)$$

これを式 (36) に代入すると、 $f(t)$ が不連続な場合の $f_K(t)$ の振る舞いが分かる。

$$\lim_{K \rightarrow \infty} f_K(t_0 + \delta) = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2} + \frac{f(t_0^+) - f(t_0^-)}{2} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx. \quad (41)$$

すなわち $t = t_0$ において $f(t)$ に有限の跳び $a = f(t_0^+) - f(t_0^-)$ があるとき、 t_0 の右側で $f_K(t)$ は a に比例した振動成分を持ち、 $f(t)$ を超過する (Gibbs 現象)。超過量の最大値と a の比の理論値は

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{f_K(t_0 + \delta) - f(t_0^+)}{a} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx - \frac{1}{2} \quad (42)$$

と見積もることができる。

例として $-T/2 \leq t < T/2$ で $f(t) = t$ となる周期関数を数値的に Fourier 級数展開し、Gibbs 現象を観測する。いま $t, f(t), a_k, b_k$ は時間の次元、 ω_k は (時間) $^{-1}$ の次元を持っていて数値計算では扱いにくいので次のように無次元化する：

$$\tilde{t} = \frac{t}{T}, \quad \tilde{f}(\tilde{t}) = \frac{f(t)}{T} = \frac{t}{T} = \tilde{t} \quad \left(-\frac{1}{2} \leq \tilde{t} < \frac{1}{2} \right), \quad (43)$$

$$\tilde{\omega}_k = \omega_k T = \frac{2\pi k}{T} T = 2\pi k, \quad (44)$$

$$\tilde{a}_k = \frac{a_k}{T} = 2 \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{f}(\tilde{t}) \cos \tilde{\omega}_k \tilde{t} d\tilde{t}, \quad \tilde{b}_k = \frac{b_k}{T} = 2 \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{f}(\tilde{t}) \sin \tilde{\omega}_k \tilde{t} d\tilde{t}, \quad (45)$$

$$\tilde{f}_K(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^K (\tilde{a}_k \cos \tilde{\omega}_k \tilde{t} + \tilde{b}_k \sin \tilde{\omega}_k \tilde{t}) \quad (46)$$

さらに $f(t)$ は奇関数なので、式 (16) から Fourier 級数は

$$\tilde{f}_K(t) = \sum_{k=1}^K \tilde{b}_k \sin \tilde{\omega}_k \tilde{t}, \quad \tilde{b}_k = 4 \int_0^{1/2} \tilde{f}(\tilde{t}) \sin \tilde{\omega}_k \tilde{t} d\tilde{t} \quad (47)$$

のように簡略化できることにも注意する。プログラムを以下に示す。

```

#include <stdio.h>
#include <math.h>

int main(){
    int kmax = 100;
    int nmax = 2 * kmax;

    double a = 0.0;
    double b = 0.5;
    double h = (b - a) / nmax;
    double coef[kmax];                                /* bk */

    for(int k=0; k<=kmax; ++k){                        /* Fourier 係数の計算 */
        double w = 2 * M_PI * k;
        double t = a;                                  /* t0 */
        double sum = 0.0;

        for(int i=1; i!=nmax; ++i){
            t = a + i * h;                              /* t1, ..., t_{N-1} */
            sum += t * sin(w * t);
        }

        t = a + nmax * h;                              /* tN */
        sum += 0.5 * t * sin(w * t);

        coef[k] = sum * 4 * h;
    }

    for(int i=-2*nmax; i<=2*nmax; ++i){                /* fK(t) の計算 */
        double t = a + i * h;
        double sum = 0.0;

        for(int k=1; k<=kmax; ++k){
            double w = 2 * M_PI * k;
            sum += coef[k] * sin(w * t);
        }

        printf("%f %f\n", t, sum);
    }
}

```

プログラムの出力を図 3 に示す。 $t = \pm T/2$ の前後で $f_K(t)$ が $f(t)$ の最大値 $\pm T/2$ を超過する Gibbs 現象が観測できる。例えば $f_N(0.495T) = 0.563303T$ であり、 $f(t)$ を $0.063303T$ だけ超過している。これと $t = T/2$ における $f(t)$ の跳び T の比は 0.063303 であり、理論値 (42) に近い。

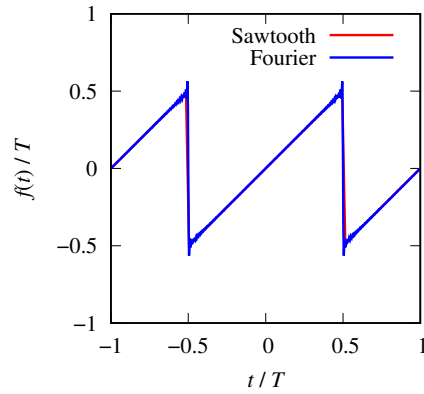


図 3 のこぎり波の Fourier 級数展開の数値計算。Fourier 級数は $K = 100$ で打ち切った。

6 レポート問題

問題 1 $-T/2 \leq t < T/2$ で $f(t) = t^2$ となる周期関数の Fourier 係数を解析的に求め、Fourier 級数の $K = 5$ の部分和 $f_K(t)$ と元の $f(t)$ をグラフに重ねて図示せよ。

(ヒント: $f(t)/T^2 = (t/T)^2$ として $f(t)/T^2$ を t/T に関してプロットすれば T の値に依らないグラフが得られる。)

問題 2 台形公式を用いて式 (41) に現れた定積分

$$I = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \quad (48)$$

の数値解を求めよ。数値積分に用いたプログラムをレポートに掲載すること。

問題 3 台形公式を用いて以下の周期関数の Fourier 係数を数値的に求め、Fourier 級数の部分和 $f_K(t)$ と元の $f(t)$ をグラフに重ねて図示せよ。数値計算に用いたプログラムをレポートに掲載すること。

(a) $-T/2 \leq t < T/2$ で滑らかな関数

$$f(t) = t^4 - \frac{T^2}{2}t^2 + \frac{T^4}{16}. \quad (49)$$

部分和の項数は $K = 10 +$ (学籍番号の下 1 桁) とする。

(ヒント: $f(t)/T^4 = (t/T)^4 - (t/T)^2/2 + 1/16$ として $f(t)/T^4$ を t/T に関してプロットすれば T の値に依らないグラフが得られる。)

(b) $t = -T/2, 0, T/2$ で不連続な関数

$$f(t) = \begin{cases} -1 & (-T/2 \leq t < 0) \\ 0 & (t = 0) \\ 1 & (0 < t < T/2). \end{cases} \quad (50)$$

部分和の項数は $K = 10 +$ (学籍番号の下 2 桁) とする。

問題 4 問題 3(b) の $f_K(t)$ では $f(t)$ の不連続な点で Gibbs 現象が観測される。 $t = 0$ での $f(t)$ の跳びの大きさを a 、 $0 < t < T/2$ での $f_K(t)$ と $f(t)$ の最大値の差を b とするとき、比 b/a を計算せよ。

7 レポート作成と提出に関する注意事項

- 最初のページの上部に学籍番号、氏名、OS とコンパイラのバージョンを記すこと。
- PDF 形式で作成し、ファイル名は exe3_2025_numcalc_学籍番号.pdf とすること。
- A グループは 5 月 27 日 (火)12:00、B グループは 6 月 17 日 (火)12:00 までに Google Classroom 上で提出すること。